



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κβάντωση $SU(N)$ θεωριών και
διάφοροι υπολογισμοί στην
Κβαντική Χρωμοδυναμική

Παναγιώτης Καλύβας

Επιβλέπων
Αν. Καθηγητής Ηρακλής Νίκος

Υπογραφές Εξεταστικής Επιτροπής

Ήργες Νίκος Αναγνωστόπουλος Κωνσταντίνος Κουτσούμπας Γεώργιος

.....

.....

.....

Περιεχόμενα

1	Πρόλογος	7
2	Άλγεβρες Lie	9
2.1	Παραδοχές	9
2.2	Ταξινόμηση των αλγεβρών Lie	9
2.2.1	Μοναδιακοί μετασχηματισμοί διανυσμάτων N διαστάσεων	10
2.2.2	Ορθογώνιοι μετασχηματισμοί N -διάστατων διανυσμάτων	10
2.2.3	Συμπλεκτικοί μετασχηματισμοί N -διάστατων διανυσμάτων	11
2.3	Αναπαραστάσεις	11
2.3.1	Τελεστής <i>Casimir</i>	14
	References	17
3	Η Συνάρτηση Lagrange των Yang – Mills	19
3.1	Εισαγωγή	19
3.2	<i>Yang – Mills</i> Λαγκρανζιανή	19
	References	27
4	Συναρτησιακές Μέθοδοι	29
4.1	Εισαγωγή	29
4.2	Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο	29
4.3	Σπινοριακά Πεδία	32
4.4	Ο Διαδότης του <i>Dirac</i>	35
	References	37
5	Κβάντωση Μη Αβελιανών $SU(N)$ Θεωριών	39
5.1	Εισαγωγή	39
5.2	Αλληλεπιδράσεις μη αβελιανών θεωριών	40
5.3	<i>Ghosts</i> και <i>Unitarity</i>	42
5.3.1	Διαγράμματα βρόχων	45

5.4	<i>BRST</i> Συμμετρία.....	49
5.5	Πρώτης Τάξεως(<i>One Loop</i>) Αποκλίνοντες Όροι (<i>Divergences</i>) της Μη Αβελιανής Θεωρίας.....	52
5.5.1	Ιδιοενέργεια του Μποζονίου Βαθμίδας- <i>Gauge boson Self – Energy</i>	53
5.5.2	Η συνάρτηση βήτα – <i>β function</i>	59
5.5.3	Σχέσεις μεταξύ <i>Counterterms</i>	63
5.6	Ασυμπτωτική Ελευθερία- <i>Asymptotic Freedom</i>	65
5.6.1	Διαταρακτική Θεωρία Πεδίου Υποβάθρου- <i>Background Field Perturbation Theory</i>	66
5.6.2	Πρώτης τάξης διόρθωση στην <i>effective</i> δράση.....	67
5.6.3	Υπολογισμός των Συναρτησιακών οριζουσών- <i>Computation of the Functional Determinants</i>	71
5.6.4	Συμπεράσματα.....	74
5.7	Παράρτημα.....	78
5.7.1	Επακανονικοποίηση της <i>QED</i> σε <i>1 – loop</i>	78
5.7.2	Πολικότητα κενού(<i>Vacuum polarization</i>).....	79
5.7.3	Στροφή <i>Wick</i> (<i>Wick rotation</i>)	81
5.8	Παράρτημα-B.....	87
5.8.1	Η <i>Callan – Symanzik</i> εξίσωση	88
5.8.2	Οι Συναρτήσεις β και γ	89
	References	91
6	Κβαντική Χρωμοδυναμική	93
6.1	Εισαγωγή	93
6.2	Τα <i>quarks</i> στην <i>QCD</i>	93
6.2.1	Εξαύλωση Ηλεκτρονίου-Ποζιτρονίου σε Αδρόνια - e^+e^- <i>Annihilation into Hadrons</i>	96
6.2.2	Η Εξέλιξη του a_s - <i>The Running of a_s</i>	98
6.2.3	Εκπομπή Γλουονίου και Παραγωγή Πίδακα- <i>Gluon Emission and Jet Production</i>	100
6.3	Βαθιά Ανελαστική Σκέδαση- <i>Deep Inelastic Scattering</i>	101
6.3.1	Βαθιά Ανελαστική Σκέδαση <i>Neutrino-Deep Inelastic Neutrino Scattering</i>	106
6.3.2	Οι παρτονικές συναρτήσεις κατανομής- <i>The Parton Distribution Functions</i>	109
6.4	“Σκληρές” Σκεδάσεις σε Αδρονικές Συγκρούσεις- <i>Hard-Scattering Processes in Hadron Collisions</i>	111
6.4.1	Παραγωγή Λεπτονικών Ζευγών- <i>Lepton Pair Production</i>	111
6.4.2	Γενική Κινηματική της Παραγωγής Ζευγών- <i>General Kinematics of Pair Production</i>	113
6.4.3	Παραγωγή Πιδάκων Ζευγών- <i>Jet Pair Production</i>	116
6.5	Παράρτημα αντιδράσεων της <i>QED</i> $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	120

	Περιεχόμενα	5
References		129
7 Επίλογος		131

Πρόλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία φιλοδοξώ να παρουσιάσω τα σημαντικότερα σημεία των $SU(N)$ μη αβελιανών θεωριών βαθμίδας και να εφαρμόσω τον φορμαλισμό αυτό ώστε να ερμηνεύσω τα πειράματα που έγιναν στα μέσα του προηγούμενου αιώνα και ανέδειξαν την εσωτερική φύση του πρωτονίου και γενικότερα των αδρονίων. Η εργασία αυτή γνωρίζω ότι δεν αποτελεί σε βάθος έρευνα και ολοκληρωμένη ανάλυση των ζητημάτων με τα οποία ασχολήθηκα αλλά ελπίζω να χρησιμοποιηθεί ως ένα σύντομο κείμενο για όποιον επιθυμεί να εισαχθεί στο αντικείμενο της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής.

Ξεκινώντας, στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρω τα μαθηματικά εργαλεία της θεωρίας ομάδων που θα χρειαστώ στην συνέχεια. Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύω από πρώτες αρχές την λαγκρανζιανή των *Yang – Mills*. Στο κεφάλαιο τρία αναλύω όσα εργαλεία της συναρτησιακής ολοκλήρωσης θα χρειαστώ για το τέταρτο κεφάλαιο. Στη συνέχεια, κάνω κβάντωση των $SU(N)$ μη αβελιανών θεωριών βαθμίδας με την μέθοδο των *Faddeev – Popov*. Υπολογίζω τους αποκλίνοντες όρους σε πρώτη τάξη διαταραχών και φυσικά οδηγούμε μέσω των όρων που υπολόγισα στην συνάρτηση βήτα. Στη συνέχεια βλέπω την ασυμπτωτική ελευθερία με δύο τρόπους: με την διαταρακτική θεωρία πεδίου υποβάθρου και το νόμο του *Gauss* στην βαθμίδα *Coulomb*. Η κάθε μέθοδος φωτίζει διαφορετικά χαρακτηριστικά της. Στο τελευταίο κεφάλαιο εφαρμόζω όλο τον φορμαλισμό που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια και κυρίως στο προτελευταίο, υπολογίζω ενεργές διατομές εξαύλωσης ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου σε αδρόνια, εκπομπής *gluon* και παραγωγής *jet*, βαθιάς ανελαστικής σκέδασης ηλεκτρονίου από πρωτόνιο και νετρίνου από πρωτόνιο. Επίσης υπολογίζω ενεργές διατομές σκληρών σχεδάσεων σε αδρονικές συγκρούσεις όπως παραγωγή λεπτονικών ζευγών και παραγωγή ζευγών *jets*. Για όλες αυτές τις ενεργές διατομές χρειάστηκε να αναπτύξουμε την μέθοδο των συναρτήσεων κατανομής παρτονίων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, τον αναπληρωτή καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου Ήργε Νίκο. Η παρουσία του με ενέπνευσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον και δύσκολο θέμα και η συμβολή του στις απορίες μου ήταν καθοριστική για να φέρω εις πέρας τον στόχο μου. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την υποψήφια διδάκτορα

Ντέμου Ελένη για τις χρήσιμες παρατηρήσεις και τις διορθώσεις στο κείμενο, τον Βλάχο Χριστόφορο, τον Σαλμά Φαίδων, την Σχοινιά Κέλλυ και τον δόκτωρα Ηλιόπουλο Αντώνιο για τις ενδιαφέρουσες συζητήσεις μας. Τέλος αφιερώνω την διπλωματική εργασία μου στους γονείς μου και την αδερφή μου για την αμέριστη και ακούραστη συμπαράστασή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Άλγεβρες *Lie*

2.1 Παραδοχές

Θα επικεντρωθούμε σε συνεχώς παραγόμενες ομάδες που είναι κοντά στην ταυτότητα. Κάθε στοιχείο μπορεί να γραφτεί:

$$g(a) = 1 + ia^a T^a + O(a^2) \quad (2.1)$$

Οι συντελεστές a είναι ερμιτιάνοι τελεστές και οι T^a είναι οι γεννήτορες της ομάδας συμμετρίας. Το σύνολο των T^a πρέπει να παράγει την απειροστή ομάδα των μετασχηματισμών έτσι ο μεταθέτης των γεννητόρων των T^a πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός των γεννητόρων. Αυτό γιατί η πράξη της μετάθεσης πρέπει να είναι κλειστή και επειδή οι T^a είναι βάση του διανυσματικού χώρου της άλγεβρας.

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (2.2)$$

Οι αριθμοί f^{abc} ονομάζονται σταθερές δομής. Οι γεννήτορες πρέπει να ικανοποιούν την ταυτότητα Jacobi:

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0 \quad (2.3)$$

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0 \quad (2.4)$$

Ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τους γεννήτορες καλείται Lie Algebra.

2.2 Ταξινόμηση των αλγεβρών *Lie*

Για να εφαρμόσουμε τη θεωρία των αλγεβρών Lie σε θεωρίες βαθμίδας πρέπει η τοπική συμμετρία να είναι ένας μοναδιακός ή ορθομοναδιαίος (unitary) μετασχηματισμός των πεδίων. Για αυτό το λόγο ενδιαφερόμαστε για Lie άλγεβρες

που έχουν ερμιτιανές αναπαραστάσεις πεπερασμένων διαστάσεων που οδηγούν σε μοναδιακές αναπαραστάσεις πεπερασμένων διαστάσεων της αντίστοιχης Lie ομάδας. Αυτές οι άλγεβρες ονομάζονται συμπαγής γιατί η αντίστοιχη Lie ομάδα είναι μία συμπαγής πολλαπλότητα πεπερασμένων διαστάσεων. Συμπαγής πολλαπλότητα είναι μία πολλαπλότητα χωρίς όρια και τρύπες για παράδειγμα ένας κύκλος, μία σφαίρα ή ένας τόρος. Οι περισσότερες από τις Lie άλγεβρες ανήκουν σε κάποια από τις τρεις οικογένειες που θα παρουσιάσουμε παρακάτω. Οι τρεις αυτές οικογένειες αντιστοιχούν στις λεγόμενες κλασικές ομάδες, οι οποίες ορίζονται μέσω αναπαραστάσεων πινάκων.

2.2.1 Μοναδιακοί μετασχηματισμοί διανυσμάτων N διαστάσεων

Έστω ξ και η μιγαδικά διανύσματα N διαστάσεων. Ένας γενικός γραμμικός μετασχηματισμός έχει τη μορφή:

$$\eta_a \rightarrow U_{ab}\eta_b, \quad \xi_a \rightarrow U_{ab}\xi_b \quad (2.5)$$

Θα λέμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι μοναδιακός εάν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο $\eta_a * \xi_a$. Οι μετασχηματισμοί φάσης

$$\xi_a \rightarrow e^{i\alpha} \xi_a \quad (2.6)$$

σχηματίζουν μια $U(1)$ υποομάδα που μετατίθεται με όλους τους άλλους μοναδιακούς μετασχηματισμούς: Αν αφαιρέσουμε αυτή την υποομάδα φτιάχνουμε μία απλή (simple) Lie ομάδα που καλείται $SU(N)$. Αυτή η ομάδα αποτελείται από όλους τους $N \times N$ μετασχηματισμούς που έχουν ορίζουσα: $\det(U) = 1$. Απλή Lie ομάδα είναι όταν δεν μπορούμε να αναλύσουμε την ομάδα αυτή σε μικρότερης διάστασης ομάδες που δεν μετατίθενται μεταξύ τους. Οι γεννήτορες της $SU(N)$ αναπαρίστανται από $N \times N$ ερμιτιανούς πίνακες t^a για τους οποίους ισχύει η συνθήκη

$$\det(U) = 1 = e^{tr[t^a]} \Leftrightarrow tr[t^a] = 0 \quad (2.7)$$

Υπάρχουν $N^2 - 1$ ανεξάρτητοι πίνακες που ικανοποιούν αυτές τις παραπάνω προϋποθέσεις.

2.2.2 Ορθογώνιοι μετασχηματισμοί N-διάστατων διανυσμάτων

Αυτοί οι μετασχηματισμοί είναι υποομάδα των μοναδιακών $N \times N$ μετασχηματισμών οι οποίοι διατηρούν το γινόμενο:

$$\eta_a E_{ab} \xi_b, \quad E_{ab} = \delta_{ab} \quad (2.8)$$

Αυτό είναι το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο και για αυτό το λόγο αυτή τη ομάδα είναι η ομάδα στροφών στις N διαστάσεις, αυτή η ομάδα είναι η $SO(N)$. Οι γεννήτορες της ομάδας είναι $N(N + 1)/2$.

2.2.3 Συμπλεκτικοί μετασχηματισμοί N -διάστατων διανυσμάτων

Αυτοί οι μετασχηματισμοί είναι υποομάδα των μοναδιακών $N \times N$ μετασχηματισμών για ζυγό αριθμό διαστάσεων που διατηρούν το αντισυμμετρικό εσωτερικό γινόμενο:

$$\eta_a E_{ab} \xi_b, \quad E_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

όπου τα στοιχεία του E_{ab} είναι $N/2 \times N/2$ υποπίνακες. Η ομάδα αυτή λέγεται $Sp(N)$ και έχει $N(N+1)/2$ γεννήτορες.

Πέρα από τις τρεις αυτές οικογένειες υπάρχουν άλλες πέντε ειδικές ομάδες οι οποίες ταξινομήθηκαν από τον *Cartan* ως G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 .

2.3 Αναπαραστάσεις

Όταν η τοπική ομάδα συμμετρίας έχει καθοριστεί, τα πεδία που εμφανίζονται στην λαγκρανζιανή θα μετασχηματίζονται ανάλογα με την μοναδιακή αναπαράσταση στην οποία ανήκουν η οποία είναι πεπερασμένων διαστάσεων. Η διαδικασία για να βρίσκουμε αναπαραστάσεις μίας ομάδας είναι μέσω των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Αυτή η διαδικασία μπορεί να γενικευτεί για κάθε συμπαγής άλγεβρα *Lie*. Πριν δούμε τις αναπαραστάσεις των Αλγεβρών *Lie* θα αναφέρουμε μερικά γενικά χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων των ομάδων. Δοθείσας μίας ομάδας G , μία πεπερασμένων διαστάσεων μοναδιακή αναπαράσταση της G είναι ένα σύνολο ερμιτιανών πινάκων t^a , διάστασης $d \times d$ οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση 2.28. Το d είναι και η διάσταση της αναπαράστασης. Μία αναπαράσταση μπορεί να αναλυθεί με αλλαγή της βάσης στην οποία όλοι οι πίνακες της αναπαράστασης θα είναι διαγώνιοι. Με αυτή την αλλαγή μπορούμε να γράψουμε την αναπαράσταση ως ευθύ άθροισμα των αμείωτων (*irreducible*) αναπαραστάσεων. Θα συμβολίζουμε τους πίνακες σε αυτή την βάση t_r^a .

Είναι σύνηθες να υιοθετούμε σύμβαση κανονικοποίησης για τους πίνακες t_r^a βασισμένοι στα ίχνη των γινομένων τους. Εάν η άλγεβρα είναι ημι-απλή, οι πίνακες t_r^a έχουν ίχνος μηδέν. Ας θεωρήσουμε το ίχνος του γινομένου δύο γεννητόρων:

$$tr[t_r^a t_r^b] =: D^{ab} \quad (2.10)$$

Όσο οι πίνακες των γεννητόρων είναι ερμιτιανοί, ο πίνακας D^{ab} είναι θετικά ορισμένος. Θα επιλέξουμε μία βάση για τους γεννήτορες T^a ώστε οι πίνακες τους να είναι ανάλογοι της μονάδας. Αν αυτό μπορεί να γίνει για μια αμείωτη αναπαράσταση μπορεί να γίνει για όλες. Άρα στη βάση όπου:

$$tr[t_r^a t_r^b] = C(r) \delta^{ab} \quad (2.11)$$

Το $C(r)$ είναι σταθερά για κάθε αναπαράσταση r . Η εξίσωση (11) μαζί με τις σχέσεις μετάθεσης 2.28 δίνουν το αποτέλεσμα:

$$f^{abc} = -\frac{i}{C(r)} \text{tr}[[t_r^a, t_r^b]t_r^c] \quad (2.12)$$

Όπου βλέπουμε από την εξίσωση ότι το f^{abc} είναι αντισυμμετρικό. Για κάθε αμείωτη αναπαράσταση r της ομάδας G υπάρχει η αντίστοιχη συζυγή (*conjugate*) αναπαράσταση \bar{r} . Η αναπαράσταση r δίνει την απειροελάχιστο μετασχηματισμό:

$$\phi \rightarrow (1 + ia^a t_r^a) \phi \quad (2.13)$$

Ο μιγαδικός συζυγής του μετασχηματισμού αυτού είναι:

$$\phi^* \rightarrow (1 - ia^a (t_r^a)^*) \phi^* \quad (2.14)$$

ο οποίος πρέπει να είναι απειροελάχιστο στοιχείο της αναπαράστασης της G . Με αυτόν τον τρόπο η συζυγή αναπαράσταση της r έχει πίνακες:

$$t_{\bar{r}}^a = -(t_r^a)^* = -(t_r^a)^T \quad (2.15)$$

Εφόσον, $\phi^* \phi$ είναι αναλλοίωτο σε μοναδιαίους μετασχηματισμούς, είναι δυνατόν να φτιάξουμε συνδυασμούς πεδίων στις αναπαραστάσεις r και \bar{r} που να είναι αναλλοίωτοι της αντίστοιχης ομάδας. Εάν για παράδειγμα η \bar{r} είναι ισοδύναμη με την r τότε υπάρχει ένας μοναδιακός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε $t_{\bar{r}}^a = U t_r^a U^\dagger$. Εάν ισχύει αυτό τότε η r είναι πραγματική. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένας πίνακας G_{ab} τέτοιος ώστε, εάν $\eta, \xi \in r$, ο συνδυασμός $G_{ab} \eta_a \xi_b$ είναι αναλλοίωτος. Μερικές φορές είναι χρήσιμο να ξεχωρίζουμε την περίπτωση που το G_{ab} είναι συμμετρικό ή αντισυμμετρικό. Στην συμμετρική περίπτωση η αναπαράσταση είναι αυστηρά πραγματική ενώ στην άλλη είναι ψευδοπραγματική. Και οι δύο περιπτώσεις συμβαίνουν στην περίπτωση του $SU(2)$: Ο συνδυασμός των διανυσμάτων $v_a w_a$ είναι αναλλοίωτος και το διάνυσμα είναι πραγματική αναπαράσταση. Ο συνδυασμός δύο σπινόρων $\epsilon^{ab} \eta_a \xi_b$ είναι αναλλοίωτος οπότε ο σπινόρας είναι ψευδοπραγματική αναπαράσταση.

Με αυτή την γλώσσα μπορούμε να αναπτύξουμε τις απλούστερες αναπαραστάσεις των κλασικών ομάδων. Στο $SU(N)$ η βασική αμείωτη αναπαράσταση ή θεμελιώδη όπως συχνά καλείται είναι ένα N -διάστατο μιγαδικά διάνυσμα. Για $N > 2$ αυτή τη αναπαράσταση είναι μιγαδική, οπότε υπάρχει μια μη ισοδύναμη αναπαράσταση \bar{N} . Στο $SU(2)$ αυτή η αναπαράσταση είναι ο ψευδοπραγματικός σπινόρας. Στο $SO(N)$ το βασικό N -διάστατο διάνυσμα και η αμείωτη αναπαράσταση είναι πραγματική αναπαράσταση και στην $Sp(N)$ είναι ψευδοπραγματική αναπαράσταση.

Μια άλλη αμείωτη αναπαράσταση που είναι παρούσα σε κάθε απλή άλγεβρα Lie, είναι αυτή στην οποία οι γεννήτορες της άλγεβρας ανήκουν. Αυτή η αναπαράσταση καλείται προσαρτημένη (*adjoint*) αναπαράσταση και συμβολίζεται ως $r = G$. Οι πίνακες της αναπαράστασης δίνονται από τις σταθερές δομής:

$$(t_G^b)_{ac} = i f^{abc} \quad (2.16)$$

Με αυτόν τον ορισμό τα t_G^a ικανοποιούν την άλγεβρα *Lie*:

$$([t_G^b, t_G^c])_{ae} = if^{bcd}(t_G^d)_{ae} \quad (2.17)$$

Εφόσον οι σταθερές δομής είναι πραγματικές και αντισυμμετρικές:
 $t_G^a = -(t_G^a)^*$, η προσαρτημένη αναπαράσταση είναι πραγματική. Η διάσταση της προσαρτημένης $d(G)$ δίνεται:

$$d(G) = \begin{cases} N^2 - 1, & SU(N) \\ N(N-1)/2, & SO(N) \\ N(N+1)/2, & Sp(N) \end{cases} \quad (2.18)$$

Ταυτότητα *Bianchi-Bianchi identity*

Εστω η συναλλοίωτη παράγωγος που δρα πάνω σε ένα πεδίο που ανήκει στην προσαρτημένη αναπαράσταση:

$$(D_\mu \phi)_a = \partial \phi_a - ig A_\mu^b (t_G^b)_{ac} \phi_c = \partial \phi_a + gf^{abc} A_\mu^b \phi_c \quad (2.19)$$

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε τον απειροστό μετασχηματισμό βαθμίδας του διανυσματικού πεδίου ως την κίνηση:

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu a)^a \quad (2.20)$$

Η εξίσωση κίνησης μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$(D^\mu F_{\mu\nu})^a = -gj_\nu^a \quad (2.21)$$

Θα θέλαμε να βρούμε τις ομογενείς εξισώσεις του *Maxwell* για μη αβελιανές θεωρίες. Ισχύει ότι:

$$[D_\nu, D_\mu] = F_{\mu\nu} \quad (2.22)$$

Οι συναλλοίωτες παράγωγοι ικανοποιούν την ταυτότητα *Jacobi*:

- $[D_\mu, [D_\nu, D_\lambda]]\psi = [D_\mu, F_{\nu\lambda}]\psi = D_\mu(F_{\nu\lambda}\psi) - F_{\nu\lambda}D_\mu\psi$
 $= D_\mu(F_{\nu\lambda})\psi + F_{\nu\lambda}D_\mu\psi - F_{\nu\lambda}D_\mu\psi = D_\mu F_{\nu\lambda}\psi$
 Ομοίως:
- $[D_\nu, [D_\lambda, D_\mu]]\psi = D_\nu F_{\lambda\mu}\psi$
- $[D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]]\psi = D_\lambda F_{\mu\nu}\psi$
 Επομένως:
 $D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$
 $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} (D_\nu F_{\lambda\sigma})^a = 0 \quad (2.23)$

Η σχέση αυτή ονομάζεται εξίσωση *Bianchi* της μη αβελιανής θεωρίας που είναι το ανάλογο των εξισώσεων *Maxwell*.

2.3.1 Τελεστής Casimir

Στην $SU(2)$ χαρακτηρίζουμε τις αναπαράστασεις από την ιδιοτιμή του ολικού σπιν J^2 . Για κάθε απλή άλγεβρα Lie ο τελεστής:

$$T^2 = T^a T^a \quad (2.24)$$

μετατίθεται με όλους του γεννήτορες της ομάδας.

$$\begin{aligned} [T^b, T^a T^a] &= [T^b, T^a] T^a - T^a [T^a, T^b] = i f^{bac} T^c T^a + T^a [T^b, T^a] \\ &= (i f^{bac} T^c) T^a + T^a (i f^{bac} T^c) = i f^{bac} (T^c T^a + T^a T^c) \\ &= i f^{bac} \{T^a, T^c\} = 0 \end{aligned}$$

Το τελευταίο ίσον οφείλεται στο ότι πολλαπλασιάζονται δύο ταυιστές που ο ένας είναι συμμετρικός και ο f^{bac} αντισυμμετρικός. Με άλλα λόγια ο T^2 είναι αναλλοίωτος της άλγεβρας. Αυτό σημαίνει ότι ο T^2 θα δίνει σταθερή τιμή για κάθε αμείωτη αναπαράσταση. Οπότε θα πρέπει να είναι ανάλογος του πίνακα μονάδα:

$$t_r^a t_r^a = C_2(r) \cdot \mathbf{1} \quad (2.25)$$

Όπου $\mathbf{1}$ είναι ο $d(r) \times d(r)$ πίνακας και ο $C_2(r)$ είναι σταθερά και καλείται τετραγωνικός τελεστής Casimir για κάθε αναπαράσταση. Για την προσαρτημένη αναπαράσταση η εξίσωση 2.25 μπορεί να γραφτεί πιο απλά:

$$f^{acd} f^{bcd} = C_2(G) \delta^{ab} \quad (2.26)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση 2.11 και την εξίσωση 2.25:

$$C_2(r) d(r) = C(r) d(G) \quad (2.27)$$

Με αυτή τη σχέση θα είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε το $C_2(r)$ για τις πιο απλές αναπαράστασεις της $SU(N)$.

Για την $SU(2)$, η θεμελιώδης 2-διάστατη αναπαράσταση είναι η σπινοριακή, η οποία δίνεται σε σχέση με τους πίνακες του Pauli:

$$t_2^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad (2.28)$$

Που ικανοποιούν την σχέση: $tr[t_2^a t_2^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab}$. Θα επιλέξουμε τους γεννήτορες της $SU(N)$ έτσι ώστε τρεις από αυτούς να είναι οι γεννήτορες της 2.28, που θα ενεργούν στις δύο πρώτες συνιστώσες του N-διάστατου διανύσματος ξ . Έτσι για κάθε πίνακα της θεμελιώδης αναπαράστασης θα ισχύει:

$$tr[t_N^a t_N^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (2.29)$$

Αυτή η σύμβαση κλειδώνει και τις τιμές των $C(r)$, $C_2(r)$ για όλες τις αμείωτες αναπαράστασεις της $SU(N)$. Για τις θεμελιώδεις αναπαράστασεις N, \bar{N} , το $C(N)$ δίνεται από την 2.29 και το $C_2(N)$ από την 2.26. Βρίσκουμε ότι

$$C(N) = \frac{1}{2}, \quad C_2(N) = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (2.30)$$

Για να υπολογίσουμε τον τελεστή *Casimir* για την προσαρτημένη αναπαράσταση, πρέπει να την φτιάξουμε μέσω του γινομένου της N και της \bar{N} . Πρώτα πρέπει να μιλήσουμε για το γινόμενο αμείωτων αναπαράστασεων. Το ευθύ γινόμενο δύο αναπαράστασεων r_1, r_2 είναι μία αναπαράσταση διάστασης $d(r_1) \cdot d(r_2)$. Το αντικείμενο που μετασχηματίζεται σύμφωνα με την καινούργια αναπαράσταση μπορεί να γραφτεί ως τανυστής Ξ_{pq} όπου ο πρώτος δείκτης μετασχηματίζεται σύμφωνα με την r_1 και ο δεύτερος σύμφωνα με την r_2 . Γενικά, ένα τέτοιο γινόμενο μπορεί να αναλυθεί ως ευθύ γινόμενο αμείωτων αναπαράστασεων, συμβολικά γράφεται ως:

$$r_1 \times r_2 = \sum r_i \quad (2.31)$$

Οι πίνακες της αναπαράστασης $r_1 \times r_2$ είναι:

$$t_{r_1 \times r_2}^a = t_{r_1}^a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes t_{r_2}^a \quad (2.32)$$

όπου ο πρώτος πίνακας του κάθε γινομένου δρα στον πρώτο δείκτη του Ξ_{pq} και ο δεύτερος του κάθε γινομένου στον δεύτερο δείκτη.

Ο τελεστής *Casimir* της αναπαράστασης γινομένου είναι:

$$(t_{r_1 \times r_2}^a)^2 = (t_{r_1}^a)^2 \otimes \mathbf{1} + 2t_{r_1}^a \otimes t_{r_2}^a + \mathbf{1} \otimes (t_{r_2}^a)^2 \quad (2.33)$$

Παίρνουμε το ίχνος της εξίσωσης αυτής και το πρώτο μέλος λόγω της 2.31 γίνεται:

$$tr[t_{r_1 \times r_2}^a]^2 = \sum C_2(r_i)d(r_i) \quad (2.34)$$

και το δεύτερο μέλος:

$$\begin{aligned} tr[(t_{r_1}^a)^2 \otimes \mathbf{1}_{r_2} + 2t_{r_1}^a \otimes t_{r_2}^a + \mathbf{1}_{r_1} \otimes (t_{r_2}^a)^2] &= tr[t_{r_1}^a]^2 tr[\mathbf{1}_{r_2}] + 2tr[t_{r_1}^a]tr[t_{r_2}^a] + tr[\mathbf{1}_{r_1}]tr[t_{r_2}^a]^2 \\ &= C_2(r_1)d(r_1)d(r_2) + d(r_1)d(r_2)C_2(r_2) = (C_2(r_1) + C_2(r_2))d(r_1)d(r_2) \end{aligned}$$

Οπότε αν εξισώσουμε το αποτέλεσμα των δύο μελών παίρνουμε μια πολύ χρήσιμη σχέση για το $C_2(r)$.

$$\sum C_2(r_i)d(r_i) = (C_2(r_1) + C_2(r_2))d(r_1)d(r_2) \quad (2.35)$$

Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση αυτή για την αναπαράσταση γινομένου μεταξύ της N και \bar{N} της $SU(N)$. Σε αυτή την περίπτωση ο τανυστής Ξ_{pq} μπορεί να περιέχει έναν όρο ανάλογο του δ_{pq} . Οι υπόλοιπες $(N^2 - 1)$ ανεξάρτητες συνιστώσες του Ξ_{pq} μετασχηματίζονται ως $N \times N$ τ με μηδενικό ίχνος. Οι πίνακες που πραγματοποιούν αυτούς τους μετασχηματισμούς φτιάχνουν την προσαρτημένη αναπαράσταση της $SU(N)$. Οπότε η εξίσωση 2.31 γίνεται:

$$N \times \bar{N} = \mathbf{1} + (N^2 - 1) \quad (2.36)$$

Για αυτή την ανάλυση η εξίσωση 2.35 δίνει:

$$\left(2\frac{N^2 - 1}{2N}\right) = 0 + C_2(G)(N^2 - 1) \quad (2.37)$$

Για $SU(N)$ παίρνουμε:

$$C_2(G) = C(G) = N \quad (2.38)$$

References

1. Michael E. Peskin, Dan V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory* (*Frontiers in Physics*)
2. John Cornwell. *Group Theory in Physics*

Η Συνάρτηση *Lagrange* των *Yang – Mills*

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα φτιάξουμε την λαγκρανζιανή των *Yang – Mills* από γενικές γεωμετρικές αρχές. το επιχείρημα όπου πρότειναν *Yang – Mills* ήταν η αναλλοιώτητα κάτω από κάθε συνεχή συμμετρία ή αλλιώς συνεχή ομάδα. Το επιχείρημα αυτό είναι έναν αναβαθμό παραπάνω από το επιχείρημα του *Maxwell* που θεώρησε αναλλοίωτη λαγκρανζιανή κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς της φάσης (*phaserotations*). Σε αυτή την ενότητα θα εισάγουμε την έννοια της τοπικής συμμετρίας. Για το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίου θα θεωρήσουμε συμμετρία να είναι κάποια τρισδιάστατη ομάδα $O(3)$ ή $SU(2)$ ώστε η θεωρία αυτών των ομάδων να είναι οικεία. Στο τέλος θα γενικεύσουμε σε πιο αφηρημένη συμμετρία.

3.2 *Yang – Mills* Λαγκρανζιανή

Ας υποθέσουμε φερμιονικό πεδίο:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Που μετασχηματίζεται κάτω από τρισδιάστατες στροφές:

$$\psi \rightarrow e^{ia^i \frac{\sigma^i}{2}} \psi \quad (3.2)$$

Είναι σημαντικό να ξεχωρίσουμε την φυσική στροφή στον τρισδιάστατο χώρο από αυτή την αφηρημένη στροφή. Στη δημοσίευση των *Yang – Mills* το (ψ_1, ψ_2) ήταν μία διπλέτα πρωτόνιου-νετρόνιου που μετασχηματίζεται κάτω από το ισόσπιν. Εάν αναβαθμίσουμε σε τοπική συμμετρία ώστε τα a^i να εξαρτώνται από μια συνάρτηση του x θα έχουμε:

$$\psi(x) \rightarrow V(x)\psi(x) \quad V(x) = e^{ia^i(x) \frac{\sigma^i}{2}} \quad (3.3)$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους της ομάδας $U(1)$ όπως κάνουμε στον ηλεκτρομαγνητισμό με την διαφορά ότι πλέον θα έχουμε τρεις ορθογώνιες κινήσεις a^i μία για κάθε i που δεν μετατίθενται μεταξύ τους. Τις ομάδες αυτές τις ονομάζουμε μη αβελιανές και την πεδιακή θεωρία από αυτές μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας.

Για να κατασκευάσουμε την λαγκρανζιανή θα ξεκινήσουμε ορίζοντας την συναλλοίωτη παράγωγο. Θα ξεκινήσουμε από τον εξής γενικό ορισμό:

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - U(x + \epsilon n, x) \psi(x)] \quad (3.4)$$

Το αντικείμενο $U(y, x)$ το ονομάζουμε συγκριτή και ο κανόνας μετασχηματισμού είναι:

$$U(y, x) \rightarrow V(y) U(y, x) V^\dagger(x) \quad (3.5)$$

Θα θέσουμε $U(y, y) = 1$. Σε σημεία όπου $x \neq y$ μπορούμε να περιορίσουμε το $U(y, x)$ να είναι μοναδιακός πίνακας. Κοντά στο $U = 1$ μπορούμε να αναπτύξουμε το U μέσω των ερμιτιανών γεννητόρων:

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 + i g n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + O(\epsilon^2) \quad (3.6)$$

Το g είναι σταθερά. Αν βάλουμε το αποτέλεσμα αυτό στον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου για $SU(2)$ συμμετρία έχουμε:

$$D_\mu = \partial_\mu - i g A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \quad (3.7)$$

Η παράγωγος αυτή απαιτεί τρία διανυσματικά πεδία, ένα για κάθε γεννήτορα της ομάδας μετασχηματισμών. Μπορούμε να βρούμε τον κανόνα μετασχηματισμού για τον σύνδεσμο A_μ^i αν βάλουμε την 3.6 στην 3.5.

$$1 + i g n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow V(x + \epsilon n) (1 + i g n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) V^\dagger(x) \quad (3.8)$$

Πρέπει να αναπτύξουμε το δεξιό μέλος ως προς ϵ , παίρνοντας υπόψιν ότι οι πίνακες *Pauli* δεν μετατίθενται μεταξύ τους. Η ανάπτυξη θα γίνει σύμφωνα με τον τύπο:

$$\begin{aligned} V(x + \epsilon n) V^\dagger(x) &= [(1 + \epsilon n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + O(\epsilon^2)) V(x)] V^\dagger(x) \\ &= 1 + \epsilon n^\mu (\frac{\partial}{\partial x^\mu} V(x)) V^\dagger(x) + O(\epsilon^2) \\ &= 1 + \epsilon n^\mu V(x) (-\frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\dagger(x)) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

διότι:

- $V(x) V^\dagger(x) = \mathbf{1}$

- $(\partial_\mu V(x))V^\dagger(x) = \partial_\mu(V(x)V^\dagger(x)) - V(x)\partial_\mu V^\dagger(x) = \partial_\mu \mathbf{1} - V(x)\partial_\mu V^\dagger(x) = V(x)(-\partial_\mu V^\dagger(x))$

Οι όροι ανάλογοι του ϵn^μ στην 3.8 έχουν κανόνα μετασχηματισμού:

$$A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow V(x) \left(A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x) \quad (3.9)$$

Η παράγωγος εφαρμόζεται πάνω στο $V(x) = e^{-ia^i \sigma^i / 2}$. Πρέπει να πάρουμε υπόψη ότι η παράγωγος του εκθετικού δεν μετατίθεται με το εκθετικό του $V(x)$. Για απειροελάχιστους μετασχηματισμούς αναπτύσσουμε το $V(x)$ ως προς την πρώτη τάξη του a :

$$A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + \frac{1}{g} (\partial a^i) \frac{\sigma^i}{2} + i [a^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}] + \dots \quad (3.10)$$

Ο τελευταίος όρος είναι καινούργιος και ανακύπτει από την μη μεταθετικότητα της άλγεβρας. Συνδυάζοντας την σχέση αυτή με τον κανόνα μετασχηματισμού του σπινόριακού πεδίου έχουμε για την συναλλοίωτη παράγωγο:

$$\psi \rightarrow (1 + ia^i \frac{\sigma^i}{2}) \psi + \dots \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &\rightarrow (\partial_\mu - ig A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - i(\partial_\mu a^i) \frac{\sigma^i}{2} + g [a^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}]) (1 + ia^k \frac{\sigma^k}{2}) \psi \\ &= (1 + ia^i \frac{\sigma^i}{2}) D_\mu \psi \simeq e^{ia^i \frac{\sigma^i}{2}} D_\mu \psi \end{aligned}$$

Θα απαιτήσουμε ότι:

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = \partial_\mu - ig A'_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} = e^{ia^i(x) \frac{\sigma^i}{2}} (\partial_\mu - ig A_\mu^i(x) \frac{\sigma^i}{2}) e^{-ia^i(x) \frac{\sigma^i}{2}} = V(x) D_\mu V^\dagger(x) \quad (3.12)$$

Επομένως ο κανόνας μετασχηματισμού του A_μ^i γίνεται:

$$A_\mu^i \rightarrow A'^i_\mu = A_\mu^i + \frac{\sigma^i}{2} \partial_\mu a^i(x) \quad (3.13)$$

Χρησιμοποιώντας την συναλλοίωτη παράγωγο μπορούμε να γράψουμε τις πιο γενικές λαγκρανζιανές ως προς τον σπινόρα που είναι αναλλοίωτες βαθμίδας. Για να γράψουμε όμως μια ολοκληρωμένη λαγκρανζιανή πρέπει να βρούμε και αναλλοίωτους όρους ως προς το διανυσματικό πεδίο A_μ^i . Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να φτιάξουμε το ανάλογο του ηλεκτρομαγνητικού τένσορα $F_{\mu\nu}$. Για να κατασκευάσουμε αυτόν τον τένσορα θα πρέπει να βρούμε τον κανόνα μετασχηματισμού του μεταθέτη των συναλλοίωτης παράγωγου.

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \psi &\rightarrow [V(x) D_\mu V^\dagger(x), V(x) D_\nu V^\dagger(x)] V(x) \psi \\ &= V(x) D_\mu V^\dagger(x) V(x) D_\nu V^\dagger(x) V(x) \psi - V(x) D_\nu V^\dagger(x) V(x) D_\mu V^\dagger(x) V(x) \psi \\ &= V(x) D_\mu D_\nu \psi - V(x) D_\nu D_\mu \psi \\ &= V(x) [D_\mu, D_\nu] \psi \end{aligned}$$

Μέσω της εξίσωσης *Bianchi* θα ορίσουμε τον νέο $F_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = (\partial_\mu - igA_\mu^i \frac{\sigma^i}{2})(\partial_\nu - igA_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}) - (\partial_\nu - igA_\nu^j \frac{\sigma^j}{2})(\partial_\mu - igA_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) \\
&= \partial_\mu \partial_\nu - ig\partial_\mu A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2} - igA_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \partial_\nu - g^2 A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2} \\
&\quad - \partial_\nu \partial_\mu + ig\partial_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + igA_\nu^j \frac{\sigma^j}{2} \partial_\mu - g^2 A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2} A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \\
&= ig(\partial_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\mu A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}) + ig(A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2} \partial_\mu - A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \partial_\nu) - g^2 [A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}] \\
&= -ig(\partial_\mu A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2} - \partial_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) + igg_{\mu\nu}(A^{j\mu} \frac{\sigma^j}{2} \partial_\mu - A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \partial^\mu) - g^2 [A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}] \\
&= -igF_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2}
\end{aligned}$$

Όπου $F_{\mu\nu}^i$:

$$F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} = \partial_\mu A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - ig[A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}] \quad (3.14)$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε τον ορισμό εφαρμόζοντας την μεταθετική σχέση μεταξύ των πινάκων σ :

$$[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}] = i\epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2} \quad (3.15)$$

Οπότε:

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \quad (3.16)$$

Το $F_{\mu\nu}^i$ έχει κανόνα μετασχηματισμού:

$$F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow V(x) F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} V^\dagger(x) \quad (3.17)$$

διότι:

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &\rightarrow [V(x)D_\mu V^\dagger(x), V(x)D_\nu V^\dagger(x)] = V(x)D_\mu V^\dagger(x)V(x)D_\nu V^\dagger(x) - V(x)D_\nu V^\dagger(x)V(x)D_\mu V^\dagger(x) \\
&= V(x)D_\mu D_\nu V^\dagger(x) - V(x)D_\nu D_\mu V^\dagger(x) \\
&= V(x)[D_\mu, D_\nu]V^\dagger(x)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το $F_{\mu\nu}^i$ δεν είναι πλέον αναλλοίωτο της βαθμίδας. Μπορούμε όμως να φτιάξουμε συνδυασμό από $F_{\mu\nu}^i$ ώστε να έχουμε αναλλοίωτη λαγκρανζιανή. Ένας από αυτούς είναι:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \text{tr}[(F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2})^2] = -\frac{1}{2} \text{tr}[F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2}] \\
 &= -\frac{1}{2} \text{tr}[\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i \mathbf{1} + i(F_{\mu\nu}^i \times F_{\mu\nu}^j) \sigma^i)] \\
 &= -\frac{1}{2} \text{tr}[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i \mathbf{1}] \\
 &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^i)^2
 \end{aligned}$$

Αυτή η λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη βαθμίδας και έχει τον κινητικό όρο του A_μ^i . Σε αντίθεση με την ηλεκτροδυναμική εδώ έχουμε κυβικούς και τετράκις όρους ως προς A_μ^i , αυτό μας δείχνει ότι η \mathcal{L}_{YM} περιγράφει μία πεδιακή θεωρία με αλληλεπιδράσεις από πρώτες αρχές. Αυτή η θεωρία ονομάζεται *Yang – Mills* θεωρία.

