ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΤΕΡΓΑΣΙΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
(ΔΠΜΣ) «ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»

Ανάλυση ευαισθησίας μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων για διάτρηση συμπαγούς κυλινδρικής πλάκας από κωνικό διεισδυτή

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΔΑΜ. Δ .ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΜΑΝΩΛΑΚΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2016

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΤΕΡΓΑΣΙΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
(ΔΠΜΣ) «ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η καταπόνηση ελαφρών προστατευτικών κατασκευών από κρουστικά φορτία, είναι ένα σημαντικό πρόβλημα της μηχανικής και χαρακτηρίζεται από μεγάλο εύρος εφαρμογών. Τα τελευταία χρόνια για την επίλυση προβλημάτων που ανήκουν σε αυτό το πεδίο, χρησιμοποιούνται υπολογιστικές προσομοιώσεις. Ωστόσο, τίθεται ένα σημαντικό ζήτημα, ως προς την αξιοπιστία αυτών των προσομοιώσεων και για αυτό το λόγο, υπάρχει ανάγκη σύγκρισης των αποτελεσμάτων των υπολογιστικών μοντέλων με πειραματικά δεδομένα.

Σε αυτήν την εργασία διεξάγεται παραμετρική ανάλυση και ανάλυση ευαισθησίας πλέγματος, σε υπολογιστικό μοντέλο διάτρησης μονής πλάκας αλουμινίου, από κυλινδρικό διεισδυτή κωνικής αιχμής. Χρησιμοποιούνται δύο τύποι πλέγματος, δομημένο πλέγμα και μη δομημένο πλέγμα τυχαίας γένεσης. Για κάθε τύπο πλέγματος, ορίζονται ορισμένες παράμετροι που ελέγχουν το μέγεθος των πεπερασμένων στοιχείων της πλάκας. Στη συνέχεια, ερευνάται η εξάρτηση των τελικών αποτελεσμάτων του μοντέλου ως προς κάθε παράμετρο ξεχωριστά. Με το πέρας της παραμετρικής ανάλυσης επιλέγεται το πλέγμα για το οποίο τα αποτελέσματα του μοντέλου εμφανίζουν την μικρότερη ευαισθησία. Τέλος, συγκρίνονται τα αποτελέσματα του μοντέλου που προκύπτει μετά το πέρας της παραμετρικής ανάλυσης, με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΤΕΡΓΑΣΙΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
(ΔΠΜΣ) «ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»

ABSTRACT

High velocity impact loading of lightweight protective structures is a major issue of applied mechanics, with a wide variety of applications. In recent years with the advent of computers, many problems that belong in this field are solved by using numerical simulations. However, there is an uncertainty about the accuracy of these models, thus the results that are produced from these models, need to be validated by experimental data.

In this diploma thesis, it is conducted, parametric and sensitivity analysis of a grid, which is produced by a FEM model that simulates the penetration of a single aluminum plate by a conical nose projectile. Two types of grids are used, a structured grid and an unstructured grid. For each type of grid, certain parameters are defined, that control the size of the finite elements that constitute the plate. After the definition of these parameters, the dependency of the model on each of the parameters separately is examined. In the end of the parametric analysis, the grid that the results of the model are least sensitive is chosen. After, the end of the parametric analysis the results of the numerical simulation are compared to experimental data.

.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με αυτήν την εργασία τελειώνουν οι μεταπτυχιακές σπουδές μου, στο (ΔΠΜΣ) «Συστήματα αυτοματισμού». Θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Δημήτριο Μανωλάκο για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το ενδιαφέρον θέμα, αλλά και για την βοήθεια που προσέφερε κατά την διάρκεια εκπονήσεως αυτής της διπλωματικής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Γεώργιο Σερέτη για την σημαντική βοήθεια που μου προσέφερε κατά την διάρκεια δημιουργίας των υπολογιστικών προσομοιώσεων.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την ηθική της στήριξη, σε ολόκληρη την διάρκεια των σπουδών μου.

1 Περιεχόμενα

2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτήν την εργασία προσομοιώνεται η διάτρηση μονής πλάκας κράματος αλουμινίου από κυλινδρικό διεισδυτή κωνικής αιχμής. Τα κράματα αλουμινίου χρησιμοποιούνται ευρέως σε προστατευτικές κατασκευές χαμηλού βάρους [1-12]. Οι λόγοι είναι η χαμηλή πυκνότητα του αλουμινίου, η υψηλή ειδική αντοχή (high specific strength), η υψηλή ικανότητα απορρόφησης ενέργειας, η καλή αντίσταση στη διάβρωση και η καλή θερμική αγωγιμότητα [13-21]. Η τελευταία ιδιότητα συνεπάγεται ότι, το αλουμίνιο είναι ευαίσθητο σε μικρότερο βαθμό σε δημιουργία ζωνών υψηλών τοπικών θερμοκρασιών (adiabatic shear banding) και σε θερμοπλαστική αστάθεια, σε σύγκριση με τον χάλυβα. Ένα ακόμη πλεονέκτημα είναι ότι πολλά κράματα αλουμινίου είναι δυνατόν μέσω εκβολής να μορφοποιηθούν σε ιδιαίτερα σύνθετες κατασκευές, και να χρησιμοποιηθούν κατευθείαν σε ανεπτυγμένα συστήματα προστασίας [22-25]. Ενδιαφέρον για τα κράματα αλουμινίου υπήρχε ακόμη και από τον προηγούμενο αιώνα όπως φαίνεται από την περίπτωση της εταιρείας Yarrow&Co, από την οποία το 1895 κατασκευάστηκε αντιτορπιλικό με υπερκατασκευή από αλουμίνιο με βάρος το μισό σε σύγκριση με την αντίστοιχη κατασκευή από χάλυβα, με τελικό αποτέλεσμα την αύξηση της τελικής ταχύτητας του πλοίου.

Τα τελευταία χρόνια, διεξάγεται μεγάλος αριθμός ερευνών για την εξακρίβωση της αντίστασης διαφόρων κραμάτων αλουμινίου σε διάτρηση. Αναφορά σε μερικές από αυτές τις μελέτες γίνεται στις αναφορές [26-29]. Από αυτές και παρόμοιες αναφορές, που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία, έχει διαπιστωθεί ότι το αλουμίνιο έχει επίσης αρκετά μειονεκτήματα συγκριτικά με άλλα υλικά όπως ο χάλυβας. Πιο συγκεκριμένα έχει χαμηλότερο μέτρο ελαστικότητας, αντοχή και ολκιμότητα (ductility), ως προς τον χάλυβα και λειώνει σε θερμοκρασία υψηλότερη των 600-700 βαθμών. Ακόμη, το αλουμίνιο εμφανίζει χαμηλότερη ευαισθησία στο ρυθμό παραμόρφωσης, σε σχέση με τους περισσότερους χάλυβες, όσο αφορά την αντοχή, αν και ο ρυθμός παραμόρφωσης επηρεάζει σημαντικά την ολκιμότητα. Έχει διαπιστωθεί ότι ο βαθμός ευαισθησίας μειώνεται με την αύξηση της αντοχής του υλικού Zukas [30] και σε μερικά κράματα η ευαισθησία στο ρυθμό παραμόρφωσης δέχεται ακόμη και αρνητικές τιμές, που συνεπάγεται ότι η τάση διαρροής και η τροπή σκλήρυνσης (strain hardening) είναι υψηλότερες για χαμηλότερες τιμές ρυθμού παραμόρφωσης αντί για υψηλότερες [31]. Επίσης, τα περισσότερα κράματα αλουμινίου είναι γνωστά για την ανισοτροπία τους [32-33], που συνεπάγεται ότι οι ιδιότητες μεταβάλλονται ανάλογα με την διεύθυνση. Αυτό οδηγεί σε μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, όσο αφορά την μοντελοποίηση του υλικού σε αναλυτικά και υπολογιστικά μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων.

Λόγω της πολυπλοκότητας του προβλήματος της σύγκρουσης υψηλών ταχυτήτων, η χρήση υπολογιστικών μεθόδων ήταν μειωμένη και συνήθως προτιμούνταν πειραματικές μέθοδοι, τουλάχιστον μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 80. Υπάρχουν τρείς βασικές μεθοδολογίες για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος, η πρώτη είναι η ανάπτυξη εμπειρικών εξισώσεων με τη χρήση πειραματικών μεθόδων, η δεύτερη είναι η δημιουργία αναλυτικών μοντέλων που εξάγονται έπειτα από απλοποίηση βασικών εξισώσεων δυναμικής [34-36] και τρίτη είναι η χρήση αριθμητικών προσομοιώσεων [37]. Η τρίτη μέθοδος έχει ξεκινήσει να προτιμάται πρόσφατα λόγω της αύξησης της ισχύος των

σύγχρονων υπολογιστών. Σε αυτό το σημείο τίθεται το ζήτημα της αξιοπιστίας των υπολογιστικών μοντέλων που αναπτύσσονται [38-39], και για αυτό το λόγο είναι σημαντική η πιστοποίηση αυτών των μοντέλων συγκρίνοντας τα αποτελέσματα τους με αξιόπιστα πειραματικά δεδομένα.

Στην αναφορά [40] χρησιμοποιήθηκε πειραματική διάταξη προκειμένου να μετρηθεί η ταχύτητα εξόδου διεισδυτή κωνικής αιχμής, που προσκρούει σε πλάκα κράματος αλουμινίου. Σε μεταγενέστερη εργασία [41] συγκρίνονται αυτά τα πειραματικά αποτελέσματα με αναλυτικές και υπολογιστικές μεθόδους.

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι η παραμετρική ανάλυση πλέγματος, κατά τη μοντελοποίηση της κρούσης κυλινδρικού διεισδυτή κωνικής αιχμής με πλάκα αλουμινίου, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Κατά την παραμετρική ανάλυση ορίζονται ορισμένες παράμετροι, που η τιμή τους επηρεάζει άμεσα το μέγεθος του πλέγματος και στη συνέχεια εξετάζεται η ευαισθησία των τελικών αποτελεσμάτων στη μεταβολή των τιμών αυτών των παραμέτρων. Η διαδικασία της παραμετρικής ανάλυσης είναι ιδιαίτερα σημαντική σε προβλήματα κρούσεων με υψηλούς ρυθμούς παραμόρφωσης, διότι σε αρκετές περιπτώσεις υπάρχει μεγάλη ευαισθησία των αποτελεσμάτων στον τρόπο, που δομείται το πλέγμα. Ακόμη, σε αντίθεση με την επίλυση προβλημάτων στατικής μηχανικής η χρησιμοποίηση πυκνότερου πλέγματος δεν συνεπάγεται πάντοτε ορθότερα αποτελέσματα. Αυτός είναι ο λόγος, που σε εργασίες όπου μελετώνται κρουστικά φαινόμενα, εξετάζεται η ευαισθησία των αποτελεσμάτων στο μέγεθος του πλέγματος. Σε αυτήν την εργασία κατά την υπολογιστική προσομοίωση, χρησιμοποιείται πλέγμα δυο διαφορετικών τύπων, πιο συγκεκριμένα, δομημένο πλέγμα και μη-δομημένο πλέγμα τυχαίας γένεσης. Για κάθε τύπο πλέγματος ορίζονται διαφορετικές παράμετροι που επηρεάζουν την πυκνότητα του πλέγματος, και στη συνέχεια παρατίθενται διαγράμματα, που παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συνάρτηση με τις τιμές, που δέχεται η κάθε παράμετρος. Ο τελικός στόχος είναι η ανάλυση της ευαισθησίας των αποτελεσμάτων της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, αλλά και εύρεση του πλέγματος, που παρέχει τα ορθότερα αποτελέσματα με βάση τα πειραματικά δεδομένα.

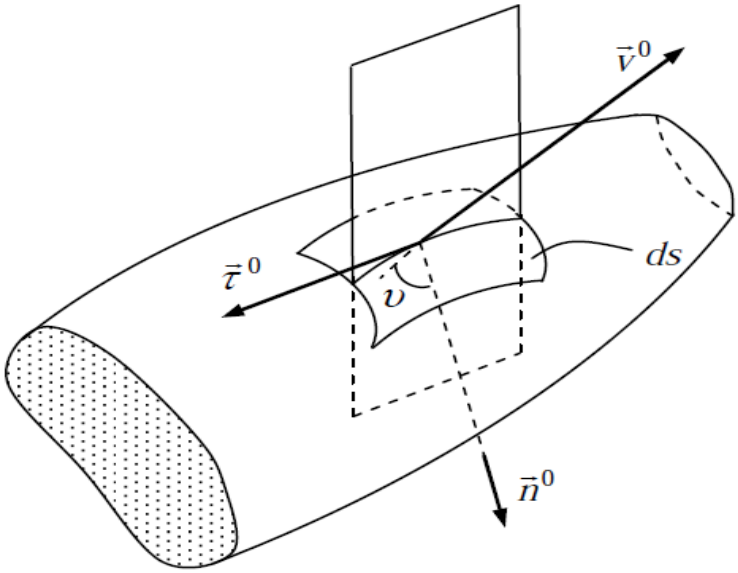
3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρατεθούν τα βασικά σημεία της θεωρίας, στα οποία βασίστηκε η συγκεκριμένη εργασία. Καταρχήν, θα γίνει επεξήγηση των βασικών αναλυτικών μοντέλων, που χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή αποτελεσμάτων και σχετίζονται με το φαινόμενο των κρούσεων υψηλών ταχυτήτων.

3.1 Αναλυτικά μοντέλα

3.1.1 Γενική θεωρία

Μεγάλος αριθμός μηχανολογικών μοντέλων, που χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση προβλημάτων διάτρησης, ανήκουν στην κατηγορία των ονομαζόμενων μοντέλων τοπικών αλληλεπιδράσεων (Localized Interaction Models-LIMs) [36]. Στα συγκεκριμένα μοντέλα η αλληλεπίδραση μεταξύ του διαπεραστικού διεισδυτή και του υλικού, που διαπερνά, περιγράφεται, ως το συνολικό άθροισμα των τοπικών αλληλεπιδράσεων των στοιχείων επιφανείας του διεισδυτή, με τα στοιχεία επιφανείας του υλικού. Κάθε τοπική αλληλεπίδραση καθορίζεται από την τοπική ταχύτητα του στοιχείου επιφανείας και τη γωνία μεταξύ του ανύσματος, της τοπικής ταχύτητας του επιφανειακού στοιχείου και του τοπικού κάθετου ανύσματος στην επιφάνεια του στοιχείου. Σημαντικές παράμετροι είναι ακόμη οι ιδιότητες του υλικού, που διαπερνά ο διεισδυτής, όπως σκληρότητα, πυκνότητα κ.ο.κ. Στην Εικόνα 3.1 φαίνονται τα προαναφερθέντα ανύσματα πάνω στην επιφάνεια του διεισδυτή.



Εικόνα 3.1. Περιγραφή του μοντέλου τοπικών αλληλεπιδράσεων [36].

Η αλληλεπίδραση μεταξύ του επιφανειακού στοιχείου του διεισδυτή και του υλικού περιγράφεται από την εξίσωση (3.1.1)

$$d\vec{F} = [\sigma_n(u,v)\vec{n}^0 + \sigma_\tau(u,v)\vec{\tau}^0]dS \tag{3.1.1}$$

$$\vec{\tau}^0 = -(\vec{v}^0 + u \cdot \vec{n}^0)/\sqrt{1-u^2} \tag{3.1.2}$$

$$u = -\vec{v}^0 \cdot \vec{n}^0 = \cos\upsilon \tag{3.1.3}$$

Όπου $d\vec{F}$ είναι η δύναμη, που ασκείται στο επιφανειακό στοιχείο dS του διεισδυτή, που έρχεται σε επαφή με το υλικό, $\vec{n}^0$και $\vec{\tau}^0$είναι το κάθετο και επιφανειακό διάνυσμα στη συγκεκριμένη θέση της επιφάνειας του διεισδυτή, $\vec{v}^0$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της ταχύτητας του επιφανειακού στοιχείου $\vec{v}$, και υ είναι η γωνία μεταξύ των ανυσμάτων $\vec{n}^0$και $(-\vec{v}^0)$. Οι μη αρνητικές συναρτήσεις $\sigma_n(u,v)$ και $\sigma_\tau(u,v)$ είναι το μέτρο της κάθετης (normal stress) και εφαπτομενικής τάσης (tangenial stress) αντιστοίχως και εξαρτώνται κυρίως από τις ιδιότητες του υλικού, που προσκρούει ο διεισδυτής. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\tau}^0$ βρίσκεται στο επίπεδο των ανυσμάτων $\vec{v}^0$ και $\vec{\tau}^0$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n}^0$ και η κατεύθυνση του έχει επιλεγεί, έτσι ώστε $\vec{v}^0 \cdot \vec{\tau}^0 < 0$, που συνεπάγεται, ότι η δύναμη τριβής κατευθύνεται στα θετικά του $\vec{\tau}^0$.

Η συνολική δύναμη, που ασκείται στο διεισδυτή κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται έπειτα από την ολοκλήρωση των στοιχειωδών δυνάμεων $d\vec{F}$ στην κοινή επιφάνεια μεταξύ του διεισδυτή και του υλικού τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Στη συνέχεια αυτής της ανάλυσης θεωρείται, ότι ο διεισδυτής είναι ένα συμμετρικό μη παραμορφώσιμο στερεό και προσκρούει στο υλικό με ταχύτητα κάθετη στο επίπεδο πρόσκρουσης. Η συνολική δύναμη, που δέχεται ο διεισδυτής, προκύπτει με ολοκλήρωση των στοιχειωδών δυνάμεων και δίνεται από την εξίσωση (3.1.4).

$$F_x = (-\vec{v}^0) \cdot \iint_S d\vec{F} = \iint_{S_{perp}} (-\vec{v}^0)d\vec{F} + \iint_{S_{lat}} (-\vec{v}^0)d\vec{F} \tag{3.1.4}$$

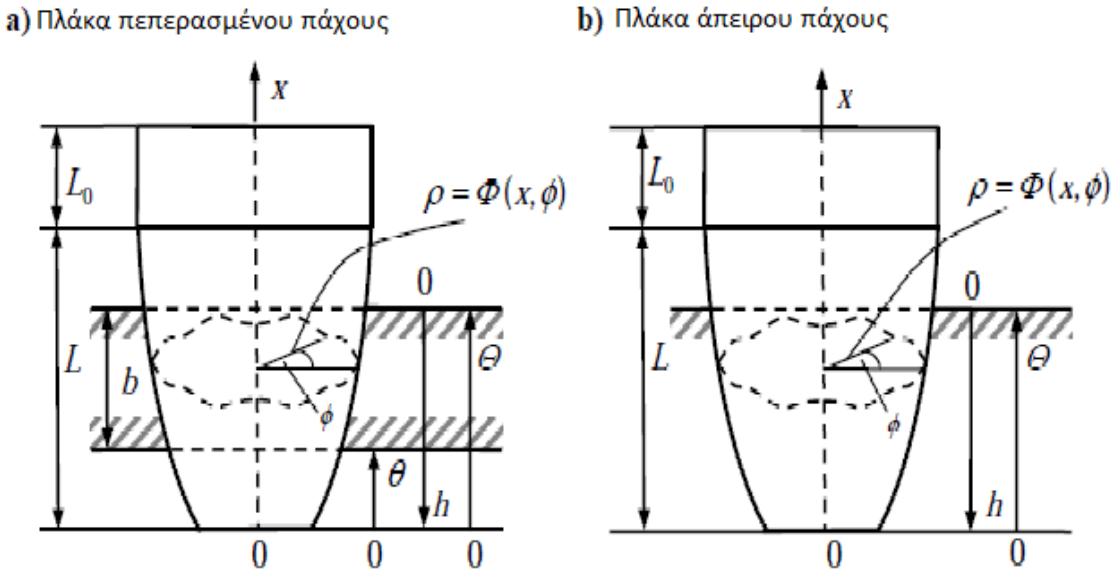
Όπου S_{perp} είναι κομμάτι της επιφάνειας επαφής S, που είναι κάθετη στην ταχύτητα του διεισδυτή και ουσιαστικά αντιστοιχεί στο εμπρόσθιο πλατύ μέρος της μύτης, και S_{lat} αντιστοιχεί στην πλευρική επιφάνεια του διεισδυτή και μετά από αντικατάσταση της (3.1.1) στην (3.1.4), προκύπτει η παρακάτω εξίσωση.

$$F_x = \sigma_n(1,v) \iint_{S_{perp}} d\vec{F} + \iint_{S_{lat}} \sigma_0(u,v)d\vec{F} \tag{3.1.5}$$

Όπου

$$\sigma_0(u,v) = u\sigma_n(u,v) + \sqrt{1-u^2}\sigma_\tau(u,v) \tag{3.1.6}$$

Στη συνέχεια, εισάγονται οι ακόλουθες μεταβλητές, που φαίνονται και στην Εικόνα 3.2. Η μεταβλητή h εκφράζει το βάθος της διείσδυσης του διεισδυτή στο υλικό, που από αυτό το σημείο θεωρείται ότι είναι μια επίπεδη πλάκα. Το h ισούται με την απόσταση της μύτης του διεισδυτή από την εμπρόσθια επιφάνεια της πλάκας. Η μεταβλητή L είναι το μήκος της μύτης και οι μεταβλητές x, φ, ρ σχετίζονται με τη γεωμετρία του διεισδυτή. Πιο συγκεκριμένα η γεωμετρία της μύτης περιγράφεται, με τη χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων μέσω της συνάρτησης $\rho = \Phi(x, \varphi)$.



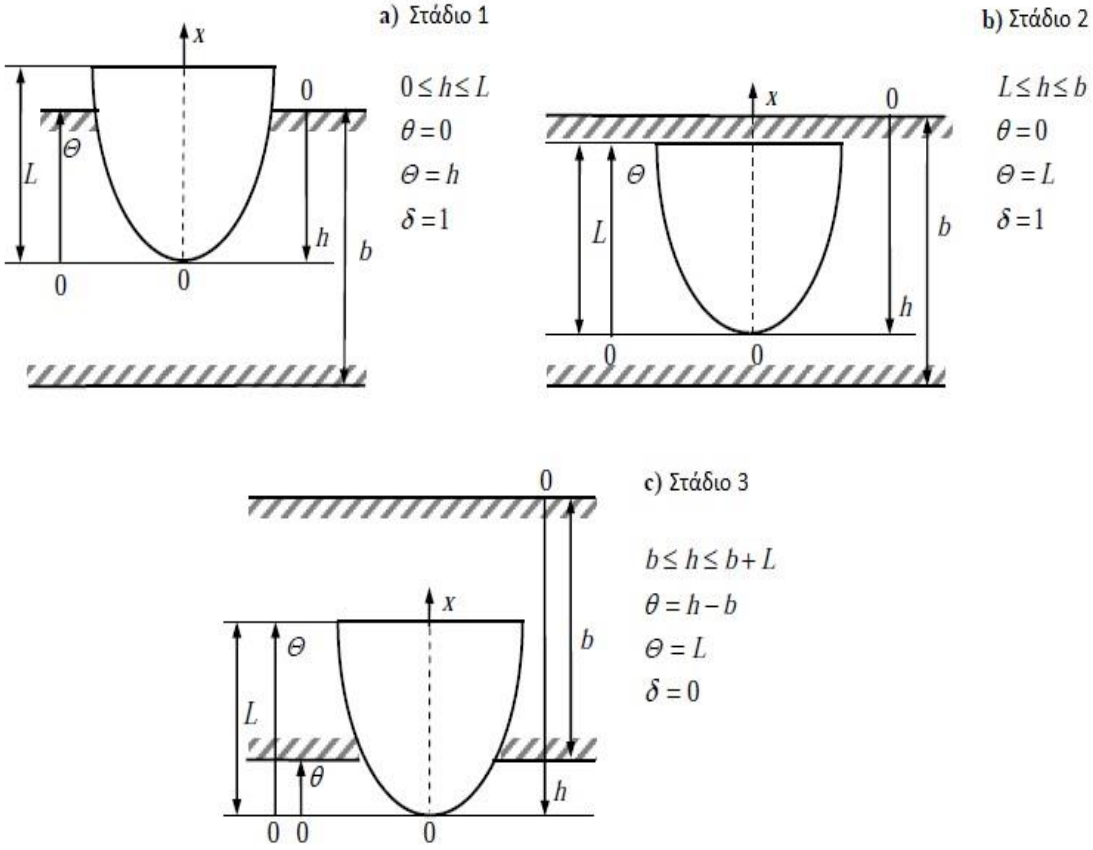
Εικόνα 3.2. Διαγραμματική απεικόνιση των χρησιμοποιούμενων μεταβλητών [36].

Το κυλινδρικό κομμάτι του διεισδυτή μετά από την μύτη έχει μήκος L_0 και θεωρείται ότι δεν αλληλεπιδρά με την πλάκα. Αυτό συνεπάγεται ότι οι παραπάνω εξισώσεις αναφέρονται στην αιχμή του διεισδυτή, που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $x = 0$ και $x = L$.

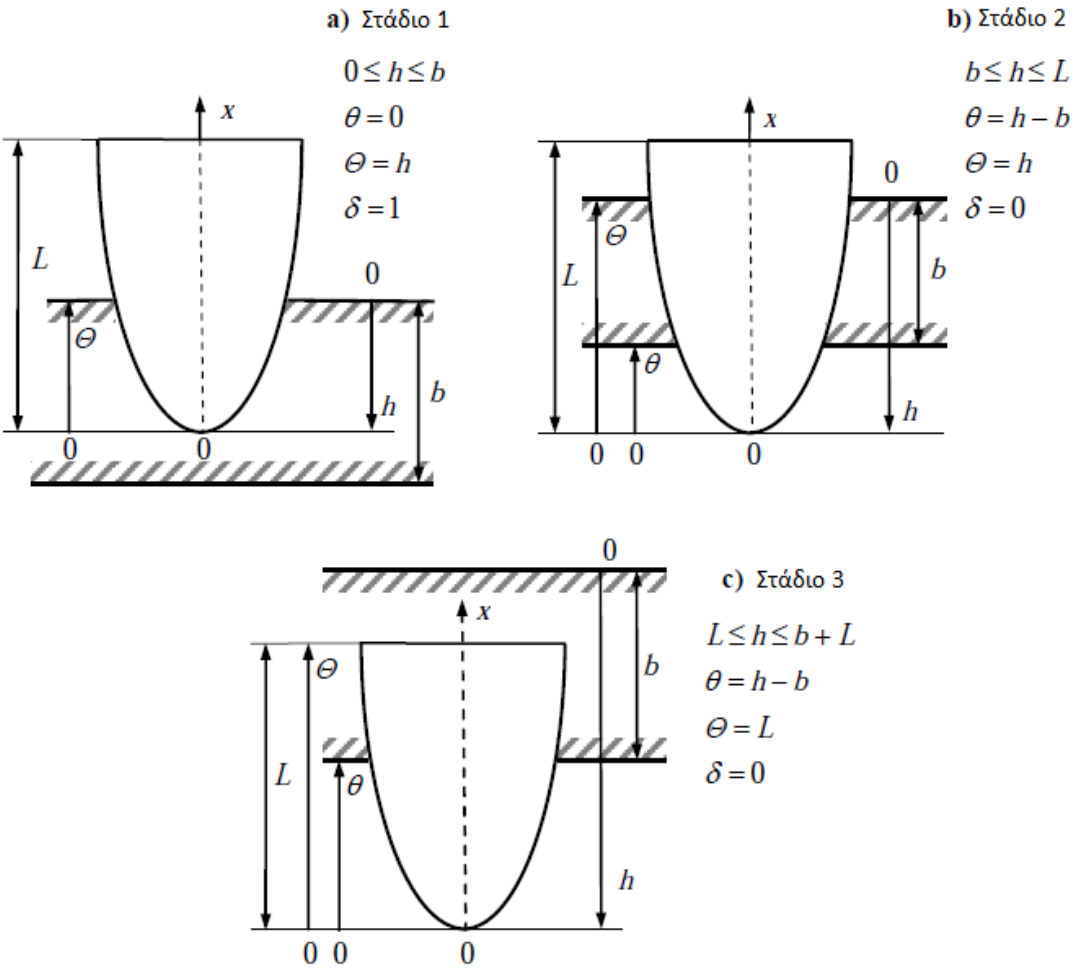
3.1.2 Επιφάνεια αλληλεπίδρασης πλάκας-διεισδυτή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γίνει περιγραφή των σταδίων της διάτρησης πλάκας πεπερασμένου πάχους b, από διεισδυτή με μήκος αιχμής L. Για $L \leq b$ η διάτρηση μπορεί να θεωρηθεί ως διαδικασία τριών σταδίων (Εικόνα 3.3). Στο πρώτο στάδιο η μύτη του διεισδυτή έχει εισέλθει μερικώς στην πλάκα ($0 \leq h \leq L$) και αλληλεπιδρούν με την πλάκα το μπροστινό πλατύ μέρος της μύτης και το κομμάτι της πλευρικής επιφάνειας μεταξύ των επιπέδων $x = 0$ και $x = h$.

Στο δεύτερο στάδιο, εισέρχεται πλήρως η μύτη στη πλάκα $(L \leq h \leq b)$ και αλληλεπιδρούν με την πλάκα το μπροστινό μέρος και ολόκληρη η πλευρική επιφάνεια της μύτης μεταξύ των επιπέδων $x = 0$ και $x = L$. Στο τρίτο στάδιο ο διεισδυτής εξέρχεται μερικώς από την πλάκα $(b \leq h \leq b + L)$ και αλληλεπιδρά με αυτήν το κομμάτι της μύτης μεταξύ των επιπέδων $x = h - b$ και $x = L$. Η περίπτωση, όπου το μήκος της μύτης είναι μεγαλύτερο από το πάχος της πλάκας $L \geq b$, φαίνεται στην Εικόνα 3.4 και αναλύεται με παρόμοιο τρόπο με την περίπτωση $L \leq b$.



Εικόνα 3.3. Απεικόνιση σταδίων διάτρησης για πλάκα μικρότερου πάχους από το μήκος της μύτης του διεισδυτή [36].



Εικόνα 3.4. Απεικόνιση σταδίων διάτρησης για πλάκα μεγαλύτερου πάχους από το μήκος της μύτης του διεισδυτή [36].

Και στις δυο περιπτώσεις η μεταβλητή περιοχή αλληλεπίδρασης μεταξύ της πλάκας και του διεισδυτή περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\theta(h) \le x \le \Theta(h) \tag{3.1.7}$$

Όπου

$$\Theta(h) = \begin{cases} h \; \gamma\iota\alpha & 0 \le h \le L \\ L \; \gamma\iota\alpha & h \ge L \end{cases} \tag{3.1.8}$$

Και

$$\theta(h) = \begin{cases} 0 & \gamma\iota\alpha \quad 0 \le h \le b \\ h - b & \gamma\iota\alpha \quad b \le h \le b + L \end{cases} \tag{3.1.9}$$

Για $h < 0$ ορίζεται $\theta(h) = \Theta(h) = 0$ και για $h > b + L$ ορίζεται $\theta(h) = \Theta(h) = L$.

3.1.3 Εξίσωση κίνησης

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $\rho = \Phi(x, \varphi)$ για την περιγραφή της γεωμετρίας του διεισδυτή, εξάγονται οι παρακάτω εξισώσεις, που συσχετίζουν το κάθετο διάνυσμα μιας στοιχειώδους επιφάνειας με τις κυλινδρικές συντεταγμένες x, φ.

$$u(x, \varphi) = \vec{x}^0 \cdot \vec{n}^0 = \frac{u_1(x, \varphi)}{u_0(x, \varphi)}, \qquad dS = u_0(x, \varphi) dx d\varphi \tag{3.1.10}$$

$$u_0(x, \varphi) = \sqrt{\Phi^2(\Phi_X^2 + 1) + \Phi_\Phi^2}\,, u_1(x, \varphi) = \Phi\Phi_x \tag{3.1.11}$$

Έπειτα από αντικατάσταση η εξίσωση (3.1.5) μετασχηματίζεται στην παρακάτω μορφή

$$F_x(u, v) = \sigma_n(1, v)\sigma_{nose}\delta(h) + \\ + \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} dx \int_0^{2\pi} \sigma_0(u(x, \varphi), v) u_0(x, \varphi) d\varphi \tag{3.1.12}$$

Όπου σ_{nose} είναι το εμβαδόν του μπροστινού μέρους της μύτης

$$\sigma_{nose} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Phi^2(0, \varphi) d\varphi \tag{3.1.13}$$

Η δύναμη τριβής μεταξύ της πλάκας και του διεισδυτή εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$\sigma_\tau = \mu_{fr}\sigma_n \tag{3.1.14}$$

Όπου μ_{fr} ο συντελεστής τριβής. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.1.6), (3.1.10)-(3.1.11) και (3.1.14) στην (3.1.12)

$$F_x(u, v) = \sigma_n(1, v)\sigma_{nose}\delta(h) + \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} dx \int_0^{2\pi} \sigma_n(u(x, \varphi), v)\, U(x, \varphi) d\varphi \tag{3.1.15}$$

Όπου

$$U(x,\varphi) = \left[u + \mu_{fr}\sqrt{1-u^2}\right] u_0 = \Phi\Phi_X + \mu_{fr}\sqrt{\Phi^2 + \Phi_\varphi^2} \tag{3.1.16}$$

Η συνάρτηση $\delta(h)$ στην εξίσωση (3.1.15) περιγράφει τη δύναμη, που ασκείται στο μπροστινό κομμάτι της μύτης και δίνεται από τη σχέση

$$\delta(h) = \begin{cases} 0 \text{ για } h \leq 0 \\ 1 \text{ για } 0 \leq b \\ 0 \text{ για } h > b \end{cases} \tag{3.1.17}$$

Η εξίσωση κίνησης του διεισδυτή μάζας m έχει την παρακάτω γενική μορφή

$$m\ddot{h} = -F_x(h,\dot{h}) \tag{3.1.18}$$

με αρχικές συνθήκες

$$h(0) = 0, \dot{h}(0) = v(0) = v_{imp} \tag{3.1.19}$$

Με την επίλυση της (3.1.18) προσδιορίζεται το βάθος της διάτρησης h και η ταχύτητα v του διεισδυτή, ως συνάρτηση του χρόνου t και της ταχύτητας πρόσκρουσης v_{imp}. Επειδή, το δεξιό μέρος της (3.1.18) δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο, ο βαθμός της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να μειωθεί και το v να εκφραστεί ως συνάρτηση $v = v(h)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$h = \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\frac{dh}{dt} = v'(h)v(h) \tag{3.1.20}$$

Η (3.1.18) γράφεται ως εξής

$$mv\frac{dv}{dh} + F_x(h,v) = 0 \tag{3.1.21}$$

Η λύση της (3.1.21) γράφεται στη μορφή

$$v = V(h; v_{imp}) \tag{3.1.22}$$

Με αρχική συνθήκη

$$v(0) = v_{imp} \tag{3.1.23}$$

3.1.4 Ταχύτητα εξόδου και ταχύτητα βαλλιστικού ορίου

Για την περίπτωση πλάκας πεπερασμένου πάχους, η ταχύτητα βαλλιστικού ορίου (ballistic limit velocity (BVL)) v_{bl} ορίζεται, ως η αρχική ταχύτητα του διεισδυτή, που απαιτείται για να εξέλθει από την πλάκα με μηδενική ταχύτητα. Επομένως, καθορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση

$$V(b + L; v_{bl}) = 0 \tag{3.1.24}$$

Η ταχύτητα εξόδου v_{res} του διεισδυτή αφού εξέλθει από την πλάκα είναι

$$v_{res} = V\big(b + L; v_{imp}\big), v_{imp} \geq v_{bl} \tag{3.1.25}$$

3.1.5 Γενικές εξισώσεις για διεισδυτή με σχήμα σώματος εκ περιστροφής

Αν ο διεισδυτής είναι σώμα εκ περιστροφής, τότε απαλείφεται η εξάρτηση από την γωνία και ισχύει

$$\Phi = \Phi(x) \tag{3.1.26}$$

Για το μπροστινό μέρος της μύτης ισχύει

$$\sigma_{nose} = \pi r^2 \tag{3.1.27}$$

Όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου που σχηματίζεται στο εμπρόσθιο πλατύ μέρος της μύτης. Ακόμη, με αντικατάσταση στις εξισώσεις (3.1.10) και (3.1.16), προκύπτει

$$\Phi_X \Big/ \sqrt{\Phi_X^2 + 1}\,, \;\; U(x, \varphi) = U(x) = \Phi(\Phi_X + \mu_{fr}) \tag{3.1.28}$$

Με αντικατάσταση των (3.1.27) και (3.1.28) στη σχέση (3.1.15), που εκφράζει τη δύναμη αντίστασης, που δέχεται ο διεισδυτής, προκύπτει η απλοποιημένη εξίσωση

$$F_x(u,v) = \sigma_n(1,v)\pi r^2\delta(h) +$$

$$+2\pi\int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \sigma_n\left(\frac{\Phi_X}{\sqrt{\Phi_X^2+1}}, v\right)\Phi(\Phi_X+\mu_{fr})\,dx \tag{3.1.29}$$

3.1.6 Εισαγωγή μοντέλου συσχέτισης τάσεων-ταχύτητας

Όπως προαναφέρθηκε προηγουμένως, η τάση είναι συνάρτηση της ταχύτητας του διεισδυτή και της σχετικής γωνίας, που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας με το διάνυσμα μιας στοιχειώδους επιφάνειας. Σε πολλά μοντέλα μηχανικής αυτή η εξάρτηση εκφράζεται μέσω ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού.

$$\sigma_n(u,v) = A + B\left(\frac{u^2}{1-u^2}\right)v^2 \tag{3.1.30}$$

Οι συντελεστές A και B εξαρτώνται από το υλικό της πλάκας και για τον προσδιορισμό χρησιμοποιείται το μοντέλο της επεκτεινόμενης κοιλότητας, στο οποίο θα γίνει αναφορά σε επόμενη ενότητα. Με αντικατάσταση της (3.1.30) στην

(3.1.29) η εξίσωση της οπισθέλκουσας δύναμης αποκτά την ακόλουθη μορφή.

$$\sigma_n(u,v) = f_0(h) + f_2(h)v^2 \tag{3.1.31}$$

Όπου στη γενική περίπτωση ισχύει

$$f_0(h) = \pi A\left[r^2\delta(h) + 2\int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \Phi(\Phi_X+\mu_{fr})\,dx\right] \tag{3.1.32}$$

$$f_2(h) = \pi B\left[r^2\delta(h) + 2\int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \Phi\Phi_X^2(\Phi_X+\mu_{fr})\,dx\right] \tag{3.1.33}$$

Η εξίσωση κίνησης (3.1.21) με την οπισθέλκουσα δύναμη να δίνεται από την (3.1.31), είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς το v^2.

$$\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dh} + f_2(h)v^2 + f_0(h) = 0 \tag{3.1.34}$$

Η λύση της διαφορικής με αρχική συνθήκη $v(0) = v_{imp}$ γράφεται στην παρακάτω μορφή.

$$v^2(h) = \frac{1}{Q(h)}\left[v_{imp}^2 - \frac{2}{m}\int_0^h f_0(\tilde{h})Q(\tilde{h})d\tilde{h}\right] \tag{3.1.35}$$

Όπου

$$Q(h) = \exp\left(\frac{2}{m}\int_0^h f_2(\zeta)d\zeta\right) \tag{3.1.36}$$

Η ταχύτητα βαλλιστικού ορίου μπορεί να υπολογισθεί από την (3.1.35) αντικαθιστώντας $h = b + L$, $v(h) = 0$ και $v_{imp} = v_{bl}$.

$$v_{bl}^2 = \frac{2}{m}\int_0^{b+L} f_0(h)Q(h)dh \tag{3.1.37}$$

Υποθέτοντας ότι $v_{imp} \geq v_{bl}$ η (3.1.35) μπορεί να γραφεί για την εναπομένουσα ταχύτητα $v_{res} = v(b + L)$, ως εξής

$$v_{res}^2 = \frac{1}{T}\left[v_{imp}^2 - \frac{2}{m}\int_0^{b+L} f_0(h)Q(h)dh\right] = \frac{1}{T}\left[v_{imp}^2 - v_{bl}^2\right] \tag{3.1.38}$$

Όπου

$$T = Q(b + L) \tag{3.1.39}$$

3.1.7 Εξισώσεις για σώμα με σχήμα κωνικής αιχμής

Αν η μύτη του διεισδυτή έχει σχήμα κωνικού σώματος εκ περιστροφής με ημιγωνία φ, τότε

$$\Phi(x) = \tan(\varphi)\, x \tag{3.1.40}$$

Και οι εξισώσεις (3.1.32) και (3.1.33) γράφονται στην παρακάτω μορφή

$$f_0(h) = e_0\varphi(h), f_2(h) = e_2\varphi(h) \tag{3.1.41}$$

Όπου

$$\varphi(h) = \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} x\, dx = 0.5[\Theta^2(h) - \theta^2(h)] \tag{3.1.42}$$

$$e_0 = \kappa e_2\ , e_2 = 2\pi B(\tan(\varphi)+\mu_{fr})\tan^3(\varphi), \kappa = \frac{A}{B\tan^2(\varphi)} \tag{3.1.43}$$

Στη συνέχεια παραγωγίζεται η (3.1.36)

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{2}{m} f_2(h) \exp\left(\frac{2}{m}\int_0^h f_2(\zeta)d\zeta\right) = \frac{2}{m} f_2(h)Q(h) = \frac{2e_2}{me_0} f_0(h)Q(h) \tag{3.1.44}$$

Επομένως,

$$\int_0^h f_0(\tilde{h})Q(\tilde{h})d\tilde{h} = \frac{m\kappa}{2}\int_0^h \frac{dQ(\tilde{h})}{d\tilde{h}} d\tilde{h} = \frac{m\kappa}{2}[Q(h) - 1] \tag{3.1.45}$$

Και η (3.1.35), που συνδέει την ταχύτητα v με το βάθος διείσδυσης h γράφεται

$$v^2(h) = \frac{1}{Q(h)}\left[v_{imp}^2 - \kappa(Q(h) - 1)\right] \tag{3.1.46}$$

Η (3.1.36) χρησιμοποιώντας την (3.1.42) ισοδυναμεί με

$$Q(h) = \exp\left(\frac{2e_2}{m}\int_0^h d\tilde{h}\int_{\theta(\tilde{h})}^{\Theta(\tilde{h})} x\, dx\right) = \exp\left(\frac{e_2}{m}\int_0^h\left[\Theta^2(\tilde{h}) - \theta^2(\tilde{h})\right]d\tilde{h}\right) \tag{3.1.47}$$

Στη συνέχεια, πρέπει να υπολογισθεί η (3.1.47) και για αυτό το σκοπό εισάγονται οι παρακάτω συναρτήσεις

$$\Lambda^{\theta}(\mathrm{h}) = \int_0^{\mathrm{h}} \theta^2(\tilde{h})\mathrm{d}\tilde{\mathrm{h}} = \begin{cases} 0 & \gamma\iota\alpha \quad 0 \le \mathrm{h} \le \mathrm{b} \\ \int_0^{\mathrm{h}} (\tilde{h} - \mathrm{b})^2 \mathrm{d}\tilde{\mathrm{h}} & \gamma\iota\alpha \quad \mathrm{b} \le \mathrm{h} \le \mathrm{b} + \mathrm{L} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \gamma\iota\alpha \quad 0 \le \mathrm{h} \le \mathrm{b} \\ (h - \mathrm{b})^3/3 & \gamma\iota\alpha \quad \mathrm{b} \le \mathrm{h} \ge \mathrm{b} + \mathrm{L} \end{cases} \tag{3.1.48}$$

$$\Lambda^{\Theta}(\mathrm{h}) = \int_0^{\mathrm{h}} \Theta^2(\tilde{h})\mathrm{d}\tilde{\mathrm{h}} = \begin{cases} \int_0^{\mathrm{h}} \tilde{h}^2 \mathrm{d}\tilde{\mathrm{h}} & \gamma\iota\alpha \quad 0 \le \mathrm{h} \le \mathrm{L} \\ \int_0^{\mathrm{L}} \tilde{h}^2 \mathrm{d}\tilde{\mathrm{h}} + \int_L^{\mathrm{h}} \mathrm{L}^2 \mathrm{d}\tilde{\mathrm{h}} & \gamma\iota\alpha \quad \mathrm{h} > L \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{h}^3/3 & \gamma\iota\alpha \quad 0 \le \mathrm{h} \le \mathrm{L} \\ \mathrm{L}^2(3\mathrm{h} - 2\mathrm{L})/3 & \gamma\iota\alpha \quad \mathrm{h} > L \end{cases} \tag{3.1.49}$$

Ακόμη για $\mathrm{h} = b + L$ ισχύει

$$\Lambda^{\theta}(b + L) = \mathrm{h}^3/3 \ , \Lambda^{\Theta}(\mathrm{b} + \mathrm{L}) = 3\mathrm{b} + \mathrm{L} \tag{3.1.50}$$

Και με αντικατάσταση στην (3.1.47) συνεπάγεται ότι

$$\mathrm{Q}(b + L) = \mathrm{T}, \mathrm{T} = \exp(\mathrm{e}_2 b \mathrm{L}^2/m) \tag{3.1.51}$$

Και με αντικατάσταση στην (3.1.38) προκύπτει

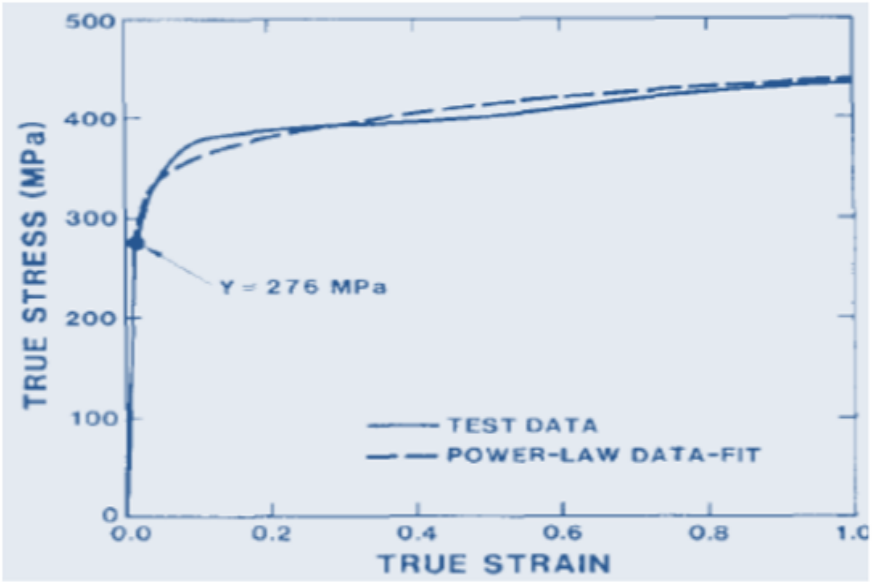
$$\mathrm{v}_{res}^2 = \frac{1}{\mathrm{T}}\left[\mathrm{v}_{\mathrm{imp}}^2 - \kappa(\mathrm{T} - 1)\right] \tag{3.1.52}$$

Όπου

$$\mathrm{v}_{\mathrm{bl}} = \sqrt{\kappa(\mathrm{T} - 1)} \tag{3.1.53}$$

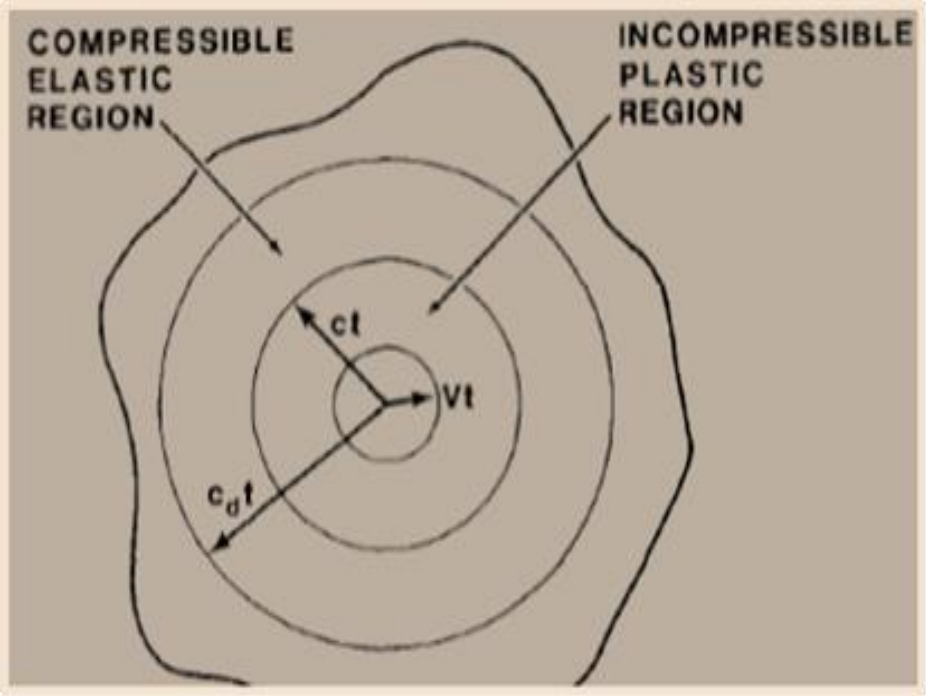
3.1.8 Θεωρία επεκτεινόμενης κοιλότητας (Cavity Expansion Theory (CET))

Σε αυτήν την ενότητα, θα γίνει παρουσίαση του μοντέλου της κυλινδρικά επεκτεινόμενης κοιλότητας για ένα σκληρυμένο υλικό (strain-hardening material). Οι Bishop, Hill και Mott εξήγαγαν εξισώσεις για την ημι-στατική (quasi-static) επέκταση κυλινδρικών κοιλοτήτων και εφάρμοσαν αυτές τις εξισώσεις για τον προσδιορισμό των φορτίων, που αναπτύσσονται σε έμβολα με κωνική αιχμή (conical nose punches) [42]. Αυτά τα μοντέλα βασίζονται πάνω σε αναπαραστάσεις γραμμικώς σκληρυμένων ελαστικών και ελαστοπλαστικών υλικών. Σε αυτήν την εργασία το υλικό στην πλαστική περιοχή θεωρείται, ότι ακολουθεί τον εκθετικό νόμο ενός σκληρυμένου υλικού (power-law strain hardening material), όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.5.



Εικόνα 3.5.Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για αλουμίνιο 5083-H113 [34].

Στην Εικόνα 3.6 φαίνεται μια κυλινδρικά συμμετρική κοιλότητα, που επεκτείνεται από αρχικώς μηδενική ακτίνα με σταθερή ταχύτητα V. Η πλαστική περιοχή φράσσεται από τις ακτίνες $r = Vt$ και $r = ct$, όπου r είναι η ακτίνα σε συντεταγμένες τύπου Euler, t είναι ο χρόνος και c η ταχύτητα του συνόρου μεταξύ ελαστικής-πλαστικής περιοχής. Παρόμοια, η ελαστική περιοχή φράσσεται από τις ακτίνες $r = ct$ και $r = c_d t$, όπου c_d είναι η ταχύτητα του ελαστικού κύματος (elastic dilatational velocity).



Εικόνα 3.6.Περιοχές απόκρισης που προβλέπονται από το μοντέλο της επεκτεινόμενης κοιλότητας [34].

3.1.8.1 Πλαστική περιοχή

Το υλικό στην πλαστική περιοχή θεωρείται ασυμπίεστο. Για κυλινδρική συμμετρία οι εξισώσεις διατήρησης ορμής και μάζας είναι οι παρακάτω [34].

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = -\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) \tag{3.1.54}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}[(r-u)^2] = 2r \tag{3.1.55}$$

Όπου σ_r και σ_θ είναι η ακτινική και γωνιακή συνιστώσες της τάσης αντιστοίχως, και θεωρούνται θετικές στη θλίψη του υλικού, ρ είναι η πυκνότητα, u η μετατόπιση και v η ταχύτητα, με θετική, να θεωρείται η φορά προς το εξωτερικό. Η ταχύτητα και η μετατόπιση συσχετίζονται με την εξίσωση

$$v\left(1 - \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.1.56}$$

Οι λογαριθμικές σχέσεις, που συνδέουν παραμορφώσεις-με μετακινήσεις, ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\varepsilon_r = \ln(1 - \frac{\partial u}{\partial r}) \tag{3.1.57}$$

$$\varepsilon_\theta = \ln(1 - \frac{u}{r}) \tag{3.1.58}$$

Όπου οι παραμορφώσεις θεωρούνται θετικές κατά τη διαστολή του υλικού. Για την περιγραφή της συμπεριφοράς του υλικού, εισάγονται δεδομένα από μονοαξονικά πειράματα θλιπτικών παραμορφώσεων και στη συνέχεια γίνεται γενίκευση και στους υπόλοιπους άξονες λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας. Αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων σε αλουμίνιο 5083-H113, με ρυθμό παραμόρφωσης (strain-rate) $10\,s^{-1}$ παρουσιάζονται στην Εικόνα 3.5. Η περιγραφή αυτών των δεδομένων γίνεται από τις εξισώσεις

$$\sigma = E\varepsilon\,, \sigma \leq Y \tag{3.1.59}$$

$$\sigma = \left(\frac{E\varepsilon}{Y}\right)^n, \sigma > Y \tag{3.1.60}$$

Όπου σ η τάση του Cauchy, ε η λογαριθμική (πραγματική) παραμόρφωση, E η σταθερά του Young, Y η τάση διαρροής και n ο εκθέτης παραμορφωσιακής σκλήρυνσης (strain-hardening exponent). Στη συνέχεια θεωρείται ότι η οκταεδρική εφαπτομενική τάση τ_n, είναι συνάρτηση της διατμητικής οκταεδρικής παραμόρφωσης γ_n. Για τα μονοαξονικά πειράματα ισχύουν οι εξισώσεις

$$\tau_n = \left[(2)^{1/2}/3\right]\sigma \tag{3.1.61}$$

$$\gamma_n = (2)^{1/2}\varepsilon \tag{3.1.62}$$

Αντικατάσταση των (3.1.61) και (3.1.62) στην (3.1.60) δίνει τη σχέση μεταξύ διατμητικής τάσης και παραμόρφωσης.

$$\frac{3\tau_n}{\sqrt{2}} = Y\left[\frac{E\gamma_n}{(\sqrt{2})Y}\right]^n \tag{3.1.63}$$

Για ασυμπίεστο υλικό και επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση, ισχύει $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$. Επομένως, για το πρόβλημα της επεκτεινόμενης κοιλότητας

$$\tau_n = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\sigma_r - \sigma_\theta) \tag{3.1.64}$$

$$\gamma_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\varepsilon_r \tag{3.1.65}$$

Η εξίσωση της πλαστική ροής αποκτάται με αντικατάσταση των (3.1.64) και (3.1.65) στην (3.1.63).

