

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Προβλήματα μηχανικής των επαφών στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ Δ.Π.Μ.Σ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΙΓΓΛΕΖΟΥ ΜΑΡΙΑ

Επιβλέποντες

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Γ. ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΖΗΣΗΣ Επίκουρος Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Αθήνα, Οκτώβριος 2016

Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στον Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, κατά το χρονικό διάστημα Σεπτέμβριο 2015 έως Οκτώβριο 2016.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητή κ. Χ. Γεωργιάδη και Επίκουρο Καθηγητή κ. Α. Ζήση για την ευκαιρία που μου έδωσαν να συνεργαστούμε, για την πρόταση του συγκεκριμένου θέματος και την πολύτιμη βοήθειά τους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τον φίλο μου, για την στήριξή τους κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη	3
Summary	4

1.	Εισ	αγωγή	.5
1	.1	Κεραμικές Επιστρώσεις Προστασίας	5
1	.2	Φαινόμενα Κλίμακας και Προβλήματα Επαφής	8
1	.3	Μοντελοποίηση μικροδομικών υλικών – Μακροσκοπική συμπεριφορά	9
1	.4	Γενικευμένες Θεωρίες Συνεχούς Μέσου1	0
1	.5	Διάρθρωση της Διατριβής1	15

	Θεωρία Τάσεων Ζεύγους	2.
	2.1 Βασικές Εξισώσεις της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους	2.
25	2.2 Θεωρία Τάσεων Ζεύγους στην Επίπεδη Παραμόρφωση	2.

3.2	Ορισμός του Προβλήματος	31
3.3	Χρήση μετασχηματισμών Fourier	32
3.4	Αποτελέσματα	37

5. Συ	μπεράσματα και Ζητήματα για Μελλοντική Έρευνα	52
5.1	Συμπεράσματα	52
5.2	Ζητήματα για Μελλοντική Έρευνα	53

λιογραφία

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη προβλημάτων επιβολής συγκεντρωμένων φορτίων στην επιφάνεια ημιχώρου και επικάλυψης στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους. Οι λύσεις που παρουσιάζονται μπορούν να αποτελέσουν τον «δομικό λίθο» για την επίλυση προβλημάτων διείσδυσης με διάφορους τύπους διεισδυτών. Οι μικρο- ή νανο- διεισδύσεις αποτελούν πρόβλημα της Μηχανικής των Επαφών και είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τον καθορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών.

Στη παρούσα διατριβή αρχικά παρουσιάζονται πληροφορίες σχετικά με τις επικαλύψεις και τις τεχνολογικές εφαρμογές αυτών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους, η οποία εισάγει νέες σταθερές του υλικού που υποδεικνύουν την ύπαρξη χαρακτηριστικού «εσωτερικού» μεγέθους.

Χρησιμοποιώντας τη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους στα πλαίσια επίπεδης παραμόρφωσης, εξετάζεται το πρόβλημα κάθετης συγκεντρωμένης φόρτισης στην επιφάνεια ημι-άπειρου χωρίου, το οποίο αντιμετωπίζεται με τη χρήση μετασχηματισμών Fourier. Παρουσιάζονται οι πλήρεις λύσεις των παραμορφωσιακών πεδίων του προβλήματος και εντοπίζονται οι σημαντικότερες διαφορές που προκύπτουν για τη δεδομένη φόρτιση μεταξύ της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους με της Κλασσικής Ελαστικότητας.

Ακολούθως, μελετάται το πρόβλημα της κάθετης συγκεντρωμένης φόρτισης στην επιφάνεια επικάλυψης. Το πρόβλημα αυτό μελετάται για πρώτη φορά και αντίστοιχες λύσεις δεν υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Παρουσιάζονται οι πλήρεις λύσεις των παραμορφωσιακών πεδίων του προβλήματος και εντοπίζονται οι σημαντικότερες διαφορές της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους με την Κλασσική Ελαστικότητα.

Η μέθοδος επίλυσης βασίζεται στους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς και είναι ακριβής. Τα αποτελέσματα δείχνουν σημαντικές διαφορές από τα αντίστοιχα της Κλασικής Ελαστικότητας καθώς οι στροφές φράσσονται στο σημείο εφαρμογής των φορτίων, ενώ οι μετατοπίσεις παρότι παρουσιάζουν τα ίδια ασυμπτωτικά χαρακτηριστικά στα πλαίσια και των δύο Θεωριών, εμφανίζουν ουσιαστικές ποιοτικές διαφορές.

Summary

The subject of the present thesis is the study of the mechanical behavior of half-planes and coatings under the action of concentrated forces, within the frame of both classical and Couple Stress Theory of Elasticity. The presented results can act as the "foundation" for the study of indentation problems with different types of indenters. Micro- and nano- indentations suggest classical contact mechanics problems, and are very useful tools for the mechanical properties of the materials. We initially present information regarding the microstructured coatings and their technological application. Next we present the basic equations of Couple Stress Elasticity, which introduces new additional material constants that suggest the existence of characteristic internal length.

Employing the couple stress theory, in its the plane strain results we initially study the problem of a half-plane loaded by a normal lead on its surface. We present full solutions of the deformation field, and we find the differences that emerge when the same problem is studied within the frame of Classical Elasticity.

Next, we study the same type of loading on the surface of a coating, again within the frame of Couple-Stress Elasticity. This problem is studied for the first time and similar solutions do not exist in the literature. The full solution for the emerging deform action fields are presented and differences with Classical Elasticity are discussed.

The methods of solution is based on integral transform. The results show important differences when compared to those attained within the frame of Classical Elasticity. In the Couple Stress Theory of Elasticity the rotations are bounded at the point of the application of the load, while the displacements even though the present the same asymptotic behavior in both theories, the present qualitative differences.

Κεφάλαιο 1

1. Εισαγωγή

1.1 Κεραμικές Επιστρώσεις Προστασίας

Η ανάπτυξη των προηγμένων κεραμικών υλικών συνδέθηκε εξαρχής με την ανάγκη αντικατάστασης των μεταλλικών κραμάτων στις περιπτώσεις όπου η θερμοκρασία λειτουργίας υπερέβαινε τα όρια που θέτει το σημείο τήξης των μετάλλων. Στην προσπάθεια για βελτιστοποίηση συστημάτων όπως είναι οι στροβιλοκινητήρες αεροσκαφών, ολοένα και μεγαλύτερες θερμοκρασίες καύσης είναι επιθυμητές προκειμένου να αυξηθεί ο βαθμός απόδοσης. Αν και τα προηγμένα κεραμικά υλικά χρησιμοποιήθηκαν αρκετά νωρίς σε διαστημικές εφαρμογές όπως για παράδειγμα ως ασπίδα θερμικής προστασίας των διαστημικών λεωφορείων κατά την είσοδο στην ατμόσφαιρα, στα συστήματα πέδησης, σε αντιβαλλιστικούς θώρακες κλπ η εισαγωγή των προηγμένων κεραμικών υλικών σε συστήματα τα οποία θα εκμεταλλευτούν πλήρως τις ιδιότητές τους δεν έχει επιτευχθεί ακόμα σε ικανοποιητικό βαθμό.

Η ανάπτυξη επιστρώσεων προστασίας από οξείδωση (EBC) και επιστρώσεων θερμικής προστασίας (TBC) είναι αντικείμενο πολλών μελετών και ερευνητικών προγραμμάτων δεδομένου ότι οι λεπτές κεραμικές επιστρώσεις, εφαρμόζονται στις επιφάνειες πλήθους μηχανικών συστημάτων μέσω διαφόρων τεχνικών εναπόθεσης, προκειμένου να προσδώσουν σε αυτές βελτιωμένες φυσικές ιδιότητες, ενώ ανάλογα με την εφαρμογή, μπορούν να έχουν πάχος ακόμη και μικρότερο του 1 μm.

Η γενεά επιστρώσεων θερμικής προστασίας τρέχουσα που χρησιμοποιείται σε στροβιλοκινητήρες αεροσκαφών αποτελείται από ένα πολυχρηστικών επιφανειών. Μία ειδική σύνολο κατηγορία τέτοιων επιστρώσεων περιλαμβάνουν εξωτερικά μία επιφάνεια θερμικής προστασίας (TBC) από οξείδιο του ζιρκονίου (ZrO₂) το οποίο εναποτίθεται σε συνδετικό υπόστρωμα (Bond-Coat) οξειδίου του αλουμινίου (Al₂O₃). Το σύστημα αυτό καλύπτει και προστατεύει θερμικά το υπέρ-κράμα νικελίου (superalloy) από το οποίο κατασκευάζονται οι λεπίδες των στροβιλοκινητήρων (Miller, 1984; Ruud

et al., 2001, Evans et al., 2001). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η κιονωτή μικροδομή (columnar microstructure) της κεραμικής επικάλυψης η οποία οφείλεται στην τεχνική εναπόθεσης - **Σχήμα 1**.

Τα συστήματα θερμικής προστασίας παρουσιάζουν δύο κύριες κατηγορίες αστοχίας. Η πρώτη εξ' αυτών σχετίζεται με τη σταδιακή οξείδωση της συνδετικής επιφάνειας μεταξύ της κεραμικής επικάλυψης και του υπέρκράματος (Miller, 1984; Karlsson et al., 2002; Mumm et al., 2001; Wright and Evans, 1999) ενώ η δεύτερη σχετίζεται με τη σύγκρουση της υπερκείμενης κεραμικής επιφάνειας από σωματίδια τα οποία εισέρχονται στο εσωτερικό του στροβιλοκινητήρα από το περιβάλλον κατά τη διάρκεια λειτουργίας αυτού. Ως εκ τούτου, η μηχανική μελέτη τέτοιων επιστρώσεων υπό την επίδραση μηχανικών φορτίων όπως για παράδειγμα είναι αυτά που αναπτύσσονται υπό συνθήκες επαφής ή σύγκρουσης είναι καθοριστικής σημασίας ενώ είναι ιδιαίτερα σημαντικό να κατανοήσουμε τη μίκρομηχανική συμπεριφορά ενός συστήματος επίστρωσης - υποστρώματος και ιδιαίτερα σε επίπεδο κατασκευών πολύ μικρής κλίμακας προκειμένου να μπορέσουμε την δομική ακεραιότητα των μηχανικών και μίκρο- μηχανικών συστημάτων.



Σχήμα 1: Κεραμική επίστρωση θερμικής προστασίας (ZrO₂) με χαρακτηριστική κιονωτή μικροδομή πάνω σε υπόστρωμα υπερ-κράματος Ni. Το πάχος της κεραμικής επίστρωσης είναι ίσο με 100 μm ενώ το πλάτος της κιόνων είναι περίπου ίσο με 5 μm.

Προκειμένου να μελετηθούν οι μηχανικές ιδιότητες τέτοιων επιστρώσεων, πρέπει αφενός να καθορισθεί η εξάρτηση αυτών από το πάχος της ίδιας της επίστρωσης και ο τρόπος με τον οποίο οι μηχανικές ιδιότητες της επίστρωσης επηρεάζονται από τις μηχανικές ιδιότητες του υποστρώματος στο οποίο εναποτίθεται η επίστρωση. Αφετέρου, πρέπει να καθορισθεί ο τρόπος με τον οποίο οι μηχανικές ιδιότητες της επίστρωσης επηρεάζονται από τα μικροδομικά χαρακτηριστικά αυτής. Μία χαρακτηριστική τέτοια περίπτωση επιστρώσεως όπου τα μηχανικά της χαρακτηριστικά επηρεάζονται τόσο από το ίδιο το πάχος της όσο και από τα μικροδομικά της χαρακτηριστικά παρουσιάζεται στο **Σχήμα 1**, όπου το πάχος της κεραμικής επίστρωσης είναι περίπου 100 μm, ενώ λόγω του τρόπου εναπόθεσης του κεραμικού υλικού στο συνδετικό υπόστρωμα, αναπτύσσεται η χαρακτηριστική κιονωτή μικροδομή, με πλάτος κάθε κίονα ίσο περίπου με 5 μm.

Τα τελευταία χρόνια έχει ευρέως παρατηρηθεί πειραματικά ότι οι μηχανικές ιδιότητες των υλικών που χρησιμοποιούνται για διάφορες εφαρμογές εξαρτώνται από διάφορα χαρακτηριστικά μήκη τα οποία καθορίζονται είτε από την ίδια την κατασκευή για την οποία χρησιμοποιείται το υλικό (για παράδειγμα το πάχος επιφάνειας επίστρωσης) είτε από τα ίδια χαρακτηριστικά της μικροδομής του υλικού (για παράδειγμα στην προαναφερθείσα περίπτωση το πλάτος των κιόνων), είτε από τον συνδυασμό των παραπάνω. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι μακροσκοπικές μηχανικές αλλά και άλλες ιδιότητες (ηλεκτρικές, θερμικές, μαγνητικές) των κατασκευών να διαφοροποιούνται αισθητά από τις αντίστοιχες ιδιότητες του «μητρικού» υλικού, καθώς αυτές μπορούν να παρουσιάζουν εξάρτηση από τη μικροδομική τοπολογία της κατασκευής σε σχέση με το συμπαγές (bulk) υλικό δεδομένου ότι η υπόθεση ότι οι ιδιότητες του υλικού κατανέμονται ομοιόμορφα στον όγκο του καταρρέει, ενώ οι Κλασσικές Θεωρίες Συνεχούς Μέσου χάνουν την ακρίβεια τους όταν χαρακτηριστικά μήκη του προβλήματος γίνονται συγκρίσιμα με το χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής. Τα φαινόμενα αυτά, δηλαδή της επίδρασης των μικροδομικών χαρακτηριστικών στην μακροσκοπική συμπεριφορά μίας κατασκευής/υλικού είναι γνωστά με τον όρο «φαινόμενα κλίμακας» (size effects).