Για να φτιάξουμε μία *Yang – Mills* θεωρία που τα διανυσματικά πεδία αλληλεπιδρούν με φερμιόνια θα προσθέσουμε την \mathcal{L}_{YM} στην λαγκρανζιανή του *Dirac* αναβαθμίζοντας την απλή παράγωγο σε συναλλοίωτη.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D})\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^i)^2 - m\bar{\psi}\psi \quad (3.18)$$

Μέσω αυτής της \mathcal{L} θα βρούμε τις κλασσικές εξισώσεις κίνησης για το διανυσματικό πεδίο:

$$\partial^\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma A^{m\rho})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{m\rho}} = 0 \Rightarrow \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma A^{m\rho})} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial^\sigma A^{m\rho})} [F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}] + \frac{\partial}{\partial(\partial^\sigma A^{m\rho})} [\bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi] \\
 &= -\frac{1}{4} [(g^{\sigma\mu} g^{\rho\nu} \delta_{mi} - g^{\sigma\nu} g^{\rho\mu} \delta_{mi}) F^{i\mu\nu} + (\delta_{\sigma\mu} \delta_{\rho\nu} \delta_{mi} - \delta_{\sigma\nu} \delta_{\rho\mu} \delta_{mi}) F_{\mu\nu}^i] \\
 &= -\frac{1}{4} [F_{\sigma\rho}^m - F_{\rho\sigma}^m + F_{\sigma\rho}^m - F_{\rho\sigma}^m] = F_{\sigma\rho}^m
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\partial^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma A^{m\rho})} = \partial^\sigma F_{\sigma\rho}^m \quad (3.20)$$

Ο δεύτερος όρος της *Euler – Lagrange* θα γίνει:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{m\rho}} &= \frac{\partial}{\partial A^{m\rho}} [-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}] + \frac{\partial}{\partial A^{m\rho}} [\bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi] \\
 &= -\frac{1}{4} [(\frac{\partial F_{\mu\nu}^i}{\partial A^{m\rho}}) F^{i\mu\nu} + (\frac{\partial F^{i\mu\nu}}{\partial A^{m\rho}}) F_{\mu\nu}^i] + \frac{\partial}{\partial A^{m\rho}} [\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \psi] \\
 &= -\frac{1}{4} [(g \epsilon^{ijk} \delta^{jm} g^{\rho\mu} A_\mu^k + g \epsilon^{ijk} \delta^{km} g_{\nu\rho} A_\mu^i) F^{i\mu\nu} + (g \epsilon^{ijk} \delta_{jm} \delta_{\rho\mu} A^{k\nu} + g \epsilon^{ijk} \delta_{\nu\rho} \delta_{km} A^{j\mu}) F_{\mu\nu}^i]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g\bar{\psi}\delta_{mi}g_{\rho\mu}\gamma^\mu\frac{\sigma^i}{2}\psi \\
& = -\frac{1}{4}(g\epsilon^{imk}A_\nu^kF_\rho^{i\nu} + g\epsilon^{ijm}A_\mu^iF_\rho^{j\mu} + g\epsilon^{imk}A^{k\nu}F_{\rho\nu}^i + g\epsilon^{ijm}A^{j\mu}F_{\mu\rho}^i) \\
& \quad +g\bar{\psi}\gamma_\rho\frac{\sigma^m}{2}\psi \\
& = -\frac{1}{4}(g\epsilon^{imk}A^{k\nu}F_{\rho\nu}^i + g\epsilon^{ijm}A^{j\mu}F_{\mu\rho}^i + g\epsilon^{imk}A^{k\nu}F_{\rho\nu}^i + g\epsilon^{ijm}A^{j\mu}F_{\mu\rho}^i) \\
& \quad +g\bar{\psi}\gamma_\rho\frac{\sigma^m}{2}\psi \\
& = -\frac{1}{4}(2g\epsilon^{imk}A^{k\nu}F_{\rho\nu}^i + 2g\epsilon^{ijm}A^{j\mu}F_{\mu\rho}^i) + g\bar{\psi}\gamma_\rho\frac{\sigma^m}{2}\psi \\
& = g\epsilon^{ijm}A^{j\nu}F_{\nu\rho}^i + g\bar{\psi}\gamma_\rho\frac{\sigma^m}{2}\psi
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^{m\rho}} = g\epsilon^{ijm}A^{j\nu}F_{\nu\rho}^i + g\bar{\psi}\gamma_\rho\frac{\sigma^m}{2}\psi \quad (3.21)$$

Αφαιρώντας την 3.21 από την 3.20 λαμβάνουμε την εξίσωση κίνησης του διανυσματικού πεδίου:

$$\begin{aligned}
\partial^\sigma F_{\rho\sigma}^m - g\epsilon^{ijm}A^{j\nu}F_{\nu\rho}^i - g\bar{\psi}\gamma_\rho\frac{\sigma^m}{2}\psi \\
\partial^\mu F_{\mu\nu}^i + g\epsilon^{ijk}A^{jm}F_{\mu\nu}^k = -g\bar{\psi}\gamma_\nu\frac{\sigma^i}{2}\psi
\end{aligned} \quad (3.22)$$

Όσα κάναμε ήταν για ομάδα συμμετρίας $SU(2)$ μπορούν να γενικευτούν και για $SU(N)$ αν θεωρήσουμε:

$$\frac{\sigma^i}{2} \rightarrow t^a \quad (3.23)$$

επίσης:

$$\epsilon^{ijk} \rightarrow f^{abc} \quad (3.24)$$

Όλα όσα χρησιμοποιήσαμε θα αλλάξουν ως εξής:

$$\begin{aligned}
D_\mu & = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a \\
\psi & \rightarrow (1 + ia^a t^a)\psi \\
A_\mu^a & \rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu a^a + f^{abc}A_\mu^b a^c \\
[D_\mu, D_\nu] & = -igF_{\mu\nu}^a t^a \\
F_{\mu\nu}^a & = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \\
F_{\mu\nu}^a & \rightarrow F_{\mu\nu}^a - f^{abc}a^b F_{\mu\nu}^c
\end{aligned}$$

και τέλος η εξίσωση κίνησης:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + gf^{abc} A^{b\mu} F_{\mu\nu}^c = -gj_\nu^a \quad (3.25)$$

όπου:

$$j_\nu^a = \bar{\psi}\gamma_\nu t^a \psi \quad (3.26)$$

Το οποίο ονομάζεται ρεύμα ολικής συμμετρίας του φερμιονικού πεδίου. Παρατηρούμε ότι οι μη γραμμικοί όροι της λαγκρανζιανής εμφανίζονται αρχικά στην συναλλοίωτη παράγωγο όπου είναι ανάλογοι των γεννητόρων t^a και στη συνέχεια στον τανυστή της έντασης του πεδίου όπου εκεί είναι ανάλογοι των σταθερών δομής. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι οι αλληλεπιδράσεις σε μια μη αβελιανή θεωρία εξαρτώνται πλήρως από την μη αβελιανότητα της ομάδας και από την τοπική(*local*) μορφή του μετασχηματισμού.

References

1. Michael E. Peskin, Dan V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*
2. C. N. Yang, R. L. Mills. *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*

Συναρτησιακές Μέθοδοι

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την μέθοδο των συναρτησιακών ολοκληρωμάτων (*functional integration*). Η μέθοδος αυτή είναι ένας γενικότερος φορμαλισμός που μας παρέχει σχετικά εύκολα την έκφραση του διαδότη του φωτονίου και τους κανόνες *Feynman* μιας θεωρίας. Μπορούμε βέβαια να την γενικεύσουμε σε κάθε θεωρία που περιέχει αλληλεπιδράσεις και ειδικότερα σε μη αβελιανές θεωρίες εφόσον η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί την λαγκρανζιανή ως βασικό συστατικό των πράξεων σε αντίθεση για παράδειγμα με την κανονική κβάντωση ή άλλες μεθόδους κβάντωσης. Ο συναρτησιακός φορμαλισμός διατηρεί όλες τις συμμετρίες της αρχικής κλασικής θεωρίας. Τέλος, ένα επιπλέον πλεονέκτημά του είναι ότι μπορούμε να δούμε την αναλογία μεταξύ της κβαντικής θεωρίας πεδίου και στατιστικής φυσικής.

4.2 Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των συναρτησιακών σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Ο στόχος μας είναι να εξάγουμε τους κανόνες *Feynman*.

$$\int DA e^{iS[A]} \quad (4.1)$$

Όπου το $S[A]$ είναι η δράση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Το ολοκλήρωμα είναι πάνω σε κάθε όρο: $DA = DA^0 DA^1 DA^2 DA^3$. Ολοκληρώνουμε κατά μέρη και αναπτύσσουμε το πεδίο ως ολοκλήρωμα *Fourier*.

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (F^{\mu\nu})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(-k) \quad (4.2)$$

Επομένως η εξίσωση 4.1 γίνεται:

$$\int DA \exp\left[i \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(-k)\right] \quad (4.3)$$

Η έκφραση στο εκθετικό μηδενίζεται όταν $\tilde{A}_\mu = k_\mu a(k)$ για κάθε βαθμωτή ποσότητα $a(k)$. Για αυτή τη μεγάλη κατηγορία σχηματισμών του πεδίου το ολοκλήρωμα στην 4.1 είναι μονάδα και έτσι αποκλίνει.

Αυτή η δυσκολία οφείλεται στον όρο $\frac{1}{e} \partial_\mu a(x)$ του μετασχηματισμού βαθμίδας του διανυσματικού πεδίου $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu a(x)$. Η απόκλιση προκαλείται όταν ολοκληρώνουμε πάνω σε όλους τους άπειρους φυσικούς σχηματισμούς του πεδίου. Για αυτό το λόγο πρέπει να επιλέξουμε βαθμίδα ώστε να απομονώσουμε το ενδιαφέρον κομμάτι του συναρτησιακού ολοκληρώματος και να ολοκληρώσουμε μόνο μία φορά σε κάθε σχηματισμό της συγκεκριμένης βαθμίδας. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε από τους *Faddeev* και *Popov*.

Θεωρούμε $G(A)$ να είναι συνάρτηση την οποία θα θέσουμε να είναι ίση με το μηδέν ως βαθμίδα. Για παράδειγμα η βαθμίδα, $G(A) = \partial_\mu A^\mu$ καλείται βαθμίδα *Lorentz*. Εμείς θα περιορίσουμε τον χώρο των δυνατών βαθμίδων ώστε το ολοκλήρωμα να καλύπτει μόνο τους σχηματισμούς πεδίων με βαθμίδα: $G(A) = \partial_\mu A^\mu = 0$ αντικαθιστώντας την συνάρτηση $\delta(G(A))$ επιτυγχάνουμε να μην ολοκληρώσουμε τους σχηματισμούς πεδίων που δεν μας ενδιαφέρουν. Μπορούμε να σκεφτούμε τη βαθμίδα $G(A)$ ως σημείο στον χώρο των μετασχηματισμών βαθμίδων και πέρα από αυτό το σημείο η συνάρτηση δέλτα μηδενίζεται. Για να εισάγουμε την συνάρτηση δέλτα, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$1 = \int Da(x) \delta(G(A^a)) \det\left(\frac{\delta(G(A^a))}{\delta a}\right) \quad (4.4)$$

όπου A^a :

$$A_\mu^a = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu a(x)$$

Η εξίσωση 4.4 είναι γενίκευση της εξίσωσης για διακριτά N -διάστατα διανύσματα:

$$1 = \left(\prod_i \int da_i\right) \delta^{(n)}(g(\mathbf{a})) \det\left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j}\right)$$

Στην *Lorentz* βαθμίδα έχουμε $G(A^a) = \partial^\mu A_\mu + (1/e)\partial^2 a$, με αυτόν τον τρόπο η ορίζουσα $\det\left(\frac{\delta(G(A^a))}{\delta a}\right)$ είναι ίση με την ορίζουσα $\det(\partial^2/e)$. Η ορίζουσα αυτή εξαρτάται από το A οπότε μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε σαν σταθερά μέσα στο ολοκλήρωμα. Αφού εισάγουμε την ορίζουσα στην αρχική εξίσωση 4.1 έχουμε:

$$\int DA e^{iS[A]} = \det\left(\frac{\delta G(A^a)}{\delta a}\right) \int Da \int DA e^{iS[A]} \delta(G(A^a))$$

Αλλάζουμε μεταβλητές από A σε A^a . Αυτό γίνεται απλά αντικαθιστώντας

$DA = DA^a$ και $S[A] = S[A^a]$, επειδή το A^a είναι μια αυθαίρετη μεταβλητή ολοκλήρωσης επιστρέφουμε πίσω στην A παίρνοντας:

$$\int DAe^{iS[A]} = \det\left(\frac{\delta G(A^a)}{\delta a}\right) \int Da \int DAe^{iS[A]} \delta(G(A)) \quad (4.5)$$

Το συναρτησιακό ολοκλήρωμα τώρα είναι πάνω στα A και περιορίζεται από την συνάρτηση δ μόνο στους μη ισοδύναμους φυσικούς σχηματισμούς πεδίων. Το αποκλίνον ολοκλήρωμα πάνω στα $a(x)$ δίνει έναν άπειρο παράγοντα.

Το επόμενο βήμα είναι να καθορίσουμε την βαθμίδα $G(A)$. Επιλέγουμε μια γενική κλάση συναρτήσεων:

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x) \quad (4.6)$$

Όπου η $\omega(x)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση. Η συναρτησιακή ορίζουσα είναι ίδια με την βαθμίδα *Lorentz*: $\det(\delta G(A)/\delta a) = \det(\partial^2/e)$. Το συναρτησιακό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int DAe^{iS[A]} = \det\left(\frac{1}{e}\partial^2\right) \int Da \int DAe^{iS[A]} \delta(\partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x)) \quad (4.7)$$

Η ταυτότητα αυτή ισχύει για κάθε $\omega(x)$ οπότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\omega(x)$ με οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό που περιέχει διάφορες συναρτήσεις της $\omega(x)$. Στη συνέχεια θα ολοκληρώσουμε πάνω σε όλα τα $\omega(x)$ με γκαουσιανό βάρος στο $\omega = 0$.

$$\begin{aligned} \int DAe^{iS[A]} &= \det\left(\frac{1}{e}\partial^2\right) \int Da \int DAe^{iS[A]} \delta(\partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x)) \\ &= N(\xi) \int D\omega \exp\left[-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}\right] \det\left(\frac{1}{e}\partial^2\right) \left(\int Da\right) \int DAe^{iS[A]} \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)) \\ &= N(\xi) \det\left(\frac{1}{e}\partial^2\right) \left(\int Da\right) \int DAe^{iS[A]} \exp\left[-i \int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2\right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Όπου το $N(\xi)$ είναι μία σταθερά που προκύπτει από την ολοκλήρωση πάνω στα ω . Το καινούργιο ολοκλήρωμα που εμφανίσαμε πρέπει να έχει τη μορφή: $\int d\omega e^{-b\omega^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$. Πρέπει να επιλέξουμε το ξ να είναι μία πεπερασμένη σταθερά. Λόγω της επιλογής βαθμίδας ξ , Πρέπει να εισάγουμε τον όρο $-(\partial^\mu A_\mu)^2/2\xi$ στην λαγκρανζιανή.

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με τον παρανομαστή της φόρμουλας:

$$\langle \Omega | TO(A) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\int DAO(A) \exp[iS[A]]}{\int DA \exp[iS[A]]} = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\int DAO(A) \exp[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}]}{\int DA \exp[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}]}$$

Οι συναρτήσεις αυτού του είδους ονομάζονται *correlation functions* και χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή των κανόνων *Feynman*. Με τον ίδιο τρόπο που

αντιμετωπίσαμε τον παρανομαστή μπορούμε να υπολογίσουμε και τον αριθμητή αν η ποσότητα $\mathcal{O}(A)$ είναι αναλλοίωτη βαθμίδας. Αν υποθέσουμε αναλλοιότητα:

$$\langle \Omega | TO(A) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\int DAO(A) \exp[i \int_{-T}^T d^4x [\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2]]}{\int DA \exp[i \int_{-T}^T d^4x [\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2]]} \quad (4.9)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του *Feynman* διαδότη:

$$\begin{aligned} (\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) D_F^{\nu\rho}(x-y) &= i\delta_\mu^\rho \delta^{(4)}(x-y) \\ \Rightarrow (-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) \tilde{D}_F^{\nu\rho}(k) &= i\delta_\mu^\rho \quad (4.10) \end{aligned}$$

Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση αυτή διότι ο πίνακας είναι ιδιάζων σε αντίθεση με πριν που δεν είχαμε κάνει την επιλογή βαθμίδας.

$$\begin{aligned} (\partial^2 g_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial_\mu \partial_\nu) D_F^{\nu\rho}(x-y) &= i\delta_\mu^\rho \delta^{(4)}(x-y) \\ \Rightarrow (-k^2 g_{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) k_\mu k_\nu) \tilde{D}_F^{\nu\rho}(k) &= i\delta_\mu^\rho \\ \Rightarrow \tilde{D}_F^{\mu\nu} &= \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) \quad (4.11) \end{aligned}$$

Στην πράξη επιλέγουμε συγκεκριμένη τιμή για το ξ όταν κάνουμε υπολογισμούς. Οι πιο συχνές τιμές είναι:

- $\xi = 0$ *Landau gauge*
- $\xi = 1$ *Feynman gauge*

4.3 Σπινორιακά Πεδία

Μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε τις *correlation functions* που περιείχαν πεδία που ικανοποιούσαν τις κανονικές σχέσεις μετάθεσης της κανονικής χβάντωσης και αυτό γιατί η κανονική χβάντωση πεδίων που ικανοποιούν την *Bose – Eistein* στατιστική είναι γενίκευση των σχέσεων μετάθεσης του χβαντικού ταλαντωτή. Τα σπινორιακά πεδία όμως δεν ξέρουμε ποιες σχέσεις μετάθεσης πρέπει να ικανοποιούν. Για να εισάγουμε σπινორιακά πεδία στον συναρτησιακό φορμαλισμό που ικανοποιούν αντιμεταθετικές σχέσεις πρέπει να αναπαραστήσουμε τα κλασικά πεδία με αντιμεταθετικούς αριθμούς.

Αντιμεταθετικοί Αριθμοί

Αυτούς τους αριθμούς θα τους ονομάζουμε *Grassmann* αριθμούς και θα τους ορίσουμε από τις αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ τους. Αυτές οι σχέσεις θα δικαιολογηθούν αργότερα από την στατιστική που θα παράξουν από τα πεδία που θα είναι η στατιστική *Fermi – Dirac*.

Η βασική ιδιότητα των αριθμών αυτών θα είναι ότι αντιμετατίθενται:

$$\theta\eta = -\eta\theta \quad (4.12)$$

Επίσης:

$$\theta^2 = 0 \quad (4.13)$$

Η ιδιότητα αυτή κάνει πολύ εύκολη την άλγεβρα τους. Το γινόμενο $(\theta\eta)$ μετατίθεται με ένα άλλο γινόμενο δύο *Grassmann* αριθμών.

$$\eta\theta\kappa = \kappa\eta\theta$$

Θα θέλαμε επιπλέον να προσθέτουμε *Grassmann* αριθμούς μεταξύ τους και να τους πολλαπλασιάζουμε με κανονικούς αριθμούς. Οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού έχουν τις ίδιες ιδιότητες σε κάθε διανυσματικό χώρο.

Η κύρια χρησιμότητα των *Grassmann* αριθμών είναι να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε πάνω τους. Για να ορίσουμε την συναρτησιακή ολοκλήρωση αυτών των αριθμών δεν χρειαζόμαστε έναν γενικό ορισμό ολοκλήρωσης αυτών των παραμέτρων αλλά απλά το ανάλογο της ολοκλήρωσης $\int_{-\infty}^{\infty} dx$. Για αυτό τον λόγο θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας γενικής συνάρτησης f με *Grassmann* μεταβλητή θ σε όλο το πεδίο της:

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta(A + B\theta) \quad (4.14)$$

Η $f(\theta)$ μπορεί να αναπτυχθεί ως σειρά *Taylor* και οι τετραγωνικοί όροι μηδενίζονται εφόσον: $\theta^2 = 0$. Το ολοκλήρωμα πρέπει να είναι γραμμικό ως προς f . Οπότε πρέπει να είναι γραμμική συνάρτηση των A, B . Η τιμή της συνάρτησης περιορίζεται και από άλλη μία απαίτηση: Στην ανάλυσή των μποζονικών συναρτησιακών ολοκληρωμάτων όπως για παράδειγμα στην εξίσωση 4.5, χρησιμοποιήσαμε την αναλλοιώτητα του ολοκληρώματος να αλλάζει μεταβλητή. Αυτή τη ιδιότητα παίζει σημαντικό ρόλο στην εξαγωγή των κβαντικών εξισώσεων της κίνησης και των αρχών διατήρησης. Αυτή την ιδιότητα θα την απαιτήσουμε και στα ολοκληρώματα των *Grassmann* μεταβλητών. Θα απαιτήσουμε αναλλοιώτητα κάτω από την αλλαγή $\theta \rightarrow \theta + \eta$. Επομένως η 4.14 θα γίνει:

$$\int d\theta(A + B\theta) = \int d\theta((A + B\eta) + B\theta) \quad (4.15)$$

Η αλλαγή αυτή θα αλλάξει τον σταθερό όρο A και θα αφήσει των γραμμικό όρο B ίδιο. Η μόνη γραμμική συνάρτηση $F(\theta) = \int d\theta(A + B\theta)$ που έχει αυτή την ιδιότητα είναι η σταθερά επί το B δηλαδή την οποία την θέτουμε μονάδα:

$$F(\theta) = B \Rightarrow \int d\theta(A + B\theta) = B \quad (4.16)$$

Επομένως η πράξη της παραγωγής και της ολοκλήρωσης *Grassmann* αριθμών είναι ισοδύναμη. Οπότε μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα *Berezin* με τις εξής ιδιότητες:

$$\int \theta_n \cdots \theta_1 d\theta_i = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.17)$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial \theta_i} d\theta = 0 \quad (4.18)$$

Επειδή το πεδίο του *Dirac* είναι μιγαδικό, θα εργαστούμε κυρίως με μιγαδικούς *Grassmann* αριθμούς, οι οποίοι μπορούν να φτιαχτούν από ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος με τον συνήθη τρόπο. Είναι βολικό να ορίσουμε το μιγαδικό συζυγές σε γινόμενο *Grassmann* αριθμών ως εξής:

$$(\theta\eta)^* = \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^* \quad (4.19)$$

Και θα ορίσουμε:

$$\theta = \frac{\theta_1 + i\theta_2}{\sqrt{2}}, \quad \theta^* = \frac{\theta_1 - i\theta_2}{\sqrt{2}} \quad (4.20)$$

Όστε όταν θα ολοκληρώνουμε να μπορούμε να χειριζόμαστε έναν *Grassmann* αριθμό και τον συζυγή του ως ανεξάρτητους ώστε η 4.17 να δίνει:

$$\int d\theta^* d\theta (\theta\theta^*) = 1 \quad (4.21)$$

Τώρα θα υπολογίσουμε ένα γκαουσιανό ολοκλήρωμα πάνω σε μία μιγαδική *Grassmann* μεταβλητή:

$$\int d\theta^* d\theta e^{-\theta^* b \theta} = \int d\theta^* d\theta (1 - \theta^* b \theta) = \int d\theta^* d\theta (1 + \theta \theta^* b) = b \quad (4.22)$$

Εάν ο θ ήταν ένας κανονικός μιγαδικός αριθμός το ολοκλήρωμα θα έδινε $2\pi/b$. Το 2π δεν μας ενδιαφέρει. Η διαφορά με έναν *Grassmann* αριθμό είναι ότι το b εμφανίζεται στον αριθμητή αντί στον παρονομαστή. Παρόλα αυτά εάν βάλουμε επιπλέον τον όρο $\theta\theta^*$ στο ολοκλήρωμα λαμβάνουμε:

$$\int d\theta^* d\theta \theta\theta^* e^{-\theta^* b \theta} = 1 = \frac{1}{b} \quad (4.23)$$

Ο επιπλέον όρος εισάγει έναν παράγοντα $(1/b)$ όπως σε έναν κανονικό ολοκλήρωμα.

Για να εφαρμόσουμε τα γκαουσιανά ολοκληρώματα σε υψηλότερες διαστάσεις θα χρειαστεί πρώτα να αποδείξουμε ότι ένα γκαουσιανό ολοκλήρωμα πάνω σε μια μιγαδική *Grassmann* μεταβλητή είναι αναλλοίωτο κάτω από μοναδιαίους (*unitary*) μετασχηματισμούς. Έστω ένα σύνολο n στο πλήθος *Grassmann* μεταβλητών θ_i και έναν μοναδιαίο πίνακα U . Αν $\theta'_i = U_{ij}\theta_j$, τότε:

$$\begin{aligned} \prod_i \theta'_i &= \frac{1}{n!} \epsilon^{ij \dots l} \theta'_i \theta'_j \dots \theta'_l \\ &= \frac{1}{n!} \epsilon^{ij \dots l} U_{ii'} \theta_{i'} U_{jj'} \theta_{j'} \dots U_{ll'} \theta_{l'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!} \epsilon^{ij \dots l} U_{ii'} U_{jj'} \dots U_{l'l'} \epsilon^{i'j' \dots l'} \prod_i \theta_i \\
&= (\det U) \prod_i \theta_i
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Σε ένα γενικό ολοκλήρωμα:

$$\left(\prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i \right) f(\theta)$$

Οι μόνοι όροι του $f(\theta)$ που επιβιώνουν είναι όσοι πολλαπλασιάζονται με θ_i ή θ_i^* δηλαδή όσοι είναι ανάλογοι των γινομένων $(\prod_i \theta_i)(\prod_i \theta_i^*)$. Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό $\theta \rightarrow U\theta$ τότε θα εμφανιστεί ο όρος $(\det U)(\det U)^* = 1$ οπότε και το ολοκλήρωμα θα μείνει αναλλοίωτο σε μοναδιακό μετασχηματισμό.

Τώρα θα υπολογίσουμε ένα γενικό γκαουσιανό ολοκλήρωμα που περιέχει έναν ερμιτιανό πίνακα B με ιδιοτιμές b_i :

$$\left(\prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i \right) e^{-\theta_i^* B_{ij} \theta_j} = \left(\prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i \right) e^{-\sum_i \theta_i^* b_i \theta_i} = \prod_i b_i = \det B \tag{4.25}$$

Ομοίως με πριν αν βάλουμε το παράγοντα $\theta_k \theta_l^*$ το προηγούμενο αποτέλεσμα θα πολλαπλασιαστεί με τον αντίστροφο του πίνακα B δηλαδή:

$$\left(\prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i \right) \theta_k \theta_l^* e^{-\theta_i^* B_{ij} \theta_j} = (\det B) (B^{-1})_{kl} \tag{4.26}$$

Συμπερασματικά, εκτός από την ορίζουσα που είναι στον αριθμητή, σε αντίθεση με τα κανονικά ολοκληρώματα που είναι στον παρανομαστή, τα γκαουσιανά ολοκληρώματα πάνω σε Grassmann μεταβλητές συμπεριφέρονται όπως τα κανονικά γκαουσιανά ολοκληρώματα πάνω σε κανονικές μεταβλητές.

4.4 Ο Διαδότης του Dirac

Ένα Grassmann πεδίο είναι συνάρτηση του χωροχρόνου και οι τιμές που παίρνει σε κάθε σημείο του είναι αντιμεταθετικοί (Grassmann) αριθμοί. Μπορούμε να ορίσουμε το πεδίο αυτό με όρους ως προς μια ορθοκανονική βάση συναρτήσεων:

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x) \tag{4.27}$$

Η συνάρτηση $\phi_i(x)$ εξαρτάται από c -number δηλαδή από πραγματική ή μιγαδική μεταβλητή και η ψ_i από αντιμεταθετική μεταβλητή. Για να περιγράψουμε το πεδίο Dirac θα θεωρήσουμε ότι τα $\phi_i(x)$ είναι η βάση σπινόρων τεσσάρων συνιστωσών.

Έχουμε ότι χρειαζόμαστε για να ορίσουμε τον διαδότη δηλαδή τις correlation functions. Ο διαδότης του Dirac (two point function) θα έχει τη μορφή:

$$\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle = \frac{\int D\bar{\psi}D\psi \exp[i \int d^4x \bar{\psi}(i\partial - m)\psi] \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}{\int D\bar{\psi}D\psi \exp[i \int d^4x \bar{\psi}(i\partial - m)\psi]} \quad (4.28)$$

Αφήνουμε τα άκρα των χρονικών ολοκληρωμάτων αόριστα. Είναι τα ίδια με τις εξίσωσης 4.9 και θα εμφανίσουν έναν όρο $i\epsilon$. Ο παρανομαστής της εξίσωσης είναι ίσος με $\det(i\partial - m)$ λόγω της 4.25 και ο αριθμητής σύμφωνα με την 4.26 είναι ίσος με $\det(i\partial - m)[-i(i\partial - m)]^{-1}$ υπολογίζοντας τον αντίστροφο στον χώρο *Fourier* βρίσκουμε το αποτέλεσμα:

$$\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle = S_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik(x_1 - x_2)}}{\not{k} - m + i\epsilon} \quad (4.29)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ο διαδότης του *Dirac* πεδίου.

References

1. L.D.Faddeev, V.N.Popov, Phys. Lett. **25B**, 29(1967)
2. F. A. Berezin, The method of second quantization, Academic Press, New York, 1966
3. Michael E. Peskin, Dan V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*

Κβάντωση Μη Αβελιανών $SU(N)$ Θεωριών

5.1 Εισαγωγή

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως να κατασκευάζουμε αβελιανές λαγκρανζιανές με συμμετρία βαθμίδας. Αυτό ήταν το πρώτο βήμα στην πορεία μας να κατανοήσουμε με ποιο τρόπο η μη αβελιανή συμμετρία βαθμίδας σχετίζεται με τις πραγματικές αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων της φύσης. Το επόμενο βήμα είναι να ασχοληθούμε με τα διαγράμματα *Feynman* που περιέχουν διανυσματικά πεδία και στη συνέχεια να υπολογίσουμε ενεργές διατομές.

Μαζί με τα τεχνικά ζητήματα των διαγραμμάτων θα μελετήσουμε πως η συμμετρία βαθμίδας επηρεάζει τα πλάτη πιθανότητας (*amplitudes*). Σε κάθε θεωρία με τοπική συμμετρία βαθμίδας υπάρχουν βαθμοί ελευθερίας των πεδίων που είναι μη-φυσικοί, με την έννοια ότι κάνοντας έναν μετασχηματισμό βαθμίδας μπορούν να εξαλειφθούν. Στην Ηλεκτροδυναμική *QED* οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου $A_\mu(k)$ που είναι ανάλογες της ορμής k^μ είναι επίσης συγγραμμικές και με την κατεύθυνση της συμμετρίας. Αυτό το γεγονός έχει δύο συνέπειες. Αρχικά ο διαδότης του A_μ είναι ασαφής με την έννοια ότι υπάρχουν διάφορες εκφράσεις που τον χαρακτηρίζουν ισοδύναμες μεταξύ τους ανάλογα την επιλογή βαθμίδας ξ . Επίσης οι αλληλεπιδράσεις της *QED* είναι τέτοιες που δεν παίζει κανένα ρόλο η μορφή του διαδότη στον υπολογισμό των ενεργών διατομών. Στις μη αβελιανές θεωρίες θα υπάρχουν τέτοια χαρακτηριστικά αλλά με πιο περίτεχνο τρόπο.

Ένας επιπλέον στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι ο υπολογισμός της *Callan-Symanzik* β συνάρτησης και έτσι ο καθορισμός της συμπεριφοράς της σταθεράς ζεύξης της μη αβελιανής θεωρίας. Όπως θα αποδείξουμε η συμπεριφορά τέτοιων θεωριών είναι η ασυμπτωτική ελευθερία: Αυτό σημαίνει ότι η σταθερά ζεύξης γίνεται μηδενική σε μεγάλες ορμές. Το γεγονός αυτό μας προτρέπει να εφαρμόσουμε μη αβελιανές θεωρίες για την περιγραφή των ισχυρών αλληλεπιδράσεων.

5.2 Αλληλεπιδράσεις μη αβελιανών θεωριών

Οι περισσότεροι κανόνες *Feynman* μπορούν να εξαχθούν από τη μορφή της *Yang-Mills* λαγκρανζιανής. Θέλουμε όμως να εισάγουμε μια πιο ολοκληρωμένη μεθοδολογία όπως στο κεφάλαιο των συναρτησιακών μεθόδων και ειδικότερα στην κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε εισήχθη από του *Faddeev* και *Popov*.

Εισάγουμε το συναρτησιακό ολοκλήρωμα μιας θεωρίας με μη αβελιανή συμμετρία βαθμίδας όπως στο κεφάλαιο των *Functional Methods*:

$$\int DAe^{iS[A]} \Rightarrow \int DA \exp[i \int d^4x (-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2)] \quad (5.1)$$

Όπως στην αβελιανή περίπτωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου η λαγκρανζιανή μένει αναλλοίωτη κάτω από άπειρο αριθμό κατευθύνσεων στον χώρο των πεδιακών μετασχηματισμών που αντιστοιχεί σε τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Για να υπολογίσουμε το συναρτησιακό ολοκλήρωμα πρέπει να απομονώσουμε όλους αυτούς τους φυσικά ισοδύναμους μετασχηματισμούς και να περιορίσουμε το ολοκλήρωμα σε έναν μικρότερο χώρο ώστε να μην υπάρχουν αλληλοεπικαλύψεις.

Θα περιορίσουμε της κατευθύνσεις της βαθμίδας επιλέγοντας βαθμίδα:

$G(A) = 0$. Θα εισάγουμε τον περιορισμό αυτό στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα μέσω της ταυτότητας:

$$1 = \int Da(x) \delta(G(A^a)) \det\left(\frac{\delta G(A^a)}{\delta a}\right) \quad (5.2)$$

Όπου A^a είναι ένα διανυσματικό πεδίο που μετασχηματίζεται μέσω πεπερασμένων μετασχηματισμών βαθμίδας:

$$(A^a)_\mu t^a = e^{ia^a t^a} [A_\mu^b t^b + \frac{i}{g} \partial_\mu] e^{-ia^a t^a} \quad (5.3)$$

Ο απειροστός μετασχηματισμός θα είναι πιο χρήσιμος:

$$(A^a)_\mu^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu a^a + f^{abc} A_\mu^b a^c = A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu a^a \quad (5.4)$$

όπου η D_μ η συναλλοίωτη παράγωγος που ασκείται σε ένα πεδίο της συζυγούς αναπαράστασης. Εφόσον η συνάρτηση $G(A)$ που καθορίζει την βαθμίδα είναι γραμμική τότε η συναρτησιακή παράγωγος $\delta G(A^a)/\delta a$ είναι ανεξάρτητη του a .

Επειδή η λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη βαθμίδας, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το A με A^a στο εκθετικό της εξίσωσης 5.1. Οπότε μπορούμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητών από το A σε A^a . Η αλλαγή αυτή διατηρεί το μέτρο του ολοκληρώματος:

$$DA = \prod_x \prod_{a,\mu} dA_\mu^a(x) \quad (5.5)$$

Οπότε $DA = DA^a$. Άρα

$$\int DAe^{iS[A]} = \left(\int Da \right) \int DAe^{iS[A]} \delta(G(A)) \det\left(\frac{\delta G(A^a)}{\delta a}\right) \quad (5.6)$$

Μέχρι αυτό το σημείο η διαδικασία για τον διαδότη είναι η ίδια με του φωτονίου. Θα επιλέξουμε τη συνθήκη *Lorentz*:

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x) \quad (5.7)$$

Οι πράξεις από το κεφάλαιο των συναρτησιακών μεθόδων οδηγούν στην εξής διατύπωση για τον διαδότη του διανυσματικού πεδίου:

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^a(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \delta^{ab} e^{-ik(x-y)} \quad (5.8)$$

$$\langle \psi_{ia}(x) \bar{\psi}_{j\beta}(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{k} - m} \right)_{\alpha\beta} \delta_{ij} e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (5.9)$$

Για την επιλογή βαθμίδας $\xi = 1$ (*Feynman-'tHooft gauge*) παίρνουμε τον διαδότη του προηγούμενου κεφαλαίου.

Στην περίπτωση της *QED* η ορίζουσα $\det(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu)$ στην εξίσωση (4) στο κεφάλαιο των συναρτησιακών μεθόδων μπορεί να απορροφηθεί στον παράγοντα κανονικοποίησης ως σταθερή διότι η ορίζουσα ήταν ανεξάρτητη της μεταβλητής A . Στη μη αβελιανή ομάδα δεν ισχύει το ίδιο για την ορίζουσα. Η απειροστή μορφή για το μετασχηματισμό βαθμίδας που δρα σε ένα πεδίο στην θεμελιώδη αναπαράσταση:

$$\frac{\delta G(A^a)}{\delta a} = \frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu \quad (5.10)$$

Αυτός ο τελεστής εξαρτάται από το A . Οπότε η ορίζουσα του παραπάνω μετασχηματισμού δημιουργεί επιπλέον όρους αλληλεπίδρασης στην λαγκρανζιανή. Οι *Faddeev* και *Popov* διάλεξαν έναν τρόπο να περιγράψουν την ορίζουσα σαν συναρτησιακό ολοκλήρωμα πάνω σε ένα σετ αντιμεταθετικών πεδίων που ανήκουν στην προσαρτημένη (*Adjoint*) αναπαράσταση. Το αποτέλεσμα αυτό εξήχθη στο κεφάλαιο των συναρτησιακών μεθόδων:

$$\det\left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu\right) = \int Dc D\bar{c} \exp\left[i \int d^4x \bar{c} (-\partial^\mu D_\mu) c\right] \quad (5.11)$$

ο παράγοντας $\frac{1}{g}$ απορροφήθηκε από την κανονικοποίηση των πεδίων c, \bar{c} . Τα αντιμεταθετικά πεδία πρέπει εκτός των άλλων να είναι βαθμωτά κάτω από *Lorentz* μετασχηματισμούς. Επίσης τα πεδία αυτά όπως θα δούμε στη συνέχεια δεν έχουν σύνδεση μεταξύ σπιν και στατιστικής. Παρόλα αυτά μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε σαν επιπρόσθετα σωματίδια στον υπολογισμό των διαγραμμάτων *Feynman*. Τα καινούργια αυτά πεδία θα λέγονται *Faddeev - Popov ghosts*.

Η λαγκρανζιανή για αυτά τα *ghosts* γράφεται:

$$\mathcal{L}_{ghost} = \bar{c}^a (-\partial^2 \delta^{ac} - g \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b) c^c \quad (5.12)$$

Ο πρώτος όρος δίνει τον διαδότη του *ghost*,

$$\langle c^a(x) \bar{c}^b(y) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \delta^{ab} e^{-ik(x-y)} \quad (5.13)$$

Σε ένα διάγραμμα *Feynman* ο διαδότης αυτός θα είναι ένα βέλος που θα δείχνει την ροή του *ghost number*.

$$a \cdots \longleftarrow \cdots b = \frac{i\delta^{ab}}{p^2}$$

$$\begin{array}{c}
 b, \mu \\
 \uparrow \\
 \bullet \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 a \quad p \quad c
 \end{array} = -gf^{abc} p^\mu$$

Η τελική θεωρία διαταραχών για μια μη αβελιανή θεωρία μπορεί να αναπαρασταθεί με την εξής λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi + \bar{c}^a(-\partial^\mu D_\mu^{ac})c^c \quad (5.14)$$

Η οποία οδηγεί στους κανόνες *Feynman*:

$$\begin{array}{c}
 a, \mu \\
 \uparrow \\
 \bullet \\
 \swarrow \quad \searrow
 \end{array} = ig\gamma^\mu t^a$$

$$\begin{array}{c}
 a, \mu \\
 \uparrow \\
 \bullet \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 p \quad k \quad q \\
 b, \nu \quad c, \rho
 \end{array} = gf^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$

$$\begin{array}{c}
 a, \mu \quad b, \nu \\
 \uparrow \quad \uparrow \\
 \bullet \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 c, \rho \quad d, \sigma
 \end{array} = -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$$

5.3 Ghosts και Unitarity

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε αν τα καινούργια αντιμεταθετικά πεδία ή αλλιώς *ghosts* των *Faddeu – Popov* είναι τα κατάλληλα για να λύσουν το πρόβλη-

μα με την ορίζουσα που παρουσιάζεται στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα για την κβάντωση της θεωρίας *Yang – Mills*.

Το πρόβλημα της ορίζουσας δεν είναι τυχαία ανακάλυψη, ουσιαστικά αναδεικνύει ότι σε μη αβελιανές θεωρίες οι βαθμοί ελευθερίας του διανυσματικού πεδίου δεν ακυρώνονται σε αντίθεση με την *QED* που υπάρχει ακριβής εξουδετέρωση. Αυτό συνδέεται με το ότι στην *Yang – Mills* επιλέξαμε συγκεκριμένο σύνολο φυσικών καταστάσεων ενώ στην *QED* δεν έχει διαφορά αν κάποιος ολοκληρώσει πάνω σε όλες τις πολικότητες ή μόνο στις δύο φυσικά αποδεκτές (*longitudinal* ή *temporal*). Για αυτό το λόγο σε επίπεδο βρόγχου (*loop diagrams*) δηλαδή σε κβαντικό επίπεδο θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν και τα *ghosts* τα οποία θα πρέπει να βρίσκονται σε κλειστούς βρόχους μεταξύ τους ώστε να ακυρώνονται και να μην εμφανίζονται σε κλασικό επίπεδο (*tree diagrams*)

Θα αναλύσουμε την λαγκρανζιανή ώστε να δούμε τις μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a(-\partial^\mu D_\mu^{ac})c^c \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & gA_\lambda^a \bar{\psi} \gamma^\lambda t^a \psi - gf^{abc}(\partial_\kappa A_\lambda^a)A^{\kappa b}A^{\lambda c} \\ & - \frac{1}{4}g^2(f^{eab}A_\kappa^a A_\lambda^b)(f^{ecd}A^{\kappa c}A^{\lambda d}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ο πρώτος όρος των μη γραμμικών όρων αλληλεπίδρασης δίνει το *vertex* του φερμιονίου-μποζονίου:

$$ig\gamma^\mu t^a \quad (5.17)$$

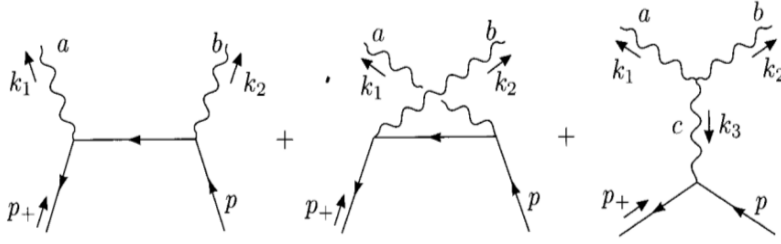
Ο δεύτερος όρος οδηγεί στο *vertex* τριών μποζονίων. Υπάρχουν 3! δυνατές συμπίεσεις (*contractions*) των διαγραμμάτων και η κάθε μία πέρνει το πρόσημό της ανάλογα την αντισυμμετρικότητα του f^{abc} . Για να βρούμε τη συνεισφορά πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλη σύμβαση στους *Lorentz* και *gauge* δείκτες. Μια καλή σύμβαση είναι όπως στο προηγούμενο διάγραμμα με όλες τις ορμές να δείχνουν προς τα μέσα. Έστω ότι στο εξωτερικό μποζόνιο που είναι ο πρώτος παράγοντας του όρου της λαγκρανζιανής αναθέτουμε ορμή k , στον δεύτερο παράγοντα p και στον τρίτο ορμή q . Η παράγωγος συνεισφέρει έναν όρο ($-ik_\kappa$) εάν η ορμή έχει φορά προς το εσωτερικό του διαγράμματος. Η ολική συνεισφορά θα είναι:

$$- igf^{abc}(-ik^\nu)g^{\mu\rho} \quad (5.18)$$

Ο τρίτος όρος οδηγεί στο *vertex* των τεσσάρων μποζονίων. Κάνοντας τον ίδιο μετασχηματισμό μία δυνατή *contraction* συνεισφέρει:

$$- ig^2 f^{eab} f^{ecd} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \quad (5.19)$$

Αρχικά θα ξεκινήσουμε από τη χαμηλότερη τάξη διαγραμμάτων που συνεισφέρουν στην αλληλεπίδραση φερμιονίου-αντιφερμιονίου σε ζευγάρι μποζονίων βαθμίδας. Σε τάξη g^2 υπάρχουν τρία διαγράμματα, τα πρώτα δύο τα συναντάμε και στην *QED* ενώ το τρίτο είναι χαρακτηριστικό της μη αβελιανότητας.



