ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΤΩΝ Η.Π.Α (1957-2006)

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: 09312032

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ, ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2016

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της εργασίας μου, κ. Μιχαηλίδη Παναγιώτη, Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π και τον κ. Κωσταντάκη Κωνσταντίνο, υποψήφιο διδάκτορα Ε.Μ.Π, για την ουσιαστική βοήθειά τους στην εκπόνηση της εργασίας, ειδικά της διατύπωσης και απόδειξης των προτάσεων και της οικονομετρικής εκτίμησης, αλλά και για την υπομονή που τους χαρακτήριζε καθ' όλη την διάρκεια της συνεργασίας μας. Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω ένα μεγάλο ΄΄ευχαριστώ΄΄ σε όλους τους καθηγητές του Ε.Μ.Π και σε έναν έναν ξεχωριστά για το τεράστιο έργο που επιτελούν.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία, προσεγγίζουμε τη συνάρτηση παραγωγή χρησιμοποιώντας νευρωνικά δίκτυα. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τη νευρωνική συνάρτηση παραγωγής στην οικονομία των Η.Π.Α, κατά την περίοδο 1957-2006, και καταλήγουμε σε αποτελέσματα για την ελαστικότητα και τις αποδόσεις κλίμακας, τα οποία συνάδουν με τις περισσότερες έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στη βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, η ελαστικότητα υποκατάστασης μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας κυμαίνεται μεταξύ 0,65 και 0,9 και οι αποδόσεις κλίμακας μεταξύ 1,09 και 1,15.

Λέξεις κλειδιά: συνάρτηση παραγωγής, νευρωνικά δίκτυα, προσέγγιση συναρτήσεων

ABSTRACT

This paper proposes a globally flexible functional form for the production function. The Neural Production Function satisfies the theoretical properties of a production function and is a global approximator to any production function. Next, we continue with an application for the US economy (1957-2006) and the results are consistent with the empirical literature. Analytically, the elasticity of substitution between capital and labor ranges between 0.65 and 0.9 and the returns to scale between 1.09 and 1.15.

Key words: production function, neural networks, global approximation

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η προσέγγιση συναρτήσεων παραγωγής με νευρωνικά δίκτυα.

Η προτεινόμενη συνάρτηση παραγωγής, πληροί τα κριτήρια που θέτει η βιβλιογραφία και μπορεί να προσεγγίσει ικανοποιητικά οποιαδήποτε συνάρτηση. Επίσης, υπολογίζονται τα μεγέθη που σχετίζονται με την παραγωγή όπως, ελαστικότητα τεχνικής υποκατάστασης, οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης και αποδόσεις κλίμακας όπως προκύπτουν για τη νευρωνική συνάρτηση παραγωγής.

Όσον αφορά στο πλαίσιο της εφαρμογής της νευρωνικής συνάρτησης παραγωγής, αξιοποιήθηκαν δεδομένα για την οικονομία των Η.Π.Α, που αφορούν στην περίοδο 1957-2006, πριν την μεγάλη κρίση, και τα αποτελέσματα είναι συνεπή με τις περισσότερες από τις προηγούμενες έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στη βιβλιογραφία, τόσο για την ελαστικότητα τεχνικής υποκατάστασης μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας, όσο και για τις αποδόσεις κλίμακας.

Για την εκτίμηση της νευρωνικής συνάρτησης παραγωγής χρησιμοποιήθηκαν η επαναληπτική μέθοδος BFGS, τα κριτήρια AIC και BIC και η λογιστική συνάρτηση ως συνάρτηση ενεργοποίησης φ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάλυση παραγωγής κατέχει δεσπόζουσα θέση στην οικονομική θεωρία λόγω του ρόλου που διαδραματίζει στις αποφάσεις των δρώντων στην οικονομία. Για τον λόγο αυτό, η προσπάθεια προσέγγισης της συνάρτησης παραγωγής, και στην συνέχεια η εκτίμησή της, καθίστανται απαραίτητες, όχι μόνο όσον αφορά στην πληροφορία για την μορφή της και τα μεγέθη που απορρέουν από αυτήν, όπως η ελαστικότητα και οι αποδόσεις κλίμακας, αλλά κυρίως γιατί με βάση αυτές τις εκτιμήσεις λαμβάνονται αποφάσεις και εφαρμόζονται πολιτικές που έχουν μακροχρόνιες επιπτώσεις στην οικονομία.

Η προσέγγιση και εκτίμησή της, όμως, μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα δύσκολο έργο λόγω των παραγόντων από τους οποίους εξαρτάται, ο καθένας από τους οποίους αποτελεί αντικείμενο συστηματικής συζήτησης και έρευνας. Μερικοί από τους πιο σημαντικούς παράγοντες είναι η συνέπεια με την οικονομική θεωρία, δηλαδή η μορφή της να επιβεβαιώνει τους κανόνες που θέτει η θεωρία, η ποιότητα των δεδομένων (αξιοπιστία πηγής, ακρίβεια στην μέτρηση των μεγεθών), το επίπεδο εξέτασης (ατομικό, κλαδικό, συνολικό) και βέβαια η στατιστική μέθοδος που επιλέγεται για να έχουμε όσο το δυνατό πιο αξιόπιστα αποτελέσματα. Στην παρούσα εργασία θα προχωρήσουμε στην εισαγωγή μίας νέας συνάρτησης, της Νευρωνικής Συνάρτησης Παραγωγής.

Η συνάρτηση που προτείνεται μέσα από αυτήν την εργασία ανήκει στις ημι-παραμετρικές (semi-parametric) μεθόδους εκτίμησης, δηλαδή δεν είναι ούτε παραμετρική, ούτε μη-παραμετρική. Από την μία πλευρά, διατηρεί την ερμηνεία των παραμέτρων του υποδείγματος και από την άλλη πλευρά είναι ευέλικτη (flexible). Επίσης, χαρακτηρίζεται από πλεονεκτήματα, όπως (Michaelides et al., 2014):

i. Μπορεί να προσεγγίσει κάθε τυχαία συνάρτηση παραγωγής.
ii. Ικανοποιεί όλα τα θεωρητικά κριτήρια.
iii. Επιτρέπει τυχαίες αποδόσεις κλίμακας.
iv. Προσαρμόζεται ικανοποιητικά στα πραγματικά δεδομένα.
v. Εκτιμάται σχετικά εύκολα.

Η παρούσα εργασία έχει οργανωθεί ως εξής: Αρχικά, θα αναφερθούμε στην οικονομική θεωρία και τις ιδιότητες που h συνάρτηση παραγωγής οφείλει να πληροί. Έπειτα, θα προχωρήσουμε σε θεωρήματα που αποδεικνύουν ότι αυτή η συνάρτηση μπορεί να προσεγγίσει οποιαδήποτε συνάρτηση παραγωγής και κάτω από ποιες προϋποθέσεις είναι και η ίδια μία καλά ορισμένη συνάρτηση παραγωγής. Στη συνέχεια, θα προτείνουμε έναν τρόπο εκτίμησής της, τον οποίο θα εφαρμόσουμε στην οικονομία των Η.Π.Α. Τέλος, θα καταλήξουμε στα συμπεράσματα που προκύπτουν από το θεωρητικό και εμπειρικό μέρος της εργασίας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

1.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η αποτελεσματικότητα πολλών υποδειγμάτων εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο ο ερευνητής, θα επιλέξει να χτίσει το μοντέλο του. Μέσα από αυτή τη διαδικασία, καλείται να υιοθετήσει, συνήθως, μία συγκεκριμένη συναρτησιακή μορφή, η οποία θα εκφράζει φυσικές ή/και οικονομικές σχέσεις πάνω στις οποίες θα στηρίξει τη θεωρία του. Φυσικά, δεν είναι σε θέση να γνωρίζει την "πραγματική" συναρτησιακή μορφή, εντούτοις προσπαθεί μέσα από τα εργαλεία που του παρέχουν η μαθηματική και η οικονομική θεωρία να έρθει, όσο το δυνατόν, πιο κοντά στην ΄΄πραγματικότητα΄΄. Οι διάφορες μορφές συναρτήσεων παραγωγής, οι οποίες έχουν προταθεί κατά καιρούς, πρέπει να πληρούν τα περισσότερα από τα μαθηματικά, στατιστικά και οικονομικά κριτήρια ώστε να επιλεχθούν από τον ερευνητή.

Ιστορικά, ο πρώτος που διατύπωσε αλγεβρικά τη σχέση μεταξύ εισροών και εκροών φαίνεται να είναι ο Philip Wicksteed (1894), αν και υπάρχουν κάποιες ενδείξεις ότι νωρίτερα, το 1840, ο Johann Von Thünen είχε σχηματίσει, πρώτος, την εκθετική συνάρτηση παραγωγής. Επίσης, ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον λογισμό για να λύσει οικονομικά προβλήματα αριστοποίησης και ο πρώτος που συνέδεσε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης με τις οριακές παραγωγικότητες (Blaug, 1985). Με την εκθετική συνάρτηση παραγωγής ασχολήθηκαν, μετέπειτα, οι Mitscherlich (1909) και Spillman (1924). Μία, αρκετά, όμοια σε μορφή συνάρτηση με αυτήν που πρότεινε ο Von Thünen, προτάθηκε από τους Cobb and Douglas (1928), οι οποίοι μελέτησαν την σχέση μεταξύ προϊόντος, εργασίας και κεφαλαίου, χρησιμοποιώντας χρονολογικές σειρές, και κατέληξαν στην πασίγνωστη συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas, με κύριο γνώρισμά της τη μοναδιαία, σταθερή ελαστικότητα.

Αργότερα, οι Halter et al. (1957) περιέγραψαν την υπερβατική (transcendental) συνάρτηση παραγωγής, η οποία είναι μία γενίκευση της Cobb-Douglas, διατηρώντας τα θετικά οριακά προϊόντα και τον φθίνοντα οριακό λόγο τεχνικής υποκατάστασης. Μολονότι επέτρεπε η ελαστικότητα να μεταβάλλεται, δεν περιέλαβε την γραμμική συνάρτηση παραγωγής, συνάρτηση εξαιρετικά σημαντική για το υπόδειγμα Harrod-Domar (Harrod, 1939; Domar, 1946). Λόγω του τελευταίου χαρακτηριστικού της υπερβατικής συνάρτησης και της μοναδιαίας ελαστικότητας που χαρακτηρίζει την Cobb-Douglas, οι Arrow et al. (1961) πρότειναν την CES ή σταθερής ελαστικότητας υποκατάστασης συνάρτηση παραγωγής. Για τη συνάρτηση, αυτή, προέκυψαν δύο προβλήματα που αφορούσαν στις ελαστικότητες μεταξύ των εισροών και στο πως μεταβάλλονται αυτές όταν οι εισροές γίνουν περισσότερες από δύο. Με αυτά τα προβλήματα ασχολήθηκαν εκτενέστατα οι Uzawa (1962) και McFadden (1962, 1963) και απέδειξαν ότι δεν υπάρχει συνάρτηση παραγωγής σταθερών ελαστικοτήτων όταν οι εισροές είναι περισσότερες από δύο.

Λόγω του παραπάνω θεωρήματος, προτάθηκαν διάφορες παραλλαγές της CES συνάρτησης παραγωγής που να επιτρέπουν μεταβαλλόμενη ελαστικότητα υποκατάστασης, όπως των Lu και Fletcher (1968), η οποία δεν είχε ικανοποιητικά εμπειρικά αποτελέσματα, των Zellner και Revankar (1969), η οποία χαρακτηρίζεται μόνο από γραμμικές αποδόσεις κλίμακας και του Bruno (1968), στην οποία η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές σε όλο το πεδίο όπου εργασία και κεφάλαιο παίρνουν θετικές τιμές.

Έπειτα, ο Diewert (1971) προχώρησε σε μία γενικευμένη μορφή της γραμμικής συνάρτησης παραγωγής και σε μία γενικευμένη μορφή της Leontief συνάρτησης παραγωγής, οι οποίες συμπεριλαμβάνουν μεγάλο αριθμό εισροών και μη σταθερές ελαστικότητες υποκατάστασης, έτσι ώστε να υπερπηδήσει το εμπόδιο που έθεσαν με το θεώρημά τους οι Uzawa (1962) και McFadden (1962, 1963). Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, οι Griliches and Ringstad (1971), οι Berndt and Chrinstensen (1973), και Chrinstensen, Jorgenson and Lau

(1973), πρότειναν μία συνάρτηση παραγωγής που να επιτρέπει ταυτόχρονα την ύπαρξη πολλών εισροών και τις μεταβαλλόμενες ελαστικότητες υποκατάστασης. Ένα, όμως, από τα σημαντικά μειονεκτήματα της τελευταίας είναι ότι οι εκτιμητές που προκύπτουν από αυτή αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας.

Γενικότερα, οι γενικεύσεις των Cobb-Douglas και CES συναρτήσεων παραγωγής, μέχρι το τέλος της δεκαετίας του ΄70 είχαν ολοκληρωθεί, ωστόσο, είχε ήδη ξεκινήσει η συζήτηση για το αν υπάρχει συνάρτηση παραγωγής που να αντιπροσωπεύει το σύνολο της οικονομίας. Το επιχείρημα στο οποίο στηρίχθηκαν οι οικονομολόγοι εναντίον της ύπαρξης μίας συνολικής συνάρτησης παραγωγής, από το 1953 μέχρι τα μέσα του ΄70, ήταν ότι δεν μπορούμε να εξάγουμε από το κεφάλαιο ποσότητα η οποία θα είναι ανεξάρτητη από επιτόκια και μισθούς, μιας και οι τιμές τους θα πρέπει να είναι γνωστές εκ των προτέρων για να σχηματίσουμε την καμπύλη και την κλίση της συνολικής συνάρτησης παραγωγής.