1.2 Φαινόμενα Κλίμακας και Προβλήματα Επαφής

Φαινόμενα κλίμακας έχουν παρατηρηθεί μεταξύ άλλων συνθηκών φόρτισης σε πειράματα μικροδιεισδύσεων και ιδιαίτερα όταν το χαρακτηριστικό μήκος της διείσδυσης – δηλαδή το πλάτος διείσδυσης ή η επιφάνεια διείσδυσης – είναι συγκρίσιμη με κάποιο χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής του ίδιου του υλικού υπό διείσδυση. Συγκεκριμένα έχει δειχθεί ότι ισχυρά φαινόμενα κλίμακας παρουσιάζονται στη μετρούμενη σκληρότητα πολυκρυσταλλικών, κυψελλωτών αλλά και πολυμερικών υλικών και ειδικά σε πολύ μικρά βάθη διείσδυσης. Για παράδειγμα έχει παρατηρηθεί ότι η σκληρότητα διείσδυσης μετάλλων και κεραμικών υλικών διπλασιάζεται καθώς η επιφάνεια επαφής μειώνεται από τα 10 μm στο 1 μm (Stelmashenko et al., 1993; Ma and Clarke, 1995; Poole et al., 1996). Επιπλέον, η διείσδυση λεπτών επιστρώσεων έδειξε ότι το όριο διαρροής αυξάνεται μειούμενου του πάχους της επίστρωσης (Huber et al., 2002). Οι Fleck et al., (Fleck et al., 1994) πρότειναν ότι τα παρατηρούμενα φαινόμενα κλίμακας σκληρότητα των υλικών οφείλονται στις υψηλές βαθμίδες στην τάσεων/τροπών που παρουσιάζονται κατά τη διείσδυση σε μικρά βάθη.

Γενικά η σκλήρυνση (hardening) των υλικών οφείλεται στη συνδυασμένη παρουσία των γεωμετρικώς απαραίτητων εξαρμώσεων (dislocations) οι οποίες σχετίζονται με τις βαθμίδες πλαστικής τροπής και με τις στατιστικώς αποθηκευόμενες εξαρμώσεις που σχετίζονται με τις πλαστικές τροπές. Παρά το γεγονός ότι οι βαθμίδες χρησιμοποιούνται ευρύτατα για την κατανόηση των φαινομένων κλίμακας στην πλαστική παραμόρφωση, αυτές είναι εξίσου σημαντικές για υλικά τα οποία παραμορφώνονται ελαστικά όταν όμως το χαρακτηριστικό μήκος της παραμόρφωσης γίνεται συγκρίσιμο με το χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής του υλικού. Αναφορικά, υπάρχουν πολυμερή τα οποία παρουσιάζουν σημαντικά φαινόμενα κλίμακας στην απολύτως ελαστική περιοχή παραμόρφωσης (Han and Nikolov, 2007; Nikolov and Han 2007), $\varepsilon v \omega$ of Maraganti and Sharma (2007) έδειξαν ότι οι βαθμίδες τροπών παίζουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην ελαστική περιοχή παραμόρφωσης σύνθετων κυψελλωτών υλικών.

Εξάλλου, κατά την πραγματοποίηση πειραμάτων διείσδυσης, σε πολύ μικρά βάθη διείσδυσης η πλαστική διαρροή (plastic flow) δεν ενεργοποιείται έως ότου η ισοδύναμη τροπή φτάσει σε κάποιο χαρακτηριστικό κρίσιμο όριο διαρροής

ενώ βέβαια η αποφόρτιση έχει πλήρως ελαστικό χαρακτήρα. Εξαιτίας των παραπάνω λοιπόν, η Ελαστική Θεωρία Επαφών είναι επαρκής, όταν για παράδειγμα θέλουμε να υπολογίσουμε μέσω ενός πειράματος διείσδυσης, το μέτρο ελαστικότητας (Pharr et al., 1992). Υπό αυτές τις συνθήκες η απόκριση του υλικού, μπορεί να γίνει κατανοητή υπό το πρίσμα μίας προσέγγισης δια μέσου καθαρά ελαστικών θεωρήσεων και ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος επαφής οι βαθμίδες τροπών μπορεί να επηρεάσουν σημαντικά τη

1.3 Μοντελοποίηση μικροδομικών υλικών – Μακροσκοπική συμπεριφορά

Προκειμένου να μελετηθούν τα φαινόμενα κλίμακας που παρατηρούνται στη μακροσκοπική συμπεριφορά κατά τη σύνθετη φόρτιση ενός υλικού με μικροδομή δύο διαφορετικές προσεγγίσεις μπορούν να ακολουθηθούν.

Η πρώτη προσέγγιση απαιτεί να ληφθεί υπόψη η πλήρης μορφολογία της μικροδομής και αυτή να μοντελοποιηθεί λεπτομερώς είτε αναλυτικά είτε δια μέσου ενός λεπτομερούς κώδικα πεπερασμένων στοιχείων. Η προσέγγιση αυτή περιλαμβάνει πλήθος λεπτομερειών της δομής του υλικού αλλά προφανώς μειονεκτεί ως προς το απαιτούμενο συνολικό υπολογιστικό κόστος το οποίο αυξάνεται καθώς η πολυπλοκότητα της μικροδομής αυξάνεται.

Μία εναλλακτική προσέγγιση περιλαμβάνει την περιγραφή του υλικού δια μέσου μίας Θεωρίας Συνεχούς Μέσου σύμφωνα με την οποία τα μικροδομικά χαρακτηριστικά του υλικού «απορροφώνται» σε ένα χαρακτηριστικό μικροδομικό μέγεθος το οποίο όμως περιλαμβάνεται στην καταστατική περιγραφή του υλικού. Η προσέγγιση δια μέσου των Θεωριών αυτών είναι ιδιαίτερα ισχυρή διότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα τα οποία απαιτούν μεγάλο εύρος υπολογισμών, αλλά βέβαια υπολείπεται σε σχέση με την προηγούμενη μέθοδο ως προς τη λεπτομερή περιγραφή της μικροδομής, δεδομένου ότι η μικροδομή περιγράφεται υπό μία γενικότερη έννοια μέσου όρου. Τέτοιες θεωρίες είναι γνώστες ως Γενικευμένες Θεωρίες Συνεχούς Μέσου (Generalized Continuum Theories). Λεπτομέρειες σχετικά με τη χρήση και των δύο προσεγγίσεων μπορούν να εντοπισθούν στις ακόλουθες εργασίες: Poole et al. (1996), Chen et al. (2004), Stupkiewicz (2007), Fleck and Zisis (2010), Zisis and Fleck (2010), Tekoglu and Onck (2008), Muki and Sternberg (1965), Begley and Hutchinson (1998), Nix and Gao (1998), Shu and Fleck (1998), Wei and Hutchinson (2003), Nielsen et al. (2014)

1.4 Γενικευμένες Θεωρίες Συνεχούς Μέσου

Ο Kröner (1968) στο συνέδριο της ΙUTAM (Διεθνούς Ένωσης Θεωρητικής και Εφηρμοσμένης Μηχανικής) που ήταν αφιερωμένο στις γενικευμένες Θεωρίες Συνεχούς Μέσου και αποτέλεσε ορόσημο για τη μετέπειτα εξέλιξή τους, περιέγραψε τις Θεωρίες αυτές ως "...Θεωρίες Μηχανικής της Ύλης για περιπτώσεις όπου οι συμβατικές Θεωρίες Συνεχούς δεν προσφέρουν μία ικανοποιητική προσέγγιση..." Το νόημα της περιγραφής αυτής εστιάζει στο γεγονός ότι οι Κλασσικές Θεωρίες Συνεχούς αδυνατούν να περιγράψουν φαινόμενα κλίμακας (size effects) που έχουν παρατηρηθεί σε πειραματικές εργασίες. Γενικά, οι Θεωρίες αυτές βασίζονται στην θεώρηση ότι το συνεχές μέσο αποτελείται από στοιχειώδη παραμορφώσιμα σωματίδια, τα μακρο-μέσα. Επιπλέον, λόγω της εν γένει εξάρτησης της παραμορφωσιακής ενέργειας από βαθμίδες συγκεκριμένων πεδίων, όπως: η (δεύτερη) βαθμίδα της μετατοπίσεως (τύπος Ι, στη Θεωρία του Mindlin), η βαθμίδα της τροπής (τύπος ΙΙ) ή η βαθμίδα της στροφής (Θεωρία Τάσεων Ζεύγους), εισάγονται νέες σταθερές του υλικού, που υποδεικνύουν την παρουσία χαρακτηριστικού «εσωτερικού» μεγέθους στην συμπεριφορά του. Το χαρακτηριστικό αυτό μέγεθος μπορεί να συνδεθεί με το μέγεθος της μικροδομής του υλικού. Έτσι, ενσωματώνονται φαινόμενα κλίμακας στην ανάλυση τάσεων, κάτι που δεν μπορεί να επιτευχθεί με την Κλασική Θεωρία. Μέσω των Θεωριών Βαθμίδας, μπορούν να περιγραφούν συνεχή μέσα με περιοδική δομή, όπως είναι π.χ. τα κρυσταλλικά πλέγματα, οι κρυσταλλίτες ενός πολυκρυσταλλικού υλικού ή οι κόκκοι ενός κοκκώδους υλικού.

Οι Γενικευμένες Θεωρίες Συνεχούς Μέσου έχουν χρησιμοποιηθεί σε μεγάλο αριθμό εφαρμογών σε διάφορα επιστημονικά πεδία. Οι πρώτες εφαρμογές εντοπίζονται στην δεκαετία του 1960 (Weitsman, 1965; Cook and Weitsman, 1966; Eshel and Rosenfeld, 1970). Πιο πρόσφατα χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση διαφόρων προβλημάτων σε περιοχές όπως η Διάδοση Κυμάτων (Vardoulakis and Georgiadis, 1997; Georgiadis et al., 2000; Georgiadis and Velgaki, 2003; Georgiadis et al., 2004; Charalambopoulos and Gergidis, 2008; Gourgiotis et al, 2013), η Μηχανική των Θραύσεων (Chen et al., 1998; Zhang et al, 1998; Georgiadis, 2003; Paulino et al., 2003; Grentzelou and Georgiadis, 2005; Wei, 2006; Radi, 2007, 2008; Gourgiotis and Georgiadis, 2007, 2008, 2009; Aravas and Giannakopoulos, 2009; Gourgiotis et al., 2012; Mishuris et al., 2012), η Πλαστικότητα (Fleck et al., 1994; Vardoulakis and Sulem, 1995; Begley and Hutchinson, 1998; Gao et al., 1999; Huang et al., 2000; Fleck and Hutchinson, 2001; Hwang et al., 2002), η Μηχανική των Εξαρμώσεων (Lubarda, 2003; Lazar and Maugin, 2005; Po et al., 2014), η Μηχανική των Επαφών (Zisis et al., 2014; Zisis and Gourgiotis, 2015; Zisis, Gourgiotis and Dal Corso, 2015), n Εμβιομηχανική (Vavva et al., 2009; Giannakopoulos et al., 2013), καθώς και σε Προβλήματα Ευστάθειας (Exadaktylos and Vardoulakis, 1998; Papargyri-Beskou et al., 2003) και Μηχανικής των Κατασκευών (Giannakopoulos and Stamoulis, 2007; Filopoulos et al., 2010; Papargyri-Beskou et al., 2010; Fafalis et al., 2012; Giannakopoulos et al., 2012). Παράλληλα, έχουν αναπτυχθεί προχωρημένες αριθμητικές μέθοδοι για την μελέτη προβλημάτων στα πλαίσια των Θεωριών Bαθμίδας (Oden et al., 1970; Shu et al., 1999; Amanatidou and Aravas, 2002; Engel et al., 2002; Providas and Kattis, 2002; Tsepoura et al., 2002, Polyzos et al., 2003; Giannakopoulos et al., 2006; Tsamasphyros et al., 2007; Markolefas et al., 2008,2009; Tsamasphyros and Vrettos, 2010). Με βάση τα μέχρι σήμερα αποτελέσματα, συμπεραίνεται ότι οι Θεωρίες Βαθμίδας επεκτείνουν το εύρος ισχύος της έννοιας του συνεχούς σε μία προσπάθεια γεφύρωσης του χάσματος μεταξύ των Κλασσικών Θεωριών Συνεχούς Μέσου και των Θεωριών Κρυσταλλικού Πλέγματος.

Γενικά, οι Θεωρίες με φαινόμενα βαθμίδας στοχεύουν στην παραμόρφωση υλικών με εσωτερικά μήκη της τάξεως των 0.1-10μm (Shi et al., 2000). Επειδή τα φαινόμενα ενίσχυσης (strengthening effects) που προκύπτουν από τις βαθμίδες γίνονται σημαντικά όταν οι βαθμίδες αυτές είναι αρκετά μεγάλες, τέτοια φαινόμενα θα είναι αξιοσημείωτα όταν το υλικό παραμορφώνεται σε πολύ μικρούς όγκους, όπως πολύ κοντά σε αιχμές ρωγμών και εγκοπών, σε μικρές οπές και εγκλείσματα και σε μικρο- ή νανο- διεισδύσεις. Παραδείγματα των φαινομένων κλίμακας σε στερεά με ελαστική παραμόρφωση

περιλαμβάνουν τη διάδοση κυμάτων με μικρά μήκη κύματος σε στρωσιγενή υλικά (layered materials) (Herrmann and Achenbach, 1968), την κάμψη δοκού πολυκρυσταλλικού αλουμινίου (Kakunai et al., 1985) και τον λυγισμό ελαστικών ινών σε σύνθετα υλικά (Fleck and Shu, 1995). Στον τομέα της διάδοσης κυμάτων που σχετίζεται με εφαρμογές ηλεκτρικών συσκευών, χρησιμοποιούνται συχνά επιφανειακές συχνότητες κυμάτων της τάξεως των GHz και επομένως, εμφανίζονται μήκη κύματος της τάξεως του μm (Farnell, 1978). Σε τέτοιες περιπτώσεις, φαινόμενα διασποράς σε υψηλές συχνότητες μπορούν να εξηγηθούν μόνο με βάση τις Θεωρίες Βαθμίδας (Georgiadis and Velgaki, 2003; Georgiadis et al., 2004).

Προτού επικεντρωθούμε στη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους, επιχειρούμε μία περιεκτική παρουσίαση των Γενικευμένων Θεωριών Συνεχούς Μέσου για ελαστικά υλικά και των σχέσεων μεταξύ τους. Αναλυτικότερες παρουσιάσεις μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Vardoulakis and Sulem (1995), Eringen (1999), Altenbach and Eremeyev (2013) και Maugin (2013).