Τα πρώτα δύο διαγράμματα αθροίζονται:

$$\begin{aligned}
 iM_{1,2}^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) &= (ig)^2 \bar{v}(p_+) \{ \gamma^\mu t^a \frac{i}{\not{p}' - \not{k}_2 - m} \gamma^\nu t^b \\
 &+ \gamma^\nu t^b \frac{i}{\not{k}_2 - \not{p}' - m} \gamma^\mu t^a \} u(p) \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2)
 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Για φυσικές πολικότητες πρέπει $k_i^\mu \epsilon_{k_i} = 0$ και για να ελέγξουμε την ταυτότητα Ward: $\epsilon_\nu^*(k_2) \rightarrow k_{2\nu}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 iM_{1,2}^{\mu\nu} \epsilon_{1\mu}^* k_{2\nu} &= (ig)^2 \bar{v}(p_+) \{ \gamma^\mu t^a \frac{i}{\not{p}' - \not{k}_2 - m} \not{k}_2 t^b \\
 &+ \not{k}_2 t^b \frac{i}{\not{k}_2 - \not{p}' - m} \gamma^\mu t^a \} u(p) \epsilon_{1\mu}^*
 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ισχύει:

$$(\not{p}' - m)u(p) = 0 \quad \bar{v}(p_+)(-\not{p}' - m) = 0 \quad (5.22)$$

Επομένως

$$iM_{1,2}^{\mu\nu} \epsilon_{1\mu}^* k_{2\nu} = (ig)^2 \bar{v}(p_+) \{ -i\gamma[t^a, t^b] \} u(p) \epsilon_{1\mu}^* \quad (5.23)$$

ή αλλιώς

$$iM_{1,2}^{\mu\nu} \epsilon_{1\mu}^* k_{2\nu} = -g^2 \bar{v}(p_+) \gamma^\mu u(p) \epsilon_{1\mu}^* f^{abc} t^c \quad (5.24)$$

Για το διάγραμμα 3 έχουμε:

$$\begin{aligned}
 iM_3^{\mu\nu} \epsilon_{1\mu}^* \epsilon_{2\nu}^* &= ig \bar{v}(p_+) \gamma_\rho t^c u(p) \frac{-i}{k_3^2 \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2)} g f^{abc} [g^{\mu\nu} (k_2 - k_1)^\rho \\
 &+ g^{\nu\rho} (k_3 - k_2)^\mu + g^{\rho\mu} (k_1 - k_3)^\nu]
 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Από διατήρηση ορμής στον κόμβο έχουμε $k_3 = -k_1 - k_2$ και αντικαθιστούμε $\epsilon_\nu^*(k_2) = k_{2\nu}$.

$$\begin{aligned}
 iM_3^{\mu\nu} \epsilon_{1\mu}^* \epsilon_{2\nu}^* &= ig \bar{v}(p_+) \gamma_\rho t^c u(p) \frac{-i}{k_2^2} \epsilon_\mu^*(k_1) g f^{abc} [k_2^\mu (k_2 - k_1)^\rho \\
 &+ k_2^\rho (k_3 - k_2)^\mu + g^{\rho\mu} (k_1 - k_3) k_2] =
 \end{aligned}$$

$$= ig\bar{v}(p_+)\gamma_\rho t^c u(p) \frac{-i}{k_3^2} \epsilon_\mu^*(k_1) g f^{abc} [g^{\rho\mu} k_3^2 - k_3^\rho k_3^\mu - g^{\rho\mu} k_1^2 + k_1^\rho k_1^\mu] \quad (5.26)$$

Υποθέτουμε ότι το μποζόνιο βαθμίδας είναι *on shell* ($k_1^2 = 0$) και ότι έχει *transverse* πολικότητα ($k_1^\mu \epsilon_\mu(k_1) = 0$) Τότε ο τρίτος και ο τέταρτος όρος στην τελευταία σχέση εξαφανίζονται

$$\begin{aligned} -g^{\rho\mu} k_1^2 &= 0 \\ k_1^\rho k_1^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Στους εναπομείναντες όρους, το k_3^2 ακυρώνεται με τον παρανομαστή του διαδότη του μποζονίου $\frac{-i}{k_3^2}$ και μένουμε με το αποτέλεσμα για το τρίτο διάγραμμα:

$$iM_3^{\mu\nu} \epsilon_{1\mu}^* k_{2\nu} = +g^2 \bar{v}(p_+) \gamma^\mu u(p) \epsilon_{1\mu}^* f^{abc} t^c \quad (5.28)$$

Το οποίο ακυρώνει το αποτέλεσμα του πρώτου και του δεύτερου διαγράμματος:

$$iM_{1,2}^{\mu\nu} \epsilon_{1\mu}^* k_{2\nu} = -g^2 \bar{v}(p_+) \gamma^\mu u(p) \epsilon_{1\mu}^* f^{abc} t^c \quad (5.29)$$

Είναι αναγκαίο να επισημάνουμε ότι η ακύρωση μεταξύ των διαγραμμάτων γίνεται μονάχα αν η σταθερά αλληλεπίδρασης g είναι η ίδια και στα τρία διαγράμματα δηλαδή αν ο *vertex* του τρι-μποζονίου έχει την ίδια σταθερά αλληλεπίδρασης g με τον *vertex* του φερμιονίου-μποζονίου. Το οποίο επιβεβαιώνει το αρχικό μας κίνητρο για μία θεωρία που να ενοποιεί τις μη αβελιανές αλληλεπιδράσεις.

Βέβαια η ακύρωση αυτή μεταξύ των μη φυσικών πολικοτήτων γίνεται σε *tree level* διαγράμματα δηλαδή σε κλασικό επίπεδο. Στην επόμενη φάση θα δούμε πώς σε χβαντικό επίπεδο δηλαδή σε *loop* διαγράμματα τα *ghosts* ακυρώνουν τις μη φυσικές πολικότητες.

5.3.1 Διαγράμματα βρόχων

Θα υπολογίσουμε την συνεισφορά του φερμιονίου-αντιφερμιονίου σε μποζόνια βαθμίδας πιο προσεκτικά. Είδαμε προηγουμένως ότι το πρώτο διάγραμμα από τα δύο επόμενα είναι μη μηδενικό αν υποθέσουμε ότι το δεύτερο μποζόνιο βαθμίδας δεν έχει *transverse* πολικότητα ($k_1^\mu \epsilon_\mu(k_1) = 0$) και αυτό γιατί αν υποθέσουμε $\epsilon_\mu^-(k_1)$ και $\epsilon_\nu^{+*}(k_2)$ για τις δύο διαφορετικές πολικότητες όπου

$$\epsilon_\mu^+(k) = \left(\frac{k^0}{\sqrt{2}|k|}, \frac{k}{\sqrt{2}|k|} \right) \quad (5.30)$$

$$\epsilon_\mu^-(k) = \left(\frac{k^0}{\sqrt{2}|k|}, -\frac{k}{\sqrt{2}|k|} \right) \quad (5.31)$$

Τα $+$, $-$ συμβολίζουν *forward*, *backward lightlike* πολικότητες. Οι *transverse* πολικότητες συμβολίζονται $\epsilon_{i\mu}^T(k)$ και ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \epsilon_i^T \cdot \epsilon_j^{*T} &= -\delta_{ij}, & \epsilon^+ \cdot \epsilon_i^T &= \epsilon^- \cdot \epsilon_i^T = 0 \\ (e^+)^2 &= (\epsilon^-)^2 = 0, & \epsilon^+ \cdot \epsilon^- &= 1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Και ικανοποιούν την εξίσωση συμπληρωματικότητας:

$$g_{\mu\nu} = \epsilon_\mu^- \epsilon_\nu^{+*} + \epsilon_\mu^+ \epsilon_\nu^{-*} + \sum_i \epsilon_{i\mu}^T \epsilon_{i\nu}^{T*} \quad (5.33)$$

Με αυτούς τους ορισμούς μπορούμε να αναλύσουμε περισσότερο την σχέση 5.26 και ειδικότερα τον όρο $k_1^\rho k_1^\mu$ ο οποίος δεν ακυρώνεται πλέον.

$$\begin{aligned} iM &= ig\bar{v}(p_+)\gamma_\rho t^c u(p) \frac{-i}{k_3^2} \epsilon_\mu^{-*}(k_1) \frac{1}{\sqrt{2}|k_2|} g f^{abc} (-k_1^\rho k_1^\mu) \\ &= ig\bar{v}(p_+)\gamma_\rho t^c u(p) \frac{-i}{k_3^2} (-g) f^{abc} k_1^\rho \frac{|k_1|}{|k_2|} \end{aligned} \quad (5.34)$$

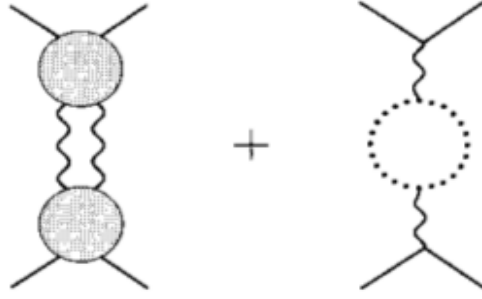
Την ποσότητα αυτή δεν μπορούμε να την αγνοήσουμε εντελώς σε διαγράμματα με βρόχους. Σε αυτά ισχύει ότι το φανταστικό μέρος του διαγράμματος συνδέεται με το τετράγωνο της συνεισφοράς που φέρει το διάγραμμα αυτό, η οποία λαμβάνεται κόβοντας το διάγραμμα κατά μήκος του βρόχου. Οπότε ουσιαστικά αφήνουμε να παράγονται μη φυσικές πολικότητες ασύστολα.

The diagram shows an equation: $2 \text{Im} \left[\text{Diagram with a ghost loop} \right] \stackrel{?}{=} \int d\Pi \left| \text{Diagram with a ghost loop} \right|^2$. The left side is the imaginary part of a diagram with a ghost loop (a cloud-like shape) and external lines. The right side is the squared magnitude of the same diagram integrated over phase space $d\Pi$.

Η συνεισφορά από το διάγραμμα φερμιονίου-αντιφερμιονίου σε μποζόνια είναι

$$iM_{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) \quad (5.35)$$

Αντίστοιχα η συνεισφορά για δύο μποζόνια να γίνουν φερμιόνιο-αντιφερμιόνιο είναι M' . Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται η γενίκευση των διαγραμμάτων φερμιονίου-αντιφερμιονίου σε μποζόνια αλλά με βρόχους. Ο στόχος είναι να βρούμε τη συνεισφορά του αριστερού διαγράμματος και μετά να θέσουμε την συνεισφορά από τον βρόχο των *ghosts* (δεξιά διάγραμμα) ίση και αντίθετη ώστε να ακυρώσουμε τις μη φυσικές πολικότητες.



Κόβοντας το αριστερά διάγραμμα στη μέση (κανόνες *Cutkosky*) θα αντικαταστήσουμε το κάθε κομμένο μποζόνιο με ορμή k_i , με τον όρο:

$$-ig_{\mu\nu}(-2\pi i)\delta(k_i^2) \quad (5.36)$$

Επομένως παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \int d^4 k_i iM^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) \epsilon_\rho(k_1) \epsilon_\sigma(k_2) iM'^{\rho\sigma} \\ &= \int d^4 k_i iM_{\mu\nu} (-ig_{\mu\rho}(-2\pi i)\delta(k_1^2)) (-ig_{\nu\sigma}(-2\pi i)\delta(k_2^2)) iM'^{\rho\sigma} \quad (5.37) \\ &= \int d^3 \prod_i \left[\frac{1}{2} (iM^{\mu\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} (iM'^{\rho\sigma}) \right] \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο συναρτήσεις δέλτα μπορούμε να αλλάξουμε τα τετραδιάστατα ολοκληρώματα των ορμών των μποζονίων σε τρισδιάστατα πάνω στο φασικό χώρο δύο άμαζων σωματιδίων. Ο συντελεστής $1/2$ προέρχεται από από την διόρθωση του ολοκληρώματος στον φασικό χώρο για ταυτόσημα σωματίδια.

Για αναπτύξουμε περαιτέρω τις πράξεις θα πρέπει να επιλέξουμε αναπαράσταση για τα $g_{\mu\rho}, g_{\nu\sigma}$. Την αναπαράσταση αυτή την έχουμε ήδη γράψει στην εξίσωση συμπληρωματικότητας 5.33. Οι όροι που θα περιέχουν μόνο *transverse* πολικότητες δηλαδή όροι με ϵ^T δεν τους χρειαζόμαστε διότι αναφέρονται σε φανταστικά μέρη του διαγράμματος και υπάρχουν για ικανοποιούν την πληρότητα της θεωρίας. Επίσης οι όροι που περιέχουν φυσικές και μη φυσικές πολικότητες ακυρώνονται λόγω της σχέσης που αποδείξαμε στα διαγράμματα χωρίς βρόχους:

$$iM^{\mu\nu} \epsilon_\mu^{T*}(k_1) \epsilon_\nu^{+*} = 0 \quad (5.38)$$

Η ίδια σχέση ισχύει αν αντικαταστήσουμε το M με M' και το ϵ^+ με ϵ^- . Οπότε οι όροι που μένουν είναι αυτοί που περιέχουν *forward* και *backward* πολικότητες:

$$\int d^3 \prod_i \left[\frac{1}{2} (iM^{\mu\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} (iM'^{\rho\sigma}) \right]$$

$$= \int d^3 \prod_i \frac{1}{2} [(iM^{\mu\nu} \epsilon_\mu^- \epsilon_\nu^{+*})(iM'^{\rho\mu} \epsilon_\rho^+ \epsilon_\sigma^-) + (iM^{\mu\nu} \epsilon_\mu^{+*} \epsilon_\nu^-)(iM'^{\rho\sigma} \epsilon_\rho^- \epsilon_\sigma^+)] \quad (5.39)$$

ολοκληρώνοντας πάνω στο φασικό χώρο. Έχουμε ήδη υπολογίσει τις ποσότητες στην εξίσωση 5.34 Έτσι καταλήγουμε:

$$\int d^3 \prod_i \frac{1}{2} (ig\bar{v}(p_+) \gamma_\mu t^c u(p) \frac{-i}{(k_1 + k_2)^2} (-gf^{abc} k_1^\mu)) \times \quad (5.40)$$

$$(ig\bar{u}(p') \gamma_\rho t^d v(p'_+) \frac{-i}{(k_1 + k_2)^2} (-gf^{abc} (-k_2)^\rho)) + (k_1 \leftrightarrow k_2)$$

Ο δεύτερος όρος είναι ίδιος με τον πρώτο αλλά με αντιστροφή των ορμών k_1, k_2 . Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες:

$$\bar{v}(p_+) \gamma_\mu (k_1 + k_2)^\mu u(p) = \bar{v}(p_+) \gamma_\mu (p + p_+)^\mu u(p) = 0 \quad (5.41)$$

Βλέπουμε ότι οι δύο όροι στην σχέση μας είναι ίσοι.

Στη συνέχεια θα προσθέσουμε και την συνεισφορά από τους όρους των *ghosts*. Από τους κανόνες *Feynman* της λαγκρανζιανής μπορούμε να κατασκευάσουμε την συνεισφορά:

$$iM_{ghost} = ig\bar{v}(p_+) \gamma t^c u(p) \frac{-i}{(k_1 + k_2)^2} (-gf^{abc} k_1^\mu) \quad (5.42)$$

Η έκφραση αυτή είναι ακριβώς το πρώτο μισό της έκφρασης για το πρώτο διάγραμμα(εξ. 5.40). Ομοίως το πλάτος πιθανότητας για διάγραμμα με ζεύγος *ghost-antighost* που θα μετατρέπεται σε φερμιόνια είναι ίσο με το δεύτερο μισό της έκφρασης του πρώτου διαγράμματος(εξ. 5.40). Επιπλέον επειδή το *ghost* πεδίο είναι αντιμεταθετικό πρέπει να βάλουμε ένα -1 για κάθε *ghost* βρόχο.

Με αυτόν τον τρόπο η συνεισφορά των μη φυσικών πολικότητων των *gauge* μποζονίων ακυρώνονται και επιπλέον δεν διαταράσσεται η φαινομενολογία σε κλασικό επίπεδο διότι παρουσιάζονται μόνο ως *virtual* σωματίδια. Τα πεδία αυτά παρουσιάζονται ως αρνητικοί βαθμοί ελευθερίας ώστε να ακυρώσουν τις μη φυσικές *timelike* και *longitudinal* πολικότητες των μποζονίων βαθμίδας.

Η πιο άμεση επίδραση που έχει το *ghost* πεδίο φαίνεται από την συναρτησιακή ολοκλήρωση επάνω στους όρους της λαγκρανζιανής του *gauge* και *ghost* πεδίου(εξ. 5.15) σε οποιαδήποτε διάσταση d και σταθερά αλληλεπίδρασης $g = 0$:

$$\int DADcD\bar{c}e^i \int d^d x [-\frac{1}{2}(\partial^d A_d)^2 + \bar{c}(-\partial^d D_d)] =$$

$$\int DAe^{-\frac{i}{2} \int d^d x [(\partial^d (A_d + g\partial_d a(x)))^2]} \int DcD\bar{c}e^i \int d^d x [\bar{c}(-\partial^d (-\partial^2 - g\partial^d f^{abc} A_d))c]$$

$$= \int DAe^{-\frac{i}{2}(\partial^d A_d)^2} \int DcD\bar{c}e^i \int d^d x [\bar{c}(-\partial^d (-\partial^d \partial^2))c]$$

$$= \det(-\partial^{2d})^{-1/2} \det(-\partial^2)$$

$$= (\det[-\partial^2])^{-d/2} (\det[-\partial^2])^{+1} \quad (5.43)$$

Όπου το $d = 0, \dots, d$ είναι ο Lorentz δείκτης. Οι πράξεις έγιναν σύμφωνα με το κεφάλαιο της συναρτησιακής ολοκλήρωσης. Το αποτέλεσμα μας δείχνει πως ο θετικός εκθέτης της ορίζουσας των *ghosts* ακυρώνεται με τον αρνητικό των *gauge*, όχι ακριβώς αλλά τόσο ώστε να μην εμφανίζονται αφύσικες πολικότητες.

5.4 BRST Συμμετρία

Για να δούμε πώς η ακύρωση των βαθμών ελευθερίας γενικεύεται σε μια ολοκληρωμένη θεωρία αλληλεπιδράσεων θα πρέπει να ακολουθήσουμε την τεχνική των *Becchi, Rouet, Stora* και *Tyutin*. Ο τρόπος που πραγματώθηκε αυτό είναι μέσα από μία νέα συμμετρία μιας *gauge – fixed* λαγκρανζιανής (5.15). Η συμμετρία αυτή έχει μία συνεχή παράμετρο που είναι αντιμεταθετικός αριθμός. Ας ξαναγράψουμε την λαγκρανζιανή των *Faddeev – Popov* εισάγοντας την καινούργια παράμετρο μέσω ενός καινούργιου βαθμωτού πεδίου B :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{\xi}{2}(B^a)^2 + B^a \partial^\mu A_\mu^a + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ac})c^c \quad (5.44)$$

Το καινούργιο πεδίο B^a έχει τετραγωνικό όρο χωρίς παραγώγους έτσι ώστε να μην διαδίδεται όπως τα συνηθισμένα πεδία. Αν ολοκληρώσουμε συναρτησιακά επάνω στο πεδίο B^a τους όρους της λαγκρανζιανής (5.44) θα επιστρέψουμε στον όρο του *gauge* πεδίου της λαγκρανζιανής (5.14). Το πεδίο B^a που εμφανίζεται επειδή δεν έχει ανεξάρτητες δυναμικές ονομάζεται *auxilliary* (βοηθητικό) πεδίο. Ο υπολογισμός θα γίνει σύμφωνα με την εξίσωση (από το βιβλίο [4]):

$$\int d[f] e^{-[k(f, Af) + (b, f) + c]} = e^{[k(b, A^{-1}b) - c]} \det(A)^{-k} \quad (5.45)$$

Στην περίπτωση μας $k = \frac{1}{2}$, $A = \xi$, $f = B^a$, $b = \partial^\mu A_\mu$, $c = 0$. Επομένως

$$\int DB e^{\frac{1}{2}\xi(B^a)^2 - B^a \partial^\mu A_\mu} = \xi^{-1/2} e^{\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2} \quad (5.46)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ϵ απειροστά μικρό αντιμεταθετικό αριθμό και ορίζουμε τους απειροστούς μετασχηματισμούς των πεδίων:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= \epsilon D_\mu^{ac} c^c \\ \delta \psi &= i g \epsilon c^a t^a \epsilon \\ \delta c^a &= -\frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c \\ \delta \bar{c}^a &= \epsilon B^a \\ \delta B^a &= 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Οι κανόνες μετασχηματισμού των A_μ^a , ψ είναι τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας με παράμετρο ανάλογη του *ghost* πεδίου: $a^a(q) = g \epsilon c^a(x)$. Με αποτέλεσμα

οι πρώτοι δύο όροι της λαγκρανζιανής 5.44 να παραμένουν αναλλοίωτοι. Ο τρίτος όρος επίσης είναι αναλλοίωτος. Ο μετασχηματισμός του A_μ^a στον τέταρτο όρο ακυρώνει τον μετασχηματισμό του \bar{c}^a στον τελευταίο όρο. Ο μετασχηματισμός του τελευταίου όρου είναι:

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu^{ac}c^c) &= D_\mu^{ac}\delta c^c + g f^{abc}\delta A_\mu^b c^c \\ &= -\frac{1}{2}g\epsilon\partial(f^{abc}c^b c^c) - \frac{1}{2}g^2\epsilon f^{abc}f^{cde}A_\mu^b c^d c^e \\ &\quad + g\epsilon f^{abc}(\partial_\mu c^d)c^c + g^2\epsilon f^{abc}f^{bde}A_\mu^d c^e c^c \end{aligned} \quad (5.48)$$

Οι όροι τάξεως g ακυρώνονται αν σπάσουμε σε άθροισμα την παράγωγο γινομένου του πρώτου όρου και στη συνέχεια ανταλλάξουμε του δείκτες. Τους όρους τάξεως g^2 χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετικότητα των *ghost* πεδίων και την ανταλλαγή των δεικτών μπορούμε να τους γράψουμε:

$$-\frac{1}{2}g^2 f^{abc}f^{cde}(A_\mu^b c^d c^e + A_\mu^d c^e c^b + A_\mu^e c^b c^d) \quad (5.49)$$

Το οποίο κάνει μηδέν λόγω της ταυτότητας *Jacobi*. Επομένως ο *BRST* μετασχηματισμός είναι μια ολική (*global*) συμμετρία της *gauge-fixed* λαγκρανζιανής (εξ. 5.44) για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου ξ .

Η συμμετρία αυτή έχει ένα ακόμη σημαντικό χαρακτηριστικό το οποίο οφείλεται στην αντιμεταθετικότητα. Έστω $Q\phi$ ο τελεστής του *BRST* μετασχηματισμού του πεδίου ϕ : $\delta\phi = \epsilon Q\phi$. Για παράδειγμα: $QA_\mu^a = D_\mu^{ac}c^c$. Τότε για κάθε πεδίο η μεταβολή του $Q\phi$ είναι ίση με μηδέν:

$$Q^2\phi = 0 \quad (5.50)$$

Έχουμε αποδείξει ήδη ότι $\delta(D_\mu^{ac}c^c) = 0$, επίσης $Q^2c^a = \frac{1}{2}g^2 f^{abc}f^{bde}c^c c^d c^e$ λόγω της ταυτότητας *Jacobi*. Η απόδειξη της ιδιότητας για τα υπόλοιπα πεδία είναι τετριμμένη.

Για να δούμε το αντίκτυπο της ιδιότητας 5.50, θα μελετήσουμε την χαμιλτονιανή εικόνα μετά την κανονική κβάντωση της *effective* θεωρίας της λαγκρανζιανής (εξ. 5.44). Λόγω της συνεχούς συμμετρίας που έχει η λαγκρανζιανή αυτή, θα υπάρχει λόγω του θεωρήματος της *Noether* ένα διατηρούμενο ρεύμα και το ολοκλήρωμα της χρονικής συνιστώσας θα είναι το διατηρούμενο φορτίο Q που θα μετατίθεται με την χαμιλτονιανή H . Λέμε ότι το τελεστής Q είναι *nilpotent* δηλαδή το τετράγωνό του ισούται με το μηδέν.

Ένας τελεστής που το τετράγωνό του είναι μηδέν και μετατίθεται με την χαμιλτονιανή του συστήματος, χωρίζει τα ιδιοδιανύσματα του H σε τρεις υπόχωρους. Πολλά από τα ιδιοδιανύσματα του H πρέπει να καταστρέφονται από τον Q έτσι ώστε η εξίσωση 5.50 να ικανοποιείται. Έστω H_1 να είναι ο υποχώρος των καταστάσεων που δεν καταστρέφονται από τον Q και H_2 να είναι ο υποχώρος των καταστάσεων της μορφής:

$$|\psi_2\rangle = Q|\psi_1\rangle \quad (5.51)$$

όπου $|\psi_1\rangle \in H_1$. Τέλος, έστω H_0 είναι ο υποχώρος των καταστάσεων $|\psi_0\rangle$ που ικανοποιούν $Q|\psi_0\rangle = 0$, οι καταστάσεις αυτές δεν μπορούν να γραφτούν με την μορφή της εξίσωσης 5.51. Ο υποχώρος H_2 είναι ιδιαίτερος διότι δύο καταστάσεις έχουν μηδενικό εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle \psi_{2a} | \psi_{2b} \rangle = \langle \psi_{1a} | Q | \psi_{2b} \rangle = 0 \quad (5.52)$$

Ομοίως:

$$\langle \psi_{0a} | Q | \psi_{2b} \rangle = 0 \quad (5.53)$$

Αυτές οι υποθέσεις έχουν άμεσο φυσικό νόημα [5]. Ας υποθέσουμε ότι μονοσωματιδιακές καταστάσεις της μη αβελιανής θεωρίας στο όριο του μηδενικού *coupling*. Σύμφωνα με τον BRST μετασχηματισμό, ο Q μετατρέπει την *forward* συνιστώσα του A_μ^a σε *ghost* πεδίο, ισοδύναμα ο Q μετατρέπει ένα *forward* πολωμένο *gauge* μποζόνιο σε ένα *ghost*. Στο $g = 0$, ο Q καταστρέφει την μονοσωματιδιακή ιδιοκατάσταση του *ghost*. Την ίδια στιγμή ο Q μετατρέπει την *antighost* κατάσταση σε ένα κβάντο του B^a . Για να αναγνωρίσουμε την κατάσταση αυτή να υπενθυμίσουμε ότι η λαγκρανζιανή απαιτεί την κλασική εξίσωση κίνησης:

$$\xi B^a = \partial^\mu A_\mu^a \quad (5.54)$$

Με αποτέλεσμα τα κβάντα του πεδίου B^a είναι τα κβάντα του A_μ^a με διανύσματα πολικότητας: $k^\mu \epsilon_\mu(k) \neq 0$ τα οποία είναι τα *backward* πολωμένα *gauge* μποζόνια. Βλέπουμε ότι δηλαδή οι μονοσωματιδιακές καταστάσεις της *gauge* θεωρίας καθορίζονται ως εξής: τα *forward gauge* μποζόνια και τα *antighosts* ανήκουν στον υποχώρο H_1 , τα *ghosts* και τα *backward* στον H_2 και τα *transverse gauge* μποζόνια στον H_0 . Πιο γενικά μπορεί να δειχθεί ότι οι ασυμπτωτικές καταστάσεις που περιέχουν *ghosts*, *antighosts* ή *gauge* μποζόνια με αφύσικες πολικότητες θα ανήκουν πάντα στον H_1 ή στον H_2 , ενώ στον H_0 ανήκουν μόνο καταστάσεις *gauge* μποζονίων με *transverse* πολικότητα. Ο BRST τελεστής δίνει μια ακριβής σχέση μεταξύ των καταστάσεων αφύσικων πολικοτήτων και των καταστάσεων *ghost* και *antighost* ως θετικών και αρνητικών βαθμών ελευθερίας.

Σε αυτό το σημείο εμφανίζεται το εξής ζήτημα. Τα στοιχεία του πίνακα S κατασκευάζονται βάζοντας του τελεστές στο μακρινό παρελθόν για να δημιουργηθούν *gauge* μποζόνια με *transverse* πολικότητα και αδιαβατικά ανοίγουμε και κλείνουμε το *gauge coupling*. Στη συνέχεια βάζουμε τους τελεστές στο μακρινό μέλλον για να καταστρέψουμε τα *gauge* μποζόνια. Αυτή η διαδικασία έχει ένα πιθανό πρόβλημα. Εάν οι καταστάσεις είναι μια συλλογή από *transverse* πολικότητες στο μακρινό παρελθόν που εξελίσσονται σε καταστάσεις που περιέχουν *gauge* μποζόνια με μη φυσικές πολικότητες, τότε ο πίνακας S που προβάλλει τις καταστάσεις από το παρελθόν στο μέλλον μπορεί να μην είναι μοναδιακός (*Unitary*). Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό θα εφαρμόσουμε την BRST συμμετρία.

Έστω ότι $|A; tr\rangle$ είναι μία εξωτερική κατάσταση από το μακρινό παρελθόν που δεν περιέχει *ghosts* παρά μόνο *gauge* μποζόνια με *transverse* πολικότητα.

Θα αποδείξουμε ότι ο S – *matrix* που προβάλλεται σε αυτές τις καταστάσεις είναι *unitary*:

$$\sum_C \langle A; tr|S^\dagger|C; tr \rangle \langle C; tr|S|B; tr \rangle = \langle A; tr|\mathbf{1}|B; tr \rangle \quad (5.55)$$

Όπως αναφέραμε προηγουμένως οι φυσικές καταστάσεις $|A; tr \rangle$ ανήκουν και γεννάνε τον υποχώρο H_0 που ορίζεται από τον $BRST$ τελεστή. Συγκεκριμένα όλες οι καταστάσεις εξουδετερώνονται από τον Q . Εφόσον ο Q μετατίθεται με την χαμηλοτιονική, η χρονική εξέλιξη κάθε τέτοιας κατάστασης πρέπει να παράγει κατάσταση που καταστρέφεται από τον Q . Με αποτέλεσμα:

$$Q \cdot S|A; tr \rangle = 0 \quad (5.56)$$

Αυτή η σχέση υπονοεί ότι οι καταστάσεις $S|A; tr \rangle = 0$ πρέπει να είναι γραμμικοί συνδυασμοί καταστάσεων των H_0 και H_2 . Οι καταστάσεις του H_2 έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδενικό μεταξύ τους αλλά και με οποιαδήποτε κατάσταση του H_0 . Για αυτό το εσωτερικό γινόμενο δύο καταστάσεων της μορφής $S|A; tr \rangle = 0$ προέρχεται από αλληλοεπικάλυψη των στοιχείων του H_0 οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \langle A; tr|S^\dagger \cdot S|B; tr \rangle &= \sum_C \langle A; tr|S^\dagger|C; tr \rangle \langle C; tr|S|B; tr \rangle \\ &= \langle A; tr|\mathbf{1}|B; tr \rangle \langle C; tr|C; tr \rangle = \langle A; tr|\mathbf{1}|B; tr \rangle \end{aligned} \quad (5.57)$$

Οι πράξεις έγιναν σύμφωνα με το σχήμα:

$$\begin{aligned} |A; tr \rangle &\mapsto_S |B; tr \rangle \mapsto_S |C; tr \rangle \\ |A; tr \rangle &\leftarrow_{S^\dagger} |B; tr \rangle \leftarrow_{S^\dagger} |C; tr \rangle \end{aligned} \quad (5.58)$$

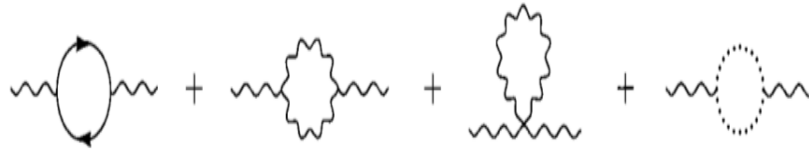
5.5 Πρώτης Τάξεως (*One Loop*) Αποκλίνοντες Όροι (*Divergences*) της Μη Αβελιανής Θεωρίας

Σε αυτή την ενότητα θα επικεντρωθούμε σε *one loop* διαγράμματα. Πάντα σε μια κβαντική θεωρία πεδίου μερικά από αυτά τα διαγράμματα θα είναι αποκλίνοντα, με άλλα λόγια θα απειρίζονται τα ολοκληρώματα διότι θα υπάρχει αβεβαιότητα στην τιμή των ορμών μέσα στους βρόχους. Η διαδικασία απορρόφησης των απειρισμών λέγεται επανακανονικοποίηση (*renormalization*) της θεωρίας. Σύμφωνα με τους κανόνες για το αν μια θεωρία είναι επανακανονικοποιήσιμη υπάρχουν τρεις περιπτώσεις: Αρχικά μια θεωρία να είναι *super-renormalizable* δηλαδή το *coupling* g να έχει θετική διάσταση μάζας. Η επόμενη κατηγορία θεωριών είναι η αυτές με μηδενική διάσταση *coupling* και αυτές λέγονται *renormalizable* και η τρίτη κατηγορία είναι αυτές με αρνητική διάσταση που λέγονται *non-renormalizable*. Επειδή η δράση πρέπει να είναι αδιάστατη, η λαγκρανζιανή έχει μονάδες μάζας 4,

τα πεδία λαμβάνουν διαστάσεις από την ελεύθερη λαγκρανζιανή που τα διέπει οπότε ο ηλεκτρομαγνητικός ταυυστής $F^{\mu\nu}$ έχει διάσταση 2 διότι $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, επίσης $[\partial^\mu] = +1$ και $[d^4x] = -1$ επομένως $[A^\mu] = [F^{\mu\nu}]/[\partial^\mu] = +1$, τα *ghost* τα μετράμε ως μποζόνια στους βαθμούς ελευθερίας άρα $[c^a] = +1$. Οι αλληλεπιδράσεις που έχουμε είναι οι εξής: $[gFAA] = 2 + 2 = 4$, $[g^2AAAA] = 4$, $[g\partial cAc] = 4$. Επομένως το g είναι αδιάστατο οπότε η μη αβελιανή θεωρία μας είναι *renormalizable*.

5.5.1 Ιδιοενέργεια του Μποζονίου Βαθμίδας-Gauge boson Self – Energy

Οι συνεισφορές σε τάξη g^2 στην ιδιοενέργεια του μποζονίου φαίνονται στο διάγραμμα:



Ας ξεκινήσουμε με το φερμιονικό διάγραμμα. Είναι παρόμοιο με το αντίστοιχο διάγραμμα στην *QED* μόνο που οι πίνακες της ομάδας t^a δρουν στη φερμιονική ομάδα δεικτών. Στο παράρτημα δείχνουμε όλη την διαδικασία που καταλήγουμε στην εξίσωση 5.193. Εδώ θα την χρησιμοποιήσουμε παραλλαγμένη για να έχουμε συνέπεια στον φορμαλισμό.



$$\begin{aligned}
 &= \text{tr}[t^a, t^b] i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \\
 &\times \frac{-g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx 8x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(m^2 - x(1-x)q^2)^{2-d/2}}
 \end{aligned}
 \tag{5.59}$$

Η τιμή του ίχνους δίνεται από την εξίσωση: $\text{tr}[t^a t^b] = C(r)\delta^{ab}$. Σε μια θεωρία με πολλές οικογένειες φερμιονίων, θα υπήρχε ένα τέτοιο διάγραμμα για κάθε οικογένεια. Εδώ θα εμβαθύνουμε στον αποκλίνοντα όρο αυτού του διαγράμματος, ο οποίος είναι ανεξάρτητος της φερμιονικής μάζας. Έστω ότι υπάρχουν n_f οικο-

γένειες φερμιονίων, όλες στην ίδια αναπαράσταση r , τότε η συνολική συνεισφορά του διαγράμματος φερμιονικού βρόχου παίρνει την μορφή:

$$\sum_{n_f} \left\{ \text{Diagram} \right\} = i(q^2 - g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left(\frac{-g^2}{4\pi^2} \frac{4}{3} n_f C(r) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right) \quad (5.60)$$

Όπου αθροίσαμε όλα τα διαγράμματα για την κάθε διαφορετική οικογένεια φερμιονίων.

Ας εξετάσουμε τα υπόλοιπα τρία διαγράμματα του τομέα της βαθμίδας. Η συνεισφορά αυτών θα εξαρτάται από την επιλογή της βαθμίδας: $\xi = 1$. Ας εξετάσουμε το διάγραμμα με το *vertex* των τριών μποζονίων.

$$\begin{array}{c} q+p, d, \sigma \\ \alpha, \mu \text{ --- } \text{Diagram} \text{ --- } \beta, \nu \\ p, c, \rho \end{array} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2} \frac{-i}{(p+q)^2} g^2 f^{acd} f^{bcd} N^{\mu\nu} \quad (5.61)$$

Όπου ο αριθμητής είναι:

$$N^{\mu\nu} = [g^{\mu\rho}(q-p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(2p+q)^\mu + g^{\sigma\mu}(-p-2q)^\rho] \times [\delta_\rho^\nu(p-q)_\sigma + g_{\rho\sigma}(-2p-q)^\nu + \delta_\sigma^\nu(p+2q)_\rho] \quad (5.62)$$

Ο συντελεστής $1/2$ ονομάζεται παράγοντας συμμετρίας διότι έχουμε 2 πηγές α, β και μία κορυφή επομένως $S = 2^1$ άρα $\text{symmetry factor} = 1/S = 1/2$. Ο παράγοντας αυτός υπάρχει λόγω της ικανότητας των διαγραμμάτων να μένουν αναλλοίωτα κάτω από διάφορες αλλαγές των πηγών ή των διαδοτών μεταξύ τους και έτσι βοηθάει στο να ολοκληρώνουμε μία φορά όλα αυτά τα ισοδύναμα διαγράμματα. Για της σταθερές δομής χρησιμοποιούμε την εξίσωση: $f^{acd} f^{bcd} = C_2(G) \delta^{ab}$

Για να απλοποιήσουμε την έκφραση περαιτέρω, συνδυάζουμε τους παρανομαστές με τον συνήθη τρόπο:

$$\frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{((1-x)p^2 + x(p+q)^2)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(P^2 - \Delta)^2} \quad (5.63)$$

Όπου $P = p + xq$ και $\Delta = -x(1-x)q^2$. Οπότε το διάγραμμα γράφεται σε απλοποιημένη μορφή:

$$\begin{array}{c} \alpha, \mu \text{ --- } \text{Diagram} \text{ --- } \beta, \nu \end{array} = -\frac{g^2}{2} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P^2 - \Delta)^2} N^{\mu\nu} \quad (5.64)$$

Ο αριθμητής μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω αν απαλείψουμε το p αντικαθιστώντας το ως προς P , απορρίπτοντας όρους γραμμικούς στο P^μ και εφόσον ολοκληρώνονται συμμετρικά στο μηδέν αντικαθιστούμε τους όρους με $P^\mu P^\nu$ με $g^{\mu\nu} P^2/d$:

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu}[(2q+p)^2 + (q-p)^2] - d(q+2q)^\mu(q+2q)^\nu \\ &\quad + [(2q+p)^\mu(q+2p)^\nu + (q-p)^\mu(2q+p)^\nu - (q+2p)^\mu(q-p)^\nu \\ &\quad + (\mu \leftrightarrow \nu)] \\ &\rightarrow -g^{\mu\nu} P^2 \cdot 6(1 - \frac{1}{d}) - g^{\mu\nu} q^2 [(2-x)^2 + (1+x)^2] \\ &\quad + q^\mu q^\nu [(2-d)(1-2x)^2 + 2(1+x)(2-x)] \end{aligned} \quad (5.65)$$

Το τελικό βήμα είναι να κάνουμε στροφή *Wick* και να εφαρμόσουμε τις φόρμουλες:

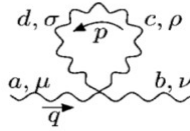
$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (5.66)$$

$$\int \frac{d^d l_E^2}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (5.67)$$

Συνεπώς καταλήγουμε στον ακόλουθο τύπο :

$$\begin{aligned} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \times (\Gamma(1 - \frac{1}{d}) g^{\mu\nu} q^2 [\frac{3}{2}(d-1)x(1-x)]) \\ &\quad + \Gamma(2 - \frac{d}{2}) g^{\mu\nu} q^2 [\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2] \\ &\quad - \Gamma(2 - \frac{d}{2}) q^\mu q^\nu [(1 - \frac{d}{2})(1-2x)^2 + (1+x)(2-x)] \end{aligned} \quad (5.68)$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το διάγραμμα των τεσσάρων μποζονίων βαθμίδας:



Χρησιμοποιώντας τους κανόνες *Feynman* της λαγκρανζιανής βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\rho\sigma}}{p^2} \delta^{cd} (-ig^2) \\ &\quad \times [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ &\quad + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ &\quad + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})] \end{aligned} \quad (5.69)$$

Ο συντελεστής $1/2$ υπάρχει διότι έχουμε 2 πηγές a, b και μία κορυφή επομένως $S = 2^1$ άρα $symmetry\ factor = 1/S = 1/2$. Ο πρώτος όρος από το άθροισμα των σταθερών δομής εξαφανίζεται λόγω της αντισυμμετρικότητας του ταυιστή f^{abc} . Ο δεύτερος και τρίτος όρος μπορούν να απλοποιηθούν χρησιμοποιώντας την εξίσωση από το κεφάλαιο για τις άλγεβρες *Lie*:

$$f^{acd} f^{bcd} = C_2(G) \delta^{ab} \quad (5.70)$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$= -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} g^{\mu\nu} (d-1) \quad (5.71)$$

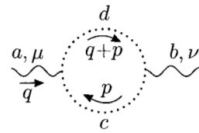
Βλέπουμε ότι το μιγαδικό ολοκλήρωμα στα p δίνει πόλο για $d = 2$ αλλά καθώς $d \rightarrow 4$ μηδενίζεται. Μπορούμε να πιστέψουμε ότι ο πόλος για $d = 2$ ακυρώνεται από τα άλλα διαγράμματα. Για να το δείξουμε αυτό θα αναγκάσουμε το ολοκλήρωμα να μοιάζει με το προηγούμενο διάγραμμα ώστε πολλαπλασιάζοντας με την μονάδα να εμφανίσουμε τον όρο $(q+p)^2/(q+p)^2$. Στη συνέχεια θα συνδυάσουμε τους παρανομαστές με τέτοιο τρόπο ώστε να γράψουμε το p μέσω της μετατοπισμένης μεταβλητής $P = p + xq$. Ξεχνώντας τους όρους που είναι γραμμικοί στην P καταλήγουμε:

$$= -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P^2 - \Delta)^2} g^{\mu\nu} (d-1) [P^2 + (1-x)^2 q^2] \quad (5.72)$$

Τώρα μπορούμε να στρέψουμε το ολοκλήρωμα κατα *Wick* και να ολοκληρώσουμε πάνω στην P ώστε να πάρουμε:

$$\begin{aligned} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\times \left(-\Gamma\left(1 - \frac{1}{d}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2} d(d-1)x(1-x) \right] \right. \\ &\quad \left. - \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 [(d-1)(1-x)^2] \right) \quad (5.73) \end{aligned}$$

Παραστάσεις της μορφής 5.68 και 5.73 δεν προσθέτουν στην πληροφορία στην κατανόησή μας. Ο πόλος στο $d = 2$ δεν ακυρώνεται και το άθροισμα δεν έχει εγκάρσια δομή *Lorentz*. Για να φέρουμε στην επιθυμητή μορφή πρέπει να πάρουμε υπόψιν μας και τα διαγράμματα του πεδίου *ghost*. Σύμφωνα με τους κανόνες έχουμε:



$$= (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2} \frac{i}{(p+q)^2} g^2 f^{dac} (p+q)^\mu f^{cbd} p^\nu \quad (5.74)$$

Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε παράγοντα συμμετρίας αλλά ένα (-1) γιατί τα πεδία *ghost* αντιμετατίθενται. Το διάγραμμα μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τις ίδιες μεθόδους που εφαρμόσαμε στα προηγούμενα δύο: Συνδυασμός παρονομαστών, αλλαγή μεταβλητών $p \rightarrow P$, στροφή *Wick* και ολοκλήρωση πάνω στην P χρησιμοποιώντας διαστατική ομαλοποίηση. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{aligned} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\quad \times \left(-\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2}x(1-x)\right] + \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu [x(1-x)] \right) \end{aligned} \quad (5.75)$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ενώσουμε τα τρία αποτελέσματα (5.68, 5.73, 5.75).

$$\begin{aligned} \text{bosonloop} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\quad \times \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{d}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{3}{2}(d-1)x(1-x)\right] \right. \\ &\quad + \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2\right] \\ &\quad \left. - \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu \left[(1 - \frac{d}{2})(1-2x)^2 + (1+x)(2-x)\right] \right) \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \text{3vertexboson} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\quad \times \left(-\Gamma\left(1 - \frac{1}{d}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2}d(d-1)x(1-x)\right] \right. \\ &\quad \left. - \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 [(d-1)(1-x)^2] \right) \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \text{ghostloop} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\quad \times \left(-\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2}x(1-x)\right] \right. \\ &\quad \left. + \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu [x(1-x)] \right) \end{aligned} \quad (5.78)$$

Ομαδοποιώντας τα αθροίσματα με κοινό παράγοντα το $\Gamma\left(1 - \frac{1}{d}\right) g^{\mu\nu} q^2 x(1-x)$ γίνονται:

$$\frac{1}{2}(3d-3-d^2+d-1) = \frac{1}{2}(-d^2+4d-4) = \left(1 - \frac{d}{2}\right)(d-2) \quad (5.79)$$

Ο πρώτος παράγοντας ακυρώνει τον πόλο στο $d=2$. Λόγω της ιδιότητας της Γάμμα συνάρτησης: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ όπου $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)\left(1 - \frac{d}{2}\right)(d-2) = \Gamma\left(1 - \frac{d}{2} + 1\right)(d+2) = \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)(d-2) \quad (5.80)$$

Με αποτέλεσμα το άθροισμα των τριών διαγραμμάτων να μην έχει κυβικό αποκλίνον όρο και έτσι δεν χρειάζεται επανακανονικοποίηση η μάζα του μποζονίου. Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα των *ghosts* παίζουν καθοριστικό ρόλο στην ακύρωση.