Εξαιτίας, αυτής, της αντιπαράθεσης, πολλοί οικονομολόγοι προσπάθησαν να αποδείξουν ότι υπάρχει μία συνολική συνάρτηση παραγωγής, η οποία αποτελεί το άθροισμα των μερών που την απαρτίζουν. Ο Solow (1957) με μία εμπειρική μελέτη του πάνω στην οικονομία των Η.Π.Α από το 1909 μέχρι το 1949, έδειξε ότι υπάρχει συνολική συνάρτηση παραγωγής για την εξεταζόμενη οικονομία και ότι η συνολική συνάρτηση παραγωγής είναι ένα απαραίτητο εργαλείο οικονομικής ανάλυσης. Ο Samuelson (1962), πρότεινε μία αντιπροσωπευτική συνάρτηση παραγωγής, η οποία μπορεί να προβλέψει την συμπεριφορά μισθών και περιθωρίου κέρδους.

Η τελική εικόνα αυτής της αντιπαράθεσης είναι ότι, οι μεν υπέρμαχοι της ύπαρξης συνολικής συνάρτησης παραγωγής ανέπτυξαν θεωρίες πάνω στις οποίες στήριξαν την άποψή τους, οι δε αντίπαλοι της άποψης αυτής δεν προχώρησαν στην ανάπτυξη αντίστοιχων θεωριών. Οπότε, στην παρούσα εργασία, θα θεωρήσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση παραγωγής που να περιγράφει το σύνολο της οικονομίας και η νευρωνική συνάρτηση παραγωγής μπορεί να το κάνει αυτό σε ικανοποιητικό βαθμό.

Όλες οι μορφές των συναρτήσεων παραγωγής που επισημάνθηκαν παραπάνω, έχουν μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα. Χάριν παραδείγματος, η γενικευμένη Cobb-Douglas συνάρτηση παραγωγής ικανοποιεί τα μαθηματικά και οικονομικά κριτήρια, αλλά αποτυγχάνει, εν μέρει, στα στατιστικά (Fraser, 2002). Επιπλέον, ένα ακόμη διάσημο παράδειγμα συνάρτησης παραγωγής είναι η CES (Σταθερής Ελαστικότητας Υποκατάστασης), η οποία ενώ οι υποθέσεις της είναι λιγότερο αυστηρές από την Cobb-Douglas οι εκτιμητές που αφορούν στην ελαστικότητα και προέρχονται από αυτήν παράγουν ασυνεπή, ως προς την εμπειρική πραγματικότητα αποτελέσματα (Miller, 2008). Τέλος, η Spillman (Spillman, 1923) συνάρτηση παραγωγής δεν πληροί από τα μαθηματικά-οικονομικά κριτήρια την ομογένεια και την ομοθετικότητα, και από τα στατιστικά εμφανίζει παρόμοια μειονεκτήματα με τη γενικευμένη Cobb-Douglas (Griffin et al., 1987). Ο λόγος για τον οποίον αναφερθήκαμε στα παραπάνω παραδείγματα δεν είναι άλλος από το να αντιληφθούμε ότι η επιλογή της συνάρτησης παραγωγής δεν είναι διόλου εύκολη υπόθεση. Γενικά, δεν υπάρχει συνάρτηση με μόνο καλές ιδιότητες και οι συνέπειες αυτής της επιλογής πιθανόν να επηρεάσουν ολόκληρο το οικονομικό μοντέλο στο οποίο, ενδεχομένως, η συνάρτηση παραγωγής να αποτελεί απλά ένα μέρος του.

Ένα επόμενο θέμα το οποίο προκύπτει, σύμφωνα και με την προηγούμενη ανάλυση, είναι αυτό της ευελιξίας της συνάρτησης παραγωγής. Με τον όρο “ευελιξία” (flexibility) εννοούμε κατά πόσο μία συναρτησιακή μορφή μπορεί να προσεγγίσει αποτελεσματικά οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση και τις παραγώγους αυτής. Μεταβαίνοντας στα νευρωνικά δίκτυα και λαμβάνοντας υπόψιν το προηγούμενο ζήτημα της ευελιξίας, μιας και αποτελεί κομμάτι της ανάλυσής μας, καταλήγουμε στο γεγονός ότι η χρήση τους στην προσέγγιση μίας συνάρτησης παραγωγής θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη. Έχει αποδειχθεί, ότι τα νευρωνικά δίκτυα μπορούν να προσεγγίσουν συναρτήσεις πολύ ικανοποιητικά, διότι η προσεγγιστική τους δυνατότητα εξαρτάται περισσότερο από την αρχιτεκτονική τους και όχι τόσο από την επιλογή της συνάρτησης ενεργοποίησης (Hornik, 1991). Επίσης, δεν χρειάζεται να κάνουμε χρήση προκαθορισμένων μοντέλων, διότι μπορούν αποτελεσματικά να ταυτοποιήσουν και να ελέγξουν άγνωστα συστήματα.

Επιπροσθέτως, η δομή του συστήματος των νευρωνικών δικτύων χαρακτηρίζεται από δύο σημαντικά πλεονεκτήματα. Πρώτον, η απεικόνιση πολυδιάστατων μη-γραμμικών σχέσεων γίνεται ευκολότερη και δεύτερον, επιτρέπεται ο διαχωρισμός της γραμμικότητας των κρυμμένων κόμβων με τη γραμμική δραστηριότητα στα επίπεδα των εισροών και εκροών. Με βάση το δεύτερο πλεονέκτημα, οι εξισώσεις αντιμετωπίζονται σαν μία συλλογή από αλγεβρικά συστήματα, τα οποία διατηρούν την αρχική συναρτησιακή μορφή και ο έλεγχος της προσεγγιστικής ικανότητας τους μπορεί να γίνει μέσω γραμμικής άλγεβρας (Ferrari and Stengel, 2005). Τέλος, μας προσφέρουν διαφορίσιμες κλειστής μορφής λύσεις, οι οποίες έχουν πολύ καλές ιδιότητες και έχουν εφαρμοστεί σε ευρεία κλίμακα (Lagaris et al., 1998).

Οι εφαρμογές των Νευρωνικών Δικτύων όσον αφορά στην οικονομική θεωρία είναι σχετικά περιορισμένες και διακρίνονται κυρίως σε δύο: σε αυτές που αφορούν στην ταξινόμηση οικονομικών μονάδων και σε αυτές που αφορούν στην πρόβλεψη χρονολογικών σειρών. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν μοντέλα όπως: πρόβλεψης χρεοκοπίας (Fletcher and Goss, 1993), πιστωτικής αξιολόγησης (Huang et al., 2004) και τμηματοποίησης της αγοράς (Vellido et al., 1999; Herbrich et al., 1999). Στην δεύτερη κατηγορία ανήκουν μοντέλα όπως, πρόβλεψης συναλλαγματικών ισοτιμιών (Kuan and Liu, 1995), μακροοικονομικών μεγεθών (Swanson and White, 1995; Herbrich et al., 1999), χρηματιστηριακού δείκτη (Kimoto et al., 1990) και οικονομικής μεγέθυνσης (Huang et al., 2007; Kaastra and Boyd, 1996).

Στην αμέσως επόμενη παράγραφο θα περιγράψουμε τα βασικά στοιχεία της δομής των νευρωνικών δικτύων και θα προχωρήσουμε στην περαιτέρω ανάλυσή τους.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δεδομένες εισροές $X' = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$, οι οποίες παράγουν προϊόν Y. Αυτές οι εισροές, λοιπόν, συνδυάζονται καταλλήλως ώστε να σχηματίσουν K ενδιάμεσες μεταβλητές $Z_1, Z_2, \ldots, Z_K$ με τον εξής τρόπο:

$$\boldsymbol{Z_\kappa = X'\beta_\kappa \qquad \kappa = 1, \dots, K}$$

όπου $\beta_\kappa \in \mathbb{R}^K$ το διάνυσμα των παραμέτρων. Οι ενδιάμεσες μεταβλητές μετασχηματίζονται μη γραμμικά ώστε να παράξουν το προϊόν Y:

$$\boldsymbol{Y = \sum_{\kappa=1}^{K} \alpha_\kappa \varphi(Z_\kappa)}$$

όπου φ είναι η συνάρτηση ενεργοποίησης, $\alpha_\kappa \in \mathbb{R}^K$ οι παράμετροι και K ο αριθμός των κόμβων.

1.2 ΝΕΥΡΩΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ)

Έστω $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}) \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{N}}$ το διάνυσμα των εισροών, δηλαδή των αγαθών τα οποία χρησιμοποιούνται στην παραγωγή κάποιων άλλων αγαθών. Επίσης, έστω $(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_m}) \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{M}}$ το διάνυσμα των αγαθών τα οποία παράγονται από τις παραπάνω εισροές. Σε όλη την παρακάτω ανάλυση θεωρούμε ότι $\boldsymbol{X} = \{(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}) \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{N}}\}$, $\boldsymbol{Y} = \{(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_m} \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{M}})\}$ είναι φραγμένα σύνολα.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση παραγωγής θα ορίσουμε ένα σύνολο, το σύνολο των εισροών. Σύμφωνα με τον Shephard (1969), για το σύνολο αυτό, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι έχει κάποιες ιδιότητες, οι οποίες θα μας εξασφαλίσουν την ύπαρξη μιας συνάρτησης παραγωγής με συγκεκριμένες ιδιότητες.

Ορισμός 1 (Σύνολο εισροών): Συμβολίζουμε L(y) το σύνολο των εισροών, το οποίο περιλαμβάνει όλα εκείνα τα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{N}}$ τα οποία αντιστοιχούν τουλάχιστον σε ένα y στον $\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{M}}$.

Για τις ιδιότητες των συνόλων αυτών, παραπέμπουμε στον Sephard (1969). Οι υποθέσεις αυτές μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη συνάρτησης παραγωγής, την οποία θα ορίσουμε αμέσως, με κάποιες ιδιότητες στις οποίες θα αναφερθούμε στον ***Ορισμό 3***.

Ορισμός 2 (Συνάρτηση παραγωγής): Η συνάρτηση παραγωγής f(x), για μία τεχνολογία η οποία αναπαριστάται από το σύνολο των εισροών παραγωγής L(y), ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{max}\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y})\}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{N}}$$

Θα προχωρήσουμε τώρα στη διατύπωση ενός πολύ σημαντικού θεωρήματος των νευρωνικών δικτύων.

Θεώρημα 1: Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^N$ένα συμπαγές σύνολο του για κάποιο $N \in \mathbb{N}$ και C(X) ο χώρος όλων των πραγματικών συναρτήσεων, ο οποίος παράγεται από τον X. Επίσης, έστω $\varphi: X \to \mathbb{R}$ μία μη σταθερή, φραγμένη, συνεχής συνάρτηση. Τότε η οικογένεια:

$$\boldsymbol{\Phi} = \left\{ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{a_i} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{w'_i x} + \boldsymbol{b_i}), \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_i} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{N}} \right\}$$

είναι πυκνή στον C(X).

Απόδειξη: Αποτελεί ευθεία εφαρμογή του θεωρήματος Hornik (1991).

Η σημασία του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι μας εξασφαλίζει ότι κάθε πραγματική συνάρτηση μπορεί να γραφεί στην μορφή που έχει η F. Παρακάτω, θα εξασφαλίσουμε τις προϋποθέσεις του ***Θεωρήματος 1***, με τη νευρωνική συνάρτηση παραγωγής (ΝΣΠ) στη θέση της F και με το σύνολο των συναρτήσεων παραγωγής, που ορίζουμε στον ***Ορισμό 3,*** στην θέση του X, ώστε η ΝΣΠ να μπορεί να προσεγγίσει οποιαδήποτε συνάρτηση παραγωγής.

Ορισμός 3 (Σύνολο συναρτήσεων παραγωγής): Εάν η συνάρτηση παραγωγής ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{max}\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y})\}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$$

τότε το σύνολο των συναρτήσεων παραγωγής θα ορίζεται ως

$$\cup_{\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}} \boldsymbol{max}\{\boldsymbol{y_i} \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y_i})\}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$$

Θεώρημα 2 (Το σύνολο των συναρτήσεων παραγωγής είναι συμπαγές): Το σύνολο των συναρτήσεων παραγωγής

$$\cup_{\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}} \boldsymbol{max}\{\boldsymbol{y_i} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y_i})\}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{N}}$$

είναι συμπαγές.

Απόδειξη: Βλέπε ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ (Παράρτημα)

Με το ***Θεώρημα 2,*** εξασφαλίζουμε τις ιδιότητες που έχει το αντίστοιχο σύνολο X στο ***Θεώρημα 1.***

Θεώρημα 3 (ΝΣΠ είναι συνεχής, φραγμένη και μη-σταθερή) : Αν το σύνολο συναρτήσεων παραγωγής είναι ένα συμπαγές σύνολο του $\mathbb{R}^M$ και $\varphi: \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ μία μη σταθερή, φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^a \prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}(x^{\beta_\kappa})$, όπου $x^a = \prod_{i=1}^{N} x_i^{a_i}$ $\mu\varepsilon\ \alpha \in \mathbb{R}^N$ το διάνυσμα των παραμέτρων και $x^{\beta_\kappa} = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\beta_i}$ $\mu\varepsilon\ \alpha^\kappa, \beta^\kappa \in \mathbb{R}^K$, οι νευρωνικές παράμετροι, είναι συνεχείς, μη σταθερές και φραγμένες.

