



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ»

«Περιοχές κίνησης και θέσεις ισορροπίας ενός μικρού σώματος στο δακτυλιοειδές πρόβλημα των $N+1$ σωμάτων, όπου το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Schwarzschild»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Ν. ΜΑΚΡΗΣ

Επιβλέπων καθηγητής: Ι.ΚΟΜΙΝΗΣ (Επίκουρος Καθηγητής)

ΑΘΗΝΑ, 2016

Πρόλογος

Η εκπόνηση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας εντάσσεται στα πλαίσια των σπουδών μου στη ροή της Δυναμικής του ΔΠΜΣ Εφαρμοσμένη Μηχανική της ΣΕΜΦΕ του ΕΜΠ.

Μετά την επιτυχή παρακολούθηση του μαθήματος «Ειδικά θέματα προχωρημένης Δυναμικής» του ομότιμου καθηγητή κ. Τηλέμαχου Καλβουρίδη, καθώς και την επιτυχή ολοκλήρωση των λοιπών προαπαιτούμενων του παραπάνω μεταπτυχιακού προγράμματος, θέλησα να εμβαθύνω τις γνώσεις μου, αλλά και να εφαρμόσω στην πράξη ένα μέρος από αυτές που απέκτησα στη διάρκεια των σπουδών μου. Θεωρώ ότι η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία με το θέμα που πραγματεύεται και το οποίο εντάσσεται στην περιοχή μελέτης των δυναμικών συστημάτων και ειδικότερα πολυσωματικών ουράνιων αστρικών συστημάτων αποτέλεσε για μένα μια εξαιρετική πρόκληση, αλλά και μια ευκαιρία για ενασχόληση με θέματα που με ενδιέφεραν ιδιαίτερα.

Παρά τις δυσκολίες που κατά καιρούς αντιμετώπισα, αλλά και την απειρία μου σε παρόμοιας εμβέλειας εγχείρημα, κατάφερα να φτάσω στον τελικό στόχο, ελπίζω με επιτυχία. Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Ιωάννη Κομίνη Επίκουρο Καθηγητή του τομέα Μηχανικής της ΣΕΜΦΕ για την τιμή που μου έκανε να τεθεί επιβλέπων της διπλωματικής μου και να με βοηθήσει, στην τελική διαμόρφωσή της με τις απαραίτητες επισημάνσεις και διορθώσεις. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον ομότιμο καθηγητή του Τομέα Μηχανικής της ΣΕΜΦΕ κ. Τηλέμαχο Καλβουρίδη για την πρόταση του συγκεκριμένου προβλήματος, αλλά και για την συνεχή πολύτιμη βοήθεια και συμπαράστασή του, τον χρόνο που διέθεσε, την απεριόριστη υπομονή του και την διαρκή ενθάρρυνση και καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς μου με τις συμβουλές του, τις καίριες επισημάνσεις του, τις υποδείξεις και τις γόνιμες παρεμβάσεις του στη διαμόρφωση του τελικού αποτελέσματος. Πολλές ευχαριστίες οφείλω επίσης και στον Δρ του ΕΜΠ κ. Δημήτριο Φακή που με την εμπειρία του και τις γνώσεις του σε τεχνικά θέματα που αφορούσαν κυρίως τον προγραμματισμό και τον τρόπο παρουσίασης των αποτελεσμάτων, αλλά και την ψυχολογική του στήριξη, συνέβαλε με τρόπο ουσιαστικό στη διαμόρφωση της παρούσας εργασίας.

*Η παρούσα διπλωματική
αφιερώνεται στους Γονείς μου*

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός μικρού σώματος που κινείται στο πεδίο δυνάμεων που δημιουργεί ένας σχηματισμός N μεγάλων σωμάτων, όπου τα $n=N-1$ έχουν ίδια μάζα m , βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις στην περιφέρεια ενός νοητού κύκλου (ή στις κορυφές ενός νοητού κανονικού n -γώνου), κινούνται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από το κέντρο μάζας τους διατηρώντας ίσες τις μεταξύ τους αποστάσεις και δημιουργούν Νευτώνεια πεδία. Το N -οστό σώμα με μάζα m_0 βρίσκεται στο κέντρο του σχηματισμού (που αποτελεί και το κέντρο μάζας του συστήματος) και δημιουργεί ένα μετά-Νευτώνειο δυναμικό τύπου Schwarzschild. Η συμπεριφορά του μικρού σώματος καθορίζεται από τρεις παραμέτρους: την παράμετρο μάζας β που ισούται με το λόγο της κεντρικής μάζας προς μία περιφερειακή ($\beta=m_0/m$), το πλήθος n των περιφερειακών σωμάτων και την παράμετρο Schwarzschild q . Μετά από μία σύντομη εισαγωγή στις βασικές έννοιες των δυναμικών συστημάτων, γίνεται η γεωμετρική περιγραφή του σχηματισμού των μεγάλων σωμάτων του συγκεκριμένου δυναμικού συστήματος και κατόπιν εξάγονται οι αδιάστατες εξισώσεις που διέπουν την κίνηση του μικρού σώματος σε ένα κινούμενο σύστημα αναφοράς, καθώς και το ολοκλήρωμα της κίνησης που απορρέει από αυτές. Με τη βοήθεια του ολοκληρώματος αυτού, μελετούμε την παραμετρική μεταβολή των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας, καθώς και των διαγραμμάτων $x-C$. Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τον εντοπισμό και τον ακριβή προσδιορισμό των υπαρχουσών θέσεων ισορροπίας του μικρού σώματος, την παραμετρική μεταβολή τους καθώς και τη γραμμική τους ευστάθεια. Ακολούθως, συγκρίνουμε τα ληφθέντα αποτελέσματα τόσο με τη βαρυτική περίπτωση, όσο και με την περίπτωση ενός μετά-νευτώνειου δυναμικού τύπου Manev το οποίο έχει μελετηθεί στο παρελθόν. Τέλος, για μια συγκεκριμένη τριάδα τιμών των παραμέτρων, μελετούμε την εξέλιξη των περιοχών επιτρεπτής κίνησης και των δημιουργούμενων περιοχών παγίδευσης του μικρού σώματος όταν μεταβάλλεται η σταθερά του Jacobi, καθώς και τις διάφορες τοπολογικές μεταβολές που συμβαίνουν στις ενεργειακές τιμές των θέσεων ισορροπίας της σταθεράς αυτής.

Abstract

The present work concerns the study of the dynamic behavior of a small body which moves under the gravitational effect of N large bodies, wherein $v = N-1$ have the same mass m , are located at equal distances on the periphery of an imaginary circle (or at the vertices of an imaginary regular v -gon) and create Newtonian fields, while the N -th body with mass m_0 is at the center of the bodies' formation (which coincides with the center of mass of the system) and creates a post-Newtonian Schwarzschild-type potential. The dynamical system is characterized by three parameters: the mass parameter β which is the ratio of the central mass to a peripheral one ($\beta = m_0 / m$), the number v of the peripheral bodies and the Schwarzschild q parameter.

Our study begins with the description of the geometry of the particular dynamical system and the output of the dimensionless equations governing the motion of the small body in an inertial and a synodic reference system. From these equations we obtain a Jacobian-type integral of motion, with the help of which, we study the parametric change of the zero-velocity curves and surfaces as well as of the diagrams $x-C$.

Then, we numerically calculate the existing equilibrium positions of the small body, their parametric variation and their linear stability. When $q > 0$ all these positions are located on the plane of the primaries and they are distributed on concentric imaginary circles which are called equilibrium zones. However, when $q < 0$ the situation changes since they may exist new planar equilibrium zones and two more out-of-plane equilibria on the vertical z -axis and in symmetric positions with respect to the plane of the primaries. After that, we compare the results obtained from both, the gravitational case and the appropriate post-Newtonian Manev-type resource which has already been studied in detail. Finally, we study the evolution with the Jacobian constant C of both, the areas where particle motion is permitted and the regions where this particle is trapped.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	13
Κεφάλαιο 1.....	19
Βασικές έννοιες και ορισμοί.....	19
1.1 Γενικά.....	19
1.2 Βήματα επίλυσης ενός δυναμικού προβλήματος.....	19
1.3 Η έννοια της αδιαστατοποίησης των εξισώσεων της κίνησης.....	20
1.4 Ολοκλήρωμα της κίνησης.....	21
1.5 Βασικές αρχές της Κλασικής Μηχανικής.....	21
1.6 Το γενικό πρόβλημα των N σωμάτων.....	22
1.7 Η κίνηση της γραμμής των αψίδων της σεληνιακής τροχιάς και το «άγνωστο» δυναμικό του Νεύτωνα.....	22
1.8 Δυναμικά τύπου Bertrand και Hall-Newcomb.....	23
1.9 Δυναμικό τύπου Manev.....	24
1.10 Δυναμικό τύπου Schwarzschild.....	24
1.11 Δυναμικό τύπου Elipе-Arribas-Palacios-Kalvouridis (γενικευμένες κεντρικές δυνάμεις).....	25
Κεφάλαιο 2.....	27
Το δακτυλιοειδές πρόβλημα των $N+1$ σωμάτων.....	27
2.1 Εισαγωγή.....	27
2.2 Συστήματα αναφοράς.....	28
2.3 Επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες του σχηματισμού.....	30
2.4 Δυνάμεις.....	33
2.5 Εξισώσεις της κίνησης του μικρού σώματος S στο αδρανειακό σύστημα.....	37
2.6 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων της κίνησης στο αδρανειακό σύστημα.....	39
2.7 Αδιάστατες εξισώσεις της κίνησης στο περιστρεφόμενο σύστημα.....	42
2.8 Ολοκλήρωμα της κίνησης (ολοκλήρωμα τύπου Jacobi).....	48
2.9 Παράμετροι του προβλήματος.....	49
Κεφάλαιο 3.....	51
Καμπύλες και επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας – παραμετρική μεταβολή.....	51
3.1 Εισαγωγή.....	51
3.2 Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας.....	51
3.3 Ιδιότητες των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας.....	52
3.4 Σχεδίαση και παραμετρική μεταβολή των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας.....	52

3.5 Νευτώνεια δυναμικά ($q=0$ και $\beta \neq 0$)	53
3.6 Περίπτωση δυναμικού τύπου Schwarzschild για $q>0$ και $\beta \neq 0$	57
3.7 Περίπτωση δυναμικού τύπου Schwarzschild για $q<0$ και $\beta \neq 0$	59
3.8 Επίδραση των παραμέτρων β και q στη διαμόρφωση των δικτύων των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας	61
3.9 Σύγκριση των επιδράσεων των παραμέτρων q και e των διορθωτικών όρων των δυναμικών τύπου Schwarzschild και τύπου Manev αντίστοιχα.....	63
Κεφάλαιο 4.....	65
Διαγράμματα $x-C$ και παραμετρική μεταβολή αυτών.....	65
4.1 Εισαγωγή.....	65
4.2 Επίδραση της παραμέτρου v στη διαμόρφωση των διαγραμμάτων $x-C$	66
4.3 Επίδραση της παραμέτρου β στη διαμόρφωση των διαγραμμάτων $x-C$	69
4.4 Επίδραση της παραμέτρου q στη διαμόρφωση των διαγραμμάτων $x-C$	72
4.5 Συγκριτική μελέτη της επίδρασης των διορθωτικών όρων κατά Schwarzschild και κατά Manev στα διαγράμματα $x-C$	75
4.5.1 Περίπτωση $q=e>0$	75
4.5.2 Περίπτωση $q=e<0$	78
Κεφάλαιο 5.....	83
Θέσεις ισορροπίας – παραμετρική μεταβολή - ευστάθεια	83
5.1 Εισαγωγή.....	83
5.2 Ύπαρξη θέσεων ισορροπίας - Ζώνες ισορροπίας στο επίπεδο των μεγάλων σωμάτων και θέσεις ισορροπίας εκτός του επιπέδου αυτού	83
5.2.1 Η βαρυντική περίπτωση	83
5.2.2 Περίπτωση δυναμικού τύπου Schwarzschild	84
5.2.3 Περίπτωση δυναμικού τύπου Manev	86
5.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων της περίπτωσης Schwarzschild με την αντίστοιχη περίπτωση Manev	87
5.4 Μέθοδος Newton-Raphson για τον αριθμητικό υπολογισμό των θέσεων ισορροπίας .	90
5.5 Ζώνες ισορροπίας.....	92
5.6 Εύρεση των οριακών τιμών των β και q για μετάβαση από τρεις σε πέντε ζώνες ισορροπίας στην περίπτωση δυναμικού Schwarzschild - Καμπύλες διακλάδωσης.....	95
5.6.1 Αποτελέσματα για δυναμικό τύπου Schwarzschild με $q>0$	96
5.6.2 Αποτελέσματα για δυναμικό τύπου Manev με $e>0$	98
5.7 Μελέτη της γραμμικής ευστάθειας των θέσεων ισορροπίας.....	100
5.8 Ενδεικτικά αριθμητικά αποτελέσματα των θέσεων ισορροπίας στο επίπεδο xy , για κεντρικό δυναμικό τύπου Schwarzschild	103

5.8.1 Περίπτωση με $q > 0$	104
5.8.2 Περίπτωση με $q < 0$	105
5.9 Θέσεις ισορροπίας εκτός του επιπέδου xy , πάνω στον άξονα z που εμφανίζονται για αρνητικές τιμές του q του δυναμικού Schwarzschild.....	106
5.9.1 Μεταβολή των θέσεων ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} με την παράμετρο ν και την παράμετρο q	106
5.9.2 Μεταβολή με την παράμετρο β και την παράμετρο q των θέσεων ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} για δεδομένη τιμή του ν	108
5.9.3 Μεταβολή με την παράμετρο β και την παράμετρο q των θέσεων ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} για δεδομένη τιμή του ν	109
5.10 Η εξέλιξη των περιοχών επιτρεπτής κίνησης στο επίπεδο xy και των περιοχών παγίδευσης όταν μεταβάλλεται η σταθερά C	110
5.10.1 Δυναμικό τύπου Schwarzschild με $q > 0$	110
5.10.2 Κεντρικό δυναμικό τύπου Schwarzschild και περίπτωση $q < 0$	114
Παράρτημα.....	121
Βιβλιογραφία.....	133

Εισαγωγή

Η Αστρονομία είναι μία από τις αρχαιότερες επιστήμες και αποτέλεσε μέρος των αρχαίων πολιτισμών όπως των Βαβυλώνιων, των Χαλδαίων, των Κινέζων, των Ινδών και των Αιγυπτίων οι οποίοι έκαναν σημαντικές παρατηρήσεις που αφορούσαν κυρίως την αναγνώριση των διαφόρων αστερών ή αστρικών συστημάτων αλλά και την παρακολούθηση της κίνησης των πλανητών και άλλων απλανών αστερών. Τις γνώσεις αυτές εμπλούτισαν οι αρχαίοι έλληνες Θαλής ο Μιλήσιος (624π.Χ-546π.Χ), Αναξίμανδρος (610 π.Χ.-546 π.Χ), Αναξαγόρας (500 π.Χ-428π.Χ), Εύδοξος (404π.Χ-335π.Χ), Αριστοτέλης (384 π.Χ.-322 π.Χ.), Ερατοσθένης (276π.Χ-194π.Χ), κ.λ.π.

Σημαντική συνεισφορά στην πρόοδο της αστρονομίας είχε ο μαθηματικός και αστρονόμος Ίππαρχος (190 – 120 π.Χ.), ο οποίος συνέταξε τον πρώτο κατάλογο που περιείχε τις κινήσεις και τις θέσεις πάνω από 1000 αστερών στον ουρανό. Επιπλέον ο Ίππαρχος υπολόγισε πως το ηλιακό έτος έχει 365,242 ημέρες τιμή πολύ κοντά στην τιμή 365,242199.

Για πολλούς αιώνες οι αρχαίοι λαοί πίστευαν ότι η Γη αποτελούσε το κέντρο του σύμπαντος. Ένας από τους κυριότερους εκπροσώπους της θεωρίας αυτής ήταν ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (127 μΧ-151 μΧ). Όμως ήδη από τον 3^ο αιώνα π.χ υπήρξε μια πρώτη αναφορά για την ύπαρξη ενός ηλιοκεντρικού συστήματος που έγινε από τον Αρίσταρχο τον Σάμιο (310π.χ-230 π.χ). Η θεωρία αυτή υιοθετήθηκε αρκετά χρόνια αργότερα από τον Πολωνό αστρονόμο Νικόλαο Κοπέρνικο (1473 – 1543). Το 1601 ο Johannes Kepler (1601), διατύπωσε τους τρεις νόμους της κίνησης των πλανητών και επιβεβαίωσε την θεωρία του Κοπέρνικου αφού τα δεδομένα από τις παρατηρήσεις και τις μέχρι τότε μετρήσεις δεν ταίριαζαν με το Γεωκεντρικό μοντέλο που είχε υιοθετηθεί ως τότε από την πλειοψηφία των αστρονόμων, ενώ συνέπιπταν με μεγάλη ακρίβεια με το ηλιοκεντρικό μοντέλο. Μεγάλη συνεισφορά στη σημαντική αυτή ανακάλυψη είχε και η κατασκευή του πρώτου τηλεσκοπίου από τον Γαλιλαίο (1564 – 1642) που βοήθησε στην επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας στις παρατηρήσεις, ενώ παράλληλα τις διεύρυνε συμπεριλαμβάνοντας αστέρες που μέχρι τότε δεν ήταν ορατοί με γυμνό μάτι.

Από την εποχή αυτή και μετά οι γνώσεις και οι ανακαλύψεις στο πεδίο της Αστρονομίας πληθαίνουν με διαρκώς αυξανόμενο ρυθμό. Ανάμεσα στα άλλα, οι

επιστήμονες διαπιστώνουν ότι οι πλανήτες περιστρέφονται γύρω από τον άξονά τους ενώ ταυτόχρονα περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο.

Τον 17ο αιώνα το φωτεινό πνεύμα του Isaac Newton (1642 – 1727) ανοίγει νέους ορίζοντες στην πρόοδο της Μηχανικής και της Αστρονομίας. Ο Νεύτωνας με την επινόηση του Απειροστικού λογισμού συνδέει τη γήινη μηχανική του Γαλιλαίου με την ουράνια μηχανική του Κέπλερ ενώ με το μνημειώδες έργο του Principia Mathematica θεμελιώνει την κλασική μηχανική στο επίκεντρο της οποίας βρίσκεται ο νόμος της Παγκόσμιας Έλξης που εκφράζει μέσω μιας απλής μαθηματικής σχέσης τη δύναμη που ασκείται ανάμεσα σε δύο σημειακές μάζες.

Η κλασική μηχανική γνώρισε μεγάλη άνθιση με τους Euler (1707-1783), Clairault (1713-1765), D' Alembert (1717-1783), Bernoulli (1782), Lagrange (1736-1813) (που θεμελιώσε την Αναλυτική Μηχανική (1749-1827) και εισήγαγε ένα νέο τρόπο περιγραφής της κίνησης με τις ομώνυμες εξισώσεις), Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855), Jacobi (1804-1851), Hamilton (1805-1865) (που εισήγαγε ένα νέο επαναστατικό τρόπο περιγραφής της κίνησης), Maxwell (1831-1879), Poincare (1854-1912), Liapunov (1857-1918), Birkhoff (1884-1944), κ.λ.π.

Η απόλυτη κυριαρχία της κλασικής Νευτώνιας Μηχανικής διατηρήθηκε μέχρι τις αρχές του 20^{ου} αιώνα οπότε ο Άλμπερτ Αϊνστάιν (1879-1955) διατύπωσε την ειδική και λίγο αργότερα τη γενική θεωρία της Σχετικότητας. Παρ' όλη την εξέλιξη αυτή, η κλασική Νευτώνεια θεωρία εξακολουθεί ακόμη και σήμερα να εφαρμόζεται σε διάφορα προβλήματα της Μηχανικής λόγω της απλότητάς της αλλά και των εξαιρετικής ακρίβειας αποτελεσμάτων όταν εφαρμόζεται σε φυσικά συστήματα του αισθητού μας κόσμου και για ταχύτητες των σωμάτων αρκετά μικρότερες της ταχύτητας του φωτός.

Η μελέτη και η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε όλα αυτά τα χρόνια, και που αφορούν όχι μόνο την φυσική κίνηση των πλανητών και των άστρων αλλά και των μοντέλων με τα οποία αυτά προσιδιάζουν, αποτελεί το περιεχόμενο και το αντικείμενο έρευνας ενός ιδιαίτερα σημαντικού κλάδου της Αστρονομίας, που ονομάζεται Ουράνια Μηχανική. Βέβαια το βασικό και μη επιλύσιμο ακόμη πρόβλημα στη γενική του μορφή, είναι το πρόβλημα των N σωμάτων που αναφέρεται στην πρόβλεψη των κινήσεων ενός πλήθους ουρανίων σωμάτων που αλληλεπιδρούν βαρυτικά μεταξύ τους. Λόγω της πολυπλοκότητάς του, έχουν γίνει κατά καιρούς από τους ερευνητές

διάφορες απλουστεύσεις στην προσπάθειά τους να διερευνήσουν κάποιες πτυχές των δυναμικών χαρακτηριστικών του γενικού προβλήματος. Στα πλαίσια αυτής της έρευνας έχουν μελετηθεί μια σειρά από ειδικές περιπτώσεις που αφορούν γεωμετρικούς σχηματισμούς N σωμάτων κάνοντας χρήση του βαρυτικού (Νευτώνειου) δυναμικού. Το πιο απλό πρόβλημα στην κατηγορία αυτή είναι το πρόβλημα των δύο σωμάτων που είναι το μόνο με αναλυτική λύση που μελετήθηκε και επιλύθηκε πλήρως από τον Johann Bernoulli (1667-1748) με την κλασική θεωρία και με την υπόθεση ότι τα δύο σώματα μπορούν να θεωρηθούν ως σημειακές μάζες.

Για προβλήματα με περισσότερα από δύο σώματα έγιναν μια σειρά από παραδοχές (γιατί αλλιώς θα ήταν δύσκολη η επίλυση των εξισώσεων), όπως η γεωμετρία του σχηματισμού των σωμάτων, το πλήθος και οι μάζες των σωμάτων.

Ένα άλλο πρόβλημα που μελετάται ακόμη και σήμερα είναι το περίφημο πρόβλημα των τριών σωμάτων. Ο Lagrange (1736-1813) ασχολήθηκε με μία εκδοχή του, το λεγόμενο περιορισμένο πρόβλημα, κάνοντας την παραδοχή ότι το ένα σώμα έχει μάζα πολύ μικρότερη από αυτές των δύο άλλων σωμάτων και βρήκε τις πέντε θέσεις ισορροπίας του μικρού σώματος που φέρουν το όνομά του.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι ο νόμος της Παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα ακόμη και στην εποχή του δεν έδινε απολύτως ακριβή αποτελέσματα όταν εφαρμοζόταν στην κίνηση της Σελήνης. Αυτό ήταν ήδη γνωστό από τον ίδιο, όπως θα δούμε αναλυτικότερα στα επόμενα, και γι αυτό το λόγο είχε προτείνει την ενσωμάτωση στη σχέση της Παγκόσμιας έλξης ενός διορθωτικού όρου. Αργότερα, και άλλοι επιστήμονες επιχείρησαν κάτι τέτοιο, ενώ εξακολουθούν να προτείνονται βελτιώσεις του νόμου αυτού μέχρι σήμερα, άλλοτε στα πλαίσια της θεωρίας της σχετικότητας και άλλοτε στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας.

Σε αυτή την εργασία γίνεται προσπάθεια μελέτης ενός απλού σχετικά γεωμετρικού μοντέλου N σωμάτων με την εισαγωγή ενός μετα-Νευτώνειου δυναμικού (post-Newtonian potential) ή ακριβέστερα, Νευτώνειου δυναμικού αλλά με διορθωτικό όρο. Πιο συγκεκριμένα, ερευνώνται κάποια χαρακτηριστικά της δυναμικής συμπεριφοράς ενός μικρού σώματος το οποίο κινείται στο πεδίο δυνάμεων που δημιουργούν N μεγάλα, σφαιρικά και ομογενή σώματα, από τα οποία τα $v=N-1$, έχουν ίσες μάζες, δημιουργούν Νευτώνεια πεδία και βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού v -γώνου, ενώ το N -οστό σώμα διαφορετικής μάζας δημιουργεί ένα μετά-

Νευτώνειο δυναμικό τύπου Schwarzschild. Το αρχικό βαρυτικό μοντέλο είναι επίσης γνωστό και ως δακτυλιοειδές πρόβλημα των $N+1$ σωμάτων (ring problem). Υποθέτουμε επίσης ότι το μικρό σώμα έχει πολύ μικρή μάζα σε σχέση με τις μάζες των άλλων σωμάτων, ώστε η μεν κίνησή του να επηρεάζεται από τα πεδία δυνάμεων των N μεγάλων σωμάτων, αλλά το ίδιο να μην επηρεάζει την κίνηση τους που εκτελείται γύρω από το κέντρο μάζας σε κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Το μοντέλο αυτό θα μπορούσε να προσεγγίσει ένα ιδεατό ουράνιο σύστημα που αποτελείται από έναν «ήλιο» ως κεντρικό σώμα που δημιουργεί ένα μη νευτώνειο δυναμικό και από n συντροχιακούς πλανήτες που κινούνται σε κυκλική τροχιά γύρω από το κεντρικό και δημιουργούν νευτώνεια δυναμικά, ενώ το μικρό σώμα μπορεί να είναι ένας φυσικός ή τεχνητός δορυφόρος που κινείται στο πεδίο των μεγάλων σωμάτων.

Το περιεχόμενο της παρούσας εργασίας οργανώνεται σε πέντε κεφάλαια.

Στο **Κεφάλαιο 1** δίνονται κάποιες γενικές έννοιες, όπως η έννοια του ολοκληρώματος της κίνησης, γίνεται μια σύντομη αναφορά στο γενικό πρόβλημα των N σωμάτων, καθώς επίσης στο δυναμικό του Νεύτωνα με τον επιπλέον όρο (διαταραχή) και σε διάφορα άλλα δυναμικά που προτάθηκαν κατά καιρούς.

Στο **Κεφάλαιο 2** θεωρώντας ένα μετα-Νευτώνειο δυναμικό τύπου Schwarzschild για το κεντρικό σώμα του δακτυλιοειδούς σχηματισμού, καταστρώνονται οι αδιάστατες εξισώσεις κίνησης του μικρού σώματος σε ένα αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς με αρχή το κέντρο μάζας του συστήματος και στη συνέχεια οι εξισώσεις αυτές μετασχηματίζονται σε ένα συνοδεύον πλαίσιο αναφοράς, ώστε με βάση τις εξισώσεις αυτές να γίνει η ανάλυση στα επόμενα κεφάλαια. Στην τελευταία ενότητα παρουσιάζεται το ολοκλήρωμα της κίνησης (ολοκλήρωμα τύπου Jacobi) που προκύπτει από τις εξισώσεις κίνησης.

Στο **Κεφάλαιο 3** δίνονται οι έννοιες και οι ιδιότητες των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας και εξετάζεται η παραμετρική μεταβολή τους. Πιο συγκεκριμένα, για μια σειρά από συνδυασμούς των παραμέτρων (ν, β, q) που χαρακτηρίζουν το δυναμικό σύστημα, παρακολουθούμε την παραμετρική μεταβολή των διαγραμμάτων και την επίδραση της κάθε παραμέτρου σε αυτή τη μεταβολή (διατηρώντας κάθε φορά τις άλλες δύο παραμέτρους σταθερές). Στο τελευταίο μέρος γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων που ελήφθησαν από την εφαρμογή του

δυναμικού τύπου Schwarzschild με τα αντίστοιχα από την εφαρμογή του δυναμικού τύπου Manev το οποίο μελετήθηκε στο πρόσφατο παρελθόν από άλλους ερευνητές.

Στο **Κεφάλαιο 4**, γίνεται μια σύντομη αναφορά στα διαγράμματα $x-C$ (όπου C είναι η σταθερά του Jacobi) τα οποία προκύπτουν από την τομή μιας επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας $C=C(x,y)$ με το επίπεδο $y=a$ (όπου a πραγματική σταθερά). Ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο με αυτόν του προηγούμενου κεφαλαίου, εξετάζουμε την παραμετρική μεταβολή των διαγραμμάτων, μεταβάλλοντας τη μία παράμετρο και διατηρώντας κάθε φορά σταθερές τις άλλες δύο. Επιπλέον, συγκρίνουμε την επίδραση του δυναμικού τύπου Schwarzschild με αυτό του Manev.

Τέλος, στο **Κεφάλαιο 5**, εξετάζεται αρχικά η ύπαρξη των θέσεων ισορροπίας του μικρού σώματος και η κατανομή τους σε κυκλικές και ομόκεντρες ζώνες. Περιγράφεται η αριθμητική μέθοδος υπολογισμού των θέσεων αυτών, η παραμετρική τους μεταβολή, καθώς και η γραμμική τους ευστάθεια. Επίσης αναλύεται η έννοια της κρίσιμης τιμής της παραμέτρου q και σχεδιάζονται οι καμπύλες διακλάδωσης (bifurcation curves) (μετάβαση από ένα πλήθος ζωνών ισορροπίας σε άλλο). Με βάση τα προηγούμενα, εξετάζεται επίσης η εξέλιξη των περιοχών επιτρεπτής κίνησης στο επίπεδο xy και των περιοχών παγίδευσης όταν μεταβάλλεται η σταθερά C .

Στο **Παράρτημα** που ακολουθεί, περιγράφονται κώδικες Mathematica που χρησιμοποιήθηκαν σε διάφορες φάσεις της μελέτης μας και παρατίθενται Πίνακες με ενδεικτικά αριθμητικά αποτελέσματα.

Η εργασία πλαισιώνεται με σχήματα και διαγράμματα και ολοκληρώνεται με την παράθεση σχετικής βιβλιογραφίας.

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες και ορισμοί

1.1 Γενικά

Σε αυτό το κεφάλαιο κρίθηκε σκόπιμο να γίνει μια σύντομη αναφορά σε κάποιες γενικές έννοιες που αναφέρονται στα δυναμικά συστήματα, στον τρόπο μελέτης τους, στο γενικό πρόβλημα των N σωμάτων, καθώς και σε κάποια από τα προταθέντα κατά καιρούς μετα-Νευτώνεια δυναμικά.

1.2 Βήματα επίλυσης ενός δυναμικού προβλήματος

Είναι προφανές ότι ακόμη και στο απλούστερο φυσικό δυναμικό σύστημα που λειτουργεί κάτω από πραγματικές συνθήκες, οι παράγοντες που επιδρούν λιγότερο ή περισσότερο στη λειτουργία του και καθορίζουν την εξέλιξή του είναι πολλοί. Όμως επειδή η ακριβής καταγραφή όλων των παραγόντων αφενός μεν είναι εξαιρετικά δύσκολη, αφετέρου δε η μελέτη του συστήματος θα απέβαινε στην περίπτωση αυτή πολύ σύνθετη, προσπαθούμε να εντοπίσουμε και να εκτιμήσουμε κατ' αρχήν τους σημαντικότερους παράγοντες που το επηρεάζουν αγνοώντας σε πρώτη φάση όλους τους υπόλοιπους. Η διαδικασία αυτή, μας οδηγεί σε απλούστερα θεωρητικά μοντέλα η συμπεριφορά των οποίων προσεγγίζεται με «ευκολότερο» τρόπο, παράλληλα όμως μας δίνει αρκετές βασικές πληροφορίες για το δυναμικό σύστημα ώστε να μπορέσουμε στη συνέχεια να βελτιώσουμε το αρχικό μοντέλο. Ο συνήθης λοιπόν τρόπος που εφαρμόζουμε στη μελέτη ενός δυναμικού προβλήματος είναι να καταφεύγουμε σε προσομοιώσεις και προσεγγιστικές λύσεις.

Ανάμεσα στα πρώτα βήματα που ακολουθούνται κατά τη μελέτη της συμπεριφοράς και της εξέλιξης μιας μεγάλης κατηγορίας συνεχών δυναμικών συστημάτων στην οποία ανήκει και το συγκεκριμένο πρόβλημα που ερευνούμε στην παρούσα εργασία, περιλαμβάνονται: ο καθορισμός των παραμέτρων που επηρεάζουν το σύστημα, ο μαθηματικός φορμαλισμός και η περιγραφή του δυναμικού συστήματος μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης ή ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων, η αδιαστατοποίηση

των εξισώσεων, η διερεύνηση για τυχόν υπάρχοντα ολοκληρώματα της κίνησης, ο προσδιορισμός των περιοχών ύπαρξης λύσεων, ο εντοπισμός των θέσεων ισορροπίας και η μελέτη της ευστάθειάς τους. Σε επόμενες φάσεις με τις οποίες δεν θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία, εντάσσεται η αναζήτηση και μελέτη των περιοδικών λύσεων και της ευστάθειάς των, καθώς και η διερεύνηση της χαοτικής συμπεριφοράς του συστήματος που απορρέει από τη μη γραμμικότητά του. Στην παρούσα εργασία θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε κάποιες από τις βασικές πτυχές του προβλήματος που αναφέραμε, οι οποίες ελπίζουμε να αποτελέσουν το έναυσμα για την περαιτέρω διερεύνηση του δυναμικού αυτού συστήματος.

1.3 Η έννοια της αδιαστατοποίησης των εξισώσεων της κίνησης

Επειδή στις διαμορφούμενες εξισώσεις κινήσεως υπάρχει μια δυσκολία στο χειρισμό των φυσικών μεγεθών που εκφράζονται σε διάφορα συστήματα μονάδων, είτε διότι είναι πολύ μεγάλα, είτε διότι είναι πολύ μικρά, και επειδή ο βασικός στόχος είναι να εξάγουμε ποιοτικά και γενικά συμπεράσματα, επιλέγουμε συχνά την αδιαστατοποίησή τους (normalization).

Ουσιαστικά η αδιαστατοποίηση αποτελεί μια νέα έκφραση ενός φυσικού μεγέθους που ήδη εκφράζεται με τη βοήθεια κάποιων μονάδων ενός υιοθετημένου συστήματος μονάδων, με ένα νέο αντίστοιχο μέγεθος που εκφράζεται και αυτό στο ίδιο σύστημα μονάδων και το οποίο μέγεθος το θεωρούμε πλέον ως νέα μονάδα. Αυτό σημαίνει π.χ. ότι μια μάζα που εκφράζεται σε μονάδες μάζας (π.χ kg) θα αδιαστατοποιηθεί με μια άλλη μάζα που εκφράζεται και αυτή στις ίδιες μονάδες (kg) αλλά θα αποτελέσει τη νέα μονάδα μέτρησης-σύγκρισης στη συνέχεια. Το ίδιο γίνεται και με τα υπόλοιπα φυσικά μεγέθη που εμφανίζονται στις βασικές μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν την δυναμική του συστήματος όπως μήκη, ταχύτητες, επιταχύνσεις, χρόνος κ.ο.κ. (Καλβουρίδης, 2004).

Προφανώς, ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία, μπορούμε να προσαρμόσουμε τα όποια αποτελέσματα παίρνουμε από την «επίλυση» του προβλήματος στα πραγματικά φυσικά διαστατά μεγέθη.

1.4 Ολοκληρώματα της κίνησης

Ως ολοκλήρωμα της κίνησης ορίζουμε μια συνάρτηση της μορφής :

$$G = (\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = C \quad (1.1)$$

όπου C σταθερά, η οποία για μια τυχαία λύση $r(t)$ και για όλα τα t , διατηρείται σταθερή αλλά αλλάζει από τη μια λύση στην άλλη. Ένα ολοκλήρωμα της κίνησης που περιέχει παραγώγους των μεταβλητών τάξης μικρότερης κατά μία από την τάξη των διαφορικών εξισώσεων, ονομάζεται πρώτο ολοκλήρωμα. Ένα τέτοιο ολοκλήρωμα είναι και το ολοκλήρωμα τύπου Jacobi που περιέχει όρους ενέργειας και συναντάται σε μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων της Ουράνιας Μηχανικής, όπως το γνωστό πρόβλημα των τριών σωμάτων. Η ύπαρξη ενός ολοκληρώματος της κίνησης είναι πολύ σημαντική στη μελέτη ενός δυναμικού συστήματος, διότι αφενός μεν ελαττώνει τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος και συνεπώς και το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών, αφετέρου δε χρησιμοποιείται ως κριτήριο για τον έλεγχο της ακρίβειας των αριθμητικών ολοκληρώσεων.

1.5 Βασικές αρχές της Κλασικής Μηχανικής

Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα σε δύο σημειακά υλικά σώματα περιγράφονται από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης που πρώτος διατύπωσε ο Νεύτωνας.

Όταν η δύναμη που επιδρά σε ένα υλικό σημείο είναι συνάρτηση μόνο της θέσης $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ (ως προς ένα αδρανειακό σύστημα) και υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $V(x, y, z)$ τέτοια ώστε η δύναμη \vec{F} να εκφράζεται υπό τη μορφή:

$$\vec{F} = -\text{grad}V \quad (1.2)$$

τότε λέμε ότι η \vec{F} προέρχεται από δυναμικό. Η συνάρτηση V ονομάζεται δυναμικό ή δυναμική ενέργεια και εκφράζει έργο ή ενέργεια που μετριέται με τις ίδιες φυσικές μονάδες. Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να προέρχεται η δύναμη από δυναμικό είναι η στροφή $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$ ή $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$. Ένα πεδίο δυνάμεων που πληροί τις προϋποθέσεις αυτές, ονομάζεται διατηρητικό ή αστρόβιλο. Τα δυναμικά (ή συναρτήσεις δυναμικού)

χαρακτηρίζονται ως: (i) **ομογενή**, όταν αποδίδονται από ομογενείς μαθηματικές συναρτήσεις των συντεταγμένων, (ii) **μη ομογενή**, όταν οι μαθηματικές συναρτήσεις που τα εκφράζουν δεν είναι ομογενείς και (iii) **σχεδόν ομογενή** (quasi-homogeneous). Την τελευταία αυτή κατηγορία δυναμικών εισήγαγε ο Diacu (Diacu, 2009 “*How I discovered Manev*”) προκειμένου να χαρακτηρίσει εκείνα τα πεδία των δυναμικών τα οποία δεν είναι μεν γνήσια ομογενή, αλλά δημιουργούνται από την επαλληλία ομογενών δυναμικών πεδίων (συναρτήσεων δυναμικού με διαφορετικό βαθμό ομογενείας). Λ.χ το δυναμικό τύπου Manev εμπίπτει στην κατηγορία αυτή επειδή μπορεί να θεωρηθεί ότι συνίσταται από δύο ομογενή δυναμικά με βαθμούς ομογενείας -1 και -2). Παρόμοια δυναμικά συναντώνται σε αρκετά προβλήματα της μη γραμμικής δυναμικής και κυρίως στη Φυσική και στην Αστρονομία. Στην κατηγορία αυτή, εκτός του προαναφερθέντος δυναμικού τύπου Manev, ανήκουν επίσης τα δυναμικά τύπου Schwarzschild (όπως αυτό που θα χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα εργασία), Elise *et al.*, κ.ο.κ.

1.6 Το γενικό πρόβλημα των N σωμάτων

Γενικά όταν αναφερόμαστε σε ένα σύστημα N υλικών σωμάτων που αλληλεπιδρούν μέσω των βαρυτικών έλξεών τους και περιοριζόμαστε σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου, αναφερόμαστε σε ένα μαθηματικό μοντέλο που θεωρούμε ότι μπορεί να προσεγγίσει μερικές πλευρές ενός πραγματικού φυσικού συστήματος συνήθως μεγάλης κλίμακας όπως το ηλιακό ή κάποιο άλλο πολυπληθέστερο αστρικό σύστημα.

Το πρόβλημα έγκειται στο να κατανοήσουμε αν και κατά πόσον το μαθηματικό μοντέλο των N υλικών σημείων είναι κατάλληλο για να περιγράψει την κίνηση N σωμάτων με πεπερασμένες και εν γένει διαφορετικές μάζες.

1.7 Η κίνηση της γραμμής των ασίδων της σεληνιακής τροχιάς και το «άγνωστο» δυναμικό του Νεύτωνα

Όπως είναι γνωστό, ο νόμος της Παγκόσμιας Έλξης του Νεύτωνα αναφέρεται σε σημειακές μάζες ή σε ομογενή (δηλαδή σταθερής πυκνότητας) και απόλυτα σφαιρικά σώματα. Όμως στην πραγματικότητα τα ουράνια σώματα δεν πληρούν απόλυτα αυτές τις

προϋποθέσεις. Όλα τα ουράνια σώματα συμπεριλαμβανόμενης και της Γης (της οποίας σημειωτέον, η κλίση του άξονά της δεν είναι σταθερή στο χώρο και στο χρόνο) δεν έχουν ούτε σταθερή πυκνότητα, αλλά ούτε και ιδανικό σφαιρικό σχήμα.

Όπως αναφέρουν οι Arribas & Elipe (2004) ο Νεύτωνας στο Liber II, propositio XLIV του περίφημου συγγράμματός του Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Koyre and Cohen, 1972), πρόσθεσε έναν επιπλέον όρο (διαταραχή) προκειμένου να ερμηνεύσει την κίνηση της γραμμής των αψίδων της Σελήνης η οποία παρουσιάζει μία περίοδο 18,6 ετών. Έτσι στην πρόταση του Νεύτωνα, το δυναμικό θα έπρεπε να περιγράφεται από τη σχέση,

$$V(r) = -k^2 Mm \left(\frac{1}{r} + \frac{B}{2r^2} \right) \quad (1.3)$$

όπου η ποσότητα B είναι μία θετική παράμετρος ανεξάρτητη από την ακτινική απόσταση r .

Δηλαδή η τροχιά ενός σώματος ως προς ένα άλλο σώμα σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα είναι μια έλλειψη της οποίας ο εστιακός άξονας (γραμμή των αψίδων) περιστρέφεται στο επίπεδο της κίνησης.

Η κίνηση αυτή των αψίδων ήταν ήδη γνωστή από τους σύγχρονους επιστήμονες του Νεύτωνα και η προσπάθεια τόσο αυτών όσο και των μεταγενέστερων ήταν να επιφέρουν βελτιώσεις στον διορθωτικό όρο ώστε τα θεωρητικά αποτελέσματα να συμφωνούν με τις παρατηρησιακές μετρήσεις. Οι προσπάθειες αυτές συνεχίστηκαν και μετά την κυριαρχία της Θεωρίας της Σχετικότητας. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μερικά από τα δυναμικά αυτής της κατηγορίας.

1.8 Δυναμικά τύπου Bertrand και Hall-Newcomb

Ο G. Bertrand το 1873 πρότεινε μια τροποποίηση του νόμου του Νεύτωνα, όπου η βαρυτική δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη του $r^{2+\epsilon}$ όπου ϵ πολύ μικρή θετική ποσότητα, και r η απόσταση μεταξύ ενός σωματιδίου και της μάζας-πηγής του πεδίου στο αντίστοιχο πρόβλημα του Νεύτωνα.

Το 1895 οι Hall-Newcomb χρησιμοποίησαν ένα δυναμικό παρόμοιο με αυτό του Bertrand. Ο μὲν Hall υπολόγισε ότι η σταθερά ϵ θα έπρεπε να παίρνει τιμές $\epsilon=1.6 \times 10^{-7}$, ο δε Newcomb βρήκε ότι η σταθερά αυτή θα έπρεπε να ισούται με $\epsilon=1.574 \times 10^{-7}$.

1.9 Δυναμικό τύπου Manev

Το 1924 ο Βούλγαρος φυσικός Giorgi Manev πρότεινε έναν τύπο παρόμοιο με τον (1.3),

$$V(r) = -k^2 Mm \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \right) \quad (1.4)$$

(Manev, 1924). Στην παραπάνω σχέση, η σταθερά B έχει διαστάσεις μήκους, ενώ όταν $A=1$ και $B=0$ μεταπίπτει στο κλασικό Νευτώνειο δυναμικό. Η σταθερά B στην περίπτωση του δυναμικού του Manev είναι πολύ μικρή και συνεπώς ο δεύτερος όρος μπορεί να χαρακτηριστεί ως μικρή διαταραχή του Νευτώνειου μοντέλου. Όμως η διαταραχή αυτή είναι αρκετή για να αλλάξει τη συμπεριφορά της Νευτώνειας έλξης όταν δύο σώματα πλησιάζουν το ένα το άλλο, όπως συμβαίνει με τον πλανήτη Ερμή και τον Ήλιο.