Μετά την ακύρωση του πόλου του πρώτου όρου και αφού η συνάρτηση Γ γίνει $\Gamma(2 - \frac{2}{d})$ μπορεί να συνδυαστεί με τους υπόλοιπους όρους του αθροίσματος των διαγραμμάτων που είναι ανάλογοι του $\Gamma(2 - \frac{2}{d})g^{\mu\nu}q^2$ ώστε να δώσει:

$$(d-2)x(1-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 - (d-1)(1-x)^2 \quad (5.81)$$

Εφόσον ο τρόπος που πρέπει να απλοποιηθεί η παράσταση αυτή δεν είναι προφανής θα δούμε πρώτα τους όρους με παράγοντα τον $\Gamma(2 - \frac{d}{2})q^\mu q^\nu$:

$$-(1 - \frac{d}{2})(1-2x)^2 - (1+x)(2-x) + x(1-x) = -(1 - \frac{d}{2})(1-2x)^2 - 2 \quad (5.82)$$

Εάν η ολική ιδιοενέργεια του μποζονίου δηλαδή του πρώτου διαγράμματος είναι ανάλογη με $(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)$ θα είναι δυνατόν η παράσταση 5.81 από το *ghostloop* που δεν είναι προφανής η απλοποίηση της να είναι η ίδια επί (-1) . Για να γίνει διακριτό αυτό το επιχείρημα παρατηρούμε ότι το Δ είναι συμμετρικό σε αλλαγές μεταβλητής: $x \leftrightarrow (1-x)$ και έτσι μπορούμε να θέσουμε $(1-x)$ σε όποιον όρο του αριθμητή θέλουμε. Ειδικότερα όροι γραμμικοί στο x μπορούν να μετασχηματιστούν ως εξής:

$$x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(1-x) = \frac{1}{2} \quad (5.83)$$

Τελικά το άθροισμα των διαγραμμάτων καταλήγει να είναι:

$$\frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{2}{d})}{\Delta^{2-d/2}} (g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu) [(1 - \frac{d}{2})(1-2x)^2 + 2] \quad (5.84)$$

Η παράσταση αυτή είναι *transverse* όπως η *Ward* ταυτότητα απαιτεί. Με λίγα λόγια αν $M_{\mu\nu}^T$ εγχάρσιος τανυστής όπου:

$$M_{\mu\nu}^T \sim g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu \quad (5.85)$$

Τότε:

$$\begin{aligned} q_\mu M_{\mu\nu}^T &= q_\mu (g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu) = q_\mu g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu q_\mu \\ &= q_\mu g_{\mu\nu} q_\mu q_\mu - q_\mu q_\nu q_\mu \\ &= q_\mu q_\nu q_\mu - q_\mu q_\nu q_\mu = 0 \end{aligned} \quad (5.86)$$

Εάν ο $M_{\mu\nu}^T$ συμβολίζει ένα πλάτος πιθανότητας μιας αλληλεπίδρασης η οποία περιέχει ένα εξωτερικό *gauge* μποζόνιο με ορμή q τότε το πλάτος μηδενίζεται:

$$q_\mu M_{\mu\nu}^T = 0 \quad (5.87)$$

Η γενική αυτή ταυτότητα πρέπει να ικανοποιείται γιατί σχετίζεται με την διατήρηση του φορτίου και την αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας της λαγκρανζιανής.

Για μελλοντική χρήση καταγράφουμε το υπερίωδες μέρος του αθροίσματος:

$$= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left(-\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{5}{3}\right) C_2(G) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \dots \right) \quad (5.88)$$

5.5.2 Η συνάρτηση βήτα – β function

Ο απλούστερος υπολογισμός που περιέχει συνδυασμούς που είναι αναλλοίωτοι σε μετασχηματισμούς βαθμίδας των *radiative* διορθώσεων είναι ο κυρίαρχος όρος της *Callan – Symanzik* β συνάρτησης μιας μη αβελιανής θεωρίας. Η αναλλοιώτητα του κυρίαρχου όρου μπορεί να υποστηριχθεί από το ότι η σταθερά σύζευξης της θεωρίας βαθμίδας δεν θα έπρεπε να εξελιχθεί σε μεγάλες τιμές σε ένα πλαίσιο υπολογισμών ενώ μένει μικρή σε ένα άλλο. Στο επόμενο κεφάλαιο θα το δούμε αυτό πιο ξεκάθαρα δείχνοντας ότι ο παράγοντας του κυρίαρχου όρου της β συνάρτησης μπορεί να εξαχθεί από μια φυσική ενεργό διατομή και έτσι πρέπει να είναι αναλλοίωτος βαθμίδας. Απροσδόκητα η απόδειξη αυτή μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στους δυο πρώτους όρους της β συνάρτησης.

Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση β δίνει τον ρυθμό εξέλιξης της επανακανονικοποιημένης σταθεράς σύζευξης που αλλάζει σύμφωνα με την κλίμακα επανακανονικοποίησης M . Εφόσον οι συναρτήσεις *Green* εξαρτιούνται από το M μέσω των *counterterms* που περιέχουν υπερίωδες διορθώσεις, η β μπορεί να εξαχθεί από τους *counterterms* που μπαίνουν σε μια κατάλληλα διαλεγμένη συνάρτηση *Green*. Για παράδειγμα η συνάρτηση β της *QED* υπολογίζεται από τα *counterterms* της αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίου-φωτονίου, της ιδιοενέργειας του ηλεκτρονίου και από την ιδιοενέργεια του φωτονίου. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και στην περίπτωση της μη αβελιανής θεωρίας. Έτσι στην χαμηλότερη τάξη προσέγγισης έχουμε:

$$\beta(g) = gM \frac{\partial}{\partial M} (-\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3) \quad (5.89)$$

Όπου $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ τα *counterterms* από την επανακανονικοποίηση της μη αβελιανής θεωρίας δηλαδή οι διορθώσεις στα αντίστοιχα διαγράμματα που παίζουν ρόλο στην συνάρτηση β .

Για να ακυρώνονται οι εξισώσεις:

$$i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left(-\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} n_f C(r) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \dots \right) \quad (5.90)$$

$$i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left(-\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(-\frac{5}{3}\right) C_G \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \dots \right) \quad (5.91)$$

Πρέπει το δ_3 να είναι:

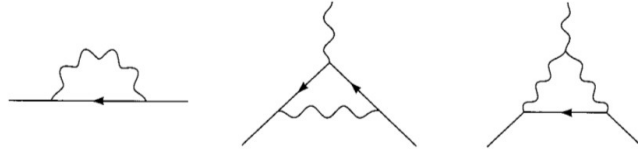
$$\delta_3 = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} \left[\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r) \right] \quad (5.92)$$

$$\text{---}\otimes\text{---} = -i(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \delta^{ab} \delta_3$$

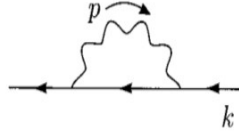
$$\text{---}\otimes\text{---} = i\not{p} \delta_2$$

$$\text{---}\otimes\text{---} = ig t^a \gamma^\mu \delta_1$$

Στην επόμενη εικόνα βλέπουμε τα διαγράμματα στα οποία οι αποκλίσεις (*divergences*) αφαιρούνται λόγω επανακανονικοποίησης από τους δ_1, δ_2 .



Η διόρθωση δ_2 της ιδιοενέργειας του φερμιονίου ακυρώνει την απόκλιση που είναι ανάλογη του \not{k} στο πρώτο διάγραμμα της δεύτερης εικόνας. Στην βαθμίδα *Feynman-t' Hooft* η τιμή του διαγράμματος αυτού είναι:



$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (ig)^2 \gamma^\mu t^a \frac{i(\not{p} + \not{k})}{(p+k)^2} \gamma_\mu t^a \frac{-i}{p^2} \quad (5.93)$$

Από την στιγμή που η απόκλιση στην επανακανονικοποίηση των πεδίων είναι ανεξάρτητη της μάζας, έχουμε απλοποιήσει την έκφραση της ιδιοενέργειας του φερμιονίου θέτοντας την μάζα μηδέν. Το ταυστικό γινόμενο των πινάκων της ομάδας ισούται με τον κυβικό τελεστή *Casimir* εξ' ορισμού. Για τους γ πίνακες χρησιμοποιούμε την ιδιότητά τους:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = -(d-2) \quad (5.94)$$

Όλες οι υπόλοιπες αλλαγές είναι ακριβώς ότι κάνανε και στην ιδιοενέργεια του μποζονίου βαθμίδας. Οπότε έχουμε:

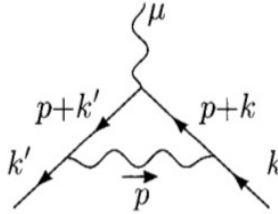
$$\begin{aligned}
&= g^2 C_2(r)(d-2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p} + \not{k})}{(p+k)^2 p} \\
&= g^2 C_2(r)(d-2) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{(1-x)\not{k}}{(P+\Delta)^2} \\
&= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(r)\not{k} \int_0^1 dx (1-x)(d-2) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \\
&= \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \not{k} C_2(r) \Gamma(2-\frac{d}{2}) + \dots
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Όπου $P = p + xk$ και $\Delta = -x(1-x)k^2$. Το αποκλίνον κομμάτι της έκφρασης αυτής πρέπει να ακυρώνεται από δεύτερο διάγραμμα των διορθώσεων στην πρώτη εικόνα δηλαδή από τον όρο: $ig\delta_2$. Εάν η κλίμακα επακανονικοποίησης είναι M :

$$\delta_2 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} C_2(r) \tag{5.96}$$

Συν πεπερασμένοι όροι. Σημειώνουμε ότι τα δ_i εξαρτιόνται από την βαθμίδα, για παράδειγμα το δ_2 είναι μηδέν για πρώτης τάξης διαγράμματα στην βαθμίδα *Landau* ($\xi = 0$).

Για να καθορίσουμε το δ_1 , πρέπει να υπολογίσουμε το δεύτερο και τρίτο διάγραμμα. Το δεύτερο διάγραμμα θα υπολογιστεί στην βαθμίδα *Feynman-t'Hoof* και για άμαζα φερμιόνια.



$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g^3 t^b t^a t^b \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu}{(p+k)^2 + (p+k)^2 p^2} \tag{5.97}$$

Η πίνακες της ομάδας βαθμίδας μπορούν να απλοποιηθούν σύμφωνα με:

$$\begin{aligned}
t^b t^a t^b &= t^b t^b t^a + t^b [t^a, t^b] \\
&= C_2(r) t^a + i t^b f^{abc} t^c \\
&= C_2(r) t^a + \frac{1}{2} i f^{abc} \cdot i f^{bcd} t^d \\
&= [C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)] t^a
\end{aligned} \tag{5.98}$$

Στην τρίτη γραμμή χρησιμοποιήσαμε την αντισυμμετρικότητα του f^{abc} για να γράψουμε το γινόμενο πινάκων ως μεταθέτη, στην τελευταία σειρά κάναμε χρήση της σχέσης:

$$f^{acd} f^{bcd} = C_2(G) \delta^{ab} \quad (5.99)$$

Όλα τα διαγράμματα που είδαμε προηγουμένως έχουν *superficial* βαθμούς ελευθερίας επομένως πρέπει να εξάγουμε τις λογαριθμικές αποκλίσεις. Η έκφραση του τελευταίου διαγράμματος 5.97 είναι λογαριθμικά αποκλίνον οπότε μπορεί να εξαχθεί σχετικά εύκολα αν υποθέσουμε το όριο της μεταβλητής ολοκλήρωσης p να είναι πολύ μεγαλύτερο από κάθε εξωτερική ορμή. Σε αυτό το όριο το διάγραμμα γίνεται:

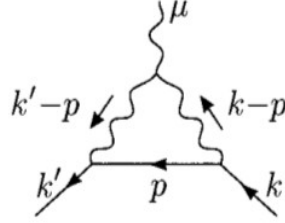
$$\sim g^3 [C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)] t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \gamma_\nu}{p^2 \cdot p^2 \cdot p^2} \quad (5.100)$$

Εάν αντικαταστήσουμε το $p^\rho p^\sigma$ με $g^{\rho\sigma} p^2/d$ στον παρανομαστή έχουμε την έκφραση:

$$\begin{aligned} &\sim g^3 [C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)] t^a (2-d) \frac{1}{d} \gamma^\mu \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2)^2} \\ &\sim \frac{ig^3}{(4\pi)^2} [C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)] t^a \gamma^\mu (\Gamma(2 - \frac{2}{d}) + \dots) \end{aligned} \quad (5.101)$$

Αυτή η προσέγγιση δίνει το σωστό συντελεστή για τον αποκλίνοντα όρο διότι ακυρώνει τους πεπερασμένους όρους στην συνάρτηση για την *vertex*.

Το τρίτο διάγραμμα μπορεί να αναλυθεί με τον ίδιο τρόπο. Στην ίδια βαθμίδα και για άμαζα φερμιόνια έχουμε:



$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (ig\gamma_\nu t^b) \frac{i\not{p}}{p^2} (ig\gamma_\rho t^c) \frac{-i}{(k' - p)^2} \frac{-i}{(k - p)^2} \\ &\times g f^{abc} [g^{\mu\nu} (2k' - k - p)^\rho + g^{\nu\rho} (-k' - k + 2p)^\mu + g^\rho (2k - k' - p)^\nu] \end{aligned} \quad (5.102)$$

Το γινόμενο, μπορεί να γίνει:

$$f^{abc} t^b t^c = \frac{1}{2} f^{abc} \cdot f^{bcd} t^d = \frac{i}{2} C_2(G) t^a \quad (5.103)$$

Ομοίως με πριν αμελούμε όλες τις εξωτερικές ορμές σε σύγκριση με την μεταβλητή ολοκλήρωσης p . Ο υπολογισμός:

$$\begin{aligned}
& \sim \frac{g^3}{2} C_2(G) t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \not{p} \gamma_\rho \frac{g^{\mu\nu\rho} - 2g^{\nu\rho} p^\mu + g^{\rho\mu} p^\nu}{(p^2)^3} \\
& \sim \frac{g^3}{2} C_2(G) t^a \frac{1}{d} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2)^2} [\gamma^\mu \gamma^{\rho\sigma} \gamma_\rho - 2\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\rho + \gamma^\sigma \gamma_\sigma \gamma^\mu] \quad (5.104) \\
& \sim \frac{ig^3}{(4\pi)^2} \frac{3}{2} C_2(G) t^a \gamma^\mu \left(\Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right)
\end{aligned}$$

Στη δεύτερη γραμμή αντικαταστήσαμε $p^\rho p^\sigma$ με $g^{\rho\sigma} p^2/d$

Το άθροισμα των αποκλίσεων 5.101 και 5.104 πρέπει να ακυρώνεται από το τρίτο διάγραμμα που περιέχει τον *counterterm* $igt^a \gamma^\mu \delta_1$. Επομένως βγάζουμε για κλίμακα επανακανονικοποίησης M :

$$\delta_1 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} [C_2(r) + C_2(G)] \quad (5.105)$$

Παρατηρούμε ότι το δ_1 δεν είναι ίσο με το δ_2 όπως ισχύει στην αβελιανή περίπτωση, εδώ το δ_1 έχει έναν έξτρα όρο που είναι ανάλογος του $C_2(G)$.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε την συνάρτηση β . Βάζοντας τους τρεις *counterterms* δ_i :

$$\beta(g) = (-2) \frac{g^3}{(2\pi)^2} [(C_2(r) + C_2(g)) - C_2(r) + \frac{1}{2} (\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r))] \quad (5.106)$$

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} [\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r)] \quad (5.107)$$

Βλέπουμε ότι για μικρές τιμές του n_f η συνάρτηση β είναι αρνητική και έτσι οι μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας είναι ασυμπτωτικά ελεύθερες. Αυτό το συμπέρασμα είναι εξαιρετικής φυσικής σημασίας. Ανακαλύφθηκε από τους *t' Hooft, Politzer* και τους *Gross, Wilczek* ([6]). Το φαινόμενο αυτό θα μελετηθεί σε επόμενη υποενοότητα αφού ολοκληρώσουμε την μελέτη πάνω στις αποκλίσεις των μη αβελιανών θεωριών.

5.5.3 Σχέσεις μεταξύ *Counterterms*

Στην προηγούμενη ανάλυση που πραγματοποιήσαμε υπολογίσαμε την συνάρτηση β της μη αβελιανής θεωρίας βαθμίδας από τις αποκλίσεις των διαγραμμάτων του φερμιονικού *vertex* και την επανακανονικοποίηση των πεδίων. Μπορεί κάποιος να την υπολογίσει επίσης, μέσω του διαγράμματος αλληλεπίδρασης φερμιονίου-μποζονίου ή μέσω του διαγράμματος της αλληλεπίδρασης τεσσάρων μποζονίων. Άλλωστε έχουμε ήδη δει ότι στην μη αβελιανή θεωρία οι σταθερές ζεύξης διαφόρων διαγραμμάτων συνδέονται και απαιτείται η εξίσωσή τους. Με αυτό το αποτέλεσμα προσδοκούμε ότι ο διαφορετικός υπολογισμός της συνάρτησης β θα παράξει την ίδια τιμή.

Για να δείξουμε αυτό το συμπέρασμα θα απαριθμήσουμε τα *counterterms* που εμφανίζονται στην μη αβελιανή θεωρία. Ξεκινάμε από την λαγκρανζιανή

5.14 και την θεωρούμε συνδυασμό των γυμνών πεδίων και τη γυμνής σταθεράς αλληλεπίδρασης. Στον ακόλουθο υπολογισμό θα θεωρούμε τις γυμνές ποσότητες με υποδείκτη το 0.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{0\nu}^a - \partial_\nu A_{0\mu}^a)^2 + \bar{\psi}_0(i\partial - m_0)\psi_0 - \bar{c}_0^a \partial^2 c_0^a \\ & + g_0 A_{0\mu}^a \bar{\psi}_0 \gamma^\mu t^a \psi_0 - g_0 f^{abc} (\partial_\mu A_{0\nu}^a) A_{0\mu}^b A_{0\nu}^c \\ & - \frac{1}{4} g^2 (f^{eab} A_{0\mu}^a A_{0\nu}^b) (f^{ecd} A_{0\mu}^c A_{0\nu}^d) - g \bar{c}_0^a f^{abc} \partial^\mu A_{b\mu}^0 c_0^c \end{aligned} \quad (5.108)$$

Επιλέγουμε $\xi = \infty$ για απλότητα. Θα επαναπροσδιορίσουμε (*rescale*) τα πεδία σε επανακανονικοποιημένα εξάγοντας τους παράγοντες Z_2 , Z_3 , Z_2^c για φερμιόνια, μποζόνια και *ghosts*. Επίσης μεταβάλλουμε την σταθερά αλληλεπίδρασης στην επανακανονικοποιήσιμη g . Η λαγκρανζιανή παίρνει την μορφή:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{c.t.} \quad (5.109)$$

Όπου \mathcal{L}_{ren} είναι η αρχική λαγκρανζιανή 5.14 και η $\mathcal{L}_{c.t.}$ παίρνει την μορφή:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{c.t.} = & -\frac{1}{4} \delta_3 (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi} (i\delta_2 \partial - \delta_m) \psi - \delta_2^c \bar{c}^a \partial^2 c^a \\ & + g \delta_1 A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - g \delta_1^{3g} f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c \\ & - g^2 \delta_1^{4g} (f^{eab} A_\mu^a A_\nu^b) (f^{ecd} A_\mu^c A_\nu^d) - g \delta_1^c \bar{c}^a f^{abc} \partial^\mu A_\mu^b c^c \end{aligned} \quad (5.110)$$

Και τα *counterterms* ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \delta_2 = Z_2 - 1, \quad \delta_3 = Z_3 - 1, \quad \delta_2^c = Z_2^c - 1, \quad \delta_m = Z_2 m_0 - m \\ \delta_1 = \frac{g_0}{g} Z_2 (Z_3)^{1/2}, \quad \delta_1^{3g} = \frac{g_0}{g} (Z_3)^{3/2} - 1, \\ \delta_1^{4g} \frac{g_0^2}{g^2} (Z_3)^2 - 1, \quad \delta_1^c = \frac{g_0}{g} Z_2^c (Z_3)^{1/2} - 1 \end{aligned} \quad (5.111)$$

Παρατηρούμε ότι οι οκτώ *counterterms* εξαρτώνται από πέντε παραμέτρους, με αποτέλεσμα να υπάρχουν τρεις σχέσεις μεταξύ τους. Η υποβόσκουσα συμμετρία της θεωρίας μας που είναι η τοπική συμμετρία βαθμίδας υπονοεί σχέσεις μεταξύ των αποκλίνωντων πλατών πιθανότητας και μεταξύ των *counteterms* που τις ακυρώνουν. Στην συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχουν πέντε συνθήκες επανακανονικοποίησης που καθορίζουν με μοναδικό τρόπο τους όρους-*counterterms* έτσι ώστε να αφαιρούν όλους τους απειρισμούς από τη θεωρία.

Σε πρώτης τάξης προσέγγιση (*1-loop order*) μπορούμε να αναπτύξουμε τον όρο g_0/g και τους διάφορους Z όρους γύρω από την μονάδα, κρατώντας μόνο την κυρίαρχη συνεισφορά σε κάθε *counterterm*. Έτσι οι σχέσεις μεταξύ τους γίνονται:

$$\delta_1 - \delta_2 = \delta_1^{3g} - \delta_3 = \frac{1}{2} (\delta_1^{4g} - \delta_3) = \delta_1^c - \delta_2^c \quad (5.112)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αυτές η συνάρτηση β θα έχει την ίδια τιμή για οποιονδήποτε κόμβο του μποζονίου βαθμίδας και αν χρησιμοποιήσουμε στον

υπολογισμό. Πιο γενικά μπορούμε να σκεφτούμε μια θεωρία με αυθαίρετο αριθμό φερμιονίων ή μποζονίων που ζεύγονται με το πεδίο βαθμίδας. Τότε σε πρώτης τάξης προσέγγιση:

$$\delta_1^i - \delta_2^i \quad (5.113)$$

Όπου το δ_1^i είναι ο όρος του κόμβου (*vertex*) για i είδη και δ_2^i ο αντίστοιχος όρος για την μεταβολή των πεδίων. Η τιμή αυτή λοιπόν παίρνει παγκόσμια τιμή. Είναι επίσης αναλλοίωτη βαθμίδας έτσι ώστε η εξάρτηση του αποκλίνοντος μέρους από την βαθμίδα να ακυρώνει την εξάρτηση του δ_3 στον υπολογισμό της συνάρτησης β .

Στο παράρτημα με τους *counterterms* της *QED* φαίνεται ότι η σχέση μεταξύ των δ_1 και δ_2 εξασφάλιζε ότι όλα τα ηλεκτρικά φορτισμένα είδη βλέπουν μία κοινή παγκόσμια τιμή της σταθεράς σύζευξης e . Στην μη αβελιανή περίπτωση οι σχέσεις 5.112 και οι υψηλότερες τάξης προσέγγισης γενικεύσεις τους διατηρούν την παγκοσμιότητα των μη αβελιανών σταθερών σύζευξης. Στην περίπτωση της *QED* μπορέσαμε να εξάγουμε πολύ πιο ισχυρή σχέση μεταξύ των δ_1 και δ_2 , $\delta_1 = \delta_2$ ή ισοδύναμα $Z_1 = Z_2$. Στην μη αβελιανή περίπτωση όμως το αντίστοιχο διανυσματικό ρεύμα $j^{\mu a} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} t^a \psi$ μετασχηματίζεται κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας στην *adjoint* αναπαράσταση. Με αποτέλεσμα η μέθοδος *Faddeev-Popov* να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστούν τα στοιχειά πίνακα του ρεύματος μονοσήμαντα και έτσι η κανονικοποίηση αυτών των στοιχείων του πίνακα να μην διατηρείται από την θεωρία διαταραχών. Ουσιαστικά αυτό που γίνεται κατανοητό είναι ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία διαταραχών για να υπολογίσουμε ρεύματα που δημιουργούνται από το φορτίου του πεδίου βαθμίδας. Οπότε σε αυτές τις περιοχές θα πρέπει να ορισθεί θεωρία μη αβελιανών αλληλεπιδράσεων σε μη διαταρακτικό πλαίσιο δηλαδή αναλυτικά. Το ζήτημα αυτό θα μας απασχολήσει στο κεφάλαιο που θα εφαρμόσουμε την μη αβελιανή $SU(N)$ θεωρία για να περιγράψουμε τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις.

5.6 Ασυμπτωτική Ελευθερία-*Asymptotic Freedom*

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι η συνάρτηση β μιας μη αβελιανής θεωρίας είναι αρνητική για συγκεκριμένο αριθμό φερμιονίων. Το αποτέλεσμα αυτό είναι τόσο σημαντικό που θα το αποδείξουμε για δεύτερη φορά. Η προηγούμενη απόδειξη ήταν κατανοητή αλλά δεν ήταν τόσο διαφωτιστική. Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση που είναι πολύ πιο γενική και περισσότερο αποκρυσταλλωμένη.

Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε αντανακλά την διαίσθηση του *Kenneth Geddes Wilson* η οποία είναι η ολοκλήρωση των υψηλών ορμών των βαθμών ελευθερίας και ταυτόχρονα η κατάλληλη διατήρηση της ελευθερίας επιλογής βαθμίδας. Θα υπολογίσουμε την *effective* δράση της μη αβελιανής θεωρίας για ένα πεδίο $A_{\mu}^a(x)$ το οποίο μεταβάλλεται αργά και είναι κλασικό πεδίο βαθμίδας που

βρίσκεται στο υπόβαθρο σε σχέση με τα άλλα. Υιοθετούμε κανονική κανονικοποίηση (*canonical normalization*) για αυτό το πεδίο και έτσι μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον παράγοντα στην *effective* δράσης ως σταθερά σύζευξης.

Στην κλασική μηχανική οι εξισώσεις κίνησης εξάγονται από την μεταβολή της κλασικής δράσης σύμφωνα με την μέθοδο *Euler-Lagrange*. Σε κβαντικό επίπεδο όμως επειδή όλα τα μονοπάτια γύρω από την μεταβολή της δράσης συνεισφέρουν εξίσου στο *path integral*, πρέπει να αντικαταστήσουμε την δράση με την *effective* δράση ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον φορμαλισμό. Επίσης όταν δουλεύουμε σε *effective* δράση για τον υπολογισμό των συναρτήσεων *Green* λαμβάνουμε υπόψιν μόνο τα *tree* διαγράμματα.

5.6.1 Διαταρακτική Θεωρία Πεδίου Υποβάθρου-*Background Field Perturbation Theory*

Για να προετοιμάσουμε τον υπολογισμό θα επαναπροσδιορίσουμε (*rescale*) το πεδίο βαθμίδας:

$$gA_\mu^a \Rightarrow A_\mu^a \quad (5.114)$$

Σε αυτή την κανονικοποίηση το *gauge coupling* αφαιρείται από την συναλλοίωτη παράγωγο και μεταφέρεται στον παράγοντα του κινητικού όρου πεδίου βαθμίδας. Οπότε ξεκινάμε από την λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g^2} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi}(i\mathcal{D})\psi \quad (5.115)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu^a t^a \quad (5.116)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (5.117)$$

Θέτουμε μηδέν την φερμιονική μάζα για απλοποίηση. Οι νόμοι μετασχηματισμού είναι ανεξάρτητοι της σταθεράς σύζευξης:

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu a^a + f^{abc} A_\mu^b a^c, \quad \delta\psi = ia^a t^a \psi \quad (5.118)$$

Η σταθερά σύζευξης θα εμφανιστεί στον διαδότη του πεδίου βαθμίδας.

Στη συνέχεια θα διαχωρίσουμε το πεδίο βαθμίδας σε ένα κλασικό πεδίο και ένα μεταβαλλόμενο κβαντικό πεδίο:

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \mathcal{A}_\mu^a \quad (5.119)$$

Θα αντιμετωπίσουμε το κλασικό κομμάτι του A_μ^a ως πάγια (*fixed*) διαμόρφωση πεδίου και το μεταβαλλόμενο μέρος \mathcal{A}_μ^a ως μεταβλητή ολοκλήρωσης του συναρτησιακού ολοκληρώματος. Από εδώ και στο εξής το σύμβολο D_μ θα αντιπροσωπεύει την συναλλοίωτη παράγωγο σε σχέση με το *background* πεδίο: $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu^a t^a$. Τότε:

$$\bar{\psi}(i\mathcal{D})\psi \rightarrow \bar{\psi}(i\mathcal{D})\psi + \mathcal{A}_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi \quad (5.120)$$

Η ένταση του πεδιακού τανυστή αναλύεται:

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}^a &\rightarrow \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\
 &+ \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} (A_\mu^b A_\nu^c - A_\nu^b A_\mu^c) + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\
 &= F_{\mu\nu}^a + D_\mu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c
 \end{aligned} \tag{5.121}$$

Όπου στην τελευταία γραμμή είναι το $F_{\mu\nu}^a$ του κλασικού πεδίου και D_μ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος στην *adjoint* αναπαράσταση. Εφόσον το *background* πεδίο είναι παγιωμένο και η λαγκρανζιανή έχει τοπική συμμετρία βαθμίδας τότε ο μετασχηματισμός του πεδίου που προκαλεί αυτή την ελευθερία βαθμίδας θα είναι του μεταβαλλόμενου A_μ^a :

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + D_\mu a^a + f^{abc} A_\mu^b a^c \tag{5.122}$$

Για να ορίσουμε το συναρτησιακό ολοκλήρωμα θα ακολουθήσουμε την μέθοδο επιλογής βαθμίδας των *Faddeev–Popov*. Επιλέγουμε την συνθήκη της επιλογής βαθμίδας σε σχέση με το *background* πεδίο ώστε να έχει νόημα η ολοκλήρωση με μεταβλητή αυτό το πεδίο:

$$G(A) = D^\mu A_\mu^a - \omega^a \tag{5.123}$$

Όπως σε προηγούμενη ενότητα θα προωθήσουμε τον όρο της επιλογής βαθμίδας στον εκθέτη ώστε να χβαντώσουμε την θεωρία στο *background* πεδίο όπως είχαμε κάνει με την βαθμίδα *Feynman-t’Hooft*. Επομένως η λαγκρανζιανή με επιλογή βαθμίδας γίνεται:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = &-\frac{1}{4g^2} (F_{\mu\nu}^a + D_\mu A_\nu^a - D_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^a)^2 - \frac{1}{2g^2} (D^\mu A_\mu^a)^2 \\
 &+ \bar{\psi} (i\not{D} + A_\mu^a \gamma^\mu t^a) \psi + \bar{c}^a (-D^2 - D^\mu f^{abc} A_\mu^b) c^c
 \end{aligned} \tag{5.124}$$

Η λαγκρανζιανή αυτή είναι όπως λέμε *gauge – fixed*, είναι ακόμη αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς που μεταβάλλουν το A_μ^a και το *background* πεδίο A_μ^a :

$$\begin{aligned}
 A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + D_\mu \beta^a \\
 A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a - f^{abc} \beta^b A_\mu^c \\
 \psi &\rightarrow \psi + i\beta^a t^a \psi \\
 c^a &\rightarrow c^a - f^{abc} \beta^b c^c
 \end{aligned} \tag{5.125}$$

Κάτω από τους μετασχηματισμούς το A_μ^a μετασχηματίζεται ως υλικό πεδίο στην *adjoint* αναπαράσταση, ενώ το A_μ^a μεταφέρει το κομμάτι του τοπικού μετασχηματισμού ανάλογο του $\partial\beta^a$.

5.6.2 Πρώτης τάξης διόρθωση στην *effective* δράση

Για να υπολογίσουμε την *effective* δράση σε πρώτη τάξη προσέγγιση, θα “ξεχάσουμε” τους όρους που είναι γραμμικοί στο μεταβαλλόμενο πεδίο A_μ^a και θα

ολοκληρώσουμε πάνω στους κυβικούς. Αυτή η διαδικασία παράγει συναρτησιακές ορίζουσες τις οποίες μπορούμε να αξιοποιήσουμε ώστε να φτιάξουμε στην κατάλληλη μορφή την *effective* δράση. Οι όροι που είναι κυβικοί στο \mathcal{A}_μ^a είναι:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2g^2} \left[\frac{1}{2} (D_\mu \mathcal{A}_\nu^a - D_\nu \mathcal{A}_\mu^a)^2 + F^{a\mu\nu} f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c + (D^\mu \mathcal{A}_\mu^a)^2 \right] \quad (5.126)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη σύμφωνα με τον τύπο:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \quad (5.127)$$

Λαμβάνουμε την λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2g^2} [\mathcal{A}_\mu^a (-(D^2)^2 g^{\mu\nu} + (D^\nu D^\mu)^{ab} - (D^\mu D^\nu)^{ab}) \mathcal{A}_\nu^b] - \mathcal{A}_\mu^a f^{abc} F^{b\mu\nu} \mathcal{A}_\nu^c \quad (5.128)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε τον μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων μέσα στην παράσταση που απλοποιείται με την εξίσωση του ορισμού του ταυυστή *Yang – Mills*:

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a t^a \quad (5.129)$$

Οπότε καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2g^2} \mathcal{A}_\mu^a [-(D^2)^{ac} g^{\mu\nu} - 2f^{abc} F^{b\mu\nu}] \mathcal{A}_\nu^c \quad (5.130)$$

Ο πρώτος όρος είναι μέρος της συναλλοίωτης Νταλαμπερτιανής. Ο δεύτερος όρος είναι ιδιαίτερος με τον ακόλουθο τρόπο: Αρχικά αναγνωρίζουμε ότι ο $F_{\mu\nu}^b$ πολλαπλασιάζεται με έναν γεννήτορα της ομάδας στην *adjoint* αναπαράσταση. Στη συνέχεια εισάγουμε τον πίνακα που είναι γεννήτορας των *Lorentz* μετασχηματισμών τετραδιανυσμάτων:

$$(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{a\beta} = i(\delta_a^\rho \delta_\beta^\sigma - \delta_a^\sigma \delta_\beta^{\rho\sigma}) \quad (5.131)$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε την λαγκρανζιανή ως εξής:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2g^2} \mathcal{A}_\mu^a [-(D^2)^{ac} g^{\mu\nu} + 2(\frac{1}{2} F_{\rho\sigma}^b \mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\mu\nu} (t_G^b)^{ac}] \mathcal{A}_\nu^c \quad (5.132)$$

Το αντικείμενο ανάμεσα στα \mathcal{A} θεωρείται ως η γενικευμένη Νταλαμπερτιανή για τις μεταβολές του *background* πεδίου.

Στη συνέχεια θα πάρουμε τους κυβικούς όρους των φερμιονικών πεδίων:

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\mathcal{D})\psi \quad (5.133)$$

Θα γράψουμε λίγο διαφορετικά τον τελεστή $i\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
 (i\mathcal{D})^2 &= -\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu \\
 &= \left(-\frac{1}{2}\gamma^\mu, \gamma^\nu - \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right) D_\mu D_\nu \\
 &= -D^2 + 2i\left(\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right) D_\mu D_\nu
 \end{aligned} \tag{5.134}$$

Στην τελευταία σειρά ο μεταθέτης των γάμμα πινάκων σχηματίζει τον γεννήτορα των *Lorentz* μετασχηματισμών στην σπινωριακή αναπαράσταση $S^{\mu\nu}$. Εφόσον ο μεταθέτης των γάμμα πινάκων είναι αντισυμμετρικός στους δείκτες το γινόμενο $D_\mu D_\nu$ μπορεί να αντικατασταθεί με το μισό του μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων (εξίσωση 5.129). Οπότε λαμβάνουμε την μορφή:

$$(i\mathcal{D})^2 = -D^2 + 2\left(\frac{1}{2}F_{\rho\sigma}^b S^{\rho\sigma}\right)t^b \tag{5.135}$$

Όπου ο t^a είναι στην αναπαράσταση των φερμιονίων. Το αποτέλεσμα αυτό είναι η Νταλαμπερτιανή για ένα νέο σετ σπιν και κβαντικών αριθμών. Εάν η θεωρία περιέχει n_f αριθμό ειδών φερμιονίων τότε η φερμιονική συναρτησιακή ολοκλήρωση δίνει την ορίζουσα της Νταλαμπερτιανής υψωμένη στη δύναμη $n_f/2$.

Οι κυβικοί όροι του όρου της λαγκρανζιανής για τα *ghosts* πεδία είναι:

$$\mathcal{L}_c = \bar{c}^a [-(D^2)^{ab}]c^b \tag{5.136}$$

Η παράγωγος μέσα σε αυτή την λαγκρανζιανή είναι Νταλαμπερτιανή στην περίπτωση του σπιν ίσο με μηδέν.

Συμπερασματικά, ορίζουμε την γενική *background* Νταλαμπερτιανή:

$$\Delta_{r,j} = -D^2 + 2\left(\frac{1}{2}F_{\rho\sigma}^b \mathcal{J}^{\rho\sigma}\right) \tag{5.137}$$

Που ασκείται σε πεδίο στην αναπαράσταση r με σπιν j . Ο πρώτος όρος που είναι στο τετράγωνο δίνει την συνήθη σύζευξη του σωματιδίου με το πεδίο βαθμίδας. Ο δεύτερος όρος είναι η μαγνητική στιγμή που εμφανίζεται στην αλληλεπίδραση με το πεδίο βαθμίδας του οποίου η ένταση αντιστοιχεί στον παράγοντα $g = 2$. Χρησιμοποιώντας αυτή την γενική έκφραση μπορούμε να γράψουμε την *effective* δράση για τα κλασικά πεδία A_μ^a σε πρώτης τάξης προσέγγιση μέσω της συναρτησιακής ολοκλήρωσης που θα καταλήξει σε ορίζουσες Νταλαμπερτιανών:

$$\begin{aligned}
 e^{i\Gamma[A]} &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}c \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_{c.t.})\right] \\
 &= \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4g^2}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \mathcal{L}_{c.t.}\right)\right] \\
 &\quad \cdot (\det \Delta_{G,1})^{-1/2} (\det \Delta_{r,1/2})^{n_f/2} (\det \Delta_{G,0})^1
 \end{aligned} \tag{5.138}$$

Όπου $\mathcal{L}_{c.t.}$ είναι η λαγκρανζιανή για τα *counterterms* και οι ορίζουσες είναι το αποτέλεσμα της συναρτησιακής ολοκλήρωσης. Επιπλέον όροι μεγαλύτερων τάξεων προσέγγισης θα περιορίζονταν από ένα επιπλέον παράγοντα g^2 .

Εφόσον κάθε ολοκλήρωμα είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς 5.125 τότε οι ορίζουσες πρέπει να είναι αναλλοίωτες της επιλογής βαθμίδας και συναρτήσει του A_μ^a . Εάν αναπτύξουμε τις ορίζουσες σε δυνάμεις του *background* πεδίου θα βρούμε μια σειρά όρων που θα ξεκινούν ως εξής:

$$\log e^{i\Gamma[A]} = \log e^{i \int d^4x (-\frac{1}{4g^2}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \mathcal{L}_{c.t.})} + (\log \det \Delta_{G,1})^{-1/2} + (\log \det \Delta_{r,1/2})^{n_f/2} + (\log \det \Delta_{G,0})^1 \quad (5.139)$$

$$\log \det \Delta_{r,j} = i \int d^4x (\frac{1}{4} C_{r,j} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \dots) \quad (5.140)$$

Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουμε:

$$i\Gamma[A] = i \int d^4x \frac{1}{4} (\frac{1}{g^2} + \frac{1}{2} C_{G,1} - C_{G,0} - \frac{n_f}{2} C_{r,1/2} + \dots) F_{\mu\nu}^a + i \int d^4x \mathcal{L}_{c.t.} \quad (5.141)$$

και οι επόμενοι όροι περιέχουν υψηλότερης διάστασης, αναλλοίωτους κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, τελεστές. Ο παράγοντας $C_{r,j}$ εξαρτάται από την αναπαράσταση r και το spin j . Ο πρώτος όρος του αναπτύγματος τροποποιεί την *effective* δράση σε μηδενική τάξη ως εξής:

$$\frac{1}{4g^2} (F_{\mu\nu}^a)^2 \rightarrow \frac{1}{4} (\frac{1}{g^2} + \frac{1}{2} C_{G,1} - C_{G,0} - \frac{n_f}{2} C_{r,1/2}) (F_{\mu\nu}^a)^2 \quad (5.142)$$

Οι παράγοντες $C_{r,j}$ είναι αδιάστατοι και επειδή δημιουργούνται από πρώτης τάξης υπολογισμούς, θα έπρεπε να είναι λογαριθμικά αποκλίνοντες:

$$C_{r,j} = c_{r,j} \log \frac{\Lambda^2}{k^2} + \dots \quad (5.143)$$

Όπου k είναι η ορμή που χαρακτηρίζει την μεταβολή του *background* πεδίου. Ο *counterterm* δ_3 αφαιρεί την απόκλιση. Εάν εφαρμόσουμε συνθήκη επανακανονικοποίησης στην κλίμακα M τότε:

$$C_{r,j} = c_{r,j} \log \frac{M^2}{k^2} + \dots \quad (5.144)$$

Η αρχική σταθερά ζεύξης στην *effective* δράση αντικαθίστανται από τη σταθερά η οποία εξαρτάται από την ορμή που χαρακτηρίζει την μεταβολή του *background* πεδίου:

$$\frac{1}{g^2(k^2)} = \frac{1}{g^2} + (\frac{1}{2} c_{G,1} - c_{G,0} - \frac{n_f}{2} c_{r,1/2}) \log \frac{M^2}{k^2} \quad (5.145)$$

$$g^2(k^2) = \frac{g^2}{1 - (\frac{1}{2} c_{G,1} - c_{G,0} - \frac{n_f}{2} c_{r,1/2}) g^2 \log k^2 / M^2} \quad (5.146)$$

Και τελικώς η συνάρτηση β :

$$\beta(g) = (\frac{1}{2} c_{G,1} - c_{G,0} - \frac{n_f}{2} c_{r,1/2}) g^3 \quad (5.147)$$

Έτσι υπολογίζοντας το $c_{r,j}$ μπορούμε να λάβουμε τον κυρίαρχο όρο της συνάρτησης β .