Απόδειξη: Βλέπε ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ (Παράρτημα)

Με το ***Θεώρημα 3,*** εξασφαλίζουμε τις ιδιότητες που έχει η αντίστοιχη συνάρτηση φ στο ***Θεώρημα 1*** και το ***Θεώρημα 4*** αποδεικνύει ότι η νευρωνική συνάρτηση παραγωγής μπορεί να προσεγγίσει οποιαδήποτε συνάρτηση παραγωγής.

Θεώρημα 4: Εάν το σύνολο των συναρτήσεων παραγωγής είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^M$,τότε η οικογένεια των συναρτήσεων

$$F = \left\{ f(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^M) : f(x) = x^a \prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}\left(x^{\beta_\kappa}\right), a \in \mathbb{R}^N, a_\kappa, \beta_\kappa \in \mathbb{R}^K \right\}$$

είναι πυκνή στο σύνολο των συναρτήσεων παραγωγής.

Απόδειξη: Βλέπε ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ (Παράρτημα)

Στην συνέχεια, με τον ***Ορισμό 4,*** συγκεντρώνουμε τις ιδιότητες που πρέπει να πληροί η νευρωνική συνάρτηση για να θεωρείται μία συνάρτηση παραγωγής.

Ορισμός 4 (Καλώς ορισμένη συνάρτηση παραγωγής): Αν η συνάρτηση παραγωγής, έστω f, ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες τότε τη θεωρούμε καλώς ορισμένη (Mas-Colell et al., 1995; Varian, 1992):

i. $f(0_n) = 0_m$.

ii. $H\ f\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu\epsilon\iota\ \pi\epsilon\pi\epsilon\rho\alpha\sigma\mu\acute{\epsilon}\nu\epsilon\varsigma\ \tau\iota\mu\acute{\epsilon}\varsigma\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\epsilon\ x \in \mathbb{R}_+^N$ *πεπερασμένο.*

iii. $f(x) \geq f(x')\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\epsilon\ x \geq x'$.

iv. $A\nu\ \ x \geq 0$ ή $x > 0\ \kappa\alpha\iota\ f(\lambda^* x) > 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota\alpha\ \lambda^* > 0\ \tau\acute{o}\tau\epsilon\ \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda x) = \infty$.

v. *H f είναι δεξιά συνεχής για κάθε* $x \in \mathbb{R}_+^N$.

vi. $f\big((1-\theta)x + \theta y\big) \geq min\{f(x), f(y)\}\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\epsilon\ x, y \in \mathbb{R}_+^N\ \kappa\alpha\iota\ 0 \leq \theta \leq 1\ (\eta\ f\ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ o\iota o\nu\epsilon\acute{\iota}\ \kappa o\acute{\iota}\lambda\eta)$.

vii. $f(x+z) \geq f(x) + f(z)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\epsilon\ x, z \in \mathbb{R}_+^N$.

Στο ***Θεώρημα 5*** θα δείξουμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις η νευρωνική συνάρτηση παραγωγής είναι μία καλώς ορισμένη συνάρτηση παραγωγής.

Θεώρημα 5: Εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες για την συνάρτηση ενεργοποίησης και τις παραμέτρους, κάθε συνάρτηση παραγωγής της μορφής $f(x) = x^a \prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}\left(x^{\beta_\kappa}\right), a \in \mathbb{R}^N, a_\kappa, \beta_\kappa \in \mathbb{R}^K$ είναι καλώς ορισμένη:

i. *Η* $\varphi: X \to \mathbb{C}^m[0,1], m = \{1, \dots, N\}$ *είναι η συνάρτηση ενεργοποίησης η οποία είναι i) μη σταθερή ii) φραγμένη iii) συνεχής iv) αύξουσα και v) οιονεί κοίλη.*

ii. $a_i \geq 0 \; για \; κάθε \; i \in \{1, \dots, N\} \; και$

iii. $a_\kappa, \beta_\kappa \geq 0 \; για \; κάθε \; \kappa \in \{1, \dots, K\}$

Απόδειξη: Βλέπε ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ (Παράρτημα)

Συμπερασματικά, η νευρωνική συνάρτηση παραγωγής είναι καλώς ορισμένη διότι ικανοποιεί όλες τις παραπάνω συνθήκες, οι οποίες προτείνονται από την οικονομική θεωρία.

1.3 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Κάποια από τα μεγέθη τα οποία απορρέουν από την συνάρτηση παραγωγής παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον και αξίζει υπολογιστούν για τη νευρωνική συνάρτηση παραγωγής, διότι αποκαλύπτουν στοιχεία για τις διάφορες οικονομίες, τα οποία εκ πρώτης όψεως δεν είναι ορατά, και βοηθούν στην άσκηση οικονομικών πολιτικών.

Πρόταση 1: Ο λογαριθμικός μετασχηματισμός της νευρωνικής συνάρτησης παραγωγής έχει ως εξής:

$$\boldsymbol{lnf}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{a_i lnx_i} + \sum_{\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{a_\kappa ln\varphi}(\boldsymbol{\beta_\kappa} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{lnx_i})$$

Απόδειξη: Βλέπε ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ (Παράρτημα)

Ένα από αυτά τα μεγέθη είναι ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης (ΟΛΤΥ), στον οποίο αναφέρθηκαν για πρώτη φορά οι Allen (1938) και Hicks (1932). Ο ΟΛΤΥ εκφράζει τη σχέση υποκατάστασης μεταξύ δύο συντελεστών παραγωγής, δηλαδή πόσο εύκολα υποκαθίσταται ένας συντελεστής με έναν άλλον έτσι ώστε η ποσότητα του προϊόντος να παραμείνει σταθερή.

Πρόταση 2: Ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης (ΟΛΤΥ) , ο οποίος εξάγεται από την νευρωνική συνάρτηση παραγωγής, ανάμεσα σε δύο εισροές n και z με $n, z \in \{1, \dots, N\}$ είναι ο εξής:

$$\boldsymbol{OATY_{x_n x_z}} = \frac{\boldsymbol{a_n + \sum_{\kappa=1}^{K} \alpha_\kappa \beta_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n}}}{\boldsymbol{a_z + \sum_{\kappa=1}^{K} \alpha_\kappa \beta_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_z}}}$$

Απόδειξη: Βλέπε ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ (Παράρτημα)

Ένα επόμενο μέγεθος, η ελαστικότητα τεχνικής υποκατάστασης, την οποία πρώτος όρισε ο Hicks (1932) μας δείχνει πόσο μία μεταβολή του λόγου των τιμών ή του ΟΛΤΥ σε μία ανταγωνιστική οικονομία επηρεάζει το μείγμα των εισροών που χρησιμοποιείται στην παραγωγή. Διαδραματίζει σημαντικό ρόλο σε πολλά πεδία των οικονομικών, κυρίως η ελαστικότητα υποκατάστασης μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας, όπως, στην κατανομή του εισοδήματος, στη θεωρία οικονομικής μεγέθυνσης, στην αγορά εργασίας και σε θέματα που αφορούν την ισορροπία.

Πρόταση 3: Η ελαστικότητα τεχνικής υποκατάστασης της νευρωνικής συνάρτησης παραγωγής δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{\sigma = -\frac{A(x_n)A(x_z)[lnx_nA(x_n) + lnx_zA(x_z)]}{lnx_nlnx_z\left\{\sum_{\kappa=1}^{K}\alpha_\kappa\beta_\kappa^2\,[\frac{\partial^2 ln\varphi}{\partial lnx_n{}^2}A(x_z)^2 + \sum_{\kappa=1}^{K}\alpha_\kappa\beta_\kappa^2\,[\frac{\partial^2 ln\varphi}{\partial lnx_z{}^2}A(x_n)^2 - 2\frac{\partial^2 ln\varphi}{\partial lnx_n\partial lnx_z}A(x_n)A(x_z)\right\}}}$$

Με

$$\boldsymbol{A(x_n) = a_n + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa\beta_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_i}, \text{για κάθε } n \in \{1, \dots, N\}}$$

Απόδειξη: Βλέπε ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ (Παράρτημα).

Τέλος, ένα ακόμη μέγεθος, οι αποδόσεις κλίμακας, μας δείχνουν τι συμβαίνει στο προϊόν όταν αυξηθούν ισόποσα όλες οι εισροές. Αν το προϊόν αυξηθεί περισσότερο, λιγότερο ή το ίδιο με τις εισροές, τότε η συνάρτηση παραγωγής παρουσιάζει αύξουσες, φθίνουσες ή σταθερές αποδόσεις κλίμακας, αντιστοίχως. Ακόμη, οι αποδόσεις κλίμακας μας αποκαλύπτουν τη σχέση μεταξύ κόστους και προϊόντος, π.χ. αν η συνάρτηση παραγωγής χαρακτηρίζεται από σταθερές αποδόσεις κλίμακας τότε η σχέση κόστους με το προϊόν είναι γραμμική.

Υπάρχουν διάφορες ισοδύναμες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται έτσι ώστε μία συνάρτηση να είναι ομογενής κάποιου βαθμού. Στην περίπτωση της θεωρίας της παραγωγής ο βαθμός ομογένειας της συνάρτησης παραγωγής εκφράζεται από τις αποδόσεις κλίμακας. Εδώ για ευκολία, θα ορίσουμε την ελαστικότητα κλίμακας στον ***Ορισμό 5***, θα χρησιμοποιήσουμε την συνθήκη με την οποία ομογένεια και ελαστικότητα κλίμακας συσχετίζονται και θα την εφαρμόσουμε στην νευρωνική συνάρτηση παραγωγής στην ***Πρόταση 4*** .

Ορισμός 5: Αν $f: \mathbb{R}_+^M \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση παραγωγής με $x: \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ να είναι οι εισροές, τότε η ελαστικότητα κλίμακας ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} \frac{\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$$

και εκφράζει τη συνολική ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης, όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές (εισροές) μεταβάλλονται κατά το ίδιο ποσοστό.

Η τιμή της ελαστικότητας κλίμακας θα είναι και ο βαθμός ομογένειας της συνάρτησης.

Πρόταση 4: Οι αποδόσεις κλίμακας (Α.Κ) της νευρωνικής συνάρτησης παραγωγής δίνονται από τον τύπο

$$\boldsymbol{A.K} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(a_n + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n} \beta_\kappa\right) lnx_i}{\sum_{i=1}^{N} a_i lnx_i + \sum_{\kappa=1}^{K} \alpha_\kappa ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}$$

Απόδειξη: Βλέπε ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ (Παράρτημα) .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην εκτίμηση ενός μοντέλου με την χρήση νευρωνικών δικτύων, βασικό ρόλο παίζουν δύο παράγοντες (Suzuki, 2011):

1. Το κριτήριο που θα καθορίσει ποιες εισροές έχουν την μεγαλύτερη επιρροή, και ποιος είναι ο κατάλληλος συνδυασμός των υποψήφιων ανεξάρτητων μεταβλητών.
2. Ο αλγόριθμος ο οποίος θα επιλεγεί έτσι ώστε το μοντέλο να είναι πιο εύχρηστο υπολογιστικά.

Στο πλαίσιο επιλογής των κατάλληλων ανεξάρτητων μεταβλητών, δηλαδή εκείνων που μας δίνουν σημαντική πληροφορία για το πώς λειτουργεί το μοντέλο μας, έχουν προταθεί διάφορα κριτήρια όπως: MSE (Leung and Yu, 1996), AIC (Akaike, 1973), Cp Mallows (Mallows, 1973), BIC (Schwartz, 1978), mR-MR (Peng et al., 2005). Επίσης, όσον αφορά στις στρατηγικές επιλογής των κατάλληλων μεταβλητών, έχουν προταθεί πολλές όπως, ενδελεχής έρευνα (exhaustive search), επιλογή κατά βήμα (stepwise selection), επιλογή προς τα μπρος (forward selection) και ευρετική έρευνα (heuristic search) (Efroymson, 1960; Hocking, 1976; Draper and Smith, 1981; SAS Institute Inc., 1989).

Ακόμη και όταν καταλήξουμε σε πόσες και ποιες μεταβλητές θα χρησιμοποιήσουμε στο μοντέλο μας η λύση του συστήματος μπορεί να γίνει μια απαιτητική υπόθεση. Η λύση, ειδικά, συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων μπορεί να γίνει υπολογιστικά πολύ περίπλοκη. Ωστόσο, κατάλληλες επαναληπτικές μέθοδοι έχουν προταθεί, κύριος στόχος των οποίων είναι η μείωση του αριθμού των εξισώσεων προς εκτίμηση. Οποιαδήποτε επαναληπτική μέθοδος με μία καλή αρχική εκτίμηση μπορεί να μας δώσει το προσδοκώμενο κατά προσέγγιση αποτέλεσμα. Η πιο γνωστή από αυτές είναι, ίσως, η μέθοδος Newton.

