



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα

“Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες”

Μεταπτυχιακή Εργασία

ΥΒΡΙΔΙΚΟΙ DEAD-BEAT ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΕΣ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Κωνσταντίνος Κίτσος

Ε.Μ.Π.

Επιβλέπων

Ιωάννης Τσινιάς

Καθηγητής στην Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του

Ε.Μ.Π.

*Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων απόκτησης του
μεταπτυχιακού τίτλου*

Οκτώβριος 2016

Η παρούσα εργασία αφιερώνεται στην οικογένειά μου

Copyright © Κωνσταντίνος Κίτσος.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

Υπογραφή: _____

Ημερομηνία: _____

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει μια συγκεκριμένη οπτική στο πρόβλημα σχεδίασης Παρατηρητή (κατάστασης) για γενικές κλάσεις μη γραμμικών συστημάτων. Η σχεδίαση Παρατηρητή κατέχει περίοπτη θέση στην Μαθηματική Θεωρία Ελέγχου. Αδρομερώς, αφορά στην εκτίμηση των μη μετρούμενων καταστάσεων ενός συστήματος ελέγχου με αποκλειστική χρήση της πληροφορίας που παρέχεται από την είσοδο και την έξοδο του συστήματος. Βιβλιογραφία σχετική με την παρατηρησιμότητα και τους Παρατηρητές έχει αναπτυχθεί πολύ τις τελευταίες δεκαετίες και ειδικά για μη γραμμικά συστήματα οι αναπτυχθείσες μαθηματικές τεχνικές ποικίλλουν. Η παρούσα εργασία στοχεύει στο να κατασκευάσει μη γραμμικούς Παρατηρητές με υβριδική συμπεριφορά, οι οποίοι εκτιμούν τα μη μετρούμενα μέρη της κατάστασης σε πεπερασμένο χρόνο, πιο συγκεκριμένα dead-beat (τελεσφόρου κτυπήματος) Παρατηρητές.

Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφεται αναλυτικά μια προηγηθείσα εργασία στους υβριδικούς dead-beat Παρατηρητές. Στην παρούσα εργασία, αυτοί οι Παρατηρητές επεκτείνονται για γενικότερες κλάσεις μη γραμμικών συστημάτων και αυτά τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα Κεφάλαια 3 και 4. Πιο συγκεκριμένα, τα συστήματα που προσεγγίζονται στο Κεφάλαιο 2 ονομάζονται στην βιβλιογραφία γραμμικά στην μη μετρούμενη κατάσταση. Τα συστήματα στα οποία επεκτεινόμαστε στο Κεφάλαιο 3 έχουν ένα γραμμικό μέρος και μια επιπλέον μη γραμμικότητα ως προς την μη μετρούμενη κατάσταση, ενώ η έξοδός τους είναι γραμμική ως προς την μη μετρούμενη κατάσταση. Στο Κεφάλαιο 4, τα προαναφερθέντα συστήματα επεκτείνονται περαιτέρω και περιέχουν συστήματα των οποίων το πρώτο μέρος είναι σχεδόν γραμμικό (quasi-linear) και επίσης έχουν μια επιπλέον μη γραμμικότητα ως προς την μη μετρούμενη κατάσταση, ενώ η μετρούμενη έξοδος είναι σχεδόν γραμμική ως προς την μη μετρούμενη κατάσταση.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο, τα αποτελέσματα εκκινούν από μια υπόθεση ισχυρής παρατηρησιμότητας, η οποία προκύπτει από την αντιστρεψιμότητα ενός πίνακα Gramian. Ο αντίστοιχος Παρατηρητής, ο οποίος είναι dead-beat εκμεταλλεύεται την πληροφορία από τις εξόδους και τις εισόδους, οι οποίες τροφοδοτούνται ως καθυστερημένα σήματα στο σύστημα του Παρατηρητή. Επίσης, μελετάται η ευρωστία του συγκεκριμένου Παρατηρητή. Η εκτίμηση πεπερασμένου χρόνου για τις άγνωστες

καταστάσεις στα Κεφάλαια 3 και 4 αρχικά στηρίζεται σε μία υπόθεση Persistence of Excitation για τα γραμμικά και σχεδόν γραμμικά μέρη των συστημάτων αντίστοιχα και επίσης σε κατάλληλες ανισότητες σχετικές με τα δυναμικά, οι οποίες παρέχουν συνθήκες υπό τις οποίες η άγνωστη κατάσταση δύναται να ανακατασκευασθεί. Η τελευταία υπόθεση εξάγεται με τεχνικές της Μη Γραμμικής Ανάλυσης, ειδικότερα της Θεωρίας Σταθερού Σημείου. Επίσης, στα Κεφάλαια 3 και 4 περιέχονται παραδείγματα που καταδεικνύουν την εφαρμογή των τεχνικών που αναπτύσσονται. Όλα τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται καθ' όλη την εργασία, καθώς και κάποια βασικά από την Μαθηματική Θεωρία Ελέγχου, παρατίθενται εκτενώς στο Κεφάλαιο 1.

Λέξεις-Κλειδιά. Σχεδίαση Παρατηρητή, Μη Γραμμικοί Παρατηρητές, Υβριδικό Παρατηρητές, Θεωρία Σταθερού Σημείου

ABSTRACT

The main purpose of the present work is to provide a specific approach on the (state) Observer problem for general classes of nonlinear systems. Observer design is a fundamental area in mathematical control theory. In general, it concerns the estimation of the internal unmeasured states of a control system using the information provided by inputs and outputs. There is a great amount of literature concerned with the notion of Observability and Observer design and, specifically for nonlinear systems, a variety of mathematical techniques has been developed. This thesis aims at constructing nonlinear Observers with hybrid performance that estimate the unmeasured state components in finite time, namely, dead-beat Observers.

A previous work in hybrid dead-beat Observers has already been done and it is analytically presented in Chapter 2. In the present thesis, these Observers are extended for general classes of nonlinear systems and these results are presented in Chapters 3 and 4. More specifically, the systems approached in Chapter 2 are cited as linear in the unmeasured state components. Systems we extend to in Chapter 3 possess a linear and an additional nonlinear in the unmeasured state part, while their output has a linear in the unmeasured state performance. In Chapter 4, the aforementioned systems are extended furthermore and include systems whose first part is quasi-linear and also possess an additional full nonlinearity, while their measured output is quasi-linear in the unknown state.

In Chapter 2, the results rely on a strong observability hypothesis which is derived from an observability Gramian invertibility. The corresponding Observer system which is dead-beat, exploits the information acquired by the inputs and outputs which are fed as delayed signals. Also, a robustness result, concerning the proposed Observer, is presented. The finite time estimation of the unknown states in Chapter 3 and 4 relies firstly on a Persistence of Excitation hypothesis for their linear and quasi-linear parts respectively and secondly on appropriate inequalities which provide conditions under which the unknown state can be reconstructed. The latter hypotheses use tools from Nonlinear Analysis, specifically Fixed Point Theory and these are essential to construct the unknown state component in finite time. Examples which illustrate the implementation of the techniques are included in Chapters 3 and 4. All mathematical tools that are utilized throughout the thesis, along with some preliminaries from Mathematical Control Theory, are extensively presented in Chapter 1.

Keywords. Observer Design, Nonlinear Observers, Hybrid Observers, Fixed Point Theory

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα πρωταρχικά να ευχαριστήσω εκ βάθρων τον Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π. και επιβλέποντα της εργασίας μου κ. Ιωάννη Τσινιά. Η καθοδήγηση, οι εξαιρετικές γνώσεις του και η τεράστια υπομονή του ήταν κομβικές στο να φέρω εις πέρας την ερευνητική εργασία την οποία μου ανέθεσε. Δεν θα ήταν δυνατόν να περατώσω την παρούσα εργασία άνευ της καθοδηγητικής του επιμέλειας και της προσωπικής του ενασχόλησης. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τον Επ. Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π. κ. Ιάσονα Καραφύλλη, για τα διεισδυτικά του σχόλια που μου έδωσαν το έναυσμα να προχωρήσω περαιτέρω. Μέσω της διδασκαλίας του στο μάθημα «Μη Γραμμικά Συστήματα και Έλεγχος» μου παρείχε πρωτοποριακή γνώση καθώς και κίνητρο έρευνας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες απευθύνω, επίσης, στον Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π. κ. Αντώνιο Χαραλαμπίδου για τα ιδιαίτερα βοηθητικά σχόλιά του κατά την εξέταση της μεταπτυχιακής εργασίας, καθώς και τα μαθήματά του, από τα οποία επωφεληθήκα κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού. Οι ειλικρινείς μου ευχαριστίες απευθύνονται επίσης στον Καθηγητή της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π. κ. Γεράσιμο Αθανασούλη για την καθοδήγησή του, τα κίνητρα με τα οποία με εφοδίασε και τον ειδικό χρόνο που αφιέρωσε για την διδασκαλία και την επιστημονική κατεύθυνσή μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π. κ. Δημήτριο Κραββαρίτη καθώς επωφεληθήκα πολλαπλώς από τα μαθήματά του στην «Μη Γραμμική Συναρτησιακή Ανάλυση».

Κωνσταντίνος Κίτσος

Οκτώβριος 2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ	1
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.2 ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.....	2
1.3 ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ	7
1.4 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΕΣ	10
1.5 ADJOINTS ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ.....	13
2 ΥΒΡΙΔΙΚΟΣ DEAD-BEAT ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΓΙΑ ΜΙΑ ΚΛΑΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΜΗ ΜΕΤΡΟΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	23
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	23
2.2 ΙΣΧΥΡΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ	25
2.3 ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ ΥΠΟ ΙΣΧΥΡΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ	30
2.4 ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΕΥΡΩΣΤΙΑΣ.....	33
2.5 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	38
3 ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΜΙΑΣ ΚΛΑΣΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΜΗ ΜΕΤΡΟΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΥΒΡΙΔΙΚΟΣ DEAD-BEAT ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ	43
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	43
3.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ	44
3.3 ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ	53
3.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	54
3.5 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	58
4 ΥΒΡΙΔΙΚΟΣ DEAD-BEAT ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΓΙΑ ΜΙΑ ΚΛΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΣΧΕΛΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΕΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΜΗ ΜΕΤΡΟΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ.....	60
4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	60
4.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ	61
4.3 ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ	72
4.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	74
4.5 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	80
5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	83
6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ	84

1 ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ

1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν Κεφάλαιο παραθέτουμε κάποια μαθηματικά προαπαιτούμενα από την μη γραμμική Ανάλυση, τα οποία είναι θεμελιώδη στις αποδεικτικές διαδικασίες που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα Κεφάλαια. Επιπλέον, παρέχουμε την έννοια της παρατηρησιμότητας καθώς και μια αναφορά στις βασικές τεχνικές σχεδίασης μη γραμμικών Παρατηρητών. Καθ' όλην την εργασία υιοθετούνται οι παρακάτω συμβολισμοί.

Συμβολισμοί. Με $|\cdot|$ συμβολίζουμε την 1-νόρμα στον \mathbb{R}^n , δηλαδή για $x(t) \in \mathbb{R}^n$,

$|x| = \sum_{i=1}^n |x_i(t)|$. Συμβολίζουμε με $|A|$ την νόρμα πίνακα που δίδεται από την σχέση

$|A| = \sup\{|Ax| : x \in \mathbb{R}^n \text{ with } |x| = 1\}$. Με x' συμβολίζουμε την αναστροφή ενός $x \in \mathbb{R}^n$ και

με A' τον ανάστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Με $C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$

συμβολίζουμε τον χώρο Banach των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο $[t_0, r]$

και λαμβάνουν τιμές στον \mathbb{R}^n εφοδιασμένο με την max-νόρμα $\|x\| = \max_{t_0 \leq t \leq r} |x(t)|$. Με

$L^\infty(X; Y)$ (ή $L_{loc}^\infty(X; Y)$) συμβολίζουμε τον χώρο των μετρήσιμων (ή τοπικά) essentially

φραγμένων συναρτήσεων που ορίζονται σε ένα χώρο X και λαμβάνουν τιμές στον Y .

Με $\mathcal{L}(X; Y)$ συμβολίζουμε τον χώρο όλων των γραμμικών απεικονίσεων που ορίζονται

στον X και λαμβάνουν τιμές στον Y . Με $\ker(A)$, $D(A)$, $\text{Im}(A)$ συμβολίζουμε τον

πυρήνα, το πεδίο ορισμού και την εικόνα ενός τελεστή A . Με H^\perp συμβολίζουμε το

ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός χώρου Hilbert H . Με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ συμβολίζουμε την πράξη

εσωτερικού γινομένου σε ένα χώρο Hilbert. Με N συμβολίζουμε την κλάση όλων των

συνεχών, μη αρνητικών και μη φθινουσών συναρτήσεων $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. Με K^+

συμβολίζουμε την κλάση των θετικών συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στον \mathbb{R}^+ .

Λέμε ότι μια θετικά ορισμένη, αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $\rho: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ είναι κλάσεως K_∞ αν $\lim_{s \rightarrow +\infty} \rho(s) = +\infty$.

1.2 Εργαλεία από την Συναρτησιακή Ανάλυση

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε κάποια χρήσιμα Θεωρήματα από την (Μη Γραμμική) Συναρτησιακή Ανάλυση και την θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν εν συνεχεία. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία των (Zeidler 1990a), (Zeidler 1990b) και (Rudin 1973) για βαθύτερη ανάλυση καθώς και αποδείξεις.

Στα Κεφάλαια 3 και 4 γίνεται χρήση τεχνικών που βασίζονται στην Θεωρία Σταθερού Σημείου και, επομένως, τα εισαγωγικά της στοιχεία παρατίθενται εδώ. Τα Θεωρήματα Σταθερού Σημείου καθώς σχετικά με την ύπαρξη και μοναδικότητα των σταθερών σημείων είναι πολλά, αλλά στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach ή Θεώρημα Συστολής (Contraction Mapping Theorem).

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach). Έστω (X, d) ένας μη κενός, πλήρης μετρικός χώρος και έστω $T: X \rightarrow X$ μια απεικόνιση που είναι συστολή, δηλαδή, $(\exists m \in [0, 1))(d(Tx, Ty) \leq md(x, y))(\forall x, y \in X)$. Τότε, η $T: X \rightarrow X$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο x^* στον X , δηλαδή, $T(x^*) = x^*$. Επιπλέον, η ακολουθία (x_n) των διαδοχικών προσεγγίσεων συγκλίνει στην λύση x^* για οποιοδήποτε τυχαίο αρχικό $x_0 \in X$.

Παρατήρηση 1.2. Σχετικά με τις εκτιμήσεις σφάλματος της σύγκλισης, για όλα τα $n = 0, 1, 2, \dots$ έχουμε την a priori εκτίμηση σφάλματος $d(x_n, x^*) \leq m^n (1 - m)^{-1} d(x_0, x_1)$ και την a posteriori εκτίμηση σφάλματος $d(x_{n+1}, x^*) \leq m(1 - m)^{-1} d(x_n, x_{n+1})$. Σχετικά με τον ρυθμό σύγκλισης, έχουμε $d(x_{n+1}, x^*) \leq md(x_n, x^*)$. \square

Εν συνεχεία δίδουμε συνέπειες του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Banach στις μη γραμμικές εξισώσεις, οι οποίες θα χρησιμοποιηθεί και στα επόμενα.

Αρχικά, παρουσιάζεται ένα τέχνασμα σταθερού σημείου (*fixed-point trick*) για την επίλυση ημι-γραμμικών (semi-linear) και σχεδόν γραμμικών (quasi-linear) εξελικτικών

εξισώσεων. Αυτή η μέθοδος θα χρησιμοποιηθεί στα Κεφάλαια 3 και 4. Θεωρούμε το ημι-γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + Ax(t) &= f(x(t)), t_0 < t < r \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

όπου A είναι ένας γραμμικός τελεστής, συνοδευόμενο από το εξής γραμμικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + Ax(t) &= g(t), t_0 < t < r \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Έστω S ο τελεστής επιλύσεως για το (1.2), ήτοι

$$x = Sg.$$

Τότε, το αρχικό πρόβλημα (1.1) ανάγεται στο εξής πρόβλημα σταθερού σημείου

$$x = Sf(x) \quad (1.3)$$

Αν επιλύσουμε την (1.3) μέσω του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Banach, τότε η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{n+1} = Sf(x_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

αντιστοιχεί στην επίλυση της επόμενης οικογένειας προβλημάτων αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1}(t) + Ax_{n+1}(t) &= f(x_n(t)), t_0 < t < r \\ x_{n+1}(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$

Αντί του προβλήματος (1.2), συχνά θεωρούμε την ολοκληρωτική μορφή

$$x(t) = e^{-tA} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(s-t)A} g(s) ds \quad (1.6)$$

που αποδίδει μια γενικευμένη ολοκληρωτική (mild) λύση του (1.2). Εδώ, το e^{-tA} αντιστοιχεί στην ημιομάδα που παράγεται από τον A . Κατ' αυτόν τον τρόπο, το αρχικό ημι-γραμμικό πρόβλημα (1.1) μπορεί να αναχθεί στην μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) = e^{-tA} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(s-t)A} f(x(s)) ds \quad (1.7)$$

Οι λύσεις του (1.7) καλούνται mild solutions του (1.1).

Θεωρούμε και το σχεδόν γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(x(t))x(t) &= f(t), t_0 < t < r \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

όπου $x \mapsto A(z)x$ είναι γραμμικός για κάθε σταθερό z . Υποθέτουμε ότι για κάθε z , μπορούμε να λύσουμε το αντιστοιχούν γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(z(t))x(t) &= f(t), t_0 < t < r \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Θέτουμε

$$x = Sz. \quad (1.10)$$

Επομένως το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα σταθερού σημείου

$$x = Sx. \quad (1.11)$$

Επί παραδείγματι, αν λύσουμε την (1.11) με χρήση Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Banach, τότε η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{n+1} = Sx_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

αντιστοιχεί στην παρακάτω οικογένεια γραμμικών προβλημάτων αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1}(t) + A(x_n(t))x_{n+1}(t) &= f(t), t_0 < t < r \\ x_{n+1}(t_0) &= x_0, n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Δεύτερον, από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, έπεται το κεντρικό θεώρημα σχετικά με την ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων διαφορικών εξισώσεων, το Θεώρημα Picard-Lindelöf. Αυτό το Θεώρημα έχει εφαρμογή σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων και καθώς σε αυτήν την εργασία εξετάζουμε μη γραμμικά συστήματα ελέγχου και ειδικότερα συστήματα Παρατηρητών, χρειαζόμαστε την ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων ως κομβικούς παράγοντες στην σχεδιάσή τους.

Θεώρημα 1.3 (Picard-Lindelöf). Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \\ x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

με αρχική τιμή $x(t_0) = x_0$. Έστω $Q = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ για σταθερά $a, b > 0$. Υποθέτουμε ότι η $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής, ότι η f είναι Lipschitz, ήτοι, $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$, για κάθε $(t, x), (t, y) \in Q$ και ότι $f(t, x) < K$, για κάθε $(t, x) \in Q$, όπου $L \geq 0, K > 0$ είναι σταθερά. Τότε, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική συνεχή λύση $x(\bullet)$ στο κλειστό διάστημα $[t_0 - c, t_0 + c]$, όπου $c := \min(a, b/K)$. Αυτή η λύση είναι επίσης η μοναδική λύση που ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Παρατήρηση 1.4. Οι διαδοχικές προσεγγίσεις (επαναλήψεις Picard) $x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds, n = 0, 1, 2, \dots$ συγκλίνουν ομοιόμορφα εντός του $[t_0 - c, t_0 + c]$ στην λύση $x(\bullet)$.

Εν συνεχεία, παρέχουμε ένα απαραίτητο θεώρημα από την Συναρτησιακή Ανάλυση, το Θεώρημα Arzelà-Ascoli.

Θεώρημα 1.5. Έστω \mathcal{X} συμπαγής χώρος, $C(\mathcal{X})$ ο χώρος Banach με την sup-νόρμα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\Phi \subset C(\mathcal{X})$ είναι σημειακά φραγμένο και ισοσυνεχές. Πιο συγκεκριμένα,

(a) $\sup\{|f(x)| : f \in \Phi\} < +\infty$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$, και

(b) αν $\varepsilon > 0$, κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχει μια περιοχή V για την οποία $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $y \in V$ και για κάθε $f \in \Phi$.

Τότε, το Φ είναι ολικά φραγμένο στον $C(\mathcal{X})$, δηλαδή μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο αριθμό υποσυνόλων.

Σημειώνουμε ότι καθώς ο $C(\mathcal{X})$ είναι ένας πλήρης χώρος, η κλειστότητα του Φ είναι συμπαγής και κάθε ακολουθία στο Φ περιέχει μια ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία.

Προχωρούμε στην έννοια της διαφορισιμότητας σε αφηρημένους χώρους. Στο Κεφάλαιο 4 θα κάνουμε χρήση της παραγώγου Fréchet και του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε άπειρες διαστάσεις, καθώς εργαζόμαστε σε αφηρημένους χώρους. Η παράγωγος Fréchet είναι η φυσική επέκταση σε χώρους Banach του συνήθους ορισμού του διαφορικού απεικονίσεων σε Ευκλείδειους χώρους.

Η παράγωγος Fréchet ενός τελεστή $\mathcal{F} : (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ στο x_0 , συμβολιζόμενη με $D\mathcal{F}(x_0)$, ορίζεται αν υπάρχει συνεχής γραμμικός τελεστής $L := D\mathcal{F}(x_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ τέτοιος ώστε:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq x_0, x \in B(x_0, \delta)) \left(\frac{\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}x_0 - L(x - x_0)\|_{\mathcal{Y}}}{\|x - x_0\|_{\mathcal{X}}} < \varepsilon \right)$$

Ένας τέτοιος L είναι μονοσήμαντα ορισμένος και καλείται διαφορικό Fréchet του \mathcal{F} στο x_0 .

Σαν παράδειγμα, έστω ο τελεστής Urysohn $\mathcal{F} : C([a, b]; \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ με την max-νόρμα, που δίδεται από: $\mathcal{F}x(t) = g(t) + \int_a^b K(t, s, x(s)) ds$, όπου η $K(\cdot, \cdot, \cdot)$ ορίζεται στο $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^n$, είναι συνεχής ως προς τα δύο πρώτα ορίσματα και συνεχώς διαφορίσιμη ως προς το τρίτο όρισμα και $g \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$. Τότε, ο τελεστής Urysohn είναι κατά Fréchet διαφορίσιμος στο $x_0(\cdot)$ και το αντίστοιχο διαφορικό Fréchet στο

$x_0(\cdot)$ δίδεται από τον τύπο $(D\mathcal{F}x_0(h))(t) = \int_a^b H(s) \frac{\partial}{\partial x_0} K(t, s, x_0(s)) ds$,

$$\text{όπου } H(s) = \begin{pmatrix} h_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2(s) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_n(s) \end{pmatrix}, h(\cdot) = (h_1(\cdot), h_2(\cdot), \dots, h_n(\cdot))' \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n).$$

Επίσης, παραθέτουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για χώρους απείρων διαστάσεων, το οποίο συνάγεται ως αποτέλεσμα γνωστού πορίσματος από το Θεώρημα Hahn-Banach και εκφράζεται ως ακολούθως:

Έστω $\mathcal{F} : (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ διαφορίσιμη κατά Fréchet σε κάθε σημείο του \mathcal{X} .
 Δοθέντων δύο σημείων $x, y \in \mathcal{X}$, ισχύει:

$$\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\|_{\mathcal{Y}} \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \|D\mathcal{F}(x + s(x-y))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})} \|x - y\|_{\mathcal{X}} \quad (1.14)$$

1.3 Προαπαιτούμενα από την Θεωρία μη γραμμικών Συστημάτων Ελέγχου

Σε όλη την εργασία, γίνεται χρήση της έννοιας του μη γραμμικού συστήματος ελέγχου καθώς και υβριδικών συστημάτων. Επομένως, εισάγουμε την γενική έννοια ενός συστήματος ελέγχου με εξόδους, καθώς και κάποια χαρακτηριστικά, όπως την ιδιότητα της ημιομάδος. Όταν σχεδιάζουμε υβριδικά συστήματα, πρέπει να ορίσουμε και την ασθενή ιδιότητα της ημιομάδος, εκτός από την κλασική ιδιότητα της ημιομάδος (βλέπε (Sontag 1998)). Αυτά τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην εργασία (Karafyllis & Jiang 2007). Με $\mathcal{M}(U)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των τοπικά φραγμένων συναρτήσεων $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow U$.

Ορισμός 1.6. Ένα σύστημα ελέγχου $\Sigma := (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, M_U, M_D, \varphi, \pi, H)$ με εξόδους αποτελείται από

- (i) ένα σύνολο U (σύνολο εισόδων) που είναι υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου με νόρμα \mathcal{U} , με $0 \in U$, και ένα σύνολο $M_U \subseteq \mathcal{M}(U)$ (επιτρεπτές εισοδοί ελέγχου), που κατ' ελάχιστον περιέχει την ταυτοτικά μηδενική είσοδο u_0 ,
- (ii) ένα σύνολο D (σύνολο διαταραχών) και ένα σύνολο $M_D \subseteq \mathcal{M}(D)$, που καλείται το «σύνολο των επιτρεπτών διαταραχών»,
- (iii) ένα ζεύγος γραμμικών χώρων με νόρμα \mathcal{X}, \mathcal{Y} που καλούνται ο «χώρος καταστάσεων» και ο «χώρος εξόδων» αντιστοίχως,
- (iv) μια συνεχή απεικόνιση $H : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times U \rightarrow \mathcal{Y}$ που απεικονίζει φραγμένα σύνολα του $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times U$ σε φραγμένα σύνολα του \mathcal{Y} , που καλείται “απεικόνιση εξόδου”,
- (v) μια πλειότιμη απεικόνιση

$$\mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times M_U \times M_D \ni (t_0, x_0, u, d) \mapsto \pi(t_0, x_0, u, d) \subseteq [t_0, +\infty)$$

με $t_0 \in \pi(t_0, x_0, u, d)$ για κάθε $(t_0, x_0, u, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times M_U \times M$, που καλείται “σύνολο στιγμών δειγματοληψίας (sampling times)”, και

(vi) μια απεικόνιση $\varphi: A_\varphi \rightarrow \mathcal{X}$, όπου $A_\varphi \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times M_U \times M_D$, καλούμενη “απεικόνιση μετάβασης”, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Ύπαρξη: για κάθε $(t_0, x_0, u, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times M_U \times M$, υπάρχει $t > t_0$ τέτοιος ώστε $[t_0, t] \times \{(t_0, x_0, u, d)\} \subseteq A_\varphi$.

(2) Ταυτοτική ιδιότητα: για κάθε $(t_0, x_0, u, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X} \times M_U \times M$, ισχύει ότι $\varphi(t_0, t_0, x_0, u, d) = x_0$.

(3) Αιτιότητα: για κάθε $(t, t_0, x_0, u, d) \in A_\varphi$, με $t > t_0$, και για κάθε $(\bar{u}, \bar{d}) \in M_U \times M_D$, με $(\bar{u}(\tau), \bar{d}(\tau)) = (u(\tau), d(\tau))$ για κάθε $\tau \in [t_0, t]$, ισχύει ότι $(t, t_0, x_0, \bar{u}, \bar{d}) \in A_\varphi$, με $\varphi(t, t_0, x_0, u, d) = \varphi(t, t_0, x_0, \bar{u}, \bar{d})$.

(4) Ασθενής ιδιότητα ημιομάδος: υπάρχει σταθερά $r > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $t \geq t_0$ με $(t, t_0, x_0, u, d) \in A_\varphi$:

(a) $(\tau, t_0, x_0, u, d) \in A_\varphi$ για κάθε $\tau \in [t_0, t]$

(b) $\varphi(t, \tau, \varphi(\tau, t_0, x_0, u, d), u, d) = \varphi(t, t_0, x_0, u, d)$ για κάθε $\tau \in [t_0, t] \cap \pi(t_0, x_0, u, d)$

(c) αν $(t+r, t_0, x_0, u, d) \in A_\varphi$, τότε ισχύει ότι $\pi(t_0, x_0, u, d) \cap [t, t+r] \neq \emptyset$

(d) για κάθε $\tau \in \pi(t_0, x_0, u, d)$, με $(\tau, t_0, x_0, u, d) \in A_\varphi$, έχουμε ότι $\pi(\tau, \varphi(\tau, t_0, x_0, u, d), x_0, u, d) = \pi(t_0, x_0, u, d) \cap [\tau, +\infty)$

Παρακάτω, δίνουμε μια ειδική εκδοχή του Θεωρήματος Picard-Lindelöf για ένα σύστημα ελέγχου με εισόδους που ανήκουν σε έναν συγκεκριμένο χώρο.

Θεωρούμε το κάτωθι σύστημα ελέγχου πεπερασμένων διαστάσεων που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t), d(t)) \\ Y(t) &= H(t, x(t), u(t)), \\ x(t) &\in \mathbb{R}^n, u(t) \in U, d(t) \in D, t \geq t_0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

όπου $U \subseteq \mathbb{R}^m, D \subseteq \mathbb{R}^l$, με $0 \in U$ και $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι δύο τοπικά φραγμένες απεικονίσεις, με $H(t, 0, 0) = 0, f(t, 0, 0, d) = 0$ για κάθε $(t, d) \in \mathbb{R}^+ \times D$ που ικανοποιούν τις επόμενες υποθέσεις:

(A1) Η απεικόνιση $(x, u, d) \rightarrow f(t, x, u, d)$ είναι συνεχής για κάθε σταθερό $t \geq 0$, μετρήσιμη ως προς $t \geq 0$ για όλα τα σταθερά $(x, u, d) \in \mathbb{R}^n \times U \times D$ και τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος φραγμένων συνόλων $I \subseteq \mathbb{R}^+, S \subset \mathbb{R}^n \times U$, υπάρχει μια σταθερά $L \geq 0$ για την οποία

$$\begin{aligned} (x - y)'(f(t, x, u, d) - f(t, y, u, d)) &\leq L|x - y|^2 \\ \forall t \in I, \forall (x, u, y, u) \in S \times S, \forall d \in D \end{aligned}$$

(A2) Η απεικόνιση $H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι συνεχής.

