



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

**«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ
και στα ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ»**

ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΦΑΣΕΩΝ ΕΝΟΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΛΑΓΚΡΑΝΖΙΑΝΩΝ ΣΥΝΕΚΤΙΚΩΝ ΔΟΜΩΝ

ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΕΤΤΑ
09314039

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΩΣΤΑΣ ΣΠΥΡΟΥ

ΑΘΗΝΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2017

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία σκοπεύουμε να διερευνήσουμε τα μη γραμμικά φαινόμενα που συμβαίνουν στη διαμήκη κίνηση του πλοίου σε περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών. Η εκδήλωση μη γραμμικής συμπεριφοράς σε αυτή την περίπτωση λειτουργεί ως προάγγελος αστάθειας σε διεύθυνση διαφορετική από τη διαμήκη. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση έντονων κυματισμών, όταν το πλοίο βρεθεί κοντά στην κοιλάδα του κύματος μπορεί να "εγκλωβιστεί" σε μία ευσταθή κατάσταση αποκτώντας την ταχύτητα φάσης του. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται surf-riding. Το surf-riding δύναται ωστόσο να ενεργοποιήσει ασταθή συμπεριφορά στο οριζόντιο επίπεδο, με απόκλιση από την επιθυμητή πορεία. Θεωρείται κατά αυτόν τον τρόπο προάγγελος του broaching, το οποίο μπορεί με τη σειρά του να οδηγήσει στην ανάπτυξη μεγάλης εγκάρσιας κλίσης, ακόμα και στην ανατροπή. Έτσι, με αποφυγή εμφάνισης του surf-riding καταφέρνουμε να αποφύγουμε την πρόκληση επικίνδυνης αστάθειας. Αυτό αντικατοπτρίζεται και στις απαιτήσεις των υπό διαβούλευση "κριτηρίων άθικτης ευστάθειας 2ης γενιάς" που συζητούνται αυτή την εποχή στον Διεθνή Ναυτιλιακό Οργανισμό (IMO). Η μελέτη μας βασίζεται σε ένα μη γραμμικό μαθηματικό μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας και γίνεται ανάλυση στο χώρο φάσεων σε περιβάλλον αρμονικών και διχρωματικών κυματισμών. Για την ανάλυση αυτή χρησιμοποιούνται η μέθοδος των εκθετών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου (FTLE) και η μέθοδος clustering ("fuzzy c-means"). Μέσω της FTLE μεθόδου γίνεται η εξαγωγή των υπερβολικών Λαγκρανζιανών Συνεκτικών Δομών (LCSs) καμπυλών που δρουν ως αδιαπέραστα όρια της φασικής ροής. Οι δομές αυτές θεωρούνται ως ανάλογα των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων των υπερβολικών στάσιμων σημείων ενός αυτόνομου δυναμικού συστήματος. Ο αλγόριθμος fuzzy c-means αποσκοπεί (αρχικά) στο διαμερισμό ενός συνόλου τροχιών σε υποσύνολα, κάθε ένα από τα οποία καταλαμβάνει μια (εξελισσόμενη) συμπαγή, κατά προσέγγιση, περιοχή του χώρου φάσεων κατά μήκος ενός διαστήματος πεπερασμένου χρόνου (finite-time coherent sets). Μέσω αυτής της ανάλυσης επιχειρούμε να κατανοήσουμε τους μηχανισμούς που οδηγούν είτε στη συνύπαρξη των φαινομένων surf-riding και surging, είτε στην καθολική εμφάνιση του φαινομένου surf-riding.

ABSTRACT

In this thesis our aim has been to gain further insight into the nonlinear dynamical phenomena associated with ship's surge motion in following seas. It is known that manifestation of nonlinear dynamic behavior in surge direction can act as a precursor of ship instability in directions unrelated with the longitudinal one. More specifically, when a ship is found near a wave trough in steep following waves, she may be captured (in a stable condition) and be pushed to run with wave's phase velocity. This phenomenon is called *the surf-riding phenomenon*, which may incur unstable behavior on the horizontal plane. In that way, surf-riding acts as a precursor of the so called broaching-to instability, which may lead to large heel and capsize of the ship. By avoiding the surf-riding condition we manage to avoid the occurrence of dangerous instability. This is also depicted in the under development requirements of the "2nd Generation Intact Stability Criteria" of the International Maritime Organization (IMO). Our research is based on a nonlinear mathematical model of one degree of freedom and the study of the phase portrait in harmonic and bichromatic wave environment. For this study *the finite-time Lyapunov exponent (FTLE)* and *the fuzzy c-means clustering* analysis tools are implemented in order to extract *Lagrangian Coherent Structures (LCSs)*, which act as transport barriers of the phase flow, and *finite-time coherent sets* respectively. LCSs are considered as analogues of the stable and unstable manifolds of an autonomous dynamical system. Through this research the mechanisms that lead either to coexistence of surf-riding and surging or to global occurrence of surf-riding, can be better understood.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πίνακες	6
Σχήματα	6
1. Εισαγωγή	11
2. Σκοπός	14
3. Κριτική ανασκόπηση	15
4. Μαθηματικό μοντέλο και μέθοδοι ανάλυσης συμπεριφοράς	20
4.1 Το μαθηματικό μοντέλο της κίνησης του πλοίου στο διάμηκες	20
4.2 Λαγκρανζιανές Συνεκτικές Δομές	25
4.3 Η μέθοδος εκθετών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου (FTLE)	29
4.4 Η μέθοδος clustering	32
5. Αποτελέσματα υπολογιστικών μεθόδων	34
5.1 Αποτελέσματα μεθόδου FTLE	34
5.1.1 Αρμονικό κύμα	34
5.1.2 Διχρωματικό κύμα	42
5.2 Αποτελέσματα μεθόδου clustering	62
6. Συμπεράσματα	67
Βιβλιογραφία	70

ΠΙΝΑΚΕΣ

Πίνακας 4.1: Χαρακτηριστικές τιμές των παραμέτρων του μοντέλου	24
Πίνακας 4.2: Κυματικοί παράμετροι του μοντέλου	24
Πίνακας 5.1: Παράμετροι των υπό μελέτη διχρωματικών περιπτώσεων	61
Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα υπολογισμού του λόγου των τροχιών που οδηγούνται σε surf-riding (ή surging) προς το συνολικό αριθμό τροχιών της δειγματοληψίας.....	65

ΣΧΗΜΑΤΑ

Σχήμα 3.1: Διακύμανση της διαμήκουσ συνιστώσας της ταχύτητας καθώς αυξάνονται οι στροφές της έλικας.....	16
Σχήμα 3.2: Ο χώρος φάσεων για (α) μικρούς, (β) μεσαίους και (γ) μεγάλους αριθμούς F_n	17
Σχήμα 3.3: Κρίσιμη ταχύτητα συναρτήσει του ύψους του κύματος	18
Σχήμα 3.4: Ποιοτική περιγραφή της εξαφάνισης της περιοδικής κίνησης	19
Σχήμα 4.1: Κύριες δυνάμεις στη διαμήκη διεύθυνση	20
Σχήμα 4.2: Ευσταθείς και ασταθείς υπερβολικές πολλαπλότητες	25
Σχήμα 4.3: Λαγκρανζιανές συνεκτικές δομές σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$	27
Σχήμα 4.4: (i) και (ii) υπερβολικές πολλαπλότητες (σάγμα) για την αυτόνομη εξίσωση κίνησης του πλοίου στο δάμηκες, (iii) και (iv) τα attracting LCSs (μπλε καμπύλες) και repelling LCSs (κόκκινες καμπύλες) με εφαρμογή της μεθόδου FTLE στη μη αυτόνομη εξίσωση κίνησης πλοίου στο διάμηκες.	28
Σχήμα 5.1: Repelling LCS για (i) $\tau^+ = 50s$ και για (ii) $\tau^+ = 300s$. Σε κάθε περίπτωση βλέπουμε αριστερά - 3D απεικόνιση του πεδίου FTLE, κέντρο - Κάτοψη του πεδίου FTLE, δεξιά - 2D απεικόνιση των repelling LCS θέτωντας ως κατώφλι την τιμή 0.85 και άνω του πεδίου FTLE.	36

Σχήμα 5.2: Attracting LCS για (i) $\tau^- = -150s$ και για (ii) $\tau^- = -240s$. αριστερά - 3D απεικόνιση του πεδίου FTLE, κέντρο - Κάτοψη του πεδίου FTLE, δεξιά - attracting LCS θέτοντας ως κατώφλι την τιμή 0.85 του πεδίου FTLE	37
Σχήμα 5.3: (i) - repelling LCS (κόκκινη καμπύλη), (ii) - attracting LCS (μπλε καμπύλη), (iii) - συνδιασμένη απεικόνιση των repelling και attracting LCS.	38
Σχήμα 5.4: Απεικόνιση των repelling (κόκκινη καμπύλη) και attracting (μπλε καμπύλη) LCSs εξαγόμενα από το πεδίο FTLE μεταβάλλοντας την τιμή οξύτητας του κύματος s	39
Σχήμα 5.5: Ολοκλήρωση περίπου 10,400 αρχικών συνθηκών (μοβ) και 5,700 αρχικών συνθηκών (πράσινο)	40
Σχήμα 5.6: Η εξέλιξη των LCS στο χρόνο σε συνδιασμό με την εξέλιξη 10,400 (μοβ) και 5,700 (πράσινο) αρχικών συνθηκών $(\lambda, s, u_{nom}, t_0) = (154, 0.02, 12, 50)$	40
Σχήμα 5.7: Διχρωματικό κύμα. Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα) $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 0.8, 0.65, 12, 50)$	42
Σχήμα 5.8: Ο χώρος φάσεων για την περίπτωση του διχρωματικού κύματος $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 0.8, s_2/s_1, 12, 50)$ για διάφορες τιμές του λόγου s_2/s_1	43
Σχήμα 5.9: Ολοκλήρωση περίπου 17,000 (μαύρο) και 12,600 (κόκκινο) αρχικών συνθηκών	45
Σχήμα 5.10: Η εξέλιξη των LCSs στο χρόνο σε συνδιασμό με την εξέλιξη ενός πακέτου 17,000 περίπου αρχικών συνθηκών	45
Σχήμα 5.11: Ολοκλήρωση περίπου 17,500 (μαύρο) και 13,200 (πράσινο) αρχικών συνθηκών	46
Σχήμα 5.12: Η εξέλιξη των LCSs στο χρόνο σε συνδιασμό με την εξέλιξη 17,500 (μαύρο) και 13,200 (πράσινο) αρχικών συνθηκών	46

Σχήμα 5.13: Διχρωματικό κύμα. Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα). $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.04, 0.8, 0.65, 12, 50)$	47
Σχήμα 5.14: Ο χώρος φάσεων για την περίπτωση του διχρωματικού κύματος $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.04, 0.8, s_2/s_1, 12, 50)$ για διάφορες τιμές του λόγου s_2/s_1	48
Σχήμα 5.15: Διχρωματικό κύμα. Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα). $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.04, 0.8, 0.65, 12, 50)$	48
Σχήμα 5.16: Ολοκλήρωση περίπου 16,700 (μαύρο), 3,300 (πράσινο) και 1,300 (μπλε) αρχικών συνθηκών	50
Σχήμα 5.17: Η εξέλιξη των LCSs στο χρόνο σε συνδιασμό με την εξέλιξη 16,700 (μαύρο), 3,300 (πράσινο) και 1,700 (μπλε) περίπου αρχικών συνθηκών	50
Σχήμα 5.18: Διχρωματικό κύμα. Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα). $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 1.3, 0.75, 12, 50)$	51
Σχήμα 5.19: Ο χώρος φάσεων για την περίπτωση του διχρωματικού κύματος $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 1.3, s_2/s_1, 12, 50)$ για διάφορες τιμές του λόγου s_2/s_1	52
Σχήμα 5.20: Ολοκλήρωση περίπου 26,000 (μοβ) και 30,000 (κόκκινο) αρχικών συνθηκών	53
Σχήμα 5.21: Η εξέλιξη των LCS στο χρόνο σε συνδιασμό με την εξέλιξη ενός πακέτου 26,000 περίπου αρχικών συνθηκών	53
Σχήμα 5.22: Ολοκλήρωση περίπου 9,300 (πράσινο), 8,800 (μαύρο) και 7,800 (μοβ) αρχικών συνθηκών	54
Σχήμα 5.23: Η εξέλιξη των LCS στο χρόνο σε συνδιασμό με περίπου 9,300 (πράσινο), 8,800 (μαύρο) και 7,800 (μοβ) αρχικών συνθηκών	54

Σχήμα 5.24: Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα Διχρωματικό κύμα. $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.04, 1.3, 0.75, 12, 50)$...	56
Σχήμα 5.25: Ολοκλήρωση περίπου 22,000 (πράσινο) και 21,800 (μοβ) αρχικών συνθηκών	57
Σχήμα 5.26: Η εξέλιξη των LCS στο χρόνο σε συνδιασμό με την εξέλιξη περίπου 22,000 αρχικών συνθηκών	57
Σχήμα 5.27: Ολοκλήρωση περίπου 6,400 (πράσινο), 6,300 (γκρι), 6,300 (μοβ) και 6,400 (μαύρο) αρχικών συνθηκών	58
Σχήμα 5.28: Η εξέλιξη των LCS σε συνδιασμό με την εξέλιξη περίπου 6,400 (πράσινο), 6,300 (γκρι), 6,300 (μοβ) και 6,400 (μαύρο) αρχικών συνθηκών	58
Σχήμα 5.29: Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα Διχρωματικό κύμα. $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.01, 1.5, 1.4, 12, 60)$	59
Σχήμα 5.30: Ολοκλήρωση περίπου 4,800 (μοβ), 2,000 (πορτοκαλί), 1300 (μαύρο) και 1,100 (πράσινο) αρχικών συνθηκών	60
Σχήμα 5.31: Η εξέλιξη των LCSs στο χρόνο σε συνδιασμό με την εξέλιξη 4,800 (μοβ), 2,000 (πορτοκαλί), 1300 (μαύρο) και 1,100 (πράσινο) αρχικών συνθηκών ..	60
Σχήμα 5.32: Χώρος φάσεων των υπό μελέτη διχρωματικών περιπτώσεων	61
Σχήμα 5.33: Διερεύνηση για την εντροπία για το αρμονικό κύμα $(\lambda, s, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 12, 50)$	63
Σχήμα 5.34: Διερεύνηση για την εντροπία για το διχρωματικό κύμα $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}) = (L, 0.02, 0.8, 0.65, 12)$	63
Σχήμα 5.35: Αρμονικό κύμα $(\lambda, s, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 12, 50)$. Με μαύρο απεικονίζεται στο (i) η surf-riding συμπεριφορά. Στο (ii) απεικονίζεται η εντροπία. Οι παράμετροι που θέσαμε είναι $T=20s$, δείγματα 35, $m=1.1$	64
Σχήμα 5.36: Διχρωματικό κύμα $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}) = (L, 0.02, 0.8, 0.65, 12)$. Με μαύρο απεικονίζεται στο (i) η surf-riding συμπεριφορά. Στο (ii) απεικονίζεται η	

εντροπία Οι παράμετροι που θέσαμε είναι $T=20s$, δείγματα 40, $m=1.1$64

Σχήμα 5.37: Διχρωματικό κύμα $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}) = (L, 0.02, 1.3, 0.75, 12)$.

Με μαύρο απεικονίζεται στο (i) η surf-riding συμπεριφορά. Στο (ii) απεικονίζεται η εντροπία. Οι παράμετροι που θέσαμε είναι $T=20s$, δείγματα 40, $m=1.1$64

Σχήμα 5.38: Σύγκριση του χώρου φάσεων μεταξύ της εφαρμογής των μεθόδων FTLE (αριστερά) και clustering (δεξιά) για την εξαγωγή των Lagrangian Coherent Structures (repelling) και των Finite-time Coherent Structures αντίστοιχα.68

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δυναμική συμπεριφορά του πλοίου σε περιβάλλον θαλάσσιων κυματισμών αποτελεί ένα αντικείμενο που δεν έχει γίνει πλήρως κατανοητό. Εδώ και πολλά χρόνια τόσο οι ναυτικοί, όσο και αργότερα πολλοί ερευνητές έχουν παρατηρήσει αστάθειες σε διευθύνσεις που διαφέρουν από τη διεύθυνση της κυματικής διέγερσης. Πολλά ατυχήματα που συνδέονται με ασταθή φαινόμενα οδήγησαν στην ανάγκη εκτεταμένης διερεύνησης της δυναμικής του πλοίου και των μηχανισμών που τις προκαλούν. Γι' αυτό η διεθνής ερευνητική κοινότητα έχει θέσει ως μία από τις προτεραιότητες της τον προσδιορισμό της επικίνδυνης αστάθειας του πλοίου στη βάση επιστημονικών προσεγγίσεων. Αυτό αντανακλάται επίσης στις προσπάθειες του IMO (International Maritime Organization) για να καθιερώσει νέες κανονιστικές προδιαγραφές με ισχυρή επιστημονική θεμελίωση δια μέσου των κριτηρίων άθικτης αστάθειας 2¹⁵ γενιάς.

Όταν τα κύματα συναντούν το πλοίο από την πρύμνη (following sea) τρία είναι τα σενάρια που μπορεί να οδηγήσουν στην ανατροπή: pure-loss of stability, parametric instability και broaching-to. Σε αυτή την εργασία θα μελετηθεί το φαινόμενο του surf-riding που είναι γνωστό ότι αποτελεί προάγγελο του broaching-to. Το broaching-to είναι μία ασταθής κατάσταση που μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη μεγάλης εγκάρσιας κλίσης ακόμα και στην ανατροπή. Από την άλλη πλευρά, το surf-riding είναι ένα μη γραμμικό φαινόμενο κατά το οποίο το πλοίο εγκλωβίζεται ξαφνικά κοντά στην κοιλάδα του κύματος και στη συνέχεια κινείται με τη φασική ταχύτητα αυτού. Αυτή η κατάσταση μπορεί να εμφανιστεί σε απότομα κύματα με μήκος κύματος παραπλήσιο στο μήκος του πλοίου, όταν η ταχύτητα του πλοίου είναι κοντά στην ταχύτητα του κύματος. Στη μόνιμη κατάσταση και για έναν παρατηρητή κινούμενο μαζί με το κύμα, το surf-riding χαρακτηρίζεται ως κατάσταση ισορροπίας.

Σημαντική πρόοδος στη μελέτη της δυναμικής αστάθειας του πλοίου άρχισε να σημειώνεται στα τέλη της δεκαετίας του '80, όπου ο Kan διερευνά πειραματικά και θεωρητικά τη διαμήκη συμπεριφορά του πλοίου σε ακολουθούντες κυματισμούς και διαπιστώνει, μεταξύ άλλων, τη συνύπαρξη διαφορετικών αποκρίσεων για κάποια περιοχή ταχυτήτων· η απόκριση του πλοίου μπορεί να έχει είτε περιοδικό (periodic

surfing) είτε μόνιμο χαρακτήρα (surf-riding) αναλόγως των αρχικών συνθηκών. Ο Σπύρου διεξάγει ποιοτική δυναμική ανάλυση της κίνησης του πλοίου σε ακολουθούντες και πλαγίως ακολουθούντες κυματισμούς μέσω της οποίας εξηγεί το φαινόμενο του surf-riding στηριζόμενος στη θεωρία των ομοκλινικών διακλαδώσεων. Επιπλέον, προτείνει τέσσερις βασικούς μηχανισμούς οι οποίοι οδηγούν στο broaching, δύο από τους οποίους συνδέονται άμεσα με το φαινόμενο surf-riding. Σήμερα ο Κοντολέφας επεκτείνει την έρευνα του φαινομένου surf-riding με χρήση σύγχρονων υπολογιστικών μεθόδων ανάλυσης της δυναμικής ενός συστήματος θαλάσσιων κυματισμών που περιλαμβάνει πολλές συχνότητες.

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο έρευνας του υποψήφιου διδάκτορα Ιωάννη Κοντολέφα της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Στην προκειμένη περίπτωση χρησιμοποιούνται υπολογιστικές μέθοδοι με χρήση του Mathematica για τη διερεύνηση της δυναμικής συμπεριφοράς της κίνησης του πλοίου στο διάμηκες τόσο στην περίπτωση αρμονικών κυματισμών όσο και σε αυτή των διχρωματικών. Συγκεκριμένα εφαρμόζεται η έννοια των υπερβολικών Λαγκρανζιανών Συνεκτικών Δομών (Lagrangian Coherent Structures - LCSs) και εξετάζεται η δυνατότητά τους να αποκαλύπτουν την αλλαγή της δομής της φασηκής ροής του συστήματος στο χρόνο. Δια μέσου της οργάνωσής τους αυτές οι δομές μπορούν να θεωρηθούν ως ανάλογα των ευσταθών (repelling LCSs) και ασταθών (attracting LCSs) πολλαπλοτήτων των υπερβολικών στάσιμων σημείων ενός αυτόνομου δυναμικού συστήματος. Για τον προσδιορισμό των LCSs θα εφαρμοστεί η μέθοδος των εκθετών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου (FTLE). Επιπλέον, θα εφαρμοστεί η μέθοδος clustering με χρήση του αλγορίθμου fuzzy c-means, ο οποίος αποσκοπεί (αρχικά) στο διαμερισμό ενός συνόλου τροχιών σε υποσύνολα, κάθε ένα από τα οποία καταλαμβάνει μια (εξελισσόμενη) συμπαγή, κατά προσέγγιση, περιοχή του χώρου φάσεων κατά μήκος ενός διαστήματος πεπερασμένου χρόνου (finite-time coherent set). Θα ακολουθήσει σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων.

Τα περιεχόμενα της παρούσας εργασίας συνοψίζονται ως ακολούθως:

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται ο σκοπός της εργασίας. Το τρίτο κεφάλαιο περιέχει σύντομη κριτική ανασκόπηση της βιβλιογραφίας γύρω από το φαινόμενο surf-riding. Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται περιγραφή του μαθηματικού μοντέλου με

βάση το οποίο θα μελετηθεί η δυναμική και αναλύονται η έννοια των LCSs και οι αριθμητικοί μέθοδοι που χρησιμοποιούνται, δηλαδή οι μέθοδοι FTLE και clustering (fuzzy c-means). Στο πέμπτο κεφάλαιο δίνονται τα αποτελέσματα, και η ανάλυση αυτών, από την εφαρμογή των δύο μεθόδων αρχικά σε περίπτωση αρμονικών κυματισμών (κυρίως για επαλήθευση των υπολογιστικών εργαλείων) και στη συνέχεια για τους διχρωματικούς κυματισμούς. Τέλος στο έκτο κεφάλαιο παρατίθενται τα συμπεράσματα της μελέτης μας.

2. ΣΚΟΠΟΣ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς της κίνησης του πλοίου στη διαμήκη διεύθυνσή του, σε περιβάλλον μίας και δύο αρμονικών κυματικών συνιστωσών μέσω της ανάλυσης του χώρου φάσεων. Η ανάλυση αυτή θα γίνει με τη χρήση των μεθόδων εκθετών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου (FTLE) και clustering (αλγόριθμος fuzzy C-means), μέσω των οποίων θα γίνει η εξαγωγή των Λαγκρανζιανών Συνεκτικών Δομών (Lagrangian Coherent Structures) και των πεπερασμένου χρόνου συμπαγών διαστημάτων (Finite-time Coherent Sets) αντίστοιχα, επιχειρώντας έτσι να κατανοήσουμε τους μηχανισμούς που προκαλούν είτε τη συνύπαρξη των καταστάσεων surf-riding και surging, είτε την καθολική εμφάνιση του φαινομένου surf-riding.

Ενδεικτικά τα βήματα είναι τα εξής

- Εφαρμογή της μεθόδου FTLE σε περιβάλλον μίας αρμονικής κυματικής συνιστώσας με σκοπό την εξοικείωση με τη μέθοδο και την επιβεβαίωση των ιδιοτήτων των LCSs και της δυνατότητας πρόβλεψης της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος.
- Εφαρμογή της μεθόδου FTLE σε πέντε διαφορετικές περιπτώσεις διχρωματικών κυματισμών.
- Εφαρμογή της μεθόδου clustering με χρήση του αλγόριθμου fuzzy c-means στις περιπτώσεις συνύπαρξης των δύο δυναμικών καταστάσεων (surf-riding και surging) στο περιβάλλον μίας και δύο αρμονικών κυματικών συνιστωσών.
- Σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων

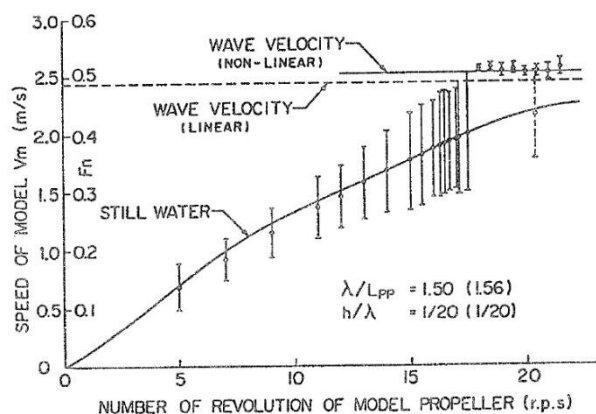
3. ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Ο όρος surf-riding περιγράφει μια ιδιάζουσα κατάσταση κατά την οποία η απόκριση του πλοίου εμφανίζει στάσιμο χαρακτήρα ως προς παρατηρητή κινούμενο με την ταχύτητα φάσης του κύματος, ο οποίος αντιλαμβάνεται το πλοίο σταματημένο στην περιοχή κάποιας κοιλάδας αν και η σχετική ταχύτητα πλοίου-κύματος θα έπρεπε, σε συμφωνία με τις επιλεγμένες στροφές της έλικας, να λαμβάνει μη μηδενική τιμή. Η ανωτέρω συμπεριφορά αναμένεται να εκδηλωθεί σε περιβάλλον κυματισμών με μήκος συγκρίσιμο με το μήκος του πλοίου και κατεύθυνση διάδοσης η οποία σχηματίζει μηδενική (following seas) ή μικρή σχετικά γωνία (quartering seas) με το διάνυσμα της ταχύτητας του πλοίου. Η επικινδυνότητα μιας ενδεχόμενης εμπλοκής με το φαινόμενο δεν είναι προφανής. Το surf-riding δύναται ωστόσο να ενεργοποιήσει ασταθείς συμπεριφορές οι οποίες συνδέονται με τις κινήσεις του πλοίου σε διαφορετικές διευθύνσεις. Θεωρείται κατ' αυτόν τον τρόπο προάγγελος του broaching, το οποίο μπορεί με τη σειρά του να οδηγήσει στην ανάπτυξη μεγάλης εγκάρσιας κλίσης, ακόμα και στην ανατροπή. Τα χαρακτηριστικά της διαμήκου απόκρισης του πλοίου ενδέχεται να ενεργοποιήσουν και άλλες μορφές αστάθειας. Ένα πλοίο το οποίο λειτουργεί σε περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών μπορεί να εκτελεί διαμήκεις περιοδικές ταλαντώσεις τέτοιας μορφής, ώστε την παρατεταμένη παραμονή του στην περιοχή των κορυφών του κύματος, όπου η ροπή επαναφοράς κατά τη διεύθυνση roll εμφανίζει μειωμένη ή και αρνητική σε κάποιες περιπτώσεις τιμή, να τη διαδέχεται μια σύντομη διέλευση από την περιοχή των κοιλάδων (asymmetric surging). Στην περίπτωση αυτή υπάρχει πιθανότητα, εάν η διέλευση του πλοίου από τη "γειτονιά" κάποιας κορυφής διαρκέσει τον απαιτούμενο χρόνο, το πλοίο να ανατραπεί με αιφνίδιο, μη ταλαντωτικό τρόπο (pure loss of stability).