Στο πλαίσιο των κριτηρίων επιλογής των κατάλληλων μεταβλητών, στην παρούσα εργασία θα κάνουμε χρήση των κριτηρίων AIC (Akaike Information Criteria) και BIC (Bayesian Information Criteria), από πλευράς επιλογής μεταβλητών, τα οποία προτάθηκαν αντιστοίχως από τον Akaike (1973) και τον Schwarz (1978). Σύμφωνα με τον Akaike (1973), οι διαστάσεις του μοντέλου μας δεν είναι δεδομένες εκ των προτέρων αλλά καθορίζονται από τα δεδομένα και η επιλογή των μεταβλητών με την εκτίμηση των παραμέτρων μπορούν να επιτευχθούν ταυτόχρονα. Το AIC κριτήριο λειτουργεί πάντα συγκριτικά μεταξύ μοντέλων με διαφορετικό αριθμό μεταβλητών και όσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή του τόσο καλύτερο είναι το μοντέλο μας.

Στο ίδιο πλαίσιο κινείται και ο Schwarz (1978) με το BIC κριτήριο, με δύο από τις σημαντικότερες διαφορές τους να είναι: Πρώτον, το BIC ενσωματώνει και «τιμωρεί» αναλόγως, την αναλογία μεταξύ παραμέτρων και μεγέθους του δείγματος σε μεγαλύτερο βαθμό από το AIC κριτήριο και δεύτερον, η BIC εκτιμήτρια είναι συνεπής αλλά ασυμπτωτικά μη αποτελεσματική, ενώ η AIC είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική αλλά ασυνεπής.

Από πλευράς επαναληπτικής μεθόδου θα αξιοποιήσουμε μία από τις μεθόδους τύπου Newton (quasi Newton Methods), την BFGS μέθοδο (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Algorithm) (Broyden, 1970; Fletcher, 1970; Goldfarb, 1970; Shanno, 1970). Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί μία προσέγγιση της Ιακωβιανής μήτρας ενώ μειώνει, παράλληλα, τον αριθμό των εξισώσεων προς εκτίμηση. Προτιμάται συχνά από τους ερευνητές διότι δεν είναι υπολογιστικά χρονοβόρα. Αναλυτικά η μέθοδος BFGS είναι η εξής:

Έστω ότι θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε, χωρίς περιορισμούς, μία συνάρτηση f. Δηλαδή,

$$minf(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

με f να είναι μία μη κυρτή συνάρτηση, με δεύτερες, συνεχείς παραγώγους.

Η λύση του προβλήματος αριστοποίησης θα βρεθεί μέσω της επαναληπτικής μορφής

$$x_{\kappa+1} = x_\kappa - \alpha_\kappa H_\kappa g_\kappa$$

με x_1 να είναι το αρχικό σημείο, H_κ να είναι μία προσέγγιση του αντίστροφου Εσσιανού πίνακα $[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}$, $g_\kappa = \nabla f(x_\kappa)$ και α_κ να είναι ο αριθμός των βημάτων του αλγόριθμου, τον οποίο βρίσκουμε με την μέθοδο Wolfe Line Search (Wolfe, 1969). Αναλυτικά, η μέθοδος Wolfe Line Search για μία διάσταση λειτουργεί ως εξής:

$$\boldsymbol{\psi_\kappa(\alpha) = f(x_\kappa - \alpha H_\kappa g_\kappa), \quad \alpha \geq 0}$$

θα είναι η σχετική συνάρτηση και το α_κ θα είναι αυτό το οποίο ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$$\boldsymbol{\psi_\kappa(\alpha_\kappa) \leq \psi_\kappa(0) + \mu \psi'_\kappa(0)\alpha_\kappa}$$

και

$$\boldsymbol{\psi'_\kappa(\alpha_\kappa) \geq \eta \psi'_\kappa(0)}$$

με μ, η να είναι σταθερές και $0 < \mu \leq \eta < 1$.

Σύμφωνα με την BFGS επαναληπτική μέθοδο, η επόμενη προσέγγιση του Εσσιανού πίνακα $H_{\kappa+1}$ θα είναι η εξής:

$$H_{\kappa+1} = H_\kappa - \frac{\delta_\kappa \gamma_\kappa^T H_\kappa + H_\kappa \gamma_\kappa \delta_\kappa^T}{\delta_\kappa^T \gamma_\kappa} + \left(1 + \frac{\gamma_\kappa^T H_\kappa \gamma_\kappa}{\delta_\kappa^T \gamma_\kappa}\right) \frac{\delta_\kappa \delta_\kappa^T}{\delta_\kappa^T \gamma_\kappa}$$

και

$$\delta_\kappa = x_{\kappa+1} - x_\kappa$$

$$\gamma_\kappa = g_{\kappa+1} - g_\kappa$$

με $\delta_\kappa^T \gamma_\kappa > 0$.

Η BFGS επαναληπτική μέθοδος με τη Wolfe Line Search (Wolfe, 1969) μέθοδο για τον αριθμό των βημάτων λειτουργεί ικανοποιητικά για κυρτές και μη κυρτές συναρτήσεις.

Ένα επόμενο σημαντικό θέμα στην διαδικασία εκτίμησης της νευρωνικής συνάρτησης παραγωγής είναι η επιλογή της συνάρτησης ενεργοποίησης φ, η οποία θα πρέπει να πληροί κάποιες ιδιότητες σύμφωνα και με το ***Θεώρημα 5***. Στην παρούσα εργασία, θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ενεργοποίησης φ είναι η λογιστική συνάρτηση με τον γνωστό τύπο:

$$\varphi(z) = \frac{e^z}{1 + e^z}, z \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάστηκε λογιστική από τον Pierre-Francois Verhulst το 1845, ο οποίος την χρησιμοποίησε για να περιγράψει την ανάπτυξη του πληθυσμού σε μία νεοσυσταθείσα χώρα. Η χρήση αυτής της σχέσης επεκτάθηκε στη Χημεία (αυτοκαταλυτικές αντιδράσεις), στην Επιδημιολογία και στις Κοινωνικές Επιστήμες.

Σε υποδείγματα συνεχούς χρόνου χρησιμοποιείται ευρέως ως η λύση μίας συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης (εντροπία), ενώ σε υποδείγματα διακριτού χρόνου η επιλογή της βασίζεται στο γεγονός ότι η λογιστική συνάρτηση συμπεριφέρεται ομαλά και συμπυκνώνει την απεικόνιση πραγματικών τιμών σε ένα φραγμένο διάστημα με μονοτονικό τρόπο. Ακόμη, εισάγει τη μη γραμμικότητα στο μοντέλο μας και μία άξια αναφοράς αλγεβρική ιδιότητα της λογιστικής κατανομής πιθανότητας είναι ότι μιμείται, σε συμπεριφορά καμπύλης, την κανονική κατανομή σε ένα μεγάλο εύρος πιθανότητας από 0.3 μέχρι 0.7. Επίσης, η λογιστική συνάρτηση παίζει μεγάλο ρόλο στην θεωρία της στατιστικής ταξινόμησης (statistical classification). Εν κατακλείδι, η λογιστική συνάρτηση είναι μία από τις συναρτήσεις οι οποίες πληρούν τα κριτήρια που έχουμε θέσει και η επιλογή της έγινε λόγω των παραπάνω χαρακτηριστικών της (Cramer, 2002; Press and Wilson, 1978; Michael, 1995).

Συνοψίζοντας, με συνάρτηση ενεργοποίησης τη λογιστική συνάρτηση, με την χρήση των κριτηρίων AIC και BIC, και με την αξιοποίηση της επαναληπτικής μεθόδου BFGS η διαδικασία εκτίμησης του μοντέλου σε μορφή βημάτων είναι η ακόλουθη:

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ

ΒΗΜΑ 1: Για m=1, όπου m ο αριθμός των κόμβων, διαλέγουμε τυχαία ένα διάνυσμα παραμέτρων $\overline{\beta_\kappa^l}, \kappa = 1, \dots, m,$ που να ανήκει στο σύνολο .

ΒΗΜΑ 2: Για αυτές τις τιμές των διανυσμάτων των παραμέτρων $\overline{\beta_\kappa^l}, \kappa = 1, \dots, m$ εκτιμούμε τις παραμέτρους $a_0, \alpha_i, a_\kappa, \kappa = 1, \dots, m \; και \; i = 1, \dots, N$ με χρήση ελαχίστων τετραγώνων (O.L.S.) στην ακόλουθη εξίσωση :

$$lny_t = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i lnx_{t,i} + \sum_{\kappa=1}^{m} a_\kappa \varphi(\overline{\beta_\kappa^l}\, lnx_{t,i}) + u_t$$

$$t = 1, \dots, T, όπου \; T \; είναι \; ο \; αριθμός \; των \; παρατηρήσεων.$$

ΒΗΜΑ 3: Για τις εκτιμηθείσες παραμέτρους $a_0, \alpha_i, a_\kappa, \kappa = 1, \dots, m \; και \; i = 1, \dots, N,$ οι οποίες είναι γνωστές από το προηγούμενο βήμα, θεωρούμε τις $\beta_\kappa^l, \kappa = 1, \dots, m$ ως άγνωστες παραμέτρους και βρίσκουμε τις αριθμητικές τιμές τους χρησιμοποιώντας την BFGS επαναληπτική μέθοδο.

ΒΗΜΑ 4: Για τις αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων των παραμέτρων $\overline{\beta_\kappa^l}, \kappa = 1, \dots, m$ εκτιμούμε τις παραμέτρους$a_0, \alpha_i, a_\kappa, \kappa = 1, \dots, m \; \kappa\alpha\iota \; i = 1, \dots, N,$ με χρήση OLS.

ΒΗΜΑ 5: Για το σύνολο των παραμέτρων $a_0, \alpha_i, a_\kappa, \kappa = 1, \dots, m \; \kappa\alpha\iota \; i = 1, \dots, N$ και $\beta_\kappa^l, \kappa = 1, \dots, m,$ υπολογίζουμε το άθροισμα των τετραγωνικών καταλοίπων $SSR = SSR^{(l)}$ που αντιστοιχούν σε αυτό το σύνολο παραμέτρων.

ΒΗΜΑ 6: Για το παραπάνω υπόδειγμα εκτιμούμε τα κριτήρια AIC (Akaike 1973)και BIC (Schwarz, 1978).

ΒΗΜΑ 7: Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1-6 για m = 2, 3, 4... και κρατάμε την τιμή των κόμβων m που ελαχιστοποιεί την τιμή του κριτηρίου AIC. Για τον βέλτιστο αριθμό κόμβων $m^* \in \{1, \dots, K\}$ που επιλέγεται από το κριτήριο AIC, κρατάμε τις τιμές του συνόλου των παραμέτρων $\overline{\beta_{m^*}}$, και των εκτιμούμενων παραμέτρων $\overline{\alpha_{0m^*}, \alpha_{\iota m^*}, \alpha_{\kappa m^*}}$.

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

3.1 ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε ένα σύνολο δεδομένων τα οποία αφορούν στην οικονομία των Η.Π.Α κατά την περίοδο 1957-2006. Ο λόγος για τον οποίο εξετάζουμε αυτήν την περίοδο είναι η δραματική αλλαγή η οποία παρατηρείται, τόσο στην οικονομία των Η.Π.Α όσο και στην παγκόσμια οικονομία μετά το 2006. Οι επιπτώσεις, εκτός των άλλων, αυτής της σημαντικής εξέλιξης αναμένεται να επηρεάσουν τα αποτελέσματα των εκτιμήσεών μας και να παράγουν μεροληπτικούς εκτιμητές.

