



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΓΙΑ ΜΗ
ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΘΕΟΔΟΣΗΣ-ΠΑΛΙΜΕΡΗΣ ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Ι. ΤΣΙΝΙΑΣ

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2017



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΓΙΑ ΜΗ
ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Διδακτορική Διατριβή

του

ΘΕΟΔΟΣΗ-ΠΑΛΙΜΕΡΗ ΔΙΟΝΥΣΙΟΥ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΤΣΙΝΙΑΣ (ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ)
ΙΑΣΩΝ ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΧΡΥΣΑΦΙΝΟΣ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Ι. ΤΣΙΝΙΑΣ
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ι. ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Κ. ΧΡΥΣΑΦΙΝΟΣ
Αναπ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Α. ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Σ. ΚΩΤΣΙΟΣ
Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Δ. ΓΚΙΝΤΙΔΗΣ
Αναπ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Β. ΚΟΚΚΙΝΗΣ
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2017

Διονύσιος Θεοδόσης-Παλιμέρης

©- 2017 All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρωτίστως, θα ήθελα να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ιωάννη Τσινιά για την ευκαιρία που μου έδωσε να μελετήσω το συγκεκριμένο θέμα, για την επιστημονική καθοδήγηση, την ενθάρρυνση και τη συμπαράσταση που μου παρείχε καθ'όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διδακτορικής διατριβής. Τον ευχαριστώ ακόμα περισσότερο για την ανιδιοτελή υποστήριξη και τη βοήθεια που μου προσέφερε όλα αυτά τα χρόνια σε όλους τους τομείς.

Το ίδιο θερμά θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής, τους καθηγητές κ. Ι. Καραφύλλη και Κ. Χρυσάφινο για τα εποικοδομητικά σχόλια, για τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις για την ολοκλήρωση της διατριβής. Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων προς τον κ. Καραφύλλη για την απaráμιλλη ικανότητά του και προθυμία του για την εκτενή ανάλυση επιστημονικών και ερευνητικών θεμάτων, που αποτέλεσαν και αποτελούν πηγή έμπνευσης και κινήτρων. Επιπλέον, θερμές ευχαριστίες οφείλω προς τους καθηγητές κ. Α. Χαραλαμπίοπουλο, Σ. Κώτσιο, Δ. Γκιντίδη και Β. Κοκκίνη που δέχτηκαν με προθυμία να συμμετάσχουν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή του διδακτορικού μου.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διδάκτορα Δημήτρη Μπόσκο με τον οποίο είχα την τύχη να συνεργαστώ. Τον ευχαριστώ για την αμέριστη βοήθεια και πολύτιμη συμπαράσταση που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής μου.

Θα ήθελα να εκφράσω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου Παναγιώτη και Γεωργία που μου έχουν προσφέρει τα μέγιστα σε όλους τους τομείς, στις αδελφές μου Μαρία και Δήμητρα και στις φίλες μου Ανδριάννα Βασιλείου και Φλώρα Κορακή για την ηθική συμπαράσταση, συνεχή ενθάρρυνση και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

*Διονύσης Θεοδόσης-Παλιμέρης
Αθήνα, Μάρτιος 2017*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Προβλήματα Σχεδίασης για Μη Γραμμικά Συστήματα

Στην παρούσα διατριβή μελετώνται τα εξής δύο προβλήματα: (i) Το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητών για μη γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, και (ii) το Πρόβλημα Σταθεροποίησης αυτόνομων μη γραμμικών συστημάτων μέσω ανάδρασης με δειγματοληψία (sampled-data feedback).

Αρχικά, εδραιώνονται ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητή για μια μεγάλη κλάση μη γραμμικών τριγωνικών συστημάτων ελέγχου. Η κατάσταση του συστήματος εκτιμάται μέσω ενός Luenberger τύπου παρατηρητή του οποίου τα δυναμικά είναι εν γένει χρονικά μεταβαλλόμενα και μη αιτιατά. Η απόδειξη των αντίστοιχων αποτελεσμάτων στηρίζεται σε μια Lyapunov τύπου επαγωγική διαδικασία που επεκτείνει παρόμοιες μεθοδολογίες από τη διεθνή βιβλιογραφία για την επιλυσιμότητα του ίδιου προβλήματος. Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ότι, υπό ασθενέστερες συνθήκες, το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή για τριγωνικά συστήματα είναι επιλύσιμο μέσω μιας διακοπτόμενης ακολουθίας παρατηρητών με χρονική υστέρηση.

Στο δεύτερο μέρος της διατριβής, εδραιώνονται Lyapunov χαρακτηρισμοί για τη δυνατότητα ημι-ολικής σταθεροποίησης μη γραμμικών αυτόνομων συστημάτων μέσω χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης με δειγματοληψία. Στη συνέχεια, αυτός ο χαρακτηρισμός χρησιμοποιείται προκειμένου να εξαχθούν ικανές Lie αλγεβρικές συνθήκες για τη δυνατότητα σταθεροποίησης μη γραμμικών συστημάτων, γραμμικών ως προς τον έλεγχο, μέσω ανάδρασης με δειγματοληψία. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα αποτελεί επέκταση του γνωστού Θεωρήματος Artstein-Sontag για σταθεροποίηση μέσω σχεδόν λείας ανάδρασης.

Λέξεις Κλειδιά: Παρατηρητές, τριγωνικά συστήματα ελέγχου, διακοπτόμενα δυναμικά, μη γραμμικά συστήματα, γραμμικά ως προς τον έλεγχο συστήματα, σταθεροποίηση, δειγματοληψία, Lie άλγεβρα, χρονικά μεταβαλλόμενη ανάδραση.

ABSTRACT

Design Problems for Nonlinear Systems

In this Dissertation the following problems are addressed: (i) the Observer Design Problem for nonlinear time-varying systems; and (ii) the Problem of Stabilizing an autonomous nonlinear system by means of sampled-data feedback.

Firstly, sufficient conditions are established for the solvability of the Observer Design Problem for a wide class of triangular nonlinear control systems. The state estimation is exhibited by means of a Luenberger-type observer whose dynamics are in general time-varying and noncausal. The proof of the main results is based on a Lyapunov-like forwarding procedure which extends relative methodologies employed in the literature for the solvability of the same problem. Then, it is proved that, under weaker hypotheses, the observer design problem for triangular systems is solvable by means of a switching sequence of delayed observers.

In the second part of this dissertation, a Lyapunov characterization is established for the possibility of semi-global asymptotic stabilization of general nonlinear autonomous systems by means of a time-varying sampled-data feedback. This result is then exploited in order to derive a Lie algebraic sufficient condition for sampled-data feedback semi-global stabilization of affine in the control nonlinear systems with non-zero drift term. The corresponding result constitutes an extension of the well-known Artstein-Sontag Theorem on stabilization by means of an almost smooth feedback.

Keywords: Observers, triangular control systems, switching dynamics, nonlinear systems, affine in the control systems, stabilization, sampled-data, Lie algebra, time-varying feedback.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Μαθηματική Θεωρία Ελέγχου είναι η περιοχή των μαθηματικών που ασχολείται με τα προβλήματα του σχεδιασμού και της ανάλυσης συστημάτων ελέγχου. Ο στόχος είναι ο επηρεασμός της συμπεριφοράς ενός δοθέντος συστήματος μέσω κατάλληλου ελεγκτή ούτως ώστε να επιτευχθεί ένα επιθυμητό αποτέλεσμα.

Στην παρούσα διατριβή, τα αντικείμενα που μελετώνται αποτελούν κεντρικά προβλήματα της περιοχής. Συγκεκριμένα μελετώνται:

1. η επιλυσιμότητα του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή,
2. το πρόβλημα σταθεροποίησης με ανάδραση για μη γραμμικά συστήματα.

Ο παρατηρητής είναι ένα σύστημα, το οποίο εκτιμά την κατάσταση ενός δοθέντος συστήματος με διαθέσιμες την έξοδο και την είσοδο του συστήματος αναφοράς. Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Luenberger, [54] για γραμμικά συστήματα και οι γενικεύσεις του προβλήματος για την μη γραμμική περίπτωση έχει προσελκύσει ένα μεγάλο πλήθος ερευνητών τις τελευταίες δεκαετίες με σημαντικά αποτελέσματα (βλέπε πχ [1]-[17], [19]-[33], [35]-[38], [41]-[59], [61], [63]-[66], [69], [71], [73], [74], [77], [78]). Σε αντίθεση με την γραμμική περίπτωση, το πρόβλημα του παρατηρητή για μη γραμμικά συστήματα καθίσταται δυσεπίλυτο και αποτελεί κεντρικό πρόβλημα στη Θεωρία Ελέγχου. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει δοθεί στη σχεδίαση παρατηρητή για συστήματα τριγωνικής δομής (βλέπε πχ [2], [6], [7], [9], [12], [14], [16]-[17], [21]-[23], [25], [26], [28], [29], [33], [46], [52], [57], [61], [63], [64], [69], [77]). Έχει αποδειχθεί ότι για μια μεγάλη κλάση μη γραμμικών συστημάτων, υπάρχει μετασχηματισμός ούτως ώστε ένα γενικό μη γραμμικό σύστημα, να αποκτά στις νέες συντεταγμένες τριγωνική μορφή (βλέπε [24], [25], [26]). Αναφέρονται επίσης οι εργασίες [50], [51] και [58] που σχετίζονται με την επίλυση του προβλήματος της σταθεροποίησης με ανάδραση εξόδου, μέσω χρήσης παρατηρητή και δυναμικής ανάδρασης.

Ένα από τα προβλήματα αιχμής στην Θεωρία Ελέγχου είναι η εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών για τη δυνατότητα σταθεροποίησης με ανάδραση με την υπόθεση της ελεγχιμότητας (βλέπε πχ [81], [82], [83], [85], [86], [92], [94], [100], [117], [124], [120], [121], [130]). Είναι γνωστό ότι στη γραμμική περίπτωση η δυνατότητα σταθεροποίησης είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική ελεγχιμότητα του συστήματος, [99]. Αντίθετα, στη μη γραμμική περίπτωση η ελεγχιμότητα δεν εξασφαλίζει εν γένει σταθεροποιησιμότητα

με συνεχείς στατικούς νόμους ανάδρασης, [86]. Υπάρχει μια εκτενέστατη βιβλιογραφία με σημαντικά αποτελέσματα που εξασφαλίζουν σταθεροποιησιμότητα με χρήση χρονικώς μεταβαλλόμενης ανάδρασης (βλέπε πχ [92]-[93], [107], [116], [118]) καθώς και με χρήση νόμων ανάδρασης με δειγματοληψία (sampling/ sample and hold) με την υπόθεση της ασυμπτωτικής ελεγκσιμότητας, (βλέπε πχ [79], [80], [89], [90], [96]-[98], [102]-[106], [109]-[111], [113], [114], [128], [131], [132]). Συγκεκριμένα, το πρόβλημα σταθεροποίησης με sampled-data ανάδραση, δηλαδή με χρήση ανάδρασης μέσω δειγματοληψίας έχει λάβει ιδιαίτερη προσοχή τα τελευταία χρόνια λόγω της ραγδαίας ανάπτυξης των ηλεκτρονικών συστημάτων. Ένας ελεγκτής ανάδρασης στις μέρες μας συνήθως εφαρμόζεται μέσω ψηφιακών συσκευών. Οι συσκευές αυτές δεν είναι σε θέση να υπολογίσουν το νόμο ανάδρασης σε συνεχή χρόνο, αλλά μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές.

Οι στόχοι της διδακτορικής διατριβής, είναι:

- η εξαγωγή ικανών συνθηκών για τη σχεδίαση παρατηρητών για μια ευρεία κλάση μη γραμμικών συστημάτων σε τριγωνική μορφή
- η εύρεση ικανών Lie αλγεβρικών συνθηκών για τη δυνατότητα σταθεροποίησης μέσω ανάδρασης με δειγματοληψία, γραμμικών ως προς τον έλεγχο-μη γραμμικών συστημάτων.

Ειδικότερα, για το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή, μελετάται η κατασκευή μη-αιτιατού Luenberger-τύπου παρατηρητή για μια μεγάλη κατηγορία μη γραμμικών χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων ελέγχου τριγωνικής μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, u) + a_1(t, x_1, u)x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_{n-1}, u) + a_{n-1}(t, x_1, u)x_n, \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, u), \\ y &= x_1 \in \mathbb{R}, \quad x := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{0.1\alpha}$$

$$\tag{0.1\beta}$$

όπου $u(\cdot)$ είναι η είσοδος και $y(\cdot)$ η έξοδος του συστήματος, υπό τις γενικές υποθέσεις

- (A) Για κάθε αρχικό χρόνο $t_0 \geq 0$, κατάσταση $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ και είσοδο u , η αντίστοιχη λύση $x(\cdot, t_0, x_0; u)$ του (0.1α) ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$.
- (B) Οι απεικονίσεις $a_i(\cdot, y(\cdot), u(\cdot))$, $i = 1, \dots, n - 1$ μπορεί να μηδενίζονται για κάποιο ζευγάρι (u, y) σε υποδιαστήματα του $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Τα πρώτα αποτελέσματα από την παραπάνω έρευνα δημοσιεύθηκαν στο επιστημονικό περιοδικό IEEE Transactions on Automatic Control σε εργασία με τίτλο "Luenberger-type observers for a class of nonlinear triangular control systems" με συν-συγγραφέα τον καθηγητή κ. Ι. Τσινιά, [78]. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι αν ισχύουν οι (A) και (B) καθώς

και κάποιος περιορισμός στα δυναμικά του συστήματος, τότε το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή είναι επιλύσιμο για το (0.1) μέσω ενός μη-αιτιατού Luenberger-τύπου παρατηρητή. Η αναγκαιότητα χρήσης ενός μη-αιτιατού παρατηρητή οφείλεται στην υπόθεση (B). Συγκεκριμένα, εφόσον οι απεικονίσεις $a_i(\cdot, y, u)$ εξαρτώνται από τα (u, y) , ενδέχεται να μηδενίζονται σε (άγνωστα) υποδιαστήματα του $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Επομένως, για τη σχεδίαση του παρατηρητή απαιτείται επαρκής γνώση των μελλοντικών τιμών των (u, y) προκειμένου να επιτευχθεί η εκτίμηση. Στη συνέχεια, μελετάται το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή για το σύστημα (0.1) με ασθενέστερους περιορισμούς στα δυναμικά του συστήματος. Αποδεικνύεται ότι οι υποθέσεις (A) και (B) καθώς και μία επιπρόσθετη συνθήκη για τις εισόδους u , εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας διακοπτόμενης (switching) ακολουθίας αιτιατών παρατηρητών που καθιστά δυνατή την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (0.1) με χρονική υστέρηση. Τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας με τίτλο "Observer design for triangular systems under weak observability assumptions" έχουν κατατεθεί προς κρίση σε επιστημονικό περιοδικό της αντίστοιχης ερευνητικής περιοχής.

Στο δεύτερο μέρος της διατριβής, μελετώνται Lyapunov χαρακτηρισμοί ούτως ώστε ένα γενικό μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ f(0, 0) &= 0\end{aligned}\tag{0.2}$$

να είναι Ημι-Ολικά Ασυμπτωτικά Σταθεροποιήσιμο μέσω χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης με δειγματοληψία. Με χρήση αυτών των Lyapunov χαρακτηρισμών, διερευνάται η εξαγωγή ικανών Lie αλγεβρικών συνθηκών για τη δυνατότητα σταθεροποίησης μέσω ανάδρασης δειγματοληψία για μη γραμμικά συστήματα, γραμμικά ως προς τον έλεγχο:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + ug(x) \\ f(0) &= 0\end{aligned}\tag{0.3}$$

Οι αντίστοιχες συνθήκες αποτελούν επέκταση της γνωστής "Artstein-Sontag" ικανής συνθήκης για ασυμπτωτική σταθεροποίηση συστημάτων (0.3) μέσω σχεδόν λείας ανάδρασης και περιλαμβάνουν μια συγκεκριμένη Lie υπο-άλγεβρα των f και g . Τα αντίστοιχα αποτελέσματα δημοσιεύθηκαν στο επιστημονικό περιοδικό IEEE Transactions on Automatic Control σε εργασία με τίτλο "Sufficient Lie algebraic conditions for sampled-data feedback stabilizability of affine in the control nonlinear systems" με συν-συγγραφέα τον καθηγητή κ. Ι. Τσινιά, [133]. Τέλος, επεκτάσεις της παραπάνω εργασίας, με έμφαση στα τρισδιάστατα συστήματα της μορφής (0.3) παρουσιάστηκαν στο διεθνές συνέδριο Conference on Decision and Control (CDC-2015), [129].

Η διατριβή έχει την ακόλουθη δομή. Στο Μέρος I δίνονται τα αποτελέσματα που αφορούν το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή. Συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 1 δίνονται οι απαραίτητοι συμβολισμοί και γίνεται μια ιστορική αναδρομή στο εν λόγω πρόβλημα. Παρέχονται πρώτα, οι ορισμοί της παρατηρησιμότητας και της ανιχνευσιμότητας καθώς και

κάποια από τα γνωστά αποτελέσματα για τη σχεδίαση παρατηρητών για αυτόνομα γραμμικά συστήματα. Στη συνέχεια, δίνονται κάποιοι από τους ορισμούς της παρατηρησιμότητας για τη μη γραμμική περίπτωση και παρουσιάζονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την εύρεση μετασχηματισμού συντεταγμένων ούτως ώστε ένα γενικό μη γραμμικό σύστημα να αποκτά νέα ειδικότερη (τριγωνική) μορφή. Τέλος, παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα από τη διεθνή βιβλιογραφία για την επίλυση του Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητή με έμφαση στα συστήματα τριγωνικής μορφής (0.1).

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας [78]. Πρώτα, δίνεται ο ορισμός του Μη-Αιτιατού Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητή καθώς και οι υποθέσεις και το κεντρικό αποτέλεσμα που αφορά συστήματα της μορφής (0.1). Ακολούθως, δίνεται η απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος και τέλος, παρέχεται ένα αριθμητικό παράδειγμα που επιδεικνύει τη συμπεριφορά ενός μη-αιτιατού παρατηρητή για ένα τρισδιάστατο μη γραμμικό σύστημα της μορφής (0.1).

Στο Κεφάλαιο 3, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας [71]. Αρχικά, δίνεται ο ορισμός της επίλυσης του Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητή μέσω μιας διακοπτόμενης ακολουθίας παρατηρητών με χρονική υστέρηση και στη συνέχεια παρέχονται ικανές συνθήκες για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος για χρονικώς μεταβαλλόμενα μη γραμμικά συστήματα συμπεριλαμβανομένων των τριγωνικών. Στη συνέχεια γίνεται σύγκριση των εξαχθέντων αποτελεσμάτων με αυτά των εργασιών [16] και [78], και στην τελευταία ενότητα παρέχεται η απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος που αφορά τριγωνικά συστήματα.

Το Μέρος II της διατριβής αφορά το πρόβλημα σταθεροποίησης μη γραμμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζονται αρχικά, οι ορισμοί της ελεγκτιμότητας και της σταθεροποίησης μέσω συνεχούς στατικής ανάδρασης για γενικά μη γραμμικά συστήματα (0.2). Στη συνέχεια, δίνονται ο ορισμός της Συνάρτησης Ελέγχου Lyapunov και η γνωστή συνθήκη Artstein-Sontag για συστήματα της μορφής (0.3). Τέλος, παραθέτονται κάποια αποτελέσματα από τη διεθνή βιβλιογραφία για τη σταθεροποίηση συστημάτων μέσω χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης καθώς και μέσω ασυνεχούς ανάδρασης.

Η διατριβή ολοκληρώνεται με το Κεφάλαιο 5 όπου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των εργασιών [129] και [133]. Αρχικά δίνεται ο ορισμός της Ημι-Ολικής Σταθεροποίησης μέσω χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης με δειγματοληψία καθώς και ο Lyapunov χαρακτηρισμός της για γενικά συστήματα (0.2). Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το κεντρικό αποτέλεσμα που αφορά Lie αλγεβρικές συνθήκες για τη δυνατότητα σταθεροποίησης συστημάτων (0.3) και εφαρμογές αυτού του αποτελέσματος για τρισδιάστατα γραμμικά ως προς τον έλεγχο συστήματα. Στην τρίτη ενότητα δίνονται οι αποδείξεις των παραπάνω αποτελεσμάτων και τέλος παρουσιάζονται κάποια ενδεικτικά παραδείγματα που επιδεικνύουν την εφαρμογή των Lie αλγεβρικών συνθηκών που εξήχθησαν.

Περιεχόμενα

Πρόλογος vii

I	Σχεδίαση Παρατηρητών για Μη Γραμμικά Συστήματα	
1	Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή	3
1.1	Παρατηρητές για Γραμμικά Αυτόνομα Συστήματα	6
1.2	Παρατηρητές για Μη Γραμμικά Συστήματα	11
1.2.1	Παρατηρησιμότητα για Μη Γραμμικά Συστήματα	11
1.2.2	Σχεδίαση παρατηρητών για μη γραμμικά συστήματα	17
2	Luenberger-Τύπου Παρατηρητές για μια Κλάση Μη-Γραμμικών Τριγωνικών Συστημάτων	29
2.1	Εισαγωγή.....	30
2.2	Ορισμοί	31
2.3	Απόδειξη Κεντρικού Αποτελέσματος	38
2.4	Ένα Αριθμητικό Παράδειγμα.....	56
3	Σχεδίαση Διακοπτόμενης Ακολουθίας Παρατηρητών για Τριγωνικά Συστήματα	69
3.1	Εισαγωγή.....	70
3.1.1	Ορισμοί και Κεντρικό Αποτέλεσμα	70
3.1.2	Σύγκριση με Παλαιότερα Αποτελέσματα	76
3.2	Προκαταρκτικά Αποτελέσματα	76
3.3	Απόδειξη της Πρότασης 3.1.1.	89
Παράρτημα Α	Αποδείξεις Ισχυρισμών της Ενότητας 2.4	105
Παράρτημα Β	Απόδειξη Λήμματος 3.2.1	109
Παράρτημα Γ	Γενική Περίπτωση στην Πρόταση 3.1.1	113


II	Σταθεροποίηση Μη Γραμμικών Συστημάτων Ελέγχου	
4	Το Πρόβλημα Σταθεροποίησης Μη Γραμμικών Συστημάτων	117
4.1	Ελεγκσιμότητα και Σταθεροποίηση	118
4.2	Συνάρτηση Ελέγχου Lyapunov	122
4.3	Χρονικά Μεταβαλλόμενοι και Ασυνεχείς Νόμοι Ανάδρασης.....	125
5	Ικανές Lie Αλγεβρικές Συνθήκες για Σταθεροποίηση Μη Γραμμικών Συστημάτων	135
5.1	Εισαγωγή.....	136
5.2	Ορισμοί	136
5.3	Αποδείξεις.....	141
5.4	Περισσότερα Παραδείγματα.....	155
	Παράρτημα Δ	159
	Βιβλιογραφία Μέρους I	163
	Βιβλιογραφία Μέρους II	169
	Ευρετήριο	175

Κατάλογος σχημάτων

1.1	Διάγραμμα Συστήματος-Παρατηρητή.	6
1.2	Προσομοίωση για το σύστημα (1.11).	11
1.3	Μη διαχωρίσιμες καταστάσεις.	12
1.4	Παρατηρησιμότητα.	12
1.5	\mathcal{N} -μη διαχωρίσιμες καταστάσεις.	13
1.6	Τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο σύστημα.	13
2.1	Περιπτώσεις στην κατασκευή.	46
2.2	Γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων u (πάνω) και C, ϕ (κάτω).	58
2.3	Αναπαράσταση των συνόλων $K(t)$ και $\bar{K}(t)$	62
2.4	Αναπαράσταση των συνόλων $K(t)$ και $\bar{K}(t)$ για την τρισδιάστατη περίπτωση (αριστερά) και η τομή στις δύο διαστάσεις (δεξιά).	66
2.5	Προσομοίωση στο διάστημα $[0, 6\pi]$. Η διακεκομμένες γραμμές αντιπροσωπεύουν την εκτίμηση του παρατηρητή ενώ οι συνεχείς την πραγματική κατάσταση του συστήματος.	68
2.6	Εκτίμηση σφάλματος μεταξύ της τροχιάς $x(\cdot)$ του συστήματος και της τροχιάς $z(\cdot)$ του παρατηρητή.	68
3.1	Διακοπτόμενη Ακολουθία Παρατηρητών.	84
3.2	Αναπαράσταση των χρονικών στιγμών T_ν και των διαστημάτων I_ν και J_ν	92
4.1	Sample-and-hold implementation.	129

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

CLF	Control Lyapunov Function
CP	Compactness Property
DODP	Delayed Observer Design Problem
DSODP	Delayed Switching Observer Design Problem
GAC	Global Asymptotic Controllability
GAS	Global Asymptotic Stabilization
IDODP	Infinitesimally Delayed Observer Design Problem
IDSODP	Infinitesimally Delayed Switching Observer Design Problem
NCODP	Noncausal Observer Design Problem
ODP	Observer Design Problem
SDF-SGAS	Semi-Global Asymptotic Stabilization by Sampled-Data Feedback
SDF-WGAS	Weak Global Asymptotic Stabilization by Sampled-Data Feedback
STLC	Small Time Local Controllability



Σχεδίαση Παρατηρητών για Μη Γραμμικά Συστήματα

1	Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή	3
2	Luenberger-Τύπου Παρατηρητές για μια Κλάση Μη-Γραμμικών Τριγωνικών Συστημάτων	29
3	Σχεδίαση Διακοπτόμενης Ακολουθίας Παρατηρητών για Τριγωνικά Συστήματα	69
	Παράρτημα Α Αποδείξεις Ισχυρισμών της Ενότητας 2.4	105
	Παράρτημα Β Απόδειξη Λήμματος 3.2.1	109
	Παράρτημα Γ Γενική Περίπτωση στην Πρόταση 3.1.1	113

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε την έννοια των παρατηρητών και παραθέτουμε κάποιους κλασικούς ορισμούς και αποτελέσματα για τη σχεδίαση τους. Συγκεκριμένα, στην Ενότητα 1.1 γίνεται εισαγωγή στις έννοιες της παρατηρησιμότητας και της ανιχνευσιμότητας καθώς και στη σχεδίαση παρατηρητών για γραμμικά συστήματα. Στην Ενότητα 1.2 παρουσιάζονται εν συντομία διάφορα αποτελέσματα και μεθοδολογίες από τη διεθνή βιβλιογραφία για την επίλυση του Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητών για μη γραμμικά και τριγωνικά συστήματα.

Περιεχόμενα Κεφαλαίου

1.1 Παρατηρητές για Γραμμικά Αυτόνομα Συστήματα	6
1.2 Παρατηρητές για Μη Γραμμικά Συστήματα	11
1.2.1 Παρατηρησιμότητα για Μη Γραμμικά Συστήματα	11
1.2.2 Σχεδίαση παρατηρητών για μη γραμμικά συστήματα	17

1.0 Συμβολισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μια ιστορική αναδρομή στο Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή με έμφαση σε αποτελέσματα και μεθοδολογίες που αφορούν μη γραμμικά συστήματα.

Συμβολισμός και Ορισμοί.

- Για δοσμένο διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με x' το ανάστροφό του και με $|x|$ την ευκλείδεια νόρμα του.
- Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$|A| := \max\{|Ax| : x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\},$$

για την επαγόμενη νόρμα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $|A|_F$ για τη Frobenius νόρμα, δηλαδή

$$|A|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Συμβολίζουμε με $\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ το διαγώνιο πίνακα με στοιχεία $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και με $I_{n \times n}$ τον $n \times n$ μοναδιαίο πίνακα.

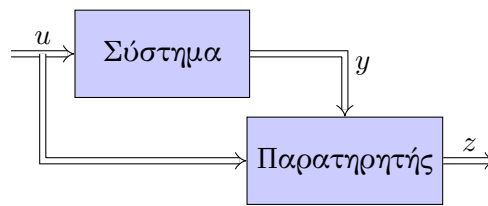
- Με \mathcal{N} συμβολίζουμε την κλάση των συνεχών και γνησίως αυξουσών συναρτήσεων $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- Με \mathcal{K} συμβολίζουμε την κλάση των συναρτήσεων $\phi(\cdot)$ που ανήκουν στην κλάση \mathcal{N} και ικανοποιούν την ιδιότητα $\phi(0) = 0$.
- Με \mathcal{K}_∞ συμβολίζουμε την κλάση των συναρτήσεων $\phi(\cdot)$ που ανήκουν στην κλάση \mathcal{K} και ικανοποιούν την ιδιότητα $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty$.
- Με \mathcal{L} συμβολίζουμε την κλάση των συναρτήσεων $\phi(\cdot)$ που ικανοποιούν την ιδιότητα $\phi(s) \rightarrow 0$ καθώς $s \rightarrow 0$.
- Με clA συμβολίζουμε την κλειστότητα του συνόλου $A \subset \mathbb{R}$ και με ∂A το σύνορο του.
- Με \mathbb{N}_0 συμβολίζουμε τους φυσικούς αριθμούς συμπεριλαμβανομένου του μηδενός, δηλαδή $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Για δοσμένο $R > 0$, συμβολίζουμε με B_R την κλειστή μπάλα ακτίνας $R > 0$, με κέντρο το $0 \in \mathbb{R}^n$.

-
- Για δοσμένο $t_0 \geq 0$, $\tau > 0$, ένα μη κενό σύνολο S και μια συνάρτηση $g : [t_0, \infty) \rightarrow S$ ορίζουμε την τ -χρονική μετατόπιση της $g_\tau : [t_0 + \tau, \infty) \rightarrow S$ ως $g_\tau(t) := g(t - \tau)$, $t \in [t_0 + \tau, \infty)$.

Ιδιότητα: Compactness Property (CP)

Θεωρούμε ένα ζεύγος μετρικών χώρων X_1, X_2 και μια πλειονότιμη απεικόνιση $X_1 \ni x \rightarrow Q(x) \subset X_2$. Λέμε ότι η $Q(\cdot)$ ικανοποιεί την ιδιότητα CP αν:

Για κάθε ακολουθία $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset X_1$ και $(q_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset X_2$ με $x_\nu \rightarrow x \in X_1$ και $q_\nu \in Q(x_\nu)$, υπάρχει υπακολουθία $(x_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ και $q \in Q(x)$ με $q_{\nu_k} \rightarrow q$.



Σχήμα 1.1: Διάγραμμα Συστήματος-Παρατηρητή.

1.1

Παρατηρητές για Γραμμικά Αυτόνομα Συστήματα

Η δυνατότητα σχεδίασης παρατηρητή για ένα δοθέν δυναμικό σύστημα αποτελεί ένα από τα κεντρικά και δυσεπίλυτα προβλήματα στη θεωρία συστημάτων. Για ένα δοσμένο δυναμικό σύστημα, ένας **παρατηρητής (observer)** είναι ένα σύστημα το οποίο δέχεται ως είσοδο, την είσοδο και έξοδο του αρχικού συστήματος με σκοπό την εκτίμηση της κατάστασης του (Σχήμα 1.1). Η έννοια του παρατηρητή για ένα σύστημα καθιερώθηκε για πρώτη φορά από τον Luenberger το 1964 (βλέπε [54], [55]), ο οποίος έθεσε τα θεμέλια για τη συστηματική και εκτεταμένη μελέτη στη σχεδίαση παρατηρητών για γραμμικά συστήματα.

Στην παρούσα ενότητα παρατίθενται εν συντομία κάποια γνωστά αποτελέσματα που αφορούν το **Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή (Observer Design Problem (ODP))** για αυτόνομα γραμμικά συστήματα (βλέπε [10], [44], [54], [55], [72])

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1\alpha)$$

$$y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k \quad (1.1\beta)$$

με $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ όπου u η είσοδος και y η έξοδος του συστήματος.

Πριν προχωρήσουμε στην ακριβή κατασκευή ενός παρατηρητή για το γραμμικό σύστημα (1.1), δίνουμε κάποιους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 1.1.1

Το σύστημα (1.1) είναι **παρατηρήσιμο (observable)** αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$y(t, x_1, u) := y(t, x_2, u), \forall t \geq 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

όπου $y(\cdot, x, u) = Cx(\cdot, x, u)$ η έξοδος του συστήματος (1.1).

Πρόταση 1.1.1

[10], [44], [72]

Το σύστημα (1.1) είναι παρατηρήσιμο, αν και μόνο αν:

(i) Το σύστημα

$$\dot{x} = Ax \text{ με έξοδο } y = Cx$$

είναι παρατηρήσιμο.

(ii) Ισχύει η συνεπαγωγή

$$y(t, x_0, 0) = Cx(t, x_0, 0) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

όπου $y(\cdot, x_0, 0)$ η έξοδος του (1.1) με είσοδο $u \equiv 0$.

(iii) Ικανοποιείται η **Συνθήκη Βαθμού Παρατηρησιμότητας** (Observability Rank Condition)

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Παρατήρηση 1.1.1. Από την Πρόταση 1.1.1 συμπεραίνουμε ότι για τη γραμμική περίπτωση, η ιδιότητα της παρατηρησιμότητας (observability) εξαρτάται αποκλειστικά από το ζευγάρι πινάκων (A, C) . ◦

Ασθενέστερη από την έννοια της παρατηρησιμότητας είναι η έννοια της **ανιχνευσιμότητας** (detectability) που ακολουθεί στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.1.2

Το σύστημα (1.1) (ή το ζευγάρι (A, C)) είναι **ανιχνεύσιμο** (detectable) αν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$Cx(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

όπου $x(\cdot) := x(\cdot, x_0)$ η λύση του (1.1α) για κάποια αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Στην ακόλουθη πρόταση παραθέτουμε ισοδύναμους χαρακτηρισμούς της ανιχνευσιμότητας του ζεύγους (A, C) . Ειδικότερα, ισχύει:

Πρόταση 1.1.2

[10], [44], [72]

Το ζευγάρι (A, C) είναι ανιχνεύσιμο, τότε και μόνο αν ισχύει μια από τις επόμενες ιδιότητες:

(i) Το ζευγάρι (A', C') είναι σταθεροποιήσιμο, δηλαδή το σύστημα

$$\dot{x} = A'x + C'u, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k$$

είναι σταθεροποιήσιμο μέσω γραμμικής ανάδρασης $u = Fx$, όπου $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

(ii) Ισχύει μια από τις επόμενες ιδιότητες:

α') Το (A, C) είναι παρατηρήσιμο.

β') Το (A, C) δεν είναι παρατηρήσιμο, όμως για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με

$$\tilde{C} = T^{-1}C = (C_1 \ 0) \tag{1.2}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

το ζευγάρι (A_{11}, C_1) είναι παρατηρήσιμο, ο δε A_{22} είναι Hurwitz.

(iii) Υπάρχει πίνακας $L \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ούτως ώστε ο $A - LC$ να είναι Hurwitz.

Παραθέτουμε τώρα δύο τελευταία κριτήρια για τον έλεγχο της παρατηρησιμότητας και της ανιχνευσιμότητας του ζευγαριού (A, C) .

Πρόταση 1.1.3

[62]

- (Rosenbrock Observability Criterion) Το ζευγάρι (A, C) είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν ισχύει

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n$$

για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A .

- Το ζευγάρι (A, C) είναι ανιχνεύσιμο αν και μόνο αν ισχύει

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n$$

για κάθε ιδιοτιμή λ του A με $\text{Re}(\{\lambda\}) \geq 0$.

Συνεχίζουμε τώρα στη σχεδίαση παρατηρητή για το γραμμικό σύστημα (1.1).

Ορισμός 1.1.3

Ένας γραμμικός παρατηρητής του (1.1) είναι ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Kz + Mu + Ly \\ z &\in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k \end{aligned} \quad (1.4)$$

το οποίο εκτιμά τη λύση $x(\cdot)$ του (1.1), έχοντας σαν πληροφορία την είσοδο $u(\cdot)$ και την έξοδο $y(\cdot)$, έτσι ώστε

$$|x(t, x_0, u) - z(t, z_0, u)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (1.5)$$

για κάθε ζευγάρι αρχικών συνθηκών x_0, z_0 , κάθε u , και επιπλέον να ισχύει η συνεπαγωγή

$$z_0 = x_0 \Rightarrow z(t, z_0, u) = x(t, x_0, u), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall u(t),$$

όπου $z(\cdot)$ η λύση του (1.4).

Για να κατασκευάσουμε τον παρατηρητή (1.4), πρέπει να επιλέξουμε τους πίνακες K , L και M κατά τέτοιον τρόπο ώστε να ικανοποιείται η (1.5) ανεξάρτητα από τα x και u . Για να προσδιορίσουμε αυτούς τους πίνακες, θεωρούμε την εκτίμηση σφάλματος

$$e := x - z \quad (1.6)$$

Από τις (1.1), (1.4) και (1.6) παίρνουμε την εξίσωση σφάλματος:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{z} \\ &= Ax + Bu - Kz - Ly - Mu \\ &= Ax + Bu - K(x - e) - LCx - Mu \\ &= Ke + (A - K - LC)x + Bu - Mu. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Από την (1.7), παρατηρούμε ότι, για να συγκλίνει το σφάλμα, ανεξάρτητα από τα x και u , θα πρέπει αναγκαστικά να επιλέξουμε

$$\begin{aligned} K &:= A - LC \\ M &:= B. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Τότε η (1.7) γράφεται

$$\dot{e} = (A - LC)e \quad (1.9)$$

της οποίας η λύση $e(\cdot)$ συγκλίνει στο μηδέν ασυμπτωτικά αν και μόνο αν ο πίνακας $A - LC$ είναι Hurwitz. Την επιλογή του πίνακα L , ώστε να ισχύει αυτή η συνθήκη, την εγγυάται η Πρόταση 1.1.2(iii). Δηλαδή, υπάρχει πίνακας $L \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ώστε ο $A - LC$ να είναι Hurwitz

αν και μόνο αν το σύστημα είναι ανιχνεύσιμο. Έτσι, από την επιλογή (1.8) και μέσω της (1.4) παίρνουμε τον παρατηρητή:

$$\dot{z} = Az + Bu + L(y - Cz) \quad (1.10)$$

Από την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε στην επόμενη ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ενός γραμμικού παρατηρητή για το σύστημα (1.1).

Θεώρημα 1.1.1

[44], [122]

Για το γραμμικό σύστημα (1.1) τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το σύστημα (1.1) είναι ανιχνεύσιμο.
2. Υπάρχει ένας γραμμικός παρατηρητής για το σύστημα (1.1) της μορφής (1.10).

Παρατήρηση 1.1.2. (i) Η επιλογή του πίνακα L στην (1.9), εγγυάται ότι $|x(t) - z(t)| \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$ και για κάθε ζευγάρι αρχικών συνθηκών $x(0)$ και $z(0)$.

(ii) Όταν $p = n$ στην (1.4), δηλαδή όταν $z \in \mathbb{R}^n$, τότε η διάσταση του παρατηρητή (1.4) (ή ισοδύναμα του (1.10)) είναι ίδια με τη διάσταση του συστήματος (1.1). Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε έναν **παρατηρητή πλήρους διάστασης (full order observer)**.

(iii) Η ταχύτητα σύγκλισης του παρατηρητή εξαρτάται από τον πίνακα L . Η επιλογή αυτού του πίνακα γίνεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο πίνακας $A - LC$ να είναι Hurwitz. Αν επιλέξουμε να έχει ιδιοτιμές με μεγάλα αρνητικά μέρη τότε μπορούμε να επιτύχουμε πολύ γρήγορη σύγκλιση. Κάποια αυθαίρετα τέτοια μεγάλη επιλογή μπορεί να οδηγήσει σε αυθαίρετα μεγάλο αρχικό σφάλμα (peaking phenomenon) το οποίο μπορεί να μην είναι επιθυμητό σε πρακτικές εφαρμογές. Επίσης, στην περίπτωση όπου η έξοδος του συστήματος επηρεάζεται από έναν προσθετικό παράγοντα $d(\cdot)$ (measurement noise), δηλαδή $y = Cx + d$, τότε η εξίσωση σφάλματος θα είχε τη μορφή

$$\dot{e} = (A - LC)e + Ld(t)$$

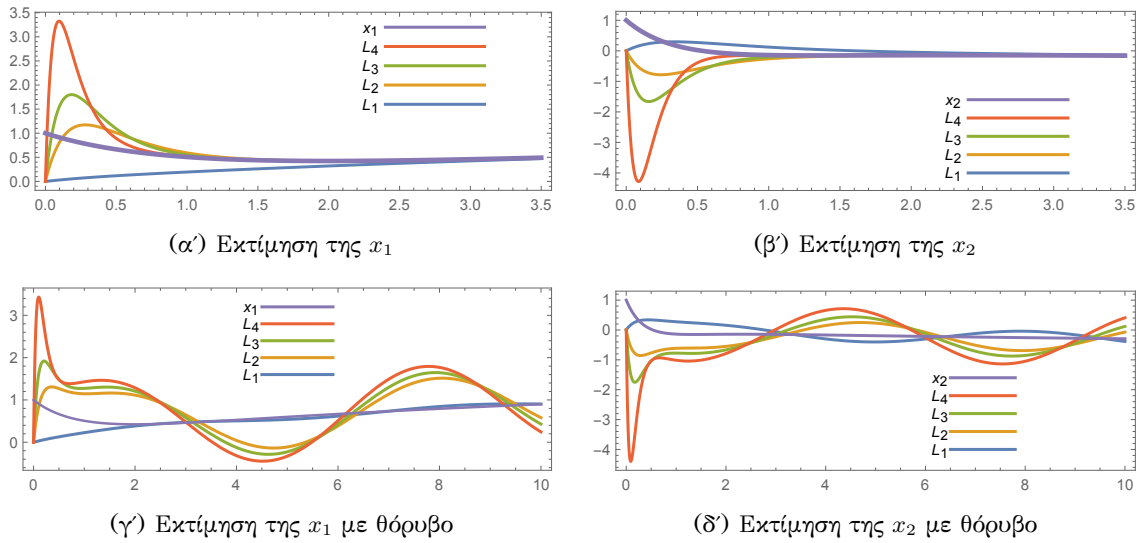
όπου μια αυθαίρετα μεγάλη επιλογή του L δε μπορεί εν γένει να οδηγήσει σε σύγκλιση του σφάλματος. ◦

Για το σύστημα

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (1.11)$$

$$y = (1, 0.5)x$$

1.2. Παρατηρητές για Μη Γραμμικά Συστήματα



Σχήμα 1.2: Προσομοίωση για το σύστημα (1.11).

πραγματοποιήθηκαν προσομοιώσεις με $u(t) = 0.3\sqrt{t}$ επιδεικνύοντας τις δύο περιπτώσεις της Παρατήρησης 1.1.2(iii). Στο Σχήμα 1.2 (α), (β) απεικονίζονται οι καταστάσεις x_1 , x_2 του συστήματος και z_1 , z_2 του παρατηρητή για διάφορες τιμές του πίνακα L με αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $z(0) = 0$. Για τον πίνακα L επιλέχθηκαν διαδοχικά οι εξής τιμές:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0.1933 \\ 1.6133 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18.6667 \\ -19.3333 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 66 \\ -92 \end{pmatrix} \right\}.$$

Στο Σχήμα 1.2 (γ),(δ) απεικονίζονται οι καταστάσεις x_1 , x_2 του συστήματος και z_1 , z_2 του παρατηρητή για τις παραπάνω τιμές του πίνακα L όπου το σύστημα επηρεάζεται από θόρυβο $y(t) = Cx(t) + d(t)$, με $d(t) = 0.6 \sin(t)$.

1.2

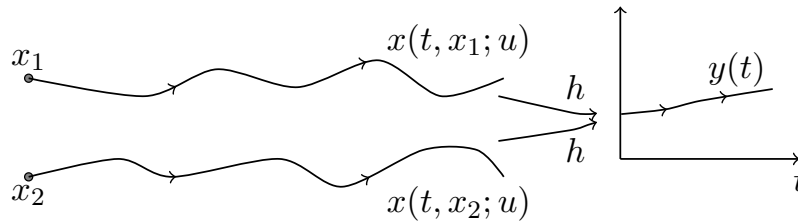
Παρατηρητές για Μη Γραμμικά Συστήματα

1.2.1

Παρατηρησιμότητα για Μη Γραμμικά Συστήματα

Παραθέτουμε τώρα κάποια αποτελέσματα από τις εργασίες [30] και [122] που αφορούν την παρατηρησιμότητα μη γραμμικών συστημάτων. Θεωρούμε το σύστημα

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & x \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R}^p, \end{cases}$$



Σχήμα 1.3: Μη διαχωρίσιμες καταστάσεις.

όπου M ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , η $h(\cdot)$ είναι συνεχής και η $f(\cdot)$ είναι συνεχής και τοπικά Lipschitz. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το σύστημα (Σ) είναι **δεξιά πλήρες**, δηλαδή, για κάθε μετρήσιμη και τοπικά ουσιαδώς φραγμένη είσοδο $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; U)$ και για κάθε $x_0 \in M$, η λύση $x(t, x_0; u)$ του (Σ) ικανοποιεί την ιδιότητα $x(t) \in M$, για κάθε $t \geq 0$.

Ορισμός 1.2.1

Λέμε ότι οι καταστάσεις $x_1, x_2 \in M$ είναι **μη διαχωρίσιμες** (indistinguishable), αν για κάθε $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; U)$ ισχύει

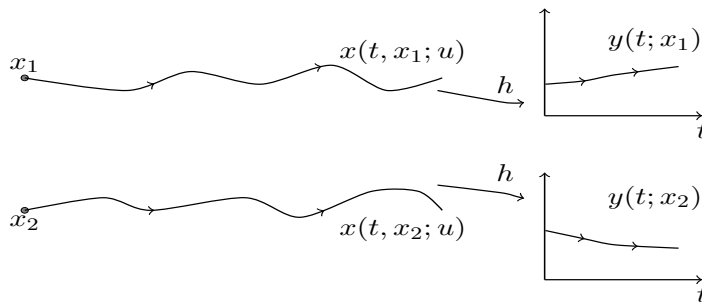
$$y(t, x_1; u) = y(t, x_2; u), \quad \forall t \geq 0.$$

Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε τις μη διαχωρίσιμες καταστάσεις x_1, x_2 με $x_1 I x_2$. Με $I(x_0)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των σημείων $x \in M$ που είναι μη διαχωρίσιμα ως προς το x_0 , δηλαδή

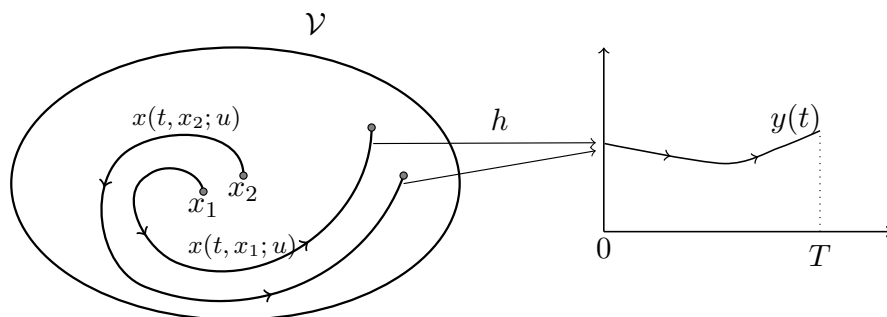
$$I(x_0) := \{x \in M : x_0 I x\}.$$

Ορισμός 1.2.2

Λέμε ότι το σύστημα (Σ) είναι **παρατηρήσιμο** (observable) στο $x_0 \in M$ αν $I(x_0) = \{x_0\}$, δηλαδή υπάρχει είσοδος $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; U)$ που διαχωρίζει τις καταστάσεις x_0 και $x \in M$. Λέμε ότι το σύστημα (Σ) είναι παρατηρήσιμο αν $I(x) = \{x\}$ για κάθε $x \in M$.



Σχήμα 1.4: Παρατηρησιμότητα



Σχήμα 1.5: \mathcal{V} -μη διαχωρίσιμες καταστάσεις

Ορισμός 1.2.3

Έστω $\mathcal{V} \subset M$. Λέμε ότι οι καταστάσεις $x_1, x_2 \in \mathcal{V}$ είναι \mathcal{V} -μη διαχωρίσιμες αν για κάθε $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; U)$ και $T > 0$ με $x(t, x_1; u), x(t, x_2; u) \in \mathcal{V}, \forall t \in [0, T]$, ισχύει $y(t, x_1; u) = y(t, x_2; u), \forall t \in [0, T]$.

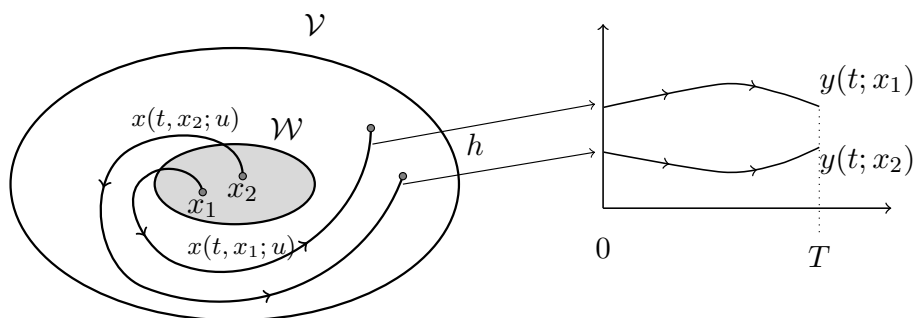
Θα συμβολίζουμε με $x_1 I_{\mathcal{V}} x_2$ τις καταστάσεις x_1, x_2 που είναι \mathcal{V} -μη διαχωρίσιμες. Επίσης, με $I_{\mathcal{V}}(x_0)$, θα συμβολίζουμε όλες τις καταστάσεις $x \in \mathcal{V}$ που είναι \mathcal{V} -μη διαχωρίσιμες ως προς το x_0 , δηλαδή

$$I_{\mathcal{V}} := \{x \in \mathcal{V}(x_0) : x_0 I_{\mathcal{V}} x\}.$$

Ορισμός 1.2.4

Λέμε ότι το σύστημα (Σ) είναι **τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο** (locally weakly observable) στο $x_0 \in M$, αν υπάρχει περιοχή \mathcal{V} του x_0 , έτσι ώστε για κάθε ανοικτή περιοχή \mathcal{W} του x_0 με $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ να ισχύει $I_{\mathcal{W}}(x_0) = \{x_0\}$. Λέμε ότι το (Σ) είναι **τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο** αν είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο για κάθε $x \in M$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι οι $f(\cdot)$ και $h(\cdot)$ του συστήματος (Σ) είναι C^∞ .



Σχήμα 1.6: Τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο σύστημα.

Ορισμός 1.2.5

(Χώρος Παρατήρησης (Observation Space)) Ο χώρος παρατήρησης για το σύστημα (Σ) ορίζεται ως ο μικρότερος πραγματικός διανυσματικός χώρος (συμβ. $\mathcal{O}(h)$) από C^∞ συναρτήσεις που περιέχει τις απεικονίσεις $h_i, i = 1, 2, \dots, p$ και είναι κλειστός ως προς την παραγωγή Lie κατά μήκος της $f_u := f(\cdot, u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^m$. Δηλαδή, για οποιαδήποτε $\phi \in \mathcal{O}(h)$ τότε $L_{f_u}\phi \in \mathcal{O}(h)$, όπου $L_{f_u}\phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, u)$.

Ορισμός 1.2.6

(Συνθήκη Βαθμού Παρατηρησιμότητας) Λέμε ότι το σύστημα (Σ) ικανοποιεί τη Συνθήκη Βαθμού Παρατηρησιμότητας (ως προς το $x_0 \in M$) αν

$$\forall x \in M \quad \dim d\mathcal{O}(h) \Big|_x = n \quad \left(\text{αντίστοιχα } \dim d\mathcal{O}(h) \Big|_{x_0} = n \right),$$

όπου $d\mathcal{O}(h) \Big|_x$ είναι το σύνολο των $d\phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, με $\phi \in \mathcal{O}(h)$.

Θεώρημα 1.2.1

[30]

1. Αν το σύστημα (Σ) ικανοποιεί τη Συνθήκη Βαθμού Παρατηρησιμότητας στο $x_0 \in M$ τότε είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο στο x_0 .
2. Αν το σύστημα (Σ) ικανοποιεί τη Συνθήκη Βαθμού Παρατηρησιμότητας για κάθε $x \in M$ τότε είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο.
3. Αν το σύστημα (Σ) είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο τότε ικανοποιείται η Συνθήκη Βαθμού Παρατηρησιμότητας σε ένα ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του M .

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι το σύστημα (Σ) είναι γραμμικό ως προς την είσοδο, με βαθμωτή είσοδο και βαθμωτή έξοδο (single input/single output), επομένως έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, & x \in \mathbb{R}^n, & u \in \mathbb{R} \\ y &= h(x), & y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

Για είσοδο $u \equiv 0$, το σύστημα (1.12) λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x), & c \in \mathbb{R}^n, & y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Ορισμός 1.2.7

1. Το σύστημα (1.13) καλείται **ομοιόμορφα παρατηρήσιμο** (uniformly observable) αν η απεικόνιση $\psi(\cdot) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

είναι ολικός διαφορομορφισμός από το \mathcal{O} στο $\psi(\mathcal{O})$.

2. Το σύστημα (1.12) καλείται **παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο** (observable for any input), αν για κάθε $x_1, x_2 \in M$, $T > 0$ και $u \in \mathcal{L}^\infty([0, T]; \mathbb{R})$ η είσοδος u διαχωρίζει τις καταστάσεις x_1 και x_2 .
3. Το σύστημα (1.12) καλείται **ομοιόμορφα παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο** (uniformly observable for any input), αν είναι παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο και επιπλέον, αν το σύστημα (1.13), δηλαδή το σύστημα (1.12) με είσοδο $u \equiv 0$, είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο.

Τα ακόλουθα αποτελέσματα παρέχουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ούτως ώστε τα συστήματα (1.13) και (1.12) να είναι ισοδύναμα μέσω ενός διαφορομορφισμού με συστήματα συγκεκριμένης δομής.

Πρόταση 1.2.1

[25]

Το σύστημα (1.13) είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο, αν και μόνο αν είναι ισοδύναμο μέσω ενός διαφορομορφισμού $\psi : \mathcal{O} \rightarrow \psi(\mathcal{O})$ με ένα σύστημα της μορφής:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \phi(x) \end{pmatrix}$$

$$y = x_1$$

Θεώρημα 1.2.2

[25]

Το σύστημα (1.12) είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο, αν και μόνο αν είναι ισοδύναμο μέσω ενός διαφορομορφισμού $\psi : \mathcal{O} \rightarrow \psi(\mathcal{O})$, με ένα σύστημα της μορφής

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} u = \tilde{F}(x) + \tilde{G}(x)u \quad (1.15\alpha)$$

$$y = x_1 \quad (1.15\beta)$$

Τέλος, παραθέτουμε ικανές συνθήκες ούτως ώστε ένα γενικό μη γραμμικό σύστημα Σ να είναι τοπικά ισοδύναμο με ένα σύστημα τριγωνικής δομής (βλέπε [26]). Θεωρούμε το σύστημα Σ με $k = 1$ και για κάθε $u \in U$ την ακολουθία κατανομών

$$\mathcal{D}(u) := \{\mathcal{D}_0(u) \supset \mathcal{D}_1(u) \supset \dots \supset \mathcal{D}_{n-1}(u)\}$$

στο \mathcal{O} που ορίζεται ως:

$$\mathcal{D}_0(u)(x) := \ker(Dh(x)), \forall x \in \mathcal{O}$$

$$\mathcal{D}_i(u)(x) := \mathcal{D}_{i-1}(u)(x) \cap \ker(DL_{f_u}^i h(x)), \forall x \in \mathcal{O}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$f_u(x) := f(x, u), \forall x \in \mathcal{O}$$

Η ακολουθία $\mathcal{D}(u)$ καλείται **παρατηρήσιμη ακολουθία κατανομών** του συστήματος (Σ). Λέμε ότι η παρατηρήσιμη ακολουθία κατανομών του (Σ) είναι ομοιόμορφη, αν κάθε κατανομή της $\mathcal{D}_i(u)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ είναι ανεξάρτητη του $u \in U$ και έχει σταθερή διάσταση $n-i-1$ για κάθε $x \in \mathcal{O}$.

Στο ακόλουθο Θεώρημα, δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες ούτως ώστε το σύστημα (Σ) να είναι τοπικά ισοδύναμο με ένα σύστημα τριγωνικής μορφής.

Θεώρημα 1.2.3**[26]**

1. Η παρατηρήσιμη ακολουθία κατανομών του συστήματος (Σ) είναι ομοιόμορφη, αν και μόνο αν για κάθε $x_0 \in \mathcal{O}$ υπάρχει μια περιοχή \mathcal{V} του x_0 και ένας διαφορομορφισμός $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \psi(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n$, ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες το σύστημα (Σ) να έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \tilde{f}_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= \tilde{f}_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= \tilde{f}_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_n &= \tilde{f}_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ y &= \tilde{h}(x_1)\end{aligned}$$

με

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_1}(x_1) &\neq 0, \forall x \in \psi(\mathcal{V}) \\ \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, u) &\neq 0, \forall (x, u) \in \psi(\mathcal{V}) \times U \\ &\vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}_{n-1}}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) &\neq 0, \forall (x, u) \in \psi(\mathcal{V}) \times U\end{aligned}$$

2. Αν η παρατηρήσιμη ακολουθία κατανομών του συστήματος (Σ) είναι ομοιόμορφη, τότε το (Σ) είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο.

1.2.2**Σχεδίαση παρατηρητών για μη γραμμικά συστήματα**

Παραθέτουμε τώρα κάποια αποτελέσματα για την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για ορισμένες κατηγορίες μη γραμμικών συστημάτων.

Παρατηρητές για ομοιόμορφα παρατηρήσιμα συστήματα.

Παραθέτουμε πρώτα κάποια από τα αποτελέσματα της εργασίας [25], όπου εισήχθησαν

οι αποκαλούμενοι **παρατηρητές υψηλού κέρδους** (high gain observers). Θεωρούμε το σύστημα (1.12) όπου $f, g, h \in C^\infty$ και υποθέτουμε ότι είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο. Δηλαδή, υπάρχει διαφορομορφισμός $\psi : \Omega \rightarrow \psi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, με Ω ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , έτσι ώστε το σύστημα (1.12) να είναι ισοδύναμο με το σύστημα (1.15). Υποθέτουμε επιπλέον ότι ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες

- Η συνάρτηση ϕ στην (1.15) μπορεί να επεκταθεί σε όλο τον \mathbb{R}^n σε μια C^∞ ολικά Lipschitz συνάρτηση.
- Οι g_i στην (1.15) μπορούν να επεκταθούν σε ολικά Lipschitz απεικονίσεις στον \mathbb{R}^i , $i = 1, \dots, n$.

Τότε, αν υποθέσουμε ότι η είσοδος $u(\cdot)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για κάθε $t \geq 0$ από κάποια σταθερά $u_0 \geq 0$, το σύστημα

$$\dot{z} = \tilde{F}(z) + \tilde{G}(z)u - S_\infty^{-1}C'(Cz - y) \quad (1.16)$$

είναι ένας παρατηρητής για το (1.15), όπου $C = (1, 0, \dots, 0)$, S_∞ είναι η λύση του $0 = -\theta S_\infty - A'S_\infty - S_\infty A + C'C$, $\theta > 0$ επαρκώς μεγάλη σταθερά και

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον, το σφάλμα μεταξύ της τροχιάς $x(\cdot) := x(\cdot, x_0; u)$ του συστήματος (1.12) και της τροχιάς $z(\cdot) := z(\cdot, z_0; u)$ του παρατηρητή (1.16), ικανοποιεί την εκτίμηση

$$|x(t) - z(t)| \leq K(\theta) \exp\left(-\frac{\theta t}{3}\right) |x_0 - z_0|, \quad \forall t \geq 0, x_0, z_0 \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $K(\theta)$ μια θετική σταθερά (που εξαρτάται από τη σταθερά θ).

Ικανές Lyapunov συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή.

Στη συνέχεια, παραθέτουμε κάποια από τα αποτελέσματα της εργασίας [73], όπου δίνονται ικανές Lyapunov-τύπου συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος του παρατηρητή για μη γραμμικά συστήματα με εισόδους και με γραμμική έξοδο. Ειδικότερα, θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.17\alpha)$$

$$y = H(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k \quad (1.17\beta)$$

όπου ο χώρος εισόδων \mathcal{F} αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις του χρόνου με τιμές σε ένα υποσύνολο U του \mathbb{R}^m . Υποθέτουμε ότι για κάθε είσοδο $u \in \mathcal{F}$ και αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$, η αντίστοιχη λύση $x(t, x_0, u)$ του (1.17α) ορίζεται για όλους τους θετικούς χρόνους. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (x, u) \rightarrow f(x, u)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, και συμβολίζουμε με $D_x f(x, u)$ την παράγωγό της ως προς x .

Για το σύστημα (1.17) αναζητούμε έναν παρατηρητή της μορφής

$$\dot{z} = f(z, u) + R(u)(y - Hz) \quad (1.18)$$

και επομένως η εξίσωση του σφάλματος $e = x - z$ ανάμεσα στην τροχιά του συστήματος (1.17) και την τροχιά του παρατηρητή (1.18) θα δίνεται ως:

$$\dot{e} = f(x, u) - f(z, u) - R(u)He \quad (1.19)$$

Για το σύστημα (1.17) κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις.

Υ1. Υπάρχουν ένας θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας P και μια σταθερά $k_1 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $e \in \ker H \setminus \{0\}$ να υπάρχει μια περιοχή S_e του e , ούτως ώστε να ισχύει:

$$v'PD_x f(x, u)v \leq -k_1|v|^2, \forall (x, v, u) \in \mathbb{R}^n \times S_e \times U \quad (1.20)$$

Υ2. Υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ και μια σταθερά $k_2 > 0$, με $p(u) \geq k_2, \forall u \in U$ και έτσι ώστε να ισχύει:

$$|v'PD_x f(x, u)v| \leq p(u)|v|^2, \forall (x, v, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U \quad (1.21)$$

Το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας [73] είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.4

[73]

Υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.17) ικανοποιεί τις Συνθήκες Υ1 και Υ2. Τότε:

(i) Για κάθε επαρκώς μεγάλη σταθερά c , ο παρατηρητής (1.18) με

$$R(u) = cp(u)P^{-1}H' \quad (1.22)$$

όπου οι $p(\cdot)$ και P δίνονται στις Υ1 και Υ2, επιτυγχάνει την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (1.17). Ειδικότερα, για τη λύση $e(\cdot)$ της εξίσωσης σφάλματος (1.19), ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t, e_0, x(t, x_0, u), u) = 0 \quad (1.23)$$

για κάθε αρχική συνθήκη (e_0, x_0) και για κάθε $u \in \mathcal{F}$. Επιπλέον, η ανωτέρω σύγκλιση είναι εκθετική.

(ii) Για κάθε ζευγάρι x_a και x_b αρχικών καταστάσεων του (1.17), οι οποίες δεν είναι διαχωρίσιμες από κάποια είσοδο $\bar{u} \in \mathcal{F}$, δηλαδή ισχύει:

$$y(t, x_a, \bar{u}) = y(t, x_b, \bar{u}), \forall t \geq 0$$

θα ικανοποιείται η συνθήκη: $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, x_a, \bar{u}) - x(t, x_b, \bar{u})) = 0$ (1.24)

Σημειώνεται ότι για γραμμικά συστήματα

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Hx \quad (1.25)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^k$, η ιδιότητα (ii) του ανωτέρω θεωρήματος, είναι ισοδύναμη με την ανιχνευσιμότητα του ζεύγους (A, H) .