5.6.3 Υπολογισμός των Συναρτησιακών ορίζουσών-*Computation of the Functional Determinants*

Για να υπολογίσουμε τα $c_{r,j}$ πρέπει να εργαστούμε με τον πρώτο όρο του αναπτύγματος της ορίζουσας. Ξεκινάμε με την εξής πρόταση:

$$\Delta_{r,j} = -\partial^2 + \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{J})} \quad (5.148)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)} &= i[\partial^\mu A_\mu^a t^a + A_\mu^a t^a \partial^\mu] \\ \Delta^{(2)} &= A^{a\mu} t^a A_\mu^b t^b \\ \Delta^{(\mathcal{J})} &= 2\left(\frac{1}{2} F_{\rho\sigma}^b \mathcal{J}^{\rho\sigma}\right) \end{aligned} \quad (5.149)$$

Οι ορίζουσες $\Delta^{(1)}$ και $\Delta^{(\mathcal{J})}$ περιέχουν μια δύναμη του εξωτερικού πεδίου ενώ η $\Delta^{(2)}$ δύο δυνάμεις του A_μ^a . Μεταχειρίζοντας τις ορίζουσες αυτές ως διαταραχές:

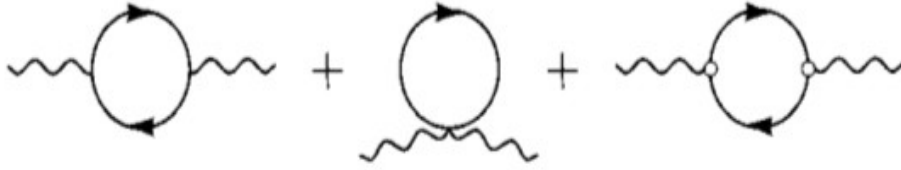
$$\begin{aligned} \log \det \Delta_{r,j} &= \log \det [-\partial^2 + (\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{J})})] \\ &= \log \det [-\partial^2] + \log \det [1 + (-\partial^2)^{-1} (\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{J})})] \\ &= \log \det [-\partial^2] + \text{tr} \log [1 + (-\partial^2)^{-1} (\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{J})})] \\ &= \log \det [-\partial^2] + \text{tr} [(-\partial^2)^{-1} (\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{J})}) + \dots] \end{aligned} \quad (5.150)$$

Ο πρώτος όρος από τα δεξιά είναι μικρής σημασίας σταθερά. Οι όροι στο ανάπτυγμα που είναι γραμμικοί ως προς A_μ^a εξαφανίζονται λόγω του $t^a = 0$. Οι κυβικοί όροι πρέπει να ανασυνταχθούν όπως στην δεύτερη εξίσωση 5.140 προσθέτοντας τους όρους υψηλότερων παραγωγών.

Στη συνέχεια οι κυβικοί όροι στην δεύτερη εξίσωση 5.140 γράφονται στον χώρο *Fourier*:

$$\log \det \Delta_{r,j} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu^a(-k) A_\nu^b(k) (k^2 \gamma^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) [C_{r,j} + \mathcal{O}(k^2)] \quad (5.151)$$

Τώρα θα υπολογίσουμε τους όρους από την εξίσωση 5.150 και θα τους εκφράσουμε στην μορφή 5.151. Οι όροι με δύο δυνάμεις του A_μ^a στο ανάπτυγμα 5.150 είναι εκείνοι με μία δύναμη του $\Delta^{(2)}$ ή δύο δυνάμεις του $\Delta^{(1)}$ ή του $\Delta^{(\mathcal{J})}$. Περαιτέρω, όροι γραμμικοί στο $\Delta^{(\mathcal{J})}$ είναι ανάλογοι του $\text{tr}[\mathcal{J}^{\rho\sigma}] = 0$ οπότε εξαφανίζονται. Οι τρεις εναπομείναντες όροι αντιστοιχούν στα διαγράμματα *Feynman* που φαίνονται στη συνέχεια:



Στο τρίτο διάγραμμα οι κόμβοι έχουν αυτή την ειδική μορφή διότι εμφανίζεται η σύζευξη μεταξύ $F^{\rho\sigma} \mathcal{J}_{\rho\sigma}$. Το πρώτο διάγραμμα περιέχει όρους με δύο δυνάμεις του $\Delta^{(1)}$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}[(-\partial^2)^{-1}\Delta^{(1)}(-\partial^2)^{-1}\Delta^{(1)}] = \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu^a A_\nu^b \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{1}{p^2} (2p+k)^\mu t^a \frac{1}{(p+k)^2} (2p+k)^\nu t^b \end{aligned} \quad (5.152)$$

Όπου το *trace* είναι πάνω στους δείκτες βαθμίδας και σπιν. Ο παράγοντας $1/2$ προέρχεται από το ανάπτυγμα του λογαρίθμου. Το δεύτερο διάγραμμα περιλαμβάνει μία δύναμη του $\Delta^{(2)}$:

$$\text{tr}[(-\partial^2)^{-1}] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu^a A_\nu^b \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{1}{p^2} g^{\mu\nu} t^a t^b \quad (5.153)$$

Επίσης από την ανάλυση στο παράρτημα για την επανακανονικοποίηση της QED γνωρίζουμε ότι:

$$\text{tr}[t^a t^b] = C(r)d(j)\delta^{ab} \quad (5.154)$$

Όπου $d(j)$ είναι ο αριθμός των συνιστωσών του σπιν. Οι αξίες των διαγραμμάτων μπορούν να υπολογιστούν μέσω των μεθόδων που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενη ενότητα (συνδυασμός παρονομαστών, αλλαγή μεταβλητών σε P , στροφή *Wick* και ολοκλήρωση στην P μέσω διασταστικής ομαλοποίησης). Αθροίζοντας τα δύο διαγράμματα καταλήγουμε με μία μορφή που είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu^a(-k) A_\nu^b(k) (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \left[i \frac{C(r)d(j)}{3(4\pi)^2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \dots \right] \quad (5.155)$$

Το διάγραμμα που περιέχει τις δύο δυνάμεις του $\Delta^{(\mathcal{J})}$ είναι:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \text{tr}[(-\partial^2)^{-1}\Delta^{(\mathcal{J})}(-\partial^2)^{-1}\Delta^{(\mathcal{J})}] \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu^a A_\nu^b \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{1}{p^2} (2ik_\rho g_{\mu\sigma} \mathcal{J}^{\rho\sigma}) t^a \frac{1}{(p+k)^2} (-2ik_a g_{\nu\beta} \mathcal{J}^{a\beta}) t^b \end{aligned} \quad (5.156)$$

Ορίζουμε το $C(r)$ ως το *trace* επάνω στους δείκτες του σπιν:

$$\text{tr}[\mathcal{J}^{\rho\sigma} \mathcal{J}^{a\beta}] = (g^{\rho a} g^{\sigma\beta} - g^{\rho\beta} g^{\sigma a}) C(j) \quad (5.157)$$

Οπότε σύμφωνα με τον ορισμό: $(\mathcal{J}^{\rho\sigma})_{a\beta} = g^{\rho a} g^{\sigma\beta} - g^{\sigma a} g^{\rho\beta}$ Έχουμε:

$$\text{tr}[(g^{\rho a} g^{\sigma\beta} - g^{\rho\beta} g^{\sigma a})(g^{a\rho} g^{\beta\sigma} - g^{\beta\rho} g^{a\sigma})] = (g^{\rho a} g^{\sigma\beta} - g^{\rho\beta} g^{\sigma a}) C(j) \quad (5.158)$$

$$C(j) = \begin{cases} 0 & \text{scalar} \\ 1 & \text{Dirac spinors} \\ 2 & \text{4-vectors} \end{cases}$$

Οπότε το τελευταίο διάγραμμα γίνεται:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu^a A_\nu^b \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+k)^2} (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) 4C(r) C(j) \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu^a(-k) A_\nu^b(k) (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \left(-i \frac{4C(r)C(j)}{(2\pi)^2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right) \end{aligned} \quad (5.159)$$

Αθροίζοντας τις εξισώσεις 5.155 και 5.159 και εξισώνοντας το άθροισμα με την εξίσωση 5.140 βρίσκουμε τις σταθερές $C_{r,j}$:

$$C_{r,j} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{3} d(j) - 4C(j) \right] C(r) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \quad (5.160)$$

Με αποτέλεσμα:

$$c_{r,j} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{3} d(j) - 4C(j) \right] C(r) \quad (5.161)$$

Αναλυτικότερα:

$$c_{r,j} = \frac{C(r)}{(4\pi)^2} \cdot \begin{cases} 1/3 & \text{scalars} \\ -8/3 & \text{Dirac spinors} \\ -20/3 & \text{4-vectors} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά που η μαγνητική στιγμή είναι διάφορη του μηδενός κυριαρχεί και η σταθερά της $c_{r,j}$ είναι αντίθετη σε πρόσημο.

Βάζοντας την τιμή των $c_{r,j}$ στην έκφραση 5.147 της συνάρτησης β λαμβάνουμε:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r) \right) \quad (5.162)$$

Και με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στο αποτέλεσμα της προηγούμενης ενότητας για την συνάρτηση β δηλαδή στο ότι οι μη αβελιανές θεωρίες με επαρκώς μικρό αριθμό φερμιονίων είναι ασυμπτωτικά ελεύθερες.

5.6.4 Συμπεράσματα

Στις προηγούμενες ενότητες υπολογίσαμε με δύο διαφορετικούς τρόπους την συνάρτηση β μιας μη αβελιανής θεωρίας:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r) \right) \quad (5.163)$$

Ός n_f συμβολίζουμε τις γενιές των φερμιονίων στην αναπαράσταση r , $C(r)$ είναι η σταθερά που εμφανίζεται από την σχέση ορθογωνιότητας $tr[t_r^a t_r^b] = C(r) \delta^{ab}$ η οποία μαζί με τις σχέσεις μετάθεσης μια ομάδας προκαλούν την αντισυμμετρικότητα του $f^{abc} = -\frac{i}{C(r)} tr[t_r^a, t_r^b] t_r^c$. Το $C_2(G)$ είναι ο κυβικός τελεστής *Casimir* της *adjoint* αναπαράστασης. Σε μια $SU(N)$ θεωρία βαθμίδας με φερμνία στην θεμελιώδη αναπαράσταση το αποτέλεσμα γίνεται:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} N - \frac{2}{3} n_f \right) \quad (5.164)$$

Το συνολικό αρνητικό πρόσημο υπονοεί ότι για μικρό αριθμό n_f οι μη αβελιανές θεωρίες είναι ασυμπτωτικά ελεύθερες. Σε αυτή την περίπτωση η σταθερά σύζευξης τείνει στο μηδέν για μεγάλες ορμές σύμφωνα με την εξίσωση:

$$g^2(k) = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} N - \frac{2}{3} n_f \right) \log(k^2/M^2)} \quad (5.165)$$

Η ασυμπτωτική ελευθερία για μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας είναι μία εκπληκτική διαπίστωση! Όταν συναντάμε για πρώτη φορά τη σταθερά σύζευξης στον ηλεκτρομαγνητισμό είναι εύκολο να κατανοήσουμε την ροή της: Το κενό αποκτά μία διηλεκτρική ιδιότητα που οφείλεται στα εικονικά ζευγάρια ηλεκτρονίων ποζιτρονίων που δημιουργούνται προκαλώντας το *effective* ηλεκτρικό φορτίο να μειώνεται σε μεγάλες αποστάσεις. Στις μη αβελιανές θεωρίες σύμφωνα με την εξίσωση 5.163 τα φερμιόνια προκαλούν το φαινόμενο αυτό. Επιπλέον επειδή τα μποζόνια βαθμίδας είναι φορτισμένα προκαλούν επιπρόσθετο *screening* φαινόμενο. Σύμφωνα όμως με την εξίσωση 5.163 το φαινόμενο *screening* που παρουσιάζουν τα μποζόνια είναι αντίθετου πρόσημου. Οπότε πρέπει να κυριαρχούν άλλα φαινόμενα ώστε να προκαλείται αυτή η αντιστροφή στο πρόσημο.

Η ακριβής μορφή αυτών των φαινομένων εξαρτάται από την βαθμίδα. Είναι απλούστερη η περιγραφή τους στην βαθμίδα *Coulomb* όπου η συνθήκη καθορισμού της βαθμίδας είναι:

$$\partial_i A^{ai} = 0 \quad (5.166)$$

Δεν θα περιγράψουμε ολόκληρη την διαδικασία κβάντωσης σε αυτή την βαθμίδα παρά μόνο θα αναφέρουμε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που μας ενδιαφέρουν. Στον ηλεκτρομαγνητισμό τα κβάντα του πεδίου βαθμίδας *Coulomb* δεν περιγράφονται με *Lorentz* αναλλοίωτο τρόπο αλλά ως *transverse* πολωμένα φωτόνια. Δεν υπάρχουν *timelike* ή *longitudinal* φωτόνια και χωρίς διαδιδόμενα *ghosts*. Πάραυτα υπάρχει δυναμικό *Coulomb* που περιγράφεται από το πεδίο

A^{a0} , το οποίο υπακούει συνθήκη ανάλογη με τον νόμο του Gauss. Παρόμοια συνθήκη ισχύει και σε μη αβελιανές θεωρίες και παίρνει τη μορφή:

$$D_i E^{ai} = g\rho^a \tag{5.167}$$

Όπου $E^{ai} = F^{a0i}$ και ρ^a είναι η πυκνότητα φορτίου του ρεύματος της ολικής συμμετρίας των φερμιονίων. Υπενθυμίζουμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος που εφαρμόζεται σε ένα πεδίο στην *adjoint* αναπαράσταση είναι:

$$(D_\mu \phi)^a = \partial_\mu \phi^a + g f^{abc} A_\mu^b \phi^c \tag{5.168}$$

Ας θεωρήσουμε ότι η ομάδα βαθμίδας είναι η $SU(2)$ έτσι ώστε $a = 1, 2, 3$ και $f^{abc} = \epsilon^{abc}$.

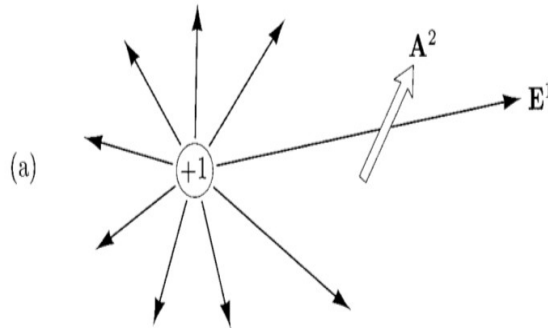
$$g\rho^a = \partial_i E^{ai} + g\epsilon^{abc} A^{bi} E^{ci} \tag{5.169}$$

Θα υπολογίσουμε το *Coulomb* δυναμικό για σημειακό φορτίο (+1) με προσανατολισμό $a = 1$. Θα λύσουμε για E^{ai} χρησιμοποιώντας μια επαναλαμβανόμενη μέθοδο, βάζοντας τον όρο του πεδίου βαθμίδας της συναλλοίωτης παραγώγου στο δεξί μέλος της εξίσωσης:

$$\partial_i E^{ai} = g\delta^{(3)}(x)\delta^{a1} + g\epsilon^{abc} A^{bi} E^{ci} \tag{5.170}$$

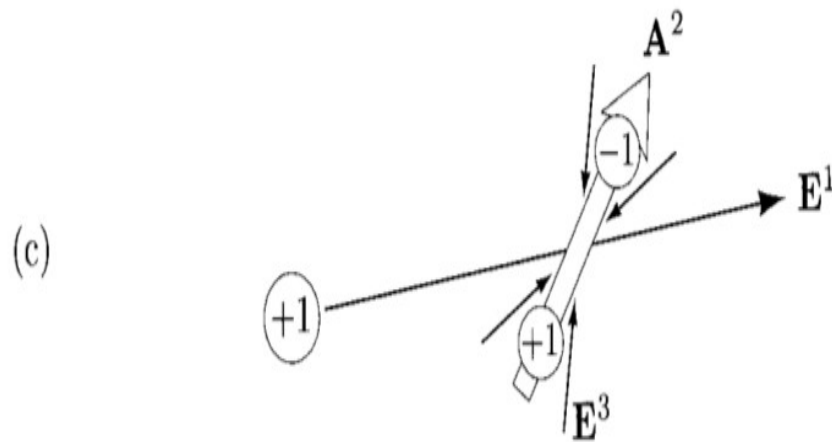
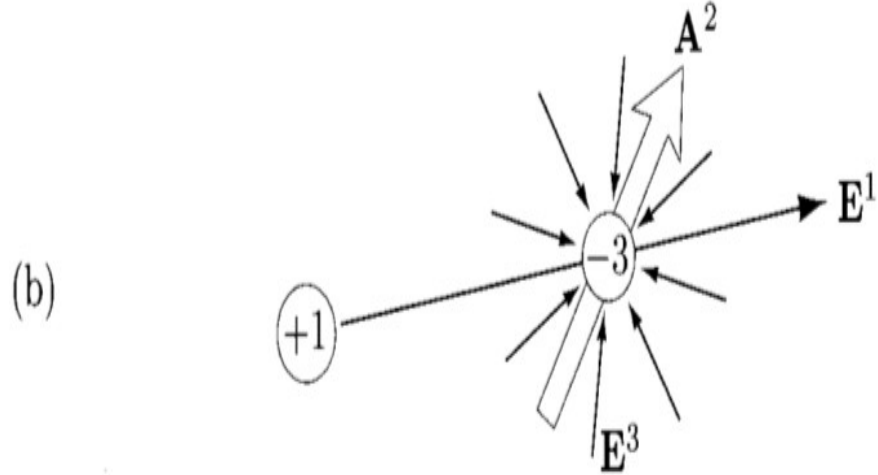
Ο δεύτερος όρος εμφανίζεται στις μη αβελιανές θεωρίες και δείχνει ότι υπάρχει περιοχή η οποία περιέχει διανυσματικά και ηλεκτρικά πεδία που είναι παράλληλα στον φυσικό χώρο και κάθετα στον χώρο της ομάδας (δείκτες b, c) τα οποία αποτελούν την πηγή του ηλεκτρικού πεδίου.

Η βαρύτητα της εξίσωσης αυτής έχει απεικονιστεί στο παρακάτω σχέδιο. Ο κυρίαρχος όρος της εξίσωσης αυτής υπονοεί έναν όρο $1/r^2$ για το ηλεκτρικό πεδίο τύπου $a = 1$ το οποίο ακτινοβολεί από το $\mathbf{x} = 0$. Κάπου στον χώρο αυτό το ηλεκτρικό πεδίο θα συναντήσει το διανυσματικό πεδίο A^{ai} που δημιουργείται από την διακύμανση του κενού. Ορίζουμε αυτή την διακύμανση να είναι του τύπου $a = 2$ και να προσανατολίζεται προς κάποια διαγώνια κατεύθυνση. Όπως φαίνεται παρακάτω:



Ο δεύτερος όρος είναι αρνητικός για $a = 3$: Βλέπουμε ότι υπάρχει μία δίνη του πεδίου E^{3i} όπως φαίνεται στο διάγραμμα παρακάτω. Αυτά τα δύο πεδία στις

δύο αυτές θέσεις είναι παράλληλα και αντιπαράλληλα με το αρχικό κυμαινόμενο A^{a_i} πεδίο. Κοιτώντας ξανά τον δεύτερο όρο βλέπουμε ότι υπάρχει μια πηγή ηλεκτρικού πεδίου τύπου $a = 1$ κοντά στην πυκνότητα φορτίου και μια δίνη ηλεκτρικού πεδίου τύπου $a = 1$ αρκετά μακρύτερα. Αυτό είναι ένα δίπολο που δημιουργείται στο κενό το οποίο φαίνεται στο τρίτο και τελευταίο διάγραμμα. Κοιτώντας όμως τα πρόσχημα βλέπουμε ότι το δίπολο αυτό είναι προς την πυκνότητα φορτίου και έτσι εξυπηρετεί την ενίσχυση του αντί το *screening* του. Έτσι η ισχύς του αρχικού φορτίου εντείνεται όσο οι αποστάσεις μεγαλώνουν.



Ο ανταγωνισμός μεταξύ του *antiscreening* φαινομένου και του *screening* που οφείλεται σε εικονικά φωτόνια πρέπει να υπολογιστεί ποσοτικά ώστε να

φανεί η διαφορά στην τάξη μεγέθους[8] Μόλις γίνει αυτό γίνεται ξεκάθαρο ότι το *antiscreening* είναι 12 φορές μεγαλύτερο.

Σε αυτή την ενότητα είδαμε τα δυναμικά χαρακτηριστικά που έχει μία μη αβελιανή θεωρία που προκαλούν την σταθερά σύζευξης να ενισχυθεί περισσότερο αντί να επικαλυφθεί και εν τέλει να μειωθεί σε μεγάλες αποστάσεις. Ανάμεσα σε επανακανονικοποιήσιμες κβαντικές θεωρίες στις τέσσερις διαστάσεις οι μη αβελιανές θεωρίες είναι οι μόνες που παρουσιάζουν την ιδιότητα της ασυμπτωτικής ελευθερίας[9]. Η ιδιότητα αυτή είχε προταθεί ως ερμηνεία για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Στο επόμενο κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε το μοντέλο των ισχυρών αλληλεπιδράσεων μέσω μιας μη αβελιανής θεωρίας και θα εξερευνήσουμε τα χαρακτηριστικά του σε λεπτομέρεια.

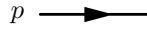
5.7 Παράρτημα

5.7.1 Επακανονικοποίηση της QED σε 1-loop

Ξεκινάμε από την lagrangian της QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial A)^2 + \bar{\psi}(i\partial + eA - m)\psi \quad (5.171)$$

Οι ελεύθεροι propagators (διαδότες) είναι: Φερμιόνιο

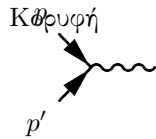


$$\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \equiv S^0(p) \quad (5.172)$$

Φωτόνιο



$$-i\left[\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + (\xi - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + i\epsilon)^2}\right] = -i\left\{\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2 + i\epsilon} + \xi\frac{k_\mu k_\nu}{k^4}\right\} \equiv G_{\mu\nu}^0(k) \quad (5.173)$$

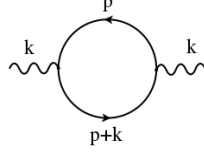


$$ie\gamma_\mu \quad (5.174)$$

Θα μελετήσουμε πρώτης τάξης βρόχους σε διαδότες και κορυφή(vertex). Θα χρησιμοποιήσουμε βαθμίδα Feynman ($\xi = 1$)

5.7.2 Πολικότητα κενού (Vacuum polarization)

Η πρώτης τάξης συνεισφορά στο διαδότη του φωτονίου δίνεται από το διάγραμμα 1:



Τη συνεισφορά του συγκεκριμένου διαγράμματος την ονομάζουμε

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(k) \equiv G_{\mu\mu'}^0 i\Pi_{\mu'\nu'}(k) G_{\nu'\nu}^0(k) \quad (5.175)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu}(k) &= -(ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}(\gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon}) = \\ &= -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{p} + \not{k} + m)]}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \end{aligned} \quad (5.176)$$

Ας υπολογίσουμε ξεχωριστά τον αριθμητή:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{p} + \not{k} + m)] &= \text{Tr}[\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p} + \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{k} + \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu m + \gamma_\mu m \gamma_\nu \not{p} + \gamma_\mu m \gamma_\nu \not{k} + \gamma_\mu m \gamma_\nu m] \\ &= \text{Tr}[16P_\mu P_\nu + 16P_\mu k_\nu + \gamma_\mu \gamma^\mu P_\mu \gamma_\nu m + \gamma_\mu m \gamma_\nu \gamma^\nu P_\nu \gamma_\mu m \gamma_\mu \gamma^\mu k_\nu \\ &\quad + \gamma_\mu \gamma_\nu m^2] \end{aligned} \quad (5.177)$$

διότι $\gamma_\mu \gamma^\mu P_\mu \gamma_\nu \gamma^\nu P_\nu = 16P_\mu P_\nu$ και $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4I_4$ Επομένως:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[16P_\mu P_\nu + 16P_\mu k_\nu + 8\gamma_\mu P_\nu m + 4\gamma_\mu m k_\nu + \gamma_\mu \gamma_\nu m^2] &= \\ &= \text{Tr}[16P_\mu P_\nu + 16P_\mu k_\nu - 8P_\nu P_\mu - 8P_\mu k_\nu \\ &\quad - 4\gamma_\mu P_\mu k_\nu + 4\gamma_\mu k^2 + (2g_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu)m^2] \\ &= 4(2P_\mu P_\nu + P_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}(P^2 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k} - m^2)) \equiv N_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.178)$$

Συνολικά έχουμε:

$$i\Pi_{\mu\nu} = -4e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \frac{N_{\mu\nu}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (5.179)$$

Το ολοκλήρωμα $i\Pi_{\mu\nu}$ έχει λογαριθμική απειρία γιατί είναι της μορφής: $\int \frac{d^4p}{p^4}$.

Επίσης ορίζουμε την ποσότητα $\epsilon = 4 - d$. Η βασική ιδέα στην διαστατική ομαλοποίηση είναι ένα ολοκλήρωμα το οποίο αποκλίνει στις 4 διαστάσεις ενώ συγκλίνει αν μειώσουμε τις διαστάσεις. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται αρχικά σε διάσταση $d < 4$ και στη συνέχεια με αναλυτική επέκταση εκφράζουμε το ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του d . Η απειρία εμφανίζεται ως πόλος για $d = 4$.

Για $d = 4 - \epsilon$ διαστάσεις τα πεδία A_μ, ψ έχουν διαστάσεις που υπολογίζονται από την απαίτηση η δράση να είναι αδιάστατη. $S = \int d^d x [-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \bar{\psi}\not{\partial}\psi]$

$$0 = -d + 2 + 2[A_\mu]$$

$$0 = -d + 1 + 2[\psi]$$

$$[A_\mu] = \frac{1}{2}(d - 2)$$

$$[\psi] = \frac{1}{2}(d - 1)$$

Και για τους όρους αλληλεπίδρασης: $S_i = \int d^d x e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu$ Πρέπει: $0 = -d + [e] + 2[\psi] + [A_\mu]$

$$[e] = \epsilon/2 \quad (5.180)$$

Άρα για $d \neq 4$ η σταθερά σύζευξης της QED έχει διαστάσεις. Για να δουλεύουμε με αδιάστατη σταθερά σύζευξης κάνουμε την αλλαγή $e \rightarrow e\mu^{\epsilon/2}$ όπου το μ έχει διαστάσεις μάζας. Γράφουμε το $\Pi_{\mu\nu}$ σε διάσταση d :

$$i\Pi_{\mu\nu}(k, \epsilon) = -4e^2\mu^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (5.181)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις παραμετρους του *Feynman* ώστε να απλοποιήσουμε το παρνομαστή του ολοκληρώματος. Σύμφωνα με τον τύπο: $\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax+b(1-x)]^2}$

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu}(k, \epsilon) &= -4e^2\mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}}{[x(p+k)^2 - xm^2 + (1-x)(p^2 - m^2) + i\epsilon]^2} = \\ &= -4e^2\mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}}{[p^2 + kpx + xk^2 - m^2 + i\epsilon]^2} = \\ &= -4e^2\mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}}{[(p+kx)^2 + k^2x(1-x) - m^2 + i\epsilon]^2} \quad (5.182) \end{aligned}$$

Αλλαγή μεταβλητών: $p \rightarrow p - kx$ και έχω

$$i\Pi_{\mu\nu}(k, \epsilon) = -4e^2\mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p - kx, k)}{[p^2 - C + i\epsilon]^2} \quad (5.183)$$

όπου $C = m^2 - k^2x(1-x)$ Θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^2} \frac{p^\mu}{[p^2 - C + i\epsilon]^2}$$

και

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^2} \frac{p^\mu p^\nu}{[p^2 - C + i\epsilon]^2}$$

Επειδή όμως $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = d \Rightarrow p^\mu p_\nu = \frac{1}{d}g^{\mu\nu}p^2$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^2} \frac{p^\mu p_\nu}{[p^2 - C + i\epsilon]^2} = \frac{1}{d}g^{\mu\nu} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^2}{[p^2 - C + i\epsilon]^2} \quad (5.184)$$

τα οποία θα λυθούν με την μέθοδο της στροφής Wick.

5.7.3 Στροφή Wick (*Wick rotation*)

Από τα παραπάνω καταλήγουμε σε ολοκληρώματα της μορφής:

$$I_{r,m} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{2r}}{[k^2 - C + i\epsilon]^m} \quad (5.185)$$

Όπου r, m τυχαίοι ακέραιοι αριθμοί. Από το θεώρημα του *Cauchy* για τα ολοκληρώματα στο μιγαδικό επίπεδο μπορούμε να αλλάξουμε τους άξονες από παραγματικούς σε φανταστικούς γράφοντας:

$$k^0 = ik_E^0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \rightarrow i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_E^0$$

$$k^2 = (k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 = -(k_E^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 \equiv -k_E^2$$

όπου $k_E = (k_E^0, \mathbf{k})$ ευκλείδιο τετραδιάνυσμα το οποίο σημαίνει ότι χρησιμοποιούμε την ευκλείδια μετρική $(+, +, +, +)$ για το γινόμενο $k_E^2 = (k_E^0)^2 + |\mathbf{k}|^2$. Ύστερα, από αυτές τις αλλαγές προκύπτει το $I_{r,m}$:

$$I_{r,m} = i(-1)^{r-m} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{k^{2r}}{[k_E^2 + C]^m}$$

Για $d < 2(m-r), k_E \rightarrow \infty$ συγκλίνει και αφού $C > 0$ εξαλείφουμε τον όρο $i\epsilon$. Το διαφορικό στο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί:

$$\int d^d k_E = \int d\bar{k} \bar{k}^{d-1} d\Omega_{d-1}$$

όπου $\bar{k} = \sqrt{(k_E^0)^2 + |\mathbf{k}|^2}$ είναι το μέτρο του k_E στον ευκλείδιο χώρο των d διαστάσεων και το $d\Omega_{d-1}$ είναι η γενίκευση των σφαιρικών $d-1$ χωρικών συντεταγμένων. Ισχύει ότι:

$$k_E = \bar{k}(\cos\theta_1, \sin\theta_1 \cos\theta_2, \sin\theta_1 \sin\theta_2, \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \dots, \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{d-1})$$

$$d\Omega_{d-1} = \int_0^\pi \sin\theta_1^{d-1} d\theta_{d-1} \cdots \int_0^\pi d\theta_{d-1}$$

$$\int_0^\pi \sin\theta^m d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})}$$

$$d\Omega_{d-1} = \int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin\theta_2 \int_0^\pi d\theta_3 \sin^2\theta_3 \cdots \int_0^\pi d\theta^{d-1} \sin^{d-2}\theta_{d-1} \quad (5.186)$$

$$d\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

Η ολοκλήρωση του \bar{k} γίνεται χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{(x^n + a^n)^a} = \pi(-1)^{a-1} a^{p+1-nq} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{n})}{n \sin(\pi \frac{p+1}{n}) \Gamma(\frac{p+1}{2} - q + 1)}$$

και το $I_{r,m}$ γίνεται:

$$I_{r,m} = iC^{r-m+d/2} \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(r+d/2)\Gamma(m-r-d/2)}{\Gamma(d/2)\Gamma(m)} \quad (5.187)$$

Η σχέση αυτή μπορεί αναλυτικά να καλύψει όλες τις δυνατές τιμές του d εκτός των πόλων της $\Gamma(m-r-d/2)$ δηλαδή $m-r-d/2 \neq 0, -1, -2, \dots$. Θα ξαναγράψουμε το $I_{r,m}$ ως προς ϵ δηλαδή $d = 4 - \epsilon$ γιατί θα μας χρειαστεί στη συνέχεια.

$$I_{r,m} = \frac{i(-1)^{r-m}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C}\right)^{\epsilon/2} C^{2+r-m} \frac{\Gamma(2+r-\epsilon/2)\Gamma(m-r-2+\epsilon/2)}{\Gamma(2-\epsilon/2)\Gamma(m)} \quad (5.188)$$

Γυρνάμε τώρα στον υπολογισμό του $\Pi_{\mu\nu}$ αφού υπολογίσαμε όλα τα ολοκληρώματα που χρειάζονται. Έχοντας κάνει αλλαγή μεταβλητών $p \rightarrow p - kx$ έχει προκύψει:

$$N_{\mu\nu}(p - kx, k) = 2p_\mu p_\nu + 2x^2 k_\mu k_\nu - 2xk_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}(p^2 + x^2 k^2 - xk^2 - m^2)$$

$$i\Pi_{\mu\nu}(k, \epsilon) = -4e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p - kx, k)}{[p^2 - C + i\epsilon]^2}$$

Σύμφωνα με τα ολοκληρώματα που υπολογίσαμε με τη στροφή *Wick*:

$$\begin{aligned} & \mu^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p - kx, k)}{[p^2 - C + i\epsilon]^2} = \\ & \mu^\epsilon \left[\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{2p_\mu p_\nu}{(p^2 - C + i\epsilon)^2} + \frac{2x^2 k_\mu k_\nu}{(p^2 - C + i\epsilon)^2} + g_{\mu\nu} \frac{(p^2 + x^2 k^2 - xk^2 - m^2)}{(p^2 - C + i\epsilon)^2} \right] \right] = \\ & = \frac{2}{d} g_{\mu\nu} \mu^\epsilon I_{1,2} - g_{\mu\nu} \mu^\epsilon I_{1,2} - 2x(1-x) k_\mu k_\nu \mu^\epsilon I_{0,2} + (x^2 - x) k^2 g_{\mu\nu} \mu^\epsilon I_{0,2} + g_{\mu\nu} m^2 \mu^\epsilon I_{0,2} \end{aligned} \quad (5.189)$$

Μπορούμε να πούμε ότι:

$$\mu^\epsilon I_{0,2} = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{C}\right)^{\epsilon/2} \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{\Gamma(2)}$$

και για μικρά ϵ

$$\Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)$$

Άρα έχουμε

$$\mu^\epsilon I_{0,2} = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln\left(\frac{C}{\mu^2}\right) \right) + O(\epsilon) \quad (5.190)$$

και κάνουμε τις ίδιες προσεγγίσεις για το $I_{1,2}$

$$\mu^2 I_{1,2} = -\frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{C} \right)^{\epsilon/2} C \frac{\Gamma(3-\epsilon/2)\Gamma(-1+\epsilon/2)}{\Gamma(2-\epsilon/2)\Gamma(2)} = \frac{i}{16\pi^2} C(1+2\Delta\epsilon-2\ln(\frac{C}{\mu^2})) + O(\epsilon) \quad (5.191)$$

όπου $\Delta\epsilon = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi)$. Λόγω της ύπαρξης πόλων στο $1/\epsilon$ προσεγγίσαμε όλες τις προηγούμενες εξισώσεις μέχρι το $O(\epsilon)$ οπότε έχουμε ότι: $\frac{2}{\epsilon} - 1 = \frac{2}{4-\epsilon} - 1 = -1/2 + \frac{1}{8}\epsilon + O(\epsilon)$ Αντικαθιστώντας στην (19):

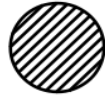
$$\begin{aligned} (19) &= g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\epsilon + O(\epsilon) \right] \left[\frac{i}{16\pi^2} C(1+2\Delta\epsilon-2\ln(\frac{C}{\mu^2})) + O(\epsilon) \right] + \\ &[-2x(1-x)k_\mu k_\nu + x(1-x)k^2 g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} m^2] \left[\frac{i}{16\pi^2} (\Delta\epsilon - \ln(\frac{C}{\mu^2})) + O(\epsilon) \right] = \\ &= -\frac{i}{16\pi^2} k_\mu k_\nu [(\Delta\epsilon - \ln(\frac{C}{\mu^2})) 2x(1-x)] + \\ &\frac{i}{16\pi^2} g_{\mu\nu} k^2 [\Delta\epsilon(x(1-x)) + x(1-x) + \ln(\frac{C}{\mu^2})(-x(1-x) - x(1-x)) + x(1-x)(1/2 - 1/2)] + \\ &\frac{i}{16\pi^2} g_{\mu\nu} m^2 [\Delta\epsilon(-1+1) + \ln(\frac{C}{\mu^2})(1-1) + (-1/2 + 1/2)] = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} (\Delta\epsilon - \ln(\frac{C}{\mu^2})) (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) 2x(1-x) \quad (5.192) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\Pi_{\mu\nu} = -4\epsilon^2 \frac{1}{16\pi^2} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \int_0^1 dx 2x(1-x) (\Delta\epsilon - \ln(\frac{C}{\mu^2})) \quad (5.193)$$

Και ορίζουμε

$$\Pi_{\mu\nu} = -(g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2, \epsilon) \quad (5.194)$$



$$\equiv i \Pi_{\mu\nu}(k)$$

Πριν δείξουμε πως να νορμαλίζουμε την ποσότητα $\Pi_{\mu\nu}$ θα την αναλύσουμε. Στην κβαντική θεωρία πεδίου ο διαδότης ενός σωματιδίου χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πλάτους πιθανότητας για το σωματίδιο να αλλάξει θέση σε δεδομένο χρόνο ή να αλλάξει δεδομένη ενέργεια και ορμή. Στα διαγράμματα *Feynman* οι διαδότες του αντίστοιχου σωματιδίου είναι το αντίστροφο της κυματοσυνάρτησης του σωματιδίου και συχνά καλούνται Green's functions .

Γνωρίζουμε ότι ο διαδότης του ελεύθερου φωτονίου είναι: $\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}$ το οποίο ισχύει για την βαθμίδα *Feynman*. Εδώ θα κάνουμε τους υπολογισμούς για γενική βαθμίδα ξ στην οποία ο διαδότης γίνεται:

$$iG_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \frac{1}{k^2} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} = P_{\mu\nu}^T \frac{1}{k^2} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \equiv iG_{\mu\nu}^{0T} + iG_{\mu\nu}^{0L} \quad (5.195)$$

Εισάγοντας τον εγκάρσιο προβολικό (trasversal projector)τανυστή, αυτό που κάνουμε είναι να αναλύσουμε τον δαδότη σε εγκάρσιο και διαμήκες κομμάτι όπως κάνουμε στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό για τις λύσεις των εξισώσεων *Maxwell*.

$$P_{\mu\nu}^T = (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2})$$

και ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

$$k_\mu P_{\mu\nu}^T = k^\mu (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) = k_\nu - \frac{k^{\mu\nu} k_\mu k_\nu}{k^2} = k_\nu - k_\nu = 0 \quad (5.196)$$

και επίσης:

$$\begin{aligned} P_\mu^{T\nu} P_{\nu\rho}^T &= (g_\mu^\nu - \frac{k_\mu k^\nu}{k^2})(g_{\nu\rho} - \frac{k_\nu k_\rho}{k^2}) = g_\mu^\nu g_{\nu\rho} - g_\mu^\nu \frac{k_\nu k_\rho}{k^2} - g_{\nu\rho} \frac{k_\mu k^\nu}{k^2} + \frac{k_\mu k^\nu k_\nu k_\rho}{k^4} = \\ &= g_{\mu\rho} - \frac{k_\mu k_\rho}{k^2} - \frac{k_\mu k_\rho}{k^2} + \frac{k_\mu k_\rho}{k^2} = P_{\mu\rho}^T \end{aligned} \quad (5.197)$$

Επομένως έχουμε τις εξής σχέσεις:

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^T + G_{\mu\nu}^L \quad (5.198)$$

$$G_{\mu\nu}^T = P_{\mu\nu}^T G_{\mu\nu} \quad (5.199)$$

Είναι τετριμένο ότι:

$$i\Pi_{\mu\nu}(k) = -ik^2 P_{\mu\nu}^T \Pi(k) \quad (5.200)$$

Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε το $G_{\mu\nu}^T$. Η ποσότητα αυτή από μαθηματικής σκοπιάς είναι ένα αντικείμενο με δύο δείκτες και από φυσικής σκοπιάς θα πρέπει να περιγράφει τη διάδοση ενός φωτονίου, και επιπλέον να περιέχει όλες τις δυνατές αλληλεπιδράσεις του φωτονίου με το κενό. Αυτό μπορεί να περιγραφεί από ένα άπειρο άθροισμα όλων των δυνατών αλληλεπιδράσεων με το κενό μέσω αλληλεπιδράσεων διδύμων γεννήσεων, με άλλα λόγια:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = & \text{~~~~~} + \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \\ & + \text{~~~~~} + \dots \end{aligned}$$

και επίσης ο κάθε όρος να έχει δύο δείκτες:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}^T &= P_{\mu\nu}^T \frac{1}{k^2} + P_{\mu\mu'}^T \frac{1}{k^2} i\Pi_{\mu'\nu'}(k) (-i) P_{\nu'\nu}^T \frac{1}{k^2} \\
&\quad + P_{\mu\rho}^T \frac{1}{k^2} i\Pi^{\rho\lambda}(k) P_{\lambda\tau}^T \frac{1}{k^2} i\Pi^{\tau\sigma}(k) P_{\sigma\nu}^T \frac{1}{k^2} = \\
&= P_{\mu\nu}^T \frac{1}{k^2} + P_{\mu\mu'}^T \frac{1}{k^2} (-i) k^2 P^{T\mu'\nu'} \Pi(k) (-i) P_{\nu'\nu}^T \frac{1}{k^2} + \\
&+ P_{\mu\rho}^T \frac{1}{k^2} (-i) k^2 P^{T\rho\lambda} \Pi(k) (-i) P_{\lambda\tau}^T \frac{1}{k^2} (-i) k^2 P^{T\tau\sigma} \Pi(k) (-i) P_{\sigma\nu}^T \frac{1}{k^2} + \dots = \\
&= P_{\mu\nu}^T \frac{1}{k^2} [1 - \Pi(k) + \Pi^2(k^2) + \dots] \quad (5.201)
\end{aligned}$$

το οποίο με τη χρήση του τύπου της γεωμετρικής σειράς θα μας δώσει:

$$iG_{\mu\nu}^T = P_{\mu\nu}^T \frac{1}{k^2 [1 + \Pi(k)]} \quad (5.202)$$

Μέχρι τώρα είδαμε ότι η διαδικασία του υπολογισμού των διαγραμμάτων μέσω της διαστατικής ομαλοποίησης εισήγαγε μία γενική παράμετρο μ η οποία είναι αναγκαία για να κρατήσουμε αδιάστατη την δράση S . Επίσης είδαμε ότι εισάγοντας την αλληλεπίδραση του φωτονίου με τον βρόχο των φερμιονίων, θα πρέπει με κάποιο τρόπο αυτή την αλληλεπίδραση να τη περάσουμε στην λαγκρανζιανή μας ώστε η θεωρία να περιέχει του όρους αλληλεπίδρασης. Για τους λόγους αυτούς οι καινούριοι όροι θα είναι διαταραχές των αρχικών όρων της θεωρίας χωρίς αλληλεπιδράσεις. Για το φωτόνιο θα έχουμε:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \delta Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.203)$$

Όπου το Z_3 δείχνει το πόσο μεγάλη μπορεί να γίνει η διαταραχή. Επειδή όμως αυτό εξαρτάται από το είδος του κενού που έχουμε, το Z_3 είναι η πιθανότητα να δημιουργηθεί μια νέα κατάσταση από το κενό και ονομάζεται Field Strength Renormalization .

