



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**«ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»**

## **Ανίχνευση Βλαβών σε Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΙΟΥΡΑΝΗΣ Σ. ΧΑΤΖΗΝΙΚΟΛΑΪΔΗΣ**

**Επιβλέπων :** Αργύρης Γ. Σολδάτος  
Δρ. Ηλ. Μηχανικός

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2016





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
«ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»

## Ανίχνευση Βλαβών σε Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΙΟΥΡΑΝΗΣ Σ. ΧΑΤΖΗΝΙΚΟΛΑΪΔΗΣ**

**Επιβλέπων :** Αργύρης Γ. Σολδάτος  
Δρ. Ηλ. Μηχανικός

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 7η Σεπτεμβρίου 2016.

.....  
Νικόλαος Μαρατός  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Χαράλαμπος Σαρίμβης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Αργύρης Σολδάτος  
Δρ. Ηλ. Μηχανικός

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2016

.....  
**Ιορδάνης Σ. Χατζηνικολαΐδης**

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ιορδάνης Σ. Χατζηνικολαΐδης, 2016.  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Περίληψη

Η αναγνώριση, ο εντοπισμός και απομόνωση λαθών σε δυναμικά συστήματα λαμβάνει όλο και πιο εξέχουσα σημασία, καθώς αυτά γίνονται όλο και πιο πολύπλοκα. Οι αναλυτικές τεχνικές που μπορούν να διευκολύνουν αυτή τη διαδικασία και να βοηθήσουν στην κατά το δυνατόν αντιμετώπιση τυχόν μη επιθυμητών καταστάσεων γίνονται συνεπώς ολοένα και πιο σημαντικές. Ανάμεσα στις διάφορες τεχνικές που περιγράφονται στη βιβλιογραφία, η μεθοδολογία σχεδιασμού φίλτρου ανίχνευσης αποτελεί μία από τις πιο σημαντικές και πολλά υποσχόμενες προσπάθειες.

Στην παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των βασικών θεωρητικών εργαλείων που απαιτούνται για τον σχεδιασμό φίλτρων ανίχνευσης. Παρ' όλο που η μέθοδος απαιτεί μια αρκετά προηγμένη επεξεργασία δεδομένων, επιτρέπει υπό κάποιες προϋποθέσεις την ανίχνευση και αναγνώριση αστοχιών εξαρτημάτων σε ένα σύστημα, καθορίζοντας σφάλματα εξόδου μίας ή δύο κατευθύνσεων για κάθε δυνατή αστοχία. Για την διευκόλυνση του σχεδιασμού τέτοιων φίλτρων, αναπτύχθηκε ένα πρόγραμμα για υπολογιστή στο περιβάλλον του Matlab. Τέλος, παρουσιάζεται η εφαρμογή της στο μοντέλο ενός αντισεισμικού συστήματος.

## Λέξεις κλειδιά

Φίλτρο ανίχνευσης, φίλτρο Beard - Jones, ανίχνευση και εντοπισμός σφαλμάτων, διάνυσμα συμβάντος, χώρος ανίχνευσης, διαχωριστικότητα στην έξοδα, αμοιβαία ανιχνευσιμότητα, στασιμότητα στην έξοδο, αστοχίες επενεργητών, αστοχίες αισθητήρων, αλλαγές δυναμικής.



## **Abstract**

The process of detection, identification and isolation of faults in dynamical systems is becoming very important, whilst systems become more complex. Analytic procedures that can facilitate and help avoid faulty situations are thus becoming even more important. Among the many different existing methodologies, the fault detection filter design theory is one of the most important and promising attempts.

This MSc dissertation recalls briefly the main results of the detection filter theory necessary for the design of detection filters. Although sophisticated data processing is required, it allows in certain circumstances to detect and identify component failures in a system, by assigning unidirectional or bidirectional error outputs to each failure. In order to facilitate the design process, a computer program was developed in Matlab. Last but not least, an application of the methodology in an anti-seismic system is presented.

## **Key words**

Detection filter, Beard - Jones filter, detection and identification of faults, event vector, event space, output separability, mutual detectability, output stationary, actuator faults, sensor faults, changes in dynamics.





## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή αυτής της διατριβής, κ. Σολδάτο Αργύρη, για τη συνεχή καθοδήγηση και για την εμπιστοσύνη του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για όλη τους την συμπαράσταση και τις ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις τους κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας και κυρίως τον Θεοδωρή Πουλιανίτη. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και κυρίως τους γονείς μου και την αδερφή μου, οι οποίοι με υποστήριξαν και έκαναν δυνατή την απερίσπαστη ενασχόλησή μου τόσο με τη παρούσα εργασία όσο και συνολικά με τις σπουδές μου.

Ιορδάνης Σ. Χατζηνικολαΐδης,  
Αθήνα, 7η Σεπτεμβρίου 2016



# Περιεχόμενα

Περίληψη . . . . .	5
Abstract . . . . .	7
Ευχαριστίες . . . . .	9
Περιεχόμενα . . . . .	11
Κατάλογος σχημάτων . . . . .	13
<b>1. Εισαγωγή.</b> . . . . .	15
1.1 Διατύπωση του προβλήματος. . . . .	15
1.2 Το φίλτρο ανίχνευσης. . . . .	16
1.3 Προηγούμενη έρευνα. . . . .	18
1.4 Δομή της εργασίας. . . . .	18
<b>2. Θεωρία φίλτρου ανίχνευσης.</b> . . . . .	19
2.1 Εισαγωγή. . . . .	19
2.2 Η δομή των φίλτρων ανίχνευσης. . . . .	19
2.3 Μοντέλα σφαλμάτων. . . . .	21
2.3.1 Αστοχίες επενεργητών. . . . .	21
2.3.2 Αλλαγές δυναμικής. . . . .	22
2.3.3 Αστοχίες αισθητήρων. . . . .	23
2.4 Σχεδιασμός φίλτρου ανίχνευσης. . . . .	24
2.4.1 Σύνολα διανυσμάτων συμβάντων. . . . .	25
2.4.2 Περιγραφή της διαδικασίας σχεδιασμού. . . . .	26
2.4.3 Διαχωρίσιμα στην έξοδο διανύσματα συμβάντος. . . . .	27
2.4.4 Χώρος συμβάντων. . . . .	28
2.4.5 Περιοριστικά σύνολα. . . . .	30
2.4.6 Επαυξάνοντας τον χώρο κατάστασης. . . . .	31
2.4.7 Υπολογίζοντας τον πίνακα κέρδους $D$ . . . . .	32
2.4.8 Το κέρδος $D$ για αστοχίες αισθητήρων. . . . .	34
2.4.9 Στασιμότητα στην έξοδο. . . . .	36
2.4.10 Επιλογή ιδιοτιμών. . . . .	37
2.5 Σύνοψη. . . . .	38
<b>3. Αλγοριθμικός σχεδιασμός του φίλτρου ανίχνευσης.</b> . . . . .	39
3.1 Αρχή του αλγορίθμου. . . . .	39
3.2 Αλγόριθμος του προγράμματος του φίλτρου ανίχνευσης. . . . .	40
3.3 Παραδείγματα εφαρμογής. . . . .	40
3.3.1 Παράδειγμα 1. . . . .	41
3.3.2 Παράδειγμα 2. . . . .	42

<b>4. Προσομοίωση του φίλτρου ανίχνευσης για ένα αντισεισμικό σύστημα.</b>	45
4.1 Μοντέλο αντισεισμικού συστήματος.	45
4.2 Μοντελοποίηση σφαλμάτων.	46
4.3 Εκτέλεση αλγορίθμου.	46
4.4 Προσομοίωση συστήματος.	47
4.4.1 Το μοντέλο προσομοίωσης.	47
4.4.2 Σφάλμα στον επενεργητή.	47
4.4.3 Σφάλμα στον δεύτερο αισθητήρα.	48
4.4.4 Σφάλμα στον πρώτο αισθητήρα.	49
4.4.5 Επίδραση του σφάλματος του επενεργητή στον πρώτο αισθητήρα.	50
4.4.6 Επίδραση του σφάλματος του πρώτου αισθητήρα στον φίλτρο επενεργητή και υπόλοιπων αισθητήρων.	50
<b>5. Συμπεράσματα και μελλοντικές προοπτικές.</b>	53
5.1 Τελικά συμπεράσματα.	53
5.2 Μελλοντικές κατευθύνσεις.	55
<b>Βιβλιογραφία</b>	57
<b>Παράρτημα</b>	59
<b>A. Ευρετήριο συμβολισμών.</b>	59

## Κατάλογος σχημάτων

1.1	Δομή του φίλτρου ανίχνευσης. . . . .	17
1.2	Υπόλοιπα από ένα τυχαίο γραμμικό φίλτρο και από ένα φίλτρο ανίχνευσης. . . . .	17
2.1	Δομικό διάγραμμα φίλτρου ανίχνευσης. . . . .	20
4.1	Μοντέλο συγκεντρωμένων παραμέτρων κτηρίου σε απόλυτες συντεταγμένες. . . . .	46
4.2	Μοντέλο συστήματος προσομοίωσης στο Simulink. . . . .	48
4.3	Απόκριση συστήματος χωρίς αστοχία. . . . .	48
4.4	Απόκριση συστήματος με αστοχία στον επενεργητή. . . . .	49
4.5	Γωνίες μεταξύ εποπτευόμενου σφάλματος επενεργητή-αισθητήρων και εξόδου στην περίπτωση σφάλματος του επενεργητή. . . . .	49
4.6	Γωνίες μεταξύ εποπτευόμενου σφάλματος επενεργητή-αισθητήρων και εξόδου στην περίπτωση σφάλματος του δεύτερου αισθητήρα. . . . .	50
4.7	Γωνίες μεταξύ εποπτευόμενου σφάλματος πρώτου αισθητήρα και εξόδου στην περίπτωση σφάλματος του πρώτου αισθητήρα. . . . .	51
4.8	Γωνίες μεταξύ εποπτευόμενου σφάλματος πρώτου αισθητήρα και εξόδου στην περίπτωση σφάλματος του επενεργητή. . . . .	51
4.9	Γωνίες μεταξύ εποπτευόμενου σφάλματος επενεργητή-αισθητήρων και εξόδου στην περίπτωση σφάλματος του πρώτου αισθητήρα. . . . .	52



## Κεφάλαιο 1

### Εισαγωγή.

#### 1.1 Διατύπωση του προβλήματος.

Ένα σύστημα διάγνωσης σφαλμάτων έχει ως στόχο την έγκαιρη αναγνώριση της ύπαρξης κάποιου σφάλματος σε ένα άλλο σύστημα και σε επόμενο στάδιο τον εντοπισμό του και την απομόνωσή του. Ο απώτερος σκοπός ενός τέτοιου συστήματος είναι η βελτίωση της αξιοπιστίας του εποπτευόμενου συστήματος. Ενόσω τα μηχανικά συστήματα γίνονται όλο και πιο πολύπλοκα, η επίτευξη αξιοπιστίας γίνεται όλο και πιο δύσκολη. Όταν ένας μεγάλος αριθμός εξαρτημάτων αλληλοσυνδέεται, η πιθανότητα αστοχίας ενός ή και περισσότερων μπορεί να είναι εξαιρετικά σημαντική, ακόμα και αν το καθένα ξεχωριστά είναι αρκετά αξιόπιστο.

Ένας τρόπος βελτίωσης της αξιοπιστίας του συνολικού συστήματος είναι μέσω της περαιτέρω βελτίωσης της αξιοπιστίας του κάθε συστήματος ξεχωριστά. Συχνά όμως τέτοιες βελτιώσεις υπόκεινται στους περιορισμούς της τεχνολογικής ανάπτυξης και στις επιστημονικές εξελίξεις που αφορούν τη θεωρία, τον σχεδιασμό και την κατασκευή του εκάστοτε εξαρτήματος.

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται μεγαλύτερη αξιοπιστία σε πρακτικά συστήματα είναι μέσω του πλεονασμού, δηλαδή την προσφορά στο σύστημα περισσότερων απ' όσα απαιτούνται για την ικανοποιητική λειτουργία. Με αυτό τον τρόπο, η αστοχία κάποιων εξαρτημάτων μπορεί να γίνει ανεκτή χωρίς να οδηγεί στην αστοχία του συνολικού συστήματος.

Μια από τις πιο απλές μεθόδους πλεονασμού αφορά αυτό που αποκαλείται πλεονασμός αναμονής. Αυτή έγκειται ουσιαστικά στην χρήση εφεδρικών εξαρτημάτων και συστημάτων. Σε περίπτωση σφάλματος, το δυσλειτουργικό εξάρτημα ή σύστημα αντικαθίσταται απλά από ένα εφεδρικό σύστημα ή εξάρτημα.

Το βασικότερο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η σχετική της απλότητα, τόσο στο σχεδιασμό όσο και στην εφαρμογή. Συνήθως, το εφεδρικό εξάρτημα είναι πανομοιότυπο με το αρχικό. Στην πράξη, αυτό γίνεται απομονώνοντας το ελαττωματικό εξάρτημα και αντικαθιστώντας το με το εφεδρικό. Πολύ σπάνια απαιτείται η σημαντική αλλαγή άλλων κομματιών του συστήματος, προκειμένου να επιτευχθεί συμβατότητα με το εφεδρικό. Συνεπώς, δεν απαιτείται κάποια περίπλοκη λογική για να επιτευχθεί η αντικατάσταση. Παρ' όλα αυτά, ακόμα και σε αυτή την τόσο απλή μέθοδο, μπορεί να μην είναι και τόσο εύκολη η αναγνώριση και ο εντοπισμός του σφάλματος, σε χρόνο που θα αποτρέψει την αστοχία του συνολικού συστήματος.

Μερικά σφάλματα μπορούν να αναγνωρισθούν και να εντοπισθούν απλά με τη χρήση αισθητήριων διατάξεων. Για παράδειγμα, η απώλεια πίεσης σε ένα υδραυλικό σύστημα. Σε άλλες περιπτώσεις το πρόβλημα εντοπισμού του ελαττωματικού εξαρτήματος παρακάμπτεται ομαδοποιώντας ένα σύνολο εξαρτημάτων σε μια ενιαία μονάδα, των οποίων η αστοχία μπορεί να εντοπισθεί σχετικά εύκολα. Τότε, αντί να αναζητείται για να αντικατασταθεί το συγκεκριμένο εξάρτημα, αντικαθίσταται η συνολική ομάδα εξαρτημάτων. Αυτό πραγματοποιείται στις περιπτώσεις ύπαρξης εφεδρικού συστήματος. Φυσικά η μέθοδος αυτή είναι μη αποδοτική, διότι αντικαθίστανται επιπλέον και ένα σύνολο υγιών εξαρτημάτων.

Παρόλο που μπορεί να είναι μια αποτελεσματική μέθοδος επίτευξης αξιοπιστίας, ο πλεονασμός αναμονής έχει και εγγενείς περιορισμούς. Σε πολλές περιπτώσεις, η ύπαρξη εφεδρικών εξαρτημάτων δεν είναι και η πλέον αποδοτική χρήση του υλικού. Καλύτερη απόδοση μπορεί πολύ συχνά να επιτευχθεί κάνοντας ταυτόχρονη χρήση όλων των εφεδρικών εξαρτημάτων. Επί παραδείγματι, ένα

σύνολο πλεονασματικών αισθητήρων, τα οποία μετρούν την ίδια ποσότητα, μπορεί να είναι σε θέση να μετρήσει με μεγαλύτερη ακρίβεια από μόνο έναν αισθητήρα. Ένα σύνολο στοιχείων, των οποίων η έξοδος είναι το άθροισμα των εξόδων των μεμονωμένων στοιχείων, μπορεί να χρησιμοποιούνται πιο αποδοτικά σε σχέση με την χρήση ενός μονάχα εξαρτήματος για τη συνολική έξοδο. Όχι μόνο η συνολική δυνατότητα ή το όριο κορεσμού αυξάνεται, αλλά και το μέσο σημείο λειτουργίας κάθε εξαρτήματος μειώνεται, το οποίο μπορεί να οδηγήσει στην αύξηση του χρόνου ζωής του.

Το κίνητρο επομένως για την αναζήτηση πιο εξελιγμένων σχημάτων διάγνωσης σφαλμάτων έγκειται στην ανάγκη παραγωγής συστημάτων με μεγαλύτερες δυνατότητες στην αντιστάθμιση τυχόν αλλαγών, αλλά και στην επίτευξη καλύτερης αξιοποίησης της εφεδρείας. Με την χρήση πιο εξελιγμένων μεθόδων είναι δυνατή η χρήση μια εφεδρείας πιο ενεργής από τον πλεονασμό αναμονής, που περιγράφηκε προηγουμένως. Αντί της χρήσης εφεδρικών εξαρτημάτων, ο πλεονασμός επιτυγχάνεται με τον σχεδιασμό ενεργών εξαρτημάτων που υποκαθιστούν το ένα το άλλο ή τα οποία αναλαμβάνουν αλληλεπικαλυπτόμενες λειτουργίες. Τότε, η αστοχία ενός εξαρτήματος δεν οδηγεί στην άμεση αντικατάσταση με ένα εφεδρικό, η οποία θα οδηγήσει στην μείωση της απόδοσης του συνολικού συστήματος, αλλά η λειτουργία του αναλαμβάνεται από τα υπόλοιπα ενεργά εξαρτήματα.

Προκειμένου να υλοποιηθούν οι πιο εξελιγμένες μέθοδοι διάγνωσης, απαιτούνται μεγαλύτεροι πόροι, τόσο σε επίπεδο λογικής όσο και υπολογιστικοί. Οι πόροι αυτοί μας είναι πλέον πολύ περισσότερο διαθέσιμοι, σε σχέση με την εποχή που αναπτύχθηκε για πρώτη φορά η μεθοδολογία που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία. Η υπολογιστική πολυπλοκότητα ήταν ένας σημαντικός παράγοντας που εμπόδιζε την διεύρυνσή της σε μεγάλο αριθμό συστημάτων· περιορίστηκε τελικά σε εξειδικευμένα συστήματα, όπου η αποφυγή σφαλμάτων έχει καταλυτικό ρόλο, από την πλευρά κυρίως του κόστους.

## 1.2 Το φίλτρο ανίχνευσης.

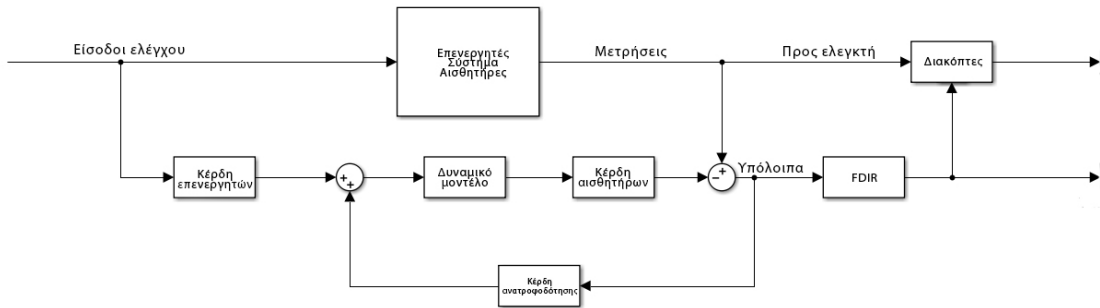
Η απλούστερη μέθοδος ανίχνευσης σφαλμάτων είναι η σύγκριση μεταξύ της συμπεριφοράς δύο παρόμοιων εξαρτημάτων· μια διαφορά υποδεικνύει την ύπαρξη σφάλματος. Η διαπίστωση ποιας εκ των δύο συσκευών είναι εσφαλμένη, γίνεται μέσω της σύγκρισης με ένα τρίτο ίδιο εξάρτημα. Αυτή η διαδικασία ψηφοφορίας είναι απλή αλλά έχει κάποια σημαντικά μειονεκτήματα: τα πλεονάζοντα εξαρτήματα μπορεί να είναι ακριβά, βαριά και ογκώδη.

Παρ' όλα αυτά, με τη χρήση κάποιου υπολογιστικού συστήματος μπορεί να υλοποιηθούν κάποιες άλλες μέθοδοι ανίχνευσης και αναγνώρισης [Willsky, 1976], πολλές από τις οποίες υποκαθιστούν με υπολογισμούς την αναμενόμενη συμπεριφορά του εξαρτήματος σε ένα σύστημα με δύο ή περισσότερα επίπεδα πλεονασμού. Μεταξύ αυτών υπάρχει το φίλτρο ανίχνευσης σφαλμάτων, μια μέθοδος που στοχεύει στην ταυτόχρονη επιτήρηση πολλών και διαφορετικών εξαρτημάτων, συμπεριλαμβανομένου αισθητήρων, επενεργητών, και δυναμικών στοιχείων του συστήματος.

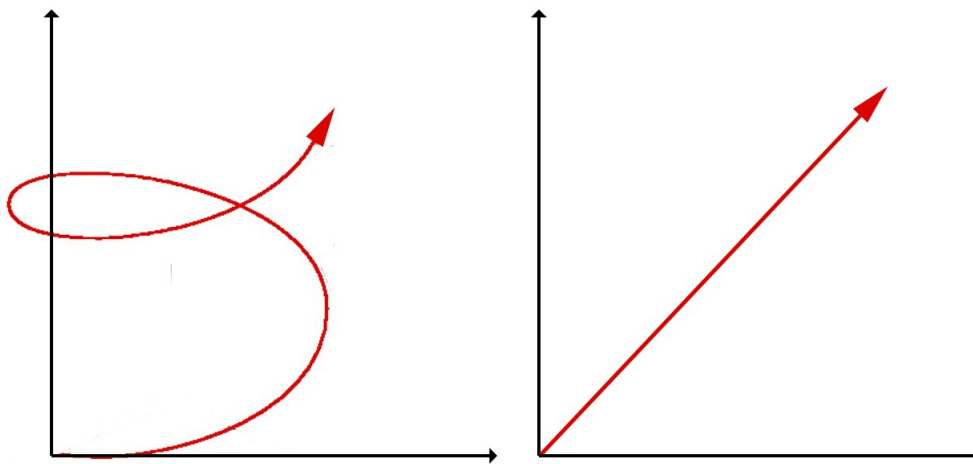
Το φίλτρο ανίχνευσης περιλαμβάνει ένα γραμμικό δυναμικό μοντέλο του συστήματος προς επιτήρηση και συγκρίνει την επίδοση του συστήματος με αυτή ενός μοντέλου αναφοράς. Στο Σχήμα 1.1 παρατηρούμε ένα διάγραμμα βαθμίδων αυτής της διαδικασίας. Στο μοντέλο εισάγεται ακριβώς η ίδια είσοδος με αυτή του συστήματος προς επιτήρηση· συνεπώς υπό φυσιολογικές συνθήκες η έξοδος του ταιριάζει με αυτή του συστήματος. Στην περίπτωση όμως που υπάρξει σφάλμα σε κάποιο εξάρτημα, είτε είναι αισθητήρας, είτε επενεργητής, είτε δυναμική συνιστώσα, οι δύο έξοδοι πλέον δεν ταιριάζουν, το οποίο υποδηλώνει την ύπαρξη σφάλματος.

Τα μοντέλα αναφοράς χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά στην ανίχνευση σφαλμάτων· αυτό όμως που ξεχωρίζει το φίλτρο ανίχνευσης από τις άλλες μεθόδους είναι ο τρόπος με τον οποίο ανιχνεύει το εξάρτημα που έσφαλε. Τα υπόλοιπα του φίλτρου, τα οποία αποτελούν την διαφορά μεταξύ των προβλέψεων του μοντέλου του συστήματος και των μετρήσεων του πραγματικού συστήματος, ανατροφοδοτούνται στην είσοδο του μοντέλου, κατά τρόπο που αναγκάζει το μοντέλο να αποκριθεί σε συγκεκριμένες αστοχίες παράγοντας συγκεκριμένα υπόλοιπα ή συνδυασμό αυτών. Το συγκεκριμένο υπόλοιπο ή ο συνδυασμός αυτών αντιστοιχεί στο εξάρτημα που έσφαλε. Διατυπώνοντάς το διαφορετικά, τα υπόλοιπα φιλτράρονται και εισάγονται πάλι στο μοντέλο με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε όταν





Σχήμα 1.1: Δομή του φίλτρου ανίχνευσης.