Το 1948 ο Davidson [1] αποδεικνύει πως ένα κατευθυντικά ευσταθές σε ήρεμο νερό πλοίο μπορεί να καταστεί ασταθές στην περίπτωση που συναντήσει κυματισμούς διαδιδόμενους προς κοινή με αυτήν της ταχύτητας του κατεύθυνση (ακολουθούντες κυματισμοί). Το 1951 ο Grim [2] επισημαίνει την πιθανότητα εμφάνισης του φαινομένου surf-riding στην περίπτωση απότομων και μεγάλου μήκους ακολουθούντων κυματισμών. Το φαινόμενο παρατηρείται πειραματικά το 1962 από τους Du Cane και Goodrich [3] και αναφέρεται η διασύνδεση του με το broaching. Η

πρώτη λεπτομερής έρευνα στο φαινόμενο surf-riding σε αρμονικούς κυματισμούς έγινε από τον Kan (1990) [4], ο οποίος πραγματοποίησε μεγάλο αριθμό πειραμάτων σε συνδυασμό με αριθμητικές προσομοιώσεις και ανάλυση του χώρου φάσεων.

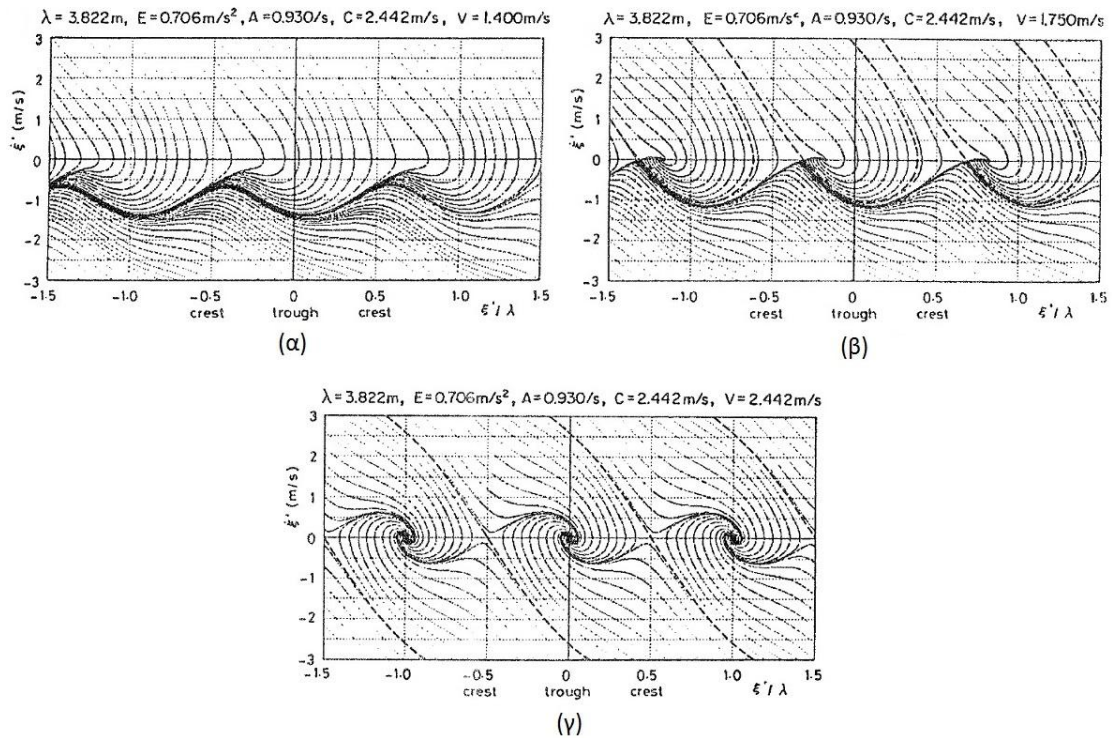
Στο σχήμα 3.1 παρουσιάζεται η διακύμανση της διαμήκουσ συνιστώσας της ταχύτητας του μοντέλου συναρτήσει των στροφών της έλικας. Γίνεται προφανές ότι μια απότομη αλλαγή της ταχύτητας λαμβάνει χώρα για συγκεκριμένο αριθμό περιστροφών (περί τις 18 στροφές ανά λεπτό). Η αλλαγή αυτή σηματοδοτεί τη μετάβαση από τη διαμήκη περιοδική ταλάντωση μεγάλου πλάτους (surging of large amplitude) στη μόνιμη κατάσταση που περιγράφεται με τον όρο surf-riding. Η απόκριση του πλοίου χάνει τον περιοδικό της χαρακτήρα τη στιγμή που η διαμήκης ταχύτητα του πλοίου, συμπεριλαμβανομένης και της ταλαντωτικής συνιστώσας, λαμβάνει οριακά την τιμή της ταχύτητας φάσης του κύματος. Επιπλέον, η εκδήλωση του φαινομένου surf-riding επιδρά αρνητικά στην αποτελεσματικότητα του πηδαλιού, καθώς επέρχεται μείωση στην ταχύτητα της εισερχόμενης σε αυτό ροής.



Σχήμα 3.1: Διακύμανση της διαμήκουσ συνιστώσας της ταχύτητας καθώς αυξάνονται οι στροφές της έλικας[4]

Από θεωρητική σκοπιά ο Kan σημείωσε την ύπαρξη δύο στάσιμων σημείων, ενός ευσταθούς και ενός σάγματος, για συγκεκριμένο εύρος παραμέτρων. Το ευσταθές σημείο αντιπροσωπεύει την εφικτή, από φυσικής άποψης, μόνιμη απόκριση (surf-riding) και εντοπίζεται εντός της περιοχής $(-\lambda/4, \lambda/4)$ από την κοιλάδα του κύματος, ενώ η ασταθής λύση βρίσκεται εκτός της προαναφερθείσας περιοχής και κοντά στην κορυφή του κύματος.

Μέσω της αριθμητικής επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης κίνησης έδειξε ότι το πλοίο δύναται είτε να εκτελεί διαμήκεις περιοδικές ταλαντώσεις καθώς το κύμα το προσπερνάει (periodic surging), είτε να αποκρίνεται με στάσιμο ως προς παρατηρητή κινούμενο με την ταχύτητα φάσης του κύματος τρόπο (surf-riding) αναλόγως των αρχικών συνθηκών. Η εγκυρότητα των προσομοιώσεων αξιολογείται βάσει πειραματικών δεδομένων.

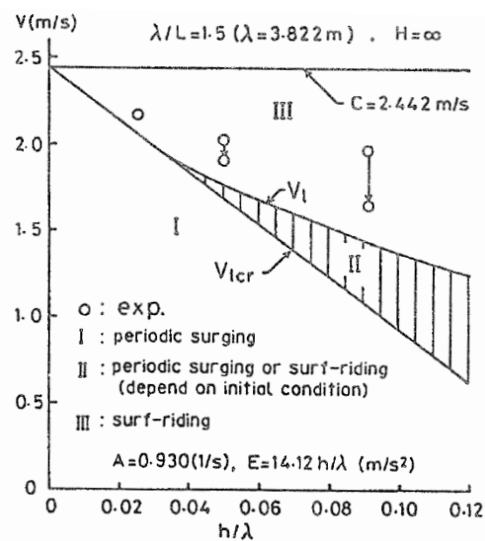


Σχήμα 3.2: Ο χώρος φάσεων για (α) μικρούς, (β) μεσαίους και (γ) μεγάλους αριθμούς $F_n[4]$

Μετά από την ανάλυση του χώρου φάσεων αυτή η συνύπαρξη διαφορετικών αποκρίσεων καθίσταται προφανής. Για χαμηλούς αριθμούς F_n ο περιοδικός ελκυστής εμφανίζεται ως η μοναδική λύση του συστήματος (periodic surging), κάθε αρχική συνθήκη καταλήγει πάνω στην κυματοειδή γραμμή στο σχήμα 3.2(α). Για ενδιάμεσες τιμές του αριθμού F_n ο χώρος φάσεων διαιρείται σε δύο ελκτικά χωρία. Αρχικές συνθήκες στο χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στις διακεκομμένες γραμμές, σχήμα 3.2(β), οδηγούν σε surf-riding, καθώς κάθε τροχιά στο χωρίο αυτό καταλήγει στο ευσταθές στάσιμο σημείο, ενώ αρχικές συνθήκες έξω από την περιοχή αυτή οδηγούν την κατάσταση του συστήματος στον περιοδικό ελκυστή. Τέλος, για μεγαλύτερες τιμές του αριθμού F_n το σύστημα καταλήγει ανεξαρτήτως των αρχικών συνθηκών

στο surf-riding, σχήμα 3.2(γ). Σημειώνεται ότι στο σχήμα 3.2(γ) οι διακεκομμένες γραμμές αποτελούν τη διαχωριστική γραμμή μεταξύ των κυμάτων στα οποία το πλοίο οδηγείται στο surf-riding.

Από τα παραπάνω καθίσταται προφανής η ύπαρξη δύο κρίσιμων τιμών της ταχύτητας που επιτυγχάνει το πλοίο (σε ήρεμο νερό για δεδομένες περιστροφές της έλικας), (Σχήμα 3.3). Κάτω από την πρώτη V_{1cr} το surf-riding δε δύναται να εμφανιστεί, ενώ πάνω από τη δεύτερη V_1 το φαινόμενο εκδηλώνεται για κάθε αρχική συνθήκη (global surf-riding). Στην ενδιάμεση περιοχή ταχυτήτων το πλοίο αποκρίνεται είτε με περιοδικό, είτε με στάσιμο τρόπο αναλόγως των αρχικών συνθηκών.

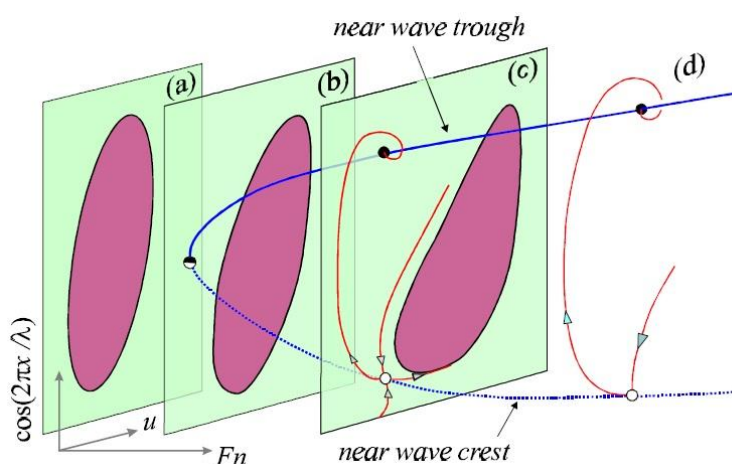


Σχήμα 3.3: Κρίσιμη ταχύτητα συναρτήσει του ύψους του κύματος [4]

Παρόλο που ο Kan συνείσφερε σημαντικά στην κατανόηση της δυναμικής του πλοίου σε ακολουθούντες κυματισμούς, δεν διερεύνησε τη δυναμική συμπεριφορά σε τυχαίους κυματισμούς, οι οποίοι συνιστούν το θαλάσσιο περιβάλλον.

Η εξαφάνιση της περιοδικής απόκρισης και η εκδήλωση του καθολικού surf-riding σχετίζεται άμεσα με τον τύπο διακλάδωσης ομοκλιτικής σύνδεσης (homoclinic bifurcation). Ο Σπύρου [5], [6] προσεγγίζει με ποιοτικό τρόπο τη μετάβαση από την περιοδική απόκριση στο surf-riding κάτω από οποιαδήποτε αρχική συνθήκη στην περίπτωση ακολουθούντων κυματισμών μεγάλου πλάτους (Σχήμα 3.4). Οι τέσσερις τομές στο σχήμα αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς F_n . Υπενθυμίζεται ότι ο αριθμός F_n εισάγεται ως μέγεθος αντιπροσωπευτικό των περιστροφών τη έλικας. Στην τομή (a) το σύστημα αποκρίνεται με περιοδικό τρόπο. Σε αυτήν την κατάσταση

τα κύματα προσπερνάνε το πλοίο. Στην τομή (b) εμφανίζεται ένα στάσιμο σημείο, το οποίο στη συνέχεια, τομή (c), διασπάται σε ένα ευσταθές σημείο και ένα σαγματικό (saddle-node bifurcation). Το σύστημα καθ' όλη τη διάρκεια του γεγονότος συνεχίζει να επιδέχεται περιοδική λύση. Ο οριακός κύκλος όμως παραμορφώνεται σταδιακά και πλησιάζει, με εφαιπτομενικό τρόπο, τους κλάδους του σάγματος. Στην κρίσιμη τιμή του αριθμού Fn ο περιοδικός ελκυστής συγκρούεται με το ασταθές σημείο (σάγμα) και μετατρέπεται σε ομοκλινική σύνδεση. Περαιτέρω αύξηση του αριθμού Fn οδηγεί στην καταστροφή της ομοκλινικής σύνδεσης. Κάθε αρχική συνθήκη οδηγείται πλέον στο ευσταθές σημείο-ελκυστή, δηλαδή σε surf-riding, τομή (d).



Σχήμα 3.4: Ποιοτική περιγραφή της εξαφάνισης της περιοδικής κίνησης [3]

Αξίζει να σημειωθεί ότι καθώς ο οριακός κύκλος πλησιάζει το ασταθές σημείο και λόγω του ότι μια οποιαδήποτε αρχική συνθήκη η οποία εκκινεί από τον ευσταθή κλάδο που κατευθύνεται προς αυτό πλησιάζει το στάσιμο σημείο σε άπειρο χρόνο, η απόκριση του συστήματος εμφανίζει χαμηλόσυχνα χαρακτηριστικά. Η διέλευση μάλιστα από την περιοχή της κορυφής του κύματος διαρκεί δυσανάλογα μεγάλο χρονικό διάστημα σε σχέση με το πέρασμα από την περιοχή της κοιλάδας. Αυτή ακριβώς η συμπεριφορά περιγράφεται από τους όρους *asymmetric surging* και *surging of large amplitude*.

Σήμερα ο Κοντολέφας (2016) [7] επεκτείνει την έρευνα του φαινομένου surf-riding με χρήση σύγχρονων υπολογιστικών μεθόδων ανάλυσης της δυναμικής ενός χρονοεξαρτώμενου πλέον συστήματος θαλάσσιων κυματισμών που περιλαμβάνει πολλές συχνότητες.

4. ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ

4.1 ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΟΥ ΠΛΟΙΟΥ ΚΑΤΑ ΤΟ ΔΙΑΜΗΚΕΣ

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του πλοίου κατά το διάμηκες στην περίπτωση ακολουθούντων κυματισμών, κυματισμών των οποίων η κατεύθυνση διάδοσης ταυτίζεται με την κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας του πλοίου, λαμβάνεται απευθείας από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (Σπύρου 2006) [8]

$$(m - X_{\ddot{u}})\ddot{\xi} = T - R + X_w \quad (4.1)$$

όπου

m η μάζα του πλοίου,

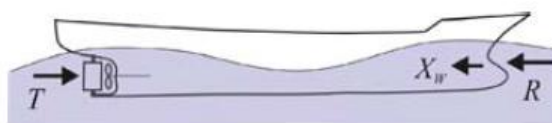
$X_{\ddot{u}}$ η πρόσθετη μάζα κατά τη διαμήκη διεύθυνση,

ξ η διαμήκης θέση του πλοίου ως προς ένα ακίνητο σύστημα πάνω στη γη

T η ώση της προπέλας,

R η αντίσταση

X_w η διεγείρουσα λόγω των κυματισμών δύναμη κατά τη διαμήκη διεύθυνση.



Σχήμα 4.1: Κύριες δυνάμεις στη διαμήκη διεύθυνση [8]

Η πρόσθετη μάζα μπορεί, δεδομένων των μικρών τιμών της συχνότητας συνάντησης, να θεωρηθεί σταθερή και να αντικατασταθεί από την ασυμπτωτική τιμή της. Επιπλέον, λόγω των μεγάλων τιμών του λόγου λ/L , όπου L το μήκος του πλοίου, καθίσταται δυνατή η υπέρθεση των όρων της ώσης και της αντίστασης, στη μορφή που αυτοί αποκτούν για την περίπτωση του πλοίου σε ήρεμο νερό, με τις διεγείρουσες δυνάμεις.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η ώση εκφράζεται συναρτήσει της ταχύτητας U του πλοίου και των στροφών της έλικας n ως εξής

$$T = \tau_0 n^2 + \tau_1 nU + \tau_2 U^2 \quad (4.2)$$

όπου

n οι στροφές της έλικας

U η ταχύτητα στο διάμηκες

και $\tau_i, i = 0, 1, 2$ οι συντελεστές οι οποίοι υπολογίζονται μέσω των παρακάτω εκφράσεων

$$\tau_0 = \kappa_0 (1 - t_p) \rho D^4 \quad (4.3.α)$$

$$\tau_1 = \kappa_1 (1 - t_p) (1 - w_p) \rho D^3 \quad (4.3.β)$$

$$\tau_2 = \kappa_2 (1 - t_p) (1 - w_p)^2 \rho D^2 \quad (4.3.γ)$$

όπου ο συντελεστής μείωσης ώσης t_p και ο συντελεστής ομόρρου w_p αναφέρονται σε ήρεμο νερό, ρ είναι η πυκνότητα του θαλασσινού νερού και D η διάμετρος της έλικας.

Οι τιμές των συντελεστών $\kappa_i, i = 0, 1, 2$ επιλέγονται έτσι, ώστε ο συντελεστής ώσης K_T να προσεγγίζεται από το ακόλουθο πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τον συντελεστή προχώρησης J ,

$$K_T = \kappa_0 + \kappa_1 J + \kappa_2 J^2 \quad (4.4)$$

με

$$J = \frac{U(1-w_p)}{nD} \quad (4.5)$$

Η αντίσταση του πλοίου μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση μόνο της ταχύτητας U και να προσεγγισθεί μέσω ενός πολυωνύμου τρίτου βαθμού,

$$R = r_1 U + r_2 U^2 + r_3 U^3 \quad (4.6)$$

όπου $r_i, i = 0, 1, 2$ κατάλληλοι συντελεστές.

Τέλος, η επαγόμενη από το πεδίο των κυματισμών δύναμη Froude-Krylov, η οποία εξαρτάται από το μήκος κύματος λ , το βάθος της θάλασσας και την οριζόντια θέση του μέσου του πλοίου σχετικά με το κύμα, προκύπτει

$$X_w = \sum_{i=1}^N f_i \sin(k_i \xi - \omega_i t + \varepsilon_i + \varepsilon_i^{(r)}) \quad (4.7)$$

όπου

N ο αριθμός των κυματικών συνιστωσών ($N=1$ για μονοχρωματικό κύμα, $N=2$ για διχρωματικό κλπ)

ω_i η συχνότητα του κύματος

$k_i = 2\pi/\lambda_i$ ο κυματαριθμός

$f_i = A_i RAO_i$ με A_i το πλάτος και RAO_i ο response-amplitude-operator

ε_i η διαφορά φάσης μεταξύ κύματος και διέγερσης

$\varepsilon_i^{(r)}$ η φάση του i -οστού κύματος στο διάστημα $[0, 2\pi)$, ένας όρος που εισάγει την τυχαιότητα στην κυματική διέγερση (όρος που δεν συμπεριλαμβάνεται στην περίπτωση μας).

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (4.1.1) προκύπτει [7]

$$(m - X_{\ddot{u}})\ddot{\xi} = (\tau_0 n^2 + \tau_1 n \dot{\xi} + \tau_2 \dot{\xi}^2) - (r_1 \dot{\xi} + r_2 \dot{\xi}^2 + r_3 \dot{\xi}^3) + \sum_{i=1}^N f_i \sin(k_i \xi - \omega_i t + \varepsilon_i) \quad (4.8)$$

Θέτοντας $x_1 = \xi$ και $x_2 = \dot{\xi}$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = (m - X_{\ddot{u}})^{-1} \left\{ \tau_0 n^2 + \left[\sum_{i=1}^N f_i \sin(k_i x_1 - \omega_i t + \varepsilon_i) \right] - (r_1 - \tau_1 n) x_2 - (r_2 - \tau_2) x_2^2 - r_3 x_2^3 \right\}$$

(4.9)

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε την τελευταία σχέση (4.1.8) θέτοντας όπου $N=1$ και $N=2$ για την προσομοίωση της κίνησης του πλοίου στο διάμηκες σε ακολουθούντες κυματισμούς μίας και δύο συνιστωσών.

Για την περίπτωση του αρμονικού κύματος εξετάζουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (m - X_{\dot{u}})^{-1} \{ \tau_0 n^2 + f \sin(kx_1 - \omega t + \varepsilon) - (r_1 - \tau_1 n)x_2 - (r_2 - \tau_2)x_2^2 - r_3 x_2^3 \}\end{aligned}\tag{4.10}$$

και για την περίπτωση του διχρωματικού κύματος εξετάζουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (m - X_{\dot{u}})^{-1} \{ \tau_0 n^2 + [f_1 \sin(k_1 x_1 - \omega_1 t + \varepsilon_1) + f_2 \sin(k_2 x_1 - \omega_2 t + \varepsilon_2)] - (r_1 - \tau_1 n)x_2 - (r_2 - \tau_2)x_2^2 - r_3 x_2^3 \}\end{aligned}\tag{4.11}$$

όπου x_1 η θέση (m) του πλοίου και x_2 η ταχύτητα (m/s) αυτού

Η μελέτη πραγματοποιείται για το πλοίο ONR tumblehome (topside series) με κύρια χαρακτηριστικά $L = 154 m$ (μήκος), $B = 18.8 m$ (πλάτος), $T = 5.5 m$ (βύθισμα), ενώ στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται οι υπόλοιπες τιμές των παραμέτρων της εξίσωσης

Πίνακας 4.1: Χαρακτηριστικές τιμές των παραμέτρων του μοντέλου

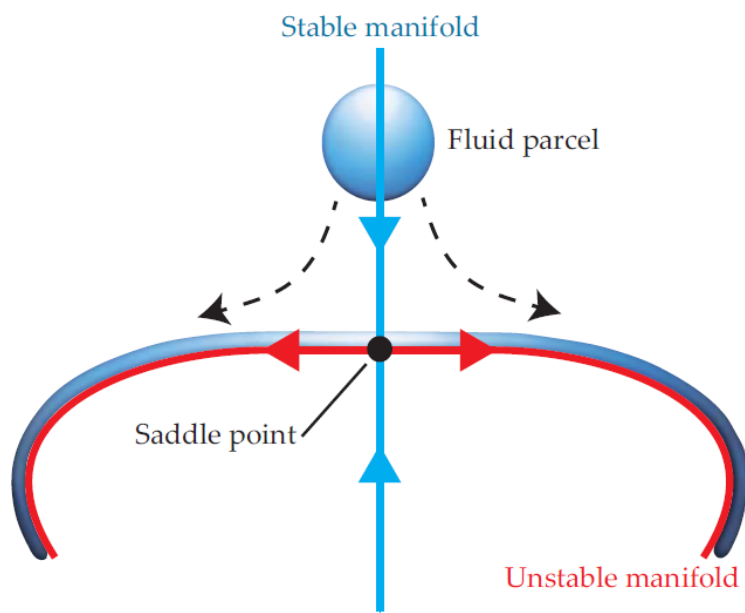
Παράμετροι	Τιμή	Μονάδες
m	8.747×10^6	Kg
$X_{\dot{u}}$	-4.373×10^5	Kg
r_1	7.705×10^3	Kg/s
r_2	2.511×10^3	Kg/m
r_3	1.540×10^2	Kg s/m ²
τ_0	9.626×10^4	Kg m
τ_1	-9.947×10^3	kg
τ_2	8.690×10^2	Kg/m

Πίνακας 4.2: Κυματικοί παράμετροι του μοντέλου

Αρμονικό κύμα (N=1)		Διχρωματικό κύμα (N=2)	
Μήκος κύματος	λ	Μήκος κύματος	λ_1
Οξύτητα κύματος	$s = H/\lambda$	Οξύτητα πρώτου κύματος	$s_1 = H_1/\lambda_1$
		Λόγος οξύτητας κυμάτων	$\frac{s_2}{s_1} = \frac{H_2/\lambda_2}{H_1/\lambda_1}$
		Λόγος συχνοτήτων	ω_2/ω_1

4.2 ΛΑΓΚΡΑΝΖΙΑΝΕΣ ΣΥΝΕΚΤΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

Η ιδέα των Λαγκρανζιανών Συνεκτικών Δομών (Lagrangian Coherent Structures) εμφανίστηκε ως αποτέλεσμα μιας γόνιμης ανταλλαγής ιδεών που προέρχονταν από τα πεδία της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων και της δυναμικής των ρευστών. Ο όρος αυτός εισήχθη για πρώτη φορά από τους Haller και Yuan (2000) [9] και στη συνέχεια πολλοί συνεισέφεραν στην ανάπτυξη υπολογιστικών εργαλείων για τον προσδιορισμό τους - μια σύντομη σχετική ανασκόπηση παρατίθεται από τον Shadden (2011) [13] - ενώ μία γενική ανασκόπηση της βασικής ιδέας των LCSs, των υπολογιστικών εργαλείων εξαγωγής αυτών και των βασικών εφαρμογών στην πρόβλεψη της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς των δυναμικών συστημάτων παρατίθεται από τους Peacock και Haller (2013) [14]



