

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ RADON (ΜΕΘΟΔΟΙ PET ΚΑΙ SPECT)

ΣΤΗΝ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ

ΧΡΥΣΑΣ Φ.ΜΑΛΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΝΤΩΝΙΟΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2016

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ RADON (ΜΕΘΟΔΟΙ PET ΚΑΙ SPECT)

ΣΤΗΝ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ

ΧΡΥΣΑΣ Φ.ΜΑΛΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΝΤΩΝΙΟΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2016



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ RADON (ΜΕΘΟΔΟΙ PET ΚΑΙ SPECT)

ΣΤΗΝ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ

ΧΡΥΣΑΣ Φ.ΜΑΛΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΝΤΩΝΙΟΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 11η Απριλίου 2016

Α. ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

.....

Δ. ΓΚΙΝΤΙΔΗΣ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

.....

Ε. ΔΟΥΚΑ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

.....

ΑΘΗΝΑ, ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2016



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΧΡΥΣΑ ΜΑΛΑΚΗ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

.....

ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ Ε-
ΠΙΣΤΗΜΩΝ Ε.Μ.Π.

2016-All rights reserved

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί διπλωματική εργασία στα πλαίσια του μεταπτυχιακού «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες» της σχολής ΣΕΜΦΕ του ΕΜΠ. Επομένως, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω ορισμένους από τους ανθρώπους που γνώρισα, συνεργάστηκα μαζί τους και έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην πραγματοποίησή της.

Καταρχήν, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας, Καθηγητή Αντώνιο Χαραλαμπίδου για την πολύτιμη καθοδήγηση του και την εμπιστοσύνη και εκτίμηση που μου έδειξε. Εν κατακλείδι, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς και στους φίλους μου, που με υπομονή και κουράγιο πρόσφεραν την απαραίτητη ηθική συμπαράσταση για την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

Περίληψη

Τα μαθηματικά αποτελούν τον στυλοβάτη σε πολλές επιστήμες, όπως η φυσική, η βιολογία, η πληροφορική και η ιατρική. Συγκεκριμένα, τα τελευταία χρόνια η συμβολή των μαθηματικών στον τομέα της ιατρικής γίνεται όλο και πιο αισθητή όχι μόνο στο επιστημονικό κόσμο αλλά και στο ευρύτερο κοινό. Ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία του τομέα ιατρικής αποτελεί η υπολογιστική τομογραφία, διότι κατέχει καθοριστικό ρόλο για την επίλυση αρκετών ιατρικών προβλημάτων.

Επομένως, στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία ασχοληθήκαμε με την ανάλυση και την επεξήγηση μαθηματικών μετασχηματισμών που χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική τομογραφία. Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο ορίσαμε τον μετασχηματισμό Radon σε δύο, τρεις και n διαστάσεις. Στη συνέχεια, στο δεύτερο κεφάλαιο επανεξετάζουμε μερικές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Radon και γίνεται αναφορά στις εφαρμογές του. Στο τρίτο κεφάλαιο, αναλύουμε τις δύο τεχνικές απεικονίσεις, την τομογραφία εκπομπής ποζιτρονίων (PET) και την εκπομπή φωτονίων τομογραφίας (SPECT) και συγκρίνουμε τις διαφορές και τις ομοιότητες τους υπό τη μαθηματική οπτική γωνία. Παρατηρούμε, όμως, ότι και στις δύο μεθόδους η επίλυση του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon είναι αυτή που θα μας βοηθήσει στην ερμηνεία των δεδομένων για την ιατρική απεικόνιση.

Συνεπώς, στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Radon και κάποια αριθμητικά πειράματα. Τέλος, στο πέμπτο και έκτο κεφάλαιο εξηγούμε πως μπορούμε να προσεγγίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Radon είτε με την μέθοδο σειρών είτε με τις αναλυτικές συναρτήσεις αντίστοιχα.

Λέξεις κλειδιά

Μετασχηματισμός Radon, Ιδιότητα μετατόπισης, Μετασχηματισμός Παραγώγων, Μέθοδος PET, Αλγόριθμος SPECT, Κυκλικές αρμονικές επεκτάσεις, Πολύωνυμα Zernike

Abstract

The mathematics are the mainstay in many disciplines, such as physics, biology, computer science and medicine. Specifically, in recent years the contribution of mathematics in medicine is increasingly felt not only in scientific world and the wider public. One of the most important tools in medicine is the CT sector, because holds a key role in solving a number of medical problems.

Therefore, at this point we dealt with the analysis and explanation of mathematical transformations used in computed tomography. Specifically, in the first chapter we defined the transformation Radon in two, three and n dimensions. Then in the second chapter we review some of the transformation properties Radon and refer to the applications. In the third chapter, we analyze both technical illustrations, positron emission tomography (PET) and the photon emission tomography (SPECT) and compare the differences and similarities in mathematical perspective. We observe, however, that in both methods of solving the inverse transformation Radon is one that will help us in the interpretation of data for medical imaging.

Therefore, in the fourth chapter we analyze the inverse transformation Radon and some numerical experiments. Finally, in the fifth and sixth chapter we explain how we can approximate inverse transformation Radon or the series method or the analytical functions respectively.

Key words

Transformation Radon, Shift Function, Derivatives Transformation, Method PET, Algorithm SPECT, Circle harmonic expansions, Polynomials Zernike.

Περιεχόμενα

1	Θεωρία Μετασχηματισμού Radon	13
1.1	Εισαγωγή	13
1.2	Μετασχηματισμός Radon	13
1.2.1	Σε Δύο Διαστάσεις	14
1.2.2	Τρεις Διαστάσεις	16
1.2.3	Επέκταση Σε Περισσότερες Διαστάσεις	17
2	Βασικές Ιδιότητες	19
2.1	Ομοιογένεια	19
2.2	Γραμμικότητα	19
2.3	Μεταφορά Γραμμικότητας Του Μετασχηματισμού	20
2.4	Ιδιότητα Μετατόπισης	21
2.5	Μετασχηματισμός Παραγώγων	22
2.6	Εφαρμογές Του Μετασχηματισμού Radon	23
3	Κατασκευή Αλγορίθμου Για Τομογράφο	25
3.1	Μέθοδοι PET και SPECT	26
3.1.1	Τομογραφία Εκπομπής Ποζιτρονίου (PET)	26
3.1.2	Τομογραφία Εκπομπής Φωτονίων(SPECT)	28
3.2	Μαθηματικές Μέθοδοι	29
3.3	Αντίστροφος Μετασχηματισμός Radon	31
4	Αλγόριθμος Για SPECT	37
4.1	Εξασθένηση Μετασχηματισμού Radon	37
4.2	Αριθμητικά πειράματα	43
4.3	Παράρτημα Α	44
5	Μέθοδος Σειρών	45
5.1	Μετασχηματισμός Gegenbauer	45
5.2	Κυκλικές Αρμονικές Επεκτάσεις ($n = 2$)	46
5.3	Σφαιρικές Αρμονικές Επεκτάσεις ($n = 3$)	48

5.4	Μετασχηματισμός Legendre	50
5.5	Μετασχηματισμός Tchebycheff 2ου Είδους	51
6	Ορθογώνιες Συναρτήσεις Του Μοναδιαίου Δίσκου	53
6.1	Ιδιότητες Του Συνόλου Βάσης	53
6.2	Πολύωνυμα Zernike	54
6.3	Μετασχηματισμός Του Συνόλου Βάσης	55
6.4	Σειρές Επέκτασης Στο Χώρο Radon	57
6.5	Εσωτερικό Γινόμενο	58
6.6	Ορθογώνιες Συναρτήσεις Στο Επίπεδο	59

Κεφάλαιο 1

Θεωρία Μετασχηματισμού Radon

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η θεωρία του κλασικού (γραμμικού) Radon. Στο τέλος παρουσιάζονται εφαρμογές οι οποίες αναδεικνύουν την χρησιμότητα του μετασχηματισμού αυτού. Το κεφάλαιο αυτό αποσκοπεί στο να χρησιμοποιηθεί ως αναφορά για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται για τον μετασχηματισμό Radon και τις εφαρμογές του. Εκτός από τον ορισμό παρουσιάζονται και οι πολύ χρήσιμες ιδιότητές του για την γραμμική γενικευμένη μορφή του.

1.2 Μετασχηματισμός Radon

Ο γραμμικός μετασχηματισμός Radon αποτελεί την πλέον διαδεδομένη μορφή του. Το μεγαλύτερο μέρος των πληροφοριών αυτού του κεφαλαίου έχει ως πηγή του το βιβλίο του Stanley R. Deans [11] το οποίο είναι αφιερωμένο σε αυτόν τον μετασχηματισμό. Θα παρουσιάσουμε τον ορισμό σε διάφορες μορφές χρήσιμες για διαφορετικές εφαρμογές και χρήσιμες ιδιότητές του.

Κάποια εσωτερική διανομή του αντικειμένου, ίσως πυκνότητα ή κάτι να σχετίζεται στενά με την πυκνότητα, ενεργείται από κάποιο ανιχνευτή. Ο ανιχνευτής μπορεί να ανιχνευθεί για να παράγουν αυτό που λέμε μια προβλεπόμενη κατανομή ή το προφίλ. Συχνά, η εσωτερική ιδιότητα του αντικειμένου μπορεί να ταυτοποιηθεί ή τουλάχιστον να προσεγγιστεί με τη συνάρτηση f και το προφίλ μπορεί να ταυτοποιηθεί ή να προσεγγιστεί με το μετασχηματισμο Radon της f ,

όπου ορίζεται ως

$$\check{f} = \mathcal{R}f \tag{1.1}$$

Δηλαδή, κάθε προφίλ ταυτίζεται με ένα δείγμα του μετασχηματισμού Radon.

Σημείωση

Αν η συνάρτηση f ορίζεται σε n -διαστάτο Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n , ο μετασχηματισμός Radon της f προσδιορίζεται από το ολοκλήρωμα της f σε διάσταση $n - 1$. Για παράδειγμα, αν η f ορίζεται στο επίπεδο \mathbb{R}^2 , τότε ο μετασχηματισμός \check{f} προσδιορίζεται από τα γραμμικά ολοκλήρωματά της f . Ενώ, αν η f ορίζεται στο \mathbb{R}^3 τότε ο \check{f} προσδιορίζεται από τα επιφανειακά ολοκλήρωματά της f πάνω σε επίπεδο δύο-διαστάσεων.

1.2.1 Σε Δύο Διαστάσεις

Εστω $f = f(x, y)$ μια συνάρτηση δύο διαστάσεων ορισμένη στο $D \subset \mathbb{R}^2$. Αν L είναι μια ευθεία στο επίπεδο, τότε η απεικόνιση που ορίζεται από την προβολή ή την γραμμή ολοκλήρωματός της f κατά μήκος όλων των πιθανών γραμμών L είναι ο (δισδιάστατος) μετασχηματισμός Radon της f με τη προϋπόθεση ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα. Δηλαδή,

$$\check{f} = \mathcal{R}f = \int_L f(x, y) ds, \quad (1.2)$$

όπου ds είναι μια αύξηση του φωτός κατά μήκος L . Η περιοχή D μπορεί να περιλαμβάνει ολόκληρο το επίπεδο ή κάποια περιοχή του επιπέδου.

Η απεικόνιση που ορίζεται από (1.2) μελετήθηκε αρχικά από τον Johann Radon (1917). Ο Radon έδειξε ότι αν η f είναι συνεχής και φραγμένη, τότε ο $\mathcal{R}f$ προσδιορίζεται ολοκληρώνοντας κατά μήκος όλων των ευθειών. Συγκεκριμένα, η εξίσωση της ευθείας δίνεται από

$$p = x \cos \phi + y \sin \phi. \quad (1.3)$$

Το ολοκλήρωμα της ευθείας εξαρτάται από τις τιμές των p και ϕ . Επομένως, έχουμε

$$\check{f}(p, \phi) = \mathcal{R}f = \int_L f(x, y) ds. \quad (1.4)$$

Αν ο $\check{f}(p, \phi)$ είναι γνωστό για όλα τα p και ϕ , τότε ο $\check{f}(p, \phi)$ είναι ο δισδιάστατος μετασχηματισμός Radon της $f(x, y)$. (Όταν ο \check{f} είναι γνωστό για συγκεκριμένες τιμές των p και ϕ , τότε έχουμε ένα δείγμα του μετασχηματισμού Radon).

Θεωρούμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων που δημιουργείτε καθώς περιστρέφουμε τους άξονες κατά γωνία ϕ . Αν οι νέοι άξονες συμβολίζονται με p και s , τότε έχουμε

$$x = p \cos \phi - s \sin \phi$$

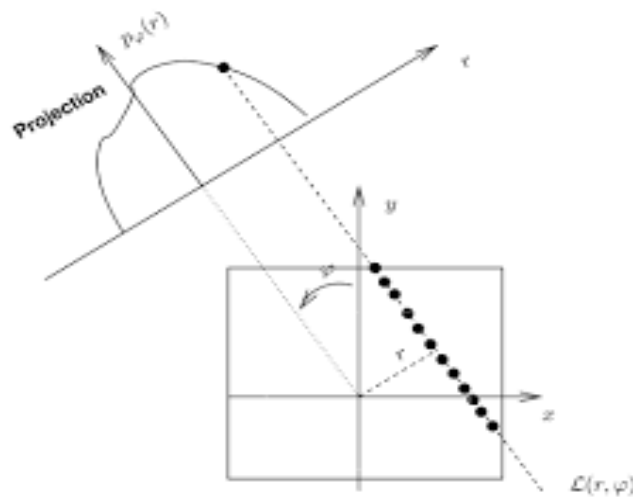
$$y = p \sin \phi + s \cos \phi$$

και προκύπτει ο μετασχηματισμός

$$\check{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \phi - s \sin \phi, p \sin \phi + s \cos \phi) ds. \quad (1.5)$$

Φυσικά, τα όρια πρέπει να είναι πεπερασμένα αν η f βρίσκεται έξω από τη περιοχή D .

Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση του μετασχηματισμού Radon



Έστω $\mathbf{x} = (x, y)$ είναι ένα διάνυσμα με συνιστώσες x και y , τότε η $f(\mathbf{x})$ σημαίνει το ίδιο με την $f(x, y)$. Επιπλέον, θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα

$$\xi = (\cos \phi, \sin \phi)$$

και

$$\xi^\perp = (-\sin \phi, \cos \phi).$$

Παρατηρούμε ότι η βαθμωτή παραμέτρο t μπορεί να βρεθεί ώστε $\mathbf{x} = p\xi + t\xi^\perp$. Επομένως, σύμφωνα με τις νέες μεταβλητές, η (1.5) γίνεται

$$\check{f}(p, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\xi + t\xi^\perp) dt. \quad (1.6)$$

Σημείωση

Οι $f(p, \xi)$ και $\check{f}(p, \phi)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν αναλόγως που θέλουμε να δώσουμε έμφαση στο διάνυσμα ξ ή στη γωνία ϕ .