Το δυναμικό κατά Manev είχε αγνοηθεί για πολλές δεκαετίες έως ότου επανήλθε στο επίκεντρο του επιστημονικού ενδιαφέροντος τις πρόσφατες δεκαετίες (Mioč & Stavinschi, 1999; Elipe & al., 2007; Fakis & Kalvouridis, 2011, 2013, 2014; Croustalloudi et al., 2012; Φακής, 2014), επειδή με τη μορφή που έδωσε στο δυναμικό, θα μπορούσε να προσομοιώσει και τις περιπτώσεις όπου το μεγάλο σώμα που δημιουργεί το δυναμικό αποτελεί ταυτόχρονα πηγή ακτινοβολίας ή ότι το μεγάλο σώμα δεν είναι σφαιρικό αλλά prolate σφαιροειδές οπότε η σταθερά B θα μπορούσε να παίρνει και αρνητικές τιμές.

1.10 Δυναμικό τύπου Schwarzschild

Το συγκεκριμένο δυναμικό στο οποίο βασίζεται η μελέτη της παρούσας εργασίας εκφράζεται από μία δυναμική συνάρτηση στον παρονομαστή του διορθωτικού όρου της

οποίας, η απόσταση r υψώνεται στον κύβο και όχι στο τετράγωνο όπως είδαμε στα άλλα δυναμικά, δηλαδή :

$$V(r) = -k^2 Mm \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^3} \right) \quad (1.5)$$

(Mioč & Stavinschi 1998). Με τη μορφή αυτή του δυναμικού προσομοιάζει το δυναμικό McCullagh (προσεγγιστικό) που δημιουργεί ένα ομογενές υλικό σώμα τυχαίου σχήματος,

$$V(r) = - \left[\frac{GM}{r} + \frac{GM}{2r^3} (I_x + I_y + I_z - 3I_e) \right] \quad (1.6)$$

όπου M είναι η μάζα του σώματος, I_x, I_y, I_z , είναι οι ροπές αδρανείας του σώματος ως προς τους άξονες x, y, z , ενός συστήματος $Oxyz$ με αρχή το κέντρο μάζας του σώματος και I_e η έκφραση της ροπής αδρανείας ως προς άξονα e που διέρχεται από το ίδιο κέντρο. Όταν το σώμα είναι ομογενής σφαίρα, τότε, ο δεύτερος όρος μηδενίζεται και απομένει ο πρώτος όρος που εκφράζει το Νευτώνειο δυναμικό που οφείλεται σε μια σημειακή μάζα.

Και στην περίπτωση του δυναμικού τύπου Schwarzschild, θα μπορούσαμε να προσομοιώσουμε (με διαφορετική βέβαια προσέγγιση) και τις περιπτώσεις εκείνες όπου το μεγάλο σώμα που δημιουργεί το δυναμικό είτε αποτελεί ταυτόχρονα πηγή ακτινοβολίας, είτε έχει τη μορφή ενός prolate σφαιροειδούς. Τότε και πάλι η σταθερά B θα μπορούσε να παίρνει και αρνητικές τιμές.

1.11 Δυναμικό τύπου Elipe-Arribas-Palacios-Kalvouridis (γενικευμένες κεντρικές δυνάμεις)

Η δυναμική συνάρτηση θεωρείται ότι έχει τη γενική μορφή (Arribas *et al.*, 2006, 2007)

$$V = -k^2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} m_i m_j \Phi \left(\frac{1}{r_{ij}} \right) \quad (1.7)$$

όπου m_i, m_j είναι οι μάζες των σωμάτων, k^2 η σταθερά του Gauss, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ είναι οι σχετικές αποστάσεις των σωμάτων και $\Phi(1/r_{ij})$ συνάρτηση των σχετικών αποστάσεων των σωμάτων αυτών. Έτσι, αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$V = -k^2 \sum_{0 \leq i < j < n} m_i m_j \left(\frac{A_1}{r_{ij}} + \frac{A_2}{r_{ij}^2} + \frac{A_3}{r_{ij}^3} + \dots + \frac{A_n}{r_{ij}^n} \right) \quad (1.8)$$

Το δυναμικό αυτό εμπίπτει στην κατηγορία των σχεδόν-ομογενών δυναμικών (quasi-homogeneous potentials) και μπορεί να αναχθεί σε κάποιο από τα προηγούμενα ομογενή ή σχεδόν ομογενή δυναμικά που παρουσιάσαμε. Αν π.χ. $A_1=1$ και $A_i=0$, $i=2, \dots, \rho$, τότε έχουμε το κλασικό Νευτώνειο δυναμικό. Αν $A_1, A_2 \neq 0$, και $A_i=0$, $i=3, \dots, \rho$, τότε έχουμε δυναμικό τύπου Manev. Τέλος, αν $A_1, A_3 \neq 0$ και $A_2=0$, $A_i=0$, $i=4, \dots, \rho$, τότε έχουμε δυναμικό τύπου Schwarzschild.

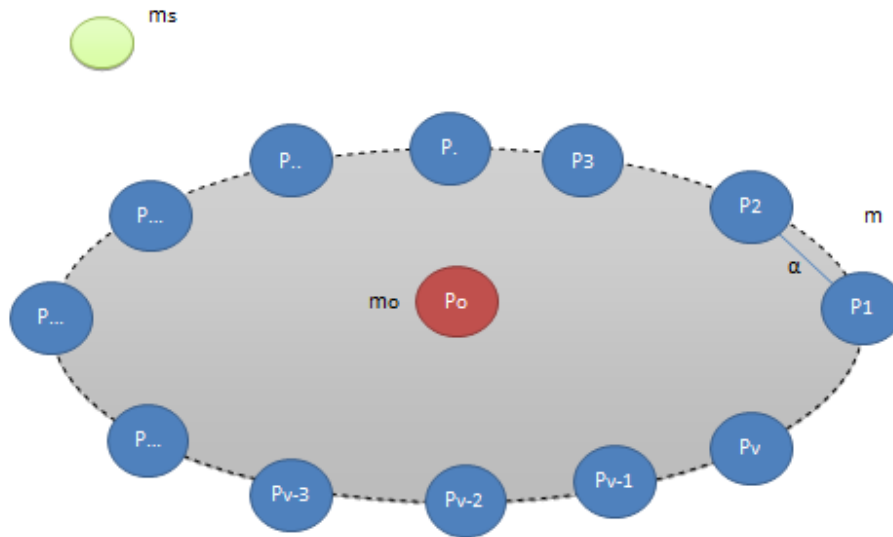
Κεφάλαιο 2

Το δακτυλιοειδές πρόβλημα των $N+1$ σωμάτων

2.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφεται μια ειδική περίπτωση του προβλήματος των N σωμάτων κατά την οποία μελετάται η δυναμική συμπεριφορά ενός μικρού σώματος με αμελητέα μάζα m_s όταν βρίσκεται μέσα στο πεδίο δυνάμεων που δημιουργείται από $N=n+1$ μεγάλα σφαιρικά, και ομογενή σώματα (πρωτεύοντα σώματα ή primaries). Τα n σώματα βρίσκονται περιφερειακά στις κορυφές ενός νοητού κανονικού n -γώνου πλευράς a και έχουν ίσες μάζες m . Το N -οστό σώμα, το οποίο θα αναφέρεται στο εξής ως κεντρικό, είναι τοποθετημένο στο κέντρο μάζας του συστήματος και έχει μάζα m_0 η οποία είναι διαφορετική από τις υπόλοιπες μάζες (δηλαδή $m_0 \neq m$). Το μοντέλο αυτό μελετήθηκε τα τελευταία χρόνια από αρκετούς ερευνητές. Αναφέρουμε μερικούς: Scheeres (1992), Kalvouridis (1998, 2006, 2008a,b, 2011), Croustalloudi & Kalvouridis (2007, 2008, 2011), Bario *et al.*, (2008), Papadakis (2009), κ.λ. Σε όλες τις προηγούμενες εργασίες μελετήθηκε η περίπτωση όπου το μικρό σώμα θεωρείται σημειακό. Επιπλέον, οι περιπτώσεις όπου το μικρό σώμα θεωρείται ότι είναι ένα τυχαίο στερεό ή ένας γυροστάτης (λ.χ. τεχνητός δορυφόρος, διαστημικό τηλεσκόπιο, κ.ο.κ.) μελετήθηκαν από τους Tsogas *et al.*, 2005. Πρόσφατα (Fakis & Kalvouridis, 2011, 2013, 2014; Croustalloudi *et al.*, 2012; Φακής, 2014) μελετήθηκε η περίπτωση κατά την οποία το κεντρικό σώμα δημιουργεί ένα μετα-Νευτώνειο δυναμικό τύπου Manev. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι εκτός από τη γεωμετρική απλότητα του σχηματισμού ένα επιπλέον πλεονέκτημα του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι με την κατάλληλη αλλαγή των βασικών του παραμέτρων το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε κάποιο από τα προβλήματα-μοντέλα της Ουράνιας Μηχανικής που προτάθηκαν στο παρελθόν, όπως η περίπτωση της Κοπεγχάγης στο περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων, το περιορισμένο πρόβλημα των πέντε σωμάτων που προτάθηκε από τον Ollöngren (1988) και το περιορισμένο πρόβλημα των τεσσάρων σωμάτων που προτάθηκε από τους Maranhao & Llibre (1999).

Στο σχήμα 2.1 που ακολουθεί, φαίνεται η διάταξη των παραπάνω σωμάτων δηλαδή του μικρού, του κεντρικού P_0 και των n περιφερειακών $P_i, i=1, \dots, n$.



Σχήμα 2.1 Διάταξη των primaries στο δακτυλιοειδές πρόβλημα των $n+1$ σωμάτων

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε, όπως ήδη αναφέρθηκε στο 1^ο κεφάλαιο, την περίπτωση όπου τα n περιφερειακά σώματα δημιουργούν Νευτώνια δυναμικά, ενώ το κεντρικό σώμα δημιουργεί δυναμικό τύπου Schwarzschild σύμφωνα με τη σχέση 1.5:

$$V(r) = -k^2 M m \left(\frac{A}{r} + \frac{B}{r^3} \right)$$

2.2 Συστήματα αναφοράς

Συνεχίζουμε την ανάλυση με τον καθορισμό των συστημάτων αναφοράς που θα χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουμε την κίνηση του μικρού σώματος, αφού πρώτα ορίσουμε τη διάταξη και το πώς κινούνται τα μεγάλα σώματα. Θεωρούμε λοιπόν ότι τα n μεγάλα σώματα (primaries) κάτω από την επίδραση των αμοιβαίων ελκτικών δυνάμεων περιστρέφονται γύρω από το κέντρο μάζας τους O , με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω και ότι διατηρούν σταθερές τις σχετικές αποστάσεις μεταξύ τους. Με αυτή την παραδοχή ο σχηματισμός των primaries θεωρείται ότι είναι ένας κεντρικός

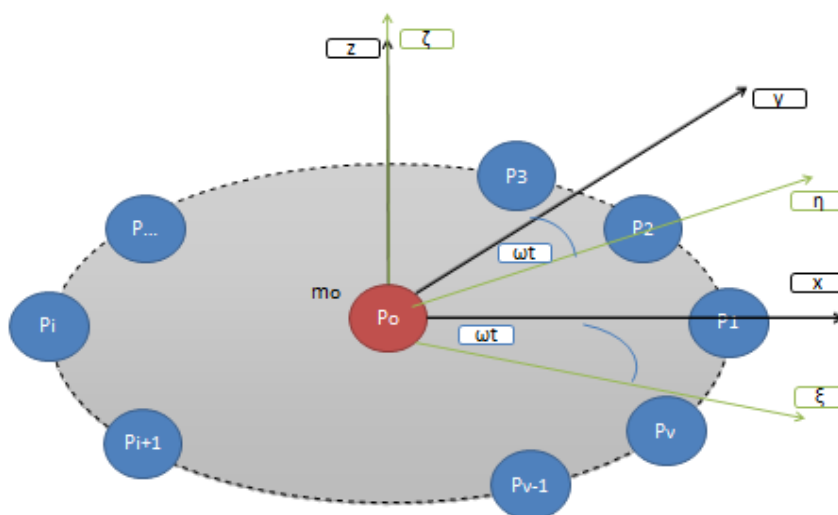
σχηματισμός στον οποίο τα μεγάλα σώματα βρίσκονται σε σχετική ισορροπία (relative equilibrium) μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, ο σχηματισμός των primaries κινείται σαν απόλυτα στερεός σχηματισμός.

Λόγω της σχετικά αμελητέας μάζας του μικρού σώματος συγκριτικά με τα πρωτεύοντα σώματα ($v + 1$) θεωρούμε ως αμελητέα και την επίδραση που ασκεί το μικρό σώμα m_s στην κίνηση των υπολοίπων σωμάτων.

Για την κατάστρωση των εξισώσεων της κίνησης του μικρού σώματος θα χρησιμοποιήσουμε δύο συστήματα καρτεσιανών συντεταγμένων, το αδρανειακό $O\xi\zeta$ και το συνοδεύον $Oxyz$ τα οποία έχουν κοινή αρχή (το κέντρο μάζας του σχηματισμού) ο δε άξονας Oz του συνοδεύοντος συστήματος ταυτίζεται με τον άξονα $O\xi$ του αντίστοιχου αδρανειακού.

Το συνοδεύον ή περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ περιστρέφεται περί τον άξονα Oz με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω που περιστρέφονται τα περιφερειακά σώματα συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι στερεά συνδεδεμένο με τον σχηματισμό των περιφερειακών σωμάτων.

Τα δύο προαναφερθέντα συστήματα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα 2.2.

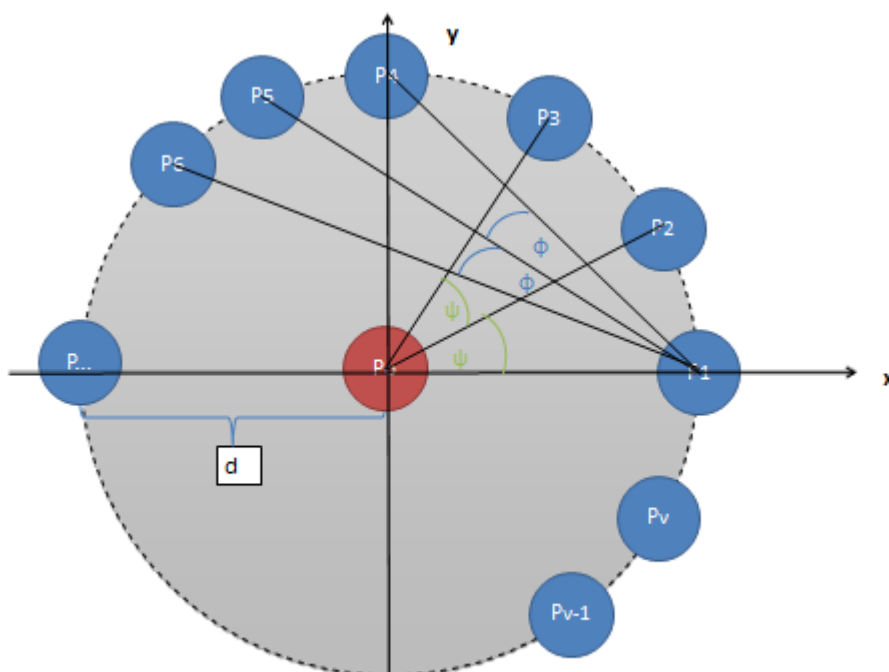


Σχήμα 2.2 Συστήματα αναφοράς: αδρανειακό $O\xi\zeta$ και συνοδεύον $Oxyz$

2.3 Επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες του σχηματισμού

Στο σχήμα 2.3 παρουσιάζονται οι επίκεντρες και οι εγγεγραμμένες γωνίες του σχηματισμού οι οποίες υπολογίζονται με βάση τις σχέσεις :

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{2\pi}{\nu} \\ \phi &= \frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{\nu}\end{aligned}\tag{2.1}$$



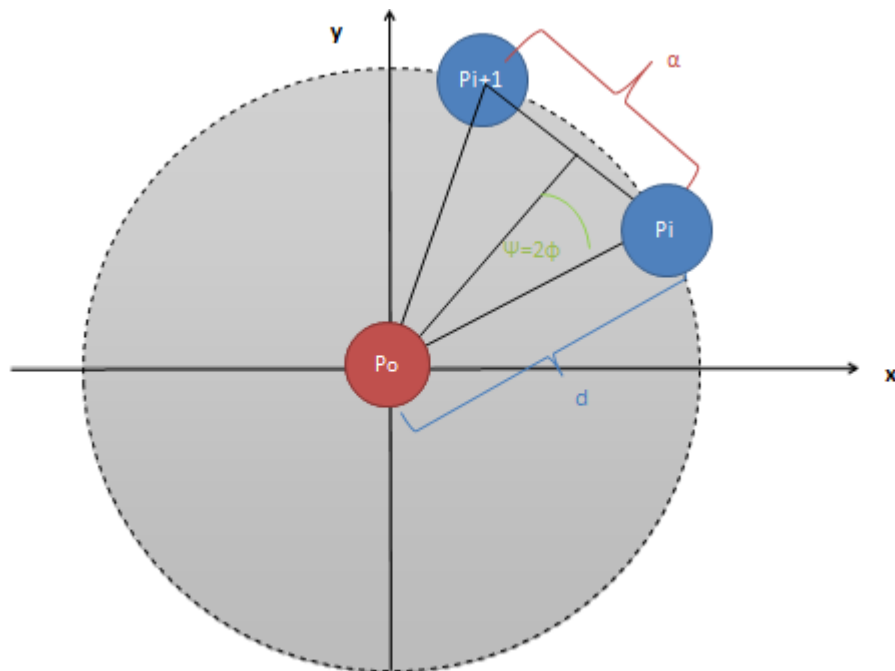
Σχήμα 2.3 Επίκεντρες (ψ) και εγγεγραμμένες (ϕ) γωνίες του σχηματισμού

Για τον υπολογισμό της σχέσης που συνδέει την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών περιφερειακών σωμάτων (δηλαδή την πλευρά του νοητού ν -γώνου της διάταξης των μεγάλων σωμάτων και την οποία συμβολίζουμε με a) και της ακτίνας του κύκλου d στην οποία είναι εγγεγραμμένο το κανονικό ν -γώνο χρησιμοποιούμε το σχήμα 2.4, από όπου παρατηρούμε ότι από το ισοσκελές τρίγωνο που σχηματίζεται από δύο συνεχόμενα περιφερειακά σώματα με το κεντρικό λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\left(d \cos \frac{\psi}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = d^2 \quad (2.2)$$

Λόγω των σχέσεων (2.1) έχουμε ότι

$$d = \frac{a}{2 \sin\left(\frac{\pi}{\nu}\right)} \quad (2.3)$$

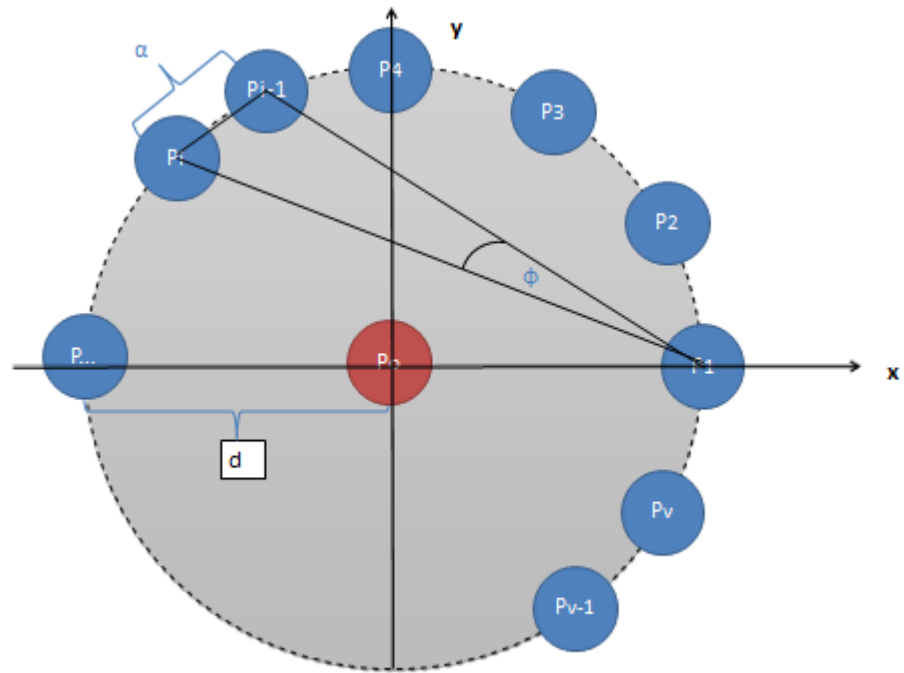


Σχήμα 2.4 Γωνία $\psi=2\Phi$ μεταξύ δύο διαδοχικών περιφερειακών σωμάτων του σχηματισμού

Από το σχήμα 2.5 και το τρίγωνο $P_1P_{i-1}P_i$, υπολογίζουμε τις αποστάσεις ενός περιφερειακού σώματος π.χ του P_1 από ένα άλλο περιφερειακό π.χ το P_i και πιο συγκεκριμένα :

$$\frac{\sin \phi}{a} = \frac{\sin(\nu - i + 1)\phi}{P_1P_i} \quad (2.4)$$

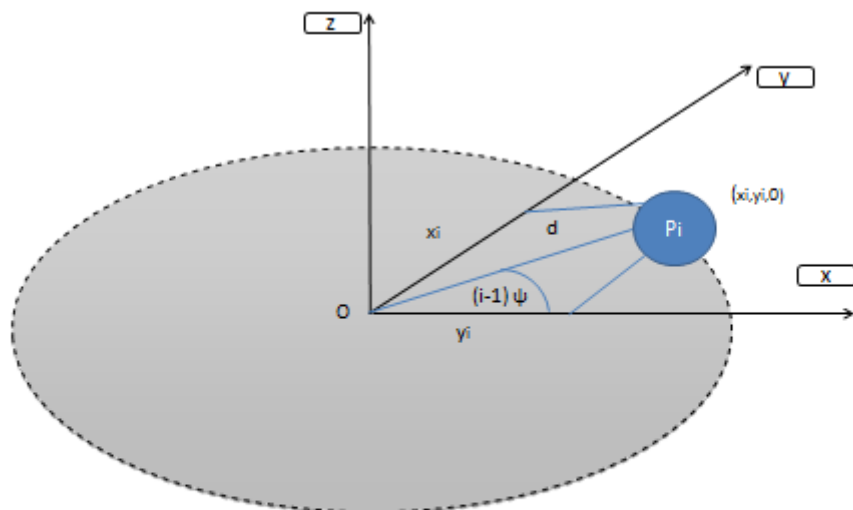
$$(P_1P_i) = \frac{a \sin(\nu - i + 1)\phi}{\sin \phi}$$



Σχήμα 2.5 Γωνίες μεταξύ των περιφερειακών σωμάτων του σχηματισμού

Τέλος από το σχήμα 2.6 οι διαστατές συντεταγμένες των περιφερειακών σωμάτων P_i στο συνοδικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις :

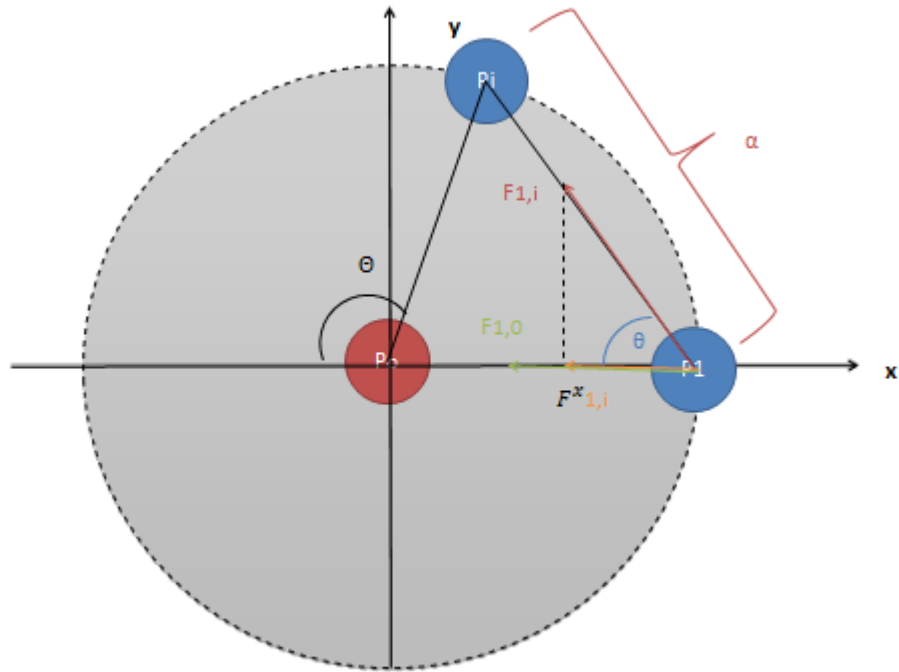
$$P_i(x_i, y_i, 0) = P_i(d \cos(i-1)\psi, d \sin(i-1)\psi, 0), i = 1, 2, \dots, v \quad (2.5)$$



Σχήμα 2.6 Συντεταγμένες περιφερειακών σωμάτων στο συνοδικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxyz

2.4 Δυνάμεις

Η προϋπόθεση για την ύπαρξη ευστάθειας στη διάταξη των $n+1$ σωμάτων, δηλαδή των n περιφερειακών σωμάτων και του κεντρικού σώματος, είναι το άθροισμα των ελκτικών δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε ένα από τα περιφερειακά σώματα από τα υπόλοιπα περιφερειακά και το κεντρικό να ισούται με την αδρανειακή δύναμη (φυγόκεντρο) που ασκείται σε αυτό το σώμα (σχήμα 2.7), δηλαδή να ισχύει ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα. Σημειώνουμε ότι μεταξύ δύο περιφερειακών σωμάτων ισχύει ο νόμος της Παγκόσμιας Έλξης με την κλασική Νευτώνεια μορφή του.



Σχήμα 2.7 Ανάλυση των δυνάμεων

Ορίζουμε $\vec{F}_{j,i}$ την ελκτική δύναμη που ασκεί το primary P_i στο P_j σώμα η οποία ισούται με:

$$\vec{F}_{j,i} = F_{j,i} \vec{p}_{j,i} \quad (2.6)$$

Όπου $\vec{p}_{j,i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $P_j P_i$ και $(P_j P_i)$ η απόσταση μεταξύ των σωμάτων P_j και P_i . Ειδικότερα, η δύναμη που ασκεί το i περιφερειακό σώμα στο σώμα αναφοράς P_1 ισούται με :

$$\vec{F}_{1,i} = \frac{k^2 m^2}{(P_1 P_i)^2} \vec{p}_{1,i} \quad (2.7)$$

όπου $\vec{p}_{1,i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $P_1 P_i$, $P_1 P_i$ είναι η απόσταση του i σώματος από το σώμα αναφοράς P_1 και k^2 η σταθερά του Gauss.

Αντικαθιστώντας τη σχέση 2.4 (για τις αποστάσεις) στη σχέση (2.7) έχουμε :

$$\vec{F}_{1,i} = \frac{k^2 m^2 \sin^2 \phi}{\alpha^2 \sin^2 [(\nu - i + 1)\phi]} \vec{p}_{1,i} \quad (2.8)$$

Συνεχίζουμε την ανάλυση υπολογίζοντας τη δύναμη $\vec{F}_{1,0}$ που ασκεί το κεντρικό σώμα P_0 μάζας m_0 στο σώμα P_1 μάζας m . Με βάση την έκφραση για το δυναμικό τύπου Schwarzschild και θεωρώντας $A=1$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,0} &= \frac{k^2 m_0 m}{(P_1 P_0)^3} \overrightarrow{P_1 P_0} + \frac{3Bk^2 m_0 m}{(P_1 P_0)^5} \overrightarrow{P_1 P_0} \\ \vec{F}_{1,0} &= -\frac{k^2 m_0 m}{d^2} \vec{i} - \frac{3Bk^2 m_0 m}{d^4} \vec{i} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση της παραμέτρου μάζας $\beta = m_0/m$ προκύπτει ότι :

$$\vec{F}_{1,0} = -\frac{k^2 m^2 \beta}{d^2} \vec{i} - \frac{3Bk^2 \beta m^2}{d^4} \vec{i} \quad (2.10)$$

Υπενθυμίζουμε ότι d είναι η ακτίνα του σχηματισμού και συνεπώς η απόσταση μεταξύ του κεντρικού σώματος και ενός περιφερειακού. Ισχύουν δε οι γεωμετρικές σχέσεις:

$$d = \frac{a}{2 \sin\left(\frac{\pi}{\nu}\right)} \quad (2.11)$$

$$P_1 P_i = \frac{a \sin(\nu - i + 1)\phi}{\sin \phi} \quad (2.12)$$

Από το σχήμα 2.7 κάνουμε ανάλυση της $\vec{F}_{1,i}$ στις επί μέρους συνιστώσες της και έχουμε :

$$\vec{F}_{1,i}^x = F_{1,i} \cos \theta (-\vec{i}) \quad (2.13)$$

Επιπλέον από το σχήμα 2.7 παρατηρούμε ότι οι γωνίες Θ και θ βαίνουν στο ίδιο τόξο με

$$\Theta = \pi - (i-1)\psi$$

και άρα

$$\theta = \frac{\Theta}{2} = \frac{\pi - (i-1)\psi}{2} = \frac{\pi}{2} - (i-1)\frac{\pi}{\nu} \quad (2.14)$$

Αντικαθιστώντας την (2.14) στη σχέση (2.13) έχουμε :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,i}^x &= F_{1,i} \cos \theta(-\vec{i}) \\ \vec{F}_{1,i}^x &= F_{1,i} \cos \left(\frac{\pi}{2} - (i-1)\frac{\pi}{\nu} \right) (-\vec{i}) \stackrel{(2.8)}{\Rightarrow} \\ \vec{F}_{1,i}^x &= \frac{k^2 m^2 \sin^2 \phi}{\alpha^2 \sin^2 [(v-i+1)\phi]} \cos \left(\frac{\pi}{2} - (i-1)\frac{\pi}{\nu} \right) (-\vec{i}), \\ \vec{F}_{1,i}^x &= -\frac{k^2 m^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\nu} \right) \sin \left[(i-1)\frac{\pi}{\nu} \right]}{\sin^2 \left[(i-1)\left(\frac{\pi}{\nu} \right) \right]} \vec{i}, \\ \vec{F}_{1,i}^x &= -\frac{k^2 m^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\nu} \right)}{\sin \left[(i-1)\left(\frac{\pi}{\nu} \right) \right]} \vec{i}, \dots, i = 1, 2, \dots, \nu \end{aligned} \quad (2.15)$$

Προκειμένου να διατηρείται ο σχηματισμός θα ισχύει για τις διανυσματικές προβολές των δυνάμεων στον άξονα Ox :

$$\sum_{i=2}^{\nu} \vec{F}_{1,i}^x + \vec{F}_{1,0} + (m d \omega^2) \vec{i} = \vec{0} \quad (2.16)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.16) τις (2.15) και (2.10) καταλήγουμε :

$$\frac{k^2 m^2}{\alpha^2} \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\nu} \right)}{\sin \left[(i-1)\left(\frac{\pi}{\nu} \right) \right]} \vec{i} + \frac{k^2 \beta m^2}{d^2} \vec{i} + \frac{3Bk^2 \beta m^2}{d^4} \vec{i} = (m d \omega^2) \vec{i} \quad (2.17)$$

Θέτουμε

$$\Lambda = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\nu}\right)}{\sin\left[(i-1)\left(\frac{\pi}{\nu}\right)\right]}, M = \frac{a}{d} = 2 \sin \frac{\pi}{\nu}, B = qa^2$$

όπου q είναι μια αδιάστατη ποσότητα που θα ονομάζουμε στο εξής παράμετρο του Schwarzschild. Έτσι έχουμε:

$$\frac{k^2}{a^2} m \Lambda + \frac{k^2 \beta m M^2}{a^2} + \frac{3k^2 \beta q m M^4}{a^2} = \omega^2 \frac{a}{M}$$

ή

$$\frac{k^2 m}{a^3 \omega^2} = \frac{1}{M(\Lambda + \beta M^2 + 3\beta q M^4)}$$

Και τελικά έχουμε

$$\frac{k^2 m}{a^3 \omega^2} = \frac{1}{\Delta} \quad (2.18)$$

Όπου

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2 + 3\beta q M^4)$$

Σύμφωνα με την (2.18) η ποσότητα Δ πρέπει να είναι πάντοτε θετική. Το γεγονός ότι οι ποσότητες β , Λ και M είναι πάντοτε θετικές, σημαίνει ότι η παράμετρος Schwarzschild q πρέπει να παίρνει τιμές τέτοιες ώστε να καθιστούν την Δ θετική.

2.5 Εξισώσεις της κίνησης του μικρού σώματος S στο αδρανειακό σύστημα

Ορίζουμε ακολούθως τα διανύσματα θέσης του μικρού σώματος S και των περιφερειακών σωμάτων P_i ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων Οξηζ :

$$S : \vec{r}_{0/A} = (\xi, \eta, \zeta)$$

$$P_i : \vec{R}_{i/A} = (\xi_i, \eta_i, 0)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε σαν σύμβολο το $\{ \}$ για ένα διάνυσμα που θέλουμε να το απεικονίζουμε σε μορφή πίνακα στήλη,

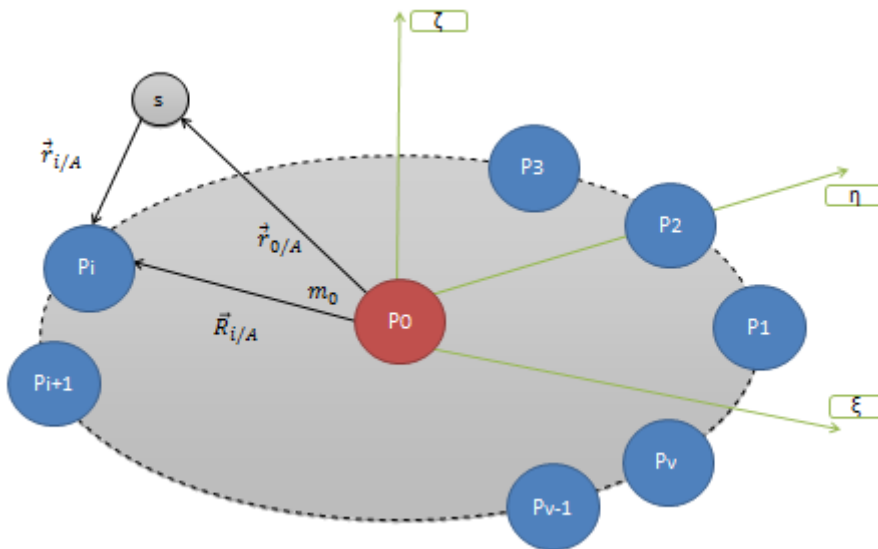
$$\{r_{0/A}\} = [\xi, \eta, \zeta]^T$$

και

$$\{R_{i/A}\} = [\xi_i, \eta_i, 0]^T$$

Τα σχετικά διανύσματα των θέσεων του σώματος m_s ως προς το σώμα m_i θα ισούνται (με βάση το σχήμα 2.8) με :

$$r_{i/A} = O\vec{P}_i - O\vec{S} = \vec{R}_{i/A} - \vec{r}_{0/A} = (\xi_i - \xi, \eta_i - \eta, -\zeta), i = 1, 2, \dots, \nu \quad (2.19)$$



Σχήμα 2.8 Αδρανειακό σύστημα αναφοράς Οξηζ και διανύσματα θέσης του μικρού σώματος

Έτσι θα έχουμε :

$$r_{i/A}^2 = (\xi_i - \xi)^2 + (\eta_i - \eta)^2 + \zeta^2, r_{0/A}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (2.20)$$

Οι εξισώσεις κίνησης του μικρού σώματος S καταστρώνονται με βάση τις ελκτικές δυνάμεις που ασκούνται πάνω του από το κεντρικό και τα περιφερειακά σώματα, και με βάση τον νόμο του Νεύτωνα καταλήγουμε :

$$m_s \ddot{\vec{r}}_{0/A} = \frac{k^2 m_s m_0}{r_{0/A}^3} (-\vec{r}_{0/A}) + \frac{3k^2 q a^2 m_s m_0}{r_{0/A}^5} (-\vec{r}_{0/A}) + k^2 m_s m \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_{i/A}^3} (\vec{r}_{i/A})$$

Διαιρώντας με τη μάζα του μικρού σώματος m_s και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης και αντικαθιστώντας το m_o με βm (όπως θέσαμε σε προηγούμενη ενότητα) έχουμε :

$$\ddot{\vec{r}}_{0/A} = \frac{k^2 m \beta}{r_{0/A}^3} (-\vec{r}_{0/A}) + \frac{3k^2 q a^2 m \beta}{r_{0/A}^5} (-\vec{r}_{0/A}) + k^2 m \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_{i/A}^3} (\vec{r}_{i/A}) \quad (2.21)$$

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική έκφραση των συντεταγμένων τους (σε μητρωική μορφή) έχουμε :

$$\left[\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta} \right]^T = k^2 m \begin{bmatrix} \frac{-\beta \xi}{r_{0/A}^3} - \frac{3q a^2 \beta \xi}{r_{0/A}^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\xi_i - \xi}{r_{i/A}^3} \\ \frac{-\beta \eta}{r_{0/A}^3} - \frac{3q a^2 \beta \eta}{r_{0/A}^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\eta_i - \eta}{r_{i/A}^3} \\ \frac{-\beta \zeta}{r_{0/A}^3} - \frac{3q a^2 \beta \zeta}{r_{0/A}^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{-\zeta}{r_{i/A}^3} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, \nu \quad (2.22)$$

Δηλαδή οι σχέσεις (2.19) και (2.22) εκφράζουν τις διανυσματικές εξισώσεις της κίνησης του σώματος S ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων.

2.6 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων της κίνησης στο αδρανειακό σύστημα

Οι εξισώσεις που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους ήταν εκφρασμένες σε φυσικά μεγέθη (αποστάσεις, ταχύτητες, μάζες, χρόνο) δηλαδή εκφρασμένες σε κάποιο σύστημα μονάδων (διαστατή τους μορφή).

Για να απλουστεύσουμε τις πράξεις και τους υπολογισμούς, χωρίς να επηρεάζονται τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του συστήματος προχωρούμε στη λεγόμενη αδιαστατοποίηση (normalization) των φυσικών μεγεθών. Στη διαδικασία αυτή, ουσιαστικά αυτό που κάνουμε είναι να χρησιμοποιούμε σαν νέα μονάδα μέτρησης μια ομοειδή ποσότητα που εκφράζεται κι αυτή στις ίδιες φυσικές μονάδες, έτσι ώστε ο λόγος του συγκεκριμένου φυσικού μεγέθους προς τη νέα φυσική μονάδα να δίνει

μια αδιάστατη ποσότητα (καθαρός αριθμός, χωρίς μονάδα). Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό επιτυγχάνουμε την επαναφορά των αποτελεσμάτων στα πραγματικά φυσικά διαστατά μεγέθη.

Στην προκειμένη περίπτωση χρησιμοποιούμε ως νέα μονάδα μέτρησης μήκους την απόσταση a μεταξύ δύο διαδοχικών περιφερειακών σωμάτων, ως μονάδα μάζας την μάζα m ενός περιφερειακού σώματος και ως μονάδα χρόνου τον χρόνο που απαιτείται για μια περιστροφή. Έτσι εισάγουμε τους μετασχηματισμούς :

$$\begin{aligned}\xi^* &= \frac{\xi}{\alpha}, \eta^* = \frac{\eta}{\alpha}, \zeta^* = \frac{\zeta}{\alpha}, m_0 = \beta m, \\ t^* &= \omega t = 1 \cdot t = t\end{aligned}\quad (2.23)$$

όπου β (όπως έχει οριστεί ήδη) είναι η παράμετρος μάζας, t^* ο μετασχηματισμένος χρόνος και ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής η οποία έχει επιλεγεί να είναι η μοναδιαία και άρα ο μετασχηματισμένος χρόνος t^* είναι ίδιος με τον χρόνο t χωρίς μονάδες μέτρησης.

Ο υπολογισμός του διανύσματος θέσης $\vec{r}_{0/A}$ του σώματος S προκύπτει με βάση τα αδιάστατα μεγέθη :

$$\vec{r}_{0/A} = (\xi, \eta, \zeta) = \alpha(\xi^*, \eta^*, \zeta^*) = \alpha \vec{r}_{0/A}^* \quad (2.24)$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε ως προς τον πραγματικό χρόνο t το παραπάνω διάνυσμα θέσης για την εύρεση της αδιάστατης ταχύτητας και της αδιάστατης επιτάχυνσης, δηλαδή :

$$\dot{\vec{r}}_{0/A} = \frac{d\vec{r}_{0/A}}{dt} = a\omega \dot{\vec{r}}_{0/A}^* \quad (2.25)$$

$$\ddot{\vec{r}}_{0/A} = \frac{d\dot{\vec{r}}_{0/A}}{dt} = a\omega^2 \ddot{\vec{r}}_{0/A}^* \quad (2.26)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο τα υπόλοιπα διαστατά διανύσματα του σχηματισμού μετασχηματίζονται σε αδιάστατα με βάση τις σχέσεις :

$$\vec{r}_{i/A} = a \vec{r}_{i/A}^* \quad (2.27)$$

και

$$\vec{R}_{i/A} = a\vec{R}_{i/A}^* \quad (2.28)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων από τη σχέση (2.20) :

$$r_{i/A}^{*2} = (\xi_i^* - \xi^*)^2 + (\eta_i^* - \eta^*)^2 + \zeta^{*2}, r_{0/A}^{*2} = \xi^{*2} + \eta^{*2} + \zeta^{*2} \quad (2.29)$$

Εισάγοντας τις παραπάνω μετασχηματισμένες εκφράσεις στις εξισώσεις κίνησης του σώματος S (2.21) και (2.22) προκύπτουν :

$$\alpha\omega^2\ddot{\vec{r}}_{0/A}^* = \frac{k^2m\beta}{\alpha^3r_{0/A}^{*3}}(-\alpha\vec{r}_{0/A}^*) + \frac{3k^2qa^2m\beta}{\alpha^5r_{0/A}^{*5}}(-\alpha\vec{r}_{0/A}^*) + k^2m\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{\alpha^3r_{i/A}^{*3}}(-\alpha\vec{r}_{i/A}^*)$$

Διαιρώντας με $\alpha\omega^2$ την παραπάνω σχέση και βγάζοντας κοινό παράγοντα στο δεξιό μέλος έχουμε :

$$\ddot{\vec{r}}_{0/A}^* = \frac{k^2m}{\omega^2\alpha^3}\left(-\frac{\beta}{r_{0/A}^{*3}}\vec{r}_{0/A}^* - \frac{3q\beta}{r_{0/A}^{*5}}\vec{r}_{0/A}^* + m_S\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{r_{i/A}^{*3}}\vec{r}_{i/A}^*\right) \quad (2.30)$$

Παραλείποντας από τη σχέση (2.30) τους αστερίσκους για ευκολία στη χρήση (αφού δεν αλλάζει κάτι) καταλήγουμε στις αδιάστατες εξισώσεις κίνησης του μικρού σώματος S ως προς το αδρανειακό σύστημα:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{0/A} &= \frac{k^2m}{\omega^2\alpha^3}\left(-\frac{\beta}{r_{0/A}^3}\vec{r}_{0/A} - \frac{3q\beta}{r_{0/A}^5}\vec{r}_{0/A} + \sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{r_{i/A}^3}\vec{r}_{i/A}\right) \Rightarrow \\ \ddot{\vec{r}}_{0/A} &= \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{\beta}{r_{0/A}^3}\vec{r}_{0/A} - \frac{3q\beta}{r_{0/A}^5}\vec{r}_{0/A} + \sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{r_{i/A}^3}\vec{r}_{i/A}\right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\{\ddot{\vec{r}}_{0/A}\} = [\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}]^T = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -\frac{\beta\xi}{r_{0/A}^3} - \frac{3q\beta\xi}{r_{0/A}^5} + \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\xi_i - \xi}{r_{i/A}^3} \\ -\frac{\beta\eta}{r_{0/A}^3} - \frac{3q\beta\eta}{r_{0/A}^5} + \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\eta_i - \eta}{r_{i/A}^3} \\ -\frac{\beta\zeta}{r_{0/A}^3} - \frac{3q\beta\zeta}{r_{0/A}^5} + \sum_{i=1}^{\nu}\frac{-\zeta}{r_{i/A}^3} \end{bmatrix}, i=1, 2, \dots, \nu \quad (2.32)$$

Η ποσότητα $(1/\Delta)=[(k^2 m/(\omega^2 \alpha^2))]$, όπως και τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{r}_{i/A}$ και $\vec{r}_{0/A}$ είναι αδιάστατα και παραλείποντας τους αστερίσκους έχουμε :

$$r_{i/A}^2 = (\xi_i - \xi)^2 + (\eta_i - \eta)^2 + \zeta^2, r_{0/A}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (2.33)$$

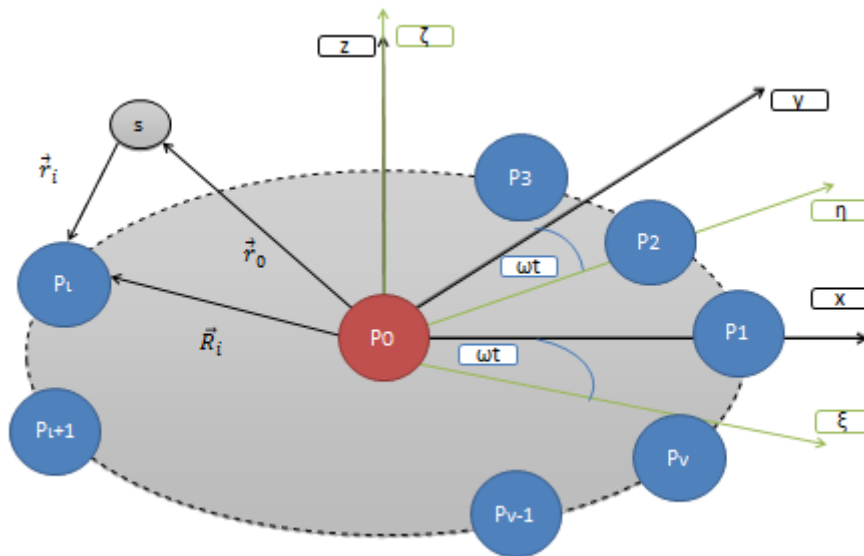
Τέλος, οι αδιάστατες συντεταγμένες του περιφερειακού primary P_i ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα, είναι:

$$P_i(x_i, y_i, 0) = P_i \left(\frac{\cos[(i-1)2\pi/\nu]}{2 \sin(\pi/\nu)}, \frac{\sin[(i-1)2\pi/\nu]}{2 \sin(\pi/\nu)}, 0 \right) \quad (2.34)$$

2.7 Αδιάστατες εξισώσεις της κίνησης στο περιστρεφόμενο σύστημα

Έστω $\vec{r}_{0/A} = (\xi, \eta, \zeta)$ το διάνυσμα θέσης του σώματος S ως προς το αδρανειακό σύστημα (A) και $\vec{r}_0 = (x, y, z)$ το διάνυσμα θέσης του σώματος S ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα και αντίστοιχα έστω $\vec{R}_{i/A} = (\xi_i, \eta_i, 0)$ το διάνυσμα θέσης των μεγάλων σωμάτων (primaries) ως προς το αδρανειακό σύστημα (A) και $\vec{R}_i = (x_i, y_i, 0)$ το διάνυσμα θέσης των σωμάτων αυτών ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα.