(A3) Υπάρχουν συναρτήσεις $\gamma \in K^+, \alpha \in K_\infty$ τέτοιες ώστε $|f(t, x, u, d)| \leq \gamma(t)\alpha(|x| + |u|)$ για κάθε $(t, x, u, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \times D$.

Σύμφωνα με την θεωρία συνήθων διαφορικών εξισώσεων, υπό τις υποθέσεις (A1)-(A3), για κάθε $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ και για κάθε ζεύγος μετρήσιμων και τοπικά φραγμένων εισόδων $(u, d) \in \mathcal{M}(U) \times \mathcal{M}(D)$, υπάρχει μοναδική απόλυτα συνεχής απεικόνιση $x(t)$ που ικανοποιεί σ.π. την παραπάνω διαφορική εξίσωση με αρχικές συνθήκες $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Παρέχουμε επίσης τον ορισμό του δεξιά πλήρους (*forward complete*) συστήματος, καθώς αυτή η έννοια είναι κρίσιμη στο πρόβλημα σχεδίασης Παρατηρητή. Θεωρούμε ένα μη γραμμικό σύστημα άνευ εισόδων της ακόλουθης μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k \end{aligned} \tag{1.16}$$

Θεωρούμε ένα ανοικτό υποσύνολο \mathcal{M} του \mathbb{R}^n . Συμβολίζουμε με $(\sigma_{\mathcal{M}}^-(x_0), \sigma_{\mathcal{M}}^+(x_0))$ το μέγιστο διάστημα χρόνων, για το οποίο η λύση $x(t, x_0)$ του συστήματος (1.16) με αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathcal{M}$ είναι ορισμένη και παραμένει εντός του \mathcal{M} .

Ορισμός 1.7. Έστω \mathcal{M} ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Το σύστημα (1.16) καλείται δεξιά πλήρες εντός του συνόλου \mathcal{M} αν για κάθε $x \in \mathcal{M}$ ισχύει η επόμενη συνεπαγωγή:

$$\sigma_{\mathcal{M}}^+(x) < +\infty \Rightarrow \sigma_{\mathcal{M}}^+(x) < \sigma_{\mathbb{R}^n}^+(x) \quad (1.17)$$

1.4 Παρατηρησιμότητα και Παρατηρητές

Η σχεδίαση Παρατηρητών για μη γραμμικά συστήματα καταλαμβάνει μια ειδική περιοχή στην Μαθηματική Θεωρία Ελέγχου. Πρωτογενώς, ο Παρατηρητής (κατάστασης) για γραμμικά συστήματα εισήχθη από τον D. Luenberger την δεκαετία του 1960. Οι Παρατηρητές είναι απαραίτητοι σε όλες τις εφαρμογές εποπτείας (monitoring) και ελέγχου στην Θεωρία Συστημάτων και στην Θεωρία Ελέγχου και για αυτόν τον λόγο η θεωρία παρατηρησιμότητας και οι μέθοδοι κατασκευής Παρατηρητών είναι ενεργές περιοχές έρευνας επί του παρόντος. Καθώς δεν είναι σύνηθες όλες οι μεταβλητές κατάστασης να είναι διαθέσιμες για άμεση on-line μέτρηση, οι Παρατηρητές κατάστασης επιφορτίζονται με το έργο πλήρους ανακατασκευής των μη μετρούμενων μεταβλητών κατάστασης. Οι διαθέσιμες on-line μετρήσεις στην έξοδο χρησιμοποιούνται στο σύστημα του Παρατηρητή ως είσοδοι και ο Παρατηρητής έχει μια συμπεριφορά μοντέλου system/process.

Ο σκοπός της εργασίας δεν είναι να περιγράψει τις τεχνικές σχεδίασης μη γραμμικών Παρατηρητών, καθώς η σχετική βιβλιογραφία είναι μεγάλη, αλλά να παράσχει κάποιους θεμελιώδεις ορισμούς και αποτελέσματα. Η εργασία κατευθύνεται στην σχεδίαση υβριδικών dead-beat (τελεσφόρου κτυπήματος) Παρατηρητών.

Ακολουθούμε τον ορισμό της παρατηρησιμότητας από τους (Hermann, R., Krener 1977).

Θεωρούμε μη γραμμικά συστήματα της ακόλουθης μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \\ x &\in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k, u \in U \subset \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (1.18)$$

όπου \mathcal{M} ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , το σύνολο U είναι μη κενό, η απεικόνιση $h(\cdot)$ είναι συνεχής και η f είναι συνεχής και τοπικά Lipschitz. Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\mathcal{U} \subseteq L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}^+; U)$, τέτοιο ώστε $\forall u \in \mathcal{U}$ και $\forall x_0 \in \mathcal{M}$ το σύστημα (1.18) είναι δεξιά πλήρες και η λύση του $x(t, x_0; u) \in \mathcal{M}, \forall t \geq 0$.

Ορισμός 1.8. (a) Λέμε ότι η είσοδος $u \in \mathcal{U}$ “διαχωρίζει τις καταστάσεις $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ σε χρόνο $r > 0$ ”, αν $\max_{t \in [0, r]} |h(x(t, x_1; u)) - h(x(t, x_2; u))| > 0$, όπου $x(t, x_1; u), x(t, x_2; u)$ οι τροχιές που εκκινούν από x_1 και x_2 αντίστοιχα.

(b) Λέμε ότι η είσοδος $u \in \mathcal{U}$ “διαχωρίζει τις καταστάσεις $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ ” αν υπάρχει χρόνος $r > 0$, τέτοιος ώστε η u διαχωρίζει τις καταστάσεις $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ σε χρόνο r .

(c) Λέμε ότι οι καταστάσεις $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ είναι μη διαχωρίσιμες (χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x_1 I x_2$, όπου I είναι σχέση ισοδυναμίας), αν για κάθε $u \in \mathcal{U}$ οι καταστάσεις x_1, x_2 δεν διαχωρίζονται μέσω της u , ή ισοδύναμα, αν:

$$h(x(t, x_1; u)) = h(x(t, x_2; u)), \forall t \geq 0$$

Ορισμός 1.9. Το σύστημα (1.18) καλείται “παρατηρήσιμο στο $x_0 \in \mathcal{M}$ ” αν για κάθε $x \in \mathcal{M}, x \neq x_0$, υπάρχει είσοδος $u \in \mathcal{U}$ που διαχωρίζει τις καταστάσεις x_0, x , ή ισοδύναμα αν $I(x_0) = \{x_0\}$, όπου $I(x_0) := \{x \in \mathcal{M} : x_0 I x\}$. Το σύστημα (1.18) καλείται «παρατηρήσιμο» αν είναι παρατηρήσιμο στο x για κάθε $x \in \mathcal{M}$, ή ισοδύναμα αν $I(x) = \{x\}$.

Ένας μη γραμμικός Παρατηρητής για ένα γενικό μη γραμμικό, χρονομεταβλητό σύστημα με εισόδους Σ που περιγράφεται από το

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.19)$$

είναι ένα σύστημα

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{z} = g(t, z, u, y) \\ \hat{x} = T(z, y) \end{cases} \quad (1.20)$$

Οι είσοδοι του συστήματος $\hat{\Sigma}$ είναι κατ’ ουσίαν η είσοδος u και η έξοδος y του Σ και η έξοδος του $\hat{\Sigma}$ προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κατάσταση του Σ , δηλαδή

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \hat{x}(t)| = 0.$$

Για έναν πιο αφηρημένο ορισμό του συγκλίνοντος μη γραμμικού Παρατηρητή ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία (Andrieu et al. 2013). Επειδή οι διάφορες

τεχνικές για την επίλυση του προβλήματος του μη γραμμικού Παρατηρητή έχουν πολλούς περιορισμούς αλλά και πλεονεκτήματα, συνοψίζουμε μερικές από αυτές όπως έχουν αναπτυχθεί στην βιβλιογραφία κατά τα προηγούμενα έτη.

Μια ευρεία κατηγορία προσεγγίσεων είναι να θεωρήσουμε τα μη γραμμικά συστήματα σε κατάλληλη παρατηρήσιμη κανονική μορφή (γραμμικό μοντέλο μέχρι έναν όρο που περιέχει την έξοδο) που επιτρέπει μια απλοποιητική σχεδίαση Παρατηρητή εκμεταλλευόμενη γραμμικές ή περίπου γραμμικές τεχνικές ((Krener & Respondek 1985), (Xia & Gao 1989), (Noh et al. 2004)). Στις εργασίες των (Krener & Isidori 1983), (Krener & Respondek 1985), (Krener & Xiao 2002) περιέχονται συνθήκες για ύπαρξη αλλαγής συντεταγμένων που μετατρέπουν τα μη γραμμικά συστήματα στην παρατηρήσιμη κανονική μορφή. Μία προσαρμοστική παρατηρήσιμη κανονική μορφή θεωρείται στην εργασία των (Bastin & Gevers 1988), κατάλληλη για την σχεδίαση προσαρμοστικών Παρατηρητών ((Marino & Tomei 1992), (Marino & Tomei 1995)). Στην εργασία του (Tsinias 2008) προτείνονται χρονομεταβλητοί παρατηρητές για τριγωνικά συστήματα. Ασθενέστερες υποθέσεις εξασφαλίζουν την ύπαρξη και άλλων μορφών κανονικών μορφών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή παρατηρητών. Στους (Gauthier et al. 1992) χρησιμοποιείται η τριγωνική δομή. Στην εργασία των (Esfandiari & Khalil 1992) μελετώνται παρατηρητές κατάστασης για συστήματα που είναι πλήρως γραμμικοποιήσιμα. Το κέρδος των παρατηρητών που σχεδιάζονται σε όλες αυτές τις ασθενέστερες κανονικές μορφές μπορεί να γίνει αρκετά μεγάλο για να κυριαρχήσει των μη γραμμικοτήτων του συστήματος (υψηλερδείς παρατηρητές - high-gain Observers). Η προσέγγιση στην εργασία (Ciccarella et al. 1993), υπό κατάλληλες συνθήκες παρατηρησιμότητας και συνθήκες σχετικού βαθμού (relative degree), επιτρέπει την κατασκευή Παρατηρητών στο πρότυπο του Παρατηρητή Luenberger στις πραγματικές συντεταγμένες του συστήματος (βλέπε (Andrieu & Praly 2004)). Σε πολλές δημοσιεύσεις, το μη γραμμικό σύστημα αντιμετωπίζεται ως γραμμικό που ταράσσεται από μη γραμμικούς όρους διαταραχών. Στις περισσότερες περιπτώσεις ο προτεινόμενος παρατηρητής έχει μια κλασική δομή ανατροφοδότησης, όπου η σχεδίαση του σταθερού κέρδους εξαρτάται από την σταθερά Lipschitz ή από κάποια φράγματα της κλίσης της μη γραμμικής διαταραχής. Συνθήκες σύγκλισης δίνονται σε όρους εξισώσεων Lyapunov, αλγεβρικών εξισώσεων Riccati ή γραμμικών ανισοτήτων πινάκων (LMIs). Επίσης, οι μέθοδοι στις δημοσιεύσεις (Tsinias 1989), (Tsinias 1990), (Arcak & Kokotovic 2001) ανήκουν σε αυτήν την κλάση προσεγγίσεων. Στην εργασία των (Karafyllis & Kravaris

2012) προτείνονται ολικοί εκθετικοί Παρατηρητές. Πρόσφατα, προτάθηκαν και μέθοδοι κατασκευής Παρατηρητών που στηρίζονται σε κατασκευή αναλλοίωτων και ελκυστικών πολλαπλοτήτων, βλέπε ((Karagiannis et al. 2008), (Karagiannis et al. 2009).

1.5 Adjoint για Γραμμικά Συστήματα και Παρατηρησιμότητα

Στην παρούσα ενότητα το πρόβλημα της παρατηρησιμότητας θα προσεγγισθεί από την σκοπιά της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Καθώς ο χώρος εξόδων είναι ένας χώρος απείρων διαστάσεων, συγκεκριμένα χώρος Hilbert, θα γίνει εισαγωγή των adjoints και των ψευδοαντιστροφών.

Οι adjoint τελεστές παρέχουν μια δυϊκότητα μεταξύ εισόδων και εξόδων γραμμικών συστημάτων. Στο (Sontag 1998), σελ. 104-111, οι ιδιότητες εν σχέσει με την είσοδο, π.χ. ζητήματα ελεγχιμότητας και η σταθεροποίηση (controllability and stabilization), αναλύονται μέσω adjoints σε χώρους Hilbert. Ως δυϊκές μορφές εν σχέσει με τις εξόδους, μπορούμε να ορίσουμε την παρατηρησιμότητα και την ανιχνευσιμότητα (detectability). Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει και στο βιβλίο του (Luenberger 1997). Κάνουμε αναφορά επίσης και τους μη γραμμικούς adjoints που εισήχθησαν με χρήση της παραγώγου Gâteaux (βλέπε (Scherpen & Gray 2002)), εντούτοις θα μείνουμε μόνο σε γραμμικούς adjoints.

Θεωρούμε ένα αιτιατό γραμμικό σύστημα μηδενικής εισόδου με την αναπαράσταση στον χώρο κατάστασης:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (1.21)$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$

Οι τελεστές $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $C(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ θεωρούνται γραμμικοί και φραγμένοι.

Ορίζουμε τον τελεστή παρατηρησιμότητας $\mathcal{O} : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$, που δίδεται από

$$x_0 \mapsto y = \mathcal{O}x_0 = C(t)\Phi(t, t_0)x_0$$

όπου $\Phi(t, t_0)$ είναι η θεμελιώδης λύση που σχετίζεται με τον $A(t)$.

Αυτός ο τελεστής είναι ένας τελεστής σε Hilbert χώρους, επομένως ο Hilbert adjoint του $\mathcal{O}^* : L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί τον ορισμό για τους Hilbert adjoints, ήτοι

$\langle \mathcal{O}x_0, y \rangle_{L^2([t_0, \infty); \mathbb{R}^m)} = \langle x_0, \mathcal{O}^* y \rangle_{\mathbb{R}^n}$ και δίδεται από

$$\mathcal{O}^* y = \int_{t_0}^r \Phi^*(s, t_0) C^*(s) y(s) ds \quad (1.22)$$

και είναι επίσης ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής.

Έστω τώρα $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G := \mathcal{O}^* \mathcal{O}$ που ονομάζεται Gramian παρατηρησιμότητας και δίδεται από

$$G = \int_{t_0}^r \Phi^*(t, t_0) C^*(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \quad (1.23)$$

Παρατηρούμε ότι ο G είναι self-adjoint και θετικά ημιορισμένος, καθότι $G^* = (\mathcal{O}^* \mathcal{O})^* = \mathcal{O}^* \mathcal{O}^{**} = G$ και $\langle x, Gx \rangle = |\mathcal{O}x|^2$. Ο επόμενος ορισμός αφορά στην παρατηρησιμότητα αλλά με όρους απειροδιαστάτης Ανάλυσης και δίνουμε ένα Θεώρημα παρατηρησιμότητας, ομοίως με την περίπτωση της ελεγκσιμότητας, η οποία περιγράφεται στο (Sontag 1998), p.108.

Ορισμός 1.10. Ένα σύστημα της μορφής $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ y = h(t, x) \end{cases}$ είναι (πλήρως) παρατηρήσιμο

στο $[t_0, r]$ αν υπάρχει μια σταθερά $r > t_0$ τέτοια ώστε $\forall t_0 \in \mathbb{R}^+$ η έξοδος $y_1 \in L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$ που αντιστοιχεί στο σύστημα με αρχική κατάσταση $x(t_0) = x_1$ δεν ταυτίζεται με την $y_2 \in L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$, την απόκριση οποιασδήποτε άλλης αρχικής κατάστασης x_2 .

Θεώρημα 1.11. Οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

- i) Το σύστημα (1.21) είναι (πλήρως) παρατηρήσιμο στο $[t_0, r]$
- ii) Ο τελεστής παρατηρησιμότητας $\mathcal{O}: \mathbb{R}^n \rightarrow L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$ είναι ερριπτικός («1-1»)
- iii) Η (πεπερασμένου χρόνου) Gramian παρατηρησιμότητας $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G := \mathcal{O}^* \mathcal{O}$ είναι αμφιρριπτική (bijection).

Το παραπάνω ισχυρίζεται ότι η Gramian G πρέπει να είναι αντιστρέψιμη, αλλά αποκλείει την περίπτωση $t_0 \rightarrow \infty$, όπου η G μπορεί να χάσει την nonsingularity.

Επομένως, χρειαζόμαστε μία ισχυρότερη μορφή ομοιόμορφης παρατηρησιμότητας, η οποία ισχυρίζεται ότι $(\forall t_0 \in \mathbb{R}^+)(\exists r > t_0)(\exists c > 0)(\langle x, Gx \rangle = \langle x, \mathcal{O}^* \mathcal{O} x \rangle \geq c|x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n)$.

Το παραπάνω Θεώρημα στηρίζεται στο επόμενο Λήμμα από την Συναρτησιακή Ανάλυση.

Λήμμα 1.12. Έστω \mathcal{O} ένας τελεστής που απεικονίζει τον \mathcal{X} πάνω στον \mathcal{Y} , όπου \mathcal{X}, \mathcal{Y} είναι Hilbert χώροι. Τότε, η εικόνα του \mathcal{O} είναι κλειστή αν και μόνον αν η εικόνα του \mathcal{O}^* είναι κλειστή. Σε αυτήν την περίπτωση, ο $\mathcal{O}^* \mathcal{O}$ απεικονίζει το $(\ker \mathcal{O})^\perp$ αμφιρριπτικά (1-1 και επί) στο $(\ker \mathcal{O})^\perp$. Επιπρόσθετα, όταν η εικόνα του \mathcal{O} είναι κλειστή, ο $\mathcal{O}^* \mathcal{O}|_{(\ker \mathcal{O})^\perp}$ είναι ένας αντιστρέψιμος τελεστής στο $(\ker \mathcal{O})^\perp$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Προβολής των Χώρων Hilbert, οποιοσδήποτε χώρος Hilbert \mathcal{X} παρουσιάζει ορθογώνια ανάλυση της μορφής $\mathcal{X} = \ker \mathcal{O} \oplus (\ker \mathcal{O})^\perp$. Εξ αυτού, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{O}^* \mathcal{O}$ γράφεται σε αναπαράσταση πινάκων ως εξής:

$$\mathcal{O}^* \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{11}^* \mathcal{O}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ on } \begin{bmatrix} (\ker \mathcal{O})^\perp \\ \ker \mathcal{O} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Αυτό συνεπάγεται άμεσα ότι ο $\mathcal{O}^* \mathcal{O}|_{(\ker \mathcal{O})^\perp} = \mathcal{O}_{11}^* \mathcal{O}_{11}$ είναι ένας τελεστής στον υπόχωρο $(\ker \mathcal{O})^\perp$. Τώρα, υποθέτουμε ότι η εικόνα του \mathcal{O} είναι κλειστή. Τότε, ο \mathcal{O}_{11} είναι αντιστρέψιμος. Επομένως, ο $\mathcal{O}_{11}^* \mathcal{O}_{11}$ είναι ένας αντιστρέψιμος τελεστής. Άρα, ο $\mathcal{O}^* \mathcal{O}|_{(\ker \mathcal{O})^\perp}$ είναι αντιστρέψιμος τελεστής στο $(\ker \mathcal{O})^\perp$. \square

Σημειωτέον ότι αν η συνεχής γραμμική επέκταση του \mathcal{O} , $\tilde{\mathcal{O}}: \mathbb{R}^n \rightarrow L^\infty([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$ είναι ερριπτική (1-1), δηλαδή το σύστημα είναι παρατηρήσιμο όταν η έξοδος είναι essentially φραγμένη, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο $\mathcal{O}: \mathbb{R}^n \rightarrow L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$ είναι ομοίως 1-1, καθώς ο $L^\infty([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$ είναι πυκνός στον $L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$ και αμφότεροι οι $\tilde{\mathcal{O}}$ και \mathcal{O} είναι συνεχείς.

Θα δείξουμε τώρα την σχέση των γενικευμένων αντιστρόφων, ή (Moore-Penrose) ψευδοαντιστρόφων με το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων. Αυτή η διαδικασία θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα Κεφάλαια για να υπολογισθεί η αρχική κατάσταση

συστημάτων σε πεπερασμένο χρόνο, χρησιμοποιώντας μόνον την πληροφορία από τις εισόδους και τις εξόδους σε ένα φραγμένο χρονικό σύνολο.

Η λύση x^{LS} ορίζεται ως η λύση ελαχίστων τετραγώνων αν $\|Ox^{LS} - y\|_{L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)} = \inf \left\{ \|Ox - y\|_{L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)} : x \in \mathbb{R}^n \right\}$ και η x είναι μια λύση ελαχίστων τετραγώνων ελάχιστης νόρμας αν είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων και $|x| \leq |x^{LS}|$ για κάθε x^{LS} .

Μεταξύ όλων των διανυσμάτων $x^{LS} \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την $\|Ox^{LS} - y\|_{L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)} = \inf \left\{ \|Ox - y\|_{L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)} : x \in \mathbb{R}^n \right\}$, έστω x_0 το μοναδικό διάνυσμα ελάχιστης νόρμας. Ο ψευδοαντίστροφος $O^\#$ του O είναι ο τελεστής που απεικονίζει το y στο αντίστοιχό του x_0 όσο το y μεταβάλλεται στον $L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$.

Ο ψευδοαντίστροφος του $O : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$, συμβολιζόμενος με $O^\# : L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$, δίδεται από $O^\# = (O^*O)^{-1}O^*$ αν ο O^*O είναι αντιστρέψιμος.

Ο $O^\#$ είναι μια γραμμική επέκταση του $(O|_{\ker(O)^\perp})^{-1}$ ούτως ώστε το πεδίο ορισμού του $D(O^\#) = \text{Im}(O) \oplus \text{Im}(O)^\perp$ και ο πυρήνας του είναι $\ker(O^\#) = \text{Im}(O)^\perp = \ker(O^*)$. Αν η $\text{Im}(O)$ είναι κλειστή, τότε ο O είναι φραγμένος τελεστής, ή αλλιώς ο $\text{Im}(O^\#) = \overline{\text{Im}(O^*)}$.

Έπεται ένα Θεώρημα σχετικό με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Θεώρημα 1.13. Έστω $O : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$ ένας γραμμικός φραγμένος τελεστής.

Τότε, για ένα σταθερό $y \in L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$ το διάνυσμα $x^{LS} \in \mathbb{R}^n$ βελτιστοποιεί την

$$\|Ox^{LS} - y\|_{L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)}, \text{ ήτοι } \|Ox^{LS} - y\|_{L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)} = \inf \left\{ \|Ox - y\|_{L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)} : x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

αν και μόνον αν $O^*Ox^{LS} = O^*y$.

Απόδειξη. Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο του να ελαχιστοποιηθεί η $\|\hat{y} - y\|_{L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)}$ όπου $\hat{y} \in \text{Im}(\mathcal{O})$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Προβολής, το \hat{y} είναι στοιχείο ελαχιστοποίησης αν και μόνον αν $y - \hat{y} \in \text{Im}(\mathcal{O})^\perp$. Επομένως,

$$y - \hat{y} \in \ker(\mathcal{O}^*) \Rightarrow 0 = \mathcal{O}^*(y - \hat{y}) = \mathcal{O}^*y - \mathcal{O}^*\mathcal{O}x^{LS}. \quad \square$$

Σημειωτέον ότι στο παραπάνω Θεώρημα δεν υπάρχει ισχυρισμός ύπαρξης (όπως στο Θεώρημα Προβολής), καθώς εν γένει η εικόνα $\text{Im}(\mathcal{O})$ μπορεί να μην είναι κλειστή. Επιπλέον, δεν υπάρχει ισχυρισμός μοναδικότητας της λύσης ελαχίστων τετραγώνων, καθώς, αν και το $\hat{y} = \mathcal{O}x^{LS}$ είναι μοναδικό, η αντίστροφη εικόνα του \hat{y} μπορεί να μην είναι μοναδική. Αν μια λύση υπάρχει πάντοτε, δηλαδή αν ο $G = \mathcal{O}^*\mathcal{O}$ είναι αντιστρέψιμος, η λύση λαμβάνει την μορφή

$$x^{LS} = (\mathcal{O}^*\mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^*y \quad (1.25)$$

Για να δικαιολογηθεί ότι υπάρχει μοναδικό x^{LS} που αντιστοιχεί σε κάθε $y \in L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$, πρέπει να εξασφαλισθεί ότι η $\text{Im}(\mathcal{O})$ είναι κλειστή. Τούτο μπορεί να συμβεί αν ο \mathcal{O} είναι η προβολή της εικόνας $\text{Im}(\mathcal{O})$ ενός γραμμικού φραγμένου τελεστή $\bar{\mathcal{O}}$ από τον \mathbb{R}^n στον $L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$, με φραγμένο αντίστροφο $\bar{\mathcal{O}}^{-1}$, δηλαδή $\mathcal{O} = P\bar{\mathcal{O}}$ όπου $P: L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k) \rightarrow \text{Im}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ η ορθογώνια προβολή. Μέσω αυτής της προβολής συνεπάγεται ότι η εικόνα $\text{Im}(\mathcal{O})$ είναι κλειστή, καθώς από έναν γνωστό ισχυρισμό της Συναρτησιακής Ανάλυσης, το πεδίο τιμών μιας προβολής είναι κλειστό και συμπίπτει με το πεδίο τιμών του \mathcal{O} . Σημειώνεται ότι ο \mathcal{O} είναι 1-1 αν ο $\bar{\mathcal{O}}$ είναι 1-1. Καθώς $\mathbb{R}^n = \ker(\mathcal{O}) \oplus \ker(\mathcal{O})^\perp$ και $L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k) = \text{Im}(\mathcal{O}) \oplus \text{Im}(\mathcal{O})^\perp$, ο τελεστής \mathcal{O} περιορισμένος στο $\ker(\mathcal{O})^\perp$ μπορεί να αντιμετωπισθεί ως τελεστής από τον χώρο Hilbert $\ker(\mathcal{O})^\perp$ πάνω στον χώρο Hilbert $\text{Im}(\mathcal{O})$. Μεταξύ αυτών των χώρων, ο \mathcal{O} είναι 1-1 και επί και επομένως έχει έναν γραμμικό αντίστροφο, που σύμφωνα με το Θεώρημα Φραγμένης Αντιστροφής (Bounded Inverse Theorem) είναι φραγμένος. Αυτός ο αντίστροφος τελεστής ορίζει τον ψευδοαντίστροφο $\mathcal{O}^\#$ στο $\text{Im}(\mathcal{O})$. Το πεδίο ορισμού του επεκτείνεται σε όλον τον $L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$ αν ορίσουμε $\mathcal{O}^\#y = 0$ για $y \in \text{Im}(\mathcal{O})^\perp$.

Οποιοδήποτε $y \in L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$ μπορεί να εκφρασθεί μονοσήμαντα σαν $y = \hat{y} + y_1$ όπου $\hat{y} \in \text{Im}(\mathcal{O})$, $y_1 \in \text{Im}(\mathcal{O})^\perp$. Άρα, το \hat{y} είναι η βέλτιστη προσέγγιση στο y μέσα στο $\text{Im}(\mathcal{O})$. Συνεπώς, $\mathcal{O}^\# y = \mathcal{O}^\# (\hat{y} + y_1) = \mathcal{O}^\# \hat{y}$. Ορίζουμε $x_0 = \mathcal{O}^\# y$, οπότε εξ ορισμού $\mathcal{O}x_0 = \hat{y}$. Επιπρόσθετα, το $x_0 \in \ker(\mathcal{O})^\perp$ και άρα είναι η λύση ελαχίστης νόρμας της $\mathcal{O}x^{LS} = \hat{y}$.

Η παραπάνω διαδικασία στους απειροδιάστατους χώρους Hilbert οδηγεί στην εξαγωγή της λύσης του προβλήματος βελτιστοποίησης που δίδεται από τον εξής τύπο:

$$x_0 = (\mathcal{O}^* \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^* P y = \left(\int_{t_0}^r \Phi'(t, t_0) C'(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'(t, t_0) C'(t) y(t) dt \quad (1.26)$$

όπου $P: L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k) \rightarrow \text{Im}(\mathcal{O}) := \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ η ορθογώνια προβολή.

Σημειώνεται επίσης η περίπτωση όπου ένας μη γραμμικός όρος εισαχθεί στο σύστημα και το σύστημα είναι της παρακάτω μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + f(t, x(t)) \\ y(t) &= C(t)x(t) \\ x &\in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k \end{aligned} \quad (1.27)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην περίπτωση του γραμμικού συστήματος, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} x_0 &= (\mathcal{O}^* \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^* P \left(y(\cdot) - C(\cdot) \int_{t_0}^{\cdot} \Phi(\cdot, s) f(s, x(s)) ds \right) \\ &= \left(\int_{t_0}^r \Phi'(t, t_0) C'(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \right)^{-1} \\ &\quad \times \int_{t_0}^r \Phi'(t, t_0) C'(t) \left[y(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, s) f(s, x(s)) ds \right] dt \end{aligned} \quad (1.28)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε επιλέξει τον τελεστή παρατηρησιμότητας να είναι ο $x_0 \mapsto \tilde{y} = \mathcal{O}x_0 = C(t)\Phi(t, t_0)x_0$, όπου \tilde{y} μια διαταραγμένη έξοδος που δίνεται από τον τύπο

$$\tilde{y}(\cdot) := y(\cdot) - C(\cdot) \int_{t_0}^{\cdot} \Phi(\cdot, s) f(s, x(s)) ds \quad (1.29)$$

Στα επόμενα Κεφάλαια, θα καταδείξουμε την εφαρμογή της τεχνικής υπολογισμού της κατάστασης του συστήματος μέσω της θεωρίας γραμμικών τελεστών, ώστε να κατασκευασθούν υβριδικοί Παρατηρητές. Στο Κεφάλαιο 2, ο υπολογισμός της αρχικής κατάστασης x_0 (που έπεται από κατάλληλη L^2 -norm βελτιστοποίηση) θα λάβει χώρα υπό συνθήκες ισχυρής παρατηρησιμότητας και θα χρησιμοποιηθεί για την σχεδίαση του υβριδικού παρατηρητή. Στα Κεφάλαια 3 και 4, η τεχνική βελτιστοποίησης θα χρησιμοποιηθεί για σχεδίαση Παρατηρητών για κλάσεις μη γραμμικών συστημάτων. Το Κεφάλαιο 3 αναφέρεται σε ένα μη γραμμικό σύστημα με ένα γραμμικό όρο και μια προσθετική μη γραμμική διαταραχή και συνοδεύεται από γραμμική έξοδο, ενώ στο Κεφάλαιο 4 προχωρούμε σε ένα σύστημα με σχεδόν γραμμικό όρο και μια μη γραμμική διαταραχή που συνοδεύεται από σχεδόν γραμμική έξοδο.

