



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΔΠΜΣ ΝΑΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ  
ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ  
ΘΑΛΑΣΣΙΟ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟ ΜΕ ΤΗΝ  
ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΣΚΕΔΑΣΤΗ**

Διπλωματική Εργασία του:

**Κυριάκη Αντώνη**

Επιβλέπων: **Αν. Καθ. Κώστας Μπελιμπασάκης**

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2016



στους γονείς μου,

Ηλία και Ευαγγελία



# Ευχαριστίες

Θα ήθελα πρώτα από όλους να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Κώστα Μπελιμπασάκη για τη συνεχή του καθοδήγηση, τις σημαντικές παρατηρήσεις και διορθώσεις του, καθώς και για τη βοήθεια που μου προσέφερε στη χρήση του προγράμματος Matlab με το οποίο δεν ήμουν εξοικειωμένος. Συνεχίζοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Ευαγγελία και Ηλία για την υποστήριξή τους σε όλη αυτή την προσπάθεια, καθώς και τον κ. Παπαμιχελάκη Γρηγόρη, ο οποίος διάβασε με ενδιαφέρον αρκετές φορές μεγάλο μέρος της εργασίας μου παροτρύνοντάς με στη συνέχισή της.



## Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη .....	VII
Abstract.....	IX
<b>Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή.....</b>	<b>1</b>
1.1.Γενικά στοιχεία.....	1
1.2.Διεγείροντα αίτια του ήχου στη θάλασσα.....	1
1.3.Καναλοποίηση κατά τη διάδοση του ηχητικού κύματος.....	5
1.4.Απώλειες κατά τη διάδοση .....	9
<b>Κεφάλαιο 2: Διάδοση του ήχου από σημειακή πηγή .....</b>	<b>13</b>
2.1.Γενικά στοιχεία διάδοσης .....	13
2.2.Πηγές σε ομογενή μέσα άπειρης έκτασης.....	15
2.2.1.Σημειακή πηγή σε ομογενές μέσο άπειρης έκτασης .....	15
2.2.2.Γραμμική πηγή σε ομογενές μέσο διάδοσης άπειρης έκτασης.....	17
2.3.Πηγή σε πεπερασμένο χωρίο.....	19
2.4.Πηγή σε οριζόντια στρωματοποιημένο μέσο διάδοσης.....	20
2.5.Διάδοση σε ρηχό θαλάσσιο περιβάλλον .....	21
2.5.1.Μέθοδος κατοπτρισμού .....	21
2.5.2.Μέθοδος ολοκληρωτικής αναπαράστασης .....	23
2.5.3.Μέθοδος κανονικών ιδιομορφών (Normal Modes).....	24
<b>Κεφάλαιο 3: Σκέδαση σε άπειρο χώρο .....</b>	<b>41</b>
3.1.Εισαγωγικά στοιχεία .....	41
3.1.1.Γεωμετρία κλειστών επιφανειών .....	42
3.1.2.Χώρος Holder.....	43
3.1.3.Αρμονικές εξισώσεις .....	44
3.2.Πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz .....	46
3.2.1.Λύσεις της εξίσωσης Helmholtz και το θεώρημα ολοκληρωτικής αναπαράστασης Green .....	47
3.2.2.Προβλήματα συνοριακών τιμών της εξίσωσης Helmholtz .....	50
3.2.3.Συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld.....	52
3.2.4.Δυναμικά Απλού και Διπλού Στρώματος .....	54
3.2.5.Συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις πρώτου είδους.....	59
3.2.6.Σκληροί και Μαλακοί σκεδαστές .....	61
3.3.Σκεδαστής πεπερασμένων διαστάσεων σε άπειρο δισδιάστατο χώρο (εξωτερικό πρόβλημα) .....	62
3.3.1.Εύρεση αναλυτικής λύσης σε κυκλικό σκεδαστή .....	66

3.3.2.Αριθμητική λύση σε σώμα γενικού σχήματος πεπερασμένων διαστάσεων με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων .....	72
<b>Κεφάλαιο 4: Πεπερασμένος σκεδαστής μέσα σε κυματοδηγό .....</b>	<b>89</b>
4.1.Εισαγωγικά στοιχεία .....	89
4.2.Επίδραση ανομοιόμορφου πυθμένα στη διάδοση ηχητικών κυμάτων .....	90
4.3.Επίδραση πεπερασμένου σκεδαστή σε ομοιόμορφο κυματοδηγό .....	101
4.4.Επίδραση πεπερασμένου σκεδαστή σε ανομοιόμορφο κυματοδηγό .....	109
<b>Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα .....</b>	<b>117</b>
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>119</b>
<b>Παράρτημα .....</b>	<b>121</b>



# Περίληψη

Ο βασικός στόχος της παρούσης εργασίας, είναι η ανάπτυξη και εφαρμογή μεθοδολογίας τύπου συζευγμένων ιδιομορφών σε συνδυασμό με μεθόδους συνοριακών στοιχείων, για την επίλυση προβλημάτων διάδοσης ακουστικών κυμάτων μέσα σε υδάτινο κυματοδηγό. Ο κυματοδηγός μπορεί να παρουσιάζει ρήχωση προσομοιάζοντας το θαλάσσιο-παράκτιο περιβάλλον, να περιέχει πεπερασμένο σκεδαστή ή συνδυασμό και των δύο.

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο αναπτύσσονται τα αίτια διέγερσης ακουστικών κυμάτων και τονίζονται οι εφαρμογές τους, οι λόγοι μεταβολής της ταχύτητας του ήχου, το φαινόμενο της καναλοποίησης του ακουστικού κύματος και πιθανά αίτια για την παρουσία απωλειών κατά τη διάδοσή του.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η μαθηματική προσέγγιση της διάδοσης ακουστικών κυμάτων. Αναφέρονται περιπτώσεις ομογενούς και ετερογενούς μέσου διάδοσης, καθώς και οι γραμμικές και σημειακές πηγές σε καρτεσιανή και κυλινδρική γεωμετρία αντίστοιχα. Σε αρκετά μεγάλο μέρος του κεφαλαίου, μας απασχολεί η διάδοση σε ρηχό κυματοδηγό και οι διάφορες μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί με σκοπό τον υπολογισμό του δυναμικού σε ένα τέτοιο περιβάλλον. Παρουσιάζεται η μέθοδος υπολογισμού της επιλογής μας, δηλαδή των κανονικών ιδιομορφών σε χώρο 2-D, με δοκιμή της σε περιβάλλον σταθερής ταχύτητας διάδοσης, αλλά και κατακόρυφα μεταβαλλόμενης ταχύτητας.

Ακολούθως, στο κεφάλαιο τρία ασχολούμαστε με την παρουσία σκεδαστή σε άπειρο χώρο διάδοσης. Οι σκεδαστές θα είναι τύπου Dirichlet, Neumann και μικτού τύπου. Προς το τέλος του κεφαλαίου θα δοθεί βάση σε 2-D προβλήματα όπου μπορούμε να δούμε τη μέθοδο αναλυτικής αλλά και αριθμητικής λύσης, με χρήση της μεθόδου δυναμικού, για κυκλικό πεπερασμένο σκεδαστή. Σκοπός μας είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων για επιβεβαίωση της ισχύος της αριθμητικής λύσης.

Τέλος, στο κεφάλαιο τέσσερα πραγματοποιούμε έναν συνδυασμό των δύο προαναφερθέντων κεφαλαίων και οδηγούμαστε στο πρόβλημα μελέτης του ακουστικού δυναμικού, σε πεδίο με πεπερασμένο σκεδαστή τοποθετημένο μέσα σε κυματοδηγό που μπορεί να παρουσιάζει και ρήχωση.



# Abstract

The basic purpose of this thesis is to explicate and apply the methodology of conjugated modes, combined with methods of boundary elements, in order to solve problems of spreading acoustic waves inside a waveguide. The waveguide can present shallowness simulating the sea-offshore environment, contain a finite scatterer or a combination of both of them.

In the introductory chapter we are analyzing the reasons of acoustic waves stimulation and we emphasize on their applications, the causes of changes in sound speed, the phenomenon of the acoustic wave channeling and the probable causes for losses during its propagation.

In the second chapter a mathematical approach on the propagation of acoustic waves is made. Occasions of homogenous and heterogeneous transmission mediums are mentioned, as well as the linear and point sources in cartesian and cylindrical coordinate systems respectively. In a wide range of the chapter, we work on the transmission in a shallow waveguide and we mention the methods evolved in order to calculate the dynamic field in such an environment. The method of normal modes in a 2-D environment, which is the one of our choice, is presented and tested in a medium of constant sound speed as well as in a vertical speed changing one.

Following, on the third chapter we deal with the presence of a scatterer in an infinite area of transmission. The scattering bodies will be Dirichlet, Neumann and mixed type. Towards the end of the chapter we will deal more with 2-D problems where we have the ability to get both analytical and numerical solutions, by the use of the dynamic method, for a circular finite scatterer. Our goal is to evaluate, through the comparison of the results, the correctness of the numerical solution.

Finally, on the fourth chapter we combine the above two chapters and we are led to the problem of the acoustic dynamic field study, in a space under the presence of a finite scatterer inside the waveguide which can also presents shallowness.



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1. Γενικά στοιχεία

Τα ακουστικά κύματα είναι διαταραχές της πίεσης που διαδίδονται μέσα σε ένα ακουστικό μέσο. Το μέσο διάδοσης μπορεί να είναι υγρό, αέριο, στερεό ή συνδυασμός των προαναφερθέντων. Ανάλογα των ακουστικών κυμάτων είναι τα υπερηχητικά και υποηχητικά κύματα με τη διαφορά ότι τα τελευταία βρίσκονται εκτός του εύρους της ανθρώπινης ακοής.

Στο θαλάσσιο περιβάλλον τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα παρουσιάζουν υψηλούς ρυθμούς απόσβεσης με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η χρήση τους σε μεγάλη κλίμακα για εφαρμογές που αφορούν το θαλάσσιο χώρο, όπως στόχευση, διερεύνηση θαλάσσιας στήλης και πυθμένα, επικοινωνία κ.α. Σε ότι αφορά τις εφαρμογές, τη θέση που κατέχουν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στην ατμόσφαιρα και στο κενό έχουν τα ακουστικά στην περίπτωση του θαλάσσιου περιβάλλοντος.

### 1.2. Διεγείροντα αίτια του ήχου στη θάλασσα

Η δημιουργία ηχητικών κυμάτων μπορεί να έχει τα εξής διεγείροντα αίτια:

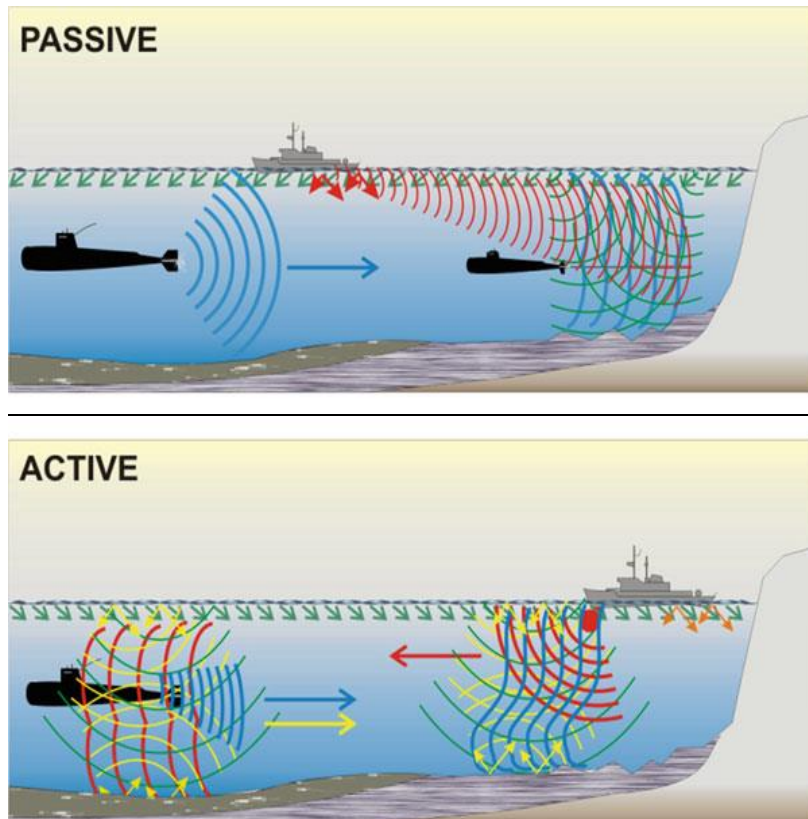
Θόρυβος περιβάλλοντος. Είναι το αποτέλεσμα φυσικών ή ανθρωπογενών αιτιών, που όμως δεν είναι προϊόν υδροακουστικής (τεχνολογικής) εφαρμογής. Περιέχει πλήθος πληροφοριών για την κατάσταση της θαλάσσιας περιοχής όπου παράγεται, για τις τεκτονικές διεργασίες στον πυθμένα της θάλασσας, καθώς και για την

κατάσταση της ανωτέρω της επιφάνειας του νερού ατμόσφαιρας. Τα χαρακτηριστικά του ηχητικού θορύβου είναι περισσότερο ακανόνιστα των διαμορφωμένων ηχητικών σημάτων. Ανάλογα με τη μπάντα των συχνοτήτων που εξετάζουμε, μελετάμε και άλλα αίτια διέγερσης. Αυτό σημαίνει πως σε ακουστικά κύματα συχνότητας από:

- 0.1 έως 10 Hz έχουμε ως αίτιο διέγερσης κυρίως τις εκρήξεις υποθαλάσσιων ηφαιστειών και τους σεισμούς.
- 50 έως 300 Hz το αίτιο κατά κύριο λόγο είναι οι θαλάσσιοι πλόες.
- 1 έως 100 Hz το κύριο αίτιό είναι οι ανεμογενείς κυματισμοί και οι μεταβολές της πίεσης στο πεδίο των κυματισμών.
- 100 Hz έως 10 kHz έχουν ως πηγή διέγερσης, τη γένεση και τη θραύση των κυματισμών, την αλληλεπίδραση της ατμόσφαιρας με τη θάλασσα και τη θραύση φυσαλίδων αέρα που παγιδεύονται στο επιφανειακό στρώμα νερού.

Υδροακουστικές τεχνολογικές εφαρμογές. Είναι διαδικασίες που αφορούν ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων ανάλογα με τους στόχους της εκάστοτε εφαρμογής. Οι κατηγορίες στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι:

- Πολύ χαμηλές συχνότητες (0.1 Hz - 10 Hz). Χρησιμοποιούνται σε σεισμικές εφαρμογές με σκοπό τη μελέτη των υποστρωμάτων του θαλάσσιου πυθμένα, ώστε να βρεθούν τυχόν ρήγματα, η σύσταση του πυθμένα με απώτερο στόχο τον έλεγχο δυνατότητας θεμελίωσης κατασκευών, και η ύπαρξη υποθαλάσσιων κοιτασμάτων πετρελαίου.
- Μεσαίες συχνότητες (10 Hz - 1 KHz). Η πρώτη εφαρμογή τους, είναι η παθητική ακρόαση, δηλαδή η εκμετάλλευση μέσω παθητικών συστημάτων ακρόασης των ήχων που λαμβάνει ένας δέκτης και έχουν παραχθεί από το θαλάσσιο περιβάλλον, μεταφέροντας πληροφορίες από αποστάσεις εκατοντάδων χιλιομέτρων για ηφαιστειακή ή σεισμική δραστηριότητα, μακρινές καταιγίδες, κινήσεις πλοίων κ.α. Η δεύτερη εφαρμογή των μεσαίων συχνοτήτων είναι η ακουστική τομογραφία, δηλαδή η χρήση ηχητικών εκπομπών συγκεκριμένων χαρακτηριστικών και η ανάλυση του επιστρέφοντος σήματος με σκοπό την αποκρυπτογράφηση της πληροφορίας που έχει καταγράψει. Τέτοιου τύπου όργανα που χρησιμοποιούνται ευρέως σήμερα είναι τα sparker, τα airgun κ.α. Σε αυτά τα όργανα η διατρητικότητα και η διακριτικότητα είναι μεγέθη που έχουν αντίστροφη συσχέτιση μεταξύ τους. Με την αύξηση της συχνότητας του παλμού του εκπεμπόμενου κύματος, παρουσιάζεται αύξηση και της διακριτικότητας αλλά μείωση της διατρητικότητας.



Σχήμα 1. Παθητικό και ενεργό σύστημα ακρόασης.

- Υψηλές συχνότητες (1 KHz – μερικές δεκάδες KHz): Χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση αντικειμένων από «ενεργά» συστήματα (SONAR), για βαθυμετρήσεις (echo sounding) και σχετικά καλές αποτυπώσεις του θαλάσσιου πυθμένα με όργανα όπως το multibeam echosounder, για την ανίχνευση ιχθυοπληθυσμών, πλαγκτόν και άλλων οργανισμών, στην ενάλια αρχαιολογία, για αμυντικούς σκοπούς (υποβρύχιο πόλεμο), όπως και για τον εντοπισμό στόχων που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια του πυθμένα. Πλέον μπορούν να αξιοποιηθούν και στη μέτρηση της ταχύτητας των θαλάσσιων ρευμάτων εκμεταλλευόμενα το φαινόμενο Doppler.
- Πολύ υψηλές συχνότητες (ως 300 KHz). Με αυτές τις συχνότητες επιτυγχάνεται η υποθαλάσσια επικοινωνία και η μετάδοση πληροφοριών. Χρησιμοποιούνται στη συνομιλία στο υποθαλάσσιο περιβάλλον και στη μεταφορά δεδομένων από κατάλληλα όργανα.

## Διέγερση θορύβου από τη θαλάσσια ναυσιπλοΐα και από άλλες ανθρωπογενείς πηγές, επιπτώσεις και κανονισμοί (IMO)

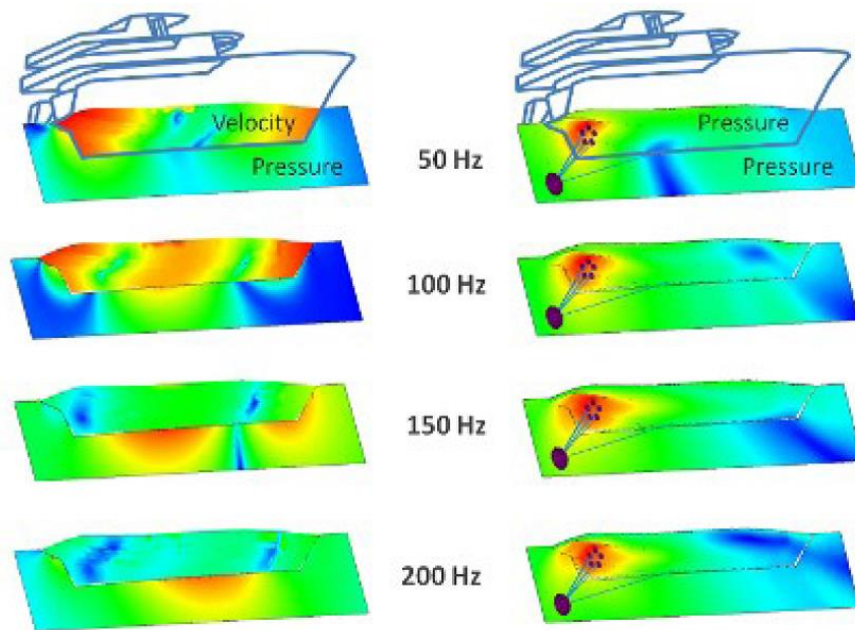
Πλέον είναι γνωστό πως οι ανθρωπογενείς θόρυβοι, μπορεί να προκαλέσουν προβλήματα στη θαλάσσια άγρια ζωή. Το είδος της βλάβης εξαρτάται από την ένταση, τη διάρκεια, τη συχνότητα του ήχου καθώς και από την ακουστική ικανότητα του υπό εξέταση είδους. Η διεθνής επιστημονική επιτροπή για την προστασία των φαιλαινών, ανησυχεί για θανάτους αλλά και τραυματισμούς ζώων λόγω έκθεσής τους σε έντονους ήχους, που παρουσιάζουν επιβλαβείς συνέπειες στο ανοσοποιητικό αλλά και στο αναπαραγωγικό σύστημα τους. Συγκεκριμένα και ανάλογα με την ένταση του ήχου γνωρίζουμε τα παρακάτω:

- Ήχοι ισχυρότεροι των 240dB: Πιθανή πρόκληση θανάτου ειδών της θαλάσσιας ζωής.
- Ήχοι ισχυρότεροι των 220dB: Πρόκληση τραυματισμού.
- Ήχοι ισχυρότεροι των 130dB: Πιθανή ζημιά στην ακοή από ένα μόνο συμβάν, κάλυψη σημαντικών σημάτων για την επιβίωσή τους (ήχοι επικοινωνίας και ηχοεντοπισμού).
- Ήχοι ισχυρότεροι των 90dB: Ισχυρές αντιδράσεις για την αποφυγή τους πρακτικά από όλα τα είδη, μικρή έως σημαντική αλλαγή συμπεριφοράς (θηλασμός, διατροφή), αλλαγή σε διαδρομές μετανάστευσης και περιοχές εύρεσης τροφής.
- Ήχοι ισχυρότεροι των 75dB: Η πλειονότητα της θαλάσσιας ζωής τα αποφεύγει σημαντικά.

Ως αποτέλεσμα και για την προστασία της θαλάσσιας ζωής, έχουμε τη δημιουργία κανόνων ως προς τον περιορισμό του ήχου στο θαλάσσιο περιβάλλον. Η Ευρωπαϊκή Ένωση δημιούργησε την οδηγία-πλαίσιο για τη θαλάσσια στρατηγική 2008/56/EC. Η οδηγία είχε ως στόχο την αποτελεσματική προστασία του θαλάσσιου περιβάλλοντος σε όλη την Ευρώπη. Το νομοσχέδιο που έχει δημιουργηθεί αποσκοπεί στο να ακολουθηθούν και να επιτευχθούν συγκεκριμένοι στόχοι από τα κράτη μέλη. Το εν λόγω έγγραφο αποτελεί ένα νομοθετικό εργαλείο περιβαλλοντικής φύσης που περιγράφει ως ρύπανση τον υποθαλάσσιο θόρυβο, ο οποίος θα πρέπει να περιοριστεί ώστε να επιτευχθούν οι στόχοι του GES. Όμως δεν υπάρχει περιγραφή συγκεκριμένων ορίων, αφήνοντας την κάθε χώρα να τα ορίσει καθοδηγούμενη από την αναφορά των IMO-MEPC, Noise Regulation.

Συγκεκριμένα με τον κανονισμό MEPC.1/Circ.833 του IMO “Οδηγίες για τη μείωση του υποθαλάσσιου θορύβου από την εμπορική ναυσιπλοΐα για να περιοριστούν οι





Σχήμα 2. Υπολογισμός ακουστικού πεδίου από εγκατάσταση πρόωσης πλοίου.

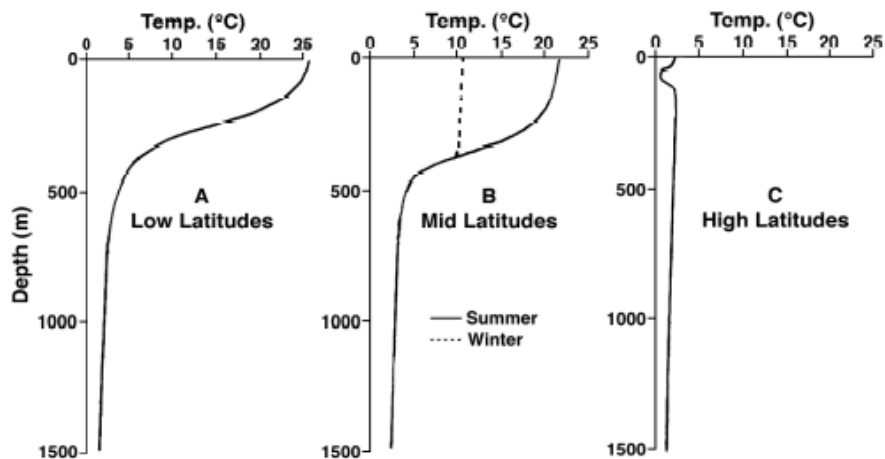
δυσμενείς επιδράσεις στη θαλάσσια ζωή-μη επιτακτικές τεχνικές συμβουλές”, παρέχονται συμβουλές για την καθοδήγηση των σχεδιαστών, κατασκευαστών και χειριστών πλοίων, τεχνολογίες και μέτρα ώστε να ελαττώσουν την εκπομπή θορύβου στον υποθαλάσσιο χώρο (βλ. σχήμα 2). Συγκεκριμένα στρέφονται προς τέσσερις τομείς: τις προπέλες, τις μηχανές του πλοίου, το σχεδιασμό του κήτους και τον χειρισμό και τη συντήρηση. Στο μέλλον αναμένεται να εισαχθεί και ένα κανονιστικό πλαίσιο για τον καθορισμό ορίων θορύβου για κάθε τύπο πλοίου κάτω από διαφορετικές συνθήκες χρήσης καθώς και η ποσοτικοποίηση της σχέσης μεταξύ του ήχου που θα δύναται να εκπέμπει το κάθε σκάφος ανάλογα με το θαλάσσιο περιβάλλον στο οποίο κινείται.

### 1.3. Καναλοποίηση κατά τη διάδοση του ηχητικού κύματος

Η διάδοση του ήχου στο θαλάσσιο περιβάλλον δεν γίνεται ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις, καθώς επηρεάζεται σημαντικά από τις παρακάτω παραμέτρους:

Την κατακόρυφη κατανομή της θερμοκρασίας, που στο θαλάσσιο περιβάλλον είναι μια από τις παραμέτρους επηρεασμού της διάδοσης του ήχου στο νερό.

### Typical Temperature Profiles

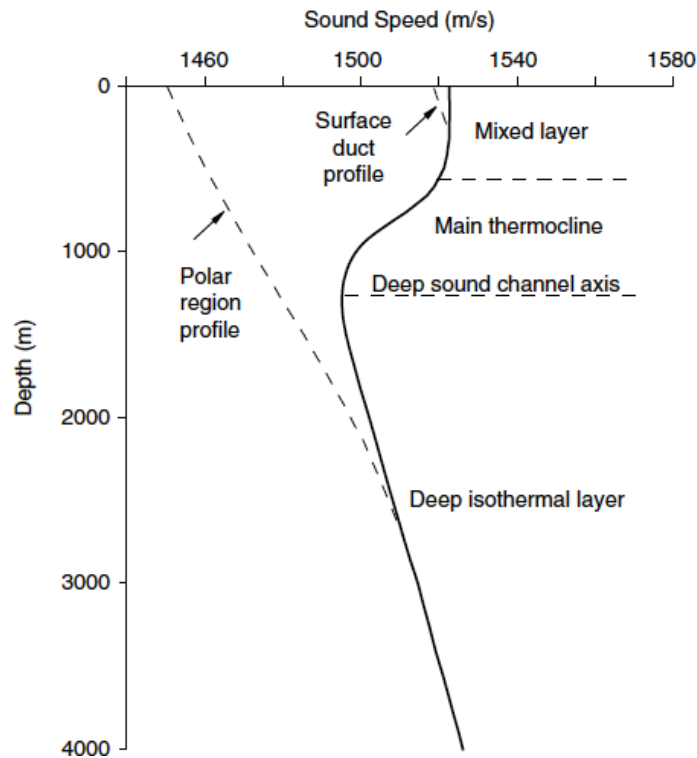


Σχήμα 3. Κατακόρυφη κατανομή θερμοκρασίας σε διαφορετικά γεωγραφικά πλάτη.

Στην περίπτωση των μεσαίων γεωγραφικά πλατών, χωρίζουμε το υποθαλάσσιο περιβάλλον σε τρία στρώματα-ζώνες. Το πρώτο στρώμα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, πάχους μερικών δεκάδων μέτρων, με την ονομασία «στρώμα αναμίξεως», είναι η περιοχή όπου η δράση των θαλάσσιων κυματισμών οδηγεί σε μια εξισορρόπηση της θερμοκρασίας σε γενικώς σταθερά επίπεδα. Τα επίπεδα αυτά διαφοροποιούνται ανάλογα με την εποχή και την ώρα της ημέρας. Ακολουθεί το επόμενο στρώμα που είναι η «κύρια θερμοκλινής ζώνη» με πάχος εκατοντάδων μέτρων και διαρκή σταδιακή ελάττωση της θερμοκρασίας, ελάττωση που έχει ως αίτιο την απομάκρυνση από την ελεύθερη επιφάνεια. Τέλος, έχουμε την «ισοθερμική ζώνη», όπου λόγω της θερμοδυναμικής ισορροπίας του νερού σε πολύ μεγάλη πίεση διατηρείται σταθερή η θερμοκρασία του στους 3 °C.

Ένα άλλο αίτιο που αποτελεί παράγοντα επηρεασμού της διάδοσης των ακουστικών κυμάτων είναι και η αλατότητα. Η αλατότητα έχει ένα εύρος τιμών από 30‰ έως 45‰ με μεταβλητότητα κατά κύριο λόγο ανάλογα με την περιοχή μέτρησης και μικρή μεταβολή ανάλογα με το βάθος. Με τη σταδιακή αύξηση του βάθους παρατηρείται η ελάττωση της αλατότητας.

Η ταχύτητα του ήχου στη θάλασσα είναι και αυτή ένα από τα αίτια που καθορίζουν τη διάδοση του ήχου και σχετίζεται άμεσα με την πυκνότητα και τη συμπιεστότητα του μέσου. Η πυκνότητα του θαλασσινού νερού είναι προφανές πως επηρεάζεται από την αλατότητα και τη θερμοκρασία που ήδη αναφέραμε, καθώς και από τη στατική πίεση. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες σχέσεις που παρέχουν την ταχύτητα διάδοσης



Σχήμα 4. Γενικό προφίλ της ταχύτητας του ήχου

του ήχου στη θάλασσα ανάλογα με την αλατότητα ( $S$ ), τη θερμοκρασία ( $T$ ) και το βάθος ( $z$ ), π.χ.<sup>1</sup>:

$$c = 1449.2T + 4.6T^2 - 0.055T^3 + 0.00029T^4 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016z.$$

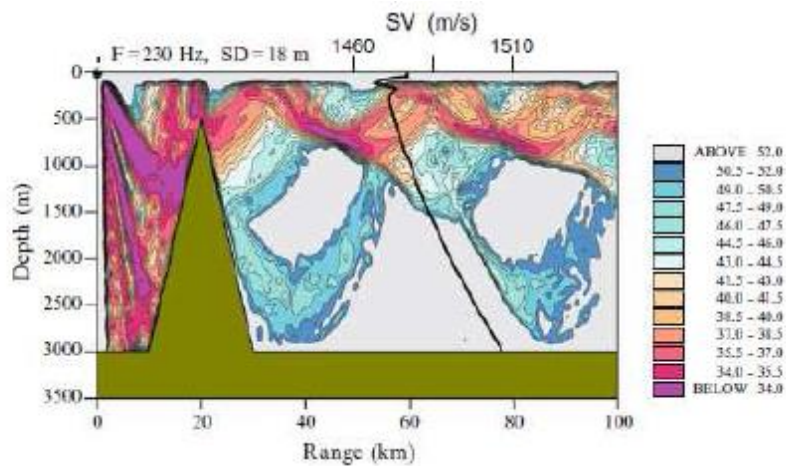
Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί και από τον παραπάνω μαθηματικό τύπο, οι ταχύτητες του ήχου στη θάλασσα στήλη κυμαίνονται από 1450 m/s έως 1570 m/s. Επίσης, μπορούν να παρατηρηθούν και οι τρεις προαναφερθείσες αιτίες μεταβολής της διάδοσης του ήχου μέσα στον ίδιο τύπο. Οι μεταβολές της ταχύτητας μπορεί να μην παρουσιάζουν έντονες διακυμάνσεις, αλλά αυτές είναι οι δημιουργοί της διαδρομής που ακολουθεί ο ήχος σε μεγάλο βαθμό μέσω των συνεχών διαθλάσεων του καθώς διαφοροποιείται η ταχύτητά του. Η μεταβλητότητα της ταχύτητας των ηχητικών κυμάτων είναι έντονη κατά τη διάρκεια της ημέρας και τη μεταβολή των εποχών κατά κύριο λόγο στο στρώμα αναμίξεως, όπου η θερμοκρασία δέχεται μεγαλύτερες μεταβολές (βλ. σχήμα 4).

<sup>1</sup> Clay & Medwin, 1977.

Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου παρουσιάζει δύο χαρακτηριστικά ελάχιστα στο θαλάσσιο περιβάλλον. Το πρώτο παρουσιάζεται στην ελεύθερη επιφάνεια και το δεύτερο παρατηρείται στο βαθύτερο όριο της κύριας θερμοκλινοῦς ζώνης. Στις θέσεις των δύο αυτών ελαχίστων έχουμε αντίστοιχα το επιφανειακό ηχητικό κανάλι και το βαθύ υποβρύχιο ακουστικό κανάλι. Όπως προαναφέραμε, τα ηχητικά κανάλια έχουν ως αίτιο τις συνεχείς διαθλάσεις των ηχητικών ακτίνων, που οδηγούν σε εγκλωβισμό του ηχητικού σήματος. Μπορούμε να τα χαρακτηρίσουμε ως περιοχές όπου η ένταση συγκεκριμένων ηχητικών κυμάτων θα είναι εντονότερη, με αποτέλεσμα την καλύτερη και σε μεγαλύτερη απόσταση διάδοση του ηχητικού σήματος, καθώς η διαδικασία της απόσβεσής τους θα καθυστερήσει. Παράλληλα με τα ηχητικά κανάλια δημιουργούνται και ζώνες σκιάς, δηλαδή περιοχές που λόγω της ιδιόμορφης κίνησης του ήχου στο θαλάσσιο χώρο, δεν εμφανίζονται ακτίνες διάδοσης. Ακολουθεί στη συνέχεια ο νόμος του Snell:

$$\frac{\cos \theta}{c} = \text{const},$$

όπου  $\theta$  η γωνία ως προς την οριζόντιο των ηχητικών ακτίνων και  $c$  η τοπική τιμή της ταχύτητας του ήχου. Σύμφωνα με τον παραπάνω νόμο οι ηχητικές ακτίνες θα στρέφονται διαρκώς προς περιοχές χαμηλότερης ταχύτητας διάδοσης του ήχου, και αυτό αποτελεί τη βασική αιτία δημιουργίας των ηχητικών καναλιών και ζωνών σκιάς στο ανομοιογενές μέσο, λόγω φαινομένων συνεχούς διαθλάσεως. Στο βαθύ ηχητικό κανάλι μπορεί να παρουσιαστεί διάδοση χωρίς σημαντική απόσβεση λόγω της μη αλληλεπίδρασης του κύματος με τα χαλαρά ιζήματα του πυθμένα. Στο σημείο αυτό σημαντικό είναι να αναφερθεί η έννοια του οριακού βάθους, το οποίο είναι το σημείο της ισοθερμικής ζώνης με ταχύτητα διάδοσης του ήχου ίση με της επιφάνειας. Σε περίπτωση που η τιμή του είναι αρνητική, τότε ο πυθμένας είναι το κατώτερο όριο του βαθέως ηχητικού καναλιού. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν η πηγή είναι κοντά στην επιφάνεια, με τις ακτίνες διάδοσης ευθυγραμμισμένες προς τον πυθμένα και τις γωνίες διάδοσης μεγαλύτερες από αυτές στο βαθύ κανάλι, ή στην περίπτωση που το βάθος δεν είναι αρκετό ώστε να έχουμε θετικό οριακό βάθος. Στη δεύτερη περίπτωση δεν παίζει τόσο σημαντικό ρόλο αυτή η καναλοποίηση, καθώς το βάθος του νερού ελαττώνεται και στη διάδοση του ήχου αρχίζει να διαδραματίζει σημαντικό ρόλο ο θαλάσσιος πυθμένας και η ελεύθερη επιφάνεια ως φυσικά όρια του θαλάσσιου κυματοδηγού (βλ. σχήμα 5). Τα σύνορα του θαλάσσιου περιβάλλοντος με τις πολλαπλές ανακλάσεις του ήχου οδηγούν στη διάδοσή του σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις, φαινόμενο που παρατηρείται έντονο στην περιοχή της υφαλοκρηπίδας. Η ελεύθερη επιφάνεια της θάλασσας λειτουργεί ως ένας πολύ καλός ανακλαστήρας



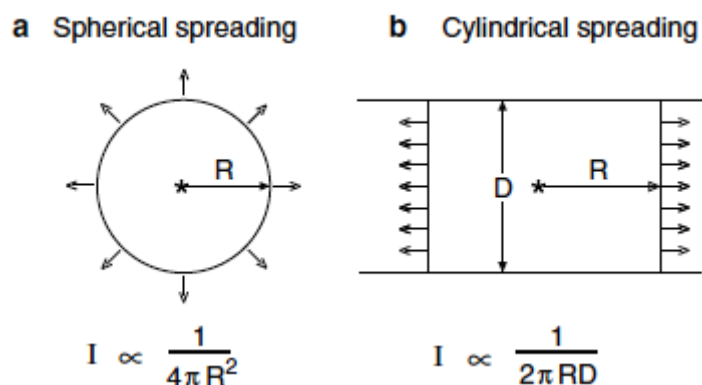
Σχήμα 5. Διάδοση ηχητικού πεδίου από πηγή με τις επιδράσεις κατακόρυφης διαστρωμάτωσης και υποθαλάσσιου υφάλου.

με σχεδόν πλήρη ανάκλαση του ακουστικού κύματος. Το αποτέλεσμα είναι η περιοδική επανασυγκέντρωση των ακτινών διάδοσης λόγω της διάθλασης του ηχητικού κύματος προς τα ανωτέρω στρώματα. Στην περίπτωση ύπαρξης κυματισμών και φουσαλίδων παγιδευμένων κοντά στην επιφάνεια, δηλαδή παραγμένης θάλασσας, παρουσιάζεται σκέδαση ενός μέρους της ακουστικής ενέργειας αλλά μεγάλο μέρος της επιστρέφει ξανά ανακλώμενο στη θαλάσσια μάζα. Για το κάθε ηχητικό κανάλι, υπάρχει και ένα κατώτερο όριο για τη συχνότητα του ήχου που αν το ξεπεράσουμε δεν μπορούμε να έχουμε διάδοση του κύματος.

Όσον αφορά τώρα το κάτω σύνορο του θαλάσσιου περιβάλλοντος, δηλαδή τον θαλάσσιο πυθμένα, παρουσιάζει στην ευρύτερη περιοχή της υφαλοκρηπίδας κλίσεις μικρές, της τάξης του 2% με 3%. Η δομή του εξαρτώμενη από τα γεωλογικά χαρακτηριστικά της εξεταζόμενης περιοχής δεν μας επιτρέπει την εξαγωγή ενός γενικού κανόνα, αλλά χρειάζεται μελέτη στην εκάστοτε περίπτωση, ώστε να εξακριβωθούν τα υλικά που δημιουργούν τη διαστρωμάτωση του πυθμένα. Τα υλικά εξετάζονται για την περιεκτικότητά τους σε άμμο, πηλό και άργιλο, με αποτέλεσμα την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για τη διαπερατότητα και την ανακλαστικότητα του.

#### 1.4. Απώλειες κατά τη διάδοση

Στην υδροακουστική μας απασχολεί η διάδοση του ήχου σε μεγάλες αποστάσεις, κατά τη διάρκεια της οποίας παρατηρούνται απώλειες σε μεγάλο βαθμό. Μερικά από



Σχήμα 6. Απώλειες λόγω γεωμετρικής διάδοσης σε σφαιρική και κυλινδρική διάδοση αντίστοιχα.

τα αίτια αυτών των απωλειών είναι η απόσβεση λόγω της αύξησης του όγκου, όπου πραγματοποιείται η διάδοση, δηλαδή λόγω της γεωμετρικής εξασθένησης, η ανάκλαση του πυθμένα και η απώλεια λόγω σκέδασης στο πεδίο και στα σύνορα.

Σε ιδανικό, ομογενές μέσο θα παρατηρήσουμε αντίστροφη συσχέτιση της έντασης του ήχου με την απόσταση από την πηγή, καθώς η επιφάνεια από την οποία εξέρχεται η ακουστική ενέργεια αυξάνει αναλογικά (βλ. σχήμα 6). Κατά τη διάρκεια της διάδοσης των ακουστικών κυμάτων, μέρος της ενέργειας αποσβένεται με τη μετατροπή της σε θερμική ενέργεια, ενώ έχει παρατηρηθεί πως τα υψίσυχνα κύματα αποσβένονται με γρηγορότερο ρυθμό από τα αντίστοιχα χαμηλόσυχνα. Ο συντελεστής απορρόφησης (attenuation coefficient) περιγράφει το ποσοστό απορρόφησης της ακουστικής ενέργειας ανά μονάδα αποστάσεως διάδοσης, έχει μονάδες dB/km και προκύπτει από τον εμπειρικό τύπο<sup>2</sup>:

$$\alpha = \left( A_1 + A_2 \frac{F_2}{(F_2)^2 + f^2} + A_3 \frac{F_3}{(F_3)^2 + f^2} \right) f^2,$$

όπου:

$A_1$ = επιδράσεις γλυκού νερού

$A_2$  και  $F_2$ = επιδράσεις  $MgSO_4$

$A_3$  και  $F_3$ = επιδράσεις βορικού οξέως

<sup>2</sup> Francois & Garrison, 1982.

Η απώλεια στη μετάδοση είναι το άθροισμα των απωλειών λόγω γεωμετρικής διάδοσης και λόγω απόσβεσης. Ο τύπος που μας δίνει την απώλεια μετάδοσης (Transfer Loss) είναι<sup>3</sup>:

$$TL = -20 \log \frac{|P(r, z)|}{|P_o|}.$$

Με τον όρο σκέδαση, την οποία αναφέραμε ως μια από τις αιτίες της απώλειας κατά τη διάδοση του ακουστικού κύματος, περιγράφουμε τη φυσική διαδικασία κατά την οποία κάποιο είδος ακτινοβολίας, και στην περίπτωση μας ο ήχος, αποκλίνει από την ευθύγραμμη πορεία διάδοσης κατά ένα ή περισσότερους δρόμους λόγω ανομοιογενειών στο μέσον όπου διαδίδεται. Η σκέδαση μπορεί να είναι απλή ή και πολλαπλή ανάλογα με τον αριθμό, τις διαστάσεις και τις λοιπές γεωμετρικές λεπτομέρειες των σκεδαστών καθώς και των ιδιοτήτων των ανακλαστικών επιφανειών – συνόρων. Φυσικές ανομοιογένειες που είναι ικανές να προκαλέσουν σκέδαση είναι φυσαλίδες αέρα, ζωντανοί οργανισμοί, όπως ψάρια ή πλαγκτόν, ανομοιογένειες στην πυκνότητα του υγρού, προεξοχές και γεωμετρικές μεταβολές στην επιφάνεια του πυθμένα, πάγος στη θάλασσα, αναταράξεις στο θαλάσσιο περιβάλλον κ.α.<sup>4</sup> Η σκέδαση χρησιμοποιείται σε μεγάλη κλίμακα για τις θαλάσσιες εφαρμογές της υδροακουστικής, που αναφέρθηκαν παραπάνω, και ανάλογα με τη χρήση/εφαρμογή εκμεταλλευόμαστε διαφορετικές μπάντες συχνοτήτων.

---

<sup>3</sup> Jensen et al, 2011, p.14.

<sup>4</sup> Συγκεκριμένα, όσον αφορά τις σκεδάσεις που μπορεί να υπάρξουν έχει πραγματοποιηθεί μελέτη για το κατά πόσο είναι δυνατός ο διαχωρισμός των σκεδάσεων λόγω ανατάραξης της θάλασσας από τις σκεδάσεις που οφείλονται στην απλή ύπαρξη πλαγκτόν, καθώς πιθανές διαταραχές στη θαλάσσια μάζα θα προσέλκυαν και μικροοργανισμούς. Το συμπέρασμα που προέκυψε ήταν πως από μόνη της η διαταραχή μπορεί μέσω των μεταβολών στη θερμοκρασία και στην αλατότητα να προκαλέσει σκέδαση. Το αποτέλεσμα της έρευνας είναι σημαντικό καθώς με την περεταίρω διεξαγωγή μελετών θα μπορούμε να έχουμε διορθώσεις για την καλύτερη προσέγγιση του πραγματικού αριθμού πληθυσμών του θαλάσσιου περιβάλλοντος.





## Κεφάλαιο 2

### Διάδοση του ήχου από σημειακή πηγή

#### 2.1. Γενικά στοιχεία διάδοσης

Γνωρίζουμε πως για ένα ιδανικό ρευστό η κυματική εξίσωση στην απλούστερη της εκδοχή παράγεται από τις εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής (Euler) και την αδιαβατική εξίσωση. Θεωρώντας ανάλυση των πεδιακών ποσοτήτων σε τιμές υποβάθρου και ακουστικής διαταραχής, και αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις Euler (διατήρηση ορμής και μάζας) και γραμμικοποιώντας οδηγούμαστε στην ακόλουθη κυματική εξίσωση ως προς την ακουστική πίεση  $p(\mathbf{r}, t)$  στις υποπεριοχές του χώρου χωρίς διεγέρτες (πηγές)<sup>5</sup>:

$$\rho \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

όπου το  $c$  συμβολίζει την ταχύτητα του κύματος (ήχου). Η ανωτέρω εξίσωση για μέσο με σταθερή πυκνότητα λαμβάνει τη μορφή:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (2.2)$$

Η ίδια ακριβώς εξίσωση ισχύει και για το δυναμικό της ταχύτητας  $\Psi$ , καθώς και για τα λοιπά ακουστικά μεγέθη. Στην περίπτωση διεγερτών από πηγή(ές) η εξίσωση είναι μη ομογενής:

---

<sup>5</sup> Jensen et al, 2011, p.67.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

και ο όρος στο δεξι μέλος  $f(\mathbf{r}, t)$  αναπαριστά την διέγερση στη θέση  $\mathbf{r}$  του μέσου. Όπως παρατηρούμε η  $f(\mathbf{r}, t)$  είναι μια συνάρτηση χωροχρονική και με την εισαγωγή της οδηγούμαστε στην μη ομογενή κυματική εξίσωση.

Ένα εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της κυματικής εξίσωσης με ύπαρξη πηγής, είναι ο μετασχηματισμός Fourier:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.4)$$

$$p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.5)$$

Η χρήση του μας οδηγεί στην κυματική εξίσωση Helmholtz η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στα μοντέλα για τη διάδοση του ήχου:

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})] p(\mathbf{r}; \omega) = f(\mathbf{r}; \omega). \quad (2.6)$$

όπου  $k(\mathbf{r})$  ο τοπικός ακουστικός κυματάριθμος για δεδομένη γωνιακή συχνότητα  $\omega$  και τοπική τιμή  $c(\mathbf{r})$  της ταχύτητας του ήχου στο μέσο.