Έστω επίσης $\vec{r}_i = (x_i - x, y_i - y, -z), i=1,2,\dots,\nu$ τα σχετικά διανύσματα θέσης του μικρού σώματος S ως προς τα primaries στο περιστρεφόμενο σύστημα.



Σχήμα 2.9 Συνοδεύον σύστημα αναφοράς $Oxyz$ και διανύσματα θέσης του μικρού σώματος

Τότε θα ισχύει:

$$\vec{r}_0 = A\vec{r}_{0/A}$$

$$\vec{r}_{0/A} = A^T\vec{r}_0$$

Όπου A ο τετραγωνικός πίνακας στροφής του περιστρεφόμενου συστήματος $Oxyz$ ως προς το αδρανειακό σύστημα $O\xi\eta\zeta$ και A^T ο ανάστροφός του δηλαδή :

$$A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η γωνία στροφής είναι $\omega t = t$ ($\omega=1$).

Έτσι τα διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης του σώματος S σε μητρική μορφή δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$\{r_{0/A}\} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = A^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos t - y \sin t \\ x \sin t + y \cos t \\ z \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\{\dot{r}_{0/A}\} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \cos t - \dot{y} \sin t - x \sin t - y \cos t \\ \dot{x} \sin t + \dot{y} \cos t + x \cos t - y \sin t \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\{\ddot{r}_{0/A}\} = \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \cos t - \ddot{y} \sin t - 2\dot{x} \sin t - 2\dot{y} \sin t - x \cos t + y \sin t \\ \ddot{x} \sin t + \ddot{y} \cos t + 2\dot{x} \cos t - 2\dot{y} \sin t - x \sin t - y \cos t \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Επίσης τα αδιάστατα μέτρα των διανυσμάτων είναι ίσα ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς $r_{0/A} = r_0$ και $r_{i/A} = r_i$.

Έτσι, ο πολλαπλασιασμός των αδιάστατων εξισώσεων της κίνησης ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (2.31) επί τον πίνακα στροφής A έχει σαν αποτέλεσμα :

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-\beta\xi}{r_{0/A}^3} - \frac{3q\beta\xi}{r_{0/A}^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\xi_i - \xi}{r_{i/A}^3} \\ \frac{-\beta\eta}{r_{0/A}^3} - \frac{3q\beta\eta}{r_{0/A}^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\eta_i - \eta}{r_{i/A}^3} \\ \frac{-\beta\zeta}{r_{0/A}^3} - \frac{3q\beta\zeta}{r_{0/A}^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{-\zeta}{r_{i/A}^3} \end{bmatrix}$$

Με βάση τις σχέσεις (2.35), (2.36) και (2.37) επιτυγχάνεται η μετάβαση των αδιάστατων εξισώσεων κίνησης για το σώμα S στο περιστρεφόμενο σύστημα Oxyz

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\dot{y} - x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{-\beta x}{r_0^3} - \frac{3q\beta x}{r_0^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{x_i - x}{r_i^3} \\ \frac{-\beta y}{r_0^3} - \frac{3q\beta y}{r_0^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{y_i - y}{r_i^3} \\ \frac{-\beta z}{r_0^3} - \frac{3q\beta z}{r_0^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{-z}{r_i^3} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} = U_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} = U_y \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z} = U_z \end{aligned}} \quad (2.39)$$

Όπου,

$$\boxed{U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{q}{r_0^3} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right]} \quad (2.40)$$

και

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \\ r_0 &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

είναι τα μέτρα των διανυσμάτων θέσης του κεντρικού και των περιφερειακών σωμάτων αντίστοιχα. Επίσης,

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2 + 3\beta q M^4)$$

$$\Lambda = \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\nu}\right)}{\sin\left[(i-1)\left(\frac{\pi}{\nu}\right)\right]}, \quad M = \frac{a}{d} = 2 \sin \frac{\pi}{\nu}, \quad B = qa^2$$

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε επίσης και τις εκφράσεις των μερικών παραγώγων πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης U ως προς τις μεταβλητές x, y, z :

$$U_x = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial \left\{ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{q}{r_0^3} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right] \right\}}{\partial x} \Rightarrow$$

$$U_x = \frac{\partial \frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{\partial x} + \frac{\partial \left\{ \frac{1}{\Delta} \left[\beta \left(\frac{1}{r_0} + \frac{q}{r_0^3} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i} \right] \right\}}{\partial x} \Rightarrow$$

$$U_x = \frac{2x}{2} + \frac{1}{\Delta} \left[\beta \frac{\partial \left(\frac{1}{r_0} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{q}{r_0^3} \right)}{\partial x} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_i} \right)}{\partial x} \right]$$

Πιο αναλυτικά:

$$\frac{\partial r_0}{\partial x} = \frac{1 \left[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2 \right]^{\frac{1}{2}-1} \partial \left((x_0 - x)^2 \right)}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial r_0}{\partial x} = \frac{1 \left[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{2} (-2x) \Rightarrow \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial r_0}{\partial x} = -\frac{x}{r_0}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r_i} \right)}{\partial x} = \frac{r_i'}{r_i^2} = \frac{(x_i - x)}{r_i^2} = \frac{(x_i - x)}{r_i^3}$$

$$\frac{\partial r_0}{\partial x} = \frac{1 \left[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{2} (-2x) \Rightarrow \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial r_0}{\partial x} = -\frac{x}{r_0}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
U_x &= \frac{2x}{2} + \frac{1}{\Delta} \left[\beta \frac{\partial \left(\frac{1}{r_0} \right)}{\partial \chi} + \frac{\partial \left(\frac{q}{r_0^3} \right)}{\partial \chi} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_i} \right)}{\partial x} \right] \Rightarrow \\
U_x &= x + \frac{1}{\Delta} \left[\frac{0 - \beta \frac{\partial r_0}{\partial x}}{r_0^2} + \frac{-\beta q \frac{\partial r_0^3}{\partial x}}{r_0^6} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_i} \right)}{\partial x} \right] \Rightarrow \\
U_x &= x + \frac{1}{\Delta} \left[\frac{0 - \beta \frac{x}{r_0}}{r_0^2} + \frac{0 - \beta q \frac{3r_0^2}{1} \frac{\partial r_0}{\partial x}}{r_0^6} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{i=1}^{\nu} \frac{0 - \frac{\partial}{\partial x} r_i}{r_i^2} \right] \Rightarrow \\
U_x &= x + \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta x}{r_0^3} - \frac{3\beta q x}{r_0^5} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - x)}{r_i^3} \right] \Rightarrow \\
U_x &= x + \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta x}{r_0^3} - \frac{3\beta q x}{r_0^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - x)}{r_i^3} \right]
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Κατά αντιστοιχία προκύπτουν:

$$U_y = y + \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta y}{r_0^3} - \frac{3\beta q y}{r_0^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(y_i - y)}{r_i^3} \right] \tag{2.44}$$

$$U_z = -\frac{z}{\Delta} \left[\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta q}{r_0^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} \right] \tag{2.45}$$

$$U_{xx} = 1 + \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta x^2}{r_0^5} - \frac{3q\beta}{r_0^5} + \frac{15q\beta x^2}{r_0^7} - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} + 3 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - x)^2}{r_i^5} \right] \tag{2.46}$$

$$U_{yy} = 1 + \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta y^2}{r_0^5} - \frac{3q\beta}{r_0^5} + \frac{15q\beta y^2}{r_0^7} - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} + 3 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(y_i - y)^2}{r_i^5} \right] \tag{2.47}$$

$$U_{zz} = \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta z^2}{r_0^5} - \frac{3q\beta}{r_0^5} + \frac{15q\beta z^2}{r_0^7} - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} + 3 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{z^2}{r_i^5} \right] \quad (2.48)$$

$$U_{xy} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{3\beta xy}{r_0^5} + \frac{15q\beta yx}{r_0^7} + 3 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - x)(y_i - y)}{r_i^5} \right] \quad (2.49)$$

$$U_{xz} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{3\beta xz}{r_0^5} + \frac{15q\beta xz}{r_0^7} - 3 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - x)z}{r_i^5} \right] \quad (2.50)$$

$$U_{yz} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{3\beta yz}{r_0^5} + \frac{15q\beta yz}{r_0^7} - 3 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(y_i - y)z}{r_i^5} \right] \quad (2.51)$$

2.8 Ολοκλήρωμα της κίνησης (ολοκλήρωμα τύπου Jacobi)

Όπως ήδη έχει αναφερθεί (Κεφ. 1, παρ.1.6), ένα ολοκλήρωμα της κίνησης είναι μια σχέση της μορφής,

$$Q = (\vec{r}, \vec{r}, t) = C$$

όπου η τιμή του παραμένει σταθερή κατά μήκος μιας λύσης. Με τη χρήση τέτοιων ολοκληρωμάτων επιτυγχάνουμε τη μείωση των ανεξάρτητων μεταβλητών που υπάρχουν στο δυναμικό σύστημα. Ένα άλλο πλεονέκτημα χρήσης αυτού του είδους των ολοκληρωμάτων είναι ότι σε προβλήματα όπου δεν είναι δυνατή η εύρεση αναλυτικών λύσεων και ο μόνος τρόπος είναι η επίλυσή τους με αριθμητικές μεθόδους με τη χρήση αυτών των ολοκληρωμάτων ελέγχουμε την ακρίβεια των αριθμητικών υπολογισμών.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ο υπολογισμός ενός τέτοιου ολοκληρώματος γίνεται με τον πολλαπλασιασμό των τριών σχέσεων του συστήματος της σχέσης (2.39) με τις αντίστοιχες πρώτες παραγώγους των τριών μεταβλητών (x, y, z) . Ειδικότερα, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση της (2.39) με \dot{x} , τη δεύτερη με \dot{y} και την τρίτη με \dot{z} , καταλήγοντας στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων :

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{x}\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} \\ \ddot{y} + 2\dot{y}\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z}\end{aligned}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις και ολοκληρώνοντας, λαμβάνουμε την σχέση:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U(x, y, z) - C \quad (2.52)$$

όπου C είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης. Επειδή το ολοκλήρωμα αυτό έχει παραγώγους των μεταβλητών κατά μία τάξη μικρότερη από την τάξη των διαφορικών εξισώσεων κίνησης είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα. Και επιπλέον επειδή μοιάζει με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα του περιορισμένου προβλήματος των τριών σωμάτων, είναι τύπου Jacobi. Η σταθερά C συχνά αναφέρεται και ως σταθερά του Jacobi.

2.9 Παράμετροι του προβλήματος

Από την ανάλυση που προηγήθηκε, προκύπτει ότι το δυναμικό σύστημα χαρακτηρίζεται από τρεις παραμέτρους: (1) το πλήθος ν των περιφερειακών σωμάτων, (2) την παράμετρο $\beta = m_0/m$ του λόγου της μάζας του κεντρικού σώματος m_0 προς τη μάζα m ενός περιφερειακού και (3) τον συντελεστή q της "διαταραχής" του Νευτώνειου πεδίου του κεντρικού σώματος P_0 που εισάγει ο τροποποιημένος τύπος του δυναμικού Schwarzschild. Όσον αφορά στις τιμές που μπορούν να πάρουν οι παράμετροι αυτές, η παράμετρος ν παίρνει πάντοτε θετικές ακέραιες τιμές μεγαλύτερες της μονάδας ($\nu \in \mathbb{N} - \{1\}$), όπου \mathbb{N} το σύνολο των φυσικών αριθμών), η παράμετρος β παίρνει πάντα θετικές πραγματικές τιμές ($\beta > 0, \beta \in \mathbb{R}^+$), ενώ η παράμετρος q μπορεί να πάρει πραγματικές τιμές, θετικές ή αρνητικές (στις περιπτώσεις που τα μεγάλα σώματα είναι πηγές ακτινοβολίας) ($q \in \mathbb{R}$) αρκεί η ποσότητα Δ να παραμένει θετική. Σημειώνουμε επίσης ότι, σύμφωνα με τον τρόπο αδιαστατοποίησης που περιγράφηκε προηγουμένως, η αδιάστατη ακτίνα $R_\nu = d/a$ του κύκλου των primaries επηρεάζεται μόνο από την παράμετρο ν .

Κεφάλαιο 3

Καμπύλες και επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας – παραμετρική μεταβολή

3.1 Εισαγωγή

Σε πολλές κατηγορίες προβλημάτων τα οποία χαρακτηρίζονται ως αυτόνομα, οι εξισώσεις κίνησης που τα περιγράφουν δεν περιέχουν άμεσα το χρόνο. Τα συστήματα αυτά διαθέτουν ένα ολοκλήρωμα της κίνησης δηλαδή μια συνάρτηση που διατηρεί σταθερή την τιμή της σε όλη τη διάρκεια της κίνησης. Τα ολοκληρώματα αυτά χρησιμοποιούνται επίσης για τον καθορισμό των περιοχών λύσεων του προβλήματος, αλλά και για τον έλεγχο της ακρίβειας των αριθμητικών υπολογισμών.

3.2 Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας

Μια κατηγορία δυναμικών συστημάτων με δύο βαθμούς ελευθερίας κίνησης χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη ενός ολοκληρώματος της κίνησης τύπου Jacobi, που έχει τη μορφή :

$$T = U(x, y) - C \quad (3.1)$$

όπου T η κινητική ενέργεια, U η δυναμική συνάρτηση και C μια σταθερά που συνήθως αναφέρεται ως σταθερά του Jacobi. Στην περίπτωση αυτή και δεδομένου ότι η κινητική ενέργεια είναι θετική ή μηδέν, ορίζουμε ως καμπύλες μηδενικής ταχύτητας εκείνες τις καμπύλες του επιπέδου xy , οι οποίες οριοθετούν τις περιοχές, όπου είναι δυνατή και επομένως πραγματοποιήσιμη η κίνηση ($T > 0$). Δηλαδή καθορίζουν τις περιοχές ύπαρξης των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων, που περιγράφουν την κίνηση.

Στις οριακές αυτές καμπύλες ισχύει ότι $T=0$, δηλαδή πάνω σε αυτές ισχύει η σχέση

$$U(x, y) = C \quad (3.2)$$

3.3 Ιδιότητες των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας

Όπως αναφέρει ο Szebehely (1967) οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας είναι ισοταχείς, ισοενεργειακές, ενώ δύο κλάδοι μιας καμπύλης που χαρακτηρίζονται από την ίδια σταθερά C μπορεί να τέμνονται αλλά μόνο σε σημεία ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας που χαρακτηρίζονται από διαφορετικές σταθερές C , δεν μπορούν να τέμνονται. Αν δεν υπάρχει καμπύλη μηδενικής ταχύτητας για συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς C , τότε η κίνηση είναι παντού δυνατή (στο επίπεδο), ενώ αν στο εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης μηδενικής ταχύτητας η κινητική ενέργεια είναι θετική, τότε η κίνηση παγιδεύεται μέσα σε αυτήν.

Για να υπάρχει συμμετρία των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας ως προς έναν από τους άξονες συντεταγμένων, θα πρέπει η συνάρτηση $U(x,y)$ να διατηρεί τη μορφή της κάτω από τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συμμετρίας που εφαρμόζεται στις συντεταγμένες της.

Αν στην επίπεδη κίνηση και στους άξονες x,y θεωρήσουμε και ένα τρίτο άξονα που μετράει τις τιμές της σταθεράς C , τότε στο τριαξονικό αυτό σύστημα παίρνουμε επιφάνειες $C=C(x,y)$ που ονομάζονται επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας αλλά που δεν πρέπει να τις συγχέουμε με τις καθαυτό επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας που αφορούν την κίνηση στον τρισδιάστατο χώρο x,y,z , όπου ισχύουν παρόμοιες ιδιότητες με αυτές που προαναφέραμε.

3.4 Σχεδίαση και παραμετρική μεταβολή των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας

Για μια συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς $C=C_a$ οι ισοενεργειακές καμπύλες λαμβάνονται από την τομή της επιφάνειας $C=C(x,y)$ με το επίπεδο που είναι παράλληλο στο επίπεδο xy και τέμνει τον άξονα των C στην τιμή $C=C_a$. Έτσι οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας που παρουσιάζονται στα παρακάτω διαγράμματα είναι ουσιαστικά το αποτέλεσμα της επαλληλίας των καμπύλων που λαμβάνονται από τις τομές αυτές για διάφορες τιμές της σταθεράς C . Οι καμπύλες αυτές δείχνουν τον

τοπογραφικό χάρτη της συνάρτησης U και χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη των θέσεων ισορροπίας στο επίπεδο xy .

Στο Παράρτημα παρουσιάζονται οι κώδικες για τη σχεδίαση των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας στο Mathematica για την περίπτωση της επίπεδης κίνησης του μικρού σώματος.

Στο παρόν κεφάλαιο χρησιμοποιώντας τους κώδικες αυτούς θα σχεδιάσουμε και στη συνέχεια θα μελετήσουμε παραμετρικά τις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας και τις επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας για διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων ν , β και q . Ο στόχος είναι να εκτιμήσουμε την επίδραση που έχει ξεχωριστά η κάθε παράμετρος στη μορφή των καμπυλών μηδενικής ταχύτητας και στη μορφή των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας

Τέλος θα επιχειρήσουμε μια σύγκριση του δυναμικού τύπου Schwarzschild με την περίπτωση του δυναμικού τύπου Manev για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων ν , β και q (ή e) αντίστοιχα.

Όπως αναφέραμε πιο πάνω, τα δίκτυα των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας αποκαλύπτουν εκτός των άλλων και τις θέσεις ισορροπίας του μικρού σώματος, έννοια στην οποία θα αναφερόμαστε στο παρόν κεφάλαιο παρότι η αναλυτική παρουσίαση για τον εντοπισμό, τον αριθμητικό προσδιορισμό, τη μελέτη της ευστάθειας και την παραμετρική εξέλιξη των θέσεων αυτών θα γίνει στο Κεφάλαιο 5.

3.5 Νευτώνεια δυναμικά ($q=0$ και $\beta \neq 0$)

Για την πληρότητα της μελέτης του προβλήματος και για να υπάρχει μια βάση σύγκρισης των αποτελεσμάτων, θα αναφερθούμε με συντομία στην παράγραφο αυτή στην περίπτωση με αδιατάρακτα Νευτώνεια δυναμικά, δηλαδή στην περίπτωση όπου η παράμετρος Schwarzschild $q=0$.

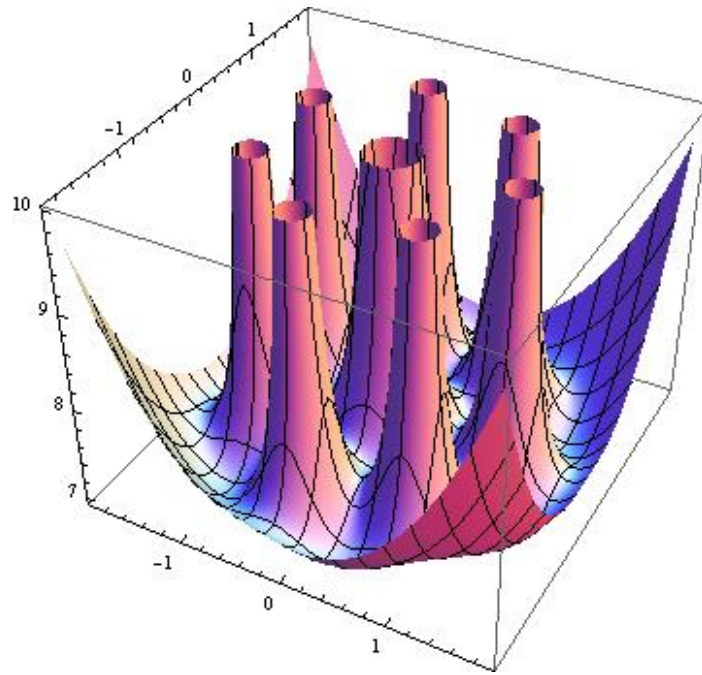
Στο σχήμα 3.1 έχει σχεδιασθεί η συνάρτηση $C=C(x,y)$ (ο κατακόρυφος άξονας μετράει τις τιμές της σταθεράς C), διαπιστώνουμε ότι η διαμορφούμενη επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας εμφανίζει «καμινάδες» οι οποίες δημιουργούνται γύρω από κάθε πρωτεύον σώμα (primary) και αναπτύσσονται θεωρητικά στο $C \rightarrow \infty$ με τις

εγκάρσιες διαστάσεις των καμινάδων να τείνουν ασυμπτωτικά προς κάποιες οριακές τιμές. Όμως ο λόγος της εγκάρσιας διάστασης της κεντρικής καμινάδας προς την αντίστοιχη μιας περιφερειακής διατηρείται για κάθε C σταθερός και ίσος προς την παράμετρο β . Η επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας, όπως είναι γνωστό, οριοθετεί την (ή τις) περιοχή(ες) όπου η κίνηση είναι επιτρεπτή από αυτήν όπου αυτή δεν είναι επιτρεπτή. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η κίνηση είναι επιτρεπτή μέσα στις καμινάδες και κάτω από την επιφάνεια όπου με απλούς υπολογισμούς διαπιστώνεται ότι εκεί η κινητική ενέργεια είναι θετική. Αντίθετα έξω από τις καμινάδες και στην περιοχή που εκτείνεται πάνω από την επιφάνεια, η κίνηση δεν επιτρέπεται, αφού εκεί η κινητική ενέργεια παίρνει αρνητικές τιμές.

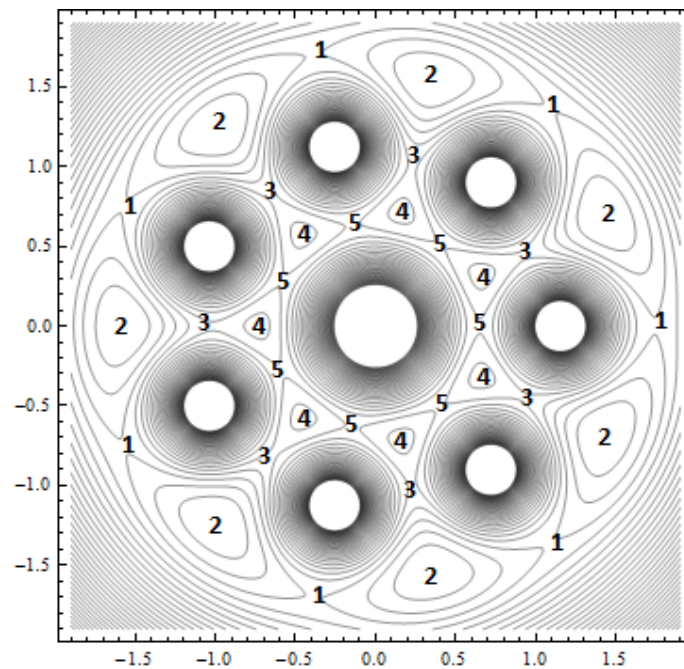
Παρατηρούμε ακόμη ότι η επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας παρουσιάζει τα ίδια στοιχεία συμμετρίας με αυτά του σχηματισμού των μεγάλων σωμάτων (primaries), δηλαδή συμμετρία σε στροφή $2\pi/n$ περί τον κατακόρυφο άξονα C , καθώς και συμμετρία ως προς τους άξονες x, y αντίστοιχα.

Το σχήμα 3.2 περιλαμβάνει τις προβολές των τομών της επιφάνειας αυτής για διάφορες τιμές του C , πάνω στο επίπεδο xy . Σημειώνουμε ότι η κίνηση του μικρού σώματος επιτρέπεται στις εμφανιζόμενες λευκές περιοχές γύρω από τα μεγάλα σώματα (περιοχές 1,2,3,4 και 5) καθώς και έξω από την ισοενεργειακή μεγάλη κλειστή καμπύλη που περιβάλλει όλα τα μεγάλα σώματα.

Παρατηρώντας τα δύο σχήματα 3.1 και 3.2, διαπιστώνουμε τη βασική επίδραση της παραμέτρου μάζας β στη διαμόρφωση της καμινάδας που περιβάλλει το κεντρικό πρωτεύον σώμα. Επειδή, όπως ήδη αναφέραμε, η παράμετρος αυτή εκφράζεται ως ο λόγος $\beta = m_0/m$ και κατά συνέπεια εκφράζει το πόσες φορές η κεντρική μάζα είναι μεγαλύτερη (ή μικρότερη) από μία περιφερειακή, όταν $\beta > 1$ σημαίνει ότι η περιοχή «επιρροής» του κεντρικού σώματος θα είναι β φορές μεγαλύτερη από μία περιφερειακή, άρα και η διαμορφούμενη καμινάδα γύρω από το κεντρικό σώμα θα είναι β φορές ευρύτερη από μία περιφερειακή. Προφανώς, το ακριβώς αντίθετο θα συμβαίνει όταν η παράμετρος $\beta < 1$. Τέλος, όταν $\beta = 1$ τότε όλες οι καμινάδες που αναπτύσσονται είτε γύρω από ένα περιφερειακό σώμα, είτε γύρω από το κεντρικό, θα είναι ίδιες.



Σχήμα 3.1 Επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας $C=C(x,y)$ για $v=7$, $\beta=2$ και $q=0$ (βαρυτική περίπτωση) (ο κατακόρυφος άξονας μετράει τις τιμές της σταθεράς C)



Σχήμα 3.2 Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας για $v=7$, $\beta=2$ και $q=0$ (βαρυτική περίπτωση). Οι αριθμοί επισημαίνουν την ύπαρξη θέσεων ισορροπίας στα σημεία αυτά

Ένα επιπλέον στοιχείο που μας αποκαλύπτουν τα διαγράμματα μηδενικής ταχύτητας είναι οι θέσεις ισορροπίας στο επίπεδο xy στις οποίες θα αναφερθούμε αναλυτικότερα στο κεφάλαιο 5. Προς το παρόν μπορούμε να πούμε ότι οι θέσεις ισορροπίας στο επίπεδο αυτό κατανέμονται σε ιδεατές περιφέρειες ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το κέντρο του σχηματισμού, τις οποίες ονομάζουμε ζώνες ισορροπίας. Σε κάθε ζώνη εμφανίζονται n ισαπέχουσες θέσεις ισορροπίας που είναι δυναμικά ισοδύναμες δηλαδή χαρακτηρίζονται από την ίδια ενέργεια και ευστάθεια (Kalvouridis, 1998). Συνεπώς παρουσιάζουν την ίδια συμμετρία στο επίπεδο xy με αυτήν του σχηματισμού. Στο σχήμα 3.2 έχουμε σημειώσει με αριθμούς τις θέσεις ισορροπίας για την περίπτωση $n=7$ και $\beta=2$. Όλες οι θέσεις που φέρουν τον ίδιο αριθμό ανήκουν στην ίδια ζώνη ισορροπίας. Στην προκειμένη περίπτωση υπάρχουν πέντε ζώνες ισορροπίας. Όμως το πλήθος των ζωνών αυτών εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου μάζας β (για τη Νευτώνεια περίπτωση). Όπως έχει βρεθεί (Kalvouridis, 1998; Κρουσταλλούδη, 2006; Croustalloudi & Kalvouridis, 2007; κ.λ.π) στα Νευτώνεια δυναμικά και για κάθε τιμή της παραμέτρου n υπάρχει μια οριακή τιμή της παραμέτρου μάζας $\beta=\beta_{op}^1$ όπου οι ζώνες αυτές, μεταπίπτουν από πέντε σε τρεις. Έτσι, όταν $\beta<\beta_{op}$ το πλήθος των ζωνών ισορροπίας είναι πέντε και ο συνολικός αριθμός των θέσεων ισορροπίας είναι $5n$, ενώ όταν $\beta>\beta_{op}$ οι ζώνες ισορροπίας είναι τρεις και ο συνολικός αριθμός των θέσεων ισορροπίας είναι $3n$. Για την περίπτωση $n=7$ και $\beta=2$ η οριακή τιμή της παραμέτρου μάζας για $n=7$ είναι $\beta_{op} = 3,08$ και επομένως αναμένουμε να υπάρχουν πέντε ζώνες ισορροπίας. Στα σχήματα 5.6 και 5.7 του κεφαλαίου 5 απεικονίζουμε τον γενικό τρόπο διάταξης και κατανομής των θέσεων ισορροπίας και για τις δύο περιπτώσεις. Σημειώνουμε επίσης ότι οι θέσεις ισορροπίας είτε διαμορφώνονται πάνω στα σημεία τομής δύο ισοενεργειακών κλάδων των καμπύλων, είτε εμφανίζονται ως εκφυλιστικά σημεία κάποιων κλειστών κλάδων. Αυτό προκύπτει και επιβεβαιώνεται από τις γενικές ιδιότητες των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας (βλ. παραγ.3.3).

¹ Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας θα υιοθετήσουμε τον συμβολισμό β_{op} και q_{op} και τον όρο «οριακή τιμή» για τον χαρακτηρισμό των τιμών διακλάδωσης του πλήθους των ζωνών ισορροπίας προκειμένου να τις διακρίνουμε από τις τιμές q_{cr} (κρίσιμες τιμές) που θα συναντήσουμε στο κεφάλαιο 5, μηδενίζουν την ποσότητα Δ και διαχωρίζουν την περιοχή των αποδεκτών τιμών της παραμέτρου q για ύπαρξη λύσης από τις μη αποδεκτές. Ενίοτε στη Νευτώνεια περίπτωση η β_n συμβολίζεται και ως l_n .

Περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με τις θέσεις ισορροπίας και την ευστάθειά τους θα δοθούν στο κεφάλαιο 5.

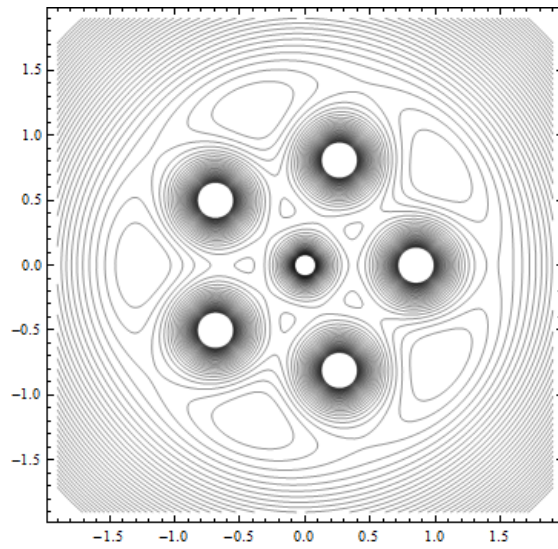
3.6 Περίπτωση δυναμικού τύπου Schwarzschild για $q>0$ και $\beta\neq 0$

Οι περιπτώσεις του δυναμικού τύπου Schwarzschild με θετική παράμετρο q , όπως θα δούμε στην παράγραφο αυτή, δεν διαφέρουν ποιοτικά από τις προηγούμενες περιπτώσεις (των Νευτώνειων δυναμικών) κυρίως όσον αφορά τις μορφές των καμπύλων και των επιφανειών μηδενικής ταχύτητας.

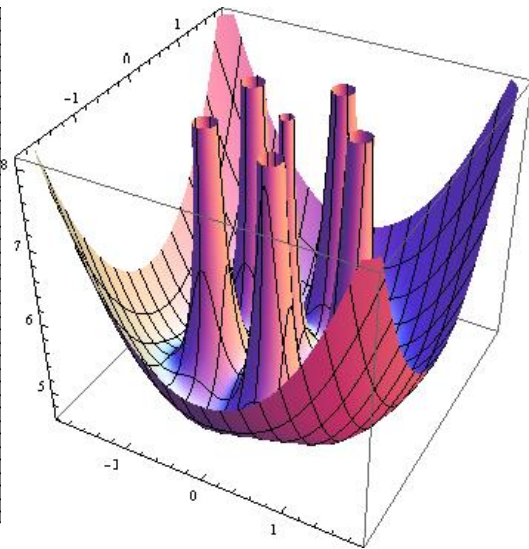
Οι μικρές παρατηρούμενες αποκλίσεις από τη Νευτώνεια συμπεριφορά, οφείλονται στην παρουσία του διαταρακτικού όρου που εισάγει το δυναμικό τύπου Schwarzschild. Σε κάθε περίπτωση η επίδραση της παραμέτρου β σαφώς υπερτερεί από την αντίστοιχη της παραμέτρου q .

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ενδεικτικά κάποια διαγράμματα που ελήφθησαν για $q>0$ και διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων β και ν . Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε περιπτώσεις με $\nu=5, 7$ και $\beta>1$ ή $\beta<1$. Οι λευκές κλειστές περιοχές που εμφανίζονται γύρω από τα πρωτεύοντα σώματα (στα σχήματα δεν σημειώνεται η θέση τους αλλά εξυπακούεται) στα δίκτυα των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας, είναι περιοχές επιτρεπτής κίνησης και συνεπώς για μια τιμή της C αποτελούν περιοχές «παγίδευσης» του μικρού σώματος.

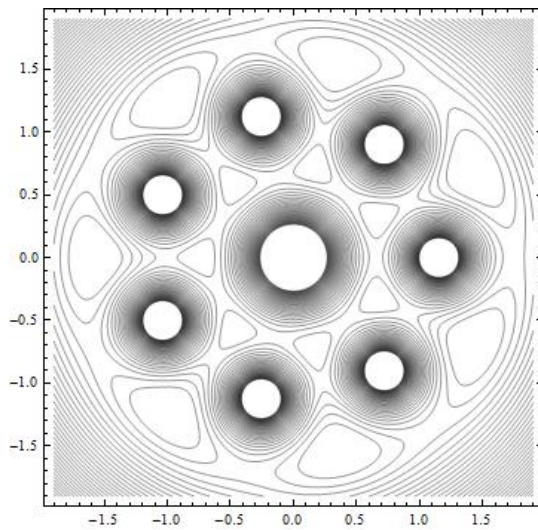
Στο σχήμα 3.3α παρουσιάζονται οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας, ενώ στο 3.3β η επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας για την περίπτωση $\nu=5$, $\beta=0.5$ και $q=0.01$. Παρατηρούμε ότι η κεντρική καμινάδα είναι μισή σε μέγεθος από τις περιφερειακές. Στο σχήμα 3.3γ παρουσιάζονται οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας, ενώ στο 3.3δ η επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας για την περίπτωση $\nu=7$, $\beta=2$ και $q=0.01$.



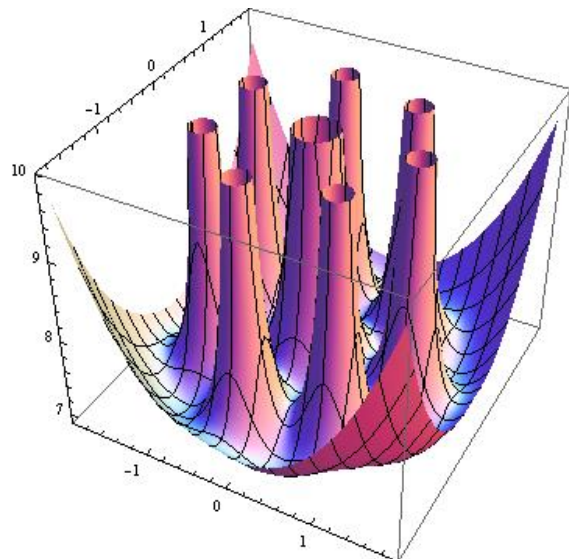
(α)



(β)



(γ)



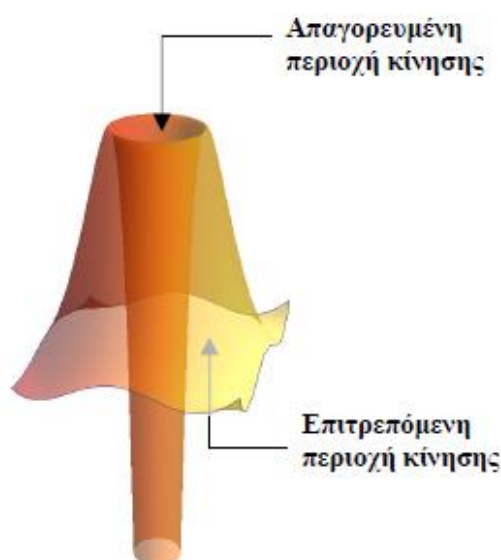
(δ)

Σχήμα 3.3 (α) Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας και (β) επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας για $\nu=7$, $\beta=0.5$, $q=0.01$. (γ) Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας και (δ) επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας για $\nu=7$, $\beta=2$ και $q=0.01$.

3.7 Περίπτωση δυναμικού τύπου Schwarzschild για $q < 0$ και $\beta \neq 0$

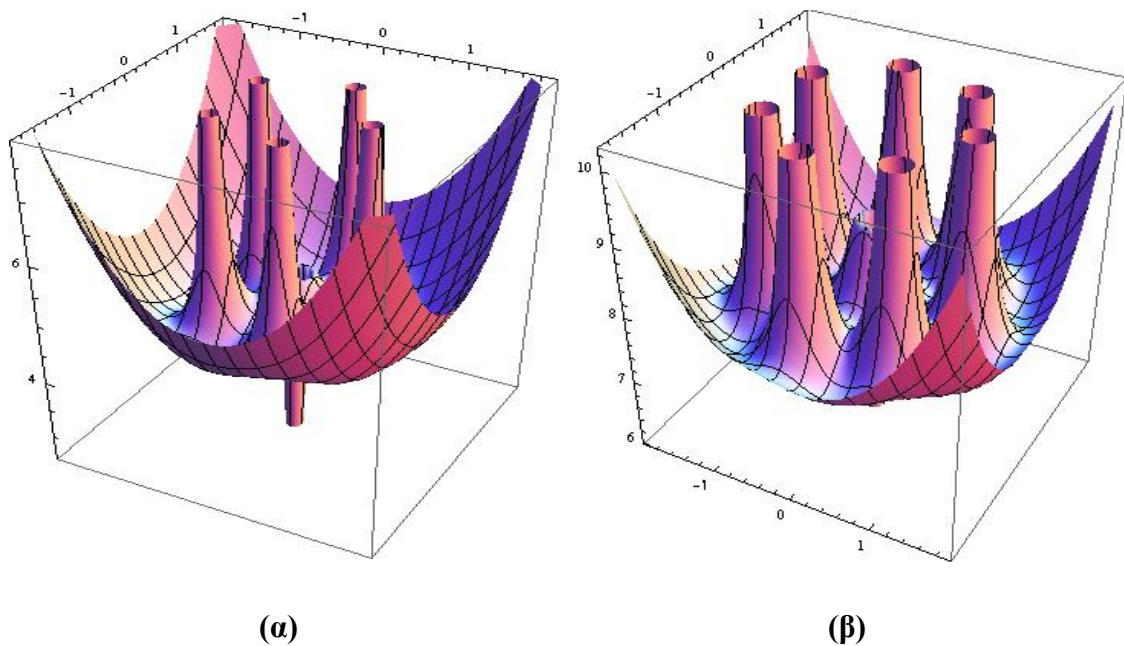
Ενώ όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, όταν $q > 0$ δεν σημειώνονται ποιοτικές αποκλίσεις από τη βαρυτική περίπτωση, εντούτοις στις περιπτώσεις του δυναμικού τύπου Schwarzschild με $q < 0$ (περίπτωση ταυτόχρονης άσκησης από το μεγάλο σώμα στο μικρό σώμα πίεσης ακτινοβολίας), τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται σημαντικά. Η βασικότερη διαφορά αφορά την καμινάδα που περιβάλλει το κεντρικό πρωτεύον σώμα (υπενθυμίζουμε ότι το σώμα αυτό δημιουργεί δυναμικό τύπου Schwarzschild). Μόλις η q γίνει αρνητική, η επιφάνεια αυτή παρουσιάζει μία αναδίπλωση προς το εσωτερικό της, το χείλος της οποίας εμφανίζεται σε πολύ υψηλές τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C όταν οι απόλυτες τιμές της παραμέτρου q είναι πολύ μικρές και χαμηλώνει όσο οι απόλυτες τιμές της q μεγαλώνουν μέχρις ότου να ολοκληρωθεί η πλήρης καταβύθιση της καμινάδας (σχήμα 3.4). Όπως θα δούμε αναλυτικότερα στο Κεφάλαιο 5, η εξέλιξη αυτή έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση δύο επιπλέον ζωνών ισορροπίας κατά μήκος του χείλους της αναδίπλωσης, και μεγάλες διαφοροποιήσεις ως προς την εμφάνιση ή την εξαφάνιση κάποιων ζωνών οι οποίες ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων q και β (για κάθε συγκεκριμένη τιμή της ν) μπορεί να είναι επτά, πέντε, ή τρεις. Επιπλέον, στα δίκτυα των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας που αναπτύσσονται γύρω από την περιοχή του πρωτεύοντος κεντρικού σώματος παρατηρούμε τη διαμόρφωση μιας νέας μικρής σε διαστάσεις κλειστής περιοχής απαγορευμένης κίνησης που περιβάλλει το κεντρικό πρωτεύον σώμα η οποία με τη σειρά της περιβάλλεται από μία ευρύτερη δακτυλιοειδή περιοχή επιτρεπτής κίνησης. Αυτή η περιοχή δημιουργείται από τα τοιχώματα της αναδιπλούμενης κεντρικής καμινάδας της επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας, αφού όπως είναι γνωστό, οι επιτρεπόμενες για την επίπεδη κίνηση λύσεις ($T > 0$) στην περιοχή του χώρου xyC βρίσκονται: (1) κάτω από τη σχηματιζόμενη επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας, (2) στο εσωτερικό των διαμορφούμενων καμινάδων γύρω από κάθε περιφερειακό πρωτεύον σώμα, (3) μεταξύ της εξωτερικής επιφάνειας της αναδιπλούμενης κεντρικής καμινάδας και της περιοχής που βρίσκεται κάτω από το χείλος της αναδίπλωσης. Σημειώνουμε εδώ, ότι μια παρόμοια εξέλιξη βρέθηκε και μελετήθηκε και στην περίπτωση του δυναμικού Manev με αρνητική παράμετρο e (Φακής, 2014). Στο κεφάλαιο 5 θα παρουσιάσουμε πιο αναλυτικά την εξέλιξη-

διαμόρφωση των επιτρεπτών και μη επιτρεπτόν περιοχών κίνησης για διάφορες τιμές της σταθεράς C (Σχήμα 5.19).