Πρόταση 1.2.2

[73]

Για το σύστημα (1.25) τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Το ζευγάρι (A, H) είναι ανιχνεύσιμο.

(ii) Το σύστημα (1.25) ικανοποιεί την Ιδιότητα Υ1. Ειδικότερα, υπάρχουν ένας θετικά ορισμένος πίνακας P και μια θετική σταθερά k_1 ούτως ώστε να ισχύει:

$$e'PAe \leq -k_1|e|^2, \forall e \in \ker H \quad (1.26)$$

(iii) Υπάρχει μια θετική σταθερά c , έτσι ώστε το γραμμικό σύστημα

$$\dot{z} = Az + cP^{-1}H'(y - Hz) + Bu \quad (1.27)$$

να αποτελεί παρατηρητή για το σύστημα (1.25).

Χρονικά Μεταβαλλόμενοι Παρατηρητές για μη Γραμμικά Συστήματα.

Συνεχίζουμε με κάποια από τα αποτελέσματα της εργασίας [77], όπου μελετάται το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή για χρονικώς μεταβαλλόμενα μη γραμμικά συστήματα. Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα

$$\dot{x} = f(t, x) := F(t, x, H(t)x) \quad (1.28\alpha)$$

$$y = h(t, x) := H(t)x \quad (1.28\beta)$$

$$t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k$$

όπου $H \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^{k \times n})$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ η απεικόνιση $F(\cdot, x, y)$ είναι συνεχής και η απεικόνιση $F(\cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz. Θεωρούμε τα μη-κενά σύνολα $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ και το σύνολο εξόδων του (1.28):

$$O(t_0, M) := \{y \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^k) : y(t) = h(t, x(t, t_0, x_0)), t \geq t_0 \in I, x_0 \in M\}.$$

Ορισμός 1.2.8

Για δοσμένο $0 < \tau \leq \infty$, λέμε ότι η απεικόνιση

$$([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \times (I \times O(I, M)) \ni (t, x; t_0, y) \rightarrow a_{t_0, y}(t, x) \in S,$$

όπου S μη κενό σύνολο, είναι τ -μη αιτιατή ως προς το $O(t_0, M)$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $t \geq t_0$, η τιμή $a(t) := a_{t_0, y}(t, x)$ εξαρτάται από τις τιμές $\{y(s), t_0 \leq s \leq t + \tau\}$ της εξόδου $y(\cdot) \in O(t_0, M)$.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$, μια απεικόνιση $A \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^{n \times n})$, μια συνάρτηση $\omega \in \mathcal{NN}$ και μη κενά σύνολα $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ και $M \subset \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε αν ορίσουμε

$$\Delta F(t, x, z; y) := F(t, x, y) - F(t, z, y) \quad (1.29)$$

$$Q_y(t) := \{q \in \mathbb{R}^\ell : |q| \leq \omega(t, |y|)\} \quad (1.30)$$

να ισχύουν τα ακόλουθα.

B1. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ και $y \in \mathbb{R}^k$ υπάρχει ένα διάνυσμα $q \in Q_y(t)$ ούτως ώστε να ισχύει

$$\Delta F(t, x, z; y) = A(t, q, y)(x - z), \forall x, z \in \mathbb{R}^n \quad (1.31)$$

B2. Υπάρχει μια συνάρτηση $k \in \mathcal{NNN}$ τέτοια ώστε για κάθε $y \in O(t_0, M) \cap C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^k)$ να ισχύει

$$|y(t)| \leq k(t, t_0, |x_0|), \forall t \geq t_0, \quad (1.32)$$

όπου $y(t) := h(t, x(t, t_0, x_0))$ και $(t_0, x_0) \in I \times M$

B3. Για κάθε $t_0 \in I$ και $y \in \mathcal{O}(t_0, M)$ υπάρχουν ένας συμμετρικός πίνακας $P := P_{t_0, y} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $d := d_{t_0, y} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ ούτως ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\int_{t_0}^{\infty} d(s) ds = \infty \quad (1.33\alpha)$$

$$P(t) \geq I_{n \times n}, \forall t \geq t_0 \quad (1.33\beta)$$

$$e'P(t)A(t, q, y(t))t + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e \leq -d(t)e'P(t)e, \\ \forall e \in \ker H(t), q \in Q_{y(t)}(t), t \geq t_0 \in I, \text{ μακριά από το μηδέν} \quad (1.33\gamma)$$

Πρόταση 1.2.3

[77]

Για το σύστημα (1.28) ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) Αν ικανοποιείται η Συνθήκη B3, τότε για κάθε $t_0 \in I$ και $y \in \mathcal{O}(t_0, M)$ υπάρχουν μια συνάρτηση $\bar{d} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ που ικανοποιεί την (1.33α) και μια συνάρτηση $\phi \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, ούτως ώστε να ισχύει

$$e'P(t)A(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e - \phi(t)|H(t)e|^2 \leq -\bar{d}(t)e'P(t)e, \\ \forall e \in \mathbb{R}^n, q \in Q_{y(t)}(t), t \geq t_0, \text{ μακριά από το μηδέν} \quad (1.34)$$

Ειδικότερα, αν οι $P(\cdot)$ και $d(\cdot)$ είναι τ_0 -μη αιτιατές για συγκεκριμένο $\tau_0 > 0$ ως προς το σύνολο $\mathcal{O}(t_0, M)$, τότε για κάθε $\tau > \tau_0$, υπάρχουν συναρτήσεις $\bar{d} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, που εν γένει εξαρτώνται από την έξοδο $y(\cdot)$ και τον αρχικό χρόνο t_0 του συστήματος, που ικανοποιούν τις (1.33α) και (1.34) και είναι και οι δυο τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $\mathcal{O}(t_0, M)$.

(ii) Αν πέραν της B3, υποθέσουμε ότι ισχύουν οι B1 και B2, τότε τα συστήματα (1.28) και

$$\dot{z} = F(t, z, y) + \phi(t)P^{-1}(t)H'(t)(y - H(t)z) \quad (1.35)$$

είναι δεξιά πλήρες, και το (1.35) αποτελεί παρατηρητή για το σύστημα (1.28). Συγκεκριμένα, το σφάλμα $e(\cdot) := x(\cdot) - z(\cdot)$ ανάμεσα στη λύση $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0)$ του (1.28) και τη λύση $z(\cdot) = z(\cdot, t_0, z_0; y)$ του (1.35) ικανοποιεί την εκτίμηση

$$|e(t)| \leq L(t, t_0, |x_0 - z_0|), \forall t \geq t_0, (x_0, z_0) \in M \times \mathbb{R}^n,$$

όπου $L \in LNK$.

Διακοπτόμενοι Παρατηρητές.

Η δυσκολία επίλυσης του Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητή για μη γραμμικά συστήματα έχει οδηγήσει πολλούς ερευνητές στη χρήση διακοπτόμενων παρατηρητών (Switching Observers) (βλεπε πχ [3], [16], [53], [31]). Ακολουθως παρουσιάζονται κάποια από τα αποτελέσματα της εργασίας [16] που αφορούν την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή μέσω μιας διακοπτόμενης (switching) ακολουθίας μη-αιτιατών χρονικά μεταβαλλόμενων δυναμικών συστημάτων. Θεωρούμε το σύστημα (1.28).

Ορισμός 1.2.9

Έστω $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το (1.28) είναι *M-δεξιά πλήρες* (M-forward complete), αν υπάρχει συνάρτηση $\beta \in \mathcal{NN}$, τέτοια ώστε η λύση $x(t) := x(t, t_0, x_0)$ του (1.28) με αρχική κατάσταση x_0 τον αρχικό χρόνο $t = t_0$, να ικανοποιεί την εκτίμηση:

$$|x(t)| \leq \beta(t, |x_0|), \forall t \geq t_0 \geq 0, x_0 \in M \quad (1.36)$$

Επιπλέον, για το σύστημα (1.28), υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο M του \mathbb{R}^n τέτοιο ώστε το σύστημα (1.28α) να είναι *M-δεξιά πλήρες*, δηλαδή η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (1.28α) να ικανοποιεί τη (1.36) για κάποια $\beta \in \mathcal{NN}$. Πέραν της (1.36), υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$, μια απεικόνιση

$$A \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^{n \times n}) \quad (1.37)$$

και σταθερές $L > 1$ και $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$, έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

B4. Για κάθε $\xi > 0$, υπάρχει μια πλειονότιμη απεικόνιση

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow Q_R(t) := Q_{R,\xi}(t) \subset \mathbb{R}^\ell, \quad (1.38)$$

που ικανοποιεί την Ιδιότητα CP έτσι ώστε για κάθε $t \geq 0$ και $(x, z, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ με

$$y \in Y_R(t) := \{y \in \mathbb{R}^k : y = H(t)x, |x| \leq \beta(t, R)\}, \quad (1.39)$$

$$|x| \leq \beta(t, R) \text{ και } |x - z| \leq \xi,$$

να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\Delta F(t, x, z; y) := F(t, x, y) - F(t, z, y) = A(t, q, y)(x - z)$$

για κάποιο διάνυσμα $q \in Q_R(t)$. (1.40)

B5. (“Υπόθεση Ανιχνευσιμότητας”) Υπάρχει μια σταθερά $\varepsilon_R > 0$ (ανεξάρτητη της σταθεράς L) τέτοια ώστε για κάθε $\xi > 0$, να υπάρχει μια πλειονότιμη απεικόνιση $Q_R := Q_{R,\xi}$ όπως στη (1.38) που να ικανοποιεί την Ιδιότητα CP (βλέπε Συμβολισμούς) και έτσι ώστε

για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0$, $\tau_0 > 0$ και $y \in O(t_0, M)$, να υπάρχουν ένας χρονικά-μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_R := P_{R,t_0,\bar{t}_0,\tau_0,\xi,y} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $d_R := d_{R,t_0,\bar{t}_0,\tau_0,\xi,y} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και οι δυο τ_0 -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$, που ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$P_R(t) > I_{n \times n}, \forall t \geq \bar{t}_0; |P_R(\bar{t}_0)| \leq L; \quad (1.41\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t d_R(s) ds > -\varepsilon_R, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} d_R(s) ds = \infty \quad (1.41\beta)$$

και επιπλέον:

$$e' P_R(t) A(t, q, y(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_R(t) e \leq -d_R(t) e' P_R(t) e, \quad (1.41\gamma)$$

$$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \ker H(t), q \in Q_R(t), \text{ δεδομένου ότι } y \in O(t_0, M).$$

Η ακόλουθη πρόταση γενικεύει μερικώς την Πρόταση 1.2.3, δίνοντας ικανές συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος του παρατηρητή για συστήματα της μορφής (1.28), **με την επιπλέον υπόθεση, ότι η αρχική συνθήκη του συστήματος ανήκει σε ένα εξαρχής δοσμένο συμπαγές σύνολο**. Ειδικότερα, είναι εκ των προτέρων γνωστό ότι η αρχική κατάσταση x_0 του (1.28α) ανήκει στη συμπαγή μπάλα ακτίνας $R > 0$ με κέντρο το μηδέν.

Πρόταση 1.2.4

[16]

Θεωρούμε το σύστημα (1.28) και ένα μη-κενό σύνολο $M \subset \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε το (1.28α) να είναι M -δεξιά πλήρες. Για την αρχική κατάσταση $x_0 \in M$ του (1.28α), υποθέτουμε ότι ισχύει $|x_0| \leq R$, για κάποια γνωστή σταθερά $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$. Αν υποθέσουμε ότι ικανοποιούνται οι Υποθέσεις B4 και B5 με το σύνολο M και τη σταθερά R όπως παραπάνω και συγκεκριμένο $L > 1$, τότε για κάθε $\tau > 0$ και $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, υπάρχουν ένας χρονικά μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ που ικανοποιεί τη (1.41α) και συναρτήσεις $\bar{d}_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, $\phi_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{\geq 0})$, τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, B_R \cap M)$, τέτοιες ώστε το σύστημα

$$\dot{z} = F(t, z, y) + \phi_R(t) P_R^{-1}(t) H'(t) (y - H(t)z) \quad (1.42\alpha)$$

$$\text{με αρχική κατάσταση } z(\bar{t}_0) = 0 \quad (1.42\beta)$$

να είναι ένας παρατηρητής για το (1.28). Συγκεκριμένα, το σφάλμα $e(\cdot) := x(\cdot) - z(\cdot)$ ανάμεσα στην τροχιά $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (1.28α) και την τροχιά $z(\cdot) := z(\cdot, \bar{t}_0, z_0)$ του (1.42) ικανοποιεί την εκτίμηση:

$$|e(t)| < \beta(\bar{t}_0, t_0, R) \sqrt{L} \exp \left[- \int_{\bar{t}_0}^t d_R(s) ds \right], \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (1.43\alpha)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \forall x_0 \in B_R \cap M. \quad (1.43\beta)$$

Το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.2.4 εξασφαλίζει ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ενός διακοπτόμενου παρατηρητή που επιτυγχάνει την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (1.28), *χωρίς κάποια εκ των προτέρων γνώση σχετικά με την αρχική του κατάσταση*. Κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση:

B6. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$, μια απεικόνιση $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως στη (1.37) και μια σταθερά $L > 1$, έτσι ώστε για κάθε $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$, να ισχύουν οι B4 και B5 ταυτόχρονα.

Πρόταση 1.2.5

[16]

Έστω $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ και έστω ότι το σύστημα (1.28) είναι M -δεξιά πλήρες. Αν υποθέσουμε ότι ικανοποιείται η B6 με M όπως παραπάνω, τότε για κάθε $t_0 \geq 0$, $\tau > 0$ και $y \in O(t_0, M)$ υπάρχουν μια αύξουσα ακολουθία από χρόνους $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ με

$$t_1 = t_0 \text{ και } \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \infty$$

και τ -μη αιτιατές απεικονίσεις $P_m := P_{m,t_0,t_{m-1},\tau,\xi_m,y} \in C^1([t_{m-1}, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$, $\bar{d}_m := \bar{d}_{m,t_0,t_{m-1},\tau,\xi_m,y} \in C^0([t_{m-1}, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_m := \phi_{m,t_0,t_{m-1},\tau,\xi_m,y} \in C^1([t_{m-1}, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{z}_m &= F(t, z_m, y(t)) + \phi_m(t) P_m^{-1}(t) H'(t)(y(t) - H(t)z_m), \forall t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \\ z_m(t_{m-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

να αποτελεί μια διακοπτόμενη ακολουθία παρατηρητών για το (1.28). Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε την τμηματικά συνεχή απεικόνιση $Z : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ με

$$Z(t) := z_m(t), \quad t \in [t_m, t_{m+1}), \quad m \in \mathbb{N},$$

όπου για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση $z_m(\cdot)$ συμβολίζει τη λύση του (1.44), τότε, το σφάλμα $e(t) := x(t) - Z(t)$ μεταξύ της τροχιάς $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$, $x_0 \in M$ του (1.28α) και τη $Z(\cdot)$, ικανοποιεί:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Παρατήρηση 1.2.1. Σημειώνουμε ότι στην εργασία [16] παρατίθενται επίσης γενικεύσεις της παραπάνω πρότασης για **σύνθετα συστήματα** (composite systems) της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + G(t, x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

◦

Τριγωνικά Συστήματα.

Από τις προηγούμενες παραγράφους, είναι φανερό ότι μια σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι αυτή που αποτελείται από συστήματα τριγωνικής δομής. Τις τελευταίες δεκαετίες, τα εν λόγω συστήματα, έχουν λάβει ιδιαίτερη προσοχή με σημαντικές συνεισφορές στη διεθνή βιβλιογραφία για την επιλυσιμότητα του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή (ODP) (βλέπε πχ [1]-[17], [19]-[33], [35]-[38], [41]-[59], [61], [63]-[66], [69], [71], [73], [74], [77], [78]). Για παράδειγμα, στην εργασία [12] δίνονται ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του ODP για την κλάση ομοιόμορφα παρατηρήσιμων συστημάτων της Πρότασης 1.2.2. Στο [9], μελετάται το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή για τριγωνικά συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(u, y) + a_1(y)x_2 + \delta_1(t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(u, y, x_2) + a_2(y)x_3 + \delta_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(u, y, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(y)x_n + \delta_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n &= f_n(u, y, x_2, \dots, x_n) + \delta_n(t) \\ y &= x_1 + \delta_y(t)\end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $f_i(\cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz, και οι απεικονίσεις $\delta(\cdot) = (\delta_1(\cdot), \delta_2(\cdot), \dots, \delta_n(\cdot))$ και $\delta_y(\cdot)$ αναπαριστούν τις άγνωστες εισόδους και το θόρυβο μέτρησης, αντίστοιχα. Υπό την υπόθεση ότι υπάρχει σταθερά $\rho > 0$ τέτοια ώστε $a_i(y) \geq \rho$, $i = 1, \dots, n-1$, οι συγγραφείς παρουσιάζουν μια νέα κλάση παρατηρητών υψηλού κέρδους (high-gain observers) που επεκτείνει το αποτέλεσμα της εργασίας [25]. Παρόμοιες υποθέσεις για τις συναρτήσεις $a_i(\cdot)$ λαμβάνονται επίσης και στα άρθρα [21], [50] και [51] για την επιλυσιμότητα του ODP για τριγωνικά συστήματα. Τέλος, ένα μεγάλο πλήθος αποτελεσμάτων για την επιλυσιμότητα του συγκεκριμένου προβλήματος παρέχεται στις εργασίες [2], [6], [12], [13], [25], [29], [33], [58] και αφορά συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= g_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2) + x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n, \\ \dot{x}_n &= g_n(x_1, \dots, x_n), \\ y &= x_1, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αυτό με κάποια αποτελέσματα από τις εργασίες [77] και [16] που παρέχουν ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του ODP για χρονικά

μεταβαλλόμενα τριγωνικά συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + a_1(t, x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2) + a_2(t, x_1)x_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.45\alpha}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(t, x_1)x_n \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{1.45\beta}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}$$

όπου για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ οι συναρτήσεις $f_i(\cdot)$ είναι συνεχείς και τοπικά Lipschitz και οι συναρτήσεις $a_i(\cdot)$ είναι C^1 . Επιπλέον υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $\omega \in \mathcal{NN}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\left(\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^i \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_i) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \omega(t, |x_1|), \forall (t, x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \tag{1.46}$$

και μη κενά σύνολα $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ και $M \subset \mathbb{R}^n$ καθώς και μια συνάρτηση $k \in \mathcal{NNN}$ ούτως ώστε να ισχύει

$$|x_1(t, t_0, x_0)| \leq k(t, t_0, x_0), \forall t \geq t_0 \in I, x_0 \in M \tag{1.47}$$

Για το σύστημα (1.45) ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.2.6

[77]

Υποθέτουμε ότι πέραν των (1.46) και (1.47) το σύστημα (1.45α) ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη.

(Σ1) Για κάθε $x_0 \in M, t_0 \in I$ και $i = 1, 2, \dots, n-1$, ισχύει

$$a_i(t, x_1(t, t_0, x_0)) \neq 0, \text{ σχεδόν για κάθε } t \geq t_0 \tag{1.48}$$

Τότε, για κάθε $t_0 \geq 0, \tau > 0$ και $y \in O(t_0, M)$ υπάρχουν ένας χρονικά μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_{t_0, \tau, y} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $\phi_{t_0, \tau, y} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{\geq 0})$, και οι δύο απεικονίσεις τ -μη αιτιατές ως προς το $O(t_0, M)$, έτσι ώστε το σύστημα (1.35) με $H = \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_n$ να είναι ένας παρατηρητής για το (1.45α).

Παρατήρηση 1.2.2. Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, επιβάλουν τη σχεδίαση παρατηρητή με εν γένει μη αιτιατά δυναμικά. Ο λόγος είναι επειδή στην υπόθεση

Σ1, υπάρχουν χρονικές στιγμές όπου κάποιος όρος $a_i(\cdot, x_1(\cdot, t_0, x_0))$ μηδενίζεται. Όταν συμβαίνει αυτό, χρειάζεται να γνωρίζουμε για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ το μέλλον της εξόδου για επόμενες χρονικές στιγμές $\tau \geq t$ πλησίον του t , προκειμένου να κατασκευάσουμε τις επιθυμητές απεικονίσεις που εμπλέκονται στο σχεδιασμό. ◦

Σημείωση: Η εργασία [77] περιέχει επίσης αποτελέσματα όπου οι απεικονίσεις $d(\cdot)$, $P(\cdot)$ και $\phi(\cdot)$ στις (1.34) και (1.35) είναι αιτιατές ως προς το σύνολο εξόδων $O(t_0, M)$. Συγκεκριμένα, για τα συστήματα (1.45), υπάρχει παρατηρητής με αιτιατά δυναμικά αν ισχύει μια από τις επόμενες συνθήκες.

(Σ2) Για κάθε $x_0 \in M$, $t_0 \in I$ και $i = 1, 2, \dots, n - 1$, ισχύει

$$|a_i(t, x_1(t, t_0, x_0))| \geq 0, \text{ για κάθε } t \geq t_0 \quad (1.49)$$

(Σ3) Κάθε συνάρτηση $a_i(\cdot)$ είναι ανεξάρτητη του x_1 , και αν ορίσουμε $\delta_i(\cdot) = a_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, κάθε συνάρτηση $\delta_i(\cdot)$ ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\delta_i(t) \neq 0, \text{ για κάθε } t \geq 0 \quad (1.50)$$

Τέλος, παρουσιάζουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της εργασίας [16] που αφορά τριγωνικά συστήματα της μορφής (1.45).

Πρόταση 1.2.7

[16]

Έστω M ένα μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Υποθέτουμε ότι το (1.45) είναι M -δεξιά πλήρες, δηλαδή η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (1.45α) ικανοποιεί την εκτίμηση (1.36) για δοσμένη $\beta \in \mathcal{NN}$. Επίσης υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.45α) ικανοποιεί τη Σ1. Τότε το σύστημα ικανοποιεί την Β6 και σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.5 υπάρχει διακοπτόμενη ακολουθία παρατηρητών που εκτιμά την κατάσταση του (1.45).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

LUENBERGER-ΤΥΠΟΥ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΕΣ ΓΙΑ ΜΙΑ ΚΛΑΣΗ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της εργασίας [78] που αφορούν την εύρεση ικανών συνθηκών για την επιλυσιμότητα του Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητή για μη γραμμικά τριγωνικά συστήματα ελέγχου. Η απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος γίνεται μέσω μιας επαγωγικής διαδικασίας η οποία γενικεύει το αποτέλεσμα της εργασίας [77]. Το εν λόγω κεφάλαιο έχει την ακόλουθη δομή. Στην Ενότητα 2.2 δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί και οι έννοιες που σχετίζονται με την επιλυσιμότητα του ODP για γενικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα καθώς και το κεντρικό αποτέλεσμα που αφορά τριγωνικά συστήματα. Η Ενότητα 2.3 περιέχει τις αποδείξεις του κεντρικού αποτελέσματος και τέλος, η Ενότητα 2.4 περιέχει ένα αριθμητικό παράδειγμα που επιδεικνύει την μεθοδολογία της Ενότητας 2.3.

Περιεχόμενα Κεφαλαίου

2.1	Εισαγωγή.....	30
2.2	Ορισμοί.....	31
2.3	Απόδειξη Κεντρικού Αποτελέσματος.....	38
2.4	Ένα Αριθμητικό Παράδειγμα.....	56

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρατίθενται τα αποτελέσματα της εργασίας [78], όπου εξάγονται ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ενός μη αιτιατού (noncausal) Luenberger τύπου παρατηρητή για μια ευρεία κλάση μη γραμμικών τριγωνικών συστημάτων ελέγχου με ασθενέστερες υποθέσεις από τις υπάρχουσες στη βιβλιογραφία. Ένας μη-αιτιατός παρατηρητής είναι ένα σύστημα του οποίου τα δυναμικά απαιτούν επαρκή γνώση των μελλοντικών τιμών τόσο στην αντίστοιχη είσοδο όσο και στην αντίστοιχη έξοδο του παρατηρούμενου συστήματος, προκειμένου να εκτιμηθεί η κατάσταση του. Όπως έχει επισημανθεί στις εργασίες [16] και [77], η επιλυσιμότητα του ODP μέσω ενός μη αιτιατού παρατηρητή είναι ισοδύναμη με την επιλυσιμότητα του ίδιου προβλήματος μέσω ενός αιτιατού συστήματος με χρονική υστέρηση.

Το κεντρικό αποτέλεσμα (Πρόταση 2.2.1) αποτελεί γενίκευση της Πρότασης 1.2.6 και παρέχει ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ενός μη-αιτιατού χρονικά μεταβαλλόμενου Luenberger-τύπου παρατηρητή που εκτιμά την κατάσταση χρονικά μεταβαλλόμενων τριγωνικών συστημάτων ελέγχου της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, u) + a_1(t, x_1, u)x_2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.1\alpha}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_{n-1}, u) + a_{n-1}(t, x_1, u)x_n, \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, u), \\ y &= x_1 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.1\beta}$$

όπου $x := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, u είναι η είσοδος και $y = x_1$ η έξοδος του συστήματος. Συγκεκριμένα, η Πρόταση 2.2.1 δίνει ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του Μη-Αιτιατού Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητή (Non-causal Observer Design Problem (NCODP)) για συστήματα ελέγχου της μορφής (2.1) υπό ασθενέστερες συνθήκες, οι οποίες παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου (Υποθέσεις H1 και H2). Συγκεκριμένα, η υπόθεση H2 είναι ασθενέστερη της (Σ1) (σελίδα 27) και περιλαμβάνει τη γενική περίπτωση όπου οι συναρτήσεις $a_i(\cdot, \cdot, \cdot)$ μπορούν να μηδενιστούν σε ανοιχτά υποδιαστήματα του $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

2.2 Ορισμοί

Ξεκινάμε αυτή την Ενότητα δίνοντας τους απαραίτητους ορισμούς για την έννοια του μη αιτιατού παρατηρητή για το γενικό σύστημα

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2.2\alpha)$$

$$y = h(t, x, u), \quad (2.2\beta)$$

όπου y η έξοδος και u η είσοδος του συστήματος. Υποθέτουμε ότι οι $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι C^0 και για σταθερά $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ και $u \in \mathbb{R}^m$ οι απεικονίσεις $f(t, \cdot, u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $h(t, \cdot, u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι C^1 . Έστω $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ ένα ζευγάρι από μη κενά σύνολα και έστω $U = U(I, M)$ το σύνολο που αποτελείται από εισόδους $u = u_{t_0, x_0} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(t_0, x_0) \in I \times M$, $u \in \mathcal{L}_{loc}^\infty$ με

$$\{u = u_{t_0, x_0} \in U\} \neq \emptyset, \forall t_0 \in I, x_0 \in M. \quad (2.3)$$

Ορισμός 2.2.1

Λέμε ότι το σύστημα (2.2α) είναι (I, M, U) -δεξιά πλήρες (forward complete), αν για κάθε $t_0 \in I$, $x_0 \in M$ και είσοδο $u_{t_0, x_0} \in U$, η αντίστοιχη τροχιά $x(\cdot, t_0, x_0, u)$ του (2.2α) με αρχική συνθήκη $x_0 \in M$ και αρχικό χρόνο $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ υπάρχει για κάθε $t \geq t_0$.

Θεωρούμε την τριάδα (I, M, U) για την οποία ικανοποιείται η (2.3) και το σύστημα (2.2α) είναι (I, M, U) -δεξιά πλήρες. Για κάθε $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ορίζουμε το σύνολο εισόδων-εξόδων:

$$\Omega_{t_0} := \{(u, y) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m : y(t) = h(t, x(t, t_0, x_0, u)), \\ u(\cdot) = u_{t_0, x_0}(\cdot) \in U, t \geq t_0, x_0 \in M.\} \quad (2.4)$$

Ορισμός 2.2.2

Για δοσμένο $0 \leq \tau \leq \infty$, λέμε ότι η απεικόνιση

$$([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \times \Omega_{t_0} \ni (t, x; u, y) \rightarrow a_{u, y}(t, x) \in S$$

όπου S μη κενό σύνολο, είναι τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο (I, M, U) , αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$, $t_0 \in I$ και $(u, y) \in \Omega_{t_0}$, η τιμή της $a_{u, y}(t, x)$ εξαρτάται από τις τιμές $\{(y(s), u(s)), t_0 \leq s \leq t + \tau\}$. Λέμε ότι η $a_{u, y}(\cdot, \cdot)$ είναι αιτιατή ως προς το (I, M, U) , αν είναι 0-μη αιτιατή ως προς το (I, M, U) .

Παρατήρηση 2.2.1. Αν η απεικόνιση $a_{u,y}(\cdot, \cdot)$ είναι τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο (I, M, U) για κάποιο $\tau \geq 0$, τότε είναι και s -μη αιτιατή (ως προς το (I, M, U)) για κάθε $s > \tau$. \circ

Ορισμός 2.2.3

Λέμε ότι το **Μη-Αιτιατό Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή** (Noncausal Observer Design Problem (NCODP)) είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.2) ως προς το (I, M, U) για μη κενά σύνολα $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ και ένα σύνολο U από εισόδους $u = u_{t_0, x_0} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $t_0 \in I$, $x_0 \in M$ για τα οποία η (2.3) ικανοποιείται και το (2.2α) είναι (I, M, U) -δεξιά πλήρες, αν υπάρχει $\tau \in (0, \infty)$ έτσι ώστε για κάθε $t_0 \in I$ και $(u, y) \in \Omega_{t_0}$, υπάρχουν μια συνεχή απεικόνιση

$$g := g_{t_0, y, u, \tau}(t, z, y, u) : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

και μια συνάρτηση $E = E_{t_0, y, u} \in \mathcal{LNK}$, και οι δύο τ -μη-αιτιατές ως προς το (I, M, U) , κατά τέτοιο τρόπο ώστε για σταθερά $(t, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m$, η $g(t, \cdot, \cdot, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ να είναι C^1 και το σφάλμα $e(t) := x(t) - z(t)$ μεταξύ της τροχιάς $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, u)$ του συστήματος (2.2) και της τροχιάς $z(\cdot) = z(\cdot, t_0, z_0, u)$ του παρατηρητή

$$\dot{z} = g(t, z, y, u), \quad (2.6)$$

ικανοποιεί την εκτίμηση

$$|e(t)| \leq E(t, t_0, |x_0 - z_0|), \forall t \geq t_0, x_0, z_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Είμαστε σε θέση τώρα να παρουσιάσουμε το κεντρικό αποτέλεσμα που αφορά την επιλυσιμότητα του NCODP για συστήματα της μορφής (2.1). Θεωρούμε ότι για κάθε $i = 1, \dots, n$, οι απεικονίσεις $f_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^0 , για σταθερό $t \geq 0$ και $u \in \mathbb{R}^m$, οι $f_i(t, \cdot, u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^1 και για κάθε $i = 1, \dots, n-1$ οι $a_i(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^1 . Επιπλέον για το σύστημα (2.1α) υποθέτουμε τα εξής:

H1: Υπάρχει συνάρτηση $\omega \in \mathcal{NNN}$ τέτοια ώστε

$$\left(\sum_{i=2}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial (x_2, \dots, x_i)}(t, x, u) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \omega(t, |x_1|, |u|), \quad (2.8)$$

$$\forall (t, x, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (2.9)$$

H2: Υπάρχουν μη κενά υποσύνολα $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ και U που περιέχει όλες τις εισόδους $u = u_{t_0, x_0} \in C^1([t_0; \infty); \mathbb{R}^m)$, $(t_0, x_0) \in I \times M$ για τις οποίες η (2.3) ικανοποιείται και έτσι ώστε:

- (i) Το σύστημα (2.1α) είναι (I, M, U) -δεξιά πλήρες;

(ii) Για κάθε $t_0 \in I$ και $(u, y) \in \Omega_{t_0} \cap C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m)$ υπάρχει εκ των προτέρων γνωστό $\xi > 0$ έτσι ώστε για μια ακολουθία από χρόνους $\{t_\nu > t_0, \nu = 1, 2, \dots\}$ με

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu = \infty, \quad (2.10\alpha)$$

$$t_{\nu+1} - t_\nu < \xi, \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10\beta)$$

(όπου το t_0 στην (2.10β) συμπίπτει με την αρχική χρονική στιγμή) να ισχύει

$$a_i(t_\nu, y(t_\nu), u(t_\nu)) \neq 0, \nu = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, n-1 \quad (2.11)$$

(iii) Για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ και μη κενά ανοιχτά διαστήματα $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ για τα οποία

$$a_i(t, y(t), u(t)) = 0, \forall t \in \Delta \quad (2.12\alpha)$$

τότε

$$a_j(t, y(t), u(t)) = 0, \forall j = i+1, i+2, \dots, n-1; \quad (2.12\beta)$$

και επιπλέον, για κάθε $i \geq 2$ και $t \geq 0$ για τα οποία η (2.12α) ικανοποιείται, θεωρούμε:

$$\max \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, y(t), \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ii}, u(t)), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, y(t), \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \dots, \alpha_{nn}, u(t)) \right\} \leq 0$$

$$\forall \alpha_{j\nu} \in \mathbb{R}, j = i, \dots, n; \nu = 2, 3, \dots, j \quad (2.12\gamma)$$

Παρατήρηση 2.2.2. Η συνθήκη H2(i) ικανοποιείται, αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι το σύνολο U περιέχει όλες τις εισόδους $u = u_{t_0, x_0}$ που ικανοποιούν την $|x_1(t, t_0, x_0, u)| \leq k_u(t, t_0, |x_0|), \forall t \geq t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x_0 \in M$, για συγκεκριμένη συνάρτηση $k_u \in \mathcal{NN}$. Η προηγούμενη ανίσωση σε συνδυασμό με την (2.9) συνεπάγεται την H2(i). ◦

Η επόμενη πρόταση αποτελεί το κεντρικό αποτέλεσμα αυτού του Κεφαλαίου και η απόδειξή της δίνεται στην Ενότητα 2.3.

Πρόταση 2.2.1

[78]

Αν ικανοποιούνται οι H1 και H2, τότε το NCODP είναι επιλύσιμο ως προς το (I, M, U) για το σύστημα (2.35), όπου τα I, M και U ορίστηκαν στην υπόθεση H2. Συγκεκριμένα, υπάρχει $T > 0$ έτσι ώστε η εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος δίνεται από τον Luenberger-τύπου παρατηρητή

$$\dot{z} = F(t, z, y, u) + \Xi(t, y, u) \underbrace{(1, 0, \dots, 0)'}_{n-1} (y - z_1) \quad (2.13)$$

για συγκεκριμένη συνεχή απεικόνιση $\Xi := \Xi_{t_0, y, u}(t, y, u) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, έτσι ώστε για κάθε $t \geq 0$ η $\Xi(t, \cdot, \cdot)$ είναι C^1 και εν γένει T -μη αιτιατή ως προς το (I, M, U) .

Παρατήρηση 2.2.3. (i) Το κεντρικό αποτέλεσμα ισχύει και με ασθενέστερες υποθέσεις. Για παράδειγμα, υπό την έλλειψη της H2(ii) και αν, αντί της H2(iii), υποθέσουμε την εξής πιο ισχυρή υπόθεση: Οι παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, i = 2, 3, \dots, n$ είναι φραγμένες και υπάρχει σταθερά $c > 0$, έτσι ώστε για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ και μη κενό ανοιχτό διάστημα $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ για το οποίο η (2.12α) ικανοποιείται, τότε η (2.12β) πληρούται και επιπλέον για $i \geq 2$ έχουμε:

$$\max \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, y(t), \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ii}, u(t)), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, y(t), \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \dots, \alpha_{nn}, u(t)) \right\} \leq -c,$$

$$\forall \alpha_{j\nu} \in \mathbb{R}, j = i, \dots, n; \nu = 2, 3, \dots, j.$$

(ii)(Σύγκριση με [77, Πρόταση 3.1]) Το κεντρικό αποτέλεσμα στην εργασία [77] δόθηκε ως εξής: Υποθέτουμε ότι το σύστημα (2.1) (χωρίς εισόδους) ικανοποιεί τη συνθήκη (1.46) και επιπλέον θεωρούμε τα μη κενά σύνολα $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ και $M \subset \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε να ισχύει η (Σ1) για κάθε $(t_0, x_0) \in I \times M$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $k \in \mathcal{NNN}$ έτσι ώστε

$$|x_1(t, t_0, x_0)| \leq k(t, t_0, |x_0|),$$

για κάθε $t \geq t_0 \in I$ και $x_0 \in M$. Τότε, για κάθε $\tau > 0$ το NCODP είναι επιλύσιμο ως προς το (I, M) για το (2.1) με ένα Luenberger-τύπου παρατηρητή, του οποίου τα δυναμικά είναι τ -μη αιτιατά ως προς το (I, M) .

(iii) Η υπόθεση H2 είναι ασθενέστερη της (Σ1)(σελίδα 27) που επιβλήθηκε στα άρθρα [16] και [77] για συστήματα της μορφής (2.1) χωρίς εισόδους.

(iv) Σύμφωνα με την Υπόθεση H2, κάθε όρος a_i στα δυναμικά του (2.1α) εν γένει εξαρτάται από τα y (έξοδος) και u (είσοδος) και επομένως μπορεί να μηδενίζεται για κάποια μη μηδενικά (u, y) . Εφόσον δεν υπάρχει εκ των προτέρων γνώση για το που μηδενίζεται κάθε συνάρτηση $a_i(\cdot, y(\cdot), u(\cdot))$, είναι αναγκαία η κατασκευή του παρατηρητή με μη αιτιατά δυναμικά.

(v) Τέλος, επισημαίνουμε ότι ο παρατηρητής (2.13) που προτείνουμε, γενικεύει την έννοια του παρατηρητή υψηλού κέρδους (high gain observer) και συγκεκριμένα του “αυξανόμενου κέρδους” (increasing-gain Luenberger observer) που έχει υιοθετηθεί στη βιβλιογραφία (βλέπε πχ [6], [9], [26], [29], [51]). ◦

Παράδειγμα 2.2.1. (Συστήματα τύπου Liénard). Θεωρούμε το σύστημα

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + \varepsilon g(x) = u, (x, u) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.14}$$

που περιέχει μια άγνωστη παράμετρο $\varepsilon \geq 0$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f, g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

και ικανοποιούν τα ακόλουθα:

$$g(x)x > 0, \forall x \neq 0; \quad g(0) = 0; \quad (2.15\alpha)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(s) ds = \infty; \quad (2.15\beta)$$

$$f(0) \geq 0; \quad \exists k \geq 0 : f(x) \geq -k, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.15\gamma)$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι $y = x$ είναι η έξοδος του συστήματος και U το σύνολο όλων των εισόδων $u = u_{t_0} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$, $t_0 \geq 0$ που ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα:

Ιδιότητα 1

Για κάθε $t_0 \geq 0$ υπάρχει $\xi > 0$ και ακολουθία $\{t_\nu > t_0, \nu = 1, 2, \dots\}$ με

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu = \infty \text{ και } t_{\nu+1} - t_\nu \leq \xi, \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16\alpha)$$

κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$u(t_\nu) \neq 0. \quad (2.16\beta)$$

Σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τα $(x, \dot{x}, \varepsilon)$, όταν η $x = x(t)$ είναι διαθέσιμη, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.2.1. Πράγματι, το σύστημα (2.14) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1)x_2 - x_3g(x_1) + u \end{aligned} \quad (2.17\alpha)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= 0 \\ y &= x_1 \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 \geq 0, \end{aligned} \quad (2.17\beta)$$

όπου προφανώς έχει την τριγωνική μορφή (2.1) με $f_1 = 0$, $f_2 = -f(x_1)x_2 + u$, $f_3 = 0$, $a_1 = 1$ και $a_2 = -g(x_1)$. Θα δείξουμε πρώτα ότι το σύστημα (2.17α) είναι δεξιά πλήρες ως προς το (I, M, U) , όπου $I := \mathbb{R}_{\geq 0}$, $M := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ και U όπως ορίστηκε στην Ιδιότητα 1. Πράγματι, για κάθε σταθερό $x_3 \geq 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$(x_1, x_2) \rightarrow V(x_1, x_2) := x_3 \int_0^{x_1} g(s) ds + \frac{1}{2}x_2^2, \quad (2.18)$$

η οποία, λόγω των (2.15α) και (2.15β), είναι θετικά ορισμένη (positive definite) και **proper** στο \mathbb{R}^2 για $x_3 > 0$, καθώς και θετικά ορισμένη και **proper** στο \mathbb{R} για την περίπτωση όπου $x_3 = 0$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη χρονική παράγωγο \dot{V} της V κατά μήκος των τροχιών του συστήματος

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -f(x_1)x_2 - x_3g(x_1) + u; x_3 = \text{constant} \geq 0. \quad (2.19)$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν τις (2.15γ), (2.18) και (2.19) έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x_2x_3g(x_1) - f(x_1)x_2^2 - x_2x_3g(x_1) + x_2u = -f(x_1)x_2^2 + ux_2 \\ &\leq kx_2^2 + |u|x_2 \leq (k + |u|)x_2^2 \\ &\leq 2(k + |u|)\frac{x_2^2}{2} + 2(k + |u|x_3) \int_0^{x_1} g(s)ds = 2(k + |u|)V, \end{aligned}$$

για κάθε $t \geq 0$, (x_1, x_2) μακριά από το μηδέν για την περίπτωση όπου $x_3 \geq 0$ και ομοίως για $x_3 = 0$, το οποίο μας εγγυάται ότι το σύστημα (2.17α) είναι δεξιά πλήρες ως προς το (I, M, U) . Τέλος, λαμβάνοντας υπ όψιν τις (2.15α), (2.15γ) καθώς και την Ιδιότητα 1 προκύπτει ότι ικανοποιούνται και οι υπόλοιπες υποθέσεις H1, H2(i)-H2(iii). Σύμφωνα λοιπόν με την Πρόταση 2.2.1 το NCODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.14) ως προς το (I, M, U) με έναν μη αιτιατό Luenberger-τύπου παρατηρητή. \triangleleft

Παράδειγμα 2.2.2. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & & \alpha_{n-1,n-1} & 0 \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \phi_1(t, x_1) + x_2 \\ \phi_2(t, x_1) + x_3 \\ \vdots \\ \phi_{n-1}(t, x_1) + x_n \\ \phi_n(t, x_1) \end{pmatrix} \quad (2.20\alpha)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$$

$$y = x_1 \in \mathbb{R}, \quad (2.20\beta)$$

όπου οι $\phi_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(i = 1, \dots, n)$ είναι C^0 , για κάθε $t \geq 0$ οι απεικονίσεις $\phi_i(t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^1 και ικανοποιούν:

$$|\phi_i(t, x_1)| \leq K + L|x_1|, \forall t \geq 0, x_1 \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n, \quad (2.21)$$

και $\alpha_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j \leq i$ είναι πραγματικές σταθερές με:

$$\alpha_{i,i} \leq 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.22)$$

Θεωρούμε επίσης το σύνολο U που αποτελείται από όλες τις εισόδους $u \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$, $t_0 \geq 0$, που ικανοποιούν την **Ιδιότητα 1** του προηγούμενου παραδείγματος. Παρατηρούμε πρώτα ότι το σύστημα (2.20) έχει τη μορφή (2.1) με

$$f_i(t, x_1, \dots, x_i, u) = \sum_{j=1}^{j=i} \alpha_{i,j} x_j + u \phi_i(t, x_1), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.23\alpha)$$

$$a_i(t, x_1, u) = u, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.23\beta)$$

και λόγω της υπόθεσης (2.21) είναι δεξιά πλήρες ως προς το (I, M, U) , όπου $I := \mathbb{R}_{\geq 0}$, $M := \mathbb{R}^n$ και U όπως ορίστηκε προηγουμένως. Επιπλέον, λόγω της (2.22) και της Ιδιότητας 1, συνεπάγεται ότι όλες οι συνθήκες της υπόθεσης H2 πληρούνται. Καταλήγουμε συνεπώς ότι σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.1 το NCODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.20), ως προς $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^n, U)$, με μη αιτιατό Luenberger παρατηρητή. Τέλος, κάθε διγραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + uBx, \\ y &= cx, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.24)$$

όπου $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ υπό τις υποθέσεις:

- I. το ζευγάρι (c, B) ικανοποιεί τη Συνθήκη Βαθμού Παρατηρησιμότητας (Observability Rank Condition),
- II. $cB^i A \in \text{span} \{c, cB, \dots, cB^i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$,
- III. όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι μη-θετικές,

μπορεί να μετατραπεί με χρήση γραμμικής αλλαγής συντεταγμένων σε ένα σύστημα της μορφής (2.20) με $\phi_i = \lambda_i x_1$, $i = 1, 2, \dots, n$ για συγκεκριμένες σταθερές λ_i , κατά τέτοιο τρόπο ώστε η (2.22) να ικανοποιείται, και επομένως, το NCODP να είναι επιλύσιμο για το (2.24) ως προς το $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^n, U)$, με μη αιτιατό Luenberger παρατηρητή. Για την ειδική περίπτωση (2.24) όπου $A = 0$, δηλαδή, για το παρατηρήσιμο σύστημα

$$\dot{x} = uBx, \quad y = cx, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad (2.25)$$

όλες οι υποθέσεις I-III ικανοποιούνται, συνεπώς, η Πρόταση 2.2.1 εγγυάται ότι το NCODP είναι επιλύσιμο για το (2.25) για οποιαδήποτε είσοδο u που ικανοποιεί την Ιδιότητα 1. \triangleleft

2.3 Απόδειξη Κεντρικού Αποτελέσματος

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος (Πρόταση 2.2.1), θα επικεντρώσουμε την ανάλυση μας σε γενικά συστήματα της μορφής

$$\dot{x} = f(t, x, u) := F(t, x, H(t, u)x, u), \quad (2.26\alpha)$$

$$(t, x, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$y = h(t, x, u) := H(t, u)x \in \mathbb{R}^k \quad (2.26\beta)$$

όπου οι $H : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{k \times n}$ και $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι C^0 και για οποιαδήποτε σταθερά (t, u) , η απεικόνιση $F(t, \cdot, \cdot, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι C^1 . Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μη κενά υποσύνολα $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ καθώς και ένα σύνολο U που περιέχει όλες τις εισόδους $u = u_{t_0, x_0} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R}^m)$, $(t_0, x_0) \in I \times M$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η (2.3) και το σύστημα (2.26α) να είναι (I, M, U) -δεξιά πλήρες. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $k', \ell \geq 1$, απεικονίσεις $A = A(t, q, y, u) \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{n \times n})$, $\omega \in \mathcal{NNN}$ και $\Theta = \Theta(t, y, u) \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{k' \times k})$ έτσι ώστε, αν ορίσουμε

$$\Delta F(t, x, z, y, u) := F(t, x, y, u) - F(t, z, y, u) \quad (2.27)$$

$$Q_{u, y}(t) := \{q \in \mathbb{R}^\ell : |q| \leq \omega(t, |y|, |u|)\} \quad (2.28)$$

να ισχύουν τα ακόλουθα:

A1. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $y \in \mathbb{R}^k$, $u \in \mathbb{R}^m$ και $x, z \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει διάνυσμα $q \in Q_{u, y}(t)$ έτσι ώστε

$$\Delta F(t, x, z, y, u) = A(t, q, y, u)(x - z). \quad (2.29)$$

A2. Αν θεωρήσουμε το σύνολο Ω_{t_0} όπως αυτό ορίστηκε στην (2.4), τότε για κάθε $t_0 \in I$ και $(u, y) \in \Omega_{t_0}$, υπάρχει ένας χρονικά μεταβαλλόμενος και συμμετρικός πίνακας $P := P_{t_0, y, u} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ καθώς και μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση $d := d_{t_0, y, u} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\int_{t_0}^{\infty} d(t) dt = \infty; \quad (2.30\alpha)$$

$$P(t) > I_{n \times n}, \forall t \geq t_0; \quad (2.30\beta)$$

$$e' P(t) A(t, q, y(t), u(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}(t) e \leq -d(t) e' P(t) e$$

$$\forall e \in \ker \Theta(t, y(t), u(t)) H(t, u(t)), q \in Q_{y(t), u(t)}(t), \text{ a.e. } t \geq t_0 \quad (2.30\gamma)$$

όπου $I_{n \times n}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $n \times n$ και \dot{P} η χρονική παράγωγος του P .

Η επόμενη πρόταση αποτελεί μερική γενίκευση της Πρότασης 1.2.3 και η απόδειξής της είναι παρόμοια με αυτή στην εργασία [77].

Πρόταση 2.3.1

[78]

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μη κενά υποσύνολα $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ και ένα σύνολο U που περιέχει τις συνεχείς εισόδους $u = u_{t_0, x_0} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(t_0, x_0) \in I \times M$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η (2.3) και το σύστημα (2.26α) να είναι (I, M, U) -δεξιά πλήρες. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) Αν πληρούται η A2, τότε για κάθε $t_0 \in I$, $u \in U$, $(u, y) \in \Omega_{t_0}$ και $\hat{d} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ που ικανοποιεί

$$\int_{t_0}^{\infty} \hat{d}(t) dt = \infty; \quad (2.31\alpha)$$

$$\begin{aligned} \hat{d}(t) < d(t), \forall t \geq t_0 : \ker \Theta(t, y(t), u(t))H(t, u(t)) \neq \mathbb{R}^n \\ \hat{d}(t) \leq d(t), \forall t \geq t_0 : \ker \Theta(t, y(t), u(t))H(t, u(t)) = \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.31\beta)$$

υπάρχει μια συνάρτηση $\phi = \phi_{t_0, y, u} \in \mathcal{N} \cap C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} e'P(t)A(t, q, y(t), u(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e - \phi(t)|\Theta(t, y(t), u(t))H(t, u(t))e|^2 \leq -\hat{d}(t)e'P(t)e \\ \forall e \in \mathbb{R}^n, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t \geq t_0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Συγκεκριμένα, όταν οι συναρτήσεις $P(\cdot)$ και $d(\cdot)$ είναι τ -μη αιτιατές για κάποιο συγκεκριμένο $\tau \geq 0$ ως προς το (I, M, U) , τότε και η \hat{d} είναι επίσης τ -μη αιτιατή και για κάθε $\tau' > \tau$, υπάρχει μια συνάρτηση ϕ που ικανοποιεί την (2.32), η οποία εν γένει είναι τ' -μη αιτιατή ως προς το (I, M, U) .

- (ii) Αν ικανοποιούνται οι Υποθέσεις A1 και A2, τότε για οποιοδήποτε $(t_0, x_0) \in I \times M$ και $(u, y) \in \Omega_{t_0}$ η αντίστοιχη τροχιά του συστήματος

$$\dot{z} = F(t, z, y, u) + \phi(t)P^{-1}(t)H'(t, u)\Theta'(t, y, u)\Theta(t, y, u)(y - H(t, u)z) \quad (2.33)$$

ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$ και το σύστημα (2.33) είναι ένας παρατηρητής για το σύστημα (2.26) και το NCODP είναι επιλύσιμο για το (2.26) ως προς το (I, M, U) .

Παρατήρηση 2.3.1. Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με την μεθοδολογία που ακολουθείται στην απόδειξη της Πρότασης 2.1 στην εργασία [77], η συνάρτηση ϕ που ικανοποιεί την ανίσωση

(2.32) κατασκευάζεται ως εξής: Ορίζουμε

$$K(t) := \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1, w'P(t)A(t, q, y(t), u(t))w + \frac{1}{2}w'(\frac{d}{dt}P(t))w + \hat{d}(t)w'P(t)w < 0, \\ \forall q \in Q_{y(t), u(t)}(t)\}, \quad (2.34\alpha)$$

$$K^c(t) := \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1, w \notin K(t)\}, \quad (2.34\beta)$$

$$C(t) \begin{cases} := (\min\{|\Theta(t, y(t), u(t))H(t, u(t))w|, w \in K^c(t)\})^{-2} \times \max\{(|P(t)||A(t, q, y(t), u(t))| \\ + \frac{1}{2}|\frac{d}{dt}P(t)| + \hat{d}(t)|P(t)|), q \in Q_{y(t), u(t)}(t)\}, t \geq t_0 : K^c(t) \neq \emptyset \\ := 0, \quad t \geq t_0 : K^c(t) = \emptyset \end{cases} \quad (2.34\gamma)$$

Τότε, η επιθυμητή ϕ που ικανοποιεί την ανίσωση (2.32) είναι οποιαδήποτε τ' -μη αιτιατή συνάρτηση κλάσεως $\mathcal{N} \cap C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ τέτοια ώστε

$$\phi(t) > \sup\{C(s), s \in [t_0, t]\}, \forall t \geq t_0. \quad (2.34\delta)$$

ο

Απόδειξη της Πρότασης 2.2.1. Προκειμένου να αποδείξουμε την επιλυσιμότητα του NCODP για το σύστημα (2.1), δείχνουμε πρώτα ότι όλες οι υποθέσεις της Πρότασης 2.3.1 πληρούνται γι' αυτό το σύστημα. Παρατηρούμε πρώτα, ότι το σύστημα (2.1) έχει τη μορφή (2.26) με δυναμικά

$$F(t, x, y, u) := \begin{pmatrix} f_1(t, y, u) + a_1(t, y, u)x_2 \\ f_2(t, y, x_2, u) + a_2(t, y, u)x_3 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, y, x_2, \dots, x_{n-1}, u) + a_{n-1}(t, y, u)x_n \\ f_n(t, y, x_2, \dots, x_n, u) \end{pmatrix} \\ (t, x, y, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \quad (2.35\alpha)$$

και έξοδο

$$y = h(t, x, u) := H(t, u)x \in \mathbb{R}, \\ H(t, u) := (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}) \quad (2.35\beta)$$

Επιπλέον, αν ορίσουμε

$$A(t, q, y, u) := \begin{pmatrix} \beta_{1,1}(=0) & a_1(t, y, u) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_{2,1}(=0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t, y, \bar{\alpha}_2, u) & a_2(t, y, u) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-2,1}(=0) & \beta_{n-2,2} & \dots & & a_{n-2}(t, y, u) & 0 \\ \beta_{n-1,1}(=0) & \beta_{n-1,2} & \beta_{n-1,3} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(t, y, \bar{\alpha}_{n-1}, u) & a_{n-1}(t, y, u) \\ \beta_{n,1}(=0) & \beta_{n,2} & \beta_{n,3} & \dots & \beta_{n,n-1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, y, \bar{\alpha}_n, u) \end{pmatrix} \quad (2.36\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{u,y}(t) := \{q = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^\ell, \ell = \frac{n(n+1)}{2}; \alpha = (\bar{\alpha}_2; \bar{\alpha}_3; \dots; \bar{\alpha}_n); \bar{\alpha}_i := (a_{i2}, \dots, a_{ii}), i = 2, \dots, n; \\
 \beta = (\beta_{3,2}; \beta_{4,2}, \beta_{4,3}; \dots; \beta_{n,2}, \dots, \beta_{n,n-1}) : |q| \leq \omega(t, |y|, |u|)\}
 \end{aligned} \tag{2.36\beta}$$

όπου η $\omega(\cdot, \cdot, \cdot)$ ορίζεται από την (2.9), τότε από τις (2.9), (2.35α), (2.36) και με χρήση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (βλέπε Παράρτημα Δ), έχουμε ότι η Υπόθεση A1 ικανοποιείται. Πράγματι, από την (2.35α) εξάγουμε ότι

$$\begin{aligned}
 & F(t, x, y, u) - F(t, z, y, u) = \\
 & \begin{pmatrix} f_1(t, y, u) + a_1(t, y, u)x_2 \\ f_2(t, y, x_2, u) + a_2(t, y, u)x_3 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, y, x_2, \dots, x_{n-1}, u) + a_{n-1}(t, y, u)x_n \\ f_n(t, y, x_2, \dots, x_n, u) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(t, y, u) + a_1(t, y, u)z_2 \\ f_2(t, y, z_2, u) + a_2(t, y, u)z_3 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, y, z_2, \dots, z_{n-1}, u) + a_{n-1}(t, y, u)z_n \\ f_n(t, y, z_2, \dots, z_n, u) \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 0 & a_1(t, y, u) & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t, y, x_2 + \lambda_1(z_2 - x_2), u) & a_2(t, y, u) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}(t, y, x_2 + \lambda_{n-2}(z_2 - x_2), \dots, x_{n-1} + \lambda_{n-2}(z_{n-1} - x_{n-1}), u) & \dots \\ 0 & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(t, y, x_2 + \lambda_{n-1}(z_2 - x_2), \dots, x_n + \lambda_{n-1}(z_n - x_n), u) & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & a_{n-1}(t, y, u) & \dots \\ \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, y, x_2 + \lambda_{n-1}(z_2 - x_2), \dots, x_n + \lambda_{n-1}(z_n - x_n), u) & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} - z_{n-1} \\ x_n - z_n \end{pmatrix} \\
 & = A(t, q, y, u)(x - z), \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} \in (0, 1),
 \end{aligned}$$

με $\beta_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, y, x_2 + \lambda_{i-1}(z_2 - x_2), \dots, x_i + \lambda_{i-1}(z_i - x_i)), i = 3, \dots, n; j = 2, \dots, i - i$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι ικανοποιείται και η Υπόθεση A2. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι, υπό τις Υποθέσεις H1 και H2, υπάρχει $T > \xi$, με ξ όπως ορίστηκε στην (2.10β) της H2(ii), έτσι ώστε για κάθε $t_0 \in I$ και $(u, y) \in \Omega_{t_0}$, υπάρχουν, ένας χρονικά μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $d \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$, και οι δύο T -μη αιτιατές ως προς το (I, M, U) , κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι (2.30α)-(2.30γ). Ακολούθως, για $i = 2, 3, \dots, n$ ορίζουμε τα εξής:

$$H_i := (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}) \tag{2.37\alpha}$$

$$\Theta_i(t, y, u) := \begin{cases} (a_{n-i+1}(t, y, u)a_{n-i}(t, y, u) \cdots a_1(t, y, u))^2, i = 2, \dots, n-1 \\ a_1^2(t, y, u), i = n \end{cases} \quad (2.37\beta)$$

$$A_i(t, q, y, u) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{n-i+1}}{\partial x_{n-i+1}}(t, y, \bar{\alpha}_{n-i+1}, u) & | & a_{n-i+1}(t, y, u) & 0 \cdots 0 \\ \hline \beta_{n-i+2, n-i+1} & | & & \\ \vdots & | & & \boxed{A_{i-1}(t, q, y, u)} \\ \beta_{n, n-i+1} & | & & \end{pmatrix} \quad (2.37\gamma)$$

$$i = 2, 3, \dots, n; \quad A_1(t, q, y, u) := \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, y, \bar{\alpha}_n, u)$$

όπου τα $\bar{\alpha}_j, j = 2, \dots, n$ ορίζονται από την (2.36β).

Έστω λοιπόν $t_0 \in I$ και ξ όπως ορίστηκε στην Υπόθεση H2. Για να απλοποιήσουμε την απόδειξη, θεωρούμε επιπλέον ότι υπάρχει ακολουθία $\{t'_\nu \geq t_0, \nu = 1, 2, \dots\}$ με $\{t'_\nu\} \cap \{t_\nu\} = \emptyset$ (όπου $\{t_\nu\}$ είναι η ακολουθία που αναφέρεται στην Υπόθεση H2(ii)) και ικανοποιεί τις (2.10α) και (2.10β) κατά τέτοιο τρόπο ώστε $a_i(t'_\nu, y(t'_\nu), u(t'_\nu)) = 0$ για $\nu = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n-1$. Διαφορετικά, μπορούμε να διαλέξουμε μια αυθαίρετη ακολουθία $\{t'_\nu\}$ που ικανοποιεί τις (2.10α), (2.10β) και $\{t'_\nu\} \cap \{t_\nu\} = \emptyset$ και να αντικαταστήσουμε κάθε όρο $a_i(t'_\nu, y(t'_\nu), u(t'_\nu))$ στην (2.37β) (καθώς και όπου αλλού εμφανίζεται ο όρος $\Theta_i(\cdot, \cdot, \cdot)$ στην απόδειξη) με τον όρο $\delta(\cdot)a_i(\cdot, \cdot, \cdot)$ για κάποια συνάρτηση $\delta \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ που ικανοποιεί $\delta(t'_\nu) = 0$ και $\delta(t) > 0, \forall t \notin \{t'_\nu\}$. Τότε, μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια ανάλυση που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω για την απόδειξη της Πρότασης 2.2.1 με στοιχειώδεις αλλαγές. Έστω λοιπόν

$$\tau > \xi. \quad (2.38)$$

Χρησιμοποιώντας τις Υποθέσεις H2(ii), H2(iii) και την προηγούμενη πρόσθετη υπόθεση, μπορούμε να βρούμε διαστήματα

$$I_i^k = [t_0 + \sigma_i^k, t_0 + \sigma_i^{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.39)$$

όπου $\{\sigma_i^k \in \mathbb{R}_{\geq 0}, k = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n-1\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία με $\sigma_i^0 = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_i^k = \infty$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n-1$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$\xi < \sigma_i^{k+1} - \sigma_i^k < \tau, \forall k = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.40)$$

καθώς και ένα ζευγάρι από ξένα και ανοιχτά διαστήματα A_i^k, B_i^k του I_i^k , με το A_i^k να είναι μη κενό, έτσι ώστε

$$I_i^k = clA_i^k \cup B_i^k \quad (2.41\alpha)$$

$$t_0 + \sigma_i^k \in \partial A_i^k, k = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.41\beta)$$

και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε επιπλέον ότι $t_0 + \sigma_i^0 (= 0) \in \partial A_i^0, i = 1, 2, \dots, n-1$.

Επίσης, για τα σύνολα A_i^k, B_i^k ισχύουν τα εξής:

$$a_i(t, y(t), u(t))a_{i-1}(t, y(t), u(t)) \cdots a_1(t, y(t), u(t)) \neq 0, \quad \forall t \in A_i^k; \quad (2.42\alpha)$$

$$a_i(t, y(t), u(t))a_{i-1}(t, y(t), u(t)) \cdots a_1(t, y(t), u(t)) = 0, \quad \forall t \in \partial A_i^k \quad (2.42\beta)$$

$$a_i(t, y(t), u(t)) = 0, \quad \forall t \in B_i^k, \quad (2.42\gamma)$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας τα σύνολα B_i^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) είναι επίσης μη κενά. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συνθήκη (iii) της Υπόθεσης H2 και την (2.42γ), έχουμε ότι:

$$\bigcup_{k=0,1,2,\dots} B_1^k \subset \bigcup_{k=0,1,2,\dots} B_2^k \subset \cdots \subset \bigcup_{k=0,1,2,\dots} B_{n-1}^k \quad (2.43)$$

Τέλος, θεωρούμε μια φραγμένη συνάρτηση $\psi \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{0\})$ με

$$\int_{t_0}^{\infty} \psi(t) dt < +\infty. \quad (2.44)$$

Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι

$$\int_{I_i^k} \psi(t) dt \leq \frac{1}{(k+1)^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.45)$$

Είμαστε σε θέση τώρα να αποδείξουμε τους επόμενους δύο Ισχυρισμούς, οι οποίοι παίζουν σημαντικό ρόλο στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.1. Η απόδειξή τους στηρίζεται σε μια επαγωγική διαδικασία η οποία χρησιμοποιεί αναδρομικά το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.3.1.