Η ποσότητα δZ_3 θα πάει σε όλα τα μεγέθη που σχετίζονται με τον κινητικό όρο του φωτονίου.

$$\text{Διαδότης: } -i\delta Z_3 k^2 (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2})$$

$$i\Pi_{\mu\nu} = -i(\Pi(k, \epsilon) + \delta Z_3) P_{\mu\nu}^T \quad (5.204)$$

Και θέτουμε: $\Pi(k, \epsilon) \rightarrow \Pi(k, \epsilon) + \delta Z_3$ Επομένως έχουμε:

$$iG_{\mu\nu}^T = P_{\mu\nu}^T \frac{1}{k^2 [1 + \Pi(k, \epsilon) + \delta Z_3]} \quad (5.205)$$

Στο όριο $k = 0$ πρέπει να πέρνουμε τον διαδότη χωρίς διαταραχές.

$$\Pi(k, \epsilon) + \delta Z_3 = 0$$

$$\delta Z_3 = -\Pi(0, \epsilon) = \frac{2a}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) [\Delta\epsilon - \ln \frac{m^2}{\mu^2}] = -\frac{a}{3\pi} [\Delta\epsilon - \ln \frac{m^2}{\mu^2}] \quad (5.206)$$

Τελικά ο επακανονικοποιημένος διαδότης του φωτονίου από την εξίσωση 5.198 είναι:

$$iG_{\mu\nu}(k) = \frac{P_{\mu\nu}^T}{k^2[1 + \Pi(k, \epsilon) - \Pi(0, \epsilon)]} + iG_{\mu\nu}^L \quad (5.207)$$

5.8 Παράρτημα-B

Για να ορίσουμε μια θεωρία επαρκώς θα πρέπει να καθορίσουμε τις συνθήκες της επανακανονικοποίησης. Για παράδειγμα στην ϕ^4 θεωρία οι συνθήκες αυτές ορίζονταν μέσω της φυσικής μάζας m . Παρολάυτά σε μια θεωρία όπου $m = 0$ αυτές οι συνθήκες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν επειδή θα προκαλούν απροσδιοριστία στους *counterterms*. Για να αποφύγουμε τέτοιες απροσδιοριστίες θα επιλέξουμε μία αυθαίρετη κλίμακα ορμής M και θα επιβάλουμε τις συνθήκες επανακανονικοποίησης σε χωροειδή (*spacelike*) ορμή με $p^2 = -M^2$:

$$\begin{aligned}
 \left(\text{PI} \right)_p &= 0 \quad \text{at } p^2 = -M^2; \\
 \frac{d}{dp^2} \left(\text{PI} \right)_p &= 0 \quad \text{at } p^2 = -M^2; \\
 &= -i\lambda \quad \text{at } (p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = -M^2.
 \end{aligned} \tag{12.30}$$

Η παράμετρος M ονομάζεται κλίμακα επανακανονικοποίησης. Αυτές οι συνθήκες ορίζουν τιμές για τις συναρτήσεις *Green* δύο και τεσσάρων σημείων και στην διαδικασία της επανακανονικοποίησης αφαιρούν όλες τις υπέρυθρες αποκλίσεις. Μιλώντας χωρίς αυστηρότητα θα λέμε ότι *ορίζουν τη θεωρία στην κλίμακα M*

Αυτές οι καινούργιες συνθήκες επανακανονικοποίησης φαίνονται σχετικά αυθαίρετες δηλαδή είναι ευριστικές και αυτό γιατί μέσω της εμπειρίας διαφαίνονται κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά τους. Πιο συγκεκριμένα, η δεύτερη συνθήκη υπονοεί ότι η συνάρτηση *Green* δύο σημείων έχει παράγοντα 1 στην μη φυσική ορμή $p^2 = -M^2$, αντί για την ορμή στο κέλυφος ($p^2 = 0$):

$$\langle \Omega | \phi(p) \phi(-p) | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2} \quad p^2 = -M^2 \tag{5.208}$$

Επομένως αυτός ο καινούριος ορισμός επειδή δεν είναι ορισμένος στο κέλυφος ($p^2 = 0$) δεν προκαλεί απειρισμούς. Το πεδίο ϕ εδώ συμβολίζει το επανακανονικοποιημένο πεδίο, που σχετίζεται με το γυμνό πεδίο ϕ_0 μέσω του παράγοντα κλίμακας Z :

$$\phi = Z^{-1/2} \phi_0 \tag{5.209}$$

και η συνάρτηση *Green* για γυμνά πεδία:

$$\langle \Omega | \phi_0(p) \phi_0(-p) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2} \tag{5.210}$$

5.8.1 Η *Callan – Symanzik* εξίσωση

Στις συνθήκες επανακανονικοποίησης, η κλίμακα M είναι αυθαίρετη. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε την ίδια θεωρία σε διαφορετική κλίμακα. Λέγοντας ίδια θεωρία εννοούμε μια θεωρία που οι γυμνές συναρτήσεις *Green*:

$$\langle \Omega | T \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \dots \phi_0(x_n) | \Omega \rangle \quad (5.211)$$

δίνονται από τις ίδιες συναρτήσεις της γυμνής σταθεράς σύζευξης λ_0 και το κατώφλι Λ . Αυτές οι συναρτήσεις δεν κάνουν καμία αναφορά σχετικά με την κλίμακα M . Η εξάρτηση από το M μπαίνει όταν αφαιρούμε το κατώφλι Λ και επαναπροσδιορίζουμε (*rescale*) τα πεδία τέλος αντικαθιστούμε λ_0 με την επανακανονικοποιημένη σταθερά σύζευξης λ . Οι επανακανονικοποιημένες συναρτήσεις *Green* είναι αριθμητικά ίσες με τις γυμνές συναρτήσεις *Green* παρά έναν παράγοντα κλίμακας Z :

$$\langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle = Z^{-n/2} \langle \Omega | T \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \dots \phi_0(x_n) | \Omega \rangle \quad (5.212)$$

Οι επανακανονικοποιημένες συναρτήσεις *Green* μπορούν να οριστούν ίσες με μια άλλη κλίμακα M' , χρησιμοποιώντας καινούργια επανακανονικοποιημένη σταθερά σύζευξης λ' και καινούργιο παράγοντα κλίμακας Z' .

Ας γράψουμε αναλυτικά το αποτέλεσμα μια απειροστής αλλαγής της κλίμακας M . Ας θεωρήσουμε $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ να είναι η συνδεμένη (*connected*) συνάρτηση *Green* n -σημείων υπολογισμένη σε επανακανονικοποιημένη θεωρία διαταραχών:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle_{connected} \quad (5.213)$$

Υποθέτουμε απειροστή μεταβολή στην κλίμακα M , δM . Παρατηρούμε άμεσα μεταβολή στην σταθερά σύζευξης και στον παράγοντα κλίμακας έτσι ώστε οι γυμνές συναρτήσεις *Green* να μείνουν ανέπαφες (ίδια θεωρία):

$$\begin{aligned} M &\Rightarrow M + \delta M \\ \lambda &\Rightarrow \lambda + \delta \lambda \\ \phi &\Rightarrow (1 + \delta \eta) \phi \end{aligned} \quad (5.214)$$

Επομένως η μεταβολή στις επανακανονικοποιημένες συναρτήσεις *Green* που προκαλείται από τον επαναπροσδιορισμό των πεδίων είναι:

$$G^{(n)} \Rightarrow (1 + \eta \delta \eta) G^{(n)} \quad (5.215)$$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $G^{(n)}$ ως συνάρτηση των M , λ μπορούμε να ξαναγράψουμε τον μετασχηματισμό:

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda = \eta \delta \eta G^{(n)} \quad (5.216)$$

Αντί να έχουμε αυτή τη σχέση ως σχέση των όρων $\delta\lambda$ και $\delta\eta$ είναι χρήσιμο να ορίσουμε τις αδιάστατες παραμέτρους:

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M} \delta\lambda; \quad \gamma \equiv -\frac{M}{\delta M} \delta\eta \quad (5.217)$$

Βάζοντας τους ορισμούς αυτούς μέσα στην εξίσωση και πολλαπλασιάζοντας με $M/\delta M$ έχουμε:

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0 \quad (5.218)$$

Οι παράμετροι β και λ είναι ίδιες για κάθε n και πρέπει να είναι ανεξάρτητες των x_i . Εφόσον οι συναρτήσεις *Green* $G^{(n)}$ είναι επανακανονικοποιήσιμες, τα β, γ δεν μπορούν να εξαρτώνται από το κατώφλι Λ και επίσης λόγω διαστατικής ανάλυσης δεν μπορούν να εξαρτώνται από την κλίμακα M . Επομένως οι συναρτήσεις β, γ εξαρτώνται μόνο από την αδιάστατη μεταβλητή λ . Η εξίσωση 5.218 καλείται εξίσωση των *Callan-Symanzik*[7]. Υπονοεί ότι υπάρχουν συναρτήσεις $\beta(\lambda), \gamma(\lambda)$ που σχετίζονται με την μεταβολή της σταθεράς σύζευξης και του παράγοντα κλίμακας Z που εκφράζουν την μεταβολή της κλίμακας M .

Το προηγούμενο επιχείρημα γενικεύεται σε άλλες άμαζες θεωρίες με αδιάστατες σταθερές σύζευξης. Σε θεωρίες με πολλαπλά *couplings* και πεδία υπάρχει μία συνάρτηση γ για κάθε πεδίο και μία συνάρτηση β για κάθε *coupling*.

5.8.2 Οι Συναρτήσεις β και γ

Ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά της συναρτήσεις β, γ . Από τους ορισμούς τους βλέπουμε ότι είναι ανάλογες στην μεταβολή της σταθεράς σύζευξης και στην μεταβολή των πεδίων όταν η κλίμακα επανακανονικοποίησης αυξάνετε. Η συμπεριφορά της σταθεράς σύζευξης σε σχέση με την M είναι εξαιρετικής σημασίας αφού καθορίζει την ένταση της αλληλεπίδρασης και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η θεωρία διαταραχών εφαρμόζεται. Αν επιμείνουμε οι εκφράσεις να ικανοποιούν την εξίσωση *Callan-Symanzik* τότε θα λάβουμε σχέσεις για τις συναρτήσεις β, γ . Λόγω όμως της εξάρτησής των συναρτήσεων *Green* από την κλίμακα γεγονός το οποίο προέρχεται από τα *counterterms* ή ισοδύναμα από τους παράγοντες των αποκλίνωντων λογαρίθμων, η συγκεκριμένη αυτή σχέση των β, γ με τα δ_i θα εξαρτάται από την συνταγή επανακανονικοποίησης και άλλων λεπτομερειών που θα σχετίζονται με το πλαίσιο των υπολογισμών, σχέση την οποία είδαμε στο κεφάλαιο της χβάντωσης των μη αβελιανών $SU(N)$ θεωριών βαθμίδας.

References

1. L.D.Faddeev, V.N.Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29(1967)
2. C. Becchi, A.Rouet, and R.Stora, *Ann. Phys.* **98**, 287(1976); I. V. Tyutin, Lebedev Institute preprint (1975, unpublished); M.Z. Iofa and I. V. Tyutin, *Theor. Math. Phys.* **27**, 316(1976);
3. Michael E. Peskin, Dan V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*
4. Lewis H. Ryder *Quantum Field Theory*, page 186
5. T. Kugo, I. Ojima, *Prog. Theor. Phys.* **66**, 1 (1979).
6. G. t'Hooft, unpublished; H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346(1973); D.J.Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**,1343(1973)
7. C.G.Callan, *Phys. Rev.* **D2**, 1541 (1970), K. Symanzik, *Comm. Math. Phys.* **18**,227(1970)
8. T. Appelquist, M. Dine, and I. Muzinich, *Phys. Lett.* **69B**, 231 (1977)
9. S.Coleman and D.J. Gross, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 851 (1973)

Κβαντική Χρωμοδυναμική

6.1 Εισαγωγή

Το κλειδί για ένα ρεαλιστικό μοντέλο των ισχυρών αλληλεπιδράσεων είναι το φαινόμενο της ασυμπτωτικής ελευθερίας.

Θα ξεκινήσουμε με το να επιχειρηματολογήσουμε ότι ο πιο φυσικός υποψήφιος για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις είναι η μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας με ομάδα βαθμίδας την $SU(3)$, συζευγμένη με φερμιόνια (*quarks*) στην θεμελιώδη αναπαράσταση. Η θεωρία αυτή ονομάζεται Κβαντική Χρωμοδυναμική (*Quantum Chromodynamics* ή *QCD*). Μετά από μία γενική συζήτηση, θα αναλύσουμε συγκεκριμένες σκεδάζσεις της *QCD*.

Αν και αυτό το κεφάλαιο θα περιέχει πολλές αναφορές σε πειράματα, ο στόχος του είναι να δώσει τα κατάλληλα θεωρητικά εργαλεία παρά να είναι ένας οδηγός στην πειραματική βιβλιογραφία. Ελπίζουμε ότι το κεφάλαιο αυτό και συνολικά η διπλωματική θα αποτελέσει ένα εγχειρίδιο που αναλύει τις θεωρητικές τεχνικές με συντομία ώστε να φωτίσει την ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων.

6.2 Τα *quarks* στην *QCD*

Η θεωρητική εικόνα που έχουμε για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις ξεκινάει με την ταυτοποίηση των θεμελιωδών φερμιονίων που αποτελούν το πρωτόνιο και άλλα αδρόνια. Όσο αυτή η εικόνα γίνεται καλύτερα κατανοητή, η φύση των αλληλεπιδράσεων τους γίνεται ολοένα και πιο συγκεκριμένη, με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να καταλήξει σε μια μοναδική υποψήφια θεωρία που θα τα περιγράψει.

Το 1963, οι *Gell–Mann* και *Zweig* πρότειναν ένα μοντέλο που εξηγούσε το φάσμα των ισχυρά αλληλεπιδρώντων σωματιδίων με όρους θεμελιωδών κομματιών ύλης που ονομάστηκαν *quark*. Τα μεσόνια αναμένονταν να είναι στάσιμες καταστάσεις (*bound states*) *quark-antiquark*. Πράγματι, τα ελαφρύτερα μεσόνια είχαν τέτοιους κβαντικούς αριθμούς ώστε μια τέτοια ερμηνεία να εφαρμόζεται: Είναι σπιν 0 και σπιν 1 καταστάσεις περιττής *parity*. Τα βαρυόνια από την άλλη ερμηνεύτηκαν ως *bound states* από τρία *quarks*. Οι *Gell – Mann* και *Zweig*

χρειάστηκαν να υποθέσουν τρία είδη quarks: up(u), down(d), strange(s). Από τότε επιπλέον αδρόνια ανακαλύφθηκαν οπότε χρειάστηκε η πρόσθεση τριών επιπλέον ειδών των charm(c), bottom(b), top(t). Για να έχουν τα βαρυόνια ακέραια πολλαπλάσια φορτίων τα quarks χρειάζονταν να έχουν κλασματικό φορτίο: $2/3$ για u, c, t και $-1/3$ για d, s, b . Έτσι για παράδειγμα το πρωτόνιο θα αποτελείται από στάσιμες καταστάσεις από uud ενώ το νετρόνιο udd . Οι έξι τύποι quarks ονομάζονται και γεύσεις (flavors).

Το μοντέλο των quarks είχε μεγάλη επιτυχία στο να προβλέπει καινούργιες αδρονικές καταστάσεις, όπως επίσης στο να εξηγεί τις εντάσεις των ηλεκτρομαγνητικών και ασθενών αλληλεπιδράσεων ανάμεσα σε διαφορετικά είδη αδρονίων. Πιο συγκεκριμένα το μοντέλο των quarks περιέχει τις πιο σημαντικές σχέσεις συμμετρίας μεταξύ των ισχυρά αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Εάν κάποιος υποθέσει ότι τα u, d έχουν ίδιες μάζες και αλληλεπιδράσεις, τότε η ομάδα $SU(2)$ που ασκείται σαν unitary περιστροφή των u, d καταστάσεων:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

θα έπρεπε να είναι συμμετρία των ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Οι μουλτιπλετες της $SU(2)$ καλούνται ισοτοπικό σπιν ή ισοσπίν. Εφόσον το s quark είναι ελάχιστα πιο βαρύ από τα u, d είναι φυσικό να θεωρήσουμε τριπλέτα (u, d, s) . Οι Gell – Mann και Ne'eman δείξανε ότι αυτά τα στοιχειώδη σωματίδια ανήκουν στην irreducible αναπαράσταση της $SU(3)$.

Παρόλη την επιτυχία που είχε το μοντέλο των quarks, είχε δύο βασικά προβλήματα. Το πρώτο είναι ότι δεν μπορούσαν να βρεθούν σωματίδια με κλασματικό φορτίο ελεύθερα στη φύση. Το δεύτερο ήταν ότι το φάσμα των βαρυονίων απαιτούσε την υπόθεση ότι η κυματοσυνάρτηση των τριών quarks έπρεπε να είναι ολικά συμμετρική κάτω από ανταλλαγή του σπιν και της γεύσης το οποίο ερχόταν σε αντίφαση με το ότι τα quarks που έχουν σπιν $1/2$ έπρεπε να υπακούουν στη στατιστική Fermi – Dirac.

Για να επιλυθεί η αντίφαση του βαρυονικού φάσματος με το θεώρημα σπιν-στατιστικής, οι Han και Nambu, Greenberg, και Gell – Mann πρότειναν ότι τα quarks κουβαλάνε και ένα επιπλέον κβαντικό αριθμό ο οποίος ονομάζεται χρώμα (color). Εισήγαγαν την ad hoc υπόθεση ότι οι βαρυονικές κυματοσυναρτήσεις είναι ολικά αντισυμμετρικές στο χρώμα. Τότε, εάν οι κυματοσυναρτήσεις των quarks είναι ολικά συμμετρικές στο σπιν και στην γεύση είναι αντισυμμετρικές συνολικά σε συμφωνία με το θεώρημα σπιν-στατιστικής. Το απλούστερο μοντέλο για το χρώμα είναι να αναθέσουμε τα quarks στην θεμελιώδη αναπαράσταση της καινούργιας εσωτερικής ολικής συμμετρίας $SU(3)$. Υποβαθμίζοντας για λίγο τους αριθμούς του σπιν και της γεύσης, μπορούμε να συμβολίσουμε τα quarks με q_i όπου $i = 1, 2, 3$ είναι ο δείκτης του χρώματος, έτσι ώστε να μετασχηματίζονται στην θεμελιώδη ή '3' αναπαράσταση. Τα antiquarks \bar{q}^i μετασχηματίζονται στην αναπαράσταση '3'. Το εσωτερικό γινόμενο των '3' και '3' είναι αναλλοίωτο στην $SU(3)$. Μπορούμε επίσης να φτιάξουμε αναλλοίωτους συνδυασμούς χρησιμοποιώντας τρεις αναπαράστασεις της 3 αναπαράστασης, ϵ_{ijk} :

$$\epsilon_{ijk} \rightarrow U_{ii'} U_{jj'} U_{kk'} \epsilon_{i'j'k'} = (\det U) \epsilon_{ijk} \quad (6.2)$$

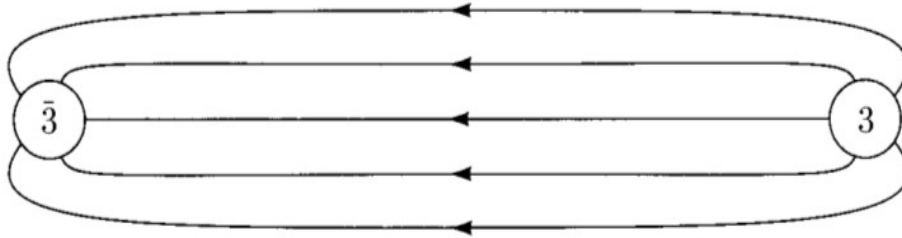
οπότε είναι αναλλοίωτοι κάτω από $SU(3)$ μετασχηματισμούς εφόσον $\det U = 1$. Από τη στιγμή που όλες οι αδρονικές κυματοσυναρτήσεις πρέπει να είναι αναλλοίωτες σε $SU(3)$ μετασχηματισμούς οι μόνοι συνδυασμοί που μένουν είναι:

$$\bar{q}^i q_i, \quad \epsilon^{ijk} q_i q_j q_k \quad \epsilon_{ijk} \bar{q}_i \bar{q}_j \bar{q}_k \quad (6.3)$$

Η υπόθεση δηλαδή ότι τα αδρόνια που βρίσκουμε στη φύση είναι *singlets* στο χρώμα υπονοεί ότι τα μόνα φυσικά ελαφριά αδρόνια είναι τα μεσόνια, βαρυόνια και αντιβαρυόνια.

Όπως το αρχικό μοντέλο των *quarks* χωρίς το χρώμα έτσι και η υπόθεση του χρώματος άνοιξαν καινούργια ερωτήματα: Γιατί τα *quarks* έχουν την ιδιότητα του χρώματος και ποια διαδικασία μας εξασφαλίζει ότι όλες οι αδρονικές κυματοσυναρτήσεις είναι *singlets* στο χρώμα; Οι απαντήσεις σε αυτές τις ερωτήσεις δεν προήλθαν από την αδρονική φασματοσκοπία αλλά από την βαθιά ανελαστική σκέδαση (*deep inelastic scattering*). Τα πειράματα αυτά εξασφάλισαν ότι η θεωρία θα πρέπει να επιδεικνύει ασυμπτωτική ελευθερία. Όταν ανακαλύφθηκε ότι οι μη αβελιανές θεωρίες περιέχουν αυτό το χαρακτηριστικό το μόνο που έμενε να γίνει ήταν η ταυτοποίηση της ομάδας βαθμίδας και η φερμιονική αναπαράσταση. Εφόσον η συμμετρία χρώματος δεν έχει κάποια άλλη εμφανή φυσική ιδιότητα ήταν φυσικό να ταυτοποιηθεί με την ομάδα συμμετρίας και τα χρώματα να είναι οι κβαντικοί αριθμοί βαθμίδας των *quarks*. Αυτού του είδους η λογική οδήγησε σε ένα μοντέλο των ισχυρών αλληλεπιδράσεων ως ένα σύστημα από *quarks* διαφόρων γεύσεων το καθένα ανατεθειμένο στην θεμελιώδη αναπαράσταση της τοπικής ομάδας βαθμίδας $SU(3)$. Τα κβάντα του πεδίου βαθμίδας της $SU(3)$ ονομάζονται γλουόνια (*gluons*) και η θεωρία, Κβαντική Χρωμοδυναμική.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε την *QCD* στο πλαίσιο υψηλών ενεργειών όπου η σταθερά σύζευξης γίνεται μικρή. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η μελέτη της *QCD* γίνεται και στο πλαίσιο όπου η σταθερά σύζευξης g_s γίνεται ισχυρή. Εκεί κανείς θα πρέπει να χρησιμοποιήσει την προσεγγιστική μέθοδο του *Wilson* στην οποία η συνεχής θεωρία βαθμίδας αντικαθίσταται από ένα διακριτό στατιστικό σύστημα σε ένα ευκλείδειο τετραδιάστατο πλέγμα. Με αυτή την προσέγγιση ο *Wilson* έδειξε ότι για επαρκώς ισχυρό *coupling* η *QCD* επιδεικνύει εγκλεισμό (*confinement*) του χρώματος: Οι μόνες ασυμπτωτικές καταστάσεις της θεωρίας είναι αυτές που είναι *singlets* του χρώματος στην $SU(3)$. Με αποτέλεσμα η ad hoc υπόθεση που εξηγεί το φάσμα των αδρονίων συμβαίνει να είναι συνέπεια της μη αβελιανής θεωρίας βαθμίδας του χρώματος. Εάν κάποιος προσπαθήσει να διαχωρίσει *singlets* χρώματος σε χρωματισμένα μέρη για παράδειγμα να ξεχωρίσει ένα μεσόνιο σε ένα *quark* και ένα *antiquark*, το πεδίο βαθμίδας δημιουργεί έναν σωλήνα μεταξύ των δύο πηγών όπως φαίνεται παρακάτω:

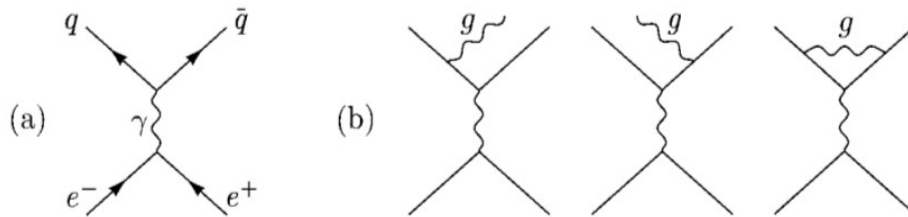


Στη μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας με επαρκώς ισχυρό coupling αυτοί οι σωλήνες έχουν καθορισμένη ακτίνα και πυκνότητα ενέργειας, οπότε η ενέργεια που πρέπει να καταναλωθεί ώστε να διαχωριστούν οι πηγές μεγαλώνει ανάλογα με το πόσο διαχωρίζονται. Ο νόμος της δύναμης για τέτοιες αλληλεπιδράσεις μπορεί να γίνει πολύ ασθενής σε κοντινές αποστάσεις και πολύ ισχυρός σε μεγάλες αποστάσεις, λαμβάνοντας υπόψιν ότι ελεύθερα *quarks* δεν παρατηρούνται.

Στο όριο των κοντινών αποστάσεων η QCD μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας διαγραμματικές μεθόδους που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Εδώ λόγω της ασυμπτωτικής ελευθερίας η σταθερά σύζευξης γίνεται ασθενής έτσι ώστε να μπορεί να γίνεται χρήση της διαγραμματικής θεωρίας διαταραχών. Οι ακόλουθες ενότητες αντιμετωπίζουν τις στοιχειώδεις αλληλεπιδράσεις μεταξύ *quarks* και *gluons* που μπορούν να παρατηρηθούν στα πειράματα υψηλών ενεργειών.

6.2.1 Εξαύλωση Ηλεκτρονίου-Ποζιτρονίου σε Αδρόνια - e^+e^- Annihilation into Hadrons

Η απλούστερη αντίδραση που περιέχει *quarks* είναι η παραγωγή ζευγαριών από *quarks* μέσω της εξαύλωσης ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου. Τα διαγράμματα που συνεισφέρουν στην αλληλεπίδραση αυτή είναι τα εξής:



Τα πρώτα δύο διαγράμματα στο b δίνουν συνεισφορά της τάξης του g^2 όπου g είναι η σταθερά σύζευξης της $SU(3)$ ώστε να παραχθεί και ένα *gluon* μαζί με τα *quarks*. Το τρίτο διάγραμμα πρέπει να αθροιστεί με το κυρίαρχο διάγραμμα ώστε να υπολογιστεί η διόρθωση στον ρυθμό παραγωγής $q\bar{q}$ χωρίς *gluon*. Οι συνεισφορές αυτές μπορούν να υπολογιστούν και στην αβελιανή θεωρία βαθμίδας. Για να πάρουμε τις αντίστοιχες συνεισφορές στην QCD θα πολλαπλασιάσουμε την αβελιανή έκφραση με τον παράγοντα ομάδας:

$$\text{tr}[t^a t^a] = C_2(r) \cdot \text{tr}[1] = \frac{4}{3} \cdot 3 \quad (6.4)$$

Όπου το $C_2(r)$ η σταθερά της θεμελιώδους αναπαράστασης της $SU(3)$. Ο αριθμός 3 υπάρχει διότι πλέον έχουμε 3 γενιές φερμιονίων (u, d, s) οπότε κάθε όρος είναι επι τρία. Το αποτέλεσμα που παίρνουμε από την *QED* είναι:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) = \sigma_0 \cdot 3 \cdot \sum_f Q_f^2 \left(1 + \frac{3a_g}{4\pi}\right) \quad (6.5)$$

Το σ_0 είναι η ενεργός διατομή της αντίδρασης $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$:

$$\sigma_0 = \frac{4\pi a^2}{3s} \quad (6.6)$$

Το Q_f είναι το ηλεκτρικό φορτίο των *quarks*. Αυτή η έκφραση υποθέτει ότι η ενέργεια στο κέντρο μάζας της αντίδρασης είναι αρκετά μεγάλη ώστε να αγνοηθούν οι μάζες των *quarks*. Οπότε μπορούμε να πάρουμε τα αποτελέσματα από την αβελιανή θεωρία βαθμίδας κάνοντας την εξής αλλαγή:

$$\begin{aligned} g^2 &\rightarrow \frac{4}{3}g^2 \\ a_g &\rightarrow \frac{4}{3}a_s \\ a_s &= \frac{g^2}{4\pi} \end{aligned} \quad (6.7)$$

όπου a_s είναι το ανάλογο της σταθεράς της λεπτής-υφής στην ισχυρή αλληλεπίδραση.

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \sigma_0 \left(3 \sum_f Q_f^2\right) \left[1 + \frac{a_s}{\pi} + \mathcal{O}(a_s^2)\right] \quad (6.8)$$

Ουσιαστικά το αποτέλεσμα αυτό είναι το άθροισμα δύο διαδικασιών: $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ περιέχοντας και την διόρθωση από το τρίτο διάγραμμα του b και της διαδικασίας $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$. Παρόλο που ο ρυθμός αυτών των διαδικασιών από μόνες τους είναι αποκλίνοντας καθώς η μάζα του γλουονίου τείνει προς το μηδέν, η απόκλιση αυτή ακυρώνεται όταν συνδυαστούν μεταξύ τους. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται *infrared divergence cancellations*.

Δεν είναι δύσκολο να κατανοήσουμε τέτοιες ακυρώσεις διαισθητικά. Η αρχική διαδικασία $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ είναι ακραία γρήγορη. Αν το εικονικό φωτόνιο είναι *off-shell* κατά μια τιμή $q^2 = s$ τα *quarks* δημιουργούνται σε χρόνο $1/\sqrt{s}$. Στα διαγράμματα με γλουονική εκπομπή, το εικονικό *quark* ή αντι*quark* είναι *off-mass-shell* κατά μια ποσότητα $p_{\perp g}^2$, όπου $p_{\perp g}$ είναι η *transverse* ορμή του γλουονίου σε σχέση με το σύστημα $q\bar{q}$. Οπότε αυτή η εικονική κατάσταση επιβιώνει για χρόνο $1/p_{\perp g}$ πριν διασπαστεί. Τέτοιου είδους αργή διαδικασία δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να επηρεάσει την πιθανότητα της εξέλιξης του συστήματος $q\bar{q}$, μπορεί μόνο να επηρεάσει τις ιδιότητες της τελικής κατάστασης που το σύστημα των $q\bar{q}$ θα καταλήξει. Με βάση αυτή τη λογική οι μόνες

διαταραχές που μπορούν να επηρεάσουν την ολική cross section είναι αυτές που $p_{\perp g} \sim \sqrt{s}$. Ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε το παραπάνω είναι να πούμε ότι αφού έχουν ακυρωθεί όλες οι *infrared* περιοχές, οι συνεισφορές που μένουν είναι από την περιοχή των μεγάλων πραγματικών ή εικονικών ορμών των *gluons*. Από όποιο επιχείρημα και αν ξεκινήσουμε η τελευταία έκφραση έχει νόημα στο πλαίσιο της διαταρακτικής *QCD* παρόλο που περιέχει ολοκλήρωση στην περιοχή της εκπομπής *soft* γλουονίου δηλαδή κοντά στην ασυμπτωτική ελευθερία των *quarks*.

6.2.2 Η Εξέλιξη του a_s -The Running of a_s

Η έκφραση που καταλήξαμε εξαρτάται από την σταθερά a_s , η οποία πρέπει να οριστεί σε κάποια κλίμακα επανακανονικοποίησης M . Αυτό έρχεται σε αντιδιαστολή με την σταθερά σύζευξης στην *QED* η οποία ορίζεται με φυσικό τρόπο από την *on-shell* επανακανονικοποίηση. Στην *QCD* θα αποφύγουμε να μιλήσουμε για *on-shell quarks* εφόσον περνάμε στην περιοχή των ισχυρών αλληλεπιδράσεων που οι διαταρακτικές μέθοδοι δεν εφαρμόζονται. Η χρήση της τιμής M μας βοηθά να αποφύγουμε το πρόβλημα αυτό. Θα ορίσουμε την a_s από συνθήκες επανακανονικοποίησης που καθορίζονται από μια μεγάλη κλίμακα ορμής M όπου η σταθερά σύζευξης είναι μικρή. Έτσι ώστε η σταθερά σύζευξης να μπορεί να προβλέψει τα αποτελέσματα των σκεδάσεων με μεγάλη ανταλλαγή ορμής.

Η χρήση της κλίμακας M στους υπολογισμούς περιέχει αναλλοίωτες ποσότητες ορμής τάξεως P^2 αλλά απαιτεί λεπτότητα στον χειρισμό όταν το P^2 διαφέρει σημαντικά από το M^2 . Σε αυτή την περίπτωση διαγράμματα με n βρόχους τυπικά περιέχουν μια διόρθωση ανάλογη του $(a_s \log(P^2/M^2))^n$. Όμως μπορούμε να συμπεριλάβουμε τις διορθώσεις αυτές σε χαμηλότερης τάξης διαγράμματα μέσω της ομάδας επανακανονικοποίησης που αντικαθιστά την *fixed* σταθερά σύζευξης με *running* σταθερά σύζευξης. Οπότε τα αποτελέσματα θα εμπεριέχουν τις διορθώσεις μεγαλύτερων βρόχων.

Για να γίνει κατανοητό θα εξετάσουμε τις επιπτώσεις που έχει η εξίσωση Callan-Symanzik για την εξαύλωση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου. Η cross section της διαδικασίας αυτής είναι συνάρτηση της s , της κλίμακας M και της τιμής a_s στην κλίμακα M . Εφόσον η ολική cross section είναι παρατηρήσιμη ποσότητα τότε και η κανονικοποίησή της είναι ανεξάρτητη από συμβάσεις. Επομένως ικανοποιεί την εξίσωση Callan-Symanzik για $\gamma = 0$:

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] \sigma(s, M, a_s) = 0 \quad (6.9)$$

Από διαστατική ανάλυση μπορούμε να γράψουμε:

$$\sigma = \frac{c}{s} f\left(\frac{s}{M^2}, a_s\right) \quad (6.10)$$

Αυτή την αλλαγή την κάνουμε γιατί στην εξίσωση Callan-Symanzik οι παράγωγοι είναι ως προς M, g οπότε οι ανεξάρτητες μεταβλητές του σ είναι οι $M,$

$a_s(Q) = \bar{g}^2/4\pi$ για $Q^2 = s$. Η σταθερά σύζευξης \bar{g} ορίζεται ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης:

$$\frac{d}{d\log(Q/M)}\bar{g} = \beta(\bar{g}) \quad (6.11)$$

Με αρχική συνθήκη $a_s(M) = a_s$. Για *QCD* με τρία χρώματα και n_f άμαζα *quarks*, η συνάρτηση β δίνεται από την εξίσωση 5.164 του προηγούμενου κεφαλαίου:

$$\beta(g) = -\frac{b_0}{(4\pi)^2}, \quad b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f \quad (6.12)$$

Οπότε η λύση της εξίσωσης Callan-Symanzik είναι:

$$a_s(Q) = \frac{a_s}{1 + (b_0 a_s/2\pi)\log(Q/M)}, \quad Q = \sqrt{s} \quad (6.13)$$

Επομένως το σ γίνεται:

$$\sigma = \sigma_0 \left(3 \sum_f Q_f^2 \right) \left[1 + \frac{a_s(\sqrt{s})}{\pi} + \mathcal{O}(a_s^2(\sqrt{s})) \right] \quad (6.14)$$

Με αποτέλεσμα η εξίσωση Callan-Symanzik να μας οδηγεί στο να αντικαταστήσουμε την *fixed* σταθερά σύζευξης a_s με την *running* $a_s(Q)$.

Επειδή το *fixed* a_s εξαρτάται από την κλίμακα M , είναι μερικές φορές χρήσιμο να αφαιρούμε αυτή την εξάρτηση από τις εξισώσεις μας. Για να γίνει αυτό θα ορίσουμε μία κλίμακα μάζας που θα την συμβολίζουμε Λ χωρίς να έχει σχέση με το *UV* κατώφλι. Η κλίμακα Λ θα ικανοποιεί την εξής ταυτότητα:

$$1 = g^2(b_0/8\pi^2)\log(M/\Lambda) \quad (6.15)$$

Οπότε επαναορίζουμε την *running* $a_s(Q^2)$:

$$a_s(Q^2) = \frac{2\pi}{b_0 \log(Q/\Lambda)} \quad (6.16)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η σαφέστερη έκφραση της εξέλιξης της $a_s(Q)$ που μικραίνει λόγω του $(\log(Q))^{-1}$ για μεγάλα Q . Η κλίμακα ορμής Λ είναι μία κλίμακα όπου το $a_s(Q)$ γίνεται ισχυρό όσο το Q^2 μικραίνει.

Πειραματικές μετρήσεις της εξαύλωσης e^+e^- έχουν εξάγει τιμή: $\Lambda \sim 200 \text{ MeV}$. Η διαταραχτική *QCD* είναι συνεπής για $Q = 1 \text{ GeV}$, όπου $a_s = 0.4$. Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις γίνονται ισχυρές σε αποστάσεις μεγαλύτερες από $1/\Lambda$, που είναι σχεδόν το μέγεθος των ελαφριών αδρονίων.

Παρόλο που το παράδειγμα της αλληλεπίδρασης e^+e^- είναι σχετικά εύκολο, εφόσον εξαρτάται μόνο από μία αναλλοίωτη ορμή, παρόμοια συμπεράσματα εξάγονται και από άλλες διαδικασίες της *QCD*. Στην ανάλυση των ισχυρών αλληλεπιδράσεων που είναι ευαίσθητες της υποδομής των *quarks* και των *gluons* βρίσκουμε αποτελέσματα για τις *cross sections* που είναι ανάλογα της σταθεράς

σύζευξης a_s . Για να κάνουμε αυτά τα αποτελέσματα να ικανοποιούν την εξίσωση Callan-Symanzik πρέπει να αντικαταστήσουμε την *fixed* a_s με την *running* $a_s(Q)$, εξισώνοντας τη Q με την τάξη μεγέθους των αναλλοίωτων ορμών της αντίδρασης. Εφόσον η $a_s(Q)$ εξαρτάται μόνο λογαριθμικά από το Q δεν χρειάζεται η τιμή να είναι ακριβής.

6.2.3 Εκπομπή Γλουονίου και Παραγωγή Πίδακα-Gluon Emission and Jet Production

Τα επόμενα διαγράμματα που θα μελετήσουμε είναι στην πρώτη εικόνα(b) του κεφαλαίου και είναι παραγωγή *quarks* με ταυτόχρονη εκπομπή γλουονίου. Παραφράζοντας τις εξίσωση για την εξαύλωση και χρησιμοποιώντας τις 6.7: Έστω x_1, x_2, x_3 να είναι οι αναλογίες μεταξύ ενεργειών *quark-antiquark*, *antiquark-γλουονίου* και *γλουονίο-ενέργειας ηλεκτρονικής δέσμης*. Αυτές ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις: $0 < x_i < 1$ και $x_1 + x_2 + x_3 = 2$. Τότε η cross section του $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g) = \sigma_0 \cdot (3 \sum_f Q_f^2) \cdot \frac{2a_s}{3\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \quad (6.17)$$

Η cross section αυτή απειρίζεται καθώς τα x_1, x_2 τείνουν στο 1. Το όριο $x_1 \rightarrow 1$ αντιστοιχεί σε διαμορφώσεις στις οποίες το *quark* έχει τη μέγιστη δυνατή ενέργεια ενώ το *antiquark* και το *gluon* εξέρχονται στην αντίθετη διεύθυνση, μοιράζοντας μεταξύ τους την εναπομένουσα ενέργεια. Σε αυτή την περίπτωση το *antiquark* και το *gluon* έχουν σχεδόν συγγραμμικά φωτεινή διανύσματα ορμής και έτσι θα διαμορφώνουν ένα σύστημα με πολύ μικρή αναλλοίωτη μάζα. Ομοίως στο όριο $x_2 \rightarrow 1$ αντιστοιχεί σε διαμορφώσεις στις οποίες το *quark* και το *gluon* είναι συγγραμμικά. Αυτοί οι απειρισμοί είναι υπεύθυνοι για την απόκλιση της ολοκληρωμένης cross section στο όριο που η μάζα του γλουονίου μηδενίζεται.

Ο τρόπος με τον οποίο θα πρέπει να ερμηνευτούν αυτές τις ιδιομορφίες (*singularities*) δεν είναι προφανής. Αν σκεφτούμε αναλυτικότερα, στην αλληλεπίδραση *bremsstrahlung*, η εκπομπή φωτονίου από ένα σκεδάμενο ηλεκτρόνιο εντείνεται, για συγγραμμική ακτινοβολία, κατά έναν παράγοντα τάξεως $\log(q^2/m^2)$, όπου m η μάζα του ηλεκτρονίου. Με αυτόν τον τρόπο ο ολικός ρυθμός εκπομπής ενός συγγραμμικού φωτονίου τυπικά αποκλίνει στο όριο της μηδενικής μάζας. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση της εκπομπής *gluons* από *quarks*. Η απόκλιση που παρουσιάζεται σε συγγραμμικές ακτινοβολίες στο όριο που η μάζα πάει στο μηδέν καλείται ιδιομορφία (*singularity*) μάζας. Στην *QED* η ιδιομορφία μάζας συγκαλύπτει μία πραγματική και φυσική επιρροή της ισχυρής εκπομπής ακτινοβολίας όταν το q^2 είναι μεγάλο. Στην *QCD* περιμένουμε μία αντίστοιχη ισχυρή εκπομπή γλουονίου όταν το q^2 είναι μεγάλο αλλά πρέπει να δούμε προσεκτικά το πως αυτή η ακτινοβολία φαίνεται πειραματικά δηλαδή αν το ισχυρό εκπεμπόμενο *gluon* εν τέλει εκπέμπεται, καθώς και αν το *quark* ή το *antiquark* που αναδύονται από την αντίδραση θα υποστούν

περαιτέρω 'μαλακές' αλληλεπιδράσεις με άλλα παράγωγα. Τέτοιες αντιδράσεις πρέπει να συνεχίζονται ώστε παράγοντας καινούρια *quark-antiquark* ζευγάρια και εκπέμποντας ή απορροφώντας *gluons* να καταλήγουν σε *singlets* στο χρώμα, αδρόνια. Επομένως, η παρουσία εκπεμπόμενων *gluons* δεν θα έχει κάποια εντυπωσιακή παρατηρήσιμη επίδραση στην τελική κατάσταση, η οποία θα αποτελείται από δύο αντιδιαμετρικούς (*back-to-back*) πίδακες αδρονίων. Για αυτό το λόγο η τελευταία εξίσωση δεν μας χρησιμεύει όταν η γλουονική *transverse* ορμή είναι μικρότερη από την συνήθη κλίμακα των 'μαλακών' γλουονικών αλληλεπιδράσεων, δηλαδή της κλίμακας του ενός *GeV*.

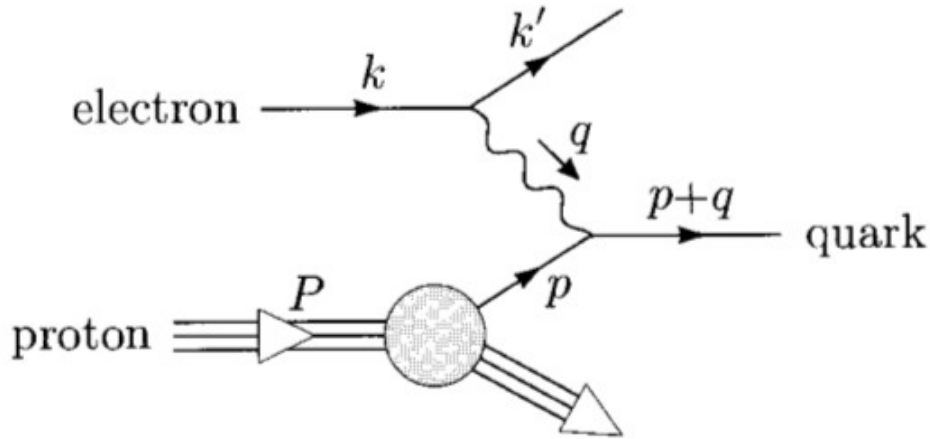
Όταν το *gluon* εκπέμπεται με ουσιαστικά *transverse* πολικότητα ορμής δηλαδή σε σχέση με τον άξονα $q\bar{q}$, δεν είναι δυνατόν για τις μεταγενέστερες 'μαλακές' αλληλεπιδράσεις να ανακατασκευάσουμε ή να αντιστρέψουμε αυτή την *transverse* ορμή. Εδώ το σύστημα $q\bar{q}g$ εξελίσσεται σε ένα σύστημα με τρεις διακριτούς πίδακες αδρονίων. Με αποτέλεσμα, επαρκώς μακριά από τις συγγραμμικές περιοχές δηλαδή εκεί που γίνονται οι 'μαλακές' αλληλεπιδράσεις η εξίσωση 6.17 να ερμηνεύεται ως η cross section για γεγονότα με τρεις αδρονικούς πίδακες, με ενέργειες x_i επί την ενέργεια της δέσμης ηλεκτρονίων.