Η εξίσωση της ευθείας (1.3) μπορεί να γραφτεί ως

$$p = \xi \cdot \mathbf{x} = x \cos \phi + y \sin \phi.$$

Τότε ο μετασχηματισμός μπορεί να γραφτεί ως ολοκλήρωμα στο \mathbb{R}^2 επιτρέποντας η συνάρτηση δέλτα Dirac να επιλέξει την ευθεία $p = \xi \mathbf{x}$ από \mathbb{R}^2 ,

$$\check{f}(p, \xi) = \int \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) dx dy. \quad (1.7)$$

Ο χώρος $dx dy$ μπορεί να γραφτεί απλά ως $d\mathbf{x}$ και τότε μπορούμε να δείξουμε ότι μπορεί το ολοκλήρωμα πάνω στο χώρο να γράφεται με ένα σύμβολο του ολοκληρώματος \int αντί $\int \int_{\mathbb{R}^2}$. Χρησιμοποιώντας αυτή την επισήμανση η σχέση (1.7) γίνεται

$$\check{f}(p, \xi) = \int f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.8)$$

1.2.2 Τρεις Διαστάσεις

Η γενίκευση της εξίσωσης (1.7) σε τρεις διαστάσεις βρίσκεται θεωρώντας ως \mathbf{x} ένα διάνυσμα στο \mathbb{R}^3 , $\mathbf{x} = (x, y, z)$ και $d\mathbf{x} = dx dy dz$. Το διάνυσμα ξ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο \mathbb{R}^3 , και προκύπτει η εξίσωση

$$p = \xi \cdot \mathbf{x} = \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z$$

η οποία ορίζει ένα επίπεδο και όχι μια ευθεία. Ο μετασχηματισμός Radon δίνεται από

$$\check{f}(p, \xi) = \int f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.9)$$

όπου τα ολοκλήρωμα πλέον είναι πάνω στο επίπεδο σε σύγκριση με το μετασχηματισμό Radon σε δύο διαστάσεις.

1.2.3 Επέκταση Σε Περισσότερες Διαστάσεις

Τα σημεία στο \mathbb{R}^n ορίζονται από $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και οι συναρτήσεις στο \mathbb{R}^n προσδιορίζονται ως $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Θεωρούμε ως $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ και ξ μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο ορίζει τον προσανατολισμό του υπερεπιπέδου με εξίσωση

$$p = \xi \cdot \mathbf{x} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση δέλτα Dirac δ , ο μετασχηματισμός Radon της f γράφεται σε μορφή συνέλιξης, που χρησιμοποιήθηκε από τους Gel'fand, Graev, and Vilenkin (1966), ως

$$\check{f}(p, \xi) = \mathcal{R}f = \int f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.10)$$

Άρα, στην γενική περίπτωση, έχοντας δοθεί η συνάρτηση f στο \mathbb{R}^n , ο μετασχηματισμός Radon της f , που συμβολίζεται ως \check{f} , προσδιορίζεται ολοκληρώνοντας πάνω σε κάθε υπερεπίπεδο του χώρου. Αν S^{n-1} είναι μια γενίκευση μοναδιαίας σφαίρας, τότε ο μετασχηματισμός Radon $\check{f}(p, \xi)$ ορίζεται στο $\mathbb{R}^1 \times S^{n-1}$.

Κεφάλαιο 2

Βασικές Ιδιότητες

2.1 Ομοιογένεια

Η συνάρτηση $\check{f}(p, \xi)$ είναι μια άρτια ομογενής συνάρτηση βαθμού -1 . Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned}\check{f}(sp, s\xi) &= \int f(\mathbf{x})\delta(sp - s\xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= |s|^{-1} \int f(\mathbf{x})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}\end{aligned}$$

για τυχαίο $s \neq 0$. Άρα,

$$\check{f}(sp, s\xi) = |s|^{-1}\check{f}(p, \xi). \quad (2.1)$$

Σημειώνεται ότι αν $s = -1$, τότε έχουμε τη συμμετρική ιδιότητα

$$\check{f}(-p, -\xi) = \check{f}(p, \xi). \quad (2.2)$$

2.2 Γραμμικότητα

Δίνονται δύο συναρτήσεις f και g και δύο σταθερές c_1 και c_2 ,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\{c_1 f + c_2 g\} &= \int [c_1 f(\mathbf{x}) + c_2 g(\mathbf{x})]\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= c_1 \check{f} + c_2 \check{g}\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathcal{R}\{c_1f + c_2g\} = c_1\mathcal{R}f + c_2\mathcal{R}g, \quad (2.3)$$

και ο μετασχηματισμός Radon είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

2.3 Μεταφορά Γραμμικότητας Του Μετασχηματισμού

Για ευκολία σημειώνουμε ότι

$$\xi \cdot \mathbf{x} = \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \dots + \xi_nx_n$$

για εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων στο \mathcal{R}^n . Σε μορφή πίνακα έχουμε

$$\xi^T \mathbf{x} = \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \dots + \xi_nx_n$$

όπου ο εκθέτης T σημαίνει μετάθεση. Μπορούμε να το γράψουμε και ως

$$\langle \xi, \mathbf{x} \rangle = \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \dots + \xi_nx_n$$

Επομένως για αντιστρέψιμο πίνακα \mathbf{A} με πραγματικά στοιχεία τέτοια ώστε $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ με $x, y \in \mathbb{R}^n$, γράφουμε την ταυτότητα

$$\langle \xi, \mathbf{y} \rangle = \langle \xi, \mathbf{Ax} \rangle = \langle \mathbf{A}^T \xi, \mathbf{x} \rangle$$

ή

$$\xi^T \mathbf{y} = \xi^T \mathbf{Ax} = (\mathbf{A}^T \xi)^T \mathbf{x}$$

ή

$$\xi \cdot \mathbf{y} = \xi \cdot \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \xi \cdot \mathbf{x}$$

Τώρα θεωρούμε $\mathcal{R}\{f(\mathbf{Ax})\}$, όπου \mathbf{A} είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$$

ή ισοδύμα σε όρους συνιστώσεων

$$y_k = \sum_{l=1}^n \mathbf{A}_{kl}x_l$$

για $k = 1, 2, \dots, n$ όπου οι συνιστώσες του \mathbf{A} γράφονται ως \mathbf{A}_{kl} ($k, l = 1, 2, \dots, n$). Το παρακάτω παράδειγμα θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τη σημασία του $f(\mathbf{Ax})$.

Παράδειγμα 2.3.1

Υποθέτουμε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ και

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2},$$

τότε

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Ax}) &= f(A_{11}x_1 + A_{12}x_2, A_{21}x_1 + A_{22}x_2) \\ &= \exp\{-(A_{11}x_1 + A_{12}x_2)^2 - (A_{21}x_1 + A_{22}x_2)^2\} \end{aligned}$$

Είναι χρήσιμο να ορίσουμε $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, τότε $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{By}$. Τότε προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\{f(\mathbf{Ax})\} &= \int f(\mathbf{Ax})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= |\det \mathbf{B}| \int f(\mathbf{y})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{By}) d\mathbf{y} \\ &= |\det \mathbf{B}| \int f(\mathbf{y})\delta(p - \mathbf{B}^T \xi \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

δεδομένου ότι ο Ιακωβιανός μετασχηματισμός είναι το μέγεθος της ορίζουσας του \mathbf{B} . Άρα

$$\mathbb{R}\{f(\mathbf{Ax})\} = |\det \mathbf{B}| \check{f}(p, \mathbf{B}^T \xi), \quad (2.4)$$

όπου $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Ισοδύναμα,

$$\mathbb{R}\{f(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x})\} = |\det \mathbf{B}| \check{f}(p, \mathbf{B}^T \xi). \quad (2.5)$$

2.4 Ιδιότητα Μετατόπισης

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, όπου οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ είναι $(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$. Ο μετασχηματισμός Radon της συνάρτησης δίνεται από

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \int f(\mathbf{x} - \mathbf{a})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int f(\mathbf{y})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{a} - \xi \cdot \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Συνεπώς το θεώρημα μετατόπισης είναι

$$\mathcal{R}f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \check{f}(p - \xi \cdot \mathbf{a}, \xi). \quad (2.6)$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι αν το \mathbf{a} το αντικαταστήσουμε με το $-\mathbf{a}$ στην (2.4), τότε το θεώρημα μετατόπισης γίνεται

$$\mathcal{R}f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{a}, \xi). \quad (2.7)$$

2.5 Μετασχηματισμός Παραγώγων

Δεδομένης μιας συνάρτησης $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ αυτό που ζητάμε είναι να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Radon της παραγώγου $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. Αν ξαναθυμηθούμε τον ορισμό της παραγώγου, μπορούμε να δούμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{\xi_k}) - f(\mathbf{x})}{\frac{\epsilon}{\xi_k}}, \quad (2.8)$$

όπου $f(\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{\xi_k})$ σημαίνει $f(x_1, \dots, x_k + \frac{\epsilon}{\xi_k}, \dots, x_n)$ και ξ_k είναι ο k -οστός όρος του ξ . Αν πάρουμε τώρα τον μετασχηματισμό Radon της παραπάνω έκφρασης και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της μετατόπισης $\mathbf{a} = (0, 0, \dots, \frac{\epsilon}{\xi_k}, \dots, 0)$ έχουμε

$$\mathcal{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_k}\right\} = \xi_k \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\check{f}(p+\epsilon, \xi) - \check{f}(p, \xi)}{\epsilon}$$

Άρα,

$$\mathcal{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_k}\right\} = \xi_k \frac{\partial \check{f}(p, \xi)}{\partial p}. \quad (2.9)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας, ο μετασχηματισμός Radon της

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

για τυχαία a_k δίνεται από

$$\mathcal{R}\left\{\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right\} = \mathbf{a} \cdot \xi \frac{\partial \check{f}(p, \xi)}{\partial p}. \quad (2.10)$$

Γενικεύοντας μπορούμε να δούμε αν παραγωγίσουμε παραγώγους δευτέρας τάξεως έχουμε

$$\mathcal{R}\left\{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_l b_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}\right\} = (\mathbf{a} \cdot \xi)(\mathbf{b} \cdot \xi) \frac{\partial^2 \check{f}(p, \xi)}{\partial p^2}, \quad (2.11)$$

για τυχαία σταθερά διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, ενώ στη γενική περίπτωση αν έχουμε ένα γραμμικό τελεστή $L(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathcal{R}\{L f\} = L(\xi_1 \frac{\partial}{\partial p}, \dots, \xi_n \frac{\partial}{\partial p}) \check{f}(p, \xi). \quad (2.12)$$

για τυχαία σταθερά διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,

2.6 Εφαρμογές Του Μετασχηματισμού Radon

Ο μετασχηματισμός Radon στην κλασική κυρίως εκδοχή βρίσκει πολλές εφαρμογές. Ο στατιστικός χαρακτήρας του τον κάνει αναντικατάστατο σε εφαρμογές στις οποίες υπάρχει πολύς θόρυβος.

Οι κυριότεροι τομείς στους οποίους χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Radon είναι οι εξής:

- Ιατρική
- Αστρονομία
- Οπτική
- Μοριακή βιολογία
- Γεωφυσική - Σεισμολογία
- Επιστήμη υλικών

Συγκεκριμένα αν θέλαμε να σχιαγραφήσου;ε τις δύο δημοφιλέστερες κατηγορίες εφαρμογών, αυτές θα ήταν οι εξής:

1. Εφαρμογές σε επεξεργασία και αναγνώριση εικόνας
2. Εφαρμογές σε περιστροφικούς σαρωτές (scanners)

Οι εφαρμογές που τον χρησιμοποιούν για αναγνώριση εικόνας ακολουθούν συνήθως το εξής σκεπτικό: Μια εικόνα φιλτράρεται, περνάει από κάποιο τελεστή ανίχνευσης αιχμών και στην συνέχεια μετασχηματίζεται στον χώρο Radon όπου συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της μπορούν να διακριθούν πιο εύκολα.

Κατά την τελευταία δεκαετία έχει υπάρξει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε τι ονομάζουμε πρόβλημα ανακατασκευής. Αυτό είναι το πρόβλημα του προσδιορισμού της εσωτερικής δομής, ή ακριβέστερα, κάποια ιδιότητα της εσωτερικής δομής χωρίς να χρειάζεται να κόψει, να ραγίσει ή οτιδήποτε άλλο που θα βλάψει το αντικείμενο. Διάφοροι ανιχνευτές, συμπεριλαμβανόμενων των ακτίνων X, των ακτίνων Γάμμα, το ορατό φως, τα μικροκύματα, τα ηλεκτρόνια, τα πρωτόνια, τα νετρόνια, τα βαριά σίδερα, τα ηχητικά κύματα, και τα πυρηνικά σήματα συντονισμού έχουν χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη μιας μεγάλης ποικιλίας αντικειμένων των οποίων τα μεγέθη ποικίλουν σ'ένα τεράστιο εύρος. Η επιτυχία της

νέας τεχνολογίας που σχετίζεται με την ιατρική απεικόνιση το οφείλει στη χρήση της υπολογιστικής τομογραφίας (*CT*), η οποία είναι υπεύθυνη για το τρέχοντος ενδιαφέρον σε μια ποικιλία μεθόδων ανακατασκευής. Όχι μόνο αυτές οι μεθόδους και η συγκεκριμένη τεχνολογία υπόσχονται πολλά στον τομέα της ιατρικής, αλλά η πρόσφατη επιτυχία τους προτείνει ενδιαφέρουσες δυνατότητες για διεύρυνση της χρήσης παρόμοιων τεχνικών.

Κεφάλαιο 3

Κατασκευή Αλγορίθμου Για Τομογράφο

Η πυρηνική ιατρική είναι η ιατρική ειδικότητα που αφορά την εφαρμογή ραδιενεργών ουσιών στη διάγνωση και θεραπεία διαφόρων νοσημάτων.

Στις διαδικασίες πυρηνικής ιατρικής, ραδιενεργά ισότοπα (ή αλλιώς ραδιοϊσότοπα) συνδυάζονται με άλλα στοιχεία σχηματίζοντας χημικές ενώσεις, ή σε άλλες περιπτώσεις με ήδη υπάρχουσες φαρμακευτικές ενώσεις, με σκοπό το σχηματισμό ραδιοφαρμάκων. Τα ραδιοφάρμακα, όταν χορηγηθούν στον ασθενή, εντοπίζονται σε συγκεκριμένα όργανα ή κυτταρικούς υποδοχείς. Αυτή η ιδιότητα των ραδιοφαρμάκων δίνει στην πυρηνική ιατρική την ικανότητα να απεικονίζει την έκταση μιας νόσου στο σώμα του ασθενή, βασισμένη κυρίως στην κυτταρική λειτουργία και φυσιολογία, και όχι σε αλλαγές στην ανατομία των ιστών. Σε ορισμένες ασθένειες η μέθοδος αυτή μπορεί να εντοπίσει ιατρικά προβλήματα νωρίτερα από άλλες διαγνωστικές εξετάσεις.

Στο μέλλον, η πυρηνική ιατρική μπορεί να δώσει νέα ώθηση στην μοριακή ιατρική. Καθώς η κατανόηση μας των βιολογικών διεργασιών στα κύτταρα του ζωντανού οργανισμού επεκτείνεται, ανιχνευτές μπορούν να αναπτυχθούν για να επιτρέπουν την απεικόνιση, το χαρακτηρισμό και την ποσοτικοποίηση των βιολογικών διαδικασιών σε κυτταρικό και υποκυτταρικό επίπεδο.