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων υπάρχουν διάφορα μαθηματικά και αριθμητικά μοντέλα που μπορούν να εφαρμοσθούν. Δύο από αυτά βρίσκουν εφαρμογές σε σεισμικά κύματα που έχουν μεγάλο εύρος συχνοτήτων και είναι η Finite Difference Method, που άμεσα διαχωρίζει σε χώρο και χρόνο τις προσεγγίσεις του διαφορικού τελεστή, και η Finite Element Method που διαχωρίζει σε μικρά τμήματα τον χώρο και το χρόνο με σκοπό να εφαρμόσουμε μια προσέγγιση της λύσης μέσω απλών συναρτήσεων (χαμηλοτάξιων τοπικών πολυωνύμων). Οι δύο μέθοδοι προϋποθέτουν τον κατακερματισμό του χώρου σε περιοχές κλάσματα του μήκους κύματος, γεγονός που κάνει υπερβολικά απαιτητική και υψηλή σε υπολογιστικό κόστος τη χρήση τους σε προβλήματα διάδοσης σε αποστάσεις πολλών χιλιομέτρων, όπως είναι και το πρόβλημα διάδοσης του ήχου. Για τέτοιας μορφής προβλήματα θα χρειαστούν αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης που είναι σίγουρο πως χάνουν σε γενικότητα αλλά έχουν τη δυνατότητα επίλυσής τους. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, ασχολούμαστε με τα προβλήματα θαλάσσιας ακουστικής από τη σκοπιά της παραγωγής τους μέσω αριθμητικών λύσεων.

Η εξίσωση (2.6) μας διευκολύνει στη λύση, καθώς μειώνει τη (χρονική) διάσταση της PDE (μερικής διαφορικής εξίσωσης), με υπολογιστικό αντίβαρο την εύρεση του μετασχηματισμού Fourier. Βασικές αριθμητικές μέθοδοι που επιλύουν την εξίσωση Helmholtz σε ακουστικούς κυματοδηγούς, είναι οι ολοκληρωτικές μέθοδοι Fourier (Wavenumber Integration), η παραβολική προσέγγιση και η μέθοδος των κανονικών ιδιομορφών (Normal Modes). Λόγω της τοπικής παρουσίας των πηγών στο θαλάσσιο περιβάλλον, έχουμε την ικανοποίηση της ομογενούς εξίσωσης Helmholtz στο μεγαλύτερο μέρος του πεδίου:

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})]p(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (2.8)$$

Η ομογενής εξίσωση Helmholtz είναι μια ελλειπτική, μερική διαφορική εξίσωση, που είναι επιλύσιμη αναλυτικά ή αριθμητικά ή και με συνδυασμό των δύο μεθόδων ανάλογα με:

- Τις διαστάσεις του προβλήματος.
- Τη μεταβολή του κυματάριθμου στο μέσο ( $k(\mathbf{r})$ ), που επάγεται από την μεταβολή της ταχύτητας του ήχου.
- Τις συνοριακές συνθήκες.
- Τη γεωμετρία και σύνθεση του πομπού ή του δέκτη.
- Τη συχνότητα και το εύρος της εφαρμογής.

Το αποτέλεσμα διαφοροποιείται έντονα από τη μέθοδο, παρόλο που έχουμε ως αφετηρία τη σχετικά απλή εξίσωση Helmholtz, καθώς διαδραματίζει σημαντικό ρόλο ο βαθμός χρήσης της αριθμητικής ή της αναλυτικής μεθόδου.

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν κάποιες από τις αναλυτικές προσεγγίσεις της λύσης της εξίσωσης Helmholtz που σε διάφορους βαθμούς σχηματίζουν τη μαθηματική βάση για τις υπολογιστικές μεθόδους που θα ακολουθήσουν.

## 2.2. Πηγές σε ομογενή μέσα άπειρης έκτασης

### 2.2.1 Σημειακή πηγή σε ομογενές μέσο άπειρης έκτασης

Στην απλούστερη περίπτωση που μπορεί να αντιμετωπίσουμε, δηλαδή ομογενούς μέσου που καλύπτει όγκο  $V$ , και χαρακτηρίζεται από κυματάριθμο  $k(\mathbf{r}) = k$  (σταθερό), ειδικές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz κατασκευάζονται με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών. Ανάλογα με τις ανάγκες του προβλήματος μπορούμε να επιλέξουμε και διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων. Στην περίπτωση που έχουμε

ομοιόμορφη διάδοση προς όλες τις διευθύνσεις από σημειακή μονοχρωματική πηγή, επιλέγουμε τη χρήση σφαιρικών συντεταγμένων  $\{r, \theta, \varphi\}$  μιας και το αποτέλεσμα εξαρτάται μόνο από την απόσταση που έχει το σημείο του πεδίου από την πηγή. Ο Λαπλασιανός τελεστής πάνω στο κυματικό πεδίο, το οποίο συμβολίζεται στη συνέχεια γενικά ως  $\Psi(\mathbf{r})$ , γράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες ως ακολούθως:

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right), \quad (2.9)$$

οπότε, αναζητώντας συμμετρικές λύσεις που παρουσιάζουν ανεξαρτησία από τη γωνία αζιμουθίου ( $\theta$ ) και την πολική γωνία ( $\varphi$ ) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right] \Psi(r) = 0. \quad (2.10)$$

Η ανωτέρω εξίσωση έχει ως γενική λύση:

$$\Psi(\mathbf{r}) = A \frac{e^{ikr}}{r} + B \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2.11)$$

Έχοντας υποθέσει αρμονική στο χρόνο εξάρτηση της μορφής  $\exp(-i\omega t)$ , θα θέσουμε το  $B=0$  ώστε να μην έχουμε στο άπειρο εισερχόμενα κύματα και η λύση θα είναι:

$$\Psi(\mathbf{r}) = A \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.12)$$

Από την ανωτέρω σχέση λαμβάνουμε για την ακουστική ταχύτητα:

$$u_r(r) = \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial r} = A e^{ikr} \left( \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (2.13)$$

Η σταθερά  $A$  μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας την συνοριακή συνθήκη στη γειτονία παλλόμενης σφαίρας που μοντελοποιεί την ακουστική πηγή:

$$u_r(\alpha) = U(\omega), \quad (2.14)$$

όπου  $U$  το πλάτος της ακτινικής ταχύτητας. Η απλή σημειακή μονοχρωματική πηγή αντιστοιχεί στη κατάσταση όπου η ακτίνα της παλλόμενης σφαίρας ( $\alpha$ ) είναι μικρή ως προς το αντίστοιχο μήκος κύματος ( $k\alpha \ll 1$ ), οπότε από τις ανωτέρω σχέσεις στην γειτονία ( $r = \alpha$ ) της πηγής προκύπτει προσεγγιστικά :

$$A \approx -a^2 U. \quad (2.15)$$

Ορίζοντας την ακουστική παροχή της πηγής ως  $S_\omega = 4\pi\alpha^2 U(\omega)$  προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το πεδίο από σημειακή πηγή:

$$\Psi(r) = -S_\omega \frac{e^{ikr}}{4\pi r} = -S_\omega G_\omega(r, 0), \quad (2.16)$$

όπου ο τελευταίος όρος στο δεξί μέλος αντιστοιχεί στην συνάρτηση Green. Η συνάρτηση εύκολα γενικεύεται για τυχαίο θέση πηγής ( $\mathbf{r}_o$ ) στο τρισδιάστατο ομογενή χώρο στην ακόλουθη μορφή:

$$G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o) = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|. \quad (2.17)$$

Διαπιστώνεται ότι η ανωτέρω λύση απεικονίζει σφαιρικά εξερχόμενα κύματα και ικανοποιεί την μη ομογενή εξίσωση Helmholtz:

$$[\nabla^2 + k^2]G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o). \quad (2.18)$$

Επίσης, ισχύει:

$$G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o) = G_\omega(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}), \quad (2.19)$$

που καταδεικνύει τη συμμετρία που παρουσιάζει το πεδίο ως προς το  $\mathbf{r}$  και  $\mathbf{r}_o$ .

## 2.2.2 Γραμμική πηγή σε ομογενές μέσο διάδοσης άπειρης έκτασης

Μια αντίστοιχη λύση που παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία μπορεί να παραχθεί από την ομογενή εξίσωση Helmholtz χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη του τελεστή Laplace σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων ( $z, r, \theta$ ):

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (2.20)$$

Στην περίπτωση λύσεων που παρουσιάζουν ανεξαρτησία από τη γωνία αζιμούθιου  $\theta$  καθώς και από την  $z$ -μεταβλητή η οποία διατρέχει κατά μήκος του άξονα κυλινδρικής συμμετρίας έχουμε την ακόλουθη απλουστευμένη εξίσωση:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right] \Psi(r) = 0. \quad (2.21)$$

Η ανωτέρω εξίσωση Bessel διαθέτει την ακόλουθη γενική λύση:

$$\Psi(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr), \quad (2.22)$$

η οποία εκφράζεται ισοδύναμα με χρήση των συναρτήσεων Hankel ως ακολούθως:

$$\Psi(r) = CH_0^{(1)}(kr) + DH_0^{(2)}(kr). \quad (2.23)$$

Οι παραπάνω σχέσεις παρουσιάζουν εξερχόμενα και εισερχόμενα κυλινδρικά κύματα στο  $r \rightarrow \infty$ , αντίστοιχα, καθώς οι συναρτήσεις Hankel διαθέτουν τις ακόλουθες ασυμπτωτικές προσεγγίσεις για μεγάλες τιμές του ορίσματος:

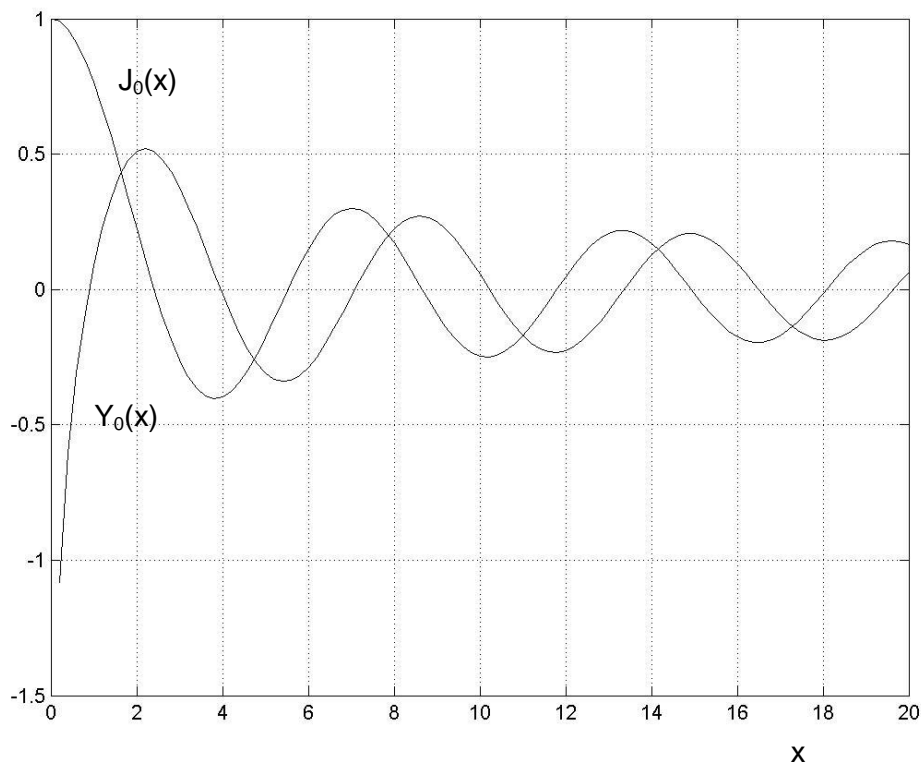
$$H_0^{(1)}(kr) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)}, \quad (2.24)$$

$$H_0^{(2)}(kr) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \pi/4)}. \quad (2.25)$$

Αντίστοιχα με τα προηγούμενα, διαπιστώνεται ότι η ανωτέρω λύση  $G_\omega(r, r_o) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|r - r_o|)$  απεικονίζει κυλινδρικά εξερχόμενα κύματα και ικανοποιεί την μη ομογενή εξίσωση Helmholtz στις δύο διαστάσεις:

$$[\nabla^2 + k^2]G_\omega(r, r_o) = -\delta(r - r_o). \quad (2.26)$$

Η ανωτέρω λύση παρουσιάζει εξασθένηση του κυλινδρικού κύματος ανάλογη με την απόσταση από την πηγή  $|r - r_o|^{-1/2}$ . Επίσης, κατά την προσέγγιση της πηγής το πεδίο παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία (βλ. σχήμα 7).



Σχήμα 7. Γραφική απεικόνιση των δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της εξίσωσης Bessel, με φανερή τη λογαριθμική ιδιομορφία της  $Y_0$ .

### 2.3 Πηγή σε πεπερασμένο χωρίο

Αντίστοιχα με το προηγούμενο εδάφιο, στην περίπτωση που έχουμε πηγές ισχύος  $f(\mathbf{r})$ , διασκορπισμένες σε περιορισμένο χωρίο  $V$  με σύνορο  $S$ , το πεδίο θα πρέπει να ικανοποιεί τη μη ομογενή εξίσωση Helmholtz:

$$[\nabla^2 + k^2]\Psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}). \quad (2.27)$$

Η  $G_\omega$  που παρουσιάσαμε πιο πάνω έχει την ιδιότητα της θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης Helmholtz, ενώ παράλληλα είναι σύμφωνη με τη συνθήκη ακτινοβολίας που αφορά εξερχόμενα κύματα που εξασθενούν σε μεγάλες αποστάσεις. Στην περίπτωση διάδοσης σε περιορισμένο χωρίο (μέσο διάδοσης το οποίο είναι ομογενές), η φυσική λύση απαιτείται να ικανοποιήσει επιπροσθέτως συνοριακές συνθήκες, και αναπαρίσταται ως άθροισμα της θεμελιώδους λύσης  $G_\omega$  και μιας κατάλληλης λύσης της ομογενούς εξίσωσης Helmholtz  $H_\omega$ . Με αυτό τον τρόπο είναι δυνατό να κατασκευαστούν γενικότερες συναρτήσεις Green της μορφής

$G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o) + H_\omega(\mathbf{r})$ , θα ικανοποιεί πλέον τη μη ομογενή Helmholtz και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

#### 2.4 Πηγή σε οριζόντια στρωματοποιημένο μέσο διάδοσης

Σε ανομοιογενή μέσα η ταχύτητα του ήχου και η πυκνότητα μεταβάλλονται κατά μήκος των διαφόρων συντεταγμένων του συστήματος. Στις περιπτώσεις που η μεταβολή έχει τη μορφή διακριτής ασυνέχειας στις ιδιότητες του μέσου, δεν ισχύει η παραγωγή στα σημεία ασυνέχειας για την κυματική εξίσωση, οπότε το πρόβλημα πρέπει να αντιμετωπιστεί ως πρόβλημα συνοριακών τιμών. Εάν το μέσο διαθέτει μόνο οριζόντια διαστρωμάτωση και η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται μόνο από τη κατακόρυφη  $z$ -μεταβλητή, είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση Helmholtz και η συνοριακή συνθήκη θα έχουν τις παρακάτω μορφές αντίστοιχα:

$$\left[ \nabla^2 + k^2(z) \right] \Psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (2.38)$$

και

$$B[\Psi(\mathbf{r})] \Big|_{z=z_n} = 0, \quad n=1 \dots N \quad (2.39)$$

Όπου  $B$  είναι συνοριακός τελεστής και  $z_n$  είναι το βάθος που βρίσκεται η νιοστή διεπιφάνεια. Η επιλογή του συστήματος συντεταγμένων που θα χρησιμοποιηθεί στην εκάστοτε περίπτωση πραγματοποιείται με βάση τις συνοριακές συνθήκες, καθώς θα πρέπει να επιλεγεί σύστημα με έναν άξονα κάθετο στην οριζόντια διεπιφάνεια.

Στο σύνηθες πρόβλημα σημειακής πηγής χρησιμοποιούμε το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Τοποθετούμε τον άξονα  $z$  έτσι ώστε να διαπερνά την πηγή, και τον άξονα  $r$  παράλληλο στις διεπιφάνειες του μέσου διάδοσης. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε την εξίσωση Helmholtz (2.38) ως προς τη αξιμουθιακή συντεταγμένη  $\theta$  και εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Hankel, ως ακολούθως:

$$\Psi(r, z) = \int_0^\infty \Psi(k_r, z) J_0(k_r r) k_r dk_r, \quad (2.40)$$

$$\Psi(k_r, z) = \int_0^\infty \Psi(r, z) J_0(k_r r) r dk_r. \quad (2.41)$$



Σκοπός μας είναι να φτάσουμε στην εύρεση της κατά βάθος διαχωρισμένης κυματικής εξίσωσης για μοναδιαία ένταση πηγής ( $S_\omega=1$ ), σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + (k^2 - k_r^2) \right] \Psi(k_r, z) = \frac{\delta(z - z_s)}{2\pi} . \quad (2.42)$$

Η υποβίβαση της εξίσωσης τριών διαστάσεων του Helmholtz σε εξίσωση μίας διάστασης επιτυγχάνεται έχοντας ως αντίβαρο κόστους τον υπολογισμό του ολοκληρώματος του αντίστροφου μετασχηματισμού Hankel. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του πυρήνα του ολοκληρώματος κάνει δυνατή την περικοπή του με μικρό σφάλμα και υπάρχουν αριθμητικά συστήματα για τον υπολογισμό της λύσης του ανεξάρτητα από την απόσταση προβλήματος. Τέτοιες μέθοδοι είναι η Wavenumber Integration Method, με μεγάλη ακρίβεια στο αποτέλεσμα, ή προσεγγιστικές μέθοδοι όπως η ανάλυση με Normal Mode ή η μέθοδος στάσιμης φάσης.<sup>6</sup>

## 2.5 Διάδοση σε ρηχό θαλάσσιο περιβάλλον

Σε περίπτωση διάδοσης του ακουστικού κύματος σε ρηχό περιβάλλον, όπως για παράδειγμα στην υφαλοκρηπίδα, υπάρχει αλληλεπίδραση του κύματος με την επιφάνεια αλλά και τον πυθμένα. Θα θεωρήσουμε ομογενή κυματοδηγό στις τρεις διαστάσεις που εκτείνεται από την επιφάνεια της θάλασσας ( $z=0$ ) μέχρι τον πυθμένα ( $z=h$ ).

### 2.5.1 Μέθοδος κατοπτρισμού

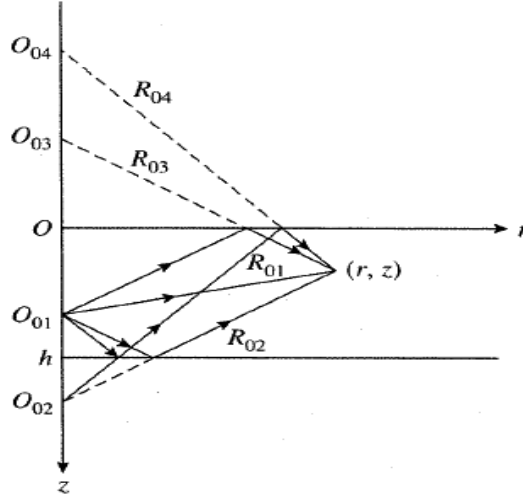
Όταν η σημειακή πηγή  $O_{01}$  βρίσκεται στη θέση  $(0, z_s=z_1)$  (βλ. σχήμα 8), το πεδίο της πηγής χωρίς τις επιδράσεις των συνόρων είναι:

$$\Psi_{01}(\mathbf{r}, z) = R_{01}^{-1} e^{ikR_{01}}, \text{ με } R_{01} = \left[ \mathbf{r}^2 + (z_1 - z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.43)$$

Το συνολικό πεδίο  $\Psi(\mathbf{r}, z)$  θα πρέπει να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες:

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad (2.44)$$

<sup>6</sup> Jensen et al, 2011, p.102-118.



Σχήμα 8. Απεικόνιση του πεδίου με τη μέθοδο πολλαπλών κατοπτρισμών

στην ελεύθερη επιφάνεια, και:

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, z = -h)}{\partial z} = 0, \quad (2.45)$$

στον απόλυτα συμπαγή πυθμένα, αντίστοιχα.

Για να επιτύχουμε και την ικανοποίηση αυτών των συνθηκών, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και τις ανακλάσεις των ορίων. Η ανάκλαση του πυθμένα θα είναι:

$$\Psi_{02}(\mathbf{r}, z) = \frac{e^{ikR_{02}}}{R_{02}}, \quad \text{με } R_{02} = [\mathbf{r}^2 + (2h - z - z_1)]^{1/2}, \quad (2.46)$$

Το ανακλώμενο κύμα μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει από μια εικονική πηγή  $O_{02}$  ευρισκόμενη στον πυθμένα. Οι επόμενες εικονικές πηγές θα βρίσκονται στην επιφάνεια της θάλασσας και θα είναι κατοπτρισμοί των δύο προαναφερθέντων πηγών  $O_{01}$ ,  $O_{02}$  με μεταβολή στη φάση τους (βλ. σχήμα 8). Η λύση λαμβάνει σε πρώτη προσέγγιση τη μορφή:

$$\Psi(\mathbf{r}, z) = \frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}} + \frac{e^{ikR_{02}}}{R_{02}} - \frac{e^{ikR_{03}}}{R_{03}} - \frac{e^{ikR_{04}}}{R_{04}}, \quad (2.47)$$

$$\text{με } R_{03} = [\mathbf{r}^2 + (z + z_1)^2]^{1/2} \quad \text{και} \quad R_{04} = [\mathbf{r}^2 + (2h + z + z_1)^2]^{1/2}.$$

Παρατηρούμε πως τώρα δεν έχουμε πλήρη ικανοποίηση της συνθήκης πυθμένα. Το ίδιο επαναλαμβάνεται διαρκώς με εναλλαγές των κατοπτρισμών ως προς το θεωρούμενο σύνορο, και τελικά η έκφραση της λύσης για το συνολικό πεδίο λαμβάνει τη μορφή:

$$\Psi(\mathbf{r}, z) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left[ \frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}} + \frac{e^{ikR_{l2}}}{R_{l2}} - \frac{e^{ikR_{l3}}}{R_{l3}} - \frac{e^{ikR_{l4}}}{R_{l4}} \right], \quad (2.48)$$

$$\text{όπου} \begin{cases} R_{lj} = (\mathbf{r}^2 + z_{lj}^2)^{1/2}, & l=0,1,2,\dots,\infty, j=1,2,3,4 \\ z_{l1} = 2hl + z_1 - z, & z_{l2} = 2h(l+1) - z_1 - z \\ z_{l3} = 2hl + z_1 + z, & z_{l4} = 2h(l+1) - z_1 + z \end{cases} .$$

Η γενίκευση της (2.48) για μερικώς ανακλαστικό πυθμένα είναι<sup>7</sup>:

$$\Psi(\mathbf{r}, z) = \sum_{l=0}^{\infty} (-V)^l \left[ \frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}} + V \frac{e^{ikR_{l2}}}{R_{l2}} - \frac{e^{ikR_{l3}}}{R_{l3}} - V \frac{e^{ikR_{l4}}}{R_{l4}} \right], \quad (2.49)$$

όπου  $V$  ο κατάλληλος συντελεστής ανάκλασης, ο οποίος εξαρτάται γενικά από την συχνότητα και τις ακουστικές ιδιότητες του υλικού του πυθμένα.

### 2.5.2 Μέθοδος ολοκληρωτικής αναπαράστασης

Στο ίδιο πρόβλημα που αφορά τρισδιάστατο περιβάλλον διάδοσης (3D) παρέχεται λύση με την μέθοδο ολοκληρωτικής αναπαράστασης (Integral representation)<sup>8</sup>. Στον ελεύθερο χώρο ένα σφαιρικό κύμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως υπέρθεση επίπεδων κυμάτων της μορφής  $\exp[i(k_x x + k_y y + k_z(z_1 - z))]$ . Όπως προαναφέρθηκε, σε περίπτωση που έχουμε πυθμένα σε βάθος  $z = h$ , θα παρουσιαστεί και μια δεύτερη μορφή που θα αναπαριστά το ανακλώμενο κύμα με τη μορφή  $V \exp[i(k_x x + k_y y + k_z(2h - z - z_1))]$ . Συνεχίζοντας με την ίδια λογική θα έχουμε μια άπειρη σειρά κυμάτων με διαφορετικούς αριθμούς ανάκλασης και φάση για κάθε κύμα της ανάλυσης, ο όρος  $z_{lj}$  μας δείχνει αντίστοιχα τη διαδρομή που ακολούθησε το εκάστοτε κύμα. Για  $l=0$  και  $j=1$  έχουμε το άμεσο από την πηγή κύμα, για  $l=0$  και  $j=2$  έχουμε το κύμα που έχει ανακλαστεί στον πυθμένα, για  $l=0$  και  $j=3$  έχουμε το κύμα που ανακλάστηκε στην επιφάνεια του ρευστού και τέλος για  $l=0$  και  $j=4$  έχουμε το κύμα που έχει υποστεί ανάκλαση από τον πυθμένα και στη συνέχεια από την επιφάνεια. Ακολουθώντας, αθροίζουμε όλα τα παραπάνω κύματα με σκοπό να βρούμε το συνολικό ακουστικό πεδίο και μετά ολοκληρώνουμε ως προς τα  $k_x$  και  $k_y$ . Καθ' όλη τη διάρκεια των υπολογισμών μας δεν ξεχνάμε πως τα πλάτη

<sup>7</sup> Brekhovskikh & Lysanov, 2001, p. 101-105.

των κυμάτων ανακλώμενα στον πυθμένα θα πολλαπλασιάζονται με τον συντελεστή ανάκλασης  $V$ , ενώ τα ανακλώμενα στην επιφάνεια με τον συντελεστή  $-1$ . Βρίσκουμε λοιπόν την παρακάτω σχέση για  $z < z_1$ :

$$\Psi(\mathbf{r}, z) = \frac{i}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[i(k_x x + k_y y)] \{ \exp[ik_z(z_1 - z)] + V \exp[ik_z(2h - z - z_1)] - \exp[ik_z(z_1 + z)] - V \exp[ik_z(2h + z - z_1)] \} \sum_{l=0}^{\infty} (-V)^l \exp(2ik_z hl) \frac{dk_x dk_y}{k_z}, \quad (2.50)$$

και αντίστοιχη έκφραση για  $z > z_1$ . Μετά από πράξεις και την εισαγωγή νέων όρων, όπως του οριζόντιου κυματάριθμου  $k_r$  με σχέση  $k_z = (k^2 + k_r^2)^{1/2} \equiv a$ , η ανωτέρω αναπαράσταση έρχεται τελικά στη μορφή:

$$\Psi(\mathbf{r}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin az \{ \exp[-ia(h - z_1)] + V \exp[ia(h - z_1)] \}}{a \exp(-iah) [1 + V \exp(2iah)]} H_0^{(1)}(k_r \mathbf{r}) k_r dk_r, \quad (2.51)$$

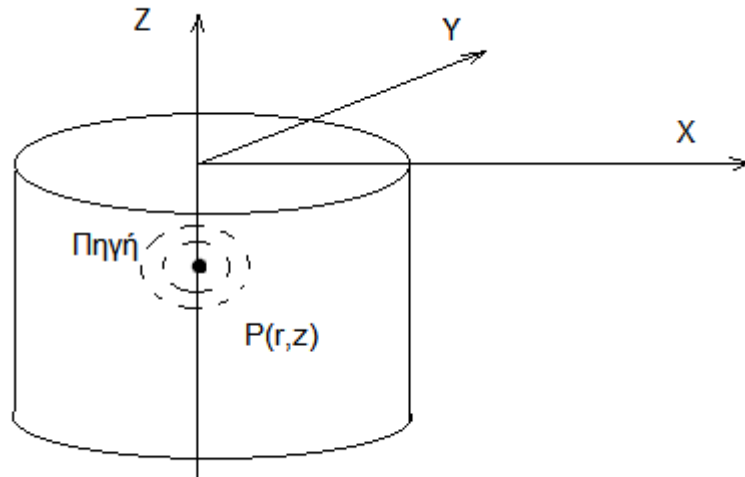
για  $z < z_1$ . Στην περίπτωση όπου  $z > z_1$  τότε θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα, αλλάζοντας τη θέση των  $z_1$  και  $z$  στη συνάρτηση.

### 2.5.3 Μέθοδος κανονικών ιδιομορφών (Normal Modes)

Η μέθοδος κανονικών ιδιομορφών θα μας απασχολήσει περισσότερο, καθώς θα χρησιμοποιηθεί στα αριθμητικά μοντέλα που θα κατασκευαστούν σε περιβάλλον Matlab για να απεικονίσουμε το ηχητικό πεδίο. Η προαναφερθείσα μέθοδος περιλαμβάνει την επίλυση μιας εξαρτώμενης από το βάθος εξίσωσης που προκύπτει από το χωρισμό μεταβλητών. Το πεδίο αποδίδεται τελικά από ένα σύνολο από παλλόμενες ιδιομορφές (modes). Οι ταλαντωτικότητα της κάθε ιδιομορφής στην οριζόντια και κατακόρυφη διάσταση χαρακτηρίζεται από αντίστοιχο οριζόντιο και κατακόρυφο κυματάριθμο που σχετίζεται με τη διάδοση της ιδιομορφής, ενώ το τελικό ακουστικό πεδίο κατασκευάζεται με την υπέρθεση όλων των ιδιομορφών.

#### Σημειακή πηγή σε κυματοδηγό με επίπεδα σύνορα

Σε αυτή την περίπτωση αναφερόμαστε σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με την πηγή πάνω στον κατακόρυφο άξονα (κυλινδρικής συμμετρίας) (βλ. σχήμα 9).



Σχήμα 9. Σημειακή πηγή σε κυλινδρική γεωμετρία

Ξεκινώντας από την ομογενή εξίσωση Helmholtz (καθώς αναζητάμε λύση για τη μη εξαναγκασμένη μορφή της Helmholtz) και για οριζόντια στρωματοποιημένο μέσο:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} \Psi = 0, \quad (2.52)$$

και εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών, αναζητούμε λύση της μορφής:

$$\Psi(r, z) = \Phi(r) Z(z). \quad (2.53)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.52), και διαιρώντας με  $\Phi(r) Z(z)$  βρίσκουμε:

$$\frac{1}{\Phi} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) \right] = -\frac{1}{Z} \left[ \rho(z) \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{dZ}{dz} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} \right] \quad (2.54)$$

Το περιεχόμενο των αγκυλών είναι συναρτήσεις ως προς το  $z$  και το  $r$ , άρα για να ικανοποιείται η εξίσωση θα πρέπει να είναι ο κάθε όρος ίσος με μια σταθερά την οποία συμβολίζουμε ως  $k_m^2$ , καταλήγοντας στην εξίσωση:

$$\rho(z) \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{\rho(z)} \frac{dZ_m(z)}{dz} \right] + \left[ \frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_m^2 \right] Z_m(z) = 0, \quad (2.55)$$

και συνοριακές συνθήκες:

$$Z_m(0) = 0, \quad \left. \frac{dZ_m}{dz} \right|_{z=h} = 0. \quad (2.56)$$

Οι δύο συνοριακές συνθήκες που θέσαμε προσομοιάζουν την ελεύθερη επιφάνεια απελευθέρωσης και τον απόλυτα συμπαγή πυθμένα σε βάθος  $h$ .

Η (2.55) είναι ένα κλασικό Sturm-Liouville πρόβλημα, έχει άπειρες λύσεις, παρουσιάζει ιδιοτιμές  $k_m$  που υποδηλώνουν οριζόντιες σταθερές διάδοσης ανάλογες με τη συχνότητα ταλάντωσης και ιδιοσυναρτήσεις  $Z_m(z)$ . Όταν έχουμε την  $m$  ιδιομορφή αναμένουμε και  $m$  σημεία μηδενισμού από την επιφάνεια μέχρι τον πυθμένα. Αντίστοιχα οι ιδιοτιμές θα είναι όλες πραγματικές και θα παρουσιάζουν φθίνουσα πορεία από την τιμή 1 έως την  $m$  και σε καμία περίπτωση δεν θα παρουσιαστεί ιδιοτιμή που θα ξεπερνάει τον λόγο  $\omega/c_{\min}$  (όπου  $c_{\min}$  η χαμηλότερη τιμή της ταχύτητας του ήχου). Επίσης, όλες οι ιδιομορφές του προβλήματος είναι ορθογώνιες ως προς τη συνάρτηση πυκνότητας ρευστού  $\rho(z)$  (στην ειδική περίπτωση ομογενούς ρευστού (νερού)  $\rho(z)=1$ )

$$\int_0^h \frac{Z_m(z)Z_n(z)}{\rho(z)} dz = 0, \quad \text{για } m \neq n, \quad (2.57)$$

ενώ τις θεωρούμε και κανονικοποιημένες:

$$\int_0^h \frac{Z_m^2(z)}{\rho(z)} dz = 1. \quad (2.58)$$

Τέλος, όλες οι ιδιομορφές σχηματίζουν ένα πλήρες σύνολο, πράγμα που σημαίνει πως μπορούμε να γράψουμε την πίεση ως άθροισμα όλων των normal modes:

$$\Psi(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(r) Z_m(z). \quad (2.59)$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική Helmholtz εξίσωση (2.52) και απλοποιώντας με την περαιτέρω χρήση της (2.54), καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d\Phi_n(r)}{dr} \right] + k_m^2 \Phi_n(r) = 0 \quad (2.60)$$

η οποία έχει λύσεις που εκφράζονται από τη συνάρτηση Hankel ως ακολούθως:

$$\Phi_n(r) = \frac{i}{4\rho(z_s)} Z_n(z_s) H_0^{(1,2)}(k_m r). \quad (2.61)$$

Οι κατακόρυφες ιδιοσυναρτήσεις έχουν την ιδιότητα να αποδίδουν την γενικευμένη συνάρτηση Dirac:

$$\frac{1}{\rho} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(z_s) Z_m(z) = \delta(z - z_s), \quad (2.62)$$

και με βάση αυτή την ιδιότητα αποδεικνύεται ότι η υπέρθεση των ανωτέρω ιδιομορφών συνθέτει το πεδίο της πηγής εντός του θεωρούμενου κυματοδηγού:

$$\Psi(r, z) = \frac{i}{4\rho(z_s)} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(z_s) Z_m(z) H_0^{(1)}(k_{rm} r). \quad (2.63)$$

Λαμβάνοντας την ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης Hankel, οδηγούμαστε στην ακόλουθη έκφραση:

$$\psi(r, z) \approx \frac{i}{\rho(z_s) \sqrt{8\pi r}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(z_s) Z_m(z) \frac{e^{ik_{rm} r}}{\sqrt{k_{rm}}}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.64)$$

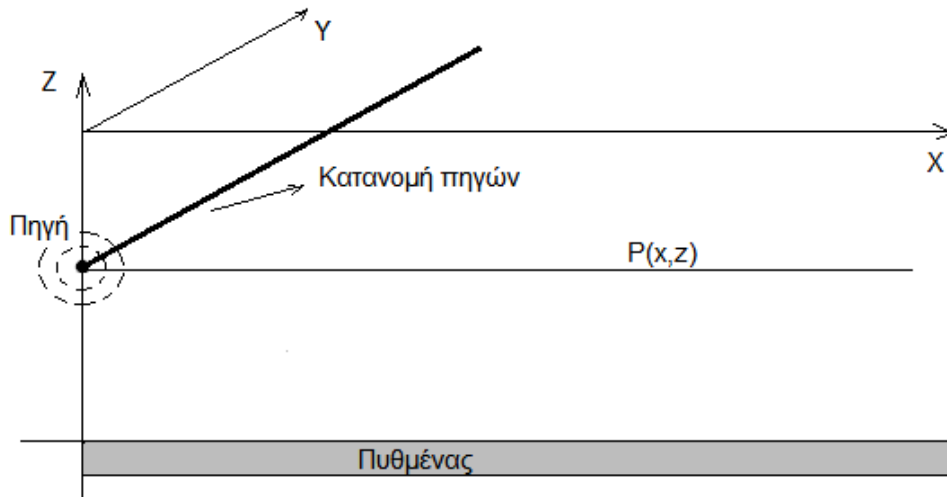
από όπου αναγνωρίζεται ότι το συνολικό πεδίο σε μακρινές αποστάσεις από την πηγή συντίθεται από εξερχόμενα κυλινδρικά κύματα.

### **Γραμμική πηγή σε κυματοδηγό με επίπεδα σύνορα**

Στην περίπτωση ενός περιβάλλοντος που δεν μεταβάλλεται κατά μήκος ενός (έστω εγκάρσιου  $Y$ ) άξονα (βλ. σχήμα 10), υπάρχει η δυνατότητα θεώρησης απλούστερων 2D λύσεων που παραμένουν ανεξάρτητες από την εγκάρσια μεταβλητή. Τέτοιες λύσεις αντιστοιχούν σε πεδία που προκύπτουν από συνεχώς κατανεμημένες σημειακές πηγές κατά μήκος του εγκάρσιου άξονα.

Με μικρές τροποποιήσεις σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα εξετάσουμε και την παρούσα περίπτωση. Για άλλη μια φορά σημείο αφετηρίας θα είναι η εξίσωση Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} \Psi = -\delta(x) \delta(z - z_s). \quad (2.65)$$



Σχήμα 10. Γραμμική πηγή σε επίπεδη γεωμετρία.

Θεωρώντας  $\rho = \text{σταθερό}$ , αναζητούμε λύση της μορφής:

$$\Psi(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x) Z_m(z), \quad (2.66)$$

όπου  $Z_m(z)$  οι ίδιες όπως προηγουμένως λύσεις του κατακόρυφου προβλήματος ιδιοτιμών, και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.65) λαμβάνουμε:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 \Phi_m(x)}{dx^2} Z_m(z) + \Phi_m(x) \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{dZ_m(z)}{dz} \right) \right] \right\} = -\delta(x) \delta(z - z_s). \quad (2.67)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.55) η οποία στην παρούσα περίπτωση γράφεται

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{dZ_m(z)}{dz} \right] + \left[ \frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_{xm}^2 \right] Z_m(z) = 0,$$

όπου  $k_{xm}^2$  τώρα οι οριζόντιοι κυματαριθμοί, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{d^2 \Phi_m(x)}{dx^2} Z_m(z) + k_{xm}^2 \Phi_m(x) Z_m(z) \right] = -\delta(x) \delta(z - z_s). \quad (2.68)$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι την ιδιότητα των κατακόρυφων ιδιοσυναρτήσεων να αποδίδουν την γενικευμένη συνάρτηση Dirac προκύπτει:

$$\frac{d^2 \Phi_n(x)}{dx^2} + k_{xn}^2 \Phi_n(x) = -\delta(x) Z_n(z_s). \quad (2.69)$$

Η λύση της εξίσωσης (2.69) είναι η:



$$\Phi_n(x) = \frac{i}{2} Z_n(z_s) \frac{e^{ik_{xn}x}}{k_{xn}} . \quad (2.70)$$

Οπότε το πεδίο της γραμμικής πηγής, γενικεύοντας για πηγή στη θέση  $(x_s, z_s)$  παρέχεται από τη σχέση:

$$\Psi(x, z) = \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(z_s) Z_m(z) \frac{e^{ik_{xm}|x-x_s|}}{k_{xm}} . \quad (2.71)$$

Σε κάθε περίπτωση (πεδίο από σημειακή πηγή ή γραμμική πηγή) το σημαντικό στοιχείο στον υπολογισμό του πεδίου είναι η κατασκευή των κατακόρυφων ιδιοσυναρτήσεων  $Z_m(z)$  καθώς και η εύρεση των αντιστοίχων ιδιοτιμών  $k_{xm}$ . Σε ειδικές (απλές) περιπτώσεις όπως  $\rho = \text{const}$ ,  $c = \text{const}$  αυτό είναι εφικτό αναλυτικά. Στην γενικότερη περίπτωση  $c(z)$  απαιτείται αριθμητικός υπολογισμός και μια τέτοια μέθοδος που βασίζεται στη διακριτοποίηση του προβλήματος ιδιοτιμών με πεπερασμένες διαφορές παρουσιάζεται κατωτέρω στο τέλος του κεφαλαίου 2.

### Διάδοση σε περιβάλλον σταθερής ταχύτητας ήχου

Στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε μια ιδεατή περίπτωση ενός περιβάλλοντος με σταθερή πυκνότητα (έστω  $\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$ ) που παρουσιάζει ομοιομορφία στο δείκτη διάθλασης, ώστε η ταχύτητα του ήχου να παραμένει αμετάβλητη σε όλο το χωρίο, η γενική λύση της εξίσωσης του κατακόρυφου προβλήματος δίνεται από τη σχέση:

$$Z_m(z) = A \sin(k_z z) + B \cos(k_z z) , \quad (2.72)$$

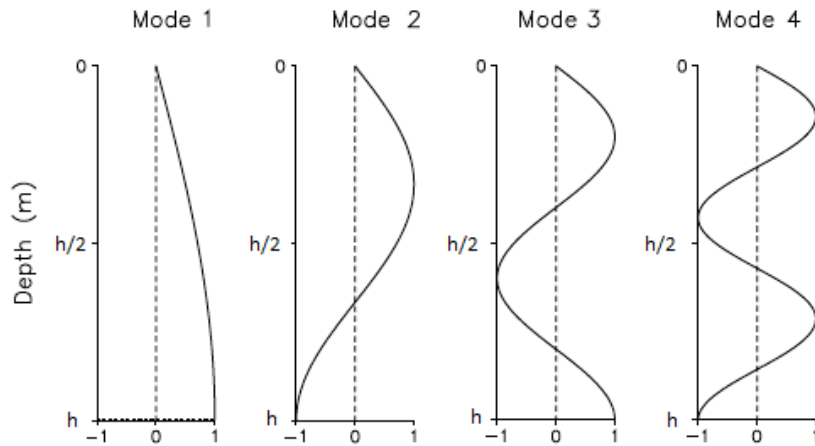
όπου ο κατακόρυφος κυματάριθμος  $k_z$  δίνεται από τη σχέση:

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_r^2} \quad (\text{ή} \quad k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2} \quad \text{για γραμμική πηγή}) \quad (2.73)$$

Η συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια επιβάλλει το B να είναι 0, ενώ η συνθήκη πυθμένα οδηγεί στο μηδενισμό της παραγώγου της συνάρτησης (2.72) που οδηγεί στη σχέση:

$$A k_z \cos(k_z h) = 0 , \quad (2.74)$$

με το  $h$  να είναι το βάθος της υπό μελέτη περιοχής, η οποία μας οδηγεί στην λύση:



Σχήμα 11. Απεικόνιση των 4 πρώτων ιδιομορφών του προβλήματος σταθερής ταχύτητας.

$$k_z h = \left(m - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.75)$$

που συνεπάγεται πως το  $k_r$  (ή το  $k_x$  στη περίπτωση της γραμμικής πηγής) θα πρέπει να λάβει τις ακόλουθες τιμές για την κάθε ιδιομορφή (mode):

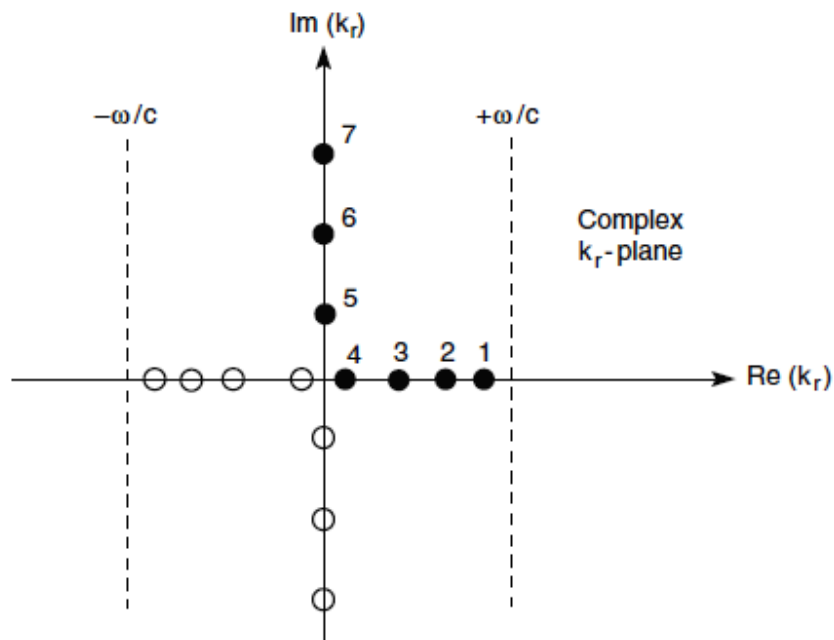
$$k_{rm} \text{ ή } k_{xm} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left[\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{h}\right]^2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.76)$$

ενώ οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις δίνονται από τη συνάρτηση (βλ. σχήμα 11):

$$Z_m(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin(k_{zm} z), \quad (2.77)$$

Επιλέξαμε τη σταθερά A έτσι ώστε οι ιδιομορφές (modes) να είναι κανονικοποιημένες ( $\|Z_m\| = 1$ ). Η εξίσωση (2.76) που μας δίνει μια συσχέτιση μεταξύ γωνιακής συχνότητας και οριζόντιου κυματάριθμου είναι γνωστή και ως σχέση διασποράς. Αντίστοιχα οι ποσότητες  $V_m(\omega) = \omega / k_{rm}$  και η  $v_m(\omega) = d\omega / dk_{rm}$  είναι η φασική και η ομαδική ταχύτητα της  $m$  ιδιομορφής.

Οι ιδιοτιμές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με το αν αφορούν διαδιδόμενες ή αποσβενούμενες ιδιομορφές, κάτι που εξαρτάται καθαρά από το αν το υπόριζο της σχέσης (2.76) είναι θετικό ή αρνητικό αντίστοιχα (βλ σχήμα 12). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι στη δεύτερη περίπτωση (αποσβενούμενες ιδιομορφές) η οριζόντια εξάρτηση της κάθε μορφής εξασθενεί εκθετικά σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή.



Σχήμα 12. Απεικόνιση των ιδιοτιμών του προβλήματος στο μιγαδικό επίπεδο

Για άλλη μια φορά η επιλογή μας για χρονική εξάρτηση της μορφής  $\exp(-i\omega t)$ , μας επιβάλλει τη χρήση της θετικής  $k_m$  λύσης, ώστε να έχουμε κύματα που διαδίδονται από την πηγή προς το άπειρο και όχι το αντίθετο. Στο σχήμα 12 παρουσιάζονται με γεμισμένο κύκλο και βρίσκονται στο θετικό πραγματικό άξονα οι διαδιδόμενες ιδιομορφές. Αντίστοιχα, για τις αποσβενούμενες ιδιομορφές θα πρέπει να επιλέξουμε ανάμεσα σε λύσεις της (2.76) με μορφή μιγαδικού  $i\xi$  και  $-i\xi$ . Επιλέγουμε τελικά, με απώτερο σκοπό τον περιορισμό της λύσης μέσα σε σύνορα, τη μορφή  $k_m = i\xi$  με  $\xi > 0$ . Οι τιμές αυτές παρουσιάστηκαν στο παραπάνω σχήμα πάλι με γεμισμένους κύκλους ως σύμβολο, αλλά στον θετικό φανταστικό άξονα.