Σχήμα 1.2: Υπόλοιπα από ένα τυχαίο γραμμικό φίλτρο και από ένα φίλτρο ανίχνευσης.

ένα εξάρτημα αποτυγχάνει, το διάνυσμα που δημιουργείται από το υπόλοιπο στο χώρο υπολοίπων - στο διανυσματικό χώρο που διαμορφώνεται απ' όλα τα πιθανά σφάλματα - έχει κάποια σταθερή διεύθυνση. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 1.2. Η διεύθυνση του διανυσματικού υπολοίπου αντιστοιχίζεται με εξάρτημα σε κατάσταση σφάλματος, αν και μερικές φορές αυτό μπορεί να μην είναι μοναδικό. Στις περισσότερες των περιπτώσεων η διεύθυνση του σφάλματος είναι ανεξάρτητη του τρόπου με την οποία αυτή έγινε· όταν σχεδιάζει κάποιος φίλτρο ανίχνευσης δεν χρειάζεται να υποθέσει πάρα πολλούς τρόπους ύπαρξης σφαλμάτων. Αυτό και η διευθυνσιακή ιδιότητα του διανύσματος υπολοίπου αποτελούν τα μεγαλύτερα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου.

Η δομή του φίλτρου αναγνώρισης είναι παρόμοια με αυτή του φίλτρου Kalman και άλλων γραμμικών φίλτρων και παρατηρητών. Οι πίνακες κέρδους ανατροφοδότησης είναι παρ' όλα αυτά αισθητά διαφορετικοί. Για παράδειγμα, το φίλτρο Kalman χρησιμοποιεί την μοντελοποιημένη σχέση μεταξύ των εξαρτημάτων του συστήματος για να συσχετίσει θορυβώδεις μετρήσεις μεταξύ τους, έτσι ώστε να βελτιστοποιήσει την εκτίμησή του για την κατάσταση του συστήματος· το φίλτρο ανίχνευσης χρησιμοποιεί την μοντελοποιημένη σχέση προκειμένου να αποσυμπλέξει τις προβλέψεις των μετρήσεων μεταξύ τους, έτσι ώστε όταν ένα σφάλμα προκαλεί κάποιο υπόλοιπο, το υπόλοιπο να μην διαδίδεται μέσω του φίλτρου. Το φίλτρο Kalman θα δημιουργήσει επίσης ένα υπόλοιπο στην περίπτωση αστοχίας ενός εξαρτήματος, αλλά αυτό το υπόλοιπο δεν θα είναι συνήθως σταθερό ως προς την διεύθυνση. Επίσης, ως βέλτιστοι εκτιμητές κατάστασης, τα φίλτρα Kalman καταστέλλουν τα υπόλοιπα, ανεξαρτήτως της αιτίας που τα προκαλούν. Τα φίλτρα ανίχνευσης από την άλλη πλευρά, δεν είναι σχεδιασμένα να απομειώσουν τα υπόλοιπα, μάλιστα καταδεικνύουν υπόλοιπα που παράγονται από σφάλματα, κρατώντας αυτά τα υπόλοιπα σε σταθερή διεύθυνση.

Ένα φίλτρο ανίχνευσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εκτιμητής κατάστασης, αλλά οι απαιτήσεις για ανίχνευση σφαλμάτων το εμποδίζουν από το να γίνει ένας βέλτιστος. Συνολικά όμως, ο συνδυα-

σμός αυτών των λειτουργιών έχει ως αποτέλεσμα μια χρήσιμη ιδιότητα: μετά από κάποιο σφάλμα, αυτές οι εκτιμήσεις που δεν εξαρτώνται από την κατεύθυνση του σφάλματος παραμένουν ακριβείς. Επιπλέον, αν υπάρξει η απαραίτητη αντιστάθμιση μετά από την αναγνώριση κάποιου σφάλματος, το φίλτρο ανίχνευσης μπορεί να συνεχίσει την κανονική λειτουργία. Για παράδειγμα, η αποσύνδεση ενός αισθητήρα θα εξαλείψει την ύπαρξη σφάλματος· τότε οι εκτιμήσεις του φίλτρου για τις χαμένες μετρήσεις μπορεί να χρησιμοποιηθούν στη θέση των πραγματικών.

### 1.3 Προηγούμενη έρευνα.

Η σύλληψη της ιδέας για το φίλτρο ανίχνευσης έγινε από τον [Beard, 1971]· η εργασία του αυτή παρουσιάζει την θεωρία που αφορά τα γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συνεχή συστήματα. Ο [Jones, 1973] εξέφρασε την θεωρία σε μορφή διανυσματικών χώρων - ο Beard χρησιμοποίησε άλγεβρα πινάκων - και επέκτεινε την ανάλυση τόσο σε δειγματοληπτούμενα όσο και σε στοχαστικά συστήματα. Επιπλέον, απέδειξε ότι η θεωρία που αναπτύχθηκε από τον Beard δεν ισχύει - εκτός ειδικών συνθηκών- για δειγματοληπτούμενα συστήματα, αλλά όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι επαρκώς μεγάλη, ικανοποιητικά φίλτρα ανίχνευσης μπορούν να κατασκευασθούν χρησιμοποιώντας αυτή τη θεωρία. Ο [Gerard, 1978] εφάρμοσε την αιτιοκρατική θεωρία για να σχεδιάσει ένα φίλτρο ανίχνευσης για ένα ελεγχόμενο από υπολογιστή όχημα οδήγησης. Ουσιαστικά παρουσίασε μια διαδικασία σχεδίασης που συμπύκνωνε τα αποτελέσματα των εργασιών του Beard και του Jones, καθώς και έναν αλγόριθμο για υπολογιστή (σε Fortran) που τα εφαρμόζει. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε με μη γραμμική δυναμική προσομοίωση σε κινητήρες αεροπλάνων, συγκεκριμένα στον στρατιωτικό κινητήρα F100, στην εργασία του [Meserole, 1981].

### 1.4 Δομή της εργασίας.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα πιο σημαντικά ζητήματα που εγείρονται κατά τον σχεδιασμό των φίλτρων ανίχνευσης. Ουσιαστικά, το μεγαλύτερο μέρος των αποτελεσμάτων είναι μια συγκέντρωση του υλικού που παρουσιάζεται στις εργασίες των [Beard, 1971], [Jones, 1973] και [Gerard, 1978]. Η συγκρότηση όμως γίνεται σε μορφή που να επιτρέπει την άμεση χρήση και εφαρμογή των συμπερασμάτων σε ένα πρακτικό σύστημα ανίχνευσης σφαλμάτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί ο αλγόριθμος για τον σχεδιασμό του φίλτρου ανίχνευσης και θα αναλυθούν διεξοδικά οι οποιεσδήποτε πτυχές του.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν κάποια σενάρια προσομοιώσεων που θα καταδεικνύουν την πρακτική εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου, καθώς και την υλοποίηση που έγινε στην εφαρμογή Matlab/Simulink.

Στο τελευταίο κεφάλαιο θα γίνει μια σύνοψη της συνολικής εργασίας μαζί με όποια συμπεράσματα απορρέουν. Επιπλέον, θα παρουσιαστούν κάποιες πιθανές μελλοντικές κατευθύνσεις που θα επιτρέψουν την περαιτέρω βελτίωση της μεθόδου και την αντιμετώπιση κάποιων εκ των βασικότερων προβλημάτων της.

## Κεφάλαιο 2

### Θεωρία φίλτρου ανίχνευσης.

#### 2.1 Εισαγωγή.

Η θεωρία φίλτρου ανίχνευσης χρησιμοποιεί εργαλεία των κλάδων των μαθηματικών, όπως οι πίνακες και οι διανυσματικοί χώροι - τα βασικά εργαλεία για συστήματα αυτομάτου ελέγχου σε μορφή εξισώσεων κατάστασης. Αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζει τα θεωρητικά εργαλεία των φίλτρων ανίχνευσης και την διαδικασία σχεδιασμού τους. Η ανάλυση ξεκινάει με την παρουσίαση των μοντέλων αναφοράς. Συνεχίζει με την ανάλυση των διαφόρων μοντέλων σφαλμάτων που περιλαμβάνονται στη θεωρία και καταλήγει με μια διεξοδική μέθοδο σχεδιασμού των φίλτρων.

#### 2.2 Η δομή των φίλτρων ανίχνευσης.

Κάθε σύστημα το οποίο πρόκειται να παρακολουθηθεί με φίλτρο ανίχνευσης πρέπει να μπορεί να παρασταθεί με ένα ΓΧΑ (γραμμικά χρονικά αναλλοίωτο) μοντέλο, με παρατηρήσιμη δυναμική. Στα επόμενα θα θεωρήσουμε μόνο συστήματα με συνεχείς μετρήσεις και εισόδους.

Το σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί τότε με τις εξής γραμμικές εξισώσεις:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad (2.1a)$$

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t) \quad (2.1b)$$

Το διάνυσμα  $\vec{x}$  αποτελείται από το σύνολο των μεταβλητών κατάστασης,  $\vec{u}$  είναι το διάνυσμα εισόδων ελέγχου και  $\vec{y}$  είναι το διάνυσμα μετρήσεων. Οι διαστάσεις του  $\vec{x}$  είναι  $n$ , του  $\vec{u}$  είναι  $1$  και του  $\vec{y}$  είναι  $m$ . Ασχολούμαστε, δηλαδή, με συστήματα μίας εισόδου και πολλών εξόδων (ΜΕΠΕ). Η τριάδα των πινάκων  $A, B, C$  χαρακτηρίζει πλήρως το σύστημα. Η αναπαράσταση αυτή περιλαμβάνεται ως μοντέλο αναφοράς στο φίλτρο ανίχνευσης κατά τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 2.1.

Οι εξισώσεις κατάστασης του φίλτρου ανίχνευσης συνεπώς γίνονται:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\vec{u}(t) + D[\vec{y}(t) - \hat{y}(t)] \quad (2.2a)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (2.2b)$$

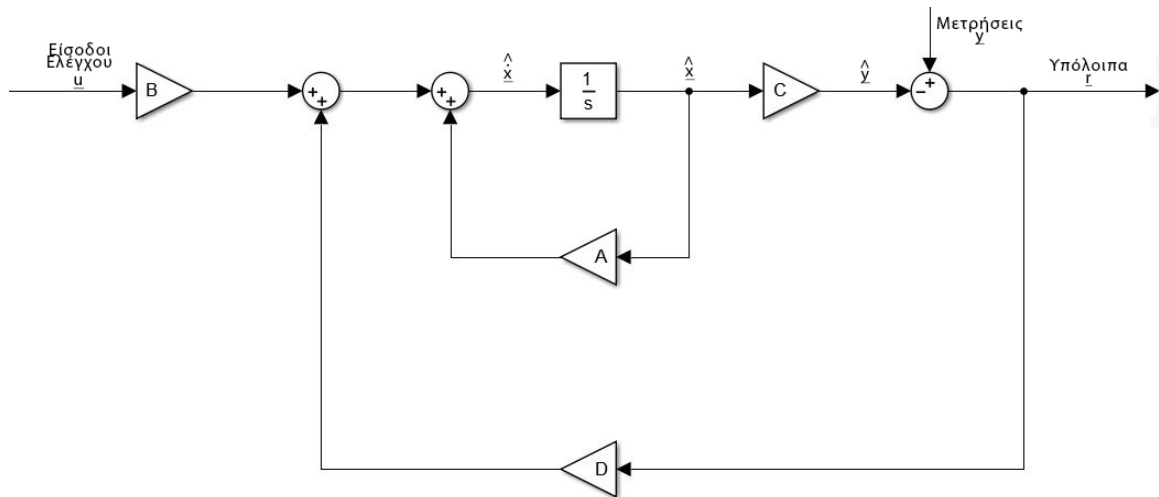
με  $\hat{x}$  το διάνυσμα καταστάσεων του μοντέλου αναφοράς και  $\hat{y}$  το προβλεπόμενο διάνυσμα μετρήσεων.

Το διάνυσμα υπολοίπων είναι ένα ένα διάνυσμα το οποίο αποτελείται από τις διαφορές μεταξύ των μετρήσεων του συστήματος και το προβλέψεων των μετρήσεων του μοντέλου αναφοράς:

$$\vec{r}(t) = \vec{y}(t) - \hat{y}(t) \quad (2.3)$$

Τα στοιχεία του  $\vec{r}$  αποτελούν τις παρατηρήσιμες ποσότητες που χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση και αναγνώριση σφαλμάτων. Ορίζουμε άλλο ένα ένα διάνυσμα  $\vec{q}$ , το οποίο αναπαριστά τις προβλέψεις του μοντέλου για την κατάσταση του συστήματος:

$$\vec{q}(t) = \vec{x}(t) - \hat{x}(t) \quad (2.4)$$



**Σχήμα 2.1:** Δομικό διάγραμμα φίλτρου ανίχνευσης.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.1)-(2.4), μπορούμε να υπολογίσουμε τη συμπεριφορά του υπολοίπου  $\vec{r}$ . Διαφορίζοντας την (2.4) προκύπτει:

$$\dot{\vec{q}}(t) = \dot{\vec{x}}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (2.5)$$

και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.1) και (2.2) στην (2.5) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}} &= [A\vec{x} + B\vec{u}] - [A\hat{x} + B\vec{u} + D(\vec{y} - \hat{y})] \\ &= A(\vec{x} - \hat{x}) - D(\vec{y} - \hat{y}) \\ &= A(\vec{x} - \hat{x}) - DC(\vec{x} - \hat{x}) \\ &= [A - DC](\vec{x} - \hat{x}) \end{aligned}$$

Καταλήγουμε συνεπώς ότι:

$$\dot{\vec{q}}(t) = [A - DC]\vec{q}(t) \quad (2.6a)$$

$$\vec{r}(t) = C\vec{q}(t) \quad (2.6b)$$

Δεδομένου ότι οι πίνακες A, B και C ικανοποιητικά αναπαριστούν το σύστημα όταν αυτό λειτουργεί κανονικά, η Σχέση (2.6) είναι πάντα έγκυρη όταν δεν υπάρχει κάποιο σφάλμα.

Η κατάλληλη επιλογή του πίνακα ανατροφοδότησης D είναι το αντικείμενο της σχεδίασης του φίλτρου ανίχνευσης. Μια απαίτηση είναι πως ο πίνακας  $[A - DC]$  πρέπει να είναι τέτοιος, ώστε οποιαδήποτε απόκλιση στο  $\vec{q}$ , η οποία εισάγεται από λανθασμένες αρχικές συνθήκες ή από θόρυβο, θα απομειώνεται, επιτρέποντας στο  $\hat{x}$  να παρακολουθεί ικανοποιητικά το  $\vec{x}$ . Μια επιπλέον απαίτηση είναι ότι αν ένα οποιοδήποτε από τα επιλεγμένα εξαρτήματα παρουσιάσει σφάλμα, ένα υπόλοιπο θα εμφανιστεί, το οποίο θα έχει συγκεκριμένη, χρονικά αναλλοίωτη διεύθυνση στο χώρο υπολοίπων. Μια προαιρετική απαίτηση είναι ότι τα υπόλοιπα που προκαλούνται από σφάλμα αισθητήρων πρέπει να περιορίζονται σε μοναδικά επίπεδα στο χώρο των υπολοίπων. Τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά της θεωρίας ανίχνευσης σφαλμάτων είναι οι αποδείξεις ότι αυτές οι απαιτήσεις είναι συμβατές, και ότι οι διευθύνσεις των υπολοίπων από τα διάφορα εξαρτήματα είναι ανεξάρτητα του τρόπου με τους οποίους αυτά αστοχούν <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Η διατύπωση αυτή δεν εφαρμόζεται γενικά στην περίπτωση ταυτόχρονων σφαλμάτων, παρόλο που σε αρκετές περιπτώσεις τα φίλτρα ανίχνευσης προσφέρουν επαρκείς πληροφορίες για να αναγνωρισθούν τα ξεχωριστά εξαρτήματα - δύο ή περισσότερα - που συμμετέχουν σε ένα σφάλμα ταυτόχρονα.

## 2.3 Μοντέλα σφαλμάτων.

Σε περίπτωση κάποιου σφάλματος, οι πίνακες  $\{A, B, C\}$  και η Σχέση (2.1) δεν αντικατοπτρίζουν επαρκώς το μοντέλο, και συνεπώς το  $\hat{y}(t)$  θα αποκλίνει από το  $\vec{y}(t)$ . Υποθέτοντας κατάλληλα μοντέλα για τα σφάλματα των διαφόρων εξαρτημάτων του συστήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε την συμπεριφορά του υπολοίπου  $\vec{r}(t)$ . Τρεις γενικές κατηγορίες σφαλμάτων θα θεωρηθούν: αστοχίες επενεργητών, αλλαγές δυναμικής, και αστοχίες αισθητήρων.

### 2.3.1 Αστοχίες επενεργητών.

Οι αστοχίες επενεργητών μπορούν συνήθως να μοντελοποιηθούν ως αλλαγές, κάποιες φορές μάλιστα χρονικές, στον πίνακα  $B$ . Το σύνολο των πινάκων του συστήματος τότε γίνεται  $\{A, B + \Delta B(t), C\}$ . Εφόσον κάθε στήλη του πίνακα  $B$  δίνει την απόκριση του συστήματος στο αντίστοιχο στοιχείο το διανύσματος εισόδου  $\vec{u}(t)$ , το  $\Delta B(t)$  για ένα σφάλμα της εισόδου του συστήματος μπορεί να γραφεί συνήθως ως <sup>2</sup>:

$$\Delta B(t) = \begin{bmatrix} \vec{0} & \dots & \vec{0} & \vec{b}_i & \vec{0} & \dots & \vec{0} \end{bmatrix} k(t) \quad (2.7)$$

όπου  $k(t)$  είναι μια χρονικά μεταβαλλόμενη βαθμωτή συνάρτηση και  $\vec{b}_i$  είναι η στήλη του πίνακα  $B$  που αντιστοιχεί στην είσοδο  $u_i$ , η οποία επηρεάζεται από το σφάλμα.

Με την προσθήκη του όρου από την εξίσωση (2.7), η εξίσωση κατάστασης (2.1) γίνεται:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) + \vec{b}_i k(t) u_i(t) \quad (2.8)$$

Το σφάλμα δεν επιδρά πάνω στο μοντέλο αναφοράς (2.2), συνεπώς η διαφορά μεταξύ της κατάστασης και της πρόβλεψης της κατάστασης συμπεριφέρεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}}(t) &= A[\vec{x}(t) - \hat{x}(t)] + \vec{b}_i k(t) u_i(t) - D[\vec{y}(t) - \hat{y}(t)] \\ &= [A - DC]\vec{q}(t) + \vec{b}_i k(t) u_i(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Το διάνυσμα  $\vec{b}_i$  καλείται διάνυσμα συμβάντος και σχετίζεται με τον  $i$  επενεργητή. Δεν θα είναι συνήθως απαραίτητο να γνωρίζουμε το  $k(t) u_i(t)$  για να αναγνωρίσουμε το εσφαλμένο εξάρτημα, οπότε μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με τον όρο  $n(t)$ , ένας όρος που θα χρησιμοποιείται επανειλημμένως για την βαθμωτή χρονική συνάρτηση που περιγράφει το διάνυσμα συμβάντος. Τότε έχουμε:

$$\dot{\vec{q}}(t) = [A - DC]\vec{q}(t) + \vec{b}_i n(t) \quad (2.10a)$$

$$\vec{r}(t) = C\vec{q}(t) \quad (2.10b)$$

Για ένα παράδειγμα αστοχίας ενός επενεργητή, ας υποθεθεί ότι ο ιωστός επενεργητής παγώνει στη μηδενική του θέση, μη δίνοντας έξοδο. Τότε το  $n(t)$  ισούται με το  $-u_i(t)$  και η (2.8) γίνεται:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) - \vec{b}_i u_i(t)$$

Ο πίνακας  $D$  θα επιλεγόταν έτσι ώστε να περιοριστεί η απόκριση του  $\vec{q}(t)$  στη Σχέση (2.10), προκειμένου το  $\vec{r}(t)$  να έχει σταθερή διεύθυνση.

<sup>2</sup> Αστοχίες επενεργητών που περιλαμβάνουν αλλαγές της δυναμικής τους μπορούν πολύ συχνά να μοντελοποιηθούν ευκολότερα μέσω του μοντέλου αλλαγής των δυναμικών που περιγράφεται στην επόμενη υποενότητα.

### 2.3.2 Αλλαγές δυναμικής.

Πολλές αλλαγές της δυναμικής του συστήματος μπορούν να μοντελοποιηθούν από ένα μοναδικό διάνυσμα συμβάντος επί μια τυχαίας βαθμωτής χρονικής συνάρτησης. Πρώτον, από μια ανεξάρτητη της κατάστασης αλλαγής των παραγώγων των μεταβλητών κατάσταση, που μοντελοποιείται ως εξής:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) + \vec{f}n(t) \quad (2.11)$$

με  $\vec{f}$  ένα αναλλοίωτο διάνυσμα συμβάντος που περιγράφει τα στοιχεία του  $\vec{x}(t)$  που άλλαξαν, και σε τι σχετικό μέγεθος.

Δεύτερον, μια ανεξάρτητη της κατάστασης αλλαγή σε μόνο μια παράγωγο κατάσταση μπορεί να μοντελοποιηθεί με αλλαγές, πιθανώς χρονικά εξαρτημένες, στην αντίστοιχη σειρά του  $A$ . Το διάνυσμα συμβάντος είναι το κατάλληλο μοναδιαίο διάνυσμα  $e_i$ , και:

$$n(t) = \sum_{j=1}^n \Delta a_{ij}(t)x_j(t) \quad (2.12)$$

όπου το  $\Delta a_{ij}(t)$  είναι οι διακυμάνσεις στα στοιχεία της ισοτής σειράς του πίνακα  $A$ . Το μοντέλο σφάλματος τότε είναι:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) + \vec{e}_i n(t) \quad (2.13)$$

Ένα απλό παράδειγμα μια τέτοιας δυσλειτουργίας είναι μια αλλαγή της χρονικής σταθεράς ενός υδραυλικού επενεργητή, ο οποίος έχει μια συμπεριφορά πρώτης τάξης. Εάν  $x_i$  είναι η μεταβλητή κατάστασης που συσχετίζεται με τον επενεργητή, το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της ισοτής σειράς του πίνακα  $A$  είναι το  $a_{ii}$ , και το μοντέλο σφάλματος είναι:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) + \vec{e}_i \Delta a_{ii}(t)x_i(t) \quad (2.14)$$

Τρίτον, όταν μερικές, ή και όλες, οι παράγωγοι κατάστασης που οδηγούνται από οποιαδήποτε μεταβλητή κατάσταση, έστω την  $j$ οστή, αλλάξουν με σταθερό λόγο, η δυσλειτουργία μπορεί να μοντελοποιηθεί από μια αναλλοίωτη αλλαγή στην  $j$ οστή στήλη του πίνακα  $A$ . Αυτή η αλλαγή μπορεί να περιγραφεί από διάνυσμα συμβάντος:

$$\vec{f} = \sum_i \vec{e}_i \Delta a_{ij} \quad (2.15)$$

Το μοντέλο σφάλματος τότε γίνεται:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) + \vec{f}x_j(t) \quad (2.16)$$

Δυσλειτουργίες αυτού του τύπου μπορούν να λάβουν χώρα σε συστήματα στα οποία η έξοδος ενός εξαρτήματος οδηγεί διάφορα άλλα εξαρτήματα - για παράδειγμα, ολόιδια μηχανικά στοιχεία που λειτουργούν παράλληλα.