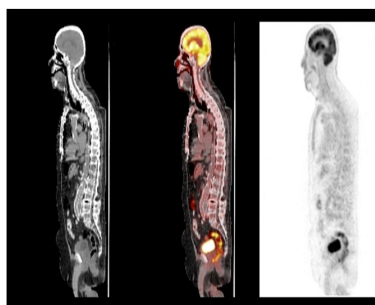
Δύο μοντέρνες τεχνικές απεικονίσεις με ένα ευρύ φάσμα ιατρικών εφαρμογών είναι η τομογραφία εκπομπής ποζιτρονίων PET και ενιαία εκπομπής φωτονίων υπολογιστικής τομογραφίας. Παρόλου που αυτές οι τεχνικές αναπτυχθήκαν αρχικά για τη μελέτη θεμελιώδων χαρακτηριστικών του εγκεφάλου, τώρα πλέον χρησιμοποιούνται σε πολλούς διαφορετικούς τομείς της κλινικής ιατρικής. Ένα πολύ καλό παράδειγμα αποτελεί ένα σχετικά πρόσφατο άρθρο στο περιοδικό 'New England Journal of Medicine' (2003) που δίνει έμφαση στη σημαντικότητα της μεθόδου PET στην ογκολογική απεικόνιση.

3.1 Μέθοδοι PET και SPECT

3.1.1 Τομογραφία Εκπομπής Ποζιτρονίου (PET)

Η τομογραφία εκπομπής ποζιτρονίου είναι μια τεχνική απεικόνισης της πυρηνικής ιατρικής, η οποία παράγει μια 3D εικόνα ή μια εικόνα λειτουργικών διεργασιών του σώματος. Το σύστημα ανιχνεύει τα ζευγάρια των ακτινών γάμμα που εκπέμπονται έμμεσα από ένα ποζιτρόνιο που εκπέμπεται από το ραδιοϊσότοπο, το οποίο εισάγεται στο σώμα σε ένα βιολογικά ενεργό μόριο. Κατόπιν, τρισδιάστατες εικόνες της συγκέντρωσης του ραδιοϊσοτόπου μέσα στο σώμα κατασκευάζονται με τη βοήθεια ανάλυσης σε υπολογιστή. Σε σύγχρονους σαρωτές, η τρισδιάστατη απεικόνιση συχνά επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μιας αξονικής τομογραφίας που πραγματοποιείται ταυτόχρονα στον ασθενή.

Για παράδειγμα, στην απεικόνιση του εγκεφάλου ένα τυπικό τέτοιο ραδιοφάρμακο είναι το flurodeoxyglucose FDG, το οποίο είναι ένα μόριο γλυκόζης συνδεδεμένο τεχνητά σ' ένα άτομο ραδιενεργού φθορίου. Τα κύτταρα του εγκεφάλου, τα οποία είναι περισσότερο δραστήρια έχουν υψηλότερο μεταβολισμό, επομένως χρειάζονται περισσότερη ενέργεια και γι' αυτό το λόγο θα απορροφήσουν περισσότερο FDG. Το άτομο φθορίου FDG υφίσταται μια ραδιενεργό διάσπαση, εκπέμπωντάς ένα ποζιτρόνιο. Όταν ένα ποζιτρόνιο συγκρούεται με ένα ηλεκτρόνιο που απελευθερώνει ενέργεια με τη μορφή δύο δέσμες ακτίνων μεταφέρεται στην αντίθετη κατεύθυνση, όπου συλλέγονται από το σαρωτή PET.

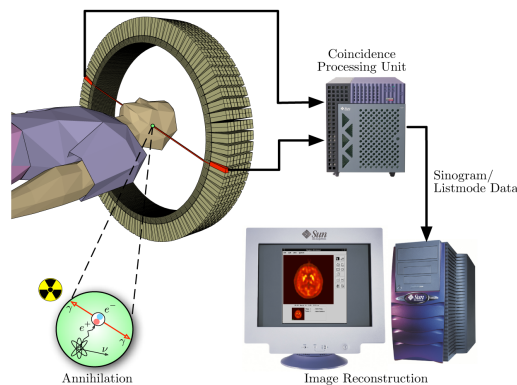


Σχήμα 2: Τομογραφία PET

Τα ανεπεξέργαστα δεδομένα που συλλέγονται από το σαρωτή του Τομογράφου Εκπομπής Ποζιτρονίου είναι μια λίστα από «γεγονότα πρόσπτωσης» τα οποία αντιπροσωπεύουν σχεδόν ταυτόχρονες (μέσα σε ένα παράθυρο 6 με 12 nanosecond) προσπτώσεις ζευγών φωτονίων σε δύο ανιχνευτές του τομογράφου. Κάθε γεγονός πρόσπτωσης συνδέει με μια γραμμή τους δύο ανιχνευτές κατά μήκος της οποίας συνέβη το γεγονός. Σύγχρονα συστήματα με μεγαλύτερη χρονική ανάλυση (περίπου 3 nanosecond) μπορούν να υπολογίσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τη χρονική διαφορά μεταξύ της ανίχνευσης των δύο

φωτονίων και έτσι να περιορίσουν το σημείο προέλευσης της σύγκρουσης σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους περίπου 10cm πάνω στη γραμμική απόκρισης.

Τα γεγονότα πρόσπτωσης μπορούν να ομαδοποιηθούν σε εικόνες προβολής, που ονομάζονται ημιτονογράμματα. Τα ημιτονογράμματα είναι παρόμοια με αυτά που λαμβάνονται κατά την αξονική τομογραφία, και μπορούν να ανακατασκευαστούν με παρόμοιο τρόπο. Ωστόσο, τα στατιστικά δεδομένα εδώ είναι πολύ χειρότερα από τομογραφίες τύπου μετάδοσης (όπως η αξονική). Ένα σύννηδες σύνολο δεδομένων για μια εξέταση Τομογραφίας Εκπομπής Ποζιτρονίου περιέχει εκατομμύρια στοιχεία, ενώ σε μια αξονική τομογραφία μερικά δισεκατομμύρια. Ως εκ τούτου, τα δεδομένα υποφέρουν από διασπορά και τυχαία γεγονότα πολύ περισσότερο. Στην πράξη, απαιτείται σημαντική προεπεξεργασία των δεδομένων: διόρθωση τυχαίων προσπτώσεων, εκτίμηση και αφαίρεση των διασπαρμένων φωτονίων, διόρθωση του νεκρού χρόνου του ανιχνευτή (μετά την ανίχνευση ενός φωτονίου, ο ανιχνευτής πρέπει να «κρυώσει» πάλι) και διόρθωση ευαισθησίας του ανιχνευτή (τόσο την εγγενή ευαισθησία του ανιχνευτή όσο και μεταβολές στην ευαισθησία λόγω της γωνίας πρόσπτωσης).



Σχήμα 3: Διαδικασία της PET

Ανακατασκευή 2D/3 D: Πρώιμοι τομογράφοι εκπομπής ποζιτρονίου είχαν μόνο ένα δακτύλιο ανιχνευτών, και έτσι η λήψη των δεδομένων και η επικείμενη ανακατασκευή εικόνας περιοριζόταν σε ένα μόνο εγκάρσιο επίπεδο. Πιο σύγχρονοι σαρωτές περιλαμβάνουν πλέον πολλούς δακτυλίους, ουσιαστικά σχηματίζοντας ένα κύλινδρο από ανιχνευτές. Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις στην ανακατασκευή των δεδομένων στους τομογράφους με πολλούς δακτυλίους:

1) 2D ανακατασκευή: Αντιμετωπίζουμε τον κάθε δακτύλιο σαν ξεχωριστή συσκευή. Έτσι, μόνο προσπτώσεις μέσα σε ένα δακτύλιο ανιχνεύονται, και η εικόνα από τον κάθε δακτύλιο ανακατασκευάζεται ξεχωριστά.

2) 3D ανακατασκευή: Επιτρέπουμε ανιχνεύσεις μεταξύ διαφορετικών δακτυλίων, και ανακατασκευάζουμε όλα τα μας τα δεδομένα σε μια συνολική 3D ανακατασκευή. Οι τεχνι-

χές 3D ανακατασκευής έχουν και λιγότερο θόρυβο, αλλά ταυτόχρονα είναι πιο ευπαθείς στις επιδράσεις λόγω διασποράς και τυχαίων προσπτώσεων, και επίσης είναι προφανές ότι απαιτούν μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύ. Η έλευση των ανιχνευτών χρονικής ανάλυσης κάτω του 1 nanosecond προσφέρει καλύτερη απόρριψη τυχαίων προσπτώσεων, ευνοώντας έτσι τις μεθόδους 3D ανακατασκευής.

3.1.2 Τομογραφία Εκπομπής Φωτονίων(SPECT)

Η τομογραφία εκπομπής φωτονίων είναι παρόμοια με την τομογραφία PET, και είναι μια τεχνική απεικόνισης που χρησιμοποιεί ακτίνες γάμμα και παράγει πραγματικά 3D δεδομένα. Αυτά τα δεδομένα συνήθως παρουσιάζονται υπό μορφή τομών (φετών), αλλά μπορούμε να τις μεταχειριστούμε όπως αλλιώς θέλουμε ανάλογα με τις απαιτήσεις.

Η μέθοδος αυτή απαιτεί επίσης τη χρήση ραδιοϊσοτόπου, το οποίο εισέρχεται ενδοφλεβίως στο σώμα του ασθενή. Ανά περίπτωση, το ραδιοϊσότοπο αυτό είναι ένα απλό διαλυτό ιόν, όπως το ραδιοϊσότοπο του γαλλίου, το οποίο επίσης τυχαίνει να έχει χημικές ιδιότητες οι οποίες του επιτρέπουν να εμφανίζεται σε συγκεντρωμένες μορφές που εμφανίζουν ενδιαφέρον για την ανίχνευση ασθενειών.

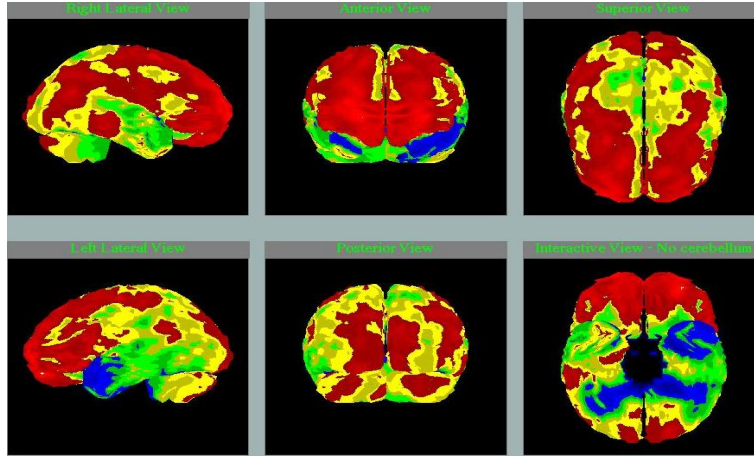
Ο κύριος σκοπός της μεθόδου αυτής είναι να χαρτογραφήσει τον τρόπο με τον οποίο το αίμα κυκλοφορεί μέσα από αρτηρίες και φλέβες στον εγκέφαλο. Δοκιμές έχουν δείξει ότι ίσως η SPECT είναι πιο ευαίσθητη από την μαγνητική ή αξονική τομογραφία διότι μπορεί να ανιχνεύσει μειωμένη ροή αίματος σε τραυματισμένες περιοχές.

Η μεγαλύτερη διαφορά ως προς τη διαγνωστική ικανότητα της μεθόδου σε σχέση με την PET είναι ότι το ραδιοϊσότοπο στην SPECT παραμένει στην κυκλοφορία του αίματος, ενώ στην PET απορροφάται από περιβάλλοντες ιστούς και έτσι η διάγνωση στην SPECT περιορίζεται μόνο σε περιοχές όπου έχουμε ροή αίματος. Η τομογραφία SPECT είναι επίσης φθηνότερη και ευκολότερα διαθέσιμη.

Η απεικόνιση στην μέθοδο αυτή γίνεται επίσης με τη χρήση κάμερας ακτινών γάμμα η οποία λαμβάνει πολλαπλές 2D εικόνες, από διάφορες γωνίες. Στη συνέχεια ακολουθείται από τη διαδικασία της τομογραφικής ανακατασκευής, δίνοντας μια 3D αναπαράσταση. Αυτά τα 3D δεδομένα μπορούμε να τα χειριστούμε αναλόγως ώστε να πάρουμε λεπτές τομές κατά μήκος οποιουδήποτε άξονα θέλουμε.

Εδώ η διαφορά από την τομογραφία PET είναι ότι η ακτινοβολία γάμμα εκπέμπεται και μετράται κατευθείαν, ενώ στην PET έχουμε εκπομπή ποζιτρονίου που διασπάται σε 2 φωτόνια.

Σχήμα 4: Τομογραφίας SPECT



3.2 Μαθηματικές Μέθοδοι

Έστω x_1 και x_2 συντεταγμένες του καρτεσιανού επιπέδου. Και στις δύο μεθόδους PET και SPECT οι πηγές της ακτινοβολίας βρίσκονται μέσα στο σώμα, και ο σκοπός είναι να προσδιοριστεί η κατανομή $g(x_1, x_2)$ σε δοσμένο επίπεδο, του σχετικού ραδιοφάρμακου από μετρήσεις που γίνονται έξω από το σώμα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας. Χρησιμοποιώντας ένα σχετικά μεγάλο αριθμών επιπέδων μπορούμε να προσδιορίσουμε τη τρισδιάστατη κατανομή. Θεωρώντας ως $f(x_1, x_2)$ το συντελεστή εξασθένησης ακτίνων X του σώματος τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι η ένταση I του σώματος από έναν ανιχνευτή που δέχεται μόνο ακτινοβολία κατά μήκος της ευθείας γραμμής L βρίσκεται από

$$I = \int_L e^{-\int_{L(x)} f ds} g d\tau \quad (3.1)$$

όπου τ είναι μια παράμετρος κατά μήκος L και $L(x)$ ορίζεται το σημείο ανάμεσα στο σημείο (x_1, x_2) και τον ανιχνευτή. Ο συντελεστής εξασθένησης $f(x_1, x_2)$ είναι η συνάρτηση που υπολογίζεται από το υπολογιστικό τομογράφο. Συνεπώς, το βασικό μαθηματικό πρόβλημα στη μέθοδο SPECT είναι να προσδιοριστεί η συνάρτηση $g(x_1, x_2)$ από τη γνωστή συνάρτηση 'μετάδοσης' $f(x_1, x_2)$ (προσδιορισμένο διαμέσου της υπολογιστικής τομογραφίας) και της συνάρτησης 'εκπομπής' I (γνωστή από τις μετρήσεις).

Η διαδικασία της μέθοδο PET είναι πιο απλή. Αναμφίβολα, καθώς οι πηγές εξάγουν σωματίδια κατά ζεύγη σε αντίθετες κατευθύνσεις και η ακτινοβολία σε αντίθετες κατευθύνσεις υπολογίζονται ταυτόχρονα, επομένως ο τύπος (3.1) γίνεται

$$I = \int_L e^{-\int_{L_+(x)} f ds - \int_{L_-(x)} f ds} g d\tau, \quad (3.2)$$

όπου $L_+(x)$, $L_-(x)$ δύο ημιευθείες της L με τελικό σημείο x . Καθώς, $L_+(x) + L_-(x) = L$, ο τύπος (3.2) γίνεται

$$I = e^{-\int_L f d\tau} \int_L g d\tau.$$

Σημείωση

Ανακαλούμε ότι η ευθεία ολοκληρώματος της συνάρτησης $f(x_1, x_2)$ κατά μήκος L προκύπτει από τις μετρήσεις της υπολογιστικής τομογραφίας. Άρα, η συνάρτηση L και το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x_1, x_2)$ είναι γνωστά από τις μετρήσεις της μεθόδου PET και της υπολογιστικής τομογραφίας αντίστοιχα. Το βασικό μαθηματικό πρόβλημα της μεθόδου PET είναι να προσδιοριστεί η $g(x_1, x_2)$ από τα γνωστά ολοκληρώματα της ευθείας. Λοιπόν διαπιστώνουμε ότι το συγκεκριμένο μαθηματικό πρόβλημα ταυτίζεται με το βασικό πρόβλημα της υπολογιστικής τομογραφίας που αναφέραμε πιο πάνω.