Παρατηρούμε ότι στην προηγούμενη ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν συστήματα μηδενικής εισόδου, αλλά οι τεχνικές δεν διαφέρουν και για συστήματα με εισόδους.

Στα Κεφάλαια 3 και 4 η παρατηρησιμότητα θα εξετασθεί μέσω θεωρημάτων μοναδικότητας για λύσεις ολοκληρωτικών εξισώσεων. Θα καταδείξουμε την σύνδεση μεταξύ της παρατηρησιμότητας και της μοναδικότητας λύσεων.

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + f(t, x, u) \\ y &= C(t)x \end{aligned} \quad (1.30)$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$

Απαιτούμε η f να είναι συνεχής και τοπικά Lipschitz και ότι υπάρχει $U \subseteq L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}^+; U)$, τέτοιο ώστε $\forall u \in U$ και $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ το σύστημα (1.30) να είναι δεξιά πλήρες και η λύση του $x(t, x_0; u) \in \mathbb{R}^n \forall t \geq t_0$.

Η παρατηρησιμότητα στο πλαίσιο του Ορισμού 1.8 διατυπώνεται ως ακολούθως:

“Για κάθε αρχικές καταστάσεις x_0^1, x_0^2 with $x_0^1 \neq x_0^2$ υπάρχει μια είσοδος $u \in U$ για την οποία έχουμε $\max_{t \in [t_0, r]} |C(t)x(t, x_0^1; u) - C(t)x(t, x_0^2; u)| > 0$ ”.

Προχωρούμε στον επόμενο ισχυρισμό που επάγεται φυσικά από τον παραπάνω ορισμό παρατηρησιμότητας.

“Υποθέτουμε ότι για μια είσοδο $u \in \mathcal{U}$ οποιοδήποτε από τα επόμενα ζεύγη εξισώσεων (i) ή (ii) ικανοποιείται από μια μοναδική τροχιά $x(\cdot)$ που εξαρτάται (συνεχώς) από το δοθέν διάνυσμα εξόδου y στο χρονικό διάστημα $[t_0, r]$:

$$(i) \begin{cases} y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, s)f(s, x(s), u(s))ds \\ x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)f(s, x(s), u(s))ds \end{cases}, t \in [t_0, r]$$

$$(ii) \begin{cases} x_0 = (\mathcal{O}^*\mathcal{O})^{-1}\mathcal{O}^*P\left(y(t) - C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, s)f(s, x(s), u(s))ds\right) \\ x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)f(s, x(s), u(s))ds \end{cases}, t \in [t_0, r]$$

όπου $\mathcal{O} : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)$: ο τελεστής παρατηρησιμότητας στο κλειστό διάστημα $[t_0, r]$, \mathcal{O}^* : ο αντίστοιχος adjoint τελεστής, $G := \mathcal{O}^*\mathcal{O}$: η (πεπερασμένου χρόνου) Gramian παρατηρησιμότητας του συστήματος και $P : L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k) \rightarrow \text{Im}(\mathcal{O}) := \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ η απεικόνιση ορθογώνιας προβολής. Τότε, η συγκεκριμένη είσοδος $u \in \mathcal{U}$ διαχωρίζει τις καταστάσεις του (1.30)”.

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (ii) εξάγονται από τις εξισώσεις (i) εκτελώντας απλές πράξεις βασισμένες στην θεωρία γραμμικών τελεστών και υπό την προϋπόθεση ότι η Gramian παρατηρησιμότητας $\mathcal{O}^*\mathcal{O}$ είναι θετικά ορισμένη και, επομένως τα συστήματα εξισώσεων (i) και (ii) είναι ισοδύναμα.

Όπως στην (1.28), η βελτιστοποιημένη αρχική κατάσταση x_0 στο ζεύγος εξισώσεων (ii) δίδεται από

$$x_0 = \left(\int_{t_0}^r \Phi'(t, t_0)C'(t)C(t)\Phi(t, t_0)dt \right)^{-1} \times \int_{t_0}^r \Phi'(t, t_0)C'(t) \left[y(t) - C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, s)f(s, x(s), u(s))ds \right] dt \quad (1.31)$$

Αυτός ο ισοδύναμος ορισμός παρατηρησιμότητας θα χρησιμοποιηθεί στα Κεφάλαια 3 και 4, όπου θα εξετασθεί η μοναδικότητα ενός σταθερού σημείου (fixed point). Σε αυτές

τις περιπτώσεις, η μοναδικότητα του σταθερού σημείου είναι ισοδύναμη με την μοναδική επιλυσιμότητα από τα παραπάνω ζεύγη εξισώσεων.

Remark 1.14. Για γραμμικά χρονομεταβλητά συστήματα της κάτωθι μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + b(t, u) \\ y &= C(t)x \end{aligned} \quad (1.32)$$

Τα ζεύγη εξισώσεων (ii) δίδονται στην μορφή

$$\begin{cases} x_0 = (\mathcal{O}^* \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^* P \left(y(\cdot) - C(\cdot) \int_{t_0}^{\cdot} \Phi(\cdot, s) b(s, u(s)) ds \right) \\ x(\cdot) = \Phi(\cdot, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{\cdot} \Phi(\cdot, s) b(s, u(s)) ds \end{cases} \quad (1.33)$$

Παρατηρούμε ότι η μοναδική επιλυσιμότητα του ζεύγους εξισώσεων (1.33) είναι τετραμμένη, καθώς το x_0 δίνεται κατά μοναδικό τρόπο από τον τύπο

$$x_0 = (\mathcal{O}^* \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^* P \left(y(\cdot) - C(\cdot) \int_{t_0}^{\cdot} \Phi(\cdot, s) b(s, u(s)) ds \right)$$

που εξαρτάται μόνο από τα

διανύσματα εισόδου και εξόδου, $u(\cdot)$ και $y(\cdot)$ αντιστοίχως. Αυτό το αποτέλεσμα θα δειχθεί και στο Κεφάλαιο 2, όπου αποδεικνύεται ότι συνάγεται από ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης (ελαχιστοποίησης). Η μοναδική λύση του παραπάνω ζεύγους εξισώσεων δίνεται από:

$$\begin{aligned} x(\cdot) &= \Phi(\cdot, t_0) (\mathcal{O}^* \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^* P \left(y(\cdot) - C(\cdot) \int_{t_0}^{\cdot} \Phi(\cdot, s) b(s, u(s)) ds \right) \\ &\quad + \int_{t_0}^{\cdot} \Phi(\cdot, s) b(s, u(s)) ds \end{aligned} \quad (1.34)$$

Παρατήρηση 1.15. Έχουμε ισχυρισθεί ότι η μοναδική επιλυσιμότητα των περιγραφέντων ζευγών εξισώσεων (i) και (ii) είναι ισοδύναμη με την ανακατασκευασιμότητα της κατάστασης $x(t)$ για $t \geq r$. Ακολουθώντας την στρατηγική, η οποία αναλύθηκε στα ανωτέρω, έχουμε την δυνατότητα κατασκευής υβριδικών dead-beat Παρατηρητών, καθ' ότι η ανακατασκευή της άγνωστης κατάστασης μπορεί να επιτευχθεί σε πεπερασμένο χρόνο. Στην περίπτωση μη γραμμικών συστημάτων πρέπει να απαιτηθεί η μοναδική επιλυσιμότητα του παραπάνω

ζεύγους εξισώσεων (βλέπε Κεφάλαια 3&4), ενώ για γραμμικά συστήματα (βλέπε Κεφάλαιο 2), όπως αυτά περιγράφηκαν στην Παρατήρηση 1.14 παραπάνω, η μοναδική επιλυσιμότητα είναι αυτόματη και, συνεπώς, αυτό οδηγεί στην κατασκευή του dead-beat Παρατηρητή, χωρίς επιπλέον υπόθεση πέραν της αντιστρεψιμότητας της Gramian παρατηρησιμότητας.

2 ΥΒΡΙΔΙΚΟΣ DEAD-BEAT ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΓΙΑ ΜΙΑ ΚΛΑΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΜΗ ΜΕΤΡΟΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

2.1 Introduction

Στο παρόν Κεφάλαιο ακολουθούμε μια διαδικασία, όπως ακριβώς περιγράφεται στην εργασία των (Karafyllis & Jiang 2011a).

Μελετούμε το πρόβλημα παρατηρησιμότητας και σχεδίασης Παρατηρητή για μη κλάση συστημάτων της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(y(t), u(t))x(t) + b(y(t), u(t)) \\ \dot{y}_i(t) &= f_i(y(t), u(t)) + \sum_{j=1}^n c_{i,j}(y(t))x_j(t) \\ x(t) &\in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^k, u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m \\ (x(t), y(t)) &\in O \subseteq \mathbb{R}^{n+k}, u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (2.1a)$$

όπου $O \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ ανοικτό σύνολο, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ένα μη κενό κλειστό σύνολο, ο $A(y, u) = (a_{i,j}(y, u))_{n \times n}$ και όλες οι απεικονίσεις $a_{i,j} : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c_{i,j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$) και $f_i : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, k$) είναι τοπικά Lipschitz, $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^k : \exists x \text{ s.t. } (x, y) \in O\}$.

Ορίζουμε $C'(y) = (c_{i,j}(y))_{n \times k}$ και $f(y, u) = (f_1(y, u) \ \dots \ f_k(y, u))'$.

Το παραπάνω σύστημα ισοδύναμα γράφεται στην παρακάτω μορφή στον χώρο καταστάσεων

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(y(t), u(t))\tilde{x}(t) + \tilde{f}(y(t), u(t)) \\ y(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t)\end{aligned}\quad (2.1b)$$

όπου η κατάσταση $\tilde{x}(t) = (x(t) \quad y(t))'$

$$\tilde{A}(y(t), u(t)) := \begin{pmatrix} A(y(t), u(t)) & 0 \\ C'(y(t)) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0_{k \times n} \quad I_{k \times k}), \quad \tilde{f}(y(t), u(t)) = \begin{pmatrix} b(y(t), u(t)) \\ f(y(t), u(t)) \end{pmatrix}$$

Έχει υποτεθεί ότι το μέρος y του διανύσματος κατάστασης \tilde{x} που είναι η έξοδος του συστήματος, είναι διαθέσιμη για την σχεδίαση ανατροφοδότησης και ότι το υπόλοιπο μέρος x της κατάστασης είναι μη μετρούμενο και πρόκειται να εκτιμηθεί. Συστήματα της μορφής (2.1a), (2.1b) είναι γραμμικά ως προς το μη μετρήσιμο μέρος της κατάστασης.

Ο σκοπός της παρούσας προσέγγισης είναι να μελετήσει τις ιδιότητες παρατηρησιμότητας συστημάτων γραμμικών στο μη μετρούμενο μέρος της κατάστασης και να προτείνει έναν Παρατηρητή που εξασφαλίζει χαρακτηριστικά που δεν εξασφαλίζονται από συμβατικούς Παρατηρητές. Οι προτεινόμενοι Παρατηρητές είναι υβριδικοί και παρέχουν ακριβή εκτίμηση του μη μετρούμενου μέρους της κατάστασης σε πεπερασμένο χρόνο (dead-beat Παρατηρητές). Επιπλέον, θεωρούμε την γενική κλάση συστημάτων που το σύστημα εξελίσσεται σε ένα ανοικτό σύνολο O και όχι σε όλον τον \mathbb{R}^{n+k} . Πρέπει να σημειωθεί ότι οι υβριδικοί Παρατηρητές έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία με την μορφή sliding Παρατηρητών και μέσω καθυστερήσεων (delays).

Στην ενότητα 2.2, μελετάμε τις ιδιότητες παρατηρησιμότητας του συστήματος (2.1). Εισάγεται η έννοια της ισχυρής παρατηρησιμότητας για γενικά μη γραμμικά συστήματα. Στην ενότητα 2.3 αποδεικνύεται ότι υπό συνθήκες ισχυρής παρατηρησιμότητας σε χρόνο $r > 0$ για το σύστημα (2.1), είναι εφικτό να δοθούν explicit τύπου για ένα ντετερμινιστικό σύστημα (Σ) με καταστάσεις $z(t) \in O$ και εισόδους $y: \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$, $u: \mathbb{R}^+ \rightarrow U$ ούτως ώστε

$$z(t) := \tilde{x}(t) = (x(t), y(t)), \text{ for all } t \geq r \quad (2.2)$$

Ο προτεινόμενος Παρατηρητής (Σ) είναι ένα υβριδικό σύστημα που χρησιμοποιεί καθυστερήσεις: χρησιμοποιείται η ιστορία της εξόδου ώστε να εκτιμηθεί η κατάσταση x του συστήματος (2.1). Για το συνολικό σύστημα (2.1) με το (Σ) δεν ισχύει η κλασική

ιδιότητα της ημιομάδος, εντούτοις, ισχύει η ασθενής ιδιότητα ημιομάδος, όπως ορίστηκε στο Κεφάλαιο 1. Ο προτεινόμενος υβριδικός Παρατηρητής στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση μιας κατάλληλης L^2 -νόρμας, όπως άλλωστε περιγράφεται και στο Κεφάλαιο 1 μέσω μεθόδων των γραμμικών adjoints, και είναι μεθοδολογικά εγγύς στην διαδικασία που χρησιμοποιείται στους Παρατηρητές με βάση μεθόδους βελτιστοποίησης.

Στην ενότητα 2.4 του παρόντος κεφαλαίου, μελετώνται διεξοδικά οι ιδιότητες ευρωστίας του προτεινόμενου Παρατηρητή εν σχέσει με τα λάθη μετρήσεων. Στην Πρόταση που θα παρουσιασθεί περιγράφεται ότι η διαφορά της κατάστασης του συστήματος (2.1) και της κατάστασης του Παρατηρητή ικανοποιεί την ιδιότητα Φραγμένης Εισόδου - Φραγμένης Εξόδου (BIBO Property) και την ιδιότητα της Συγκλίνουσας Εισόδου - Συγκλίνουσας Εξόδου (CICO) με είσοδο το σφάλμα μέτρησης και υπό ορισμένες προϋποθέσεις. Η ευρωστία των Παρατηρητών μελετάται σχετικά σπάνια.

2.2 Ισχυρή Παρατηρησιμότητα

Θεωρούμε ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x(t), u(t)) \\ x(t) &\in D \subseteq \mathbb{R}^n, u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (2.3)$$

όπου D ανοικτό σύνολο, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ μη κενό, κλειστό σύστημα και η απεικόνιση $F: D \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι τοπικά Lipschitz. Η έξοδος του συστήματος (2.3) δίνεται από

$$y(t) = h(x(t)) \quad (2.4)$$

Όπου η απεικόνιση $h: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι συνεχής. Για το σύστημα (2.3) υιοθετούμε την παρακάτω έννοια παρατηρησιμότητας. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x_0 \in D$ και $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; U)$ υπάρχει μοναδική λύση $[0, +\infty) \ni t \mapsto x(t) = x(t, x_0; u) \in D$ για το (2.3) που ικανοποιεί την (2.3) για σχεδόν όλα τα $t \geq 0$ και $x(0) = x(0, x_0; u) = x_0$.

Ορισμός 2.1. Θεωρούμε το σύστημα (2.3) με έξοδο την (2.4). Λέμε ότι η είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ διαχωρίζει ισχυρά το $x_0 \in D$ σε χρόνο $r > 0$, αν ισχύει η επόμενη συνθήκη:

$$\max_{t \in [0, r]} |h(x(t, x_0; u)) - h(x(t, \xi; u))| > 0 \quad (2.5)$$

για κάθε $\xi \in D$ με $x_0 \neq \xi$.

Παρατήρηση 2.2. Ο παραπάνω ορισμός συνεπάγεται ότι αν η είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση $x_0 \in D$ σε χρόνο $r > 0$, τότε για κάθε $\xi \in D$ με $x_0 \neq \xi$ η είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ διαχωρίζει μεταξύ των γεγονότων $(x_0, 0)$ και $(\xi, 0)$ για το σύστημα (2.3) με έξοδο (2.4).

Για το σύστημα (2.1) υποθέτουμε ότι για κάθε $(x_0, y_0) \in O$ και $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; U)$ υπάρχει μοναδική απεικόνιση

$$[0, +\infty) \ni t \mapsto \tilde{x}(t) = (x(t), y(t)) = \tilde{x}(t, \tilde{x}_0; u) = (x(t, x_0, y_0; u), y(t, x_0, y_0; u)) \in O \text{ που}$$

ικανοποιεί την (2.1) σχεδόν για κάθε $t > 0$ και

$$(x(0), y(0)) = (x(0, x_0, y_0; u), y(0, x_0, y_0; u)) = (x_0, y_0) = \tilde{x}_0$$

Αναπαριστούμε με $\Phi(t, x_0, y_0; u)$ τον πίνακα μετάβασης του γραμμικού χρονομεταβλητού συστήματος

$$\dot{x}(t) = A(y(t), u(t))x(t),$$

όπου οι $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; U)$ και $y(t) = y(t, x_0, y_0; u)$ για $t \geq 0$ θεωρούνται ως είσοδοι.

Τότε, ισχύει το επόμενο γεγονός για τις λύσεις του συστήματος (2.1), τις οποίες έχουμε εκφράσει στην ολοκληρωτική τους μορφή.

Γεγονός I. Για κάθε $(x_0, y_0) \in O$ και $u \in L^\infty([0, r]; U)$ ισχύουν οι επόμενες εξισώσεις για όλα τα $t \geq 0$:

$$x(t, x_0, y_0; u) = \Phi(t, x_0, y_0; u)x_0 + \theta(t, x_0, y_0; u) \quad (2.6)$$

$$p(t, x_0, y_0; u) = q'(t, x_0, y_0; u)x_0 \quad (2.7)$$

όπου

$$q(t, x_0, y_0; u) := \int_0^t \Phi'(s, x_0, y_0; u)C(s, x_0, y_0; u)ds \quad (2.8)$$

$$\theta(t, x_0, y_0; u) := \int_0^t \Phi(t, x_0, y_0; u) \Phi^{-1}(\tau, x_0, y_0; u) b(y(\tau, x_0, y_0; u), u(\tau)) d\tau \quad (2.9)$$

$$C'(t, x_0, y_0; u) := \left(c_{i,j}(y(t, x_0, y_0; u)) \right)_{k \times n} \quad (2.10)$$

$$p(t, x_0, y_0; u) := y(t, x_0, y_0; u) - y_0 - \int_0^t f(y(s, x_0, y_0; u), u(s)) - \int_0^t C'(s, x_0, y_0; u) \theta(s, x_0, y_0; u) ds \quad (2.11)$$

Οι ανωτέρω ολοκληρωτικές μορφές έπονται του γεγονότος ότι $x(t, x_0, y_0; u) = \Phi(t, x_0, y_0; u)x_0 + \theta(t, x_0, y_0; u)$, $\dot{y}(t) = C'(y(t))x(t) + f(y(t), u(t)) \Rightarrow \dot{y}(t) = C'(y(t))\Phi(t, x_0, y_0; u)x_0 + C'(y(t))\theta(t, x_0, y_0; u) + f(y(t), u(t))$.

Είναι αξιοσημείωτο ότι όλες οι εκφράσεις που περιέχονται στις (2.6)-(2.11) υπολογίζονται με χρήση της τροχιάς εξόδου $y(\tau) = y(\tau, x_0, y_0; u)$ και της εισόδου $u(\tau)$ για $\tau \in [0, t]$, καθώς το σύστημα, όπως γράφεται στην ισοδύναμη μορφή (2.1b) είναι γραμμικό στην μη μετρούμενη κατάσταση. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας μετάβασης $\Phi(t, x_0, y_0; u)$ μπορεί να υπολογισθεί λύνοντας την γραμμική διαφορική εξίσωση πινάκων $\frac{d}{d\tau}\Phi(\tau) = A(y(\tau), u(\tau))\Phi(\tau)$ για $\tau \in [0, t]$ και με αρχική συνθήκη $\Phi(0) = I_{n \times n}$. Ομοίως, το $\theta(t) = \theta(t, x_0, y_0; u)$ μπορεί να υπολογισθεί λύνοντας το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων $\frac{d}{d\tau}\theta(\tau) = A(y(\tau), u(\tau))\theta(\tau) + b(y(\tau), u(\tau))$ για $\tau \in [0, t]$ με αρχική συνθήκη $\theta(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Τέλος, οι διαφορικές εξισώσεις $\frac{d}{d\tau}q(\tau) = \Phi'(\tau)C(\tau)$ και $\frac{d}{d\tau}\xi(\tau) = f(y(\tau), u(\tau)) + C'(\tau)\theta(\tau)$, $\tau \in [0, t]$ παράγουν τις ποσότητες $q(t) = q(t, x_0, y_0; u)$, $p(t, x_0, y_0; u) = y(t) - y_0 - \xi(t)$.

Η ακόλουθη Πρόταση περιγράφει χαρακτηριστικά της κλάσης των εισόδων $u \in L^\infty([0, r]; U)$ που διαχωρίζουν ισχυρά την κατάσταση $\tilde{x}_0 = (x_0, y_0) \in O$ σε χρόνο $r > 0$ για το σύστημα (2.1). Η βασική ιδέα της Πρότασης 2.3 είναι η μετατροπή της ιδιότητας της παρατηρησιμότητας στην ελαχιστοποίηση μιας κατάλληλης L^2 νόρμας.

Συνεπώς, η προσέγγιση αυτή είναι συγγενική με την διαδικασία που ακολουθείται στους Παρατηρητές με βάση την βελτιστοποίηση. Η προσέγγιση αυτή κείται στην εξαγωγή της μοναδικής λύσης ελαχίστων τετραγώνων, η οποία μπορεί να γραφεί ως ο ψευδοαντίστροφος ενός καταλλήλου τελεστή παρατηρησιμότητας. Αυτή η διαδικασία έχει παρατεθεί αναλυτικά στο προηγούμενο Κεφάλαιο, στην ενότητα 1.5, μαζί με τις ικανές συνθήκες (αντιστρεψιμότητα της Gramian), ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες παρατηρησιμότητας. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η αρχική κατάσταση $\tilde{x}_0 = (x_0, y_0) \in O$ ανακατασκευάζεται με χρήση των ψευδοαντιστρόφων, αν παραμείνουμε στην ισοδύναμη μορφή της (2.1b), η οποία είναι αυτή των συστημάτων του 1^{ου} κεφαλαίου. Δίνουμε επιπλέον μια απόδειξη στο Παράρτημα που χρησιμοποιεί συμβατικά εργαλεία της βελτιστοποίησης.

Πρόταση 2.3. Έστω το σύστημα (2.1a). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(a) Η είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση $(x_0, y_0) \in O$ σε πεπερασμένο χρόνο $r > 0$.

(b) Το πρόβλημα L^2 ελαχιστοποίησης

$$\min_{\xi \in B(y_0)} \int_0^r |p(t, x_0, y_0; u) - q'(t, x_0, y_0; u) \xi|^2 dt \quad (2.12)$$

όπου $B(y_0) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : (\xi, y_0) \in O\}$ έχει την μοναδική λύση $\xi = x_0$.

(c) Ο συμμετρικός πίνακας

$$Q(r, x_0, y_0; u) := \int_0^r q(t, x_0, y_0; u) q'(t, x_0, y_0; u) dt \quad (2.13)$$

είναι θετικά ορισμένος. Επιπλέον, ισχύει ότι

$$x_0 = Q^{-1}(r, x_0, y_0; u) \int_0^r q(t, x_0, y_0; u) p(t, x_0, y_0; u) dt \quad (2.14)$$

(d) Ισχύει η επόμενη συνεπαγωγή:

$$q'(t, x_0, y_0; u) \xi = 0, \forall t \in [0, r] \Rightarrow \xi = 0 \in \mathbb{R}^n \quad (2.15)$$

Το ακόλουθο Πρόρισμα στηρίζεται στην Πρόταση 2.3 και παρέχει ικανές συνθήκες ώστε μια είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ να διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση $(x_0, y_0) \in O$ σε χρόνο $r > 0$ για το σύστημα (2.1).

Πόρισμα 2.4. Θεωρούμε το σύστημα (2.1) με $k=1$ και έστω $(x_0, y_0) \in O, u \in L^\infty([0, r]; U)$ για τα οποία υπάρχουν $t, t_1, \dots, t_{n-1} \in [0, r]$ ούτως ώστε

$$\det \begin{bmatrix} C'(t, x_0, y_0; u) \Phi(t, x_0, y_0; u) \\ C'(t_1, x_0, y_0; u) \Phi(t_1, x_0, y_0; u) \\ \vdots \\ C'(t_{n-1}, x_0, y_0; u) \Phi(t_{n-1}, x_0, y_0; u) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (2.16)$$

Τότε η είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση $(x_0, y_0) \in O$ σε χρόνο $r > 0$. Επιπλέον, ο συμμετρικός πίνακας $Q(r, x_0, y_0; u)$ που ορίζεται από την (2.13) είναι θετικά ορισμένος και ισχύει η (2.14).

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $k=1$ και ότι η είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ δεν διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση $(x_0, y_0) \in O$ σε χρόνο $r > 0$ για το σύστημα (2.1). Η ισοδυναμία (a) \Leftrightarrow (d) δεικνύει ότι υπάρχει ένα $\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0$, έτσι ώστε $q'(t, x_0, y_0; u)\xi = 0$ για όλα τα $t \in [0, r]$. Έπεται ότι $\frac{d}{dt} q'(t, x_0, y_0; u)\xi = C'(t, x_0, y_0; u)\Phi(t, x_0, y_0; u)\xi = 0$ για όλα τα $t \in [0, r]$. Συνεπώς, λαμβάνουμε:

$$\det \begin{bmatrix} C'(t, x_0, y_0; u) \Phi(t, x_0, y_0; u) \\ C'(t_1, x_0, y_0; u) \Phi(t_1, x_0, y_0; u) \\ \vdots \\ C'(t_{n-1}, x_0, y_0; u) \Phi(t_{n-1}, x_0, y_0; u) \end{bmatrix} = 0,$$

για όλα τα $t, t_1, \dots, t_{n-1} \in [0, r]$. Τούτο αντίκειται στην (2.16). Η απόδειξη είναι πλήρης.

Δίνουμε τώρα έναν ορισμό παρατηρησιμότητας.

Ορισμός 2.5. Θεωρούμε το σύστημα (2.3) με έξοδο που δίνεται από την (2.4). Λέμε ότι το (2.3) είναι ισχυρά παρατηρήσιμο στον χρόνο $r > 0$ αν κάθε είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ διαχωρίζει ισχυρά κάθε κατάσταση $x_0 \in D$ σε χρόνο $r > 0$.

Παρατήρηση 2.6. Η Πρόταση 2.3 εξασφαλίζει ότι το σύστημα (2.1) είναι ισχυρά παρατηρήσιμο στον χρόνο $r > 0$, αν ο συμμετρικός πίνακας $Q(r, x_0, y_0; u)$ που ορίζεται από την (2.13) είναι θετικά ορισμένος για κάθε $(x_0, y_0) \in O$ και $u \in L^\infty([0, r]; U)$. Είναι εμφανές ότι η παρατηρησιμότητα για το γραμμικό χρονομεταβλητό σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu, y = C'x$ είναι ισοδύναμη με την ισχυρή παρατηρησιμότητα σε χρόνο $r > 0$ για κάθε $r > 0$. Γενικώς, η ισχυρή παρατηρησιμότητα στον χρόνο $r > 0$ συνεπάγεται την παρατηρησιμότητα στον χρόνο $r > 0$ με την έννοια που παρουσιάζεται στο (Sontag 1998). Παρ' όλα αυτά, ο αντίστροφος ισχυρισμός δεν ισχύει για τα μη γραμμικά συστήματα.

2.3 Σχεδίαση Παρατηρητή υπό Ισχυρή Παρατηρησιμότητα

Σε αυτήν την ενότητα χρησιμοποιούμε τα συμπεράσματα της προηγούμενης ενότητας και κάνοντας την υπόθεση της ισχυρής παρατηρησιμότητας σε χρόνο $r > 0$ για το σύστημα (2.1). Ειδικότερα, η Πρόταση 2.3 αποδεικνύει ότι υπό την επόμενη υπόθεση για το σύστημα (2.1):

(H1) Το σύστημα (2.1) είναι ισχυρά παρατηρήσιμο στον χρόνο $r > 0$, είμαστε σε θέση να ορίσουμε τον τελεστή:

$$P : L^\infty([0, r]; \Omega) \times L^\infty([0, r]; U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

όπου $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^k : \exists x \text{ s.t. } (x, y) \in O\}$.