Σχήμα 3.4 Λεπτομέρεια των περιοχών επιτρεπτής και απαγορευμένης κίνησης κοντά στην αναδίπλωση για αρνητικές τιμές της παραμέτρου Schwarzschild q

Όλα αυτά δημιουργούν μια σημαντικά διαφοροποιημένη εικόνα τόσο στα δίκτυα των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας, όσο και στις επιφάνειες $C=C(x,y)$. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5, η διαφοροποίηση αυτή δεν εντοπίζεται μόνο στις καμπύλες και στις επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας αλλά και στις θέσεις ισορροπίας αφού νέες ζώνες εμφανίζονται στο επίπεδο xy , όπως επίσης και νέες θέσεις ισορροπίας επάνω στον άξονα των z . Όσον αφορά τις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας και τις επιφάνειες κοντά στα περιφερειακά σώματα, αυτές όπως είναι φυσικό, επηρεάζονται πολύ λιγότερο, αφού στη γειτονιά τους υπερτερεί το Νευτώνειο πεδίο των σωμάτων αυτών. Στο σχήμα 3.5 παρουσιάζουμε κάποιες περιπτώσεις για $q < 0$ και για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και ν .



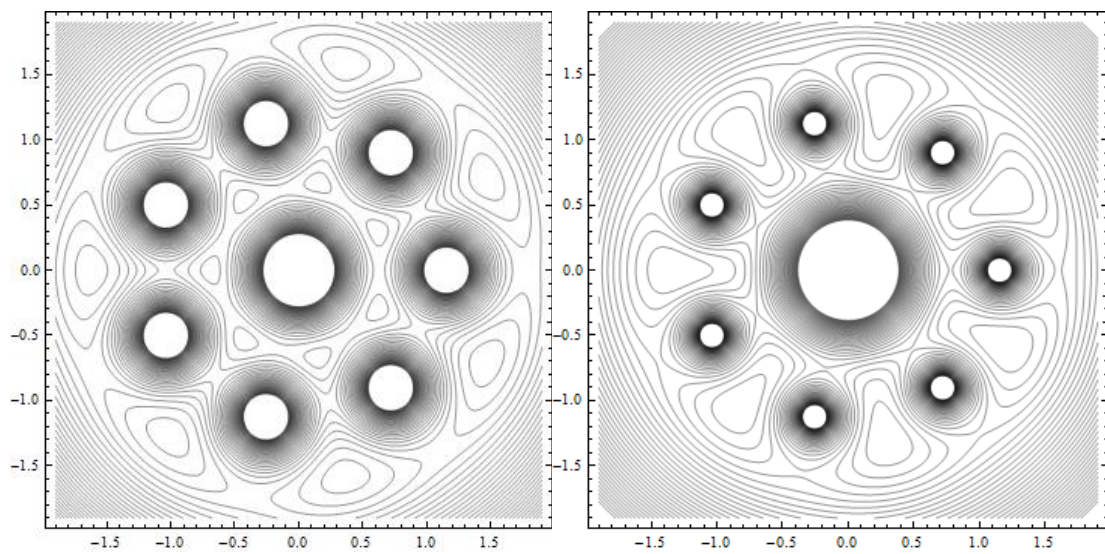
Σχήμα 3.5 Επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας: (α) για $v=5$, $\beta=2$ και $q=-0.1$, (β) για $v=7$, $\beta=2$ και $q=-0.1$

3.8 Επίδραση των παραμέτρων β και q στη διαμόρφωση των δικτύων των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας

Στην παράγραφο αυτή θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε την επίδραση των δύο παραμέτρων του προβλήματος β και q στη διαμόρφωση και εξέλιξη των δικτύων των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας. Για να καταστήσουμε σαφέστερη την επίδραση αυτή θα διατηρούμε κάθε φορά σταθερές τις δύο από τις τρεις παραμέτρους v , β , q και θα μεταβάλλουμε την τρίτη.

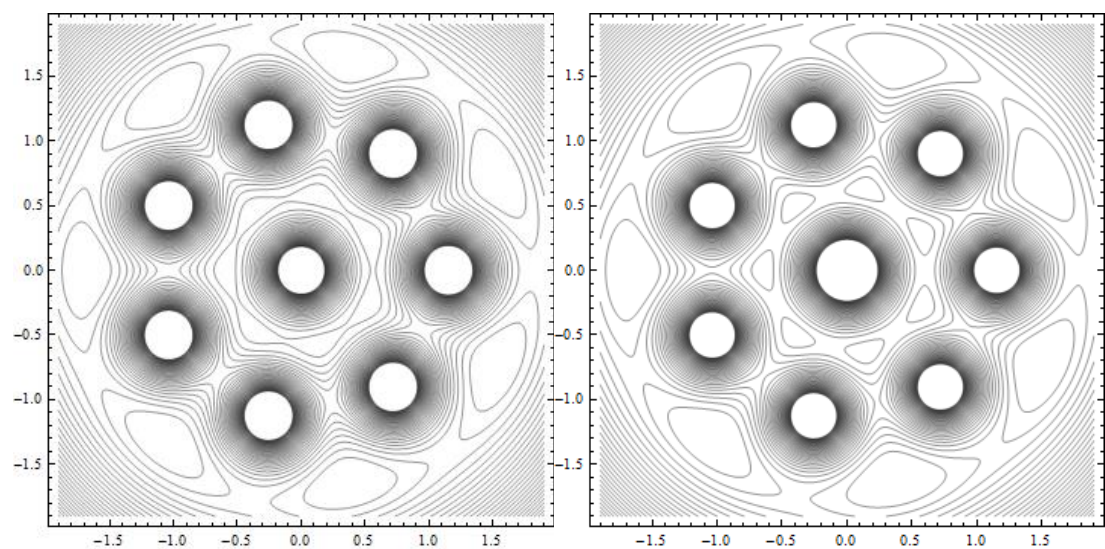
Στο σχήμα 3.6 παραθέτουμε διαγράμματα καμπύλων μηδενικής ταχύτητας από τα οποία τα μεν 3.6α και 3.6β σχεδιάστηκαν με τις ίδιες τιμές των δύο παραμέτρων v και $q > 0$ (και συγκεκριμένα για $v=7$ και $q=0.2$) και τιμές $\beta=2$ (σχήμα 3.6α) και $\beta=4$ (σχήμα 3.6β), τα δε 3.6γ και 3.6δ έχουν σχεδιασθεί για σταθερές τιμές $v=7$ και $\beta=1$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου q . Σε όλα τα σχήματα έχουμε διατηρήσει τα ίδια διαστήματα τιμών των μεταβλητών $x, y \in [-2, 2]$. Ενώ όπως είναι φυσικό οι τιμές των

παραμέτρων επηρεάζουν για κάθε τιμή της σταθεράς C τις διαστάσεις και τη μορφή των ισοενεργειακών καμπύλων μηδενικής ταχύτητας. Στα σχήματα που ακολουθούν η επίδραση αυτή είναι πιο εμφανής και αποτυπώνεται καλύτερα στις κλειστές περιοχές επιτρεπτής κίνησης που διαμορφώνονται γύρω από κάθε μεγάλο σώμα (λευκές περιοχές). Έτσι, στην πρώτη περίπτωση (σταθερών ν, q), η επίδραση της παραμέτρου μάζας β δημιουργεί μια διεύρυνση όταν $\beta > 1$ (αντίστοιχα συρρίκνωση όταν $\beta < 1$) της κλειστής περιοχής γύρω από το κεντρικό σώμα σε σχέση με τις κλειστές περιοχές γύρω από τα περιφερειακά σώματα και μάλιστα με την ίδια αναλογία που εκφράζει η τιμή του β .



(α)

(β)



(γ)

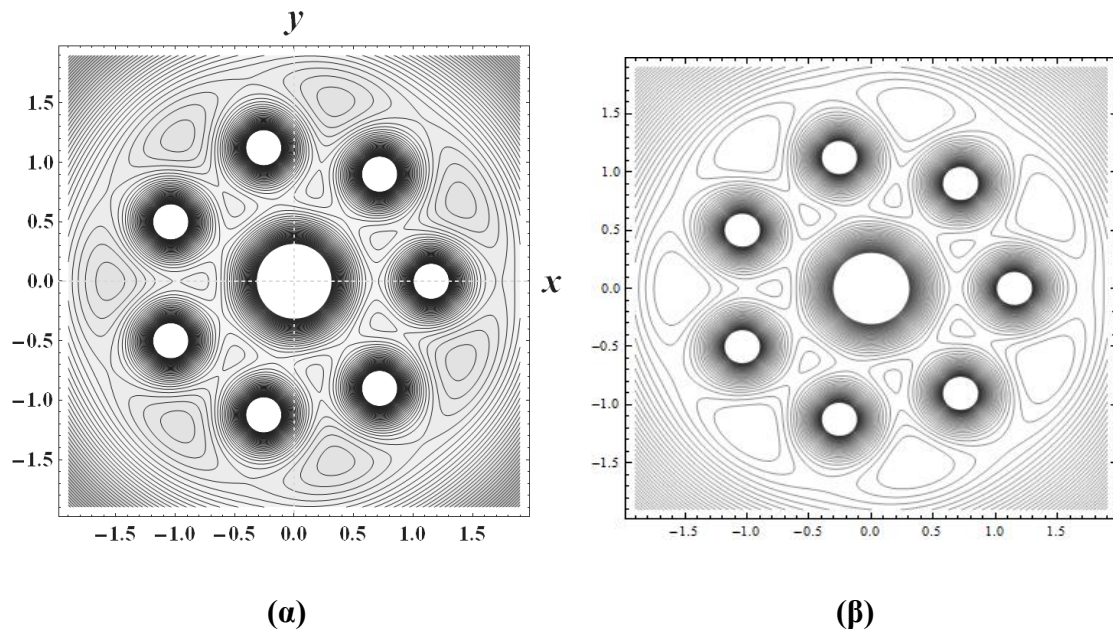
(δ)

Σχήμα 3.6 (α)-(β) Δίκτυα καμπύλων μηδενικής ταχύτητας για $v=7$, $q=0.2$ και: (α) $\beta=2$, (β) $\beta=4$
(γ)-(δ) Δίκτυα καμπύλων μηδενικής ταχύτητας για $v=7$, $\beta=1$ και: (γ) $q=0.001$, (δ) $q=0.1$

Στο Παράρτημα, που υπάρχει μετά το τέλος του 5ου κεφαλαίου, παρατίθενται οι κώδικες Mathematica που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή των παραπάνω σχημάτων, καθώς και των σχετικών σχημάτων που θα συναντήσουμε στις δύο επόμενες παραγράφους.

3.9 Σύγκριση των επιδράσεων των παραμέτρων q και e των διορθωτικών όρων των δυναμικών τύπου Schwarzschild και τύπου Manev αντίστοιχα

Το σχήμα 3.7 περιλαμβάνει δίκτυα καμπύλων μηδενικής ταχύτητας που αντιστοιχούν σε δυναμικό τύπου Manev (σχήμα 3.7α) και σε δυναμικό τύπου Schwarzschild (σχήμα 3.7β) τα οποία έχουν σχεδιασθεί για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων $v=7$ και $\beta=2$. Τα διαγράμματα χαρακτηρίζονται από την ίδια τιμή (θετική) των παραμέτρων e και q των διαταρακτικών τους όρων. Είναι προφανείς οι ποιοτικές ομοιότητες των αντίστοιχων διαγραμμάτων κατά την εξέλιξη των καμπύλων με την σταθερά του Jacobi C , ενώ οι διαφορές τους είναι δυσδιάκριτες. Αυτό βέβαια είναι λογικό αφού το μόνο που διαφοροποιείται είναι η τάξη μεγέθους του διαταρακτικού όρου στις εκφράσεις των δυναμικών.



Σχήμα 3.7 Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας για $\nu=7$ και $\beta=2$. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρήθηκαν ίδιες τιμές για τις παραμέτρους e, q . (α) δυναμικό τύπου Manev με $e=0.1$, (β) δυναμικό τύπου Schwarzschild με $q=0.1$

Κεφάλαιο 4

Διαγράμματα $x-C$ και παραμετρική μεταβολή αυτών

4.1 Εισαγωγή

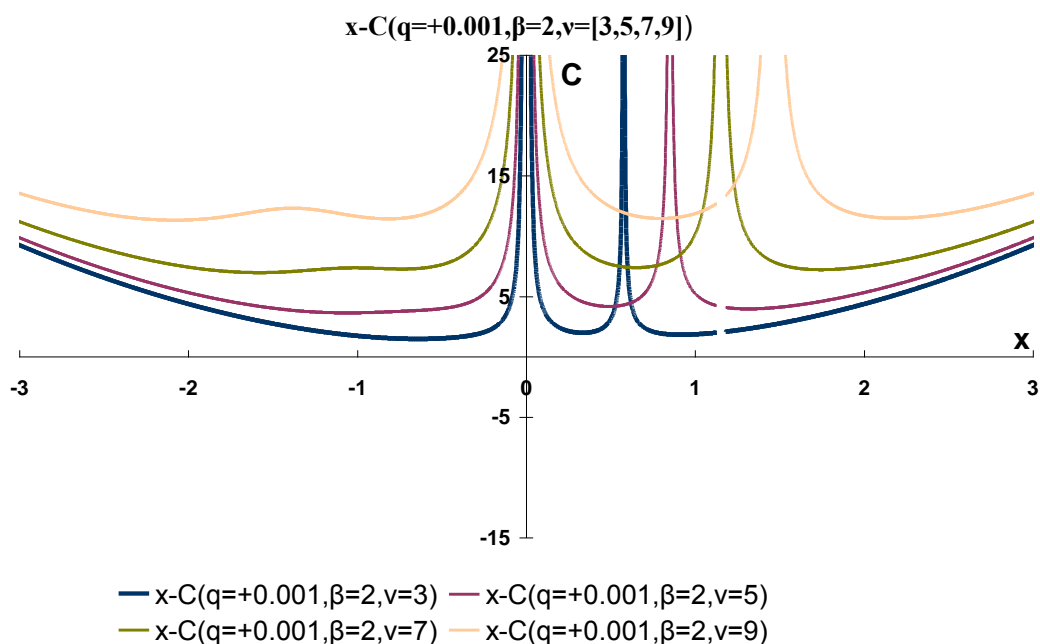
Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρήχθησαν τα δίκτυα των καμπύλων και οι επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας για την επίπεδη κίνηση του μικρού σώματος. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα διαγράμματα $x-C$ τα οποία προκύπτουν από την τομή μιας επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας $C=C(x,y)$ με ένα επίπεδο $y=a$. Ειδικότερα τα διαγράμματα που λαμβάνονται για $y=0$ είναι εξαιρετικά χρήσιμα διότι αφενός μεν αποκαλύπτουν τις θέσεις ισορροπίας του μικρού σώματος που αναπτύσσονται πάνω στον άξονα Ox του στρεφόμενου συστήματος των συντεταγμένων, αφετέρου δε αποτελούν το βασικό εργαλείο κατά την εφαρμογή μιας από τις μεθόδους αναζήτησης περιοδικών τροχιών συμμετρικών ως προς τον άξονα Ox (μέθοδος search) επειδή συνιστούν τον φασικό χώρο των αρχικών συνθηκών αυτής της κατηγορίας των περιοδικών λύσεων και παράλληλα μπορούν να απεικονισθούν σε αυτόν οι καμπύλες των οικογενειών των τροχιών αυτών. Όσον αφορά τις αποκαλυπτόμενες θέσεις ισορροπίας, αυτές στις περιπτώσεις που η παράμετρος ν είναι περιττή τότε αντιπροσωπεύουν όλες τις υπάρχουσες στο επίπεδο xy ζώνες ισορροπίας του μικρού σώματος, ενώ όταν το ν είναι άρτιο τότε οι θέσεις αυτές ανήκουν στις ζώνες των λεγόμενων συγγραμμικών θέσεων ισορροπίας.

Τα διαγράμματα $x-C$ σχεδιάζονται με τη βοήθεια ενός απλού κώδικα που έχει συνταχθεί σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran και συνήθως συνδυάζεται με κάποιο σχεδιαστικό πακέτο (software) (Excel) ώστε τα αποτελέσματα να πάρουν την τελική τους μορφή ως διαγράμματα. Για το πρόβλημά μας, εφαρμόσαμε τον κώδικα αυτόν για διάφορες τιμές των παραμέτρων ν , β και q , θεωρώντας τιμές της μεταβλητής x στο διάστημα -3 έως $+3$ και βήμα $dx=0.001$. Σε επόμενες παραγράφους εξετάζουμε την παραμετρική μεταβολή των διαγραμμάτων διατηρώντας κάθε φορά σταθερές τις δύο από τις τρεις παραμέτρους και μεταβάλλοντας την τρίτη.

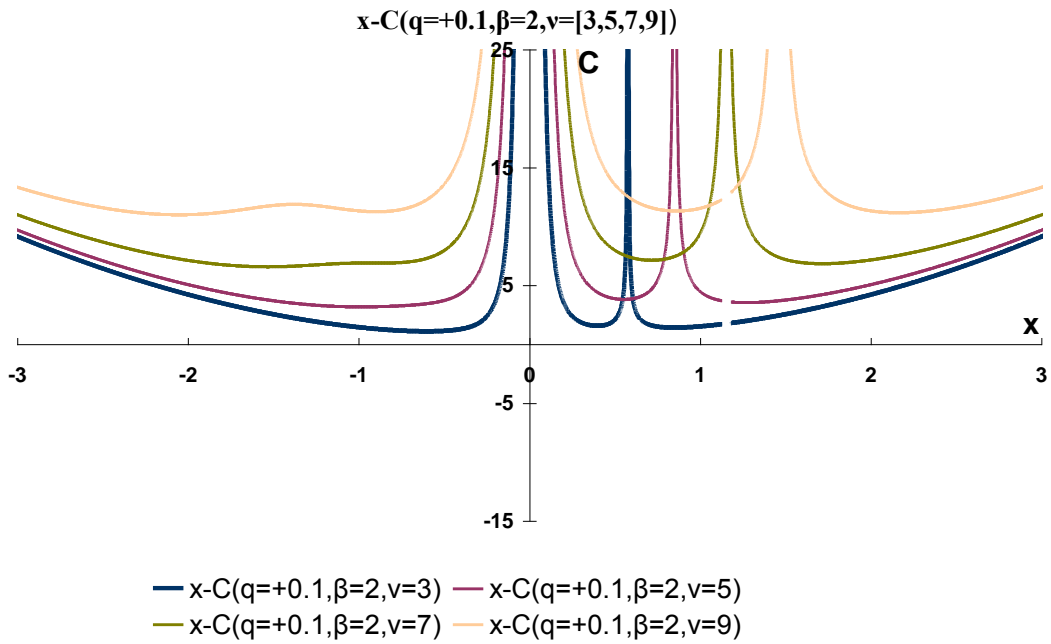
4.2 Επίδραση της παραμέτρου ν στη διαμόρφωση των διαγραμμάτων $x-C$

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την επίδραση της παραμέτρου ν (πλήθος περιφερειακών σωμάτων) στα διαγράμματα $x-C$ καθώς επίσης και στις εμφανιζόμενες θέσεις ισορροπίας. Κάθε σχήμα αφορά μια συγκεκριμένη δυάδα τιμών των παραμέτρων β και q και περιλαμβάνει τέσσερις καμπύλες που αναφέρονται στις τιμές $\nu=3, 5, 7, 9$ της παραμέτρου ν .

Ειδικότερα στα διαγράμματα του σχήματος 4.1 θεωρήσαμε θετικές τιμές της παραμέτρου q ($q=0.001, q=0.1$). Διαπιστώνουμε ότι όταν αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου ν , οι καμπύλες (που είναι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας $C=C(x)$) μετατοπίζονται προς υψηλότερες τιμές της σταθεράς C και παράλληλα αυξάνονται οι τιμές C των εμφανιζόμενων ακρότατων με παράλληλη μετατόπιση προς μεγαλύτερες (απόλυτες) τιμές του x .

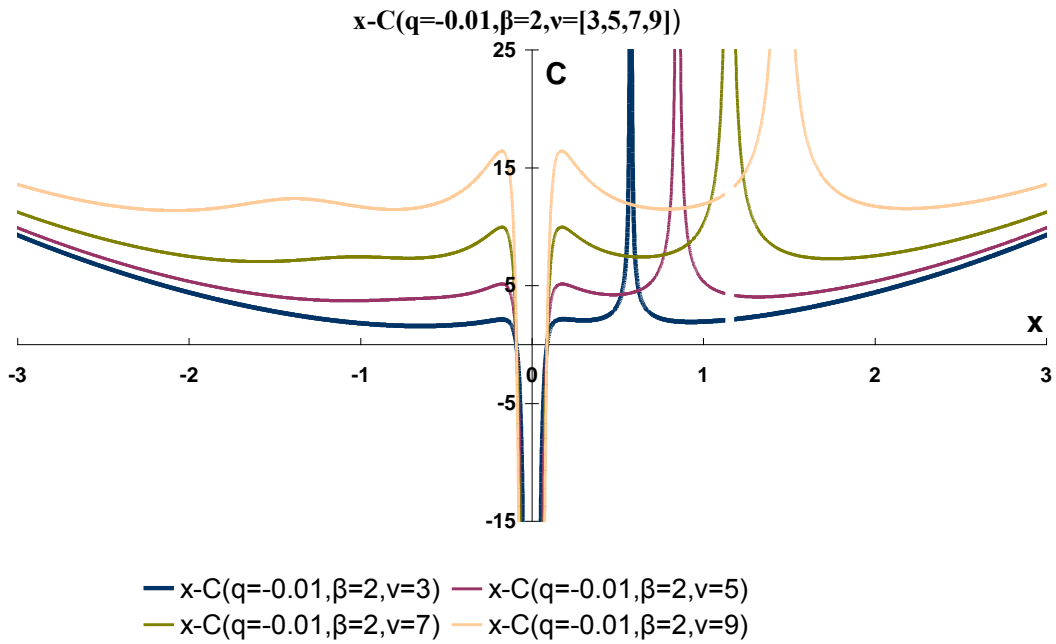


(a)

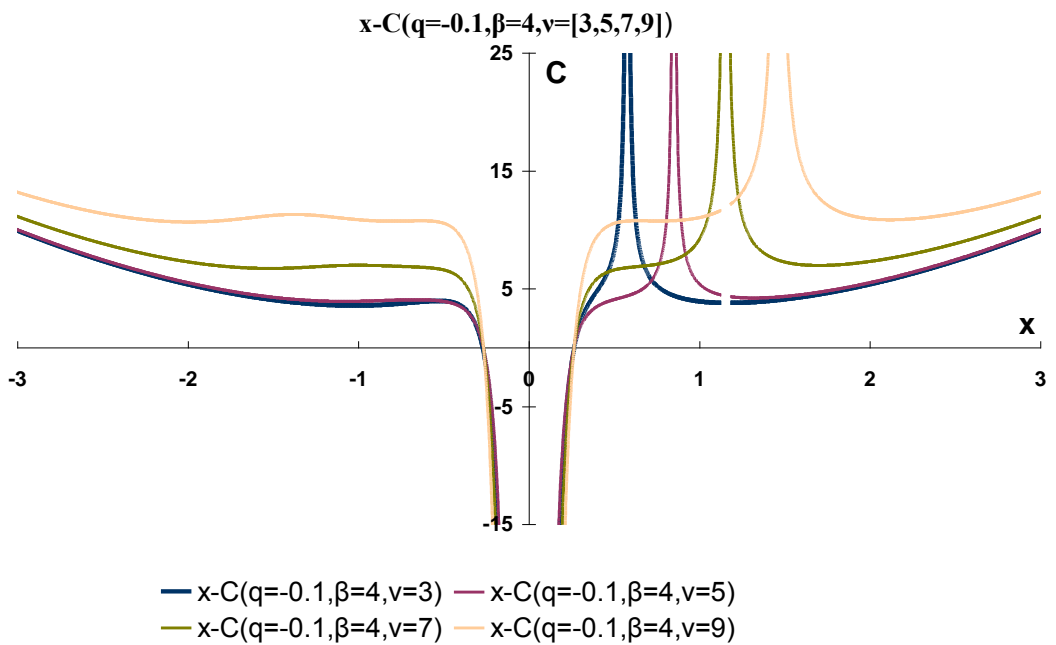


Σχήμα 4.1. Διαγράμματα $x-C$. Παραμετρική μεταβολή με την παράμετρο v ($=3, 5, 7, 9$) όταν $q > 0$. (α) $q=+0.001, \beta=2$, (β) $q=+0.1, \beta=2$

Στο επόμενο σχήμα 4.2 για τις τιμές της παραμέτρου μάζας $\beta=2, 4$ και τις ίδιες τιμές με την προηγούμενη περίπτωση της παραμέτρου $v=3,5,7,9$ θεωρήσαμε τιμές αρνητικές της παραμέτρου q και συγκεκριμένα την τιμή $q=-0.01$ (σχήμα 4.2α) και $q=-0.1$ (σχήμα 4.2β). Παρατηρώντας τα διαγράμματα αυτά διαπιστώνουμε ότι πέρα από την αναδίπλωση της καμπύλης στην περιοχή του κεντρικού σώματος η οποία οφείλεται στις αρνητικές τιμές του q , όταν αυξάνει η τιμή του v , οι μεν καμπύλες μετατοπίζονται προς υψηλότερες τιμές της σταθεράς C του Jacobi, η δε καμινάδα που διαμορφώνεται γύρω από το περιφερειακό σώμα P_1 μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες τιμές θετικές τιμές του x .



(α)

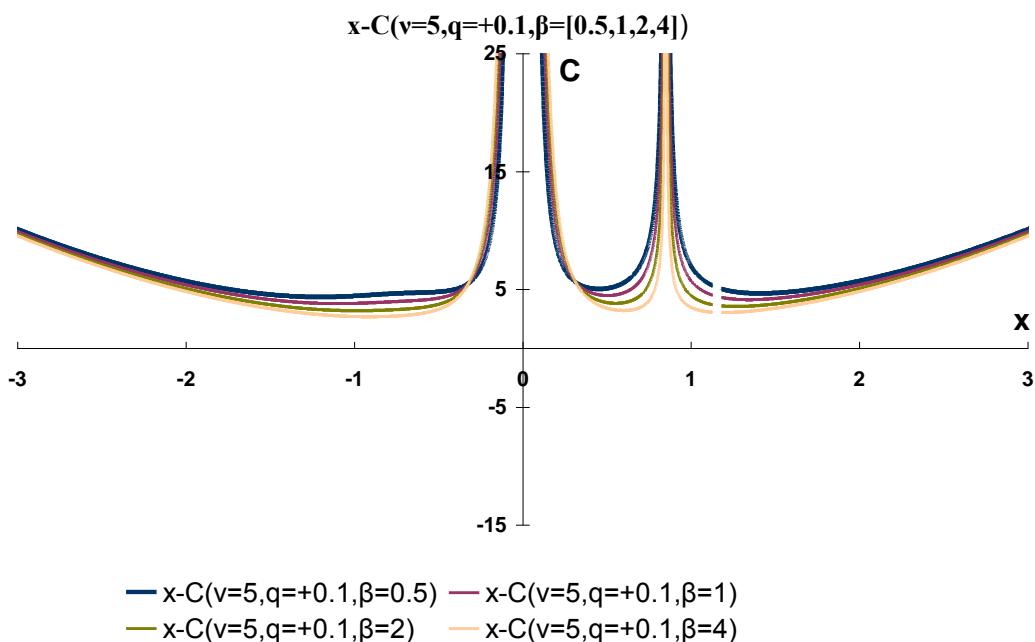


(β)

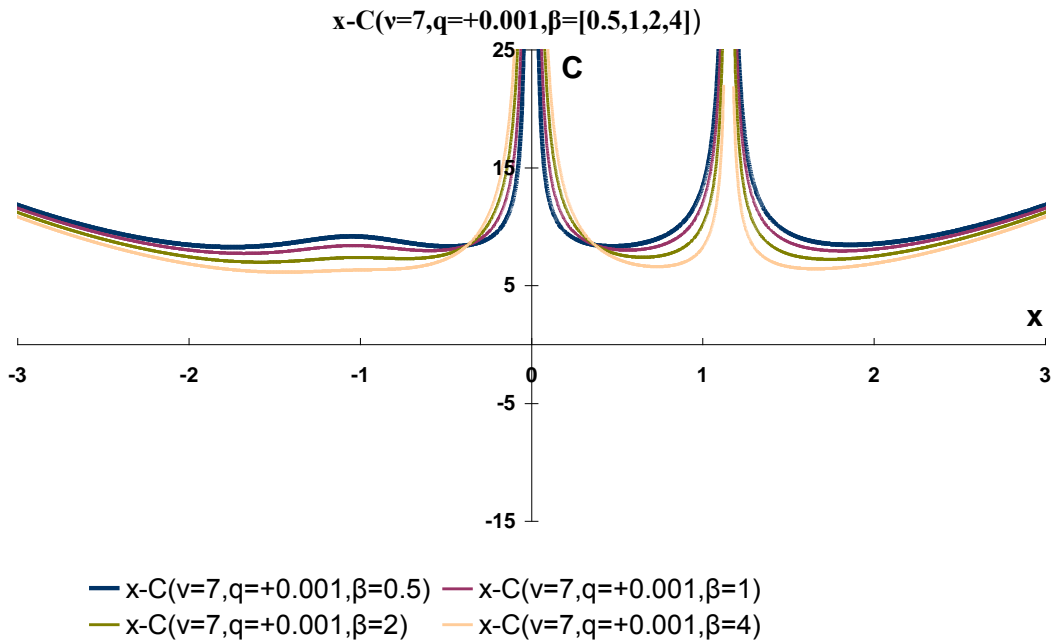
Σχήμα 4.2. Διαγράμματα $x-C$. Παραμετρική μεταβολή με την παράμετρο v ($=3, 5, 7, 9$) όταν $q < 0$. (α) $q=-0.01, \beta=2$, (β) $q=-0.1, \beta=4$

4.3 Επίδραση της παραμέτρου β στη διαμόρφωση των διαγραμμάτων $x-C$

Στα επόμενα σχήματα 4.3 και 4.4 θα εξετάσουμε την επίδραση της παραμέτρου β στα διαγράμματα $x-C$ θεωρώντας για όλες τις περιπτώσεις τις τιμές $\beta=0.5, 1, 2, 4$. Ειδικότερα στο σχήμα 4.3 αναφερόμαστε σε θετικές τιμές $q=0.1, 0.001$. Οι καμπύλες έχουν σχεδιασθεί για $\nu=5$ (σχήμα 4.3α) και $\nu=7$ (σχήμα 4.3β). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι όταν ελαττώνεται η τιμή της παραμέτρου β τα διαγράμματα $x-C$ μετατοπίζονται προς υψηλότερες τιμές της σταθεράς C χωρίς αισθητή μετατόπισή τους στη διεύθυνση του άξονα των x .



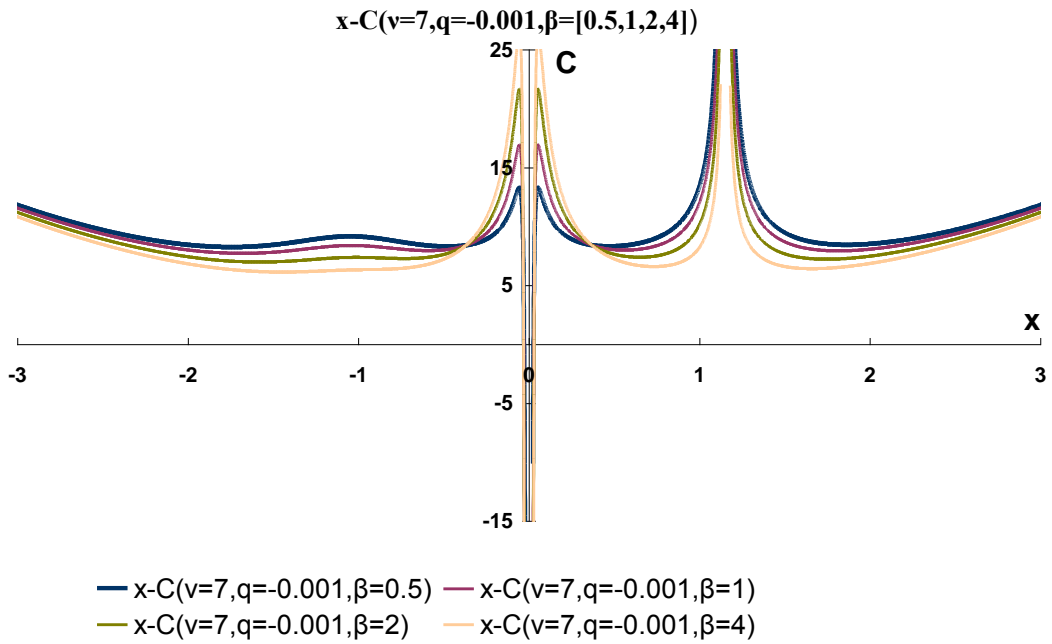
(α)



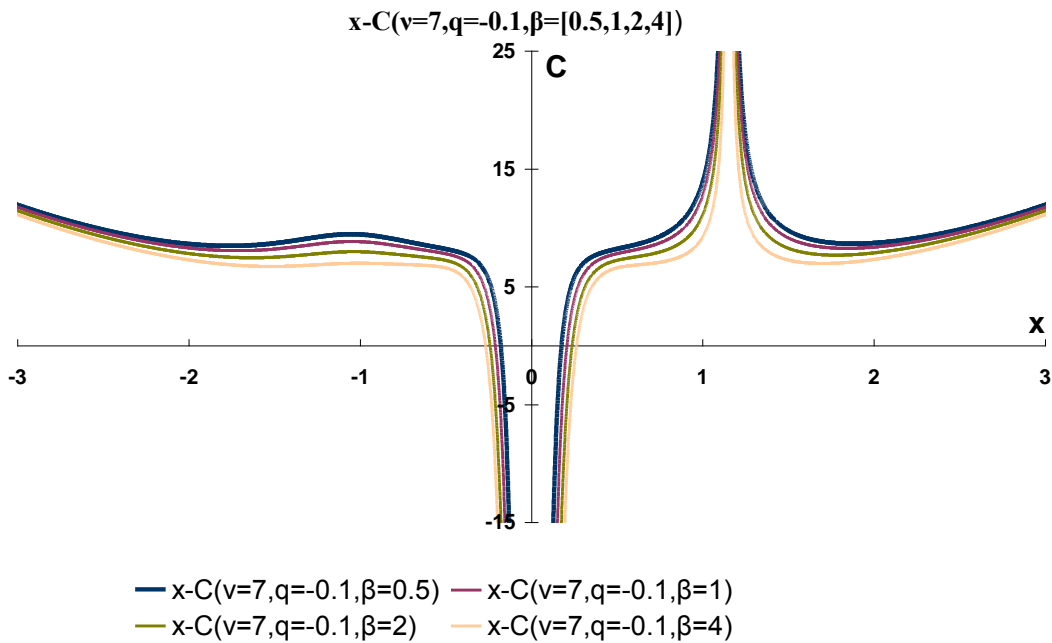
(β)

Σχήμα 4.3. Διαγράμματα $x-C$. Επίδραση της παραμέτρου μάζας β όταν $q>0$: (α) $\nu=5$, $q=+0.1$, (β) $\nu=7$, $q=+0.001$

Στο σχήμα 4.4 αναφερόμαστε σε αρνητικές τιμές $q=-0.001$, -0.1 και οι καμπύλες αφορούν ένα σχηματισμό κανονικού επταγώνου ($\nu=7$). Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες των διαγραμμάτων αυτών μετατοπίζονται προς υψηλότερες τιμές της σταθεράς C καθώς μειώνεται η τιμή της παραμέτρου β .



(α)



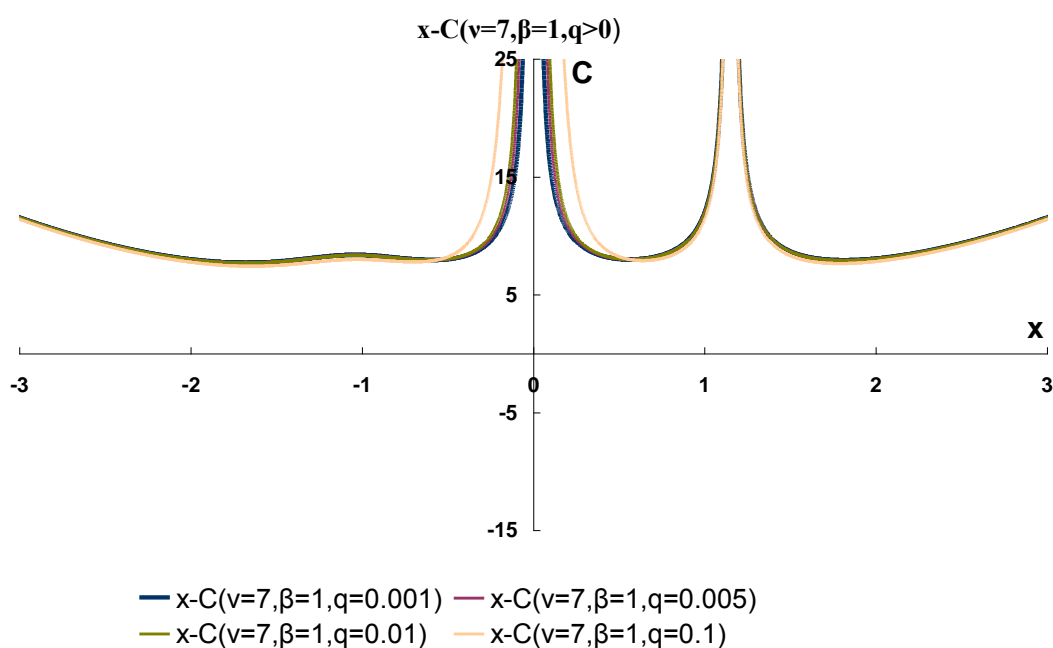
(β)

Σχήμα 4.4. Διαγράμματα $x-C$. Επίδραση της παραμέτρου μάζας β όταν $q < 0$: (α) $v=7$, $q = -0.001$, (β) $v=7$, $q = -0.1$

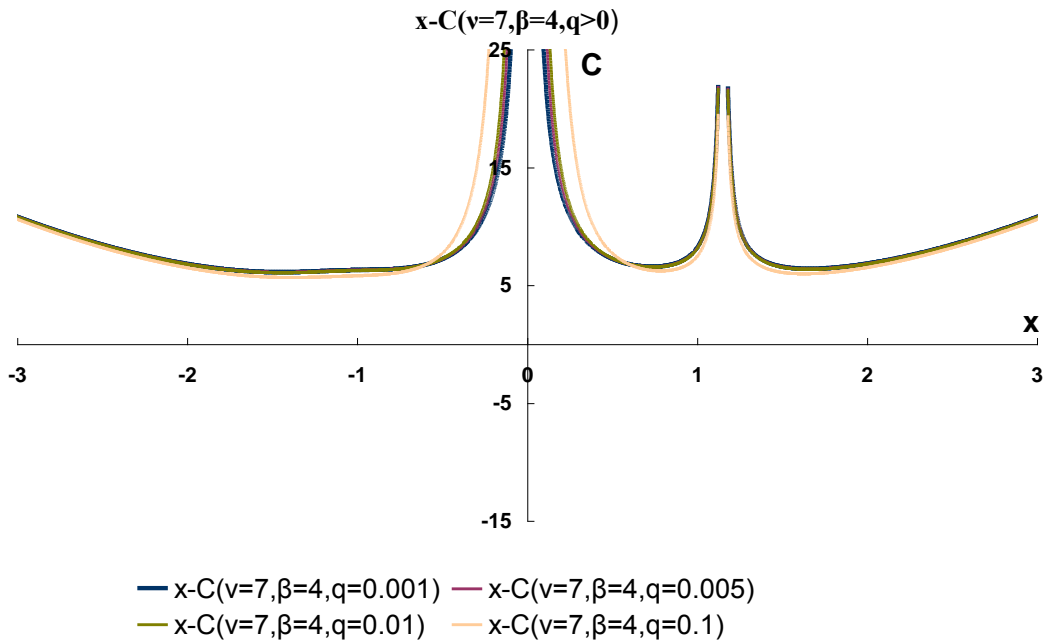
4.4 Επίδραση της παραμέτρου q στη διαμόρφωση των διαγραμμάτων $x-C$

Στις επόμενες ενότητες θα εξετάσουμε την επίδραση του συντελεστή q στα διαγράμματα $x-C$. Ακολουθώντας την πρακτική των προηγούμενων παραγράφων θα εξετάσουμε χωριστά τα διαγράμματα όπου το q λαμβάνει θετικές τιμές και χωριστά εκείνα όπου το q παίρνει αρνητικές τιμές.

Στο σχήμα 4.5 θεωρήσαμε ένα σχηματισμό κανονικού επαγώνου ($\nu=7$) και οι καμπύλες που σχεδιάστηκαν αντιστοιχούν σε τιμές $q=0.001$, 0.005 , 0.01 , 0.1 . Ειδικότερα το σχήμα 4.5α αναφέρεται σε τιμή της παραμέτρου μάζας $\beta=1$, ενώ το σχήμα 4.5β αναφέρεται σε τιμή $\beta=4$. Παρατηρούμε ότι για θετικές τιμές του q , όταν αυξάνει η τιμή της παραμέτρου αυτής, οι μεν καμπύλες μετατοπίζονται ελάχιστα προς μικρότερες τιμές της σταθεράς C , ενώ παράλληλα διευρύνεται η κεντρική καμινάδα που διαμορφώνεται γύρω από το κεντρικό σώμα.