Η ανάλυσή μας περιλαμβάνει δεδομένα από 14 βασικούς τομείς οικονομικής δραστηριότητας. Με (R) συμβολίζουμε τις συνολικές δαπάνες για έρευνα και ανάπτυξη (R&D), με (Y) το ακαθάριστο προϊόν κάθε τομέα, με (L) τους εργαζόμενους κάθε τομέα υπό το καθεστώς πλήρους απασχόλησης και με (K) το καθαρό απόθεμα φυσικού κεφαλαίου. Η εργασία (L) μετράται σε χιλιάδες εργαζόμενους, οι δαπάνες για έρευνα και ανάπτυξη (R) μετράται σε εκατομμύρια δολάρια Η.Π.Α (τιμές 1957) και τα υπόλοιπα μεγέθη μετρώνται σε δισεκατομμύρια δολάρια Η.Π.Α (τιμές 1957) και η προέλευσή τους είναι από τις εξής πηγές: τα (K),(Y) προέρχονται από το Bureau of Economic Activity, το (L) από το Bureau of Labor Statistics και το (R&D) από το National Scientific Foundation of USA. Στον **ΠΙΝΑΚΑ 3.1** γίνεται λεπτομερής περιγραφή των δεδομένων, τα οποία χρησιμοποιούνται στην εργασία.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1: Δεδομένα

ΤΟΜΕΙΣ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ			
1	Γεωργία, Δασοκομία και Αλιεία	NACE ταξινόμηση	ΔΙΑΘΕΣΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	ΠΗΓΗ
2	Εξόρυξη, πετρελαίου και κάρβουνου	A01, A02, A03	ΠΡΟΙΟΝ (Y)	Bureau of Economic Activity
3	Ηλεκτρισμός, Αέριο, Νερό	B, C10-C12, C13-C15, C16, C17, C18, C19, C20, C21, C22, C23, C24, C25, C26, C27, C28, C29, C30, C31-C32, C33		
4	Κατασκευές	D, E36, E37-39		
5	Τρόφιμα, Ποτά, Ξύλινα προϊόντα και Έπιπλα, Μεταλλικά προϊόντα	F		
6	Χονδρική Πώληση	I	ΚΕΦΑΛΑΙΟ (K)	Bureau of Economic Activity
7	Λιανεμπόριο	G45, G46		
8	Μεταφορές και Αποθήκευση	G47		
9	Βιομηχανία Πληροφορίας και Τεχνολογίας	H49, H50, H51, H52, H53		
10	Ακίνητα και Επιχειρηματικές Υπηρεσίες,	J58, J59-60, J61, J62-63, S95	Δαπάνες για Έρευνα και Ανάπτυξη (R&D)	National Scientific Foundation

	Χρηματοοικονομικές και Ασφαλιστικές Υπηρεσίες			
11	Επικοινωνία κοινωνικές και ιδιωτικές υπηρεσίες	K64, K65, K66, L, L68A, M71, M72, N77		
12	Υπηρεσίες Διοίκησης Επιχειρήσεων	M73, M74-M75, N79, N80-N82, O, Q87-Q88, R90-R92, R93, S94, S96, T, U		
13	Εκπαιδευτικοί Οργανισμοί	M69-M70, N78	Εργασία (L)	Bureau of Labor Statistics
14	Υπηρεσίες Υγείας	P		

3.2 ΕΚΤΙΜΗΣΗ

Με συνάρτηση ενεργοποίησης τη λογιστική συνάρτηση, ακολουθώντας κατά βήμα τον αλγόριθμο εκτίμησης της συνάρτησης παραγωγής και με την υπόθεση ότι όλες οι παράμετροι του μοντέλου είναι θετικές, εκτιμήσαμε την παρακάτω συνάρτηση παραγωγής για έναν κόμβο (**ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4**):

$$\boldsymbol{lny_t = a_0 + a_1 lnK_t + a_2 lnR_t + a_3 lnL_t + \gamma_1 \varphi(\beta_{11} lnK_t + \beta_{12} lnR_t + \beta_{13} lnL_t) + u_t}$$

και τα αποτελέσματα αυτής συνοψίζονται στους παρακάτω πίνακες:

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2: Οι εκτιμήσεις των β

	β_{11}	β_{12}	β_{13}
Τιμές παραμέτρων (t-στατιστική)	0,012 (2,156)	0,025 (3,213)	0,121 (5,004)
Αρχική τιμή	Τυχαίες κανονικές αποκλίσεις		
Επαναλήψεις προς σύγκλιση	64		
Μέθοδος	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannon		

Εκτίμηση: Κ. Κωσταντάκης, Π. Μιχαηλίδης

Ο **ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2** μας δείχνει τις εκτιμήσεις των νευρωνικών παραμέτρων $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}$ της νευρωνικής συνάρτησης παραγωγής, οι οποίες προήλθαν από την BFGS επαναληπτική μέθοδο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3: Οι εκτιμήσεις των α με μη γραμμικό OLS και 1 κόμβο

	a_0	a_1	a_2	a_3	γ_1
Εκτιμήσεις	16,67	0,837	0,294	0,290	5,28
Τυπική Απόκλιση	2,35	0,064	0,051	0,071	3,856
z-τιμή	7,07	13,551	5,210	4,350	6,720
p-τιμή	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Προσαρμοσμένο R^2	0,995				

Εκτίμηση: Κ. Κωσταντάκης, Π. Μιχαηλίδης

Ο **ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3** μας δείχνει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων των συντελεστών παραγωγής K, L, R&D, και της παραμέτρου της συνάρτησης ενεργοποίησης, οι οποίες προήλθαν από τη μέθοδο μη γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων. Επίσης, το μοντέλο μας εξηγεί κατά 99,5% τη συνολική μεταβλητότητα των μεγεθών, σύμφωνα με το προσαρμοσμένο R^2, αποτέλεσμα πολύ ικανοποιητικό.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4: Μοντέλο με 1 κόμβο έναντι μοντέλου με 2 κόμβους

	1 κόμβος	2 κόμβοι
AIC	-254,95	-201,32
BIC	-245,34	-200,55

Εκτίμηση: Κ. Κωσταντάκης, Π. Μιχαηλίδης

Ο **ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4** μας δείχνει ότι το μοντέλο με τον 1 κόμβο μας παρέχει περισσότερη πληροφόρηση απ' ότι το μοντέλο με τους 2 κόμβους, σύμφωνα με τα κριτήρια AIC και BIC, οπότε θα διεξάγουμε την εκτίμηση υποθέτοντας έναν μόνο κόμβο.

Οπότε, η συνάρτηση παραγωγής των Η.Π.Α με τρεις συντελεστές παραγωγής κατά την περίοδο 1957-2006, και με έναν κόμβο είναι η παρακάτω:

$$\boldsymbol{lny_t = 16,67 + 0,837lnK_t + 0,294lnR_t + 0,290lnL_t}$$
$$\boldsymbol{+ 5,28\varphi(0,012lnK_t + 0,025lnR_t + 0,121lnL_t)}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5: Ελαστικότητα τεχνικής υποκατάστασης και αποδόσεις κλίμακας

ΜΕΓΕΘΗ	MIN(ΕΤΟΣ)	MAX(ΕΤΟΣ)	ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΗ ΠΟΡΕΙΑ
$\boldsymbol{\sigma_{KL}}$	0,6455 (2006)	0,8985 (1957)	ΦΘΙΝΟΥΣΑ
$\boldsymbol{\sigma_{KR}}$	1,333 (2006)	2,126 (1957)	ΦΘΙΝΟΥΣΑ
$\boldsymbol{\sigma_{LR}}$	0,804 (2006)	1,3 (1957)	ΦΘΙΝΟΥΣΑ
Α.Κ(RTS)	1,0954 (1957)	1,1515 (2006)	ΑΥΞΟΥΣΑ

Ο **ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5** μας δείχνει την ελάχιστη και μέγιστη τιμή καθώς και τη διαχρονική συμπεριφορά των ελαστικοτήτων τεχνικής υποκατάστασης και τις αποδόσεις κλίμακας της νευρωνικής συνάρτησης παραγωγής. Οι τιμές των ελαστικοτήτων τεχνικής υποκατάστασης αποκαλύπτουν ότι οι σχέσεις μεταξύ των συντελεστών παραγωγής, την περίοδο 1957-2006, γίνονται όλο και πιο ανελαστικές και οι αποδόσεις κλίμακας είναι αύξουσες.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

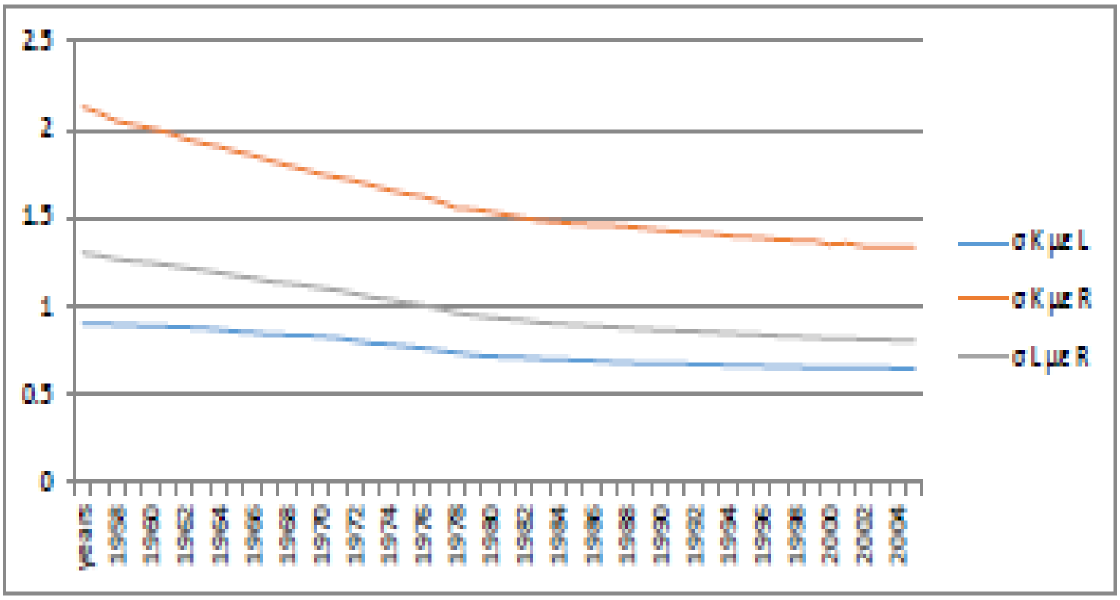
Με μία πρώτη ματιά στην εκτιμηθείσα συνάρτηση παραγωγής, παρατηρούμε ότι η παραγωγή των Η.Π.Α είναι εντάσεως κεφαλαίου και εξαρτάται σε μικρότερο βαθμό από τις δαπάνες για έρευνα και ανάπτυξη και την εργασία. Εντούτοις, τα μεγέθη που απορρέουν από τη συνάρτηση παραγωγής παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον και χρήζουν περαιτέρω ανάλυσης.

4.1ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΕΣ

Όσον αφορά στις ελαστικότητες των συντελεστών παραγωγής, δύο είναι τα γενικά χαρακτηριστικά τους. Πρώτον, η ελαστικότητα ανεξάρτητα του ζεύγους των εισροών κυμαίνεται μεταξύ 0,645 και 2,126 και δεύτερον, η πορεία της διαχρονικά φαίνεται να είναι φθίνουσα. Το εύρος τιμών είναι αρκετά μεγάλο και δε μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα όπως, σημεία συγκέντρωσης, αν και η ελαστικότητα υποκατάστασης μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας που, συνήθως, απασχολεί τους ερευνητές κυμαίνεται σταθερά κάτω από τη μονάδα.

Σε αντίθεση με το εύρος, η διαχρονική της συμπεριφορά μας οδηγεί σε πολλαπλά συμπεράσματα. Σύμφωνα με τον ορισμό, ελαστικότητα είναι ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής του λόγου των εισροών προς την ποσοστιαία μεταβολή του οριακού λόγου τεχνικής υποκατάστασης. Όσο πιο μικρή είναι η μεταβολή του ΟΛΤΥ στις μεταβολές του μείγματος των εισροών τόσο πιο εύκολη είναι η υποκατάσταση μεταξύ τους. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται ξεκάθαρα η φθίνουσα πορεία της ελαστικότητας κατά την περίοδο 1957-2006 που καθιστά την υποκατάσταση μεταξύ τους όλο και πιο δύσχερη.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.1: Οι ελαστικότητες τεχνικής υποκατάστασης μεταξύ των εισροών



Ας επικεντρωθούμε, κυρίως, στην ελαστικότητα μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας που απασχολεί περισσότερο τους ερευνητές. Όπως φαίνεται στο **ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.1** η ελαστικότητα φθίνει σε όλη την περίοδο 1957-2016 και η τιμή της βρίσκεται σταθερά κάτω από τη μονάδα. Το μέγεθος της ελαστικότητας σε σχέση με τη μονάδα παίζει καθοριστικό ρόλο σε πολλούς τομείς των οικονομικών και κυρίως σε αυτόν των δυναμικών μακροοικονομικών. Οι La Grandville (1989) και Klump and de La Grandville (2000) απέδειξαν ότι η υψηλή ελαστικότητα μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας αποτελεί τον μοχλό ανάπτυξης της οικονομίας. Επίσης, ο Chirinko (2002) έδειξε ότι όσο πιο χαμηλή είναι η τιμή της ελαστικότητας, τόσο περισσότερο μειωμένη θα είναι η αντίδραση των ιδιωτικών επενδύσεων σε μεταβολές του επιτοκίου από νομισματικές και δημοσιονομικές επεμβάσεις.