- i. Σημείο της ευθείας L σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x_1 που καθορίζεται από τρεις πραγματικούς αριθμούς (τ, ρ, θ) , όπου τ είναι παράμετρος κατά μήκος της ευθείας L , $-\infty < \tau < \infty$, ρ είναι η απόσταση από τη πηγή (αρχή αξόνων) στην ευθεία, $-\infty < \rho < \infty$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- ii. Η παραπάνω παραμετροποίηση σημαίνει ότι για σταθερή γωνία θ οι κατερσιανές συντεταγμένες εκφράζονται σε τοπικές συντεταγμένες (τ, ρ) από τις εξισώσεις

$$x_1 = \tau \cos \theta - \rho \sin \theta$$

$$x_2 = \tau \sin \theta + \rho \cos \theta \quad (3.3)$$

Άρα, η συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ γράφεται σε τοπικές συντεταγμένες και θα ορίζεται ως

$$F(\tau, \rho, \theta) = f(\tau \cos \theta - \rho \sin \theta, \tau \sin \theta + \rho \cos \theta).$$

Έτσι, $F(\tau, \rho, \theta)$ και $G(\tau, \rho, \theta)$ θα ορίζουν το συντελεστή εξασθένησης $f(x_1, x_2)$ της ακτίνας X και τη κατανομή του ραδιοφάρμακου $g(x_1, x_2)$ αντίστοιχα εκφρασμένα σε τοπικές συντεταγμένες.

- iii. Η ευθεία ολοκληρώματος της συνάρτησης f ονομάζεται *μετασχηματισμός Radon* και θα ορίζεται ως \check{f} . Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση \check{f} γράφουμε τη συνάρτηση f σε τοπικές συντεταγμένες και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς τ ,

$$\check{f}(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau, \rho, \theta) d\tau. \quad (3.4)$$

Όσο αφορά την ευθεία ολοκληρώματος της συνάρτησης g ως προς τη συνάρτηση f που ορίζεται στη εξίσωση (3.1) ονομάζεται *εξασθένιση μετασχηματισμού Radon* της g και θα ορίζεται ως \hat{g}_f . Για να υπολογίσουμε τη \hat{g}_f , γράφουμε τις συναρτήσεις f και g σε τοπικές συντεταγμένες και ακόλουθα προκύπτει το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$\hat{g}_f(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\int_{\tau}^{\infty} F(s, \rho, \theta) ds} G(\tau, \rho, \theta) d\tau \quad (3.5)$$

Επομένως, το ουσιαστικό πρόβλημα από μαθηματικής πλευράς και για τις δύο μεθόδους PET, SPECT είναι να ανακατασκευάσουμε τη συνάρτηση f γνωρίζοντας το μετασχηματισμό Radon \check{f} . Ο σχετικός τύπος ονομάζεται *αντίστροφος μετασχηματισμός Radon* και δίνεται από

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4i\pi^2} (\theta_{x_1} - i\theta_{x_2}) \otimes \int_0^{\infty} e^{i\theta} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{f}(\rho, \theta)}{\rho - (x_2 \cos \theta - x_1 \sin \theta)} d\rho \right\} d\theta, \quad (3.6)$$

όπου $-\infty < x_j < \infty$, $j = 1, 2, \dots$.

Μια προσέγγιση για τη κατασκευή της εξίσωσης (3.6) ανέπτυξε ο Φωκάς και Novikov [1] που βασίζεται στην ανάλυση της εξίσωσης

$$\left(\frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \theta_{x_1} + \frac{1}{2i} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \theta_{x_2} \right) \mu(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2), \quad (3.7)$$

όπου λ είναι μια μιγαδική παράμετρο διάφορη του μηδενός. Η εφαρμογή αυτής της προσέγγισης στη γενικευμένη μορφή της εξίσωσης (3.7) χρησιμοποιήθηκε για την ανακατασκευή της συνάρτησης g γνωρίζοντας τον μετασχηματισμό Radon \hat{g}_f . Ο αντίστοιχος τύπος ονομάζεται *αντίστροφος εξασθένισης μετασχηματισμού Radon* ο οποίος δημιουργήθηκε από το Novikov [2], αναλύοντας αντί την εξίσωση (3.7), την εξίσωση

$$\left(\frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \theta_{x_1} + \frac{1}{2i} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \theta_{x_2} + f(x_1, x_2) \right) \mu(x_1, x_2, \lambda) = g(x_1, x_2). \quad (3.8)$$

3.3 Αντίστροφός Μετασχηματισμός Radon

Αρχικά θα αναλύσουμε το βασικό αποτέλεσμα του Φωκά και Novikov [1]. Αυτό το αποτέλεσμα θα το χρησιμοποιήσουμε αργότερα για να προκύψουν τόσο ο αντίστροφος Radon όσο και ο αντίστροφος εξασθένισης μετασχηματισμού Radon.

Πρόταση 3.2.1 Θεωρούμε τη μιγαδική παράμετρο z με

$$z = \frac{1}{2i} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) x_1 - \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} x_2 \right), \quad (3.9)$$

όπου x_1, x_2 είναι πραγματικές καρτεσιανές συντεταγμένες $-\infty < x_j < \infty$, $j = 1, 2, \dots$, και λ είναι μια μιγαδική μεταβλητή, $\lambda \neq 0$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ φθίνει καθώς $|x_1| + |x_2| \rightarrow \infty$. Έστω $\mu(x_1, x_2, \lambda)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{|\lambda|^2} - |\lambda|^2 \right) \frac{\partial \mu(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \bar{z}} = f(x_1, x_2), \quad (3.10)$$

$|\lambda| \neq 1$, με οριακή συνθήκη $\mu = O(\frac{1}{z})$ καθώς $|x_1| + |x_2| \rightarrow \infty$. Ως $\lambda^+(\theta)$ και $\lambda^-(\theta)$ ορίζουμε τα όρια του λ καθώς αυτό προσεγγίζει το μοναδιαίο κύκλο από εσωτερικά προς εξωτερικά του μοναδιαίου δίσκου αντιστοίχως, δηλαδή έχουμε

$$\lambda^\pm(\theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 \mp \epsilon) e^{i\theta},$$

$0 < \epsilon, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Τότε

$$\mu(x_1, x_2, \lambda^\pm(\theta)) = \mp P^\mp \hat{f}(\rho, \theta) - \int_\tau^\infty F(\tau', \rho, \theta) d\tau', \quad (3.11)$$

όπου ως \hat{f} ορίζουμε το μετασχηματισμό Radon της f , F ορίζουμε τη συνάρτηση f σε τοπικές συντεταγμένες και ως P^\pm τον φορέα προβολής στην μεταβλητή ρ , δηλαδή

$$(P^\pm g)(\rho) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_\infty^\infty \frac{g(\rho')}{\rho' - (\rho \pm i\epsilon)} d\rho' = \pm \frac{g(\rho)}{2} + \frac{1}{2i\pi} \oint_{-\infty}^\infty \frac{g(\rho')}{\rho' - \rho} d\rho' \quad (3.12)$$

Απόδειξη. Λαμβάνοντας το συζυγή της εξίσωσης (3.9) βρίσκουμε

$$\bar{z} = -\frac{1}{2i} \left(\bar{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) x_1 - \frac{1}{2} \left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\bar{\lambda}} x_2 \right), \quad (3.13)$$

όπου \bar{z} και $\bar{\lambda}$ είναι τα συζυγή των z και λ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις (3.9) και (3.12) ορίζουν μια αλλαγή των μεταβλητών από (x_1, x_2) σε (z, \bar{z}) . Χρησιμοποιώντας αυτή την αλλαγή μεταβλητών για να υπολογίσουμε ∂_{x_1} και ∂_{x_2} σύμφωνα με τα ∂_z και $\partial_{\bar{z}}$ η εξίσωση (3.7) γίνεται (3.10).

Στη συνέχεια θα δούμε πως προέκυψε ο τύπος (3.11). Η συγκεκριμένη απόδειξη χωρίζεται σε δύο βήματα, τα οποία χρησιμοποιούνται κυρίως στο χώρο των μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Στο πρώτο βήμα (μερικές φορές καλείται *ευθή πρόβλημα*) θεωρούμε την εξίσωση (3.10) ως μια εξίσωση στην οποία ορίζουμε το μ σύμφωνα με την f , και κατασκευάζουμε το μ σύμφωνα με την f για όλες τις μιγαδικές τιμές της λ . Επομένως, έχουμε

$$\mu(x_1, x_2, \lambda) = -\frac{1}{2i\pi} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{|\lambda|^2} - |\lambda|^2\right) \iint_{R^2} \frac{f(x'_1, x'_2)}{z' - z} dx'_1 dx'_2, \quad (3.14)$$

$|\lambda| \neq 1$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\mu(z_R, z_I)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial \mu(z_R, z_I)}{\partial \bar{z}} = g(z_R, z_I), \quad z = z_R + iz_I,$$

$-\infty < z_R < \infty$, $-\infty < z_I < \infty$, καθώς για την οριακή συνθήκη ισχύει $\mu = O\left(\frac{1}{z}\right)$ όταν $z \rightarrow \infty$. Τότε, ο τύπος του Pomrieu [3] συνεπάγεται

$$\mu = -\frac{1}{\pi} \iint_{R^2} \frac{g(z'_R, z'_I)}{z' - z} dz'_R dz'_I. \quad (3.15)$$

Αυτή η εξίσωση είναι η ευθύς συνέπεια του γεγονότος ότι επειδή η μ στην εξίσωση (3.15) εξαρτάται από τη z μέσω της σχέση $(z' - z)^{-1}$, τότε η εξάρτηση της μεταβλητής \bar{z} μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς χρησιμοποιώντας το τύπο

$$\partial_{\bar{z}}(z' - z)^{-1} = 2i\pi\delta(z' - z). \quad (3.16)$$

Στη περίπτωση μας,

$$g = \frac{2if}{\frac{1}{|\lambda|^2} - |\lambda|^2},$$

$$dz_R dz_I = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{|\lambda|^2 - |\lambda|^2} \right) dx_1 dx_2$$

έτσι η εξίσωση (3.15) γίνεται (3.14).

Στο δεύτερο βήμα (μερικές φορές καλείται *αντίστροφο πρόβλημα*), αναλύουμε τις ιδιότητες της μεταβλητής μ σύμφωνα με τη λ και βρίσκουμε ένα εναλλακτικό τύπο για τη μ . Αυτός ο εναλλακτικός τύπος περιλαμβάνει συγκεκριμένα ολοκληρώματα της συνάρτησης

f που ονομάζονται φασματικές συναρτήσεις. Όσο αφορά το δικό μας πρόβλημα, αυτός ο τύπος είναι η εξίσωση (3.11). Επειδή, όμως, μ είναι μια συνάρτηση της λ για $|\lambda| \neq 1$ και $\mu = O(\frac{1}{\lambda})$ όταν $\lambda \rightarrow \infty$, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε τη συνάρτηση μ αν γνωρίζουμε ότι το 'πήδημα' στο μοναδιαίο κύκλο είναι

$$\mu(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{J(x_1, x_2, \theta') e^{i\theta'}}{e^{i\theta'} - \lambda} d\theta', \quad (3.17)$$

όπου

$$J(x_1, x_2, \theta) = \mu(x_1, x_2, \lambda^+) - \mu(x_1, x_2, \lambda^-).$$

Άρα, χρειάζεται να υπολογίσουμε τα όρια των μ καθώς λ τείνει στο λ^\pm . Για $\epsilon \rightarrow 0$ έχουμε,

$$\lambda^\pm \mp \frac{1}{\lambda^\pm} \sim (1 - \epsilon)e^{i\theta} \mp (1 + \epsilon)e^{-i\theta}.$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στον ορισμό της z (εξίσωση (3.9)) και απλοποιώντας βρίσκουμε

$$z' - z \sim (x'_1 - x_1) \sin \theta - (x'_2 - x_2) \cos \theta + i\epsilon((x'_1 - x_1) \cos \theta + (x'_2 - x_2) \sin \theta). \quad (3.18)$$

Το δεξί μέρος της εξίσωσης (3.17) μπορεί να το γραφτεί σύμφωνα με τις τοπικές συντεταγμένες ρ, ρ', τ, τ' . Δηλαδή, έστω κ και κ^\perp δύο μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος της ευθείας L και κάθετα στην ευθεία αντίστοιχα. Τότε

$$x = \tau\kappa + \rho\kappa^\perp$$

ή

$$(x_1, x_2) = \tau(\cos \theta, \sin \theta) + \rho(-\sin \theta, \cos \theta).$$

Όμως, τα x_1 και x_2 δίνονται από την εξίσωση (3.3). Αντιστρέφοντας αυτές τις εξισώσεις βρίσκουμε

$$\tau = x_2 \sin \theta + x_1 \cos \theta, \rho = x_2 \cos \theta - x_1 \sin \theta. \quad (3.19)$$

Έτσι, η εξίσωση (3.17) γίνεται

$$z' - z \sim -\rho' + \rho + i\epsilon(\tau' - \tau).$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην εξίσωση (3.14) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο αντίστοιχος $sign$ ισούται με τη μονάδα, βρίσκουμε

$$\mu(x_1, x_2, \lambda^+) \sim -\frac{1}{2i\pi} \iint_{R^2} \frac{f(x'_1, x'_2)}{\rho' - \rho - i\epsilon(\tau' - \tau)} dx'_1 dx'_2 \quad (3.20)$$

Χρησιμοποιώντας την εναλλαγή των μεταβλητών $(x_1, x_2) \leftrightarrow (\tau, \rho)$ που έχουν οριστεί στις εξισώσεις (3.3) και (3.19) και σημειώνοντας τον αντίστοιχο Ιακωβιανό ίσο με τη μονάδα, δηλαδή

$$f(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 = F(\tau', \rho', \theta) d\tau' d\rho',$$

βρίσκουμε ότι το δεξί μέρος της εξίσωσης (3.20) είναι ίσο με

$$-\frac{1}{2i\pi} \iint_{R^2} \frac{F}{\rho' - (\rho + i\epsilon(\tau' - \tau))} d\tau' d\rho'. \quad (3.21)$$

Με σκοπό την απλοποίηση αυτής της έκφρασης χωρίζουμε το ολοκλήρωμα πάνω στο $d\tau'$ στην εξής μορφή

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' + \int_{\tau}^{\infty} d\tau',$$

με περιορισμό στο πρώτο ολοκλήρωμα $\tau' - \tau < 0$ ενώ στο δεύτερο ολοκλήρωμα $0 < \tau' - \tau$. Επομένως, χρησιμοποιώντας το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (3.12) η έκφραση της (3.21) γίνεται

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau', \rho', \theta) \frac{1}{\rho' - \rho} d\rho' \right) d\tau' \\ & -\frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} F(\tau', \rho, \theta) d\tau' + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\tau} F(\tau', \rho, \theta) d\tau' \end{aligned}$$

Τέλος, προσθέτοντας και αφαιρώντας το ολοκλήρωμα $\frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty}$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \mu(x_1, x_2, \lambda^+) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau', \rho', \theta) \frac{1}{\rho' - \rho} d\rho' \right) d\tau' \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau', \rho, \theta) d\tau' - \int_{\tau}^{\infty} F(\tau', \rho, \theta) d\tau' \end{aligned}$$

Οι δύο πρώτοι όροι στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης ισούνται με $-P^- \hat{f}$, άρα βρήκαμε (3.11)⁺. Ομοίως για την (3.11)⁻. \square

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση (3.11) για να δούμε πως προκύπτουν ο αντίστροφος Radon και ο αντίστροφος εξασθένησης Radon μετασχηματισμός. Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα της πρότασης (3.2.1) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^\pm} \left\{ \partial_{\bar{z}}^{-1} \left(\frac{f(x_1, x_2)}{\nu(\lambda)} \right) \right\} = \mp P^\mp \hat{f}(\rho, \theta) - \int_\tau^\infty F(\tau', \rho, \theta) d\tau', \quad (3.22)$$

όπου

$$\nu(\lambda) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{|\lambda|^2 - |\lambda|^2} \right). \quad (3.23)$$

Η εξίσωση (3.11) παράγει

$$J(x_1, x_2, \theta) = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\rho', \theta)}{\rho' - (x_2 \cos \theta - x_1 \sin \theta)} d\rho'. \quad (3.24)$$

Η εξίσωση (3.17) συνεπάγεται

$$\mu(x_1, x_2, \lambda) = \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J(x_1, x_2, \theta) e^{i\theta} d\theta \right) \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (3.25)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην εξίσωση (3.7) βρίσκουμε

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (\theta_{x_1} - i\theta_{x_2}) \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J(x_1, x_2, \theta) e^{i\theta} d\theta \right). \quad (3.26)$$

Τοποθετώντας την εξίσωση J στο δεξί μέρος της εξίσωσης (3.24) βρίσκουμε την εξίσωση (3.6).