Μία προφανής γενίκευση της Κλασικής Θεωρίας Συνεχούς Μέσου είναι η υπόθεση ότι δύο υλικά σωματίδια αλληλεπιδρούν όχι μέσω μίας δύναμης αλλά μέσω ενός ζεύγους δυνάμεων. Απαρχή αυτής της γενίκευσης μπορεί να θεωρηθεί η Θεωρία Δοκού Euler-Bernoulli, όπου τα διανύσματα μετατόπισης και στροφής είναι ανεξάρτητες κινηματικές ποσότητες ενώ οι ελκυστές τάσεων και τάσεων ζεύγους (ροπή) εμφανίζονται ως ανεξάρτητα εσωτερικά φορτία. Η ιδέα ανεξάρτητων τάσεων ζεύγους σε ένα ελαστικό συνεχές μέσο μελετήθηκε από διαφόρους επιστήμονες τον 19° αιώνα (MacCullagh, 1839; Lord Kelvin, 1882, 1884, 1890; Voigt, 1887). Το 1909, οι αδερφοί Cosserat ανέπτυξαν μία μη γραμμική Θεωρία Ελαστικότητας (Cosserat and Cosserat, 1909). Ειδικότερα, εισήγαγαν μία απολύτως στερεά τριάδα (directors) διανυσμάτων σε κάθε υλικό σημείο του συνεχούς η οποία μπορεί να στρέφεται ανεξάρτητα από την τοπική στροφή του μέσου κατά την παραμόρφωση. Πλέον, κάθε υλικό σημείο έχει έξι βαθμούς ελευθερίας (τρείς μεταφορικούς και τρείς στροφικούς). Με αυτό τον τρόπο εισάγεται η επίδραση των τάσεων ζεύγους κατά την παραμόρφωση ενός ελαστικού μέσου σε ένα συνεχές τύπου Cosserat.

Στην εργασία των αδερφών Cosserat δεν δόθηκε η δέουσα προσοχή για αρκετό χρονικό διάστημα. Στις αρχές της δεκαετίας του 1960, η Θεωρία Ελαστικότητας με τάσεις ζεύγους γίνεται ξανά αντικείμενο έρευνας και Θεωρίες τύπου Cosserat μελετώνται ανεξάρτητα από διαφόρους συγγραφείς. Μεταξύ των άλλων, οι Grioli (1960), Rajagopal (1960), Aero and Kuvshinskii (1961), Eringen (1962), Mindlin and Tiersten (1962) και Koiter (1964) εξέτασαν μία ειδική περίπτωση της Θεωρίας Cosserat στην οποία η στροφή της στερεάς τριάδας δεν είναι μία ανεξάρτητη κινητική παράμετρος αλλά ορίζεται συναρτήσει της βαθμίδας των μετατοπίσεων. Η Θεωρία αυτή είναι γνωστή ως Θεωρία Τάσεων Ζεύγους (Couple Stress Theory). Στην Θεωρία Τάσεων Ζεύγους μόνο η βαθμίδα του διανύσματος στροφής εισάγεται στην έκφραση της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας, δηλαδή μόνο οκτώ από τις δεκαοκτώ ανεξάρτητες συνιστώσες της πρώτης βαθμίδας τροπής. Στη συνέχεια, όλες οι ανεξάρτητες συνιστώσες της πρώτης βαθμίδας της τροπής εισήχθησαν στην πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας σε μη γραμμική μορφή από τον Toupin (1962, 1964) και σε γραμμική μορφή από τον Mindlin (1964). Η εκδοχή αυτή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως Θεωρία Βαθμίδας Τροπής (Strain Gradient Theory). Or Green and Rivlin (1964) έθεσαν τις βάσεις μίας γενικής περίπτωσης στην οποία περιέχονται όλες οι βαθμίδες ανωτέρας τάξης του τανυστή της τροπής, η οποία αναφέρεται ως Πολυπολική Θεωρία (Multipolar Theory). Ο Mindlin (1965) διατύπωσε, ως ειδική περίπτωση της Πολυπολικής Θεωρίας, μία Θεωρία στην οποία συμπεριλαμβάνονται τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη βαθμίδα του τανυστή της τροπής, γνωστή ως Θεωρία Δεύτερης Βαθμίδας Τροπής (Second Strain Gradient Theory). Όλες οι παραπάνω Θεωρίες όπου η παραμορφωσιακή ενέργεια συνδέεται με βαθμίδες τροπής αναφέρονται στην βιβλιογραφία με τον όρο «Θεωρίες Ανωτέρου Βαθμού» (Higher Grade Theories) (δεξιά στήλη Σχήμα 2).

Ένας εναλλακτικός τρόπος επέκτασης της Κλασσικής Ελαστικότητας ώστε να συμπεριληφθεί η επίδραση των παραμορφώσεων της μικροδομής του υλικού είναι μέσω της εισαγωγής πρόσθετων βαθμών ελευθερίας στο συνεχές μέσο. Αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας ορίζονται ως ανεξάρτητοι από τους συνήθεις βαθμούς ελευθερίας του κλασσικού συνεχούς μέσου (πεδίο μετατοπίσεων). Θεωρίες αυτού του τύπου είναι γνωστές ως «Θεωρίες Ανωτέρας Τάξης» (Higher Order Theories) (αριστερή στήλη **Σχήμα 2**). Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται η μη γραμμική Μικρομορφική Θεωρία (Micromorphic Theory)

που αναπτύχθηκε από τους Eringen and Suhubi (1964) και η γραμμική Μικροδομική Θεωρία (Microstructure Theory) του Mindlin (1964). Η γραμμική εκδοχή της Μικρομορφικής Θεωρίας (Eringen, 1999) ταυτίζεται με την Μικροδομική Θεωρία του Mindlin. Στην Μικρομορφική Θεωρία, κάθε υλικό σημείο διαθέτει τρεις παραμορφώσιμες στερεές τριάδες (directions) που εισάγουν εννέα πρόσθετους βαθμούς ελευθερίας, ψ_{ij} , οι οποίοι είναι αδιάστατες ποσότητες όπως η τροπή. Ουσιαστικά, εισάγεται στο συνεχές μέσο ένα «μικροστοιχείο» το οποίο μπορεί να περιστρέφεται και να μετατοπίζεται ανεξάρτητα από την τοπική παραμόρφωση του «μακρο-στοιχείου» (material particle) κατά Mindlin.

Θεωρίες ανωτέρας τάξης

Θεωρίες ανωτέρου βαθμού



Σχήμα 2: Γενικευμένες Θεωρίες Συνεχούς Μέσου και οι σχέσεις μεταξύ τους (Tekoğlu and Onck, 2008).

Δύο ειδικές περιπτώσεις της Μικρομορφικής Θεωρίας είναι η Θεωρία Μικροτάνυσης (Microstretch Theory) (Eringen, 1971, 1990) και η Μικροπολική Θεωρία (Micropolar Theory) (Eringen, 1966). Στην Θεωρία Μικροτάνυσης εισάγονται τέσσερις πρόσθετοι βαθμοί ελευθερίας: τρεις για την στροφή (φ_i) και ένας για την τάνυση (χ) των στερεών τριάδων. Στην περίπτωση του μικροπολικού συνεχούς μέσου οι τριάδες είναι απολύτως στερεές και εισάγονται τρεις στροφικοί βαθμοί ελευθερίας (φ_i) πρόσθετοι στους τρεις μεταφορικούς της Κλασσικής Θεωρίας. Αν οι στερεές τριάδες θεωρηθούν πλήρως συζευγμένες με το κάθε υλικό σημείο του συνεχούς, οι στροφικοί βαθμοί ελευθερίας της Μικροπολικής Θεωρίας ταυτίζονται με τις κλασσικές στροφές $\varphi_k = e_{iik}u_{i,i}/2$ (όπου e_{iik} είναι το σύμβολο εναλλαγής Levi-Civita) και η Μικροπολική Θεωρία ανάγεται στη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους. Επιπλέον, η Θεωρία Τάσεων Ζεύγους είναι μια ειδική περίπτωση της Θεωρία Βαθμίδα Τροπής. Μία ακόμη σύνδεση μεταξύ των Θεωριών Ανωτέρας Τάξης και Ανωτέρου Βαθμού είναι η αναγωγή της Μικρομορφικής Θεωρίας στην Θεωρία Βαθμίδας Τροπής όταν οι πρόσθετοι βαθμοί ελευθερίας ψ_{ij} ορίζονται ίσοι με την βαθμίδα της μετατόπισης $u_{i,j}$.

Οι παραπάνω Γενικευμένες Θεωρίες Συνεχούς Μέσου και οι σχέσεις μεταξύ του συνοψίζονται στο **Σχήμα 2**.

1.5 Διάρθρωση της Διατριβής

Η παρούσα εργασία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη της συμπεριφοράς ελαστικών υποστρωμάτων υπό την επίδραση συγκεντρωμένων φορτίων στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους. Το υπόστρωμα μπορεί να έχει τη μορφή ημι-άπειρου χωρίου ή να είναι πεπερασμένο υπό τη μορφή επιστρώσεως (coating) και η χρήση της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους γίνεται σε μία προσπάθεια να εξετασθεί η επίδραση της μικροδομής του υλικού στη μηχανική του συμπεριφορά.

Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζονται οι αρχές τις Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους και δίνονται οι βασικές εξισώσεις στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης.

Στο **Κεφάλαιο 3** μελετώνται προβλήματα συγκεντρωμένης κατακόρυφης φόρτισης στην επιφάνεια ημιχώρου, στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους.

Στο **Κεφάλαιο 4** μελετάται το πρόβλημα κατακόρυφου φορτίου (τύπου Flamant) στην επιφάνεια επιστρώσεως στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους.

Τα δύο πρόβλημα που παρουσιάζονται στα **Κεφάλαια 3** και **4** αντιμετωπίζονται με τη χρήση των μετασχηματισμών Fourier και τη βοήθεια των τασικών συναρτήσεων.

Η παρούσα διατριβή ολοκληρώνεται στο **Κεφάλαιο 5** με σύνοψη των αποτελεσμάτων και προτάσεις για μελλοντική ερευνητική εργασία.

Κεφάλαιο 2

2. Θεωρία Τάσεων Ζεύγους

2.1 Βασικές Εξισώσεις της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους

Η Θεωρία Τάσεων Ζεύγους αναφέρεται στη βιβλιογραφία με διάφορα ονόματα, όπως 'Cosserat Theory with constrained rotation' (Toupin, 1962), 'Couple Stress Theory' (Koiter, 1964), 'Indeterminate Coupe Stress Theory' (Eringen, 1968) 'Cosserat pseudo-continuum' (Nowacki, 1986). Όπως ήδη αναφέρθηκε, η αυστηρή θεμελίωση της Θεωρίας αυτής έγινε τη δεκαετία του 1960 με τις εργασίες των Toupin (1962), Mindlin and Tiersten (1962) και Koiter (1964). Ενδιαφέρουσες παρουσιάσεις της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους μπορούν επίσης να βρεθούν στις εργασίες των Aero and Kunshinskii (1961), Pal'mov (1964), Muki and Sternberg (1965). Επιπλέον, στην εργασία των Georgiadis and Velgaki (2003) παρουσιάζεται μία πιο πληρέστερη περιγραφή της Θεωρίας περιλαμβάνονται φαινόμενα αδράνειας και καθώς μικρο-αδράνειας επισημαίνοντας έτσι τη μικροδομική προέλευση της θεώρησης τάσεων ζεύγους.

Οι βασικές υποθέσεις της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους είναι οι εξής: (i) κάθε υλικό σημείο έχει τρεις ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας (τρεις συνιστώσες μετατόπισης), (ii) η Αρχή των Τάσεων (Stress Principle) των Euler-Cauchy επεκτείνεται λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη ελκυστών τάσεων ζεύγους (ροπής), (iii) η πυκνότητα παραμόρφωσιακής ενέργειας εξαρτάται όχι μόνο από την τροπή αλλά και από την βαθμίδα της στροφής. Απουσία αδρανειακών φαινομένων, οι νόμοι διατήρησης της ορμής και της στροφορμής για έναν όγκο ελέγχου CV με επιφάνεια S γράφονται ως (Mindlin and Tiersten, 1962; Georgiadis and Velgaki, 2003):

$$\int_{s} t_{p}^{(n)} dS + \int_{CV} f_{p} d(CV) = 0, \qquad (1.1)$$

$$\int_{s} \left(x_{q} t_{k}^{(n)} e_{pqk} + M_{p}^{(n)} \right) dS + \int_{CV} \left(x_{q} f_{k} e_{pqk} + C_{p} \right) d(CV) = 0,$$
(1.2)

όπου $t_p^{(n)}$ είναι η επιφανειακή δύναμη ανά μονάδα επιφανείας (ελκυστής των τάσεων), f_p είναι οι καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου, $M_p^{(n)}$ είναι η επιφανειακή ροπή ανά μονάδα επιφανείας, C_p είναι οι καθολικές ροπές ανά μονάδα όγκου και x_q είναι οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης κάθε υλικού στοιχείου με στοιχειώδη όγκο d(CV).