Για κάθε $(y, u) \in L^\infty([0, r]; \Omega) \times L^\infty([0, r]; U)$, ο $P(y, u)$ δίνεται από

$$P(y, u) = \Phi(r, y; u) Q^{-1} \int_0^r q(\tau) p(\tau) d\tau + \theta(r) \quad (2.17)$$

όπου, όπως στα προηγούμενα, $\Phi(t, y; u)$ ο πίνακας μετάβασης του γραμμικού συστήματος

$$\dot{z}(t) = A(y(t), u(t))z(t), Q = \int_0^r q(\tau) q'(\tau) d\tau, q(\tau) = \int_0^\tau \Phi'(s, y; u) C(s) ds, p(\tau) = y(\tau) - y_0$$

$$-\int_0^{\tau} f(y(s), u(s)) - \int_0^{\tau} C'(s)\theta(s) ds, \theta(\tau) = \int_0^{\tau} \Phi(\tau, y; u)\Phi^{-1}(s, y; u)b(y(s), u(s)) ds \text{ για όλα}$$

τα $\tau \in [0, r]$. Η Πρόταση 2.3 εξασφαλίζει ότι, αν ισχύει η υπόθεση (H1), τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in O$, $u \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}^+; U)$ έχουμε την επόμενη ισότητα:

$$x(t, x_0, y_0; u) = P(\delta_{t-r}y, \delta_{t-r}u), \forall t \geq r \quad (2.18)$$

όπου $(\delta_{t-r}y)(s) = y(t-r+s, x_0, y_0; u)$, $(\delta_{t-r}u)(s) = u(t-r+s)$ for $s \in [0, r]$.

Επομένως, αν ισχύει η υπόθεση (H1) για το σύστημα (2.1), τότε είμαστε σε θέση να παράσχουμε έναν υβριδικό, dead-beat Παρατηρητή για το σύστημα (2.1). Δοθέντων $t_0 \geq 0$, $(z_0, w_0) \in O$, υπολογίζουμε την κατάσταση του Παρατηρητή $(z(t), w(t)) \in O$ μέσω του επομένου αλγορίθμου:

Βήμα i: Υπολογισμός του $z(t)$ για $t \in [t_0 + ir, t_0 + (i+1)r]$.

(1) Υπολογίζουμε την $z(t)$ για $t \in [t_0 + ir, t_0 + (i+1)r]$ ως την λύση της

$$\dot{z}(t) = A(w(t), u(t))z(t) + b(w(t), u(t)), \dot{w}(t) = f(w(t), u(t)) + C'(w(t))z(t).$$

(2) Θέτουμε $z(t_0 + (i+1)r) = P(\delta_{t_0+ir}y, \delta_{t_0+ir}u)$ και $w(t_0 + (i+1)r) = y(t_0 + (i+1)r)$,

όπου $P: C^0([0, r]; \Omega) \times L^{\infty}([0, r]; U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ο τελεστής που ορίζεται στην (2.17).

Για $i = 0$ λαμβάνουμε $(z(t_0), w(t_0)) = (z_0, w_0)$ (αρχική συνθήκη). Ο προτεινόμενος Παρατηρητής μπορεί να αναπαρασταθεί από το επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(w(t), u(t))z(t) + b(w(t), u(t)), t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \dot{w}(t) &= f(w(t), u(t)) + C'(w(t))z(t) \\ z(\tau_{i+1}) &= P(\delta_{\tau_i}y, \delta_{\tau_i}u), w(\tau_{i+1}) = y(\tau_{i+1}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\tau_{i+1} = \tau_i + r$$

$$z(t) \in \mathbb{R}^n, w(t) \in \mathbb{R}^k, (z(t), w(t)) \in O \subseteq \mathbb{R}^{n+k}.$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο, από τα προηγούμενα καταλήγουμε στο εξής Πρόρισμα.

Πόρισμα 2.7. Θεωρούμε το σύστημα (2.1) και υποθέτουμε ότι ισχύει η υπόθεση (H1). Θεωρούμε την μοναδική λύση $(x(t), y(t), z(t), w(t)) \in O \times O$ των (2.1), (2.19) με τυχαία αρχική συνθήκη την $(x_0, y_0, z_0, w_0) \in O \times O$ που αντιστοιχεί σε τυχαία είσοδο $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; U)$. Τότε, η λύση $(x(t), y(t), z(t), w(t)) \in O \times O$ ικανοποιεί την

$$z(t) = x(t), w(t) = y(t) \quad \forall t \geq r. \quad (2.20)$$

Απόδειξη. Η λύση $(z(t), w(t)) \in O$ των

$$\dot{z}(t) = A(w(t), u(t))z(t) + b(w(t), u(t))$$

και

$$\dot{w}(t) = f(w(t), u(t)) + C'(w(t))x(t)$$

υπάρχει για όλα τα $t \in [0, r)$ (λόγω της υποτεθείσας δεξιιάς πληρότητας του συστήματος (2.1)) και είναι φραγμένη επί του $[0, r)$. Επιπλέον, έπεται από τις (2.6), (2.14) και τον Ορισμό (2.17) ότι $x(\tau_1) = x(r) = P(\delta_0 y, \delta_0 u)$. Επομένως, οι «διακοπτόμενοι» (switching) κανόνες του συστήματος (2.19) συνεπάγονται ότι $z(\tau_1) = x(\tau_1)$ και $w(\tau_1) = y(\tau_1)$. Εξαιτίας των λύσεων της (2.1) λαμβάνουμε $z(t) = x(t)$ και $w(t) = y(t)$ για όλα τα $t \in [r, 2r)$. Εφαρμόζοντας τετριμμένους ισχυρισμούς επαγωγής, καταλήγουμε στο ότι ισχύει η (2.20). \square

Παρατήρηση 2.8. Ο προτεινόμενος Παρατηρητής (2.19) είναι ένα υβριδικό σύστημα που χρησιμοποιεί καθυστερήσεις (delays): χρησιμοποιείται η ιστορία της εξόδου προκειμένου να υπολογισθεί το μέρος x της κατάστασης του συστήματος (2.1). Για το συνολικό σύστημα (2.1) με την (2.19) δεν ισχύει η κλασική ιδιότητα ημιομάδος. Εντούτοις, ισχύει η ασθενής ιδιότητα της ημιομάδος (Ορισμός 1.6, Κεφάλαιο 1). Πρέπει να σημειωθεί ότι ως συνέπεια του Πορίσματος 2.4 για την περίπτωση $k = 1$ μια επαρκής συνθήκη για την υπόθεση (H1) είναι η επόμενη:

- Για κάθε $(x_0, y_0) \in O, u \in L^\infty([0, r]; U)$ υπάρχουν $t, t_1, \dots, t_{n-1} \in [0, r]$ για τα οποία ισχύει η (2.16).

Υποθέτουμε τώρα ότι πέραν της υπόθεσης (H1) ισχύει και η επόμενη.

(H2) Υπάρχουν ανοικτά σύνολα $D \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοια ώστε $O = D \times \Omega$. Επιπλέον, για κάθε $\xi \in D$ και κάθε $(y, u) \in L^\infty([0, r]; \Omega) \times L^\infty([0, r]; U)$, η λύση $z(t)$ της $\dot{z}(t) = A(y(t), u(t))z(t) + b(y(t), u(t))$ με $z(0) = \xi$ ικανοποιεί την $z(t) \in D$ για όλα τα $t \in [0, r]$. Αν ισχύει η (H2), μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν υβριδικό, dead-beat Παρατηρητή μειωμένης τάξεως για το σύστημα (2.1), ο οποίος είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(w(t), u(t))z(t) + b(w(t), u(t)), t \in [t_i, t_{i+1}) \\ z(\tau_{i+1}) &= P(\delta_{\tau_i} y, \delta_{\tau_i} u) \\ \tau_{i+1} &= \tau_i + r \\ z(t) &\in D \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.21}$$

όπου $P: L^\infty([0, r]; \Omega) \times L^\infty([0, r]; U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ο τελεστής που ορίζεται από την (2.17).

Πόρισμα 2.9. Θεωρούμε το σύστημα (2.1) και υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις (H1), (H2). Θεωρούμε την μοναδική λύση $(x(t), y(t), z(t)) \in D \times \Omega \times D$ των (2.1), (2.21) με τυχαία αρχική συνθήκη $(x_0, y_0, z_0) \in D \times \Omega \times D$ που αντιστοιχεί σε τυχαία είσοδο $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; U)$. Τότε, η λύση $(x(t), y(t), z(t)) \in D \times \Omega \times D$ των (2.1), (2.21) ικανοποιεί την $z(t) = x(t), t \geq r$.

Σκιαγράφιση Απόδειξης. Η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν του Πορίσματος 2.7. Η μόνη διαφορά είναι ότι η υπόθεση (H2) εξασφαλίζει ότι η λύση $z(t) \in D$ του $\dot{z}(t) = A(w(t), u(t))z(t) + b(w(t), u(t))$ υπάρχει για όλα τα $t \in [0, r)$ και είναι φραγμένη επί του διαστήματος $[0, r)$. □

2.4 Ζητήματα Ευρωστίας

Στην παρούσα ενότητα περιγράφουμε τις ιδιότητες ευρωστίας του προαναφερθέντος Παρατηρητή. Εμμένουμε στην περίπτωση όπου αμφότερες οι (H1), (H2) ισχύουν με $D = \mathbb{R}^n$, $\Omega = \mathbb{R}^k$ (αν και η ίδια προσέγγιση μπορεί να εφαρμοσθεί σε συστήματα που ικανοποιούν μόνο την υπόθεση (H1)).

Χρησιμοποιούμε τον όρο «σφάλμα μέτρησης» για να περιγράψουμε μια μετρήσιμη και τοπικά essentially φραγμένη είσοδο $e: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^k$ η οποία αλλοιώνει τις τιμές της εξόδου

οι οποίες ανατροφοδοτούνται στον Παρατηρητή, δηλαδή ο Παρατηρητής περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(\tilde{y}(t), u(t))z(t) + b(\tilde{y}(t), u(t)), t \in [t_i, t_{i+1}) \\ z(\tau_{i+1}) &= P(\delta_{\tau_i} \tilde{y}, \delta_{\tau_i} u) \\ \tau_{i+1} &= \tau_i + r \\ z(t) &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.22)$$

όπου $P: L^\infty([0, r]; \Omega) \times L^\infty([0, r]; U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ένας τελεστής που δίνεται από την (2.17) και

$$\tilde{y}(t) = y(t) + e(t), \forall t \geq 0 \quad (2.23)$$

Πρωταρχικά, πρέπει να σημειωθεί ότι ο Παρατηρητής dead-beat δεν μπορεί να εξασφαλισθεί κάτω από σφάλματα μέτρησης. Παρ' όλα αυτά, γίνεται να ικανοποιούνται διαφορετικές ιδιότητες ευρωστίας υπό κατάλληλες συνθήκες. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον τύπο $z(\tau_{i+1}) = P(\delta_{\tau_i} \tilde{y}, \delta_{\tau_i} u) = P(\delta_{\tau_i} y + \delta_{\tau_i} e, \delta_{\tau_i} u)$ για όλα τα $i \geq 0$ και το Πρόσχημα 2.9, το οποίο εξασφαλίζει ότι $x(\tau_{i+1}) = P(\delta_{\tau_i} y, \delta_{\tau_i} u)$, $\forall i \geq 0$, καταλήγουμε στο ότι το σφάλμα του Παρατηρητή που επάγεται από το σφάλμα μέτρησης την στιγμή $t = \tau_{i+1}$ ($i \geq 0$) θα ικανοποιεί την $|z(\tau_{i+1}) - x(\tau_{i+1})| = |P(\delta_{\tau_i} y + \delta_{\tau_i} e, \delta_{\tau_i} u) - P(\delta_{\tau_i} y, \delta_{\tau_i} u)|$ για όλα τα $i \geq 0$.

Σε αυτό το σημείο, εισάγουμε ένα ζεύγος υποθέσεων ούτως ώστε να αναλύσουμε περαιτέρω την χρονική εξέλιξη του σφάλματος του Παρατηρητή.

(R1) Για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ και $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U)$, η μοναδική λύση $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ του (2.1) με αρχική συνθήκη $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, που αντιστοιχεί σε είσοδο $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U)$ ικανοποιεί την $\sup_{t \geq 0} |y(t)| + \sup_{t \geq 0} |x(t)| < +\infty$.

(R2) Ο τελεστής $L^\infty([0, r]; \mathbb{R}^k) \times L^\infty([0, r]; U) \ni (y, u) \mapsto P(y, u) \in \mathbb{R}^n$ είναι completely συνεχής ως προς $y \in L^\infty([0, r]; \mathbb{R}^k)$, ήτοι, για κάθε ζεύγος φραγμένων συνόλων $S \subset L^\infty([0, r]; \mathbb{R}^k)$, $V \subseteq L^\infty([0, r]; U)$ η εικόνα $P(S \times U) \subset \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη και για

κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|P(y,u) - P(\hat{y},u)| < \varepsilon$ για κάθε $y, \hat{y} \in S, u \in V$ με $\sup_{t \geq 0} |y(t) - \hat{y}(t)| < \delta$.

Η υπόθεση (R1) επιβάλλει περιορισμούς στην δυναμική συμπεριφορά του συστήματος (2.1). Από την άλλη, η υπόθεση (R2) είναι μια υπόθεση συνέχειας η οποία ικανοποιείται εύκολα για ορισμένες περιπτώσεις. Μια περίπτωση όπου η υπόθεση (R2) ισχύει είναι όταν για κάθε ζεύγος φραγμένων συνόλων $S \subset L^\infty([0, r]; \mathbb{R}^k), V \subseteq L^\infty([0, r]; U)$ υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε $\det(Q) \geq a$ για όλα τα $y \in S, u \in V$,

$$\text{όπου } Q = \int_0^r q(\tau) q'(\tau) d\tau, \quad q(\tau) = \int_0^\tau \Phi'(s, y; u) C(s) ds, \quad C'(\tau) = (c_{i,j}(y(\tau)))_{k \times n}.$$

Ένα άλλο αξιοσημείωτο σημείο είναι ότι η εκτίμηση του συστήματος (2.1) υπό την υπόθεση (R1) δεν μπορεί να γίνει μέσω υψηλερδών (high-gain) Παρατηρητών. Πράγματι, αν και το υποσύστημα $\dot{x}(t) = A(y(t), u(t))x(t) + b(y(t), u(t))$ είναι ολικά Lipschitz όταν ισχύει η (R1) και όταν εφαρμόζεται φραγμένη είσοδος $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U)$, δεν έχουμε γνώση της σταθεράς Lipschitz του συστήματος (καθώς δεν υποθέτουμε γνώση του $\sup_{t \geq 0} |y(t)|$), που εν γένει εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ και από την εφαρμοζόμενη είσοδο $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U)$.

Κάνοντας χρήση των υποθέσεων (R1) και (R2), είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.10. Θεωρούμε το σύστημα (2.1) για το οποίο ισχύουν οι υποθέσεις (H1) και (H2) με $D = \mathbb{R}^n, \Omega = \mathbb{R}^k$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι επίσης ισχύουν οι υποθέσεις (R1) και (R2). Τότε,

- (a) για κάθε $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, (u, e) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U) \times L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^k)$ η λύση $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ των (2.1), (2.22), (2.23) με αρχική συνθήκη $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ που αντιστοιχούν σε εισόδους $(u, e) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U) \times L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^k)$ ικανοποιεί την $\sup_{t \geq 0} |z(t) - x(t)| < +\infty$,

- (b) για κάθε $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U)$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $e \in L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^k)$ με $\sup_{t \geq 0} |e(t)| < \delta$ η λύση $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ των (2.1), (2.22), (2.23) με αρχική συνθήκη $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ που αντιστοιχεί σε εισόδους $(u, e) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U) \times L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^k)$ ικανοποιεί την $\sup_{t \geq 0} |z(t) - x(t)| < \varepsilon$,
- (c) για κάθε $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, $(u, e) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U) \times L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^k)$ με $\lim_{t \rightarrow +\infty} |e(t)| = 0$, η λύση $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ των (2.1), (2.22), (2.23) με αρχική συνθήκη $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ που αντιστοιχεί σε εισόδους $(u, e) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U) \times L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^k)$ ικανοποιεί την $\lim_{t \rightarrow +\infty} |z(t) - x(t)| = 0$.

Απόδειξη. Έστω δοθέν $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, $(u, e) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U) \times L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^k)$ και θεωρούμε την λύση $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ των (2.1), (2.22), (2.23) με αρχική συνθήκη $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ που αντιστοιχεί σε εισόδους $(u, e) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U) \times L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^k)$. Λόγω της υπόθεσης (R1) έχουμε $\|y\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |y(t)| < +\infty$ και $\|x\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |x(t)| < +\infty$. Η απόδειξη στηρίζεται στο ακόλουθο γεγονός, που εκμεταλλεύεται το ότι $A(y, u) = (a_{i,j}(y, u))_{n \times n}$ και ότι όλες οι απεικονίσεις $a_{i,j} : \mathbb{R}^k \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, \dots, n$) και όλες οι απεικονίσεις $b : \mathbb{R}^k \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι τοπικά Lipschitz. Η απόδειξη κάνει χρήση της ανισότητας Grönwall και είναι τετριμμένη.

Γεγονός. Υπάρχουν μη φθίνουσες συναρτήσεις $\kappa : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ και $R : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ τέτοιες ώστε

$$|x(t) - z(t)| \leq (|x(\tau_i) - z(\tau_i)| + r \|e\|_\infty R(s)) \exp(r\kappa(s)), \quad \forall t \in (\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (2.24)$$

όπου $s := \|y\|_\infty + \|u\|_\infty + \|e\|_\infty + \|x\|_\infty$, $\|y\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |y(t)|$, $\|u\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |u(t)|$, $\|e\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |e(t)|$.

Λόγω της υπόθεσης (R2), που εξασφαλίζει ότι η εικόνα $P(S \times U) \subset \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη, όπου $S \subset L^\infty([0, r]; \mathbb{R}^k)$ το φραγμένο σύνολο μετρήσιμων και essentially φραγμένων

συναρτήσεων $z: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\sup_{t \geq 0} |z(t)| \leq \|y\|_\infty + \|e\|_\infty$, και $V \subset L^\infty([0, r]; \mathbb{R}^k)$ το φραγμένο σύνολο των μετρήσιμων και essentially φραγμένων συναρτήσεων $v: [0, r] \rightarrow U$ με $\sup_{t \geq 0} |v(t)| \leq \|u\|_\infty$, υπάρχει $K \geq 0$ τέτοιο ώστε $|P(\delta_{\tau_i} y + \delta_{\tau_i} e, \delta_{\tau_i} u)| \leq K$, $|P(\delta_{\tau_i} y, \delta_{\tau_i} u)| \leq K$, $\forall i \geq 0$. Συνεπώς, από την (2.23) λαμβάνουμε:

$$|z(\tau_{i+1}) - x(\tau_{i+1})| \leq 2K, \forall i \geq 0 \quad (2.25)$$

Συνδυάζοντας τις (2.24) και (2.25) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\sup_{t \geq 0} |z(t) - x(t)| < +\infty$.

Η ανισότητα (2.24) συνεπάγεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 \in (0, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε $|z(t) - x(t)| < \varepsilon$ για όλα τα $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, δεδομένου ότι $\|e\|_\infty < \delta_1$ και $|z(\tau_i) - x(\tau_i)| < \delta_1$.

Επιπλέον, η υπόθεση (R2) και η (2.23) συνεπάγονται την ύπαρξη ενός $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ τέτοιου ώστε $|z(\tau_{i+1}) - x(\tau_{i+1})| < \delta_1$ δεδομένου ότι $\|e\|_\infty < \delta_2$. Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες ανισότητες, συμπεραίνουμε ότι $|z(t) - x(t)| < \varepsilon$ για όλα τα $t \geq r$,

δεδομένου ότι $\|e\|_\infty < \delta_2$. Επίσης, αν $\lim_{t \rightarrow +\infty} |e(t)| = 0$ τότε υπάρχει $i \geq 0$ επαρκώς μεγάλο,

τέτοιο ώστε $\sup_{t \geq \tau_i} |e(t)| < \delta_2$. Οι προηγούμενες ανισότητες καταλήγουν στο ότι

$|z(t) - x(t)| < \varepsilon$ για όλα τα $t \geq \tau_i + r$ και καθώς το $\varepsilon > 0$ είναι τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} |z(t) - x(t)| = 0$. □

Παρατήρηση 2.11. Αν ο πίνακας $A(y, u) = A(u)$, τότε δεν απαιτείται να υποθέσουμε ότι $\|x\|_\infty < +\infty$. Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση τα συμπεράσματα της Πρότασης 2.10 ισχύουν αν η υπόθεση (R1) αντικατασταθεί από την ακόλουθη ασθενέστερη υπόθεση:

(R3) Για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ και $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U)$, η μοναδική λύση $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ του (2.1) με αρχική συνθήκη $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, που αντιστοιχεί σε είσοδο $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U)$ ικανοποιεί την $\sup_{t \geq 0} |y(t)| < +\infty$.

2.5 Παράρτημα

Απόδειξη της Πρότασης 2.3.

(α) \Rightarrow (β) Η απόδειξη της συνεπαγωγής θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι η είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση $(x_0, y_0) \in O$ σε χρόνο $r > 0$. Παρατηρούμε ότι το Γεγονός I και οι Ορισμοί (2.7)-(2.11) εξασφαλίζουν ότι το (2.12) είναι πάντα επιλύσιμο και έχει την λύση $\xi = x_0$ με

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^r |p(t, x_0, y_0; u) - q'(t, x_0, y_0; u)x_0|^2 dt \\ &= \min_{\xi \in B(y_0)} \int_0^r |p(t, x_0, y_0; u) - q'(t, x_0, y_0; u)\xi|^2 dt. \end{aligned} \quad (A1)$$

Συνεπώς, η άρνηση του (β) είναι ο επόμενος ισχυρισμός: “Το πρόβλημα (2.12) έχει την λύση $\xi = x_1 \in \mathbb{R}^n$ με $x_1 \neq x_0$ και $(x_1, y_0) \in O$ ”. Επομένως, υποθέτουμε ότι ισχύει αυτός ο ισχυρισμός. Λόγω της (A1) πρέπει να ισχύει $0 = \int_0^r |p(t, x_0, y_0; u) - q'(t, x_0, y_0; u)x_1|^2 dt$. Η συνέχεια των απεικονίσεων $t \mapsto p(t, x_0, y_0; u)$ και $t \mapsto q(t, x_0, y_0; u)$ συνεπάγονται την αλήθεια του επομένου ισχυρισμού:

“υπάρχει $x_1 \neq x_0$ με $(x_1, y_0) \in O$ τέτοιο ώστε $p(t, x_0, y_0; u) = q'(t, x_0, y_0; u)x_1$ για όλα τα $t \in [0, r]$ ”.

Ο παραπάνω ισχυρισμός διασταυρούμενος με τους ορισμούς (2.8), (2.9), (2.11) δείχνει ότι (με άμεση διαφορίση):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t, x_0, y_0; u) &= f(y(t, x_0, y_0; u)) + C'(t, x_0, y_0; u) \\ &\quad \times [\Phi(t, x_0, y_0; u)x_1 + \theta(t, x_0, y_0; u)] \end{aligned}$$

όπου

$$\frac{d}{dt} [\Phi(t, x_0, y_0; u)x_1 + \theta(t, x_0, y_0; u)]$$

$$= A(y(t, x_0, y_0; u), u(t)) [\Phi(t, x_0, y_0; u) x_1 + \theta(t, x_0, y_0; u)] + b(y(t, x_0, y_0; u), u(t))$$

για σχεδόν όλα τα $t \in [0, r]$. Συνεπώς, η μοναδικότητα των λύσεων για την (2.1) συνεπάγεται ότι $x(t, x_1, y_0; u) = \Phi(t, x_0, y_0; u) x_1 + \theta(t, x_0, y_0; u)$ και $y(t, x_1, y_0; u) = y(t, x_0, y_0; u)$ για όλα τα $t \in [0, r]$. Επομένως, ισχύει ότι:

“υπάρχει $x_1 \neq x_0$ με $(x_1, y_0) \in O$ τέτοιο ώστε $y(t, x_1, y_0; u) = y(t, x_0, y_0; u)$ για όλα τα $t \in [0, r]$ ”.

Ο παραπάνω ισχυρισμός αντικρούεται από την υπόθεση ότι η είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση $(x_0, y_0) \in O$ σε πεπερασμένο χρόνο $r > 0$.

(b) \Rightarrow (a) Ας υποτεθεί ότι το πρόβλημα (2.12) έχει την μοναδική λύση $\xi = x_0$. Υποθέτουμε ότι η είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ δεν διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση $(x_0, y_0) \in O$ σε χρόνο $r > 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι

“υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}^n$ με $x_1 \neq x_0$ και $(x_1, y_0) \in O$ τέτοιο ώστε $y(t, x_1, y_0; u) = y(t, x_0, y_0; u)$ για όλα τα $t \in [0, r]$ ”.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα μέρη y από τις διαφορετικές αρχικές καταστάσεις $(x_0, y_0) \in O$ και $(x_1, y_0) \in O$ που παράγουν ταυτόσημες εξόδους για $t \in [0, r]$, αναγκαστικά συμπίπτουν. Εξαιτίας του Γεγονότος I και των Ορισμών (2.7)-(2.11) έπεται ότι $p(t, x_0, y_0; u) = q'(t, x_0, y_0; u) x_1$ για όλα τα $t \in [0, r]$. Επομένως, πρέπει να

έχουμε: $0 = \int_0^r |p(t, x_0, y_0; u) - q'(t, x_0, y_0; u) x_1|^2 dt$. Αυτό δείχνει ότι η $x_1 \in \mathbb{R}^n$ με $x_1 \neq x_0$

και $(x_1, y_0) \in O$ είναι μια λύση του προβλήματος (2.12) που έρχεται σε αντίθεση με την μοναδικότητα των λύσεων του προβλήματος (2.12).

(b) \Rightarrow (c) Πάλι, η απόδειξη της συνεπαγωγής θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα (2.12) έχει την μοναδική λύση $\xi = x_0$. Σημειώνουμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση για το πρόβλημα (2.12) είναι η τετραγωνική συνάρτηση:

$$\begin{aligned}
 R(\xi) &:= \int_0^r |p(t, x_0, y_0; u) - q'(t, x_0, y_0; u) x_1|^2 dt \\
 &= \int_0^r |p(t, x_0, y_0; u)|^2 dt - 2 \int_0^r p'(t, x_0, y_0; u) q'(t, x_0, y_0; u) dt \xi + \xi' Q(r, x_0, y_0; u) \xi \quad (A2)
 \end{aligned}$$

όπου το $Q(r, x_0, y_0; u)$ ορίζεται στην (2.13) και για το οποίο ισχύει

$$\begin{aligned}
 R(\xi) &= R(x_0) + 2 \left[- \int_0^r q(t, x_0, y_0; u) p(t, x_0, y_0; u) dt + Q(r, x_0, y_0; u) x_0 \right]' (\xi - x_0) \\
 &\quad + (\xi - x_0)' Q(r, x_0, y_0; u) (\xi - x_0). \quad (A3)
 \end{aligned}$$

Καθώς η $\xi = x_0$ είναι μια λύση του προβλήματος (2.12) και καθώς το O είναι ανοικτό, η παραπάνω ισότητα δεικνύει ότι πρέπει να έχουμε αναγκαστικά

$$\int_0^r q(t, x_0, y_0; u) p(t, x_0, y_0; u) dt = Q(r, x_0, y_0; u) x_0 \quad (A4)$$

Από την άλλη, ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός (c) δεν ισχύει, δηλαδή υποθέτουμε ότι ο συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας

$$Q(r, x_0, y_0; u) = \int_0^r q(t, x_0, y_0; u) q'(t, x_0, y_0; u) dt \text{ δεν είναι θετικά ορισμένος. Συνεπώς}$$

υπάρχει $\zeta \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \neq 0$ τέτοιο ώστε $\zeta' Q(r, x_0, y_0; u) \zeta = 0$. Έπεται από τα (A3), (A4) και για επαρκώς μικρό $\lambda > 0$ ότι το διάνυσμα $\xi = x_0 + \lambda \zeta$ θα ικανοποιεί την $(\xi, y_0) \in O$, καθώς το O είναι ανοικτό και $R(\xi) = R(x_0)$, δηλαδή το διάνυσμα $\xi = x_0 + \lambda \zeta$ είναι μια επιπλέον λύση για το πρόβλημα (2.12) με $\xi \neq x_0$, άτοπο.

Άρα, ο $Q(r, x_0, y_0; u) = \int_0^r q(t, x_0, y_0; u) q'(t, x_0, y_0; u) dt$ είναι θετικά ορισμένος. Η εξίσωση

(2.14) είναι άμεση συνέπεια της (A4).

(c) \Rightarrow (b) Αυτή η συνεπαγωγή είναι άμεση συνέπεια των (A2)-(A4) που δείχνουν ότι

$R(\xi) = (\xi - x_0)' Q(r, x_0, y_0; u) (\xi - x_0)$, για όλα τα $\xi \in \mathbb{R}^n$ with $(\xi, y_0) \in O$. Σημειωτέον ότι η εξίσωση (2.7) εγγυάται ότι $R(\xi) = 0$.