Κεφάλαιο 4

Αλγόριθμος Για SPECT

4.1 Εξασθένιση Μετασχηματισμού Radon

Η εξίσωση (3.8) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}} + \frac{f}{\nu} \mu = \frac{g}{\nu}$$

όπου το ν ορίζεται από την εξίσωση (3.23). Έτσι, έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\mu \exp\left[\theta_{\bar{z}}^{-1} \left(\frac{f}{\nu}\right)\right] \right) = \frac{g}{\nu} \exp\left[\theta_{\bar{z}}^{-1} \left(\frac{f}{\nu}\right)\right]$$

ή

$$\mu \exp\left[\theta_{\bar{z}}^{-1} \left(\frac{f}{\nu}\right)\right] = \theta_{\bar{z}}^{-1} \left(\frac{g}{\nu} \exp\left[\theta_{\bar{z}}^{-1} \left(\frac{f}{\nu}\right)\right] \right).$$

Τοποθετώντας στην εξίσωση αυτή το ίσο της $\theta_{\bar{z}}^{-1} \frac{f}{\nu}$ από την εξίσωση (3.22) προκύπτει

$$\begin{aligned} & \mu(x_1, x_2, \lambda^\pm) e^{\mp P^\mp \hat{f}(\rho, \theta)} e^{-\int_\tau^\infty F(\tau', \rho, \theta) d\tau'} \\ &= \theta_{\bar{z}}^{-1} \left(\frac{g(x_1, x_2)}{\nu(\lambda)} e^{\mp P^\mp \hat{f}(\rho, \theta)} e^{-\int_\tau^\infty F(\tau', \rho, \theta) d\tau'} \right) \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του δεξιού μέρους αυτής της εξίσωσης χρησιμοποιούμε πάλι την εξίσωση (3.22), όπου f τοποθετείται από g φορές των δύο εκθετικών που εμφανίζονται στη παραπάνω σχέση. Λοιπόν, έχουμε

$$\begin{aligned} & \mu(x_1, x_2, \lambda^\pm) e^{\mp P^\mp \hat{f}(\rho, \theta)} e^{-\int_\tau^\infty F(\tau', \rho, \theta) d\tau'} \\ &= \mp P^\mp e^{\mp P^\mp \hat{f}(\rho, \theta)} \hat{g}_f(\rho, \theta) \end{aligned}$$

$$- \int_{\tau}^{\infty} G(\tau', \rho, \theta) e^{\mp P^{\mp} \hat{f}(\rho, \theta)} e^{-\int_{\tau'}^{\infty} F(s, \rho, \theta) ds} d\tau'. \quad (4.1)$$

Σημειώνεται ότι η έκφραση $\exp[\mp P^{\mp} \hat{f}]$ είναι ανεξάρτητη από τη τ' , έτσι αυτή η έκφραση βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα \int_{τ}^{∞} και το ίδιο ισχύει για την ίδια έκφραση που βρίσκεται στο αριστερό μέρος της εξίσωσης (4.1). Άρα, όταν υπολογίζουμε το $\mu(x_1, x_2, \lambda^+) - \mu(x_1, x_2, \lambda^-)$, η δεύτερη έκφραση του δεξιού μέρους της εξίσωσης (4.1) διαγράφεται και βρίσκουμε τον αντίστοιχο τύπο που δίνεται από

$$J(x_1, x_2, \theta) = -e^{\int_{\tau}^{\infty} F(\tau', \rho, \theta) d\tau'} \\ \otimes \left(e^{P^- \check{f}(\rho, \theta)} P^- e^{-P^- \check{f}(\rho, \theta)} + e^{-P^+ \check{f}(\rho, \theta)} P^+ e^{P^+ \check{f}(\rho, \theta)} \right) \check{g}_f(\rho, \theta) \quad (4.2)$$

όπου τ και ρ εκφράζονται σε συνάρτηση των x_1 και x_2 στην εξίσωση (3.19).

Η εξίσωση (3.17) ισχύει όπως και η εξίσωση (3.26) αν η f αντικαθιστεί από την g στην εξίσωση (3.26). Συνεπώς, έχουμε

$$g(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi} (\theta_{x_1} - i\theta_{x_2}) \int_0^{2\pi} J(x_1, x_2, \theta) e^{i\theta} d\theta, \quad (4.3)$$

όπου J ορίζεται από την εξίσωση (4.2). Αυτός ο τύπος ισούται με το τύπο του Novikov.

Σημειώνουμε την πρώτη εκθετική συνάρτηση του δεξιού μέρους της εξίσωσης (4.2) ως προς το $I(\tau, \rho, \theta)$, δηλαδή έχουμε

$$I(\tau, \rho, \theta) = \exp\left[\int_{\tau}^{\sqrt{1-\rho^2}} F(\tau', \rho, \theta) d\tau'\right]. \quad (4.4)$$

Η περιοχή ολοκλήρωσης είναι πεπερασμένη, δηλαδή $[\tau, \sqrt{1-\rho^2}]$ και $F(\tau, \rho, \theta) = 0$ για $|\rho| \geq 1$ ή για $|\tau| \geq \sqrt{1-\rho^2}$.

Ο ορισμός (3.12) γίνεται $P^{\pm} \check{f}(\rho, \theta) = \pm \frac{1}{2} \check{f}(\rho, \theta) - \frac{i}{2\pi} h(\rho, \theta)$.

Επιπλέον,

$$\exp[P^{\pm} \check{f}(\rho, \theta)] \\ = \exp\left[\pm \frac{1}{2} \check{f}(\rho, \theta)\right] \left(\cos \frac{h(\rho, \theta)}{2\pi} - \sin \frac{h(\rho, \theta)}{2\pi} \right),$$

$$\begin{aligned} & \exp[-P^\pm \check{f}(\rho, \theta)] \\ &= \exp[\mp \frac{1}{2} \hat{f}(\rho, \theta)] \left(\cos \frac{h(\rho, \theta)}{2\pi} + i \sin \frac{h(\rho, \theta)}{2\pi} \right). \end{aligned}$$

Θέτω τις παρακάτω ισότητες

$$\begin{cases} f^{cpe}(\rho, \theta) = e^{\frac{1}{2} \check{f}(\rho, \theta) \cos \frac{h(\rho, \theta)}{2\pi}}, \\ f^{spe}(\rho, \theta) = e^{\frac{1}{2} \check{f}(\rho, \theta) \sin \frac{h(\rho, \theta)}{2\pi}} \\ f^{cme}(\rho, \theta) = e^{-\frac{1}{2} \check{f}(\rho, \theta) \cos \frac{h(\rho, \theta)}{2\pi}}, \\ f^{sme}(\rho, \theta) = e^{-\frac{1}{2} \check{f}(\rho, \theta) \sin \frac{h(\rho, \theta)}{2\pi}} \\ f^c(\rho, \theta) = f^{cpe}(\rho, \theta) \check{g}_f(\rho, \theta), \\ f^s(\rho, \theta) = f^{spe}(\rho, \theta) \check{g}_f(\rho, \theta) \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τις ισότητες και τοποθετώντας την ισότητα $R(\tau, \rho, \theta) = -J(\tau, \rho, \theta)$, κάνοντας τις κατάλληλες πράξεις η εξίσωση (4.2) γίνεται

$$R(\tau, \rho, \theta) = I(\tau, \rho, \theta) ((f^{cme} - i f^{sme})(P^- f^c + i P^- f^s) + (f^{cme} + i f^{sme})(P^+ f^c - i P^+ f^s)). \quad (4.5)$$

Τώρα θα θέσουμε

$$\begin{aligned} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{f^c(\rho', \theta)}{\rho' - \rho} d\rho' &= h^c(\rho, \theta), \\ \oint_{\infty}^{\infty} \frac{f^s(\rho', \theta)}{\rho' - \rho} d\rho' &= h^s(\rho, \theta), \end{aligned}$$

έτσι η εξίσωση (4.5) γίνεται

$$R(\tau, \rho, \theta) = -i I(\tau, \rho, \theta) \left(f^{cme} \left(\frac{1}{\pi} h^c + 2f^s \right) + f^{sme} \left(\frac{1}{\pi} h^s - 2f^c \right) \right).$$

Επομένως, γράψαμε το δεξιό μέρος της εξίσωσης ως προς το $-ir(\tau, \rho, \theta)$. Λαμβάνοντας το πραγματικό μέρος της $g(x_1, x_2)$ στην εξίσωση (4.3) παρατηρούμε ότι

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (r_{x_1} \sin \theta - r_{x_2} \cos \theta) d\theta, \quad (4.6)$$

όπου τ και ρ που δίνονται από την εξίσωση (3.19) και

$$r(\tau, \rho, \theta) = I(\tau, \rho, \theta) \left(f^{cme} \left(\frac{1}{\pi} h^c + 2f^s \right) + f^{sme} \left(\frac{1}{\pi} h^s - 2f^c \right) \right). \quad (4.7)$$

Για αριθμητικό υπολογισμό του μετασχηματισμού Hilbert υποθέτουμε ότι $\check{f}(\rho, \theta)$ δίνεται για κάθε θ σε n ισοδύναμα σημεία $\rho_i \in [-1, 1]$, δηλαδή θεωρήσαμε ότι $\check{f}_i = \check{f}(\rho_i, \theta)$ είναι γνωστά. Επιπλέον, σε κάθε διάστημα $[\rho_i, \rho_{i+1}]$ προσεγγίζουμε το $\check{f}(\rho, \theta)$ χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\begin{aligned} \check{f}(\rho, \theta) &= S_i(\rho, \theta) \\ &= A_i \check{f}_i + B_i \check{f}_{i+1} + C_i \check{f}_i'' + D_i \check{f}_{i+1}'' \end{aligned} \quad (4.8)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\rho_{i+1} - \rho}{\rho_{i+1} - \rho_i}, \\ B_i &= 1 - A_i \\ C_i &= \frac{1}{6}(A_i^3 - A_i)(\rho_{i+1} - \rho_i)^2, \\ D_i &= \frac{1}{6}(B_i^3 - B_i)(\rho_{i+1} - \rho_i)^2, \end{aligned}$$

και ως \check{f}_i'' ορίζουμε την δεύτερη παράγωγο του $\check{f}(\rho, \theta)$ ως προς τη ρ για $\rho = \rho_i$. Με άλλα λόγια, προσεγγίζουμε το $\check{f}(\rho, \theta)$ σύμφωνα με τη κυβική συνάρτηση spline με ίσα τμηματικά σημεία.

Τότε γράφουμε

$$\begin{aligned} h(\rho, \theta) &= \int_{-1}^1 \frac{\check{f}(\rho, \theta)}{\rho' - \rho} d\rho' + \int_{-1}^1 \frac{\check{f}(\rho', \theta) - \check{f}(\rho, \theta)}{\rho' - \rho} d\rho' \\ &= \check{f}(\rho, \theta) \ln \frac{1 - \rho}{1 + \rho} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{S_i(\rho', \theta) - \check{f}(\rho, \theta)}{\rho' - \rho} d\rho'. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Αν $\rho = \rho_i$ ή $\rho = \rho_{i+1}$ το ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους της εξίσωσης (4.9) γράφεται ως

$$\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{S_i(\rho', \theta) - S_i(\rho, \theta)}{\rho' - \rho} d\rho'.$$

Έτσι μετά από μερικές πράξεις προκύπτει

$$\begin{aligned} \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{S_i(\rho', \theta) - \check{f}(\rho, \theta)}{\rho' - \rho} d\rho' &= -\check{f}_i + \check{f}_{i+1} \\ &= \frac{1}{36}(4\rho_i^2 - 5\rho_i\rho_{i+1} - 5\rho_{i+1}^2 - 3(\rho - 5\rho_{i+1})\rho - 6\rho^2)\check{f}_i'' \end{aligned}$$

$$\frac{1}{36}(5\rho_i^2 + 5\rho_i\rho_{i+1} - 4\rho_{i+1}^2 - 3(5\rho - \rho_{i+1})\rho + 6\rho^2)\check{f}_{i+1}'' \quad (4.10)$$

Αν $\rho \neq \rho_i$ και $\rho \neq \rho_{i+1}$ το ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους της εξίσωσης (4.9) μπορεί να γραφτεί ως

$$\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{S_i(\rho', \theta)}{\rho' - \rho} d\rho' - \check{f}(\rho, \theta) \ln \left| \frac{\rho_{i+1} - \rho}{\rho_i - \rho} \right|,$$

και μετά από μερικές πράξεις προκύπτει

$$\begin{aligned} h(\rho, \theta) = & \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ F_i - \frac{1}{\rho_i - \rho_{i+1}} \ln \left| \frac{\rho_{i+1} - \rho}{\rho_i - \rho} \right| [(\rho_{i+1} - \rho)\check{f}_i \right. \\ & - (\rho_i - \rho)\check{f}_{i+1} - \frac{1}{6}(\rho_i - \rho)(\rho_{i+1} - \rho)((\rho_i - 2\rho_{i+1} + \rho)\check{f}_i'' \\ & \left. + (2\rho_i - \rho_{i+1} - \rho)\check{f}_{i+1}''] \right\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

όπου F_i είναι το δεξιό μέρος της εξίσωσης (4.10).