Οι τάσεις και οι τάσεις ζεύγους ορίζονται λαμβάνοντας υπόψη την ισορροπία ενός στοιχειώδους υλικού τετράεδρου (τετράεδρο Cauchy) και χρησιμοποιώντας τις Εξ. (1.1) και (1.2) αντίστοιχα (βλέπε π.χ. Aero and Kuvshinskii, 1961; Malvern, 1969). Ο ασύμμετρος τανυστής των τάσεων σ_{pq} ορίζεται ως:

$$t_p^{(n)} = \sigma_{qp} n_q, \tag{1.3}$$

και ο επίσης ασύμμετρος τανυστής των τάσεων ζεύγου
ς $\mu_{\scriptscriptstyle qp}$ ως:

$$M_{p}^{(n)} = \mu_{qp} n_{q}.$$
 (1.4)

Θεωρώντας την ισορροπία μίας λεπτής λωρίδας (thin slice) του υλικού, μπορούν εύκολα να αποδειχθούν οι σχέσεις $t^{(n)} = -t^{(n)}$ και $M^{(n)} = -M^{(n)}$, όπου **n** είναι το μοναδιαίο κάθετο σε ένα στοιχείο επιφανείας (είτε στο σύνορο, είτε σε οποιαδήποτε ιδεατή επιφάνεια στο εσωτερικό του σώματος) διάνυσμα με φορά προς τα έξω (βλέπε π.χ. Jaunzemis, 1967). Οι τάσεις ζεύγους μ_{pq} έχουν διαστάσεις [δύναμη][μήκος]⁻¹. Επιπλέον, η τάση σ_{pq} χωρίζεται σε ένα συμμετρικό και ένα αντισυμμετρικό τμήμα ως:

$$\sigma_{pq} = \tau_{pq} + \alpha_{pq}, \qquad (1.5)$$

όπου $\tau_{pq} = \tau_{qp}$ και $\alpha_{pq} = -\alpha_{qp}$, ενώ ο τανυστής των τάσεων ζεύγους μ_{pq} χωρίζεται σε ένα αποκλίνον $\mu_{pq}^{(D)}$ και ένα σφαιρικό τμήμα $\mu_{pq}^{(S)}$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mu_{pq} = m_{pq} + \frac{1}{3} \delta_{pq} \mu_{kk}, \qquad (1.6)$$

όπου $m_{pq} \equiv \mu_{pq}^{(D)}$, $\mu_{pq}^{(S)} \equiv (1/3)\delta_{pq}\mu_{kk}$ και δ_{pq} είναι το δέλτα του Kronecker.

Σύμφωνα με τους ανωτέρω ορισμούς και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Green-Gauss προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων και ροπών:

$$\partial_p \sigma_{pq} + f_q = 0, \tag{1.7}$$

$$\partial_p \mu_{pq} + \sigma_{kq} e_{pqk} + C_q = 0, \qquad (1.8)$$

όπου $\partial_p() \equiv \partial() / \partial x_p$.

Οι παραπάνω εξισώσεις με χρήση της Εξ. (1.5) γράφονται ως:

$$\partial_p \tau_{pq} + \partial_p \alpha_{pq} + f_q = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{2}\partial_{p}\mu_{pk}e_{pqk} + a_{pq} + \frac{1}{2}C_{k}e_{pqk} = 0.$$
(1.10)

Τελικά, συνδυάζοντας τις Εξ. (1.9) και (1.10) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $curl\left\{div\left[(1/3)\delta_{pq}\mu_{kk}\right]\right\} = 0$ προκύπτει η παρακάτω ενιαία εξίσωση ισορροπίας:

$$\partial_p \tau_{pq} - \frac{1}{2} \partial_p \partial_r m_{rk} e_{pqk} + f_q - \frac{1}{2} \partial_p C_k e_{pqk} = 0.$$
(1.11)

Για την κινηματική περιγραφή του σώματος ορίζονται, στα πλαίσια μίας γεωμετρικά γραμμικής Θεωρίας, οι ακόλουθες ποσότητες:

$$\omega_q = \frac{1}{2} e_{qpk} u_{k,p}, \qquad (1.12)$$

$$\kappa_{pq} = \omega_{q,p}, \tag{1.13}$$

όπου ω_q είναι το διάνυσμα στροφής και κ_{pq} είναι ο τανυστής καμπυλότητας (curvature or torsion-flexure tensor). Ο τανυστής αυτός έχει διαστάσεις $[\mu\eta\kappa\sigma_{\zeta}]^{-1}$ και ορίζεται είτε ως η βαθμίδα της στροφής είτε ως ο στρόβιλος της τροπής:

$$\kappa_{pq} = (1/2) e_{qkl} \partial_p \partial_k u_l \equiv e_{qkl} \partial_k \varepsilon_{pl}.$$
(1.14)

Η Εξ. (1.14) αποτελεί την εξίσωση συμβιβαστού μεταξύ τροπών και καμπυλοτήτων. Επιπλέον, η ταυτότητα $\partial_s \kappa_{pq} = \partial_p \partial_s \omega_q = \partial_p \kappa_{sq}$ εκφράζει τις εξισώσεις συμβιβαστού για τις συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο τανυστής κ_{pq} είναι ασύμμετρος και έχει μόνο οκτώ ανεξάρτητες συνιστώσες αφού λόγω της αντισυμμετρίας του συμβόλου εναλλαγής ισχύει $\kappa_{pp} = 0$ (traceless tensor). Όσον αφορά τον τανυστή των τροπών, ισχύουν οι συνήθεις εξισώσεις συμβιβαστού κατά Saint Venant (βλέπε π.χ. Barber, 2010).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η αρμόζουσα μεταβολική έκφραση για την Θεωρία Τάσεων Ζεύγους γράφεται ως:

$$\int_{V} \delta W \left(\varepsilon_{pq}, \partial_{p} \omega_{q} \right) dV = \int_{V} f_{q} \delta u_{q} dV + \int_{V} C_{q} \delta \omega_{q} dV + \int_{S} t_{q}^{(n)} \delta u_{q} dS + \int_{S} M_{q}^{(n)} \delta \omega_{q} dS.$$
(1.15)

Όσον αφορά στις συνοριακές συνθήκες, σε κάθε σημείο μίας λείας συνοριακής επιφάνειας μπορούν να οριστούν τρεις τροποποιημένοι ελκυστές δύναμης και δύο εφαπτομενικοί ελκυστές ροπής (Mindlin and Tiersten, 1962; Koiter, 1964)

$$P_q^{(n)} = \sigma_{pq} n_p - \frac{1}{2} e_{qpr} n_p \partial_r m_{(nm)} \quad \text{sto } bdy, \qquad (1.16)$$

$$R_q^{(n)} = m_{pq} n_q - m_{(nm)} n_q$$
 oto $b dy$, (1.17)

όπου $m_{(nm)} = n_p n_q m_{pq}$ είναι η κάθετη συνιστώσα του αποκλίνοντος τανυστή τάσεων ζεύγους m_{pq} και με bdy συμβολίζεται οποιοδήποτε σύνορο κατά μήκος

ενός τμήματος στο εσωτερικό του υλικού ή κατά μήκος της επιφάνειάς του. Πρέπει να σημειώσουμε πως η ύπαρξη ακμών στη συνοριακή επιφάνεια οδηγεί σε επιπλέον συνοριακές συνθήκες (Koiter, 1964).

Οι τροποποιημένοι ελκυστές δύναμης και ροπής $\left(P_q^{(n)}, R_q^{(n)}\right)$ σχετίζονται με τους ελκυστές $\left(t_q^{(n)}, M_q^{(n)}\right)$ σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$P_{q}^{(n)} = t_{q}^{(n)} - \frac{1}{2} n_{k} e_{kpq} \partial_{p} \left(M_{p}^{(n)} n_{p} \right), \qquad (1.18)$$

$$R_q^{(n)} = M_q^{(n)} - \left(M_p^{(n)} n_p\right) n_q.$$
(1.19)

Από την Εξ. (1.19) προκύπτει ότι $n_p R_q^{(n)} = 0$, συνεπώς ο ελκυστής ροπής $R_q^{(n)}$ είναι εφαπτόμενος σε κάθε σημείο του συνόρου (δηλαδή, έχει μηδενική κάθετη στο σύνορο συνιστώσα).

Με μία πρώτη ματιά, θα ήταν εύλογη η θεώρηση πως οι επιφανειακοί ελκυστές $t_q^{(n)}$ και $M_q^{(n)}$ μπορούν να ορισθούν ανεξάρτητα σε κάθε σημείο της συνοριακής επιφανείας του σώματος βάσει των Εξ. (1.3) και (1.4). Ωστόσο, όπως υπέδειξε ο Koiter (1964), ο αριθμός των έξι συνοριακών συνθηκών (τρεις συνιστώσες για τον ελκυστή δύναμης $t_p^{(n)}$ και τρεις για τον ελκυστή ροπής $M_p^{(n)}$ θα ερχόταν σε αντίθεση με τις πέντε γεωμετρικές συνθήκες που μπορούν να ορισθούν ανεξάρτητα σε ένα σημείο του συνόρου. Πράγματι, επειδή στη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους το διάνυσμα της στροφή
ς $\,\omega_{\!_{q}}\,$ εξαρτάται από το διάνυσμα της μετατόπισης u_q (όπως φαίνεται στην Εξ. (1.12)), η κάθετη συνιστώσα της στροφής προσδιορίζεται πλήρως από την κατανομή των εφαπτομενικών μετατοπίσεων στο σύνορο. Επομένως, μόνο οι τρεις συνιστώσες της μετατόπισης και οι δύο εφαπτομενικές συνιστώσες της στροφής μπορούν να περιγράψουν ανεξάρτητα το σύνορο. Αντίστοιχα, μόνο πέντε επιφανειακοί ελκυστές (οι ενεργειακά συζυγείς των παραπάνω κινηματικών μεγεθών) μπορούν να οριστούν σε ένα σημείο μίας λείας συνοριακής επιφάνειας. Οι ελκυστές αυτοί δίνονται στις Εξ. (1.16) και (1.17). Μία ανάλογη κατάσταση

συναντάται στην Θεωρία Πλακών Kirchhoff, όπου ο αριθμός των συνοριακών συνθηκών σε μία ελεύθερη παρειά της πλάκας μειώνεται από τρείς σε δύο. Αντίθετα, στη Μικροπολική Θεωρία Cosserat όπου η στροφή είναι πλήρως ανεξάρτητη από το διάνυσμα της μετατόπισης, οι συνοριακές συνθήκες είναι έξι (Nowacki, 1972) και μπορούν άμεσα να εξαχθούν από την ισορροπία του τετράεδρου Cauchy (Εξ. (1.3) και (1.4)).

Όσον αφορά τις καταστατικές συνθήκες της Θεωρίας, στην απλούστερη περίπτωση γραμμικής και ισότροπης καταστατικής συμπεριφοράς, η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας λαμβάνει την ακόλουθη τετραγωνική μορφή:

$$W = W(\varepsilon_{pq}, \kappa_{pq}) = (1/2)\lambda\varepsilon_{pp}\varepsilon_{qq} + \mu\varepsilon_{pq}\varepsilon_{pq} + 2\eta\kappa_{pq}\kappa_{pq} + 2\eta'\kappa_{pq}\kappa_{qp}, \quad (1.20)$$

η οποία περιλαμβάνει τέσσερις διαφορετικές υλικές σταθερές, τις συνήθεις σταθερές Lamé (λ, μ) με διαστάσεις $[\delta i \nu \alpha \mu \eta] [\mu \eta \kappa \sigma \varsigma]^{-2}$ και δύο μικροδομικές σταθερές (η, η') που εισάγονται από τη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους και έχουν διαστάσεις δύναμης.

Γραμμικές και ισότροπες καταστατικές σχέσεις προκύπτουν από την Εξ. (1.20) μέσω των ακόλουθων μεταβολικών εκφράσεων:

$$\tau_{pq} \equiv \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{pq}} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{pq}, \qquad (1.21)$$

$$m_{pq} \equiv \frac{\partial W}{\partial \kappa_{pq}} = 4\eta \kappa_{pq} + 4\eta' \kappa_{qp}.$$
(1.22)

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις καταστατικές σχέσεις Εξ. (1.21) και (1.22) στην εξίσωση ισορροπίας Εξ. (1.11) και χρησιμοποιώντας τις γεωμετρικές σχέσεις Εξ. (1.12) και (1.13) καταλήγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας ως προς τις μετατοπίσεις (απουσία καθολικών δυνάμεων και ροπών) (Muki and Sternberg, 1965):

$$\nabla^{2} u_{q} - \ell^{2} \nabla^{4} u_{q} + \partial_{q} \left[\frac{1}{1 - 2\nu} u_{p,p} + \ell^{2} \nabla^{2} \left(u_{p,p} \right) \right] = 0, \qquad (1.23)$$

όπου $v = \lambda/2(\lambda + \mu)$ είναι ο λόγος Poisson, $\ell \equiv (\eta/\mu)^{1/2}$ το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού, ∇^2 είναι ο τελεστής Laplace και $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ είναι ο διαρμονικός τελεστής. Οι παραπάνω εξισώσεις εκφυλίζονται στις Navier-Cauchy της Κλασσικής Ελαστικότητας όταν $\ell \rightarrow 0$.

Εφαρμόζοντας τον τελεστή βαθμίδας $\nabla(\) \equiv \partial_p(\)$ στην Εξ. (1.23) καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) \equiv u_{q,qpp} = 0.$$
(1.24)

Παρατηρούμε ότι η συστολή/διαστολή (dilatation) $\varepsilon_{qq} = u_{q,q}$, υπακούει στην ίδια εξίσωση με την Κλασσική Ελαστικότητα (Koiter, 1964).

Επιπλέον, τα ακόλουθα σημεία πρέπει να επισημανθούν: (i) Εφόσον ισχύει η σχέση $\kappa_{pp} = 0$, θα ισχύει και η σχέση $m_{pp} = 0$, συνεπώς ο τανυστής m_{pq} έχει μόνο οκτώ ανεξάρτητες συνιστώσες. (ii) Το σφαιρικό τμήμα $(1/3)\mu_{kk}$ του τανυστή τάσεων ζεύγους μ_{pq} δεν εμφανίζεται ούτε στην τελική εξίσωση κίνησης ούτε στις καταστατικές εξισώσεις και επομένως η ποσότητα αυτή παραμένει απροσδιόριστη (indeterminate) στην Θεωρία Τάσεων Ζεύγους. Αυτό σημαίνει πως το πεδίο μ_{pq} είναι μοναδικό, εκτός από ένα πρόσθετο αυθαίρετο (σταθερό) και ισότροπο πεδίο τάσεων ζεύγους. (iii) Οι ακόλουθοι περιορισμοί μεταξύ των σταθερών του υλικού πρέπει να ισχύουν ώστε η παραμορφωσιακή ενέργεια να είναι θετικά ορισμένη και να υπάρχει μοναδικότητα της λύσεως (Mindlin and Tiersten, 1962):

$$3\lambda + 2\mu > 0, \qquad \mu > 0, \qquad \eta > 0, \qquad -1 < \frac{\eta'}{\eta} < 1.$$
 (1.25)

Οι σταθερές του υλικού *l*, *η* και *η*' εξαρτώνται από την μικροδομή και μπορούν να προσδιοριστούν πειραματικά. Ο Lakes (1986) πραγματοποίησε πειράματα κάμψης και στρέψης σε πορώδη υλικά και προσδιόρισε, μεταξύ

άλλων, τα χαρακτηριστικά μήκη σε κάμψη ℓ_b και σε στρέψη ℓ_t . Αυτά τα μεγέθη συνδέονται με τις σταθερές της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους μέσω των σχέσεων (Radi, 2008):

$$\ell_b = \frac{\ell}{\sqrt{2}}, \qquad \ell_t = \ell \sqrt{1 + \frac{\eta'}{\eta}}. \tag{1.26}$$

Από τα πειραματικά δεδομένα του Lakes (1986) προκύπτουν οι τιμές $\ell_b = 0.032mm$ και $\ell_t = 0.065mm$ για έναν κυψελοειδή αφρό που αποτελείται από κοίλες μικροφυσαλίδες γυαλιού ενσωματωμένες σε μία εποξειδική μήτρα και οι τιμές $\ell_b = 0.327mm$ και $\ell_t = 0.620mm$ για έναν υψηλής ποιότητας άκαμπτο αφρό πολυουρεθάνης. Αυτά τα δεδομένα δίνουν με βάση την Εξ. (1.26) τις τιμές $\ell = 0.045mm$ και $\beta = \eta' / \eta = 1$ για το πρώτο υλικό και $\ell = 0.462mm$ και σρό που αποτελείται από το δεύτερο. Η μεταβολή των χαρακτηριστικών μηκών κάμψης και στρέψης απεικονίζεται στο **Σχήμα 3.** Στην οριακή τιμή $\beta = -1$ παρατηρείται εξάλειψη του χαρακτηριστικού μήκους σε στρέψη ενώ για $\beta = -0.5$ ισχύει η σχέση $\ell_t = \ell_b$ και για $\beta = 0$ η σχέση $\ell_t = \ell = \sqrt{2}\ell_b$.