Συνεπώς, όλα τα μοντέλα σφάλματος που παρουσιάστηκαν μέχρι στιγμής έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) + \vec{f}n(t) \quad (2.17a)$$

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t) \quad (2.17b)$$

Θα αποκαλέσουμε αυτό το μοντέλο "μοντέλο αστοχίας εισόδου". Καλείται έτσι γιατί θα χρησιμοποιηθεί συχνά για δυσλειτουργίες συσκευών εισόδου του συστήματος και διότι τυχόν ανωμαλίες στην δυναμική συμπεριφορά που ταιριάζουν στο σύστημα, μπορούν να γραφούν σαν εξωγενής γραμμικές εισοδοί στο σύστημα. Τα υπόλοιπα που παράγονται από τις εξισώσεις της Σχέσης (2.17) συμπεριφέρονται ως εξής:

$$\dot{\vec{q}}(t) = [A - DC]\vec{q}(t) + \vec{f}n(t) \quad (2.18a)$$

$$\vec{r}(t) = C\vec{q}(t) \quad (2.18b)$$

Η θεωρία φίλτρων ανίχνευσης δείχνει ότι για κάθε  $\vec{f}$  είναι δυνατόν να ευρεθεί ένας  $D$ , έτσι ώστε το  $\vec{r}(t)$  να αποκτά σταθερή διεύθυνση ως απόκριση στο  $\vec{f}^n(t)$ , οτιδήποτε και αν είναι το  $n(t)$ . Επιπροσθέτως, για ένα σύνολο διανυσμάτων συμβάντων  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_r\}$ , συχνά μπορεί να βρεθεί ένας  $D$ , έτσι ώστε κάθε  $\vec{f}$  να προβάλλεται σε ένα μοναδικό, σταθερής διεύθυνσης υπόλοιπο. Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα διανύσματα ενός συνόλου ώστε να κάνουν αυτό δυνατό είναι σημαντικά αποτελέσματα της θεωρίας φίλτρου ανίχνευσης.

### 2.3.3 Αστοχίες αισθητήρων.

Οι αστοχίες αισθητήρων μοντελοποιούνται με δύο τρόπους. Αυτό εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο οι αισθητήρες αναπαριστώνται στο μοντέλο αναφοράς. Κατά συνέπεια, οι αισθητήρες χωρίζονται σε δύο σύνολα. Στο πρώτο σύνολο περιλαμβάνονται αισθητήρες των οποίων η έξοδος περιλαμβάνεται στο διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης  $\vec{x}$ , είτε έμμεσα είτε άμεσα. Το δεύτερο σύνολο περιλαμβάνει όλους τους υπόλοιπους αισθητήρες.

Οι έξοδοι των αισθητήρων της πρώτης ομάδας έχουν κάποια επίδραση στην παράγωγο του διανύσματος κατάστασης. Αυτές μπορεί να είναι, αλλά όχι απαραίτητα, μεταβλητές κατάστασης από μόνες τους. Δύο σχετικά συχνές περιπτώσεις στις οποίες ένας αισθητήρας μπορεί να μοντελοποιηθεί με αυτό τον τρόπο είναι:

- Όταν η δυναμική του αισθητήρα είναι αρκετά σημαντική και γι' αυτό το λόγο πρέπει να συμπεριληφθεί στο μοντέλο αναφοράς.
- Όταν ο σχεδιαστής του φίλτρου ανίχνευσης επιθυμεί να συμπεριλάβει αστοχίες του συστήματος ελέγχου ανατροφοδότησης στο σχεδιασμό του φίλτρου. Σε αυτή την περίπτωση, ο νόμος ανατροφοδότησης - μαζί με ότι δυναμικές μπορεί να έχει - πρέπει να αναπαρασταθούν στο πίνακα  $A$ . Συνεπώς, οι μετρήσεις αυτών των αισθητήρων πρέπει είτε να είναι μεταβλητές κατάστασης είτε να εισάγονται έμμεσα σε κάποια στοιχεία του πίνακα  $A$ .

Οι αστοχίες των αισθητήρων του πρώτου συνόλου μπορούν να μοντελοποιηθούν ως αλλαγές στον πίνακα  $A$ , όπως ακριβώς μοντελοποιούνται οι αλλαγές της δυναμικής του συστήματος. Συνεπώς, αυτοί οι αισθητήρες ταιριάζουν στα πλαίσια του μοντέλου αστοχίας εισόδου και επομένως υπάρχει ένα διάνυσμα συμβάντος για κάθε μια από αυτές.

Οι αστοχίες των αισθητήρων του δεύτερου συνόλου πρέπει να μοντελοποιηθούν με διαφορετικό τρόπο. Σαν συνέπεια αυτού, πρέπει κανείς να τις μεταχειριστεί με διαφορετική ανάλυση στα πλαίσια του φίλτρου ανίχνευσης. Εφόσον αυτοί οι αισθητήρες δεν μοντελοποιούνται στην εξίσωση κατάστασης, μόνο στην εξίσωση μετρήσεων, οι αστοχίες τους πρέπει να μοντελοποιηθούν σαν αλλαγές της εξόδου. Οι αλλαγές είναι όμως απλές, διότι όλες οι πιθανές αστοχίες αυτών των αισθητήρων μπορούν να μοντελοποιηθούν από έναν όρο που αποτελείται από ένα κατάλληλο μοναδιαίο διάνυσμα επί μία χρονικά μεταβαλλόμενη βαθμωτή συνάρτηση. Για παράδειγμα, οι αστοχίες του ισοτού αισθητήρα μοντελοποιούνται ως εξής:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad (2.19a)$$

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + \vec{e}_i n(t) \quad (2.19b)$$

Εδώ, το  $\vec{e}_i$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον χώρο των υπολοίπων και  $n(t)$  είναι πάλι μια τυχαία συνάρτηση. Εφόσον ο όρος αστοχίας εμφανίζεται στην εξίσωση μετρήσεων, καλούμαι την (2.19) "μοντέλο σφάλματος μέτρησης".

Σε αντίθεση με όλες τις άλλες αστοχίες που περιγράφηκαν προηγουμένως, αυτές που μοντελοποιούνται μέσω του μοντέλου σφάλματος μέτρησης παράγουν διανύσματα υπολοίπων που δεν περιορίζονται σε μία σταθερή διεύθυνση. Μπορούν, πάντα όμως, να περιορισθούν σε ένα επίπεδο που σχετίζεται μοναδικά με τον αισθητήρα που αστοχεί. Το διάνυσμα μετρήσεων  $\vec{y}(t)$  τροφοδοτείται στο

μοντέλο αναφοράς μέσω του όρου  $D[\bar{y}(t) - \hat{y}(t)]$ , και συνεπώς μια αστοχία του jοστού αισθητήρα για παράδειγμα, αλλάζει το μοντέλο κατά μία ποσότητα ίσης με:

$$\vec{d}_j n(t) = D\vec{e}_j n(t) \quad (2.20)$$

όπου  $\vec{d}_j$  είναι η jοστή στήλη του πίνακα  $D$ . Κατά συνέπεια, οι εξισώσεις των υπολοίπων παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\dot{\vec{q}}(t) = [A - DC]\vec{q}(t) - \vec{d}_j n(t) \quad (2.21a)$$

$$\vec{r}(t) = C\vec{q}(t) + \vec{e}_j n(t) \quad (2.21b)$$

Είναι δυνατόν να επιλεγθεί ο  $D$  έτσι ώστε η συνεισφορά στο  $\vec{r}(t)$  που εισάγεται από τον όρο  $\vec{d}_j n(t)$  να έχει μοναδική διεύθυνση, αλλά η διεύθυνση δεν θα είναι συνήθως η  $\vec{e}_j$ . Γι' αυτό τον λόγο, τις περισσότερες φορές το φίλτρο ανίχνευσης μπορεί να κατασκευαστεί ώστε να περιορίζει το υπόλοιπο που παράγεται κατά την αστοχία του αισθητήρα στο επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα  $\vec{e}_j$  και  $C\vec{d}_j$ . Παρ' όλο που αυτή η συμπεριφορά δεν είναι εύκολο να αναγνωρισθεί ως μία που έχει μοναδικό αντίκτυπο, στην πραγματικότητα κάνει το αντίκτυπο του σφάλματος του αισθητήρα να είναι αισθητά διαφορετικό από αυτό του αισθητήρα που επιτηρεί. Συνεπώς, οι αστοχίες των αισθητήρων μπορούν να διαχωριστούν από αστοχίες άλλων εξαρτημάτων του συστήματος. Επί παραδείγματι, μπορεί να σχεδιαστεί ένα φίλτρο τέτοιο ώστε οι αστοχίες των αισθητήρων θέσης των επενεργητών να έχουν υπόλοιπο πάνω σε επίπεδο, ενώ οι αστοχίες των επενεργητών καθεαυτών να έχουν υπόλοιπο σε μοναδική διεύθυνση.

Σημειώνεται ότι, αντιφάσκοντας τις προτάσεις της προηγούμενης παραγράφου, η αστοχία που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.21) θα παράγει πάντα ένα διάνυσμα υπολοίπου που περιορίζεται στη διεύθυνση του  $\vec{e}_j$ , εάν το  $\vec{d}_j$  ισούται με το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η μέτρηση  $y_j(t)$  δεν θα τροφοδοτούνταν στο φίλτρο. Αλλά κατά τον σχεδιασμό φίλτρων ανίχνευσης, το ενδιαφέρον δεν στρέφεται μόνο γύρω από τον περιορισμό των διανυσμάτων υπολοίπων σε αναγνωρίσιμες περιοχές του χώρου υπολοίπων, είτε γραμμές είτε επίπεδα, αλλά επιπλέον να ορίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $[A - DC]$ . Κάνοντας το  $\vec{d}_j$  ίσο με το μηδέν, παραιτούμαστε από τη δυνατότητα ορισμού κάποιας ιδιοτιμής, η οποία υπό άλλες συνθήκες θα μπορούσε να ορισθεί ελεύθερα στην πιο χρήσιμη τιμή. Παρ' όλα αυτά, υπό περιπτώσεις αυτό θα μπορούσε να είναι μια επιθυμητή συμπεριφορά.

Στην επόμενη ενότητα θα παρουσιαστούν οι πρωταρχικές έννοιες της θεωρίας σχεδιασμού φίλτρου ανίχνευσης και οι λεπτομέρειες της διαδικασίας σχεδιασμού.

## 2.4 Σχεδιασμός φίλτρου ανίχνευσης.

Η διαδικασία σχεδιασμού ξεκινάει με τον προσδιορισμό του μοντέλου του συστήματος. Για να διαμορφωθεί μια κατάλληλη βάση για το μεγαλύτερο μέρος της διαδικασίας σχεδιασμού, αυτό το μοντέλο πρέπει να είναι στη μορφή των εξισώσεων (2.1). Όταν το σύστημα είναι μη γραμμικό και το γραμμικό μοντέλο δεν είναι ικανοποιητικά ακριβές σε όλο το εύρος λειτουργίας, μπορεί να αναπαρασταθεί το σύστημα σαν τμηματικά γραμμικό, και να αλλάζει το μοντέλο καταλλήλως. Ο ορισμός ενός γραμμικού μοντέλου περιλαμβάνει την επιλογή ενός κατάλληλου διανύσματος μεταβλητών κατάστασης  $\vec{x}$  και προσδιορίζοντας ένα ικανοποιητικό σύνολο πινάκων  $\{A, B, C\}$ . Οι επιλογές πρέπει να γίνουν επιδιώκοντας να κατασκευασθεί το απλούστερο δυνατό μοντέλο, το οποίο θα εκτιμά όσο πιο ικανοποιητικά γίνεται όλες τις μεταβλητές κατάστασης που θα επηρεάζονται από τις αναμενόμενες αστοχίες. Επιπλέον, το μοντέλο πρέπει να είναι παρατηρήσιμο <sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Ένα σύστημα είναι παρατηρήσιμο, εάν η συμπεριφορά οποιουδήποτε μέρους του συστήματος έχει επίδραση στις μετρούμενες εξόδους του, είτε άμεσα είτε έμμεσα. Τυπικά, η τριάδα  $\{A, B, C\}$  είναι παρατηρήσιμη εάν και μόνο εάν ο βαθμός



### 2.4.1 Σύνολα διανυσμάτων συμβάντων.

Εφόσον το μοντέλο έχει ορισθεί, πρέπει να ευρεθεί το διάνυσμα συμβάντος για κάθε εξάρτημα που επιτηρείται. Αυτό γίνεται με τον τρόπο που περιγράφεται στην ενότητα 2.3, αν και πολλές φορές απαιτείται ένα επιπλέον βήμα. Αν το διάνυσμα συμβάντος ενός οποιουδήποτε εξαρτήματος είναι τέτοιο ώστε:

$$C\vec{f} = \vec{0}$$

τότε το διάνυσμα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα  $A$  επανειλημμένως, μέχρις ότου το αποτέλεσμα να είναι μη μηδενικό· έως ότου να βρεθεί το μικρότερο δυνατό  $\mu$  για το οποίο να ισχύει:

$$CA^\mu \vec{f} \neq \vec{0}$$

Τότε το  $A^\mu \vec{f}$  γίνεται η συνιστώσα  $\vec{f}$  που απαιτείται, αντικαθιστώντας το πρωταρχικό.

Κάποιες φορές, μερικά εξαρτήματα θα έχουν το ίδιο διάνυσμα συμβάντος. Αστοχίες αυτών των εξαρτημάτων δεν θα μπορούν να διαχωριστούν με βάση την κατεύθυνση των υπολοίπων και μόνο, διότι αν επιλεγεί ο  $D$  έτσι ώστε το αντίστοιχο  $\vec{f}$  να έχει μοναδική διεύθυνση, το σφάλμα οποιουδήποτε εξ αυτών των εξαρτημάτων θα προκαλέσει ένα υπόλοιπο στην ίδια κατεύθυνση. Για εργαλείο περιγραφής αυτής της κατάστασης μαθηματικά, ορίζουμε τον χώρο συμβάντων ενός διανύσματος συμβάντος ως τον διανυσματικό χώρο που αποτελείται από κάθε διάνυσμα, του οποίου το υπόλοιπο θα βρίσκεται αποκλειστικά κατά μήκος της διεύθυνσης  $C\vec{f}$ , όταν το φίλτρο ανίχνευσης κάνει το υπόλοιπο από το  $\vec{f}$  να βρίσκεται κατά μήκος του  $C\vec{f}$ . Συμβολίζουμε αυτό τον διανυσματικό χώρο με  $f$ . Η διάστασή του καλείται τάξη συμβάντος του  $\vec{f}$  και γράφεται ως  $\nu$ . Κάθε διάνυσμα συμβάντος έχει ένα χώρο συμβάντος, ακόμα και διανύσματα συμβάντων που σχετίζονται μοναδικά με κάποια εξαρτήματα. Τέτοια διανύσματα έχουν μονοδιάστατους χώρους συμβάντων, οι οποίοι περιέχουν μόνο το διάνυσμα συμβάντος και τα πολλαπλάσια αυτού. Θα προσδιοριστεί ένα σύνολο διανυσμάτων βάσης για κάθε χώρο συμβάντος και μετά θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα σύνολα για να υπολογίσουμε τον πίνακα κέρδους  $D$ .

Όπως και για κάθε είδος φίλτρου όσο και παρατηρητή κατάστασης, ο σχεδιασμός κατάλληλων δυναμικών στο φίλτρο ανίχνευσης είναι απαραίτητος για την επιτυχή εφαρμογή του. Οι δυναμική του φίλτρου ανίχνευσης χαρακτηρίζεται από τους πόλους του, δηλαδή τις ιδιοτιμές του πίνακα  $[A - DC]$ . Συνεπώς, για να είναι δυνατόν να δοθεί στο φίλτρο η επιθυμητή δυναμική, απαιτείται ικανοποιητική ελευθερία στον προσδιορισμό του  $D$ , έτσι ώστε να μπορούν να επιλεγθούν τις ιδιοτιμές του  $[A - DC]$ . Ο αριθμός των στοιχείων του  $D$  που παραμένει απροσδιόριστος από τις απαιτήσεις για διάγνωση σφαλμάτων εξαρτάται από το πλήθος των διανυσμάτων συμβάντων, αλλά και την σχέση μεταξύ των.

Οι διευθύνσεις των διανυσμάτων συμβάντων καθορίζουν, πρώτον, εάν ένα φίλτρο ανίχνευσης είναι δυνατόν να σχεδιαστεί για το σύνολο αυτών των διανυσμάτων και, δεύτερον, αν οι δυναμικές του φίλτρου μπορούν να ρυθμιστούν κατά το δοκούν. Μπορεί να υπάρχουν περισσότερα διανύσματα συμβάντων από αυτά που μπορούν να εισαχθούν στον σχεδιασμό ενός και μόνο φίλτρου. Ο πρώτος περιορισμός είναι ότι τα διανύσματα  $C\vec{f}_1, C\vec{f}_2, C\vec{f}_3, \dots$  πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Όταν κάποια διανύσματα  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r$  ικανοποιούν αυτή την απαίτηση, τότε καλούνται διαχωρίσιμα στην έξοδο. Αυτό εγγυάται ότι:

- Ο πίνακας κέρδους  $D$  μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε κάθε  $\vec{f}_i$  να παράγει ένα υπόλοιπο μονάχα κατά μήκος της προβολής του  $C\vec{f}_i$  στο χώρο υπολοίπων.
- Θα υπάρχουν  $\nu_i$  ελεύθερα επιλέξιμες ιδιοτιμές για τον πίνακα  $[A - DC]$  που να σχετίζονται με το  $\vec{f}_i$  και το χώρο συμβάντος του.

του πίνακα

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

ισούται με  $n$ , τη διάσταση δηλαδή του  $\vec{x}$ . Στον [Jones, 1973] μπορεί να βρει κανείς μια ανάλυση στις επιπτώσεις της χρήσης μη παρατηρήσιμων μοντέλων.

Κάθε διάνυσμα που αποκλείεται κατά την κατασκευή του συνόλου των διαχωρίσιμων στην έξοδο διανυσμάτων μπορεί κάποιες φορές να επανεισαχθεί στο σχεδιασμό σε κατοπινό στάδιο. Με ευνοϊκές προϋποθέσεις, αυτό μπορεί να γίνει απλώς ορίζοντας την ίδια τιμή σε δύο ή περισσότερες ιδιοτιμές. Όταν σε ένα απ' αυτά τα διανύσματα δοθεί υπόλοιπο μοναδικής διεύθυνσης, καλείται στάσιμο στην έξοδο με  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r$ . Όταν σε κάποια διανύσματα δίνονται υπόλοιπα μοναδικής διεύθυνσης, σε μοναδικές μεταξύ τους διευθύνσεις, τότε αυτά καλούνται αμοιβαίως στάσιμα στην έξοδο με  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r$ .

Ένας μικρός περιορισμός κατά την επιλογή των ιδιοτιμών είναι ότι οποτεδήποτε μια μιγαδική ιδιοτιμή ορίζεται με ένα συγκεκριμένο χώρο συμβάντος, η συζυγής της πρέπει υποχρεωτικά να επιλεγεί. Λαμβάνοντας αυτόν τον περιορισμό υπόψη, θα αποκαλούμαι τις ιδιοτιμές του πίνακα  $[A - DC]$  καθορίσιμες, όταν το σύνολο των επιλεχθέντων διανυσμάτων συμβάντος επιτρέπει ελεύθερη επιλογή κάθε μίας από αυτές τις ιδιοτιμές (Δεν θα μας απασχολήσει ο οποιοσδήποτε ισοτικός περιορισμός που εισάγεται από την διαχωρισιμότητα στην έξοδο και κάνει τις σχετιζόμενες ιδιοτιμές μη καθορίσιμες).

Για να είναι κάποιες ιδιοτιμές μη καθορίσιμες πρέπει να συμβαίνουν τα ακόλουθα: Εάν το πλήθος  $s$  των διαχωρίσιμων στην έξοδο διανυσμάτων ισούται με την τάξη του πίνακα  $C$  - τον αριθμό των ανεξάρτητων αισθητήρων - τότε ο αριθμός των μη καθορίσιμων ιδιοτιμών ισούται με τη διαφορά μεταξύ την διάστασης του μοντέλου και του αθροίσματος των τάξεων των γεγονότων. Όταν δεν υπάρχει κάποια διαφορά, όλες οι ιδιοτιμές είναι καθορίσιμες. Εάν το  $s$  είναι μικρότερο της τάξης του πίνακα  $C$ , τότε η εξέταση για μη καθορισιμότητα δεν είναι τόσο άμεση. Για κάθε συγκεκριμένη επιλογή του μοντέλου, το σύνολο των επιλεχθέντων διανυσμάτων συμβάντος καθορίζει εάν όλες οι ιδιοτιμές θα είναι καθορίσιμες και, εάν όχι, ποιες δεν είναι. Θα ονομάσουμε κάθε σύνολο διαχωρίσιμων στην έξοδο διανυσμάτων που αφήνει όλες τις ιδιοτιμές καθορίσιμες ως μη περιοριστικό. Είναι επιθυμητό να επιλέγεται ένα σύνολο μη περιοριστικό, αλλά μη καθορίσιμες ιδιοτιμές, εφόσον είναι αρνητικές, δεν υποβαθμίζουν συνήθως την απόδοση του φίλτρου.

Με μια συγκεκριμένη κλάση συστημάτων, όλα τα πιθανά σύνολα διαχωρίσιμων στην έξοδο διανυσμάτων είναι μη περιοριστικά. Αυτό συμβαίνει όταν το πλήθος των ανεξάρτητων μετρήσεων είναι το μέγιστο δυνατό, ίσο δηλαδή με το πλήθος των μεταβλητών κατάστασης που απαιτούνται για την μοντελοποίηση του συστήματος. Ένα τέτοιο σύστημα καλείται πλήρως μετρήσιμο. Σε αυτή την περίπτωση, ο σχεδιασμός φίλτρων ανίχνευσης είναι αρκετά απλοποιημένος.

## 2.4.2 Περιγραφή της διαδικασίας σχεδιασμού.

Σε αυτό το σημείο θα περιγραφούν τα βήματα της διαδικασίας σχεδιασμού· στην επόμενη υποενότητα θα αναλυθούν οι υπολογισμοί που απαιτούνται.

1. Ανάλυση του συστήματος και καθορισμός των πινάκων  $\{A, B, C\}$  για ένα μοντέλο αναφοράς της μορφής:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad (2.22a)$$

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t) \quad (2.22b)$$

2. Καθορισμός ενός διανύσματος συμβάντος  $\vec{f}$  για κάθε εξάρτημα που θα παρακολουθηθεί· όπου απαιτείται, αυτό θα πολλαπλασιαστεί επανειλημμένως με τον πίνακα  $A$  μέχρις ότου να δημιουργηθεί ένα άλλο διάνυσμα, για το οποίο το  $C\vec{f}$  να είναι μη μηδενικό.
3. Έλεγχος του συνόλου των διανυσμάτων συμβάντος για το κατά πόσο είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο. Εάν όχι, είτε πρέπει να διαγραφούν ένα ή περισσότερα διανύσματα, είτε να χωριστούν τα διανύσματα σε δύο ή περισσότερα σύνολα. Στην τελευταία περίπτωση, ένα ξεχωριστό φίλτρο ανίχνευσης μπορεί να απαιτηθεί για κάθε σύνολο, ανάλογα με τα αποτελέσματα του βήματος (7).

Επιλέγεται ένα σύνολο διαχωρίσιμων στην έξοδο διανυσμάτων,  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$  και συνεχίζεται η διαδικασία.