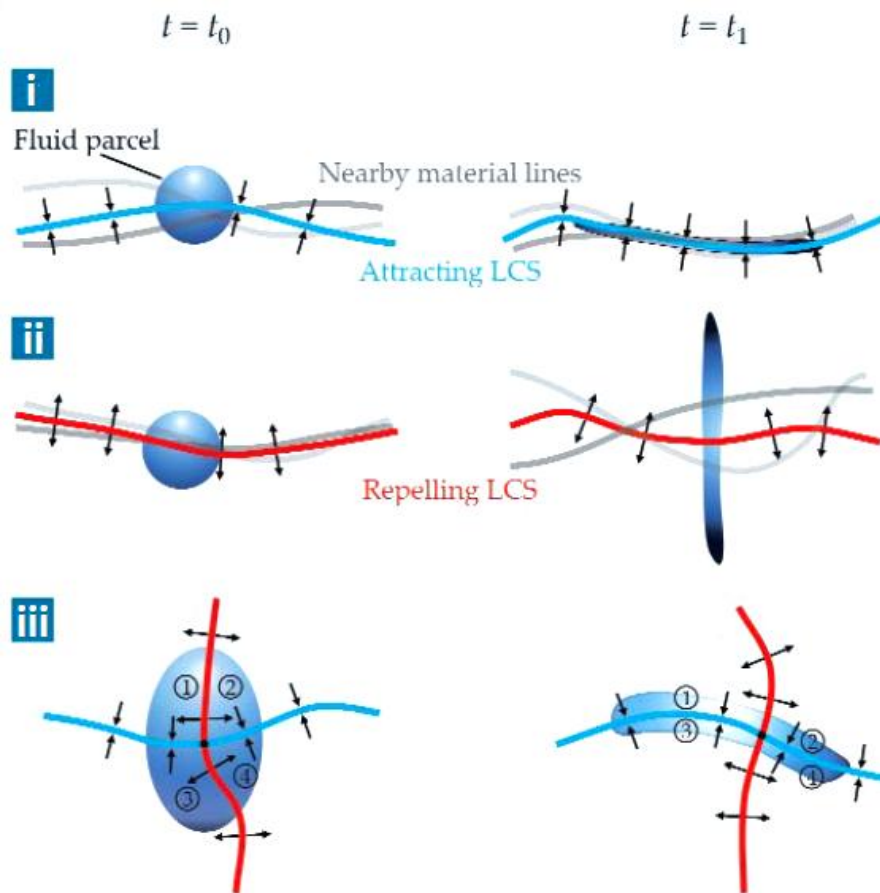
Σχήμα 4.2: Ευσταθείς και ασταθείς υπερβολικές πολλαπλότητες. Ομάδα σωματιδίων πλησιάζει το σαγματικό σημείο κινούμενο περίξ της ευσταθούς πολλαπλότητας - μπλε καμπύλη) αποθούνται και περνώντας το σαγματικό σημείο διατάσσονται με βάση την άλλη υλική γραμμή (ασταθή πολλαπλότητα - κόκκινη καμπύλη) [14]

Στο σχήμα 4.2 απεικονίζονται οι ευσταθείς και ασταθείς υπερβολικές πολλαπλότητες για ένα αυτόνομο σύστημα. Συγκεκριμένα απεικονίζεται ομάδα σωματιδίων να πλησιάζει το σαγματικό σημείο κινούμενο περίξ υλικής γραμμής, την ευσταθή πολλαπλότητα - μπλε καμπύλη, και στη συνέχεια, περνώντας απότο σαγματικό σημείο, διατάσσονται με βάση την άλλη υλική γραμμή, την ασταθή πολλαπλότητα -

κόκκινη καμπύλη. Η ασταθής πολλαπλότητα, παρά το χαρακτηρισμό της ως "ασταθής", είναι υπεύθυνη για την οργάνωση της δομής στη γειτονιά του σαγματικού σημείου, έλκοντας όλα τα γειτονικά σωματίδια τα οποία διατάσσονται έτσι ώστε να πάρουν τη μορφή της.

Το σχήμα 4.3 αναφέρεται σε ένα μη αυτόνομο σύστημα όπου απεικονίζονται τα LCSs σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$. Τα LCSs θεωρούνται υλικές γραμμές που καθορίζουν τη συμπεριφορά των γειτονικών μεταξύ τους ροϊκών σωματιδίων σε μία δεδομένη χρονική περίοδο. Εξ ορισμού τα repelling (attracting) LCSs απωθούν (έλκουν) τις γειτονικές τροχιές στο μεγαλύτερο τοπικό ρυθμό συγκριτικά με τις άλλες γειτονικές υλικές γραμμές. Στο σχήμα 4.3(i) ένα attracting LCS είναι μία υλική γραμμή (μπλε χρώμα) που έλκει το σωματίδιο περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη γειτονική υλική γραμμή (γκρι). Το σωματίδιο επιμηκύνεται παράλληλα στο attracting LCS παίρνοντας τελικά τη μορφή του. Στο σχήμα 4.3(ii) ένα repelling LCS είναι μία υλική γραμμή (κόκκινο χρώμα) που απωθεί το σωματίδιο περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη γειτονική υλική γραμμή (γκρι χρώμα), με αποτέλεσμα το σωματίδιο να επιμηκύνεται κάθετα πάνω στο repelling LCS και τελικά σε δεδομένη μετέπειτα χρονική στιγμή να σπάει. Τέλος, στο σχήμα 4.3(iii) ένα repelling LCS συμπεριφέρεται ως όριο μεταξύ δύο περιοχών ελκυσμού για ένα attracting LCS. Επειδή τα LCSs δεν δύναται να τα διαπεράσει κανένα σωματίδιο, ορίζουν και διαμορφώνουν τις περιοχές 1-4 κατευθύνοντας τα σωματίδια σε διαφορετικές περιοχές των attracting LCSs.

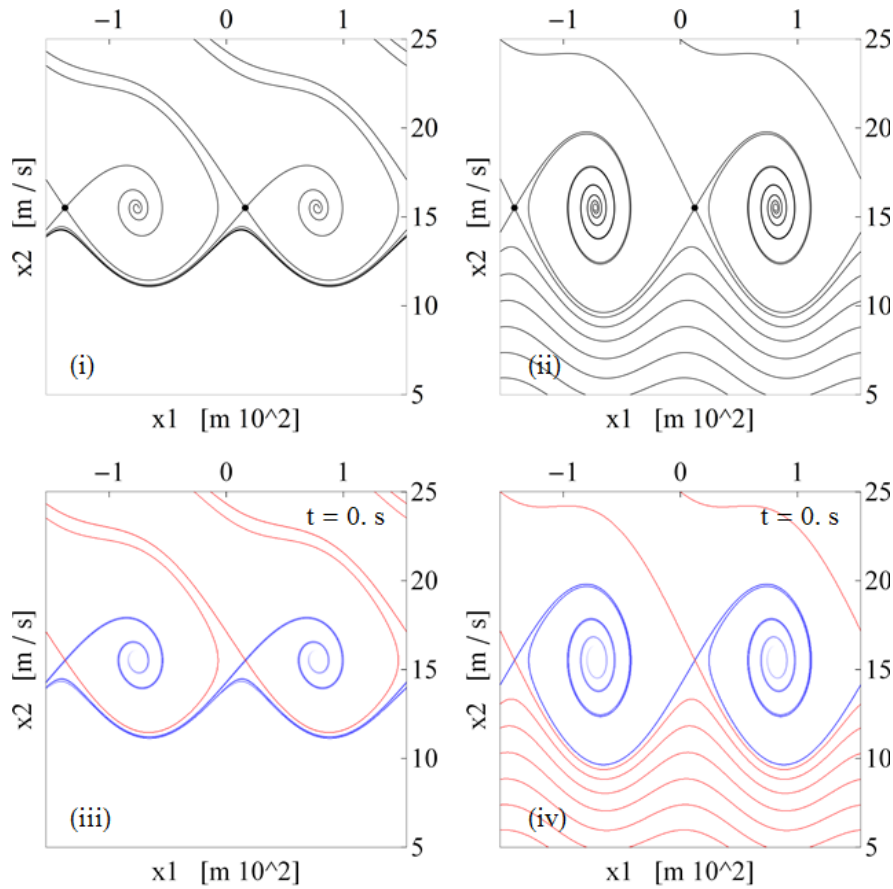
Από τα παραπάνω παρατηρούμε μία αναλογία στη συμπεριφορά των LCSs με αυτή των υπερβολικών πολλαπλοτήτων στα αυτόνομα δυναμικά συστήματα. Επειδή τα στάσιμα σημεία (με την αυστηρή έννοια) δεν ορίζονται στα μη αυτόνομα συστήματα, η μελέτη αυτών γίνεται μέσω των LCSs.



Σχήμα 4.3: Λαγκρανζιανές συνεκτικές δομές σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$. (i) Ένα *attracting LCS* είναι μία υλική γραμμή (μπλε) που έλκει το σωματίδιο περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη γειτονική υλική γραμμή (γκρι). (ii) Ομοίως ένα *repelling LCS* είναι μία υλική γραμμή (μπλε) που απωθεί το σωματίδιο περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη γειτονική υλική γραμμή (γκρι). (iii) Ένα *repelling LCS* συμπεριφέρεται ως όριο μεταξύ δύο περιοχών ελκυσμού για ένα *attracting LCS*. Επειδή τα LCSs δεν δύναται να τα διαπεράσει κανένα σωματίδιο, ορίζουν και διαμορφώνουν τις περιοχές 1-4. [14]

Οι Kontolefas και Spyrou (2016) [7] επιβεβαιώνουν την αναλογία των LCSs με τις πολλαπλότητες στο δυναμικό σύστημα που περιγράφει την κίνηση του πλοίου στο διάμηκες. Για δεδομένες τιμές παραμέτρων έγινε αρχικά εξαγωγή των υπερβολικών πολλαπλοτήτων μέσω επίλυσης της αυτόνομης εξίσωσης κίνησης του πλοίου στο διάμηκες (σχήμα 4.4(i) και (ii)), ενώ με χρήση της μεθόδου FTLE (αναλύεται στη συνέχεια) έγινε η εξαγωγή των *attracting LCSs* (μπλε καμπύλη) και των *repelling*

LCSs (κόκκινη καμπύλη) για το μη αυτόνομο αντίστοιχο σύστημα (σχήμα 4.4(iii) και (iv)), όσον αφορά την περίπτωση του αρμονικού κύματος.



Σχήμα 4.4: (i) και (ii) υπερβολικές πολλαπλότητες για την αυτόνομη εξίσωση κίνησης του πλοίου στο διάμηκες, (iii) και (iv) τα attracting LCSs (μπλε καμπύλες) και repelling LCSs (κόκκινες καμπύλες) με εφαρμογή της μεθόδου FTLE στη μη αυτόνομη εξίσωση κίνησης πλοίου στο διάμηκες. [7]

Τα LCSs χρησιμοποιούνται εκτενώς τα τελευταία χρόνια σε μία ευρεία κλίμακα εφαρμογών σχετικών με φυσικές και βιολογικές ροές (έλεγχος ρύπανσης, ατμοσφαιρικής κυκλοφορίας, κυκλοφορία αίματος στις αρτηρίες) [13], ενώ ταυτόχρονα αναπτύσσονται, τόσο η θεωρία όσο και μια σειρά αποτελεσματικών υπολογιστικών μεθόδων (μέθοδος FTLE [15], μέθοδος FSLE [16], [17], μεταβολική θεωρία [18], [19]) για την εξαγωγή τέτοιων δομών με σκοπό την πρόβλεψη της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς ενός μη αυτόνομου γραμμικού συστήματος.

4.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΚΘΕΤΩΝ LYAPUNOV ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (FINITE-TIME LYAPUNOV EXPONENTS - FTLE)

Έστω ένα δυναμικό σύστημα που περιγράφει μία ροή στο επίπεδο

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2, t \in [t^-, t^+] \subset \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Η τροχιά του συστήματος (4.1) τη χρονική στιγμή t , ξεκινώντας από μία αρχική συνθήκη x_0 τη στιγμή t_0 , δίνεται ως $x(t; t_0, x_0)$

Για το χάρτη ροής $F_{t_0}^t(x_0)$ του (4.1) μπορεί να γραφτεί

$$F_{t_0}^t : D \rightarrow D$$

$$x_0 \mapsto x(t; t_0, x_0) \quad (4.2)$$

Μέσω της (4.2) το φασικό σωματίδιο που διέρχεται από τη θέση x_0 τη χρονική στιγμή t_0 συνδέεται με τη θέση του x τη στιγμή t .

Επιπλέον, έστω δύο απειροστά κοντινά φασικά σωματίδια στις θέσεις x_0 και $x_0 + \delta_0$ τη χρονική στιγμή t_0 . Η απομάκρυνση δ μεταξύ τους μετά από χρόνο τ είναι

$$\delta = F_{t_0}^{t_0+\tau}(x_0 + \delta_0) - F_{t_0}^{t_0+\tau}(x_0) = \left. \frac{\partial F_{t_0}^{t_0+\tau}}{\partial x} \right|_{x=x_0} \delta_0 + \mathcal{O}\|\delta_0\|^2 \quad (4.3)$$

Άρα το μέτρο της γραμμικοποιημένης διαταραχής τη στιγμή $t_0 + \tau$ δίνεται από (Shadden 2011) [13]

$$\|\delta\| = \|\nabla F_{t_0}^{t_0+\tau}(x_0)\delta_0\| = \|\delta_0\| \sqrt{e_0^T \left[\nabla F_{t_0}^{t_0+\tau}(x_0) \right]^T \nabla F_{t_0}^{t_0+\tau}(x_0) e_0} \quad (4.4)$$

όπου

e_0 το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την διεύθυνση του δ_0

A^T δηλώνει τη μετάθεση του A

$\nabla F_{t_0}^{t_0+\tau}(x_0)$ η βαθμίδα παραμόρφωσης στη θέση x_0

$C_{t_0}^{t_0+\tau}(x_0) = \left[\nabla F_{t_0}^{t_0+\tau}(x_0) \right]^T \nabla F_{t_0}^{t_0+\tau}(x_0)$ ο δεξιός τανυστής παραμόρφωσης Cauchy-Green στη θέση x_0 . Είναι πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα έχει

θετικές ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1, 2$. Τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα $e_i, i = 1, 2$ συνιστούν μία ορθοκανονική βάση. Ο τανυστής παραμόρφωσης Cauchy-Green παρέχει ένα μέτρο του πώς παραμορφώνονται γραμμικά στοιχεία στη γειτονιά του x_0 εξαιτίας της ροής.

Άρα συντελεστής επιμήκυνσης μεταξύ δύο κοντινών φασικών σωματιδίων θα δίνεται

$$\lim_{|\delta_0| \rightarrow 0} \frac{|\delta|}{|\delta_0|} = \sqrt{e_0^T \left[\nabla F_{t_0}^{t_0+\tau}(x_0) \right]^T \nabla F_{t_0}^{t_0+\tau}(x_0) e_0} \Rightarrow \lim_{|\delta_0| \rightarrow 0} \frac{|\delta|}{|\delta_0|} = \sqrt{\lambda_i} \quad (4.5)$$

Οι εκθέτες Lyapunov πεπερασμένου χρόνου ορίζονται ως

$$\Lambda_i = \frac{1}{|\tau|} \ln \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2 \quad (4.6)$$

Ο μεγαλύτερος FTLE, Λ_2 , αναφέρεται συνήθως απλά ως "FTLE". Λόγω της (4.6) ο Λ_2 μπορεί να θεωρηθεί ως η χρονικά σταθμισμένη μέση τιμή του μέτρου επιμήκυνσης μεταξύ δύο γειτονικών αρχικών συνθηκών οι οποίες εξελίσσονται σύμφωνα με τη ροή που επάγει το διανυσματικό πεδίο (4.1). Αυτό όμως σύμφωνα με τον Shadden (2011) [13] δεν ισχύει γενικά.

Μέσω του υπολογισμού της χωρικής κατανομής του FTLE είναι δυνατός ο προσδιορισμός των υπερβολικών LCSs. Τα LCSs θα εμφανιστούν τελικά ως οι καμπύλες κατά μήκος των οποίων μεγιστοποιείται το πεδίο FTLE. Εφαρμογή της μεθόδου για αρνητικούς χρόνους ολοκλήρωσης σημαίνει απόκλιση πίσω στο χρόνο, δηλαδή σύγκλιση μπροστά στο χρόνο. Σύμφωνα με τον Haller (2000) [6] τα attracting LCSs εξάγονται μέσω της ολοκλήρωσης πίσω στο χρόνο (αρνητικός χρόνος τ) και τα repelling LCSs μέσω της ολοκλήρωσης μπροστά στο χρόνο (θετικός χρόνος τ). Η επιλογή του κατάλληλου χρόνου ολοκλήρωσης καθίσταται κρίσιμη στην σωστή εξαγωγή όλων των LCSs στο πεδίο FTLE. Τα LCSs του πεδίου FTLE δύναται να μην εμφανιστούν όλα για μικρή τιμή του χρόνου ολοκλήρωσης, ενώ αυξάνοντας την τιμή τ οι κορυφογραμμές του πεδίου γίνονται πιο οξείες.

Τυπικά ο υπολογισμός του πεδίου FTLE γίνεται ως εξής [12]

1. Θεωρούμε ένα πλέγμα $N \times N$ αρχικών συνθηκών $\{x_0, u_0\}_{i=1, \dots, N^2}$ σε ένα χωρίο $x_1 - x_2$ μία δεδομένη χρονική στιγμή t_0 .

2. Το πλέγμα ολοκληρώνεται πάνω σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $\tau = t - t_0$ χρησιμοποιώντας έναν αριθμητικό αλγόριθμο ολοκλήρωσης και υπολογίζεται η τελική θέση κάθε σημείου του πλέγματος
3. Εφαρμόζεται ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών στους κόμβους του αρχικού πλέγματος και λαμβάνεται η βαθμίδα παραμόρφωσης.
4. Τέλος, υπολογίζεται η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του τανυστή Cauchy-Green και υπολογίζεται το πεδίο FTLE μέσω της σχέσης $\Lambda = \frac{1}{|\tau|} \ln \sqrt{\lambda}$.

Τα repelling (attracting) LCSs προσδιορίζονται ως οι κορυφογραμμές του πεδίου FTLE μέσω προς (πίσω) ολοκλήρωσης στο χρόνο επιλέγοντας να εμφανιστούν μόνο οι μεγαλύτερες τιμές του πεδίου. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία για ένα δεδομένο χρονικό διάστημα βλέπουμε την εξέλιξη των LCSs στο χρόνο.

4.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ CLUSTERING

Έστω n τροχιές $x_i(t) \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, \dots, n$ διακριτοποιημένες σε $N+1$ σημεία $t_i, i=0, 1, \dots, N$. Θεωρούμε κάθε τροχιά σαν ένα σημείο $X_i = (x_i(t_0), x_i(t_1), \dots, x_i(t_N)) \in \mathbb{R}^{d(N+1)}$, το οποίο αναφέρεται ως τροχιά (γιατί αποτελεί μια διακριτοποιημένη εκδοχή της τροχιάς x_i). Έστω επίσης η μετρική

$$M(x_i(t_0), x_j(t_0)) = \sum_{k=0}^N \|x_i(t_k) - x_j(t_k)\|^2 = \|X_i - X_j\|^2 \quad (4.7)$$

Θεωρούμε το $\mathbb{R}^{d(N+1)}$ ως $\prod_{t=0}^N \mathbb{R}^d$, όπου το γινόμενο των αντιγράφων του χώρου φάσεων \mathbb{R}^d διατάσσεται κατά αύξοντα χρόνο t .

Ο αλγόριθμος *fuzzy c-means clustering* αποσκοπεί (αρχικά) στο διαμερισμό ενός συνόλου τροχιών σε υποσύνολα, κάθε ένα από τα οποία καταλαμβάνει μια (εξελισσόμενη) συμπαγή, κατά προσέγγιση, περιοχή του χώρου φάσεων κατά μήκος ενός διαστήματος πεπερασμένου χρόνου (finite-time coherent sets). Κάθε τροχιά συνδέεται με μία πιθανότητα $0 \leq u_{k,i} \leq 1$ να ανήκει στην ομάδα $C_k \in \mathbb{R}^{d(N+1)}, k = 1, 2, \dots, K$

Επιθυμούμε την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n u_{k,i}^m \|X_i - C_k\|^2 = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n u_{k,i}^m \sum_{t=0}^N \|x_i(t) - c_i(t)\|^2 \quad (4.8)$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\sum_{k=1}^K u_{k,i} = 1, i = 1, 2, \dots, n \text{ και } u_{k,i} \geq 0, k = 1, 2, \dots, K, i = 1, 2, \dots, n$$

όπου

m ο εκθέτης ασάφειας με $m > 1$

$u_{k,i}, k = 1, 2, \dots, K, i = 1, 2, \dots, n$ οι πιθανότητες ένταξης

Η αύξηση του εκθέτη ασάφειας αντιστοιχεί σε softer clusters, ενώ καθώς το $m \rightarrow 1$ οι πιθανότητες ένταξης συγκλίνουν ή προς το 0 ή προς το 1, δίνοντας ένα hard clustering.

Τα υπολογιστικά βήματα είναι τα εξής:

1. Δίνονται αρχικές τιμές ένταξης (είτε τυχαία είτε μετά από υπολογισμό μέσω του τρίτου βήματος, ο οποίος βασίζεται σε αρχικές επιλογές K κέντρων)

2. Υπολογισμός των κέντρων

$$C_k = \frac{\sum_{i=1}^n u_{k,i} X_i}{\sum_{i=1}^n u_{k,i}^m}, k = 1, 2, \dots, K.$$

3. Ανανέωση των τιμών ένταξης

$$u_{k,i} = \frac{1/\|X_i - C_k\|^{2/(m-1)}}{\sum_{j=1}^K (1/\|X_i - C_j\|^{2/(m-1)})}, k = 1, 2, \dots, K, i = 1, 2, \dots, n$$

4.. Εκτίμηση της αντικειμενικής συνάρτησης

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n u_{k,i}^m \|X_i - C_k\|^2$$

Εάν η βελτίωση στην αντικειμενική συνάρτηση είναι κάτω από ένα δοσμένο όριο προχωρά στο βήμα 5, διαφορετικά επιστροφή στο βήμα 2.

5. Εξαγωγή των cluster κέντρων $C_k \in \mathbb{R}^{d(T+1)}, k = 1, 2, \dots, K$ και των πιθανοτήτων ένταξης $u_{k,i} \in [0,1], k = 1, 2, \dots, K, i = 1, 2, \dots, n$

Ένα μέτρο της βεβαιότητας της συσχέτισης κάθε τροχιάς στην αντίστοιχη ομάδα αποτελεί η εντροπία, η οποία ορίζεται ως

$$h_i := \frac{\sum_{k=1}^K u_{k,i} \log u_{k,i}}{\log K}$$

παίρνοντας τιμές μεταξύ 0-1. Συγκεκριμένα για $h_i = 1$ επικρατεί πλήρης αβεβαιότητα στην ομαδοποίηση της τροχιάς i σε κάποια ομάδα K , ενώ για τιμή $h_i = 0$ η ομαδοποίηση έχει γίνει με επιτυχία. Επομένως, η χωρική απεικόνιση του πεδίου της εντροπίας στο χώρο φάσεων είναι χρήσιμη στην εκτίμηση του κατά πόσο οι επιλεγμένες τροχιές έχουν ομαδοποιηθεί σωστά.

Τα παραπάνω έχουν αναπτυχθεί από τους Froyland και Padberg-Gehle (2015) [20]

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Η μελέτη αφορά το πλοίο ONR tumblehome (topside series) με κύρια χαρακτηριστικά $L = 154 \text{ m}$ (μήκος), $B = 18.8 \text{ m}$ (πλάτος), $T = 5.5 \text{ m}$ (βύθισμα) υποθέτοντας περιοχή βαθέως νερού. Αρχικά θα εφαρμοστεί η μέθοδος FTLE στην περίπτωση αρμονικών κυματισμών $N = 1$ και στη συνέχεια σε διχρωματικούς κυματισμούς $N = 2$.

Για την περίπτωση του μονοχρωματικού κύματος εξετάζουμε το μοντέλο

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (m - X_{\dot{u}})^{-1} \{ \tau_0 n^2 + f \sin(kx_1 - \omega t + \varepsilon) - (r_1 - \tau_1 n)x_2 - (r_2 - \tau_2)x_2^2 - r_3 x_2^3 \}\end{aligned}\tag{4.10}$$

και για την περίπτωση του διχρωματικού κύματος

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (m - X_{\dot{u}})^{-1} \{ \tau_0 n^2 + [f_1 \sin(k_1 x_1 - \omega_1 t + \varepsilon_1) + f_2 \sin(k_2 x_1 - \omega_2 t + \varepsilon_2)] \\ &\quad - (r_1 - \tau_1 n)x_2 - (r_2 - \tau_2)x_2^2 - r_3 x_2^3 \}\end{aligned}\tag{4.11}$$

όπου x_1 η θέση (m) του πλοίου και x_2 η ταχύτητα (m/s) αυτού, ενώ οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου βρίσκονται στον πίνακα 4.1.

5.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FTLE

5.1.1 Αρμονικό κύμα

Για το μήκος και την οξύτητα του κύματος επιλέγονται οι τιμές $\lambda = L = 154 \text{ m}$ και $s = H/\lambda = 0.02$ αντίστοιχα, όπου το H αναφέρεται στο ύψος του κύματος. Ο ρυθμός περιστροφής της έλικας (n) ρυθμίζεται έτσι ώστε να αντιστοιχεί σε ταχύτητα πλοίου ίση με $u_{nom} = 12 \text{ m/s}$.