Σχήμα 3: Μεταβολή των χαρακτηριστικών μηκών σε κάμψη ℓ_b και σε στέψη ℓ_t με τον λόγο β .

Η παράμετρος η μπορεί να εκτιμηθεί μέσω μελετών στον τομέα της διάδοσης κυμάτων (Georgiadis and Velgaki, 2003). Στην εργασία αυτή θεωρήθηκε ότι το υλικό αποτελείται από μοναδιαίες κυψέλες κυβικού σχήματος με ακμή 2h. Συγκρίνοντας τις μορφές των καμπυλών διασποράς των κυμάτων Rayleigh με εκείνες που προκύπτουν από την ανάλυση κρυσταλλικού πλέγματος των Gazis et al. (1960), μπορεί να εκτιμηθεί ότι ο συντελεστής τάσεων ζεύγους η (couple-stress modulus) είναι της τάξεως των $0.1\mu h^2$. Περαιτέρω απόπειρες προσδιορισμού των σταθερών του υλικού που χρησιμοποιούνται στην Θεωρία Τάσεων Ζεύγους μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Hu et al. (1999), Bigoni and Drugan (2007), και Beveridge et al. (2013).

2.2 Θεωρία Τάσεων Ζεύγους στην Επίπεδη Παραμόρφωση

Στην ενότητα αυτή εξάγονται οι βασικές εξισώσεις της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης και οι εξισώσεις διατυπώνονται σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Θεωρούμε ένα σώμα που καταλαμβάνει περιοχή στο (x, y)-επίπεδο και βρίσκεται υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (**Σχήμα 4**). Παρουσιάζονται οι ορθογώνιες συνιστώσες των ασύμμετρων τάσεων $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy})$ και των τάσεων ζεύγους (m_{xz}, m_{yz}) , οι οποίες δρουν επί των επιφανειών ενός ορθογωνικού στοιχείου μοναδιαίου πάχους. Το δι-διάστατο πεδίο μετατοπίσεων που δημιουργείται είναι το ακόλουθο:

$$u_x \equiv u_x(x, y) \neq 0, \qquad u_y \equiv u_y(x, y) \neq 0, \qquad u_z \equiv 0,$$
 (1.27)

με τον άξονα z να είναι κάθετος στο επίπεδο (x, y).

Σχετικά με την κινητική περιγραφή του ελαστικού σώματος, ισχύουν οι κατωτέρω εκφράσεις για τις συνιστώσες του τανυστή της τροπής:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$
 (1.28)

Αντίστοιχα, για το διάνυσμα της στροφής και τις συνιστώσες του τανυστή της καμπυλότητας έχουμε:

$$\omega_z = \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \tag{1.29}$$

$$\kappa_{xz} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad \kappa_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$
(1.30)

Σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, ο συμμετρικός τανυστής των τάσεων τ_{pq} έχει τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες εντός του επιπέδου (x, y), που γράφονται συναρτήσει του πεδίου μετατοπίσεων σύμφωνα με τις Εξ. (1.21), (1.29) και (1.30):

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad (1.31)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \tag{1.32}$$

$$\tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$
 (1.33)



Σχήμα 4: Οι συνιστώσες των τάσεων και των τάσεων ζεύγους σε καρτεσιανές συντεταγμένες για ένα στοιχειώδες σωματίδιο σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης.

Ο τανυστής τάσεων ζεύγους m_{pq} έχει δύο ανεξάρτητες συνιστώσες εντός του επιπέδου (x, y), που γράφονται συναρτήσει των μετατοπίσεων σύμφωνα με τις Εξ. (1.22), (1.29) και (1.30) ως:

$$m_{xz} = 2\mu\ell^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}\right),$$
 (1.34)

$$m_{yz} = 2\mu\ell^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right).$$
(1.35)

Θεωρώντας μηδενικές καθολικές δυνάμεις και ροπές, το αντισυμμετρικό τμήμα των τάσεων γράφεται σύμφωνα με την Εξ. (1.10):

$$\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = 0, \tag{1.36}$$

$$\alpha_{xy} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yz}}{\partial y} \right) = -2\mu\ell^2 \nabla^2 \omega, \qquad \alpha_{yx} = -\alpha_{xy}.$$
(1.37)

όπου $\nabla^2 \equiv \partial_x^2 () + \partial_y^2 ()$ είναι ο δι-διάστατος τελεστής Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες και $\partial_x () \equiv \partial () / \partial x$, $\partial_y () \equiv \partial () / \partial y$.

Οι συνιστώσες του ασύμμε
τρου τανυστή τάσεων $\sigma_{\rm pq}$ γράφονται ως:

$$\sigma_{xx} = \tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad (1.38)$$

$$\sigma_{yy} = \tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad (1.39)$$

$$\sigma_{yx} = \tau_{yx} + a_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \mu \ell^2 \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3} \right), \quad (1.40)$$

$$\sigma_{xy} = \tau_{xy} + a_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \mu \ell^2 \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3} \right).$$
(1.41)

Η έκφραση για την πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας Εξ. (1.20) λαμβάνει τη μορφή:

$$W = (\lambda/2) \left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \right)^{2} + \mu \left(\varepsilon_{xx}^{2} + 2\varepsilon_{xy}^{2} + \varepsilon_{yy}^{2} \right) + 2\mu \ell^{2} (\kappa_{xz}^{2} + \kappa_{yz}^{2})$$

$$= \frac{1}{2\mu} \left\{ \tau_{xy}^{2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\tau_{xx}^{2} + \tau_{yy}^{2} - 2\nu \tau_{xx} \tau_{yy} - \nu^{2} \left(\tau_{xx} + \tau_{yy} \right)^{2} \right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{8\mu\ell^{2}} \left(m_{xz}^{2} + m_{yz}^{2} \right).$$
(1.42)

Επιπλέον συνδυάζοντας τις Εξ. (1.36), (1.37) και (1.42) με τις Εξ. (1.7) και (1.8), αποκτούμε το ακόλουθο σύστημα συζευγμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων ως προς τις συνιστώσες του δι-διάστατου πεδίου μετατοπίσεων (u_x, u_y) :

$$\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left[2(1-\nu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right] + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \ell^2\left(\frac{\partial^4 u_y}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 u_x}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_y}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 u_x}{\partial y^4}\right) = 0,$$
(1.43)

$$\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left[2(1-\nu)\frac{\partial u_{y}}{\partial y}+\frac{\partial u_{x}}{\partial x}\right]+\frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial x^{2}}+\ell^{2}\left(\frac{\partial^{4} u_{x}}{\partial x^{3} \partial y}-\frac{\partial^{4} u_{y}}{\partial x^{2} \partial y^{2}}+\frac{\partial^{4} u_{x}}{\partial x \partial y^{3}}-\frac{\partial^{4} u_{y}}{\partial x^{4}}\right)=0.$$
(1.44)

Στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης, η πλήρης λύση των Εξ. (1.7) και (1.8) επιδέχεται αναπαράσταση μέσω τασικών συναρτήσεων της μορφής (Mindlin, 1963):

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}, \qquad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \qquad (1.45)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \qquad (1.46)$$

και

$$m_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad m_{yz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$
 (1.47)

όπου $\Phi \equiv \Phi(x, y)$ και $\Psi \equiv \Psi(x, y)$ είναι δύο αυθαίρετες αλλά επαρκώς ομαλές τασικές συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές συνδέονται μέσω του ακόλουθου συζευγμένου συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi \right) = -2 \left(1 - \nu \right) \ell^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \tag{1.48}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi \right) = 2 \left(1 - \nu \right) \ell^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right).$$
(1.49)

Έπειτα από αποσύζευξη του παραπάνω συστήματος οδηγούμαστε στις παρακάτω εξισώσεις πεδίου για τις τασικές συναρτήσεις του Mindlin:

$$\nabla^4 \Phi = 0, \qquad \nabla^2 \Psi - \ell^2 \nabla^4 \Psi = 0 \tag{1.50}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι όταν οι ποσότητες ℓ , $\partial \Psi / \partial x$ και $\partial \Psi / \partial y$ τείνουν στο μηδέν, η παραπάνω αναπαράσταση ανάγεται στην κλασσική αναπαράσταση του Airy.

Κεφάλαιο 3

3. Το πρόβλημα συγκεντρωμένων φορτίσεων στην επιφάνεια ημιχώρου στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους

3.1 Εισαγωγή

Σε ένα δι-διάστατο ημι-άπειρο χωρίο το πρόβλημα καθορισμού των τάσεων και μετατοπίσεων λόγω της ύπαρξης συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια αυτού, οδηγούν στο γνωστό πρόβλημα Flamant-Boussinesq. Η λύση του για την Κλασική Ελαστικότητα έχει παρουσιαστεί, μεταξύ άλλων από τους Love (1952), Fung (1965), Timoshenko and Goodier (1970) και λαμβάνει σημαντικές εφαρμογές, κυρίως στη μηχανική των επαφών και της τριβολογίας, δεδομένου ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως δομικό στοιχείο για τη διαμόρφωση πολύπλοκων προβλημάτων επαφής (π.χ., Johnson (1985), Hills and Nowell (1994) και Barber (2010).

Στο πλαίσιο των Γενικευμένων Θεωριών Συνεχούς Μέσου, προβλήματα συγκεντρωμένων φορτίων, έχουν μελετηθεί εκτενώς και δίνονται λύσεις οι οποίες διαφέρουν σημαντικά από τις αντίστοιχες της Κλασικής Ελαστικότητας. Μια εκτενής ανάλυση αυτών των λύσεων μπορεί να βρεθεί στην αντίστοιχη εργασία των Georgiadis and Anagnostou (2008).

Όσον αφορά στη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους, οι Muki and Sternberg (1965) ήταν οι πρώτοι οι οποίοι παρουσίασαν τα ασυμπτοτικά πεδία τάσεων στο πρόβλημα Flamant-Boussinesq.

Εδώ παρουσιάζονται οι πλήρεις λύσεις των παραμορφωσιακών πεδίων για το πρόβλημα συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια ημι-άπειρου χωρίου ενώ αναφορά γίνεται και στο αντίστοιχο πρόβλημα της Κλασσικής Ελαστικότητας προκειμένου να εντοπισθούν οι σημαντικότερες διαφορές. Η επίλυση του προβλήματος αυτού, παρουσιάζει ενδιαφέρον στη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους ως προς τα πεδία μετατοπίσεων (Gourgiotis and Zisis (2016)) ενώ αποτελεί, ως λύση, την εισαγωγή για την επίλυση του πιο σύνθετου

προβλήματος, της φόρτισης επιστρώσεως από συγκεντρωμένο φορτίο, που πρόκειται να ακολουθήσει.

3.2 Ορισμός του Προβλήματος

Θεωρούμε ημίχωρο $(-\infty < x < \infty$ και y > 0) υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης στου οποίου την επιφάνεια ασκείται κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο μέτρου *P* όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5**. Στο σημείο εφαρμογής του φορτίου τοποθετείται και η αρχή (x = y = 0) του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς. Οι διαστάσεις του συγκεντρωμένου φορτίου στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης είναι [force][length]⁻¹.



Σχήμα 5: Σχηματική απεικόνιση του ημιχώρου υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου *P*. Ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έχει επιλεγεί με αρχή το σημείο επιβολής του φορτίου. Τα μικροδομικά χαρακτηριστικά του υλικού περιλαμβάνονται στην καταστατική περιγραφή του και η συμπεριφορά αυτού περιγράφεται σύμφωνα με τη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους. Όταν το $\ell \rightarrow 0$, τα μικροδομικά χαρακτηριστικά του υλικού του ημιχώρου αγνοούνται και η συμπεριφορά αυτού περιγράφεται διαμέσου της Κλασσικής Θεωρίας Ελαστικότητας.

Ακολούθως, για το συγκεκριμένο πρόβλημα οι συνοριακές συνθήκες κατά μήκος της επιφάνειας *y* = 0 γράφονται:

$$\sigma_{yy}(x,0) = -P\delta(x) \quad \forall \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1.51}$$

$$\sigma_{yx}(x,0) = 0 \qquad \forall \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1.52}$$

$$m_{yz}(x,0) = 0 \quad \forall \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.53}$$

όπου δ () είναι η Dirac δέλτα κατανομή.

Σε αυτό το σημείο σημειώνεται ότι η διαδικασία επίλυσης για την αντίστοιχη περίπτωση της φόρτισης της επιφάνειας του ημιχώρου με εφαπτόμενικό σε αυτή φορτίο είναι απολύτως ανάλογη με τη διαδικασία επίλυσης που θα ακολουθεί.