(c) \Rightarrow (d) Αυτή η συνεπαγωγή έπεται από το γεγονός ότι

$$\xi' Q(r, x_0, y_0; u) \xi = \int_0^r |q'(t, x_0, y_0; u) \xi|^2 dt, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(d) \Rightarrow (c) Ο ισχυρισμός (c) έπεται από το γεγονός ότι

$$\xi' Q(r, x_0, y_0; u) \xi = \int_0^r |q'(t, x_0, y_0; u) \xi|^2 dt, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

και το γεγονός ότι η απεικόνιση $t \mapsto q(t, x_0, y_0; u)$ είναι συνεχής. Ο τύπος (2.14) που υπολογίζει το x_0 ακολουθεί άμεσα το Γεγονός I και την ισότητα (2.7). \square

Παρατήρηση. Η παραπάνω απόδειξη μπορεί να αντικατασταθεί από αυτήν που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 1, ενότητα 1.5. Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε την ισοδύναμη μορφή (2.1b) του συστήματος και εξάγουμε την λύση στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης (2.12) ως ψευδοαντίστροφο ενός τελεστή παρατηρησιμότητας. Με αυτήν την μέθοδο καταλήγουμε στις ίδιες ικανές συνθήκες, όπως στην προηγούμενη απόδειξη. Πράγματι, το σύστημα (2.1b) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(y(t), u(t)) \tilde{x}(t) + \tilde{f}(y(t), u(t)) \\ y(t) &= \tilde{C} \tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

όπου $\tilde{x}(t) = (x(t) \quad y(t))' \in \mathbb{R}^{n+k}$,

$$\tilde{A}(y(t), u(t)) := \begin{pmatrix} A(y(t), u(t)) & 0 \\ C'(y(t)) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0_{k \times n} \quad I_{k \times k}), \quad \tilde{f}(y(t), u(t)) = \begin{pmatrix} b(y(t), u(t)) \\ f(y(t), u(t)) \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης του χρονομεταβλητού γραμμικού συστήματος

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(y(t), u(t)) \tilde{x}(t) \quad \text{είναι ο} \quad \tilde{\Phi}(t, \tau; u) = \begin{pmatrix} \Phi(t, \tau; u) & 0 \\ \int_0^t C'(s; u) \Phi(t, \tau; u) ds & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου}$$

$\Phi(t, \tau; u)$ ο πίνακας μετάβασης του $\dot{x}(t) = A(y(t), u(t))x(t)$, που εκκινεί από χρόνο $t = \tau$, όπου τα $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; U)$ και $y \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; U)$ θεωρούνται οι είσοδοι και

$$C'(t) := (c_{i,j}(y(t)))_{k \times n}.$$

Η λύση στην ολοκληρωτική της μορφή γράφεται υπό την μορφή:

$$\tilde{x}(t, x_0; u) = \tilde{\Phi}(t, 0; u) \tilde{x}_0 + \int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau; u) \tilde{f}(y(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (A6)$$

Η έξοδος δίνεται από την σχέση:

$$y(t) = \tilde{C} \tilde{\Phi}(t, 0; u) \tilde{x}_0 + \tilde{C} \int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau; u) \tilde{f}(y(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (A7)$$

Ακολουθούμε την λογική του κεφαλαίου 1, ενότητα 1.5. Λαμβάνουμε υπ' όψιν την υπόθεση της ισχυρής παρατηρησιμότητας, δηλαδή ότι η Gramian $(\mathcal{O}^* \mathcal{O})^{-1} = \int_0^r \tilde{\Phi}'(t, \tau; u) \tilde{C}' \tilde{C} \tilde{\Phi}(t, \tau; u) dt = Q$, που επίσης δίνεται από την (2.13), είναι θετικά ορισμένη. Τότε, η αρχική κατάσταση δίνεται μοναδικά από τον τύπο:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= \left(\mathcal{O}^* \mathcal{O} \right)^{-1} \mathcal{O}^* P \left(y(t) - \tilde{C} \int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau; u) \tilde{f}(y(\tau), u(\tau)) d\tau \right) \\ &= \left(\int_0^r \tilde{\Phi}'(t, 0; u) \tilde{C}' \tilde{C} \tilde{\Phi}(t, 0; u) dt \right)^{-1} \\ &\quad \times \int_{t_0}^r \tilde{\Phi}'(t, 0; u) \tilde{C}' \left[y(t) - \tilde{C} \int_0^t \tilde{\Phi}(t, \tau; u) \tilde{f}(y(\tau), u(\tau)) d\tau \right] dt \end{aligned} \quad (A8)$$

Αυτή είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων του προβλήματος βελτιστοποίησης $\min \left\{ \left\| \mathcal{O}x - \bar{y}(\bullet) \right\|_{L^2([t_0, r]; \mathbb{R}^k)} : x \in \mathcal{O} \right\}$, όπου $\bar{y}(\bullet) := y(\bullet) - \tilde{C} \int_0^\bullet \tilde{\Phi}(t, \tau; u) \tilde{f}(y(\tau), u(\tau)) d\tau$ και όπως παρατηρούμε είναι η ισοδύναμη γραφή του προβλήματος βελτιστοποίησης (2.12).

Από την (A8) και εκτελώντας απλές πράξεις Γραμμικής Άλγεβρας, εξάγουμε και τον τύπο για το x_0 που δίνεται από την (2.14) στην Πρόταση 2.3.

Συμπερασματικά, από την προηγούμενη Αναλυτική προσέγγιση, καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα όπως και στην Πρόταση 2.3. Η προαναφερθείσα βασική αυτή μέθοδος θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα Κεφάλαια. Εκεί, διερευνούμε την επέκταση της μεθόδου του κεφαλαίου 2 σε συστήματα που είναι μη γραμμικά στην μη μετρούμενη κατάσταση. Η μέθοδος σχεδίασης των υβριδικών Παρατηρητών θα βασισθεί σε εργαλεία Συναρτησιακής Ανάλυσης, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 1.

3 ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΜΙΑΣ ΚΛΑΣΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΜΗ ΜΕΤΡΟΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΥΒΡΙΔΙΚΟΣ DEAD-BEAT ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν Κεφάλαιο επιχειρείται να εξαχθούν ικανές συνθήκες υπό τις οποίες η άγνωστη κατάσταση μιας κλάσης μη γραμμικών συστημάτων μπορεί να ανακατασκευασθεί μετά από συγκεκριμένο πεπερασμένο χρόνο, μέσω συστήματος Παρατηρητή. Στο προηγούμενο Κεφάλαιο, το σύστημα το οποίο αναλύθηκε ήταν γραμμικό ως προς την μη μετρούμενη κατάσταση και μη γραμμικό ως προς την μετρούμενη κατάσταση. Το σύστημα σε αυτό το Κεφάλαιο είναι μη γραμμικό ως προς την πλήρη κατάσταση και τα εργαλεία, επομένως, που χρησιμοποιούμε διαφέρουν. Το δυναμικό σύστημα υπό μελέτη είναι πεπερασμένης διάστασης και ντετερμινιστικό και συνοδεύεται από ένα γραμμικό διάνυσμα εξόδου.

$$\dot{x} = A(y, u)x + f(t, x, y, u) \quad (3.1a)$$

$$y = C(t)x \quad (3.1b)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k, u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$$

όπου U μη κενό κλειστό σύνολο. Η εξίσωση (3.1a) παριστά ένα χρονομεταβλητό δυναμικό σύστημα που περιγράφει την εξέλιξη της άγνωστης κατάστασης x , εξαρτώμενης από την είσοδο $u: [0, \infty) \rightarrow U$ και την έξοδο $y \in \mathbb{R}^k$. Ο πρώτος όρος της (3.1a) είναι γραμμικός ως προς την άγνωστη κατάσταση x και f ένας όρος μη γραμμικής διαταραχής. Οι μετρήσεις που παρέχονται από το διάνυσμα y στην (3.1b),

είναι γραμμικές ως προς την άγνωστη κατάσταση. Υποθέτουμε ότι το σύνολο των αποδεκτών εισόδων u είναι το $\mathcal{U} \subseteq L_{loc}^{\infty}([0, \infty); U)$.

Στην παρούσα εργασία, το πρόβλημα της παρατηρησιμότητας προσεγγίζεται χρήση της Θεωρίας Σταθερού Σημείου. Μια σχετική προσέγγιση είχε εισαχθεί στην εργασία των (Quinn & Carmichael, 1985). Στοχεύουμε στο να εξαγάγουμε τις συνθήκες υπό της οποίες επιτυγχάνεται παρατηρησιμότητα και, ύστερα, μια συγκεκριμένη μέθοδο για να καθορισθεί η άγνωστη κατάσταση x σε πεπερασμένο χρόνο, δηλαδή να ανακατασκευασθεί η τροχιά του συστήματος (3.1), βασιζόμενοι μόνο στην είσοδο u και το διάνυσμα παρατήρησης (εξόδου) y σε ένα φραγμένο κλειστό διάστημα. Η στρατηγική αυτή οδηγεί στον ορισμό ενός υβριδικού dead-beat Παρατηρητή που λαμβάνει ένα ακριβές αντίγραφο του συστήματος μέχρι μια πεπερασμένη χρονική στιγμή $t = r$, το οποίο εκκινεί από μια τυχαία αρχική συνθήκη και στην χρονική αυτή στιγμή αλλάζει τιμή κρουστικά (impulsively). Το impulse αυτό ισούται με την ακριβή τιμή της άγνωστης κατάστασης την χρονική στιγμή αλλαγής (switching) $t = r$. Η παρατηρησιμότητα αποδεικνύεται μέσω της ιδιότητας μοναδικότητας ενός σταθερού σημείου (fixed point) συγκεκριμένου τελεστή και υπό ορισμένες συνθήκες επί της (πεπερασμένου χρόνου) Gramian παρατηρησιμότητας. Οι συνθήκες μοναδικότητας που συνεπάγονται παρατηρησιμότητα είναι ικανές να καθορίσουν το impulse στον χρόνο $t = r$. Στηριζόμαστε σε επαναλήψεις Picard οι οποίες συγκλίνουν στην άγνωστη τροχιά x σε χρόνο $t = r$. Στα επόμενα, χρησιμοποιούμε τη νόρμα $|A|$ που παριστά το μέγιστο απόλυτο άθροισμα στήλης του πίνακα A .

3.2 Αποτελέσματα Παρατηρησιμότητας

Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να διερευνήσει την παρατηρησιμότητα του συστήματος (3.1) και την ύπαρξη Παρατηρητή που καθορίζει (ανακατασκευάζει) την άγνωστη κατάσταση $x(t)$ μετά συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t = r$.

Είναι απαραίτητες οι ακόλουθες συνθήκες που αφορούν την δυναμική συμπεριφορά του (3.1), ώστε να προχωρήσουμε στην βασική ανάλυση. Η (H3) είναι μια υπόθεση Persistence of Excitation.

Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα για κάποια είσοδο $u \in \mathcal{U}$:

(H1) Υπάροχει απεικόνιση $k_1^u \in N$, τέτοια ώστε για $1 \leq i, j \leq n$:

$$|a_{ij}(y(t), u(t))| \leq k_1^u(t), t \geq 0, y \in \mathbb{R}^k,$$

όπου $a_{ij}(y(t), u(t))$ είναι τα στοιχεία του πίνακα $A(y(t), u(t))$, δηλαδή

$$A(y(t), u(t)) = (a_{ij}(y(t), u(t)))_{n \times n}$$

Υπάροχει απεικόνιση $k_2^u \in N$, τέτοια ώστε για $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$:

$$|c_{ij}(t)| \leq k_2^u(t), t \geq 0,$$

$$\text{όπου } (c_{ij}(t))_{k \times n} = C(t)$$

(H2) Για την απεικόνιση $f \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times U; \mathbb{R}^n)$ υποθέτουμε ότι

$$(\exists L^u)(\forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n) |f(t, x, y, u) - f(t, \bar{x}, y, u)| \leq L^u |x - \bar{x}|, t \geq 0, y \in \mathbb{R}^k.$$

Υπόθεση I. Υποθέτουμε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$ και $u \in \mathcal{U} \subseteq L_{loc}^\infty([t_0, \infty); U)$, υπάρχει μοναδική απεικόνιση

$[t_0, \infty) \ni t \mapsto x(t) = x(t, t_0, x_0; u) \in \mathbb{R}^n$, με $x(t_0) = x(t_0, x_0; u) = x_0$, που ικανοποιεί την (3.1a) σχεδόν για όλα τα $t \geq t_0$. Το (3.1a) ότι είναι δεξιά πλήρες. Ο ορισμός της δεξιάς πληρότητας δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 3.1. Έστω $M \subset \mathbb{R}^n$. Το σύστημα (3.1a) καλείται M -δεξιά πλήρες αν για κάθε αρχικά $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ και είσοδο $u \in \mathcal{U}$ η αντιστοιχούσα τροχιά $x(\cdot, t_0, x_0; u)$ του (3.1a) που εκκινεί από $x_0 \in M$ σε χρόνο t_0 υπάρχει για όλα τα $t \geq t_0$.

Προχωρούμε στον βασικό κορμό της ανάλυσης, που στοχεύει στην εξαγωγή των συνθηκών παρατηρησιμότητας. Πρώτον, πρέπει να γίνει η ακόλουθη υπόθεση, ένα συμπέρασμα παρατηρησιμότητας για το γραμμικό μέρος του (3.1):

(H3) Για δοθέν $t_0 \geq 0$ υπάρχει σταθερά $r > t_0$, τέτοια ώστε η $G_{y,u}(r, t_0)$ είναι αντιστρέψιμη και έστω σταθερά $c^u(r) > 0$, τέτοια ώστε

$$\left| (G_{y,u}(r, t_0))^{-1} \right| \leq c^u(r) \quad (3.2)$$

όπου

$$G_{y,u}(r, t_0) = \int_{t_0}^r \Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t) C(t) \Phi_{y,u}(t, t_0) dt \quad (3.3)$$

η Gramian παρατηρησιμότητας και $\Phi_{y,u}(t, t_0)$, με $\Phi_{y,u}(t_0, t_0) = I_{n \times n}$, ο πίνακας μετάβασης του γραμμικού χρονομεταβλητού συστήματος

$$\dot{\hat{x}} = A(y, u) \hat{x}$$

με εισόδους (y, u) .

Ιδιότητα 3.2. Θεωρούμε το σύστημα (3.1a) με έξοδο (3.1b). Λέμε ότι η είσοδος $u \in \mathcal{U}$ “διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ in $[t_0, r]$ ”, αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$\max_{t \in [t_0, r]} |C(t)x(t, t_0, x_0; u) - C(t)x(t, t_0, \xi; u)| > 0, \quad \text{για όλα τα } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ με } x_0 \neq \xi, \text{ όπου}$$

$x(t, x_0, t_0; u), x(t, t_0, \xi; u)$ οι τροχιές που εκκινούν από x_0 και ξ αντίστοιχα σε χρόνο $t = t_0$.

Δίνουμε τώρα έναν ορισμό παρατηρησιμότητας.

Ορισμός 3.3. Θεωρούμε το σύστημα (3.1a) με έξοδο (3.1b). Λέμε ότι το (3.1) είναι ισχυρά παρατηρήσιμο επί του $[t_0, r]$ αν κάθε είσοδος $u \in \mathcal{U}$ διαχωρίζει ισχυρά κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ στο $[t_0, r]$.

Η βασική ιδέα ώστε να ανακατασκευασθεί η άγνωστη κατάσταση σε πεπερασμένο χρόνο $t = r$ είναι να θεωρηθεί ένα βοηθητικό σύστημα του αρχικού συστήματος (3.1), αφού έχει αντικατασταθεί το όρισμα x της f με ένα τυχαίο $z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$:

$$\dot{\hat{x}} = A(y, u) \hat{x} + f(t, z, y, u), \quad t \in [t_0, r] \quad (3.4)$$

$$y(t) = C(t) \hat{x}(t), \quad t \in [t_0, r] \quad (3.5)$$

όπου $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ και $y(t)$ η έξοδος του συστήματος (3.1). Το σύστημα (3.4) είναι ένα γραμμικό, χρονομεταβλητό δυναμικό σύστημα, όπου τα z μπορούν να θεωρηθούν ως εισοδοι του συστήματος και συνοδεύεται από την σχέση εξόδου (3.5). Το παραπάνω fixed point trick χρησιμοποιείται επίσης στην διερεύνηση της ύπαρξης λύσεων σε σχεδόν γραμμικές εξελικτικές εξισώσεις, όπως αναλυτικά περιγράφεται στο (Zeidler

1990b), σελ. 485. Μέσω αυτής της διαδικασίας θέλουμε να καταλήξουμε στην σχέση $\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u) = \mathcal{F}_{y,u} z(t)$, όπου $\mathcal{F}_{y,u}$ κατάλληλος τελεστής και $\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u)$ η τροχιά που εκκινεί από \hat{x}_0 σε χρόνο $t = t_0$ και ικανοποιεί την (3.4) για σχεδόν όλα τα $t \in [t_0, r]$.

Το πρόβλημα ανάγεται στο να καθορισθεί ένα μοναδικό σταθερό σημείο του $\mathcal{F}_{y,u}$ και, επομένως, για κατάλληλα επιλεγόμενο $u \in \mathcal{U}$ μπορούμε να καθορίσουμε την άγνωστη κατάσταση x . Αυτά θα δοθούν στην Πρόταση 3.4.

Για οποιαδήποτε $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $(z, y, u) \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n) \times L_{loc}^\infty([t_0, r]; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{U}$, ισχύει η επόμενη εξίσωση, που παριστά την λύση της εξίσωσης (3.4) για σχεδόν όλα τα $t \in [t_0, r]$, με αρχική συνθήκη (t_0, \hat{x}_0) :

$$\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u) = \Phi_{y,u}(t, t_0) \hat{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds, \quad t \in [t_0, r] \quad (3.6)$$

όπου $(z, y, u) \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n) \times L_{loc}^\infty([t_0, r]; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{U}$ θεωρούνται είσοδοι.

Ύστερα, στοχεύουμε στο να λύσουμε την $y(t) = C(t) \hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u)$, $t \in [t_0, r]$ ως προς \hat{x}_0 .

Χρησιμοποιώντας την (3.6), αυτή η εξίσωση γράφεται:

$$y(t) = C(t) \Phi_{y,u}(t, t_0) \hat{x}_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds \quad (3.7)$$

και, καθώς ο παράγοντας $C(t) \Phi_{y,u}(t, t_0)$ δεν είναι αντιστρέψιμος, θεωρούμε τον ψευδοαντίστροφο κατάλληλου τελεστή παρατηρησιμότητας (βλέπε ενότητα 1.5, Κεφάλαιο 1). Η λύση \hat{x}_0 που εξάγεται από τον ψευδοαντίστροφο είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων και ελαχίστης νόρμας και στο πρόβλημα βελτιστοποίησης της L^2 - νόρμας:

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_{t_0}^r |y(t) - C(t) \hat{x}(t, t_0, \xi; z, u)|^2 dt \quad (3.8)$$

Η λύση ελαχίστων τετραγώνων του προβλήματος (3.8) δίδεται από:

$$\xi = \hat{x}_0 = \left(G_{y,u}(r, t_0) \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t)$$

$$\times \left[y(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t,s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds \right] dt \quad (3.9)$$

Και εξάγεται από την μέθοδο gradient. Η μέθοδος για να λάβουμε το βελτιστοποιημένο \hat{x}_0 που δίνεται από την (3.9) περιγράφεται αναλυτικά στην ενότητα 1.5, Κεφάλαιο 1.

Η εξίσωση (3.9) μπορεί πιο εύκολα να εξαχθεί με χρήση αλγεβρικών πράξεων στην σχέση εξόδου (3.7). Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά και τα δύο μέλη της (3.7) με το $\Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t)$ και ολοκληρώνουμε από t_0 ως r . Έχουμε

$$\int_{t_0}^r \Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t) y(t) dt = \int_{t_0}^r \Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t) C(t) \Phi_{y,u}(t, t_0) dt \hat{x}_0 + \int_{t_0}^r \Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t) C(t) \left(\int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds \right) dt \quad (3.10)$$

Έχουμε ήδη υποθέσει στην (H3) ότι για συγκεκριμένο $u \in \mathcal{U}$, η $G_{y,u}(r, t_0)$ που δίνεται από την (3.3), είναι αντιστρέψιμη και, άρα, πολλαπλασιάζοντας εξ αριστερών και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $G_{y,u}^{-1}(r, t_0)$, καταλήγουμε στην (3.9). Σημειώνουμε ότι η (3.9) ισχύει για την συγκεκριμένη είσοδο $u \in \mathcal{U}$ για την οποία ικανοποιείται η (H3).

Αντικαθιστούμε τώρα το \hat{x}_0 , που δίνεται από την (3.9), στην (3.6) και λαμβάνουμε:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u) = \Phi_{y,u}(t, t_0) \left(G_{y,u}(r, t_0) \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t) \times \left[y(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds \right] dt + \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds, \quad t \in [t_0, r] \quad (3.11)$$

Ορίζουμε έναν μη γραμμικό τελεστή $z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{F}_{y,u} z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$ που παριστά όλο το δεξιό μέλος της (3.11) και, άρα δίνεται από:

$$\mathcal{F}_{y,u} z(t) = \Phi_{y,u}(t, t_0) \left(G_{y,u}(r, t_0) \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[y(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t,s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds \right] dt \\ & + \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t,s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds, t \in [0, r] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Μέσω της (3.12), η εξίσωση (3.11) γράφεται ως

$$\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u) = \mathcal{F}_{y,u} z(t), t \in [t_0, r] \quad (3.13)$$

Στην ακόλουθη Πρόταση, παρέχουμε την σημασία της μοναδικότητας των λύσεων της εξίσωσης $\mathcal{F}_{y,u} z(t) = z(t)$, $t \in [t_0, r]$ και την σχέση της με την παρατηρησιμότητα του (3.1). Ειδικότερα, δίδουμε τις συνθήκες μοναδικότητας ενός σταθερού σημείου του μη γραμμικού τελεστή $\mathcal{F}_{y,u}$, ο οποίος δίνεται από την (3.12).

Πρόταση 3.4. Ας υποθεθεί ότι ισχύει η Υπόθεση I. Τότε, ισχύουν τα επόμενα σχετικά με την εξίσωση $\mathcal{F}_{y,u} z(t) = z(t)$, $t \in [t_0, r]$, όπου ο $\mathcal{F}_{y,u}$ δίνεται από την (3.12).

- (a) Για ένα συγκεκριμένο $u \in \mathcal{U}$, ο $\mathcal{F}_{y,u}$ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο $z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, δηλαδή το z ικανοποιεί την $\mathcal{F}_{y,u} z(t) = z(t)$, $t \in [t_0, r]$. Το σταθερό σημείο z είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.4) για σχεδόν όλα τα $t \in [t_0, r]$, με αρχική συνθήκη που δίνεται από την (3.9).
- (b) Υποθέτουμε ότι για μια είσοδο $u \in \mathcal{U}$, ο $\mathcal{F}_{y,u}$ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $z^* \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, δηλαδή το z^* ικανοποιεί την $\mathcal{F}_{y,u} z^*(t) = z^*(t)$, $t \in [t_0, r]$. Τότε, αυτή η είσοδος διαχωρίζει ισχυρά τις καταστάσεις της (3.1) στο $[t_0, r]$. Επιπλέον, αν ο $\mathcal{F}_{y,u}$ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο για κάθε είσοδο $u \in \mathcal{U}$, τότε το (3.1) είναι ισχυρά παρατηρήσιμο επί του $[t_0, r]$.
- (c) Υποθέτουμε ότι για κάποιο $u \in \mathcal{U}$ ικανοποιούνται η Υπόθεση I, η (H1), η (H2) και η (H3) και επιπλέον ισχύει ότι:

$$(r-t_0)c''(r)nk(k_2''(r))^2 \exp(2n(r-t_0)k_1''(r)) + 1 < \frac{1}{(r-t_0)L'' \exp(n(r-t_0)k_1''(r))} \quad (3.14)$$

Τότε,

- (i) ο τελεστής $\mathcal{F}_{y,u}$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο για την είσοδο $u \in \mathcal{U}$.
- (ii) για την είσοδο $u \in \mathcal{U}$, η άγνωστη κατάσταση μπορεί να ανακατασκευασθεί σε χρόνο r μέσω του $\mathcal{F}_{y,u}$.

Απόδειξη. (a) Παρατηρούμε ότι αν $\hat{x}(\bullet) = z(\bullet)$, από την (3.4) και την (3.5) ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\hat{x}(\bullet) = z(\bullet) \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}(\bullet) = A(y(\bullet), u(\bullet))z(\bullet) + f(\bullet, z(\bullet), y(\bullet), u(\bullet)) \\ C(\bullet)z(\bullet) = y(\bullet) \end{cases} \quad (3.15)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, το $z(\bullet)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος (3.1a), (3.1b). Καθώς το σύστημα (3.1a), (3.1b) είναι καλώς ορισμένο, υπάρχουν τροχιές $z(\bullet)$ που ικανοποιούν αμφότερες τις (3.1a) και (3.1b) και, επομένως, υπάρχουν $z(\bullet)$ για τα οποία $\hat{x}(\bullet) = z(\bullet)$. Αλλά από την (3.13), $\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u) = \mathcal{F}_{y,u} z(t)$, $t \in [t_0, r]$ και, άρα, υπάρχουν $z(\bullet)$ για τα οποία $\mathcal{F}_{y,u} z(t) = z(t)$, $t \in [t_0, r]$. Με άλλα λόγια, ο τελεστής $\mathcal{F}_{y,u}$ έχει σταθερά σημεία. Συνεπώς, τα σταθερά σημεία $z(\bullet)$ του $\mathcal{F}_{y,u}$ συμπίπτουν με τις τροχιές $x(\bullet)$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις (3.1a) και (3.1b). Εκ της Υπόθεσης I, είναι εγγυημένο ότι οι τροχιές που ικανοποιούν την (3.1a) υπάρχουν και είναι μοναδικές.

(b) Η ιδιότητα 3.2 μπορεί να εκφραστεί ως εξής: “Η είσοδος $u \in \mathcal{U}$ διαχωρίζει τις καταστάσεις x_0^1, x_0^2 στο $[t_0, r]$ αν η σχέση $C(t)x(t, t_0, x_0^1; u) = C(t)x(t, t_0, x_0^2; u)$ συνεπάγεται υποχρεωτικά ότι $x_0^1 = x_0^2$, όπου $x(t, t_0, x_0^i; u)$, $i = 1, 2$ οι λύσεις της (3.1) για αρχικές καταστάσεις x_0^i , $i = 1, 2$ ”.

Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{F}_{y,u}$ που δίνεται από την (3.12) έχει μοναδικό σταθερό σημείο $z^* \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, που ικανοποιεί την (3.11), ήτοι,

$$\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z^*, u) = z^*(t), t \in [t_0, r], \text{ όπου}$$

$$\hat{x}_0 = \hat{x}(t_0, t_0, \hat{x}_0; z^*, u) = z^*(t_0) = (G_{y,u}(r, t_0))^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t)$$

$$\times \left[y(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t,s) f(s, z^*(s), y(s), u(s)) ds \right] dt \quad (3.16)$$

Σύμφωνα με το (α), το z^* είναι το μοναδικό σταθερό σημείο, και, άρα, η λύση της (3.1), ίση με την κατάσταση x , επομένως λαμβάνουμε $\hat{x}_0 = x_0 := x(t_0, t_0, x_0; u)$. Βασιζόμενοι στον τύπο (3.16), ορίζουμε \hat{x}_0^1 και \hat{x}_0^2 , που αντιστοιχούν σε εξόδους $y^1(t)$, $y^2(t)$ αντίστοιχα, ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0^1 &= \left(G_{y^1,u}(r, t_0) \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{y^1,u}(t, t_0) C'(t) \\ &\times \left[y^1(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi_{y^1,u}(t,s) f(s, z^*(s), y^1(s), u(s)) ds \right] dt \end{aligned} \quad (3.17a)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_0^2 &= \left(G_{y^2,u}(r, t_0) \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{y^2,u}(t, t_0) C'(t) \\ &\times \left[y^2(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi_{y^2,u}(t,s) f(s, z^*(s), y^2(s), u(s)) ds \right] dt \end{aligned} \quad (3.17b)$$

όπου $y^1(t) := C(t)x(t, t_0, x_0^1; u)$, $y^2(t) := C(t)x(t, t_0, x_0^2; u)$. Αν υποθέσουμε $y^1(t) = y^2(t)$, από τις εξισώσεις (3.17a), (3.17b), έπεται ότι $\hat{x}_0^1 = \hat{x}_0^2$. Αλλά $\hat{x}_0^1 = x_0^1$, $\hat{x}_0^2 = x_0^2$ από το (α) και, επομένως, σύμφωνα με την Ιδιότητα 3.2, η επιλεγόμενη είσοδος διαχωρίζει τις καταστάσεις x_0^1 και x_0^2 στο $[t_0, r]$. Συνεπώς, καθώς τα x_0^1, x_0^2 επιλέγηκαν τυχαία, η είσοδος $u \in \mathcal{U}$ διαχωρίζει όλες τις καταστάσεις στο $[t_0, r]$. Επιπλέον, αν για κάθε $u \in \mathcal{U}$ ο τελεστής $\mathcal{F}_{y,u}$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο $z^* \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, το σύστημα (3.1) είναι παρατηρήσιμο επί του $[t_0, r]$.

