ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ

και **την ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»**

Εφαρμογές του Θεωρήματος Κατηγορίας Baire σε Μετρικούς Χώρους

Ευστράτιος Θήριος

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: 09313017

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Βασίλης Παπανικολάου

ΑΘΗΝΑ, 15/9/2016

Στην μητέρα μου, στην γυναίκα μου και στην κόρη μου.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Στην παρούσα εργασία αρχικά γίνεται μία εκτεταμένη μελέτη σχετικά με το θεώρημα κατηγορίας του Baire και ισοδύναμες μορφές του. Στην συνέχεια γίνεται αναλυτική αναφορά σε γνωστές εφαρμογές του. Τέλος αποδεικνύονται λιγότερο γνωστές εφαρμογές του θεωρήματος κατηγορίας του Baire.

Βιογραφικό Σημείωμα του Baire

Στο École Normale Supérieure ο Baire παρακολούθησε διαλέξεις από Jules Taneri και Goursat και, επιπλέον, παρακολούθησε διαλέξεις από Hermite , Émile Picard και Poincaré στη Σορβόννη.

Ενώ ήταν φοιτητής βοήθησε στην συγγραφή των διαλέξεων του Poincaré, για τη διάδοση της θερμότητας.

Απέκτησε την πρώτη θέση του ως καθηγητής στο λύκειο Bar-le-Duc Στο Lycée Bar-le-Duc Baire εργάστηκε πάνω στη θεωρία των συναρτήσεων και στην έννοια του ορίου.

Σε αυτό το διάστημα ανακάλυψε τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες μια συνάρτηση είναι το όριο μίας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων. Αμέσως μετά από αυτό ο Baire ταξινόμησε τις συναρτήσεις σε κατηγορία 1, κατηγορία 2 και κατηγορία 3. Οι συναρτήσεις κατηγορίας 1 είναι αυτές που είναι το όριο μίας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων και οι συναρτήσεις κατηγορίας 2 είναι εκείνες που είναι το όριο μίας ακολουθίας συναρτήσεων κατηγορίας 1. Τέλος η κλάση 3 αποτελείται από συναρτήσεις οι οποίες είναι το όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων κατηγορίας 2.

Ο Baire, έλαβε μια υποτροφία για να του επιτρέψει να συνεχίσει τις σπουδές του στην Ιταλία και εκεί γνωρίστηκε με τον Volterra. Καθώς εργαζόταν στο λύκειο, ο Baire έγραψε παράλληλα τη διδακτορική διατριβή του πάνω στις ασυνεχείς συναρτήσεις. Εξετάστηκε επιτυχώς στις 24 Μαρτίου 1899 από τους Darboux , Appell και Émile Picard.

Το 1901 ο Baire διορίστηκε στο Πανεπιστήμιο του Μονπελιέ ως "Maitre des συνέδρια". Το 1904 τιμήθηκε με το Ίδρυμα Peccot με υποτροφία και εντάχθηκε στην Σχολή Επιστημών στο Ντιζόν. Το 1907 προήχθη σε καθηγητή της Ανάλυσης στο Ντιζόν.

Ο Baire είχε αναπτύξει αλληλογραφία με τον Émile Borel. Στις επιστολές ο Baire γράφει με μεγάλη λεπτομέρεια σχετικά με την έρευνα και τις ιδέες του, πάνω στην ταξινόμηση των συναρτήσεων Baire, στα σύνολα πρώτης και δεύτερης κατηγορία, και στην ημισυνέχεια.

Ο Baire έγραψε μια σειρά σημαντικών βιβλίων ανάλυσης συμπεριλαμβανομένων των *Théorie des nombres irrationels, des limites et de la continuité* (1905) και *Leçons sur les théories générales de l'analyse*, 2 Vols. (1907-8). Ο Baire έκανε ένα αποφασιστικό βήμα για την απομάκρυνση από την διαισθητική ιδέα των συναρτήσεων και της συνέχειας και είδε ξεκάθαρα ότι η θεωρία συνόλων ήταν θεμελιώδους σημασίας για την αυστηρή πραγματική ανάλυση.

Εισαγωγικά στοιχεία για μετρικούς χώρους

Ορισμός-Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $Z \subseteq \mathrm{X}$. Η σχετική μετρική στον Z ως προς την μετρική ρ είναι ο περιορισμός της συνάρτησης ρ στο ZxZ.

Πρόταση-Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $Z \subseteq \mathrm{X}$ και σ η σχετική μετρική στο Z. Για κάθε $z \in Z$ και $\varepsilon > 0$ ισχύει $B_\sigma(z, \varepsilon) = B_\rho(z, \varepsilon) \cap Z$.

Απόδειξη-Είναι άμεσο από τον ορισμό της ανοικτής σφαίρας $B_\rho(z, \varepsilon) = \{x \in \mathrm{X} | \rho(x, z) < \varepsilon\}$ στον μετρικό χώρο (X, ρ) και τον ορισμό της ανοικτής σφαίρας $B_\sigma(z, \varepsilon) = \{x \in Z | \rho(x, z) < \varepsilon\}$ στον μετρικό χώρο (Z, σ).

Πρόταση- Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $Z \subseteq \mathrm{X}$, σ η σχετική μετρική στο Z και $G \subseteq Z$. Το G είναι ανοικτό υποσύνολο του (Z, σ) αν και μόνο αν υπάρχει A ανοικτό υποσύνολο του X έτσι ώστε $G = A \cap Z$.

Απόδειξη-Εφόσον το G είναι ανοικτό υποσύνολο του (Z, σ) για κάθε $z \in G$ υπάρχει $\varepsilon_z > 0$ έτσι ώστε $B_\sigma(z, \varepsilon_z) \subseteq Z$. Άρα έχουμε ότι $G = \bigcup_{z \in G} B_\sigma(z, \varepsilon_z)$. Συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι $G = \bigcup_{z \in G} \{B_\rho(z, \varepsilon_z) \cap Z\} = Z \cap \bigcup_{z \in G} B_\rho(z, \varepsilon_z)$. Θέτοντας $A = \bigcup_{z \in G} B_\rho(z, \varepsilon_z)$ έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα έστω $z \in G$. Εφόσον ισχύει ότι $A \supseteq G$ και το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X, υπάρχει $\varepsilon_z > 0$ έτσι ώστε $B_\rho(z, \varepsilon_z) \subseteq A$. Συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι $B_\sigma(z, \varepsilon_z) = B_\rho(z, \varepsilon_z) \cap Z \subseteq A \cap Z = G$. Δηλαδή Το G είναι ανοικτό υποσύνολο στο μετρικό χώρο (Z, σ).

Πρόταση-Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $Z \subseteq \mathrm{X}$, σ η σχετική μετρική στο Z και $F \subseteq Z$. Το F είναι κλειστό υποσύνολο του (Z, σ) αν και μόνο αν υπάρχει K κλειστό υποσύνολο του X έτσι ώστε $F = K \cap Z$.

Απόδειξη-Εφόσον το F είναι κλειστό υποσύνολο του (Z, σ), συνεπάγεται ότι $Z \backslash F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (Z, σ). Συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει ανοικτό σύνολο A στο (X, ρ) έτσι ώστε το $Z \backslash F = A \cap Z$. Θέτουμε $K = \mathrm{X} \backslash A$. Το K είναι κλειστό στο (X, ρ) και ισχύει $F = Z \backslash Z \backslash F = Z \backslash \{A \cap Z\} = \{Z \backslash A\} \cup \emptyset = Z \cap \{\mathrm{X} \backslash A\} = Z \cap K$ που είναι και το ζητούμενο.

Αντίστροφα έστω ότι ισχύει $F = K \cap Z$. Τότε έχουμε ότι $Z \backslash F = Z \backslash \{K \cap Z\} = Z \backslash K = Z \cap \{\mathrm{X} \backslash K\}$. Εφόσον το $\mathrm{X} \backslash K$ είναι ανοικτό υποσύνολο στο μετρικό χώρο (X, ρ), από την προηγούμενη πρόταση συνεπάγεται ότι και το $Z \backslash F$ είναι ανοικτό στο μετρικό χώρο (Z, σ).

Συνεπώς το υποσύνολο F είναι κλειστό στον μετρικό χώρο (Z, σ), που είναι και το ζητούμενο.

Ορισμός-Έστω Ε ένα μη κενό υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, ρ). Η διάμετρος του Ε ορίζεται ως $diam(E) = sup\{\rho(x, z) | x, z \in E\}$.

Ορισμός-Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq \mathrm{X}$. Το A είναι φραγμένο αν και μόνο αν $diam(A) < \infty$.

Πρόταση-Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $diam(A) = diam(\bar{A})$.

Απόδειξη-Εφόσον το $A \subseteq \bar{A}$ εξορισμού έχουμε ότι $diam(A) \leq diam(\bar{A})$.

Αντίστροφα έστω $x, z \in \bar{A}$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της κλειστότητας υπάρχουν $x_1, z_1 \in A$ έτσι ώστε $\rho(x, x_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ και $\rho(z, z_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Συνεπώς ισχύουν τα ακόλουθα, $\rho(x, z) \leq \rho(x, x_1) + \rho(x_1, z_1) + \rho(z, z_1) < \varepsilon + diam(A)$.

Δεδομένου ότι το $\varepsilon > 0$ είναι τυχαίο συνεπάγεται ότι $\rho(x, z) \leq diam(A)$. Επίσης επειδή και τα $x, z \in \bar{A}$ είναι τυχαία, συνεπάγεται ότι η $diam(\bar{A}) = sup\{\rho(x, z) | x, z \in \bar{A}\} \leq diam(A)$. Συνεπώς η $diam(A) = diam(\bar{A})$.

Ορισμός-Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq \mathrm{X}$.

1. Το A είναι G_δ σύνολο αν υπάρχει ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανοικτών υποσυνόλων του Χ, ώστε $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.
2. Το A είναι F_σ σύνολο αν υπάρχει ακολουθία $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του Χ, ώστε $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι το συμπλήρωμα ενός G_δ συνόλου είναι F_σ σύνολο και αντίστροφα.

Πρόταση-Αν (X, ρ) μετρικός χώρος, $\emptyset \neq A \subseteq \mathrm{X}$ και $x \in \mathrm{X}$, τότε $x \in \bar{A}$ αν και μόνο αν $\rho(x, A) = 0$.

Απόδειξη-Έστω ότι το $\rho(x, A) = \delta > 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\rho(x, z) \geq \delta$ για κάθε $z \in A$. Συνεπώς ισχύει ότι $B\left(x, \frac{\delta}{2}\right) \cap A = \emptyset$. Άτοπο διότι το $x \in \bar{A}$.

Αντίστροφα έστω $\varepsilon > 0$, τότε από τον ορισμό του infimum υπάρχει $z \in A$ έτσι ώστε $\rho(x, z) < \varepsilon$. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Συνεπώς το $x \in \bar{A}$.

Πρόταση-(i) Κάθε κλειστό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ) είναι G_δ σύνολο.

(ii) Κάθε ανοικτό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ) είναι F_σ σύνολο.

Απόδειξη-(i) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και F κλειστό υποσύνολο του X. Θέτουμε $G_n = \left\{x \in \mathrm{X} | \rho(x, F) < \frac{1}{n}\right\}$. Εφόσον η συνάρτηση $f(x) = \rho(x, F)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνεπάγεται ότι το σύνολο G_n είναι ανοικτό. Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Δηλαδή το F είναι G_δ σύνολο.

(ii) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και G ανοικτό υποσύνολο του X. Συνεπώς το $\mathrm{X}\backslash G$ είναι κλειστό στο (X, ρ). Δηλαδή υπάρχει ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του (X, ρ) έτσι ώστε $\mathrm{X}\backslash G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Από το θέωρημα De Morgan προκύπτει ότι $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X}\backslash G_n$, όπου το $\mathrm{X}\backslash G_n$ είναι κλειστό στο (X, ρ) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή το G είναι F_σ σύνολο.

Πρόταση (Χαρακτηρισμός Cantor πλήρων μετρικών χώρων)-Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος τα επόμενα είναι ισοδύναμα,

1) Ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.
2) Αν $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X με $diam(F_n) \to 0$ τότε υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Απόδειξη-Θεωρούμε ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και ότι η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X με $diam(F_n) \to 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγεται τυχαίο $x_n \in F_n$.

Ισχυρισμός, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

Πράγματι έστω ε > 0, τότε υπάρχει $n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_o(\varepsilon)$ ισχύει ότι $diam(F_n) < \varepsilon$. Εφόσον η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα για κάθε $m > n \geq n_o(\varepsilon)$ τα $x_n, x_m \in F_{n_o(\varepsilon)}$. Δηλαδή για κάθε $m > n \geq n_o(\varepsilon)$ το $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Επειδή ο (X, ρ) είναι πλήρης, υπάρχει $x \in \mathrm{X}$ έτσι ώστε $x_n \to x$. Εξορισμού της κατασκευής της ακολουθίας προκύπτει ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το $(x_n)_{n\geq m} \subset F_m$. Αλλά για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το F_m είναι κλειστό και η ακολουθία $(x_n)_{n\geq m}$ συγκλίνει στο x ως υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Συνεπώς το $x \in F_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Έστω $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ με $x \neq z$ τότε συνεπάγεται ότι το $0 < \rho(x, z) = \varepsilon$. Αλλά για ε > 0 υπάρχει $n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_o(\varepsilon)$, ισχύει ότι $diam(F_n) < \varepsilon$. Συνεπώς για κάθε $n \geq n_o(\varepsilon)$ η $diam(F_n) < \rho(x, z)$. Δηλαδή για κάθε $n \geq n_o(\varepsilon)$ είτε $x \notin F_n$ είτε $z \notin F_n$. Άτοπο. Συνεπώς $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Αντίστροφα, έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $F_n = \overline{\{x_\kappa\}_{\kappa\geq n}}$. Συνεπώς η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X.

Ισχυρισμός, Αν η $diam(\{x_\kappa\}_{\kappa\geq n}) \to 0$ συνεπάγεται ότι $diam(F_n) \to 0$.

Πράγματι έστω $x, z \in F_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχουν $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$,$(z_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \{x_\kappa\}_{\kappa\geq n}$ ακολουθίες έτσι ώστε $x_m \to x$ και $z_m \to z$.

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_o(\varepsilon)$ η $diam(\{x_\kappa\}_{\kappa \geq n}) < \varepsilon$. Τότε υπάρχουν $l_o(\varepsilon), m_o(\varepsilon), k_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $m \geq l_o(\varepsilon)$, $\rho(z_m, z) < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $m \geq m_o(\varepsilon)$ και $\rho(x_{\widetilde{m}}, z_m) < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $m, \widetilde{m} \geq k_o(\varepsilon) \geq n_o(\varepsilon)$.

Από τα προαναφερόμενα είναι άμεσο ότι για κάθε $m, \widetilde{m} \geq max\{n_o(\varepsilon), m_o(\varepsilon), k_o(\varepsilon)\}$ ισχύει ότι $\rho(x, z) \leq \rho(x_{\widetilde{m}}, x) + \rho(x_{\widetilde{m}}, z_m) + \rho(z_m, z) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Συνεπώς $diam\left(\overline{\{x_\kappa\}_{\kappa \geq n}}\right) < \varepsilon$. Άρα ισχύει ότι $diam(F_n) \to 0$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε η $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Ισχυρισμός, η $x_n \to x$.

Πράγματι εφόσον $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, τότε $x \in F_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_{\kappa_n} \in \{x_\kappa\}_{\kappa \geq n}$ έτσι ώστε το $\rho\left(x_{\kappa_n}, x\right) < \frac{1}{n}$. Εφόσον η $x_{\kappa_n} \to x$ και η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική, έχουμε ότι $x_n \to x$.

Θεώρημα κατηγορίας του Baire

Θεώρημα κατηγορίας του Baire-Έστω (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε η $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

Απόδειξη-Αρκεί να δείξουμε ότι αν $x_o \in \mathrm{X}$ και $\varepsilon_o > 0$ τότε η $B(x_o, \varepsilon_o) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. Εφόσον το υποσύνολο U_1 είναι πυκνό στον χώρο (X, ρ), τότε η $U_1 \cap B(x_o, \varepsilon_o) \neq \emptyset$. Συνεπώς υπάρχει $x_1 \in U_1 \cap B(x_o, \varepsilon_o)$. Επίσης το U_1 είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $0 < \varepsilon_1' < \frac{1}{2}$ έτσι ώστε $\overline{B\left(x_1, \frac{\varepsilon_1'}{2}\right)} \subset B(x_1, \varepsilon_1') \subset U_1 \cap B(x_o, \varepsilon_o)$. Θέτουμε $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1'}{2}$. Τότε ισχύει ότι $\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subset U_1 \cap B(x_o, \varepsilon_o)$.

Με τον ίδιο κατασκευαστικό τρόπο, για κάθε $1 < \kappa \leq n$ ισχύει ότι $\overline{B(x_\kappa, \varepsilon_\kappa)} \subset U_\kappa \cap B(x_{\kappa-1}, \varepsilon_{\kappa-1})$ με $0 < \varepsilon_\kappa' < \frac{1}{2\kappa}$ και $\varepsilon_\kappa = \frac{\varepsilon_\kappa'}{2}$.

Από υπόθεση το υποσύνολο U_{n+1} είναι ανοικτό και πυκνό στον χώρο (X, ρ). Συνεπώς υπάρχει $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap B(x_n, \varepsilon_n)$ και $0 < \varepsilon_{n+1}' < \frac{1}{2(n+1)}$ έτσι ώστε $\overline{B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1})} \subset B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}') \subset U_{n+1} \cap B(x_n, \varepsilon_n)$ όπου $\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1}'}{2}$.

Άρα ισχύουν τα ακόλουθα,

1. $B(x_o, \varepsilon_o) \supset \overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \supset B(x_1, \varepsilon_1) \supset \cdots \supset \overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \supset B(x_n, \varepsilon_n) \supset \overline{B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1})} \supset B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \ldots$
2. $\overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subset U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
3. Εφόσον για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subset B\left(x_n, \frac{1}{2n}\right)$ συνεπάγεται ότι $diam\left\{\overline{B(x_n, \varepsilon_n)}\right\} \leq diam\left\{B\left(x_n, \frac{1}{2n}\right)\right\} \leq \frac{1}{n}$. Δηλαδή $diam\left\{\overline{B(x_n, \varepsilon_n)}\right\} \to 0$.

Δεδομένου ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος από τον **Χαρακτηρισμό Cantor πλήρων μετρικών χώρων,** υπάρχει $x \in \mathrm{X}$ έτσι ώστε η $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B(x_n, \varepsilon_n)} = \{x\}$.

Επειδή $B(x_o, \varepsilon_o) \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B(x_n, \varepsilon_n)}$ συνεπάγεται ότι $x \in B(x_o, \varepsilon_o)$. Επίσης από τα προαναφερόμενα ισχύει ότι $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Συνεπώς $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Δηλαδή η $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \cap B(x_o, \varepsilon_o) \neq \emptyset$.