Ισχυρισμός 1

Θεωρούμε τις απεικονίσεις H_i, Θ_i, A_i και τη σταθερά τ όπως ορίστηκαν από τις (2.37α), (2.37β), (2.37γ) και (2.38), αντίστοιχα. Τότε, για κάθε $i = 2, 3, \dots, n$, $t_0 \in I$ και $(u, y) \in \Omega_{t_0}$ υπάρχουν σταθερά $\tau_i \in [\tau, 2\tau)$, ένας χρονικά μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_i = (P_i)_{t_0, y, u} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{i \times i})$ και μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση $d_i = (d_i)_{t_0, y, u} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, και οι δύο απεικονίσεις τ_i -μη αιτιατές ως προς το (I, M, U) , έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (2.30α)-(2.30γ) με $A := A_i, H := H_i, \Theta := \Theta_i, P := P_i$ και $d := d_i$, δηλαδή:

$$\int_{t_0}^{\infty} d_i(t) dt = \infty; \quad (2.46\alpha)$$

$$P_i(t) > I_{i \times i}, \quad \forall t \geq t_0; \quad (2.46\beta)$$

$$e' P_i(t) A_i(t, q, y(t), u(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_i(t) e \leq -d_i(t) e' P_i(t) e,$$

$$\forall e := (e_1, \dots, e_i) \in \ker \Theta_i(t, y(t), u(t)) H_i, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), \text{ a.e. } t \geq t_0 \quad (2.46\gamma)$$

Άμεση συνέπεια του Ισχυρισμού 1 και της Πρότασης 2.3.1(i), για την περίπτωση όπου $i = n$, είναι ο εξής ισχυρισμός:

Ισχυρισμός 2

(Επιλυσιμότητα του NCODP για το σύστημα (2.1)): Έστω $T := 2\tau$, όπου τ ορίζεται από την (2.38). Τότε, για κάθε $t_0 \in I$ και $(u, y) \in \Omega_{t_0}$, υπάρχει ένας χρονικά μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P = P_{t_0, y, u} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $d = d_{t_0, y, u} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$, και οι δύο απεικονίσεις T -μη αιτιατές ως προς το (I, M, U) , που ικανοποιούν

$$\int_{t_0}^{\infty} d(t)dt = \infty; \quad (2.47\alpha)$$

$$P(t) > I_{n \times n}, \forall t \geq t_0 \quad (2.47\beta)$$

καθώς και μια T -μη αιτιατή συνάρτηση $\phi = \phi_{t_0, y, u} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ έτσι ώστε

$$e'P(t)A(t, q, y(t), u(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e - \phi(t)|\Theta(t, y(t), u(t))H(t, u(t))e|^2 \leq -d(t)e'P(t)e, \quad \forall e \in \mathbb{R}^n, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t \geq t_0 \quad (2.47\gamma)$$

όπου η $A(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ ορίζεται από την (2.36), $H(\cdot, \cdot) := H_n = (1, 0, \dots, 0)$ και $\Theta := \Theta_n(t, y, u) = a_1^2(t, y, u)$. Τότε, λόγω της (2.47) και της εγκυρότητας της Υπόθεσης A1 για το σύστημα (2.1), η Πρόταση 2.3.1 πληρούται, και επομένως το NCODP είναι επιλύσιμο για το (2.1) ως προς το (I, M, U) και ο Luenberger τύπου παρατηρητής:

$$\dot{z} = F(t, z, y, u) + \underbrace{\phi(t)a_1^4(t, y, u)P^{-1}(t)}_{\Xi(t, y, u)} \underbrace{(1, 0, \dots, 0)'}_{n-1} (y - z_1) \quad (2.48)$$

εκτιμά την κατάσταση του (2.1), όπου η $F(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ ορίζεται από την (2.35α). Ειδικά, η χρονική παράγωγος $\dot{V}(t, e(t))$ της συνάρτησης σφάλματος Lyapunov $V(t, e) := e'P(t)e$ κατά μήκος της τροχιάς της εξίσωσης σφάλματος

$$\dot{e} = F(t, x, y, u) - F(t, z, y, u) - \underbrace{\phi(t)a_1^4(t, y, u)P^{-1}(t)}_{\Xi(t, y, u)} \underbrace{(1, 0, \dots, 0)'}_{n-1} (y - z_1)$$

ικανοποιεί, σύμφωνα με την (2.47γ):

$$\dot{V}(t, e(t)) \leq -d(t)V(t, e(t)), \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.49)$$

Η (2.49) μαζί με τις (2.47α) και (2.47β) εγγυάται ότι η εκτίμηση του σφάλματος ικανοποιεί την (2.7), με $E = E_{t_0, y, u} \in \mathcal{LNK}$ όπως ορίζεται από:

$$E(t, t_0, r) := \exp\left(-\int_{t_0}^t d(s)ds\right) |P(t_0)| |r|, \quad t \geq t_0 \quad (2.50)$$

Συνεχίζουμε τώρα με την απόδειξη του Ισχυρισμού 1, χρησιμοποιώντας μια επέκταση της επαγωγικής διαδικασίας που εφαρμόστηκε στην εργασία [77]. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε τον Ισχυρισμό 1 για τις περιπτώσεις $i = 2, 3$. Η απόδειξη για τις υπόλοιπες περιπτώσεις $i = 4, 5, \dots, n$ είναι παρόμοια με αυτή της περίπτωσης $i = 3$ και παραλείπεται. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε στη συνέχεια ότι η διάσταση του συστήματος (2.1) είναι μεγαλύτερη ή ίση του τρία.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1 για $i = 2$. Σύμφωνα με την (2.37), για την περίπτωση $i=2$, έχουμε

$$H_2 := (1, 0), \quad (2.51\alpha)$$

$$\Theta_2(t, y, u) := (a_{n-1}(t, y, u)a_{n-2}(t, y, u) \cdots a_1(t, y, u))^2 \quad (2.51\beta)$$

$$A_2(t, q, y, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(t, y, \bar{\alpha}_{n-1}, u) & a_{n-1}(t, y, u) \\ \beta_{n,n-1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, y, \bar{\alpha}_n, u) \end{pmatrix}. \quad (2.51\gamma)$$

Έστω $Q_{u,y}(\cdot)$ όπως ορίστηκε στην (2.36β), τ που ικανοποιεί την (2.38) και έστω $e := (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $t_0 \geq 0$, $(u, y) \in \Omega_{t_0}$ και $\tau_2 := \tau$, υπάρχει μια τ_2 -μη αιτιατή και τμηματικά συνεχής συνάρτηση $d_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και τ_2 -μη αιτιατές απεικονίσεις $p, p_1, p_2 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ έτσι ώστε, αν ορίσουμε τον χρονικά μεταβαλλόμενο και συμμετρικό πίνακα:

$$P_2(t) := \begin{pmatrix} p_1(t) & p(t) \\ p(t) & p_2(t) \end{pmatrix} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (2.52)$$

τότε

$$\int_{t_0}^{\infty} d_2(t) = \infty, \quad (2.53\alpha)$$

$$P_2(t) > I_{2 \times 2}, \forall t \geq t_0, \quad (2.53\beta)$$

$$e' P_2(t) A_2(t, q, y(t), u(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_2(t) e \leq -d_2(t) e' P_2(t) e,$$

$$\forall e := (e_1, e_2) \in \ker \Theta_2(t, y(t), u(t)) H_2, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), \text{ a.e. } t \geq t_0. \quad (2.53\gamma)$$

Για να κατασκευάσουμε τις επιθυμητές συναρτήσεις στις (2.52), (2.53) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (2.41) και (2.42) θεωρούμε τις εξής δύο περιπτώσεις (Σχήμα 2.1).

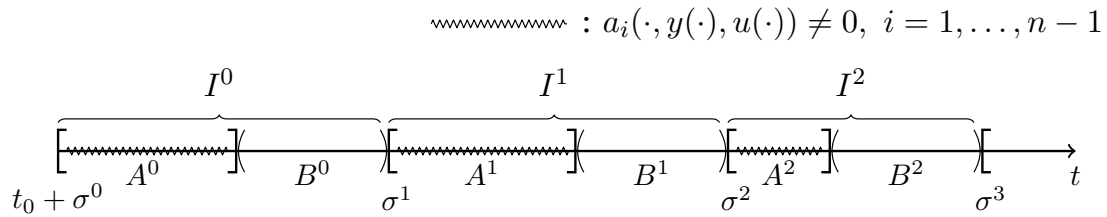
Περίπτωση 1: Κατασκευή των P_2 και d_2 στο χωρίο clA_{n-1}^k , ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Από τις (2.42α), (2.51α) και (2.51β) έχουμε ότι

$$\ker \Theta_2(t, y(t), u(t)) H_2 = \ker(1, 0), \forall t \in A_{n-1}^k (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.54)$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι υπάρχουν απεικονίσεις

$$\bar{d}_2^k \in C^0(clA_{n-1}^k; \mathbb{R}), \quad (2.55\alpha)$$



Σχήμα 2.1: Περιπτώσεις στην κατασκευή.

$$\bar{P}_2^k(t) = \begin{pmatrix} \bar{p}_1^k(t) & \bar{p}^k(t) \\ \bar{p}^k(t) & \bar{p}_2^k(t) \end{pmatrix} \in C^1(clA_{n-1}^k; \mathbb{R}^{2 \times 2}) \quad (2.55\beta)$$

έτσι ώστε

$$\bar{P}_2^k(t) > I_{2 \times 2}, \forall t \in clA_{n-1}^k; \quad (2.56\alpha)$$

$$e' \bar{P}_2^k(t) A_2(t, q, y(t), u(t)) e + \frac{1}{2} e' \hat{\bar{P}}_2^k(t) e \leq -\bar{d}_2^k(t) e' \bar{P}_2^k(t) e,$$

$$\forall e = (e_1, e_2) \in \ker \Theta_2(t, y(t), u(t)) H_2 = \ker(1, 0), q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t \in A_{n-1}^k \quad (2.56\beta)$$

όπου η απεικόνιση $A_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ δίνεται από την (2.51γ) και η συνάρτηση \bar{d}_2^k ικανοποιεί τις ανισώσεις:

$$\int_{A_{n-1}^k \cap [t_0, t)} \bar{d}_2^k(s) ds > -\frac{1}{k^2}, \forall t \geq t_0; \quad (2.57\alpha)$$

$$\int_{A_{n-1}^k} \bar{d}_2^k(s) ds > \frac{1}{k+1}, (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.57\beta)$$

Πράγματι, επιλέγουμε πρώτα:

$$\bar{p}^k(t) := -\ell_k(t) a_{n-1}(t, y(t), u(t)); \quad (2.58\alpha)$$

$$\bar{p}_2^k(t) := p_{20}(\text{constant}) > 1, \forall t \in clA_{n-1}^k, (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.58\beta)$$

για συγκεκριμένη τ_2 -μη αιτιατή συνάρτηση $\ell_k(\cdot) = (\ell_k(\cdot))_{u, y}$ την οποία θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια. Τότε λόγω των (2.9), (2.51γ), (2.55) και (2.58), για να δείξουμε την επιθυμητή (2.56β), αρκεί να προσδιορίσουμε μια C^1 συνάρτηση $\ell_k(\cdot) : clA_{n-1}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ έτσι ώστε

$$-\ell_k(t) a_{n-1}^2(t, y(t), u(t)) + p_{20} \omega(t, |y(t)|, |u(t)|) \leq -p_{20} \bar{d}_2^k(t), \forall t \in A_{n-1}^k, \quad (2.59)$$

για συγκεκριμένη συνάρτηση $\bar{d}_2^k \in C^0(clA_{n-1}^k; \mathbb{R})$ που ικανοποιεί τις (2.57α) και (2.57β), το οποίο είναι δυνατό, λόγω της (2.42α) για $i = n-1$ και λαμβάνοντας υπ'όψιν τις (2.38)-(2.41) (βλέπε [77], page 1046, όπου δίνονται παρόμοια επιχειρήματα). Επιπλέον, επιλέγουμε τη συνάρτηση $\ell_k = (\ell_k)_{u, y}$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$\ell_k(t) = \dot{\ell}_k(t) = 0, \forall t \in \partial A_{n-1}^k (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.60)$$

Από αυτή την επιλογή της $\ell_k(\cdot)$ και λόγω της (2.58α) παίρνουμε:

$$\bar{p}^k(t) = \widehat{\bar{p}}^k(t) = 0, \forall t \in \partial A_{n-1}^k. \quad (2.61)$$

Τέλος, επιλέγουμε μια τ_2 -μη αιτιατή συνάρτηση $\bar{p}_1^k \in C^1(\text{cl}A_{n-1}^k; \mathbb{R}_{\geq 0})$ ώστε να ισχύει η εξής ανίσωση:

$$\det \begin{pmatrix} \bar{p}_1^k(t) - 1 & \bar{p}^k(t) \\ \bar{p}^k(t) & \bar{p}_2^k(t) - 1 \end{pmatrix} > 0, \forall t \in \text{cl}A_{n-1}^k, \quad (2.62)$$

όπου λόγω της (2.58β) συνεπάγεται η (2.56α). Ο ακριβής προσδιορισμός της συνάρτησης \bar{p}_1^k θα δοθεί στην επόμενη περίπτωση.

Περίπτωση 2: Κατασκευή των P_2 και d_2 στο χωρίο $B_{n-1}^k (k = 0, 1, 2, \dots)$.

Σύμφωνα με τις (2.42γ), (2.51α) και (2.51β) έχουμε:

$$\begin{aligned} & \ker \Theta_2(t, y(t), u(t)) H_2 \\ &= \ker((a_{n-1}(t, y(t), u(t))a_{n-2}(t, y(t), u(t)) \cdots a_1(t, y(t), u(t)))^2, 0) = \mathbb{R}^2, \forall t \in B_{n-1}^k. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι υπάρχουν τ_2 -μη αιτιατές συναρτήσεις $\tilde{p}^k, \tilde{p}_1^k, \tilde{p}_2^k \in C^1(B_{n-1}^k; \mathbb{R})$ έτσι ώστε, αν ορίσουμε:

$$\tilde{P}_2^k(t) := \begin{pmatrix} \tilde{p}_1^k(t) & \tilde{p}^k(t) \\ \tilde{p}^k(t) & \tilde{p}_2^k(t) \end{pmatrix}; \quad (2.64\alpha)$$

$$\tilde{d}_2^k(t) := -\psi(t), \forall t \in B_{n-1}^k (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.64\beta)$$

τότε ισχύουν τα εξής:

$$\tilde{P}_2^k(t) > I_{2 \times 2}; \quad (2.65\alpha)$$

$$\begin{aligned} & e' \tilde{P}_2^k(t) A_2(t, q, y(t), u(t)) e + \frac{1}{2} e' \widehat{\tilde{P}_2^k}(t) e \leq -\tilde{d}_2^k(t) e' \tilde{P}_2^k(t) e \\ & \forall e = (e_1, e_2) \in \ker \Theta_2(t, y(t), u(t)) H_2 = \mathbb{R}^2, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t \in B_{n-1}^k, \end{aligned} \quad (2.65\beta)$$

όπου, λόγω της (2.42γ), η απεικόνιση $A_2(t, q, y, u)$ γράφεται στη μορφή:

$$A_2(t, q, y, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(t, y, \bar{\alpha}_{n-1}, u) & 0 \\ \beta_{n, n-1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, y, \bar{\alpha}_n, u) \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Πράγματι, έστω

$$\tilde{p}^k(t) := 0; \quad (2.67\alpha)$$

$$\tilde{p}_2^k(t) := p_{20}(\text{constant}) > 1, \forall t \in B_{n-1}^k (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.67\beta)$$

όπου p_{20} είναι η ίδια σταθερά που επιλέχτηκε στην (2.58β) της προηγούμενης περίπτωσης. Επιπλέον, επιλέγουμε:

$$\tilde{p}_1^k(t) := \tilde{p}_1^k(\text{constant}) > 1, \forall t \in B_{n-1}^k (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.68)$$

Στη συνέχεια, επικαλούμαστε την υπόθεση ότι ισχύει η (2.12γ) οποτεδήποτε πληρούται η (2.12α), δηλαδή

$$\max \left\{ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(t, y(t), \alpha_{n-1,2}, \dots, \alpha_{n-1,n-1}, u(t)), \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, y(t), \alpha_{n,2}, \alpha_{n,3}, \dots, \alpha_{n,n}, u(t)) \right\} \leq 0, \\ \forall t \in \mathbf{B}_{n-1}^k, \alpha_{j\nu} \in \mathbb{R}, j = n-1, n; \nu = 2, 3, \dots, j \quad (2.69)$$

Τότε, από τις (2.36β), (2.64α) και (2.66)-(2.69) ακολουθεί ότι ο πίνακας \tilde{P}_2^k είναι σταθερός στο χωρίο \mathbf{B}_{n-1}^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) και για επαρκώς μεγάλο \tilde{p}_1^k ισχύει ότι:

$$(e_1, e_2) \tilde{P}_2^k A_2(t, q, y(t), u(t)) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} \tilde{p}_1^k & 0 \\ 0 & p_{20} \end{pmatrix} A_2(t, q, y(t), u(t)) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ \leq \inf \{ \psi(t), t \in \mathbf{B}_{n-1}^k \} (e_1, e_2) \tilde{P}_2^k \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \\ \forall (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t \in \mathbf{B}_{n-1}^k \quad (2.70)$$

όπου λάβαμε υπ'όψιν το γεγονός ότι για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$ το σύνολο \mathbf{B}_{n-1}^k είναι φραγμένο και η συνάρτηση ψ (όπως ορίστηκε στις (2.44) και (2.45)) παίρνει αυστηρά θετικές τιμές. Τέλος, από τις (2.64) και (2.67)-(2.70) καταλήγουμε ότι οι (2.65α) και (2.65β) πληρούνται.

ΤΕΛΟΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ

Είμαστε σε θέση τώρα να αποδείξουμε ότι υπάρχουν τ_2 -μη αιτιατές απεικονίσεις $P_2(\cdot)$ και $d_2(\cdot)$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η (2.53α) και οι (2.53β), (2.53γ) να πληρούνται σχεδόν για κάθε $t \geq t_0$, με $d_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής και $P_2 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{2 \times 2})$. Συνδυάζοντας τις Περιπτώσεις 1 και 2 κατασκευάζουμε τις επιθυμητές απεικονίσεις. Πράγματι, μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $\tilde{p}_1^k \in C^1(c\mathbf{A}_{n-1}^k; \mathbb{R}_{\geq 0})$ έτσι ώστε, επιπρόσθετα της (2.62), να έχουμε:

$$\tilde{p}_1^k(t) = \tilde{p}_1^k, \forall t \in \partial \mathbf{A}_{n-1}^k \cap \partial \mathbf{B}_{n-1}^k, \text{ για την περίπτωση } \partial \mathbf{A}_{n-1}^k \cap \partial \mathbf{B}_{n-1}^k \neq \emptyset; \quad (2.71\alpha)$$

$$\tilde{p}_1^k(t) = \tilde{p}_1^{k+1}(t), \forall t \in \partial \mathbf{A}_{n-1}^k \cap \partial \mathbf{A}_{n-1}^{k+1}, \text{ για την περίπτωση } \partial \mathbf{A}_{n-1}^k \cap \partial \mathbf{A}_{n-1}^{k+1} \neq \emptyset; \quad (2.71\beta)$$

$$\hat{\tilde{p}}_1^k(t) = 0, \forall t \in \partial \mathbf{A}_{n-1}^k, (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.71\gamma)$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε τις επιθυμητές τ_2 -μη αιτιατές απεικονίσεις $d_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ και $P_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ως εξής:

$$d_2(t) := \begin{cases} \bar{d}_2^k(t), & t \in c\mathbf{A}_{n-1}^k; \\ -\psi(t), & t \in \mathbf{B}_{n-1}^k, (k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.72\alpha)$$

$$P_2(t) := \begin{cases} \bar{P}_2^k(t), & t \in c\mathbf{A}_{n-1}^k; \\ \tilde{P}_2^k(t), & t \in \mathbf{B}_{n-1}^k, (k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.72\beta)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (2.38)-(2.42), (2.45), (2.54), (2.56)-(2.58), (2.60)-(2.65), (2.67), (2.68) και (2.70)-(2.72), έχουμε ότι η $d_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχής, ο πίνακας $P_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ είναι C^1 και ικανοποιούν τις (2.53α)-(2.53γ). Σημειώνουμε εδώ ότι η (2.53α) είναι άμεση συνέπεια των (2.45), (2.57) και (2.72α). Τέλος, επικαλούμενοι τις (2.38)-(2.41), προκύπτει ότι για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$ η κατασκευή των απεικονίσεων \bar{d}_2^k, \bar{P}_2^k και \bar{P}_2^k παραπάνω προσδιορίζεται πλήρως από τις τιμές των $\{(y(s), u(s)), s \in [t_0 + \sigma_{n-1}^k, t_0 + \sigma_{n-1}^k + \tau]\}$, το οποίο συνεπάγεται ότι όντως οι απεικονίσεις P_2 και d_2 όπως ορίζονται από την (2.72) είναι $\tau_2 (= \tau)$ -μη αιτιατές. Συνεπώς, αποδείχτηκε ο Ισχυρισμός 1 για $i = 2$.

Συνέπεια του Ισχυρισμού 1 (i = 2) και της Πρότασης 2.3.1:

Από τις (2.51)-(2.53) και την Πρόταση 2.3.1 έχουμε:

- Για $\tau'_2 \in (\tau_2, 2\tau)$ υπάρχουν τ'_2 -μη αιτιατές απεικονίσεις $\hat{d}_2 \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$, $\phi_2 \in \mathcal{N} \cap C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ και $P_2 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{2 \times 2})$ έτσι ώστε

$$\int_{t_0}^{\infty} \hat{d}_2(t) dt = \infty; \quad (2.73\alpha)$$

$$P_2(t) > I_{2 \times 2}; \quad (2.73\beta)$$

$$\begin{aligned} e' P_2(t) A_2(t, q, y(t), u(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_2(t) e &\leq -\hat{d}_2(t) e' P_2(t) e + \phi_2(t) a_{n-1}^4(t, y(t), u(t)) \\ &\quad \times a_{n-2}^4(t, y(t), u(t)) \cdots a_1^4(t, y(t), u(t)) |e_1|^2, \\ \forall e = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t \geq t_0. \end{aligned} \quad (2.73\gamma)$$

- Συγκεκριμένα, από τις (2.57), (2.72) και λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 2.3.1(i) καθώς και την κατασκευή του πίνακα P_2 στο χωρίο B_{n-1}^k ($k = 0, 1, 2, \dots$), η επιθυμητή απεικόνιση P_2 και η συνάρτηση \hat{d}_2 μπορούν να κατασκευαστούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε $\hat{d}_2(t) \leq d_2(t)$, για κάθε $t \geq t_0$, όπου η d_2 ορίστηκε στην (2.72α), και επιπλέον:

$$\left. \begin{aligned} \hat{d}_2(t) &= -\frac{3}{2} \psi(t) \\ P_2(t) &= \text{constant} \end{aligned} \right\}, \forall t \in \bigcup_{k=0,1,2,\dots} B_{n-1}^k, \quad (2.74)$$

$$\int_{A_{n-1}^k \cap [t_0, t)} \hat{d}_2(s) ds > -\frac{1}{2k^2}, \forall t \geq t_0; \quad (2.75\alpha)$$

$$\int_{A_{n-1}^k} \hat{d}_2(s) ds > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} \right), k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.75\beta)$$

▲

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τις (2.73) και (2.74) ώστε να αποδείξουμε το επόμενο βήμα της επαγωγικής διαδικασίας.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1 για $i = 3$: Σύμφωνα με την (2.37), για την περίπτωση $i = 3$, έχουμε:

$$H_3 := (1, 0, 0) \quad (2.76\alpha)$$

$$\Theta_3(t, y, u) := (a_{n-2}(t, y, u)a_{n-3}(t, y, u) \cdots a_1(t, y, u))^2 \quad (2.76\beta)$$

$$A_3(t, q, y, u) := \left(\begin{array}{c|cc} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-2}}(t, y, \bar{a}_{n-2}, u) & a_{n-2}(t, y, u) & 0 \\ \hline & & \\ \beta_{n-1, n-2} & & \boxed{A_2(t, q, y, u)} \\ \beta_{n, n-2} & & \end{array} \right) \quad (2.76\gamma)$$

όπου η απεικόνιση $A_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ ορίστηκε στην (2.51γ). Θεωρούμε όπως και προηγουμένως το σύνολο $Q_{u,y}(\cdot)$, όπως ορίστηκε από την (2.36β). Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι για κάθε $t_0 \geq 0$, $(u, y) \in \Omega_{t_0}$ και $\tau_3 := \tau_2'$, υπάρχει μια τ_3 -μη αιτιατή τμηματικά συνεχής συνάρτηση $d_3 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και τ_3 -μη αιτιατές απεικονίσεις $p_1, p \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $P_2 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{2 \times 2})$ έτσι ώστε, αν ορίσουμε:

$$P_3(t) := \left(\begin{array}{c|cc} p_1(t) & p(t) & 0 \\ \hline & & \\ p(t) & & \boxed{P_2(t)} \\ 0 & & \end{array} \right) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (2.77)$$

τότε

$$\int_{t_0}^{\infty} d_3(t) = \infty; \quad (2.78\alpha)$$

$$P_3(t) > I_{3 \times 3}, \forall t \geq t_0; \quad (2.78\beta)$$

$$\begin{aligned} (e_1, e_2, e_3)P_3(t)A_3(t, q, y(t), u(t)) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(e_1, e_2, e_3)\dot{P}_3(t) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ \leq -d_3(t)(e_1, e_2, e_3)P_3(t) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\forall (e_1, e_2, e_3) \in \ker \Theta_3(t, y(t), u(t))H_3, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), a.e. t \geq t_0. \quad (2.78\gamma)$$

Θεωρούμε πάλι τα υποσύνολα A_{n-2}^k και B_{n-2}^k του I_{n-2}^k που ικανοποιούν τις (2.41)-(2.43) για $i = n - 2$. Όπως και στο προηγούμενο επαγωγικό βήμα, θεωρούμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Κατασκευή των P_3 και d_3 στην περιοχή $clA_{n-2}^k (k = 0, 1, 2, \dots)$.

Λόγω των (2.42α), (2.76α) και (2.76β) έχουμε ότι:

$$\ker \Theta_3(t, y(t), u(t))H_3 = \ker(1, 0, 0), \quad \forall t \in A_{n-2}^k. \quad (2.79)$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν απεικονίσεις $\bar{d}_3 \in C^0(clA_{n-2}^k; \mathbb{R})$, $\bar{p}_1^k, \bar{p}^k \in C^1(clA_{n-2}^k; \mathbb{R})$ και $\bar{P}_2^k \in C^1(clA_{n-2}^k; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ έτσι ώστε, αν ορίσουμε:

$$\bar{P}_3^k(t) := \left(\begin{array}{c|cc} \bar{p}_1^k(t) & \bar{p}^k(t) & 0 \\ \hline - & - & - \\ \bar{p}^k(t) & & \\ \hline 0 & & \boxed{\bar{P}_2^k(t)} \end{array} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.80)$$

τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\bar{P}_3^k(t) > I_{3 \times 3}, \quad \forall t \in clA_{n-2}^k; \quad (2.81\alpha)$$

$$e' \bar{P}_3^k(t) A_3(t, q, y(t), u(t)) e + \frac{1}{2} e' \hat{\bar{P}}_3^k(t) e \leq -\bar{d}_3^k(t) e' \bar{P}_3^k(t) e,$$

$$\forall e = (e_1, e_2, e_3) \in \ker \Theta_3(t, y(t), u(t))H_3 = \ker(1, 0, 0), \quad q \in Q_{y(t), u(t)}(t), \quad t \in A_{n-2}^k, \quad (2.81\beta)$$

όπου η απεικόνιση $A_3(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ δίνεται από την (2.76γ). Η επιθυμητή (2.81β) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} (0, e_2, e_3) \bar{P}_3^k(t) A_3(t, q, y(t), u(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (0, e_2, e_3) \hat{\bar{P}}_3^k(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ \leq -\bar{d}_3^k(t) (0, e_2, e_3) \bar{P}_3^k(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\forall (e_2, e_3) \in \mathbb{R}^2, \quad q \in Q_{y(t), u(t)}(t), \quad t \in A_{n-2}^k. \quad (2.82)$$

Ορίζουμε:

$$\bar{d}_3^k(t) := \hat{d}_2(t); \quad (2.83\alpha)$$

$$\bar{P}_2^k(t) := P_2(t), \quad \forall t \in clA_{n-2}^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.83\beta)$$

όπου οι \hat{d}_2 και P_2 εμπλέκονται στην (2.73). Σύμφωνα με τις (2.76γ), (2.80) και (2.83), για να αποδείξουμε την (2.82), αρκεί να αποδείξουμε:

$$\begin{aligned} e_2^2 \bar{p}^k(t) a_{n-2}(t, y(t), u(t)) + (e_2, e_3) P_2(t) A_2(t, q, y(t), u(t)) \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (e_2, e_3) \dot{P}_2(t) \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ \leq -\hat{d}_2(t) (e_2, e_3) P_2(t) \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\forall (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2, \quad q \in Q_{y(t), u(t)}(t), \quad t \in A_{n-2}^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.84)$$

με $A_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ όπως δίνεται από την (2.51γ). Για την απόδειξη της (2.84) αρκεί, λόγω της (2.73γ), να βρούμε μια συνάρτηση $\bar{p}^k \in C^1(\text{cl}A_{n-2}^k, \mathbb{R})$ έτσι ώστε να ισχύει η εξής ανίσωση

$$\begin{aligned} & e_2^2(\bar{p}^k(t)a_{n-2}(t, y(t), u(t)) + \phi_2(t)a_{n-1}^4(t, y(t), u(t))a_{n-2}^4(t, y(t), u(t)) \cdots a_1^4(t, y(t), u(t))) \\ & - \hat{d}_2(t)(e_2, e_3)P_2(t) \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \leq -\hat{d}_2(t)(e_2, e_3)P_2(t) \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \\ & \forall (e_2, e_3) \in \mathbb{R}^2, t \in A_{n-2}^k, (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Πράγματι, για να ισχύει η (2.85), για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$, αρκεί να διαλέξουμε την τ_3 -μη αιτιατή απεικόνιση:

$$\begin{aligned} \bar{p}^k(t) & := -\phi_2(t)a_{n-1}^4(t, y(t), u(t))a_{n-2}^3(t, y(t), u(t))a_{n-3}^4(t, y(t), u(t)) \cdots a_1^4(t, y(t), u(t)), \\ & t \in \text{cl}A_{n-2}^k. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Από την (2.42β) για την περίπτωση $i = n - 2$, έχουμε για την παραπάνω επιλογή (2.86) ότι

$$\bar{p}^k(t) = \hat{\bar{p}}^k(t) = 0, \forall t \in \partial A_{n-2}^k, (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.87)$$

Επιπλέον επιλέγουμε μια τ_3 -μη αιτιατή συνάρτηση $\bar{p}_1^k \in C^1(\text{cl}A_{n-2}^k, \mathbb{R}_{\geq 0})$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \bar{p}_1^k(t) - 1 & | & \bar{p}^k(t) & 0 \\ \text{---} & | & \text{---} & \text{---} \\ \bar{p}^k(t) & | & \boxed{P_2(t) - I_{2 \times 2}} \\ 0 & | & \end{pmatrix} > 0, \\ & \forall t \in \text{cl}A_{n-2}^k, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.88)$$

το οποίο είναι δυνατό λόγω της (2.73β). Η προηγούμενη επιλογή εγγυάται ότι πληρούνται οι (2.81α) και (2.81β).

Περίπτωση 2: Κατασκευή των P_3 και d_3 στο χωρίο $B_{n-2}^k (k = 0, 1, 2, \dots)$.

Από την (2.42γ) ισχύει ότι

$$a_{n-2}(t, y(t), u(t)) = 0, \forall t \in B_{n-2}^k, \quad (2.89)$$

και επομένως από τις (2.76α), (2.76β) και λαμβάνοντας υπ' όψιν την Υπόθεση H2(iii) (συνεπαγωγή (2.12α) \Rightarrow (2.12β)) έχουμε:

$$a_{n-1}(t, y(t), u(t)) = 0; \quad (2.90\alpha)$$

$$\begin{aligned} \ker \Theta_3(t, y(t), u(t))H_3 & = \ker((a_{n-2}(t, y(t), u(t))a_{n-3}(t, y(t), u(t)) \cdots a_1(t, y(t), u(t)))^2, 0, 0) \\ & = \mathbb{R}^3, \forall t \in B_{n-2}^k. \end{aligned} \quad (2.90\beta)$$

Επιπλέον, από την (2.73γ) του προηγούμενου βήματος και την (2.90α), έχουμε:

$$\begin{aligned} & e'P_2(t)A_2(t, q, y(t), u(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_2(t)e \leq -\hat{d}_2(t)e'P_2(t)e, \\ & \forall e = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t \in B_{n-2}^k, \end{aligned} \quad (2.91)$$

(με \hat{d}_2 όπως δίνεται από στην (2.74)). Είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι υπάρχουν τ_3 -μη αιτιατές απεικονίσεις $\tilde{d}_3^k \in C^0(\mathbf{B}_{n-2}^k; \mathbb{R})$, $\tilde{p}_1^k, \tilde{p}^k \in C^1(\mathbf{B}_{n-2}^k; \mathbb{R})$ και $\tilde{P}_2^k \in C^1(\mathbf{B}_{n-2}^k; \mathbb{R}^{2 \times 2})$, έτσι ώστε, αν ορίσουμε:

$$\tilde{P}_3^k(t) := \left(\begin{array}{c|cc} \tilde{p}_1^k(t) & \tilde{p}^k(t) & 0 \\ \hline & & \\ \tilde{p}^k(t) & & \\ \hline 0 & & \boxed{\tilde{P}_2^k(t)} \end{array} \right), \forall t \in \mathbf{B}_{n-2}^k, \quad (2.92)$$

τότε

$$\tilde{P}_3^k(t) > I_{3 \times 3}; \quad (2.93\alpha)$$

$$e' \tilde{P}_3^k(t) A_3(t, q, y(t), u(t)) e + \frac{1}{2} e' \hat{\tilde{P}}_3^k(t) e \leq -\tilde{d}_3^k(t) e' \tilde{P}_3^k(t) e,$$

$$\forall e = (e_1, e_2, e_3) \in \ker \Theta_3(t, y(t), u(t)) H_3 = \mathbb{R}^3, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t \in \mathbf{B}_{n-2}^k, \quad (2.93\beta)$$

όπου στην περίπτωση μας, λόγω των (2.51γ), (2.76γ), (2.89) και (2.90α), η απεικόνιση $A_3(t, q, y, u)$ γράφεται:

$$A_3(t, q, y, u) = \left(\begin{array}{c|cc} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-2}}(t, y, \bar{\alpha}_{n-2}, u) & 0 & 0 \\ \hline & & \\ \beta_{n-1, n-2} & & \boxed{A_2(t, q, y, u)} \\ \hline \beta_{n, n-2} & & \end{array} \right) \quad (2.94)$$

με $A_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ όπως ορίζεται από την (2.66). Ορίζουμε:

$$\tilde{P}_2^k(t) := P_2(t); \quad (2.95\alpha)$$

$$\tilde{d}_3^k(t) := -3\psi(t); \forall t \in \mathbf{B}_{n-2}^k \quad (2.95\beta)$$

(με τον πίνακα P_2 όπως υπεισέρχεται στην (2.91)). Τότε, από τις (2.92), (2.94) και (2.95), η επιθυμητή (2.93β) γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} & (e_1, e_2, e_3) \left(\begin{array}{c|cc} \tilde{p}_1^k(t) & \tilde{p}^k(t) & 0 \\ \hline & & \\ \tilde{p}^k(t) & & \\ \hline 0 & & \boxed{P_2(t)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cc} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-2}}(t, y, \bar{\alpha}_{n-2}, u) & 0 & 0 \\ \hline & & \\ \beta_{n-1, n-2} & & \boxed{A_2(t, q, y(t), u(t))} \\ \hline \beta_{n, n-2} & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2} (e_1, e_2, e_3) \hat{\tilde{P}}_3^k(t) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \leq 3\psi(t) (e_1, e_2, e_3) \tilde{P}_3^k(t) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ & \forall (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^3, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t \in \mathbf{B}_{n-2}^k \end{aligned} \quad (2.96)$$

με $A_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ όπως ορίζεται από την (2.66). Επιπρόσθετα στην (2.95), διαλέγουμε:

$$\tilde{p}^k(t) := 0; \quad (2.97\alpha)$$

$$\tilde{p}_1^k(t) := \tilde{p}_1^k(\text{constant}) > 1, \forall t \in \mathbf{B}_{n-2}^k \quad (2.97\beta)$$

όπου η \tilde{p}_1^k θα προσδιοριστεί στη συνέχεια. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της (2.96), παρατηρούμε πρώτα ότι λόγω της (2.43) έχουμε ότι

$$\bigcup_{k=0,1,2,\dots} \mathbf{B}_{n-2}^k \subset \bigcup_{k=0,1,2,\dots} \mathbf{B}_{n-1}^k. \quad (2.98)$$

Επιπλέον, από τις (2.74), (2.92), (2.97α), (2.97β) και (2.98) παίρνουμε:

$$P_2 = \text{constant}; \quad (2.99\alpha)$$

$$\tilde{P}_3^k = \text{constant}; \quad (2.99\beta)$$

$$\hat{d}_2(t) = - (3/2)\psi(t), \forall t \in \mathbf{B}_{n-2}^k. \quad (2.99\gamma)$$

Από τη συνεπαγωγή (2.12α) \Rightarrow (2.12γ) της Υπόθεσης H2(iii) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-2}}(t, y(t), \alpha_{n-1,2}, \dots, \alpha_{n-2,n-2}, u(t)), \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(t, y(t), \alpha_{n-1,2}, \dots, \alpha_{n-1,n-1}, u(t)), \right. \\ & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, y(t), \alpha_{n,2}, \alpha_{n,3}, \dots, \alpha_{n,n}, u(t)) \right\} \leq 0, \\ & \forall t \in \mathbf{B}_{n-2}^k, \alpha_{j\nu} \in \mathbb{R}, j = n-2, n-1, n; \nu = 2, 3, \dots, j. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Επίσης, από τις (2.9), (2.36β), (2.91), (2.95α), (2.97), (2.99), (2.100) και διαλέγοντας $\tilde{p}_1^k (= \text{constant})$ επαρκώς μεγάλο, η (2.93α) ικανοποιείται και επιπλέον παίρνουμε

$$\begin{aligned} & (e_1 \tilde{p}_1^k, (e_2, e_3)P_2) \left(\begin{array}{c|cc} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-2}}(t, y, \bar{\alpha}_{n-2}, u) & 0 & 0 \\ \hline \beta_{n-1,n-2} & \boxed{A_2(t, q, y(t), u(t))} & \\ \beta_{n,n-2} & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ & \leq e_1^2 \tilde{p}_1^k \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-2}}(t, y(t), \bar{\alpha}_{n-2}, u(t)) + \frac{3}{2} \psi(t) (e_2, e_3) P_2 \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ & \quad + \omega(t, |y(t)|, |u(t)|) |e_1| |(e_2, e_3)| |P_2| \\ & \leq e_1^2 \tilde{p}_1^k \inf \left\{ \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-2}}(t, y(t), \bar{\alpha}_{n-2}, u(t)), t \in \mathbf{B}_{n-2}^k \right\} \\ & \quad + \sup \left\{ \omega(t, |y(t)|, |u(t)|), t \in \mathbf{B}_{n-2}^k \right\} |e_1| |(e_2, e_3)P_2| + \frac{3}{2} \psi(t) (e_2, e_3) P_2 \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ & \leq 3\psi(t) (e_1, e_2, e_3) \left(\begin{array}{c|cc} \tilde{p}_1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & \hline 0 & \boxed{P_2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = 3\psi(t) (e_1, e_2, e_3) \tilde{P}_3^k \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \\ & \forall (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^3, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t \in \mathbf{B}_{n-2}^k \end{aligned} \quad (2.101)$$

με $A_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ όπως ορίστηκε από την (2.66). Σημειώνουμε ότι για να πάρουμε την (2.101), λάβαμε υπ' όψιν μας το γεγονός ότι για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$ το σύνολο B_{n-2}^k είναι φραγμένο και την υπόθεση ότι $\psi(t) > 0, \forall t \geq 0$. Τέλος, από τις (2.95), (2.97), (2.99) και (2.101) λαμβάνουμε την (2.96) και επομένως την επιθυμητή (2.93β). **ΤΕΛΟΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ**

Όπως και στην απόδειξη του Ισχυρισμού 1 για $i = 2$, θα συνδυάσουμε τις Περιπτώσεις 1 και 2 για να προσδιορίσουμε τ_3 -μη αιτιατές απεικονίσεις $P_3(\cdot)$ και $d_3(\cdot)$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η (2.78α) και να πληρούνται οι (2.78β) και (2.78γ) σχεδόν για κάθε $t \geq t_0$, με την $d_3(\cdot) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι τμηματικά συνεχής και ο πίνακας $P_3 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{3 \times 3})$. Πράγματι, πρώτα βρίσκουμε μια συνάρτηση $\bar{p}_1^k \in C^1(clA_{n-2}^k; \mathbb{R}_{\geq 0})$ έτσι ώστε, επιπρόσθετα στην (2.88), να ικανοποιούνται τα εξής:

$$\bar{p}_1^k(t) = \tilde{p}_1^k, \forall t \in \partial A_{n-2}^k \cap \partial B_{n-2}^k \text{ για την περίπτωση } \partial A_{n-2}^k \cap \partial B_{n-2}^k \neq \emptyset; \quad (2.102\alpha)$$

$$\bar{p}_1^k(t) = \bar{p}_1^{k+1}(t), \forall t \in \partial A_{n-2}^k \cap \partial A_{n-2}^{k+1} \text{ για την περίπτωση } \partial A_{n-2}^k \cap \partial A_{n-2}^{k+1} \neq \emptyset; \quad (2.102\beta)$$

$$\hat{\bar{p}}_1^k(t) = 0, \forall t \in \partial A_{n-2}^k, (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.102\gamma)$$

Ορίζουμε τώρα τις επιθυμητές:

$$d_3(t) := \begin{cases} \hat{d}_2(t), t \in clA_{n-2}^k; \\ -3\psi(t), t \in B_{n-2}^k (k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.103\alpha)$$

$$P_3(t) := \begin{cases} \bar{P}_3^k(t), t \in clA_{n-2}^k; \\ \tilde{P}_3^k(t), t \in B_{n-2}^k (k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.103\beta)$$

Τότε, από τις (2.38)-(2.42), (2.73), (2.74), (2.76), (2.79)-(2.81), (2.83), (2.86)-(2.88), (2.90β), (2.92), (2.93), (2.95), (2.97), (2.99), (2.102) και (2.103) έχουμε ότι η $d_3(\cdot)$ είναι τμηματικά συνεχής, ο πίνακας $P_3 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ είναι C^1 και ικανοποιούνται οι ιδιότητες (2.78α), (2.78β) και (2.78γ). Τέλος, σημειώνουμε ότι η (2.78α) είναι συνέπεια των (2.45), (2.73α), (2.74), (2.98) και (2.103α). Επίσης, με παρόμοια επιχειρήματα όπως αυτά της περίπτωσης $i = 2$ μαζί με τις σχέσεις (2.38)-(2.41) καθώς και με την επιλογή $\tau_3 = \tau'_2$ αιτιολογείται ότι οι απεικονίσεις που κατασκευάστηκαν παραπάνω είναι τ_3 -μη αιτιατές. Συνεπώς, αποδείχτηκε ο Ισχυρισμός 1 για $i = 3$. \blacktriangle

Συνέπεια του Ισχυρισμού 1 ($i = 3$) και της Πρότασης 2.3.1:

Από τις (2.76)-(2.78) και την Πρόταση 2.3.1 παίρνουμε:

- Για $\tau'_3 \in (\tau_3, 2\tau)$, υπάρχουν τ'_3 -μη αιτιατές απεικονίσεις $\hat{d}_3 \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$, $\phi_3 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ και συμμετρικός πίνακας $P_3 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{3 \times 3})$ έτσι ώστε

$$\int_{t_0}^{\infty} \hat{d}_3(t) dt = \infty; \quad (2.104\alpha)$$

$$P_3(t) > I_{3 \times 3}, \forall t \geq t_0; \quad (2.104\beta)$$

$$\begin{aligned} e' P_3(t) A_3(t, q, y(t), u(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_3(t) e &\leq -\hat{d}_3(t) e' P_3(t) e + \phi_3(t) a_{n-2}^4(t, y(t), u(t)) \\ &\quad \times a_{n-3}^4(t, y(t), u(t)) \cdots a_1^4(t, y(t), u(t)) |e_1|^2, \\ \forall e = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^3, q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t &\geq t_0. \end{aligned} \quad (2.104\gamma)$$

- Συγκεκριμένα, από την κατασκευή των P_3 και d_3 στο χωρίο B_{n-2}^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) και λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος της Πρότασης 2.3.1, η επιθυμητή απεικόνιση P_3 και η συνάρτηση \hat{d}_3 παραπάνω μπορούν να κατασκευαστούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε $\hat{d}_3(t) \leq d_3(t)$, $\forall t \geq t_0$ (όπου η d_3 ορίζεται από την (2.103α)) και επιπλέον:

$$\left. \begin{aligned} \hat{d}_3(t) &= -(7/2)\psi(t) \\ P_3(t) &= \text{constant} \end{aligned} \right\}, \forall t \in \bigcup_{k=0,1,2,\dots} B_{n-2}^k. \quad (2.105)$$

Τώρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις (2.104) και (2.105), ώστε να αποδείξουμε το επόμενο βήμα της επαγωγικής διαδικασίας. Όπως επισημάνθηκε στην αρχή, η απόδειξη του Ισχυρισμού 1 για τις υπόλοιπες περιπτώσεις $i = 4, 5, \dots, n$ είναι παρόμοια με αυτή της περίπτωσης $i = 3$ για αυτό και παραλείπεται. \square

2.4 Ένα Αριθμητικό Παράδειγμα

Σε αυτή την Ενότητα παρέχουμε μια πλήρη κατασκευή ενός Luenberger παρατηρητή για μια υποκατηγορία συστημάτων (2.1). Θεωρούμε το εξής τρισδιάστατο σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \rho_1(t) u x_2 \\ \dot{x}_2 &= \rho_2(t) u x_3 \\ \dot{x}_3 &= u g(x_1, x_2), \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (2.106)$$

όπου $\rho_1, \rho_2 \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{0\})$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ έτσι ώστε

$$\rho_i(t) > 0, \forall t \geq 0, i = 1, 2 \quad (2.107\alpha)$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right| \leq k(|x_1|), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.107\beta)$$

για συγκεκριμένο $k \in \mathcal{N}$ και με την επιπλέον υπόθεση ότι η απεικόνιση $g(\cdot, \cdot)$ είναι φραγμένη. Έστω U το σύνολο των εισόδων $u \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}), t_0 \geq 0$ που ικανοποιούν την Ιδιότητα 1 (Παράδειγμα 2.14 της Ενότητας 2.2). Το σύστημα (2.106) είναι της μορφής (2.1) με

$$a_i := \rho_i u, i = 1, 2 \text{ και } f_1 = f_2 := 0, f_3 := ug \quad (2.108)$$

και μπορεί εύκολα να επαληθευτεί από την (2.107β) και το γεγονός ότι η g είναι φραγμένη, ότι οι H1 και H2 ικανοποιούνται με $I = \mathbb{R}_{\geq 0}, M = \mathbb{R}^3$ και U όπως παραπάνω. Πράγματι, αν ορίσουμε τη συνάρτηση $V(x) := \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, τότε η παράγωγος της \dot{V} της V κατά μήκος των τροχιών του (2.106) ικανοποιεί την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \rho_1(t)ux_1x_2 + \rho_2(t)ux_2x_3 + ug(x_1, x_2)x_3 \\ &\leq \rho_1(t)|u||x_1||x_2| + \rho_2(t)|u||x_2||x_3| + |u||g(x_1, x_2)||x_3| \\ &\leq \frac{1}{2}\rho_1(t)|u|(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}\rho_2(t)|u|(x_2^2 + x_3^2) + |u|Mx_3^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\rho_1(t)|u|(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{1}{2}\rho_2(t)|u|(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{1}{2}(2|u|M)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\leq \frac{1}{2}(\rho_1(t) + \rho_2(t) + 2M)|u|V, \end{aligned}$$

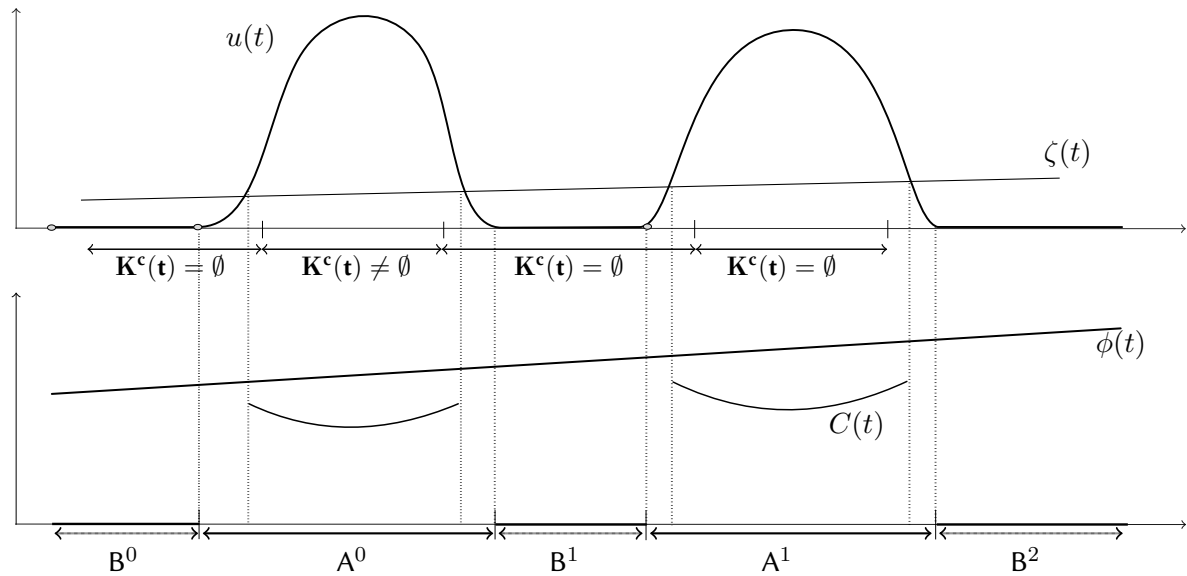
η οποία εγγυάται ότι το σύστημα (2.106) είναι δεξιά πλήρες. Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.1, το NCODP είναι επιλύσιμο για το (2.106) ως προς το $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^3, U)$. Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε έναν παρατηρητή για το σύστημα (2.106) χρησιμοποιώντας μια μικρή τροποποίηση της μεθοδολογίας που υιοθετήθηκε για την απόδειξη της Πρότασης 2.2.1. Παρατηρούμε πρώτα ότι ικανοποιείται η Υπόθεση A1 της Πρότασης 2.3.1 με

$$A(t, q, u) := \begin{pmatrix} 0 & \rho_1(t)u & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2(t)u \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.109\alpha)$$

$$Q_{u,y} := \{q \in \mathbb{R} : |q| \leq \omega(|y|, |u|)\}$$

$$\omega(\alpha, \beta) := |\beta|k(|\alpha|), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.109\beta)$$

Έστω $t_0 \in I, (u, y) \in \Omega_{t_0}$ και έστω θετική σταθερά ξ όπως προσδιορίζεται στην Ιδιότητα 1 (Παράδειγμα 2.2.1 της Ενότητας 2.2). Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια την επαγωγική διαδικασία της προηγούμενης Ενότητας για να κατασκευάσουμε έναν T -μη αιτιατό ως προς το (I, M, U) συμμετρικό και χρονικά μεταβαλλόμενο πίνακα $P = P_{t_0, u} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{3 \times 3})$ και T -μη αιτιατές ως προς το (I, M, U) συναρτήσεις $d = d_{t_0, u} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi = \phi_{t_0, u} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, για συγκεκριμένο $T > \xi$, ώστε να ικανοποιούνται οι (2.47α), (2.47β) και (2.47γ) με $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ και $Q_{u,y}$ όπως ορίστηκαν στην (2.109α) και $H(t, u) := (1, 0, 0); \Theta(t, u) := \rho_1^2(t)u^2$. Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.1, θεωρούμε μια σταθερά $\tau > \xi$, διαστήματα $I^k = [t_0 + \sigma^k, t_0 + \sigma^{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots$, όπου $\{\sigma^k \in \mathbb{R}_{\geq 0}, k = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία με $\sigma^0 = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^k = \infty$ και



Σχήμα 2.2: Γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων u (πάνω) και C, ϕ (κάτω).

$\xi < \sigma^{k+1} - \sigma^k < \tau, \forall k = 0, 1, 2, \dots$ και ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα A^k και B^k με $I^k = cI A^k \cup B^k$, όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $t_0 + \sigma^{k+1} \in \partial A^k, k = 0, 1, 2, \dots$, τα $A^k, B^k, (k = 0, 1, 2, \dots)$ είναι μη κενά και κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$u(t) \neq 0, \quad \forall t \in A^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.110\alpha)$$

$$u(t) = 0, \quad t \in B^k \cup \partial A^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.110\beta)$$

(Σχήμα. 2.2 (πάνω)). Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας μια παρόμοια διαδικασία με αυτή της απόδειξης του Ισχυρισμού 1 για τις περιπτώσεις $i = 2, 3$. Θα χωρίσουμε τη διαδικασία αυτή σε δύο μέρη. Στο πρώτο, θα κατασκευάσουμε απεικονίσεις $P_2 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{2 \times 2})$ και $d_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο Ισχυρισμός 1 να ικανοποιείται για $i = 2$ και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε μια επέκταση της προσέγγισης που προτάθηκε στο [77, Example 4.1], για να κατασκευάσουμε τις συναρτήσεις \hat{d}_2 και ϕ_2 που ικανοποιούν τις (2.73α)-(2.73γ). Στο δεύτερο βήμα, κατασκευάζουμε τις επιθυμητές απεικονίσεις $P := P_3$ και $d = d_3$ που ικανοποιούν τον Ισχυρισμό 1 με $i = 3$ και χρησιμοποιώντας ξανά τη μεθοδολογία από την εργασία [77, Example 4.1], προσδιορίζουμε συναρτήσεις \hat{d}_3 και ϕ_3 κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει ο Ισχυρισμός 2 με $i = 3$. Τέλος, ο προτεινόμενος παρατηρητής θα έχει τη μορφή (2.48) με $\phi = \phi_3$ και $P = P_3$.

Βήμα I: Σύμφωνα με τις (2.51α)-(2.51γ) και (2.109) ορίζουμε:

$$H_2 := (1, 0), \Theta_2(t, u) := (\rho_1(t)\rho_2(t)u^2)^2, \quad (2.111\alpha)$$

$$A_2(t, q, u) := \begin{pmatrix} 0 & \rho_2(t)u \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.111\beta)$$

$$(t, q, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |q| \leq \omega(|x_1|, |u|)$$

και κατασκευάζουμε έναν συμμετρικό και χρονικά μεταβαλλόμενο πίνακα $P_2 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{2 \times 2})$ και μια συνεχή συνάρτηση $d_2 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, και οι δύο τ_2 -μη αιτιατές με $\tau_2 := \tau$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (2.53α)-(2.53γ). Λόγω των (2.107α), (2.108) και (2.110) θεωρούμε τις ακόλουθες περιπτώσεις (βλέπε Σχήμα 2.1):

Περίπτωση 1: Κατασκευάζουμε τις P_2 και d_2 στις περιοχές clA^k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Συγκεκριμένα, προσδιορίζουμε $\bar{P}_2^k \in C^1(clA^k; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ και $\bar{d}_2^k \in C^0(clA^k; \mathbb{R})$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η (2.56) με A_2, H_2 και Θ_2 όπως ορίζονται από την (2.111) και $Q_{u,y}$ όπως δίνεται από την (2.109). Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\psi(t) := \frac{1}{t^2 + 1}, \quad t \geq 0 \quad (2.112)$$

και ορίζουμε:

$$\bar{P}_2^k(t) := \begin{pmatrix} \bar{p}_1^k(t) & \bar{p}^k(t) \\ \bar{p}^k(t) & \bar{p}_2^k(t) \end{pmatrix}, \quad t \in clA^k \quad (2.113\alpha)$$

$$\bar{p}^k(t) := -\ell_k(t)\rho_2(t)u(t), \quad \ell_k(t) := L_k u^2(t);$$

$$\bar{p}_1^k(t) := (\bar{p}^k(t))^2 + 2, \quad \bar{p}_2^k(t) := 2; \quad (2.113\beta)$$

$$\bar{d}_2^k(t) := \frac{1}{2}L_k\rho_2^2(t)u^4(t) - \psi(t), \quad t \in clA^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου οι σταθερές $L_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ διαλέγονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$\int_{A^k} \left(\frac{1}{2}L_k\rho_2^2(t)u^4(t) - \psi(t) \right) dt \geq \frac{1}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.114)$$

Ισοδύναμα, από τις (2.110α) και (2.112), αρκεί να διαλέξουμε τις σταθερές L_k έτσι ώστε

$$\frac{1}{2}L_k \int_{A^k} \rho_2^2(t)u^4(t) dt \geq \int_0^\infty \psi(t) dt + \frac{1}{k+1} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.115)$$

Τότε, από τις (2.109)-(2.114), μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι ικανοποιούνται οι επιθυμητές (2.56α), (2.56β) και (2.57β).

Περίπτωση 2: Στη συνέχεια προσδιορίζουμε απεικονίσεις P_2 και d_2 στις περιοχές B^k , ($k = 0, 1, 2, \dots$). Παρατηρούμε πρώτα ότι σε αυτή την περίπτωση, λόγω των (2.110β) και (2.111β) έχουμε

$$A_2(t, q, u)|_{u=q=0} = 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (2.116)$$

Σύμφωνα με την προσέγγιση που ακολουθήσαμε στην απόδειξη του Ισχυρισμού 1 για $i = 2$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (2.110β) και (2.116), έχουμε ότι, αν ορίσουμε

$$\tilde{P}_2^k(t) := \begin{pmatrix} \tilde{p}_1^k(t) & \tilde{p}^k(t) \\ \tilde{p}^k(t) & \tilde{p}_2^k(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbf{B}^k \quad (2.117\alpha)$$

$$\tilde{p}^k(t) := 0, \tilde{p}_1^k = \tilde{p}_2^k := 2, \tilde{d}_2^k := -\psi(t), \quad \forall t \in \mathbf{B}^k, \quad (2.117\beta)$$

τότε ικανοποιούνται οι (2.65α) και (2.65β) με $Q_{u,y} = \{0\}$ και H_2, Θ_2 όπως ορίστηκαν στην (2.111α).

Στόχος μας τώρα είναι να συνδυάσουμε τις Περιπτώσεις 1 και 2, ώστε να κατασκευάσουμε τ_2 -μη αιτιατές απεικονίσεις P_2 και d_2 που ικανοποιούν τις (2.53α)-(2.53γ). Σύμφωνα με τις (2.73α) και (2.73β), αυτό μπορεί να γίνει, εάν ορίσουμε

$$d_2(t) := \begin{cases} \tilde{d}_2^k(t), t \in clA^k; \\ -\psi(t), t \in \mathbf{B}^k \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.118\alpha)$$

$$P_2(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) & p(t) \\ p(t) & p_2(t) \end{pmatrix} := \begin{cases} \tilde{P}_2^k(t), t \in clA^k \\ \tilde{P}_2^k, t \in \mathbf{B}^k \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.118\beta)$$

όπου οι $\tilde{P}_2^k(\cdot)$, $\tilde{d}_2^k(\cdot)$ και $\tilde{P}_2^k(\cdot)$ προσδιορίζονται από τις (2.113)-(2.117). Επομένως έχουμε ότι

$$\left. \begin{aligned} p(t) &:= -L_k \rho_2(t) u^3(t) \\ p_1(t) &:= p^2(t) + 2 \\ p_2(t) &:= 2 \end{aligned} \right\}, \text{ για } t \in A^k$$

και

$$\left. \begin{aligned} p(t) &:= 0 \\ p_1(t) &:= 2 \\ p_2(t) &:= 2 \end{aligned} \right\}, \text{ για } t \in \mathbf{B}^k.$$

Συγκεκριμένα, από τις (2.110)-(2.118) έχουμε ότι $d_2 \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$, $P_2 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{2 \times 2})$ και πληρούνται οι (2.53α)-(2.53γ). Ορίζουμε τώρα

$$\hat{d}_2(t) := d_2(t) - \psi(t), t \geq t_0, \quad (2.119)$$

με d_2 όπως δίνεται από την (2.118α). Έχουμε τότε από τις (2.112) και (2.53α), ότι ικανοποιείται η (2.73α). Επομένως, σύμφωνα με τις (2.53β), (2.53γ), (2.119) και την Πρόταση 2.3.1, υπάρχει τ'_2 -μη αιτιατή συνάρτηση $\phi_2 \in \mathcal{N} \cap C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, για αυθαίρετο $\tau'_2 \in (\tau_2, 2\tau)$, που ικανοποιεί την (2.73γ) με $n = 3$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} e' P_2(t) A_2(t, q, u(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_2(t) e - \phi_2(t) (\rho_1(t) \rho_2(t) u^2(t))^4 |e_1|^2 &\leq -\hat{d}_2(t) e' P_2(t) e \\ \forall e \in \mathbb{R}^2, q \in Q_{y(t), u(t)}, t &\geq t_0. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Κατασκευή της ϕ_2 : Για να κατασκευάσουμε την επιθυμητή ϕ_2 που ικανοποιεί την (2.120), θα ακολουθήσουμε την κατασκευαστική προσέγγιση που υπάρχει στο [77, Παράδειγμα 4.1]. Συγκεκριμένα, ορίζουμε τα σύνολα:

$$K(t) := \{w \in \mathbb{R}^2 : |w| = 1, w' P_2(t) A_2(t, q, u(t)) w + \frac{1}{2} w' \dot{P}_2(t) w + \hat{d}_2(t) w' P_2(t) w < 0, \\ \forall q \in Q_{y(t), u(t)}\}; \quad (2.121\alpha)$$

$$K^c(t) := \{w \in \mathbb{R}^2 : |w| = 1, w \notin K(t)\}, t \geq t_0 \quad (2.121\beta)$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \geq t_0$, το σύνολο $\ker \Theta_2(t, u(t)) H_2$ είναι μη κενό και σύμφωνα με τις (2.53γ) και (2.121α), το σύνολο $K(t)$ περιέχει όλα τα διανύσματα $w \in \mathbb{R}^2 : |w| = 1$ με $w \in \ker \Theta_2(t, u(t)) H_2$. Από το τελευταίο συνεπάγεται ότι για κάθε $t \geq t_0$ το σύνολο $K(t)$ είναι μη κενό. Επιπλέον, σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς παίρνουμε τους επόμενους Ισχυρισμούς οι οποίοι παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατασκευή των επιθυμητών απεικονίσεων (οι αποδείξεις των Ισχυρισμών 4.4-4.8 παρακάτω, δίνονται στο Παράρτημα Α). Πρώτα, από τις (2.107α), (2.109)-(2.113), (2.117)-(2.119) και (2.121), συνεπάγεται ότι

$$u(t) = 0 \implies \begin{cases} \dot{P}_2(t) = 0 \\ \hat{d}_2(t) = -\psi(t) \\ A(t, q, u(t)) = 0 \text{ για } |q| = \omega(|x_1(t)|, 0) = 0 \end{cases},$$

και επομένως έχουμε:

Ισχυρισμός Π.1

Για $t \geq t_0$ ισχύουν τα εξής:

$$K^c(t) \neq \emptyset \implies t \in \bigcup_{k=0,1,2,\dots} A^k \quad (2.122\alpha)$$

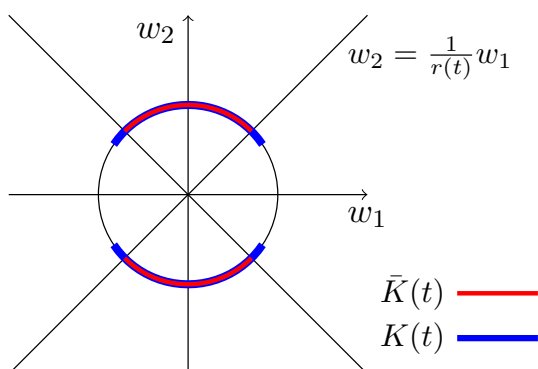
$$t \in \bigcup_{k=0,1,2,\dots} (B^k \cup \partial A^k) \Leftrightarrow u(t) = 0 \implies K^c(t) = \emptyset \quad (2.122\beta)$$

και ως συνέπεια των (2.121) και (2.122β), παίρνουμε:

Ισχυρισμός Π.2

$$u(t) = 0 \implies K^c(t) = \emptyset \Leftrightarrow \\ w' \left(P_2(t) A_2(t, q, u(t)) + \frac{1}{2} \dot{P}_2(t) + \hat{d}_2(t) P_2(t) \right) w < 0, \\ \forall w \in \mathbb{R}^2, |w| = 1, q \in Q_{y(t), u(t)} \quad (2.123)$$

Άμεση συνέπεια του Ισχυρισμού Π2 είναι:



Σχήμα 2.3: Αναπαράσταση των συνόλων $K(t)$ και $\bar{K}(t)$.