(d) Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα του σταθερού σημείου, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach (Αρχή της Συστολής), που δίνει για δοθέν $u \in \mathcal{U}$ μοναδικό σταθερό σημείο για τον τελεστή $\mathcal{F}_{y,u}$ αν η απεικόνιση $\mathcal{F}_{y,u} : C([t_0, r]; \mathbb{R}^n) \rightarrow C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$ είναι συστολή. Έστω $z_1, z_2 \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$. Τότε, λόγω της (3.12), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{F}_{y,u} z_1 - \mathcal{F}_{y,u} z_2\| &= \max_{t \in [t_0, r]} \left| \Phi_{y,u}(t, t_0) (G_{y,u}(r, t_0))^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t) C(t) \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) (f(s, z_1(s), y(s), u(s)) - f(s, z_2(s), y(s), u(s))) ds \right) dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) (f(s, z_1(s), y(s), u(s)) - f(s, z_2(s), y(s), u(s))) ds \right| \Rightarrow \\
 \|\mathcal{F}_{y,u} z_1 - \mathcal{F}_{y,u} z_2\| &\leq (r - t_0) L^u \exp(n(r - t_0) k_1^u(r)) \\
 &\quad \times \left((r - t_0) c^u(r) n k(k_2^u(r))^2 \exp(2n(r - t_0) k_1^u(r)) + 1 \right) \|z_1 - z_2\| \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Επομένως, αν ισχύει η (3.14) για κάποιο $u \in \mathcal{U}$, η ποσότητα $(r - t_0) L^u \exp(n(r - t_0) k_1^u(r)) \times \left((r - t_0) c^u(r) n k(k_2^u(r))^2 \exp(2n(r - t_0) k_1^u(r)) + 1 \right)$ στην (3.18) είναι μικρότερη του 1 και, συνεπώς, ο $\mathcal{F}_{y,u}$ είναι συστολικός. Επομένως, από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, ο $\mathcal{F}_{y,u}$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο $z^* \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$. Ο δεύτερος ισχυρισμός καταδεικνύει ότι αν βασισθούμε στην μοναδικότητα των σταθερών σημείων μπορούμε να καθορίσουμε την άγνωστη κατάσταση $x(\bullet)$. Πράγματι, από το (a), το σταθερό σημείο είναι η άγνωστη τροχιά $x(\bullet)$ και μέσω του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Banach μπορούμε να καθορίσουμε (Picard iterations) το σταθερό σημείο, ήτοι την άγνωστη κατάσταση $x(\bullet)$. Για πιο αναλυτική απόδειξη παραπέμπουμε στο Παράρτημα του παρόντος κεφαλαίου. \square

Παρατήρηση I. Μέσω της προηγούμενης Πρότασης, αναγάγαμε την ιδιότητα της παρατηρησιμότητας του αρχικού συστήματος (3.1) στο πρόβλημα μοναδικότητας ενός σταθερού σημείου και, επομένως, στην μοναδική επιλυσιμότητα της ολοκληρωτικής εξίσωσης $\mathcal{F}z(t) = z(t)$, $t \in [t_0, r]$, για $z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$. Επίσης, παρατηρούμε ότι η ιδιότητα Persistence of Excitation (H3) μπορεί να ικανοποιηθεί για πολλές τιμές της σταθεράς r και, έτσι, μπορούμε καταλλήλως να επιλέξουμε το r για να ικανοποιεί επιπλέον και την ανισότητα συστολής (3.14), ώστε να καταφέρουμε την σχεδίαση του συστήματος παρατηρητή που ορίζεται στην επόμενη ενότητα. \square

3.3 Σύστημα Παρατηρητή

Σε αυτήν την ενότητα χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα της Πρότασης 3.4 που επιβάλλει συνθήκες παρατηρησιμότητας στο σύστημα (3.1) υπό την προϋπόθεση μοναδικότητας του σταθερού σημείου και κατασκευάζουμε έναν υβριδικό, dead-beat Παρατηρητή. Στο παρακάτω σύστημα Παρατηρητή, χρησιμοποιούμε και επαναλήψεις Picard για να υπολογίσουμε την μοναδική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης $\mathcal{F}_{y,u} z(t) = z(t)$, υπό τις συνθήκες που επιβάλαμε στην Πρόταση 3.2 (c):

Δοθέντων $t_0 \geq 0$, $w(t_0) = w_0 \in \mathbb{R}^n$, υπολογίζουμε την κατάσταση του Παρατηρητή $w(t)$ με τον παρακάτω αλγόριθμο:

Υπολογισμός του $w(t)$ για $t \in [t_0, r]$.

(1) Υπολογίζουμε το $w(t)$ για $t \in [t_0, r]$ ως την λύση της $\dot{w} = A(y, u)w + f(t, w, y, u)$ (αντίγραφο (3.1a))

(2) Για $i = \{1, 2, \dots\}$:

Υπολογίζουμε την επανάληψη $z^i(r)$ μέσω της σχέσης Picard $z^i(t) = \mathcal{F}z^{i-1}(t)$, $t \in [t_0, r]$, όπου το $z^i(\bullet)$ παριστά την i -επανάληψη Picard και $z^0 \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$ μια συνεχής συνάρτηση που επιλέγεται τυχαία. Οι επαναλήψεις μέσω του $\mathcal{F}_{y,u}$ δίνονται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{y,u} z^{i-1}(t) &= \Phi_{y,u}(t, t_0) \left(G_{y,u}(r, t_0) \right)^{-1} \\ &\times \int_{t_0}^r \Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t) \left[y(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) f(s, z^{i-1}(s), y(s), u(s)) ds \right] dt \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) f(s, z^{i-1}(s), y(s), u(s)) ds, t \in [t_0, r] \end{aligned}$$

έως:

$$\int_{t_0}^r \left| C(t) z^{i^*}(t) - y(t) \right|^2 dt < \varepsilon$$

για κάποιο $i^* \in \mathbb{N}$ και ε επαρκώς μικρό.

(3) Θέτουμε $w(r) = z^{i^*}(r)$.

Σημειώνουμε ότι οι επαναλήψεις Picard σταματούν όταν η L^2 - νόρμα της διαφοράς μεταξύ της μετρούμενης εξόδου και της υπολογιζόμενης εξόδου στο βήμα i^* γίνει επαρκώς μικρή. Ο αριθμός i^* , ο οποίος επιλέγεται να σταματάει τις επαναλήψεις, καθορίζει το σταθερό σημείο, ήτοι την μη μετρούμενη κατάσταση $x(t)$ του συστήματος (3.1).

Στον παραπάνω αλγόριθμο κάνουμε μια αρχική τυχαία εκλογή του r . Αν η συστολική ανισότητα (3.14) αποτύχει να ικανοποιηθεί για αυτήν την εκλογή, εκλέγουμε διαφορετική σταθερά r .

Ο προτεινόμενος παρατηρητής παριστάνεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\dot{w} = A(y, u)w + f(t, w, y, u), t \in [t_0, r) \quad (3.19a)$$

$$w(r) = z^{i^*}(r) \quad (3.19b)$$

όπου $w(t) \in \mathbb{R}^n$ η κατάσταση του Παρατηρητή και $z^{i^*}(\bullet)$ η i^* -επανάληψη Picard, για την οποία οι επαναλήψεις σταματούν.

Παρατήρηση II. Όπως περιγράφεται στην Πρόταση 3.4, αν επιβάλουμε συνθήκες μοναδικότητας για το σταθερό σημείο και ύστερα το υπολογίσουμε από την ολοκληρωτική εξίσωση, εξάγουμε την άγνωστη αρχική κατάσταση από την οποία το σύστημα εκκινεί. Μέσω αυτού, καθώς η μη μετρούμενη τροχιά του (3.1) έχει υποθεθεί μοναδική και εξαιτίας της δεξιάς πληρότητας, καθίσταται γνωστή για κάθε χρόνο $t \geq r$, δηλαδή $x(t) = z^{i^*}(t)$ για όλα τα $t \geq r$. Αυτό το γεγονός δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό dead-beat. □

3.4 Παραδείγματα

Δείχνουμε τώρα την εφαρμογή της σχεδίασης του Παρατηρητή της προηγούμενης ενότητας σε ένα μη γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_1) + u \end{aligned} \quad (3.20a)$$

$$y = 10^3 x_1 + x_2 \quad (3.20b)$$

Επιλέγουμε ένα νόμο ελέγχου ανατροφοδότησης της μορφής $u = x_2 + \cos(t)$. Για το σύστημα (3.20) οι αντίστοιχες συναρτήσεις/σταθερές όπως δίνονται στις υποθέσεις (H1)-(H3) αποτυγχάνουν να ικανοποιήσουν την ανισότητα (3.14) για μικρές τιμές του r , και έτσι εφαρμόζουμε γραμμικό μετασχηματισμό συντεταγμένων, όπου οι νέες συντεταγμένες δίνονται από: $\chi_1 = x_1, \chi_2 = 10^{-3} x_2$. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος αλλαγής συντεταγμένων μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλά συστήματα ώστε να μειωθεί η σταθερά Lipschitz L^u του νέου συστήματος και την ίδια στιγμή να διατηρηθεί το γινόμενο $c^u (k_2^u)^2$ σταθερό. Το σύστημα στις νέες συντεταγμένες δίνεται από την:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= -\chi_1 \\ \dot{\chi}_2 &= \chi_2 + 10^{-3} (\sin(\chi_1) + \cos(t)) \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$y = 10^3 (\chi_1 + \chi_2) \quad (3.21b)$$

Η νέα σταθερά Lipschitz είναι $L^u = 0.002$ και οι σταθερές στις υποθέσεις (H1)-(H2) είναι οι $k_1^u = 1, k_2^u = 10^3$. Επιλέγουμε $t_0 = 0$ και χρόνο $r = 0.1$ στον οποίο το σταθερό σημείο, δηλαδή η άγνωστη κατάσταση του συστήματος (3.21), θα υπολογισθεί. Για αυτήν την σταθερά r η c^u είναι ίση με 0.007. Για τις παραπάνω σταθερές, η ανισότητα (3.14) γίνεται $r \times 0.007 \times 2 \times 10^6 e^{4r} + 1 < \frac{1}{rL^u e^{2r}}$ και ικανοποιείται.

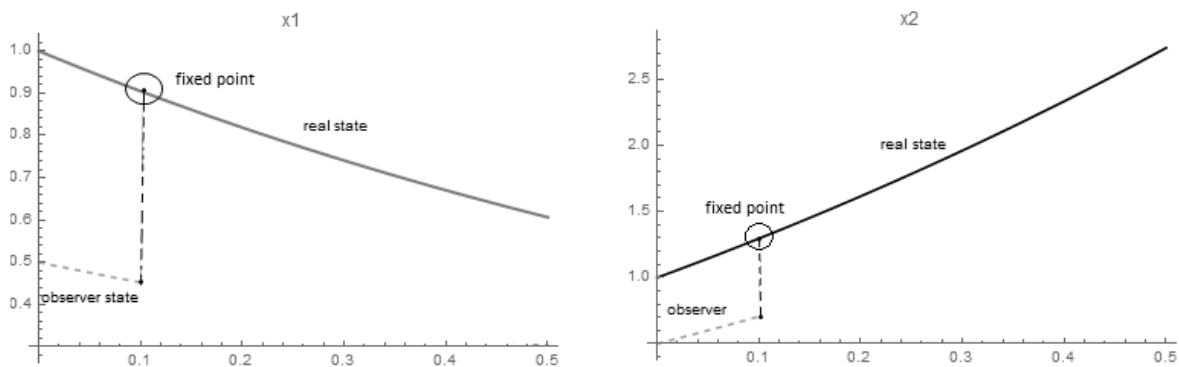
Για να υπολογίσουμε την κατάσταση του (3.21) σε χρόνο $r > 0$ δίνουμε τις επαναλήψεις Picard. Υποθέτουμε ότι η πραγματική κατάσταση (σύμφωνα με την έξοδο του συστήματος που λαμβάνουμε) παριστάνεται στο Σχήμα 3.1.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z_1^{i-1}(r) \\ z_1^{i-1}(r) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3.001 & -2.7109 \\ -3.31109 & 3.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^r e^{-t} \left[y(t) - \int_0^t (\sin(z_1^{i-1}) + \cos(s)) e^{t-s} ds \right] dt \\ \int_0^r e^t \left[y(t) - \int_0^t (\sin(z_1^{i-1}) + \cos(s)) e^{t-s} ds \right] dt \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001 \int_0^r (\sin(z_1^{i-1}) + \cos(s)) e^{r-s} ds \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Μετά από μερικές επαναλήψεις, το σταθερό σημείο υπολογίζεται και συγκλίνει στην κατάσταση του (3.21) σε χρόνο r για την δοθείσα έξοδο y . Κατόπιν, εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό συντεταγμένων και λαμβάνουμε το σταθερό σημείο για το σύστημα (3.20). Ο προτεινόμενος Παρατηρητής είναι της μορφής (3.19) και δίνεται από

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -w_1 \\ \dot{w}_2 &= \sin(w_1) + w_2 + \cos(t), t \in [0, r] \end{aligned} \quad (3.23a)$$

$$\begin{aligned} w_1(r) &= z_1^{i^*}(r) \\ w_2(r) &= 10^3 z_2^{i^*}(r) \end{aligned} \quad (3.23b)$$



Σχήμα 3.1

Remark III. Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει ότι για συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(y, u)x + f(t, x, y, u) \\ y &= C(t)x \end{aligned} \quad (3.24)$$

είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε γραμμικό μετασχηματισμό συντεταγμένων, της μορφής $\chi = Px$ και να μετασχηματισθεί το σύστημα στην μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= PA(y, u)P^{-1}\chi + Pf(t, P^{-1}\chi, y, u) \\ y &= C(t)P^{-1}\chi \end{aligned} \quad (3.25)$$

Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να έχουμε μικρότερη σταθερά Lipschitz και να διατηρήσουμε μικρό το γινόμενο $c^u(k_2^u)^2$, ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα (3.14).

Πρέπει επίσης να επιβάλουμε μικρή τιμή στην σταθερά k_1^u για το $PA(y, u)P^{-1}$. Η σταθερά Lipschitz του διανύσματος $Pf(t, P^{-1}\chi, y, u)$ μπορεί πράγματι να είναι μικρότερη σε μια περίπτωση όπως στο επόμενο σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(y, u)x + f(t, x, y, u) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3.26)$$

που ικανοποιεί τις (H1)-(H3) και όπου

$$A(y, u) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(y, u) & \cdots & a_{1,n}(y, u) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}(y, u) & \cdots & a_{n-1,n-1}(y, u) & 0 \\ a_{n,1}(y, u) & \cdots & a_{n,n-1}(y, u) & a_{n,n}(y, u) \end{bmatrix}, f(t, x, y, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_n(t, x_1, \dots, x_{n-1}, y, u) \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon}c_{1,1}(t) & \cdots & \frac{1}{\varepsilon}c_{1,n-1}(t) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_n(t) \end{bmatrix}$$

όπου ε αρκετά μικρό και τα $|a_{i,j}(y, u)|$ δεν είναι υπερβολικά μεγάλα, π.χ. $|a_{i,j}(y, u)| \leq 1$, μπορεί να μετασχηματισθεί στο σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \begin{bmatrix} a_{1,1}(y, u) & \cdots & a_{1,n}(y, u) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}(y, u) & \cdots & a_{n-1,n-1}(y, u) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}(y, u) \end{bmatrix} \chi + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_n(t, \chi_1, \dots, \chi_{n-1}, y, u) + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i} \chi_i \end{bmatrix} \\ y &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} c_{1,1}(t) & \cdots & c_{1,n-1}(t) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_n(t) \end{bmatrix} \chi \end{aligned} \quad (3.27)$$

εφαρμόζοντας την αλλαγή συντεταγμένων $\chi = [x_1 \ \dots \ x_{n-1} \ \varepsilon x_n]$. Σε αυτήν την περίπτωση, η μη γραμμικότητα $f(t, \chi, y, u)$ μπορεί να έχει οσοδήποτε μεγάλη σταθερά Lipschitz, καθώς με τον μετασχηματισμό συντεταγμένων αυτή γίνεται οσοδήποτε μικρή. Τα δυναμικά του συστήματος (3.27) μπορούν πιο εύκολα να ικανοποιήσουν την ανισότητα συστολής (3.14) και, κατ' αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να υπολογίσουμε την άγνωστη κατάσταση για το σύστημα (3.27). Συστήματα της μορφής (3.26) φαίνεται να έχουν τον περιορισμό με τον πολλαπλασιαστή $1/\varepsilon$ στην πρώτη σειρά του πίνακα $C(t)$, αλλά αυτό το πρόβλημα μπορεί να εξαλειφθεί σε πρακτικά συστήματα απλώς πολλαπλασιάζοντας την μέτρηση που λαμβάνουμε στην έξοδο με αυτόν τον

πολλαπλασιαστική και χρησιμοποιώντας ως έξοδο αυτές τις πολλαπλασιασμένες μετρήσεις □

3.5 Παράρτημα

Στην Πρόταση 3.4 κάναμε χρήση ορισμένων ανισοτήτων σχετικά με τα δυναμικά του συστήματος. Αυτές οι ανισότητες βασίσθηκαν στις υποθέσεις (H1)-(H3) και ήταν αναγκαίες για να αποδειχθεί η μοναδικότητα του σταθερού σημείου. Υπενθυμίζεται ότι χρησιμοποιήθηκε το μέγιστο απόλυτο άθροισμα στήλης ως η νόρμα πινάκων. Πιο συγκεκριμένα,

$$|\Phi_{y,u}(t, t_0)| \leq \exp(n(t-t_0)k_1''(t)), \forall t \geq t_0 \quad (A1)$$

Πράγματι, εξ ορισμού του πίνακα μετάβασης

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_{y,u}(t, t_0) &= A(y(t), u(t)) \Phi_{y,u}(t, t_0) \Rightarrow \Phi_{y,u}(t, t_0) = \Phi_{y,u}(t_0, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t A(y(s), u(s)) \Phi_{y,u}(s, t_0) ds \Rightarrow \Phi_{y,u}(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t A(y(s), u(s)) \Phi_{y,u}(s, t_0) ds \Rightarrow \end{aligned}$$

$|\Phi_{y,u}(t, t_0)| \leq 1 + \int_{t_0}^t |A(y(s), u(s))| |\Phi_{y,u}(s, t_0)| ds$. Από την ανισότητα Grönwall, έχουμε:

$|\Phi_{y,u}(t, t_0)| \leq \exp \int_{t_0}^t |A(y(t), u(t))| dt$. By (H1), $|a_{ij}(y(t), u(t))| \leq k_1''(t)$ και για την νόρμα

πίνακα που χρησιμοποιήσαμε ισχύει $|A(y(t), u(t))| \leq nk_1''(t)$. Εξ αυτού,

$\int_{t_0}^t |A(y(t), u(t))| dt \leq n(t-t_0)k_1''(t)$, καθώς $k_1'' \in N$ (αύξουσα συνάρτηση) και, συνεπώς,

λαμβάνουμε την (A1). Επιπροσθέτως, από την υπόθεση (H1), λαμβάνουμε

$$|C(t)| \leq kk_2''(t), |C'(t)| \leq nk_2''(t), \forall t \geq 0 \quad (A2)$$

καθώς $|c_{ij}(t)| \leq k_2''(t)$.

Από την υπόθεση (H2), για $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$|f(t, z_1(t), y(t), u(t)) - f(t, z_2(t), y(t), u(t))| \leq L'' |z_1(t) - z_2(t)|, \forall t \geq 0 \quad (A3)$$

Από την (3.2) της υπόθεσης (H3) έχουμε

$$\left| (G_{y,u}(r, t_0))^{-1} \right| \leq c^u(r) \quad (\text{A4})$$

Οι σχέσεις (A1)-(A4) χρησιμοποιούνται για να εξαχθεί η ανισότητα (3.18). Για $z_1, z_2 \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, χρήση της (3.12), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_{y,u} z_1 - \mathcal{F}_{y,u} z_2\| &= \max_{t \in [t_0, r]} \left| \Phi_{y,u}(t, t_0) (G_{y,u}(r, t_0))^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{y,u}(t, t_0) C'(t) C(t) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) (f(s, z_1(s), y(s), u(s)) - f(s, z_2(s), y(s), u(s))) ds \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) (f(s, z_1(s), y(s), u(s)) - f(s, z_2(s), y(s), u(s))) ds \right| \quad (\text{A5}) \end{aligned}$$

Λόγω των (A1), (A3), για τον τελευταίο όρο ισχύει το ακόλουθο για τον τελευταίο όρο εντός του \max της (A5) :

$$\begin{aligned} &\max_{t \in [t_0, r]} \left| \int_{t_0}^t \Phi_{y,u}(t, s) (f(s, z_1(s), y(s), u(s)) - f(s, z_2(s), y(s), u(s))) ds \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in [t_0, r]} \int_{t_0}^t \left| \Phi_{y,u}(t, s) (f(s, z_1(s), y(s), u(s)) - f(s, z_2(s), y(s), u(s))) \right| ds \leq \\ &\leq \max_{t \in [t_0, r]} \left((t - t_0) \exp(n(t - t_0) k_1^u(t)) L^u |z_1(t) - z_2(t)| \right) \leq \\ &\leq (r - t_0) \exp(n(r - t_0) k_1^u(r)) L^u \|z_1 - z_2\| \quad (\text{A6}) \end{aligned}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει και το γεγονός στα παραπάνω ότι οι συναρτήσεις k_1^u, k_2^u είναι εξ ορισμού αύξουσες.

Όπως στην σχέση (A6), με παρόμοια προσέγγιση, υπολογίζουμε τα φράγματα για κάθε όρο μέσα στην (A5) με χρήση των σχέσεων (A1)-(A4) και, επομένως, καταλήγουμε στην ανισότητα (3.18) της Πρότασης 3.4 που εξασφαλίζει ότι ο τελεστής είναι συστολικός.

4 ΥΒΡΙΔΙΚΟΣ DEAD-BEAT ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ ΓΙΑ ΜΙΑ ΚΛΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΣΧΕΔΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΕΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΜΗ ΜΕΤΡΟΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

4.1 Εισαγωγή

Στο παρόν Κεφάλαιο εξετάζουμε ικανές συνθήκες ώστε η άγνωστη κατάσταση μιας κλάσης μη γραμμικών συστημάτων να μπορεί να ανακατασκευασθεί μετά συγκεκριμένο πεπερασμένο χρόνο μέσω ενός συστήματος Παρατηρητή. Το σύστημα υπό μελέτη είναι πεπερασμένης διάστασης και ντετερμινιστικό και συνοδεύεται από ένα σχεδόν γραμμικό (quasi-linear) διάνυσμα παρατήρησης (εξόδου).

$$\dot{x} = A(x, y, u)x + f(t, x, y, u) \quad (4.1a)$$

$$y = C(x, u)x \quad (4.1b)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k, u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$$

όπου U μη κενό κλειστό σύνολο. Η εξίσωση (4.1a) παριστά ένα χρονομεταβλητό δυναμικό σύστημα που περιγράφει την εξέλιξη της μη μετρούμενης κατάστασης x , εξαρτώμενης από τις εισόδους $u : [t_0, \infty) \rightarrow U$ και την έξοδο $y \in \mathbb{R}^k$. Ο πρώτος όρος της (4.1a) είναι σχεδόν γραμμικός (quasi-linear) ως προς την μη μετρούμενη κατάσταση x και η f είναι ένας πλήρως μη γραμμικός όρος διαταραχής. Οι μετρήσεις που παρέχονται από το διάνυσμα y στην (4.1b), είναι σχεδόν γραμμικές ως προς την μη μετρούμενη κατάσταση. Υποθέτουμε ότι η κλάση των αποδεκτών εισόδων u είναι η $\mathcal{U} \subseteq L_{loc}^\infty([0, \infty); U)$.

Στην παρούσα προσέγγιση ακολουθούμε μια διαδικασία εμπνευσμένη από τις εργασίες του (Klamka 1975) που περιγράφεται και στο βιβλίο του (Coron 2007) (σελ. 150-152), όπου ακολουθείται διαδικασία σταθερού σημείου (fixed point theory approach), ούτως ώστε να εξαχθούν ικανές συνθήκες για το πρόβλημα της ελεγχσιμότητας, μέσω του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Schauder. Μια άλλη προσέγγιση που στηρίζεται σε μια υπόθεση Persistence of Excitation μπορεί να βρεθεί στις δημοσιεύσεις του (Tsinias 2005) και (Tsinias 2007). Στην περίπτωση μας, το πρόβλημα παρατηρησιμότητας, που με κάποια έννοια αντιμετωπίζεται ως δυϊκό του προβλήματος ελεγχσιμότητας, προσεγγίζεται και αυτό με την Θεωρία Σταθερού Σημείου. Στοχεύουμε στο να καταλήξουμε στις συνθήκες, κάτω από τις οποίες επιτυγχάνουμε παρατηρησιμότητα και ακολούθως να παράσχουμε μια ορισμένη μέθοδο που καθορίζει την μη μετρούμενη κατάσταση x σε πεπερασμένο χρόνο. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε την τροχιά του συστήματος (4.1), βασιζόμενοι μόνο στην γνώση της εισόδου u και του διανύσματος εξόδου επί ενός φραγμένου χρονικού διαστήματος. Η ακολουθούμενη στρατηγική οδηγεί στον ορισμό ενός Υβριδικού Dead-Beat Παρατηρητή που λαμβάνει ένα ακριβές αντίγραφο του αρχικού συστήματος που εκκινεί από τυχαία αρχική συνθήκη μέχρι μια χρονική στιγμή $t = r$ και σε αυτήν την χρονική στιγμή αλλάζει κρουστικά (impulsively) την τιμή του. Αυτό το impulse ισούται με την ακριβή τιμή της άγνωστης κατάστασης στην χρονική στιγμή (switching time) $t = r$. Η παρατηρησιμότητα αποδεικνύεται μέσω μιας ιδιότητας μοναδικότητας ενός σταθερού σημείου συγκεκριμένου τελεστή και υπό συγκεκριμένες υποθέσεις επί μιας (πεπερασμένου χρόνου) Gramian παρατηρησιμότητας. Οι συνθήκες μοναδικότητας που εγγυώνται την παρατηρησιμότητα είναι ικανές να καθορίσουν το impulse την στιγμή $t = r$. Αυτό γίνεται με επαναλήψεις Picard που συγκλίνουν στην άγνωστη τροχιά x σε χρόνο $t = r$. Στα επόμενα, χρησιμοποιούμε τη νόρμα $|A|$ που παριστά το μέγιστο απόλυτο άθροισμα στήλης του πίνακα A .

4.2 Αποτελέσματα Παρατηρησιμότητας

Ο σκοπός της παρούσας ενότητας είναι να διερευνηθεί η παρατηρησιμότητα του συστήματος (4.1) και η ύπαρξη συστήματος Παρατηρητή, που καθορίζει (ανακατασκευάζει) την μη μετρούμενη κατάσταση $x(t)$ μετά πεπερασμένο χρόνο $t = r$.

Είναι απαραίτητες οι ακόλουθες υποθέσεις που αφορούν τα δυναμικά του (4.1), ώστε να προχωρήσουμε στην κεντρική ανάλυση. Η (PE) είναι μια υπόθεση Persistence of Excitation.

Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα για κάποιο $u \in \mathcal{U}$:

(PE) Για δοθέν $t_0 \geq 0$ υπάρχει σταθερά $r > t_0$, τέτοια ώστε $\forall z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, ο $G_{z,y,u}(r, t_0)$ είναι αντιστρέψιμος και έστω σταθερά $c^u > 0$, η οποία εξαρτάται από το r , τέτοια ώστε

$$\sup_{z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)} \left| \left(G_{z,y,u}(r, t_0) \right)^{-1} \right| \leq c^u \quad (4.2)$$

όπου:

$$G_{z,y,u}(r, t_0) = \int_{t_0}^r \Phi'_{z,y,u}(t, t_0) C'(z(t), u(t)) C(z(t), u(t)) \Phi_{z,y,u}(t, t_0) dt \quad (4.3)$$

και ο $\Phi_{z,y,u}(t, t_0)$, με $\Phi_{z,y,u}(t_0, t_0) = I_{n \times n}$, είναι ο πίνακας μετάβασης του γραμμικού χρονομεταβλητού συστήματος

$$\dot{\hat{x}} = A(z, y, u) \hat{x}$$

με εισόδους (z, y, u) .

(H1) $A = (a_{ij})_{n \times n} \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times U; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))$ και

(i) υπάρχει συνάρτηση $k_a^u \in N$, τέτοια ώστε για $1 \leq i, j \leq n$:

$$\left| a_{ij}(x, y, u) \right| \leq k_a^u(t), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, t \geq 0 \quad (4.4)$$

(ii) Ο $A(\cdot, y, u): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι C^1 , και υπάρχει συνάρτηση $k_a^u \in N$, τέτοια ώστε, για $1 \leq i, j \leq n$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} a_{ij}(x, y, u) \right| \leq k_a^u(t), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, t \geq 0 \quad (4.5)$$

(H2) $C = (c_{ij})_{k \times n} \in C(\mathbb{R}^n \times U; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k))$ και

(i) υπάρχει συνάρτηση $k_c^u \in N$, τέτοια ώστε για $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$:

$$|c_{ij}(x, u)| \leq k_c^u(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \quad (4.6)$$

(i) υπάρχει συνάρτηση $k_c^u \in N$, τέτοια ώστε για $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} c_{ij}(x, u) \right| \leq k_c^u(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \quad (4.7)$$

(H3) Η απεικόνιση $f \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times U; \mathbb{R}^n)$ και η $f(t, \bullet, y, u): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι C^1 .

Επίσης,

$$(i) \quad (\exists k_f^u \in N) \quad |f(t, x, y, u)| \leq k_f^u(t), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, t \geq 0 \quad (4.8)$$

$$(ii) \quad (\exists k_{f'}^u \in N) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, y, u) \right| \leq k_{f'}^u(t), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, t \geq 0 \quad (4.9)$$

Υποθέτουμε ότι το (4.1a) είναι δεξιά πλήρες, δηλαδή η λύση $x(t) = x(t, t_0, x_0; u)$ της (4.1a) που εκκινεί από $x_0 \in \mathbb{R}^n$ την στιγμή t_0 ορίζεται για όλους τους χρόνους $t \geq t_0$.

Γεγονός I. Από τις υποθέσεις (H1), (H2) και (H3), ικανοποιούνται οι συνθήκες Καραθεοδωρή, τουτέστιν, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$ και $u \in \mathcal{U} \subseteq L_{loc}^\infty([t_0, \infty); U)$, υπάρχει μοναδική απεικόνιση $[t_0, \infty) \ni t \mapsto x(t) = x(t, t_0, x_0; u) \in \mathbb{R}^n$, με $x(t_0) = x(t_0, t_0, x_0; u) = x_0$, που ικανοποιεί την (4.1a) για σχεδόν όλα τα $t \geq t_0$.

□

Προχωρούμε στον βασικό κορμό της ανάλυσης που στοχεύει στην εξαγωγή των συνθηκών παρατηρησιμότητας.