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \left[2/(3)^{1/2}\right]^{1+n} E^n Y^{1-n}(\varepsilon_r)^n \tag{3.1.66}$$

Όπου $\sigma_r - \sigma_\theta > 2Y/(3)^{1/2}$. Στο ελαστο-πλαστικό σύνορο δεν υπάρχει παραμορφωσιακή σκλήρυνση (strain-hardening), επομένως για $n = 0$, $(\sigma_r - \sigma_\theta) = 2Y/(3)^{1/2}$, που είναι το σύνηθες κριτήριο διαρροής του Mises. Στη συνέχεια εισάγονται οι αδιάστατες μεταβλητές

$$S = \frac{\sigma_r}{Y},\ \ U = \frac{v}{c}\ \ ,\bar{u} = \frac{u}{ct}\ \ ,\gamma = \frac{V}{c} \tag{3.1.67}$$

και ο μετασχηματισμός ομοιότητας (similarity transformation)

$$\xi = \frac{r}{ct} \tag{3.1.68}$$

Έπειτα από την απαλοιφή της σ_θ από την εξίσωση (3.1.54) με τις εξισώσεις (3.1.57) και (3.1.66) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.1.67) και (3.1.68) η εξίσωση της ορμής μετατρέπεται [34]

$$\frac{dS}{d\xi} = -\left[\frac{2}{(3)^{\frac{1}{2}}}\right]^{1+n}\left(\frac{E}{Y}\right)^n\frac{1}{\xi}\left[\ln\left(1 - \frac{d\bar{u}}{d\xi}\right)\right]^n + \frac{\rho c^2}{Y}(\xi - U)\frac{dU}{d\xi} \tag{3.1.69}$$

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες εξισώσεις (3.1.67) και (3.1.68) οι εξισώσεις (3.1.55) και (3.1.56) μετασχηματίζονται στις εξισώσεις.

$$\frac{d}{d\xi}[(\xi - \bar{u})^2] = 2\xi \tag{3.1.70}$$

$$U\left(1 - \frac{d\bar{u}}{d\xi}\right) = \bar{u} - \xi\frac{d\bar{u}}{d\xi} \tag{3.1.71}$$

Οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια της κοιλότητας είναι

$$\bar{u}(\xi = \gamma) = \gamma \tag{3.1.72}$$

Για ασυμπίεστο υλικό, η τάση και η ταχύτητα είναι συνεχείς στη διεπιφάνεια ελαστικής και πλαστικής περιοχής $\xi = 1$. Επομένως, ισχύει

$$S(\xi = 1) = S_1 \tag{3.1.73}$$

$$U(\xi = 1) = U_1 \tag{3.1.74}$$

Όπου S_1 και U_1 είναι η ακτινική τάση και ταχύτητα στην ελαστική περιοχή για $\xi = 1$. Η λύση της (3.1.70), που ικανοποιεί την συνθήκη (3.1.72) είναι η εξίσωση.

$$\bar{u} = \xi - (\xi^2 - \gamma^2)^{1/2} \tag{3.1.75}$$

Αντικατάσταση της (3.1.75) στην (3.1.71) δίνει

$$U = \frac{\gamma^2}{\xi} \tag{3.1.76}$$

Στη συνέχεια γίνεται αντικατάσταση των (3.1.75) και (3.1.76) στην εξίσωση (3.1.69) και προκύπτει η αδιάστατη ακτινική τάση [34].

$$S(\xi) = S_1 + \frac{2}{(3)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{E}{(3)^{\frac{1}{2}}Y}\right]^n \times \int_{\xi}^{1} \frac{1}{\xi}\left[\ln\left(\frac{\xi^2}{\xi^2 - \gamma^2}\right)\right]^n d\xi +$$

$$+\frac{\rho V^2}{2Y}(\gamma^2 - 2\ln(\xi) - \frac{\gamma^2}{\xi^2}) \tag{3.1.77}$$

Όπου οι S_1 και c ($\gamma = \frac{V}{c}$) μένουν να προσδιοριστούν. Για τον προσδιορισμό τους απαιτούνται πληροφορίες από την περιοχή του υλικού, που έχει παραμορφωθεί ελαστικά.

3.1.8.2 Ελαστική περιοχή

Οι Forestall, Crozier και Hunter, παρήγαγαν εξισώσεις για την ελαστική απόκριση του υλικού [43-44].

$$S(\xi) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{3}(1-2v)\sqrt{(1-a^2)}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{(1-2v)\sqrt{(1-a^2\xi^2)}}{\alpha^2\xi^2} + \ln\left[\frac{1+\sqrt{(1-a^2\xi^2)}}{\alpha\xi}\right] \right\} \tag{3.1.78}$$

Για $1 < \xi < 1/\alpha$ και

$$\alpha = {}^{c}/_{c_d}\ , c_d^2 = \frac{E(1-v)}{\rho(1+v)(1-2v)} \tag{3.1.79}$$

Στη διεπιφάνεια ελαστικής-πλαστικής περιοχής

$$U_1 = \frac{2(1+v)Y}{\sqrt{3}E} \tag{3.1.80}$$

3.1.8.3 Εξισώσεις απόκρισης

Η ταχύτητα στη διεπιφάνεια ελαστικής-πλαστικής περιοχής είναι δυνατόν να προσδιοριστεί από τις εξισώσεις (3.1.74), (3.1.76) και (3.1.80). Επομένως

$$\gamma = \frac{V}{c} = \left[\frac{2(1+v)Y}{\sqrt{3}E}\right]^{1/2} \tag{3.1.81}$$

Με $S_1 = S(\xi = 1)$ στην (3.1.78), η ακτινική τάση στην πλαστική περιοχή δίνεται από τη σχέση

$$S(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1 + \left[\frac{E}{\sqrt{3}Y}\right]^n I(\xi)\right\} + \frac{\rho V^2}{2Y}\left\{\frac{1}{(1-v)\sqrt{(1-\alpha^2)}}\right.$$

$$\left.\times \ln\left[\frac{1+\sqrt{(1-\alpha^2)}}{\alpha}\right] + \gamma^2 - 2\ln\xi - \frac{\gamma^2}{\xi^2}\right\} \tag{3.1.82}$$

Όπου το γ δίνεται από την (3.1.81), και

$$\alpha = \left[\frac{\sqrt{3}(1-2v)}{2(1-v)}\right]^{1/2}\left[(\sqrt{\rho/Y}/V)\right] \tag{3.1.83}$$

$$I(\xi) = \int_{1-(\gamma/\xi)^2}^{1-\gamma^2} \frac{(-lnx)^n}{(1-x)}\, dx \tag{3.1.84}$$

Η τιμή του α αποκτάται από τις εξισώσεις (3.1.79) και (3.1.81), και το ολοκλήρωμα $I(\xi)$ στην (3.1.84) αποκτάται από το ολοκλήρωμα στην (3.1.77) με τους συνεχείς μετασχηματισμούς $\zeta = (\gamma/\xi)^2$ και $\chi = 1 - \zeta$. Για $n = 1$, το $I(\xi)$ είναι η διαφορά μεταξύ δυο διλογαριθμικών συναρτήσεων (Abramowitz και Stegun [45]). Ο Amos [46] παρουσιάζει μια αριθμητική διαδικασία για τον προσδιορισμό του $I(\xi)$. Τα μοντέλα διάτρησης απαιτούν την ακτινική τάση στην επιφάνεια της κοιλότητας συναρτήσει της ταχύτητας που επεκτείνεται.

Η ακτινική τάση στην επιφάνεια της κοιλότητας ($\xi = \gamma$) είναι

$$S(\xi = \gamma) = \frac{\sigma_r(\xi = \gamma)}{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1 + \left[\frac{E}{\sqrt{3}Y}\right]^n I(\xi = \gamma)\right\} +$$

$$+\frac{\rho V^2}{2Y}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{(1-v)\sqrt{(1-\alpha^2)}} \times \ln\left[\frac{1+\sqrt{(1-\alpha^2)}}{\alpha}\right] + \gamma^2 \\ -2\ln\gamma - 1\end{array}\right\} \tag{3.1.85}$$

Όπου γ και α δίνονται από τις (3.1.81) και (3.1.83). Όπως φαίνεται από την (3.1.83), το α εξαρτάται από την V. Προκειμένου να αναπτυχθούν εξισώσεις σε κλειστή μορφή, η (3.1.85) απλοποιείται περαιτέρω μέσω της ανάπτυξης των όρων, που περιέχουν το α σε σειρά. Επομένως, μια προσεγγιστική έκφραση για την (3.1.85) είναι

$$S(\xi=\gamma)=\frac{\sigma_r(\xi=\gamma)}{Y}=\overline{A}+\overline{B}(\rho/Y)V^2 \tag{3.1.86}$$

Όπου

$$\overline{A}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1+\left[\frac{E}{\sqrt{3}Y}\right]^n I(\xi=\gamma)\right\} \tag{3.1.87}$$

$$\overline{B}=\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\ln 2)}{(1-v)}+\gamma^2-2\ln\gamma-1\right] \tag{3.1.88}$$

Μέσω της (3.1.86) συνδέεται η τάση κατά την ακτινική διεύθυνση με την ταχύτητα που επεκτείνεται η κοιλότητα. και οι συντελεστές A και B είναι οι άγνωστοι συντελεστές της εξίσωσης (3.1.30).

3.1.9 Αναλυτικά μοντέλα υπολογισμού ταχύτητας εξόδου και ταχύτητας βαλλιστικού ορίου

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται δυο μοντέλα εύρεσης της ταχύτητας εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει της ταχύτητας πρόσκρουσης. Το δεύτερο μοντέλο είναι ουσιαστικά μια απλοποίηση του πρώτου όπου απαλείφονται κάποιοι όροι που αποδεικνύεται ότι έχουν ελάχιστη επίδραση στα τελικά αποτελέσματα.

Προκειμένου να χρησιμοποιηθεί η θεωρία της επεκτεινόμενης κοιλότητας για την επίλυση του προβλήματος διάτρησης πλάκας θεωρητικά άπειρης έκτασης και πεπερασμένου πάχους από διεισδυτή κωνικής αιχμής, γίνεται η παραδοχή, ότι η πλάκα δεν είναι συνεχής κατά πάχος αλλά αποτελείται από διακριτά στρώματα κάθετα στην διεύθυνση κίνησης του διεισδυτή. Ακόμη, με την παραδοχή της αξονοσυμμετρίας το πρόβλημα περιορίζεται από τρείς σε μια διάσταση, που αντιστοιχεί στην αξονική διεύθυνση. Στην Εικόνα 3.7 φαίνονται οι διαστάσεις του διεισδυτή με γωνία αιχμής 2φ και διάμετρο της βάσης 2α. Ακόμη, οι τάσεις, που αναπτύσσονται κατά την αξονική διεύθυνση στην κοιλότητα, ισούνται με τις κάθετες τάσεις, που ασκούνται στην επιφάνεια του διεισδυτή. Επομένως, από την ισότητα των (3.1.30) και (3.1.86) ισχύει η εξίσωση

$$\sigma_r(\xi=\gamma)=\sigma_n(u,v)=A+B\left(\frac{u^2}{1-u^2}\right)v^2 \tag{3.1.89}$$

Όπου

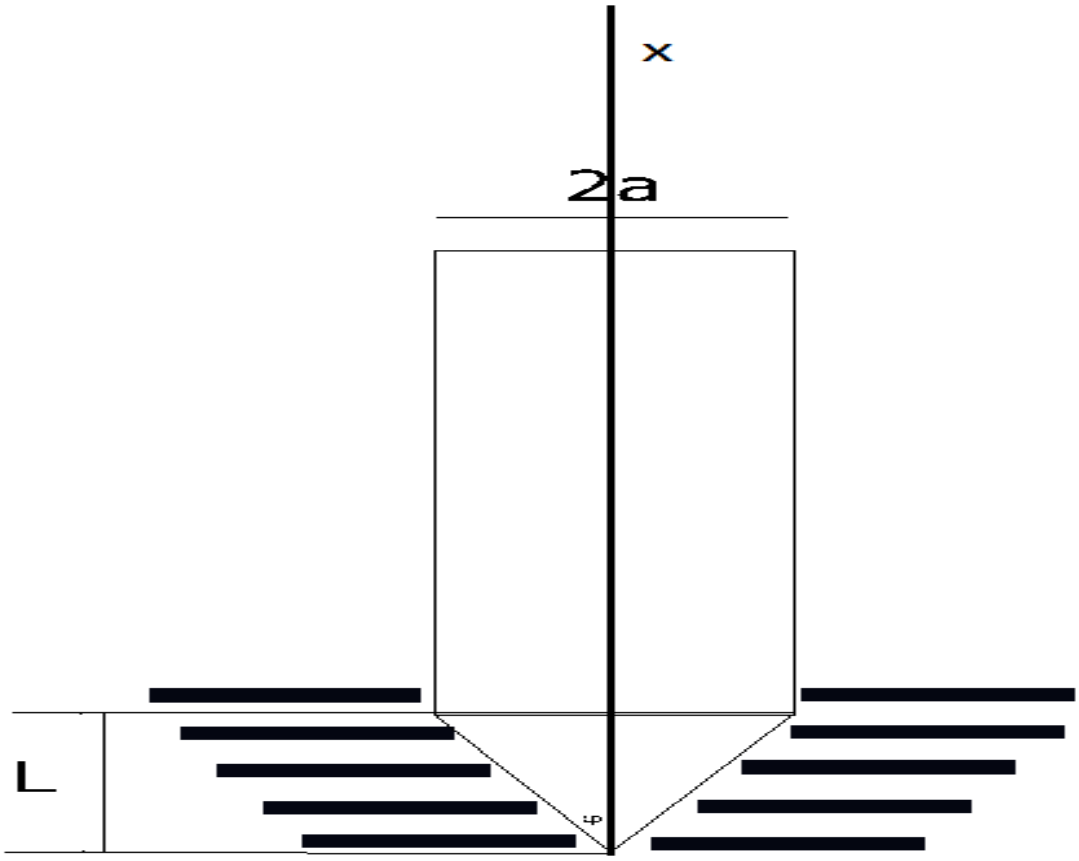
$$A = Y\overline{A} = \frac{Y}{\sqrt{3}}\left\{1 + \left[\frac{E}{\sqrt{3}Y}\right]^{n} I(\xi = \gamma)\right\} \tag{3.1.90}$$

$$B = \rho\overline{B} \tag{3.1.91}$$

Ακόμη, για κωνικό διεισδυτή που προσκρούει κάθετα στην πλάκα ισχύει $u = \sin(\varphi)$ και με αντικατάσταση στην (3.1.30) προκύπτει

$$\sigma_n(u, v) = A + B(\tan(\varphi)\, v)^2 \tag{3.1.92}$$

Επομένως, αν η ταχύτητα πρόσκρουσης είναι v, τότε συνδέεται με την ταχύτητα επέκτασης της κοιλότητας V, μέσω της σχέσης $V = v\tan(\varphi)$.



Εικόνα 3.7. Απεικόνιση της διάτρησης πλάκας από συμμετρικό διεισδυτή βάσει των παραδοχών της θεωρίας της επεκτεινόμενης κοιλότητας. Το υλικό θεωρείται ότι δεν είναι συνεχές αλλα αποτελείται από διακριτά στρώματα που ανοίγουν κατά την εισχώρηση του διεισδυτή.

Για το διεισδυτή της Εικόνα 3.7 ισχύει η παρακάτω σχέση, που συνδέει τη μάζα με την πυκνότητα και τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά.

$$m = \rho_b \pi a^2 (L_0 + L/3) \tag{3.1.93}$$

Στη συνέχεια ξαναγράφεται η (3.1.43)

$$e_0 = \kappa e_2 \, , e_2 = 2\pi B(\tan(\varphi) + \mu_{fr})\tan^3(\varphi), \kappa = \frac{A}{B\tan^2(\varphi)}$$

Που ισοδυναμεί με τις εξισώσεις

$$e_2 = 2\pi\rho\overline{B}\left(1 + \frac{\mu_{fr}}{\tan(\varphi)}\right)\tan^4(\varphi) = \, , \kappa = \frac{A}{\rho\overline{B}\tan^2(\varphi)} \tag{3.1.94}$$

Οι συντελεστές A και B είναι πλέον γνωστοί από τις (3.1.90) και (3.1.91). Στη συνέχεια, ξαναγράφεται η (3.1.53), για να υπολογιστεί η ταχύτητα βαλλιστικού ορίου.

$$v_{bl} = \sqrt{\kappa(T - 1)}$$

Με αντικατάσταση του e_2 της (3.1.94) και της μάζας m από την (3.1.93) στην (3.1.51)

$$T = \exp(e_2 b L^2/m) = \exp\left(\frac{2\pi B\left(1 + \frac{\mu_{fr}}{\tan(\varphi)}\right)\tan^4(\varphi) b L^2}{\rho_b \pi a^2 (L_0 + L/3)}\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{2\pi\rho\overline{B}\left(1 + \frac{\mu_{fr}}{\tan(\varphi)}\right)\tan^4(\varphi) b L^2}{\rho_b \pi a^2 (L_0 + L/3)}\right)$$

Ακόμη, ισχύει $\mathrm{L}\tan(\varphi) = \mathrm{a}$ και θεωρείται ότι η επίδραση της τριβής είναι αμελητέα $\mu_{\mathrm{fr}} = 0$. Επομένως, ισχύει

$$\mathrm{T} = \exp\left(\frac{2b}{(\mathrm{L}_0 + \mathrm{L}/3)}\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{b}}}\overline{\mathrm{B}}\tan^2(\varphi)\right) \tag{3.1.95}$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.1.94) και (3.1.95) στην (3.1.53) προκύπτει

$$\mathrm{v}_{\mathrm{bl}} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{A}}{\rho\overline{\mathrm{B}}\tan^2(\varphi)}\right)}\sqrt{\exp\left(\frac{2b}{(\mathrm{L}_0 + \mathrm{L}/3)}\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{b}}}\overline{\mathrm{B}}\tan^2(\varphi)\right) - 1} \tag{3.1.96}$$

Ακόμη, από την (3.1.52) ισχύει

$$\mathrm{v}_{res}^2 = \frac{1}{\mathrm{T}}\left[\mathrm{v}_{\mathrm{imp}}^2 - \kappa(\mathrm{T} - 1)\right] = \left[\mathrm{v}_{\mathrm{imp}}^2 - \mathrm{v}_{\mathrm{bl}}^2\right]\mathrm{T}^{-2}$$

$$\mathrm{v}_{res} = \sqrt{\left[\mathrm{v}_{\mathrm{imp}}^2 - \mathrm{v}_{\mathrm{bl}}^2\right]}\exp\left(-\frac{b}{(\mathrm{L}_0 + \mathrm{L}/3)}\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{b}}}\overline{\mathrm{B}}\tan^2(\varphi)\right) \tag{3.1.97}$$

3.1.9.1 Απλοποιημένο αναλυτικό μοντέλο

Όπως, φαίνεται στις εξισώσεις (3.1.96) και (3.1.97) η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή και η ταχύτητα βαλλιστικού ορίου, εξαρτώνται από αρκετές παραμέτρους. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι ορισμένες από αυτές τις παραμέτρους έχουν μικρή επίδραση στα τελικά αποτελέσματα με την ακόλουθη διαδικασία.

Ορίζεται, η παράμετρος

$$C = \frac{2b}{(L_0 + L/3)} \frac{\rho}{\rho_b} \overline{B} \tan^2(\varphi) \tag{3.1.98}$$

Έπειτα, απλοποιούνται οι εξισώσεις (3.1.96) και (3.1.97) με ανάπτυξη των εκθετικών όρων σε σειρά και αποδεικνύεται, ότι προσεγγίζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$v_{bl} = \sqrt{\frac{2A}{\rho_b} \frac{b}{(L_0 + L/3)}} \sqrt{\left(1 + C + \frac{2}{3} C^2\right)} \tag{3.1.99}$$

$$v_{res} = \sqrt{\left[v_{imp}^2 - v_{bl}^2\right]} \sqrt{\left(1 - C + \frac{1}{2} C^2\right)} \tag{3.1.100}$$

Αποδεικνύεται ότι [35] η σταθερά $C \ll 1$,επομένως οι (3.1.99) και (3.1.100) απλοποιούνται στην παρακάτω μορφή

$$v_{bl} = \sqrt{\frac{2A}{\rho_b} \frac{b}{(L_0 + L/3)}} \tag{3.1.101}$$

$$v_{res} = v_{bl} \sqrt{\left[\left(\frac{v_{imp}}{v_{bl}}\right)^2 - 1\right]} \tag{3.1.102}$$

Από τις (3.1.101) και (3.1.102) εξάγεται το συμπέρασμα ότι η πυκνότητα της πλάκας και ο συντελεστής $\overline{B}$ της (3.1.91) έχουν ασθενή επίδραση στα τελικά αποτελέσματα. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι οι τελικές ταχύτητες δεν εξαρτώνται από την ακτίνα της πλευρικής επιφάνειας του διεισδυτή a, αφού απαλείφεται από τις εξισώσεις ακόμη και στην μη απλοποιημένη τους μορφή.

Σε αυτό το σημείο, λήγει η παρουσίαση των αναλυτικών μοντέλων, που προσδιορίζουν την ταχύτητα εξόδου του κυλινδρικού διεισδυτή κωνικής αιχμής κατά την πρόσκρουση σε πλάκα αλουμινίου. Σε αυτά τα μοντέλα η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων του υλικού θεωρείται, ότι ακολουθεί τον λογαριθμικό νόμο, ωστόσο για προσομοιώσεις

κρούσεων υψηλών ταχυτήτων με αριθμητικές μεθόδους, είναι δυνατή η χρήση συνθετότερων μοντέλων, που περιγράφουν ακριβέστερα τη συμπεριφορά του υλικού. Ένα μοντέλο αυτού του τύπου περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο.

3.1.10 Αναλυτικό μοντέλο Johnson-Cook

Οι κρούσεις υψηλών ταχυτήτων περιλαμβάνουν φαινόμενα πλαστικής διαρροής σε υψηλούς ρυθμούς παραμορφώσεων, τοπικές αυξήσεις της θερμοκρασίας και ενδεχομένως, θραύση του υλικού. Η συνήθης προσέγγιση σε αριθμητικές προσομοιώσεις είναι η χρησιμοποίηση δύο διαφορετικών μοντέλων, όπου το ένα αναπαριστά την τάση διαρροής και το άλλο την θραύση. Αυτά τα δυο μοντέλα είναι δυνατόν να είναι συζευγμένα η μη.

Είναι γνωστό ότι η τάση διαρροής, είναι συνάρτηση της πλαστικής παραμόρφωσης, του ρυθμού παραμόρφωσης και της θερμοκρασίας. Έχουν προταθεί αρκετά καταστατικά μοντέλα και μερικά από αυτά περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό παραμέτρων, μερικές φορές και περισσότερες από δέκα, που πρέπει να προσδιοριστούν από πειραματικές μετρήσεις στο υλικό. Τέτοιου τύπου μοντέλα μπορεί να παρέχουν ακριβείς προβλέψεις κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, αλλά μπορεί να είναι δύσκολο να καλιμπραριστούν, ειδικότερα όταν οι εμπλεκόμενες παράμετροι στερούνται φυσικής ερμηνείας σε μακροσκοπικό επίπεδο.

Αντιθέτως, απλούστερα μοντέλα που αποτελούνται από σχετικά λίγες παραμέτρους φαίνεται να είναι πιο δημοφιλή. Ένα από τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα σε προβλήματα κρούσεων είναι το μοντέλο Johnson-Cook, το οποίο είναι κατάλληλο για αριθμητικές προσομοιώσεις και αποτελείται από πέντε παραμέτρους, που πρέπει να προσδιοριστούν από πειράματα στο υλικό. Το πρωτότυπο μοντέλο είναι

$$\sigma_{eq} = (A + Bp^{n})(1 + C\ln\dot{p}^{*})(1 - T^{*m}) \tag{3.1.103}$$

Όπου p είναι η πλαστική παραμόρφωση, $\dot{p}^{*} = \dot{p}/\dot{p}_0$ είναι ο αδιάστατος ρυθμός πλαστικής παραμόρφωσης με $\dot{p}_0$ να είναι ο ρυθμός παραμόρφωσης αναφοράς και θεωρείται ίσος με $1s^{-1}$. Ο όρος $T^{*} = (T - T_0)/(T_m - T_0)$, είναι η αδιάστατη θερμοκρασία, όπου T_0 είναι η θερμοκρασία δωματίου και T_m η θερμοκρασία αλλαγής φάσης του υλικού (melting temperature). Όπως φαίνεται, από την (3.1.103) η ισοδύναμη τάση διαρροής είναι το γινόμενο τριών παραγόντων, που αναπαριστούν παραμορφωσιακή σκλήρυνση (strain-hardening), ρυθμό παραμόρφωσης και θερμοκρασία. Αυτό διευκολύνει το καλιμπράρισμα του μοντέλου διότι κάθε μια από τις παρενθέσεις μπορεί να αντιμετωπιστεί ξεχωριστά σε τρείς σειρές μονοαξονικών (uniaxial) πειραμάτων.

Ένα πιθανό πρόβλημα, που σχετίζεται με την (3.1.103), είναι ότι η λογαριθμική συνάρτηση $\ln\dot{p}^{*}$ πλησιάζει το μείον άπειρο για πολύ μικρούς ρυθμούς παραμορφώσεων. Προκειμένου να αποφευχθούν αριθμητικές δυσκολίες στο τμήμα της κατασκευής, όπου το $\dot{p}^{*}$είναι κοντά στο μηδέν, όπως σε στατικές συνθήκες, έχει προταθεί μία τροποποίηση του αρχικού μοντέλου [47].

$$\sigma_{eq} = (A + Bp^{n})(1 + \dot{p}^{*})^{C}(1 - T^{*m}) \tag{3.1.104}$$

Το τροποποιημένο μοντέλο Johnson-Cook έχει χρησιμοποιηθεί σε μελέτη διάτρησης μεταλλικών πλακών [48].

Όσο αφορά τη μοντελοποίηση της θραύσης, είναι ευρέως αποδεχτό, ότι η τριαξονικότητα της τάσης (stress triaxiality) έχει μεγάλη επίδραση στις ιδιότητες όλκιμης θραύσεως του υλικού (ductile fracture properties). Μια συνήθης τεχνική για την μεταβολή της τριαξονικότητας είναι η χρησιμοποίηση δοκιμίων με, διαφορετικού μεγέθους, εγκοπές. Έχει αποκαλυφθεί από αρκετές έρευνες, ότι η αυξημένη τριαξονικότητα μειώνει την ολκιμότητα και συνεπώς την τάση διαρροής. Η τριαξονικότητα, συνήθως, αναπαρίσταται από την αδιάστατη αναλογία τασικής τριαξονικότητας (stress triaxiality ratio), που ορίζεται ως

$$\sigma^{*} = \frac{\sigma_{H}}{\sigma_{eq}} =$$

$$= \frac{\left(\sigma_{x} + \sigma_{y} + \sigma_{z}\right)/3}{\sqrt{\sigma_{x}^{2} + \sigma_{y}^{2} + \sigma_{z}^{2} - \sigma_{x}\sigma_{y} - \sigma_{y}\sigma_{z} - \sigma_{z}\sigma_{x} + 3\left(\tau_{xy}^{2} + \tau_{yz}^{2} + \tau_{zx}^{2}\right)}} \tag{3.1.105}$$

Όπου σ_{H} είναι η υδροστατική τάση, και σ_{eq} η ισοδύναμη τάση κατά Mises. Για μονοαξονική εντατική κατάσταση, όπου σ_{x} είναι η μόνη μη μηδενική συνιστώσα, ισχύει $\sigma_{x} = \sigma_{eq}$ και $\sigma^{*} = 1/3$ [31].

Οι Johnson και Cook πρότειναν ένα μοντέλο θραύσεως, όπου η ισοδύναμη τάση πλαστικής θραύσης p_{f}, εξαρτάται από τον ρυθμό παραμόρφωσης και την θερμοκρασία, επιπρόσθετα της τασικής τριαξονικότητας. Το προτεινόμενο μοντέλο έχει παρόμοια μορφή με την (3.1.103) και γράφεται

$$p_{f} = (D_{1} + D_{2}p^{D_{3}\sigma^{*}})(1 + \dot{p}^{*})^{D_{4}}(1 + D_{5}T^{*}) \tag{3.1.106}$$

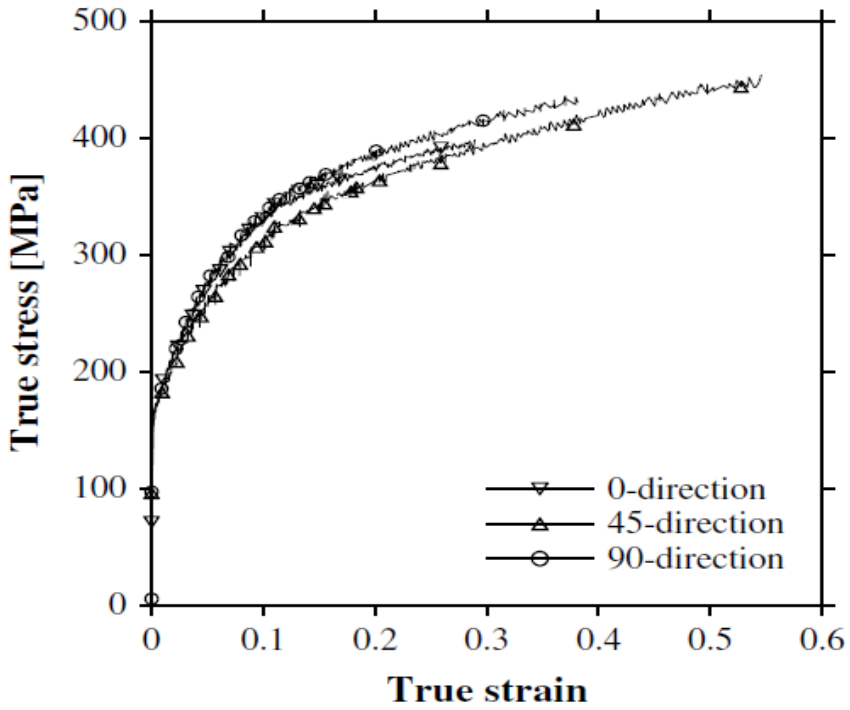
Συνοψίζοντας, το καλιμπράρισμα του τροποποιημένου μοντέλου Johnson Cook απαιτεί ημιστατικές δοκιμές (quasi static tests), δοκιμές ρυθμού παραμόρφωσης (strain rate tests) και δοκιμές θερμοκρασίας (temperature tests). Οι ίδιες δοκιμές χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του μοντέλου θραύσεως, αλλά επιπρόσθετα πρέπει να πραγματοποιηθούν μονοαξονικά πειράματα (uniaxial tensile tests) σε δοκίμια, με διαφορετικών διαστάσεων εγκοπές, ώστε να μεταβάλλεται ο συντελεστής τριαξονικότητας.

Πριν από το καλιμπράρισμα της (3.1.106) πρέπει να προσδιοριστεί η παραμόρφωση θραύσεως (fracture strain). Περισσότερες λεπτομέρειες για τη διεξαγωγή των πειραμάτων δίνονται στην [31].

3.1.11 Επιλογή τιμών παραμέτρων του μοντέλου Johnson-Cook

Σε αυτήν την εργασία χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο Johnson-Cook για τις αριθμητικές προσομοιώσεις. Οι τιμές των παραμέτρων, που χρησιμοποιήθηκαν στο μοντέλο, είναι ίδιες με αυτές που δίνονται στην [41]. Στη συγκεκριμένη εργασία, οι σταθερές του υλικού για το λογαριθμικό μοντέλο, βασίστηκαν σε πειραματικά δεδομένα πειραμάτων ημι-στατικού εφελκυσμού (quasi-static tensile tests).Τα δοκίμια για τα συγκεκριμένα πειράματα πάρθηκαν από δείγματα πλακών αλουμινίου μεταβλητού πάχους και χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα εντατικής κατάστασης από μία μόνο διεύθυνση, επομένως δε μοντελοποιείται η πιθανή ανισοτροπία του υλικού. Ακόμη, έγινε η υπόθεση, ότι οι τιμές για το αλουμίνιο έχουν την ονομαστική τους τιμή. Προκειμένου να υπάρξει η καλύτερη δυνατή προσέγγιση στα πειραματικά δεδομένα οι συντελεστές του εκθετικού μοντέλου Y και n προσαρμόστηκαν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, με αποτέλεσμα ο συντελεστής Y να μην ταυτίζεται επακριβώς με την τάση διαρροής.

Συνεχίζοντας, οι παράμετροι του μοντέλου Johnson-Cook επιλέχθηκαν με βάση το εκθετικό μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα, οι σταθερές A και B της εξίσωσης (3.1.104) επιλέγονται έτσι, ώστε οι καμπύλες που προκύπτουν από τα δυο μοντέλα να ταυτίζονται, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.8.



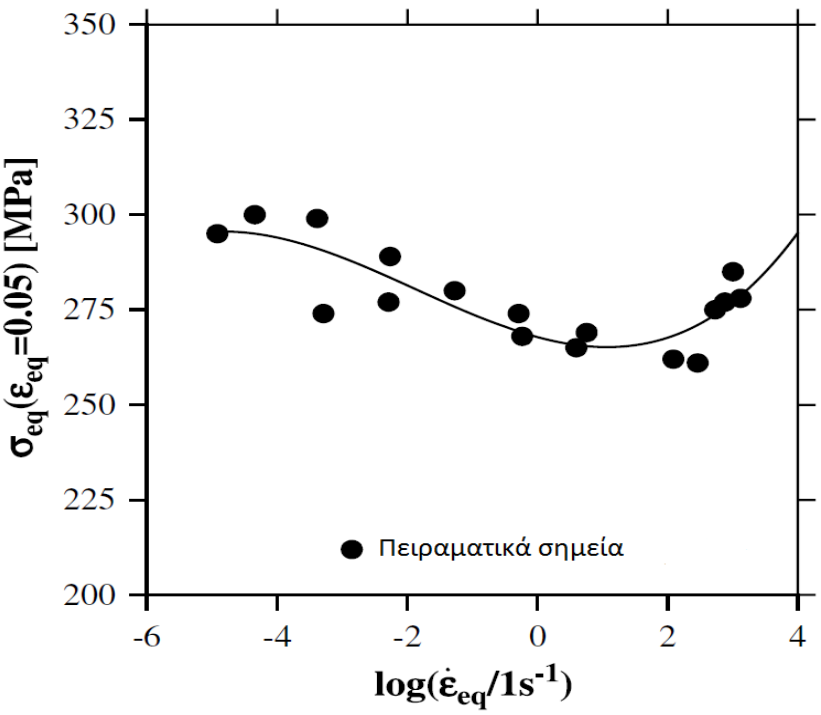
Εικόνα 3.8. Προσαρμογή του εκθετικού μοντέλου και του μοντέλου Johnson-Cook σε πειραματικές τιμές τυπικών μονοαξονικών πειραμάτων, για τέσσερα διαφορετικά πάχη πλακών από κράμα αλουμινίου AA5083-H116 [41].

Στον πίνακα 1 φαίνονται οι τιμές, που έχουν επιλεγεί για το εκθετικό μοντέλο και το μοντέλο Johnson-Cook [41].

Πίνακας 1

Πάχος πλάκας	Τάση διαρροής	Εκθετικό Μοντέλο		Μοντέλο Johnson-Cook		
b	σ_{02}(MPa)	Y(MPa)	n	A	B	n
15	278	245	0.160	143	462	0.216
20	230	194	0.185	124	456	0.252
25	152	118	0.246	59	511	0.285
30	224	190	0.192	119	475	0.256

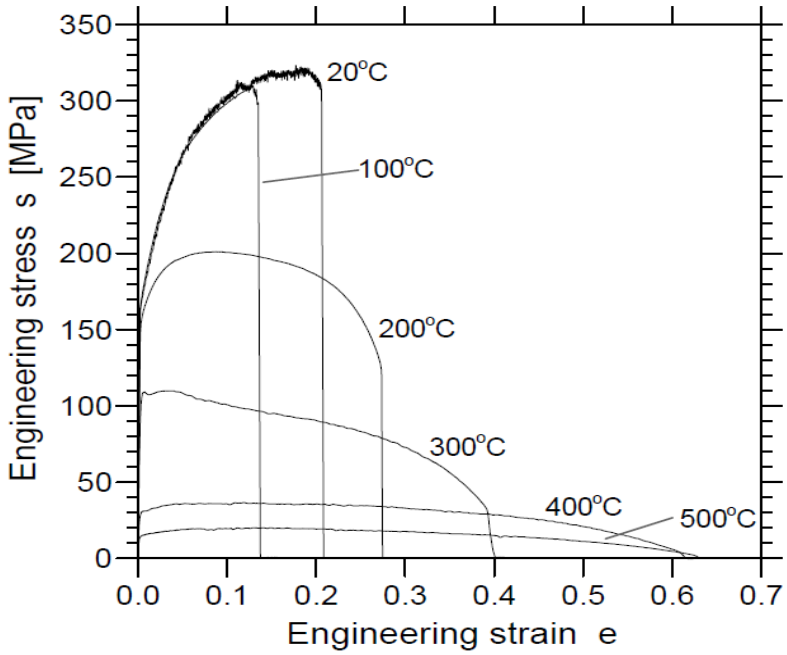
Ένα πλεονέκτημα με τις προσομοιώσεις πεπερασμένων στοιχείων είναι ότι φαινόμενα, όπως σκλήρυνση λόγω του ρυθμού παραμόρφωσης (strain-rate hardening) και μαλάκωμα λόγω θερμοκρασίας (temperature softening), είναι εύκολο να συμπεριληφθούν στις εξισώσεις. Για τον προσδιορισμό του συντελεστή ρυθμού παραμόρφωσης C χρησιμοποιήθηκαν τα πειράματα εντατικής κατάστασης σε δυναμικές συνθήκες (dynamic tensile tests), που φαίνονται στην Εικόνα 3.9.



Εικόνα 3.9. Τάση διαρροής για 5% πλαστική παραμόρφωση στην 0° διεύθυνση ως συνάρτηση του αδιάστατου ρυθμού παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}^*_{eq} = \dot{\varepsilon}_{eq}/\dot{\varepsilon}_0$ όπου $\dot{\varepsilon}_0 = 1s^{-1}$ [31].

Όπως φαίνεται και στην ίδια εικόνα το κράμα αλουμινίου AA5083-H116 παρουσιάζει δυναμική παραμορφωσιακή σκλήρυνση (dynamic strain aging), δηλαδή αρνητική κλίση της καμπύλης τάσης διαρροής-ρυθμού παραμόρφωσης, για χαμηλούς ρυθμούς παραμόρφωσης και θερμοκρασίας δωματίου. Αυτό το φαινόμενο δεν είναι δυνατό να υπολογισθεί από το μοντέλο, για αυτό λήφθηκαν μόνο δεδομένα, που δίνουν θετική κλίση της καμπύλης.

Όσο αφορά την παράμετρο m, που σχετίζεται με το μαλάκωμα του υλικού λόγω της θερμοκρασίας, η τιμή της υπολογίσθηκε από πειράματα εντατικής κατάστασης σε αυξημένες θερμοκρασίες. Αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων φαίνονται στην Εικόνα 3.10.



Εικόνα 3.10. Αντιπροσωπευτικές καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων σε αυξημένες θερμοκρασίες [31].

Είναι φανερή από τις καμπύλες η επίδραση της θερμοκρασίας στη μηχανική συμπεριφορά του υλικού. Στον πίνακα 2 φαίνονται οι τιμές των παραμέτρων C και m συν οι τιμές κάποιων σημαντικών σταθερών, που αφορούν τις ιδιότητες του υλικού [41].

Πίνακας 2

Ελαστικές σταθερές και πυκνότητα			Σκλήρυνση που οφείλεται στο ρυθμό παραμόρφωσης (strain-rate hardening)			Θερμοκρασιακή χαλάρωση και αδιαβατική αύξηση θερμοκρασίας (temperature softening and adiabatic heating).				
E(GPa)	v	$\rho(Kg/m^3)$	C	$\dot{\varepsilon}_0\ [s^{-1}]$	m	$C_p[J/KgK]$	χ	$a\ [K^{-1}]$	T_m[K]	T_r[K]
70	0.3	2700	0.008	1	0.859	910	0.9	2.3×10^{-5}	893	293

3.2 Μη γραμμική ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γίνει αναφορά στην αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

3.2.1 Εξισώσεις ισορροπίας

Όπως και στην περίπτωση των αναλυτικών μοντέλων, η έννοια της τάσης είναι βασική για την εξαγωγή των εξισώσεων της κίνησης. Προκειμένου να συνδεθεί το πεδίο των τάσεων με το πεδίο των ταχυτήτων, χρησιμοποιείται η αρχή διατήρησης της ορμής, σε ένα σώμα V με σύνορο S.

$$\int_S \vec{t} dS + \int_V \rho \vec{g} dV = \int_V \rho \ddot{\vec{u}} dV \tag{3.2.1}$$

Όπου $\vec{t}$ είναι το διάνυσμα της τάσης, που ασκείται στην επιφάνεια dS και $\vec{u}$ το διάνυσμα της μετακίνησης ενός σημείου του σώματος V. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται ο τανυστής των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$ για να συνδεθεί το διάνυσμα της τάσης $\vec{t}$ με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια dS.

$$\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \tag{3.2.2}$$

Και με αντικατάσταση στην (3.2.1) προκύπτει

$$\int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho \vec{g} dV = \int_V \rho \ddot{\vec{u}} dV \tag{3.2.3}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιείται το θεώρημα της απόκλισης, προκειμένου να μετατραπεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο αριστερό μέρος.

$$\int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \overleftrightarrow{\sigma} dV \tag{3.2.4}$$

Και η (3.2.3) ισοδυναμεί με την εξίσωση

$$\int_V \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{g} - \rho \ddot{\vec{u}}\right) dV = 0 \tag{3.2.5}$$

Προκειμένου να ισχύει η ταυτότητα πρέπει η εξίσωση εντός του ολοκληρώματος να μηδενίζεται σε ολόκληρο το διάστημα ολοκλήρωσης. Επομένως, ισχύει

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\vec{g} - \rho\ddot{\vec{u}} = 0 \tag{3.2.6}$$

Στη συνέχεια εισάγεται ο μητρωικός τελεστής L

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{pmatrix} \tag{3.2.7}$$

Και η (3.2.6) ξαναγράφεται

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_{\mathrm{V}} + \rho\vec{g} - \rho\ddot{\vec{u}} = 0 \tag{3.2.8}$$

Όπου $\vec{\sigma}_{\mathrm{V}}$ είναι ο τανυστής των τάσεων εκφρασμένος, ως διάνυσμα με το συμβολισμό του Voigt.

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{V}} = \left(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\right) \tag{3.2.9}$$

Στη συνέχεια, προκειμένου να μετασχηματισθεί η (3.2.8) σε ασθενή διατύπωση, πολλαπλασιάζεται με μία μεταλλαγή της συνάρτησης των μετατοπίσεων $\delta\vec{u}$ και ολοκληρώνεται στο πεδίο, που καταλαμβάνεται από το σώμα.

$$\int_{\mathrm{V}} \delta\vec{u}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_{\mathrm{V}} + \rho\vec{g} - \rho\ddot{\vec{u}}\right)\mathrm{dV} = 0 \tag{3.2.10}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης η (3.2.10) ισοδυναμεί με την παρακάτω εξίσωση.

$$\int_{\mathrm{V}} \left(\rho\delta\vec{u}^{\mathrm{T}}\ddot{\vec{u}} + (\mathbf{L}\delta\vec{u})^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_{\mathrm{V}}\right)\mathrm{dV} = \int_{\mathrm{V}} \rho\delta\vec{u}^{\mathrm{T}}\vec{g}\mathrm{dV} + \int_{\mathrm{S}} \delta\vec{u}^{\mathrm{T}}\vec{t}\mathrm{dV} \tag{3.2.11}$$

Με οριακές συνθήκες $\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$ ή $\vec{u} = \vec{u}_{\mathrm{p}}$, ορισμένες σε διαφορετικές περιοχές της συνοριακής επιφάνειας S με αρχικές συνθήκες $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$ και $\dot{\vec{u}}(t_0) = \dot{\vec{u}}_0$.

Η ταυτότητα (3.2.11) είναι η ασθενής μορφή των εξισώσεων κίνησης και αναπαριστά την αρχή των δυνατών έργων εκφρασμένη στη συγκεκριμένη διαμόρφωση. Να σημειωθεί, ότι στην παραπάνω διατύπωση, δεν έχουν γίνει υποθέσεις, όσο αφορά την συμπεριφορά του υλικού, ως προς το μέγεθος των μεταβολών των μετατοπίσεων.

Επομένως, η συγκεκριμένη εξίσωση είναι έγκυρη για γραμμική αλλά και μη-γραμμική συμπεριφορά του υλικού ανεξάρτητα από το μέγεθος των μεταβολών των μετατοπίσεων.

3.2.2 Χωρική διακριτοποίηση με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων

Η εξίσωση (3.2.11) θα χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για την προσέγγιση με πεπερασμένα στοιχεία, όπου οι βασικοί άγνωστοι θεωρούνται οι μετακινήσεις στους κόμβους των στοιχείων. Με την εισαγωγή ενός διανύσματος $\vec{a}_k$, όπου περιέχει τις μετατοπίσεις (a_x, a_y, a_z) του ανύσματος μετατόπισης στον κόμβο k, είναι δυνατό να προσεγγισθεί το συνεχές πεδίο των μετατοπίσεων $\vec{u}$ χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες από τους n κόμβους ενός στοιχείου, ως εξής

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} h_k(\xi, \eta, \zeta)\, \vec{a}_k \tag{3.2.12}$$

Όπου h_k είναι οι συναρτήσεις σχήματος, ή αλλιώς συναρτήσεις παρεμβολής, του στοιχείου. Συνήθως, οι συναρτήσεις παρεμβολής είναι πολυώνυμα, που εκφράζονται, ως προς τις ισοπαραμετρικές συντεταγμένες (ξ, η, ζ).

Συνεχίζοντας, εισάγεται το διάνυσμα $\vec{a}_e$ το οποίο περιέχει τα ανύσματα των μετατοπίσεων όλων των κόμβων του στοιχείου e.

$$\vec{a}_e = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \tag{3.2.13}$$

Και το μητρώο μεγέθους $3 \times 3n$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \cdots & \cdots h_n & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 \cdots & \cdots 0 & h_n & 0 \\ 0 & 0 & h_1 \cdots & \cdots 0 & 0 & h_n \end{pmatrix} \tag{3.2.14}$$

Η παρεμβολή του συνεχούς πεδίου των μετακινήσεων εσωτερικά του στοιχείου μπορεί να γραφεί σε πιο συμπαγή μορφή

$$\vec{u} = \mathbf{H}\vec{a}_e \tag{3.2.15}$$

Οι μετακινήσεις που περιέχονται στο στοιχειακό διάνυσμα $\vec{a}_e$, συσχετίζονται με τις καθολικές μετακινήσεις (global displacements), που περιέχονται στο διάνυσμα των

καθολικών μετατοπίσεων $\vec{a}$, μέσω ενός μητρώου $\mathbf{Z}_e$, που αναπαριστά την τοπολογία της διακριτοποίησης

$$\vec{a}_e = \mathbf{Z}_e \vec{a} \tag{3.2.16}$$

Όταν το σύστημα αποτελείται από N καθολικούς βαθμούς ελευθερίας, το $\mathbf{Z}_e$ είναι ένα μητρώο $3n \times N$. Αν το καθολικό σύστημα συντεταγμένων (global coordinate system) και το στοιχειακό σύστημα συντεταγμένων (element coordinate system) έχουν τους ίδιους άξονες, το μητρώο $\mathbf{Z}_e$ αποτελείται απλώς από μηδενικά και μονάδες, αλλιώς εισάγονται στο μητρώο τα ημίτονα και συνημίτονα του μετασχηματισμού μεταξύ των δύο συστημάτων συντεταγμένων. Με την χρησιμοποίηση των εξισώσεων (3.2.15) και (3.2.16) η (3.2.11) γράφεται

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} \rho(\mathbf{H}\mathbf{Z}_e \delta\vec{a})^T \mathbf{H}\mathbf{Z}_e \ddot{\vec{a}} dV + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} (\mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{Z}_e \delta\vec{a})^T \vec{\sigma}_V dV$$

$$= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} \rho(\mathbf{H}\mathbf{Z}_e \delta\vec{a})^T \vec{g} dV + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_e} (\mathbf{H}\mathbf{Z}_e \delta\vec{a})^T \vec{t} dV \tag{3.2.17}$$

Όπου κάθε ολοκλήρωμα επεκτείνεται στο χώρο, που καταλαμβάνει το στοιχείο V_e, για κάθε ένα από τα n_e στοιχεία του πλέγματος. Οι καθολικές εικονικές μετατοπίσεις του ανύσματος $\delta\vec{a}$ είναι ανεξάρτητες από τις χωρικές συντεταγμένες, επομένως είναι δυνατόν να εξέλθουν από το ολοκλήρωμα, όπως και από το σύμβολο της αθροίσεως. Ακόμη, τα μητρώα $\mathbf{Z}_e$ δεν εξαρτώνται από τις χωρικές συντεταγμένες, αλλά διαφέρουν από στοιχείο σε στοιχείο, συνεπώς εξέρχονται μόνο από το ολοκλήρωμα και όχι από τη διαδικασία της αθροίσεως. Γνωρίζοντας ότι η (3.2.17) μηδενίζεται για κάθε $\delta\vec{a}$ λαμβάνεται η εξίσωση της χωρικά διακριτοποιημένης εξίσωσης ισορροπίας της ορμής.

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{a}} = \vec{f}_{ext} - \vec{f}_{int} \tag{3.2.18}$$

Όπου το μητρώο μάζας ισούται με

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \mathbf{Z}_e \tag{3.2.19}$$

Το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων

$$\vec{f}_{ext} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \rho \mathbf{H}^T \vec{g} dV + \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{S_e} \mathbf{H}^T \vec{t} dV \tag{3.2.20}$$

Και το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων

$$\vec{f}_{int} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \vec{\sigma}_V dV \tag{3.2.21}$$

Όπου

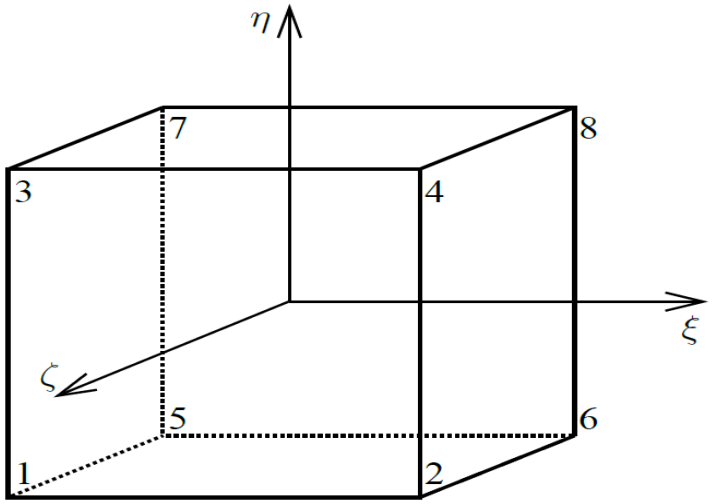
$$\mathbf{B} = \mathbf{LH} \tag{3.2.22}$$

Το μητρώο, που συνδέει τις παραμορφώσεις εσωτερικά ενός στοιχείου, με τις μετακινήσεις στους κόμβους.

Ο υπολογισμός του μητρώου μάζας και τα ανύσματα των εσωτερικών και των εξωτερικών δυνάμεων, όπως και ο υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας **K,** που θα παρουσιαστεί σε επόμενη ενότητα, απαιτούν τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων στο χώρο, που καταλαμβάνει κάθε στοιχείο. Οι συναρτήσεις που πρέπει να ολοκληρωθούν μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκες, αν χρησιμοποιηθούν συναρτήσεις παρεμβολής ανώτερης τάξης, αν για αξονοσυμμετρικά στοιχεία εισαχθούν παράγοντες της μορφής $1/r$, αν οι γεωμετρίες των στοιχείων δεν είναι ορθογώνιες, ή αν γεωμετρικές μη-γραμμικότητες είναι τόσο σημαντικές, που μεταβάλλουν το σχήμα του στοιχείου, από την αρχική τετραγωνική του μορφή. Αυτές, οι περιπλοκές, καθιστούν πρακτικά αδύνατο τον αναλυτικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στις εξισώσεις (3.2.19)-(3.2.21). Επιπρόσθετα, αν εισαχθούν μη-γραμμικότητες στο υλικό, μία εκτίμηση των ολοκληρωμάτων σε κλειστή μορφή είναι αδύνατη, αφού δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων οι τιμές των ιδιοτήτων του υλικού εσωτερικά του πεδίου. Για τους παραπάνω λόγους χρησιμοποιούνται μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης, όταν εμφανίζονται μη- γραμμικότητες, που οφείλονται είτε στο υλικό είτε στη γεωμετρία [49].

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί μια εφαρμογή αριθμητικής ολοκλήρωσης και θα χρησιμοποιηθεί για παράδειγμα το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων, που αντιστοιχούν σε ένα στοιχείο. Για να διευκολυνθεί ο υπολογισμός θα οριστεί μια απεικόνιση από ένα κυβικό αρχικό στοιχειό (Εικόνα 3.11) στο σύστημα συντεταγμένων (ξ, η, ζ), στο πραγματικό στοιχείο τυχαίας γεωμετρίας στο σύστημα (x, y, z). Αν $\vec{\xi}^T = [\xi, \eta, \zeta]$ και $\vec{x}^T = [x, y, z]$ ορίζεται η συνάρτηση

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}) \tag{3.2.23}$$



Εικόνα 3.11. Τρισδιάστατο στοιχείο οκτώ κόμβων σε ισοπαραμετρικές συντεταγμένες [49].

Παράδειγμα χρησιμοποίησης συναρτήσεων παρεμβολής [49].

Για ένα τρισδιάστατο στοιχείο οκτώ κόμβων χρησιμοποιούνται οι παρακάτω συναρτήσεις παρεμβολής.

$$h_1 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) h_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$h_2 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) h_6 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$h_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) h_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$h_4 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) h_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

Το μητρώο $\mathbf{B} = \mathbf{LH}$ περιλαμβάνει παραγώγιση ως προς τις καθολικές συντεταγμένες $\vec{x}$. Ωστόσο, οι συναρτήσεις παρεμβολής h_k είναι συναρτήσεις των ισοπαραμετρικών συντεταγμένων ξ. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται ο κανόνας της αλυσωτής παραγώγισης για να αποκτηθεί

$$\frac{\partial h_k}{\partial \vec{\xi}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \frac{\partial h_k}{\partial \vec{x}} = \mathbf{J} \frac{\partial h_k}{\partial \vec{x}}$$

Και με αντιστροφή προκύπτει

$$\frac{\partial h_k}{\partial \vec{x}} = \mathbf{J}^{-1}\frac{\partial h_k}{\partial \vec{\xi}}$$

Το μητρώο **B** είναι επομένως

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial h_8}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_8}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial \zeta} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \zeta} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial h_8}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & 0 & \cdots & \frac{\partial h_8}{\partial \eta} & \frac{\partial h_8}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & \cdots & 0 & \frac{\partial h_8}{\partial \zeta} & \frac{\partial h_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial h_1}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & \frac{\partial h_2}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial h_8}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial h_8}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

Όπου η αντίστροφη της ιακωβιανής γράφεται ως ένα μητρώο 6×6 συναρτήσει των ισοπαραμετρικών συντεταγμένων.

