



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

**Αεροδυναμική Ανάλυση πτερύγων με καμπυλωμένα άκρα με  
χρήση μεθόδου στοιχείων στροβιλότητας**

Μεταπτυχιακή εργασία

Ιωάννης Τσαγκαρλιώτης

Επιβλέπων Καθηγητής:

Βασίλειος Α. Ριζιώτης, Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2016



## Περίληψη

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει μια μέθοδο επίλυσης ασυμπίεστων μη συνεκτικών ροών και των αεροδυναμικών μεγεθών και την εφαρμογή σε πτέρυγες με καμπυλωμένα άκρα. Η ευρεία χρήση τέτοιων συσκευών στα άκρα των πτερύγων τις τελευταίες δεκαετίες, λόγω των θετικών αποτελεσμάτων στην διάσπαση των επαγόμενων στροβίλων, έχει αυξήσει το ενδιαφέρον για τη μελέτη τους. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι αυτή των συνοριακών στοιχείων σε συνδυασμό με τα φύλλα στροβιλότητας. Σε αυτή τη μεθοδολογία αξιοποιούμε την άμεση διατύπωση του δυναμικού, συνθήκη Kutta και συνθήκη Kelvin. Τα αποτελέσματα που εξάχθηκαν συγκρίθηκαν με τα αντίστοιχα πειραματικά.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING  
SECTION OF FLUIDS  
LABORATORY OF AERODYNAMICS

**Aerodynamic analysis of wings with curved tips with the use of  
vortex element method**

Diploma Thesis

Ioannis Tsagkarliotis

Supervisor:

Vasilis A. Riziotis, Assistant Professor NTUA

Αθήνα, 2016

## Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή .....	9
1.1.	Ιστορική επισκόπηση.....	9
1.2.	Η σημασία των στροβίλων ακροπτερυγίων (wingtip vortices).....	9
1.3.	Γενικά στοιχεία για τα ακροπτερύγια (wingtip devices).....	15
1.4.	Οι πτέρυγες με κυρτό άκρο (Οι πτέρυγες με κυρτό άκρο ).....	16
1.5.	Πρώιμες προσπάθειες.....	17
1.6.	Εφαρμογές των Winglets.....	18
1.7.	Θεωρητική επεξήγηση.....	20
1.8.	Στόχος της εργασίας.....	25
2.	Θεωρητική επισκόπηση της μεθόδου .....	27
2.1.	Οι πλεγματικές και μη πλεγματικές μέθοδοι.....	27
2.2.	Θεωρία των σωμάτων με πάχος .....	28
2.3.	Αναπαράσταση φύλλου στροβιλότητας.....	29
2.4.	Η δυναμική θεώρηση του Φύλλου Στροβιλότητας .....	31
2.5.	Ο Ομόρρους ως Φύλλο Στροβιλότητας .....	32
2.6.	Οι Βασικές Εξισώσεις του Προβλήματος.....	35
2.7.	Η Ροή Γύρω από Ανωστικά Σώματα με Πάχος.....	37
2.8.	Η αριθμητική διακριτοποίηση του προβλήματος.....	46
2.8.1.	Διακριτοποίηση της γεωμετρίας.....	46
2.8.2.	Συνθήκη μη εισχώρησης.....	50
2.8.3.	Συνθήκη Kutta .....	52
3.	Υπολογιστικά αποτελέσματα.....	53
3.1.	Εισαγωγή .....	53
3.2.	Περιγραφή του πειράματος .....	53
3.3.	Αποτελέσματα .....	54
3.4.1.	Βασική πτέρυγα.....	55
3.4.2.	Πτέρυγα με καμπυλωμένο άκρο ( winglet2 ) .....	57
3.4.3.	Υπολογιστικά αποτελέσματα για τη βασική πτέρυγα .....	59
3.4.4.	Υπολογιστικά αποτελέσματα για την πτέρυγα με τα καμπυλωμένα άκρα ....	64
3.5.	Συμπεράσματα .....	68
4.	Αποτίμηση εργασίας - γενικά συμπεράσματα.....	69
4.1.	Συμπεράσματα .....	69
4.2.	Προτάσεις για μελλοντική εργασία .....	69

## **Abstract**

This paper presents a method for solving incompressible and inviscid flows and calculating aerodynamic sizes and application wings with curved edges. The widespread use of such devices on the ends of the wings in recent decades, due to positive results in the decomposition of the induced turbulence has increased the interest in the study. The method used is that of boundary element method combined with the vortex filaments. In this methodology utilizing the direct wording of potential, Kutta condition and Kelvin Treaty. The viscosity correction is added afterwards. The results were derived were compared to the experimental.



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλεποντα καθηγητή μου Βασίλειο Ριζιώτη για τη δυνατότητα να εκπονήσω μια μεταπτυχιακή εργασία σε αντικείμενο της υπολογιστικής ρευστομηχανικής με μεγάλο ενδιαφέρον και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και όλο το προσωπικό του εργαστηρίου αεροδυναμικής για την πολύτιμη βοήθειά του.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την στήριξη ώστε να επιτύχω ότι έχω καταφέρει μέχρι τώρα και δείχνοντας κατανόηση σε όλες τις δύσκολες καταστάσεις.



## 1 Εισαγωγή

### 1.1. Ιστορική επισκόπηση

Οι μηχανικοί αεροσκαφών θα ήθελαν να μας κάνουν να πιστέψουμε ότι η αεροδυναμική είναι μια ώριμη επιστήμη. Αν αυτό ήταν αλήθεια, τότε η έρευνα πάνω στο τομέα των Winglet θα είχε πια τελειώσει. Ο Richard T. Whitcomb, ερευνητής της NASA, είχε εφεύρει αυτές τις σχεδόν κάθετες προεκτάσεις των πτερύγων (wingtip) στις αρχές της δεκαετίας του 1970 ως ένα μέσο με το οποίο ο λόγος άνωσης/οπισθέλκουσας θα μπορούσε να αυξηθεί.

Πράγματι, η έρευνα Whitcomb το 1976 έδειξε ότι ακροπτερύγια θα μπορούσαν να μειώσουν την επαγωγική οπισθέλκουσα κατά 20 τοις εκατό, με αποτέλεσμα περίπου εννέα τοις εκατό καλύτερη απόδοση στον λόγο άνωσης/οπισθέλκουσας στα 0,78 Mach για μια συγκεκριμένη φόρτιση πτέρυγας. Ο Whitcomb κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα winglet παράγουν διπλάσιο όφελος από αυτό της προέκτασης του wingtip στην αντίστοιχη περιοχή. Ως αποτέλεσμα, τα winglets επιφέρουν πολύ λιγότερο βάρος και αύξηση οπισθέλκουσας από την αύξηση του εκπετάσματος της πτέρυγας.

Τα αρχικά ακροπτερύγια είχαν σχεδιαστεί προσεκτικά με αεροτομές που αξιοποιούσαν την ενέργεια των δινών. Πολλές από τις αρχικές αρχές σχεδιασμού εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται στην τελευταία γενιά των ακροπτερυγίων.

### 1.2. Η σημασία των στροβίλων ακροπτερυγίων (wingtip vortices)

Όταν μια αεροδυναμική επιφάνεια με πεπερασμένο εκπέτασμα, όπως μια πτέρυγα αεροσκάφους ή η έλικα ενός ελικοπτέρου, κινείται σχετικά προς το ρευστό παράγει άνωση, σχηματίζονται κυκλικά μοτίβα περιστρεφόμενου ρευστού, που ονομάζονται στρόβιλοι (vortices). Αυτοί οι στρόβιλοι γενικά αναπτύσσονται κοντά στις άκρες των ανωστικών επιφανειών και βρίσκονται στη βιβλιογραφία με πολλά διαφορετικά ονόματα όπως στρόβιλοι πτερύγων (wing vortices), στρόβιλοι ακμών (tip vortices) ή στρόβιλοι εκφυγής (trailing vortices). Χαρακτηρίζονται από υψηλά επίπεδα στροβιλότητας, μεγάλες περιοχές περιστρεφόμενου ρευστού και από μια ανθεκτικό κατώρευμα της επιφάνειας. Το μεγάλο ενδιαφέρον σε αυτούς τους στρόβιλους έρχεται από τη μεγάλη σημασία και το μεγάλο αριθμό εφαρμογών που έχουν. Μια επισκόπηση στα πιο κοινά πεδία που οι στρόβιλοι των ακροπτερυγίων (wingtip vortices) καθώς και κυριότερα προβλήματα σχετικά με αυτούς θα αναφερθούν στη συνέχεια.

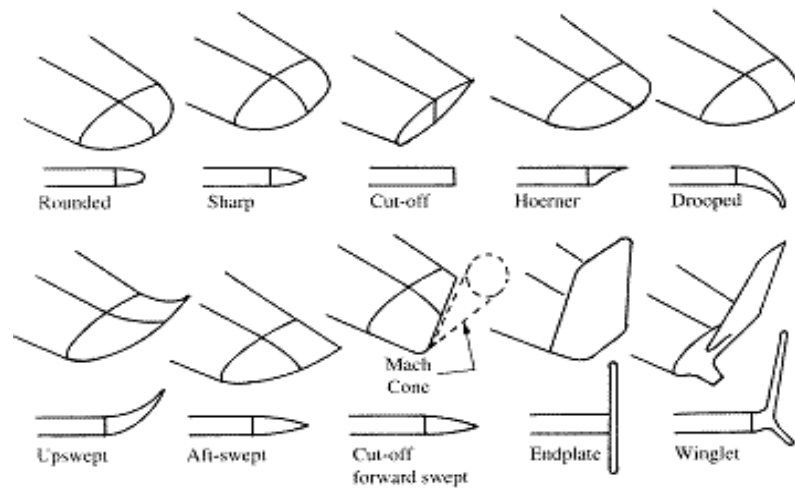
Μια αναφορά στη φυσική εξήγηση της παρουσίας του tip vortex δύνεται στη συνέχεια, όπου διαφορετικές και συμπληρωματικές προσεγγίσεις παρουσιάζονται. Η παρούσα κατάσταση της κατανόησης αυτής της σημαντικής στροβιλώδης ροής αναλύεται στη συνέχεια, όπου προηγούμενες πειραματικές, υπολογιστικές και θεωρητικές μελέτες παρουσιάζονται. Παρόλη την ύπαρξη μεγάλου αριθμού και έκτασης μελέτες στους wingtip vortices, η βιβλιογραφική επισκόπηση αποκαλύπτει σημαντικά σημεία για το σχηματισμό και την αρχική εξέλιξη των στροβίλων που ακόμα δεν είναι ξεκάθαρα και απαιτούν περισσότερη προσοχή.

Οι στροβίλοι ακροπτερυγίων (wingtip vortices) συνδέονται κυρίως με τους στροβίλους που σχηματίζονται στις άκρες των πτερύγων αεροπλάνων, αλλά ομοίως δημιουργούνται σε αρκετές παρόμοιες καταστάσεις. Επιπλέον, οι επιπτώσεις και οι επιδράσεις που αυτοί οι στροβίλοι φέρνουν μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με την κάθε περίπτωση. Για ένα αεροσκάφος, ένας κοινός τρόπος οπτικοποίησης αυτών των στροβιλωδών ροών είναι με τη συμπύκνωση των υδρατμών στον αέρα. Στην περιοχή των κέντρου του στροβίλου οι ισχυρές κεντρόφυγες δυνάμεις εξισορροπούνται από την κλίση της ακτινικής πίεσης. Στο κέντρο του στροβίλου η πίεση φτάνει στην ελάχιστη τιμή όπου, για συγκεκριμένες ατμοσφαιρικές συνθήκες, προκαλεί τη συμπύκνωση των υδρατμών. Μια συλλογή περιπτώσεων όπου οι επιδράσεις των στροβίλων ακροπτερυγίων αναφέρονται στα σχήματα στη συνέχεια, που συμπεριλαμβάνει στροβίλους στην εγγύτητα αεροδρομίων και ίχνη συμπυκνωμάτων νερού στον ουρανό; Ακροπτερύγια (winglet devices) για πτέρυγες με υψηλούς λόγους επί μήκους και στροβίλους για δέλτα πτέρυγες; στροβίλοι από προπέλες αεροπλάνων, έλικες ελικοπτέρων, έλικες ανεμογεννητριών και ναυτικές προπέλες; στροβίλοι από πτέρυγες αυτοκινήτων και οι επιδράσεις των στροβίλων από το σχηματισμό V.

Μια από τις σημαντικότερες προκλήσεις στην σημερινή αεροναυτική είναι το πρόβλημα της βελτίωσης της ασφάλειας των πτήσεων και το χώρο στην εγγύτητα των αεροδρομίων. Ιδιαίτερα η αντιμετώπιση ενός αεροπλάνου που απογειώνεται (ή προσγειώνεται) με τα ομόρρου (wake) ενός αεροπλάνου που πλησιάζει μπορεί να προκαλέσει ένα σημαντικό κίνδυνο επειδή θα συμβεί κοντά στο έδαφος. Ο επιβληθείς roll, απώλεια ύψους και δυνατά δομικά φορτία είναι μερικοί από τους κινδύνους που το υπόψη αεροπλάνο θα υποφέρει. Για να αποφευχθεί η αντιμετώπιση τέτοιων κινδύνων, οι κανονισμοί απαιτούν το αεροπλάνο να διατηρεί συγκεκριμένες αποστάσεις που έχουν τεθεί πίσω από το προηγούμενο και να τηρούνται χρονικά περιθώρια μεταξύ απογειώσεων και προσγειώσεων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, το λειτουργικό κόστος των αεροπορικών εταιριών να έχει σοβαρά επηρεαστεί. Ο στόχος πολλών ερευνητών σε αυτήν την οπτική είναι να μπορέσουν να δημιουργήσουν αυτοματοποιημένα συστήματα

πραγματικού χρόνου που να μπορούν να μετρήσουν και να προβλέψουν τις συνθήκες wake vortex στα αεροδρόμια έτσι ώστε τα αεροπλάνα να μπορούν να πετάξουν κοντύτερα, η συμφόρηση των αεροδρομίων μπορεί να ελαττωθεί και ο ρυθμός εξυπηρέτησης του αεροδιαδρόμου μπορεί να αυξηθεί.

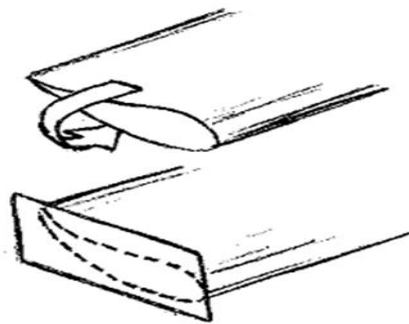
Μια σωστή κατανόηση του στροβίλου της ακμής εκφυγής από μια ανωστική πτέρυγα είναι κρίσιμη επειδή η ροή στην περιοχή της ακμής έχει μεγάλη επιρροή στην απόδοση της πτέρυγας. Το οπίσθιο σύστημα στροβίλων είναι υπεύθυνο για το κατώρευμα (downwash) και συνεπώς για την παρακινούμενη οπισθέλκουσα (induced drag) της πτέρυγας. Κτά την διάρκεια της απογείωσης, όταν το αεροπλάνο πετάει με μεγάλους συντελεστές άνωσης, η παρακινούμενη οπισθέλκουσα (induced drag) μπορεί να συνεισφέρει μέχρι και το 60% της συνολικής οπισθέλκουσας [1]. Η κατανόηση της φυσικής του σχηματισμού του στροβίλου είναι ένας σημαντικός παράγοντας για τη βελτίωση της απόδοσης της πτέρυγας. Μεταφράζοντας αυτό σε πραγματικές συνθήκες οικονομικού ενδιαφέροντος, η βελτίωση της αεροδυναμικής απόδοσης μιας πτέρυγας ενός αεροσκάφους θα επιφέρει μια συνεισφορά προς την εξοικονόμηση καυσίμων και προς την ελάττωση των εκπομπών άνθρακα στο περιβάλλον [2]. Η μελέτη της ροής στο ακροπτερύγιο είναι επίσης πολύ σημαντική και στο σχεδιασμό των ανεμόπτερων, όπου η απόδοση της πτέρυγας παίζει καθοριστικό ρόλο.



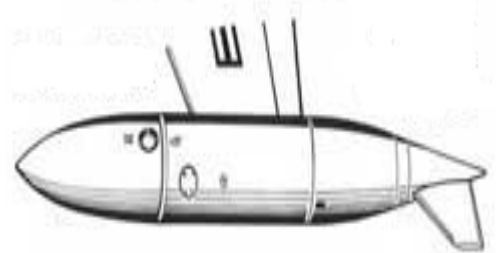
Στις προηγούμενες δεκαετίες, αρκετές λύσεις είχαν προταθεί είτε για να ανακουφίσουν είτε για ωφεληθούν από τις επιδράσεις των στροβίλων ακροπτερυγίων σε μια πτέρυγα αεροσκάφους. Wing end plates, wingtip tanks, vertical winglets, spiroid winglets είναι μερικές από τις λύσεις που προτάθηκαν τα προηγούμενα χρόνια. Η ιδέα πίσω από τις περισσότερες wingtip devices είναι η διάχυση των δυνατών στροβίλων που απελευθερώνονται στις άκρες και η βελτίωση της κατανομής άνωσης, και την ίδια στιγμή να διατηρήσει τις πρόσθετες ροπές πάνω στην πτέρυγα μέσα σε συγκεκριμένα όρια. Παρόλα αυτά, πολύ λίγα από τις πολλές ιδέες

έχουν υιοθετηθεί. Οι δυσκολίες στην παραμετρική περιγραφή τέτοιων σχεδίων και η υπολογιστική μελέτη τους επηρεάζουν ακόμα τους σχεδιαστές σύγχρονων αεροσκαφών προς την κατεύθυνση των πιο γνωστών, επιβεβαιωμένων και απλών επιλογών.

Μια βαθύτερη κατανόηση της φυσικής του σχηματισμού και εξέλιξης του στροβίλου είναι ουσιώδης στη βελτίωση των προβλέψεων και την έρευνα στα wingtip devices. Η έρευνα της NASA στα 1980s (Yates & Donaldson, 1986) εκτιμήθηκε ένας αριθμός winglets και άλλων συσκευών μείωσης οπισθέλκουσας, και βρέθηκε ότι οι wingtip devices μπορούν να μειώσουν την οπισθέλκουσα που έχει σχέση με την άνωση από 10 μέχρι 15% εάν έχουν σχεδιαστεί σαν ένα αναπόσπαστο μέρος της πτέρυγας. Οι πιο πρόσφατες παραλλαγές winglet που έχουν υιοθετηθεί σε εμπορικά αεροσκάφη, που ονομάζονται κεκλιμένα ακροπτερύγια, είναι το αποτέλεσμα ολοκληρωμένου σχεδιασμού του ακροπτερυγίου και πτέρυγας, και συνήθως έχουν από μια περιοχή του άκρου με ένα υψηλότερο βαθμό οπισθόκλισης από το υπόλοιπο τμήμα της πτέρυγας. Το Boeing 787 Dreamliner και Airbus A350 είναι μεταξύ των αεροπλάνων που έχουν υιοθετήσει αυτή τη λύση.



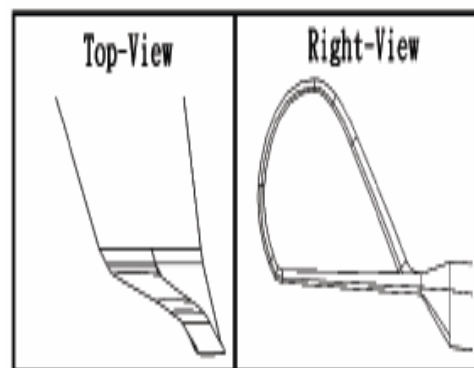
Wing end plates



wingtip tank



vertical winglet



spiroid winglet

Η μελέτη της γεωμετρίας του ακροπτερυγίου δεν σταματάει στις επιδράσεις στο αεροπλάνο , αλλά εκτείνεται στην εξέλιξη του στροβίλου πίσω από την πτέρυγα. Ιδιαίτερα, οι μηχανισμοί που προκαλούν την κατάρρευση και η αποσύνθεση ενός αντίθετα περιστρεφόμενου ζευγαριού στροβίλων είναι μεγάλης σπουδαιότητας. Οι στρόβιλοι που διασκορπίζονται γρηγορότερα μπορούν να επαυξήσουν την χωρητικότητα του αεροδρομίου. Ο Jacquín (2005) [3] παρουσίασε μια σύντομη αλλά ολοκληρωμένη επισκόπηση των σημαντικότερων παραγόντων στη σταθερότητα των trailing vortices και μια περιεκτική ανασκόπηση των μελετών που έχουν γίνει τις τελευταίες 5 δεκαετίες πάνω στους τύπους των τρόπων διάσπασης δινών δόθηκε από τους Lucca-Negro & O'Doherty (2001) [4].

Ένα από τα πιο κοινά αχνάρια που βλέπουμε να σχηματίζονται στον ουρανό λόγω του περάσματος των αεροπλάνων λέγεται αστάθεια Crow (Crow, 1970) [5], δημιουργείται από την αλληλεπίδραση των δύο στροβίλων έτσι ώστε να γίνουν συμμετρικές ημιτονοειδείς ταλαντώσεις με ανάπτυξη μεγάλου μήκους κύματος. Επίσης, πρόσφατες μελέτες στην πρόβλεψη και περιορισμό αυτών των ιχνών σκοπεύουν στον περιορισμό της επίδρασής τους στην παγκόσμια υπερθέρμανση (Naiman, 2009) [6].



Η έγκλιση των στροβίλων που έχουν παρατηρηθεί στις πτέρυγες δέλτα as wingtip vortices δεν είναι απολύτως κατάλληλες. Οι στρόβιλοι στις πτέρυγες δέλτα, δημιουργούνται από τις απότομες και με οπισθόκλιση εμπρόσθιες άκρες, είναι μια σημαντική πηγή άνωσης για αυτό το είδος πτέρυγας. Αυτές

οι δίνες αναπτύσσονται κατά μήκος της πτέρυγας και δημιουργούν μια δυνατή αναρρόφηση (suction) στην πάνω επιφάνεια κοντά στη ακμή εκφυγής, παράγοντας άνωση (Anderson, 2001).

Παρόλα αυτά, μερικοί από τους μηχανισμούς στο σχηματισμό του στροβίλου είναι παρόμοιοι με αυτούς που παρατηρούνται σε μεγάλους επί μήκους πτέρυγες, όπως ο σχηματισμός δευτερογενών και τριτογενών δινών, ο διαχωρισμός της ροής από μια απότομη ακμή και η επανακόλησή της στην επιφάνεια της πτέρυγας. Επειδή πολλά δεδομένα και πολλές πηγές μπορούν να βρεθούν για στροβίλους σε πτέρυγες δέλτα παρά για δίνες ακροπτερυγίων, ιδιαιτέρως για το σχηματισμό των δινών και την αστάθεια, είναι χρήσιμο να συνδέσουμε τα δύο φαινόμενα.

Μια ιδιαίτερη προσοχή στη βιβλιογραφία δίνεται σε trailing vortices πίσω από περιστρεφόμενα πτερύγια (blades) όπως προπέλες αεροσκαφών, στροφέια ελικοπτέρων, προπέλες ναυτικές και ανεμογεννητριών. Η αλληλεπίδραση μεταξύ του ομόρου (wake) μιας προπέλας αεροσκάφους και του αέρα επάγει μια υπολογίσιμη μεταβολή στην κατανομή της άνωσης και της οπισθέλκουσας συγκρινόμενη με αυτήν που θα είχε η πτέρυγα εάν συναντούσε «καθαρή» ροή. Επίσης, αντίθετα με τις πτέρυγες των αεροσκαφών και ανάλογα με την ένταση της ροής που είναι παράλληλης με τον άξονα περιστροφής, τα περιστρεφόμενα στροφέια (rotating blades) μπορούν να λειτουργούν στον ομόρου που ακολουθείται από τα στροφέια που λειτουργούν. Αυτό είναι σύνηθες στην περίπτωση των ελικοπτέρων όπου η αλληλεπίδραση του ομόρου με το στροφέιο, που κοινώς ονομάζεται σαν blade–vortex interaction (BVI), έχει βαθιές επιδράσεις στην αεροδυναμική και την δομική δυναμική (structural dynamics) του συστήματος των στροφείων (rotor system). Η ταχύτητα που επάγεται από τον ασταθή ομόρου έχει ως αποτέλεσμα ορμητικές αλλαγές στη ροή που συναντούν τα περιστρεφόμενα στροφέια, οι οποίες συνεισφέρουν σημαντικά στο θόρυβο και τις δονήσεις (Duraisamy, 2005) [7]. Οι στροβίλοι ακροπτερυγίων (Wingtip vortices) είναι επίσης μια σημαντική πηγή αστάθειας, θορύβου και δονήσεων σε ανεμογεννήτριες και η μελέτη της δομής ομόρου ανεμογεννητριών είναι ο κύριος στόχος πολλών μελετητών.

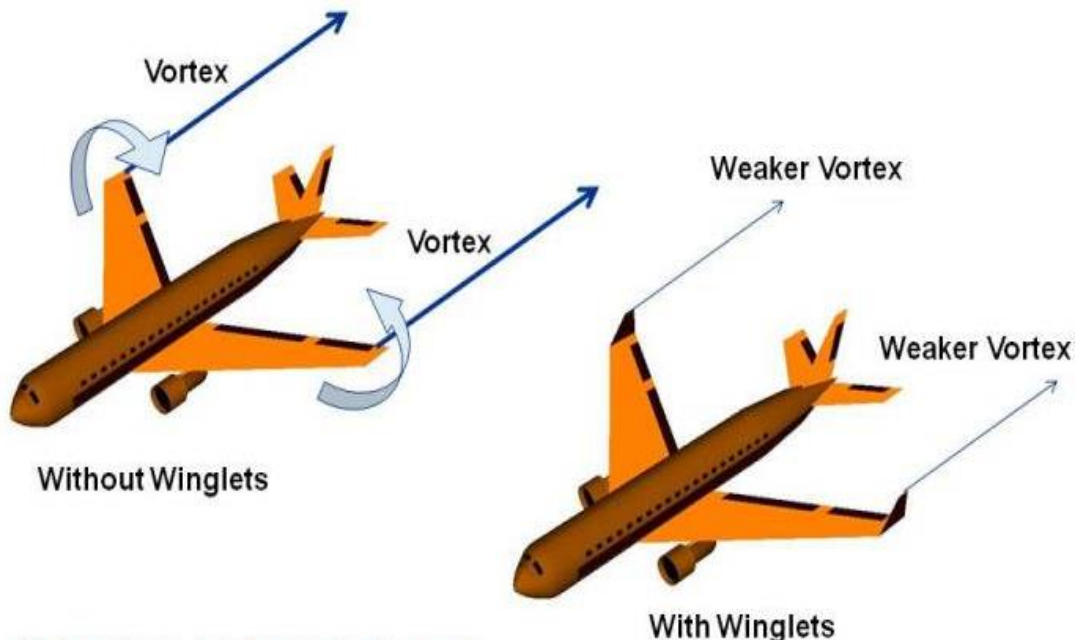
Η σπηλαίωση σε ναυτικές προπέλες λόγω στροβίλων ακροπτερυγίων είναι ένα πολύ κοινό φαινόμενο και είναι ένας σημαντικός παράγοντας στη σχεδίαση των προπελών. Η σπηλαίωση συμβαίνει σαν μια συνέπεια της ταχείας ανάπτυξης μικρών φυσαλίδων που έχουν γίνει ασταθείς κάτι που οφείλεται στη μεταβολή της πίεσης. Αυτές οι φυσαλίδες μπορούν είτε να εισαχθούν στη ροή ή να μπουν από μικρές ρωγμές στις επιφάνειες των ορίων της ροής (Arndt, 2002) [8]. Η σπηλαίωση είναι ένας σημαντικός παράγοντας ζημιών σε εξαρτήματα, θορύβου και δονήσεων.

### 1.3. Γενικά στοιχεία για τα ακροπτερύγια (wingtip devices)

Η αρχική ιδέα χρονολογείται στο 1897, όταν ο Άγγλος μηχανικός Frederick W. Lanchester πατεντάρησε την τοποθέτηση κάθετων πλακών στις άκρες των πτερυγίων σαν μια μέθοδο να ελέγξει τους στρόβιλους στα σημεία αυτά. Στις Η.Π.Α., ο γεννημένος στην Σκοτία, William E. Somerville [9] πατεντάρησε το πρώτο λειτουργικό ακροπτερύγιο το 1910. Ο Somerville εγκατέστησε τις συσκευές στα αρχικά του σχέδια του δικού του μονοπλάνου και διπλάνου.

Οι διαμορφώσεις των ακροπτερυγίων (wingtip devices), χρησιμοποιούνται για να βελτιώσουν την αεροδυναμική απόδοση των πτερυγίων των αεροσκαφών. Υπάρχουν αρκετοί τύποι ακροπτερυγίων και ενώ έχουν διαφορετικό τρόπο λειτουργίας, όλα έχουν ως στόχο τη μείωση της αντίστασης (οπισθέλκουσας) του αεροσκάφους, με την μείωση μέρους της ενέργειας που χάνεται από το στρόβιλο του ακροπτερυγίου (Σχήμα 1.3). Τα ακροπτερύγια μπορούν επίσης να μεταβάλουν τα χαρακτηριστικά ευστάθειας του αεροσκάφους και να μειώσουν τον κίνδυνο απώλειας στήριξης λόγω καθοδικών ρεύματα αέρα που μπορεί να επηρεαστεί κάποιο επόμενο αεροσκάφος.

Τέτοιες διαμορφώσεις αυξάνουν επίσης τον «ενεργό» λόγο επί μήκους (effective aspect ratio) μιας πτέρυγας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για ένα δεδομένο μεικτό φορτίο (βάρος) ενός αεροσκάφους να απαιτείται μικρότερο εμπέτασμα, άρα και μικρότερη επαγόμενη και παρασιτική αντίσταση και επομένως και μικρότερο βάρος της πτέρυγας.