Για τον υπολογισμό του πεδίου FTLE διακριτοποιείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 50 \text{ s}$ ένα ορθογωνικό χωρίο $[-L, L]m_x [5, 25] \text{ m/s}$ του φασικού επιπέδου $x_1 - x_2$ με τη βοήθεια πλέγματος 500×500 σημείων με κέντρο πλέγματος στο $x_{centre} = 0 * L$. Ο αριθμός των σημείων που επιλέγονται για την κατασκευή του πλέγματος συμβάλει στην ποιότητα της απεικόνισης των LCSs. Όσο πυκνότερο είναι το πλέγμα τόσο καθαρότερη απεικόνιση έχουμε, αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος.

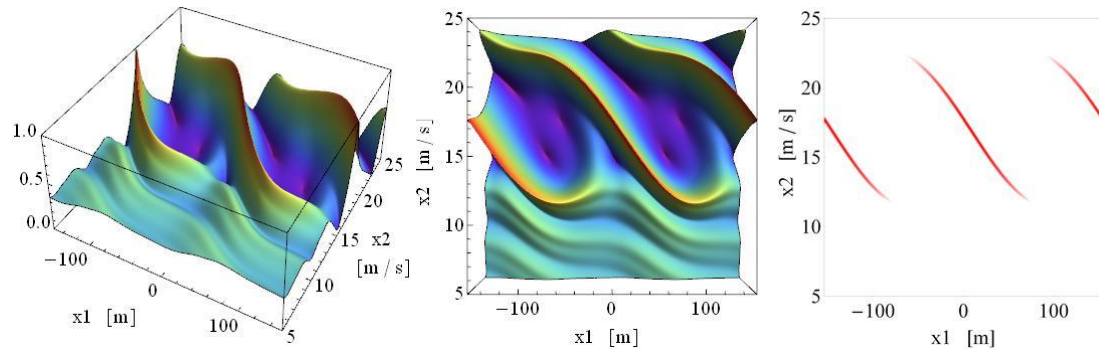
Τη χρονική στιγμή $t_0 = 50 \text{ s}$ και για δεδομένο χρόνο ολοκλήρωσης τ πραγματοποιείται η εξαγωγή του πεδίου FTLE. Για το χρόνο ολοκλήρωσης επιλέχθηκαν οι τιμές $\tau^+ = 300 \text{ s}$ για μπροστά στο χρόνο όπου έγινε εξαγωγή των repelling LCSs και $\tau^- = -240 \text{ s}$ για πίσω στο χρόνο όπου έγινε εξαγωγή των attracting LCSs. Η τελική αυτή επιλογή του χρόνου ολοκλήρωσης έγινε ύστερα από πολλαπλές δοκιμές. Όσο αυξάνεται ο χρόνος ολοκλήρωσης τ , οι κορυφογραμμές των LCSs γίνονται πιο έντονες. Αυτό συμβαίνει γιατί δίνουμε χρόνο στο σύστημα να εξελιχθεί κι έτσι εξάγουμε περισσότερη πληροφορία, δηλαδή αποκαλύπτεται μεγαλύτερο τμήμα των LCSs. Η ολοκλήρωση του FTLE πεδίου μπροστά στο χρόνο παρέχει την πρόβλεψη της επιμήκυνσης των αρχικών συνθηκών μετά από χρόνο τ , ενώ το πεδίο FTLE για ολοκλήρωση πίσω στο χρόνο παρέχει τη σύγκλιση των αρχικών συνθηκών.

Επίσης, κατασκευάζουμε μια 3D απεικόνιση του βαθμωτού πεδίου FTLE, έτσι ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα τη δομή αυτού και συγκεκριμένα τη δομή των καμπύλων, που αντιστοιχούν στην τοπικά μέγιστη επιμήκυνση, μέσω των οποίων θα εξάγουμε εν τέλει τα LCSs. Μέσω των 3D απεικονίσεων δηλαδή αναγνωρίζουμε τις κορυφογραμμές που αντιπροσωπεύουν σε κάθε περίπτωση τα attracting και repelling LCS, η εξαγωγή των οποίων γίνεται επιλέγοντας εκείνες μόνο τις τιμές του πεδίου FTLE που είναι μεγαλύτερες από $0.85 * FTLE_{max}$. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ένα 2D πλαίσιο στο χώρο φάσεων $x_1 - x_2$ αποκαλύπτοντας τα repelling και attracting LCSs ως καμπύλες στο χωρίο ενός χώρου φάσεων.

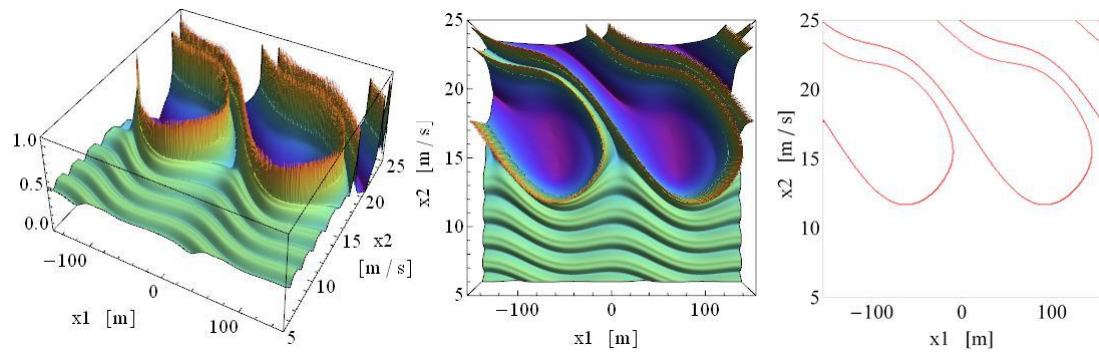
Τα αποτελέσματα για τα repelling LCSs είναι στο σχήμα 5.1 και για τα attracting LCSs στο σχήμα 5.2, στα οποία παρουσιάζουμε επίσης το αποτέλεσμα που έχουμε αν θεωρήσουμε μικρότερο χρόνο ολοκλήρωσης. Στο σχήμα 5.1(i) με $\tau^+ = 50 \text{ s}$ παρατηρούμε ότι παίρνουμε λιγότερη πληροφορία από ότι στην περίπτωση (ii) με

$\tau^+ = 300s$, αφού δεν δίνουμε τον απαραίτητο χρόνο στο σύστημα να εξελιχθεί, ενώ επίσης, οι καμπύλες είναι πιο λείες. Αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στον αριθμό των σημείων του πλέγματος που έχουν επιλεγεί και κατά δεύτερο λόγο στο σφάλμα ολοκλήρωσης το οποίο αυξάνει όσο αυξάνει ο χρόνος ολοκλήρωσης. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι οι καμπύλες στις χαμηλότερες ταχύτητες δεν έχουν κυρίαρχο ρόλο στην οργάνωση της φασικής ροής (όπως θα φανεί και στη συνέχεια) ώστε να θεωρηθούν ως LCSs επιλέγοντας ένα πολύ χαμηλότερο κατώφλι. Ομοίως, στην περίπτωση των attracting LCSs στο σχήμα 5.2 ο μικρότερος κατά απόλυτο χρόνος ολοκλήρωσης οδηγεί σε αποκάλυψη μικρότερου τμήματος των attracting LCS.

(i) $\tau^+ = 50s$

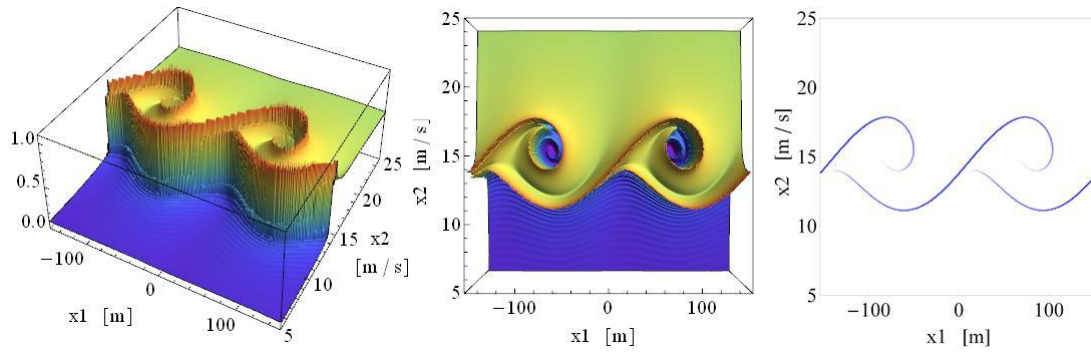


(ii) $\tau^+ = 300s$

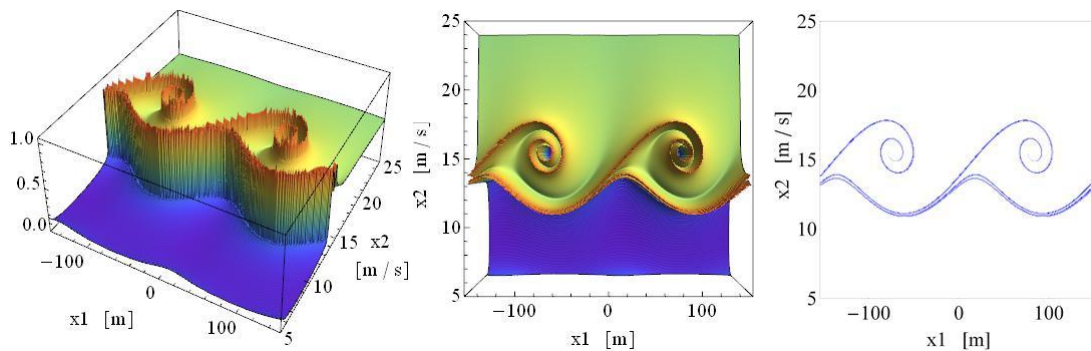


Σχήμα 5.1: Repelling LCS για (i) $\tau^+ = 50s$ και για (ii) $\tau^+ = 300s$. Σε κάθε περίπτωση βλέπουμε αριστερά - 3D απεικόνιση του πεδίου FTLE, κέντρο - Κάτοψη του πεδίου FTLE, δεξιά - 2D απεικόνιση των repelling LCS θέτοντας ως κατώφλι την τιμή 0.85 και άνω του πεδίου FTLE.

$$(i) \tau^- = -150s$$



$$(ii) \tau^- = -240s$$

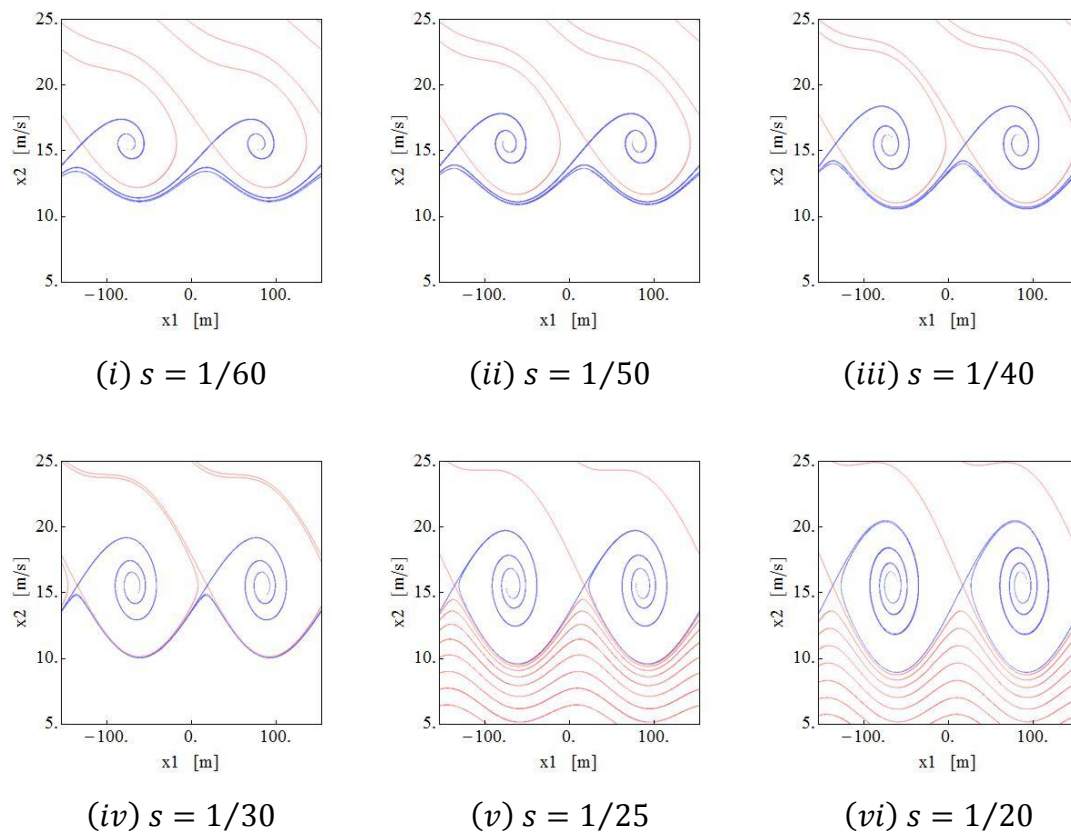


Σχήμα 5.2: Attracting LCS για (i) $\tau^- = -150s$ και για (ii) $\tau^- = -240s$. αριστερά - 3D απεικόνιση του πεδίου FTLE, κέντρο - Κάτοψη του πεδίου FTLE, δεξιά - attracting LCS θέτωντας ως κατώφλι την τιμή 0.85 του πεδίου FTLE

Αποτυπώνουμε στο ίδιο σχήμα τα repelling LCS και attracting LCS (σχήμα 5.3-iii). Παρατηρούμε δύο διαφορετικές περιοχές ελκυσμού στις οποίες το πλοίο μπορεί να εγκλωβιστεί αναλόγως των αρχικών συνθηκών. Έχουμε δηλαδή συνύπαρξη δύο διαφορετικών δυναμικών συμπεριφορών. Όταν το πλοίο βρεθεί μέσα στη λεκάνη ελκυσμού, δηλαδή πάνω από το repelling LCS (κόκκινη καμπύλη) θα κινηθεί και θα καταλήξει στον ελκυστή surf-riding, ενώ αν βρεθεί οπουδήποτε έξω από τη λεκάνη αυτή και κάτω από το repelling LCS θα κινηθεί και θα καταλήξει στον surging ελκυστή. Αυτό πρακτικά υποδηλώνει την ευαισθησία της κίνησης του πλοίου στις αρχικές συνθήκες. Ο τρόπος με τον οποίο τα LCSs οργανώνουν τη φασική ροή θα γίνει στη συνέχεια πιο ξεκάθαρος με την ολοκλήρωση ενός "πακέτου" σωματιδίων και την παρακολούθηση της συμπεριφοράς τους κατά την εξέλιξη του συστήματος στην πάροδο του χρόνου.

ενός και μόνο ελκυστή, του surf-riding, σε ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του πλοίου (περίπου ~ 15 m/s).

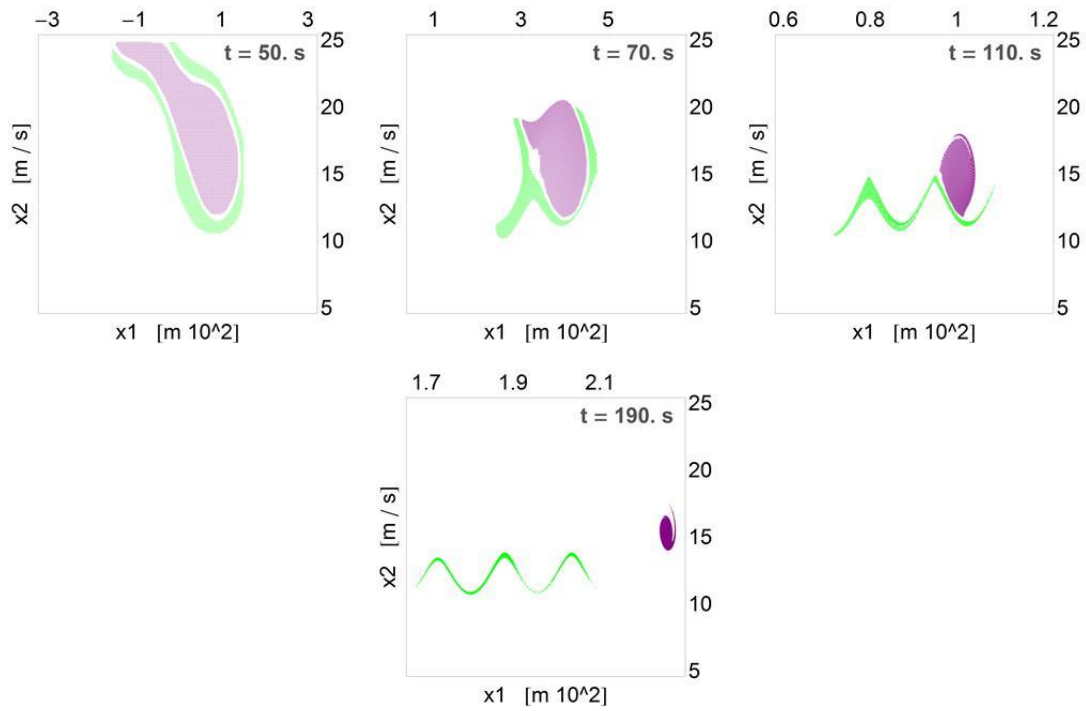
Η επίδραση των LCSs στην τελική κίνηση του πλοίου και η ομοιότητα αυτών με τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες φαίνεται στη συνέχεια όπου απεικονίζεται η εξέλιξη των LCSs ταυτόχρονα με την ολοκλήρωση των σωματιδίων στο χώρο φάσεων.



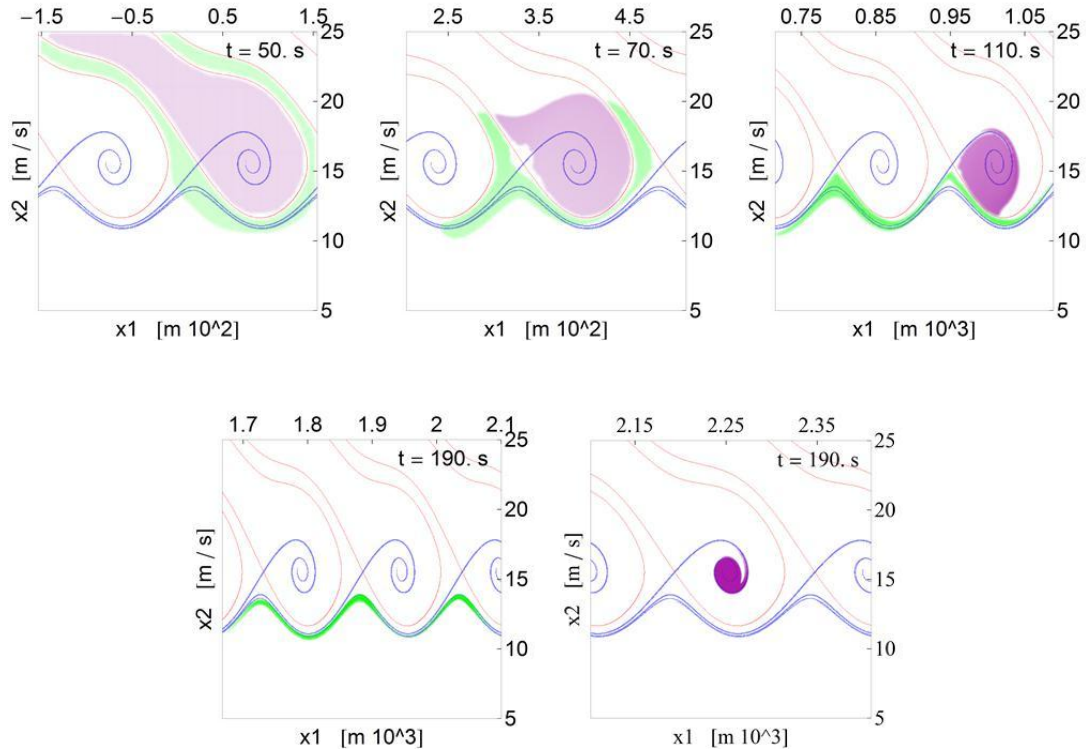
Σχήμα 5.4: Απεικόνιση των repelling (κόκκινη καμπύλη) και attracting (μπλε καμπύλη) LCSs εξαγόμενα από το πεδίο FTLE μεταβάλλοντας την τιμή οζύτητας του κύματος s .

Συνδυασμός FTLE με εξέλιξη σωματιδίων

Για την ίδια επιλογή παραμέτρων θεωρούμε ένα σύνολο σωματιδίων (αρχικών συνθηκών) τη χρονική στιγμή $t_0 = 50$ s των οποίων μελετάμε τη συμπεριφορά καθώς εξελίσσεται το σύστημα. Συγκεκριμένα επιλέγουμε ένα σύνολο 10,400 αρχικών συνθηκών (μοβ) μέσα στη λεκάνη ελκυσμού πάνω από το repelling LCS, οι οποίες αναμένεται να καταλήξουν στον ελκυστή surf-riding, και ένα σύνολο 5,700 αρχικών συνθηκών (πράσινο), οι οποίες θα καταλήξουν στον ελκυστή surging.



Σχήμα 5.5: Ολοκλήρωση περίπου 10,400 αρχικών συνθηκών (μωβ) και 5,700 αρχικών συνθηκών (πράσινο)



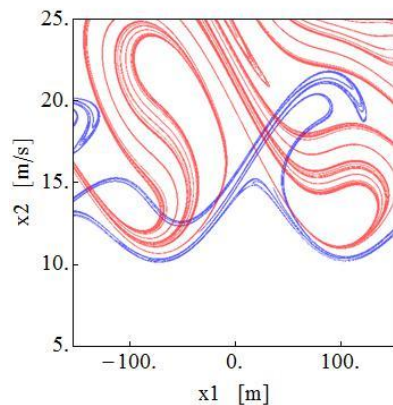
Σχήμα 5.6: Η εξέλιξη των LCS στο χρόνο σε συνδυασμό με την εξέλιξη 10,400 (μωβ) και 5,700 (πράσινο) αρχικών συνθηκών $(\lambda, s, u_{nom}, t_0) = (154, 0.02, 12, 50)$

Στο σχήμα 5.5 φαίνεται η εξέλιξη των σωματιδίων και ο διαφορετικός τρόπος συμπεριφοράς τους. Το κάθε πακέτο σωματιδίων οδηγείται σταδιακά σε διαφορετικό ελκυστή χωρίς αυτά να αναμειγνύονται μεταξύ τους. Το μοβ πακέτο οδηγείται σε surf-riding ελκυστή, ο οποίος εμφανίζεται ως σημείο και το πράσινο στον surging ελκυστή, ο οποίος εμφανίζεται ως συνεχής υλική γραμμή. Στο σχήμα 5.6 απεικονίζεται η εξέλιξη των τροχιών των σωματιδίων (μοβ και πράσινο πακέτο) μαζί με την εξέλιξη των LCSs σε διάφορα χρονικά στιγμιότυπα. Παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά της μη ανάμειξης οφείλεται στα repelling LCSs (κόκκινο) τα οποία λειτουργούν ως εμπόδιο διέλευσης της φασικής ροής διαχωρίζοντας περιοχές διαφορετικής δυναμικής συμπεριφοράς. Το μοβ πακέτο σωματιδίων συγκεντρώνεται μέσα στη λεκάνη ελκυσμού και ύστερα από κάποιο χρόνο οδηγείται στην ευσταθή κατάσταση του surf-riding και θα παραμείνει εκεί, ενώ το πράσινο πακέτο οδηγείται σταδιακά στην ευσταθή κατάσταση του surging ελκυστή. Τα repelling LCSs λειτουργούν ανάλογα προς τις ευσταθείς πολλαπλότητες, ενώ τα attracting LCS ανάλογα προς τις ασταθείς πολλαπλότητες. Το σημείο τομής των repelling και attracting LCSs λειτουργεί ως ανάλογο του σαγματικού σημείου των αυτόνομων συστημάτων. Τέλος, τα LCSs για το αρμονικό κύμα διατηρούν τη δομή τους καθώς το σύστημα εξελίσσεται στο χρόνο. Αυτό όμως δεν ισχύει για συνιστώσες κυμάτων $N \geq 2$.