Οι παράγωγοι, που εμφανίζονται στην εξίσωση (3.2.21) μέσω του μητρώου **B,** υπολογίζονται με άμεση παραγώγιση, όπως φαίνεται και στο παράδειγμα. Χρησιμοποιώντας ένα συνήθη μετασχηματισμό το πεδίο ολοκλήρωσης σε συντεταγμένες x, y, z μπορεί να μετατραπεί στο απλό κυβικό πεδίο του αρχικού στοιχείου.

$$\vec{f}_{int} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\det\mathbf{J})\mathbf{B}^T\vec{\sigma}_V \, d\xi \, d\eta d\zeta \tag{3.2.24}$$

Όπου είναι εμφανές το πλεονέκτημα από τον ορισμό των συναρτήσεων παρεμβολής, ως προς τις ισοπαραμετρικές συντεταγμένες. Στην εξίσωση (3.2.24) **J** είναι η ιακωβιανή της απεικόνισης $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi})$ και ορίζεται ως

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \tag{3.2.25}$$

Ή αν γραφεί αλλιώς σε μητρωική γραφή

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.2.26}$$

Παρόμοια με την παρεμβολή του πεδίου των μετακινήσεων της εξίσωσης (3.2.12) η γεωμετρία προσεγγίζεται μέσω της εξίσωσης

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} h_k(\xi, \eta, \zeta)\, \vec{x}_k \tag{3.2.27}$$

Όπου $\vec{x}_k$ είναι οι χωρικές συντεταγμένες του κόμβου k. Όταν οι συναρτήσεις h_k, που χρησιμοποιούνται για την παρεμβολή του πεδίου των μετατοπίσεων είναι οι ίδιες με αυτές, που χρησιμοποιούνται για την παρεμβολή της γεωμετρίας, τότε ο σχηματισμός των πεπερασμένων στοιχείων ονομάζεται ισοπαραμετρικός (isoparametric). Όταν χρησιμοποιούνται συναρτήσεις κατώτερου βαθμού για την γεωμετρία τότε ο σχηματισμός ονομάζεται υποπαραμετρικός (subparametric), ενώ ο όρος υπερπαραμετρικός (superparametric) χρησιμοποιείται όταν η παρεμβολή της γεωμετρίας γίνεται με πολυώνυμα υψηλότερου βαθμού, σε σύγκριση με το πεδίο των μετακινήσεων [49].

Η ιακωβιανή έπειτα από αντικατάσταση της (3.2.27) στην (3.2.25) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_k}{\partial \vec{\xi}} \vec{x}_k^T \tag{3.2.28}$$

Τέλος, η αριθμητική ολοκλήρωση εφαρμόζεται για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στην (3.2.24).

$$\vec{f}_{int} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \sum_{i=1}^{n_i} w_i (\det \mathbf{J}_i) \mathbf{B}_i^T \vec{\sigma}_{Vi} \tag{3.2.29}$$

Όπου w_i είναι ο συντελεστής βάρους για το σημείο ολοκλήρωσης i, και n_i ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης στο στοιχείο e. Όλα τα μητρώα στις εξισώσεις (3.2.19)-(3.2.21) πρέπει να προσδιοριστούν ξεχωριστά για κάθε σημείο ολοκλήρωσης. Για συνεχή στοιχεία (continuum elements) έχει γίνει σύνηθες να χρησιμοποιείται η μέθοδος ολοκλήρωσης του Gauss, καθώς παρέχει τη μεγαλύτερη ακρίβεια για δεδομένο αριθμό σημείων ολοκλήρωσης.

3.2.3 Σταδιακή επαναληπτική ανάλυση (incremental iterative analysis)

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γίνει αναφορά στην επίλυση των στατικών εξισώσεων ισορροπίας, δηλαδή της (3.2.18), όπου $\ddot{\vec{a}} = 0$. Αν και η παρούσα εργασία ασχολείται με φαινόμενα δυναμικής φύσεως, η μεθοδολογία επίλυσης των εξισώσεων στατικών προβλημάτων είναι παρόμοια με τη μέθοδο επίλυσης δυναμικών προβλημάτων κατά τη μετάβαση από την μια χρονική στιγμή στην επόμενη. Μεθοδολογίες επίλυσης δυναμικών φαινομένων θα παρουσιαστούν σε επόμενο κεφάλαιο.

Για στατικά προβλήματα η (3.2.18) απλοποιείται στην εξίσωση

$$\vec{f}_{ext} - \vec{f}_{int} = 0 \tag{3.2.30}$$

Αν και ο χρόνος δεν παίζει πλέον κανένα ρόλο, είναι απαραίτητη η χρήση κάποιας παραμέτρου για τη διάταξη της αλληλουχίας των γεγονότων. Για αυτό το σκοπό και για στατικά προβλήματα συνεχίζεται να χρησιμοποιείται η έννοια του χρόνου, με την έννοια ότι το εξωτερικό φορτίο δεν ασκείται ακαριαία αλλά σταδιακά σε μία αλληλουχία βημάτων, Θα ήταν δυνατόν να ασκηθεί το φορτίο σε ένα μόνο βήμα, αλλά αυτή η προσέγγιση δεν ενδείκνυται για τους εξής λόγους.

Το σύνολο των αλγεβρικών εξισώσεων, που προκύπτει από την διακριτοποίηση ενός μη-γραμμικού συνεχούς μοντέλου, είναι και το ίδιο μη-γραμμικό. Επομένως, είναι δύσκολο να αποκτηθεί μία καλή σύγκλιση από την εφαρμογή μεγάλων φορτίων σε ένα μόνο βήμα. Ακόμη, πολλά υλικά επιδεικνύουν συμπεριφορά, που εξαρτάται από την προϊστορία του τρόπου φορτίσεως και συνεπάγεται, ότι προκύπτουν διαφορετικές τιμές τάσεων, ανάλογα με την πορεία των παραμορφώσεων. Για αυτό το λόγο η συμπεριφορά του υλικού μπορεί να προβλεφθεί σωστά, μόνο όταν οι παραμορφώσεις από το ένα βήμα στο άλλο είναι μικρές.

Στη συνέχεια, το διάνυσμα των τάσεων, που περιέχει τις άγνωστες συνιστώσες τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ και συμβολίζεται με $\vec{\sigma}_V^{t+\Delta t}$, αναλύεται στο διάνυσμα των τάσεων $\vec{\sigma}_V^{t}$ τη χρονική στιγμή t, που οι συνιστώσες της τάσης είναι γνωστές και στο διάνυσμα $\Delta\vec{\sigma}_V$, όπου περιέχονται οι άγνωστοι συντελεστές της τάσης και αναλογεί στο κομμάτι της τάσης μεταξύ των δυο βημάτων.

$$\vec{\sigma}_V^{t+\Delta t} = \vec{\sigma}_V^{t} + \Delta\vec{\sigma}_V \tag{3.2.31}$$

Με αντικατάσταση στην (3.2.30) και χρησιμοποιώντας την (3.2.21) προκύπτει

$$\vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \vec{\sigma}_V^{t} dV - \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \Delta\vec{\sigma}_V dV = 0 \tag{3.2.32}$$

Όπου με τη χρησιμοποίηση του άνω δείκτη $t + \Delta t$ στο εξωτερικό φορτίο $\vec{f}_{ext}$ δίνεται έμφαση ότι το εξωτερικό φορτίο πρέπει να υπολογιστεί τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$. Αντικαθιστώντας την (3.2.21) η

(3.2.32) ισοδυναμεί

$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \Delta\vec{\sigma}_V dV = \vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int}^{t} \tag{3.2.33}$$

Ο δείκτης t τοποθετείται στο $\vec{f}_{int}^{t}$ προκειμένου να σημειωθεί ότι το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων υπολογίζεται τη χρονική στιγμή t. Το σύστημα των συνήθως μη-γραμμικών εξισώσεων της (3.2.33) απαιτεί τη χρήση μιας επαναληπτικής διαδικασίας για την επίλυσή του. Συνήθως, τέτοιες τεχνικές όπως η μέθοδος Newton-Raphson, που χρησιμοποιείται συχνά στην ανάλυση των κατασκευών, περιλαμβάνουν γραμμικοποίηση των εξισώσεων προς επίλυση. Επομένως, πρέπει να γραμμικοποιηθεί η συσχέτιση της μεταβολής της τάσης $\Delta\vec{\sigma}_V$ με τη μεταβολή των μετατοπίσεων $\Delta\vec{u}$. Η μεταβολή της τάσης εξαρτάται από τη μεταβολή των παραμορφώσεων $\Delta\vec{\epsilon}$, ενώ η μεταβολή του τανυστή των παραμορφώσεων μπορεί να είναι μια μη-γραμμική συνάρτηση της μεταβολής του συνεχούς πεδίου των μετατοπίσεων [49].

$$\Delta\vec{\sigma}_V = \Delta\vec{\sigma}_V\left(\Delta\vec{\epsilon}_V(\Delta\vec{u})\right) \tag{3.2.34}$$

Η μεταβολή της τάσης $\Delta\vec{\sigma}_V$ μπορεί να γραμμικοποιηθεί ως εξής

$$\delta\vec{\sigma}_V = \left(\frac{\partial\vec{\sigma}_V}{\partial\vec{\epsilon}_V}\right)^t \delta\vec{\epsilon}_V \tag{3.2.35}$$

Ακόμη, ορίζεται το μητρώο δυσκαμψίας

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial\vec{\sigma}_V}{\partial\vec{\epsilon}_V}\right)^t \tag{3.2.36}$$

Επομένως, ισχύει

$$\delta\vec{\sigma}_V = \mathbf{D}\delta\vec{\epsilon}_V \tag{3.2.37}$$

Στην εξίσωση (3.2.11) ο δεύτερος όρος του αριστερού μέλους $\int_V (\mathbf{L}\delta\vec{u})^T \vec{\sigma}_V dV$ αναπαριστά το έργο των εσωτερικών δυνάμεων, το οποίο ορίζεται ως

$$\delta W_{int} = \int_V (\delta\vec{\epsilon}_V)^T \vec{\sigma}_V dV \tag{3.2.38}$$

Άρα, η μεταβολή του πεδίου των παραμορφώσεων σχετίζεται με τη μεταβολή του πεδίου των τάσεων με την ισότητα

$$\delta\vec{\epsilon}_V = \mathbf{L}\delta\vec{u} \tag{3.2.39}$$

Συνεχίζοντας, ξαναγράφεται η (3.2.11) για στατικές συνθήκες

$$\int_V (\delta\vec{\epsilon}_V)^T \vec{\sigma}_V dV = \int_V \rho\delta\vec{u}^T\vec{g} dV + \int_S \delta\vec{u}^T\vec{t} dV \tag{3.2.40}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.2.39) η μεταβολή της τάσης γράφεται

$$\delta\vec{\sigma}_V = \mathbf{DL}\delta\vec{u} \tag{3.2.41}$$

Από την (3.2.15) η μεταβολή των μετακινήσεων συνδέεται με τις μετακινήσεις στους κόμβους

$$\delta\vec{\sigma}_V = \mathbf{DLH}\delta\vec{a}_e \tag{3.2.42}$$

Και χρησιμοποιώντας την (3.2.16)

$$\delta\vec{\sigma}_V = \mathbf{DLHZ}_e\delta\vec{a} \tag{3.2.43}$$

Αφού εισαχθεί το παραπάνω αποτέλεσμα στην (3.2.33), και εισαχθεί το μητρώο $\mathbf{B}$ από την (3.2.22), προκύπτει η γραμμικοποιημένη εξίσωση για πεπερασμένη μεταβολή του φορτίου

$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T\mathbf{DBZ}_e\delta\vec{a} dV = \vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int}^{t} \tag{3.2.44}$$

Επειδή, οι μετατοπίσεις στους κόμβους δεν εξαρτώνται από τις χωρικές συντεταγμένες, τοποθετούνται έξω από το ολοκλήρωμα και αποκτάται το παραπάνω σύστημα τωνN εξισώσεων

$$\mathbf{K}\,\Delta\vec{a} = \vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int}^{t} \tag{3.2.45}$$

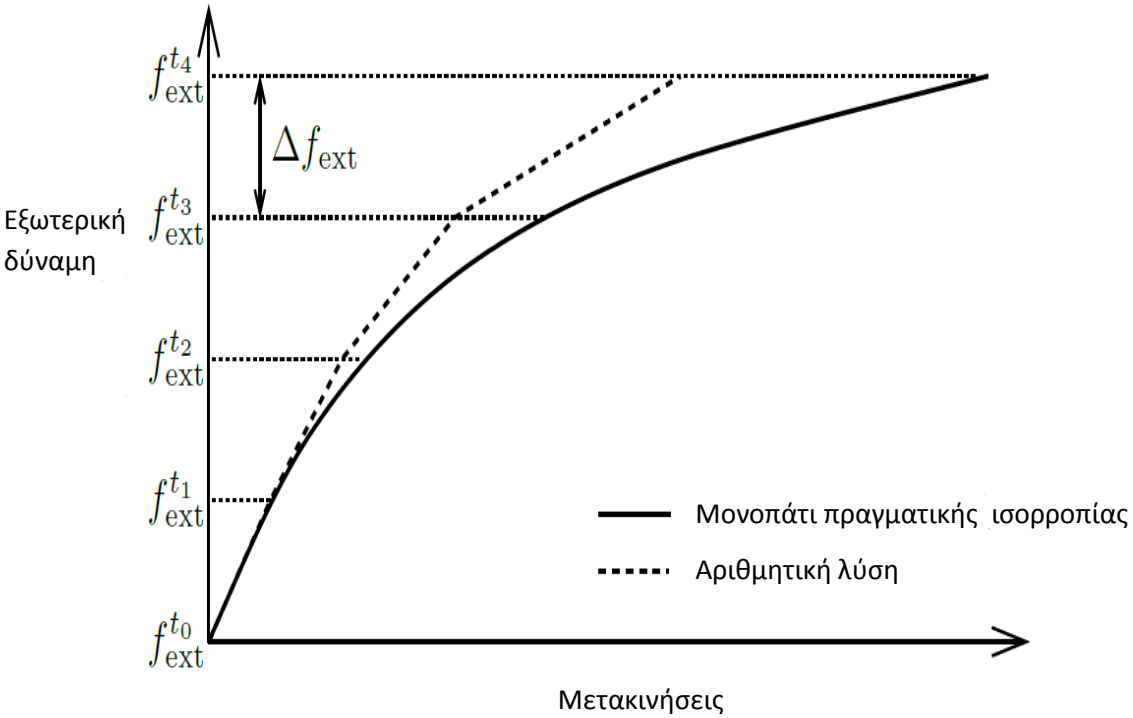
Όπου,

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{Z}_e dV \tag{3.2.46}$$

Το $\mathbf{K}$ είναι το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής για μια μικρή μεταβολή του φορτίου. Η (3.2.45) μπορεί να λυθεί εύκολα αφού είναι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Η ίδια εξίσωση μπορεί να γραφεί και στην παρακάτω μορφή [49]

$$\mathbf{K}\, \Delta\vec{a} = \Delta\vec{f}_{ext} + \vec{f}_{ext}^{t} - \vec{f}_{int}^{t} \tag{3.2.47}$$

Όπου το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων έχει χωριστεί στο φορτίο που έχει ασκηθεί από το προηγούμενο βήμα και τη μεταβολή που υφίσταται στο τρέχον βήμα. Στην παραπάνω εξίσωση έχουν γραμμικοποιηθεί η ενδεχομένως μη-γραμμική σχέση τάσεων-παραμορφώσεων και μη-γραμμική σχέση μεταξύ των παραμορφώσεων και των μετακινήσεων στην αρχή του βήματος στο χρόνο t, ενώ κάθε βήμα περιλαμβάνει το χρονικά διάστημα $[t, t + \Delta t]$. Η γραμμικοποίηση των εξισώσεων οδηγεί σε μια απόκλιση από την πραγματική λύση, ειδικά όταν χρησιμοποιούνται σχετικά μεγάλες μεταβολές στις τιμές του φορτίου, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.12.



Εικόνα 3.12. Διαδικασία καθαρά σταδιακής επίλυσης (Purely incremental solution procedure) [49].

Η σταδιακή απομάκρυνση της αριθμητικής λύσης από την πραγματική μπορεί να αποφευχθεί, ή τουλάχιστον να μειωθεί, με την προσαύξηση μιας επαναληπτικής διαδικασίας μεταξύ των βημάτων με σκοπό να προσδιορισθούν οι μετακινήσεις για τις οποίες ικανοποιείται η ισορροπία εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων για κάθε βήμα.

Για μία διαδικασία σταδιακής και επαναληπτικής επίλυσης, γίνεται μια πρώτη εκτίμηση για τη μεταβολή της μετατόπισης

$$\Delta\vec{a}_1 = \mathbf{K}_0^{-1}\vec{r}_0 \tag{3.2.48}$$

Με

$$\vec{r}_0 = \vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int,0} \tag{3.2.49}$$

Το διάνυσμα που εκφράζει την απόκλιση από την κατάσταση ισορροπίας, κατά την εφαρμογή του εξωτερικού φορτίου. Ο δείκτης 1 του $\Delta\vec{a}$ υποδηλώνει, ότι πρόκειται για την εκτίμηση της μεταβολής, που αντιστοιχεί στην πρώτη επανάληψη. Παρόμοια, ο δείκτης 0 του διανύσματος των εσωτερικών δυνάμεων υποδηλώνει, ότι αυτό το διάνυσμα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις τάσεις στην αρχή του βήματος ($\vec{\sigma}_v^0 = \vec{\sigma}_v^t$).

$$\vec{f}_{int,0} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \sum_{i=1}^{n_i} w_i(\det\mathbf{J}_{\boldsymbol{i}})\mathbf{B}_{\boldsymbol{i}}^T\vec{\sigma}_{Vi,0} \tag{3.2.50}$$

Από το διάνυσμα $\Delta\vec{a}_1$ μπορεί να υπολογισθεί μια πρώτη εκτίμηση για τη μεταβολή των παραμορφώσεων $\Delta\vec{\epsilon}_V^1$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση τάσεων παραμορφώσεων, μπορεί να υπολογιστεί η μεταβολή των τάσεων $\Delta\vec{\sigma}_V^1$. Οι τάσεις μετά την πρώτη επανάληψη δίνονται από τη σχέση

$$\vec{\sigma}_V^1 = \vec{\sigma}_V^0 + \Delta\vec{\sigma}_V^1 \tag{3.2.51}$$

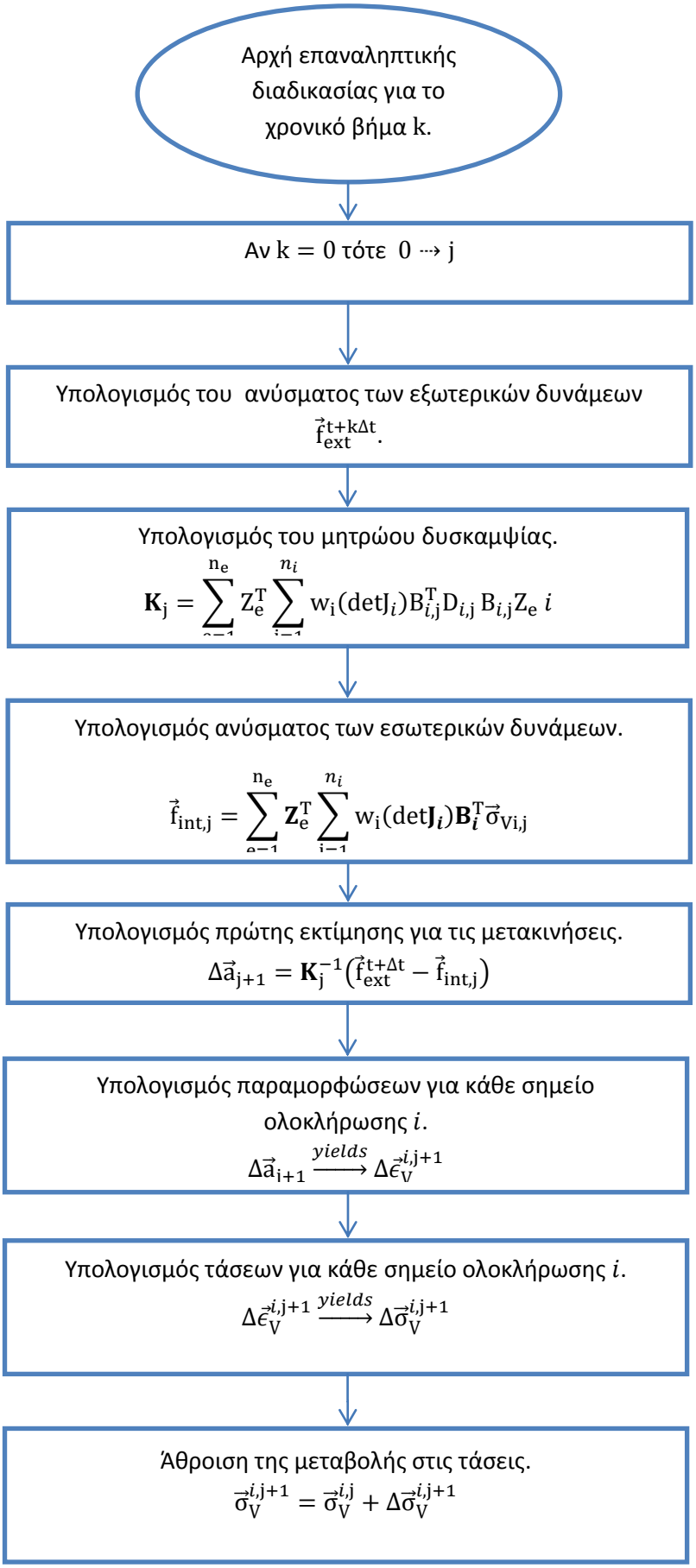
Συνήθως, το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων $\vec{f}_{int,1}$, που υπολογίζεται με βάση τις τάσεις $\vec{\sigma}_V^1$ δε βρίσκεται σε ισορροπία με τα εξωτερικά φορτία $\vec{f}_{ext}^{t+\Delta t}$. Για αυτό το λόγο είναι απαραίτητη μια διόρθωση στη μεταβολή των μετακινήσεων. Αυτή η διόρθωση συμβολίζεται με $d\vec{a}_2$ και ισχύει

$$d\vec{a}_2 = \mathbf{K}_1^{-1}\vec{r}_1 \tag{3.2.52}$$

Όπου $\vec{r}_0 = \vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int,1}$ και $\mathbf{K}_1$ το ανανεωμένο μητρώο δυσκαμψίας. Η διόρθωση προστίθεται στο διάνυσμα που υπολογίστηκε στην αρχή του βήματος.

$$\Delta\vec{a}_2 = \Delta\vec{a}_1 + d\vec{a}_2 \tag{3.2.53}$$

Με την ίδια λογική υπολογίζονται τα διανύσματα $\Delta\vec{\epsilon}_V^2$ και $\Delta\vec{\sigma}_V^2$. Από την τελευταία ποσότητα γίνεται μια καλύτερη προσέγγιση των τάσεων $\vec{\sigma}_V^2$ στο τέλος του αρχικού βήματος. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται συνοπτικά αυτή η διαδικασία.



Υπολογισμός του νέου μητρώου δυσκαμψίας.

$$\mathbf{K}_{j+1} = \sum_{e=1}^{n_e} Z_e^T \sum_{i=1}^{n_i} w_i(\det J_i) B_{i,j+1}^T D_{i,j+1} B_{i,j+1} Z_e$$

Υπολογισμός του νέου ανύσματος των εσωτερικών δυνάμεων.

$$\vec{f}_{int,j+1} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \sum_{i=1}^{n_i} w_i(\det \mathbf{J}_i) \mathbf{B}_i^T \vec{\sigma}_{Vi,j+1}$$

Υπολογισμός διόρθωσης για τις για τις μετακινήσεις.

$$d\vec{a}_{j+2} = \mathbf{K}_{j+1}^{-1}\left(\vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int,j+1}\right)$$

Άθροιση της διόρθωσης στις μετακινήσεις.

$$\Delta\vec{a}_{j+2} = d\vec{a}_{j+2} + \Delta\vec{a}_{j+1}$$

Υπολογισμός των νέων παραμορφώσεων για κάθε σημείο ολοκλήρωσης i.

$$\Delta\vec{a}_{i+2} \xrightarrow{yields} \Delta\vec{\epsilon}_V^{i,j+2}$$

Υπολογισμός των νέων τάσεων για κάθε σημείο ολοκλήρωσης i.

$$\Delta\vec{\epsilon}_V^{i,j+2} \xrightarrow{yields} \Delta\vec{\sigma}_V^{i,j+2}$$

Άθροιση της μεταβολής στις τάσεις.

$$\vec{\sigma}_V^{i,j+2} = \vec{\sigma}_V^{i,j+1} + \Delta\vec{\sigma}_V^{i,j+2}$$

Υπολογισμός του νέου ανύσματος των εσωτερικών δυνάμεων.

$$\vec{f}_{int,j+2} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \sum_{i=1}^{n_i} w_i(\det \mathbf{J}_i) \mathbf{B}_i^T \vec{\sigma}_{Vi,j+2}$$

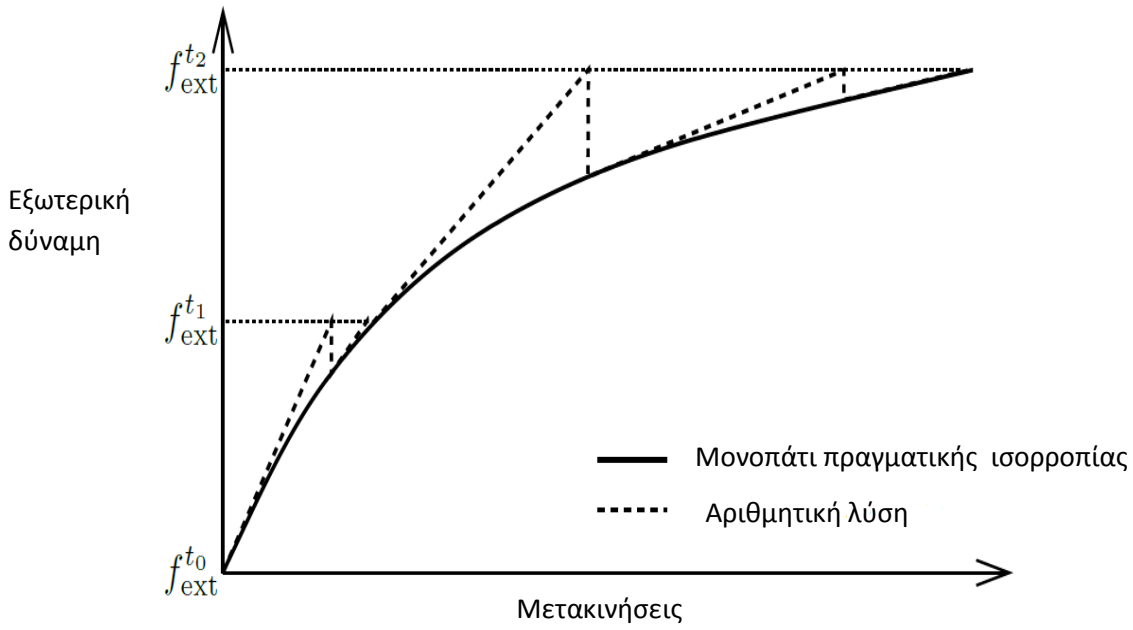
Έλεγχος σύγκλισης $\left|\vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int,j+2}\right| < \delta$

ΟΧΙ

$j + 1 \dashrightarrow j$

$k + 1 \dashrightarrow k$ και η διαδικασία ξεκινά από την αρχή.

Στην Εικόνα 3.13 φαίνεται η πορεία της αριθμητικής λύσης, όταν χρησιμοποιείται η επαναληπτική διαδικασία, για τη διόρθωση του σφάλματος σε κάθε βήμα.



Εικόνα 3.13.Διαδικασία σταδιακής και επαναληπτικής επίλυσης (Incremental iterative solution procedure) [49].

3.2.4 Τεχνικές επίλυσης για προβλήματα μη-γραμμικής δυναμικής

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε περιγραφή της βασικής δομής ενός προγράμματος μη-γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση προβλημάτων στατικής φύσεως. Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει επεξήγηση, για το πώς οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν μπορούν να επεκταθούν για την εύρεση λύσεων σε προβλήματα δυναμικής φύσεως.

3.2.4.1 Ημι-διακριτές εξισώσεις

Ξαναγράφεται η εξίσωση (3.2.18) που περιγράφει την χωρικά διακριτοποιημένη εξίσωση ισορροπίας.

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t} = \vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int}^{t+\Delta t} \tag{3.2.54}$$

Όπου $\mathbf{M}$ το μητρώο μάζας, $\vec{f}_{ext}$ το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων και $\vec{f}_{int}$ το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων. Οι εξισώσεις (3.2.19) έως (3.2.21) παραμένουν ίδιες αλλά προστίθεται ο όρος των αδρανειακών δυνάμεων. Η (3.2.54) χρησιμοποιείται ευθέως σε ρητά σχήματα χρονικής ολοκλήρωσης (explicit-time-integration schemes), όπου η συγκεκριμένη εξίσωση προσεγγίζεται με ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών στο χρόνο. Στα ρητά σχήματα, δε γίνονται επαναλήψεις κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος, προκειμένου να ικανοποιηθούν αυστηρά οι εξισώσεις ισορροπίας και επομένως είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση μικρών χρονικών βημάτων για να αποκτηθεί μια ικανοποιητική λύση.

Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι να χρησιμοποιηθεί ένα σχήμα έμμεσης χρονικής ολοκλήρωσης (implicit time integration scheme), όπου διεξάγεται μια επαναληπτική διαδικασία προκειμένου να ικανοποιηθεί η εξίσωση ισορροπίας στο τέλος του χρονικού βήματος. Πιο συγκεκριμένα, η τάση τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ χωρίζεται σε δύο μέρη, το ένα είναι η γνωστή τάση τη χρονική στιγμή t και το άλλο είναι η μεταβολή $\Delta\vec{\sigma}_V$, όπως φαίνεται στην εξίσωση (3.2.31). Στη συνέχεια, με αντικατάσταση στη σχέση που εκφράζει τις εσωτερικές δυνάμεις(3.2.21) η

(3.2.32) γράφεται, ως εξής

$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{Z}_e dV \ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t} + \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \Delta\vec{\sigma}_V dV = \vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int}^{t} \tag{3.2.55}$$

Με μια διαδικασία γραμμικοποίησης παρόμοια με της προηγούμενης ενότητας, η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}_0 \Delta\vec{a} = \vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int}^{t} \tag{3.2.56}$$

Όπου $\mathbf{K}_0$ το μητρώο δυσκαμψίας στην αρχή του χρονικού βήματος, και δίνεται από την (3.2.46). Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το σφάλμα γραμμικοποίησης οδηγεί σε μία απόκλιση από την πραγματική εξίσωση δυναμικής ισορροπίας και πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα επαναληπτικό σχήμα για να εξασφαλισθεί, ότι το σφάλμα παραμένει σε συγκεκριμένα όρια. Για αυτό το σκοπό ορίζεται ένα διάνυσμα υπολοίπου (residual force vector).

$$\vec{r}_0 = \vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int}^{t} - \mathbf{M}\ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t} \tag{3.2.57}$$

Ώστε να είναι δυνατόν να γίνει μια πρώτη εκτίμηση για το διάνυσμα των μετατοπίσεων από την επίλυση του γραμμικού συστήματος

$$\Delta\vec{a}_1 = \mathbf{K}_0^{-1}\vec{r}_0 \tag{3.2.58}$$

Που είναι ίδιο με το σύστημα της εξίσωσης (3.2.48) με τη διαφορά ότι υπολογίζονται και οι αδρανειακοί όροι στο διάνυσμα του υπολοίπου.

3.2.5 Ρητή χρονική ολοκλήρωση (explicit-time-integration)

Ένα από τα πιο δημοφιλή σχήματα ρητής χρονικής ολοκλήρωσης είναι το σχήμα κεντρικών διαφορών το οποίο γράφεται ως εξής

$$\dot{\vec{a}}^{t+\Delta t} = \frac{\vec{a}^{t+\Delta t} - \vec{a}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \tag{3.2.59}$$

$$\ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t} = \frac{\vec{a}^{t+\Delta t} - 2\vec{a}^{t} + \vec{a}^{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \tag{3.2.60}$$

Αυτό το σχήμα έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης, που συνεπάγεται ότι το σφάλμα μειώνεται ανάλογα με το τετράγωνο της μεταβολής του χρόνου Δt^2. Με αντικατάσταση της (3.2.60) στην ημι-διακριτοποιημένη εξίσωση της ορμής (3.2.54) και με ανακατάταξη κάποιων όρων προκύπτει

$$\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\vec{a}^{t+\Delta t} = \vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int}^{t+\Delta t} + \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}(2\vec{a}^{t} - \vec{a}^{t-\Delta t}) \tag{3.2.61}$$

Από την παραπάνω εξίσωση υπολογίζονται οι μετακινήσεις τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$.

$$\vec{a}^{t+\Delta t} = \Delta t^2\mathbf{M}^{-1}\left(\vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int}^{t+\Delta t}\right) + 2\vec{a}^{t} - \vec{a}^{t-\Delta t} \tag{3.2.62}$$

Έπειτα, είναι δυνατόν να υπολογιστεί η μεταβολή των μετατοπίσεων $\Delta\vec{a} = \vec{a}^{t+\Delta t} - \vec{a}^{t}$ η οποία μέσω της κινηματικής σχέσης δίνει τη μεταβολή των παραμορφώσεων $\Delta\vec{\epsilon}_V$. Μέσω της μεταβολής των παραμορφώσεων είναι δυνατόν να υπολογιστεί η μεταβολή των τάσεων $\Delta\vec{\sigma}_V$. Το διάνυσμα των τάσεων υπολογίζεται τη νέα χρονική στιγμή από τη σχέση $\vec{\sigma}_V^{t+\Delta t} = \vec{\sigma}_V^{t} + \Delta\vec{\sigma}_V$. Το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων $\vec{f}_{int}^{t+\Delta t}$ υπολογίζεται από τη σχέση (3.2.21). Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι στην εξίσωση (3.2.62), η μετατόπιση τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$, εξαρτάται από τις μετατοπίσεις τις χρονικές στιγμές t και $t - \Delta t$, που συνεπάγεται, ότι χρειάζεται πληροφορία από δυο προγενέστερα χρονικά βήματα. Αυτό δημιουργεί ένα πρόβλημα για την εκκίνηση της υπολογιστικής διαδικασίας τη χρονική

στιγμή 0, αφού απαιτείται γνώση για τη χρονική στιγμή $-\Delta t$. Προκειμένου να παρακαμφθεί αυτό το πρόβλημα για τη χρονική στιγμή 0 στις εξισώσεις (3.2.59) και (3.2.60) οι μετατοπίσεις τη χρονική στιγμή Δt απαλείφονται και χρησιμοποιείται η σχέση

$$\vec{a}^{-\Delta t} = \vec{a}^{0} - \Delta t\dot{\vec{a}}^{0} + \frac{1}{2}\Delta t^{2}\mathbf{M}^{-1}\left(\vec{f}_{ext}^{0} - \vec{f}_{int}^{0}\right) \tag{3.2.63}$$

Όπου $\vec{a}^{0}$ και $\dot{\vec{a}}^{0}$ τα αρχικά πεδία μετατοπίσεων και ταχυτήτων. Η ημι-διακριτή εξίσωση της ορμής (3.2.54), έχει χρησιμοποιηθεί για τον τελευταίο όρο στη χρονική στιγμή 0. Συνήθως, αυτός ο όρος είναι μηδέν, αλλά δεν είναι υποχρεωτικό, αφού μπορεί να υπάρχουν αρχικές τάσεις.

Ένα εναλλακτικό σχήμα ρητής χρονικής ολοκλήρωσης, που χρησιμοποιείται από πολλούς κώδικες πεπερασμένων στοιχείων, είναι να προσεγγισθεί η ταχύτητα στο μεσοδιάστημα.

$$\dot{\vec{a}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} = \frac{\vec{a}^{t+\Delta t} - \vec{a}^{t}}{\Delta t} \tag{3.2.64}$$

Και η επιτάχυνση υπολογίζεται τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ από τη σχέση

$$\ddot{\vec{a}}^{t} = \frac{\dot{\vec{a}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} - \dot{\vec{a}}^{t-\frac{1}{2}\Delta t}}{\Delta t} \tag{3.2.65}$$

Με αντικατάσταση της (3.2.64) στην (3.2.65) προκύπτει η (3.2.60), που είναι το σχήμα κεντρικών διαφορών. Με χρησιμοποίηση της (3.2.64) είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι μετατοπίσεις τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$.

$$\vec{a}^{t+\Delta t} = \vec{a}^{t} + \Delta t\dot{\vec{a}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} \tag{3.2.66}$$

Όπως, και προηγουμένως υπολογίζεται η μεταβολή των μετατοπίσεων $\Delta\vec{a} = \vec{a}^{t+\Delta t} - \vec{a}^{t}$, με την οποία σχετίζονται η μεταβολή των παραμορφώσεων $\Delta\vec{\epsilon}_{V}$ και η μεταβολή των τάσεων $\Delta\vec{\sigma}_{V}$. Αφού υπολογιστούν οι νέες τάσεις $\vec{\sigma}_{V}^{t+\Delta t} = \vec{\sigma}_{V}^{t} + \Delta\vec{\sigma}_{V}$, υπολογίζεται το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων $\vec{f}_{int}^{t+\Delta t}$. Τέλος, υπολογίζεται η επιτάχυνση τη νέα χρονική στιγμή χρησιμοποιώντας την εξίσωση της ορμής

$$\ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{-1}\left(\vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int}^{t+\Delta t}\right) \tag{3.2.67}$$

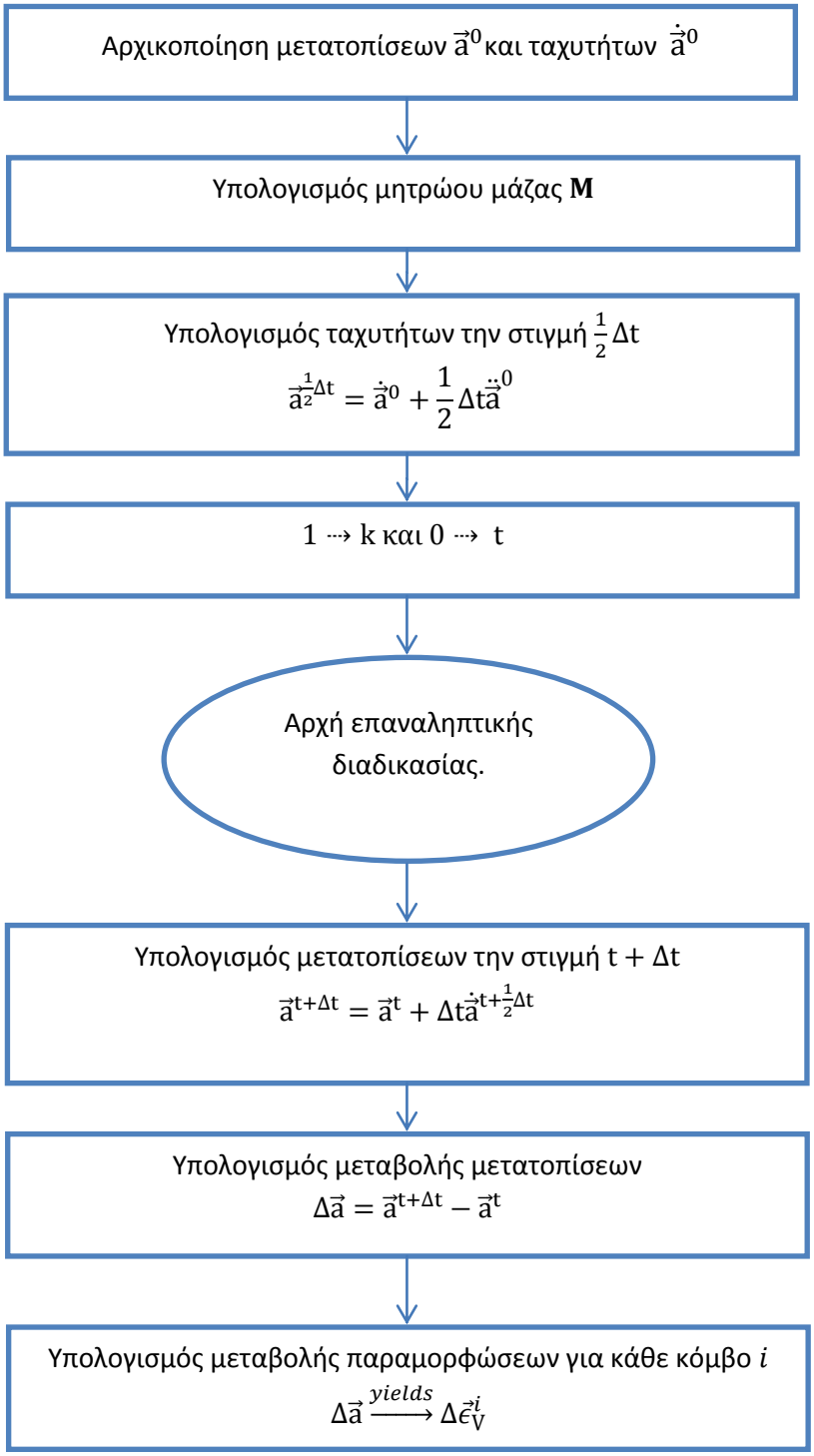
Για το επόμενο βήμα υπολογίζεται η ταχύτητα στο μεσοδιάστημα χρησιμοποιώντας την (3.2.65).

$$\dot{\vec{a}}^{t+\frac{3}{2}\Delta t} = \dot{\vec{a}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} + \Delta t\ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t} \tag{3.2.68}$$

Κατά την εκκίνηση του αλγορίθμου, για να υπολογιστεί η ταχύτητα στο μεσοδιάστημα του πρώτου χρονικού βήματος, χρησιμοποιείται η ειδική συνθήκη

$$\dot{\vec{a}}^{\frac{1}{2}\Delta t} = \dot{\vec{a}}^{0} + \frac{1}{2}\Delta t\ddot{\vec{a}}^{0} \tag{3.2.69}$$

Ο αλγόριθμος παρουσιάζεται ολοκληρωμένα στο παρακάτω διάγραμμα [49].



Υπολογισμός μεταβολής τάσεων για κάθε κόμβο i

$$\Delta\vec{\epsilon}_V^i \xrightarrow{yields} \Delta\vec{\sigma}_V^i$$

↓

Υπολογισμός τάσεων την χρονική στιγμή $t + \Delta t$

$$\vec{\sigma}_V^{t+\Delta t} = \vec{\sigma}_V^t + \Delta\vec{\sigma}_V$$

↓

Υπολογισμός ανύσματος εσωτερικών δυνάμεων την χρονική στιγμή $t + \Delta t$

$$\vec{f}_{int}^{t+\Delta t} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{Z}_e^T \sum_{i=1}^{n_i} w_i (\det \mathbf{J}_i) \mathbf{B}_i^T \vec{\sigma}_{Vi}$$

↓

Υπολογισμός επιταχύνσεων την χρονική στιγμή $t + \Delta t$

$$\ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{-1}\left(\vec{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \vec{f}_{int}^{t+\Delta t}\right)$$

↓

Υπολογισμός ταχυτήτων στο νέο μεσοδιάστημα

$$\dot{\vec{a}}^{t+\frac{3}{2}\Delta t} = \dot{\vec{a}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} + \Delta t \ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t}$$

↓

Υπολογισμός ταχυτήτων στο νέο μεσοδιάστημα

$$\dot{\vec{a}}^{t+\frac{3}{2}\Delta t} = \dot{\vec{a}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} + \Delta t \ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t}$$

↓

$k \dashrightarrow k + 1$ και $t \dashrightarrow k\,\Delta t$

↓

Ο αλγόριθμος ξεκινά από την αρχή της επαναληπτικής διαδικασίας

3.2.6 Έμμεση χρονική ολοκλήρωση (implicit-time-integration)

Τα σχήματα έμμεσης χρονικής ολοκλήρωσης είναι περισσότερο πολύπλοκα και πιο δαπανηρά από πλευράς υπολογιστικού χρόνου, ανά χρονικό βήμα. Το πλεονέκτημα είναι ότι επιτρέπουν την επιλογή μεγαλύτερων χρονικών βημάτων, διότι σε κάθε χρονικό βήμα χρησιμοποιείται μια επαναληπτική διαδικασία για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος, που εκφράζεται από το διάνυσμα της εξίσωσης (3.2.57). Με τα σχήματα έμμεσης χρονικής ολοκλήρωσης, τυπικές τιμές του μεγέθους του χρονικού βήματος, που χρησιμοποιείται, είναι 0.0001 έως 0.01 δευτερόλεπτα και συνήθως ο συνολικός χρόνος μιας προσομοίωσης κυμαίνεται περίπου από 0.1 έως 10 δευτερόλεπτα και συνεπάγεται, ότι στην εκτέλεση της προσομοίωσης, περιλαμβάνονται εκατοντάδες ή χιλιάδες χρονικά βήματα. Τα σχήματα έμμεσης ολοκλήρωσης είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν για τα περισσότερα προβλήματα δυναμικής. Ωστόσο, για προσομοιώσεις κρουστικών φαινομένων, ο συνολικός χρόνος, που διεξάγεται το φαινόμενο είναι τόσο μικρός, που το υπολογιστικό κόστος είναι μη-αποδεκτό. Σε αυτές τις περιπτώσεις προτιμούνται τα σχήματα άμεσης ολοκλήρωσης.

Ένα από τα πιο διαδεδομένα σχήματα έμμεσης ολοκλήρωσης οφείλεται στον Newmark και βασίζεται στην παραδοχή ότι η επιτάχυνση μεταβάλλεται γραμμικά κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος, επομένως η ταχύτητα και η επιτάχυνση δίνονται από τις σχέσεις

$$\dot{\vec{a}}^{t+\Delta t} = \dot{\vec{a}}^{t} + \Delta t\left((1-\gamma)\ddot{\vec{a}}^{t} + \gamma\ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t}\right) \tag{3.2.70}$$

$$\vec{a}^{t+\Delta t} = \vec{a}^{t} + \Delta t\dot{\vec{a}}^{t} + \frac{1}{2}\Delta t^{2}\left((1-2\beta)\ddot{\vec{a}}^{t} + 2\beta\ddot{\vec{a}}^{t+\Delta t}\right) \tag{3.2.71}$$

Οι παράμετροι β και γ καθορίζουν τη σταθερότητα και την ακρίβεια του συστήματος. Πολλά σχήματα έμμεσης χρονικής ολοκλήρωσης προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις του παραπάνω σχήματος, έπειτα από αντικατάσταση ορισμένων τιμών στις β και γ. Να σημειωθεί ότι, για $\beta = 0$ και $\gamma = 1/2$ προκύπτει το σχήμα άμεσης ολοκλήρωσης του προηγούμενου κεφαλαίου [49].

Στις εξισώσεις (3.2.70) και (3.2.71) η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι εκφρασμένες σε μη ρητή μορφή. Επομένως, απαιτείται μια επαναληπτική διαδικασία σε κάθε χρονικό βήμα για την εύρεση των μετακινήσεων που ικανοποιούν αυτές τις εξισώσεις. Σε αυτήν την εργασία χρησιμοποιείται σχήμα ρητής ολοκλήρωσης, για αυτό το λόγο, τα σχήματα έμμεσης ολοκλήρωσης δεν θα αναλυθούν περαιτέρω.

3.3 Ανάλυση ευαισθησίας

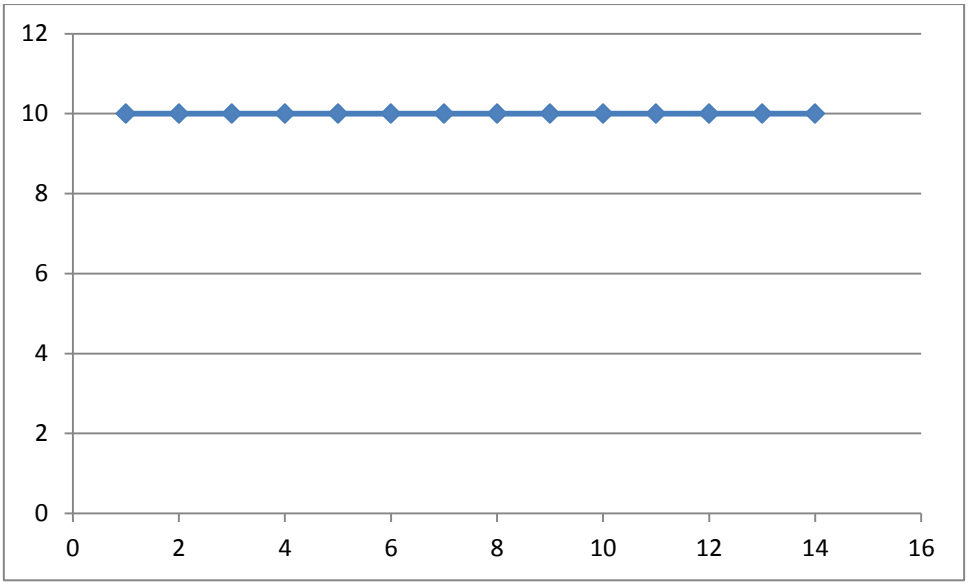
Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει σύντομη αναφορά στη διαδικασία της ανάλυσης ευαισθησίας ενός μαθηματικού μοντέλου. Σκοπός της ανάλυσης ευαισθησίας είναι ο προσδιορισμός της ευαισθησίας της εξόδου μιας συνάρτησης, ως προς τις μεταβολές στις μεταβλητές εισόδου. Από τις πληροφορίες, που εξάγονται από την ανάλυση ευαισθησίας, προκύπτει ο βαθμός εξάρτησης των αποτελεσμάτων ενός μαθηματικού μοντέλου, ως προς κάθε μεταβλητή ή παράμετρο ξεχωριστά. Η μέτρηση της ευαισθησίας μίας συνάρτησης πολλών μεταβλητών

$$\mathrm{Y} = \mathrm{f}(X_1, X_2, \cdots, X_{N-1}, X_N) \tag{3.3.1}$$

περιγράφεται από τα παρακάτω βήματα.

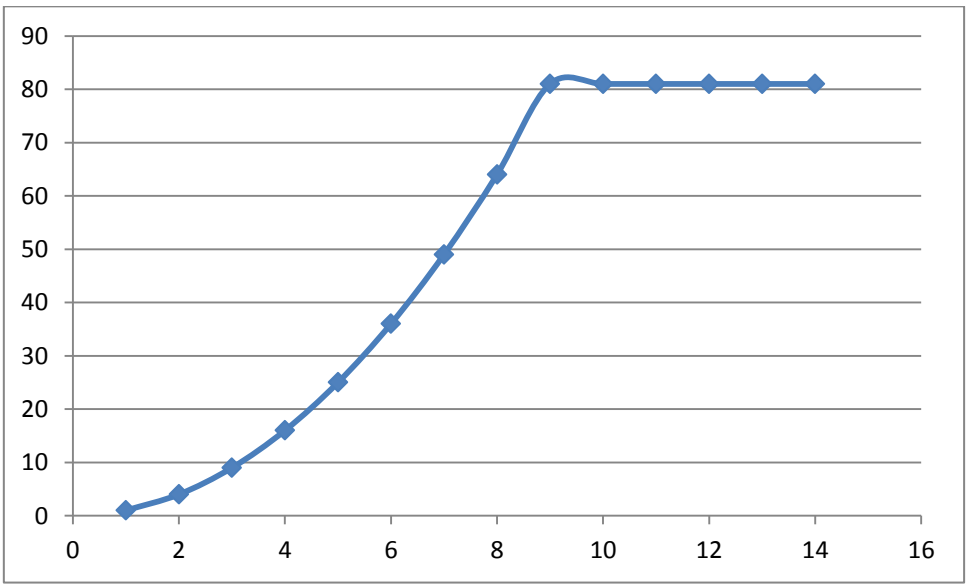
1) Επιλέγεται η μεταβλητή για την οποία είναι επιθυμητός ο έλεγχος της ευαισθησίας, έστω η X_k.
2) Επιλέγεται το σημείο $\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_{N-1}, X_N)$ στην περιοχή το οποίου θα γίνει η ανάλυση.
3) Διατηρώντας όλες τις μεταβλητές σταθερές εκτός από την X_k επιλέγεται μία νέα τιμή για την X_k η X_k' για την οποία υπολογίζεται η νέα τιμή εξόδου Y'.
4) Υπολογίζονται οι ποσοστιαίες μεταβολές των μεταβλητών εισόδου $(X_k' - X_k)/X_k$ και εξόδου $(\mathrm{Y}' - \mathrm{Y})/\mathrm{Y}$.
5) Διαιρούνται οι ποσοστιαίες μεταβολές των μεταβλητών εισόδου και εξόδου.

Για να βρεθεί η ευαισθησία ως προς μία άλλη μεταβλητή ακολουθείται η ίδια διαδικασία αλλά με τις υπόλοιπες μεταβλητές να παραμένουν σταθερές. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν διαγραμματικά μερικά παραδείγματα. Για απλοποίηση, γίνεται η υπόθεση, ότι η συνάρτηση που πρέπει να γίνει η ανάλυση ευαισθησίας, είναι μίας μεταβλητής $\mathrm{Y} = \mathrm{f}(X)$. Η πρώτη απαραίτητη ενέργεια είναι να αποκτηθεί μία γραφική παράσταση της συνάρτησης, για ένα συγκεκριμένο εύρος της ανεξάρτητης μεταβλητής. Μία πιθανή περίπτωση είναι να μην υπάρχει καθόλου εξάρτηση, όπως φαίνεται και στο παρακάτω γράφημα.



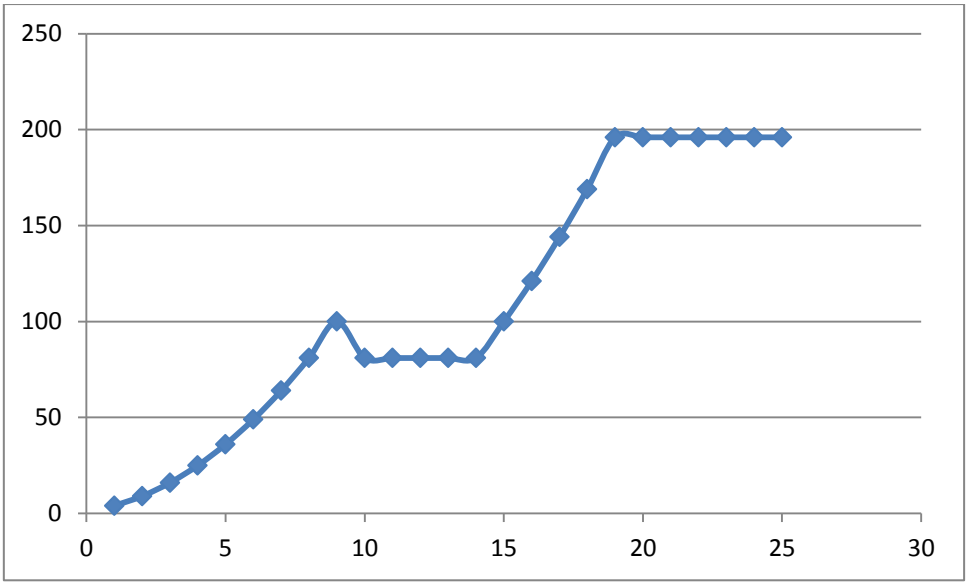
Εικόνα 3.14. Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(X)$ όταν υπάρχει μηδενική ευαισθησία της εξαρτημένης μεταβλητής, σε μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Μια άλλη βασική περίπτωση είναι έπειτα από μία συγκεκριμένη τιμή η ευαισθησία να μηδενίζεται, ενώ για τις υπόλοιπες τιμές να υπάρχει μη μηδενική ευαισθησία μεταξύ των δυο εξαρτώμενων μεταβλητών.



Εικόνα 3.15.Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(X)$ όταν υπάρχει μηδενική ευαισθησία σε συγκεκριμένο εύρος, όπως στο συγκεκριμένο διάγραμμα στην περιοχή [9-15].

Σε πολλές περιπτώσεις προκύπτουν πολλαπλές περιοχές όπου η ευαισθησία μηδενίζεται όπως φαίνεται και στο παρακάτω παράδειγμα.



Εικόνα 3.16.Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(X)$ όταν υπάρχει μηδενική ευαισθησία σε πολλαπλές περιοχές, όπως στο συγκεκριμένο διάγραμμα στην περιοχή [10-14] και [19-25].