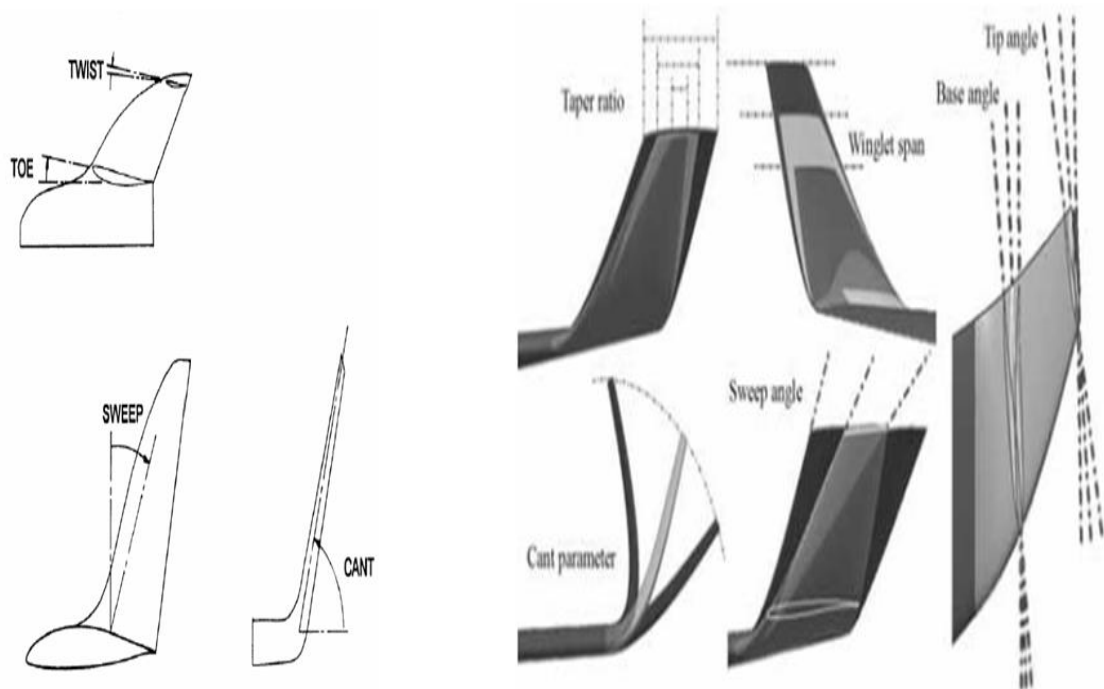
**Σχήμα 1.3 Η επίδραση του Winglet στον στρόβιλο του ακροπτερυγίου**

Οι συσκευές στα ακροπτερύγια (wingtip devices) αυξάνουν την άνωση που παράγεται στο σημείο αυτό, εξομαλύνοντας την ροή του αέρα κατά μήκος

της πτέρυγας κοντά σε αυτό. Επιπλέον, μειώνουν και την επαγόμενη αντίσταση, με αποτέλεσμα τελικά να αυξάνουν τον λόγο άνωσης προς αντίσταση ( $L/D$ ), ο οποίος έχει σημαντικό αντίκτυπο στην μείωση της κατανάλωσης καυσίμου και αύξηση της εμβέλειας στα αεροσκάφη.

#### 1.4. Οι πτέρυγες με κυρτό άκρο (Οι πτέρυγες με κυρτό άκρο )

Το 1970, ο μηχανικός Richard T Whitcomb στο ερευνητικό κέντρο της NASA στο *Langley research center*, χρησιμοποίησε τον όρο ακροπτερύγιο (*winglet*), με τη σύγχρονη έννοια, δηλαδή της σχεδόν κάθετης επέκτασης στην άκρη της πτέρυγας. Η γωνία μεταξύ της πτέρυγας και του *winglet* ή η γωνία *cant*, η προς τα έξω ή προς τα μέσα γωνία *toe* (Σχήμα 1.4) καθώς και το μέγεθος και το σχήμα του *winglet* είναι κρίσιμης σημασίας και διαφέρουν ανάλογα την εφαρμογή [10].



**Σχήμα 1.2 Βασικές γωνίες των Winglet**

Ο στρόβιλος του ακροπτερυγίου, κατά την ελικοειδή μεταφορά του, προσπίπτει στην εξωτερική πλευρά του *winglet* εφαρμόζοντας έτσι μια δύναμη με κατεύθυνση προς τη βάση της πτέρυγας και έχοντα συνιστώσα



κατά την κατεύθυνση της ώσης. Έτσι, έχουμε πρακτικά «μεταφορά ενέργειας» από την οπισθέλκουσα σε μια φαινομενική ώση. Αυτή η μικρή συνεισφορά, είναι αρκετά σημαντική, αφού η εξοικονόμηση στα καύσιμα υπερκαλύπτει τα κόστη εγκατάστασης και συντήρησης των winglets.

### 1.5. Πρώιμες προσπάθειες

Στην πρώτη πιο γνωστή δημιουργία μιας συσκευής ακροπτερυγίου τύπου Hoerner με γωνία προς τα κάτω σε ένα αεριοθούμενο αεροσκάφος ήταν το ονομαζόμενο *Lippisch-Ohren* (αυτιά του Lippisch), φέρεται να αποδίδεται στον σχεδιαστή του Messerschmitt Me 163, Alexander Lippisch, και πρώτα πρόσθεσε στο M3 και M4 τα 3<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup> πρωτότυπα του Heinkel He 162A *Spatz* ελαφριού μαχητικού για αξιολόγηση. Αυτό έγινε προκειμένου να αντισταθμίσει τα χαρακτηριστικά του dutch roll που είχε το σχέδιο της πτέρυγας λόγω της δίδρου γωνίας του αρχικού He 162. Σαν παραγωγή του επιλεγμένου από το Τρίτο Ράιχ αερωθιούμενου μαχητικού ήταν πρωταρχικής σημασίας κατά την έναρξη του 1945, διακοπή της γραμμής παραγωγής για να κάνει άλλους τύπους αλλαγές για να διορθωθούν ένα τέτοιο πρόβλημα δεν ήταν δυνατό να είναι σε διάθεση, και οι προτιθόμενες συσκευές ακροπτερυγίων έγιναν became a στάνταρ χαρακτηριστικό σε περίπου 320 completed He 162A μαχητικά που κατασκευάστηκαν, με κεταοντάδες ακόμα σκελετούς από He 162A που παρέμειναν ημιτελή λόγω του τέλους του 2<sup>ου</sup> Παγκοσμίου Πολέμου.

Ακολουθώντας το τέλος του 2<sup>ου</sup> Παγκοσμίου Πολέμου, ο Dr. Sighard F. Hoerner ήταν ο πρωτοπόρος ερευνητής σε αυτό το πεδίο, έχοντας γράψει μια τεχνική έρευνα που δημοσιεύτηκε το 1952 [11] που ζητούσε κεκλινόμενα ακροπτερύγια (Drooped wingtips) των οποίων τα πίσω άκρα επικεντρώνονταν ώστε η προκύπτουσα δίνη να απομακρύνεται από την άνω επιφάνεια της πτέρυγας. Τα Drooped wingtips συχνά αποκαλούνται "άκροπτερύγια Hoerner» προς τιμήν του. Ανεμόπτερα και ελαφρά αεροσκάφη έκαναν χρήση των ακροπτερυγίων Hoerner για πολλά χρόνια. [12].

Αρχικά ο Richard T. Whitcomb ανέπτυξε περαιτέρω το σχέδιο του Hoerner. Με προσεκτικό αεροδυναμικό σχεδιασμό έδειξε ότι τα winglets με σωστές γωνίες και σχήμα μπορούσαν να διατηρήσουν την ίδια ή μικρότερη ροπή κάμψης με μικρότερο εκπέτασμα και με μεγαλύτερη ευστάθεια πτήσης από ότι η κατασκευή με τις επεκτάσεις στο ακροπτερύγιο. Τα σχέδια του Whitcomb δοκιμάστηκαν το 1979-1980 σε πραγματικές πτήσεις στο ερευνητικό κέντρο *Dryden Flight Research Center*. Η πιο αξιοσημείωτη εφαρμογή των winglets από την NASA είναι στο *Boeing 747 Shuttle Carrier*

*Aircraft* τα οποία λόγω της σχεδίασης που είχαν βοηθούσαν περισσότερο στην διαμήκη ευστάθεια παρά στην μείωση της οπισθέλκουσας.

## 1.6. Εφαρμογές των Winglets

Ακόμη και πριν η NASA να κάνει δοκιμές πτήσης για πτερύγια, ο Burt Rutan τα ενσωματώνονται στα καινοτόμα σε σχεδιασμό Rutan VariEze χειροποίητο αεροσκάφος του, το οποίο έκανε την πρώτη του πτήση με winglets στις 21 Μαΐου, 1975. Τα συμβατικά ακροπτερύγια είχαν τοποθετηθεί στο Rutan Voyager, το πρώτο αεροσκάφος που θα έκανε τον περίπλου του κόσμου χωρίς ανεφοδιασμό το 1986. Τα ακροπτερύγια του αεροσκάφους υπέστησαν ζημιές, στο διάδρομο κατά την διάρκεια τροχοδρόμησης για την απογείωση, έγινε αποκοπή ενός μεγάλου τμήματος από κάθε wingtip, με αποτέλεσμα η πτήση να γίνει χωρίς όφελος από πτερύγια.

Τα πτερύγια εφαρμόζονται επίσης σε πολλά άλλα ιδιωτικά (επιχειρηματικά) αεριωθούμενα έτσι να μειώνεται η απόσταση απογείωσης, που επιτρέπει τη λειτουργία και από μικρότερα δευτερεύοντα αεροδρόμια, και επιτρέποντας την πτήση σε μεγαλύτερα υψόμετρα για την αποφυγή κακών καιρικών συνθηκών, δύο από τα οποία είναι πολύτιμα επιχειρησιακά οφέλη για τα εταιρικά ταξίδια.

Εκτός από την εργοστασιακά εγκατεστημένα winglets για νέα αεροσκάφη, οι aftermarket προμηθευτές έχουν αναπτύξει σετ μεταγενέστερης τοποθέτησης, για διάφορους τύπους αεροσκαφών, για να βελτιώσουν τόσο την αεροδυναμική όσο και την εμφάνιση. Πτερύγια έγινε τόσο δημοφιλές σε αυτή την κατηγορία των αεροσκαφών που ο Όμιλος Dassault, του οποίου οι σχεδιαστές είχαν αντισταθεί στην εφαρμογή τους στο Dassault Falcon μέχρι πρόσφατα, ανακοίνωσε ότι είναι σε συνεργασία με εταιρία για να δοκιμάσει μια νέα συσκευή wingtip ονομάζεται ελλειπτικό Winglet, το οποίο έχει σχεδιαστεί για να αυξήσει το εύρος και την αύξηση του ωφέλιμου φορτίου για απογειώσεις σε υψηλή θερμοκρασία και γρήγορης ανάβασης [13].

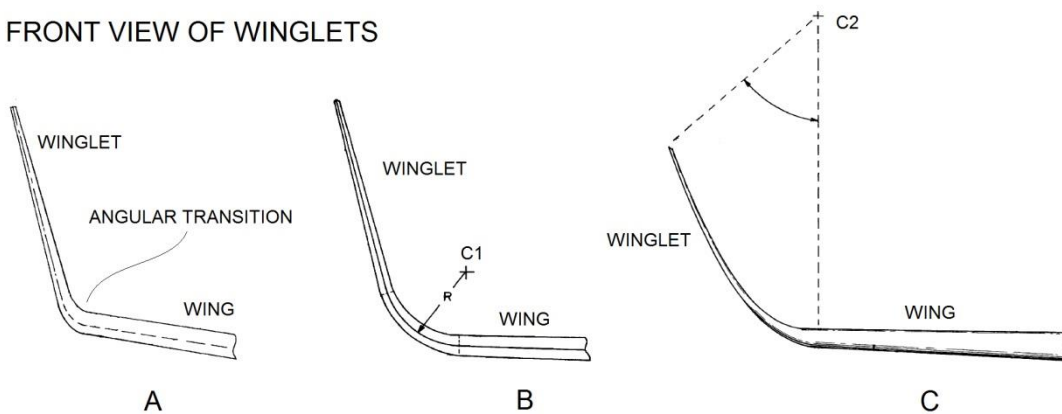
Η τελευταία εξέλιξη στην τομέα των ακροπτερυγίων είναι η ιδέα των ενσωματωμένων ακροπτερυγίων (blended winglets). Τα blended winglets είναι ενσωματωμένα στην πτέρυγα με εξομαλυμένη κλίση επιφάνειας αντί μιας απότομης γωνίας με σκοπό την μείωση την παρεμβαλόμενης οπισθέλκουσας στο σημείο ένωσης πτέρυγας με το ακροπτερύγιο. Μια απότομη εσωτερική γωνία στην περιοχή αυτή μπορεί να αλληλεπιδράσει με τη ροή του οριακού στρώματος προκαλώντας δίνη επιφέροντας οπισθέλκουσα αναιρώντας μερικά από τα οφέλη του Winglet. Αυτό

χρησιμοποιείται στα επιχειρηματικά αεριωθούμενα αεροσκάφη και ανεμοπλάνα, όπου οι ατομικές προτιμήσεις του αγοραστή είναι μια σημαντική πτυχή της αγοράς.

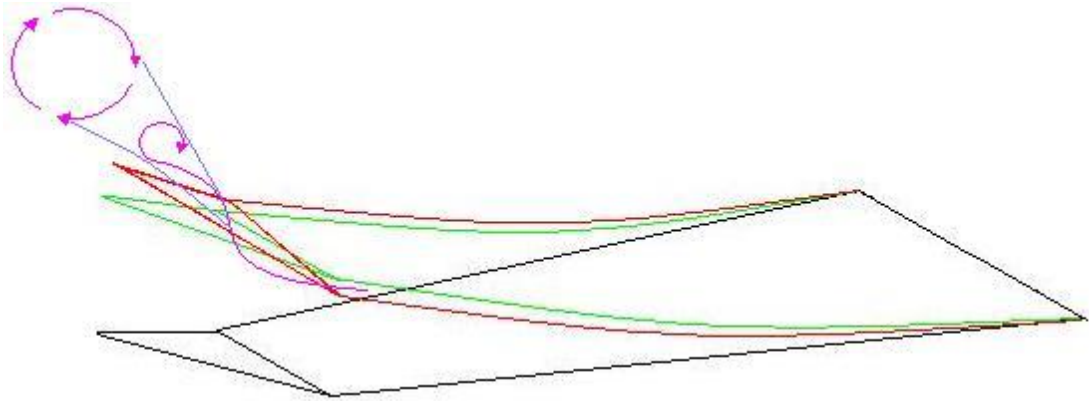
Κεκλιμένο ακροπτερύγιο (Raked wingtips) είναι ένα χαρακτηριστικό σε ορισμένα αεροσκάφη της Boeing, όπου η άκρη του φτερού έχει υψηλότερο βαθμό οπισθόκλισης (sweep) από το υπόλοιπο της πτέρυγας. Ο δεδηλωμένος σκοπός αυτού του επιπλέον χαρακτηριστικού είναι η βελτίωση της αποδοτικότητας των καυσίμων και η απόδοση αναρρίχησης και η μείωση του αναγκαίου μήκους του διαδρόμου απογείωσης. Αυτό επιτυγχάνεται με τον ίδιο τρόπο που κάνουν και τα winglets, αυξάνοντας την αποτελεσματική αναλογία της πτέρυγας και τη διάσπαση των δινών των πτέρυγων που δημιουργούνται στις άκρες αυτών και επιφέρουν σημαντική συνεισφορά στην οπισθέλκουσα.

Τα μη επίπεδα ακροπτερύγια (non-planar wingtips) είναι κανονικά τοπθετημένα με γωνία προς τα πάνω σε μια πολυεδρική διαμόρφωση πτέρυγας, αυξάνοντας την τοπική διέδρο κοντά στην άκρη πτέρυγα, με σχέδια πολυεδρικών πτερυγών να είναι δημοφιλοί για μοντέλα αεροσκαφών ελεύθερης πτήσης για δεκαετίες. Τα μη επίπεδα ακροπτερύγια παρέχουν το όφελος του ελέγχου του ομόρρου, που έχουν τα winglets, με λιγότερο παρασιτική οπισθέλκουσα, εφόσον έχουν σχεδιαστεί προσεκτικά. Τα μη επίπεδα ακροπτερύγια συχνά έχουν μια μικρή οπισθόκλιση σαν ένα raked wingtip και μπορεί επίσης να συνδυαστεί με ένα Winglet. Ένα Winglet είναι επίσης μια ειδική περίπτωση ενός μη επίπεδου ακροπτερύγιου.

#### FRONT VIEW OF WINGLETS



Σχήμα : Διαφορετικές αντιμετωπίσεις στο σχεδιασμό της μεταβατικής περιοχής



Σχήμα : Οπίσθια κεκλινόμενο ακροπτερύγιο (raked winglets)

Οι σχεδιαστές αεροσκαφών μετά τον Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, πριν από την εισαγωγή των ακροπτερυγίων, χρησιμοποιούσαν ως επί το πλείστον επίπεδη σχέδια πτέρυγας με απλή δίοδο. Με την ευρεία χρήση των winglets στον σχεδιασμό των ανεμοπλάνων στη δεκαετία του '90, οι σχεδιαστές προσπάθησαν να βελτιστοποιήσουν περαιτέρω την αεροδυναμική απόδοσή τους. Τα πτερύγια ανεμόπτερων είχαν αρχικά τοποθετηθεί στις επίπεδες πτέρυγες, με μόνο μια μικρή περιοχή μετάβασης με σχεδόν ορθή γωνία. Μόλις βελτιστοποιήθηκε η απόδοση του Winglet, η προσοχή στράφηκε στη βελτίωση της απόδοσης της περιοχής μετάβασης πάνω στην πτέρυγα μέχρι το Winglet. Μια κοινή λύση ήταν η λέπτυνση της περιοχής μετάβασης από τη χορδή του ακροπτερύγιο προς τη χορδή του Winglet, για να τοποθετηθεί το Winglet στη βέλτιστη θέση. Αν το κεκλιμένο τμήμα είχε κλίση προς τα άνω, το ύψος του Winglet θα μπορούσε επίσης να μειωθεί. Τελικά, οι σχεδιαστές που απασχολούνταν με πολλαπλά μη επίπεδα τμήματα, με το καθένα με κλίση σε μια μεγαλύτερη γωνία, καταθέτοντας τις ανάλογα με τα πτερύγια.

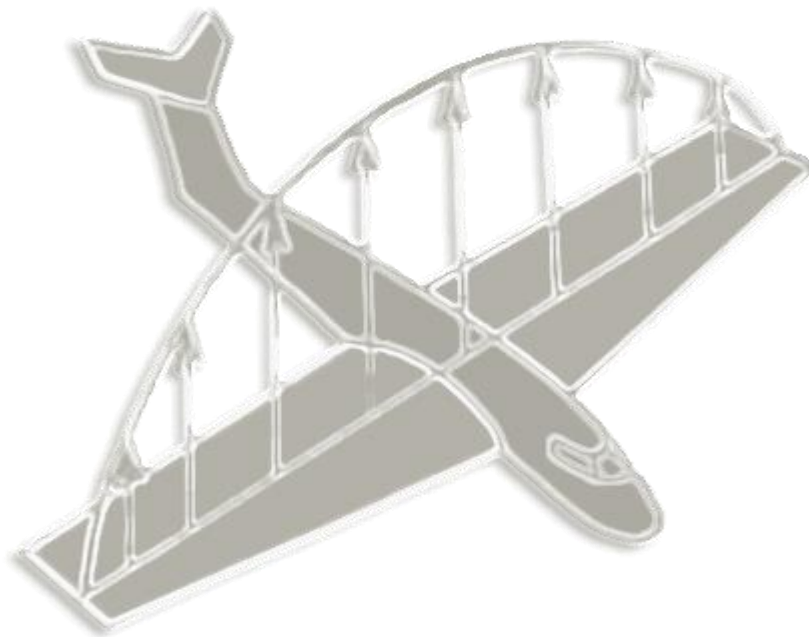
### 1.7. Θεωρητική επεξήγηση

Η βασική και κύρια ιδέα της ύπαρξης των wingtip vortices παρουσιάζονται σε αυτό το τμήμα. Η περίπτωση της ορθογώνιας σταθερής πτέρυγας χρησιμοποιείται ως αναφορά, αλλά τέτοια παραδείγματα συνήθως χρησιμοποιούνται και για άλλες περιπτώσεις.

Θα πρέπει να προβούμε σε μια λεπτομερή θεωρητική ανάλυση του σχηματισμού trailing vortex και της εξέλιξής του βασίζομενοι σε παρατηρήσεις που έχουν γίνει, διαφορετικά μοντέλα και μηχανισμούς που θα εξηγούν την παρουσία του vortex. Αυτές οι διαφορετικές προσεγγίσεις θα πρέπει να ερμηνευτούν σαν το ίδιο φαινόμενο που περιγράφεται από διαφορετική οπτικές.

Παρατηρώντας τη ροή πάνω στην επιφάνεια μιας ορθογωνικής πτέρυγας σε μία γωνία πρόσπτωσης, σε μία περιοχή κοντά στο άκρο οι γραμμές ροής στην επιφάνεια αναρρόφησης (suction surface) κάμπτονται προς την κατεύθυνση της ρίζας της πτέρυγας όπου η ροή ενώ η ροή στην επιφάνεια πίεσης κάμπτονται με κατεύθυνση προς το άκρο [14].

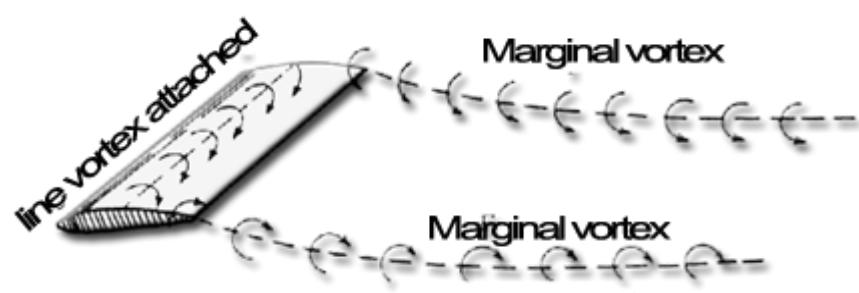
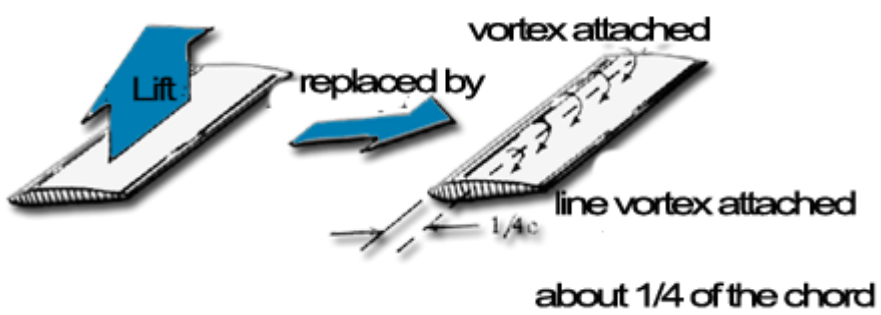
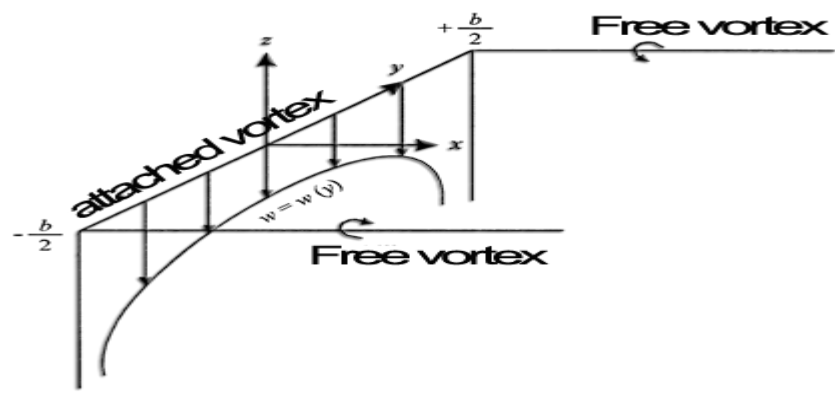
Η διαδικασία ανασήκωσης παρατηρείται ότι ξεκινάει να εκτυλίσσεται κοντά στην ακμή πρόσπτωσης όπου η ροή επιταχύνεται από την επιφάνεια πίεσης στην επιφάνεια αναρρόφησης (suction side) και τυλίγεται γύρω από το άκρο [15].



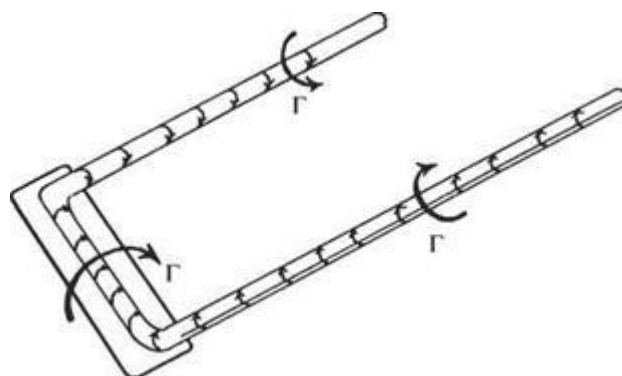
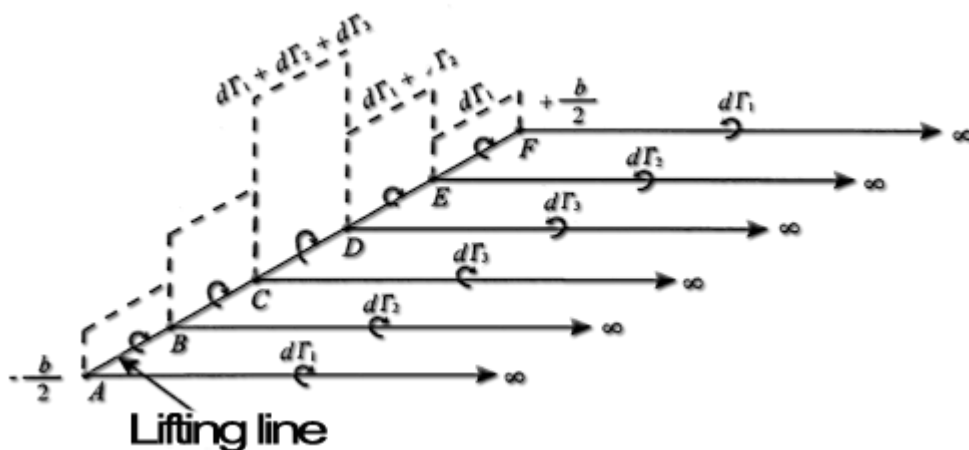
Με την εξέλιξη αυτής της διαδικασίας κατά μήκος της άκρης, η ροή ερχόμενη από την επιφάνεια πίεσης συναντάει μία αντίθετη δυνατή κλίση πίεσης η οποία τελικά αναγκάζει το οριακό στρώμα σε αποκόλληση [16]. Η άνωση που δέχεται το ρευστό από την ταχύτητα εγκάρσιας ροής σε συνδυασμό με τη ροή στην κατεύθυνση του ρεύματος σχηματίζουν μια στροβιλοειδές δομή με ισχυρή ελικοειδή κίνηση. Η δίνη που σχηματίζεται έτσι μεγαλώνει σε μέγεθος και η δύναμη κατά μήκος του φτερού και δευτερογενή δίνες ανιχνεύονται στην περιοχή της αποκολλημένης ροής [17]. Η φυσική της ροής για αεροναυτικές εφαρμογές είναι εξαιρετικά περίπλοκη, δεδομένου ότι η διαδικασία είναι σε μεγάλο βαθμό τυρβώδης, τρεις διαστάσεων και περιλαμβάνει περιοχές κλίσης υψηλής ταχύτητας με πολλαπλές αποκολλήσεις ροής [18]. Αυτή η στροβιλιζόμενη ροή μεταφέρεται κατάντη της οπίσθιας ακμής και σχηματίζει τελικά τη δίνη στο τέλος. Η ροή είναι «ενσωματωμένη» στο οριακό στρώμα που δημιουργείται πάνω από στην επιφάνεια της πτέρυγας και αποβάλλεται κατάντη της οπίσθιας ακμής με τη μορφή ενός λεπτού φύλλου με ένα υψηλό επίπεδο στροβιλισμού. Ο ομόρρους συμπαρασύρεται στη δίνη του άκρου και σε απόσταση λίγων

χορδών από τη μεταπορευόμενη ακμή, παρατηρείται ένα ζευγάρι αντίθετα περιστρεφόμενων αξονοσυμμετρικά δινών. Αυτό το σύστημα δύο παράλληλων μεταπορευόμενων δινών είναι ασταθές και μπορεί να εμφανιστεί ένας αριθμός μηχανισμών αλληλεπίδρασης καθώς κινείται προς τα κάτω της πτέρυγας.

Κοιτάζοντας την πολύπλοκη φύση των μεταπορευόμενων δινών, η απαίτηση για ύπαρξη απλών μοντέλων και στοιχειωδών μηχανισμών οι οποίοι να είναι σε θέση να ρίξουν φως σχετικά με τους βασικούς φυσικούς παράγοντες είναι απαραίτητη. Ένα μεγάλο και ουσιαστικό βήμα προς τα εμπρός στον τομέα της αεροναυπηγικής ήρθε με την θεωρία πεπερασμένης πτέρυγας των Lanchester - Prandtl που έδειξε πώς θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν δεδομένα από 2διάστατη αεροτομή για να προβλεφθούν τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της πτέρυγας πεπερασμένου εκπετάσματος. Ένα τέτοιο μοντέλο ήταν επίσης πολύ σημαντικό για την κατανόηση του ρόλου των πίσω δινών στην παραγωγή της άνωσης και ο λόγος για το σχηματισμό τους.