4. Υπολογίζεται η τάξη συμβάντος  $\nu$  για κάθε  $\vec{f}$  και υπολογίζονται τα διανύσματα βάσης για κάθε χώρο συμβάντος. Όταν ένας χώρος συμβάντος είναι μονοδιάστατος - το οποίο είναι η πιο συνηθισμένη περίπτωση - το μόνο διάνυσμα βάσης είναι το ίδιο το διάνυσμα συμβάντος.
5. Εξετάσουμε αν το σύνολο  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$  είναι περιοριστικό. Όταν  $s = \text{rank}\{C\}$ , θα υπάρχουν  $n - \sum \nu_i$  μη καθοριζόμενες ιδιοτιμές. Εάν δεν υπάρχουν καθόλου, τότε το σύνολο  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$  είναι μη περιοριστικό· σε αντίθετη περίπτωση το σύνολο είναι περιοριστικό και μία από τις ακόλουθες επιλογές πρέπει να επιλεγθεί:
  - (a) Επιλέγονται όλες οι μη καθοριζόμενες ιδιοτιμές ως έχουν.
  - (b) Δοκιμάζεται ένα διαφορετικό σύνολο διαχωριζόμενων στην έξοδο διανυσμάτων.
  - (c) Εγκαθιστώνται περισσότεροι αισθητήρες στο σύστημα.
  - (d) Διαγράφονται από το σύνολο ικανοποιητικά αρκετά διανύσματα ώστε να εξαλειφθούν οι μη καθοριζόμενες ιδιοτιμές.
  - (e) Επαυξάνεται το σύστημα αναφοράς με επιπλέον μεταβλητές κατάστασης, έτσι ώστε το σύνολο  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$  να γίνει μη περιοριστικό. Αυτό είναι πάντα δυνατό (Η απόδειξη δίνεται από τον [Jones, 1973]).
  - (f) Διαχωρίζεται το σύνολο  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$  σε μη περιοριστικά υποσύνολα· σχεδιάζεται ένα φίλτρο ανίχνευσης για κάθε υποσύνολο.

Εστω  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$  το επιλεγμένο σύνολο σε αυτό το βήμα· είτε είναι περιοριστικό είτε δεν είναι.

6. Για το σύνολο  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$  καταστρώνονται οι εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιεί ο πίνακας  $D$ . Αυτές οι εξισώσεις εξαρτώνται από τα σύνολα διανυσμάτων βάσεως που υπολογίστηκαν στο βήμα (4) και περιέχουν ως παραμέτρους τις καθορίσιμες ιδιοτιμές του πίνακα  $[A - DC]$ .
7. Αναζητούνται διανύσματα συμβάντος που μπορούν να γίνουν στάσιμα στην έξοδο με τα  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$ . Αυτά είναι διανύσματα που δεν είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο με τα  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$  και τα οποία μπορεί να γίνουν να έχουν σταθερές κατευθύνσεις υπολοίπων που να είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διευθύνσεων  $\{C\vec{f}_1, \dots, C\vec{f}_t\}$ .  
 Όταν το σύστημα είναι πλήρως μετρήσιμο, δηλαδή όταν  $\text{rank}(C) = n$ , όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $[A - DC]$  μπορούν να γίνουν ίσες, το οποίο κάνει όλα τα διανύσματα στάσιμα ως προς της έξοδο και ο  $D$  γίνεται ανεξάρτητος των  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$ .
8. Καθορίζονται οι ελεύθερες ιδιοτιμές του πίνακα  $[A - DC]$ . Συχνά, η καλύτερη προσέγγιση είναι να επιλεγθεί η ίδια ιδιοτιμή, διότι αυτή είναι η ευκολότερη προσέγγιση και ταυτόχρονα μεγιστοποιεί τον αριθμό των στάσιμων στην έξοδο διανυσμάτων. Η τιμή που επιλέγεται πρέπει να είναι συνήθως πιο αρνητική από τις επικρατούσες ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ .

Κατόπιν έχει προσδιοριστεί πλήρως ο πίνακας ανατροφοδότησης  $D$ .

### 2.4.3 Διαχωρίσιμα στην έξοδο διανύσματα συμβάντος.

Κάποια διανύσματα συμβάντος  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο, αν και μόνο εάν τα διανύσματα  $\{C\vec{f}_1, \dots, C\vec{f}_s\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Η απαίτηση για γραμμική ανεξαρτησία των  $C\vec{f}_i$  περιορίζει το πλήθος των διανυσμάτων συμβάντος σε ένα σύνολο διαχωρίσιμων στην έξοδο διανυσμάτων μέχρι το πλήθος των ανεξάρτητων μετρήσεων. Διατυπώνοντάς το διαφορετικά, το  $s$  πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο της τάξης του πίνακα  $C$ . Όταν το φίλτρο ανίχνευσης σχεδιάζεται για να δώσει σε κάθε  $\vec{f}$  στο σύνολο  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$  μια μοναδική διεύθυνση υπολοίπου, η οποία θα είναι η διεύθυνση των  $\{C\vec{f}_1, \dots, C\vec{f}_s\}$  αντίστοιχα.

Παρόλο που η γραμμική ανεξαρτησία των  $\{C\vec{f}_1, \dots, C\vec{f}_s\}$  εγγυάται την ύπαρξη του φίλτρου ανίχνευσης για τα  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$ , μια ισχυρότερη συνθήκη απαιτείται προκειμένου να είναι το φίλτρο

πρακτικά εφαρμόσιμο. Υποθέτοντας ότι η συνθήκη ανεξαρτησίας ισχύει, άλλα ότι δύο τυχαία διανύσματα  $C\vec{f}_i$  και  $C\vec{f}_j$  βρίσκονται σχεδόν στην ίδια διεύθυνση - δηλαδή είναι μετά βίας διαχωρίσιμα. Τότε για να είναι δυνατόν γι' αυτό το φίλτρο να διαχωρίσει μεταξύ τους, πρέπει να δώσει μεγάλη βαρύτητα αυτά τα υπόλοιπα που θα υποδείξουν τις παραμικρές διαφορές μεταξύ των  $C\vec{f}_i$  και  $C\vec{f}_j$ . Με άλλα λόγια, ο πίνακας  $D$ , ο οποίος πολλαπλασιάζει το διάνυσμα υπολοίπων, πρέπει να έχει κάποια πολύ μεγάλα στοιχεία. Εάν το μοντέλο είναι ικανοποιητικά ακριβές, τότε αυτό δεν δημιουργεί κάποιο πρόβλημα· άλλα τις περισσότερες φορές το μοντέλο αναφοράς είναι μια προσέγγιση, και οι ανακρίβειες της μοντελοποίησης οξύνονται από αυτά τα μεγάλα στοιχεία. Προφανώς, όσο λιγότερα ακριβές είναι το μοντέλο, τόσο δυσκολότερη είναι η διεργασία διαχωρισμού μεταξύ των αστοχιών των οποίων το υπόλοιπο δείχνει σε σχεδόν ίδιες διευθύνσεις. Ένα φίλτρο που έχει σχεδιαστεί προς τούτο, θα είναι εξαιρετικά ευαίσθητο σε σφάλματα μοντελοποίησης.

Συνεπώς, ο βαθμός της διαχωρισιμότητας στην έξοδο είναι πολύ σημαντικός. Είναι πολύ σημαντική η επιλογή του μοντέλου αναφοράς και των διανυσμάτων συμβάντος έτσι ώστε οι διευθύνσεις να είναι όσο το ευκολότερα διαχωρίσιμες γίνεται. Υπάρχει ένας δείκτης που μπορεί να καταδείξει κατά πόσο η διαχωρισιμότητα είναι ικανοποιητική. Υποθέτοντας ότι υπάρχουν  $m$  ανεξάρτητες μετρήσεις και επιπλέον ότι επιλέγονται  $m$  διαχωρίσιμα στην έξοδο διανύσματα συμβάντος· το μέγιστο δυνατό πλήθος. Στη συνέχεια, διαμορφώνονται τα  $C\vec{f}_i$  και  $C\vec{f}_j$  και κανονικοποιούνται έτσι ώστε να έχουν μέτρο 1. Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του  $m \times m$  πίνακα των κανονικοποιημένων διανυσμάτων  $C\vec{f}$  ως στήλες, θα είναι μεταξύ 0 και 1. Όταν τα  $C\vec{f}$  είναι ορθογώνια, η τιμή της ορίζουσας θα είναι 1, ενώ αν ένα ή περισσότερα είναι σχεδόν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, η τιμή θα είναι σχεδόν 0. Προκειμένου το φίλτρο ανίχνευσης να συμπεριφέρεται καλά, θα πρέπει η ορίζουσα να είναι τουλάχιστον 0.2 ή και περισσότερο.

#### 2.4.4 Χώρος συμβάντων.

Όπως ορίστηκε προηγουμένως, ο χώρος συμβάντων  $\vec{f}$  αποτελείται από όλα τα διανύσματα που μπορούν να αναπαραστήσουν τις πιθανές αστοχίες, μοναδικές ή και πολλαπλές, πραγματικές ή φανταστικές, που θα προκαλούσαν ένα υπόλοιπο μοναδικής διεύθυνσης κατά μήκος του  $C\vec{f}$ , δεδομένου ότι το φίλτρο ανίχνευσης σχεδιάστηκε για να ελέγχει το σφάλμα που μοντελοποιείται μέσω του  $\vec{f}$ . Στην ουσία,  $\vec{f}$  είναι το διάνυσμα συμβάντος για κάθε αστοχία που μοντελοποιείται από ένα διάνυσμα το χώρο συμβάντων του  $\vec{f}$ .

Ο μαθηματικός ορισμός του χώρου συμβάντος είναι:

$$f = f_0 + f_1$$

όπου  $f_1$  είναι ο μονοδιάστατος διανυσματικός χώρος που περιλαμβάνει όλα τα βαθμωτά πολλαπλάσια του  $\vec{f}$ , συμπεριλαμβανομένου του  $\vec{f}$ , και  $f_0$  είναι ο μεγαλύτερος διανυσματικός υπόχωρος (του διαστάσεων  $n$  χώρου κατάστασης) για τον οποίο:

1.  $\bar{C}f_0$  περιέχει μόνο το μηδενικό διάστημα.
2.  $\bar{A}f_0$  ανήκει στον  $f$ .

Τα σύμβολα  $\bar{A}$  και  $\bar{C}$  καταδεικνύουν τους γραμμικούς τελεστές που αντιστοιχούν στους πίνακες  $A$  και  $C$ .

Ένα χώρος συμβάντος  $f$  περιγράφεται από το σύνολο των διανυσμάτων που διαμορφώνουν την βάση του. Το πλήθος των διανυσμάτων που απαιτούνται ισούται με την διάσταση του  $f$ , το οποίο ορίστηκε ως τάξη του γεγονότος  $\nu$ . Ένα ιδιαίτερο σύνολο διανυσμάτων βάσης χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί ο πίνακας ανατροφοδότησης  $D$ . Αυτό το σύνολο είναι το:

$$\{\vec{g}, A\vec{g}, \dots, A^{\nu-1}\vec{g}\} \quad (2.23)$$

όπου το διάνυσμα  $\vec{g}$  καλείται γεννήτορας συμβάντος του  $f$ . Αυτό το διάνυσμα μπορεί να υπολογισθεί λύνοντας το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} C\vec{g} &= \vec{0} \\ CA\vec{g} &= \vec{0} \\ &\vdots \\ CA^{\nu-2}\vec{g} &= \vec{0} \\ CA^{\nu-1}\vec{g} &= C\vec{f} \end{aligned} \quad (2.24)$$

υπό τον περιορισμό ότι το  $\vec{f}$  μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της (2.23):

$$\vec{f} = \alpha_1\vec{g} + \alpha_2A\vec{g} + \cdots + \alpha_{\nu-1}A^{\nu-2}\vec{g} + \alpha_{\nu}A^{\nu-1}\vec{g} \quad (2.25)$$

Η τελευταία εξίσωση εξασφαλίζει ότι το  $\vec{f}$  θα ανήκει στον δικό του χώρο συμβάντος. Τα  $\alpha$  είναι τυχαίες βαθμωτές σταθερές - είναι μόνο απαραίτητο το  $\vec{g}$  να είναι τέτοιο ώστε να υπάρχει ένα σύνολο  $\alpha$  που να ικανοποιεί τη σχέση (2.25). Συγκρίνοντας την σχέση (2.25) με την (2.24), γίνεται εμφανές ότι το  $\alpha_{\nu}$  πρέπει να ισούται με 1, συνεπώς όταν το  $\nu$  ισούται με 1, το  $\vec{g}$  είναι ίδιο με το  $\vec{f}$ .

Η σχέσεις (2.24) και (2.25) εξαρτώνται από την τιμή του  $\nu$ , αλλά δεν υπάρχει άμεση σχέση που να υπολογίζει την τιμή του. Μια αλγοριθμική διαδικασία για την εύρεση του  $\nu$  δίνεται από τον [Beard, 1971] και παρουσιάζεται παρακάτω, αλλά η διαδικασία αυτή στις περισσότερες περιπτώσεις είναι αρκετά πιο πολύπλοκη απ' ό,τι χρειάζεται. Συνήθως το  $\nu$  ισούται με 1, και σπάνια ξεπερνά το 2 και το 3. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι διότι το μοντέλο αναφοράς κατασκευάζεται συνήθως με τον ελάχιστο πλήθος μεταβλητών κατάστασης και όσες περισσότερες μετρήσεις γίνεται, το οποίο ελαχιστοποιεί την τάξη του γεγονότος. Συνήθως επιλέγονται τόσα διανύσματα συμβάντος όσες και οι επιλεγμένες μετρήσεις, και από τον ορισμό του χώρου συμβάντων προκύπτει ότι το άθροισμα των τάξεων των συμβάντων δεν θα ξεπεράσει ποτέ την τάξη του μοντέλου αναφοράς. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μπορεί να υπολογίσει κανείς το κάθε  $\nu$  από την προσεκτική εξέταση του μοντέλου αναφοράς. Εναλλακτικά μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τις εξισώσεις (2.24) για να βρουν το  $\nu$ :

- Αν δεν υπάρχει κανένα  $\vec{g}$  για το οποίο:

$$\begin{aligned} C\vec{g} &= \vec{0} \\ CA\vec{g} &= C\vec{f} \end{aligned}$$

τότε  $\nu = 1$  και  $\vec{g} = \vec{f}$ . Εάν υπάρχει τέτοιο  $\vec{g}$  τότε  $\nu \geq 2$ .

- Εάν δεν υπάρχει διάνυσμα  $\vec{g}$  για το οποίο:

$$\begin{aligned} C\vec{g} &= \vec{0} \\ CA\vec{g} &= \vec{0} \\ CA^2\vec{g} &= C\vec{f} \end{aligned}$$

τότε  $\nu = 2$ . Εάν υπάρχει τέτοιο διάνυσμα  $\vec{g}$  τότε  $\nu \geq 3$  και άλλη μια εξίσωση από τις (2.24) πρέπει να δοκιμαστεί.

Όταν το  $\nu$  είναι γνωστό, εάν η (2.24) προσδιορίζει πλήρως το  $\vec{g}$ , τότε η (2.25) ικανοποιείται αυτομάτως. Αυτό είναι και το σύννηθος: σπάνια η σχέση (2.24) αφήνει κάποια ελευθερία στον καθορισμό κάποιων συνιστωσών του  $\vec{g}$ . Όταν το επιτρέπει, η (2.25) εξαφανίζει αυτή την ελευθερία και καθορίζει τη μοναδική λύση.

Η μέθοδος που παρουσιάζεται από τον [Beard, 1971] για τον προσδιορισμό του  $\nu$  παρουσιάζει την ακόλουθη δομή:

1. Διαμορφώνεται ο πίνακας

$$A' = A - D'C \quad (2.26)$$

όπου το  $D'$  επιλέγεται αυθαίρετα ώστε να μηδενίζει όσο το δυνατόν περισσότερες στήλες του  $A'$ . Αυτό επιτυγχάνει την απλοποίηση των επόμενων υπολογισμών.

2. Υπολογίζονται οι πίνακες:

$$C' = C - C\vec{f}(C\vec{f})^\dagger C \quad (2.27a)$$

$$K = A' - A'\vec{f}(C\vec{f})^\dagger C \quad (2.27b)$$

$$M = \begin{bmatrix} C' \\ C'K \\ \vdots \\ C'K^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.27c)$$

όπου  $L^\dagger$  ο κατά Moore–Penrose αντίστροφος του πίνακα  $L$ .

3. Ο χώρος γεγονότος του  $\vec{f}$  είναι ο μηδενοχώρος του πίνακα  $M$ , δηλαδή ο  $f$  είναι ο μεγαλύτερος υπόχωρος που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\bar{M}f = \emptyset$$

όπου  $\bar{M}$  είναι ο γραμμικός τελεστής που αντιστοιχεί στον πίνακα  $M$ . Η τάξη του γεγονότος  $\nu$  είναι τότε η διάσταση του μηδενοχώρου του  $M$  και υπολογίζεται ως:

$$\nu = n - \text{rank}\{M\} \quad (2.28)$$

Η τάξη του πίνακα συνήθως μπορεί να υπολογιστεί και εποπτικά: αν αυτό δεν είναι δυνατόν, μπορεί κανείς να καταφύγει σε αριθμητικές τεχνικές όπως π.χ. ο αλγόριθμος της ορθογώνιας μειώσης, ο οποίος υπολογίζει τόσο το  $f$  όσο και το  $\nu$  από τον  $M$ <sup>4</sup>.

### 2.4.5 Περιοριστικά σύνολα.

Από τον ορισμό τους, το σύνολο  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$  είναι μη περιοριστικό, εάν εφόσον ο  $D$  έχει προσδιοριστεί έτσι ώστε να κάνει το υπόλοιπο που σχετίζεται με κάθε  $\vec{f}$  μοναδικό σε διεύθυνση, υπάρχει ακόμα αρκετή ελευθερία στην κατασκευή του, έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα  $[A-DC]$  να μπορούν να επιλεγούν κατά το δοκούν, εκτός του περιορισμού ότι πρέπει να επιλέγεται μια μιγαδική ιδιοτιμή μαζί με τη συζυγή της στον ίδιο χώρο συμβάντος. Ένας τρόπος για να εξετασθεί εάν ένα σύνολο είναι μη περιοριστικό είναι να αγνοηθεί το βήμα (5) και να υπολογισθούν με βάση τα επόμενα βήματα τα στοιχεία του πίνακα  $D$ . Σε συστήματα χαμηλής τάξης, αυτή η προσέγγιση είναι αποτελεσματική. Συνήθως οι μη καθορίσιμες ιδιοτιμές γίνονται εύκολα αντιληπτές, και στην περίπτωση που δεν είναι επιθυμητές, το φίλτρο μπορεί να επανασχεδιαστεί.

Μια άλλη προσέγγιση είναι να υπολογισθούν εκ των προτέρων εάν υπάρχουν μη καθορίσιμες ιδιοτιμές, και αν ναι ποιες ακριβώς είναι. Αυτές ιδιοτιμές εξαρτώνται μόνο από τον πίνακα  $A$  και τα διανύσματα  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$ , συνεπώς ο υπολογισμός τους μπορεί να γίνει πριν τον σχεδιασμό του  $D$ . Για να γίνει αυτό, πρώτα υπολογίζεται η διάσταση  $\nu'$  αυτού που καλείται χώρος γεγονότος συνόλου  $\mathcal{F}$  των  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$ . Αυτός ο διανυσματικός χώρος ορίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως κάθε  $f$ , με τα  $\mathcal{F}_1$  και  $\mathcal{F}_0$  στη θέση των  $f_1$  και  $f_0$ . Η διαδικασία για την εύρεση του  $\nu'$  είναι ίδια με τον αλγόριθμο εύρεσης της τάξης γεγονός:

1. Ορίζεται ο  $n \times s$  πίνακας  $F$  εισάγοντας τα  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$  σαν στήλες:

$$F = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \dots & \vec{f}_s \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

<sup>4</sup> Η μέθοδος αυτή περιγράφεται τόσο από τον [Beard, 1971], όσο και από τους [Jones, 1973] και [Gerard, 1978]

2. Διαμορφώνεται ο πίνακας  $M'$  διαστάσεως  $nm \times s$  με τον ίδιο τρόπο όπως στη σχέση (2.27), αντικαθιστώντας το  $\vec{f}$  με το  $F$ .

3. Ο χώρος γεγονότος συνόλου είναι ο μηδενοχώρος του πίνακα  $M'$ , και η τάξη του  $\nu'$  δίνεται από τη σχέση:

$$\nu' = n - \text{rank}\{M'\} \quad (2.30)$$

4. Το πλήθος των μη καθορίσιμων ιδιοτιμών είναι:

$$\nu_0 = \nu' - \sum_i \nu_i \quad (2.31)$$

Όταν το πλήθος των διανυσμάτων συμβάντος ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων μετρήσεων, δηλαδή όταν το  $s$  ισούται με την τάξη του  $C$ , τότε το  $\nu'$  ισούται με τη διάσταση της χώρου καταστάσεων  $n$ .

Όταν υπάρχουν μη καθορίσιμες ιδιοτιμές, αυτές σχετίζονται με ένα υποχώρο  $\mathcal{F}$  διάστασης  $\nu_0$ . Αυτός ο υποχώρος, που συμβολίζεται με  $\mathcal{R}$ , είναι αυτό το κομμάτι του  $\mathcal{F}$  το οποίο δεν περιλαμβάνεται σε κανένα χώρο γεγονότος των διανυσμάτων  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$ . Συγκρίνοντας τον  $\mathcal{F}$  με τους χώρους γεγονότος, μπορεί κανείς να βρει ένα σύνολο διανυσμάτων βάσης για το χώρο  $\mathcal{R}$ . Τότε με αυτά τα διανύσματα μπορεί κανείς να υπολογίσει τις μη καθορίσιμες ιδιοτιμές. Έστω  $R$  ένας πίνακας διαστάσεων  $n \times \nu_0$  με στήλες αυτά τα διανύσματα, και έστω ο πίνακας  $G$  με στήλες όλα τα διανύσματα βάσης των χώρων γεγονότος, όπως ορίζονται στη σχέση (2.23). Τότε οι μη καθορίσιμες ιδιοτιμές του πίνακα  $[A - DC]$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\Pi$  διαστάσεως  $\nu_0 \times \nu_0$  που είναι μέρος της λύσης της εξίσωσης:

$$AR = [R \ G] \begin{bmatrix} \Pi \\ \Theta \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Αυτή η εξίσωση δηλώνει ότι το  $\bar{A}\mathcal{R}$  περιέχεται στον  $\mathcal{F}$ , το οποίο προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του  $\mathcal{F}$ .

#### 2.4.6 Επαυξάνοντας τον χώρο κατάστασης.

Είναι πάντα δυνατό να γίνουν οι μη καθορίσιμες ιδιοτιμές καθορίσιμες προσθέτοντας μία ή και περισσότερες εικονικές μεταβλητές κατάστασης στο διάνυσμα κατάστασης. Αυτό μεγαλώνει τη διάσταση του πίνακα  $A$ , το οποίο έχοντας ως αποτέλεσμα την αύξηση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, επιτρέπει τον ελεύθερο προσδιορισμό ενός μέρους του πίνακα  $A$ . Στόχος είναι η επιλογή νέων στοιχείων για τον  $A$  που θα επαυξήσει την διάσταση των κατάλληλων χώρων συμβάντων έτσι ώστε το άθροισμα των τάξεων των συμβάντων να γίνει ίσο με την τάξη γεγονότος του συνόλου. Μερικές επιπλέον μεταβλητές κατάστασης μπορεί να απαιτηθούν για να επανορθώσουν για την κάθε μία έλλειψη στο άθροισμα της τάξεως των συμβάντων. Κάθε επιπλέον μεταβλητή μεγαλώνει την τάξη του συνόλου κατά ένα και συνήθως μόνο μια τάξη ενός γεγονότος κατά ένα. Τελικώς, η επόμενη νέα μεταβλητή θα αυξήσει δύο τάξεις συμβάντων κατά ένα, μειώνοντας κατά αυτό τον τρόπο την έλλειψη κατά ένα.