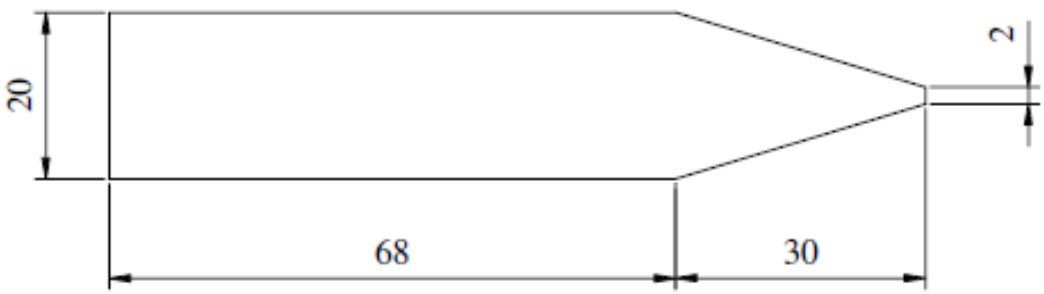
Σε περίπτωση που η εξεταζόμενη συνάρτηση είναι πολλών μεταβλητών θα πρέπει να αποκτηθούν διαγράμματα για κάθε μεταβλητή ξεχωριστά, και εφόσον επιλέγεται μια μεταβλητή όλες οι υπόλοιπες παραμένουν σταθερές. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί, ότι κατά την ανάλυση ευαισθησίας σε πολλές εφαρμογές το ζητούμενο πρόβλημα, είναι η εύρεση περιοχών, όπου η ευαισθησία ως προς τις μεταβολές των ανεξάρτητων μεταβλητών είναι ελάχιστη έως μηδενική. Για αυτό το λόγο κατά τη μετάβαση από μια μεταβλητή στην επόμενη, για την προηγούμενη μεταβλητή που σταθεροποιείται επιλέγονται τιμές, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή δεν επηρεάζεται από τις μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής.

4 ANSYS

Στην προηγούμενη ενότητα, παρουσιάστηκε η βασική θεωρία πάνω στην οποία βασίζεται η συγκεκριμένη εργασία. Όπως προαναφέρθηκε, ένα κομμάτι αυτής της εργασίας περιλαμβάνει την υπολογιστική προσομοίωση πρόσκρουσης κυλινδρικού διεισδυτή κωνικής αιχμής σε επίπεδη πλάκα και για την προσομοίωση αυτού του φαινομένου χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Explicit Dynamics του Ansys. Σε αυτήν την ενότητα θα γίνει περιγραφή του τρόπου που στήθηκε το μοντέλο με τη χρησιμοποίηση του συγκεκριμένου λογισμικού. Κατά τη δημιουργία ενός μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων το πρώτο βήμα είναι η περιγραφή της γεωμετρίας των σωμάτων, που εμπλέκονται στο φαινόμενο. Το επόμενο βασικό βήμα είναι η δημιουργία του πλέγματος, όπου καθορίζονται σημαντικές παράμετροι, που αφορούν τον τύπο των πεπερασμένων στοιχείων, που χρησιμοποιούνται και το μέγεθός τους. Στη συνέχεια, εισάγεται το υλικό κάθε αντικειμένου και στην προκειμένη περίπτωση του διεισδυτή και της πλάκας. Το τελικό βήμα είναι η εισαγωγή των περιορισμών και των αρχικών συνθηκών και πιο συγκεκριμένα τα σημεία που έχει πακτωθεί η πλάκα και η αρχική ταχύτητα του διεισδυτή.

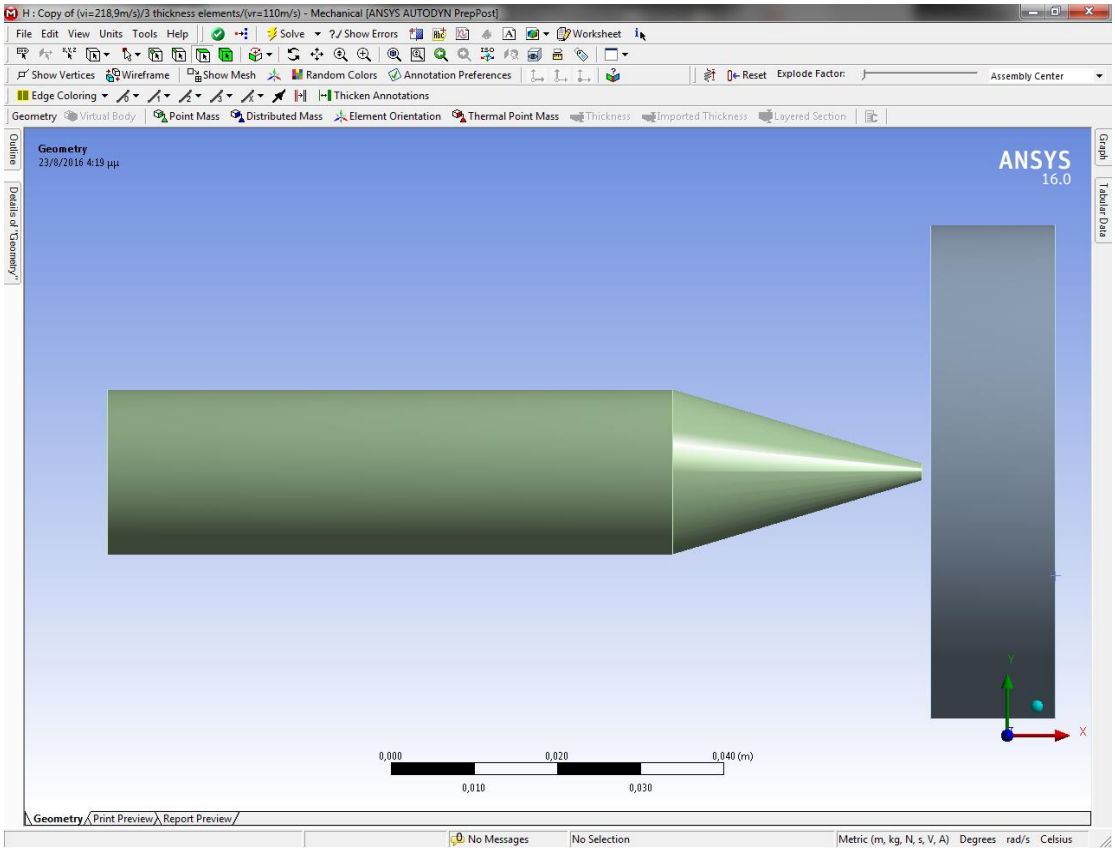
4.1 Γεωμετρία

Στην εικόνα φαίνονται οι διαστάσεις του διεισδυτή σε [mm].

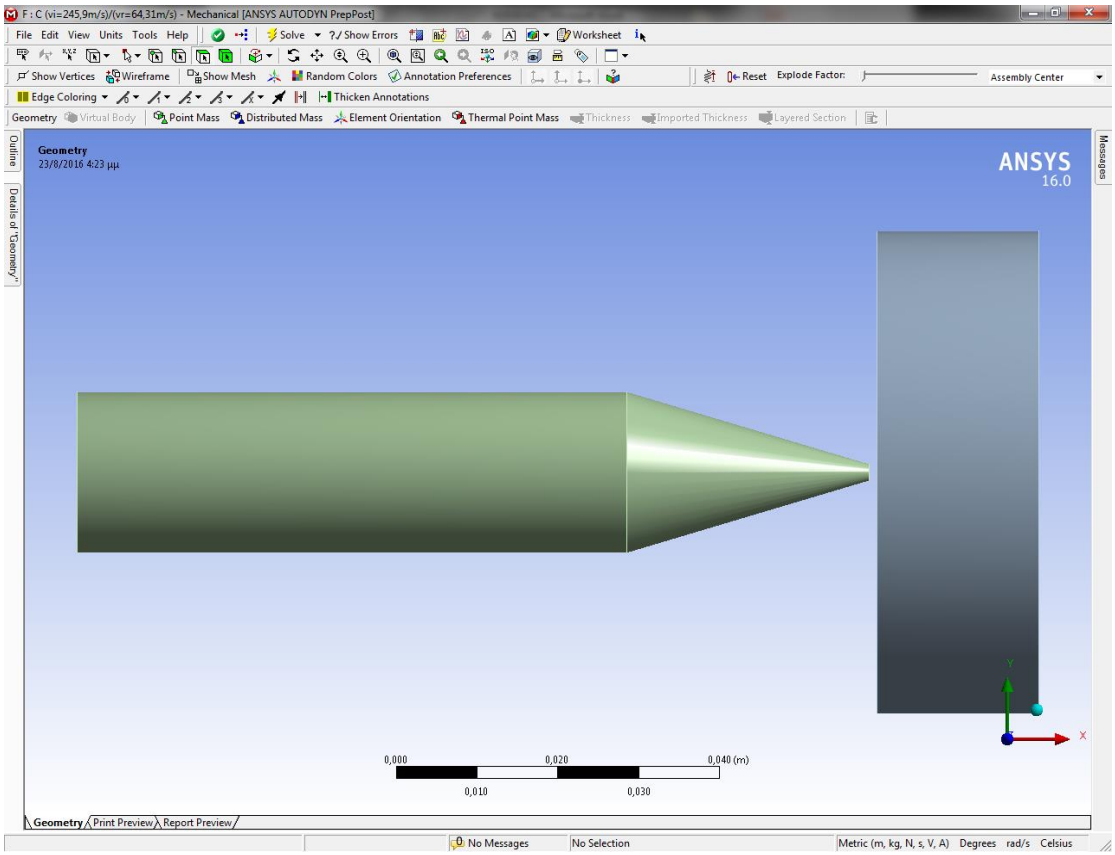


Εικόνα 4.1. Γεωμετρία και διστάσεις σε [mm] του διεισδυτή κωνικής αιχμής με πεπλατυμένη μύτη [41].

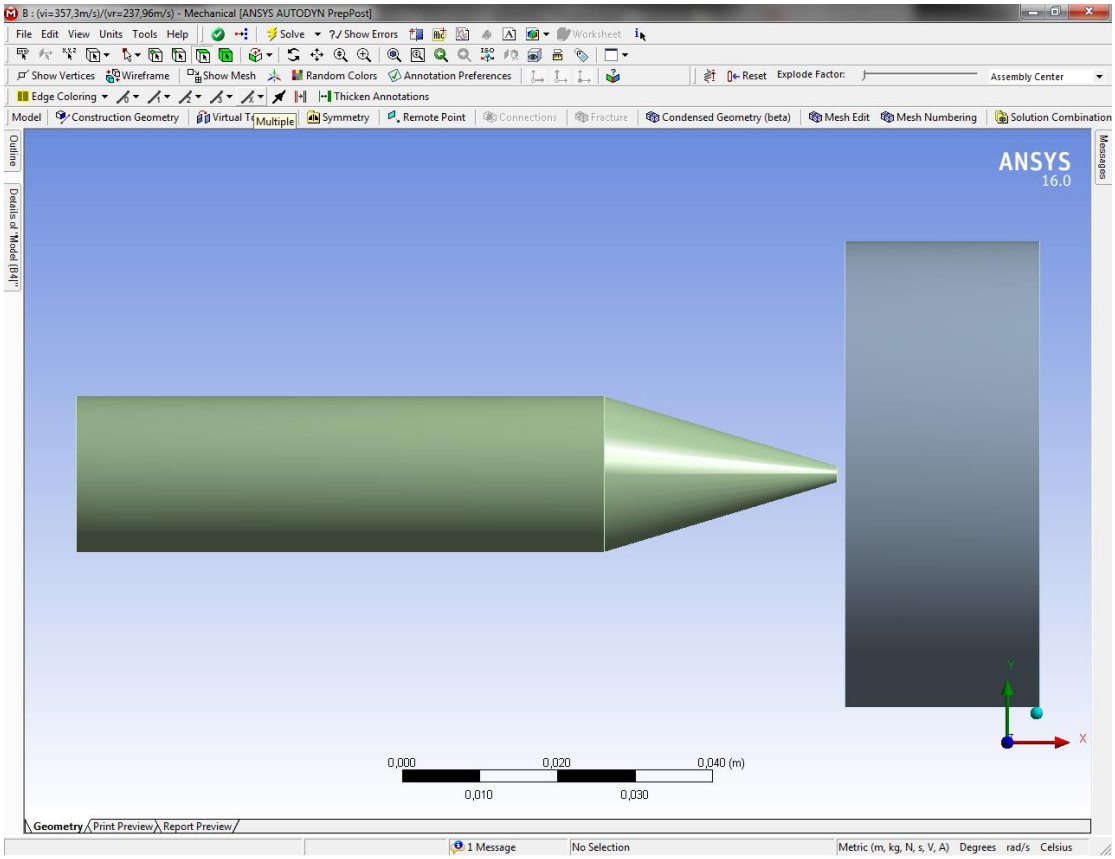
Η πλάκα ,είναι στον τρισδιάστατο χώρο, ένας κύλινδρος με διάμετρο τριπλάσια από αυτή του διεισδυτή. Για το πάχος της πλάκας μελετώνται τέσσερις περιπτώσεις με πάχη 15, 20, 25 και 30 mm η κάθε μία. Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζονται τα γεωμετρικά μοντέλα, που δημιουργήθηκαν με εργαλεία του λογισμικού για όλα τα πάχη της πλάκας.



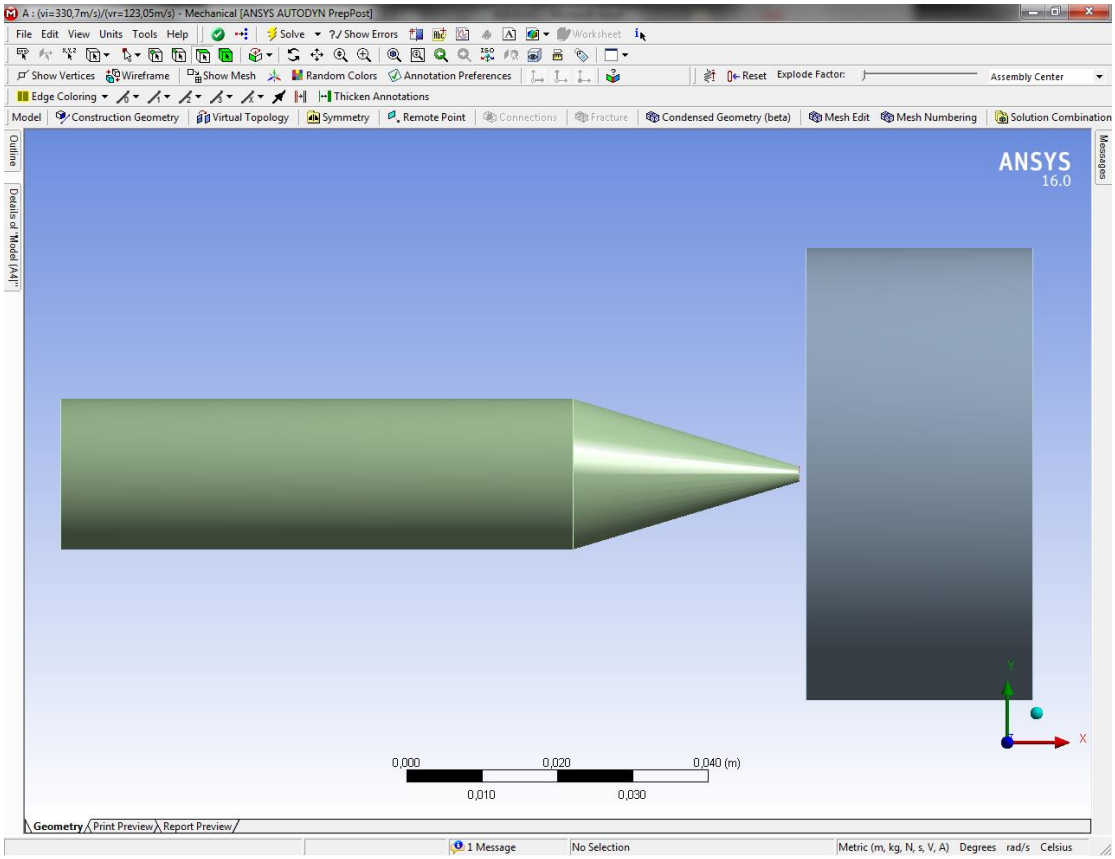
Εικόνα 4.2. Γεωμετρικό μοντέλο του διεισδυτή και της πλάκας πάχους 15 [mm] δημιουργημένα στο λογισμικό Ansys.



Εικόνα 4.3. Γεωμετρικό μοντέλο του διεισδυτή και της πλάκας πάχους 20 [mm] δημιουργημένα στο λογισμικό Ansys.

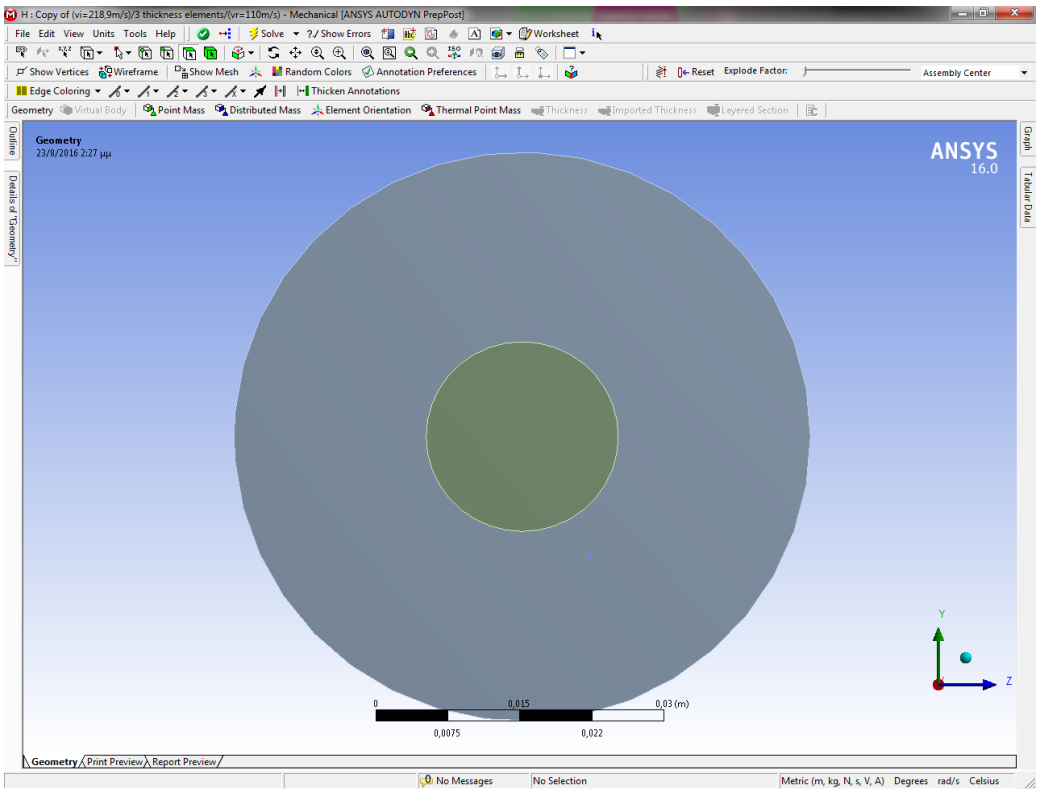


Εικόνα 4.4. Γεωμετρικό μοντέλο του διεισδυτή και της πλάκας πάχους 25 [mm] στο λογισμικό Ansys.



Εικόνα 4.5. Γεωμετρικό μοντέλο του διεισδυτή και της πλάκας πάχους 30 [mm] δημιουργημένα στο λογισμικό Ansys.

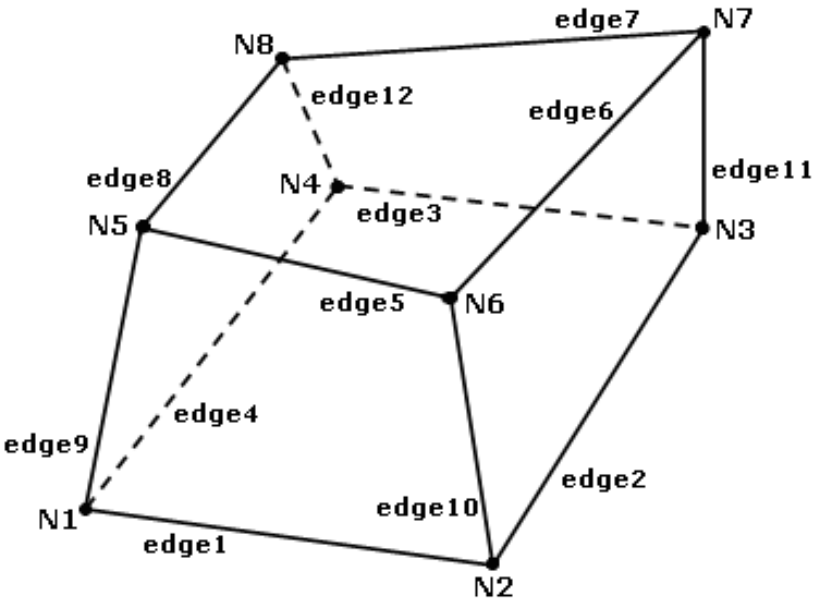
Στην Εικόνα 4.6 φαίνονται η πίσω επιφάνεια του διεισδυτή και η επιφάνεια πρόσκρουσης της πλάκας, ώστε να είναι άμεσα συγκρίσιμη η αναλογία των διαμέτρων πλάκας και διεισδυτή.



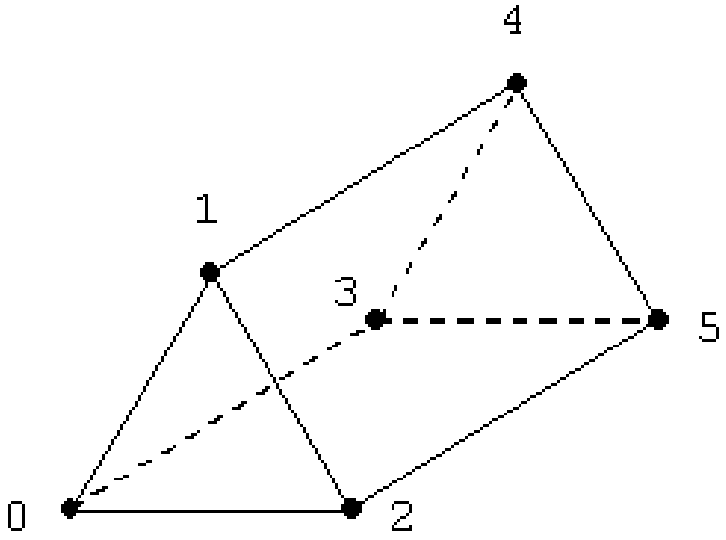
Εικόνα 4.6. Πίσω επιφάνεια του διεισδυτή και της κυλινδρικής πλάκας δημιουργημένα στο λογισμικό Ansys.

4.2 Δημιουργία πλέγματος

Αφού οριστεί η γεωμετρία ακολουθεί η δημιουργία του πλέγματος. Στη συγκεκριμένη εργασία για το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιήθηκαν δύο τύποι πλέγματος, μη-δομημένο πλέγμα τυχαίας γένεσης και δομημένο (κυλινδρικό) πλέγμα. Στον πρώτο τύπο πλέγματος χρησιμοποιούνται στοιχεία τετραγωνικής (Hex8) ή τριγωνικής (Wed6) διατομής, ενώ στο δομημένο πλέγμα χρησιμοποιούνται μόνο τα Hex8. Τα Hex8 είναι εξαεδρικά στοιχεία οκτώ κόμβων (Εικόνα 4.7), και τα Wed6 είναι πρισματικά στοιχεία έξι κόμβων (Εικόνα 4.8). Για κάθε τύπο πλέγματος ορίζονται ορισμένες παράμετροι, που καθορίζουν το μέγεθος των πεπερασμένων στοιχείων, που προκύπτουν κατά τη δημιουργία του πλέγματος. Σκοπός αυτής της διπλωματικής είναι να εξετασθεί πόσο ευαίσθητα είναι τα τελικά αποτελέσματα, που προκύπτουν από την προσομοίωση σε μεταβολές αυτών των παραμέτρων. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων θα γίνει στην επόμενη ενότητα.



Εικόνα 4.7. Εξαεδρικό στοιχείο οκτώ κόμβων και τετραγωνικής διατομής Hex8.

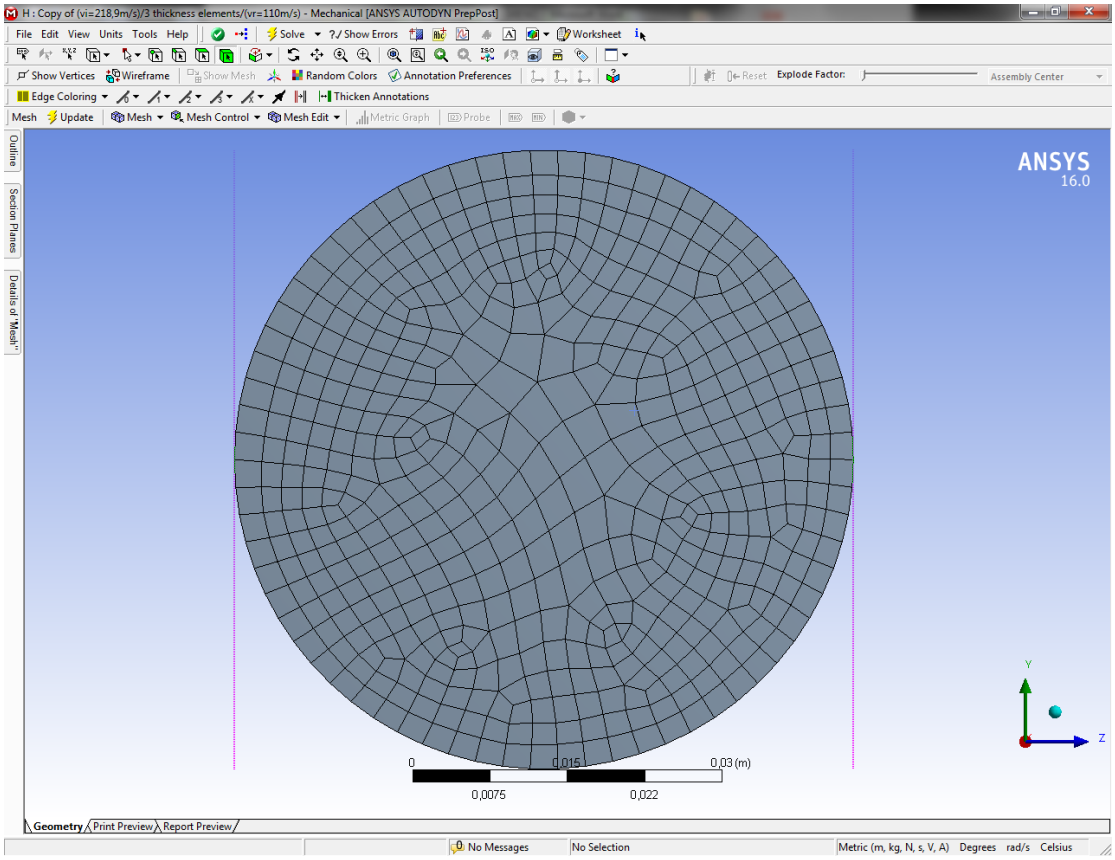


Εικόνα 4.8. Πρισματικό στοιχείο έξι κόμβων και τριγωνικής διατομής Wed6.

Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν τα βήματα που ακολουθούνται για τη δημιουργία του πλέγματος.

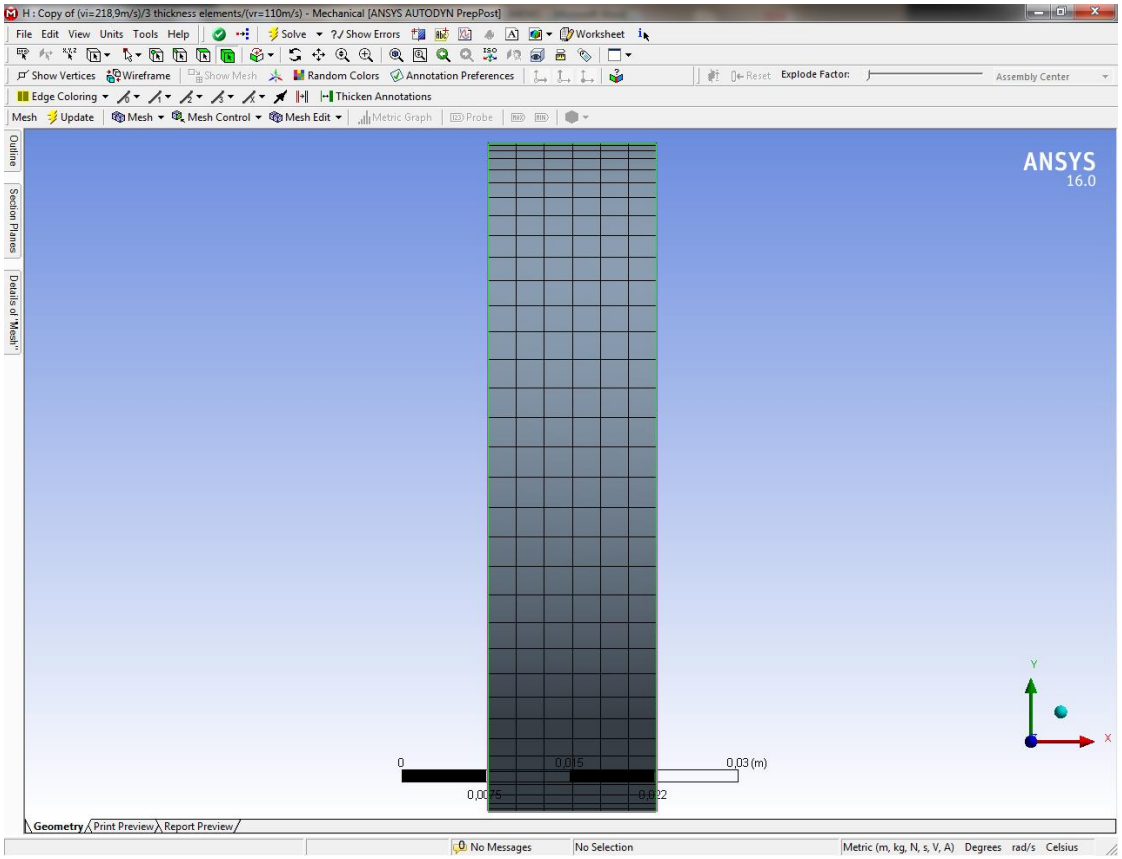
4.2.1 Μη-δομημένο πλέγμα (πλέγμα τυχαίας γένεσης)

Για τη δημιουργία του μη-δομημένου πλέγματος χρησιμοποιούνται στοιχεία τετραγωνικής και τριγωνικής διατομής. Αρχικά δίνεται εντολή στο πρόγραμμα να δημιουργήσει ένα αρχικό πλέγμα με στοιχεία αυτού του τύπου, χωρίς κάποιους συγκεκριμένους περιορισμούς. Στις παρακάτω εικόνες φαίνεται το αρχικό πλέγμα της πλάκας από δύο διαφορετικές γωνίες. Στην εικόνα Εικόνα 4.9 φαίνεται η επιφάνεια πρόσκρουσης της πλάκας.

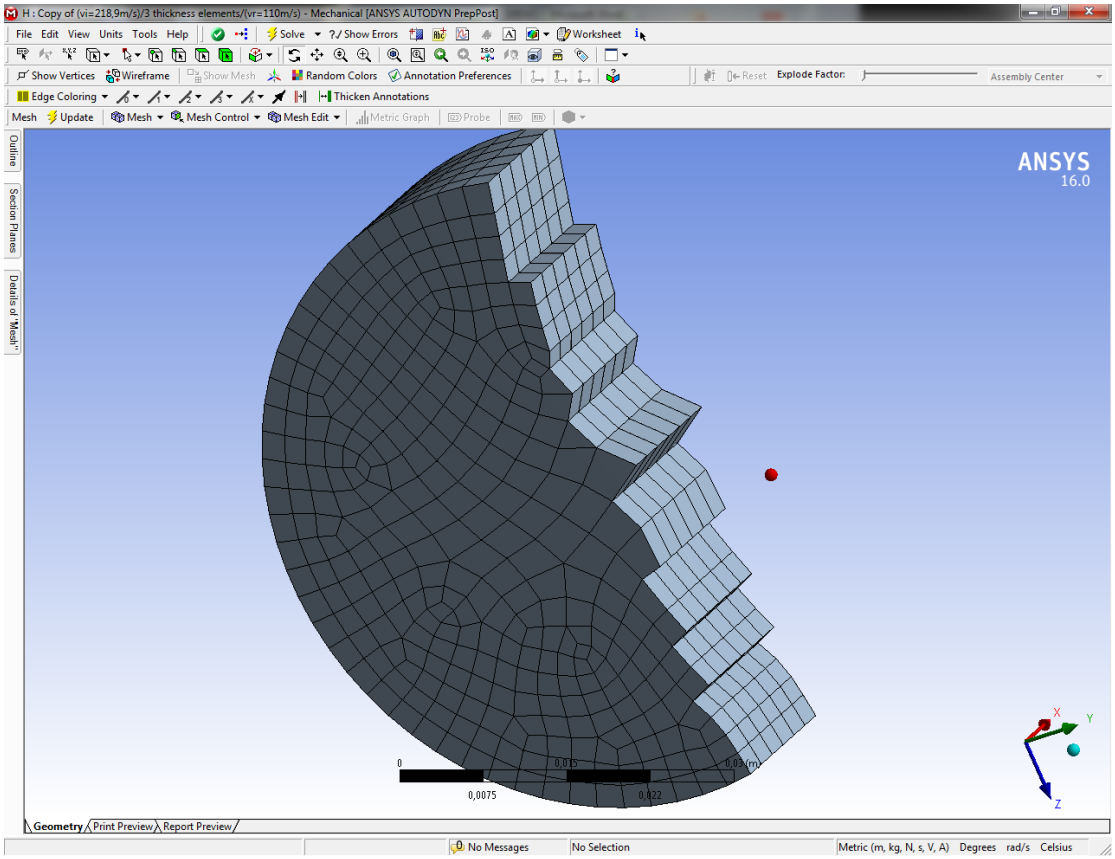


Εικόνα 4.9. Πίσω επιφάνεια της πλάκας έπειτα από την αρχική διακριτοποίηση χρησιμοποιώντας τριγωνικά και τετραγωνικά στοιχεία.

Στην Εικόνα 4.10 φαίνεται η πλευρική επιφάνεια της πλάκας και στην Εικόνα 4.11 φαίνεται μία οριζόντια τομή της πλάκας, προκειμένου να παρουσιαστεί καλύτερα η γεωμετρία των πεπερασμένων στοιχείων.



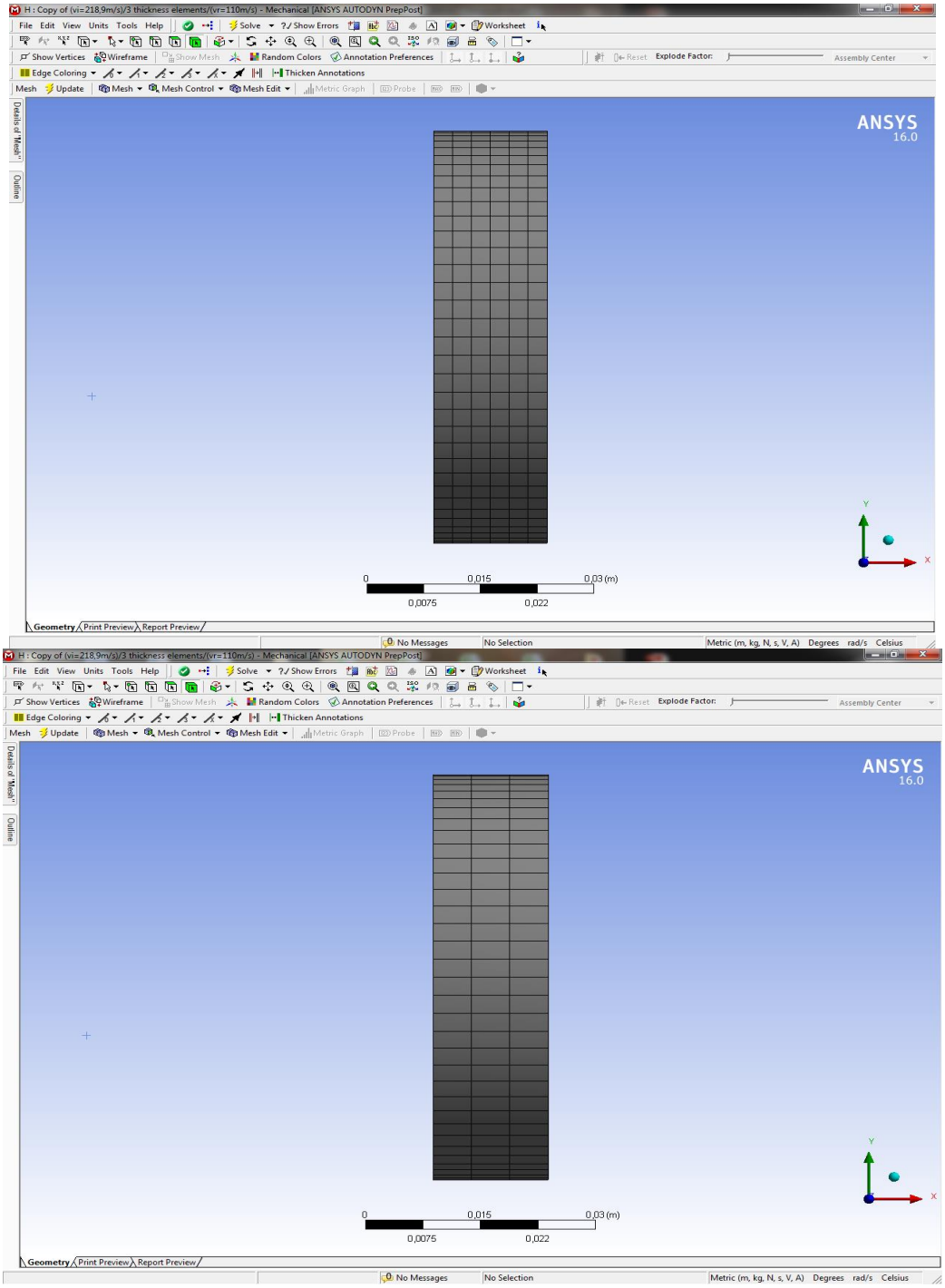
Εικόνα 4.10. Πλευρική επιφάνεια της πλάκας έπειτα από την αρχική διακριτοποίηση.



Εικόνα 4.11. Τομή της πλάκας έπειτα από την αρχική διακριτοποίηση .

4.2.1.1 Αριθμός στοιχείων κατά πάχος

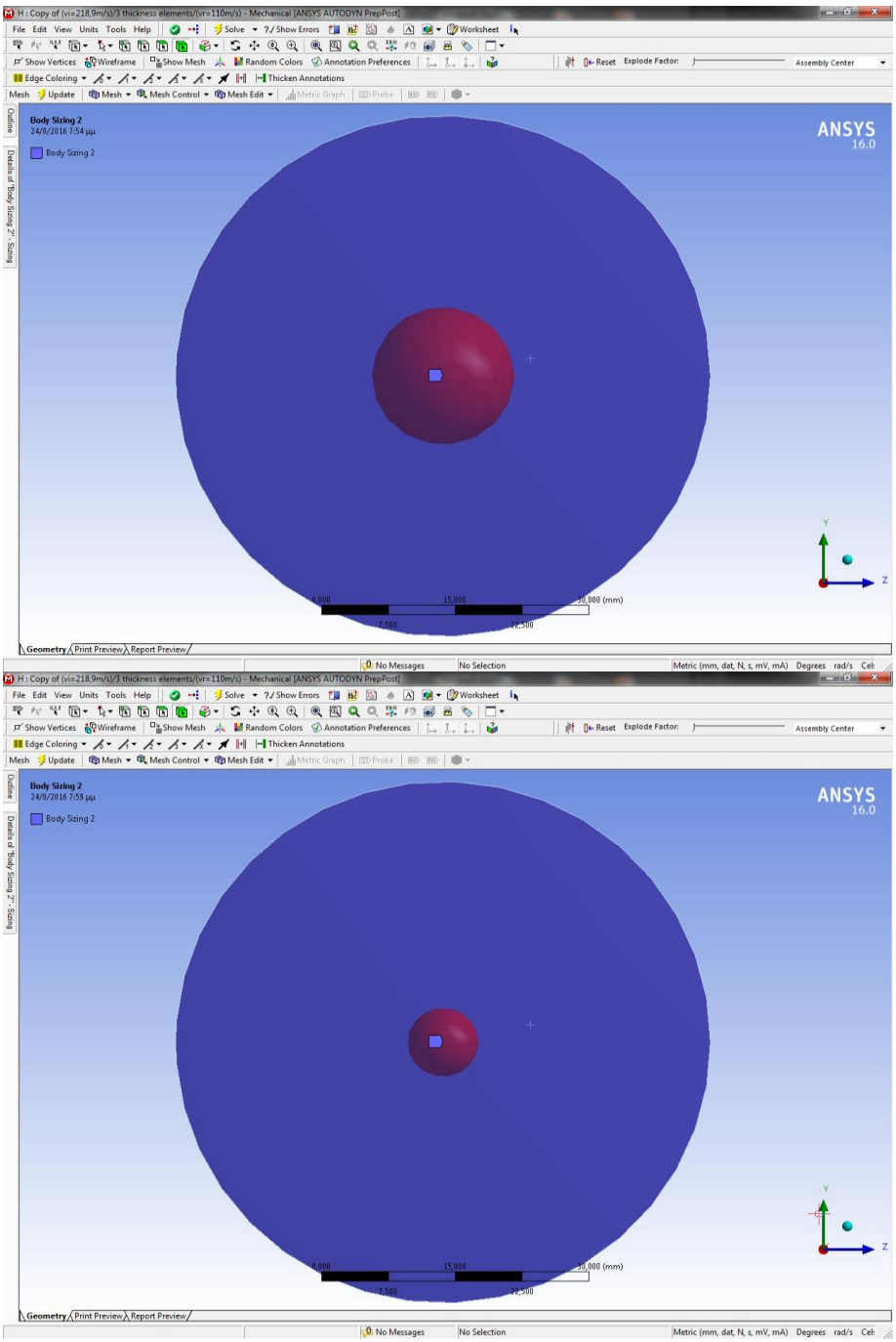
Έπειτα από τη δημιουργία του αρχικού πλέγματος, η πρώτη παράμετρος, που επιλέχθηκε για να ελεγχθεί, είναι ο αριθμός των στοιχείων κατά τη διεύθυνση του πάχους της πλάκας. Στην Εικόνα 4.12 φαίνεται η πλάκα με αριθμό στοιχείων κατά πάχος 3 και 6 στο κάτω και στο άνω μέρος αντίστοιχα.



Εικόνα 4.12. Πλευρική επιφάνεια της πλάκας με τρία στοιχεία κατά πάχος (κάτω μέρος) και έξι στοιχεία κατά πάχος (άνω μέρος).

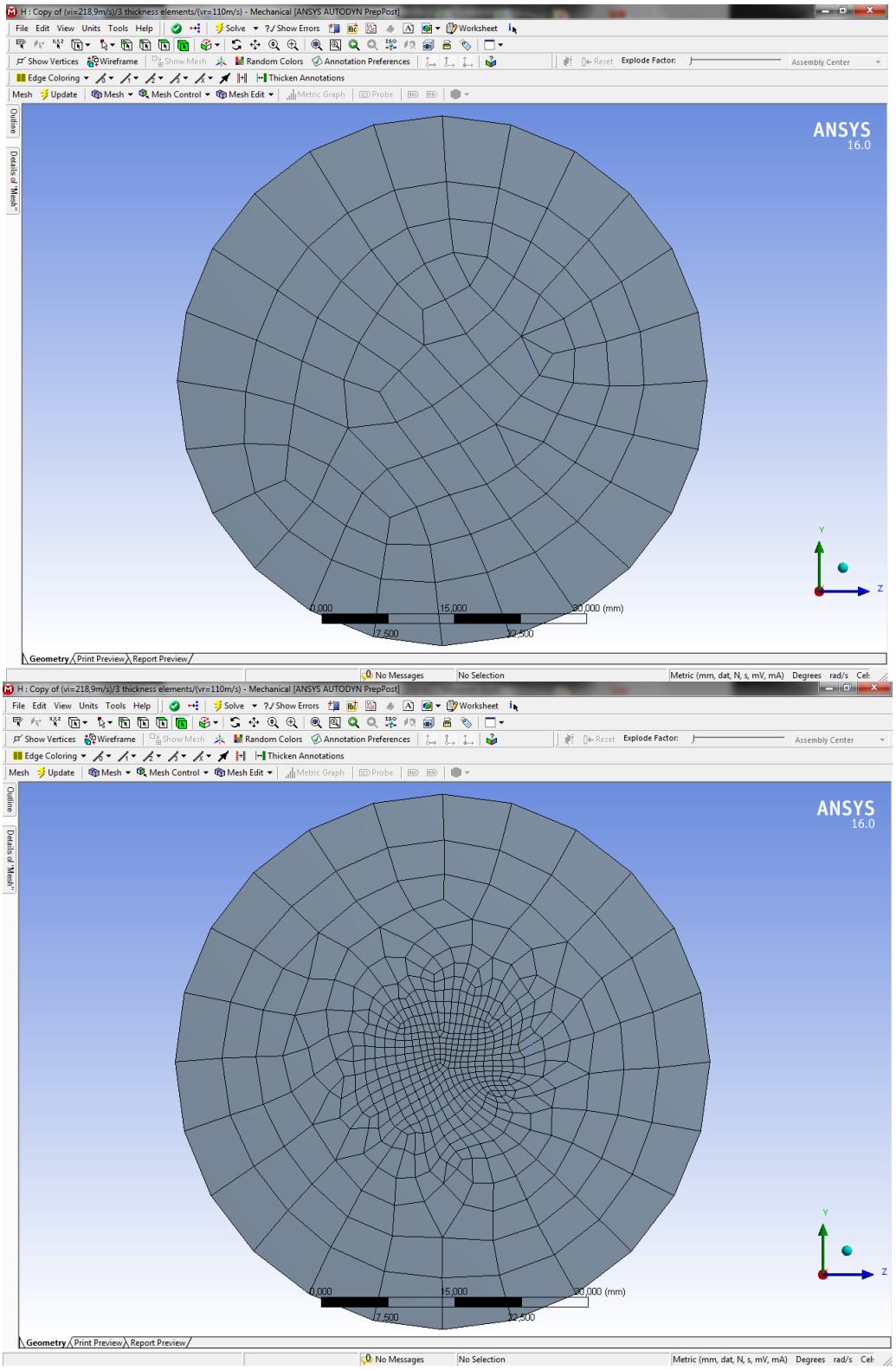
4.2.1.2 Δημιουργία σφαίρας επιρροής

Αφού οριστούν τα στοιχεία κατά πάχος ακολουθεί η πύκνωση του πλέγματος στο σημείο της πρόσκρουσης του διεισδυτή στην επιφάνεια της πλάκας. Για να επιτευχθεί αυτό ορίζεται μία σφαίρα, όπου υπάρχει η δυνατότητα να μεταβληθεί το μέγεθος των στοιχείων, που βρίσκονται στο εσωτερικό της. Στην Εικόνα 4.13 φαίνεται η σφαίρα επιρροής.



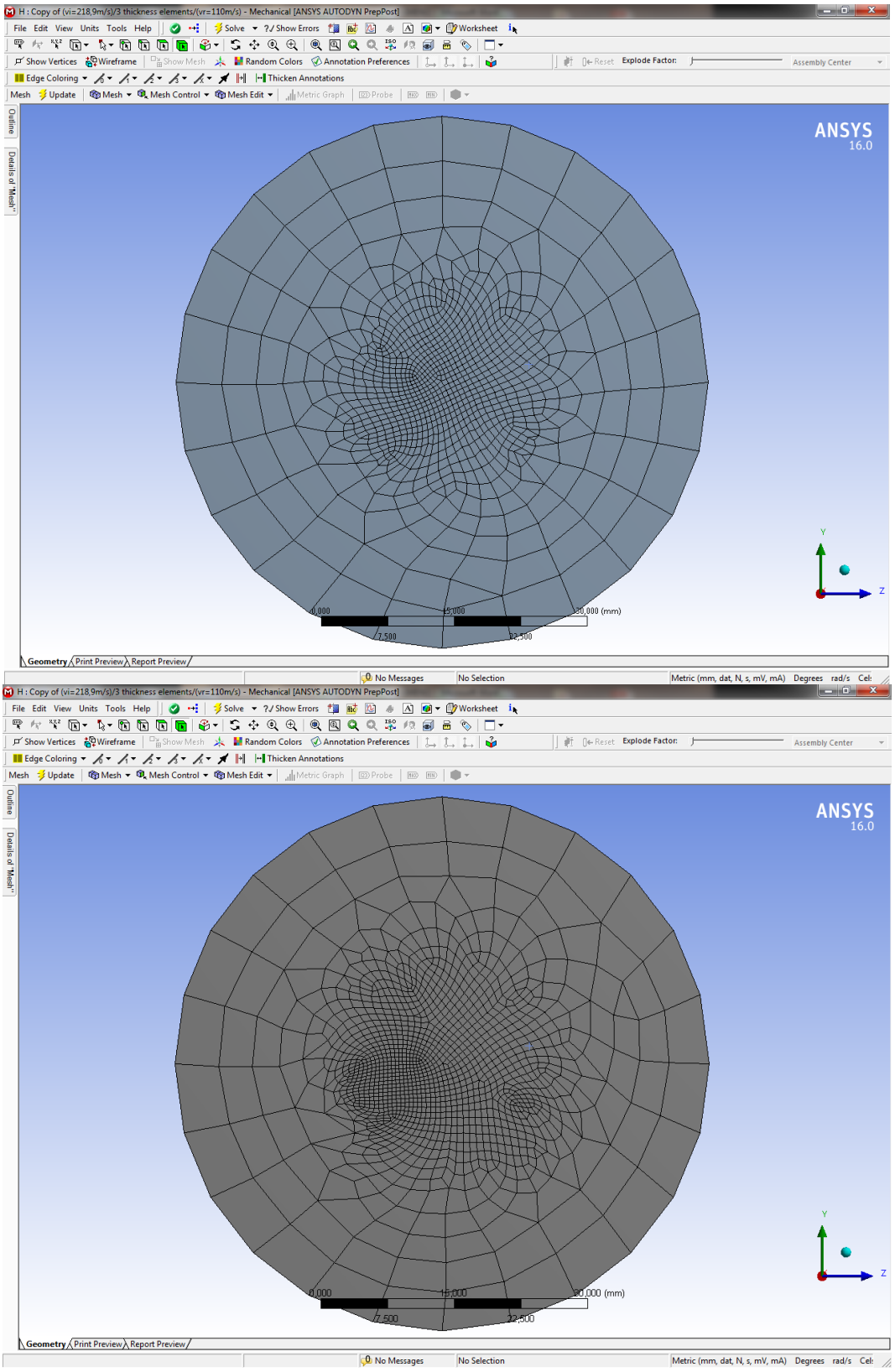
Εικόνα 4.13. Επιφάνεια πρόσκρουσης της πλάκας με την σφαίρα επιρροής εσωτερικά της οποίας μεταβάλλεται το μέγεθος των στοιχείων. Στην άνω εικόνα η σφαίρα έχει ακτίνα 8 [mm] και στην κάτω 4 [mm].

Στην Εικόνα 4.14 φαίνεται το αρχικό πλέγμα στο άνω μέρος και το πλέγμα έπειτα από την τοπική πύκνωση στο κάτω μέρος.



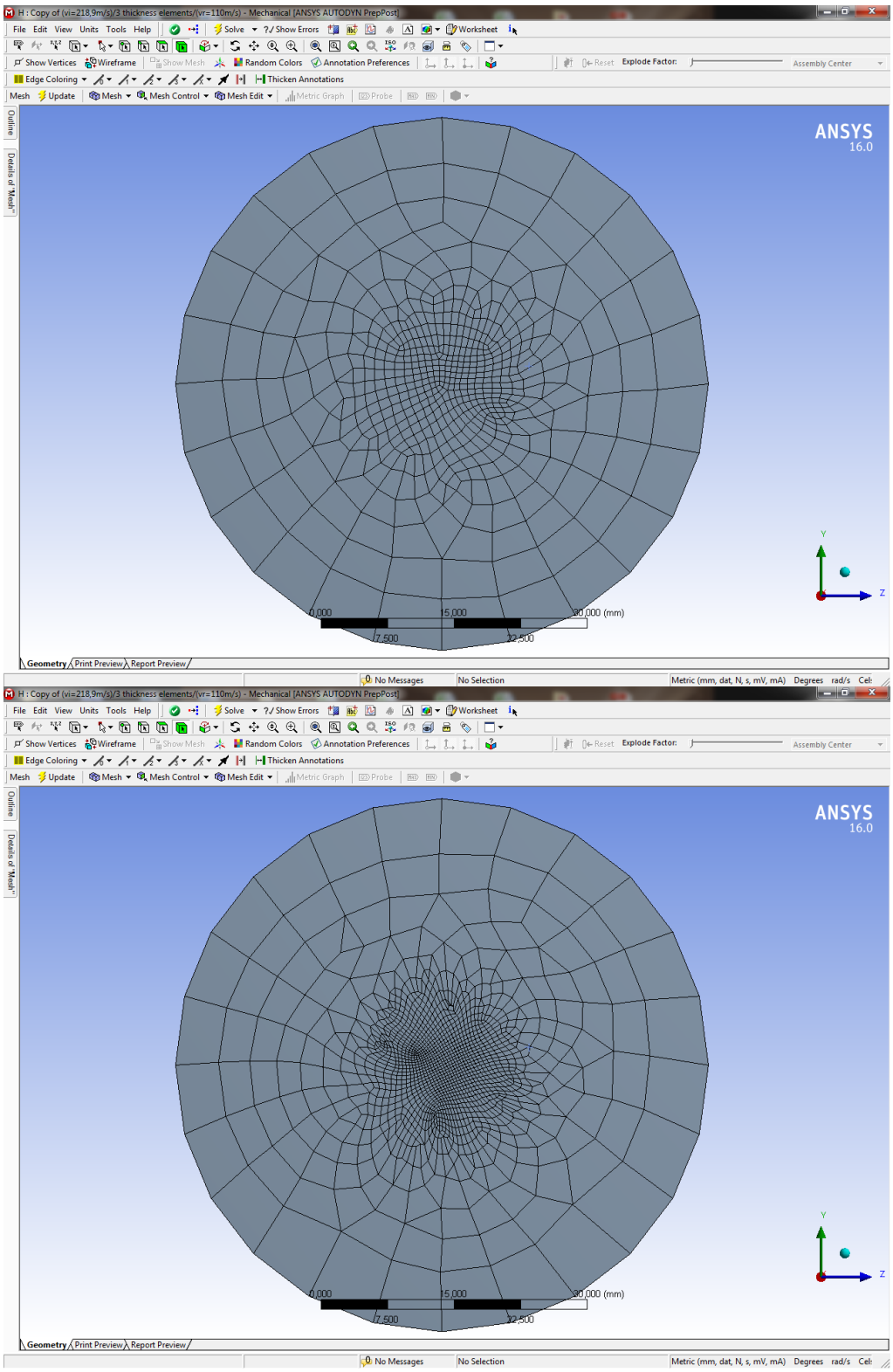
Εικόνα 4.14. Επιφάνεια πρόσκρουσης της χωρικά διακριτοποιημένης πλάκας χωρίς πύκνωση στο κέντρο (άνω μέρος) και με πύκνωση (κάτω μέρος). Τα στοιχεία στη συγκεκριμένη εικόνα εκτός της περιοχής που πύκνωσης έχουν μέγεθος 8 [mm] και εσωτερικά της περιοχής πύκνωσης 0.6 [mm]. Η ακτίνα της σφαίρας επιρροής στη συγκεκριμένη εικόνα επιλέχθηκε στα 6 [mm] και η συνολική ακτίνα της πλάκας είναι 30 [mm].