Μέσα σε αυτό το μοντέλο, η πτέρυγα ανύψωσης και ο ομόρρους της έχουν αντικατασταθεί από ένα σύστημα δινών που προσδίδουν στον περιβάλλοντα αέρα μια παρόμοια κίνηση με την πραγματική ροή και δημιουργεί μια δύναμη που ισοδυναμεί με την άνωση. Το σύστημα δινών μπορεί να διαιρεθεί σε τρία κύρια μέρη τα οποία μαζί σχηματίζουν ένα δακτύλιο δίνης: η αρχική δίνη, το σύστημα μεταπορευόμενων δινών και η δεσμευμένη σύστημα στροβιλισμού [19]. Ενώ τα δύο πρώτα είναι παρατηρήσιμες φυσικές οντότητες, το δεσμευμένο σύστημα δίνης είναι μια υποθετική διάταξη ενός αριθμού δινών που αντικαθιστούν την πραγματική φυσική πλευρά όπου ο στροβιλισμός του κάθε λεπτού νήματος δίνης συνδέεται με την από άκρο σε άκρο κλίση της κατανομής κυκλοφορίας στην πτέρυγα. Αυτό το ανάντη τμήμα του δακτυλίου δίνης αντιπροσωπεύει το οριακό στρώμα των άνω και κάτω επιφανειών της πτέρυγας και είναι η πηγή της άντωσης και οπισθέλκουσας μέσω των διανομών πίεσης και διαμητρικής τάσης. Η κατανομή των νημάτων δίνης τελικά συγχωνεύονται στο σύστημα μεταπορευόμενης δίνης προς τα κάτω της πτέρυγας. Επιπλέον, η αρχική δίνη σύντομα μένει πίσω και για πρακτικούς λόγους, οι πίσω δίνες συχνά μοντελοποιούνται ότι εκτείνονται στο άπειρο.



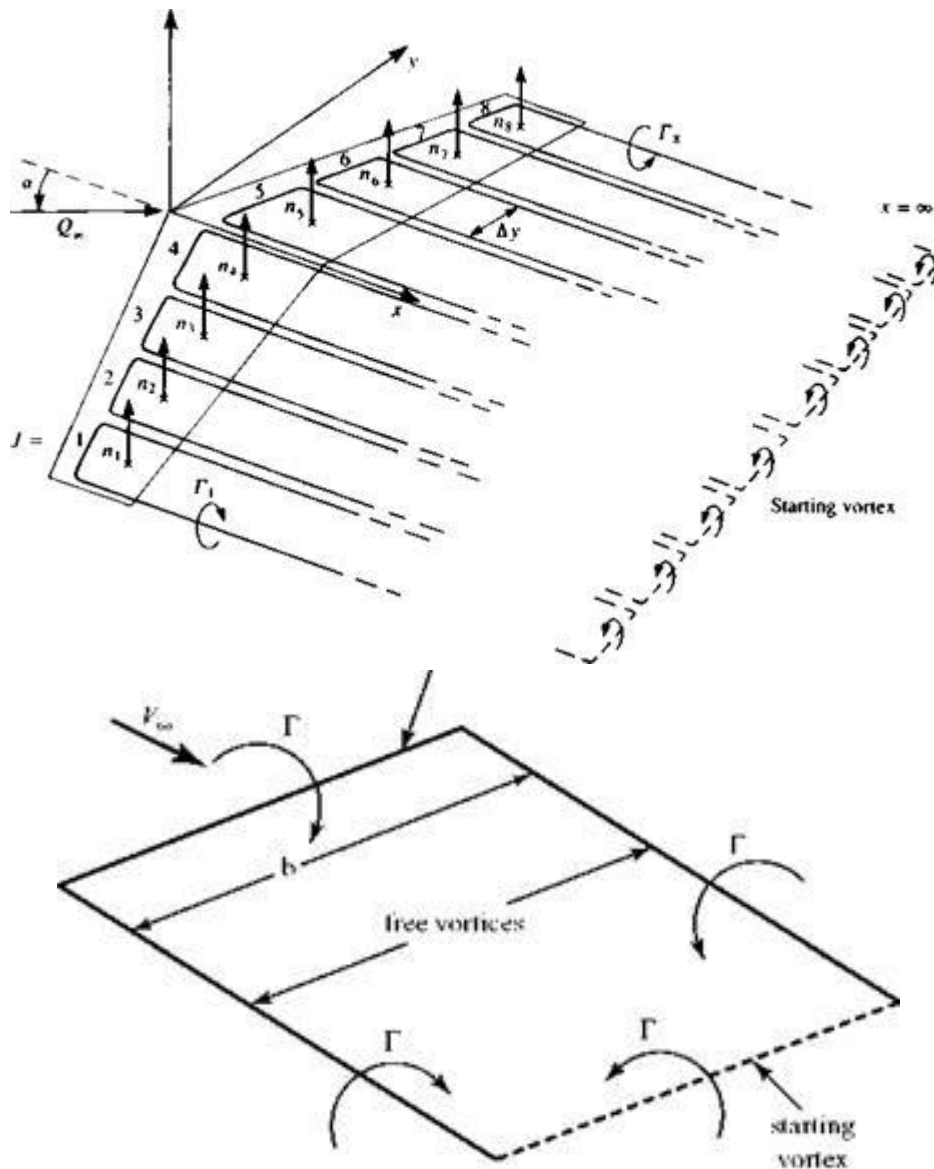


Figure 6.5. Simple horseshoe vortex representation of a wing.

Η δίνη πετάλου (horseshoe vortex) είναι σημαντική αναπαράσταση της πτέρυγας ανύψωσης και η μέθοδος πλέγματος (lattice method) που προέρχονται από αυτή την παράσταση είναι ένα ισχυρό αριθμητικό εργαλείο για τη διερεύνηση της διαμόρφωσης και της γεωμετρίας της πτέρυγα. Για την εκτίμηση των μακρινών φαινομένων, όπως οι επιπτώσεις που έχουν οι δίνες σε μια πτήση, υιοθετείται μια απλουστευμένη έκδοση του μοντέλου πέταλου δίνης που σχηματίζεται από μια μόνο οριακή δίνη (bound vortex) και δύο πίσω δίνες. Βασισμένο στο θεώρημα του Helmholtz που ισχύει για ατριβείς και ασυμπίεστες ροές, η δίνη νήματος αντικαθιστώντας το φτερό θα συνεχίσει στον ομόρρου σαν δύο απείρως μεγάλες ελεύθερες δίνες και η δύναμη της οριακής δίνης είναι ίση με την δύναμη των δύο πίσω δινών. Παρά το γεγονός ότι το ιξώδες διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στην αλληλεπίδραση του ρευστού με το πτερύγιο, κατά την διάρκεια του σχηματισμού δίνης, την εξέλιξη στον ομόρρου και την τελική διάχυση, αυτό το μοντέλο είναι σε θέση



να δώσει ακριβή αποτελέσματα για την ανύψωση που παράγεται από το φτερό. Επιπλέον, το πέταλο μοντέλο δίνει εξηγεί και δικαιολογεί το σχηματισμό και την ύπαρξη των δινών ακροπτερυγίου με τους νόμους διατήρησης.

Ο μηχανισμός του σχηματισμού της δίνης στην άκρη του φτερού μπορεί να εξηγηθεί και από άλλες συμπληρωματικές προσεγγίσεις από τη θεωρία της άπειρη πτέρυγας. Μία από αυτές τις απόψεις, ίσως εκείνη που είναι πιο συχνά χρησιμοποιούμενη λόγω της απλότητας και της αμεσότητά της, είναι η ερμηνεία του πεδίου πίεσης. Η φυσική του μηχανισμού για την παραγωγή ανύψωση της πτέρυγας είναι η ύπαρξη μιας υψηλότερης πίεσης στην κάτω επιφάνεια από ό, τι στην άνω επιφάνεια (η συμβολή στην ανύψωση της τάσης διάτμησης είναι συνήθως αμελητέα). Η καθαρή ανισοροπία της κατανομής της πίεσης δημιουργεί την άνοση. Η ροή κοντά στα ακροπτερύγια, αναγκασμένη από τη διαφορά της πίεσης μεταξύ των δύο επιφανειών, να καμφθεί από τον πυθμένα προς την άνω πλευρά της πτέρυγας. Ως αποτέλεσμα, η ροή στην κάτω επιφάνεια του πτερυγίου παρουσιάζει ένα στοιχείο από άκρο σε άκρο που κατευθύνεται από τη ρίζα προς το άκρο του προκαλώντας τα γραμμές ροής να λυγίσουν και αντίστροφα για την άνω επιφάνεια. Η ροή διέλευσης δεν μπορεί να κινηθεί επ' αόριστον στην από άκρο σε άκρο κατεύθυνση κατά μήκος της άνω επιφάνειας λόγω της σταδιακής εξισορρόπησης της πίεσης που, σε συνδυασμό με το στοιχείο της ταχύτητα ρεύματος, παράγει μια συναγωγή της ροής προς την κατεύθυνση της οπίσθιας ακμής σε στροβιλοειδή κίνηση. Επιπλέον, η διαφορά των κατευθύνσεων των ροής από τις επιφάνειες της πίεσης και αναρροφήσεως έχει σαν αποτέλεσμα ένα λεπτό στρώμα στροβιλισμού η οποία αντιπροσωπεύει το φύλλο ομόρρου.

## 1.8. Στόχος της εργασίας

Στόχος της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η υπολογιστική ρευστομηχανική προσομοίωση της ροής γύρω από πτέρυγα που έχει καμπυλωμένα άκρα. Επιλύεται το πεδίο ροής και ανευρίσκονται τα κινηματικά μεγέθη (θέση, ταχύτητα, πίεση) κατάντι της πτέρυγας.

Μετάπειτα γίνεται σύγκριση με τη βασική πτέρυγα (Baseline), την πτέρυγα με καμπυλωμένο άκρο (Winglet 2) και την HECS 1 χρησιμοποιώντας μία μεθοδολογία βασισμένη στη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων η οποία δημιουργήθηκε πρόσφατα στο εργαστήριο αεροδυναμικής του ΕΜΠ και εισάγει την άμεση διατύπωση του δυναμικού.

Η μεθοδολογία επιλύει την ροή με αρχική υπόθεση ότι είναι ασυμπίεστη και μη συνεκτική και στη συνέχεια γίνεται η εισαγωγή των συνεκτικών

διορθώσεων όπως αυτές προκύπτουν από το FOIL2W για τον αντίστοιχο αριθμό Reynolds της κάθε πτέρυγας. Το FOIL2W είναι ένας κώδικας του Εργαστηρίου Αεροδυναμικής Ε.Μ.Π. και αποτελεί ένα εργαλείο επίλυσης της ροής γύρω από αεροτομή που ταλαντώνεται και βασίζεται σε ένα συνδυασμό μίας στροβιλής μεθοδολογίας με την μέθοδο συνοριακών στοιχείων, συζευγμένο με μία ολοκληρωτική διατύπωση του οριακού στρώματος. Χρησιμοποιώντας τα πειραματικά αποτελέσματα των Barry S. Lazos και Kenneth D. Visser [2002] [20], έγινε η σύγκριση και προέκυψαν χρήσιμα συμπεράσματα για την αποδοτικότητα της μεθόδου.

## 2. Θεωρητική επισκόπηση της μεθόδου

### 2.1. Οι πλεγματικές και μη πλεγματικές μέθοδοι

Σχεδόν όλα τα φαινόμενα στη φύση μπορούν να περιγραφούν σε ικανοποιητικό βαθμό με τη βοήθεια κάποιων αλγεβρικών, διαφορικών ή ολοκληρωματικών εξισώσεων. Δυστυχώς όλες αυτές οι εξισώσεις δεν έχουν πάντα αναλυτικές λύσεις. Η καθημερινότητα όμως μας αναγκάζει να αναζητούμε λύσεις για τα προβλήματα που δημιουργούνται, λόγω των φαινομένων αυτών ή για να μελετήσουμε την καλύτερη δυνατόν αντιμετώπιση μελλοντικών αναγκών. Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε αυτά τα φαινόμενα στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει αναλυτική λύση, οι μηχανικοί έχουν δημιουργήσει αριθμητικές μεθόδους προσεγγιστικής επίλυσης αυτών των πολύπλοκων εξισώσεων. Σήμερα οι μηχανικοί και οι επιστήμονες πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με αριθμητικές τεχνικές για διάφορους τύπους προβλημάτων.

Λόγω της ταχείας ανάπτυξης της τεχνολογίας των υπολογιστών, οι τεχνικές αριθμητικής προσομοίωσης που χρησιμοποιούν υπολογιστή (ή υπολογιστική προσομοίωση) έχουν γίνει μια σημαντική προσέγγιση για την επίλυση πολύπλοκων και πρακτικών προβλημάτων στην τεχνολογία και την επιστήμη.

Η κύρια ιδέα της αριθμητικής προσομοίωσης είναι να μετατρέψει ένα πολύπλοκο πρακτικό πρόβλημα σε μια μαθηματική περιγραφή με απλή διακριτή μορφή, να επαναδημιουργήσει και να λύσει το πρόβλημα σε έναν υπολογιστή και, τέλος, να οπτικοποιήσει τα αποτελέσματα σύμφωνα με τις απαιτήσεις της ανάλυσης. Έτσι είναι συχνά δυνατόν να βρεθεί μια αποτελεσματική αριθμητική ή προσεγγιστική λύση για ένα σύνθετο πρόβλημα, εφόσον χρησιμοποιείται η ορθή αριθμητική μέθοδος.

Η διακριτοποίηση του χώρου όπου εξελίσσεται ένα φαινόμενο γίνεται με δύο κατηγορίες μεθόδων. Η μια χρησιμοποιεί υπολογιστικά πλέγματα (πλεγματικές μέθοδοι) ενώ η δεύτερη αντιπροσωπευτικά σημεία ή στοιχεία του μέσου (μη- πλεγματικές μέθοδοι).

Στα προβλήματα της ρευστομηχανικής οι πλεγματικές συνήθως επιλύουν τις εξισώσεις Navier-Stokes, γεγονός που τις καθιστά δυνατές να επιλύουν προβλήματα συνεκτικών και συμπιεστών ροών, αλλά ταυτόχρονα έχουν αυξημένο υπολογιστικό κόστος.

Αντίθετα οι μη πλεγματικές μέθοδοι βασίζονται στην ικανοποίηση της εξίσωσης Laplace στο πεδίο, έχουν χαμηλό υπολογιστικό κόστος, όμως δεν μπορούν να υπολογίσουν με ακρίβεια συνεκτικές και συμπιεστές ροές. Συνήθως χρησιμοποιούνται για επίλυση απλών προβλημάτων που δεν απαιτούν ακρίβεια ή ως αρχική επίλυση δύσκολων προβλημάτων για την εύρεση αρχικών λύσεων και επιτάχυνση της επίλυσης των δύσκολων εξίσσεων σε πολύπλοκα προβλήματα.

## 2.2. Θεωρία των σωμάτων με πάχος

Εφαρμόζοντας το γενικευμένο θεώρημα διαχωρισμού ταχυτήτων του Helmholtz, μπορούμε να εκφράσουμε το πεδίο ροής ως άθροισμα ενός αστρόβιλου και ενός στροβιλού πεδίου ροής. Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων συνδυάζεται με τη μέθοδο των στοιχείων στροβιλότητας για την αναπαράσταση των σωμάτων και των φύλλων στροβιλότητας που εκφεύγουν από αυτά. Σύμφωνα με το θεώρημα Green, όταν μια διαταραχή εισάγεται σε κάποια ροή με την παρουσία στερεών σωμάτων, περιγράφεται από το βαθμωτό δυναμικό  $\Phi(\vec{x})$  ενός αστρόβιλου πεδίου ροής, που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και προκύπτει με την τοποθέτηση διανομών κατάλληλων ιδιομορφιών (πηγών, διπόλων) στην πραγματική επιφάνεια των σωμάτων.

Στο στροβιλό τμήμα του πεδίου ροής είναι δυνατόν να συμπεριληφθεί τόσο η ελεύθερη στροβιλότητα που εκφεύγει από τα ανωστικά σώματα (ως συνέπεια του θεωρήματος διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin) όσο και η στροβιλότητα που υπάρχει στο επερχόμενο πεδίο ροής και που μπορεί να προέρχεται από προπορευόμενα σώματα.

Σύμφωνα με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, η επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος γίνεται στο συνοριακό πλέγμα της εξωτερικής επιφάνειας των σωμάτων και όχι σε ένα χωρικό πλέγμα που καλύπτει όλο το πεδίο ροής (όπως συμβαίνει στις πλεγματικές μεθόδους που επιλύουν τις εξισώσεις Euler και Navier-Stokes). Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή στα προβλήματα όπως αυτό που ασχολείται η εργασία αυτή είναι μη γραμμικές, και επιπλέον συμπεριλαμβάνουν και μη μόνιμους όρους. Στα στερεά σώματα ικανοποιείται η κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης της ταχύτητας. Επιπλέον στα ανωστικά σώματα ικανοποιείται και η δυναμική συνθήκη εξίσωσης των πιέσεων στην ακμή εκφυγής. Με τις εξισώσεις αυτές υπολογίζονται οι εντάσεις των διανομών ιδιομορφιών (πηγών, διπόλων) στα σώματα. Κύριο ρόλο στην αλληλεπίδραση μεταξύ των σωμάτων έχει η στροβιλότητα του ομόρρου των ανωστικών σωμάτων που μπορεί να προσπίπτει σε σώματα που ακολουθούν. Η διαχείριση των φύλλων στροβιλότητας πολλές φορές γίνεται μέσω της αναπαράστασής τους με ελεύθερα στοιχεία στροβιλότητας, που καθώς δεν προαπαιτεί την ύπαρξη συνδετικής δομής, διευκολύνει κατά πολύ τους υπολογισμούς, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις πρόσπτωσης της στροβιλότητας σε στερεά σώματα. Η στροβιλότητα που δημιουργείται (χρονική και χωρική εξέλιξη) ικανοποιεί τις εξισώσεις του Helmholtz, οι οποίες συμπεριλαμβάνουν και μη γραμμική εξίσωση μεταφοράς με όρους διάδοσης, παραμόρφωσης και διάχυσης. Με την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων βρίσκουμε τις άγνωστες εντάσεις των διανομών πηγών και διπόλων και είναι εφικτός ο άμεσος

υπολογισμός του πεδίου ταχυτήτων. Ο υπολογισμός όμως των πιέσεων στα στερεά όρια είναι ένα πρόβλημα πλήρως διαφοροποιημένο από τον υπόλοιπο υπολογισμό του πεδίου ροής και γίνεται με ολοκλήρωση της απόκλισης των εξισώσεων ορμής.

Έτσι προκύπτει ένα εύχρηστο αριθμητικό σχήμα που μπορεί να επιλύει, με ικανοποιητική ακρίβεια και σημαντική οικονομία σε χρόνο και μνήμη  $H/Y$ , προβλήματα μόνιμης και μη μόνιμης ροής σε περιπτώσεις σωμάτων που είναι ανωστικά, ή μη ανωστικά και μπορούν να κινούνται ανεξάρτητα και να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα επιμέρους θεωρητικά εργαλεία και καταστρώνεται το σύστημα των εξισώσεων του προβλήματος.

### 2.3. Αναπαράσταση φύλλου στροβιλότητας

Κάθε κινούμενη ή μη επιφάνεια  $S_w$ , που παρουσιάζει ασυνέχεια της εφαπτομενικής ταχύτητας, σε πεδίο ροής ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού, ονομάζεται φύλλο στροβιλότητας και ουσιαστικά αποτελεί το φυσικό ανάλογο των στρωμάτων διάτμησης.

Στην περίπτωση μιας ροής ενός μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ένα τρισδιάστατο ανωστικό σώμα επιβάλλεται ο ορισμός μίας γραμμής στο στερεό σύνορό του (της ακμής εκφυγής), από όπου θα εκφεύγει ένα επιφανειακό φύλλο στροβιλότητας (ο ομόρρους του), με ασυνέχεια (πήδημα) της εφαπτομενικής ταχύτητας επομένως και του δυναμικού. Η ύπαρξη μίας επιφάνειας ασυνέχειας του δυναμικού είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη επιφανειακής διανομής διπόλων και είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ανάπτυξη κυκλοφορίας, συνεπώς και άνωσης.

Εξ'ορισμού, το φύλλο στροβιλότητας είναι μία κινούμενη επιφάνεια  $S_w$  με ασυνέχεια (πήδημα) ταχύτητας  $[[\bar{U}]](\bar{x}_w)$  στην τυχαία θέση  $\bar{x}_w \in S_w$ . Η πλέον συνηθισμένη περίπτωση, που έχει άμεση σχέση με ρευστομηχανικές εφαρμογές, είναι αυτή ενός δυναμικού φύλλου στροβιλότητας που παράγεται ως επιφάνεια ασυνέχειας δυναμικού (ή ισοδύναμα ως μία διανομή διπόλων) και μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως εξής:

$$\begin{aligned} \left[ \overline{U} \right] (\bar{x}_w) \cdot \bar{v}(\bar{x}_w) &= 0, \quad \bar{x}_w \in S_w \\ \bar{\gamma}(\bar{x}_w) &= \bar{v}(\bar{x}_w) \times \left[ \overline{U} \right] (\bar{x}_w) \end{aligned} \quad (1.1)$$

όπου

$\bar{v}(\bar{x}_w)$  το κάθετο διάνυσμα στο σημείο  $\bar{x}_w$  της επιφανείας  $S_w$  και  $\bar{\gamma}(\bar{x}_w)$  η ένταση της επιφανειακής στροβιλότητας στην ίδια θέση.

Σε κάθε σημείο  $\bar{x}_w$  του φύλλου στροβιλότητας  $S_w$  ισχύει:

$$\frac{d\bar{x}_w}{dt} = \bar{u}(\bar{x}_w; t) \quad (1.2)$$

$$P(\bar{x}_w) = 0 \quad (1.3)$$

όπου  $\bar{u}(\bar{x}_w; t)$  είναι η μέση ταχύτητα μεταφοράς του φύλλου στροβιλότητας και  $P(\bar{x}_w)$  είναι η ασυνέχεια (το πήδημα) της πίεσης στην θέση  $\bar{x}_w$ .

Η σχέση (1.2) είναι η κινηματική εξίσωση του ομόρρου που καθορίζει τη χρονική εξέλιξη της γεωμετρίας του. Η (1.3) είναι η δυναμική εξίσωση του ομόρρου που εξισώνει την πίεση της επάνω και της κάτω πλευράς σε κάθε σημείο του φύλλου στροβιλότητας και ουσιαστικά ρυθμίζει την χρονική εξέλιξη της έντασης της στροβιλότητας σε αυτό.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Helmholtz το πεδίο ταχύτητας ασυμπύεστου μη συνεκτικού ρευστού μπορεί να γραφεί ως:

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \nabla \Phi(\bar{x}, t) + \bar{u}_\omega(\bar{x}, t) \quad (1.4)$$

Όταν υπάρχει ροή γύρω από ανωστικό σώμα ο όρος  $\nabla \Phi(\bar{x}, t)$  μπορεί να συμπεριλάβει και την συνεισφορά της αποβαλλόμενης στροβιλότητας αυτού του σώματος που μπορεί να διανέμεται ως ένα ελεύθερο φύλλο στροβιλότητας. Έτσι προκύπτει η δυναμική (potential) θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας, σύμφωνα με την οποία ο ομόρρος αναπαρίσταται από μία επιφάνεια ασυνέχειας του δυναμικού κατασκευασμένη από πλέγμα δινωσωλήνων.

Όμως, αφού η γεωμετρία του ομόρρου δεν είναι συγκεκριμένη και προκύπτει από την σχέση (1.2), αυτή η θεώρηση είναι πιθανό να παρουσιάσει αριθμητικές αστάθειες, ιδιαίτερα σε περιοχές όπου έχουμε

αναδίπλωση στα φύλλα στροβιλότητας. Οι δυσκολίες αυτές μπορούν να αντιμετωπιστούν εάν αυτό αναπαρασταθεί μέσω του δεύτερου όρου της (1.4). Με τον τρόπο αυτό ορίζεται ηθεωρητικά ισοδύναμηστροβιλή (vortex) εκδοχή του φύλλου στροβιλότητας, που εισάγει τον ομόρρου ως περιοχή γενικευμένης στροβιλότητας. Στην περίπτωση αυτή ο ομόρρουσ απαρτίζεται από ένα σύνολο στοιχείων στροβιλότητας από τις θέσεις των οποίων προκύπτει η γεωμετρία του.

#### 2.4. Η δυναμική θεώρηση του Φύλλου Στροβιλότητας

Η δυναμική αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας γίνεται με τη θεώρηση πλέγματος ευθύγραμμων δινωσωλήνων, με ένταση  $\mu_w$  που προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin και γεωμετρία  $\bar{x}_w$  όπως αυτή προκύπτει από την κινηματική συνθήκη (1.2).

Με αυτά τα δεδομένα υπολογίζονται το δυναμικό<sup>1</sup>  $\Phi_w(\bar{x}_o; t)$  και η ταχύτητα  $\bar{u}_w(\bar{x}_o; t)$  που το φύλλο στροβιλότητας επάγει σε σημείο του χώρου  $\bar{x}_o \in D$  (Hess 1972):

$$\Phi_w(\bar{x}_o; t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{\bar{v}_w(\bar{x}_w) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}_w) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_w(\bar{x}_o; t) = & \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \{ \nabla \mu_w(\bar{x}_w; t) \times \bar{v}_w(\bar{x}_w) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}_w}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}_w) \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{d\bar{l}_w \times (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Στην παραπάνω σχέση διακρίνουμε δύο όρους, έναν επιφανειακό και έναν επικαμπύλιο. Εάν τεθεί:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\bar{x}; t) = & \delta_{S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w) \cdot \{ \nabla \mu_w(\bar{x}_w; t) \times \bar{v}_w(\bar{x}_w; t) \} \\ & + \delta_{\partial S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w) \mu_w(\bar{x}_w; t) \bar{c}_w(\bar{x}_w; t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

όπου  $\bar{\tau}_w(\bar{x}_w; t)$  το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο  $\partial S_w(t) = (C_s) \cup (C_o)$  και

$\delta_{S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w)$ ,  $\delta_{\partial S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w)$  συναρτήσεις Dirac ορισμένες αποκλειστικά στην  $S_w$  και στο σύνορο  $\partial S_w$  αυτής αντίστοιχα, τότε η (1.6) γράφεται:

$$\bar{u}_\omega(\bar{x}_o; t) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\omega}(\bar{x}; t) \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dx \quad (1.8)$$

Η (1.7) ορίζει την γενικευμένη στροβιλότητα που αποδεικνύεται, ότι όχι μόνο κινηματικά αλλά και δυναμικά συμπεριφέρεται όπως η χωρική στροβιλότητα.

## 2.5. Ο Ομόρρους ως Φύλλο Στροβιλότητας

Η εμφάνιση άνωσης ισοδυναμεί με την κατανομή κυκλοφορίας στο πρόβλημα της ροής μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ανωστικό σώμα. Όπως προαναφέρθηκε, στα πλαίσια της θεώρησης μη συνεκτικού ρευστού επιβάλλεται ο ορισμός επιφανειών που εκφεύγουν από το στερεό σύνορο του σώματος και παρουσιάζουν ασυνέχεια (πήδημα) στην εφαπτομενική ταχύτητα, συνεπώς και στο δυναμικό, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη κυκλοφορίας γύρω από μία κλειστή καμπύλη που περικλείει το σώμα. Αυτή η επιφάνεια ασυνέχειας του δυναμικού είναι ο ομόρρους της πτέρυγας και αποτελεί το μη συνεκτικό ανάλογο ενός στρώματος διάτμησης.