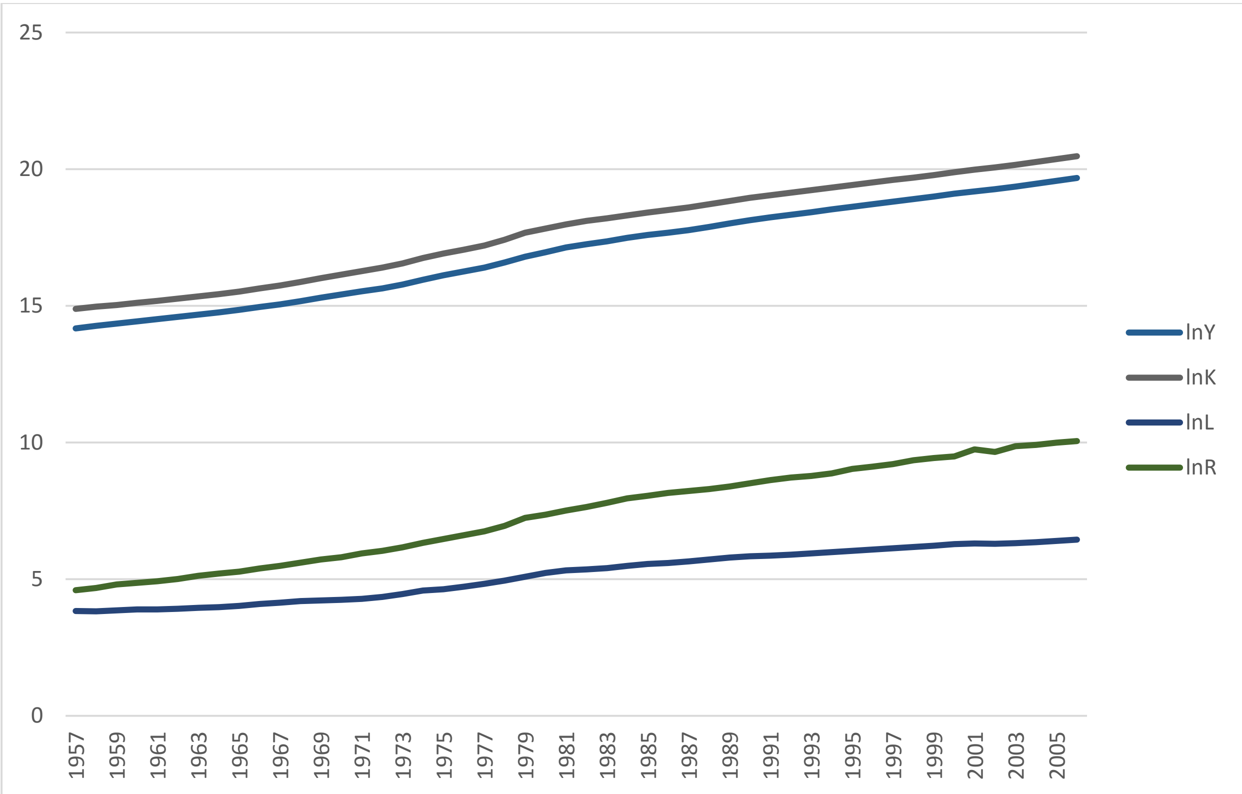
Τα αποτελέσματα κάποιων εργασιών ευνοούν την υπόθεση της μη μοναδιαίας ελαστικότητας και κάποιων όχι. Στις δύο επόμενες παραγράφους παραθέτουμε κάποιες εργασίες και από τις δύο πλευρές.

Από την μία πλευρά οι Maddala (1965), Coen (1969), Eisne and Nadir (1968), χρησιμοποιώντας χρονολογικές σειρές, εκτίμησαν την ελαστικότητα αρκετά μικρότερη από την μονάδα και οι David and van de Klundert (1965) και Kalt (1970) βρήκαν ότι η ελαστικότητα κυμαίνεται ανάμεσα στο 0,32 και 0,76 όπως και ο Lucas (1969), με μικρότερο εύρος από 0,3 μέχρι 0,5. Ο Berndt (1976), με CES συνάρτηση παραγωγής και με τη χρήση χρονολογικών σειρών, βρήκε ότι $\sigma \ll 1$. Ακόμη, ο Levy (1989) με δεδομένα ανά τρίμηνο από το 1948 μέχρι 1983 και δύο συντελεστές παραγωγής, βρήκε ότι η ελαστικότητα παραγωγής κυμαίνεται μεταξύ 0,44 και 0,55. Ο Hamermesh (1993), με CES και δεδομένα ωρών εργασίας, βρήκε ότι $0,32 < \sigma < 1,16$ και ο Pereira (2003), με χρονολογικές σειρές ή πάνελ, βρήκε ότι γενικότερα κυμαίνεται κάτω από τη μονάδα. Επιπροσθέτως, ο Antras (2004), χρησιμοποιώντας δεδομένα από το 1948 μέχρι το 1998 για τον ιδιωτικό τομέα των ΗΠΑ και υποθέτοντας CES συνάρτηση παραγωγής, εξήγαγε αποτελέσματα με την βοήθεια διαφόρων στατιστικών μεθόδων τα οποία δείχνουν ότι $\sigma \ll 0,5$, όπως και ο Chirinko (2008) βρήκε ότι $0,4 < \sigma < 0,6$. Τέλος, οι Oberfield and Raval (2014), με διακλαδικά δεδομένα από εργοστάσια παραγωγής από το 1972 μέχρι το 2007, βρήκαν ότι $\sigma \approx 0,7$.

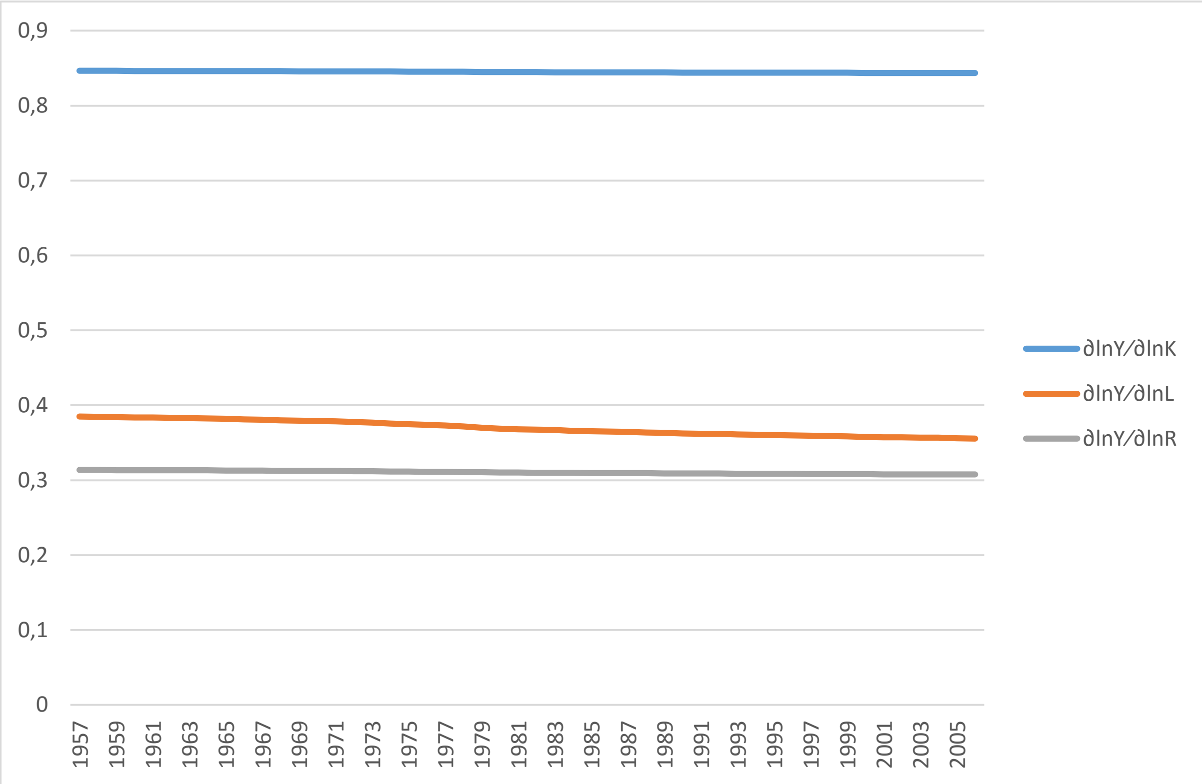
Από την άλλη πλευρά, οι Dhrymes and Zarembka (1970) χρησιμοποιώντας κλασική ανάλυση παλινδρόμησης και χρονολογικές σειρές βρήκαν ότι $\sigma = 1$, ενώ και ο Berndt (1976), με CES συνάρτηση παραγωγής και διακλαδικά δεδομένα, κατέληξε στο ίδιο αποτέλεσμα. Ακόμη, ο Antras (2004), χρησιμοποιώντας δεδομένα από το 1948 μέχρι το 1998 για τον ιδιωτικό τομέα των ΗΠΑ, παρήγαγε αποτελέσματα με τη βοήθεια διαφόρων στατιστικών μεθόδων, τα οποία δείχνουν ότι $\sigma \approx 1$.

Συμπερασματικά, τα εμπειρικά ευρήματα πολλών μελετών συνάδουν με τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, ότι δηλαδή η ελαστικότητα μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας κυμαίνεται κάτω από τη μονάδα, και μας αποκαλύπτει ένα χαρακτηριστικό της οικονομίας των Η.Π.Α, το οποίο διαφαίνεται και από τα παρακάτω διαγράμματα.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.2: Η πορεία των εισροών και του προϊόντος μεταξύ των ετών 1957 και 2006



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.3: Οριακές παραγωγικότητες των εισροών

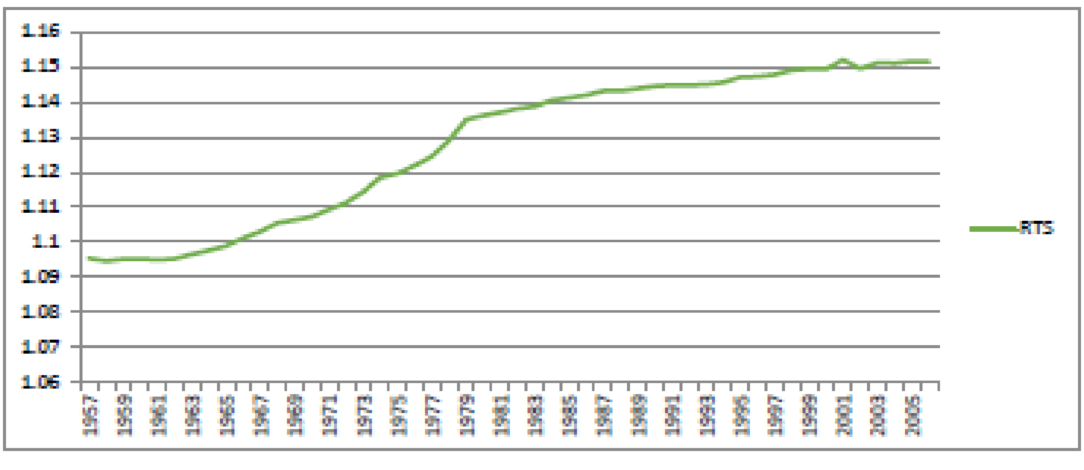


Η παραγωγή των Η.Π.Α αυξήθηκε από το 1957 εως και το 2006 λόγω της αύξησης των μεγεθών των συντελεστών παραγωγής και όχι λόγω της αύξησης των οριακών παραγωγικοτήτων τους. Συγκεκριμένα, οι παραγωγικότητες κεφαλαίου και εργασίας έχουν μειωθεί και η αυτή των δαπανών για έρευνα και ανάπτυξη έχει αυξηθεί. Στη βιβλιογραφία, κάποιοι από τους παράγοντες που έχουν οδηγήσει την παραγωγικότητα στις Η.Π.Α να έχει μειωθεί, είναι: η μείωση της ποιότητας της εργασίας, οι κυβερνητικές πολιτικές, η μη αποτελεσματική αξιοποίηση των δαπανών για έρευνα και ανάπτυξη και οι τιμές του πετρελαίου (Irmen, 2010; Cullison, 1989). Εν κατακλείδι, η βάση για οικονομική μεγέθυνση των Η.Π.Α φαίνεται να είναι η αύξηση των παραγωγικοτήτων των συντελεστών παραγωγής. Η ανάλυση και η αντιμετώπιση των παραγόντων που οδηγούν σε μείωση παραγωγικότητας αλλά και η περαιτέρω αύξηση των δαπανών για έρευνα και ανάπτυξη φαίνεται να οδηγούν προς αυτήν την κατεύθυνση.

4.2 ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

Ένα άλλο σημαντικό μέγεθος που προκύπτει από την συνάρτηση παραγωγής είναι οι αποδόσεις κλίμακας. Για τις Η.Π.Α, εν προκειμένω, η παραγωγή χαρακτηρίζεται από αύξουσες αποδόσεις κλίμακας από 1,095 μέχρι 1,152. Μολονότι οι αποδόσεις κλίμακας αυξάνονται, ο ρυθμός αύξησης τους από το 1979 και μετά είναι συνεχώς μειούμενος.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.4: Αποδόσεις κλίμακας



Όσον αφορά στις αποδόσεις κλίμακας έχουν διεξαχθεί αρκετές έρευνες, οι περισσότερες οι οποίες καταλήγουν ότι οι Η.Π.Α παρουσιάζουν αύξουσες αποδόσεις κλίμακας, σε πλήρη αντιστοιχία με την παρούσα εργασία. Ο Levy (1989), χρησιμοποιώντας τριμηνιαία δεδομένα από το 1948 μέχρι το 1983 για δύο συντελεστές παραγωγής, βρήκε ότι η οικονομία των ΗΠΑ παρουσιάζει αύξουσες αποδόσεις κλίμακας με Α.Κ=1,1. Ακόμη, οι Basu and Fernald (1997) χρησιμοποιώντας δεδομένα από 34 βιομηχανίες, 21 κατασκευαστικές και 13 μη κατασκευαστικές, οι οποίες συνιστούν τον ιδιωτικό τομέα των ΗΠΑ κατά την περίοδο 1959-1989, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ενώ σε επίπεδο μίας βιομηχανίας παρουσιάζονται σταθερές ή φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας, σε κλαδικό επίπεδο εμφανίζονται αύξουσες αποδόσεις. Οι Laitner και Stolyarov (2003), με τη χρήση διαφόρων στατιστικών τεχνικών κατέληξαν ότι $1{,}09 \leq A.K \leq 1{,}11$. Τέλος, ο Xi Chen (2015), αξιοποιώντας την KLEMS βάση δεδομένων από το 1949-2001, βρήκε ότι $1{,}1 < A.K < 1{,}6$.