Στη Εικόνα 4.15 φαίνεται το πλέγμα για δύο διαφορετικά μεγέθη της ακτίνας της σφαίρας επιρροής.



Εικόνα 4.15. Επιφάνεια πρόσκρουσης της χωρικά διακριτοποιημένης πλάκας με ακτίνα της σφαίρας επιρροής 6 [mm] στο άνω μέρος και 10 [mm] στο κάτω μέρος. Τα στοιχεία στη συγκεκριμένη εικόνα εκτός της περιοχής πύκνωσης έχουν μέγεθος 8 [mm] και εσωτερικά της περιοχής πύκνωσης 0.6 [mm].

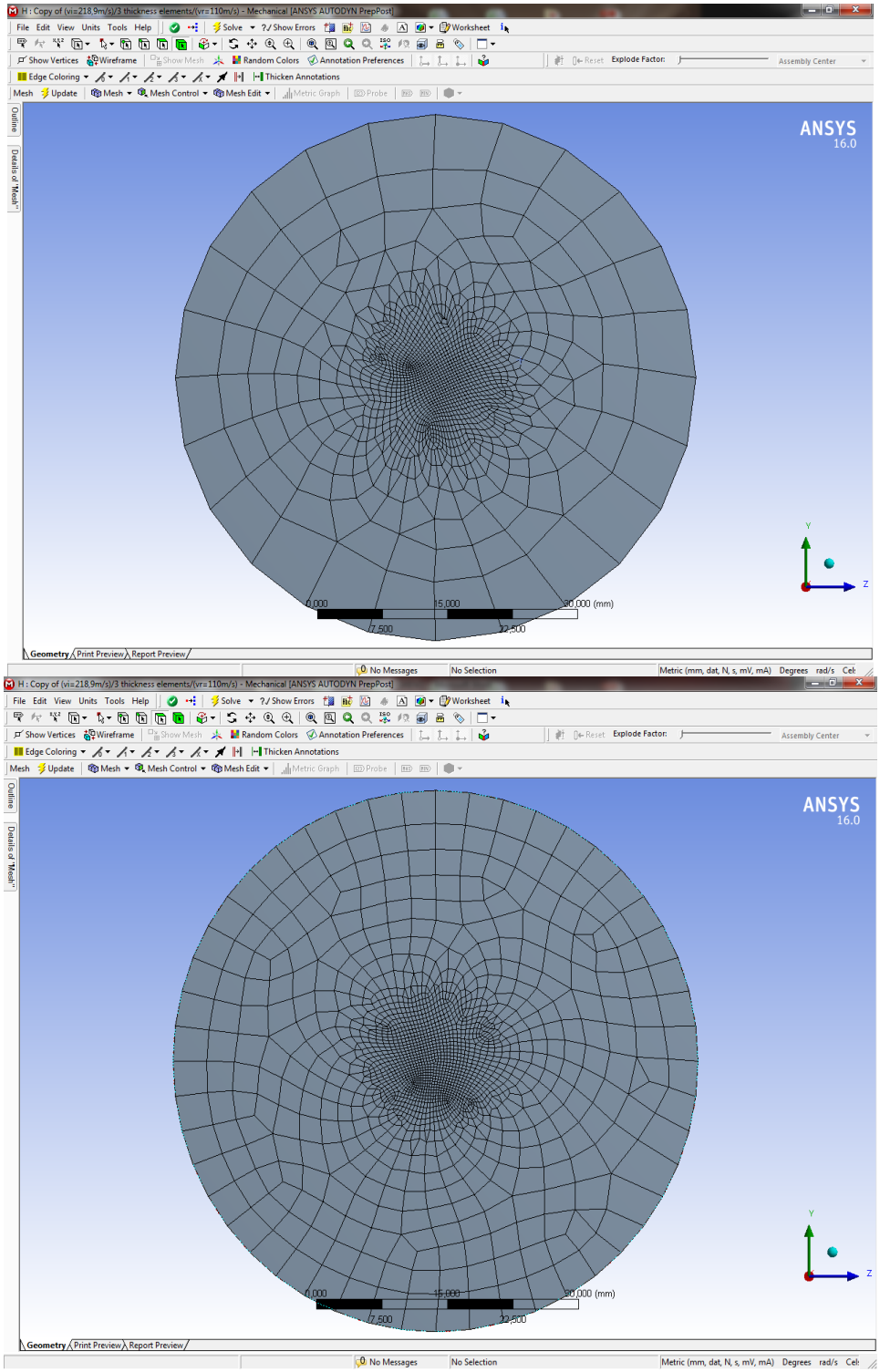
Εκτός από το μέγεθος της ακτίνας πρέπει να οριστεί και το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής. Στην Εικόνα 4.16 φαίνεται το πλέγμα για δυο διαφορετικά μεγέθη των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής.



Εικόνα 4.16. Επιφάνεια πρόσκρουσης της χωρικά διακριτοποιημένης πλάκας με μέγεθος στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.6 [mm] στο άνω μέρος και 0.35 [mm] στο κάτω μέρος. Τα στοιχεία στη συγκεκριμένη εικόνα εκτός της περιοχής πύκνωσης έχουν μέγεθος 8 [mm] και η ακτίνα της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].

4.2.1.3 Μέγεθος περιφερειακών στοιχείων

Η τελευταία παράμετρος, που ελέγχεται στο μη δομημένο πλέγμα, είναι το μέγεθος των στοιχείων, που βρίσκονται εξωτερικά της σφαίρας επιρροής (Εικόνα 4.17).



Εικόνα 4.17. Επιφάνεια πρόσκρουσης της χωρικά διακριτοποιημένης πλάκας με μέγεθος στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm] στο άνω μέρος και 4 [mm] στο κάτω μέρος. Τα στοιχεία στη συγκεκριμένη εικόνα εντός της περιοχής πύκνωσης έχουν μέγεθος 0.35 [mm] και η ακτίνα της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].

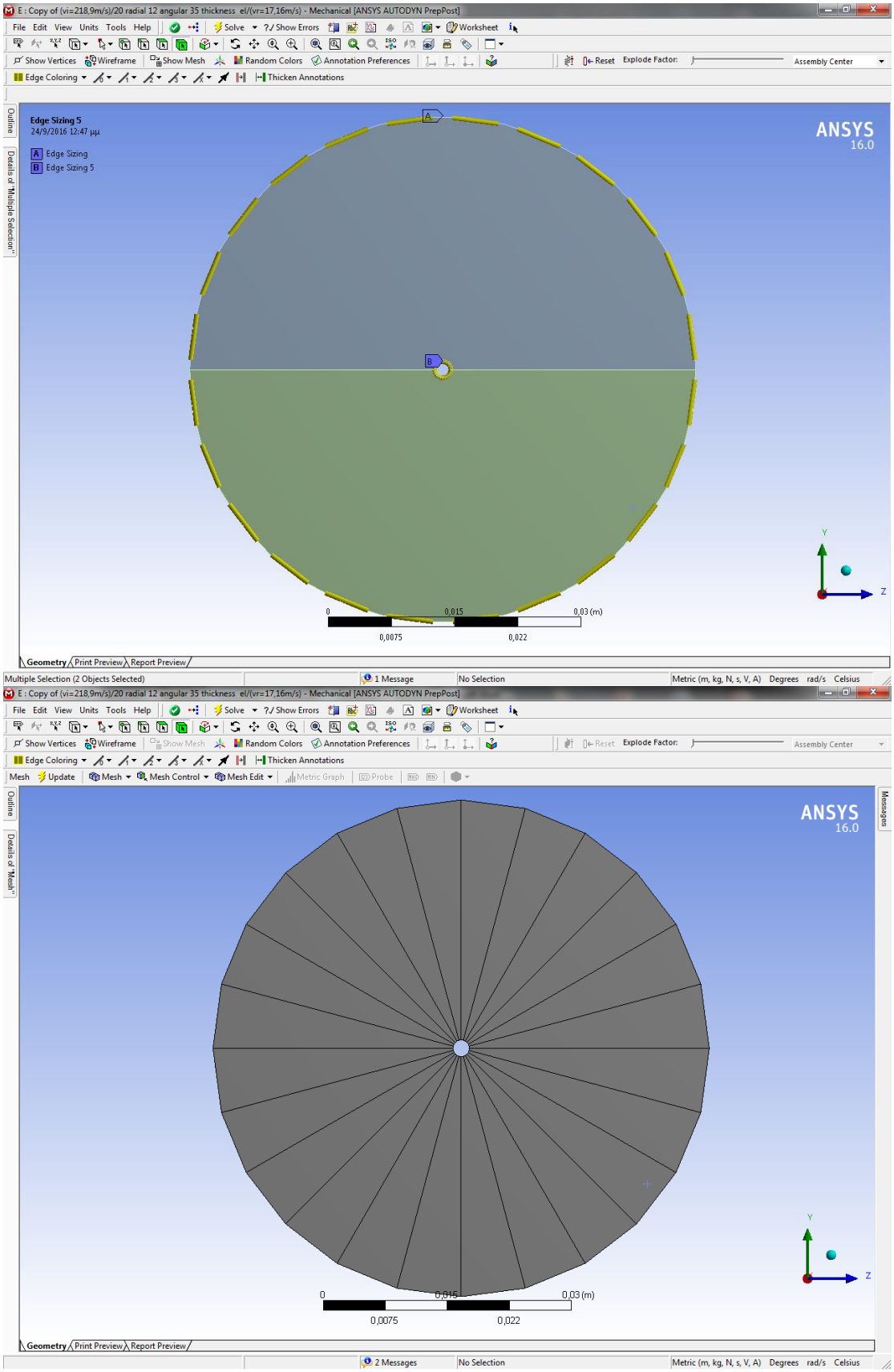
4.2.2 Δομημένο (κυλινδρικό) πλέγμα

Όπως προαναφέρθηκε, στη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιήθηκαν δυο διαφορετικοί τύποι πλέγματος. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα βήματα, που ακολουθούνται για τη δημιουργία του δομημένου (κυλινδρικού) πλέγματος και οι παράμετροι, που ορίστηκαν για τον έλεγχό του. Για τη δημιουργία του πλέγματος πρέπει να διαμεριστεί η πλάκα σε κυκλικούς τομείς και στη συνέχεια η ακτίνα κάθε κυκλικού τομέα διαμερίζεται σε ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Τέλος, παρόμοια με το μη-δομημένο πλέγμα η πλάκα διαμερίζεται και κατά τη διεύθυνση του πάχους.

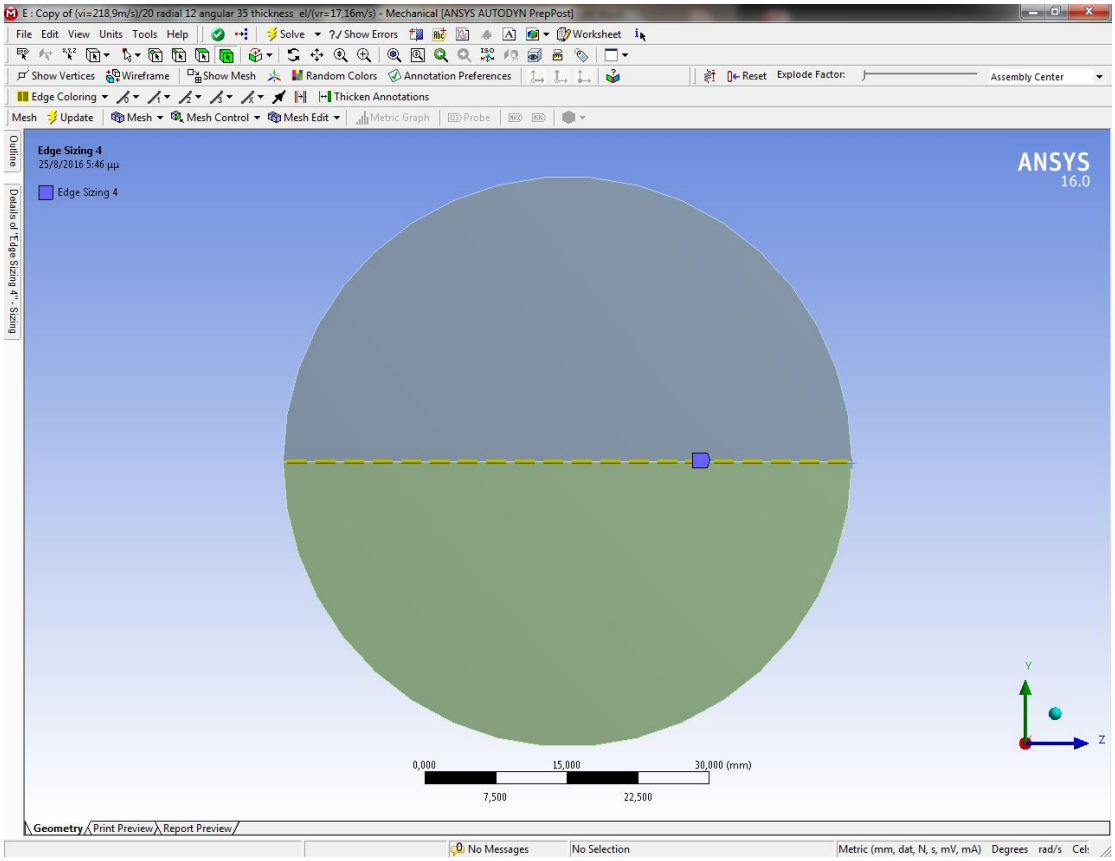
Στην Εικόνα 4.18 φαίνεται η μπροστινή επιφάνεια της πλάκας με μια οπή στο κέντρο. Αυτό το άνοιγμα στο κέντρο είναι απαραίτητο προκειμένου να δημιουργηθεί από το λογισμικό το δομημένο πλέγμα. Στην εικόνα το άνοιγμα έχει διάμετρο 2 [mm] ,προκειμένου να είναι εμφανές. Ωστόσο, στις προσομοιώσεις η διάμετρος είναι δύο τάξεις μεγέθους μικρότερη, δηλαδή 0.02 [mm]. Όπως αναφέρεται και στην [41], έχει αποδειχθεί, ότι η δημιουργίας μιας μικρής οπής στο κέντρο, δεν οδηγεί σε λανθασμένα αποτελέσματα. Ουσιαστικά, αυτό το άνοιγμα απαλλάσσει τον κώδικα από την ανάγκη χρησιμοποίησης κάποιο κριτηρίου για την έναρξη ρωγμών στο υλικό, αφού όπως προβλέπεται και από την θεωρία που αναπτύχθηκε στο αρχικό κεφάλαιο της προηγούμενης ενότητας, το αρχικό άνοιγμα διευρύνεται με μία συγκεκριμένη ταχύτητα, καθώς ο διεισδυτής διαπερνά το υλικό. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι η συγκεκριμένη παραδοχή δεν είναι καθολική, αλλά ισχύει σε συγκεκριμένα υλικά όπου ο μηχανισμός διάτρησης χαρακτηρίζεται από το άνοιγμα κοιλότητας σε όλκιμο υλικό (Ductile hole enlargement) και είναι ένας από τους πολλούς δυνατούς μηχανισμούς διάτρησης, που περιγράφονται στην [26].

Στην Εικόνα 4.18 φαίνονται επιλεγμένες (κίτρινη διακεκομμένη) η κυκλική περιφέρεια της πλάκας, και η κυκλικού περιφέρεια του ανοίγματος στο κέντρο. Στο λογισμικό δίνεται εντολή να χωριστούν οι δύο περιφέρειες σε ίσα κυκλικά τμήματα. Στη συνέχεια οι άκρες κάθε κυκλικού τμήματος στην περιφέρεια του ανοίγματος, ενώνονται με τις άκρες του αντιστοίχου τμήματος στην περιφέρεια της πλάκας, με αποτέλεσμα τον χωρισμό της πλάκας σε κυκλικούς τομείς.

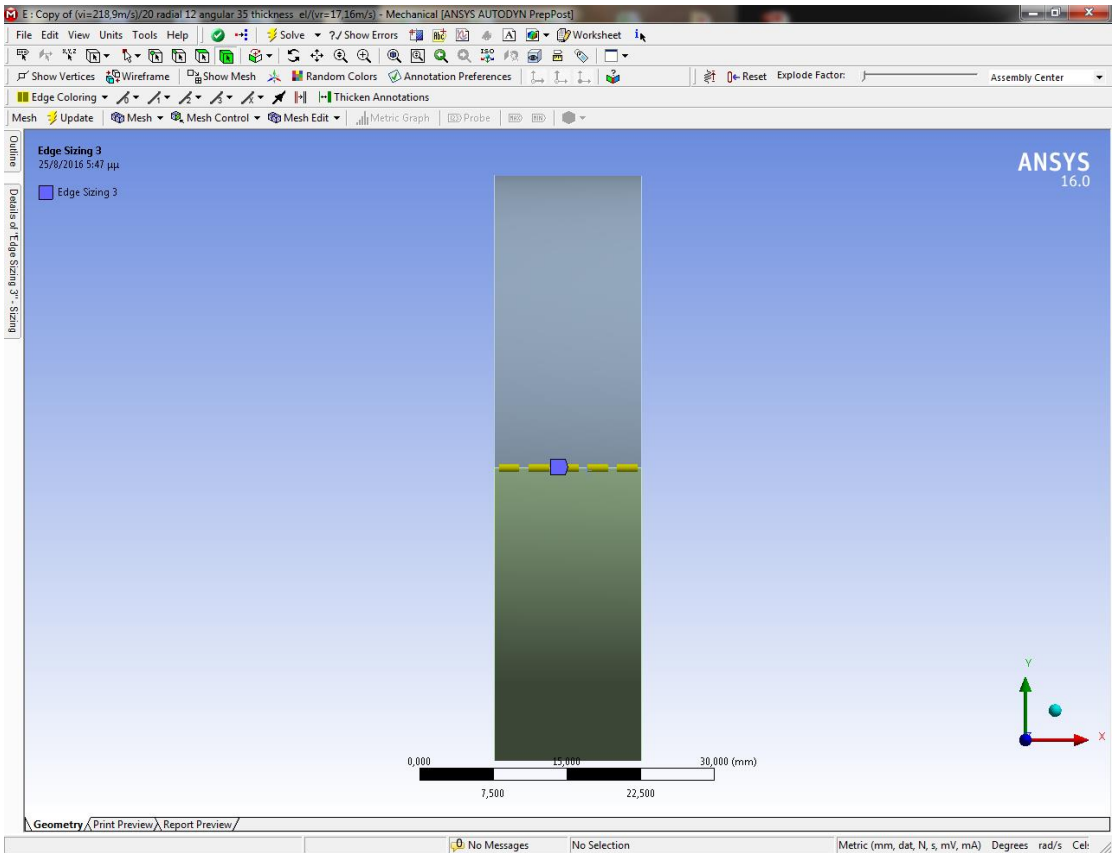
Στην Εικόνα 4.19 φαίνεται επιλεγμένη η διάμετρος της μπροστινής επιφάνειας της πλάκας και στην Εικόνα 4.20 η πλευρική επιφάνεια με επιλεγμένο ένα ευθύγραμμο τμήμα κατά τη διεύθυνση του πάχους της πλάκας, η διαμέριση του οποίου, καθορίζει τον αριθμό στοιχείων κατά το πάχος.



Εικόνα 4.18. Επιφάνεια πρόσκρουσης της πλάκας (άνω εικόνα) με επιλεγμένες τις περιφέρειες της πλάκας και του ανοίγματος στο κέντρο (κίτρινη διακεκομμένη γραμμή). Από τον αριθμό των διαμερίσεων της περιφέρειας καθορίζεται ο αριθμός των κυκλικών τομέων που θα χωριστεί η πλάκα (κάτω εικόνα).

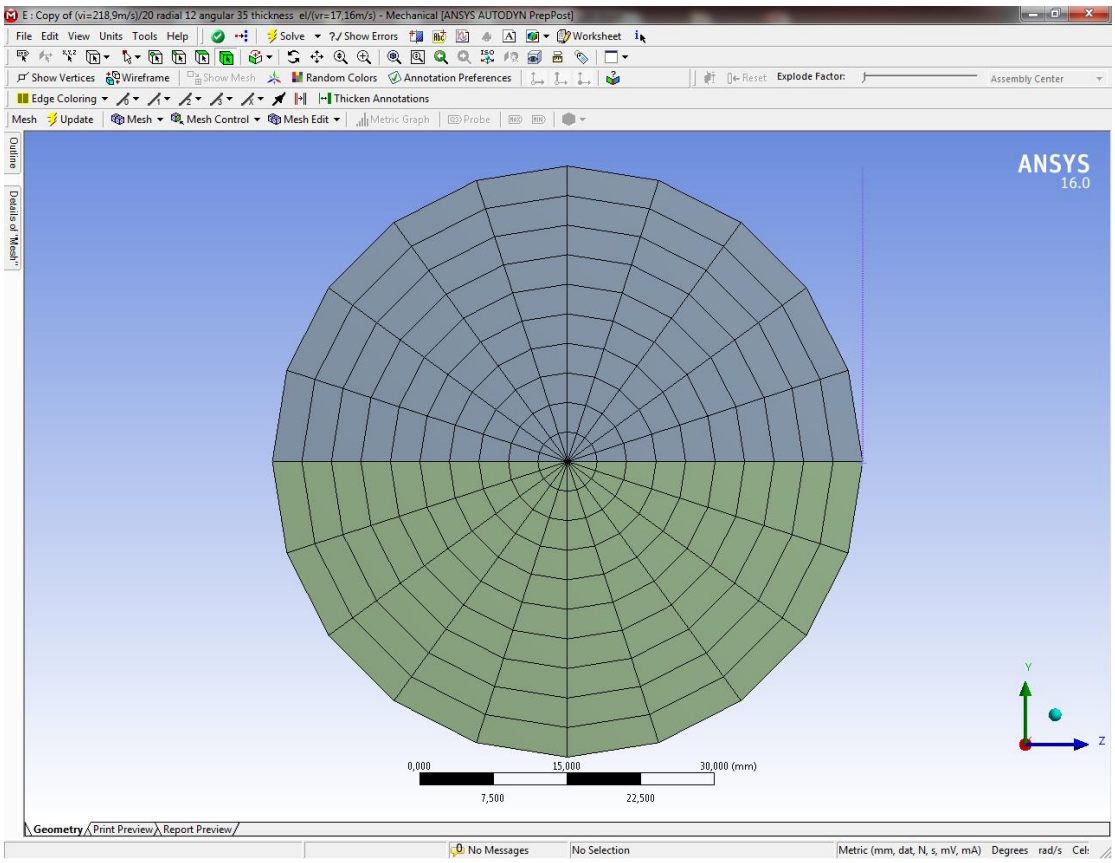


Εικόνα 4.19. Επιφάνεια πρόσκρουσης της πλάκας με επιλεγμένη την διάμετρο (κίτρινη διακεκομμένη γραμμή). Από τον αριθμό των διαμερίσεων της διαμέτρου καθορίζεται η διαμέριση κάθε κυκλικού τομέα κατά την διεύθυνση της ακτίνας.



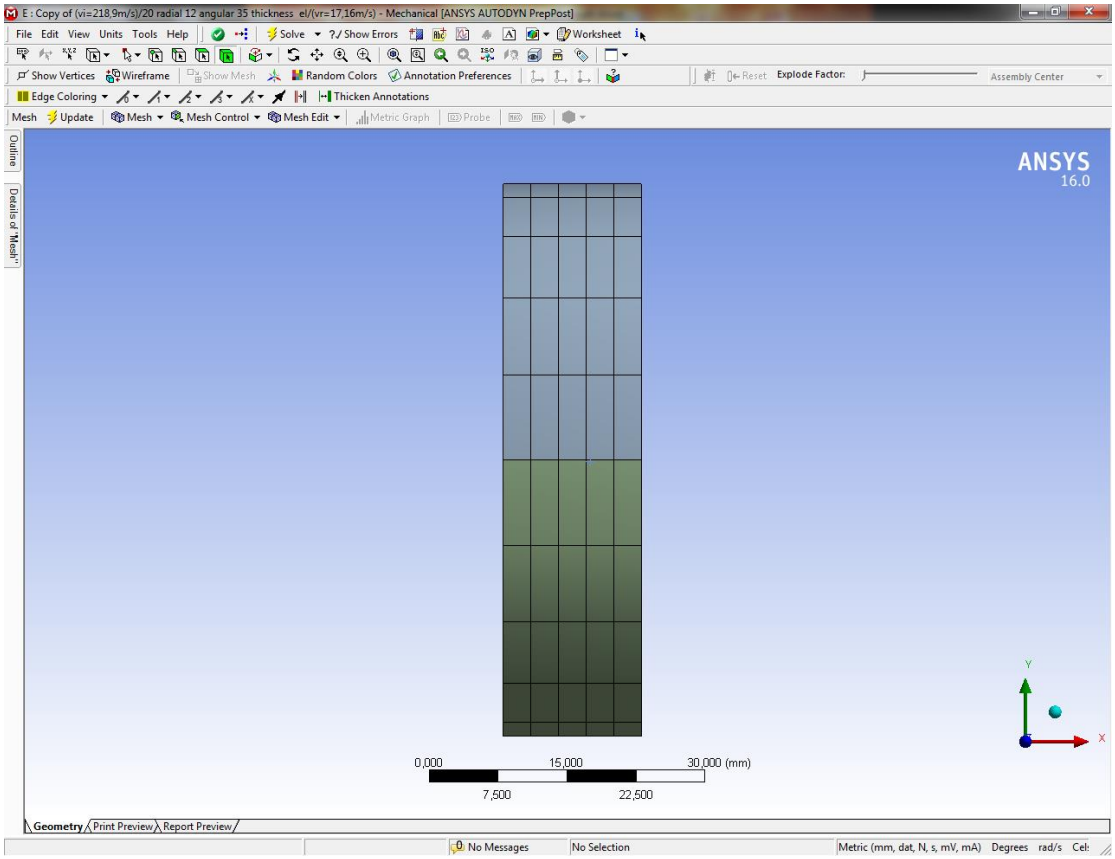
Εικόνα 4.20.Πλευρική επιφάνεια της πλάκας με επιλεγμένο ένα ευθύγραμμο τμήμα κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας η διαμέριση του οποίου καθορίζει τον αριθμό στοιχείων κατά το πάχος.

Παρακάτω παρουσιάζεται η αρχική διακριτοποίηση της πλάκας με τη χρήση του δομημένου πλέγματος. Στην Εικόνα 4.21 φαίνεται η επιφάνεια πρόσκρουσης της πλάκας με το αρχικό πλέγμα.

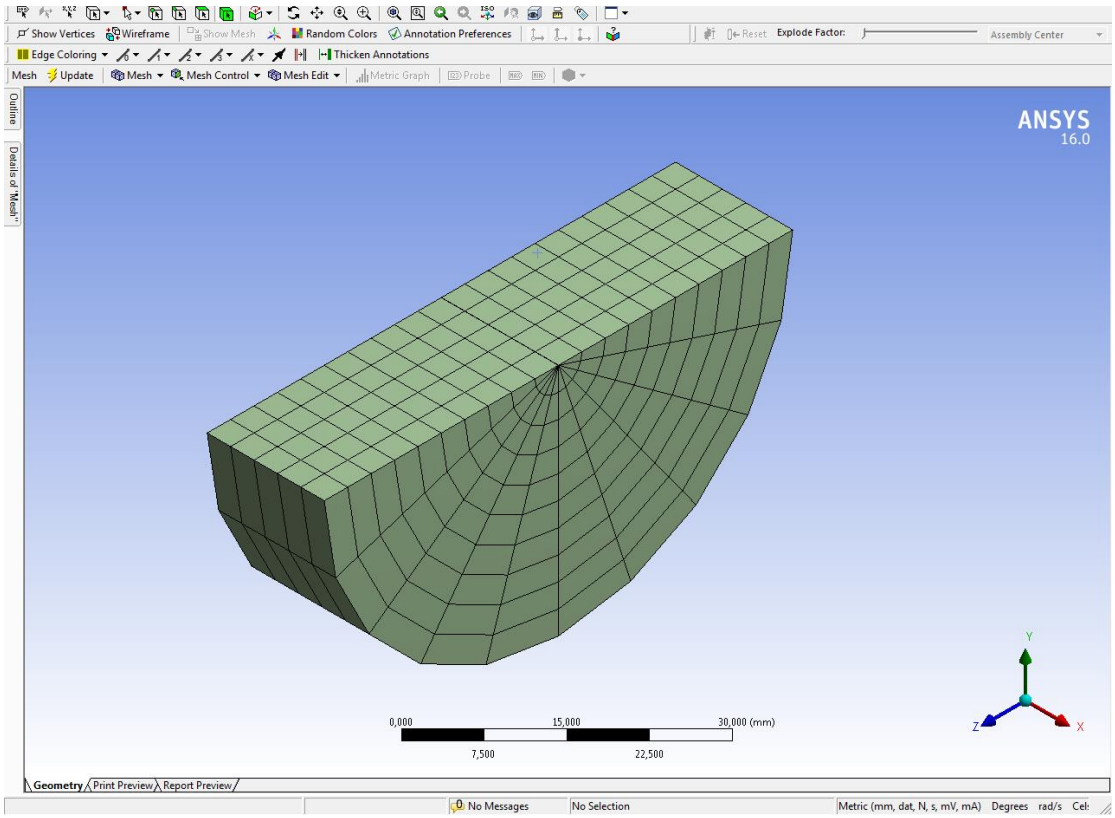


Εικόνα 4.21. Επιφάνεια πρόσκρουσης της πλάκας έπειτα από την αρχική διακριτοποίηση χρησιμοποιώντας δομημένο πλέγμα.

Στην Εικόνα 4.22 φαίνεται η πλευρική επιφάνεια της πλάκας με το αρχικό πλέγμα και στην Εικόνα 4.23 μία τομή της πλάκας κατά το οριζόντιο επίπεδο x-z.



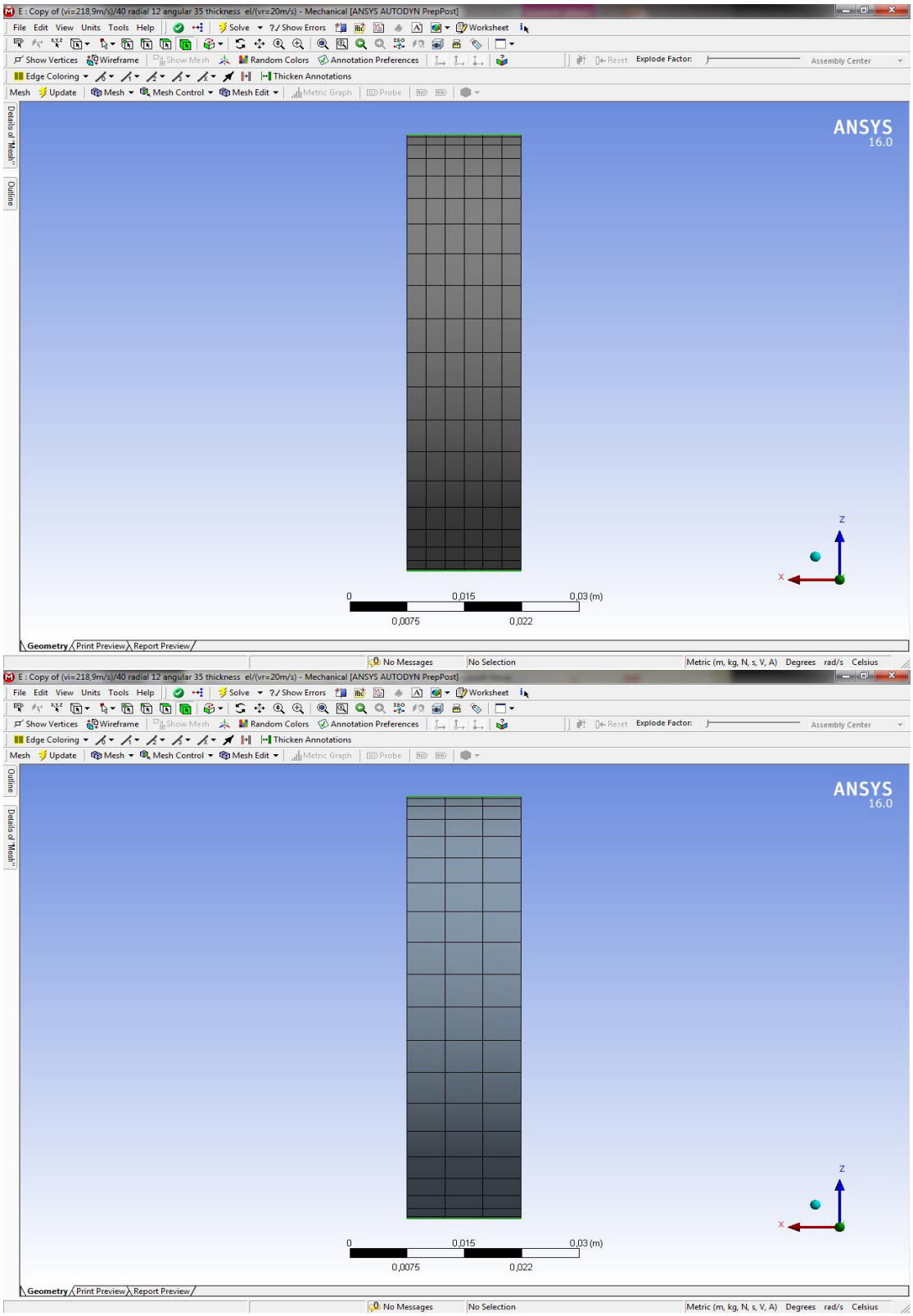
Εικόνα 4.22. Πλευρική επιφάνεια της πλάκας έπειτα από την αρχική διακριτοποίηση χρησιμοποιώντας δομημένο πλέγμα.



Εικόνα 4.23.Οριζόντια τομή της πλάκας έπειτα από την αρχική διακριτοποίηση χρησιμοποιώντας δομημένο πλέγμα.

4.2.3 Αριθμός στοιχείων κατά πάχος

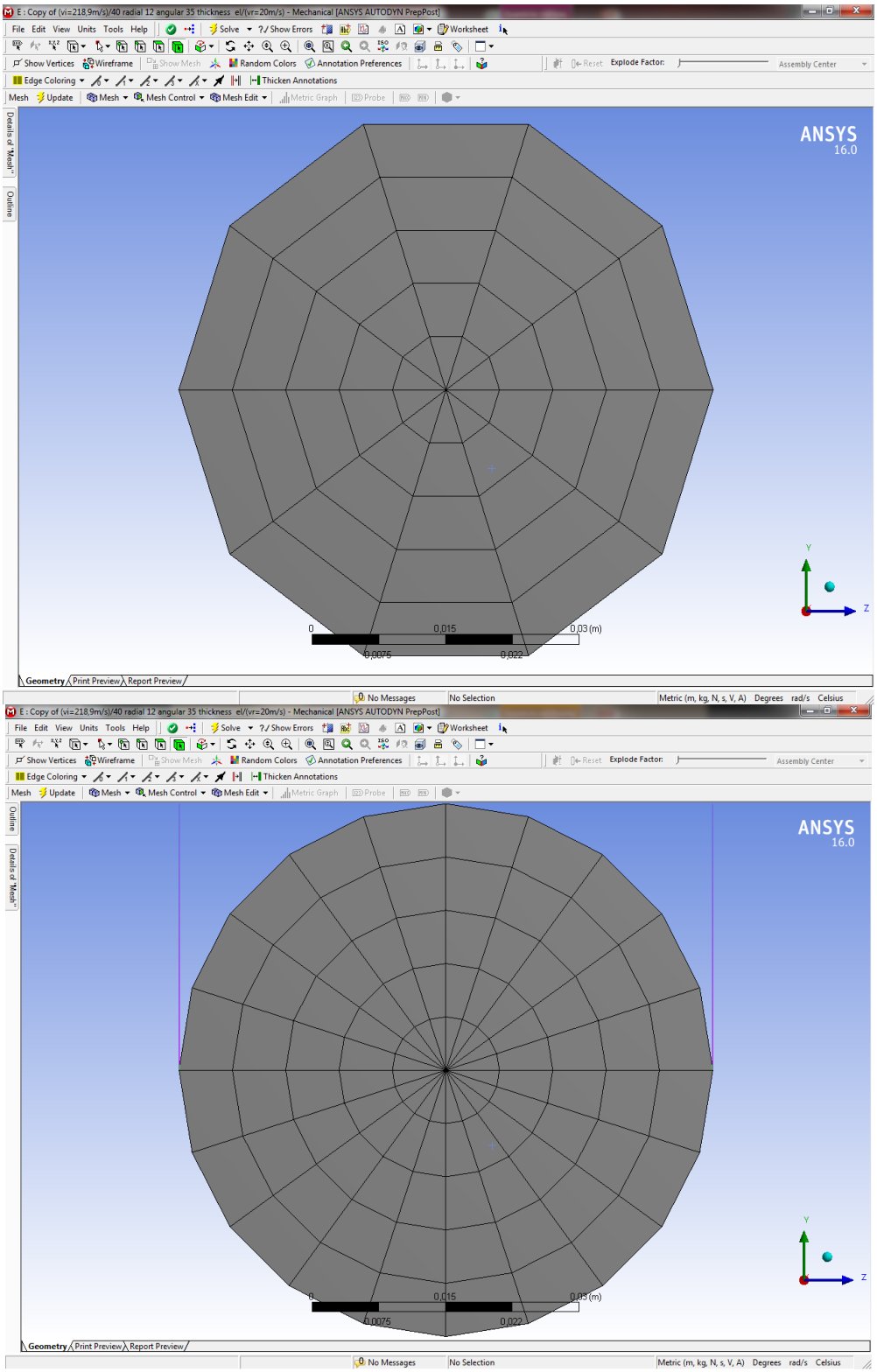
Παρόμοια με το μη δομημένο πλέγμα η πρώτη παράμετρος, που ελέγχεται, είναι ο αριθμός των στοιχείων κατά το πάχος της πλάκας. Στην Εικόνα 4.24 φαίνεται η πλάκα με αριθμό στοιχείων κατά πάχος 3 και 6 στο κάτω και στο πάνω μέρος αντίστοιχα.



Εικόνα 4.24. Πλευρική επιφάνεια της πλάκας με τρία στοιχεία κατά πάχος (κάτω μέρος) και έξι στοιχεία κατά πάχος (άνω μέρος).

4.2.4 Αριθμός γωνιακών διαμερίσεων

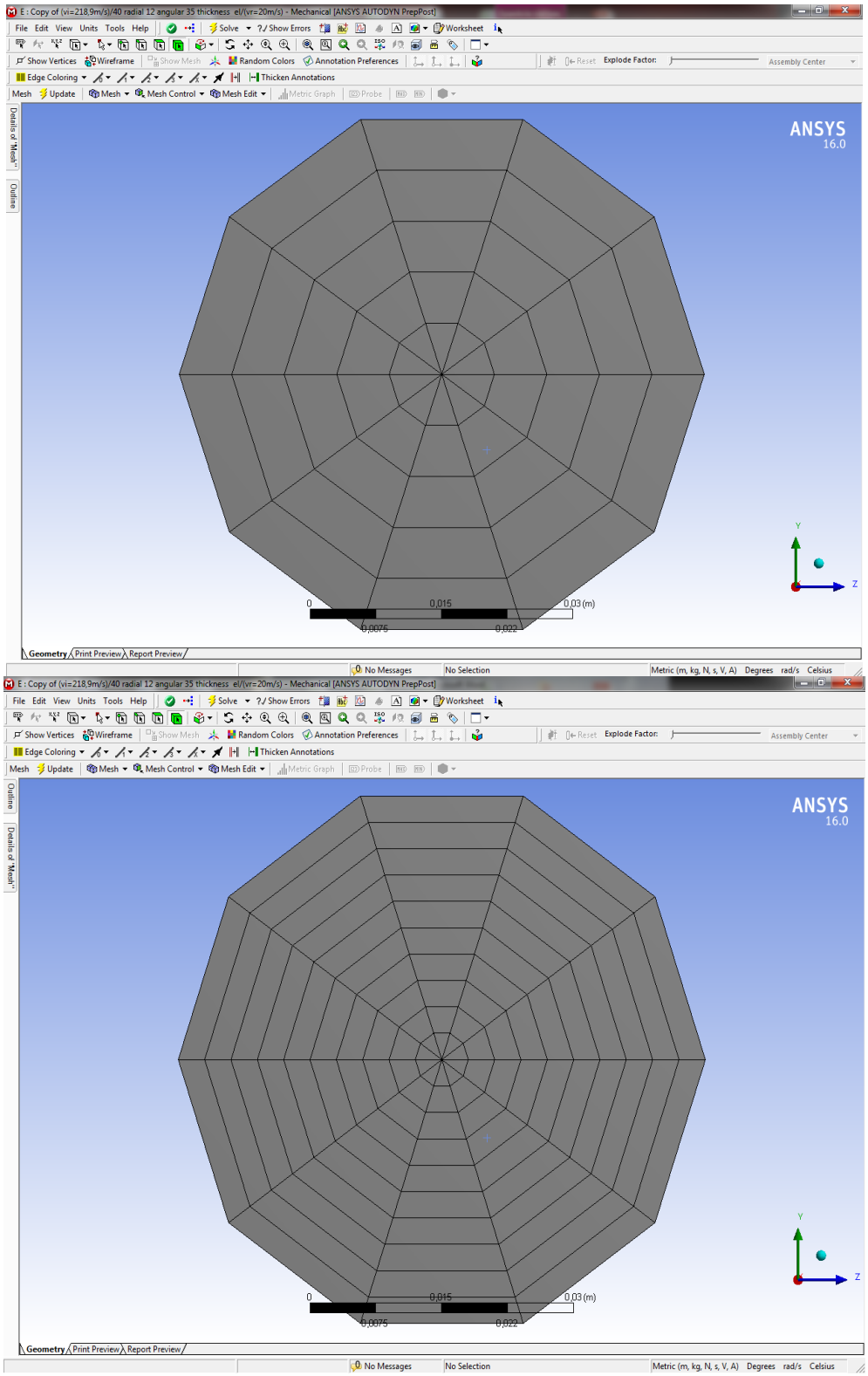
Η επόμενη παράμετρος, που ελέγχεται, είναι ο αριθμός των διαμερίσεων της πλάκας κατά τη γωνιακή διεύθυνση. Στην Εικόνα 4.25 φαίνεται η πλάκα με 10 στοιχεία (άνω) και 20 στοιχεία (κάτω).



Εικόνα 4.25. Επιφάνεια πρόσκρουσης της πλάκας έπειτα από την χρησιμοποίηση κυλινδρικού πλέγματος. Στην άνω εικόνα είναι χωρισμένη σε 10 τμήματα κατά την γωνιακή διεύθυνση και στην κάτω εικόνα σε 20 τμήματα κατά την γωνιακή διεύθυνση.

4.2.5 Αριθμός ακτινικών διαμερίσεων

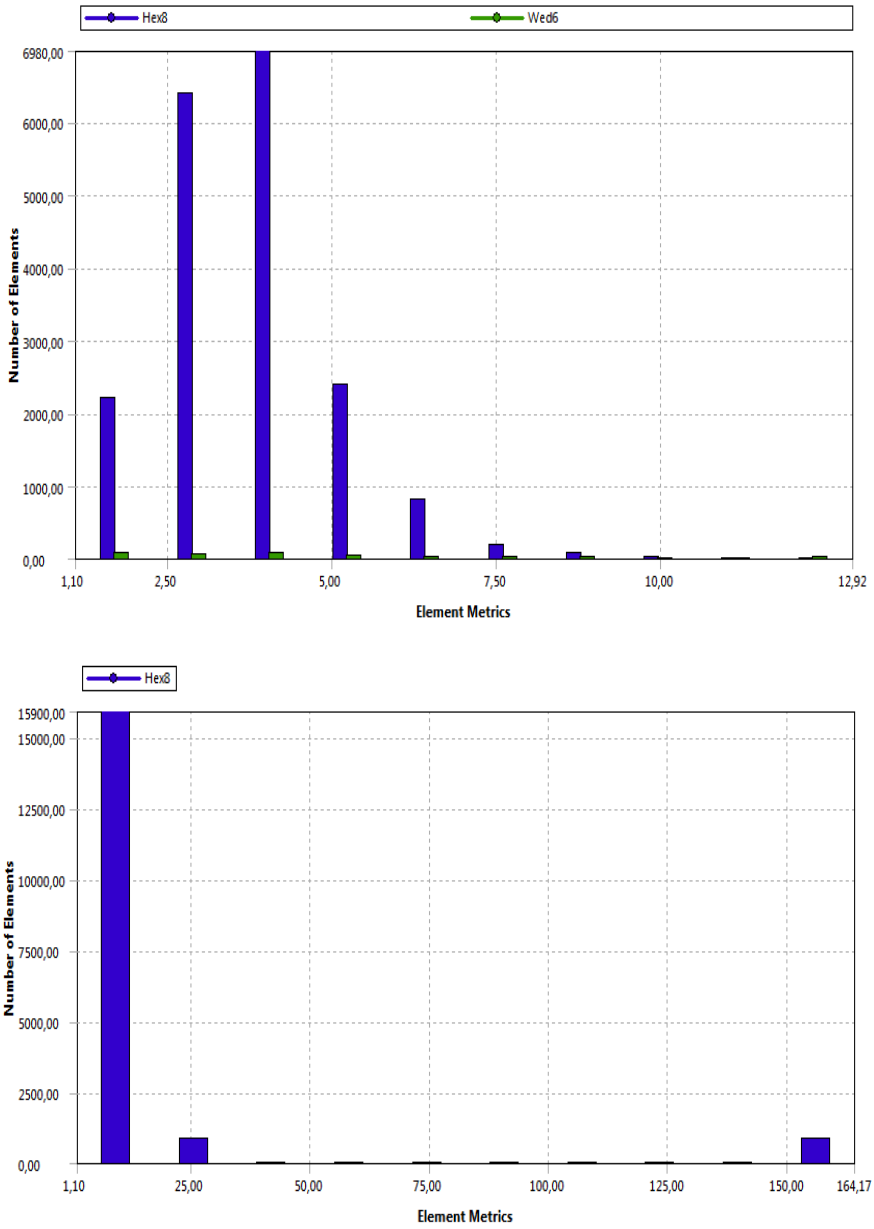
Η τελευταία παράμετρος, που ελέγχεται στο δομημένο πλέγμα, είναι ο αριθμός διαμερίσεων στην ακτινική διεύθυνση. Στην Εικόνα 4.26 φαίνεται η πλάκα με 5 στοιχεία (άνω) και 10 στοιχεία (κάτω) κατά την ακτινική διεύθυνση.



Εικόνα 4.26. Επιφάνεια πρόσκρουσης της πλάκας έπειτα από την χρησιμοποίηση δομημένου πλέγματος. Στην άνω εικόνα είναι χωρισμένη σε 5 τμήματα κατά την ακτινική διεύθυνση και στην κάτω εικόνα σε 10 τμήματα κατά την ακτινική διεύθυνση. Ο αριθμός των διαμερίσεων άνω και κάτω κατά την γωνιακή διεύθυνση είναι 10.

4.2.6 Αναλογία μεταξύ τριγωνικών και τετραγωνικών στοιχείων

Στην Εικόνα 4.27 παρουσιάζεται ο αριθμός των στοιχείων τριγωνικής και τετραγωνικής διατομής, που χρησιμοποιείται στο μη-δομημένο και στο δομημένο πλέγμα. Όπως, είναι εμφανές στο δομημένο πλέγμα χρησιμοποιούνται εξολοκλήρου τετραγωνικά στοιχεία, ενώ στο μη δομημένο χρησιμοποιούνται και οι δύο τύπο στοιχείων. Η πλειοψηφία των στοιχείων στο μη δομημένο πλέγμα είναι τετραγωνικής διατομής και τα πρισματικά στοιχεία χρησιμοποιούνται για να συμπληρωθούν τα κενά, που προκύπτουν κατά τη δημιουργία του πλέγματος από το λογισμικό.



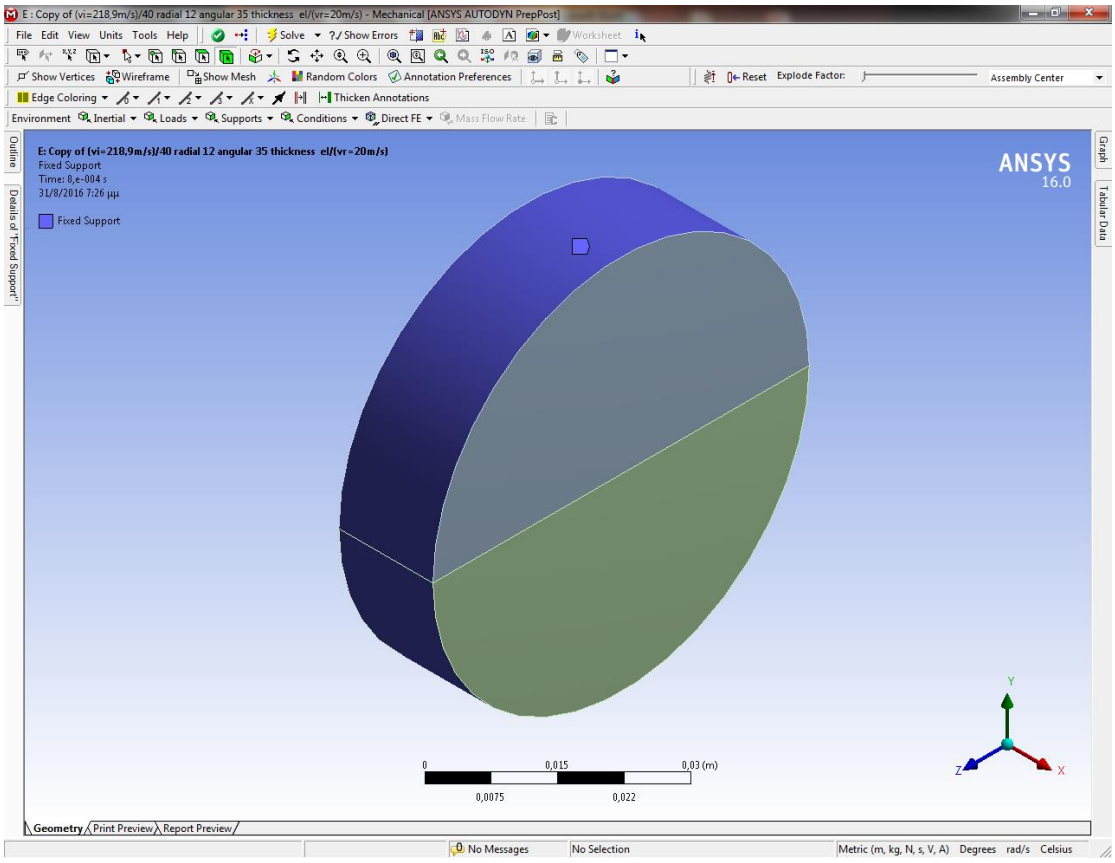
Εικόνα 4.27. Αναλογία μεταξύ στοιχείων τριγωνικής και τετραγωνικής διατομής για μη δομημένο πλέγμα (άνω) και δομημένο (κάτω). Στον οριζόντιο άξονα βρίσκεται ο λόγος της μεγαλύτερης προς την μικρότερη διάσταση των πεπερασμένων στοιχείων (aspect ratio) και στον κατακόρυφο ο αριθμός των στοιχείων του πλέγματος, που έχουν το ίδιο aspect ratio.

4.3 Επιλογή υλικού

Για υλικό της πλάκας επιλέγεται το αλουμίνιο AL5083 H116 από την βιβλιοθήκη του Ansys. Οι τιμές των παραμέτρων, που καθορίζουν τις ιδιότητες του αλουμινίου και πρέπει να εισαχθούν στο λογισμικό, δίνονται από τους πίνακες 1 και 2. Ο διεισδυτής θεωρείται ότι είναι μη παραμορφώσιμο στερεό και η μόνη σημαντική παράμετρος, που πρέπει να καθοριστεί είναι η πυκνότητα ($7850[Kg/m^3]$).

4.4 Επιβολή συνοριακών συνθηκών

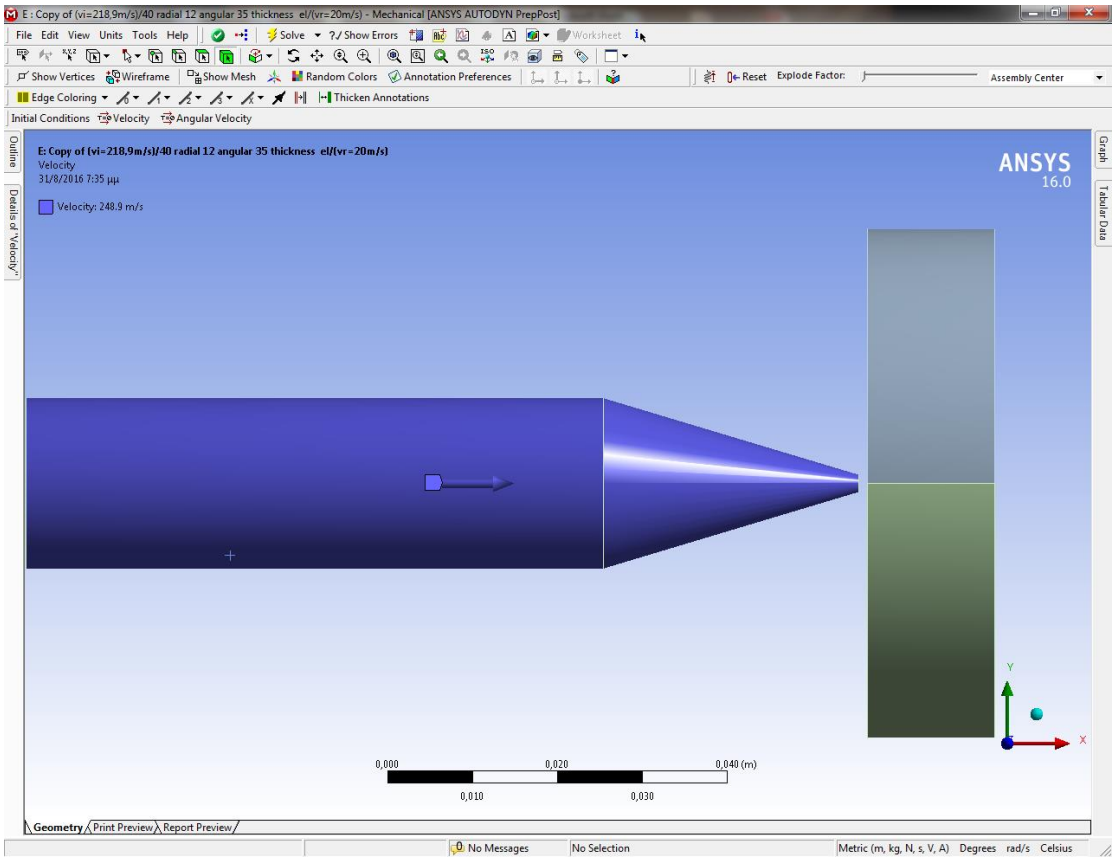
Αφού δημιουργηθεί το πλέγμα, είτε μη-δομημένο είτε δομημένο, πρέπει να οριστούν οι συνοριακές συνθήκες ή αλλιώς οι στηρίξεις της πλάκας. Στο πείραμα που περιγράφεται στην [40] η πλάκα στηρίζεται σε ένα σταθερό πλαίσιο με κοχλίες, που τοποθετούνται περιμετρικά στην περιφέρεια της. Αυτός ο τρόπος στήριξης μοντελοποιείται με τη θεώρηση ότι η πλευρική επιφάνεια της πλάκας είναι πακτωμένη. Στην Εικόνα 4.28 φαίνεται η επιλεγμένη περιοχή στο λογισμικό με μπλε χρώμα.