Λαμβάνοντας υπόψη μας το πραγματικό μέρος της εξίσωσης (3.6) αυτό σημαίνει ότι η $f(x_1, x_2)$ δίνεται από

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} h_\rho(\rho, \theta) d\theta, \quad (4.12)$$

όπου $h(\rho, \theta)$ ορίζεται από την εξίσωση (3.9). Επομένως, διαπιστώνουμε ότι η $f(x_1, x_2)$ είναι συμπαγής, συγκεκριμένα $f(x_1, x_2) = 0$ για $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$. Άρα, για να υπολογίσουμε αριθμητικά την $I(\tau, \rho, \theta)$ για κάθε x_1, x_2, θ , χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.12) και (3.19) και προκύπτει

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} h_\rho(x_2 \cos t - x_1 \sin t, t) dt,$$

και κατά συνέπεια

$$F(\tau, \rho, \theta) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} h_\rho(\tau \sin(\theta - t) + \rho \cos(\theta - t), t) dt. \quad (4.13)$$

Τώρα θα υπολογίσουμε τη $F(\tau, \rho, \theta)$ ακολουθώντας την διαδικασία που περιγράφεται στο Παράρτημα Α. Τότε υπολογίζουμε τη $I(\tau, \rho, \theta)$ χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.4) αν $\tau \geq 0$, αλλιώς αν $\tau \leq 0$ τότε χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$I(\tau, \rho, \theta) = \exp[\check{f}(\rho, \theta)] - \int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\tau} F(\tau', \rho, \theta) d\tau' \quad (4.14)$$

Για την αριθμητική επίλυση των ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται στις εξισώσεις (4.4) και (4.14) χρησιμοποιούμε το τετράγωνο του Gauss-Legendre σε δύο συναρτήσεις σε κάθε βήμα, δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(\tau', \rho, \theta) d\tau' \approx w_1 F(\tau_1, \rho, \theta) + w_2 F(\tau_2, \rho, \theta),$$

όπου τετμημένες οι τ_1, τ_2 και οι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) w_1, w_2 δίνονται από

$$\tau_1 = \alpha + (\beta - \alpha)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\tau_2 = \alpha + (\beta - \alpha)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha).$$

Σημειώνουμε ότι προσπαθήσαμε την υποδιαίρεση του διαστήματος (α, β) σε διάφορα χρονικά διαστήματα και η βελτίωση είναι πολύ μικρή. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιούμε ένα διάστημα, δηλαδή δύο συναρτήσεις στο τετράγωνο, δεδομένου ότι η μεγάλη αύξηση του χρόνου στο πρόγραμμα συνάγεται από τη χρήση του πίνακα στο τετράγωνο που δεν δικαιολογείται από τη μέτρια αύξηση στην ακρίβεια.

Για την αριθμητική επίλυση των ολοκληρωμάτων στις εξισώσεις (4.6) και (4.13) χρησιμοποιούμε το τύπο

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g\left(\frac{2i\pi}{N}\right).$$

Για την αριθμητική επίλυση των μερικών παραγώγων r_{x_1} και r_{x_2} στην εξίσωση (4.6) χρησιμοποιούμε το εμπρός σύστημα διαφοράς

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x + \Delta x) - f(x + 2\Delta x)}{2\Delta x}$$

για το πρώτο μισό του διαστήματος $[-1, 1]$, και το πίσω σύστημα διαφοράς

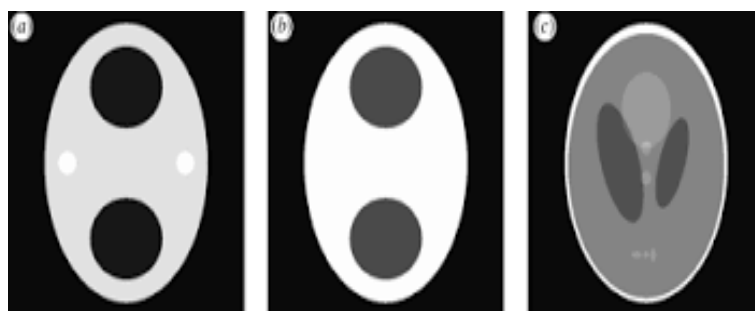
$$f'(x) \approx \frac{3f(x) - 4f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{2\Delta x}$$

για το δεύτερο μισό. Έτσι, για την αριθμητική επίλυση της $g(x_1, x_2)$ από τα δεδομένα $\hat{f}(\rho, \theta)$ και $\hat{g}_f(\rho, \theta)$ εφαρμόσουμε την ακόλουθη διαδικασία. Πρώτα, υπολογίζουμε τις δεύτερες παραγώγους \check{f}_i'' χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση spline από το [2] θέτωντας $\check{f}_1'' = \check{f}_n'' = 0$. Συνεπώς, υπολογίζουμε $h(\rho, \theta)$ χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.9) και (4.10) για δοσμένα ρ και θ . Σημειώνουμε ότι αν $|\rho_i| = 1$ τότε καθώς έχουμε την συμπύκνωση, $\check{f}(\rho, \theta) = 0$, έτσι το $\check{f}(\rho, \theta)$ μπορεί να απουσιάζει, τότε υπολογίζουμε $f^{spe}(\rho, \theta)$ και $f^{cpe}(\rho, \theta)$. Τελικά υπολογίσαμε πάλι χρησιμοποιώντας την συνάρτηση spline, τις δεύτερες παραγώγους για τη κυβική συνάρτηση spline παρεμβολής των συναρτήσεων $f^c(\rho, \theta)$ και $f^s(\rho, \theta)$.

4.2 Αριθμητικά πειράματα

Τα θ σημεία είναι ίσα τμηματικά στο διάστημα $[0, 2\pi]$, ενώ τα ρ σημεία είναι ίσα τμηματικά στο $[-1, 1]$. Το μαύρο χρώμα αναπαριστά τις μηδενικές τιμές ενώ το λευκό χρώμα αναπαριστά τη μέγιστη τιμή της αρχικής (ή ανακατασκευώμενης) συνάρτησης.

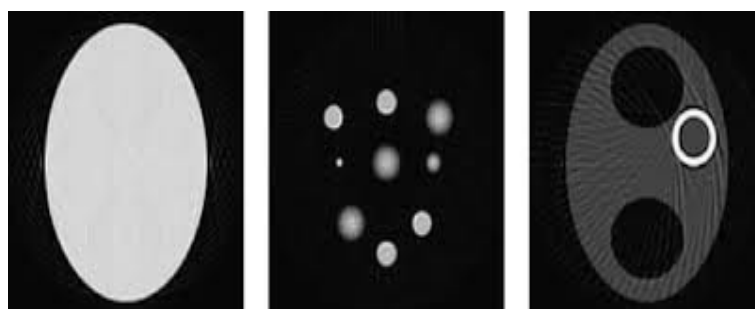
Πρώτα, θα εξετάσουμε τον αλγόριθμο PET για τρία διαφορετικά φαντάσματα στο Σχήμα 5. Τα στοιχεία αυτά απεικονίζουν τον συντελεστή εξασθένησης X-ακτίνων για μια συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ που μοντελοποιεί ένα τμήμα ανθρώπινου θώρακος. Οι μικροί κύκλοι αναπαριστούν τα οστά και οι ελλείψεις τους πνεύμονες. Το Σχήμα 5c είναι γνωστό ως φάντασμα Shepp-Logan, το οποίο προβάλλει το μοντέλο ενός τμήματος της κεφαλής. Όλα αυτά τα φαντάσματα αποτελούνται από διαφορετικές ελλείψεις με διάφορες πυκνότητες.



Σχήμα 5

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Radon (3.4), υπολογίσαμε τη δεδομένη συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ για 200 σημεία για θ και 100 σημεία για ρ . Τότε χρησιμοποιήσαμε αυτά τα δεδομένα σε αριθμητικό αλγόριθμο για να ξανά υπολογίσουμε τη $f(x_1, x_2)$.

Εν συνεχείας, εξετάσαμε το αλγόριθμο SPECT για τρία διαφορετικά φαντάσματα τα οποία απεικονίζονται στο Σχήμα 6. Το Σχήμα 6a,b τα πήραμε από τον Kunyansky [4]. Σε αυτές τις περιπτώσεις η συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ δόθηκε από το Σχήμα 5a. Όσο αφορά το Σχήμα 6c, ο λευκός δακτύλιος αναπαριστά την κατανομή του ραδιοφαρμάχου στο μυοκάρδιο. Σε αυτή τη περίπτωση η συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ δόθηκε από το Σχήμα 5b



Σχήμα 6

4.3 Παράρτημα Α

Η συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ δίνεται από την εξίσωση (4.12). Ενσωματώνοντας τη spline (4.8) προκύπτει ο παρακάτω τύπος που διαβάζεται ως

$$h(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{S_i(\rho', \theta)}{\rho' - \rho} d\rho'.$$

Μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε σε

$$\begin{aligned} h_\rho(\rho, \theta) = & \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\check{f}_i}{\rho_i - \rho} - \frac{\check{f}_{i+1}}{\rho_{i+1} - \rho} - \frac{1}{4}(\rho_i - 3\rho_{i+1} + 2\rho)\check{f}_i'' \right. \\ & - \frac{1}{4}(3\rho_i - \rho_{i+1} - 2\rho)\check{f}_{i+1}'' \\ & \left. \left[\frac{\check{f}_i - \check{f}_{i+1}}{\rho_i - \rho_{i+1}} - \frac{1}{6} \left(\rho_i - \rho_{i+1} - \frac{3(\rho_{i+1} - \rho)^2}{\rho_i - \rho_{i+1}} \right) \check{f}_i'' \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{6} \left(\rho_i - \rho_{i+1} - \frac{3(\rho_i - \rho)^2}{\rho_i - \rho_{i+1}} \right) \check{f}_{i+1}'' \right] \ln \left| \frac{\rho_{i+1} - \rho}{\rho_i - \rho} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Άρα για να υπολογίσουμε αριθμητικά τη $f(x_1, x_2)$ από τη δεδομένη $\check{f}(\rho, \theta)$ πρώτα υπολογίζουμε τις δεύτερες παραγώγους \check{f}_i'' χρησιμοποιώντας spline. Τότε για κάθε x_1 και x_2 υπολογίζουμε ρ χρησιμοποιώντας την (3.19) και τη $h_\rho(\rho, \theta)$ χρησιμοποιώντας την (4.15). Τελικά βρήκαμε τη $f(x_1, x_2)$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση (4.15).

Σημειώνουμε ότι η εξίσωση (4.15) περιέχει την έκφραση

$$\ln \left| \frac{\rho_{i+1} - \rho}{\rho_i - \rho} \right|$$

Ωστόσο, επειδή για την ανακατασκευή ο αριθμός των σημείων για x_1 και x_2 μπορεί να είναι διαφορετικός από τον αριθμό των σημείων ρ , γενικώς ισχύει $\rho \neq \rho_{i+1}$ και $\rho \neq \rho_i$.

Κεφάλαιο 5

Μέθοδος Σειρών

5.1 Μετασχηματισμός Gegenbauer

Πολλές σειρές προσεγγίζουν μια συνάρτηση $f(x)$ αν μας δίνονται ικανοποιητικές πληροφορίες για το μετασχηματισμό Radon $f(p, \xi)$. Οι περισσότερες από αυτές τις προσεγγίσεις εξαρτώνται από συγκεκριμένη φυσική κατάσταση και την ποιότητα των δεδομένων. Δεν είναι σκοπό μας να επανεξετάσουμε τα εν λόγω τεχνικά ζητήματα, αλλά θα επικεντρωθούμε σε ορισμένα γενικά αποτελέσματα που αποτελούν τη βάση για το μεγαλύτερο μέρος της σειράς προσεγγίσεων στην χρήση.

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται ως το άθροισμα

$$f(x) = \sum_{l,m} A_{lm} g_l(r) S_{lm}(\omega), \quad (5.1)$$

όπου A_{lm} είναι σταθερές. Στη γενική περίπτωση το άθροισμα $\sum_{l,m}$ σημαίνει $\sum_{N=1}^{\infty} \sum_{l=0}^N$ με S_{lm} και $N = N(n, l)$ που ορίζεται ως $N = N(n, l) = \frac{2l+n-2}{l} \binom{l+n-3}{l-1}$ που ως n θεωρούμε τη διάσταση του χώρου και ως l το βαθμό των σφαιρικών αρμονικών. Στην πράξη το άθροισμα θα είναι πεπερασμένο και εκπροσωπεί τη προσέγγιση της $f(x)$.

Ο μετασχηματισμός Radon δίνεται από

$$\check{f}(p, \xi) = \sum_{l,m} A_{lm} \check{g}_l(p) S_{lm}(\xi). \quad (5.2)$$

Υποθέτουμε ότι ο $\check{f}(p, \xi)$ είναι γνωστό. Οι σταθερές μπορούν να προσδιοριστούν κάνοντας τις γωνιακές ολοκληρώσεις και κάνοντας χρήση την ορθογωνιότητα του $S_{lm}(\xi)$,

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|=1} \check{f}(p, \xi) S_{l'm'}(\xi) d\xi &= \int_{|\xi|=1} \sum_{l,m} A_{lm} \check{g}_l(p) S_{lm}(\xi) S_{l'm'}(\xi) d\xi \\
&= \sum_{l,m} A_{lm} \check{g}_l(p) \delta_{l'l} \delta_{m'm} \\
&= A_{l'm'} \check{g}_{l'}(p).
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα,

$$= A_{lm} \check{g}_l(p) = \int_{|\xi|=1} \check{f}(p, \xi) S_{lm}(\xi) d\xi. \quad (5.3)$$

Οι εξισώσεις της ακτίνας $g_l(r)$ στο τύπο (5.1) και $\check{g}_l(p)$ στο (4.3) είναι μέρος του μετασχηματισμού Gegenbauer, και συνδέονται με το ακόλουθο τύπο

$$g_l(r) = \frac{(-1)^{2\nu+1} \Gamma(l+1) \Gamma(\nu)}{2\pi^{\nu+1} \Gamma(l+2\nu)r} \int_r^\infty \check{g}_l^{(2\nu+1)}(p) C_l^\nu\left(\frac{p}{r}\right) \left[\frac{p^2}{r^2} - 1\right]^{\nu-\frac{1}{2}} dp \quad (5.4)$$

Η προηγούμενη προσέγγιση φαίνεται απλή. Συγκεκριμένα, καθορίζουμε το $A_{lm} \check{g}_l(p)$ από το τύπο (5.3) και χρησιμοποιώντας το (5.4) για να πάρουμε το $A_{lm} g_l(r)$, τότε υπολογίζουμε τη συνάρτηση $f(x)$ από το (5.1). Όμως, η αριθμητική εφαρμογή αυτής της διαδικασίας είναι αρκετά δύσκολη. Επόμενος, υπάρχει ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση αυτής της δυσκολίας.

Ειδικές περιπτώσεις αυτή της γενικής ανάπτυξης παρουσιάζονται στις παρακάτω παραγράφους.