Ορισμός-Ένα υποσύνολο E ενός μετρικού (X, ρ) καλείται αραιό όταν το $intE = \emptyset$.

Ορισμός-Ένα υποσύνολο E ενός μετρικού (X, ρ) καλείται πουθενά πυκνό όταν η κλειστότητα του $\bar{E}$ δεν περιέχει ανοικτά σύνολα. Δηλαδή $int\bar{E} = \emptyset$.

1η Ισοδύναμη μορφή του θεωρήματος κατηγορίας του Baire- Ένας πλήρης μετρικός χώρος (X, ρ) δεν μπορεί να είναι η ένωση ενός αριθμήσιμου το πλήθος πουθενά πυκνών $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του.

Απόδειξη-

1ος τρόπος-Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $\mathrm{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ με U_n πουθενά πυκνό για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός, αν το U_1 είναι πουθενά πυκνό τότε $\overline{U_1} \subsetneq \mathrm{X}$.

Πράγματι, δεδομένου ότι το X είναι ανοικτό, αν $\overline{U_1} = \mathrm{X}$ τότε το $int\overline{U_1} = \mathrm{X}$. Άτοπο διότι το $int\overline{U_1} = \emptyset$.

Από τον ισχυρισμό υπάρχει $x_1 \in \mathrm{X}\setminus\overline{U_1}$. Κατά συνέπεια υπάρχει $1 > \varepsilon_1 > 0$ έτσι ώστε $B(x_1, \varepsilon_1) \cap U_1 = \emptyset$. Εφόσον το U_2 είναι πουθενά πυκνό τότε υπάρχει $x_2 \in B(x_1, \varepsilon_1)\setminus\overline{U_2}$ και $\frac{1}{2} > \varepsilon_2 > 0$ έτσι ώστε $\overline{B(x_2, \varepsilon_2)} \subset B(x_1, \varepsilon_1)\setminus\overline{U_2}$ και άρα $B(x_2, \varepsilon_2) \cap U_2 = \emptyset$.

Επαγωγικά αν $x_n \in B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1})\setminus\overline{U_n}$, τότε υπάρχει $\frac{1}{2^{n-1}} > \varepsilon_n > 0$ έτσι ώστε $\overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subset B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1})\setminus\overline{U_n}$ και άρα $B(x_n, \varepsilon_n) \cap U_n = \emptyset$.

Ισχυρισμός, η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Πράγματι, από τα προαναφερόμενα ισχύει ότι $B(x_1, \varepsilon_1) \supset \overline{B(x_2, \varepsilon_2)} \supset B(x_2, \varepsilon_2) \supset \cdots \supset \overline{B(x_N, \varepsilon_N)} \supset B(x_N, \varepsilon_N) \supset \overline{B(x_{N+1}, \varepsilon_{N+1})} \supset B(x_{N+1}, \varepsilon_{N+1}) \supset \cdots$, συνεπώς για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq N$ ισχύει ότι $x_m, x_n \in B(x_N, \varepsilon_N)$. Άρα έχουμε ότι $\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_N) + \rho(x_N, x_n) < \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^{N-1}} = \frac{2}{2^{N-1}} = \frac{4}{2^N}$.

Εφόσον για $N \to \infty$ συνεπάγεται ότι $n, m \to \infty$, τότε ισχύει ότι $0 \leq lim_{N\to\infty}\rho(x_m, x_n) \leq lim_{N\to\infty}\frac{4}{2^N} = 0$. Δηλαδή $\lim_{n\to\infty} lim_{m\to\infty}\rho(x_m, x_n) = \lim_{m\to\infty} lim_{n\to\infty}\rho(x_m, x_n) = 0$. Άρα η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Δεδομένου ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος, συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in \mathrm{X}$ έτσι ώστε $lim_{n\to\infty}\rho(x_n, x) = 0$.

Από τα προαναφερόμενα αν $N \in \mathbb{N}$ τότε $\{x_n\}_{n\geq N} \subseteq B(x_N, \varepsilon_N)$. Συνεπώς το $x \in \overline{B(x_N, \varepsilon_N)}$. Δηλαδή για κάθε $N \in \mathbb{N}$ το $x \in \overline{B(x_N, \varepsilon_N)}$.

Αλλά $B(x_{N-1}, \varepsilon_{N-1}) \cap U_{N-1} = \emptyset$ και $\overline{B(x_N, \varepsilon_N)} \subset B(x_{N-1}, \varepsilon_{N-1})$. Δηλαδή $x \notin U_{N-1}$. Εφόσον το N είναι τυχαίο τότε το $x \notin U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $x \notin \mathrm{X}$. Άτοπο.

2ος τρόπος- Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και υποθέτουμε ότι $\mathrm{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ με U_n πουθενά πυκνό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $G_n = \mathrm{X}\setminus\overline{U_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς το G_n είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του (X, ρ) για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από το θεώρημα κατηγορίας του Baire έχουμε ότι η $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ είναι πυκνό υποσύνολο στον (X, ρ). Συνεπώς ισχύουν τα ακόλουθα,

$$\mathrm{X} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X}\setminus\overline{U_n}} = \overline{\mathrm{X}\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}} \subseteq \overline{\mathrm{X}\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n} = \emptyset.$$

Άτοπο.

Πρόταση- Έστω (X, ρ) είναι μετρικός χώρος και Ε υποσύνολο. Τότε $intE = \emptyset$ αν και μόνο αν $\overline{\mathrm{X} \backslash E} = \mathrm{X}$.

Απόδειξη- υποθέτουμε ότι το $intE = \emptyset$ και $\overline{\mathrm{X} \backslash E} \subsetneq \mathrm{X}$ τότε υπάρχουν $x \in \mathrm{X}$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(x, \varepsilon) \cap \{\mathrm{X} \backslash E\} = \emptyset$. Συνεπώς $B(x, \varepsilon) \subset E$. Δηλαδή $x \in intE$. Άτοπο εφόσον $intE = \emptyset$.

Αντίστροφα έστω ότι $\overline{\mathrm{X} \backslash E} = \mathrm{X}$ και $x \in intE$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(x, \varepsilon) \subset E$. Συνεπώς $B(x, \varepsilon) \cap (\mathrm{X} \backslash E) = \emptyset$. Δηλαδή $x \notin \overline{\mathrm{X} \backslash E} = \mathrm{X}$. Άτοπο.

Πρόταση-Ένα υποσύνολο Ε του μετρικού (X, ρ) είναι πουθενά πυκνό αν και μόνο αν για κάθε O ανοικτό υποσύνολο του Χ, το σύνολο $E \cap O$ δεν είναι πυκνό στον (O, ρ_o) όπου $\rho_o = \rho | O \times O \to \mathbb{R}$ είναι ο περιορισμός της μετρικής ρ στο υποσύνολο O του Χ.

Απόδειξη-Έστω O ανοικτό υποσύνολο του Χ με το σύνολο $\overline{E \cap O}^{\,\rho_o} = O$.

Από υπόθεση έχουμε ότι $\overline{\mathrm{X} \backslash \overline{E}} = \mathrm{X}$. Συνεπώς $O \cap (\mathrm{X} \backslash \overline{E}) \neq \emptyset$. Έστω $z \in O \cap (\mathrm{X} \backslash \overline{E})$. Εφόσον τα $O, \mathrm{X} \backslash \overline{E}$ είναι ανοικτά τότε το $O \cap (\mathrm{X} \backslash \overline{E})$ είναι επίσης ανοικτό στον Χ. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $B(z, \delta) \subset O \cap (\mathrm{X} \backslash \overline{E})$. Από τα προαναφερόμενα προκύπτουν τα ακόλουθα,

$$B(z, \delta) \subset O = \overline{E \cap O}^{\,\rho_o} \subset \overline{E \cap O} \subset \overline{E}$$

Άτοπο διότι το $int\overline{\mathrm{E}} = \emptyset$.

1ος τρόπος-Αντίστροφα έστω ότι το $E \neq \emptyset$ δεν είναι πουθενά πυκνό. Τότε το εσωτερικό της κλειστότητας του $int\overline{E}$, δεν είναι κενό. Συνεπώς το $intE \neq \emptyset$. Αν όχι τότε $int^{-} \subseteq \overline{E} \backslash E$. Τότε υπάρχει $x \in \overline{E} \backslash E$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq \overline{E} \backslash E$. Δηλαδή $B(x, \varepsilon) \cap E = \emptyset$. Εφόσον $x \in \overline{E}$ συνεπάγεται ότι $B(x, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$. Άτοπο. Θέτουμε $U = intE$. Άρα ισχύει ότι $U \cap E = U$. Συνεπώς $\overline{U \cap E}^{\rho_o} = \overline{U}^{\rho_o} = U$. Άτοπο διότι για κάθε μη κενό ανοικτό O υποσύνολο του Χ, το σύνολο $E \cap O$ δεν είναι πυκνό στον (O, ρ_o).

2ος τρόπος-Αντίστροφα θεωρούμε ότι για κάθε Ο ανοικτό υποσύνολο του Χ, το σύνολο $E \cap O$ δεν είναι πυκνό στον (O, ρ_o).

Έστω ότι το υποσύνολο Ε δεν είναι πουθενά πυκνό. Συνεπώς το $\mathrm{X} \backslash \overline{E}$ δεν είναι πυκνό στον (X, ρ). Άρα υπάρχει $x \epsilon^{-}$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq \overline{E}$.

Από υπόθεση ισχύει ότι $\overline{B(x, \varepsilon) \cap E}^{\rho_o} \subsetneq B(x, \varepsilon)$. Έστω $z \in B(x, \varepsilon) \backslash \overline{B(x, \varepsilon) \cap E}^{\rho_o}$, τότε υπάρχει δ>0 έτσι ώστε $B_{\rho_o}(z, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon) \backslash \overline{B(x, \varepsilon) \cap E}^{\rho_o}$.

Επειδή το $z \in B(x,\varepsilon)$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ έτσι ώστε $B(z,\delta_1) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq \bar{E}$.

Εφόσον,

$$B(z,\delta) \supseteq B(z,\delta) \bigcap B(x,\varepsilon) = B_{\rho_o}(z,\delta)$$

προκύπτει ότι,

$$B(z,\delta) \cap \overline{B(x,\varepsilon) \cap E}^{\rho_o} = \emptyset, \text{ διαφορετικά } B_{\rho_o}(z,\delta) \bigcap \overline{B(x,\varepsilon) \cap E}^{\rho_o} \neq \emptyset.$$

Είναι άμεσο ότι $B(x,\varepsilon) \cap E \subseteq \overline{B(x,\varepsilon) \cap E}^{\rho_o}$. Δηλαδή $B(z,\delta) \cap B(x,\varepsilon) \cap E = \emptyset$.

Θέτουμε $\delta_2 = min\{\delta,\delta_1\}$, τότε $B(z,\delta_2) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq \bar{E}$ και $B(z,\delta_2) \cap B(x,\varepsilon) \cap E = \emptyset$. Αλλά ισχύει ότι, $(B(x,\varepsilon) \cap E) \cup \big(B(x,\varepsilon) \cap (\bar{E} \setminus E)\big) = B(x,\varepsilon)$. Άρα $B(z,\delta_2) \bigcap B(x,\varepsilon) \cap (\bar{E} \setminus E) \neq \emptyset$.

Εφόσον $B(z,\delta_2) \subseteq B(x,\varepsilon)$ και $B(z,\delta_2) \subseteq \bar{E}$ ισχύει ότι $B(z,\delta_2) \cap E = \emptyset$ και $B(z,\delta_2) = B(z,\delta_2) \bigcap (\bar{E} \setminus E) \neq \emptyset$. Δεδομένου ότι το $z \in \bar{E}$ καταλήγουμε σε άτοπο διότι ισχύει ταυτόχρονα ότι $B(z,\delta_2) \cap E = \emptyset$ και $B(z,\delta_2) \cap E \neq \emptyset$.

2η Ισοδύναμη μορφή Θεωρήματος Κατηγορίας Baire-Έστω (X,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με $intF_n = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $int\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\} = \emptyset$.

Απόδειξη- Έστω $int\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\} \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $x_o \in int\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\}$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(x_o,\varepsilon) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Συνεπώς $B(x_o,\varepsilon) \bigcap \{\mathrm{X} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\} = \emptyset$. Δηλαδή $B(x_o,\varepsilon) \bigcap \{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{X} \setminus F_n)\} = \emptyset$.

Εφόσον F_n είναι κλειστό, τότε $\mathrm{X} \setminus F_n$ είναι ανοικτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης εφόσον $intF_n = \emptyset$ τότε $\overline{\mathrm{X} \setminus F_n} = \mathrm{X}$. Από το **Θεώρημα Κατηγορίας του Baire** προκύπτει ότι $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X} \setminus F_n} = \mathrm{X}$. Συνεπώς $B(x_o,\varepsilon) \bigcap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X} \setminus F_n \neq \emptyset$. Άτοπο. Άρα $int\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\} = \emptyset$.

Πρόταση-Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X. Εάν $int\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\} \neq \emptyset$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα F_{n_o} με $intF_{n_o} \neq \emptyset$.

Απόδειξη-Έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $intF_n = \emptyset$. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε ότι $\overline{\mathrm{X} \setminus F_n} = \mathrm{X}$ και $\mathrm{X} \setminus F_n$ ανοικτό.

Εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος από το Θεώρημα κατηγορίας του Baire ισχύει ότι $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X} \setminus F_n} = \mathrm{X}$.

Ωστόσο, δεδομένου ότι το $int\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\} \neq \emptyset$, συνεπάγεται ότι $\overline{\mathrm{X}\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X}\setminus F_n} \subsetneq \mathrm{X}$. Άτοπο. Συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα F_{n_o} με $intF_{n_o} \neq \emptyset$.

Θεώρημα-Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $\mathrm{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ όπου F_n ρ-κλειστό υποσύνολο του X για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $int\ {}_{n_o} \neq \emptyset$.

Απόδειξη-Έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $int\ {}_{n} = \emptyset$. Συνεπώς $\overline{\mathrm{X}\setminus F_n} = \mathrm{X}$ και $\mathrm{X}\setminus F_n$ είναι ρ-ανοικτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος, από το Θεώρημα κατηγορίας του Baire ισχύει ότι $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X}\setminus F_n} = \mathrm{X}$. Συνεπώς η $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X}\setminus F_n \neq \emptyset$.

Εφόσον το $\mathrm{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, από τις σχέσεις De Morgan έχουμε ότι $\emptyset = \mathrm{X}\setminus\mathrm{X} = \mathrm{X}\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X}\setminus F_n$. Άτοπο. Άρα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $intF_{n_o} \neq \emptyset$.

Ορισμός-Έστω (X,ρ), (Z,d) μετρικοί χώροι και $\mathcal{L} = \{f|(\mathrm{X},\rho) \to (\mathrm{Z},d)\}$ οικογένεια συναρτήσεων. Η $\mathcal{L}$ καλείται ισοσυνεχής στο x_o αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in B_\rho(x_o,\delta)$ και για κάθε $f \in \mathcal{L}$ να ισχύει $f(x) \in B_d(f(x_o),\varepsilon)$.

Πρόταση-Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X. Τότε $int\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} bdF_n\} = \emptyset$.

Απόδειξη-Έστω Ε κλειστό υποσύνολο του X και έστω $intbdE \neq \emptyset$, τότε υπάρχουν x και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq bdE = \bar{E} \cap \overline{\mathrm{X}\setminus E}$. Συνεπώς $B(x,\varepsilon) \subseteq \overline{\mathrm{X}\setminus E}$ και $B(x,\varepsilon) \subseteq \bar{E} = E$. Τότε $B(x,\varepsilon) \cap \mathrm{X}\setminus E = \emptyset$. Δηλαδή $x \notin \overline{\mathrm{X}\setminus E}$. Άτοπο. Συνεπώς έχουμε ότι $intbdE = \emptyset$.

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $intbdF_n = \emptyset$ και προφανώς το bdF_n είναι κλειστό. Από την ισοδύναμη μορφή του θεωρήματος Baire προκύπτει ότι $int\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} bdF_n\} = \emptyset$.

Θεώρημα-Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $\mathcal{L} = \{f|(\mathrm{X},\rho) \to (\mathbb{R},|\ |)\}$ μία οικογένεια συνεχών συναρτήσεων έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathrm{X}$ υπάρχει $M_x > 0$ με $|f(x)| < M_x$ για κάθε $f \in \mathcal{L}$. Τότε υπάρχει U ανοικτό υποσύνολο του X και $M > 0$, έτσι ώστε για κάθε $x \in U$ για κάθε $f \in \mathcal{L}$ να ισχύει ότι $|f(x)| \leq M$.

Απόδειξη-Θέτουμε $E_n = \{x \in \mathrm{X}|\ |f(x)| \leq n, \forall f \in \mathcal{L}\}$. Συνεπώς $E_n = \bigcap_{f\in\mathcal{L}} f^{-1}([-n,n])$ είναι κλειστό. Έστω $x \in \mathrm{X}$.

Τότε από υπόθεση υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|f(x)| \leq M_x \leq n$ για κάθε $f \in \mathcal{L}$. Συνεπώς $x \in E_n$. Άρα $\mathrm{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Συνεπώς υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $in\ {}_{n_o} \neq \emptyset$. Συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $E_{n_o} \supseteq B(x_o,\varepsilon)$. Τότε για κάθε $x \in B(x_o,\varepsilon)$ και για κάθε $f \in \mathcal{L}$ έχουμε ότι $|f(x)| \leq n_o$.

Θεώρημα-Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος, συνάρτηση $f|(\mathrm{X},\rho)\to(\mathbb{R},|\,|)$ και $\{f_n|(\mathrm{X},\rho)\to(\mathbb{R},|\,|)\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων για την οποία ισχύει ότι $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$ για κάθε $x\in\mathrm{X}$. Τότε υπάρχει πυκνό υποσύνολο D του X στο οποίο η $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοσυνεχής και η f είναι συνεχής.

Απόδειξη-Έστω $m,n\in\mathbb{N}$. Ορίζουμε $E(m,n)=\left\{x\in\mathrm{X}\middle|\left|f_j(x)-f_k(x)\right|\leq\frac{1}{m}\ \forall\ k,j\geq n\right\}$. Είναι άμεσο ότι η απεικόνιση $x\to\left(f_j-f_k\right)(x)$ είναι συνεχής και ότι $E(m,n)=\bigcap_{j,k\geq n}\left\{\left(f_j-f_k\right)^{-1}\left(\left[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right]\right)\right\}$. Συνεπώς το υποσύνολο $E(m,n)$ είναι κλειστό. Τέλος είναι προφανές ότι $\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}E(m,n)=\mathrm{X}$.