Ισχυρισμός Π.3

Υπάρχει C^0 συνάρτηση $\zeta = \zeta_u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{0\}$ έτσι ώστε

$$|u(t)| \leq \zeta(t), t \geq t_0 \Rightarrow K^c(t) = \emptyset, \quad (2.124)$$

(Σχήμα 2.2). Επακόλουθο των (2.107), (2.110)-(2.113), (2.117)-(2.119) και (2.121) είναι ο επόμενος ισχυρισμός:

Ισχυρισμός Π.4

$$\begin{aligned} & w'P_2(t)A_2(t, q, u(t))w + \frac{1}{2}w'\dot{P}_2(t)w + \hat{d}_2(t)w'P_2(t)w \\ & \leq w_1^2R_1(t) + |w_1||w_2|R_2(t) + w_2^2R_3(t) \\ & \forall w = (w_1, w_2) \in K(t), q \in Q_{y(t), u(t)}, t \geq t_0; \end{aligned} \quad (2.125\alpha)$$

όπου

$$\begin{aligned} R_1(t) & := \frac{1}{2}|\dot{p}_1(t)| + |\hat{d}_2(t)||p_1(t)| + |p(t)|\omega(|x_1(t)|, |u(t)|) + 1, \\ R_2(t) & := |p_1(t)||\rho_2(t)||u(t)| + |\dot{p}(t)| + 2|\hat{d}_2(t)||p(t)| + 2\omega(|x_1(t)|, |u(t)|) + 1 \\ R_3(t) & := -4\psi(t) \end{aligned} \quad (2.125\beta)$$

Παρατηρούμε ότι, από τις (2.112) και (2.125β), έχουμε $R_3(t) < 0, \forall t \geq t_0$. Ορίζουμε τώρα:

$$r(t) := \frac{-R_2(t) + \sqrt{R_2^2(t) - 4R_1(t)R_3(t)}}{4R_1(t)}; \quad (2.126\alpha)$$

$$\bar{K}(t) := \{w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : |w| = 1, |w_1| \leq r(t)|w_2|\}; \quad (2.126\beta)$$

$$\bar{K}^c(t) := \{w \in \mathbb{R}^2 : |w| = 1, w \notin \bar{K}(t)\}; \quad (2.126\gamma)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &:= \min\{|\Theta_2(t, u(t))H_2w| : w \in \bar{K}^c(t)\} \\ &= \min\{ |(\rho_1(t)\rho_2(t)u^2(t))^2 w_1| : w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \\ &\quad |w| = 1, w \in \bar{K}^c(t) \}, t \geq t_0\end{aligned}\quad (2.126\delta)$$

Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με την (2.126γ), $\bar{K}^c(t) \neq \emptyset$ για κάθε $t \geq t_0$ και η συνάρτηση $\varepsilon(\cdot)$ όπως δίνεται από την (2.126δ) είναι καλά ορισμένη για κάθε $t \geq t_0$. Επίσης, από τις (2.125β) και (2.126α), έχουμε ότι $r(t) > 0, \forall t \geq t_0$. Επιπλέον έχουμε:

Ισχυρισμός Π.5

$$\bar{K}(t) \subset K(t) \text{ για κάθε } t \geq t_0 \quad (2.127)$$

Ισχυρισμός Π.6

$$\varepsilon(t) = (\rho_1(t)\rho_2(t)u^2(t))^2 \sqrt{r^2(t)/(1+r^2(t))}, \forall t \geq t_0, \quad (2.128\alpha)$$

$$\varepsilon(t) > 0 \text{ για κάθε } t \geq t_0 \text{ για τα οποία } K^c(t) \neq \emptyset. \quad (2.128\beta)$$

Ορίζουμε τώρα:

$$C(t) \begin{cases} := \varepsilon^{-2}(t) \max\{|P_2(t)||A_2(t, q, u(t))| + \frac{1}{2} |\dot{P}_2(t)| + |\hat{d}_2(t)||P_2(t)|, q \in Q_{y(t), u(t)}\}, \\ \text{για } t \geq t_0 : \text{ είτε } K^c(t) \neq \emptyset \text{ ή } |u(t)| > \zeta(t) \text{ και } K^c(t) = \emptyset, \\ := 0, \text{ για } t \geq t_0 : |u(t)| \leq \zeta(t) (\Rightarrow K^c(t) = \emptyset) \end{cases} \quad (2.129)$$

με $\varepsilon(\cdot)$ όπως δίνεται από την (2.128) και $\zeta(\cdot)$ όπως ορίστηκε στην (2.124).

Ισχυρισμός Π.7

Για οποιαδήποτε ακολουθία $t_n \rightarrow t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ έχουμε $\lim_{t_n \rightarrow t} C(t_n) < \infty$.

Ισχυρισμός Π.8

Η ανίσωση (2.120) ισχύει για οποιαδήποτε $\phi_2 \in \mathcal{N} \cap C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}_{> 0})$ που ικανοποιεί

$$\phi_2(t) \geq \sup\{C(s) : s \in [t_0, t]\}, \forall t \geq t_0. \quad (2.130)$$

Οι προηγούμενοι Ισχυρισμοί οδηγούν στην κατασκευή της $C(\cdot)$ και συνεπώς της $\phi_2(\cdot)$ όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2(κάτω): Η επιθυμητή $C(\cdot)$ μηδενίζεται σε μια περιοχή του συνόλου $\cup_{i=0,1,2,\dots} B_i$, που ορίζεται από τον Ισχυρισμό Π3, και συμπίπτει με τον πρώτο μη μηδενικό όρο της (2.129) στο συμπλήρωμα του $\cup_{i=0,1,2,\dots} B_i$.

Βήμα II: Προχωράμε τώρα στο δεύτερο βήμα της κατασκευής του παρατηρητή για το σύστημα (2.106). Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (2.76α)-(2.76γ) και (2.109) ορίζουμε:

$$\begin{aligned} H_3 &:= (1, 0, 0), \quad \Theta_3(t, u) := (\rho_1(t)u)^2, \\ A_3(t, q, u) &:= A(t, q, u), \\ (t, q, u) &\in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |q| \leq \omega(|y|, |u|), \end{aligned} \quad (2.131)$$

όπου $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ ορίζεται από την (2.109α). Σύμφωνα με τη μεθοδολογία της απόδειξης του Ισχυρισμού 1 για $i = 3$ στην προηγούμενη ενότητα, θα βρούμε $\tau_3 (= \tau'_2)$ -μη αιτιατές $p_1, p \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και μια $\tau_3 (= \tau'_2)$ -μη αιτιατή συνεχή συνάρτηση $d_3 : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (2.78α)-(2.78γ) με $Q_{u,y}, \Theta_3, H_3, A_3$ όπως δίνονται από τις (2.109) και (2.131) αντίστοιχα, και $P_3 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{3 \times 3})$ όπως δίνεται από την (2.77) με P_2 όπως αυτή προσδιορίστηκε από την (2.118β) του προηγούμενου βήματος. Λόγω της (2.110) θεωρούμε πάλι δύο περιπτώσεις. Πρώτα κατασκευάζουμε τις απεικονίσεις d_3 και P_3 στο χωρίο clA^k , ($k = 0, 1, 2, \dots$). Συγκεκριμένα θα προσδιορίσουμε $\bar{p}_1^k, \bar{p}^k \in C^1(clA^k; \mathbb{R})$ και $\bar{d}_3 \in C^0(clA^k; \mathbb{R})$ έτσι ώστε, αν θεωρήσουμε το χρονικά μεταβαλλόμενο πίνακα $\bar{P}_3^k \in C^1(clA^k; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ όπως δίνεται από την (2.80), όπου $\bar{P}_2^k = P_2$ δίνεται στο προηγούμενο βήμα, τότε οι (2.81α) και (2.81β) ικανοποιούνται με A_3, H_3 και Θ_3 όπως ορίζονται από την (2.131) και $Q_{u,y}$ όπως ορίζεται στην (2.109). Πράγματι, διαλέγουμε πρώτα:

$$\begin{aligned} \bar{p}^k(t) &:= -\phi_2(t)\rho_1^3(t)\rho_2^4(t)u^7(t), \\ \bar{p}_1^k(t) &:= (\bar{p}^k(t))^2 + 2, \\ \bar{d}_3^k(t) &:= \hat{d}_2(t), \end{aligned} \quad (2.132)$$

όπου οι ϕ_2, \hat{d}_2 και P_2 ορίστηκαν στο προηγούμενο βήμα. Χρησιμοποιώντας τις (2.110α), (2.113β), (2.119), (2.131), (2.132) και εφαρμόζοντας τα ίδια επιχειρήματα με αυτά του Ισχυρισμού 1(περίπτωση $i = 3$) έχουμε ότι ισχύουν οι επιθυμητές (2.81α) και (2.81β). Προχωράμε τώρα στην κατασκευή των P_3 και d_3 στις περιοχές B^k , ($k = 0, 1, 2, \dots$). Συγκεκριμένα, θα προσδιορίσουμε $\tilde{p}_1^k \in C^1(B^k; \mathbb{R})$ και $\tilde{d}_3 \in C^0(B^k; \mathbb{R})$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε, αν ορίσουμε \tilde{P}_3^k όπως στην (2.92), τότε ισχύουν οι (2.93α) και (2.93β) με

$$A_3(t, q, u)|_{u=q=0} = 0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (2.133)$$

H_3, Θ_3 όπως αυτές ορίζονται από την (2.131) και $Q_{u,y}(\cdot) = \{0\}$. Αυτό μπορεί να γίνει διαλέγοντας, (σύμφωνα με τη μεθοδολογία της απόδειξης της Πρότασης 2.2.1):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p}^k(t) &:= 0, \\ \tilde{p}_1^k(t) &:= 2, \\ \tilde{d}_3^k(t) &:= \hat{d}_2(t) = -2\psi(t) \end{aligned} \right\}, t \in B^k, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.134)$$

με $\psi(t)$ όπως δίνεται από την (2.112) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (2.118α) και (2.119).

Τώρα, συνδυάζοντας τις Περιπτώσεις 1 και 2 αυτού του βήματος ορίζουμε:

$$d_3(t) := \begin{cases} \hat{d}_2(t)(= \frac{1}{2}L_k u^4(t) - 2\psi(t)), t \in clA^k; \\ -2\psi(t), t \in B^k, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.135\alpha)$$

$$P_3(t) = \left(\begin{array}{c|cc} p_1(t) & p(t) & 0 \\ \hline - & - & - \\ p(t) & & \boxed{P_2(t)} \\ 0 & & \end{array} \right) := \begin{cases} \bar{P}_3(t), t \in clA^k \\ \tilde{P}_3(t), t \in B^k \end{cases} \quad (2.135\beta)$$

$k = 0, 1, 2, \dots,$

και επομένως,

$$\left. \begin{aligned} p(t) &:= -\phi_2(t)\rho_1^3(t)\rho_2^4(t)u^7(t), \\ p_1(t) &:= p^2(t) + 2 \end{aligned} \right\}, \text{ για } t \in clA^k,$$

$$\left. \begin{aligned} p(t) &:= 0 \\ p_1(t) &:= 2 \end{aligned} \right\}, \text{ για } t \in B^k$$

και P_2 όπως δίνεται από την (2.118β). Από την κατασκευή των διαφορών απεικονίσεων παραπάνω έχουμε ότι $d_3 \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$, $P_3 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{3 \times 3})$ και ισχύουν οι (2.78α)-(2.78γ). Διαλέγοντας τώρα

$$\hat{d}_3(t) := d_3(t) - \psi(t), t \geq t_0 \quad (2.136)$$

έχουμε ότι ικανοποιείται η (2.104α) και η Πρόταση 2.3.1 εγγυάται ότι υπάρχει $T := 2\tau - \mu\eta$ αιτιατή συνάρτηση $\phi_3 \in \mathcal{N} \cap C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, που ικανοποιεί

$$e'P_3(t)A_3(t, q, u(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_3(t)e - \phi_3(t)\rho_1^4(t)u^4(t)|e_1|^2 \leq -\hat{d}_3(t)e'P_3(t)e,$$

$$\forall e \in \mathbb{R}^3, q \in Q_{y(t), u(t)}, t \geq t_0 \quad (2.137)$$

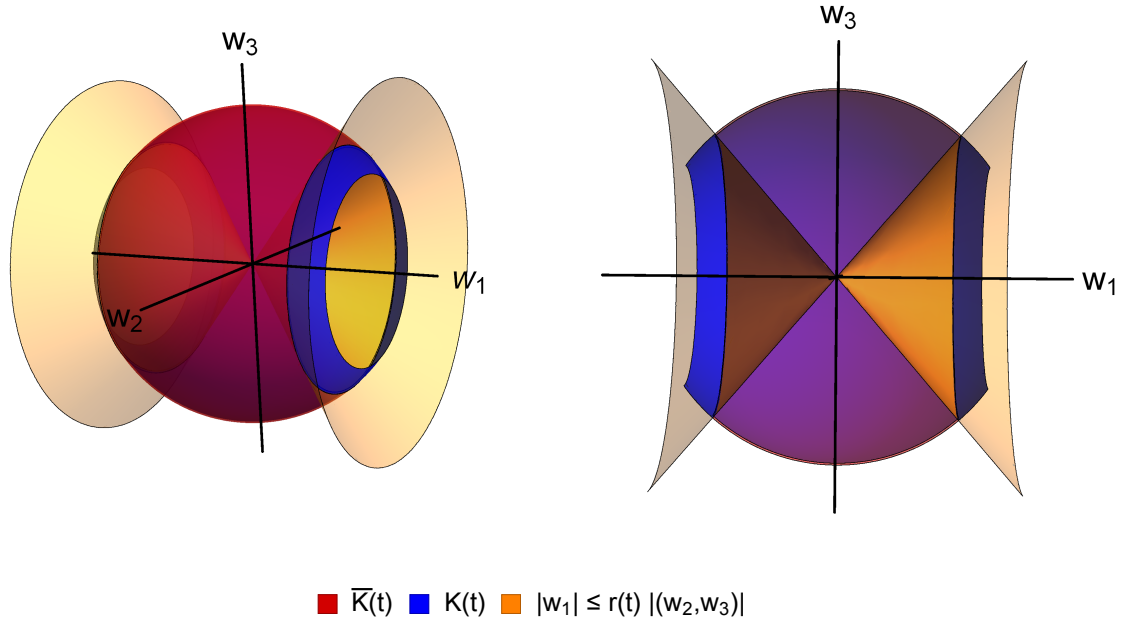
Κατασκευή της ϕ_3 : Για να κατασκευάσουμε την επιθυμητή συνάρτηση ϕ_3 που ικανοποιεί την (2.137) παραπάνω, χρησιμοποιούμε μια παρόμοια προσέγγιση με αυτή του Βήματος I. Θεωρούμε πάλι το μη κενό σύνολο

$$K(t) := \{w \in \mathbb{R}^3 : |w| = 1,$$

$$w'P_3(t)A_3(t, q, u(t))w + \frac{1}{2}w'\dot{P}_3(t)w + \hat{d}_3(t)w'P_3(t)w < 0, \forall q \in Q_{y(t), u(t)}, t \geq t_0 \quad (2.138)$$

και το συμπλήρωμα του $K^c(t) := \{w \in \mathbb{R}^3 : |w| = 1, w \notin K(t)\}$. Τότε, όπως και στον Ισχυρισμό Π4 του Βήματος I, μπορούμε να δείξουμε ότι, αν λάβουμε υπ' όψιν τις (2.120), (2.131), (2.132), (2.134)-(2.136) και το γεγονός ότι $P_2(t) > I_{2 \times 2}$ για κάθε $t \geq t_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} &w'P_3(t)A_3(t, q, u(t))w + \frac{1}{2}w'\dot{P}_3(t)w + \hat{d}_3(t)w'P_3(t)w \\ &\leq w_1^2 R_1(t) + |w_1||w_2|R_2(t) + |w_1||w_3|R_3(t) + (w_2^2 + w_3^2)R_4(t), \\ &\forall w \in K(t), q \in Q_{y(t), u(t)}, t \geq t_0 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.4: Αναπαράσταση των συνόλων $K(t)$ και $\bar{K}(t)$ για την τρισδιάστατη περίπτωση (αριστερά) και η τομή στις δύο διαστάσεις (δεξιά).

με

$$\begin{aligned} R_1(t) &:= \frac{1}{2}|\dot{p}_1(t)| + |\hat{d}_3(t)||p_1(t)| + 1, \\ R_2(t) &:= |\dot{p}(t)| + |p_1(t)||u(t)||\rho_1(t)| + 2|\hat{d}_3(t)||p(t)| + 1, \\ R_3(t) &:= |p(t)||u(t)||\rho_2(t)| + 1, \\ R_4(t) &:= -\psi(t). \end{aligned}$$

όπου οι $p(\cdot)$, $p_1(\cdot)$, $\hat{d}_3(\cdot)$ και $\psi(\cdot)$ προσδιορίζονται από τις (2.132), (2.134), (2.135), (2.136) και (2.112). Επίσης ορίζουμε:

$$r(t) := \frac{-R_2(t) - R_3(t) + \sqrt{(R_2(t) + R_3(t))^2 - 4R_1(t)R_4(t)}}{4R_1(t)}, \quad t \geq t_0 \quad (2.139\alpha)$$

$$\bar{K}(t) := \{w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : |w| = 1, |w_1| \leq r(t)|(w_2, w_3)|\}, \quad (2.139\beta)$$

$$\bar{K}^c(t) := \{w \in \mathbb{R}^3 : |w| = 1, w \notin K(t)\}, \quad (2.139\gamma)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &:= \min\{|\Theta_3(t, u(t))H_3 w| : w \in \bar{K}^c(t)\} \\ &= \min\{|\rho_1^2(t)u^2(t)w_1| : w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3, |w| = 1, w \in \bar{K}^c(t)\}, \end{aligned} \quad (2.139\delta)$$

(Σχήμα 2.4) και όπως και στο προηγούμενο βήμα προσδιορίζουμε μια C^0 συνάρτηση $\zeta = \zeta_u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ έτσι ώστε

$$|u(t)| \leq \zeta(t), \quad t \geq t_0 \Rightarrow K^c(t) = \emptyset \quad (2.140)$$

Τέλος ορίζουμε

$$C(t) \begin{cases} := \varepsilon^{-2}(t) \max\{|P_3(t)||A_3(t, q, u(t))| + \frac{1}{2}|\dot{P}_3(t)| + |\hat{d}_3(t)||P_3(t)|, q \in Q_{y(t), u(t)}\}, \\ \text{για } t \geq t_0 : \text{είτε } K^c(t) \neq \emptyset \text{ ή } |u(t)| > \zeta(t) \text{ και } K^c(t) = \emptyset \\ := 0, \text{ για } t \geq t_0 : |u(t)| \leq \zeta(t) (\Rightarrow K^c(t) = \emptyset) \end{cases} \quad (2.141)$$

όπου οι απεικονίσεις $P_3(\cdot)$, $\hat{d}_3(\cdot)$ και $\zeta(\cdot)$ ορίζονται από τις (2.118β), (2.136) και (2.140) αντίστοιχα. Τότε από τις (2.133)-(2.141) μπορούμε να αποδείξουμε ότι όλοι οι Ισχυρισμοί του Βήματος I ικανοποιούνται με P_3 , A_3 , d_3 , \hat{d}_3 , αντί των P_2 , A_2 , d_2 , \hat{d}_2 , αντίστοιχα και με K , \bar{K} , ε , r όπως ορίστηκαν από την (2.139). Για παράδειγμα, μπορούμε να δείξουμε ότι $\varepsilon(t) = \rho_1^2(t)u^2(t)\sqrt{r^2(t)/(1+r^2(t))}$, $t \geq t_0$, όπου η $r(\cdot)$ δίνεται από την (2.139α). Προκύπτει τότε, ότι υπάρχει μια $T = 2\tau$ -μη αιτιατή συνάρτηση ϕ_3 κλάσεως $\mathcal{N} \cap C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}_{>0})$ που ικανοποιεί $\phi_3(t) \geq \sup\{C(s), s \in [t_0, t]\}$, $t \geq t_0$, με $C(\cdot)$ όπως δίνεται από την (2.141), και όπως και στο Βήμα I μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει η επιθυμητή (2.137). Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το NCODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.106) ως προς το $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^3, U)$. Σύμφωνα με την προσέγγιση μας, το τρισδιάστατο σύστημα (2.48) με $F(t, z, y, u) := (\rho_1(t)uz_2, \rho_2(t)uz_3, ug(z_1, z_2))'$, $a_1(t, y, u) := \rho_1(t)u$, $P(\cdot) := P_3(\cdot)$ (όπως ορίστηκε στην (2.135β)) και $\phi := \phi_3$ είναι ένας παρατηρητής για το (2.106).

Τέλος, εφαρμόζουμε την παραπάνω ανάλυση για να εκτιμήσουμε την κατάσταση του συστήματος (2.106), με $\rho_1(t) := 3t^4 + 1$, $\rho_2(t) := 1$, $t \geq 0$ και $g \equiv 0$, στο χρονικό διάστημα $[0, 6\pi]$, υπό την προϋπόθεση ότι η είσοδος u και επομένως και η αντίστοιχη έξοδος y είναι γνωστές σε ολόκληρο το διάστημα $[0, 6\pi]$. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι

$$u(t) := \begin{cases} \sin^2(t), & t \in [\pi, 2\pi] \cup [3\pi, 4\pi] \cup [5\pi, 6\pi]; \\ 0, & t \in (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi). \end{cases}$$

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία μας, αν επιλέξουμε $\phi(t) = \text{constant} = 2.6 \cdot 10^{12}$, $t \in [t_0 = 0, 6\pi]$ και κατάλληλο $P(\cdot)$ όπως παραπάνω (στο ίδιο διάστημα $[0, 6\pi]$) τότε το σύστημα (2.48) με

$$F(t, z, y, u) := \begin{pmatrix} (3t^4 + 1)u(t)z_2 \\ u(t)z_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

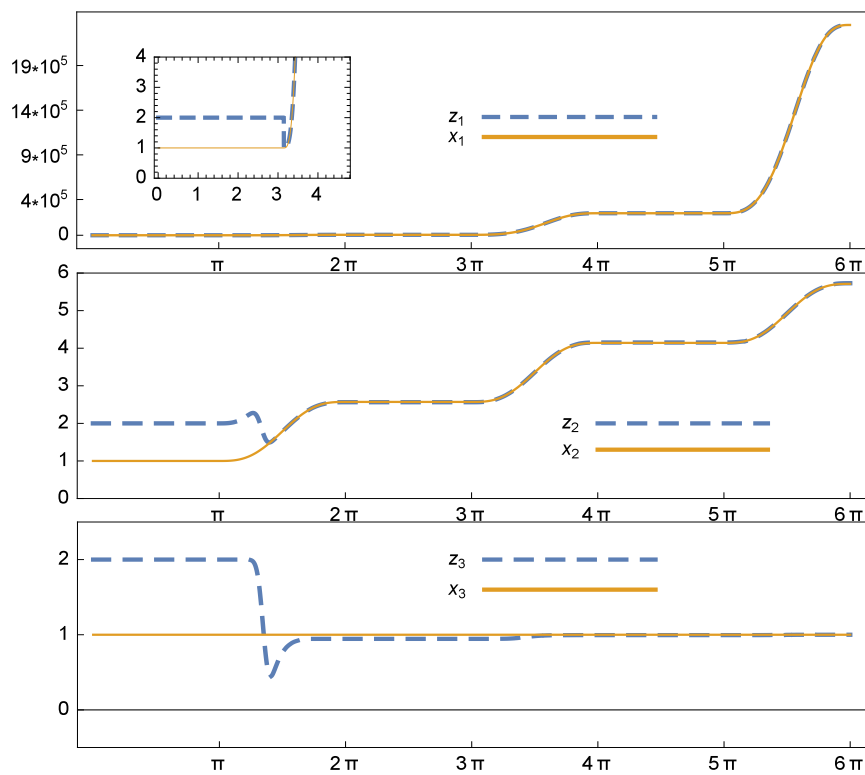
$a_1(t) := (3t^4 + 1)u(t)$, $L_k := 2\pi$, ϕ όπως παραπάνω και

$$P(t) = \begin{pmatrix} 2.401 \cdot 10^{-5} \rho_1^6(t)u^{14}(t) + 2 & -4.9 \cdot 10^{-3} \rho_1^3(t)u^7(t) & 0 \\ -4.9 \cdot 10^{-3} \rho_1^3(t)u^7(t) & (2\pi u^3(t))^2 + 2 & -2\pi u^3(t) \\ 0 & -2\pi u^3(t) & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.142)$$

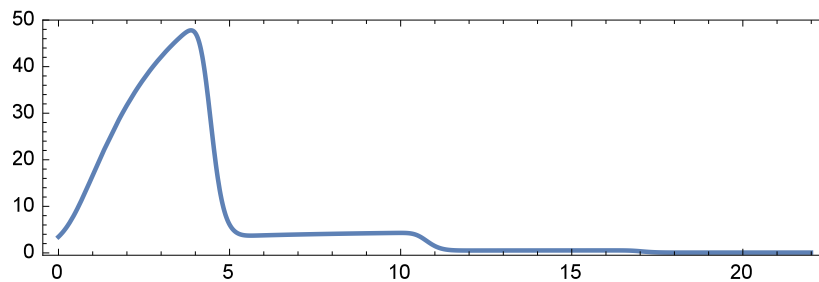
εκτιμά την κατάσταση του (2.106) στο διάστημα $[0, 6\pi]$. Η αριθμητική προσομοίωση των καταστάσεων $x := (x_1, x_2, x_3)$ και $z := (z_1, z_2, z_3)$ του (2.106) και του παρατηρητή, αντίστοιχα,

2. LUENBERGER-ΤΥΠΟΥ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΕΣ ΓΙΑ ΜΙΑ ΚΛΑΣΗ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

με αρχικές συνθήκες $x(0) = (1, 1, 1)'$ και $z(0) = (2, 2, 2)'$, απεικονίζεται στο Σχήμα 2.5. Τέλος, στο Σχήμα 2.6, εκτιμάται η εξίσωση σφάλματος, σύμφωνα με την (2.50), με αρχικές συνθήκες όπως παραπάνω, με $P(\cdot)$ όπως δίνεται από την (2.142) και $d(t) := \pi u^4(t) - 2\psi(t)$, όπου η $\psi(\cdot)$ δίνεται από την (2.112).



Σχήμα 2.5: Προσομοίωση στο διάστημα $[0, 6\pi]$. Η διακεκομμένες γραμμές αντιπροσωπεύουν την εκτίμηση του παρατηρητή ενώ οι συνεχείς την πραγματική κατάσταση του συστήματος.



Σχήμα 2.6: Εκτίμηση σφάλματος μεταξύ της τροχιάς $x(\cdot)$ του συστήματος και της τροχιάς $z(\cdot)$ του παρατηρητή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΔΙΑΚΟΠΤΟΜΕΝΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΡΙΓΩΝΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας [71] που αφορούν την επιλυσιμότητα του Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητή για μη γραμμικά τριγωνικά συστήματα ελέγχου μέσω μιας διακοπτόμενης ακολουθίας δυναμικών συστημάτων με χρονική υστέρηση. Το εν λόγω κεφάλαιο έχει την ακόλουθη δομή. Στην Ενότητα 3.1 δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί και οι έννοιες που σχετίζονται με την επιλυσιμότητα του ODP για γενικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα καθώς και το κεντρικό αποτέλεσμα που αφορά τριγωνικά συστήματα. Η Ενότητα 3.2 περιέχει κάποια προκαταρκτικά αποτελέσματα για γενικά μη γραμμικά συστήματα και τέλος, η Ενότητα 3.3 περιέχει την απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος.

Περιεχόμενα Κεφαλαίου

3.1	Εισαγωγή.....	70
3.1.1	Ορισμοί και Κεντρικό Αποτέλεσμα	70
3.1.2	Σύγκριση με Παλαιότερα Αποτελέσματα	76
3.2	Προκαταρκτικά Αποτελέσματα	76
3.3	Απόδειξη της Πρότασης 3.1.1.	89

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρατίθενται τα αποτελέσματα της εργασίας [71], όπου γενικεύεται η προσέγγιση της εργασίας [16], προκειμένου να εξαχθούν ικανές συνθήκες για την επίλυση του Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητή (ODP) για μια ευρεία κλάση μη γραμμικών συστημάτων της μορφής

$$\dot{x} = f(t, x, u), (t, x, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \quad (3.1\alpha)$$

$$y = h(t, x, u), y \in \mathbb{R}^k \quad (3.1\beta)$$

μέσω μιας διακοπτόμενης (switching) ακολουθίας αιτιατών (causal) χρονικώς μεταβαλλόμενων δυναμικών συστημάτων με χρονική υστέρηση. Κύριος στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η επιλυσιμότητα του ODP για συστήματα τριγωνικής μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, u) + a_1(t, x_1, u)x_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.2\alpha)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(t, x_1, \dots, x_{n-1}, u) + a_{n-1}(t, x_1, u)x_n, \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u), \\ y &= x_1, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (3.2\beta)$$

με ασθενέστερες υποθέσεις από τις υπάρχουσες στη βιβλιογραφία και ακολουθώντας μια διαφορετική προσέγγιση από αυτή του Κεφαλαίου 2. Συγκεκριμένα, σύγκριση των εξαχθέντων αποτελεσμάτων με αυτά του Κεφαλαίου 2 και αυτά της εργασίας [16] γίνεται στην υπο-ενότητα 3.1.2.

3.1.1 Ορισμοί και Κεντρικό Αποτέλεσμα

Υποθέτουμε ότι το δεξί μέλος της (3.1α) είναι τοπικά Lipschitz ως προς το x , δηλαδή, για κάθε συμπαγές $[a, b] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, $K \subset \mathbb{R}^n$ και $U \subset \mathbb{R}^p$ υπάρχει σταθερά $L > 0$ έτσι ώστε

$$|f(t, x, u) - f(t, z, u)| \leq L|x - z|, \forall t \in [a, b], x, z \in K, u \in U.$$

Τότε, για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $x_0 \in \mathbb{R}^n$ σε χρόνο $t_0 \geq 0$ και είσοδο $u \in L_{loc}^\infty([t_0, \infty); \mathbb{R}^p)$ το σύστημα (3.1α) έχει μοναδική λύση που ορίζεται στο διάστημα $[t_0, T_{\max})$ (βλέπε [36], [122]).

Ορισμός 3.1.1

Θεωρούμε το μη κενό σύνολο M του \mathbb{R}^n . Για κάθε $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times M$, θεωρούμε $\mathcal{U}(t_0, x_0)$ να είναι ένα μη κενό σύνολο από (μετρήσιμες και τοπικά ουσιαδώς φραγμένες) εισόδους $u : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$ και ορίζουμε

$$\mathcal{U}(t_0) := \cup_{x_0 \in M} \mathcal{U}(t_0, x_0), t_0 \geq 0; \mathcal{U} := \cup_{t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \mathcal{U}(t_0). \quad (3.3)$$

Λέμε ότι το σύστημα (3.1α) είναι (M, \mathcal{U}) -δεξιά πλήρες, αν υπάρχει συνάρτηση $\beta \in \mathcal{NN}$ έτσι ώστε η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0; u)$ του (3.1α) που αντιστοιχεί σε είσοδο $u(\cdot)$ με αρχική συνθήκη x_0 σε χρόνο $t = t_0$ ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$ και ικανοποιεί

$$|x(t)| \leq \beta(t, |x_0|), \forall t \geq t_0 \geq 0, x_0 \in M, u \in \mathcal{U}(t_0, x_0). \quad (3.4)$$

Παρατήρηση 3.1.1. Στην περίπτωση όπου $M = \mathbb{R}^n$ και όλα τα $u \in \mathcal{U}$ παίρνουν τιμές σε ένα συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^p , το χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα (3.1α) είναι δεξιά πλήρες, αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $\beta \in \mathcal{NN}$ έτσι ώστε να ισχύει η (3.4), εφόσον τα δυναμικά του (3.1α) είναι C^0 και τοπικά Lipschitz στο $x \in \mathbb{R}^n$ (βλέπε Λήμμα 2.3 [37]). ◦

Προκύπτει ότι, αν το σύστημα (3.1α) είναι (M, \mathcal{U}) -δεξιά πλήρες, για κάθε $t_0 \geq 0, x_0 \in M$ και $u \in \mathcal{U}(t_0, x_0)$, η αντίστοιχη έξοδος $y(t) = h(t, x(t, t_0, x_0; u), u(t))$ του (3.1) ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$. Για κάθε $t_0 \geq 0$ και $x_0 \in M$ θεωρούμε το σύνολο $O(t_0, x_0)$, που περιέχει τα ζευγάρια όλων των δυνατών εισόδων $\mathcal{U}(t_0, x_0)$ και τις αντίστοιχες εξόδους του συστήματος (με αρχική συνθήκη (t_0, x_0)), δηλαδή:

$O(t_0, x_0) := \{(u, y) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k : u \in \mathcal{U}(t_0, x_0), y(t) = h(t, x(t, t_0, x_0; u), u(t)), \forall t \geq t_0\}$
και ορίζουμε

$$O(t_0, M) := \cup_{x_0 \in M} O(t_0, x_0). \quad (3.5)$$

Ορισμός 3.1.2

Έστω $k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^\ell$ και για κάθε $t_0 \geq 0$, έστω $\Omega(t_0, M)$ ένα μη κενό σύνολο από συναρτήσεις $(u, y) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$, $y := y_{t_0, x_0}$, $u := u_{t_0, x_0}$ παραμετροποιημένες από τα $t_0 \geq 0$ και $x_0 \in M$. Για δοσμένο σύνολο $I \subset [t_0, \infty)$, λέμε ότι η απεικόνιση

$$I \times \Omega(t_0, M) \ni (t, (u, y)) \rightarrow a_{u, y}(t) \in S$$

είναι **αιτιατή** ως προς το $\Omega(t_0, M)$, αν για κάθε $t \in I$, η τιμή της $a(t) := a_{u, y}(t)$ εξαρτάται μόνο από τα $(u, y)|_{[t_0, t]}$ (ο περιορισμός των $(u, y)(\cdot)$ στο $[t_0, t]$). Έστω $\beta > \alpha \geq t_0$ και $a_{u, y}(\cdot)$ όπως ορίστηκε παραπάνω. Λέμε ότι η $a_{u, y}(\cdot)$ είναι **ισχυρώς αιτιατή** στο $I \cap [\alpha, \beta]$ ως προς το $\Omega(t_0, M)$, αν για κάθε $t \in I \cap [\alpha, \beta]$, η τιμή της $a(t) (= a_{u, y}(t))$ εξαρτάται μόνο από $(u, y)|_{[t_0, \alpha]}$.

Σε αυτό το Κεφάλαιο, εξετάζουμε ξανά το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή για συστήματα της μορφής (3.2), υπό την υπόθεση ότι κάθε $a_i(\cdot, y(\cdot), u(\cdot))$, $i = 1, \dots, n-1$ μπορεί να μηδενίζεται σε υποδιαστήματα του $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Συγκεκριμένα, κατά την εκκίνηση του συστήματος, υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων μια διαμέριση του $\mathbb{R}_{\geq 0}$ σε μια αριθμήσιμη ακολουθία διαστημάτων, καθένα εκ των οποίων περιέχει μια χρονική στιγμή όπου όλες οι a_i είναι μη μηδενικές. Παρ' όλα αυτά, δεν γνωρίζουμε εξαρχής ποιες είναι αυτές οι χρονικές στιγμές. Επομένως, για να κατασκευάσουμε τον επιθυμητό παρατηρητή, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε μελλοντικές τιμές της εξόδου του συστήματος, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα την εκτίμηση της κατάστασης με κάποια χρονική καθυστέρηση. Ωστόσο, αυτή η καθυστέρηση αποτελεί μια παράμετρο σχεδιασμού που μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρή.

Προχωράμε τώρα στο φορμαλισμό του παραπάνω προβλήματος, δηλαδή, στον ορισμό του Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητή με καθυστέρηση καθώς και στον ορισμό της Διακοπτόμενης Ακολουθίας Παρατηρητών με καθυστέρηση για τη γενική περίπτωση (3.1).

Ορισμός 3.1.3

Θεωρούμε $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{U} όπως στην (3.3) και υποθέτουμε ότι το σύστημα (3.1) είναι (M, \mathcal{U}) -δεξιά πλήρες. Για δοσμένο $\tau > 0$, λέμε ότι το **Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή με τ -Καθυστέρηση (Delayed-ODP, τ -DODP)** είναι **επιλύσιμο για το σύστημα (3.1) ως προς το (M, \mathcal{U})** , αν για κάθε $t_0 \geq 0$, και $(u, y) \in O(t_0, M)$ υπάρχει συνεχής απεικόνιση

$$G := G_{t_0, \tau, y, u}(t, z, w, u) : [t_0 + \tau, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

αιτιατή ως προς το $O(t_0, M)$ και ένα μη κενό σύνολο $\bar{M} \subset \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε για κάθε αρχική συνθήκη $z_0 \in \bar{M}$ η αντίστοιχη τροχιά $z(\cdot) := z(\cdot, t_0 + \tau, z_0; u, y)$; $z(t_0 + \tau) = z_0$ του παρατηρητή

$$\dot{z}(t) = G(t, z(t), y_\tau(t), u_\tau(t))$$

υπάρχει για κάθε $t \geq t_0 + \tau$ και το σφάλμα $e(t) := x_\tau(t) - z(t)$, μεταξύ της τροχιάς $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0; u)$, $x_0 \in M$ του (3.1α) και της τροχιάς $z(\cdot) := z(\cdot, t_0 + \tau, z_0; u, y)$ του παρατηρητή ικανοποιεί:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (3.6)$$

Λέμε ότι το **Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή με Αυθαίρετα Μικρή-Καθυστέρηση (Infinitesimally Delayed Observer Design Problem (IDODP))** είναι **επιλύσιμο για το (3.1) ως προς το (M, \mathcal{U})** , αν το τ -DODP είναι επιλύσιμο για το (3.1) για οποιοδήποτε (αυθαίρετα μικρό) $\tau > 0$.

Ορισμός 3.1.4

Έστω $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{U} όπως (3.3) και υποθέτουμε ότι το σύστημα (3.1) είναι (M, \mathcal{U}) -δεξιά πλήρες. Για δοσμένο $\tau > 0$, λέμε ότι το **Διακοπτόμενο Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή με τ -Καθυστέρηση** (τ -Delayed Switching Observer Design Problem, (τ -DSODP)) είναι επιλύσιμο για το (3.1) ως προς το (M, \mathcal{U}) , αν για κάθε $t_0 \geq 0$ και $(u, y) \in O(t_0, M)$ υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία από χρόνους $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ με

$$t_1 = t_0 + \tau \text{ και } \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \infty,$$

και μια ακολουθία από συνεχείς απεικονίσεις

$$G_m := G_{m, t_{m-1}, \tau, u, y}(t, z, w, u) : [t_{m-1}, t_{m+1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N},$$

αιτιατές ως προς το $O(t_0, M)$ και ένα μη κενό σύνολο $\bar{M} \subset \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε η λύση $z_m(\cdot)$ του συστήματος

$$\dot{z}_m(t) = G_m(t, z_m(t), y_\tau(t), u_\tau(t)), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \quad (3.7)$$

με αρχική συνθήκη $z(t_{m-1}) \in \bar{M}$, ορίζεται για κάθε $t \in [t_{m-1}, t_{m+1}]$ και κατά τέτοιο τρόπο ώστε, αν θεωρήσουμε την τμηματικά συνεχή απεικόνιση

$$Z : [t_0 + \tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

που ορίζεται από την

$$Z(t) := z_m(t), t \in [t_m, t_{m+1}), m \in \mathbb{N},$$

όπου για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $z_m(\cdot)$ είναι η λύση του (3.7), τότε το σφάλμα $e(t) := x_\tau(t) - Z(t)$ μεταξύ της τροχιάς $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0; u)$, του συστήματος (3.1α) και της $Z(\cdot)$ ικανοποιεί την (3.6).

Λέμε ότι το **Διακοπτόμενο Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή με Αυθαίρετα Μικρή-Καθυστέρηση** (Infinitesimally Delayed Switching Observer Design Problem (IDODP)) είναι επιλύσιμο για το (3.1) ως προς το (M, \mathcal{U}) , αν το τ -DSODP είναι επιλύσιμο για το (3.1) για οποιοδήποτε $\tau > 0$.

Συνεχίζουμε τώρα με το κεντρικό αποτέλεσμα της εργασίας [71] που αφορά την επιλυσιμότητα του IDSODP (IDODP) για τριγωνικά συστήματα (3.2). Υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 1, \dots, n$ η απεικόνιση $f_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^0 , και για κάθε σταθερό $t \geq 0$ και $u \in \mathbb{R}^p$, η $f_i(t, \cdot, u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^1 και για κάθε $i = 1, \dots, n - 1$ η απεικόνιση $a_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^1 . Επιπλέον υποθέτουμε:

Y1. Υπάρχει μη κενό υποσύνολο M του \mathbb{R}^n , μια συνεχή συνάρτηση $\bar{u} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ και ένα μη κενό σύνολο από **συνεχώς διαφορίσιμες** εισόδους \mathcal{U} όπως στο (3.3), έτσι ώστε το σύστημα (3.2α) είναι (M, \mathcal{U}) -δεξιά πλήρες; συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $\beta \in \mathcal{NN}$ έτσι ώστε η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0; u)$ του (3.2α) ικανοποιεί την (3.4). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για κάθε $t_0 \geq 0$ και $u \in \mathcal{U}(t_0)$ ισχύει ότι:

$$|u(t)| \leq \bar{u}(t), \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (3.8)$$

Y2. Για κάθε $t_0 \geq 0$ και $(u, y) \in O(t_0, M)$, υπάρχει μια εκ των προτέρων γνωστή γνησίως αύξουσα ακολουθία από χρόνους $\{T_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ με

$$T_0 = t_0; \lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu = \infty \quad (3.9)$$

έτσι ώστε να υπάρχει ακολουθία $\{\hat{t}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ με $\hat{t}_\nu \in (T_{\nu-1}, T_\nu)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και

$$a_i(\hat{t}_\nu, y(\hat{t}_\nu), u(\hat{t}_\nu)) \neq 0, \forall i = 1, \dots, n-1, \nu \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

Το κεντρικό αποτέλεσμα είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.1

[71]

Για το σύστημα (3.2), υποθέτουμε ότι υπάρχει μη κενό υποσύνολο M του \mathbb{R}^n και ένα σύνολο από εισόδους \mathcal{U} όπως στη (3.3) έτσι ώστε να πληρούνται οι Y1 και Y2. Τότε

1. το **IDSODP** είναι επιλύσιμο για το (3.2) ως προς το (M, \mathcal{U}) .
2. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι είναι **εκ των προτέρων γνωστό** ότι οι αρχικές συνθήκες του (3.2) ανήκουν στην (μη κενή) τομή του M με δοσμένη μπάλα B_R ακτίνας $R > 0$ και κέντρο το μηδέν $0 \in \mathbb{R}^n$, τότε το **IDODP** είναι επιλύσιμο για το (3.2) ως προς το $(B_R \cap M, \mathcal{U})$.

Το επόμενο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή της Πρότασης 3.1.1.

Παράδειγμα 3.1.1. Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x}_1 = ux_2, \dot{x}_2 = g(t, x_1, x_2, u) - x_2^q, y = x_1, \quad (3.11)$$

όπου q είναι περιττός ακέραιος και η $g \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ ικανοποιεί την ακόλουθη ανίσωση

$$|g(t, x_1, x_2, u)| \leq \alpha(t)|x_1| + \beta(t), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |u| \leq \bar{u}(t), t \geq 0, \quad (3.12)$$

για συγκεκριμένη συνεχή συνάρτηση $\bar{u} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ και $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Υποθέτουμε επίσης ότι το σύνολο εισόδων \mathcal{U} περιέχει όλα τα $u \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $t_0 \geq 0$, που ικανοποιούν την (3.8) και την ακόλουθη ιδιότητα:

Ιδιότητα 2

Για κάθε $t_0 \geq 0$, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία από χρόνους $\{T_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ με $t_0 = T_0$ και $\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu = \infty$, έτσι ώστε να ισχύει το ακόλουθο. Για κάθε $u \in \mathcal{U}(t_0)$, υπάρχει ακολουθία $\{\hat{t}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\hat{t}_\nu (= \hat{t}_\nu(u)) \in (T_{\nu-1}, T_\nu)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \hat{t}_\nu = \infty$ και

$$u(\hat{t}_\nu) \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}_0. \quad (3.13)$$

Το σύστημα (3.11) έχει τη μορφή (3.2) με $f_1(t, x_1, u) = 0$, $f_2(t, x_1, x_2, u) = g(t, x_1, x_2, u) - x_2^q$ και $a_1(t, x_1, u) := u$ και ικανοποιεί τις υποθέσεις Y1 και Y2 για το δοσμένο σύνολο εισόδων \mathcal{U} και $M = \mathbb{R}^2$. Προκύπτει από τις υποθέσεις (3.8) και (3.12), ότι το σύστημα είναι $(\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$ -δεξιά πλήρες. Πράγματι, υπολογίζοντας τη χρονική παράγωγο \dot{V} της $V(x_1, x_2) := 1/2(x_1^2 + x_2^2)$ κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (3.11) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= u(t)x_1(t)x_2(t) + x_2(t)g(t, x_1, x_2, u) - x_2^{q+1}(t) \leq |u(t)||x_1(t)||x_2(t)| + |x_2(t)||g(t, x_1, x_2, u)| \\ &\leq (\bar{u}(t) + \alpha(t))|x_1(t)||x_2(t)| + \beta(t)|x_2(t)| \leq \frac{1}{2}(\bar{u}(t) + \alpha(t))(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\beta(t)(2 + x_1^2(t) + x_2^2(t)) \leq (\bar{u}(t) + \alpha(t) + \beta(t))V(x(t)) + \beta(t), \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι το σύστημα (3.11) είναι δεξιά πλήρες. Προκύπτει, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.1, ότι το IDSODP (IDODP) είναι επιλύσιμο για το (3.11) ως προς το (M, \mathcal{U}) . \triangleleft

Παρατήρηση 3.1.2. Σημειώνουμε ότι η Ιδιότητα 2 παραπάνω είναι ασθενέστερη της Ιδιότητας 1 του προηγούμενου Κεφαλαίου (σελ. 35). Αυτό προκύπτει εύκολα με το ακόλουθο αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε την ακολουθία $\{T_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ με $t_0 = T_0 = 0$ και $T_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι για κάθε $u \in \mathcal{U}$, υπάρχει ακολουθία από χρόνους $\{t_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ με

$$t_\nu \in \left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}, \frac{\nu(\nu+1)}{2} + 1 \right]: u(t_\nu) \neq 0 \quad (3.14\alpha)$$

και

$$u(t) = 0, \forall t \in \left[\frac{\nu(\nu+1)}{2} + 1, \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} \right]. \quad (3.14\beta)$$

Προφανώς, ο παραπάνω ορισμός συνεπάγεται την Ιδιότητα 2, αφού από τα $\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu = \infty$ και (3.14) συνεπάγεται η (3.13). Τότε, για κάθε $\xi > 0$, μπορούμε να βρούμε επαρκώς μεγάλο $\nu_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε να ισχύουν οι (3.14α) και (3.14β) με $\nu = \nu_0$ κι επιπλέον $t_{\nu_0} - t_{\nu_0-1} > \xi$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την (2.16α) της Ιδιότητας. Συγκεκριμένα, αρκεί να διαλέξουμε $\nu_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\frac{(\nu_0+1)(\nu_0+2)}{2} - \frac{\nu_0(\nu_0+1)}{2} - 1 > \xi,$$

για οποιοδήποτε σταθερό $\xi > 0$. \circ

3.1.2 Σύγκριση με Παλαιότερα Αποτελέσματα

Στην εργασία [16], μελετήθηκε το ODP για συστήματα (3.2) χωρίς εισόδους υπό τις υποθέσεις ότι το σύστημα είναι δεξιά πλήρες και ικανοποιεί την ακόλουθη συνεπαγωγή

$$\begin{aligned} \forall t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x_0 \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \Rightarrow a_i(t, y(t)) \neq 0 \text{ σχεδόν παντού } t \geq t_0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Στην Πρόταση 1.2.7, που αποτελεί ένα από τα κεντρικά αποτελέσματα της εργασίας [16], αποδεικνύεται ότι, υπό τις παραπάνω υποθέσεις το Μη-Αιτιατό ODP είναι επιλύσιμο για το (3.2) μέσω μιας διακοπτόμενης ακολουθίας παρατηρητών. Επιπλέον αποδείχτηκε ότι αν είναι εκ των προτέρων γνωστό ότι οι αρχικές συνθήκες βρίσκονται σε ένα φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n , τότε το Μη-Αιτιατό ODP είναι επιλύσιμο για το (3.2).

Προφανώς, η υπόθεση Υ2 είναι ασθενέστερη από την (3.15) και επομένως η Πρόταση 3.1.1, αυτού του κεφαλαίου αποτελεί γενίκευση της Πρότασης 1.2.7. Συγκεκριμένα, η υπόθεση Υ2 συμπεριλαμβάνει τη γενική περίπτωση όπου οι απεικονίσεις $a_i(\cdot, y(\cdot), u(\cdot))$, $i = 1, \dots, n-1$ μπορεί να μηδενίζονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Στα αποτελέσματα των Προτάσεων 1.2.6 και 2.2.1, η επιλυσιμότητα του μη αιτιατού ODP στηρίζεται σε μεθοδολογίες όπου υπεισέρχονται επιπρόσθετοι περιορισμοί στα δυναμικά του συστήματος, βλέπε (1.46) και (2.9). Σε αυτό το Κεφάλαιο, η διακοπτόμενη μεθοδολογία που υιοθετείται, μας επιτρέπει να επιτύχουμε την ολική εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος χωρίς περιορισμούς στους όρους $f_i(\cdot)$. Μια άλλη σημαντική διαφορά βρίσκεται στην Υπόθεση Υ2 η οποία είναι ασθενέστερη από την H2 στο Κεφάλαιο 2 (βλέπε Παρατήρηση 3.1.2). Από την άλλη μεριά, για την απόδειξη της Πρότασης 3.1.1 πρέπει να συμπεριλάβουμε την επιπρόσθετη υπόθεση (3.8) και να ακολουθήσουμε μια διαφορετική κατασκευή από αυτή στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.1.

3.2 Προκαταρκτικά Αποτελέσματα

Προκειμένου να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα που αφορά τα τριγωνικά συστήματα (3.2), θα δώσουμε πρώτα κάποια τεχνικά αποτελέσματα για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή για συστήματα της μορφής (3.1) με γραμμική έξοδο:

$$\dot{x} = f(t, x, u) := F(t, x, H(t, u)x, u), (t, x, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \quad (3.16\alpha)$$

$$y = h(t, x, u) := H(t, u)x, y \in \mathbb{R}^k, \quad (3.16\beta)$$

όπου $H : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{k \times n}$ είναι C^0 και $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι C^0 και τοπικά Lipschitz ως προς x . Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένα μη κενό υποσύνολο M του \mathbb{R}^n , μια συνεχή συνάρτηση $\bar{u} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$, και ένα σύνολο από συνεχείς εισόδους \mathcal{U} όπως στην (3.3), έτσι ώστε για κάθε $t_0 \geq 0$, να ικανοποιείται η (3.8) για κάθε $u \in \mathcal{U}(t_0)$, και επιπλέον, το σύστημα (3.16α) να είναι (M, \mathcal{U}) -δεξιά πλήρες, δηλαδή, για κάθε $t_0 \geq 0$, $x_0 \in M$ και $u \in \mathcal{U}(t_0, x_0)$, η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0; u)$ του (3.16α) ικανοποιεί την (3.4) για συγκεκριμένη $\beta \in \mathcal{NN}$. Επίσης, για κάθε $R > 0$ και $t \geq 0$ ορίζουμε:

$$Y_R(t) := \{y \in \mathbb{R}^k : y = H(t, u)x, |x| \leq \beta(t, R), |u| \leq \bar{u}(t)\}, \quad (3.17)$$

όπου η $H(\cdot, \cdot)$ δίνεται από την (3.16β). Προκύπτει τότε ότι $Y_R(t) \neq \emptyset$ για κάθε $t \geq 0$ και η πλειονότιμη απεικόνιση $[0, \infty) \ni t \rightarrow Y_R(t) \subset \mathbb{R}^k$ ικανοποιεί την Ιδιότητα CP (σελ. 5). Επίσης, λόγω της (3.4), για κάθε $t_0 \geq 0$ και $(u, y) \in O(t_0, B_R \cap M)$ ισχύει ότι $y(t) \in Y_R(t)$ για κάθε $t \geq t_0$, με $O(t_0, B_R \cap M)$ όπως ορίστηκε στην (3.5). Για τα συστήματα (3.16) κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

Υπόθεση 3.2.1. Υπάρχουν, ακέραιος $\ell \in \mathbb{N}$, μια συνεχή απεικόνιση $A : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ και σταθερές $L > 1$ και $R > 0$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

A1. Για κάθε $\xi > 0$ υπάρχει πλειονότιμη απεικόνιση

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow Q_R(t) := Q_{R, \xi}(t) \subset \mathbb{R}^\ell, \quad (3.18)$$

με $Q_R(t) \neq \emptyset$ για κάθε $t \geq 0$, που ικανοποιεί την Ιδιότητα CP και έτσι ώστε

$$\forall t \geq 0, x, z \in \mathbb{R}^n \text{ with } |x| \leq \beta(t, R), |x - z| \leq \xi, y \in Y_R(t) \text{ και } u \in \mathbb{R}^p \text{ με } |u| \leq \bar{u}(t) : \text{ισχύει ότι } F(t, x, y, u) - F(t, z, y, u) = A(t, q, y, u)(x - z) \text{ για συγκεκριμένο } q \in Q_R(t), \quad (3.19)$$

με $Y_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.17).

A2. Για κάθε $\xi > 0$, $\tau > 0$, $t_0 \geq 0$, $\bar{t}_0 \geq t_0 + \tau$ και $(u, y) \in O(t_0, M)$, υπάρχει αύξουσα συνεχή συνάρτηση $\kappa_R := \kappa_{R, \xi, \bar{t}_0, \tau} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ που ικανοποιεί

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \kappa_R(t) = \infty, \quad (3.20)$$

μια απεικόνιση $Q_R := Q_{R, \xi}$ όπως στην (3.18) και μια ακολουθία $\mathcal{A}_\nu := [a_\nu, b_\nu]$, $\nu \in \mathbb{N}$ από κλειστά διαστήματα με

$$a_1 \geq t_0 + \tau, \quad a_i < b_i, \quad a_{i+1} > b_i, \quad b_i - a_i < \tau, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (3.21)$$

κατά τέτοιον τρόπο ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα. Υπάρχουν, ένας χρονικά μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_R := P_{R, \xi, t_0, \bar{t}_0, \tau, y, u} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση $d_R := d_{R, \xi, t_0, \bar{t}_0, \tau, y, u} : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, και οι δύο ισχυρώς αιτιατές σε κάθε \mathcal{A}_ν ως προς το $O(t_0, M)$, που ικανοποιούν:

$$P_R(t) \geq I_{n \times n}, \forall t \geq \bar{t}_0; |P_R(\bar{t}_0)| \leq L; \quad (3.22\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}_0}^t d_R(s)ds > \kappa_R(t), \forall t \geq \bar{t}_0; \quad (3.22\beta)$$

$$e'P_R(t)A(t-\tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_R(t)e \leq -d_R(t)e'P_R(t)e,$$

$$\bullet \forall \nu \in \mathbb{N}, t \in \mathcal{A}_\nu, e \in \ker H(t-\tau, u_\tau(t)), q \in Q_R(t-\tau), \text{ και}$$

$$\bullet \forall t \in [\bar{t}_0, \infty) \setminus \cup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_\nu, e \in \mathbb{R}^n, q \in Q_R(t-\tau), \delta(u, y) \in O(t_0, B_R \cap M). \quad (3.22\gamma)$$

Η ακόλουθη πρόταση, αποτελεί μια τροποποίηση της Πρότασης 2.1 της εργασίας [16] και μας παρέχει αποτελέσματα για την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (3.16), όταν είναι εκ των προτέρων γνωστό ότι οι αρχικές συνθήκες βρίσκονται σε ένα φραγμένο υποσύνολο $M \cap B_R$ του \mathbb{R}^n .

Πρόταση 3.2.1

[71]

Θεωρούμε το σύστημα (3.16) και υποθέτουμε ότι είναι (M, \mathcal{U}) -δεξιά πλήρες, δηλαδή, υπάρχει μη κενό υποσύνολο M του \mathbb{R}^n και ένα σύνολο από συνεχείς εισόδους \mathcal{U} όπως στην (3.3), έτσι ώστε να ισχύει η (3.4) για συγκεκριμένη συνάρτηση $\beta \in \mathcal{NN}$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η Υπόθεση 3.2.1. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $\tau > 0$, $t_0 \geq 0$, $\bar{t}_0 \geq t_0 + \tau$ και $(u, y) \in O(t_0, B_R \cap M)$, υπάρχουν μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση $\bar{d}_R : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί

$$\bar{d}_R(t) \leq d_R(t), \forall t \geq \bar{t}_0; \bar{d}_R(t) < d_R(t), \forall t \in \mathcal{A}_\nu, \nu \in \mathbb{N}, \quad (3.23\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}_0}^t \bar{d}_R(s)ds \geq \kappa_R(t) - 1, \forall t \geq \bar{t}_0; \quad (3.23\beta)$$

(με $d_R(\cdot)$, $\kappa_R(\cdot)$ και \mathcal{A}_ν όπως δίνονται στην A2) και μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση $\phi_R : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, και οι δύο αιτιατές και ισχυρώς αιτιατές σε κάθε \mathcal{A}_ν ως προς το $O(t_0, B_R \cap M)$, έτσι ώστε

$$e'P_R(t)A(t-\tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_R(t)e \leq \phi_R(t)|H(t-\tau, u_\tau(t))e|^2 - \bar{d}_R(t)e'P_R(t)e, \quad \forall t \in [\bar{t}_0, \infty), e \in \mathbb{R}^n, q \in Q(t-\tau). \quad (3.23\gamma)$$

(ii) Επιπλέον ισχύουν τα ακόλουθα. Για κάθε $\tau > 0$, $t_0 \geq 0$, $\bar{t}_0 \geq t_0 + \tau$, $(u, y) \in O(t_0, B_R \cap M)$ και σταθερά ξ που ικανοποιεί την εκτίμηση

$$\xi \geq \sqrt{L}\beta(\bar{t}_0, R) \exp(-\min\{\kappa_R(t) - 1 : t \geq \bar{t}_0\}), \quad (3.24)$$

η λύση $z(\cdot)$ του συστήματος

$$\dot{z}(t) = G_{\bar{t}_0}(t, z(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) \quad (3.25\alpha)$$

$$:= F(t-\tau, z(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) + \phi_R(t)P_R^{-1}(t)H'(t-\tau, u_\tau(t))(y_\tau(t) - H(t-\tau, u_\tau(t))z(t))$$

$$\text{με } z(\bar{t}_0) = 0 \quad (3.25\beta)$$

με $P_R(\cdot)$ όπως δίνεται στην A2, ορίζεται για κάθε $t \geq \bar{t}_0$. Επίσης, το σφάλμα $e(t) := x_\tau(t) - z(t)$ μεταξύ της τροχιάς $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0; u)$ του (3.16α) με τ μονάδες καθυστέρησης και αρχική συνθήκη $x_0 \in B_R \cap M$ σε χρόνο $t_0 \geq 0$ και της τροχιάς $z(\cdot) := z(\cdot, \bar{t}_0, 0; u, y)$ της (3.25α) ικανοποιεί:

$$|e(t)| < \xi, \forall t \geq \bar{t}_0; \quad (3.26\alpha)$$

$$|e(t)| \leq \sqrt{L}\beta(\bar{t}_0, R) \exp(-\kappa_R(t) + 1), \forall t \geq \bar{t}_0. \quad (3.26\beta)$$

Προκύπτει από τις (3.20) και (3.26β), ότι για $\bar{t}_0 := t_0 + \tau$ το τ -DODP είναι επιλύσιμο για το (3.16) ως προς το $(B_R \cap M, \mathcal{U})$. Συγκεκριμένα, το σφάλμα $e(\cdot)$ μεταξύ της τροχιάς $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0; u)$, $x_0 \in B_R \cap M$, $u \in \mathcal{U}$ του (3.16α) και της τροχιάς $z(\cdot) := z(\cdot, \bar{t}_0, z_0; u, y)$, $z(\bar{t}_0) = 0$ του παρατηρητή $\dot{z}(t) = G_{\bar{t}_0}(t, z(t), y_\tau(t), u_\tau(t))$ ικανοποιεί την (3.6). Εφόσον η παράμετρος $\tau > 0$ μπορεί να επιλεγεί επαρκώς μικρή, προκύπτει επίσης ότι το IDODP είναι επίσης επιλύσιμο για το σύστημα (3.16) ως προς το $(B_R \cap M, \mathcal{U})$.

Παρατήρηση 3.2.1. Παρατηρούμε ότι, λόγω της (3.20) και της συνέχειας της $\kappa_R(\cdot)$, το minimum στην (3.24) είναι καλώς ορισμένο. Επίσης, προκύπτει από την (3.22β) ότι $\kappa_R(\bar{t}_0) < 0$ και επομένως $\exp(-\min\{\kappa_R(t) - 1 : t \geq \bar{t}_0\}) > 1$. \circ

Η ακόλουθη πρόταση επίσης αποτελεί μια τροποποίηση της Πρότασης 2.2 στην εργασία [16] και μας παρέχει ικανές συνθήκες για την ύπαρξη μιας ακολουθίας παρατηρητών (βλέπε Ορισμό 3.1.4) για την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (3.16), χωρίς να γνωρίζουμε εκ των προτέρων πληροφορίες για τις αρχικές συνθήκες. Κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση:

Υπόθεση 3.2.2. Υπάρχουν μια σταθερά $L > 1$, ένας ακέραιος $\ell \in \mathbb{N}$ και μια απεικόνιση $A : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, έτσι ώστε για κάθε $R > 0$ να ικανοποιείται η Υπόθεση 3.2.1, δηλαδή, ικανοποιούνται οι A1 και A2.