Ο αριθμός των διαδιδόμενων ιδιομορφών καθορίζεται εύκολα στην περίπτωση του ομοιόμορφου περιβάλλοντος  $c = \text{const}$  από το ακόλουθο ακέραιο μέρος:

$$N_p = \left[ 0.5 + \frac{\omega h}{\pi c} \right] = [0.5 + 2hf / c]. \quad (2.78)$$

Από όπου φαίνεται ότι ο αριθμός των διαδιδόμενων ιδιομορφών αυξάνεται αναλογικά με την συχνότητα της πηγής και το βάθος του κυματοδηγού, και ελαττώνεται με την αύξηση της φασικής ταχύτητας. Το ανώτερο όριο των πραγματικών (διαδιδόμενων) ιδιοτιμών είναι στο  $\omega/c$ . Σε αρκετά χαμηλή συχνότητα μπορεί όλες οι ιδιομορφές να

γίνουν αποσβενούμενες. Η συχνότητα αυτή ονομάζεται “συχνότητα αποκοπής” (cutoff frequency) του κυματοδηγού και δίνεται από τη σχέση:

$$f_0 = \frac{c}{4h} . \quad (2.79)$$

Στην περίπτωση του γενικού οριζόντια στρωματοποιημένου περιβάλλοντος με μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης  $c(z)$  ο αριθμός των διαδιδόμενων ιδιομορφών καθορίζεται από το πρόσημο των ιδιοτιμών  $k_{rm}$  ή  $k_{xm}$  οι οποίες υπολογίζονται αριθμητικά. Σε κάθε περίπτωση η ανωτέρω σχέση εφαρμοζόμενη με χαρακτηριστική (μέση ή ελάχιστη) τιμή του  $c(z)$  προσεγγίζει τον αριθμό των διαδιδόμενων ιδιομορφών.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.77) στην αναπαράσταση του πεδίου βρίσκουμε για το πρόβλημα σημειακής πηγής σε ομογενή κυματοδηγό σταθερής ταχύτητας:

$$\Psi(r, z) = \frac{i}{2h} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(k_{zm} z_s) \sin(k_{zm} z) H_0^{(1)}(k_{rm} r) , \quad (2.80)$$

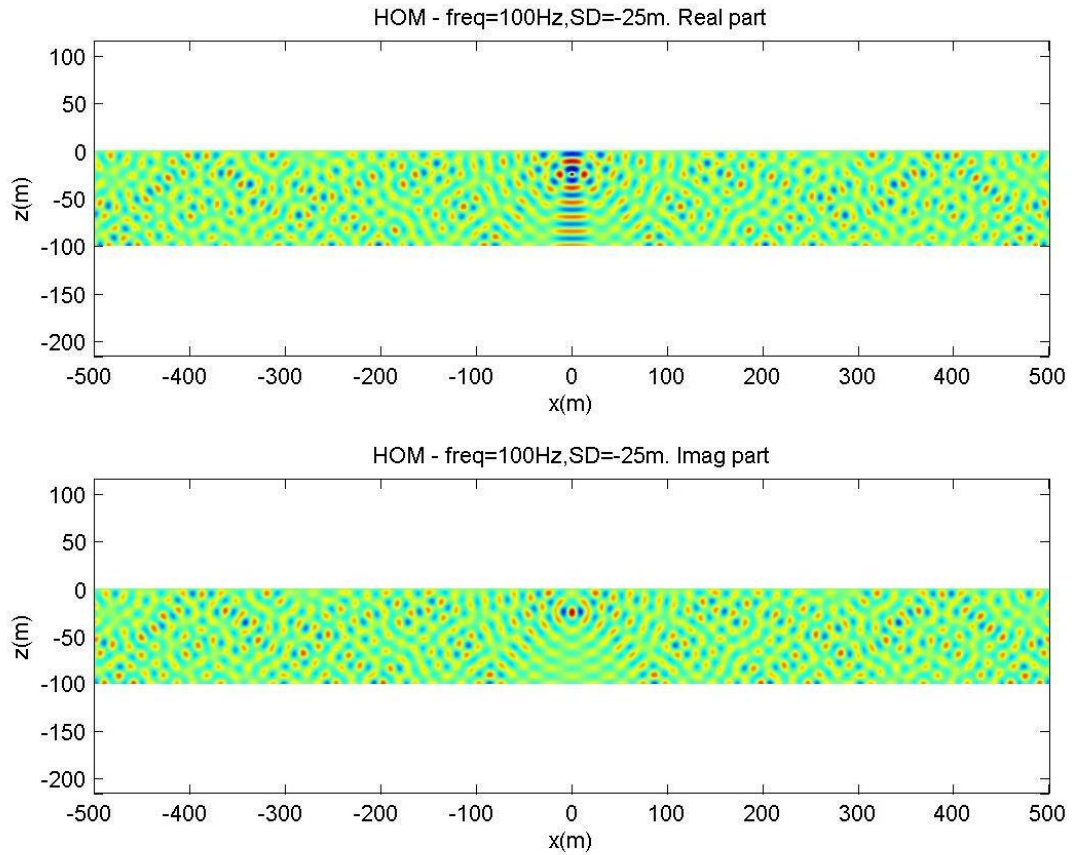
και για την γραμμική πηγή:

$$\Psi(x, z) = \frac{i}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(k_{zm} z_s) \sin(k_{zm} z) \frac{\exp(ik_{xm} x)}{k_{xm}} . \quad (2.81)$$

Πολλές από τις ιδιότητες που είδαμε στο ισοταχές πρόβλημα (isovelocity) θα έχουν ισχύ και σε πιο σύνθετα περιβάλλοντα. Αλλά ενώ είναι χρήσιμο να μιλάμε για διαδιδόμενες και αποσβενούμενες ιδιομορφές σε ιδανικό περιβάλλον, η διαφορά μεταξύ τους καθίσταται κάπως δυσδιάκριτη όταν υπάρχει απόσβεση.

Στο σχήμα 13 εικονίζεται ένα παράδειγμα υπολογισμού πεδίου από γραμμική πηγή σε ομογενές θαλάσσιο περιβάλλον σταθερής ταχύτητας  $c = 1500 \text{ m/s}$  και σταθερής βαθυμετρίας  $h = 100 \text{ m}$  από γραμμική πηγή συχνότητας  $f = 100 \text{ Hz}$ . Οι διαδιδόμενες ιδιομορφές θα είναι 13 και οι αποσβενούμενες 50.

Παρατηρούμε δύο απεικονίσεις, η πρώτη αφορά το πραγματικό μέρος του συνολικού πεδίου και η δεύτερη το φανταστικό μέρος του. Στη συγκεκριμένη απεικόνιση έχουν χρησιμοποιηθεί όλες οι καθαρά διαδιδόμενες ιδιομορφές (modes), καθώς και 50 επιπλέον που θα είναι αποσβενούμενες (βλ. σχήμα 13). Το αρχείο Matlab που χρησιμοποιήθηκε για την παρακάτω απεικόνιση είναι το **g2d.m**.

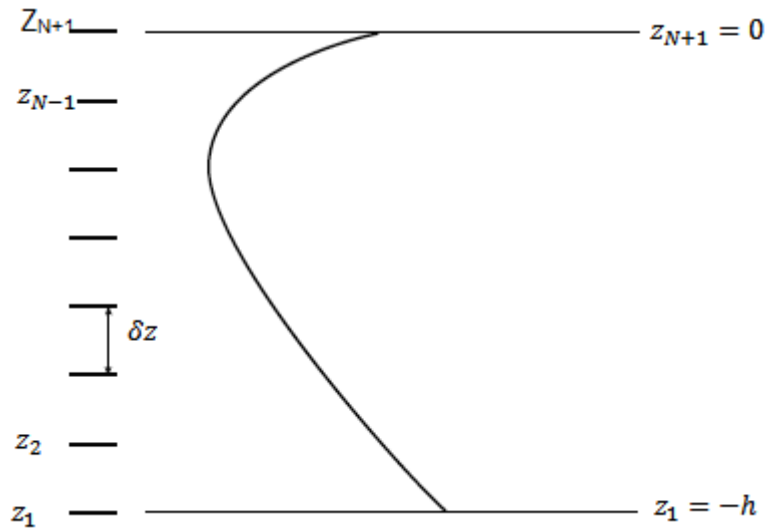


**Σχήμα 13. Απεικόνιση διάδοσης ηχητικού πεδίου από σημειακή πηγή σε συχνότητα 100Hz σε ρηχό ομογενές περιβάλλον**

**Διάδοση σε περιβάλλον κατακόρυφα μεταβαλλόμενης ταχύτητας του ήχου**

Με σκοπό την εύρεση των ιδιοτιμών σε ένα περιβάλλον, όπου έχουμε μεταβαλλόμενη κατά βάθος ταχύτητα διάδοσης του ήχου, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Για να καταφέρουμε να πραγματοποιήσουμε τη διακριτοποίηση του προβλήματος, αρχικά χωρίζουμε το πεδίο από τον πυθμένα έως την ελεύθερη επιφάνεια σε  $N$  ίσα τμήματα, κατασκευάζοντας ένα πλέγμα από  $N + 1$  σημεία, με αφετηρία τον πυθμένα. Ο αριθμός των τμημάτων διαμέρισης  $N$  θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος, ώστε να έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση των ιδιομορφών, Συνήθως χρησιμοποιούνται 10 σημεία (ή περισσότερα) ανά χαρακτηριστικό μήκος ταλαντωτικότητας της λύσης. Εφόσον θεωρούμε πως το θαλάσσιο περιβάλλον θα είναι σταθερής βαθυμετρίας ίσης με  $h$ , τα τμήματα της διαμέρισης θα έχουν μήκος που θα δίνεται από τη σχέση:

$$\delta z = \frac{h}{N} \quad . \quad (2.82)$$



Σχήμα 14. Σχηματική αναπαράσταση του πλέγματος

Συνεχίζοντας, θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό  $Z_j = Z(z_j)$  και θεωρώντας πως η πυκνότητα του μέσου είναι σταθερή καταλήγουμε στην παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$Z''_n + (k^2(z) - k_{zn}^2)Z_n = 0, \quad (2.83)$$

όπου το  $k(z) = \omega/c(z)$  και ο τόνος δηλώνει παράγωγο ως προς το  $z$ .

Ακολουθώντας την κλασική διαδικασία για την μέθοδο πεπερασμένων διαφορικών εξισώσεων, χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα της σειράς Taylor οδηγούμενοι στη σχέση:

$$Z_{j+1} = Z_j + Z'_j \delta z + Z''_j \frac{\delta z^2}{2!} + Z'''_j \frac{\delta z^3}{3!} + \dots, \quad (2.84)$$

από όπου με αναδιάταξη των όρων βρίσκουμε την προς τα μπρος διαφορική προσέγγιση<sup>8</sup> για την πρώτη παράγωγο σε πρώτης τάξεως προσέγγιση:

$$Z'_j \cong \frac{Z_{j+1} - Z_j}{\delta z}. \quad (2.85)$$

Αντίστοιχα, από τη προς τα πίσω διαφορική προσέγγιση, ξεκινώντας από το ανάπτυγμα της σειράς Taylor:

<sup>8</sup> Η προσέγγιση θα είναι  $O(\delta z)$ , δηλαδή όροι τέτοιας τάξης θεωρούνται μικροί και απαλείφονται.

$$Z_{j-1} = Z_j - Z'_j h + Z''_j \frac{\delta z^2}{2!} - Z'''_j \frac{\delta z^3}{3!} + \dots, \quad (2.86)$$

βρίσκουμε τη προσεγγιστική σχέση :

$$Z'_j \cong \frac{Z_j - Z_{j-1}}{\delta z}. \quad (2.87)$$

Τέλος, με την πρόσθεση των αναπτυγμάτων Taylor και την αναδιάταξη των όρων βρίσκουμε την κεντρική διαφορική προσέγγιση σε δεύτερης τάξεως προσέγγιση<sup>9</sup> για τη δεύτερη παράγωγο:

$$Z''_j = \frac{Z_{j-1} - 2Z_j + Z_{j+1}}{(\delta z)^2}, \quad (2.88)$$

όπου τα  $z_j$  δίνονται από τη σχέση:

$$z_j = j \delta z, \quad j = 2, \dots, N. \quad (2.89)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως για τα εσωτερικά σημεία του πλέγματος που κατασκευάσαμε, δίχως τις συνοριακές τιμές επιφάνειας και πυθμένα, θα ισχύει με αντικατάσταση της (2.88) στην εξίσωση (2.83) η σχέση:

$$\frac{Z_{j+1} - 2Z_j + Z_{j-1}}{(\delta z)^2} + k^2(z_j) Z_j = 0. \quad (2.90)$$

Παρατηρώντας την εξίσωση (2.90), μπορούμε να διακρίνουμε την παράβλεψη του όρου  $k_{zn}^2$  καθώς αυτός ο όρος θα αναζητηθεί ως λύση του διακριτοποιημένου προβλήματος ιδιοτιμών. Οι όροι αν τους ταξινομήσουμε ελαφρώς διαφορετικά, θα μας οδηγήσουν στη σχέση:

$$\frac{1}{(\delta z)^2} Z_{j-1} + \left( \frac{-2}{(\delta z)^2} + k^2(z_j) \right) Z_j + \frac{1}{(\delta z)^2} Z_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (2.91)$$

με βάση την οποία θα δημιουργηθεί ο διαγώνιος πίνακας του προβλήματός, όπου με  $d(j)$  θα συμβολίζεται ο συντελεστής του μεσαίου αγνώστου  $Z_j$  στην εξίσωση (2.91), ενώ ο συντελεστής των επόμενων και προηγούμενων όρων από τον  $Z_j$  θα συμβολίζεται με  $e(j)$ . Ο ανωτέρω διακριτός πίνακας  $C$  θα ικανοποιεί γενικώς την εξίσωση ιδιοτιμών:

---

<sup>9</sup> Η προσέγγιση θα είναι  $O(\delta z^2)$ .

$$\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I} = 0. \quad (2.92)$$

Στον διακριτό πίνακα θα προστεθούν κάποιες τροποποιητικές αλλαγές, προκειμένου να εισαχθούν οι συνοριακές συνθήκες. Αρχικά θα εισαγάγουμε τη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας  $Z_{N+1} = Z(z = z_{N+1} = 0) = 0$ , οδηγούμενοι τελικά σε έναν διακριτό πίνακα διαστάσεως  $N$ . Συνεχίζουμε με την εισαγωγή και της συνθήκης πυθμένα, χρησιμοποιώντας την παρακάτω ολοκλήρωση της σχέσης (2.83):

$$Z'_n + \int_{-h}^{-h+\delta z} (k^2(z) - k_{xn}^2) Z_n dz = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{Z_2 - Z_1}{\delta z} + \frac{k^2(z_2) + k^2(z_1)}{2} Z_1 \delta z = 0 \Rightarrow$$

$$\left( -\frac{1}{\delta z} + k^2(z_1) \delta z \right) Z_1 + \frac{1}{\delta z} Z_2 = 0. \quad (2.93)$$

Η ανωτέρω σχέση χρησιμοποιούμενη για  $z = z_1 = -h$ , σε συνδυασμό με την σχέση (2.91), όπου τη θέση του  $d(1)$  θα τη λάβει ο συντελεστής  $\left( -\frac{1}{\delta z} + k^2(z_1) \delta z \right)$  και ο συντελεστής  $\frac{1}{\delta z}$  θα λάβει τη θέση του όρου  $e(2)$ , καθορίζει την τελική μορφή του διακριτού πίνακα  $\mathbf{C}$ . Οι ιδιοτιμές  $\lambda_n$  της εξίσωσης (2.92) προσεγγίζουν τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του κατακόρυφου προβλήματος  $k_{xn}^2$  και τα ιδιοδιανύσματα τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις στα σημεία του πλέγματος  $Z_n(z = z_j)$ , οι οποίες κανονικοποιούνται  $\tilde{Z}_n(z = z_j) = Z_n(z = z_j) / \|Z_n\|$  διαιρούμενες με την νόρμα  $\|Z_n\|$ , η οποία υπολογίζεται με αριθμητική ολοκλήρωση:

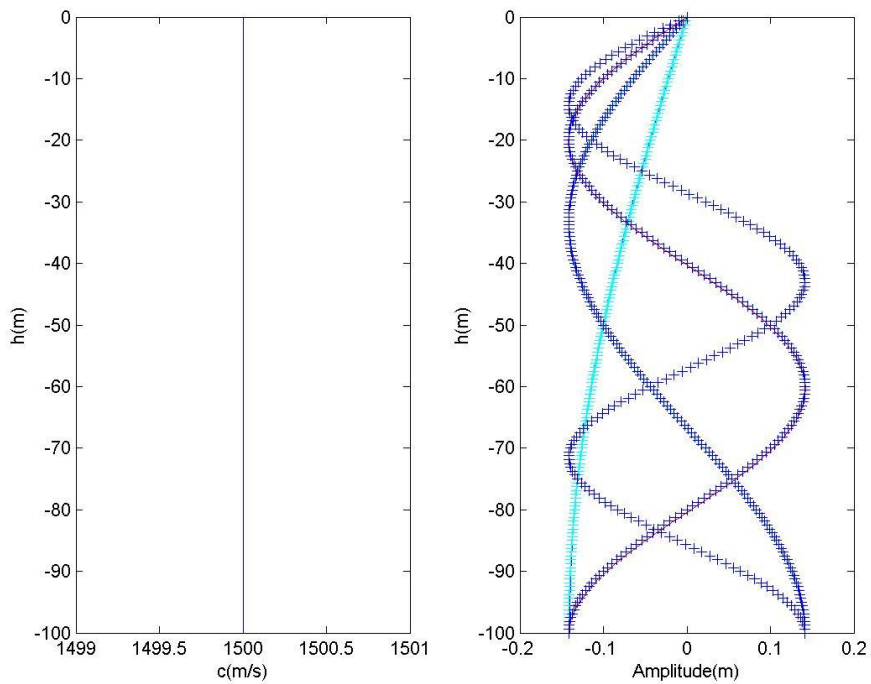
$$\|Z_n\|^2 = \int_{-h}^0 Z_n^2 dz. \quad (2.94)$$

Ειδικά στην περίπτωση  $c = \text{const}$  θα οδηγεί στο γνωστό αποτέλεσμα:

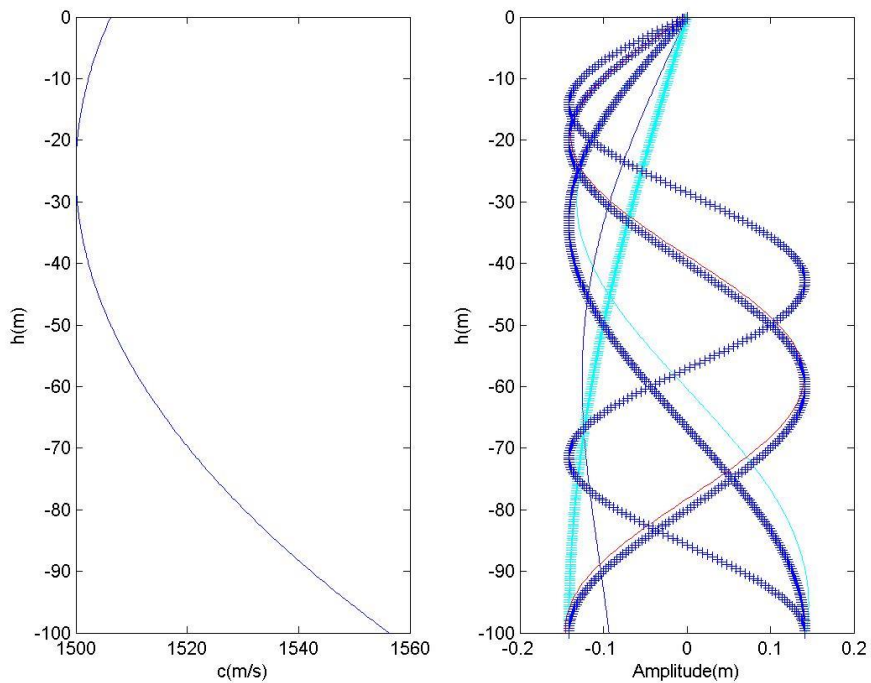
$$\|Z_n\|^2 = \int_{-h}^0 Z_n^2 dz = \frac{2}{h} \int_{-h}^0 \sin^2 \frac{n\pi z}{h} dz = \int_{-h}^0 \left( \frac{1}{2} - \cos \frac{2n\pi z}{h} \right) dz = \frac{h}{2}. \quad (2.95)$$

και θα δώσει ως αποτέλεσμα τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις  $\tilde{Z}_n(z)$ .





Σχήμα 15. Κατακόρυφο προφίλ ταχύτητας (στα αριστερά) και απεικόνιση των 4 πρώτων ιδιομορφών στο πρόβλημα σταθερής ταχύτητας για συχνότητα 30Hz και σύγκριση αναλυτικής και αριθμητικής λύσης (στα δεξιά)



Σχήμα 16. Κατακόρυφο προφίλ ταχύτητας (στα αριστερά) και απεικόνιση των 4 πρώτων ιδιομορφών του προβλήματος VEP για συχνότητα 30Hz με την σύγκριση αναλυτικής (περιβάλλον σταθερής ταχύτητας διάδοσης) και αριθμητικής λύσης (κατακόρυφα μεταβαλλόμενη ταχύτητα).

Τα αποτελέσματα θα εισαχθούν στην αναπαράσταση του πεδίου, το οποίο στην περίπτωση της γραμμικής πηγής λαμβάνει τη μορφή δυναμικού:

$$\Psi(x, z) = \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{N_p+m} \tilde{Z}_n(z) \tilde{Z}_n(z_0) \frac{\exp(ik_{zn}|x-x_0|)}{k_{zn}}, \quad (2.96)$$

όπου  $m$  δηλώνει τον αριθμό των αποσβενούμενων ιδιομορφών που διατηρούνται στο άθροισμα πάνω από τις  $N_p$  διαδιδόμενες ιδιομορφές.

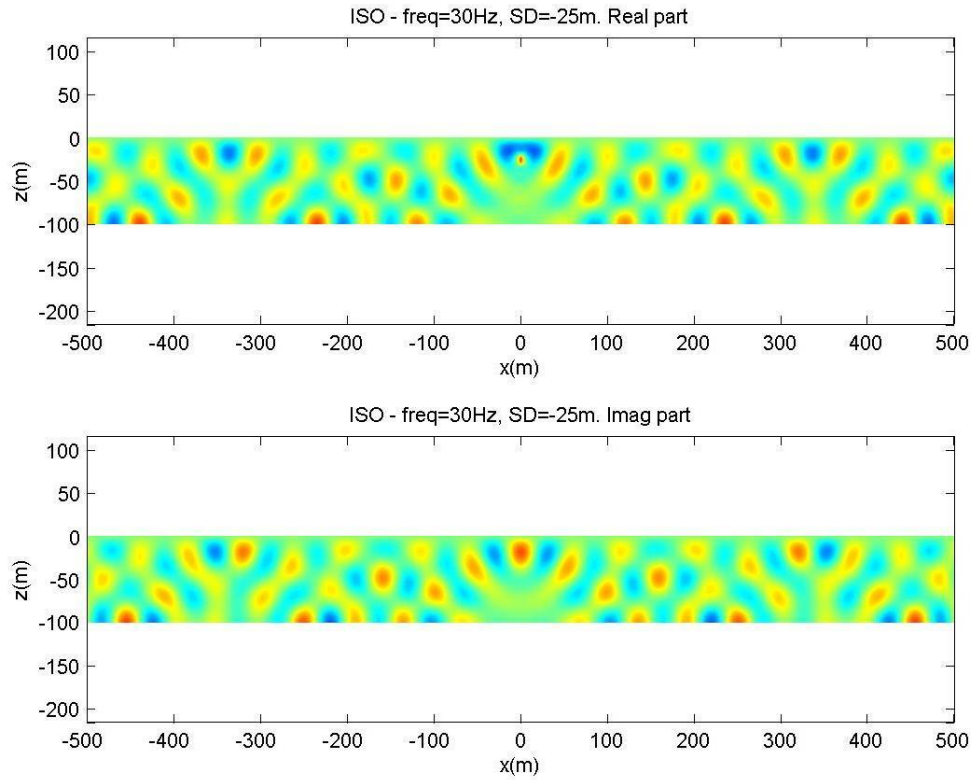
Κατά τη διάρκεια της κατασκευής του κατακόρυφου προβλήματος ιδιοτιμών (Vertical Eigenvalue Problem) στο πρόγραμμα Matlab και για τον έλεγχο της ορθότητάς του, συγκρίνουμε τις αριθμητικές λύσεις του με την αναλυτική λύση για ομογενές ( $c=\text{const}$ ) περιβάλλον σταθερής βαθυμετρίας. Η συμφωνία αριθμητικής και αναλυτικής λύσης παρουσιάζεται στο σχήμα 15 για συχνότητα  $30\text{ Hz}$ , όπου τα σύμβολα (+) απεικονίζουν την αριθμητική λύση ενώ οι συνεχείς γραμμές την αναλυτική. Ο κάθετος άξονας δίνει την τιμή του βάθους, ο οριζόντιος στα αριστερά, το εύρος των τιμών της ταχύτητας ( $1500\text{ m/s}$  σταθερά στην περίπτωση μας) και το πλάτος των ιδιομορφών στο σχήμα στα δεξιά.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε ένα μεταβαλλόμενο κατακόρυφο προφίλ για την ταχύτητα παραβολικής μορφής:

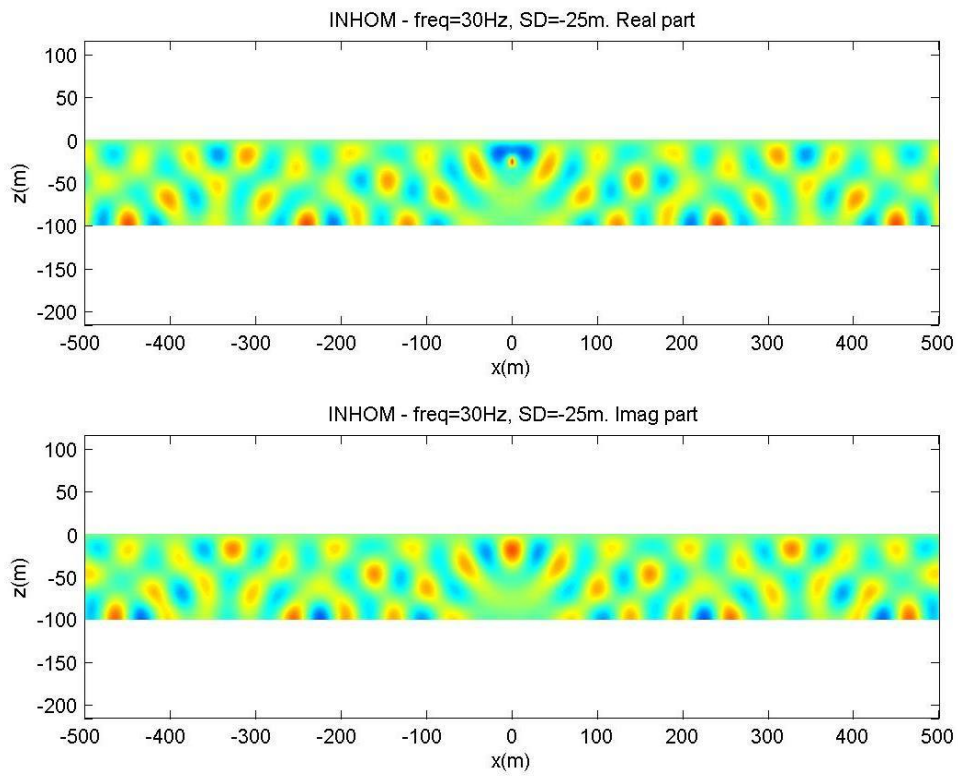
$$c(z) = c_0 + b(z - z_0)^2,$$

όπου  $c_0 = 1500\text{ m/s}$  η ελάχιστη τιμή της φασικής ταχύτητας μετάδοσης και  $z_0 = -25\text{ m}$  η θέση του ελαχίστου. Επίσης έχει ληφθεί  $b = 0.1\text{ m}^{-1}/\text{s}$ . Το προφίλ εικονίζεται στο σχήμα 16, όπου επίσης παρατηρούμε τις διαφοροποιήσεις των αριθμητικών λύσεων από την αναλυτική, που αναφέρεται για περιβάλλον σταθερής ταχύτητας  $c_0 = 1500\text{ m/s}$  για την ίδια συχνότητα  $30\text{ Hz}$ . Παρατηρούμε στο σχήμα 16 ότι μεγαλύτερες τροποποιήσεις προκύπτουν στις πρώτες κατακόρυφες ιδιοδυναρτήσεις, ενώ όσο ο δείκτης της ιδιομορφής αυξάνεται οι ιδιοσυναρτήσεις τείνουν να συμπέσουν στις αντίστοιχες του ομογενούς προβλήματος.

Το υπολογιζόμενο κυματικό πεδίο από γραμμική πηγή σε συχνότητα  $30\text{ Hz}$  στο ομογενές και ανομοιογενές περιβάλλον παρουσιάζεται στα σχήματα 17 και 18, αντίστοιχα. Οι διαδιδόμενες ιδιομορφές θα είναι 4 και οι αποσβενούμενες 10. Οι διαφορές δεν είναι εύκολα εμφανείς καθώς ασχολούμαστε με μικρό σχετικά βάθος, πάντως παρουσιάζονται διαφοροποιήσεις. Τα αρχεία Matlab που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα: **veps.m**, **g2dvep.m** και **g2da.m**.



Σχήμα 17. Ομογενές περιβάλλον διάδοσης.



Σχήμα 18. Ανομοιογενές περιβάλλον διάδοσης.



# Κεφάλαιο 3

## Σκέδαση σε άπειρο χώρο

### 3.1. Εισαγωγικά στοιχεία

Κατά τη διάρκεια διάδοσης ακουστικών κυμάτων στο θαλάσσιο περιβάλλον υπάρχει η πιθανότητα το κύμα να συναντήσει μεγάλα ή μικρότερα εμπόδια στην πορεία του, που θα διεγείρουν φαινόμενα σκέδασης, όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 1. Σε αυτή την περίπτωση το συνολικό πεδίο γράφεται στη μορφή αθροίσματος δύο διαφορετικών δυναμικών, ένα που θα περιγράφει το δυναμικό που προέρχεται από την πηγή ή το παράλληλο κύμα (σε περίπτωση που δεν υπάρχει πηγή μέσα στο περιβάλλον μας) και ένα που θα αφορά το δυναμικό σκέδασης, δηλαδή το δυναμικό που δημιουργείται λόγω της αλληλεπίδρασης με τον σκεδαστή. Το συνολικό δυναμικό θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\Psi_T = \Psi_I + \Psi_S \quad , \quad (3.1)$$

όπου το  $\Psi_I$  θα συμβολίζει το δυναμικό λόγω πηγής ή παράλληλου κύματος και το  $\Psi_S$  θα συμβολίζει το δυναμικό σκέδασης.

Ο στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο θα είναι να δώσουμε κάποιες μαθηματικές βάσεις για την προσέγγιση του φαινομένου της σκέδασης. Για να πετύχουμε την ανάλυση της σκέδασης ακουστικών κυμάτων από ένα εμπόδιο θα πρέπει να γίνει η παραγωγή των συνοριακών τιμών του προβλήματος σκέδασης και η αναδιατύπωση του με χρήση συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών, ως δυναμικού από

συνεχείς κατανομές ιδιομορφιών διανεμημένες στο σύνορο. Ακολούθως, με τη χρήση των ιδιοτήτων συνέχειας τέτοιων δυναμικών, οδηγούμαστε στην ολοκληρωτική εξίσωση.

Στο παρόν υποκεφάλαιο, θα δοθούν κάποιες εισαγωγικές έννοιες για την καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων που θα ακολουθήσουν, θα αναφερθούμε στις γεωμετρικές ιδιότητες των κλειστών επιφανειών στον τρισδιάστατο χώρο, στην έννοια της συνέχειας Hölder και των χώρων αποτελούμενων από Holder συνεχείς συναρτήσεις, ορισμένες σε υποσύνολα του τρισδιάστατου ή του δισδιάστατου χώρου, καθώς και στις αρμονικές εξισώσεις που αναπαριστούν τα κυματικά πεδία. Καθ' όλη τη διάρκεια της ανάλυσης θα χρησιμοποιούμε το  $D$  αναφερόμενοι σε πεπερασμένο ανοιχτό χωρίο, το σύνορο του θα συμβολίζεται με  $\partial D$  και με το  $\bar{D} = D \cup \partial D$  θα συμβολίζουμε το κλειστό χωρίο. Με τον όρο  $C^k(D)$  με  $k \in \mathbb{N}$ , περιγράφουμε το γραμμικό χώρο συνεχών συναρτήσεων με  $k$  συνεχείς παραγώγους. Στην περίπτωση που γράψουμε  $C^k(\bar{D})$ , θα περιγράφουμε τον υπόχωρο του  $C^k(D)$  που μαζί με όλες τις παραγώγους του, μέχρι και  $k$  βαθμού, μπορούν να επεκταθούν συνεχώς από τον  $D$  στο  $\bar{D}$ .

### 3.1.1. Γεωμετρία κλειστών επιφανειών

Το χωρίο  $D$  θεωρούμε ότι αποτελείται από πεπερασμένα σε αριθμό κλειστά λεία τμήματα τάξης  $C^2$ . Το  $\partial D \in C^2$  σημαίνει πως για κάθε σημείο στην επιφάνεια του χωρίου θα υπάρχει τρισδιάστατη γειτονία της οποίας η τομή με το σύνορο θα μπορεί να περιγραφεί αμφιμονοσήμαντα σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$ . Η συνάρτηση που θα το περιγράφει θα είναι διπλά συνεχής και παραγωγίσιμη και δίνεται στη συνέχεια:

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)), \quad (3.2)$$

όπου  $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$  στο παραμετρικό χώρο  $U$ .

Η απεικόνιση ενός τέτοιου χώρου παραμέτρων που ονομάσαμε  $U$ , μέσω αυτής της συνάρτησης, ονομάζεται στοιχείο επιφανείας. Το συνολικό σύνορο μπορούμε να το βρούμε ενώνοντας όλα τα επιμέρους στοιχεία. Επειδή η απεικόνιση είναι

αμφιμονοσήμαντη τα  $\mathbf{x}_{,j} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j}$ , όπου  $j=1,2$ , είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και

περιγράφουν διανύσματα εφαπτόμενα στην επιφάνεια στο κάθε σημείο, ορίζοντας το

εφαπτόμενο επίπεδο στο συγκεκριμένο σημείο. Τα στοιχεία του μετρικού πίνακα στην επιφάνεια δίνονται από τη σχέση:

$$\mathbf{g}_{jk} = (\mathbf{x}_{,j}, \mathbf{x}_{,k}), \quad \text{με } j, k = 1, 2, \quad (3.3)$$

και η ορίζουσα του συμμετρικού πίνακα  $\mathbf{g}_{jk}$  θα παρέχει τη μετρική

$$g = \det(\mathbf{g}_{jk}) = \left[ [\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}] \right]^2 > 0.$$

Στην παραπάνω περίπτωση, το γραμμικό στοιχείο μιας επιφάνειας στο κάθε σημείο θα δίνεται από τη σχέση:

$$(\mathbf{x}_{,j} du^j, \mathbf{x}_{,k} du^k) = \mathbf{g}_{jk} du^j du^k, \quad (3.4)$$

όπου στο παρόν κεφάλαιο  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο. Αντίστοιχα το επιφανειακό στοιχείο στο σημείο  $\mathbf{x}$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$ds = \sqrt{g} du^1 du^2. \quad (3.5)$$

Τέλος, το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  στην επιφάνεια  $\partial D$ , που θα μας χρησιμεύσει στη συνέχεια και στα θεωρήματα αναπαράστασης, στο κάθε σημείο θα είναι:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{g}} [\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}], \quad (3.6)$$

οπότε καταλήγουμε να έχουμε τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα σε κάθε σημείο της επιφάνειας, τα  $\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}$  και  $\mathbf{n}$ .

Για σύνορο δύο φορές συνεχές και διαφορίσιμο, υπάρχει θετική σταθερά  $L$  τέτοια ώστε:

$$\left| (\mathbf{n}(x), \mathbf{x} - \mathbf{y}) \right| \leq L |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2, \quad (3.7)$$

για κάθε  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  πάνω στο  $\partial D$ . Η ανισότητα αυτή εκφράζει το γεγονός πως το διάνυσμα  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ , για  $\mathbf{x}$  κοντά στο  $\mathbf{y}$ , είναι σχεδόν ορθογώνιο στο κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$ .

### 3.1.2. Χώρος Hölder

Φτάσαμε λοιπόν στο σημείο αναφοράς στον χώρο Hölder. Ο χώρος ομοιόμορφα συνεχών Hölder συναρτήσεων, είναι βασικής σημασίας στην έρευνα για τις συνθήκες κανονικότητας του απλού και του διπλού στρώματος δυναμικού. Ορίζουμε το χώρο

συναρτήσεων Hölder-συνεχών σε ένα πεπερασμένο κλειστό υποσύνολο του τρισδιάστατου ή του δισδιάστατου χώρου  $G$ , και συμβολίζουμε ως  $C^{0,a}(G)$ ,  $0 < a \leq 1$ , τον γραμμικό χώρο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων  $u$  που ορίζονται στο χώρο  $G$  και ικανοποιούν τη σχέση:

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq c |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^a. \quad (3.8)$$

Όπου  $c$  είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται από το  $u$  αλλά όχι από τις συντεταγμένες  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ . Στην περίπτωση που το  $G$  είναι μη πεπερασμένο, με τον όρο  $u \in C^{0,a}(G)$  περιγράφουμε το πεδίο των μιγαδικών συναρτήσεων  $u$  που είναι πεπερασμένο και ικανοποιεί τη συνθήκη (3.8). Είναι προφανές πως τότε ο χώρος  $u$  θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $G$ . Ο χώρος  $C^{0,a}(G)$  ονομάζεται Holder και θα τον συναντήσουμε σε περιπτώσεις όπου το  $G$  θα είναι το κλειστό χωρίο  $\bar{D}$ , το ανοιχτό χωρίο  $D$  ή το σύνορο  $\partial D$ .

### 3.1.3. Αρμονικές συναρτήσεις

Για να γίνει δυνατή η αναφορά στα χρήσιμα θεωρήματα Green, θα εξηγηθεί πότε μια συνάρτηση ονομάζεται αρμονική και θα ακολουθήσουν τα θεωρήματα Green και οι αρμονικές συναρτήσεις. Μια συνάρτηση  $u$  είναι αρμονική όταν είναι διπλά συνεχώς παραγωγίσιμη με πραγματικές τιμές, ορισμένη σε πεδίο  $D$ , υποσύνολο του  $R^m$  με τιμές  $m=2,3$  και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace:

$$\Delta u = 0, \quad \text{στο χωρίο } D, \quad (3.9)$$

όπου το  $\Delta u$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}. \quad (3.10)$$

Οι αρμονικές εξισώσεις είναι κατάλληλες μεταξύ άλλων και για την περιγραφή δυναμικών ταχύτητας αστρόβιλων ροών υγρών. Σχετίζονται άμεσα με τις μιγαδικές αναλυτικές συναρτήσεις, καθώς οι τελευταίες έχουν ως πραγματικό και φανταστικό μέρος αρμονικές εξισώσεις.

Οι πιο πολλές από τις βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων μπορούν να εξαχθούν από τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Laplace που είναι η:



$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, & m=2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}, & m=3 \end{cases}, \quad (3.11)$$

και ονομάζεται και συνάρτηση Green για χώρο των 2 και 3 διαστάσεων, αντίστοιχα. Συνεχίζοντας, θα αναφερθούμε σε δύο σημαντικά εργαλεία στη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων, στα θεωρήματα του Green:

Εάν  $D$  είναι ένα κλειστό χωρίο τάξης  $C^1$  και αν παράλληλα θεωρήσουμε πως το  $n$  ορίζει το μοναδιαίο, κάθετο στο σύνορο  $\partial D$  διάνυσμα, που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του  $D$ , τότε για  $u \in C^1(\bar{D})$  και  $v \in C^2(\bar{D})$  θα ισχύει το πρώτο θεώρημα του Green:

$$\int_D \{u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v\} dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} ds, \quad (3.12)$$

για  $u, v \in C^2(\bar{D})$  θα ισχύει το δεύτερο θεώρημα του Green:

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (3.13)$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το θεώρημα απόκλισης του Gauss:

$$\int_D \nabla A dx = \int_{\partial D} n \cdot A ds$$

στο διανυσματικό πεδίο  $A \in C^1(\bar{D})$  οριζόμενο από το  $A = u \nabla v$  και χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\nabla(u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v$$

καταλήγουμε στη σχέση (3.12).

Ακολουθώντας την ίδια πορεία, με τη μόνη διαφορά πως αντικαθιστούμε το  $u$  με  $v$  και μετά αφαιρούμε τις δύο σχέσεις κατά μέλη, θα βρούμε τη σχέση (3.13).

Ως φυσική συνέπεια των παραπάνω έχουμε πως για  $u \in C^2(\bar{D})$  αρμονική στο χωρίο, θα ισχύει:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (3.14)$$

Στην περίπτωση που έχουμε  $D$  κλειστό σύνολο τάξης  $C^1$  και  $u \in C^2(\bar{D})$  να είναι αρμονική στο πεδίο  $D$ , τότε έχουμε το θεώρημα ολοκληρωτικής αναπαράστασης του Green:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right\} ds(\mathbf{y}). \quad (3.15)$$

Από την παραπάνω σχέση άμεσα συμπεραίνουμε πως κάθε αρμονική συνάρτηση είναι και αναλυτική. Η σχέση Green (3.15) αναπαριστά κάθε αρμονική συνάρτηση, έχοντας ως όρους τα στοιχεία Cauchy που είναι οι συνοριακές τιμές της και την κάθετη παράγωγο στο σύνορο. Τέλος, σημαντικό είναι να αναφέρουμε την αρχή του Μεγίστου-Ελαχίστου, σύμφωνα με την οποία μια αρμονική συνάρτηση δεν μπορεί να λάβει τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της εντός του πεδίου ορισμού παρά μόνο πάνω στο σύνορο (εκτός αν είναι σταθερή). Πολλά από τα παραπάνω θεωρήματα χρησιμοποιούνται κυρίως σε αποδείξεις για θεωρήματα συνοριακών τιμών και στη θεωρία δυναμικού.

### 3.2. Πρόβλημα συνοριακών τιμών για τη εξίσωση Helmholtz

Η εφαρμογή των παραπάνω θεωρημάτων και ειδικά των δύο θεωρημάτων Green συναντάται και στην εξίσωση Helmholtz που μας αφορά, καθώς η διάδοση των ακουστικών κυμάτων που μελετάμε γίνεται με βάση τη συγκεκριμένη. Το βασικό πλεονέκτημα της παραπάνω μεθόδου στη μελέτη προβλημάτων εξωτερικών συνοριακών τιμών έγκειται στο ότι η προσέγγιση αυτή ελαττώνει τη διάσταση του προβλήματος, μετατρέποντάς το από ορισμένο σε ανοικτό χωρίο σε ορισμένο στο σύνορο-επιφάνεια του σώματος-σκεδαστή. Το γεγονός αυτό είναι υψηλής σημασίας για την αριθμητική ανάλυση αλλά έχει και τα μειονεκτήματά του. Η απευθείας χρήση της θεωρίας δυναμικού με σκοπό το σχηματισμό συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων για το κλασικό πρόβλημα συνοριακών τιμών της θεωρίας σκέδασης, οδηγεί σε ιδιόμορφες εξισώσεις. Ένα πολύ σημαντικό και δύσκολο έργο είναι η εύρεση αναλυτικών μεθόδων για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος. Η αριθμητική εφαρμογή των παραπάνω μεθόδων οδηγεί σε περαιτέρω δυσκολίες, καθώς οι ιδιοτιμές δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων και αυτό με τη σειρά του οδηγεί στην ανάγκη χρήσης πιο εκλεπτυσμένων μεθόδων.

Αρχικά, θα σχολιαστούν οι φυσικές καταβολές του εξωτερικού προβλήματος συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz, η έννοια της αρχής της ακτινοβολίας (radiation condition) και η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιούν αυτή την αρχή. Αυτή η συζήτηση μας επιτρέπει την ικανοποίηση της μοναδικότητας της λύσης για τα προβλήματα εξωτερικών τιμών Dirichlet και Neumann. Συνεχίζοντας, θα αναζητήσουμε την ύπαρξη λύσης για τα δύο προαναφερθέντα προβλήματα και θα καταλήξουμε στον προσδιορισμό της χρησιμοποιώντας σχέσεις της μορφής επιφανειακών δυναμικών απλού και διπλού στρώματος. Σκεπτόμενοι διάφορες μετατροπές στην παραπάνω προσέγγιση, με σκοπό την εύρεση ολοκληρωτικών εξισώσεων που είναι μοναδικά επιλύσιμες για κάθε τιμή του κυματικού αριθμού, καταλήγουμε σε μεθόδους όπως αυτή των Jones (1974) και Ursell (1973,1978) που οδηγεί σε ελαφρώς ιδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις ή τη μέθοδο Panich (1965)<sup>10</sup>, που στην περίπτωση του προβλήματος Neumann οδηγεί σε ισχυρά ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση, η οποία θα χρειάζεται ειδικό χειρισμό (regularization).

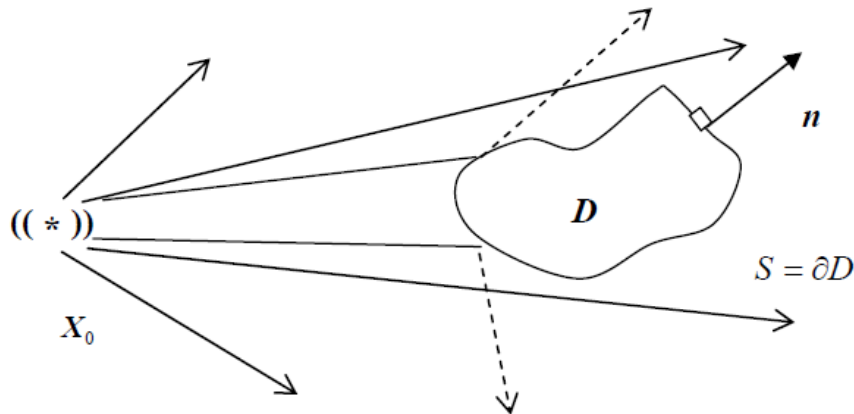
Αρωγός στην προσπάθειά μας μπορεί να είναι το θεώρημα ολοκληρωτικών αναπαράστασεων Green, το οποίο δύναται να αξιοποιηθεί με σκοπό την εύρεση ολοκληρωτικών εξισώσεων για το πρόβλημα συνοριακών τιμών της θεωρίας σκέδασης, αποτελέσματα που συμφωνούν με αυτά που βρίσκουμε μέσω της θεωρίας δυναμικού.

### **3.2.1. Λύσεις της εξίσωσης Helmholtz και το θεώρημα ολοκληρωτικής αναπαράστασης Green**

Σημαντική εφαρμογή των συναρτήσεων Green είναι η ικανότητά τους να μας προσφέρουν, μέσω κατάλληλων ολοκληρωτικών αναπαράστασεων, τις γενικές λύσεις κυματικών προβλημάτων, στις δύο και τρεις διαστάσεις (λύσεις προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών), παρουσία διαφόρων ανομοιογενειών, όπως πεπερασμένοι σκεδαστές.