Εφόσον το $\{E(m,n)\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του πλήρη μετρικού χώρου (X,ρ), τότε $int\left\{\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}bdE(m,n)\right\}=\emptyset$.

Θέτουμε $D=\mathrm{X}\setminus\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}bdE(m,n)$. Εφόσον $int\left\{\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}bdE(m,n)\right\}=\emptyset$, έχουμε $\overline{D}=\mathrm{X}$.

Ισχυρισμός-Έστω $x_o\in D$ και $x_o\in E(m_o,n_o)$. Τότε το x_o είναι εσωτερικό σημείο του $E(m_o,n_o)$.

Πράγματι εφόσον $x_o\in D$ τότε $x_o\notin\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}bdE(m,n)$. Συνεπώς $x_o\notin bdE(m,n)$ για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $x_o\notin E(m,n)\cap\overline{\mathrm{X}\setminus E(m,n)}$ για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$.

Για $m_o,n_o\in\mathbb{N}$ είτε $x_o\in\mathrm{X}\setminus E(m_o,n_o)$ είτε $x_o\in\mathrm{X}\setminus\overline{\mathrm{X}\setminus E(m_o,n_o)}$. Τότε είτε υπάρχει $\varepsilon>0$ έτσι ώστε $B(x_o,\varepsilon)\subseteq\mathrm{X}\setminus E(m_o,n_o)$είτε υπάρχει $\delta>0$ έτσι ώστε $B(x_o,\delta)\subseteq\mathrm{X}\setminus\overline{\mathrm{X}\setminus E(m_o,n_o)}$.

Εφόσον το $x_o\in E(m_o,n_o)$, έχουμε ότι $B(x_o,\delta)\subseteq\mathrm{X}\setminus\overline{\mathrm{X}\setminus E(m_o,n_o)}\subseteq E(m_o,n_o)$. Άρα το x_o είναι εσωτερικό σημείο του $E(m_o,n_o)$.

Θα δείξουμε ότι η $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοσυνεχής στο D.

Έστω $x_o\in D$. Αν $\varepsilon>0$ τότε υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε $\frac{\varepsilon}{4}>\frac{1}{m}$. Εφόσον η $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα, η $\{f_n(x_o)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Συνεπώς υπάρχει $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε $\left|f_j(x_o)-f_k(x_o)\right|\leq\frac{1}{m}$ για κάθε $k,j\geq n(\varepsilon)$. Δηλαδή το $x_o\in E\big(m,n(\varepsilon)\big)$.

Από τον ισχυρισμό υπάρχει $\delta>0$ έτσι ώστε $B(x_o,\delta)\subseteq E\big(m,n(\varepsilon)\big)$. Συνεπώς για κάθε $x\in B(x_o,\delta)$ έχουμε ότι $\left|f_j(x)-f_k(x)\right|\leq\frac{1}{m}$ για κάθε $k,j\geq n(\varepsilon)$.

Εφόσον η $f_{n(\varepsilon)}|(\mathrm{X},\rho)\to(\mathbb{R},|\,|)$ είναι συνεχής στο x_o υπάρχει $0<r<\delta$ έτσι ώστε $\left|f_{n(\varepsilon)}(x_o)-f_{n(\varepsilon)}(x)\right|<\frac{1}{m}$ για κάθε $x\in B(x_o,r)$.

Συνεπώς για κάθε $x\in B(x_o,r)$ και για κάθε $j\geq n(\varepsilon)$ ισχύουν τα ακόλουθα, $\left|f_j(x)-f_j(x_o)\right|\leq\left|f_j(x)-f_{n(\varepsilon)}(x)\right|+\left|f_{n(\varepsilon)}(x)-f_{n(\varepsilon)}(x_o)\right|+\left|f_{n(\varepsilon)}(x_o)-f_j(x_o)\right|<\frac{3}{m}<\frac{3}{4}\varepsilon<\varepsilon$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι για την πεπερασμένη οικογένεια $\left\{f_j\right\}_{1\leq j\leq n(\varepsilon)-1}$ ισχύει $\left|f_j(x)-f_j(x_o)\right|<\varepsilon$ για κάθε $x\in B(x_o,r)$. Εφόσον το x_o είναι τυχαίο, η οικογένεια $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοσυνεχής στο D.

Συνεπώς έχουμε ότι $\left|f_j(x) - f_j(x_o)\right| < \varepsilon$ για κάθε $j \geq n(\varepsilon)$ και για κάθε $x \in B(x_o, r)$. Άρα από υπόθεση έχουμε ότι,

$lim_{j\to\infty}\left|f_j(x) - f_j(x_o)\right| = \left|lim_{j\to\infty}f_j(x) - lim_{j\to\infty}f_j(x_o)\right| = |f(x) - f(x_o)| \leq \varepsilon$ για κάθε $x \in B(x_o, r)$. Δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_o. Εφόσον το x_o είναι τυχαίο η f είναι συνεχής στο (X, ρ).

1^o Εφαρμογές του Θεωρήματος Κατηγορίας Baire σε χώρους Banach

Θεώρημα (Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος)-Έστω $(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}})$ χώρος Banach, $(\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ χώρος με νόρμα και $(T_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Z. Θεωρούμε ότι η οικογένεια $(T_i)_{i\in I}$ είναι κατά σημείο φραγμένη. Δηλαδή για κάθε $x \in \mathrm{X}$ ισχύει ότι $sup\{\|T_i(x)\|_{\mathrm{Z}} \mid i \in I\} < \infty$. Τότε η οικογένεια $(T_i)_{i\in I}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Δηλαδή το $sup\{\|T_i\|_{\mathrm{B(X,Z)}} \mid i \in I\} < \infty$.

Απόδειξη- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = \{x \in \mathrm{X} \mid \|T_i(x)\|_{\mathrm{Z}} \leq n, \forall\, i \in I\}$. Εφόσον ο T_i είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής για κάθε $i \in I$ και $A_n = \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(B_{\mathrm{Z}}[0,n])$ συνεπάγεται ότι το A_n είναι κλειστό ως τομή κλειστών συνόλων.

Το $\mathrm{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Πράγματι έστω $x \in \mathrm{X}$. Από υπόθεση έχουμε ότι $sup\{\|T_i(x)\|_Z \mid i \in I\} < \infty$. Συνεπώς υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $sup\{\|T_i(x)\|_{\mathrm{Z}} \mid i \in I\} \leq n$. Δηλαδή το $x \in A_n$. Η σχέση $\mathrm{X} \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι προφανής.

Εφόσον ο $(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}})$ είναι πλήρης από το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $int(A_{n_o}) \neq \emptyset$. Συνεπώς υπάρχει $x_o \in \mathrm{X}$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B_{\mathrm{X}}[x_o, \varepsilon] \subset A_{n_o}$. Άρα για κάθε $x \in B_{\mathrm{X}}(x_o, \varepsilon)$ το $sup\{\|T_i(x)\|_{\mathrm{Z}} \mid i \in I\} \leq n_o$.

Έστω $i \in I$ και $x \in \mathrm{X}$ με $\|x\|_{\mathrm{X}} \leq 1$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα,

$$\|T_i(x)\|_{\mathrm{Z}} = \frac{1}{\varepsilon}\|\varepsilon\, T_i(x)\|_{\mathrm{Z}} = \frac{1}{\varepsilon}\|\, T_i(\varepsilon x + x_o - x_o)\|_{\mathrm{Z}} \leq \frac{1}{\varepsilon}(\|\, T_i(\varepsilon x + x_o)\|_{\mathrm{Z}} + \|\, T_i(x_o)\|_{\mathrm{Z}})$$

Εφόσον $\|\, \varepsilon x + x_o - x_o\|_{\mathrm{X}} = \varepsilon\|\, x\|_{\mathrm{X}} \leq \varepsilon$, τότε $\varepsilon x + x_o \in B_{\mathrm{X}}[x_o, \varepsilon]$. Άρα

$$\|T_i(x)\|_{\mathrm{Z}} \leq \frac{1}{\varepsilon}(\|\, T_i(\varepsilon x + x_o)\|_{\mathrm{Z}} + \|\, T_i(x_o)\|_{\mathrm{Z}}) \leq \frac{1}{\varepsilon}(n_o + n_o) = \frac{2n_o}{\varepsilon}$$

Εφόσον το $x \in \mathrm{X}$ με $\|x\|_{\mathrm{X}} \leq 1$ είναι τυχαίο, συνεπάγεται ότι,

$$\|T_i\|_{\mathrm{B(X,Z)}} = sup\{\|T_i(x)\|_{\mathrm{Z}} \mid \|x\|_{\mathrm{X}} \leq 1\} \leq \frac{2n_o}{\varepsilon}$$

Επίσης εφόσον το $i \in I$ είναι τυχαίο προκύπτει ότι,

$$sup\{\|T_i\|_{\mathrm{B(X,Z)}} \mid i \in I\} \leq \frac{2n_o}{\varepsilon}$$

Συνεπώς η οικογένεια $(T_i)_{i\in I}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Πρόταση-Έστω $(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}})$ και $(\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ χώροι με νόρμα. Τότε η γραμμική απεικόνιση $T|(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής αν και μόνο αν το $int\{T^{-1}(B_Z[0,1])\} \neq \emptyset$.

Απόδειξη- έστω ότι ο $T|(\mathrm{X},\| \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z},\| \|_{\mathrm{Z}})$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε για κάθε $x \in \mathrm{X}$ ισχύει ότι $\|T(x)\|_{\mathrm{Z}} \leq \|T\| \, \|x\|_{\mathrm{X}}$. Συνεπώς για κάθε $x \in B_{\mathrm{X}}(0_X, 1)$ ισχύει ότι $\|T(x)\|_{\mathrm{Z}} < \|T\|$.

Η ισότητα των συνόλων $\Sigma_1 = \left\{\frac{x}{\|T\|} \in \mathrm{X} | \|x\|_{\mathrm{X}} < 1\right\} = \left\{w \in \mathrm{X} | \|w\|_{\mathrm{X}} < \frac{1}{\|T\|}\right\} = \Sigma_2$ προκύπτει άμεσα. Πράγματι είναι προφανές ότι $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$. Έστω $w \in \Sigma_2$ τότε $\big\|\|T\|w\big\|_{\mathrm{X}} < 1$ και $w = \frac{\|T\|w}{\|T\|}$. Δηλαδή $w \in \Sigma_1$. Άρα $\Sigma_1 \supseteq \Sigma_2$. Άρα $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Συνεπώς, εφόσον το Σ_1 είναι ανοικτό και $\Sigma_1 \subseteq T^{-1}(B_Z[0,1])$, συνεπάγεται ότι $int\{T^{-1}(B_Z[0,1])\} \neq \emptyset$.

Αντίστροφα έστω $T|(\mathrm{X},\| \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z},\| \|_{\mathrm{Z}})$ γραμμική με $int\{T^{-1}(B_Z[0,1])\} \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχουν $x_o \in \mathrm{X}$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(x_o, \varepsilon) \subseteq int\{T^{-1}(B_Z[0,1])\}$.

Αν $\|x\|_{\mathrm{X}} < \varepsilon$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα, $\|T(x)\|_Z \leq \|T(x + x_o)\|_Z + \|T(x_o)\|_Z \leq 2$, δεδομένου ότι $x + x_o, x_o \in int\{T^{-1}(B_Z[0,1])\}$. Έστω $\varepsilon > \varepsilon_o > 0$. Συνεπώς για κάθε $x \in \mathrm{X}$ ισχύει ότι $\left\|\frac{x\varepsilon_o}{\|x\|_{\mathrm{X}}}\right\|_{\mathrm{X}} = \varepsilon_o < \varepsilon$. Εφόσον ισχύει ότι $\left\|T\left(\frac{x\varepsilon_o}{\|x\|_{\mathrm{X}}}\right)\right\|_Z \leq 2$, συνεπάγεται ότι η $\|T(x)\|_Z \leq \frac{2}{\varepsilon_o}\|x\|_{\mathrm{X}}$ για κάθε $x \in \mathrm{X}$. Δηλαδή ο $T|(\mathrm{X},\| \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z},\| \|_{\mathrm{Z}})$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Πρόταση-Έστω $(\mathrm{X},\| \|_{\mathrm{X}})$ και $(\mathrm{Z},\| \|_{\mathrm{Z}})$ χώροι με νόρμα και έστω $B|(\mathrm{XxZ},\| \|_{\mathrm{X}}\mathrm{x}\| \|_{\mathrm{Z}}) \to (\mathbb{C},| |_2)$ μία φραγμένη διγραμμική απεικόνιση. Τότε αν $x_n \to 0$ και $z_n \to 0$ συνεπάγεται ότι $B(x_n, z_n) \to 0$.

Απόδειξη-Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε για κάθε $z \in Z$ θέτουμε $T_n(z) = B(x_n, z)$. Από υπόθεση ο T_n είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Επίσης από υπόθεση και ο τελεστής $B(\ ,z\ )$ είναι φραγμένος γραμμικός για κάθε $z \in Z$. Συνεπώς ισχύει ότι $|B(x_n, z)|_2 \leq \|B(\ ,z\ )\|\|x_n\|_{\mathrm{X}}$.

Εφόσον η ακολουθία $x_n \to 0$, συνεπάγεται ότι $\|x_n\|_{\mathrm{X}} \to 0$. Δηλαδή υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $\|x_n\|_{\mathrm{X}} \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $|T_n(z)|_2 = |B(x_n, z)|_2 \leq \|B(\ ,z\ )\|M = \Lambda_z$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $sup\{|T_n(z)|_2 | n \in \mathbb{N}\} \leq \Lambda_z$.

Εφόσον ο χώρος $(\mathrm{Z},\| \|_{\mathrm{Z}})$ είναι Banach, από την Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος έχουμε ότι το $sup\{\|T_n\| | n \in \mathbb{N}\} \leq K < \infty$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $|T_n(z_n)|_2 = B(x_n, z_n) \leq \|T_n\|\|z_n\|_{\mathrm{Z}} \leq K\|z_n\|_{\mathrm{Z}}$. Εφόσον $\|z_n\|_{\mathrm{Z}} \to 0$ έχουμε ότι και το $B(x_n, z_n) \to 0$.

Θεώρημα (Banach-Steinhaus)-Έστω $(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}})$ χώρος Banach, $(\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ χώρος με νόρμα και $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Z έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathrm{X}$ να υπάρχει το $lim_{n\to\infty}T_n(x)$. Θέτοντας $T(x) = lim_{n\to\infty}T_n(x)$, προκύπτει ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Απόδειξη-Ο T είναι γραμμικός. Πράγματι ισχύει ότι $T(ax_1 + bx_2) = alim_{n\to\infty}T_n(x_1) + blim_{n\to\infty}T_n(x_2) = aT(x_1) + bT(x_2)$.

Λόγω της σύγκλισης της ακολουθίας $\big(T_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, προκύπτει άμεσα ότι για κάθε $x \in \mathrm{X}$ υπάρχει $M_x > 0$ έτσι ώστε $sup\{\|T_n(x)\|_{\mathrm{Z}} | n \in \mathbb{N}\} \leq M_x$.

Εφόσον η οικογένεια $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κατά σημείο φραγμένη, τότε από την Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος είναι και Ομοιόμορφα Φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $sup\{\|T_n\| | n \in \mathbb{N}\} \leq M$. Συνεπώς αν $x \in \mathrm{X}$ με $\|x\|_{\mathrm{X}} \leq 1$, τότε $\|T_n(x)\|_{\mathrm{Z}} \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εφόσον ισχύει ότι $|\|T_n(x)\|_{\mathrm{Z}} - \|T(x)\|_{\mathrm{Z}}| \leq \|T_n(x) - T(x)\|_{\mathrm{Z}}$, τότε $lim_{n\to\infty}\|T_n(x)\|_{\mathrm{Z}} = \|T(x)\|_{\mathrm{Z}}$ για κάθε $x \in \mathrm{X}$. Συνεπώς για $x \in \mathrm{X}$ με $\|x\|_{\mathrm{X}} \leq 1$ έπεται ότι $\|T(x)\|_{\mathrm{Z}} = lim_{n\to\infty}\|T_n(x)\|_{\mathrm{Z}} \leq M$. Δηλαδή η $\|T\| = sup\{\|T(x)\|_{\mathrm{Z}} | \, \|x\|_x \leq 1\} \leq M$. Ισοδύναμα ο T είναι γραμμικός τελεστής.

Λήμμα-Έστω $(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}})$ χώρος Banach και $(\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ χώρος με νόρμα. Έστω επίσης $T|(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(a) Αν για $r > \varepsilon > 0$ ισχύει ότι $B_{\mathrm{Z}}(0, r) \subseteq T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big) + B_{\mathrm{Z}}(0, \varepsilon)$ τότε συνεπάγεται ότι $B_{\mathrm{Z}}(0, r) \subseteq T\left(B_{\mathrm{X}}\left(0, \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}}\right)\right)$.

(b) Ειδικότερα αν $B_{\mathrm{Z}}(0, r) \subseteq \overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}$ τότε $B_{\mathrm{Z}}(0, r) \subseteq T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)$.

Απόδειξη-(α) Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή T και του χώρου X, για κάθε $\theta > 0$ ισχύει ότι $B_{\mathrm{Z}}(0, \theta) \subseteq T\left(B_{\mathrm{X}}\left(0, \frac{\theta}{r}\right)\right) + B_{\mathrm{Z}}\left(0, \frac{\varepsilon\theta}{r}\right)$.

Έστω $z \in B_{\mathrm{Z}}(0, r)$. Τότε $z \in T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big) + B_{\mathrm{Z}}(0, \varepsilon)$. Συνεπώς υπάρχει $x_1 \in B_{\mathrm{X}}(0,1)$ και $w \in B_{\mathrm{Z}}(0, \varepsilon)$ έτσι ώστε $z - T(x_1) = w$. Άρα $\|z - T(x_1)\|_{\mathrm{Z}} = \|w\|_{\mathrm{Z}} < \varepsilon$ και $\|x_1\|_{\mathrm{X}} < 1 = \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^0$.

Έστω ότι έχουν κατασκευαστεί $\{x_\kappa\}_{1\leq\kappa\leq n}$ ώστε $\|x_\kappa\|_{\mathrm{X}} < \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{\kappa-1}$ και $\|z - \sum_{i=1}^{\kappa} T(x_i)\|_{\mathrm{Z}} < \frac{\varepsilon^\kappa}{r^{\kappa-1}}$. Συνεπώς $z - \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \in B_{\mathrm{Z}}\left(0, \frac{\varepsilon^n}{r^{n-1}}\right)$.