Πρόταση 3.2.2

[71]

Υποθέτουμε ότι το σύστημα (3.16α) είναι (M, \mathcal{U}) -δεξιά πλήρες και ότι το σύστημα (3.16) ικανοποιεί την Υπόθεση 3.2.2. Τότε το IDSODP είναι επιλύσιμο για το (3.16) ως προς το (M, \mathcal{U}) .

Οι αποδείξεις των Προτάσεων 3.2.1 και 3.2.2 βασίζονται σε ένα τεχνικό αποτέλεσμα (Λήμμα 3.2.1 παρακάτω) το οποίο αποτελεί τροποποίηση του Λήμματος 2.1 της εργασίας

[16]. Η απόδειξη του παρέχεται στο Παράρτημα Γ.

Έστω $k, \ell, n, p, s \in \mathbb{N}$, $W \subset \mathbb{R}^n$ και έστω το ζευγάρι (H, A) από συνεχείς απεικονίσεις:

$$H := H(t, u) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{s \times n}; \quad (3.27\alpha)$$

$$A := A(t, q, y, u) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.27\beta)$$

Θεωρούμε επίσης την πλειονότιμη απεικόνιση

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow Q(t) \subset \mathbb{R}^\ell \quad (3.28)$$

με $Q(t) \neq \emptyset$ για κάθε $t \geq 0$, που ικανοποιεί την Ιδιότητα CP και για κάθε $t_0 \geq 0$, θεωρούμε το μη κενό σύνολο $\Omega(t_0, W)$ που αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις $(u, y) := (u_{t_0, x_0}, y_{t_0, x_0}) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$, παραμετροποιημένες από τα $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ και $x_0 \in W$.

Λήμμα 3.2.1

Θεωρούμε το ζευγάρι (H, A) από τις χρονικά μεταβαλλόμενες απεικονίσεις που δίνονται από την (3.27) και την πλειονότιμη απεικόνιση $Q(\cdot)$ όπως αυτή ορίζεται στην (3.28). Επίσης, έστω $t_0 \geq 0$, $\tau > 0$, $b > a \geq t_0 + \tau$ με $b - a < \tau$, $(u, y) \in \Omega(t_0, W)$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένας χρονικά μεταβαλλόμενος συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας $P := P_{t_0, \bar{t}_0, \tau, y, u} \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $d := d_{t_0, \bar{t}_0, \tau, y, u} \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$, και οι δύο ισχυρώς αιτιατές στο $[a, b]$ ως προς το $\Omega(t_0; W)$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} e'P(t)A(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e &\leq -d(t)e'P(t)e, \\ \forall t \in [a, b], e \in \ker H(t - \tau, u_\tau(t)), q &\in Q(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.29)$$

και επιπλέον

$$\text{rank}H(t - \tau, u_\tau(t)) < n, \forall t \in [a, b]. \quad (3.30)$$

Τότε, για κάθε ισχυρώς αιτιατή στο $[a, b]$ ως προς το $\Omega(t_0; W)$ συνάρτηση $\bar{d} := \bar{d}_{t_0, \bar{t}_0, \tau, y, u} \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ με

$$\bar{d}(t) < d(t), \forall t \in [a, b], \quad (3.31)$$

υπάρχει μια ισχυρώς αιτιατή στο $[a, b]$ ως προς το $\Omega(t_0; W)$ συνάρτηση $\phi := \phi_{t_0, \bar{t}_0, \tau, y, u} \in C^1([a, b]; \mathbb{R}_{>0})$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} e'P(t)A(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e &\leq \phi(t)|H(t - \tau, u_\tau(t))e|^2 - \bar{d}(t)e'P(t)e, \\ \forall t \in [a, b], e \in \mathbb{R}^n, q &\in Q(t - \tau). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Είμαστε σε θέση τώρα να αποδείξουμε τις Προτάσεις 3.2.1 και 3.2.2 οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος (Θεώρημα 3.1.1). Για την απόδειξη τους θα εκμεταλλευτούμε το αποτέλεσμα του Λήμματος 3.2.1.

Απόδειξη της Πρότασης 3.2.1: (i) Έστω $\tau > 0$, $t_0 \geq 0$, $\bar{t}_0 \geq t_0 + \tau$, $(u, y) \in O(t_0, B_R \cap M)$ και έστω μια ακολουθία από κλειστά διαστήματα $A_\nu = [a_\nu, b_\nu]$, $\nu \in \mathbb{N}$ που ικανοποιούν την (3.21). Θεωρούμε επίσης, $d_R(\cdot)$ και $\kappa_R(\cdot)$ όπως δίνονται στην A2 της Υπόθεσης 3.2.1 και ορίζουμε

$$\bar{d}_R(t) := \begin{cases} d_R(t) - \frac{2}{\pi(1+t^2)}, & t \in A_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N} \\ d_R(t), & t \in [\bar{t}_0, \infty) \setminus \cup_{\nu \in \mathbb{N}} A_\nu \end{cases} \quad (3.33)$$

Προκύπτει τότε ότι η $\bar{d}_R : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχής και ισχυρώς αιτιατή σε κάθε A_ν ως προς το $O(t_0, M)$. Επιπλέον, λόγω της (3.22β), ικανοποιούνται οι (3.23α) και (3.23β).

Στη συνέχεια, θα κατασκευάσουμε μια τμηματικά συνεχή συνάρτηση $\phi_R : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, που να είναι αιτιατή και ισχυρώς αιτιατή σε κάθε A_ν ως προς το $O(t_0, M)$, έτσι ώστε να ισχύει η (3.23γ) με $\bar{d}_R(\cdot)$ όπως ορίζεται από την (3.33). Συγκεκριμένα, θα εφαρμόσουμε διαδοχικά το αποτέλεσμα του Λήμματος 3.2.1 για να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση $\phi_R(\cdot)$ στα κλειστά διαστήματα A_ν , $\nu \in \mathbb{N}$, την οποία στη συνέχεια “ενώνουμε” κατά τέτοιον τρόπο ώστε να κατασκευάσουμε μια τμηματικά συνεχή συνάρτηση $\phi_R(\cdot)$ στο $[\bar{t}_0, \infty)$. Πράγματι, λαμβάνοντας υπ’ όψιν τις (3.21), (3.22γ), τη δεύτερη ανίσωση της (3.23α) και την (3.33), προκύπτει ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ οι υποθέσεις του Λήμματος 3.2.1 ικανοποιούνται με $W := B_R \cap M$ και $[a, b] := A_\nu$. Συνεπώς, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, υπάρχει συνάρτηση $\phi_{R,\nu} \in C^1(A_\nu; \mathbb{R}_{>0})$, που να είναι ισχυρώς αιτιατή σε κάθε A_ν ως προς το $O(t_0; M)$ και έτσι ώστε

$$e'P_R(t)A(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_R(t)e \leq \phi_{R,\nu}(t)|H(t - \tau, u_\tau(t))e|^2 - \bar{d}_R(t)e'P_R(t)e, \\ \forall t \in A_\nu, \nu \in \mathbb{N}, e \in \mathbb{R}^n, q \in Q(t - \tau). \quad (3.34)$$

Έστω τώρα $\phi_R : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια μη αρνητική συνάρτηση έτσι ώστε $\phi_R(t) = \phi_{R,\nu}(t)$ για κάθε $t \in A_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε, από τις (3.22γ), (3.23α), (3.33), (3.34), το γεγονός ότι $\phi_R(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq \bar{t}_0$, και λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι $(u, y) \in O(t_0, B_R \cap M)$, προκύπτει ότι

$$e'P_R(t)A(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_R(t)e \leq \phi_R(t)|H(t - \tau, u_\tau(t))e|^2 - \bar{d}_R(t)e'P_R(t)e, \\ \forall t \in [\bar{t}_0, \infty), e \in \mathbb{R}^n, q \in Q(t - \tau). \quad (3.35)$$

Συνεπώς αποδείξαμε το πρώτο μέρος της Πρότασης 3.2.1.

(ii) Για να αποδείξουμε το (ii), θεωρούμε $\tau > 0$, $t_0 \geq 0$, $\bar{t}_0 \geq t_0 + \tau$, $u \in \mathcal{U}$, $(u, y) \in O(t_0, B_R \cap M)$ και μια σταθερά ξ όπως στην (3.24). Σύμφωνα με την υπόθεση 3.2.1, υπάρχουν μια ακολουθία $\{A_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ από κλειστά διαστήματα που ικανοποιούν την (3.21), ένας χρονικά μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση $d_R : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, και οι δύο ισχυρώς αιτιατές σε κάθε A_ν , $\nu \in \mathbb{N}$, ως προς το $O(t_0, B_R \cap M)$, και κατά τέτοιον τρόπο ώστε να ισχύουν οι (3.22α)-(3.22γ). Τότε, από το μέρος (i) της Πρότασης, υπάρχουν τμηματικά συνεχής συναρτήσεις $\bar{d}_R : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $\phi_R : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, και οι δύο αιτιατές και ισχυρώς αιτιατές σε κάθε A_ν ως προς το

$O(t_0, B_R \cap M)$, έτσι ώστε να ισχύουν οι (3.23α), (3.23β) και (3.23γ). Λόγω της (3.16β), η εξίσωση σφάλματος $e(t) = x(t - \tau) - z(t) = x_\tau(t) - z(t)$ μεταξύ των (3.16α) και (3.25α) γράφεται:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}(t) &= F(t - \tau, x_\tau(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) - F(t - \tau, z(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) - \phi_R(t)P_R^{-1}(t) \\
 &\quad \times H'(t - \tau, u_\tau(t))(y_\tau(t) - H(t - \tau, u_\tau(t))z(t)) \\
 &= F(t - \tau, x_\tau(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) - F(t - \tau, z(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) - \phi_R(t)P_R^{-1}(t) \\
 &\quad \times H'(t - \tau, u_\tau(t))(H(t - \tau, u_\tau(t))x - H(t - \tau, u_\tau(t))z(t)) \\
 &= F(t - \tau, x_\tau(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) - F(t - \tau, z(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) - \phi_R(t)P_R^{-1}(t) \\
 &\quad \times H'(t - \tau, u_\tau(t))H(t - \tau, u_\tau(t))e, \quad t \geq \bar{t}_0
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.25β), θεωρούμε $[\bar{t}_0, T_{\max})$ να είναι το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης $e(\cdot)$ της εξίσωσης σφάλματος (3.36) με αρχική συνθήκη

$$e(\bar{t}_0) = x(\bar{t}_0 - \tau, t_0, x_0; u) - z(\bar{t}_0) = x(\bar{t}_0 - \tau, t_0, x_0; u). \tag{3.37}$$

Τότε, από τις (3.4), (3.24), (3.37), το γεγονός ότι $L > 1$ (βλέπε Υπόθεση 3.2.1), $\beta \in NN$, $x_0 \in B_R \cap M$ και από την Παρατήρηση 3.2.1, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 |e(\bar{t}_0)| &= |x(\bar{t}_0 - \tau, t_0, x_0; u)| \leq \beta(\bar{t}_0 - \tau, |x_0|) \leq \beta(\bar{t}_0, R) \\
 &< \beta(\bar{t}_0, R)\sqrt{L}\exp(-\min\{\kappa_R(t) - 1 : t \geq \bar{t}_0\}) \leq \xi
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $|e(t)| < \xi$ για κάθε $t \in [\bar{t}_0, T_{\max})$ και επομένως $T_{\max} = \infty$. Πράγματι, υποθέτουμε τουναντίον ότι υπάρχει χρόνος $\hat{t} \in [\bar{t}_0, T_{\max})$ έτσι ώστε

$$|e(\hat{t})| = \xi \tag{3.39α}$$

$$|e(t)| < \xi, \quad \forall t \in [\bar{t}_0, \hat{t}) \tag{3.39β}$$

Από την (3.17), και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.39) και το γεγονός ότι $e(t) = x(t - \tau) - z(t) = x_\tau(t) - z(t)$, $y_\tau(t) \in Y_R(t - \tau)$ και $|u_\tau(t)| \leq \bar{u}(t - \tau)$, προκύπτει από την (3.19) της A1 με $t := t - \tau$, ότι για κάθε $t \in [\bar{t}_0, \hat{t}]$ υπάρχει $q \in Q_R(t - \tau)$ έτσι ώστε

$$F(t - \tau, x_\tau(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) - F(t - \tau, z(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) = A(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t))(x_\tau(t) - z(t)). \tag{3.40}$$

Επομένως, υπολογίζοντας τη χρονική παράγωγο \dot{V} της $V(t, e) := \frac{1}{2}e'P_R(t)e$, $e \in \mathbb{R}^n$ κατά μήκος των τροχιών $e(\cdot) = e(\cdot, \bar{t}_0, e(\bar{t}_0); x(\cdot), u(\cdot))$ της (3.36) και χρησιμοποιώντας την (3.40)

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t, e(t)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e'(t) P_R(t) e(t)) \\
 &= \frac{1}{2} \dot{e}'(t) P_R(t) e(t) + \frac{1}{2} e'(t) \dot{P}_R(t) e(t) + \frac{1}{2} e'(t) P_R(t) \dot{e}(t) \\
 &= \frac{1}{2} e'(t) \dot{P}_R(t) e(t) + e'(t) P_R(t) (F(t - \tau, x_\tau(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) \\
 &\quad - F(t - \tau, z(t), y_\tau(t), u_\tau(t))) \\
 &\quad - e'(t) P_R(t) \phi_R(t) P_R^{-1}(t) H'(t - \tau, u_\tau(t)) H(t - \tau, u_\tau(t)) e(t) \\
 &= \frac{1}{2} e'(t) \dot{P}_R(t) e(t) + e'(t) P_R(t) A(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t)) e(t) \\
 &\quad - \phi_R(t) |H(t - \tau, u_\tau(t)) e(t)|^2, \forall t \in [\bar{t}_0, \hat{t}], q \in Q_R(t - \tau). \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, από τις (3.23γ) και (3.41) λαμβάνουμε ότι

$$\dot{V}(t, e(t)) \leq -2\bar{d}_R(t) V(t, e(t)), \forall t \in [\bar{t}_0, \hat{t}]. \tag{3.42}$$

Από τις (3.23α), (3.42) και τον ορισμό της $V(\cdot, \cdot)$ παραπάνω έχουμε ότι

$$V(t, e(t)) = \frac{1}{2} e'(t) P_R(t) e(t) \leq \frac{1}{2} e'(\bar{t}_0) P_R(\bar{t}_0) e(\bar{t}_0) \exp\left(-\int_{\bar{t}_0}^t 2\bar{d}_R(s) ds\right), \forall t \in [\bar{t}_0, \hat{t}]. \tag{3.43}$$

Τότε, από την πρώτη ανίσωση της (3.22α) και από την (3.43) έχουμε ότι

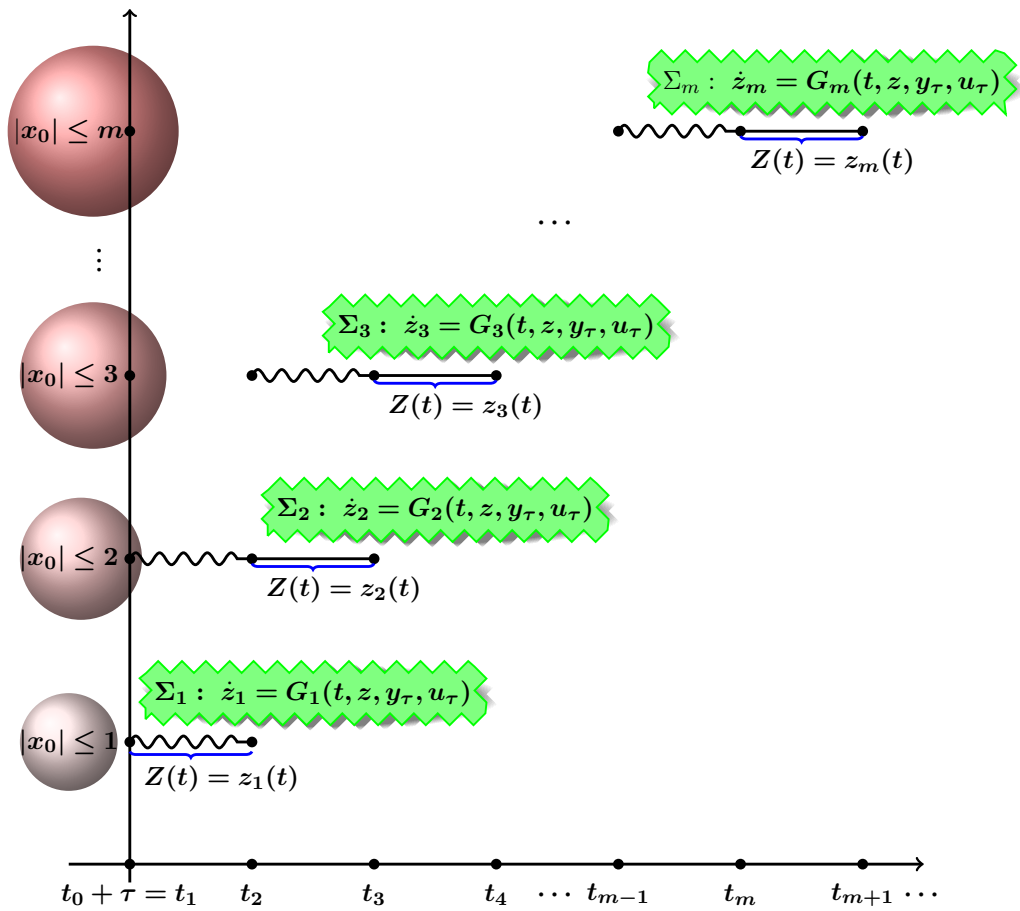
$$\begin{aligned}
 e'(t) P_R(t) e(t) &\leq e'(\bar{t}_0) P_R(\bar{t}_0) e(\bar{t}_0) \exp\left(-\int_{\bar{t}_0}^t 2\bar{d}_R(s) ds\right) \implies \\
 |e(t)|^2 &\leq |e'(\bar{t}_0)| |P_R(\bar{t}_0)| |e(\bar{t}_0)| \exp\left(-\int_{\bar{t}_0}^t 2\bar{d}_R(s) ds\right) \implies \\
 |e(t)| &\leq |e(\bar{t}_0)| \sqrt{|P_R(\bar{t}_0)|} \exp\left(-\int_{\bar{t}_0}^t \bar{d}_R(s) ds\right), \forall t \in [\bar{t}_0, \hat{t}]. \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

Επίσης, από τις (3.4) και (3.37) έχουμε ότι

$$|e(\bar{t}_0)| = |x(\bar{t}_0 - \tau, t_0, x_0; u)| \leq \beta(\bar{t}_0, R). \tag{3.45}$$

Κατά συνέπεια, λαμβάνοντας υπ' όψιν τη δεύτερη ανίσωση της (3.22α), (3.23β) και από τις (3.24), (3.44) και (3.45) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 |e(t)| &\leq \beta(\bar{t}_0, R) \sqrt{L} \exp\left(-\int_{\bar{t}_0}^t \bar{d}_R(s) ds\right) \\
 &\leq \beta(\bar{t}_0, R) \sqrt{L} \exp(-\kappa_R(t) + 1) \\
 &< \beta(\bar{t}_0, R) \sqrt{L} \exp(-\min\{\kappa_R(t) - 1 : t \in [\bar{t}_0, \hat{t}]\}) \leq \xi, \forall t \in [\bar{t}_0, \hat{t}]. \tag{3.46}
 \end{aligned}$$



Σχήμα 3.1: Διακοπτόμενη Ακολουθία Παρατηρητών.

Άρα $|e(\hat{t})| < \xi$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της (3.39). Συνεπώς η λύση $e(\cdot) = e(\cdot, \bar{t}_0, e(\bar{t}_0); x(\cdot), u(\cdot))$ της (3.36) ικανοποιεί την (3.26α), δηλαδή $|e(t)| < \xi$, για κάθε $t \in [\bar{t}_0, T_{\max})$, και επομένως $T_{\max} = \infty$. Το τελευταίο σημαίνει ότι η (3.44) ισχύει για κάθε $t \geq t_0$. Άρα, από τη δεύτερη ανίσωση της (3.22α) και τις (3.23β), (3.24), (3.44) και (3.45), προκύπτει ότι ικανοποιείται η (3.26β). Τέλος, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (3.20), (3.23β) και (3.26β) καταλήγουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ και συνεπώς το τ -DODP είναι επιλύσιμο για το (3.16) ως προς το $(B_R \cap M, \mathcal{U})$. \square

Συνεχίζουμε τώρα με την απόδειξη της Πρότασης 3.2.2 η οποία παρέχει ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του ODP για συστήματα (3.1) μέσω μιας διακοπτόμενης ακολουθίας παρατηρητών με καθυστέρηση. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι αν ικανοποιούνται οι ιδιότητες A1 και A2, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε τους επιθυμητούς παρατηρητές σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.4. Η βασική ιδέα για την απόδειξη απεικονίζεται μέσω του Σχήματος 3.1 όπου αναπαρίστανται μια αύξουσα ακολουθία από χρόνους, με t_0 να είναι η αρχική χρονική στιγμή του συστήματος, καθώς και η διακοπτόμενη ακολουθία παρατηρη-

τών. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε διαδοχικά τις εκτιμήσεις που δίνονται στην Πρόταση 3.2.1 με $R = 1, 2, 3, \dots$ σαν να ήταν η περίπτωση όπου οι αρχικές συνθήκες του συστήματος ανήκουν την τομή του συνόλου M και τις μπάλας με κέντρο το 0 και ακτίνα $R = 1, 2, 3, \dots$ στον \mathbb{R}^n αντίστοιχα. Έπειτα, ξεκινάμε την κατασκευή του παρατηρητή Σ_2 . Από την Πρόταση 3.2.1 με $R = 2$, μπορούμε να θεωρήσουμε τον παρατηρητή Σ_1 , του οποίου την ύπαρξη εγγυάται η Πρόταση 3.2.1, ο οποίος μπορεί να εκτελέσει την ασυμπτωτική εκτίμηση της κατάστασης, υπό την προϋπόθεση ότι η αρχική κατάσταση x_0 ανήκει στη μπάλα B_2 με κέντρο το 0 και ακτίνα $R = 2$. Παρά το γεγονός ότι η x_0 δεν ανήκει απαραίτητα σε αυτή τη μπάλα, διαλέγουμε χρόνο t_2 ώστε το σφάλμα να είναι επαρκώς μικρό στην περίπτωση όπου όντως $x_0 \in B(2)$. Τη χρονική στιγμή t_2 ξεκινάμε την κατασκευή του παρατηρητή Σ_3 με τον ίδιο συλλογισμό για την μπάλα B_3 με κέντρο 0 και ακτίνα $R = 3$, και διαλέγουμε κάποιο χρόνο t_3 αντίστοιχα, σαν να είχαμε ότι $x_0 \in B(3)$. Τη χρονική στιγμή t_3 σταματάμε τον παρατηρητή Σ_2 και συνεχίζουμε με τη σχεδίαση του παρατηρητή Σ_4 . Συνεχίζοντας την παραπάνω αναδρομική διαδικασία, μπορούμε να επιτύχουμε την ολική εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος για κάθε αρχική συνθήκη $x_0 \in M \cap \mathbb{R}^n$ μέσω της τμηματικά συνεχής συνάρτησης

$$Z(t) := \begin{cases} z_1(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ z_2(t), & t_2 \leq t \leq t_3 \\ \vdots \\ z_m(t), & t_m \leq t \leq t_{m+1} \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι οι χρόνοι t_m επιλέγονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι εκτιμήσεις της Πρότασης 3.2.1 εγγυώνται ότι η Z συγκλίνει στη λύση του συστήματος.

Απόδειξη της Πρότασης 3.2.2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $0 \in clM$ και επομένως $B_R \cap M \neq \emptyset$ για κάθε $R > 0$, όπου σύμφωνα με την υπόθεση 3.2.2, συνεπάγεται ότι οι A1 και A2 της Υπόθεσης 3.2.1 ικανοποιείται για κάθε $R = 1, 2, \dots$. Θεωρούμε το σύστημα (3.16) που ξεκινά τη χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ και έστω $\tau > 0$, $(u, y) \in O(t_0, M)$, $L > 1$ και $R > 0$. Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία από χρόνους $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ και μια ακολουθία από συνεχείς και αιτιατές ως προς το $O(t_0, M)$ απεικονίσεις $(G_m)_{m \in \mathbb{N}}$ που ικανοποιούν τον Ορισμό 3.1.4 για την επιλυσιμότητα του IDSODP. Η απόδειξη διεξάγεται μέσω επαγωγής και στηρίζεται στον ακόλουθο ισχυρισμό.

Επαγωγικός Ισχυρισμός

(Επαγωγική Υπόθεση) Έστω $L > 1$, $t_0 \geq 0$, $\tau > 0$ και $(u, y) \in O(t_0, M)$ όπως παραπάνω και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν:

- θετικές σταθερές ξ_m και $t_m := t_{m, t_0, t_{m-1}, \tau, \xi_m}$, κατά τέτοιο τρόπο ώστε η ακολουθία

$(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$t_{m+1} \geq t_m + 1, m = 1, 2, \dots \quad (3.47\alpha)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \infty, \quad (3.47\beta)$$

με $t_1 = t_0 + \tau$.

- μια πλειονότιμη απεικόνιση $Q_m(\cdot) := Q_{m,t_0,\xi_m}(\cdot)$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα CP (βλέπε Συμβολισμούς, σελ. 5) έτσι ώστε να ικανοποιείται η (3.19) με $R := m$, $t_0 \geq 0$ και $\xi := \xi_m$;

- μια αύξουσα συνεχής συνάρτηση $\kappa_m : [t_0 + \tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (3.20), δηλαδή $\lim_{t \rightarrow \infty} \kappa_m(t) = \infty$, ένας συμμετρικός πίνακας $P_m := P_{m,t_0,t_{m-1},\tau,\xi_m,y,u} \in C^1([t_{m-1}, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$, τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις $\bar{d}_m := \bar{d}_{m,t_0,t_{m-1},\tau,\xi_m,y,u} : [t_{m-1}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $\phi_m := \phi_{m,t_0,t_{m-1},\tau,\xi_m,y,u} : [t_{m-1}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, όλες αιτιατές ως προς το $O(t_0, M)$ και κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

$$P_m(t) \geq I_{n \times n}, \forall t \geq t_{m-1}; |P_m(t_{m-1})| \leq L, \quad (3.48\alpha)$$

$$\int_{t_{m-1}}^t \bar{d}_m(s) ds \geq \kappa_m(t) - 1, \forall t \geq t_{m-1}, \quad (3.48\beta)$$

$$e' P_m(t) A(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_m(t) e - \phi_m(t) |H(t - \tau, u_\tau(t)) e|^2 \leq -\bar{d}_m(t) e' P_m(t) e, \quad (3.48\gamma)$$

$\forall t \geq t_{m-1}$, $e \in \mathbb{R}^n$, $q \in Q_m(t - \tau)$, με την προϋπόθεση ότι $(u, y) \in O(t_0, B_m \cap M)$.

Ειδικότερα, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, οι επιθυμητές σταθερές ξ_m και t_m ορίζονται ως εξής:

$$\xi_i := \beta(t_{i-1}, i) \sqrt{L} \exp(-\min\{\kappa_i(t) - 1 : t \in [t_{i-1}, t_i]\}), i = 1, \dots, m, \quad (3.49)$$

$$t_i := \min \left\{ t \geq t_{i-1} + 1 : \exp(-\kappa_i(\bar{t}) + 1) \leq \frac{1}{i \beta(t_{i-1}, i) \sqrt{L}}, \forall \bar{t} \geq t \right\}, \quad (3.50)$$

$$i = 2, \dots, m \text{ γ } m \geq 2; t_1 := t_0 + \tau.$$

Απόδειξη του Επαγωγικού Ισχυρισμού για $m = 1$: Λόγω της Υπόθεσης 3.2.2, θα εφαρμόσουμε τις Ιδιότητες A1 και A2 με $R = m := 1$. Σύμφωνα με αυτές τις ιδιότητες, αν ορίσουμε $t_1 := t_0 + \tau$ και

$$\xi_1 := \beta(t_0 + \tau, 1) \sqrt{L} \exp(-\min\{\kappa_1(t) - 1 : t \in [t_0, t_1]\}),$$

τότε, υπάρχει πλειονότιμη απεικόνιση $Q_1 := Q_{1,t_0,\xi_1}$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα CP κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει η (3.19). Επιπλέον, για $\bar{t}_0 := t_1 (= t_0 + \tau)$, μπορούμε να βρούμε μια τμηματικά συνεχή συνάρτηση $d_1 : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και ένα χρονικά μεταβαλλόμενο συμμετρικό πίνακα $P_1 \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$, και οι δύο αιτιατοί ως προς το $O(t_0, M)$, έτσι ώστε, για $R = 1$ να ικανοποιούνται οι συνθήκες (3.22α), (3.22β) και (3.22γ), δεδομένου

ότι $(u, y) \in O(t_0, B_1 \cap M)$. Συνεπώς, για $R = 1$, η Πρόταση 3.2.1 εγγυάται την ύπαρξη τμηματικά συνεχών και αιτιατών ως προς το $O(t_0, M)$ συναρτήσεων $\bar{d}_1 : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $\phi_1 : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ που ικανοποιούν τις (3.48α), (3.48β) και (3.48γ) με $m := 1$.

Γενικό Βήμα της Επαγωγής: Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι (3.48α)-(3.48γ) για κάθε $i = 1, \dots, m$ για συγκεκριμένο ακέραιο $m \in \mathbb{N}$ και για κατάλληλα t_i που ικανοποιούν, $t_{i+1} \geq t_i + 1$, $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Εφαρμόζουμε πάλι τις A1 και A2 με $R := m + 1$. Αν ορίσουμε

$$\xi_{m+1} := \beta(t_m, m + 1)\sqrt{L}\exp(-\min\{\kappa_{m+1}(t) - 1 : t \in [t_m, t_{m+1}]\}),$$

τότε, μπορούμε να βρούμε μια πλειονότιμη απεικόνιση $Q_{m+1} := Q_{m+1, t_0, \xi_{m+1}}$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα CP, έτσι ώστε να ισχύει η (3.19). Επιπλέον, για $\bar{t}_0 := t_m \geq t_0 + \tau$, ικανοποιούνται οι συνθήκες (3.22α), (3.22β) και (3.22γ) για $R := m + 1$, δεδομένου ότι $(u, y) \in O(t_0, B_{m+1} \cap M)$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας πάλι το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.2.1, υπάρχουν τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις $\bar{d}_{m+1} : [t_m, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $\phi_{m+1} : [t_m, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ και οι δύο αιτιατές ως προς το $O(t_0, M)$, που ικανοποιούν τις (3.48α), (3.48β) και (3.48γ) με $m := m + 1$. Τέλος, η επιθυμητή t_{m+1} δίνεται από την (3.50) με $i := m + 1$, δηλαδή:

$$t_{m+1} := \min \left\{ t \geq t_m + 1 : \exp(-\kappa_{m+1}(t) + 1) \leq \frac{1}{(m + 1)\beta(t_m, m + 1)\sqrt{L}} \right\}. \quad (3.51)$$

Ολοκληρώθηκε λοιπόν η απόδειξη του Ισχυρισμού.

Σχεδίαση του Διακοπτόμενου Παρατηρητή: Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον προηγούμενο Ισχυρισμό, θα κατασκευάσουμε την επιθυμητή ακολουθία διακοπτόμενων παρατηρητών που επιτυγχάνουν την εκτίμηση της κατάστασης (3.6), σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.4. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το σύστημα

$$\Sigma_m : \dot{z}_m(t) = G_m(t, z_m(t), y_\tau(t), u_\tau(t)), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \quad (3.52\alpha)$$

με αρχική συνθήκη

$$z_m(t_{m-1}) = 0 \quad (3.52\beta)$$

$$G_m(t, z_m, y, u) \begin{cases} := F(t - \tau, z, y, u) + \phi_m(t)P_m^{-1}(t)H'(t - \tau, u)(y - H(t - \tau, u)z), \\ \quad \text{για } |z| \leq \zeta_m, t \in [t_{m-1}, t_{m+1}], \\ \\ := (F(t - \tau, z, y, u) + \phi_m(t)P_m^{-1}(t)H'(t - \tau, u)(y - H(t - \tau, u)z))\frac{2\zeta_m - |z|}{\zeta_m} \\ \quad \text{για } \zeta_m \leq |z| \leq 2\zeta_m, t \in [t_{m-1}, t_{m+1}], \\ \\ := 0, \quad \text{για } |z| \geq 2\zeta_m, t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \end{cases} \quad (3.52\gamma)$$

$$\zeta_m := \beta(t_{m+1}, m) + \xi_m \quad (3.52\delta)$$

όπου οι ακολουθίες $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ και $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ προσδιορίζονται στον Επαγωγικό Ισχυρισμό. Παρατηρούμε ότι η $G_m(\cdot)$ είναι $C^0([t_{m-1}, t_{m+1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$ και επιπλέον είναι τοπικά Lipschitz στο $z \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον, $G_m : [t_{m-1}, t_{m+1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη, και συνεπώς για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $z_m(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in [t_{m-1}, t_{m+1}]$ η αντίστοιχη λύση του (3.52α) ορίζεται για κάθε $t \in [t_{m-1}, t_{m+1}]$.

Απόδειξη της (3.6): Έστω $Z : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ όπως ορίζεται στον Ορισμό 3.1.4, δηλαδή, $Z(t) := z_m(t)$, $t \in [t_m, t_{m+1})$, $m \in \mathbb{N}$, όπου για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση $z_m(\cdot)$ είναι η λύση της (3.52). Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση $x_0 \in M$ του (3.16α), υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ με $m_0 \geq 2$ έτσι ώστε

$$m_0 \geq |x_0|. \quad (3.53)$$

Έστω $m \geq m_0$. Λόγω της (3.52β), υπάρχει χρόνος $\bar{t} \in (t_{m-1}, t_{m+1}]$ έτσι ώστε $|z_m(t)| < \zeta_m$ για κάθε $t \in [t_{m-1}, \bar{t})$.

Ισχυρισμός 1
<p>Ισχυριζόμαστε ότι</p> $ z_m(t) < \zeta_m, \forall t \in [t_{m-1}, t_{m+1}), \quad (3.54)$ <p>δηλαδή, ισχύει ότι $\bar{t} = t_{m+1}$.</p>

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1: Θα αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό με επαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει χρόνος $\bar{t} \in (t_{m-1}, t_{m+1})$ έτσι ώστε

$$|z_m(\bar{t})| = \zeta_m \text{ και } |z_m(t)| < \zeta_m, \forall t \in [t_{m-1}, \bar{t}). \quad (3.55)$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (3.52α), (3.52γ) και (3.55), η απεικόνιση $z_m(\cdot)$ ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} \dot{z}_m(t) = & F(t - \tau, z_m(t), y_\tau(t), u_\tau(t)) \\ & + \phi_m(t) P_m^{-1}(t) H'(t - \tau, u_\tau(t)) (y_\tau(t) - H(t - \tau, u_\tau(t)) z_m(t)), \forall t \in [t_{m-1}, \bar{t}]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Ορίζουμε τώρα

$$e_m(t) := x(t - \tau) - z_m(t) = x_\tau(t) - z_m(t), \forall t \in [t_{m-1}, t_{m+1}]. \quad (3.57)$$

Σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 1, η $Q_m(\cdot) := Q_{m, t_0, \xi_m}(\cdot)$ ικανοποιεί την Ιδιότητα CP και την (3.19) με $R := m$, $t_0 \geq 0$ και $\xi := \xi_m$. Επιπλέον, λόγω της (3.48), ικανοποιούνται οι (3.22α), (3.23β) και (3.23γ) με $\bar{t}_0 := t_{m-1}$, $R = m$ και t_0, τ, ξ όπως παραπάνω. Επίσης, λόγω του ορισμού (3.49), η σταθερά $\xi (= \xi_m)$ ικανοποιεί την (3.24) με $R = m$ και $\bar{t}_0 = t_{m-1}$. Τέλος, εφόσον $|x_0| \leq m = R$, έχουμε ότι $(u, y) \in O(t_0, B_m \cap M)$. Οι προηγούμενες ιδιότητες, σε

συνδυασμό με το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.2.1(ii), εγγυώνται ότι η ισχύει η εκτίμηση (3.26β), δηλαδή:

$$|e_m(t)| < \beta(t_{m-1}, m)\sqrt{L} \exp(-k_m(t) + 1), \forall t \in [t_{m-1}, \bar{t}]. \quad (3.58)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (3.48β), (3.49) και (3.58) παίρνουμε:

$$|e_m(t)| < \xi_m, \forall t \in [t_{m-1}, \bar{t}]. \quad (3.59)$$

Τότε, από τις (3.4), (3.52δ), (3.57), (3.59) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $m \geq m_0$, $\beta \in NN$ και $\bar{t} \leq t_{m+1}$ λαμβάνουμε:

$$|z_m(\bar{t})| \leq |x(\bar{t})| + |e_m(\bar{t})| < \beta(\bar{t}, m) + \xi_m \leq \beta(t_{m+1}, m) + \xi_m = \zeta_m, \quad (3.60)$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την (3.55). Καταλήγουμε λοιπόν ότι για το παραπάνω m , ισχύουν οι $\bar{t} = t_{m+1}$ και (3.54). Τα ίδια επιχειρήματα παραπάνω εγγυώνται ότι επιπλέον ισχύει η (3.58) για κάθε $t \in [t_{m-1}, t_{m+1}]$. Στη συνέχεια, σημειώνουμε ότι από τις (3.48β) και (3.50) έχουμε ότι

$$\exp\left(-\int_{t_{m-1}}^t \bar{d}_m(s)ds\right) \leq \exp(-\kappa_m(t) + 1) \leq \frac{1}{m\beta(t_{m-1}, m)\sqrt{L}}, \forall t \geq t_m, \quad (3.61)$$

επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (3.47α), (3.58) και (3.61) παίρνουμε:

$$|e_m(t)| < \beta(t_{m-1}, m)\sqrt{L} \exp(-\kappa_m(t) + 1) \leq \frac{1}{m}, \forall t \in [t_m, t_{m+1}]. \quad (3.62)$$

Τέλος, θα δείξουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_\tau(t) - Z(t)| = 0$ ή ισοδύναμα ότι:

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T > 0 : |x_\tau(t) - Z(t)| < \varepsilon, \forall t > T. \quad (3.63)$$

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$, $\bar{m} = \bar{m}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με $\bar{m} \geq m_0$ έτσι ώστε $\frac{1}{\bar{m}} < \varepsilon$ και $T = T(\varepsilon) := t_{\bar{m}}$. Τότε, από την (3.47) προκύπτει ότι για κάθε $t > T$ υπάρχει $m \geq \bar{m}$ έτσι ώστε $t_m \leq t < t_{m+1}$, συνεπώς, αφού $m \geq m_0$, προκύπτει από τις (3.57), (3.62) και το γεγονός ότι $Z(t) := z_m(t)$, $t \in [t_m, t_{m+1}]$, ότι $|x_\tau(t) - Z(t)| = |x_\tau(t) - z_m(t)| = |e_m(t)| \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{\bar{m}} < \varepsilon$ για κάθε $t > T = T(\varepsilon)$. Το τελευταίο συνεπάγεται την (3.63) και ολοκληρώνεται η απόδειξη της Πρότασης 3.2.2. \square

3.3

Απόδειξη της Πρότασης 3.1.1.

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε το κεντρικό αποτέλεσμα που αφορά την επιλυσιμότητα του DSODP(DODP) για τριγωνικά συστήματα (3.2). Η απόδειξη στηρίζεται στα αποτελέσματα των Προτάσεων 3.2.1 και 3.2.2, και επεκτείνει μερικώς τη μεθοδολογία της εργασίας [16].

Απόδειξη της Πρότασης 3.1.1. Η απόδειξη του πρώτου σκέλους της Πρότασης, στηρίζεται στην καθιέρωση της Υπόθεσης 3.2.2 για το σύστημα (3.2). Παρατηρούμε πρώτα ότι το σύστημα (3.2) έχει τη μορφή (3.16) με

$$F(t, x, y, u) := \begin{pmatrix} f_1(t, y, u) + a_1(t, y, u)x_2 \\ f_2(t, y, x_2, u) + a_2(t, y, u)x_3 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, y, x_2, \dots, x_{n-1}, u) + a_{n-1}(t, y, u)x_n \\ f_n(t, y, x_2, \dots, x_n, u) \end{pmatrix}, (t, x, y, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, \quad (3.64)$$

και

$$H := \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_n. \quad (3.65)$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν, ένας ακέραιος $\ell \in \mathbb{N}$, μια συνεχής απεικόνιση $A : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ και μια σταθερά $L > 1$, κατά τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε $R > 0$, να ικανοποιούνται οι Ιδιότητες A1 και A2 της Υπόθεσης 3.2.1 για το σύστημα (3.16) με $F(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ και H όπως παραπάνω. Έστω $R > 0$ και $\xi > 0$. Από τα C^1 δυναμικά του συστήματος και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.8) της υπόθεσης Y1, υπάρχει συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $\sigma_R := \sigma_{R, \xi} \in \mathcal{N}$ που ικανοποιεί:

$$\sigma_R(t) \geq \left[\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^i \left(\max \left\{ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_1, \dots, x_i, u) \right| : |(x_1, \dots, x_i, u)| \leq 2\beta(t, R) + \bar{u}(t) + \xi \right\} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.66)$$

$$t \geq 0.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε την πλειονότιμη απεικόνιση $[0, \infty) \ni t \rightarrow Q_R(t) := Q_{R, \xi}(t) \subset \mathbb{R}^\ell$, $\ell := \frac{n(n+1)}{2}$ που ορίζεται ως εξής

$$Q_R(t) := \{q = (q_{1,1}; q_{2,1}, q_{2,2}; \dots; q_{n,1}, q_{n,2}, \dots, q_{n,n}) \in \mathbb{R}^\ell : |q| \leq \sigma_R(t)\}, \quad (3.67)$$

και ικανοποιεί την Ιδιότητα CP. Επίσης, θεωρούμε $Y_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.17) και $H(\cdot)$ όπως ορίζεται στην (3.65). Παρατηρούμε ότι, λόγω των (3.17) και (3.65), ισχύει:

$$|y| \leq \beta(t, R), \text{ για κάθε } y \in Y_R(t), t \geq 0. \quad (3.68)$$

Από τις (3.64), (3.66), (3.67) και (3.68), προκύπτει ότι για κάθε $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^p$ με $|u| \leq \bar{u}(t)$, $y \in Y_R(t)$ και $x, z \in \mathbb{R}^n$ με $|x| \leq \beta(t, R)$ και $|x - z| \leq \xi$ έχουμε:

$$F(t, x, y, u) - F(t, z, y, u) = A(t, q, y, u)(x - z),$$

για κάποιον $q \in Q_R(t)$ με $q_{i,1} = 0, i = 1, \dots, n;$ (3.69α)

με

$$A(t, q, y, u) := \begin{pmatrix} q_{1,1} & a_1(t, y, u) & 0 & \cdots & 0 \\ q_{2,1} & q_{2,2} & a_2(t, y, u) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & q_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1}(t, y, u) \\ q_{n,1} & q_{n,2} & q_{n,3} & \cdots & q_{n,n} \end{pmatrix}. \quad (3.69\beta)$$

Συνεπώς, ικανοποιείται η A1. Για να δείξουμε την A2, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $L > 1$, έτσι ώστε για κάθε $R > 0$, $\xi > 0$, $\tau > 0$, $t_0 \geq 0$, $\bar{t}_0 \geq t_0 + \tau$ και $(u, y) \in O(t_0, M)$, υπάρχουν, μια αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $\kappa_R := \kappa_{R, \xi, \tau, \bar{t}_0, \{T_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ που ικανοποιεί την (3.20) και μια ακολουθία από διαστήματα $\mathcal{A}_\nu = [\alpha_\nu, \beta_\nu]$, $\nu \in \mathbb{N}$, κατά τέτοιον τρόπο ώστε να υπάρχουν ένας χρονικά μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_R := P_{R, \xi, t_0, \bar{t}_0, \tau, y, u} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση $d_R := d_{R, \xi, t_0, \bar{t}_0, \tau, y, u} : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, και οι δύο αιτιατές και ισχυρώς αιτιατές σε κάθε \mathcal{A}_ν ως προς το $O(t_0, M)$ και ικανοποιούν τις (3.22α)-(3.22γ), με H και $Q_R(\cdot)$ όπως δίνονται από τις (3.65) και (3.67), αντίστοιχα.

Συνεχίζουμε ως εξής. Επιλέγουμε $L > 1$, και θεωρούμε $R > 0$, $\xi > 0$ και $\tau > 0$. Θεωρούμε επίσης, τις C^1 συναρτήσεις $\sigma_{R,i}(\cdot)$, $i = 1, \dots, n-1$ που ικανοποιούν

$$\sigma_{R,i}(t) := \sigma_{R, \xi, i}(t) \geq \max\{|a_i(\bar{t}, y, u)| : \bar{t} \in [0, t], |y| \leq \beta(\bar{t}, R), |u| \leq \bar{u}(t)\}, \forall t \geq 0, i = 1, \dots, n-1 \quad (3.70\alpha)$$

και ορίζουμε:

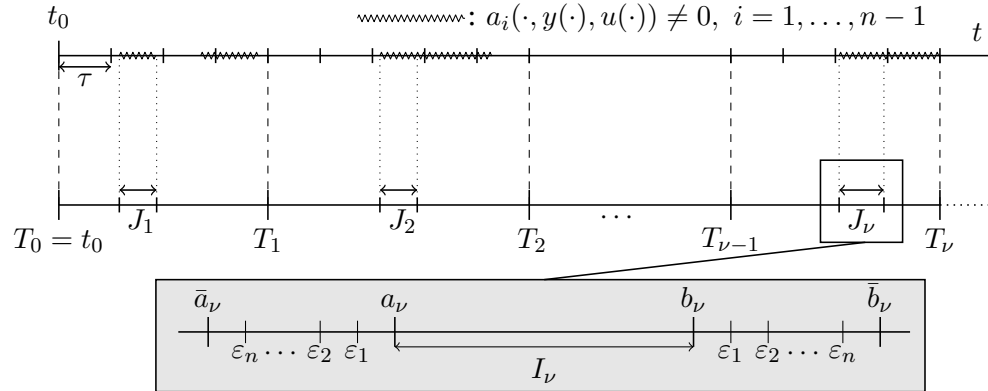
$$\bar{\sigma}_R(t) := \bar{\sigma}_{R, \xi}(t) = \left(\sigma_R^2(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{R,i}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}}, t \geq 0 \quad (3.70\beta)$$

με $\sigma_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.66). Προκύπτει τότε από τις (3.66), (3.67), (3.69α), (3.69β), (3.70α), (3.70β) και το γεγονός ότι $\bar{\sigma}_R \in N$, ότι η απεικόνιση $A(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ ικανοποιεί

$$|A(t - \tau, q, y, u)| \leq |A(t - \tau, q, y, u)|_F \leq \bar{\sigma}_R(t), \forall t \geq \tau \geq 0, q \in Q_R(t - \tau), y \in Y_R(t - \tau) \quad (3.71)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.10), μπορούμε να υποθέσουμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, η διαφορά $T_\nu - T_{\nu-1}$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της σταθεράς “καθυστερήσης” τ , δηλαδή, ισχύει ότι $T_\nu - T_{\nu-1} = j_\nu \tau$ για συγκεκριμένο $j_\nu \in \mathbb{N}$ (για την γενική περίπτωση, παραπέμπουμε στο Παράρτημα Γ). Επιπλέον, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ισχύει $\bar{t}_0 = t_0 + \tau (= T_0 + \tau)$ και διαλέγουμε μια αύξουσα συνάρτηση $\kappa_R \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ ως εξής:

$$\kappa_R(t) \begin{cases} := - \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0 + T_1} \bar{\sigma}_R(s) ds - 1, & t \in [T_0 + \tau, T_1 + \tau] \\ \in \left[- \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0 + T_1} \bar{\sigma}_R(s) ds - 1, 1 \right], & t \in [T_1 + \tau, \frac{T_1 + T_2}{2} + \tau] \\ := \nu - 1, & t \in \left[\frac{T_{\nu-1} + T_\nu}{2} + \tau, T_\nu + \tau \right], \nu = 2, 3, \dots \\ \in [\nu - 1, \nu], & t \in \left[T_\nu + \tau, \frac{T_\nu + T_{\nu+1}}{2} + \tau \right], \nu = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.72)$$



Σχήμα 3.2: Αναπαράσταση των χρονικών στιγμών T_ν και των διαστημάτων I_ν και J_ν .

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι για κάθε $(u, y) \in O(t_0, M)$ υπάρχουν απεικονίσεις $P_R(\cdot)$ και $d_R(\cdot)$ που ικανοποιούν τις επιθυμητές αιτιατές ιδιότητες και κατά τέτοιον τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι (3.22α)-(3.22γ), με $\kappa_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.72). Ορίζουμε

$$j_\nu := \frac{T_\nu - T_{\nu-1}}{\tau} \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{N}. \quad (3.73)$$

Επίσης, θεωρούμε $(u, y) \in O(t_0, M)$ και ορίζουμε:

$$m_\nu := \min\{j \in \{1, \dots, j_\nu\} : \exists t \in (T_{\nu-1} + \tau(j-1), T_{\nu-1} + \tau j) : a_i(t, y(t), u(t)) \neq 0, \forall i = 1, \dots, n-1\}, \quad (3.74)$$

όπου λόγω της (3.10) είναι καλώς ορισμένο. Συγκεκριμένα, χωρίζοντας κάθε διάστημα $[T_{\nu-1}, T_\nu]$ σε j_ν υποδιαστήματα μήκους τ , το m_ν είναι το πρώτο τέτοιο υποδιάστημα όπου ισχύει ότι $a_i(t, y(t), u(t)) \neq 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n-1$.

Η ύπαρξη των επιθυμητών απεικονίσεων $P_R(\cdot)$ και $d_R(\cdot)$ βασίζεται στην απόδειξη του ακόλουθου ισχυρισμού.

Ισχυρισμός 1

Για $u(\cdot), y(\cdot)$ όπως παραπάνω και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, υπάρχουν σταθερές $0 < \varepsilon_{2,\nu} < \dots < \varepsilon_{n,\nu}$ με $\varepsilon_{m,\nu} \leq \frac{m}{4n^2}$, $m = 2, \dots, n$ και διαστήματα

$$I_\nu := [a_\nu, b_\nu] \subset J_\nu := (\bar{a}_\nu, \bar{b}_\nu) \subset (T_{\nu-1} + \tau m_\nu, T_{\nu-1} + \tau(m_\nu + 1)), m = 2, \dots, n \quad (3.75)$$

με m_ν όπως δίνονται από την (3.74), έτσι ώστε

$$a_i(t - \tau, y_\tau(t), u_\tau(t)) \neq 0, \forall t \in J_\nu, i = 1, \dots, n-1 \quad (3.76)$$

$$[a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}] \subset J_\nu, m = 2, \dots, n \quad (3.77)$$

(Στο Σχήμα 3.2 γίνεται αναπαράσταση των T_ν , $\nu \in \mathbb{N}$ (όπως δίνονται από την Υπόθεση Υ2), καθώς και των διαστημάτων I_ν και J_ν όπως ορίζονται από την (3.75)). Επιπλέον, για κάθε $m = 2, \dots, n$, υπάρχουν απεικονίσεις $d_{R,m} \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R})$ και $P_{R,m} \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R}^{n \times n})$, και οι δύο ισχυρώς αιτιατές σε κάθε J_ν , $\nu \in \mathbb{N}$ ως προς το $O(t_0, M)$, έτσι ώστε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
 P_{R,2}(t) &= \begin{pmatrix} p_{R,2,1}(t) & p_{R,2}(t) \\ p_{R,2}(t) & L \end{pmatrix}, & \forall t \in J_\nu \\
 P_{R,m}(t) &= \begin{pmatrix} p_{R,m,1}(t) & p_{R,m}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ p_{R,m}(t) & & & & \\ 0 & & \boxed{P_{R,m-1}(t)} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, & \forall t \in J_\nu, m = 3, \dots, n \\
 P_{R,m}(t) &> I_{m \times m}, & \forall t \in J_\nu, m = 2, \dots, n \\
 p_{R,m,1}(t) &= L, p_{R,m}(t) = 0, & \forall t \in J_\nu \setminus [a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}], m = 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}
 d_{R,m}(t) &= \frac{\int_{t_0}^{T_2+\tau} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_1 - a_1} + n - m, & \forall t \in I_1 \text{ if } \nu = 1 \\
 d_{R,m}(t) &= \frac{\int_{T_\nu+\tau}^{T_\nu+1+\tau} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_\nu - a_\nu} + n - m, & \forall t \in I_\nu, m = 2, \dots, n, \text{ if } \nu \geq 2 \\
 \int_S d_{R,m}(s) ds &\geq -\frac{m}{n}, & \forall S \subset [a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}] \setminus I_\nu, m = 2, \dots, n \\
 d_{R,m}(t) &\leq -\bar{\sigma}_R(t), & \forall t \in J_\nu \setminus [a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}], m = 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
 e' P_{R,m}(t) A_m(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_{R,m}(t) e &\leq -d_{R,m}(t) e' P_{R,m}(t) e, \\
 \forall t \in J_\nu, e \in \ker H_m, q \in Q_R(t - \tau) &
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

με

$$H_m := (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_m), e := (e_{n-m+1}, \dots, e_n)' \in \mathbb{R}^m \tag{3.81}$$

$$A_m(t, q, y, u) := \begin{pmatrix} q_{n-m+1, n-m+1} & a_{n-m+1}(t, y, u) & 0 & \cdots & 0 \\ q_{n-m+2, n-m+1} & & & & \\ \vdots & & \boxed{A_{m-1}(t, q, y, u)} & & \\ q_{n, n-m+1} & & & & \end{pmatrix}; A_1(t, q, y, u) := q_{n, n} \tag{3.82}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Περίπτωση $m := 2$: Θεωρούμε τις σταθερές $L > 1, R > 0$,

$\xi > 0, \tau > 0$ όπως παραπάνω και ορίζουμε

$$H_2 := (1, 0), e := (e_{n-1}, e_n)' \in \mathbb{R}^2 \quad (3.83\alpha)$$

$$A_2(t, q, y, u) := \begin{pmatrix} q_{n-1, n-1} & a_{n-1}(t, y, u) \\ q_{n, n-1} & q_{n, n} \end{pmatrix}. \quad (3.83\beta)$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν, ένας χρονικά μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_{R,2} := P_{R,\xi,\bar{t}_0,\tau,y,u,2} \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ και μια απεικόνιση $d_{R,2} := d_{R,\xi,\bar{t}_0,\tau,y,u,2} \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R})$ έτσι ώστε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \bullet P_{R,2}(t) &= \begin{pmatrix} p_{R,2,1}(t) & p_{R,2}(t) \\ p_{R,2}(t) & L \end{pmatrix}, \quad \forall t \in J_\nu, \\ \bullet P_{R,2}(t) &> I_{2 \times 2}, \quad \forall t \in J_\nu, \\ \bullet p_{R,2,1}(t) &= L, p_{R,2}(t) = 0, \quad \forall t \in J_\nu \setminus [a_\nu - \varepsilon_{2,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{2,\nu}], \end{aligned} \quad (3.84\alpha)$$

$$\begin{aligned} \bullet d_{R,2}(t) &= \frac{\int_{t_0}^{T_2} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_1 - a_1} + n - 2, \quad \forall t \in I_1, \text{ if } \nu = 1 \\ \bullet d_{R,2}(t) &= \frac{\int_{T_\nu}^{T_\nu+1} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_\nu - a_\nu} + n - 2, \quad \forall t \in I_\nu, \text{ if } \nu \geq 2 \\ \bullet \int_S d_{R,2}(s) ds &\geq -\frac{2}{n}, \quad \forall S \subset [a_\nu - \varepsilon_{2,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{2,\nu}] \setminus I_\nu, \\ \bullet d_{R,2}(t) &\leq -\bar{\sigma}_R(t), \quad \forall t \in [T_{\nu-1}, T_\nu] \setminus J_\nu, \end{aligned} \quad (3.84\beta)$$

$$\begin{aligned} e' P_{R,2}(t) A_2(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_{R,2}(t) e &\leq -d_{R,2}(t) e' P_{R,2}(t) e, \\ \forall t \in J_\nu, e \in \ker H_2, q \in Q_R(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.84\gamma)$$

με $H_2, A_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ και $Q_R(\cdot)$ όπως δίνονται από τις (3.83α), (3.83β) και (3.67), αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (3.83) και (3.84α), η επιθυμητή (3.84γ) γράφεται:

$$\begin{aligned} (0, e) \begin{pmatrix} p_{R,2,1}(t) & p_{R,2}(t) \\ p_{R,2}(t) & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n-1, n-1} & a_{n-1}(t - \tau, y_\tau(t), u_\tau(t)) \\ q_{n, n-1} & q_{n, n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} \\ + (0, e) \overbrace{\begin{pmatrix} p_{R,2,1}(t) & p_{R,2}(t) \\ p_{R,2}(t) & L \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} &\leq -d_{R,2}(t) (0, e) \begin{pmatrix} p_{R,2,1}(t) & p_{R,2}(t) \\ p_{R,2}(t) & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}, \\ \forall t \in J_\nu, e \in \mathbb{R}, q \in Q_R(t), &\iff \\ p_{R,2}(t) a_{n-1}(t - \tau, y_\tau(t), u_\tau(t)) + L q_{n, n} &\leq -L d_{R,2}(t), \\ \forall t \in J_\nu, q \in Q_R(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Από τις (3.67), (3.71) και την ισοδυναμία μεταξύ των (3.84γ) και (3.85), προκύπτει ότι, για να δείξουμε (3.84γ), αρκεί να προσδιορίσουμε απεικονίσεις $p_{R,1}, p_R \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R})$

και $d_{R,2} \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R})$ κατά τέτοιον τρόπο ώστε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ να ικανοποιούνται οι (3.84α) και (3.84β), και επιπλέον:

$$p_{R,2}(t)a_{n-1}(t - \tau, y_\tau(t), u_\tau(t)) + L\bar{\sigma}_R(t) \leq -Ld_{R,2}(t), \forall t \in J_\nu, q \in Q_R(t - \tau) \quad (3.86)$$

Κατασκευή των p_R και $d_{R,2}$: Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, θεωρούμε

$$M_{2,\nu} := \max\{\bar{\sigma}_R(t) : t \in J_\nu\} \quad (3.87\alpha)$$

$$\varepsilon_{2,\nu} := \min\left\{\frac{1}{2nM_2}, \frac{\bar{b}_\nu - b_\nu}{2}, \frac{a_\nu - \bar{a}_\nu}{2}, \frac{1}{2n^2}\right\} \quad (3.87\beta)$$

και ορίζουμε $d_{R,2} \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R})$ και $p_R \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R})$ ως εξής:

$$d_{R,2}(t) \begin{cases} := -\bar{\sigma}_R(t), & t \in [\bar{a}_\nu, a_\nu - \varepsilon_{2,\nu}], \nu \in \mathbb{N} \\ \in \left[-\bar{\sigma}_R(t), \frac{\int_{t_0}^{T_2} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_1 - a_1} + n - 2\right], & t \in [a_1 - \varepsilon_{2,1}, a_1] \\ := \frac{\int_{t_0}^{T_2} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_1 - a_1} + n - 2, & t \in [a_1, b_1] \\ \in \left[-\bar{\sigma}_R(t), \frac{\int_{t_0}^{T_2} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_1 - a_1} + n - 2\right], & t \in [b_1, b_1 + \varepsilon_{2,1}] \\ \in \left[-\bar{\sigma}_R(t), \frac{\int_{T_\nu}^{T_\nu+1} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_\nu - a_\nu} + n - 2\right], & t \in [a_\nu - \varepsilon_{2,\nu}, a_\nu], \nu = 2, 3, \dots \\ := \frac{\int_{T_\nu}^{T_\nu+1} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_\nu - a_\nu} + n - 2, & t \in [a_\nu, b_\nu], \nu = 2, 3, \dots \\ \in \left[-\bar{\sigma}_R(t), \frac{\int_{T_\nu}^{T_\nu+1} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_\nu - a_\nu} + n - 2\right], & t \in [b_\nu, b_\nu + \varepsilon_{2,\nu}], \nu = 2, 3, \dots \\ := -\bar{\sigma}_R(t), & t \in [b_\nu + \varepsilon_{2,\nu}, \bar{b}_\nu], \nu \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.88)$$

$$p_{R,2}(t) := L \frac{-d_{R,2}(t) - \bar{\sigma}_R(t)}{a_{n-1}(t - \tau, y_\tau(t), u_\tau(t))}, t \in J_\nu, \nu \in \mathbb{N}. \quad (3.89)$$

Για να αποδείξουμε την (3.84γ), αρκεί να αποδείξουμε ότι ικανοποιείται η (3.86) με $d_{R,2}(\cdot)$ και $p_{R,2}(\cdot)$ όπως δίνονται από τις (3.88) και (3.89) αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (3.88) και (3.89) παίρνουμε ότι

$$p_{R,2}(t)a_{n-1}(t - \tau, y_\tau(t), u_\tau(t)) + L\bar{\sigma}_R(t) = -Ld_{R,2}(t), \forall t \in J_\nu, \nu \in \mathbb{N} \quad (3.90)$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι ισχύει η (3.86) και συνεπώς η (3.84γ) ικανοποιείται για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Από τις (3.73), (3.74), (3.75)-(3.77), (3.88), (3.89) και το γεγονός ότι η $\sigma_R(\cdot)$ είναι ανεξάρτητη των (u, y) , προκύπτει ότι η $p_{R,2}(\cdot)$ στην (3.88) είναι ισχυρώς αιτιατή σε κάθε J_ν , $\nu \in \mathbb{N}$ ως προς το $O(t_0, M)$. Τέλος, θα δείξουμε ότι $\int_S d_{R,2}(s) ds \geq -\frac{2}{n}$ για κάθε $S \subset [a_\nu - \varepsilon_{2,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{2,\nu}] \setminus I_\nu$. Πράγματι, από τις (3.87α), (3.87β) και (3.88) λαμβάνουμε

$$\int_S d_{R,2}(s) ds \geq - \int_S \bar{\sigma}_R(s) ds \geq - \int_{[a_\nu - \varepsilon_{2,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{2,\nu}] \setminus I_\nu} \bar{\sigma}_R(s) ds \geq -2M_{2,\nu}\varepsilon_{2,\nu} \geq -\frac{2}{n}. \quad (3.91)$$

Από τις (3.88) και (3.91) συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιότητες της (3.84β) ικανοποιούνται. Συνεπώς, η (3.79) πληρούται για $m = 2$.

Κατασκευή της $p_{R,1}(\cdot)$: Θα προσδιορίσουμε τώρα την απεικόνιση $p_{R,1} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η (3.78). Παρατηρούμε πρώτα από τις (3.88) και (3.89) ότι $p_{R,2}(t) = 0$ για κάθε $t \in J_\nu \setminus [a_\nu - \varepsilon_{2,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{2,\nu}]$. Εφόσον $L > 1$, μπορούμε να ορίσουμε

$$p_{R,1}(t) := \frac{p_{R,2}^2(t)}{L-1} + L \quad (3.92)$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι $p_{R,1}(t) = L$ για κάθε $t \in J_\nu \setminus [a_\nu - \varepsilon_{2,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{2,\nu}]$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (3.89), (3.92) και την υπόθεση ότι $L > 1$ παίρνουμε

$$\det(P_{R,2}(t) - I_{2 \times 2}) = \det \begin{pmatrix} p_{R,1}(t) - 1 & p_{R,2}(t) \\ p_{R,2}(t) & L - 1 \end{pmatrix} = (L - 1)^2 > 0, \quad \forall t \in J_\nu. \quad (3.93)$$

από το οποίο παίρνουμε ότι $P_{R,2}(t) > I_{2 \times 2}$ για κάθε $t \in J_\nu$. Επιπλέον, συνεπάγεται από την (3.92) και τις αιτιατές ιδιότητες της $p_{R,2}(\cdot)$ όπως ορίστηκε στην (3.89), ότι η $p_{R,1}(\cdot)$ είναι επίσης ισχυρώς αιτιατή σε κάθε J_ν , $\nu \in \mathbb{N}$ ως προς το $O(t_0, M)$. Τέλος, από τις (3.89), (3.92) και (3.93) συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιότητες της (3.84α) ικανοποιούνται. Άρα, η (3.78) ισχύει με $m = 2$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη του Ισχυρισμού για $m = 2$.