---

<sup>10</sup> Colton & Kress, 1983, ch. 3.



Σχήμα 19. Σκέδαση αρμονικού κυματικού πεδίου, διεγερόμενου από σημειακή πηγή στη θέση  $r=X_0$ , από αδιαπέρατο πεπερασμένο σκεδαστή  $D$ .

Εξετάζουμε την ειδική περίπτωση<sup>11</sup> που αφορά τη σκέδαση αρμονικού κυματικού πεδίου που διεγείρεται από σημειακή αρμονική πηγή στη θέση  $r = X_0$  (βλ. σχήμα 19), από πεπερασμένο σκεδαστή (σώμα  $D$ ), με σύνορο  $S = \partial D$ . Για το συγκεκριμένο πρόβλημα το  $n$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του σκεδαστή με διεύθυνση προς τον εξωτερικό του σώματος χώρο.

Στην περίπτωση αυτή, το κυματικό δυναμικό  $\Psi(\mathbf{r})$  ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz:

$$\Delta \Psi(\mathbf{r}) + k^2 \Psi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - X_0), \quad \mathbf{r} \in D_*, \quad (3.16)$$

όπου  $D_*$  το χωρίο στο οποίο ορίζονται η συνάρτηση  $\Psi(\mathbf{r})$ , δηλαδή  $D_* = \mathbb{R}^3 \setminus D$  στις τρεις διαστάσεις, και  $D_* = \mathbb{R}^2 \setminus D$  στις δύο διαστάσεις. Δηλαδή ο χώρος εκτός της περιοχής που καταλαμβάνει ο πεπερασμένος σκεδαστής.

Στο πρόβλημα αυτό θα θεωρούμε το μέσο διάδοσης ομογενές, δηλαδή  $k = \text{σταθερό}$  σε όλο το χώρο. Ενώ θα ισχύει η ιδανική περίπτωση αδιαπέρατου σκεδαστή. Η τελευταία υπόθεση μοντελοποιείται από συνοριακή συνθήκη της μορφής:

$$\alpha \Psi(\mathbf{r}) + \beta \frac{\partial \Psi(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (3.17)$$

<sup>11</sup> Αθανασούλης & Μπελιμπασάκης, 2003, σελ. 2.2-1 - 2.2-3.

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , και  $\partial \Psi(\mathbf{r}) / \partial n$ ,  $\mathbf{r} \in S$ , δηλώνει την τοπική παράγωγο του δυναμικού στην επιφάνεια του συνόρου σκεδαστή  $S = \partial D$ , κατά την διεύθυνση του καθέτου διανύσματος  $\mathbf{n}$ .

Επίσης, επιβάλλουμε την απαίτηση η λύση να συμπεριφέρεται ως εξερχόμενα κύματα σε πολύ μακρινές αποστάσεις από την πηγή, δηλαδή:

$$\Psi(\mathbf{r}) \text{ αναπαριστά εξερχόμενα κύματα, όταν } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Το θεώρημα Green που συνδέεται με τον διαφορικό τελεστή Laplace, ο οποίος εμπλέκεται στην εξίσωση Helmholtz (2.28), και θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια για την κατασκευή της λύσεως του σύνθετου κυματικού προβλήματος (3.16), (3.17), (3.18) είναι το ακόλουθο:

$$\int_{D_*} (\psi_1 \Delta \psi_2 - \psi_2 \Delta \psi_1) dx = \int_{\partial D_*} \left( \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n(\mathbf{r})} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n(\mathbf{r})} \right) dS(\mathbf{r}) \quad (3.19)$$

όπου  $D_*$  το χωρίο στο οποίο ορίζονται οι συναρτήσεις  $\psi_1(\mathbf{r})$  και  $\psi_2(\mathbf{r})$ . Υπενθυμίζουμε ότι εκ κατασκευής η συνάρτηση Green της εξίσωσης Helmholtz στον ελεύθερο χώρο, ικανοποιεί

$$\Delta G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + k^2 G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad (3.20)$$

όπου ο δείκτης  $\mathbf{r}$  στον διαφορικό τελεστή  $\Delta$  έχει προστεθεί για να μας υπενθυμίζει την χωρική μεταβλητή ως προς την οποία πραγματοποιείται η διαφορίση. Στον διδιάστατο άπειρο χώρο, σε ομογενές μέσο διάδοσης με κυματριθμό  $k = \omega/c$  η εξίσωση Green θα δίνεται από τη σχέση:

$$G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|).$$

Την εξίσωση (3.20) θα μπορούσαμε να τη γράψουμε και στην παρακάτω μορφή:

$$\Delta_0 G_\omega(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}) + k^2 G_\omega(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}), \quad (3.21)$$

και με χρήση της ιδιότητας της αμοιβαιότητας και συμμετρίας καταλήγουμε στη:

$$\Delta_0 G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + k^2 G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.22)$$

Η εξίσωση (3.16) μπορεί να γραφεί επίσης στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$\Delta \Psi(\mathbf{r}_0) + k^2 \Psi(\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{X}_0) \quad (3.23)$$

Πολλαπλασιάζουμε στην συνέχεια την (3.22) με τη συνάρτηση κυματικού δυναμικού  $\Phi(\mathbf{r}_0)$  και την (3.23) με τη συνάρτηση Green  $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$  και αφαιρούμε κατά μέλη τα αποτελέσματα των γινομένων. Συνεχίζοντας, ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα στο χωρίο  $D_*$  λαμβάνοντας:

$$\begin{aligned} & \int_{D_*(\mathbf{r}_0)} \{G_H(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)\Delta_{\mathbf{x}_0}\Psi(\mathbf{r}_0) - \Psi(\mathbf{r}_0)\Delta_{\mathbf{x}_0}G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)\}d\mathbf{r}_0 = \\ & = \int_{D_*(\mathbf{r}_0)} \{\Psi(\mathbf{r}_0)\cdot\delta(\mathbf{r}-\mathbf{X}_0) - G_\omega(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\delta(\mathbf{r}-\mathbf{X}_0)\}d\mathbf{r}_0 = \Psi(\mathbf{r}) - G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{X}_0). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Κάνοντας χρήση τώρα του θεωρήματος Green (3.19) για τις συναρτήσεις  $\psi_1 = G_\omega$  και  $\psi_2 = \Psi$  λαμβάνουμε από την εξίσωση (3.23):

$$\Psi(\mathbf{r}) = G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{X}_0) + \int_{\partial D} \left\{ G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}_0)}{\partial n(\mathbf{r}_0)} - \Psi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial n(\mathbf{r}_0)} \right\} dS(\mathbf{r}_0). \quad (3.25)$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί στην εξεταζόμενη περίπτωση την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσεως του ανωτέρω προβλήματος σκέδασης με χρήση του θεωρήματος Green. Εναλλακτικά η λύση του ίδιου προβλήματος δύναται να κατασκευαστεί μέσω απλών κατανομών πηγών στο σύνορο που προσφέρουν την ολοκληρωτική αναπαράσταση του πεδίου σκέδασης (δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της ανωτέρω εξίσωσης). Η αναπαράσταση αυτή σε συνδυασμό με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων θα παρουσιαστεί για το εξεταζόμενο πρόβλημα σκέδασης από πεπερασμένο σκεδαστή σε άπειρο χωρίο στο Κεφάλαιο 3. Περαιτέρω η ίδια μέθοδος θα επεκταθεί για προβλήματα διάδοσης-σκέδασης σε θαλάσσιο κυματοδηγό με ανομοιόμορφο πυθμένα στο Κεφάλαιο 4.

### 3.2.2. Προβλήματα συνοριακών τιμών της εξίσωσης Helmholtz

Εάν το  $D$  που θα είναι υποσύνολο του χώρου μας είναι ένα κλειστό χωρίο με απλό και λείο σύνορο κλάσης  $C^2$ , και με  $\mathbb{R}^n \setminus D$ ,  $n=2,3$ , ορίζουμε το συμπληρωματικό ανοιχτό χωρίο του  $D$ . Τότε θα μας παρουσιαστούν τέσσερις περιπτώσεις συνοριακών προβλημάτων, δύο από αυτές αφορούν το εσωτερικό πρόβλημα που δεν μας απασχολεί και άλλες δύο το εξωτερικό πρόβλημα που παρουσιάζει ενδιαφέρον στην περίπτωσή μας, και περιγράφονται παρακάτω (στη κλασική τους διατύπωση):

### Εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet

Πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^n \setminus D)$  που να αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης Helmholtz στο πεδίο  $\mathbb{R}^n \setminus D$  και να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη:

$$u = f \text{ στο σύνορο } \partial D, \quad (3.26)$$

όπου η  $f$  είναι μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση και να ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας για  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) - iku(\mathbf{x}) = 0, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (3.27)$$

ομοιόμορφα για κάθε κατεύθυνση  $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ . Τα  $n=2,3$  σχετίζονται με το αν ο χώρος είναι δύο ή τριών διαστάσεων αντίστοιχα.

### Εξωτερικό πρόβλημα Neumann

Πρέπει να βρούμε μια ομαλή συνάρτηση  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^n \setminus D)$  που να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης Helmholtz στο πεδίο  $\mathbb{R}^n \setminus D$  και να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla u = g \text{ στο σύνορο } \partial D, \quad (3.28)$$

με την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης στο σύνορο, όπου το  $g$  είναι μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση. Για  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  απαιτείται και πάλι η ικανοποίηση της συνθήκης ακτινοβολίας (3.27) ομοιόμορφα για όλες τις κατευθύνσεις  $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ .

Στόχος μας σε αυτό το σημείο είναι να επιβεβαιώσουμε πως το κάθε ένα από τα παραπάνω προβλήματα έχει μοναδική λύση. Η λύση αυτή θα εξαρτάται συνεχώς από τα συνοριακά δεδομένα. Η μοναδικότητα των λύσεων στο πρόβλημα Dirichlet αποδεικνύεται<sup>12</sup> μέσω της μέγιστης-ελάχιστης αρχής, ενώ για το πρόβλημα Neumann η μοναδικότητα ισχύει για τα όρια για τα οποία ισχύει το θεώρημα του Green.

---

<sup>12</sup> Ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει την απόδειξη στο βιβλίο Kress R., 1989, 64.

Επίσης η μοναδικότητα και των δύο εξωτερικών προβλημάτων μπορεί να έρθει σαν φυσικό επακόλουθο του θεωρήματος που ακολουθεί, όπως διατυπώνεται από τους Colton και Kress.

Ας θεωρήσουμε πως  $u$  είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο εξωτερικό χωρίο  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$  που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας και επιπλέον ισχύει πως:

$$\operatorname{Im} \left( k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right) \geq 0.$$

Τότε  $u = 0$  στο χώρο  $\mathbb{R}^3 \setminus D$ <sup>13</sup>.

### 3.2.3. Συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld

Όσον αφορά τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld θα παρατηρήσουμε πως χαρακτηρίζει εξ ολοκλήρου τη συμπεριφορά των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz στο άπειρο. Συγκεκριμένα τόσο το δυναμικό απλού όσο και το δυναμικό διπλού στρώματος, που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, θα ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld:

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) - iku(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

Στην περίπτωση που η  $u$  αποτελεί λύση της ομογενούς εξίσωσης Helmholtz στο χωρίο  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ , ενώ παράλληλα ικανοποιεί και τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld ως προς κάθε κατεύθυνση  $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ , τότε:

$$\int_{\partial D} \left\{ u(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\} ds(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & x \in D \\ u(\mathbf{x}), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \end{cases}, \quad (3.30)$$

ισχύει και στην προαναφερθείσα περίπτωση πως η συνάρτηση  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  είναι η συνάρτηση Green στην οποία αναφερθήκαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο.<sup>14</sup>

Είναι προφανές, πως κάθε λύση της εξίσωσης Helmholtz στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ , που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld, θα ικανοποιεί και τη σχέση:

<sup>13</sup> Colton D. & Kress R., 1983, p.78.

<sup>14</sup> Ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει την απόδειξη της σχέσης 3.30 στο βιβλίο Colton D., Kress R., 1983, p. 69-70.



$$u(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (3.31)$$

ομοιόμορφα για κάθε κατεύθυνση  $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ .

Γνωρίζουμε πως η φυσική ερμηνεία της συνάρτησης Green είναι η περιγραφή ενός σφαιρικού (ή κυλινδρικού για  $n=2$ ) κύματος που ταξιδεύει προς το άπειρο. Αυτός είναι και ο λόγος που η συνθήκη ακτινοβολίας αποτελεί τη μαθηματική περιγραφή κυμάτων απομακρυνόμενων από την πηγή. Είναι δυνατό αλλάζοντας απλά το αρνητικό πρόσημο σε θετικό της σχέσης Sommerfeld να βρούμε τη θεωρία για εισερχόμενα κύματα. Η αλλαγή στην συνάρτηση Green θα οδηγήσει στην παρακάτω μορφή της:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|},$$

και αντίστοιχα στη νέα συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld:

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + iku(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

Από την αναπαράσταση (3.30) αντιλαμβανόμαστε, πως κάθε λύση της εξίσωσης Helmholtz που είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη είναι και αναλυτική, και έχουμε το παρακάτω θεώρημα επέκτασης<sup>15</sup>:

Αν  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$  είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz και ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας και  $r, \theta, \varphi$  είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες του  $\mathbf{x}$ , το  $u$  θα παρουσιάζει ανάπτυγμα της μορφής:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta, \varphi)}{r^n}, \quad (3.32)$$

σχέση που ισχύει για κάθε  $r \geq R_0$  και που συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε συνάρτηση με τις  $r, \theta, \varphi$ . Η σειρά μπορεί να παραγωγισθεί όρο προς όρο όσες φορές χρειαστεί και το αποτέλεσμα θα είναι πάλι απόλυτα και ομοιόμορφα συγκλίνον.

Ως φυσική συνέπεια ακολουθεί το ότι κάθε λύση  $u$  της εξίσωσης Helmholtz που επαληθεύει την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld έχει την παρακάτω ασυμπτωτική συμπεριφορά:

<sup>15</sup> Colton D. & Kress R., 1983, p.72.

$$u(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} F_0(\theta, \varphi) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (3.33)$$

όπου η  $F_0$  ονομάζεται radiation pattern του  $u$ .

Οι συντελεστές  $F_n$  που συναντήσαμε στο ανάπτυγμα (3.32), ορίζονται αναδρομικά σε όρους του πεδίου ακτινοβολίας  $F_0$  μέσω της σχέσης:

$$2iknF_n = n(n-1)F_{n-1} + \mathcal{B}F_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.34)$$

με τον όρο  $\mathcal{B}$  να είναι ο τελεστής Beltrami για σφαίρα:

$$\mathcal{B} := \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (3.35)$$

Στην περίπτωση που ισχύουν οι προϋποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος και για τη συγκεκριμένη λύση, για την οποία το radiation pattern εξαφανίζεται πανομοιότυπα, τότε  $u = 0$  στο  $R^3 \setminus \bar{D}$ .

Στην περίπτωση του χώρου δύο διαστάσεων, θα πρέπει να αντικατασταθεί η συνθήκη Sommerfeld από τη σχέση:

$$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) - iku(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|}}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (3.36)$$

ομοιόμορφα προς κάθε κατεύθυνση  $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ . Είναι ξεκάθαρο πως η ασυμπτωτική αναλυτική μορφή της συνάρτησης Hankel που χρησιμοποιείται στο χώρο δύο διαστάσεων θα ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld.

### 3.2.4. Δυναμικά Απλού και Διπλού Στρώματος

Όπως και στην περίπτωση Laplace όπου έχουμε την εξίσωση Helmholtz με τη μεταβλητή  $k = 0$ , έτσι και στην περίπτωση Helmholtz μπορούμε να ελαττώσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών σε ολοκληρωτικές εξισώσεις δεύτερου τύπου, αναζητώντας τις λύσεις σε μορφή κατάλληλου επιφανειακού δυναμικού. Στη συνέχεια, με σκοπό τη μελέτη των προβλημάτων συνοριακών τιμών παρουσιάζονται τα απλού και διπλού στρώματος δυναμικά.

### Κυματικό δυναμικό απλού στρώματος

Δοσμένης μιας συνάρτησης  $\varphi \in C(\partial D)$ , με τη  $\varphi$  να περιγράφει την πυκνότητα, η σχέση:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D, \quad (3.37)$$

ορίζει το δυναμικό απλού στρώματος με συνεχή πυκνότητα  $\varphi$ . Η συνάρτηση (3.37) είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz και άρα είναι αναλυτική στο πεδίο ορισμού του  $\mathbf{x}$ . Το παραπάνω δυναμικό (3.37) θα είναι λύση του εξωτερικού προβλήματος Neumann εάν η  $\varphi$  είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$\varphi(\mathbf{x}) - 2 \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} ds(\mathbf{y}) = -2g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D. \quad (3.38)$$

Η  $g$  που παρουσιάζεται στον τύπο θα είναι η συνεχής συνάρτηση που αναφέρθηκε στην παρουσίαση του προβλήματος Neumann. Παράλληλα γνωρίζουμε πως το εξωτερικό πρόβλημα Neumann είναι μοναδικώς επιλύσιμο.

Στην περίπτωση χώρου δύο διαστάσεων, δηλαδή  $n=2$ , θα πρέπει να ισχύει επιπλέον η προϋπόθεση:

$$\int_{\partial D} \varphi ds = 0. \quad (3.39)$$

Επίσης, για το δυναμικό απλού στρώματος  $u$  με συνεχή πυκνότητα  $\varphi$ , γνωρίζουμε πως είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχές για το  $\mathbb{R}^3$ , ενώ ισχύει η σχέση:

$$u_{a, \mathbb{R}^3} \leq C_a \varphi_{\infty, \partial D}, \quad (3.40)$$

για  $0 < a < 1$  για μια σταθερά  $C_a$  εξαρτώμενη από το σύνορο  $\partial D$  και το  $a$ . Όπου  $\varphi_{\infty, \partial D}$  είναι η μέγιστη νόρμα της πυκνότητας πάνω στο σύνορο του σκεδαστή.

### Κυματικό δυναμικό διπλού στρώματος

Αντίστοιχα, δοσμένης μιας συνάρτησης  $\psi \in C(\partial D)$ , η σχέση:

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \psi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus D, \quad (3.41)$$

ορίζει το δυναμικό διπλού στρώματος, με συνεχή πυκνότητα  $\psi$ . Θεωρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα  $n$  κάθετο και κατευθυνόμενο προς τα εξωτερικά του τομέα  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ . Το κυματικό δυναμικό διπλού στρώματος είναι και αυτό με τη σειρά του λύση της εξίσωσης Helmholtz και άρα αναλυτικό στο πεδίο  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ .

Το δυναμικό  $v$  θα είναι λύση του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet στο χώρο  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ , υπό την προϋπόθεση ότι η συνεχής πυκνότητα  $\psi$  θα είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$\psi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\partial D} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} ds(\mathbf{y}) = 2f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D. \quad (3.42)$$

Η  $f$  που παρουσιάζεται στη σχέση (3.42) θα είναι η συνεχής συνάρτηση που αναφέρθηκε στην παρουσίαση του προβλήματος Dirichlet, απ' όπου γνωρίζουμε πως η λύση του προβλήματος Dirichlet θα είναι μοναδική. Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε πως κάθε λύση του Dirichlet προβλήματος με σύνορα που ανήκουν στο  $C^{1,\alpha}(\partial D)$  είναι αυτομάτως ομοιόμορφα Hölder συνεχώς παραγωγίσιμη μέχρι το σύνορο. Συγκεκριμένα η λύση θα ανήκει στον χώρο λύσεων του εξωτερικού προβλήματος.

### Σχέσεις άλματος<sup>16</sup>

Με σκοπό την κατανόηση της συμπεριφοράς των λύσεων, καθώς προσεγγίζονται τα σύνορα, θα παρουσιάσουμε τις σχέσεις άλματος. Για να είναι κατανοητές οι σχέσεις που ακολουθούν, θα πρέπει να αναφέρουμε πως την προσέγγιση της συνοριακής επιφάνειας από τα εσωτερικά του συνόρου, τη συμβολίζουμε με  $v_+(\mathbf{x})$  και από τα εξωτερικά του συνόρου με  $v_-(\mathbf{x})$ .

Για το δυναμικό  $v$  διπλού στρώματος συνεχούς πυκνότητας  $\psi$ , θα ισχύει η σχέση άλματος, η οποία μας δίνει μια συσχέτιση μεταξύ των δυναμικών, καθώς προσεγγίζουμε το σύνορο από τα εσωτερικά και τα εξωτερικά:

$$v_+ - v_- = \psi, \quad \text{στο σύνορο } \partial D. \quad (3.43)$$

Η σχέση (3.41) που μας δίνει άμεσα την τιμή του δυναμικού διπλού στρώματος στο σύνορο της επιφάνειας με συνεχή πυκνότητα  $\psi$ , αντιπροσωπεύει μια ομοιόμορφα συνεχή Hölder εξίσωση στο σύνορο της επιφάνειας  $\partial D$  με:

<sup>16</sup> Colton D. & Kress R., 1983, p. 47-51.

$$v_{\alpha, \partial D} \leq C_a \psi_{\infty, \partial D}, \quad (3.44)$$

για  $0 < a < 1$  και σταθερά  $C_a$  εξαρτώμενη από το σύνορο  $\partial D$  και το  $a$ .

Σε περίπτωση που έχουμε δυναμικό διπλού στρώματος με ομοιόμορφα συνεχή Hölder πυκνότητα  $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ ,  $0 < a < 1$ , τότε το δυναμικό θα είναι ομοιόμορφα συνεχές Hölder στο πεδίο  $\mathbb{R}^3 \setminus D$  και στο σύνορο  $\bar{D}$  με:

$$v_{\alpha, \mathbb{R}^3} \leq C_a \psi_{\alpha, \partial D}, \quad v_{\alpha, \bar{D}} \leq C_a \psi_{\alpha, \partial D}. \quad (3.45)$$

Όσον αφορά την παραγωγισιμότητα των επιφανειακών δυναμικών πάνω στο σύνορο, η πρώτη παράγωγος ενός δυναμικού απλού στρώματος με ομοιόμορφα συνεχή Hölder πυκνότητα  $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ ,  $0 < a < 1$ , μπορεί να επεκταθεί ομοιόμορφα με συνεχή Hölder μέθοδο από  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$  σε  $\mathbb{R}^3 \setminus D$  και σε  $D$  από  $\bar{D}$  με οριακές τιμές:

$$\nabla u_{\pm}(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \mp \frac{1}{2} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D. \quad (3.46)$$

Η σχέση άλματος που ισχύει για δυναμικό  $u$  απλού στρώματος, με ομοιόμορφα συνεχή Hölder πυκνότητα  $\varphi$  θα είναι:

$$\nabla u_+ - \nabla u_- = \varphi \mathbf{n} \quad \text{στο σύνορο } \partial D. \quad (3.47)$$

Αντίστοιχα, για τη δεύτερη περίπτωση απλού στρώματος δυναμικού με απλά συνεχή πυκνότητα  $\varphi$ , η σχέση άλματος θα έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial u_+}{\partial n} - \frac{\partial u_-}{\partial n} = -\varphi \quad \text{στο σύνορο } \partial D. \quad (3.48)$$

Για το δυναμικό διπλού στρώματος  $v$  με συνεχή πυκνότητα  $\psi$ , η σχέση της κάθετης στο σύνορο παραγώγου μεταξύ του δυναμικού εσωτερικής και εξωτερικής προσέγγισης θα είναι:

$$\frac{\partial v_+}{\partial n} = \frac{\partial v_-}{\partial n} \quad \text{στο } \partial D. \quad (3.49)$$

Τέλος, γνωρίζουμε πως οι τιμές που λαμβάνουμε από την σχέση (3.41), για το σύνορο με ομοιόμορφα συνεχή Hölder πυκνότητα  $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ ,  $0 < a < 1$ , αντιπροσωπεύουν μια ομοιόμορφα συνεχή Hölder παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σύνορο με:

$$\nabla v_{\alpha, \partial D} \leq C_a \psi_{\alpha, \partial D}, \quad (3.50)$$

με  $C_a$  σταθερά, εξαρτώμενη από το σύνορο και την τιμή του  $a$ .

### Ολοκληρωτικοί Τελεστές

Οι ολοκληρωτικοί τελεστές θα αποτελέσουν χρήσιμο εργαλείο για την συνέχιση της μελέτης, καθώς θα μπορούν να εφαρμοστούν σε προβλήματα συνοριακών τιμών Neumann και Dirichlet.

Αρχικά παρουσιάζουμε τους ολοκληρωτικούς τελεστές  $K$  και  $K'$ :  $C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ :

$$(K\psi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (3.51)$$

και

$$(K'\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (3.52)$$

και στις δύο παραπάνω σχέσεις αλλά και σε αυτές που θα ακολουθήσουν, με  $\varphi$  και  $\psi$  θα συμβολίζουμε την πυκνότητα στην επιφάνεια του σκεδαστή για την περίπτωση απλού και διπλού δυναμικού αντίστοιχα.

Είναι εμφανές πως οι τελεστές  $K$  και  $K'$  είναι συζυγείς. Οι τελεστές  $K$ ,  $K'$  είναι συμπαγείς<sup>17</sup> στα πεδία  $C(\partial D)$  και  $C^{0,a}(\partial D)$ , ενώ απεικονίζουν το  $C(\partial D)$  στο χώρο  $C^{0,a}(\partial D)$ . Ο τελεστής  $K$  απεικονίζει και το  $C^{0,a}(\partial D)$  στο  $C^{1,a}(\partial D)$ .

Τέλος, εισάγουμε τους ολοκληρωτικούς τελεστές  $S$  και  $T$ . Ο τελεστής  $S$ :  $C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$  περιγράφεται από τη σχέση:

$$(S\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} G(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D. \quad (3.53)$$

Ο παραπάνω τελεστής είναι αυτοσυζυγής που σημαίνει πως  $S\varphi \cdot \psi = \varphi \cdot S\psi$  για κάθε  $\varphi, \psi \in C(\partial D)$ , γεγονός που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε πως ο  $S$  είναι και αυτός συμπαγής και έχει ίδιες ιδιότητες απεικόνισης με τον  $K$ .

Για τον ορισμό του τελεστή  $T$  ορίζουμε το χώρο  $\Pi(\partial D)$ . Ο γραμμικός αυτός χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων  $\psi$ , έχει την ιδιότητα ότι το διπλού στρώματος δυναμικό  $v$ , με πυκνότητα  $\psi$ , έχει συνεχείς κάθετες παραγώγους και στις δύο

<sup>17</sup> Colton D. & Kress R., 1983, p. 61.

πλευρές του συνόρου  $\partial D$ . Ακολουθώντας, ορίζουμε τον τελεστή  $T : \Pi(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$  με την παρακάτω σχέση:

$$(T\psi)(\mathbf{x}) := 2 \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \psi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \partial D. \quad (3.54)$$

Παρατηρούμε πως και ο τελεστής  $T$  είναι αυτοσυζυγής για κάθε  $\varphi, \psi \in \Pi(\partial D)$ , δεν είναι περιφραγμένος από σύνορα, αλλά ο  $T - T_o$  είναι συμπαγής στο  $C(\partial D)$  και  $C^{0,a}(\partial D)$  για  $0 < a < 1$ , όπου ο  $T_o$  δίνεται από τη σχέση (3.39) με αντικατάσταση του

$$\varphi \text{ από το } G_o = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως οι τελεστές  $S$  και  $T - T_o$  είναι συμπαγείς στο  $C(\partial D)$  και στο  $C^{0,a}(\partial D)$  για  $0 < a < 1$ , ενώ ισχύει πως οι  $S$  και  $T - T_o$  απεικονίζουν το  $C(\partial D)$  στο πεδίο  $C^{0,a}(\partial D)$  και ο  $S$  απεικονίζει το  $C^{0,a}(\partial D)$  στο πεδίο  $C^{1,a}(\partial D)$ .

Πλέον, τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (3.38) και (3.42) που αναφέρθηκαν στην αρχή του υποκεφαλαίου, μπορούμε να τις γράψουμε εν συντομία με τη χρήση των ολοκληρωτικών τελεστών ως:

$$\psi + \mathbf{K}\psi = 2f, \quad (3.55)$$

για την περίπτωση του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet, και:

$$\varphi - \mathbf{K}'\varphi = -2g, \quad (3.56)$$

για την περίπτωση του εξωτερικού προβλήματος Neumann.

### 3.2.5. Συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις πρώτου είδους

Είναι δυνατό να ελαττώσουμε το βαθμό του προβλήματος συνοριακών τιμών της εξίσωσης Helmholtz και σε ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου τύπου. Συγκεκριμένα για το πρόβλημα Dirichlet θα ισχύει ότι το δυναμικό απλού στρώματος  $u$ , με συνεχή πυκνότητα  $\varphi$ , θα αποτελεί λύση του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet με την προϋπόθεση το  $\varphi$  να είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$\int_{\partial D} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D, \quad (3.57)$$

ή σε πιο συνεκτική μορφή με τη χρήση τελεστών:

$$S\varphi = 2f . \quad (3.58)$$

Για κάθε ανομοιογενή  $f \in \Pi(\partial D)$  η ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου τύπου του προβλήματος Dirichlet έχει μοναδική λύση, αρκεί το  $k$  να μην είναι ιδιοτιμή του εσωτερικού Dirichlet προβλήματος.

Καθώς γνωρίζουμε πως το δυναμικό απλού στρώματος με συνεχή πυκνότητα έχει συνεχείς κάθετες παραγώγους στο σύνορο, η ολοκληρωτική εξίσωση (3.57) είναι επιλύσιμη μόνο για συναρτήσεις  $f$ , των οποίων οι λύσεις για το εξωτερικό πρόβλημα ανήκουν στην περιοχή  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ .

Στη συνέχεια, ενθυμούμενοι τον γραμμικό υπόχωρο  $\Pi(\partial D)$  όλων των συνεχών συναρτήσεων  $\psi \in C(\partial D)$ , από όπου το δυναμικό διπλού στρώματος  $v$  θα έχει συνεχείς, κάθετες παραγώγους και από τις δύο πλευρές του συνόρου, μπορούμε να αναφέρουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Μία λύση  $u$  στο εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet, με συνοριακές τιμές  $u = f$  στο σύνορο  $\partial D$ , έχει συνεχείς κάθετες στο σύνορο παραγώγους, που σημαίνει πως  $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$  αν και μόνο αν  $f \in \Pi(\partial D)$ .

Στην περίπτωση που αναζητήσουμε λύση στο πρόβλημα Neumann σε μορφή διπλού στρώματος δυναμικού, αντιμετωπίζουμε την εξής δυσκολία. Η κάθετη στο σύνορο παράγωγος του διπλού στρώματος δυναμικού με συνεχή πυκνότητα, σε γενικές γραμμές δεν υπάρχει, οπότε οδηγούμαστε στην υπόθεση πως η πυκνότητα ανήκει στον υπόχωρο  $\Pi(\partial D)$  και μπορούμε να αναφέρουμε πως:

Το δυναμικό διπλού στρώματος  $v$ , με πυκνότητα  $\psi \in \Pi(\partial D)$ , επιλύει το εξωτερικό πρόβλημα Neumann με την προϋπόθεση πως το  $\psi$  είναι λύση της ιδιόμορφης ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$\frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \psi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D , \quad (3.59)$$

ή με χρήση των τελεστών θα γράψουμε:

$$T\psi = 2g . \quad (3.60)$$



Για κάθε ανομοιογενή συνάρτηση  $g \in C(\partial D)$  η παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση (3.59) έχει μοναδική λύση, αρκεί ο  $k$  να μην είναι ιδιοτιμή του εσωτερικού Neumann προβλήματος.

Παραδοσιακά, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις πρώτου τύπου για τη μελέτη προβλημάτων σκέδασης κατά την ακουστική διάδοση είχαν παραμεληθεί. Ο βασικός λόγος είναι οι ελλείψεις στη θεωρία των εξισώσεων πρώτου τύπου και οι εσφαλμένοι ορισμοί τους. Όλα τα παραπάνω έχουν ως αποτέλεσμα μικρές μεταβολές στο δεξιό μέλος της εξίσωσης  $S\varphi = 2f$  να προκαλέσουν μεγάλες μεταβολές στη λύση  $\varphi$  ή και να την καταστήσουν άλυτη σε περίπτωση που οι αλλαγές οδηγήσουν την  $f$  εκτός του πεδίου  $\Pi(\partial D)$ . Παρά τις δυσκολίες που αναφέρθηκαν, έχει πραγματοποιηθεί σημαντική πρόοδος στην αριθμητική ανάλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων πρώτου είδους και συγκεκριμένα στην περιοριστική θεωρητική περίπτωση του  $k = 0$ .

### 3.2.6. Σκληροί και Μαλακοί σκεδαστές

Υπάρχουν δύο ακραίες περιπτώσεις σκεδαστών, ο μαλακός και ο σκληρός σκεδαστής. Στην περίπτωση του μαλακού σώματος (πρόβλημα Dirichlet) το συνολικό πεδίο (πίεση) πρέπει να μηδενίζεται στην επιφάνεια, δηλαδή  $u_s = -u_i$ . Αντίστοιχα, στην περίπτωση που ασχολούμαστε με την περιγραφή της κάθετης στην επιφάνεια παραγώγου του  $u$ , που σαν φυσικό μέγεθος αντιστοιχεί στην περιγραφή της κάθετης στην επιφάνεια συνιστώσας της ταχύτητας του ακουστικού κύματος, παρουσιάζεται το πρόβλημα Neumann που περιγράφει σκέδαση από σκληρό σώμα  $\frac{\partial u_s}{\partial n} = -\frac{\partial u_i}{\partial n}$ .

Μια καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος (σε ότι αφορά τη προσομοίωση των σκεδαστικών ιδιοτήτων φυσικών σωμάτων) γίνεται με συνδυασμό των συνθηκών Neumann και Dirichlet σε μία μικτή σχέση:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = g \text{ στο } \partial D, \quad (3.61)$$

όπου  $\lambda = i\chi\rho(\omega + i\gamma)$  και  $\chi$  είναι η κυματική (ακουστική) αντίσταση (αντιστρόφως ανάλογη της αγωγιμότητας) του σώματος, η οποία είναι μεταβλητή, εξαρτώμενη συνήθως από την συχνότητα και ορίζεται πάνω στο σύνορο του σώματος, και  $g$  είναι συνεχής συνάρτηση στο σύνορο (συνοριακά δεδομένα).

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz. Σκοπός μας είναι η εύρεση μιας λείας συνάρτησης  $u$  που να ικανοποιεί

της εξίσωση Helmholtz στο χώρο  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$  ή  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  αντίστοιχα, τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld στο άπειρο καθώς και τη συνοριακή συνθήκη (3.61).

Το εξωτερικό μικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών έχει το πολύ μια λύση, αρκεί να ισχύει πως:

$$\text{Im}(\bar{k}\lambda) \geq 0, \text{ για τιμές στο σύνορο του σκεδαστή.} \quad (3.62)$$

Ανάλογα με το εξωτερικό πρόβλημα Neumann, που είναι ειδική περίπτωση του προβλήματος συνοριακών τιμών (για  $\lambda = 0$ ), το δυναμικό απλού στρώματος  $u(x)$  θα αποτελεί λύση και του εξωτερικού προβλήματος αντίστασης, με την προϋπόθεση η συνεχής πυκνότητα  $\varphi$  να είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$\varphi - \mathbf{K}'\varphi - \lambda \mathbf{S}\varphi = -2g. \quad (3.63)$$

Χωρίς να σχολιάσουμε περεταίρω την παραπάνω εξίσωση θα προχωρήσουμε σε μοναδικώς επιλύσιμη ολοκληρωτική εξίσωση. Το συνδυαστικό δυναμικό:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ G(x, y) + i\eta \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} \right\} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D, \quad (3.64)$$

όπου  $\eta$  είναι μια τιμή διαφορετική του μηδενός. Το  $u(x)$  επιλύει το εξωτερικό πρόβλημα, αρκεί η πυκνότητα  $\varphi \in \Pi(\partial D)$  να είναι λύση της ιδιόμορφης ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$(1 - i\eta\lambda)\varphi - (\mathbf{K}' + i\eta\mathbf{T} + i\eta\lambda\mathbf{K} + \lambda\mathbf{S})\varphi = -2g. \quad (3.65)$$

Η ομογενής μορφή της (3.65) παρουσιάζει την τετριμμένη λύση  $\varphi = 0$  μόνο στην περιοχή  $\Pi(\partial D)$ . Η συνδυαστική ολοκληρωτική εξίσωση μονού και διπλού στρώματος είναι μοναδικά επιλύσιμη για κάθε κυματαριθμό  $\text{Im}(k) \geq 0$  και αντιστάσεις που ικανοποιούν τη σχέση του ακουστικού δυναμικού απλού στρώματος. Περισσότερες λεπτομέρειες παρέχονται στο Κεφ. 3.6 Colton & Kress (1983).

### 3.3. Σκεδαστής πεπερασμένων διαστάσεων σε άπειρο δισδιάστατο χώρο (εξωτερικό πρόβλημα)

Σε ειδικές περιπτώσεις το πρόβλημα σκέδασης από έναν πεπερασμένο δισδιάστατο σκεδαστή διαθέτει αναλυτική λύση, η οποία εκφράζεται μέσω γνωστών συναρτήσεων. Η κατασκευή των λύσεων αυτών έχει ιδιαίτερη σημασία για την έλεγχο

της ακρίβειας και την αξιολόγηση αριθμητικών επιλυτών της εξίσωσης Helmholtz που είναι σε θέση να διαχειριστούν επιφάνειες σκεδαστή – σύνορα γενικού σχήματος. Μια τέτοια περίπτωση είναι ο κυκλικός σκεδαστής. Για τη κατασκευή της λύσης θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες.

Ενδιαφερόμενοι για ακουστικά προβλήματα από τούδε και στο εξής χρησιμοποιούμε ως βασικό κυματικό πεδίο την ακουστική πίεση  $P$ . Ξεκινάμε θεωρώντας, σύμφωνα με τα προηγούμενα, την ομογενή εξίσωση Helmholtz για το πεδίο σκέδασης της ακουστικής πίεσης  $P_s$  σε δισδιάστατο εξωτερικό μη φραγμένο χωρίο:

$$\Delta P_s + k^2 P_s = 0, \quad (3.66)$$

η οποία γράφεται σε πολικές συντεταγμένες:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P_s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P_s}{\partial \theta^2} + k^2 P_s = 0. \quad (3.67)$$

Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας για την επίλυση τη Μέθοδο Χωριζομένων Μεταβλητών:

$$P_s = R(r)T(\theta). \quad (3.68)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση (3.67) θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$\frac{r^2}{R} \left[ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R \right] = -\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d\theta^2} = n^2, \quad (3.69)$$

όπου  $n$  είναι η σταθερά χωρισμού μεταβλητών. Συνεχίζοντας θα καταλήξουμε σε δύο διαφορετικές σχέσεις, η πρώτη θα αφορά τον όρο  $T$ :

$$T(\theta) = C e^{in\theta},$$

με  $C$  να είναι μια σταθερά και το  $n=0,1,2,\dots$ , επιλογή που εξασφαλίζει την περιοδικότητα της λύσης. Αντίστοιχα λαμβάνουμε και μια σχέση για το  $R$ :

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n^2) R = 0,$$

όπου θέτουμε  $\tilde{z} = kr$  και  $\tilde{R}(\tilde{z}) = R(kr)$ , και καταλήγουμε στην εξίσωση Bessel τάξεως  $n$ :

$$\tilde{z}^2 \frac{d^2 \tilde{R}}{d\tilde{z}^2} + \tilde{z} \frac{d\tilde{R}}{d\tilde{z}} + (\tilde{z}^2 - n^2) \tilde{R} = 0. \quad (3.70)$$

Η λύση της εξίσωσης (3.70) είναι ένα άθροισμα συναρτήσεων Hankel της μορφής:

$$\tilde{R}(z) = \tilde{A}J_n(z) + \tilde{B}Y_n(z) = AH_n^{(1)}(z) + BH_n^{(2)}(z), \quad (3.71)$$

γνωρίζοντας πως για τις συναρτήσεις Hankel ισχύει:

$$H_n^{(1,2)} = J_n \pm iY_n, \quad (3.72)$$

όπου  $J_n, Y_n$  οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel.

Η γενική αναπαράσταση πεδίου στα εξωτερικά του κυλινδρικού σκεδαστή που θα εκτείνεται ως το άπειρο θα δίνεται από το άθροισμα:

$$P_s(r, \theta) = \sum_{n=0} A_n H_n^{(1)}(kr) \cos(n\theta) + \sum_{n=1} B_n H_n^{(1)}(kr) \sin(n\theta). \quad (3.73)$$

Όπως παρατηρούμε στη σχέση (3.73) απουσιάζει εντελώς η Hankel δεύτερου είδους, αυτό συμβαίνει διότι απορρίπτεται λόγω της απαίτησης της συνθήκης ακτινοβολίας (δηλαδή να αναπαριστά εξερχόμενα κύματα) και της θεώρησης μας:

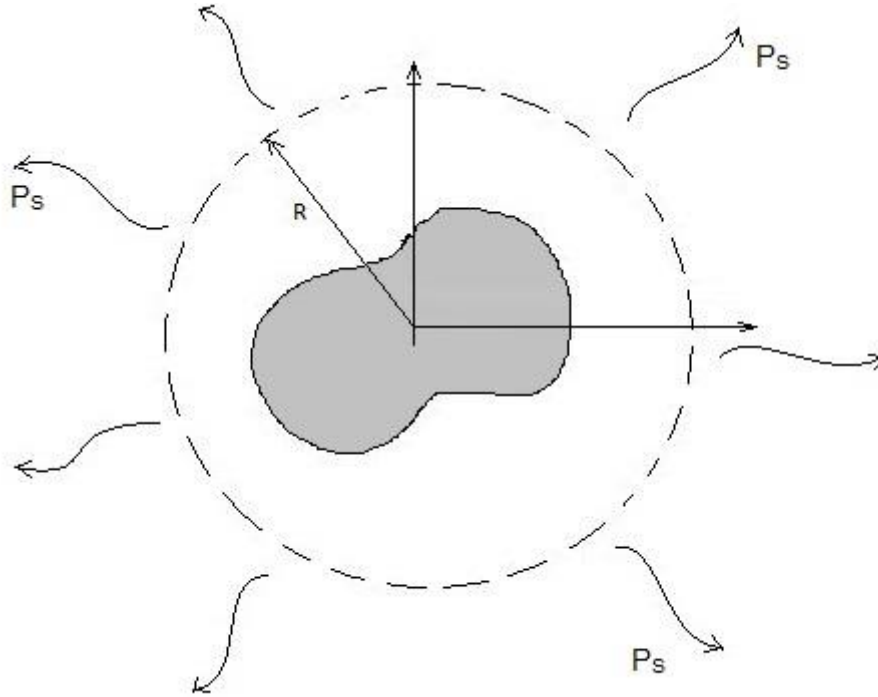
$$P_s(r, \theta; t) = \text{Re} \left( P_s(r, \theta) e^{-i\omega t} \right)$$

για την αρμονική από το χρόνο εξάρτηση του κυματικού πεδίου.

Απόδειξη: Η ασυμπτωτική μορφή των συναρτήσεων Hankel για μεγάλες τιμές του ορίσματος θα είναι:

$$H_n^{(1,2)}(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{\pm i \left( kr - n\pi - \frac{\pi}{2} \right)}$$

και λόγω της τυχαίας επιλογής μας για την περιγραφή του χρονικά αρμονικού προβλήματος η μορφή της λύσης με την Hankel πρώτου είδους  $H_n^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}$  θα περιγράφει εξερχόμενα κύματα που έχουν φυσικό νόημα. Η συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους θα απορριφθεί, καθώς περιγράφει κύματα εισερχόμενα από το άπειρο προς την πηγή.



Σχήμα 20. Ο κύκλος ακτίνας  $R$  που περικλείει το σώμα και τα σκεδαζόμενα κύματα στην επιφάνειά του.

Με δεδομένο το πεδίο  $P_s(r, \theta)$ , για κάθε κύκλο ακτίνας  $R >$  διαμέτρου σώματος, ώστε να το περικλείει στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα 20, οι συντελεστές  $A_n$  και  $B_n$  της σχέσης (3.73) θα καθορίζονται από την ανάλυση σε σειρές Fourier πάνω στον εκάστοτε κύκλο, όπως φαίνεται στη συνέχεια:

$$a_0 = A_0 H_0^{(1)}(kR) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_s(\theta; R) d\theta, \quad (3.74)$$

$$a_n = A_n H_n^{(1)}(kR) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_s(\theta; R) \cos(n\theta) d\theta, \quad (3.75)$$

$$\beta_n = B_n H_n^{(1)}(kR) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_s(\theta; R) \sin(n\theta) d\theta. \quad (3.76)$$

Για μεγάλες αποστάσεις από την πηγή ( $r \rightarrow \infty$ ) θα ισχύει και η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld, δηλαδή η σχέση (3.36) και επειδή γνωρίζουμε πως ισχύει:

$$P_s(r \rightarrow \infty, \theta) \approx \sqrt{\frac{1}{r}} e^{ikr}, \quad (3.77)$$

η συνθήκη ακτινοβολίας θα έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial P_s}{\partial r} - ikP_s = O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (3.78)$$

Στη συνέχεια θα βρούμε την αναλυτική λύση σε πρόβλημα δύο διαστάσεων για κυκλικό σκεδαστή και θα ακολουθήσει η εύρεση της αριθμητικής λύσης. Σκοπός μας είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων από τις δύο μεθόδους, ώστε να ελέγξουμε την ισχύ της αριθμητικής λύσης για μετέπειτα χρήση σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει αναλυτική λύση.

Σημειώνεται ότι η ανωτέρω διαδικασία επεκτείνεται και σε άλλα γεωμετρικά συμμετρικά σώματα, όπως η έλλειψη κλπ, απαιτεί όμως πιο σύνθετες συναρτήσεις.