Τη χρονική στιγμή  $t$  σε μία τομή της πτέρυγας, η ασυνέχεια του δυναμικού στον ομόρρου στην ακμή εκφυγής, μεταξύ της κάτω πλευράς (υπερπίεσης/pressure side, δείκτης "-") και της επάνω πλευράς (υποπίεσης/suction side, δείκτης "+") θα ισούται με την κυκλοφορία γύρω από την πτέρυγα σε αυτή την τομή:

$$\Phi_w^t = \Phi_{w+}^t - \Phi_{w-}^t = \Gamma^t \quad (1.9)$$

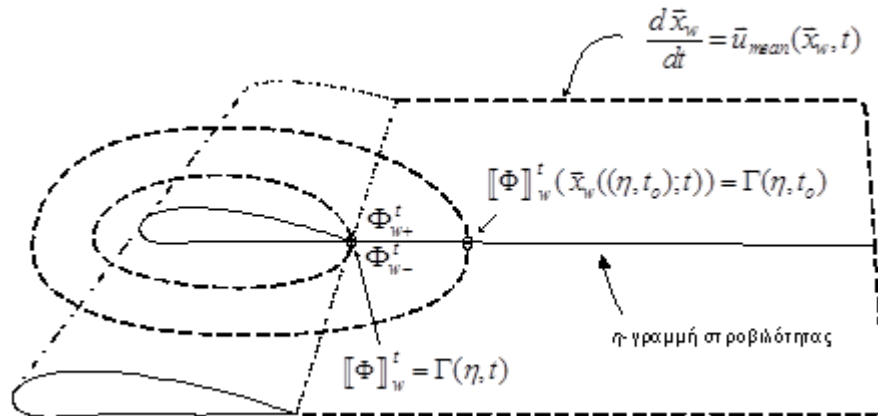
Η ένταση της διαφοράς (του πηδήματος) δυναμικού  $\Phi_w(\bar{x}_w)$  καθορίζει την ένταση δινωσολήνα  $\mu_w(\bar{x}_w)$  στο υλικό σημείο  $\bar{x}_w \in S_w$  του ομόρρου:

$$\mu_w(\bar{x}_w) = -\Phi_w(\bar{x}_w) = -(\Phi_w^+ - \Phi_w^-), \quad \bar{x}_w \in S_w \quad (1.10)$$



ενώ η θέση  $\bar{x}_w \in S_w$  ενός υλικού σημείου του ομόρρου θα καθορίζεται από την μέση ταχύτητα (που σαφώς έχει μόνο εφαπτομενική συνιστώσα):

$$\frac{d\bar{x}_w}{dt} = \frac{1}{2} \{ \bar{u}^+(\bar{x}_w, t) + \bar{u}^-(\bar{x}_w, t) \} = \bar{u}_{mean}(\bar{x}_w, t) \quad (1.11)$$



**Σχήμα:** Η ασυνέχεια δυναμικού και η αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin

Η ασυνέχεια του δυναμικού κατά μήκος της ακμής εκφυγής του ανωστικού σώματος επεκτείνεται στη συνέχεια σε επιφάνεια, που αποτελεί τον ομόρρου του σώματος, με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί το θεώρημα του Kelvin περί υλικής διατήρησης της κυκλοφορίας. Η αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin επιβάλλει την υλική διατήρηση της κυκλοφορίας κατά μήκος των αποβαλλόμενων γραμμών στροβιλότητας. Αυτό σημαίνει ότι η ένταση της διανομής διπόλων που μεταφέρεται με ένα υλικό σημείο κατά μήκος μίας γραμμής στροβιλότητας συντηρεί τη ένταση που είχε αυτό το υλικό σημείο κατά την εκπομπή του από την ακμή εκφυγής. Έτσι τη χρονική στιγμή  $t$  το υλικό σημείο  $\bar{x}_w((\eta, t_0); t)$ , που αποβλήθηκε τη στιγμή  $t_0$  από την  $\eta$ -γραμμή στροβιλότητας, θα έχει ένταση  $\Phi_w^t(\bar{x}_w((\eta, t_0); t))$  ίση με την ένταση που είχε η κυκλοφορία  $\Gamma(\eta, t_0)$  στην  $\eta$ -γραμμή στροβιλότητας τη στιγμή  $t_0$ :

$$\Phi_w^t(\bar{x}_w((\eta, t_0); t)) = \Gamma(\eta, t_0) \quad (1.12)$$

Η συνθήκη Kutta-Joukowski επιβάλλει τη συνέχεια των πιέσεων στην ακμή εκφυγής της πτέρυγας καθώς το ασυμπίεστο ρευστό δεν μπορεί να παραλάβει ορθές τάσεις:

$$P^+ = P^- \Rightarrow P = 0 \quad (1.13)$$

Αποτελεί τη δυναμική συνθήκη του προβλήματος και μαζί με την κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης ορίζουν πλήρως ένα σύστημα τόσων εξισώσεων όσες είναι και οι εντάσεις των αγνώστων διανομών πηγών και διπόλων. Η συνθήκη μηδενισμού του πηδήματος της πίεσης καθορίζει ποσοτικά τη στροβιλότητα που αποβάλλεται στον ομόρρου της πτέρυγας ή ισοδύναμα την κυκλοφορία πάνω σε αυτή. Είναι μη γραμμική συνθήκη λόγω της ύπαρξης του τετραγωνικού όρου της ταχύτητας στο όρο της κινητικής ενέργειας στην εξίσωση Bernoulli. Αποτέλεσμα είναι το πρόβλημα να μετατρέπεται σε μη γραμμικό (σε αντίθεση με το διδιάστατο πρόβλημα όπου η αντίστοιχη συνθήκη είναι γραμμική).

Η δυναμική συνθήκη μηδενισμού των πιέσεων στον ομόρρου βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Πράγματι σύμφωνα με το θεώρημα του Kelvin θα πρέπει :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla \Gamma) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi(x_w; t)}{\partial t} + \vec{u}(x_w; t) \cdot (\nabla \Phi(x_w; t)) \quad (1.14)$$

όπου θεωρώντας ότι η ταχύτητα στον ομόρρου είναι ουσιαστικά η μέση ταχύτητα της πάνω και κάτω πλευράς, θα έχουμε :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi(x_w; t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \{ \vec{u}^+(x_w; t) + \vec{u}^-(x_w; t) \} \cdot \{ \vec{u}^+(x_w; t) - \vec{u}^-(x_w; t) \} \quad (1.15)$$

και κάνοντας πράξεις :

$$\frac{\partial \Phi^+(x_w; t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^{+2}(x_w; t) = \frac{\partial \Phi^-(x_w; t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^{-2}(x_w; t) \Rightarrow$$

$$\frac{P^+}{\rho} = \frac{P^-}{\rho} \Rightarrow \frac{P}{\rho} = 0 \Rightarrow P = 0 \quad (1.16)$$

δηλαδή το θεώρημα του Kelvin ισοδυναμεί με τη συνθήκη του μηδενισμού των πιέσεων στον ομόρροο της πτέρυγας με την προϋπόθεση ότι η ταχύτητα υπολογίζεται ως ο μέσος όρος της ταχύτητας στην πάνω και κάτω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας, γεγονός που επιβεβαιώνει την εξίσωση (1.11).

## 2.6. Οι Βασικές Εξισώσεις του Προβλήματος

Το θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz εξασφαλίζει ότι οποιοδήποτε πεδίο ταχύτητας γράφεται στην μορφή

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \nabla\Phi(\vec{x}, t) + \vec{u}_\omega(\vec{x}, t) + \vec{U}_\infty(t) \quad ( 1.17 )$$

όπου:  $\vec{U}_\infty(t)$  η ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο,  $\Phi(\vec{x}, t)$  είναι το βαθμωτό δυναμικό του αστρόβιλου πεδίου ροής και  $\vec{u}_\omega(\vec{x}, t)$  η επαγόμενη ταχύτητα από το γενικευμένο πεδίο χωρικά διανεμημένης στροβιλότητας  $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ , τέτοια ώστε:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \Phi(\vec{x}, t) &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{u}_\omega(\vec{x}, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad ( 1.18 )$$

Από τις (1.17) και (1.18) προκύπτει ότι:

$$\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}, t) = \nabla^2\Phi(\vec{x}, t) = \Delta\Phi(\vec{x}, t) \quad ( 1.19 )$$

$$\nabla \times \vec{u}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{u}_\omega(\vec{x}, t) = \vec{\omega}(\vec{x}, t) \quad ( 1.20 )$$

όπου:  $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$  η στροβιλότητα και  $\Delta\Phi(\vec{x}, t)$  ο ρυθμός μεταβολής του όγκου.

Θεωρώντας ροή ασυμπίεστη με στερεά σύνορα επιφανείας  $S_i$ ,  $S = \bigcup_i S_i$  τότε από την (1.19) προκύπτει η εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2\Phi(\vec{x}, t) = 0 \quad ( 1.21 )$$

Έπειτα χρησιμοποιώντας την μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων

$$\nabla^2 \Phi_\mu = 0 \quad \text{και} \quad \nabla^2 \Phi_\sigma = 0 \quad (1.22)$$

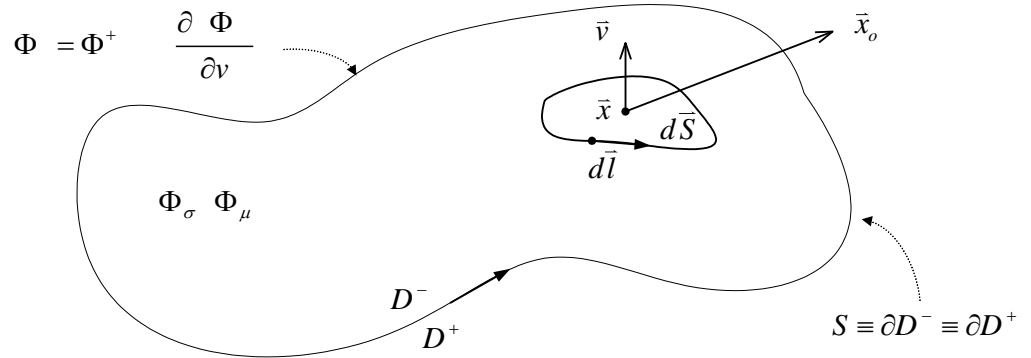
Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή  $\nabla^2(\cdot)$ , η συνάρτηση  $\Phi_{\sigma,\mu} = \Phi_\mu + \Phi_\sigma$  θα ικανοποιεί επίσης την εξίσωση του πεδίου ροής (δηλαδή την εξίσωση Laplace) και θα ισχύει:

$$\nabla^2 \Phi_{\sigma,\mu} = \nabla^2 (\Phi_\mu + \Phi_\sigma) = \nabla^2 \Phi_\mu + \nabla^2 \Phi_\sigma = 0 \quad (1.23)$$

Η αναπαράσταση του δυναμικού για τη μικτή διατύπωση σε σημείο  $\bar{x}_o \in D^+$  προκύπτει θέτοντας  $\Phi^- \equiv 0$ :

$$\Phi_{\sigma,\mu}^+(\bar{x}_o) = \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\bar{x}) \frac{1}{|\bar{x}_o - \bar{x}|} dS(\bar{x}) - \frac{1}{4\pi} \int_S \mu(\bar{x}) \frac{\bar{v}(\bar{x}) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) \quad (1.24)$$

Η ταχύτητα που επάγεται στο  $\bar{x}_o \in D^+$  θα προκύπτει



$$\begin{aligned} \nabla \Phi_{\sigma,\mu}^+(\bar{x}_o) = \bar{u}(\bar{x}_o) = & \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\bar{x}) \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_S \{ \nabla \mu(\bar{x}) \times \bar{v}(\bar{x}) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S} \mu(\bar{x}) \frac{d\bar{l} \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Σημειώνεται ότι η θετική φορά διαγραφής του επικαμπυλίου ολοκληρώματος στην παραπάνω εξίσωση είναι η ανθρωπολογική, ώστε το κάθετο διάνυσμα

να έχει θετική φορά προς τον εξωτερικό χώρο, ενώ επιπλέον γίνεται η παρατήρηση ότι ο όρος αυτός μηδενίζεται στην περίπτωση μίας κλειστής επιφανείας  $S$ .

Στις παραπάνω σχέσεις χρειάζεται να προσδιοριστούν οι δύο διανομές  $\sigma(\vec{x})$ ,  $\mu(\vec{x})$  της διατύπωσης. Η κατασκευή της μικτής διατύπωσης μπορεί να συσχετιστεί με το φυσικό πρόβλημα της ροής γύρω από ανωστικό σώμα με πάχος. Σε αυτό το πρόβλημα υπάρχει η δυνατότητα ικανοποίησης της συνθήκης εξίσωσης των πιέσεων στην ακμή εκφυγής που αποτελεί τη δυναμική εξίσωση του προβλήματος που σε συνδυασμό με την κινηματική συνθήκη οδηγεί στον καθορισμό των άγνωστων διανομών. Επειδή όμως η δυναμική συνθήκη στο πρόβλημα της πτέρυγας είναι μη γραμμική, οι εξισώσεις που προσδιορίζουν τις δύο διανομές εμφανίζονται συζευγμένες κατά τρόπο μη γραμμικό. Παρά το γεγονός ότι με τη χρήση της κινηματικής και της δυναμικής συνθήκης επιλύεται πλήρως το πρόβλημα που θέσαμε, μπορεί να αμφισβητηθεί η καλή τοποθέτηση του προβλήματος, αφού η συνέχεια των πιέσεων στον ομόρρου δεν εξασφαλίζεται. Παρόλα αυτά η επαλήθευση της ορθότητας της μεθόδου μπορεί να γίνει με τη σύγκριση των προλέξεων της με πειραματικά δεδομένα. Σε επόμενη παράγραφο, όπου εξετάζεται το πρόβλημα του ανωστικού σώματος με πάχος, θα δούμε αναλυτικά πως υλοποιείται η διατύπωση πηγών-διπόλων, καθώς και το πως προσδιορίζονται οι δύο διανομές.

## 2.7. Η Ροή Γύρω από Ανωστικά Σώματα με Πάχος

Από τη θεωρία του μη συνεκτικού ρευστού είναι γνωστό ότι η ανάπτυξη άνωσης, συνεπώς και κυκλοφορίας, σε ένα σώμα προϋποθέτει την ύπαρξη μίας επιφάνειας ασυνέχειας του δυναμικού στο πεδίο ροής. Υποχρεωτικά αυτή η επιφάνεια θα αποτελεί επιφάνεια ασυνέχειας των εφαπτομενικών ταχυτήτων. Ο ομόρρους ενός ανωστικού σώματος μπορεί να αναπαρίσταται από μία τέτοια επιφάνεια. Η άνωση μπορεί να εισαχθεί υποχρεωτικά μέσω μίας διανομής διπόλων καθώς μία τέτοια διανομή παρουσιάζει ασυνέχεια

τόσο στην ταχύτητα όσο και στο δυναμικό και θα πρέπει απαραίτητα να περιλαμβάνεται στη διατύπωση που θα χρησιμοποιήσουμε.

Μία διανομή πηγών έχει συνεχή εφαπτομενική ταχύτητα στην επιφάνεια στην οποία προφανώς διανέμεται μια συνεχής κατανομή δυναμικού, ενώ παρουσιάζει ασυνέχεια της κάθετης ταχύτητας και συνεπώς ασυνέχεια της κάθετης παραγώγου του δυναμικού πάνω στην επιφάνεια. Μη μηδενική ένταση της διανομής πηγών σημαίνει ότι το ρευστό «διαπερνά» την επιφάνεια με ρυθμό ίσο με την ένταση των πηγών στο εν λόγω σημείο. Με τη διανομή πηγών στην κλειστή επιφάνεια ενός σώματος αναπαριστούμε το πάχος του. Ασυμπτωτικές αναλύσεις δείχνουν ότι το πρόβλημα του «πάχους» μπορεί να αντιμετωπιστεί και με την τοποθέτηση μίας διανομής πηγών στη μέση επιφάνεια του σώματος και με ένταση ανάλογη της κλίσης της συνάρτησης του πάχους του σώματος (Ashley and Landahl 1965). Οπότε, με τον ένα, ή τον άλλο τρόπο, μία διανομή πηγών θα πρέπει να αποτελεί επίσης μέρος της διατύπωσης που θα επιλέξουμε για την επίλυση του προβλήματος.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο συμπέρασμα ότι για την εξέταση της ροής γύρω από ανωστικά σώματα με πάχος απαιτείται ο καθορισμός μίας διατύπωσης που να περιλαμβάνει και τις δύο διανομές πηγών και διπόλων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον λοιπόν παρουσιάζουν τόσο η άμεση όσο και η μεικτή διατύπωση πηγών-διπόλων με τις οποίες μπορούν να αντιμετωπιστούν με ενιαίο τρόπο προβλήματα μη ανωστικών και ανωστικών σωμάτων με πάχος και αποβαλλόμενα φύλλα στροβιλότητας<sup>2</sup>.

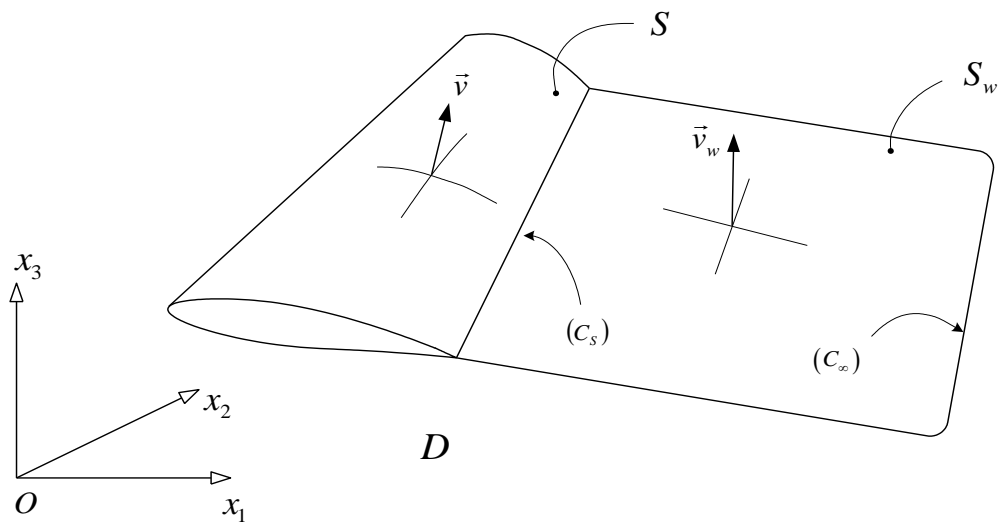
Στην περίπτωση της άμεσης διατύπωσης η υπόθεση της τμηματικά σταθερής διανομής δυναμικού οδηγεί στον άμεσο υπολογισμό της διαφοράς δυναμικού και την ικανοποίηση της συνθήκης Kutta-Joukowski ακριβώς επάνω στην ακμή εκφυγής. Στην περίπτωση αυτή το πεδίο ταχυτήτων πάνω στην επιφάνεια του σώματος προκύπτει με την εφαρμογή αριθμητικού σχήματος παραγωγίσις του δυναμικού, η ακρίβεια του οποίου εξαρτάται από την ποιότητα με την οποία γίνεται η γεωμετρική αναπαράσταση του σώματος. Στην περίπτωση της μικτής διατύπωσης το πεδίο ταχυτήτων προκύπτει με ακρίβεια αφού επιλυθεί το σύστημα που καθορίζει τις

άγνωστες εντάσεις των πηγών και των διπόλων, όμως η εφαρμογή της συνθήκης Kelvin γίνεται σε θέση κοντά στην ακμή εκφυγής, καθώς ακριβώς επάνω στην ακμή εκφυγής παρουσιάζεται απειρισμός ταχυτήτων.

Στη σχετική βιβλιογραφία έχει παρουσιαστεί η υλοποίηση της άμεσης διατύπωσης σε συνδυασμό με τη θεωρία στοιχείων στροβιλότητας (Βουτσινάς 1990; Μπέλεσης 1998) σε διάφορα προβλήματα πτερυγών σε ροή υπό κλίση. Η μέθοδος αυτή υιοθετήθηκε και από την παρούσα εργασία, όμως η ύπαρξη αριθμητικών δυσκολιών<sup>3</sup> δεν επέτρεψε την εφαρμογή αυτής της μεθόδου σε γενικότερα προβλήματα στρεφόμενων ελίκων και έτσι υιοθετήθηκε η μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων.

Μετά την ανάλυση που προηγήθηκε, επανερχόμαστε στο πρόβλημα αναπαράστασης του δυναμικού και του πεδίου ταχυτήτων γύρω από ανωστικά σώματα. Για το σκοπό αυτό θα εφαρμόσουμε το θεώρημα διαχωρισμού των ταχυτήτων του Helmholtz, και τα όσα προαναφέρθηκαν για την μικτή διατύπωση αναπαράστασης του δυναμικού  $\Phi$  του αστρόβιλου πεδίου ροής και την αναπαράσταση των φύλλων στροβιλότητας.

Θεωρούμε τη ροή που δημιουργεί ανωστικό σώμα κινούμενο σε ασυμπίεστο μη συνεκτικό ρευστό στο χώρο  $D$ . Έστω  $S$  η εξωτερική επιφάνεια του σώματος,  $\bar{n}$  το κάθετο διάνυσμα σε αυτήν,  $S_w$  η επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας, με πήδημα ταχύτητας που συμβολίζεται με  $\bar{u}$  και  $\bar{v}_w$  το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $S_w$  (0). Θεωρούμε ότι η εξωτερική επιφάνεια του σώματος, καθώς και η επιφάνεια ασυνέχειας ταχύτητας είναι επαρκώς λείες ώστε σε κάθε σημείο τους να υπάρχει μοναδικό κάθετο διάνυσμα με φορά προς τα έξω. Μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου η  $S_w$  είναι φύλλο στροβιλότητας και αναπαριστά τον ομόρρου ανωστικού σώματος. Η επιφάνεια  $S_w$  έχει όριο  $\partial S_w = C_s \cup C_\infty$ , όπου  $C_s$  η καμπύλη τομής των  $S$  και  $S_w$  και  $C_\infty$  το έπ' άπειρο σύνορο της  $S_w$ . Η περίπτωση αυτή είναι συνεπής με το θεώρημα στροβιλότητας του Helmholtz, σύμφωνα με το οποίο οι γραμμές σταθερής στροβιλότητας πρέπει να είναι είτε κλειστές, είτε ανοικτές με άκρα στο άπειρο, ή σε στερεό σύνορο.



Η γεωμετρία του σώματος, του ομόρρου και οι βασικοί συμβολισμοί

Θεωρώντας τη ροή ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ανωστικό σώμα με φύλλο στροβιλότητας και υιοθετώντας τη διατύπωση πηγών διπόλων, το δυναμικό που επάγεται από το σώμα και τον κοντινό ομόρρου του σε τυχαίο σημείο  $\vec{x}_o \in D$  θα υπολογίζεται σύμφωνα με τις (1.24) και (1.5) ως:

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma,\mu}(\vec{x}_o;t) = & -\frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\vec{x};t) \frac{dS(\vec{x})}{|\vec{x}_o - \vec{x}|} + \frac{1}{4\pi} \int_S \mu(\vec{x};t) \frac{\vec{v}(\vec{x}) \cdot (\vec{x}_o - \vec{x})}{|\vec{x}_o - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \mu_w(\vec{x}_w;t) \frac{\vec{v}_w(\vec{x}_w) \cdot (\vec{x}_o - \vec{x}_w)}{|\vec{x}_o - \vec{x}_w|^3} dS_w(\vec{x}) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Το συνολικό πεδίο ταχύτητας σε σημείο  $\vec{x}_o \in D$  θα αναπαρίσταται αθροίζοντας τις επιμέρους συνιστώσες του: την επί άπειρο ταχύτητα, την επαγόμενη ταχύτητα από τα σώματα (1.25) και τον κοντινό ομόρρου τους (1.6), καθώς και την επαγόμενη ταχύτητα από το χωρικά διανεμημένο πεδίο στροβιλότητας (1.8) στη μορφή:



$$\begin{aligned}
\bar{u}(\bar{x}_o; t) = & \bar{U}_\infty(\bar{x}; t) \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\bar{x}; t) \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_S \{ \nabla \mu(\bar{x}; t) \times \bar{v}(\bar{x}) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S} \mu(\bar{x}; t) \frac{d\vec{l} \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \{ \nabla \mu_w(\bar{x}_w; t) \times \bar{v}_w(\bar{x}) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}_w}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{d\vec{l}_w \times (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\omega}(\bar{x}) \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dx
\end{aligned}
\tag{1.27}$$

Είναι δυνατόν να γίνουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις σε αυτόν τον τρόπο αναπαράστασης του πεδίου ταχύτητας:

Στη γενική περίπτωση η ταχύτητα της αδιατάρακτης ροής στο άπειρο  $\bar{U}_\infty$  είναι δυνατόν να μεταβάλλεται με το χρόνο, ή να παρουσιάζει διακυμάνσεις στο εσωτερικό του πεδίου D αρκεί να έχει πάντα μηδενική απόκλιση και στροβιλισμό.

Στη γενική περίπτωση η συνεισφορά της ταχύτητας  $\bar{u}_\omega(\bar{x})$  μίας χωρικής κατανομής στροβιλότητας μπορεί να συμπεριλαμβάνει και την αποβαλλόμενη στροβιλότητα από σώματα που προηγούνται και που προσπίπτει στο εξεταζόμενο σώμα.

Θεωρώντας ότι το δυναμικό διαταραχής  $\Phi(\bar{x})$  αναπαριστά τη συνολική συνεισφορά των σωμάτων και του κοντινού τους ομόρρου, τότε η ( 1.27 ) θα γράφεται στη μορφή:

$$\bar{u}(\bar{x}) = \bar{U}_\infty + \nabla \Phi_{\sigma, \mu}(\bar{x}) + \bar{u}_\omega(\bar{x})
\tag{1.28}$$

Στη περίπτωση αυτή η συνοριακή συνθήκη θα έχει την μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(\vec{x}, t) = \bar{v} \cdot \nabla \Phi(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t)$$

που εκφράζει τη συνθήκη μη εισχώρησης, ενώ στο άπειρο :

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \infty} \Phi(\vec{x}, t) = 0 \text{ και } \lim_{\vec{x} \rightarrow \infty} \nabla \Phi(\vec{x}, t) = 0$$

όπου  $\vec{U}_\infty$  είναι η ταχύτητα της επερχόμενης ροής και

$\vec{v}$  το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του σώματος.

Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζουν πλήρως ένα πρόβλημα αστρόβιλου πεδίου ροής με πεδιακή εξίσωση την Laplace. Ικανοποιείται η κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης και η απαίτηση της αδιατάρακτης ροής και μηδενισμού του  $\nabla \Phi$ .

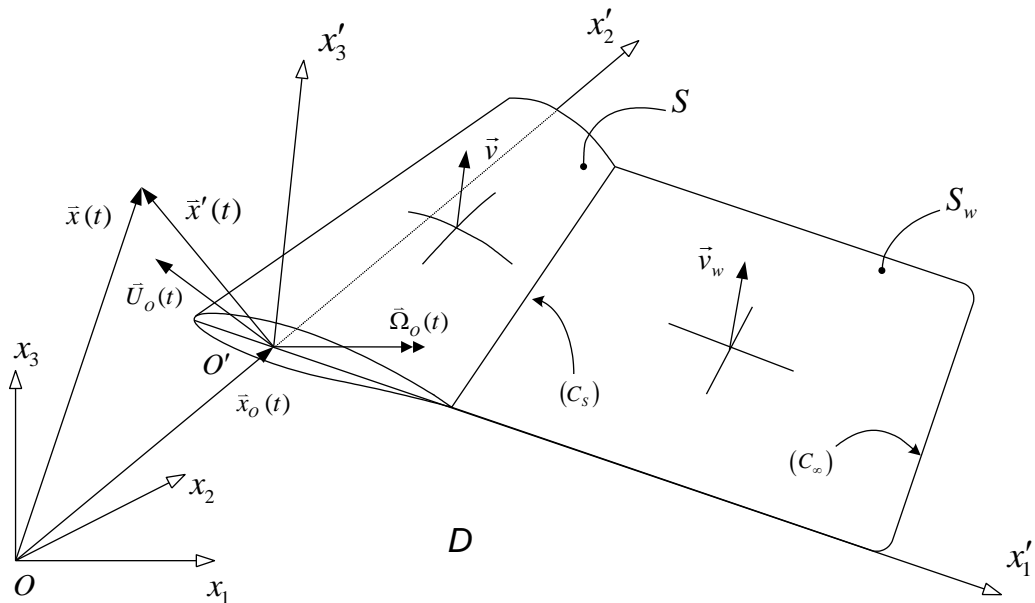
$$\vec{u}(\vec{x}; t) = \vec{U}_\infty(t) + \nabla \Phi(\vec{x}; t) + \vec{u}(\vec{x}; t)$$

Ανάλογα με την κίνηση της πτέρυγας η  $g(\vec{x}, t)$ , έχει συγκεκριμένη έκφραση.

Στην περίπτωση κινούμενου σώματος, με μεταφορική και γωνιακή ταχύτητα  $\vec{U}_0(t)$  και  $\vec{\Omega}_0(t)$  αντίστοιχα και ταχύτητα ρευστού  $\vec{U}_\infty(t)$  στο άπειρο, προκύπτει (Σχήμα 1):

$$g(\vec{x}, t) = (\vec{U}_0(t) + \vec{\Omega}_0(t) \times \vec{x} - \vec{U}_\infty(t)) \cdot \vec{v}$$

Και ενώ το αστρόβιλο τμήμα  $\nabla \Phi(\vec{x}, t)$  της  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  σχετίζεται με την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών στα στερεά σύνορα, το στροβιλό τμήμα  $\vec{u}_\omega(\vec{x}, t)$  σχετίζεται με την δυναμική της ροής, δηλαδή την εμφάνιση κυκλοφορίας και άρα άνωσης στη πτέρυγα και την δημιουργία ομόρρου.



**Σχήμα 1:** Το αδρανειακό και σωματόδετο συστήματα αναφοράς  $O(x_1, x_2, x_3)$  και  $O'(x'_1, x'_2, x'_3)$  αντίστοιχα καθώς και οι βασικοί συμβολισμοί στην πτέρυγα και τον ομόρρου της. Σημειώνεται ότι το δυναμικό επιλέγεται ώστε  $\nabla\varphi$  ως μέγεθος να δίνει την απόλυτη ταχύτητα διαταραχής και στα δύο συστήματα. Ανάλογα βέβαια με το σύστημα που χρησιμοποιείται οι συνιστώσες της ταχύτητας θα αλλάζουν αλλά το μέτρο θα είναι το ίδιο.

Σχετικά με τον ομόρρου, εισάγεται ως φύλλο στροβιλότητας, δηλαδή μια υλική επιφάνεια  $S_w(t)$  που κινείται και παραμορφώνεται μεταφέροντας στροβιλότητα. Πρόκειται για επιφάνεια ασυνέχειας της εφαπτομενικής σε αυτήν ταχύτητας:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}) \times \vec{v}_w(\vec{x}) &= -\vec{\gamma}_w(\vec{x}) \\ \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}_w(\vec{x}) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \vec{x} \in S_w$$

Με την πίεση όμως να παραμένει συνεχής.