5.2 Κυκλικές Αρμονικές Επεκτάσεις ($n = 2$)

Παρατηρούμε ότι για $n = 2$ έχουμε $N(2, l) = 2$. Συνήθως, για διδιάστατη περίπτωση θεωρούμε $\omega(\cos \theta, \sin \theta)$. Οι κυκλικές συναρτήσεις $S_{lm}(\omega)$ μπορούν να επιλεγούν ως

$$S_{l1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos l\theta, S_{l2}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin l\theta \quad (5.5)$$

Όταν εργαζόμαστε σε δύο διαστάσεις συχνά είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε γραμμικούς συνδυασμούς των S_{lm} , π.χ

$$\sqrt{\pi}(S_{l1} + iS_{l2}) = e^{il\theta}$$

και

$$\sqrt{\pi}(S_{l1} - iS_{l2}) = e^{-il\theta}.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι και το αντικείμενο $f(r, \theta)$ και ο μετασχηματισμός $\check{f}(p, \theta)$ πρέπει να είναι περιοδικά με περίοδο 2π . Συνεπώς, είναι λογικό να επεκτείνουμε την $f(r, \theta)$ με το τύπο

$$f(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l(r) e^{il\theta}. \quad (5.6)$$

Παρατηρούμε ότι είναι ο ίδιος τύπος με το (5.1) έχοντας αντικαταστήσει στο όρο $e^{il\theta}$ ένα κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των S_{lm} . Η σταθερά έχει 'απορροφηθεί' μέσα στη συνάρτηση $g_l(r)$. Τώρα, ο μετασχηματισμός Radon (5.6) γίνεται

$$\check{f}(p, \phi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \check{g}_l(p) e^{il\phi}. \quad (5.7)$$

Η συνάρτηση $\check{g}_l(p)$ μπορεί να υπολογιστεί από τη συνηθισμένη διαδικασία

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \check{f}(p, \phi) e^{-il'\phi} d\phi &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \check{g}_l(p) \int_0^{2\pi} e^{il\phi} e^{-il'\phi} d\phi \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \check{g}_l(p) 2\pi \delta_{ll'} \\ &= 2\pi \check{g}_{l'}(p) \end{aligned}$$

Ισοδύναμα,

$$\check{g}_l(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{f}(p, \phi) e^{-il\phi} d\phi. \quad (5.8)$$

Για να βρούμε την εξίσωση $\check{g}_l(p)$ που αφορά σε $g_l(r)$, υπολογίζουμε (5.4) χρησιμοποιώντας για $n = 2$. Η διαδικασία είναι ευθύς αν στον πρώτο όρο πολλαπλασιάσουμε με $\frac{\nu}{\nu}$, λαμβάνουμε τον όριο καθώς $\nu \rightarrow 0$, και χρησιμοποιούμε

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} C_l^\nu = \frac{2}{l} T_l(z).$$

Το αποτέλεσμα είναι ο τύπος του μετασχηματισμού Tchebycheff

$$g_l(r) = \frac{-1}{\pi r} \int_r^\infty \check{g}'_l(p) T_l\left(\frac{p}{r}\right) \left[\frac{p^2}{r^2} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dp, \quad (5.9)$$

όπου $\check{g}'_l(p) = \frac{d}{dp}\check{g}_l(p)$ και $r > 0$.

Η εξίσωση του αντίστροφου είναι ο τύπος

$$\check{g}_l(p) = 2 \int_p^\infty g_l(r) T_l\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \quad (5.10)$$

για $p \geq 0$.

Σημείωση (Μετασχηματισμό Abel)

Θεωρούμε τις εξισώσεις (5.9) και (5.10) με $l = 0$. (Αυτή είναι η περίπτωση της κυκλικής συμμετρίας). Ο μετασχηματισμός Abel είναι

$$g_0(r) = \frac{-1}{\pi} \int_r^\infty g'_0(p) [p^2 - r^2]^{-\frac{1}{2}} dp \quad (5.11)$$

$$\check{g}_0(p) = 2 \int_p^\infty r g_0(r) [r^2 - p^2]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (5.12)$$

Σημειώνεται ότι η περίπτωση για $r = 0$ δίνει μη μηδενική συμβολή για $f(0, \theta)$. Για παράδειγμα, αν $\check{g}_0(p) = \sqrt{\pi} e^{-p^2}$, τότε $g_0(0) = 1$ και $f(0, \theta) = 1$.

5.3 Σφαιρικές Αρμονικές Επεκτάσεις ($n = 3$)

Αν $n = 3$, οι πραγματικές ορθοκανονικές συναρτήσεις S_{lm} σχετίζονται με τις γνωστές σφαιρικές αρμονικές Y_{lm} . Πριν, όμως, εξηγήσουμε τη σχέση τους, θα ορίσουμε τις Y_{lm} .

Τα πολυώνυμα Legendre $P_l(t)$ ορίζονται ως

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dt}\right)^l (t^2 - 1)^l, \quad (5.13)$$

και οι αντίστοιχες συναρτήσεις Legendre ορίζονται ως

$$P_l^m(t) = \frac{1}{2^l l!} (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^{l+m} (t^2 - 1)^l \quad (5.14)$$

για $0 \leq m \leq l$. Οι σφαιρικά αρμονικές σύμφωνα με τις αντίστοιχες συναρτήσεις Legendre είναι

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (5.15)$$

για $0 \leq m \leq 1$, όπου θ και ϕ είναι οι πολικές γωνίες. Οι Y_{lm} ικανοποιούν τη συνθήκη της συμμετρίας

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi), \quad (5.16)$$

όπου ως $*$ ορίζουμε το μιγαδικό συζυγή, και η συνθήκη ορθοκανονικότητας είναι

$$\langle Y_{lm}, Y_{l'm'} \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) \sin \theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (5.17)$$

Ένας τρόπος να συνδέσουμε τις S_{lm} με τις Y_{lm} είναι να θεωρήσουμε $N(n, l) = N(3, l) - 2l + 1$ των συναρτήσεων S_{lm} με

$$S_{l,m}^e = \frac{Y_{lm} + Y_{lm}^*}{\sqrt{2}} = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi,$$

για $m = 1, 2, \dots, l$

$$S_{l,m}^o = \frac{Y_{lm} - Y_{lm}^*}{i\sqrt{2}} = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l+m)!}{2\pi(l-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^{-m}(\cos \theta) \sin m\phi,$$

για $m = -1, -2, \dots, -l$

$$S_{l0} = Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta),$$

για $m = 0$.

Οι εκθέτες e (για άρτιο) και o (για περιττό) έχουν εισαχθεί για να βοηθήσουν τον προσδιορισμό των τύπων των πραγματικών σφαιρικών αρμονικών. Οι προηγούμενες εξισώσεις μπορούν να λυθούν για Y_{lm} και Y_{lm}^* αν πρώτα σημειώσουμε ότι

$$S_{l,-m}^o = \frac{Y_{l,-m} - Y_{l,-m}^*}{i\sqrt{2}} = (-1)^m \left(\frac{Y_{lm}^* - Y_{lm}}{i\sqrt{2}} \right),$$

για $m = 1, 2, \dots, l$.

Πρέπει πλέον να θεωρείται σαφές ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε S_{lm} είτε Y_{lm} στις σειρές επέκτασης. Το πλεονέκτημα χρησιμοποιώντας τις S_{lm} είναι ότι είναι πραγματικές και ορθοκανονικές, ενώ όσο αφορά τις Y_{lm} είναι πιο γνωστές και συνακόλουθα πιο κατανοητές από τους αναγνώστες.

5.4 Μετασχηματισμός Legendre

Η δοθείσα συνάρτηση $f(x) = f(r, \theta, \phi)$ μπορεί να επεκταθεί ως

$$f(r, \omega) = \sum_{m=-l}^l \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm} g_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (5.18)$$

και συνέχεια ως

$$\hat{f}(p, \xi) = \sum_{m=-l}^l \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm} \check{g}_l(p) Y_{lm}(\theta', \phi'). \quad (5.19)$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει τα μοναδιαία διανύσματα

$$\omega = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

και

$$\xi = (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta').$$

Στη παράγραφο [5.1] οι σταθερές και $\check{g}_l(p)$ προσδιορίζονται με ολοκλήρωση πάνω στις γωνίες,

$$A_{lm} \check{g}_l(p) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \check{f}(p, \xi) Y_{lm}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'. \quad (5.20)$$

Επειδή οι Y_{lm} χρησιμοποιούνται αντί των S_{lm} , οι σταθερές A_{lm} θα είναι μιγαδικές. Σ' αυτή τη περίπτωση ($n = 3, \nu = \frac{1}{2}$) οι συναρτήσεις των ακτίνων είναι

$$\check{g}_l(p) = 2\pi \int_p^{\infty} r g_l(r) P_l\left(\frac{p}{r}\right) dr \quad (5.21)$$

και

$$g_l(r) = \frac{1}{2\pi} \int_r^{\infty} \check{g}_l''(p) P_l\left(\frac{p}{r}\right) dp. \quad (5.22)$$

Συνήθως, $\check{g}_l''(p)$ σημαίνει ότι $\left(\frac{d}{dp}\right)^2 \check{g}_l(p)$.

5.5 Μετασχηματισμός Tchebycheff 2ου Είδους

Ο τρόπος με το οποίο οι S_{lm} συνδέονται με 4-διαστάσεις σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκε από Judd (1975). Οι σειρές επέκτασης ακολουθούν την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε στις προηγούμενες παραγράφους. Η ουσιώδης διαφορά είναι ότι οι συναρτήσεις των ακτίνων είναι ο μετασχηματισμός Tchebycheff 2ου είδους. Αν $n = 4$, τότε $\nu = 1$ και

$$C_l^1(t) = U_l(t).$$

Οι όροι του μετασχηματισμού g_l και \check{g}_l ικανοποιούν

$$\check{g}_l(p) = \frac{4\pi}{l+1} \int_p^\infty r^2 g_l(r) U_l\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr,$$

$$g_l(r) = \frac{-1}{2p^{i^2(l+1)r}} \int_r^\infty \check{g}_l'''(p) U_l\left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} dp.$$

Κεφάλαιο 6

Ορθογώνιες Συναρτήσεις Του Μοναδιαίου Δίσκου

6.1 Ιδιότητες Του Συνόλου Βάσης

Από τις προηγούμενες παραγράφους, παρατηρούμε ότι η επίλυση του αντίστροφου προβλήματος με τη μέθοδο των σειρών φαίνεται πιο εύκολη. Συγκεκριμένα, είναι εύκολο να ορίσουμε τις $\tilde{g}_l(p)$ από τα δεδομένα, να υπολογίσουμε τις $g_l(r)$ στο κομπιούτερ, και στο τέλος να παρουσιάσουμε το προσεγγιστικό άθροισμα (5.1) για να καλύψουμε την f . Το δύσκολο είναι όταν οι $\tilde{g}_l(p)$ έχουν οριστεί πειραματικά, η πράξη που οδηγεί σε $g_l(r)$ δεν είναι μια απλή αριθμητική πράξη. Συνεπώς, είναι ωφέλιμο να προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε τις $\tilde{g}_l(p)$ με κατάλληλες αναλυτικές συναρτήσεις. Ένας άπειρος αριθμός επιλογών είναι διαθέσιμος, εκτός και αν οι περιορισμοί που τίθενται μας απορρίπτουν κάποιες επιλογές. Δύο, πάντως, ιδιότητες είναι σημαντικές, η ορθογωνιότητα και η πληρότητα.

Θα δώσουμε έμφαση στην περίπτωση των 2-διαστάσεων, $n = 2$, με $f(x, y)$ να περιορίζεται στο μοναδιαίο δίσκο. Τότε υπάρχουν δύο πιθανότητες:

(i.) θεωρούμε ότι οι $g_l(r)$ μπορούν να επεκταθούν με μια σειρά ορθογωνίων συναρτήσεων και χρησιμοποιώντας το (5.10) να υπολογίσουμε την αντίστοιχη επέκταση για $\tilde{g}_l(p)$,

(ii.) θεωρούμε ότι οι $\tilde{g}_l(p)$ μπορούν να επεκταθούν με μια σειρά ορθογωνίων συναρτήσεων και χρησιμοποιώντας το (5.9) να βρούμε την αντίστοιχη επέκταση για $g_l(r)$.

Μια παραλλαγή αυτών των προσεγγίσεων είναι να αποφύγουμε είτε το (5.9) είτε το (5.10) απευθείας, αυτό προκύπτει από τι τελικά θα κάνουμε. Σημειώνουμε ότι η επιλογή ενός ορθογωνίου συνόλου στο οποίο επεκτείνεται μια από τις δύο συναρτήσεις $g_l(r)$ ή $\tilde{g}_l(p)$ δεν μας εγγύαται ότι το σύνολο του μετασχηματισμού θα είναι ορθογώνιο. Άρα, άλλη απαραίτητη ιδιότητα είναι ότι πρέπει και τα δύο σύνολα να είναι ορθογώνια. Για κάθε

σταθερό l , πρέπει να έχουμε μια ορθογώνια επέκταση για $g_l(r)$ και $\check{g}_l(p)$.

Τα κατάλληλα σύνολα των συναρτήσεων που καλύπτουν τις παραπάνω ιδιότητες υπάρχουν. Αυτές είναι τα πολύωνυμα Zernike, τα οποία έχουν μια μεγάλη ιστορία στο τομέα της οπτικής, και τα πολύωνυμα Tchebycheff 2ου είδους τα οποία προκύψαν μετασχηματίζοντας τα πολύωνυμα Zernike.

Υπενθυμίζουμε ότι

$$f(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l(r) e^{il\theta} \quad (6.1)$$

Υποθέτουμε ότι $f(x, y)$ μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα άθροισμα των $x^k y^m$. Άρα, θεωρούμε $f(x, y) = x^k y^m$, τότε $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^{k+m} f(\cos \theta, \sin \theta)$. Επομένως, είναι εύλογο για παραπάνω επέκταση των $g_l(r)$ σύμφωνα με τα πολύωνυμα Zernike σε ένα πλήρη σύνολο, για να προκύψει η επέκταση

$$f(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l(r) e^{il\theta} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{ls} Z_{l+2s}^l(r) e^{il\theta}, \quad (6.2)$$

όπου A_{ls} σταθερές.

6.2 Πολύωνυμα Zernike

Οι συναρτήσεις $B_s^l = Z_{|l|+2s}^{|l|} e^{il\theta}$ σχηματίζουν ένα πλήρη χώρο των ορθογωνίων συναρτήσεων πάνω σε ένα μοναδιαίο δίσκο. Η σχέση της ορθογωνιότητας των πολυωνύμων είναι

$$\int_0^1 Z_{l+2s}^l(r) Z_{l+2s}^l(r) r dr = \frac{1}{2(|l| + 2s + 1)} \delta_{st}. \quad (6.3)$$

Έτσι, οι σταθερές A_{ls} της (6.2) δίνονται από

$$A_{ls} = \frac{2(|l| + 2s + 1)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) Z_{l+2s}^l(r) e^{-il\theta} r dr d\theta, \quad (6.4)$$

με $A_{-l,s} = A_{ls}^*$.