### 3.3.1. Εύρεση αναλυτικής λύσης σε κυκλικό σκεδαστή

Η διέγερση στα σύνορα του σκεδαστή μπορεί να προκληθεί από παράλληλο κύμα ή από σημειακή πηγή. Στην πρώτη περίπτωση και χωρίς βλάβη της γενικότητας λαμβάνουμε το διαδιδόμενο κύμα με κατεύθυνση τον καρτεσιανό  $x_1$ -άξονα ως προς τον σκεδαστή, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση της μορφής:

$$P_I = \exp(ikx_1), \quad (3.79)$$

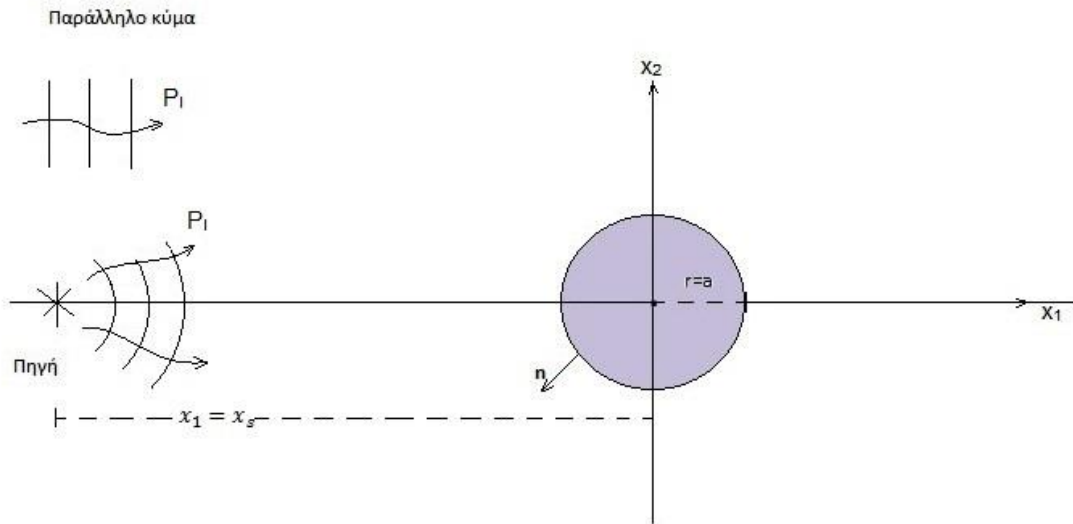
στη δεύτερη περίπτωση, με την ύπαρξη πηγής στη θέση ( $x_1 = x_s, x_2 = 0$ ) σε σύστημα με αρχή το κέντρο του κυκλικού σκεδαστή, το εισερχόμενο κύμα θα δίδεται από:

$$P_I = H_0^{(1)}(k|x_1 - x_s|). \quad (3.80)$$

Το σχήμα που ακολουθεί (βλ. σχήμα 21) θα μας βοηθήσει να έχουμε μια καλύτερη εικόνα για το περιγραφόμενο πρόβλημα.

Το συνολικό πεδίο θα είναι ένα άθροισμα του πεδίου σκέδασης  $P_s$  και του εισερχόμενου πεδίου  $P_I$ :

$$P_T = P_I + P_s. \quad (3.81)$$



Σχήμα 21. Σκέδαση από κυκλικό σκεδαστή.

Σε περίπτωση που υπάρχει πηγή το συνολικό πεδίο θα ικανοποιεί την μη ομογενή Helmholtz:

$$\Delta P_T + k^2 P_T = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s),$$

ενώ στην περίπτωση εισερχόμενου παράλληλου κύματος από το άπειρο θα ικανοποιείται η ομογενής μορφή της Helmholtz, δηλαδή η:

$$\Delta P_T + k^2 P_T = 0,$$

για κάθε σημείο  $r > a$ , δηλαδή εξωτερικό του σκεδαστή.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα θα πρέπει να ισχύουν επιπλέον η συνθήκη Sommerfeld:

$$\frac{\partial P_s}{\partial r} - ik P_s = 0, \quad (3.82)$$

που είναι η συνθήκη για εξερχόμενα κύματα στο άπειρο ( $r \rightarrow \infty$ ), καθώς και οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του σκεδαστή ( $r = a$ ), που έχουν αναφερθεί και στο υποκεφάλαιο 3.2.6.:

$$\beta \frac{\partial P_T}{\partial n} + \alpha P_T = 0 \Rightarrow \beta \frac{\partial P_s}{\partial n} + \alpha P_s = - \left( \beta \frac{\partial P_I}{\partial n} + \alpha P_I \right) = g, \quad (3.83)$$

όπου  $g$  είναι μια συνεχής συνάρτηση που περιγράφει τα δεδομένα του πεδίου στο σύνορο. Στην παραπάνω σχέση έχουμε αντικαταστήσει την παραγωγή ως προς το

κάθετο διάνυσμα  $n$  με παραγωγή ως προς την ακτίνα  $r$  που στην περίπτωση του κύκλου δεν έχει κάποια διαφορά.

Ως προς την συνοριακή συνθήκη έχουμε:

- Dirichlet με  $\alpha=1$  και  $\beta=0$  στη σχέση (3.83), αντιπροσωπεύει μαλακό σκεδαστή.
- Neumann με  $\alpha=0$  και  $\beta=1$  στη σχέση (3.83), αντιπροσωπεύει σκληρό σκεδαστή.

Βεβαίως υπάρχουν οι ενδιάμεσες περιπτώσεις που δημιουργούν συνοριακές συνθήκες Robin που προσομοιάζουν αγωγήμο σύνορο. Στην γενική περίπτωση οι ανωτέρω συντελεστές είναι συναρτήσεις της συχνότητας και καθορίζονται από το υλικό του σκεδαστή, την αγωγιμότητα του καθώς και τα χαρακτηριστικά της επιφάνειάς του (επιστρώσεις, τραχύτητα κλπ).

Στη συνέχεια ακολουθούν δύο θεωρήματα που μας βοηθάνε στην παραγωγή της αναλυτικής λύσης είτε από παράλληλο προσπίπτον κύμα είτε από κύμα εκπεμπόμενο από σημειακή πηγή.

### Θεώρημα 1

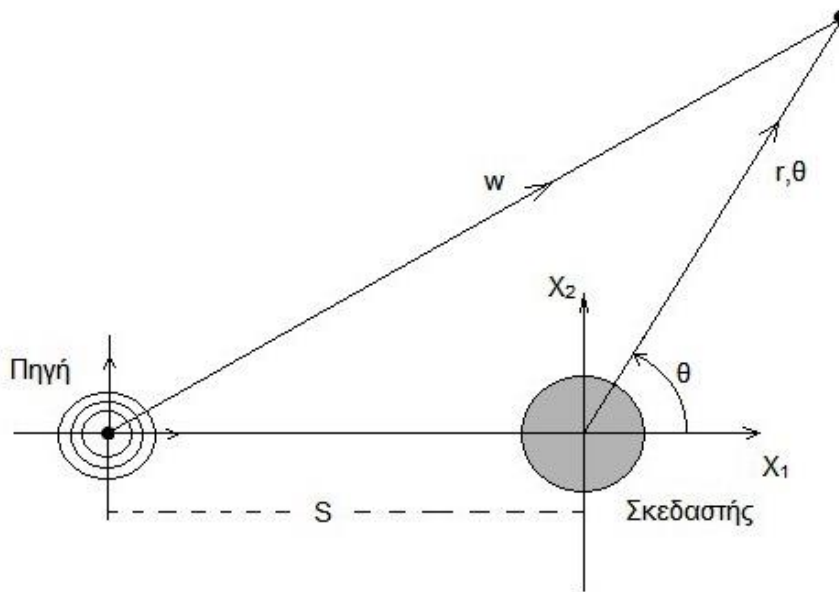
Η ανάπτυξη παράλληλου κύματος με κατεύθυνση τον καρτεσιανό  $x_1$ -άξονα σε κυλινδρικά κύματα είναι η παρακάτω:

$$\exp(ikx) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m(kr) \cos(m\theta), \quad (3.84)$$

όπου  $\varepsilon_m$  είναι το σύμβολο του Neumann με τιμές 1 για  $m=0$  και 2 για  $m \geq 1$ .

Όπως παρατηρούμε στη σχέση (3.84) δεν υπάρχει ο όρος του ημιτόνου, καθώς το πεδίο είναι συμμετρικό όπως και ο κυκλικός σκεδαστής.





Σχήμα 22. Το σύστημα πηγής-σκεδαστή με το σημείο αναζήτησης της λύσης.

Θεώρημα 2 (άθροισης συναρτήσεων Graf)<sup>18</sup>

Ισχύει:

$$H_0^{(1)}(kw) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m H_m^{(1)}(ks) J_m(kr) \cos(m\theta), \text{ για } r < s = |x_s|. \quad (3.85)$$

Στην παραπάνω σχέση το  $r$  συμβολίζει την απόσταση του σκεδαστή από το σημείο που αναζητάμε το πεδίο και το  $s$  τη θέση που βρίσκεται η πηγή ως προς τον σκεδαστή (βλ. σχήμα 22).

Η γενική λύση του προβλήματος σκέδασης θα δίνεται από τη σχέση (3.73) που λόγω συμμετρίας του κύκλου, όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω, θα χάνει τον όρο του ημιτόνου και θα λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$P_s(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\theta) H_m^{(1)}(kr). \quad (3.86)$$

Πρόβλημα διέγερσης από παράλληλο κύμα

Η πρώτη περίπτωση όπου θα αναζητήσουμε τον συντελεστή  $A_m$  θα είναι για το πρόβλημα Dirichlet ( $\alpha=1, \beta=0$ ) με αποτέλεσμα:

<sup>18</sup> Abramowitz M., Stegun I.A., 1970, p. 363

$$A_m^{(D)} = -\varepsilon_m i^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}, \quad (3.87)$$

όπου το  $A_m^{(D)}$  δηλώνει ότι είναι ο συντελεστής για το πρόβλημα Dirichlet.

Απόδειξη: Αρχικά από τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet γνωρίζουμε πως ισχύει:

$$P_r = 0 \Rightarrow P_s = -P_l (r = a),$$

δηλαδή θα πρέπει να εξισώνουμε τις σχέσεις (3.86) και (3.84) στην επιφάνεια του σκεδαστή που είναι ακτίνας  $a$ :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m(kr) \cos(m\theta) = -\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(D)} \cos(m\theta) H_m^{(1)}(kr) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_m i^m J_m(kr) = -A_m^{(D)} H_m^{(1)}(kr) \Rightarrow$$

$$A_m^{(D)} = -\frac{\varepsilon_m i^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}.$$

Εργαζόμενοι αντίστοιχα θα βρούμε το συντελεστή και για το πρόβλημα Neumann ( $\alpha=0, \beta=1$ )<sup>19</sup>:

$$A_m^{(N)} = -\varepsilon_m i^m \frac{J'_m(ka)}{\Phi_m^{(1)}(ka)}, \quad (3.88)$$

όπου το  $N$  δηλώνει πως είναι ο συντελεστής για το πρόβλημα Neumann, με:

$$J'_m(x) = \frac{dJ_m(x)}{dx} \quad \text{και} \quad \Phi_m^{(1)}(x) = \frac{dH_m^{(1)}(x)}{dx}.$$

Απόδειξη: Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη από τη συνοριακή συνθήκη Neumann:

$$\frac{\partial P_s}{\partial n} = -\frac{\partial P_l}{\partial n} = g,$$

Παραγωγίζουμε ως προς το διάνυσμα  $\mathbf{n}$ , που θα είναι κάθετο στην επιφάνεια του σκεδαστή, τις σχέσεις (3.84) και (3.86) και τις αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση:

$$-\frac{\partial P_l}{\partial n} = +\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J'_m(ka) m \sin(m\theta), \quad (A)$$

<sup>19</sup> Δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να γίνει σύγχυση των όρων  $\alpha$  που στην περίπτωση του τύπου δηλώνουν ακτίνα, ενώ στην παρένθεση είναι ένας εκ των συντελεστών της συνοριακής συνθήκης (3.83).

και για το σκεδαζόμενο κύμα:

$$\frac{\partial P_s}{\partial n} = -\sum_{m=0}^{\infty} A_m \Phi_m^{(1)}(ka) m \sin(m\theta) . \quad (B)$$

Τέλος, εξισώνουμε την (A) και τη (B) σχέση και καταλήγουμε στη ζητούμενη (3.88).

### Πρόβλημα διέγερσης από σημειακή πηγή

Αντίστοιχα εργαζόμαστε για την εύρεση των σχέσεων που θα μας δίνουν τους συντελεστές  $A_m$ , στην περίπτωση της διέγερσης από σημειακή πηγή. Η σχέση που θα μας δίνει πλέον το εισερχόμενο κύμα θα έχει αλλάξει και θα είναι η (3.80) σε συνδυασμό με την (3.85) και το εξερχόμενο κύμα θα δίνεται και πάλι από τη σχέση (3.86).

Στην περίπτωση του προβλήματος Dirichlet ( $\alpha=1, \beta=0$ ) θα ισχύει:

$$A_m^{(D)} = -\varepsilon_m (-1)^m \frac{H_m^{(1)}(ks) J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} . \quad (3.89)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι απλή καθώς θα χρειαστεί να εξισώσουμε τις σχέσεις (3.85) και (3.86) πάνω στην επιφάνεια του κυκλικού σκεδαστή ακτίνας  $a$ , όπως και στην περίπτωση του παράλληλου κύματος για την περίπτωση Dirichlet.

Αντίστοιχα στην περίπτωση του προβλήματος Neumann ( $\alpha=0, \beta=1$ ) η σχέση που δίνει τον συντελεστή  $A_m$  θα είναι:

$$A_m^{(N)} = -\varepsilon_m (-1)^m \frac{H_m^{(1)}(ks) J'_m(ka)}{\Phi_m^{(1)}(ka)} . \quad (3.90)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι όμοια με την περίπτωση του προβλήματος Neumann για παράλληλο εισερχόμενο κύμα. Η μοναδική διαφορά είναι πως παραγωγίζουμε τη σχέση (3.85) αντί για την (3.84), καθώς πλέον χρειαζόμαστε το εισερχόμενο κύμα να προέρχεται από πηγή, ως προς το  $n$  και συνεχίζουμε ομοίως εξισώνοντας τα δύο αποτελέσματα της παραγώγου.

### Γενικοί συντελεστές $\alpha, \beta$ για αγώγιμο σύνορο

Έχουμε συζητήσει και σε προηγούμενη ενότητα την περίπτωση ύπαρξης μιας ενδιάμεσης κατάστασης μεταξύ των δύο ακραίων, Neumann-Dirichlet, η οποία θα μπορούσε να περιγραφεί από την αρχική συνοριακή συνθήκη (3.83) σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα που βρήκαμε για τους συντελεστές  $A_m$  στα δύο παραπάνω συνοριακά προβλήματα. Καταλήγουμε λοιπόν σε έναν νέο συντελεστή μιας γενικής μορφής:

$$A_m = \alpha A_m^{(D)} + \beta A_m^{(N)}, \quad (3.91)$$

όπου  $\alpha, \beta$  θα είναι γνωστοί συντελεστές ανάλογα με τις ιδιότητες του εκάστοτε σκεδαστή, ενώ οι συντελεστές  $A_m^{(D)}$  και  $A_m^{(N)}$  θα δίνονται από τις σχέσεις (3.89), (3.90) σε περίπτωση προβλήματος σημειακής πηγής και από τη σχέση (3.87), (3.88) στην περίπτωση εισερχόμενου παράλληλου κύματος.

### **3.3.2. Αριθμητική λύση σε σώμα γενικού σχήματος πεπερασμένων διαστάσεων με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων**

Στην περίπτωση της γενικής λύσης του προβλήματος σκέδασης έχουμε αναφερθεί αναλυτικά σε όλο το τρίτο κεφάλαιο. Εδώ απλά θα συγκεντρώσουμε όλες τις πληροφορίες που έχουμε αναλύσει με σκοπό να τις συνδυάσουμε με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων (Boundary Element Method) και να δώσουμε μια αριθμητική απάντηση στο πρόβλημα του σκεδαστή. Το πλεονέκτημα της αριθμητικής λύσης είναι ότι έχει εφαρμογή για σκεδαστή γενικού σχήματος (πεπερασμένων διαστάσεων σώμα). Όπως έχει αναφερθεί υπάρχουν δύο διαφορετικές μέθοδοι προσέγγισης του προβλήματος, η μέθοδος των θεωρημάτων Green και η μέθοδος δυναμικού. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη.

Η συνάρτηση Green της διαφορικής εξίσωσης Helmholtz στις δύο διαστάσεις που μας ενδιαφέρουν θα είναι η σχέση:

$$G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (3.92)$$

Συνεχίζοντας θα αντικαταστήσουμε τη σχέση Green στην ολοκληρωτική αναπαράσταση του ακουστικού δυναμικού σκέδασης<sup>20</sup>, γνωστό και ως δυναμικό απλού στρώματος, δηλαδή στη σχέση (3.37) με την παρακάτω μορφή:

$$P_s(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \text{ για } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \quad (3.93)$$

δηλαδή για όλο το χώρο εκτός από το εσωτερικό του σκεδαστή. Στην ανωτέρω σχέση  $\sigma(\mathbf{y})$  περιγράφει την ένταση των πηγών πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή που είναι συνεχώς κατανεμημένες,  $G(\mathbf{x} | \mathbf{y})$  θα είναι η συνάρτηση Green για χώρο δύο διαστάσεων και το διάνυσμα  $\mathbf{y}$  θα δηλώνει τη θέση του σκεδαστή.

Αντίστοιχα προς την ανωτέρω αναπαράσταση η παράγωγος του ακουστικού πεδίου δίνεται από την σχέση:

$$\nabla_x P_s(\mathbf{x}) = \nabla \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \text{ για } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D},$$

Το δυναμικό της σχέσης (3.93) θα είναι λύση του προβλήματος Neumann όπως έχουμε αναφέρει στο υποκεφάλαιο 3.2.4 εάν στο σύνορο του σκεδαστή ικανοποιείται η ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση ως προς την άγνωστη ένταση  $\sigma(\mathbf{y})$ :

$$-\frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{\partial n} ds(\mathbf{y}) = g_N(\mathbf{x}) \equiv -\frac{\partial P_I}{\partial n}, \text{ για } \mathbf{x} \in \partial D, \quad (3.94)$$

όπου  $g_N$  θα είναι η συνεχής συνάρτηση στο σύνορο του σκεδαστή που έχουμε ήδη αναφέρει για το πρόβλημα Neumann.

Η συνάρτηση Green της εξίσωσης Helmholtz (και της εξίσωσης Laplace) παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία όταν  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ :

$$H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \approx \frac{2i}{\pi} \ln\left(\frac{k}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\right),$$

πράγμα που καθιστά τα ολοκληρώματα (3.93) και (3.94) ιδιόμορφα και ο υπολογισμός τους απαιτεί ειδικό χειρισμό. Η εφαρμοζόμενη μέθοδος στην παρούσα εργασία θα σχολιαστεί κατωτέρω σε συνδυασμό με τη χαμηλοτάξια μέθοδο συνοριακών στοιχείων που θα αναπτυχθεί.

<sup>20</sup> Η ολοκληρωτική αναπαράσταση θα μας δίνει το δυναμικό σκέδασης σε οποιοδήποτε εξωτερικό σημείο του σκεδαστή.

Αν χρειαζόμασταν συνθήκη Dirichlet πάνω στο σώμα θα χρησιμοποιούσαμε τη σχέση:

$$P_s(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = g_D(\mathbf{x}) \equiv -P_t(\mathbf{x}), \quad \text{για } \mathbf{x} \in \partial D. \quad (3.95)$$

Απόδειξη: Με διαφορίση της σχέσης (3.93) στο σύνορο της επιφάνειας του σκεδαστή θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$\nabla P_s = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \nabla G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \text{για } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D},$$

η οποία καθώς προσεγγίζεται το σύνορα του σκεδαστή, λόγω της παρουσιαζόμενης ιδιομορφίας του ολοκληρωτικού πυρήνα, τροποποιείται στην ακόλουθη μορφή<sup>21</sup>:

$$\nabla P_s = \frac{\sigma(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \nabla G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \text{για } \mathbf{x} \in \partial D.$$

Επομένως η κάθετη παράγωγος του δυναμικού σκέδασης στο σύνορο που θα πρέπει να ικανοποιεί τα δεδομένα Neumann δίνεται από:

$$g_N = \mathbf{n} \nabla P_s \Big|_{\partial D} = \frac{\partial P_s}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} = -\frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \nabla G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}),$$

που είναι ακριβώς η ολοκληρωτική εξίσωση δευτέρου είδους (3.94).

Αντίστοιχα, για το πρόβλημα Dirichlet έχουμε με απευθείας εφαρμογή της σχέσης (3.93) την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους (ως προς την άγνωστη κατανομή πηγών):

$$g_D(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \text{για } \mathbf{x} \in \partial D,$$

Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιήσουμε το δυναμικού διπλού στρώματος<sup>22</sup>, σχέση (3.41) και να έχουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση του πεδίου σκέδασης μέσω εντάσεως διπόλων:

$$P_s(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \mu(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \text{για } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (3.96)$$

<sup>21</sup> Colton & Kress, 1983, ch. 3.

<sup>22</sup> Προτιμάται η χρήση του δυναμικού απλού στρώματος καθώς διευκολύνει στην εξαγωγή της σχέσης Neumann.

η οποία οδηγεί στην ολοκληρωτική εξίσωση<sup>23</sup>:

$$g_D(\mathbf{x}) = -\frac{\mu(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \partial D. \quad (3.97)$$

### Χαμηλοτάξια Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (Boundary Element Method)

Για να γίνει δυνατή η προσέγγιση οποιουδήποτε σχήματος θα χρειαστεί να χωρίσουμε την επιφάνειά του σώματος σε στοιχειώδη τμήματα (elements ή panels). Στην απλούστερη περίπτωση χρησιμοποιούμε χαμηλοτάξια στοιχεία που στις δύο διαστάσεις είναι ευθύγραμμα τμήματα και έτσι το σύνορο προσεγγίζεται από μια κλειστή πολυγωνική γραμμή. Το πολύγωνο θα προσεγγίζει με την αύξηση του αριθμού των στοιχείων το πραγματικό σύνορο του σκεδαστή (βλ. σχήμα 23). Ακολούθως θα ισχύει:

$$\partial D_N \rightarrow \partial D, \text{ για την περίπτωση που } N \rightarrow \infty,$$

όπου  $N$  είναι το πλήθος των στοιχείων μερισμού του συνόρου-επιφάνεια του σκεδαστή  $\partial D$ . Τα κέντρα των στοιχείων όπως φαίνεται και στο σχήμα 23 δεν ευρίσκονται απαραίτητα στην επιφάνεια του σκεδαστή.

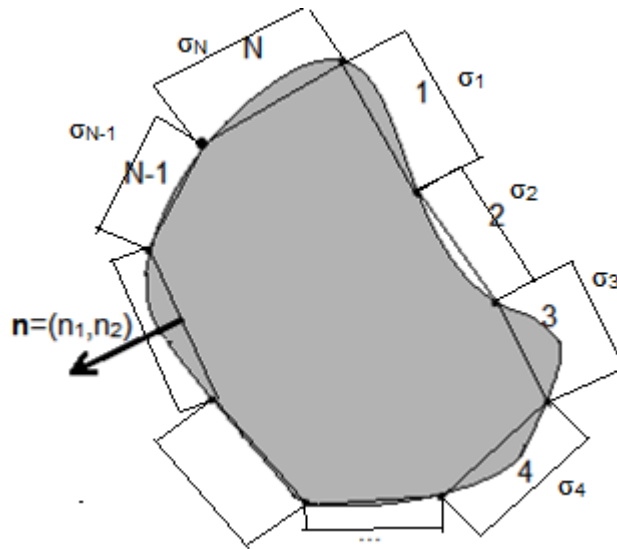
Σε ότι αφορά την άγνωστη συνάρτηση που είναι η ένταση πηγών  $\sigma(s) \equiv \sigma(\mathbf{y}(s))$  πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή αυτή προσεγγίζεται τμηματικώς σταθερή σε κάθε ένα από τα στοιχεία (panels) του συνόρου ( $i = 1, 2, \dots, N$  στο σχήμα 23), όπου θα έχει και διαφορετική τιμή  $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, N$  και προσεγγίζει την πραγματική ένταση πηγών στην επιφάνεια του σκεδαστή,

$$\|\sigma_N - \sigma(s)\|_{N \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

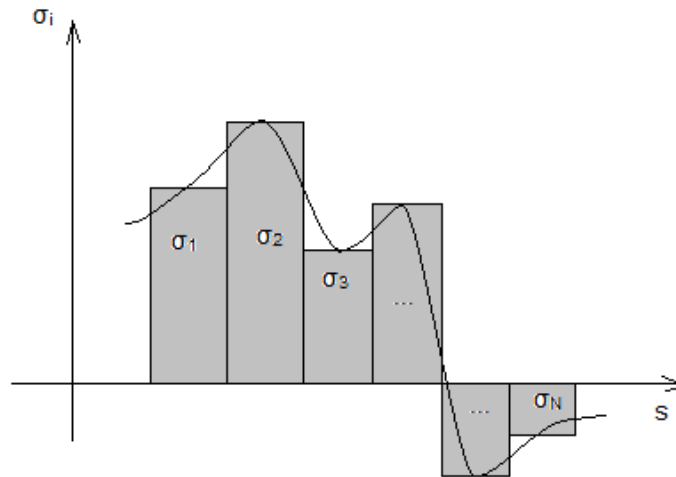
Στην χαμηλοτάξια μέθοδο συνοριακών στοιχείων θεωρούμε ότι η ένταση πηγών  $\sigma$  διατηρείται σταθερή σε κάθε στοιχειώδες τμήμα (βλ. σχήμα 24) γεγονός που υποβοηθεί την ολοκλήρωση στην επιφάνεια που προσεγγίζει το σύνορο. Το  $\sigma_i$  θα δείχνει την τιμή στο κάθε στοιχείο του συνόρου και η ολοκληρωτική εξίσωση θα ικανοποιηθεί στο κέντρο κάθε στοιχείου το οποίο θα αριθμείται με τον ίδιο δείκτη

---

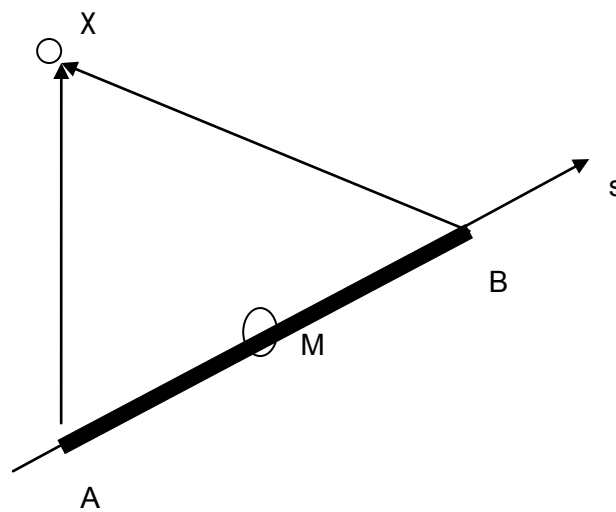
<sup>23</sup> Colton & Kress, 1983.



Σχήμα 23. Σκεδαστής πεπερασμένων διαστάσεων μετά από εφαρμογή της Panel Method



Σχήμα 24. Πυκνότητα των panel του σκεδαστή με τη γραμμή κατανομής



Σχήμα 25. Επαγόμενο δυναμικό από ευθύγραμμο συνοριακό στοιχείο AB



$i = 1, 2, \dots, N$ . Με αυτό το τρόπο έχουμε δημιουργήσει λοιπόν ένα πρόβλημα  $N$  διακριτών αγνώστων.

Για ένα στοιχείο  $AB$ , με άκρα τα  $A$  και  $B$ , θα ισχύει πως το δυναμικό σκέδασης που παράγει σε κάποιο σημείο του χώρου θα δίνεται από τη σχέση (3.93), καθώς επιλέξαμε δυναμικό απλού στρώματος:

$$P_s(\mathbf{x}) = \int_A^B \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}).$$

Γνωρίζοντας πως η συνάρτηση Green για δυσδιάστατο χώρο θα δίνεται από τη σχέση (3.92) και σε συνδυασμό με το παραπάνω δυναμικό, και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ένταση πηγών είναι σταθερή εντός κάθε στοιχείου, οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση που θα μας δίνει το δυναμικό σκέδασης του συγκεκριμένου στοιχείου  $AB$ :

$$P_s(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \sigma_{AB} \int_A^B H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) ds(\mathbf{y}) = \sigma_{AB} U_{AB}, \quad (3.98)$$

όπου

$$U_{AB}(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \int_A^B H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) ds, \quad \text{για } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D \text{ ή } \mathbf{x} \in \partial D, \quad (3.99)$$

το επαγόμενο δυναμικό στο σημείο  $\mathbf{x}$  από το στοιχείο  $AB$ .

Συνεχίζοντας, με παραγωγή της (3.98) καταλήγουμε στην σχέση:

$$\frac{\partial P_s(\mathbf{x})}{\partial n} = \sigma_{AB} F_{AB}(\mathbf{x}), \quad (3.100)$$

όπου

$$F_{AB}(\mathbf{x}) = -\frac{ik}{4} \int_A^B H_1^{(1)}\left(k\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) Q ds, \quad \text{για } \mathbf{x} \in \partial D, \quad (3.101)$$

και

$$Q = \left( \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} n_2 \right)$$

η επαγόμενη κάθετη ταχύτητα από το στοιχείο  $AB$  στο σημείο  $\mathbf{x}$  πάνω στο σύνορο.

Όπως αναφέρθηκε ήδη, τα ολοκληρώματα στη σχέση (3.99) και (3.101) είναι ιδιόμορφα όταν το  $\mathbf{x}$  ανήκει πάνω στο ευθύγραμμο στοιχείο  $AB$ . Σύμφωνα με τη

εφαρμοζόμενη μέθοδο BEM-collocation αυτό θα συμβεί στη περίπτωση των αυτεπαγωγμένων συνεισφορών από το κάθε στοιχείο στον κέντρο του, όταν δηλαδή το στοιχείο ελέγχου θα συμπίπτει με το κέντρο του εκάστοτε στοιχείου.

Όμως στην εξεταζόμενη περίπτωση το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα (3.98) παρουσιάζει ασθενή ολοκληρώσιμη ιδιομορφία (λογαριθμικό απειρισμό) και υπολογίζεται εύκολα με απλό μετασχηματισμό. Αντιθέτως το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.101) είναι ισχυρά ιδιόμορφο καθότι η συνάρτηση:

$$H_1^{(1)}(k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \approx -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

όταν  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  παρουσιάζει ισχυρή ιδιομορφία. Κατά συνέπεια το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα (3.101) υπάρχει μόνο κατά την έννοια της κύριας κατά Cauchy τιμής. Όμως αυτό θα συμβεί όταν υπολογίζεται η επαγόμενη κάθετη ταχύτητα (3.101) από το κάθε ευθύγραμμο στοιχείο AB στο κέντρο του, δηλαδή όταν το σημείο στο σχήμα 25 λαμβάνεται στο μέσο M του ίδιου του στοιχείου AB. Όμως, από την ειδική μορφή του ολοκληρώματος (3.101) παρατηρούμε πως οι συνεισφορές από τις κατανεμημένες πηγές εκατέρωθεν του κέντρου του στοιχείου απειρίζονται για  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  (στο μέσον του στοιχείου) αλλά είναι συμμετρικά αντίθετες. Οπότε λόγω συμμετρίας προκύπτει ότι το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα (3.101) ως συνολική συνεισφορά στην κάθετη ταχύτητα στο κέντρο του στοιχείου από τη κατανεμημένη πηγή σταθερής έντασης στο κέντρο του ίδιου στοιχείου θα μηδενίζεται.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, όταν  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  τα ανωτέρω ολοκληρώματα δεν παρουσιάζουν ιδιομορφία και μπορούν να υπολογιστούν με κλασσικές μεθόδους. Στην παρούσα εργασία έχουμε θεωρήσει σκεδαστές-σύνορα σωμάτων πεπερασμένου πάχους (μη λεπτόγραμμα σχήματα) και σχετικά μικρούς κυματαριθμούς, και έχει χρησιμοποιηθεί κανόνας Simpson με δεδομένο (ικανοποιητικά μεγάλο) αριθμό σημείων για το αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Επομένως η κάθετη παράγωγος του πεδίου στο σύνορο από όλη την κατανομή πηγών σταθερής έντασης  $\sigma_i, i=1,2,\dots,N$ , υπολογιζόμενη στα κέντρα  $\mathbf{x}_i, i=1,2,\dots,N$  των στοιχείων θα δίνεται από τη σχέση:

$$g_N(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \sigma_j F_j(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_i \in \partial D_N, \quad i=1,2,\dots,N. \quad (3.102)$$

Που αποτελεί ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα  $N$  εξισώσεων με  $N$  αγνώστους, από όπου υπολογίζεται η ένταση των πηγών  $\sigma_i, i=1,2,\dots,N$ , στα στοιχεία του συνόρου.

Ακολουθώντας το δυναμικό σε κάθε σημείο του χώρου και πάνω στο σύνορο υπολογίζεται με τη βοήθεια των ανωτέρω σχέσεων ως:

$$P_s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \sigma_j U_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D. \quad (3.103)$$

### Πρόβλημα Dirichlet

Στην περίπτωση του προβλήματος Dirichlet χρησιμοποιώντας την σχέση που παρέχει το δυναμικό που προκαλείται από το στοιχειώδες συνοριακό στοιχείο  $AB$  στο σημείο  $x$ , λαμβάνουμε από την υπέρθεση:

$$g^{(D)}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \sigma_j U_j(\mathbf{x}_i) \text{ για } i=1,2,\dots,N, \quad (3.104)$$

όπου

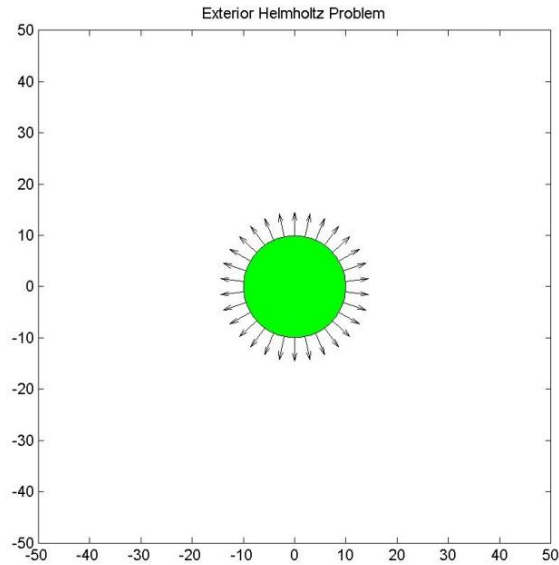
$$g^{(D)}(\mathbf{x}_i) = -P_i(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_i \in \partial D_N, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (3.105)$$

τα δεδομένα Dirichlet πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή.

Στις προαναφερθείσες περιπτώσεις η καταγραφή των δυναμικών σκέδασης που προκαλείται από το κάθε στοιχείο γίνεται διαδοχικά στα παραπάνω αθροίσματα. Ακολουθούμε καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας καταγραφής των αποτελεσμάτων του κάθε στοιχείου τη φορά των δεικτών του ρολογιού, για την επιφάνεια του σκεδαστή. Στο αρχείο Matlab που χρησιμοποιούμε έχουμε ορίσει ως σκεδαστή κυκλικό σώμα ακτίνας  $10m$ , σταθερή ταχύτητα διάδοσης ήχου  $1500m/s$  και συχνότητα  $100Hz$ . Τα αρχεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν: **fhankel.m**, **sourcegh.m**, **helm2d.m**.

Από το πρόγραμμα θα βρούμε το πεδίο δυναμικού σε δύο διαφορετικά προβλήματα:

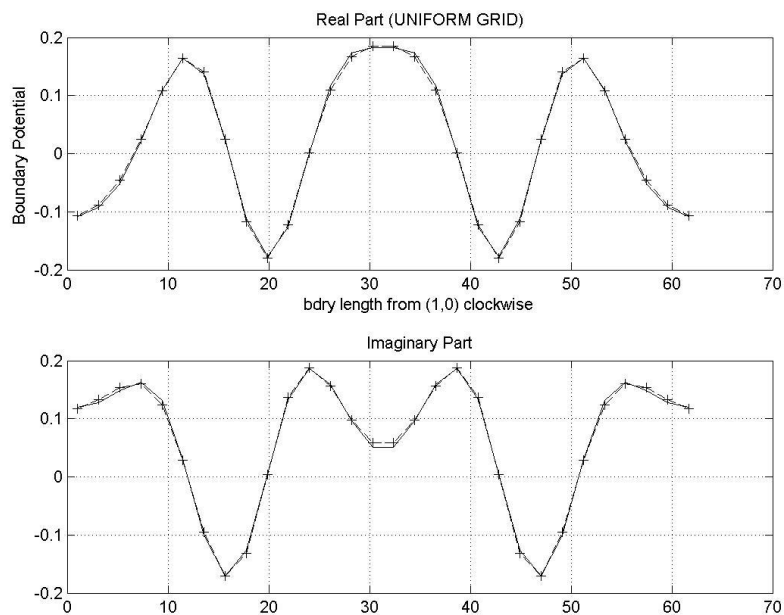
- Πρόβλημα Dirichlet με εισερχόμενο κύμα από πηγή.
- Πρόβλημα Neumann με εισερχόμενο παράλληλο κύμα.



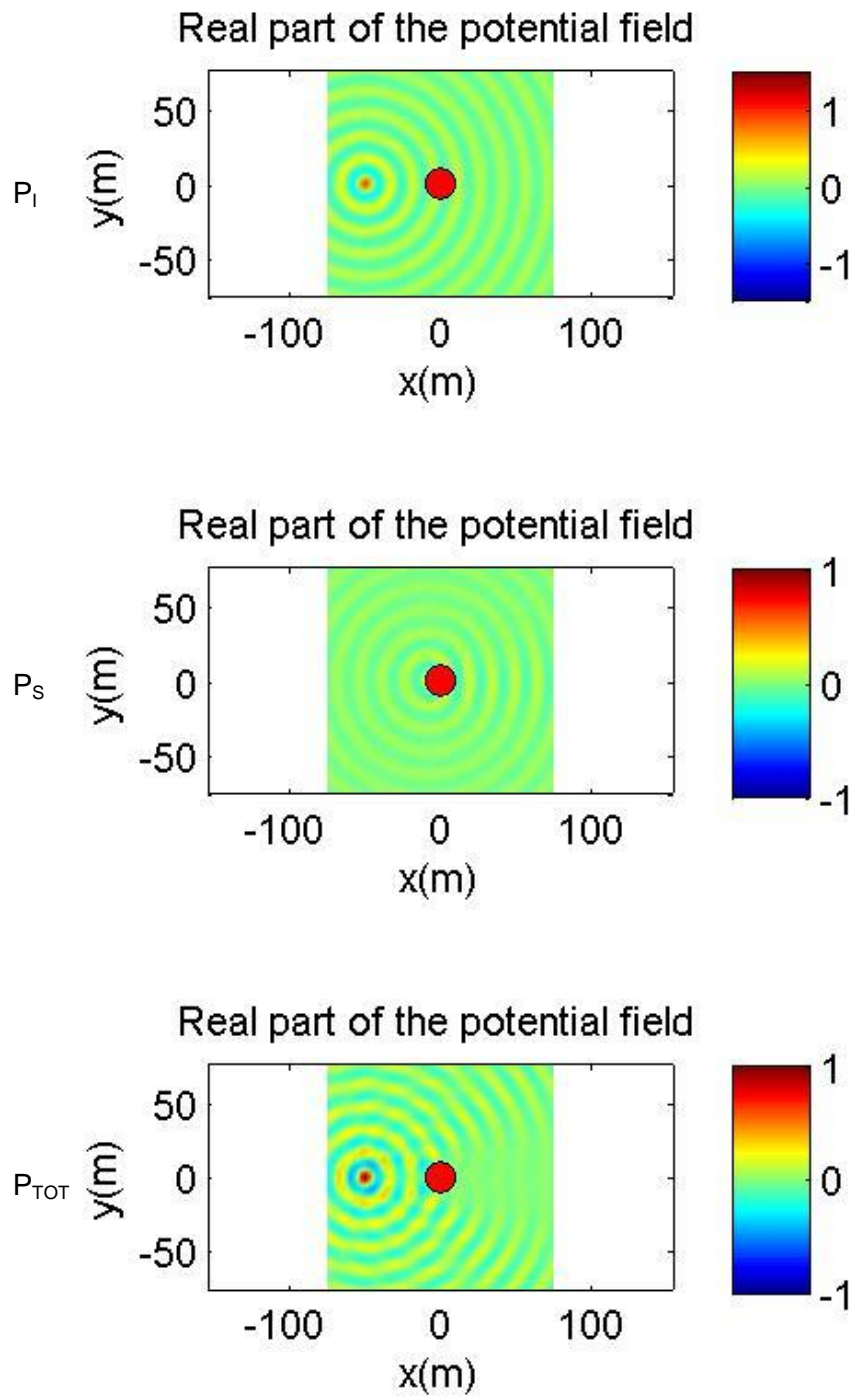
Σχήμα 26. Διάταξη προς τα εξωτερικά του σκεδαστή των κάθετων διανυσμάτων  $n$

Οι συνδυασμοί που παρουσιάζονται είναι μόνο οι δύο από τους τέσσερις δυνατούς. Τα αποτελέσματα στην κάθε περίπτωση ακολουθούν στη συνέχεια:

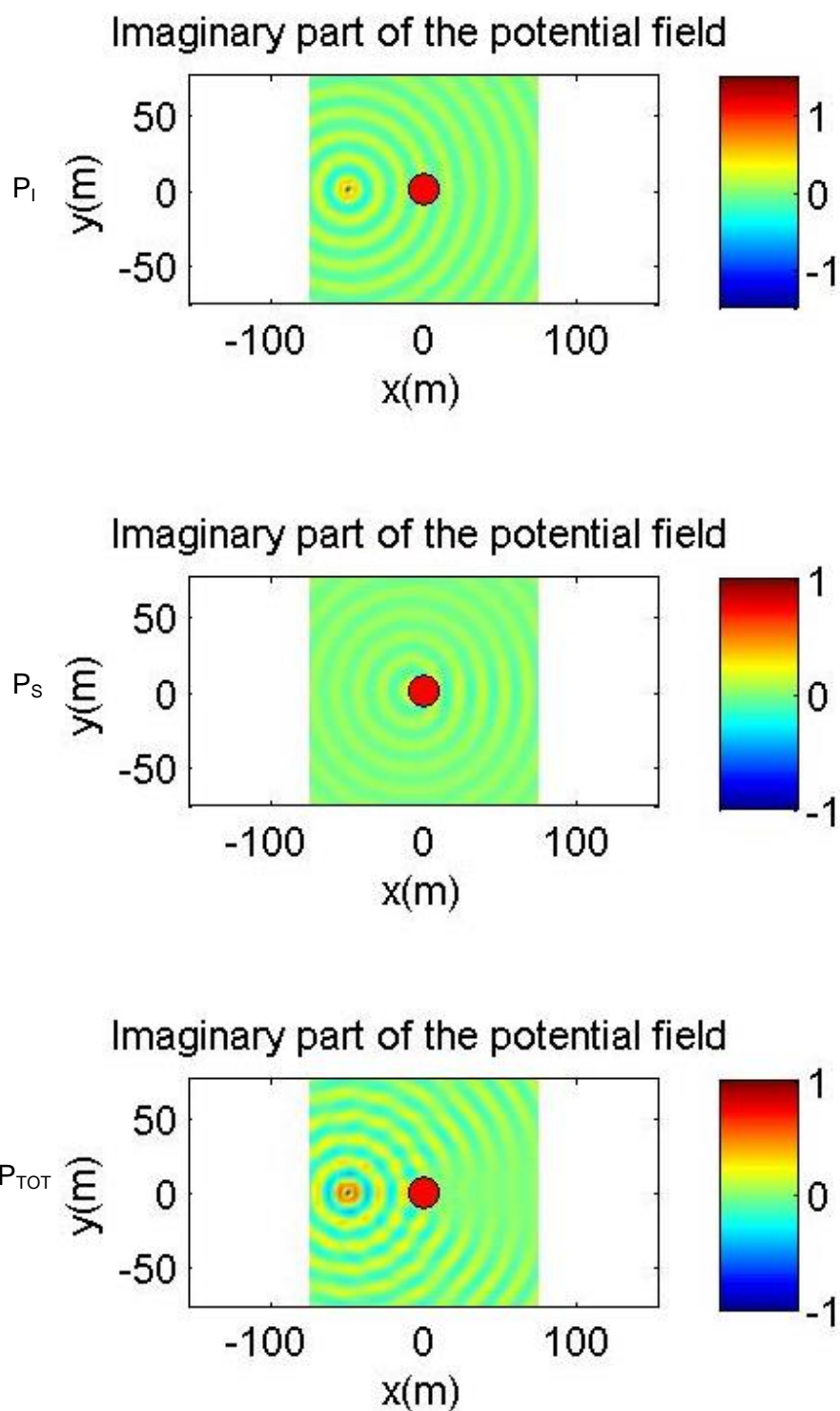
Μαλακός σκεδαστής πεπερασμένων διαστάσεων (πρόβλημα Dirichlet) με πηγή σε απόσταση 50 m



Σχήμα 27. Σύγκριση αναλυτικής (συνεχής γραμμή)-αριθμητικής λύσης (διακεκομμένη γραμμή με (+)) για το πρόβλημα Dirichlet.