Το μέγεθος της πίεσης είναι ιδιαίτερα σημαντικό από τεχνολογικής πλευράς στα διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με πεδία ροής. Στις διάφορες αριθμητικές μεθόδους επίλυσης των πεδίων ροής η πίεση υπολογίζεται άμεσα. Είτε προκύπτει σαν λύση του προβλήματος, είτε η χρήση Eulerian χωρικού πλέγματος καθιστά τον υπολογισμό της πρωτογενή.

Στην παρούσα μέθοδο ο υπολογισμός των πιέσεων στην επιφάνεια ενός σώματος αποτελεί ένα πρόβλημα που είναι πλήρως αποσυζευγμένο από τον υπολογισμό του πεδίου ροής και απαιτεί την επίλυση μίας ακόμα εξίσωσης που περιέχει την πίεση ως άγνωστο.

Η πίεση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συνεισφορών από το αστρόβιλο και το στροβιλό μέρος της αναπαράστασης ταχυτήτων:

$$p(\bar{x};t) = p_{\Phi}(\bar{x};t) + p_{\omega}(\bar{x};t) \quad (1.29)$$

Από την ολοκλήρωση της απόκλισης του θεωρήματος της ορμής προκύπτει η εξίσωση Bernoulli για αστρόβιλο πεδίο, που οδηγεί στον υπολογισμό του όρου  $p_{\Phi}(\bar{x};t)$ . Ο υπολογισμός είναι εξαιρετικά απλός αλλά χρειάζεται προσοχή στον τρόπο υλοποίησής του. Η ολοκλήρωση της εξίσωσης ορμής ως προς το σχετικό σύστημα αναφοράς, που κινείται με ταχύτητα  $\vec{U}_B(\bar{x};t)$ , αλλά με βάση τις απόλυτες ταχύτητες δίνει:

$$\frac{\partial \Phi(\bar{x};t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{u}^2(\bar{x};t) + \frac{p_{\Phi}(\bar{x};t)}{\rho} - \bar{u}(\bar{x};t) \cdot \vec{U}_B(\bar{x};t) = c(t) \quad (1.30)$$

Ισοδύναμα, ως προς την σχετική ταχύτητα  $\bar{u}_r(\bar{x};t)$ :

$$\bar{u}_r(\bar{x};t) = \bar{u}(\bar{x};t) - \vec{U}_B(\bar{x};t) \quad (1.31)$$

μετά από την εισαγωγή της (1.31) στην (1.30) προκύπτει:

$$\frac{\partial \Phi(\bar{x};t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{u}_r^2(\bar{x};t) + \frac{p_{\Phi}(\bar{x};t)}{\rho} - \frac{1}{2} \vec{U}_B^2(\bar{x};t) = c(t) \quad (1.32)$$

όπου :

$\Phi(\bar{x};t)$  το συνολικά επαγόμενο δυναμικό του αστρόβιλου πεδίου ροής στη θέση  $\bar{x}$ :

$$\Phi(\bar{x};t) = \Phi_{\infty}(\bar{x};t) + \Phi_{\sigma,\mu}(\bar{x};t) \quad (1.33)$$

Και  $p_\phi(\bar{x};t)$  η στατική πίεση στη θέση  $\bar{x}$ ,  $\rho$  η πυκνότητα. και  $c(t)$  μία σταθερά που προκύπτει από την τιμή της έκφρασης ( 1.30 ) ή ( 1.32 ) στο άπειρο ( $\bar{x} \rightarrow \infty$ ):

$$c(t) = \frac{\partial \Phi_\infty(t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{U}_\infty^2(t) + \frac{p_\infty(t)}{\rho} - \bar{U}_\infty(t) \cdot \bar{U}_B(t) \quad ( 1.34 )$$

Ο μη μόνιμος όρος δυναμικού στην εξίσωση Bernoulli συμπεριλαμβάνει τις χρονικές μεταβολές που συμβαίνουν στο αστρόβιλο πεδίο (της επερχόμενης ροής και αυτού που αντιστοιχεί στα ιδιόμορφα στοιχεία: τις κατανομές πηγών και διπόλων στα σώματα):

$$\frac{\partial \Phi(\bar{x};t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_\infty(t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{\sigma,\mu}(\bar{x};t)}{\partial t} \quad ( 1.35 )$$

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στον τρόπο υπολογισμού αυτών των μεγεθών, που εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς στο οποίο εφαρμόζεται η αντίστοιχη έκφραση για την εξίσωση Bernoulli( 1.30 ) ή ( 1.32 ). Μετά την επίλυση του προβλήματος ( $\phi_N$ ) και τον υπολογισμό των παραμέτρων των διανομών των ιδιομορφιών γίνεται ο υπολογισμός των ταχυτήτων  $\bar{u}(\bar{x},t)$  στα σημεία του σώματος όπου έχει ικανοποιηθεί η συνθήκη μη εισχώρησης. Σε αυτά τα σημεία επίσης υπολογίζεται και ο ρυθμός μεταβολής του επαγόμενου δυναμικού της συνολικής ροής. Στην περίπτωση της μόνιμης ροής ο όρος  $\partial \Phi_\infty(\bar{x};t)/\partial t$  μηδενίζεται, σε κάθε άλλη περίπτωση όμως θα πρέπει να υπολογίζεται σύμφωνα με τα δεδομένα του κάθε προβλήματος. Γνωρίζοντας τις εντάσεις των πηγών και των διπόλων είναι δυνατός ο υπολογισμός των τιμών του δυναμικού  $\Phi_\sigma(\bar{x};t)$ ,  $\Phi_\mu(\bar{x};t)$  σε κάθε χρονική στιγμή, οπότε ο όρος  $\partial \Phi_{\sigma,\mu}(\bar{x};t)/\partial t$  υπολογίζεται εύκολα στην περίπτωση του διακριτοποιημένου προβλήματος από τη χρονική μεταβολή τους.

Έχοντας χρησιμοποιήσει την εξίσωση Bernoulli γίνεται ο υπολογισμός του όρου της πίεσης που αντιστοιχεί στο αστρόβιλο μέρος του πεδίου ροής. Εκκρεμεί ο υπολογισμός του όρου που αντιστοιχεί στο στροβιλό μέρος της ροής. Όπως προαναφέρθηκε η πίεση  $p_\omega(\bar{x};t)$  που

επάγει μία διανομή στροβιλότητας υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{p_\omega(\bar{x}_o; t)}{\rho} &= \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\bar{u}_\omega(\bar{x}; t) \times \bar{\omega}(\bar{x}; t) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x})}{(\bar{x}_o - \bar{x})^3} dx, \quad \bar{x}_o \neq \bar{x} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_j \frac{\bar{u}(\bar{x}_{\Omega_j}; t) \times \bar{\Omega}(\bar{x}_{\Omega_j}; t) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x}_{\Omega_j})}{(\bar{x}_o - \bar{x}_{\Omega_j})^3}, \quad \bar{x}_o \neq \bar{x}_{\Omega_j} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ο υπολογισμός του συντελεστή στατικής πίεσης  $c_p(\bar{x}; t)$  προκύπτει από την σχέση ( 1.37 ), αδιαστατοποιώντας με την κατάλληλη, σε κάθε περίπτωση, πίεση αναφοράς  $p_{ref}$  :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{p_{ref}} \quad (1.37)$$

## 2.8. Η αριθμητική διακριτοποίηση του προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ο τρόπος διακριτοποίησης των εξισώσεων που περιγράφουν το θεωρητικό πλαίσιο επίλυσης του προβλήματος της μη μόνιμης ροής ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από σώμα με πάχος. Διαρθρώνεται το σύστημα των διακριτών εξισώσεων του προβλήματος που ικανοποιούν τη συνθήκη μη εισχώρησης στο στερεό σύνορο και επιπλέον την εξίσωση των πιέσεων στην ακμή εκφυγής του ανωστικού σώματος το οποίο αναπαρίσταται γεωμετρικά με πλέγμα αποτελούμενο από τετράπλευρα επίπεδα στοιχεία.

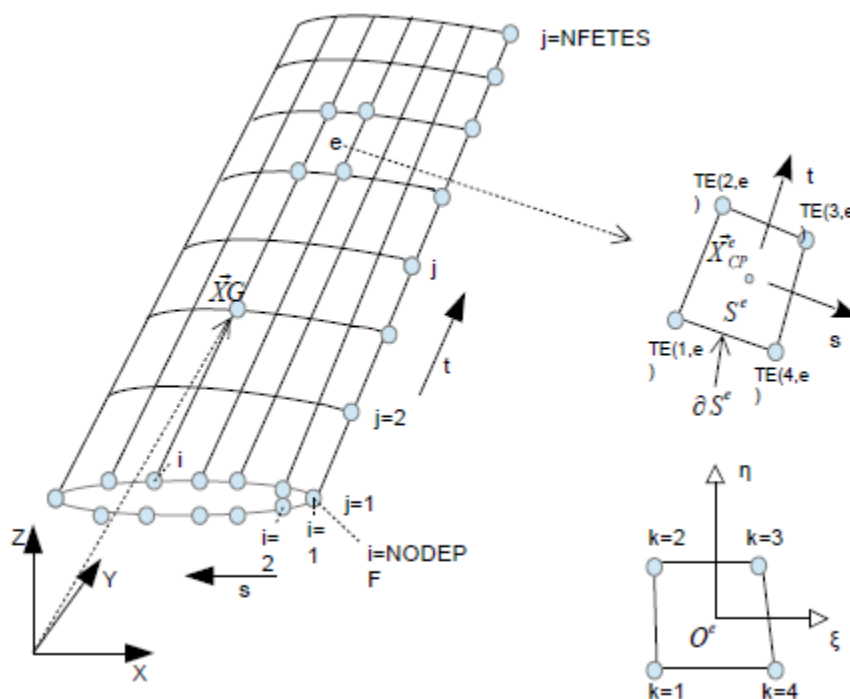
### 2.8.1. Διακριτοποίηση της γεωμετρίας

Η γεωμετρία ενός σώματος αποτελεί δεδομένο του εξεταζόμενου προβλήματος. Προσεγγίζεται από ένα επιφανειακό πλέγμα σημείων (  $X^*G$  ) στο γενικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ένα τέτοιο επιφανειακό πλέγμα μπορεί να περιγραφεί από μία διπαραμετρική επιφάνεια

$$S(s_i, t_j) : S(s_i, t_j), \quad i=1, NODEPF, \quad j=1, NFETES$$

όπου

NODEPF, NFETES ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος κατά την  $s$  και  $t$  διάστασή του αντίστοιχα. Οι γραμμές  $s_i$  είναι συνήθως προσανατολισμένες προς την κύρια κατεύθυνση της ροής, ιδιότητα που διευκολύνει τις αριθμητικές διαδικασίες όπως η αποβολή της στροβιλότητας. Ξεκινάει από την ακμή εκφυγής της κάτω πλευράς υπερπίεσης (pressure side), περνάει από το χείλος προσβολής και καταλήγει στην ακμή εκφυγής από την πάνω πλευρά υποπίεσης (suction side). Η παράμετρος μήκους  $r$  αντιστοιχεί σε ακτινικές θέσεις πάνω στο σώμα.



Διακριτοποίηση του σώματος

Ένα επιφανειακό πλέγμα ορίζεται από NODE κόμβους, που σχηματίζουν NPAN τετράπλευρα επιφανειακά στοιχεία:

$$\text{NODE} = \text{NODEST} * \text{NFETES}$$

$$\text{NPAN} = (\text{NODEST} - 1) * (\text{NFETES} - 1)$$

Οι κόμβοι που ορίζουν το επιφανειακό πλέγμα του σώματος βρίσκονται πάνω στην πραγματική επιφάνεια του σώματος και στην γενική περίπτωση ένα στοιχείο ορίζεται από τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία. Η αναπαράσταση των

σωμάτων με επίπεδα στοιχεία οδηγεί σε απλούστευση των αριθμητικών υπολογισμών και εξοικονόμηση χρόνου υπολογιστή. Δεν αποτελεί θεωρητική απαίτηση της μεθόδου αλλά διευκολύνει τους υπολογισμούς ταχυτήτων ιδίως στην περίπτωση που αυτές γράφονται στην αναλυτική τους μορφή.

Στις περιοχές όπου η πτέρυγα εμφανίζει έντονες κλίσεις δημιουργούνται κενά μεταξύ των στοιχείων και η προσέγγιση της γεωμετρίας μπορεί να μην είναι ακριβής. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με πύκνωση των στοιχείων στις περιοχές αυτές και κυρίως στην ακμή προσβολής και στην ακμή εκφυγής. Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτουν τραπεζοειδή στοιχεία.

Έτσι στο γενικό-αδρανειακό σύστημα ορίζεται δομημένο πλέγμα από σημεία

$XG(k, n)$  με  $k=1:3$ ,  $n=1: NODE$

όπου το  $k$  αντιστοιχεί σε καρτεσιανή συνιστώσα του αδρανειακού συστήματος αναφοράς και

το  $n$  σε αριθμό κόμβου του πλέγματος, σύμφωνα με την αρίθμηση που περιγράφεται παρακάτω.

Η θέση ενός τετράπλευρου στοιχείου καθορίζεται από τις συντεταγμένες  $XG$  των τεσσάρων κορυφών που αριθμούνται δεξιόστροφα. Οι κορυφές  $k=1:4$ , στο τοπικό σύστημα του στοιχείου αντιστοιχούν σε κόμβους του γενικού συστήματος.

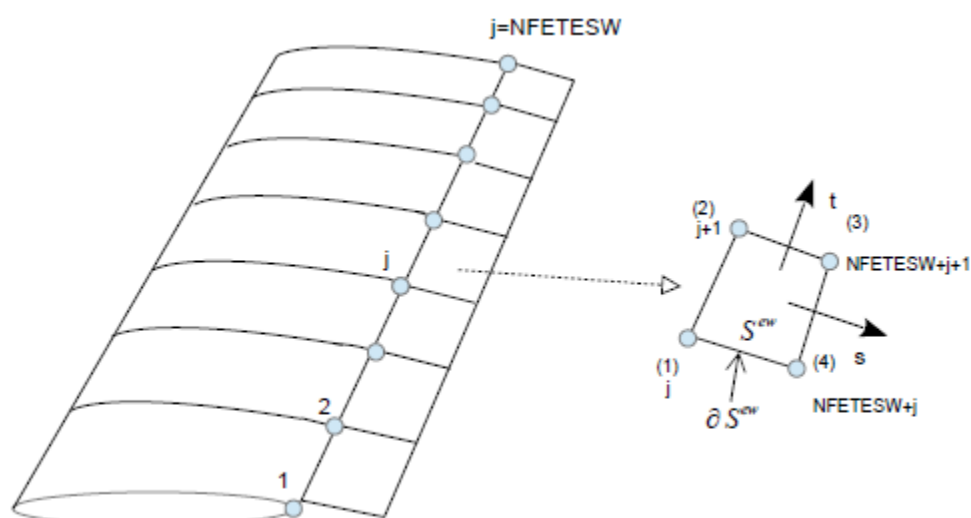
Με δεδομένη την γεωμετρία της πτέρυγας γίνονται υπολογισμοί για κάθε πάνελ ξεχωριστά. Δημιουργούνται τα διανύσματα κάθε πλευράς καθώς και των διαγωνίων υπολογίζονται τα μήκη και το εμβαδόν του πάνελ (AREA) και σχηματίζεται η βάση του τοπικού συστήματος. Επιπλέον ορίζεται διανυσματικά η θέση του σημείου ελέγχου  $XGUP$  που αποτελεί το σημείο επαλήθευσης της συνθήκης μη εισχώρησης.

Η παραγωγή του ομόρρου ενός ανωστικού σώματος γίνεται σταδιακά σύμφωνα με ένα χρονικό σχήμα παραγωγής στροβιλότητας. Το φύλλο στροβιλότητας παράγεται σε κάθε χρονικό βήμα και χωρίζεται στον κοντινό και τον μακρινό ομόρρου. Ο κοντινός ομόρρος αποτελεί το φύλλο στροβιλότητας που εκφεύγει άμεσα από την ακμή εκφυγής και αναπαρίσταται μέσω της δυναμικής θεώρησης



σύμφωνα με την οποία η ταχύτητα προκύπτει από το ημίθροισμα των ταχυτήτων της πάνω και της κάτω πλευράς. Ο μακρινός ομόρρους περιλαμβάνει τα υπόλοιπα στοιχεία του φύλλου στροβιλότητας που παρήχθησαν σε προηγούμενα χρονικά βήματα. Ο διαχωρισμός έγκειται στην επίδρασή τους στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά του σώματος και στο γεγονός ότι ο μακρινός ομόρρους ταξιδεύει στον χώρο και στον χρόνο με ταχύτητα που επιβάλλεται από τον άμεσο υπολογισμό της πάνω στους κόμβους του πλέγματος.

Η θέση αποβολής της στροβιλότητας στα πλαίσια της μη συνεκτικής θεώρησης είναι δεδομένη και ταυτίζεται με τη γραμμή της ακμής εκφυγής. Η διακριτοποίηση του φύλλου στροβιλότητας (σύμφωνα με τη δυναμική θεώρηση) αποτελεί συνέχεια της ακτινικής διακριτοποίησης της επιφάνειας του σώματος και αναπαριστάται από τετράπλευρα στοιχεία που αποτελούν προέκταση των γραμμών  $t=ctime$  του σώματος. Οι γραμμές αυτές πρέπει να είναι κοινές για το σώμα και τον ομόρρου καθώς αυτό επιβάλλεται από το θεώρημα του Kelvin που εφαρμόζεται σε αυτές τις θέσεις. Η γεωμετρία του ομόρρου αποτελείται από κόμβους του σώματος που βρίσκονται πάνω στην ακμή εκφυγής καθώς και από κόμβους που προκύπτουν από τη μεταφορά αυτών. Αυτό έχει σαν συνέπεια τη δημιουργία NFETESW-1 επιφανειακών στοιχείων που ορίζονται από  $2 \cdot NFETESW$  σημεία. Η αρίθμηση και οι υπολογισμοί για κάθε στοιχείο wake του ομόρρου είναι ίδιοι με τους αντίστοιχους των στοιχείων panel του σώματος.



Σχεδίαση 7: Διακριτοποίηση του ομόρρου

Για κάθε στοιχείο “w” του κοντινού αλλά και του μακρινού ομόρρου ακολουθείται η ίδια διαδικασία διακριτοποίησης. Η διαφοροποίηση όπως αναφέρθηκε στην παραπάνω παράγραφο έγκειται στον τρόπο μεταφοράς των στοιχείων στην εξέλιξη του φαινομένου.

Όταν τα στοιχεία του κοντινού ομόρρου μεταφερθούν και περάσουν στον μακρινό, ο υπολογισμός της ταχύτητας αποδεδεσμεύεται από μέσες ταχύτητες και από τα κέντρα των πάνελ και πλέον υπολογίζεται σε κάθε κόμβο ξεχωριστά.

Ο παραπάνω χειρισμός είναι απαραίτητος για την καλύτερη διαχείριση των τρισδιάστατων δομών του ομόρρου. Στο κοντινό κομμάτι η γεωμετρία του φύλλου στροβιλότητας παρουσιάζει εν μέρει 2 βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι εξαρτώνται από την ταχύτητα εκφυγής δηλαδή από τη μέση ταχύτητα των στοιχείων “e” της γεωμετρίας στην πάνω και στην κάτω πλευρά.

Ως εκ τούτου η σύγκλιση της μεθόδου εξαρτάται μόνο από τις συνιστώσες κατά τον “x” και τον “z” άξονα. Αντίθετα, ο μακρινός ομόρρους παρουσιάζει έντονες συνιστώσες κατά τον “y” άξονα με αποτέλεσμα η συστροφή των στοιχείων από το κέντρο των πάνελ να είναι περιορισμένη. Για αυτόν τον λόγο η μετακίνηση των πάνελ μέσω των κόμβων παρουσιάζει συνέχεια και αποτυπώνει με καλύτερη ακρίβεια δομές, όπως λόγου χάρη στροβίλους των ακροπτερυγίων (wingtip).

### 2.8.2. Συνθήκη μη εισχώρησης

Η συνθήκη μη εισχώρησης εφαρμόζεται σε καθένα από τα στοιχεία “e” του σώματος και επιβάλλει τον μηδενισμό της κάθετης ταχύτητας σε αυτά:

$$(u^{\rightarrow}(\vec{x}; t) - U^{\rightarrow} b(\vec{x}; t))^{\rightarrow} \eta = 0$$

Η μεθοδολογία αυτή δεν εξετάζει σώματα τα οποία κινούνται.

$$U^{\rightarrow} b(\vec{x}; t) = 0$$

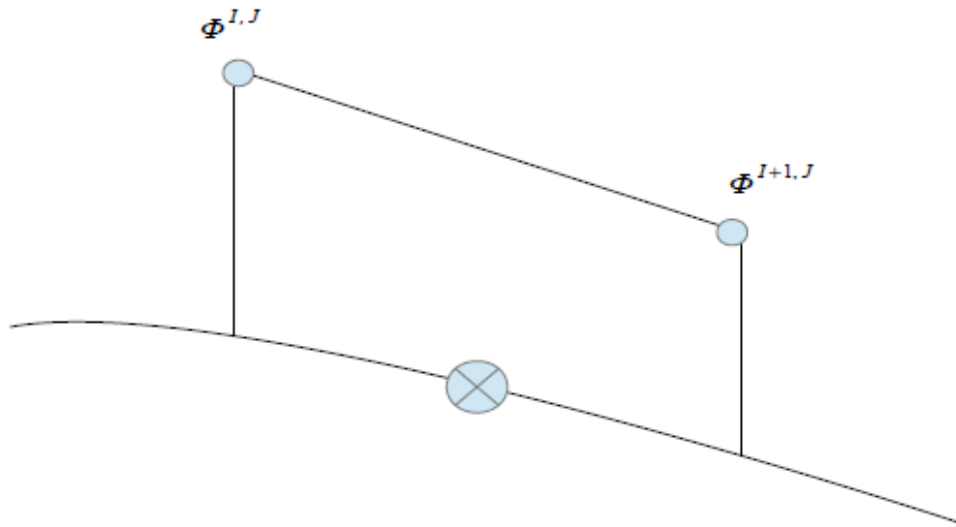
και σύμφωνα με το θεώρημα διαχωρισμού των ταχυτήτων του Helmholtz:

$$(U^{\rightarrow \infty}(\vec{x}; t) + \nabla \Phi(\vec{x}; t))^{\rightarrow} \eta = 0 ,$$

$$\partial \Phi / \partial \eta(\vec{x}) = -U^{\rightarrow \infty} \cdot \vec{\eta}$$

Οι βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος αποκτούν διακριτές τιμές στους κόμβους του σώματος και επομένως η συνθήκη εφαρμόζεται στο  $x^{\rightarrow} CP$  (σημείο

ελέγχου) του κάθε πάνελ. Το σημείο ελέγχου κατά την κατεύθυνση  $s$  επιλέγεται να είναι στο κέντρο της απόστασης  $|\Phi|, J-\Phi|+1, j|$ , πράγμα που επιλέγεται και για την  $t$  κατεύθυνση.



Σχεδίαση 9: Αναπαράσταση του σημείου ελέγχου κατά την "s" διεύθυνση

$$\frac{1}{2}(\varphi_{\vec{x}_{Cp}}^{I,J} + \varphi_{\vec{x}_{Cp}}^{I+1,J}) - \frac{1}{4\pi} \sum_{\epsilon=1}^N \int_{\Delta S^{\epsilon}} \varphi(\vec{s}) \frac{(\vec{x}_{Cp} - \vec{s}) \cdot \vec{n}(\vec{s})}{|\vec{x}_{Cp} - \vec{s}|^3} dS = \frac{1}{4\pi} \sum_{\epsilon=1}^N \int_{\Delta S^{\epsilon}} (-\vec{U}_{\infty}) \cdot \vec{n} \frac{1}{|\vec{x}_{Cp} - \vec{s}|} dS$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S^w} [\varphi]_w(\vec{s}) \frac{(\vec{x}_{Cp} - \vec{s}) \cdot \vec{n}(\vec{s})}{|\vec{x}_{Cp} - \vec{s}|^3} dS$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την εφαρμογή της συνθήκης σε ένα τυχαίο  $x_{Cp}$ . Αριστερά της ισότητας εντοπίζονται οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος από 1 έως DoF. Δεξιά της ισότητας παρατηρείται ένας σταθερός όρος. Η αρίθμηση (I,J) και (I+1,J) του δυναμικού αποκτά σταθερή τιμή για κάθε στοιχείο "e" και αναφέρεται στην αμοιβαία συνεισφορά των δύο βαθμών ελευθερίας του κάθε πάνελ.

Ωστόσο η θέση στην ακτινική κατεύθυνση δεν είναι ουσιώδης δεδομένης της σταθερής κατανομής του δυναμικού. Μεγάλη επίδραση στη σταθερότητα του συστήματος και των αποτελεσμάτων έχει η θέση στην αξονική κατεύθυνση, κι αυτό γιατί διαφοροποιείται η συνεισφορά των δύο βαθμών ελευθερίας από τους οποίους εξαρτάται κάθε στοιχείο "p" του σώματος.

Στην πράξη η επαλήθευση της συνθήκης στο κέντρο προκαλεί αστάθειες. Για αυτόν τον λόγο εισάγεται μία λογική ανάντι σχήματος "UPWIND" η οποία μετατοπίζει το σημείο ελέγχου.

### 2.8.3. Συνθήκη Kutta

Η συνθήκη Kutta επιβάλλει την ισότητα των πιέσεων στην ακμή εκφυγής δηλαδή τον μηδενισμό του πηδήματος:

$$P^+ \equiv P^- \rightarrow [P]=0, \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{\partial[\Phi]}{\partial t} + \frac{[u^2]}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial \Phi^+}{\partial t} + \frac{u^{+2}}{2} = \frac{\partial \Phi^-}{\partial t} + \frac{u^{-2}}{2} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta \Phi^+}{\Delta t} + \frac{(U_{\omega_s}^+ + u_s^+)^2}{2} + \frac{(U_{\omega_t}^+ + u_t^+)^2}{2} = \frac{\Delta \Phi^-}{\Delta t} + \frac{(U_{\omega_s}^- + u_s^-)^2}{2} + \frac{(U_{\omega_t}^- + u_t^-)^2}{2} \rightarrow$$

$$\frac{\Phi^+ - \Phi_{old}^+}{\Delta t} + \frac{U_{\omega_s}^2 + 2U_{\omega_s} u_s^+ + u_s^{+2}}{2} + \frac{U_{\omega_t}^2 + 2U_{\omega_t} u_t^+ + u_t^{+2}}{2} = \dot{\zeta}$$

$$\frac{\Phi^- - \Phi_{old}^-}{\Delta t} + \frac{U_{\omega_s}^2 + 2U_{\omega_s} u_s^- + u_s^{-2}}{2} + \frac{U_{\omega_t}^2 + 2U_{\omega_t} u_t^- + u_t^{-2}}{2} \quad (2.36)$$

Η παραπάνω έκφραση αποτελεί την προς επίλυση εξίσωση. Ωστόσο είναι μη γραμμική και για αυτόν τον λόγο δεν είναι δυνατό να επιλυθεί άμεσα. Επιλέγεται να γραμμικοποιηθεί εκφράζοντας το τετράγωνο των ταχυτήτων ως:

$$u^2 = u * u_{const}$$

το  $u_{const}$  είναι μία αυθαίρετη θεώρηση της ταχύτητας που επιλέγεται σαν λύση. Με επαναλήψεις, στόχος είναι η σταθερά που επιλέγεται και η τιμή που προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης να συγκλίνουν. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τη διαδικασία αυτή είναι η μέθοδος του σταθερού σημείου:

$$u_m = f(u_{m-1}) \text{ με } u_0 = 0$$

Έχοντας γραμμικοποιήσει την εξίσωση, την εφαρμόζουμε (NFETES-1) φορές, τόσες όσα και τα STRIP. Κάθε φορά εφαρμόζεται μεταξύ ενός πάνελ της πάνω πλευράς και του πάνελ της κάτω πλευράς.

Για την απλούστευση των πράξεων και για την εξοικονόμηση χρόνου ο υπολογισμός των ταχυτήτων που χρησιμοποιούνται προκύπτουν με την άμεση διαφόριση του βαθμωτού δυναμικού  $\Phi$  κάνοντας χρήση του θεωρήματος Gauss.

### 3. Υπολογιστικά αποτελέσματα

#### 3.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο 1 αναφέρεται ότι σκοπός της εργασίας είναι η υπολογιστική ρευστομηχανική προσομοίωση της ροής γύρω από πτέρυγα που έχει ακροπτερύγια.

Η παρούσα εργασία έρχεται στην συνέχεια προηγούμενης εργασίας του Θ. Ανδρόνικου [71] για να συνεχίσει την εξέλιξη του κώδικα unsteady του Εργαστηρίου Αεροδυναμικής Ε.Μ.Π.. Για να μπορέσουμε να είμαστε σίγουροι για την αξιοπιστία του κώδικα και ότι έχουμε σωστά δεδομένα για τα μεγέθη θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας σε σχέση αποτελέσματα από το πείραμα "Aerodynamic Comparison of Hyper-Elliptic Cambered Span (HECS) Wings with Conventional Configurations" των Barry S. Lazos και Kenneth D. Visser, στο οποίο γίνονται μετρήσεις σε συμβατικές διατάξεις όπως winglets και σε ημι-ελλειπτική πτέρυγα [68].

#### 3.2. Περιγραφή του πειράματος

Μία πειραματική μελέτη διεξήχθη για να εξεταστούν τα Αεροδυναμικά μεγέθη και τα χαρακτηριστικά του πεδίου ροής υπερ ελλειπτικών καμπυλωμένων πτερυγών (hyper-elliptic cambered span - HECS) και την σύγκριση των αποτελεσμάτων με ποιο συμβατικές διαμορφώσεις που χρησιμοποιούνται για την μείωση της επαγωγικής οπισθέλκουσας.