Θέτουμε στην αρχική μας σχέση $\theta = \frac{\varepsilon^n}{r^{n-1}}$. Άρα $B_{\mathrm{Z}}\left(0, \frac{\varepsilon^n}{r^{n-1}}\right) \subseteq T\left(B_{\mathrm{X}}\left(0, \frac{\varepsilon^n}{r^n}\right)\right) + B_{\mathrm{Z}}\left(0, \frac{\varepsilon^{n+1}}{r^n}\right)$. Δηλαδή υπάρχει $x_{n+1} \in B_{\mathrm{X}}\left(0, \frac{\varepsilon^n}{r^n}\right)$ έτσι ώστε $\|z - \sum_{i=1}^{n} T(x_i) - T(x_{n+1})\|_{\mathrm{Z}} <$

$\frac{\varepsilon^{n+1}}{r^n}$. Συνεπώς προκύπτει επαγωγικά ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\|z - \sum_{i=1}^{n} T(x_i)\|_{\mathrm{Z}} < \frac{\varepsilon^n}{r^{n-1}}$ και $\|x_n\|_{\mathrm{X}} < \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{n-1}$.

Εφόσον το $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{\mathrm{X}} < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}} < \infty$, υπάρχει $x \in \mathrm{X}$ έτσι ώστε $\|\sum_{n=1}^{m} x_n - x\|_{\mathrm{X}} \to 0$. Δηλαδή $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Συνεπώς έχουμε ότι,

$$\|x\|_{\mathrm{X}} = \|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\|_{\mathrm{X}} = \|lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n\|_{\mathrm{X}} = lim_{m\to\infty}\|\sum_{n=1}^{m} x_n\|_{\mathrm{X}} \leq$$
$$lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m}\|x_n\|_{\mathrm{X}} = \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{\mathrm{X}} < \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}}.$$

Εφόσον ο $T|(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z}, \|\ \|_{\mathrm{Z}})$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής ισχύουν τα ακόλουθα,

$$\|z - T(x)\|_{\mathrm{Z}} = \left\|z - T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)\right\|_{\mathrm{Z}} = lim_{m\to\infty}\left\|z - \sum_{n=1}^{m} T(x_n)\right\|_{\mathrm{X}} \leq lim_{m\to\infty}\frac{\varepsilon^m}{r^{m-1}} = 0$$

Δηλαδή $z = T(x)$. Συνεπώς $z \in T\left(B_{\mathrm{X}}\left(0, \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}}\right)\right)$. Δηλαδή

(b) Έστω ότι ισχύει $B_{\mathrm{Z}}(0,r) \subseteq \overline{T(B_{\mathrm{X}}(0,1))}$, τότε προκύπτει από τον ορισμό της κλειστότητας ενός συνόλου ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $B_{\mathrm{Z}}(0,r) \subseteq T(B_{\mathrm{X}}(0,1)) + B_{\mathrm{Z}}(0,\varepsilon)$.

Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$ και $z \in \overline{T(B_{\mathrm{X}}(0,1))}$, τότε $B_{\mathrm{Z}}\left(z, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap T(B_{\mathrm{X}}(0,1)) \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει $T(w) \in B_{\mathrm{Z}}\left(z, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap T(B_{\mathrm{X}}(0,1))$. Συνεπώς $z \in B_{\mathrm{Z}}(T(w), \varepsilon)$ και $T(w) \in T(B_{\mathrm{X}}(0,1))$. Άρα $z \in T(w) + B_{\mathrm{Z}}(0,\varepsilon) \subseteq T(B_{\mathrm{X}}(0,1)) + B_{\mathrm{Z}}(0,\varepsilon)$. Εφόσον το z είναι τυχαίο τότε $\overline{T(B_{\mathrm{X}}(0,1))} \subseteq T(B_{\mathrm{X}}(0,1)) + B_{\mathrm{Z}}(0,\varepsilon)$.

Από το (a) προκύπτει ότι για κάθε $r > \varepsilon > 0$ το $B_{\mathrm{Z}}(0,r) \subseteq T\left(B_{\mathrm{X}}\left(0, \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}}\right)\right)$. Συνεπώς για κάθε $M > 1$ ισχύει $B_{\mathrm{Z}}(0,r) \subseteq T(B_{\mathrm{X}}(0,M))$. Έστω $z \in B_{\mathrm{Z}}(0,r)$, τότε $\|z\|_Z < \theta < r$ για κάποιο $0 < \theta$. Τότε $z \in B_{\mathrm{Z}}(0,\theta) = \frac{\theta}{r}B_{\mathrm{Z}}(0,r) \subseteq \frac{\theta}{r}T\left(B_{\mathrm{X}}\left(0, \frac{r}{\theta}\right)\right) = T(B_{\mathrm{X}}(0,1))$. Εφόσον το z είναι τυχαίο, τότε $B_{\mathrm{Z}}(0,r) \subseteq T(B_{\mathrm{X}}(0,1))$.

Θεώρημα (Ανοικτής Απεικόνισης)-Έστω $(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}})$ και $(\mathrm{Z}, \|\ \|_{\mathrm{Z}})$ χώροι Banach και $T|(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z}, \|\ \|_{\mathrm{Z}})$ φραγμένος γραμμικός τελεστής που είναι επί. Τότε ο T είναι ανοικτή απεικόνιση. Δηλαδή για κάθε U ανοικτό υποσύνολο του X το $T(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Z.

Απόδειξη

1^{ος} τρόπος-Δεδομένου ότι ο T είναι επί και $\mathrm{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{\mathrm{X}}(0,n)$ τότε $\mathrm{Z} = T(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{\mathrm{X}}(0,n)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T\big(B_{\mathrm{X}}(0,n)\big)$. Εφόσον $\mathrm{Z} \supseteq \overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,n)\big)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\mathrm{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,n)\big)}$. Εφόσον ο $(\mathrm{Z}, \|\ \|_{\mathrm{Z}})$ είναι πλήρης χώρος, από το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $int\overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,n_o)\big)} \neq \emptyset$. Είναι άμεσο ότι $n_o\ int\overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)} = int\overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,n_o)\big)}$. Δηλαδή $int\overline{\overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}} \neq \emptyset$. Συνεπώς υπάρχει $z_o \in \overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B_{\mathrm{Z}}(z_o, \varepsilon) \subseteq \overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}$.

Εφόσον το $B_{\mathrm{X}}(0,1)$ είναι συμμετρικό και κυρτό τότε λόγω της γραμμικότητας του T και το $T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)$ είναι συμμετρικό και κυρτό.

Θα δείξουμε ότι το $\overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}$ είναι συμμετρικό, η κυρτότητα είναι άμεση.

Πράγματι έστω $T(x) \in \overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}$. Τότε υπάρχει $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)$ έτσι ώστε $\|T(x_n) - T(x)\|_{\mathrm{Z}} \to 0$. Λόγω συμμετρίας $\{-T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)$. Συνεπώς $\big\|-T(x) - \big(-T(x_n)\big)\big\|_{\mathrm{Z}} = \|T(x_n) - T(x)\|_{\mathrm{Z}} \to 0$. Άρα το $-T(x) \in \overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η κυρτότητα.

Συνεπώς λόγω συμμετρίας ισχύουν τα ακόλουθα, $-B_{\mathrm{Z}}(z_o,\varepsilon) = B_{\mathrm{Z}}(-z_o,\varepsilon) \subseteq \overline{\overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}}$. Έστω $z \in B_{\mathrm{Z}}(0,\varepsilon)$, τότε $z_o + z \in B_{\mathrm{Z}}(z_o,\varepsilon)$ και $-z_o + z \in B_{\mathrm{Z}}(-z_o,\varepsilon)$. .

Λόγω της κυρτότητας του συνόλου $\overline{\overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}}$ έχουμε ότι το $z = \frac{1}{2}(z_o + z) + \frac{1}{2}(-z_o + z) \in \overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}$. Εφόσον το z είναι τυχαίο ισχύει ότι $B_{\mathrm{Z}}(0,\varepsilon) \subseteq \overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}$.

Συνεπώς για κάθε $\delta > 0$ έχουμε ότι $B_{\mathrm{Z}}(0,\varepsilon) \subseteq T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big) + B_{\mathrm{Z}}(0,\delta)$.

Πράγματι έστω $\delta > 0$ και $T(x) \in \overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)}$, τότε $B_{\mathrm{Z}}\left(T(x), \frac{\delta}{2}\right) \cap T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big) \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει $T(w) \in B_{\mathrm{Z}}\left(T(x), \frac{\delta}{2}\right) \cap T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)$. Συνεπώς $T(x) \in B_{\mathrm{Z}}(T(w),\delta)$ και $T(w) \in T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)$. Άρα $T(x) \in T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big) + B_{\mathrm{Z}}(0,\delta)$. Εφόσον το $T(x)$ είναι τυχαίο συνεπάγεται ότι $\overline{T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)} \subseteq T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big) + B_{\mathrm{Z}}(0,\delta)$.

Εφόσον ισχύει ότι $B_{\mathrm{Z}}(z_o,\varepsilon) \subseteq T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big) + B_{\mathrm{Z}}(0,\delta)$, από το λήμμα προκύπτει ότι $B_{\mathrm{Z}}(0,\varepsilon) \subseteq T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big)$.

Έστω U ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X και $z \in T(U)$. Τότε υπάρχει $x \in U$ έτσι ώστε $z = T(x)$. Εφόσον το U είναι ανοικτό υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $B_{\mathrm{X}}(x,\delta) \subset U$. Επομένως $B_{\mathrm{Z}}(z,\delta\varepsilon) = z + \delta B_{\mathrm{Z}}(0,\varepsilon) \subseteq T(x) + \delta T\big(B_{\mathrm{X}}(0,1)\big) = T\big(B_{\mathrm{X}}(x,\delta)\big) \subseteq T(U)$. Συνεπώς έχουμε ότι το σύνολο $T(U)$ είναι ανοικτό.

2^{ος} τρόπος-Λόγω της γραμμικότητας της T αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ανοικτή σφαίρα $B(0_{\mathrm{X}},r)$ στο X, υπάρχει $r' > 0$ έτσι ώστε $T\big(B(0_{\mathrm{X}},r)\big) \supseteq B(0_{\mathrm{Z}},r')$, όπου $B(0_{\mathrm{Z}},r')$ ανοικτή σφαίρα στο Z.

Εφόσον ο φραγμένος γραμμικός τελεστής $T|(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z}, \|\ \|_{\mathrm{Z}})$ είναι επί, ισχύει ότι $\mathrm{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(B_{\mathrm{X}}(0,n))}$. Από το Θεώρημα του Baire προκύπτει ότι $int\overline{\overline{T(B_{\mathrm{X}}(0,1))}} \neq \emptyset$. Συνεπώς υπάρχει $B_{\mathrm{Z}}(z_o, \varepsilon) \subseteq \overline{T(B_{\mathrm{X}}(0,1))}$. Λόγω της συμμετρικότητας και της κυρτότητας του $\overline{T(B_{\mathrm{X}}(0,1))}$ ισχύει ότι $B_{\mathrm{Z}}(-z_o, \varepsilon) \subseteq \overline{T(B_{\mathrm{X}}(0,1))}$ και $B_{\mathrm{Z}}(0, \varepsilon) \subseteq \overline{T(B_{\mathrm{X}}(0,1))}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{T(B_{\mathrm{X}}(0,1))} \subseteq T(B_{\mathrm{X}}(0,2))$ και καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Πράγματι έστω $z \in \overline{T(B_{\mathrm{X}}(0,1))}$ τότε υπάρχει $T(x_1) \in T(B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 1))$ έτσι ώστε $T(x_1) \in B(z, \varepsilon/2) \cap T(B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 1))$. Δηλαδή το $z \in B(T(x_1), \varepsilon/2)$. Συνεπώς είναι άμεσο ότι το $z - T(x_1) \in B(0_Z, \varepsilon/2) \subseteq \overline{T(B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 1/2))}$.

Τότε υπάρχει $T(x_2)$ έτσι ώστε $T(x_2) \in B(z - T(x_1), \varepsilon/4) \cap T(B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 1/2))$. Συνεπώς προκύπτει άμεσα ότι $z - T(x_1) - T(x_2) \in B(0_Z, \varepsilon/4) \subseteq T(B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 1/4))$. Επαγωγικά έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $z - \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \in B(0_Z, \varepsilon/2^n) \subseteq T(B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 1/2^n))$ όπου $x_n \in B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 1/2^{n-1})$.

Από τα προαναφερόμενα προκύπτει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathrm{X}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} < \infty$. Εφόσον ο $(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}})$ είναι χώρος Banach η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει. Έστω $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Επειδή $\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathrm{X}} \leq \frac{1}{2}$, τότε το $x \in B_{\mathrm{X}}[0_{\mathrm{X}}, 1/2] \subset B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 2)$.

Επίσης από τα προαναφερόμενα ισχύει ότι $0 \leq lim_{n\to\infty} \|z - \sum_{i=1}^{n} T(x_i)\|_Z = \|z - lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} T(x_i)\|_Z = \|z - \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i)\|_Z \leq lim_{n\to\infty} \varepsilon/2^n = 0$. Δηλαδή $z = \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i)$.

Εφόσον ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής ισχύει ότι $z = \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i) = T(\sum_{i=1}^{\infty} x_i) = T(x)$. Δηλαδή το $z \in T(B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 2))$. Δεδομένου ότι το z είναι τυχαίο τότε $\overline{T(B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 1))} \subseteq T(B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 2))$. Συνεπώς δείξαμε ότι $B_{\mathrm{Z}}(0_{\mathrm{Z}}, \varepsilon) \subseteq T(B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 2))$.

Αν G είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $u \in T(G)$, τότε υπάρχει $x \in G$ έτσι ώστε $u = T(x)$. Εφόσον το G είναι ανοικτό τότε υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $B_{\mathrm{X}}(x, \delta) \subseteq G$. Τότε $T(G) \supseteq T(B_{\mathrm{X}}(x, \delta)) = T(x) + \delta T(B_{\mathrm{X}}(0_{\mathrm{X}}, 1)) \supseteq T(x) + \delta B_{\mathrm{Z}}(0_{\mathrm{Z}}, \varepsilon/2) = B_{\mathrm{Z}}(T(x), \varepsilon\delta/2)$. Συνεπώς το $T(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Z.

Στην συνέχεια παρουσιάζονται το **Θεώρημα Αντιστροφής** και το το οποίο είναι μία άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος Ανοικτής απεικόνισης και κατ 'επέκταση του **Θεωρήματος Κατηγορίας του Baire.**

Θεώρημα Αντιστροφής-Έστω $(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}})$ και $(\mathrm{Z}, \|\ \|_{\mathrm{Z}})$ χώροι Banach και $T|(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z}, \|\ \|_{\mathrm{Z}})$ 1-1 και επί φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε ο T είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη-Από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης, αν G είναι ανοικτό υποσύνολο του X τότε το $T(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Z.

Εφόσον ο T είναι 1-1 και επί ορίζεται ο αντίστροφός τελεστής του $T^{-1}|(\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}}) \to (\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}})$ και για κάθε G ανοικτό υποσύνολο του X ισχύει ότι $(T^{-1})^{-1}(G) = T(G)$.

Επίσης είναι άμεσο ότι ισχύουν τα ακόλουθα, $T^{-1}(\alpha\, z_1 + b\, z_2) = T^{-1}\big(\alpha\, T(x_1) + b\, T(x_2)\big) = T^{-1}\big(T(\alpha x_1 + b x_2)\big) = \alpha T^{-1}(x_1) + b T^{-1}(x_2)$.

Συνεπώς ο τελεστής $T^{-1}|(\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}}) \to (\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}})$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δηλαδή ο τελεστής $T|(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ είναι ισομορφισμός.

Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος-Έστω $(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}})$ και $(\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ χώροι Banach και $T|(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ γραμμικός τελεστής. Το γράφημα $\Gamma(T) = \{(x, z) \in \mathrm{XxZ} | T(x) = z\}$ του T είναι κλειστό στον χώρο $(\mathrm{XxZ}, \| \|_{\mathrm{XZ}})$ αν και μόνο αν ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. (Επιλέγετε η νόρμα του XxZ να είναι $\|(x, z)\|_{\mathrm{XZ}} = \|x\|_{\mathrm{X}} + \|z\|_{\mathrm{Z}}$.)

Απόδειξη-Είναι άμεσο ότι το $\Gamma(T)$ είναι υπόχωρος του XxZ. Εφόσον ο $(\mathrm{XxZ}, \| \|_{\mathrm{XZ}})$ είναι χώρος Banach και το $\Gamma(T)$ κλειστό, τότε ο $(\Gamma(T), \| \|_{\mathrm{XZ}})$ είναι χώρος Banach.

Έστω $\pi_1|\mathrm{XxZ} \to \mathrm{X}$ η προβολή του XxZ στον X και $\pi_2|\mathrm{XxZ} \to \mathrm{Z}$ η προβολή του XxZ στον Z. Από τον ορισμό της $\| \|_{\mathrm{XZ}}$ προκύπτει ότι $\|x\|_{\mathrm{X}} \leq \|(x, z)\|_{\mathrm{XZ}}$ για κάθε $(x, z) \in \mathrm{XxZ}$. Συνεπώς η π_1 είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Για τον ίδιο λόγο η π_2 είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Είναι προφανές ότι ο περιορισμός της π_1 στον $\Gamma(T)$ είναι 1-1 και επί του X. Εφόσον ο X είναι χώρος Banach από το Θεώρημα Αντιστροφής έπεται ότι η π_1 είναι ισομορφισμός στο $\Gamma(T)$. Συνεπώς ο $T = \pi_2 \circ \big(\pi_1|_{\Gamma(T)}\big)^{-1}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Αντίστροφα έστω $T|(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\big\{\big(x_n, T(x_n)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία Cauchy ακολουθία στοιχείων του $\Gamma(T)$.

Εφόσον ισχύει ότι $\big\|\big(x_n - x_m, T(x_n) - T(x_m)\big)\big\|_{\mathrm{XZ}} = \|x_n - x_m\|_{\mathrm{X}} + \|T(x_n) - T(x_m)\|_{\mathrm{Z}}$, τότε οι ακολουθίες $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στους χώρους X και Z αντίστοιχα. Επειδή οι χώροι $(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}})$ και $(\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ είναι Banach υπάρχουν $x \in \mathrm{X}$ και $z \in \mathrm{Z}$, έτσι ώστε $x_n \to x$ και $T(x_n) \to z$.

Εφόσον ο $T|(\mathrm{X}, \| \|_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z}, \| \|_{\mathrm{Z}})$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε $T(x_n) \to T(x)$. Από την μοναδικότητα της σύγκλισης του ορίου σε μετρικούς χώρους έπεται ότι $z = T(x)$. Δηλαδή το $(x, z) \in \Gamma(T)$. Συνεπώς το $\Gamma(T)$ είναι κλειστό στο XxZ.

Πρόταση-Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών δεν είναι G_δ υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, | |)$ των πραγματικών αριθμών.