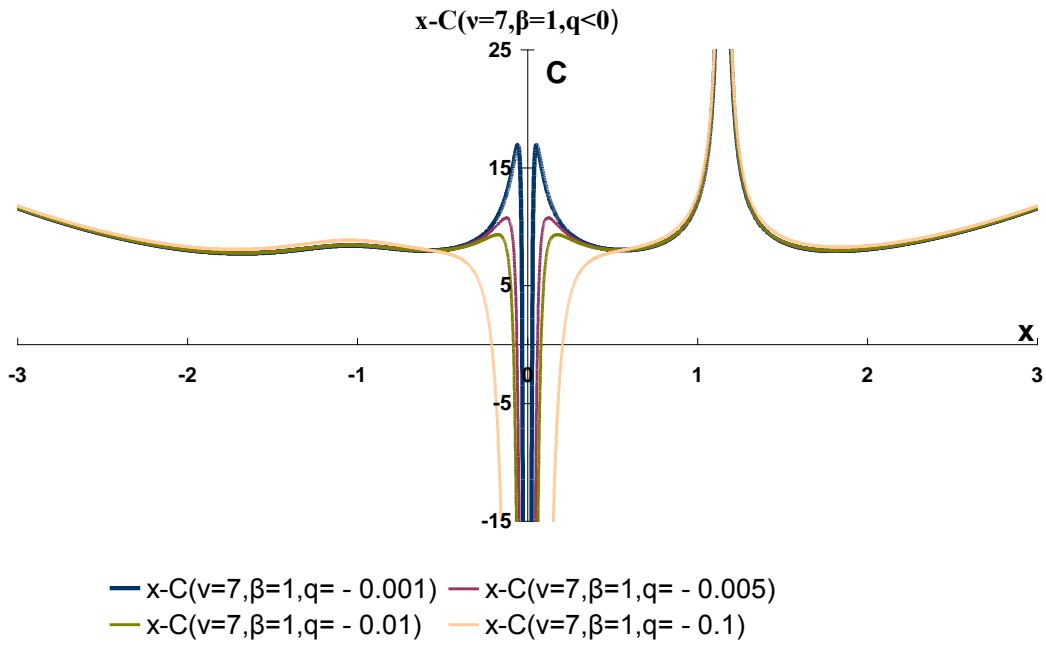


(α)

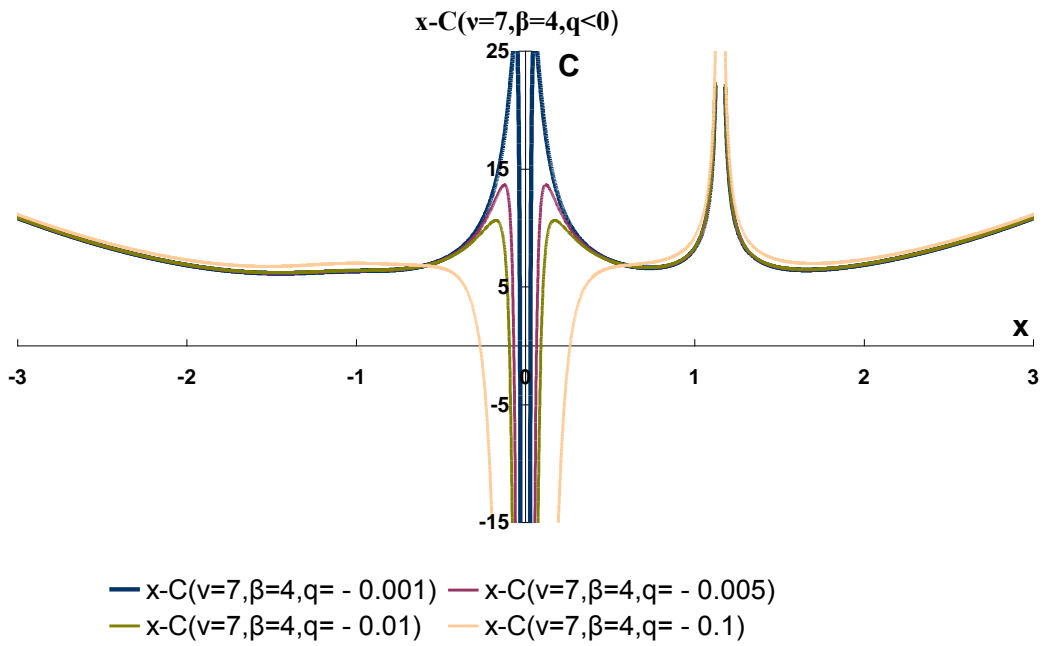


Σχήμα 4.5. Επίδραση του συντελεστή Schwarzschild $q>0$ στη διαμόρφωση των διαγραμμάτων $x-C$. (α) $v=7, \beta=1$, (β) $v=7, \beta=4$

Στα διαγράμματα του επόμενου σχήματος 4.6 θεωρήσαμε για τον ίδιο σχηματισμό ($v=7$) αρνητικές τιμές της παραμέτρου $q=-0.001, -0.005, -0.01, -0.1$. Ειδικότερα στο μεν σχήμα 5.6α αναφερόμαστε στην τιμή $\beta=1$, στο δε σχήμα 5.6β στην τιμή $\beta=4$. Παρατηρούμε ότι πέρα από την αναδίπλωση των καμπύλων στην περιοχή του κεντρικού σώματος, όταν αυξάνεται η απόλυτη τιμή της q , οι καμπύλες μετατοπίζονται προς χαμηλότερες τιμές της σταθεράς C .



(α)



(β)

Σχήμα 4.6. Επίδραση του συντελεστή Schwarzschild $q<0$ στη διαμόρφωση των διαγραμμάτων $x-C$. (α) $v=7, \beta=1$, (β) $v=7, \beta=4$

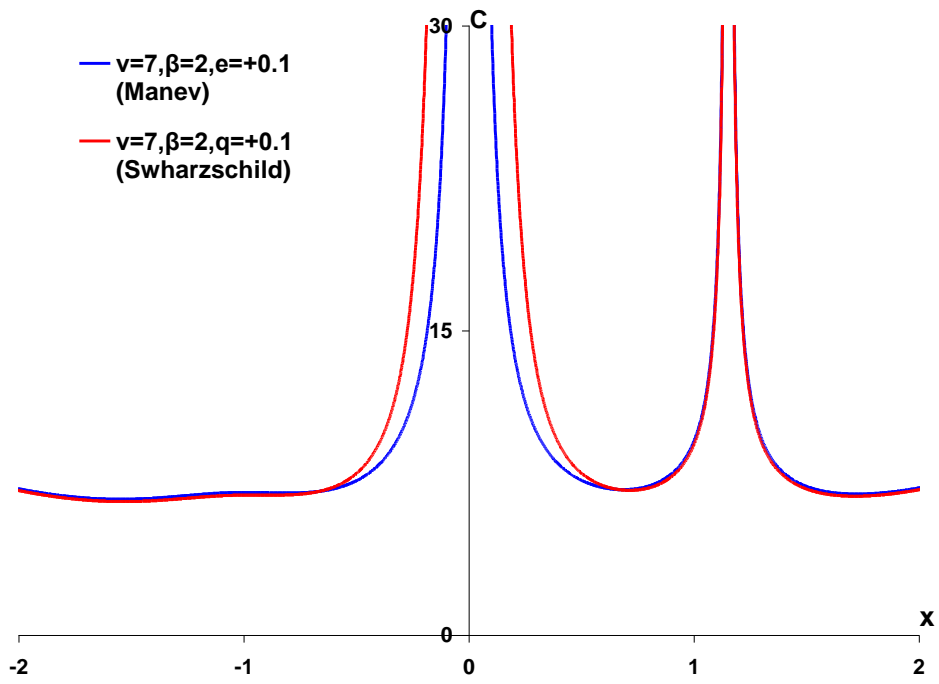
4.5 Συγκριτική μελέτη της επίδρασης των διορθωτικών όρων κατά Schwarzschild και κατά Manev στα διαγράμματα x-C

Στην παράγραφο αυτή θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που ελήφθησαν από την ενσωμάτωση του διορθωτικού όρου τύπου Schwarzschild στο Νευτώνειο δυναμικό του κεντρικού σώματος του δακτυλιοειδούς σχηματισμού των μεγάλων σωμάτων, με αυτά που ελήφθησαν σε προηγούμενες μελέτες (Fakis & Kalvouridis, 2011, 2013; Φακίς, 2014) όπου στο Νευτώνειο δυναμικό του κεντρικού σώματος είχε ενσωματωθεί ένας διορθωτικός όρος τύπου Manev. Πιο συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε τις υπάρχουσες διαφορές των διαγραμμάτων x-C στις δύο παραλλαγές του προβλήματος θεωρώντας κάθε φορά αφενός μεν την τριάδα των παραμέτρων ν , β , q με τον διορθωτικό όρο κατά Schwarzschild, αφετέρου δε τις ν , β , e με τον διορθωτικό όρο κατά Manev, με $q=e$. Για την απλούστευση της διαδικασίας αυτής, θα περιορισθούμε σε σχηματισμούς κανονικού επταγώνου ($\nu=7$). Σε όλα τα διαγράμματα που παρουσιάζονται στην παράγραφο αυτή, οι καμπύλες με το κόκκινο χρώμα αναφέρονται στην περίπτωση Schwarzschild, οι δε καμπύλες με το μπλε χρώμα αναφέρονται στην περίπτωση Manev.

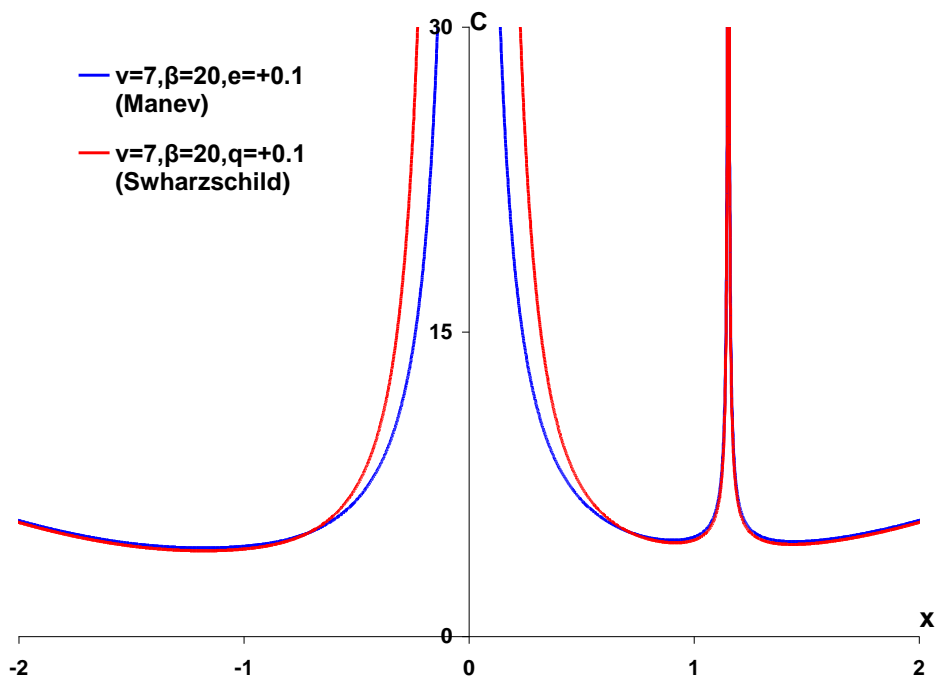
4.5.1 Περίπτωση $q=e>0$

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε ενδεικτικά μερικά αποτελέσματα που λάβαμε κατά τη μελέτη τη παραμετρικής εξέλιξης των διαγραμμάτων όταν τα q , e είναι θετικά. Πιο συγκεκριμένα, μας απασχόλησαν οι περιπτώσεις μεταβολής των διαγραμμάτων x-C όταν: (1) διατηρούνται οι παράμετροι ν και $q=e$ σταθερές και μεταβάλλεται η παράμετρος της μάζας β , και (2) όταν διατηρούνται οι παράμετροι ν και β σταθερές και μεταβάλλονται τα $q=e>0$. Από το πλήθος των διαγραμμάτων που σχεδιάσαμε για ένα μεγάλο πλήθος τιμών των παραμέτρων, επιλέξαμε τα πιο αντιπροσωπευτικά που αναδεικνύουν καλύτερα τις υπάρχουσες διαφορές ανάμεσα στα δυναμικά τύπου Manev και τύπου Schwarzschild.

Έτσι, στο μεν σχήμα 4.7 που ακολουθεί, έχουμε διατηρήσει σταθερή την τιμή $q=e=0.1$ και μεταβάλλουμε την τιμή της παραμέτρου μάζας $\beta=2, 20$, στο δε σχήμα 4.8 έχουμε διατηρήσει την τιμή της παραμέτρου $\beta=2$ και μεταβάλλουμε την τιμή των $q=e=0.01, 0.05$.

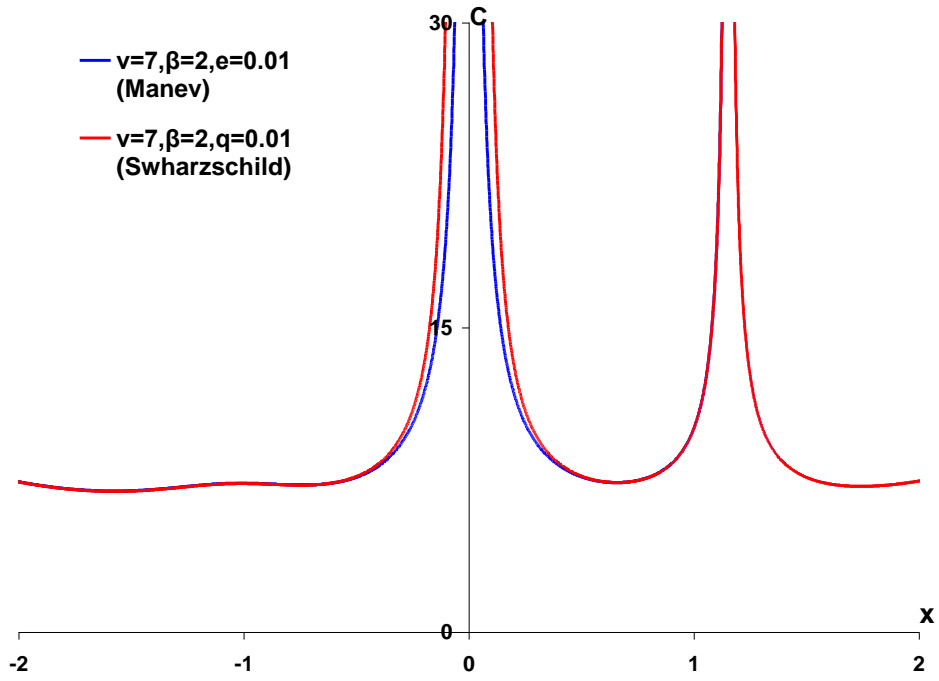


(α)

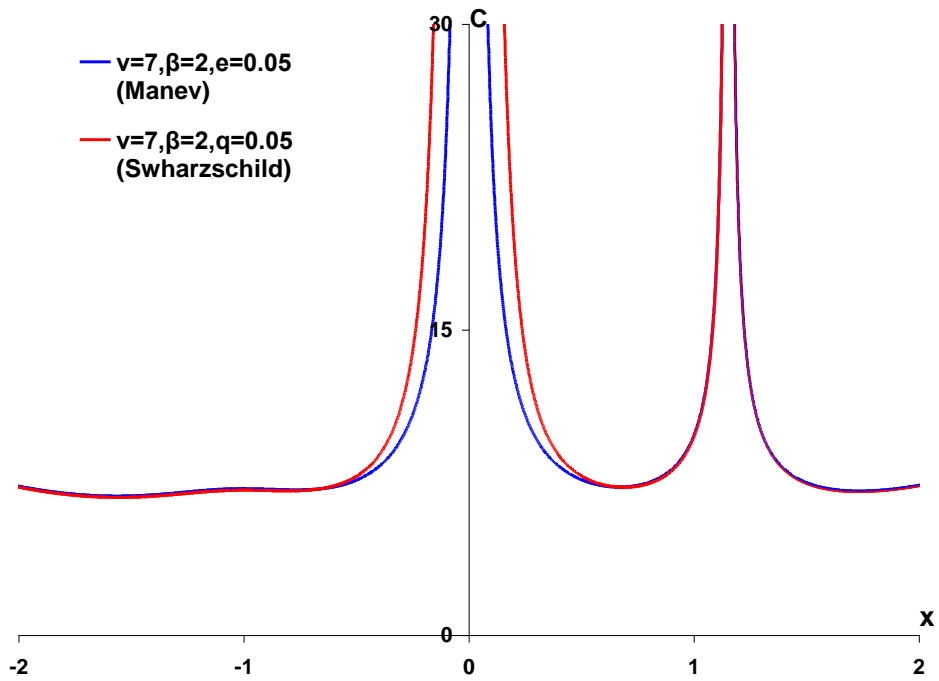


(β)

Σχήμα 4.7. Κοινά διαγράμματα $x-C$ για τις περιπτώσεις Schwarzschild και Manev με $v=7, q=e=0.1$: (α) $\beta=2$, (β) $\beta=20$



(a)



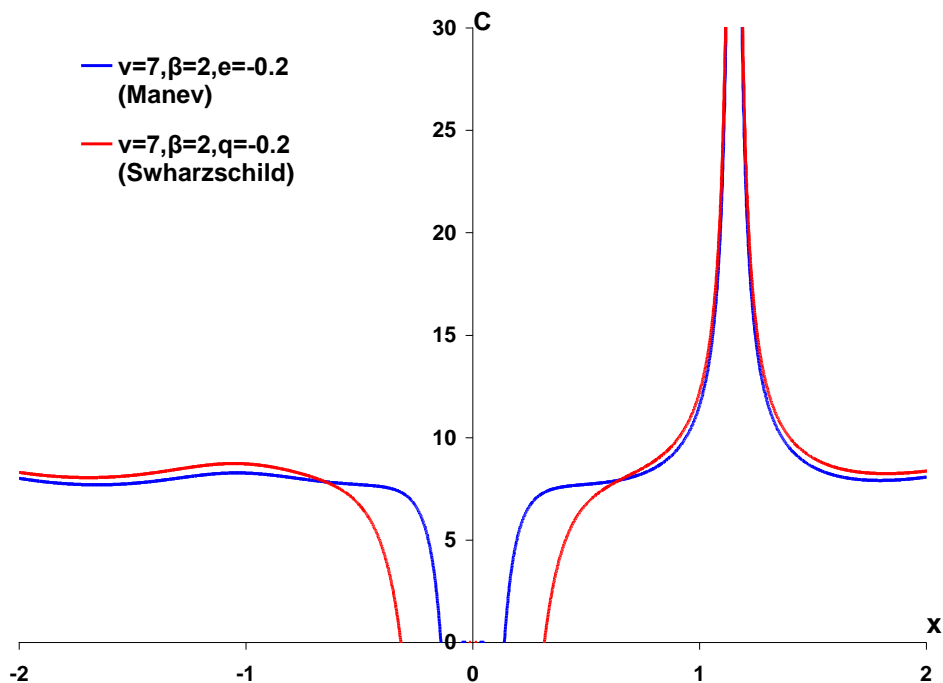
(b)

Σχήμα 4.8. Κοινά διαγράμματα $x-C$ για τις περιπτώσεις Schwarzschild και Manev με $v=7, \beta=2$. (α) $q=e=0.01$, (β) $q=e=0.05$

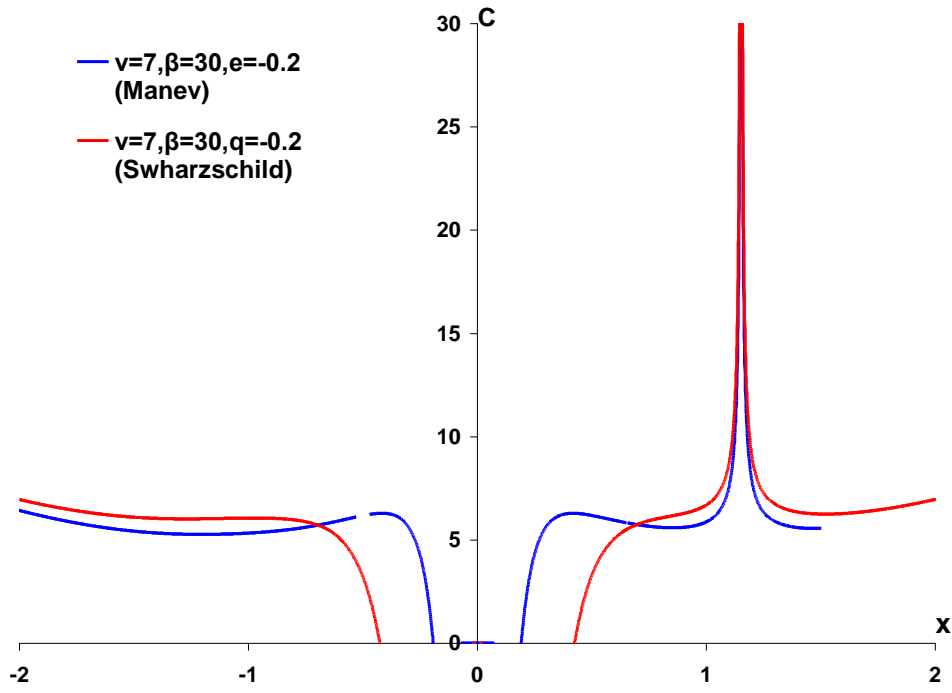
4.5.2 Περίπτωση $q=e<0$

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε ενδεικτικά μερικά αποτελέσματα που λάβαμε κατά τη μελέτη τη παραμετρικής εξέλιξης των διαγραμμμάτων όταν τα q , e είναι αρνητικά. Πιο συγκεκριμένα, μας απασχόλησαν οι περιπτώσεις: (1) η μεταβολή των διαγραμμμάτων όταν διατηρούνται οι παράμετροι ν και $q=e$ σταθερές και μεταβάλλεται η παράμετρος της μάζας β , και (2) η μεταβολή των διαγραμμμάτων όταν διατηρούνται οι παράμετροι ν και β σταθερές και μεταβάλλονται τα $q=e<0$. Από το πλήθος των διαγραμμμάτων που σχεδιάσαμε για ένα μεγάλο πλήθος τιμών των παραμέτρων, επιλέξαμε τα πιο αντιπροσωπευτικά που αναδεικνύουν καλύτερα τις υπάρχουσες διαφορές ανάμεσα στα δυναμικά τύπου Manev και τύπου Schwarzschild.

Έτσι στο μεν σχήμα 4.9 έχουμε θεωρήσει τις τιμές $\nu=7$ και $q=e=-0.2$ για τις παραμέτρους Schwarzschild και Manev αντίστοιχα, ενώ η τιμή της παραμέτρου μάζας β παίρνει τις τιμές $\beta=2, 30$, στο δε σχήμα 4.10 έχουμε διατηρήσει τις παραμέτρους $\nu=7$ και $\beta=2$ σταθερές και μεταβάλλουμε τις τιμές των παραμέτρων $q=e=-0.05, -0.1$.

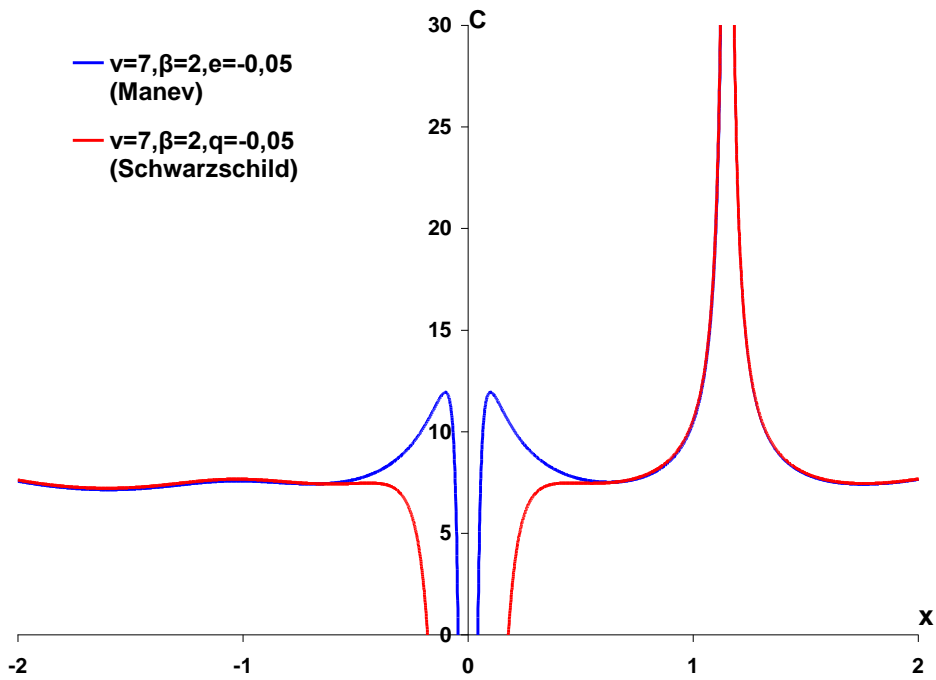


(α)

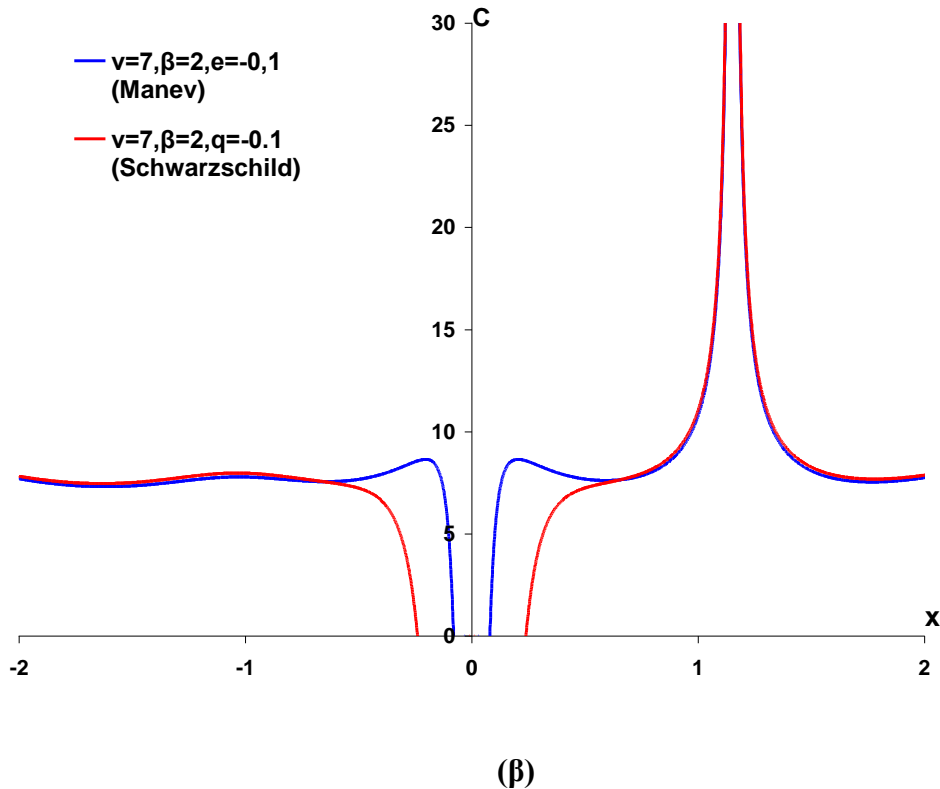


(β)

Σχήμα 4.9. Κοινά διαγράμματα $x-C$ για τις περιπτώσεις Schwarzschild και Manev με $v=7$ και $q=e=-0.2$. (α) $\beta=2$, (β) $\beta=30$



(α)



Σχήμα 4.10. Κοινά διαγράμματα x - C για τις περιπτώσεις Schwarzschild και Manev με $\nu=7$ και $\beta=2$. (α) $q=e=-0.05$, (β) $q=e=-0.1$

Μερικά γενικά συμπεράσματα

- Όπως προείπαμε, καθεμία από τις περιπτώσεις των διαγραμμάτων του σχήματος 4.7 (α και β), χαρακτηρίζεται από την ίδια τιμή ν ($=7$) και $q=e>0$ (εδώ θεωρήσαμε την τιμή $q=e=+0.1$), ενώ έχουμε θεωρήσει τις τιμές $\beta=2$ και 20 στα σχήματα 4.7α και 4.7β αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι οι εντονότερες διαφορές εντοπίζονται στους κλάδους που αναπτύσσονται στην περιοχή του κεντρικού πρωτεύοντος. Αντίθετα, στα τμήματα των καμινάδων γύρω από ένα περιφερειακό σώμα, οι παρατηρούμενες διαφορές είναι αμελητέες. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση του δυναμικού Schwarzschild η κεντρική καμινάδα εμφανίζεται πιο διευρυνόμενη από εκείνην του δυναμικού Manev. Εκτός από τη διαφορά αυτή, τα διαγράμματα παρουσιάζουν παρόμοια παραμετρική εξέλιξη.
- Παρόμοια εικόνα έχουμε εξετάζοντας τις περιπτώσεις (α και β) του σχήματος 4.8 όπου διατηρήσαμε εκτός της παραμέτρου $\nu=7$ και την παράμετρο β σταθερή ($=2$),

ενώ θεωρήσαμε διαφορετικές τιμές $e=q>0$ σε καθένα από τα δύο σχήματα, και συγκεκριμένα τις τιμές $q=e=0.01, 0.05$ στα σχήματα 4.8α και 4.8β αντίστοιχα. Και εδώ οι διαφορές εντοπίζονται στα τμήματα των καμπύλων που αναπτύσσονται γύρω από το κεντρικό πρωτεύον σώμα ενώ, τόσο η παραμετρική εξέλιξη των καμπύλων, όσο και των ακροτάτων είναι παρόμοιες.

- Όσον αφορά τα διαγράμματα των σχημάτων 4.9 και 4.10 τα οποία αναφέρονται σε αρνητικές τιμές των παραμέτρων q και e , οι διαφορές που εμφανίζονται, κυρίως στην περιοχή του κεντρικού πρωτεύοντος σώματος, είναι πιο έντονες από εκείνες που παρατηρούνται όταν $q, e>0$. Όπως έχει ήδη βρεθεί στην περίπτωση του δυναμικού Manev (Φακής, 2014), το κύριο χαρακτηριστικό των διαγραμμάτων $x-C$ όταν $e<0$, είναι η αναδίπλωση της κεντρικής καμινάδας, κάτι που παρατηρείται και στην περίπτωση του δυναμικού Schwarzschild όταν $q<0$. Η σημαντική αυτή διαφοροποίηση στην παραμετρική εξέλιξη της κεντρικής καμινάδας και συνεπώς και των αντίστοιχων τμημάτων των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας στα διαγράμματα $x-C$ των δύο αυτών δυναμικών είναι φυσικό να δημιουργεί τις πιο έντονες διαφορές στην περιοχή του κεντρικού πρωτεύοντος σώματος. Ειδικότερα,
 - Όταν διατηρήσαμε τις τιμές των ν και $q=e$ σταθερές και μεταβάλαμε μόνο την παράμετρο β , παρατηρήσαμε ότι:
 - Η αναδίπλωση της καμινάδας στην περιοχή του κεντρικού πρωτεύοντος σώματος, συμβαίνει σε μεγαλύτερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C στο δυναμικό Manev από ότι στο δυναμικό Schwarzschild.
 - Το αναδιπλούμενο τμήμα της κεντρικής καμινάδας είναι ευρύτερο στο δυναμικό Schwarzschild από ότι στο δυναμικό Manev.
 - Όταν διατηρήσαμε σταθερές τις τιμές των ν και β και μεταβάλαμε την τιμή των $q=e<0$, παρατηρήσαμε ότι:
 - Σε πολύ μικρές απόλυτες τιμές των q, e η αναδίπλωση της κεντρικής καμινάδας συμβαίνει σε μεγαλύτερες τιμές της Ιακωβιανής σταθεράς C .

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις αλλά και σε άλλες που εξετάσαμε, οι διαφορές στην εξέλιξη των καμπύλων $C=C(x)$, είναι αμελητέες στις περιοχές των περιφερειακών πρωτευόντων σωμάτων.

Κεφάλαιο 5

Θέσεις ισορροπίας – παραμετρική μεταβολή - ευστάθεια

5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε πρώτα την ύπαρξη των θέσεων ισορροπίας του μικρού σώματος και στη συνέχεια θα αναζητήσουμε, θα εντοπίσουμε και θα υπολογίσουμε αριθμητικά τις θέσεις αυτές. Ακολούθως θα μελετήσουμε την παραμετρική μεταβολή τους καθώς και τη γραμμική ευστάθειά τους. Όπως είναι γνωστό, οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες που ισχύουν σε μια θέση ισορροπίας είναι το μικρό σώμα να έχει μηδενική ταχύτητα και μηδενική επιτάχυνση. Συνεπώς με βάση τις συνθήκες αυτές, οι σχέσεις (2.39) του 2^{ου} κεφαλαίου ανάγονται στο παρακάτω μη γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x = 0 \quad (5.1.α)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = U_y = 0 \quad (5.1.β)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = U_z = 0 \quad (5.1.γ)$$

5.2 Ύπαρξη θέσεων ισορροπίας - Ζώνες ισορροπίας στο επίπεδο των μεγάλων σωμάτων και θέσεις ισορροπίας εκτός του επιπέδου αυτού

5.2.1 Η βαρυτική περίπτωση

Όπως έχει αποδειχθεί (Kalnouridis, 1998), στη βαρυτική περίπτωση του “ring problem” δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας εκτός του επιπέδου xy , η δε ποσότητα Δ ισούται με,

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2),$$

εξαρτάται από τις παραμέτρους ν και β και παραμένει θετική για όλους τους συνδυασμούς των ν και β , αφού αυτές οι ποσότητες (ν και β) είναι πάντα θετικές. Επιπλέον, η μερική παράγωγος της συνάρτησης U ως προς z ισούται με :

$$U_z = -\frac{z}{\Delta} \left[\frac{\beta}{r_0^3} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} \right]$$

Βασιζόμενη στη συνθήκη ισορροπίας $U_z = 0$ και με βάση το γεγονός ότι οι ποσότητες που βρίσκονται στην παρένθεση, είναι πάντα θετικές, συνεπάγεται ότι $z=0$, δηλαδή τα σημεία ισορροπίας κείνται στο επίπεδο xy του σχηματισμού.

5.2.2 Περίπτωση δυναμικού τύπου Schwarzschild

Στην περίπτωση αυτή η ύπαρξη των θέσεων ισορροπίας αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο. Η ποσότητα Δ ισούται με,

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2 + 3\beta q M^4)$$

και η μερική παράγωγος της συνάρτησης U ως προς z ισούται με,

$$U_z = -\frac{z}{\Delta} \left[\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3q\beta}{r_0^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} \right]$$

Επειδή η παράμετρος q μπορεί να παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές, διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

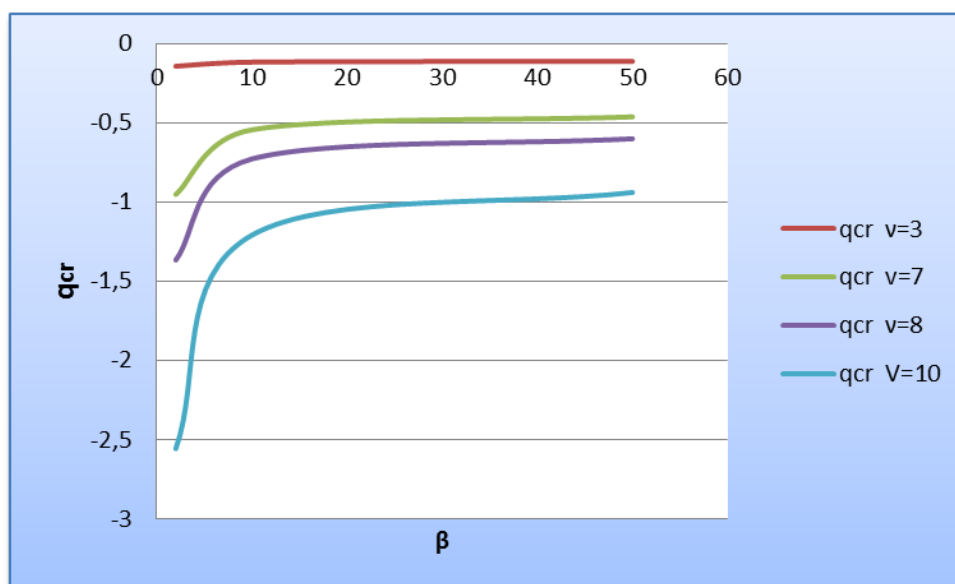
- Όταν $q > 0$, και επειδή στη συνθήκη ισορροπίας $U_z = 0$, τότε με δεδομένο ότι όλες οι ποσότητες που βρίσκονται στην παρένθεση είναι θετικές, συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει $z=0$, δηλαδή θα πρέπει και πάλι τα σημεία ισορροπίας να κείνται στο επίπεδο xy του σχηματισμού.
- Όταν $q < 0$, τότε θα πρέπει να ελεγχθούν οι συνδυασμοί των β και q για κάθε τιμή του ν (αριθμός των περιφερειακών σωμάτων) και να αποκλειστούν εκείνοι που είτε μηδενίζουν, είτε καθιστούν αρνητική την ποσότητα Δ . Ειδικότερα για την περίπτωση που $\Delta=0$, από τις εξισώσεις του 2^{ου} κεφαλαίου προκύπτει ότι, τόσο η συνάρτηση U , όσο και οι μερικές παράγωγοι αυτής ως προς x, y, z δεν υπάρχουν και άρα δεν έχει νόημα να μελετηθεί η ύπαρξη θέσεων ισορροπίας.

Για να προσδιορίσουμε την κρίσιμη τιμή του $q=q_{cr}$ όπου μηδενίζεται η ποσότητα Δ για συγκεκριμένες τιμές των δύο άλλων παραμέτρων β και ν , θα λύσουμε την εξίσωση Δ ως προς q (για την εύρεση του q_{cr}) μηδενίζοντας την τιμή για το Δ , δηλαδή :

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2 + 3\beta q M^4) = 0 \Rightarrow$$

$$q_{cr} = -\frac{\Lambda + \beta M^2}{3\beta M^4} \quad (5.2)$$

Στο σχήμα 5.1 παραθέτουμε σε κοινό γράφημα τις καμπύλες $q_{cr}=q_{cr}(\beta)$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν . Αναλυτικές τιμές δίνουμε στον Πίνακα Α1 του Παραρτήματος



Σχήμα 5.1 Μεταβολή της κρίσιμης τιμής q_{cr} με την παράμετρο β για διάφορες τιμές του $\nu = 3, 7, 8, 10$

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι και οι τέσσερις καμπύλες $q_{cr}=q_{cr}(\beta)$ εξελίσσονται σχεδόν παράλληλα η μία με την άλλη και ότι εμφανίζουν μία μετατόπιση προς μικρότερες απόλυτες τιμές της q_{cr} όσο το ν μικραίνει. Επίσης παρατηρούμε ότι για πολύ μικρές τιμές του β οι καμπύλες ξεκινούν από σχετικά

μεγάλες απόλυτες τιμές του q και ότι καθώς η τιμή του β αυξάνει, τείνουν σχεδόν ασυμπτωτικά προς μια σταθερή οριακή τιμή $q_{cr} \rightarrow q_{lim}$ η οποία εξαρτάται από το ν .

Για κάθε καμπύλη, η περιοχή τιμών των παραμέτρων για τις οποίες εξασφαλίζεται η ύπαρξη θέσεων ισορροπίας (αλλά και γενικότερα, λύσεων του προβλήματος), είναι αυτή που ορίζεται από την καμπύλη και τους δύο άξονες.

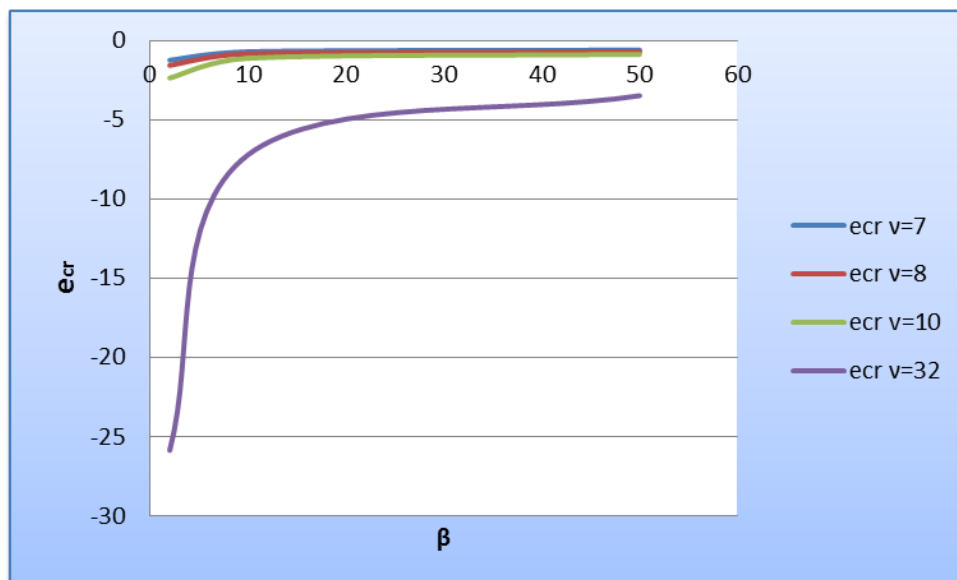
5.2.3 Περίπτωση δυναμικού τύπου Manev

Προκειμένου να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε με αυτά που βρέθηκαν από την αντίστοιχη μελέτη της περίπτωσης Manev (Φακής, 2014) παραθέτουμε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών Δ και e_{cr} (κρίσιμη παράμετρος Manev)

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2 + 2\beta e M^3) = 0 \Rightarrow$$

$$e_{cr} = -\frac{\Lambda + \beta M^2}{2\beta M^3} \quad (5.3)$$

Στο σχήμα 5.2 παραθέτουμε σε κοινό γράφημα τις καμπύλες $e_{cr}=e_{cr}(\beta)$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν . Αναλυτικές τιμές δίνουμε στον Πίνακα A2 του Παραρτήματος



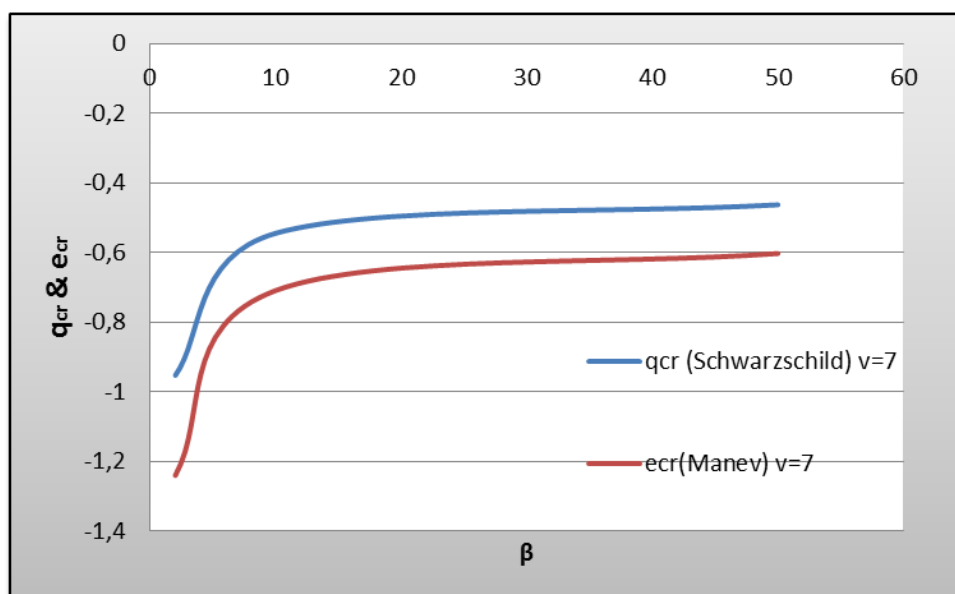
Σχήμα 5.2 Μεταβολή της κρίσιμης τιμής e_{cr} με την παράμετρο β για τιμές $\nu=7, 8, 10, 32$.

Από το σχήμα 5.2 παρατηρούμε ότι, όπως και στο σχήμα 5.1, οι καμπύλες (e_{cr}) που σχεδιάστηκαν για διάφορες τιμές του ν , ξεκινούν από μεγάλες απόλυτες τιμές της e_{cr} και καθώς η τιμή του β αυξάνει, τείνουν προς μια σταθερή οριακή τιμή $e_{cr} \rightarrow e_{lim}$, δηλαδή η κρίσιμη τιμή για την παράμετρο e (η οποία υπολογίστηκε με βάση τη σχέση 5.3) τείνει σχεδόν ασυμπτωτικά σε μια αρνητική τιμή (η οποία είναι προφανώς διαφορετική από αυτήν που βρήκαμε προηγουμένως για την περίπτωση Schwarzschild) καθώς το β αυξάνει και μάλιστα η τιμή αυτή αυξάνει απόλυτα όσο αυξάνεται ο αριθμός των περιφερειακών σωμάτων ν .

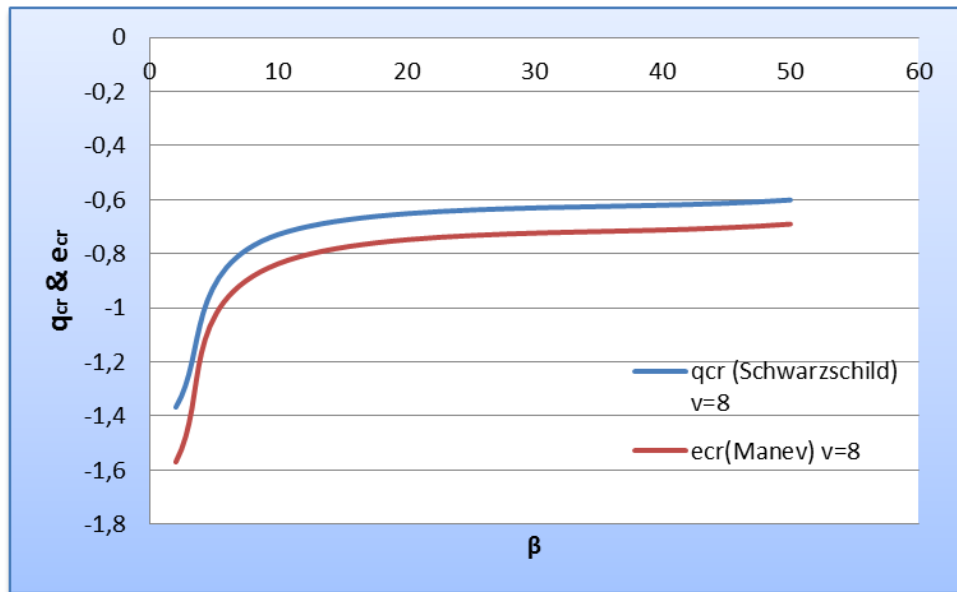
Και εδώ όπως προηγουμένως, για κάθε καμπύλη, η περιοχή τιμών των παραμέτρων για τις οποίες εξασφαλίζεται η ύπαρξη θέσεων ισορροπίας, είναι αυτή που ορίζεται από την καμπύλη και τους δύο άξονες.