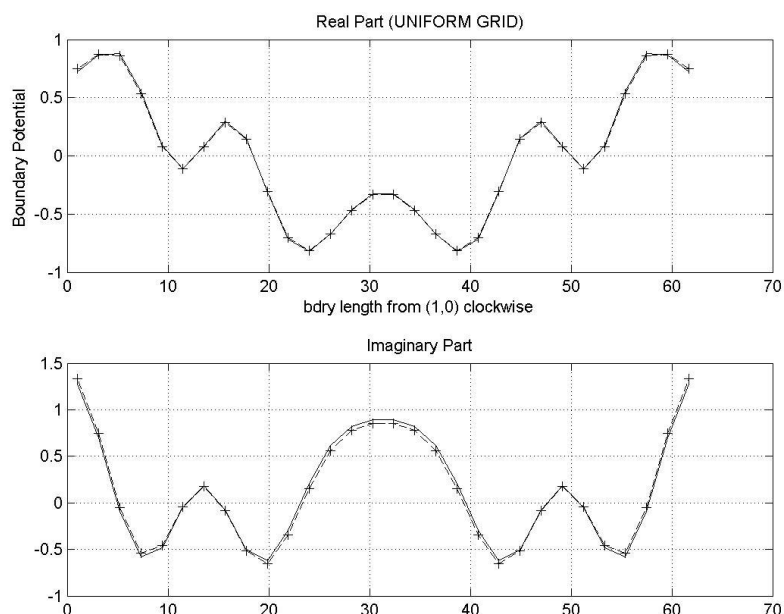


Σχήμα 28α. Αποτελέσματα σε 2D της σκέδασης από μαλακό κυκλικό σκεδαστή (κύμα από πηγή, πραγματικό μέρος προπίπτοντος πεδίου, σκεδαζόμενου πεδίου και συνολικού πεδίου)



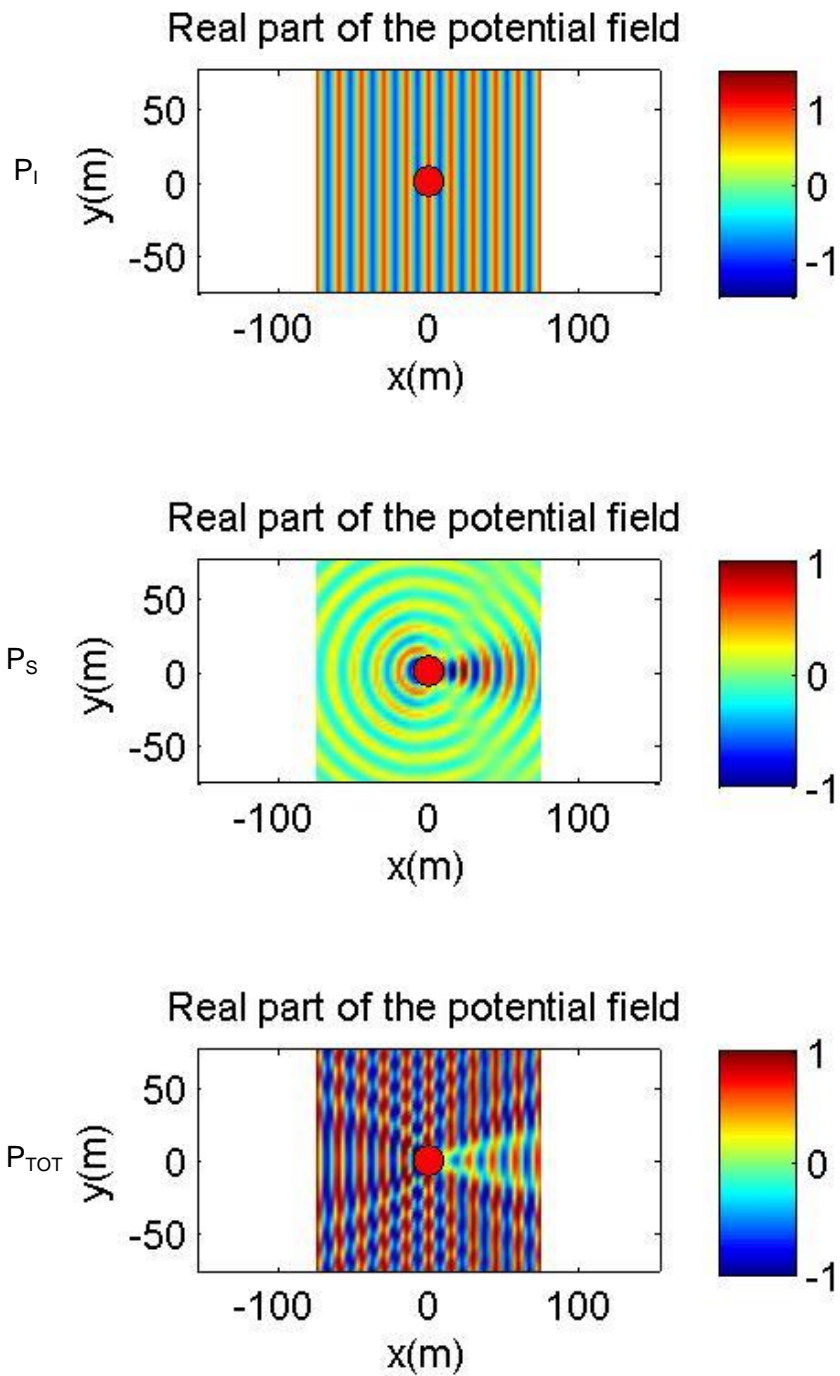
Σχήμα 28β. Αποτελέσματα σε 2D της σκέδασης από μαλακό κυκλικό σκεδαστή (κύμα από πηγή, φανταστικό μέρος προπίπτοντος πεδίου, σκεδαζόμενου πεδίου και συνολικού πεδίου)

Σκληρός σκεδαστής πεπερασμένων διαστάσεων (πρόβλημα Neumann) με παράλληλο κύμα



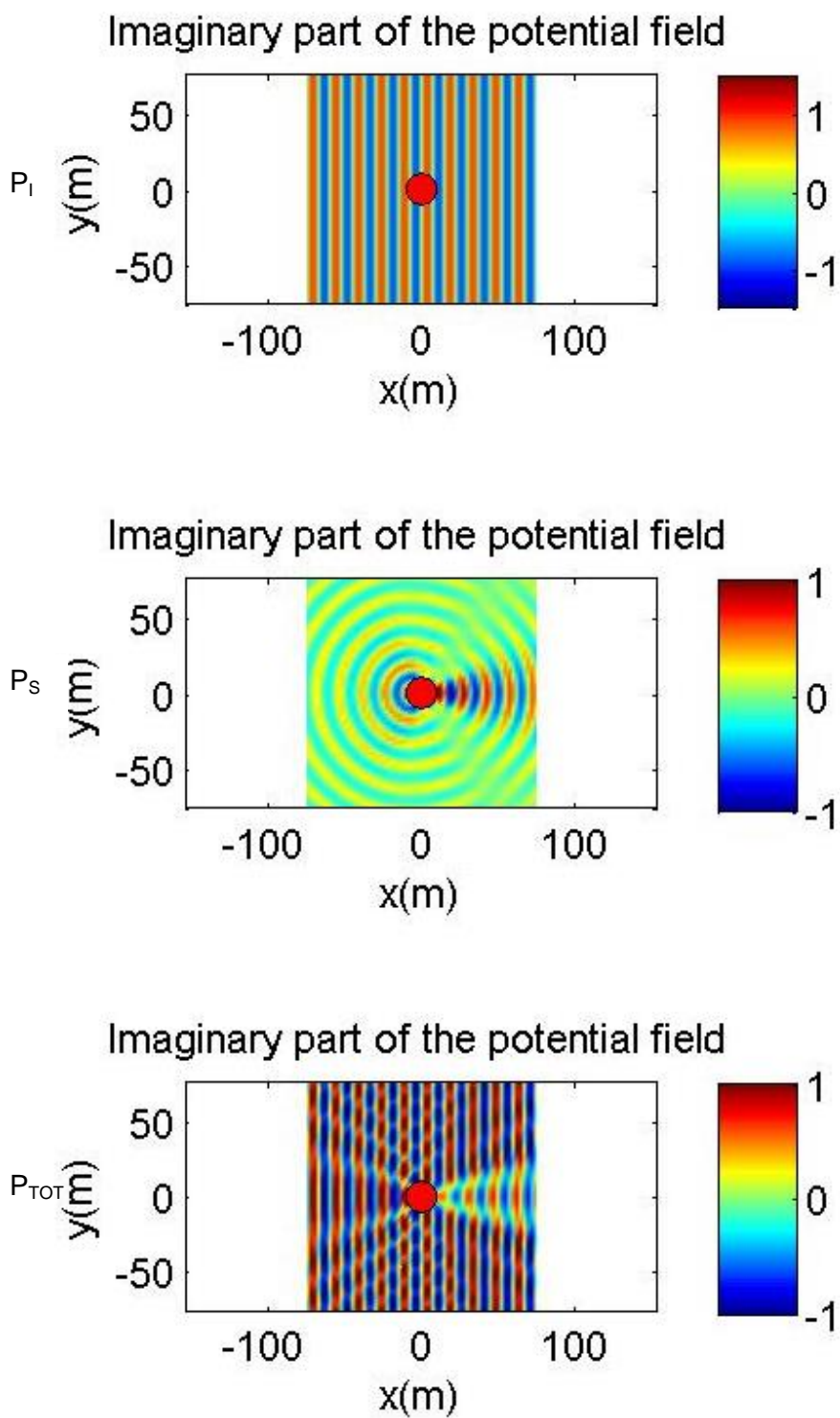
**Σχήμα 29. Σύγκριση αναλυτικής (συνεχής γραμμή)-αριθμητικής λύσης(διακεκομμένη γραμμή με (+)) για το πρόβλημα Neumann**

Στα σχήματα 27 και 29 για τα προβλήματα Dirichlet και Neumann αντίστοιχα, παρατηρούμε πως με τα 30 σε αριθμό στοιχεία που επιλέξαμε για την αριθμητική επίλυση των προβλημάτων, έχουμε ικανοποιητική ταύτιση των αριθμητικών (διακεκομμένη γραμμή με σταυρούς) με τις αναλυτικές λύσεις (συνεχής γραμμή) για το δυναμικό, όσον αφορά το πραγματικό και το φανταστικό του τμήμα. Σε περίπτωση που αποφασίσουμε να αυξήσουμε τον αριθμό των στοιχείων που θα σκιαγραφούν το σύνορο του πεπερασμένου σκεδαστή, αναμένεται βελτιωμένη προσέγγιση της αναλυτικής λύσης. Το αποτέλεσμα μας αποδεικνύει πως η μέθοδος συνοριακών στοιχείων είναι κατάλληλη για την αναζήτηση αριθμητικών λύσεων. Σύγκριση των δυναμικών στο σύνορο της επιφάνειας για σώμα Dirichlet και Neumann δεν είναι δυνατή καθώς το εισερχόμενο κύμα έχει ως προέλευση στην πρώτη περίπτωση σημειακή πηγή ενώ στη δεύτερη είναι παράλληλο κύμα.



Σχήμα 30α. Αποτελέσματα σε 2D της σκέδασης από σκληρό κυκλικό σκεδαστή (παράλληλο κύμα). Πραγματικό μέρος προπίπτοντος πεδίου, σκεδαζόμενου πεδίου και συνολικού πεδίου, αντίστοιχα.

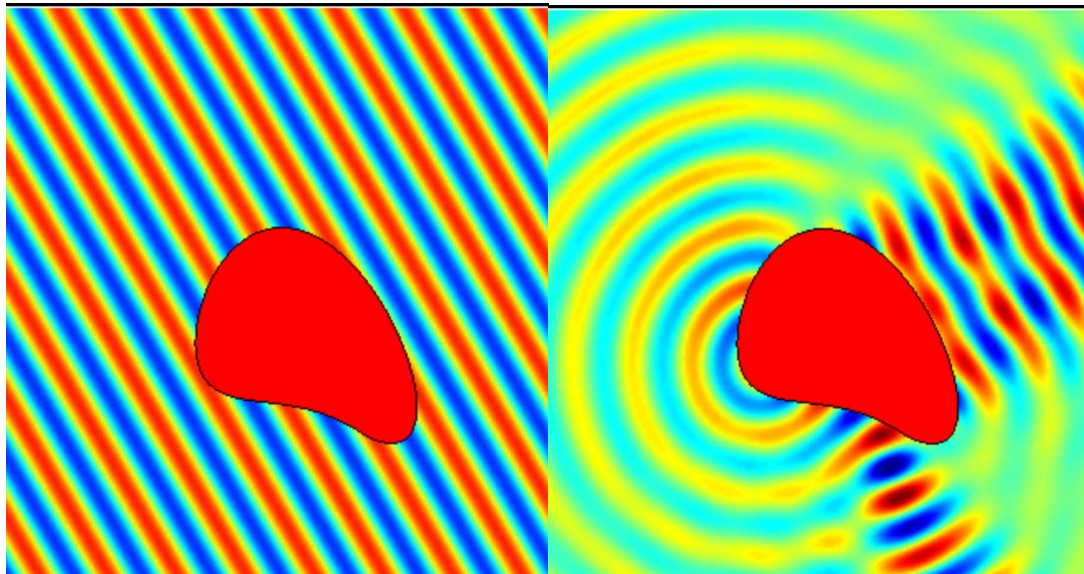




Σχήμα 30β. Αποτελέσματα σε 2D της σκέδασης από σκληρό κυκλικό σκεδαστή (παράλληλο κύμα). Φανταστικό μέρος προπίπτοντος πεδίου, σκεδαζόμενου πεδίου και συνολικού πεδίου, αντίστοιχα.

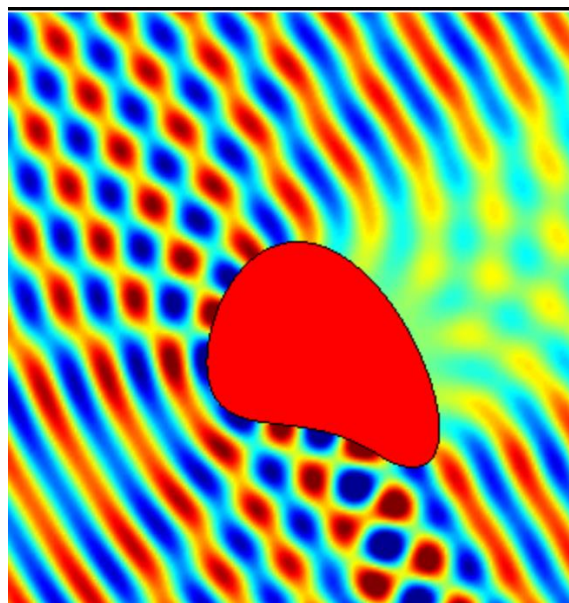
Στα σχήματα 28α και 30α παρατηρούμε το πραγματικό μέρος του πεδίου του δυναμικού. Στις πρώτες γραμμές συναντάμε το πεδίο που δημιουργείται από την πηγή ή το παράλληλο κύμα αντίστοιχα, δηλαδή το εισερχόμενο δυναμικό. Στη δεύτερη γραμμή παρουσιάζεται το δυναμικό σκέδασης του κυκλικού σώματος. Τέλος, στην τρίτη γραμμή παρατηρούμε την υπέρθεση των δύο δυναμικών και τη δημιουργία του συνολικού δυναμικού, και στα δύο σχήματα είναι εμφανής η ζώνη σκίασης που δημιουργείται στο πίσω μέρος του πεπερασμένου σκεδαστή ενώ στην πλευρά πρόσπτωσης έχουμε αύξηση της έντασης του πεδίου λόγω φαινομένων ενισχυτικής συμβολής. Τα ίδια φαινόμενα παρατηρούνται και στα σχήματα 28β και 30 β, όπου απεικονίζεται το φανταστικό μέρος του δυναμικού για εισερχόμενο κύμα από πηγή ή παράλληλο κύμα αντίστοιχα.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει η προαναφερθείσα μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για πεπερασμένο σκεδαστή τυχαίας γεωμετρίας (σχήματος) και όχι μόνο σε κυκλικό σώμα. Τα αποτελέσματα της σκέδασης από τυχαίο σώμα ακολουθούν στη συνέχεια, όπου παρατηρούμε την υπέρθεση του παράλληλου κύματος με του δυναμικού σκέδασης που οδηγεί στο συνολικό δυναμικό της τρίτης εικόνας (βλ. σχήμα 31).



(α) προσπίπτον παράλληλο κύμα

(β) σκεδαζόμενο πεδίο



(γ) συνολικό πεδίο

Σχήμα 31. Αποτελέσματα σε 2D της σκέδασης από σκεδαστή γενικού σχήματος όπως υπολογίζεται με τη μέθοδο BEM (διέγερση από παράλληλο προσπίπτον κύμα)<sup>24</sup>

<sup>24</sup> Φίλιππας Ε, 2011.



# Κεφάλαιο 4

## Πεπερασμένος σκεδαστής μέσα σε κυματοδηγό

### 4.1. Εισαγωγικά στοιχεία

Μέχρι το συγκεκριμένο σημείο έχουμε μελετήσει τη διάδοση του ήχου από πηγή και σε κυματοδηγό, με ομογενές και μη ομογενές μέσο διάδοσης στο κεφάλαιο 2, ενώ αντίστοιχα στο κεφάλαιο 3 μελετήσαμε την αλληλεπίδραση του ήχου σε περιβάλλον όπου υπάρχει πεπερασμένος σκεδαστής, όταν το χωρίο διάδοσης ήταν άπειρο στις 2 διαστάσεις, χωρίς την ύπαρξη συνόρων και περιορισμών.

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη διάδοση του ήχου σε κυματοδηγό με και χωρίς ανομοιόμορφο σύνορο, χωρίς αλλά και με παρουσία πεπερασμένου σκεδαστή. Χάριν απλότητας, θα θεωρήσουμε ότι το περιβάλλον μας θα έχει σταθερή ταχύτητα διάδοσης (isovelocity problem), ώστε τα αποτελέσματα να μην γίνουν υπερβολικά περίπλοκα για τη διεξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων. Δηλαδή θα ισχύει εντός του κυματοδηγού:

$$c = \text{const} \quad \text{και} \quad \frac{\omega}{c} = k = \text{const}$$

Σε όλες τις περιπτώσεις που ακολουθούν το κυματικό δυναμικό θα διεγείρεται από γραμμική πηγή που θα βρίσκεται βυθισμένη στον κυματοδηγό, του οποίου τα χαρακτηριστικά παραμένουν αναλλοίωτα στην εγκάρσια  $y$ -διεύθυνση,.

Αρχικά, στο υποκεφάλαιο 4.2 θα μας απασχολήσει ο ανομοιομορφος κυματοδηγός (π.χ. ρήχωση). Συνεχίζοντας, στο υποκεφάλαιο 4.3 θα ασχοληθούμε με ομοιομορφο κυματοδηγό με παρουσία πεπερασμένου σκεδαστή και θα καταλήξουμε στο υποκεφάλαιο 4.4, στο πιο σύνθετο πρόβλημα αλλά και πιο ρεαλιστικό, ενός ανομοιομορφου κυματοδηγού με ύπαρξη πεπερασμένου σκεδαστή. Όλες οι προηγούμενες περιπτώσεις έχουν προγραμματιστεί στο Matlab και θα παρουσιαστούν αντίστοιχα τα αποτελέσματά τους στο κάθε υποκεφάλαιο.

## 4.2. Επίδραση ανομοιομορφου πυθμένα στη διάδοση ηχητικών κυμάτων

Στην περίπτωση μελέτης κυματοδηγού ανομοιομορφου πυθμένα μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας το πρόβλημα θα επιλυθεί με διαχωρισμό του κυματοδηγού σε τρία υποχωρία. Το πρώτο θα αποτελείται από την περιοχή όπου θα θεωρηθεί η διέγερση από την σημειακή πηγή, στο δεύτερο υποχωρίο θα υπάρχει η ανομοιομορφία πυθμένα, και στο τρίτο υποχωρίο θα έχουμε ομοιομορφο περιβάλλον σταθερού αλλά πιθανώς διαφορετικού βάθους από το πρώτο, όπου συνεχίζεται η διάδοση και πάλι σε ομοιομορφη περιοχή, όπως φαίνεται και στο σχήμα 32 που ακολουθεί (το οποίο αναφέρεται η ειδική περίπτωση ρήχωσης).

### Υποχωρίο (I)

Στο υποχωρίο (I) (αριστερή ημιάπειρη λωρίδα) το συνολικό πεδίο αποτελείται από ένα άθροισμα δύο κυμάτων, ενός κύματος λόγω της εκπομπής της πηγής και του σκεδαζόμενου που επιστρέφει από το υποχωρίο (II) στο (I). Σύμφωνα με το Κεφ.2, η σχέση που παρέχει το πεδίο της πηγής στο σημείο  $(x_s, z_s)$  θα είναι:

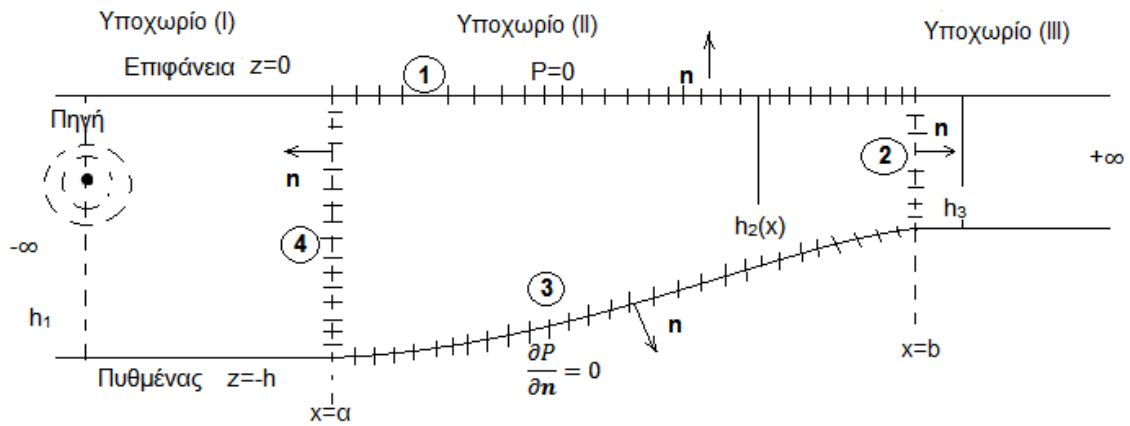
$$G_w(x, z) = \frac{i}{2} \sum_{n=1}^N \tilde{Z}_n(z) \tilde{Z}_n(z_s) \frac{\exp\left(ik_{xn}^{(1)}|x-x_s|\right)}{k_{xn}^{(1)}}, \quad (4.1)$$

όπου  $k_{xn}^{(1)} = \sqrt{k^2 - k_{zn}^2}$ ,  $k_{zn} = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi}{h_1}$  και

$$\tilde{Z}_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{h_1}} \sin\left(k_{zn}^{(1)}z\right),^{25}$$

οι κανονικοποιημένες κατακόρυφες ιδιομορφές στην περιοχή (I).

<sup>25</sup> Ο εκάστοτε άνω δείκτης σε παρένθεση συμβολίζει το υποχωρίο όπου εργαζόμαστε.



Σχήμα 32. Ανομοιόμορφος κυματοδηγός

Αντίστοιχα, το πεδίο λόγω σκέδασης (από την αλληλεπίδραση με την μεταβαλλόμενη βαθυμετρία, π.χ. ρήχωση) θα έχει τη μορφή ενός κύματος που ανακλάται και επιστρέφει στην περιοχή (I):

$$\Phi_{scat}^{(1)}(x, z) = \sum_{n=1}^N C_n^{(1)} \tilde{Z}_n^{(1)}(z) \exp(-ik_{xn}^{(1)} x), \quad (4.2)$$

όπου  $C_n^{(1)}$  είναι απροσδιόριστοι συντελεστές της ανωτέρω αναπαράστασης που πρόκειται να υπολογιστούν. Το αρνητικό πρόσημο μέσα στον εκθετικό όρο δείχνει την κατεύθυνση του κύματος προς τον αρνητικό ημιάπειρο χώρο εντός του κυματοδηγού.

Το ολικό δυναμικό στο υποχωρίο (I) θα παρέχεται από το άθροισμα των πεδίων(4.1) και (4.2):

$$P_I(x, z) = G_w(x, z) + \Phi_{scat}^{(1)}(x, z), \quad (4.3)$$

### Υποχωρίο (III)

Στη δεξιά ημιάπειρη λωρίδα θα υπάρχει μόνο η διάδοση του πεδίου που έχει δεχθεί τις επιδράσεις σκέδασης από την περιοχή ρήχωσης το οποίο διαδίδεται προς τα θετικά x σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή. Το πεδίο στην περιοχή αυτή θα δίνεται από την συνάρτηση:

$$P_{III}(x, z) = \sum_{n=1}^N C_n^{(3)} \tilde{Z}_n^{(3)}(z) \exp(ik_{xn}^{(3)} x), \quad (4.4)$$

όπου  $C_n^{(3)}$  είναι επίσης απροσδιόριστοι συντελεστές που πρόκειται να υπολογιστούν.

Στο υποχωρίο (III) το δυναμικό σκέδασης και διάδοσης ( $P_{III}(x, z)$ ) θα αντιστοιχεί στο ολικό δυναμικό καθώς δεν υπάρχει άλλο πέρα από το σκεδαζόμενο.

$$P_{III}(x, z) = P_T. \quad (4.5)$$

### Υποχωρίο (II)

Η πιο απαιτητική σε υπολογισμούς περιοχή του κυματοδηγού είναι η (II), καθώς εκεί παρουσιάζεται η μεταβαλλόμενη βαθυμετρία και άρα η ανομοιομορφία του περιβάλλοντος. Αυτός είναι και ο λόγος που αφέθηκε να αναφερθεί στο τέλος από τους ευκολότερους (I) και (III) υπόχωρους. Για τη μελέτη της ενδιάμεσης περιοχής θα χρησιμοποιηθεί η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (BEM), που έχουμε μελετήσει την εφαρμογή της στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου σε προβλήματα σκέδασης σε άπειρο εξωτερικό χωρίο. Όπως γίνεται φανερό (βλ. σχήμα 32), η ενδιάμεση περιοχή θα χωρισθεί σε  $N_{elem}$  στοιχεία που θα αντιστοιχούν στο άθροισμα των συνοριακών στοιχείων της κάθε μια από τις τέσσερις συνολικά επιφάνειες που περικλείουν το υποχωρίο (II):

$$N_{elem} = N_1 + N_2 + N_3 + N_4, \quad (4.6)$$

όπου  $N_1, N_2, N_3, N_4$  είναι αντίστοιχα τα συνοριακά στοιχεία των συνόρων  $\partial D_1$  (ελ. επιφάνεια),  $\partial D_2$  (έξοδος),  $\partial D_3$  (πυθμένας) και  $\partial D_4$  (είσοδος – προσπίπτων κυματισμός), αντίστοιχα.

Στο υποχωρίο (II) δεν υπάρχει πηγή, άρα η διάδοση του κύματος περιγράφεται από την ομογενή εξίσωση Helmholtz<sup>26</sup>:

$$\Delta P + k^2 P = 0, \quad (4.7)$$

ενώ η επίδραση του άνω συνόρου (ελ. επιφάνεια) και κάτω συνόρου (πυθμένας) θα λαμβάνεται υπόψη από τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες:

$$P = 0, \text{ για } x \in \partial D_F \text{ δηλαδή } (z = 0), \quad (4.8)$$

και

---

<sup>26</sup> Το σύμβολο που θα χρησιμοποιηθεί για το ολικό δυναμικό του υποχωρίου (II) θα είναι το  $P$  χωρίς κάποιον άλλο δείκτη.



$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0, \text{ για } \mathbf{x} \in \partial D_B \text{ (} z = -h \text{)}. \quad (4.9)$$

Χρησιμοποιώντας το δυναμικό απλού στρώματος θα έχουμε τη ολοκληρωτική αναπαράσταση του δυναμικού σε όλο το υποχωρίο (II), να δίνεται από τη σχέση:

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \text{ για } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D. \quad (4.10)$$

Γνωρίζουμε πως η διαφορίση της (4.10) παρέχει την παράγωγο της ακουστικής πίσης που είναι ανάλογη της ακουστικής ταχύτητας, και η αντίστοιχη σχέση παρουσιάζει ιδιομορφία καθώς προσεγγίζουμε το σύνορο του χώρου, και άρα:

$$\nabla P = \begin{cases} \nabla_x \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \nabla_x G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), & \text{για } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \\ \frac{\sigma(\mathbf{x}) \mathbf{n}}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \nabla_x G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), & \text{για } \mathbf{x} \in \partial D \end{cases}. \quad (4.11)$$

Συνεχίζοντας υπολογίζουμε για σημεία  $\mathbf{x} \in \partial D$  το εσωτερικό γινόμενο της (4.11) με το κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  και καταλήγουμε στη σχέση:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_{\partial D} \equiv \mathbf{n} \nabla P = \frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \mathbf{n} \nabla_x G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad (4.12)$$

όπου ο όρος  $\mathbf{n} \nabla_x G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{\partial G}{\partial n}$  δηλώνει την κάθετη παράγωγο της συνάρτησης Green.

Με χρήση των σχέσεων (4.8), (4.9) και των (4.10) και (4.12) διατυπώνουμε τις συνοριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια και των πυθμένα στον υποχωρίο (II).

Η συνθήκη μαλακού συνόρου (ομογενής Dirichlet) που θα ισχύει στην ελεύθερη επιφάνεια είναι:

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = 0, \text{ για } \mathbf{x} \in \partial D_1. \quad (4.13)$$

Αντίστοιχα, για τον πυθμένα θεωρούμε ως απόλυτα συμπαγή θα ισχύει η συνθήκη σκληρού συνόρου (ομογενής Neumann) που είναι:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_{\partial D_3} \equiv \mathbf{n} \nabla P = \frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D_3} \sigma(\mathbf{y}) \mathbf{n} \nabla_x G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = 0, \text{ για } \mathbf{x} \in \partial D_3. \quad (4.14)$$

Τέλος, θα χρειαστούν σχέσεις που θα ικανοποιούν την ομαλή σύνδεση (συνέχεια τιμής και παραγώγου) του πεδίου μεταξύ των υποχωρίων (I) και (II), καθώς και μεταξύ των υποχωρίων (II) και (III) πάνω στις κατακόρυφες διεπιφάνειες  $x = a$  και  $x = b$ , οι οποίες εικονίζονται με διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα 32.

Στην πρώτη κατακόρυφη διεπιφάνεια στο  $x = a$  ( $\partial D_4$ ), οι σχέσεις συναρμογής θα λαμβάνουν την παρακάτω μορφή ώστε να εξασφαλιστεί η συνέχεια του δυναμικού:

$$P(a, z) = P_I(a, z), \text{ για } x = a \text{ και } -h(a) = -h_1 < z < 0, \quad (4.15)$$

και

$$\frac{\partial P}{\partial n}(a, z) = \frac{\partial P_I}{\partial n}(a, z) = -\frac{\partial P_I}{\partial x}(a, z), \text{ για } x = a \text{ και } -h(a) = -h_1 < z < 0. \quad (4.16)$$

Οι ανωτέρω σχέσεις θα εφαρμοσθούν στα κέντρα  $z_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_4$ , των συνοριακών στοιχείων (collocation points) στο κατακόρυφο σύνορο-διεπιφάνεια  $x = a$ . Η παράγωγος ως προς το  $x$  εμφανίζει αρνητικό πρόσημο καθώς το  $x$  έχει αντίθετη φορά από το μοναδιαίο διάνυσμα  $n$ .

Με αντικατάσταση των σχέσεων (4.1) και (4.2) στις (4.15) και (4.16) βρίσκουμε τις παρακάτω σχέσεις συναρμογής:

$$\int_{\partial D_4} \sigma(y) G(x|y) ds(y) = \frac{i}{2} \sum_{n=1} \tilde{Z}_n^{(1)}(z) \tilde{Z}_n^{(1)}(z_s) \frac{\exp\left(ik_{xn}^{(1)}|a - x_s|\right)}{k_{xn}^{(1)}} + \sum_{n=1}^{N_4} C_n^{(1)} \tilde{Z}_n^{(1)}(z) \exp\left(-ik_{xn}^{(1)}a\right), \quad (4.17)$$

όπου  $(x_s, z_s)$  η θέση της πηγής, και

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_I}{\partial n} \Big|_{\partial D_4} &= n \nabla P_I \Big|_{\partial D_4} = \frac{\sigma(x)}{2} + \int_{\partial D_4} \sigma(y) n \nabla G(x|y) ds(y) = -\frac{\partial P_I}{\partial x} \equiv \\ &\equiv -\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=1} Z_n^{(1)}(z) Z_n^{(1)}(z_s) \exp\left(ik_{xn}^{(1)}(a - x_s)\right) - i \sum_{n=1} C_n^{(1)} k_{xn}^{(1)} Z_n^{(1)}(z) \exp\left(-ik_{xn}^{(1)}a\right) \right\}. \quad (4.18) \end{aligned}$$

Για να βρούμε την τιμή του όρου  $C_n^{(1)}$  θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η σχέση απαλειφής:

$$\mathbb{C}_n^{(1)} = \frac{\langle P(a, z), \tilde{Z}_n^{(1)} \rangle}{\exp(-ik_{xn}^{(1)}a)}, \quad (4.19)$$

όπου  $\langle P(a, z), \tilde{Z}_n^{(1)} \rangle = \int_{-h_1}^0 P(a, z) \tilde{Z}_n^{(1)} dz = \delta_{nm}$ .

Απόδειξη: Ξεκινώντας από το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle \Phi^{(1)}(a, z), \tilde{Z}_n^{(1)} \rangle = \langle P(a, z), \tilde{Z}_n^{(1)} \rangle$$

και αντικαθιστώντας το δυναμικό  $\Phi^{(1)}(a, z)$  από τη σχέση (4.2) θα βρούμε για  $n = m$  μοναδική τιμή καθώς για κάθε άλλη τιμή το  $\delta_{nm} = 0$ , δηλαδή

$$\langle P(a, z), \tilde{Z}_n^{(1)} \rangle = \mathbb{C}_n^{(1)} \exp(-ik_{xn}^{(1)}a),$$

καταλήγοντας στη σχέση:

$$\mathbb{C}_n^{(1)} = \frac{\langle P(a, z), \tilde{Z}_n^{(1)} \rangle}{\exp(-ik_{xn}^{(1)}a)}.$$

Αξιοποιώντας τη σχέση (4.19) θα βρούμε τις τελικές μορφές των σχέσεων συναρμογής στη κατακόρυφη διεπιφάνεια  $x = a$ .

$$\begin{aligned} P(a, z) - \sum_{n=1} \tilde{Z}_n^{(1)}(z) \int_{-h_1}^0 P(a, z) \tilde{Z}_n^{(1)}(z) dz = \\ = \frac{i}{2} \sum_{n=1} \tilde{Z}_n^{(1)}(z) \tilde{Z}_n^{(1)}(z_s) \frac{\exp(ik_{xn}^{(1)}|a - x_s|)}{k_{xn}^{(1)}}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

με το  $P(a, z) = \sum_{k=1}^N \sigma_k U_k(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \partial D_4$ ,  $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ , από τη σχέση (3.103).

Περαιτέρω, έχοντας ως αφετηρία τη σχέση (4.15) ξεκινάμε τις αντικαταστάσεις από τις (4.1) και (4.2) και βρίσκουμε:

$$P(a, z) - \sum_{n=1} \tilde{Z}_n^{(1)}(z) \left\{ \frac{i}{2} \tilde{Z}_n^{(1)}(z_s) \frac{\exp(ik_{xn}^{(1)}|a - x_s|)}{k_{xn}^{(1)}} + \exp(-ik_{xn}^{(1)}a) \mathbb{C}_n^{(1)} \right\} = 0$$

Συνεχίζουμε με αντικατάσταση της τιμής  $\mathbb{C}_n^{(1)}$  από τη σχέση (4.19):

$$P(a, z) - \sum_{n=1} \tilde{Z}_n^{(1)}(z) \left\{ \frac{i}{2} \tilde{Z}_n^{(1)}(z_s) \frac{\exp\left(ik_{xn}^{(1)}|a-x_s|\right)}{k_{xn}^{(1)}} + \langle P(a, z), \tilde{Z}_n^{(1)} \rangle \right\} = 0$$

$$P(a, z) - \sum_{n=1} \tilde{Z}_n^{(1)}(z) \left\{ \frac{i}{2} \tilde{Z}_n^{(1)}(z_s) \frac{\exp\left(ik_{xn}^{(1)}|a-x_s|\right)}{k_{xn}^{(1)}} + \int_{-h_1}^0 P(a, z_n) \tilde{Z}_n^{(1)}(z) dz \right\} = 0$$

Η μορφή της σχέσης συναρμογής, που εμπλέκει το πεδίο και τη κάθετη παραγωγό του πάνω στην διεπιφάνεια  $x = a$ , δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\partial P}{\partial n}(a, z) - i \sum_{n=1} k_{xn}^{(1)} \tilde{Z}_n^{(1)}(z) \langle P(a, z), \tilde{Z}_n^{(1)} \rangle = \sum_{n=1} \tilde{Z}_n^{(1)}(z) \tilde{Z}_n^{(1)}(z_s) \frac{\exp\left(ik_{xn}^{(1)}(a-x_s)\right)}{2} \quad (4.21)$$

Απόδειξη: Με αφητηρία τη σχέση (4.16) και αντικατάσταση των (4.1) και (4.2) θα οδηγηθούμε στην εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial n}(a, z) + \sum_{n=1} \tilde{Z}_n^{(1)}(z) \tilde{Z}_n^{(1)}(z_s) \frac{i}{2} k_{xn} \frac{\exp\left(ik_{xn}^{(1)}(a-x_s)\right)}{k_{xn}^{(1)}} + \\ + \sum_{n=1} \mathbb{C}_n^{(1)} (-i) \tilde{Z}_n^{(1)}(z) k_{xn}^{(1)} \exp\left(-ik_{xn}^{(1)}a\right) = 0. \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης που έχουμε για το  $\mathbb{C}_n^{(1)}$ , καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση (4.21).

Η ανωτέρω συνθήκη εξασφαλίζει τη συναρμογή του πεδίου στη κατακόρυφη διεπιφάνεια  $\partial D_4$  και στην κατασκευή του αριθμητικού σχήματος θα επιλεγεί η ικανοποίηση της στα σημεία  $z_k, k = 1, 2, \dots, N_4$  κέντρα των συνοριακών στοιχείων στο διάστημα  $-h(a) < z < 0, x = a$ .

Αντίστοιχα, στο δεύτερο κατακόρυφο σύνορο διεπιφανειών  $x = b$  ( $\partial D_2$ -έξοδος), θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις συναρμογής:

$$P(b, z) = P_{III}(b, z), \text{ για } x = b \text{ και } -h(b) = -h_2 < z < 0, \quad (4.22)$$

και

$$\frac{\partial P}{\partial n}(b, z) = \frac{\partial P_{III}}{\partial n}(b, z) = \frac{\partial P_{III}}{\partial x}(b, z), \text{ για } x = b \text{ και } -h(b) = -h_2 < z < 0. \quad (4.23)$$

Αντικαθιστώντας την (4.3) στις (4.22) και (4.23) σχέσεις θα βρούμε τις εξισώσεις συναρμογής για το σύνορο διεπιφανειών  $\partial D_2$ :

$$\int_{\partial D_2} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = \sum_{n=1} \mathbb{C}_n^{(3)} \tilde{Z}_n^{(3)}(z) \exp(ik_{xn}^{(3)}b), \quad (4.24)$$

και

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P_{III}}{\partial n} \right|_{\partial D_2} &= \mathbf{n} \nabla P_{III} \Big|_{\partial D_2} = \frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D_2} \sigma(\mathbf{y}) \mathbf{n} \nabla G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = \frac{\partial P_{III}}{\partial x} \equiv \\ &\equiv i \sum_{n=1} \mathbb{C}_n^{(3)} k_{xn}^{(3)} \tilde{Z}_n^{(3)}(z) \exp(ik_{xn}^{(3)}b). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Για την εύρεση του  $\mathbb{C}_n^{(3)}$  θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η σχέση:

$$\mathbb{C}_n^{(3)} = \frac{\langle P(b, z), \tilde{Z}_n^{(3)} \rangle}{\exp(ik_{xn}^{(3)}b)}, \quad (4.26)$$

$$\text{όπου } \langle P(b, z), \tilde{Z}_n^{(3)} \rangle = \int_{-h_3}^0 P(b, z) \tilde{Z}_n^{(3)} dz .$$

Απόδειξη: Ξεκινώντας από το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle P^{(3)}(b, z), \tilde{Z}_n^{(3)} \rangle = \langle P(b, z), \tilde{Z}_n^{(3)} \rangle$$

Και αντικαθιστώντας το δυναμικό  $P^{(3)}(b, z)$  από τη σχέση (4.4) θα βρούμε

$$\langle P(b, z), \tilde{Z}_n^{(3)} \rangle = \mathbb{C}_n^{(3)} \exp(ik_{xn}^{(3)}b)$$

καταλήγοντας στη σχέση:

$$\mathbb{C}_n^{(3)} = \frac{\langle P(b, z), \tilde{Z}_n^{(3)} \rangle}{\exp(ik_{xn}^{(3)}b)} .$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (4.22) και (4.26) οδηγούμαστε στη σχέση συναρμογής:

$$P(b, z) - \sum_{n=1} \tilde{Z}_n^{(3)}(z) \int_{-h_3}^0 P(b, z) \tilde{Z}_n^{(3)}(z) dz = 0, \quad (4.27)$$

με το  $P(b, z) = \sum_{k=1}^N \sigma_k U_k(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \partial D_2$  από τη σχέση (3.103),

και  $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$  ο συνολικός αριθμός συνοριακών στοιχείων που καλύπτει στο σύνορο της ενδιαμέσης περιοχής.

Απόδειξη: Έχοντας ως αφετηρία τη σχέση (4.22) και αντικαθιστώντας την (4.4) θα οδηγηθούμε στην εξίσωση:

$$P(b, z) - \sum_{n=1} \mathbb{C}_n^{(3)} \tilde{Z}_n^{(3)}(z) \exp(ik_{xn}^{(3)} b) = 0$$

Με χρήση της (4.26) στην παραπάνω εξίσωση καταλήγουμε στη:

$$P(b, z) - \sum_{n=1} \tilde{Z}_n^{(3)}(z) \langle P(b, z), \tilde{Z}_n^{(3)} \rangle = 0.$$

Αντίστοιχα, με συνδυασμό των σχέσεων (4.23) και (4.26) προκύπτει η μορφή της σχέσης συναρμογής, που εμπλέκει το πεδίο και τη κάθετη παραγωγό του πάνω στην διεπιφάνεια  $\partial D_2$  ( $x = b$ ), η οποία δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\partial P}{\partial n}(b, z) - i \sum_{n=1} k_{xn}^{(3)} \tilde{Z}_n^{(3)}(z) \int_{-h_3} P(b, z) \tilde{Z}_n^{(3)}(z) dz = 0. \quad (4.28)$$

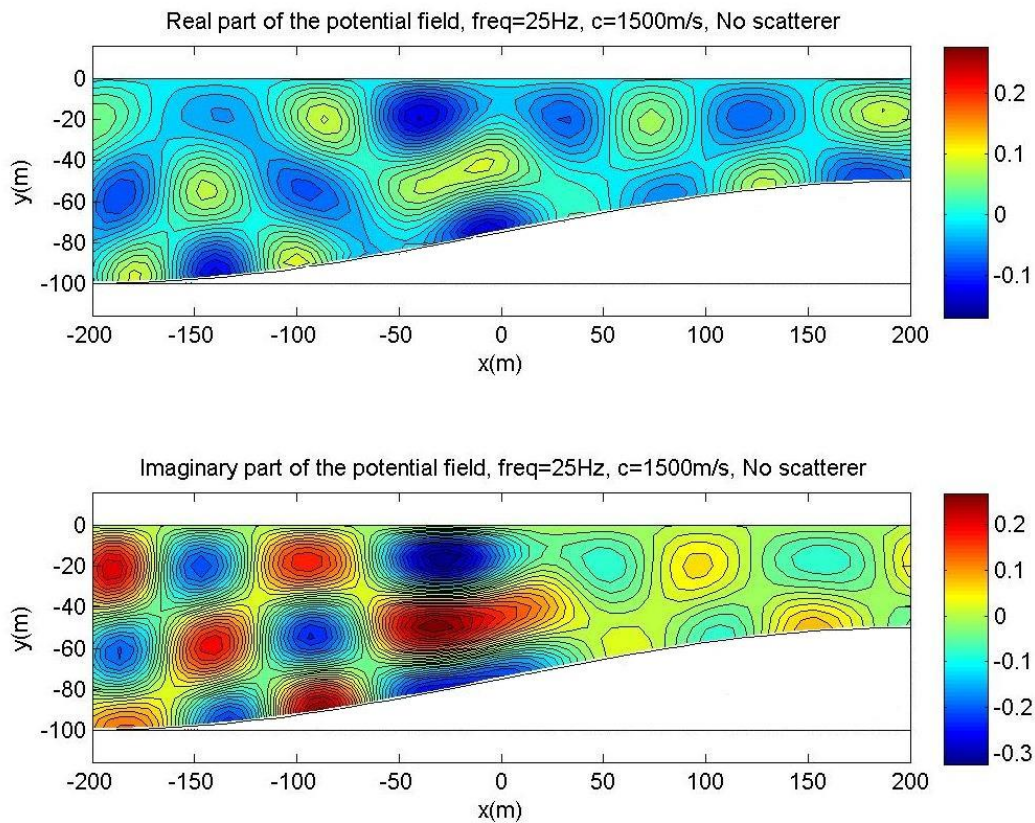
Απόδειξη: Με αφετηρία τη σχέση (4.23) και αντικαθιστώντας την (4.4) θα οδηγηθούμε στην εξίσωση:

$$\frac{\partial P}{\partial n}(b, z) - \sum_{n=1} ik_{xn}^{(3)} \tilde{Z}_n^{(3)}(z) \mathbb{C}_n^{(3)} \exp(ik_{xn}^{(3)} b) = 0$$

Από τη σχέση (4.26) αντικαθιστούμε τη  $\mathbb{C}_n^{(3)}$  φτάνοντας στη (4.28).

Η ανωτέρω συνθήκη εξασφαλίζει τη συναρμογή του πεδίου στη κατακόρυφη διεπιφάνεια  $\partial D_2$  και στην κατασκευή του αριθμητικού σχήματος θα επιλεγεί η ικανοποίηση της στα σημεία  $z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_2$  κέντρα των συνοριακών στοιχείων στο διάστημα  $-h(b) < z < 0$ ,  $x = b$ .

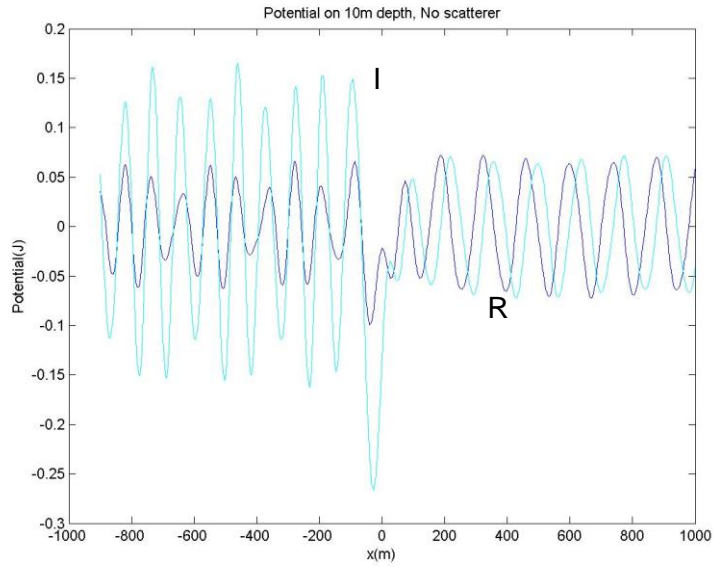
Με χρήση του προγράμματος Matlab και συγκεκριμένα των αρχείων: **cresol.m**, **geom.m**, **sourcegh.m**, **fankel.m**, **helm2db.m**. Εισάγοντας τιμές: συχνότητας  $f = 25\text{Hz}$ , ταχύτητας ήχου στο θαλάσσιο περιβάλλον  $c = 1500\text{m/s}$ , μεγίστου βάθους  $h_1 = 100\text{m}$ , ελαχίστου βάθους  $h_3 = 50\text{m}$  λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:



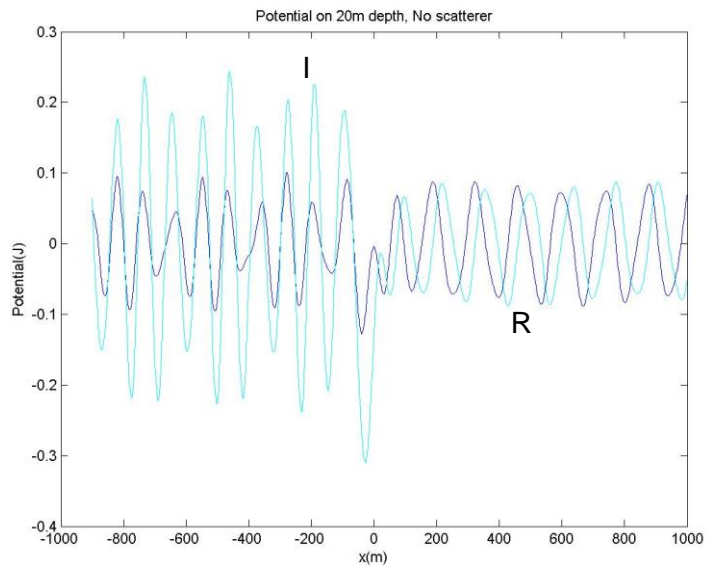
Σχήμα 33. Αναπαράσταση του δυναμικού χωρίς την ύπαρξη πεπερασμένου σκεδαστή για μήκος 400m.