Μπορούμε να βελτιώσουμε την εξίσωση 6.17 με το να αντικαταστήσουμε τη *fixed* σταθερά σύζευξης a_s με την *running* σταθερά. Μια λογική επιλογή της κλίμακας Q είναι η *transverse* ορμή $p_{\perp g}$. Εάν αυτή η ορμή είναι μικρή το $a_s(Q)$ θα είναι μεγάλο και η έκφραση της cross section θα καταρρεύσει. Αυτός είναι ο δεύτερος λόγος που δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση αυτή για ορμή κάτω από ένα *GeV*.

Από την άλλη μεριά για ορμές άνω του ενός *GeV* δεν έχουμε λόγο να μην κάνουμε διαταρακτική *QCD*. 'Μαλακές' διαδικασίες δεν 'ενοχλούν' τους τρεις πίδακες αδρονίων και η μικρή σταθερά σύζευξης δηλαδή ουσιαστικά η ασυμπτωτική ελευθερία εξασφαλίζει ότι η κυρίαρχη τάξη στην θεωρία διαταραχών θα είναι καλή προσέγγιση.

6.3 Βαθιά Ανελαστική Σκέδαση-Deep Inelastic Scattering

Η επόμενη απλή αντίδραση που περιέχει ισχυρά αλληλεπιδρώντα σωματίδια είναι η σκέδαση ηλεκτρονίου από πρωτόνιο, ή από ένα άλλο αδρόνιο. Στο πιο θεμελιώδες επίπεδο αυτή η αντίδραση μπορεί να μελετηθεί από την ηλεκτρομαγνητική σκέδαση ενός ηλεκτρονίου από ένα *quark* μέσα σε ένα πρωτόνιο (όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να μπει στη θέση του μιονίου). Ένας τρόπος για να αντιληφθούμε την διαδικασία είναι να δούμε την εξής εικόνα:



Ας ονομάσουμε την ορμή του πρωτονίου P και την αρχική ορμή του *quark* p . Θα θέσουμε τις αρχικές και τελικές τριορμές του ηλεκτρονίου k και k' αντίστοιχα. Η ορμή του ηλεκτρονίου την ώρα της αλληλεπίδρασης μπορεί μετρηθεί και θα ήταν $q = k - k'$ μεταφερόμενη από ένα εικονικό φωτόνιο στο αδρονικό σύστημα. Το διάνυσμα q είναι χωροειδές και συμβατικά κανείς γράφει $q^2 = -Q^2$.

Εάν η αναλλοίωτη μεταφορά ορμής Q^2 είναι μεγάλη τότε το *quark* εκπέμπεται από το πρωτόνιο με τρόπο τέτοιο ώστε δεν μπορεί να εξισορροπηθεί από τις μεταγενέστερες 'μαλακές' αλληλεπιδράσεις. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές θα δημιουργήσουν γλουόνια και ζευγάρια *quarks* τα οποία θα ουδετεροποιηθούν το χρώμα και θα προκαλέσουν το αρχικό εκπεμπόμενο *quark* να υλοποιηθεί ως πίδακας αδρονίων στην κατεύθυνση της μεταφοράς ορμής από το ηλεκτρόνιο. Τυπικά, η ολική αναλλοίωτη μάζα του τελικού αδρονικού συστήματος είναι μεγάλη εφόσον το εκπεμπόμενο *quark* κουβαλάει μεγάλη ορμή σε σχέση με τα υπόλοιπα *quark*. Σε αυτή την περίπτωση η διαδικασία ονομάζεται βαθιά ανελαστική σκέδαση.

Για να φτιάξουμε την πρώτη προσέγγιση της cross section για την αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου πρωτονίου θα φανταστούμε την αντίδραση από το πλαίσιο στο οποίο το ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο κινούνται το ένα προς το άλλο, για παράδειγμα στο σύστημα κέντρου μάζας ηλεκτρονίου-πρωτονίου. Θα υποθέσουμε ότι η ενέργεια του κέντρου μάζας είναι αρκετά μεγάλη με σκοπό να αγνοήσουμε την μάζα του πρωτονίου έτσι ώστε να εργαστούμε με την κινηματική. Το πρωτόνιο επομένως έχει σχεδόν φωτοειδή ορμή κατά μήκος του άξονα της σύγκρουσης. Τα συστατικά που αποτελούν το πρωτόνιο επίσης έχουν φωτοειδής ορμές, οι οποίες είναι σχεδόν συγγραμμικές με την ορμή του πρωτονίου. Αυτό συμβαίνει γιατί τα συστατικά δεν μπορούν να αποκτήσουν μεγάλη *transverse* ορμή εκτός αν ανταλλάξουν ένα 'σκληρό' γλουόνιο, αλληλεπίδραση η οποία καταστέλλεται κατά πολύ λόγω της μικρής σταθεράς σύζευξης. Με αυτόν τον τρόπο μέχρι τον κυρίαρχο όρο της διαταρακτικής *QCD* μπορούμε να γράψουμε:

$$p = \xi P \quad (6.18)$$

όπου ξ είναι ένας αριθμός από το μηδέν μέχρι το ένα και καλείται *longitudinal* κλάσμα του συστατικού. Δηλαδή κάθε συστατικό έχει ένα ποσοστό από την συνολική ορμή του πρωτονίου. Στον κυρίαρχο όρο του a_s μπορούμε να αγνοήσουμε εκπομπή ή ανταλλαγές γλουονίου κατά την στιγμή της σύγκρουσης. Επομένως η cross section για την σκέδαση πρωτονίου-ηλεκτρονίου δίνεται από την cross section ηλεκτρονίου-*quark* με ένα ορισμένο ποσοστό ξ , πολλαπλασιασμένη με την πιθανότητα το πρωτόνιο να περιέχει ένα *quark* με την συγκεκριμένη τιμή του ξ , ολοκληρωμένη πάνω στα ξ .

Η πιθανότητα όμως το πρωτόνιο να περιέχει ένα συστατικό με συγκεκριμένο ποσοστό ορμής δεν μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας διαταρακτική *QCD* εφόσον εξαρτάται από τις "μαλακές" αλληλεπιδράσεις που καθορίζουν την δομή του πρωτονίου ως στάσιμη (*bound*) κατάσταση *quarks* και γλουονίων. Οπότε θα θεωρήσουμε ότι είναι μια τιμή η οποία θα καθορισθεί από το πείραμα. Εν τέλει, θα χρειαστούμε την πιθανότητα αυτή για κάθε είδος *quark*, *antiquark* και γλουονίου που μπορούν να βρεθούν στην κυματοσυνάρτηση του πρωτονίου. Συνολικά αυτά τα συστατικά καλούνται παρτόνια (*partons*). Για κάθε είδος παρτονίου f , γράφουμε την πιθανότητα να βρούμε αυτό το συστατικό στο πρωτόνιο με ποσοστό ορμής ξ :

$$\left(\begin{array}{l} \text{probability of finding constituent } f \\ \text{with longitudinal fraction } \xi \end{array} \right) = f_f(\xi) d\xi \quad (6.19)$$

Οι συναρτήσεις $f_f(\xi)$ καλούνται συναρτήσεις κατανομής παρτονίων. Κάνοντας χρήση αυτής της σημειογραφίας η cross section για την ανελαστική σκέδαση ηλεκτρονίου-πρωτονίου δίνεται σε πρώτη προσέγγιση της a_s από την έκφραση:

$$\begin{aligned} \sigma(e^-(k)p(P) \rightarrow e^-(k') + q_f(p')) \\ = \int_0^1 d\xi \sum f_f(\xi) \sigma(e^-(k)q_f(\xi P) \rightarrow e^-(k') + q_f(p')) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Όπου X συμβολίζει οποιαδήποτε τελική αδρονική κατάσταση. Το άθροισμα περιέχει συνεισφορές από τα συστατικά των *antiquarks* καθώς και των *quarks*.

Η σχέση αυτή πρέπει να θυμόμαστε ότι είναι προσέγγιση πρώτης τάξεως και όχι ολοκληρωμένη πρόβλεψη της *QCD* και η οποία καλείται μοντέλο παρτονίων. Για υψηλότερες τάξεις διορθώσεων πρέπει να γίνουν παραλλαγές στην σκέδαση ηλεκτρονίου-*quark* και στις συναρτήσεις κατανομής των παρτονίων, τις σημαντικότερες παραλλαγές θα τις μελετήσουμε σε επόμενη υποενότητα του κεφαλαίου αυτού.

Με τον ίδιο τρόπο οποιαδήποτε αντίδραση που περιέχει πρωτόνιο με μεγάλη ανταλλαγή ορμής θα περιέχεται στην ερμηνεία της συναρτήσης παρτονίων. Στην *QCD* όλες οι cross sections υπολογίζονται από πλάτη πιθανότητας σχεδιάσεων *quarks* και γλουονίων. Η αρχική κίνηση των παρτονίων για κάθε διαδικασία περιγράφεται από τις ίδιες συναρτήσεις κατανομής $f_f(\xi)$ που εμφανίζονται στην βαθιά ανελαστική σκέδαση.

Για να υπολογίσουμε την πρώτη προσέγγιση της a_s για την βαθιά ανελαστική σκέδαση και εφόσον οι μάζες μπορούν να αγνοηθούν και αντίστοιχα οι ενέργειες είναι πολύ μεγάλες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της QED για την αντίδραση ηλεκτρονίου-μιονίου:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} = \frac{2\pi a^2 Q_i^2}{\hat{s}} \left(\frac{\hat{s}^2 + (\hat{s} + \hat{t})^2}{\hat{t}^2} \right) \quad (6.21)$$

Εν γένει οι μεταβλητές *Mandelstam* μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αλληλεπίδραση δύο σωμάτων στο παρτονικό μοντέλο όπως για τον ίδιο σκοπό και στην σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου. Αυτές οι μεταβλητές σχετίζονται με τις παρατηρήσιμες ποσότητες του αδρονικού συστήματος ή με το σχεδαζόμενο ηλεκτρόνιο. Για άμαζα αρχικά και τελικά σωματίδια ισχύει:

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0 \quad (6.22)$$

Στην περίπτωση της βαθιάς ανελαστικής σκέδασης:

$$\hat{t} = -Q^2 \quad (6.23)$$

και

$$\hat{s} = 2p \cdot k = 2\xi P \cdot k = \xi s \quad (6.24)$$

Επομένως έχουμε:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi) Q_f^2 \frac{2\pi a^2}{Q^4} \left[1 + \left(1 - \frac{Q^2}{\xi s} \right)^2 \right] \theta(\xi s - Q^2) \quad (6.25)$$

Ο τελευταίος όρος εκφράζει τον κινηματικό περιορισμό: $\hat{s} \geq |\hat{t}|$. Η έκφραση αυτή είναι μια καλή προσέγγιση στην πρώτη τάξη διαταραχών για την βαθιά ανελαστική σκέδαση όταν το Q^2 είναι μεγάλο. Έτσι οι διορθώσεις σε αυτή την έκφραση από 'σκληρές' εκπομπές και ανταλλαγές γλουονίων θα είναι της τάξης $a_s(Q^2)$.

εφόσον το ηλεκτρόνιο σχεδαζεται τελικώς με μια ορμή k' μπορούμε από την ορμή q που ανταλλάχθηκε να καθορίσουμε με μοναδικό τρόπο το ποσοστό ξ του αντίστοιχου παρτονίου. Αυτό μπορεί να γίνει με την υπόθεση ότι η σκέδαση παρτονίου-ηλεκτρονίου είναι ελαστική. Εφόσον η ορμή του παρτονίου είναι $p = \xi P$ όπου P η συνολική ορμή του πρωτονίου και k η αρχική ορμή του ηλεκτρονίου, έχουμε:

$$\hat{s} = (p + k)^2 = 2p \cdot k = 2\xi P \cdot k = \xi s \quad (6.26)$$

Επειδή η μάζα του πρωτονίου είναι μικρή σε σχέση με το s και Q :

$$0 = (p + q)^2 = 2p \cdot q + q^2 = 2\xi P \cdot q - Q^2 \quad (6.27)$$

Οπότε:

$$\xi = x \quad x \equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q} \quad (6.28)$$

Όταν η εξίσωση 6.25 εκφραστεί ως διπλά παραγωγημένη cross section στο x και στο Q^2 γίνεται ένα απλό γινόμενο από cross section παρτονίου για το αντίστοιχο f και ένα γινόμενο αθροισμάτων από συναρτήσεις κατανομών παρτονίων θεωρούμενες στο $\xi = x$. Στην βιβλιογραφία το σύμβολο x συχνά χρησιμοποιείται αντί του ξ , και θα το ακολουθήσουμε και στην παρούσα εργασία από εδώ και στο εξής. Είναι σχετικά βολικό να αναπαριστούμε την cross section με όρους συνδυασμών κινηματικών σταθερών. Μία από αυτές θα είναι η x και μια άλλη καλή επιλογή είναι:

$$y \equiv \frac{2P \cdot p}{2P \cdot k} = \frac{2P \cdot q}{s} \quad (6.29)$$

Στο σύστημα στο οποίο το πρωτόνιο είναι σε ηρεμία:

$$y = \frac{q^0}{k^0} \quad (6.30)$$

όπου y είναι η ενέργεια του ηλεκτρονίου που μεταφέρθηκε στο αδρονικό σύστημα. Όμως από την άλλη μεριά εφόσον $p = \xi P$ μπορούμε να εκφράσουμε τη μεταβλητή αυτή με όρους παρτονικών μεταβλητών:

$$y = \frac{2p \cdot (k - k')}{2p \cdot k} = \frac{\hat{s} + \hat{u}}{\hat{s}} \quad (6.31)$$

Έτσι ώστε:

$$\frac{\hat{u}}{\hat{s}} = -(1 - y) \quad (6.32)$$

Από την δύο τελευταίες σχέσεις βλέπουμε ότι $y < 1$. Επομένως η κινηματική επιφάνεια που περιορίζονται οι μεταβλητές (x, y) είναι:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (6.33)$$

Για να εκφράσουμε την 6.25 με όρους x, y χρειαζόμαστε την εξίσωση:

$$Q^2 = xys \quad (6.34)$$

Συναγόμεστε από τις εξισώσεις 6.28, 6.29 και την αλλαγή μεταβλητών

$$d\xi dQ^2 = dx dQ^2 = \frac{dQ^2}{dy} dx dy = xs dx dy \quad (6.35)$$

Και η διαφορική cross section γίνεται:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} (e^- p \rightarrow e^- X) = \left(\sum_f x f_s(x) Q_f^2 \right) \frac{2\pi a^2 s}{Q^4} [1 + (1 - y)^2] \quad (6.36)$$

Ο παράγοντας $1/Q^4$ προέρχεται από το τετράγωνο του διαδότη του φωτονίου. Μόλις αυτός ο παράγοντας φύγει η εξάρτηση στα x, y παραγοντοποιείται. Ο κάθε όρος περιέχει μια φυσική πληροφορία. Το γεγονός ότι οι συναρτήσεις

$f_f(x)$ εξαρτιόνται μόνο από τα x και είναι ανεξάρτητα του Q^2 μαρτυρά την ύπαρξη Bjorken scaling . Αυτό μας λέει ότι η αρχική κατανομή των παρτονίων είναι ανεξάρτητη των λεπτομερειών της "σκληρής" σκέδασης. Η εξάρτηση της cross section στα y προέρχεται από την υποβόσκουσα cross section του παρτονίου. Γνωρίζουμε ότι κάθε αντίδραση στο όριο των πολύ υψηλών ενεργειών αντανακλά τις ελικότητες (*helicities*) των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Η εξάρτηση $[1 + (1 - y)^2]$ είναι γνωστή ως *Callan - Gross*, σχετίζεται με την σκέδαση των ηλεκτρονίων από άμαζα φερμιόνια. Αυτή η σχέση έδωσε στοιχεία ότι τα παρτόνια που παίζουν ρόλο στην βαθιά ανελαστική σκέδαση είναι φερμιόνια στη φάση όπου η σχέση μεταξύ παρτονίων και *quarks* ήταν ασαφής.

6.3.1 Βαθιά Ανελαστική Σκέδαση *Neutrino-Deep Inelastic Neutrino Scattering*

Επειδή το άθροισμα πάνω στις γεύσεις των *quarks* παραγοντοποιείται στην τελευταία σχέση, δεν μπορούμε να καθορίσουμε τις συναρτήσεις κατανομής για κάθε παρτόνιο ξεχωριστά. Μπορούμε όμως να λάβουμε πληροφορία για την δομή του πρωτονίου από την βαθιά ανελαστική σκέδαση του *neutrino*.

Τα *neutrinos* έχουν μηδενικό ηλεκτρικό φορτίο και έτσι δεν αλληλεπιδρούν ανταλλάσσοντας φωτόνιο, αλληλεπιδρούν όμως με τα *quarks* μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων. Σε αυτή την διαδικασία ένα νεutrίνο μεταβάλλεται στο αντίστοιχο φορτισμένο λεπτόνιο ανταλλάσσοντας ένα εικονικό μαζικό διανυσματικό μποζόνιο, το W^+ (Υπάρχει επίσης και ουδέτερο ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης που το νεutrίνο παραμένει νεutrίνο, το οποίο δεν προσφέρει στην αντίδραση μας επιπλέον πληροφορία). Το μποζόνιο αυτό συζεύγνυται με το ρεύμα του *quark* που μετασχηματίζει το d *quark* σε ένα u *quark*. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι να παράσχει μια μέθοδο για να εισάγουμε μία "σκληρή" μεταφορά ορμής q . Το πλάτος πιθανότητας αυτής της διαδικασίας περιγράφεται από την *effective* λαγκρανζιανή:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2} \frac{1}{m_W^2} \left[\bar{l}\gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \nu \right] \left[\bar{u}\gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) d \right] + h.c. \quad (6.37)$$

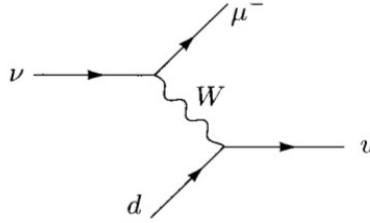
όπου l, ν, d, u είναι τα φερμιονικά πεδία που σχετίζονται με το αντίστοιχο σωματίδιο που παίρνει μέρος. Το g είναι η σταθερά σύζευξης της ασθενούς αλληλεπίδρασης. Ο όρος $1/m_W^2$ προέρχεται από το διαδότη του διανυσματικού μποζονίου W , θεωρούμενος στο όριο $q^2 \ll m_W^2$. Οι πρώτοι δύο όροι συχνά γράφονται μέσω της σταθεράς *Fermi*:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} \quad (6.38)$$

Η σταθερά αυτή δίνει την ένταση της ασθενούς αλληλεπίδρασης σε ενέργειες πολύ μικρότερες του m_W . Η καθοριστική ιδιότητα των ασθενών αλληλεπιδράσεων φαίνεται στην λαγκρανζιανή 6.37, η οποία είναι ότι το W μποζόνιο αλληλεπιδρά

μόνο με αριστερόστροφης ελικότητας καταστάσεις των ρελατιβιστικών φερμιονίων.

Για τεχνικούς λόγους είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε την βαθιά ανελαστική σκέδαση νετρίνο χρησιμοποιώντας μιονικά νετρίνο τα οποία μετατρέπονται σε μιόνια αφού εκπέμψουν ένα W μποζόνιο. Εφόσον το πρωτόνιο περιέχει ένα μικρό μείγμα από βαρύτερα *quarks* s, c που επίσης συνεισφέρουν στην σκέδαση του νετρίνο και τα οποία θα τα αγνοήσουμε στην μελέτη μας.



Η cross section της σκέδασης νετρίνο δίνεται από την σχέση 6.20 αφού αλλάξουμε τον παρανομαστή t^2 που προέρχεται από τον διαδότη του φωτονίου, με m_W^4 στην περίπτωση της ασθενούς αλληλεπίδρασης. Ο όρος $[\hat{s}^2 + \hat{u}^2]$ οφείλεται στην άλγεβρα των πινάκων *Dirac*. Από την *QED* γνωρίζουμε ότι αριστερόχειρα φερμιόνια ή δεξιόχειρα ηλεκτρόνια σκεδάζονται από δεξιόχειρα φερμιόνια το οποίο οφείλεται στην αντίστοιχη λαγκρανζιανή. Στην περίπτωση της σκέδασης νετρίνου-*quark*, η *effective* λαγκρανζιανή επιτρέπει σκέδαση μόνο αριστερόχειρων νετρίνων από αριστερόχειρα *quarks* οπότε ο όρος \hat{s}^2 επιβιώνει. Για να υπολογίσουμε την ολική κανονικοποίηση της cross section σημειώνουμε ότι αφού τα νετρίνο παράγονται σε ασθενής αλληλεπίδρασεις πάντα θα έχουν αριστερόχειρη πολικότητα έτσι ώστε να μην χρειάζεται να γίνει μέσος όρος πολικότητας. Πάραυτα, πρέπει να πάρουμε τον μέσο όρο της πολικότητας για τα αρχικά *quarks*. Επομένως βρίσκουμε:

$$\frac{d\sigma}{dt}(vd \rightarrow \mu^- u) = \frac{\pi g^4}{2(4\pi)^2 \hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2}{m_W^4} \right] = \frac{G_F^2}{\pi} \quad (6.39)$$

Το πρώτο ίσον είναι η παραλλαγή της 6.21 για $a^2 Q_f^2 = \frac{g^4}{(4\pi)^2}$ και $\hat{t}^2 = 4m_W^4$ διότι όπως είπαμε προηγουμένως $\hat{t} = -Q^2$ και το δεύτερο ίσον είναι η απαλοιφή των όρων \hat{s}^2 και ο ορισμός της σταθεράς *Fermi*.

Η cross section για αντινετρίνο υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο. Σημειώνουμε ότι η αντίδραση περιέχει ανταλλαγή W^- (αντινετρίνο) και έτσι μετατρέπει τα u σε d . Πρέπει όμως τα u να είναι αριστερόχειρα. Επίσης τα αντινετρίνο είναι δεξιόχειρα οπότε μόνο το u κανάλι συνεισφέρει σήμα:

$$\frac{d\sigma}{dt}(\bar{\nu}u \rightarrow \mu^+ d) = \frac{\pi g^4}{2(4\pi)^2 \hat{s}^2} \left[\frac{\hat{u}^2}{m_W^4} = \frac{G_F^2}{\pi} (1-y)^2 \right] \quad (6.40)$$

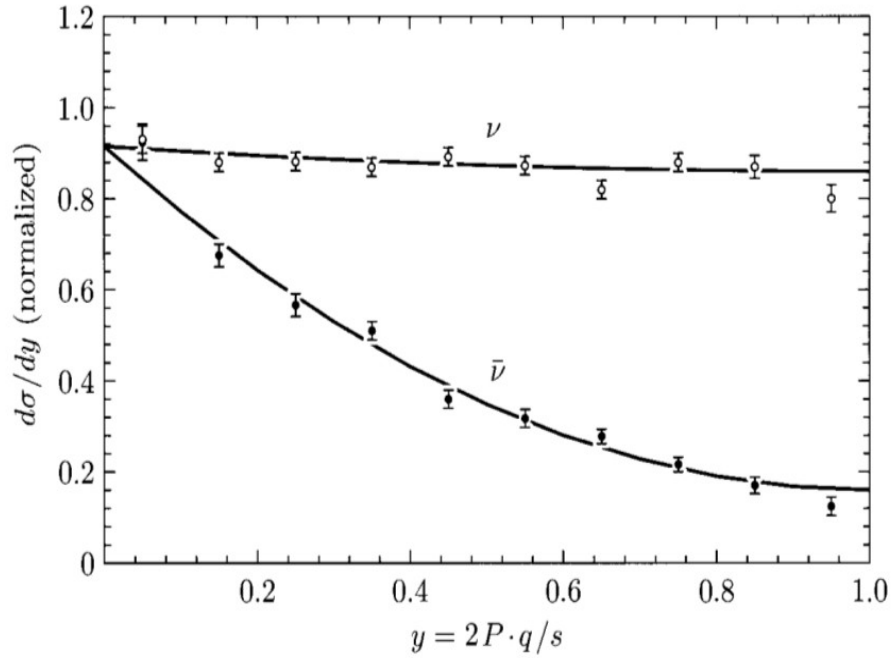
Η cross section της σκέδασης νετρίνου-*antiquark*, κατά την οποία μετατρέπεται το \bar{u} σε d δίνεται από την τελευταία εξίσωση:

Για να μετατρέψουμε τις cross sections του επιπέδου παρτονίων σε φυσικό επίπεδο πρέπει να τις συνδυάσουμε με τις συναρτήσεις κατανομής των παρτονίων. Ακολουθώντας τα ίδια επιχειρήματα με την σκέδαση ηλεκτρονίου-*quark* βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx dy}(\nu p \rightarrow \mu^- X) &= \frac{G_F^2 s}{\pi} [x f_d(x) + x f_{\bar{u}}(x)(1-y)^2] \\ \frac{d^2\sigma}{dx dy}(\bar{\nu} p \rightarrow \mu^+ X) &= \frac{G_F^2 s}{\pi} [x f_u(x)(1-y)^2 + x f_{\bar{d}}(x)] \end{aligned} \quad (6.41)$$

Σύμφωνα με αυτές τις σχέσεις η βαθιά ανελαστική σκέδαση νετρίνο επιτρέπει σε κάποιον να απεικονίσει ξεχωριστά τις συναρτήσεις κατανομής για τα *u, d quarks* από τις αντιστοιχές για τα *antiquarks*.

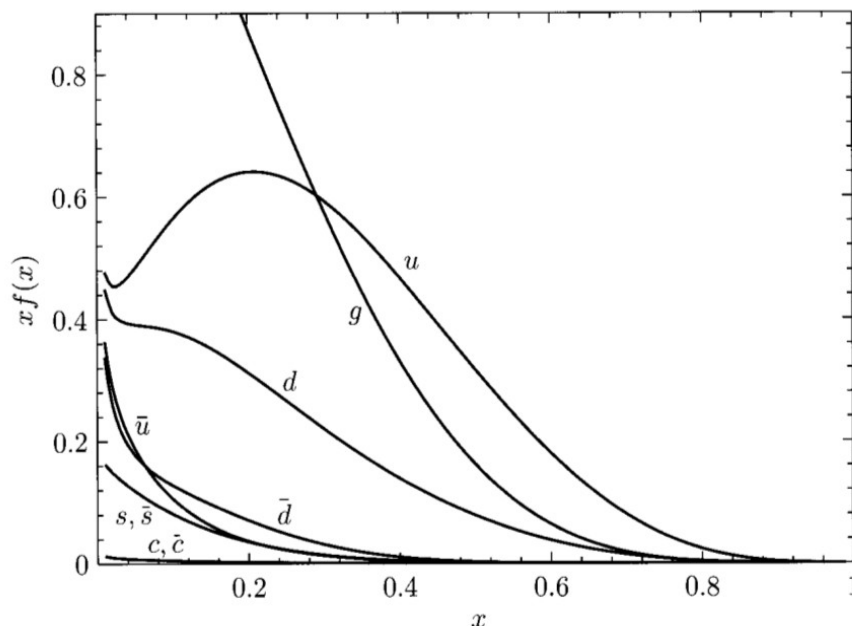
Επιπλέον, η τελευταία εξίσωση κάνει μια πολύ ποιοτική πρόβλεψη: Στο βαθμό που το πρωτόνιο ή το νετρόνιο αποτελούνται από *quarks* με πολύ λίγα επιπλέον *quark-antiquark* ζεύγη, η cross section της βαθιάς ανελαστικής σκέδασης θα πρέπει να είναι σταθερή στα *y*. Η μετρούμενη *y* εξάρτηση αυτών των ανελαστικών cross sections φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Η ποιοτική συμπεριφορά της πρόβλεψης των συναρτήσεων κατανομής παρτονίων είναι ξεκάθαρα φανερή. Η απόκλιση από την αυστηρή πρόβλεψη μπορεί μόνο να οφείλεται σε κάποιον όρο *antiquark* στην κυματοσυνάρτηση του νουκλεονίου.



Στο διάγραμμα φαίνεται η κατανομή του *y* για τη βαθιά ανελαστική σκέδαση νετρίνου και αντινετρίνου από στόχο σιδήρου, όπως μετρήθηκε στο πείραμα *CDHS*[1]

6.3.2 Οι παρτονικές συναρτήσεις κατανομής-The Parton Distribution Functions

Δεδομένου ότι οι προβλέψεις των συναρτήσεων κατανομής των παρτονίων για τις βαθιές ανελαστικές σχεδιάσεις του ηλεκτρονίου και του νετρίνου ταιριάζουν με τις πειραματικές μετρήσεις[1], υπάρχει η δυνατότητα να εξάγουμε τις συναρτήσεις αυτές και έτσι να μάθουμε περισσότερα για την δομή του πρωτονίου. Ένα σύνολο τέτοιων συναρτήσεων που θα μπορούσαν να αναπαράγουν τα πειραματικά δεδομένα είναι αυτό της ακόλουθης εικόνας:



Εφόσον όλες αυτές οι συναρτήσεις επιλέγονται για να ταιριάζουν στο πείραμα, ειδικά εκείνες για τα αντικουάρκς οι οποίες φτάνουν σε έντονο μέγιστο για μικρά x , έχουμε σχεδιάσει το $xf_f(x)$ για κάθε είδος. Γενικά παρατηρείται πειραματικά μια μικρή παραβίαση του *Bjorken scaling* οπότε οι συναρτήσεις αυτές αλλάζουν αργά με το Q^2 . Το διάγραμμα έχει σχεδιαστεί στο $Q^2 = 4\text{GeV}^2$. Σε επόμενη υποενότητα θα δούμε πώς η παραβίαση αυτή περιέχεται σε υψηλότερης τάξης διαταραχή στην *QCD*. Θα αποδείξουμε πως η πειραματική μέτρηση του *scaling* αυτού μπορεί να καθορίσει τις συναρτήσεις κατανομής των γλουονίων, $f_g(x)$, οι οποίες έχουν σχεδιαστεί στο διάγραμμα αυτό. Βλέπουμε από το διάγραμμα ότι τα u, d κουάρκς είναι πιο πιθανό να έχουν την περισσότερη ορμή του πρωτονίου από τα αντικουάρκς και τα γλουόνια, όπως είναι λογικό.

Αφού οι συναρτήσεις κατανομής είναι πιθανότητες να βρούμε τα διάφορα συστατικά του πρωτονίου, πρέπει να κανονικοποιηθούν με τέτοιο τρόπο που να αντανακλά τους χβαντικούς αριθμούς του πρωτονίου. Το πρωτόνιο είναι ένα μίγμα από μία στάσιμη κατάσταση του uud συν λίγο από ζεύγη κουάρκς-αντικουάρκς.

Επομένως πρέπει να περιέχει ένα πλεόνασμα από δύο u και ένα d περισσότερα από τα αντίστοιχα αντικουάρκς. Αυτό το συμπέρασμα οδηγεί στους περιορισμούς:

$$\int_0^1 dx [f_u(x) - f_{\bar{u}}(x)] = 2, \quad \int_0^1 dx [f_d(x) - f_{\bar{d}}(x)] = 1 \quad (6.42)$$

Όμοιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και για κάθε άλλο αδρόνιο. Το κάθε αδρόνιο έχει το δικό του σύνολο συναρτήσεων κατανομής που αντανακλούν τους αντίστοιχους κβαντικούς αριθμούς του. Στην περίπτωση του νετρονίου που ουσιαστικά ανταλλάζουν τα u με d και τα d με u ισχύει:

$$f_u^n(x) = f_d(x), \quad f_d^n(x) = f_u(x) \quad f_{\bar{u}}^n(x) = f_{\bar{d}}, \quad etc. \quad (6.43)$$

Οι συναρτήσεις με άνω δείκτη n είναι του νετρονίου και χωρίς δείκτη είναι του πρωτονίου. Επίσης οι συναρτήσεις κατανομής του αντιπρωτονίου δίνονται από:

$$f_u^{\bar{p}}(x) = f_{\bar{u}}(x), \quad f_{\bar{u}}^{\bar{p}}(x) = f_u(x), \quad etc. \quad (6.44)$$

Σε κάθε περίπτωση η ολική ορμή που κουβαλάνε τα παρτόνια πρέπει να είναι ίση με αυτή του αδρονίου:

$$\int_0^1 dx [f_u(x) + f_d(x) + f_{\bar{u}}(x) + f_{\bar{d}}(x) + f_g(x)] = 1 \quad (6.45)$$

Οι συναρτήσεις κατανομής των κουάρκς, αντικουάρκς έτσι όπως εξήχθησαν από το πείραμα συνεισφέρουν μόνο το μισό της συνολικής τιμής του ολοκληρώματος. Η εναπομένουσα ενέργεια-ορμή πρέπει να προέρχεται από τα *gluons*

6.4 "Σκληρές" Σκεδιάσεις σε Αδρονικές Συγκρούσεις-*Hard-Scattering Processes in Hadron Collisions*

Στη σύγκρουση αδρονίων με αδρόνια σε υψηλές ενέργειες οι περισσότερες από τις συγκρούσεις μεταξύ των συστατικών είναι "μαλακές" αλληλεπιδράσεις δηλαδή η σταθερά σύζευξης a_s είναι μεγάλη και η ανταλλαγή ορμής μικρή οπότε η θεωρία διαταραχών δεν εφαρμόζεται. Σε ελάχιστες περιπτώσεις όμως δύο *quarks* ή δύο γλουόνια θα ανταλλάξουν μία μεγάλη ορμή κάθετη στον άξονα της σύγκρουσης. Τότε όπως και στην βαθιά ανελαστική σκέδαση, αυτή η στοιχειώδης αλληλεπίδραση πέρνει μέρος σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα σε σύγκριση με την εσωτερική χρονική κλίμακα της αδρονικής κυματοσυνάρτησης, με αποτέλεσμα η χαμηλότερη τάξη διαταραχών να μπορεί να περιγράψει την επιμέρους αυτή διαδικασία. Όπως και πριν θα βρούμε μια έκφραση που θα κάνει χρήση των συναρτήσεων κατανομής των παρτονίων η οποία θα αποτελείται από τον κυρίαρχο όρο της cross section της επιμέρους διαδικασίας ολοκληρωμένη πάνω στις συναρτήσεις κατανομής. Στην περίπτωση της σύγκρουσης πρωτονίου-πρωτονίου αυτές οι συναρτήσεις θα είναι οι ίδιες με την περίπτωση της βαθιάς ανελαστικής σκέδασης λεπτονίου-πρωτονίου.

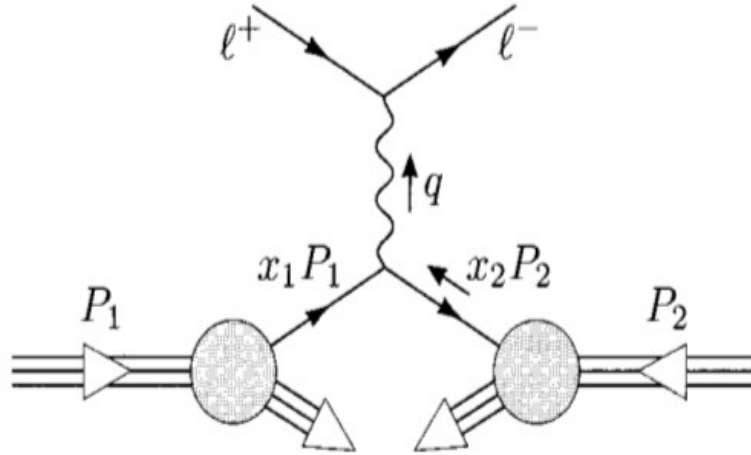
Για παράδειγμα, εάν η "σκληρή" διαδικασία επιπέδου παρτονίων εμπεριέχει σκέδαση *quark-antiquark* σε μια τελική κατάσταση Y , ο κυρίαρχος όρος της πρόβλεψης της *QCD* παίρνει την μορφή:

$$\begin{aligned} \sigma(p(P_1) + p(P_2) \rightarrow Y + X) \\ = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \sum_f f_f(x_1) f_{\bar{f}}(x_2) \cdot \sigma(q_f(x_1 P) + \bar{q}_f(x_2 P) \rightarrow Y) \end{aligned} \quad (6.46)$$

Με X συμβολίζουμε ξανά οποιαδήποτε αδρονική τελική κατάσταση. Αυτή η έκφραση καταλλήλως παραλλαγμένη στις συναρτήσεις κατανομής ισχύει για κάθε σκέδαση αδρονίου-αδρονίου. Η εξίσωση αυτή θα είναι μια καλή πρώτη προσέγγιση εάν κατά κάποιο μέτρο (για παράδειγμα το a_s) η μεταφορά ορμής είναι μεγάλη σε μια αλληλεπίδραση $q\bar{q}$. Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε διάφορα παραδείγματα εφαρμογής αυτής της σχέσης σε τέτοιου είδους φαινόμενα.

6.4.1 Παραγωγή Λεπτονικών Ζευγών-*Lepton Pair Production*

Θα μελετήσουμε αρχικά το φαινόμενο της αντίδρασης ενός υψηλής μάζας λεπτονικό ζεύγος l^+l^- που αναδύεται από την εξαύλωση $q\bar{q}$ σε μια αντίδραση πρωτονίου-πρωτονίου. Η αντίδραση αυτή ονομάζεται *Drell - Yan* και σχεδιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σε αυτή την περίπτωση η αντίδραση $q\bar{q}$ περιγράφεται από μία QED cross section. Για τον κυρίαρχο όρο στην QCD θα απαιτήσουμε η $\sigma(q\bar{q} \rightarrow l^+l^-)$ να σχετίζεται με την cross section $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$ που υπολογίσαμε σε προηγούμενη ενότητα 6.8. Η μόνη διαφορά μεταξύ τους θα είναι ένας παράγοντας του μέσου όρου αντί το άθροισμα πάνω στα χρώματα του *quark* και του *antiquark*. Αυτό δίνει άλλους δύο παράγοντες $1/3$:

$$\sigma(q_f\bar{q}_f \rightarrow l^+l^-) = \frac{1}{3}Q_f^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3\hat{s}} \quad (6.47)$$

Εάν οι τελικές ορμές των λεπτονίων παρατηρηθούν, είναι δυνατόν να ανακατασκευάσουμε την ολική τετραορμή του εικονικού φωτονίου. Είναι επίσης δυνατόν να καθορίσουμε τα *longitudinal* κλάσματα του αρχικού *quark* και του τελικού *antiquark*. Έστω:

$$M^2 = q^2 \quad (6.48)$$

Να είναι το τετράγωνο της αναλλοίωτης μάζας του *Drell – Yan* ζεύγους. (Μην συγχέουμε την ποσότητα M με την κλίμακα της επανακανονικοποίησης.) Αν τα αρχικά παρτόνια έχουν μικρή *transverse* ορμή τότε η *transverse* ορμή του φωτονίου θα είναι επίσης μικρή. Η *longitudinal* θα είναι σημαντική. Θα την παραμετροποιήσουμε χρησιμοποιώντας την ταχύτητα (*rapidity*) Y του εικονικού φωτονίου που ορίζεται:

$$q^0 = M \cosh(Y) \quad (6.49)$$

Όπου η q_0 μετριέται στο κέντρο μάζας. Θα περιγράψουμε τα διαμήκη κλάσματα των *quarks* και εν τέλει την *Drell – Yan* cross section με όρους των ποσοτήτων M^2, Y .

Στο κέντρο μάζας οι ορμές των πρωτονίων πέρνουν μορφή:

$$P_1 = (E, 0, 0, E), \quad P_2 = (E, 0, 0, -E) \quad (6.50)$$

Όπου το E ικανοποιεί την $s = 4E^2$. Αγνοώντας τις μικρές διαμήχεις ορμές μπορούμε να περιγράψουμε τις συστατικές ορμές των *quark* και *antiquark* ως x_1, x_2 έτσι ώστε:

$$q = x_1 P_1 + x_2 P_2 = ((x_1 + x_2)E, 0, 0, (x_1 - x_2)E) \quad (6.51)$$

Υπολογίζοντας το αναλλοίωτο του τετραγώνου του διανύσματος αυτού βρίσκουμε:

$$M^2 = x_1 x_2 s \quad (6.52)$$

Βάζοντας τα τελευταία αποτελέσματα στον ορισμό της *rapidity* λαμβάνουμε:

$$\cosh(Y) = \frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \right) \quad (6.53)$$

Το οποίο υπονοεί:

$$\exp Y = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad (6.54)$$

$$x_1 = \frac{M}{\sqrt{s}} e^Y, \quad x_2 = \frac{M}{\sqrt{s}} e^{-Y} \quad (6.55)$$

Σχέσεις σαν τις 6.52 και 6.54 μας επιτρέπουν να αλλάζουμε μεταβλητές στο ολοκλήρωμα 6.46 σε παραμέτρους M^2, Y των παραγόμενων λεπτονίων. Η *Jacobian* ώστε να γίνει η αλλαγή μεταβλητών είναι:

$$\frac{\partial(M^2, Y)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} x_2 s & x_1 s \\ 1/2x_1 & -1/2x_2 \end{vmatrix} = s = \frac{M^2}{x_1 x_2} \quad (6.56)$$

Επομένως η σχέση για την παραγωγή λεπτονιακών ζευγών είναι:

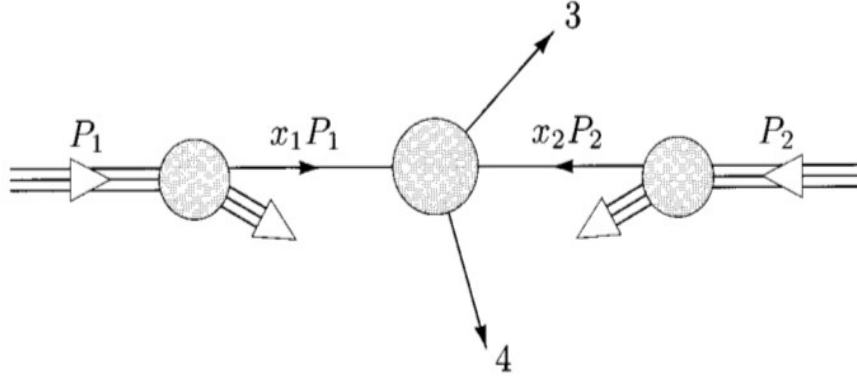
$$\frac{d^2\sigma}{d^2M^2 dY} (pp \rightarrow e^+ e^- + X) = \sum_f x_1 f_f(x_1) x_2 f_{\bar{f}}(x_2) \frac{1}{3} Q_f^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3M^4} \quad (6.57)$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι η cross section προσδιορίζεται από την πληροφορία που εξαγάγαμε στην βαθιά ανελαστική σκέδαση. Δυστυχώς όμως η σχέση αυτή επιδέχεται διόρθωση της τάξης του $a_s(M)$ που καταλήγει να είναι αριθμητικά μεγάλη, έτσι ώστε να πρέπει να συμπεριληφθεί ώστε να δοκιμάσουμε την εξίσωση αυτή στο πείραμα.