3.3 Χρήση μετασχηματισμών Fourier

Το πρόβλημα που θα αναλύσουμε αντιμετωπίζεται με χρήση των μετασχηματισμών Fourier και διατυπώνεται με τη βοήθεια των τασικών συναρτήσεων όπως παρουσιάσθηκαν στη σελ. (29). Ο μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφός του ορίζονται:

$$\hat{f}\left(\xi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) e^{i\xi x} dx, \qquad (1.54)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \qquad (1.55)$$

Ο μετασχηματισμός των Εξ. (1.50) μέσω της Εξ. (1.54) οδηγούν στο σύστημα των ακολούθων συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{d^4\hat{\Phi}}{\partial y^4} - 2\xi^2 \frac{d^2\hat{\Phi}}{\partial y^2} + \xi^4\hat{\Phi} = 0, \qquad (1.56)$$

$$\ell^{2} \frac{d^{4} \hat{\Psi}}{\partial y^{4}} - \left(1 + 2\ell^{2} \xi^{2}\right) \frac{d^{2} \hat{\Psi}}{\partial y^{2}} + \xi^{2} \left(1 + \ell^{2} \xi^{2}\right) \hat{\Psi} = 0.$$
 (1.57)

Αντίστοιχα, οι μετασχηματισμένες τάσεις και τα μετασχηματισμένα ζεύγη τάσεων γράφονται:

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} + i\xi \frac{d\hat{\Psi}}{dy}, \quad \hat{\sigma}_{yy} = -\xi^2 \hat{\Phi} - i\xi \frac{d\hat{\Psi}}{dy},$$

$$\hat{\sigma}_{yx} = i\xi \frac{d\hat{\Phi}}{dy} - \xi^2 \hat{\Psi}, \quad \hat{\sigma}_{xy} = i\xi \frac{d\hat{\Phi}}{dy} - \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2},$$

$$\hat{m}_{xz} = -i\xi \hat{\Psi}, \quad \hat{m}_{yz} = \frac{d\hat{\Psi}}{dy},$$
(1.59)

ενώ οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις γράφονται:

$$\hat{u}_{x} = \frac{1}{2\mu\xi} \left(i(1-\nu)\frac{d^{2}\hat{\Phi}}{dy^{2}} - \xi\frac{d\hat{\Psi}}{dy} + i\nu\xi^{2}\hat{\Phi} \right),$$

$$\hat{u}_{y} = \frac{1}{2\mu\xi^{2}} \left((1-\nu)\frac{d^{3}\hat{\Phi}}{dy^{3}} - (2-\nu)\xi^{2}\frac{d\hat{\Phi}}{dy} - i\xi^{3}\hat{\Psi} \right).$$
(1.60)

Οι Εξ. (1.56) και (1.57) έχουν τις ακόλουθες γενικές λύσεις:

$$\hat{\Phi}(\xi, y) = \left[C_1(\xi) + yC_2(\xi)\right] e^{-|\xi|y|} + \left[B_1(\xi) + yB_2(\xi)\right] e^{|\xi|y|}, \quad (1.61)$$

$$\hat{\Psi}(\xi, y) = C_3(\xi)e^{-|\xi|y} + C_4(\xi)e^{-\gamma y} + B_3(\xi)e^{\xi y} + B_4(\xi)e^{\gamma y}, \qquad (1.62)$$

όπου στην περίπτωση του ημιχώρου, οι Εξ. (1.61) και (1.62) λαμβάνουν την ακόλουθη φραγμένη μορφή καθώς το $y \rightarrow \infty$:

$$\hat{\Phi}(\xi, y) = \left[C_1(\xi) + yC_2(\xi)\right] e^{-|\xi|y}, \qquad (1.63)$$

$$\hat{\Psi}(\xi, y) = C_3(\xi) e^{-|\xi|_y} + C_4(\xi) e^{-\gamma y}, \qquad (1.64)$$

όπου $\gamma \equiv \gamma(\xi) = (1/\ell^2 + \xi^2)^{1/2}.$

Οι άγνωστες συναρτήσεις $C_i(\xi)$ (i=1,..., 4) θα υπολογιστούν βάσει των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών και των εξισώσεων συμβιβαστού της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους, Εξ. (1.48) και (1.49), δια μέσου της σχέσης:

$$C_{3}(\xi) = -4i\ell^{2}(1-\nu)\xi C_{2}(\xi).$$
(1.65)

Έτσι στην προκειμένη περίπτωση οι συναρτήσεις $C_i(\xi)$ (i=1,..., 4) δίνονται ως:

$$C_1 = \frac{P}{\xi^2},$$

$$C_2 = \frac{P\gamma}{\sqrt{\xi^2}R(\xi)},$$

$$C_{3} = -\frac{4i\ell^{2}P(1-\nu)\sqrt{\xi^{2}}\gamma}{\xi R(\xi)},$$
(1.66)

$$C_4 = \frac{4i\ell^2 P(1-\nu)\xi}{R(\xi)},$$

όπου $R(\xi) = \left(\gamma - 4\ell^2 (1 - \nu) \left((\xi^2)^{3/2} - \xi^2 \gamma \right) \right).$

Ακολούθως, με αντικατάσταση των συναρτήσεων $C_i(\xi)$ (*i*=1,..., 4) στις Εξ. (1.60) και κάνοντας χρήση της πληροφορίας ότι η $\hat{u}_x(x, \xi)$ και $\hat{u}_y(x, \xi)$ είναι περιττές και άρτιες συναρτήσεις του ξ αντιστοίχως:

$$\hat{u}_{x}(-\xi) = -\hat{u}_{x}(\xi),$$

$$\hat{u}_{y}(-\xi) = \hat{u}_{y}(\xi),$$
(1.67)

και δεδομένου ότι από τη Θεωρία Ολοκληρωτικών Μετασχηματισμών (Bracewell, 1965) προκύπτει ότι οι ίδιες ιδιότητες θα ισχύουν και στο «φυσικό» πεδίο, οι συνιστώσες του διανύσματος της μετατόπισης γράφονται ως:

$$u_{x}(x,y) = -\frac{i}{\pi} \int_{0}^{\infty} \hat{u}_{x}(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi,$$

$$u_{y}(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \hat{u}_{y}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi,$$
(1.68)

όπου

$$\hat{u}_{x}(\xi, y) = \frac{iP}{2\mu\xi\Delta} \Big[4\ell^{2} (1-\nu)\xi^{2}\gamma e^{-\gamma y} + (\gamma(y\xi-1+2\nu)-4\ell^{2} (1-\nu)\xi^{3})e^{-\xi y} \Big],$$
(1.69)

και

$$\hat{u}_{y}(\xi, y) = \frac{iP}{2\mu\xi\Delta} \Big[4\ell^{2} (1-\nu)\xi^{3}\gamma e^{-\gamma y} + (\gamma(y\xi+2(1-\nu)) - 4\ell^{2} (1-\nu)\xi^{3})e^{-\xi y} \Big],$$
(1.70)

όπου $\Delta \equiv \Delta(\xi) = \gamma - 4(1-\nu)\ell^2 \xi^2 (\xi - \gamma).$

Η οριζόντια μετατόπιση $u_x(x, y)$ μπορεί να υπολογισθεί απευθείας αριθμητικά εξαιτίας του γεγονότος ότι η συνάρτηση $\hat{u}_x(\xi, y)$ είναι φραγμένη καθώς το $\xi \to 0$ - παρόλα αυτά δίνεται ως άθροιση της λύσης της Κλασσικής Ελαστικότητας και της αντίστοιχης λύσης της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους για πληρότητα, Εξ. (1.71). Αντίθετα, η αντιστροφή της $\hat{u}_y(\xi, y)$ απαιτεί ειδικό χειρισμό δεδομένου ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση στη δεύτερη σχέση της Εξ. (1.68) συμπεριφέρεται ως $\hat{u}_y(\xi, y) = O(\xi^{-1})$ καθώς $\xi \to 0$ και για αυτό το λόγο ο χειρισμός της πρέπει να γίνει υπό την έννοια του πεπερασμένου μέρους (finite part).

Ακολούθως, με εφαρμογή της Εξ. (1.68) γράφουμε και τις δύο μετατοπίσεις $u_x(\xi, y)$ και $u_y(\xi, y)$ συναρτήσει των αντιστοίχων λύσεων της Κλασσικής Ελαστικότητας ως:

$$u_x(x, y) = I_x + I_x^{class}, \qquad (1.71)$$

$$u_{y}(x, y) = I_{y} + I_{y}^{class}, \qquad (1.72)$$

όπου στην επιφάνεια του ημιχώρου (y = 0),

$$I_{x} = -\frac{P}{\mu\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\ell^{2} (1-\nu)^{2} (\gamma-\xi)\xi}{(4\ell^{2} (1-\nu)\xi^{3} - \gamma(1+4\ell^{2} (1-\nu)\xi^{2}))} \sin(\xi x) d\xi,$$

$$I_{x}^{class} = \frac{-P(1-2\nu)}{4\mu} \operatorname{sign}(x),$$
(1.73)

$$I_{y} = \frac{1}{\mu \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\ell^{2} P(1-\nu)^{2} (\gamma - \xi) \xi}{\left(4\ell^{2} (1-\nu) \xi^{3} - \gamma (1+4\ell^{2} (1-\nu) \xi^{2})\right)} \cos(\xi x) d\xi,$$

$$I_{y}^{class} = \frac{-P(1-\nu) \log|x|}{\pi \mu}.$$
(1.74)

Τα ολοκληρώματ
α $I_{\scriptscriptstyle x}$ και $I_{\scriptscriptstyle y}$ μπορούν να υπολογισθούν αριθμητικά.

Ακολούθως, εξετάζεται η ασυμπτωτική λύση των εφαπτομενικών και ορθών μετατοπίσεων στο πλαίσιο της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους κοντά στο σημείο εφαρμογής του φορτίου. Αυτό πραγματοποιείται με εφαρμογή Θεωρημάτων τύπου Abel-Tauber (Roos, 1969) και διερεύνηση της συμπεριφοράς των μετασχηματισμένων λύσεων καθώς το $\xi \rightarrow \infty$.

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι:

$$u_{x}^{asympt}(x,y) = \frac{P}{2\mu\pi(3-2\nu)} \left[-(1-2\nu)\frac{xy}{r^{2}} + \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \right], \quad (1.75)$$

$$u_{y}^{asympt}(x,y) = -\frac{P}{2\pi\mu(3-2\nu)} \left[(1-2\nu)\frac{y^{2}}{r^{2}} + 2(1-\nu)\log(r) \right], \quad (1.76)$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Επιπλέον, αντίστοιχες πλήρεις λύσεις όσον αφορά στις συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης στα πλαίσια της Κλασσικής Ελαστικότητας δίνονται ως (Barber, 2010):

$$u_{x}^{class}(x,y) = \frac{P}{2\pi\mu} \left[\frac{xy}{r^{2}} - (1 - 2\nu) \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) \right], \qquad (1.77)$$

$$u_{y}^{class}(x, y) = \frac{P}{2\pi\mu} \left[\frac{y^{2}}{r^{2}} - 2(1 - \nu) \log(r) \right].$$
(1.78)

Τέλος οι συνιστώσες του τανυστή των τροπών, μπορούν άμεσα να υπολογισθούν από τις Εξ. (1.71) και (1.72) διαμέσου κατάλληλων παραγωγίσεων.

3.4 Αποτελέσματα

Αποτελέσματα, ως προς τη συμπεριφορά επιφανείας (y=0) ημιχώρου υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της Κλασσικής Θεωρίας Ελαστικότητας (C.E.) αλλά και της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους (C.S.E.) παρουσιάζονται στο **Σχήμα 6**.

Η γενικότερη αδιαστατοποίηση του προβλήματος, επιτάσσει οι αποστάσεις να αδιαστατοποιηθούν με το εσωτερικό μήκος (x/ℓ) , οι μετατοπίσεις με το μέτρο διάτμησης και το εφαρμοζόμενο φορτίο $(\mu u_x/P, \mu u_y/P)$ ενώ η στροφή με το μέτρο διάτμησης, το εφαρμοζόμενο φορτίο και το εσωτερικό μήκος $(\mu \ell \omega_z/P)$. Για την περίπτωση που γίνεται αναφορά στις μετατοπίσεις και στην στροφή στην επιφάνεια του ημιχώρου μία άλλη αδιαστατοποίηση της μορφής: $4\mu u_x/P(1-2v)$, $2\pi\mu u_y/P(1-v)$ και $\pi\mu\ell\omega_zP(1-v)$ μπορεί να πραγματοποιηθεί.

Παρατηρείται, ότι οι μετατοπίσεις $u_x(x,0)$ παρουσιάζουν της ίδιας μορφής ασυνέχεια ενώ οι $u_y(x,0)$ παρουσιάζουν την ίδια ασυμπτωτική

συμπεριφορά στην Κλασσική Ελαστικότητα και στη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους ενώ και οι δύο μετατοπίσεις διαφέρουν ως προς τις λεπτομέρειες της ευρύτερης δομής τους.

Αξίζει να σημειωθεί ότι όσον αφορά τις μετατοπίσεις, αυτές διατηρούν την ιδιομορφία τους στη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους όπως και στην Κλασσική Ελαστικότητα, ενώ αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η στροφή η οποία φράσσεται. Υπενθυμίζεται ότι στην Κλασσική Ελαστικότητα η στροφή είναι ιδιόμορφη ως $\omega_z(r) = O(r^{-1})$ καθώς $r \rightarrow 0$ - Σχήμα 6 (c). Για την συγκεκριμένη αδιαστατοποίηση τα αποτελέσματα της Κλασσικής Ελαστικότητας, όσον αφορά στην επιφάνεια του ημιχώρου, δεν εξαρτώνται από το λόγο Poisson ενώ τα αποτελέσματα της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους παρουσιάζουν σημαντική εξάρτηση από αυτόν.



Σχήμα 6: Συμπεριφορά επιφανείας (y=0) ημιχώρου υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της Κλασσικής Θεωρίας Ελαστικότητας (С.Ε.) αλλά και της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους (С.S.Ε.). Παρουσιάζονται το αδιάστατο πεδίο μετατοπίσεων (a) $4\mu u_x/P(1-2\nu)$, (b) $2\pi\mu u_y/P(1-\nu)$ και (c) η αδιάστατη στροφή $\pi\mu\ell\omega_z/P(1-\nu)$ συναρτήσει της απόστασης x/ℓ από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P.