Η μορφή των επαυξημένων πινάκων  $A$ ,  $B$  και  $C$  είναι:

$$A' = \begin{bmatrix} A & W \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad (2.33a)$$

$$B' = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.33b)$$

$$C' = [C \ 0] \quad (2.33c)$$

Πολλές και διαφορετικές επιλογές των  $W$  και  $Q$  θα εξαλείψουν τις μη καθορίσιμες ιδιοτιμές: ποια είναι η καλύτερη εξαρτάται από την δοθείσα εφαρμογή και μπορεί να προσδιοριστεί από το τι άλλο

επιθυμεί να επιτύχει ο σχεδιαστής με την επαύξηση του πίνακα  $A$ . Ο [Jones, 1973] παρουσιάζει μια διαδικασία για την απόκτηση κατάλληλων πινάκων  $[W, Q]$  από την λύση για τα  $[\Pi, \Theta]$  της εξίσωσης (2.32). Εναλλακτικά, το πρόβλημα μπορεί να προσεγγιστεί ως εξής:

1. Επιλέγεται διαγώνιος πίνακας  $Q$  τυχαίας διάστασης και τυχαίων διαγώνιων στοιχείων.
2. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.24) και (2.25) ορίζονται οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ο πίνακας  $W$  για να επεκταθούν οι κατάλληλοι χώροι γεγονότος. Οι απαραίτητες διαστάσεις του πίνακα  $Q$  θα γίνουν ξεκάθαρες, και γενικά θα υπάρξει μια ελευθερία στην επιλογή των στοιχείων.

### 2.4.7 Υπολογίζοντας τον πίνακα κέρδους $D$ .

Η σχέση που καθορίζει το κέρδος  $D$  προκύπτει από τους γεννήτορες συμβάντος που ορίστηκαν στο βήμα (4). Σε κάθε γεννήτορα συμβάντος ορίζουμε ένα σύνολο από αριθμούς, πραγματικούς ή μιγαδικούς,<sup>5</sup> οι οποίοι πρόκειται να είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $[A - DC]$ . Σημειώνεται το σύνολο  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\nu\}$ , όπου, όπως πριν,  $\nu$  είναι η τάξη του γεγονότος. Για κάθε σύνολο λοιπόν διαμορφώνεται το πολυώνυμο  $\Psi(s)$  της μιγαδικής μεταβλητής  $s$  ως εξής:

$$\Psi(s) = \prod_{j=1}^{\nu} (s - \lambda_j) = s^\nu + p_\nu s^{\nu-1} + \dots + p_2 s + p_1 \quad (2.34)$$

Τα  $\lambda$  τότε είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης που διαμορφώνεται αν θέσουμε το  $\Psi(s)$  ίσο με το μηδέν. Αν χρησιμοποιηθεί το  $\Psi(s)$  στον υπολογισμό του  $D$ , τότε θα εξασφαλιστεί ότι θα είναι και πόλοι του φίλτρου ανίχνευσης.

Για κάθε  $\vec{f}$  είναι επιθυμητό να προσδιοριστεί κατάλληλες συνθήκες στον  $D$  έτσι ώστε να επιτευχθούν δύο στόχοι: Πρώτον, τα υπόλοιπα που δημιουργούνται από τις αστοχίες που αναπαριστούνται με το  $\vec{f}$  να έχουν μοναδική διεύθυνση κατά μήκος του  $C\vec{f}$ , και δεύτερον, οι αριθμοί  $\lambda_1, \dots, \lambda_2$  να είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$\det\{(A - DC) - sI\} = 0 \quad (2.35)$$

Όσον αφορά την πρώτη συνθήκη, από την σχέση (2.6) προκύπτει ότι μετά από κάποια δυσλειτουργία που αναπαρίσταται με το μοντέλο αστοχίας εισόδου, το διάνυσμα υπολοίπων συμπεριφέρεται ως εξής:

$$\dot{\vec{q}}(t) = [A - DC]\vec{q}(t) + \vec{f}n(t) \quad (2.36a)$$

$$\vec{r}(t) = C\vec{q}(t) \quad (2.36b)$$

Επιλέγεται ο  $D$  έτσι ώστε το  $\vec{q}(t)$  που παράγεται από το  $\vec{f}$ , σύμφωνα με την (2.36) να βρίσκεται πάντα εντός του  $f$ , διότι μόνο τα διανύσματα μέσα στο  $f$  όταν περάσουν μέσω του φίλτρου θα δημιουργήσουν εξόδους αποκλειστικά κατά μήκος του  $C\vec{f}$ .

Η περιοχή του χώρου καταστάσεως, στην οποία θα εξελιχθεί το  $\vec{q}(t)$  που παράγεται από το  $\vec{f}$ , είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα:

$$\{\vec{f}, [A - DC]\vec{f}, [A - DC]^2\vec{f}, [A - DC]^3\vec{f}, \dots\} \quad (2.37)$$

Τα στοιχεία του  $D$  επιλέγονται έτσι ώστε η (2.37) να παράγει μόνο το χώρο γεγονότος, ούτε περισσότερο ούτε λιγότερο<sup>6</sup>. Τα πρώτα  $\nu$  διανύσματα στη (2.37),

$$\{\vec{f}, [A - DC]\vec{f}, [A - DC]^2\vec{f}, \dots, [A - DC]^{\nu-1}\vec{f}\} \quad (2.38)$$

<sup>5</sup> Και οι δύο μιγαδικοί πρέπει να ανήκουν στο ίδιο σύνολο.

<sup>6</sup> Αυτό εξασφαλίζει ότι η διάσταση του χώρου που παράγεται από την (2.37) θα είναι  $\nu$ , και συνεπώς εξασφαλίζει όσο απαιτείται έλεγχο πάνω στον πίνακα  $[A - DC]$ , έτσι ώστε να μπορούν να ορισθούν κάθε μια από τις  $\nu$  ιδιοτιμές του στο  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\nu\}$ .



θα αποτελούν μια βάση για τον  $f$ , ενώ τα υπόλοιπα διανύσματα, όντας μέλη του  $f$ , θα είναι γραμμικός συνδυασμός των πρώτων. Υπενθυμίζεται ότι στην ενότητα για τους χώρους γεγονότος ορίστηκε άλλη μια βάση για τον  $f$ , συγκεκριμένα η:

$$\{\vec{g}, A\vec{g}, A^2\vec{g}, \dots, A^{\nu-1}\vec{g}\} \quad (2.39)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.24) επαναδιατυπώνουμε την βάση ως εξής:

$$\{\vec{g}, [A - DC]\vec{g}, [A - DC]^2\vec{g}, \dots, [A - DC]^{\nu-1}\vec{g}\} \quad (2.40)$$

Αυτό δεν αλλάζει τα διανύσματα βάσης: τα (2.39) και (2.40) αποτελούν ταυτόσημα σύνολα.

Για να διατηρηθεί η πρώτη συνθήκη, όπως το  $[A - DC]^\nu \vec{f}$  πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στη (2.38), έτσι πρέπει το  $[A - DC]^\nu \vec{g}$  να είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στην (2.40), καθώς το  $\vec{g}$  ανήκει στον  $f$ . Αυτή η διατύπωση παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$[A - DC]^\nu \vec{g} = \alpha_1 \vec{g} + \alpha_2 [A - DC]\vec{g} + \dots + \alpha_\nu [A - DC]^{\nu-1}\vec{g} \quad (2.41)$$

όπου τα  $\alpha$  είναι τυχαίοι βαθμωτοί συντελεστές.

Για να επιτευχθεί ο δεύτερος στόχος, απαιτείται το σύνολο  $\{-\alpha_1, \dots, -\alpha_\nu\}$  να είναι ίσο με το σύνολο των συντελεστών του πολωνύμου  $\{p_1, p_2, \dots, p_\nu\}$  της (2.34). δηλαδή απαιτείται ο  $D$  να ικανοποιεί την εξής συνθήκη:

$$-[A - DC]^\nu \vec{g} = p_1 \vec{g} + p_2 [A - DC]\vec{g} + \dots + p_\nu [A - DC]^{\nu-1}\vec{g} \quad (2.42)$$

Το θεώρημα Cayley-Hamilton της γραμμικής άλγεβρας εγγυάται ότι τα  $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$  θα είναι ρίζες της (2.35). Αυτό το θεώρημα αναφέρει ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωσή του. Αυτή η εξίσωση για έναν πίνακα  $M$  διαστάσεων  $n \times n$  είναι:

$$\Psi(s) = s^n + p_n s^{n-1} + \dots + p_2 s + p_1 = 0 \quad (2.43)$$

και συνεπώς από το θεώρημα προκύπτει ότι:

$$\Psi(M) = M^n + p_n M^{n-1} + \dots + p_2 M + p_1 = \vec{0} \quad (2.44)$$

Για τον υπολογισμό του  $D$ , ορίζεται ένα σύνολο πολωνύμων  $\{\Psi_1(s), \dots, \Psi_t(s)\}$  που αντιστοιχεί στο σύνολο των διανυσμάτων γεγονότος  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$ , και στη συνέχεια απαιτείται για κάθε  $\Psi_i$  ότι:

$$\Psi_i(A - DC) = \vec{0} \quad (2.45)$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι:

$$\Psi_0(A - DC) \cdot \Psi_1(A - DC) \cdot \dots \cdot \Psi_t(A - DC) = \vec{0} \quad (2.46)$$

όπου  $\Psi_0(A - DC)$  είναι ένα πολυώνυμο με ρίζες τις μη καθορίσιμες ιδιοτιμές του  $[A - DC]$  - αν υπάρχουν - και αν το  $t$  είναι μικρότερο της τάξης του  $C$ , οι ιδιοτιμές του  $[A - DC]$  που μπορούν να καθοριστούν εκμεταλλεύοντας την επιπλέον ελευθερία που θα υπήρχε στην επιλογή του  $D$  σε αυτή την περίπτωση. Η εξίσωση (2.46) αποτελεί μια διαφορετική διατύπωση του θεωρήματος Cayley-Hamilton για το  $[A - DC]$ : θέτει τις συνθήκες στον  $D$ , έτσι ώστε η χαρακτηριστική εξίσωση για το  $[A - DC]$ , (2.35), να είναι παραγοντοποιήσιμη στη μορφή:

$$\Psi_0(s) \cdot \Psi_1(s) \cdot \dots \cdot \Psi_t(s) = 0 \quad (2.47)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (2.45) σε κάθε  $\Psi_i, i = 1, 2, \dots, t$ , προκύπτουν οι εξισώσεις που πρέπει να λυθούν για την εύρεση του  $D$ . Για μια πιο αναλυτική μορφή της εξίσωσης (2.45), αυτή γράφεται στη μορφή της (2.44):

$$[A - DC]^\nu + p_\nu [A - DC]^{\nu-1} + \dots + p_2 [A - DC] + p_1 = \vec{0} \quad (2.48)$$

πολλαπλασιάζεται με  $\vec{g}$ , αναλύονται οι δυνάμεις, και χρησιμοποιώντας την (2.24) καταλήγουμε ότι:

$$A\vec{g} - DC\vec{f} = -p_1\vec{g} - p_2A\vec{g} - \dots - p_\nu A^{\nu-1}\vec{g} \quad (2.49)$$

Σημειώνεται ότι, αν η τάξη ενός γεγονότος του  $\vec{f}$  είναι ένα, η (2.49) απλοποιείται στην:

$$[A - DC]\vec{f} = \lambda\vec{f} \quad (2.50)$$

Κατ' επέκταση, σε αυτή την περίπτωση η συνθήκη στον  $D$  είναι τέτοια ώστε το  $\vec{f}$  να είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του  $[A - DC]$  και  $\lambda$  η αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Συνοψίζοντας, για την επίλυση για το κέρδος  $D$ , ορίζεται για κάθε διάνυσμα γεγονότος στο σύνολο  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_i\}$  ένα σύνολο από αριθμούς  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\nu\}$ , έπειτα υπολογίζονται οι συντελεστές του πολυωνύμου  $\Psi_i(s)$  χρησιμοποιώντας την:

$$\Psi(s) = \prod_{j=1}^{\nu} (s - \lambda_j) = p_1 + p_2s + \dots + p_\nu s^{\nu-1} + s^\nu \quad (2.51)$$

και γράφεται η εξίσωση:

$$DC\vec{f} = p_1\vec{g} + p_2A\vec{g} + \dots + p_\nu A^{\nu-1}\vec{g} + A^\nu\vec{g} \quad (2.52)$$

Αφού έχουν οριστεί οι τιμές για τα  $\lambda$ , επιλύονται ταυτόχρονα όλες οι εξισώσεις της σχέσης (2.52) για το  $D$ . Όταν το πλήθος των διανυσμάτων γεγονότος ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων μετρήσεων, τότε καθορίζονται πλήρως όλα τα στοιχεία του  $D$ .

#### 2.4.8 Το κέρδος $D$ για αστοχίες αισθητήρων.

Η εξίσωση (2.52) προσδιορίστηκε για αστοχίες που αναπαριστώνται μέσω του μοντέλου αστοχίας εισόδου, αλλά συνήθως μπορεί να χρησιμοποιηθεί και με το μοντέλο αστοχίας μέτρησης. Μπορεί όμως να γίνει μη γραμμικό. Αν είναι επιθυμητό σφάλματα του μιστού αισθητήρα να παράγουν ένα υπόλοιπο που περιορίζεται στο επίπεδο που ορίζεται από τα  $\vec{e}_j$  και  $C\vec{d}_j$ , τότε το  $\vec{d}_j$  πρέπει να γίνει διάνυσμα γεγονότος για το φίλτρο ανίχνευσης. Αλλά δυστυχώς το  $\vec{d}_j$  δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων όπως τα  $\vec{f}$ . Σε τρεις περιπτώσεις που απαντώνται αρκετά συχνά, μπορεί αυτή η δυσκολία να ξεπεραστεί.

Πρώτα απ' όλα, εάν ένα από τα άλλα διανύσματα γεγονότος, π.χ. το  $\vec{f}_i$ , είναι τέτοιο ώστε το  $C\vec{f}_i$  να ισούται με  $\vec{e}_j$ , τότε το  $\vec{d}_j$  προσδιορίζεται πλήρως από την (2.52) εφαρμοζόμενη μόνο για το  $\vec{f}_i$ , ανεξαρτήτου του τι είναι τα υπόλοιπα  $\vec{f}$ . Αυτό θα συμβαίνει όταν το  $\vec{f}_i$  σχετίζεται με έναν επενεργητή, του οποίου η θέση μετράται από τον μιστό αισθητήρα. Σε αυτή την περίπτωση, το  $DC\vec{f}_i$  είναι απλά ο  $D$  επί το  $\vec{e}_j$ , το οποίο είναι το  $\vec{d}_j$ . Συνεπώς, το  $\vec{d}_j$  μπορεί εύκολα να βρεθεί και να εισαχθεί στη σχέση (2.52) ως διάνυσμα γεγονότος.

Δεύτερον, αν από τη δομή του μοντέλου αναφοράς μπορεί κανείς να εκτιμήσει την τάξη του γεγονότος  $\vec{d}_j$ , τότε μπορεί να είναι δυνατόν να γραφεί η (2.52) ως μία μη γραμμική εξίσωση που μπορεί να λυθεί αριθμητικά. Για παράδειγμα, αν η τάξη του γεγονότος  $\vec{d}_j$  μπορεί να είναι μόνο ένα, τότε

$$\vec{g}_i = \vec{f}_i = \vec{d}_i \quad (2.53)$$

και αντικαθιστώντας το  $\vec{f}$  με το  $\vec{d}_j$ , η (2.52) γίνεται:

$$DC\vec{d}_j = p_1\vec{d}_j + A\vec{d}_j \quad (2.54)$$

Αυτή η μη γραμμική εξίσωση πρέπει να λυθεί ταυτόχρονα με τις άλλες εξισώσεις που προέκυψαν για τα άλλα διανύσματα γεγονότος. Συνήθως, θα απαιτηθεί κάποιο υπολογιστικό πακέτο επίλυσης συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων.

Τρίτον, μπορεί κάποιες φορές να γίνει ένα  $\vec{d}_j$  στάσιμο στην έξοδο ως προς τα  $\vec{f}$ , και ως εκ τούτου αποφεύγοντας το πρόβλημα του να κάνει το  $\vec{d}_j$  να είναι ένα από τα  $\vec{f}$ . Αυτή είναι και προτιμότερη λύση, καθώς μπορεί να είναι δυνατόν να γίνουν μερικές, ίσως και όλες οι στήλες του  $D$  στάσιμες στην έξοδο ταυτόχρονα, ορίζοντας την ίδια τιμή σε κάποιες ή και σε όλες τις καθορισμένες ιδιοτιμές του  $[A - DC]$ . Η επόμενη υποενότητα περιγράφει την διαδικασία με την οποία γίνονται κάποια διανύσματα στάσιμα στην έξοδο.

Η λύση που εφαρμόστηκε για τον σχεδιασμό φίλτρων που επιτρέπουν την αναγνώριση σφαλμάτων των αισθητήρων βασίστηκε στην εργασία των [Park et al., 1994]. Συγκεκριμένα, ορίζεται μια επαύξηση του χώρου κατάστασης του μοντέλου αναφοράς, η οποία επιτρέπει τον μετασχηματισμό των αστοχιών των αισθητήρων σε μορφή αστοχιών επενεργητών ή αλλαγών δυναμικής. Έτσι, ο σχεδιασμός του φίλτρου ακολουθεί την διαδικασία που αφορά μόνο αυτές τις κατηγορίες αστοχιών και η οποία είναι ουσιαστικά η ίδια. Πλέον, το διάνυσμα γεγονότος για σφάλμα αισθητήρων αποκτά μοναδική διεύθυνση και δεν απαιτείται ο ορισμός του επιπέδου που αναλύθηκε παραπάνω. Αυτό αποτελεί σαφώς ένα σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου. Το μειονέκτημά της είναι φυσιολογικά η αύξηση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας του μοντέλου αναφοράς. Από την άλλη, εκτός του πλεονεκτήματος της διεύθυνσης, υπάρχουν και μερικά ακόμα πλεονεκτήματα: τα διανύσματα σφάλματος του κάθε αισθητήρα είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο από αυτά των υπολοίπων καθώς και από αυτά των αστοχιών και των αλλαγών δυναμικής. Επίσης, η μόνη προϋπόθεση για να εφαρμοστεί η επαύξηση αυτή είναι το σύστημα να είναι παρατηρήσιμο· κάτι το οποίο εν γένει απαιτείται από όλη την μεθοδολογία των φίλτρων αντίκρουσης.

Για το σύστημα των εξισώσεων (2.19) ορίζεται ένα νέο σύστημα εξισώσεων κατάστασης, το οποίο περιλαμβάνει μια βοηθητική μεταβλητή που αντιπροσωπεύει την δυναμική του σφάλματος του αισθητήρα:

$$\dot{\vec{x}} = \bar{A}\vec{x} + \bar{B} \begin{bmatrix} u \\ \xi \end{bmatrix} \quad (2.55a)$$

$$\vec{y} = \bar{C}\vec{x} \quad (2.55b)$$

διαστάσεων  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ ,  $\bar{B} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (p+1)}$ ,  $\bar{C} \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$  και  $\xi \in \mathbb{R}$  μία είσοδος αστοχίας αισθητήρα. Αυτά ορίζονται ως εξής:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{x}_{previous} \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.56a)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & \vec{0} \\ \vec{0} & \alpha \end{bmatrix} \quad (2.56b)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.56c)$$

$$\bar{C} = [C \quad \vec{e}_i] \quad (2.56d)$$

$$\xi = \dot{\zeta} - \alpha\zeta \quad (2.56e)$$

όπου το  $\alpha$  θα αποτελέσει ιδιοτιμή του φίλτρου που θα σχεδιαστεί για το διάνυσμα γεγονότος αυτού του αισθητήρα. Με βάση τις προηγούμενες σχέσεις, το επαυξημένο σύστημα έχει την εξής εξίσωση κατάστασης:

$$\dot{\vec{x}} = \bar{A}\vec{x} + \bar{B} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.57a)$$

$$\vec{y} = \bar{C}\vec{x} \quad (2.57b)$$

Η εξίσωση του υπολοίπου γι αυτό το σύστημα γίνεται:

$$\dot{\vec{e}} = (\bar{A} - D\bar{C}) \vec{e} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xi \quad (2.58a)$$

$$\vec{y} = \bar{C}\vec{e} \quad (2.58b)$$

η οποία έχει την ίδια μορφή με τις (2.10) ή την (2.18), δηλαδή μοναδική διεύθυνση στην έξοδο.

#### 2.4.9 Στασιμότητα στην έξοδο.

Στο βήμα (5), το σύνολο  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$  κατασκευάστηκε είτε ως ένα μη περιοριστικό σύνολο διανυσμάτων γεγονότος ή ως ένα περιοριστικό σύνολο που έχει αποδεκτές μη καθορίσιμες ιδιοτιμές· μπορεί να είναι τόσο δυνατό όσο και επιθυμητό να εισαχθούν σε αυτό το σύνολο ένα ή και περισσότερα διανύσματα τα οποία δεν είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο ως προς τα  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$ . Όπως τονίστηκε και προηγουμένως, τα επιπλέον διανύσματα πρέπει να γίνουν αμοιβαία στάσιμα στην έξοδο με τα  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$ . Για να είναι αυτό εφικτό, αυτά τα διανύσματα πρέπει να ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες που παρουσιάζονται παρακάτω. Εάν αυτό είναι επιθυμητό ή όχι εξαρτάται από τους περιορισμούς που εισάγονται. Κάποια από την ελευθερία στην επιλογή των ιδιοτιμών θυσιάζεται κάνοντας ένα διάνυσμα στάσιμο στην έξοδο, διότι τουλάχιστον δύο σύνολα ιδιοτιμών. π.χ. τα  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu_i}\}$  και  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu_j}\}$ , πρέπει να γίνουν ίσα μεταξύ τους (ή μερικώς έτσι ώστε το ένα να είναι μεγαλύτερο από το άλλο). Επιπροσθέτως, όταν το  $\nu_j$  δεν είναι ίσο με το  $\nu_i$ , οι μη αντίστοιχες ιδιοτιμές γίνονται μη καθορίσιμες.

Πρώτα απ' όλα, προσδιορίζεται ποια από τα επιπλέον διανύσματα, επιλέγοντας ένα κάθε φορά, μπορεί να γίνουν διαχωρίσιμα στην έξοδο. Η συνθήκη που ένα διάνυσμα  $\vec{h}$  πρέπει να ικανοποιεί, ώστε να προκαλεί ένα υπόλοιπο μοναδικής διεύθυνσης από ένα φίλτρο που σχεδιάζεται για τα  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$ , είναι ότι το  $[A - DC]\vec{h}$  πρέπει να περιέχεται στο χώρο γεγονότος του  $\vec{h}$ , δηλαδή ότι:

$$[A - DC]\vec{h} \in \vec{h} \quad (2.59)$$

Ο χώρος γεγονότος του  $\vec{h}$  βρίσκεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που βρίσκονται οι χώροι γεγονότος  $f$  των  $\vec{f}$ , και η (2.59) είναι η ίδια συνθήκη που εφαρμόζεται σε όλα τα  $\vec{f}$  και προσδιορίζει ποιος πρέπει να είναι ο  $D$ , εκτός από την επιλογή των ιδιοτιμών. Αυτή η επιλογή μπορεί να γίνει έτσι ώστε να ικανοποιείται η (2.59).