Οι πειραματικές μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν στο Ερευνητικό Κέντρο της Nasa στο Langley (Basic Aerodynamics Research Tunnel - BART). Αυτή η εγκατάσταση είναι μια αεροσύραγγα ανοιχτού κυκλώματος με τμήμα διεξαγωγής των πειραμάτων 0,71m \* 1,02m και μήκος 3,05m. Η εγκατάσταση λειτούργησε με σταθερή ταχύτητα 50 m/s για όλα τα tests έτσι ώστε να επιτευχθεί αριθμός Reynolds  $3,33 \cdot 10^6/m$ . Σε αυτό το πείραμα δοκιμάστηκαν 8 διαφορετικά μοντέλα (configurations). Η αεροτομή που χρησιμοποιήθηκε ήταν η SD7032, η οποία είναι μια αεροτομή χαμηλών αριθμών Reynolds που έχει σχεδιαστεί για

να αντιμετωπίσει τα προβλήματα αποκόλλησης της ροής με τη χρήση bubble ramp.

Για την παρούσα εργασία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για δύο από τις παραπάνω πτέρυγες, τη βασική-ημιελλειψοειδή πτέρυγα (Baseline) και την πτέρυγα με ακροπτερύγιο τύπου winglet (Winglet 2).

Και οι δύο παραπάνω πτέρυγες χαρακτηρίζονται από εμβαδόν κάτοψης  $S=0.072258 \text{ m}^2$  και άνοιγμα πτερύγων  $b=0.7112 \text{ m}$  παρουσιάζοντας επομένως αναλογία  $AR=b^2/S=7$ . Η αεροτομή που χρησιμοποιήθηκε στην κατασκευή των πτερύγων ήταν η SD32, η οποία είναι κατάλληλη για λειτουργία σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds και έχει σχεδιαστεί ώστε να μετριάξει φαινόμενα αποκόλλησης της ροής.

Η βασική πτέρυγα χαρακτηρίζεται από ελλειπτική κατανομή χορδής με ευθεία γραμμή εκφυγής. Το εμβαδόν της πτέρυγας καθορίστηκε στα  $0.0736837 \text{ m}^2$  και το μήκος της στα  $0.7112 \text{ m}$ . Η μέση χορδή της πτέρυγας (mean-aerodynamic-chord MAC) υπολογίστηκε στα  $0.11862 \text{ m}$ .

Η πτέρυγα με ακροπτερύγιο τύπου winglet έχει άνοιγμα πτερύγων  $0.7112 \text{ m}$ , εμβαδόν  $0.078245 \text{ m}^2$  και η μέση χορδή υπολογίστηκε στα  $0.12878 \text{ m}$ . Το μήκος της προέκτασης (winglet) φτάνει σε μήκος τα  $0.107366 \text{ m}$  και η γωνία sweep καθορίστηκε στις 30 μοίρες. Κατά μήκος του winglet δεν χρησιμοποιήθηκε συστροφή (twist).

Η σήραγγα έχει μήκος 3.084 μέτρα και περιοχή δοκιμών 71.12 εκατοστόμετρα x 101.6 εκατοστόμετρα. Κατά τη διάρκεια του πειράματος η ταχύτητα του ανέμου στο εσωτερικό της σήραγγας διατηρήθηκε σταθερή στα 50 m/s επιτυγχάνοντας αριθμό Reynolds της τάξεως των 500.000.

### **3.3. Αποτελέσματα**

Δεδομένα σχετικά με τις δυνάμεις που αναπτύσσονται ανά διεύθυνση επάνω στην πτέρυγα, όπως και για τις αντίστοιχες ροπές, προκύπτουν από τη χρήση ζυγού (strain gauge balance) στον οποίο έχει τοποθετηθεί κατάλληλα το εκάστοτε αεροδυναμικό σώμα. Κατά τη διάρκεια του πειράματος, οι δύο

πτέρυγες που εξετάζονται (baseline και winglet) τοποθετήθηκαν στον ζυγό και έγιναν δοκιμές σε ένα μεγάλο εύρος γωνιών (-4 έως 10 μοίρες).

Η πτέρυγα τύπου baseline παρουσιάζει μεγαλύτερο συντελεστή άνωσης από την πτέρυγα τύπου Winglet, ωστόσο, το ίδιο ισχύει και για τον συντελεστή αντίστασης επομένως δεν είναι δυνατή η άμεση σύγκρισή τους.

Για τον παραπάνω λόγο, την καλύτερη αποτίμηση δηλαδή της αεροδυναμικής απόδοσης των πτερύγων, κατασκευάζεται το διάγραμμα που περιλαμβάνει τον λόγο L/D συναρτήσει του συντελεστή άνωσης που εμφανίζει κάθε πτέρυγα στο εύρος γωνιών από -4 έως 10 μοίρες.

Είναι εμφανές πως η πτέρυγα με ακροπτερύγιο τύπου winglet παρουσιάζει καλύτερη αεροδυναμική συμπεριφορά συγκριτικά με τη βασική πτέρυγα. Στο μεγαλύτερο εύρος του συντελεστή άνωσης, ο λόγος της άνωσης ως προς την αντίσταση παρουσιάζει μεγαλύτερες τιμές.

αξίζει να σημειωθεί πως στη συνέχεια η παρουσίαση των αποτελεσμάτων για τα χαρακτηριστικά του ομόρρου αφορά τις γωνίες στις οποίες εντοπίζεται η μεγαλύτερη τιμή του λόγου L/D. Επομένως, η πτέρυγα με ακροπτερύγιο τύπου winglet τοποθετήθηκε στις 2.75 μοίρες στις οποίες παρουσιάζει λόγο L/D=26.26 και συντελεστή άνωσης CL=0.639, ενώ η βασική πτέρυγα στις 1.77 μοίρες με λόγο L/D=25.45 και CL=0.574.

### **3.4. Υπολογιστικά αποτελέσματα**

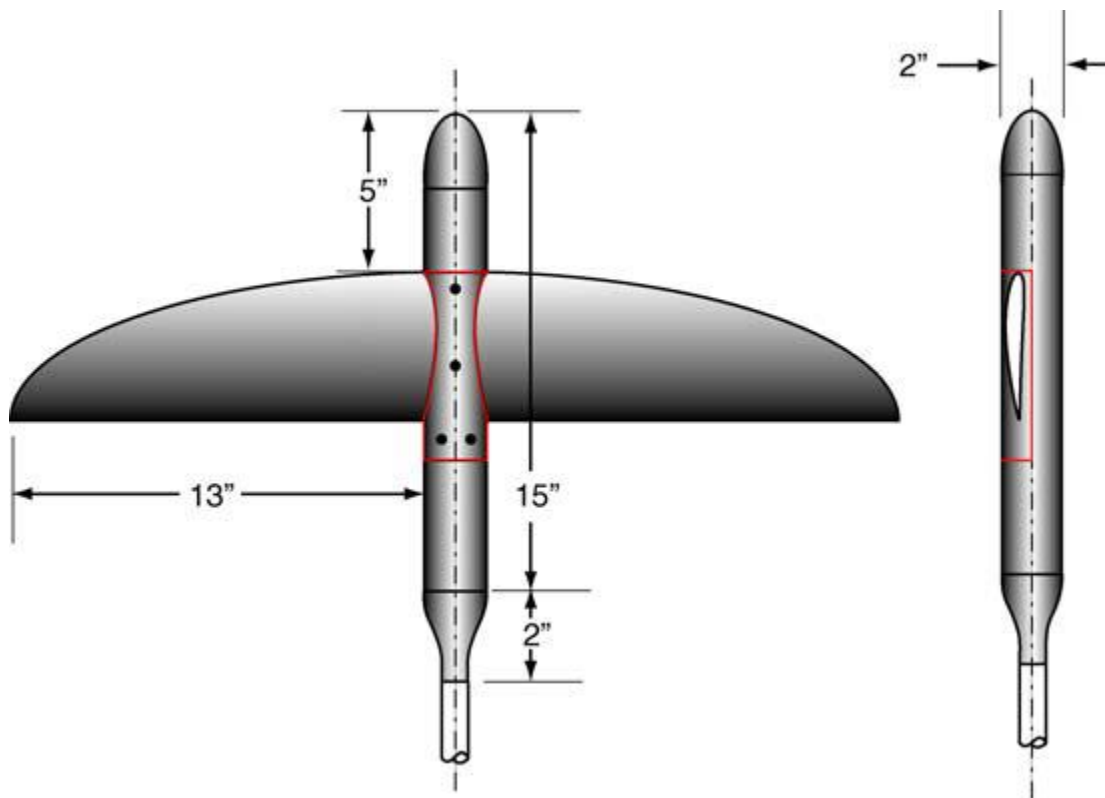
Εδώ θα παρουσιαστούν οι γεωμετρίες των πτερύγων που θα εξεταστούν. Επίσης θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εκτέλεση του κώδικα που λειτουργεί με την παρούσα μέθοδο για τις ίδιες παράμετρους ροής και θα συγκριθούν με αυτά του πειράματος για να αξιολογηθεί η συμπεριφορά του κώδικα

#### **3.4.1. Βασική πτέρυγα**

Η βασική πτέρυγα baseline κατασκευάστηκε έχοντας γενική μορφή έλλειψης στο μεγαλύτερο τμήμα της (και στην περιοχή κοντά στη γραμμή πρόσπτωσης) και ευθεία ακμή εκφυγής. Αυτή η διαμόρφωση χρησιμοποιήθηκε γιατί είχε διαπιστωθεί μετά από λεπτομερείς υπολογιστικές μελέτες ότι αυτή η μορφή πρόσδιδε συντελεστή απόδοσης της επαγόμενης οπισθέλκουσας πιο κοντά στη μονάδα από κάθε άλλη μορφή που δοκιμάστηκε με ελλειπτική κατανομή χορδής.



Σχήμα: Το πειραματικό μοντέλο της πτέρυγας baseline



Σχήμα: Σχηματική παράσταση του πειραματικού μοντέλου της πτέρυγας baseline

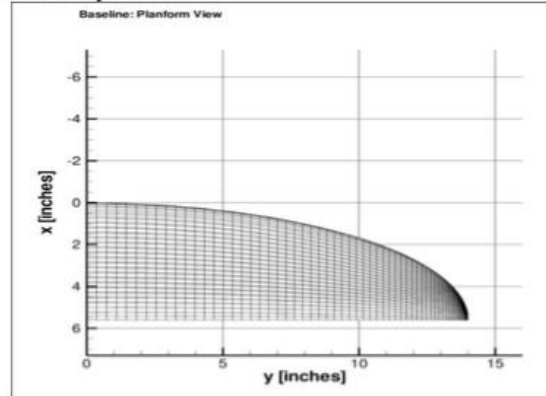
Το εμβαδόν της πτέρυγας (σε κάτοψη) είναι  $0.072258 \text{ m}^2$ , ενώ το πραγματικό εμβαδόν της πτέρυγας (επιφάνεια που έρχεται σε επαφή με το ρευστό) υπολογίστηκε ίσο με  $0.073807 \text{ m}^2$ . Η μέση αεροδυναμική χορδή (MAC) της πτέρυγας είναι  $0.11862 \text{ m}$ . Το κεντρικό σώμα αμελήθηκε για λόγους απλότητας και βάσει της υπόθεσης πως το σφάλμα της επίδρασης στα εν λόγω αεροδυναμικά χαρακτηριστικά που μελετώνται είναι πολύ μικρό.



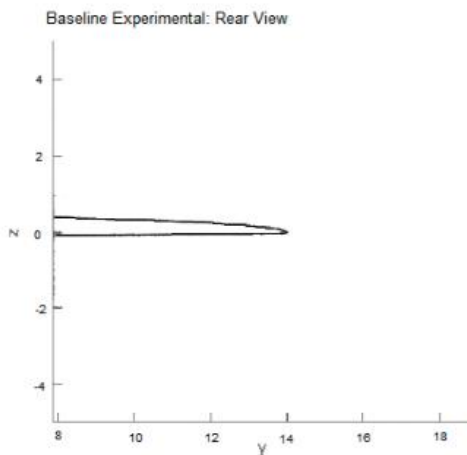
## Baseline Geometry



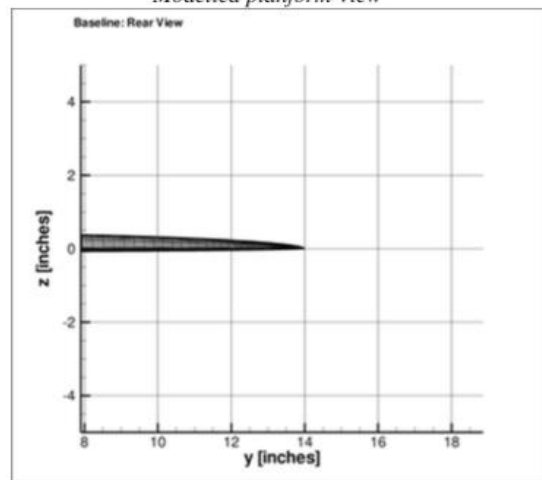
*Experimental planform view*



*Modelled planform View*



*Experimental rear view*



*Modelled rear view*

Σχήμα: Σύγκριση πειραματικού-υπολογιστικού μοντέλου για την βασική πτέρυγα

### 3.4.2. Πτέρυγα με καμπυλωμένο άκρο ( winglet2 )

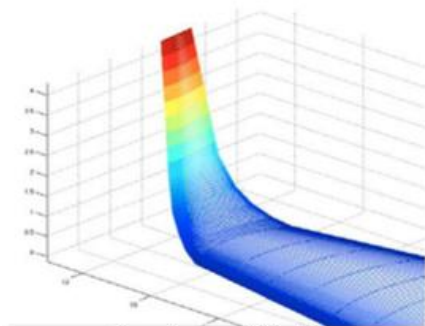
Έχοντας ως σκοπό να προσεγγιστεί ο σχεδιασμός πτερύγων με καμπυλωμένο άκρο με ένα συστηματικό τρόπο, χρησιμοποιήθηκαν οδηγίες (περιορισμοί) σχεδίασης οι οποίες ουσιαστικά υπαγορεύθηκαν από τη βιβλιογραφία και συνδυάστηκαν με έναν κώδικα vortex lattice. Οι κύριες οδηγίες σχεδίασης φαίνονται παρακάτω:

- Η οπισθόκλιση του καμπυλωμένου άκρου είναι  $30^\circ$
- Δεν υπάρχει συστροφή
- Γωνία Cant= $15^\circ$
- Taper ratio = 0.6
- Ratio of winglet chord to wingtip chord = 0.6.
- Αρνητική γωνία toe

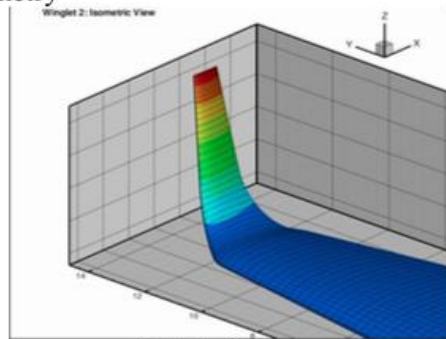


Εικόνα: winglet2

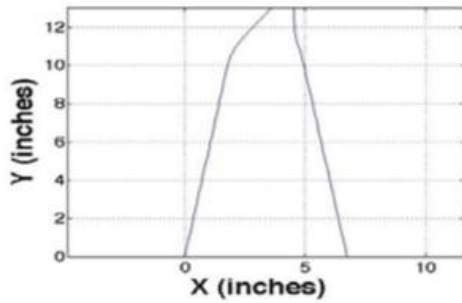
Winglet2 Geometry



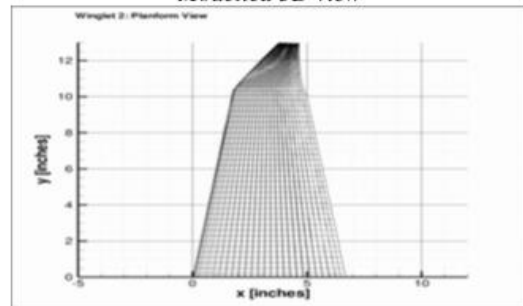
Experimental 3D view



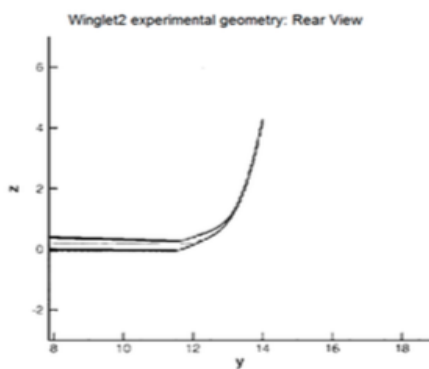
Modelled 3D view



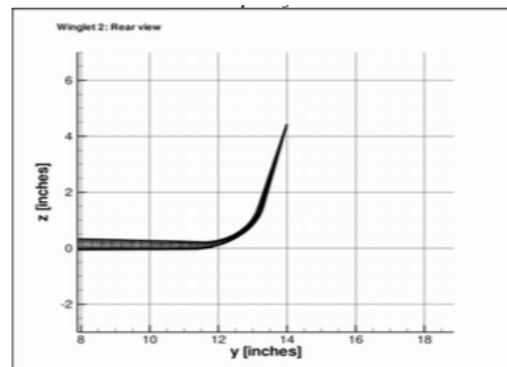
Experimental planform view



Modelled planform view



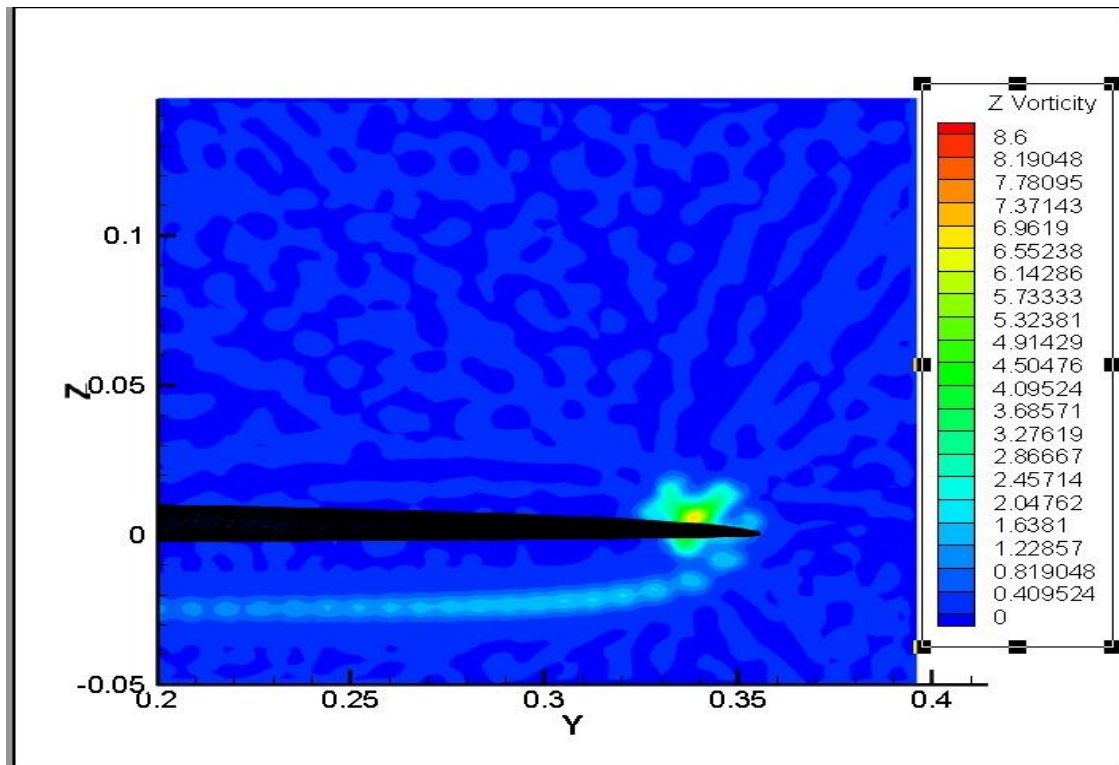
Experimental rear view



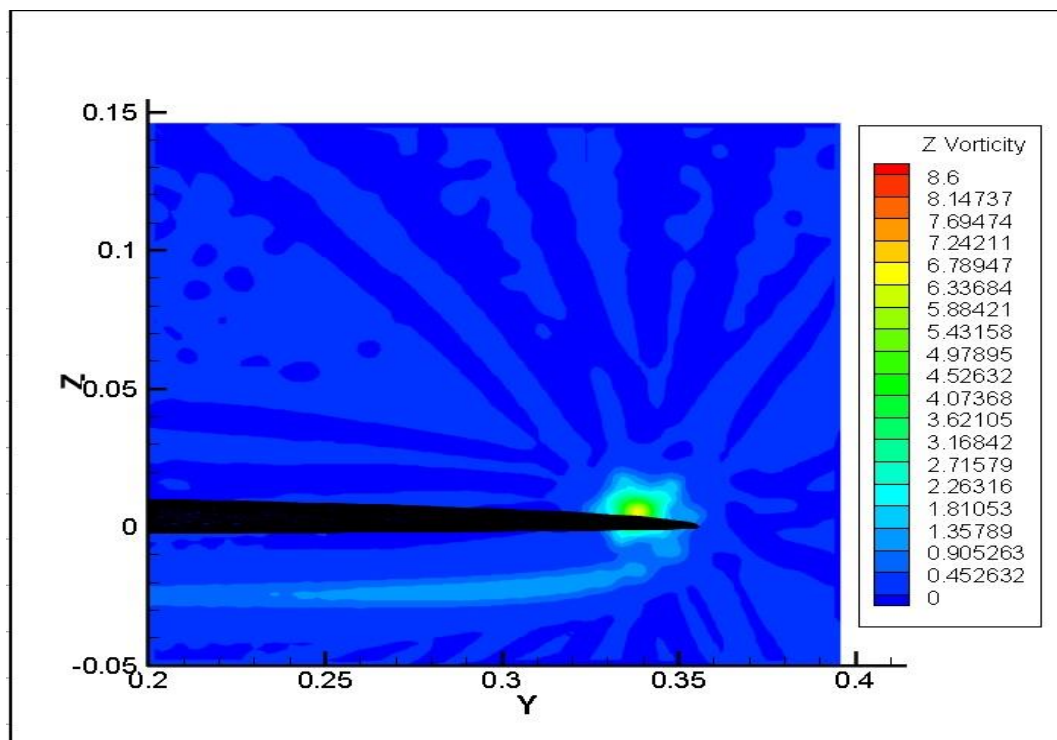
Modelled rear view

Σχήμα: Σύγκριση πειραματικού-υπολογιστικού μοντέλου για την πτέρυγα Winglet 2

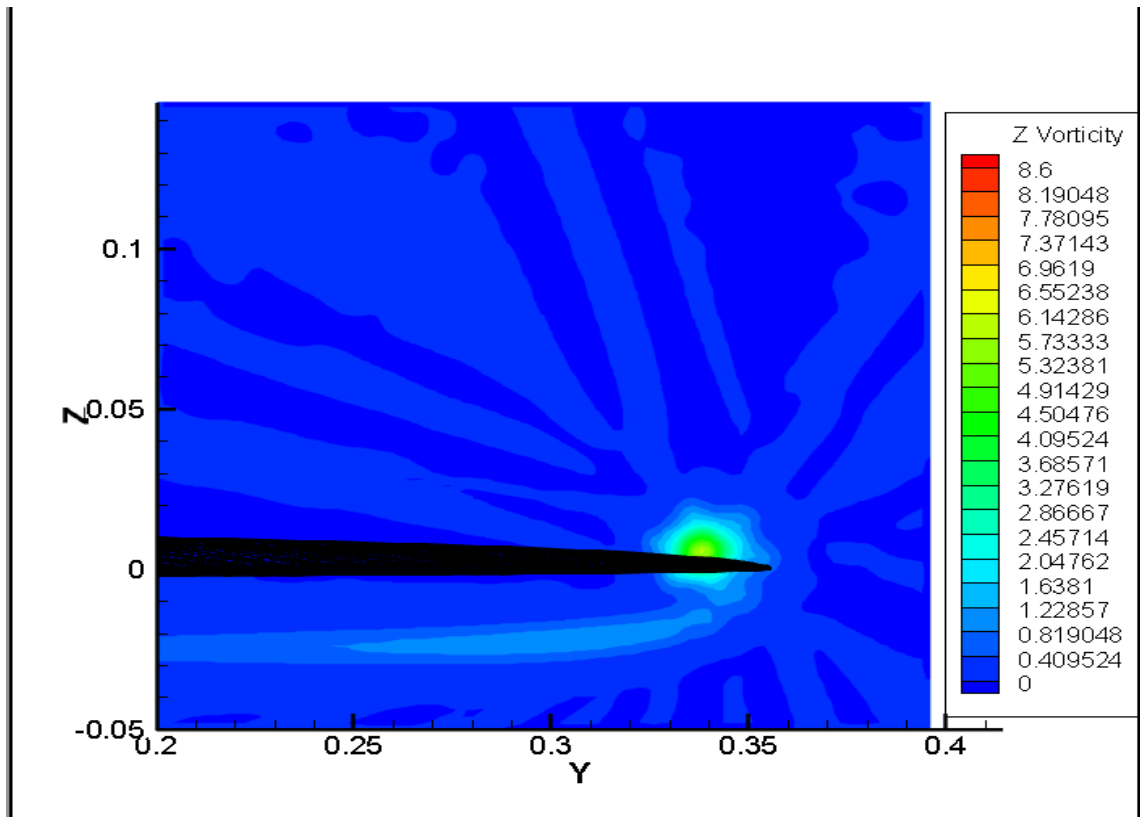
### 3.4.3. Υπολογιστικά αποτελέσματα για τη βασική πτέρυγα



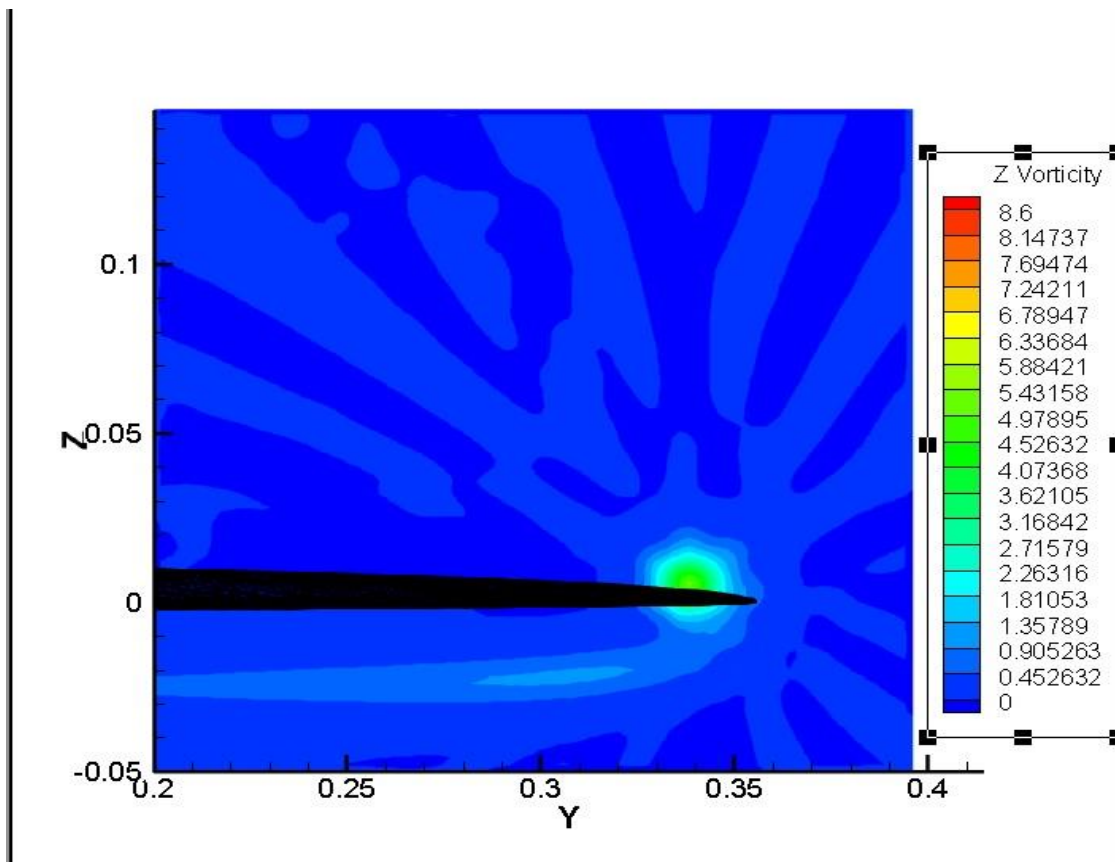
dt=0,00009 , eps=0,004 , max z vorticity=7,04459