Μελετώντας το σχήμα 33, διακρίνουμε πως αρχικά στη διάδοση του ηχητικού κύματος υπάρχουν τρεις ιδιομορφές στα 100m για τη συχνότητα 25Hz, όπως προβλέπει και η θεωρία που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2. Στη συνέχεια κατά τη διάρκεια της ρήχωσης έχουμε μια συμπίεση των γραμμών δυναμικού που οδηγεί τελικά στην απώλεια μιας ιδιομορφής για το βάθος των 50m. Στην επιφάνεια του κυματοδηγού διακρίνουμε χαρακτηριστικά τις δυναμικές γραμμές να είναι παράλληλες με την επιφάνεια, δηλαδή εφαρμόζεται η συνθήκη Dirichlet, αντίστοιχα στον πυθμένα με την εφαρμογή της συνθήκης Neumann οι δυναμικές γραμμές έχουν στραφεί κάθετα προς αυτόν. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί πως, από τον επιβλέπωντα καθηγητή (Κ. Α. Μπελιμπασάκη), έχει πραγματοποιηθεί σύγκριση με καλή συσχέτιση αποτελεσμάτων της προαναφερθείσας μεθόδου με τη μέθοδο συζευγμένων ιδιομορφών.<sup>27</sup>

<sup>27</sup> Athanassoulis G.A. et al, 2008, p. 83-116.  
Belibassakis K.A. & Athanassoulis G.A., 2014.

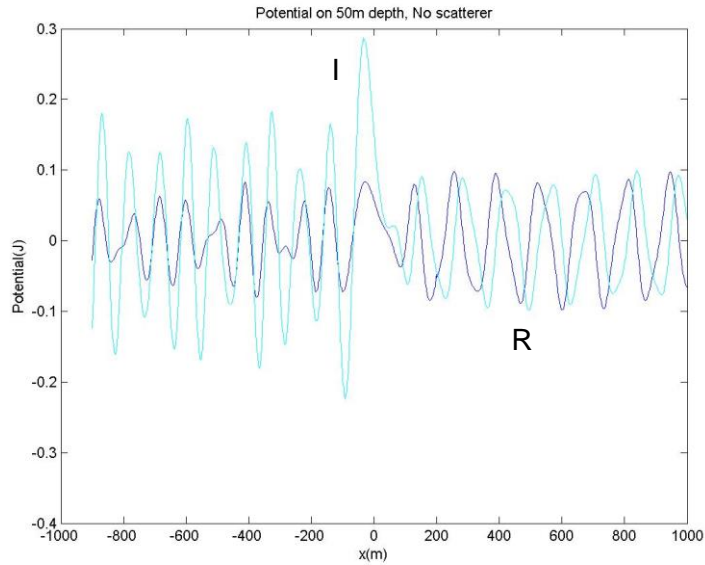


Σχήμα 34. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού σε βάθος 10m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).



Σχήμα 35. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού για βάθος 20m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).





**Σχήμα 36. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού για βάθος 50m(real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα) .**

Κατά τη διάρκεια της μελέτης του δυναμικού για όλο το μήκος του κυματοδηγού (βλ. σχήμα 34, 35, 36), παρατηρούμε στη θέση  $x = 0m$  και γενικότερα στην περιοχή της ρήγωσης μια έντονη μεταβολή, η οποία ομαλοποιείται προς το υποχωρίο (III). Αντίθετα, στο υποχωρίο (I) όπου υπάρχει η πηγή αλλά και το σκεδαζόμενο κύμα παρατηρείται μια μεγαλύτερη ανωμαλία στις καμπύλες και συγκεκριμένα στην αναπαράσταση του πραγματικού μέρους.

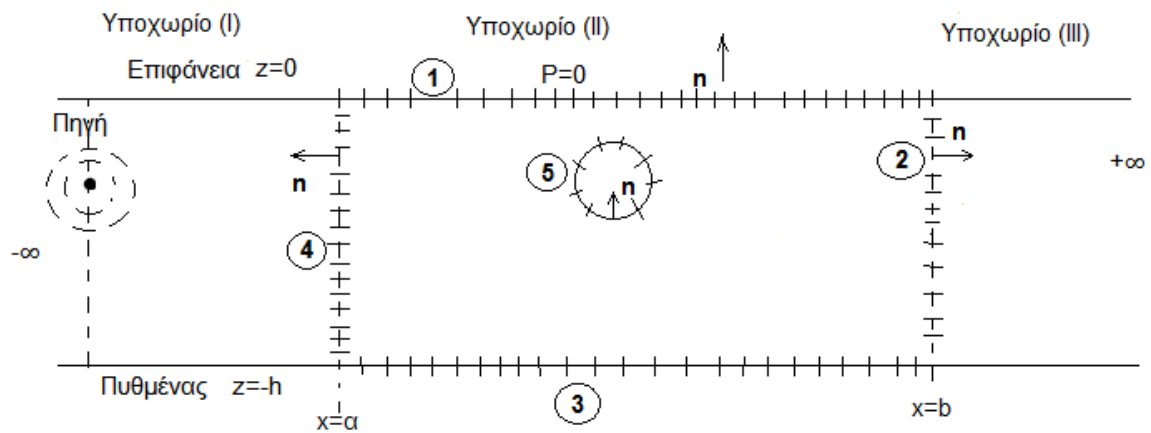
### 4.3. Επίδραση πεπερασμένου σκεδαστή σε ομοιόμορφο κυματοδηγό

Στην περίπτωση ομοιόμορφου κυματοδηγού  $h_2(x) = \text{σταθερό}$ , και  $h_1 = h_2 = h_3$ .

Οι συνοριακές συνθήκες επιφάνειας και πυθμένα θα παραμείνουν ίδιες με αυτές του προηγούμενου υποκεφαλαίου. Δηλαδή θα ισχύουν οι (4.13) και (4.14). Ενώ οι σχέσεις συναρμογής δεν θα τροποποιηθούν με αποτέλεσμα να είναι σε ισχύ η σχέση (4.27) και η (4.28).

Τέλος στο υποχωρίο (II) θα πρέπει να εισαχθεί και η σχέση που θα καλύπτει τη συνοριακή συνθήκη στην επιφάνεια του πεπερασμένου σκεδαστή:

$$\beta \frac{\partial P}{\partial n} + \alpha P = 0, \text{ για } \mathbf{x} \in \partial D_{scat} \text{ ,} \quad (4.29)$$



Σχήμα 38. Ομογενής κυματοδηγός με ύπαρξη πεπερασμένου σκεδαστή.

με  $\alpha$  και  $\beta$  να είναι συντελεστές εξαρτώμενοι από το είδος (φύση) του σκεδαστή. Η επιφάνεια-σύνορο του πεπερασμένου σκεδαστή θα είναι η  $\partial D_5 = \partial D_{scat}$  (βλ. σχήμα

38). Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις  $\sum_{j=1}^N \sigma_j U_j(\mathbf{x}_i)$  για το επαγόμενο δυναμικό από

τα συνοριακά στοιχεία και  $\sum_{j=1}^N \sigma_j F_j(\mathbf{x}_i)$  για την αντίστοιχη επαγόμενη κάθετη

ταχύτητα σε όλα τα κέντρα των στοιχείων  $\mathbf{x}_i \in \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \partial D_3 \cup \partial D_4 \cup \partial D_5$ , η συνοριακή συνθήκη στο σκεδαστή γράφεται στην μορφή:

$$\sum_{j=1}^N \sigma_j (\beta F_j(\mathbf{x}_i) + \alpha U_j(\mathbf{x}_i)) = 0, \quad \mathbf{x}_i \in \partial D_5. \quad (4.30)$$

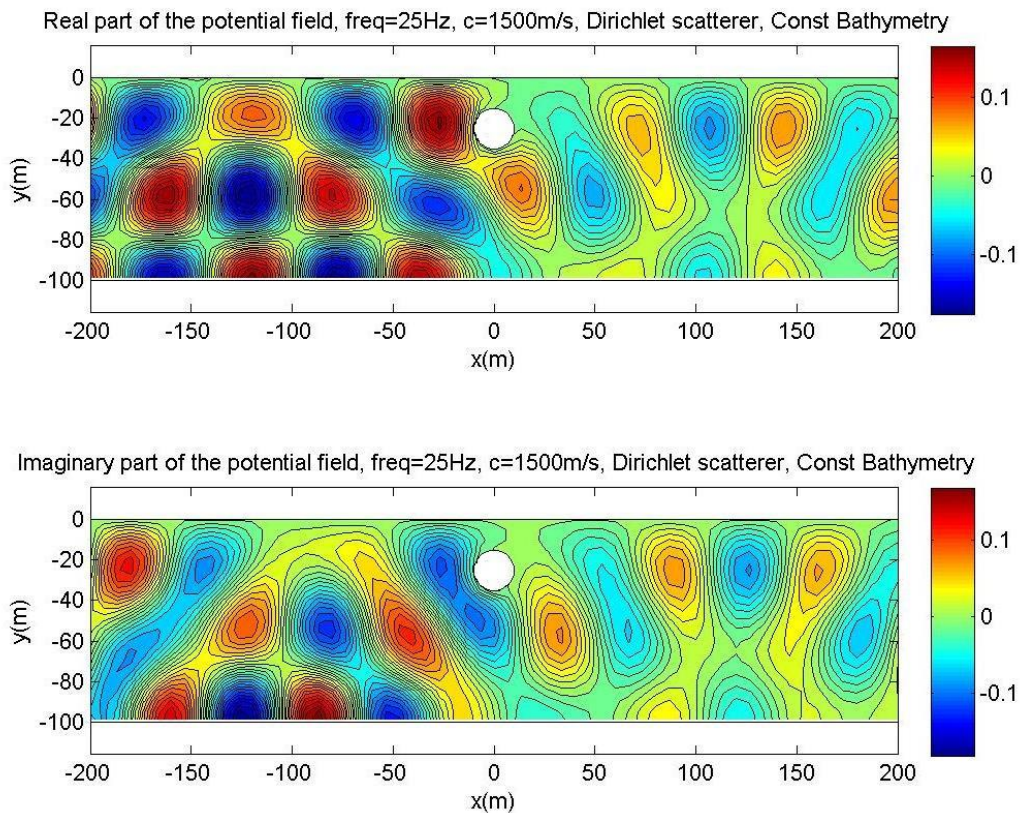
Τα συνοριακά στοιχεία στα οποία πλέον θα έχουμε χωρίσει το χώρο θα δίνονται από τη σχέση:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5, \quad (4.31)$$

όπου  $N_5$  θα είναι τα μέρη στα οποία θα έχουμε διαχωρίσει το σύνορο του πεπερασμένου σκεδαστή  $\partial D_5$ .

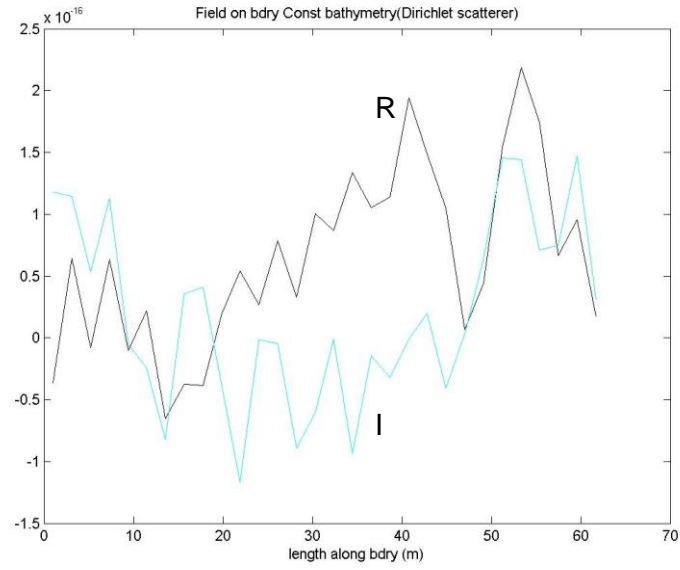
Με αντίστοιχη εισαγωγή των εξισώσεων και των στοιχείων συχνότητας, ταχύτητας, τα οποία διατηρήθηκαν όμοια με του προηγούμενου υποκεφαλαίου, για να υπάρχει η δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων και με διατήρηση σταθερού βάθους (100m). Λάβαμε τα παρακάτω αποτελέσματα από τη χρήση του Matlab και των ίδιων προγραμμάτων που αναφέρθηκαν στο υποκεφάλαιο 4.2.

Για την περίπτωση πεπερασμένου σκεδαστή τύπου Dirichlet με διατήρηση σταθερής βαθυμετρίας 100m.

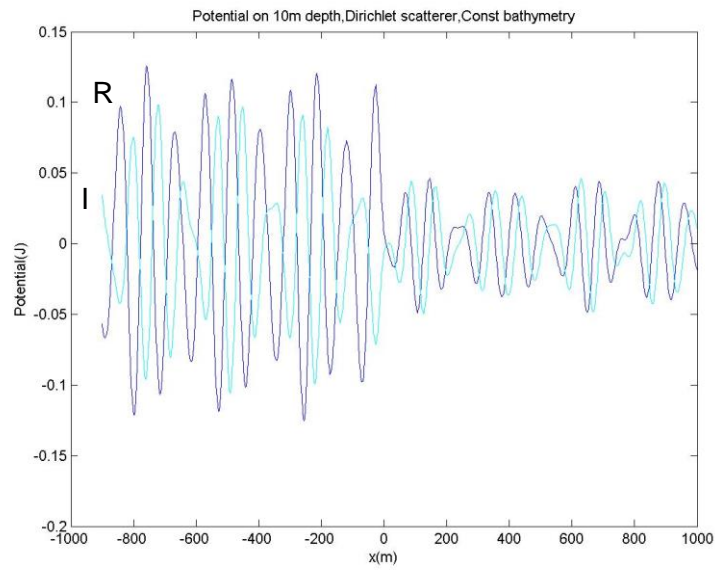


**Σχήμα 39. Αναπαράσταση του δυναμικού με ύπαρξη πεπερασμένου σκεδαστή για μήκος 400m σε σταθερή βαθυμετρία 100m.**

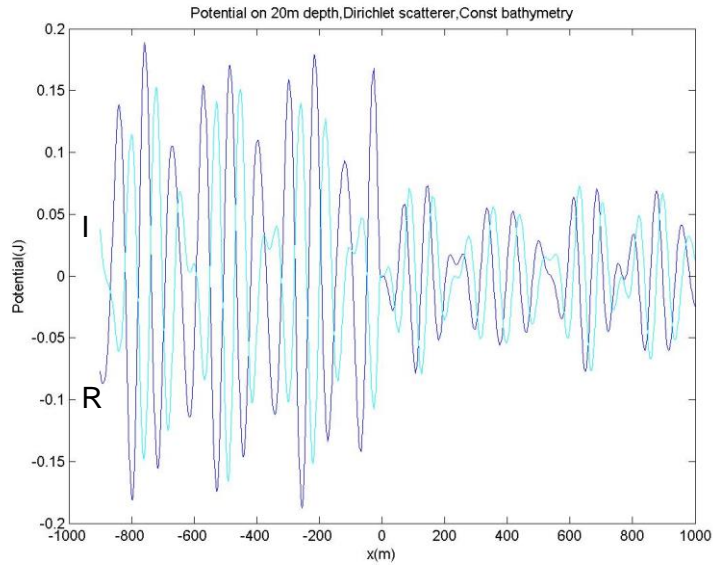
Παρατηρούμε στο σχήμα 39 την ελάττωση της έντασης του δυναμικού μετά την αλληλεπίδραση του ακουστικού κύματος με τον πεπερασμένο σκεδαστή. Πάνω στα όρια του σκεδαστή βλέπουμε όσο είναι δυνατόν να διακριθεί από την ανάλυση της εικόνας μας, το μηδενισμό του δυναμικού όπως επιβάλλουν οι συνθήκες Dirichlet. Σε ισχύ βρίσκεται επίσης η συνθήκη Neumann σε όλο τον πυθμένα και αντίστοιχα η συνθήκη Dirichlet κατά μήκος της επιφάνειας του κυματοδηγού.



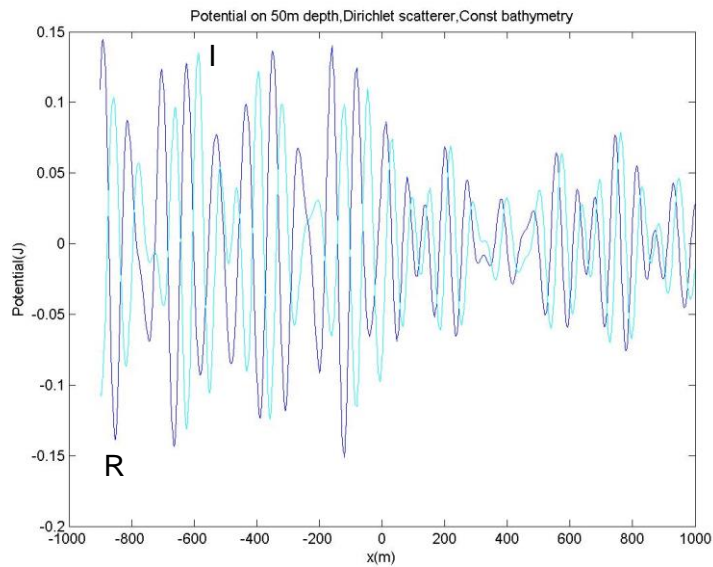
Σχήμα 40. Αναπαράσταση δυναμικού πάνω στην επιφάνεια του πεπερασμένου σκεδαστή τύπου Neumann (real part με μαύρο χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).



Σχήμα 41. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού σε βάθος 10m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα) .



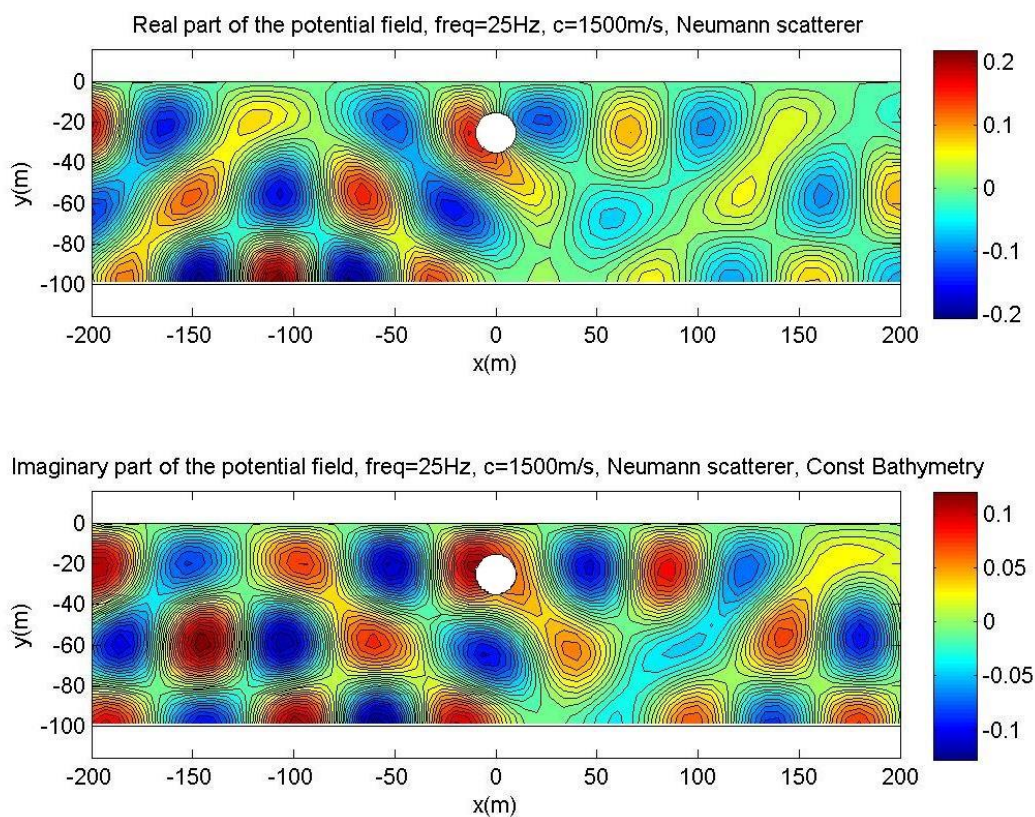
**Σχήμα 42. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού σε βάθος 20m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).**



**Σχήμα 43. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού σε βάθος 50m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα) .**

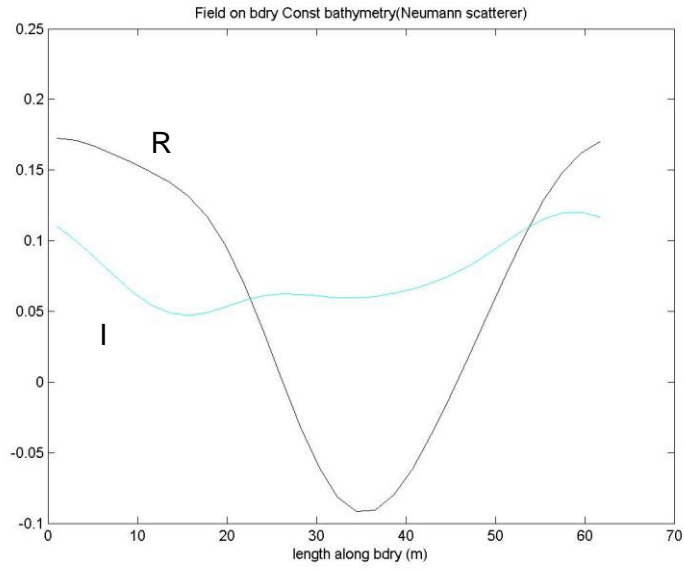
Στο σχήμα 40 παρατηρούμε το δυναμικό πάνω στην επιφάνεια του πεπερασμένου σκεδαστή, είναι όντως σχεδόν μηδενικό καθώς αν κοιτάξουμε τον άξονα του δυναμικού (κάθετο άξονα) οι ενδείξεις είναι πολλαπλασιασμένες με το  $10^{-16}$ . Αν μελετήσουμε τα διαγράμματα για την αναπαράσταση του δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού (βλ. σχήμα 41, 42, 43) θα διακρίνουμε πως υπάρχει μια εμφανής ελάττωσή του μετά από τη σύγκρουση του ηχητικού κύματος με το σώμα.

Για την περίπτωση πεπερασμένου σκεδαστή τύπου Neumann με διατήρηση σταθερής βαθυμετρίας 100m.

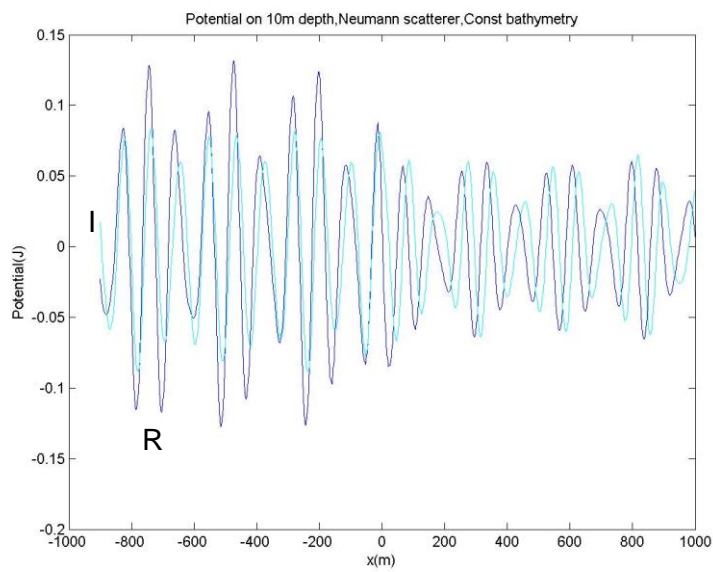


**Σχήμα 44. Αναπαράσταση του δυναμικού με ύπαρξη πεπερασμένου σκεδαστή για μήκος 400m σε σταθερή βαθυμετρία 100m.**

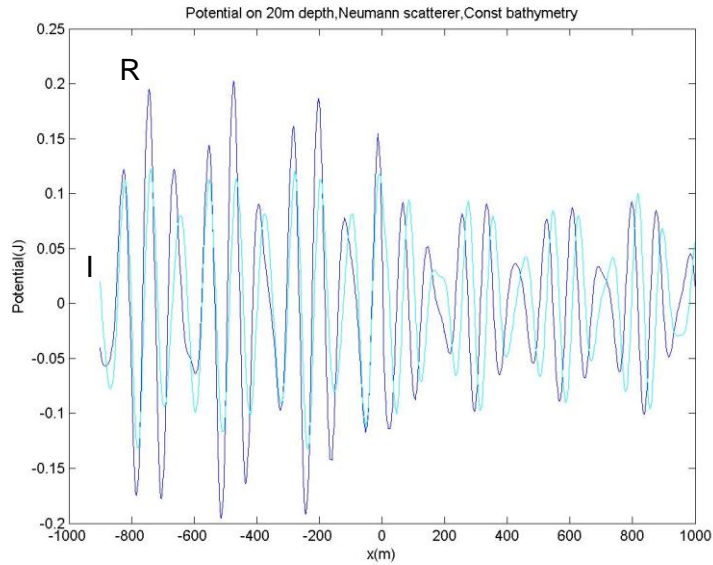
Από το σχήμα 44 δεν παρατηρούμε καμιά μεταβολή στον αριθμό των ιδιομορφών πριν και μετά τον πεπερασμένο σκεδαστή, όμως διακρίνεται όπως είναι αναμενόμενο μια απώλεια στην έντασή τους μετά την αλληλεπίδρασή τους με τον σκεδαστή. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι κάθετες στον σκεδαστή, καθώς είναι τύπου Neumann. Ο πυθμένας παρουσιάζει συνθήκη Neumann όπως είναι φανερό, ενώ η επιφάνεια συνθήκη Dirichlet με παράλληλες τις δυναμικές γραμμές σε αυτή.



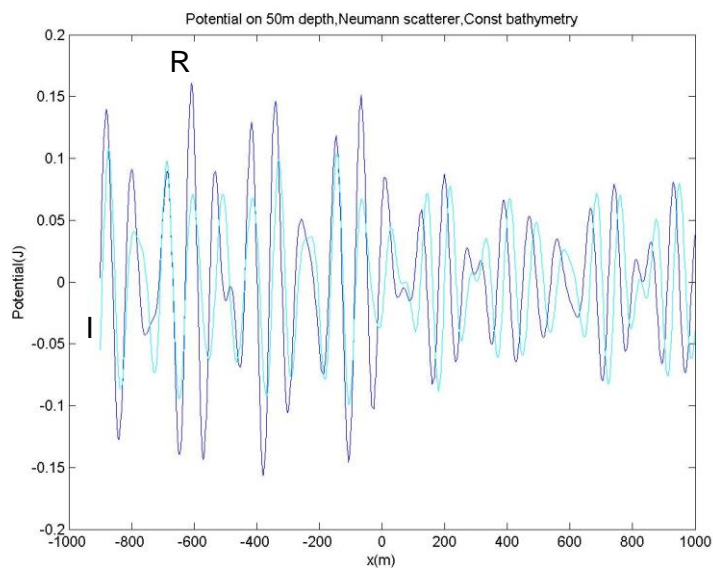
Σχήμα 45. Αναπαράσταση δυναμικού πάνω στην επιφάνεια του πεπερασμένου σκεδαστή τύπου Dirichlet (real part με μαύρο χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).



Σχήμα 46. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού σε βάθος 10m(real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).



Σχήμα 47. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού σε βάθος 20m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).

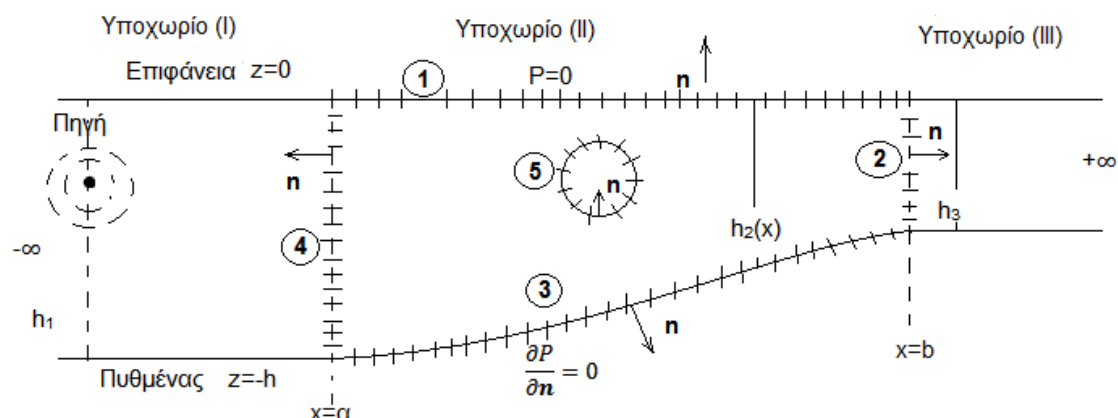


Σχήμα 48. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού σε βάθος 50m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).

Όπως και στην περίπτωση του πεπερασμένου Dirichlet σκεδαστή έτσι και στην περίπτωση Neumann παρατηρούμε μια σημαντική μείωση στην ισχύ του δυναμικού πριν και μετά από την αλληλεπίδραση με τον σκεδαστή.



#### 4.4. Επίδραση πεπερασμένου σκεδαστή σε ανομοιόμορφο κυματοδηγό

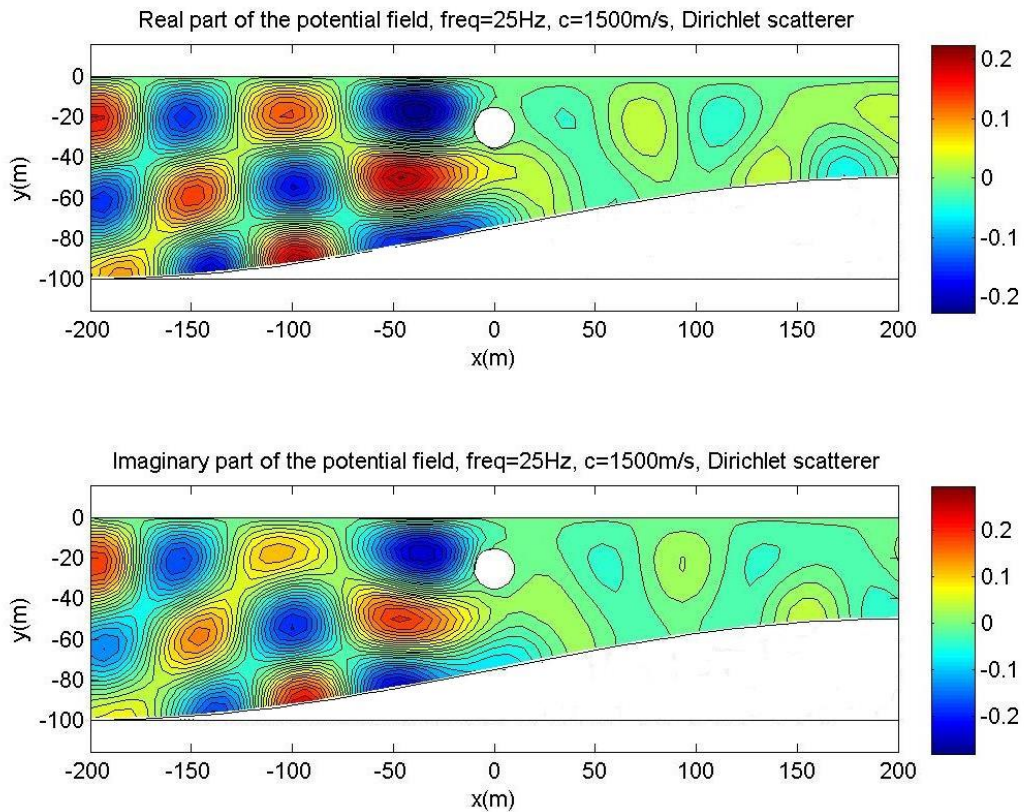


Σχήμα 49. Ανομοιόμορφος κυματοδηγός με ύπαρξη πεπερασμένου σκεδαστή.

Τέλος, μπορούμε να οδηγηθούμε στην πιο σύνθετη περίπτωση που αποτελεί συνδυασμό των υποκεφαλαίων 4.2 και 4.3. Αναφερόμαστε βεβαίως στο πρόβλημα ανομοιόμορφου κυματοδηγού με παράλληλη ύπαρξη πεπερασμένου σκεδαστή στο υποχωρίο II. Πλέον σε ισχύ θα είναι όλες οι προαναφερθείσες σχέσεις, δηλαδή για τα υποχωρία I και III θα εφαρμόζουμε τις 4.3 και 4.5 αντίστοιχα. Στο υποχωρίο II θα βρίσκονται σε ισχύ οι 4.13 και 4.14 για την επιφάνεια και τον πυθμένα, οι σχέσεις συναρμογής 4.27 και 4.28, καθώς και η σχέση 4.29 από το υποκεφάλαιο 4.3 όσον αφορά την επιφάνεια του πεπερασμένου σκεδαστή. Όλα τα παραπάνω παρουσιάζονται στο σχήμα 42 που ακολουθεί.

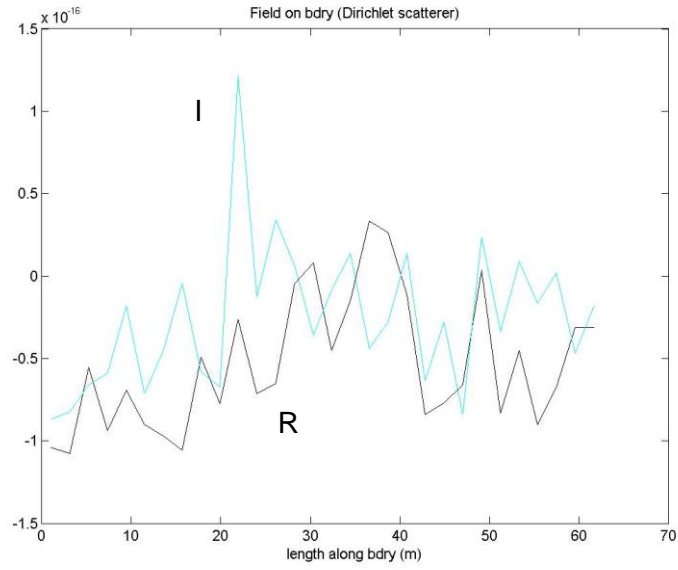
Όπως αναφέραμε και πριν με την εισαγωγή των ίδιων τιμών για συχνότητα, ταχύτητα διάδοσης του ήχου αλλά και την ύπαρξη της ίδιας βαθυμετρίας με του υποκεφαλαίου 4.2 στο πρόγραμμα Matlab και με χρήση των αρχείων που αναφέρθηκαν αναλυτικά στο υποκεφάλαιο 4.2, οδηγούμαστε στα παρακάτω σχήματα.

Για την περίπτωση πεπερασμένου σκεδαστή τύπου Dirichlet

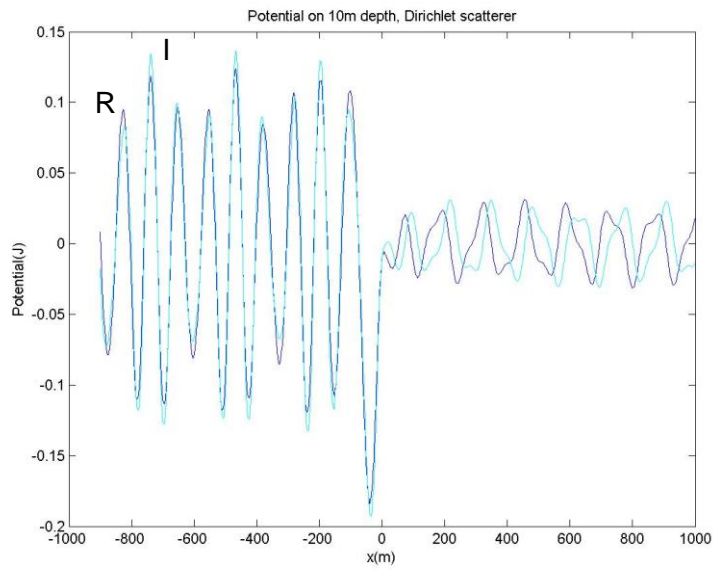


**Σχήμα 50.** Αναπαράσταση του δυναμικού με πεπερασμένο Dirichlet σκεδαστή για μήκος 400m.

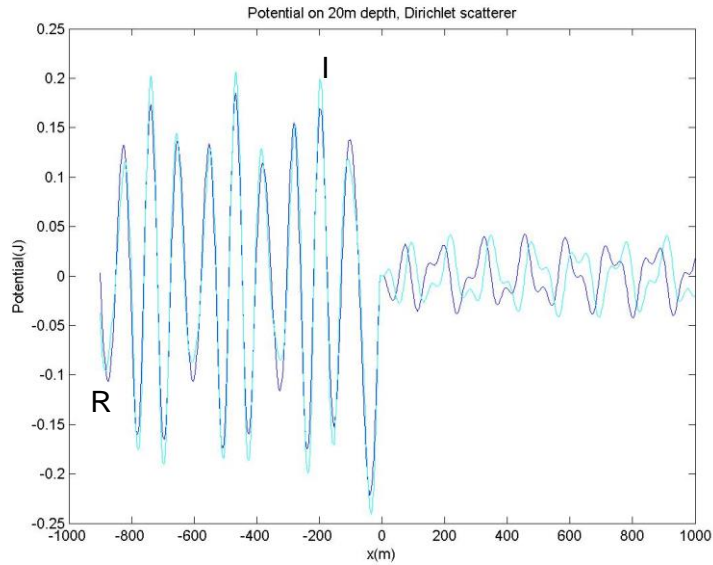
Στο σχήμα 50, όπου έχουμε πλέον συνδυασμό ρήχωσης με παράλληλη ύπαρξη πεπερασμένου σκεδαστή (τύπου Dirichlet), διακρίνουμε την έντονη μείωση των ιδιομορφών από τρεις σε δύο μετά την παρουσία της ρήχωσης και του πεπερασμένου σκεδαστή, ενώ φαίνεται να έχει χαθεί μεγάλο μέρος της έντασης του δυναμικού. Το σώμα που λειτουργεί ως σκεδαστής παρουσιάζει μηδενικό δυναμικό στην επιφάνειά του, ενώ οι συνθήκες Dirichlet στην επιφάνεια και Neumann στον πυθμένα φαίνονται να είναι σε ισχύ.



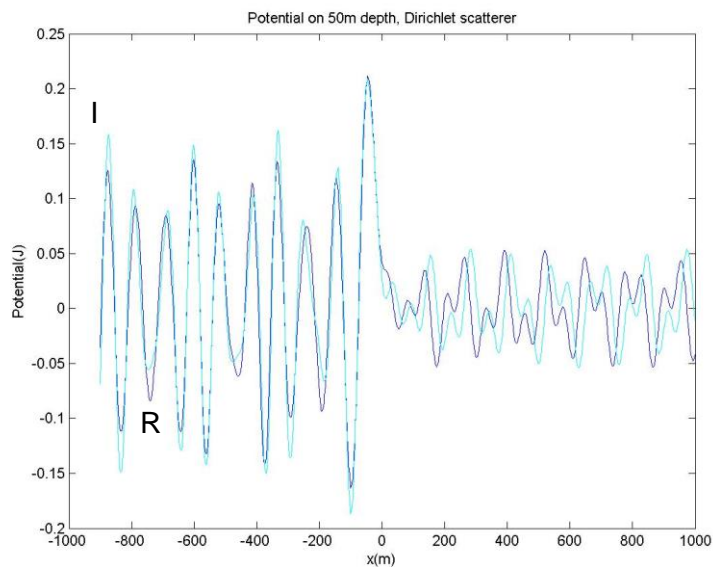
Σχήμα 51. Αναπαράσταση δυναμικού πάνω στην επιφάνεια του πεπερασμένου σκεδαστή τύπου Dirichlet (real part με μαύρο χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).



Σχήμα 52. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού για βάθος 10m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).



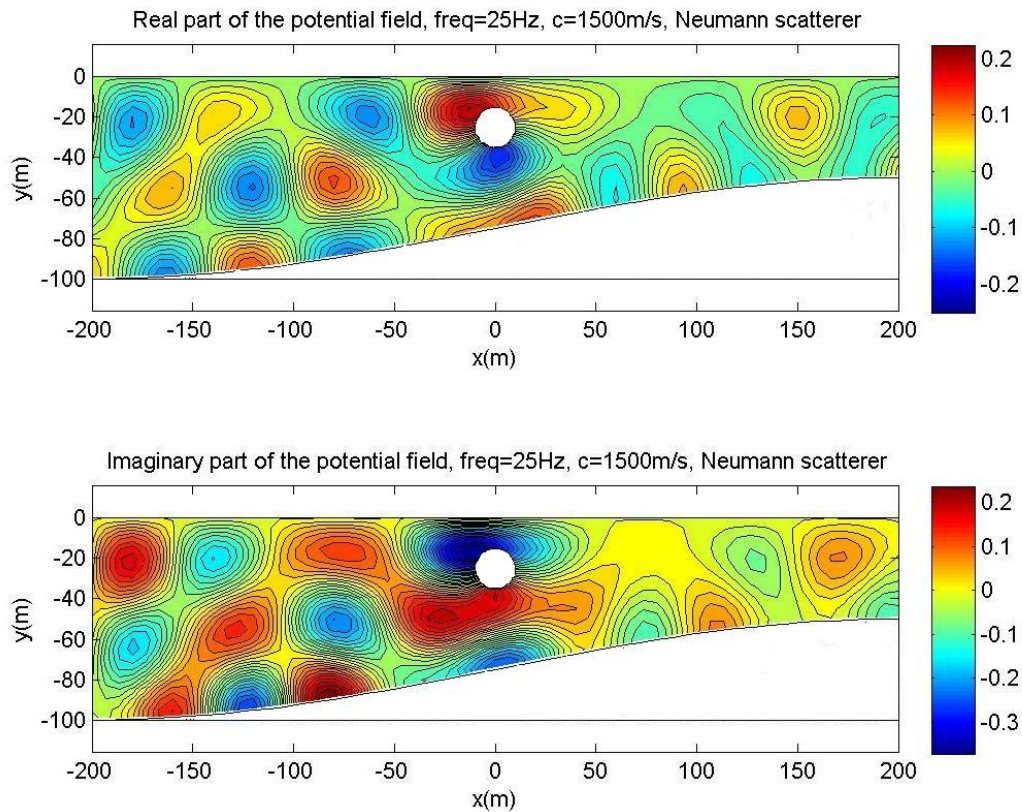
**Σχήμα 53. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού για βάθος 20m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα) .**



**Εικόνα 54. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού για βάθος 50m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).**

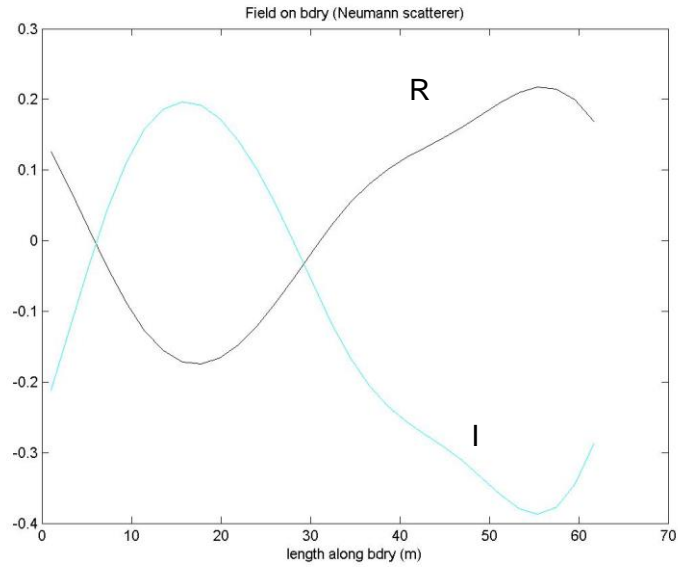
Στο σχήμα 51 παρατηρείται για άλλη μια φορά το μηδενικό (σχεδόν) δυναμικό στην επιφάνεια του Dirichlet πεπερασμένου σκεδαστή. Στα αμέσως επόμενα σχήματα (βλ. σχήμα 52, 53, 54) διακρίνουμε την έντονη ελάττωση στην ισχύ του δυναμικού μετά τη ρήγωση που είναι πολύ εντονότερη από την αντίστοιχη στα υποκεφάλαια 4.2 και 4.3 καθώς πλέον έχουμε την ύπαρξη δύο διαφορετικών λόγων σκέδασης, τον πυθμένα που παρουσιάζει ρήγωση και τον πεπερασμένο σκεδαστή.

Για την περίπτωση πεπερασμένου σκεδαστή τύπου Neumann

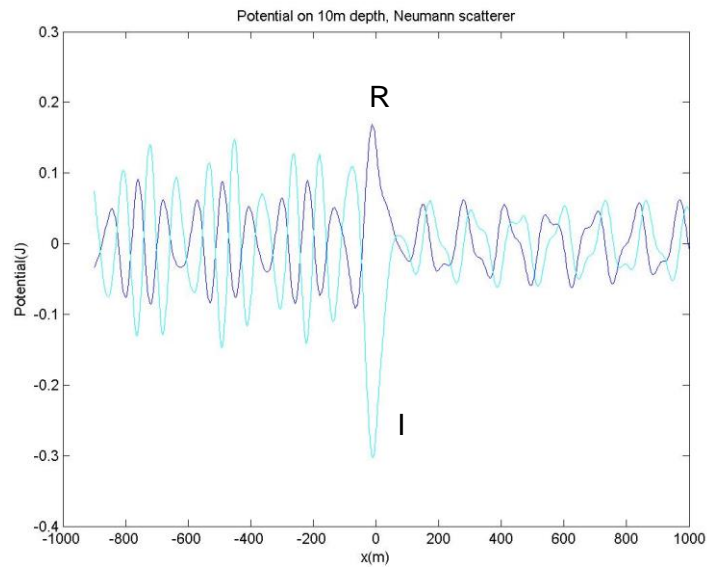


**Σχήμα 55. Αναπαράσταση του δυναμικού με πεπερασμένο Neumann σκεδαστή για μήκος 400m.**

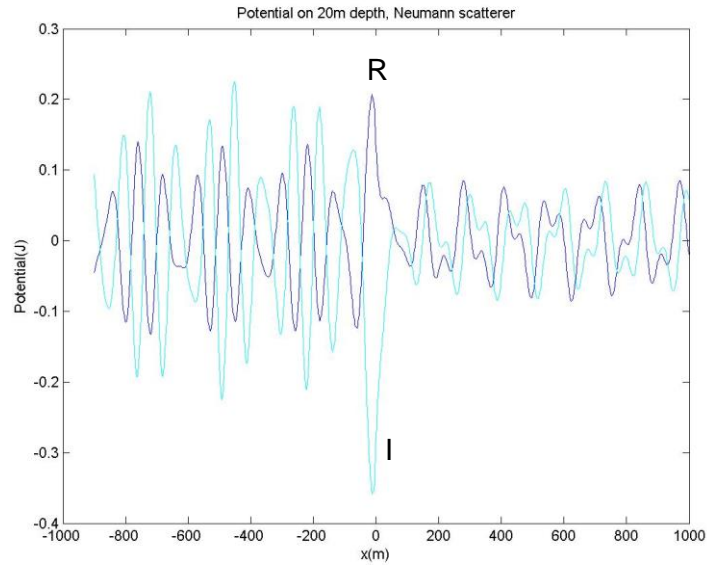
Η ελάττωση των ιδιομορφών από τρεις σε δύο μετά τη διέλευση από το σημείο ρήξης, είναι εμφανής και στο σχήμα 54. Οι δυναμικές γραμμές όσο το επιτρέπει πάλι η ανάλυση του πλέγματος δείχνουν να τέμνονται κάθετα με την επιφάνεια του πεπερασμένου σκεδαστή, ένδειξη συνθήκης Neumann. Ενώ διακρίνονται και οι συνθήκες Dirichlet και Neumann σε επιφάνεια και πυθμένα αντίστοιχα. Η απώλεια της έντασης του δυναμικού είναι μικρότερη στην περίπτωση Neumann από την Dirichlet.