Απόδειξη-Πράγματι έτω ότι το $\mathbb{Q}$ είναι G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Συνεπώς το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ των αρρήτων είναι F_σ υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δηλαδή υπάρχει ακολουθία $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, έτσι ώστε το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Συνεπώς ισχύει ότι το F_n είναι πουθενά πυκνό στο $\mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα προαναφερόμενα προκύπτει ότι το $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\{q_n\}$ είναι πουθενά πυκνό στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, |\ |)$ είναι πρώτης κατηγορίας.

Εφόσον ο $(\mathbb{R}, |\ |)$ είναι πλήρης, από προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι είναι δεύτερης κατηγορίας. Άτοπο.

2^o Εφαρμογές του Θεωρήματος Κατηγορίας Baire γενικότερα σε μετρικούς χώρους

Ορισμός-Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και συνάρτηση $f|(\mathrm{X},\rho)\rightarrow(\mathbb{R},|\ |)$. Η συνάρτηση f είναι άνω ημισυνεχής στο σημείο $x\in\mathrm{X}$ αν για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ με $f(x)<a$ να υπάρχει $\delta(\alpha)>0$ έτσι ώστε για κάθε $z\in\mathrm{X}$ με $\rho(x,z)<\delta(\alpha)$ να ισχύει ότι $f(z)<a$.

Πρόταση- Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και συνάρτηση $f|(\mathrm{X},\rho)\rightarrow(\mathbb{R},|\ |)$. Η συνάρτηση f είναι άνω ημισυνεχής στο X αν και μόνο αν για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Απόδειξη-Έστω $x\in f^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big)$. Τότε $f(x)<\alpha$. Εφόσον η f είναι άνω ημισυνεχής στο x, συνεπάγεται ότι για $\alpha>0$ υπάρχει $\delta(\alpha)>0$ έτσι ώστε για κάθε $z\in B\big(x,\delta(\alpha)\big)$ το $f(z)<\alpha$. Δηλαδή ισχύει ότι $B\big(x,\delta(\alpha)\big)\subseteq f^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big)$. Συνεπώς το $f^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big)$ είναι ανοικτό.

Αντίστροφα έστω ότι το $f^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε αν $x\in f^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big)$ υπάρχει $\delta(\alpha)>0$ έτσι ώστε $B\big(x,\delta(\alpha)\big)\subseteq f^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big)$. Συνεπώς για κάθε $z\in B\big(x,\delta(\alpha)\big)$ το $f(z)<\alpha$. Δηλαδή η f είναι άνω ημισυνεχής στο x.

Θεώρημα- Έστω $f|(\mathrm{X},\rho)\rightarrow(\mathrm{Z},\mathrm{d})$ συνάρτηση. Το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι ένα G_δ σύνολο. Επίσης δεν υπάρχει πραγματική συνάρτηση $f|(\mathbb{R},|\ |)\rightarrow(\mathbb{R},|\ |)$, της οποίας τα σημεία συνέχειας να είναι μόνο οι ρητοί αριθμοί.

Απόδειξη- Έστω $f|(X,\rho)\rightarrow(Z,d)$ μία συνάρτηση μεταξύ δύο μετρικών χώρων και $x_o\in\mathrm{X}$. Θέτουμε ως $\tau_f(x_o)=inf_{\delta>0}\Big\{diam\{f\big(B(x_o,\delta)\big)\}\Big\}=inf_{\delta>0}\Big\{sup_{B(x_o,\delta)}\Big(d\big(f(\acute{x}),f(x)\big)\Big)\Big\}$ όπου $\acute{x},x\in B(x_o,\delta)$.

Ισχυρισμός-Από τον ορισμό της συνέχειας προκύπτει ότι $\tau_f(x_o)=0$ αν και μόνο αν το x_o είναι σημείο συνέχειας της f.

Πράγματι έστω ότι $\tau_f(x_o)=0$ και $\varepsilon>0$, τότε από τον ορισμό του infimum υπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ ώστε $sup_{B_\rho(x_o,\delta(\varepsilon))}\Big(d\big(f(\acute{x}),f(x)\big)\Big)<\varepsilon$.

Συνεπώς το $sup_{B_\rho(x_o,\delta(\varepsilon))}\Big(d\big(f(x_o),f(x)\big)\Big)<\varepsilon$. Δηλαδή για $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ έτσι ώστε για κάθε $x\in B_\rho\big(x_o,\delta(\varepsilon)\big)$ ισχύει ότι $d\big(f(x_o),f(x)\big)<\varepsilon$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_o.

Το αντίστροφο είναι άμεσο από τον ορισμό της συνέχειας στο x_o. Πράγματι αν f είναι συνεχής στο x_o συνεπάγεται ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ έτσι ώστε

$f\left(B_\rho\big(x_o,\delta(\varepsilon)\big)\right) \subseteq B_d(f(x_o),\varepsilon)$. Δηλαδή η $diam\left\{f\left(B_\rho\big(x_o,\delta(\varepsilon)\big)\right)\right\} \leq \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Συνεπώς ισχύει ότι,

$$\tau_f(x_o) = inf_{\delta>0}\left\{diam\left\{f\left(B_\rho(x_o,\delta)\right)\right\}\right\} \leq inf_{\varepsilon>0}\left\{diam\left\{f\left(B_\rho\big(x_o,\delta(\varepsilon)\big)\right)\right\}\right\} \leq \varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα το $\tau_f(x_o) = 0$.

Από τον ορισμό του $\tau_f(x_o)$ προκύπτει άμεσα ότι το x_o είναι σημείο συνέχειας της f αν και μόνο αν το $x_o \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left\{x \in \mathrm{X} | \tau_f(x) < \frac{1}{n}\right\}$.

Ισχυρισμός-Παρατηρούμε ότι η τ_f είναι άνω ημισυνεχής.

Πράγματι έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathrm{X}$, με $\tau_f(x) < \alpha$. Τότε $inf_{\delta>0}\left\{diam\left\{f\left(B_\rho(x,\delta)\right)\right\}\right\} < \alpha$. Συνεπώς από τον ορισμό του infimum, υπάρχει $\delta(\alpha) > 0$ έτσι ώστε $\tau_f(x) \leq diam\left\{f\left(B_\rho\big(x,\delta(\alpha)\big)\right)\right\} < \alpha$.

Έστω $z \in B_\rho\big(x,\delta(\alpha)\big)$, τότε υπάρχει $\delta_z(\alpha) > 0$, έτσι ώστε $B_\rho\big(x,\delta(\alpha)\big) \supseteq B_\rho\big(z,\delta_z(\alpha)\big)$. Συνεπώς $diam\left\{f\left(B_\rho\big(x,\delta(\alpha)\big)\right)\right\} \geq diam\left\{f\left(B_\rho\big(z,\delta_z(\alpha)\big)\right)\right\}$.

Κατ 'επέκταση,

$\alpha > diam\left\{f\left(B_\rho\big(x,\delta(\alpha)\big)\right)\right\} \geq diam\left\{f\left(B_\rho\big(z,\delta_z(\alpha)\big)\right)\right\} \geq inf_{\delta>0}diam\left\{f\left(B_\rho(z,\delta)\right)\right\} = \tau_f(z)$.

Δηλαδή για κάθε $z \in B_\rho\big(x,\delta(\alpha)\big)$ ισχύει ότι $\alpha > \tau_f(z)$. Συνεπώς $B_\rho\big(x,\delta(\alpha)\big) \subseteq {\tau_f}^{-1}([0,\alpha))$. Εφόσον το x είναι τυχαίο, προκύπτει ότι το ${\tau_f}^{-1}([0,\alpha))$ είναι ανοικτό. Δεδομένου ότι το α είναι τυχαίο, από την προηγούμενη Πρόταση προκύπτει ότι η τ_f είναι άνω ημισυνεχής.

Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το ${\tau_f}^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{n}\right)\right) = \left\{x \in \mathrm{X} | \tau_f(x) < \frac{1}{n}\right\}$ είναι ανοικτό. Άρα η $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} {\tau_f}^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{n}\right)\right)$ είναι G_δ σύνολο. Δηλαδή το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι G_δ σύνολο.

Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f|(\mathbb{R},|\,|) \to (\mathbb{R},|\,|)$ της οποίας το σύνολο των σημείων συνέχειας της f να περιέχει μόνο τους ρητούς αριθμούς.

Πράγματι παρατηρούμε ότι οι ρητοί αριθμοί είναι F_σ σύνολο εφόσον $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}$. Αν υποθέσουμε ότι τα σημεία συνέχειας της f είναι μόνο οι ρητοί τότε το $\mathbb{Q}$ είναι G_δ. Άρα το συμπλήρωμα τους $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, που είναι οι άρρητοι, είναι F_σ σύνολο.

Αυτό έχει ως συνέπεια $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ όπου C_n είναι κλειστό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, εφόσον $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ και ο χώρος $(\mathbb{R},|\,|)$ είναι πλήρης, τότε από το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire προκύπτει ότι υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $intC_{n_o} \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει $x_o \in C_{n_o}$ και $\varepsilon_o > 0$, έτσι ώστε $C_{n_o} \supseteq (x_o - \varepsilon_o, x_o + \varepsilon_o)$. Άτοπο διότι το σύνολο C_{n_o} είναι υποσύνολο των άρρητων, ενώ το $(x_o-\varepsilon_o, x_o+\varepsilon_o)$ περιέχει και ρητούς αριθμούς.

Πρόταση-Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του χώρου $(\mathbb{R},|\ |)$ μπορεί να γραφτεί ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.

Απόδειξη-Πράγματι έστω V ένα ανοικτό υποσύνολο στον $(\mathbb{R},|\ |)$ και $x\in$ V. θέτουμε $\mathrm{I}_x=\{(\alpha,b)|x\in(\alpha,b)\subset \mathrm{V}\}$.

Ισχυρισμός, $(\alpha_x,b_x)=\bigcup\{(\alpha,b)|x\in(\alpha,b)\in \mathrm{I}_x\}$, με $\alpha_x=inf\{z<x|(z,x]\subset \mathrm{V}\}$ και $b_x=sup\{x<z|[x,z)\subset \mathrm{V}\}$.

Έστω $z\in(\alpha_x,b_x)$ με $z\neq x$. Είναι άμεσο ότι είτε $\alpha_x<z<x<b_x$ είτε $\alpha_x<\mathrm{x}<\mathrm{z}<b_x$. Συνεπώς υπάρχει $\varepsilon>0$ έτσι ώστε είτε $z=\alpha_x+\varepsilon$ είτε $z=b_x-\varepsilon$. Από τον ορισμό των α_x και b_x είναι άμεσο ότι υπάρχουν είτε $\alpha_x<c_1<z<x<c_2<b_x$ είτε $\alpha_x<c_1<\mathrm{x}<\mathrm{z}<c_2<b_x$. Δηλαδή το $z\in(c_1,c_2)$. Από τα προαναφερόμενα το $(c_1,c_2)\in \mathrm{I}_x$. Δηλαδή το $z\in\bigcup\{(\alpha,b)|x\in(\alpha,b)\in \mathrm{I}_x\}$. Συνεπώς $(\alpha_x,b_x)\subset\bigcup\{(\alpha,b)|x\in(\alpha,b)\in \mathrm{I}_x\}$.

Αντίστροφα έστω $z\in\bigcup\{(\alpha,b)|x\in(\alpha,b)\in \mathrm{I}_x\}$. Τότε υπάρχει $(\alpha,b)\in \mathrm{I}_x$ έτσι ώστε το $z\in(\alpha,b)$. Δηλαδή ισχύει είτε ότι $\alpha_x\leq\alpha<z<x<b\leq b_x$ είτε ότι $\alpha_x\leq\alpha<x<z<b\leq b_x$. Συνεπώς $z\in(\alpha_x,b_x)$. Άρα $\bigcup\{(\alpha,b)|x\in(\alpha,b)\in \mathrm{I}_x\}\subset(\alpha_x,b_x)$.

Ισχυρισμός, έστω $x_1,x_2\in$ V, τότε είτε τα (α_{x_1},b_{x_1}), (α_{x_2},b_{x_2}) ταυτίζονται είτε $(\alpha_{x_1},b_{x_1})\bigcap(\alpha_{x_2},b_{x_2})=\emptyset$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha_{x_1}<\alpha_{x_2}<b_{x_1}<b_{x_2}$. Τότε τα $x_1,x_2\in(\alpha_{x_1},b_{x_2})$. Δηλαδή το $b_{x_1}=sup\{x_1<z|[x_1,z)\subset \mathrm{V}\}<b_{x_2}$ και το $\alpha_{x_1}<\alpha_{x_2}=inf\{z<x_2|(z,x_2]\subset \mathrm{V}\}$. Άτοπο διότι από τον ορισμό του infimum και του supremum υπάρχουν $z_1,z_2\in$ V με $\alpha_{x_1}<z_1<\alpha_{x_2}$ και $b_{x_1}<z_2<b_{x_2}$.

Θεώρημα-Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap_{i\in I}F_i\neq\emptyset$.

Απόδειξη-Έστω ότι ο (X,ρ) είναι συμπαγής και $(F_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Θεωρούμε ότι $\bigcap_{i\in I}F_i=\emptyset$. Συνεπώς $\bigcup_{i\in I}(\mathrm{X}\backslash F_i)=\mathrm{X}$. Λόγω της συμπάγειας της (X,ρ) υπάρχει οικογένεια $\left(\mathrm{X}\backslash F_{i_k}\right)_{1\leq k\leq n}$ έτσι ώστε $\bigcup_{k=1}^{n}\left(\mathrm{X}\backslash F_{i_k}\right)=\mathrm{X}$. Δηλαδή η $\bigcap_{k=1}^{n}F_{i_k}=\emptyset$. Άτοπο εφόσον η οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Επομένως $\bigcap_{i\in I}F_i\neq\emptyset$.

Έστω ότι ισχύει αν οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής τότε να ισχύει $\bigcap_{i\in I}F_i\neq\emptyset$. Έστω ότι ο (X,ρ) δεν είναι συμπαγής, τότε υπάρχει $\{U_i\}_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του X χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή για κάθε $J \subseteq I$ πεπερασμένο ισχύει ότι $\bigcap_{j\in J}(\mathrm{X}\backslash U_j) \neq \emptyset$. Από υπόθεση έχουμε ότι $\bigcap_{\iota\in I}(\mathrm{X}\backslash U_i) \neq \emptyset$. Δηλαδή $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \mathrm{X}$. Άτοπο.

Θεώρημα- Έστω $f|(\mathbb{R},|\,|) \to (\mathbb{R},|\,|)$ μία συνεχής συνάρτηση με $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n(x) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $f^{n(x)}(x) = 0$, τότε η f είναι πολυώνυμο.

Απόδειξη- Έστω $f|(\mathbb{R},|\,|) \to (\mathbb{R},|\,|)$ η συνεχής συνάρτηση της υπόθεσης. Θέτουμε ως $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid f^n(x) = 0\}$. Εφόσον η $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ τότε το σύνολο A_n είναι κλειστό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι άμεσο ότι το $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ και δεδομένου ότι ο $(\mathbb{R},|\,|)$ είναι πλήρης, από το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $D_{n_o} = intA_{n_o} \neq \emptyset$.

Από την προηγούμενη Πρόταση κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του χώρου $(\mathbb{R},|\,|)$ μπορεί να γραφτεί ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.

Συνεπώς αν $D_{n_o} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i^{n_o}$, εφόσον τα $I_i^{n_o}$ είναι ανοικτά διαστήματα συνεπάγεται ότι $I_i^{n_o} \subseteq D_{n_o+1} = intA_{n_o+1}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Δηλαδή ισχύει ότι $D_{n_o} \subseteq D_{n_o+1}$. Επαγωγικά προκύπτει ότι για κάθε $n_o \leq n < m$ ισχύει ότι $D_n \subseteq D_m$. Συνεπώς η ακολουθία $\{D_n = intA_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα.

Τα ανοικτά διαστήματα $I_i^m \subseteq D_m \backslash D_n$ δεν μπορούν να είναι διαδοχικά είτε μεταξύ τους είτε με αυτά της D_n. Επίσης είναι αναγκαστικά ξένα με αυτά της D_n.

Πράγματι έστω ότι υπάρχουν δύο διαδοχικά ανοικτά διαστήματα $(q_1, q_2), (q_2, q_3) \subseteq D_m$. Εφόσον η $f^{(m)}$ είναι συνεχής και $f^{(m)}(q) = 0$ για κάθε $q \in (q_1, q_2) \cup (q_2, q_3)$, τότε $f^{(m)}(q_2) = 0$. Άτοπο διότι $q_2 \notin D_m$.

Θεωρούμε ότι $n < m$. Αν $(q_1, q_2) \subseteq D_n$ και $(q_2, q_3) \subseteq D_m \backslash D_n$, συνεπάγεται ότι το q_2 είναι σημείο ασυνέχειας της $f^{(n)}$, εφόσον $f^{(n)}|_{(q_1,q_2)} = 0$ και $f^{(n)}|_{(q_2,q_3)} \neq 0$. Άτοπο εφόσον η $f^{(n)} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Συνεπώς για κάθε i $\in \mathbb{N}$ ισχύει ότι είτε $D_{n+1} \backslash D_n \supseteq I_i^{n+1}$ είτε $D_n \supseteq I_i^{n+1}$.

Ισχυρισμός1-$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Θέτουμε $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ και έστω $\mathbb{R}\backslash D \neq \emptyset$. Εφόσον το $\mathbb{R}\backslash D$ είναι κλειστό, ο χώρος $(\mathbb{R}\backslash D,|\,|)$ είναι πλήρης και το $(\mathbb{R}\backslash D) \cap A_n$ είναι κλειστό στον χώρο $(\mathbb{R}\backslash D,|\,|)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Είναι άμεσο ότι ισχύει $(\mathbb{R}\backslash D) = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R}\backslash D) = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap (\mathbb{R}\backslash D) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{A_n \cap (\mathbb{R}\backslash D)\}$. Από το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $int\{A_{n_o} \cap (\mathbb{R}\backslash D)\} \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει ανοικτό διάστημα (a, b) στο χώρο $(\mathbb{R},|\,|)$, έτσι ώστε $\emptyset \neq (a, b) \cap (\mathbb{R}\backslash D) \subseteq A_{n_o} \cap (\mathbb{R}\backslash D) \subseteq A_{n_o}$. Το $(a, b) \cap (\mathbb{R}\backslash D)$ είναι ανοικτό διάστημα στο $(\mathbb{R}\backslash D,|\,|)$.

Θα δείξουμε ότι το $(\mathbb{R}\backslash D,|\,|)$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Πράγματι αν x είναι μεμονωμένο σημείο του $(\mathbb{R}\backslash D, |\ |)$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $\mathbb{R}\backslash D \supseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{x\}$. Εφόσον το $\{x\}$ είναι ανοικτό στον $(\mathbb{R}\backslash D, |\ |)$ και ο χώρος $(\mathbb{R}, |\ |)$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία, υπάρχει ανοικτό διάστημα (c,d) με $c < d$, έτσι ώστε $(c,d)\cap(\mathbb{R}\backslash D) = \{x\}$. Δηλαδή το $(c,x)\cup(x,d) \subseteq D$.