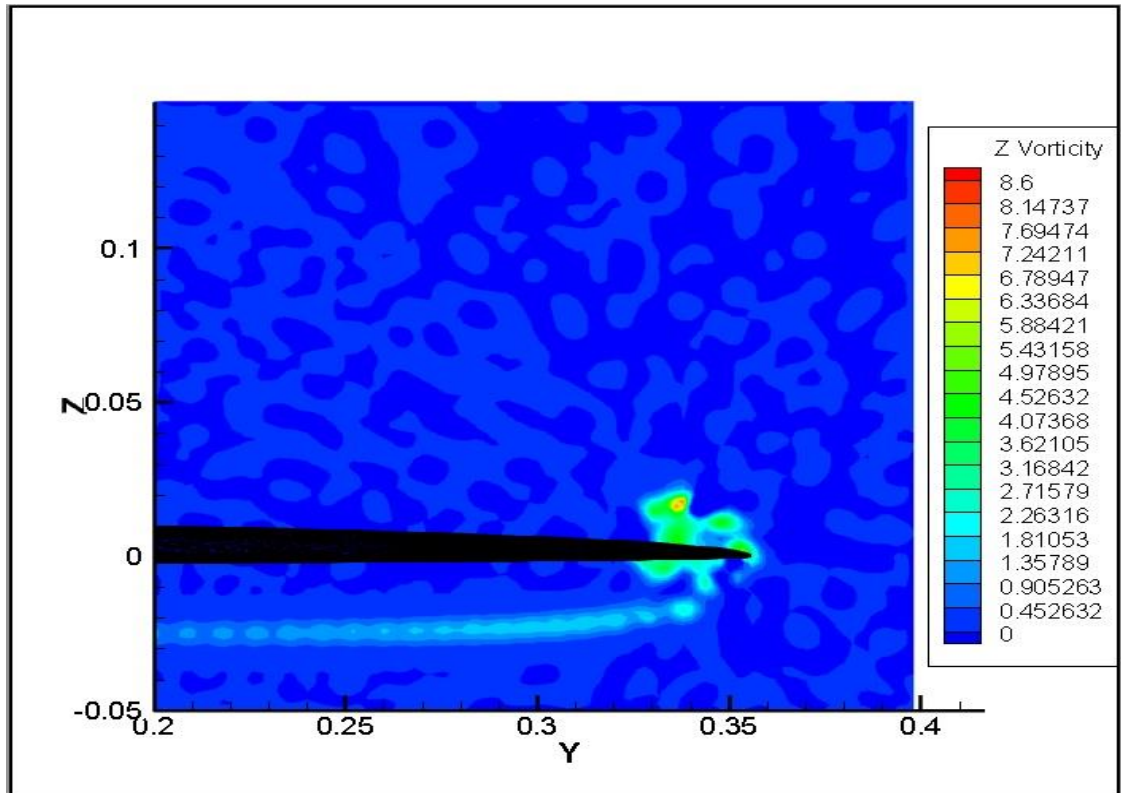
dt=0,00009 , eps=0,005 , max z vorticity=6,58222



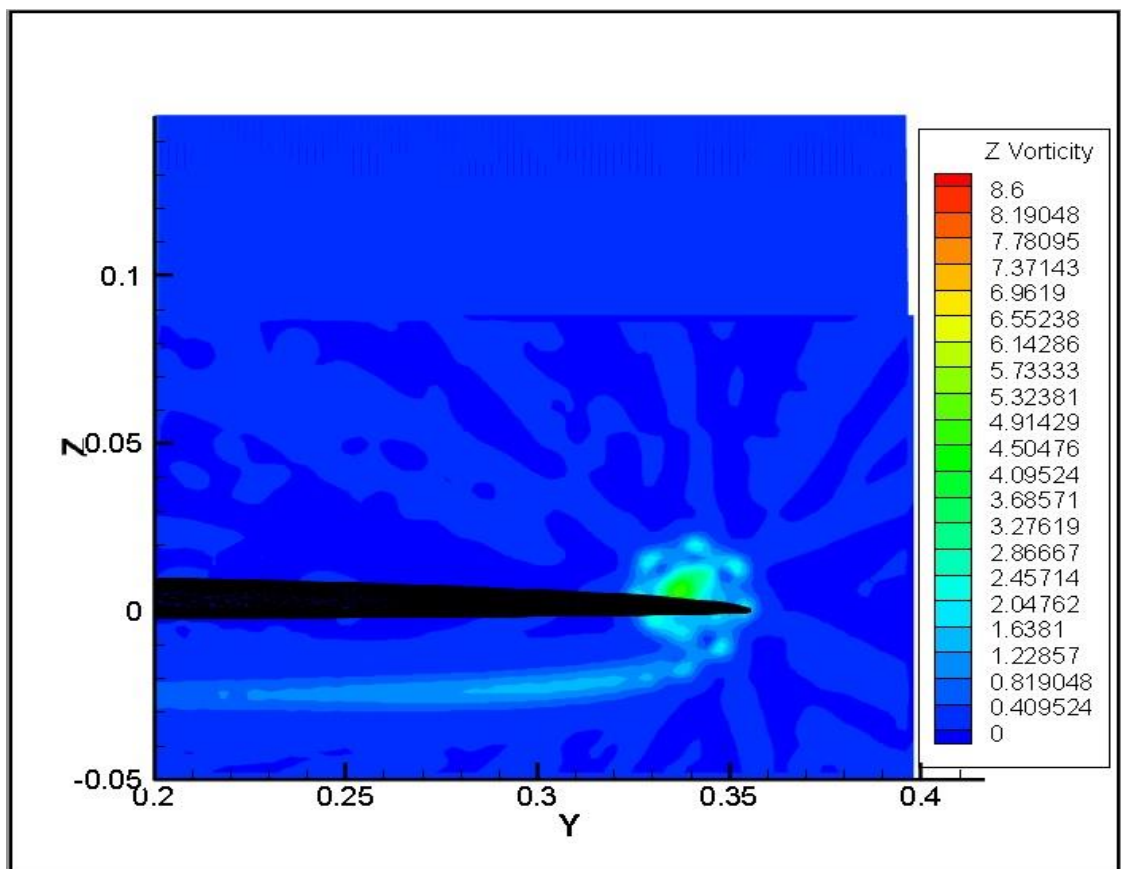
dt=0,00009 , eps=0,006 , max z vorticity=5,91152



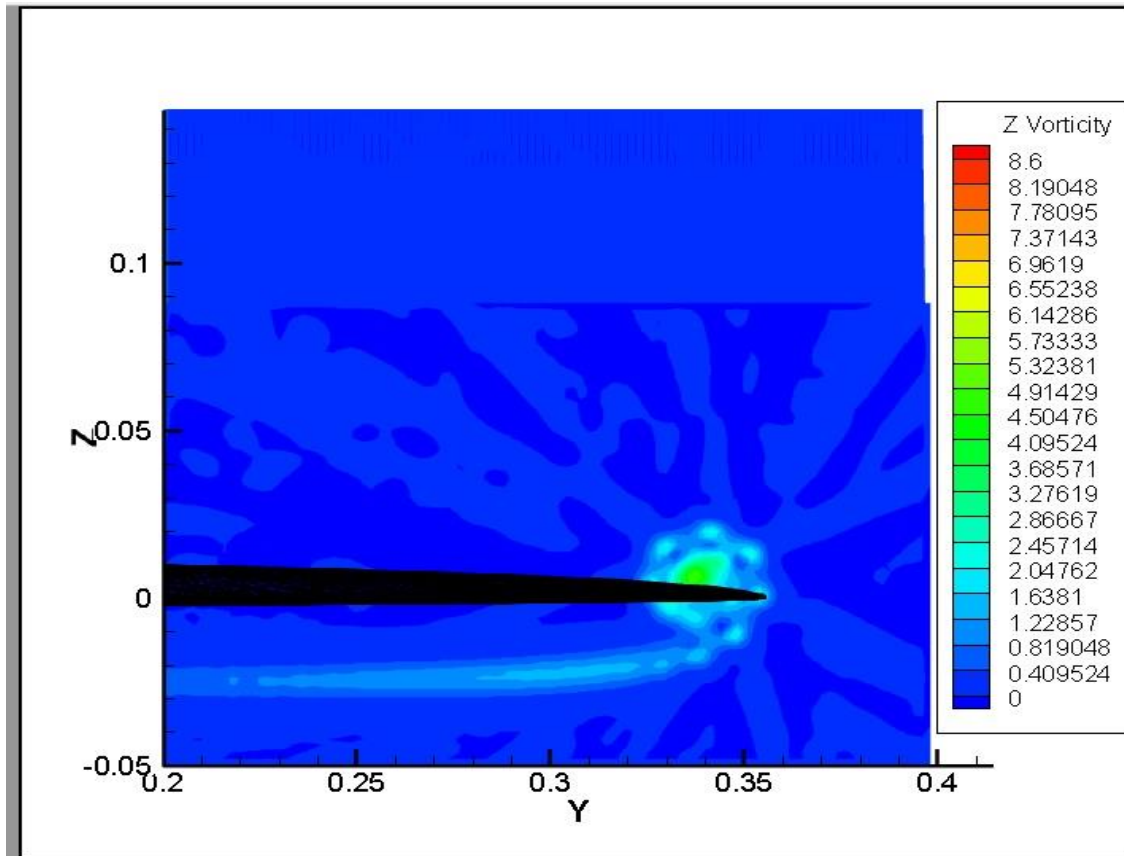
dt=0,00009 , eps=0,007 , max z vorticity=5,08965



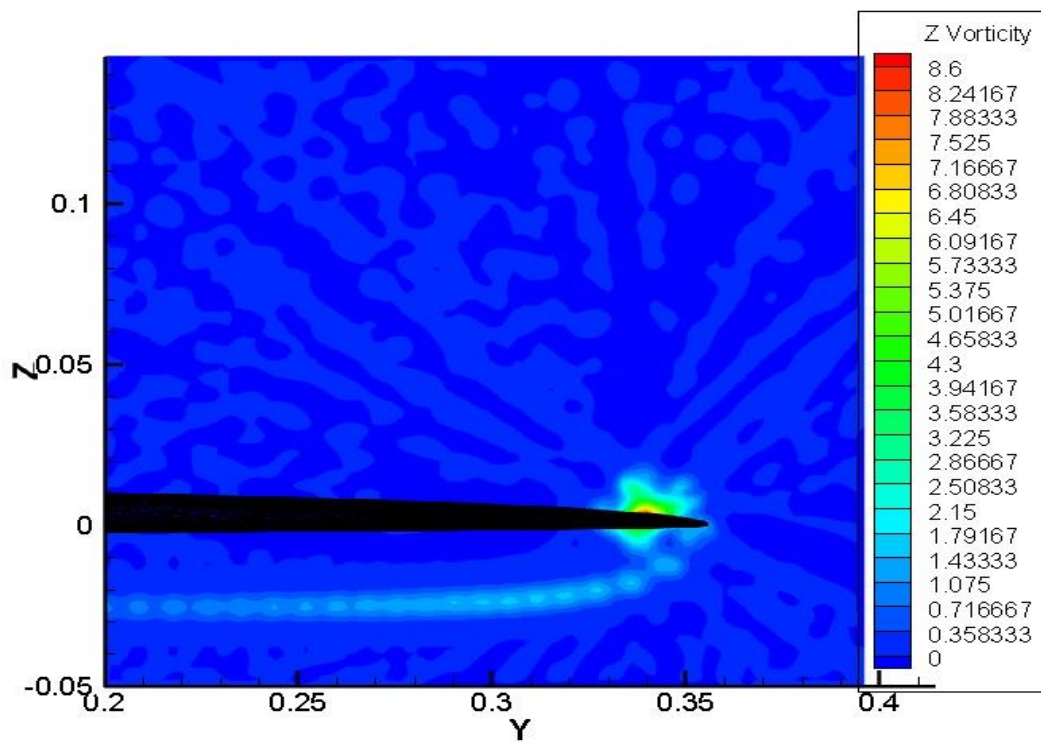
dt=0,00025 , eps=0,004 , max z vorticity=8,08776 , min z vorticity=-4,71446



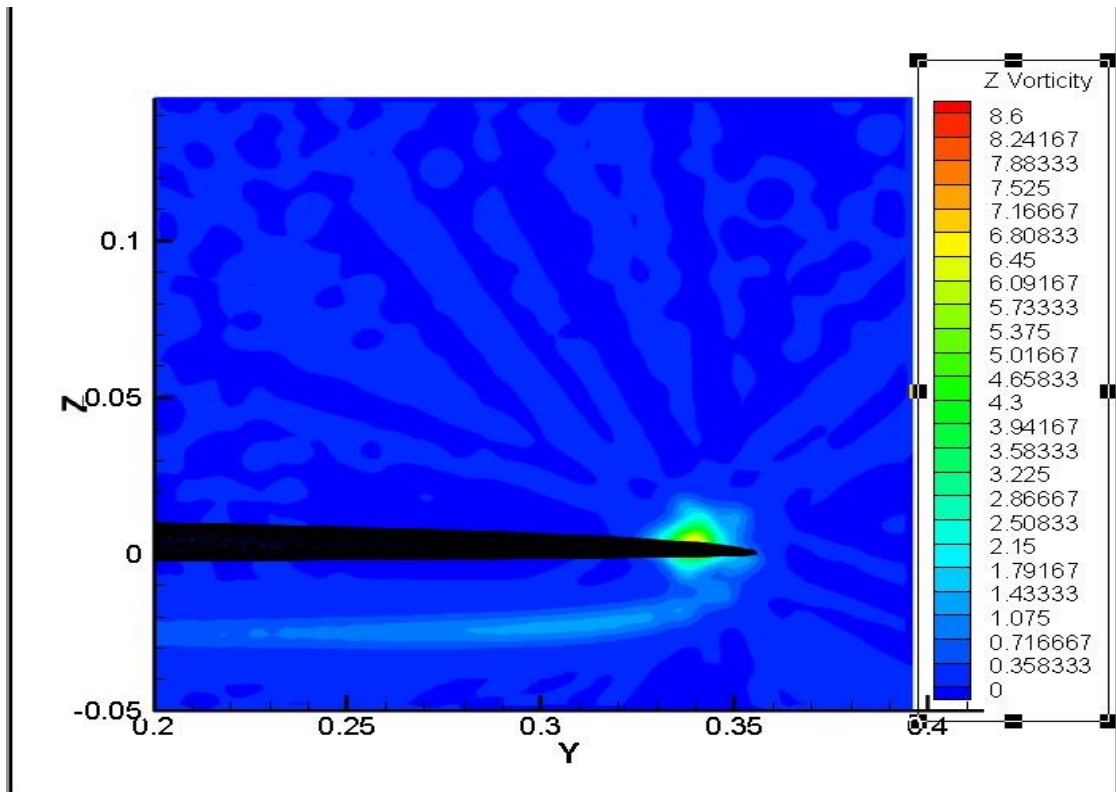
dt=0,00025 , eps=0,005 , max z vorticity=4,92273



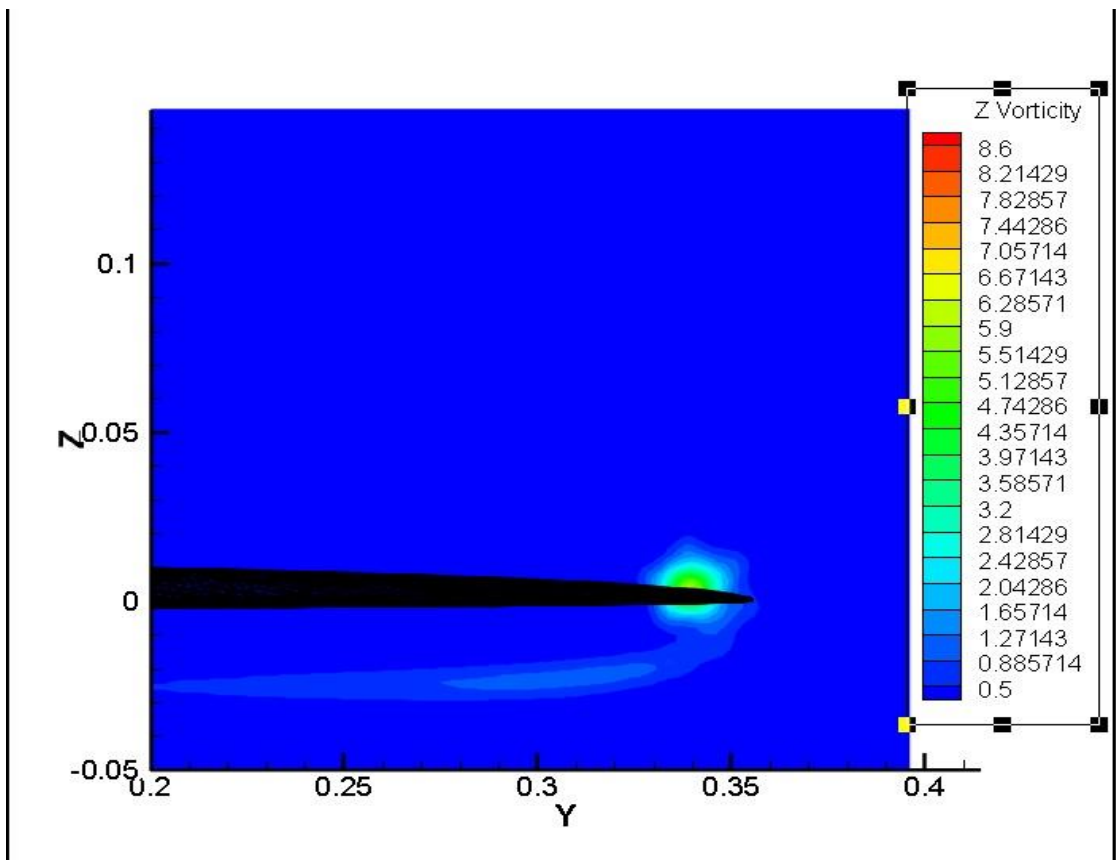
dt=0,0001 , eps=0,006 , max z vorticity=4,92273