Απόδειξη Ισχυρισμού (Γενικό Επαγωγικό Βήμα): Υποθέτουμε τώρα ότι ο Ισχυρισμός ικανοποιείται για συγκεκριμένο m με $2 \leq m < n$. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται επίσης για $m := m + 1$. Θεωρούμε το ζευγάρι (H, A) όπως δίνεται από την (3.27) με $H(t, u) := H_m$, $A(t, q, y, u) := A_m(t, q, y, u)$, $\ell = \frac{n(n+1)}{2}$, $m := m$, $n := n$ και $k := 1$, όπου H_m και A_m ορίζονται από τις (3.81) και (3.82), αντίστοιχα. Επιπλέον, θεωρούμε την πλειονότιμη απεικόνιση $Q_R(\cdot)$ όπως αυτή δίνεται από την (3.67) και τις απεικονίσεις $d_{R,m}(\cdot)$ και $P_{R,m}(\cdot)$ όπως ορίζονται από τις (3.78), (3.79) στην επαγωγική υπόθεση, και ικανοποιούν τις (3.80) με $m := m$. Τέλος, θεωρούμε τη συνάρτηση $\bar{d}_{R,m} := \bar{d}_{R,\xi,t_0,\tau,y,u,m}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\bar{d}_{R,m}(t) := d_{R,m}(t) - 1, \quad t \in J_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad (3.94)$$

και ικανοποιεί $\bar{d}_{R,m}(t) < d_{R,m}(t)$ για κάθε $t \in \cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu$. Προκύπτει τότε, ότι όλες οι προϋποθέσεις του Λήμματος 3.2.1 ικανοποιούνται και επομένως, υπάρχει συνάρτηση $\phi_{R,m} := \phi_{R,\xi,t_0,m} \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R}_{>0})$ έτσι ώστε

$$e' P_{R,m}(t) A_m(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_{R,m}(t) e \leq \phi_{R,m}(t) |H_m e|^2 - \bar{d}_{R,m}(t) e' P_{R,m}(t) e, \quad (3.95)$$

$$\forall t \in J_\nu, \nu \in \mathbb{N}, q \in Q_R(t - \tau), e \in \mathbb{R}^m$$

Επιπλέον, λόγω των (3.79) και (3.94), η απεικόνιση $\bar{d}_{R,m}(\cdot)$ ικανοποιεί τα εξής:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \bar{d}_{R,m}(t) = \frac{\int_{t_0}^{T_2+\tau} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_1 - a_1} + n - (m + 1), \quad \forall t \in I_1 \\
 & \bullet \bar{d}_{R,m}(t) = \frac{\int_{T_\nu+\tau}^{T_\nu+1+\tau} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_\nu - a_\nu} + n - (m + 1), \quad \forall t \in I_\nu, \nu = 2, 3, \dots \\
 & \bullet \int_S \bar{d}_{R,m}(s) ds \geq -\frac{m}{n} - \frac{1}{2n}, \quad \forall S \subset [a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}] \setminus I_\nu, \nu \in \mathbb{N} \\
 & \bullet \bar{d}_{R,m}(t) \leq -\bar{\sigma}_R(t), \quad \forall t \in J_\nu \setminus [a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}], \nu \in \mathbb{N}
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τις (3.95) και (3.96), για να δείξουμε ότι ισχύει ο Ισχυρισμός για $m = m + 1$. Συγκεκριμένα, για τα ίδια $L, R, \xi, t_0 = \bar{t}_0, \tau, u(\cdot)$ και $y(\cdot)$ όπως προηγουμένως, θα δείξουμε ότι υπάρχει χρονικά μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_{R,m+1} \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)})$ και απεικόνιση $d_{R,m+1} \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R})$, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να πληρούνται οι (3.78) και (3.79) με $m = m + 1$ και επιπλέον να ισχύει:

$$\begin{aligned}
 & e' P_{R,m+1}(t) A_{m+1}(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_{R,m+1}(t) e \leq -d_{R,m+1}(t) e' P_{R,m+1}(t) e, \\
 & \forall t \in J_\nu, \nu \in \mathbb{N}, e \in \ker H_{m+1}, q \in Q_R(t - \tau)
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

με

$$H_{m+1} := \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{m+1}, e := (e_{n-m}; \hat{e}')' \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \hat{e} := (e_{n-m+1}, \dots, e_n)' \in \mathbb{R}^m \tag{3.98\alpha}$$

$$A_{m+1}(t, q, y, u) := \begin{pmatrix} q_{n-m, n-m} & a_{n-m}(t, y, u) & 0 & \cdots & 0 \\ q_{n-m+1, n-m} & & & & \\ \vdots & & \boxed{A_m(t, q, y, u)} & & \\ q_{n, n-m} & & & & \end{pmatrix} \tag{3.98\beta}$$

$$P_{R,m+1}(t) := \begin{pmatrix} p_{R,m+1,1}(t) & p_{R,m+1}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ p_{R,m+1}(t) & & & & \\ 0 & & \boxed{P_{R,m}(t)} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \tag{3.98\gamma}$$

όπου η $Q_R(\cdot)$ δίνεται από την (3.67). Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τις (3.98α) και (3.98γ), έχουμε $e' P_{R,m+1}(t) e = \hat{e}' P_{R,m}(t) \hat{e}$ για κάθε $e = (0, \hat{e}')' = (0, e_{n-m+1}, \dots, e_n)' \in \ker H_{m+1}$,

επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.81), η επιθυμητή (3.97) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
 & (0; \hat{e}') \begin{pmatrix} p_{R,m+1,1}(t) & p_{R,m+1}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ p_{R,m+1}(t) & & & & \\ 0 & & \boxed{P_{R,m}(t)} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \\
 & \quad \times \begin{pmatrix} q_{n-m,n-m} & a_{n-m}(t-\tau, y_\tau(t), u_\tau(t)) & 0 & \cdots & 0 \\ q_{n-m+1,n-m} & & & & \\ \vdots & & \boxed{A_m(t-\tau, q, y, u)} & & \\ q_{n,n-m} & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{e} \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} (0; \hat{e}') \begin{pmatrix} p_{R,m+1,1}(t) & p_{R,m+1}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ p_{R,m+1}(t) & & & & \\ 0 & & \boxed{P_{R,m}(t)} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{e} \end{pmatrix} \\
 & \leq -d_{R,m+1}(t)(0; \hat{e}') \begin{pmatrix} p_{R,m+1,1}(t) & p_{R,m+1}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ p_{R,m+1}(t) & & & & \\ 0 & & \boxed{P_{R,m}(t)} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{e} \end{pmatrix}, \\
 & \forall t \in J_\nu, \nu \in \mathbb{N}, \hat{e} \in \mathbb{R}^m, q \in Q_R(t) \iff
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & e_{n-m+1}^2 p_{R,m+1}(t) a_{n-m}(t-\tau, y_\tau(t), u_\tau(t)) + \hat{e}' P_{R,m}(t) A_m(t-\tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t)) \hat{e} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \hat{e}' P_{R,m}(t) \hat{e} \leq -d_{R,m+1}(t) \hat{e}' P_{R,m}(t) \hat{e}, \\
 & \forall t \in J_\nu, \nu \in \mathbb{N}, \hat{e} \in \mathbb{R}^m, q \in Q_R(t-\tau) \tag{3.99}
 \end{aligned}$$

Από την (3.95), αντί της (3.99), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}
 & e_{n-m+1}^2 (p_{R,m+1}(t) a_{n-m}(t-\tau, y_\tau(t), u_\tau(t)) + \phi_{R,m}(t)) \leq (\bar{d}_{R,m}(t) - d_{R,m+1}(t)) \hat{e}' P_{R,m}(t) \hat{e}, \\
 & \forall t \in J_\nu, \nu \in \mathbb{N}, \hat{e} \in \mathbb{R}^m \tag{3.100}
 \end{aligned}$$

Απόδειξη των (3.100), (3.78) και (3.79) για $m = m+1$: Επιβάλλουμε την ακόλουθη συνθήκη για την υποψήφια συνάρτηση $d_{R,m+1}(\cdot)$:

$$d_{R,m+1}(t) \leq \bar{d}_{R,m}(t), \forall t \in J_\nu, \nu \in \mathbb{N}. \tag{3.101}$$

Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.101), προκύπτει ότι, για να δείξουμε την (3.100) και ότι ισχύουν οι (3.78) και (3.79) με $m = m + 1$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} p_{R,m+1}(t)a_{n-m}(t - \tau, y_\tau(t), u_\tau(t)) + \phi_{R,m}(t) &\leq \bar{d}_{R,m}(t) - d_{R,m+1}(t) \\ \forall t \in J_\nu, \nu \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (3.102)$$

για κατάλληλες απεικονίσεις $p_{R,m+1,1}, p_{R,m} \in C^1(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R})$ και $d_{R,m+1} \in C^0(\cup_{\nu \in \mathbb{N}} J_\nu; \mathbb{R})$, κατά τέτοιον τρόπο ώστε να ισχύουν οι (3.78), (3.79) με $m = m + 1$, και επιπλέον η $d_{R,m+1}(\cdot)$ να ικανοποιεί την (3.101). Συνεχίζουμε με την κατασκευή αυτών των συναρτήσεων.

Κατασκευή των p_R και $d_{R,m+1}$: Έστω

$$M_{m+1,\nu} := \max \{ |\bar{d}_{R,m}(t)| + \phi_m(t) : t \in J_\nu \}, \nu \in \mathbb{N} \quad (3.103\alpha)$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{m,\nu} &:= \min \left\{ \frac{1}{4nM_{m+1,\nu}}, \frac{1}{4n^2}, \frac{a_\nu - \varepsilon_{m,\nu} - \bar{a}_\nu}{2}, \frac{\bar{b}_\nu - b_\nu - \varepsilon_{m,\nu}}{2} \right\} \\ \varepsilon_{m+1,\nu} &:= \varepsilon_{m,\nu} + \delta\varepsilon_{m+1,\nu} \end{aligned} \quad (3.103\beta)$$

$$d_{R,m+1}(t) \begin{cases} := \bar{d}_{R,m}(t) - \phi_{R,m}(t), & t \in [\bar{a}_\nu, a_\nu - \varepsilon_{m+1,\nu}], \nu \in \mathbb{N} \\ \in [\bar{d}_{R,m}(t) - \phi_{R,m}(t), \bar{d}_{R,m}(t)], & t \in [a_\nu - \varepsilon_{m+1,\nu}, a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}], \nu \in \mathbb{N} \\ := \bar{d}_{R,m}(t), & t \in [a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}], \nu \in \mathbb{N} \\ \in [\bar{d}_{R,m}(t) - \phi_{R,m}(t), \bar{d}_{R,m}(t)], & t \in [b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m+1,\nu}], \nu \in \mathbb{N} \\ := \bar{d}_{R,m}(t) - \phi_{R,m}(t), & t \in [b_\nu + \varepsilon_{m+1,\nu}, \bar{b}_\nu], \nu \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.104)$$

$$p_{R,m+1}(t) := \frac{\bar{d}_{R,m}(t) - \phi_{R,m}(t) - d_{R,m+1}(t)}{a_{n-m}(t - \tau, y_\tau(t), u_\tau(t))}, t \in J_\nu, \nu \in \mathbb{N} \quad (3.105)$$

Για τις $d_{R,m+1}(\cdot)$ και $p_{R,m+1}(\cdot)$ όπως ορίζονται από τις (3.104) και (3.105) αντίστοιχα, προκύπτει ότι ισχύει η (3.102) για κάθε $t \in J_\nu$ και επιπλέον, $d_{R,m+1}(t) \leq \bar{d}_{R,m}(t)$ για κάθε $t \in J_\nu$. Από το τελευταίο σε συνδυασμό με την (3.104) συνεπάγεται ότι

$$d_{R,m+1}(t) \leq \bar{d}_{R,m}(t) \leq -\bar{\sigma}_R(t) \quad (3.106)$$

για κάθε $t \in J_\nu \setminus [a_\nu - \varepsilon_{m+1,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m+1,\nu}]$. Παρατηρούμε ότι, λόγω του προηγούμενου επαγωγικού βήματος και του αποτελέσματος του Λήμματος 3.2.1, οι $\bar{d}_{R,m}(\cdot)$ και $\phi_{R,m}(\cdot)$ είναι ισχυρώς αιτιατές σε κάθε J_ν , $\nu \in \mathbb{N}$, και επομένως, οι $d_{R,m+1}(\cdot)$ και $p_{R,m+1}(\cdot)$ όπως ορίστηκαν στις (3.104) και (3.105) είναι επίσης ισχυρώς αιτιατές σε κάθε J_ν , $\nu \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η $d_{R,m+1}(\cdot)$ όπως ορίστηκε στην (3.104), ικανοποιεί

$$\int_S d_{R,m+1}(s) ds \geq -\frac{m+1}{n}$$

για κάθε $S \subset [a_\nu - \varepsilon_{m+1,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m+1,\nu}] \setminus I_\nu$. Πράγματι, από τις (3.96), (3.103), (3.104) και (3.106) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \int_S d_{R,m+1}(s)ds &= \int_{([a_\nu - \varepsilon_{m+1,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m+1,\nu}] \setminus [a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}]) \cap S} d_{R,m+1}(s)ds \\
 &\quad + \int_{([a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}] \setminus I_\nu) \cap S} d_{R,m+1}(s)ds \\
 &\geq - \int_{([a_\nu - \varepsilon_{m+1,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m+1,\nu}] \setminus [a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}]) \cap S} (|\bar{d}_{R,m}(s)| + \phi(s))ds \\
 &\quad + \int_{([a_\nu - \varepsilon_{m,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m,\nu}] \setminus I_\nu) \cap S} \bar{d}_{R,m}(s)ds \\
 &\geq - 2M_{m+1,\nu} \delta \varepsilon_{m,\nu} - \frac{m}{n} - \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2n} - \frac{2m+1}{2n} \\
 &= -\frac{m+1}{n}, \tag{3.107}
 \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (3.106) και (3.107), ότι όλες οι ιδιότητες της (3.79) ικανοποιούνται.

Κατασκευή της $p_{R,m+1,1}(\cdot)$:

Απομένει να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση $p_{R,m+1,1} \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ έτσι ώστε να ισχύει η (3.78), δηλαδή $P_{R,m+1}(t) > I_{(m+1) \times (m+1)}$. Ορίζουμε

$$p_{R,m+1,1}(t) := \frac{p_{R,m+1}^2(t) \det(P_{R,m-1}(t) - I_{(m-1) \times (m-1)})}{\det(P_{R,m}(t) - I_{m \times m})} + L, \quad t \geq t_0. \tag{3.108}$$

Εφόσον $L > 1$ και $P_{R,m}(t) > I_{m \times m}$, προκύπτει από την (3.108) ότι

$$\begin{aligned}
 &\det(P_{R,m+1}(t) - I_{(m+1) \times (m+1)}) = \\
 &= \det \begin{pmatrix} p_{R,m+1,1}(t) - 1 & p_{R,m+1}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ p_{R,m+1}(t) & & & & \\ 0 & & \boxed{P_{R,m}(t) - I_{m \times m}} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \\
 &= (L - 1) \det(P_{R,m}(t) - I_{m \times m}) > 0, \quad \forall t \geq t_0. \tag{3.109}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $t \in J_\nu \setminus [a_\nu - \varepsilon_{m+1,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{m+1,\nu}]$, για τις απεικονίσεις $p_{R,m+1}(\cdot)$ και $p_{R,m+1,1}(\cdot)$ όπως ορίζονται από τις (3.105) και (3.108) αντίστοιχα, ισχύει ότι $p_{R,m+1,1}(t) = L$ και $p_{R,m+1}(t) = 0$. Επομένως, ισχύουν όλες οι ιδιότητες της (3.78).

Από τις (3.95), (3.96), (3.100), (3.102)-(3.105), (3.107), (3.108) και (3.109) προκύπτει ότι ισχύει η επαγωγική υπόθεση για $m := m + 1$. Οπότε ολοκληρώθηκε η απόδειξη του Ισχυρισμού. \square

Για να δείξουμε ότι ισχύουν οι (3.22α)-(3.22γ) για $P_R(\cdot)$ και $d_R(\cdot)$ όπως αυτές ορίζονται από τις (3.22α) και (3.22β) αντίστοιχα, χρησιμοποιούμε τον Ισχυρισμό με $m = n$. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τα διαστήματα $\{\mathcal{A}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} := \{[\alpha_\nu, \beta_\nu]\}_{\nu \in \mathbb{N}}$, που ορίζονται από την (3.77) με $m = n$, δηλαδή,

$$\mathcal{A}_\nu := [a_\nu - \varepsilon_{n,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{n,\nu}], \nu \in \mathbb{N} \quad (3.110)$$

και ορίζουμε τις απεικονίσεις $P_R : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ και $d_R : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής

$$P_R(t) := \begin{cases} \text{diag}\{L, \dots, L\}, & t \in [\bar{t}_0, \infty) \setminus \cup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_\nu \\ P_{R,n}(t), & t \in \mathcal{A}_\nu, \nu \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.111)$$

και

$$d_R(t) := \begin{cases} -\bar{\sigma}_R(t), & t \in [\bar{t}_0, \infty) \setminus \cup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_\nu \\ d_{R,n}(t), & t \in \mathcal{A}_\nu, \nu \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.112)$$

με $L (> 1)$ όπως δίνεται παραπάνω και $\mathcal{A}_\nu, P_{R,n}(\cdot), d_{R,n}(\cdot)$ και $\bar{\sigma}_R(\cdot)$ όπως στις (3.110), (3.78), (3.79) και (3.70β), αντίστοιχα. Προκύπτει από τις from (3.76)-(3.78) και (3.111) ότι $P_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και ότι η $d_R : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχής. Επιπλέον, από τις (3.75)-(3.77) και (3.110)-(3.112), έχουμε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, οι απεικονίσεις παραπάνω είναι ισχυρώς αιτιατές σε κάθε \mathcal{A}_ν ως προς το $O(t_0, M)$ και επομένως, λόγω του Ορισμού 3.1.2, αιτιατές ως προς το $O(t_0, M)$. Επιπλέον, προκύπτει ότι οι $P_R(\cdot)$ και $d_R(\cdot)$, όπως ορίζονται από τις (3.111) και (3.112) αντίστοιχα, ικανοποιούν τις (3.22α)-(3.22γ), με $\kappa_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.72) και

$$A(t, q, y, u) := A_n(t, q, y, u) \quad (3.113)$$

$$H := H_n \quad (3.114)$$

όπου $A_n(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ και H_n ορίζονται από τις (3.82) και (3.81), αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τις (3.22α)-(3.22γ).

Απόδειξη της (3.22α). Λαμβάνοντας υπ' όψιν την τρίτη ιδιότητα της (3.78), την (3.111) και το γεγονός ότι λόγω της (3.77) το αριστερό άκρο του \mathcal{A}_0 είναι μεγαλύτερο του t_0 , προκύπτει ότι πληρούται η (3.22α).

Απόδειξη της (3.22β). Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (3.79), (3.112) και (3.110) συμπεραίνουμε ότι η $d_R(\cdot)$ ικανοποιεί

$$\begin{aligned} d_R(t) &= \frac{\int_{\bar{t}_0}^{T_2+\tau} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_1 - a_1}, & \forall t \in I_1 \\ d_R(t) &= \frac{\int_{T_\nu+\tau}^{T_{\nu+1}+\tau} \bar{\sigma}_R(s) ds + 2}{b_\nu - a_\nu}, & \forall t \in I_\nu, \nu = 2, 3, \dots \\ \int_S d_R(s) ds &\geq -1, & \forall S \subset [a_\nu - \varepsilon_{n,\nu}, b_\nu + \varepsilon_{n,\nu}] \setminus I_\nu, \nu = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.115)$$

Για να δείξουμε την επιθυμητή (3.22β), θεωρούμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση Α: $t \in [\bar{t}_0, T_1 + \tau)$. Τότε, προκύπτει από τις (3.112), (3.115) και (3.72) ότι

$$\begin{aligned} \int_{[\bar{t}_0, t)} d_R(s)ds &= \int_{[\bar{t}_0, t) \cap [\bar{t}_0, T_1 + \tau]} d_R(s)ds = \int_{[\bar{t}_0, t) \cap ([\bar{t}_0, T_1 + \tau] \setminus \mathcal{A}_1)} d_R(s)ds \\ &+ \int_{[\bar{t}_0, t) \cap (\mathcal{A}_1 \setminus I_1)} d_R(s)ds + \int_{[\bar{t}_0, t) \cap I_1} d_R(s)ds \geq \int_{[\bar{t}_0, T_1 + \tau] \setminus \mathcal{A}_1} d_R(s)ds - 1 \\ &> - \int_{[\bar{t}_0, T_1 + \tau]} \bar{\sigma}_R(s - \tau)ds - 1 \geq \kappa_R(t) \end{aligned}$$

Περίπτωση Β: $t \in [T_\nu + \tau, T_{\nu+1} + \tau)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε παίρνουμε

$$\int_{[\bar{t}_0, t)} d_R(s)ds = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{[T_{i-1} + \tau, T_i + \tau)} d_R(s)ds + \int_{[T_\nu + \tau, t]} d_R(s)ds \quad (3.116)$$

Με παρόμοιους υπολογισμούς όπως στην περίπτωση Α, παίρνουμε ότι ο δεύτερος όρος στην (3.116) ικανοποιεί

$$\int_{[T_\nu + \tau, t]} d_R(s)ds > - \int_{[T_\nu + \tau, T_{\nu+1} + \tau)} \bar{\sigma}_R(s - \tau)ds - 1 \geq \kappa_R(t). \quad (3.117)$$

Για τον πρώτο όρο, χρησιμοποιώντας τις (3.112) και (3.115) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu} \int_{[T_{i-1} + \tau, T_i + \tau)} d_R(s)ds &= \sum_{i=1}^{\nu} \int_{[T_{i-1} + \tau, T_i + \tau) \setminus \mathcal{A}_i} d_R(s)ds + \sum_{i=1}^{\nu} \int_{\mathcal{A}_i \setminus I_i} d_R(s)ds \\ &+ \sum_{i=1}^{\nu} \int_{I_i} d_R(s)ds \geq \sum_{i=1}^{\nu} \left(- \int_{[T_{i-1} + \tau, T_i + \tau) \setminus \mathcal{A}_i} \bar{\sigma}_R(s - \tau)ds \right) + \sum_{i=1}^{\nu} (-1) \\ &+ (b_1 - a_1) \frac{\int_{\bar{t}_0}^{T_2 + \tau} \bar{\sigma}_R(s)ds + 2}{b_1 - a_1} + (b_\nu - a_\nu) \sum_{i=2}^{\nu} \frac{\int_{T_{i-1} + \tau}^{T_i + \tau} \bar{\sigma}_R(s)ds + 2}{b_i - a_i} \\ &\geq - \int_{[\bar{t}_0, T_\nu + \tau)} \bar{\sigma}_R(s - \tau)ds - \nu + 2\nu + \int_{[\bar{t}_0, T_{\nu+1} + \tau)} \bar{\sigma}_R(s - \tau)ds \\ &= \nu + \int_{[T_\nu + \tau, T_{\nu+1} + \tau)} \bar{\sigma}_R(s - \tau)ds. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Συνεπώς, παίρνουμε από τις (3.72), (3.116), (3.117) και (3.118) ότι $\int_{[\bar{t}_0, t)} d_R(s)ds > \nu - 1 \geq \kappa_R(t)$. Άρα, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (3.22β) για αυτή την περίπτωση.

Απόδειξη της (3.22γ). Θεωρούμε πάλι δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση Α: $t \in \mathcal{A}_\nu$ για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε, προκύπτει από τις (3.78), (3.79), (3.80), (3.111) και (3.112) ότι ικανοποιείται η (3.22γ) με $A(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ και H όπως δίνονται από τις (3.113) και (3.114), αντίστοιχα.

Περίπτωση Β: $t \in [\bar{t}_0, \infty) \setminus \cup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_\nu$. Σε αυτή την περίπτωση, παίρνουμε από τις (3.71), (3.111) και (3.112) ότι για κάθε $e \in \ker H$ και $q \in Q_R(t - \tau)$

$$\begin{aligned} e' P_R(t) A(t - \tau, q, y_\tau(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_R(t) e &= e' P_R(t) A(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t)) e \\ &\leq L \bar{\sigma}_R(t) |e|^2 = -d_R(t) e' P_R(t) e. \end{aligned}$$

Επομένως, από τον Ισχυρισμό έχουμε ότι ικανοποιούνται οι (3.22α)-(3.22γ) της Α2. Προκύπτει τότε από την Πρόταση 3.2.1, ότι υπάρχει τμηματικά συνεχής συνάρτηση \bar{d}_R που ικανοποιεί την $\bar{d}_R(t) \leq d_R(t)$ για κάθε $t \geq \bar{t}_0$ και μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση $\phi_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{\geq 0})$, και οι δύο αιτιατές ως προς το $O(t_0, B_R \cap M)$ έτσι ώστε να ισχύει η (3.23γ).

Καταλήγουμε λοιπόν, ότι για κάθε $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$, ισχύουν και οι δύο Υποθέσεις 3.2.1 και 3.2.2, επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.2 το IDSODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (3.2) ως προς το (M, \mathcal{U}) . Η απόδειξη του δεύτερου μέρους της Πρότασης 3.1.1 είναι άμεση απόρροια του Ισχυρισμού, της Πρότασης 3.2.1 και του γεγονότος ότι οι αρχικές συνθήκες του (3.2) ανήκουν στην τομή του M με δοσμένη μπάλα B_R ακτίνας $R > 0$. \square

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΙΣΧΥΡΙΣΜΩΝ ΤΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ 2.4

Απόδειξη Ισχυρισμού Π4. Από τις (2.109), (2.111β), (2.113) και (2.117)-(2.119) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & w' P_2(t) A_2(t, q, u(t)) w + \frac{1}{2} w' \dot{P}_2(t) w + \hat{d}_2(t) w' P_2(t) w \\
 &= (w_1, w_2) \begin{pmatrix} p_1(t) & p(t) \\ p(t) & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho_2(t)u(t) \\ q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (w_1, w_2) \begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) & \dot{p}(t) \\ \dot{p}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\
 & \quad + \hat{d}_2(t) (w_1, w_2) \begin{pmatrix} p_1(t) & p(t) \\ p(t) & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\
 &= w_1^2 (p(t)q + \frac{1}{2} \dot{p}_1(t)) + w_1 w_2 (2q + p_1(t) \rho_2(t) u(t) + \dot{p}(t) + 2 \hat{d}_2(t) p(t)) \\
 & \quad + w_2^2 (p(t) \rho_2(t) u(t) + 2 \hat{d}_2(t)) \\
 & \leq w_1^2 \left(\frac{1}{2} |\dot{p}_1(t)| + |\hat{d}_2(t)| |p_1(t)| + |p(t)| \omega(|x_1(t)|, |u(t)|) + 1 \right) + |w_1| |w_2| (|p_1(t)| |\rho_2(t)| |u(t)| \\
 & \quad + |\dot{p}(t)| + 2 |\hat{d}_2(t)| |p(t)| + 2 \omega(|x_1(t)|, |u(t)|) + 1) + w_2^2 (2 \hat{d}_2(t) + p(t) \rho_2(t) u(t)), \\
 & \quad \forall w = (w_1, w_2) \in K(t), q \in Q_{y(t), u(t)}(t), t \geq t_0 \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τις (2.113β), (2.117β) και (2.118β),

$$p(t) \begin{cases} = -L_k \rho_2(t) u^3(t), & \text{για } t \in clA^k \\ = 0, & \text{για } t \in B^k \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Το γεγονός αυτό μαζί με τις σχέσεις (2.107α), (2.110), (2.113β), (2.117β), (2.118α), (2.119) και (2.125β), συνεπάγεται ότι για $t \in clA^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ τότε

$$2 \hat{d}_2(t) + p(t) \rho_2(t) u(t) = 2(d_2(t) - \psi(t)) - L_k \rho_2^2(t) u^4(t) = -4\psi(t) = R_3(t)$$

και για $t \in B^k$, τότε

$$2 \hat{d}_2(t) + p(t) \rho_2(t) u(t) = -2d_2(t) - 2\psi(t) = -4\psi(t) = R_3(t).$$

Επομένως, από την (A.1) και το παραπάνω επιχείρημα παίρνουμε την επιθυμητή (2.125). ▲

Απόδειξη Ισχυρισμού Π5. Αν $K^c(t) = \emptyset$ τότε ο Ισχυρισμός είναι προφανής. Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $K^c(t) \neq \emptyset$ για κάποιο $t \geq t_0$. Σύμφωνα με την (2.121), για να δείξουμε την (2.127), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} w'P_2(t)A_2(t, q, u(t))w + \frac{1}{2}w'\dot{P}_2(t)w + \hat{d}_2(t)w'P_2(t)w < 0, \\ \forall w = (w_1, w_2) \in \bar{K}(t), q \in Q_{y(t), u(t)}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Από τον Ισχυρισμό Π4, για να ικανοποιείται η (A.2), αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $w = (w_1, w_2) \in \bar{K}(t)$ τότε

$$w_1^2 R_1(t) + |w_1||w_2|R_2(t) + w_2^2 R_3(t) < 0 \quad (\text{A.3})$$

με R_1, R_2 και R_3 όπως ορίζονται από την (2.125β) (Ισχυρισμός Π4). Η (A.3), λόγω της (2.126β) γράφεται

$$\begin{aligned} \left(\frac{|w_1|}{|w_2|} \right)^2 R_1(t) + \frac{|w_1|}{|w_2|} R_2(t) + R_3(t) < 0 \\ \Leftrightarrow \\ r^2(t)R_1(t) + r(t)R_2(t) + R_3(t) < 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Επομένως, για να δείξουμε ότι ισχύει η (A.3) και συνεπώς η (A.2), αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιείται η (A.4) για $r(\cdot)$ όπως επιλέχτηκε στην (2.126α). Παρατηρούμε τώρα ότι, εφόσον $R_3(t) < 0$ και $R_1, R_2 > 0$ για κάθε $t \geq t_0$, η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\beta^2 R_1(t) + \beta R_2(t) + R_3(t) = 0$$

έχει δύο άνισες λύσεις

$$\beta_{1,2} = \frac{-R_2(t) \pm \sqrt{R_2^2(t) + 4R_1(t)R_3(t)}}{2R_1(t)}$$

και λόγω της (2.126α) έχουμε ότι

$$\beta_1 < r(t) < \beta_2, \text{ για κάθε } t \geq t_0.$$

Από την παραπάνω ανίσωση συμπεραίνουμε ότι ικανοποιείται η (A.4) και κατά συνέπεια ο ισχυρισμός ότι $\bar{K}(t) \subset K(t)$. ▲

Απόδειξη Ισχυρισμού Π6. Η ισότητα (2.128α) είναι συνέπεια των (2.126β) και (2.126δ). Τώρα, σύμφωνα με τις (2.107α), (2.128) και το γεγονός ότι $r(\cdot) > 0$, έχουμε ότι $\varepsilon(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq t_0$ και $\varepsilon(t) = 0$, αν και μόνο αν $u(t) = 0$. Επομένως, από την (2.122β) του Ισχυρισμού Π1 ισχύει ότι $K^c(t) = \emptyset$ το οποίο συνεπάγεται την επιθυμητή (2.128β). ▲

Απόδειξη Ισχυρισμού Π7. Υποθέτουμε τουναντίον ότι υπάρχει ακολουθία $t_n \rightarrow t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ με, είτε

$$K^c(t_n) \neq \emptyset \quad (\text{A.5})$$

είτε

$$|u(t_n)| > \zeta(t_n) \quad (\text{A.6})$$

έτσι ώστε $C(t_n) \rightarrow +\infty$ καθώς $t_n \rightarrow t$. Αυτό όμως, από τις (2.128), (2.129) και το γεγονός ότι $r(\cdot) > 0$, είναι ισοδύναμο με

$$\lim_{t_n \rightarrow t} u(t_n) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι ισχύουν οι (A.6) και (A.7). Αυτό θα σήμαινε ότι

$$0 = \lim_{t_n \rightarrow t} u(t_n) > \lim_{t_n \rightarrow t} \zeta(t_n) = \zeta(t) > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύουν οι (A.5) και (A.7). Τότε υπάρχουν ακολουθίες $\{w_n\}$, $\{q_n\}$ με $w_n \in K^c(t_n)$, $|w_n| = 1$; $|q_n| \leq |u(t_n)|k(|x_1(t_n)|)$ κι ένα διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^2$ με $|w| = 1$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε $w_n \rightarrow w$, $q_n \rightarrow 0$. Επιπλέον, αν ορίσουμε

$$S(t, q, e) := e' P_2(t) A_2(t, q, u(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_2(t) e + \hat{d}_2(t) e' P_2(t) e, \quad t \geq t_0,$$

όπου $e \in \mathbb{R}^2$ και $q \in \mathbb{R}$, τότε

$$S(t_n, q_n, w_n) \geq 0.$$

Αυτό όμως μαζί με τις (2.109β), (2.110β), (2.113), (2.117)-(2.119) και λόγω συνέχειας των P_2 , A_2 , \hat{d}_2 , u και $x(\cdot)$ συνεπάγεται ότι

$$S(t_n, q_n, w_n) \rightarrow S(t, 0, w) = -2\psi(t)w'P_2(t)w < 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, εφόσον $\psi(t) > 0$ και $P_2(t) > 0$. ▲

Απόδειξη Ισχυρισμού Π8. Έστω $w \in \mathbb{R}^2$ με $|w| = 1$ κι έστω $t \geq t_0$. Τότε, είτε $w \in K(t)$ ή $w \in K^c(t)$. Αν $w \in K(t)$ τότε από την (2.121α), προκύπτει ότι ισχύει η (2.120) για οποιαδήποτε $\phi_2(\cdot) > 0$. Για $w \in K^c(t)$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (2.126δ), (2.127) του Ισχυρισμού Π5 και την (2.128α) του Ισχυρισμού Π6 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\Theta_2(t, u(t))H_2w| &\geq \min\{|\Theta_2(t, u(t))H_2w|, w \in K^c(t)\} \geq \min\{|\Theta_2(t, u(t))H_2w|, w \in \bar{K}^c(t)\} \\ &= \varepsilon(t) = (\rho_1(t)\rho_2(t)u^2(t))^2 \sqrt{r^2(t)/(1+r^2(t))}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Από τις (2.129), (2.130) και (A.8) συνεπάγεται ότι

$$\phi_2(t)|\Theta_2(t, u(t))H_2w|^2 \geq \max\{|P_2(t)||A_2(t, q, u(t))| + \frac{1}{2}|\dot{P}_2(t)| + |\hat{d}_2(t)||P_2(t)|, q \in Q_{y(t), u(t)}\},$$

η οποία μαζί με την (2.111) συνεπάγεται την (2.120). Καταλήγουμε ότι η επιλογή (2.130) της ϕ_2 εγγυάται την εγγυρότητα της (2.120). ▲

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΛΗΜΜΑΤΟΣ 3.2.1

Έστω $t_0, \tau, a, b, y(\cdot), u(\cdot)$ κι έστω οι απεικονίσεις $d(\cdot), P(\cdot)$ και $\bar{d}(\cdot)$ όπως δίνονται στο Λήμμα. Προχωρούμε με την κατασκευή της συνάρτησης $\phi(\cdot)$ στο διάστημα $[a, b]$ και ορίζουμε για κάθε $t \in [a, b], q \in \mathbb{R}^\ell$ και $e \in \mathbb{R}^n$ τις απεικονίσεις

$$D(t, q, e) := e'P(t)A(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e + \bar{d}(t)e'P(t)e \quad (\text{B.1})$$

$$K(t) := \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1, D(t, q, w) < 0, \forall q \in Q(t - \tau)\}. \quad (\text{B.2})$$

Επίσης, λόγω συνέχειας των $y(\cdot), u(\cdot)$ καθώς και των απεικονίσεων που εμπλέκονται στο δεξί μέλος της (B.1), έχουμε ότι η $D(\cdot, \cdot, \cdot)$ είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι λόγω των (3.30), (3.31) και (3.32), το σύνολο $K(t)$ είναι μη κενό, εφόσον περιέχει όλα τα διανύσματα $w \in \mathbb{R}^n$ με $|w| = 1$ και $w \in \ker H(t - \tau, u_\tau(t)) \neq \emptyset$. Πράγματι, έστω $w \in \mathbb{R}^n$ με $|w| = 1$ και $w \in \ker H(t - \tau, u_\tau(t))$. Τότε, από τις (3.31), (3.32) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο πίνακας $P(t)$ είναι θετικά ορισμένος, συμπεραίνουμε ότι $D(t, q, w) \leq (\bar{d}(t) - d(t))w'P(t)w < 0$ για κάθε $q \in Q(t - \tau)$ κι επομένως $w \in K(t)$ το οποίο εγγυάται ότι $K(t) \neq \emptyset$. Συνεπώς, ισχύει ότι

$$w \in \ker H(t - \tau, u_\tau(t)) \text{ και } |w| = 1 \Rightarrow w \in K(t). \quad (\text{B.3})$$

Στη συνέχεια, για κάθε $t \in [a, b]$, υιοθετούμε το συμβολισμό $K^c(t)$ για το συμπλήρωμα του $K(t)$ ως προς τη μοναδιαία σφαίρα στον \mathbb{R}^n , δηλαδή, $K^c(t) := \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1, w \notin K(t)\}$. Επομένως, λαμβάνουμε από την (B.3) ότι

$$K^c(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1 \text{ και } D(t, q, w) \geq 0, \text{ για κάποιο } q \in Q(t - \tau)\}. \quad (\text{B.4})$$

Θα δείξουμε τώρα ότι για κάθε $t \in [a, b]$, το σύνολο $K^c(t)$ είναι κλειστό. Επομένως, θεωρούμε ότι $t \in [a, b]$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $K^c(t) \neq \emptyset$. Θα δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $\{w_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset K^c(t)$ με $w_l \rightarrow w$ ισχύει ότι $w \in K^c(t)$. Πράγματι, εφόσον $w_l \in K^c(t)$, συνεπάγεται από την (B.4) ότι υπάρχει $q_l \in Q(t - \tau)$ με $D(t, q_l, w_l) \geq 0$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το $q(\cdot)$ ικανοποιεί την Ιδιότητα CP, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q_l \rightarrow q$ για συγκεκριμένο $q \in Q(t - \tau)$. Εφόσον $(q_l, w_l) \rightarrow (q, w)$ και λόγω συνέχειας της $D(t, \cdot, \cdot)$ προκύπτει ότι $D(t, q_l, w_l) \rightarrow D(t, q, w) \geq 0$, κι επομένως από την (B.4) έχουμε ότι

B. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΛΗΜΜΑΤΟΣ 3.2.1

$w \in K^c(t)$, το οποίο σημαίνει ότι το σύνολο $K^c(t)$ είναι κλειστό. Στη συνέχεια, θεωρούμε την απεικόνιση $\omega : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ που ορίζεται ως εξής:

$$\omega(t) := \begin{cases} \min\{|H(t - \tau, u_\tau(t))w| : w \in K^c(t)\}, & \text{if } K^c(t) \neq \emptyset \\ \infty, & \text{if } K^c(t) = \emptyset \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in [a, b]$ το σύνολο $\{|H(t - \tau, u_\tau(t))w| : w \in K^c(t)\}$ είναι συμπαγές, όποτε $K^c(t) \neq \emptyset$ και επομένως $\eta \omega(\cdot)$ είναι καλώς ορισμένη και ικανοποιεί $\omega(t) > 0$ για κάθε $t \in [a, b]$. Θα δείξουμε τώρα ότι επιπλέον ισχύει το ακόλουθο

$$\inf\{\omega(t) : t \in [a, b]\} > 0. \quad (\text{B.6})$$

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $\omega(t_l) \rightarrow 0$ για συγκεκριμένη ακολουθία $t_l \rightarrow t \in [a, b]$. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν την (B.5) μπορούμε να υποθέσουμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας ισχύει ότι $K^c(t_l) \neq \emptyset$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και επομένως υπάρχει $w_l \in K^c(t_l)$ έτσι ώστε $|H(t_l - \tau, u_\tau(t_l))w_l| \rightarrow 0$. Αφού $w_l = 1$, μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι υπάρχει $w \in \mathbb{R}^n$ με $|w| = 1$ και $w_l \rightarrow w$. Άρα, λόγω συνέχειας της $H(\cdot)$ έχουμε ότι $H(t - \tau, u_\tau(t))w = 0$ και από την (B.3) ότι $w \in K(t)$. Από την άλλη, ισχύει ότι $w_l \in K^c(t)$ και από την (B.4) προκύπτει ότι $D(t_l, q_l, w_l) \geq 0$ για συγκεκριμένο $q_l \in Q(t - \tau)$. Από το τελευταίο σε συνδυασμό με την Ιδιότητα CP για την $Q(\cdot)$ και τη συνέχεια της $D(\cdot, \cdot, \cdot)$ προκύπτει ότι $\lim D(t_l, q_l, w_l) \rightarrow D(t, q, w) \geq 0$ για κάποιο $q \in Q(t - \tau)$. Επομένως, $w \in K^c(t)$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα ισχύει η (B.6). Ακολουθώντας, ορίζουμε την απεικόνιση $\bar{\omega} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ως εξής

$$\bar{\omega}(t) := \begin{cases} \frac{1}{\omega^2(t)} & \text{if } K^c(t) \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } K^c(t) = \emptyset \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Τότε, από τις (B.6) και (B.7) λαμβάνουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ έτσι ώστε

$$\sup\{\bar{\omega}(t) : t \in [a, b]\} \leq M \quad (\text{B.8})$$

Επιπλέον, για $t \in [a, b]$ ορίζουμε

$$C(t) := \sup \left\{ \bar{\omega}(t) \left(|P(t)| |A(t - \tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t))| + \frac{1}{2} |\dot{P}(t)| + |\bar{d}(t)| |P(t)| \right) : q \in Q(t - \tau) \right\}. \quad (\text{B.9})$$

Τότε, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $\phi \in C^1([a, b]; \mathbb{R}_{\geq 0})$ που ικανοποιεί την ακόλουθη ανίσωση

$$\phi(t) > C(t), \forall t \in [a, b]. \quad (\text{B.10})$$

Από τις παραπάνω κατασκευές, την υπόθεση ότι οι απεικονίσεις $d(\cdot)$ και $\bar{d}(\cdot)$ είναι a -αιτιατές στο $[a, b]$ ως προς το $\Omega(t_0; W)$ και την υπόθεση ότι $b - a < \tau$, προκύπτει ότι η

συνάρτηση $\phi(\cdot)$ είναι επίσης a -αιτιατή στο $[a, b]$ ως προς το $\Omega(t_0; W)$. Παρατηρούμε τώρα ότι η επιθυμητή (3.32) είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned} w'P(t)A(t-\tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t))w + \frac{1}{2}w'\dot{P}(t)w &\leq \phi(t)|H(t-\tau, u_\tau(t))w|^2 - \bar{d}(t)w'P(t)w, \\ \forall t \in [a, b], w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1, q \in Q(t-\tau). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Επομένως, για να δείξουμε την (3.32) αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η (B.11). Έστω $t \in [a, b]$ και $w \in K(t)$. Τότε, η επιθυμητή (B.11) είναι συνέπεια των (B.1), (B.2) και του γεγονότος ότι $\phi(t) \geq 0$. Τέλος, αν $K^c(t) \neq \emptyset$ και $w \in K^c(t)$, τότε, για να δείξουμε ότι ισχύει η (B.11) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sup \left\{ |P(t)||A(t-\tau, q, y_\tau(t), u_\tau(t))| + \frac{1}{2}|\dot{P}(t)| + |d(t)||P(t)| : q \in Q(t-\tau) \right\} \leq \phi(t)\omega^2(t)$$

το οποίο είναι συνέπεια των (B.7), (B.9) και (B.10) κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.1

Κατασκευάζουμε μια νέα ακολουθία από χρόνους $\{\bar{T}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$, η οποία εξαρτάται από την παράμετρο καθυστέρησης $\tau > 0$ και την ακολουθία $\{T_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ που εμπλέκεται στην Υπόθεση Η2 με $\bar{T}_0 = T_0 = t_0$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{T}_\nu = \infty$ και κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιείται η (3.10) με $\hat{t}_\nu \in (\bar{T}_{\nu-1}, \bar{T}_\nu)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $\tau > 0$ και ορίζουμε

$$\bar{T}_0 := T_0; \quad j_1 := \frac{T_1 - \bar{T}_0}{\tau}. \quad (\Gamma.1)$$

Συμβολίζουμε με $[\cdot]$ και $\lceil \cdot \rceil$, το κάτω και άνω ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού αντίστοιχα, δηλαδή, $[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ και $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$. Τότε $[j_1] \leq \lceil j_1 \rceil$ και λόγω της (Γ.1), συνεπάγεται ότι

$$\bar{T}_0 + \tau \cdot [j_1] \in [T_1, T_{k_1}] \quad (\Gamma.2)$$

για κάποιον ακέραιο $k_1 \in \{2, 3, \dots\}$. Ορίζουμε τώρα

$$\bar{T}_1 := \bar{T}_0 + \tau \cdot [j_1]. \quad (\Gamma.3)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (Γ.2) και (Γ.3) προκύπτει ότι $\bar{T}_1 \geq T_1$. Από το τελευταίο μαζί με τις (Γ.1) και (Γ.2) έχουμε ότι

$$(\bar{T}_0, T_1) \subset (\bar{T}_0, \bar{T}_1). \quad (\Gamma.4)$$

Επομένως, από την (Γ.4) και την Υπόθεση Η2, ικανοποιείται η (3.10) με $T_0 = \bar{T}_0$ και $T_1 = \bar{T}_1$.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως παραπάνω, ορίζουμε

$$j_2 := \frac{T_{k_1+1} - \bar{T}_1}{\tau}, \quad (\Gamma.5)$$

όπου $k_1 \in \{2, 3, \dots\}$ και επιλέχτηκε στην (Γ.2). Τότε, από την (Γ.5), έχουμε ότι

$$\bar{T}_1 + \tau \cdot [j_2] \in [T_{k_1+1}, T_{k_2}] \quad (\Gamma.6)$$

για κάποιον ακέραιο $k_2 \in \{k_1 + 2, k_1 + 3, \dots\}$. Ορίζοντας τώρα

$$\bar{T}_2 := \bar{T}_1 + \tau \cdot [j_2] \quad (\Gamma.7)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (Γ.6) και (Γ.7) προκύπτει ότι $\bar{T}_2 \geq T_{k_1+1}$ και

$$(\bar{T}_1, T_{k_1+1}) \subset (\bar{T}_1, \bar{T}_2). \quad (\Gamma.8)$$

Παρατηρούμε ξανά ότι, λόγω της Υπόθεσης Η2 και της (Γ.8), ισχύει η (3.10) με $T_1 = \bar{T}_1$ και $T_2 = \bar{T}_2$. Ορίζουμε αναδρομικά

$$j_{\nu+1} := \frac{T_{k_{\nu+1}} - \bar{T}_\nu}{\tau}, \quad \nu = 2, 3, \dots \quad (\Gamma.9)$$

όπου $k_\nu \in \{k_{\nu-1} + 2, k_{\nu-1} + 3, \dots\}$ διαλέχτηκε στο προηγούμενο βήμα. Τότε, από την (Γ.9), προκύπτει ότι

$$\bar{T}_\nu + \tau \cdot [j_{\nu+1}] \in [T_{k_{\nu+1}}, T_{k_{\nu+1}}] \quad (\Gamma.10)$$

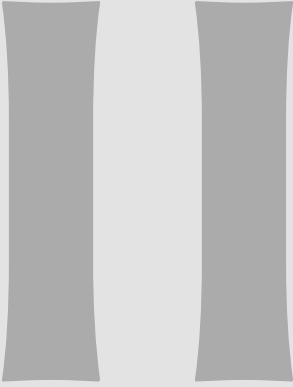
για κάποιον ακέραιο $k_{\nu+1} \in \{k_\nu + 2, k_\nu + 3, \dots\}$. Ορίζουμε τώρα

$$\bar{T}_{\nu+1} := \bar{T}_\nu + \tau \cdot [j_{\nu+1}]. \quad (\Gamma.11)$$

Από τις (Γ.9) και (Γ.10) παίρνουμε ότι

$$(\bar{T}_\nu, T_{k_{\nu+1}}) \subset (\bar{T}_\nu, \bar{T}_{\nu+1}), \quad (\Gamma.12)$$

από όπου, όπως και προηγουμένως, συνεπάγεται ότι ισχύει η (3.10). Συνεπώς, με την παραπάνω αναδρομική διαδικασία, κατασκευάσαμε μια καινούρια ακολουθία από χρόνους $\{\bar{T}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η (3.10) κι επιπλέον να ισχύει ότι $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{T}_\nu = \infty$.



Σταθεροποίηση Μη Γραμμικών Συστημάτων Ελέγχου

4 Το Πρόβλημα Σταθεροποίησης Μη Γραμμικών Συστημάτων	117
5 Ικανές Lie Αλγεβρικές Συνθήκες για Σταθεροποίηση Μη Γραμμικών Συστημάτων	135
Δ	159
Βιβλιογραφία Μέρους I	163
Βιβλιογραφία Μέρους II	169
Ευρετήριο	175

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μια αναδρομή στην ιδιότητα της ελεγχιμότητας και στο πρόβλημα της σταθεροποίησης μη γραμμικών συστημάτων. Στην Ενότητα 4.1 δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί και κάποια γνωστά αποτελέσματα για τη σταθεροποίηση συστημάτων μέσω συνεχούς στατικής ανάδρασης. Στην Ενότητα 4.2 δίνεται ο ορισμός της Συνάρτησης Ελέγχου Lyapunov και το κλασικό αποτέλεσμα Artstein-Sontag για σταθεροποίηση συστημάτων μέσω σχεδόν λείας ανάδρασης. Στην Ενότητα 4.3 παρατίθενται κάποια αποτελέσματα για τη σταθεροποίηση συστημάτων μέσω χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης καθώς και με ασυνεχείς νόμους ανάδρασης.

Περιεχόμενα Κεφαλαίου

4.1	Ελεγχιμότητα και Σταθεροποίηση	118
4.2	Συνάρτηση Ελέγχου Lyapunov	122
4.3	Χρονικά Μεταβαλλόμενοι και Ασυνεχείς Νόμοι Ανάδρασης.....	125

4.1 Ελεγχιμότητα και Σταθεροποίηση

Το πρόβλημα της συσχέτισης της ελεγχιμότητας (controllability) και του προβλήματος της σταθεροποίησης μέσω ανάδρασης (feedback stabilization) είναι ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα στη Θεωρία Ελέγχου. Στο παρόν Κεφάλαιο γίνεται μια μικρή αναδρομή στο παραπάνω πρόβλημα για μη γραμμικά συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ f(0, 0) &= 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

όπου f τοπικά Lipschitz. Η ιδιότητα της ελεγχιμότητας είναι η εξής:

Έστω $x_0 \neq x_1$ δύο σημεία της κατάστασης του (4.1). Επιθυμούμε να προσδιορίσουμε έναν έλεγχο $u = u(t)$ ώστε η αντίστοιχη λύση του (4.1) να περνά από ένα επιθυμητό σημείο $x(t_1) = x_1$, ή να το προσεγγίζει καθώς $t \rightarrow t_1 \leq +\infty$.

Το πρόβλημα της σταθεροποίησης διατυπώνεται ως εξής:

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ένα σημείο ισορροπίας του (4.1), δηλαδή $f(\bar{x}, 0) = 0$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε μια ανάδραση $u = k(x)$ ώστε το σύστημα κλειστού βρόγχου $\dot{x} = f(x, k(x))$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές στο \bar{x} .

Comparison Functions

- Μια συνάρτηση $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ είναι κλάσεως \mathcal{K} , αν είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και $\alpha(0) = 0$.
- Μια συνάρτηση $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ είναι κλάσεως \mathcal{K}_∞ , αν είναι κλάσεως \mathcal{K} και επιπλέον $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$.
- Μια συνάρτηση $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ είναι κλάσεως \mathcal{L} , αν είναι συνεχής, φθίνουσα και $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = 0$.
- Μια συνάρτηση $\beta : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ είναι κλάσεως \mathcal{KL} , αν $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}_\infty$ για κάθε t και $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(r, t) = 0$.

Ξεκινάμε δίνοντας κάποιους ορισμούς που αφορούν την ελεγχιμότητα μη γραμμικών συστημάτων (4.1) (βλέπε [82], [85], [90], [94], [123], [122]).

Ορισμός 4.1.1

Το σύστημα (4.1) λέγεται **ολικά ασυμπτωτικά ελέγξιμο (Globally Asymptotically Controllable (GAC))** στο μηδέν αν

1. (attractiveness) για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$, υπάρχει αποδεκτός έλεγχος $u(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε η λύση $x(t, x_0, u(\cdot))$ να ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ και να ικανοποιεί

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, u(\cdot)) = 0 \quad (4.2)$$

2. (stability) για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $|x_0| \leq \delta$, υπάρχει $u(t)$ ώστε να ικανοποιείται η (4.2) και επιπλέον

$$|x(t, x_0, u(\cdot))| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.3)$$

Παρατήρηση 4.1.1. (i) Στα [85], [90], [97] υπάρχει η επιπλέον συνθήκη

- (3) (bounded controls) υπάρχουν $C, M > 0$ έτσι ώστε $|x_0| < C$ και ο έλεγχος $u(t)$ μπορεί να επιλεγθεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε $|u(t)| \leq M$ σχεδόν για κάθε $t \geq 0$.

(ii) Αν η (4.2) ισχύει για κάθε x_0 σε μια περιοχή του μηδενός, τότε λέμε ότι το σύστημα είναι **τοπικά ασυμπτωτικά ελέγξιμο**.

(iii) Ο παραπάνω ορισμός λέει με λίγα λόγια ότι το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί ασυμπτωτικά στο μηδέν μέσω (ανοικτού βρόγχου) ελέγχου που εξαρτάται από την αρχική συνθήκη.

(iv) Ο ορισμός εκφράζεται ισοδύναμα μέσω συναρτήσεων σύγκρισης (comparison functions) ως εξής: Το σύστημα (4.1) είναι GAC στο μηδέν, αν υπάρχει συνάρτηση $\beta \in \mathcal{KL}$ έτσι ώστε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$, υπάρχει $u_{x_0} \in \mathbb{R}^m$ (με $\|u\|_\infty \leq \sigma(|x_0|)$, $\sigma \in \mathcal{N}$) με $|x(t, x_0, u(\cdot))| \leq \beta(|x_0|, t)$, $\forall t \geq 0$. \circ

Ορισμός 4.1.2

Το σύστημα (4.1) λέγεται **τοπικά ελέγξιμο σε μικρό χρόνο (small time locally controllable (STLC))** στο μηδέν αν για κάθε $T > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ με $|x_0| < \delta$, υπάρχει $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε

$$x(T, x_0, u(\cdot)) = 0.$$

Η διαφορά μεταξύ των ορισμών GAC και STLC είναι ότι στην πρώτη περίπτωση πλησιάζουμε το μηδέν ασυμπτωτικά ενώ στη δεύτερη οδηγούμαστε στο μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο. Υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία όσο αφορά την έννοια του STLC (βλέπε πχ [82], [85], [94], [127]) όπου δίνονται είτε ικανές είτε αναγκαίες συνθήκες για STLC χρησιμοποιώντας τη Lie άλγεβρα που παράγεται από τα διανυσματικά πεδία $\{X(x) = f(x, u) : u \in \mathbb{R}^m\}$ (με $f \in C^\infty$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^m$).

Συνεχίζουμε την ενότητα αυτή δίνοντας τον ορισμό της σταθεροποίησης του μη γραμμικού συστήματος (4.1) μέσω συνεχούς στατικής ανάδρασης.

Ορισμός 4.1.3

Το σύστημα (4.1) είναι συνεχώς σταθεροποιήσιμο στο μηδέν, αν υπάρχει συνεχής στατική ανάδραση $u = k(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k(0) = 0$ έτσι ώστε το σύστημα κλειστού βρόγχου

$$\dot{x} = f(x, k(x))$$

είναι **Ολικά Ασυμπτωτικά Ευσταθές (Globally Asymptotically Stabilizable (GAS))**. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $\beta \in \mathcal{KL}$ έτσι ώστε $|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t)$ για κάθε $t \geq 0$.

Το επόμενο αποτέλεσμα οφείλεται στον Brockett, [86] και παρέχει αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη συνεχούς στατικής ανάδρασης για την ασυμπτωτική σταθεροποίηση μη γραμμικών συστημάτων (4.1) (βλέπε επίσης [122], [94]).

Θεώρημα 4.1.1

Brockett [86]

Αν το σύστημα $\dot{x} = f(x, u)$ είναι τοπικά ασυμπτωτικά σταθεροποιήσιμο στο μηδέν μέσω συνεχούς στατικής ανάδρασης, τότε η εικόνα της f περιέχει κάποια περιοχή του μηδενός. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε y με $|y| \leq \delta$, υπάρχουν x, u έτσι ώστε $f(x, u) = y$.

Για γραμμικά συστήματα $\dot{x} = Ax + Bu$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, είναι γνωστό ότι αν το σύστημα είναι ελέγξιμο, τότε μπορεί να σταθεροποιηθεί μέσω συνεχών νόμων ανάδρασης (βλέπε [85], [94], [99]). Πιο συγκεκριμένα, για γραμμικά συστήματα, οι έννοιες ασυμπτωτικά ελέγξιμο, STLC, σταθεροποίηση μέσω συνεχούς ανάδρασης και σταθεροποίηση μέσω γραμμικής ανάδρασης είναι ισοδύναμες. Το φυσικό ερώτημα είναι αν η αντίστοιχη ισοδυναμία ισχύει για μη γραμμικά συστήματα. Άμεσο αποτέλεσμα από τους Ορισμούς 4.1.1 και 4.1.3 είναι το ακόλουθο λήμμα ([122]) από το οποίο προκύπτει ότι αν το σύστημα (4.1) είναι GAS τότε είναι και GAC:

Λήμμα 4.1.1

Θεωρούμε το σύστημα (4.1) και υποθέτουμε ότι υπάρχει $k \in C^1$, $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ώστε το σύστημα κλειστού βρόγχου $\dot{x} = f(x, k(x))$ να είναι GAS. Τότε το (4.1) είναι GAC στο μηδέν.

Στην εργασία [126], αποδείχθηκε ότι το αντίστροφο του παραπάνω λήμματος δεν ισχύει εν γένει. Συγκεκριμένα, δόθηκε παράδειγμα όπου ένα αναλυτικό μη γραμμικό σύστημα είναι ολικά ελέγξιμο αλλά δεν μπορεί να σταθεροποιηθεί ολικά μέσω συνεχών νόμων ανάδρασης. Τέλος, στην εργασία [86], ο Brockett έδειξε ότι ακόμα και για την τοπική σταθεροποίηση μέσω συνεχούς στατικής ανάδρασης η συνεπαγωγή $GAC \Rightarrow GAS$ δεν ισχύει. Συγκεκριμένα, έδωσε το ακόλουθο αντιπαράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1.1. (Αντιπαράδειγμα του Brockett, [86]) Θεωρούμε το σύστημα (nonholonomic integrator)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2 - x_2 u_1\end{aligned}\tag{4.4}$$

με $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ και $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Αποδεικνύεται στην εργασία [94] (Example 3.20) ότι το σύστημα αυτό είναι ολικά ελέγξιμο (globally controllable) και τοπικά ελέγξιμο σε μικρό χρόνο (STLC) στο μηδέν. Ωστόσο, δεν ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη του Brockett (Θεώρημα 4.1.1). Πράγματι, δεν υπάρχει

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \neq 0$$

ώστε η εξίσωση

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad x_1 u_2 - x_2 u_1 = \varepsilon$$

να έχει λύση. Επομένως δεν μπορεί να σταθεροποιηθεί μέσω συνεχών στατικών νόμων ανάδρασης. \triangleleft

Παρατήρηση 4.1.2. Σημειώνουμε ότι το σύστημα (4.4) μπορεί να σταθεροποιηθεί ολικά μέσω περιοδικών χρονικά μεταβαλλόμενων νόμων ανάδρασης κλάσεως C^∞ (βλέπε [91]).

◦

4.2 Συνάρτηση Ελέγχου Lyapunov

Ένα ισχυρό εργαλείο για τη μελέτη και τη σχεδίαση νόμων ανάδρασης για τη σταθεροποίηση μη γραμμικών συστημάτων ελέγχου είναι η **Συνάρτηση Ελέγχου Lyapunov (Control Lyapunov Function (CLF))**.

Ορισμός 4.2.1

[122] Ονομάζουμε **τοπική Συνάρτηση Ελέγχου Lyapunov (Control Lyapunov Function (CLF))** για το σύστημα (4.1) (ως προς το σημείο ισορροπίας x_0) μια συνεχή συνάρτηση $V : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ περιοχή του x_0 έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Η V είναι **proper** στο x_0 , δηλαδή το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq \varepsilon\}$$

είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathcal{O} για κάθε $\varepsilon > 0$ επαρκώς μικρό.

(ii) Η V είναι θετικά ορισμένη στο \mathcal{O} :

$$V(x_0) = 0 \text{ και } V(x) > 0, \forall x \in \mathcal{O}, x \neq x_0.$$

(iii) Για κάθε $x \neq x_0$ στο \mathcal{O} , υπάρχει χρόνος $\sigma > 0$ και έλεγχος $u \in \mathcal{U}^{[0, \sigma]}$ έτσι ώστε για την τροχιά $\xi = \psi(x, u)$ που αντιστοιχεί σε αυτό τον έλεγχο και την αρχική συνθήκη να ισχύει

$$V(\xi(t)) \leq V(x), \forall t \in [0, \sigma)$$

και

$$V(\xi(\sigma)) < V(x).$$

Η **ολική Συνάρτηση Ελέγχου Lyapunov** είναι μια συνεχή συνάρτηση V που είναι (ολικά) **proper**, δηλαδή το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq L\}$$

είναι συμπαγές για κάθε $L > 0$ και έτσι ώστε να ισχύουν οι (ii) και (iii) παραπάνω με $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 4.2.1. Η έννοια της **proper** συνάρτησης V ισοδυναμεί με την απαίτηση ότι $V^{-1}(C)$ είναι συμπαγές όταν το $C \subset \mathbb{R}$ είναι συμπαγές. Μια συνεχή συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow$

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι **proper** αν και μόνο αν το $V^{-1}(C)$ είναι φραγμένο όταν το C είναι φραγμένο ή ισοδύναμα

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty.$$

◦

Ένα πολύ ισχυρό αποτέλεσμα που συνδέει την Ασυμπτωτική Ελεγχιμότητα με τη Συνάρτηση Ελέγχου Lyapunov είναι το ακόλουθο (βλέπε [120], [122]).

Θεώρημα 4.2.1**Sontag [120]**

Αν υπάρχει τοπική (ολική) Συνάρτηση Ελέγχου Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ για το (4.1), τότε το (4.1) είναι τοπικά (ολικά) ασυμπτωτικά ελεγχίμο.