5.1.2 Διχρωματικό κύμα

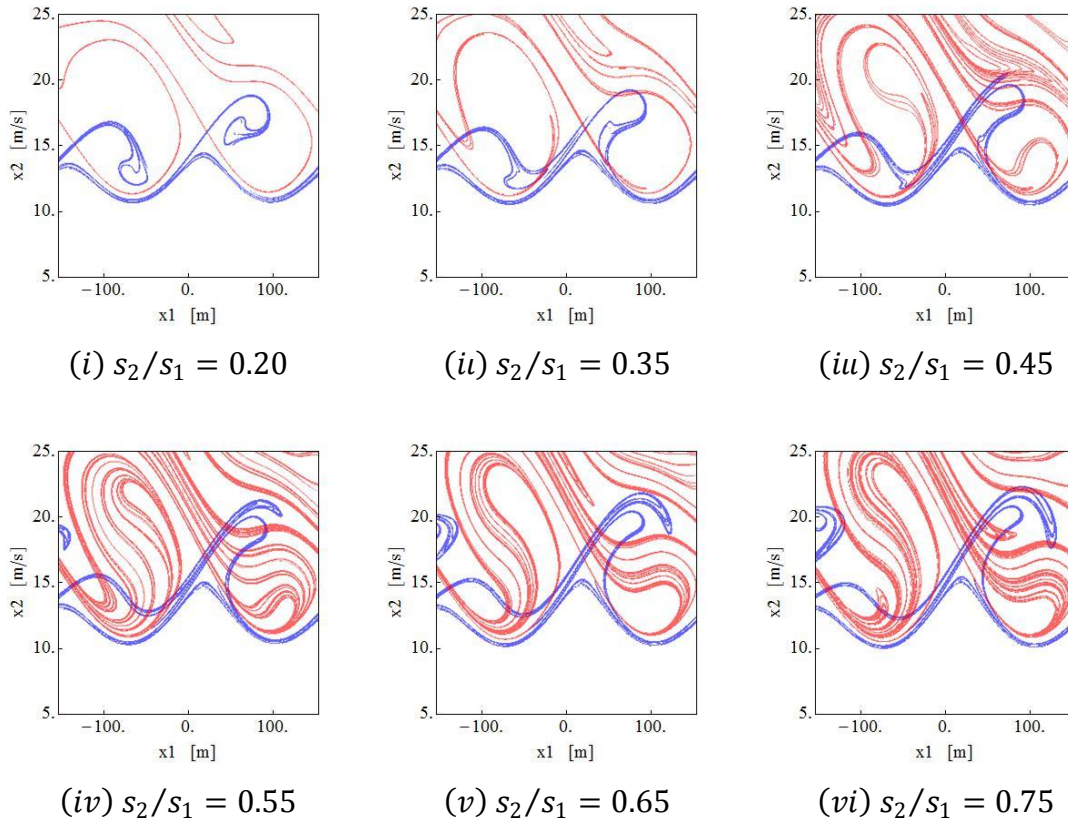
Περίπτωση 1 (συνύπαρξη *surf-riding* και *surging*)

Για το μήκος και την οξύτητα της πρώτης συνιστώσας (κύμα αναφοράς) επιλέγονται οι τιμές $\lambda_1 = L$ και $s_1 = 0.02$ αντίστοιχα. Η δεύτερη συνιστώσα προσδιορίζεται μέσω των λόγων $\omega_2/\omega_1 = 0.8$ και $s_2/s_1 = 0.65$. Η ταχύτητα του πλοίου ρυθμίζεται στην τιμή $u_{nom} = 12 \text{ m/s}$. Για τον υπολογισμό του πεδίου FTLE διακριτοποιείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 50 \text{ s}$ ένα ορθογωνικό χωρίο $[-L, L]m_x[5, 25] \text{ m/s}$ του φασικού επιπέδου $x_1 - x_2$ με τη βοήθεια πλέγματος 500×500 σημείων με κέντρο πλέγματος στο $x_{centre} = 0 * L$. Για τους χρόνους ολοκλήρωσης επιλέγονται οι τιμές $\tau = -240 \text{ s}$ (backward) και $\tau = 300 \text{ s}$ (forward FTLE field). Ο χώρος φάσεων για αυτήν την περίπτωση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5.7: Διχρωματικό κύμα. Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα) $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 0.8, 0.65, 12, 50)$

Παρατηρούμε ότι έχει ήδη συμβεί το ομοκλινικό γεγονός και στη συνέχεια πολλαπλά ετεροκλινικά γεγονότα λόγω των οποίων εμφανίζονται οι αλληπάλληλες αναδιπλώσεις των repelling LCSs, τα οποία καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος στο χώρο φάσεων σε ταχύτητες 12 m/s και άνω, και των attracting LCSs. Στην περιοχή ταχυτήτων $10 - 15 \text{ m/s}$ φαίνεται το attracting LCS (κυματοειδής μπλε καμπύλη) που αντιστοιχεί στον surging ελκυστή.



Σχήμα 5.8: Ο χώρος φάσεων για την περίπτωση του διχρωματικού κύματος $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 0.8, s_2/s_1, 12, 50)$ για διάφορες τιμές του λόγου s_2/s_1

Μεταβάλλοντας τις τιμές του λόγου οξύτητας παίρνουμε αποτελέσματα του σχήματος 5.8. Στην περίπτωση (i) παρατηρούμε την ομοιότητα των δομών με εκείνων του αρμονικού κύματος. Στην (ii) παρατηρούμε ότι έχει επέλθει το ομοκλινικό και στη συνέχεια το ετεροκλινικό γεγονός. Στις επόμενες περιπτώσεις εμφανίζονται συνεχείς αναδιπλώσεις των LCSs ενώ τα repelling LCSs αρχίζουν να καταλαμβάνουν σχεδόν όλο το χώρο φάσεων στις ταχύτητες 12 m/s και άνω.

Συνεχίζουμε με τη δυναμική μελέτη της περίπτωσης (v). Για την ίδια επιλογή παραμέτρων θεωρούμε ένα σύνολο σωματιδίων / αρχικών συνθηκών τη χρονική στιγμή $t_0 = 50$ s των οποίων μελετάμε τη συμπεριφορά καθώς εξελίσσεται το σύστημα. Σκοπός μας τώρα είναι να διερευνήσουμε αν το σύστημα μας έχει δύο διαφορετικούς ελκυστές - δύο διαφορετικές περιοχές δυναμικής ευστάθειας.

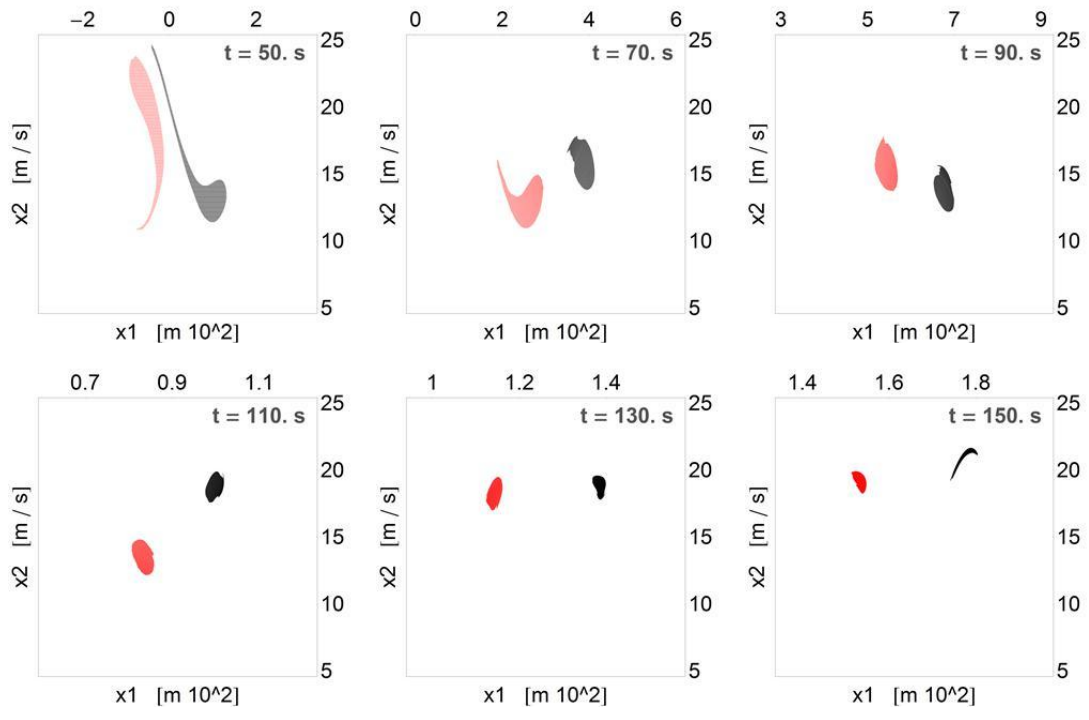
Αρχικά επιλέγουμε ένα σύνολο 17,000 (μαύρο) και 12,600 (κόκκινο) αρχικών συνθηκών μέσα στις δύο πιθανές λεκάνες ελκυσμού. Στα στιγμιότυπα του σχήματος

5.9 διακρίνονται οι θέσεις των σωματιδίων σε διαφορετικούς χρόνους. Κάθε πακέτο σωματιδίων συγκλίνει και οδηγείται σταδιακά σε περιοχές υψηλών ταχυτήτων. Στο σχήμα 5.10 απεικονίζεται η εξέλιξη των τροχιών του ενός μόνο πακέτου σωματιδίων (μαύρο) μαζί με την εξέλιξη των LCSs σε διάφορα χρονικά στιγμιότυπα. Παρατηρούμε ότι το πακέτο σωματιδίων συγκεντρώνεται μέσα στη λεκάνη ελκυσμού και οδηγείται πάνω στο attracting LCS, όπου παραμένει σε αυτό, δηλαδή στη κατάσταση του surf-riding, σε περιοχή ταχυτήτων 15 – 20 m/s περίπου.

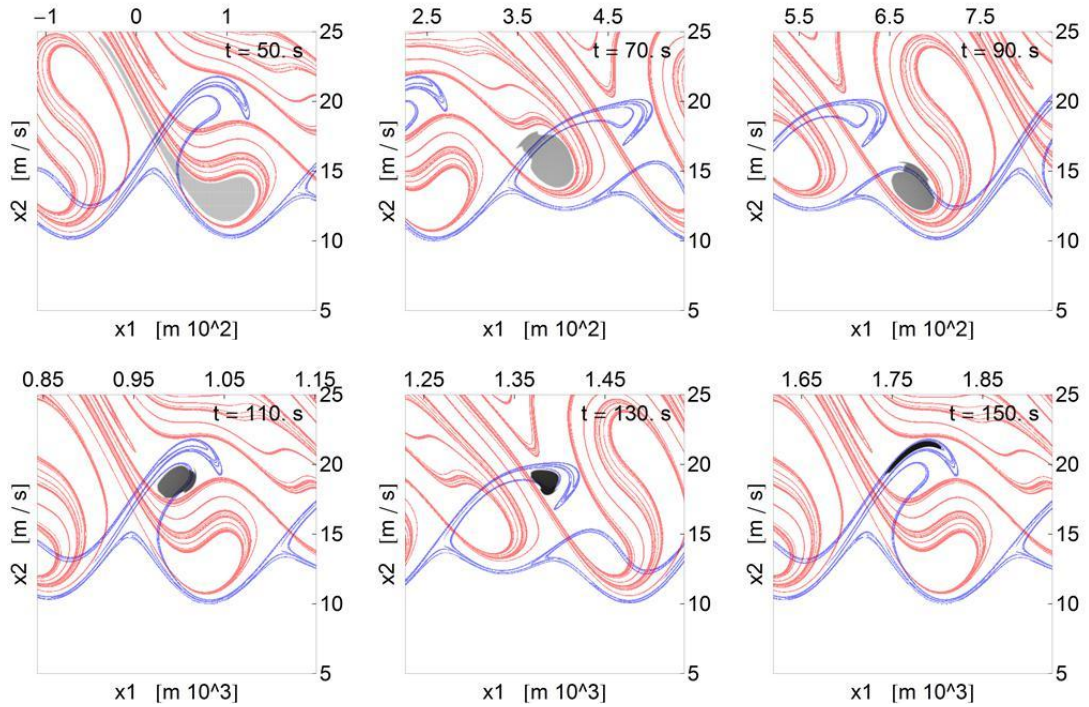
Στη συνέχεια, επιλέγουμε ένα σύνολο από περίπου 17,500 (μαύρο) και 13,200 (πράσινο) αρχικών συνθηκών, έξω από τα repelling LCSs, το πρώτο σε χαμηλές και το δεύτερο σε υψηλές ταχύτητες. Στο σχήμα 5.11 παρατηρούμε την εξέλιξή τους σε διάφορα στιγμιότυπα, όπου φαίνεται να καταλήγουν και τα δύο μαζί στον surging ελκυστή. Στο σχήμα 5.12 φαίνεται ξεκάθαρα ότι τα δύο πακέτα οδηγούνται προς το attracting LCS, ενώνονται μεταξύ τους και συνεχίζουν να βρίσκονται πάνω σε αυτό, δηλαδή πάνω στον surging ελκυστή, στην περιοχή ταχυτήτων 10 – 15 m/s.

Σημαντικό επίσης, είναι να προσέξουμε ότι τα LCS, σε αντίθεση με την περίπτωση του αρμονικού κύματος, μεταβάλλουν τη δομή τους καθώς το σύστημα εξελίσσεται στο χρόνο. Αυτό συμβαίνει και στις επόμενες περιπτώσεις διχρωματικού κύματος που μελετάμε.

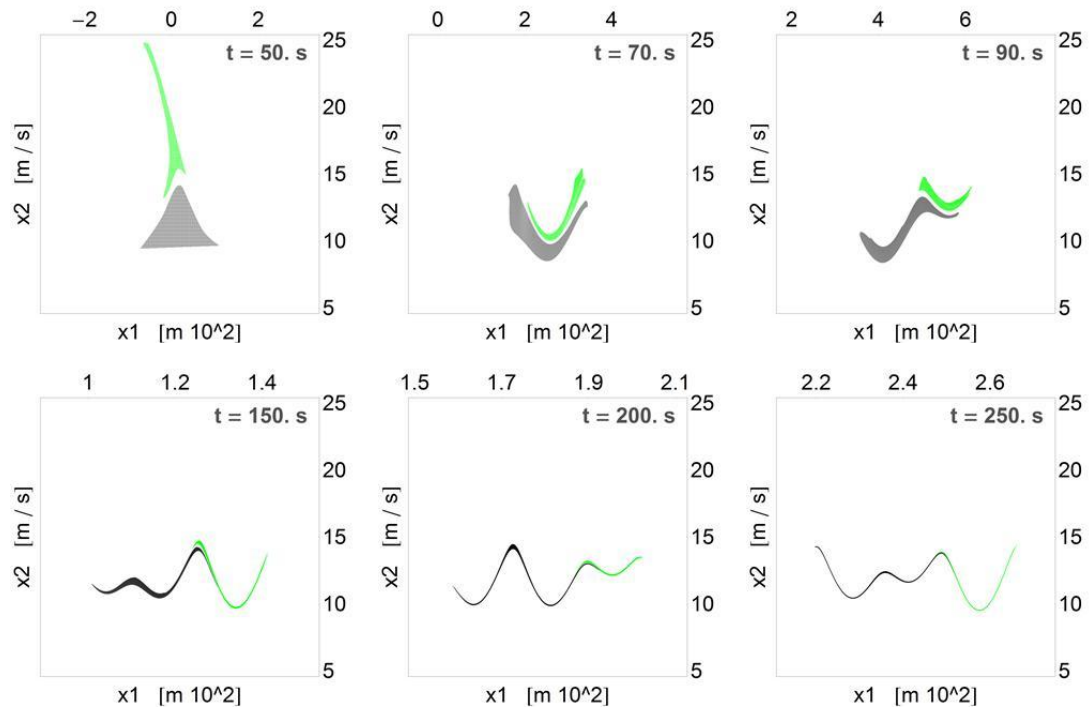
Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι για την περίπτωση του διχρωματικού κύματος $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 0.8, 0.65, 12, 50)$ έχουμε συνύπαρξη δύο δυναμικών καταστάσεων, surf-riding και surging, αναλόγως των αρχικών συνθηκών.



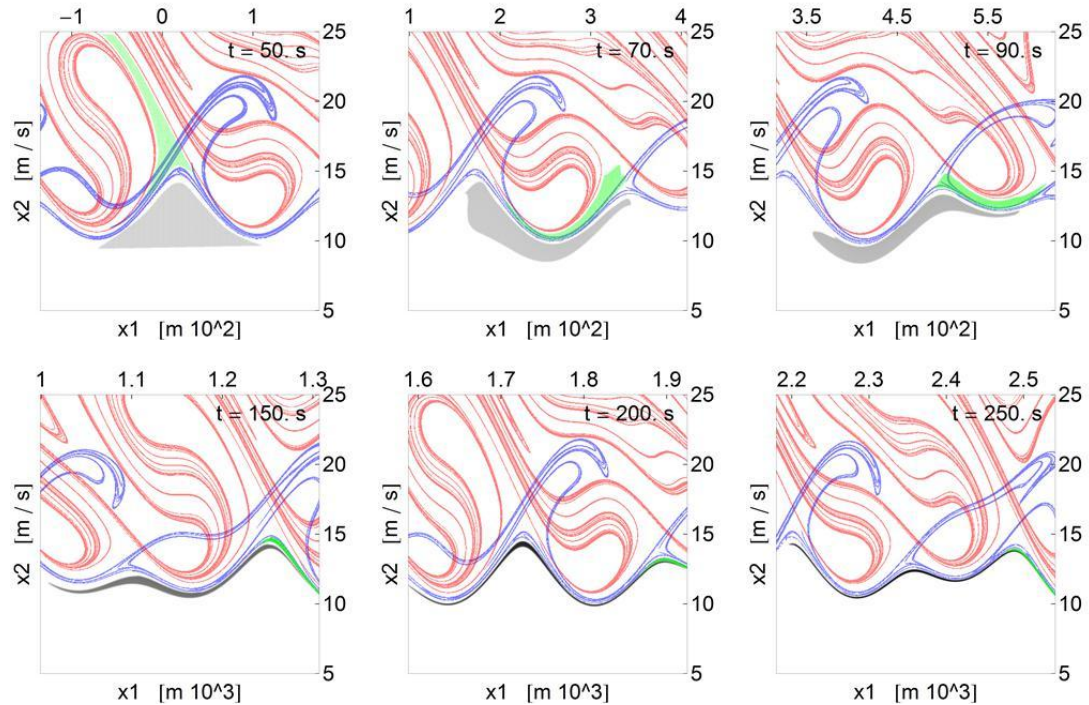
Σχήμα 5.9: Ολοκλήρωση περίπου 17,000 (μαύρο) και 12,600 (κόκκινο) αρχικών συνθηκών



Σχήμα 5.10: Η εξέλιξη των LCSs στο χρόνο σε συνδυασμό με την εξέλιξη ενός πακέτου 17,000 περίπου αρχικών συνθηκών



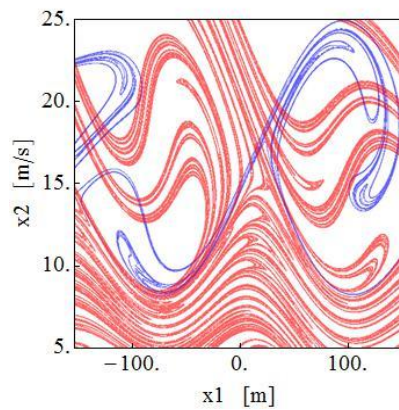
Σχήμα 5.11: Ολοκλήρωση περίπου 17,500 (μαύρο) και 13,200 (πράσινο) αρχικών συνθηκών



Σχήμα 5.12: Η εξέλιξη των LCSs στο χρόνο σε συνδυασμό με την εξέλιξη 17,500 (μαύρο) και 13,200 (πράσινο) αρχικών συνθηκών

Περίπτωση 2 (global surf-riding)

Για το μήκος και την οξύτητα της πρώτης συνιστώσας (κύμα αναφοράς) επιλέγονται οι τιμές $\lambda_1 = L$ και $s_1 = 0.04$ αντίστοιχα. Η δεύτερη συνιστώσα προσδιορίζεται μέσω των λόγων $\omega_2/\omega_1 = 0.8$ και $s_2/s_1 = 0.65$. Η ταχύτητα του πλοίου ρυθμίζεται στην τιμή $u_{nom} = 12 \text{ m/s}$. Για τον υπολογισμό του πεδίου FTLE διακριτοποιείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 50 \text{ s}$ ένα ορθογωνικό χωρίο $[-L, L]m_x [5, 25] m/s$ του φασικού επιπέδου $x_1 - x_2$ με τη βοήθεια πλέγματος 500×500 σημείων με κέντρο πλέγματος στο $x_{centre} = 0 * L$. Για τους χρόνους ολοκλήρωσης επιλέγονται οι τιμές $\tau = -240 \text{ s}$ (backward) και $\tau = 500 \text{ s}$ (forward FTLE field).

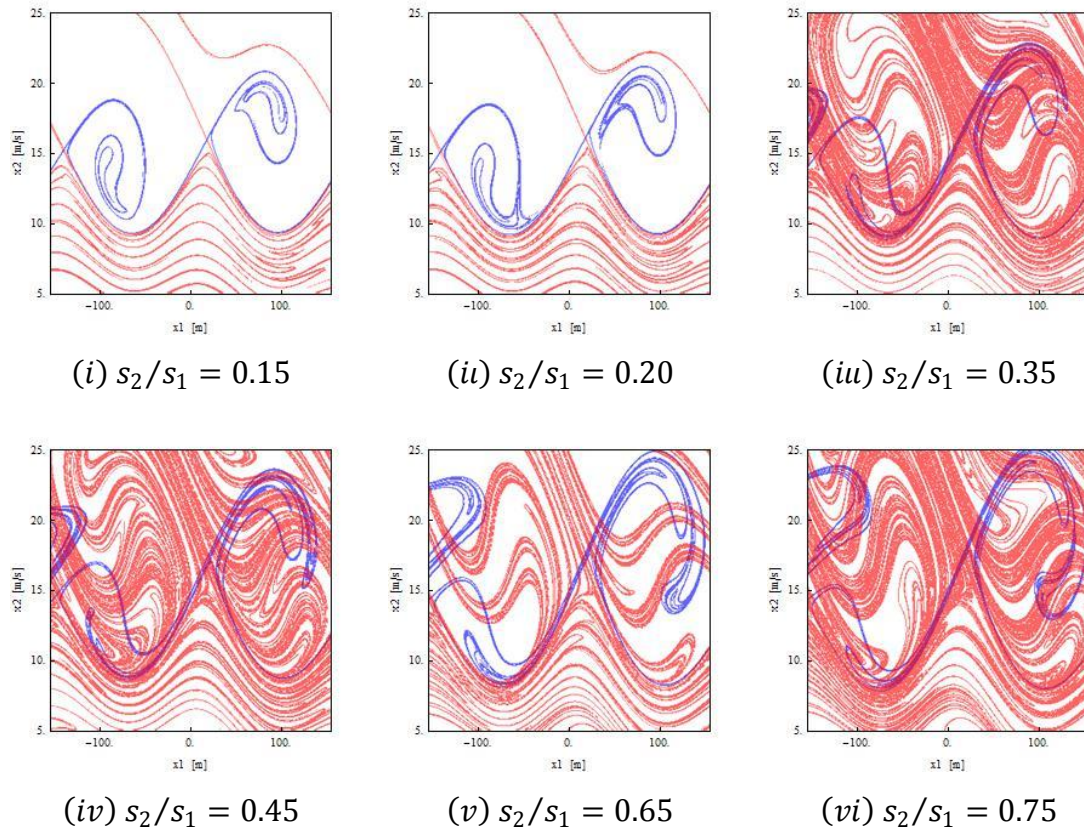


Σχήμα 5.13: Διχρωματικό κύμα. Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα). $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.04, 0.8, 0.65, 12, 50)$

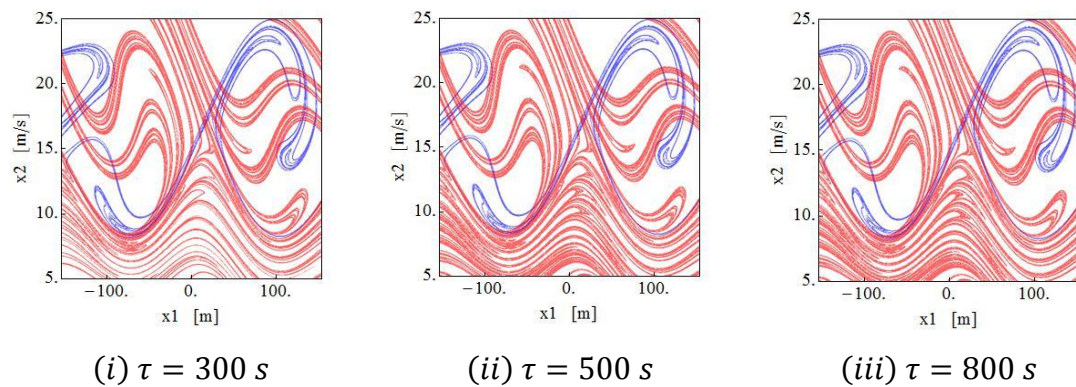
Στη συγκεκριμένη περίπτωση αυξήθηκε ο χρόνος για ολοκλήρωση του πεδίου μπροστά από $\tau = 300 \text{ s}$ σε $\tau = 500 \text{ s}$, ώστε να εμφανιστούν όλα τα LCSs. Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.15 αυξάνοντας το χρόνο εμφανίστηκαν νέα repelling LCSs κυρίως στην περιοχή χαμηλών ταχυτήτων.

Παρατηρούμε ότι τα repelling LCSs καλύπτουν σχεδόν όλο το φασικό χώρο παρουσιάζοντας συνεχείς αναδιπλώσεις, οι οποίες εμφανίζονται και στην περίπτωση των attracting LCSs. Οι αναδιπλώσεις αυτές οφείλονται σε ομοκλινικά/ετεροκλινικά γεγονότα. Συγκεκριμένα στο σχήμα 5.14 παρατηρούμε ότι μετά τις συγκρούσεις (μετά την περίπτωση ii) τα repelling LCSs καταλαμβάνουν όλο το χώρο φάσεων. Επιλέξαμε λοιπόν τη δυναμική μελέτη της περίπτωσης (v) καθώς υπάρχει διαθέσιμος χώρος για την τοποθέτηση σωματιδίων. Η έντονη παρουσία των repelling LCSs στις

χαμηλές ταχύτητες και η απουσία του surging ελκυστή οδηγεί στην υποψία ύπαρξης μόνο ενός ελκυστή, του surf-riding.