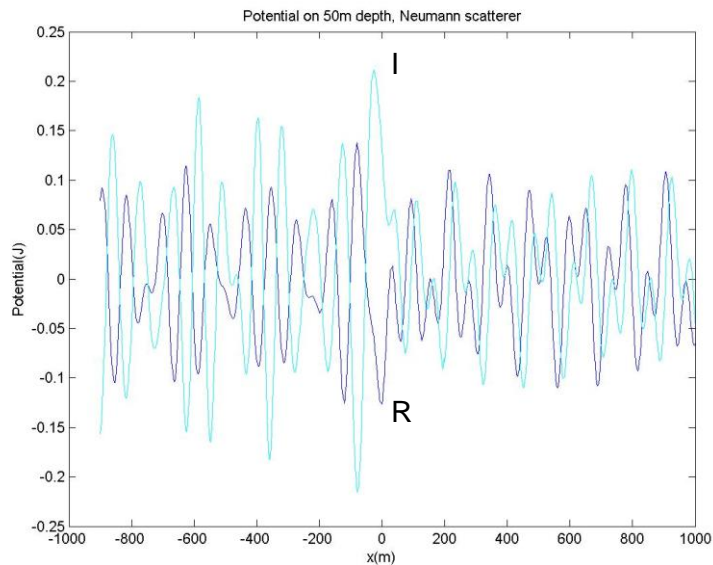
Σχήμα 56. Αναπαράσταση δυναμικού πάνω στην επιφάνεια του πεπερασμένου σκεδαστή τύπου Neumann (real part με μαύρο χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).



Σχήμα 57. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού για βάθος 10m(real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα) .



**Σχήμα 58. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού για βάθος 20m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα).**



**Σχήμα 59. Αναπαράσταση δυναμικού σε όλο το μήκος του κυματοδηγού για βάθος 50m (real part με μωβ χρώμα, imaginary part με γαλάζιο χρώμα) .**

Μελετώντας τα παραπάνω σχήματα (βλ. σχήμα 57, 58, 59) παρατηρούμε την έντονη αλλαγή στο δυναμικό στο σημείο όπου βρίσκεται ο σκεδαστής και αμέσως μετά την μείωσή του. Εξάιρεση αποτελεί το δυναμικό σε βάθος 50m όπου το πραγματικό μέρος έχει διατηρήσει σχεδόν την ίδια τιμή πριν και μετά το σκεδαστή, με τη θέση που έχει επιλεγεί να βρίσκεται στον πυθμένα του κυματοδηγού μετά την περιοχή ρήχωσης.





# Κεφάλαιο 5

## Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία έγινε η ανάπτυξη και εφαρμογή μεθοδολογίας τύπου συζευγμένων ιδιομορφών σε συνδυασμό με μεθόδους συνοριακών στοιχείων, για την επίλυση προβλημάτων διάδοσης ακουστικών κυμάτων μέσα σε υδάτινο κυματοδηγό (ακουστική διάδοση στο θαλάσσιο/παράκτιο περιβάλλον). Στις διάφορες περιπτώσεις που μελετήθηκαν, ο κυματοδηγός ήταν σταθερής ή μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας, ενώ εξετάσθηκε επιπρόσθετα η επίδραση πεπερασμένου σκεδαστή.

Εξετάσθηκαν οι διαφοροποιήσεις μεταξύ ενός ομογενούς περιβάλλοντος διάδοσης και ενός ετερογενούς, όπου παρουσιάστηκαν μεταβολές στο δυναμικό οι οποίες δύνανται να ενταθούν με την μεταβολή της βαθυμετρίας.

Περαιτέρω ασχοληθήκαμε ιδιαίτερα με τα προβλήματα σκέδασης από σώματα πεπερασμένων διαστάσεων σε άπειρο χώρο διάδοσης και στον θαλάσσιο/παράκτιο κυματοδηγό σε απλές εκδοχές (προσεγγίσεις) που αντιπροσωπεύονται από δισδιάστατα προβλήματα. Αυτό επιτεύχθη με τις ακόλουθες υποθέσεις:

- αμετάβλητο γεωμετρικών και φυσικών παραμέτρων κατά την εγκάρσια διεύθυνση, κάτι που αποτελεί φυσική προσέγγιση κοντά σε μια ομαλή ρήχωση
- τη θέωση μιας γραμμικής μονοχρωματικής πηγής (line source) για την μοντελοποίηση της ακουστικής διέγερσης

Μελετήθηκαν λύσεις του προβλήματος σκέδασης με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων που αναπτύχθηκε γύρω από σώματα πεπερασμένων διαστάσεων, και έγινε σύγκριση με αναλυτικές λύσεις στην περίπτωση απλού σκεδαστή κυκλικής γεωμετρίας. Από τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν προκύπτει πολύ καλή σύγκριση αριθμητικών προβλέψεων και αναλυτικών αποτελεσμάτων, ενώ παρουσιάστηκαν και αποτελέσματα υπολογισμών πεδίου γύρω από σκεδαστή γενικής γεωμετρίας.

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας συνδυάσαμε τις μεθόδους αναπαραστάσεων του πεδίου σε σειρές κανονικών ιδιομορφών και συνοριακών ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων, με σκοπό την εύρεση του ακουστικού δυναμικού σε κυματοδηγό με μεταβαλλόμενα σύνορα, και με πεπερασμένο σκεδαστή στο εσωτερικό του, σε ομοιογενές μέσο διάδοσης. Στο πρόβλημα αυτό παρατηρήθηκαν ιδιαίτερα φαινόμενα, όπως αύξηση της ανακλώμενης ενέργειας λόγω της στένωσης του κυματοδηγού και της παρουσίας του σκεδαστή, που προσομοιώνονται με επάρκεια με τη παρούσα μέθοδο.

Η παρούσα εργασία μπορεί να βρεί χρήσιμη εφαρμογή στη διακρίβωση των ανακλαστικών ιδιοτήτων συγκεκριμένων υποθαλάσσιων σωμάτων/στόχων. Επίσης, η όλη ανάλυση μπορεί να επεκταθεί στη περίπτωση ανομοιογενούς κυματοδηγού με μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης, καθώς και σε αντίστοιχα προβλήματα στις τρεις διαστάσεις (με αρκετά αυξημένο υπολογιστικό κόστος).

# Βιβλιογραφία

1. Abramowitz M., Stegun I.A., «Handbook of Mathematical Functions», Dover Publications, 1970.
2. Athanassoulis G.A. et al, «Coupled-mode and finite-element solutions of underwater sound propagation problems in stratified acoustic environments», Journal of Computational Acoustics-JCA, **16**, 2008.
3. Beer G., Smith I., Duenser, C., «The Boundary Element Method with Programming», Springer 2008.
4. Belibassakis K.A., Athanassoulis G.A., «A coupled-mode method for acoustic propagation and scattering in inhomogenous waveguides», OMAE2014, 2014.
5. Boyles C.A., «Acoustic Waveguides: Applications to Oceanic Science», John Wiley and Sons, 1984.
6. Brekhovskikh L.M., Lysanov Y.P., «Fundamentals of Ocean Acoustics», Springer-Verlag, 2003.
7. Clay, C.S., Medwin, H., Acoustics: An introduction to its physical principles and applications, Wiley-Interscience, 1997.
8. Colton D., Kress R., «Integral Equation Methods in Scattering Theory», Wiley, 1983.
9. Francois, R.W., Garrison, G.R., 1982, Sound absorption based on ocean measurements, Journal of the Acoustical Soc. of America, **72**, pp. 1879-1890.
10. Frisk G., «Ocean and seabed acoustics», Prentice Hall, 1994.
11. Jensen F.B., Kuperman W.W., Porter M.B., Schmidt H., «Computational Ocean Acoustics», AIP Press, 1994 (2<sup>nd</sup> Edition 2011).
12. Kress R., «Linear Integral Equations», Springer-Verlag, 1989.
13. Medwin H., Clay S.C., «Fundamentals of Acoustical Oceanography», Academic Press, 1998.
14. Αθανασούλης Γ.Α., Μπελιμπασάκης Κ.Α., «Σημειώσεις για το μάθημα Κυματικά Φαινόμενα στο Θαλάσσιο Περιβάλλον», ΣΝΜΜ-ΕΜΠ., 2003.
15. Φίλιππας Ε., «Περιγραφή της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων και Εφαρμογή σε Απλά Προβλήματα Υδροδυναμικής και Κυματικής Διάδοσης στο Θαλάσσιο Περιβάλλον», ΣΝΜΜ-ΕΜΠ 2011.



# Παράρτημα

## Προγράμματα Matlab

### g2d.m

```
clear all;close all;

imu=sqrt(-1);
freq=100;om=2*pi*freq;h=100;cc=1500;ka=om/cc;
Np=floor(0.5+(ka*h/pi))

Nm=Np+50;
n=1:Nm;
kzn=(n-0.5)*pi/h;kxn=sqrt(ka^2-kzn.^2);

xs=0;zs=-25;
x=linspace(-5*h,5*h,1001);
z=linspace(-h,0,101);

[xx,zz]=meshgrid(x,z);ff=0*xx; ff1=ff;

for n=1:Nm
    ff=ff+(2/h)*sin(kzn(n)*zs)*sin(kzn(n)*zz).*exp(imu*kxn(n)*abs(xx-
xs))/kxn(n);
end
ff=0.5*imu*ff;fm=max(max(abs(ff)));

figure
subplot(2,1,1);pcolor(xx,zz,real(ff));shading interp;axis
equal;caxis([-0.2 0.2]);xlabel('x(m)');ylabel('z(m)'); title('HOM -
freq=100Hz,SD=-25m. Real part')%caxis([-1.2*fm 1.2*fm]);
subplot(2,1,2);pcolor(xx,zz,imag(ff));shading interp;axis
equal;caxis([-0.2 0.2]);xlabel('x(m)');ylabel('z(m)');title('HOM -
freq=100Hz,SD=-25m. Imag part')%caxis([-1.2*fm 1.2*fm]);
```

### veps.m

```
clear all;close all;
Nm=5;
freq=10;om=2*pi*freq;om2=om^2;
h=100;

N=160; dz=h/N;dz2=dz^2;
z=linspace(-h,-dz,N); bb=0;c=1500+bb*(z+25).^2; k2=om2./(c.^2);

CC=zeros(N);
```

```

CC(1,1)=(-1/dz)+0.5*(k2(1)+k2(2))*dz;
CC(1,2)=1/dz;

for i=2:N
CC(i,i-1)=1/dz2;
CC(i,i)=((-2/dz2)+k2(i));

if i<N, CC(i,i+1)=1/dz2; end
end

[vv,dd]=eig(CC);
ddl=diag(dd); [dd2 ii2]=sort(ddl,'descend');

z=[z 0]; c=1500+bb*(z+25).^2;

Z=zeros(N+1,N);
for m=1:N
    Z(1:N,m)=vv(:,m);
    Z(N+1,m)=0;
end

%methodos trapeziou
co=2*ones(size(z));co(1)=1;co(N+1)=1;

ZZ=zeros(N+1,Nm);
for m=1:Nm

    f=Z(:,ii2(m));

    In=(dz/2)*sum(co'.*f.^2)

    f=f/sqrt(In);

    topderiv=f(N+1)-f(N);
    sig=1; if topderiv<=0 sig=-1;end

    ZZ(:,m)=sig*f;

end

kxn_numer=dd2((1:Nm))
disp('analytic only for isospeed')
mi=1:Nm;
kxn_anal=sqrt(mean(k2)-((mi-0.5)*pi/h).^2)

%plot
figure
subplot(1,2,1)
plot(c,z);

ylabel('h(m)');xlabel('c(m/s)');
subplot(1,2,2)
plot(ZZ(:,1),z)
hold on
plot(sqrt(2/h)*sin(0.5*pi*z/h),z,'c+')

plot(ZZ(:,2),z,'c');%arithmitikh

```

```

plot(sqrt(2/h)*sin(1.5*pi*z/h),z,'+')%analutikh

plot(ZZ(:,3),z,'r');plot(sqrt(2/h)*sin(2.5*pi*z/h),z,'+')
plot(ZZ(:,4),z,'w');plot(sqrt(2/h)*sin(3.5*pi*z/h),z,'+')

ylabel('h(m)');xlabel('Amplitude(m)');

```

### g2dvep.m

```

clear all;%close all;
imu=sqrt(-1);
freq=30;om=2*pi*freq;h=100;cc=1500;ka=om/cc;
Np=floor(0.5+(ka*h/pi))

Nm=Np+10;
n=1:Nm;
kzn=(n-0.5)*pi/h;kxn=sqrt(ka^2-kzn.^2);

xs=0;zs=-25;
x=linspace(-5*h,5*h,1001);
load vepsol30Hz ; %z=linspace(-h,0,101);

[xx zz]=meshgrid(x,z);
ff=0*zz; ff1=ff;

for i=1:length(x)
for n=1:Nm

    la=interp1('z',ZZ(:,n),zs)*ZZ(:,n)*exp(imu*kxn(n)*abs(x(i)-
xs))/kxn(n);
    ff(:,i)=ff(:,i)+la;
end
end
ff=0.5*imu*ff;fm=max(max(abs(ff)));

figure
subplot(2,1,1);pcolor(xx,zz,real(ff));shading interp;axis
equal;caxis([-1.2*fm 1.2*fm]);
title('INHOM - freq=30Hz, SD=-25m. Real
part');xlabel('x(m)');ylabel('z(m)');

%caxis([-0.2 0.2]);%caxis([-1.2*fm 1.2*fm]);
subplot(2,1,2);pcolor(xx,zz,imag(ff));shading interp;axis
equal;caxis([-1.2*fm 1.2*fm]);%caxis([-0.2 0.2]);%caxis([-1.2*fm
1.2*fm]);
title('INHOM - freq=30Hz, SD=-25m. Imag
part');xlabel('x(m)');ylabel('z(m)');

```

### g2da.m

```

clear all;close all;
imu=sqrt(-1);
freq=30;om=2*pi*freq;h=100;cc=1500;ka=om/cc;
Np=floor(0.5+(ka*h/pi))

Nm=Np+10;

```

```

n=1:Nm;
kzn=(n-0.5)*pi/h;kxn=sqrt(ka^2-kzn.^2);

xs=0;zs=-25;
x=linspace(-5*h,5*h,1001);
z=linspace(-h,0,101);

[xx,zz]=meshgrid(x,z);ff=0*xx; ff1=ff;

for n=1:Nm
    ff=ff+(2/h)*sin(kzn(n)*zs)*sin(kzn(n)*zz).*exp(imu*kxn(n)*abs(xx-
xs))/kxn(n);
end
ff=0.5*imu*ff;fm=max(max(abs(ff)));

figure
subplot(2,1,1);pcolor(xx,zz,real(ff));shading interp;axis
equal;caxis([-1.2*fm 1.2*fm]);
title('ISO - freq=30Hz, SD=-25m. Real
part');xlabel('x(m)');ylabel('z(m)');
subplot(2,1,2);pcolor(xx,zz,imag(ff));shading interp;axis
equal;caxis([-1.2*fm 1.2*fm]);
title('ISO - freq=30Hz, SD=-25m. Imag
part');xlabel('x(m)');ylabel('z(m)');

veps;

g2dvep;

```

### **fhankel.m**

```

function f=fhankel(order,kind,x)
fi=0;
if order==0,
    fi=-besselh(1,kind,x);
else,
    fi=besselh(order-1,kind,x)-(order./x).*besselh(order,kind,x);
end
f=fi;

```

### **sourcegh.m**

```

function f=sourceg(x1,y1,x2,y2,yp,k);
imu=sqrt(-1);lakis=(2*pi/real(k));
uu=0.;
vv=0.;
ll=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);
N=61;dll=ll/(N-1);
co=3+(-1).^(1:N);co(1)=1;co(N)=1;
ss=linspace(0,1,N);dss=ss(2)-ss(1);
x=x1+(x2-x1)*ss;y=y1+(y2-y1)*ss;

R=sqrt((xp-x).^2+(yp-y).^2)+0.001*lakis;
po=0.25*imu*besselh(0,1,k*R);

```



```

RR=-k*besselh(1,1,k*R);ui=0.25*imu*RR.*(xp-
x)./R;vi=0.25*imu*RR.*(yp-y)./R;

```

```

pot=(dll/dss)*(dss/3)*sum(co.*po);
potx=(dll/dss)*(dss/3)*sum(co.*ui);
poty=(dll/dss)*(dss/3)*sum(co.*vi);

```

```

f(1)=potx;
f(2)=poty;
f(3)=pot;

```

## helm2d.m

```

%bdry --> clockwise
clear all; %close all;clc

```

```

imu=sqrt(-1);

```

```

N=30;N1=N+1; % BOUNDARY ELEMENTS in iso spacing

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

t=linspace(0,2*pi,N1); x=zeros(1,length(t)); y=zeros(1,length(t));

```

```

aa=10;x=aa*cos(-t);y= aa*sin(-t);%% scatterer circle radius aa

```

```

freq=100;c=1500;om=2*pi*freq;k=om/c; kx=k;ky=0; % plane x-incident
wave

```

```

figure

```

```

plot(x,y,'k')
fill(x,y,'g');hold on
axis equal
axis(aa*[-5 5 -5 5 ])
title('Exterior Helmholtz Problem')

```

```

isp=input('source-D or plane-N (1/0)...=');

```

```

if isp==0,

```

```

%%% analytical solution plane wave + hard circ.body %%%%%%%%%

```

```

for i=1:N

```

```

xp=0.5*(x(i)+x(i+1));yp=0.5*(y(i)+y(i+1)); thp=atan2(yp,xp);

```

```

%arctan(y/x)

```

```

pinc=exp(+imu*(kx*xp+ky*yp)); %3.90

```

```

psc=0;

```

```

for n=0:10

```

```

en=2;if n==0,en=1;end

```

```

An=-(imu^n)*en*real(fhankel(n,1,k*aa))/fhankel(n,1,k*aa);

```

```

psc=psc+An*besselh(n,1,k*aa)*cos(n*thp);

```

```

end

```

```

potan(i)=0*pinc+psc;

```

```

end

```

```

else

```

```

%%%%% analytical solution source emission + soft circ.body %%%%%%%%%%%
xs=-50;

N101=301;
thi=linspace(-pi,pi,N101);dthi=thi(2)-thi(1);
xthi=aa*cos(thi);ythi=aa*sin(thi);rthi=sqrt((xthi-
xs).^2+ythi.^2);
co=3+(-1).^(1:N101);co(1)=1;co(N101)=1;
pinth=besselh(0,1,k*rthi);

for n=0:6
A(n+1)=- (dthi/3/pi)*sum(co.*pinth.*cos(n*thi))/besselh(n,1,k*aa);
A1(n+1)=-2*((-
1)^n)*besselh(n,1,k*abs(xs))*besselj(n,k*aa)/besselh(n,1,k*aa);
if n==0, A(n+1)=0.5*A(n+1); A1(n+1)=0.5*A1(n+1);end

end

for i=1:N
xp=0.5*(x(i)+x(i+1));yp=0.5*(y(i)+y(i+1)); thp=atan2(yp,xp);
rp=sqrt((xp-xs)^2+yp^2);
pinc=besselh(0,1,k*rp);
psc=0;
for n=0:6
psc=psc+A1(n+1)*besselh(n,1,k*aa)*cos(n*thp);
end

potan(i)=0*pinc+psc;
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:N
dy=y(i+1)-y(i);dx=x(i+1)-x(i);dl=sqrt(dx^2+dy^2);
nx(i)=-dy/dl;
ny(i)= dx/dl;
ccx(i)=0.5*(x(i)+x(i+1));
ccy(i)=0.5*(y(i)+y(i+1));

if i==1; ll(i)=dl/2;; else ll(i)=ll(i-1)+0.5*dlo+0.5*dl;end
dlo=dl;
end

quiver(ccx,ccy,nx,ny,'k')

for i=1:N;
dy=y(i+1)-y(i);dx=x(i+1)-x(i);dlo=sqrt(dx^2+dy^2);
if i==1; la(i)=0.5*dlo;
else,
la(i)=la(i-1)+0.5*(dlok+dlo);
end
dlok=dlo;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Matrix coefficient & system solution
for i=1:N

```

```

xp=0.5*(x(i)+x(i+1));yp=0.5*(y(i)+y(i+1));xpl(i)=xp;yp1(i)=yp;

if isp==0,
    % plane incident waves + Neumann bc
    ui= imu*kx*exp(+imu*(kx*xp+ky*yp));vi=
imu*ky*exp(+imu*(kx*xp+ky*yp));
    %R=sqrt((xp-xs).^2+(yp ).^2);
    %RR=-k*besselh(1,1,k*R);ui=0.25*imu*RR.*(xp-
xs)./R;vi=0.25*imu*RR.*(yp )./R;
    Bv(i)=- (ui*nx(i)+vi*ny(i));
else
    % source emission + Dirichlet bc
    rdist=sqrt((xp-xs)^2+yp^2);
    Bv(i)= -besselh(0,1,k*rdist);
end

for j=1:N

    xil=x(j);xi2=x(j+1);yil=y(j);yi2=y(j+1);
    f=soursegh(xil,yil,xi2,yi2,xp,yp,k);Potm(i,j)=f(3);
    up=f(1);vp=f(2);un(i,j)=up*nx(i)+vp*ny(i);if i==j, un(i,j)=-
0.5;end
    if isp==0,
        Am(i,j)=un(i,j);
    else,
        Am(i,j)=Potm(i,j);
    end
end
end

S1=Am\conj(Bv');Pot1=Potm*S1;

%%% comparison potential on bdry *****

figure
subplot(2,1,1)
plot(la,real(potan),'k');hold on;
plot(l1,real(Pot1),'k+');plot(l1,real(Pot1),'k--');grid on
xlabel('bdry length from (1,0) clockwise')
ylabel('Boundary Potential ')
title('Cyan line = analytical solution | Red line (+) numerical at
c.p. UNIFORM GRID')
subplot(2,1,2)
plot(la,imag(potan),'k');hold on;
plot(l1,imag(Pot1),'k+');plot(l1,imag(Pot1),'k--');grid on
title('Imaginary')

%%%%%
disp('Press enter...');
pause;

%%% field plot *****
bb=2*pi/k;
xx=linspace(-5*bb,5*bb,61);yy=xx;
[XX YY]=meshgrid(xx,yy);
for jj=1:length(yy)
    jj
    ypi=yy(jj);

```

```

for ii=1:length(xx)
    xpi=xx(ii);

    if isp==0,
        potinc=exp(imu*(kx*xpi+ky*ypi));% plane incident wave
    else
        R=sqrt((xpi-xs).^2+(ypi ).^2); % point source emission
        potinc= besselh(0,1,k*R);
    end
    %wx(jj,ii)=Ux; wy(jj,ii)=Uy;
    pot2(jj,ii)=0;
    for j=1:N
        xil=x(j);xi2=x(j+1);yil=y(j);yi2=y(j+1);
        f=soursegh(xil,yil,xi2,yi2,xpi,ypi,k);
        potp=f(3)*S1(j);
        %up=f(1)*S1(j);vp=f(2)*S1(j);
        pot2(jj,ii)=pot2(jj,ii)+potp;

        end
        potI(jj,ii)=potinc;
        potD(jj,ii)=pot2(jj,ii);
    end
end

figure
subplot(3,2,1)
pcolor(XX,YY,real(potI));hold on
shading interp
caxis([-1.5 1.5])
%axis([-15 15 -15 15])
axis equal
colorbar
colormap jet
fill(x,y,'r')
title(' Real part of the potential field')
xlabel('x(m)');ylabel('y(m)')

subplot(3,2,2)
pcolor(XX,YY,imag(potI));hold on
shading interp

caxis([-1.5 1.5])

axis equal
colorbar
colormap jet
fill(x,y,'r')
title(' Imaginary part of the potential field')
xlabel('x(m)');ylabel('y(m)')

subplot(3,2,3)
pcolor(XX,YY,real(potD));hold on
shading interp
caxis([-1 1])

axis equal
colorbar
colormap jet
fill(x,y,'r')
title(' Real part of the potential field')

```

```

xlabel('x(m)');ylabel('y(m)')

subplot(3,2,4)
pcolor(XX,YY,imag(potD));hold on
shading interp

caxis([-1 1])

axis equal
colorbar
colormap jet
fill(x,y,'r')
title(' Imaginary part of the potential field')
xlabel('x(m)');ylabel('y(m)')

subplot(3,2,5)
pcolor(XX,YY,real(potI+potD));hold on
shading interp
caxis([-1 1])

axis equal
colorbar
colormap jet
fill(x,y,'r')
title(' Real part of the potential field')
xlabel('x(m)');ylabel('y(m)')

subplot(3,2,6)
pcolor(XX,YY,imag(potI+potD));hold on
shading interp

caxis([-1 1])

axis equal
colorbar
colormap jet
fill(x,y,'r')
title(' Imaginary part of the potential field')
xlabel('x(m)');ylabel('y(m)')

```

### **cresol.m**

```

%% CALCULATION OF EXCITING FORCES & HYDRODYNAMIC COEFFS IN THE
FREQUENCY RANGE
% sections: REVERSE 1=body, 2=FSleft, 3=Left, 4=Bottom, 5=Right,
6=FSright
% exp(-imu*om*t) harmonic time dependence %%%%%%%%%!!!!!!
clear all;%close all;
load geodat

N1=N+1;Nel=sum(N);
Ao=A;Bo=B;xo4=xi(4,1:N1(4));yo4=yi(4,1:N1(4));

denom=[1 h h h^2
        1 h^2 h^2 h^3
        1 h^2 h^2 h^3
        1 h^3 h^3 h^4];

```

```

A0=A;B0=B;

%%% wave data
om=2;AA=9.81/om/om;
mi=om*om*h/9.81;imu=sqrt(-1);
Str=mi*h;
kh0=Str;
d1=0.6666666666;
d2=0.3555555555;
d3=0.1608465608;
d4=0.0632098765;
d5=0.0217540484;
d6=0.0065407983;
den=1+d1*kh0+d2*kh0.^2+d3*kh0.^3+d4*kh0.^4+d5*kh0.^5+d6*kh0.^6;
kappa=sqrt((kh0.^2)+(kh0./den))./h;lamh =2*pi/kappa/h

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Str=mi*h1;
kh0=Str;
den=1+d1*kh0+d2*kh0.^2+d3*kh0.^3+d4*kh0.^4+d5*kh0.^5+d6*kh0.^6;
kappal=sqrt((kh0.^2)+(kh0./den))./h1;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Str=mi*h2;
kh0=Str;
den=1+d1*kh0+d2*kh0.^2+d3*kh0.^3+d4*kh0.^4+d5*kh0.^5+d6*kh0.^6;
kappa2=sqrt((kh0.^2)+(kh0./den))./h2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% GEOMETRY CORRECTION %%
lama=2*pi/kappa;lama1=2*pi/kappal;lama2=2*pi/kappa2;B1=2*1
ama2;A2=-Rb-A1;B2=Rb+B1;
A=min([A2 min(xo4)]);B=max([B2 max(xo4)]);
x2=linspace(Rb,B,51);y2=zeros(size(x2));N(2)=length(x2)-1;
y3=linspace(0,-h2,11);x3=B*ones(size(y3));N(3)=length(x3)-1;
x42=xo4;y42=yo4;dxo=xo4(2)-xo4(1);
x41=[];y41=[];dxo1=2*pi/kappal/20;dxo2=2*pi/kappa2/20;dxo11=max([dxo
dxo1]);dxo22=max([dxo dxo2]);
if B>x42(1),Nko=ceil((B-(x42(1)-dxo))/dxo11);x41=linspace(B,x42(1)-
dxo,Nko);y41=-h1*ones(size(x41));end
x43=[];y43=[];
if A<x42(length(x42)),Nko=ceil((x42(length(x42))+dxo-
A)/dxo22);x43=linspace(x42(length(x42))+dxo,A,Nko);y43=-
h2*ones(size(x43));end
x4a=[x41 x42 x43];y4a=[y41 y42 y43];N1a(4)=length(x4a);
%x4=linspace(min(x4a),max(x4a),101);y4=interp1(x4a,y4a,x4);
x4=x4a;y4=y4a;N1(4)=length(x4);N(4)=N1(4)-1;
max(abs(gradient(y42,x42(2)-x42(1))))
y5=linspace(-h1,0,11);x5=A*ones(size(y5));N(5)=length(x5)-1;
x6=linspace(A,-Rb,51);y6=zeros(size(x6));N(6)=length(x6)-
1;N1=N+1;Nel=sum(N);
x1=xi(1,1:(N1(1)));y1=yi(1,1:(N1(1)));

%figure
xall=[x1 x2 x3 x4 x5 x6];yall=[y1 y2 y3 y4 y5 y6];
%plot(xall,yall);hold on;plot(xall,yall,'ro');axis equal;

xi(2,1:N1(2))=x2;yi(2,1:N1(2))=y2;
xi(3,1:N1(3))=x3;yi(3,1:N1(3))=y3;
xi(4,1:N1(4))=x4;yi(4,1:N1(4))=y4;

```

```

xi(5,1:N1(5))=x5;yi(5,1:N1(5))=y5;
xi(6,1:N1(6))=x6;yi(6,1:N1(6))=y6;

%disp('...');pause
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Bv=zeros(Nel,4);icp=0;clear Am Potm;
for isec=1:6
    clear th
    for i=1:N(isec)
        th(i)=atan2(yi(isec,i+1)-yi(isec,i),xi(isec,i+1)-xi(isec,i))-
0.5*pi;
        icp=icp+1;
        npx(icp)=-cos(th(i));npy(icp)=-sin(th(i));
        xm(icp)=0.5*(xi(isec,i)+xi(isec,i+1));
        ym(icp)=0.5*(yi(isec,i)+yi(isec,i+1));
        np4(icp)=- (npy(icp)*xm(icp)-npx(icp)*ym(icp));
        for ipro=1:4
            if isec==1 & ipro==1, Bv(icp,ipro)= 0;end
            if isec==3 & ipro==1, Bv(icp,ipro)=
2*imu*kappal*AA*cosh(kappal*(ym(icp)+h1))/cosh(kappal*h1);end
            if isec==1 & ipro==2, Bv(icp,ipro)= npx(icp);end
            if isec==1 & ipro==3, Bv(icp,ipro)= npy(icp);end
            if isec==1 & ipro==4, Bv(icp,ipro)= np4(icp);end
        end
    end
end

%Matrix coefficient & system solution

icp=0;
for isec=1:6
    for i=1:N(isec)
        icp=icp+1;
        xp=0.5*(xi(isec,i)+xi(isec,i+1));
        yp=0.5*(yi(isec,i)+yi(isec,i+1));

        jel=0;
        for jsec=1:6
            for j=1:N(jsec)
                jel=jel+1;
                xil=xi(jsec,j);yil=yi(jsec,j);
                xi2=xi(jsec,j+1);yi2=yi(jsec,j+1);
                f=-sourseg(xil,yil,xi2,yi2,xp,yp);Potm(icp,jel)=f(3);%change
sign for sink
                up=f(1);vp=f(2);un(icp,jel)=up*npx(icp)+vp*npy(icp);if
icp==jel, un(icp,jel)=0.5;end
                if isec==1|isec==4,Am(icp,jel)=un(icp,jel);end
                if isec==2|isec==6,Am(icp,jel)=un(icp,jel)-
mi*Potm(icp,jel);end
                if isec==3,Am(icp,jel)=un(icp,jel)-
imu*kappal*Potm(icp,jel);end
                if isec==5,Am(icp,jel)=un(icp,jel)-
imu*kappa2*Potm(icp,jel);end
            end
        end
    end
end

S1=Am\Bv(:,1);Pot1=Potm*S1;
S2=Am\Bv(:,2);Pot2=Potm*S2;

```

```
S3=Am\Bv(:,3);Pot3=Potm*S3;
S4=Am\Bv(:,4);Pot4=Potm*S4;
save res
```

```
plotsol;
```

### geom.m

```
%%% DOMAIN GEOMETRY %%% sections: REVERSE 1=body, 2=FSleft, 3=Left,
4=Bottom, 5=Right, 6=FSright
clear all; close all;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% rectangle
```

```
%Rb=1;h=1*Rb;h2=1*h;A=-4*Rb;B=4*Rb;
```

```
%t=linspace(0,pi,37);
```

```
%Rb1=Rb*ones(size(t));ila1=find(t<0.25*pi);ila2=find(t>=0.25*pi&t<0.5*pi);ila3=find(t>=0.5*pi&t<0.75*pi);ila4=find(t>=0.75*pi);
```

```
%Rb1(ila1)=Rb./cos(t(ila1));Rb1(ila2)=Rb./cos(0.5*pi-t(ila2));
```

```
%Rb1(ila4)=Rb./cos(pi-t(ila4));Rb1(ila3)=Rb./cos(0.5*pi-t(ila3));
```

```
%x1=Rb1.*cos(t);y1=-Rb1.*sin(t);N(1)=length(x1)-1;
```

```
%%% circle -----
```

```
%Rb=1;h=1*Rb;h2=1*h;A=-4*Rb;B=4*Rb;
```

```
%t=linspace(0,pi,37);
```

```
%Rb1=Rb*ones(size(t))
```

```
%x1=Rb1.*cos(t);y1=-Rb1.*sin(t);N(1)=length(x1)-1;
```

```
%%% pontoon B/h=bih, T/h=tih-----
```

```
h1=100;h2=100;
```

```
%h1=1.2;h2=0.8;%slope=12.5%
```

```
%h1=1.4;h2=0.6;%slope=25%
```

```
Rb1=10; B=200; A=-B; % BOUNDARY ELEMENTS in iso spacing
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
t=linspace(0,2*pi,31); x=zeros(1,length(t)); y=zeros(1,length(t));
```

```
x5=-Rb1.*cos(t);y5=-25-Rb1.*sin(t);N(5)=length(x5)-1;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
x1=linspace(-B,B,51);y1=zeros(size(x1));N(1)=length(x1)-1;
```

```
y2=linspace(0,-h2,15);x2=B*ones(size(y2));N(2)=length(x2)-1;
```

```
y4=linspace(-h1,0,15);x4=A*ones(size(y4));N(4)=length(x4)-1;
```

```
%tanh botom profile
```

```
x3=linspace(B,-B,51);
```

```
y3=-0.5*(h1+h2)-0.5*(h1-h2)*cos(1.*pi*(x3-A)/(B-A));N(3)=length(x3)-1;
```

```
%linear (almost) sloping bottom
```

```
% load xyn;y4=-h1+(h1-h2)*interp1(xn,yn,(x4-A-0.15*(B-A))/0.7/(B-A));N(4)=length(x4)-1;
```

```
% sinusoidal bottom profile
```

```
% y4=-h1*ones(size(x4));
```

```
% y4=-h1*(1-0.30*cos(6.*pi*(x4-A-0.00*(B-A))/1/(B-A)).*exp(-10*((x4-A)/(B-A)-0.5).^2));N(4)=length(x4)-1;
```

```
% max(abs(gradient(y4,x4(2)-x4(1))))
```

```
N1=N+1;Nel=sum(N);Bv=zeros(1,Nel)';
```



```

xall=[x1 x2 x3 x4 x5 ];yall=[y1 y2 y3 y4 y5 ];
plot(xall,yall);hold on;plot(xall,yall,'wo');axis equal;
xi=zeros(6,101);yi=xi;
xi(1,1:N1(1))=x1;yi(1,1:N1(1))=y1;

xi(2,1:N1(2))=x2;yi(2,1:N1(2))=y2;
xi(3,1:N1(3))=x3;yi(3,1:N1(3))=y3;
xi(4,1:N1(4))=x4;yi(4,1:N1(4))=y4;
xi(5,1:N1(5))=x5;yi(5,1:N1(5))=y5;

plot([x1 x2 x3 x4 x5 ],[y1 y2 y3 y4 y5 ],'w');hold on;

icp=0;
for isec=1:5
    clear th
    for i=1:N(isec)
        th(i)=atan2(yi(isec,i+1)-yi(isec,i),xi(isec,i+1)-xi(isec,i))-
0.5*pi;
    end
    nx=-cos(th);ny=-sin(th);

xm=0.5*(xi(isec,1:N(isec))+xi(isec,2:N1(isec)));ym=0.5*(yi(isec,1:N(i
sec))+yi(isec,2:N1(isec)));
    quiver(xm,ym,nx,ny);
end
axis equal
x=xi;y=yi;
save geodat x y N
disp('Press enter to calculate...');

```

### **helm2db.m**

```

%%% HELMHOLTZ equ scattering problem in sea acoustic waveguide
% sections: 1=FS, 2=Right, 3=Bottom, 4=Left, 5=BODY %bdry -->
clockwise
clear all; %close all;%clc
load geodat
aa=input('BBC a*dphi/dn + b*phi. a...=');
bb=input('BBC a*dphi/dn + b*phi. b...=');

Nsec=4; if sqrt(aa^2+bb^2)>0, Nsec=5;end

imu=sqrt(-1);

xin=x(1,1);xout=x(1,N(1)+1);h=abs(y(4,1)); h3=abs(y(2,N(2)+1));
zz1=linspace(-h,0,101);zz3=linspace(-h3,0,101);dz1=zz1(2)-zz1(1);
co=3+(-1).^(1:101);co(1)=1;co(101)=1;dz3=zz3(2)-zz3(1);

freq=25;c=1500;om=2*pi*freq;kk=om/c; Nm=10; xsour=-1000; z0=-h/10;%
source x-incident wavefield
for n=1:Nm
    kzn(n)=(n-0.5)*pi/h;kzn3(n)=(n-0.5)*pi/h3;
    kxn(n)=sqrt(kk^2-kzn(n)^2);kxn3(n)=sqrt(kk^2-kzn3(n)^2);
    Znz0(n)=sqrt(2/h)*sin(kzn(n)*z0);
    An(n)=0.5*imu*Znz0(n)*exp(-imu*kxn(n)*xsour)/kxn(n);
end

```

```

Np1=length(find((kxn.^2)>0));
%% length on body = sec 5

isec=5;
for i=1:N(isec);
    dy=y(isec,i+1)-y(isec,i);dx=x(isec,i+1)-
x(isec,i);dlo=sqrt(dx^2+dy^2);
    if i==1; la(i)=0.5*dlo;
    else,
        la(i)=la(i-1)+0.5*(dlok+dlo);
    end
    dlok=dlo;
end

%%%%%%%%%% DtN setup & system solution
ii=0;
for isec=1:Nsec
for i=1:N(isec)
    ii=ii+1;

xp=0.5*(x(isec,i)+x(isec,i+1));yp=0.5*(y(isec,i)+y(isec,i+1));xpl(ii)
=xp;yp1(ii)=yp;
    th=atan2(y(isec,i+1)-y(isec,i),x(isec,i+1)-x(isec,i))-0.5*pi;
    nx(ii)=-cos(th);ny(ii)=-sin(th);
    Bv(ii)=0;

jj=0;
    for jsec=1:Nsec
        for j=1:N(jsec)
            jj=jj+1;
            xi1=x(jsec,j);xi2=x(jsec,j+1);yi1=y(jsec,j);yi2=y(jsec,j+1);
            f=soursegh(xi1,yi1,xi2,yi2,xp,yp,kk);Potm(ii,jj)=f(3);
            up=f(1);vp=f(2);un(ii,jj)=up*nx(ii)+vp*ny(ii);
            if ii==jj, un(ii,jj)=0.5;end %% Note normal vector directed
to the exterior of the domain!!
            % if isp==0,
            %     Am(ii,jj)=un(ii,jj);
            % else,
            %     Am(ii,jj)=Potm(ii,jj);
            % end
        end
    end
end
end

%Tau=un*inv(Potm);
is2=N(1)+1; ie2=N(1)+N(2); is4=N(1)+N(2)+N(3)+1;
ie4=N(1)+N(2)+N(3)+N(4);
Nel=sum(N);if Nsec==4, Nel=N(1)+N(2)+N(3)+N(4);end

ii=0;
for isec=1:Nsec
for i=1:N(isec)
    ii=ii+1;

jj=0;
    for jsec=1:Nsec
        for j=1:N(jsec)
            jj=jj+1;
            if isec==1, Am(ii,jj)=Potm(ii,jj); end

```

```

        if isec==3, Am(ii,jj)=un(ii,jj); end
        if isec==5, Am(ii,jj)=aa*un(ii,jj)+bb*Potm(ii,jj); end
        if isec==2, Am(ii,jj)=un(ii,jj); end
        if isec==4, Am(ii,jj)=un(ii,jj); end
    end
end
    if isec==2,
        for jj=1:Nel
            zic= yp1(is2:ie2)' ; fic=Potm(is2:ie2,jj);
fic1=interp1(zic, fic, zz3, 'linear', 'extrap');
            for n=1:Nm

olon=(dz3/3)*sqrt(2/h3)*sum(co.*fic1.*sin(kzn3(n)*zz3));
                Am(ii,jj)=Am(ii,jj)-
imu*kxn3(n)*olon*(sqrt(2/h3)*sin(kzn3(n)*yp1(ii)));
            end
            end
        end
        if isec==4,

            for jj=1:Nel
                zic= yp1(is4:ie4)' ; fic=Potm(is4:ie4,jj);
fic1=interp1(zic, fic, zz1, 'linear', 'extrap');
                for n=1:Nm

olon=(dz1/3)*sqrt(2/h)*sum(co.*fic1.*sin(kzn(n)*zz1));
                    Am(ii,jj)=Am(ii,jj)-
imu*kxn(n)*olon*(sqrt(2/h)*sin(kzn(n)*yp1(ii)));
                end
                end
                for n=1:Nm
                    Bv(ii)=Bv(ii)-
2*imu*An(n)*kxn(n)*exp(imu*kxn(n)*xin)*(sqrt(2/h)*sin(kzn(n)*yp1(ii))
);
                end
            end
        end
end
end

S1=Am\conj(Bv');Pot1=Potm*S1;

%%% comparison potential on bdry *****
if Nsec==5,
figure
is5=N(1)+N(2)+N(3)+N(4)+1; ie5=N(1)+N(2)+N(3)+N(4)+N(5);
    potan=Pot1(is5:ie5);
plot(la,real(potan),'y');hold on; title('Field on bdry (Neumann
scatterer)')

plot(la,imag(potan),'c');hold on; xlabel('length along bdry (m)')
end

%%%%%%
disp('Press enter...');
pause;

%%% field plot *****
xx=linspace(xin,xout,61);yy=linspace(-h,0,21);

```

```

[XX YY]=meshgrid(xx,yy);
for jj=1:length(yy)
    jj
        ypi=yy(jj);

        for ii=1:length(xx)
            xpi=xx(ii);

            pot2(jj,ii)=0;jk=0;
            for jsec=1:Nsec
                for j=1:N(jsec)
                    jk=jk+1;
                    xi1=x(jsec,j);xi2=x(jsec,j+1);yi1=y(jsec,j);yi2=y(jsec,j+1);
                    f=soursegh(xi1,yi1,xi2,yi2,xpi,ypi,kk);
                    potp=f(3)*S1(jk);
                    %up=f(1)*S1(j);vp=f(2)*S1(j);
                    pot2(jj,ii)=pot2(jj,ii)+potp;
                end
            end

        end
    end

figure

xibot=x(3,1:N(3)+1);yibot=y(3,1:N(3)+1);

subplot(2,1,1)
%pcolor(XX,YY,real(pot2));hold on;shading interp;caxis([-1.5 1.5])
contourf(XX,YY,real(pot2),31,'k');hold on
%axis([-15 15 -15 15])
axis equal
colorbar
colormap jet
if Nsec==5,fill(x(5,1:N(5)+1),y(5,1:N(5)+1),'w');end
title(' Real part of the potential field, freq=25Hz, c=1500m/s,
Neumann scatterer')
xlabel('x(m)');ylabel('y(m)')
plot(xibot,yibot,'w','linewidth',2)
fill([xibot xibot(1) xibot(1)],[yibot yibot(end) yibot(end)],'w')
subplot(2,1,2)
%pcolor(XX,YY,imag(pot2));hold on;shading interp;caxis([-1.5 1.5])
contourf(XX,YY,imag(pot2),31,'k');hold on
axis equal
colorbar
colormap jet
if Nsec==5,fill(x(5,1:N(5)+1),y(5,1:N(5)+1),'w');end
plot(x(3,1:N(3)+1),y(3,1:N(3)+1),'w','linewidth',2)
fill([xibot xibot(1) xibot(1)],[yibot yibot(end) yibot(end)],'w')
title(' Imaginary part of the potential field, freq=25Hz, c=1500m/s,
Neumann scatterer')
xlabel('x(m)');ylabel('y(m)')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
zzp=[-10 -20 -50];

zic= yp1(is2:ie2)' ; fic=Pot1(is2:ie2);
fic1=interp1(zic, fic, zz3, 'linear', 'extrap');
for n=1:Nm

```

```

olo=(dz3/3)*sqrt(2/h3)*sum(co.*fic1.*sin(kzn3(n)*zz3))*exp(-
imu*kxn3(n)*xout);
Cout(n)=olo;
end
zic=yp1(is4:ie4)';fic=Pot1(is4:ie4);
fic1=interp1(zic,fic,zz1,'linear','extrap');
for n=1:Nm
olo=(dz1/3)*sqrt(2/h)*sum(co.*fic1.*sin(kzn(n)*zz1))*exp(imu*kxn(n)*x
in);
Cin(n)=olo-An(n)*exp(2*imu*kxn(n)*xin);
end

xa1=linspace(xsour+100,xin,301);
xa2=linspace(xin,xout,301);
xa3=linspace(xout,1000,301);

for ni=1:length(zzp)
figure
fa1=0*xa1;fa2=0*xa2;fa3=0*xa3;
for n=1:Nm
Anna=An(n);%if N>Np1,Anna=0;end
fa1=fa1+(Cin(n)*exp(-
imu*kxn(n)*xa1)+Anna*exp(imu*kxn(n)*xa1))*sqrt(2/h)*sin(kzn(n)*zzp(ni
));
fa3=fa3+(Cout(n)*exp(imu*kxn3(n)*xa3))*sqrt(2/h3)*sin(kzn3(n)*zzp(ni
));
end
fa2=interp2(XX,YY,pot2,xa2,zzp(ni));

plot([xa1 xa2 xa3],real([fa1 fa2 fa3]));hold on;
plot([xa1 xa2 xa3],imag([fa1 fa2 fa3]),'c');title('Potential on 50m
depth, Neumann scatterer')
xlabel('x(m)');ylabel('Potential(J)')
end

```