Εικόνα 4.28. Τρισδιάστατη όψη της πλάκας με επιλεγμένη την περιοχή που ορίζεται στο λογισμικό ως σταθερά πακτωμένη.

4.5 Ορισμός αρχικών συνθηκών

Το τελευταίο στάδιο για τον πλήρη ορισμό του μοντέλου, είναι ο ορισμός των αρχικών συνθηκών, που στη συγκεκριμένη εφαρμογή είναι η αρχική ταχύτητα του διεισδυτή. Στην Εικόνα 4.29 φαίνεται η πλάκα και ο διεισδυτής επιλεγμένος με μπλε χρώμα, όπως και το διάνυσμα της ταχύτητας, που είναι παράλληλο ως προ τον x-άξονα.



Εικόνα 4.29. Πλευρική επιφάνεια της πλάκας και του διεισδυτή, με επιλεγμένο τον διεισδυτή για τον ορισμό του ανύσματος της αρχικής ταχύτητάς.

5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτήν την ενότητα, θα γίνει παράθεση των αποτελεσμάτων από την υπολογιστική προσομοίωση της κρούσης. Όπως, προαναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα σκοπός αυτής της εργασίας είναι η ανάλυση ευαισθησίας, των αποτελεσμάτων του υπολογιστικού μοντέλου, ως προς τις παραμέτρους, που επηρεάζουν το μέγεθος του πλέγματος είτε δομημένου είτε μη-δομημένου. Ο τελικός σκοπός αυτής της εργασίας είναι διττός, αφενός εξετάζεται η ευαισθησία των τελικών αποτελεσμάτων, ως προς τις διάφορες παραμέτρους, από τις οποίες εξαρτώνται τα τελικά αποτελέσματα και αφετέρου είναι η εύρεση του βέλτιστου πλέγματος, ως προς την προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων.

Τα φαινόμενα των κρούσεων υψηλών ταχυτήτων είναι ιδιαίτερα σύνθετα αφού περιλαμβάνουν φαινόμενα ελαστικών και πλαστικών παραμορφώσεων, φαινόμενα διάδοσης ελαστικών και πλαστικών κυματικών διαταραχών σε συνεχές μέσο, φαινόμενα πλαστικής διαρροής και θραύσεως και ανάπτυξη υψηλών θερμοκρασιών στην περιοχή, που εφάπτεται ο διεισδυτής με την πλάκα. Το σύνολο αυτών των φαινομένων είναι από δύσκολο έως αδύνατον να μετρηθούν πειραματικά και για αυτό το λόγο οι πειραματικές μελέτες αυτού του φαινομένου είναι σχετικά περιορισμένες και ασχολούνται με μεγέθη, που είναι σχετικά εύκολο να μετρηθούν, όπως η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή από την πλάκα και η μορφή του κρατήρα, που δημιουργείται στις δύο επιφάνειες της πλάκας, έπειτα από τη διάτρηση της από το διεισδυτή. Στην [40] παρατίθεται ένας πίνακας που περιλαμβάνει τις πειραματικά μετρημένες ταχύτητες εξόδου του διεισδυτή για διάφορες τιμές του πάχους της πλάκας και της ταχύτητας πρόσκρουσης του διεισδυτή. Οι πειραματικές τιμές από την [40] χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του υπολογιστικού μοντέλου.

Ακόμη, η ταχύτητα εξόδου είναι η μεταβλητή στην οποία εξετάζεται η ευαισθησία, ως προς τις παραμέτρους, που επηρεάζουν το πλέγμα. Επομένως, θεωρείται ότι η ταχύτητα εξόδου είναι η μεταβλητή εξόδου μίας πολυπαραμετρικής συνάρτησης, που δέχεται ως ορίσματα αυτές τις παραμέτρους. Στα κεφάλαια που ακολουθούν παρατίθενται διαγράμματα, όπου παρουσιάζεται η εξάρτηση της ταχύτητας εξόδου, ως προς κάθε παράμετρο ξεχωριστά και για τους δύο τύπους πλέγματος. Στη συνέχεια μετά το πέρας της ανάλυσης ευαισθησίας συγκρίνονται τα πειραματικά δεδομένα με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

5.1 Μη-δομημένο πλέγμα (πλέγμα που κατασκευάστηκε με αυτόματη γένεση)

Για το μη-δομημένο πλέγμα, οι παράμετροι που το επηρεάζουν, είναι ο αριθμός των στοιχείων κατά το πάχος της πλάκας N_t, η ακτίνα της σφαίρας επιρροής R, το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά S_i και εξωτερικά S_o της σφαίρας επιρροής. Επομένως, η ταχύτητα εξόδου είναι συνάρτηση αυτών των παραμέτρων συν της ταχύτητας εισόδου ή πρόσκρουσης του διεισδυτή.

$$V_{out} = f(N_t, R, S_i, S_o, V_{in}) \tag{5.1.1}$$

Για την παραμετρική ανάλυση επιλέγεται μία αρχική τιμή για κάθε παράμετρο. Στη συνέχεια, επιλέγεται μία παράμετρος, η οποία θεωρείται μεταβαλλόμενη και οι υπόλοιπες σταθεροποιούνται. Έπειτα, παράγεται το γράφημα της (5.1.1), ως προς τη μεταβαλλόμενη παράμετρο και γίνεται αναζήτηση περιοχών μηδενικής ευαισθησίας, δηλαδή περιοχών που μεταβολές της παραμέτρου δεν επηρεάζουν τη μεταβλητή εξόδου. Στο επόμενο βήμα επιλέγεται μία τιμή για τη μεταβαλλόμενη παράμετρο από την περιοχή μηδενικής ευαισθησίας, η παράμετρος αυτή σταθεροποιείται και η παραμετρική ανάλυση τελειώνει για τη συγκριμένη παράμετρο. Στη συνέχεια, επιλέγεται η επόμενη παράμετρος και επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία.

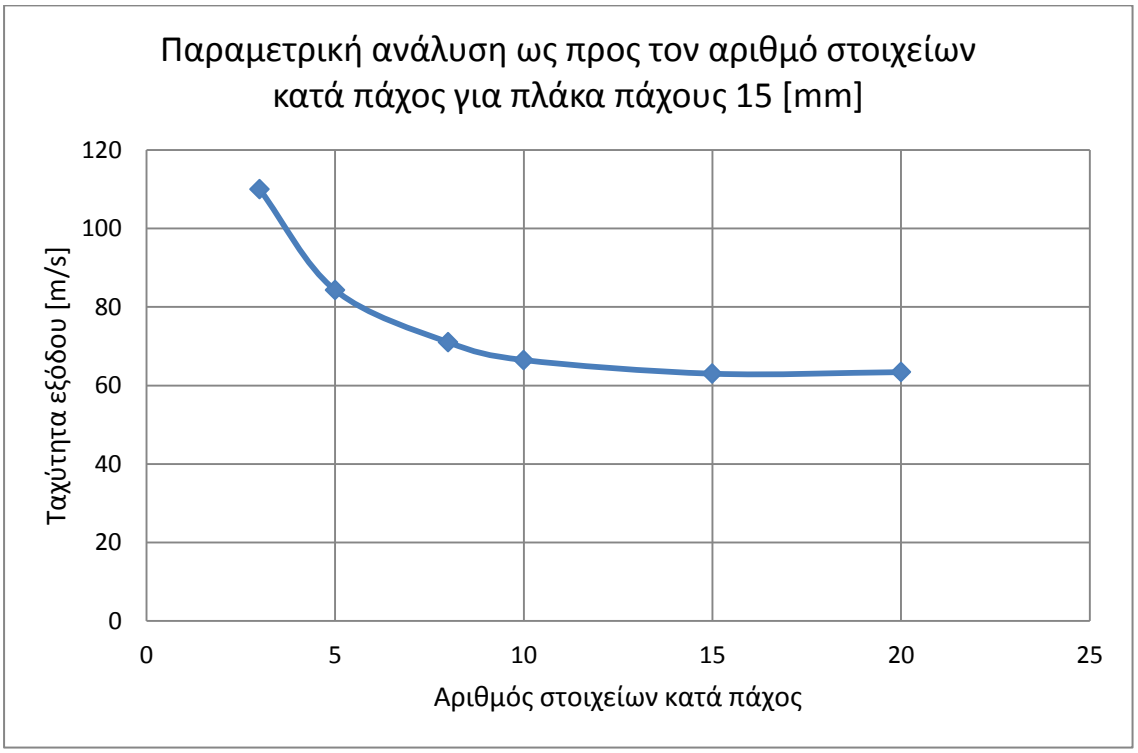
Στη συγκεκριμένη εργασία παρατίθενται αποτελέσματα προσομοιώσεων για τέσσερα διαφορετικά πάχη της πλάκας και πέντε διαφορετικές ταχύτητες πρόσκρουσης για κάθε πάχος. Ωστόσο, εκτενής παραμετρική ανάλυση διεξάγεται μόνο για μια τιμή του πάχους στα 15 [mm] και για τα υπόλοιπα πάχη επιλέγονται τιμές, που προέκυψαν από την ανάλυση της πρώτης πλάκας. Πιο συγκεκριμένα η σειρά που διεξάγεται η ανάλυση είναι, ως εξής. Επιλέγεται, μια αρχική ταχύτητα πρόσκρουσης για κάθε τιμή του πάχους της πλάκας. Γίνεται παραμετρική ανάλυση, ως προς τον αριθμό των στοιχείων κατά πάχος, για πλάκα πάχους 15, 20, 25 και 30 [mm]. Η παραμετρική ανάλυση συνεχίζεται για τις υπόλοιπες παραμέτρους με τη σειρά, που είναι γραμμένες στην (5.1.1) και μόνο για την πλάκα των 15 [mm]. Δημιουργούνται διαγράμματα της ταχύτητας εξόδου, ως προς την ταχύτητα εισόδου και οι τιμές των παραμέτρων του πλέγματος, που χρησιμοποιούνται για την πλάκα των 15 [mm], είναι αυτές που προέκυψαν από την παραμετρική ανάλυση. Για τα υπόλοιπα πάχη των 20, 25 και 30 [mm] χρησιμοποιούνται οι ίδιες τιμές με αυτές της λεπτότερης πλάκας, εκτός από τις τιμές που λαμβάνει η πρώτη παράμετρος, που εκφράζει τον αριθμό των στοιχείων κατά το πάχος, διότι όπως προαναφέρθηκε, για την πρώτη παράμετρο πραγματοποιήθηκε ανάλυση για όλα τα πάχη.

5.1.1 Ανάλυση ως προς τον αριθμό στοιχείων κατά το πάχος

Στην Εικόνα 5.1 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με τον αριθμό στοιχείων κατά το πάχος της πλάκας των 15 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 218.9 [m/s]
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 6 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm]

Από το διάγραμμα είναι εμφανές, ότι η ευαισθησία του μοντέλου μηδενίζεται από τα 10 στοιχεία και άνω.

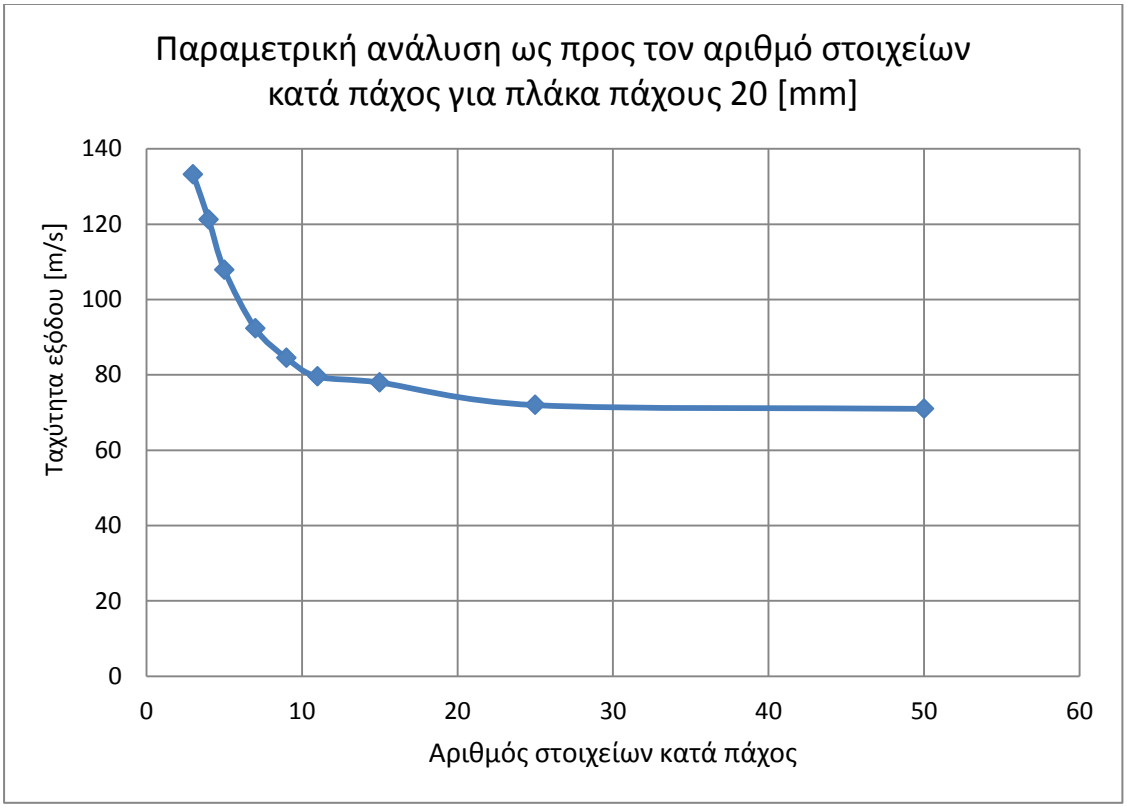


Εικόνα 5.1. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του αριθμού στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 218.9 [m/s], η ακτίνα της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm], το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm].

Στην Εικόνα 5.2 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με τον αριθμό στοιχείων κατά το πάχος της πλάκας των 20 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 252 [m/s]
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 6 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm]

Από το διάγραμμα είναι εμφανές ότι η ευαισθησία του μοντέλου μηδενίζεται από τα 25 στοιχεία και άνω.

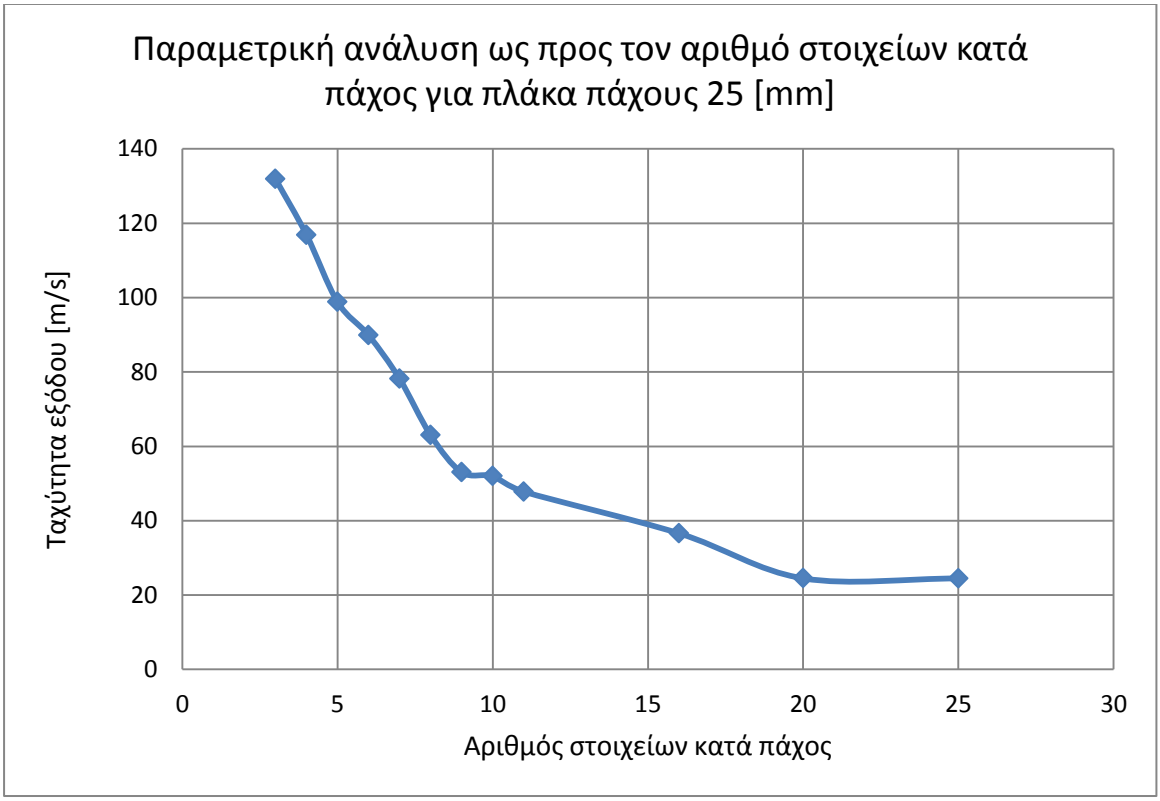


Εικόνα 5.2. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του αριθμού στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 252 [m/s], η ακτίνα της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm], το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm].

Στην Εικόνα 5.3 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με τον αριθμό στοιχείων κατά το πάχος της πλάκας των 25 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 263.6 [m/s]
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 6 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm]

Από το διάγραμμα είναι εμφανές ότι η ευαισθησία του μοντέλου μηδενίζεται από τα 20 στοιχεία και άνω.

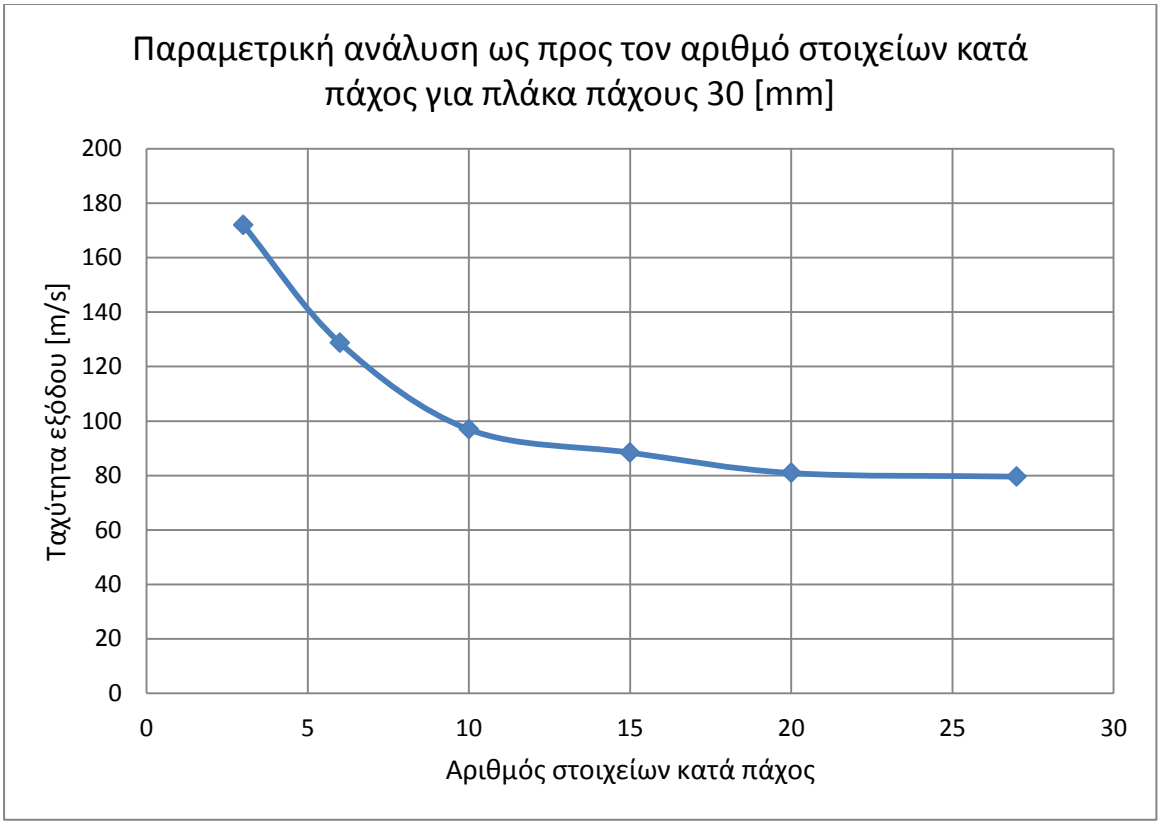


Εικόνα 5.3. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του αριθμού στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 263.6 [m/s], η ακτίνα της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm], το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm].

Στην Εικόνα 5.4 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με τον αριθμό στοιχείων κατά το πάχος της πλάκας των 30 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 319 [m/s]
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 6 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm]

Από το διάγραμμα είναι εμφανές ότι η ευαισθησία του μοντέλου μηδενίζεται από τα 20 στοιχεία και άνω.



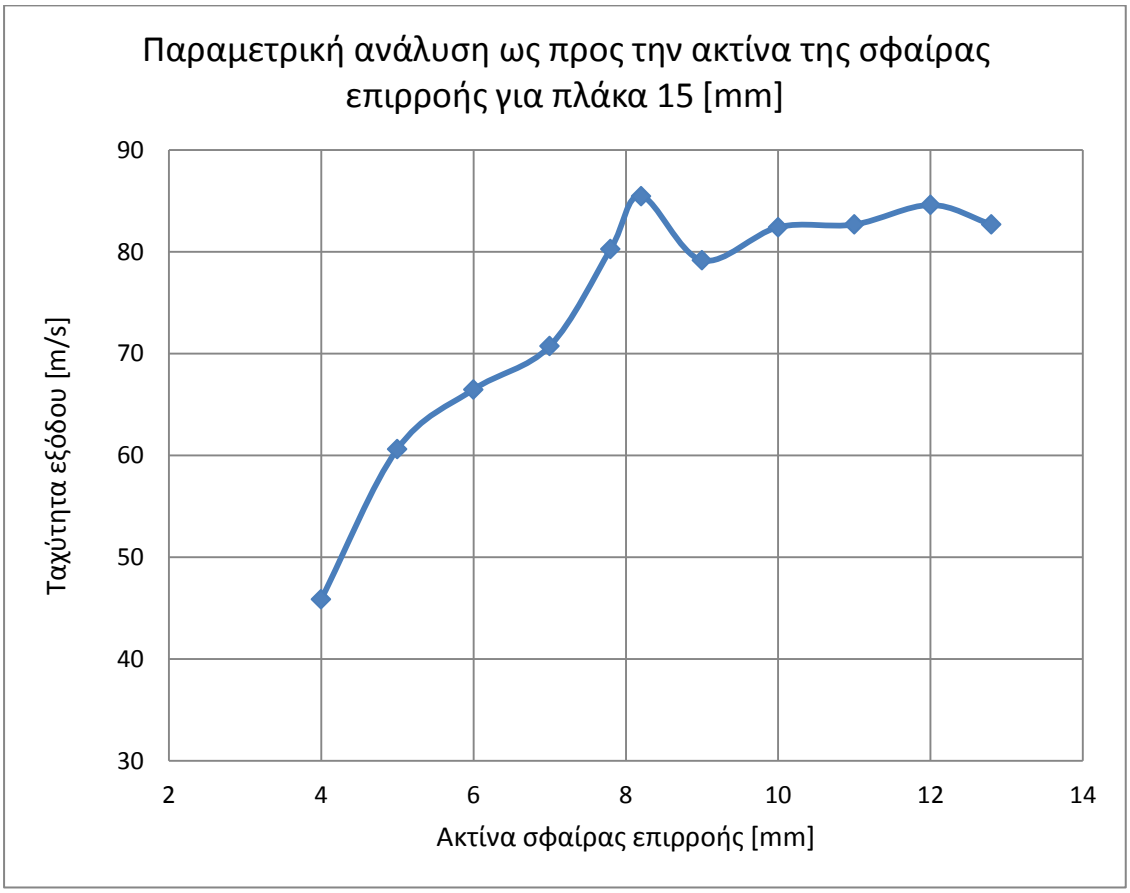
Εικόνα 5.4. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του αριθμού στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 319 [m/s], η ακτίνα της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm], το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm].

5.1.2 Ακτίνα σφαίρας επιρροής

Στην Εικόνα 5.5 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με την ακτίνα της σφαίρας επιρροής για την πλάκα πάχους των 15 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 218.9 [m/s]
- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 10
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm]

Από το διάγραμμα είναι εμφανές ότι η ευαισθησία του μοντέλου είναι σχεδόν μηδενική από τα 8 [mm] και άνω.



Εικόνα 5.5. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του μεγέθους της ακτίνας της σφαίρας επιρροής. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 218.9 [m/s], ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 10, το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm].

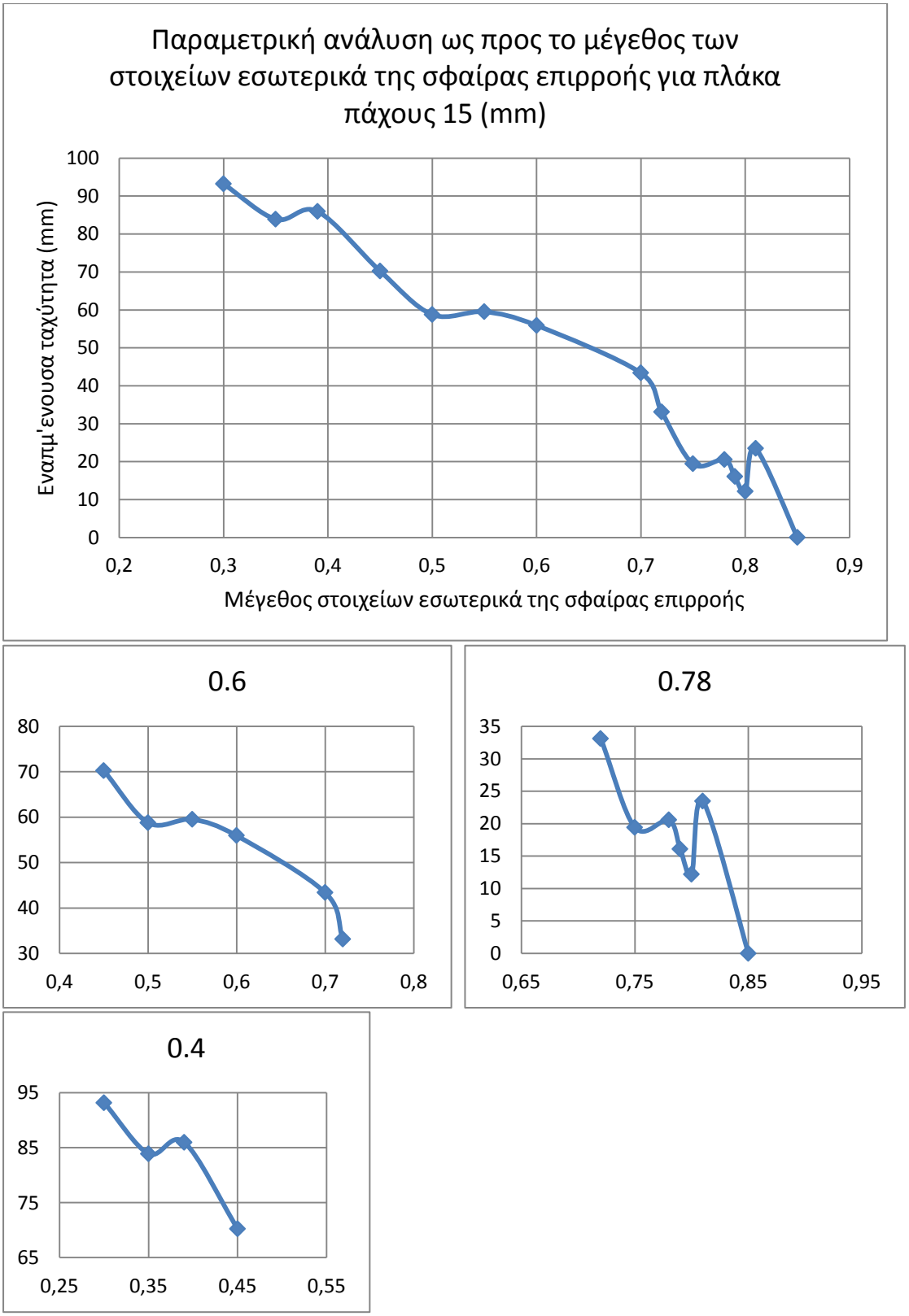
5.1.3 Μέγεθος στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής

Στην Εικόνα 5.6 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής για την πλάκα πάχους των 15 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 218.9 [m/s]
- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 10
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm]

Στο συγκεκριμένο διάγραμμα η περιοχή μηδενικής ευαισθησίας δεν είναι στον ίδιο βαθμό εμφανής, σε σύγκριση με τα προηγούμενα διαγράμματα. Ακόμη, σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις υπάρχουν πολλαπλές περιοχές ευαισθησίας. Στα τρία μικρότερα διαγράμματα της ίδιας εικόνας παρουσιάζονται αυτές ο περιοχές σε μεγέθυνση, προκειμένου να παρουσιαστούν με μεγαλύτερη ευκρίνεια. Από τα μεγεθυμένα διαγράμματα φαίνονται τρείς περιοχές σύγκλισης όπου τοπικά η ευαισθησία, ως προς το μέγεθος των στοιχείων, είναι μηδενική. Η πρώτη περιοχή ξεκινά για μέγεθος στοιχείων στα 0.78 [mm] , η δεύτερη στα 0.6 [mm] και η τρίτη περιοχή στα 0.4 [mm].

Επειδή, εντοπίστηκαν τρείς περιοχές σύγκλισης θα πρέπει η παραμετρική ανάλυση για την επόμενη παράμετρο του πλέγματος, να πραγματοποιηθεί για τις τρείς τιμές του μεγέθους των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής ξεχωριστά. Αυτό συνεπάγεται ότι με το πέρας της ανάλυσης δεν θα προκύψει ένα βέλτιστο πλέγμα, αλλά τουλάχιστον τρείς δυνατές περιπτώσεις. Σε αυτό το σημείο, πρέπει να σημειωθεί ότι θα ήταν δυνατόν να εξεταστεί μόνο η πρώτη τιμή σύγκλισης του πλέγματος και να απορριφθούν οι υπόλοιπες τιμές. Ωστόσο, όπως θα γίνει εμφανές στο επόμενο κεφάλαιο, όπου συγκρίνονται οι πειραματικές τιμές με τις τιμές που υπολογίζονται από το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων, κάθε πλέγμα που αντιστοιχεί σε μία τιμή σύγκλισης, προσεγγίζει τα πειραματικά δεδομένα ακριβέστερα σε ένα συγκεκριμένο εύρος και οι υπόλοιπες περιοχές προσεγγίζονται με μεγαλύτερη ακρίβεια, από το πλέγμα που αντιστοιχεί στις υπόλοιπες τιμές σύγκλισης.



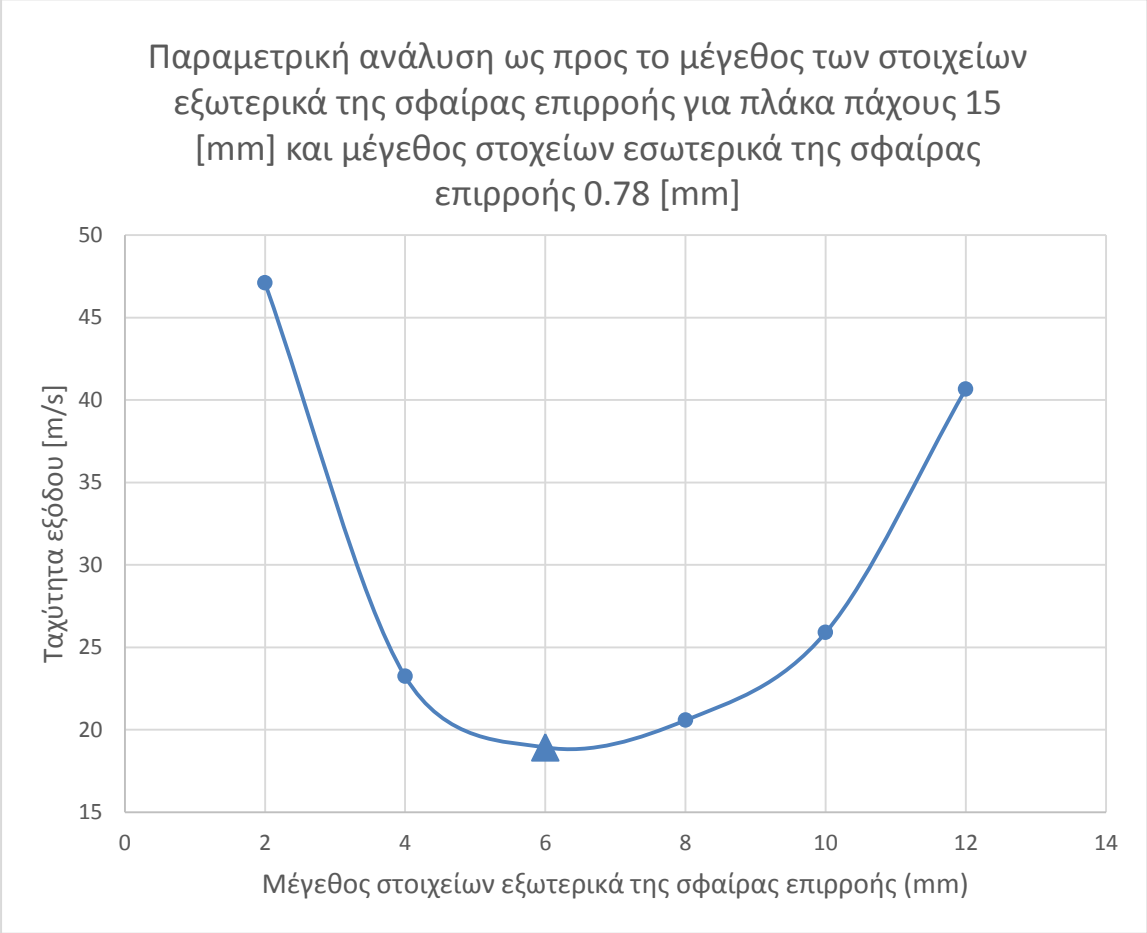
Εικόνα 5.6. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του μεγέθους των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 218.9 [m/s], ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 10, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 8 [mm].

5.1.4 Μέγεθος στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής

Στην Εικόνα 5.7 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής για την πλάκα πάχους των 15 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 218.9 [m/s]
- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 10
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.78 [mm]

Στο διάγραμμα φαίνεται ότι υπάρχει περιοχή μηδενικής ευαισθησίας με αρχή τα 8 [mm].

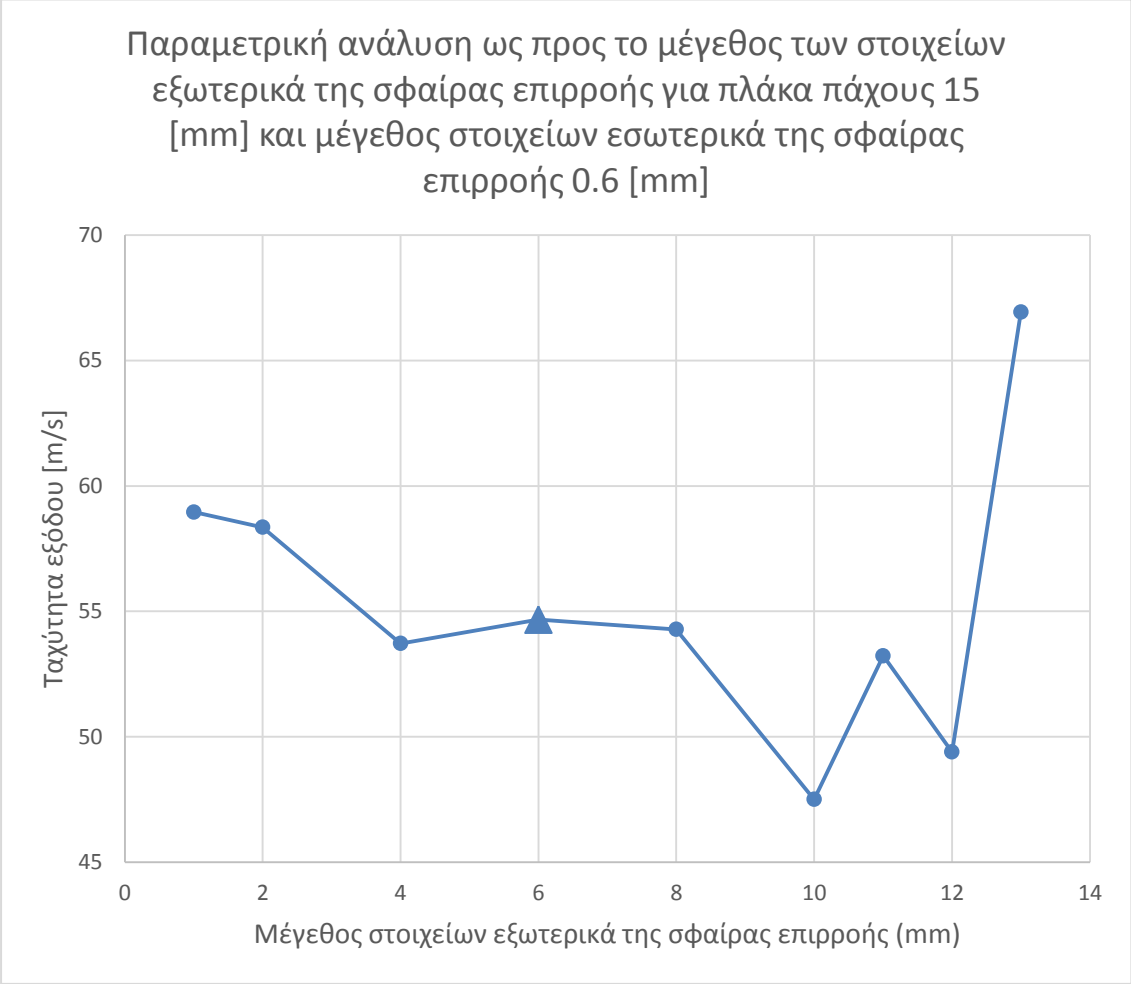


Εικόνα 5.7. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του μεγέθους των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 218.9 [m/s], ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 10, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.78 [mm].

Στην Εικόνα 5.8 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής για την πλάκα πάχους των 15 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 218.9 [m/s]
- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 10
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.6 [mm]

Στο διάγραμμα φαίνεται ότι σε σύγκριση με το διάγραμμα από την Εικόνα 5.7 το εύρος μεταξύ της ανώτερης και κατώτερης τιμής της ταχύτητας εξόδου είναι κατά πολύ μικρότερο. Από το ίδιο διάγραμμα είναι εμφανές ότι το σημείο σύγκλισης βρίσκεται στα 8 [mm].

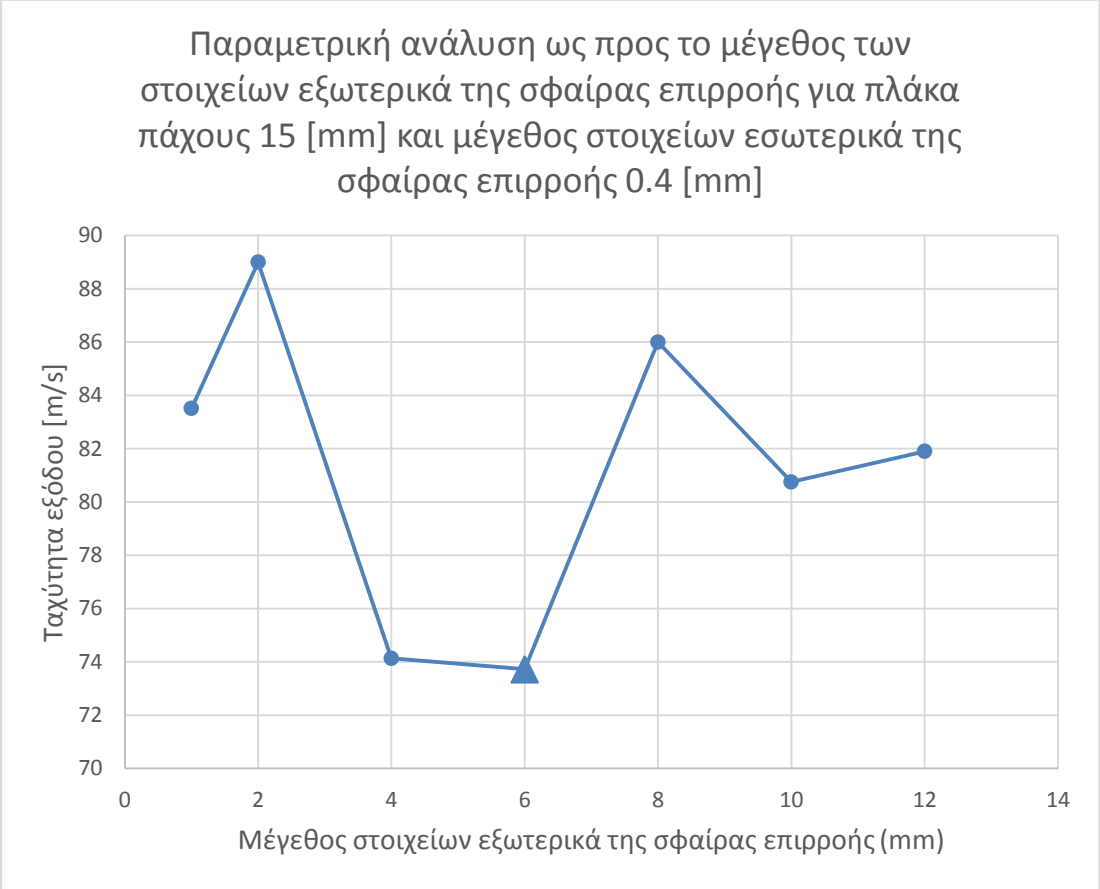


Εικόνα 5.8. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του μεγέθους των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 218.9 [m/s], ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 10, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.6 [mm].

Στην Εικόνα 5.9 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής για την πλάκα πάχους των 15 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 218.9 [m/s]
- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 10
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm]

Στο διάγραμμα φαίνεται μια περιοχή μηδενικής ευαισθησίας που έχει αρχή τα 6 [mm].



Εικόνα 5.9. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του μεγέθους των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 218.9 [m/s], ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 10, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm].

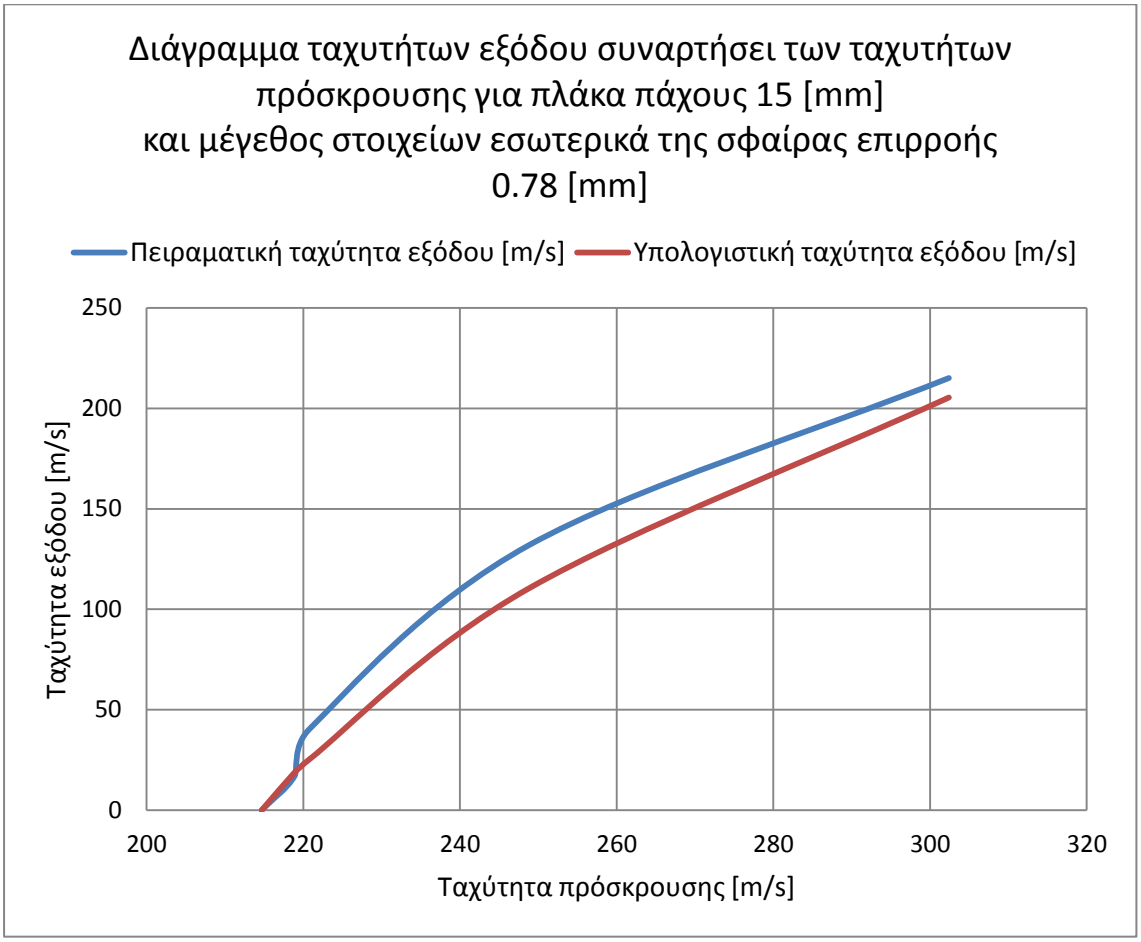
Από τις εικόνες 5.7 έως 5.9, είναι εμφανές, ότι η τιμή των 6 [mm] βρίσκεται εσωτερικά της περιοχής σύγκλισης, για τις τρείς επιλογές του μεγέθους των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής. Επομένως, επιλέγεται η τιμή των 6 [mm] και στις τρείς περιπτώσεις.

5.1.5 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων μη-δομημένου πλέγματος για πλάκα 15 [mm]

Στην Εικόνα 5.10 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 15 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 10
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.78 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα είναι εμφανές ότι υπάρχει ταύτιση πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου για χαμηλές ταχύτητες πρόσκρουσης. Από τα 220 [m/s] και άνω οι καμπύλες φαίνονται να αποκλίνουν, ωστόσο η απόκλιση είναι αναλογικά μικρή.

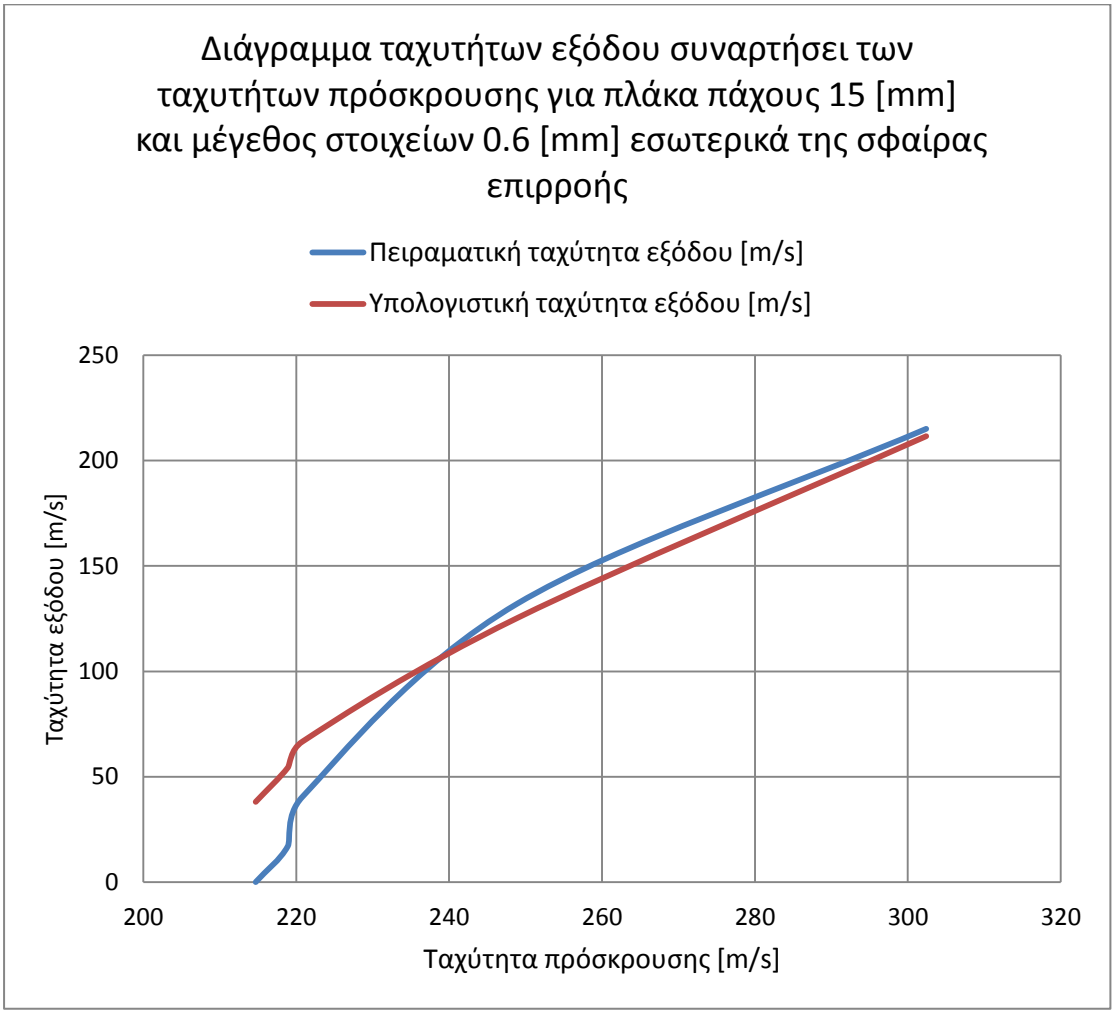


Εικόνα 5.10. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 10, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.78 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].

Στην Εικόνα 5.11 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 15 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 10
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.6 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα είναι εμφανές ότι υπάρχει πολύ ικανοποιητική προσέγγιση πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου για ταχύτητες πρόσκρουσης από τα 240 [m/s] και άνω. Ωστόσο, εμφανίζονται υψηλές αποκλίσεις σε χαμηλότερες τιμές της ταχύτητας πρόσκρουσης.

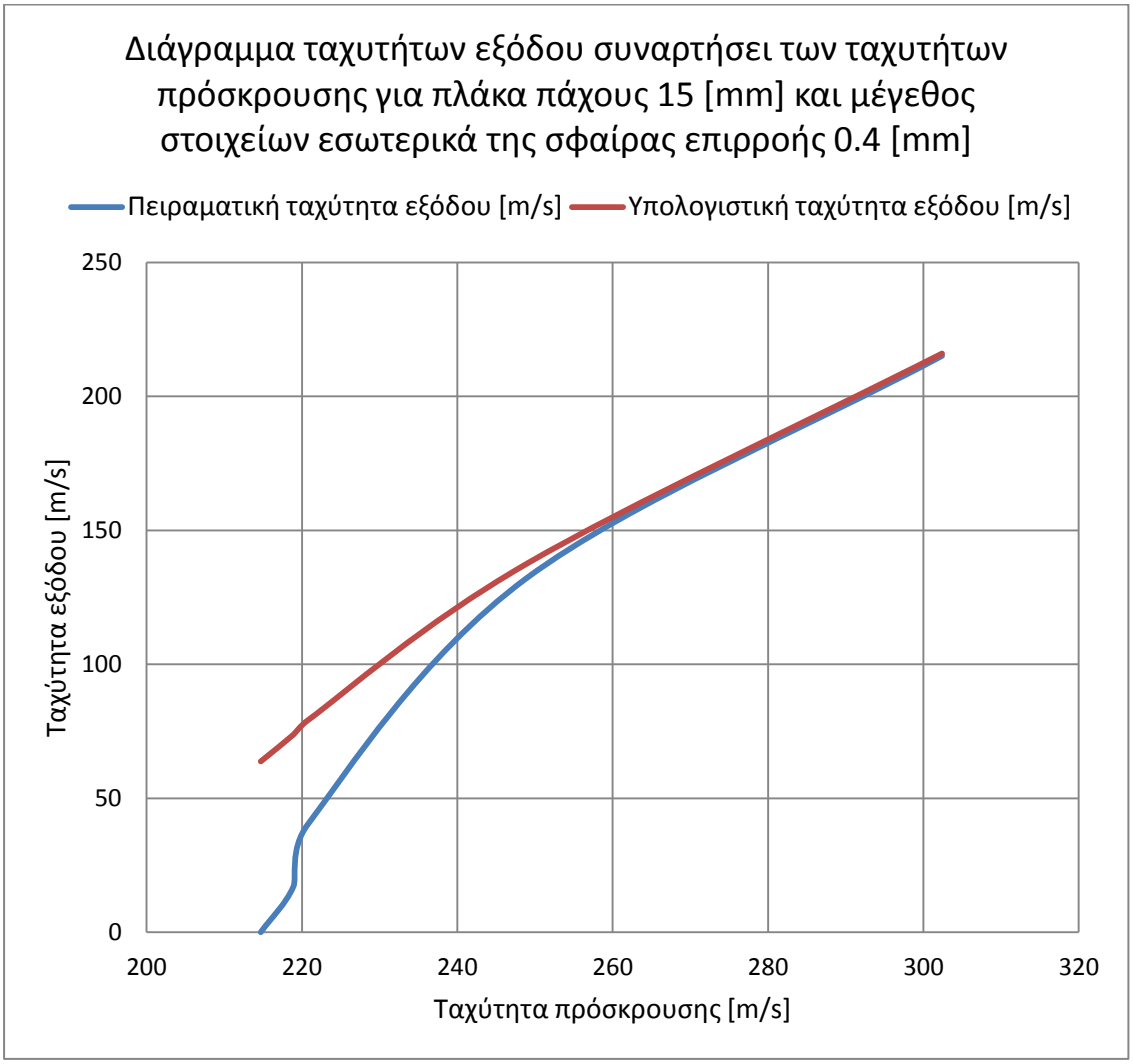


Εικόνα 5.11.Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 10, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.6 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].