Για παράδειγμα, έστω οι τάξεις των γεγονότων  $\vec{h}$ ,  $\vec{f}_1$  και  $\vec{f}_2$  είναι ίσες με ένα και ότι το  $\vec{h}$  είναι συνδυασμός των  $\vec{f}_1$  και  $\vec{f}_2$ :

$$\vec{h} = \alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2 \quad (2.60)$$

Τότε:

$$\begin{aligned} [A - DC]\vec{f}_1 &= \lambda_1 \vec{f}_1 \\ [A - DC]\vec{f}_2 &= \lambda_2 \vec{f}_2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

και

$$[A - DC]\vec{h} = [A - DC][\alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2] = \alpha_1 \lambda_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{f}_2 \quad (2.62)$$

Ο μονοδιάστατος χώρος γεγονότος του  $\vec{h}$  αποτελείται από όλα τα βαθμωτά πολλαπλάσια του  $\vec{h}$ , συνεπώς το  $[A - DC]\vec{h}$  θα βρίσκεται στο χώρο εάν και μόνο εάν τα  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  είναι ίσα. Η (2.61) τότε γίνεται:

$$[A - DC]\vec{h} = \alpha_1 \lambda_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{f}_2 = \lambda(\alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2) = \lambda \vec{h} \quad (2.63)$$

Γενικά, για να εκτιμηθεί ένα ένα δεδομένο διάνυσμα  $\vec{h}$  μπορεί να γίνει στάσιμο στην έξοδο, μπορεί να ακολουθηθεί η εξής διαδικασία: Γράφεται το διάνυσμα  $C\vec{h}$  ως γραμμικός συνδυασμός των

$\{C\vec{f}_1, \dots, C\vec{f}_t\}$  και συλλέγεται το σύνολο  $I$  των δεικτών των  $\vec{f}$  που απαιτούνται για τον γραμμικό συνδυασμό. Μέτα γράφεται:

$$\vec{h} = \sum_{i \in I} \alpha_i \vec{f}_i + \vec{\xi} \quad (2.64)$$

όπου το  $\vec{\xi}$  ικανοποιεί την  $C\vec{\xi} = \vec{0}$  και κανένα από τα  $\alpha_i$  δεν είναι μηδενικό. Τότε:

$$[A - DC]\vec{h} = \sum_{i \in I} \alpha_i [A - DC]\vec{f}_i + A\vec{\xi} \quad (2.65)$$

Οι εξισώσεις (2.64) και (2.65) παρουσιάζουν τρεις εναλλακτικές πιθανότητες:

1. Το διάνυσμα  $\vec{\xi}$  είναι μηδέν ή περιέχεται στην ένωση <sup>7</sup> των συνόλων  $f : i \in I$ . Ο ορισμός του διανύσματος γεγονόςτος υποδηλώνει ότι το  $\vec{\xi}$  βρίσκεται πλήρως εντός της ένωσης των  $f : i \in I$ . Είναι γνωστό επίσης, πως και το  $A\vec{\xi}$  πρέπει να βρίσκεται στην ένωση. Επιπλέον, η ελευθερία της επιλογής των ιδιοτιμών του  $[A - DC]$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κάνει την δεξιά πλευρά της (2.65) να βρίσκεται οπουδήποτε στη ένωση, το οποίο σημαίνει ότι η (2.59) ικανοποιείται. Εάν όλες οι τάξεις γεγονόςτος  $\nu_i : i \in I$  είναι ίσες, τότε η (2.59) ικανοποιείται οποτεδήποτε όλα τα σύνολα ιδιοτιμών  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu_i}\} : i \in I$  είναι ίσα. (Δεν είναι απαραίτητο οι ιδιοτιμές  $\lambda$  μέσα σε κάθε σύνολο να είναι ίσες.) Εάν τα  $\nu_i$  δεν είναι ίσα, τότε οι σχέσεις (2.64) και (2.65) αναγκάζουν κάποια από τα  $\lambda$  να πάρουν συγκεκριμένες τιμές. Έστω ότι το  $\nu_{min}$  καθορίζει την μικρότερη από τα  $\nu_i$ : τότε κάθε σύνολο  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu_i}\} : i \in I, \nu_i - \nu_{min}$  των  $\lambda$  θα καθοριστεί. Τα υπόλοιπα κομμάτια των συνόλων περιορίζονται μόνο να είναι ίσα όπως πριν.
2. Το διάνυσμα  $\vec{\xi}$  δεν βρίσκεται στην ένωση των  $f : i \in I$ , αλλά το  $A\vec{\xi}$  βρίσκεται στην ένωση του  $h$  με αυτή την ένωση. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο όταν το σύνολο  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_t\}$  είναι περιοριστικό. Πάλι η σχέση (2.59) μπορεί να ικανοποιηθεί, και αν το  $A\vec{\xi}$  βρίσκεται είτε εντός του  $h$  είτε εντός της ένωσης των  $f : i \in I$ , μπορεί να ικανοποιηθεί όπως η (1) παραπάνω. Εναλλακτικά, οι σχέσεις (2.51), (2.52) και (2.65) πρέπει να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα για να ευρεθούν ποιες τιμές των  $\lambda$  θα κάνουν το  $\vec{h}$  στάσιμο στην έξοδο - απλά κάνοντας τα σύνολα ίσα δεν θα επιφέρει αυτό το αποτέλεσμα.
3. Το διάνυσμα  $A\vec{\xi}$  δεν βρίσκεται στην ένωση των  $h$  και  $f : i \in I$ . Καμία επιλογή των  $\lambda$  δεν μπορεί να κάνει το  $\vec{h}$  στάσιμο στην έξοδο.

Η αμοιβαία στασιμότητα στην έξοδο κάποιων διανυσμάτων  $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_\nu$  μπορεί να εγγυηθεί, στις δύο πιο απλές περιπτώσεις, οποτεδήποτε:

1. Δεν υπάρχει καμία επικάλυψη μεταξύ των συνόλων  $\{\vec{f}_i : i \in I_1\}, \dots, \{\vec{f}_i : i \in I_\nu\}$  που χρησιμοποιούνται στον γραμμικό συνδυασμό που παράγει τα  $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_\nu$  ή
2. Τα σύνολα είναι ταυτόσημα.

Εάν, από την άλλη πλευρά, κάποια από τα σύνολα δεικτών  $I$  είναι τεμνόμενα και όχι ταυτόσημα, η στασιμότητα αυτών των σχετιζόμενων διανυσμάτων εξαρτάται από το εάν δύο από αυτά τα σύνολα κάνουν τις ίδιες ιδιοτιμές μη καθορίσιμες και απαιτούν διαφορετικές τιμές γι' αυτό.

#### 2.4.10 Επιλογή ιδιοτιμών.

Εκτός από τον περιορισμό για τα συζυγή ζευγάρια και τους περιορισμούς ισότητας που εισάγονται από τα στάσιμα στην έξοδο διανύσματα, ο σχεδιαστής έχει αρκετή ελευθερία στην επιλογή των καθορίσιμων ιδιοτιμών του πίνακα  $[A - DC]$ . Η κατάλληλη αξιοποίησή της απαιτεί αντίληψη των διαφόρων παραγόντων που επιδρούν στην απόδοση του φίλτρου. Αρχικά, οι ιδιοτιμές πρέπει να

<sup>7</sup> Η ένωση διαφόρων διανυσματικών χώρων είναι ο χώρος που παράγεται από την συλλογή των διανυσμάτων βάσης αυτών των χώρων.

είναι αρνητικές - ή να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη - αλλιώς η κατάσταση του μοντέλου αναφοράς τελικά θα αποκλίνει από την κατάσταση του πραγματικού συστήματος. Μεγάλες αρνητικές τιμές κάνουν το μοντέλο να παρακολουθεί τις μετρήσεις καλύτερα, και ελαχιστοποιείται το μέγεθος των υπολοίπων που συμβαίνουν από δυσλειτουργίες ή από σφάλματα μοντελοποίησης. Από την άλλη πλευρά, οι μικρές αρνητικές τιμές κάνουν τα μεταβατικά υπόλοιπα να εξασθενήσουν πιο αργά, και επιτρέπουν στα μόνιμα υπόλοιπα που παράγονται από δυσλειτουργίες να διατηρήσουν μεγάλα πλάτη. Υπόλοιπα που προκαλούνται από θόρυβο μετρήσεων υψηλής συχνότητας επηρεάζονται σχετικά λίγο από την επιλογή των ιδιοτιμών· κατ' επέκταση, όσο περισσότερο αρνητικές είναι οι ιδιοτιμές, τόσο μικρότερος θα είναι ο σηματοθορυβικός λόγος στα υπόλοιπα.

Στις περισσότερες περιπτώσεις οι ιδιοτιμές πρέπει να είναι σχετικά πιο αρνητικές από τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του συστήματος. Αυτό δίνει έναν καλό συμβιβασμό μεταξύ ρυθμού απόκρισης και σηματοθορυβικού λόγου. Τις περισσότερες φορές, η πιο πρακτική προσέγγιση είναι να επιλεγθούν η ίδια τιμή για όλες τις καθορίσιμες ιδιοτιμές.

## 2.5 Σύνοψη.

Η μέθοδος σχεδιασμού φίλτρου ανίχνευσης που αναπτύχθηκε σε αυτό το κεφάλαιο αποτελείται από διαδικασίες προσδιορισμού των διανυσμάτων γεγονότος των αστοχιών, για να ελεγχθεί εάν ένα σύνολο διαχωρίσιμων στην έξοδο διανυσμάτων είναι μη περιοριστικό, για τον έλεγχο των διανυσμάτων για στασιμότητα στην έξοδο, και για τον υπολογισμό του πίνακα κέρδους. Τα συστήματα για τα οποία αναπτύχθηκαν τα παραπάνω είναι τα συνεχή γραμμικά συστήματα.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνει μια πιο συγκεκριμένη παρουσίαση της αλγοριθμικής ανάλυσης της παραπάνω διαδικασίας, καθώς και πτυχών της εφαρμογής της. Έπειτα θα δοθεί ένα σεισμικό σύστημα για το οποίο θα υπολογιστούν αναλυτικά τα απαιτούμενα φίλτρα ανίχνευσης καθώς και μια προσομοίωση για να καταδειχθούν κάποια από τα προηγούμενως αναλυθέντα ζητήματα.

## Κεφάλαιο 3

# Αλγοριθμικός σχεδιασμός του φίλτρου ανίχνευσης.

### 3.1 Αρχή του αλγορίθμου.

Υπάρχουν δύο βασικά βήματα κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου:

1. Καταρχήν, ο σχεδιαστής πρέπει να βρει ένα αποδεκτό σύνολο από διανύσματα γεγονότος, είτε διαχωρίσιμα στην έξοδο και αμοιβαία ανιχνεύσιμα - δηλαδή χωρίς μη καθορίσιμες ιδιοτιμές - είτε διαχωρίσιμα στην έξοδο με αποδεκτές μη καθορίσιμες ιδιοτιμές.
2. Κατόπιν τούτου, το πρόγραμμα προχωράει στον υπολογισμό του ή των φίλτρων ανίχνευσης με βάση τις επιθυμητές ιδιοτιμές.

Το πρόγραμμα αρχικά εξετάζει την διαχωρισιμότητα στην έξοδο των γεγονότων και, εφόσον αυτά είναι διαχωρίσιμα, υπολογίζει τις διαστάσεις του χώρου γεγονότος που σχετίζεται με το σύνολο των συμβάντων, καθώς και το χώρο γεγονότος κάθε συμβάντος ξεχωριστά. Ταυτόχρονα με τους προηγούμενους υπολογισμούς, υπολογίζεται οι γεννήτορες συμβάντος κάθε χώρου γεγονότος. Με βάση τότε τη σχέση (2.31) υπάρχουν δύο εναλλακτικές επιλογές:

- Αν  $\nu_0 = 0$ , τότε τα γεγονότα είναι αμοιβαίως ανιχνεύσιμα. Τότε μπορεί να σχεδιαστεί φίλτρο ανίχνευσης  $D$  τέτοιο ώστε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $[A - DC]$  να επιλεγούν σχεδόν τυχαία.
- Αν  $\nu_0 > 0$  τότε υπάρχουν  $\nu_0$  μη καθορίσιμες ιδιοτιμές για τον πίνακα  $[A - DC]$ , ανεξαρτήτως της επιλογής του  $D$ . Στην παρούσα του φάση το πρόγραμμα υπολογίζει και πάλι το φίλτρο αγνοώντας αυτό το γεγονός· μετά τον υπολογισμό του επιστρέφει τις ιδιοτιμές του πίνακα  $[A - DC]$  για έλεγχο από τον σχεδιαστή.

Σε επόμενη προσθήκη το πρόγραμμα θα επεκταθεί δίνοντας στο σχεδιαστή τέσσερις εναλλακτικές επιλογές κατά τη δεύτερη φάση:

- Ελέγχοντας τις μη καθορίσιμες ιδιοτιμές, ο σχεδιαστής μπορεί να τις επιλέξει ως έχουν.
- Να βρεθούν υποσύνολα με καθορίσιμες ιδιοτιμές και να σχεδιαστεί περισσότερα του ενός φίλτρα για κάθε υποσύνολο.
- Να επαυξάνει τη διάσταση του χώρου κατάστασης ώστε όλες οι ιδιοτιμές να γίνονται καθορίσιμες.
- Να ελέγξει αν κάποια από τα γεγονότα μπορούν να γίνουν στάσιμα στην έξοδο.

Εφόσον ο σχεδιαστής έχει ένα αποδεκτό σύνολο γεγονότων, τότε το πρόγραμμα προχωράει στον υπολογισμό του φίλτρου ανίχνευσης. Αυτό γίνεται μέσω της σχέσης (2.52).

### 3.2 Αλγόριθμος του προγράμματος του φίλτρου ανίχνευσης.

1. Εισαγωγή των πινάκων  $A, B, C, f$ .
2. Επιλέγεται από τον σχεδιαστή αν είναι η επιθυμητή η επαύξηση του μοντέλου κατάστασης ώστε να συμπεριλάβει τυχόν αστοχίες αισθητήρων. Εφόσον αυτό είναι επιθυμητό, επιλέγονται οι αισθητήρες προς εξέταση.
3. Υπολογίζεται η τάξη του πίνακα  $\bar{C}$ .
4. Αν υπάρχουν περισσότερα της τάξης του πίνακα  $\bar{C}$  διανύσματα γεγονότος προς αναγνώριση, τότε αυτά χωρίζονται σε σύνολα πλήθους μικρότερου ή ίσου της τάξης.
5. Κάθε σύνολο ελέγχεται για διαχωρισιμότητα στην έξοδο, όπως περιγράφεται στην παράγραφο 2.4.1, και ελέγχεται η γραμμική ανεξαρτησία τους. Αν δεν ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες, το σύνολο πρέπει να αλλάξει. Για την υλοποίηση αυτού, κατασκευάζεται ένα δένδρο το οποίο περιέχει όλους τους συνδυασμούς των διανυσμάτων γεγονότος τάξης  $i$  και μικρότερης. Ξεκινώντας από την μεγαλύτερη δυνατή τάξη - την τάξη δηλαδή του πίνακα  $C$  - υπολογίζονται όλες μέχρι και τάξη 1, δηλαδή μέχρι κάθε σύνολο να αποτελείται από ένα και μόνο διάνυσμα γεγονότος. Αν κατά την διάρκεια της εκτέλεσης βρεθούν υποσύνολα που είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο, τότε η εκτέλεση διακόπτεται και κρατούνται αυτά ως έχουν.
6. Για κάθε σύνολο διαχωρίσιμων στην έξοδο διανυσμάτων γεγονότος θα ελεγχθεί η αμοιβαία ανιχνευσιμότητα. Για κάθε σύνολο θα υπολογιστεί μια βάση του χώρου γεγονότος κάθε συμβάντος καθώς και ο γεννήτοράς του. Αυτό γίνεται μέσω της κατασκευής των πινάκων της σχέσης (2.27). Η τάξη του μηδενοχώρου του  $M$  είναι η τάξη του υπό εξέταση γεγονότος. Ο γεννήτορας του συμβάντος υπολογίζεται από την επίλυση της σχέσης (2.24). Τέλος, η βάση του χώρου υπολογίζεται έπειτα από απλή εφαρμογή της σχέσης (2.23).
7. Εφαρμόζοντας την σχέση (2.27) για το σύνολο όμως των γεγονότων συμβάντος αυτή τη φορά, υπολογίζεται η τάξη του χώρου γεγονότος συνόλου.
8. Στη συνέχεια υπολογίζεται το  $\nu_0$  με βάση τη σχέση (2.31). Όπως αναφέρθηκε, στην παρούσα έκδοση του αλγορίθμου, ανεξαρτήτως του αποτελέσματος αυτής της σχέσης το πρόγραμμα προχωράει στον υπολογισμό του πίνακα κέρδους  $D$ .
9. Εισάγονται από τον σχεδιαστή οι επιθυμητές ιδιοτιμές.
10. Με βάση τη σχέση (2.52) βρίσκεται ο ζητούμενος πίνακας κέρδους.
11. Πραγματοποιούνται κάποιες τροποποιήσεις ώστε τα αποτελέσματα να είναι κατάλληλα για εισαγωγή στο Simulink.
12. Μετά το τέλος του αλγορίθμου, ο σχεδιαστής πρέπει να μεριμνήσει ώστε να ελέγξει αν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $[\bar{A} - DC]$  είναι τουλάχιστον αρνητικές, και έπειτα αν είναι αποδεκτές σύμφωνα με τις απαιτήσεις του σχεδιασμού.

### 3.3 Παραδείγματα εφαρμογής.

Στο σημείο αυτό θα δοθούν δύο παραδείγματα του παραπάνω αλγορίθμου από μαθηματική σκοπιά και μόνο. Αυτά έχουν αντληθεί από την εργασία του [Gerard, 1978], ο οποίος τα παραθέτει για ευκολότερη κατανόηση του αλγορίθμου του.



### 3.3.1 Παράδειγμα 1.

Οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος είναι:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 0 & -4 & -0.8 & 0 \\ -1.5 & 0 & -2 & 0 & -0.9 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1.5 \end{bmatrix} u \quad (3.1a)$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} \quad (3.1b)$$

Τα διανύσματα γεγονότος που επιλέχθηκαν είναι τα ακόλουθα:

$$\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Εκτελώντας το πρόγραμμα με τα παραπάνω δεδομένα ως είσοδος τα διανύσματα προκύπτουν διαχωρίσιμα στην έξοδο. Οι γεννήτορες του των δύο χώρων είναι:

$$\vec{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Ο χώρος γεγονότος για το σύνολο των συμβάντων είναι διάστασης 3, ενώ για κάθε ένα από τα δύο γεγονότα ξεχωριστά είναι 1. Συνεπώς, τα διανύσματα συμβάντος δεν είναι αμοιβαίως ανιχνεύσιμα και υπάρχει μία μη καθορίσιμη ιδιοτιμή. Η εκτέλεση συνεχίζει υπολογίζοντας το κέρδος του φίλτρου. Οι επιθυμητές ιδιοτιμές επιλέγονται ίσες με  $-5$  και  $-6$ . Το κέρδος τότε που προκύπτει για αυτή την επιλογή είναι ίσο με:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ -1.5 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Ο πίνακας  $[A - DC]$  τότε προκύπτει ίσος με:

$$A - DC = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & -6 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

με ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -0.8, \lambda_5 = -0.9 \quad (3.6)$$

Συνεπώς, το φίλτρο είναι ευσταθές. Παρατηρούμε ότι:

$$[A - DC] \cdot \vec{g}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -5\vec{g}_1 \quad (3.7a)$$

$$[A - DC] \cdot \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -6\vec{g}_2 \quad (3.7b)$$

### 3.3.2 Παράδειγμα 2.

Χρησιμοποιείται πάλι το σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος. Αυτή τη φορά όμως τα διανύσματα συμβάντος είναι τα ακόλουθα:

$$\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{f}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Εκτελώντας το πρόγραμμα με τα παραπάνω δεδομένα ως εισόδους τα διανύσματα προκύπτουν διαχωρίσιμα στην έξοδο. Οι γεννήτορες των τεσσάρων χώρων είναι:

$$\vec{g}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{g}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Ο χώρος γεγονότος για το σύνολο των συμβάντων είναι διάστασης 5, ενώ για κάθε ένα από τα τέσσερα γεγονότα ξεχωριστά είναι 1. Συνεπώς, τα διανύσματα συμβάντος δεν είναι αμοιβαίως ανιχνεύσιμα και υπάρχει μία μη καθορίσιμη ιδιοτιμή. Η εκτέλεση συνεχίζει υπολογίζοντας το κέρδος του φίλτρου. Οι επιθυμητές ιδιοτιμές επιλέγονται ίσες με  $-2, -3, -4$  και  $-5$ . Το κέρδος τότε που προκύπτει για αυτή την επιλογή είναι ίσο με:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ -3 & -4 & 1.2 & 0 \\ -1.5 & -2 & 0 & 2.1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Ο πίνακας  $[A - DC]$  τότε προκύπτει ίσος με:

$$A - DC = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

με ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -2, \lambda_5 = 0 \quad (3.12)$$

Σημειώνεται ότι η μη καθορίσιμη ιδιοτιμή σε αυτή την περίπτωση είναι η 0, η οποία έγινε αποδεκτή. Το γεγονός όμως ότι είναι μη αρνητική μπορεί να δημιουργεί προβλήματα στη πρακτική εφαρμογή αυτού του φίλτρου. Παρατηρούμε ότι:

$$[A - DC] \cdot \vec{g}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2\vec{g}_1 \quad (3.13a)$$

$$[A - DC] \cdot \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = -3\vec{g}_2 \quad (3.13b)$$

$$[A - DC] \cdot \vec{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -4\vec{g}_3 \quad (3.13c)$$

$$[A - DC] \cdot \vec{g}_4 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -5\vec{g}_4 \quad (3.13d)$$

Δεδομένης της μάλλον μη επιθυμητής ιδιοτιμής για πρακτική εφαρμογή του παραπάνω φίλτρου, θα είναι δυνατή στο μέλλον η επαύξηση του χώρου κατάστασης. Η πιο εύκολη εναλλακτική θα ήταν σαφώς η δημιουργία περισσότερων υποσυνόλων του παραπάνω φίλτρου που θα είχαν αποδεκτές μη καθορίσιμες ιδιοτιμές. Το πρόβλημα με τη χρήση όμως δύο ή περισσότερων φίλτρων είναι η ανάγκη ύπαρξης ισόποσων μοντέλων αναφοράς· ένα για κάθε φίλτρο χωριστά. Στην πραγματικότητα αυτό θα αύξανε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του συνολικού σχεδιασμού πολύ περισσότερο σε σχέση με την επαύξηση του χώρου κατάστασης. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι ο ορισμός κάποιου διανύσματος συμβάντος ως στάσιμο στην έξοδο είναι αδύνατο σε αυτή την περίπτωση.



## Κεφάλαιο 4

# Προσομοίωση του φίλτρου ανίχνευσης για ένα αντισεισμικό σύστημα.

### 4.1 Μοντέλο αντισεισμικού συστήματος.

Θεωρείται ένα μονοδιάστατο δυναμικό μοντέλο ενός κτηρίου, εκφρασμένο σε απόλυτες συντεταγμένες. Με μεταβλητές  $m_i$  την μάζα του ισοτού ορόφου,  $c_{i-1}$  τον συντελεστή απόσβεσης,  $k_{i-1}$  τη σταθερά του ελατηρίου μεταξύ της σύνδεσης του ισοτού ορόφου με τον προηγούμενο όροφο ή το έδαφος,  $c_0$  και  $k_0$  της μεταβλητές της απομόνωσης της βάσης, το μοντέλο ενός κτηρίου υπό την επίδραση κάποιου σεισμού είναι το ακόλουθο:

$$\ddot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Cv(t) + Bu(t) \quad (4.1a)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.1b)$$

οπού  $\vec{x}(t)$  αποτελούν τις μεταβλητές κατάστασης του συστήματος, εν προκειμένω την ταχύτητα και τη θέση κάθε ορόφου,  $v(t)$  συνάρτηση που περιγράφει τον σεισμό,  $C$  πίνακας που αντιπροσωπεύει την επίδραση του σεισμού στο σύστημα,  $u(t)$  η είσοδος ενεργού ελέγχου ταλαντώσεων και  $x_0$  η αρχική κατάσταση του συστήματος. Σημειώνεται ότι στις προσομοιώσεις που ακολουθούν οι αρχικές συνθήκες θεωρούνται μηδενικές - μηδενική αρχική θέση και ταχύτητα του κτηρίου - και δεν εξετάζεται η ύπαρξη σεισμού, δηλαδή  $v(t) = 0$ . Η μοντελοποίηση του κτηρίου φαίνεται γραφικά και στο Σχήμα 4.1.