6.4.2 Γενική Κινηματική της Παραγωγής Ζευγών-*General Kinematics of Pair Production*

Στον υπολογισμό της εξίσωσης 6.57 χρησιμοποιήσαμε την ολική cross section 6.47 για το επίπεδο των παρτονίων και ολοκληρώμενη πάνω στην γωνιακή κατανομή των εξερχόμενων λεπτονίων. Θα μπορούσαμε να διατηρούσαμε την γωνιακή πληροφορία και να καταλήγαμε σε μια τριπλή διαφορική κατανομή. Αυτή θα ήταν η πιο ολοκληρωμένη πρόβλεψη για αλληλεπίδραση δύο σωμάτων στο επίπεδο των

παρτονίων. Θα ήταν χρήσιμο να δουλέψουμε την κινηματική τέτοιων αντιδράσεων, παίρνοντας μία πιο γενική οπτική. Στην πιο γενική περίπτωση, ένα παρτόνιο τύπου 1 από το πρωτόνιο τύπου 1 σκεδάζεται από παρτόνιο τύπου 2 από το πρωτόνιο τύπου 2 και παράγονται παρτόνια τύπου 3 και 4 με μεταφορά ορμής στο τετράγωνο \hat{t} . Αυτή η γενική διαδικασία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σε μια *Drell – Yan* διαδικασία τα παρτόνια 3,4 είναι λεπτόνια. Αυτά τα παρτόνια όμως μπορεί να είναι *quarks* ή γλουόνια που υλοποιούνται σε αδρονικούς πίδακες. Θα υποθέσουμε ότι όλα τα παρτόνια είναι άμαζα. Σε μεταβλητές παρτονίων η cross section για την διαδικασία στο διάγραμμα είναι:

$$\frac{d^3\sigma}{dx_1 dx_2 dx_3} (pp \rightarrow 3 + 4 + X) = f_1(x_1) f_2(x_2) \frac{d\sigma}{d\hat{t}} (1 + 2 \rightarrow 3 + 4) \quad (6.58)$$

Θα μετατρέψουμε την έκφραση αυτή σε παρατηρήσιμες ποσότητες της τελικής κατάστασης.

Στην κυρίαρχη τάξη της *QCD* οι εγκάρσιες ορμές των παρτονίων 3 και 4 πρέπει να είναι ίσες και αντίθετες αλλά η διαμήκης ορμή δεν περιορίζεται. Θα πάρουμε τρεις παραμέτρους της τελικής κατάστασης να είναι ίδιου μεγέθους των εγκάρσιων ορμών p_\perp των παρτονίων και των *longitudinal rapidities* y_3, y_4 της τελικής κατάστασης των παρτονίων που ορίζονται από τις εκφράσεις:

$$E_i = p_\perp \cosh y_i, \quad p_{i\parallel} = p_\perp \sinh y_i \quad (6.59)$$

Η διαμήκης *rapidity* y_i δίνει την προώθηση του σωματιδίου i από το σύστημα όπου έχει μηδενική διαμήκη ορμή. Υπενθυμίζουμε ότι οι *rapidities* προστίθενται κάτω από συγγραμμικές προωθήσεις. Η εγκάρσια ορμή είναι αναλλοίωτη κάτω από διαμήκεις προωθήσεις. Έτσι οι (y_3, y_4, p_\perp) είναι ένα σετ μεταβλητών με βολικό μετασχηματισμό *Lorentz* που σέβονται τις προωθήσεις κατά μήκος του άξονα σύγκρουσης. Τώρα θα εξετάσουμε πως αυτές οι μεταβλητές συνδέονται με τις μεταβλητές των παρτονίων x_1, x_2, \hat{t} .

Θα δουλέψουμε στο σύστημα του κέντρου μάζας. Η ολική ενέργεια σε αυτό το σύστημα είναι \sqrt{s} . Θα χρησιμοποιήσουμε τον δείκτη $*$ για να συμβολίζουμε τις μεταβλητές που μετρούνται σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων όπως η μεταβλητή θ_* που είναι η γωνία σκέδασης του παρτονίου. Τότε:

$$p_{3\parallel*} = \frac{1}{2}\sqrt{\hat{s}}\cos\theta_*, \quad p_{3\perp*} = \frac{1}{2}\sqrt{\hat{s}}\sin\theta_* \quad (6.60)$$

Και η p_{4*} ορίζεται αντίθετα. Το σύστημα που επιλέξαμε είναι επίσης και το σύστημα κέντρου μάζας για τα παρτόνια 3,4 έτσι:

$$y_{3*} = -y_{4*} \equiv y_* \quad (6.61)$$

Εφόσον οι *rapidities* μετασχηματίζονται μόνο από μετατοπίσεις μπορούμε να λύσουμε ως προς y_* και την *rapidity* Y με τις οποίες πρέπει να προωθήσουμε για να φτάσουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$y_* = \frac{1}{2}(y_3 - y_4), \quad Y = \frac{1}{2}(y_3 + y_4) \quad (6.62)$$

Η γωνία σκέδασης θ_* καθορίζεται από την y_* συνδυάζοντας τις 6.60 με την σχέση $E_* = p_{\perp} \cosh y_*$:

$$\frac{1}{\sin\theta_*} = \cosh y_* \quad (6.63)$$

Τότε οι μεταβλητές *Mandelstam*:

$$\hat{s} = \frac{4p_{\perp}^2}{\sin^2\theta_*}, \quad \hat{t} = -\frac{1}{2}\hat{s}(1 - \cos\theta_*) \quad (6.64)$$

Που μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\hat{s} = 4p_{\perp}^2 \cosh^2 y_*, \quad \hat{t} = -2p_{\perp}^2 \cosh y_* e^{-y} \quad (6.65)$$

Μπορούμε να συνδυάσουμε την πρώτη εξίσωση από τις δύο με την 6.55 για να καθορίσουμε x_1, x_2 :

$$x_1 = \frac{2p_{\perp}}{\sqrt{\hat{s}}} \cosh y_* e^Y, \quad x_2 = \frac{2p_{\perp}}{\sqrt{\hat{s}}} \cosh y_* e^{-Y} \quad (6.66)$$

Η *Jacobian* για να κάνουμε τη αλλαγή μεταβλητών στην cross section :

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \hat{t})}{\partial(y_3, y_4, p_{\perp})} = \frac{8p_{\perp}^3}{s} \cosh^2 y_* = \frac{2p_{\perp} \hat{s}}{s} \quad (6.67)$$

Πολλαπλασιάζοντας την 6.58 με την *Jacobian*:

$$\frac{d^3\sigma}{dy_3 dy_4 dp_{\perp}} = f_1(x_1) f_2(x_2) \frac{2p_{\perp} \hat{s}}{s} \frac{d\sigma}{d\hat{t}} (1 + 2 \rightarrow 3 + 4) \quad (6.68)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις: $\hat{s} = x_1 x_2 s$ και $p_{\perp} dp_{\perp} = d^2 p_{\perp} / 2\pi$:

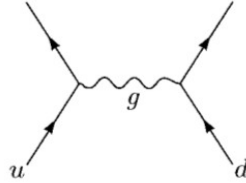
$$\frac{d^4\sigma}{dy_3 dy_4 d^2 p_{\perp}} = x_1 f_1(x_1) f_2(x_2) \frac{1}{\pi} \frac{d\sigma}{d\hat{t}} (1 + 2 \rightarrow 3 + 4) \quad (6.69)$$

6.4.3 Παραγωγή Πιδάκων Ζευγών-*Jet Pair Production*

Οι πιο συχνές αντιδράσεις δύο σωμάτων στην QCD είναι αυτές που περιέχουν *quarks*, γλουόνια ή και τα δύο. Δυστυχώς είναι πολύ δύσκολο να ξεχωρίσουμε αδρονικούς πίδακες που προέρχονται από γλουόνια, από πίδακες που προέρχονται από *quarks*. Είναι ακόμη πιο δύσκολο να ξεχωρίσουμε πειραματικά αν τα αρχικά παρτόνια σε μια "σκληρή" σκέδαση είναι *quarks* ή γλουόνια. Με αποτέλεσμα οι προβλέψεις της QCD για μια "σκληρή" σκέδαση να είναι cross sections για παραγωγή πιδάκων σε αδρονικές συγκρούσεις αθροιζόμενες πάνω σε όλες τις πιθανές αντιδράσεις *quarks*, *antiquarks* και γλουονίων.

Μια απλή σκέδαση δύο σωμάτων που περιέχουν *quarks*, *antiquarks* και γλουόνια είναι στοιχειώδεις διαδικασίες της διαταρακτικής QCD . Σε αυτή την υποενοότητα θα γράψουμε διάφορες διαδικασίες που θα περιέχουν κουάκρς και γλουόνια. Όλες αυτές οι διαδικασίες θα είναι της τάξης του a_s . Ουσιαστικά το a_s θα είναι σε αντιδράσεις για μεταφορά ορμής της τάξης $Q^2 = \hat{t}$.

Η απλούστερη υποαντίδραση είναι η σκέδαση διαφορετικών ειδών *quarks* για παράδειγμα $u + d \rightarrow u + d$. Σε τάξη a_s η διαδικασία αυτή περιγράφεται με διάγραμμα *Feynman* όπως φαίνεται στο διάγραμμα:



Η αντίδραση αυτή είναι ανάλογη της σκέδασης ηλεκτρονίου-μυονίου στην QED , για την οποία η cross section είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^- \mu \rightarrow e^- \mu) = \frac{2\pi a^2}{\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right] \quad (6.70)$$

Η οποία εξήχθη στο παράρτημα, εξίσωση 6.127. Για να μετατρέψουμε αυτή την έκφραση για σκέδαση *quark* στην QCD θα χρειαστεί να αντικαταστήσουμε τη σταθερά σύζευξης e^2 με το g^2 επί τον αντίστοιχο παράγοντα της ομάδας $SU(3)$. Το διάγραμμα στην QCD περιέχει τον παράγοντα:

$$(t^a)_{i' i} (t^a)_{j' j} \quad (6.71)$$

Όπου τα i, i' είναι τα αρχικά και τελικά χρώματα του u και τα j', j είναι τα αρχικά και τελικά χρώματα του d . Για να μετατρέψουμε την cross section πρέπει να τετραγωνίσουμε τον παράγοντα και να αθροίσουμε πάνω σε όλα τα πιθανά τελικά χρώματα επί τον μέσο όρο των αρχικών χρωμάτων. Αυτό δίνει τον παράγοντα:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \text{tr}[t^b t^a] \cdot \text{tr}[t^b t^a] = \frac{1}{9} [C(r)]^2 \delta^{ab} \delta^{ab} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 = \frac{2}{9} \quad (6.72)$$

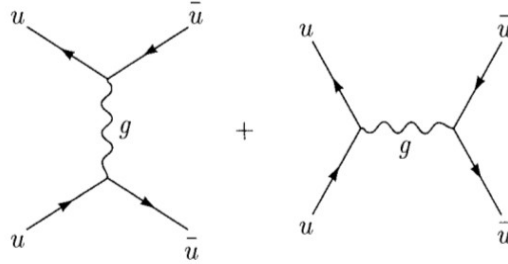
Χρησιμοποιήσαμε την θεμελιώδη αναπαράσταση της $SU(3)$ $C(r) = 1/2$. Με αποτέλεσμα για την ud σκέδαση:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(u\bar{u} \rightarrow u\bar{u}) = \frac{4\pi a_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right] \quad (6.73)$$

Για να πάρουμε την cross section για εξάλωση $q\bar{q}$ σε διαφορετικά είδη κάνουμε $t \leftrightarrow s$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(u\bar{u} \rightarrow \bar{d}d) = \frac{4\pi a_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right] \quad (6.74)$$

Η σκέδαση *quark* με *antiquark* του ίδιου είδους είναι πιο περίπλοκη γιατί συνεισφέρουν δύο διαγράμματα *Feynman* τα οποία συνδυάζονται μεταξύ τους όπως φαίνεται στο διάγραμμα:



Το ανάλογο της διαδικασίας στην *QED* είναι η σκέδαση *Bhabha*, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) = \frac{2\pi a^2}{\hat{s}^2} \left[\left(\frac{\hat{s}}{\hat{t}} \right)^2 + \left(\frac{\hat{t}}{\hat{s}} \right)^2 + u^2 \left(\frac{1}{\hat{s}} + \frac{1}{\hat{t}} \right)^2 \right] \quad (6.75)$$

Η μετατροπή της εξίσωσης αυτής για την διαδικασία της *QCD* δεν είναι καθόλου προφανής γιατί διαφορετικοί παράγοντες λαμβάνουν διαφορετικούς όρους χρώματος.

Η διαδικασία αυτή αναλύεται εύκολα χρησιμοποιώντας αρχικές και τελικές καταστάσεις καθορισμένης ελικιότητας. Για άμαζα φερμιόνια η ελικιότητα διατηρείται έτσι η αντίδραση $e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_R^-$ λαμβάνει συνεισφορά μόνο από το διάγραμμα του καναλιού s ενώ η αντίδραση $e_R^+e_R^- \rightarrow e_R^+e_R^-$ λαμβάνει συνεισφορά μόνο από το διάγραμμα του καναλιού t . Η αντίστοιχη cross section είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_R^-) &= \frac{4\pi a^2}{\hat{s}^2} \left(\frac{\hat{t}}{\hat{s}} \right)^2 \\ \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e_R^+e_R^- \rightarrow e_R^+e_R^-) &= \frac{4\pi a^2}{\hat{s}^2} \left(\frac{\hat{s}}{\hat{t}} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.76)$$

Η cross section για την αντίδραση $e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_L^-$ πρέπει να μηδενίζεται γιατί δεν διατηρείται η ελικιότητα. Η τέταρτη δυνατή διαδικασία έχει συνεισφορές και από το s κανάλι και από το t . Δανειζόμενοι το αποτέλεσμα:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e_R^+e_L^- \rightarrow e_R^+e_L^-) = \frac{4\pi a^2}{\hat{s}^2} \hat{u}^2 \left(\frac{1}{\hat{t} + \frac{1}{\hat{s}}} \right)^2 \quad (6.77)$$

Η cross section αυτή είναι ο όρος που προκύπτει λόγω της 'συμβολής' των δύο διαγραμμάτων. Η αναλλοιωτότητα της QED στην $parity$ μας οδηγεί στο ότι όλες αυτές οι cross sections παραμένουν ίδιες όταν όλες οι ελικότητες αντιστραφούν. Αυτές οι τρεις cross sections συνθέτουν την ολική.

Για να μετατρέψουμε το αποτέλεσμα 6.75 σε πρόβλεψη της QCD πρέπει σε κάθε διάγραμμα που συνεισφέρει να αναθέσουμε ένα παράγοντα χρώματος στο τετράγωνο, όπως ο όρος 6.72. Η cross section που είναι μεταξύ δύο διαγραμμάτων παίρνει έναν παράγοντα της μορφής:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (t^a)_{i'i} (t^a)_{jj'} \cdot (t^b)_{j'i'} (t^b)_{ij} = \frac{1}{9} tr[t^a t^b t^a t^b] \quad (6.78)$$

$$t^a t^b t^a t^b = \left(C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G)\right) t^a t^a = \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) \frac{4}{3} = -\frac{2}{9} \quad (6.79)$$

Επομένως:

$$\frac{1}{9} tr[t^a t^b t^a t^b] = -\frac{2}{27} \quad (6.80)$$

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(u\bar{u} \rightarrow u\bar{u}) = \frac{4\pi a_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} - \frac{2}{3} \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{t}} \right] \quad (6.81)$$

Συνδυάζοντας τα κανάλια s, u βρίσκουμε την cross section για την αντίδραση $uu \rightarrow uu$:

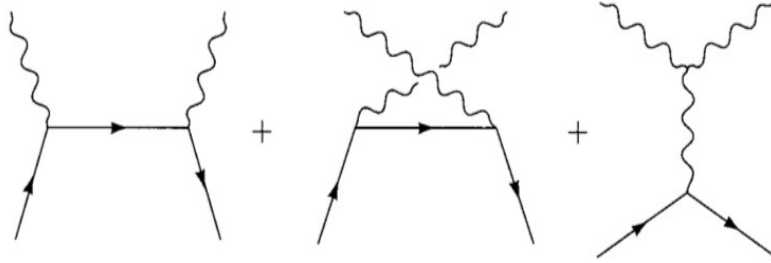
$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(uu \rightarrow uu) = \frac{4\pi a_s^2}{9\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{u}^2 + \hat{s}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2 + \hat{s}^2}{\hat{u}^2} - \frac{2}{3} \frac{\hat{s}^2}{\hat{u}\hat{t}} \right] \quad (6.82)$$

Η αντίδραση $\bar{u}\bar{u} \rightarrow \bar{u}\bar{u}$ έχει την ίδια cross section

Στη συνέχεια θα δούμε μία αντίδραση που περιέχει *quarks* και γλουόνια. Την αντίδραση $q\bar{q} \rightarrow gg$. Το ανάλογο στην QED είναι η $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{2\pi a^s}{\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} \right] \quad (6.83)$$

Εφόσον τα φωτόνια είναι ταυτόσημα σωματίδια η έκφραση ολοκληρώνεται στην μισή στερεά γωνία. Όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα στην αντίδραση αυτή στην QCD συνεισφέρουν τρία διαγράμματα:



Οι συνεισφορές αυτές θα πρέπει να αθροιστούν πάνω στις διαμήκεις καταστάσεις της πολικότητας των γλουονίων. Αν επιλέξουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα στις πολικότητες με την αντικατάσταση:

$$\sum_{\epsilon} \epsilon^{\mu} \epsilon^{*\nu} \rightarrow -g^{\mu\nu} \quad (6.84)$$

είδαμε σε προηγούμενη ενότητα ότι πρέπει να λάβουμε υπόψιν και την 'αρνητική' cross section για την εξαύλωση *quark-antiquark* σε *ghost-antighost*.

Ο κυρίαρχος όρος της αντίδρασης $q\bar{q} \rightarrow gg$ είναι ως προς \hat{t} ή $u \rightarrow 0$. Σε κάθε περίπτωση καναλιού μόνο το αντίστοιχο διάγραμμα συνεισφέρει την αντίστοιχη κινηματική ιδιομορφία. Ο παράγοντας χρώματος που σχετίζεται με το τετράγωνο αυτών των διαγραμμάτων είναι:

$$(t^a)_{ij}(t^b)_{jk} \quad (6.85)$$

Αθροίζουμε πάνω στα χρώματα των δύο γλουονίων a, b και μεσοσταθμισμένο πάνω στο χρώμα των κουάρκ και *antiquark* i, k .

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \text{tr}[t^a t^b t^b t^a] = \frac{1}{9} \cdot 3(C_2(r))^2 = \frac{16}{27} \quad (6.86)$$

Οι 'κυρίαρχοι' όροι προέρχονται από απλή αντικατάσταση των αποτελεσμάτων της *QED* αντικαθιστώντας το $a \rightarrow a_s$ και πολλαπλασιάζοντας με $16/27$:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow gg) = \frac{32\pi a_s}{27\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} - \frac{9}{4} \left(\frac{\hat{t}^2 + u^2}{\hat{s}^2} \right) \right] \quad (6.87)$$

Οι cross sections για τις εναπομένουσες αντιδράσεις *quarks* και γλουονίων υπολογίζονται μέσω *crossing*. Για παράδειγμα η αντίδραση $gg \rightarrow q\bar{q}$ πρέπει να μεσοσταθμιστεί στα γλουονικά χρώματα δίνοντας έναν όρο $(3/8)^2$. Με αποτέλεσμα:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gg \rightarrow q\bar{q}) = \frac{\pi a_s^2}{6\hat{s}^2} \left[\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} - \frac{9}{4} \left(\frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right) \right] \quad (6.88)$$

Για την αντίδραση $qg \rightarrow qg$ κάνουμε *cross* τα κανάλια s και t στην εξίσωση και πολλαπλασιάζουμε με $3/8$ εφόσον το χρώμα είναι μόνο ενός γλουονίου:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(qg \rightarrow qg) = \frac{4\pi a_s^2}{9\hat{s}^2} \left[-\frac{\hat{u}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{9}{4} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right) \right] \quad (6.89)$$

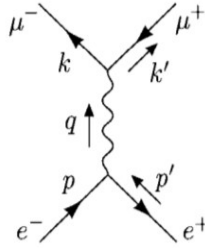
Η cross section για την αντίδραση $\bar{q}g \rightarrow \bar{q}g$ είναι ταυτόσημη.

Οι cross sections που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν με τις συναρτήσεις κατανομής των παρτονίων και να παράξουν προβλέψεις για παραγωγή πιδάκων στις αδρονικές συγκρούσεις.

6.5 Παράρτημα αντιδράσεων της QED $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Η αντίδραση $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ είναι η απλούστερη διαδικασία της QED και η πιο σημαντική στην φυσική υψηλών ενεργειών. Χρησιμοποιείται επίσης στα πειράματα για βαθμονόμηση σε e^+e^- επιταχυντές. Η αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-μιονίου είναι εξαιρετικά χρήσιμη για την αντίδραση $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ που μελετάμε στο κεφάλαιο αυτό.

Σε αυτό το παράρτημα θα υπολογίσουμε την μη πολωμένη cross section $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ στη χαμηλότερη τάξη προσέγγισης. Θα θεωρήσουμε μάζα για το μόνιο και εφόσον ο λόγος $m_e/m_\mu \equiv 1/200$ δεν έχει νόημα να θεωρήσουμε μάζα για τα ηλεκτρόνια. Οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την συνεισφορά του διαγράμματος:



$$= \bar{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}^r(k)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(k') \quad (6.90)$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους και αφήνοντας τους δείκτες του σπιν έχουμε:

$$i\mathcal{M}(e^-(p)e^+(p') \rightarrow \mu^-(k)\mu^+(k')) = \frac{ie^2}{q^2} (\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')) \quad (6.91)$$

Για να υπολογίσουμε την cross section χρειαζόμαστε την έκφραση του $|\mathcal{M}|^2$ οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το μιγαδικό συζυγές του \mathcal{M} . Το δι-σπινωριακό γινόμενο όπως το $\bar{v}\gamma^\mu u$ μπορεί να γίνει μιγαδικό συζυγές:

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v \quad (6.92)$$

Με αυτόν τον τρόπο:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu v(p')) (\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\bar{v}(k')\gamma_\nu u(k)) \quad (6.93)$$

Σε αυτό το σημείο έχουμε ακόμα ελευθερία επιλογής σπινωριακών συναρτήσεων $u^s(p), \bar{v}^{s'}(p')$ που θα αντιστοιχεί στην επιθυμητή κατάσταση σπιν των φερμιονίων. Στα πειράματα είναι δύσκολο να διατηρήσουμε καθορισμένες τις καταστάσεις σπιν οπότε θα πρέπει να ετοιμάσουμε μια αρχική κατάσταση από πολωμένα υλικά και να αναλύσουμε την τελική κατάσταση χρησιμοποιώντας τεχνικές ανεξάρτητες του σπιν. Στα περισσότερα πειράματα οι δέσμες είναι μη πολωμένες

έτσι θα πρέπει η μετρούμενη cross section να είναι μέση τιμή πάνω στις καταστάσεις spin s, s' του ηλεκτρονίου και του ποζιτρονίου αντίστοιχα. Οι μονικοί ανιχνευτές είναι συνήθως τυφλοί στην πολικότητα έτσι οι cross section είναι άθροισμα πάνω στα μονικά spin r, r' .

Η έκφραση του $|\mathcal{M}|^2$ απλοποιείται όταν ξεχάσουμε την πληροφορία του spin. Θέλουμε να υπολογίσουμε:

$$\frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |\mathcal{M}(s, s' \rightarrow r, r')|^2 \quad (6.94)$$

Τα αθροίσματα στα spin μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις συμπληρωματικότητας:

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \quad \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m \quad (6.95)$$

Ξαναγράφοντας το τετράγωνο του \mathcal{M} με σπινοριακούς δείκτες και δουλεύοντας στο πρώτο μισό ώστε να μετακινήσουμε το v δίπλα στο \bar{v} έχουμε:

$$\sum_{s, s'} \bar{v}^{s'}(p') \gamma_{ab}^\mu u_b^s(p) \bar{u}_c^s(p) \gamma_{cd}^\nu v_d^{s'}(p') = (\not{p}' - m)_{da} \gamma_{ab}^\mu (\not{p} + m)_{bc} \gamma_{cd}^\nu = \text{tr}[(\not{p}' - m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu] \quad (6.96)$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο στο δεύτερο μισό παίρνουμε συνολικά:

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{tr}[(\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu] \text{tr}[(\not{k}' + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k} - m_\mu) \gamma_\nu] \quad (6.97)$$

Οι σπίνες u, v έχουν εξαφανιστεί. Κάθε πλάτος πιθανότητας της QED που περιέχει εξωτερικά (*external*) φερμιόνια όταν τετραγωνιστεί μπορεί να γραφτεί με όρους *trace* σε πίνακες γ του Dirac.

Ο Feynman βρήκε ότι αντί να υπολογίσουμε τα ίχνη (*trace*) των γάμμα πινάκων με ευθύ υπολογισμό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αλγεβρικές ιδιότητές τους ώστε να βγάλουμε τα *traces*. Θα θέλαμε να υπολογίσουμε γινόμενα n στο πλήθος γάμμα πινάκων. Για $n = 0$ $\text{tr}\mathbf{1} = 4$ στον τετραδιάστατο χώρο. Για $n = 1$:

$$\text{tr}\gamma^\mu = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.98)$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την *chiral* αναπαράσταση των γάμμα πινάκων. Επίσης το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να το λάβουμε και από τις αλγεβρικές ιδιότητες των γάμμα πινάκων:

$$\begin{aligned} \text{tr}\gamma^\mu &= \text{tr}\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu && \text{since } (\gamma^5)^2 = 1 \\ &= -\text{tr}\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5 && \text{since } \gamma^\mu, \gamma^5 = 0 \\ &= -\text{tr}\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu && \text{cyclic property of trace} \\ &= -\text{tr}\gamma^\mu \end{aligned} \quad (6.99)$$

Εφόσον το ίχνος του γάμμα πίνακα είναι ίσο με τον αρνητικό εαυτό του πρέπει να εξαφανίζεται. Για n στο πλήθος γινόμενα από γάμμα πίνακες θα παίρνουμε n στο πλήθος αρνητικά πρόσημα στο δεύτερο βήμα και το *trace* είναι μηδέν αν το n είναι περιττό.

$$tr\gamma^\mu\gamma^\nu = tr(2g^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1} - \gamma^\nu\gamma^\mu) = 8g^{\mu\nu} - tr\gamma^\mu\gamma^\nu \quad (6.100)$$

Στο πρώτο ίσον κάναμε χρήση της αντιμεταθετικότητας των γάμμα πινάκων και στο δεύτερο ίσον την κυκλική ιδιότητα του *trace*. Οπότε $tr\gamma^\mu\gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}$. Το *trace* ζυγού πλήθους γινομένου γάμμα πινάκων μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με αυτό τον υπολογισμό. Αντιμεταθέτουμε τον πρώτο γάμμα πίνακα μέχρι να φτάσει στα δεξιά του γινομένου και μετά κυκλικά τον φέρνουμε πάλι στα αριστερά.

$$\begin{aligned} tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= tr(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma) \\ &= tr(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma + \gamma^\nu\gamma^\rho 2g^{\mu\sigma} - \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \end{aligned} \quad (6.101)$$

Χρησιμοποιώντας την κυκλική μετάθεση όρων του *trace* στον τελευταίο όρο του δεξιά μέλους, τον φέρνουμε στο αριστερό οπότε:

$$\begin{aligned} tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= g^{\mu\nu}tr\gamma^\rho\gamma^\sigma - g^{\mu\rho}tr\gamma^\nu\gamma^\sigma + g^{\mu\sigma}tr\gamma^\nu\gamma^\rho \\ &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (6.102)$$

Συνήθως σε υπολογισμούς είναι χρήσιμος ο πίνακας $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Το *trace* του γινομένου του γ^5 επί περιττό πλήθος γάμμα πινάκων είναι μηδέν. Επίσης το *trace* του γ^5 είναι μηδέν:

$$tr\gamma^5 = tr(\gamma^0\gamma^0\gamma^5) = -tr(\gamma^0\gamma^5\gamma^0) = -tr(\gamma^0\gamma^0\gamma^5) = -tr\gamma^5 \quad (6.103)$$

Το ίδιο κάνουμε και για το $tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5)$. Για να αξιολογήσουμε το $tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$ μπορούμε να δούμε ότι η ίδια ιδέα εφαρμόζεται με το προηγούμενο *trace* οπότε $tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) = 0$ εκτός και αν τα (μ, ν, ρ, σ) είναι κάποια μετάθεση των $(0, 1, 2, 3)$. Τότε αναγνωρίζουμε ότι από τους κανόνες αντιμετάθεσης των γάμμα πινάκων αν αλλάξουμε την σειρά δύο δεικτών παίρνουμε ένα πρόσημο μείον επομένως το $tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$ πρέπει να είναι ανάλογο του $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) &= a\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ tr(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5) &= a\epsilon^{0123} \\ tr(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) &= a\epsilon^{0123} \\ itr(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) &= a\epsilon^{0123} \\ itr(-i\gamma^5(-i\gamma^5)) &= a\epsilon^{0123} \\ -itr(\gamma^5\gamma^5) &= ag^{0\mu}g^{1\nu}g^{2\rho}g^{3\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \\ -itr(I^4) &= ag^{00}g^{11}g^{22}g^{33}\epsilon_{0123} \\ -4i &= -a \end{aligned}$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (6.104)$$

Οπότε συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{1}) &= 4 \\ \text{tr}(\text{any odd number of } \gamma\text{'s}) &= 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ \text{tr}(\gamma^5) &= 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) &= 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned} \quad (6.105)$$

Εκφράσεις που προέρχονται από την τελευταία εξίσωση απλοποιούνται με τις ταυτότητες:

$$\begin{aligned} \epsilon^{a\beta\gamma\delta} \epsilon_{a\beta\gamma\delta} &= -24 \\ \epsilon^{a\beta\gamma\mu} \epsilon_{a\beta\gamma\nu} &= -6\delta_\nu^\mu \\ \epsilon^{a\beta\mu\nu} \epsilon_{a\beta\rho\sigma} &= -2(\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \end{aligned} \quad (6.106)$$

Μία άλλη χρήσιμη ταυτότητα επιτρέπει να αντιστρέψουμε την διάταξη των γάμμα πινάκων μέσα στο *trace*:

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \dots) = \text{tr}(\dots \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu) \quad (6.107)$$

Για να αποδειχτεί αυτή η σχέση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $C = \gamma^0 \gamma^2$ δηλαδή τον τελεστή φορτίου (*charge conjugation operator*). Ο τελεστής αυτός ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$$C^2 = 1, \quad C\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T \quad (6.108)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \dots) &= \text{tr}(C\gamma^\mu C C\gamma^\nu C \dots) \\ &= (-1)^n \text{tr}[(\gamma^\mu)^T (\gamma^\nu)^T \dots] \\ &= \text{tr}(\dots \gamma^\nu \gamma^\mu) \end{aligned} \quad (6.109)$$

Αν δύο γάμμα πίνακες πολλαπλασιάζονται μέσα στο *trace* είναι καλό να τους υπολογίζουμε πριν επιτεθούμε συνολικά στο *trace* με τις εξισώσεις που ειπώθηκαν.

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma_\mu &= g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \\
&= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}) \gamma^\mu \gamma^\nu \\
&= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + g_{\mu\nu} \gamma^\nu \gamma^\mu) \\
&= \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \\
&= g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} I^4 \\
&= 4I^4
\end{aligned} \tag{6.110}$$

Οι ακόλουθες ταυτότητες συστολής (*contraction identities*) αποδεικνύονται με τις σχέσεις αντιμετάθεσης των γάμμα πινάκων:

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= \gamma^\mu (2g_\mu^\nu I^4 - \gamma_\mu \gamma^\nu) \\
&= 2\gamma^\mu g_\mu^\nu - \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma^\nu \\
&= 2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu
\end{aligned} \tag{6.111}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= \gamma^\mu, \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu \\
&= 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu, \gamma^\rho \gamma_\mu + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\mu, \quad \gamma^\mu \gamma_\mu = 4I^4 \\
&= 2\gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\nu 2g^{\mu\rho} \gamma_\mu + 4\gamma^\nu \gamma^\rho \\
&= 2\gamma^\rho \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\rho + 4\gamma^\nu \gamma^\rho \\
&= 2(\gamma^\rho \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\rho) \\
&= 2\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} \\
&= 4g^{\nu\rho} I_4
\end{aligned} \tag{6.112}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία εξίσωση που αποδείξαμε και την σχέση αντιμετάθεσης των γάμμα πινάκων μπορούμε να δείξουμε:

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu \\
&= 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu - 4\gamma^\nu g^{\rho\sigma} \\
&= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - 4\gamma^\nu g^{\rho\sigma} \\
&= 2(2g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho) \gamma^\nu - 4\gamma^\nu g^{\rho\sigma} \\
&= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu
\end{aligned} \tag{6.113}$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες που αποδείξαμε θα υπολογίσουμε τα *traces* της εξίσωσης 6.97. Για το *trace* του ηλεκτρονίου έχουμε:

$$tr[(\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p}' + m_e) \gamma^\nu] = 4[p'^\mu p'^\nu + p'^\nu p'^\mu - g^{\mu\nu} (p \cdot p' + m_e^2)] \tag{6.114}$$

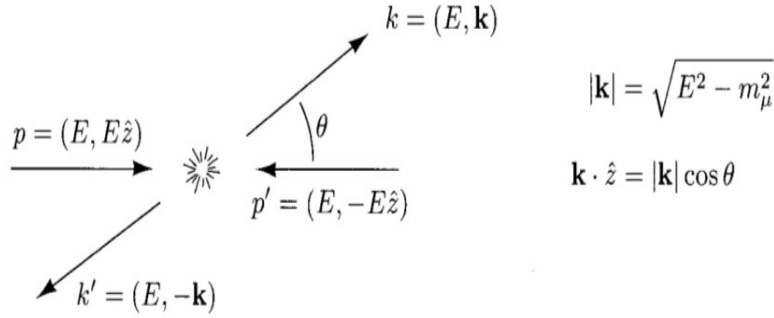
Ομοίως το *trace* για το μύονιο θα είναι:

$$tr[(\not{k}' + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu] = 4[k'_\mu k'_\nu + k'_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} (k \cdot k' + m_\mu^2)] \tag{6.115}$$

Από εδώ και στο εξής θα θέσουμε $m_e = 0$ για τους λόγους που αναφέραμε στην αρχή του κειμένου. Πολλαπλασιάζοντας μεταξύ τους τις δυο τελευταίες σχέσεις και ομαδοποιώντας τους όρους παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |M|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + m_\mu^2(p \cdot p')] \quad (6.116)$$

Για να μπορέσουμε να πάρουμε πιο 'πρακτική' έκφραση η οποία να είναι σε θέση να μας δώσει πειραματική πρόβλεψη πρέπει να εξειδικεύσουμε τα διανύσματα p, p', k, k', q με όρους βασικών κινηματικών μεταβλητών όπως ενέργειες και γωνίες σε ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Στην πράξη ένα τέτοιο σύστημα προσδιορίζεται από τις πειραματικές συνθήκες οπότε εδώ θα διαλέξουμε το πιο απλό ώστε να υπολογίσουμε την cross section στο σύστημα του κέντρου μάζας της αντίδρασης. Για αυτή την επιλογή τα αρχικά και τελικά τετραδιανύσματα μπορούν να γραφτούν ως εξής:



Για να υπολογίσουμε το τετράγωνο του M ως προς ενέργειες και γωνίες θα χρειαστούμε τις εκφράσεις:

$$\begin{aligned} q^2 &= (p + p')^2 = 4E^2, & p \cdot p' &= 2E^2 \\ p \cdot k &= p' \cdot k' = E^2 - E|\mathbf{k}| \cos \theta, & p \cdot k' &= p' \cdot k = E^2 + E|\mathbf{k}| \cos \theta \end{aligned} \quad (6.117)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |M|^2 &= \frac{8e^4}{16E^4} [E^2(E - |\mathbf{k}| \cos \theta)^2 + E^2(E + |\mathbf{k}| \cos \theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2] \\ &= e^4 \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (6.118)$$

Αυτό που μένει είναι να εισάγουμε την τελευταία εξίσωση στην έκφραση που ενώνει το M με την cross section :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2E_{cm}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{16\pi^2 E_{cm}} \cdot \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{a^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (6.119)$$

Ολοκληρώνοντας την στερεά γωνία λαμβάνουμε:

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi a^2}{3E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \quad (6.120)$$

Στο όριο των υψηλών ενεργειών όπου $E \gg m_\mu$ η έκφραση απλοποιείται:

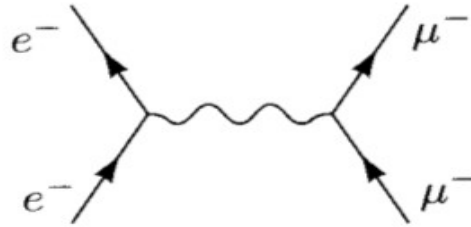
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{a^2}{4E_{cm}^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (6.121)$$

$$\sigma_{total} \rightarrow \frac{4\pi a^2}{3E_{cm}^2} \left(1 - \frac{3}{8} \left(\frac{m_\mu}{E}\right)^4 - \dots\right) \quad (6.122)$$

Για να περάσουμε στην cross section της αντίδρασης $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ θα γράψουμε την έκφραση 6.116 με όρους μεταβλητών *Mandelstam* ώστε να κάνουμε χρήση της συμμετρίας *crossing*. Δουλεύοντας στην αντίδραση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ οι μεταβλητές *Mandelstam* στο όριο των υψηλών ενεργειών είναι: $t = -2p \cdot k = -2p' \cdot k'$, $u = -2p \cdot k' = -2p' \cdot k$ και $s = (p + p')^2 = q^2$. Επομένως έχουμε:

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right] \quad (6.123)$$

Για να μετατρέψουμε αυτό το πλάτος στο πλάτος της αντίδρασης $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ θα στρέψουμε το διάγραμμα στα πλάγια. Οι κανόνες του *crossing* απαιτούν να αλλάξουμε πρόσημο στο p' , στην ορμή του ποζιτρονίου και να την ερμηνεύσουμε σαν την ορμή του εξερχόμενου ηλεκτρονίου. Οπότε το $s \rightarrow t$, το παλιό t γίνεται s και το u παραμένει ίδιο. Και έτσι προκύπτει:



$$\frac{1}{4} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right] \quad (6.124)$$

Για να κάνουμε χρήση του αποτελέσματος αυτού στην QCD θα πολλαπλασιάσουμε με το ηλεκτρικό φορτίο των *quarks* Q_i και οι $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ είναι οι μεταβλητές *Mandelstam* για την σύγκρουση ηλεκτρονίου-*quark*.

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4 Q_i^2}{\hat{t}^2} \left[\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{4} \right] \quad (6.125)$$

Την οποία θα την βάλουμε μέσα στη σχέση της cross section για το κέντρο μάζας αλλά ως προς τις μεταβλητές *Mandelstam*:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d \cos \theta_{CM}} &= \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{16\pi} \frac{1}{4} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{16\pi} \frac{8e^4 Q_i^2}{\hat{t}^2} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{4} \right) \\ &= \frac{\pi a^2 Q_i^2}{\hat{s}} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (6.126)$$

Επειδή $\hat{t} = -\hat{s}(1 - \cos \theta_{CM})/2$:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} = \frac{2\pi a^2 Q_i^2}{\hat{s}^2} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{4} \right) \quad (6.127)$$

Και έτσι καταλήξαμε στη ζητούμενη cross section για την αντίδραση του $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

References

1. J.G.H. de Groot, et. al., *Z.Phys.* **C1**, 143 (1979)
2. V.N. Gribov and Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15**, 438 (1972)
3. Michael E. Peskin, Dan V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory* (*Frontiers in Physics*)

Επίλογος

Σε αυτή την εργασία είδαμε τα σημαντικότερα σημεία των $SU(N)$ θεωριών και κάποιες από τις προβλέψεις της $pQCD$. Δουλεύοντας από πρώτες αρχές είδαμε πως κατασκευάζεται η λαγκρανζιανή των $Yang - Mills$ η οποία ήταν η βάση για να μελετήσουμε τις αλληλεπιδράσεις της και να διαπιστώσουμε ότι επιδεικνύει ασυμπτωτική ελευθερία μέσω του υπολογισμού της βήτα συνάρτησης. Επίσης στο ίδιο κεφάλαιο είδαμε την μέθοδο $Faddeev - Popov$ οι οποίοι με περίτεχνο τρόπο μπόρεσαν να ακυρώσουν τις μη φυσικές πολικότητες του πεδίου βαθμίδας εισάγοντας τα πεδία *ghosts* τα οποία λειτουργούν ως αντίθετοι μποζονικοί βαθμοί ελευθερίας παρότι είναι φερμιονικά αντιμεταθετικά πεδία. Η μέθοδος αυτή γενικεύτηκε μέσω της $BRST$ συμμετρίας που δημιουργεί *ghost* πεδία σε θεωρίες που ο καθορισμός της βαθμίδας δεν είναι αρκετός για να απομονώσει τις φυσικές πολικότητες των πεδίων που η χβάντωση γίνεται με την μέθοδο της συναρτησιακής ολοκλήρωσης.

Πλέον η μέθοδος $BRST$ έχει καταλήξει να είναι ανεξάρτητη της συναρτησιακής ολοκλήρωσης διότι έγινε αντιληπτό ότι αποτελεί μέθοδος χβάντωσης από μόνη της με εξαιρετικό γεωμετρικό χαρακτήρα. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται εκτός των άλλων σε τοπολογικές χβαντικές θεωρίες πεδίου. Το ζήτημα αυτό θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί ως συνέχεια της διπλωματικής εργασίας.

Στο επόμενο κεφάλαιο είδαμε πως να εφαρμόζουμε τον φορμαλισμό που αναπτύξαμε ώστε να εξηγήσουμε διάφορες φυσικές cross sections που εμφανίζονται στο πείραμα. Αφού ταυτοποιήσαμε φυσικά σωματίδια με πεδία και τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις τους αναπτύξαμε τον φορμαλισμό των παρτονικών συναρτήσεων κατανομής με την υπόθεση ότι κάθε παρτόνιο που αποτελούν συνολικά το αδρόνιο "κουβαλά" ένα συγκεκριμένο κλάσμα από την συνολική ορμή. Οπότε πλέον έχουμε αλληλεπιδράσεις παρτονίων με ηλεκτρόνια ή παρτονίων με νετρίνο. Με λίγα λόγια μπορέσαμε μέσω των παρτονίων που είναι φερμιόνια να συμπυκνώσουμε τις νέες πληροφορίες για τα αδρόνια και πολυσωματιδιακά αντικείμενα όπως *jets* σε αλληλεπιδράσεις μεταξύ φερμιονίων και μποζονίων βαθμίδας τις οποίες ως ένα βαθμό μπορούμε να τις δανειστούμε από την QED .

Ως συνέχεια αυτής της μελέτης θα ήταν ο υπολογισμός της αντίδρασης $gg \rightarrow gg$ η οποία δεν έχει ανάλογο στην QED και ο υπολογισμός όλων των

cross section που αναφέραμε σε ανώτερη τάξη προσέγγισης. Επίσης ένα μεγάλο κομμάτι των ισχυρών αλληλεπιδράσεων που δεν είδαμε αναλυτικά είναι η μη διαταρακτική QCD ή $npQCD$ η οποία ορίζεται σε μεγάλο *coupling* χωρίς να έχουμε την ανάγκη ορισμού της θεωρίας στο πλαίσιο των υψηλών ενεργειών. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να απαντήσουμε τρεις ερωτήσεις. Αρχικά, πως περιγράφουμε δυνάμεις που συζεύγουν τα *quarks* εντός των αδρονίων. Δεύτερον, ποια είναι η κατάλληλη περιγραφή των συστημάτων *quark – antiquark* και τριών *quarks* που συνδέονται με τις δυνάμεις που αναφέραμε και τρίτον πως υπολογίζουμε τα πλάτη σκέδασης με αυτές τις καταστάσεις μη διαταρακτικά. Ο *KennethGeddesWilson* πρότεινε την αντικατάσταση του χωροχρόνου με ένα διακριτό πλέγμα διακριτών σημείων. Ένα τέτοιο πλέγμα μπορούμε να το φανταστούμε σε Ευκλείδειο χωροχρόνο έτσι ώστε να ορίσουμε συναρτησιακή ολοκλήρωση και να προσεγγίσουμε τις Ευκλείδειες *Green* συναρτήσεις. Μια τέτοια θεωρία μπορεί να ορισθεί καλώς στο πλαίσιο του ισχυρού *coupling*.