Εφόσον η ακολουθία $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα συνεπάγεται ότι θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $(c,x)\cup(x,d) \subseteq D_{n_1}$.

Πράγματι υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο $n \in \mathbb{N}$. Δεδομένου ότι $(c,x) \subseteq D$ θα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $(c,x) \subseteq \bigcup_{n\geq n_o} D_n$. Συνεπώς για κάθε $n \geq n_o$ ισχύει ότι $(c,x) \cap D_n \neq \emptyset$. Από τα προαναφερόμενα αν $I \subseteq (c,x) \cap D_{n_o}$ανοικτό διάστημα, τότε υπάρχει $n > n_o$ και $J \subseteq (c,x) \cap D_n$ έτσι ώστε $J \cap (c,x) \cap D_{n_o} = \emptyset$ και $I \cap J \neq \emptyset$. Άτοπο.

Δεδομένου ότι η $f^{(n_1)}$ είναι συνεχής στο x και $f^{(n_1)}|_{(c,x)\cup(x,d)} = 0$ συνεπάγεται ότι $f^{(n_1)}(x) = 0$. Δηλαδή $(c,d) \subseteq D_{n_1}$. Αυτό συνεπάγεται ότι το $x \in D_{n_1}$. Άτοπο εφόσον το $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι $(a,b)\backslash\{\mathbb{R}\backslash D\} \subseteq A_{n_o}$. Αν ισχύει η τελευταία σχέση καταλήγουμε σε άτοπο.

Πράγματι σε αυτή την περίπτωση το $(a,b) = \{(a,b)\backslash\{\mathbb{R}\backslash D\}\}\cup\{(a,b)\cap(\mathbb{R}\backslash D)\} \subseteq D_{n_o}$. Δηλαδή $D_{n_o}\cap\{\mathbb{R}\backslash D\} \neq \emptyset$. Άτοπο.

Εφόσον το $(a,b)\backslash(\mathbb{R}\backslash D) = (a,b)\cap(\mathbb{R}\backslash D)^c = (a,b)\cap D$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$ μπορεί να εκφραστεί ως ένωση αριθμήσιμου το πλήθος ανοικτών διαστημάτων.

Έστω $\mathrm{I}_o \subseteq (a,b)\cap D$ ένα τέτοιο ανοικτό διάστημα. Τότε υπάρχει $\mu_o \in \mathbb{N}$ (παίρνουμε το ελάχιστο) ώστε $\mathrm{I}_o \subseteq D_{\mu_o}$. Το τελευταίο συμπέρασμα έχει αποδειχθεί προηγουμένως. Επιλέγουμε το I_o έτσι ώστε το x που είναι ένα από τα δύο άκρα του δεν είναι άκρο του (a,b). Συνεπώς $x \in (a,b)\cap D^c \subseteq A_{n_o}$, $x \notin \mathrm{I}_o$ και $f^{(n_o)}(x) = 0$.

Εφόσον ο χώρος $(D^c, |\ |)$ δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία το x είναι σημείο επαφής του. Συνεπώς υπάρχει $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D^c$ έτσι ώστε $|x_k - x| \to 0$. Εφόσον το σύνολο $(a,b)\cap D^c$ είναι ανοικτό στον $(D^c, |\ |)$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $k_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $k \geq k_o$ το $x_k \in (a,b)\cap D^c$. Επίσης εφόσον ισχύει ότι $(a,b)\cap D^c \subseteq A_{n_o}$, συνεπάγεται ότι για κάθε $k \geq k_o$ το $f^{(n_o)}(x_k) = 0$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle στα κλειστά διαστήματα $\{[x_k, x]\}_{k\geq k_o}$, προκύπτει η ακολουθία $\{\xi_k\}_{k\geq k_o}$, με $\xi_k \in (x_k, x)$ και $f^{(n_o+1)}(\xi_k) = 0$. Εφόσον $|x_k - x| \to 0$,τότε και $|\xi_k - x| \to 0$.

Επειδή η $f^{(n_o+1)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ και $k\big(\delta(\varepsilon)\big) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $k \geq k\big(\delta(\varepsilon)\big)$ να ισχύει ότι $|\xi_k - x| < \delta(\varepsilon)$ και κατ' επέκταση $\left|f^{(n_o+1)}(\xi_k) - f^{(n_o+1)}(x)\right| < \varepsilon$. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι $\left|f^{(n_o+1)}(x)\right| < \varepsilon$. Συνεπώς $f^{(n_o+1)}(x) = 0$. Επαγωγικά προκύπτει ότι $f^{(n_o+m)}(x) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Εφόσον η f στο διάστημα I_o είναι πολυώνυμο βαθμού $\mu_o - 1$ τότε το $n_o \geq \mu_o$.

Πράγματι δεν μπορεί να ισχύει $n_o < \mu_o$, διότι η $\mu_o - 1$ παράγωγος του πολυωνύμου είναι μία σταθερά διάφορη του μηδενός στο I_o και το σημείο x είναι άκρο του I_o. Άρα αν $n_o \leq \mu_o - 1$ συνεπάγεται ότι η $f^{(\mu_o-1)}$ θα είναι ασυνεχής στο σημείο x, διότι $f^{(\mu_o-1)}|_{\mathrm{I}_o} = c \neq 0$ και $f^{(\mu_o-1)}(x) = 0$ από τα προαναφερόμενα. Άτοπο.

Άρα $\mathrm{I}_o \subseteq D_{n_o}$. Εφόσον το I_o είναι τυχαίο τότε $(a,b) \cap D \subseteq D_{n_o} \subseteq A_{n_o}$.

Από τα προαναφερόμενα συνεπάγεται ότι $(a,b) \subseteq A_{n_o}$ και κατ' επέκταση $(a,b) \subseteq D_{n_o}$. Άτοπο διότι ισχύει ταυτόχρονα ότι $(a,b) \cap D^c = \emptyset$ και $(a,b) \cap D^c \neq \emptyset$.

Συνεπώς $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ και όπως ήδη δείξαμε υπάρχει $m_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $D_{m_o} = \mathbb{R}$. Άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού $m_o - 1$.

Ισχυρισμός2-Αν $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, τότε συνεπάγεται ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $D_m = \mathbb{R}$.

Πράγματι έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε $[-k,k] \subsetneq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Δεδομένου ότι το $[-k,k]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\ |)$ υπάρχει πεπερασμένο $I \subseteq \mathbb{N}$ έτσι ώστε $[-k,k] \subsetneq \bigcup_{i\in I} D_{n_i}$. Επειδή η ακολουθία των $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα θα υπάρχει $m \in I$ έτσι ώστε $D_{n_i} \subseteq D_m$ για κάθε $i \in I$. Κατά συνέπεια $[-k,k] \subsetneq D_m$.

Εφόσον $D_m = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i^m$ είναι μία αριθμήσιμη ένωση ξένων και φραγμένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων τότε θα ισχύει ότι και το $[-k,k] \subsetneq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i^m$. Πάλι λόγω της συμπάγειας του $[-k,k]$ θα υπάρχει $J \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο έτσι ώστε $[-k,k] \subsetneq \bigcup_{i\in J} I_i^m$. Από τα προαναφερόμενα υπάρχει μοναδικό ανοικτό διάστημα I_i^m με $i \in J$, το οποίο να περιέχει το $[-k,k] \subsetneq I_i^m$.

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $m-1$ στο I_i^m. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το m είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που ικανοποιεί την προαναφερόμενη πρόταση. Δηλαδή η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο βαθμού $m-1$ στο I_i^m. Αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο βαθμού $m-1$ στο $[-k,k]$, της μορφής $\alpha_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_o$ με $\alpha_{m-1} \neq 0$.

Έστω $k' \in \mathbb{N}$ με $k < k'$, τότε με παρόμοιο τρόπο θα υπάρχει ανοικτό και φραγμένο διάστημα $I_{i'}^{m'}$, με $[-k',k'] \subseteq I_{i'}^{m'}$ προφανώς με $m' \geq m$. Επομένως χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το m' είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που ικανοποιεί την προαναφερόμενη πρόταση. Δηλαδή η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο βαθμού $m'-1$ στο $I_{i'}^{m'}$. Αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο βαθμού $m'-1$ στο $[-k',k']$, της μορφής $b_{m'-1}x^{m'-1} + \cdots + b_1 x + b_o$ με $b_{m'-1} \neq 0$.

Συνεπώς για κάθε $x \in [-k,k]$ έχουμε ότι $\alpha_{n_1-1}x^{n_1-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_o = b_{n_o-1}x^{n_o-1} + \cdots + b_1 x + b_o$.

Άρα για κάθε $x \in [-k,k]$ ισχύει ότι $\alpha_{n_1-1}x^{n_1-1} + \cdots + \left(\alpha_{n_o-1} - b_{n_o-1}\right)x^{n_o-1} + \cdots + (\alpha_1 - b_1)x + \alpha_o - b_o = 0$. Εφόσον οι ρίζες είναι το πολύ $n_1 - 1$, συνεπάγεται ότι $\alpha_{n_o} = \cdots = \alpha_{n_1-1} = 0$ και $\alpha_o = b_o, \ldots, \alpha_{n_o-1} = b_{n_o-1}$. Άτοπο.

Συνεπώς ισχύει ότι $m = m'$. Δηλαδή το m είναι ανεξάρτητο του k. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ $[-k, k] \subseteq D_m$. Εφόσον το $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}[-k, k]$, συνεπάγεται ότι $D_m = \mathbb{R}$.

Πρόταση-Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα,

- **a.** Το σύνορο ενός ανοικτού υποσυνόλου του Χ έχει κενό εσωτερικό.
- **b.** Το σύνορο ενός κλειστού υποσυνόλου του Χ έχει κενό εσωτερικό.

Απόδειξη-

a. Έστω $A \neq \emptyset$ ανοικτό υποσύνολο του Χ και υποθέτουμε ότι $int(\bar{A}\setminus A) \neq \emptyset$. Συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $x \in \bar{A} \cap \overline{X\setminus A}$ έτσι ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq \bar{A} \cap \overline{X\setminus A}$. Εφόσον το A είναι ανοικτό υποσύνολο του Χ τότε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq \bar{A} \cap X\setminus A$. Άρα το $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Δηλαδή $x \notin \bar{A}$ και κατ' επέκταση $x \notin \bar{A}\setminus A$. Άτοπο.

b. Έστω $F \neq \emptyset$ κλειστό υποσύνολο του Χ. Τότε το $\mathrm{X}\setminus F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Χ. Ισχύει ότι $\partial F = \bar{F} \cap \left(\overline{X\setminus F}\right) = F \cap \left(\overline{X\setminus F}\right) = \partial(\mathrm{X}\setminus F)$. Από το **a** έχουμε ότι το $int\left(\partial(\mathrm{X}\setminus F)\right) = \emptyset$. Συνεπώς ισχύει ότι το $int(\partial F) = \emptyset$.

Πρόταση-Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία αραιών υποσυνόλων του Χ. Τότε το $int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \emptyset$, δηλαδή το υποσύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι αραιό στον (X, ρ). Συνεπώς κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του Χ είναι δεύτερης κατηγορίας.

Απόδειξη- Έστω A_n αραιό και κλειστό υποσύνολο του Χ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς το $X\setminus A_n$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εφόσον ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος, από το θεώρημα Κατηγορίας του Baire προκύπτει ότι και η $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X\setminus A_n$ είναι πυκνό σύνολο στον Χ.

Το ζητούμενο έπεται από την σχέση $\mathrm{X} = \overline{\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{X}\setminus A_n)}} = \overline{\mathrm{X}\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \mathrm{X}\setminus int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. Δηλαδή το $int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \emptyset$.

Αν τα A_n δεν είναι κλειστά, τότε επιλέγουμε την ακολουθία $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Εφόσον το A_n είναι αραιό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε και το $\overline{A_n}$ είναι αραιό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι αν όχι τότε εφόσον το $\overline{A_n} = (\overline{A_n}\setminus A_n) \cup A_n$ και το $intA_n = \emptyset$ συνεπάγεται ότι $int(\overline{A_n}\setminus A_n) \neq \emptyset$. Έστω $x \in int(\overline{A_n}\setminus A_n)$ τότε $x \in \overline{A_n}$ και ταυτόχρονα υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq \overline{A_n}\setminus A_n$. Συνεπώς ισχύει ταυτόχρονα ότι $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ και $B(x, \varepsilon) \cap A_n = \emptyset$. Άτοπο.

Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το υποσύνολο $\mathrm{X}\setminus\overline{A_n}$ είναι πυκνό στο Χ. Από το θεώρημα κατηγορίας του Baire η $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{X}\setminus\overline{A_n})$ είναι πυκνό υποσύνολο στο Χ. Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι $int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}) = \emptyset$.

Εφόσον ισχύει ότι $int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}) \supseteq int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$, συνεπάγεται ότι $int(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \emptyset$.

Αν $A \neq \emptyset$ ανοικτό υποσύνολο του X είναι πρώτης κατηγορίας τότε θα γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση αραιών υποσυνόλων του X. Εφόσον το A είναι ανοικτό, θα έχει μη κενό εσωτερικό σύνολο. Από τα προαναφερόμενα αυτό είναι άτοπο.

Θεώρημα-Έστω $f|([0,1],|\,|) \to (\mathbb{R},|\,|)$ συνάρτηση. Ορίζουμε αναδρομικά την $n-$τάξης παράγουσα F_n της f στο $[0,1]$ όπως αποτυπώνεται ακολούθως, $F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(t)dt$ με $F_o(x) = f(x)$. Τότε η f είναι μηδενική στο $[0,1]$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει $n(x) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $F_{n(x)}(x) = 0$.

Απόδειξη-Το ευθύ πρόβλημα είναι άμεσο.

Αντίστροφα έστω ότι για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει $n(x) \in \mathbb{N}$ με $F_{n(x)}(x) = 0$.

Εφόσον η F_n είναι διαφορίσιμη και άρα συνεχής, τότε το $F_n^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεση προκύπτει άμεσα ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^{-1}(\{0\}) = [0,1]$.

Λόγω της συνέχειας της f, αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι μηδενική στο $(0,1)$.

Έστω ότι υπάρχει $x \in (0,1)$ ώστε $f(x) \neq 0$. Από υπόθεση υπάρχει $n(x) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x \in F_{n(x)}^{-1}(\{0\})$. Αν $x \in int\{F_{n(x)}^{-1}(\{0\})\}$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subseteq F_{n(x)}^{-1}(\{0\})$. Με διαδοχικές παραγωγίσεις προκύπτει ότι το $f(z) = 0$ για κάθε $z \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Άτοπο. Άρα το $x \in \partial F_{n(x)}^{-1}(\{0\})$. Δηλαδή $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial F_n^{-1}(\{0\})$.

Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, από τον ορισμό της συνέχειας, θα υπάρχει ανοικτό διάστημα $(x-\delta, x+\delta) \subseteq (0,1)$ έτσι ώστε η f να είναι διάφορη του μηδενός. Από τα προαναφερόμενα το ανοικτό διάστημα θα περιέχεται στο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial F_n^{-1}(\{0\})$.

Από προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι το $\partial F_n^{-1}(\{0\})$ είναι αραιό υποσύνολο του $[0,1]$ ως σύνορο του κλειστού συνόλου $F_n^{-1}(\{0\})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από προηγούμενη πρόταση, εφόσον τα $\{\partial F_n^{-1}(\{0\})\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αραιά υποσύνολα του $[0,1]$, προκύπτει ότι $int \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial F_n^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Άτοπο.

Θεώρημα-Για κάθε φυσικό αριθμό n, στον μετρικό χώρο $([0,1],|\,|)$ υπάρχει ένα πουθενά πυκνό κλειστό υποσύνολο του, το οποίο έχει μέτρο Lebesgue $1 - {}^{1}\!/_{n}$. Αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη ενός υποσυνόλου του $[0,1]$, το οποίο είναι Πρώτης Κατηγορίας και έχει Lebesgue μέτρο 1.

Απόδειξη-(i) Το πρώτο μέρος του Θεωρήματος θα δειχθεί γενικότερα για $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάζουμε μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων παρόμοια με αυτή του συνόλου Cantor, μόνο που τώρα στο 1ο βήμα της κατασκευής δεν αφαιρούμε από το

$B_o = [0,1]$ το ανοικτό διάστημα $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, αλλά το ανοικτό διάστημα $I_{1,1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right)$ μήκους $\alpha/3$ του οποίου το μέσο είναι το $\frac{1}{2}$.

Συνεπώς προκύπτουν τα κλειστά διαστήματα $J_{1,1} = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right]$ και $J_{1,2} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}, 1\right]$. Θέτουμε $B_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2}$. Το μέτρο Lebesgue του B_1 είναι,

$$m(B_1) = m\left(\left[0,\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right]\right) + m\left(\left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}, 1\right]\right) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3} + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3} = 1 - \frac{\alpha}{3}.$$

Στο 2ο βήμα αφαιρούμε τα ανοικτά διαστήματα

$$I_{2,1} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right)$$

$$I_{2,2} = \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9}, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right)$$

μήκους $\alpha/3^2$ των οποίων τα μέσα ταυτίζονται με αυτά των διαστημάτων $J_{1,1}$, $J_{1,2}$. Συνεπώς προκύπτουν τα ακόλουθα κλειστά διαστήματα,

$$J_{2,1} = \left[0, \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right]$$

$$J_{2,2} = \left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)\right]$$

$$J_{2,3} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right]$$

$$J_{2,4} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}, 1\right]$$

με $B_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4}$.

Το αντίστοιχο μέτρο Lebesgue του B_2 είναι,

$$m(B_2) = m(J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4}) = m(J_{2,1}) + m(J_{2,2}) + m(J_{2,3}) + m(J_{2,4}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)\left[1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3}\cdot\frac{2}{3}\right] = 1 - \frac{\alpha}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\right)$$

Στο 3ο βήμα αφαιρούμε τα ανοικτά διαστήματα

$$I_{3,1} = \left(\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} - \frac{\alpha}{2\cdot 27}, \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} + \frac{\alpha}{2\cdot 27}\right)$$

$$I_{3,2} = \left(\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} - \frac{\alpha}{2\cdot 27}, \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} + \frac{\alpha}{2\cdot 27}\right)$$

$$I_{3,3} = \left(\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right\} - \frac{\alpha}{2\cdot 27}, \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right\} + \frac{\alpha}{2\cdot 27}\right)$$

$$I_{3,4} = \left(\frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} - \frac{\alpha}{2\cdot 27}, \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} + \frac{\alpha}{2\cdot 27}\right)$$

μήκους $\alpha/3^3$ των οποίων τα μέσα ταυτίζονται με αυτά των διαστημάτων $J_{2,1}, J_{2,2}, J_{2,3}, J_{2,4}$.