Για μια δοσμένη τιμή της $l \geq 0$, τα μέλη του συνόλου $Z_{l+2s}^l(r)$ περιλαμβάνουν

$$\{Z_l^l, Z_{l+2}^l, Z_{l+4}^l, \dots\}.$$

Αυτά τα πολύωνυμα προκύπτουν από την ορθογωνοποίηση των δυνάμεων $r^l, r^{l+2}, r^{l+4}, \dots$ με συντελεστή βαρύτητας r πάνω στο διάστημα $0 \leq r \leq 1$. Αυτό, στη συνέχεια, σημαίνει ότι το $Z_{l+2s}^l(r)$ είναι ένα πολύωνυμο του r βαθμού $l+2s$ και δεν περιλαμβάνει καμία δύναμη του r μικρότερη από το l . Καθώς το $Z_{l+2s}^l(r)$ είναι άρτιο ή περιττό εξαρτάται από το αν το l είναι άρτιο ή περιττό, έχουμε

$$Z_{l+2s}^l(-r) = (-1)^l Z_{l+2s}^l(r). \quad (6.5)$$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω σχέση είναι σημαντική καθώς απαιτείται να ισχύει η ισότητα

$$g_l(-r) = (-1)^l g_l(r).$$

Για $l < 0$, το Z_{l+2s}^l υπολογίζεται από

$$Z_{l+2s}^l(r) = Z_{|l|+2s}^{|l|}(r). \quad (6.6)$$

Πρόσθετες ιδιότητες μπορούν να συναχθούν από το γεγονός ότι το $Z_{l+2s}^l(r)$ σχετίζονται με τα γενικά Ιακωβινά πολύωνυμα $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$

$$Z_{l+2s}^l(r) = r^{|l|} P_s^{(0,|l|)}(2r^2 - 1). \quad (6.7)$$

6.3 Μετασχηματισμός Του Συνόλου Βάσης

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να βρούμε το μετασχηματισμό Radon μιας συνάρτησης με τύπο

$$f(x, y) = Z_{l+2s}^l(r) e^{il\theta}. \quad (6.8)$$

Ήδη γνωρίζουμε ότι ο όρος της γωνιάς μετασχηματίζεται ως $e^{il\phi}$ και ο όρος της ακτίνας πρέπει να ικανοποιεί την (3.10), με ανώτατο όριο την μονάδα,

$$\check{g}_l(p) = 2 \int_p^1 Z_{l+2s}^l(r) T_l\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr. \quad (6.9)$$

Η ιδέα για να κατασκευάσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier είναι η εξής:

Μετασχηματίζουμε την συνάρτηση f μέσα στο πραγματικό χώρο σε \tilde{f} μέσα στο χώρο Fourier και στη συνέχεια ο μετασχηματισμός \tilde{f} σε f μέσα στο χώρο Radon.

Αν $f(x)$ είναι μια συνάρτηση με πραγματική μεταβλητή x , τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx,$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk.$$

Δίνεται ότι η f έχει το τύπο (6.8), και θέλουμε να βρούμε $\tilde{f} = \mathcal{F}_2 f$. Επειδή η f είναι συμμετρική, χρησιμοποιούμε το τύπο με τις πολικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(xu+yv)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} Z_{l+2s}^l(r) e^{il\theta} e^{-iqr \cos(\theta-\phi)} r dr d\theta, \end{aligned}$$

όπου $x + iy = re^{i\theta}$ και $u + iv = qe^{i\phi}$. Στη συνέχεια, κάνοντας αλλαγή μεταβλητών $\beta = \theta - \phi$ τότε προκύπτει

$$\tilde{f}(q - \phi) = e^{il\phi} \int_0^{\infty} dr r Z_{l+2s}^l(r) \int_0^{2\pi} d\beta e^{il\beta - iqr \cos \beta}.$$

Το ολοκλήρωμα β είναι ένα ολοκλήρωμα που αναπαράσταιται στις συναρτήσεις Bessel

$$\begin{aligned} J_l(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{i(\nu\theta - x \sin \theta)} d\theta \\ &= \frac{e^{i\frac{l\pi}{2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(l\beta - x \cos \beta)} d\beta, \end{aligned}$$

όπου $\theta = \beta + \frac{\pi}{2}$ και α επιλέγεται τέτοιο ώστε να είναι ίσο με $\frac{\pi}{2}$. Έτσι, ο $\tilde{f}(q, \phi)$ γίνεται

$$\tilde{f}(q, \phi) = 2\pi e^{il\phi} e^{-il\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} Z_{l+2s}^l(r) J_l(qr) r dr$$

Το ολοκλήρωμα πάνω στη r είναι ο μετασχηματισμός Hankel.

Το επόμενο βήμα είναι να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό Fourier πάνω στη μεταβλητή q , επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \check{f}(p, \phi) &= \mathcal{F}_1^{-1} \tilde{f}(q, \phi) \\ &= 2\pi e^{il\phi} e^{-il\frac{\pi}{2}} (-1)^s \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{l+2s+1}(q)}{q} e^{ipq} dq. \end{aligned}$$

6.4 Σειρές Επέκτασης Στο Χώρο Radon

Έχοντας δοθεί

$$f(r, \theta) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{ls} Z_{l+2s}^l(r) e^{il\theta} \quad (6.10)$$

με $A_{-ls} = A_{ls}^*$, τότε προκύπτει

$$\check{f}(p, \phi) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{2A_{ls}}{|l| + 2s + 1} \sqrt{1-p^2} U_{|l|+2s}(p) e^{il\phi}. \quad (6.11)$$

Είναι εύκολο να λύσουμε για A_{ls} πολλαπλασιάζοντας την (6.10) με $e^{-il'\phi} U_{|l|+2s}$ και ολοκληρώνοντας πάνω στα p και ϕ

$$A_{ls} = \frac{(|l|+2s+1)}{2\pi^2} \int_0^1 \int_{-1}^1 \check{f}(p, \phi) e^{-il'\phi} U_{|l|+2s}(p) dp d\phi$$

ή ακόμα καλύτερα

$$A_{ls} = \frac{(|l| + 2s + 1)}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\check{f}(p, \phi)}{\sqrt{1-p^2}} e^{-il'\phi} U_{|l|+2s}(p) \sqrt{1-p^2} dp d\phi. \quad (6.12)$$

Υποθέτουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τις f και \check{f} ως

$$f = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l(r) e^{il\theta} \quad (6.13)$$

$$\check{f} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \check{g}_l(p) e^{il\phi}. \quad (6.14)$$

Από (6.10) και (6.11), για σταθερό l οι επεκτάσεις των πολυωνύμων είναι

$$g_l(r) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{ls} Z_{l+2s}^l(r) \quad (6.15)$$

και

$$\frac{\check{g}_l(p)}{2\sqrt{1-p^2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{ls}}{l+2s+1} U_{l+2s}(p). \quad (6.16)$$

Σημειώνουμε ότι το $\check{g}_l(p)$ έχει διαιρεθεί από την προβολή ενός ενιαίου δίσκου. Από (6.16) και την ορθογωνιότητα των πολωνύμων Tchebycheff έχουμε

$$A_{ls} = \frac{2(|l|+2s+1)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\check{g}_l(p)}{2\sqrt{1-p^2}} U_{|l|+2s}(p) \sqrt{1-p^2} dp. \quad (6.17)$$

Περίληπτικά, αν η \check{f} μπορεί να εκφραστεί από το (6.14) και A_{ls} μπορεί να καθοριστεί από (6.17) τότε $g_l(r)$ μπορεί να καθοριστεί από (6.15) και η f μπορεί να βρεθεί (6.13). Αν, όμως, δεν είναι εφικτό να γράψουμε την \check{f} από το (6.14) αρχικά, τότε οι σταθερές A_{ls} ορίζονται από την (6.12) και η f βρίσκεται από την (6.10).

6.5 Εσωτερικό Γινόμενο

Εστω $\langle f_1, f_2 \rangle$ ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \int \int_D f_1^*(x, y) f_2(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_1^*(r, \theta) f_2(r, \theta) r dr d\theta \end{aligned} \quad (6.18)$$

σε πραγματικό χώρο. Ο δοσμένος μετασχηματισμός Radon των f_1 και f_2 έχουν οριστεί από τις f_1 και f_2 αντίστοιχα, το εσωτερικό γινόμενο $[\check{f}_1, \check{f}_2]$ στο χώρο Radon ορίζεται από $[\check{f}_1, \check{f}_2]$

$$[\check{f}_1, \check{f}_2] = \int_0^{2\pi} \int_1^{-1} \check{f}_1^*(p, \phi) \check{f}_2(p, \phi) \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} dp d\phi. \quad (6.19)$$

Η επιλογή για το τύπο της συνάρτησης βάρους $\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$ προκύπτει αν f_1 και f_2 επεκτείνεται στο (6.2). Τότε \check{f}_1 και \check{f}_2 επεκτείνεται στο (6.11), και προκύπτει

$$[\check{f}_1, \check{f}_2] = \sum_{l,s} \sum_{l',s'} \frac{4A_{ls}^* A_{l's'}}{(|l|+2s+1)(|l'|+2s'+1)} 2\pi \delta_{ll'} \times \int_{-1}^1 U_{|l|+2s}(p) U_{|l'|+2s'}(p) \sqrt{1-p^2} dp.$$

Δεδομένου ότι το ολοκλήρωμα στην δεξιά πλευρά είναι ακριβώς $(\frac{\pi}{2})\delta_{ss'}$, τα αθροίσματα πάνω από τα l' και s' δίνονται

$$[\check{f}_1, \check{f}_2] = \sum_{l,s} \frac{4\pi^2 |A_{ls}|^2}{(|l| + 2s + 1)^2}. \quad (6.20)$$

Κατά παρομοίο τρόπο,

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \sum_{l,s} \sum_{l',s'} A_{ls}^* A_{l's'} 2\pi \delta_{ll'} \int_0^1 Z_{l+2s}^l(r) Z_{l'+2s'}^{l'}(r) r dr \\ &= \sum_{l,s} \frac{\pi}{(|l| + 2s + 1)} |A_{ls}|^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Παρατηρούμε ότι

$$4\pi \sum_{l,s} \frac{\pi |A_{ls}|^2}{(|l|+2s+1)^2} \leq 4\pi \frac{\pi |A_{ls}|^2}{(|l|+2s+1)},$$

άρα προκύπτει

$$[\check{f}_1, \check{f}_2] \leq 4\pi \langle f_1, f_2 \rangle. \quad (6.22)$$

6.6 Ορθογώνιες Συναρτήσεις Στο Επίπεδο

Υπενθυμίζουμε ότι βρήκαμε ένα πλήρη σύνολο στα ορθογώνια πολυώνυμα $\mathfrak{L}_{l+2k}^{\pm l}$,

$$\mathfrak{L}_{l+2k}^{\pm l}(\lambda x, \lambda y) = \frac{(-1)^k \lambda}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{k!}{(l+k)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times e^{\pm i l \theta} [\lambda^2(x^2 + y^2)]^{\frac{l}{2}} L_k^l[\lambda^2(x^2 + y^2)], \quad (6.23)$$

με μετασχηματισμό Radon

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}\{\mathfrak{L}_{l+2k}^{\pm l}(\lambda x, \lambda y) e^{-\lambda^2(x^2+y^2)}\} \\ &= \left[\frac{1}{k!(l+k)!} \right]^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{l+2k}} e^{\pm i l \phi} H_{l+2k}(\lambda p) e^{-\lambda^2 p^2}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

60ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΔΙΣΚΟΥ

Ως L_k^l ορίζουμε τα πολυώνυμα Laguerre και ως H_m τα πολυώνυμα Hermite.

Παρατηρούμε ότι για $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$,

$$\mathfrak{L}_{l+2k}^{\pm l}(\lambda r \cos \theta, \lambda r \sin \theta) = \frac{(-1)^k \lambda^{l+1}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{k!}{(l+k)!} \right]^{\frac{1}{2}} e^{\pm i l \theta} r^l L_k^l(\lambda^2 r^2). \quad (6.25)$$

Η ορθογωνιότητα του ολοκληρώματος σε συνάρτηση με το συντελεστή βάρους $e^{-\lambda^2(x^2+y^2)}$ στο πραγματικό χώρο είναι

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{L}_{l+2k}^{\pm l}, \mathfrak{L}_{l'+2k'}^{\pm l'} \rangle &= \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathfrak{L}_{l+2k}^{\pm l})^* \mathfrak{L}_{l'+2k'}^{\pm l'} e^{-\lambda^2(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \delta_{ll'} \delta_{kk'} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Αυτό αποδεικνύεται αλλάζοντας τις πολικές συντεταγμένες και αλλάζοντας τις μεταβλητές $r^2 = t$.

Στο χώρο Radon, οι συναρτήσεις

$$h_{l+2k}^{\pm l}(\lambda p, \phi) = N_k^l e^{\pm i l \phi} H_{l+2k}(\lambda p), \quad (6.27)$$

με

$$N_k^l = \frac{1}{2^{l+2k}} \left[\frac{1}{k!(l+k)!} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6.28)$$

ικανοποιούν τη συνθήκη της ορθογωνιότητας σε συνάρτηση με το συντελεστή βάρους $e^{-\lambda^2 p^2}$,

$$\begin{aligned} [h_{l+2k}^{\pm l}, h_{l'+2k'}^{\pm l'}] &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (h_{l+2k}^{\pm l})^* h_{l'+2k'}^{\pm l'} e^{-\lambda^2 p^2} dp d\phi \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{ll'} N_k^l N_{k'}^{l'} \int_{-\infty}^{\infty} H_{l+2k}(\lambda p) H_{l+2k'}(\lambda p) d(\lambda p) \\ &= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\lambda} (N_k^l)^2 2^{l+2k} (l+2k)! \delta_{ll'} \delta_{kk'} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\lambda 2^{l+2k}} \frac{(l+2k)!}{k!(l+k)!} \delta_{ll'} \delta_{kk'}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Βιβλιογραφία

- [1] Discrete analogues of $\bar{\theta}$ -equations and of radon transform, Fokas, A.S. and Novikov, R.G., 1991, CR Acad. Sci. Paris Ser. I Math
- [2] Numerical recipes in Fortran. The art of scientific computing, Press, W.H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, 1992, Cambridge University Press
- [3] Introduction and applications of complex variables, Ablowitz, M. J. and Fokas, A. S., 1997, Cambridge University Press
- [4] A new SPECT reconstruction algorithm based on the novikov explicit inversion formula, Kunyansky, L. A., 2001, Inv. Prob
- [5] Fully three-dimensional image reconstruction from cone-beam sources, Altschuler, M. D., G. T. Herman, and A. Lent, 1978, New York
- [6] On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets, Bhatia, A. B. and E. Wolf, 1954, Proc. Cambridge Philos. Soc.
- [7] Multivariate interpolation and the Radon transform, Cavaretta, A. S., Jr., C. A. Micchelli, and A. Sharma, 1980, Math. Z.
- [8] Image reconstruction with limited angle projection data, Inouye, T., 1979, IEEE Trans. Nucl. Sci.
- [9] A new computerized tomographic imaging system for positron-emitting radiopharmaceuticals, Phelps, M. E., E. J. Hoffman, S. C. Huang and D. E. Kuhl, 1978, J. Nucl. Med.
- [10] Reconstruction of 3-D objects from cone beam projection, Nalcioglu, O. and Z. H. Cho, 1978, Proc. IEEE

62ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΣΤΗΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΔΙΣΚΟΥ

[11] The Radon transform and some of its applications, Stanley R. Deans, 1983, University of South Florida

[12] Inversion of reflection data for layered media, Newton, R. G., 1981, Geophys. J. R. Astron. Soc.

[13] Computed Tomography, Waggener, R. G., and W. D. McDavid, 1979,, Adv. Biomed. Eng

Ευρετήριο Πινάκων

Διαδικασία της PET, 25

Σχηματική αναπαράσταση του μετασχηματισμού Radon, 13

Τομογραφία SPECT, 27

Τομογραφία PET, 24