Κεφάλαιο 4

4. Το πρόβλημα συγκεντρωμένων φορτίσεων στην επιφάνεια επικάλυψης στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους

4.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε επικάλυψη πάχους $h(-\infty < x < \infty$ και 0 < y < h) υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης στης οποίας την επιφάνεια ασκείται κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο μέτρου P όπως φαίνεται στο **Σχήμα 7**. Στο σημείο εφαρμογής του φορτίου τοποθετείται και η αρχή (x = y = 0) του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς. Οι διαστάσεις του συγκεντρωμένου φορτίου στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης είναι [force][length]⁻¹.



Σχήμα 7: Σχηματική απεικόνιση επικάλυψης η οποίο έχει εναποτεθεί σε απαραμόρφωτο υπόστρωμα ημι-άπειρων διαστάσεων. Η επικάλυψη φορτίζεται στην επιφάνεια της με κάθετο συγκεντρωμένο φορτίο P. Ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έχει επιλεγεί με αρχή το σημείο επιβολής του φορτίου. Τα μικροδομικά χαρακτηριστικά του υλικού του υμενίου περιλαμβάνονται στην καταστατική περιγραφή του υλικού και η συμπεριφορά αυτού περιγράφεται σύμφωνα με τη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους.

Ακολούθως, για το συγκεκριμένο πρόβλημα οι συνοριακές συνθήκες κατά μήκος της επιφάνειας *y* = 0 γράφονται:

$$\sigma_{yy}(x,0) = -P\delta(x) \quad \forall \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.79}$$

$$\sigma_{yx}(x,0) = 0 \quad \forall \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1.80}$$

$$m_{yz}(x,0) = 0 \quad \forall \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.81}$$

όπου $\delta()$ είναι η Dirac δέλτα κατανομή.

Όσον αφορά στις συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια μεταξύ επικάλυψης και απαραμόρφωτου ημιχώρου *y* = *h* μπορούμε να θεωρήσουμε δύο διαφορετικά σύνολα συνοριακών συνθηκών όπως φαίνεται παρακάτω.

Το πρώτο αφορά στον περιορισμό των μετατοπίσεων και των στροφών ω_z στη διεπιφάνεια:

$$u_{x}(x,h) = 0 \quad \forall \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1.82}$$

$$u_{y}(x,h) = 0 \quad \forall \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1.83}$$

$$\omega_{z}(x,h) = 0 \quad \forall \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1.84}$$

ενώ το δεύτερο αφορά στον περιορισμό των μετατοπίσεων και των τάσεων ζεύγους m_{yz} στη διεπιφάνεια.

$$u_{x}(x,h) = 0 \quad \forall \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1.85}$$

$$u_{y}(x,h) = 0 \quad \forall \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1.86}$$

$$m_{yz}(x,h) = 0 \quad \forall \qquad -\infty < x < \infty.$$
(1.87)

Παρότι και τα δύο σύνολα συνοριακών συνθηκών είναι έγκυρα, το πρώτο αποτελεί μια υπερδεσμευμένη (overconstrained) εκδοχή, ενώ το δεύτερο σύνολο συνοριακών συνθηκών επιτρέπει πιο άμεση σύγκριση με το αντίστοιχο πρόβλημα στα πλαίσια της Κλασσικής Θεωρίας Ελαστικότητας.

Σημειώνεται ότι η διαδικασία επίλυσης για την αντίστοιχη περίπτωση της φόρτισης της επιφάνειας του ημιχώρου με εφαπτόμενικό σε αυτή φορτίο είναι απολύτως ανάλογη με τη διαδικασία που ακολουθεί.

4.2 Χρήση μετασχηματισμών Fourier

Το πρόβλημα που θα αναλύσουμε αντιμετωπίζεται με χρήση των μετασχηματισμών Fourier και διατυπώνεται με τη βοήθεια των τασικών συναρτήσεων όπως παρουσιάσθηκαν στη σελ. (29). Ο μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφός του ορίζονται:

$$\hat{f}\left(\xi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) e^{i\xi x} dx, \qquad (1.88)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \qquad (1.89)$$

όπου $i \equiv (-1)^{-1/2}$.

Ο μετασχηματισμός των Εξ. (1.50) μέσω της Εξ. (1.88) οδηγούν στο σύστημα των ακολούθων συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{d^4\hat{\Phi}}{\partial y^4} - 2\xi^2 \frac{d^2\hat{\Phi}}{\partial y^2} + \xi^4\hat{\Phi} = 0, \qquad (1.90)$$

$$\ell^{2} \frac{d^{4} \hat{\Psi}}{\partial y^{4}} - \left(1 + 2\ell^{2} \xi^{2}\right) \frac{d^{2} \hat{\Psi}}{\partial y^{2}} + \xi^{2} \left(1 + \ell^{2} \xi^{2}\right) \hat{\Psi} = 0.$$
 (1.91)

Αντίστοιχα, οι μετασχηματισμένες τάσεις και τα μετασχηματισμένα ζεύγη τάσεων γράφονται:

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} + i\xi \frac{d\hat{\Psi}}{dy}, \quad \hat{\sigma}_{yy} = -\xi^2 \hat{\Phi} - i\xi \frac{d\hat{\Psi}}{dy},$$

$$\hat{\sigma}_{yx} = i\xi \frac{d\hat{\Phi}}{dy} - \xi^2 \hat{\Psi}, \quad \hat{\sigma}_{xy} = i\xi \frac{d\hat{\Phi}}{dy} - \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2},$$

$$\hat{m}_{xz} = -i\xi \hat{\Psi}, \quad \hat{m}_{yz} = \frac{d\hat{\Psi}}{dy},$$
(1.92)
(1.93)

ενώ οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις γράφονται:

$$\hat{u}_{x} = \frac{1}{2\mu\xi} \left(i(1-\nu)\frac{d^{2}\hat{\Phi}}{dy^{2}} - \xi\frac{d\hat{\Psi}}{dy} + i\nu\xi^{2}\hat{\Phi} \right),$$

$$\hat{u}_{y} = \frac{1}{2\mu\xi^{2}} \left((1-\nu)\frac{d^{3}\hat{\Phi}}{dy^{3}} - (2-\nu)\xi^{2}\frac{d\hat{\Phi}}{dy} - i\xi^{3}\hat{\Psi} \right).$$
(1.94)

Οι Εξ. (1.90) και (1.91) έχουν τις ακόλουθες γενικές λύσεις:

$$\hat{\Phi}(\xi, y) = \left[C_1(\xi) + yC_2(\xi)\right] e^{-|\xi|_y} + \left[C_3(\xi) + yC_4(\xi)\right] e^{|\xi|_y},$$
(1.95)

$$\hat{\Psi}(\xi, y) = B_1(\xi)e^{-|\xi|y} + B_2(\xi)e^{-\gamma y} + B_3(\xi)e^{\xi y} + B_4(\xi)e^{\gamma y}, \qquad (1.96)$$

όπου $\gamma \equiv \gamma(\xi) = (1/\ell^2 + \xi^2)^{1/2}.$

Οι άγνωστες συναρτήσεις $B_i(\xi)$ και $C_i(\xi)$ (i=1,..., 4) θα υπολογιστούν βάσει των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών και των εξισώσεων συμβιβαστού της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους, Εξ. (1.82)-(1.84) ή (1.85)-(1.87), δια μέσου των σχέσεων:

$$B_{1}(\xi) = -4i\ell^{2}(1-\nu)\xi C_{2}(\xi), \qquad (1.97)$$

$$B_{3}(\xi) = -4i\ell^{2}(1-\nu)\xi C_{4}(\xi).$$
(1.98)

Έτσι οι εναπομείνασες συναρτήσεις $B_i(\xi)$ με (i=2, 4) και $C_i(\xi)$ (i=1,..., 4) για το πρώτο σύνολο συνοριακών συνθηκών δίνονται ως:

$$B_2 = B_4 - \frac{4i(C_4 - C_2)n\ell^2\beta\xi}{\gamma},$$

$$B_4 = -B_2 + \frac{i\left(C_2 + C_4 - C_1\beta + C_3\beta + 4\left(C_2 + C_4\right)\ell^2 n\xi^2\right)}{\xi},$$

$$C_{1} = \frac{P + \xi \left(i \left(B_{2} - B_{4} \right) \gamma - \left(C_{3} - 4 \left(C_{2} - C_{4} \right) \ell^{2} \beta \left(1 - \nu \right) \right) \xi \right)}{\xi^{2}},$$

$$C_{2} = \frac{e^{-h(\beta+\gamma)} \left(i e^{2h\beta} \left(B_{4} e^{2h\gamma} - B_{2} \right) \gamma \xi + e^{h(\beta+\gamma)} \left(C_{1} + C_{3} e^{2h\beta} \right) \left(\beta^{2} n + v \xi^{2} \right) + C_{4} e^{h(\beta+\gamma)} \left(\beta \left(2 + h\beta \right) n + \left(4\ell^{2}\beta n + hv \right) \xi^{2} \right) \right)}{\beta \left(2 - h\beta \right) n + \left(4\ell^{2}\beta n - hv \right) \xi^{2}}, \quad (1.99)$$

$$C_{3} = \frac{e^{-h(\beta+\gamma)} \left(i e^{2h\beta} \left(-B_{2} + B_{4} e^{2h\gamma} \right) \gamma \xi + e^{h(\beta+\gamma)} \left(C_{1} + C_{3} e^{2h\beta} \right) \left(\beta^{2} n + \nu \xi^{2} \right) + C_{4} e^{h(3\beta+\gamma)} \left(\beta \left(2 + h\beta \right) n + \left(4\ell^{2} \beta n + h\nu \right) \xi^{2} \right) \right)}{\beta \left(2 - h\beta \right) n + \left(4\ell^{2} \beta n - h\nu \right) \xi^{2}},$$

$$\begin{split} C_{4} &= \frac{e^{-h(2\beta+\gamma)} \Big(2C_{1} e^{h\gamma} \beta n(\xi-\beta)(\xi+\beta) - 2C_{2} e^{h\gamma} n\Big(\beta^{2} (h\beta-3) + \xi^{2} - \beta \Big(h+2\ell^{2}\beta\Big)\xi^{2} + 2\ell^{2}\xi^{4} \Big) \Big)}{\Big(2n \Big(\Big(1+\beta \big(h-2\ell^{2}\beta\big) \Big)\xi^{2} + 2\ell^{2}\xi^{4} - \beta^{2} \big(3+h\beta\big) \Big) \Big)} \\ &+ \frac{e^{-h(2\beta+\gamma)} \Big(e^{h\beta} \Big(2C_{3} e^{h(\beta+\gamma)} \beta n(\beta-\xi)(\beta+\xi) + i\Big(B_{2} + B_{4} e^{2h\gamma}\Big)(\gamma-\xi)\xi(\gamma+\xi) \Big) \Big)}{\Big(2n \Big(\Big(1+\beta \big(h-2\ell^{2}\beta\big) \big)\xi^{2} + 2\ell^{2}\xi^{4} - \beta^{2} \big(3+h\beta\big) \Big) \Big)}, \end{split}$$

ενώ για το δεύτερο σύνολο συνοριακών συνθηκών δίνονται ως:

$$B_2 = B_4 - \frac{4i(-C_2 + C_4)n\ell^2\beta\xi}{\gamma},$$

$$B_4 = -B_2 + \frac{i(C_2 + C_4 - C_1\beta + C_3\beta + 4(C_2 + C_4)\ell^2 n\xi^2)}{\xi},$$

$$C_{1} = \frac{P + \xi \left(i \left(B_{2} - B_{4} \right) \gamma - \left(C_{3} - 4 \left(C_{2} - C_{4} \right) \ell^{2} \beta \left(1 - \nu \right) \right) \xi \right)}{\xi^{2}},$$

$$C_{2} = \frac{e^{-h(\beta+\gamma)} \left(ie^{2h\beta} \left(B_{4} e^{2h\gamma} - B_{2} \right) \gamma \xi + e^{h(\beta+\gamma)} \left(C_{1} + C_{3} e^{2h\beta} \right) \left(\beta^{2} n + \nu \xi^{2} \right) + C_{4} e^{h(3\beta+\gamma)} \left(\beta \left(2 + h\beta \right) n - \left(-4\ell^{2}\beta n - h\nu \right) \xi^{2} \right) \right)}{\beta \left(2 - h\beta \right) n + \left(4\ell^{2}\beta n - h\nu \right) \xi^{2}}, \quad (1.100)$$

$$C_{3} = \frac{-1}{\beta \left((1+n)\xi^{2} - \beta^{2}n \right)} e^{-h(2\beta+\gamma)} \left(C_{1} e^{h\gamma} \beta \left(\beta^{2} n - (1+n)\xi^{2} \right) + i \left(B_{2} e^{h\beta} \xi^{3} + B_{4} e^{h(\beta+2\gamma)} \xi^{3} \right) \right)$$

$$+ \frac{1}{\beta \left((1+n)\xi^{2} - \beta^{2}n \right)} e^{-h(2\beta+\gamma)} \left(C_{4} e^{h(2\beta+\gamma)} \left(\beta^{2} \left(3 + h\beta \right) n - (1+h\beta) (1+n)\xi^{2} - 4\ell^{2}n\xi^{4} \right) \right)$$

$$+ \frac{1}{\beta \left((1+n)\xi^{2} - \beta^{2}n \right)} e^{-h(2\beta+\gamma)} \left(C_{2} e^{h\gamma} \left(\beta^{2} \left(3 - h\beta \right) n - (1-h\beta) (1+n)\xi^{2} - 4\ell^{2}n\xi^{4} \right) \right),$$

$$C_4 = \frac{e^{-h(2\beta+\gamma)} \left(iB_2 e^{h\beta}\gamma - e^{h\gamma} \left(iB_4 e^{h(\beta+\gamma)}\gamma - 4C_2 \ell^2 \beta n\xi\right)\right)}{4\ell^2 \beta n\xi},$$

όπου $\gamma \equiv \gamma(\xi) = (1/\ell^2 + \xi^2)^{1/2}$, $\beta \equiv \beta(\xi) = \sqrt{\xi^2}$ και n = 1 - v.