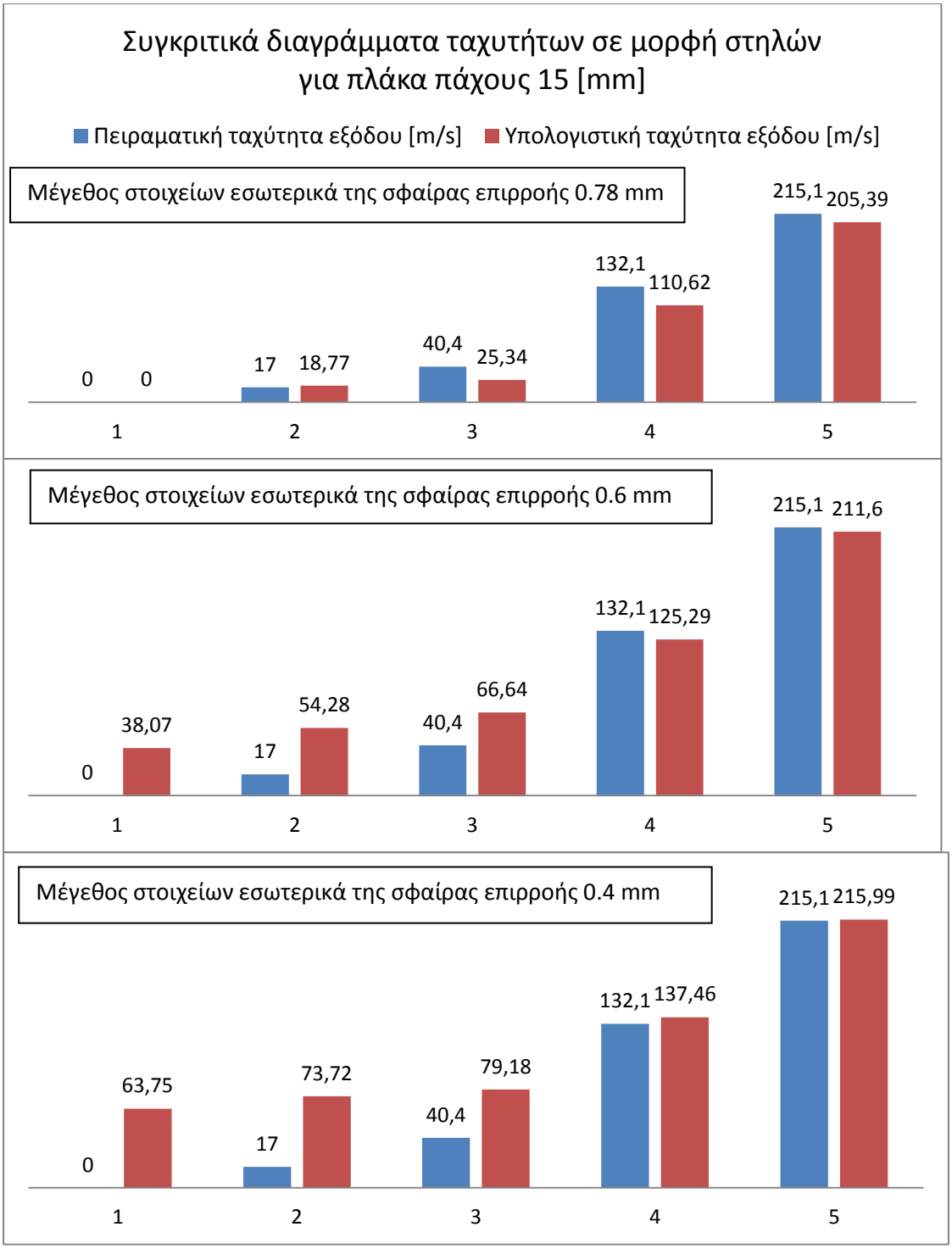
Στην Εικόνα 5.12 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 15 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 10
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα φαίνεται ότι βελτιώνεται η προσέγγιση πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου για ταχύτητες πρόσκρουσης από τα 260 [m/s] και άνω σε σύγκριση με το προηγούμενο διάγραμμα. Ωστόσο, αυξάνονται οι αποκλίσεις σε χαμηλότερες τιμές της ταχύτητας πρόσκρουσης.



Εικόνα 5.12. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 10, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.4 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].



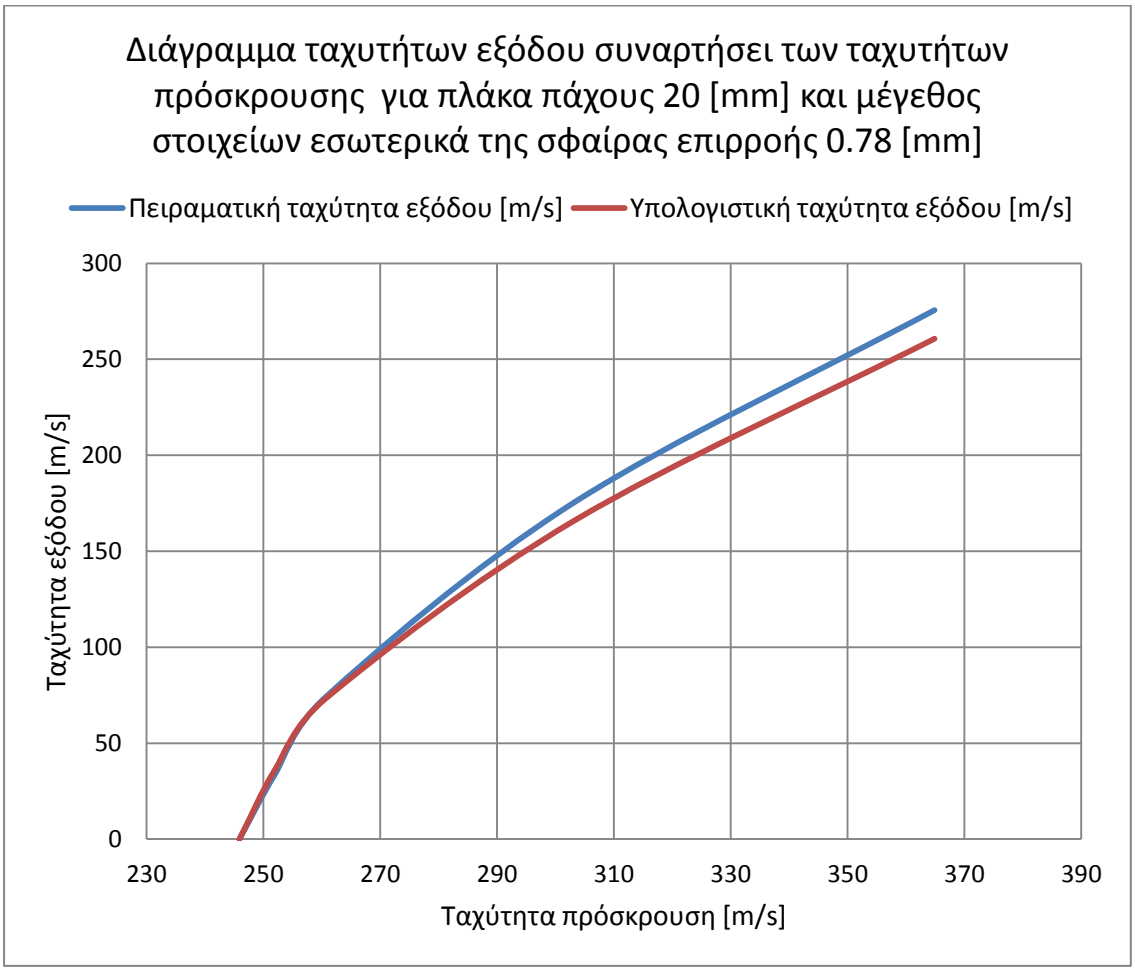
Εικόνα 5.13. Διαγράμματα πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή σε μορφή στηλών, για τις τρείς επιλογές τις τιμής του μεγέθους των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής.

5.1.6 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων μη-δομημένου πλέγματος για πλάκα 20 [mm]

Στην Εικόνα 5.14 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 20 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 25
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.78 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα είναι εμφανές ότι υπάρχει ταύτιση πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου για χαμηλές ταχύτητες πρόσκρουσης. Από τα 260 [m/s] και άνω οι καμπύλες φαίνονται να αποκλίνουν σε μικρό βαθμό, αλλά οι διαφορές είναι αναλογικά μικρές.

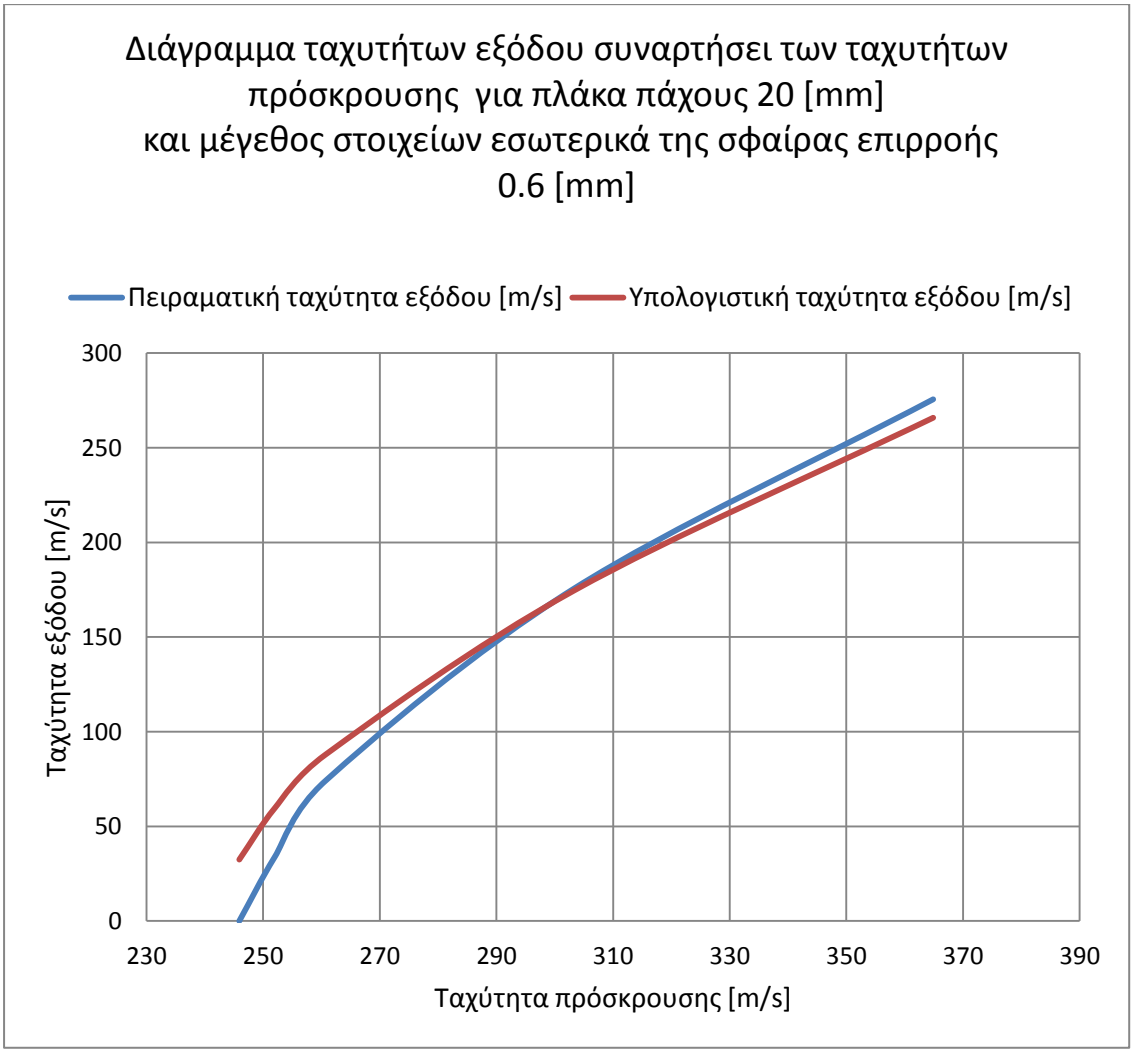


Εικόνα 5.14. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 25, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.78 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].

Στην Εικόνα 5.15 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 20 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 25
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.6 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα είναι εμφανές ότι βελτιώνεται η προσέγγιση πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου για ταχύτητες πρόσκρουσης από τα 290 [m/s] και άνω. Ωστόσο, αυξάνονται οι αποκλίσεις σε χαμηλότερες τιμές της ταχύτητας πρόσκρουσης.

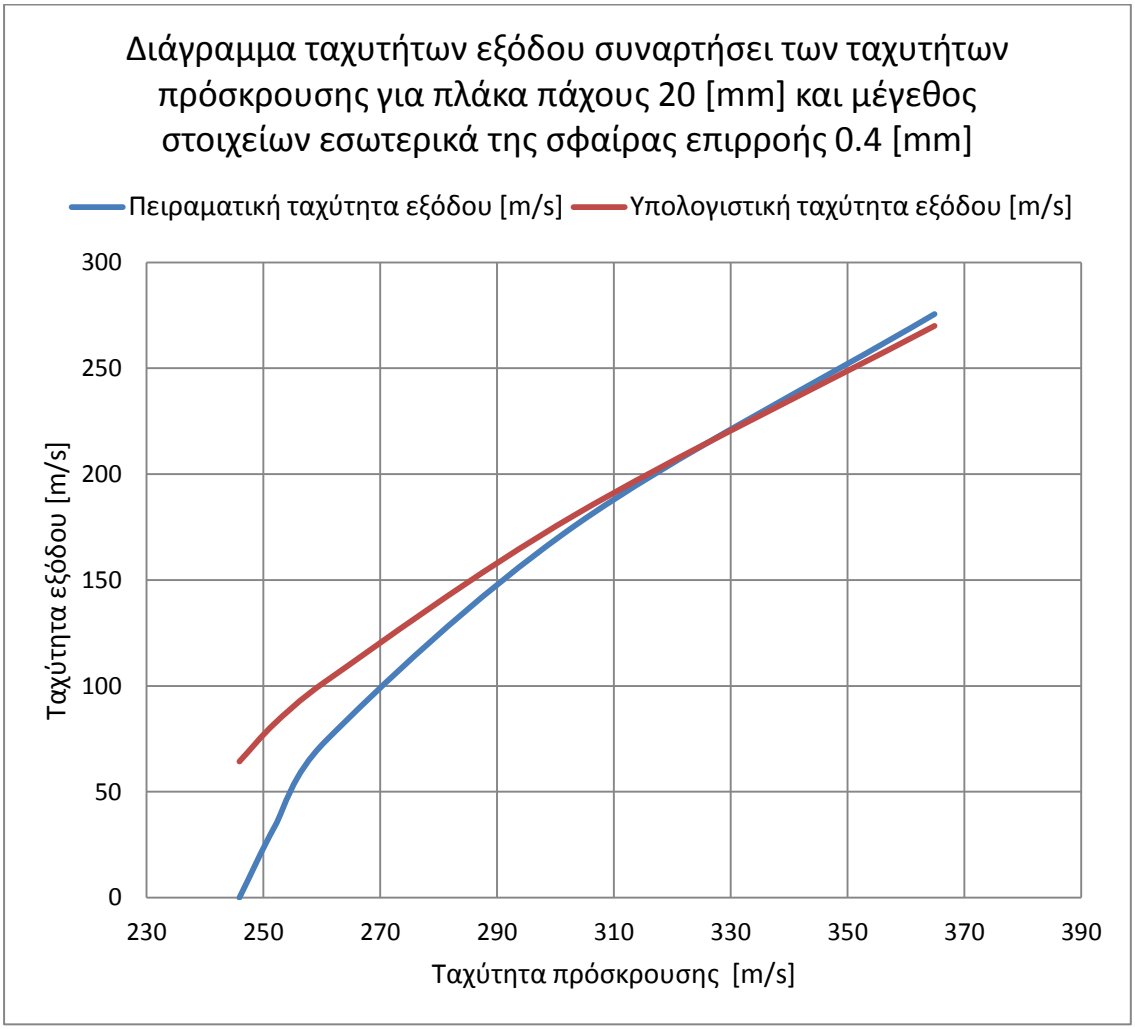


Εικόνα 5.15.Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 25, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.6 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].

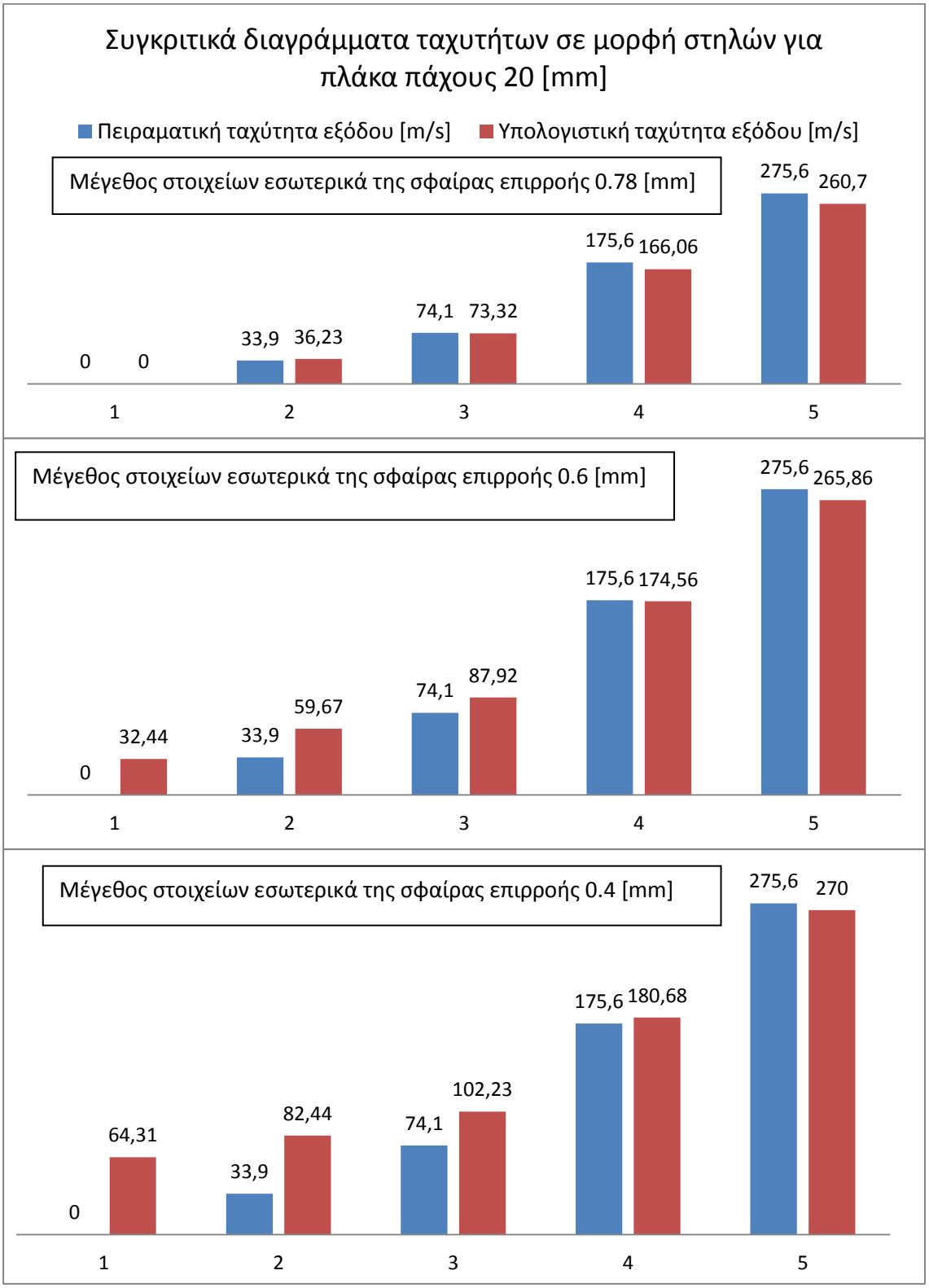
Στην Εικόνα 5.16 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 20 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 25
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα φαίνεται ότι βελτιώνεται η προσέγγιση πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου για ταχύτητες πρόσκρουσης από τα 310 [m/s] και άνω σε σύγκριση με το προηγούμενο διάγραμμα. Ωστόσο, αυξάνονται οι αποκλίσεις σε χαμηλότερες τιμές της ταχύτητας πρόσκρουσης.



Εικόνα 5.16. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 25, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.4 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].



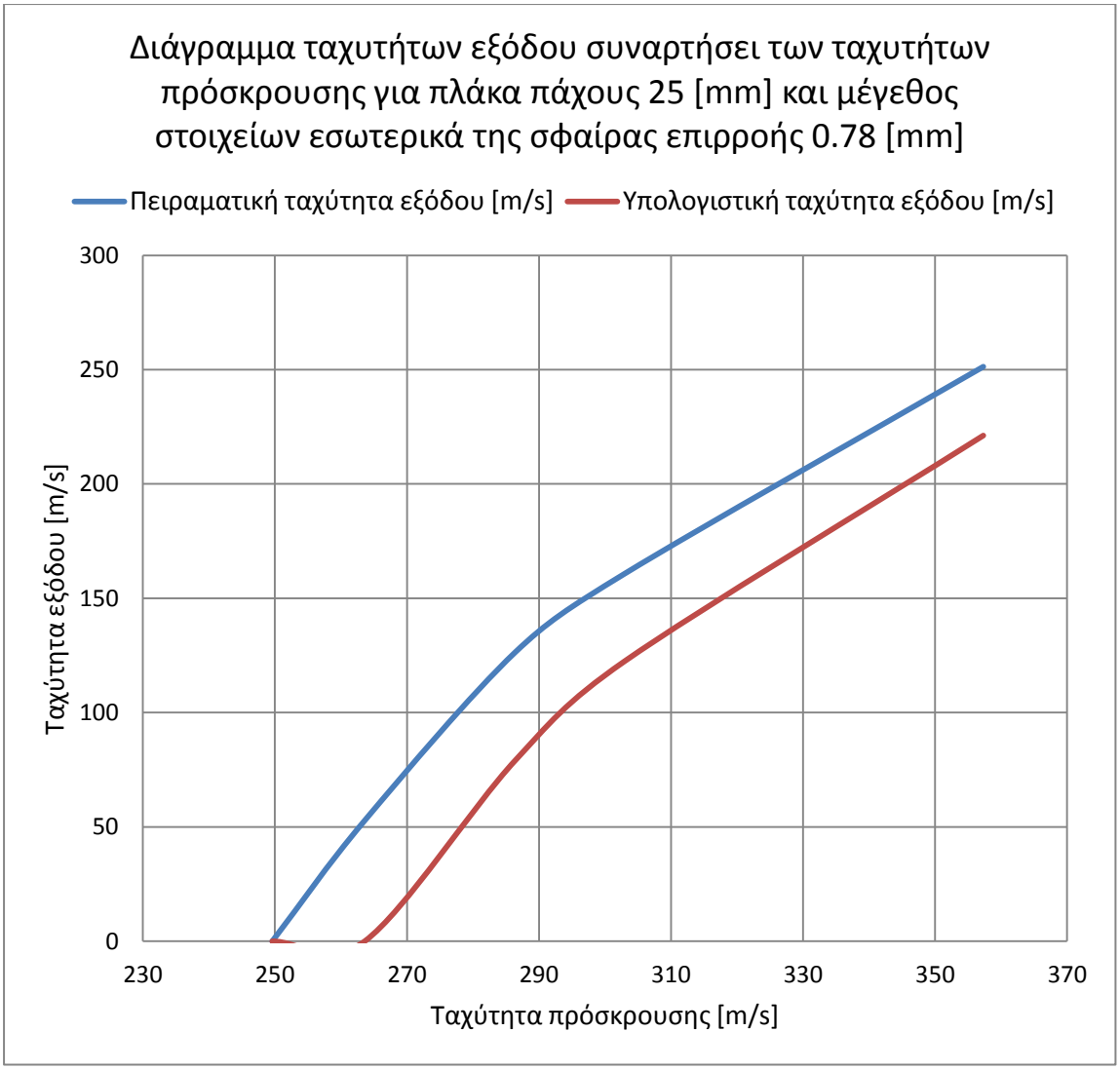
Εικόνα 5.17. Διαγράμματα πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή σε μορφή στηλών, για τις τρείς επιλογές της τιμής του μεγέθους των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής.

5.1.7 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων μη-δομημένου πλέγματος για πλάκα 25 [mm].

Στην Εικόνα 5.18 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 25 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 20
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.78 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα φαίνεται ότι οι καμπύλες πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου έχουν την ίδια μορφή, αλλά δεν ταυτίζονται σε κανένα σημείο.

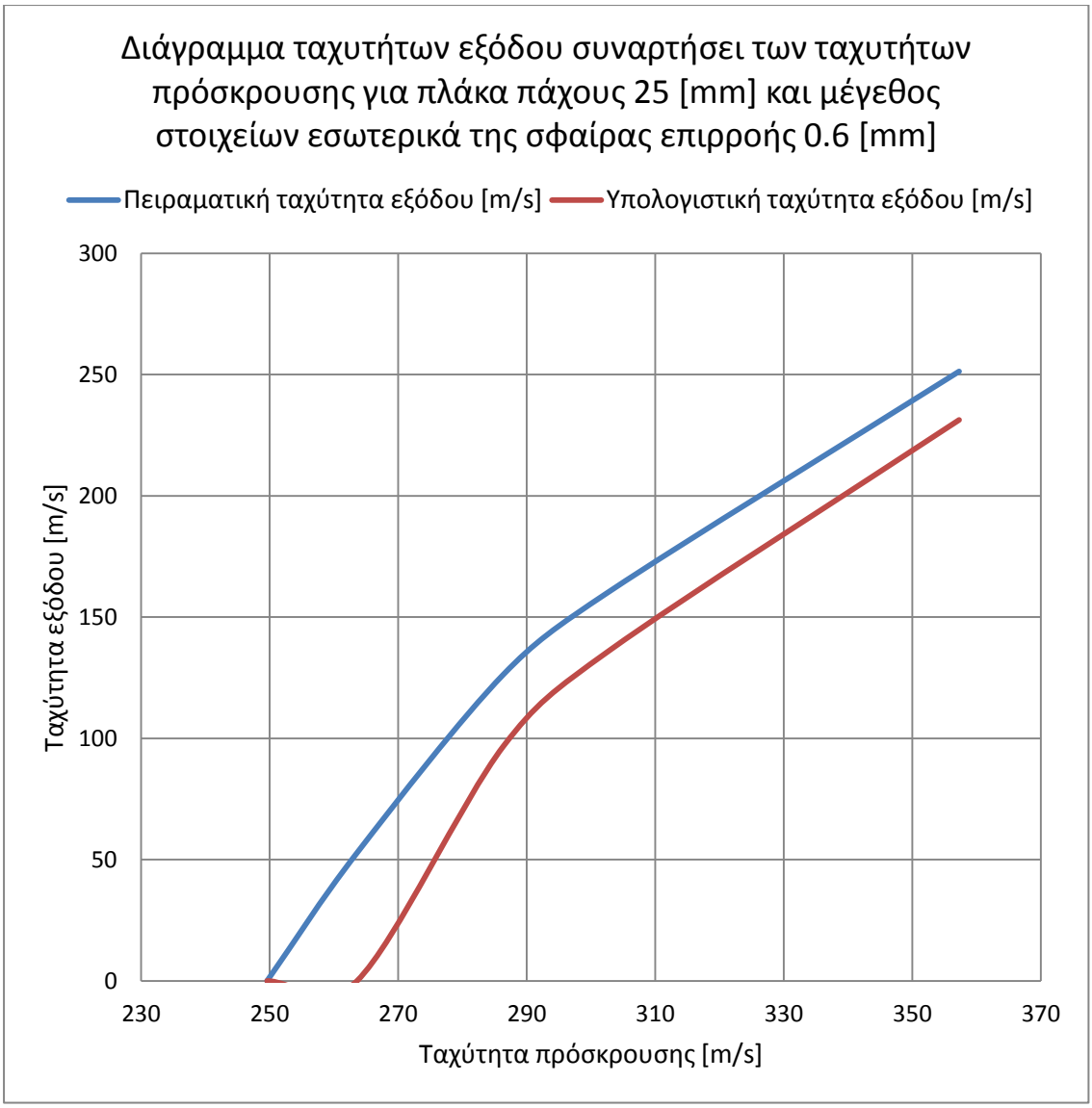


Εικόνα 5.18. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 20, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.78 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].

Στην Εικόνα 5.19 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 25 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 20
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.6 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα φαίνεται ότι βελτιώνεται η προσέγγιση των πειραματικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου για ταχύτητες πρόσκρουσης από 280 [m/s] και άνω.

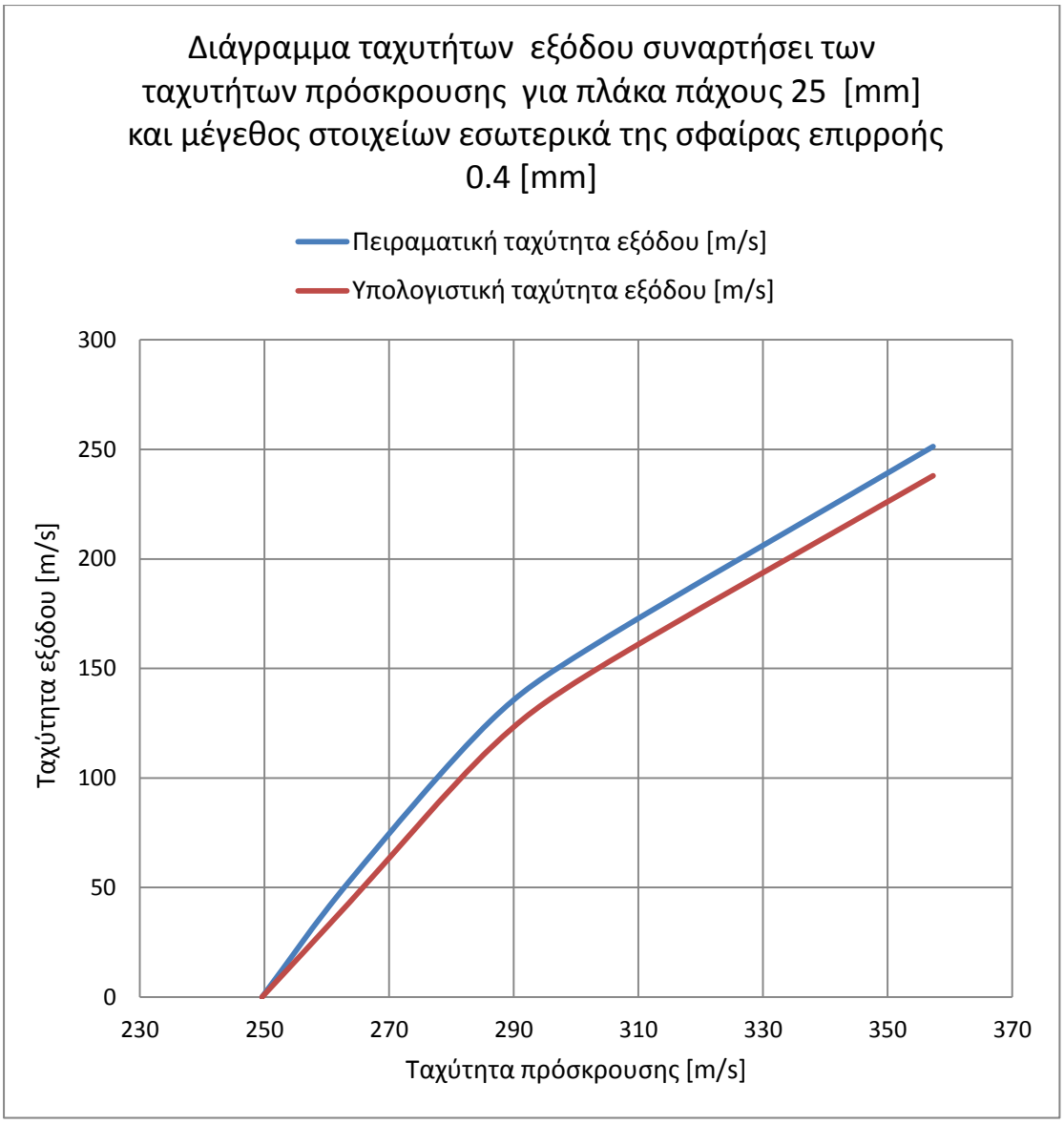


Εικόνα 5.19. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 20, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.6 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].

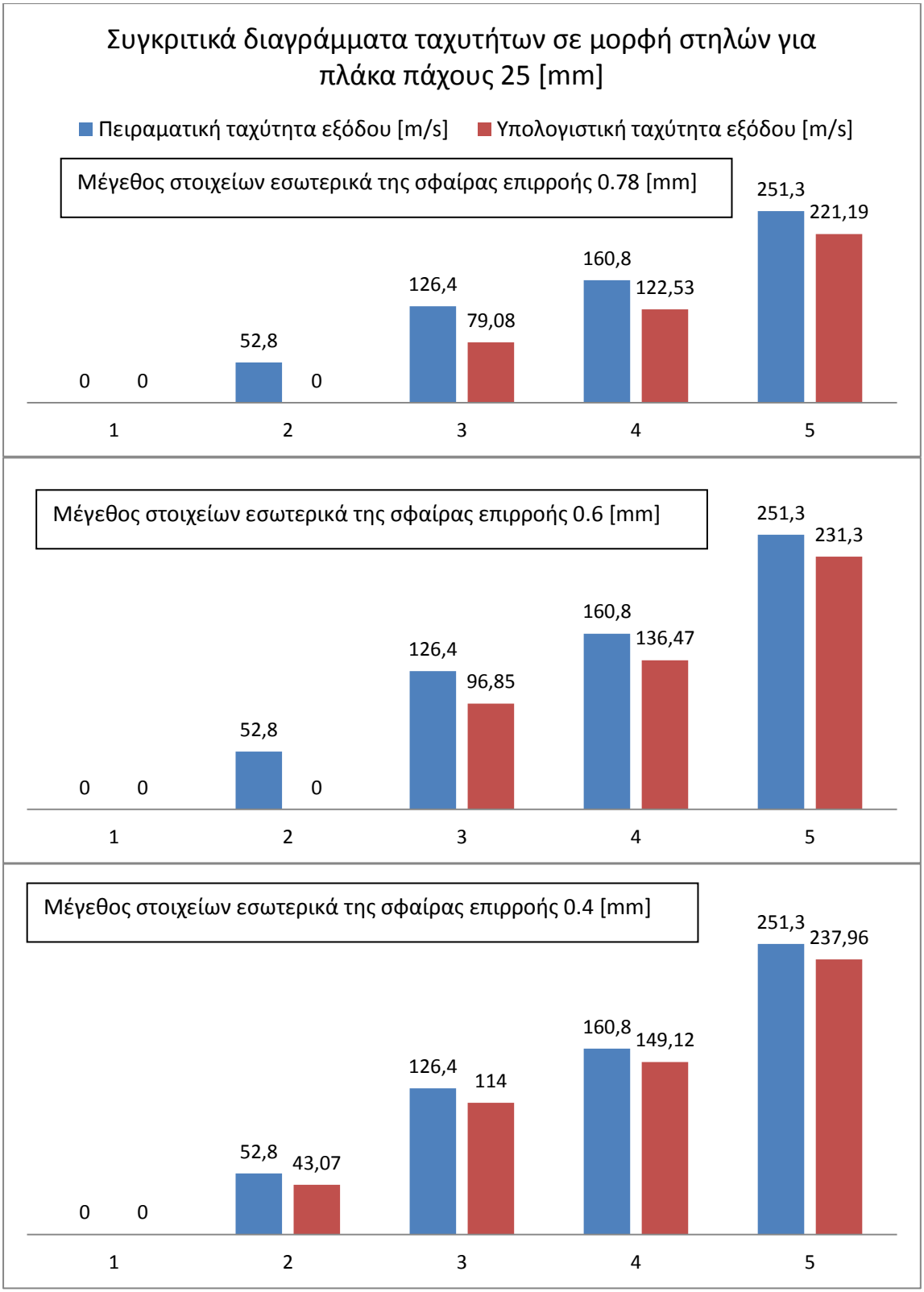
Στην Εικόνα 5.20 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 25 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 20
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα φαίνεται ότι βελτιώνεται η προσέγγιση των πειραματικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου για όλο το εύρος των ταχυτήτων πρόσκρουσης.



Εικόνα 5.20. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 20, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.4 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].



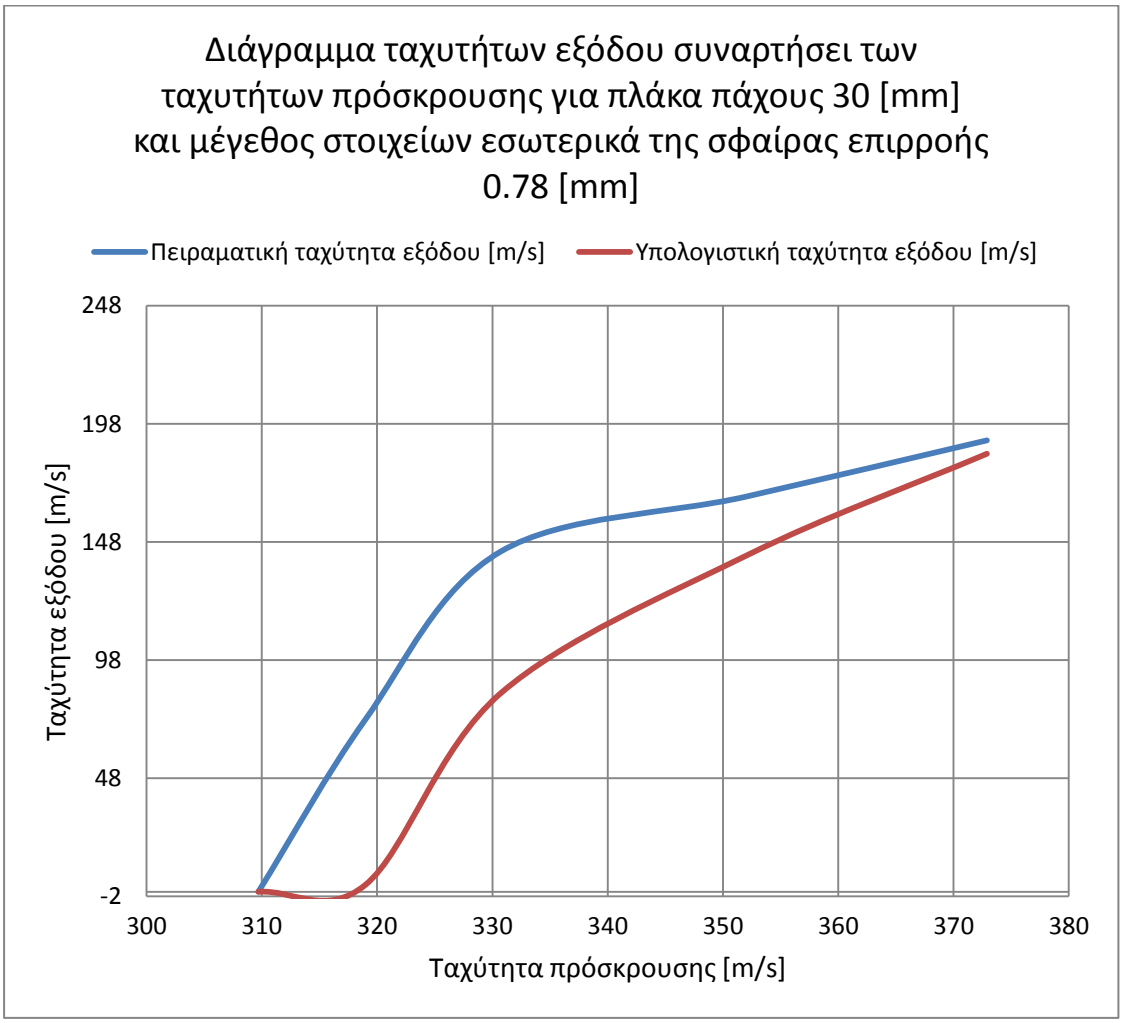
Εικόνα 5.21. Διαγράμματα πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή σε μορφή στηλών, για τις τρείς επιλογές τις τιμής του μεγέθους των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής.

5.1.8 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων μη-δομημένου πλέγματος για πλάκα 30 [mm]

Στην Εικόνα 5.22 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 30 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 20
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.78 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα φαίνεται ότι οι καμπύλες πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου αποκλίνουν σε αρκετά μεγάλο βαθμό σε ολόκληρο το εύρος των ταχυτήτων πρόσκρουσης. Το γεγονός ότι τα αποτελέσματα για ταχύτητα πρόσκρουσης 370 [m/s] ταυτίζονται, οφείλεται στο ότι οι δύο καμπύλες τέμνονται σε αυτό το σημείο.

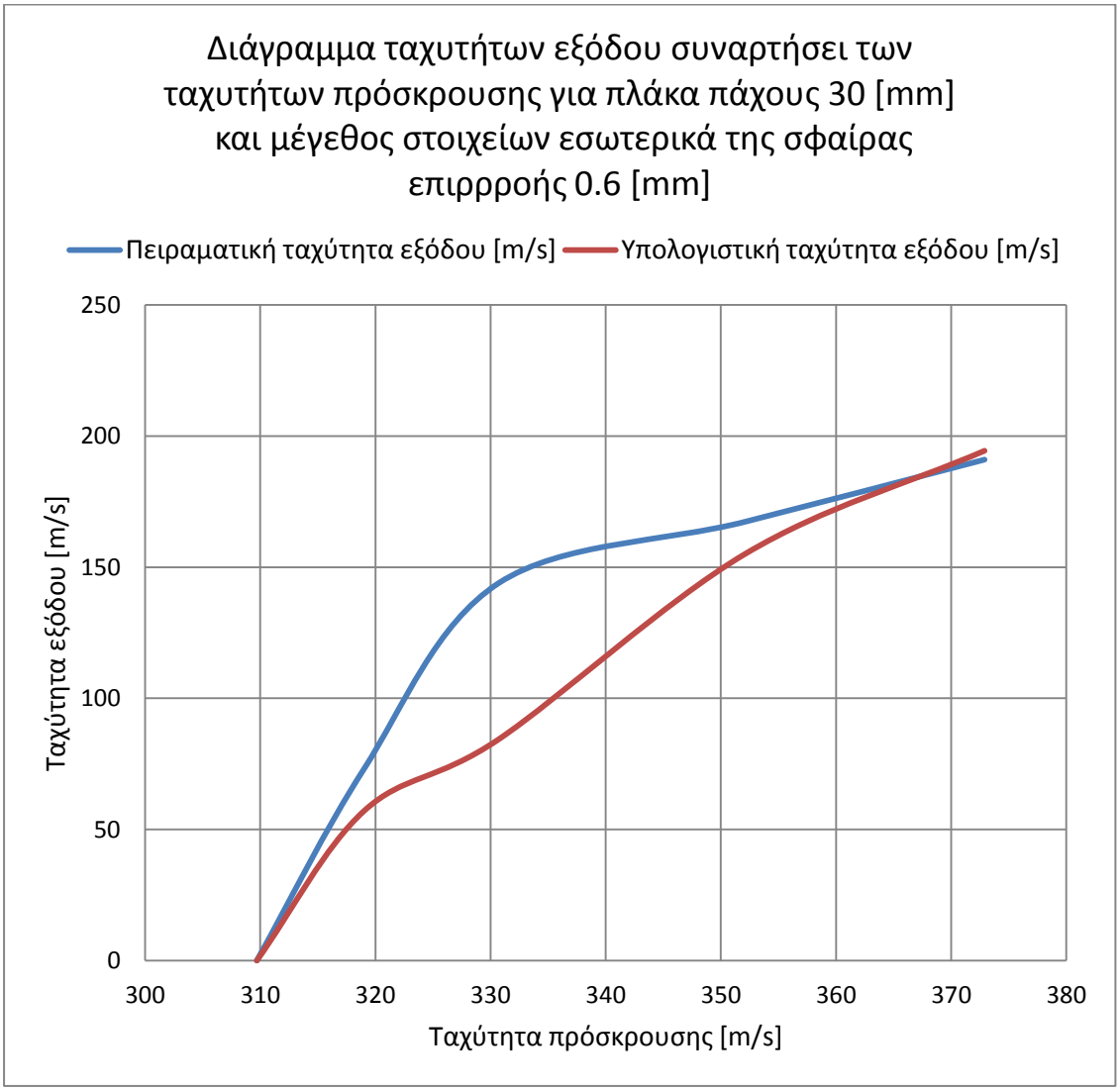


Εικόνα 5.22. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 20, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.78 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].

Στην Εικόνα 5.23 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 30 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 20
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.6 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα φαίνεται ότι βελτιώνεται η προσέγγιση των πειραματικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου για χαμηλές ταχύτητες πρόσκρουσης από 320 [m/s] και κάτω, και για υψηλές ταχύτητες πρόσκρουσης από 350 [m/s] και άνω. Στο ενδιάμεσο διάστημα δεν παρατηρείται σημαντική βελτίωση.

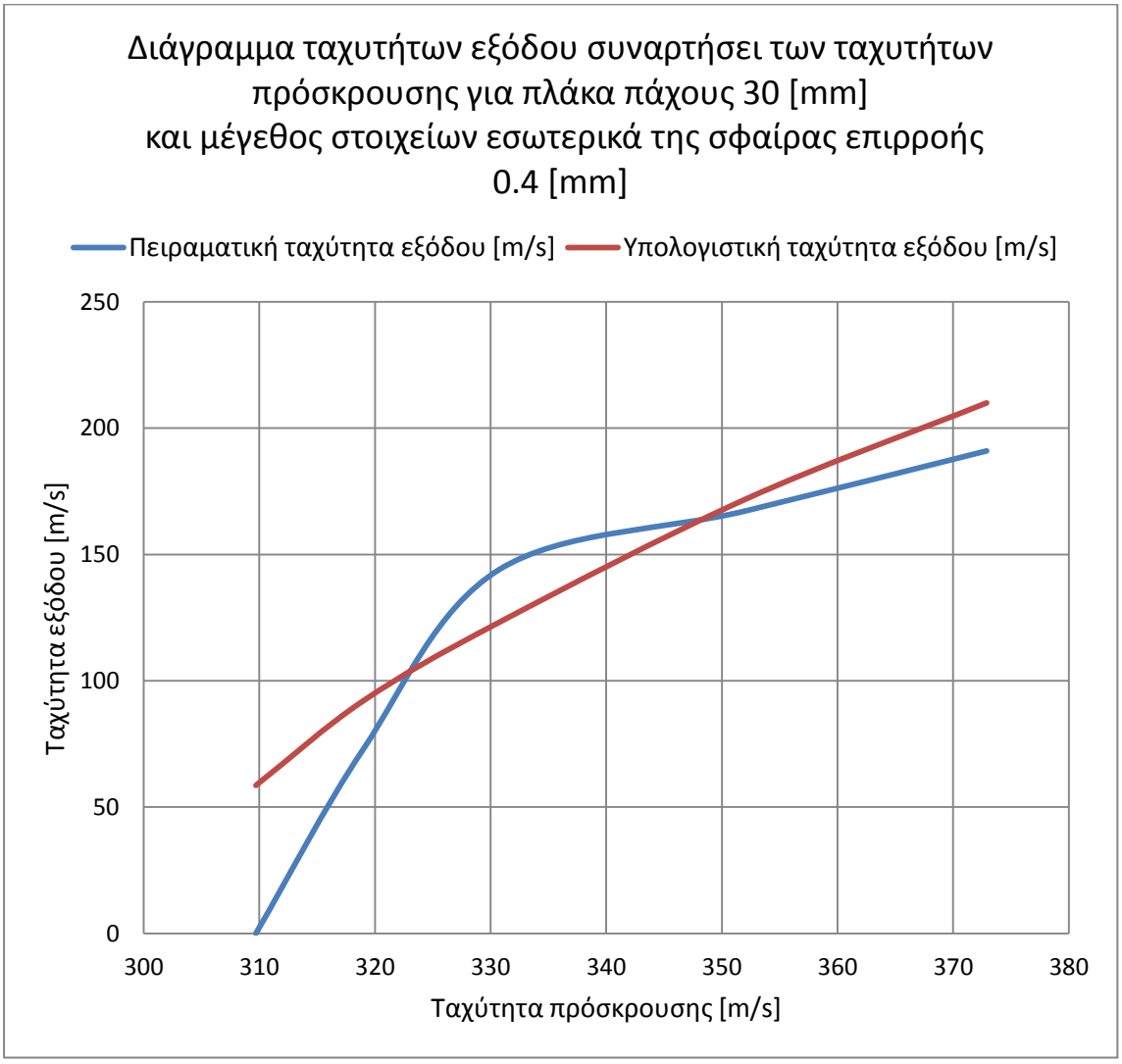


Εικόνα 5.23. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 20, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.6 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].

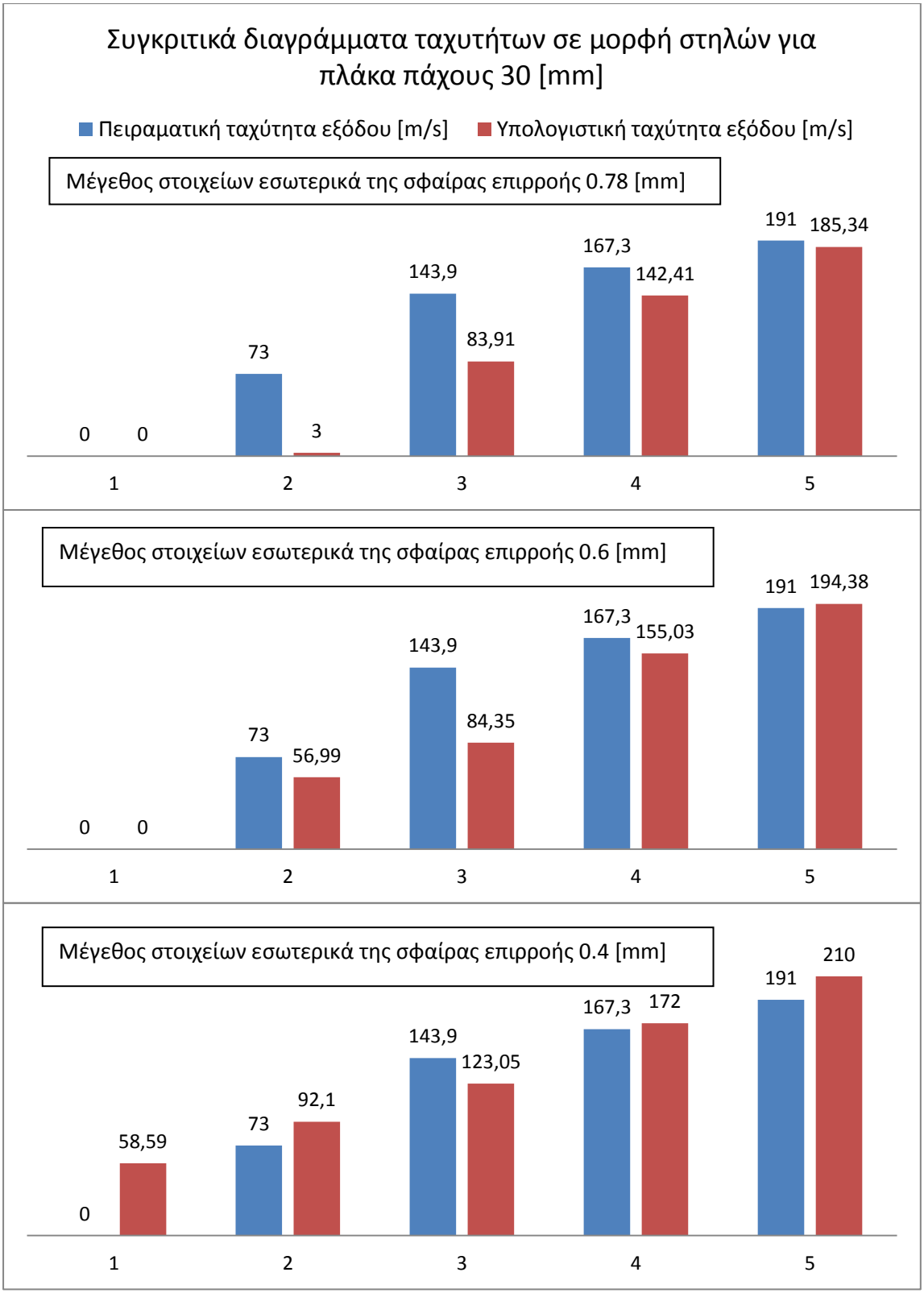
Στην Εικόνα 5.24 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 30 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 20
- ακτίνα της σφαίρας επιρροής 8 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής 0.4 [mm]
- μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής 6 [mm]

Στην εικόνα φαίνεται ότι βελτιώνεται η προσέγγιση των πειραματικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου για ταχύτητες πρόσκρουσης από 330 έως 350 [m/s]. Στα εξωτερικά διαστήματα οι καμπύλες αποκλίνουν σε μεγαλύτερο βαθμό σε σύγκριση με τα διαγράμματα τις προηγούμενης εικόνας.



Εικόνα 5.24. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 20, το μέγεθος της ακτίνας της σφαίρας επιρροής είναι 8 [mm],το μέγεθος των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 0.4 [mm] και το μέγεθος των στοιχείων εξωτερικά της σφαίρας επιρροής είναι 6 [mm].



Εικόνα 5.25. Διαγράμματα πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή σε μορφή στηλών, για τις τρείς επιλογές τις τιμής του μεγέθους των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής.

5.2 Δομημένο (κυλινδρικό) πλέγμα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει παρουσίαση της παραμετρικής ανάλυσης του δομημένου (κυλινδρικού) πλέγματος και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι παράμετροι που επηρεάζουν το κυλινδρικό πλέγμα είναι ο αριθμός των στοιχείων κατά το πάχος της πλάκας N_t, ο αριθμός των διαμερίσεων της περιφέρειας της πλάκας ή αλλιώς ο αριθμός των στοιχείων κατά τη γωνιακή διεύθυνση N_a (a το αρχικό του angular), ο αριθμός των διαμερίσεων της ακτίνας της πλάκας ή αλλιώς ο αριθμός των στοιχείων κατά την ακτινική διεύθυνση N_r (r το αρχικό του radial). Επομένως, η ταχύτητα εξόδου είναι συνάρτηση αυτών των παραμέτρων συν της ταχύτητας εισόδου ή πρόσκρουσης του διεισδυτή.

$$V_{out} = f(N_t, N_a, N_r, V_{in}) \tag{5.2.1}$$

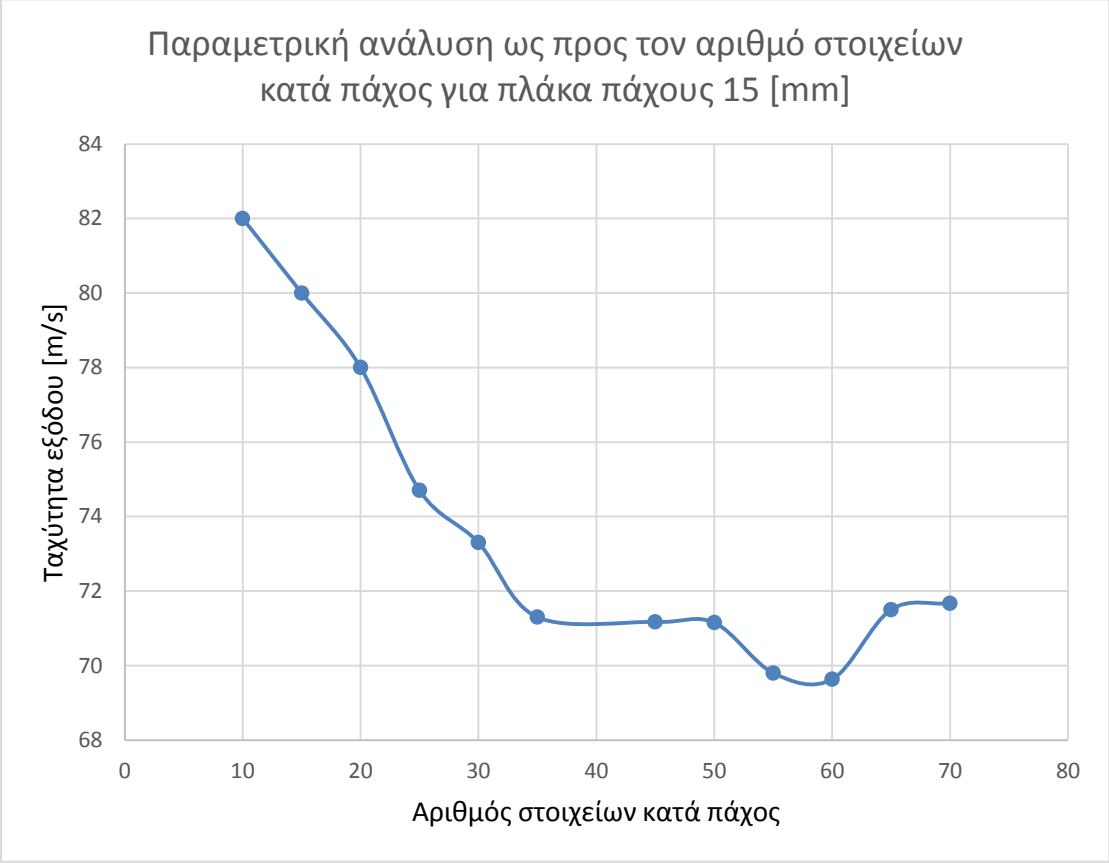
Η διαδικασία που ακολουθείται για την παραμετρική ανάλυση του κυλινδρικού πλέγματος είναι αυτούσια με αυτήν του μη-δομημένου πλέγματος. Διεξάγεται παραμετρική ανάλυση ως προς τον αριθμό στοιχείων κατά το πάχος της πλάκας, για δύο τιμές του πάχους της πλάκας, για 15 και 20 [mm], Στη συνέχεια, μόνο για την πλάκα των 15 [mm] πραγματοποιείται παραμετρική ανάλυση, για τις υπόλοιπες παραμέτρους του πλέγματος και στο τέλος γίνεται αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Για την αξιολόγηση, χρησιμοποιούνται και για τα δύο πάχη της πλάκας οι τιμές των παραμέτρων που προέκυψαν από την ανάλυση της λεπτότερης πλάκας, με εξαίρεση τις τιμές τις πρώτης παραμέτρου.