Ιδιότητα 4.1. Θεωρούμε το σύστημα (4.1a) με τις εξόδους (4.1b). Λέμε ότι η είσοδος $u \in \mathcal{U}$ “διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ στο $[t_0, r]$ ”, αν ισχύει οι ακόλουθη συνθήκη:

$$\max_{t \in [t_0, r]} |C(x(t, t_0, x_0; u), u(t))x(t, t_0, x_0; u) - C(x(t, t_0, \xi; u), u(t))x(t, t_0, \xi; u)| > 0, \quad \text{για όλα τα}$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$ με $x_0 \neq \xi$, όπου $x(t, x_0, t_0; u), x(t, t_0, \xi; u)$ είναι οι τροχιές που εκκινούν από x_0 και ξ αντιστοίχως σε χρόνο $t = t_0$.

Ακολουθώντας, δίνουμε έναν ορισμό παρατηρησιμότητας.

Ορισμός 4.2. Θεωρούμε το σύστημα (4.1a) με έξοδο (4.1b). Λέμε ότι το (4.1) είναι ισχυρά παρατηρήσιμο επί του $[t_0, r]$ αν κάθε είσοδος $u \in \mathcal{U}$ διαχωρίζει ισχυρά κάθε κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ στο $[t_0, r]$.

Η κεντρική ιδέα ώστε να ανακατασκευασθεί η άγνωστη κατάσταση σε πεπερασμένο χρόνο $t = r$ είναι να θεωρήσουμε ένα βοηθητικό σύστημα του αρχικού συστήματος (4.1), αφού έχουμε αντικαταστήσει το όρισμα x του A , του C και της f με τυχόν $z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$:

$$\dot{\hat{x}} = A(z, y, u)\hat{x} + f(t, z, y, u), \quad t \in [t_0, r] \quad (4.10)$$

$$y(t) = C(z(t), u(t))\hat{x}(t), \quad t \in [t_0, r] \quad (4.11)$$

όπου $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ και $y(t)$ η έξοδος του συστήματος (4.1). Το σύστημα (4.10) είναι ένα γραμμικό χρονομεταβλητό δυναμικό σύστημα, όπου το z μπορεί να θεωρηθεί ως είσοδος του και συνοδεύεται από την σχέση εξόδου (4.11).

Το παραπάνω τέχνασμα σταθερού σημείου (fixed point trick) χρησιμοποιείται επίσης στην διερεύνηση της ύπαρξης λύσεων για σχεδόν γραμμικές εξελικτικές εξισώσεις, όπως αναλυτικά περιγράφεται στο βιβλίο του (Zeidler 1990b), σελ. 485. Μέσω αυτού του τεχνάσματος, επιθυμούμε να καταλήξουμε στην μορφή $\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u) = \mathcal{F}_{y,u} z(t)$, όπου $\mathcal{F}_{y,u}$ κατάλληλος τελεστής και $\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u)$ η τροχιά που εκκινεί από \hat{x}_0 και ικανοποιεί την (4.10) για σχεδόν όλα τα $t \in [t_0, r]$. Το πρόβλημα τώρα ανάγεται στο να καθορισθεί ένα μοναδικό σταθερό σημείο του $\mathcal{F}_{y,u}$ και, επομένως για κατάλληλα επιλεγόμενο $u \in \mathcal{U}$ είμαστε σε θέση να καθορίσουμε την άγνωστη κατάσταση x . Αυτά τα αποτελέσματα θα περιγραφούν στην Πρόταση 4.3.

Για κάθε $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $(z, y, u) \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n) \times L_{loc}^\infty([t_0, r]; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{U}$, ισχύει η επόμενη εξίσωση, η οποία παριστά την λύση της εξίσωσης (4.10) σχεδόν για όλα τα $t \in [t_0, r]$, με αρχική κατάσταση (t_0, \hat{x}_0) :

$$\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u) = \Phi_{z,y,u}(t, t_0)\hat{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi_{z,y,u}(t, s)f(s, z(s), y(s), u(s))ds, \quad t \in [t_0, r] \quad (4.12)$$

όπου τα $(z, y, u) \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n) \times L_{loc}^\infty([t_0, r]; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{U}$ θεωρούνται ως είσοδοι.

Ακολουθώντας, στοχεύουμε να λύσουμε την εξίσωση $y(t) = C(z(t), u(t))\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u)$, $t \in [t_0, r]$ ως προς \hat{x}_0 . Με χρήση της (4.12), αυτή η εξίσωση γράφεται:

$$y(t) = C(z(t), u(t))\Phi_{z,y,u}(t, t_0)\hat{x}_0 + C(z(t), u(t))\int_{t_0}^t \Phi_{z,y,u}(t, s)f(z(s), u(s))ds \quad (4.13)$$

και, καθώς ο παράγοντας $C(z(t), u(t))\Phi_{z,y,u}(t, t_0)$ δεν είναι αντιστρέψιμος, θεωρούμε τον ψευδοαντίστροφο ενός καταλλήλου τελεστή παρατηρησιμότητας (βλ. ενότητα 1.5, Κεφάλαιο 1). Η λύση \hat{x}_0 που συνάγεται από τον ψευδοαντίστροφο είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων ελαχίστης νόρμας στο πρόβλημα βελτιστοποίησης L^2 - νόρμας. optimization problem:

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_{t_0}^r |y(t) - C(z(t), u(t))\hat{x}(t, t_0, \xi; z, u)|^2 dt, \quad t \in [t_0, r] \quad (4.14)$$

Η λύση ελαχίστων τετραγώνων του ανωτέρω προβλήματος δίνεται από:

$$\hat{x}_0 = \xi = \left(G_{z,y,u}(r, t_0) \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{z,y,u}(t, t_0) C'(z(t), u(t)) \times \left[y(t) - C(z(t), u(t)) \int_{t_0}^t \Phi_{z,y,u}(t, s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds \right] dt \quad (4.15)$$

και εξάγεται με την μέθοδο βαθμίδας (gradient). Η διαδικασία για να λάβουμε το βελτιστοποιημένο \hat{x}_0 που δίνεται από την (3.9) περιγράφεται αναλυτικά στην ενότητα 1.5, Κεφάλαιο 1.

Η εξίσωση (4.15) μπορεί πιο εύκολα να εξαχθεί εκτελώντας απλές πράξεις γραμμικής άλγεβρας στην εξίσωση εξόδου (4.13). Πολλαπλασιάζουμε εξ αριστερών και τα δύο μέλη της (4.13) με $\Phi'_{z,y,u}(t, t_0)C'(z(t), u(t))$ και ολοκληρώνουμε από το t_0 ως το r , οπότε λαμβάνουμε:

$$\int_{t_0}^r \Phi'_{z,y,u}(t, t_0)C'(z(t), u(t))y(t)dt = \int_{t_0}^r \Phi'_{z,y,u}(t, t_0)C'(z(t), u(t))C(z(t), u(t))\Phi_{z,y,u}(t, t_0)\hat{x}_0dt + \int_{t_0}^r \Phi'_{z,y,u}(t, t_0)C'(z(t), u(t))C(z(t), u(t)) \left(\int_{t_0}^t \Phi_{z,y,u}(t, s)f(s, z(s), y(s), u(s))ds \right) dt$$

Στην (PE) έχουμε ήδη υποθέσει ότι για συγκεκριμένο $u \in \mathcal{U}$, η $G_{z,y,u}(r, t_0)$ που δίνεται από την (4.3), είναι αντιστρέψιμη, οπότε πολλαπλασιάζοντας εξ αριστερών και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $G_{z,y,u}^{-1}(r, t_0)$, καταλήγουμε στην (4.15). Παρατηρούμε ότι η (4.15) ισχύει για το $u \in \mathcal{U}$ για το οποίο ικανοποιείται η (PE).

Ακολουθώντας, αντικαθιστούμε το \hat{x}_0 , που δίνεται από την (4.15), στην (4.12) και λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = \hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u) &= \Phi_{z,y,u}(t, t_0) \left(G_{z,y,u}(r, t_0) \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{z,y,u}(t, t_0) C'(z(t), u(t)) \\ &\times \left[y(t) - C(z(t), u(t)) \int_{t_0}^t \Phi_{z,y,u}(t, s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds \right] dt \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi_{z,y,u}(t, s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds, \quad t \in [t_0, r] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ας ορίσουμε τώρα έναν τελεστή $z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{F}_{y,u} z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$ που παριστά όλο το δεξιό μέλος της εξίσωσης (4.16) και δίνεται από την:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{y,u} z(t) &= \Phi_{z,y,u}(t, t_0) \left(G_{z,y,u}(r, t_0) \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{z,y,u}(t, t_0) C'(z(t), u(t)) \\ &\times \left[y(t) - C(z(t), u(t)) \int_{t_0}^t \Phi_{z,y,u}(t, s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds \right] dt \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi_{z,y,u}(t, s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds, \quad t \in [t_0, r] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Με χρήση της (4.17), η εξίσωση (4.16) γράφεται ως εξής:

$$\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u) = \mathcal{F}_{y,u} z(t), \quad t \in [t_0, r] \quad (4.18)$$

Στην ακόλουθη Πρόταση παρέχουμε την σημασία της μοναδικότητας των λύσεων της εξίσωσης $\mathcal{F}_{y,u} z(t) = z(t)$, $t \in [t_0, r]$ και την σχέση της με την παρατηρησιμότητα του συστήματος (4.1). Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε τις συνθήκες της μοναδικότητας ενός σταθερού σημείου του μη γραμμικού τελεστή $\mathcal{F}_{y,u}$, που δίνεται από την (4.17).

Πρόταση 4.3. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι (H1), (H3). Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα σχετικά με την $\mathcal{F}_{y,u}z(t) = z(t)$, $t \in [t_0, r]$, όπου ο $\mathcal{F}_{y,u}$ δίνεται από την (4.17).

(a) Για συγκεκριμένη $u \in \mathcal{U}$ ο $\mathcal{F}_{y,u}$ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο $z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, δηλαδή το z ικανοποιεί την $\mathcal{F}_{y,u}z(t) = z(t)$, $t \in [t_0, r]$. Το σταθερό σημείο z είναι λύση της (4.10) για σχεδόν όλα τα $t \in [t_0, r]$, με αρχική συνθήκη που δίνεται από την (4.15).

(b) Υποθέτουμε ότι για μια είσοδο $u \in \mathcal{U}$, ο $\mathcal{F}_{y,u}$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο $z^* \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, δηλαδή το z^* ικανοποιεί την $\mathcal{F}_{y,u}z^*(t) = z^*(t)$, $t \in [t_0, r]$. Τότε, η είσοδος αυτή διαχωρίζει ισχυρά τις καταστάσεις της (4.1) στο $[t_0, r]$. Επιπλέον, αν ο $\mathcal{F}_{y,u}$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο για κάθε είσοδο $u \in \mathcal{U}$, τότε το (4.1) είναι ισχυρά παρατηρήσιμο επί του $[t_0, r]$.

(c) Υποθέτουμε ότι για συγκεκριμένο $u \in \mathcal{U}$, ικανοποιούνται οι (H1), (H2), (H3), (PE) και ισχύουν επιπλέον τα ακόλουθα:

(I) Υπάρχει $c_1^u > 0$, που εξαρτάται από το r , τέτοιο ώστε:

$$\sup_{z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)} \left| \frac{\partial}{\partial z} (G_{z,y,u}(r, t_0))^{-1} \right| \leq c_1^u$$

$$(II) \quad \left(c^u e_2 + c_1^u e_1 \right) \left(nk_c^u(r) e_1 \left(k_y + kk_c^u(r) (r - t_0) e_1 k_f^u(r) \right) \right) + c^u e_1 \left[nk_c^u(r) k_y e_2 \right. \\ \left. + nk_c^u(r) k_y e_1 + (r - t_0) nk_c^u(r) e_1 k_f^u(r) (e_2 k_c^u(r) + 2e_1 k_c^u(r)) \right. \\ \left. + e_1 (r - t_0) nk_c^u(r) \left(k_c^u(r) \right)^2 (e_2 k_f^u(r) + e_1 k_f^u(r)) \right] + e_2 k_f^u(r) + e_1 k_f^u(r) < \frac{1}{r - t_0} \quad (4.19)$$

όπου

$$e_1 := \exp(n(r - t_0) k_a(r)), \quad e_2 := n(r - t_0) k_a^u(r) \exp(n(r - t_0) k_a^u(r)) + \\ + n(r - t_0) k_a^u(r) \exp(n(r - t_0) k_a^u(t)) \max(1, n(r - t_0) k_a^u(r)) \quad \text{και} \quad k_y > 0 \quad \text{σταθερά} \\ \text{για την οποία} \quad |y(t)| \leq k_y \quad \forall t \in [t_0, r].$$

Τότε,

(i) ο τελεστής έχει $\mathcal{F}_{y,u}$ μοναδικό σταθερό σημείο για αυτό το $u \in \mathcal{U}$.

- (ii) για αυτό το $u \in \mathcal{U}$, μπορεί να ανακατασκευασθεί η άγνωστη κατάσταση σε χρόνο r μέσω του $\mathcal{F}_{y,u}$.

Απόδειξη. (a) Παρατηρούμε ότι αν υποθέσουμε ότι $\hat{x}(\bullet) = z(\bullet)$, λόγω της (4.10) και της (4.11) ισχύει η επόμενη συνεπαγωγή:

$$\hat{x}(\bullet) = z(\bullet) \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}(\bullet) = A(z(\bullet), y(\bullet), u(\bullet))z(\bullet) + f(\bullet, z(\bullet), y(\bullet), u(\bullet)) \\ C(z(\bullet), y(\bullet))z(\bullet) = y(\bullet) \end{cases} \quad (4.20)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η $z(\bullet)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος (4.1a), (4.1b). Καθώς το σύστημα (4.1a), (4.1b) είναι καλώς ορισμένο, υπάρχουν τροχιές $z(\bullet)$ που ικανοποιούν αμφότερες τις (4.1a) και (4.1b) και επομένως υπάρχουν $z(\bullet)$ για τα οποία $\hat{x}(\bullet) = z(\bullet)$. Αλλά από την (4.18), $\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z, u) = \mathcal{F}_{y,u} z(t)$, $t \in [t_0, r]$ και οπότε υπάρχουν $z(\bullet)$ για τα οποία $\mathcal{F}_{y,u} z(t) = z(t)$, $t \in [t_0, r]$. Με άλλα λόγια, ο τελεστής $\mathcal{F}_{y,u}$ έχει σταθερά σημεία. Συνεπώς, τα σταθερά σημεία $z(\bullet)$ του $\mathcal{F}_{y,u}$ συμπίπτουν με τις τροχιές $x(\bullet)$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις (4.1a) και (4.1b). Από τις (H1), (H3) είναι εγγυημένο ότι οι τροχιές που ικανοποιούν την (4.1a) υπάρχουν και είναι μοναδικές.

(b) Η ιδιότητα 4.1 μπορεί να εκφρασθεί ως εξής: “Η είσοδος $u \in \mathcal{U}$ διαχωρίζει τις καταστάσεις x_0^1, x_0^2 στο $[t_0, r]$ αν η σχέση $C(x(t, t_0, x_0^1; u), u(t))x(t, t_0, x_0^1; u) = C(x(t, t_0, x_0^2; u), u(t))x(t, t_0, x_0^2; u)$ συνεπάγεται υποχρεωτικά ότι $x_0^1 = x_0^2$, όπου $x(t, t_0, x_0^i; u)$, $i = 1, 2$ οι λύσεις του (4.1) για αρχικές καταστάσεις x_0^i , $i = 1, 2$ ”.

Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{F}_{y,u}$ που δίνεται από την (4.17) έχει μοναδικό σταθερό σημείο $z^* \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, το οποίο ικανοποιεί την (4.16), δηλαδή $\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0; z^*, u) = z^*(t)$, $t \in [t_0, r]$, όπου

$$\hat{x}_0 = \hat{x}(t_0, t_0, \hat{x}_0; z^*, u) = z^*(t_0) = \left(G_{z^*, y, u}^*(r, t_0) \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{z^*, y, u}(t, t_0) C'(z^*(t), u(t))$$

$$\times \left[y(t) - C(z^*(t), u(t)) \int_{t_0}^t \Phi_{z^*, y, u}(t, s) f(s, z^*(s), y(s), u(s)) ds \right] dt \quad (4.21)$$

Σύμφωνα με το (a), το z^* είναι το μοναδικό σταθερό σημείο και άρα η λύση του (4.1), ίση με την κατάσταση x , οπότε λαμβάνουμε $\hat{x}_0 = x_0 := x(t_0, t_0, x_0; u)$. Από τον τύπο, τώρα, (4.21), ορίζουμε \hat{x}_0^1 και \hat{x}_0^2 , που αντιστοιχούν σε εξόδους $y^1(t)$, $y^2(t)$ αντιστοίχως, από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0^1 &= \left(G_{z^*, y^1, u}(r, t_0) \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{z^*, y^1, u}(t, t_0) C'(z^*(t), u(t)) \\ &\times \left[y^1(t) - C(z^*(t), u(t)) \int_{t_0}^t \Phi_{z^*, y^1, u}(t, s) f(s, z^*(s), y^1(s), u(s)) ds \right] dt \end{aligned} \quad (4.22a)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_0^1 &= \left(G_{z^*, y^2, u}(r, t_0) \right)^{-1} \int_{t_0}^r \Phi'_{z^*, y^2, u}(t, t_0) C'(z^*(t), u(t)) \\ &\times \left[y^2(t) - C(z^*(t), u(t)) \int_{t_0}^t \Phi_{z^*, y^2, u}(t, s) f(s, z^*(s), y^2(s), u(s)) ds \right] dt \end{aligned} \quad (4.22b)$$

όπου $y^1(t) := C(t)x(t, t_0, x_0^1; u)$, $y^2(t) := C(t)x(t, t_0, x_0^2; u)$. Αν υποθέσουμε $y^1(t) = y^2(t)$, από τις εξισώσεις (4.22a), (4.22b), έπεται ότι $\hat{x}_0^1 = \hat{x}_0^2$. Αλλά $\hat{x}_0^1 = x_0^1$, $\hat{x}_0^2 = x_0^2$ από το (a) και, επομένως, σύμφωνα με την Ιδιότητα 4.1, η επιλεγόμενη είσοδος διαχωρίζει τις x_0^1 και x_0^2 στο $[t_0, r]$. Συνεπώς, καθώς οι x_0^1, x_0^2 επελέγησαν τυχαία, η είσοδος $u \in \mathcal{U}$ διαχωρίζει όλες τις καταστάσεις στο $[t_0, r]$. Επιπλέον, αν για κάθε είσοδο $u \in \mathcal{U}$ ο τελεστής $\mathcal{F}_{y, u}$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο $z^* \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, το σύστημα (4.1) είναι παρατηρήσιμο επί του $[t_0, r]$.

(c) Καθορίζουμε το υποσύνολο του $C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$ στο οποίο κείνται τα σταθερά σημεία μέσω του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Schauder και παρέχουμε τις ικανές συνθήκες μοναδικότητας μέσω του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Banach. Αν και η ύπαρξη των σταθερών σημείων είναι αυτόματη, όπως δείχθηκε στο (a), μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{F}_{y, u}$ έχει σταθερά σημεία μέσω του Θεωρήματος

Schauder. Αρχικά, σημειώνουμε ότι καθώς η y είναι συνεχής, είναι φραγμένη στο $[t_0, r]$, $\exists k_y > 0$:

$$|y(t)| \leq k_y \quad \forall t \in [t_0, r] \quad (4.23)$$

Θεωρούμε το υποσύνολο M του $C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, που δίνεται από

$$M = \{z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n), \|z\| \leq K\} \quad (4.24)$$

όπου το K δίνεται από την:

$$K = (r - t_0)nc^u k_c^u(r) \exp(2n(r - t_0)k_a^u(r)) \left[k_y + (r - t_0)kk_f^u(r) \exp(n(r - t_0)k_a^u(r)) \right] + (r - t_0)k_f^u(r) \exp(n(r - t_0)k_a^u(r)) \quad (4.25)$$

Το σύνολο M , που δίνεται στην (4.24), είναι κλειστό. Πράγματι, έστω $z_n \in M$ και $z_n \rightarrow z$. Το z_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο z και

$$\|z_n - z\| = \max_{t_0 \leq t \leq r} |z_n(t) - z(t)| \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \Rightarrow |z_n(t) - z(t)| \rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow \infty, \forall t \in [t_0, r] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z(t)| = \left| \lim_n z_n(t) \right| = \lim_n |z_n(t)| \leq \lim_n K = K \Rightarrow z \in M. \text{ Είναι επίσης προφανές ότι το } M$$

είναι και κυρτό. Επίσης, παρατηρούμε ότι η εικόνα

$$\mathcal{F}[M] = \{x(t) | x(t) = \mathcal{F}(z)(t), z \in M, \forall t \in [t_0, r]\} \text{ ικανοποιεί τον εγκλεισμό } \mathcal{F}[M] \subset M.$$

Ο τελεστής \mathcal{F} είναι συνεχής και από το Θεώρημα Arzelà-Ascoli, συμπεραίνουμε ότι η εικόνα $\mathcal{F}[M]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του M . Επομένως, εφαρμόζεται το Θεώρημα

Σταθερού Σημείου του Schauder στο σύνολο M για την εξίσωση $\mathcal{F}z(t) = z(t), \forall t \in [t_0, r]$.

Για να δείξουμε την μοναδικότητα του σταθερού σημείου, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, που ισχυρίζεται ότι το σταθερό σημείο από το (c) είναι μοναδικό αν ο τελεστής $\mathcal{F}_{y,u} : C([t_0, r]; \mathbb{R}^n) \rightarrow C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$ είναι συστολικός (contraction). Για να δειχθεί, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (περίπτωση απειροδιαστάτων χώρων).

Θα δείξουμε ότι $\forall z \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, $\sup \|D\mathcal{F}z\| < 1$, όπου το D παριστά την διαφύριση κατά Fréchet και $\|D\mathcal{F}z\|$ είναι η νόρμα του. Η συνθήκη $\sup \|D\mathcal{F}z\| < 1$ αρκεί ώστε να ικανοποιείται η ιδιότητα της συστολής, καθώς από το Θεώρημα Μέσης Τιμής:

$$\|\mathcal{F}z_1 - \mathcal{F}z_2\| \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \|D\mathcal{F}(z_1 + s(z_2 - z_1))\| \|z_1 - z_2\| \quad (4.26)$$

Το διαφορικό Fréchet $D\mathcal{F}z(h)(t)$, $h \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$, $t \in [t_0, r]$ δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}z(h)(t) = & H_{h(t)} \left(\frac{\partial}{\partial z} \Phi_{z,y,u}(t, t_0) (G_{z,y,u}(r, t_0))^{-1} + \Phi_{z,y,u}(t, t_0) \frac{\partial}{\partial z} (G_{z,y,u}(r, t_0))^{-1} \right) \\ & \times \int_{t_0}^r \Phi'_{z,y,u}(t, t_0) C'(z(t), u(t)) (y(t) - C(z(t), u(t)) B_1(t, t_0)) dt \\ & + \Phi_{z,y,u}(t, t_0) (G_{z,y,u}(r, t_0))^{-1} \left(\int_{t_0}^r \left(H_{h(t)} \frac{\partial}{\partial z} [\Phi'_{z,y,u}(t, t_0) C'(z(t), u(t))] y(t) \right. \right. \\ & - H_{h(t)} \frac{\partial}{\partial z} [\Phi'_{z,y,u}(t, t_0) C'(z(t), u(t)) C(z(t), u(t))] B_1(t, t_0) \\ & \left. \left. + \Phi'_{z,y,u}(t, t_0) C'(z(t), u(t)) C(z(t), u(t)) \int_{t_0}^t H_{h(s)} B_2(t, s) ds \right) dt \right) \\ & + \int_{t_0}^t H_{h(s)} B_2(t, s) ds \end{aligned} \quad (4.27)$$

όπου το $\frac{\partial}{\partial z}$ την μερική διαφύριση πίνακα ως προς z ,

$$H_{h(t)} = \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2(t) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_n(t) \end{pmatrix}, \quad h(\cdot) = (h_1(\cdot), h_2(\cdot), \dots, h_n(\cdot))' \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n).$$

και τα $B_1(t, t_0)$, $B_2(t, s)$ δίνονται από τους τύπους:

$$B_1(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi_{z,y,u}(t, s) f(s, z(s), y(s), u(s)) ds \quad (4.28)$$

$$B_2(t, s) = \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_{z,y,u}(t, s)) f(s, z(s), y(s), u(s))$$

$$+\Phi_{z,y,u}(t,s)\frac{\partial}{\partial z}(f(s,z(s),y(s),u(s))) \quad (4.29)$$

Η νόρμα τελεστή της παραγώγου Fréchet δίνεται από τον τύπο

$$\|D\mathcal{F}z\| := \|D\mathcal{F}z\|_{\mathcal{L}(C([t_0,r];\mathbb{R}^n);C([t_0,r];\mathbb{R}^n))} := \sup\{\|D\mathcal{F}z(h)\|; \|h\|=1\}.$$

Μετά από υπολογισμούς, καταλήγουμε ότι αν για κάποιο $u \in \mathcal{U}$, ισχύει η ανισότητα (4.19), έχουμε ότι $\sup\|D\mathcal{F}(z)\| < 1$ και, επομένως, ο \mathcal{F} είναι συστολικός (contraction).

Συνεπώς, εκ του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου Banach, ο \mathcal{F} έχει μοναδικό σταθερό σημείο $z^* \in C([t_0,r];\mathbb{R}^n)$. Ο δεύτερος ισχυρισμός του (c) περιγράφει ότι μέσω της μοναδικότητας του σταθερού σημείου μπορούμε να καθορίσουμε την άγνωστη κατάσταση $x(\bullet)$. Πράγματι, από το (a), το σταθερό σημείο είναι η άγνωστη τροχιά $x(\bullet)$ και μέσω του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου Banach μπορούμε να καθορίσουμε (Picard επαναλήψεις) το σταθερό σημείο, δηλαδή την άγνωστη κατάσταση $x(\bullet)$. Για πιο αναλυτική απόδειξη, παραπέμπουμε στο Παράρτημα του παρόντος Κεφαλαίου. \square

Παρατήρηση I. Από την παραπάνω Πρόταση, έχουμε αναγάγει την ιδιότητα παρατηρησιμότητας του αρχικού συστήματος (4.1) στην μοναδικότητα ενός σταθερού σημείου και, ισοδύναμα, στην μοναδική επιλυσιμότητα της ολοκληρωτικής εξίσωσης $\mathcal{F}z(t) = z(t)$, $t \in [t_0,r]$, για $z \in C([t_0,r];\mathbb{R}^n)$. Επίσης, η υπόθεση Persistence of Excitation (PE) μπορεί να ικανοποιείται για πολλές τιμές της σταθεράς r και, άρα μπορούμε να επιλέγουμε το r ώστε να ικανοποιεί επίσης και την ανισότητα συστολής (4.19), ώστε να επιτύχουμε την σχεδίαση του συστήματος Παρατηρητή που ορίζεται στην επόμενη ενότητα. \square

4.3 Σύστημα Παρατηρητή

Σε αυτήν την ενότητα κάνουμε χρήση των αποτελεσμάτων της Πρότασης 4.3 που επιβάλλουν συνθήκες παρατηρησιμότητας του συστήματος (4.1) υπό την μοναδικότητα ενός σταθερού σημείου και σχεδιάζουμε υβριδικό, dead-beat σύστημα Παρατηρητή. Στο σχήμα του υβριδικού παρατηρητή που ακολουθεί χρησιμοποιούμε επαναλήψεις Picard για να υπολογίσουμε την μοναδική λύση της $\mathcal{F}_{y,u}z(t) = z(t)$, υπό τις συνθήκες που επιβλήθηκαν στην Πρόταση 4.3 (c):

Δοθέντων $t_0 \geq 0$, $w(t_0) = w_0 \in \mathbb{R}^n$, υπολογίζουμε την κατάσταση $w(t)$ του Παρατηρητή από τον επόμενο αλγόριθμο:

Υπολογισμός του $w(t)$ για $t \in [t_0, r]$.

(1) Υπολογίζουμε το $w(t)$ για $t \in [t_0, r]$ ως την λύση της $\dot{w} = A(w, u)w + f(t, w, y, u)$ (αντίγραφο του συστήματος (4.1))

(2) Για $i = \{1, 2, \dots\}$:

Υπολογίζουμε το $z^i(r)$ από τις επαναλήψεις Picard $z^i(t) = \mathcal{F}_{y,u} z^{i-1}(t)$, όπου το $z^i(\cdot)$ υποδηλώνει την i -επανάληψη Picard και το $z^0 \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^n)$ είναι συνεχής συνάρτηση επιλεγόμενη τυχαία. Οι επαναλήψεις μέσω του $\mathcal{F}_{y,u}$ δίνονται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}z^{i-1}(t) &= \Phi_{z^{i-1}, y, u}(t, t_0) \left(G_{z^{i-1}, y, u}(r, t_0) \right)^{-1} \\ &\quad \times \int_{t_0}^r \Phi'_{z^{i-1}, y, u}(t, t_0) C'(z^{i-1}(t), u(t)) [y(t) - C(z^{i-1}(t), u(t))] \\ &\quad \times \int_{t_0}^t \Phi_{z^{i-1}, y, u}(t, s) f(s, z^{i-1}(s), y(s), u(s)) ds \Big] dt \\ &\quad + \int_{t_0}^t \Phi_{z^{i-1}, y, u}(t, s) f(s, z^{i-1}(s), y(s), u(s)) ds, t \in [t_0, r] \end{aligned}$$

έως:

$$\int_{t_0}^r \left| C(z^{i^*}(t), u(t)) z^{i^*}(t) - y(t) \right|^2 dt < \varepsilon$$

για κάποιο $i^* \in \mathbb{N}$ και ε επαρκώς μικρό.

(3) Θέτουμε $w(r) = z^{i^*}(r)$.