5.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων της περίπτωσης Schwarzschild με την αντίστοιχη περίπτωση Manev

Με βάση τις δύο προηγούμενες παραγράφους θα προχωρήσουμε στη σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις δύο περιπτώσεις (Schwarzschild και Manev) για τις κρίσιμες τιμές των παραμέτρων q_{cr} και e_{cr} που προσδιορίζουν τις περιοχές τιμών των παραμέτρων για την ύπαρξη θέσεων ισορροπίας.



(α)

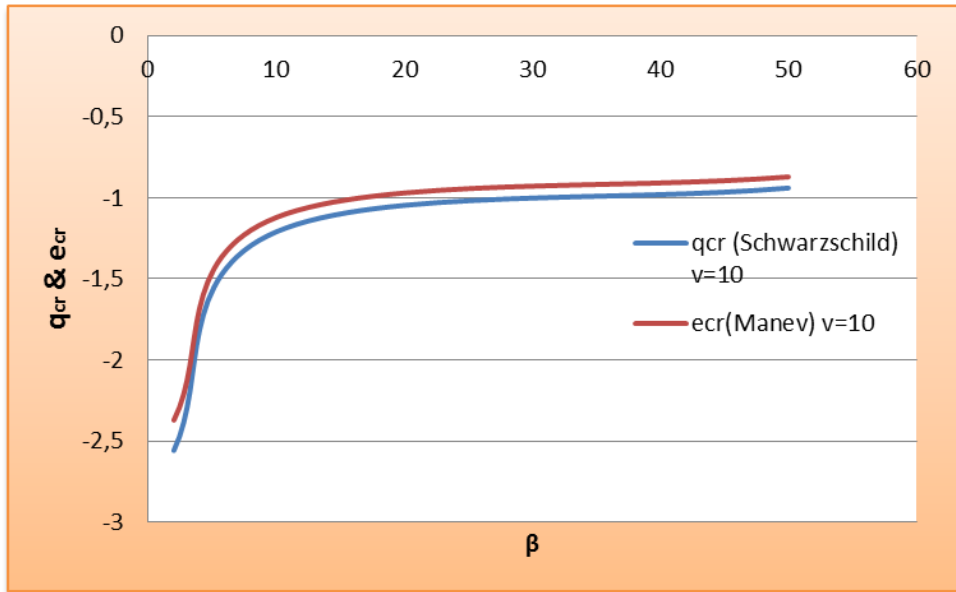


(β)

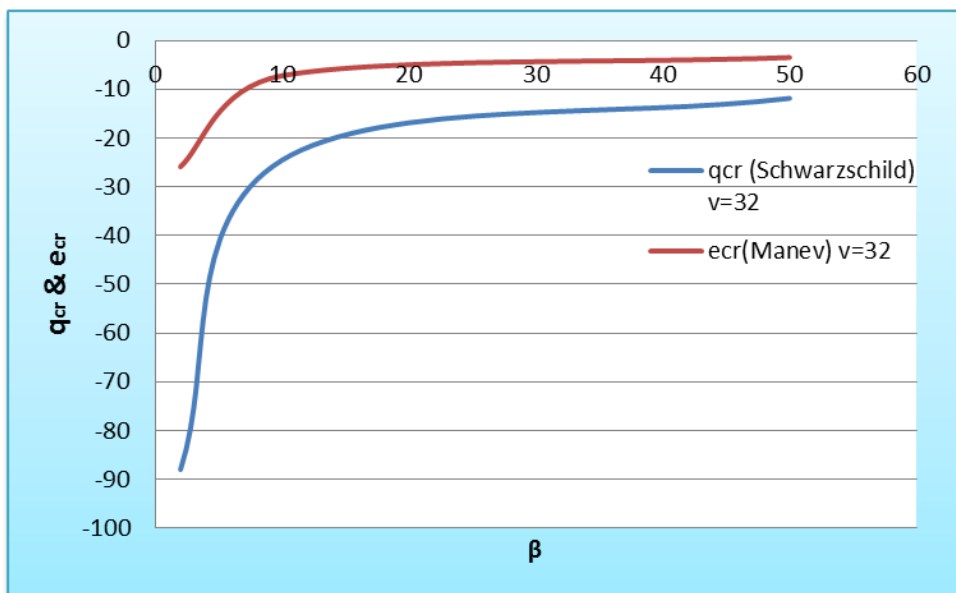
Σχήμα 5.3 Σύγκριση της κρίσιμης τιμής q_{cr} (Schwarzschild) με την αντίστοιχη κρίσιμη τιμή e_{cr} (Manev) για: (α) $\nu = 7$ και (β) $\nu = 8$

Για τις περιπτώσεις που ο αριθμός περιφερειακών σωμάτων ν ισούται με 7 ή 8 (σχήμα 5.3 (α) & (β)) παρατηρούμε ότι οι τιμές του q_{cr} βρίσκονται πιο πάνω από τις αντίστοιχες τιμές του e_{cr} , δηλαδή οι κρίσιμες τιμές για τον συντελεστή Schwarzschild βρίσκονται πάνω από τις αντίστοιχες καμπύλες για τις κρίσιμες τιμές του συντελεστή Manev.

Αντίθετα όταν το ν αυξάνει σε 10 και 32 (σχήματα 5.4 (α) & (β)) παρατηρούμε μια ανατροπή σε σχέση με τα προηγούμενα αποτελέσματα και συγκεκριμένα οι καμπύλες των q_{cr} βρίσκονται τώρα κάτω από τις αντίστοιχες των e_{cr} .



(α)



(β)

Σχήμα 5.4 Σύγκριση της κρίσιμης τιμής q_{cr} (Schwarzschild) με την αντίστοιχη κρίσιμη τιμή e_{cr} (Manev) για: (α) $\nu = 10$ και (β) $\nu = 32$

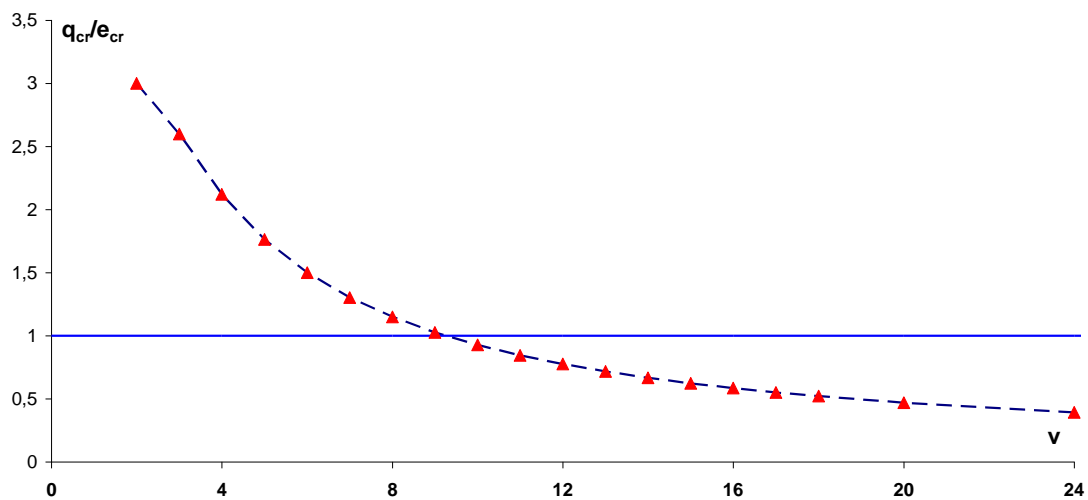
Αυτή η αλλαγή εξηγείται απλά, αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις 5.2 και 5.3. Θα έχουμε τότε ότι ο λόγος τους λ θα ισούται με,

$$\lambda = \frac{q_{cr}}{e_{cr}} = \frac{3}{2} M = \frac{3}{2} 2 \sin\left(\frac{\pi}{\nu}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{\nu}\right)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

- όταν $2 \leq \nu \leq 9$, τότε $\lambda > 1$, δηλαδή $q_{cr} > e_{cr}$
- όταν $\nu \geq 10$, τότε $\lambda < 1$, δηλαδή $q_{cr} < e_{cr}$

Στο σχήμα 5.5 που ακολουθεί, δείχνουμε σε γράφημα αυτή την αλλαγή



Σχήμα 5.5. Μεταβολή του λόγου q_{cr}/e_{cr} με την παράμετρο ν

5.4 Μέθοδος Newton-Raphson για τον αριθμητικό υπολογισμό των θέσεων ισοροπίας

Επειδή το αλγεβρικό σύστημα (5.1) είναι μη γραμμικό, ο προσδιορισμός των θέσεων ισοροπίας γίνεται με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων. Σημειώνουμε ότι αναφερόμαστε πάντα στο περιστρεφόμενο σύστημα $Oxyz$ και όχι στο αδρανειακό $O\xi\zeta$.

Από τις υπάρχουσες αριθμητικές μεθόδους που περιγράφονται στην ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία, επιλέξαμε τη μέθοδο Newton-Raphson η οποία έχει εφαρμοσθεί στο παρελθόν και σε άλλα παρόμοια προβλήματα και επιπλέον είναι απλή στην εφαρμογή της και δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, θεωρούμε μια προσεγγιστική λύση (x_0, y_0, z_0) του συστήματος (5.1) που αποτελεί την τιμή εκκίνησης του αλγορίθμου. Η τιμή αυτή μπορεί να βρεθεί είτε από τα διαγράμματα των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας, είτε από τον εντοπισμό μικρών περιοχών τιμών των x , y και z μέσα στις οποίες οι συναρτήσεις του συστήματος (5.1) αλλάζουν ταυτόχρονα πρόσημο.

Η γενική μορφή του αλγορίθμου που αναφέρεται σε θέσεις ισορροπίας στον τρισδιάστατο χώρο, περιγράφεται με τις τρεις επαναληπτικές σχέσεις (Καλβουρίδης, 2004):

$$x^{(v)} = x^{(v-1)} - \frac{F(G_y H_z - H_y G_z) - F_y (GH_z - HG_z) + F_z (GH_y - HG_y)}{J}$$

$$y^{(v)} = y^{(v-1)} - \frac{F_x (GH_z - HG_z) - F(G_x H_z - H_x G_z) + F_z (G_x H - H_x G)}{J}$$

$$z^{(v)} = z^{(v-1)} - \frac{F_x (G_y H - H_y G) - F_y (G_x H - H_x G) + F(G_x H_y - H_x G_y)}{J}$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι άνω δείκτες (v) και $(v-1)$ αναφέρονται στη (v) -οστή και $(v-1)$ -οστή αντίστοιχα προσέγγιση-επανάληψη. Στις σχέσεις αυτές θέσαμε :

$$U_x(x, y, z) = F(x, y, z)$$

$$U_y(x, y, z) = G(x, y, z)$$

$$U_z(x, y, z) = H(x, y, z)$$

ενώ με $F_x, F_y, F_z, G_x, G_y, G_z, H_x, H_y, H_z$, συμβολίζουμε τις πρώτες μερικές παραγώγους των συναρτήσεων F, G, H . Τα κριτήρια τερματισμού του αλγορίθμου εκφράζονται από τις σχέσεις:

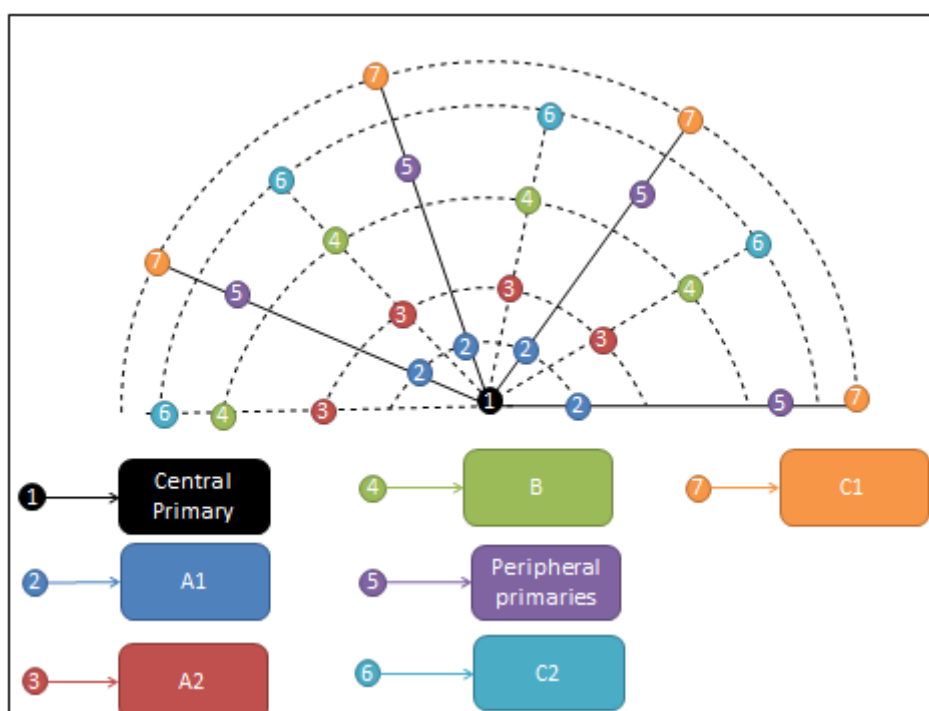
$$|x^{(v)} - x^{(v-1)}| \leq \varepsilon, \quad |y^{(v)} - y^{(v-1)}| \leq \varepsilon, \quad |z^{(v)} - z^{(v-1)}| \leq \varepsilon$$

όπου συνήθως $\varepsilon = 10^{-12}$ είναι η ακρίβεια σύγκλισης.

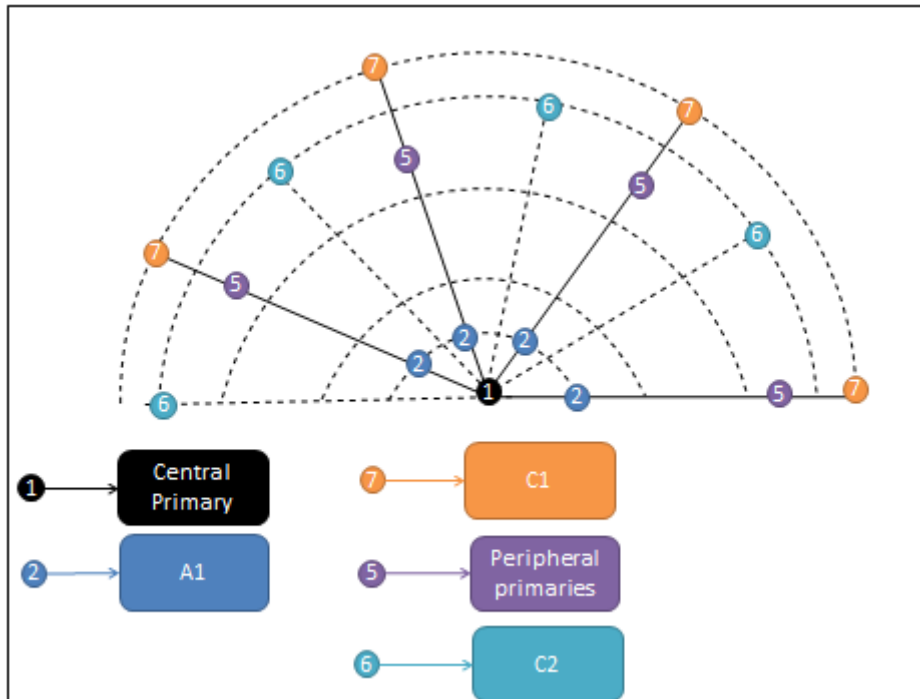
5.5 Ζώνες ισορροπίας

Όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 3, οι υπάρχουσες θέσεις ισορροπίας βρίσκονται πάνω σε ομόκεντρους κύκλους που το κοινό τους κέντρο ταυτίζεται με το κέντρο του σχηματισμού. Ο αριθμός των ζωνών ισορροπίας ισούται με τον αριθμό των ομάδων των δυναμικά ισοδύναμων θέσεων ισορροπίας. Λόγω της συμμετρίας του σχηματισμού των πρωτευόντων σωμάτων αλλά και του δημιουργούμενου δυναμικού πεδίου σε στροφές κατά γωνία $2\pi/n$ περί άξονα κάθετο στο επίπεδο των primaries που διέρχεται από το κέντρο του σχηματισμού, κάθε τέτοια ομάδα αποτελείται από δυναμικά ισοδύναμες θέσεις ισορροπίας, οι οποίες ισαπέχουν από το κεντρικό σώμα αλλά και μεταξύ τους.

Οι θέσεις αλλά και το πλήθος των ζωνών ισορροπίας στη Νευτώνεια εκδοχή του προβλήματος εξαρτώνται από τις τιμές των δύο παραμέτρων n και β . Έτσι για κάθε τιμή της n , η τιμή της παραμέτρου β θα καθορίσει το αν ο αριθμός των ζωνών θα είναι πέντε ή τρεις. Ακολουθώντας τη σειρά με την οποία εμφανίζονται από το κέντρο προς την περιφέρεια και υιοθετώντας τον συμβολισμό που έχει χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα (Kalnouridis, 1998), τις ζώνες τις διακρίνουμε σε A_1, A_2, B, C_2, C_1 όταν πρόκειται για πέντε ζώνες και σε A_1, C_2, C_1 όταν πρόκειται για τρεις, όπως φαίνεται στα σχήματα 5.6 και 5.7 που ακολουθούν.



Σχήμα 5.6 Διάταξη των θέσεων ισορροπίας στην περίπτωση ύπαρξης πέντε ζωνών ισορροπίας ($\beta < l_v$)



Σχήμα 5.7 Διάταξη των θέσεων ισορροπίας στην περίπτωση ύπαρξης τριών ζωνών ισορροπίας ($\beta > l_v$)

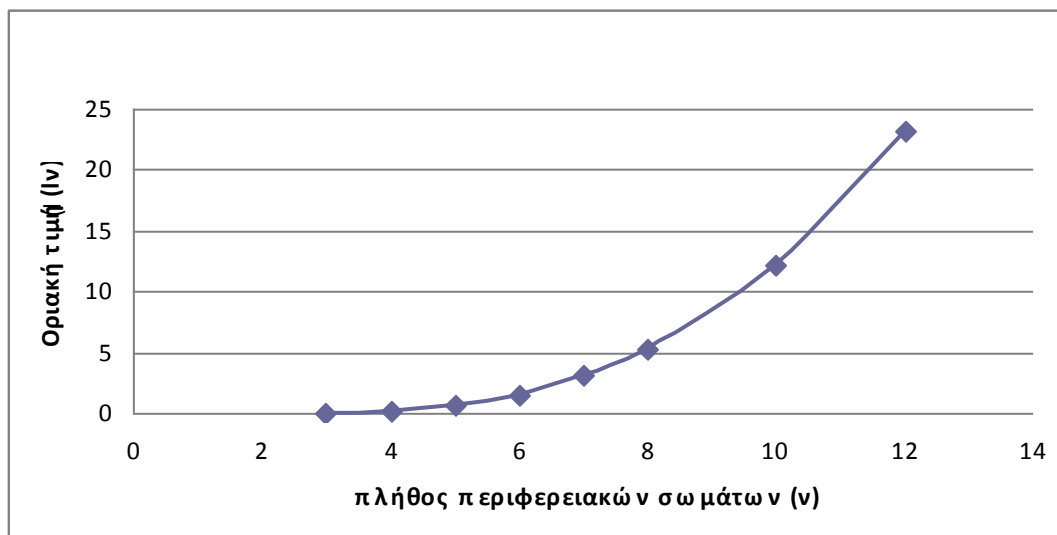
Τα σημεία της ζώνης A_1 ονομάζονται εσωτερικά συγγραμμικά, βρίσκονται στο εσωτερικό του ιδεατού κύκλου των περιφερειακών σωμάτων και πάνω στις ακτίνες που συνδέουν το κεντρικό σώμα με τα περιφερειακά. Τα σημεία της ζώνης C_1 ονομάζονται εξωτερικά συγγραμμικά επειδή βρίσκονται εκτός του κύκλου των περιφερειακών σωμάτων και πάνω στις προεκτάσεις των ακτίνων τους. Τα σημεία των ζωνών A_2 και B ονομάζονται εσωτερικά τριγωνικά και βρίσκονται πάνω στις ακτίνες που διχοτομούν τις γωνίες που σχηματίζονται από το κεντρικό σώμα και δύο διαδοχικά περιφερειακά σώματα. Τέλος τα σημεία C_2 καλούνται εξωτερικά τριγωνικά επειδή βρίσκονται εκτός του κύκλου των primaries και στις προεκτάσεις των ακτίνων των δύο προηγούμενων ζωνών.

Η μετάβαση από πέντε σε τρεις ζώνες για διάφορες τιμές της παραμέτρου ν , αποδίδεται στο διάγραμμα του σχήματος 5.8 (Croustalloudi & Kalvouridis, 2007). Η μεταβολή της οριακής τιμής β_{op} (ή l_v) με την παράμετρο ν δεν είναι προφανώς συνεχής, αφού η παράμετρος ν μεταβάλλεται με τρόπο διακριτό. Όμως οι

Croustalloudi & Kalvouridis (2011) βρήκαν ότι οι οριακές τιμές l_v μπορούν να υπολογισθούν με πολύ καλή προσέγγιση με τη βοήθεια μιας σχέσης πολυωνυμικής μορφής 4^{ου} βαθμού που έχει τη μορφή :

$$l_v = 0.0000418632 * v^4 + 0.018856 * v^3 - 0.0648675 * v^2 - 0.104225 * v + 0.40547,$$

$$v=2,3,4\dots \quad (5.4)$$



Σχήμα 5.8 Οριακές τιμές l_v της παραμέτρου μάζας για διάφορες τιμές της παραμέτρου v (η συνεχής γραμμή είναι απλώς ενδεικτική της εξέλιξης των τιμών αυτών)

Στον επόμενο Πίνακα 5.1, καταγράφονται οι οριακές τιμές της παραμέτρου μάζας $\beta_{op} = l_v$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου v .

Πίνακας 5.1 (Croustalloudi & Kalvouridis 2007). Οριακές τιμές l_v της παραμέτρου μάζας για διάφορες τιμές της v

Πλήθος v περιφερειακών σωμάτων	Οριακή τιμή της παραμέτρου μάζας l_v
3	0.014
4	0.184
5	0.6496
6	1.547
7	3.08

8	5.24
10	12.16
12	23.26

5.6 Εύρεση των οριακών τιμών των β και q για μετάβαση από τρεις σε πέντε ζώνες ισορροπίας στην περίπτωση δυναμικού Schwarzschild - Καμπύλες διακλάδωσης

Όπως είναι προφανές, οι παράγοντες που επηρεάζουν το πλήθος των ζωνών ισορροπίας είναι οι τρεις παράμετροι του προβλήματος, δηλαδή το ν , ο συντελεστής β και η τιμή του Schwarzschild q . Όπως ήδη έχει λεχθεί, η παράμετρος β λαμβάνει θετικές τιμές μικρότερες ή μεγαλύτερες της μονάδας, ο συντελεστής Schwarzschild q μπορεί να πάρει θετικές, αρνητικές αλλά και την τιμή μηδέν (δηλαδή την περίπτωση για Νευτώνια δυναμικά), ενώ η τιμή της παραμέτρου ν που αναφέρεται στο πλήθος των περιφερειακών πρωτευόντων σωμάτων παίρνει μόνο θετικές ακέραιες τιμές ($\nu > 1$). Με αυτά τα δεδομένα, θα επικεντρωθούμε στη συνέχεια στη μελέτη της επίδρασης των τριών αυτών παραγόντων μέσω των καμπύλων διακλάδωσης.

Γενικά, μια καμπύλη διακλάδωσης για μια τιμή της παραμέτρου ν , αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των σημείων (q, β) του επιπέδου (q, β) , όπου συμβαίνει μετάβαση από ένα πλήθος ζωνών σε ένα άλλο ή ακόμη και μετάβαση από ένα πλήθος ζωνών στο ίδιο μεν πλήθος αλλά διαφορετικών ζωνών. Φυσικά για την τιμή $q=0$ οι καμπύλες αυτές ανάγονται σε ένα σημείο (σημείο διακλάδωσης) στο οποίο αναφερθήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

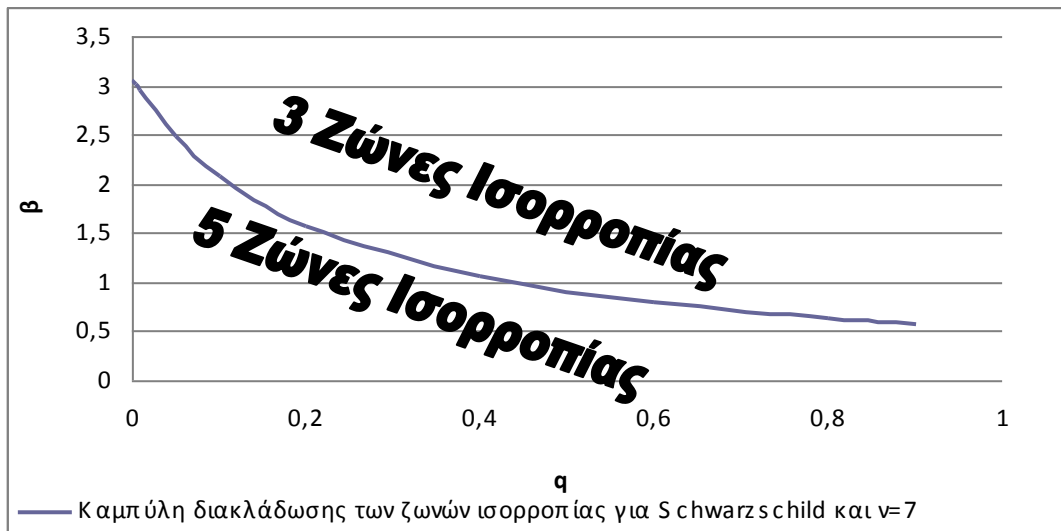
Στην περίπτωση που $q > 0$, τα πράγματα είναι σχετικά απλά αφού για κάθε ν υπάρχει μόνο μία καμπύλη διακλάδωσης που οριοθετεί την περιοχή τιμών (q, β) στο επίπεδο q - β όπου υπάρχουν τρεις ζώνες, από εκείνη όπου οι ζώνες είναι πέντε. Η σχεδίαση των καμπύλων αυτών για δεδομένο ν έγινε διατηρώντας κάθε φορά σταθερή την τιμή του q και μεταβάλλοντας την τιμή του β ώστε να επιτύχουμε τη μετάβαση από τρεις σε πέντε ζώνες. Το ίδιο επαναλάβαμε για διάφορες τιμές της q στο διάστημα $0 < q < 0.9$.

Στην περίπτωση που $q < 0$, επιπλέον των τριών ή πέντε ζωνών που εμφανίζονται στις περιπτώσεις $q = 0$ και $q > 0$, καταγράφονται δύο νέες ζώνες ισορροπίας που αναπτύσσονται στην περιοχή του κεντρικού πρωτεύοντος σώματος P_0 και συμβολίζονται με E_1 και E_2 . Αυτό σημαίνει ότι, ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων το πλήθος των ζωνών μπορεί να είναι τρεις, πέντε ή επτά ζώνες, κάτι που αναμένουμε να φανεί στο αντίστοιχο διάγραμμα διακλάδωσης (με το διάγραμμα αυτό δεν έχουμε ασχοληθεί στην παρούσα εργασία). Όμως από την εμπειρία της μέχρι τώρα μελέτης, εικάζουμε ότι θα πρέπει να παρουσιάζει παρόμοια ποιοτικά χαρακτηριστικά με αυτό που βρέθηκε στην περίπτωση του δυναμικού Manev (Φακής, 2014), δηλαδή να αποτελείται από τρεις καμπύλες διακλάδωσης οι οποίες να διαχωρίζουν το επίπεδο τιμών (q, β) σε περισσότερες από δύο περιοχές.

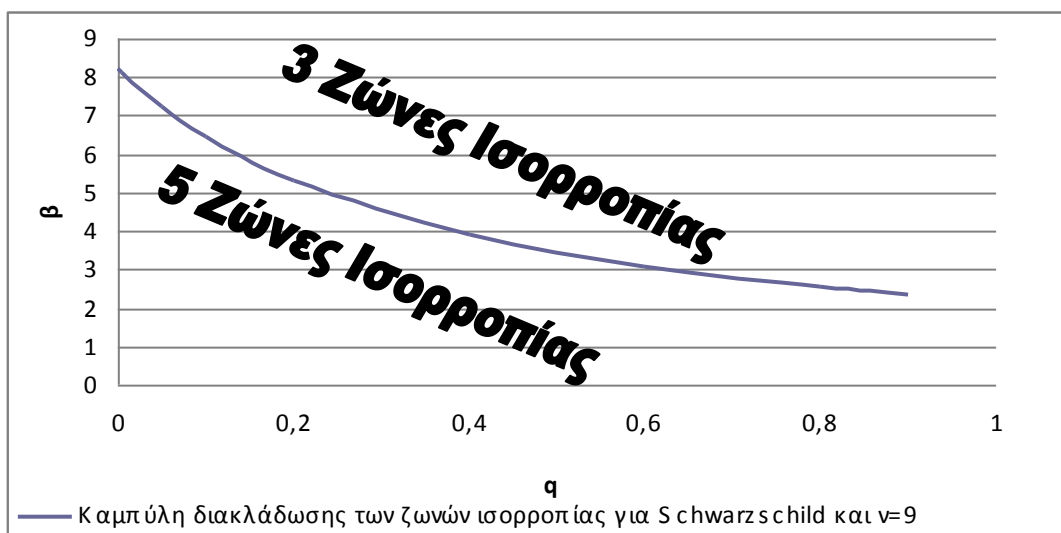
5.6.1 Αποτελέσματα για δυναμικό τύπου Schwarzschild με $q > 0$

Στα σχήματα 5.9 και 5.10 έχουμε σχεδιάσει τις καμπύλες διακλάδωσης για $n=7$ και $n=9$ αντίστοιχα. Στον άξονα των τετμημένων καταγράφονται οι τιμές της παραμέτρου β , ενώ στον άξονα τεταγμένων καταγράφονται οι τιμές της παραμέτρου q . Επιπλέον, έχουμε σημειώσει τις περιοχές των τιμών (q, β) για τις οποίες υπάρχουν τρεις ζώνες και εκείνες όπου οι ζώνες είναι πέντε. Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στους Πίνακες B1 και B2 του Παραρτήματος.

Οι καμπύλες αυτές (και οι τιμές των Πινάκων B1 και B2 του Παραρτήματος) δεν υπολογίστηκαν με αναλυτικό τρόπο, αλλά εφαρμόσαμε μία μέθοδο διπλής σάρωσης των τιμών των παραμέτρων β και q . Δηλαδή με δεδομένη την τιμή της παραμέτρου n ($n = 7$), για κάθε τιμή της παραμέτρου q στο διάστημα $0 < q < 0.9$, μεταβάλαμε την τιμή της παραμέτρου β στο διάστημα $0 < \beta < 9$ έτσι ώστε κάθε φορά να σημειώνουμε την τιμή εκείνη της β όπου παρατηρείται η μετάβαση του πλήθους των ζωνών από πέντε σε τρεις. Διαπιστώσαμε ότι όλες οι καμπύλες που σχεδιάσαμε είναι φθίνουσες και ότι τείνουν ασυμπτωτικά σε μια οριακή τιμή της παραμέτρου q . Η περιοχή με τις πέντε ζώνες ισορροπίας εκτείνεται μεταξύ του άξονα των q και της καμπύλης διακλάδωσης, ενώ η περιοχή με τις τρεις ζώνες βρίσκεται πάνω από την καμπύλη.



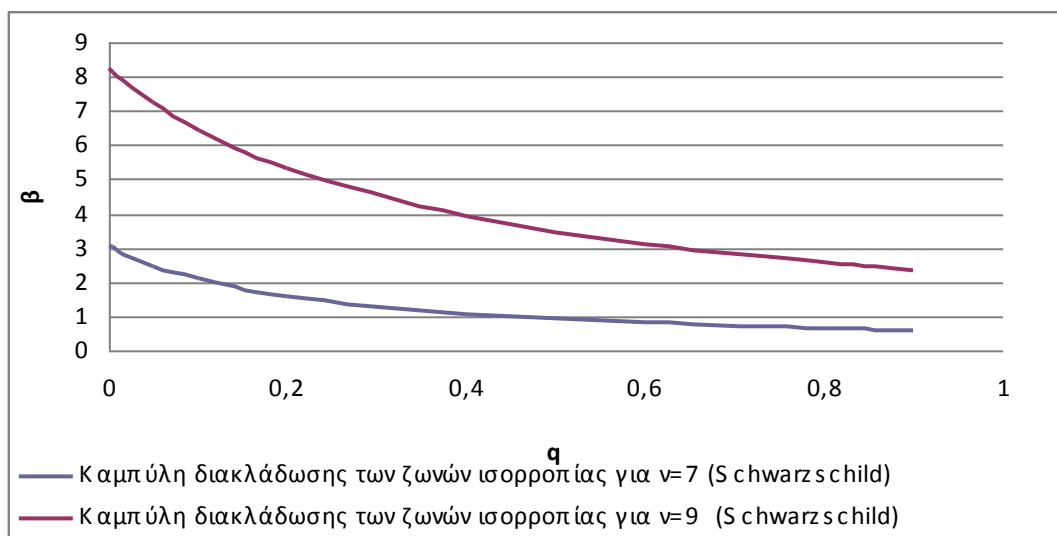
Σχήμα 5.9 Καμπύλη διακλάδωσης των ζωνών ισορροπίας για $v=7$ και δυναμικό τύπου Schwarzschild με $q>0$



Σχήμα 5.10 Καμπύλη διακλάδωσης των ζωνών ισορροπίας για $v=9$ και δυναμικό τύπου Schwarzschild με $q>0$

Στο σχήμα 5.11 έχουμε απεικονίσει στο ίδιο διάγραμμα τις δύο προηγούμενες καμπύλες ώστε να έχουμε μια σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις καμπύλες διακλάδωσης σε σχέση με τη μεταβλητή v . Από το διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι η καμπύλη μετάβασης για $v=7$ βρίσκεται πιο πάνω από την αντίστοιχη καμπύλη για $v=9$, δηλαδή αυξάνοντας τον αριθμό των περιφερειακών σωμάτων (από 7 σε 9) χρειαζόμαστε για την ίδια τιμή του συντελεστή q υψηλότερες τιμές της παραμέτρου β

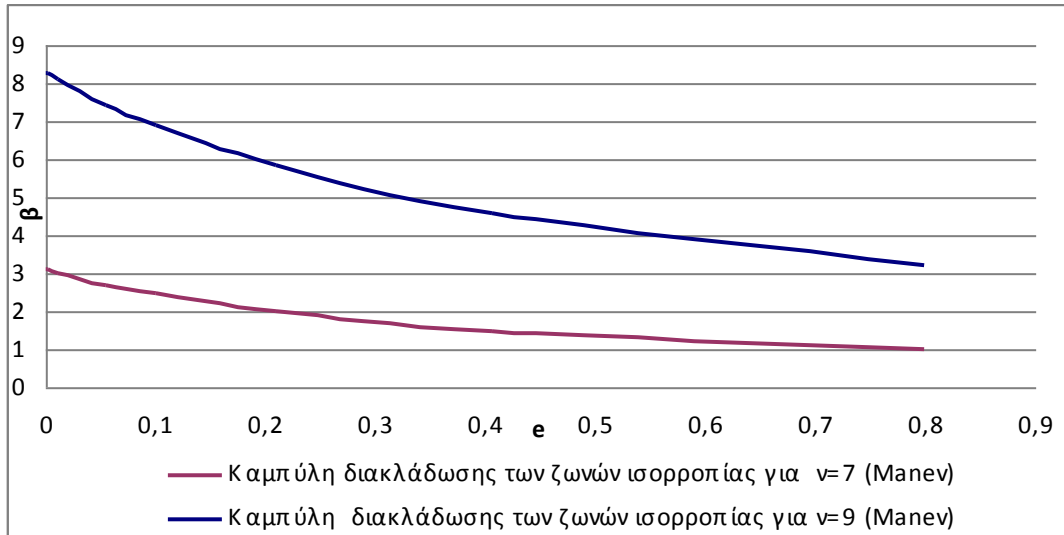
ώστε να έχουμε την μετάβαση από πέντε σε τρεις ζώνες που ισχύει για τα επτά περιφερειακά σώματα.



Σχήμα 5.11 Κοινό διάγραμμα των καμπύλων διακλάδωσης των ζωνών ισορροπίας για $\nu=7, 9$ και δυναμικό τύπου Schwarzschild ($q>0$)

5.6.2 Αποτελέσματα για δυναμικό τύπου Manev με $\epsilon>0$

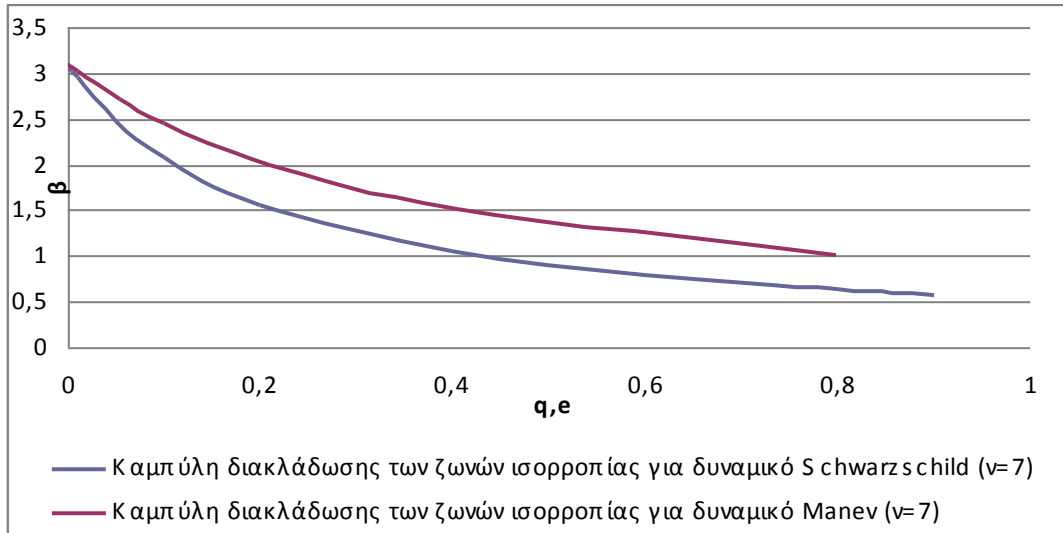
Παρότι οι καμπύλες αυτές μελετήθηκαν πρόσφατα και διεξοδικά (Φακής, 2014), παραθέτουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα προκειμένου να συγκρίνουμε τα δύο είδη δυναμικών. Οι αντίστοιχες καμπύλες διακλάδωσης απεικονίζονται στο κοινό διάγραμμα του σχήματος 5.12, ενώ τα αριθμητικά αποτελέσματα εμφανίζονται στους Πίνακες B3 και B4 του Παραρτήματος. Είναι φανερό ότι οι καμπύλες διακλάδωσης για δυναμικό τύπου Manev έχουν παρόμοια συμπεριφορά με τις αντίστοιχες για το δυναμικό τύπου Schwarzschild που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, καθώς ξεκινούν από μια μεγάλη τιμή στον άξονα β και στη συνέχεια ελαττώνονται τείνοντας ασυμπτωτικά σε μια οριακή τιμή του ϵ . Στο άνω μέρος της καμπύλης είναι οι συνδυασμοί β και ϵ που δίνουν τρεις ζώνες ισορροπίας και στο κάτω μέρος, πέντε ζώνες.



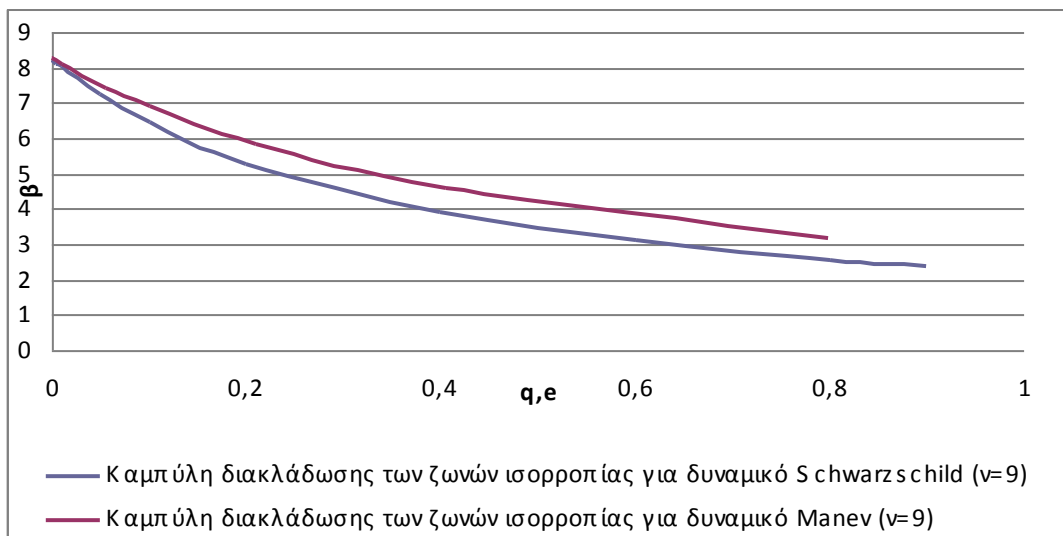
Σχήμα 5.12 Κοινό διάγραμμα των καμπύλων διακλάδωσης των ζωνών ισορροπίας για $\nu=9$ και $\nu=7$ και δυναμικό τύπου Manev με $e>0$

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα των σχημάτων 5.11 και 5.12, παρατηρούμε παρόμοια συμπεριφορά αφού και στην περίπτωση Manev και στην περίπτωση Schwarzschild, η καμπύλη μετάβασης για $\nu=9$ βρίσκεται πιο πάνω από την αντίστοιχη καμπύλη για $\nu=7$.

Στα επόμενα δύο διαγράμματα των σχημάτων 5.13 και 5.14 συγκρίνουμε τα αποτελέσματα για τα δύο δυναμικά και τις δύο τιμές της παραμέτρου ν . Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις (για $\nu=7$ και $\nu=9$) η καμπύλη διακλάδωσης που αφορά το δυναμικό τύπου Manev βρίσκεται πιο πάνω από την αντίστοιχη καμπύλη που αφορά το δυναμικό τύπου Schwarzschild με τη μόνη διαφορά ότι όσο μεγαλώνει το ν κλείνει η ψαλίδα της διαφοράς.