Συνεπώς προκύπτουν τα ακόλουθα κλειστά διαστήματα,

$J_{3,1} = \left[0, \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} - \frac{\alpha}{2\cdot 27}\right]$

$J_{3,2} = \left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} + \frac{\alpha}{2\cdot 27}, \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right]$

$J_{3,3} = \left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}, \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} - \frac{\alpha}{2\cdot 27}\right]$

$J_{3,4} = \left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} + \frac{\alpha}{2\cdot 27}, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)\right]$

$J_{3,5} = \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}, \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right\} - \frac{\alpha}{2\cdot 27}\right]$

$J_{3,6} = \left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\cdot 3}\right\} + \frac{\alpha}{2\cdot 27}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) - \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right]$

$J_{3,7} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}, \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} - \frac{\alpha}{2\cdot 27}\right]$

$J_{3,8} = \left[\frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)\right) + \frac{\alpha}{2\cdot 9}\right\} + \frac{\alpha}{2\cdot 27}, 1\right]$

με $\mathrm{B}_3 = J_{3,1} \cup J_{3,2} \cup J_{3,3} \cup J_{3,4} \cup J_{3,5} \cup J_{3,6} \cup J_{3,7} \cup J_{3,8}$.

Το αντίστοιχο μέτρο Lebesgue του B_3 είναι,

$m(\mathrm{B}_3) = m(J_{3,1} \cup J_{3,2} \cup J_{3,3} \cup J_{3,4} \cup J_{3,5} \cup J_{3,6} \cup J_{3,7} \cup J_{3,8}) = m(J_{3,1}) + m(J_{3,2}) + m(J_{3,3}) + m(J_{3,4}) + m(J_{3,5}) + m(J_{3,6}) + m(J_{3,7}) + m(J_{3,8}) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2^3}\right)\left[1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{9} - \frac{4\alpha}{27}\right] = 1 - \frac{\alpha}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι το n-1-οστό βήμα. Από τα κλειστά διαστήματα $J_{n-1,k}$ του σύνολο $\mathrm{B}_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{n-1,k}$ αφαιρούμε τα ανοικτά διαστήματα $I_{n,k}$, με $1 \leq k \leq 2^{n-1}$, τα οποία έχουν μήκος $\alpha/3^n$ και το ίδιο μέσο με τα αντίστοιχα $J_{n-1,k}$. κλειστά διαστήματα.

Για κάθε $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ από το διάστημα $J_{n-1,k}$ προκύπτουν τα κλειστά διαστήματα $J_{n,2k-1}$ και $J_{n,2k}$. Το $J_{n,2k-1}$ έχει το ίδιο αριστερό άκρο με το $J_{n-1,k}$ και το $J_{n,2k}$ έχει το ίδιο δεξιο άκρο με το $J_{n-1,k}$. Συνεπώς προκύπτει το ακόλουθο σύνολο κλειστών και ξένων ανά δύο διαστημάτων $\{J_{n,k}\}_{k=1}^{2^n}$. Το μέτρο Lebesgue του $J_{n,k}$,για κάθε $1 \leq k \leq 2^n$, είναι

$$m(J_{n,k}) = \left(\frac{1}{2^n}\right)\left[1 - \frac{\alpha}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] = \frac{1}{2^n} - \frac{\alpha}{2^n} + \frac{\alpha}{3^n}$$

Το σύνολο $\mathrm{B}_n = J_{n,1} \cup J_{n,2} \cup \cdots \cup J_{n,2^n}$ προκύπτει από το B_{n-1} αν αφαιρέσουμε από το τελευταίο τα 2^{n-1} το πλήθος ανοικτά και ξένα ανά δύο διαστήματα $I_{n,k}$, μήκους $\frac{\alpha}{3^n}$.

Το μέτρο Lebesgue των $\{I_{n,k}\}_{k=1}^{2^{n-1}}$ είναι

$$m([0,1]\setminus \mathrm{B}_n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} m(I_{n,k}) = 2^{n-1}\frac{a}{3^n} = \frac{a}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Τα αντίστοιχα κλειστά και ξένα ανά δύο διαστήματα $\{J_{n,k}\}_{k=1}^{2^n}$ έχουν μέτρο Lebesgue

$$m(\mathrm{B}_n) = \sum_{k=1}^{2^n} m(J_{n,k}) = 2^n\left(\frac{1}{2^n} - \frac{a}{2^n} + \frac{a}{3^n}\right) = 1 - a + a\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Θέτουμε $\mathrm{C}_\alpha = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$. Εφόσον η $\{\mathrm{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και $m([0,1]) = 1 < \infty$ συνεπάγεται ότι,

$$m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(\mathrm{B}_n) = 1-\alpha.$$

Συνεπώς το μέτρο Lebesgue του συμπληρώματος του C είναι,

$$a = 1-(1-a) = m([0,1]) - m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) = m\left([0,1]\setminus\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) = m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}\right)$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} m(I_{n,k}) = \frac{a}{2}\cdot\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Το C_α είναι πουθενά πυκνό, δηλαδή το $int\mathrm{C}_\alpha = \emptyset$.

Πράγματι έστω ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα $(\alpha,b) \subseteq \mathrm{C}_\alpha \neq \emptyset$, όπου $b > a$. Τότε από κατασκευή υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{J_{n,k(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $(\alpha,b) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_{n,k(n)}$. Συνεπώς

$$0 \le m((\alpha,b)) \le m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_{n,k(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} m(J_{n,k(n)}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{a}{2^n} + \frac{a}{3^n} = 0.$$

Άρα $b - \alpha = m((\alpha,b)) = 0$. Άτοπο.

Από τα προαναφερόμενα προκύπτει ότι για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει ένα πουθενά πυκνό κλειστό σύνολο C_α υποσύνολο του $[0,1]$, το οποίο έχει μέτρο Lebesgue $1-\alpha$.

(ii) Από το (i) έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ πουθενά πυκνών και κλειστών υποσυνόλων του $([0,1], |\,|)$, με μέτρο Lebesgue $m(A_n) = 1 - \frac{1}{n}$. Συνεπώς ισχύει ότι το $intA_n = \emptyset$ και άρα $\overline{[0,1]\setminus A_n} = [0,1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εφόσον $A_n \cap ([0,1]\setminus A_n) = \emptyset$, συνεπάγεται ότι το $m([0,1]\setminus A_n) = {}^{1}/_{n}$.

Πράγματι άμεσα προκύπτει ότι $m([0,1]\setminus A_n) + m(A_n) = m(A_n \cup \{[0,1]\setminus A_n\}) = m([0,1]) = 1$. Δηλαδή $m([0,1]\setminus A_n) + 1 - \frac{1}{n} = 1$ αν και μόνο αν $m([0,1]\setminus A_n) = {}^{1}/_{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε $C_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Το C_n είναι κλειστό για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ως πεπερασμένη ένωση των κλειστών υποσυνόλων $\{A_i\}_{1\le i\le n}$. Είναι άμεσο ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Πράγματι έστω $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ τότε υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x \in A_{n_o}$. Δηλαδή $x \in C_{n_o}$. Άρα $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Αντίστροφα έστω $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Τότε υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x \in C_{n_o}$. Άρα $x \in \bigcup_{i=1}^{n_o} A_i$. Δηλαδή $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Αν δείξουμε ότι το C_n είναι πουθενά πυκνό σύνολο για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ θα είναι Πρώτης Κατηγορίας.

Από τα προαναφερόμενα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $[0,1]\backslash A_n$ είναι ανοικτό και πυκνό στο $([0,1],|\ |)$. Συνεπώς από το θεώρημα Κατηγορίας του Baire το σύνολο $[0,1]\backslash C_n = \bigcap_{i=1}^{n}[0,1]\backslash A_i$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο στο $([0,1],|\ |)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή ισχύει ότι $intC_n = \emptyset$. Άρα το C_n είναι πουθενά πυκνό σύνολο για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι *το* $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = 1$.

Θέτουμε $B_1 = [0,1]\backslash A_1$, $B_2 = \{[0,1]\backslash A_1\}\cap\{[0,1]\backslash A_2\}$, … , $B_n = \bigcap_{i=1}^{n}\{[0,1]\backslash A_i\}$, … . Από το θεώρημα Κατηγορίας του Baire το σύνολο $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{[0,1]\backslash A_n\}$ είναι πυκνό στο $([0,1],|\ |)$. Συνεπώς η $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{[0,1]\backslash A_n\} \neq \emptyset$.

Εφόσον η $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και $m(B_1) = m([0,1]) = 1 < \infty$, συνεπάγεται ότι το $m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = lim_{n\to\infty} m(B_n)$. Αλλά $m(B_n) \leq m([0,1]\backslash A_n) = {}^{1}/_{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $0 \leq m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) \leq lim_{n\to\infty} {}^{1}/_{n} = 0$. Άρα $m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 0$.

Είναι άμεσο ότι ισχύει $[0,1] = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\}\cup\{[0,1]\backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\} = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\}\cup\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\}$ και $\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\}\cap\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\}=\emptyset$. Συνεπώς προκύπτει ότι το $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) + m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = m(\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\}\cap\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\}) = m([0,1]) = 1$. Εφόσον το $m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 0$, έχουμε ότι $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = 1$.

Θεώρημα-Έστω $f|(\mathbb{R},|\ |) \to (\mathbb{R},|\ |)$ συνεχής συνάρτηση, έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει ότι $lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$. Τότε $lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Απόδειξη-Έστω $\varepsilon > 0$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $F_n = \bigcap_{m=n}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} \mid |f(mx)| \leq {}^{\varepsilon}/_{2}\}$. Από την υπόθεση το F_n είναι κλειστό για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, εφόσον η f είναι συνεχής, το $f^{-1}([-{}^{\varepsilon}/_{2}, {}^{\varepsilon}/_{2}])$ είναι κλειστό και άρα και το $\frac{1}{m} f^{-1}([-{}^{\varepsilon}/_{2}, {}^{\varepsilon}/_{2}])$ είναι κλειστό για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Συνεπώς το $F_n = \bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \frac{1}{m} f^{-1}([-{}^{\varepsilon}/_{2}, {}^{\varepsilon}/_{2}])\right\}$ είναι κλειστό ως τομή κλειστών.

Επίσης από την υπόθεση ισχύει ότι $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Πράγματι έστω $x \in \mathbb{R}$ τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $m \geq n(x,\varepsilon)$ η $|f(mx)| < {}^{\varepsilon}/_{2}$. Δηλαδή $x \in F_{n(x,\varepsilon)}$. Άρα $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Συνεπώς $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Εφόσον ο $(\mathbb{R},|\ |)$ είναι πλήρης, από το θεώρημα Κατηγορίας του Baire υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $int(F_{n_o}) \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει $(a,b) \subseteq F_{n_o}$. Συνεπώς για κάθε $x \in (a,b)$ και για κάθε $m \geq n_o$ ισχύει ότι η $|f(mx)| \leq {}^{\varepsilon}/_{2}$. Δηλαδή $\bigcup_{m=n_o}^{\infty}(ma,mb) \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq {}^{\varepsilon}/_{2}\}$.

1) Υποθέτουμε ότι $0 < a < b$. Οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν με παρόμοιους τρόπους. Είναι άμεσο ότι για $M > max\left\{n_o, \frac{a}{b-a}\right\}$, με $\mathrm{M} \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\big((\mathrm{M}+l)a, (\mathrm{M}+l)b\big) \cap \big((\mathrm{M}+l+1)a, (\mathrm{M}+l+1)b\big) \neq \emptyset$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$.

Πράγματι αν $m \geq \mathrm{M}$ τότε $m > \frac{a}{b-a}$ αν και μόνο αν $(b-a)m > a$ αν και μόνο αν $bm > (1+m)a > ma$. Δηλαδή $(ma, mb) \cap \big((m+1)a, (m+1)b\big) \neq \emptyset$.

Από τα προαναφερόμενα ισχύει ότι $(\mathrm{M}a, \infty) = \bigcup_{\kappa=\mathrm{M}}^{\infty} (\kappa a, \kappa b)$.

1ος τρόπος. Έστω $x \in (\mathrm{M}a, \infty)$ και θέτουμε $n = min\{\kappa \geq \mathrm{M}-1 | x < (\kappa+1)b\}$. Τότε είτε $nb = x$ είτε $nb < x$. Όπως έχει ήδη αποδειχθεί ισχύει ότι $(1+n)b > nb > (1+n)a$. Συνεπώς το $x \in \big((1+n)a, (1+n)b\big)$. Δηλαδή το $x \in \bigcup_{\kappa=\mathrm{M}}^{\infty} (\kappa a, \kappa b)$.

Αντίστροφα έστω $x \in \bigcup_{\kappa=\mathrm{M}}^{\infty} (\kappa a, \kappa b)$, τότε υπάρχει $\kappa_o \geq \mathrm{M}$ έτσι ώστε $x \in (\kappa_o a, \kappa_o b)$. Δηλαδή ισχύει ότι $\infty > \kappa_o b > x > \kappa_o a > \mathrm{M}\alpha$. Δηλαδή το $x \in (\mathrm{M}a, \infty)$.

2ος τρόπος. Έστω ότι δεν ισχύει η ισότητα, τότε για κάθε $i \geq \mathrm{M}$ υπάρχει $x_i > ia$ με $x_i \in (ia, \infty) \setminus \bigcup_{\kappa=i}^{\infty} (\kappa a, \kappa b)$. Δηλαδή, η ακολουθία $\{x_i\}_{i \geq \mathrm{M}}$ συγκλίνει στο $x_i \to \infty$, εφόσον η ακολουθία συγκλίνει στο $ia \to \infty$.

Έστω $i \geq \mathrm{M}$, τότε από τα προαναφερόμενα υπάρχει $x_i > ia$. Εφόσον το $x_i < \infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $i_o \geq i$, έτσι ώστε $ia < x_i < i_o b$. Από τα προαναφερόμενα έχουμε ότι $i_o \geq i \geq \mathrm{M}$ και για κάθε $i \leq l \leq j \leq i_o$ ισχύει ότι $(la, lb) \cap (ja, jb) \neq \emptyset$. Δηλαδή $x_i \in (ia, i_o b) = \bigcup_{l=i}^{i_o} (la, lb)$. Άτοπο.

Συνοψίζοντας ισχύει ότι,

$$(\mathrm{M}a, \infty) = \bigcup_{\kappa=\mathrm{M}}^{\infty} (\kappa a, \kappa b) \subseteq \bigcup_{m=n_o}^{\infty} (ma, mb) \subseteq \left\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq {}^{\varepsilon}/_{2}\right\}.$$

Δηλαδή για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\mathrm{M}a > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x > \mathrm{M}a$ η $|f(x)| < \varepsilon$.

2) Για την περίπτωση που $\alpha < 0 < b$, είναι άμεσο ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $(ma, mb) \subseteq \big((m+1)a, (m+1)b\big)$. Συνεπώς προκύπτει άμεσα ότι $\mathbb{R} = \bigcup_{m=n_o}^{\infty} (ma, mb) \subseteq \left\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq {}^{\varepsilon}/_{2}\right\}$. Δηλαδή αν $\varepsilon > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $|f(x)| < \varepsilon$.

3)Τέλος για την περίπτωση που $\alpha < b < 0$, είναι άμεσο ότι για $M > max\left\{n_o, \frac{b}{a-b}\right\}$, με $\mathrm{M} \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\big((\mathrm{M}+l)a, (\mathrm{M}+l)b\big) \cap \big((\mathrm{M}+l+1)a, (\mathrm{M}+l+1)b\big) \neq \emptyset$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$.

Πράγματι αν $m \geq \mathrm{M}$ τότε $m \geq \frac{b}{a-b}$ αν και μόνο αν $(a-b)m < b$ αν και μόνο αν $(1+m)a < ma < (1+m)b < mb$. Δηλαδή $(ma, mb) \cap \big((m+1)a, (m+1)b\big) \neq \emptyset$.

Από τα προαναφερόμενα ισχύει ότι $(-\infty, \mathrm{M}b) = \bigcup_{\kappa=\mathrm{M}}^{\infty} (\kappa a, \kappa b)$.

Έστω $x \in (-\infty, \mathrm{M}b)$ και θέτουμε $n = min\{\kappa \geq \mathrm{M}-1 \mid x > (\kappa+1)a\}$. Τότε είτε $na = x$ είτε $na > x$. Όπως έχει ήδη αποδειχθεί ισχύει ότι $(1+n)a < na < (1+n)b$. Συνεπώς το $x \in \big((1+n)a, (1+n)b\big)$. Δηλαδή το $x \in \bigcup_{\kappa=\mathrm{M}}^{\infty} (\kappa a, \kappa b)$.

Αντίστροφα έστω $x \in \bigcup_{\kappa=\mathrm{M}}^{\infty}(\kappa a, \kappa b)$, τότε υπάρχει $\kappa_o \geq \mathrm{M}$ έτσι ώστε $x \in (\kappa_o a, \kappa_o b)$. Δηλαδή ισχύει ότι $-\infty < \kappa_o a < x < \kappa_o b < \mathrm{M}b$. Συνεπώς το $x \in (-\infty, \mathrm{M}b)$.

Συνοψίζοντας ισχύει ότι,

$$(-\infty, \mathrm{M}b) = \bigcup_{\kappa=\mathrm{M}}^{\infty}(\kappa a, \kappa b) \subseteq \bigcup_{m=n_o}^{\infty}(ma, mb) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq {}^{\varepsilon}\!/_{2}\right\}.$$

Δηλαδή για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\mathrm{M}b < 0$ έτσι ώστε για κάθε $x < \mathrm{M}b$ η $|f(x)| < \varepsilon$.

Συνεπώς για την περίπτωση που θέλουμε να δείξουμε ότι το $lim_{x\to+\infty}f(x) = 0$ εφαρμόζουμε το θεώρημα του Baire στον χώρο $([0,+\infty), |\ |)$ με $F_n = \bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{x \in [0,+\infty) \mid |f(mx)| \leq {}^{\varepsilon}\!/_{2}\right\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για την περίπτωση που θέλουμε να δείξουμε ότι το $lim_{x\to-\infty}f(x) = 0$ εφαρμόζουμε το θεώρημα του Baire στον χώρο $\big((-\infty,0], |\ |\big)$ με $F_n = \bigcap_{m=n}^{\infty}\big\{x \in (-\infty,0] \mid |f(mx)| \leq {}^{\varepsilon}\!/_{2}\big\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα-Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f|\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ και $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$.

Απόδειξη-Προς απαγωγή σε άτοπο θεωρούμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f|\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να πληρή τις υποθέσεις της εκφώνησης.