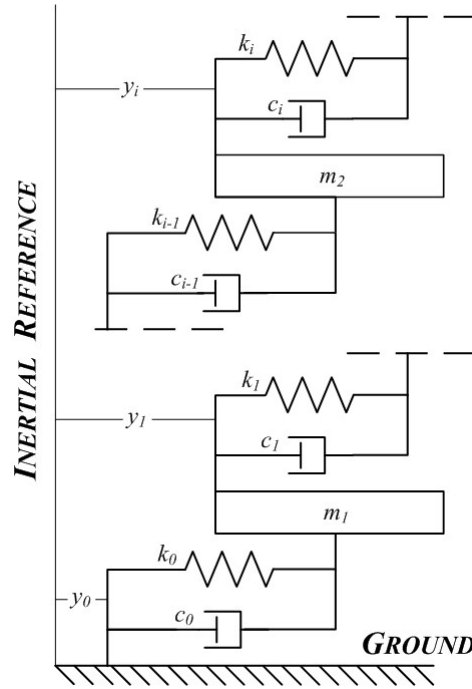
Οι πίνακες  $A$  και  $B$  για ένα κτήριο τριών ορόφων έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{c_0+c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & 0 & 0 & -\frac{k_0+k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{c_1}{m_2} & -\frac{c_1+c_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & 0 & \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{m_3} & -\frac{c_2+c_3}{m_3} & \frac{c_3}{m_3} & 0 & \frac{k_2}{m_3} & -\frac{k_2+k_3}{m_3} & \frac{k_3}{m_3} \\ 0 & 0 & \frac{c_3}{m_4} & -\frac{c_3}{m_4} & 0 & 0 & \frac{k_3}{m_4} & -\frac{k_3}{m_4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2a)$$

$$B = \left[ \frac{1}{m_1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (4.2b)$$

Οι τιμές των παραμέτρων που εμφανίζονται στους δύο αυτού πίνακες επιλέγονται ως:

$c_0$	86	$k_0$	45000	$m_1$	200
$c_1$	2600	$k_1$	1305300	$m_2$	200
$c_2$	2600	$k_2$	1305300	$m_3$	200
$c_3$	2600	$k_3$	1305300	$m_4$	200



**Σχήμα 4.1:** Μοντέλο συγκεντρωμένων παραμέτρων κτηρίου σε απόλυτες συντεταγμένες.

Θεωρώντας ότι διαθέτουμε αισθητήρες που μετρούν την θέση και την ταχύτητα όλων των ορόφων, η έξοδος του συστήματος γίνεται:

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}(t) \quad (4.3)$$

## 4.2 Μοντελοποίηση σφαλμάτων.

Για την κατασκευή του συστήματος ανίχνευσης σφαλμάτων, θα επικεντρωθούμε σε τυχόν σφάλματα όλων των αισθητήρων και σε σφάλμα του συστήματος ενεργής απόσβεσης ταλαντώσεων. Για τις αστοχίες αισθητήρων εφαρμόζεται η μέθοδος επέκτασης των εξισώσεων κατάστασης του συστήματος. Το διάνυσμα γεγονόςτος για την αστοχία εισόδου είναι:

$$\vec{f} = \left[ \frac{1}{m_1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (4.4)$$

## 4.3 Εκτέλεση αλγορίθμου.

Για την εκτέλεση του αλγορίθμου απαιτείται επιλογή των ιδιοτιμών του φίλτρου. Καλή πολιτική είναι επιλογή ιδιοτιμών πιο αρνητικών απ' αυτές του πίνακα  $A$ . Η πιο αρνητική του ιδιοτιμή είναι περίπου ίση με  $-22$ . Συνεπώς οι ιδιοτιμές που επιλέγονται για το φίλτρο, τόσο για την αστοχία εισόδου όσο και για την αστοχία αισθητήρων, είναι  $-30$ . Εκτελώντας τον αλγόριθμο προκύπτουν δύο φίλτρα, καθώς τα γεγονότα είναι συνολικά 9 ενώ η τάξη του πίνακα εξόδου είναι 8.

Η αρχική επιλογή ήταν το πρώτο φίλτρο να αφορά αποκλειστικά την αστοχία εισόδου, ενώ το δεύτερο να αφορά όλες τις αστοχίες των αισθητήρων. Δυστυχώς, σε αυτή την περίπτωση το επαυξημένο

σύστημα μεταβλητών κατάστασης του δεύτερου συστήματος είναι μη παρατηρήσιμο και δεν μπορεί να εκτελεσθεί ο αλγόριθμος. Σε αυτή την περίπτωση είτε έπρεπε να αναζητήσουμε ένα διαχωρισμό σε υποσύνολα με επαυξημένες εξισώσεις κατάστασης, η οποίες να είναι παρατηρήσιμες, είτε να αλλάξουμε το γεγονός που αφορά τον επενεργητή με κάποιο των αισθητήρων, και να επανεξετάσουμε τα δύο φίλτρα. Εδώ μόνο μια επιλογή είναι δυνατή: εφόσον το διάνυσμα γεγονόςτος που αφορά τον επενεργητή και αυτό που αφορά τον πρώτο αισθητήρα είναι μη διαχωρίσιμα στην έξοδο, αυτά δεν μπορούν να βρίσκονται στο ίδιο σύνολο. Συνεπώς, τα δύο σύνολα αφορούν το μεν πρώτο το διάνυσμα γεγονόςτος του πρώτου αισθητήρα, το δε δεύτερο τα διανύσματα γεγονόςτος του επενεργητή και των υπόλοιπων αισθητήρων. Η εκτέλεση του αλγορίθμου πραγματοποιείται χωρίς προβλήματα. Για το πρώτο φίλτρο που προκύπτει, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $[\bar{A} - D_1\bar{C}]$  είναι:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -30 \\ \lambda_2, \lambda_3 &\approx -22.2 \pm 147.7i \\ \lambda_4, \lambda_5 &\approx -13.1 \pm 113.8i \\ \lambda_6, \lambda_7 &\approx -3.9 \pm 62.5i \\ \lambda_8, \lambda_9 &\approx -0.052 \pm 7.4i\end{aligned}\tag{4.5}$$

ενώ για του δεύτερου φίλτρου, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $[\bar{A} - D_2\bar{C}]$  είναι:

$$\begin{aligned}\lambda_1, \dots, \lambda_8 &= -30 \\ \lambda_9, \lambda_{10} &\approx -21.1 \pm 144i \\ \lambda_{11}, \lambda_{12} &\approx -10.1 \pm 100.2i \\ \lambda_{13}, \lambda_{14} &\approx -1.3 \pm 35.9i \\ \lambda_{15} &\approx 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

Δυστυχώς, η μη καθορίσιμη μηδενική ιδιοτιμή μπορεί να δημιουργήσει πρόβλημα σε ένα πραγματικό σύστημα. Θα πρέπει να εφαρμοστεί συνεπώς κάποια από τις λύσεις που έχουν προταθεί προηγουμένως. Κατόπιν του υπολογισμού των κερδών ανίχνευσης προχωρούμε στην προσομοίωση του συστήματος.

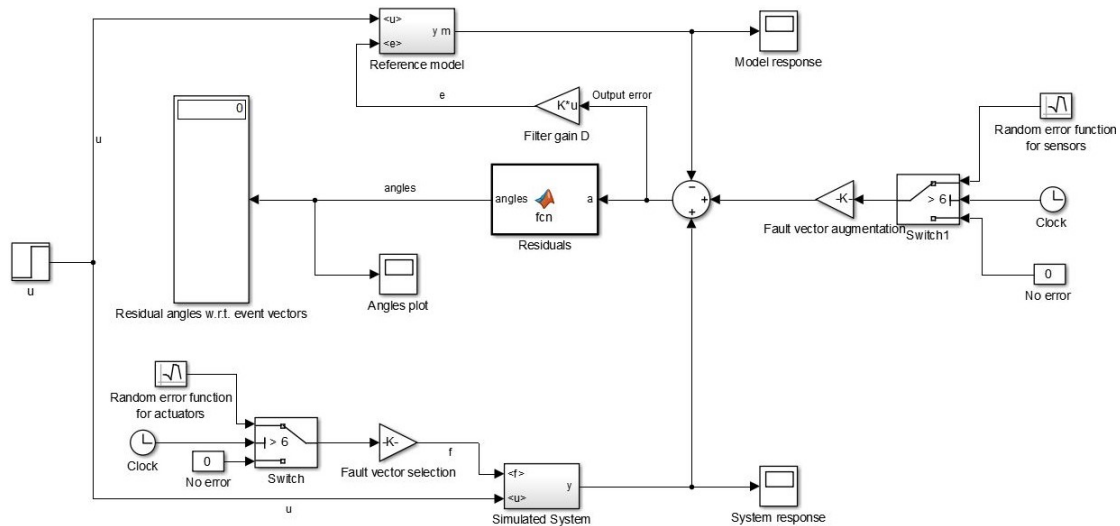
## 4.4 Προσομοίωση συστήματος.

### 4.4.1 Το μοντέλο προσομοίωσης.

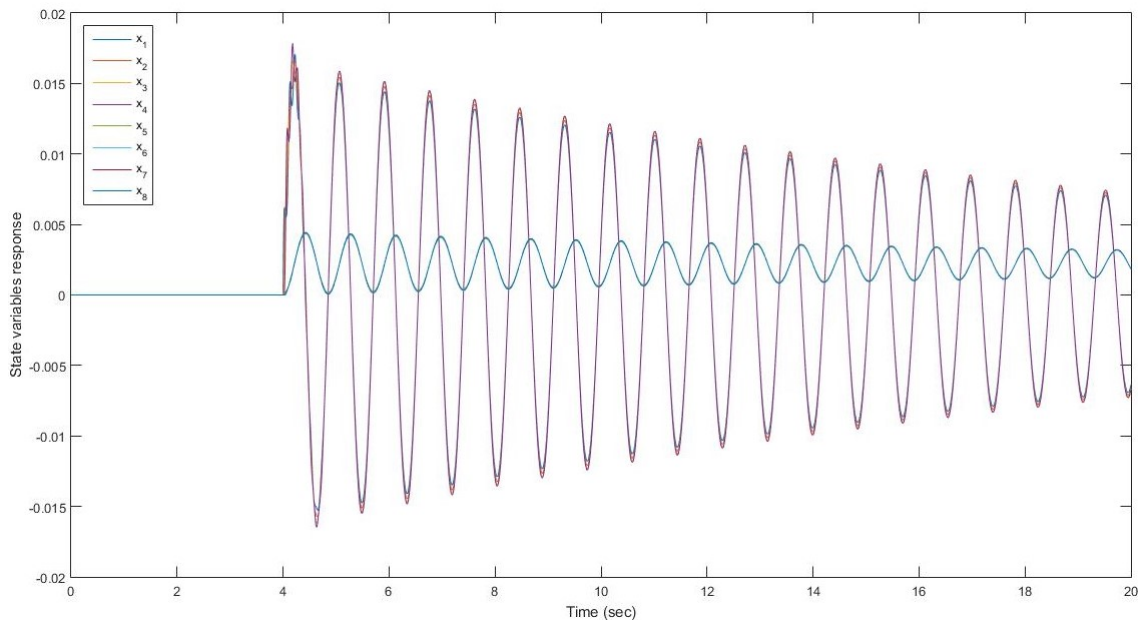
Στο Σχήμα 4.2 φαίνεται το αρχείο Simulink που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση του αντισεισμικού συστήματος. Παρατηρούμε ότι το σφάλμα έχει μοντελοποιηθεί από ένα προσθετικό τυχαίο σήμα, το οποίο υπερτίθεται είτε στο σήμα του επενεργητή είτε στο σήμα του αισθητήρα. Η ενεργοποίησή του γίνεται σε 6 sec μετά την έναρξη της προσομοίωσης. Η συνολική προσομοίωση διαρκεί 20 sec, ενώ σαν είσοδος στο σύστημα δίδεται βηματική στο 4 δευτερόλεπτο. Η απόκριση του συστήματος, χωρίς κάποια αστοχία, φαίνεται στο Σχήμα 4.3.

### 4.4.2 Σφάλμα στον επενεργητή.

Στο σημείο αυτό θα δοκιμασθεί η συμπεριφορά του συστήματος ανίχνευσης για σφάλμα στον επενεργητή. Η απόκριση του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Η χρονική εξέλιξη της γωνίας μεταξύ του εποπτευόμενου σφάλματος και της εξόδου φαίνεται στο Σχήμα 4.5. Εκτός αυτού, φαίνεται και η εξέλιξη για τις γωνίες που αφορούν τους αισθητήρες και του εποπτευόμενου σφάλματος. Η γωνία αυτή λαμβάνει τιμές μεταξύ  $0^\circ$  και  $90^\circ$ . Σε περίπτωση που δεν υπάρχει σφάλμα, αυτή λαμβάνει τιμή ίση με  $100^\circ$ . Όπως είναι αναμενόμενο, μέχρι τα 6 sec δεν υπάρχει σφάλμα και η γωνία είναι  $100^\circ$ . Μετά την εισαγωγή του σφάλματος αυτή γίνεται  $0^\circ$ , το οποίο υποδηλώνει την ύπαρξή του. Φυσικά, σε ένα πραγματικό σύστημα η απόκριση δεν θα ήταν τόσο ιδανική. Η γωνία αρχικά θα έπαιρνε τιμές μεγάλες και μετά την εισαγωγή του σφάλματος αυτές θα γινόντουσαν πολύ μικρές.



**Σχήμα 4.2:** Μοντέλο συστήματος προσομοίωσης στο Simulink.



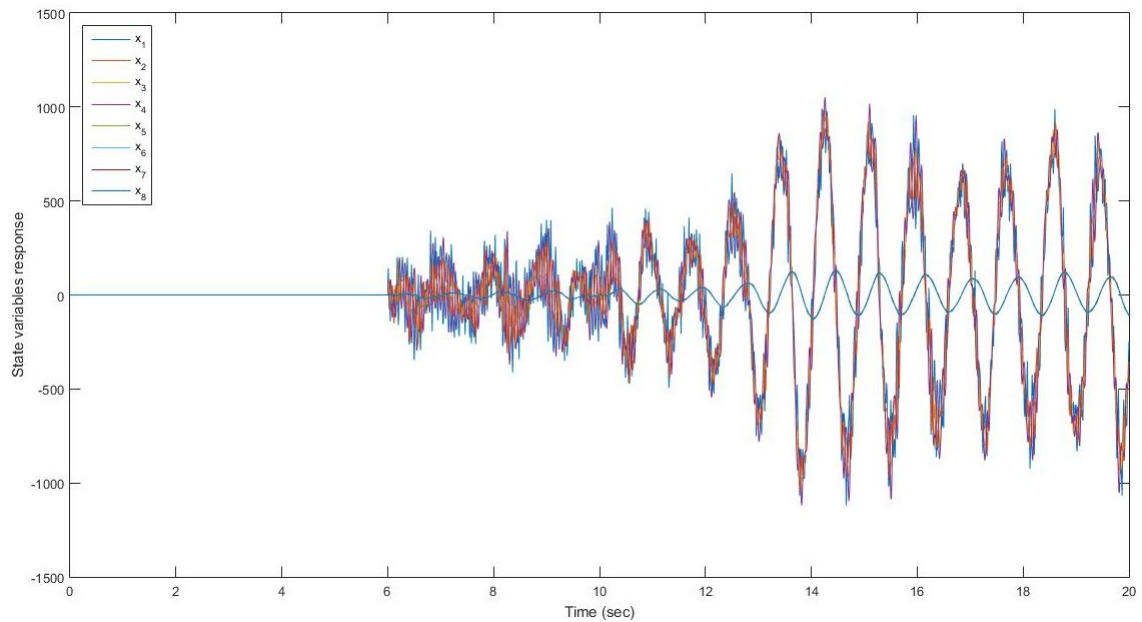
**Σχήμα 4.3:** Απόκριση συστήματος χωρίς αστοχία.

Εδώ φαίνεται και η βασική ιδέα αναγνώρισης του φίλτρου. Εποπτεύοντας αυτές τις γωνίες μπορούμε άμεσα να κατανοήσουμε πιο στοιχείο βρίσκεται σε αστοχία. Οι γωνίες είναι  $90^\circ$  για τα διανύσματα γεγονότος που αφορούν τους αισθητήρες, εφόσον αυτά είναι διανύσματα γεγονότος κάθετα σε αυτή την περίπτωση, και  $0^\circ$  για τον επενεργητή.

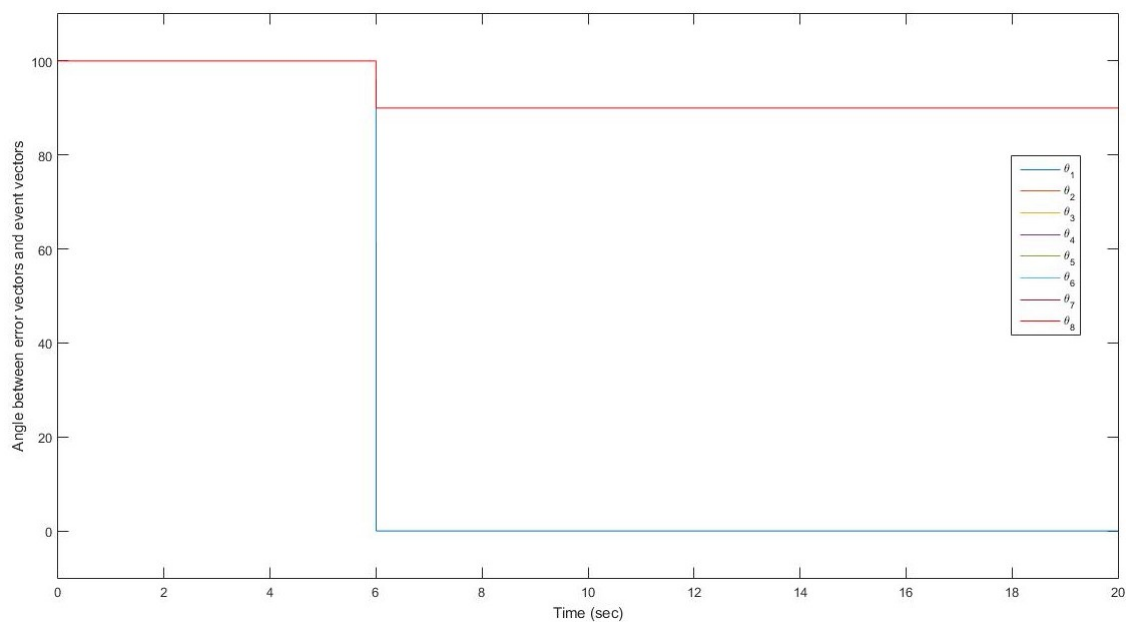
#### 4.4.3 Σφάλμα στον δεύτερο αισθητήρα.

Χρησιμοποιώντας το ίδιο φίλτρο, το σφάλμα για τον δεύτερο αισθητήρα φαίνεται στο Σχήμα 4.6. Ισχύουν τα ίδια σχόλια που έγιναν στην περίπτωση του επενεργητή. Παρόμοιες συμπεριφορές στην γωνία θα υπάρχει και για σφάλματα στους υπόλοιπους 6 αισθητήρες. Για λόγους συντομίας, δεν θα παρουσιαστούν αυτές οι γραφικές που είναι ίδιες με τις 4.5 και 4.6.





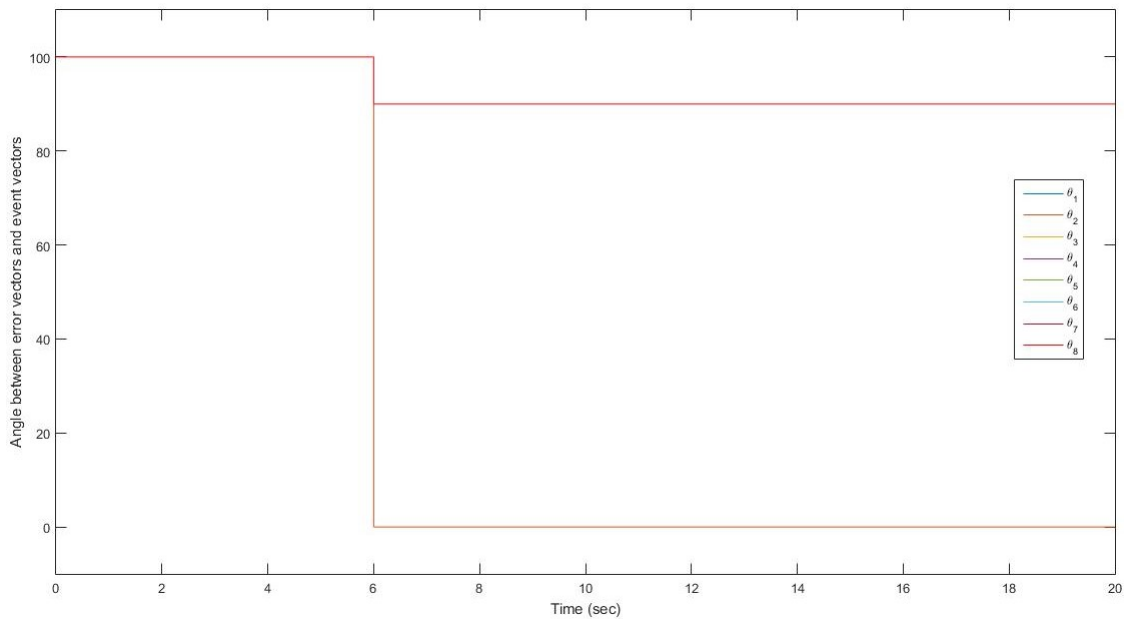
**Σχήμα 4.4:** Απόκριση συστήματος με αστοχία στον επενεργητή.



**Σχήμα 4.5:** Γωνίες μεταξύ εποπτευόμενου σφάλματος επενεργητή-αισθητήρων και εξόδου στην περίπτωση σφάλματος του επενεργητή.

#### 4.4.4 Σφάλμα στον πρώτο αισθητήρα.

Για να εποπτεία αυτού του σφάλματος χρησιμοποιούμε το άλλο φίλτρο που σχεδιάστηκε. Όσον αφορά την απόκριση του συστήματος, για οποιοδήποτε σφάλμα αισθητήρα δεν αλλάζει από την αναμενόμενη του Σχήματος 4.3, διότι δεν υπάρχει κάποιος νόμος ανατροφοδότησης κατάστασης που να την εισάγει στο σύστημα. Η χρονική εξέλιξη της γωνίας για σφάλμα στον πρώτο αισθητήρα φαίνεται στο Σχήμα 4.7. Εδώ το σύστημα εποπτεύει επιτυχώς μόνο μια γωνία, αυτή του διανύσματος γεγονός για τον πρώτο αισθητήρα και του σφάλματος.



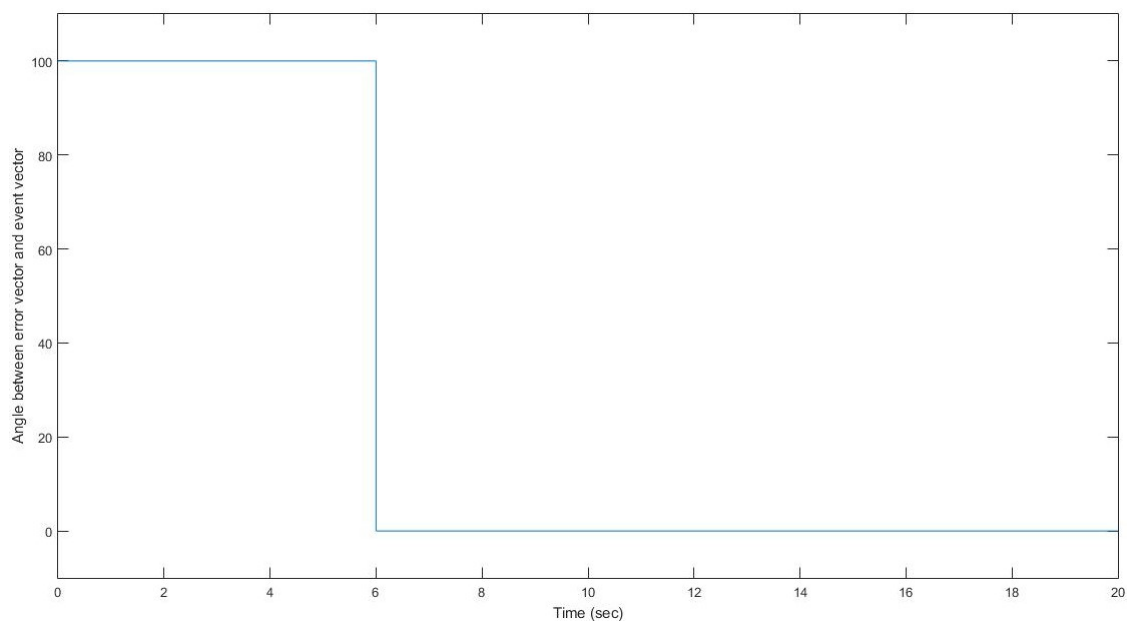
**Σχήμα 4.6:** Γωνίες μεταξύ εποπτευόμενου σφάλματος επενεργητή-αισθητήρων και εξόδου στην περίπτωση σφάλματος του δεύτερου αισθητήρα.