Η ιδιότητα (iii) του Ορισμού 4.2.1, δηλαδή ότι η V μειώνεται κατά μήκος των τροχιών του συστήματος, δεν είναι εύκολο να ελεγχθεί για συστήματα συνεχούς χρόνου, καθώς είναι απαραίτητη η επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Μια άμεση ικανή συνθήκη για την ισχύ της (iii) δίνεται από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.2.1

Θεωρούμε το σύστημα (4.1) και μια συνεχώς παραγωγίσιμη, θετικά ορισμένη και proper συνάρτηση $V : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ σε μια γειτονιά \mathcal{O} του x_0 , $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. Τότε, μια ικανή συνθήκη για να είναι η V CLF είναι για κάθε $x \in \mathcal{O}$, $x \neq x_0$, υπάρχει $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε

$$\nabla V(x)f(x, u) < 0. \quad (4.5)$$

Αν ικανοποιείται η (4.5) με $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$, η V είναι ολική CLF.

Τα κάτωθι αποτελέσματα περιέχονται στις εργασίες [81] και [121] και συνδέουν τη CLF και τη σταθεροποίηση μη γραμμικών συστημάτων μέσω συνεχών στατικών νόμων ανάδρασης. Θα λέμε ότι ο νόμος ανάδρασης $u = k(x)$ είναι σχεδόν συνεχής αν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Επιπλέον, έχουμε την ακόλουθη ιδιότητα:

Ιδιότητα: Μικρού Ελέγχου (small control property)

Λέμε ότι η V ικανοποιεί την **ιδιότητα μικρού ελέγχου** (small control property), αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $0 < |x| < \delta$, υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$ με $|u| < \varepsilon$ και να ικανοποιεί την (4.5).

Θεώρημα 4.2.2

Artstein [81]

Αν το σύστημα (4.1) είναι GAS μέσω σχεδόν συνεχών στατικών νόμων ανάδρασης, τότε υπάρχει C^1 CLF. Αν για το σύστημα (4.1) υπάρχει C^1 CLF, τότε μπορεί να σταθεροποιηθεί ολικά μέσω

- σχεδόν συνεχούς ανάδρασης αν το (4.1) είναι γραμμικό ως προς τον έλεγχο,
- relaxed controls (βλέπε [81], [135] για ορισμό).

Αν επιπλέον η V παραπάνω ικανοποιεί τη ιδιότητα μικρού ελέγχου, τότε μπορούμε να σταθεροποιήσουμε το σύστημα μέσω συνεχούς στατικής ανάδρασης.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή παραθέτοντας ένα αποτέλεσμα από την εργασία [121] που αφορά συστήματα γραμμικά ως προς τον έλεγχο της μορφής

$$\dot{x} = f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (\text{CA})$$

με $f_0, g_1, \dots, g_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Συγκεκριμένα, το ακόλουθο θεώρημα γενικεύει το Θεώρημα Artstein παραπάνω δίνοντας ρητά τη σχεδίαση της ανάδρασης.

Θεώρημα 4.2.3

Artstein-Sontag [121]

Υποθέτουμε ότι υπάρχει CLF $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ για το σύστημα (CA). Τότε η στατική ανάδραση $u = (u_1, \dots, u_m)' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ που ορίζεται από

$$u_i(x) := -\nabla V(x) \cdot g_i(x) \phi\left(\nabla V(x) \cdot f_0(x), \sum_{j=1}^m (\nabla V(x) \cdot g_j(x))^2\right),$$

$$\text{με } \phi(a, b) = \begin{cases} \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}, & \text{αν } b \neq 0, \\ 0, & \text{αν } b = 0, \end{cases}$$

είναι λεία στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ με $u(0) = 0$ και σταθεροποιεί ασυμπτωτικά (ολικά) το σύστημα (CA). Αν επιπλέον η V ικανοποιεί την ιδιότητα μικρού ελέγχου, τότε η u μπορεί να επιλεχθεί να είναι συνεχής στο μηδέν.

Τέλος σημειώνουμε ότι η (4.5) για συστήματα της μορφής (CA) γράφεται ισοδύναμα:

Συνθήκη Artstein-Sontag

$$\nabla V(x) \cdot g_1(x) = \dots = \nabla V(x) \cdot g_m(x) = 0, \quad x \neq 0 \implies \nabla V(x) \cdot f_0(x) < 0.$$

4.3

Χρονικά Μεταβαλλόμενοι και Ασυνεχείς Νόμοι Ανάδρασης

Εν γένει, υπάρχουν πολλά μη γραμμικά συστήματα τα οποία είναι ελέγξιμα αλλά δεν είναι σταθεροποιήσιμα μέσω συνεχούς στατικής ανάδρασης (βλέπε πχ Παράδειγμα 4.1.1). Για τη σταθεροποίηση τέτοιων συστημάτων προτάθηκαν οι εξής δύο στρατηγικές:

- i) ασυμπτωτική σταθεροποίηση μέσω συνεχούς χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης,
- ii) ασυμπτωτική σταθεροποίηση μέσω ασυνεχούς ανάδρασης.

Χρονικά Μεταβαλλόμενοι Νόμοι Ανάδρασης.

Παραθέτουμε πρώτα κάποια γνωστά αποτελέσματα που αφορούν τη σταθεροποίηση μη γραμμικών συστημάτων μέσω χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης (βλέπε [94], [93], [112]). Θεωρούμε το μη γραμμικό σύστημα (4.1) όπου $f \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R}^n)$ και \mathcal{O} ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n που περιέχει το $(0, 0)$.

Ορισμός 4.3.1

Το σύστημα (4.1) είναι **τοπικά σταθεροποιήσιμο σε μικρό χρόνο μέσω συνεχούς περιοδικής χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης** (locally stabilizable in small time by means of continuous periodic time-varying feedback) αν, για κάθε $T > 0$, υπάρχει $\varepsilon \in (0, \infty)$ και $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^m)$ έτσι ώστε

1. $u(0, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$
2. $u(x, t + T) = u(x, t), \forall t \in \mathbb{R}$
3. $(\dot{x} = f(x, u(x, t)) \text{ και } x(s) = 0) \implies (x(\tau) = 0, \forall \tau \geq s), \forall s \in \mathbb{R}$
4. $(\dot{x} = f(x, u(x, t)) \text{ και } |x(s)| \leq \varepsilon) \implies (x(\tau) = 0, \forall \tau \geq s + T), \forall s \in \mathbb{R}$

Αν το u μπορεί να επιλεγθεί ώστε να είναι κλάσεως C^∞ στο $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι το σύστημα (4.1) είναι **τοπικά σταθεροποιήσιμο σε μικρό χρόνο μέσω σχεδόν λείας περιοδικής χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης** (locally stabilizable in small time by means of almost smooth periodic time-varying feedback).

Έστω Ω μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και έστω \mathcal{F} μια οικογένεια από C^∞ διανυσματικά πεδία στο Ω . Συμβολίζουμε παρακάτω με $Lie\{\mathcal{F}\}$ τη Lie άλγεβρα που παράγεται

από τα διανυσματικά πεδία στο \mathcal{F} (βλέπε Παράρτημα Δ).

Ορισμός 4.3.2

Το σύστημα (4.1) ικανοποιεί τη **Lie Algebra Rank Condition (LARC)** στο $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ αν

$$LARC(0, 0) := \left\{ g(0) : g \in Lie \left(\frac{\partial^{|a|} f}{\partial u^a}(\cdot, 0), a \in \mathbb{N}^m \right) \right\} = \mathbb{R}^n.$$

Θεώρημα 4.3.1

[93] Υποθέτουμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι τοπικά συνεχώς reachable σε μικρό χρόνο για το σύστημα (4.1), δηλαδή το (4.1) ικανοποιεί τη LARC στο $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ και

$$n \notin \{2, 3\}.$$

Τότε το (4.1) είναι τοπικά σταθεροποιήσιμο σε μικρό χρόνο με σχεδόν λεία χρονικά μεταβαλλόμενη ανάδραση.

Παρατήρηση 4.3.1. Στην εργασία [124], αποδείχτηκε ότι ελέγξιμα μη γραμμικά συστήματα (4.1) με $n=1$ είναι πάντα σταθεροποιήσιμα μέσω συνεχούς χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης. ◦

Μια άλλη σημαντική κατηγορία γραμμικών ως προς τον έλεγχο συστημάτων είναι η ακόλουθη

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x),$$

γνωστά ως **driftless control affine systems**.

Θεώρημα 4.3.2

Υποθέτουμε ότι

$$\{h(x); h \in Lie\{f_1, \dots, f_m\}\} = \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (4.6)$$

Τότε, για κάθε $T > 0$, υπάρχει $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^m)$ ώστε

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ u(x, t + T) &= u(x, t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

και το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το σύστημα

$$\dot{x} = f(x, u(x, t)) = \sum_{i=1}^m u_i(x, t) f_i(x).$$

Παρατήρηση 4.3.2. Από το Θεώρημα Rashevski-Chow [87], η συνθήκη (4.6) παραπάνω συνεπάγεται ότι το σύστημα $\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$ είναι ολικά ελέγξιμο. ◦

Λύση Filippov.

Μία από τις πιο γνωστές έννοιες λύσης για διαφορικές εξισώσεις $\dot{x}(t) = g(x(t))$ όπου η $g(\cdot)$ είναι εν γένει ασυνεχής είναι η έννοια της λύσης **Filippov (Filippov solution)**, [95]. Μία απολύτως συνεχής συνάρτηση $x = x(t)$ είναι λύση Filippov της $\dot{x}(t) = g(x(t))$ αν ικανοποιεί το διαφορικό εγκλεισμό

$$\dot{x} \in G(x(t)) \text{ σχεδόν παντού}$$

όπου

$$G(x) := \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcap_{\mu(\Omega)=0} \overline{co} g(B(x(t), \epsilon) \setminus \Omega)$$

και co η κυρτή θήκη (convex hull), $\mu(\Omega)$ το μέτρο Lebesgue του Ω και $B(x, r)$ η ανοικτή μπάλα κέντρου x και ακτίνας r .

Επιστρέφουμε λοιπόν στο ερώτημα: “Αν ένα σύστημα είναι GAC, μπορεί να σταθεροποιηθεί μέσω (ασυνεχούς) ανάδρασης στην περίπτωση όπου θεωρήσουμε λύσεις Filippov?”. Αποδείχτηκε στα [117] και [116] ότι η Αναγκαία Συνθήκη του Brockett εξακολουθεί να ισχύει με λύσεις Filippov:

Θεώρημα 4.3.3

Θεωρούμε το σύστημα (4.1) και υποθέτουμε ότι η $f(x, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής με $f(0, 0) = 0$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι για κάθε $K \subset \mathbb{R}^m$ και $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, coK) = cof(x, K)$. Τότε, μια αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη τοπικά φραγμένης και μετρήσιμης στατικής ανάδρασης $u = k(x)$ που σταθεροποιεί το σύστημα (4.1) (με την έννοια λύσης Filippov) είναι ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\forall y \in B_\delta, \exists x \in B_\epsilon, \exists u \in \mathbb{R}^m \text{ έτσι ώστε } y = f(x, u).$$

Τα επόμενα αποτελέσματα οφείλονται στους Coron και Rosier, [116], όπου αποδεικνύουν ότι αν το σύστημα (4.1) μπορεί να σταθεροποιηθεί μέσω ασυνεχούς ανάδρασης (με

την έννοια λύσης Filippov) τότε μπορεί να σταθεροποιηθεί και μέσω συνεχών χρονικά μεταβαλλόμενων νόμων ανάδρασης. Επιπλέον, αν το σύστημα είναι γραμμικό ως προς τον έλεγχο (affine in the control), τότε μπορούμε να αποφύγουμε τη χρήση ασυνεχών νόμων ανάδρασης (με την έννοια λύσης Filippov). Συγκεκριμένα, έχουμε τους εξής ορισμούς και αποτελέσματα.

Ορισμός 4.3.3

Το σύστημα (4.1) είναι ασυμπτωτικά σταθεροποιήσιμο μέσω ασυνεχούς ανάδρασης αν υπάρχει $u \in \mathcal{L}_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ έτσι ώστε

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{|x| < \delta} |u(x)| = 0$$

το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο του $\dot{x} = f(x, u(x))$.

Θεώρημα 4.3.4

Υποθέτουμε ότι το σύστημα $\dot{x} = f(x, u)$ μπορεί να σταθεροποιηθεί ασυμπτωτικά μέσω ασυνεχούς ανάδρασης. Τότε:

1. για οποιοδήποτε $T > 0$, το σύστημα (4.1) μπορεί να σταθεροποιηθεί μέσω συνεχούς χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης περιόδου T .
2. Αν το σύστημα (4.1) είναι γραμμικό ως προς τον έλεγχο ($f(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x)$), τότε το σύστημα μπορεί να σταθεροποιηθεί ασυμπτωτικά μέσω συνεχούς στατικής ανάδρασης.

Ανάδραση με Δειγματοληψία.

Μια άλλη μέθοδος για τη σταθεροποίηση συστημάτων μέσω ασυνεχούς ανάδρασης είναι η αυτή της δειγματοληψίας (sampling/sample-and-hold).

Για δοσμένη γνησίως αύξουσα ακολουθία από χρόνους (sampling-times), υπολογίζουμε το νόμο ανάδρασης σε κάθε τέτοια χρονική στιγμή και χρησιμοποιούμε την τιμή που προκύπτει ως (σταθερό) έλεγχο εως την επόμενη χρονική στιγμή.

Θεωρούμε το γενικό μη γραμμικό σύστημα (4.1), με $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$, με f συνεχής και τοπικά Lipschitz στο x . Έχουμε τον εξής ορισμό [90]:

Ορισμός 4.3.4

Έστω $\pi = \{t_i\}_{i \geq 0}$ μια διαμέριση (sampling schedule/time) του $[0, \infty)$ με

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots,$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$$

και διάμετρο

$$d(\pi) := \sup(t_{i+1} - t_i).$$

Για δοσμένη αρχική συνθήκη $x_0 \in \mathbb{R}^n$, η π -τροχιά $x(\cdot)$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση π και στο νόμο ανάδρασης $k : \mathbb{R}^n \rightarrow U$, ορίζεται ως εξής: Για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots$ λύνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{x} = f(x(t), k(x(t_i))), \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

χρησιμοποιώντας ως αρχική συνθήκη σε κάθε $[t_i, t_{i+1}]$ -διάστημα την $x(t_i)$ (ξεκινώντας με $x(t_0) = x_0$). Τότε η π -τροχιά του $\dot{x} = f(x, k(x))$ με αρχική συνθήκη x_0 , είναι η συνάρτηση $x(\cdot)$ που παίρνουμε παραπάνω.

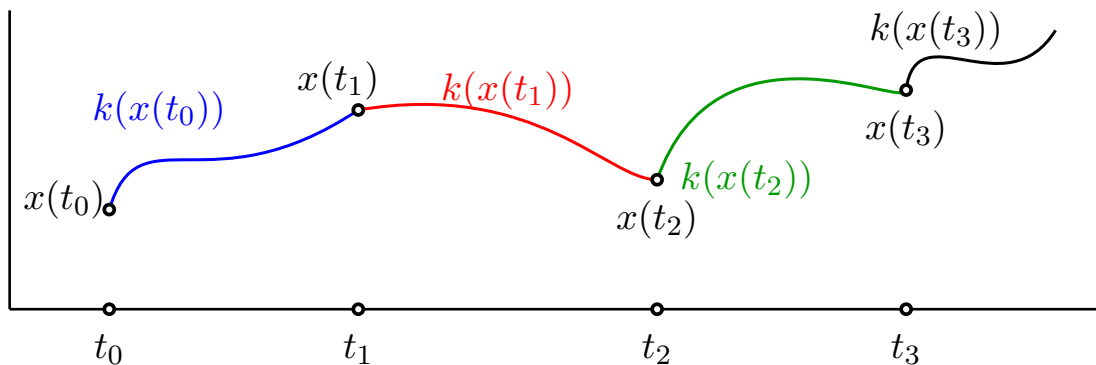
Συγκεκριμένα, στο διάστημα $[t_0, t_1]$, παίρνουμε τη λύση x της

$$\dot{x} = f(x(t), k(x_0)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Θέτουμε στη συνέχεια $x_1 := x(t_1)$ και ξεκινάμε το σύστημα από το $t = t_1$ με έλεγχο $k(x_1)$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x_1)), \quad x(t_1) = x_1, \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

και ούτω καθεξής. Η λύση x που προκύπτει από αυτή τη διαδικασία είναι η τροχιά που αντιστοιχεί σε ένα τμηματικά σταθερό έλεγχο ανοικτού βρόγχου.



Σχήμα 4.1: Sample-and-hold implementation

Ορισμός 4.3.5**[90]**

Η ανάδραση $k : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ σταθεροποιεί το σύστημα (4.1) με δειγματοληψία αν για κάθε ζευγάρι

$$0 < \varepsilon < K,$$

υπάρχουν $M = M(K) > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ και $T(\varepsilon, K) > 0$ έτσι ώστε, για κάθε διαμέριση π με $d(\pi) < \delta$ και για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη x_0 με $|x_0| \leq K$, η π -τροχιά του $\dot{x} = f(x, k(x))$ που ξεκινά από το x_0 είναι καλώς ορισμένη και ικανοποιεί

1. (uniform attractiveness) $|x(t)| \leq \varepsilon, \forall t \geq T$,
2. (overshoot boundedness) $|x(t)| \leq M(K), \forall t \geq 0$,
3. (Lyapunov Stability) $\lim_{K \rightarrow 0} M(K) = 0$.

Το ακόλουθο Θεώρημα αποδεικνύεται στην εργασία [90].

Θεώρημα 4.3.5**[90]**

Το σύστημα $\dot{x} = f(x, u)$ είναι ασυμπτωτικά ελέγξιμο αν και μόνο αν είναι σταθεροποιήσιμο μέσω στατικής ανάδρασης με δειγματοληψία.

Παρατήρηση 4.3.3. Για συνεχή ανάδραση k , η σταθεροποιησιμότητα του συστήματος (4.1) περιγράφεται ως εξής: για κάθε $0 < \varepsilon < K$, υπάρχουν $T = T(\varepsilon, K) > 0$ και $M = M(K) > 0$ έτσι ώστε για κάθε τροχιά του συστήματος κλειστού βρόγχου $\dot{x} = f(x, k(x))$ με $|x(0)| \leq K$ ικανοποιούνται οι 1, 2, 3 του Ορισμού 4.3.5. Έχουμε την εξής πρόταση

Πρόταση 4.3.1

Αν το σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο μέσω συνεχούς ανάδρασης, τότε είναι σταθεροποιήσιμο και μέσω ανάδρασης με δειγματοληψία.

◦

Παραθέτουμε τώρα κάποια από τα αποτελέσματα των εργασιών [131] και [132] που αφορούν τη σταθεροποίηση μέσω ανάδρασης με δειγματοληψία (**Sampled-Data Feedback**) για αυτόνομα μη γραμμικά συστήματα (4.1). Συγκεκριμένα, στις προαναφερθείσες εργασίες παρουσιάζεται μια ασθενέστερη έννοια για τη σταθεροποίηση συστημάτων μέσω ανάδρασης με δειγματοληψία.

Ορισμός 4.3.6

Το σύστημα (4.1) είναι **Ασθενώς Ολικά Ασυμπτωτικά Σταθεροποιήσιμο μέσω Ανάδρασης με Δειγματοληψία (Weakly Globally Asymptotically Stabilizable by Sampled-Data Feedback (SDF-WGAS))**, αν για κάθε $\tau > 0$, υπάρχουν απεικονίσεις $T : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ με

$$T(x) \leq \tau, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (4.7)$$

και $k(t, x; x_0) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε για κάθε σταθερό $(x, x_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, η απεικόνιση $k(\cdot, x; x_0) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι μετρήσιμη και τοπικά ουσιωδώς φραγμένη και έτσι ώστε για κάθε $x_0 \neq 0$ υπάρχει ακολουθία από χρόνους

$$t_1 = 0 < t_2 < t_3 < \dots < t_\nu < \dots, \quad \text{με } t_\nu \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

έτσι ώστε η τροχιά $x(\cdot)$ του συστήματος κλειστού βρόγχου

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, k(t, x(t_i); x_0)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (4.9)$$

ικανοποιεί την

$$t_{i+1} - t_i = T(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

και τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\begin{aligned} \text{Stability:} \quad \forall \varepsilon > 0 &\Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |x(0)| \leq \delta, \\ &\Rightarrow |x(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\text{Attractivity:} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n \quad (4.12)$$

Παρατήρηση 4.3.4. Η έννοια του SDF-WGAS είναι ασθενέστερη από αντίστοιχες έννοιες που έχουν υιοθετηθεί στη βιβλιογραφία (βλέπε πχ [90], [102], [109]). Πράγματι, στον παραπάνω ορισμό από τις εργασίες [131] και [132]:

1. Χρησιμοποιούνται χρονικά μεταβαλλόμενοι ελεγκτές με δειγματοληψία (στην εργασία [102] τέτοιοι ελεγκτές καλούνται *υβριδικοί*).
2. Η διαμέριση των χρόνων (4.8) εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες σε αντίθεση με τον Ορισμό 4.3.4 όπου η διαμέριση είναι εκ των προτέρων γνωστή.
3. Δεν γίνεται καμία υπόθεση σχετικά με το εύρος τιμών του αποδεκτού ελέγχου. Αντιθέτως, σε ανάλογα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται διάφορες ιδιότητες μικρού ελέγχου (βλέπε Παρατήρηση 4.1.1).

◦

Η ακόλουθη πρόταση παρέχει Lyapunov χαρακτηρισμούς του GAC (βλέπε Ορισμό 4.1.1) μέσω ενός T -sampled-data controller.

Πρόταση 4.3.2

[131], [132]

Για το σύστημα (4.1) τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. Υπάρχουν συνεχής, θετικά ορισμένη και **proper** συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, συνάρτηση $\beta \in \mathcal{K}$ και απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ έτσι ώστε για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει έλεγχος $u_x(\cdot) : [0, T(x)] \rightarrow \mathbb{R}^m$ που ικανοποιεί

$$V(x(t, 0, x; u_x)) \leq \beta(V(x)), \quad \forall t \in [0, T(x)] \quad (4.13\alpha)$$

$$V(x(T(x), 0, x; u_x)) < V(x), \quad (4.13\beta)$$

2. Υπάρχουν συναρτήσεις $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $a_1, a_2 \in \mathcal{K}_{\infty}$, με τη V εν γένει να είναι ασυνεχής στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, έτσι ώστε

$$a_1(|x|) \leq V(x) \leq a_2(|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.14)$$

καθώς και μια συνάρτηση $\beta \in \mathcal{K}$ και ένα ζευγάρι από κάτω ημι-συνεχής (lower semi-continuous (LSC)) απεικονίσεις $T : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ και $q : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ κατά τέτοιον τρόπο ώστε για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει έλεγχος $u_x(\cdot) : [0, T(x)] \rightarrow \mathbb{R}^m$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$V(x(t, 0, x; u_x)) \leq \beta(V(x)), \quad \forall t \in [0, T(x)] \quad (4.15\alpha)$$

$$V(x(T(x), 0, x; u_x)) \leq V(x) - q(V(x)), \quad (4.15\beta)$$

3. Το σύστημα (4.1) είναι GAC μέσω T -sampled data feedback για συγκεκριμένη LSC απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.
4. Το σύστημα (4.1) είναι GAC.

Θα δώσουμε τώρα κάποιες ικανές συνθήκες για GAC μέσω sampled-data controller.

Υπόθεση 4.3.1. Υπάρχει C^1 , θετικά ορισμένη και **proper** συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ και κλειστό μη-κενό υποσύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

A1 Για κάθε μη-μηδενικό $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ υπάρχει διάνυσμα $u_x \in \mathbb{R}^m$ με

$$DV(x)f(x, u_x) < 0.$$

A2 Υπάρχουν συναρτήσεις $\beta \in \mathcal{K}$ και απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in E \setminus \{0\}$ υπάρχει $\bar{u}_x(\cdot) : [0, T(x)] \rightarrow \mathbb{R}^m$ κατά τέτοιον τρόπο ώστε αν ορίσουμε

$z := x(T(x), 0, x; u_x)$, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

$$z \notin E, \quad V(z) \leq V(x)$$

$$z \in E, \quad V(z) < V(x)$$

και ταυτόχρονα

$$V(x(t, 0, x; u_x)) \leq \beta(V(x)), \quad \forall t \in [0, T(x)].$$

Πρόταση 4.3.3

[131]

- i) Αν ικανοποιούνται οι A1 και A2, τότε το σύστημα (4.1) είναι GAC (μέσω T -sampled-data controller).
- ii) Αν επιπρόσθετα στην A1, υποθέσουμε ότι για κάθε $\tau > 0$ υπάρχει απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ που ικανοποιεί την (4.7) και την υπόθεση A2, τότε το (4.1) είναι SDF-WGAS.

Θεωρούμε τώρα συστήματα γραμμικά ως προς τον έλεγχο (affine in the control):

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (4.16)$$

$$f(0) = 0. \quad (4.17)$$

Στην Ενότητα 4.2 δόθηκε η ικανή συνθήκη Artstein-Sontag για ολική ασυμπτωτική σταθεροποίηση συστημάτων (4.16) με σχεδόν λεία ανάδραση. Υιοθετούμε τον εξής συμβολισμό, $XY := DY \cdot X$ για C^1 απεικονίσεις $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Η παρακάτω πρόταση αποτελεί γενίκευση αυτού του αποτελέσματος.

Συνεπαγωγή Artstein-Sontag

$$(gV)(x) = 0, \quad x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} (fV)(x) < 0, \text{ “Συνθήκη Artstein-Sontag”,} \\ \text{ή } (fV)(x) = 0 \text{ και } ([f, g]V)(x) \neq 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

όπου $[\cdot, \cdot]$ είναι η αγκύλη Lie (Lie Bracket) και $[X, Y]\Phi = XY\Phi - YX\Phi$ για C^2 απεικονίσεις $X, Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και C^2 συνάρτηση $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Πρόταση 4.3.4

[132]

Αν ικανοποιείται η (4.18), τότε το σύστημα (4.16) είναι SDF-WGAS.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΙΚΑΝΕΣ LIE ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο παραθέτουμε τα αποτελέσματα των εργασιών [129] και [133] που αφορούν την εύρεση ικανών συνθηκών για τη δυνατότητα σταθεροποίησης μη γραμμικών συστημάτων μέσω ανάδρασης με δειγματοληψία. Το εν λόγω κεφάλαιο έχει την ακόλουθη δομή. Στην Ενότητα 5.2 δίνονται, ο ορισμός της Ημι-Ολικής Ασυμπτωτικής Σταθεροποίησης μέσω ανάδρασης με δειγματοληψία και ένας Lyapunov χαρακτηρισμός της, καθώς και Lie αλγεβρικές συνθήκες για τη σταθεροποίηση μη γραμμικών συστημάτων που είναι γραμμικά ως προς τον έλεγχο. Η Ενότητα 5.3 περιέχει τις αποδείξεις των κεντρικών αποτελεσμάτων ενώ στην Ενότητα 5.4 παρέχονται αντιπροσωπευτικά παραδείγματα με ιδιαίτερη έμφαση σε συστήματα τριών διαστάσεων γραμμικά ως προς τον έλεγχο.

Περιεχόμενα Κεφαλαίου

5.1	Εισαγωγή.....	136
5.2	Ορισμοί.....	136
5.3	Αποδείξεις.....	141
5.4	Περισσότερα Παραδείγματα.....	155

5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάζουμε τις εργασίες [129] και [133] που γενικεύουν και επεκτείνουν τα προηγούμενα αποτελέσματα των [131] και [132]. Συγκεκριμένα, η Πρόταση 5.2.1, καθορίζει ότι για γενικά μη-γραμμικά συστήματα ελέγχου

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \\ f(0, 0) &= 0\end{aligned}\tag{5.1}$$

ο Lyapunov χαρακτηρισμός του SDF-WGAS, όπως παρουσιάστηκε στην Πρόταση 4.3.2 (βλέπε επίσης [131]), συνεπάγεται **Ημι-Ολική Ασυμπτωτική Σταθεροποίηση μέσω χρονικά μεταβαλλόμενης Ανάδρασης υπό Δειγματοληψία (Semi-Global Asymptotic Stabilization by Sampled-Data Feedback (SDF-SGAS))**.

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι η Πρόταση 5.2.2, όπου παρέχονται ικανές Lie αλγεβρικές συνθήκες για τη δυνατότητα σταθεροποίησης μέσω ανάδρασης με δειγματοληψία, γραμμικών ως προς τον έλεγχο-μη γραμμικών συστημάτων

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + ug(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ f(0) &= 0\end{aligned}\tag{5.2}$$

Οι ικανές αυτές συνθήκες γενικεύουν το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.3.4 και επεκτείνουν τη γνωστή “Artstein-Sontag” ικανή συνθήκη για ασυμπτωτική σταθεροποίηση συστημάτων (5.2) μέσω σχεδόν λείας ανάδρασης.

5.2 Ορισμοί

Θεωρούμε το σύστημα (5.1) και υποθέτουμε ότι η $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι Lipschitz συνεχής. Με $x(\cdot) = x(\cdot, s, x_0, u)$ θα συμβολίζουμε την λύση του (5.1) με αρχική συνθήκη $x(s, s, x_0, u) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο μετρήσιμο και ουσιωδώς φραγμένο έλεγχο $u : [s, T_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου $T_{\max} = T_{\max}(s, x_0, u)$ είναι το αντίστοιχο μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης της λύσης.

Δίνουμε τώρα, τον Lyapunov χαρακτηρισμό του SDF-SGAS ο οποίος αποτελεί γενίκευση της έννοιας της **Συνάρτησης Ελέγχου Lyapunov (Control Lyapunov Function (CLF))** (βλέπε Ορισμό 5.7.1 [122]).

Υπόθεση 1

Υπάρχει θετικά ορισμένη και C^0 συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ και συνάρτηση $a \in K$ έτσι ώστε για κάθε $\xi > 0$ και $x_0 \neq 0$ υπάρχει σταθερά $\varepsilon = \varepsilon(x_0) \in (0, \xi]$ και μετρήσιμος και τοπικά ουσιωδώς φραγμένος έλεγχος $u(\cdot, x_0) : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$ που ικανοποιεί

$$V(x(\varepsilon, 0, x_0, u(\cdot, x_0))) < V(x_0); \quad (5.3\alpha)$$

$$V(x(s, 0, x_0, u(\cdot, x_0))) \leq a(V(x_0)), \quad \forall s \in [0, \varepsilon] \quad (5.3\beta)$$

Ορισμός 5.2.1

Λέμε ότι το σύστημα (5.1) είναι **Ημι-Ολικά Ασυμπτωτικά Σταθεροποιήσιμο μέσω Ανάδρασης με Δειγματοληψία (Semi-Globally Asymptotically Stabilizable by Sampled-Data Feedback (SDF-SGAS))**, εάν για κάθε $R > 0$ και για οποιαδήποτε δοσμένη διαμέριση χρόνων

$$T_1 := 0 < T_2 < T_3 < \dots < T_\nu < \dots \quad \text{με } T_\nu \rightarrow \infty \quad (5.4)$$

υπάρχει περιοχή Π του μηδενός με $B[0, R] := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\} \subset \Pi$ και μια απεικόνιση $k : \mathbb{R}^+ \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε για $x \in \Pi$, η απεικόνιση $k(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι μετρήσιμη και τοπικά ουσιωδώς φραγμένη και η τροχιά $x(\cdot)$ του συστήματος κλειστού βρόγχου (sampled-data closed loop system)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, k(t, x(T_i))), \quad t \in [T_i, T_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots \\ x(0) &\in \Pi \end{aligned} \quad (5.5)$$

ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} \text{Stability:} \quad \forall \varepsilon > 0 &\Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : x(0) \in \Pi, \\ |x(0)| \leq \delta &\Rightarrow |x(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\text{Attractivity:} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \forall x(0) \in \Pi \quad (5.7)$$

Παρατήρηση 5.2.1. (i) Η έννοια του SDF-SGAS είναι πιο ισχυρή από την έννοια της ημι-ολικής ασυμπτωτικής σταθεροποίησης μέσω ανάδρασης με δειγματοληψία που έχει υιοθετηθεί στη βιβλιογραφία, διότι η διαμέριση των χρόνων στην (5.4) είναι αυθαίρετη. Επιπλέον, αναφέρουμε ότι ένα επιπλέον πλεονέκτημα του SDF-SGAS είναι ότι η διαμέριση των χρόνων στην (5.4) καθώς και ο αντίστοιχος έλεγχος στην (5.5) είναι ανεξάρτητοι της αρχικής

συνθήκης. Αυτή είναι και μια ουσιαστική διαφορά των SDF-SGAS και SDF-WGAS, όπου στο τελευταίο, η διαμέριση των χρόνων και ο αντίστοιχος έλεγχος εξαρτώνται από την αρχική συνθήκη (βλέπε Ορισμό 4.3.6). ◦

Αξιοποιώντας τώρα τον Ορισμό 5.2.1, και συγκεκριμένα την απαίτηση ότι ικανοποιούνται οι (5.6) και (5.7) για αρχικές τιμές $x(0)$ που βρίσκονται σε ένα συμπαγές σύνολο, λαμβάνουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.2.1

[129], [133]

Υπό την Υπόθεση 1, το σύστημα (5.1) είναι SDF-SGAS.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια το κεντρικό αποτέλεσμα, το οποίο παρέχει ικανές Lie Αλγεβρικές Συνθήκες για SDF-SGAS(WGAS) για μη γραμμικά συστήματα, γραμμικά ως προς τον έλεγχο (affine in the control) (5.2). Υποθέτουμε ότι τα δυναμικά του (5.2), f, g είναι λεία (C^∞) και έστω $Lie\{f, g\}$, η Lie άλγεβρα που παράγεται από τα διανυσματικά πεδία $\{f, g\}$. Ορίζουμε τώρα

$$L_1 := span\{f, g\}$$

$$L_{i+1} := span\{[X, Y], X \in L_i, Y \in L_1\}, i = 1, 2, \dots$$

και για οποιοδήποτε μη-μηδενικό $\Delta \in Lie\{f, g\}$:

$$order_{\{f, g\}}\Delta \begin{cases} := 1, \text{ αν } \Delta \in L_1 \setminus \{0\} \\ := k > 1, \text{ αν } \Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \text{ με } \Delta_1 \in L_k \setminus \{0\} \\ \text{ και } \Delta_2 \in span\{\cup_{i=1}^{k-1} L_i\} \end{cases} \quad (5.8)$$

Από την Πρόταση 5.2.1, την Campbell-Baker-Hausdorff (CBH) formula και επεκτείνοντας την απόδειξη της Πρότασης 4.3.4 λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 5.2.2

[129], [133]

Για το σύστημα (5.2) υποθέτουμε ότι υπάρχει λεία, θετικά ορισμένη και **proper** συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, έτσι ώστε για κάθε $x \neq 0$, είτε $(gV)(x) \neq 0$, ή ικανοποιείται ένα από τα επόμενα: Είτε

$$(gV)(x) = 0 \Rightarrow (fV)(x) < 0 \quad (5.9)$$

είτε υπάρχει ακέραιος $N = N(x) \geq 1$ έτσι ώστε

$$(gV)(x) = 0, (f^i V)(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.10\alpha)$$

$$(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k V)(x) = 0$$

$$\forall \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k \in Lie\{f, g\} \setminus \{g\} \quad (5.10\beta)$$

$$\text{με } \sum_{p=1}^k \text{order}_{\{f, g\}} \Delta_p \leq N$$

όπου $(f^i V)(x) := f(f^{i-1} V)(x)$, $i = 2, 3, \dots$, $(f^1 V)(x) := (fV)(x)$ και κατά τέτοιον τρόπο ώστε να ικανοποιείται μία από τις επόμενες ιδιότητες:

$$(P1) \quad (f^{N+1} V)(x) < 0 \quad (5.11)$$

(P2) N είναι περιττός και

$$([\dots \underbrace{[[f, g], g], \dots, g], g] V)(x) \neq 0 \quad (5.12)$$

(P3) N είναι άρτιος και

$$([\dots \underbrace{[[f, g], g], \dots, g], g] V)(x) < 0 \quad (5.13)$$

(P4) N είναι αυθαίρετος ακέραιος με

$$(f^{N+1} V)(x) = 0, \quad (5.14\alpha)$$

$$([\dots \underbrace{[[g, f], f], \dots, f], f] V)(x) \neq 0 \quad (5.14\beta)$$

Τότε, το σύστημα (5.2) ικανοποιεί την Υπόθεση 1, και επομένως, είναι SDF-SGAS (SDF-WGAS).

Παρατήρηση 5.2.2. (i) Επισημαίνουμε ότι, η έννοια της Συνάρτησης Ελέγχου Lyapunov (CLF) στην Υπόθεση 1, μαζί με το αποτέλεσμα της Πρότασης 5.2.1, παίζουν σημαντικό ρόλο στην εξαγωγή της ικανής Lie συνθήκης της Πρότασης 5.2.2. Επίσης, η υπόθεση της Πρότασης 5.2.2 εγγυάται την εγκυρότητα της Υπόθεσης 1 για το σύστημα (5.2), αλλά εν γένει δεν συνεπάγεται ότι η V στις (5.9)-(5.14) είναι Συνάρτηση Ελέγχου Lyapunov (CLF), σύμφωνα με τον καθιερωμένο στη βιβλιογραφία ορισμό.

(ii) Για τη συγκεκριμένη περίπτωση όπου $N = 1$, η προϋπόθεση (5.10α) είναι ισοδύναμη με $(gV)(x) = 0$ και $(fV)(x) = 0$, ενώ η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την (5.10β) και τέλος η (5.12) είναι ισοδύναμη με $([f, g]V)(x) \neq 0$. Προκύπτει ότι, σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.2, υπό την (4.18) είναι SDF-SGAS και επομένως SDF-WGAS.

(iii) Η Πρόταση 5.2.2 πληρούται με ασθενέστερες υποθέσεις για τα f , g και V . Συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι $\bar{N} := \sup\{N = N(x), x \neq 0\} < +\infty$, όπου $N = N(x)$ είναι ο ακέραιος που εμπλέκεται στις (5.10)-(5.14), τότε η Πρόταση 5.2.2 ικανοποιείται υπό τις υποθέσεις ότι $f, g, V \in C^k$ για συγκεκριμένο ακέραιο $k > \bar{N}$. Τέλος, αναφέρουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να επεκταθεί σε multi-input affine in the control συστήματα και για λόγους απλότητας μόνο η single-input περίπτωση θεωρείται εδώ. \circ

Πόρισμα 5.2.1

[129]

Θεωρούμε το τρισδιάστατο σύστημα (5.2) και υποθέτουμε ότι:

$$(I) \quad \text{span}\{g(x), [f, g](x), [f, [f, g]](x)\} = \mathbb{R}^3, \forall x \neq 0 \quad (5.15)$$

(II) Υπάρχει λεία, θετικά ορισμένη και **proper** συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ έτσι ώστε

$$DV(x) \neq 0, \forall x \neq 0 \quad (5.16)$$

κατά τέτοιο τρόπο ώστε, είτε ικανοποιείται η (5.9), είτε

$$(gV)(x) = 0 \Rightarrow (f^i V)(x) = 0, \forall x \neq 0, i = 1, 2, 3 \quad (5.17)$$

Τότε το τρισδιάστατο σύστημα (5.2) είναι SDF-SGAS.

Μια εφαρμογή της Πρότασης 5.2.2 αφορά τη σταθεροποίηση μέσω ανάδρασης με δειγματοληψία του τρισδιάστατου συστήματος:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_1, x_2, x_3)x_3^L, \\ \dot{x}_2 &= b(x_1, x_2, x_3)x_3, \\ \dot{x}_3 &= u, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (5.18)$$

όπου

$$L \geq 3 \text{ είναι περιττός ακέραιος} \quad (5.19)$$

και οι απεικονίσεις $a, b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λείες (C^∞) και ικανοποιούν

$$a(x), b(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (5.20)$$

Το σύστημα αυτό, δεν ικανοποιεί τη γνωστή Αναγκαία Συνθήκη του Brockett για σταθεροποίηση μέσω συνεχούς ανάδρασης (smooth static feedback stabilization). Πράγματι, η απεικόνιση $f(x, u) = (x_3^L, x_3, u)$, δεν μπορεί να πάρει την τιμή $(\varepsilon, 0, 0)$ για κάθε $\varepsilon \neq 0$. Επιπλέον, για $a(\cdot) = b(\cdot) = 1$, αποδείχτηκε στην εργασία [100] ότι το σύστημα (5.18) είναι τοπικά ελέγξιμο σε μικρό χρόνο (*small time locally controllable*) και τέλος, στην εργασία [118]

δόθηκε ο εξής ισχυρισμός που αποδεικνύει ότι το σύστημα (5.18) είναι τοπικά ασυμπτωτικά σταθεροποιήσιμο μέσω λείας περιοδικής ανάδρασης (*locally asymptotically stabilizable by means of a smooth time-varying periodic feedback*).

Το σύστημα (5.18), με $a(\cdot) = b(\cdot) = 1$, είναι τοπικά ασυμπτωτικά σταθεροποιήσιμο για οποιοδήποτε L που ικανοποιεί την (5.19), με την εξής λεία περιοδική ανάδραση

$$u(x, t) = -x_1 - x_2 - (\sin t)x_3 + (\cos 2t - 2 \sin 2t)x_3^L.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.2.2, παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:

Πόρισμα 5.2.2

[129]

Υπό τις υποθέσεις (5.19) και (5.20), το σύστημα (5.18) είναι SDF-SGAS.

5.3 Αποδείξεις

Απόδειξη της Πρότασης 5.2.1. Θεωρούμε το ζευγάρι από σταθερές R, ρ με $R > \rho \geq 0$ και ορίζουμε $S[\rho, R] := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho \leq V(x) < R\}$. Χρησιμοποιώντας τις (5.3α), (5.3β) και με παρόμοια επιχειρήματα όπως αυτά στην απόδειξη της Πρότασης 1 στην εργασία [131], προκύπτει ότι για οποιοδήποτε $\xi > 0$, υπάρχει $\sigma \in (0, \xi]$ έτσι ώστε για κάθε $\varepsilon \in (0, \sigma]$, μπορούμε να βρούμε μια σταθερά $L = L(\rho, R) > 0$ κατά τέτοιον τρόπο ώστε για κάθε $t \geq 0$ και $x_0 \in S[\rho, R]$ υπάρχει έλεγχος $u(\cdot, x_0)$ (όπως αυτός προσδιορίζεται στην (5.3) με ε όπως παραπάνω) έτσι ώστε, αν ορίσουμε $u_t(s, x_0) := u(s - t, x_0)$, $s \in [t, t + \varepsilon]$, η τροχιά $x(\cdot, \cdot, x_0, u_t(\cdot, x_0))$ του συστήματος (5.1) με $x(t, t, x_0, u_t(\cdot, x_0)) = x_0$ ικανοποιεί:

$$V(x(t + \varepsilon, t, x_0, u_t(\cdot, x_0))) \leq V(x_0) - L; \quad (5.21\alpha)$$

$$V(x(s, t, x_0, u_t(\cdot, x_0))) \leq 2a(V(x_0)), \forall s \in [t, t + \varepsilon] \quad (5.21\beta)$$

Θεωρούμε αυθαίρετο $R > 0$ και έστω μια σταθερά $\bar{R} > 0$ έτσι ώστε $B[0, R] \subset S[0, \bar{R}]$. Θεωρούμε επίσης μια διαμέριση των σταθερών $\{R_n, n = 1, 2, \dots\}$ με

$$R_1 = \bar{R}, 0 < R_{n+1} < R_n, n = 1, 2, \dots \text{ με } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0 \quad (5.22)$$

Έστω τώρα, $\{T_\nu, \nu = 1, 2, \dots\}$ μια δοσμένη διαμέριση χρόνων που ικανοποιούν την (5.4). Για κάθε $i = 1, 2, \dots$ και σταθερές $\varepsilon_i > 0, i = 1, 2, \dots$ θεωρούμε τη διαμέριση χρόνων:

$$P_i := \{t_{i,1} := 0, t_{i,2}, t_{i,3}, \dots\} \text{ με } \lim_{p \rightarrow \infty} t_{i,p} = \infty, i = 1, 2, \dots \quad (5.23)$$

που ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

$$0 < t_{i,p} < t_{i,p+1}; \quad (5.24\alpha)$$

$$\{T_\nu, \nu = 1, 2, \dots\} \subset P_i \subset P_{i+1}; \quad (5.24\beta)$$

$$\varepsilon_i \geq t_{i,p+1} - t_{i,p} > 0, \quad \forall i, p \in \mathbb{N} \quad (5.24\gamma)$$

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $u_{i,j}(\cdot, x_0) := u_{t_{i,j}}(\cdot, x_0)$. Από τις (5.21α) και (5.21β) με $\rho = R_{i+1}$ και $R = R_i$, $i = 1, 2, \dots$, μπορούμε να βρούμε μια σταθερά $L_i > 0$, μια διαμέριση χρόνων και επαρκώς μικρή σταθερά $\varepsilon_i > 0$ έτσι ώστε να ισχύει η (5.24) και ταυτόχρονα για $x_0 \in S[R_{i+1}, R_i]$ και οποιοδήποτε ζευγάρι ακεραίων $(i, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε κάποιον έλεγχο $u_{i,p}(\cdot; x_0) : [t_{i,p}, t_{i,p} + \varepsilon_i] \rightarrow \mathbb{R}^m$ που να ικανοποιεί:

$$V(x(t_{i,p+1}, t_{i,p}, x_0, u_{i,p}(\cdot, x_0))) \leq V(x_0) - L_i; \quad (5.25\alpha)$$

$$V(x(s, t_{i,p}, x_0, u_{i,p}(\cdot, x_0))) \leq 2a(V(x_0)), \forall s \in [t_{i,p}, t_{i,p+1}] \quad (5.25\beta)$$

Η προηγούμενη ανάλυση εγγυάται ότι, για δοσμένα $\{T_\nu, \nu = 1, 2, \dots\}$, μπορούμε να προσδιορίσουμε μια διαμέριση χρόνων (5.23) κατά τέτοιον τρόπο ώστε να ισχύουν οι (5.24α), (5.24β) και ταυτόχρονα να πληρούται η (5.25), υπό την προϋπόθεση ότι $x_0 \in S[R_{i+1}, R_i]$. Για κάθε αρχική συνθήκη $x(0) \in \Pi := S[0, R_1]$ θεωρούμε την απεικόνιση $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t, t_{i,p}, x(t_{i,p}), u_{i,p}(\cdot, x_0)) \\ \forall t \in [t_{i,p}, t_{i,p+1}), \quad x(t_{i,p}) &\in S[R_{i+1}, R_i], \quad i, p \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (5.26\alpha)$$

όπου η $x(\cdot, s, z, u)$ ικανοποιεί:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad t \geq s, \quad x(s, s, z, u) = z \quad (5.26\beta)$$

Άμεση συνέπεια των (5.23), (5.24α), (5.25) και (5.26) είναι ο επόμενος ισχυρισμός:

Ισχυρισμός 1

Η απεικόνιση $x(\cdot)$ όπως προσδιορίζεται από την (5.26) είναι καλώς ορισμένη και ικανοποιεί:

$$V(x(t_{i,p+1})) \leq V(x(t_{i,p})) - L_i; \quad (5.27\alpha)$$

$$V(x(s)) \leq 2a(V(x(t_{i,p}))), \forall s \in [t_{i,p}, t_{i,p+1}], \quad i, p \in \mathbb{N} \quad (5.27\beta)$$

υπό την προϋπόθεση ότι $x(t_{i,p}) \in S[R_{i+1}, R_i]$

και ως συνέπεια της (5.27α) παίρνουμε:

Ισχυρισμός 2

$$\begin{aligned}
V(x(t_k)) &\leq V(x(t_1)) - (k-1) \min\{L_j, j = \nu, \nu+1, \dots, m\}, \\
\forall k, m, \nu \in \mathbb{N}; m > \nu, t_i \in P_m, i = 1, 2, \dots, k: t_1 < t_2 < \dots < t_k \\
\text{υπό την προϋπόθεση ότι } x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k) &\in S[R_{m+1}, R_\nu)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

και

$$V(x(t_2)) \leq V(x(t_1)), \forall t_2 > t_1; t_2, t_1 \in P_\infty := \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i, x(t_1) \in \Pi \tag{5.29}$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (5.24β), (5.27β) και (5.29), προκύπτει ότι:

Ισχυρισμός 3

Για οποιοδήποτε $\tau \in P_\infty$ με $x(\tau) \in \Pi$, υπάρχει μια ακολουθία $\{t_k, k = 1, 2, \dots\}$ με $t_k \in P_\infty$ και $t_{k+1} > t_k > \tau$, $k = 2, 3, \dots$, $t_1 := \tau$ έτσι ώστε $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ και

$$V(x(s)) \leq 2a(V(x(t_k))), \forall s \in [t_k, t_{k+1}) \tag{5.30}$$

η οποία λόγω της (5.29) συνεπάγεται την:

$$V(x(s)) \leq 2a(V(x(t_1))), \forall s \geq t_1 \tag{5.31}$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $x(\cdot)$ ικανοποιεί τις (5.6) και (5.7). Εφόσον η V είναι θετικά ορισμένη και **proper**, προκειμένου να αποδείξουμε την (5.7), αρκεί να δείξουμε ότι για αρχικό μη μηδενικό $x(0) \in \Pi (= S[0, R_1])$ και επαρκώς μικρό $\mu > 0$ υπάρχει χρόνος $\tau \in P_\infty$ έτσι ώστε

$$V(x(t)) \leq \mu, \forall t \geq \tau \tag{5.32}$$

Έστω $\theta, \mu > 0$ με $2a(\theta) < \mu$; $\theta \leq R_1$ και έστω $m \in \mathbb{N}$ με

$$R_{m+1} \leq \theta < R_m \tag{5.33}$$

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $\bar{p} \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $t_{m, \bar{p}} \in P_m$ και

$$V(x(t_{m, \bar{p}})) \leq \theta \tag{5.34}$$

Πράγματι, στην αντίθετη περίπτωση θα είχαμε $\{x(t_{m, p}) : p = 1, 2, \dots\} \cap S[0, R_{m+1}) = \emptyset$ και εφόσον $t_{m, p} \in P_m$, παίρνουμε από τις (5.28) και (5.33) ότι $R_{m+1} < V(x(t_{m, p})) \leq$

$V(x(0)) - (p - 1) \min\{L_\nu, \nu = 1, \dots, m\}$, $\forall p = 1, 2, \dots$, το οποίο είναι άτοπο, επομένως, ικανοποιείται η (5.34). Το τελευταίο, σε συνδυασμό με την (5.30) και τον ορισμό των θ και μ , συνεπάγεται ότι $2a(V(x(t_{m,\bar{p}}))) \leq 2a(\theta) < \mu$. Τότε, η προηγούμενη ανίσωση μαζί με την (5.31), εγγυάται ότι για δοσμένο $x(0) \in \Pi$ και επαρκώς μικρό $\mu > 0$ υπάρχει χρόνος $\tau \in P_\infty$ έτσι ώστε η απεικόνιση $x(\cdot)$ ικανοποιεί την $V(x(t)) \leq 2a(V(x(\tau))) < \mu$ για κάθε $t \geq \tau$, από το οποίο συνεπάγεται η (5.7). Ομοίως, χρησιμοποιώντας την (5.31) με $t_1 = 0$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει η (5.6) για την απεικόνιση $x(\cdot)$. Είμαστε σε θέση τώρα να δείξουμε ότι υπάρχει απεικόνιση $k : \mathbb{R}^+ \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε η τροχιά του συστήματος κλειστού βρόγχου με δειγματοληψία (5.5) ικανοποιεί τις (5.6) και (5.7). Πράγματι, λόγω του πρώτου εγκλεισμού στην (5.24β), για κάθε δοσμένο T_i και για διάνυσμα $z \in \Pi$ υπάρχουν χρόνοι $t_{i_k, p_k} \in P_\infty$, $k = 1, 2, \dots, \nu$ και είσοδοι $\omega_k : [t_{i_k, p_k}, t_{i_{k+1}, p_{k+1}}) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k = 1, 2, \dots, \nu - 1$ έτσι ώστε

$$\left. \begin{aligned} t_{i_k, p_k} &< t_{i_{k+1}, p_{k+1}}; i_k \leq i_{k+1}; \\ i_k = i_{k+1} &\Rightarrow p_{k+1} = p_k + 1; \\ t_{i_1, p_1} &:= T_i, \quad t_{i_\nu, p_\nu} := T_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (5.35\alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &:= z; \quad \omega_1(t) := u_{i_1, p_1}(t, x_1), \quad t \in [t_{i_1, p_1}, t_{i_2, p_2}] \\ x_2 &:= x(t_{i_2, p_2}, t_{i_1, p_1}, x_1, \omega_1); \quad \omega_2(t) := u_{i_2, p_2}(t, x_2), \quad t \in [t_{i_2, p_2}, t_{i_3, p_3}] \\ x_3 &:= x(t_{i_3, p_3}, t_{i_2, p_2}, x_2, \omega_2); \quad \omega_3(t) := u_{i_3, p_3}(t, x_3), \quad t \in [t_{i_3, p_3}, t_{i_4, p_4}] \\ &\vdots \\ x_{\nu-1} &:= x(t_{i_{\nu-1}, p_{\nu-1}}, t_{i_{\nu-2}, p_{\nu-2}}, x_{\nu-2}, \omega_{\nu-2}); \\ \omega_{\nu-1}(t) &:= u_{i_{\nu-1}, p_{\nu-1}}(t, x_{\nu-1}), \quad t \in [t_{i_{\nu-1}, p_{\nu-1}}, t_{i_\nu, p_\nu}] \end{aligned} \right\} \quad (5.35\beta)$$

Τότε, αν ορίσουμε:

$$\begin{aligned} \phi_i(t, z) &:= \omega_k(t), \quad t \in [t_{i_k, p_k}, t_{i_{k+1}, p_{k+1}}), \quad z \in \Pi, \\ k &= 1, 2, \dots, \nu - 1, \quad t_{i_1, p_1} = T_i, \quad t_{i_\nu, p_\nu} = T_{i+1} \end{aligned} \quad (5.36\alpha)$$

$$k(t, z) := \phi_i(t, z), \quad t \in [T_i, T_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, \quad z \in \Pi \quad (5.36\beta)$$

η απεικόνιση $x(\cdot)$ όπως ορίστηκε στην (5.26) συμπίπτει με τη λύση του συστήματος κλειστού βρόγχου (5.5) με $k : \mathbb{R}^+ \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπως ορίστηκε από τις (5.35) και (5.36), υπό την προϋπόθεση ότι οι αρχικές τους τιμές στο $t = 0$ είναι ίδιες. Τέλος, προκύπτει ότι, σύμφωνα με την ανάλυση για την ευστάθεια του $x(\cdot)$, ικανοποιούνται οι (5.6) και (5.7) για την τροχιά του συστήματος (5.5) με $k : \mathbb{R}^+ \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπως ορίστηκε παραπάνω. \square

Απόδειξη της Πρότασης 5.2.2. Έστω $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}^n$ και ας υποθέσουμε πρώτα ότι, είτε $(gV)(x_0) \neq 0$, είτε πληρούται η (5.9) με $x = x_0$, δηλαδή, $(gV)(x_0) = 0$ και $(fV)(x_0) < 0$. Τότε, και στις δύο περιπτώσεις παραπάνω, υπάρχει σταθερή είσοδος u έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (5.3α) και (5.3β) της Υπόθεσης 1. Συγκεκριμένα, για κάθε επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$ έχουμε:

$$V(x(s, 0, x_0, u)) < V(x_0), \quad \forall s \in (0, \varepsilon] \quad (5.37)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει ακέραιος $N = N(x_0) \geq 1$ που ικανοποιεί την (5.10), καθώς και μια από τις ιδιότητες (P1), (P2), (P3), (P4) με $x = x_0$. Προκειμένου να καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα, ορίζουμε:

$$X := f + u_1g, Y := f + u_2g. \quad (5.38)$$

Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, γράφουμε $X_t(z)$ και $Y_t(z)$ τις τροχιές των συστημάτων $\dot{x} = X(x)$ και $\dot{y} = Y(y)$, αντίστοιχα, που ξεκινούν τη χρονική στιγμή $t = 0$ από κάποιο $z \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον, για οποιαδήποτε σταθερά $\rho > 0$ ορίζουμε:

$$R(t) := (X_{\rho t} \circ Y_t)(x_0), t \geq 0, R(0) = x_0 \quad (5.39)$$

$$m(t) := V(R(t)), t \geq 0 \quad (5.40)$$

και συμβολίζουμε στη συνέχεια με $\overset{(\nu)}{m}(\cdot)$, $\nu = 1, 2, \dots$ την ν -χρονική παράγωγο. Θα δείξουμε ότι, υπό τις προηγούμενες υποθέσεις για τον ακέραιο $N = N(x_0)$, υπάρχει σταθερά $\rho = \rho(x_0) > 0$ και ένα ζευγάρι από σταθερές εισόδους u_1 και u_2 έτσι ώστε $\overset{(n)}{m}(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots, N$ και $\overset{(N+1)}{m}(0) < 0$. Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι $m(t) < m(0) = V(x_0)$ για κάθε $t > 0$ κοντά στο μηδέν. Η προηγούμενη ανίσωση, μαζί με τις (5.39) και (5.40), θα μας οδηγήσει τελικά στην εγκυρότητα των (5.3α) και (5.3β), όπου σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.1 μας εγγυάται ότι το σύστημα (5.2) είναι SDF-SGAS. Στη συνέχεια, θα εκφράσουμε τις χρονικές παραγωγούς $\overset{(\nu)}{m}(0)$, $\nu = 1, 2, \dots$ της απεικόνισης $m(\cdot)$, ως προς όρους των στοιχείων της Lie άλγεβρας των $\{f, g\}$ και της συνάρτησης V υπολογισμένα στο x_0 . Εφαρμόζουμε τώρα την CBH formula στο δεξί μέρος της (5.39). Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= \rho X(R(t)) + (DX_{\rho t}Y) \circ X_{-\rho t}(R(t)) \\ &= \rho X(R(t)) + Y(R(t)) + \rho t[Y, X](R(t)) \\ &\quad + \frac{\rho^2 t^2}{2!} [[Y, X], X](R(t)) + \dots \\ &\quad + \frac{\rho^k t^k}{k!} [\dots \underbrace{[[Y, X], X], \dots, X}_k](R(t)) + O(t^k) \end{aligned} \quad (5.41)$$

όπου $\lim_{t \rightarrow 0^+} (O(t)/t) = 0$. Έστω

$$\begin{aligned} A_0 &:= \rho X + Y, \\ A_\nu &:= [\dots \underbrace{[[Y, X], X], \dots, X}_\nu], \nu = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.42)$$

Παρατηρούμε ότι, εφόσον $A_\nu \in Lie\{X, Y\}$, μπορούμε να ορίσουμε, σύμφωνα με την (5.8), την τάξη(order) του κάθε A_ν ως προς τη Lie άλγεβρα των $\{X, Y\}$. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση μας, έχουμε

$$order_{\{X, Y\}} A_\nu = \nu + 1, \forall \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (5.43)$$

Από τα παραπάνω, η (5.41) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\dot{R}(t) = (A_0 + \rho t A_1 + \frac{1}{2!} \rho^2 t^2 A_2 + \dots + \frac{1}{k!} \rho^k t^k A_k)(R(t)) + O(t^k) \quad (5.44)$$

και επομένως, επικαλούμενοι την (5.40), προκύπτει ότι για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\overset{(1)}{m}(t) = \sum_{i=0}^k \frac{\rho^i t^i}{i!} (A_i V)(R(t)) + O(t^k) \quad (5.45)$$

Δεδομένου ότι έχουμε υποθέσει ότι $(fV)(x_0) = (gV)(x_0) = 0$, συνεπάγεται από τις (5.38), (5.42) και (5.45) ότι

$$\overset{(1)}{m}(0) = 0 \quad (5.46)$$

Έτσι, από τις (5.44) και (5.45) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{m}(t) &= \sum_{i=0}^k \frac{\rho^i t^i}{i!} D(A_i V)(R(t)) \dot{R}(t) + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\rho^i t^{i-1}}{(i-1)!} (A_i V)(R(t)) + O(t^{k-1}) \\ &\in (A_0^2 V)(R(t)) + t \rho \operatorname{span} \{A_1 A_0 V, A_0 A_1 V\} (R(t)) \\ &\quad + t^2 \rho^2 \operatorname{span} \{A_2 A_0 V, A_1^2 V, A_0 A_2 V\} (R(t)) \\ &\quad + t^3 \rho^3 \operatorname{span} \{A_0 A_3 V, A_2 A_1 V, A_1 A_2 V, A_3 A_0 V\} (R(t)) \\ &\quad + \dots + t^k \rho^k \operatorname{span} \{A_k A_0 V, A_{k-1} A_1 V, \dots, A_0 A_k V\} (R(t)) \\ &\quad + \rho (A_1 V)(R(t)) \\ &\quad + \operatorname{span} \{\rho^2 t A_2 V, \rho^3 t^2 A_3 V, \dots, \rho^k t^{k-1} A_k V, \rho^{k+1} t^k A_{k+1} V\} (R(t)) + O(t^{k-1}) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε ζευγάρι από ακέραιους n, k με $2 \leq n \leq k$, η n -χρονική παράγωγος $\overset{(n)}{m}(\cdot)$ του $m(\cdot)$ ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{m}(t) &\in S_n(t, x_0) := (A_0^n V)(R(t)) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{j=k} t^j \operatorname{span} \left\{ \begin{array}{l} \rho^{r_n^j} (A_{i_1^j} A_{i_2^j} \dots A_{i_\nu^j} V)(R(t)) : \nu \geq 2; \\ \sum_{s=1}^{\nu} \operatorname{order}_{\{X, Y\}} A_{i_s^j} = n + j; \\ r_n^j = \sum_{s=1}^{\nu} i_s^j \in \{1, 2, \dots, n + j - 2\} \end{array} \right\} \\ &\quad + \rho^{n-1} (A_{n-1} V)(R(t)) \\ &\quad + \operatorname{span} \{\rho^n t (A_n V)(R(t)), \rho^{n+1} t^2 (A_{n+1} V)(R(t)), \dots, \\ &\quad \quad \rho^{n+k-1} t^k (A_{k+n-1} V)(R(t))\} + O(t^{k-n+1}) \end{aligned} \quad (5.48)$$

με $i_1^j, i_2^j, \dots, i_\nu^j \in \mathbb{N}_0$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (5.47), εύκολα προκύπτει ότι ο εγκλεισμός (5.48) πληρούται για $n = 2$. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η (5.48) για κάποιον ακέραιο n , $2 \leq n < k$. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται και για $n = n + 1 \leq k$.