Εφόσον η απεικόνιση $f|\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση το υποσύνολο $f(\mathbb{Q})$ είναι αριθμήσιμο και δεδομένου ότι το $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ και το υποσύνολο $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ είναι αριθμήσιμο. Τέλος επειδή $\mathbb{Q} \bigcap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \emptyset$ συνεπάγεται ότι $f(\mathbb{Q}) \cap f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Είναι άμεσο ότι $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ και επίσης είναι προφανές ότι το $f^{-1}\big(f(\mathbb{R})\big) = \mathbb{R}$. Από τα προαναφερόμενα προκύπτει ότι το $f(\mathbb{R})$ είναι αριθμήσιμο και κατεπέκταση ισχύουν τα ακόλουθα $\mathbb{R} = f^{-1}\big(\bigcup_{z\in f(\mathbb{R})} z\big) = \bigcup_{z\in f(\mathbb{R})} f^{-1}(z)$.

Εφόσον ο $(\mathbb{R}, |\ |)$ είναι πλήρης και το $\{z\}$ είναι κλειστό για κάθε $z \in f(\mathbb{R})$, τότε από το θεώρημα κατηγορίας του Baire υπάρχει $\{z_o\}$ έτσι ώστε $int\{f^{-1}(z_o)\} \neq \emptyset$. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα $(\alpha, b) \subseteq f^{-1}(z_o)$ με $\alpha < b$. Συνεπώς ισχύει ότι $f\big((\alpha, b)\big) \subseteq f\big(f^{-1}(z_o)\big) \subseteq \{z_o\}$. Αλλά υπάρχει $q \in (\alpha, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ και $r \in (\alpha, b) \bigcap \{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\} \neq \emptyset$. Δηλαδή $f(q), f(r) \in \{z_o\}$. Όμως $f(q) \neq f(r)$ διότι $f(q) \in f(\mathbb{Q})$, $f(r) \in f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ και $f(\mathbb{Q}) \cap f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \emptyset$. Άτοπο.

Θεώρημα- Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f|\ (\mathrm{X}, \rho) \to (\mathbb{Q}, |\ |)$ συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει μη κενό ανοικτό υποσύνολο $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$, ώστε ο περιορισμός της f στο A να είναι σταθερή συνάρτηση.

Απόδειξη-Θέτουμε $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Συνεπώς ισχύει ότι $\mathrm{X} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} \mid f(x) \in \mathbb{Q}\} = f^{-1}(\mathbb{Q}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\{q_n\})$.

Εφόσον η $f|\,(\mathrm{X},\rho) \to (\mathbb{Q},|\,|)$ είναι συνεχής το υποσύνολο $f^{-1}(\{q_n\})$ είναι κλειστό, δεδομένου ότι το $\{q_n\}$ είναι ταυτόχρονα κλειστό και ανοικτό στον χώρο $(\mathbb{Q},|\,|)$.

Από το θεώρημα κατηγορίας του Baire υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $int\{f^{-1}(\{q_{n_o}\})\} \neq \emptyset$. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει ανοικτό υποσύνολο $\mathrm{A} \subseteq f^{-1}(\{q_{n_o}\})$. Άμεσα προκύπτει ότι $f(\mathrm{A}) \subseteq f\left(f^{-1}(\{q_{n_o}\})\right) = \{q_{n_o}\}$. Δηλαδή για κάθε $x \in \mathrm{A}$ το $f(x) = q_{n_o}$. Συνεπώς η f είναι σταθερή συνάρτηση στο ανοικτό υποσύνολο Α του μετρικού χώρου (X,ρ).

Θεώρημα- Έστω μία συνεχής και 1-1 συνάρτηση $f|\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, τότε το αριθμήσιμο σύνολο $f(\mathbb{Q})$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία και η $\overline{f(\mathbb{Q})}$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Απόδειξη-Προς απαγωγή σε άτοπο θεωρούμε ότι υπάρχει μεμονωμένο σημείο $f(q_o)$ στο $f(\mathbb{Q})$ με $q_o \in \mathbb{Q}$. Δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $(f(q_o) - \varepsilon, f(q_o) + \varepsilon) \cap f(\mathbb{Q}) = f(q_o)$. Εφόσον η f είναι συνεχής συνάρτηση υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f\big((q_o - \delta, q_o + \delta) \cap \mathbb{Q}\big) \subseteq (f(q_o) - \varepsilon, f(q_o) + \varepsilon)$. Επομένως έχουμε τα ακόλουθα $f\big((q_o - \delta, q_o + \delta) \cap \mathbb{Q}\big) = f\big((q_o - \delta, q_o + \delta) \cap \mathbb{Q}\big) \cap f(\mathbb{Q}) \subseteq (f(q_o) - \varepsilon, f(q_o) + \varepsilon) \cap f(\mathbb{Q}) = \{f(q_o)\}$. Άτοπο δεδομένου ότι το σύνολο $(q_o - \delta, q_o + \delta) \cap \mathbb{Q}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο και η f είναι 1-1.

Το σύνολο $\overline{f(\mathbb{Q})}$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Πράγματι έστω z_o μεμονωμένο σημείο του $\overline{f(\mathbb{Q})}$. Από τα προηγούμενα έχουμε ότι $z_o \in \overline{f(\mathbb{Q})} \backslash f(\mathbb{Q})$. Δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $(z_o - \varepsilon, z_o + \varepsilon) \cap \overline{f(\mathbb{Q})} = \{z_o\}$. Εφόσον το $z_o \in \overline{f(\mathbb{Q})}$, τότε για κάθε $\delta > 0$ ισχύει ότι $(z_o - \delta, z_o + \delta) \cap f(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Συνεπώς για τυχαίο $\delta > 0$ υπάρχει $z \neq z_o$ με $z \in (z_o - \delta, z_o + \delta) \cap f(\mathbb{Q}) \subseteq (z_o - \delta, z_o + \delta) \cap \overline{f(\mathbb{Q})} = \{z_o\}$. Άτοπο. Άρα το z_o δεν είναι μεμονωμένο σημείο του $\overline{f(\mathbb{Q})}$.

Αν $(z_o - \delta, z_o + \delta) \cap f(\mathbb{Q}) = \{z_o\}$ τότε το z_o είναι μεμονωμένο σημείο του $f(\mathbb{Q})$. Άτοπο από τα προαναφερόμενα.

Έστω ότι το $\overline{f(\mathbb{Q})}$ δεν είναι υπεραρθμήσιμο. Θέτουμε $\overline{f(\mathbb{Q})} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{z_n\}$. Εφόσον ο χώρος $(\mathbb{R},|\,|)$ είναι πλήρης τότε και ο χώρος $\left(\overline{f(\mathbb{Q})},|\,|\right)$ είναι πλήρης.

Δεδομένου ότι το $\overline{f(\mathbb{Q})}$ δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία στον χώρο $(\mathbb{R},|\,|)$, τότε για κάθε $z_n \in \overline{f(\mathbb{Q})}$ το $\{z_n\}$ είναι κλειστό στον χώρο $(\mathbb{R},|\,|)$. Συνεπώς και το $\{z_n\} = \overline{f(\mathbb{Q})} \cap \{z_n\}$ είναι κλειστό στο χώρο $\left(\overline{f(\mathbb{Q})},|\,|\right)$.

Από τα προαναφερόμενα προκύπτει ότι το $\overline{f(\mathbb{Q})} \backslash \{z_n\}$ είναι ανοικτό και πυκνό στον πλήρη μετρικό χώρο $\left(\overline{f(\mathbb{Q})},|\,|\right)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα κατηγορίας του Baire το σύνολο $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(\mathbb{Q})} \backslash \{z_n\} = \overline{f(\mathbb{Q})} \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{z_n\} = \overline{f(\mathbb{Q})} \backslash \overline{f(\mathbb{Q})} = \emptyset$ είναι πυκνό υποσύνολο στον χώρο $\left(\overline{f(\mathbb{Q})},|\,|\right)$. Άτοπο. Άρα το $\overline{f(\mathbb{Q})}$ είναι υπεραρθμήσιμο.

Θεώρημα- Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $\mathcal{L}=\{f|(\mathrm{X},\rho)\to(\mathbb{R},|\,|)\}$ μία οικογένεια συνεχών συναρτήσεων έτσι ώστε για κάθε $x\in X$ υπάρχει $M_x>0$ με $|f(x)|<M_x$ για κάθε $f\in\mathcal{L}$, τότε υπάρχει Ο ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του (X,ρ), τέτοιο ώστε για κάθε $x\in \mathrm{O}$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x στην οποία το $\mathcal{L}=\{f|(\mathrm{X},\rho)\to(\mathbb{R},|\,|)\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο.

Απόδειξη-Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θέτουμε $E_n=\{x\in \mathrm{X}\,|\,|f(x)|\le n\,,\forall f\in\mathcal{L}\}$. Εφόσον το σύνολο E_n είναι κλειστό τότε το bdE_n είναι πουθενά πυκνό για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς από προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι το σύνολο $int\bigcup_{n\in\mathbb{N}}bdE_n=\emptyset$. Δηλαδή το $\mathrm{X}\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}bdE_n$ είναι πυκνό στο χώρο Χ.

Όπως αποδείχθηκε στο προηγούμενο θεώρημα το $\mathrm{X}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$. Άρα ισχύει ότι $\mathrm{X}\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}bdE_n\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}intE_n$.

Πράγματι έστω $x\in \mathrm{X}\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}bd\ \ _n$, τότε $x\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}}bdE_n$, δηλαδή για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι $x\notin bdE_n$. Συνεπώς για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι $x\notin E_n\cap\overline{\mathrm{X}\setminus E_n}$.

Επίσης εφόσον το $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ υπάρχει $n_o\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε $x\in E_{n_o}$. Δηλαδή έχουμε $x\in E_{n_o}$ και $x\notin bd\ \ _{n_o}$.

Αν το $x\notin in\ \ _{n_o}$ τότε για κάθε $\delta>0$ θα ισχύει ότι $B(x,\delta)\cap \mathrm{X}\setminus E_{n_o}\neq\emptyset$. Δηλαδή το $x\in\overline{\mathrm{X}\setminus E_{n_o}}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $x\in E_{n_o}\cap\overline{\mathrm{X}\setminus E_{n_o}}=bdE_{n_o}$. Άτοπο. Συνεπώς $x\in intE_{n_o}$.

Εφόσον το σύνολο bdE_n είναι κλειστό και πουθενά πυκνό για κάθε $n\in\mathbb{N}$, από την ισοδύναμη μορφή του θεωρήματος Baire έχουμε ότι $int\bigcup_{n\in\mathbb{N}}bdE_n=\emptyset$. Συνεπώς ισχύουν τα ακόλουθα $\mathrm{X}=\overline{\mathrm{X}\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}bdE_n}\subseteq\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}intE_n}\subseteq \mathrm{X}$. Συνεπώς $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}intE_n}=\mathrm{X}$. Δηλαδή το υποσύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}intE_n$ είναι ανοικτό και πυκνό στον (X,ρ).

Έστω $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}intE_n$ τότε υπάρχει $n_o\in\mathbb{N}$ και $\varepsilon>0$ έτσι ώστε η $B(x,\varepsilon)\subseteq E_{n_o}=\{x\in \mathrm{X}\,|\,|f(x)|\le n_o\,,\forall f\in\mathcal{L}\}$. Δηλαδή υπάρχει σταθερά $\mathrm{M}_x>0$ έτσι ώστε για κάθε $z\in B(x,\varepsilon)$ και για κάθε $f\in\mathcal{L}$ να ισχύει ότι $|f(z)|\le \mathrm{M}_x$. Συνεπώς το σύνολο $\mathcal{L}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο στο $B(x,\varepsilon)$.

Το $\mathrm{O}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}intE_n$ είναι το ζητούμενο σύνολο του θεωρήματος.

Θεώρημα-Έστω (X,ρ) είναι αριθμήσιμος πλήρης μετρικός χώρος. Τότε το σύνολο των μεμονωμένων σημείων Μ του Χ είναι G_δ πυκνό στο Χ.

Απόδειξη-Αρχικά θα δείξουμε ότι ο (X,ρ) περιέχει μεμονωμένα σημεία.

Πράγματι αν όχι τα $\mathrm{X}\setminus\{x\}$ είναι ανοικτά και πυκνά στον (X,ρ). Εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης από το θεώρημα Baire ισχύει ότι το σύνολο $\bigcap_{x\in X}\mathrm{X}\setminus\{x\}$ είναι πυκνό στον Χ. Δηλαδή $\bigcap_{x\in X}\mathrm{X}\setminus\{x\}\neq\emptyset$. Έστω $x_o\in\bigcap_{x\in X}\mathrm{X}\setminus\{x\}$. Τότε $x_o\in \mathrm{X}\setminus\{x_o\}$. Άτοπο.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του Χ είναι πυκνό.

Έστω ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο V του X και έστω ότι δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία. Τότε και η κλειστότητα του $\overline{\mathrm{V}}$ δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία.

Πράγματι έστω $x \in \overline{\mathrm{V}}$ μεμονωμένο σημείο του. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(x,\varepsilon) \cap \overline{\mathrm{V}} = \{x\}$. Εφόσον ισχύει ότι $B(x,\delta) \cap \mathrm{V} \neq \emptyset$ για κάθε $\delta > 0$ συνεπάγεται ότι $\emptyset \neq B(x,\varepsilon) \cap \mathrm{V} \subset B(x,\varepsilon) \cap \overline{\mathrm{V}} = \{x\}$. Δηλαδή $B(x,\varepsilon) \cap \mathrm{V} = \{x\}$. Άτοπο.

Εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος τότε και ο $(\overline{\mathrm{V}},\rho)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Δεδομένου ότι το $\overline{\mathrm{V}}$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία είναι υπεραριθμήσιμο.

Πράγματι αν όχι τότε $\overline{\mathrm{V}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}$.

Δεδομένου ότι το σύνολο $\overline{\mathrm{V}}$ δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία στον (X,ρ), συνεπάγεται ότι ο χώρος $(\overline{\mathrm{V}},\rho)$ δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία. Αν όχι, θα έχουμε $\{x\} = B_{\overline{\mathrm{V}}}(x,\delta) = B(x,\varepsilon) \cap \overline{\mathrm{V}}$. Δηλαδή το x είναι μεμονωμένο σημείο του $\overline{\mathrm{V}}$. Άτοπο. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το μονοσύνολο $\{q_n\}$ είναι μόνο κλειστό στον $(\overline{\mathrm{V}},\rho)$.

Εφόσον ο $(\overline{\mathrm{V}},\rho)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος από το θεώρημα Baire υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $int\{q_{n_o}\} \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $B(q_{n_o},\varepsilon) \subseteq \{q_{n_o}\}$. Άτοπο διότι το q_{n_o} δεν είναι μεμονωμένο σημείο.

Άρα το V περιέχει μεμονωμένα σημεία. Δηλαδή το σύνολο των μεμονωμένων σημείων M του X είναι πυκνό στον (X,ρ). Τέλος εφόσον ο X είναι αριθμήσιμος, τότε το M είναι η αριθμήσιμη ένωση των μεμονωμένων σημείων. Εφόσον τα μεμονωμένα σημεία είναι ανοικτά σύνολα συνεπάγεται ότι το M είναι ανοικτό. Δηλαδή το M είναι G_δ.

Θεώρημα-Δεν υπάρχει ακολουθία $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συνεχών πραγματικών συναρτήσεων, η οποία να συγκλίνει κατά σημείο στην συνάρτηση Dirichlet $\mathrm{X}_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Απόδειξη-Έστω ότι υπάρχει ακολουθία πραγματικών συνεχών συναρτήσεων $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{X}_{\mathbb{Q}}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_m(x)| \leq \alpha\}$ για κάθε $0 < \alpha < 1$.

Πράγματι έστω $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ τότε εφόσον $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, υπάρχει $m_o(\alpha) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $m \geq m_o(\alpha)$ να ισχύει ότι $|f_m(x)| \leq \alpha$.Δηλαδή $x \in \bigcap_{m\geq m_o(\alpha)}\{z \in \mathbb{R} \mid |f_m(z)| \leq \alpha\}$. Συνεπώς $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_m(x)| \leq \alpha\}$. Άρα $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_m(x)| \leq \alpha\}$.

Αντίστροφα έστω $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n}\{z \in \mathbb{R} \mid |f_m(z)| \leq \alpha\}$. Τότε υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x \in \bigcap_{m\geq n_o}\{z \in \mathbb{R} \mid |f_m(z)| \leq \alpha\}$. Συνεπώς $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{X}_{\mathbb{Q}}(x) \leq \alpha < 1$. Από τον ορισμό της $\mathrm{X}_{\mathbb{Q}}$ και εφόσον το $0 < \alpha < 1$, συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Δηλαδή το $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Άρα $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n}\{z \in \mathbb{R} \mid |f_m(z)| \leq \alpha\} \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Εφόσον τα $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις το υποσύνολο $\bigcap_{m=n}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_m(x)| \leq \alpha\}$ είναι κλειστό για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ως τομή των κλειστών υποσυνόλων $\{x \in \mathbb{R} \mid |f_m(x)| \leq \alpha\}$ με $m \geq n$.

Δεδομένου ότι το $\mathbb{Q}$ γράφεται ως $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}$, συνεπάγεται ότι το $\mathbb{R}$ εκφράζεται ως ένωση κλειστών υποσυνόλων του, δηλαδή το $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_m(x)| \leq \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Από το θεώρημα του Baire υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $intI_{n_o} \neq \emptyset$. Αν το $I_{n_o} = \{q_{n_o}\}$ καταλήγουμε σε άτοπο διότι το $\{q_{n_o}\}$ δεν περιέχει εσωτερικά σημεία. Αν το $I_{n_o} = \bigcap_{m=n_o}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_m(x)| \leq \alpha\}$, τότε υπάρχει $(\alpha, b) \subseteq I_{n_o}$ με $\alpha < b$. Επειδή $\bigcap_{m=n_o}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_m(x)| \leq \alpha\} \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, συνεπάγεται ότι $(\alpha, b) \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Άτοπο.

Συνεπώς δεν υπάρχει ακολουθία $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συνεχών πραγματικών συναρτήσεων, η οποία να συγκλίνει κατά σημείο στην συνάρτηση Dirichlet $X_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Βιβλιογραφία

1. Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση. Σ. Νεγρεπόντης, Φ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη. Εκδόσεις Συμμετρίας 1997.
2. Real Analysis. H.L.Royden, P.M. Fitzpatrick. $4^{η}$ έκδοση China Machine Press.
3. Functional Analysis. M.Reed , B.Simon. Academic Press Inc.
4. Σημειώσεις Συναρτησιακής ανάλυσης. Σ. Αργυρός.
5. Σημειώσεις Πραγματικής ανάλυσης. Σ. Αργυρός.
6. Πραγματική Ανάλυση. Ν. Σκούταρης.