Σχήμα 5.13 Κοινό διάγραμμα των καμπύλων διακλάδωσης των ζωνών ισορροπίας για $v=7$ και δυναμικά τύπου Manev και Schwarzschild



Σχήμα 5.14 Κοινό διάγραμμα των καμπύλων διακλάδωσης των ζωνών ισορροπίας για $v=9$ και δυναμικά τύπου Manev και Schwarzschild

5.7 Μελέτη της γραμμικής ευστάθειας των θέσεων ισορροπίας

Αν με L συμβολίσουμε γενικά μία από τις θέσεις ισορροπίας του μικρού σώματος, το διάνυσμα θέσης της L στο χώρο των φάσεων (συντεταγμένες και ταχύτητες) θα είναι,

$$\vec{x}_L = (x_L, y_L, z_L, 0, 0, 0),$$

Θεωρούμε μία γειτονική θέση \vec{r} του σημείου ισορροπίας L,

$$\vec{r} = \vec{r}_L + \delta \vec{r} = (x_L + \delta x, y_L + \delta y, z_L + \delta z, 0 + \delta \dot{x}, 0 + \delta \dot{y}, 0 + \delta \dot{z})$$

Αντικαθιστούμε στις αδιαστατοποιημένες εξισώσεις κινήσεως (Κεφάλαιο 2), οπότε αναλύοντας σε σειρές Taylor τις U_x, U_y, U_z και παραλείποντας τους μη γραμμικούς όρους, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα καταστατικών εξισώσεων πρώτης τάξεως:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta x) &= \delta \dot{x} \\ \frac{d}{dt}(\delta z) &= \delta \dot{z} \\ \frac{d}{dt}(\delta y) &= \delta \dot{y} \\ \frac{d}{dt}(\delta \dot{x}) &= 2\delta \dot{y} + U_{xx}\delta x + U_{xy}\delta y + U_{xz}\delta z \\ \frac{d}{dt}(\delta \dot{y}) &= -2\delta \dot{x} + U_{yx}\delta x + U_{yy}\delta y + U_{yz}\delta z \\ \frac{d}{dt}(\delta \dot{z}) &= U_{zx}\delta x + U_{zy}\delta y + U_{zz}\delta z \end{aligned} \quad (5.5)$$

και σε μορφή πινάκων

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} & 0 & 2 & 0 \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} & -2 & 0 & 0 \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Όπου για το συγκεκριμένο πρόβλημα θα έχουμε :

$$U_x = x + \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta x}{r_0^3} - \frac{3\beta q x}{r_0^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - x)}{r_i^3} \right]$$

$$U_y = y + \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta y}{r_0^3} - \frac{3\beta q y}{r_0^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(y_i - y)}{r_i^3} \right]$$

$$U_z = -\frac{z}{\Delta} \left[\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta q}{r_0^5} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} \right]$$

$$U_{xx} = 1 + \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta x^2}{r_0^5} - \frac{3q\beta}{r_0^5} + \frac{15q\beta x^2}{r_0^7} - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} + 3 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - x)^2}{r_i^5} \right]$$

$$U_{yy} = 1 + \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta y^2}{r_0^5} - \frac{3q\beta}{r_0^5} + \frac{15q\beta y^2}{r_0^7} - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} + 3 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(y_i - y)^2}{r_i^5} \right]$$

$$U_{zz} = \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{\beta}{r_0^3} + \frac{3\beta z^2}{r_0^5} - \frac{3q\beta}{r_0^5} + \frac{15q\beta z^2}{r_0^7} - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{r_i^3} + 3 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{z^2}{r_i^5} \right]$$

$$U_{xy} = \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{3q\beta xy}{r_0^5} - \frac{15q\beta yx}{r_0^7} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - x)(y_i - y)}{r_i^5} \right]$$

$$U_{xz} = \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{3\beta xz}{r_0^5} - \frac{15q\beta xz}{r_0^7} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - x)z}{r_i^5} \right]$$

$$U_{yz} = \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{3\beta yz}{r_0^5} - \frac{15q\beta yz}{r_0^7} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(y_i - y)z}{r_i^5} \right]$$

Για να έχουμε λύση διάφορη της τετριμμένης (μηδενικής), θα πρέπει

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (5.7)$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 6x6 και A είναι ο πίνακας των συντελεστών του 2^{ου} μέλους της (5.5).

Θέτοντας

$$F_w = \frac{\partial U_x}{\partial w}, \quad G_w = \frac{\partial U_y}{\partial w}, \quad H_w = \frac{\partial U_z}{\partial w}, \quad \text{με } w=x,y,z$$

η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι ένα πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού,

$$P(\lambda) = \alpha_0 \lambda^6 + \alpha_1 \lambda^5 + \alpha_2 \lambda^4 + \alpha_3 \lambda^3 + \alpha_4 \lambda^2 + \alpha_5 \lambda + \alpha_6 = 0 \quad (5.8)$$

όπου:

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = 4 - (H_z + G_y + F_x)$$

$$\alpha_3 = 2(F_y - G_x)$$

$$\alpha_4 = -4H_z + (G_y H_z - G_z H_y) + (F_z H_x - F_x H_z) + (F_x G_y - F_y G_x)$$

$$\alpha_5 = -2 \left[(F_z H_y - F_y H_z) + (G_x H_z - G_z H_x) \right]$$

$$\alpha_6 = F_x (H_y G_z - G_y H_z) + F_y (G_x H_z - H_x G_z) + F_z (H_x G_y - G_x H_y)$$

Τότε οι μεταβολές δx , δy , δz , μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή,

$$\delta x = \sum_{i=1}^6 A_i e^{\rho_i t}, \quad \delta y = \sum_{i=1}^6 B_i e^{\rho_i t}, \quad \delta z = \sum_{i=1}^6 C_i e^{\rho_i t}$$

όπου ρ_i , $i=1,2,\dots,6$, είναι οι ρίζες της (5.8) και

$$\begin{aligned} A_i &= A_i(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta \dot{x}_0, \delta \dot{y}_0, \delta \dot{z}_0) \\ B_i &= B_i(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta \dot{x}_0, \delta \dot{y}_0, \delta \dot{z}_0) \\ C_i &= C_i(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta \dot{x}_0, \delta \dot{y}_0, \delta \dot{z}_0) \end{aligned} \quad i=1,2,\dots,6$$

Η ευστάθεια του γραμμικοποιημένου συστήματος στη θέση ισορροπίας L ελέγχεται λοιπόν με τη βοήθεια των ιδιοτιμών της (5.8). Αν έστω και μία από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται ασταθής. Αν όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται ασυμπτωτικά ευσταθής. Αν έστω και μία από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει μηδενικό πραγματικό μέρος και όλες οι υπόλοιπες ρίζες έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε η ισορροπία χαρακτηρίζεται οριακά ευσταθής.

5.8 Ενδεικτικά αριθμητικά αποτελέσματα των θέσεων ισορροπίας στο επίπεδο xy , για κεντρικό δυναμικό τύπου Schwarzschild

Όπως ήδη αναφέραμε, για τον ακριβή αριθμητικό προσδιορισμό των θέσεων ισορροπίας χρησιμοποιήσαμε ένα πρόγραμμα Fortran το οποίο συντάχθηκε και

εφαρμόστηκε σε πλήθος προβλημάτων από τον καθηγητή κ Καλβουρίδη και τους συνεργάτες του και βασίζεται στον αλγόριθμο Newton – Raphson τον οποίο περιγράψαμε αναλυτικά στην παράγραφο 5.4 του παρόντος κεφαλαίου. Στο ίδιο πρόγραμμα προσδιορίζεται και η γραμμική ευστάθεια κάθε σημείου ισορροπίας με βάση τις σχέσεις της προηγούμενης παραγράφου.

Στα επόμενα θα παραθέσουμε πίνακες με ενδεικτικά αποτελέσματα για τις δύο περιπτώσεις, $q > 0$ και $q < 0$. Περισσότερες περιπτώσεις και αριθμητικά αποτελέσματα θα αναφερθούν στους Πίνακες Γ του Παραρτήματος. Σημειώνουμε εδώ ότι τα αποτελέσματα αφορούν μόνο έναν αντιπρόσωπο-σημείο από κάθε ομάδα-ζώνη που υπάρχει επάνω στο επίπεδο xy , για τις δεδομένες τιμές των παραμέτρων. Προφανώς οι συντεταγμένες των υπόλοιπων μελών της ζώνης, των οποίων το συνολικό πλήθος ισούται με το πλήθος των περιφερειακών σωμάτων v , μπορούν να υπολογισθούν με έναν απλό μετασχηματισμό συμμετρίας σε στροφή στο ίδιο επίπεδο κατά γωνίες $\kappa(2\pi/v)$, $\kappa=1, 2, 3, \dots, v-1$. Λόγω της υπάρχουσας συμμετρίας του σχηματισμού και του πεδίου, οι τιμές των ακτίνων (αποστάσεις από το κέντρο), της Ιακωβιανής σταθεράς C , καθώς και η κατάσταση ευστάθειας θα είναι ίδιες για όλες τις θέσεις που ανήκουν στην ίδια ζώνη.

5.8.1 Περίπτωση με $q > 0$

Για τις τιμές των παραμέτρων που αναγράφονται στον Πίνακα 5.2 ($v=7$, $\beta=0.5$, $q=+0.001$) εμφανίζονται πέντε ζώνες ισορροπίας στο xy επίπεδο. Στις στήλες 2, 3 και 4 αναφέρονται οι συντεταγμένες x , y και z , των εκπροσώπων των ζωνών αυτών. Στη στήλη C είναι οι τιμές των Ιακωβιανών σταθερών τους C , ενώ στη στήλη Rad καταγράφονται οι αντίστοιχες αποστάσεις τους από την αρχή. Τέλος στις δύο τελευταίες στήλες αναγράφονται η ονομασία της ζώνης στην οποία ανήκει το συγκεκριμένο σημείο-εκπρόσωπος, καθώς και η ευστάθειά τους ($U=Unstable$, ασταθές, $S=stable$ ευσταθές). Όπως είπαμε προηγουμένως, τα υπόλοιπα σημεία κάθε ζώνης μπορούν εύκολα να προσδιορισθούν χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων σε στροφή στο επίπεδο xy περί άξονα κάθετο σε αυτό (δηλαδή περί τον Oz) και γωνία στροφής $\kappa(2\pi/v)$, $\kappa=1,2,3,\dots,v-1$.

Πίνακας 5.2. Περίπτωση με $q>0$ ($v=7$, $\beta=0.5$, $q= + 0.001$)

A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	Ευσταθ.
1	-1.744016958	0	0	8.25563769	1.744016958	C2	U
2	-1.051127660	0	0	9.16496652	1.051127660	B	U
3	-0.483547578	0	0	8.31022679	0.483547578	A2	U
4	0.472065674	0	0	8.32294988	0.472065674	A1	U
5	1.861095681	0	0	8.44686798	1.861095681	C1	U

5.8.2 Περίπτωση με $q<0$

Στην περίπτωση αυτή ($q<0$), επιπλέον των τριών ή πέντε ζωνών που εμφανίζονται για $q=0$ ή $q>0$, καταγράφουμε την εμφάνιση δύο νέων ζωνών ισορροπίας που συμβολίζουμε με E_1 και E_2 . Αυτό σημαίνει ότι στη γενική περίπτωση το πλήθος των ζωνών ισορροπίας μπορεί να είναι επτά. Στον Πίνακα 5.3 που ακολουθεί, καταγράφονται οι επτά θέσεις ισορροπίας που ανήκουν στις αντίστοιχες ζώνες στο xy επίπεδο όπως έγινε και στην προηγούμενη παράγραφο.

Πίνακας 5.3. Περίπτωση με $q<0$ ($v=7$, $\beta=2$, $q=-0.001$)

A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	Ευστ
1	-1,585796872	0	0	7.02440769	1.585796872	C2	U
2	-1,017728032	0	0	7.43064293	1.017728032	B	U
3	-0,716757734	0	0	7.31330665	0.716757734	A2	U
4	-0,174395395	0	0	9.95138468	0.174395395	E2	U
5	0,174395912	0	0	9.95139144	0.174395913	E1	U
6	0,638311619	0	0	7.41208146	0.638311619	A1	U
7	1,746691535	0	0	7.26484558	1.746691535	C1	U

Περισσότερες περιπτώσεις με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παράρτημα του 5 κεφαλαίου (μέρος Α).

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι, όλοι οι έλεγχοι ευστάθειας που έγιναν στις θέσεις ισορροπίας που υπολογίσθηκαν για διάφορες τιμές των παραμέτρων (συμπεριλαμβανομένων και αυτών των παραρτημάτων) έδειξαν ότι οι θέσεις αυτές είναι ασταθείς.

5.9 Θέσεις ισορροπίας εκτός του επιπέδου xy , πάνω στον άξονα z που εμφανίζονται για αρνητικές τιμές του q του δυναμικού Schwarzschild

Εκτός από τις θέσεις ισορροπίας στο επίπεδο xy που μελετήθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, στην περίπτωση που η παράμετρος $q < 0$, εμφανίζονται άλλες δύο θέσεις πάνω στον άξονα z , μία στον θετικό ημιάξονα ($+z$) και μία στον αρνητικό ($-z$) ημιάξονα. Οι δύο αυτές θέσεις είναι συμμετρικές ως προς το επίπεδο xy και τις συμβολίζουμε με L_{+z} και L_{-z} αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα που ελήφθησαν αφορούν κανονικούς πολυγωνικούς σχηματισμούς με $n=5, 7$ και 9 η δε μελέτη της παραμετρικής μεταβολής των θέσεων αυτών έγινε διατηρώντας κάθε φορά την μια παράμετρο σταθερή και μεταβάλλοντας τις άλλες δύο. Στα σχήματα που ακολουθούν θα εξετάσουμε την μεταβολή μόνο του ενός από τα δύο (αυτό που βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Oz , καθότι λόγω της συμμετρίας του και το σημείο στον αρνητικό ημιάξονα θα έχει την ίδια παραμετρική συμπεριφορά).

5.9.1 Μεταβολή των θέσεων ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} με την παράμετρο n και την παράμετρο q

Εξετάσαμε την συμπεριφορά των θέσεων ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} με την παράμετρο n για διάφορα σταθερά ζεύγη τιμών των β και q . Συγκεκριμένα, θεωρήσαμε τις περιπτώσεις:

(α) $\beta=0.1$ και $q=-0.001$

(β) $\beta=0.1$ και $q=-0.01$,

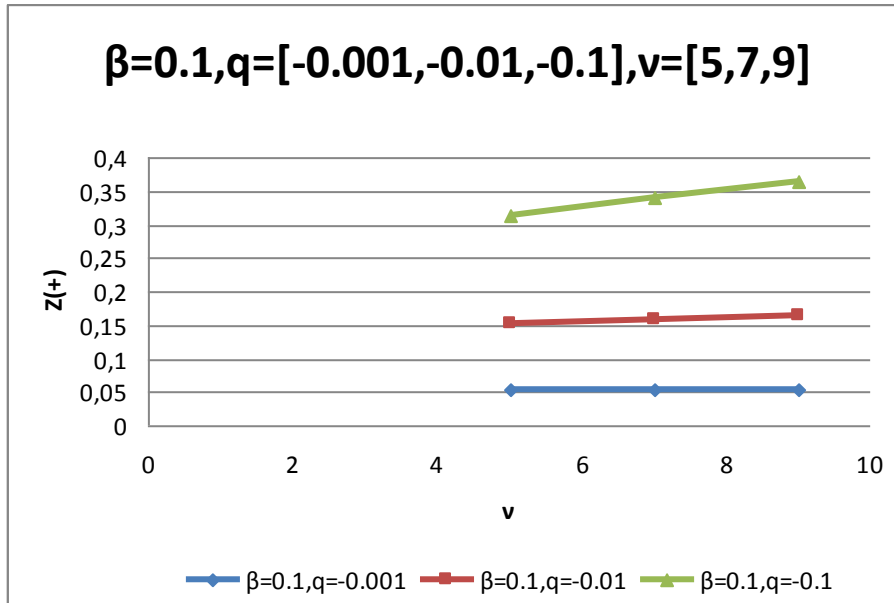
(γ) $\beta=0.1$ και $q=-0.1$

(δ) $\beta=0.5$ και $q=-0.001$

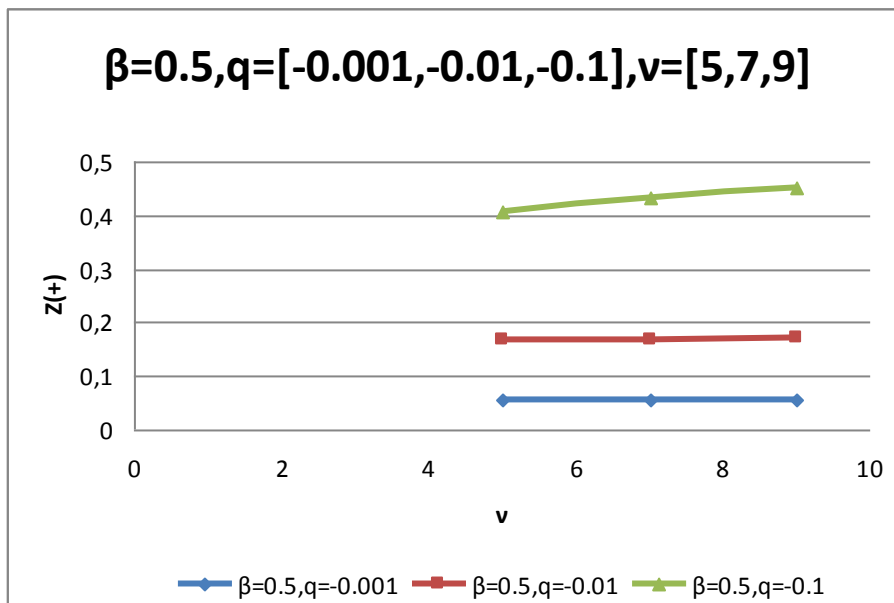
(ε) $\beta=0.5$ και $q=-0.01$

(ζ) $\beta=0.5$ και $q=-0.1$

Ομαδοποιώντας τις περιπτώσεις (α), (β), (γ) αφενός και αφετέρου τις (δ), (ε) και (ζ) σε κοινά διαγράμματα, πήραμε τα επόμενα σχήματα 5.15α και 5.15β από όπου αντλούμε πληροφορίες για την συμπεριφορά των L_{+z} και L_{-z} , αφενός μεν όταν μεταβάλλεται η παράμετρος n , αφετέρου δε όταν μεταβάλλεται η παράμετρος q .



(α)



(β)

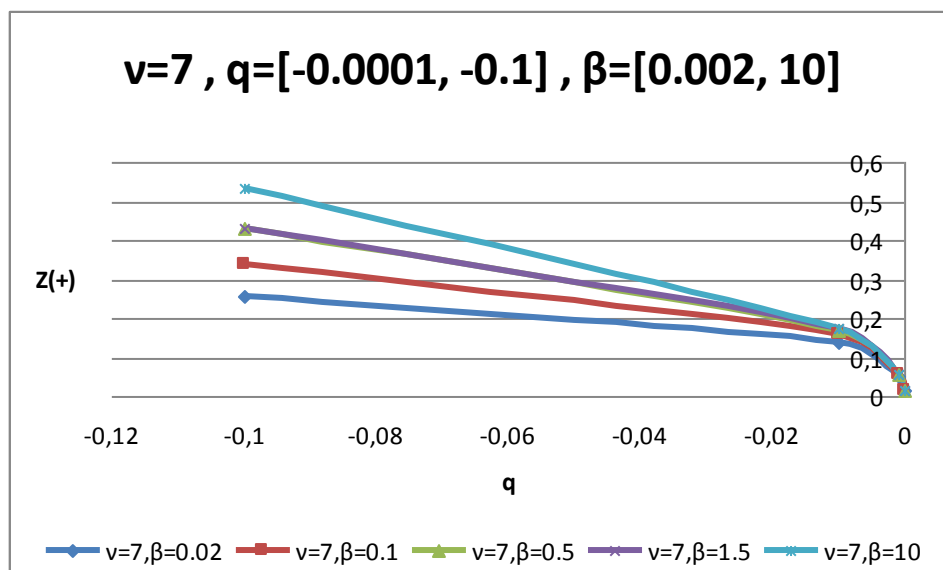
Σχήμα 5.15 Μεταβολή της θέσης ισορροπίας L_{+z} με την παράμετρο ν και για διάφορες τιμές της q όταν: (α) $\beta=0.1$, (β) $\beta=0.5$

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

- Για σταθερές τιμές των δύο παραμέτρων β και q , όταν αυξάνεται ο αριθμός των περιφερειακών σωμάτων, τότε η θέση αυτή ισορροπίας (και φυσικά και η συμμετρική της L_{-z}) απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων δηλαδή από το επίπεδο xy .
- Για σταθερή τιμή της παραμέτρου ν , όταν αυξάνεται η απόλυτη τιμή της παραμέτρου q , τότε οι δύο θέσεις ισορροπίας απομακρύνονται από την αρχή και συνεπώς από το επίπεδο xy .

5.9.2 Μεταβολή με την παράμετρο β και την παράμετρο q των θέσεων ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} για δεδομένη τιμή του ν

Στο Σχήμα 5.16 με δεδομένη την τιμή της παραμέτρου ν ($\nu=7$), σχεδιάσαμε τέσσερις καμπύλες μεταβολής της θέσης L_{+z} με την παράμετρο q . Η κάθεμία από τις καμπύλες αυτές αντιστοιχεί σε διαφορετική τιμή της παραμέτρου β (0.02, 0.1, 1.5, 10).



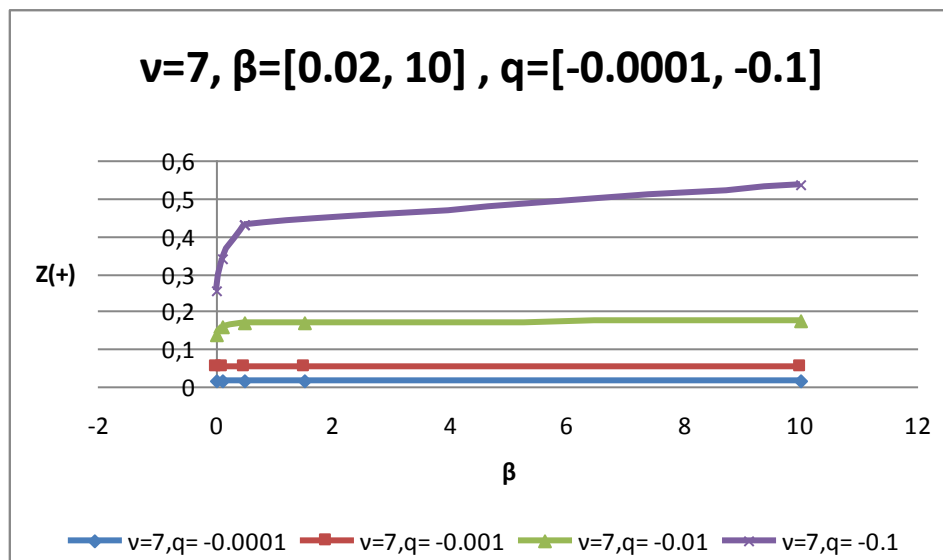
Σχήμα 5.16 Μεταβολή των θέσεων ισορροπίας L_z με την παράμετρο q για $\nu=7$ και τέσσερις διαφορετικές τιμές του β (0.02, 0.1, 1.5, 10)

Παρατηρούμε ότι:

- Καθώς η απόλυτη τιμή του q μειώνεται, τα σημεία ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} πλησιάζουν προς την αρχή των αξόνων και οι αποστάσεις τους από το επίπεδο xy τείνουν στο μηδέν όταν $|q| \rightarrow 0$. Δηλαδή όταν $q = 0$ (βαρυτική περίπτωση) οι θέσεις αυτές εξαφανίζονται.
- Όταν αυξάνει η τιμή της παραμέτρου β για δεδομένη τιμή της παραμέτρου q , τότε οι θέσεις ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} απομακρύνονται από την αρχή.
- Όλες οι καμπύλες που σχεδιάσθηκαν για διάφορες τιμές της παραμέτρου β , συγκλίνουν προς την αρχή των αξόνων.

5.9.3 Μεταβολή με την παράμετρο β και την παράμετρο q των θέσεων ισορροπίας L_{+z} και L_{-z} για δεδομένη τιμή του v

Στο Σχήμα 5.17 με δεδομένη την τιμή της παραμέτρου v ($v=7$), σχεδιάσαμε τέσσερις καμπύλες μεταβολής της θέσης L_{+z} με την παράμετρο β . Η κάθεμία από τις καμπύλες αυτές αντιστοιχεί σε διαφορετική αρνητική τιμή της παραμέτρου q (-0.0001, -0.001, -0.01, -0.1).



Σχήμα 5.17 Μεταβολή της θέσης ισορροπίας $z(+)$ σε σχέση με την παράμετρο q για $v=7$ και διάφορες τιμές του β

Συμπερασματικά έχουμε ότι:

- Καθώς το β αυξάνει, οι θέσεις των L_{+z} και L_{-z} απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων. Η απομάκρυνση αυτή είναι περισσότερο αισθητή όταν αυξάνει η απόλυτη τιμή της παραμέτρου q .
- Για δεδομένη τιμή της β , όταν το q αυξάνει, οι θέσεις των L_{+z} και L_{-z} απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων. Η απομάκρυνση γίνεται με ταχύτερους ρυθμούς όταν αυξάνει η απόλυτη τιμή της παραμέτρου q , επειδή στις μεγάλες απόλυτες τιμές της q η κλίση της καμπύλης αυξάνει θεαματικά.

Όλες οι αριθμητικές τιμές των παραπάνω γραφημάτων αναγράφονται στους Πίνακες Δ1-Δ4 του Παραρτήματος.

5.10 Η εξέλιξη των περιοχών επιτρεπτής κίνησης στο επίπεδο xy και των περιοχών παγίδευσης όταν μεταβάλλεται η σταθερά C

Παρόλο που με τις περιοχές της επίπεδης επιτρεπτής κίνησης ασχοληθήκαμε στο κεφάλαιο 3, εδώ θα επανέλθουμε και θα ασχοληθούμε με την εξέλιξη των περιοχών αυτών όταν μεταβάλλεται η Ιακωβιανή σταθερά C , αφού οι τοπολογικές μεταβολές που συμβαίνουν στις περιοχές αυτές συνδέονται απόλυτα με τις υπάρχουσες θέσεις ισορροπίας. Ενδεικτικά θα παρουσιάσουμε και θα περιγράψουμε αναλυτικά δύο περιπτώσεις, μία για θετική τιμή του συντελεστή Schwarzschild ($q>0$) και μία για αρνητική ($q<0$). Ο κώδικας με βάση τον οποίο κατασκευάστηκαν αυτές οι περιοχές έχει γραφεί σε πρόγραμμα Mathematica (Φακής, 2014) και παρατίθεται στο παράρτημα (μέρος Γ).

5.10.1 Δυναμικό τύπου Schwarzschild με $q>0$

Από την παρουσίαση των γραφικών παραστάσεων της $C=C(x,y)$ (στο 3^ο κεφάλαιο) παρατηρήσαμε ότι οι κλειστές περιοχές γύρω από τα περιφερειακά primaries συρρικνώνονται τείνοντας ασυμπτωτικά προς μια οριακή κλειστή καμπύλη που αναπτύσσεται γύρω από αυτά τα σώματα, όταν αυξάνει η τιμή της σταθεράς C . Ενώ η εξωτερική κλειστή καμπύλη που το περιβάλλει διευρύνεται.

Στην περίπτωση όπου η τιμή της σταθεράς C μειώνεται έχουμε διεύρυνση των εσωτερικών κλειστών περιοχών γύρω από τα primaries οι οποίες τείνουν να

προσεγγίσουν την κλειστή καμπύλη του κεντρικού σώματος από τη μια μεριά και από την άλλη την εξωτερική κλειστή περιβάλλουσα περιοχή.

Όπως και στις προηγούμενες αναλύσεις οι τιμές των παραμέτρων v , β και q επηρεάζουν τους σχηματισμούς των περιοχών επιτρεπτής κίνησης για τις αντίστοιχες τιμές της σταθεράς C . Στα παρακάτω σχήματα οι περιοχές επιτρεπτής κίνησης έχουν σχεδιαστεί με λευκό χρώμα, ενώ οι περιοχές μη επιτρεπτής κίνησης έχουν γίνει με έγχρωμο.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το συνδυασμό των τριών παραμέτρων (v , β και q) με βάση το διάγραμμα διακλάδωσης που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες ενότητες του παρόντος κεφαλαίου (5.6). Πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε τον συνδυασμό για $v=7$, $\beta=4$ και $q=0.001$ ο οποίος με βάση το διάγραμμα διακλάδωσης που αντιστοιχεί στην περιοχή, χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη τριών ζωνών ισοροπίας (A_1 , C_2 , C_1).

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση οι σταθερές Jacobi των υπαρχουσών ζωνών ισοροπίας χαρακτηρίζονται από τις τιμές:

$$C_{C_2}= 6.12787703, C_{A_1}=6.59381444, C_{C_1}= 6.41279715$$

Και συνεπώς ισχύει ότι $C_{A_1} > C_{C_1} > C_{C_2}$.

Μεταβάλλοντας τις τιμές της σταθεράς C παρατηρούμε τις εξής περιπτώσεις :

- $C > C_{A_1}$:

Οι ισοενεργειακές καμπύλες αποτελούνται από v κλειστές καμπύλες που περιβάλλουν κάθε ένα από τα v μεγάλα σώματα και από μια πιο μεγάλη κλειστή εξωτερική καμπύλη η οποία περιβάλλει όλες τις προηγούμενες v (σχήμα 5.18α). Από τις $v+1$ κλειστές καμπύλες που περιβάλλουν τα μεγάλα σώματα οι v περικλείουν τα περιφερειακά και είναι ίσες μεταξύ τους, ενώ η μία που περικλείει το κεντρικό είναι ίση με τις άλλες όταν $\beta=1$. Στην προκειμένη περίπτωση όπου $\beta=4$, η κεντρική κλειστή περιοχή είναι τετραπλάσια από κάθε αντίστοιχη που περιβάλλει ένα περιφερειακό σώμα. Η κίνηση του μικρού σώματος επιτρέπεται στο εσωτερικό των κλειστών περιοχών αφού η κινητική του ενέργεια μέσα σε αυτές είναι θετική. Αντίθετα, απαγορεύεται η κίνηση του (αφού η κινητική του ενέργεια είναι αρνητική) στην περιοχή του επιπέδου xy , το οποίο περικλείεται μεταξύ της μεγάλης εξωτερικής και

των $n+1$ εσωτερικών. Τέλος σε όλη την υπόλοιπη περιοχή του επιπέδου που βρίσκεται εκτός της εξωτερικής μεγάλης κλειστής καμπύλης, επιτρέπεται η κίνηση του μικρού σώματος επειδή εκεί η κινητική ενέργεια είναι και πάλι θετική.

- $C = C_{A1}$:

Το σχήμα 5.18β αποδίδει την περίπτωση αυτή. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την τιμή της σταθεράς ξεκινά η πρώτη τοπολογική αλλαγή, δηλαδή φαίνεται ότι η κλειστή καμπύλη που αναπτύσσεται γύρω από το κεντρικό σώμα, εφάπτεται με τις κλειστές περιοχές που αναπτύσσονται γύρω από τα μεγάλα περιφερειακά σώματα στα σημεία ισορροπίας της ζώνης A_1 .

- $C_{C1} < C < C_{A1}$:

Σε αυτή την περίπτωση έχει διαμορφωθεί μια ενιαία κλειστή περιοχή εσωτερικά η οποία περικλείει όλα τα μεγάλα σώματα, ενώ η εξωτερική περιβάλλουσα καμπύλη πλησιάζει τα μεγάλα σώματα (σχήμα 5.18γ).

- $C = C_{C1}$:

Όταν η σταθερά C παίρνει αυτή την τιμή, έχουμε επαφή της εξωτερικής κλειστής καμπύλης με την ενιαία εσωτερική καμπύλη στα σημεία των θέσεων ισορροπίας της ζώνης C_1 και ταυτόχρονα ξεκινά η δεύτερη τοπολογική αλλαγή (σχήμα 5.18δ) κατά την οποία ξεκινά η δημιουργία διαύλων επικοινωνίας μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής περιοχής επιτρεπτής κίνησης.

- $C_{C2} < C < C_{C1}$:

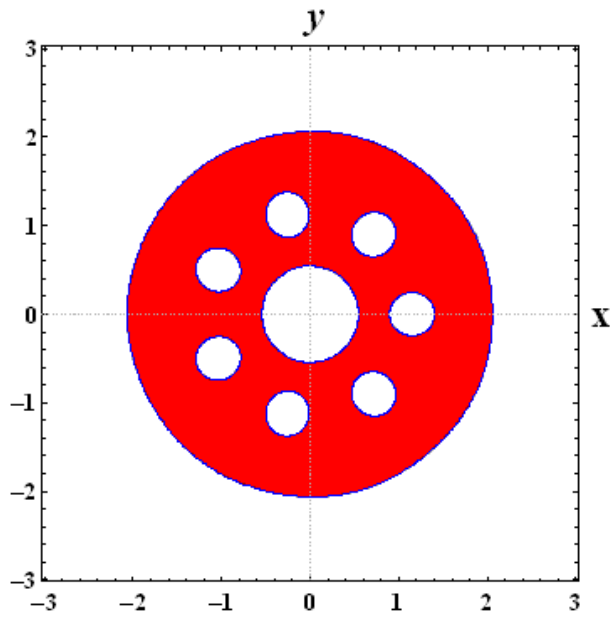
Όταν η τιμή της C βρίσκεται μεταξύ των δύο παραπάνω τιμών, τότε παρατηρείται ο σχηματισμός n νησίδων απαγορευμένης κίνησης οι οποίες αναπτύσσονται μεταξύ των περιφερειακών σωμάτων (σχήμα 5.18ε).

- $C = C_{C2}$:

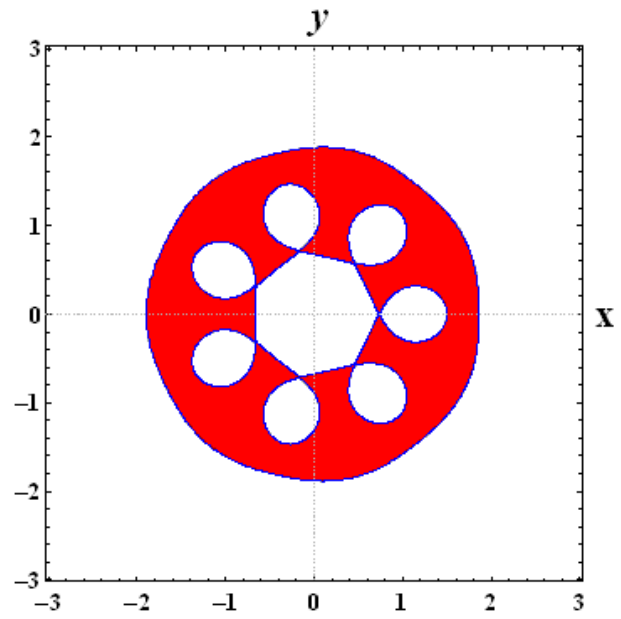
Στην τιμή αυτή της σταθεράς C , οι νησίδες εκφυλίζονται σε σημεία.

- $C < C_{C2}$:

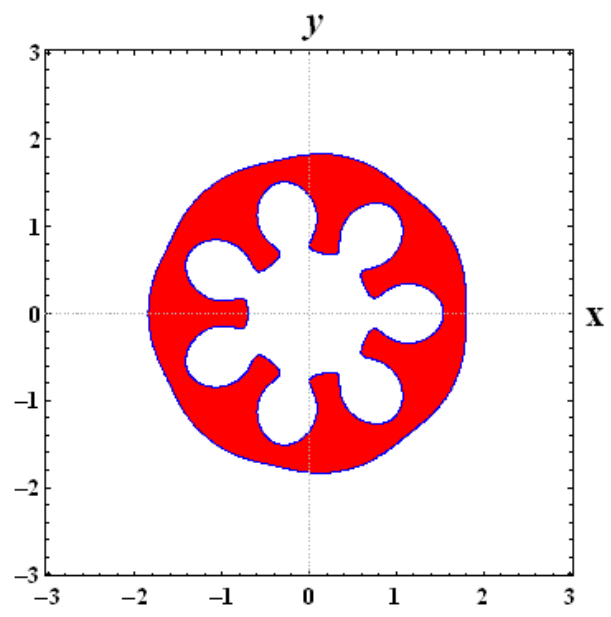
Παρατηρούμε την πλήρη εξαφάνιση των νησίδων, οπότε η κίνηση του μικρού σώματος είναι ελεύθερη παντού πάνω στο επίπεδο xy (σχήμα 5.18ζ).



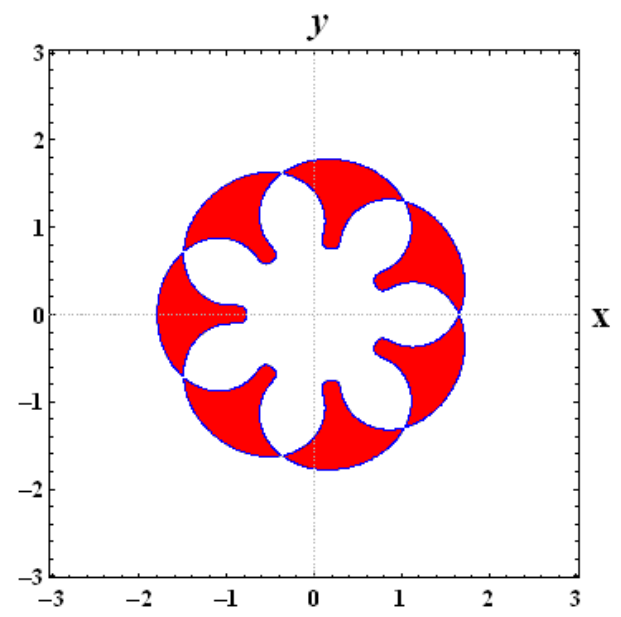
(α)



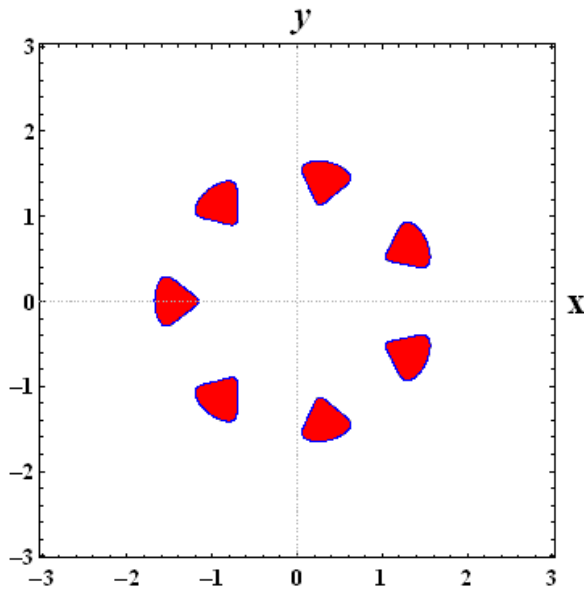
(β)



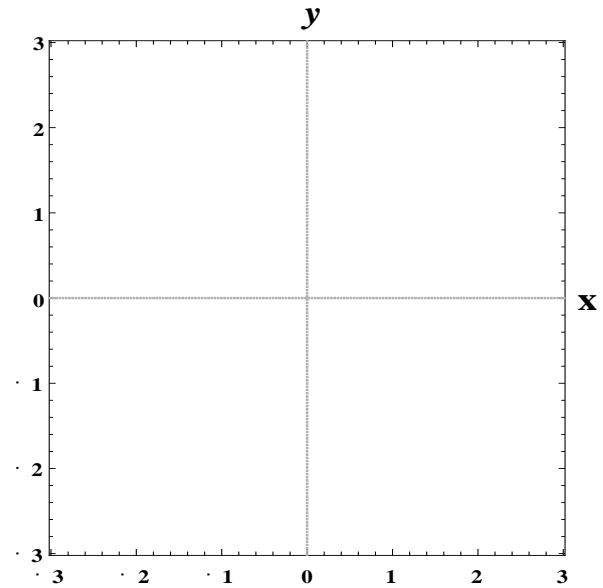
(γ)



(δ)



(ε)



(ζ)

Σχήμα 5.18 Εξέλιξη με την σταθερά C των καμπύλων μηδενικής ταχύτητας και των περιοχών επιτρεπτής (λευκές) και μη επιτρεπτής (έγχρωμες) κίνησης για $\nu=7$, $\beta=4$ και $q=0.001$. (α) $C=7$, (β) $C=C_{A1} = 6.59381444$, (γ) $C=6.5$, (δ) $C=C_{C1} = 6.41279715$, (ε) $C=6.25$, (ζ) $C=C_{C2} = 6.12787703$.

5.10.2 Κεντρικό δυναμικό τύπου Schwarzschild και περίπτωση $q < 0$

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε την εξέλιξη των περιοχών επιτρεπτής κίνησης για τις αντίστοιχες τιμές της σταθεράς C και $q < 0$. Πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε τον συνδυασμό για $\nu=7$, $\beta=2$ και $q = -0.01$ όπου παρατηρούνται επτά ζώνες ισορροπίας ($C_2, B, A_2, E_2, E_1, A_1, C_1$).

Στα σχήματα που ακολουθούν (όπως και στην προηγούμενη ενότητα), οι περιοχές επιτρεπτής κίνησης έχουν σχεδιαστεί με λευκό χρώμα, ενώ οι περιοχές μη επιτρεπτής κίνησης έχουν γίνει με έγχρωμο.

Στην προκειμένη περίπτωση, ισχύει η διάταξη,

$$C_{E1} \approx C_{E2} > C_B > C_{A1} > C_{A2} > C_{C1} > C_{C2}$$

Με αριθμητικές τιμές :

$$C_{E1} \approx C_{E2} = 9.95138468, C_B = 7.43064293, C_{A1} = 7.41208146, C_{A2} = 7.31330665$$

$$C_{C1} = 7.26484558, C_{C2} = 7.02440769$$

Καθώς μεταβάλλεται η σταθερά C , έχουμε τις εξής περιπτώσεις :

- $C > C_{E1} \approx C_{E2}$:

Παρατηρούμε την ύπαρξη n κλειστών περιοχών γύρω από τα n περιφερειακά σώματα όπου επιτρέπεται η κίνηση, δηλαδή αποτελούν τις περιοχές παγίδευσης (σχήμα 5.19α). Δεν υπάρχει επιτρεπτή περιοχή γύρω από το κεντρικό σώμα.

- $C = C_{E1} \approx C_{E2}$:

Στην τιμή αυτή της σταθεράς C ξεκινά η πρώτη τοπολογική μεταβολή των περιοχών επιτρεπτής κίνησης αφού, εκτός από τις παραπάνω n κλειστές περιοχές γύρω από τα n περιφερειακά σώματα όπου επιτρέπεται η κίνηση και οι οποίες αρχίζουν να μεγαλώνουν, αρχίζει να διαφαίνεται μία επιπλέον δακτυλιοειδής περιοχή γύρω από το κεντρικό πρωτεύον σώμα. Στην εσωτερική κλειστή περιοχή δεν επιτρέπεται η κίνηση, αλλά είναι επιτρεπτή στην δακτυλιοειδή κλειστή περιοχή που περιβάλλει την εσωτερική (σχήμα 5.19β).

- $C_{E1} \approx C_{E2} < C < C_B$:

Όσο η τιμή C αρχίζει να μειώνεται και να πλησιάζει την τιμή της C_B φαίνεται, ότι οι δύο προαναφερθείσες (στην προηγούμενη περίπτωση) κλειστές περιοχές διευρύνονται και γίνονται περισσότερο ευδιάκριτες (σχήμα 5.19γ).

- $C = C_B$:

Όταν η τιμή της εξισωθεί με την τιμή της C_B ξεκινάει η δεύτερη τοπολογική μεταβολή. Τα όρια των κλειστών περιοχών της επιτρεπτής κίνησης που αναπτύσσονται γύρω από τα περιφερειακά, με το εξωτερικό όριο της κλειστής δακτυλιοειδούς περιοχής που αναπτύσσεται γύρω από το κεντρικό σώμα έρχονται σε επαφή μεταξύ τους στα n σημεία ισοροπίας της ζώνης B (σχήμα 5.19δ).

- $C_B < C < C_{A1}$:

Από τη συνένωση των κλειστών περιοχών περί τα περιφερειακά primaries που αναφέραμε στην προηγούμενη περίπτωση, δημιουργείται μια ενιαία κλειστή περιοχή

επιτρεπτής κίνησης, ενώ παράλληλα συνεχίζει να διευρύνεται η δακτυλιοειδής κλειστή περιοχή επιτρεπτής κίνησης γύρω από το κεντρικό σώμα (σχήμα 5.19ε).

- $C = C_{A1}$:

Η τρίτη κατά σειρά τοπολογική μεταβολή σημειώνεται στην τιμή αυτή της σταθεράς C . Σε αυτή την περίπτωση η ενιαία περιοχή γύρω από τα n περιφερειακά σώματα που σχηματίστηκε στην προηγούμενη περίπτωση έρχεται σε επαφή με την ήδη αυξημένη δακτυλιοειδή περιοχή γύρω από το κεντρικό primary, με το ξεκίνημα διαύλων επικοινωνίας στα n σημεία που αντιστοιχούν με τις θέσεις ισορροπίας της ζώνης A_1 (σχήμα 5.19ζ).

- $C_{A1} < C < C_{A2}$:

Σε αυτήν την περιοχή τιμών της σταθεράς C φαίνεται καθαρά η συνένωση των δύο περιοχών που περιγράφηκαν προηγουμένως, ενώ απομένουν ακόμη n νησίδες απαγορευμένης κίνησης που αναπτύσσονται γύρω από τις θέσεις ισορροπίας της ζώνης A_2 και οι οποίες συρρικνώνονται καθώς μειώνεται η τιμή της σταθεράς C (σχήμα 5.19η). Όπως φαίνεται επίσης στο σχήμα αυτό, εξακολουθεί να υπάρχει άλλη μία μικρή, σχεδόν κυκλική, περιοχή απαγορευμένης κίνησης, που περιβάλλει το κεντρικό σώμα.