Πράγματι, από την (5.48), η $(n+1)$ -χρονική παράγωγος του $m(\cdot)$ είναι

$$\begin{aligned}
 {}^{(n+1)}m(t) &= \frac{d}{dt}({}^{(n)}m(t)) \in D(A_0^n V)(R(t))\dot{R}(t) \\
 &+ \sum_{j=0}^{j=k} t^j \operatorname{span} \left\{ \begin{array}{l} D(\rho^{r_n^j} A_{i_1^j} \dots A_{i_\nu^j} V)(R(t)) : \nu \geq 2; \\ \sum_{s=1}^{\nu} \operatorname{order}_{\{X,Y\}} A_{i_s^j} = n+j; \\ r_n^j = \sum_{s=1}^{\nu} i_s^j \in \{1, 2, \dots, n+j-2\} \end{array} \right\} \dot{R}(t) \\
 &+ \sum_{j=1}^{j=k} j t^{j-1} \operatorname{span} \left\{ \begin{array}{l} \rho^{r_n^j} (A_{i_1^j} \dots A_{i_\nu^j} V)(R(t)) : \nu \geq 2; \\ \sum_{s=1}^{\nu} \operatorname{order}_{\{X,Y\}} A_{i_s^j} = n+j; \\ r_n^j = \sum_{s=1}^{\nu} i_s^j \in \{1, 2, \dots, n+j-2\} \end{array} \right\} \\
 &+ \rho^{n-1} D(A_{n-1} V)(R(t))\dot{R}(t) \\
 &+ \operatorname{span}\{\rho^n t D(A_n V)(R(t)), \rho^{n+1} t^2 D(A_{n+1} V)(R(t)), \dots, \\
 &\quad \rho^{n+k-1} t^k D(A_{k+n-1} V)(R(t))\} \dot{R}(t) \\
 &+ \operatorname{span}\{\rho^n (A_n V)(R(t)), \rho^{n+1} t (A_{n+1} V)(R(t)), \dots, \\
 &\quad \rho^{n+j} t^j (A_{n+j} V)(R(t)), j = 0, 1, 2, \dots, k\} + O(t^{k-n}) \tag{5.49}
 \end{aligned}$$

Επομένως, από την (5.44) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 {}^{(n+1)}m(t) &\in (A_0^{n+1} V)(R(t)) \\
 &+ \operatorname{span}\{\rho^q t^q (A_q A_0^n V)(R(t)), q = 1, \dots, n, n+1, \dots, k\} \\
 &+ \sum_{\substack{j=0,1,\dots,k \\ q=0,1,\dots,k \\ j+q \leq k}} t^{j+q} \operatorname{span} \left\{ \begin{array}{l} \rho^{r_n^{j+q}} (A_q A_{i_1^j} \dots A_{i_\nu^j} V)(R(t)) : \nu \geq 2; \\ \sum_{s=1}^{\nu} \operatorname{order}_{\{X,Y\}} A_{i_s^j} = n+j; \\ r_n^{j+q} = \sum_{s=1}^{\nu} i_s^j \in \{1, 2, \dots, n+j-2\} \end{array} \right\} \\
 &+ \sum_{j=1}^{j=k} t^{j-1} \operatorname{span} \left\{ \begin{array}{l} j \rho^{r_n^j} (A_{i_1^j} \dots A_{i_\nu^j} V)(R(t)) : \nu \geq 2; \\ \sum_{s=1}^{\nu} \operatorname{order}_{\{X,Y\}} A_{i_s^j} = n+j; \\ r_n^j = \sum_{s=1}^{\nu} i_s^j \in \{1, 2, \dots, n+j-2\} \end{array} \right\} \\
 &+ \rho^n (A_n V)(R(t)) \\
 &+ \rho^{n-1} \operatorname{span}\{\rho^q t^q (A_q A_{n-1} V)(R(t)); q = 0, 1, \dots, n, n+1, \dots, k\} \\
 &+ \operatorname{span}\{\rho^{j+n-1+q} t^{j+q} (A_q A_{j+n-1} V)(R(t)), j = 1, 2, \dots \\
 &\quad \dots, n, n+1, \dots, k, q = 0, 1, \dots, k; j+q \leq k\} \\
 &+ \operatorname{span}\{\rho^{n+1} t (A_{n+1} V)(R(t)), \dots, \rho^{n+j} t^j (A_{n+j} V)(R(t)), \\
 &\quad j = 1, 2, \dots, k\} + O(t^{k-n}) \tag{5.50}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε νέος όρος $t^K \rho^L A_{\tau_1} \dots A_{\tau_M} V$ που εμφανίζεται παραπάνω, ικανοποιεί

$$\sum_{s=1}^{s=M} \text{order}_{\{X,Y\}} A_{\tau_s} = (n+1) + K; \quad (5.51)$$

$$L = \sum_{s=1}^{s=M} \tau_s \in \{1, 2, \dots, (n+1) + K - 2\} \quad (5.52)$$

Για πληρότητα, σημειώνουμε ότι για τους όρους $\rho^q t^q (A_q A_0^n V)$, $q = 1, \dots, k$ συνεπάγεται, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (5.48) και (5.49), ότι

$$\text{order}_{\{X,Y\}} A_q + \sum_{s=1}^{s=n} \text{order}_{\{X,Y\}} A_0 = (n+1) + q,$$

και επιπλέον ικανοποιείται η (5.52). Για τους όρους $t^{j+q} \rho^{r_n^j+q} (A_q A_{i_1^j} \dots A_{i_\nu^j} V)$ έχουμε:

$$\text{order}_{\{X,Y\}} A_q + \sum_{j=1}^{\nu} \text{order}_{\{X,Y\}} A_{i_j^k} = (n+1) + q + j,$$

και εφόσον στην (5.50) έχουμε ότι $r_n^j \in \{1, \dots, n+j-2\}$, τότε:

$$r_n^j + q \in \{1, 2, \dots, n+q+j-2\} \subset \{1, 2, \dots, (n+1) + (q+j) - 2\}.$$

Επιπλέον, για τους όρους $t^{j-1} \rho^{r_n^j} (A_{i_1^j} A_{i_2^j} \dots A_{i_\nu^j} V)$ στην (5.50) έχουμε ότι:

$$\sum_{j=1}^{\nu} \text{order}_{\{X,Y\}} A_{i_j^k} = (n+1) + j - 1$$

και συνεπώς $r_n^j \in \{1, 2, \dots, n+j-2\} \subset \{1, 2, \dots, (n+1) + j - 2\}$. Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι οι υπόλοιποι όροι στην (5.50) ικανοποιούν τις (5.51) και (5.52). Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι το δεξί μέλος της (5.50) συμπεριλαμβάνεται στο $S_{n+1}(t, x_0)$, όπως αυτό ορίστηκε στην (5.48), το οποίο εγγυάται ότι ο εγκλεισμός (5.48) ισχύει για $n := n+1$ και συνεπώς ικανοποιείται για κάθε ζευγάρι ακεραίων $k \geq n \geq 2$. Από τις (5.47) και (5.48) προκύπτει ότι

$$\overset{(2)}{m}(0) = (A_0^2 V)(x_0) + (\rho A_1 V)(x_0) \quad (5.53)$$

για την περίπτωση όπου $n = 2$ και γενικά για $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} & \overset{(n)}{m}(0) \in (A_0^n V)(x_0) \\ & + \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \rho^{r_n^0} (A_{i_1^0} A_{i_2^0} \dots A_{i_\nu^0} V)(x_0) : \nu \geq 2; \\ i_1^0, i_2^0, \dots, i_\nu^0 \in \mathbb{N}_0; \sum_{j=1}^{\nu} \text{order}_{\{X,Y\}} A_{i_j^0} = n; \\ r_n^0 = \sum_{j=1}^{\nu} i_j^0 \in \{1, 2, \dots, n-2\} \end{array} \right\} \\ & + \rho^{n-1} (A_{n-1} V)(x_0) \end{aligned} \quad (5.54)$$

Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν τον ορισμό (5.38) των διανυσματικών πεδίων X και Y και διαλέγοντας

$$u_2 = -\rho u_1, \rho > 0 \quad (5.55)$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} A_0 &= (\rho + 1)f, \quad A_1 = (\rho + 1)u_1[f, g] \\ A_2 &= (\rho + 1)(u_1^2[[f, g], g] - u_1[[g, f], f]) \\ &\vdots \\ A_n &= (\rho + 1)u_1^n[\dots \underbrace{[[f, g], g], \dots, g}]_n \\ &\quad + (\rho + 1)u_1^{n-1}([\dots \underbrace{[f, g], \dots, g], g], f]_{n-1} \\ &\quad + [\dots \underbrace{[f, g], \dots, g], f], g] + \dots + [\dots \underbrace{[[f, g], f], g], \dots, g]_{n-2} \\ &\quad + \dots + (\rho + 1)u_1^2([\dots \underbrace{[[f, g], f], \dots, f], f], g]_{n-2} \\ &\quad + [\dots \underbrace{[[f, g], f], \dots, f], g], f] + \dots + [\dots \underbrace{[[f, g], g], f], \dots, f], f]_{n-2} \\ &\quad - (\rho + 1)u_1[\dots \underbrace{[g, f], f], \dots, f], n = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (5.56)$$

Προφανώς, από την (5.56) συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} A_k &\in \text{span}\{\Delta \in \text{Lie}\{f, g\} \setminus \{g\} : \text{order}_{\{f, g\}}\Delta = k + 1\} \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.57)$$

Επιπλέον, από τις (5.43) και (5.54) έχουμε ότι $r_n^0 = \sum_{s=1}^{\nu} i_s^0 \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$ και $\sum_{j=1}^{\nu} \text{order}_{\{X, Y\}} A_{i_j}^0 = r_n^0 + \nu = n$ με $\nu \geq 2$ και συνεπώς $\nu \leq n - 1$. Από τα παραπάνω και τις (5.54)-(5.57) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \binom{n}{m}(0) &\in (\rho + 1)^n (f^n V)(x_0) + u_1 \pi_1(\rho, \rho + 1; x_0) \\ &\quad + \text{span} \left\{ u_1^k \pi_k(\rho, \rho + 1; x_0), k = 2, \dots, n - 2 \right\} \\ &\quad + \rho^{n-1} (\rho + 1) u_1^{n-1} ([\dots \underbrace{[[f, g], g], \dots, g}]_{n-1} V)(x_0) \\ &\quad - \rho^{n-1} (\rho + 1) u_1 ([\dots \underbrace{[g, f], f], \dots, f]_{n-1} V)(x_0) \end{aligned} \quad (5.58)$$

για $n = 2, 3, \dots$ και για συγκεκριμένες λείες συναρτήσεις $\pi_k : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n - 2$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(S1) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$, κάθε απεικόνιση $\pi_k(\alpha, \beta; x_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι πολυώνυμο ως προς τις πρώτες δύο μεταβλητές κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$\begin{aligned} & \text{span}\{\pi_k(\alpha, \beta; x_0), k = 1, 2, \dots, n-2\} \subset \\ & \text{span}\{(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_i V)(x_0); i \in \mathbb{N}, \\ & \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i \in \text{Lie}\{f, g\} \setminus \{g\}; \sum_{j=1}^{j=i} \text{order}_{\{f, g\}} \Delta_j = n\} \end{aligned} \quad (5.59)$$

(S2) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν ακέραιοι $\lambda_i, \mu_i, i = 1, 2, \dots, L \in \mathbb{N}$ με $1 \leq \lambda_i \leq n-2, 2 \leq \mu_i \leq n-1$ έτσι ώστε η απεικόνιση $\pi_1(\alpha, \beta; x_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί $\pi_1(\alpha, \beta; x_0) \in \text{span}\{\alpha^{\lambda_1} \beta^{\mu_1}, \alpha^{\lambda_2} \beta^{\mu_2}, \dots, \alpha^{\lambda_L} \beta^{\mu_L}\}$. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι για κάθε σταθερό $x_0 \in \mathbb{R}^n$, τα πολυώνυμα $\pi_1(\rho, \rho+1; x_0)$ και $-\rho^{n-1}(\rho+1)(\underbrace{[\dots [g, f], f], \dots, f]}_{n-1} V)(x_0)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, υπό την προϋπόθεση ότι

$$([\dots [\underbrace{[g, f], f], \dots, f]}_{n-1} V)(x_0) \neq 0 \quad (5.60)$$

Αν ορίσουμε:

$$\begin{aligned} \xi_n(\rho; x_0) & := \pi_1(\rho, \rho+1; x_0) \\ & - \rho^{n-1}(\rho+1)(\underbrace{[\dots [g, f], f], \dots, f]}_{n-1} V)(x_0), \end{aligned} \quad (5.61)$$

ο εγκλεισμός (5.58) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \binom{n}{m}(0) & \in (\rho+1)^n (f^n V)(x_0) + u_1 \xi_n(\rho; x_0) \\ & + \text{span}\left\{u_1^k \pi_k(\rho, \rho+1; x_0), k = 2, \dots, n-2\right\} \\ & + \rho^{n-1}(\rho+1)u_1^{n-1}(\underbrace{[\dots [f, g], g], \dots, g]}_{n-1} V)(x_0) \end{aligned} \quad (5.62)$$

και μπορούμε να βρούμε μια σταθερά $\rho = \rho(x_0) > 0$ με

$$\xi_n(\rho; x_0) \neq 0 \quad (5.63)$$

υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η (5.60). Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει ακέραιος $N = N(x_0) \geq 1$ που ικανοποιεί την (5.10), καθώς και μια από τις ιδιότητες (P1), (P2), (P3), (P4) με $x = x_0$. Από την (5.46) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (5.10), (5.58) και (5.59) προκύπτει ότι:

$$\binom{n}{m}(0) = 0, n = 1, 2, \dots, N \quad (5.64)$$

και διακρίνουμε τις επόμενες τέσσερις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Ικανοποιείται η (5.11) με $x = x_0$. Τότε, χρησιμοποιώντας την (5.62) με $n := N+1$ και θέτοντας $u_1 = 0$ παίρνουμε ότι για κάθε $\rho > 0$ ισχύει:

$$\binom{N+1}{m}(0) < 0 \quad (5.65)$$

Περίπτωση 2: Ο ακέραιος N είναι περιττός και ισχύει η (5.12) με $x = x_0$. Τότε, επικαλούμενοι την (5.62) για $n := N + 1$ και την υπόθεση ότι ο ακέραιος N είναι περιττός, προκύπτει ότι για κάθε $\rho > 0$ υπάρχει σταθερά $u_1 = u_1(x_0)$, με $|u_1|$ επαρκώς μεγάλο, έτσι ώστε να ικανοποιείται η (5.65).

Περίπτωση 3: Ο ακέραιος N είναι άρτιος και ισχύει η (5.13) με $x = x_0$. Τότε, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, από την (5.62) για $n := N + 1$ προκύπτει ότι, για οποιαδήποτε επιλογή του $\rho > 0$ και για οποιοδήποτε επαρκώς μεγάλο σταθερό $u_1 = u_1(x_0) > 0$, ικανοποιείται η επιθυμητή (5.65).

Περίπτωση 4: N είναι αυθαίρετος ακέραιος και ικανοποιούνται οι (5.14α) και (5.14β) με $x = x_0$. Τότε, λόγω της υπόθεσης (5.14β), συνεπάγεται ότι πληρούται η (5.60) με $n := N + 1$, επομένως υπάρχει σταθερά $\rho = \rho(x_0) > 0$ που ικανοποιεί την (5.63) με $n := N + 1$. Επικαλούμενοι ξανά την (5.62) για $n := N + 1$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν την υπόθεση (5.14α), προκύπτει ότι για το ρ που επιλέχθηκε παραπάνω υπάρχει επαρκώς μικρό σταθερό $u_1 = u_1(x_0) \neq 0$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η (5.65).

Από τις (5.39), (5.40), (5.55), (5.64) και (5.65) προκύπτει ότι σε όλες τις περιπτώσεις παραπάνω, υπάρχει σταθερά u_1 έτσι ώστε, αν για $t > 0$ ορίσουμε:

$$\omega(s; t, x_0) := \begin{cases} u_2 = -\rho u_1, & s \in [0, t] \\ u_1, & s \in (t, t + \rho t] \end{cases} \quad (5.66)$$

με $\rho = \rho(x_0) := 1$ για τις Περιπτώσεις 1, 2 και 3 και $\rho = \rho(x_0)$ όπως επιλέχθηκε στην Περίπτωση 4, τότε για κάθε επαρκώς μικρό $\sigma = \sigma(x_0) > 0$ έχουμε ότι $m(t) < m(0)$, $\forall t \in (0, \sigma]$, όπου $m(t) := V((X_{\rho t} \circ Y_t)(x_0)) = V(x(t + \rho t, 0, x_0, \omega(\cdot; t, x_0)))$ και $x(\cdot, 0, x_0, \omega(\cdot; t, x_0))$ είναι η τροχιά του συστήματος (5.2) που αντιστοιχεί σε είσοδο $\omega(\cdot; t, x_0)$. Ισοδύναμα:

$$V(x(t, 0, x_0, \omega(\cdot; \frac{t}{1+\rho}, x_0))) < V(x_0), \forall t \in (0, \frac{\sigma}{1+\rho}] \quad (5.67)$$

Εφόσον η σταθερά $\rho = \rho(x_0)$ είναι ανεξάρτητη του t , μπορούμε να επιλέξουμε $\varepsilon \in (0, \sigma]$ επαρκώς μικρό έτσι ώστε, αν ορίσουμε $u(\cdot, x_0) := \omega(\cdot; \frac{\varepsilon}{1+\rho}, x_0)$, η ανισότητα στη (5.67) ικανοποιείται για $t := \varepsilon$, δηλαδή, $V(x(\varepsilon, 0, x_0, u(\cdot, x_0))) < V(x_0)$ και ταυτόχρονα $V(x(s, 0, x_0, u(\cdot, x_0))) \leq 2V(x_0)$, $\forall s \in (0, \varepsilon]$. Καταλήγουμε, λαμβάνοντας υπ' όψιν την (5.37) και τις προηγούμενες ανισότητες, ότι για κάθε $x_0 \neq 0$ και $\xi > 0$, υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon(x_0) \in (0, \xi]$ και μετρήσιμος και τοπικά ουσιωδώς φραγμένος έλεγχος $u(\cdot, x_0) : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (5.3α) και (5.3β) της Υπόθεσης 1 με $a(s) := 2s$. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.1, το σύστημα (5.2) είναι SDF-SGAS. \square

Απόδειξη του Πορίσματος 5.2.1. Πρώτα, από τις (5.15) και (5.16) προκύπτει ότι για κάθε $x \neq 0$, ή $(gV)(x) \neq 0$, ή

$$(gV)(x) = 0 \quad (5.68)$$

το οποίο σε συνδυασμό με την υπόθεση (5.9) και την Πρόταση 5.2.2 συνεπάγεται το επιθυμητό αποτέλεσμα. Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου ικανοποιούνται οι (5.17)

και (5.68). Τότε, λόγω των (5.15)-(5.17), έχουμε ότι:

$$(fV)(x) = (f^2V)(x) = (f^3V)(x) = 0 \quad (5.69\alpha)$$

$$|([f, g]V)(x)| + |([f, [f, g]]V)(x)| \neq 0 \quad (5.69\beta)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Η πρώτη είναι $([f, g]V)(x) \neq 0$. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (5.68) και (5.69α) έπεται ότι ικανοποιούνται οι (5.10α) και (P4) με $N = 1$. Η δεύτερη περίπτωση είναι

$$([f, g]V)(x) = 0 \quad (5.70\alpha)$$

$$([f, [f, g]]V)(x) \neq 0. \quad (5.70\beta)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (5.70), (5.68) και (5.69α) προκύπτει ότι πληρούνται οι (5.10α), (5.10β) και (P4) της Πρότασης 5.2.2 με $N = 2$. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.2, το τριδιάστατο σύστημα (5.2) είναι SDF-SGAS. \square

Απόδειξη του Πορίσματος 5.2.2. Ορίζουμε:

$$f(x) := \begin{pmatrix} a(x_1, x_2, x_3)x_3^L \\ b(x_1, x_2, x_3)x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (5.71)$$

και

$$V(x) := \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{L+1}x_2^{L+1} + \frac{1}{2}x_3^2 \quad (5.72)$$

όπου λόγω της (5.19) είναι θετικά ορισμένη και **proper**. Τότε, από τις (5.71) και (5.72), έχουμε ότι

$$[f, g](x) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial a}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)x_3^L - La(x_1, x_2, x_3)x_3^{L-1} \\ -\frac{\partial b}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)x_3 - b(x_1, x_2, x_3) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.73\alpha)$$

και για κάθε ακέραιο $k : 2 \leq k \leq L$ ισχύει:

$$\underbrace{[\dots [f, g], g] \dots g]}_k(x) = \begin{pmatrix} A_{1,k}(x_1, x_2, x_3) + (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} (L-i)a(x_1, x_2, x_3)x_3^{L-k} \\ A_{2,k}(x_1, x_2, x_3) + (-1)^k k \frac{\partial^{k-1} b}{\partial x_3^{k-1}}(x_1, x_2, x_3) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.73\beta)$$

$$\underbrace{[\dots [g, f], f] \dots f]}_k(x) = \begin{pmatrix} B_{1,k}(x_1, x_2, x_3) \\ B_{2,k}(x_1, x_2, x_3) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.73\gamma)$$

για συγκεκριμένες λείες συναρτήσεις $A_{1,k}, A_{2,k}, B_{1,k}, B_{2,k} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιούν

$$A_{1,k}(\cdot, \cdot, 0) = A_{2,k}(\cdot, \cdot, 0) = B_{1,k}(\cdot, \cdot, 0) = B_{2,k}(\cdot, \cdot, 0) = 0, \quad (5.74\alpha)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j A_{1,n}}{\partial x_2^j}(\cdot, \cdot, 0) &= \frac{\partial^j B_{1,n}}{\partial x_2^j}(\cdot, \cdot, 0) = \frac{\partial^j B_{2,n}}{\partial x_2^j}(\cdot, \cdot, 0) = 0, \\ j &= 1, \dots, L-1; \quad n = 2, \dots, L-j+1. \end{aligned} \quad (5.74\beta)$$

Από τις (5.71)-(5.73) παίρνουμε

$$(gV)(x) = x_3; \quad (5.75\alpha)$$

$$\begin{aligned} ([f, g]V)(x) &= -\frac{\partial a}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)x_1x_3^L - La(x_1, x_2, x_3)x_1x_3^{L-1} \\ &\quad - \frac{\partial b}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)x_2^Lx_3 - b(x_1, x_2, x_3)x_2^L, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (5.75\beta)$$

και για κάθε ακέραιο $k: 2 \leq k \leq L$ ισχύει:

$$\begin{aligned} ([\dots \underbrace{[f, g], g] \dots}_k]V)(x) &= A_{1,k}(x_1, x_2, x_3)x_1 + (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} (L-i)a(x_1, x_2, x_3)x_3^{L-k}x_1 \\ &\quad + A_{2,k}(x_1, x_2, x_3)x_2^L + (-1)^k k \frac{\partial^{k-1} b}{\partial x_3^{k-1}}(x_1, x_2, x_3)x_2^L, \end{aligned} \quad (5.75\gamma)$$

$$([\dots \underbrace{[g, f], f] \dots}_k]V)(x) = B_{1,k}(x_1, x_2, x_3)x_1 + B_{2,k}(x_1, x_2, x_3)x_2^L. \quad (5.75\delta)$$

Έστω $x \neq 0$ για τα οποία

$$(gV)(x) = x_3 = 0. \quad (5.76)$$

Τότε, από τις (5.71) και (5.72) προκύπτει ότι

$$(f^k V)(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.77)$$

Συγκεκριμένα, από τις (5.71) και (5.72) παίρνουμε

$$\begin{aligned} (fV)(x) &= a(x_1, x_2, x_3)x_1x_3^L + b(x_1, x_2, x_3)x_2^Lx_3, \\ (f^2V)(x) &= (f(fV))(x) = \frac{\partial a}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)a(x_1, x_2, x_3)x_1x_3^{2L} + a^2(x_1, x_2, x_3)x_3^{2L} \\ &\quad + \frac{\partial b}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)a(x_1, x_2, x_3)x_2^Lx_3^{L+1} + \frac{\partial a}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3)b(x_1, x_2, x_3)x_1x_3^{L+1} \\ &\quad + \frac{\partial b}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3)b(x_1, x_2, x_3)x_2^Lx_3^2 + Lb^2(x_1, x_2, x_3)x_2^{L-1}x_3^2 \end{aligned}$$

και γενικά για $k = 3, 4, \dots$,

$$\begin{aligned} (f^k V)(x) &= (f(f^{k-1} V))(x) = (z_1(x_1, x_2, x_3), z_2(x_1, x_2, x_3), z_3(x_1, x_2, x_3)) \begin{pmatrix} a(x_1, x_2, x_3)x_3^L \\ b(x_1, x_2, x_3)x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= z_1(x_1, x_2, x_3)a(x_1, x_2, x_3)x_3^L + z_2(x_1, x_2, x_3)b(x_1, x_2, x_3)x_3, \end{aligned}$$

με $z_j \in C^\infty$, $j = 1, 2, 3$, όπου λόγω της (5.76) προκύπτει η (5.77). Συνεπώς ικανοποιείται η (5.10α) και επιπλέον, από τις (5.19) και (5.75β) έχουμε:

$$([f, g]V)(x) = -b(x_1, x_2, 0)x_2^L \quad (5.78)$$

Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $x_2 \neq 0$ με $x_1 \in \mathbb{R}$ και $x_3 = 0$. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν την υπόθεση (5.20) και την (5.78), έπεται ότι $([f, g]V)(x) \neq 0$, το οποίο μαζί με την (5.77) βεβαιώνει ότι πληρούνται οι (5.10) και (P2) της Πρότασης 5.2.2 με $N = 1$.

Περίπτωση 2: $x_2 = 0$ με $x_1 \neq 0$ και $x_3 = 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει από τις (5.20), (5.75γ), (5.76) και (5.78) ότι

$$(\underbrace{[[[f, g], g], \dots, g]}_k V)(x) = 0, \quad k = 1, \dots, L-1; \quad (5.79\alpha)$$

$$([\dots \underbrace{[[f, g], g], \dots, g}]_L V)(x) \neq 0, \quad \forall x_1 \neq 0 \quad (5.79\beta)$$

και συνεπώς, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις υποθέσεις (5.19), (5.20) και την (5.79β), έπεται ότι ικανοποιείται η (P2) με $N = L$. Επιπλέον, από την (5.77), συνεπάγεται ότι ικανοποιείται η (5.10α) για $k = 1, \dots, L$, επομένως, προκειμένου να επαληθεύσουμε ότι όλες οι ιδιότητες της Πρότασης 5.2.2 ικανοποιούνται, μένει να δείξουμε ότι ισχύει η (5.10β). Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι, αν ορίσουμε

$$\begin{aligned} \pi_k(x) &:= (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k V)(x); \\ \Delta_1, \dots, \Delta_k &\in Lie\{f, g\} \setminus \{g\} \text{ με } \sum_{p=1}^k \text{order}_{\{f, g\}} \Delta_p \leq L \end{aligned} \quad (5.80)$$

τότε

$$\pi_k(x_1, 0, 0) = 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}. \quad (5.81)$$

Προκειμένου να αποδείξουμε την (5.81), αρκεί να θεωρήσουμε στην (5.80) τα διανυσματικά πεδία Δ_p που ικανοποιούν

$$\Delta_p \in \{f, \underbrace{[\dots [f, g], g], \dots, g]}_{k_1}, \underbrace{[[g, f], f], \dots, f]}_{k_2}\}$$

για κατάλληλα $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε πρώτα ότι, λόγω των (5.71), (5.73) και (5.74), κάθε Δ_p , $p = 1, 2, \dots, k$ παραπάνω γράφεται ως εξής

$$\Delta_p(x) = \begin{pmatrix} C_{1,k}(x_1, x_2, x_3) \\ C_{2,k}(x_1, x_2, x_3) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.82\alpha)$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ και για συγκεκριμένες λείες συναρτήσεις $C_{1,k}(\cdot, \cdot, \cdot)$ και $C_{2,k}(\cdot, \cdot, \cdot)$ με

$$\begin{aligned} \bullet \quad & C_{1,k}(\cdot, \cdot, 0) = 0; \quad \frac{\partial^j C_{1,q}}{\partial x_2^j}(\cdot, \cdot, 0) = 0, \\ & j = 1, \dots, k; \quad q = 1, \dots, k - j + 1, \quad \text{για την περίπτωση όπου} \\ & \Delta_p \in D := \{[\dots[\underbrace{[f, g], g], \dots, g], n = 1, \dots, L}\}; \end{aligned} \quad (5.82\beta)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & C_{1,k}(\cdot, \cdot, 0) = 0; \quad C_{2,k}(\cdot, \cdot, 0) = 0; \quad \frac{\partial^j C_{1,q}}{\partial x_2^j}(\cdot, \cdot, 0) = 0, \\ & j = 1, \dots, k; \quad q = 1, \dots, k - j + 1, \\ & \text{για την περίπτωση όπου } \Delta_p \in \text{Lie}\{f, g\} \setminus \{\{g\} \cup D\}. \end{aligned} \quad (5.82\gamma)$$

Τότε, από τις (5.71)-(5.74), (5.82α), (5.82β), (5.82γ) και με επαγωγή προκύπτει εύκολα ότι για κάθε ακέραιο $k \in \{1, \dots, L - 1\}$, για τον οποίο ισχύει η (5.80), υπάρχει λεία συνάρτηση $\Xi_i = \Xi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2$ κατά τέτοιον τρόπο ώστε

$$\Xi_1(\cdot, \cdot, 0) = 0 \quad (5.83\alpha)$$

$$\pi_k(x_1, x_2, x_3) = \Xi_1(x_1, x_2, x_3) + \Xi_2(x_1, x_2, x_3)x_2^{L-k+1} \quad (5.83\beta)$$

από το οποίο έπεται η (5.81). Από τις (5.20), (5.77), (5.79β) και (5.81) προκύπτει ότι για την περίπτωση 2, ικανοποιούνται οι (5.10) και (P2) με $N = L$. Καταλήγουμε, ότι και στις δύο περιπτώσεις παραπάνω, οι υποθέσεις της Πρότασης 5.2.2 πληρούνται, και επομένως το σύστημα (5.18) είναι SDF-SGAS. \square

5.4

Περισσότερα Παραδείγματα

Τα επόμενα παραδείγματα αποτελούν εφαρμογή της Πρότασης 5.2.2, το πρώτο εκ των οποίων γενικεύει το Παράδειγμα 2 της εργασίας [130].

Παράδειγμα 5.4.1. Θεωρούμε το σύστημα 2-διαστάσεων:

$$\dot{x}_1 = F(x_1, x_2) \quad (5.84)$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

όπου $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ είναι C^∞ και υποθέτουμε ότι για κάθε $x_1 \neq 0$, είτε

$$x_1 F(x_1, 0) < 0 \quad (5.85)$$

είτε υπάρχει ακέραιος $N = N(x_1) \geq 1$ με

$$\frac{\partial^i F}{\partial x_2^i}(x_1, 0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.86)$$

έτσι ώστε να ικανοποιείται μια από τις επόμενες ιδιότητες:

(H1) N είναι περιττός και

$$\frac{\partial^N F}{\partial x_2^N}(x_1, 0) \neq 0,$$

(H2) N είναι άρτιος και

$$x_1 \frac{\partial^N F}{\partial x_2^N}(x_1, 0) < 0.$$

Ορίζουμε $x := (x_1, x_2)^T$, $V(x) := \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, $f(x) := (F(x_1, x_2), 0)^T$ και $g(x) := (0, 1)^T$. Τότε

$$(gV)(x) = (DV(x) \cdot g(x)) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2.$$

Επομένως,

$$(gV)(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0. \quad (5.87)$$

Για $x = (x_1, 0)$, $x_1 \neq 0$ έχουμε

$$(fV)(x) = x_1 F(x_1, x_2) \quad (5.88)$$

Συνεπώς, αν ικανοποιείται η (5.85), προκύπτει από τις (5.87) και (5.88) ότι $(fV)(x) < 0$ για κάθε μη μηδενικό x που ικανοποιεί την (5.87). Δηλαδή, ισχύει η (5.10). Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει ακέραιος N έτσι ώστε να ισχύει η (5.86). Τότε, αν ικανοποιείται η (H1) για τα $x \neq 0$ που ικανοποιούν την (5.87) έχουμε ότι πληρούνται οι (5.10) και (P2) της Πρότασης 5.2.2. Τέλος, αν ικανοποιείται η (H2), προκύπτει ότι πληρούνται οι (5.10) και (P3) της Πρότασης 5.2.2. Άρα, από τα παραπάνω επιχειρήματα έχουμε ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης 5.2.2 για όλες τις περιπτώσεις και επομένως το σύστημα είναι SDF-SGAS. \triangleleft

Παράδειγμα 5.4.2. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 a(x_3) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 b(x_3) \\ \dot{x}_3 &= u, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (5.89)$$

όπου $a(\cdot), b(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ και ικανοποιούν:

$$a(0) = b(0) \neq 0 \quad (5.90\alpha)$$

$${}^{(1)}a(0) \neq {}^{(1)}b(0) \quad (5.90\beta)$$

όπου με ${}^{(1)}a(\cdot)$ και ${}^{(1)}b(\cdot)$ συμβολίζουμε τις πρώτες παραγώγους των $a(\cdot)$ και $b(\cdot)$, αντίστοιχα. Ορίζουμε:

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad f(x) := \begin{pmatrix} x_2 a(x_3) \\ -x_1 b(x_3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V(x) := \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

Τότε, προκύπτει ότι:

$$(gV)(x) = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0 \quad (5.91)$$

$$([f, g]V)(x) = x_1 x_2 ({}^{(1)}b(0) - {}^{(1)}a(0)) \quad (5.92)$$

Επιπλέον, από τις (5.90α) και (5.91) έχουμε:

$$(gV)(x) = 0, x \neq 0 \Rightarrow$$

$$(fV)(x) = (f^2V)(x) = (f^3V)(x) = 0 \quad (5.93)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι

$$(gV)(x) = 0 \text{ για συγκεκριμένο } x = (x_1, x_2, x_3)^T \neq 0 \quad (5.94)$$

όπου τα x_1 και x_2 είναι μη-μηδενικά. Τότε, λόγω των (5.90β) και (5.92), παίρνουμε ότι:

$$([f, g]V)(x) \neq 0, \quad (5.95)$$

το οποίο σε συνδυασμό με τις (5.93) και (5.94) βεβαιώνει ότι το σύστημα (5.89) ικανοποιεί τις (5.10) και (5.12) (P2) της Πρότασης 5.2.2 με $N = 1$.

Περίπτωση 2: Υποθέτουμε τώρα ισχύει η (5.94) και επιπλέον

$$([f, g]V)(x) = 0 \quad (5.96)$$

για συγκεκριμένο $x = (x_1, x_2, x_3)^T \neq 0$, το οποίο, λόγω των (5.90β), (5.92) και (5.94) είναι ισοδύναμο με

$$x_1 x_2 = 0, \quad (x_1, x_2) \neq 0 \quad (5.97)$$

Τέλος, υπολογίζουμε:

$$([[f, g], g]V)(x_1, x_2, 0) = x_1 x_2 ({}^{(2)}a(0) - {}^{(2)}b(0)) \quad (5.98\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 ([[g, f], f]V)(x_1, x_2, 0) &= x_1^2 \overset{(1)}{a}(0)b(0) - a(0) \overset{(1)}{b}(0) \\
 &+ x_2^2 (a(0) \overset{(1)}{b}(0) - \overset{(1)}{a}(0)b(0))
 \end{aligned} \tag{5.98\beta}$$

όπου με $\overset{(2)}{a}(\cdot)$ και $\overset{(2)}{b}(\cdot)$ συμβολίζουμε τις δεύτερες παραγώγους των $a(\cdot)$ και $b(\cdot)$, αντίστοιχα. Επομένως, από τις (5.90α), (5.90β), (5.96) και (5.97) παίρνουμε ότι $([[f, g], g]V)(x) = 0$ και $([[g, f], f]V)(x) \neq 0$, το οποίο σε συνδυασμό με τις (5.93) και (5.94) βεβαιώνει ότι οι (5.10) και (5.14) ικανοποιούνται με $N = 2$, για το παραπάνω μη μηδενικό διάνυσμα $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. Καταλήγουμε ότι, και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, όλες οι υποθέσεις της Πρότασης 5.2.2 ικανοποιούνται, άρα το σύστημα (5.89) είναι SDF-SGAS. \triangleleft

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Λήμμα Gronwall-Bellman

Λήμμα Δ.0.1. Έστω $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ και $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, τέτοιες ώστε

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s)ds.$$

Τότε ισχύει:

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s) \exp\left(\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right) ds$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Αγκύλη Lie και η φόρμουλα Campbell-Baker-Hausdorff

Η αγκύλη Lie (Lie Bracket) των διανυσματικών πεδίων f και g είναι ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται ως

$$[f, g] := fg - gf$$

και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- είναι διγραμμική,

$$[f, a_1g_1 + a_2g_2] = a_1[f, g_1] + a_2[f, g_2],$$

όπου $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

- αντισυμμετρική,

$$[f, g] = -[g, f],$$

- ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0.$$

Η αγκύλη Lie των f και g μπορεί να ερμηνευτεί ως η τιμή στο $t = 0$ της παραγώγου (ως προς t) της συνάρτησης

$$W(t) = (\Phi_{-t}^f)_*g(\Phi_t^f(p)).$$

Δ.

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι για οποιοδήποτε $k \geq 0$

$$\left(\frac{d^k W(t)}{dt^k}\right)_{t=0} = ad_f^k g(p),$$

όπου $ad_f^k g$ ορίζεται αναδρομικά ως

$$ad_f^0 g = g, \quad ad_f^k g = [f, ad_f^{k-1} g].$$

Αν η συνάρτηση $W(t)$ είναι αναλυτική σε μια γειτονιά του $t = 0$, τότε η $W(t)$ μπορεί να αναπτυχθεί στη μορφή

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} ad_f^k g(p) \frac{t^k}{k!}$$

που είναι γνωστή ως φόρμουλα *Campbell-Baker-Hausdorff*.

Lie Άλγεβρα

Έστω Ω μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n κι έστω \mathcal{F} μια οικογένεια από C^∞ διανυσματικά πεδία στο Ω . Συμβολίζουμε με $Lie\{\mathcal{F}\}$ τη Lie άλγεβρα που παράγεται από τα διανυσματικά πεδία στο \mathcal{F} , δηλαδή, το μικρότερο γραμμικό υπόχωρο E του $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

$$\mathcal{F} \subset E$$

$$X \in E \text{ και } Y \in E \Rightarrow [X, Y] \in E.$$

Θεώρημα Μέσης Τιμής για Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Θεώρημα Δ.0.1. Έστω A ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε για $a, b \in A$, υπάρχει $c = a + \lambda(b - a)$ με $\lambda \in (0, 1)$ έτσι ώστε

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b - a).$$

ΛΙΣΤΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΩΝ

- I. J. Tsiniias and D. Theodosis
Luenberger type observers for a class of nonlinear triangular control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61 (2016), pp. 3797–3812.
- II. D. Theodosis, D. Boskos, and J. Tsiniias
Observer design for triangular systems under weak observability assumptions, *η εργασία έχει υποβληθεί προς αξιολόγηση*.
- III. J. Tsiniias and D. Theodosis
Sufficient Lie algebraic conditions for sampled-data feedback stabilizability of affine in the control nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61 (2016), pp. 1334–1339.
- IV. D. Theodosis and J. Tsiniias
Sufficient Lie algebraic conditions for sampled-data feedback stabilization, in 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Dec 2015, pp. 6490–6495.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΜΕΡΟΥΣ Ι

- [1] T. AHMED-ALI, I. KARAFYLLIS, AND F. LAMNABHI-LAGARRIGUE, *Global exponential sampled-data observers for nonlinear systems with delayed measurements*, Systems & Control Letters, 62 (2013), pp. 539 – 549.
- [2] T. AHMED-ALI AND F. LAMNABHI-LAGARRIGUE, *Sliding observer-controller design for uncertain triangular nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 44 (1999), pp. 1244–1249.
- [3] J. H. AHRENS AND H. K. KHALIL, *High-gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach*, Automatica, 45 (2009), pp. 936 – 943.
- [4] M. ALAMIR, *Optimization based non-linear observers revisited*, International Journal of Control, 72 (1999), pp. 1204–1217.
- [5] A. ALESSANDRI AND P. COLETTA, *Switching observers for continuous-time and discrete-time linear systems*, in Proceedings of the 2001 American Control Conference. (Cat. No.01CH37148), vol. 3, 2001, pp. 2516–2521 vol.3.
- [6] A. ALESSANDRI AND A. ROSSI, *Time-varying increasing-gain observers for nonlinear systems*, Automatica, 49 (2013), pp. 2845 – 2852.
- [7] ———, *Increasing-gain observers for nonlinear systems: Stability and design*, Automatica, 57 (2015), pp. 180 – 188.
- [8] V. ANDRIEU AND L. PRALY, *On the existence of a kazantzis–kravaris/luenberger observer*, SIAM Journal on Control and Optimization, 45 (2006), pp. 432–456.
- [9] V. ANDRIEU, L. PRALY, AND A. ASTOLFI, *High gain observers with updated gain and homogeneous correction terms*, Automatica, 45 (2009), pp. 422 – 428.
- [10] P. J. ANTSAKLIS AND A. N. MICHEL, *Linear systems*, Springer Science & Business Media, 2006.
- [11] M. ARCAK AND P. KOKOTOVIĆ, *Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis*, Automatica, 37 (2001), pp. 1923 – 1930.

- [12] A. ASTOLFI AND L. PRALY, *Global complete observability and output-to-state stability imply the existence of a globally convergent observer*, in Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on, vol. 2, 2003, pp. 1562–1567 Vol.2.
- [13] J. BACK AND J. H. SEO, *Constructive algorithm for system immersion into non-linear observer form*, International Journal of Control, 81 (2008), pp. 317–331.
- [14] G. BESANCON AND A. TICLEA, *An immersion-based observer design for rank-observable nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 52 (2007), pp. 83–88.
- [15] D. BOSKOS AND J. TSINIAS, *Observer design for nonlinear triangular systems with unobservable linearisation*, International Journal of Control, 86 (2013), pp. 721–739.
- [16] —, *Sufficient conditions on the existence of switching observers for nonlinear time-varying systems*, European Journal of Control, 19 (2013), pp. 87 – 103.
- [17] —, *Observer design for a general class of triangular systems*, in MTNS 2014, Groningen, Netherlands, July 2014, pp. 325–3332.
- [18] D. CHENG AND W. LIN, *On p -normal forms of nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 48 (2003), pp. 1242–1248.
- [19] M. S. CHONG, D. NEŠIĆ, R. POSTOYAN, AND L. KUHLMANN, *Parameter and state estimation of nonlinear systems using a multi-observer under the supervisory framework*, IEEE Transactions on Automatic Control, 60 (2015), pp. 2336–2349.
- [20] A. DORIS, A. JULOSKI, W. HEEMELS, N. VAN DE WOUW, AND H. NIJMEIJER, *Switching observer design for an experimental piece-wise linear beam system*, IFAC Proceedings Volumes, 38 (2005), pp. 175 – 180. 16th IFAC World Congress.
- [21] H. DU, C. QIAN, S. YANG, AND S. LI, *Recursive design of finite-time convergent observers for a class of time-varying nonlinear systems*, Automatica, 49 (2013), pp. 601 – 609.
- [22] P. DUFOUR, S. FLILA, AND H. HAMMOURI, *Observer design for mimo non-uniformly observable systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 57 (2012), pp. 511–516.
- [23] M. FARZA, M. M’SAAD, AND L. ROSSIGNOL, *Observer design for a class of {MIMO} nonlinear systems*, Automatica, 40 (2004), pp. 135 – 143.
- [24] J. P. GAUTHIER AND G. BORNARD, *Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 26 (1981), pp. 922–926.
- [25] J. P. GAUTHIER, H. HAMMOURI, AND S. OTHMAN, *A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors*, IEEE Transactions on Automatic Control, 37 (1992), pp. 875–880.

- [26] J. P. GAUTHIER AND I. KUPKA, *Deterministic Observation Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2004.
- [27] M. HAMMAMI, *Global observers for homogeneous vector fields*, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 10 (2005), pp. 197–210.
- [28] H. HAMMOURI, G. BORNARD, AND K. BUSAWON, *High gain observer for structured multi-output nonlinear systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 (2010), pp. 987–992.
- [29] H. HAMMOURI, B. TARGUI, AND F. ARMANET, *High gain observer based on a triangular structure*, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12 (2002), pp. 497–518.
- [30] R. HERMANN AND A. KRENER, *Nonlinear controllability and observability*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 (1977), pp. 728–740.
- [31] T.-B. HOANG, W. PASILLAS-LÉPINE, AND W. RESPONDEK, *A switching observer for systems with linearizable error dynamics via singular time-scaling*, in *MTNS 2014*, Groningen, Netherlands, July 2014, pp. 1101–1108.
- [32] L. HSU, R. ORTEGA, AND G. DAMM, *A globally convergent frequency estimator*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 (1999), pp. 698–713. cited By 210.
- [33] P. JOUAN, *Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41 (2003), pp. 1756–1778.
- [34] I. KARAFYLLIS, *Non-uniform in time robust global asymptotic output stability*, *Systems & Control Letters*, 54 (2005), pp. 181 – 193.
- [35] I. KARAFYLLIS AND Z.-P. JIANG, *Hybrid dead-beat observers for a class of nonlinear systems*, *Systems & Control Letters*, 60 (2011), pp. 608–617.
- [36] ———, *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, Communications and Control Engineering, Springer London, 2011.
- [37] I. KARAFYLLIS AND C. KRAVARIS, *Robust output feedback stabilization and nonlinear observer design*, *Systems & Control Letters*, 54 (2005), pp. 925 – 938.
- [38] ———, *From continuous-time design to sampled-data design of nonlinear observers*, in *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*, Dec 2008, pp. 5408–5413.
- [39] ———, *Global exponential observers for two classes of nonlinear systems*, *Systems & Control Letters*, 61 (2012), pp. 797 – 806.
- [40] I. KARAFYLLIS AND J. TSINIAS, *Non-uniform in time stabilization for linear systems and tracking control for non-holonomic systems in chained form*, *International Journal of Control*, 76 (2003), pp. 1536–1546.

- [41] D. KARAGIANNIS, D. CARNEVALE, AND A. ASTOLFI, *Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 53 (2008), pp. 2602–2614.
- [42] N. KAZANTZIS AND C. KRAVARIS, *Nonlinear observer design using Lyapunov’s auxiliary theorem*, in Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on, vol. 5, Dec 1997, pp. 4802–4807 vol.5.
- [43] H. K. KHALIL AND L. PRALY, *High-gain observers in nonlinear feedback control*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 24 (2014), pp. 993–1015.
- [44] S. KOROVIN AND V. FOMICHEV, *State Observers for Linear Systems with Uncertainty*, De Gruyter Expositions in Mathematics, De Gruyter, 2009.
- [45] G. KREISSELMEIER AND R. ENGEL, *Nonlinear observers for autonomous lipschitz continuous systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 48 (2003), pp. 451–464.
- [46] A. J. KRENER AND A. ISIDORI, *Linearization by output injection and nonlinear observers*, Systems & Control Letters, 3 (1983), pp. 47 – 52.
- [47] A. J. KRENER AND W. RESPONDEK, *Nonlinear observers with linearizable error dynamics*, SIAM Journal on Control and Optimization, 23 (1985), pp. 197–216.
- [48] A. J. KRENER AND M. XIAO, *Nonlinear observer design in the siegel domain*, SIAM Journal on Control and Optimization, 41 (2002), pp. 932–953.
- [49] ———, *Observers for linearly unobservable nonlinear systems*, Systems & Control Letters, 46 (2002), pp. 281 – 288.
- [50] P. KRISHNAMURTHY AND F. KHORRAMI, *Dynamic high-gain scaling: State and output feedback with application to systems with iss appended dynamics driven by all states*, IEEE Trans. Automat. Contr., 49 (2004), pp. 2219–2239.
- [51] P. KRISHNAMURTHY, F. KHORRAMI, AND R. S. CHANDRA, *Global high-gain-based observer and backstepping controller for generalized output-feedback canonical form*, IEEE Transactions on Automatic Control, 48 (2003), pp. 2277–2283.
- [52] E. LEFEBER, A. ROBERTSSON, AND H. NIJMEIJER, *Linear controllers for tracking chained-form systems*, in Stability and Stabilization of Nonlinear Systems, D. Aeyels, F. Lamnabhi-Lagarrigue, and A. van der Schaft, eds., Springer London, London, 1999, pp. 183–199.
- [53] Y. LIU, *Switching observer design for uncertain nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 42 (1997), pp. 1699–1703.

-
- [54] D. G. LUENBERGER, *Observing the state of a linear system*, IEEE Transactions on Military Electronics, 8 (1964), pp. 74–80.
- [55] ———, *An introduction to observers*, IEEE Transactions on Automatic Control, 16 (1971), pp. 596–602.
- [56] R. POSTOYAN, M. H. A. HAMID, AND J. DAAFOUZ, *A multi-observer approach for the state estimation of nonlinear systems*, in 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Dec 2015, pp. 1793–1798.
- [57] L. PRALY, *On observers with state independent error lyapunov function*, in Proceedings of the 5th IFAC Symposium” Nonlinear Control Systems”(NOLCOS’01), 2001.
- [58] ———, *Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate*, IEEE Transactions on Automatic Control, 48 (2003), pp. 1103–1108.
- [59] L. PRALY, A. ISIDORI, AND L. MARCONI, *A new observer for an unknown harmonic oscillator*, in Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, 2006, pp. 24–28.
- [60] W. RESPONDEK, *Transforming a single-input system to a p -normal form via feedback*, in Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on, vol. 2, Dec 2003, pp. 1574–1579 Vol.2.
- [61] W. RESPONDEK, A. POGROMSKY, AND H. NIJMEIJER, *Time scaling for observer design with linearizable error dynamics*, Automatica, 40 (2004), pp. 277 – 285.
- [62] H. H. ROSENBRACK, *State-space and Multivariable theory*, Studies in dynamical systems, Thomas Nelson And Sons LTD, 1970.
- [63] R. G. SANFELICE AND L. PRALY, *On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise*, Automatica, 47 (2011), pp. 2165 – 2176.
- [64] Y. SHEN AND Y. HUANG, *Uniformly observable and globally lipschitzian nonlinear systems admit global finite-time observers*, IEEE Transactions on Automatic Control, 54 (2009), pp. 2621–2625.
- [65] H. SHIM AND D. LIBERZON, *Nonlinear observers robust to measurement disturbances in an iss sense*, IEEE Transactions on Automatic Control, 61 (2016), pp. 48–61.
- [66] H. SHIM AND L. PRALY, *Remarks on equivalence between full order and reduced order nonlinear observers*, in Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on, vol. 6, Dec 2003, pp. 5837–5840 Vol.6.

- [67] E. D. SONTAG AND Y. WANG, *Detectability of nonlinear systems*, in in Proc. Conf. on Information Science and Systems (CISS 96), Princeton, NJ, 1996.
- [68] —, *Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems*, Systems & Control Letters, 29 (1997), pp. 279 – 290.
- [69] B. TARGUI, M. FARZA, AND H. HAMMOURI, *Constant-gain observer for a class of multi-output nonlinear systems*, Applied Mathematics Letters, 15 (2002), pp. 709 – 720.
- [70] A. TEEL AND L. PRALY, *Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback*, SIAM Journal on Control and Optimization, 33 (1995), pp. 1443–1488.
- [71] D. THEODOSIS, D. BOSKOS, AND J. TSINIAS, *Observer design for triangular systems under weak observability assumptions*, Submitted, (2016).
- [72] J. TSINIAS, *Άριστος Έλεγχος, Σημειώσεις για το μάθημα 8ου εξαμήνου ΤΕΜΦΕ, ΕΜΠ: “Μαθηματικός Βέλτιστος Έλεγχος”*.
- [73] —, *Observer design for nonlinear systems*, Systems & Control Letters, 13 (1989), pp. 135 – 142.
- [74] —, *Further results on the observer design problem*, Systems & Control Letters, 14 (1990), pp. 411 – 418.
- [75] —, *A theorem on global stabilization of nonlinear systems by linear feedback*, Systems & Control Letters, 17 (1991), pp. 357 – 362.
- [76] —, *Backstepping design for time-varying nonlinear systems with unknown parameters*, Systems & Control Letters, 39 (2000), pp. 219 – 227.
- [77] —, *Time-varying observers for a class of nonlinear systems*, Systems & Control Letters, 57 (2008), pp. 1037–1047.
- [78] J. TSINIAS AND D. THEODOSIS, *Luenberger type observers for a class of nonlinear triangular control systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 61 (2016), pp. 3797–3812.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΜΕΡΟΥΣ ΙΙ

- [79] F. ANCONA AND A. BRESSAN, *Patchy vector fields and asymptotic stabilization*, ESAIM: COCV, 4 (1999), pp. 445–471.
- [80] A. ANTA AND P. TABUADA, *To sample or not to sample: Self-triggered control for nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 55 (2010), pp. 2030–2042.
- [81] Z. ARTSTEIN, *Stabilization with relaxed controls*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 7 (1983), pp. 1163 – 1173.
- [82] A. BACCIOTTI, *Local Stabilizability of Nonlinear Control Systems*, Series on advances in mathematics for applied sciences, World Scientific, 1992.
- [83] A. BACCIOTTI AND L. MAZZI, *From Artstein-Sontag theorem to the min-projection strategy*, Transactions of the Institute of Measurement and Control, 32 (2010), pp. 571–581.
- [84] ———, *Stabilisability of nonlinear systems by means of time-dependent switching rules*, International Journal of Control, 83 (2010), pp. 810–815.
- [85] A. BACCIOTTI AND L. ROSIER, *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*, Communications and Control Engineering, Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [86] R. W. BROCKETT, *Asymptotic stability and feedback stabilization*, Differential geometric control theory, 27 (1983), pp. 181–191.
- [87] W.-L. CHOW, *Über systeme von liearren partiellen differentialgleichungen erster ordnung*, Mathematische Annalen, 117 (1940), pp. 98–105.
- [88] F. CLARKE, *Lyapunov Functions and Feedback in Nonlinear Control*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004, pp. 267–282.
- [89] F. H. CLARKE, Y. S. LEDYAEV, L. RIFFORD, AND R. J. STERN, *Feedback stabilization and Lyapunov functions*, SIAM Journal on Control and Optimization, 39 (2000), pp. 25–48.
- [90] F. H. CLARKE, Y. S. LEDYAEV, E. D. SONTAG, AND A. I. SUBBOTIN, *Asymptotic controllability implies feedback stabilization*, IEEE Transactions on Automatic Control, 42 (1997), pp. 1394–1407.

- [91] J. M. CORON, *Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift*, Mathematics of Control, Signals and Systems, 5 (1992), pp. 295–312.
- [92] ———, *Links between local controllability and local continuous stabilization*, in Nonlinear Control Systems Design 1992: Selected papers from the 2nd IFAC Symposium, M. FLIESS, ed., IFAC Symposia Series, Elsevier, 1992, pp. 165–171.
- [93] ———, *On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law*, SIAM Journal on Control and Optimization, 33 (1995), pp. 804–833.
- [94] ———, *Control and Nonlinearity*, Mathematical surveys and monographs, American Mathematical Society, 2007.
- [95] A. FILIPPOV, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*, vol. 18, Springer Science & Business Media, 1988.
- [96] R. GOEBEL AND A. TEEL, *Direct design of robustly asymptotically stabilizing hybrid feedback*, Esaim-control Optimisation and Calculus of Variations, 15 (2009), p. 205–213.
- [97] L. GRÜNE, *Stabilization by sampled and discrete feedback with positive sampling rate*, Springer London, London, 1999, pp. 165–182.
- [98] L. GRÜNE AND D. NESIC, *Optimization-based stabilization of sampled-data nonlinear systems via their approximate discrete-time models*, SIAM Journal on Control and Optimization, 42 (2003), pp. 98–122.
- [99] M. HAUTUS, *Stabilization controllability and observability of linear autonomous systems*, Indagationes Mathematicae (Proceedings), 73 (1970), pp. 448 – 455.
- [100] H. HERMES, *Asymptotically stabilizing feedback controls and the nonlinear regulator problem*, SIAM Journal on Control and Optimization, 29 (1991), pp. 185–196.
- [101] A. ISIDORI, *Nonlinear Control Systems*, Communications and Control Engineering, Springer London, 3rd ed. ed., 1995.
- [102] I. KARAFYLLIS, *Stabilization by means of time-varying hybrid feedback*, Mathematics of Control, Signals and Systems, 18 (2006), pp. 236–259.
- [103] I. KARAFYLLIS AND C. KRAVARIS, *Global stability results for systems under sampled-data control*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 19 (2009), pp. 1105–1128.
- [104] ———, *Robust global stabilisability by means of sampled-data control with positive sampling rate*, International Journal of Control, 82 (2009), pp. 755–772.

- [105] I. KARAFYLLIS AND M. KRSTIC, *Nonlinear stabilization under sampled and delayed measurements, and with inputs subject to delay and zero-order hold*, in 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Dec 2011, pp. 7581–7586.
- [106] ———, *Nonlinear stabilization under sampled and delayed measurements, and with inputs subject to delay and zero-order hold*, IEEE Transactions on Automatic Control, 57 (2012), pp. 1141–1154.
- [107] I. KARAFYLLIS AND J. TSINIAS, *Control Lyapunov functions and stabilization by means of continuous time-varying feedback*, ESAIM: COCV, 15 (2009), pp. 599–625.
- [108] H. KHALIL, *Nonlinear Systems*, Pearson Education, Prentice Hall, 3rd ed. ed., 2002.
- [109] N. MARCHAND AND M. ALAMIR, *Asymptotic controllability implies continuous-discrete time feedback stabilizability*, in Nonlinear control in the year 2000 volume 2, A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, and W. Respondek, eds., Springer London, London, 2001, pp. 63–79.
- [110] H. MICHALSKA AND M. TORRES-TORRITI, *A geometric approach to feedback stabilization of nonlinear systems with drift*, Systems & Control Letters, 50 (2003), pp. 303 – 318.
- [111] D. NESIC AND A. R. TEEL, *A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models*, IEEE Transactions on Automatic Control, 49 (2004), pp. 1103–1122.
- [112] J.-B. POMET, *Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift*, Systems & Control Letters, 18 (1992), pp. 147 – 158.
- [113] C. PRIEUR, *Asymptotic controllability and robust asymptotic stabilizability*, SIAM Journal on Control and Optimization, 43 (2005), pp. 1888–1912.
- [114] C. PRIEUR, R. GOEBEL, AND A. R. TEEL, *Hybrid feedback control and robust stabilization of nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 52 (2007), pp. 2103–2117.
- [115] L. RIFFORD, *Semiconcave control-lyapunov functions and stabilizing feedbacks*, SIAM Journal on Control and Optimization, 41 (2002), pp. 659–681.
- [116] L. ROSIER AND J.-M. CORON, *A relation between continuous time-varying and discontinuous feedback stabilization*, J. Math. Syst. Estim. Control, 4 (1994), pp. 67–84.
- [117] E. P. RYAN, *On Brockett’s condition for smooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback*, SIAM Journal on Control and Optimization, 32 (1994), pp. 1597–1604.

- [118] R. SEPULCHRE, G. CAMPION, AND V. WERTZ, *Some remarks about periodic feedback stabilization*, in *Nonlinear Control Systems Design 1992*, M. FLIESS, ed., IFAC Symposia Series, Pergamon, Oxford, 1993, pp. 403 – 408.
- [119] H. SHIM AND A. TEEL, *Asymptotic controllability and observability imply semiglobal practical asymptotic stabilizability by sampled-data output feedback*, *Automatica*, 39 (2003), pp. 441 – 454.
- [120] E. D. SONTAG, *A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21 (1983), pp. 462–471.
- [121] ———, *A ‘universal’ construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization*, *Systems & Control Letters*, 13 (1989), pp. 117 – 123.
- [122] ———, *Mathematical control theory. Deterministic finite dimensional systems. 2nd ed.*, New York, NY: Springer, 2nd ed. ed., 1998.
- [123] ———, *Stability and stabilization: discontinuities and the effect of disturbances*, Springer Netherlands, Dordrecht, 1999, pp. 551–598.
- [124] E. D. SONTAG AND H. J. SUSSMANN, *Remarks on continuous feedback*, in *1980 19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, Dec 1980, pp. 916–921.
- [125] ———, *Nonsmooth control-Lyapunov functions*, in *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3, Dec 1995, pp. 2799–2805 vol.3.
- [126] H. J. SUSSMANN, *Subanalytic sets and feedback control*, *Journal of Differential Equations*, 31 (1979), pp. 31 – 52.
- [127] ———, *A general theorem on local controllability*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25 (1987), pp. 158–194.
- [128] P. TABUADA, *Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52 (2007), pp. 1680–1685.
- [129] D. THEODOSIS AND J. TSINIAS, *Sufficient Lie algebraic conditions for sampled-data feedback stabilization*, in *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Dec 2015, pp. 6490–6495.
- [130] J. TSINIAS, *Sufficient lyapunov-like conditions for stabilization*, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2 (1989), pp. 343–357.
- [131] ———, *Remarks on asymptotic controllability and sampled-data feedback stabilization for autonomous systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 (2010), pp. 721–726.

- [132] —, *New results on sampled-data feedback stabilization for autonomous nonlinear systems*, Systems & Control Letters, 61 (2012), pp. 1032 – 1040.
- [133] J. TSINIAS AND D. THEODOSIS, *Sufficient Lie algebraic conditions for sampled-data feedback stabilizability of affine in the control nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 61 (2016), pp. 1334–1339.
- [134] V. I. UTKIN, *Sliding modes in control and optimization*, Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [135] J. WARGA, *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, 1972.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Α

Ανάδραση

- με δειγματοληψία 128, 131, 137
- συνεχής στατική 120, 128
- σχεδόν λεία 124
- χρονικά μεταβαλλόμενη 125, 128

Ανιχνευσιμότητα 7, 20, 23

Απεικόνιση

- αιτιατή 31, 71
- ισχυρώς αιτιατή 71
- μη αιτιατή 31

Δ

Διαχωρισιμότητα 12

Ε

Ελέγξιμο

- ολικά ασυμπτωτικά 119
- τοπικά ασυμπτωτικά 119
- τοπικά ελέγξιμο σε μικρό χρόνο 119

Θ

Θεώρημα

- Artstein 124
- Artstein-Sontag 124
- Brockett 120
- Sontag 123

Λ

Λύση Filippov 127

Π

Παρατηρητής

- γραμμικός 9, 10
- διακοπτόμενος 25, 84, 87
- μη αιτιατός 30
- υψηλού κέρδους 18, 34

Παρατηρησιμότητα 7

μη γραμμικά συστήματα 11

Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

- γραμμικά συστήματα 6
- με διακοπτόμενη ακολουθία 73
- με καθυστέρηση 72
- μη αιτιατό 32

Σ

Συνάρτηση

- Ελέγχου Lyapunov 122
- θετικά ορισμένη 35

Συνθήκη

- Artstein-Sontag 124, 133
- Brockett 120
- Βαθμού Lie άλγεβρας 126
- Βαθμού Παρατηρησιμότητας 7, 14, 37

Σύστημα

- Liénard 34
- ανιχνεύσιμο 7, 10, 20
- γραμμικό 6
- δεξιά πλήρες 12, 31, 32, 71
- διγραμμικό 37
- παρατηρήσιμο 6, 12
- ομοιόμορφα 15
- τοπικά ασθενώς 13
- σταθεροποιήσιμο 8

ασθενώς ολικά.....	131	positive definite	35, 122, 132
ημι-ολικά	137	proper.....	35, 122, 132
συνεχώς	120		
τοπικά.....	120		
σύνθετο	25		
τριγωνικό.....	27, 30, 70		
		H	
		High gain observer.....	18
		L	
X		Lie Algebra Rank Condition	126
Χώρος Παρατήρησης.....	14		
		N	
		nonholonomic integrator.....	121
B			
Brockett's Necessary Condition	120	O	
		observability.....	7
		Observability Rank Condition	7
		Observation Space.....	14
C		observer.....	6
comparison functions.....	119		
Control Lyapunov Function	122	R	
controllability.....	118	Rosenbrock Observability Criterion.....	8
D		S	
detectability	7	small control property.....	123
distinguishability.....	12	small time locally controllable	119
		stabilizability.....	118
F		switching	23
Filippov solution.....	127	Switching Observer.....	25, 73, 84, 87
forward complete.....	31, 71		
full order observer.....	10		
Function			