Σχήμα 5.14: Ο χώρος φάσεων για την περίπτωση του διχρωματικού κύματος $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.04, 0.8, s_2/s_1, 12, 50)$ για διάφορες τιμές του λόγου s_2/s_1

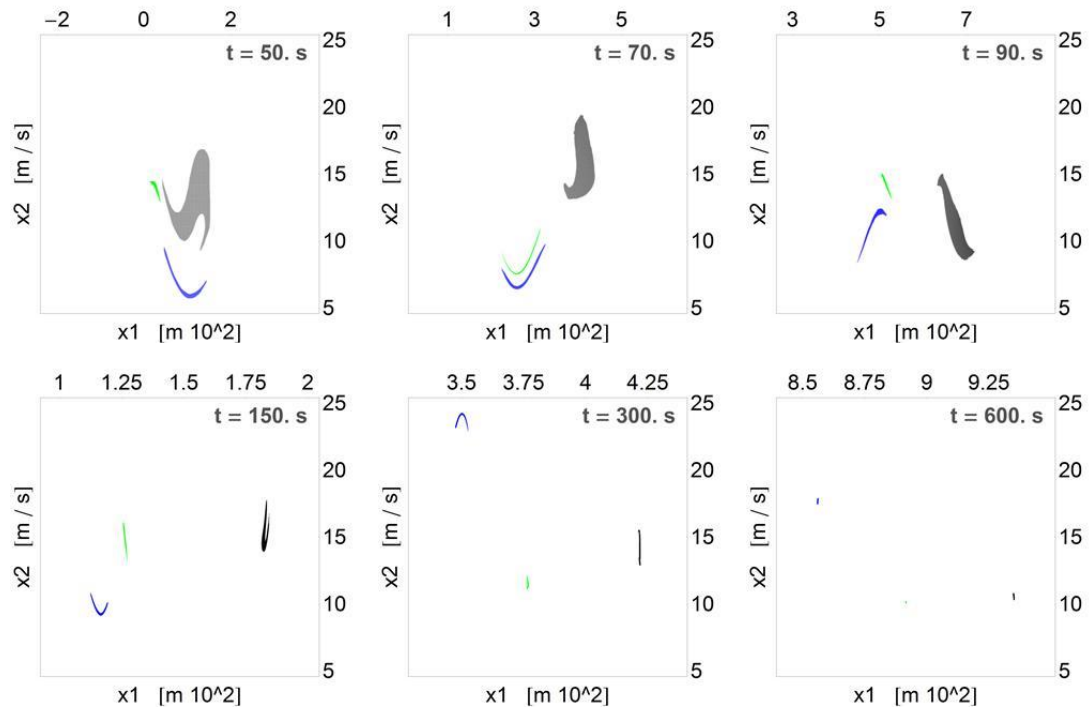


Σχήμα 5.15: Διχρωματικό κύμα. Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα). $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.04, 0.8, 0.65, 12, 50)$

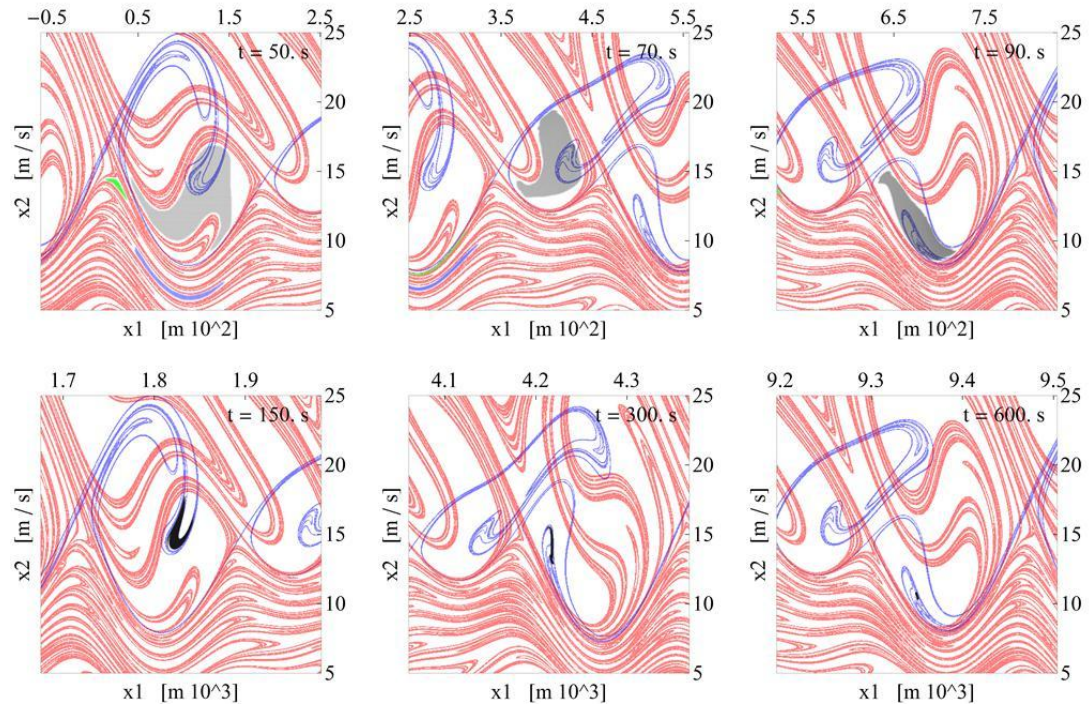
Θεωρούμε ένα σύνολο σωματιδίων / αρχικών συνθηκών τη χρονική στιγμή $t_0 = 50 \text{ s}$ των οποίων μελετάμε τη συμπεριφορά καθώς εξελίσσεται το σύστημα. Σκοπός μας τώρα είναι να διερευνήσουμε αν όντως το σύστημα μας έχει ένα μόνο ελκυστή, αυτόν του surf-riding. Επιλέγουμε περίπου 16,700 (μαύρο), 3,300 (πράσινο) και 1,300 (μπλε) αρχικών συνθηκών. Στο σχήμα 5.16 φαίνεται η εξέλιξη των σωματιδίων, τα οποία μακροπρόθεσμα καταλήγουν ως μεμονωμένα σημεία. Στο σχήμα 5.17 απεικονίζεται η εξέλιξη των τροχιών τους (με έμφαση στο ένα μόνο πακέτο σωματιδίων - μαύρο) μαζί με την εξέλιξη των LCSs σε διάφορα χρονικά στιγμιότυπα. Παρατηρούμε ότι το πακέτο σωματιδίων εγκλωβίζεται μέσα σε μία λεκάνη και οδηγείται πάνω στο attracting LCS (μπλε καμπύλη), όπου παραμένει πάνω σε αυτό και καταλήγει στην ευσταθή κατάσταση του surf-riding ως σημείο.

Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι η μεγάλη σε πλάτος έκταση στο χώρο φάσεων των attracting LCSs οδηγεί τα σωματίδια να αποκτούν οποιαδήποτε ταχύτητα αναλόγως σε ποιο από αυτά εγκλωβίζονται. Για παράδειγμα το μπλε πακέτο φαίνεται να κινείται σε ένα μεγάλο εύρος ταχυτήτων, από χαμηλές $6 - 12 \text{ m/s}$ στα πρώτα στιγμιότυπα μέχρι πολύ υψηλές $18 - 25 \text{ m/s}$ στα δύο τελευταία.

Τέλος, έγινε έλεγχος ύπαρξης πιθανής κατάστασης surging θεωρώντας 400 αρχικές συνθήκες, από τον οποίο έλεγχο δεν κατέστη δυνατή η αναγνώριση τέτοιας κατάστασης. Επομένως, στην περίπτωση του διχρωματικού κύματος με παραμέτρους $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.04, 0.8, 0.65, 12, 50)$ όλες οι αρχικές συνθήκες καταλήγουν σε κατάσταση surf-riding.



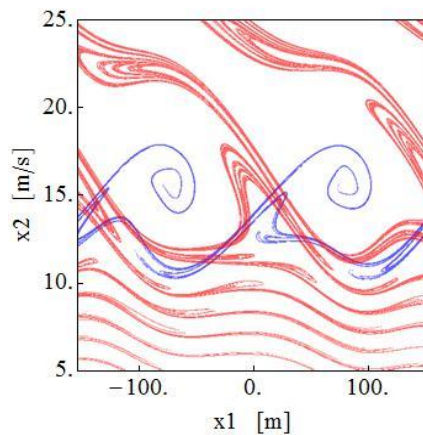
Σχήμα 5.16: Ολοκλήρωση περίπου 16,700 (μαύρο), 3,300 (πράσινο) και 1,300 (μπλε) αρχικών συνθηκών



Σχήμα 5.17: Η εξέλιξη των LCSs στο χρόνο σε συνδυασμό με την εξέλιξη 16,700 (μαύρο), 3,300 (πράσινο) και 1,700 (μπλε) περίπου αρχικών συνθηκών

Περίπτωση 3 (συνόπαρξη *surf-riding* και *surging*)

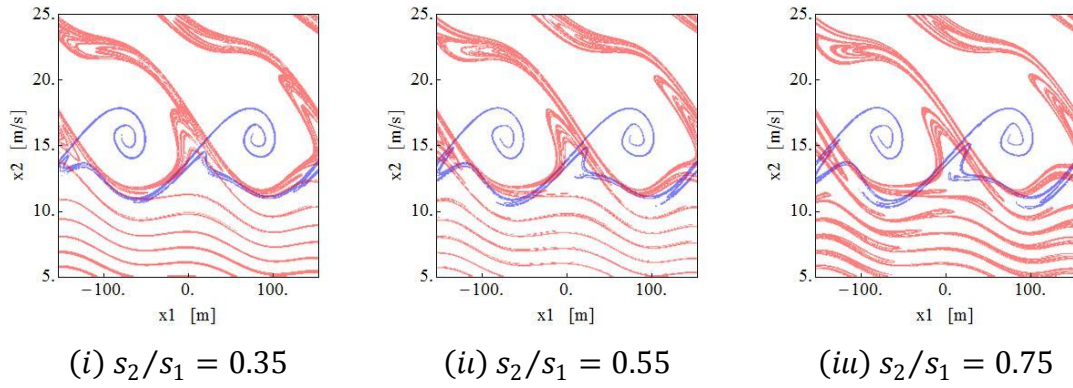
Για το μήκος και την οξύτητα της πρώτης συνιστώσας (κύμα αναφοράς) επιλέγονται οι τιμές $\lambda_1 = L$ και $s_1 = 0.02$ αντίστοιχα. Η δεύτερη συνιστώσα προσδιορίζεται μέσω των λόγων $\omega_2/\omega_1 = 1.3$ και $s_2/s_1 = 0.75$. Η ταχύτητα του πλοίου ρυθμίζεται στην τιμή $u_{nom} = 12 \text{ m/s}$. Για τον υπολογισμό του πεδίου FTLE διακρίτοποιείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 50 \text{ s}$ ένα ορθογωνικό χωρίο $[-L, L]m_x [5, 25] m/s$ του φασικού επιπέδου $x_1 - x_2$ με τη βοήθεια πλέγματος 500×500 σημείων με κέντρο πλέγματος στο $x_{centre} = 0 * L$. Για τους χρόνους ολοκλήρωσης επιλέγονται οι τιμές $\tau = -240 \text{ s}$ (backward) και $\tau = 300 \text{ s}$ (forward FTLE field). Ο αντίστοιχος χώρος φάσεων βρίσκεται στο σχήμα 5.18



Σχήμα 5.18: Διχρωματικό κύμα. Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα). $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 1.3, 0.75, 12, 50)$

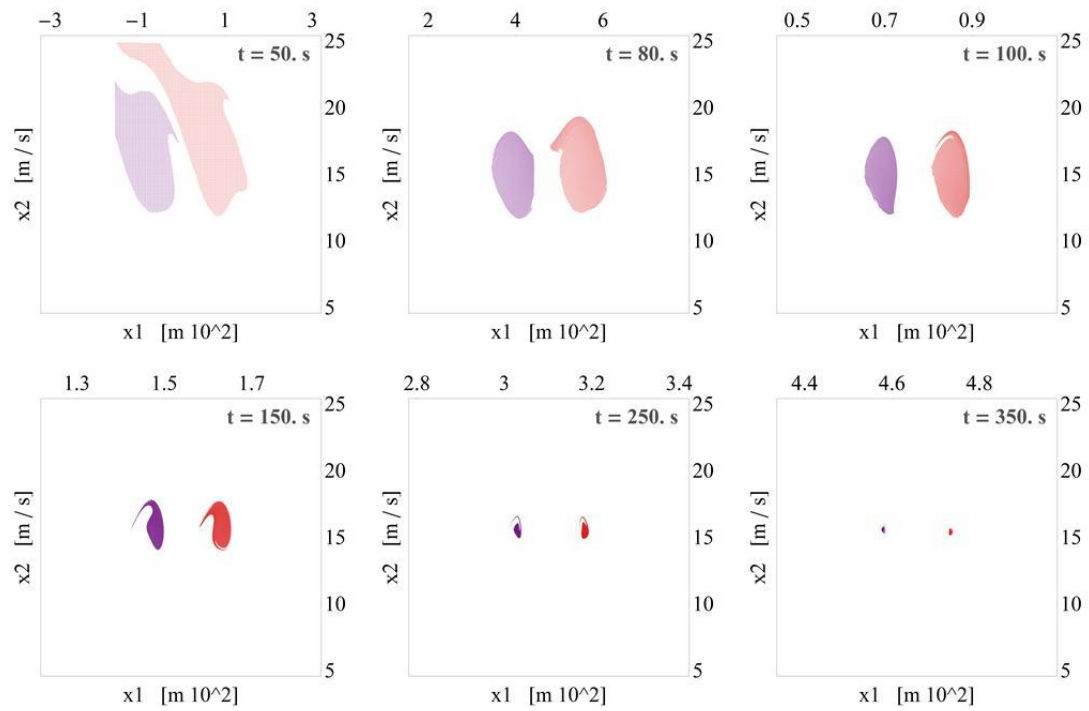
Παρατηρούμε ότι τα repelling LCSs εμφανίζουν αναδιπλώσεις, οι οποίες οφείλονται σε ετεροκλινικά γεγονότα, ενώ surging ελκυστής (attracting LCS) κάτω από τις λεκάνες ελκυσμού εμφανίζεται ως σημείο. Η παρουσία επομένως των attracting LCSs στην περιοχή χαμηλών ταχυτήτων οδηγεί στην υποψία κατά πόσο έχουν κυρίαρχο ρόλο στη φασική ροή έναντι του surging ελκυστή.

Στο σχήμα 5.19 παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται η τιμή του λόγου οξύτητας των κυμάτων γίνεται πιο έντονο το γεγονός ότι ο surging ελκυστής δεν εμφανίζεται πλέον ως συνεχής υλική γραμμή αλλά ως σημείο.

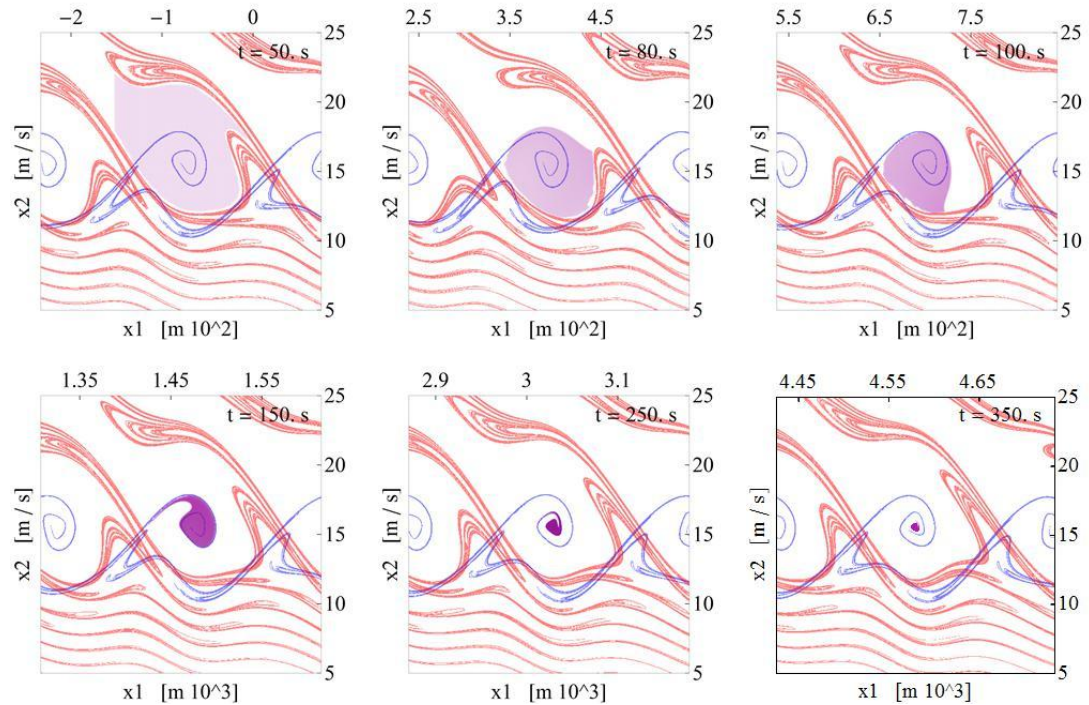


Σχήμα 5.19: Ο χώρος φάσεων για την περίπτωση του διχρωματικού κύματος $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 1.3, s_2/s_1, 12, 50)$ για διάφορες τιμές του λόγου s_2/s_1

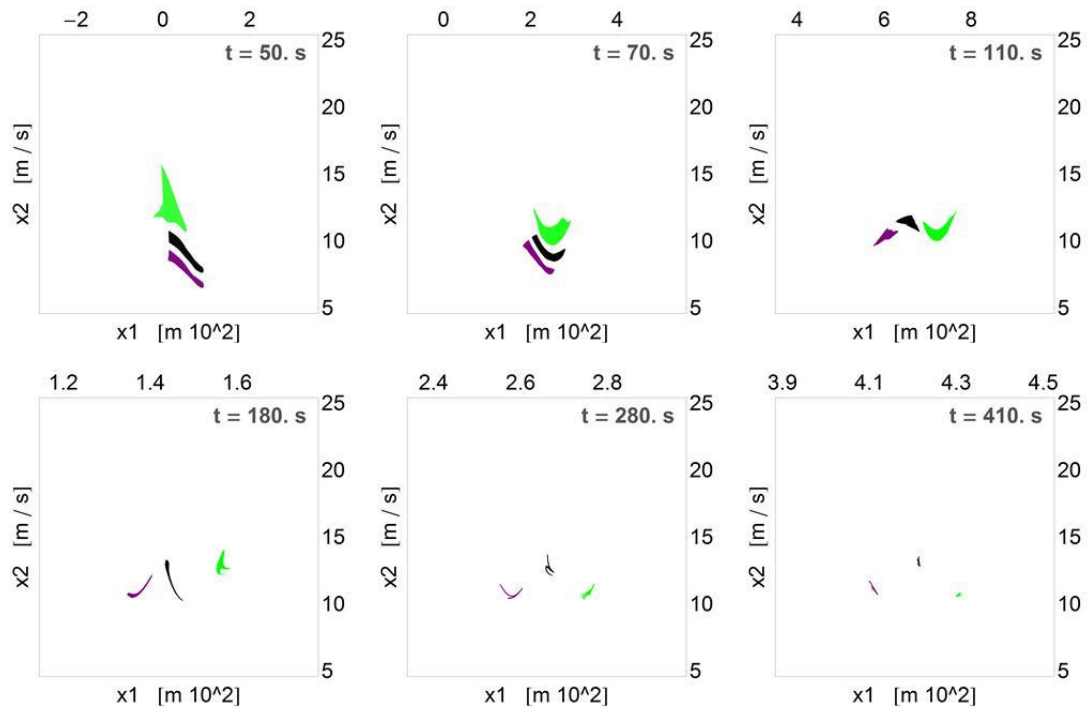
Θεωρούμε ένα σύνολο σωματιδίων / αρχικών συνθηκών τη χρονική στιγμή $t_0 = 50$ s. Αρχικά επιλέγουμε ένα σύνολο 26,000 (μωβ) και 30,000 (κόκκινο) αρχικών συνθηκών μέσα στις δύο λεκάνες ελκυσμού. Στο σχήμα 5.20 φαίνεται η εξέλιξη των σωματιδίων, όπου το κάθε πακέτο συγκλίνει και οδηγείται ως σημείο σε περιοχή ταχυτήτων περίπου 15 m/s. Στο σχήμα 5.21 απεικονίζεται η εξέλιξη των τροχιών του ενός μόνο πακέτου σωματιδίων (μαύρο) μαζί με την εξέλιξη των LCS σε διάφορα χρονικά στιγμιότυπα. Παρατηρούμε ότι το πακέτο σωματιδίων συγκεντρώνεται μέσα στη λεκάνη ελκυσμού και οδηγείται πάνω στο attracting LCS (μπλε καμπύλη) όπου παραμένοντας πάνω σε αυτό καταλήγει πράγματι ως σημείο στην ευσταθή κατάσταση του surf-riding.



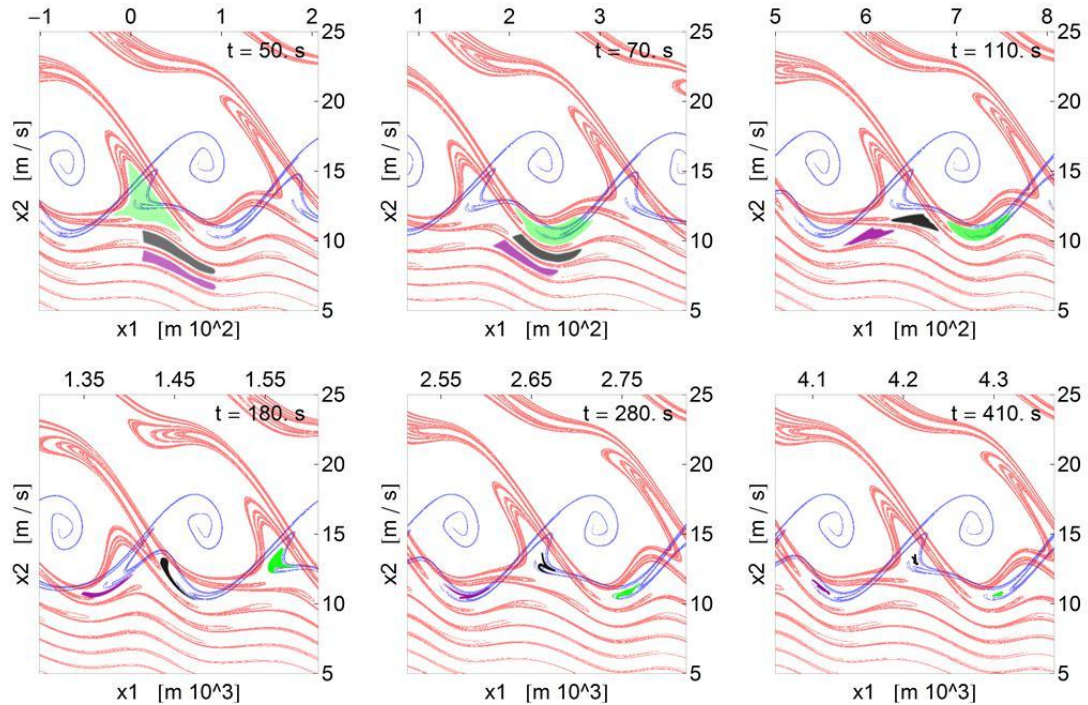
Σχήμα 5.20: Ολοκλήρωση περίπου 26,000 (μωβ) και 30,000 (κόκκινο) αρχικών συνθηκών



Σχήμα 5.21: Η εξέλιξη των LCS στο χρόνο σε συνδυασμό με την εξέλιξη ενός πακέτου 26,000 περίπου αρχικών συνθηκών



Σχήμα 5.22: Ολοκλήρωση περίπου 9,300 (πράσινο), 8,800 (μαύρο) και 7,800 (μοβ) αρχικών συνθηκών.



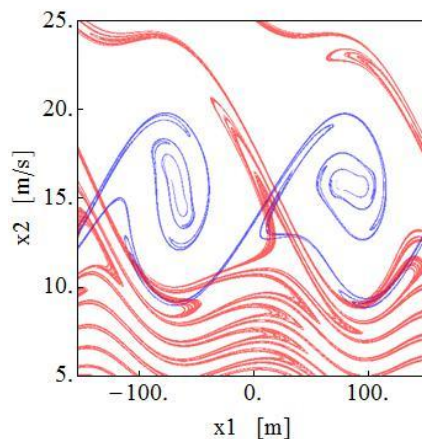
Σχήμα 5.23: Η εξέλιξη των LCS στο χρόνο σε συνδυασμό με περίπου 9,300 (πράσινο), 8,800 (μαύρο) και 7,800 (μοβ) αρχικών συνθηκών.

Στη συνέχεια επιλέγουμε ένα σύνολο από περίπου 9,300 (πράσινο), 8,800 (μαύρο) και 7,800 (μοβ) αρχικών συνθηκών και στο σχήμα 5.22 παρατηρούμε την εξέλιξή τους σε διάφορα στιγμιότυπα, όπου φαίνεται να καταλήγουν στον surging ελκυστή ως σημεία, όπως επιβεβαιώνεται και στο σχήμα 5.23 παρατηρώντας τις τροχιές των σωματιδίων μαζί με την εξέλιξη των LCSs. Τα σωματίδια καταλήγουν όλα στην περιοχή ταχυτήτων $12 - 15 \text{ m/s}$ πάνω στον surging ελκυστή, ο οποίος δεν εμφανίζεται πλέον ως συνεχής υλική γραμμή αλλά ως σημείο. Παρόλη την ύπαρξη των repelling LCSs στις χαμηλές ταχύτητες, αυτά δεν έχουν κυρίαρχο ρόλο στη φασική ροή.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι για την περίπτωση $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 1.3, 0.75, 12, 50)$ έχουμε συνύπαρξη δύο δυναμικών καταστάσεων, surf-riding και surging, αναλόγως των αρχικών συνθηκών.