Υπάρχουν, βέβαια, και κάποιες έρευνες οι οποίες δείχνουν ότι οι Η.Π.Α παράγουν με σταθερές ακόμη και φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας. Ο Hall (1990), βρήκε ότι οι αποδόσεις κλίμακας είναι φθίνουσες και συγκεκριμένα έχουν τιμή ίση με 0,3. Ακόμη, οι Basu and Fernald (1994), είχαν καταλήξει ότι οι αποδόσεις κλίμακας είναι σταθερές. Επίσης, οι Oberfield and Raval (2014), με διακλαδικά δεδομένα από εργοστάσια παραγωγής κατά την περίοδο 1972-2007 και CES συνάρτηση παραγωγής, βρήκαν ότι η οικονομία των ΗΠΑ παράγει με σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

Συνοψίζοντας, η νευρωνική συνάρτηση παραγωγής, η οποία προτείνεται μέσα από αυτήν την εργασία, χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες που πρέπει να έχει μία συνάρτηση παραγωγής σύμφωνα με την οικονομική θεωρία. Το βασικό της πλεονέκτημα είναι ότι μπορεί να προσεγγίσει οποιαδήποτε συνάρτηση παραγωγής. Η εφαρμογή της στην οικονομία των Η.Π.Α μας αποκαλύπτει στοιχεία τα οποία έρχονται σε πλήρη αντιστοιχία με τις περισσότερες έρευνες πάνω στην οικονομία των Η.Π.Α. Πρώτον, η ελαστικότητα κεφαλαίου και εργασίας βρίσκεται σταθερά κάτω από τη μονάδα από 0,65 μέχρι 0,9, και δεύτερον οι αποδόσεις κλίμακας είναι αύξουσες από 1,09 μέχρι 1,15. Τέλος, τα επιμέρους χαρακτηριστικά των δύο μεγεθών δείχνουν ότι οι ασκούντες την οικονομική πολιτική θα πρέπει να εστιάσουν στην αύξηση της παραγωγικότητας, κυρίως του κεφαλαίου και της εργασίας, και θα πρέπει να δώσουν μεγαλύτερη βαρύτητα στις δαπάνες για έρευνα και ανάπτυξη μιας και η οριακή τους παραγωγικότητα συνεχίζει να αυξάνει.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Θεώρημα 2

Επειδή X,Y είναι φραγμένα σύνολα, το L(y) θα είναι φραγμένο και από τις ιδιότητές του θα είναι και κλειστό. Το σύνολο $\cup_{i\in I} max\{y_i: x \in L(y_i)\}, x \in \mathbb{R}_+^N$ είναι ένα υποσύνολο του $Y \subset \mathbb{R}_+^M$. Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}_+^M$ είναι συμπαγές σύνολο, οπότε το σύνολο $\cup_{i\in I} max\{y_i: x \in L(y_i)\}, x \in \mathbb{R}_+^N$ είναι συμπαγές.

Θεώρημα 3

Για κάθε $x_j \in \mathbb{R}_+^N$ υπάρχει ένα $y_J \in \mathbb{R}_+^M$ τέτοιο ώστε $f(x_j) = y_J, \forall j \in J,$ οπότε το γινόμενο $x_j^a = \prod_{i=1}^N x_{ij}^{a_i} \in \mathbb{R}_+ , \forall j \in J$. Ως εκ τούτου η $f(x_j) = x_j^a \prod_{\kappa=1}^K \varphi^{\alpha_\kappa}(x_j^{\beta_\kappa})$ είναι συνεχής συνάρτηση αφού η φ είναι συνεχής εξ ορισμού.

Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x_1 x_2 \in \mathbb{R}_+^N \; \mu\varepsilon \; x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$$

Έστω $x_1 x_2 \in \mathbb{R}_+^N$, τα οποία αντιστοιχούν στα y_1, y_2 στο Y αντίστοιχα. Επειδή η φ είναι μη σταθερή συνάρτηση, ισχύει $\prod_{\kappa=1}^K \varphi^{\alpha_\kappa}(x_1^{\beta_\kappa}) \neq \prod_{\kappa=1}^K \varphi^{\alpha_\kappa}(x_2^{\beta_\kappa})$, το οποίο μας δείχνει, με τη σειρά του , ότι: $f(x_1) \neq f(x_2)$ και συνεπώς η f είναι μη σταθερή συνάρτηση.

Η f είναι το γινόμενο δύο όρων, του $x^a = \prod_{i=1}^{N} x_i^{a_i}$ και του $\prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}(x^{\beta_\kappa})$. Ο πρώτος όρος είναι ένα πεπερασμένο γινόμενο πεπερασμένων πραγματικών στοιχείων, οπότε προφανώς είναι φραγμένος. Ο δεύτερος όρος είναι το πεπερασμένο γινόμενο φραγμένων συναρτήσεων, οπότε είναι και αυτός φραγμένος. Ως εκ τούτου, η f είναι φραγμένη.

Θεώρημα 4

Από το ***Θεώρημα 2***, το σύνολο των συναρτήσεων παραγωγής είναι συμπαγές. Επίσης, από το ***Θεώρημα 3***, οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^a \prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}(x^{\beta_\kappa})\,, \alpha \in \mathbb{R}^N, \alpha_\kappa, \beta_\kappa \in \mathbb{R}^K$ είναι μη σταθερές, συνεχείς και φραγμένες. Από το ***Θεώρημα 1***, η οικογένεια $F = \left\{f(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^M): f(x) = x^a \prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}\left(x^{\beta_\kappa}\right), a \in \mathbb{R}^N, a_\kappa, \beta_\kappa \in \mathbb{R}^K\right\}$ είναι πυκνή στον $\mathbb{C}(X)$ για κάθε $X \subseteq \cup_{i\in I} max\{y_i : x \in L(y_i)\}, x \in \mathbb{R}_+^N$.

Θεώρημα 5

i. $f(0) = 0$. Επειδή η φ είναι μη σταθερή για κάθε $\kappa \in \{1, \dots, K\}, \varphi^{\alpha_\kappa}(0) = 0$. Επομένως, $f(0) = \prod_{i=1}^{N} 0^{a_i} 0 = 0$.

ii. Η f παίρνει πεπερασμένες τιμές για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^N$ πεπερασμένο. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^N$ πεπερασμένο η $f(x)$ φράσσεται από κάποιο πραγματικό αριθμό. Επειδή, x πεπερασμένο, δηλαδή κάθε στοιχείο του x_i του διανύσματος είναι ένας πραγματικός, θετικός αριθμός, θα ισχύει $\prod_{i=1}^{N} x_i^{a_i} = K, όπου\ K \in \mathbb{R}_+$. Η f εξ' ορισμού, είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\varphi(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}_+^N$. Άρα η $f(x) \leq KM$.

iii. Έστω $x' \geq x \Rightarrow x'_i \geq x_i \forall\ i \in \{1, \dots, N\}$. Αν $\alpha_\iota \geq 0\ \forall\ i \in \{1, \dots, N\}$ τότε $\prod_{i=1}^{N} x'^{a_i}_i \geq \prod_{i=1}^{N} x_i^{a_i}$. Επειδή η ϕ είναι αύξουσα και $\alpha_\kappa, \beta_\kappa \geq 0\ \forall\ \kappa \in \{1, \dots, K\}$, η f θα είναι αύξουσα ως γινόμενο δύο αυξουσών συναρτήσεων.

iv. Έστω $x \geq 0\ και\ f(\lambda x) > 0. Τότε$

$$\lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda x) = \lim_{\lambda \to \infty} \prod_{i=1}^{N} \lambda^{\alpha_i} x_i^{a_i} \prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}\left(\lambda x^{\beta_\kappa}\right)$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \prod_{i=1}^{N} \lambda^{\alpha_i} x_i^{a_i} M^K = M^K \lim_{\lambda \to \infty} \prod_{i=1}^{N} \lambda^{\alpha_i} x_i^{a_i}$$

$$= M^K \lim_{\lambda \to \infty} \prod_{i=1}^{N} \lambda^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{N} x_i^{a_i}$$

$$= M^K \prod_{i=1}^{N} x_i^{a_i} \lim_{\lambda \to \infty} \prod_{i=1}^{N} \lambda^{\alpha_i} = \infty.$$

Επειδή η ϕ είναι φραγμένη από κάποιο πραγματικό, θετικό αριθμό, έστω M.

v. Είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

vi. Αρκεί να δείξουμε ότι $f\big((1-\theta)x+\theta z\big) \geq \min\{f(x), f(y)\}$.

Επειδή η φ είναι οιονεί κοίλη για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$ ισχύει $\prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}(((1-\theta)x+\theta z)^{\beta_\kappa}) \geq \min\{\prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}\big(x^{\beta_\kappa}\big), \prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}(z^{\beta_\kappa})\}$.

Άρα

$$f\big((1-\theta)x+\theta z\big)$$

$$= \prod_{i=1}^{N}((1-\theta)x+\theta z)^{\alpha_i} \prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}(((1-\theta)x + \theta z)^{\beta_\kappa})$$

$$\geq \min\left\{x^{a} \prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}\big(x^{\beta_\kappa}\big), z^{a} \prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}\big(z^{\beta_\kappa}\big)\right\}$$

$$= \min\{f(x), f(z)\}.$$

vii. Έστω $u = \max\{f(x), f(y)\}, u \in \mathbb{R}_{+}^{M}, x, y \in \mathbb{R}_{+}^{N}$.

Από ομογένεια της f έχουμε ότι $f\left(\frac{u}{f(x)}x\right) \geq u, f(\frac{u}{f(y)}y) \geq u$.

Από οιονεί κοιλότητα της f, με $\theta = \frac{f(y)}{f(x)+f(y)}$ έχουμε ότι

$$f\left((1-\theta)\frac{u}{f(x)}x + \frac{u}{f(y)}y\right) \geq \min\left\{f\left(\frac{u}{f(x)}x\right), f\left(\frac{u}{f(y)}y\right)\right\}$$

$$= u \Rightarrow f\left(\frac{(x+y)}{f(x)+f(y)}\right) \geq u \ (1)$$

Από ομογένεια της f έχουμε ότι

$f\left(\frac{(x+y)}{f(x)+f(y)}\right) \leq \frac{u}{f(x)+f(y)} f(x+y)$ (2)

Από (1), (2) έχουμε ότι

$$u \leq \frac{f(x+y)u}{f(x)+f(y)} \Rightarrow f(x+y) \geq f(x)+f(y).$$

Πρόταση 1

Ο λογαριθμικός μετασχηματισμός της νευρωνικής συνάρτησης παραγωγής

$$f(x) = x^a \prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}\left(x^{\beta_\kappa}\right), a \in \mathbb{R}^N, a_\kappa, \beta_\kappa \in \mathbb{R}^K$$

θα είναι

$$lnf(x) = \ln\left(\prod_{i=1}^{N} x_i^{a_i}\right) + \ln\left[\prod_{\kappa=1}^{K} \varphi^{\alpha_\kappa}\left(x^{\beta_\kappa}\right)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{N} a_i lnx_i + \sum_{\kappa=1}^{K} \alpha_\kappa ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)$$

Πρόταση 2

Η παράγωγος της $lnf(x)$ ως προς τον λογάριθμο μιας εισροής x_n είναι

$$\frac{\partial lnf(x)}{\partial lnx_n} = a_n + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n} \beta_\kappa$$

Αντίστοιχα, για τον λογάριθμο της εισροής x_z

$$\frac{\partial lnf(x)}{\partial lnx_z} = a_z + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_z} \beta_\kappa$$

Οπότε ο ΟΛΤΥ θα είναι ο λόγος των δύο εισροών

$$O\Lambda T\Upsilon = \frac{a_n + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n} \beta_\kappa}{a_z + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_z} \beta_\kappa}$$

<u>Πρόταση 3</u>

Ο τύπος της ελαστικότητας τεχνικής υποκατάστασης μίας συνάρτησης παραγωγής χρησιμοποιώντας μερικές παραγώγους είναι ο εξής:

$$\sigma = \frac{\frac{\partial lnf(x)}{\partial lnx_n}\frac{\partial lnf(x)}{\partial lnx_z}(lnx_n\frac{\partial lnf(x)}{\partial lnx_n} + lnx_z\frac{\partial lnf(x)}{\partial lnx_z})}{lnx_n lnx_z(\frac{\partial^2 lnf(x)}{\partial {lnx_n}^2}\left(\frac{\partial lnf(x)}{\partial lnx_n}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 lnf(x)}{\partial lnx_n \partial lnx_z}\frac{\partial lnf(x)}{\partial lnx_n}\frac{\partial lnf(x)}{\partial lnx_z} + \frac{\partial^2 lnf(x)}{\partial {lnx_z}^2}\left(\frac{\partial lnf(x)}{\partial lnx_z}\right)^2}$$

Ο αριθμητής του κλάσματος, εφαρμόζοντας την νευρωνική συνάρτηση παραγωγής, θα είναι ο:

$$\begin{aligned}&\left(a_n + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n} \beta_\kappa\right)\Bigg(a_z \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_z} \beta_\kappa\Bigg)\Bigg[lnx_n\Bigg(a_n \\ &\quad + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n} \beta_\kappa\Bigg) \\ &\quad + lnx_z\left(a_z + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_z} \beta_\kappa\right)\Bigg]\end{aligned}$$

Η δεύτερη παράγωγος της $lnf(x)$ ως προς τον λογάριθμο της εισροής x_n είναι:

$$\frac{\partial^2 lnf(x)}{\partial lnx_n{}^2} = \sum_{\kappa=1}^{K} \alpha_\kappa \beta_\kappa^2 \frac{\partial^2 ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n{}^2}$$