dt=0,00005 , eps=0,004 , max z vorticity=7,96272

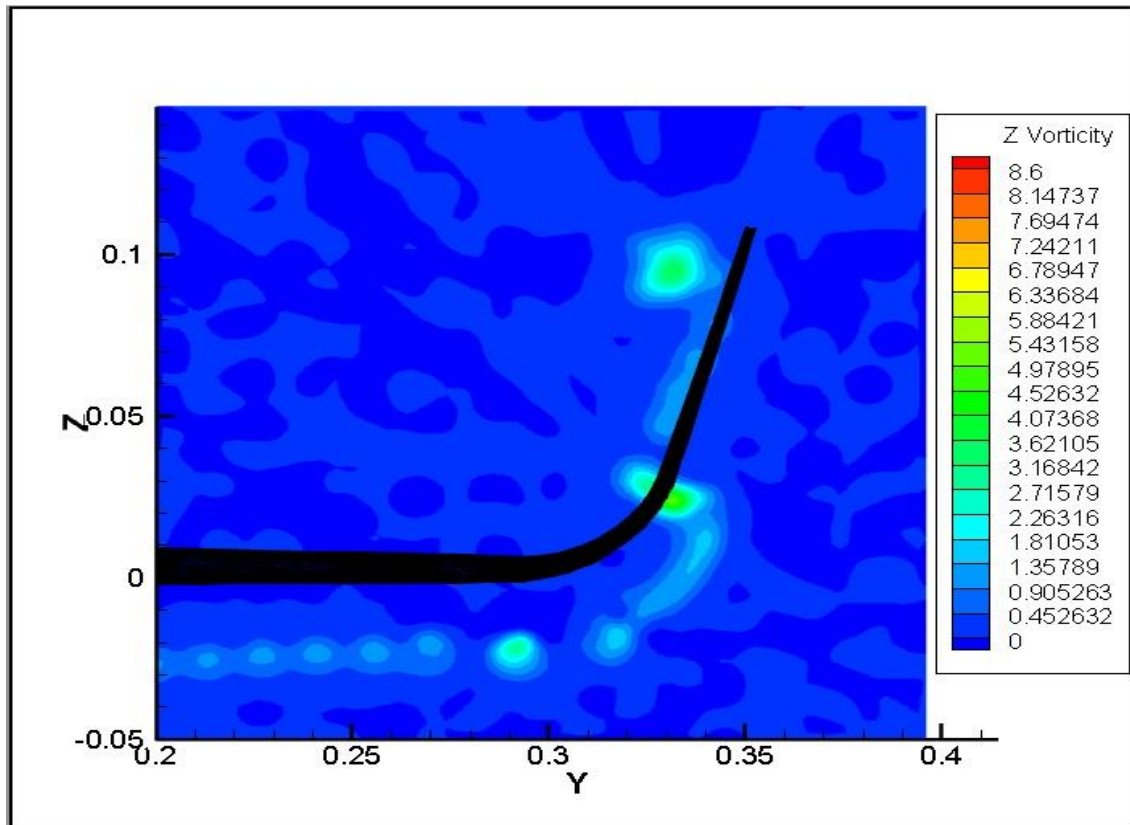


dt=0,00005 , eps=0,005 , max z vorticity=7,10776

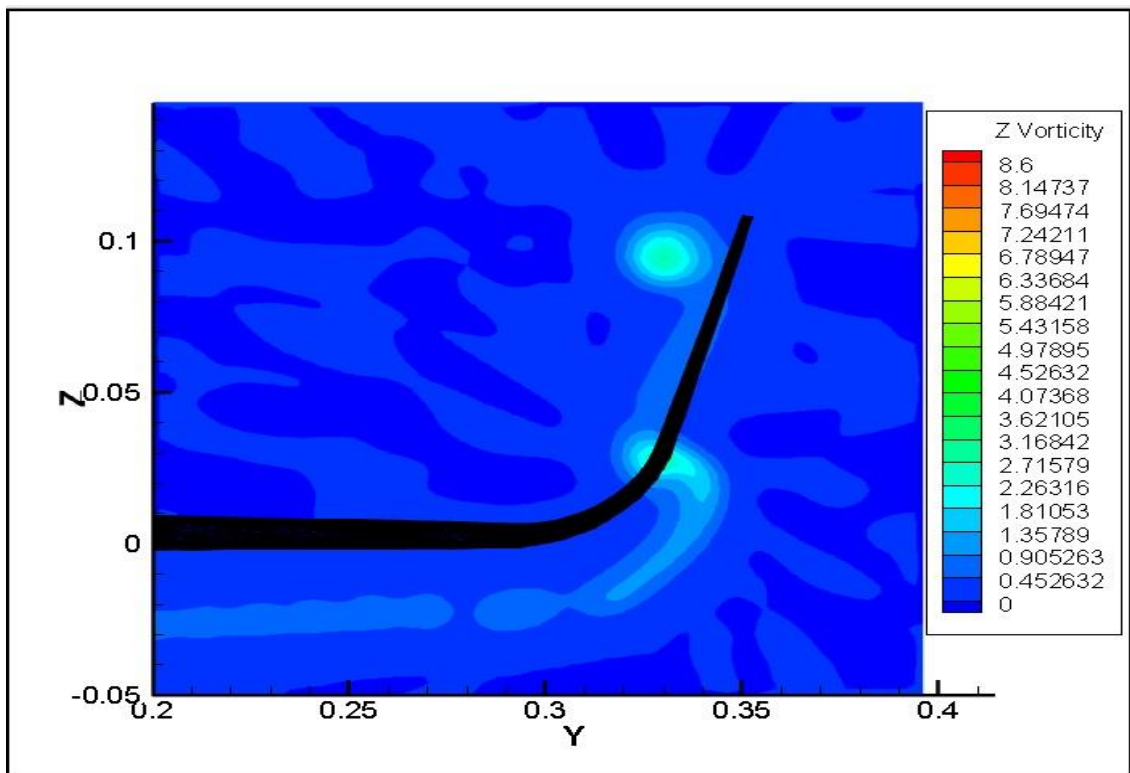


dt=0,00005 , eps=0,006 , max z vorticity=5,98959

### 3.4.4. Υπολογιστικά αποτελέσματα για την πτέρυγα με τα καμπυλωμένα άκρα

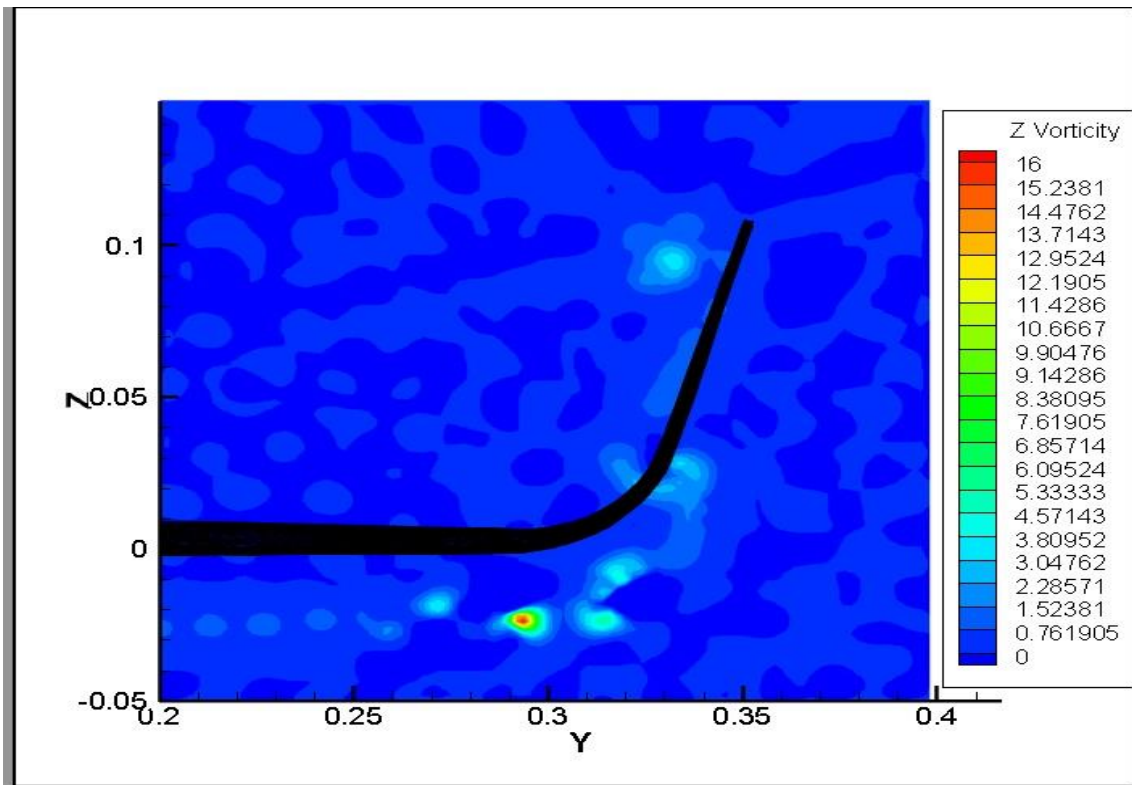


dt=0,0005 , eps=0,006 , max z vorticity=5.27795

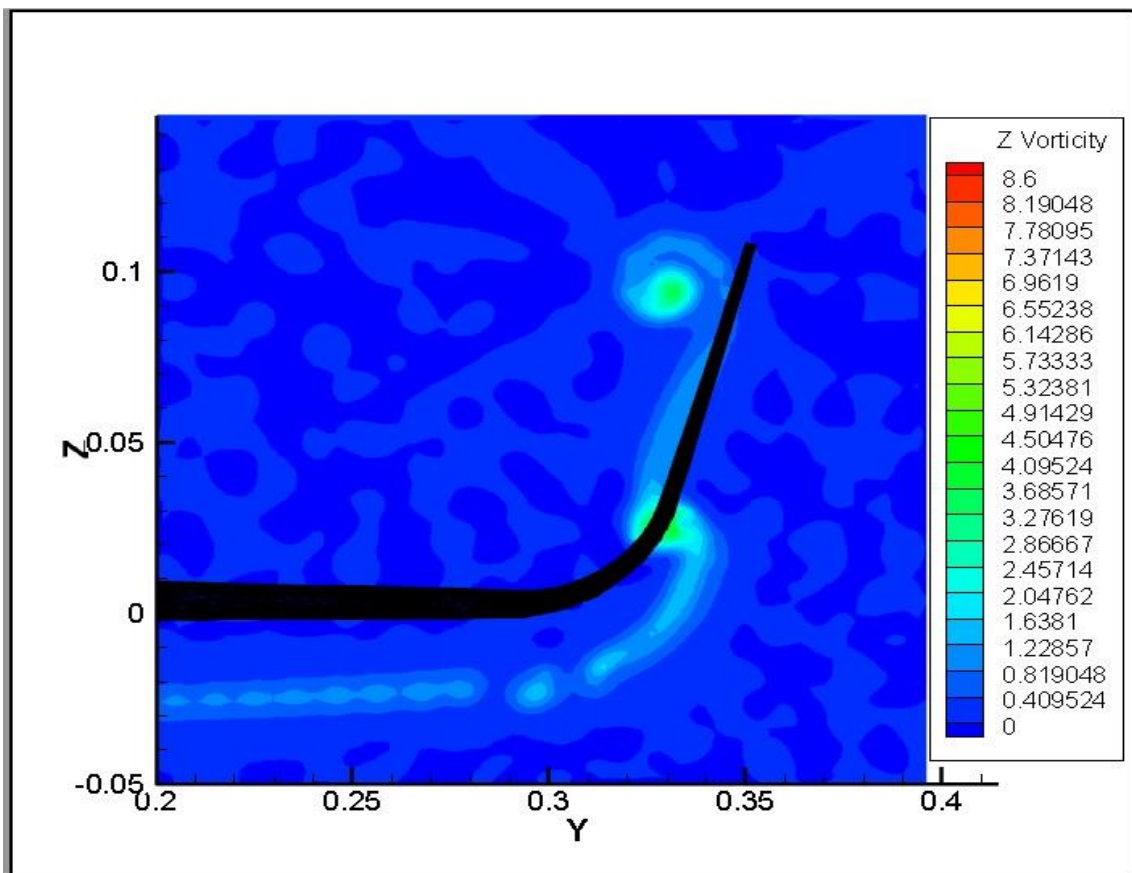


dt=0,0005 , eps=0,008 , max z vorticity=2.78136

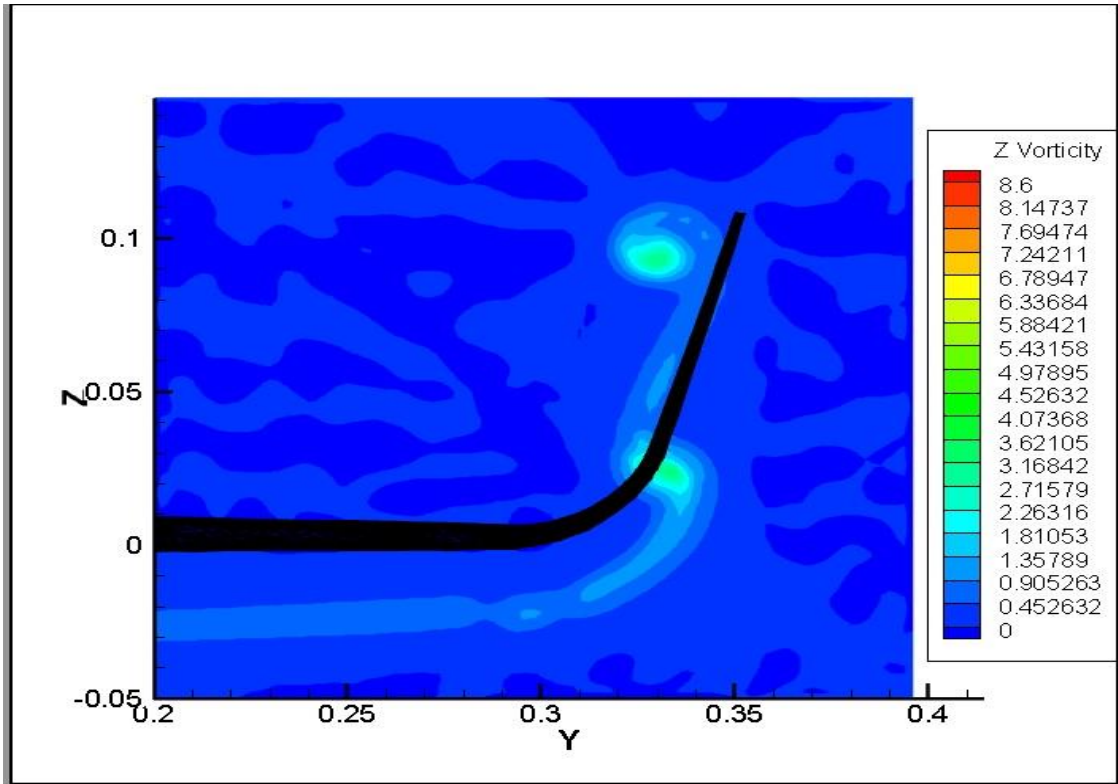




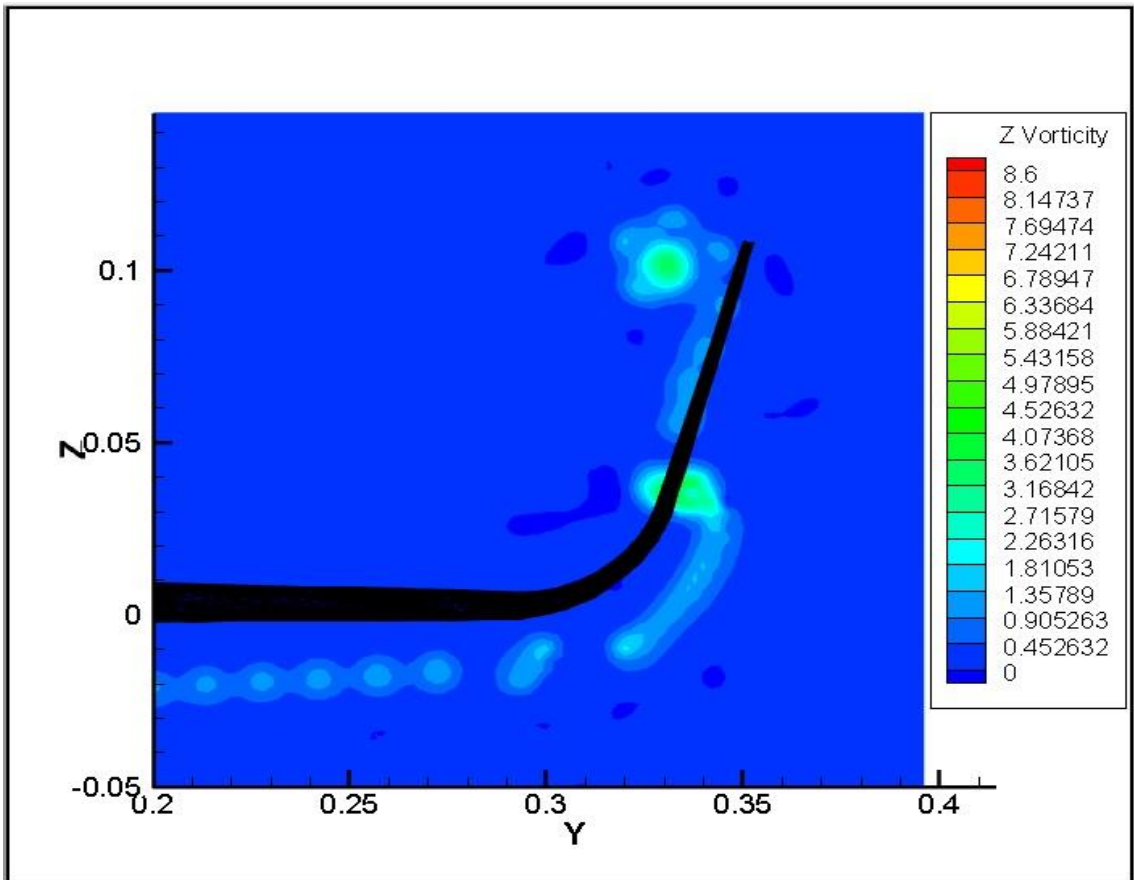
dt=0,0004 , eps=0,006 (low), max z vorticity=16.6133



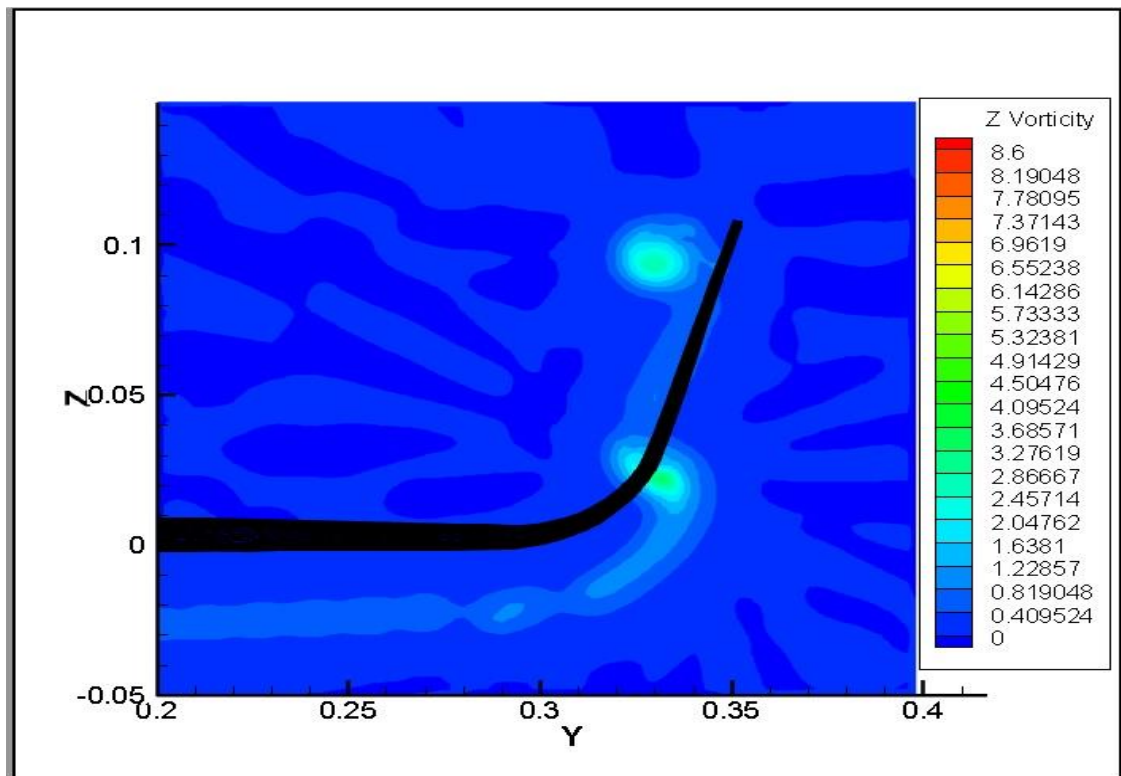
dt=0,0004 , eps=0,006 (thick), max z vorticity=4.53834



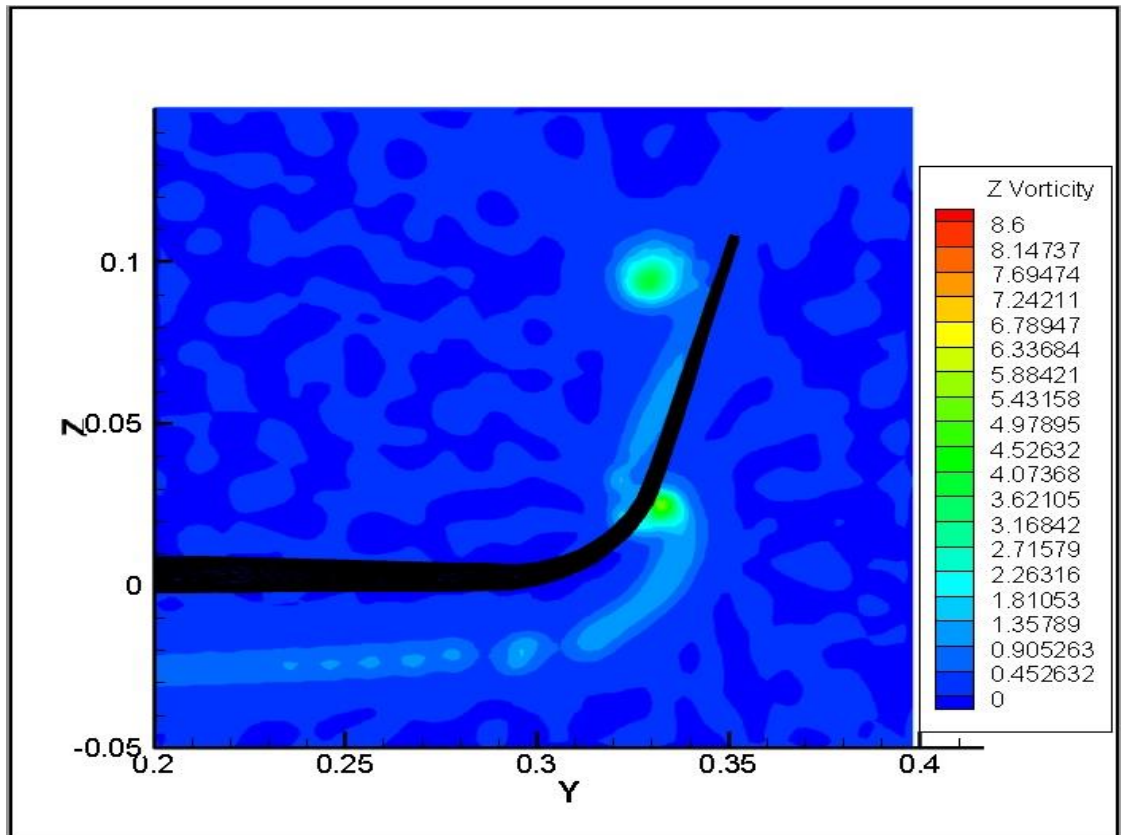
dt=0,0004 , eps=0,007 (thick), max z vorticity=3.15982



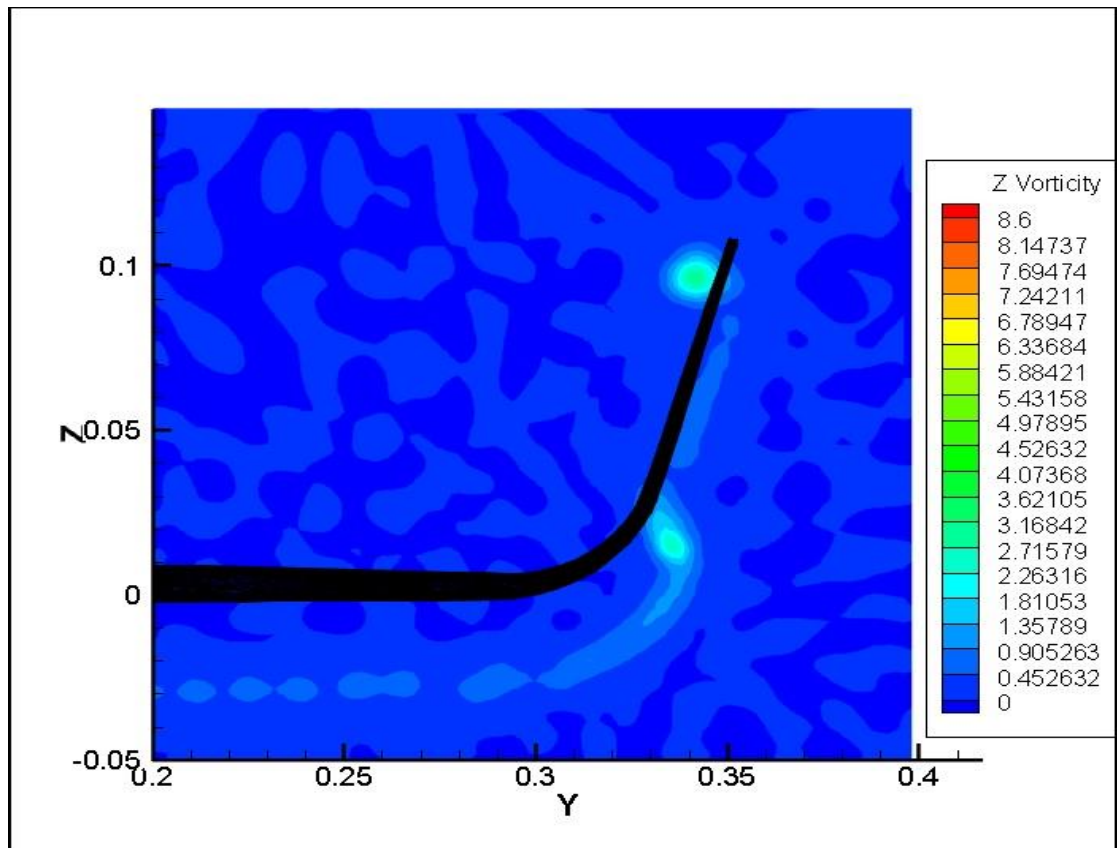
dt=0,00035 , eps=0,006 , max z vorticity=4.45261



dt=0,00035 , eps=0,008 , max z vorticity=3.55603



dt=0,0003 , eps=0,006 , max z vorticity=5.31734



dt=0,0001 , eps=0,006 , max z vorticity=3.1153

### 3.5. Συμπεράσματα

Και στις δύο πτέρυγες έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα συγκριτικά με τα πειραματικά, κάτι που σημαίνει ότι έχουμε φτάσει στο σωστό πλέγμα από άποψη πύκνωσης. Η μεθοδολογία έχει βελτιωθεί καθώς λαμβάνουμε καλύτερα αποτελέσματα από την προηγούμενη μελέτη πάνω σε αυτήν τη μεθοδολογία και η απόκλιση από τα πειραματικά αποτελέσματα είναι πάρα πολύ μικρή.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων και των δύο πτέρυγων έχουμε μια ισχυρή εξάρτηση από το eps (cut off length) το οποίο σχετίζεται με την κανονικοποίηση των αποτελεσμάτων σε σχέση με τον υπολογισμό των ταχυτήτων. Αυτή η εξάρτηση αφορά τόσο την ένταση όσο και τη θέση των στροβίλων. Θεωρητικά το eps (cut off length) δεν υπάρχει κάποια φυσική εξήγηση για αυτή την εξάρτηση, άρα πρόκειται για μια καθαρά υπολογιστική (αριθμητική) διαδικασία.

## **4. Αποτίμηση εργασίας - γενικά συμπεράσματα**

### **4.1. Συμπεράσματα**

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε αεροδυναμική ανάλυση μιας ελλειπτικής πτέρυγας και μιας πτέρυγας με καμπυλωμένο. Αυτό έγινε για να διαπιστωθεί η ικανότητα της μεθόδου να υπολογίζει σωστά ροές από πτέρυγες σύνθετων γεωμετριών και τον ομόρρου κατάντι αυτών.

Η μεθοδολογία που χρησιμοποιούμε είναι αυτή των συνοριακών στοιχείων με τη χρήση φύλλων στροβιλότητας. Η μεθοδολογία γενικά δεν φέρει κάποια θεωρητική αδυναμία πέραν της αδυναμίας να ενσωματώσει φαινόμενα συνεκτικότητας και συμπεστότητας στην πλήρη μορφή τους. Υπολογιστικά κατά την επίλυση της ροής γύρω από την πτέρυγα HECS I δημιουργήθηκαν αρκετές δυσκολίες και ο κώδικας χρειαζόταν αρκετό χρόνο για την ολοκλήρωση της ανάλυσης με αποτέλεσμα να γίνεται υπολογιστικά μη συμφέρουσα η χρήση του. Ουσιαστικά δυσκολεύεται αρκετά στη σύγκλιση της μεθόδου όταν χρησιμοποιούμε το σύννηθες κριτήριο σύγκλισης.

Παρόλα αυτά με μια μικρή χαλάρωση των κριτηρίων λαμβάνουμε ικανοποιητικά γρήγορα αποτελέσματα, αλλά μακριά από τα πειραματικά.

### **4.2. Προτάσεις για μελλοντική εργασία**

#### **Περαιτέρω ανάπτυξη του κώδικα**

Η περαιτέρω ανάπτυξη του θεωρώ πως είναι επιβεβλημένη, τόσο για την μείωση του υπολογιστικού κόστους κατά την αεροδυναμική ανάλυση, όσο και για την προσθήκη των απαραίτητων εργαλείων για τον υπολογισμό και άλλων χρήσιμων μεγεθών.

#### **Προσομοίωση και άλλων τύπων winglet**

Έχοντας σαν βάση τον κώδικα που έχει αναπτυχθεί είναι δυνατή η ανάλυση και άλλων τύπων winglet.

#### **Βελτιστοποίηση winglet**

Με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού που διαθέτει η Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ, μαζί με τον υπόψη κώδικα είναι δυνατή η μελέτη βελτιστοποίησης winglet κυρίως για εμπορικές εφαρμογές.

## Βιβλιογραφία

- [1] Anderson, Jr., J. D. 2001 Fundamentals of aerodynamics, 3rd edn. Mc Graw-Hill International Edition.
- [2] Lockney, D., Schwerin, B. & Rademakers, L. 2010 Winglets save billions of dollars in fuel costs. In Spinoff - NASA technologies benefit society.
- [3] Jacquin, L., Fabre, D., Sipp, D. & Coustols, E. 2005 Unsteadiness, instability and turbulence in trailing vortices. *Comptes Rendus Physique* 6, 399-414.
- [4] Lucca-Negro, O. & O'Doherty, T. 2001 Vortex breakdown: a review. *Progress in Energy and Combustion Science* 27, 431-481.
- [5] Crow, S. C. 1970 Stability theory for a pair of trailing vortices. *AIAA Journal* 8 (12), 2172-2179.
- [6] Naiman, A. D., Lele, S. K., Wilkerson, J. T. & Jacobson, M. Z. 2009 A low-order contrail model for use with global scale climate models. In 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting. Orlando, FL.
- [7] Duraisamy, K. 2005 Studies in tip vortex formation, evolution and control. PhD thesis, University of Maryland, College Park, MD.
- [8] Arndt, R. E. A. 2002 Cavitation in vertical flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* 34, 143-175.
- [9] William E. "Billie" Somerville 1869-1950. [lavhalloffame.org](http://lavhalloffame.org). Retrieved November 13, 2010.
- [10] Bargsten, Clayton J.; Gibson, Malcolm T. (August 2011). NASA Innovation in Aeronautics: Select Technologies That Have Shaped Modern Aviation, NASA/TM-2011-216987. National Aeronautics and Space Administration. pp.15–21.
- [11] Hoerner, Dr. Sighard (1952). "Aerodynamic Shape of the Wing Tips, Technical Report No. 5752" (PDF). USAF Technical Reports. Engineering Division, Air Materiel Command; Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio; United States Air Force.
- [12] "Aerodynamic Shape of the Wing Tips". [Stormingmedia. us](http://stormingmedia.us). Retrieved November 13, 2010.
- [13] [Aero-news.net](http://aero-news.net). Winglets Coming For Citation X Bizjets, March 13, 2007
- [14] Green, S. I. & Acosta, A. J. 1991 Unsteady flow in trailing vortices. *Journal of Fluid Mechanics* 227, 107-134.
- [15] Francis, T. B. & Kennedy, D. A. 1979 Formation of a trailing vortex. *Journal of Aircraft* 16 (3), 148-154.

- [16] Duraisamy, K. 2005 Studies in tip vortex formation, evolution and control. PhD thesis, University of Maryland, College Park, MD.
- [17] Chow, J., Zilliac, G. & Bradshaw, P. 1997a Turbulence measurements in the near field of a wingtip vortex. Nasa technical memorandum 110418. NASA.
- [18] Chow, J. S., Zilliac, G. G. & Bradshaw, P. 1997b Mean and turbulence measurements in the near field of a wingtip vortex. AIAA Journal 35 (10), 1561-1567.
- [19] Houghton, E. L. & Carpenter, P. V. 2003 Aerodynamics for engineering students, 5th edn. Butterworth Heinemann.
- [20] Aerodynamic Comparison of Hyper-Elliptic Cambered Span (HECS) Wings with Convencinal Configurations, Barry S. Lazos, Kenneth D. Visser, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia 2002
- [21] [https://en.wikipedia.org/wiki/Wingtip\\_device](https://en.wikipedia.org/wiki/Wingtip_device)
- [22] The design of winglets for low-speed aircraft, Mark D. Maughmer, The Pennsylvania State University
- [23] Anderson, E. A. & Lawton, T. A. 2003 Correlation between vortex strength and axial velocity in a trailing vortex. Journal of Aircraft 40 (4), 699–704.
- [24] Adrian, R. J., Christensen, K. T. & Liu, Z. C. 2000 Analysis and interpretation of instantaneous turbulent velocity fields. Experiments in Fluids 29, 275–290.
- [25] Arndt, R. E. A. 2002 Cavitation in vortical flows. Annual Review of Fluid Mechanics 34, 143–175.
- [26] Arora, P. R., Hossain, A., Edi, P., Jaafar, A. A., Younis, T. S. & Saleem, M. 2005 Drag reduction in aircraft model using elliptical winglet. Journal of the Institution of Engineers, Malaysia
- [27] Bailey, S. C. C., Tavoularis, S. & Lee, B. H. K. 2006 Effects of freestream turbulence on wing–tip vortex formation and near field. Journal of Aircraft 43, 1282– 1291.
- [28] Bandyopadhyay, P. 1990 The organized nature of a turbulent trailing vortex. In AIAA 21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, 18-20 June. Seattle, WA
- [29] Batchelor, G. K. 1964 Axial flow in trailing line vortices. Journal of Fluid Mechanics 20 (4), 645–658.
- [30] Beresh, S. J. & Henfling, J. F. 2010 Meander of fin trailing vortex and the origin of its turbulence. Experiments in Fluids 49, 599–611. Billant, P., Chomaz, J. M. & Huerre, P. 1998



- [31] Experimental study of vortex breakdown in swirling jets. *Journal of Fluid Mechanics* 376, 183–219.
- [32] Birch, D. M., Lee, T., Mokhatarian, F. & Kafyeke, F. 2003 Rollup and near– field behavior of a tip vortex. *Journal of Aircraft* 40 (3), 603–607.
- [33] Birch, D. M., Lee, T., Mokhatarian, F. & Kafyeke, F. 2004 Structure and induced drag of a tip vortex. *Journal of Aircraft* 41 (5), 1138–1145.
- [34] Chambers, J. R. 2003 Concept to reality: contribution of the NASA Langley Research Center to U.S. civil aircraft of the 1990s. Nasa sp-2003-4529. NASA
- [35] Chigier, N. 1974 Vortexes in aircraft wakes. *Scientific American* 230, 76–83
- [36] Chigier, N. A. & Corsiglia, V. R. 1971 Tip vortices - Velocity distributions. Nasa technical memorandum x-62,087. NASA.
- [37] Conlisk, A. T. & Komerath, N. M. 2001 The origin and structure of trailing vortices in aerodynamics. Final report. Georgia Institute of Technology.
- [38] Cotel, A. J. & Breidenthal, R. E. 1999 Turbulence inside a vortex. *Physics of Fluids* 11 (10), 3026–3029.
- [39] Cotel, A. J. & Breidenthal, R. E. 2002 Turbulence inside a vortex: take two. *Physics of Fluids* 14 (8), 2933–2934.
- [40] Crouch, J. D. 1997 Instability and transient growth for two trailing–vortex pairs. *Journal of Fluid Mechanics* 350, 311–330.
- [41] Crow, S. C. 1970 Stability theory for a pair of trailing vortices. *AIAA Journal* 8 (12), 2172–2179.
- [42] Devenport, W. J., Rife, M. C., Lipias, S. I. & Follin, G. J. 1996 The structure and development of a wing–tip vortex. *Journal of Fluid Mechanics* 312, 67–106.
- [43] Devenport, W. J., Zsoldos, J. S. & Vogel, C. M. 1997 The structure and development of a counter–rotating wing–tip vortex pair. *Journal of Fluid Mechanics* 332, 71–104.
- [44] Francis, T. B. & Kennedy, D. A. 1979 Formation of a trailing vortex. *Journal of Aircraft* 16 (3), 148–154.
- [45] Giuni, M., Benard, E. & Green, R. B. 2010 Near field core structure of wing tip vortices. In *Experimental Fluid Mechanics 2010* . Liberec, Czech Republic: EFM.

- [46] Govindaraju, S. P. & Saffman, P. G. 1971 Flow in a turbulent trailing vortex. *The Physics of Fluids* 14 (10).
- [47] Green, S. I. 1995 Fluid vortices. In *Fluid Mechanics and its Applications*, pp. 427–470. Kluwer Academic Publisher.
- [48] Green, S. I. & Acosta, A. J. 1991 Unsteady flow in trailing vortices. *Journal of Fluid Mechanics* 227, 107–134.
- [49] Grow, T. L. 1969 Effect of a wing on its tip vortex. *Journal of Aircraft* 6 (1), 37–41
- [50] Gursul, I. 2004 Recent development in delta wing aerodynamics. *The Aeronautical Journal* pp. 437–452.
- [51] Gursul, I., Vardaki, E., Margaris, P. & Wang, Z. 2007 Control of wing vortices. In *Active Flow Control*, pp. 137–151. Springer.
- [52] Haller, G. 2005 An objective definition of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics* 525, 1–26.
- [53] Houghton, E. L. & Carpenter, P. V. 2003 *Aerodynamics for engineering students*, 5th edn. Butterworth Heinemann.
- [54] Jacquin, L., Fabre, D., Sipp, D. & Coustols, E. 2005 Unsteadiness, instability and turbulence in trailing vortices. *Comptes Rendus Physique* 6, 399–414
- [55] Jeong, J. & Hussain, F. 1995 On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics* 285, 69–94.
- [56] Karakus, C., Akilli, H. & Sahin, B. 2008 Formation, structure, and development of the near-field wing tip vortices. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 222, 13–22.
- [57] Kim, S. E. & Rhee, S. H. 2005 Prediction of tip-vortex flow past a finite wing. In *43th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*. Reno, NV.
- [58] Lucca-Negro, O. & O'Doherty, T. 2001 Vortex breakdown: a review. *Progress in Energy and Combustion Science* 27, 431–481.
- [59] Mudkavi, V. Y. 1993 The phenomenon of vortex breakdown. In *Proceedings of the Fluid Dynamics Symposium in honour of Professor R. Narashima on his 60th birthday*. Sikim, India
- [60] Saffman, P. G. 1974 The structure and decay of trailing vortices. *Archives of Mechanics* 26 (3), 423–439.

- [61] Spall, R. E. 2001 Numerical study of a wing–tip vortex using the Euler equations. *Journal of Aircraft* 38 (1), 22–27.
- [62] Surana, A., Grunberg, O. & Haller, G. 2006 Exact theory of three–dimensional flow separation. Part 1. Steady separation. *Journal of Fluid Mechanics* 564, 57–103
- [63] Vyshinsky, V. V. 2001 Flight safety, aircraft vortex wake and airport operation capacity: collection of papers. *Air & Space Europe* 3, 206–208.
- [64] Widnall, S. E. 1975 The structure and dynamics of vortex filaments. *Annual Review of Fluid Mechanics* 7, 141–165.
- [65] Wu, J. C. 2005 *Elements of vorticity aerodynamics*. Tsinghua University Press. Wu, J. Z., Ma, H. Y. & Zhou, M. D. 2006 *Vorticity and vortex dynamics*. Springer.
- [66] Yates, J. E. & Donaldson, C. 1986 Fundamental study of drag and an assessment of conventional drag–due–to–lift reduction devices. Nasa contractor report 4004. NASA.
- [67] Zuhai, L. 2001 Formation and near–field dynamics of a wing tip vortex. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- [68] Aerodynamic Comparison of Hyper-Elliptic Cambered Span (HECS) Wings with Conventional Configurations, Barry S. Lazos, Kenneth D. Visser, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia 2002
- [69] Αεροδυναμική ανάλυση σταθερών πτερυγίων και περιστρεφόμενων πτερυγίων με κυρτό άκρο (Winglet), Κ. Κουλουράς, Αθήνα 2012
- [70] Ανάλυση της αεροδυναμικής απόδοσης πτέρυγας με καμπυλωμένο άκρο (winglet), Ραφαήλ-Άγγελος Α. Εζνεπίδης, Αθήνα 2014
- [71] Αεροδυναμική Ανάλυση πτερυγίων με καμπυλωμένα άκρα, Θεολόγος Ε. Ανδρόνικος, Αθήνα 2015