- $C \approx C_{A2}$:

Η τέταρτη τοπολογική μεταβολή αφορά τον εκφυλισμό σε σημεία των νησίδων που περιγράφηκαν προηγουμένως και περιέβαλλαν τις θέσεις της ζώνης A_2 (σχήμα 5.19θ).

- $C_{A2} < C < C_{C1}$:

Σε αυτήν την περιοχή τιμών της σταθεράς C , παρατηρείται πλέον μία ενιαία, ευρεία, κλειστή περιοχή επιτρεπτής κίνησης μεταξύ των περιφερειακών σωμάτων και του ορίου της απαγορευμένης περιοχής που αναπτύσσεται γύρω από το κεντρικό πρωτεύον το οποίο και περικλείει (σχήμα 5.19ι).

- $C = C_{C1}$:

Σηματοδοτεί την επικείμενη νέα τοπολογική μεταβολή με τη δημιουργία διόδων επικοινωνίας της εσωτερικής επιτρεπτής περιοχής κίνησης με την εξωτερική όπου η κίνηση είναι ελεύθερη (σχήμα 5.19κ).

- $C_{C1} < C < C_{C2}$:

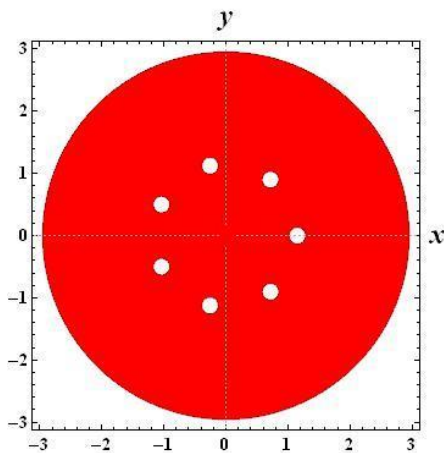
Σε αυτή την περίπτωση εκτός της μικρής απαγορευμένης περιοχής γύρω από το κεντρικό σώμα έχουν δημιουργηθεί πλέον n νησίδες που αναπτύσσονται γύρω από τις θέσεις ισορροπίας C_2 όπου απαγορεύεται η κίνηση (σχήμα 5.19λ), ενώ η μικρή κλειστή περιοχή απαγορευμένης κίνησης περί το κεντρικό σώμα διατηρείται.

- $C = C_{C2}$:

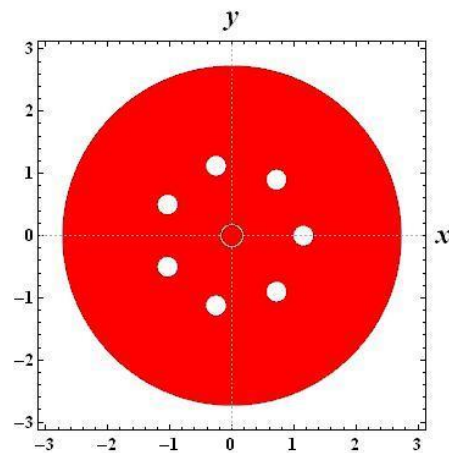
Στην τελευταία τοπολογική εξέλιξη όπου η Ιακωβιανή σταθερά C παίρνει την τιμή C_2 οι n νησίδες τείνουν να εξαλειφθούν αναγόμενες σε σημεία (σχήμα 5.19μ).

- $C < C_{C2}$:

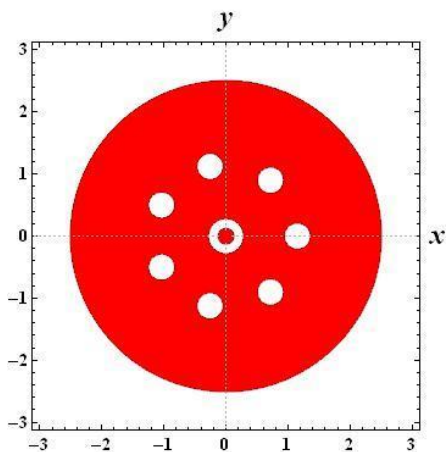
Στην περίπτωση αυτή, η κίνηση του μικρού σώματος επιτρέπεται σε όλο το επίπεδο (λευκή περιοχή), ενώ απαγορεύεται στη μικρή κλειστή περιοχής που περιβάλλει το κεντρικό σώμα (σχήμα 5.19ν).



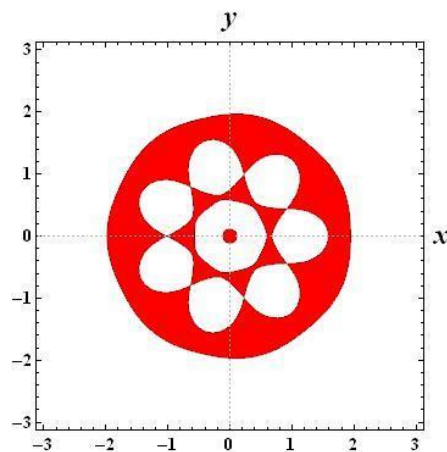
(α)



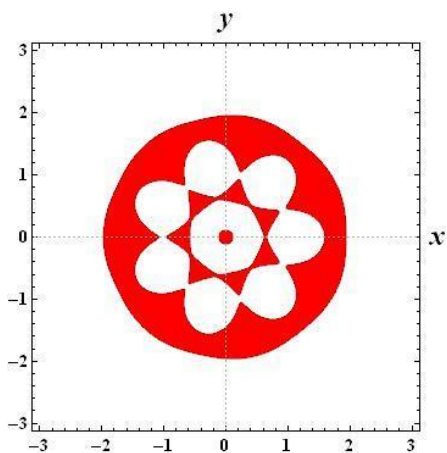
(β)



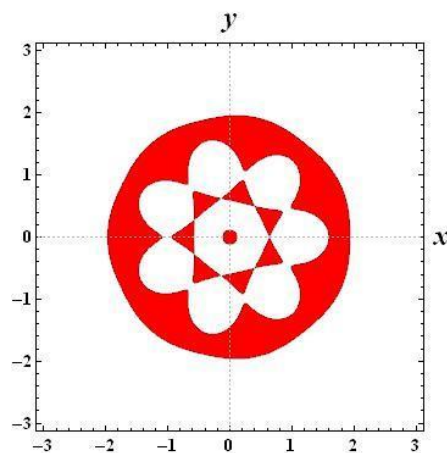
(γ)



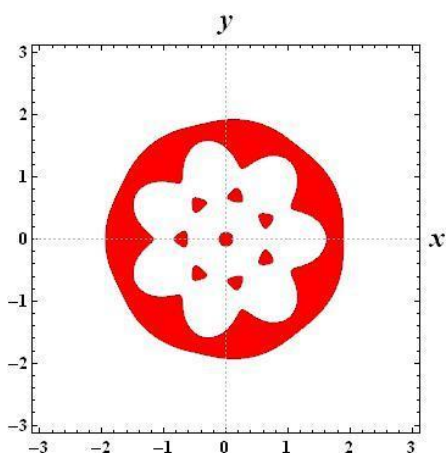
(δ)



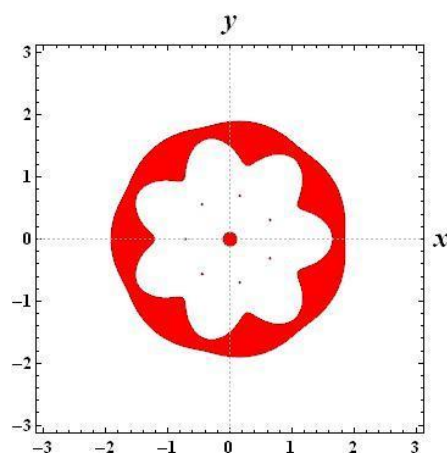
(ϵ)



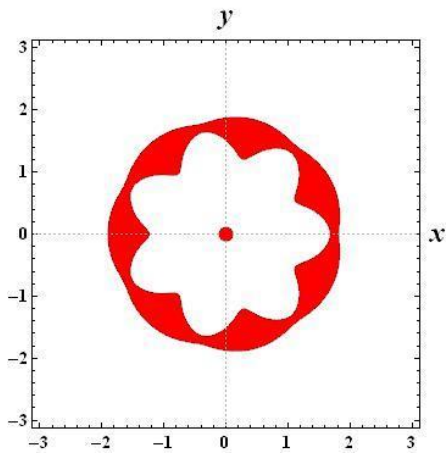
(ζ)



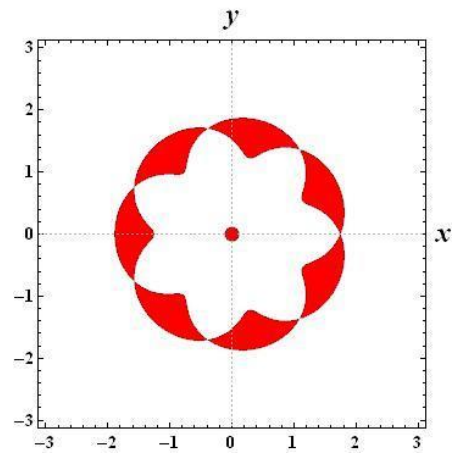
(η)



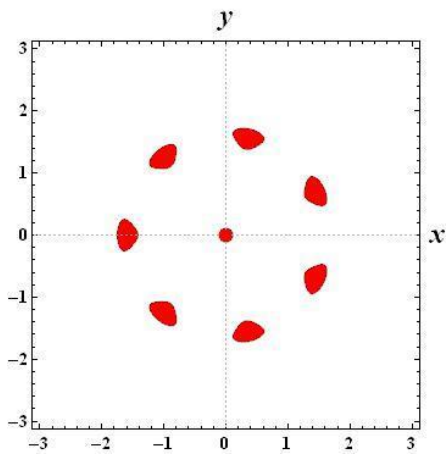
(θ)



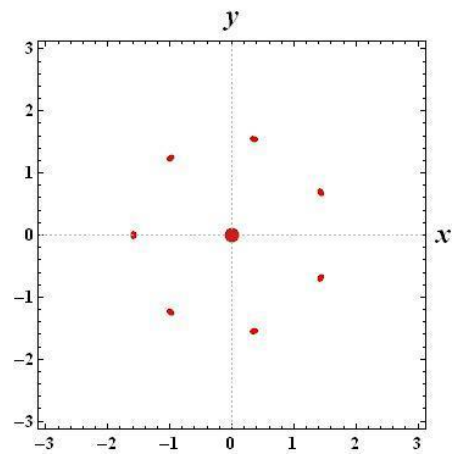
(l)



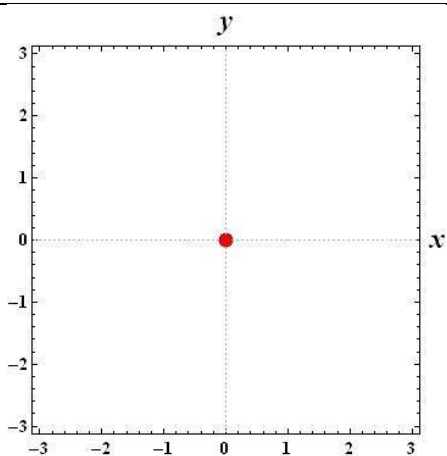
(k)



(λ)



(μ)



(v)

Σχήμα 5.19 Εξέλιξη των περιοχών επιτρεπτής (λευκές) και μη επιτρεπτής (έγχρωμες) κίνησης για $v=7$, $\beta=2$ και $q=-0.01$.

- (α) $C=11$ ($C > C_{E1}, C_{E2}$), (β) $C \approx C_{E1,E2} = 9.945$,
 (γ) $C=9$ ($C_{E1} \approx C_{E2} < C < C_B$), (δ) $C=7.43064293$ ($C = C_B$),
 (ε) $C=7.42$ ($C_B < C < C_{A1}$), (ζ) $C=7.41208146$ ($C = C_{A1}$),
 (η) $C=7.36$ ($C_{A1} < C < C_{A2}$), (θ) $C=7.3144$ ($C \approx C_{A2}$),
 (ι) $C=7.29$ ($C_{A2} < C < C_{C1}$), (κ) $C=7.26484558$, ($C = C_{C1}$),
 (λ) $C=7.1$ ($C_{C1} < C < C_{C2}$), (μ) $C=7.04$, ($C \approx C_{C2}$),
 (ν) $C=7.0$ ($C < C_{C2}$)

ΣΗΜ. Ο προγραμματισμός για την παραγωγή των σχημάτων της παραγράφου 5.10.2 (παρόμοιος προγραμματισμός με μικρές διαφοροποιήσεις έγινε και για τα σχήματα της παραγράφου 5.10.1) έγινε σε κώδικα Mathematica που παρουσιάζεται στο παράρτημα (Γ μέρος).

Παράρτημα

Κεφάλαιο 3

Πρόγραμμα Mathematica για τον σχεδιασμό των Zero-velocity curves and surfaces (Εφαρμογή στην περίπτωση $v=9$)

```
1  ppi=N[Pi,15]
2  ni=9
3  bet=0.5
4  Q=-0.005
5  phi=ppi/ni
6  psi=2.*phi
7  s=(iota-1).*phi
8  lamda=Sin[phi]^2./Sin[s]
9  Slamda=NSum[lamda,{iota,2,ni}]
10 mi=2.*Sin[phi]
11 delta=mi*(Slamda+bet*mi^2+3.*bet*Q*mi^4)
12 x1=(1./mi)*Cos[0.*psi]
13 y1=(1./mi)*Sin[0.*psi]
14 x2=(1./mi)*Cos[1.*psi]
15 y2=(1./mi)*Sin[1.*psi]
16 x3=(1./mi)*Cos[2.*psi]
17 y3=(1./mi)*Sin[2.*psi]
18 x4=(1./mi)*Cos[3.*psi]
19 y4=(1./mi)*Sin[3.*psi]
20 x5=(1./mi)*Cos[4.*psi]
21 y5=(1./mi)*Sin[4.*psi]
22 x6=(1./mi)*Cos[5.*psi]
23 y6=(1./mi)*Sin[5.*psi]
24 x7=(1./mi)*Cos[6.*psi]
25 y7=(1./mi)*Sin[6.*psi]
26 x8=(1./mi)*Cos[7.*psi]
27 y8=(1./mi)*Sin[7.*psi]
28 x9=(1./mi)*Cos[8.*psi]
29 y9=(1./mi)*Sin[8.*psi]
30 a=x^2+y^2
31 b=(x-x1)^2+(y-y1)^2
32 c=(x-x2)^2+(y-y2)^2
33 d=(x-x3)^2+(y-y3)^2
34 e=(x-x4)^2+(y-y4)^2
35 f=(x-x5)^2+(y-y5)^2
36 g=(x-x6)^2+(y-y6)^2
37 h=(x-x7)^2+(y-y7)^2
38 m=(x-x8)^2+(y-y8)^2
39 j=(x-x9)^2+(y-y9)^2
40 r0=Sqrt[a]
41 r1=Sqrt[b]
42 r2=Sqrt[c]
```

```

43 r3=Sqrt[d]
44 r4=Sqrt[e]
45 r5=Sqrt[f]
46 r6=Sqrt[g]
47 r7=Sqrt[h]
48 r8=Sqrt[m]
49 r9=Sqrt[j]
50 r=1./r1+1./r2+1./r3+1./r4+1./r5+1./r6+1./r7+1./r8+1./r9
51 omega=2.*((x^2+y^2)/2.+(1./delta)*(bet*(1./r0+Q/r0^2)+r))
52 ContourPlot[omega,{x,-1.9,1.9},{y,-1.9,1.9},Contours->35,ContourShading-
>False,PlotPoints->30]
53 ContourPlot[omega,{x,-0.005,0.005},{y,-0.005,0.005},Contours-
>25,ContourShading->False,PlotPoints->30]
54 ParametricPlot3D[{x,y,omega},{x,-1.9,1.9},{y,-1.9,1.9},PlotPoints->30]

```

Κεφάλαιο 5

Α. Πίνακες με τις κρίσιμες τιμές των q_{cr} , e_{cr} για διάφορες τιμές των παραμέτρων ν και β

Πίνακας Α1		
ν	β	q_{cr}
2	2	-0.09375
	10	-0.0854167
	50	-0.08375
	500	-0.083375
	1000	-0.0833542
	10000	-0.0833354
3	2	-0.143186
	10	-0.117526
	50	-0.112394
	500	-0.111239
	1000	-0.111175
	10000	-0.111118
7	2	-0.952777
	10	-0.544685
	50	-0.463066
	500	-0.444702

	1000	-0.443682
	10000	-0.442764
8	2	-1.36707
	10	-0.728642
	50	-0.600957
	500	-0.572228
	1000	-0.570632
	10000	-0.569195
10	2	-2.55802
	10	-1.20975
	50	-0.940091
	500	-0.879419
	1000	-0.876049
	10000	-0.873015
32	2	-87.9968
	10	-24.5385
	50	-11.8468
	500	-8.9912
	1000	-8.83255
	10000	-8.68977

	Πίνακας Α2	
ν	β	e_{cr}
7	2	-1.2401839
	10	-0.7089897
	50	-0.6027509
	500	-0.5788472
	1000	-0.5775192
	10000	-0.576324
8	2	-1.5694649
	10	-0.8365181
	50	-0.6899288

	500	-0.56569462
	1000	-0.6551138
	10000	-0.6534647
10	2	-2.3714107
	10	-1.1214957
	50	-0.8715127
	500	-0.8152666
	1000	-0.8121418
	10000	-0.8093295
32	2	-25.8755922
	10	-7.2155778
	50	-3.4835749
	500	-2.6438743
	1000	-2.5972243
	10000	-2.5552392

B. Πίνακες με ζεύγη τιμών (q , β) που ανήκουν στις καμπύλες διακλάδωσης των ζωνών ισοροπίας

Πίνακας B1	
$\nu=7$	
q (Schwarzschild)	β
0.001	3.05
0.005	3.02
0.01	2.95
0.05	2.48
0.1	2.08
0.2	1.56
0.4	1.05
0.6	0.79
0.8	0.63
0.9	0.57

Πίνακας Β2	
v=9	
q (Schwarzschild)	β
0.001	8.22
0.005	8.12
0.01	8.01
0.05	7.24
0.1	6.45
0.2	5.29
0.4	3.91
0.6	3.09
0.8	2.56
0.9	2.35

Πίνακας Β3	
v=7	
e (Manev)	β
0.0001	3.1
0.001	3.093
0.01	3.022
0.055	2.708
0.1	2.455
0.209	2
0.406	1.5
0.799	1

Πίνακας Β4	
v=9	
e (Manev)	β
0.0001	8.255
0.001	8.239

0.01	8.1
0.055	7.443
0.1	6.89
0.209	5.84
0.406	4.573
0.799	3.194

Γ. Πίνακες αποτελεσμάτων των ζωνών ισοροπίας για διάφορες τιμές των παραμέτρων (αντιπροσωπευτικές θέσεις επί του άξονα O_x)

Πίνακας Γ1							
v=3, β=0.5, q= 0.001							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-0.765536532	0	0	2.11359494	0.76553653 2	C2	U
2	0.252661136	0	0	2.84027605	0.25266113 6	A1	U
3	1.047977087	0	0	2.52272757	1.04797708 7	C1	U
Πίνακας Γ2							
v=3, β=0.5, q= 0.01							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-0.755143640	0	0	2.06169609	0.755143640	C2	U
2	0.271009718	0	0	2.84027605	0.271009718	A1	U
3	1.040378297	0	0	2.82568255	1.040378297	C1	U
Πίνακας Γ3							
v=3, β=2, q= 0.001							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-0.641386203	0	0	1.48137700	0.641386203	C2	U
2	0.332003957	0	0	1.98832902	0.332003957	A1	U
3	0.913845579	0	0	1.82855535	0.913845579	C1	U
Πίνακας Γ4							
v=3, β=2, q= - 0.001							
A/A	x	y	Z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-0.643061937	0	0	1.49414160	0.643061937	C2	U
2	-0.054813758	0	0	4.44677245	0.054813758	E1	U
3	0.054826429	0	0	4.44761197	0.054826429	E2	U
4	0.328360213	0	0	1.99805538	0.328360213	A1	U
5	0.915984168	0	0	1.84171626	0.915984168	C1	U
Πίνακας Γ5							
v=3, β=4, q= - 0.001							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-0.610667126	0	0	1.28295588	0.610667126	C2	U
2	-0.054804609	0	0	4.57055830	0.054804609	E1	U

3	0.054810930	0	0	4.57103111	0.054810930	E2	U
4	0.367290073	0	0	1.66007927	0.367290073	A1	U
5	0.850671368	0	0	1.56794879	0.850671368	C1	U

Πίνακας Γ6

$v=5, \beta=0.5, q= 0.001$

A/A	x	y	Z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-1.246402013	0	0	4.64357058	1.246402013	C2	U
2	-0.642854204	0	0	5.05308204	0.642854204	B	U
3	-0.455574956	0	0	5.02026360	0.455574956	A2	U
4	0.369726347	0	0	5.11854736	0.369726347	A1	U
5	1.435907473	0	0	4.93042676	1.435907473	C1	U

Πίνακας Γ7

$v=5, \beta=0.5, q= 0.01$

A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-1.242122649	0	0	4.61464585	1.242122649	C2	U
2	-0.633617133	0	0	5.01862128	0.633617133	B	U
3	-0.484512708	0	0	5.00120008	0.484512708	A2	U
4	0.384930215	0	0	5.12384906	0.384930215	A1	U
5	1.433134324	0	0	4.90316643	1.433134324	C1	U

Πίνακας Γ8

$v=5, \beta=2, q= 0.001$

A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-1.061307250	0	0	3.63742913	1.061307250	C2	U
2	0.489276549	0	0	4.17340941	0.489276549	A1	U
3	1.312231599	0	0	3.96640780	1.312231599	C1	U

Πίνακας Γ9

$v=5, \beta=4, q= - 0.001$

A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-0.959809829	0	0	3.12492359	0.959809829	C2	U
2	-0.054786653	0	0	1.25370877	0.054786653	E1	U
3	0.054786665	0	0	1.25370892	0.054786665	E2	U
4	0.543611867	0	0	3.60992202	0.543611867	A1	U
5	1.236714672	0	0	3.46063492	1.236714672	C1	U

Πίνακας Γ10

$v=7, \beta=2, q= 0.0001$

A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-1.580786094	0	0	6.98014165	1.580786094	C2	U
2	-1.014730282	0	0	7.37651171	1.014730282	B	U
3	-0.734204241	0	0	7.27896932	0.734204241	A2	U
4	0.649419163	0	0	7.39168603	0.649419163	A1	U
5	1.743458872	0	0	7.22282264	1.743458872	C1	U

Πίνακας Γ11

$v=7, \beta=2, q= 0.001$

A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-1.744016958	0	0	8.25563769	1.744016958	C2	U
2	-1.051127660	0	0	9.16496652	1.051127660	B	U
3	-0.483547578	0	0	8.31022679	0.483547578	A2	U
4	0.472065674	0	0	8.32294988	0.472065674	A1	U

5	1.861095681	0	0	8.44686798	1.861095681	C1	U
Πίνακας Γ12							
$v=7, \beta=2, q= 0.1$							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-1.724796554	0	0	8.06446973	1.724796554	C2	U
2	-1.047446633	0	0	8.90085547	1.047446633	B	U
3	-0.589152188	0	0	8.32953548	0.589152188	A2	U
4	0.562971582	0	0	8.37642127	0.562971582	A1	U
5	1.847017586	0	0	8.26302001	1.847017586	C1	U
Πίνακας Γ13							
$v=7, \beta=2, q= 0.12$							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-1.525839410	0	0	6.50994589	1.525839410	C2	U
4	0.721549311	0	0	7.08003343	0.721549311	A1	U
5	1.709024887	0	0	6.77787337	1.709024887	C1	U
Πίνακας Γ14							
$v=7, \beta=2, q=-0.001$							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-1.581328655	0	0	6.98492360	1.581328655	C2	U
2	-1.015066385	0	0	7.38234867	1.015066385	B	U
3	-0.732381587	0	0	7.28278925	0.732381587	A2	U
4	-0.054735622	0	0	2.16551198	-0.054735622	E2	U
5	0.005612039	0	0	2.16551198	0.005612039	E1	U
6	0.648290732	0	0	7.39401029	0.648290732	A1	U
7	1.743808155	0	0	7.22736118	1.743808155	C1	U
Πίνακας Γ15							
$v=7, \beta=2, q=-0.01$							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-1.585796872	0	0	7.02440769	1.585796872	C2	U
2	-1.017728032	0	0	7.43064293	1.017728032	B	U
3	-0.716757734	0	0	7.31330665	0.716757734	A2	U
4	-0.174395395	0	0	9.95138468	0.174395395	E2	U
5	0.174395912	0	0	9.95139144	0.174395913	E1	U
6	0.638311619	0	0	7.41208146	0.638311619	A1	U
7	1.746691535	0	0	7.26484558	1.746691535	C1	U
Πίνακας Γ16							
$v=7, \beta=2, q=-0.05$							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-1.606309958	0	0	7.20801702	1.606309958	C2	U
2	-1.027999414	0	0	7.65743732	1.027999414	B	U
3	-0.607177049	0	0	7.41627725	0.607177049	A2	U
4	-0.439721671	0	0	7.46048405	0.439721671	E2	U
5	0.445822851	0	0	7.46555846	0.445822851	E1	U
6	0.547229183	0	0	7.44961043	0.547229183	A1	U
7	1.760086105	0	0	7.43938974	1.760086105	C1	U
Πίνακας Γ17							
$v=9, \beta=0.5, q=-0.01$							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U

1	-2.223210216	0	0	12.8329141	2.223210216	C2	U
2	-1.392246320	0	0	14.6479546	1.392246320	B	U
3	-0.536110528	0	0	12.2035126	0.536110528	A2	U
4	-0.175786720	0	0	13.2926072	0.175786720	E2	U
5	0.175779367	0	0	13.2926073	0.175779367	E1	U
6	0.534963512	0	0	12.2044636	0.534963512	A1	U
7	2.294770902	0	0	12.9556292	2.294770902	C1	U
Πίνακας Γ18							
$v=9, \beta=2, q=-0.01$							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-2.083078235	0	0	11.3609422	2.083078235	C2	U
2	-1.384120109	0	0	12.3641659	1.384120109	B	U
3	-0.804059890	0	0	11.4519789	0.804059890	A2	U
4	-0.173926562	0	0	16.4000543	0.173926562	E2	U
5	0.173918064	0	0	16.4000544	0.173918064	E1	U
6	0.783886737	0	0	11.4779177	0.783886737	A1	U
7	2.182449781	0	0	11.5226078	2.182449781	C1	U
Πίνακας Γ19							
$v=11, \beta=2, q=-0.001$							
A/A	x	y	z	C	Rad	Ζώνες	S/U
1	-2.558686760	0	0	16.6181729	2.083078235	C2	U
2	-1.717861995	0	0	18.5991518	1.384120109	B	U
3	-0.924259162	0	0	16.2924681	0.173926562	E2	U
4	0.919211386	0	0	16.2987262	0.173918064	E1	U
5	2.619806807	0	0	16.7226284	2.182449781	C1	U

Δ. Πίνακες αποτελεσμάτων των εκτός επιπέδου θέσεων ισορροπίας Lz_+ και Lz_- για διάφορες τιμές των παραμέτρων

Πίνακας Δ1								
Lz_+								
v	β	q	x	y	z	C	RAD	S/U
5	0.1	-0.001	0.0	0.0	0.054419	5.91E+00	0.054419	U
7	0.1	-0.001	0.0	0.0	0.05457	9.28E+00	0.05457	U
9	0.1	-0.001	0.0	0.0	0.054644	1.34E+01	0.054644	U
5	0.1	-0.01	0.0	0.0	0.153191	5.17E+00	0.153191	U
7	0.1	-0.01	0.0	0.0	0.159436	8.18E+00	0.159436	U
9	0.1	-0.01	0.0	0.0	0.163416	1.19E+01	0.163416	U
5	0.1	-0.1	0.0	0.0	0.31309	4.82E+00	0.31309	U
7	0.1	-0.1	0.0	0.0	0.340317	7.65E+00	0.340317	U
9	0.1	-0.1	0.0	0.0	0.363767	1.12E+01	0.363767	U
5	0.5	-0.001	0.0	0.0	0.0547	7.85E+00	0.0547	U
7	0.5	-0.001	0.0	0.0	0.054731	1.33E+01	0.054731	U
9	0.5	-0.001	0.0	0.0	0.054746	2.00E+01	0.054746	U
5	0.5	-0.01	0.0	0.0	0.167298	5.13E+00	0.167298	U
7	0.5	-0.01	0.0	0.0	0.169581	8.72E+00	0.169581	U

9	0.5	-0.01	0.0	0.0	0.170819	1.32E+01	0.170819	U
5	0.5	-0.1	0.0	0.0	0.407517	4.44E+00	0.407517	U
7	0.5	-0.1	0.0	0.0	0.432179	7.26E+00	0.432179	U
9	0.5	-0.1	0.0	0.0	0.45248	1.09E+01	0.45248	U
Πίνακας Δ2								
Lz .								
v	β	q	x	y	z	C	RAD	S/U
5	0.1	-0.001	0.0	0.0	-0.05442	5.91E+00	0.054419	U
7	0.1	-0.001	0.0	0.0	-0.05457	9.28E+00	0.05457	U
9	0.1	-0.001	0.0	0.0	-0.05464	1.34E+01	0.054644	U
5	0.1	-0.01	0.0	0.0	-0.15319	5.17E+00	0.153191	U
7	0.1	-0.01	0.0	0.0	-0.15944	8.18E+00	0.159436	U
9	0.1	-0.01	0.0	0.0	-0.16342	1.19E+01	0.163416	U
5	0.1	-0.1	0.0	0.0	-0.31309	4.82E+00	0.31309	U
7	0.1	-0.1	0.0	0.0	-0.34032	7.65E+00	0.340317	U
9	0.1	-0.1	0.0	0.0	-0.36377	1.12E+01	0.363767	U
5	0.5	-0.001	0.0	0.0	-0.0547	7.85E+00	0.0547	U
7	0.5	-0.001	0.0	0.0	-0.05473	1.33E+01	0.054731	U
9	0.5	-0.001	0.0	0.0	-0.05475	2.00E+01	0.054746	U
5	0.5	-0.01	0.0	0.0	-0.1673	5.13E+00	0.167298	U
7	0.5	-0.01	0.0	0.0	-0.16958	8.72E+00	0.169581	U
9	0.5	-0.01	0.0	0.0	-0.17082	1.32E+01	0.170819	U
5	0.5	-0.1	0.0	0.0	-0.40752	4.44E+00	0.407517	U
7	0.5	-0.1	0.0	0.0	-0.43218	7.26E+00	0.432179	U
9	0.5	-0.1	0.0	0.0	-0.45248	1.09E+01	0.45248	θ
Πίνακας Δ3								
Lz+								
v	β	q	x	y	z	C	RAD	S/U
7	0.02	-0.0001	0.0	0.0	0.017310247	9.01E+00	0.017310247	U
7	0.02	-0.001	0.0	0.0	0.053824004	8.31E+00	0.053824004	U
7	0.02	-0.01	0.0	0.0	0.137632211	8.05E+00	0.137632211	U
7	0.02	-0.1	0.0	0.0	0.256106493	7.83E+00	0.256106493	U
7	0.1	-0.0001	0.0	0.0	0.017318452	1.26E+01	0.017318452	U
7	0.1	-0.001	0.0	0.0	0.05457049	9.28E+00	0.05457049	U
7	0.1	-0.01	0.0	0.0	0.159435829	8.18E+00	0.159435829	U
7	0.1	-0.1	0.0	0.0	0.340316658	7.65E+00	0.340316658	U
7	0.5	-0.0001	0.0	0.0	0.017320097	2.76E+01	0.017320097	U
7	0.5	-0.001	0.0	0.0	0.054731365	1.33E+01	0.054731365	U
7	0.5	-0.01	0.0	0.0	0.169580645	8.72E+00	0.169580645	U
7	0.5	-0.1	0.0	0.0	0.432178906	7.26E+00	0.432178906	U
7	1.5	-0.0001	0.0	0.0	0.017320371	5.13E+01	0.017320371	U
7	1.5	-0.001	0.0	0.0	0.054758595	1.96E+01	0.054758595	U
7	1.5	-0.01	0.0	0.0	0.171921139	9.59E+00	0.171921139	U
7	1.5	-0.1	0.0	0.0	0.432178906	7.26E+00	0.432178906	U
7	10	-0.0001	0.0	0.0	0.017320487	9.73E+01	0.017320487	U
7	10	-0.001	0.0	0.0	0.054770205	3.18E+01	0.054770205	U
7	10	-0.01	0.0	0.0	0.173007035	1.13E+01	0.173007035	U
7	10	-0.1	0.0	0.0	0.534007314	5.67E+00	0.534007314	U

Πίνακας Δ4								
Lz .								
v	β	q	x	y	z	C	RAD	S/U
7	0.02	-0.0001	0.0	0.0	-0.01731	9.01E+00	0.01731	U
7	0.02	-0.001	0.0	0.0	-0.05382	8.31E+00	0.053824	U
7	0.02	-0.01	0.0	0.0	-0.13763	8.05E+00	0.137632	U
7	0.02	-0.1	0.0	0.0	-0.25611	7.83E+00	0.256106	U
7	0.1	-0.0001	0.0	0.0	-0.01732	1.26E+01	0.017318	U
7	0.1	-0.001	0.0	0.0	-0.05457	9.28E+00	0.05457	U
7	0.1	-0.01	0.0	0.0	-0.15944	8.18E+00	0.159436	U
7	0.1	-0.1	0.0	0.0	-0.34032	7.65E+00	0.340317	U
7	0.5	-0.0001	0.0	0.0	-0.01732	2.76E+01	0.01732	U
7	0.5	-0.001	0.0	0.0	-0.05473	1.33E+01	0.054731	U
7	0.5	-0.01	0.0	0.0	-0.16958	8.72E+00	0.169581	U
7	0.5	-0.1	0.0	0.0	-0.43218	7.26E+00	0.432179	U
7	1.5	-0.0001	0.0	0.0	-0.01732	5.13E+01	0.01732	U
7	1.5	-0.001	0.0	0.0	-0.05476	1.96E+01	0.054759	U
7	1.5	-0.01	0.0	0.0	-0.17192	9.59E+00	0.171921	U
7	1.5	-0.1	0.0	0.0	-0.48545	6.75E+00	0.485445	U
7	10	-0.0001	0.0	0.0	-0.01732	9.73E+01	0.01732	U
7	10	-0.001	0.0	0.0	-0.05477	3.18E+01	0.05477	U
7	10	-0.01	0.0	0.0	-0.17301	1.13E+01	0.173007	U
7	10	-0.1	0.0	0.0	-0.53401	5.67E+00	0.534007	U

U = ΑΣΤΑΘΗΣ ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ, S = ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Πρόγραμμα Mathematica σχεδίασης των επιτρεπόμενων και μη επιτρεπόμενων περιοχών κινήσεως (Παράγραφος 5.10)

```

ppi=N[Pi,15];
ni=7
bet=2
Q=- 0.01
phi=ppi/ni;
psi=2.*phi;
s=(iota-1.)*phi;
lamda=Sin[phi]^2./Sin[s];
Slamda=NSum[lamda,{iota,2,ni}];
mi=2.*Sin[phi];
delta=mi*(Slamda+bet*mi^2+3.*bet*Q*mi^4);
x1=(1./mi)*Cos[0.*psi];
y1=(1./mi)*Sin[0.*psi];
x2=(1./mi)*Cos[1.*psi];
y2=(1./mi)*Sin[1.*psi];
x3=(1./mi)*Cos[2.*psi];
y3=(1./mi)*Sin[2.*psi];
x4=(1./mi)*Cos[3.*psi];
y4=(1./mi)*Sin[3.*psi];

```

```

x5=(1./mi)*Cos[4.*psi];
y5=(1./mi)*Sin[4.*psi];
x6=(1./mi)*Cos[5.*psi];
y6=(1./mi)*Sin[5.*psi];
x7=(1./mi)*Cos[6.*psi];
y7=(1./mi)*Sin[6.*psi];
a=x^2+y^2;
b=(x-x1)^2+(y-y1)^2;
c=(x-x2)^2+(y-y2)^2;
d=(x-x3)^2+(y-y3)^2;
e=(x-x4)^2+(y-y4)^2;
f=(x-x5)^2+(y-y5)^2;
g=(x-x6)^2+(y-y6)^2;
h=(x-x7)^2+(y-y7)^2;
r0=Sqrt[a];
r1=Sqrt[b];
r2=Sqrt[c];
r3=Sqrt[d];
r4=Sqrt[e];
r5=Sqrt[f];
r6=Sqrt[g];
r7=Sqrt[h];
r=1./r1+1./r2+1./r3+1./r4+1./r5+1./r6+1./r7;
omega=2.*(x^2+y^2)/2.+(1./delta)*(bet*(1./r0+Q/r0^3)+r)
;
c=7.31330665
L2=ContourPlot[omega,{x,-2.9,2.9},{y,-
2.9,2.9},Contours->{c},

PlotPoints->60,MaxRecursion->2,Axes->True,AxesStyle->{{Thick
ness[0.001],Dashing[0.0009],GrayLevel[0.7]},{Thickness[0.
001],Dashing[0.0009],GrayLevel[0.7]}},AxesLabel->{Style["x
",Large,Bold,Black],Style[y
",Large,Bold,Black]},LabelStyle->Directive[Black,Bold,14]
,ContourShading->{{Red},{White}}];
L4=ContourPlot[{omega==c},{x,-2.9,2.9},{y,-
2.9,2.9},PlotPoints->50,Axes->True,AxesLabel->{Style["x",Lar
ge,Bold,Black],Style["y",Large,Bold,Black]},LabelStyle->Di
rective[Black,Bold,14],AxesStyle->{{Thickness[0.001],Dashi
ng[0.0009],GrayLevel[0.7]},{Thickness[0.001],Dashing[0.00
09],GrayLevel[0.7]}},ContourStyle->{Blue,Thickness[0.003]}
]
L5=Show[L2,L4]

```

Βιβλιογραφία

- Καλβουρίδης Ι. Τ.:** 2004, *Ειδικά θέματα προχωρημένης δυναμικής*, Αθήνα, 2004.
- Κρουσταλλούδη, Μ.:** 2006. *Μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς μικρού σώματος στο Νευτώνειο πεδίο κανονικών πολυγωνικών σχηματισμών ($n+1$) σωμάτων*. Διδακτορική Διατριβή, σελ. 1-223, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- Φακής, Α.:** 2014. *Μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός μικρού σώματος στο δακτυλιοειδές πρόβλημα $N+1$ σωμάτων με μετανευτώνιο δυναμικό τύπου Manev στο κεντρικό σώμα*. Διδακτορική Διατριβή, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- Arribas, M., Elipe, A.:** 2004. *Bifurcations and equilibria in the extended N -body problem*. Mech. Res. Comm. **31**, 1-8.
- Arribas, M., Elipe, A., Kalvouridis, T.J.:** 2006. *Central configuration in the planar $(n+1)$ body problem with generalized forces*. Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza, **28**, 1-8.
- Arribas, M., Elipe, A., Kalvouridis, T.J., Palacios, M.:** 2007. *Homographic solutions in the planar $(n+1)$ problem in a quasi-homogeneous potential*. Celest. Mech. Dyn.Astron., **99**, No1, 1-12.
- Barrio, R., Blesa, F., Serrano, S.:** 2008. *Qualitative analysis of the $(N+1)$ -body ring problem*. Chaos, Solitons and Fractals **36**, 1067-1088.
- Croustalloudi M., Kalvouridis T.:** 2007. *Attracting domains in ring-type N -body formations*. Planetary and Space Sci., **55**, No 1-2, 53-69.
- Croustalloudi, M.N., Kalvouridis, T.J.:** 2011. *Regions of a satellite's motion in a Maxwell's ring system of N bodies*. Astrophys. Sp.Sci. **331**, 497-510.
- Croustalloudi, M.N., Fakis, D., Kalvouridis, T.J.:** 2012. *Regions of convergence in a Maxwell ring-type N -body system where the central body creates a post-Newtonian potential field*. In honour of prof. M. Kontadakis, Thessaloniki, 1-12.
- Diacu, F.N.:** 2009. *How I discovered Manev*. Ομιλία που δόθηκε κατά τον εορτασμό της 125^{ης} επετείου από τη γέννηση του Georgi Manev, Sofia, Bulgaria, (12 Νοεμβρίου, 2009).
- Elipe, A., Arribas, M., Kalvouridis, T.J.:** 2007. *Periodic solutions and their parametric evolution in the planar case of the $(n+1)$ ring problem with oblateness*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, **30**, No6, 1640-1648.
- Fakis, D.Gn., Kalvouridis, T.J.:** 2011. *On the dynamics of a small body in a post-Newtonian potential field created by a regular polygon formation of N bodies*. Proceedings of the 10th Conference of the Hellenic Astronomical Society (Ioannina, Greece, Sept.2011), 1-2, also Book of Abstracts, S3-4, p26.
- Fakis, D.Gn., Kalvouridis, T.J.:** 2013. *Dynamics of a small body in a Maxwell ring-type N -body system with a spheroid central body*. Celest. Mech. Dyn. Astron., **116**, No 3, 229-240.
- Fakis, D.Gn., Kalvouridis, T.J.:** 2014. *Focal points and focal curves: a property of the zero-velocity curves and surfaces in the regular polygon problem of $(N+1)$ bodies where the central primary creates a Manev-type potential*. XIV Jornadas de Trabajo en Mecanica Espacial, Ribadeo, Spain 17-19 July 2014.
- Kalvouridis, T. J.:** 1998. *A planar case of the $n+1$ body problem: the 'ring' problem*. Astrophys. Sp.Sci., **260** (3), 309-325.

- Kalvouridis, T.J.:** 2006. *Some versions of the regular polygon problem of $(n+1)$ bodies*. Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza, **30**, 79-94.
- Kalvouridis, T.J.:** 2008a. *On the topology of the regions of 3-D particle motions in annular configurations of N bodies with a central post-Newtonian potential*. In: G.Contopoulos, P.A. Patsis (eds.) "Chaos in Astronomy" Astrophys. and Space Sci. Proceedings, 357-362.
- Kalvouridis, T.J.:** 2008b. *Particle motions in Maxwell's ring dynamical systems*. Celest. Mech. Dyn. Astron., **102**, No 1-3, 191-206.
- Kalvouridis, T.J.:** 2011. *The regular polygon $(N+1)$ -body problem: An overview*. In Albert.C.J.Luo, Jose Antonio Tenreiro Machado, Dumitru Baleanu (eds.) "Dynamical Systems and Methods", Springer Science +Business Media, LLC2011, pp. 135-150.
- Koyre, A., Cohen, I.B.:** 1972. *Isaac's Newton Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, vol I*. Harvard University Press, Cambridge, MA, p.227.
- Maneff, G.:** 1924. *La gravitation et le principe de l' action et de la reaction*. C.R. Acad. Sci. Paris, **178**, 2159-2161.
- Marañhao, D., Llibre, J.:** 1999. *Ejection-collision orbits and invariant punctured tori in a restricted four-body problem*. Celest. Mech. Dyn. Astron., **71**, 1-14.
- Mioc, V., Stavinschi, M.:** 1998. *On the Schwarzschild-type polygonal $(n+1)$ -body problem and on the associated restricted problem*. Baltic Astronomy **7**, 637-651.
- Mioc, V., Stavinschi, M.:** 1999. *On Maxwell's $(n+1)$ -body problem in the Manev-type field and on the associated restricted problem*. Physica Scripta **60**, 483-490.
- Ollöngren, A.:** 1988. *On a particular restricted five-body problem, an analysis with computer algebra*. J. Symbolic Comput., **6**, 117-126.
- Papadakis, K.E.:** 2009. *Asymptotic orbits in the $(N+1)$ -body ring problem*. Astrophys. Sp. Sci. **323**, 261-272.
- Scheeres, D.:** 1992. *On symmetric central configurations with application to satellite motion about rings*. PhD Thesis. The University of Michigan.
- Szebehely, V.:** *Theory of orbits*, Academic Press, 1967.
- Tsogas, V., T.J.Kalvouridis, T.J., Mavraganis, A.G.:** 2005. *Equilibrium states of a gyrostat satellite moving in the gravitational field of an annular configuration of N big bodies*. Acta Mechanica, **175**, No 1-4, 181-195.