Περίπτωση 4 (global surf-riding)

Για το μήκος και την οξύτητα της πρώτης συνιστώσας (κύμα αναφοράς) επιλέγονται οι τιμές $\lambda_1 = L$ και $s_1 = 0.04$ αντίστοιχα. Η δεύτερη συνιστώσα προσδιορίζεται μέσω των λόγων $\omega_2/\omega_1 = 1.3$ και $s_2/s_1 = 0.75$. Η ταχύτητα του πλοίου ρυθμίζεται στην τιμή $u_{nom} = 12 \text{ m/s}$. Για τον υπολογισμό του πεδίου FTLE διακρίτοποιείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 50 \text{ s}$ ένα ορθογωνικό χωρίο $[-L, L] \times [5, 25] \text{ m/s}$ του φασικού επιπέδου $x_1 - x_2$ με τη βοήθεια πλέγματος 500×500 σημείων με κέντρο πλέγματος στο $x_{centre} = 0 * L$. Για τους χρόνους ολοκλήρωσης επιλέγονται οι τιμές $\tau = -240 \text{ s}$ (backward) και $\tau = 300 \text{ s}$ (forward FTLE field). (σχήμα 5.24)



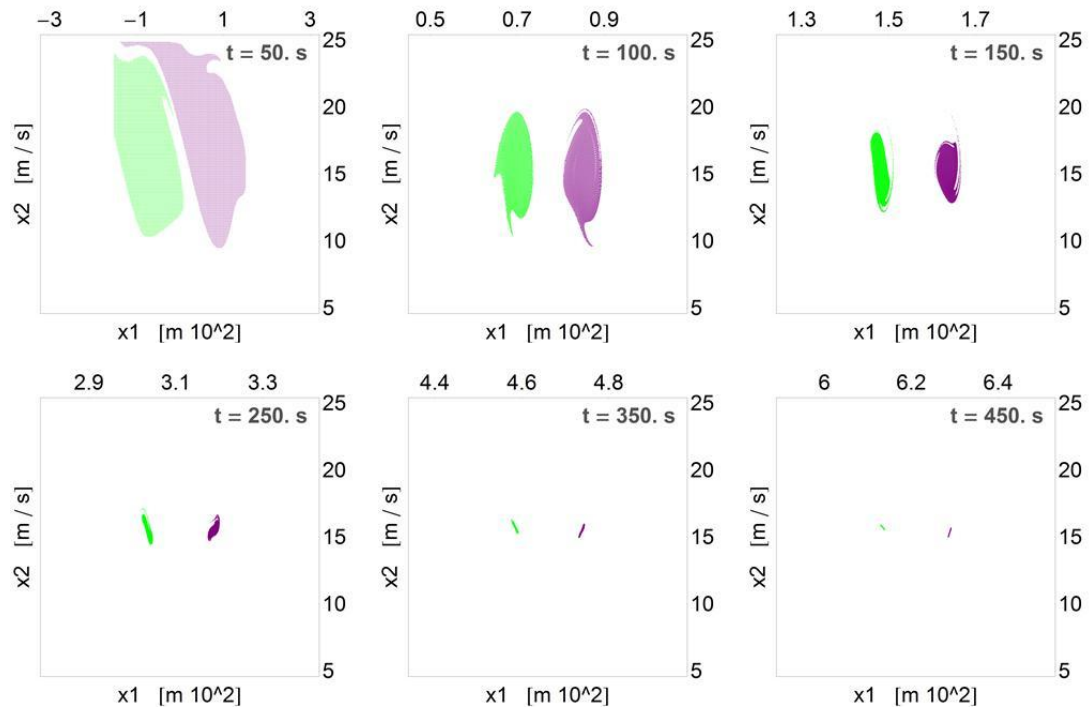
Σχήμα 5.24.: *Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα Διχρωματικό κύμα. $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.04, 1.3, 0.75, 12, 50)$)*

Παρατηρούμε ότι τα repelling LCSs εμφανίζουν αναδιπλώσεις, οι οποίες οφείλονται σε ετεροκλινικά γεγονότα. Η έντονη παρουσία των repelling LCSs στις χαμηλές ταχύτητες και η απουσία του surging ελκυστή οδηγεί στην υποψία ύπαρξης μόνο ενός ελκυστή, του surf-riding.

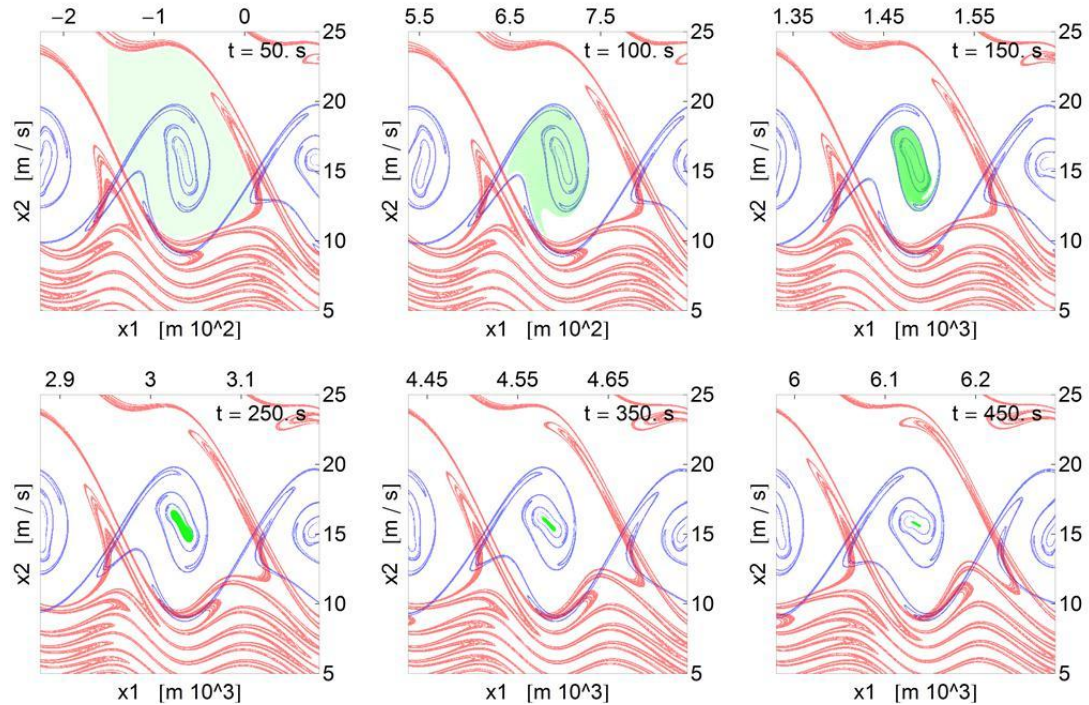
Θεωρούμε ένα σύνολο σωματιδίων / αρχικών συνθηκών τη χρονική στιγμή $t_0 = 50$ s. Συγκεκριμένα επιλέγουμε ένα σύνολο από περίπου 22,000 (πράσινο) και 21,800 (μοβ) αρχικών συνθηκών μέσα στην κάθε λεκάνη ελκυσμού. Στο σχήμα 5.25 φαίνεται η εξέλιξη των σωματιδίων, όπου το κάθε πακέτο φαίνεται να οδηγείται σταδιακά στον ελκυστή surf-riding. Στο σχήμα 5.26 δίνοντας έμφαση στο ένα μόνο πακέτο σωματιδίων (πράσινο) μαζί με την εξέλιξη των LCS σε διάφορα χρονικά στιγμιότυπα. Παρατηρούμε ότι το πακέτο σωματιδίων συγκλίνει και οδηγείται πάνω στο attracting LCS (μπλε καμπύλη) καταλήγοντας ως σημείο στην κατάσταση του surf-riding.

Επιλέγουμε ένα σύνολο περίπου 6,400 (πράσινο), 6,300 (γκρι), 6,300 (μοβ) και 6,400 (μαύρο) αρχικών συνθηκών Στο σχήμα 5.27 στα τρία πρώτα χρονικά στιγμιότυπα βλέπουμε τα σωματίδια να συγκλίνουν μεταξύ τους δείχνοντας ότι θα ακολουθήσουν κοινή πορεία εκτελώντας surging, ενώ παραμένουν σε χαμηλές ταχύτητες 8 – 12 m/s. Στα αμέσως επόμενα όμως στιγμιότυπα το καθένα οδηγείται σε διαφορετική θέση στο χώρο φάσεων και όλα σε μεγαλύτερη ταχύτητα αυτή των 15 m/s οδηγώντας μας στην υποψία ότι καταλήγουν στην κατάσταση surf-riding. Πράγματι στο σχήμα 5.28 όπου απεικονίζονται μαζί με την εξέλιξη των LCS στο χρόνο βλέπουμε ότι όλα έλκονται από τον surf-riding ελκυστή (attracting LCS).

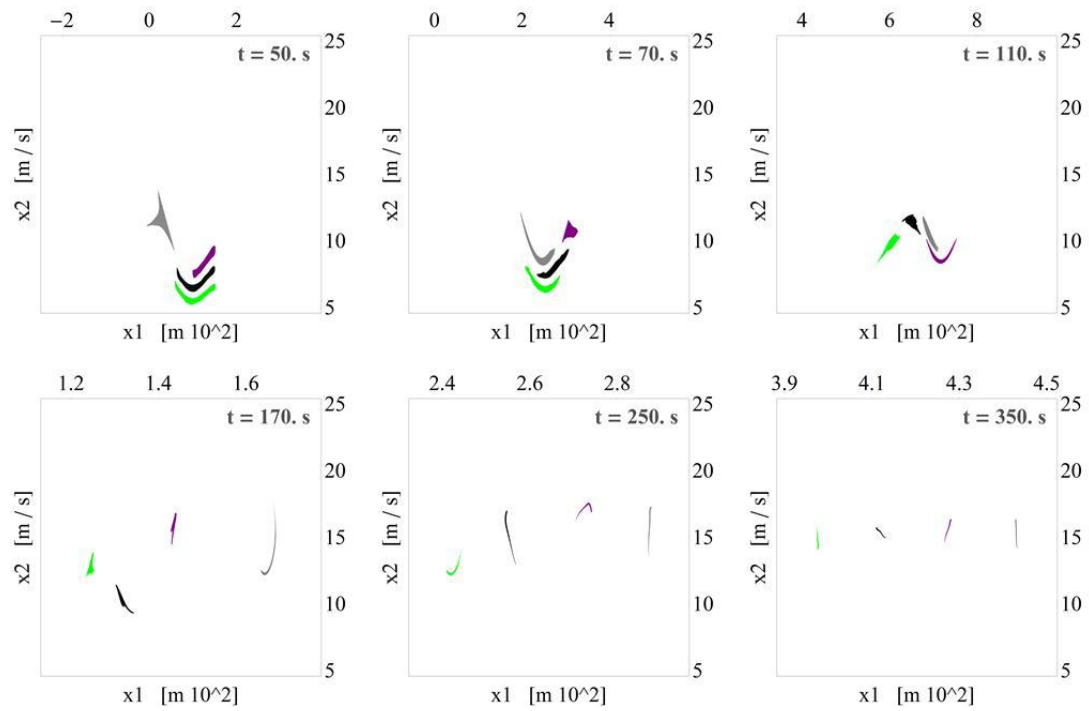
Τέλος, έγινε έλεγχος ύπαρξης πιθανής κατάστασης surging θεωρώντας 900 αρχικές συνθήκες, από τον οποίο έλεγχος δεν κατέστη δυνατή η αναγνώριση τέτοιας απόκρισης. Επομένως, στην περίπτωση διχρωματικού κύματος με παραμέτρους $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.04, 1.3, 0.75, 12, 50)$ όλες οι αρχικές συνθήκες καταλήγουν σε κατάσταση surf-riding.



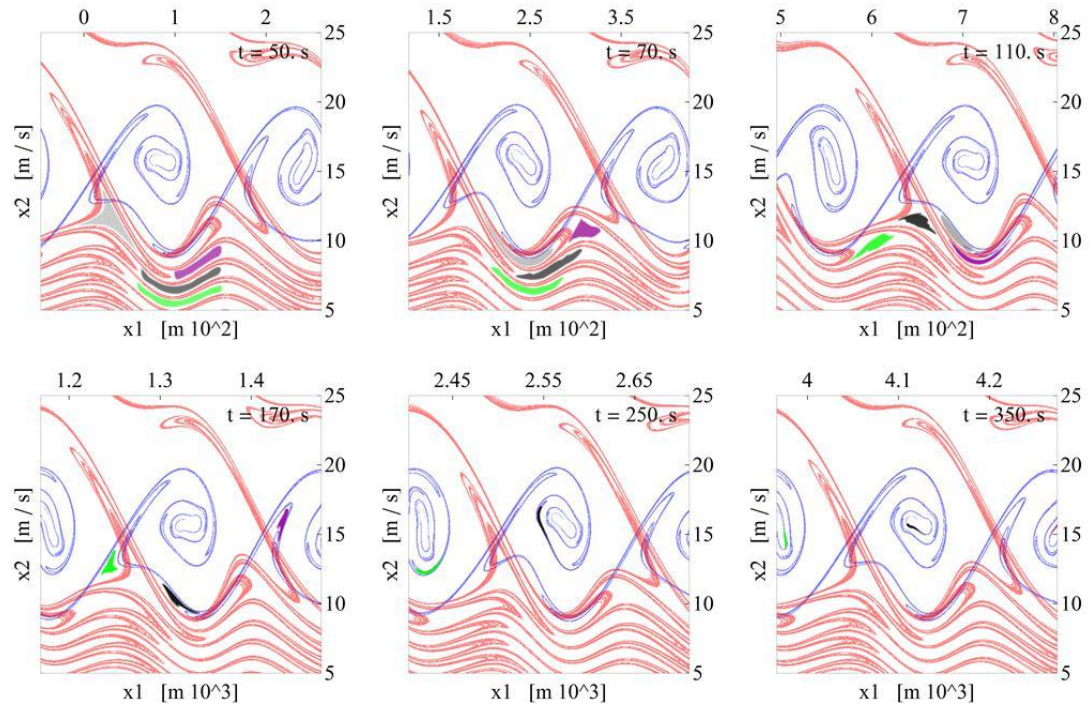
Σχήμα 5.25: Ολοκλήρωση περίπου 22,000 (πράσινο) και 21,800 (μωβ) αρχικών συνθηκών.



Σχήμα 5.26: Η εξέλιξη των LCS στο χρόνο σε συνδυασμό με την εξέλιξη περίπου 22,000 αρχικών συνθηκών



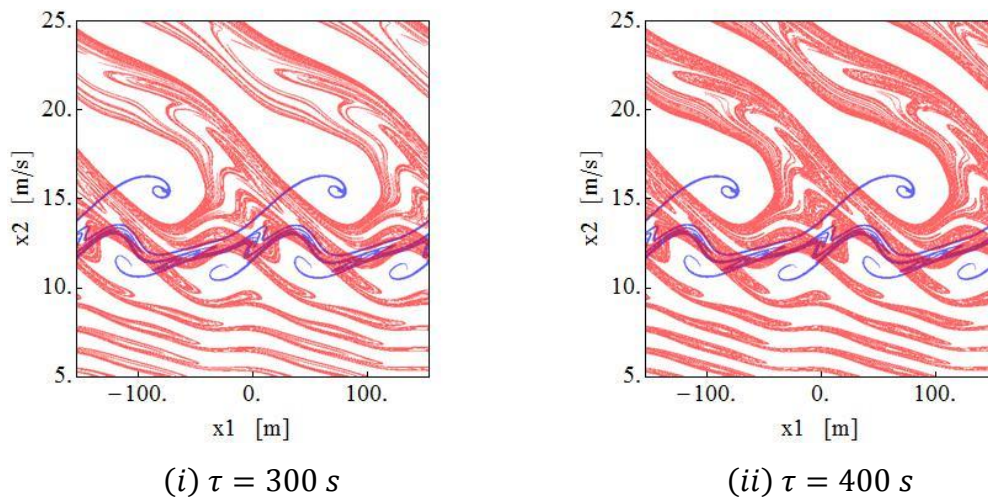
Σχήμα 5.27: Ολοκλήρωση περίπου 6,400 (πράσινο), 6,300 (γκρι), 6,300 (μοβ) και 6,400 (μαύρο) αρχικών συνθηκών.



Σχήμα 5.28: Η εξέλιξη των LCS σε συνδυασμό με την εξέλιξη περίπου 6,400 (πράσινο), 6,300 (γκρι), 6,300 (μοβ) και 6,400 (μαύρο) αρχικών συνθηκών.

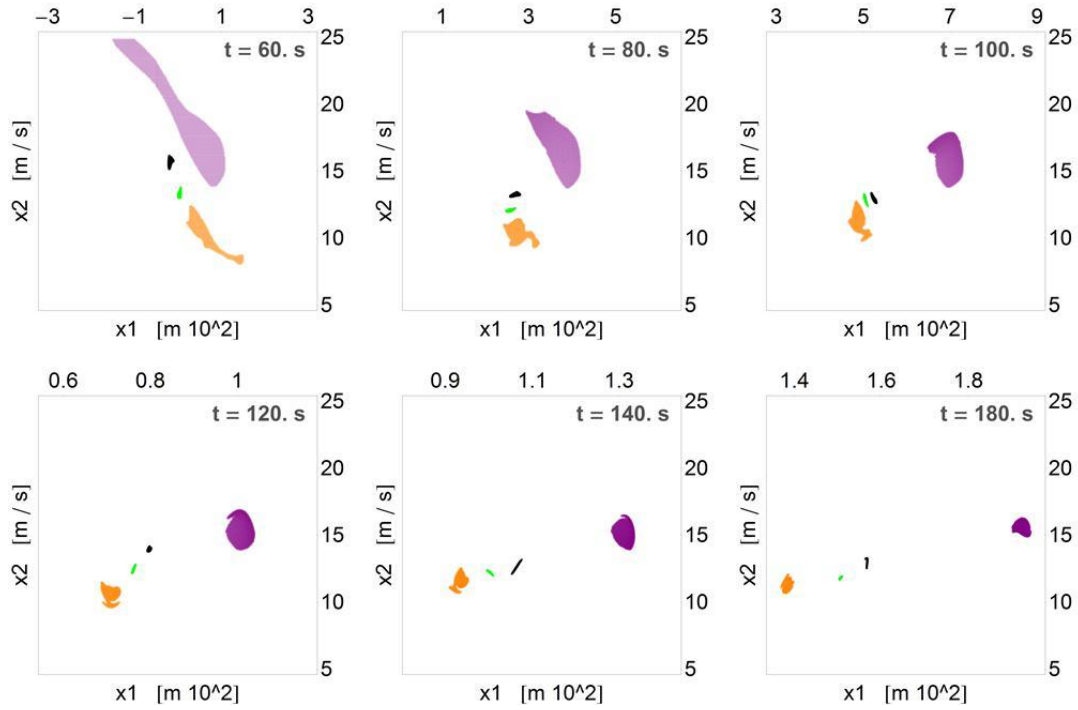
Περίπτωση 5 (συνόπαρξη surf-riding και surging)

Για το μήκος και την οξύτητα της πρώτης συνιστώσας (κύμα αναφοράς) επιλέγονται οι τιμές $\lambda_1 = L$ και $s_1 = 0.01$ αντίστοιχα. Η δεύτερη συνιστώσα προσδιορίζεται μέσω των λόγων $\omega_2/\omega_1 = 1.4$ και $s_2/s_1 = 1.5$. Η ταχύτητα του πλοίου ρυθμίζεται στην τιμή $u_{nom} = 12 \text{ m/s}$. Για τον υπολογισμό του πεδίου FTLE διακριτοποιείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 60 \text{ s}$ ένα ορθογωνικό χωρίο $[-L, L]m_x[5, 25] \text{ m/s}$ του φασικού επιπέδου $x_1 - x_2$ με τη βοήθεια πλέγματος 500×500 σημείων με κέντρο πλέγματος στο $x_{centre} = 0 * L$. Για τους χρόνους ολοκλήρωσης επιλέγονται οι τιμές $\tau = -240 \text{ s}$ (backward) και $\tau = 400 \text{ s}$ (forward FTLE field). Ο χώρος φάσεων για αυτήν την περίπτωση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αυξήθηκε ο χρόνος για ολοκλήρωση του πεδίου μπροστά από $\tau = 300 \text{ s}$ σε $\tau = 400 \text{ s}$, ώστε να εμφανιστούν όλα repelling LCSs, τα οποία παρουσιάζουν συνεχείς αναδιπλώσεις λόγω των ετεροκλιτικών γεγονότων.

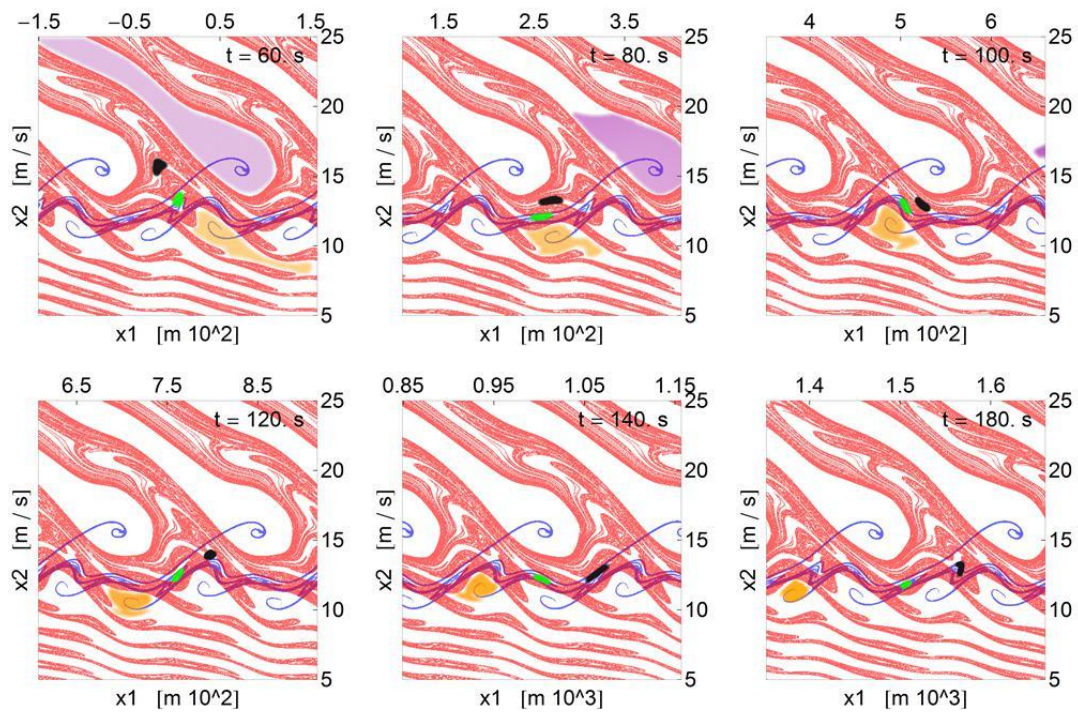


Σχήμα 5.29: Attracting και repelling LCS (μπλε και κόκκινες καμπύλες αντίστοιχα Διχρωματικό κύμα. $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.01, 1.5, 1.4, 12, 60)$

Αξιοσημείωτο αποτελεί το γεγονός ότι εμφανίζονται δύο surf-riding ελκυστές, ένας σε ταχύτητα 15 m/s και ο άλλος σε ταχύτητα 12 m/s . Επίσης, ανάμεσα υπάρχει ένας ελκυστής surging. Από την ολοκλήρωση των αρχικών συνθηκών και τη συνδυασμένη απεικόνιση αυτών με την εξέλιξη του πεδίου FTLE στο χρόνο (σχήματα 5.30 και 5.31) παρατηρούμε ότι πράγματι τα μοβ και πορτοκαλί πακέτα σωματιδίων οδηγούνται σταδιακά στην κατάσταση surf-riding, ενώ τα ενδιάμεσα, μαύρο και πράσινο πακέτο σωματιδίων, οδηγούνται στον surging ελκυστή.



Σχήμα 5.30: Ολοκλήρωση περίπου 4,800 (μωβ), 2,000 (πορτοκαλί), 1300 (μαύρο) και 1,100 (πράσινο) αρχικών συνθηκών



Σχήμα 5.31: Η εξέλιξη των LCSs στο χρόνο σε συνδυασμό με την εξέλιξη 4,800 (μωβ), 2,000 (πορτοκαλί), 1300 (μαύρο) και 1,100 (πράσινο) αρχικών συνθηκών

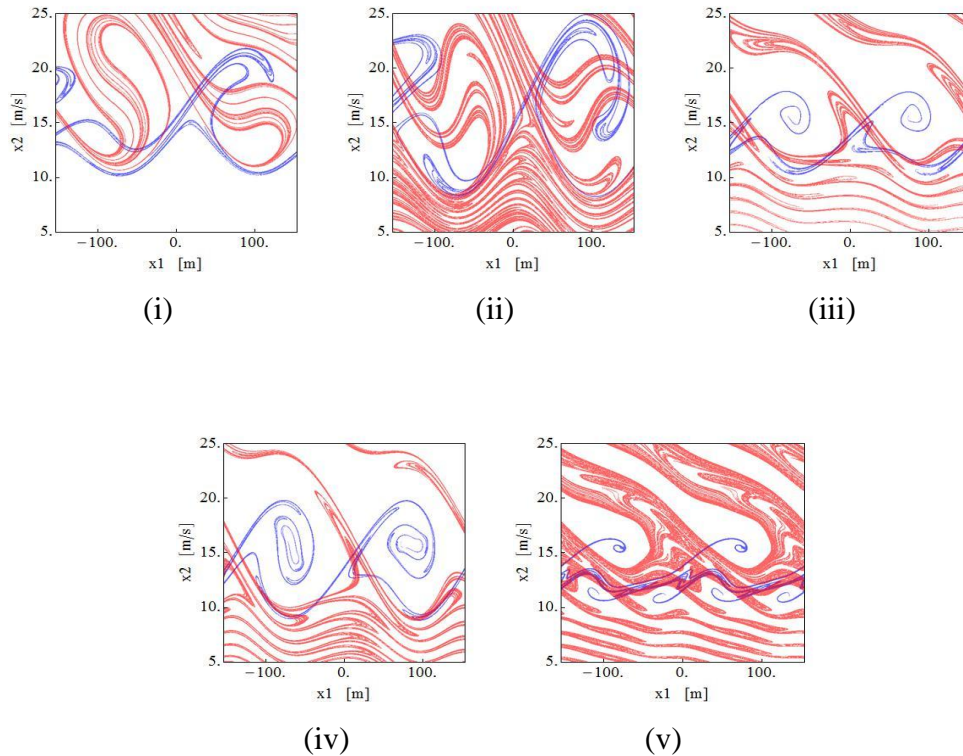
Συγκεντρωτικά

Πίνακας 5.1: Παράμετροι των υπό μελέτη διχρωματικών περιπτώσεων

σχήμα	$\lambda_1 = L$	s_1	s_2/s_1	ω_2/ω_1	u_{nom}	t_0	τ^-	τ^+	συμπεριφορά
5.32(i)	154	0.02	0.65	0.8	12	50	-240	300	Surging και surf-riding
5.32(ii)	154	0.04	0.65	0.8	12	50	-240	500	Global surf-riding
5.32(iii)	154	0.02	0.75	1.3	12	50	-240	300	Surging και surf-riding
5.32(iv)	154	0.04	0.75	1.3	12	50	-240	300	Global surf-riding
5.32(v)	154	0.01	1.5	1.4	12	60	-240	400	Surging και surf-riding

Για τις (ii) και (iv) περιπτώσεις έγινε έλεγχος ύπαρξης πιθανής κατάστασης surging θεωρώντας 400 και 900 αντίστοιχα αρχικές συνθήκες, από τον οποίο έλεγχο δεν κατέστη δυνατή η αναγνώριση τέτοιας συμπεριφοράς

Στην περίπτωση (v) εμφανίζονται δύο καταστάσεις surf-riding.