#### 4.4.5 Επίδραση του σφάλματος του επενεργητή στον πρώτο αισθητήρα.

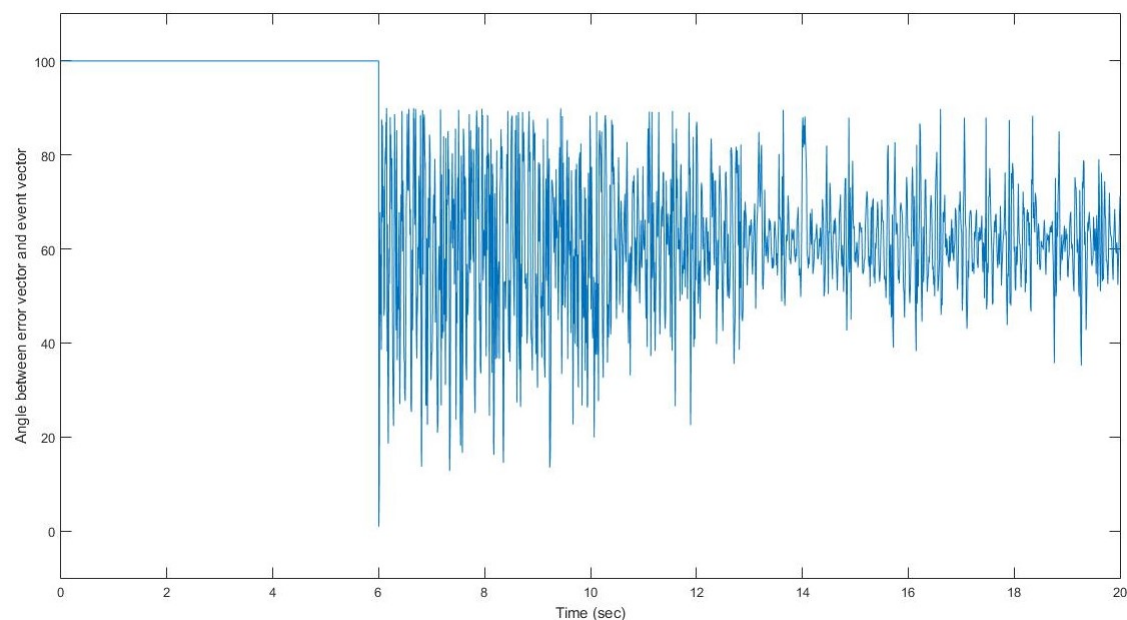
Σε περίπτωση σφάλματος του επενεργητή, το φίλτρο αναγνώρισης αστοχίας του πρώτου αισθητήρα δεν είναι σχεδιασμένο να το αναγνωρίζει. Αλλά εξαιτίας της στενής συσχέτισης αυτών των δύο (ο πρώτος αισθητήρας μετρά την πρώτη μεταβλητή κατάστασης, η οποία επηρεάζεται άμεσα από τον επενεργητή) αναμένεται γωνία μεταξύ του διανύσματος συμβάντος του αισθητήρα και του επενεργητή μικρή, αλλά όχι σαφώς μηδενική. Η κατάσταση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 4.8. Παρατηρούμε ότι, παρ' όλη την μεγάλη διακύμανση, η γωνία αυτή έχει μέση τιμή περίπου  $60^\circ$ .

#### 4.4.6 Επίδραση του σφάλματος του πρώτου αισθητήρα στον φίλτρο επενεργητή και υπόλοιπων αισθητήρων.

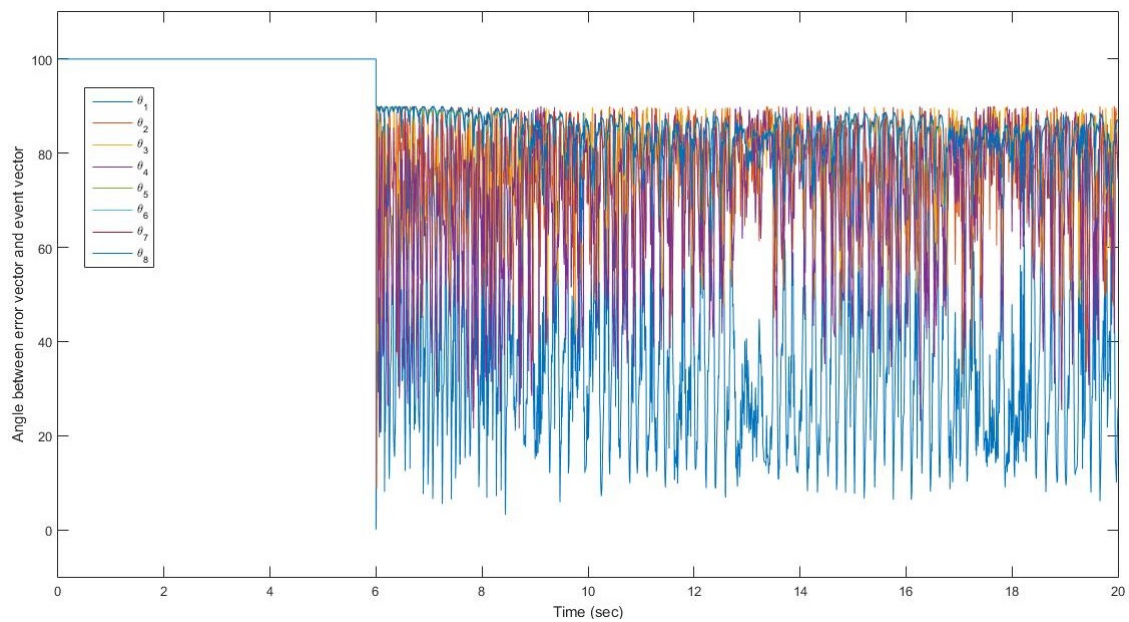
Στο σημείο αυτό θα επαναληφθεί η προσομοίωση για την αντίστροφη κατάσταση, δηλαδή για τις γωνίες των υπολοίπων στην περίπτωση σφάλματος στον πρώτο αισθητήρα από το φίλτρο που αφορά τον επενεργητή και τους υπόλοιπους αισθητήρες. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 4.9. Οι μέσες τιμές των σφαλμάτων σε αυτή την περίπτωση είναι  $22.35^\circ$ ,  $85.43^\circ$ ,  $83.43^\circ$ ,  $81.62^\circ$ ,  $82.79^\circ$ ,  $82.76^\circ$ ,  $82.74^\circ$ ,  $82.73^\circ$  ως προς το διάνυσμα γεγονός του επενεργητή και των υπολοίπων αισθητήρων αντίστοιχα. Εδώ φαίνεται καλύτερα η σχέση μεταξύ του σφάλματος του επενεργητή και του πρώτου αισθητήρα, η οποία σχέση αποτυπώνεται πάνω στη γωνία.



**Σχήμα 4.7:** Γωνίες μεταξύ εποπτευόμενου σφάλματος πρώτου αισθητήρα και εξόδου στην περίπτωση σφάλματος του πρώτου αισθητήρα.



**Σχήμα 4.8:** Γωνίες μεταξύ εποπτευόμενου σφάλματος πρώτου αισθητήρα και εξόδου στην περίπτωση σφάλματος του επενεργητή.



**Σχήμα 4.9:** Γωνίες μεταξύ εποπτευόμενου σφάλματος επενεργητή-αισθητήρων και εξόδου στην περίπτωση σφάλματος του πρώτου αισθητήρα.

## Κεφάλαιο 5

### Συμπεράσματα και μελλοντικές προοπτικές.

#### 5.1 Τελικά συμπεράσματα.

Τα αποτελέσματα αυτής, αλλά και προηγούμενων ερευνών, έχουν καταδείξει ότι το φίλτρο ανίχνευσης είναι μια εφικτή προσέγγιση για την ανίχνευση και αναγνώριση σφαλμάτων στον έλεγχο ακόμα και πολύπλοκων συστημάτων. Παρ' όλο που η παραπάνω ανάλυση έχει θεωρητικά εφαρμογή μόνο σε γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα, υπάρχουν εργασίες στις οποίες αυτές εφαρμόστηκαν επιτυχώς ακόμα και σε μη γραμμικά συστήματα, όπως π.χ. σε κινητήρες αεροσκαφών στην εργασία του [Meserole, 1981]. Ένα σημαντικό πόρισμα απ' την εφαρμογή στους κινητήρες αυτούς ήταν ότι το φίλτρο λειτουργεί εξίσου καλά και στον έλεγχο της κατάστασης των αισθητήρων, παρ' όλο που εκ πρώτης όψεως αυτό είναι πιο δύσκολο να γίνει. Τα μεγαλύτερα πλάτη των υπολοίπων που προκύπτουν από τις αστοχίες των αισθητήρων ξεπερνούν την δυσκολία για την αναγνώριση των διανυσματικών υπολοίπων που περιορίζονται πάνω σε ένα επίπεδο, και όχι σε μια συγκεκριμένη διεύθυνση. Επίσης, ο [Jones, 1973] στην εργασία του επέκτεινε την ανάλυση για διακριτά γραμμικά συστήματα, και απέδειξε ότι είναι εξίσου έγκυρη, αλλά και για στοχαστικά. Στη μελέτη του πάνω σε δειγματοληπτούμενα συστήματα, έδειξε ότι τα αποτελέσματα του [Beard, 1971] δεν έχουν δυστυχώς απευθείας εφαρμογή. Η μεθοδολογία που ανέπτυξε βασίζεται πάνω σε προσεγγίσεις διακριτών σε συνεχή και απαιτεί μεγαλύτερη μαθηματική ακρίβεια.

Ένα από τα σοβαρότερα προβλήματα της μεθόδου είναι φυσικά η ταχύτητα εκτέλεσης και οι απαιτήσεις σε χώρο αποθήκευσης. Αυτός ήταν και μάλλον ο μεγαλύτερος περιορισμός που απέτρεψε την πρακτική εφαρμογή της μεθόδου τα προηγούμενα χρόνια. Όμως, η εξέλιξη τόσο των υπολογιστικών συστημάτων όσο και περαιτέρω βελτίωση της απόδοσης του υλικού, διευκολύνουν πλέον την εφαρμογή της μεθόδου στη πράξη. Έτσι τα προβλήματα αυτά πλέον αποκτούν όλο και μικρότερη σημασία.

Στην εργασία του, ο [Massoumnia, 1986] απέδειξε ότι οι απαιτήσεις της διαχωρισιμότητας στην έξοδο δεν είναι τόσο αυστηρές. Στην πραγματικότητα, οι συνθήκες που παρουσιάστηκαν προηγούμενων αποτελούν μια συγκεκριμένη περίπτωση μια ποιος γενικής κατηγορίας διανυσμάτων γεγονός που μπορούν να αναγνωρισθούν από ένα φίλτρο ανίχνευσης. Στην εργασία αυτή αναλύονται αυτές οι συνθήκες και παρουσιάζεται μια πιο γενική μεθοδολογία σχεδιασμού φίλτρων ανίχνευσης.

Η μεθοδολογία αυτή θα εμφανίσει την αξία της όχι όταν εφαρμοστεί αυτή καθαυτή, αλλά όταν συνδυαστεί και με άλλα συστήματα αντιμετώπισης βλαβών. Εφόσον είναι σε θέση κάθε στιγμή να αναγνωρίζει ποιο σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση αστοχίας αλλά και την αναμενόμενη κατάσταση στην οποία θα έπρεπε να βρίσκεται το σύστημα χωρίς της ύπαρξή της, αυτή η πληροφορία θα μπορούσε να γίνει εύκολα εκμεταλλεύσιμη για την βελτίωση της απόδοσης ενός πρακτικού συστήματος και της ελαχιστοποίησης της επίδρασης των βλαβών. Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση αστοχίας κάποιου αισθητήρα, θα ήταν δυνατόν να αγνοηθεί η λανθασμένη μέτρηση και να χρησιμοποιηθεί η αναμενόμενη - όπως προκύπτει από την προσομοίωση του συστήματος με το φίλτρο - έως ότου αποκατασταθεί πλήρως η βλάβη.

Συνοψίζοντας, τα σημαντικά οφέλη που μπορεί να προκύψουν από την χρήση ενός φίλτρου ανίχνευσης είναι τα ακόλουθα:

1. Όταν προκύψει ένα σφάλμα ή μια αλλαγή, το φίλτρο ανίχνευσης δημιουργεί ένα διανυσματικό

σήμα σφάλματος του οποίου η διεύθυνση καταδεικνύει τη θέση του σφάλματος ή της αλλαγής, ή τουλάχιστον περιορίζει σημαντικά την τοποθεσία στην οποία το γεγονός μπορεί να έχει λάβει χώρα. Μια αστοχία επενεργητή ή αλλαγή κάποιας παραμέτρου του δυναμικού συστήματος δημιουργεί ένα σήμα σφάλματος σε μια σταθερή διανυσματική διεύθυνση. Αυτή η αναλλοίωτη διεύθυνση υποδεικνύει ποιος επενεργητής δυσλειτουργεί ή ποια παράμετρος έχει αλλάξει. Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί η αναλλοίωτη διεύθυνση να συσχετισθεί με πλέον της μίας παραμέτρους· τότε η θέση της αστοχίας ή της αλλαγής περιορίζεται σε αυτούς τους επενεργητές ή παραμέτρους που σχετίζονται με αυτή τη διεύθυνση.

2. Κατά την απουσία αστοχιών ή αλλαγής δυναμικής (ή εφόσον αναγνωρισθούν και αντισταθμιστούν) το φίλτρο ανίχνευσης υπολογίζει μια εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος. Η εκτίμηση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής υπό την έννοια ότι κατά την έλλειψη διαταραχών, το σφάλμα των εκτιμήσεων προσεγγίζει ασυμπτωτικά το μηδέν. Το φίλτρο ανίχνευσης μπορεί επομένως να λειτουργήσει και ως φίλτρο εκτίμησης της κατάστασης.
3. Οι πόλοι του φίλτρου ανίχνευσης επιλέγονται από τον σχεδιαστή. Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος απόκρισης του φίλτρου μπορεί να γίνει όσο γρήγορος είναι επιθυμητό, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις απαιτήσεις απόρριψης διαταραχών και μεγέθη του κέρδους. Αυτό σημαίνει ότι το φίλτρο μπορεί να σχεδιαστεί για να βελτιώνει την απόκριση των αστοχιών και αλλαγών που επιτηρεί, ενώ ταυτόχρονα να καταστείλει την απόκριση του θορύβου των αισθητήρων και άλλων διαταραχών.
4. Ένα φίλτρο ανίχνευσης, του οποίου η διάσταση είναι ίση με αυτή του συστήματος, είναι σε θέση να αναγνωρίζει ένα σημαντικό αριθμό διαφορετικών γεγονότων (αστοχιών ή αλλαγών δυναμικής). Όταν ένα μοναδικό φίλτρο ανίχνευσης δεν είναι σε θέση να ανιχνεύει όλα τα πιθανά γεγονότα, είναι απλά ικανό να χρησιμοποιηθούν παραπάνω φίλτρα, το καθένα σχεδιασμένο να ανιχνεύει ένα υποσύνολο του συνόλου των πιθανών γεγονότων. Επειδή κάθε φίλτρο είναι σε θέση να αναγνωρίζει ένα μεγάλο πλήθος γεγονότων, θα είναι δυνατό να αναγνωρισθούν όλα τα γεγονότα με ένα μικρό πλήθος φίλτρων. Για την ειδική περίπτωση στην οποία η κατάσταση του συστήματος είναι πλήρως μετρήσιμη, ένα μοναδικό φίλτρο ανίχνευσης είναι σε θέση να δίνει πληροφορία για όλα τα γεγονότα - αστοχίες επενεργητών, αστοχίες αισθητήρων και αλλαγών δυναμικής. Για την πιο γενική περίπτωση, δηλαδή του μερικώς μετρήσιμο διανύσματος κατάστασης, το πλήθος των διαφορετικών γεγονότων που μπορούν να αναγνωρισθούν από ένα φίλτρο ανίχνευσης είναι, σε γενικές γραμμές τουλάχιστον, ίσο με το πλήθος των αισθητήρων του συστήματος. Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις μπορεί να είναι είτε λίγο μικρότερο είτε λίγο μεγαλύτερο. Σε κάθε περίπτωση, ένα φίλτρο ανίχνευσης μπορεί να δώσει πληροφορία για όλες τις αλλαγές δυναμικής ενός γραμμικού συστήματος.
5. Η ίδια βασική θεωρία εφαρμόζεται στο σχεδιασμό φίλτρων ανίχνευσης που αφορούν για αστοχίες επενεργητών, αστοχίες αισθητήρων και αλλαγών δυναμικής. Για την ανίχνευση αλλαγών δυναμικής, το φίλτρο ανίχνευσης είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικό σε περιπτώσεις που οι πιθανές αλλαγές εξαρτώνται από ένα μικρό αριθμό παραμέτρων. Ακόμα και όταν εφαρμόζεται στο γενικό πρόβλημα την αναγνώρισης ή παρακολούθησης άγνωστων γραμμικών δυναμικών ενός συστήματος, η θεωρία φίλτρου ανίχνευσης αποτελεί μια μέθοδο αναγνώρισης που είναι συγκρίσιμη με άλλες μεθόδους που στοχεύουν στην παρακολούθηση κάποιου μοντέλου.
6. Οι υπολογισμοί για τον σχεδιασμό φίλτρων ανίχνευσης απαιτούν κυρίως την επίλυση συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Δεν είναι απαραίτητη η επίλυση διαφορικών εξισώσεων - ούτε γραμμικών ούτε μη γραμμικών. Οι υπολογισμοί, για παράδειγμα, είναι σαφώς λιγότεροι από αυτούς που απαιτούνται κατά τον υπολογισμό ενός φίλτρου Kalman, το οποίο απαιτεί την επίλυση της εξίσωσης Ricatti.

## 5.2 Μελλοντικές κατευθύνσεις.

Με βάση το σύνολο της ανάλυσης που πραγματοποιήθηκε παραπάνω, εντοπίστηκαν ένας αριθμός από διαφορετικά ζητήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν. Κατ' αρχάς, στα πλαίσια του αλγορίθμου, πρέπει να εισαχθούν οι διάφορες επιλογές που έχουν ήδη σχολιαστεί, δηλαδή ή επιλογή των μη καθορισμένων ιδιοτιμών, ή η επαύξηση του μοντέλου αναφοράς, ή ο ορισμός στάσιμων στην έξοδο διανυσμάτων γεγονόςτος.

Σε δεύτερο στάδιο αξίζει να μελετηθούν τα αποτελέσματα του [Massoumnia, 1986] που αφορούν γενίκευση της παραπάνω μεθοδολογίας, ώστε να συμπεριλάβει μεγαλύτερο μέρος περιπτώσεων. Εργασίες που εκπονήθηκαν αργότερα χρονικά αναφέρουν προβλήματα που μπορεί να προκύψουν από την πρακτική εφαρμογή του φίλτρου, όπως ζητήματα ευρωστίας, χρόνοι εκτέλεσης, υπολογιστικοί πόροι κλπ. Αξίζει να μελετηθούν σε μεγαλύτερο βάθος ώστε να γίνει δυνατή η εφαρμογή της μεθοδολογίας σε πραγματικά συστήματα.

Τέλος, σε πρακτικές εφαρμογές, προβλήματα μπορεί να υπάρξουν κατά την επεξεργασία του σήματος σφάλματος για την αναγνώριση του πιο πιθανού γεγονότος (ή γεγονότων), σε καταστάσεις που προκύπτουν από θόρυβο διαταραχών, ταυτόχρονα πολλαπλά γεγονότα ή γεγονότα που είναι μη διαχωρίσιμα από την διεύθυνση του σφάλματος και μόνο.





## Βιβλιογραφία

- [Beard, 1971] Beard, R. V. (1971). *Failure Accomodation in Linear Systems Through Self-Reorganization*. PhD thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, M.I.T., Cambridge, MA.
- [Gerard, 1978] Gerard, J. P. (1978). Application of detection filter theory to longitudinal control of guideway vehicles. Master's thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, M.I.T., Cambridge, MA.
- [Jones, 1973] Jones, H. L. (1973). *Failure Detection in Linear Systems*. PhD thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, M.I.T., Cambridge, MA.
- [Massoumnia, 1986] Massoumnia, M. A. (1986). *A Geometric Approach to Failure Detection and Identificatiion in Linear Systems*. PhD thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, M.I.T., Cambridge, MA.
- [Meserole, 1981] Meserole, J. S. (1981). *Detection Filters for Fault-Tolerant Control of Turbofan Engines*. PhD thesis, The Charles Stark Draper Laboratory, M.I.T., Cambridge, MA.
- [Park et al., 1994] Park, J., Rizzoni, G., and Ribbens, W. B. (1994). On the representation of sensor faults in fault detection filters. *Automatica*, 30(11):1793–1795.
- [Willsky, 1976] Willsky, A. S. (1976). A survey of design methods for failure detection in dynamic systems. *Automatica*, 12:601–611.



## Παράρτημα Α

### Ευρετήριο συμβολισμών.

- $A, B, C$  Πίνακες που αναπαριστούν το σύστημα σε μορφή εξισώσεων κατάστασης.
- $\vec{b}_i$  Διάνυσμα συμβάντος  $i$ .
- $D$  Το φίλτρο ανίχνευσης σφαλμάτων.
- $\vec{d}_i$  Η ιοστή στήλη του πίνακα  $D$ .
- $\vec{e}$  Μοναδιαίο διάνυσμα.
- $F$  Πίνακας διαστάσεων  $n \times s$  με στήλες τα διανύσματα  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$ .
- $\mathcal{F}$  Διανυσματικός χώρος γεγονότος του συνόλου των  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s\}$ .
- $\vec{f}$  Αναλλοίωτο διάνυσμα συμβάντος.
- $f$  Διανυσματικός χώρος υπολοίπων διανύσματος συμβάντος  $\vec{f}$ .
- $\vec{g}$  Ο γεννήτορας συμβάντος του  $f$ .
- $K$  Πίνακας που χρησιμοποιείται κατά τον προσδιορισμό του χώρου γεγονότος.
- $M$  Πίνακας που χρησιμοποιείται κατά τον προσδιορισμό του χώρου γεγονότος.
- $m$  Πλήθος μετρήσεων.
- $n$  Πλήθος μεταβλητών κατάστασης.
- $n(t)$  Βαθμωτή συνάρτηση που περιγράφει την χρονική εξέλιξη του σφάλματος.
- $\vec{q}$  Διάνυσμα διαφορών μεταβλητών κατάστασης.
- $\vec{r}$  Διάνυσμα υπολοίπων.
- $\vec{u}$  Διάνυσμα εισόδων ελέγχου.
- $\vec{x}$  Διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης συστήματος.
- $\hat{x}$  Διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης μοντέλου αναφοράς.
- $\vec{y}$  Διάνυσμα μετρήσεων συστήματος.
- $\hat{y}$  Διάνυσμα προβλεπόμενων μετρήσεων μοντέλου αναφοράς.
- $\Delta a_{ij}(t)$  Η διακύμανση στα στοιχεία της ιοστής σειράς και ιοστής στήλης του πίνακα  $A$ .

$\Delta B(t)$  Αστοχία επενεργητή.

$\mu$  Μεταβλητή εκθέτη.

$\nu$  Τάξη συμβάντος  $f$ .

$\nu'$  Τάξη του  $\mathcal{F}$ .