5.2.1 Ανάλυση ως προς τον αριθμό στοιχείων κατά το πάχος

Στην Εικόνα 5.26 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με τον αριθμό στοιχείων κατά το πάχος της πλάκας των 15 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 218.9 [m/s]
- αριθμός διαμερίσεων της περιφέρειας 20
- αριθμός διαμερίσεων της περιφέρειας 20

Από το διάγραμμα είναι εμφανές το πλέγμα συγκλίνει στα 35 στοιχεία.

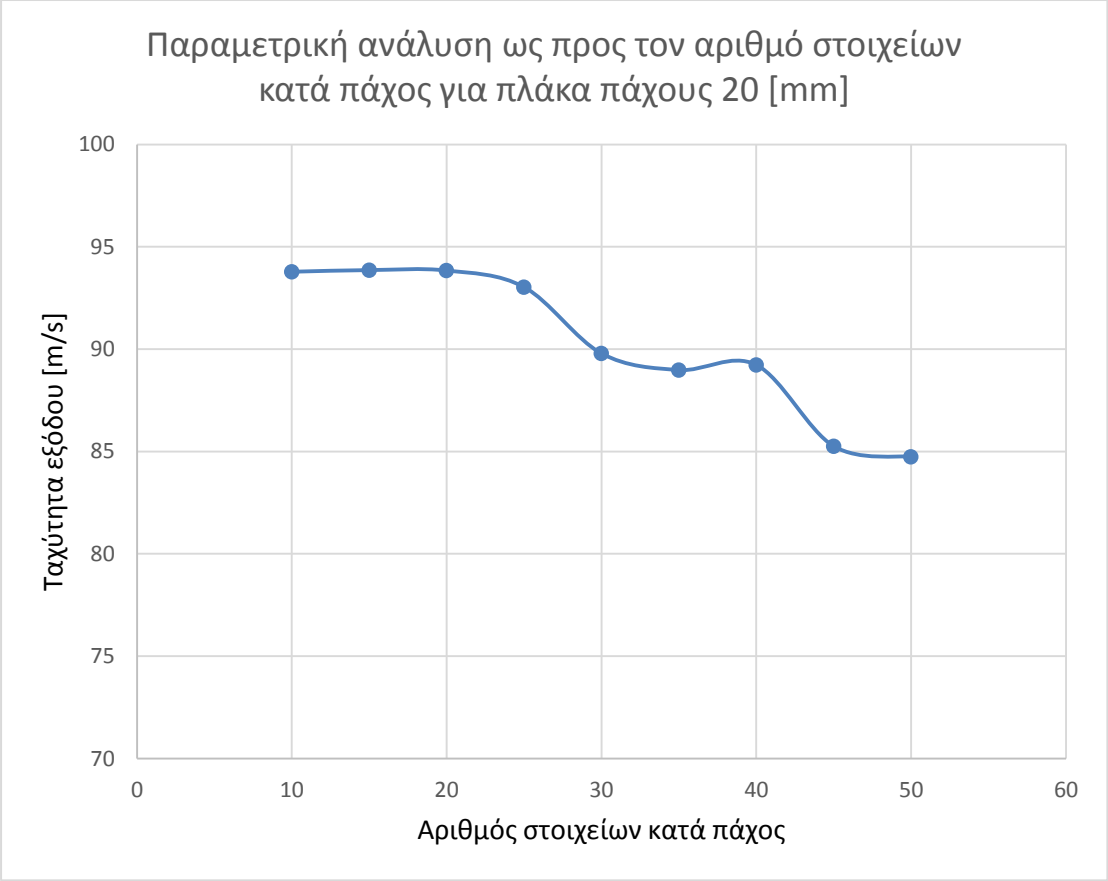


Εικόνα 5.26. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του αριθμού στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 218.9 [m/s], ο αριθμός των στοιχείων κατά την γωνιακή διεύθυνση είναι 20 και ο αριθμός των στοιχείων κατά την ακτινική διεύθυνση είναι 20.

Στην Εικόνα 5.27 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με τον αριθμό στοιχείων κατά το πάχος της πλάκας των 20 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 252 [m/s]
- αριθμός διαμερίσεων της περιφέρειας 20
- αριθμός διαμερίσεων της περιφέρειας 20

Από το διάγραμμα είναι εμφανές ότι το πλέγμα συγκλίνει, από την αρχή, στα 10 στοιχεία.



Εικόνα 5.27. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του αριθμού στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 252 [m/s], ο αριθμός των στοιχείων κατά την γωνιακή διεύθυνση είναι 20 και ο αριθμός των στοιχείων κατά την ακτινική διεύθυνση είναι 20.

5.2.2 Ανάλυση ως προς τον αριθμό στοιχείων κατά την γωνιακή διεύθυνση

Στην Εικόνα 5.28 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με τον αριθμό διαμερίσεων της κυκλικής περιφέρειας της πλάκας των 15 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 218.9 [m/s]
- αριθμός στοιχείων κατά πάχος 35
- αριθμός διαμερίσεων της ακτίνας 20

Στην διάγραμμα φαίνεται να υπάρχει ένα σημείο σύγκλισης στα 12 στοιχεία με περιοχή μικρής ευαισθησίας μεταξύ του 12 και 13. Προφανώς, λόγω της διακριτής φύσεως αυτής της παραμέτρου, δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί η ταχύτητα εξόδου για αριθμό στοιχείων ενδιάμεσα αυτού του διαστήματος.

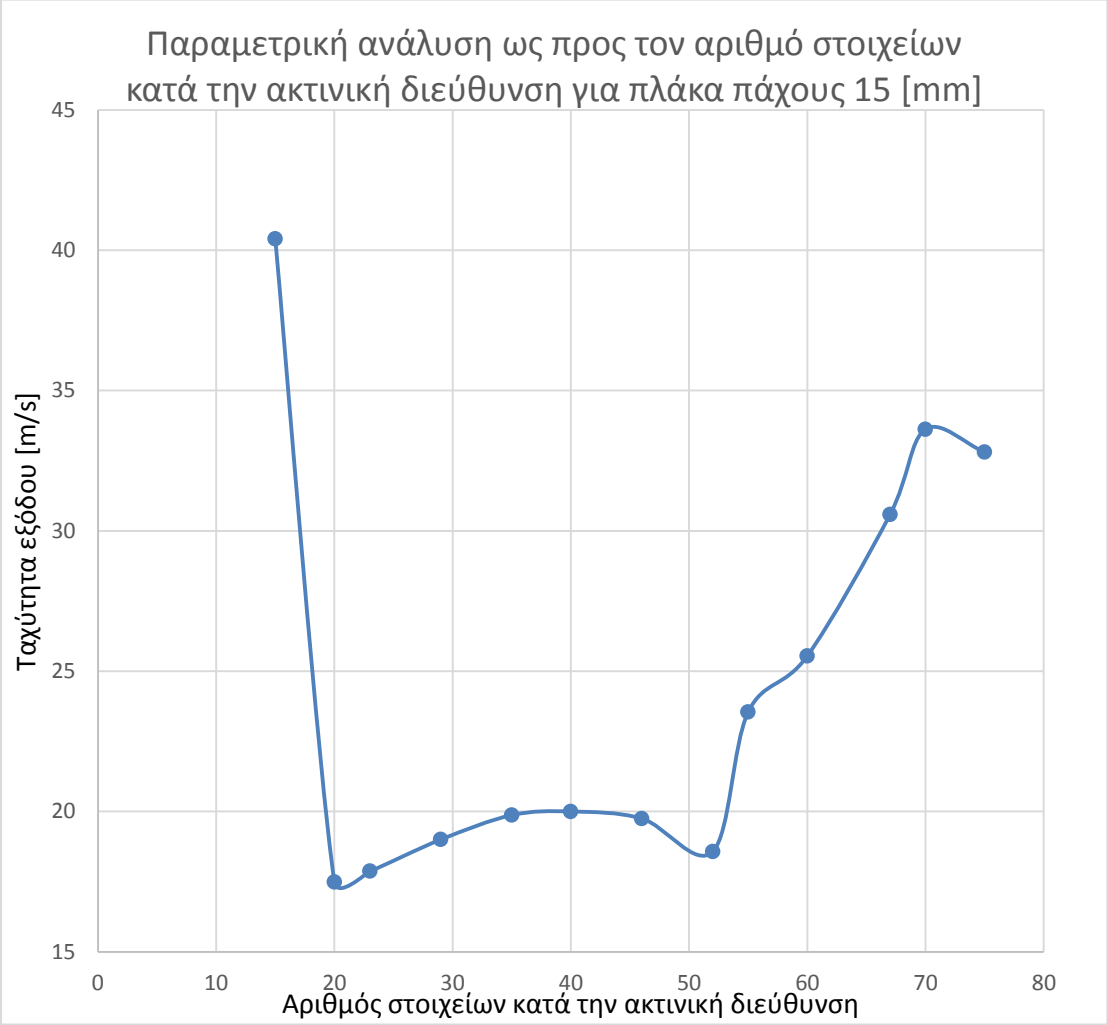
Εικόνα 5.28. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του αριθμού στοιχείων κατά την γωνιακή διεύθυνση. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 218.9 [m/s], ο αριθμός των στοιχείων κατά πάχος είναι 35 και ο αριθμός των στοιχείων κατά την ακτινική διεύθυνση είναι 20.

5.2.3 Ανάλυση ως προς τον αριθμό στοιχείων κατά την ακτινική διεύθυνση

Στην Εικόνα 5.29 παρουσιάζεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή σε συσχέτιση με τον αριθμό διαμερίσεων της ακτίνας της πλάκας των 15 [mm]. Οι υπόλοιπες παράμετροι του πλέγματος έχουν οριστεί στις παρακάτω τιμές

- ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή 218.9 [m/s]
- αριθμός στοιχείων κατά πάχος 35
- αριθμός διαμερίσεων της περιφέρειας 12

Από το διάγραμμα είναι εμφανές ότι το πλέγμα συγκλίνει στα 35 στοιχεία .



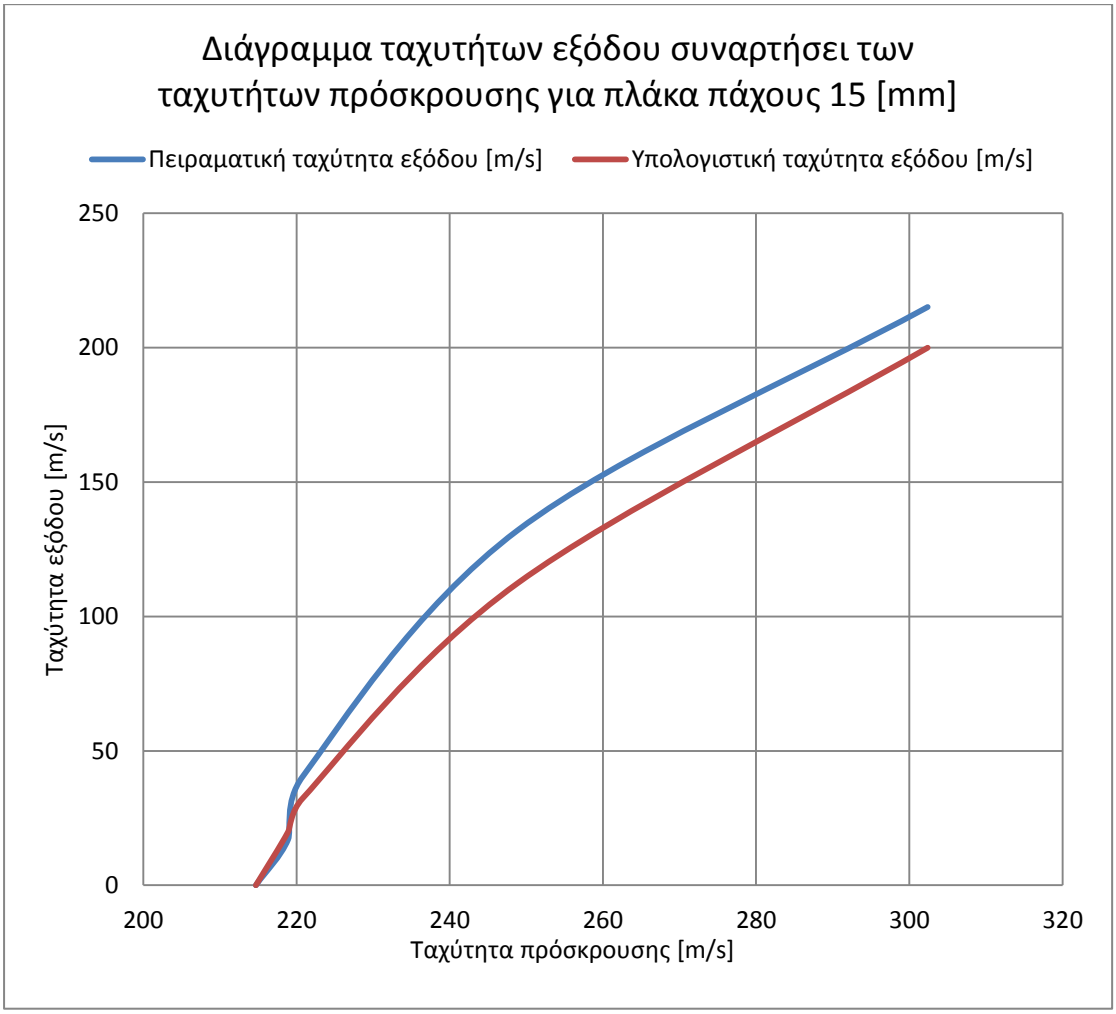
Εικόνα 5.29. Διάγραμμα ταχυτήτων εξόδου του διεισδυτή συναρτήσει του αριθμού στοιχείων κατά την ακτινική διεύθυνση. Η ταχύτητα πρόσκρουσης του διεισδυτή είναι 218.9 [m/s], ο αριθμός των στοιχείων κατά πάχος είναι 35 και ο αριθμός των στοιχείων κατά την γωνιακή διεύθυνση είναι 12.

5.2.4 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων

Στην Εικόνα 5.30 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 15 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 35
- αριθμός διαμερίσεων της περιφέρειας 12
- αριθμός διαμερίσεων της ακτίνας 35

Στην εικόνα είναι εμφανές ότι υπάρχει ταύτιση πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων τιμών για χαμηλές ταχύτητες πρόσκρουσης μέχρι 220 [m/s]. Για μεγαλύτερες τιμές οι καμπύλες φαίνεται να αποκλίνουν, οι διαφορές όμως είναι σχετικά μικρές. Ακόμη, οι καμπύλες από τα 240 [m/s] και άνω έχουν σχεδόν την ίδια κλίση.

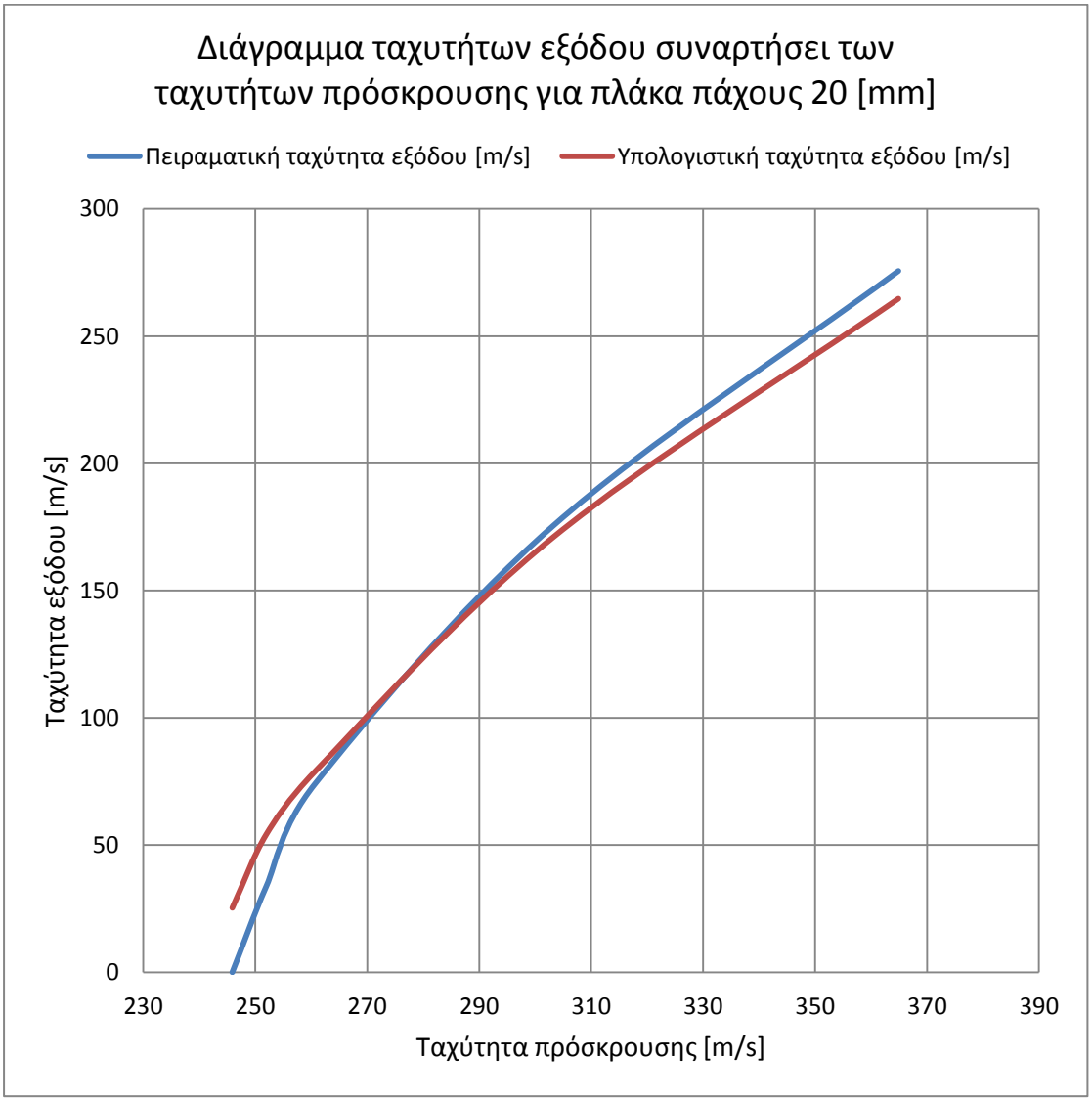


Εικόνα 5.30. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 35, ο αριθμός των στοιχείων κατά την γωνιακή διεύθυνση είναι 12, και ο αριθμός των στοιχείων κατά την ακτινική διεύθυνση είναι 35.

Στην Εικόνα 5.31 παρουσιάζονται διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή για πλάκα πάχους των 20 [mm]. Οι παράμετροι του πλέγματος έχουν συγκλίνει στις παρακάτω τιμές

- αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας 10
- αριθμός διαμερίσεων της περιφέρειας 12
- αριθμός διαμερίσεων της ακτίνας 35

Στην εικόνα είναι εμφανές ότι υπάρχει ικανοποιητική προσέγγιση πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων τιμών για ολόκληρο το εύρος των τιμών των ταχυτήτων πρόσκρουσης, ωστόσο οι αποκλίσεις φαίνονται συγκριτικά μεγαλύτερες για χαμηλές ταχύτητες πρόσκρουσης μέχρι 260 [m/s].



Εικόνα 5.31. Διαγράμματα συσχέτισης πειραματικά και αριθμητικά υπολογισμένων ταχυτήτων εξόδου με τις ταχύτητες πρόσκρουσης του διεισδυτή. Ο αριθμός των στοιχείων κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας είναι 10, ο αριθμός των στοιχείων κατά την γωνιακή διεύθυνση είναι 12, και ο αριθμός των στοιχείων κατά την ακτινική διεύθυνση είναι 35.

6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην προηγούμενη ενότητα έγινε παράθεση των αποτελεσμάτων της παραμετρικής ανάλυσης. Στη συνέχεια, παρουσιάστηκαν συγκριτικά διαγράμματα, μεταξύ των αποτελεσμάτων των αριθμητικών προσομοιώσεων και των πειραματικών δεδομένων. Σε αυτήν την ενότητα παρατίθενται ορισμένα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση της προηγούμενης ενότητας.

Για το μη δομημένο πλέγμα εξάγονται από τα διαγράμματα της προηγούμενης ενότητας, τα ακόλουθα συμπεράσματα.

- Με την αύξηση της ακτίνας της σφαίρας επιρροής, η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή αυξάνεται, μέχρι ένα σημείο σταθεροποιείται και δεν εξαρτάται πλέον από την αύξηση της ακτίνας. Η σταθεροποίηση ξεκινά όταν η ακτίνα είναι 8 [mm], που είναι περίπου ίση με την ακτίνα του διεισδυτή (10 [mm]).
- Με την μείωση του μεγέθους των στοιχείων εσωτερικά της σφαίρας επιρροής, η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή αυξάνεται. Ακόμη, σε αντίθεση με τις προηγούμενες παραμέτρους εμφανίζονται πολλαπλές περιοχές ευστάθειας που πρέπει να εξεταστούν.
- Στις πλάκες των 15 και 20 [mm], τα στοιχεία μικρού μεγέθους εσωτερικά της σφαίρας επιρροής, προσεγγίζουν καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα για υψηλές ταχύτητες πρόσκρουσης. Αντιθέτως, τα στοιχεία μεγαλύτερου μεγέθους προσεγγίζουν ακριβέστερα τα πειραματικά δεδομένα για χαμηλές ταχύτητες πρόσκρουσης.
- Στην πλάκα των 25 [mm] προσεγγίζονται ικανοποιητικά τα πειραματικά αποτελέσματα, σε ολόκληρο το εύρος των ταχυτήτων πρόσκρουσης, από τα στοιχεία του μικρότερου μεγέθους (0,4 [mm]) .
- Στην πλάκα των 30 [mm], τα στοιχεία μεσαίου μεγέθους (0,6 [mm]) εσωτερικά της σφαίρας επιρροής, προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα, για πολύ χαμηλές και υψηλές ταχύτητες πρόσκρουσης. Υπάρχει μία ενδιάμεση περιοχή που προσεγγίζεται καλύτερα από τα μικρότερα στοιχεία (0,4 [mm]). Ωστόσο, χάνεται η ακρίβεια στις υπόλοιπες περιοχές, ως προς την διαφορά μεταξύ των πειραματικών και αριθμητικών τιμών, αλλά και ως προς τις παραγώγους των δυο καμπυλών, δηλαδή δεν προσεγγίζεται ικανοποιητικά η τάση της πειραματικής καμπύλης.

Για το δομημένο πλέγμα εξάγονται τα παρακάτω

- Με την αύξηση του αριθμού των στοιχείων κατά την γωνιακή και την ακτινική διεύθυνση, αυξάνεται η ταχύτητα εξόδου του διεισδυτή.
- Το μοντέλο εμφανίζει μεγαλύτερη ευαισθησία ως προς τον αριθμό των στοιχείων κατά την γωνιακή διεύθυνση, σε σύγκριση με τον αριθμό των στοιχείων κατά την ακτινική διεύθυνση.

- Για τις τιμές των παραμέτρων του πλέγματος που επιλέχθηκαν, παρατηρείται ικανοποιητική προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων, για ολόκληρο το εύρος των ταχυτήτων πρόσκρουσης του διεισδυτή.

7 ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

Σε αυτήν την παράγραφο, γίνονται προτάσεις για έρευνα πάνω σε προβλήματα που αφορούν την προσομοίωση καταπονήσεων κατασκευών από κρουστικά φορτία.

Σε αυτήν την εργασία μελετήθηκε η διάτρηση πλάκας αλουμινίου. Εκτός από το αλουμίνιο, σε προστατευτικές κατασκευές χρησιμοποιούνται μεταλλικά υλικά όπως ο χάλυβας και το τιτάνιο αλλά και κεραμικά υλικά. Επομένως, σε μελλοντικές εργασίες θα ήταν δυνατόν να πραγματοποιηθεί μία παρόμοια ανάλυση με αυτήν που διεξάχθηκε στην παρούσα εργασία, για κάθε υλικό ξεχωριστά, αλλά και για συνδυασμούς, καθώς στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται προστατευτικές πλάκες από σύνθετα υλικά που συνδυάζουν μεταλλικά με κεραμικά υλικά.

Σε αντίθεση με τα υλικά που προαναφέρθηκαν, που στοχεύουν κυρίως στον εξοστρακισμό του διεισδυτή, χρησιμοποιούνται ευρέως και ελαφρύτερα υλικά, που κατασκευάζονται από συνθετικές ίνες. Με την χρησιμοποίηση συνθετικών ινών, δίνεται έμφαση στην σταδιακή απορρόφηση της κινητικής ενέργειας του διεισδυτή. Ενδιαφέρον παρουσιάζει, η προσομοίωση της διάτρησης στρώσεων υφάσματος, αλλά και η προσομοίωση διάτρησης μεταλλικών υλικών, που ενισχύονται στο τέλος με υφάσματα.

8 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] D. Mohotti , T. Ngo , S.N. Raman , P. Mendis , Analytical and numerical investigation of polyurea layered aluminium plates subjected to high velocity projectile impact, Materials and Design 82 (2015) 1–17.

[2] B. Sorensen , High-Velocity Impact of Encased Al/PTFE Projectiles on Structural Aluminum Armor, Procedia Engineering 103 (2015) 569 – 576.

[3] Z. Rosenberg , R. Kositski , E. Dekel , On the perforation of aluminum plates by 7.62 mm APM2 projectiles, International Journal of Impact Engineering 97 (2016) 79–86.

[4] L. Antoinat , R. Kubler , J.L Barou , P. Viot , L. Barrallier , Perforation of aluminium alloy thin plates, International Journal of Impact Engineering 75 (2015) 255-267.

[5] A. Manes , F. Serpellini , M. Pagani , M. Saponara , M. Giglio , Perforation and penetration of aluminium target plates by armour piercing bullets, International Journal of Impact Engineering 69 (2014) 39-54.

[6] T. Borvik , L. Olovsson , S. Dey , M. Langseth , Normal and oblique impact of small arms bullets on AA6082-T4 aluminium protective plates, International Journal of Impact Engineering 38 (2011) 577-589.

[7] T. Borvik, A.G. Hanssen , S. Dey, H. Langberg , M. Langseth , On the ballistic and blast load response of a 20 ft ISO container protected with aluminium panels filled with a local mass—Phase I: Design of protective system, Engineering Structures 30 (2008) 1605–1620.

[8] T. Borvik, A. Burbach , H. Langberg , M. Langseth , On the ballistic and blast load response of a 20ft ISO container protected with aluminium panels filled with a local mass—Phase II: Validation of protective system, Engineering Structures 30 (2008) 1621–1631.

[9] A. Manes, D. Lumassi , L. Giudici , M. Giglio, An experimental–numerical investigation on aluminium tubes subjected to ballistic impact with soft core 7.62 ball projectiles, Thin-WalledStructures73(2013) 68–80.

[10] V. Aune , E. Fagerholt , K.O. Hauge , M. Langseth, T. Borvik , Experimental study on the response of thin aluminium and steel plates subjected to airblast loading, International Journal of Impact Engineering 90 (2016) 106–121.

[11] P. Kumar, J. LeBlanc, D.S. Stargel , A. Shukla , Effect of plate curvature on blast response of aluminum panels, International Journal of Impact Engineering 46 (2012) 74-85.

[12] K. Spranghers , I. Vasilakos , D. Lecompte , H. Sol , J. Vantomme , Numerical simulation and experimental validation of the dynamic response of aluminum plates under free air explosions, International Journal of Impact Engineering 54 (2013) 83-95 .

[13] E.A. Starke , Aluminum Alloys: Alloy, Heat Treatment and Temper Designation, Encyclopedia of Materials: Science and Technology 21 (2001) 106-107.

[14] E.A. Starke , Aluminum Alloys: Properties and Applications, Encyclopedia of Materials: Science and Technology 21 (2001) 113-116.

[15] E.A. Starke , Aluminum: Alloying, Encyclopedia of Materials: Science and Technology, 21 (2001) 101-106.

[16] Y. Huang, Y. Li , Z. Xiao , Y. Liu, Y. Huang , X. Ren , Effect of homogenization on the corrosion behavior of 5083-H321 aluminum alloy, Journal of Alloys and Compounds 673 (2016) 73-79.

[17] Y. Altıntas, S. Aksoz , K. Keslioglu , N. Maraslı, Determination of thermodynamic properties of aluminum based binary and ternary alloys, Journal of Alloys and Compounds 649 (2015) 453-460.

[18] P.A. Rometsch , Y. Zhang , S. Knight , Heat treatment of 7xxx series aluminium alloys—Some recent developments, Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 24 (2014) 2003-2017.

[19] J. Hirsch , Recent development in aluminium for automotive applications, Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 24 (2014) 1995-2002.

[20] H. Zhong , P. Rometsch , Y. Estrin , Effect of alloy composition and heat treatment on mechanical performance of 6xxx aluminum alloys, Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 24 (2014) 2174-2178.

[21] N. Fakhar , F.F. Saniee , R. Mahmudi , High strain-rate superplasticity of fine- and ultrafine-grained AA5083 aluminum alloy at intermediate temperatures, Materials and Design 85 (2015) 342–348.

[22] Y. Zhao , B. Song , Z. Yan , X. Zhang , J. Pei , Microstructure and mechanical properties of extrusion welds incontinuous extrusion of AA6063 aluminium alloy with double billets, Journal of Materials Processing Technology 235 (2016) 149–157.

[23] L. Chen , G. Zhao , J. Yu , W. Zhang , Constitutive analysis of homogenized 7005 aluminum alloy at evaluated temperature for extrusion process, Materials and Design 66 (2015) 129–136.

[24] Y.M. khani , M.A. Wells , N. Parson, W.J. Poole , Numerical modeling of the material flow during extrusion of aluminium alloys and transverse weld formation, Journal of Materials Processing Technology 214 (2014) 688– 700.

[25] Q. Chen , X. Xia , B. Yuan , D. Shu , Z. Zhao , Microstructure evolution and mechanical properties of 7A09 high Strength aluminium alloy processed by backward extrusion at room temperature, Materials Science & Engineering A 588 (2013) 395–402.

[26] M.E. Backman , W. Goldsmith , The mechanics of penetration of projectiles into targets, International Journal of Engineering Science 16 (1978) 1-99.

[27] G.G. Corbett , S.R. Reid , W. Johnson , Impact loading of plates and shells by free-flying projectiles: A review, International Journal of Impact Engineering 18 (1992) 141-230.

[28] M.L. Wilkins , Mechanics of penetration and perforation, International Journal of Engineering Science 16 (1978) 793-807.

[29] G.H. Jonas , J.A. Zukas , Mechanics of penetration: Analysis and experiment, International Journal of Engineering Science 16 (1978) 879-903.

[30] J.A. Zukas , Impact dynamics, New York: Wiley; 1982.

[31] A.H. Clausen , T. Borvik , O.S. Hopperstad , A. Benallal , Flow and fracture characteristics of aluminium alloy AA5083–H116 as function of strain rate, temperature and triaxiality, Materials Science and Engineering A 364 (2004) 260–272.

[32] G.T. Motsı, M.B. Shongwe, T.J. Sono , P.A. Olubambi, Anisotropic behavior studies of aluminum alloy 5083-H0 using a micro-tensile test stage in a FEG-SEM, Materials Science& Engineering A 656 (2016) 266–274.

[33] T. Ye, L. Li, X. Liu, W. Liu, P. Guo, X. Tang, Anisotropic deformation behavior of as-extruded 6063-T4 alloy under dynamic impact loading, Materials Science & Engineering A 666 (2016) 149–155.

[34] M.J. Forrestal , V.K. Luk , N.S. Brar , Perforation of aluminum armor plates with conical-nose projectiles, Mechanics of Materials 10 (1990) 97-105.

[35] M.J. Forrestal, T.L. Warren , Perforation equations for conical and ogival nose rigid projectiles into aluminum target plates, International Journal of Impact Engineering 36 (2009) 220–225.

[36] G. Ben-Dor , A. Dubinsk , T. Elperin , High-Speed Penetration Dynamics: Engineering Models and Methods, World Scientific Publishing Company (2013).

[37] C.E. Anderson Jr, S.R. Bodner , Ballistic impact: The status of analytical and numerical modeling, International Journal of Impact Engineering 7 (1988) 9-35.

[38] D.R. Scheffler, J.A. Zukas, Practical aspects of numerical simulation of dynamic events: material interfaces, International Journal of Impact Engineering 24 (2000) 821-842.

[39] J.A. Zukas, D.R. Scheffler, Practical aspects of numerical simulations of dynamic events: effects of meshing, International Journal of Impact Engineering 24 (2000) 925-945.

[40] T. Borvik , A.H. Clausen , O.S. Hopperstad , M. Langseth , Perforation of AA5083-H116 aluminium plates with conical-nose steel projectiles—experimental study, International Journal of Impact Engineering 30 (2004) 367–384.

[41] T. Borvik, M.J. Forrestal, O.S. Hopperstad , T.L. Warren, M. Langseth , Perforation of AA5083-H116 aluminium plates with conical-nose steel projectiles – Calculations, International Journal of Impact Engineering 36 (2009) 426–437.

[42] R.F. Bishop, R. Hill, N.F. Mort , The theory of indentation and hardness tests, Phys. Soc. Proc (1945) 57-147.

[43] M.J. Forrestal , Penetration into dry porous rock, International Journal of Solids and Structures, 22 (1986) 1485-1500.

[44] R. J. M. Crozier, S. C. Hunter , Similarity solution for the rapid uniform expansion of a cylindrical cavity in a compressible elastic-plastic solid, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 23 (1970) 349-363.

[45] M. Abramowitz, I.A. Stegun , Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards: Applied Mathematics Series, 55; 1964.

[46] D.E. Amos (1988), Evaluation of integrals related to the Debye function, SAND88-2896, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM.

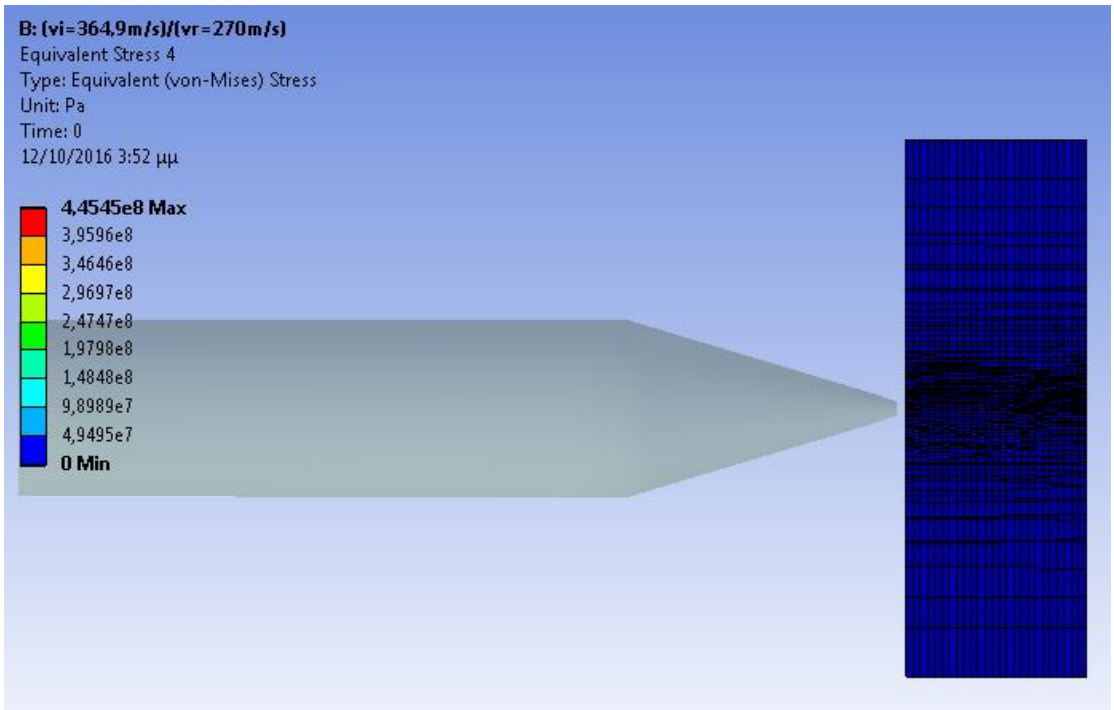
[47] T. Borvik , O.S Hopperstad , T. Berstad , M. Langseth , A computational model of viscoplasticity and ductile damage for impact and penetration, Eur. J. Mech. A/Solids 20 (2001) 685–712.

[48] T. Borvik, O. S. Hopperstad, T. Berstad, M. Langseth , Numerical simulation of plugging failure in ballistic penetration, International Journal of Solids and Structures, 38 (2001) 6241–6264.

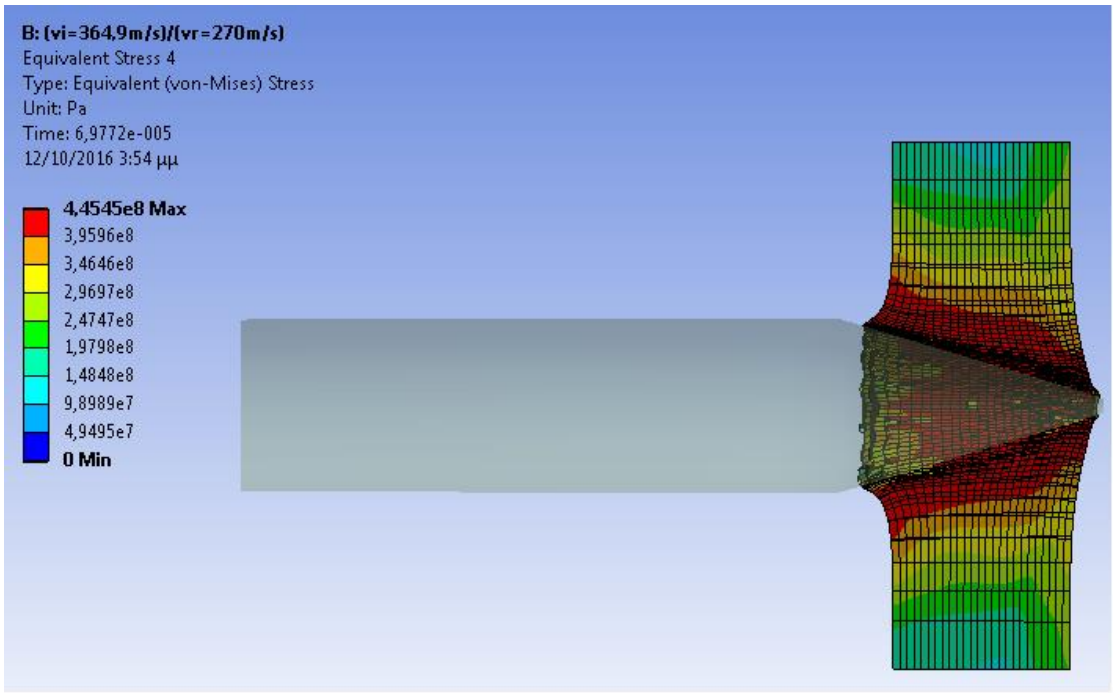
[49] R. Borst, M.A. Crisfield , J.J. CRemmers , C.V. Verhoosel , Non-linear finite element analysis of solids and structures, West Sussex: John Wiley & Sons Ltd; 2012.

.

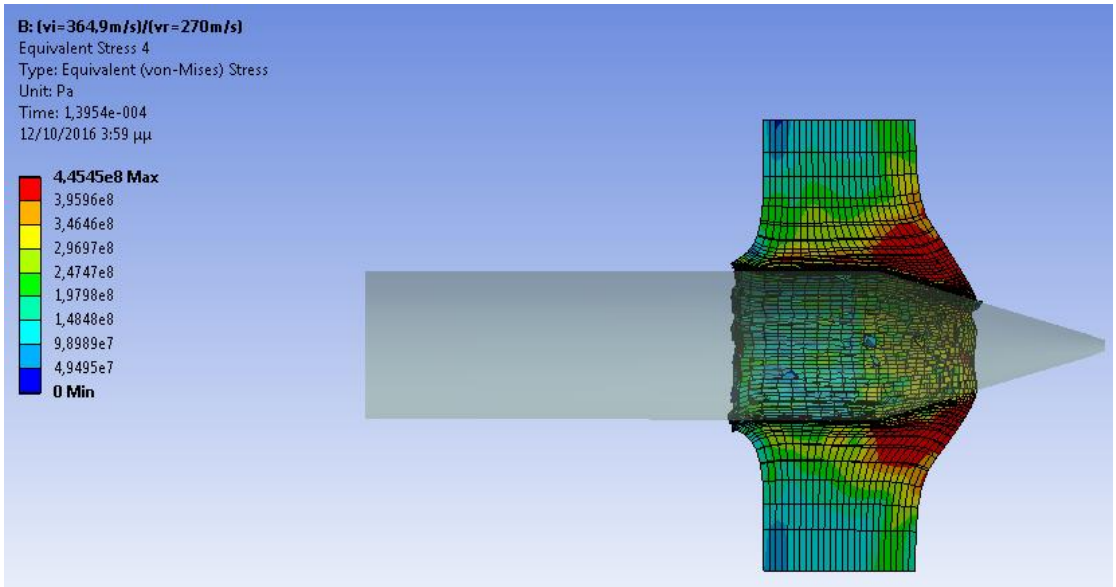
9 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



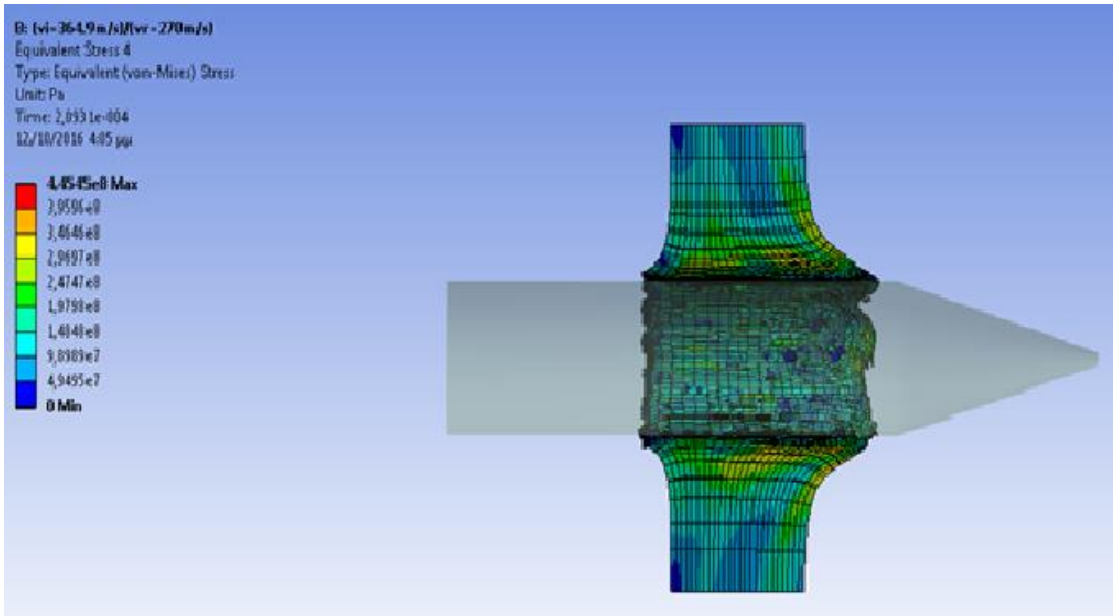
Στιγμιότυπο υπολογιστικής προσομοίωσης διάτρησης πλάκας αλουμινίου και πάχους 20 [mm], από κυλινδρικό διεισδυτή κωνικής αιχμής, την χρονική στιγμή t=0 [s]. Το πλέγμα είναι μη- δομημένο.



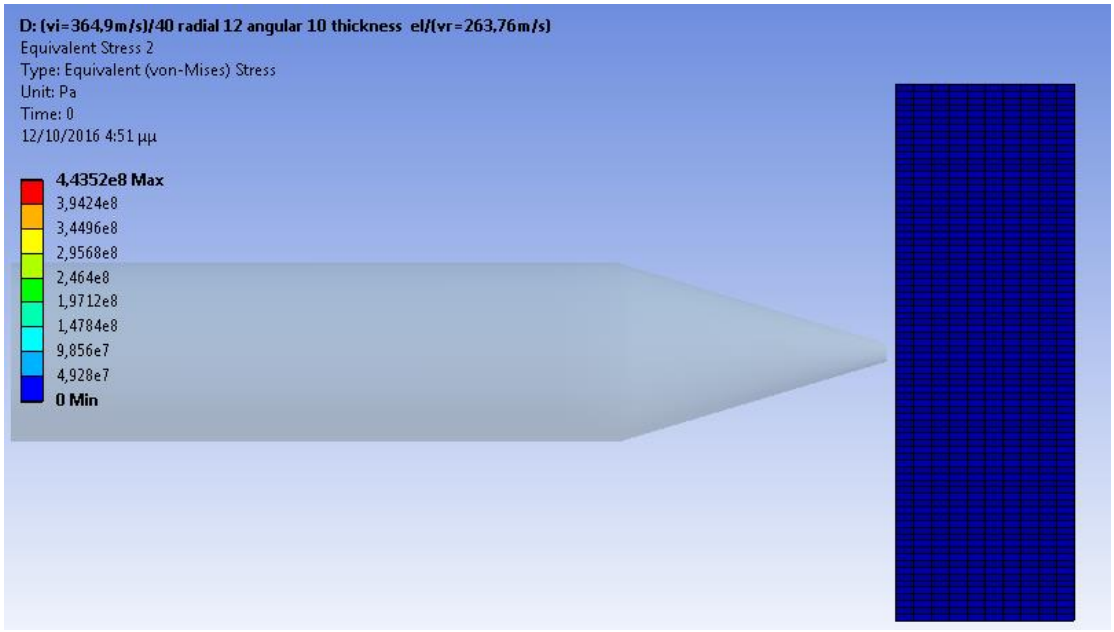
Στιγμιότυπο υπολογιστικής προσομοίωσης διάτρησης πλάκας αλουμινίου και πάχους 20 [mm], από κυλινδρικό διεισδυτή κωνικής αιχμής, την χρονική στιγμή $t = 7 \cdot 10^{-5}$ [s]. Το πλέγμα είναι μη- δομημένο.



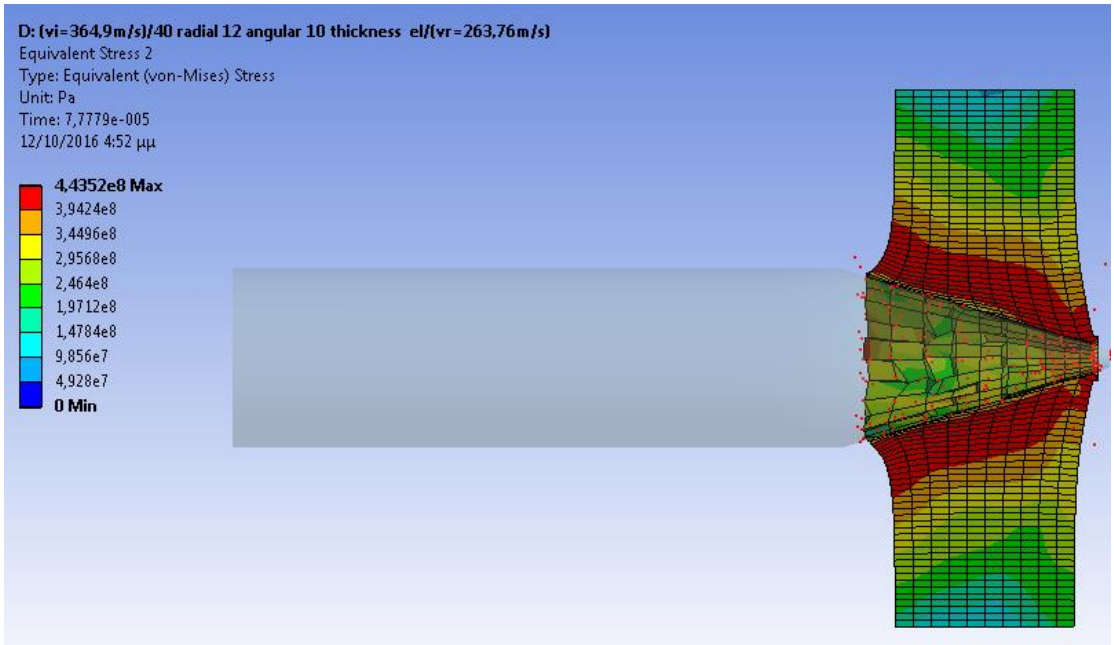
Στιγμιότυπο υπολογιστικής προσομοίωσης διάτρησης πλάκας αλουμινίου και πάχους 20 [mm], από κυλινδρικό διεισδυτή κωνικής αιχμής, την χρονική στιγμή $t = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ [s]. Το πλέγμα είναι μη- δομημένο.



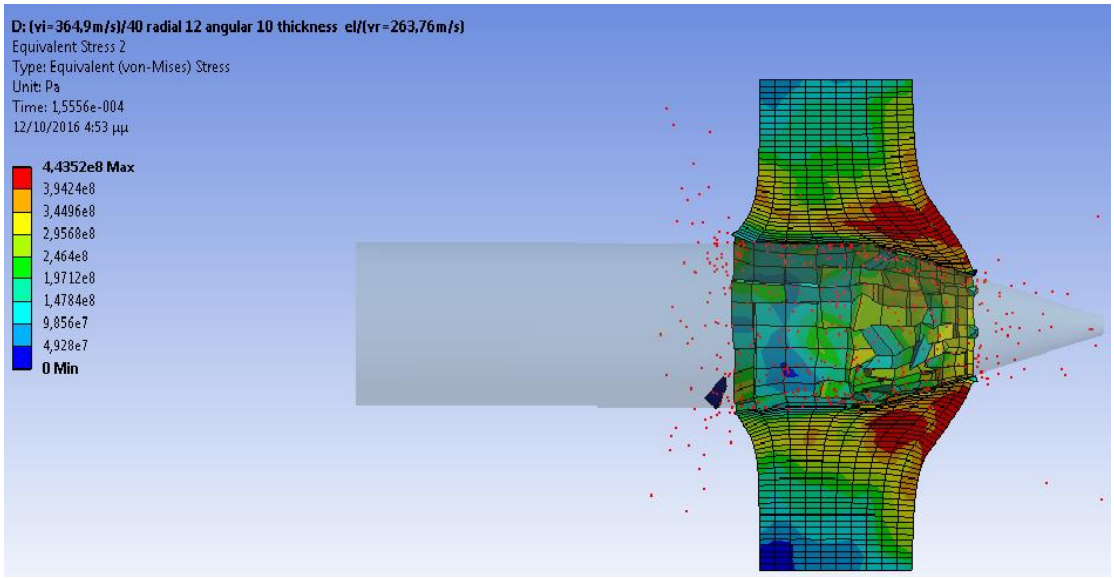
Στιγμιότυπο υπολογιστικής προσομοίωσης διάτρησης πλάκας αλουμινίου και πάχους 20 [mm], από κυλινδρικό διεισδυτή κωνικής αιχμής, την χρονική στιγμή $t = 2{,}1 \cdot 10^{-4}$ [s]. Το πλέγμα είναι μη- δομημένο.



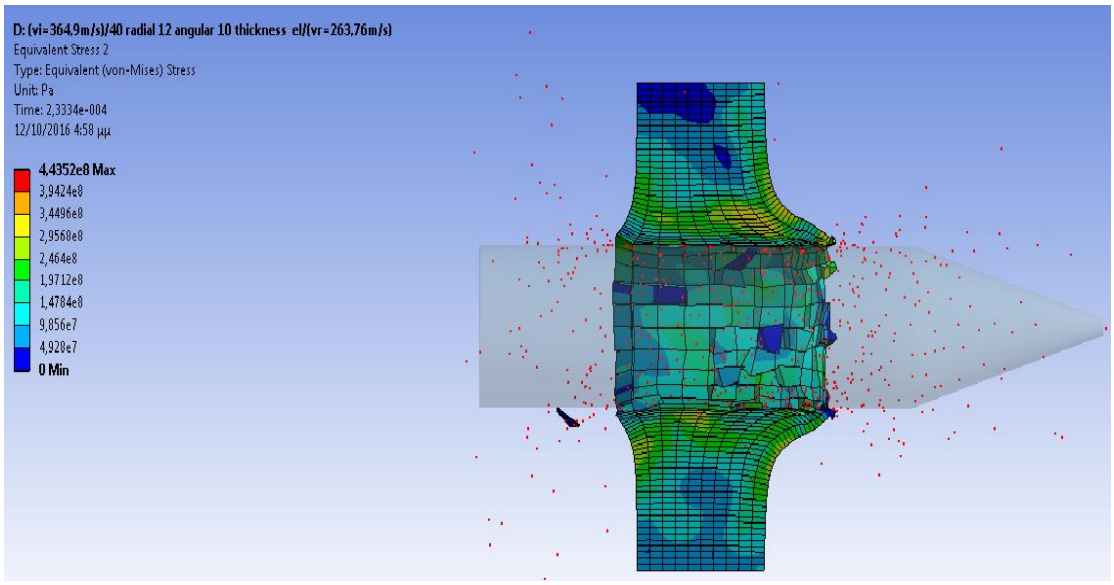
Στιγμιότυπο υπολογιστικής προσομοίωσης διάτρησης πλάκας αλουμινίου και πάχους 20 [mm], από κυλινδρικό διεισδυτή κωνικής αιχμής, την χρονική στιγμή $t = 0$ [s]. Το πλέγμα είναι δομημένο.



Στιγμιότυπο υπολογιστικής προσομοίωσης διάτρησης πλάκας αλουμινίου και πάχους 20 [mm], από κυλινδρικό διεισδυτή κωνικής αιχμής, την χρονική στιγμή $t = 7{,}8 \cdot 10^{-5}$ [s]. Το πλέγμα είναι δομημένο.



Στιγμιότυπο υπολογιστικής προσομοίωσης διάτρησης πλάκας αλουμινίου και πάχους 20 [mm], από κυλινδρικό διεισδυτή κωνικής αιχμής, την χρονική στιγμή $t = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ [s]. Το πλέγμα είναι δομημένο.



Στιγμιότυπο υπολογιστικής προσομοίωσης διάτρησης πλάκας αλουμινίου και πάχους 20 [mm], από κυλινδρικό διεισδυτή κωνικής αιχμής, την χρονική στιγμή $t = 2{,}3 \cdot 10^{-4}$ [s]. Το πλέγμα είναι δομημένο.