Και η σταυροειδής παράγωγος της $lnf(x)$ ως προς τον λογάριθμο της εισροής x_n και μετά ως προς τον λογάριθμο της εισροής x_z είναι η:

$$\frac{\partial^2 lnf(x)}{\partial lnx_n \partial lnx_z} = \sum_{\kappa=1}^{K} \alpha_\kappa \beta_\kappa^2 \frac{\partial^2 ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n \partial lnx_z}$$

Οπότε, ο παρονομαστής του κλάσματος θα είναι:

$$lnx_n lnx_z \left\{ \sum_{\kappa=1}^{K} \alpha_\kappa \beta_\kappa^2 \left[\frac{\partial^2 ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n{}^2} \left(a_z + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_z} \beta_\kappa \right)^2 \right.\right.$$
$$+ \frac{\partial^2 ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_z{}^2} \left(a_n + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n} \beta_\kappa \right)^2$$
$$- 2 \frac{\partial^2 ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n \partial lnx_z} \left(a_n + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_n} \beta_\kappa \right) \left(a_z \right.$$
$$\left.\left.\left. + \sum_{\kappa=1}^{K} a_\kappa \frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa \sum_{i=1}^{N} lnx_i)}{\partial lnx_z} \beta_\kappa \right) \right] \right\}$$

Πρόταση 3

Από τον ***Ορισμό 5***, η ελαστικότητα κλίμακας ισούται με το βαθμό ομογένειας της συνάρτησης, οπότε:

$$A.K=\sum_{i=1}^{N}\frac{\frac{\partial lnf(x)}{\partial lnx_i}lnx_i}{lnf(x)}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{(a_n+\sum_{\kappa=1}^{K}a_\kappa\frac{\partial ln\varphi(\beta_\kappa\sum_{i=1}^{N}lnx_i)}{\partial lnx_n}\beta_\kappa)lnx_i}{\sum_{i=1}^{N}a_ilnx_i+\sum_{\kappa=1}^{K}\alpha_\kappa ln\varphi(\beta_\kappa\sum_{i=1}^{N}lnx_i)}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Akaike H. (1973), Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, *Proc. 2nd Inter., Symposium on Information Theory*, 267-281, Budapest.

Allen R. G. D. (1934), A Reconsideration of the Theory of Value, *Economica*, Part II 1(2), 196-219.

Antras P. (2004), Is the U.S Aggregate Production Function Cobb-Douglas? New Estimates of the Elasticity of Substitution, B.E. *Journal of Macroeconomics*, Vol.4, Issue 1, Article 4.

Arrow K. J., Chenery H. B., Minhas B. S., Solow R. M. (1961), Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, *The Review of Economics and Statistics,* Vol. 43, No. 3, 225-250.

Basu S. and Fernald J. (1997), Returns to Scale in U.S. Production: Estimates and Implication, *Journal of Political Economy*, Vol. 105, 249-283

Berndt E. (1976), Reconciling Alternative Estimates of the Elasticity of Substitution, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 58, 59-68.

Berndt E. and Christensen L. (1973), The Translog Function and the Substitution of Equipment, Structures and Labor in U.S. Manufacturing, 1929-1968, *Journal of Econometrics*, Vol. 1, 81-114.

Bruno, M. (1968), Estimation of Factor Contribution to Growth under Structural Disequilibrium, *International Economic Review*, Vol. 9, 49-62.

Chen X. (2015), Increasing Returns to Scale in U.S Manufacturing Industries: Evidence from direct and reverse regressions.

Chirinko R.S. (2008), The long and short of it, *Journal of Macroeconomics*, Vol. 30, 671-686.

Cobb C.W. and Douglas P.H. (1928), A Theory of Production, *American Economic Review,* Vol. 18, 139–165.

Cramer J. S. (2002), *The Origins of Logistic Regression, Logit Models from Economics and Other Fields*, Cambridge University Press.

Christensen L. R., Jorgenson D. W., Lau L. J. (1973), Transcendental Logarithmic Production Frontiers, *The Review of Economics and statistics,* Vol. 55, Issue 1, 28-45.

Cullison W. (1989), The US Productivity Slowdown: What the Experts Say, *Economic Review,* Issue July, 10-21.

Czekaj T. G. and Henningsen A. (2011), Using non-parametric methods in economic production analysis: An application to Polish family farms, *Paper presented at the Congress of the European Association of Agricultural Economists 2011*, Zürich, Switzerland.

David P. and van de Klundert T. (1965), Biased Efficiency Growth and Capital-Labor Substitution in the U.S., 1899-1960, *American Economic Review,* Vol. 55, 359-394.

Diewert W. E (1971), An application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function, *Journal of Political Economy,* Vol. 79, Issue 3, 481-507.

Domar E. (1946), Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment, *Econometrica,* Vol. **14** (2): 137–147

Draper N. and Smith H. (1981), *Applied Regression Analysis, 2nd Edition,* New York: John Wiley and Sons, Inc.

Efroymson M. A. (1960), *"Multiple regression analysis",* Mathematical Methods for Digital Computers, Ralston A. and Wilf, H. S., (eds.), Wiley, New York.

Ferrari S., Stengel F. R. (2005), Smooth Function Approximation Using Neural Networks, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,* Vol. 16, no. 1, 24-38.

Fletcher D., Goss E. (1993), Forecasting with Neural Networks: An Application using bankruptcy data, *Information & Management* 24, 159-167.

Fraser I. (2002), The Cobb-Douglas Production Function: An Antipodean Defence?, *Economic Issues*, Vol. 7, Part 1, 20-21.

Griffin C. R., Montgomery M. G., Rister E. M. (1987), Selecting Functional Form in Production Function Analysis, *Western Journal of Agricultural Economics,* 12(2), 216- 227.

Griliches Z. and Ringstad V. (1971), *Economies of Scale and the Form of Production Function,* North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

Halter, A.N., Carter, H.O. and Hocking, J.G. (1957), A Note on the Transcendental Production Function, *Journal of Farm Economics*, 29, 966-974.

Hamermesh D. (1993), *Labor Demand*, Princeton: Princeton University Press.

Harrod, R. F. (1939), An Essay in Dynamic Theory. *The Economic Journal*, Vol. (193), 14–33.

Herbrich R., Keilbach M., Graespel T., Bollmann S. P., Obermayer K. (1999), Neural Networks in Economics: Background, Applications and New Developments*, Computational Techniques for Modelling Learning in Economics,* 169-196.

Hicks J.R. (1932), *The Theory of Wages*, London: Macmillan.

Hocking, R. R. (1976), The Analysis and Selection of Variables in Linear Regression, *Biometrics,* Vol. 32, No. 1, 1-49.

Hornik K. (1991), Approximation capabilities of multilayer feedforward networks, *Neural Networks* 4(2), 251- 257.

Hornik K., Stinchcombe M. and White H. (1989), Multilayer feedforward networks are universal approximators, *Neural Networks* 2(5), 359- 366.

Huang W., Lai K. K., Nakamori Y., Wang S., Yu L. (2007), Neural Networks in Finance & Economics Forecasting, *International Journal of Information Technology & Decision Making*, Vol. 6, No. 1, 113-140.

Huang Z., Chen H., Hsu C.-J., Chen W.-H., Soushan W. (2004), Credit Rating Analysis with support vector machines and Neural Networks: A Market Comparative Study, *Decision Support Systems 37*, 543-558.

Irmen A. (2010), *Steady-State Growth and the elasticity of substitution*, Discussion Paper Series, Department of Economics, University of Heidelberg.

Jordan I. M. (1995), Why the Logistic Function? A tutorial discussion on probabilities and neural networks, *Computational Cognitive Science Technical Report 9503*.

Kaastra I., Boyd M. (1996), Designing a Neural Network for forecasting financial time series, *Neurocomputing* 10, 215-236.

Kimoto T., Asakawa K., Yoda M., Taleoka M. (1990), Stock Market Prediction System with Modular Neural Networks, *IJCNN International Joint Conference on Neural Networks*, Vol. 1, 1-6.

Klump R., McAdam P. and Willman A. (2011), The Normalized CES Production Function: Theory and Empirics, *Working Paper Series, European Central Bank,* No 1294.

Kuan C. M., Liu T. (1995), Forecasting Exchange Rates Using Feedforward and Recurrent Neural Networks, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.10, 347-364.

Lagaris I. E., Likas A., Fotiadis D. I. (1998), Artificial Neural Networks for solving ordinary and partial differential equations, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,* Vol. 9 no. 5, 987-995.

Laitner J. and Stolyarov D. (2003), Aggregate Returns to Scale and Embodied Technical Change: Theory and Measurement Using Stock Market Data.

Leung S. F., Yu S. (1996), On the choice between sample selection and two-part models, *Journal of Econometrics* 72, 197-229.

Lu Y., Fletcher L. B. (1968), A Generalization of the CES Production Function, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 1, No.4, 449-452.

Lucas R. (1969), Labor-Capital Substitution in U.S Manufacturing, In the Taxation of Income and Capital, Harberger A. and Bailey M. (ed.), *Washington D.C: The Brookings Institution*, 223-274.

Mallows C.L. (1973), Some comments on C_p, *Technometrics* 15:4, 661-675.

Mark Blaug (1985), *Economic Theory in Retrospect*, Fourth edition, Cambridge University Press.

Mas- Colell A. and Whinston M.D., J. Green (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.

McFadden D. (1978), Estimation Techniques for the elasticity of substitution and other production parameters, *Production Economics: A dual approach to theory and applications*, Vol. II*, 73-124,* North-Holland Publishing Company.

McFadden D. (1962), *Factor Substitution in the Economic Analysis of Production*, Ph.D. Dissertation, Univ. of Minnesota.

McFadden D. (1963), Constant Elasticity of Substitution Production Function, *Review of Economic Studies*, Vol. 30, 73-83.

Michaelides G. P., Tsionas G. E., Vouldis T. A., Kostantakis N. K. (2015), Global approximation to arbitrary cost functions: A Bayesian approach with application to US banking, *European Journal of Operational Research,* Vol. 241, Issue 1, 148-160.

Mitscherlich E.A. (1909), Das Gesetz des Minimums und das Gesetz des adnehmenden Bodenertrages, Landwirtsch Jahrb, Vol. 38, 537-552.

Oberfield E. and Raval D. (2014), Micro Data & Macro Technology, *NBER Working Papers 20452,* Issue September.

Peng H., Long F. & Ding C. (2005), Feature selection based on mutual information criteria of max-dependency, max-relevance, and min-redundancy, Pattern Analysis and Machine Intelligence, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 27(8): 1226-1238.

Pereira C. (2003), *Empirical Essays on the Elasticity of Substitution, Technical Change and Economic Growth*, Ph. D dissertation, North Carolina State University.

Press S. J. and Wilson S. (1978), Choosing Between Logistic Regression and Discriminant Analysis, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 73, No. 364, 699-705.

Rudin W. (1976), *Principles of Mathematical Analysis (3rd Edition),* United States: McGraw and Hill.

Samuelson, P.A. (1962), Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function, *Review of Economic Studies*, Vol. 29, 193-206.

SAS Institute Inc. (1989) *SAS/STAT User's Guide, Version 6, Fourth Edition, Volume 2,* Cary, NC: SAS Institute Inc.

Schwarz G. (1978), Estimating the Dimension of a Model, *Annals of Statistics*, Vol. 6, No. 2, 461-464.

Shephard R. W. (1970), Proof of the Law of Diminishing Returns, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 30, 7-34.

Solow, R.M. (1957), Technical Change and the Aggregate Production Function, *The Review of Economics and Statistics*, 39 (3), 312-320.

Spillman W.J. (1923), Application of the Law of Diminishing Returns to some Fertilizer and Feed Data, *Journal of Farm Economics 5*, 36-52.

Suzuki K. (2011), *ANN-Methodological Advances & Biomedical Applications,* InTech.

Swanson N., White H. (1995), A Model Selection Approach to Real-time Macroeconomic Forecasting Using Artificial Neural Networks, Discussion Paper, Department of Economics, Pennsylvania State University.

Thünen J.H. von (1930), *Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirthschaft und Nationalökonomie,* 3 volumes: Fischer, Jena, Germany.

Tsionas G. E., Michaelides G. P., Vouldis T. A. (2009), Global Approximations to Cost and Production Functions using Artificial Neural Networks, *International Journal of Computational Intelligence Systems,* Vol. 2, No. 2, 132-139.

Uzawa H. (1962), Production Functions with Constant Elasticities of Substitution, *Review of Economic Studies*, Vol. 29, 291-299.

Varian R. H. (1992), *Microeconomic Analysis (3rd Edition),* W.W Norton & Company Inc.

Vellido A., Lisboa P. J. G. and Vaughan J. (1999), Neural Networks in business: a survey of application (1992-1998), *Experts Systems with Application* 17, 51-70.

Wicksteed P. H. (1894), *An Essay on the Co-ordination of the Laws of Distribution*, Macmillan & Co., London.

Wolfe P. (1969), Convergence conditions for ascent methods, *SIAM Review,* Vol. 11, 226–235.

Wolfe P. (1971), Convergence conditions for ascent methods II: Some corrections, *SIAM Review*, Vol. 13, 185–188.

Zellner A. and Revankar N.S. (1969), Generalized Production Functions, *The Review of Economic Studies*, Vol. 36(2), 241-250.