Σχήμα 5.32: Χώρος φάσεων των υπό μελέτη διχρωματικών περιπτώσεων

5.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ CLUSTERING

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο clustering για τις περιπτώσεις με το αρμονικό κύμα $(\lambda, s, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 12, 50)$ και τα διχρωματικά κύματα $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 0.8, 0.65, 12, 50)$ και $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 1.3, 0.75, 12, 50)$, των οποίων η δυναμική συμπεριφορά μελετήθηκε προηγουμένως με χρήση της μεθόδου FTLE. Στις τρεις αυτές περιπτώσεις συνυπάρχουν και οι δύο δυναμικές καταστάσεις (surf-riding και surging). Άρα επιλέγουμε $k = 2$ τον αριθμό των ομάδων.

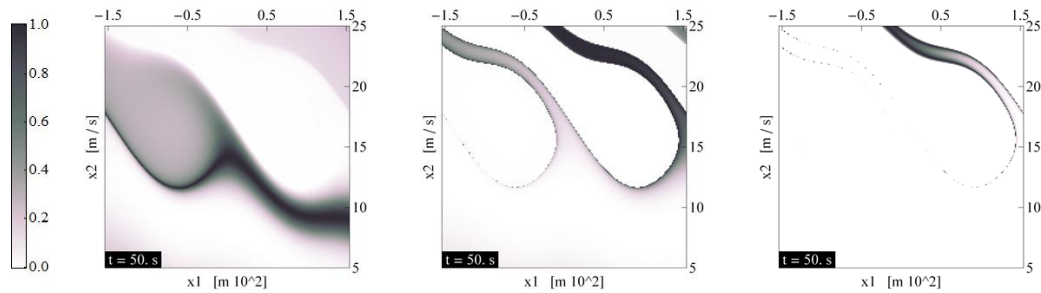
Για κάθε παραπάνω περίπτωση διακριτοποιείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 50$ s ένα ορθογωνικό χωρίο $[-L, L], [u_1, u_2]$ (όπου $u_1 = 5$ m/s και $u_2 = 25$ m/s) του φασικού επιπέδου $x_1 - x_2$ με τη βοήθεια πλέγματος 300×300 σημείων για το αρμονικό και 500×500 σημείων για τα διχρωματικά με κέντρο πλέγματος στο $x_{centre} = 0 * L$.

Ύστερα από διεξοδική διερεύνηση επιλέγονται για το αρμονικό κύμα 35 δείγματα με το καθένα να απέχει περίοδο 20s και για τα δύο διχρωματικά κύματα επιλέγονται 40 δείγματα με απόσταση ομοίως 20s, ενώ σε όλα επιλέγουμε το δείκτη ασάφειας $m = 1.1$ για hard clustering απεικόνιση. Η ομαδοποίηση γίνεται ως εξής. Τροχιές που ακολουθούν τη surf-riding συμπεριφορά τοποθετούνται στην ίδια ομάδα και εμφανίζονται με μαύρο (σχήματα 5.35(i), 5.36(i), 5.37(i)).

Επιπλέον, η μηδενική τιμή για την εντροπία (σχήματα 5.35(ii), 5.36(ii), 5.37(ii)) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ομαδοποίηση των τροχιών σε κάθε ομάδα είναι πετυχημένη. Παράδειγμα μη πετυχημένης ομαδοποίησης αποτελούν τα σχήματα 5.33 για το αρμονικό κύμα $(\lambda, s, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 12, 50)$ και 5.34 για το διχρωματικό $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 0.8, 0.65, 12, 50)$, στα οποία απεικονίζεται η εντροπία ενδεικτικά για κάποιες τιμές παραμέτρων σε πλέγμα 200×200 σημείων.

Τέλος, έγινε ο υπολογισμός του λόγου των τροχιών που οδηγούνται σε surf-riding (ή surging) προς το συνολικό αριθμό τροχιών της δειγματοληψίας. Έστω I_1 οι τροχιές με πιθανότητα ένταξης άνω του 0.98, δηλαδή οι τροχιές που αντιστοιχούν στη surf-riding συμπεριφορά, και I_2 οι τροχιές με πιθανότητα ένταξης κάτω από 0.02, δηλαδή οι τροχιές που αντιστοιχούν στη surging συμπεριφορά για άνω του 0.98. Το άθροισμα αυτών των δύο δείχνει πόσες τροχιές από τις αρχικά επιλεγμένες για τη

δειγματοληψία έχουν ομαδοποιηθεί σύμφωνα με το κριτήριο που τέθηκε. Τα αποτελέσματα βρίσκονται στον πίνακα 5.2. Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις περισσότερο από 90% του συνολικού αριθμού των τροχιών που έχουν συμπεριληφθεί στη δειγματοληψία έχουν ομαδοποιηθεί είτε στην κατάσταση surf-riding είτε στην κατάσταση surging. Ενώ ο λόγος του surf-riding προς το συνολικό αριθμό δειγματοληψιών είναι περίπου 1 προς 2, με λίγο λιγότερο (0.44) για τη περίπτωση του σχήματος 5.36(ii), λογικό αφού στο χώρο φάσεων βλέπουμε ότι περισσότερο χώρο καταλαμβάνει η surging περιοχή.



(i)

δείγματα 40,

$T = 2s, m = 1.5$

(ii)

δείγματα 80,

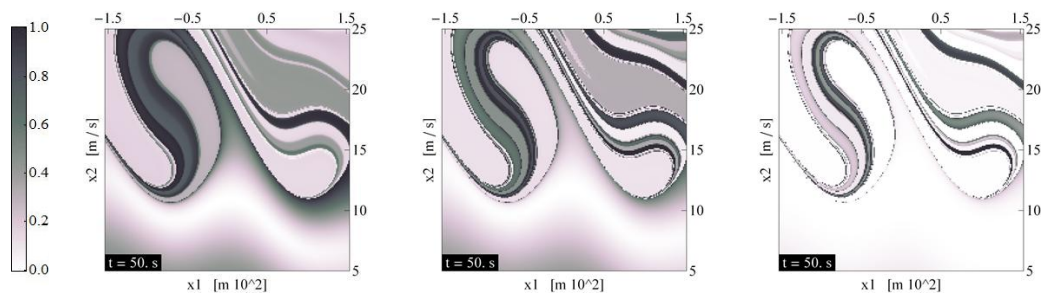
$T = 5s, m = 1.5$

(iii)

δείγματα 80,

$T = 5s, m = 1.1$

Σχήμα 5.33: Διερεύνηση για την εντροπία για το αρμονικό κύμα $(\lambda, s, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 12, 50)$.



(i)

δείγματα 40,

$T = 5s, m = 2$

(ii)

δείγματα 60,

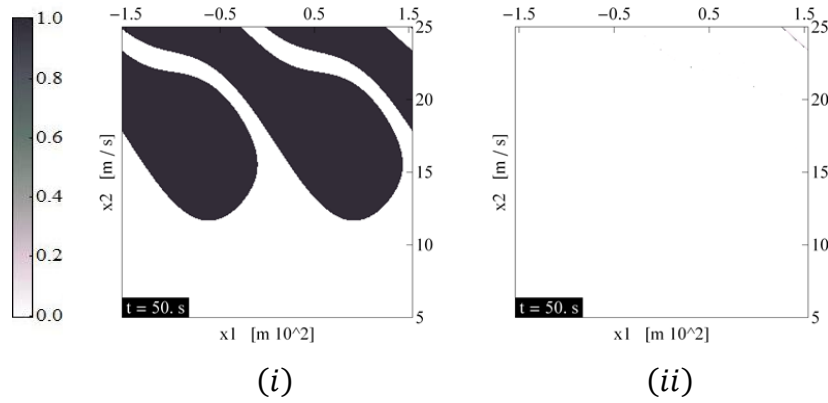
$T = 5s, m = 2$

(iii)

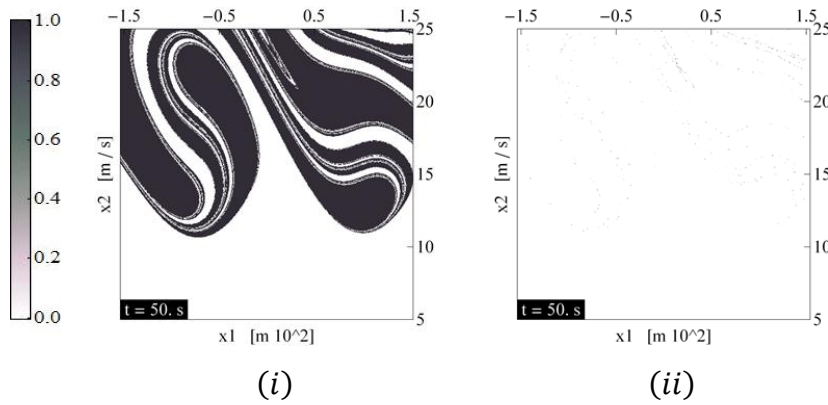
δείγματα 60,

$T = 5s, m = 1.5$

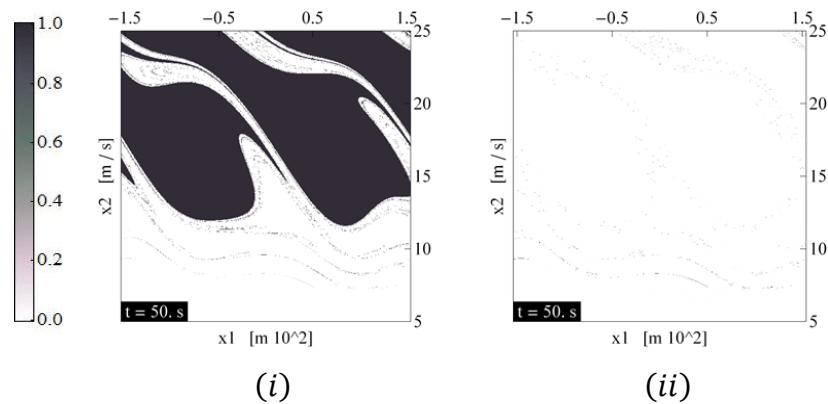
Σχήμα 5.34: Διερεύνηση για την εντροπία για το διχρωματικό κύμα $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}) = (L, 0.02, 0.8, 0.65, 12)$.



Σχήμα 5.35: Αρμονικό κύμα $(\lambda, s, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 12, 50)$. Με μαύρο απεικονίζεται στο (i) η surf-riding συμπεριφορά. Στο (ii) απεικονίζεται η εντροπία. Οι παράμετροι που θέσαμε είναι $T=20s$, δείγματα 35, $m=1.1$



Σχήμα 5.36: Διχρωματικό κύμα $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}) = (L, 0.02, 0.8, 0.65, 12)$. Με μαύρο απεικονίζεται στο (i) η surf-riding συμπεριφορά. Στο (ii) απεικονίζεται η εντροπία. Οι παράμετροι που θέσαμε είναι $T=20s$, δείγματα 40, $m=1.1$



Σχήμα 5.37: Διχρωματικό κύμα $(\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}) = (L, 0.02, 1.3, 0.75, 12)$. Με μαύρο απεικονίζεται στο (i) η surf-riding συμπεριφορά. Στο (ii) απεικονίζεται η εντροπία. Οι παράμετροι που θέσαμε είναι $T=20s$, δείγματα 40, $m=1.1$

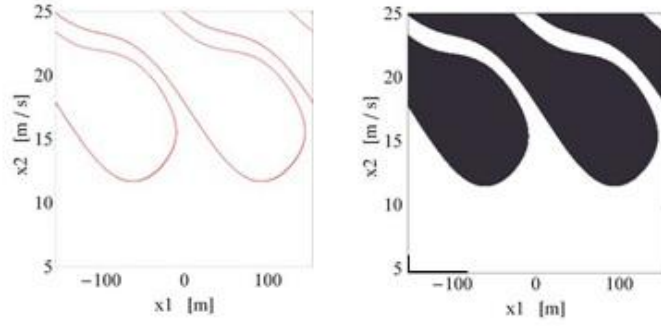
Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα υπολογισμού του λόγου των τροχιών που οδηγούνται σε *surf-riding* (ή *surging*) προς το συνολικό αριθμό τροχιών της δειγματοληψίας

σχήμα	$I_1/total$	$I_2/total$	$I_1 + I_2$	$total$
Αρμονικό κύμα Σχήμα 5.35	0.49	0.51	89961	90000
Διχρωματικό κύμα Σχήμα 5.36	0.44	0.56	249595	250000
Διχρωματικό κύμα Σχήμα 5.37	0.49	0.50	249400	250000

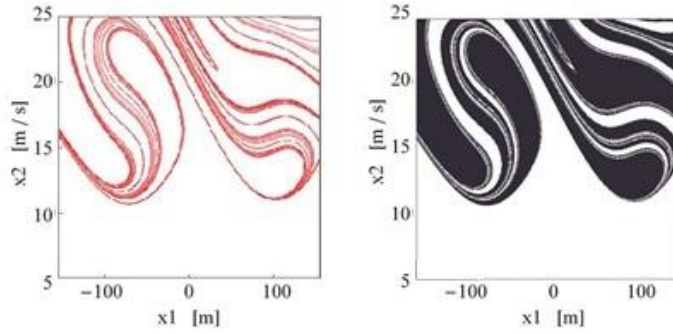
* όπου I_1 οι τροχιές που καταλήγουν σε *surf-riding* με πιθανότητα ένταξης ≥ 0.98 . I_2 οι τροχιές που καταλήγουν σε *surf-riding* με πιθανότητα ένταξης ≤ 0.02 (δηλαδή >0.98 σε *surging*), $I_1 + I_2$ ο αριθμός των τροχιών που ομαδοποιήθηκαν, $total$ ο συνολικός αριθμός των τροχιών που συμπεριλήφθησαν στη δειγματοληψία.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα πλεονέκτημα της εφαρμογής της μεθόδου clustering είναι ότι δύναται να αποκαλυφθεί η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος για τη δεδομένη χρονική στιγμή σε όλο το εύρος του χώρου φάσεων ακόμα και των πολύ στενών περιοχών, λόγω των αναδιπλώσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το σχήμα 5.36(i) όπου παρατηρούμε *surf-riding* σε στενές περιοχές ανάμεσα στις αναδιπλώσεις, όπου με τη μέθοδο FTLE ήταν αδύνατο να τοποθετήσουμε σωματίδια, ώστε να μελετήσουμε τη δυναμική συμπεριφορά.

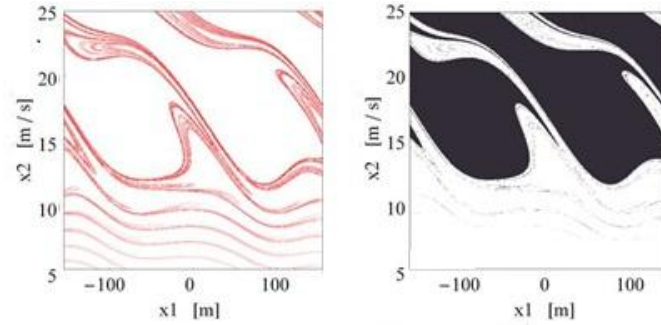
Ωστόσο, γνωρίζοντας από πριν τη δομή των (repelling) LCSs στο χώρο φάσεων με τη μέθοδο FTLE, ενισχύεται το αναμενόμενο αποτέλεσμα με τη μέθοδο clustering. Με αυτόν τον τρόπο μειώνεται ο χρόνος διερεύνησης των σωστών παραμέτρων (αριθμός διεγμάτων και περίοδος) για την εφαρμογή της μεθόδου clustering, εφόσον θα έχουμε ήδη μία πιθανή εικόνα του χώρου φάσεων. Στο σχήμα 5.38 απεικονίζεται αριστερά ο χώρος φάσεων με τα repelling LCSs (αποτέλεσμα της εφαρμογής της μεθόδου FTLE) και δεξιά ο χώρος φάσεων με τα finite-time coherent sets (αποτέλεσμα της εφαρμογής της μεθόδου clustering) για τις τρεις περιπτώσεις που μελετήθηκαν προηγουμένως. Μέσω της συγκριτικής αυτής απεικόνισης παρατηρούμε την ομοιότητα μεταξύ των δομών των δύο μεθόδων.



$$(i) (\lambda, s, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 12, 50)$$



$$(ii) (\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 0.8, 0.65, 12, 50)$$



$$(iii) (\lambda_1, s_1, \omega_2/\omega_1, s_2/s_1, u_{nom}, t_0) = (L, 0.02, 1.3, 0.75, 12, 50)$$

Σχήμα 5.38: Σύγκριση του χώρου φάσεων μεταξύ της εφαρμογής των μεθόδων FTLE (αριστερά) και clustering (δεξιά) για την εξαγωγή των Lagrangian Coherent Structures (repelling) και των Finite-time Coherent Sets αντίστοιχα.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η δυναμική συμπεριφορά της κίνησης του πλοίου στο διάμηκες, με σκοπό την κατανόηση των μη γραμμικών φαινομένων, σε περιβάλλον μίας και δύο κυματικών συνιστωσών μέσω της ανάλυσης του χώρου φάσεων. Για την ανάλυση αυτή χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των εκθετών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου (FTLE) και η μέθοδος clustering (αλγόριθμος fuzzy c-means) μέσω των οποίων έγινε η εξαγωγή των υπερβολικών Λαγκρανζιανών Συνεκτικών Δομών (LCSs) και των πεπερασμένου χρόνου συμπαγών διαστημάτων (Finite-time Coherent Sets) αντίστοιχα

Στην περίπτωση αρμονικού κυματισμού εξοικειωθήκαμε αρχικά με τη μέθοδο FTLE και επιβεβαιώσαμε ότι:

- τα LCSs αποτελούν δομές που οργανώνουν τη φασική ροή δρώντας ως αδιαπέραστα όρια
- τα repelling LCSs και τα attracting LCSs είναι ανάλογα των ευσταθών και ασταθών αντίστοιχα πολλαπλοτήτων των υπερβολικών στάσιμων σημείων των αυτόνομων δυναμικών συστημάτων.
- τα LCSs οριοθετούν περιοχές διαφορετικής δυναμικής συμπεριφοράς (surging και surf-riding) στο χώρο φάσεων.

Προσδιορίζοντας τα LCSs για διάφορους χρόνους και με την ολοκλήρωση τροχιών φασικών σωματιδίων αναδείξαμε τη δυνατότητα πρόβλεψης της συμπεριφοράς του συστήματος αναλόγως των αρχικών συνθηκών.

Τόσο στο περιβάλλον μίας όσο και στο περιβάλλον δύο κυματικών συνιστωσών διακρίναμε περιπτώσεις κατά τις οποίες έχουμε συνύπαρξη των δύο δυναμικών καταστάσεων, δηλαδή του surf-riding και του surging, και περιπτώσεις στις οποίες έχουμε επικράτηση μόνο του φαινομένου surf-riding. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο ελκυστής surf-riding εμφανίζεται ως σημείο, ενώ ο ελκυστής surging εμφανίζεται ως συνεχής υλική γραμμή.

Ωστόσο, στην περίπτωση των διχρωματικών κυματισμών μελετήσαμε επιπλέον περιπτώσεις στις οποίες

- ο ελκυστής *surging* δεν εμφανίζεται πλέον ως συνεχής υλική γραμμή αλλά ως σημείο
- έχουμε συνύπαρξη δύο καταστάσεων *surf-riding* σε διαφορετική περιοχή ταχυτήτων και μίας κατάστασης *surging* σε ενδιάμεση περιοχή ταχυτήτων.

Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να αναφέρουμε ότι όταν

- τα δύο κύματα παρουσιάζουν μεγάλη οξύτητα έχουμε κυριαρχία του φαινομένου *surf-riding* (πίνακας 5.1 περίπτωση (ii) και (iv))
- τα δύο κύματα παρουσιάζουν μικρότερη οξύτητα και
 - α. το πρώτο κύμα είναι οξύτερο από το δεύτερο έχουμε συνύπαρξη των δύο δυναμικών καταστάσεων *surf-riding* και *surging* (πίνακας 5.1 περίπτωση (i) και (iii)) ενώ όταν
 - β. το δεύτερο κύμα είναι οξύτερο από το πρώτο συνυπάρχουν δύο καταστάσεις *surf-riding* σε διαφορετική περιοχή ταχυτήτων και μία κατάσταση *surging* (πίνακας 5.1 περίπτωση (v))

Επιπροσθέτως, στην περίπτωση των διχρωματικών κυματισμών παρατηρήσαμε ότι κρίσιμο σημείο για την επιτυχία της μεθόδου FTLE είναι η επιλογή του σωστού χρόνου ολοκλήρωσης τ , καθώς στην περίπτωση λανθασμένης επιλογής αυτού δεν εξασφαλίζεται πάντα η αποκάλυψη όλων των LCSs στο χώρο φάσεων.

Τέλος, οι αναδιπλώσεις που παρατηρούνται στην περίπτωση των διχρωματικών κυματισμών λόγω των ομοκλινικών και ετεροκλινικών φαινομένων που συμβαίνουν, οδηγούν κάποιες φορές στην κάλυψη όλου του χώρου φάσεων από τα LCSs (κυρίως τα *repelling* LCSs) με αποτέλεσμα να είναι δύσκολη ή/και αδύνατη η δυναμική μελέτη.

Η μέθοδος *clustering* με χρήση του αλγόριθμου *fuzzy c-means*, και στις δύο περιπτώσεις κυματικών διεγέρσεων και όσον αφορά μόνο τις περιπτώσεις αυτών στις οποίες υπάρχει συνύπαρξη των δύο διαφορετικών δυναμικών καταστάσεων (*surf-riding* και *surging*), μπορεί να αποκαλύψει άμεσα τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος για τη δεδομένη χρονική στιγμή σε όλο το εύρος του χώρου φάσεων, ακόμα και σε πολύ στενές περιοχές, στις οποίες μειονεκτεί η μέθοδος FTLE σε συνδυασμό με την ολοκλήρωση των σωματιδίων.

Επιπλέον, γνωρίζοντας από πριν τη δομή των (repelling) LCSs στο χώρο φάσεων με τη μέθοδο FTLE, ενισχύεται το αναμενόμενο αποτέλεσμα με τη μέθοδο clustering. Με αυτόν τον τρόπο μειώνεται ο χρόνος διερεύνησης των σωστών παραμέτρων (αριθμός δειγμάτων και περίοδος) για την εφαρμογή της μεθόδου clustering, εφόσον θα έχουμε ήδη μία πιθανή εικόνα του χώρου φάσεων.

Ωστόσο, η μέθοδος clustering δεν μπορεί να εντοπίσει με αξιοπιστία τις περιπτώσεις όπου κυριαρχεί μόνο η κατάσταση surf-riding σε σχέση με τη μέθοδο FTLE, αφού δεν είναι δυνατή η ομαδοποίηση.

Κατά συνέπεια, οι δύο μέθοδοι FTLE και clustering μπορούν να θεωρηθούν ως συμπληρωματικές για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα είχε η εφαρμογή των μεθόδων σε περιβάλλον θαλάσσιων κυματισμών που περιλαμβάνει πολλές συχνότητες..

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Davidson K. S. M., "A Note on the Steering of Ships in Following Seas", 7th International Congress of Applied Mechanics, London, England, 1948
- [2] Grim O., "Das Schiff in von Achtern Anlaufender See", JSTG, Vol. 45, 264-287, 1951
- [3] Du Cane P. and Goodrich G. J., "The Following Sea, Broaching and Surging", Trans. RINA, Vol. 104, No. 2, 109-140, 1962
- [4] Kan, M., "Surging of Large Amplitude and Surf-riding of Ships in Following Seas", Selected papers in Naval Architecture and Ocean Engineering, no. 28, Tokyo: Society of Naval Architects of Japan, 1990
- [5] Spyrou, K.J., "Dynamic Instability in Quartering Seas: The Behavior of a Ship During Broaching", Journal of Ship Research, Vol.40, No.1, pp.46-59, 1996
- [6] Spyrou, K.J., "The Nonlinear Dynamics of Ships in Broaching", Marie Curie Fellowships Annuals, vol.1, 2002
- [7] Kontolefas, I., Spyrou, K.J., "Coherent structures in phase space, governing the nonlinear surge motions of ships in steep waves", Ocean Eng, 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.02.013>
- [8] Spyrou, K.J., "Asymmetric surging of ships in following seas and its repercussions for safety", Nonlinear Dynamics, 43: 149-172, 2006
- [9] Haller, G., Yuan, G., "Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence", Physica D, 147, 352–370, 2000
- [10] Haller, G., 'Distinguished material surfaces and coherent structures in 3D fluid flows', Physica D, 2001
- [11] Haller, G., 'Lagrangian structures and the rate of a strain in a partition of two-dimensional turbulence', Physics of Fluids, Vol.13, No.11, 2001

- [12] Shadden, S.C., Lekien, F., Marsden, J.E, 'Definition and Properties of Lagrangian Coherent Structures from Finite-Time Lyapunov Exponents in two-Dimensional Aperiodic Flows', *Physica D* 212, 271-304, 2005 , doi:10.1016/j.physd.2005.10.007
- [13] Shadden, S.C., "Lagrangian Coherent Structures", Grigoriev, Roman (Ed.), *Transport and Mixing in Laminar Flows: from Microfluidics to Oceanic Currents*. Wiley-VCH, Weinheim, Germany, pp. 59–89, ISBN: 978-3-527-41011-8, 2011
- [14] Peacock, T., Haller, G., "Lagrangian Coherent Structures-The Hidden Skeleton of Fluid Flows", www.physicstoday.org, 2013
- [15] Allshouse, M.R., Peacock, T., "Refining finite-time Lyapunov exponent ridges and the challenges of classifying them", *Chaos*, 25, 087410, 2015, <http://dx.doi.org/10.1063/1.4928210>
- [16] Koh, Legras, "Hyperbolic lines and the stratospheric polar vortex", *Chaos*, vol. 2, n. 2, 2002
- [17] Joseph, B., Legras, B., "Relation between Kinematic Boundaries, Stirring and Barriers for the Antarctic Polar Vortex", *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 59, 1198-1212, 2001
- [18] Farazmand, M., Haller, G, "Computing Lagrangian coherent structures from their variational theory", *Chaos*, 22, 013128, 2012, doi: 10.1063/1.3690153
- [19] Haller, G., "A variational theory of hyperbolic Lagrangian Coherent Structures", *Physica D*, 240, 574-598, 2011, doi: 10.1016/j.physd.2010.11.010
- [20] Froyland, G., Padberg-Gehle, K., "A rough-and-steady cluster based approach for extracting finite-time coherent sets from space and incomplete trajectory data", *Chaos*, 25, 087406, 2015, <http://dx.doi.org/10.1063/1.4926372>