Στον παραπάνω αλγόριθμό έχουμε κάνει μια αρχική επιλογή της σταθεράς r . Αν η ανισότητα συστολής (4.19) αποτύχει να ικανοποιηθεί για αυτήν την επιλογή, κάνουμε διαφορετική επιλογή του r .

Σημειώνουμε ότι οι επαναλήψεις Picard τερματίζονται όταν η L^2 - νόρμα της διαφοράς μεταξύ της μετρούμενης εξόδου και της υπολογιζόμενης εξόδου στο βήμα i^* γίνει επαρκώς μικρή. Ο αριθμός i^* που επιλέγεται για να τερματίσει τις επαναλήψεις, καθορίζει το σταθερό σημείο, δηλαδή την μη μετρούμενη κατάσταση $x(t)$ του συστήματος (4.1).

Ο προτεινόμενος Παρατηρητής περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\dot{w} = A(w, y, u)w + f(t, w, y, u), t \in [t_0, r) \quad (4.30a)$$

$$w(r) = z^{i^*}(r) \quad (4.30b)$$

όπου $w(t) \in \mathbb{R}^n$ η κατάσταση του Παρατηρητή και $z^{i^*}(\bullet)$ η i^* - επανάληψη Picard, για την οποία οι επαναλήψεις τερματίζονται.

Παρατήρηση II. Όπως περιγράφεται στην Πρόταση 4.3, αν επιβάλλουμε συνθήκες μοναδικότητας επί του σταθερού σημείου και ύστερα το υπολογίσουμε από την ολοκληρωτική εξίσωση, εξάγουμε την άγνωστη αρχική κατάσταση από την οποία το σύστημα εκκινεί. Εξ αυτού, καθώς η μη μετρούμενη τροχιά του συστήματος (4.1) έχει υποθεθεί μοναδική και εξαιτίας της δεξιάς πληρότητας, γίνεται γνωστή για κάθε χρόνο $t \geq r$, δηλαδή $x(t) = z^{i^*}(t)$ για όλα τα $t \geq r$. Το γεγονός αυτό δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό dead-beat για τον Παρατηρητή.

4.4 Παραδείγματα

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την προηγηθείσα μέθοδο, σχεδιάζουμε υβριδικούς dead-beat Παρατηρητές για τα επόμενα συστήματα:

(1) Θεωρούμε το ακόλουθο μη γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \cos(x_2(t))x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 0 \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Η έξοδος που λαμβάνεται από το σύστημα θεωρείται ότι είναι η $y(t) = \exp(t)$.

Το σύστημα (4.31) είναι της μορφής $\dot{x}(t) = A(x(t))x(t)$, $y(t) = Cx(t)$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$, όπου:

$$A(x(t)) = \begin{pmatrix} \cos(x_2(t)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 1)$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές των υποθέσεων (H1) και (H2) (βλέπε (4.4), (4.5), (4.6)):

$$k_a = 1, k_c = 1, k_{a'} = 1.$$

Επιλέγουμε $t_0 = 0$. Ο πίνακας μετάβασης του γραμμικού συστήματος $\dot{x}(t) = A(z(t))x(t)$ είναι ο:

$$\Phi_z(t, 0) = \begin{pmatrix} \exp \int_0^t \cos(z_2(s)) ds & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

όπου $z(t) = (z_1(t), z_2(t)) \in C([t_0, r]; \mathbb{R}^2)$ συνεχής συνάρτηση.

Η Gramian που ορίζεται στην (4.3) είναι η

$$G_z(r, 0) = \begin{pmatrix} \int_0^r \exp 2 \int_0^t \cos(z_2(s)) ds dt & \int_0^r \exp \int_0^t (\cos(z_2(s)) ds) dt \\ \int_0^r \exp \int_0^t (\cos(z_2(s)) ds) dt & 1 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Ο αντίστροφός της δίνεται από:

$$(G_z(r, 0))^{-1} = \frac{1}{\det G_z(r, t_0)} \begin{pmatrix} 1 & -\int_0^r \exp \int_0^t (\cos(z_2(s)) ds) dt \\ -\int_0^r \exp \int_0^t (\cos(z_2(s)) ds) dt & \int_0^r \exp 2 \int_0^t \cos(z_2(s)) ds dt \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Η ορίζουσά της είναι η

$$\det G_z(r, 0) = \int_0^r \exp 2 \int_0^t \cos(z_2(s)) ds dt - \left(\int_0^r \exp \int_0^t (\cos(z_2(s)) ds) dt \right)^2 \quad (4.35)$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, ισχύει πάντοτε $\det G_z(r, 0) \geq 0$. Επίσης, $\det G_z(r, t_0) \geq r e^{2r} (e^{-4r} - r)$, καθώς

$$\int_0^r \exp 2 \int_0^t \cos(z_2(s)) ds dt > r \min \left\{ 1, e^{2 \int_0^r \cos(z_2(s)) ds} \right\} > r \min \{1, e^{-2r}\} = re^{-2r}$$

$$\int_0^r \exp \int_0^t (\cos(z_2(s))) ds dt < r \max \left\{ 1, e^{\int_0^r \cos(z_2(s)) ds} \right\} = re^r$$

Ισχύει ότι $re^{2r}(e^{-4r} - r) > 0$ για $0 < r < 0.3$ και άρα $\det G_z(r, t_0) > 0$ για $r < 0.3$.

Η σταθερά c της υπόθεσης (H3) (βλέπε (4.2)) είναι η:

$$c = \frac{\max(1 + re^r, re^r + re^{2r})}{r(e^{-2r} - re^{2r})}$$

Τα στοιχεία του πίνακα $\frac{\partial}{\partial z} G_z^{-1}(r, 0)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial z_1} (G_z(r, 0))_{11}^{-1} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2} (G_z(r, 0))_{11}^{-1} = \frac{2}{(\det G_z(r, 0))^2} \left[\int_0^r \left(\int_0^t (\sin(z_2(s)) ds) \right) \exp \left(2 \int_0^t (\cos(z_2(s)) ds) \right) dt \right.$$

$$\left. - \int_0^r \left(\int_0^t (\sin(z_2(s)) ds) \right) \exp \left(\int_0^t (\cos(z_2(s)) ds) \right) dt \int_0^r \exp \int_0^t (\cos(z_2(s)) ds) dt \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} (G_z(r, 0))_{12}^{-1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2} (G_z(r, 0))_{12}^{-1} = \frac{1}{(\det G_z(r, 0))^2} \left[\int_0^r \left(\int_0^t (\sin(z_2(s)) ds) \right) \exp \left(\int_0^t (\cos(z_2(s)) ds) \right) dt \det G_z(r, t_0) \right.$$

$$\left. - \int_0^r \left(\int_0^t (\sin(z_2(s)) ds) \right) \exp \left(\int_0^t (\cos(z_2(s)) ds) \right) dt \int_0^r \exp \int_0^t (\cos(z_2(s)) ds) dt \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} (G_z(r, 0))_{21}^{-1} = \frac{\partial}{\partial z_1} (G_z(r, 0))_{22}^{-1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z_2} (G_z(r, 0))_{21}^{-1} = \frac{\partial}{\partial z_2} (G_z(r, 0))_{12}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_2} (G_z(r, 0))_{22}^{-1} &= \frac{1}{(\det G_z(r, t_0))^2} \left[-2 \int_0^r \left(\int_0^t \sin(z_2(s)) ds \right) e^{\exp\left(2 \int_0^t \cos(z_2(s)) ds\right)} dt \det G_z(r, t_0) \right. \\ &\quad + 2 \int_0^r e^{\exp\left(2 \int_0^t \cos(z_2(s)) ds\right)} dt \int_0^t \left(\int_0^t \sin(z_2(s)) ds \right) e^{\exp\left(2 \int_0^t \cos(z_2(s)) ds\right)} dt \\ &\quad \left. + \int_0^r \exp\left(\int_0^t \cos(z_2(s)) ds\right) dt \int_0^t \left(\int_0^t \sin(z_2(s)) ds \right) e^{\exp\left(\int_0^t \cos(z_2(s)) ds\right)} dt \right] \end{aligned}$$

Η σταθερά c_1 της Πρότασης 4.3 είναι η:

$$c_1 = \max \left(\frac{2(re^{2r} + e^{2r} + re^{2r})}{(e^{-2r} - re^{2r})^2} + \frac{re^r}{(e^{-2r} - re^{2r})}, \frac{re^r + 2re^{2r}}{(e^{-2r} - re^{2r})} + \frac{2re^{2r} + 2e^{4r}}{(e^{-2r} - re^{2r})^2} \right)$$

Για $t \in [t_0, r]$ οι επαναλήψεις Picard για το σταθερό σημείο δίνονται από την:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1^i(t) \\ z_2^i(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det G_{z^{i-1}}(r, 0)} \\ &\times \begin{pmatrix} e^{t \cos(z_2^{i-1})} \frac{e^{r(1+\cos(z_2^{i-1}))} - 1}{1 + \cos(z_2^{i-1})} + \left(e^{t \cos(z_2^{i-1})} - 1 \right) \frac{1 - e^r}{e^{t \cos(z_2^{i-1})} \frac{e^{r(1+\cos(z_2^{i-1}))} - 1}{1 + \cos(z_2^{i-1})} + \left(e^{t \cos(z_2^{i-1})} - 1 \right)} \\ \frac{1 - e^{r \cos(z_2^{i-1})}}{\cos(z_2^{i-1})} \frac{e^{r(1+\cos(z_2^{i-1}))} - 1}{1 + \cos(z_2^{i-1})} + \frac{(e^r - 1)(e^{2r \cos(z_2^{i-1})} - 1)}{2 \cos(z_2^{i-1})} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\text{όπου } \det G_{z^{i-1}}(r, 0) = \frac{e^{2r \cos(z_2^{i-1})} - 1}{2 \cos(z_2^{i-1})} - \left(\frac{e^{r \cos(z_2^{i-1})} - 1}{\cos(z_2^{i-1})} \right)^2$$

Οι επαναλήψεις σταματούν όταν $\int_0^r |z_1^i(t) + z_2^i(t) - e^t|^2 dt < \varepsilon$ για κάποιο $i^* \in \mathbb{N}$ και ε

επαρκώς μικρό.

Η συστολική ανισότητα της (4.19) της Πρότασης 4.3 ικανοποιείται για $r = 0.03$ καθώς

$$2e^{5r} (4rc + c_1) + 8rce^{5r} < 1/r$$

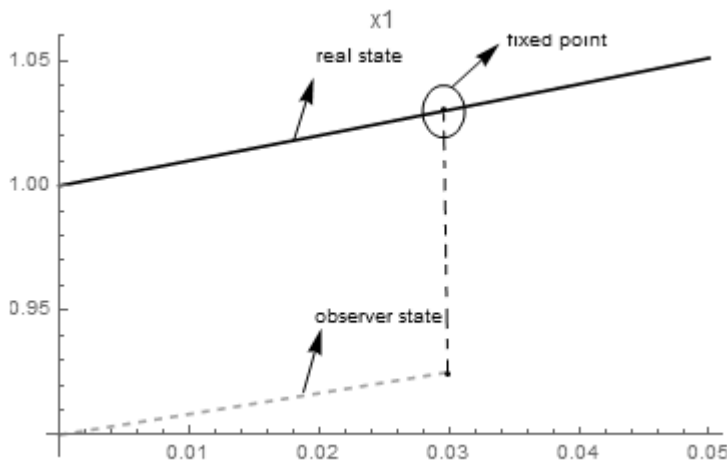
Μετά από λίγες επαναλήψεις, για τυχαίες αρχικές $\begin{pmatrix} z_1^0(t) \\ z_2^0(t) \end{pmatrix}$, το παραπάνω σχήμα

συγκλίνει στην λύση $\begin{pmatrix} z_1^*(t) \\ z_2^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ο υβριδικός dead-beat Παρατηρητής για το παραπάνω παράδειγμα δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= \cos(w_2(t))w_1(t), t \in [0, r) \\ \dot{w}_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.37a)$$

$$\begin{pmatrix} w_1(r) \\ w_2(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^*(r) \\ z_2^*(r) \end{pmatrix} \quad (4.37b)$$



Σχήμα 4.1

(2) Ένα δεύτερο παράδειγμα με επιπλέον όρο μη γραμμικότητας είναι το εξής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \cos(x_2(t))x_1(t) + e^{-t \sin(x_2(t))} \\ \dot{x}_2(t) &= 0 \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Υποθέτουμε ότι λαμβάνουμε έξοδο την $y(t) = 1 + \exp(t)$.

Το σύστημα (4.38) είναι της μορφής

$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + f(t, x(t)), y(t) = Cx(t), x(t) \in \mathbb{R}^2$, όπου:

$$A(x(t)) = \begin{pmatrix} \cos(x_2(t)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} e^{-t \sin(x_2(t))} \\ 0 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 1)$$

Οι σταθερές των υποθέσεων (H1), (H2), (H3) είναι οι εξής:

$$k_a = 1, k_{a'} = 1, k_c = 1, k_f(t) = e^t, k_{f'}(t) = te^t, k_y = e^r + 1$$

Επιλέγουμε $t_0 = 0$. Ο πίνακας μετάβασης του $\dot{x}(t) = A(z(t))x(t)$ δίνεται από την

$$\Phi_z(t, 0) = \begin{pmatrix} \exp \int_0^t \cos(z_2(s)) ds & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η σταθερά c δίνεται από:

$$c = \frac{\max(1 + re^r, re^r + re^{-2r})}{r(e^{-2r} - re^{2r})}$$

Επίσης, η σταθερά c_1 δίνεται από την:

$$c_1 = \max \left(\frac{2(re^{2r} + e^{2r} + re^{2r})}{(e^{-2r} - re^{2r})^2} + \frac{re^r}{(e^{-2r} - re^{2r})}, \frac{re^r + 2re^{2r}}{(e^{-2r} - re^{2r})} + \frac{2re^{2r} + 2e^{4r}}{(e^{-2r} - re^{2r})^2} \right)$$

Το σχήμα για τον dead-beat Παρατηρητή δίνεται από την σχέση:

$$\begin{pmatrix} z_1^i(t) \\ z_2^i(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\int_0^r e_{z_2^{i-1}}^2(t) dt - \left(\int_0^r e_{z_2^{i-1}}(t) dt \right)^2} \times \begin{pmatrix} e_{z_2^{i-1}}(t) & -e_{z_2^{i-1}}(t) \int_0^r e_{z_2^{i-1}}(t) dt \\ -\int_0^r e_{z_2^{i-1}}(t) dt & \int_0^r e_{z_2^{i-1}}(t) dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^r e_{z_2^{i-1}}(t) (e^t - 1 - e_{z_2^{i-1}}(t) \rho_{z_2^{i-1}}(t)) dt \\ \int_0^r (e^t - 1 - e_{z_2^{i-1}}(t) \rho_{z_2^{i-1}}(t)) dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{z_2^{i-1}}(t) \rho_{z_2^{i-1}}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [t_0, r] \quad (4.39)$$

$$\text{όπου } e_{z_2^{i-1}}(t) = e^{\int_0^t \cos(z_2^{i-1}(s)) ds}, \rho_{z_2^{i-1}}(t) = \int_0^t \frac{e^{-\sin(z_2^{i-1}(s))}}{e_{z_2^{i-1}}(s)} ds$$

Η ανισότητα συστολής (4.19) της Πρότασης 4.3 ικανοποιείται για τιμή $r = 0.02$.
Πράγματι,

$$2e^{2r} (4cre^{2r} + c_1 e^{2r}) (e^r + 1 + re^{3r}) + ce^{2r} [8re^{2r} (e^r + 1) + 18r^2 e^{5r}] + 5re^{3r} < 1/r \text{ για } r = 0.02.$$

Ο υβριδικός dead-beat Παρατηρητής για το παράδειγμα περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= \cos(w_2(t)) w_1(t) + e^{-t \sin(w_2(t))} \\ \dot{w}_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad , t \in [0, r] \quad (4.40a)$$

$$\begin{pmatrix} w_1(r) \\ w_2(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^i(r) \\ z_2^i(r) \end{pmatrix} \quad (4.40b)$$

4.5 Παράρτημα

Στην Πρόταση 4.3 χρησιμοποιήθηκαν ανισότητες σχετικές με τα δυναμικά του συστήματος. Οι ανισότητες αυτές στηρίχθηκαν στις υποθέσεις (H1)-(H3) και ήταν αναγκαίες για να αποδειχθεί η μοναδικότητα του σταθερού σημείου. Υπενθυμίζουμε ότι υιοθετούμε ως νόρμα πίνακα το μέγιστο του απολύτου αθροίσματος στήλης. Σχετικά με τον πίνακα μετάβασης $\Phi_{z,y,u}(t, t_0)$ έχουμε τις ακόλουθες ανισότητες.

$$|\Phi_{z,y,u}(t, t_0)| \leq \exp(n(t - t_0) k_a^u(t)) \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{z,y,u}(t, t_0) \right| &\leq n(t - t_0) k_a^u(t) \exp(n(t - t_0) k_a^u(t)) \\ &+ n(t - t_0) k_a^u(t) \exp(n(t - t_0) k_a^u(t)) \max(1, n(t - t_0) k_a^u(t)) \end{aligned} \quad (A2)$$

Για να αποδείξουμε την (A1), λαμβάνουμε τον ορισμό του πίνακα μετάβασης:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_{z,y,u}(t, t_0) &= A(z(t), y(t), u(t)) \Phi_{z,y,u}(t, t_0) \Rightarrow \Phi_{z,y,u}(t, t_0) = \Phi_{z,y,u}(t_0, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t A(z(s), y(s), u(s)) \Phi_{z,y,u}(s, t_0) ds \Rightarrow \\ \Phi_{z,y,u}(t, t_0) &= I + \int_{t_0}^t A(z(s), y(s), u(s)) \Phi_{z,y,u}(s, t_0) ds \Rightarrow \end{aligned}$$

$|\Phi_{z,y,u}(t, t_0)| \leq 1 + \int_{t_0}^t |A(z(s), y(s), u(s))| |\Phi_{z,y,u}(s, t_0)| ds$. Από την ανισότητα Grönwall

έχουμε: $|\Phi_{z,y,u}(t, t_0)| \leq \exp \int_{t_0}^t |A(z(t), y(t), u(t))| dt$. Από την (H1),

$|a_{ij}(z(t), y(t), u(t))| \leq k_a^u(t)$ και, λόγω της νόρμας που χρησιμοποιούμε,

$|A(z(t), y(t), u(t))| \leq nk_a^u(t)$. Εξ αυτού, $\int_{t_0}^t |A(z(t), y(t), u(t))| dt \leq n(t-t_0)k_a^u(t)$, καθώς η

$k_a^u \in N$ (αύξουσα συνάρτηση), οπότε καταλήγουμε στην (A1).

Αποδεικνύουμε την (A2). Έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{z,y,u}(t, t_0) &= A(z(t), y(t), u(t)) \Phi_{z,y,u}(t, t_0) \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial z} \dot{\Phi}_{z,y,u}(t, t_0) &= \frac{\partial}{\partial z} A(z(t), y(t), u(t)) \Phi_{z,y,u}(t, t_0) + A(z(t), y(t), u(t)) \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{z,y,u}(t, t_0) \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{z,y,u}(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial z} A(z(s), y(s), u(s)) \Phi_{z,y,u}(s, t_0) ds \\ &+ \int_{t_0}^t A(z(s), y(s), u(s)) \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{z,y,u}(s, t_0) ds \Rightarrow \\ \left| \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{z,y,u}(t, t_0) \right| &\leq \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial}{\partial z} A(z(s), y(s), u(s)) \right| |\Phi_{z,y,u}(s, t_0)| ds \\ &+ \int_{t_0}^t |A(z(s), y(s), u(s))| \left| \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{z,y,u}(s, t_0) \right| ds \Rightarrow \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Grönwall, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{z,y,u}(t, t_0) \right| &\leq \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial}{\partial z} A(z(s), y(s), u(s)) \right| |\Phi_{z,y,u}(s, t_0)| ds \\ &+ \int_{t_0}^t \left[|A(z(s), y(s), u(s))| \int_{t_0}^s \left| \frac{\partial}{\partial z} A(z(w), y(w), u(w)) \right| |\Phi_{z,y,u}(w, t_0)| dw \right. \\ &\left. \times \exp \left(\int_s^t |A(z(w), y(w), u(w))| dw \right) \right] ds \end{aligned}$$

Από την παραπάνω ανισότητα συμπεραίνουμε ότι η (A2) ισχύει.

Επιπλέον, ισχύουν οι εξής:

$$\left| C(z(t), u(t)) \right| \leq k k_c^u(t), \quad \left| C'(z(t), u(t)) \right| \leq n k_c^u(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{A3})$$

καθώς από την (4.6) $\left| c_{ij}(z(t), u(t)) \right| \leq k_c^u(t)$.

Η ανισότητα (4.19) (συστολή) εξάγεται αν λάβουμε υπ' όψιν τις ανισότητες (A1)-(A3) καθώς και τις σταθερές των (4.2)-(4.9) και αφ' ότου έχουμε υπολογίσει τα φράγματα κάθε όρου της (4.27).

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στα Κεφάλαια 3 και 4 έχει προταθεί υβριδικός dead-beat Παρατηρητής, εμπνευσμένος από την εργασία των (Karafyllis & Jiang 2011b), με την επιπλέον υπόθεση ικανοποίησης μιας συνθήκης μοναδικότητας λύσεων συγκεκριμένης μη γραμμικής εξίσωσης. Η μέθοδος που ακολουθήθηκε προκειμένου να καθορισθεί η μοναδική επιλυσιμότητα στηρίχθηκε στο Θεώρημα Συστολής. Καθώς η εξίσωση με τον τελεστή πάνω σε χώρους συνεχών συναρτήσεων των Κεφαλαίων 3 και 4 μπορεί να ειπωθεί ως ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm-Volterra, μπορεί να διεξαχθεί περαιτέρω έρευνα (βλέπε (Tidke et al. 2011) σχετικά με τέτοιες εξισώσεις). Επιπλέον, αριθμητικές λύσεις τέτοιων ολοκληρωτικών εξισώσεων μπορούν να διερευνηθούν και έχει διεξαχθεί ήδη εργασία σχετικά με προσεγγιστικές λύσεις, βλέπε (Karoui 2005a), (Karoui 2005b). Στην πραγματικότητα, τέτοιες εξισώσεις απαιτούν εξαντλητικούς υπολογισμούς και οι προσεγγιστικές λύσεις εξάγονται με αριθμητικές μεθόδους.

Στην εργασία των (Karafyllis & Jiang 2011b) εξετάστηκε η ιδιότητα της ευρωστίας του Παρατηρητή. Τα ζητήματα ευρωστίας είναι κομβικά στην σχεδίαση Παρατηρητών (π.χ. όταν υψίσυχνος θόρυβος διαταράσσει το μετρούμενο σήμα) και συνεπώς πρέπει να διερευνηθεί η ευρωστία για τις κλάσεις των μη γραμμικών συστημάτων που περιγράφονται στα Κεφάλαια 3 και 4. Οι υβριδικοί Παρατηρητές που προτείνονται είναι της μορφής των Impulsive Nonlinear Differential Equations. Έχει γίνει αρκετή εργασία τελευταία σχετικά με διαφορικές εξισώσεις με impulses και η βιβλιογραφία είναι αξιοσημείωτη. Η ευστάθεια λύσεων κατά Hyers-Ulam-Rassias μπορεί πιθανώς να χρησιμοποιηθεί στην διερεύνηση της συμπεριφοράς των λύσεων σε Impulsive Differential Equations όταν υπάρχει διαταραχή κάποιου σήματος (βλέπε (Li & Wang 2013), (Wang et al. 2012)).

Επίσης, θα ήταν χρήσιμο να επεκταθούν τα αποτελέσματα και σε πιο αφηρημένους χώρους, π.χ. αν ο χώρος καταστάσεων \mathcal{X} και ο χώρος εξόδων \mathcal{Y} είναι χώροι Banach. Τεχνικές Μη Γραμμικής Ανάλυσης χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία των (Quinn & Carmichael, 1985).

6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Andrieu, V., Besançon, G. & Serres, U., 2013. Observability necessary conditions for the existence of observers. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision και Control*, pp.4442–4447.

Andrieu, V. & Praly, L., 2004. Remarks on the existence of a Kazantzis-Kravaris/Luenberger observer. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision και Control*, 4(2), pp.3874–3879.

Arcak, M. & Kokotovic, P., 2001. Nonlinear observers: A circle criterion design και robustness analysis. *Automatica*, 37(12), pp.1923–1930.

Bastin, G. & Gevers, M.R., 1988. Stable Adaptive Observers for Nonlinear Time-varying Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(7), pp.650–658.

Ciccarella, G., Dalla Mora, M. & Germani, a., 1993. A Luenberger-like observer for nonlinear Systems. *International Journal of Control*, 57(3), pp.537–556.

Coron, J.M., 2007. *Control και nonlinearity*, Rhode Island, U.S.A.: American Mathematical Society.

Esfandiari, F. & Khalil, H.K., 1992. Output feedback stabilization of fully linearizable Systems. *International Journal of Control*, 56(5), pp.1007–1037.

Gauthier, J.P.P., Hammouri, H. & Othman, S., 1992. A simple observer for nonlinear Systems applications to bioreactor. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6), pp.875–879.

Hermann, R., Krener, A., 1977. Nonlinear Controllability και Observability, 22, pp.728–740.

Karafyllis, I. & Jiang, Z., 2007. A Small-Gain Theorem for a Wide Class of Feedback Systems with Control Applications. *SIAM Journal on Control και Optimization*, 46(4), pp.1483–1517.

Karafyllis, I. & Jiang, Z.P., 2011a. Hybrid dead-beat observers for a class of nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 60(8), pp.608–617.

- Karafyllis, I. & Jiang, Z.P., 2011b. Hybrid dead-beat observers for a class of nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 60(8), pp.608–617.
- Karafyllis, I. & Kravaris, C., 2012. Global exponential observers for two classes of nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 61(7), pp.797–806.
- Karagiannis, D., Carnevale, D. & Astolfi, a, 2008. Invariant Manifold Based Reduced Order Observer Design for Nonlinear Systems. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 53(11), pp.2602–2614.
- Karagiannis, D., Sassano, M. & Astolfi, A., 2009. Dynamic scaling και observer design with application to adaptive control. *Automatica*, 45(12), pp.2883–2889.
- Karoui, A., 2005a. Existence και Approximate Solutions of Nonlinear Integral Equations, 5, pp.569–581.
- Karoui, A., 2005b. On the existence of continuous solutions of nonlinear integral equations. *Applied Mathematics Letters*, 18(3), pp.299–305.
- Klamka, J., 1975. On the global controllability of perturbed nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control* 20 (1), pp.170–172.
- Krener, A.J. & Isidori, A., 1983. Linearization by output injection και nonlinear observers. *Systems and Control Letters*, 3(1), pp.47–52.
- Krener, A.J. & Xiao, M., 2002. Observers for linearly unobservable nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 46(4), pp.281–288.
- Krener, a. J. & Respondek, W., 1985. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *Journal of Control και Optimization*, 23(2), pp.197–216.
- Li, X. & Wang, J., 2013. Ulam-Hyers-Rassias stability of semilinear differential equations with impulses. , 2013(172), pp.1–8.
- Luenberger, D.G., 1997. *Optimization by vector space methods*, John Wiley & Sons, Inc.
- Marino, R. & Tomei, P., 1995. Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(7), pp.1300–1304.
- Marino, R. & Tomei, P., 1992. Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8 pt I), pp.1239–1245.

- Noh, D., Jo, N.H. & Seo, J.H., 2004. Nonlinear observer design by dynamic observer error linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(10), pp.1746–1750.
- Quinn, M. D., & Carmichael, N. (1985). An approach to non-linear control problems using fixed-point methods, degree theory και pseudo-inverses. *Numerical Functional Analysis και Optimization Volume 7, Issue 2-3*,, 197-219.
- Rudin, W., 1973. *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc.
- Scherpen, J.M.A. & Gray, W.S., 2002. Nonlinear Hilbert adjoints: Properties και applications to Hankel singular value analysis. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods και Applications*, 51(5), pp.883–901.
- Sontag, E., 1998. *Mathematical Control Theory Deterministic Finite Dimensional Systems* 2nd ed., Piscataway, NJ: Springer.
- Tidke, H.L., Aage, C.T. & Salunke, J.N., 2011. Existence και Uniqueness of Continuous Solution of Mixed Type Integral Equations in Cone Metric Space. *Engineering και Technology*, 7(1), pp.48–55.
- Tsinias, J., "Άριστος Έλεγχος (in Greek) (Optimal Control)", Lecture notes for the course of NTUA "Mathematical Optimal Control".
- Tsinias, J., 1990. Further results on the observer design problem. , 14, pp.411–418.
- Tsinias, J., 2005. Links between asymptotic controllability και persistence of excitation for a class of time-varying systems. *Systems and Control Letters*, 54(11), pp.1051–1062.
- Tsinias, J., 1989. Observer design for nonlinear control systems. *Systems & Control Letters*, 13, pp.135–142.
- Tsinias, J., 2007. Sufficient Conditions for Asymptotic Controllability και Hybrid Feedback Stabilization for a Class of Time-Varying Systems. , 52(1), pp.76–83.
- Tsinias, J., 2008. Time-varying observers for a class of nonlinear σύστημα. *Systems and Control Letters*, 57(12), pp.1037–1047.
- Wang, J., Fec̃kan, M. & Zhou, Y., 2012. Ulam’s type stability of impulsive ordinary differential equations. *Journal of Mathematical Analysis και Applications*, 395(1), pp.258–264.
- Xia, X.-H. & Gao, W.-B., 1989. Nonlinear Observer Design by Observer Error Linearization. *SIAM Journal on Control και Optimization*, 27(10), pp.199–216.

Zeidler, E., 1990a. *Nonlinear Functional Analysis και its Applications I Fixed Point Theorems*.

Zeidler, E., 1990b. *Nonlinear Functional Analysis και its Applications II/B Nonlinear Monotone Operators*, Leipzig: Springer-Verlag New York.