Ακολούθως, με αντικατάσταση των συναρτήσεων $B_i(\xi)$ με (i=2, 4) και $C_i(\xi)$ (i=1,...,4) στις Εξ. (1.95) και (1.96) εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι η $\hat{u}_x(x,\xi)$ και $\hat{u}_y(x,\xi)$ είναι περιττές και άρτιες συναρτήσεις του ξ αντιστοίχως:

$$\hat{u}_{x}(-\xi) = -\hat{u}_{x}(\xi),$$

$$(1.101)$$

$$\hat{u}_{y}(-\xi) = \hat{u}_{y}(\xi),$$

και δεδομένου ότι από τη Θεωρία Ολοκληρωτικών Μετασχηματισμών (Bracewell, 1965) προκύπτει ότι οι ίδιες ιδιότητες θα ισχύουν και στο φυσικό πεδίο, οι συνιστώσες του διανύσματος της μετατόπισης γράφονται ως:

$$u_{x}(x, y) = -\frac{i}{\pi} \int_{0}^{\infty} \hat{u}_{x}(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi,$$

$$u_{y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \hat{u}_{y}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi.$$
(1.102)

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση της επικάλυψης στα πλαίσια τόσο της Κλασσικής Ελαστικότητας όσο και της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους και σε αντίθεση με την περίπτωση της αντίστοιχης φόρτισης ημιχώρου οι μετατοπίσεις u_y δεν παρουσιάζουν την συνήθη ιδιομορφία δηλαδή του απειρισμού της συγκεκριμένης συνιστώσας καθώς το $x \rightarrow \infty$. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι στην περίπτωση της επικάλυψης πεπερασμένου πάχους h λαμβάνεται το φυσικά αποδεκτό αποτέλεσμα του μηδενισμού των κάθετων μετατοπίσεων αρκετά μακριά από το σημείο της φόρτισης, στην προκειμένη περίπτωση από την αρχή των αξόνων.

Διερεύνηση των συναρτήσεων προς ολοκλήρωση $\hat{u}_x(\xi, y)$ και $\hat{u}_y(\xi, y)$ αποδεικνύει ότι τόσο η $\hat{u}_x(\xi, y)$ όσο και η $\hat{u}_y(\xi, y)$ φράσσονται καθώς το $\xi \rightarrow 0$. Το γεγονός αυτό προφανώς είναι αναμενόμενο όσον αφορά τις $\hat{u}_x(\xi, y)$ αλλά διαφοροποιείται από την αντίστοιχη λύση στην περίπτωση του ημιχώρου και συνδέεται άμεσα με την άρση της ιδιομορφίας του απειρισμού των μετατοπίσεων πολύ μακριά από την περιοχή φόρτισης στην επιφάνεια του ημιχώρου.

Βάσει των παραπάνω η αντιστροφή των $\hat{u}_x(\xi, y)$ και $\hat{u}_y(\xi, y)$ μπορεί να πραγματοποιηθεί απευθείας αριθμητικά.

Όσον αφορά στην Κλασσική Ελαστικότητα και στην αντίστοιχη φόρτιση με συγκεντρωμένο κάθετο φορτίο επικάλυψης πάχους h η γενική λύση ως προς την τασική συνάρτηση $\hat{\Phi}(\xi, y)$ δίνεται από την Εξ. (1.95) ενώ οι συναρτήσεις $B_i(\xi)$ με (i=1,..., 4) υπολογίζονται απευθείας από τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες Εξ. (1.79), (1.80) και Εξ. (1.82), (1.83). Για την περίπτωση αυτή στην επιφάνεια της επικάλυψης (y=0) έχουμε:

$$u_{x}(x,y) = \frac{-P}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\left((1-2\nu)(3-4\nu) + e^{4h\xi}(1-2\nu)(3-4\nu) - 2e^{2h\xi}(3-2\nu(5-4\nu)+2h^{2}\xi^{2})\right)}{2\mu\xi(3+e^{4h\xi}(3-4\nu)-4\nu+2e^{2h\xi}(5-12\nu+8\nu^{2}+2h^{2}\xi^{2}))} \sin(\xi x)d\xi,$$

$$(1.103)$$

$$u_{y}(x,y) = \frac{-P}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{2(1-\nu)(3-4\nu) - 2e^{4h\xi}(1-\nu)(3-4\nu) + 8e^{2h\xi}h(1-\nu)\xi}{2\mu\xi(3+e^{4h\xi}(3-4\nu)-4\nu+2e^{2h\xi}(5-12\nu+8\nu^{2}+2h^{2}\xi^{2}))} \cos(\xi x)d\xi.$$

Σημειώνεται, ότι υπολογισμός των ολοκληρωμάτων στην Εξ. (1.103) μπορεί να πραγματοποιηθεί απευθείας αριθμητικά.

4.3 Αποτελέσματα

Αποτελέσματα, ως προς τη συμπεριφορά επιφανείας (y=0) ημιχώρου υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της Κλασσικής Θεωρίας Ελαστικότητας (C.E.) αλλά και της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους (C.S.E.) παρουσιάζονται στα **Σχήματα 8** - **11**. Η γενικότερη αδιαστατοποίηση του προβλήματος, επιτάσσει οι αποστάσεις να αδιαστατοποιηθούν με το πάχος της επικάλυψης (x/h), οι μετατοπίσεις με το μέτρο διάτμησης και το εφαρμοζόμενο φορτίο $(\mu u_x/P, \mu u_y/P)$, ενώ η στροφή με το μέτρο διάτμησης, το εφαρμοζόμενο φορτίο και το πάχος της επικάλυψης $(\mu h \omega_z/P)$.

Ξεκινάμε την παρουσίαση αποτελεσμάτων αναφερόμενοι στην περίπτωση της Κλασσικής Ελαστικότητας. Στο Σχήμα 8 παρουσιάζεται η συμπεριφορά της επιφανείας (y=0) της επικάλυψης υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της Κλασσικής Θεωρίας Ελαστικότητας ως προς το αδιάστατο πεδίο μετατοπίσεων. Παρουσιάζονται αποτελέσματα για τις δύο αδιάστατες μετατοπίσεις μ u_x/P και μ u_y/P καθώς και για την αδιάστατη στροφή $\mu h \omega_z / P$ συναρτήσει της αδιάστατης απόστασης x/h από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P. Ενδεικτικά παρουσιάζουμε αποτελέσματα για δύο λόγους του Poisson. Τα αποτελέσματα αυτά στα πλαίσια της Κλασσικής Ελαστικότητας εξαρτώνται μόνο από το λόγο Poisson ενώ για τη συγκεκριμένη αδιαστατοποίηση οι καμπύλες είναι μοναδικές ανεξάρτητα από το πάχος της επικάλυψης. Η ασυνέχεια στην εφαπτομενική μετατόπιση και ο απειρισμός της κάθετης μετατόπισης στο σημείο εφαρμογής του φορτίου είναι ίδιες με αυτές που παρατηρούνται στην περίπτωση του ημιχώρου. Σε αντίθεση όμως με την περίπτωση του ημιχώρου καθώς απομακρυνόμαστε από το σημείο εφαρμογής του φορτίου, οι μετατοπίσεις φθίνουν και για $x/h \ge 5$ πρακτικά μηδενίζονται. Όσον αφορά ειδικά τις κάθετες μετατοπίσεις παρατηρείται ότι καθώς αυξάνεται ο λόγος του Poisson η επιφάνεια της επικάλυψης ανασηκώνεται εκατέρωθεν του εφαρμοζόμενου φορτίου (pile-up effect).



Σχήμα 8: Συμπεριφορά επιφανείας (y=0) επικάλυψης υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της Κλασσικής Θεωρίας Ελαστικότητας. Το αδιάστατο πεδίο μετατοπίσεων (a) $\mu u_x/P$, (b) $\mu u_y/P$ και (c) η αδιάστατη στροφή $\mu h \omega_z/P$ συναρτήσει της απόστασης x/h από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P.

Ακολούθως, στα **Σχήματα 9-11** παρουσιάζεται η συμπεριφορά της επιφανείας (y=0) της επικάλυψης υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται τα αδιάστατα πεδία μετατοπίσεων και στροφών συναρτήσει της αδιάστατης απόστασης x/h από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P για δύο διαφορετικούς λόγους Poisson και διαφορετικές συνθήκες στη διεπιφάνεια.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως στη διεπιφάνεια μεταξύ της επικάλυψης και του απαραμόρφωτου υποστρώματος, θέτουμε δύο διαφορετικές συνοριακές συνθήκες πέραν του μηδενισμού των συνιστωσών της μετατόπισης. Η πρώτη αφορά στο μηδενισμό της στροφής και η δεύτερη αφορά στο μηδενισμό των τάσεων ζεύγους $\omega_z(x,h) = 0$ ή $m_{yz}(x,h) = 0$ αντιστοίχως. Η επίδραση στα αποτελέσματα των διαφορετικών αυτών συνοριακών συνθηκών κρίνεται ως αμελητέα.

Στην περίπτωση της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους, η παραμορφωσιακή κατάσταση της επιφάνειας της επικάλυψης εξαρτάται σε αυτή την περίπτωση και από τον ανεξάρτητο αδιάστατο λόγο του πάχους της επικάλυψης ως προς το χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής του υλικού h/ℓ .

Για λόγο Poisson v = 0 για δεδομένο πάχος επικάλυψης h και κοντά στο σημείο εφαρμογής του φορτίου, όπου η βαθμίδα τροπών είναι ισχυρή, η αύξηση του χαρακτηριστικού μήκους της μικροδομής αντιστοιχεί κατά απόλυτη τιμή σε μείωση των οριζόντιων και κάθετων μετατοπίσεων αλλά και μείωση της στροφής.

Για λόγο Poisson v = 0.49 για δεδομένο πάχος επικάλυψης h και κοντά στο σημείο εφαρμογής του φορτίου, η αύξηση του χαρακτηριστικού μήκους της μικροδομής αντιστοιχεί κατά απόλυτη τιμή σε αύξηση των οριζόντιων μετατοπίσεων, μείωση των κάθετων μετατοπίσεων αλλά και μείωση της στροφής.

Καθώς απομακρυνόμαστε από το σημείο εφαρμογής του φορτίου η επίδραση των βαθμίδων τροπών φθίνει και τα αποτελέσματα όλων των μεγεθών συγκλίνουν σε αυτά της Κλασσικής Ελαστικότητας. Η σύγκλιση αυτή πραγματοποιείται γρηγορότερα με αύξηση του λόγου h/ℓ . Επίσης, καθώς αυξάνεται ο λόγος h/ℓ και για $h > 50\ell$ οι μετατοπίσεις και η στροφή, έχουν συγκλίνει ουσιαστικά στις αντίστοιχες που προβλέπονται από την Κλασσική Θεωρία Ελαστικότητας.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονισθεί ότι το $h/\ell \to \infty$ πρέπει να γίνεται περισσότερο αντιληπτό ως $\ell \to 0$ και όχι ως $h \to \infty$ δεδομένου ότι και στα πλαίσια της Κλασσικής Ελαστικότητας οι λύσεις που προβλέπονται για την επικάλυψη πεπερασμένου πάχους h δεν μπορούν, στο όριο $h \to \infty$, να συγκλίνουν στις αντίστοιχες λύσεις του ημιχώρου. Χαρακτηριστικά είναι και τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των δύο λύσεων στα πλαίσια της Κλασσικής Ελαστικότητας για την κάθετη για παράδειγμα μετατόπιση.

Στην περίπτωση του ημιχώρου παρουσιάζεται ο απειρισμός των κάθετων στην επιφάνεια μετατοπίσεων καθώς αποκρινόμαστε από το σημείο εφαρμογής του φορτίου, ενώ στην αντίστοιχη περίπτωση της επικάλυψης η ίδιες μετατοπίσεις μηδενίζονται αρκετά μακριά από το σημείο εφαρμογής του φορτίου.



Σχήμα 9: Συμπεριφορά επιφανείας (y=0) επικάλυψης υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους. Παρουσιάζεται το αδιάστατο πεδίο οριζόντιων μετατοπίσεων $\mu u_x/P$, συναρτήσει της απόστασης x/h από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P για δύο διαφορετικούς λόγους Poisson και διαφορετικές συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια. (α) v = 0, $\omega_z(x,h) = 0$, (b) v = 0, $m_{yz}(x,h) = 0$, (c) v = 0.49, $\omega_z(x,h) = 0$, (d) v = 0.49, $m_{yz}(x,h) = 0$.



Σχήμα 10: Συμπεριφορά επιφανείας (y=0) επικάλυψης υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους. Παρουσιάζεται το αδιάστατο πεδίο κάθετων μετατοπίσεων $\mu u_y/P$, συναρτήσει της απόστασης x/h από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P για δύο διαφορετικούς λόγους Poisson και διαφορετικές συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια. (α) v=0, $\omega_z(x,h)=0$, (b) v=0, $m_{yz}(x,h)=0$, (c) v=0.49, $\omega_z(x,h)=0$, (d) v=0.49, $m_{yz}(x,h)=0$.



Σχήμα 11: Συμπεριφορά επιφανείας (y=0) επικάλυψης υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους. Παρουσιάζεται το αδιάστατο πεδίο στροφής $\mu h \omega_z / P$, συναρτήσει της απόστασης x / h από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P για δύο διαφορετικούς λόγους Poisson και διαφορετικές συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια. (α) v = 0, $\omega_z(x,h) = 0$, (b) v = 0, $m_{yz}(x,h) = 0$, (c) v = 0.49, $\omega_z(x,h) = 0$, (d) v = 0.49, $m_{yz}(x,h) = 0$.

Κεφάλαιο 5

5. Συμπεράσματα και Ζητήματα για Μελλοντική Έρευνα

5.1 Συμπεράσματα

διατριβή μελετήθηκαν προβλήματα Στην παρούσα επιβολής συγκεντρωμένων φορτίων στην επιφάνεια ημιχώρου και επικαλύψεων στα πλαίσια της Κλασσικής Θεωρίας Ελαστικότητας και οι λύσεις επεκτάθηκαν στην Θεωρία Τάσεων Ζεύγους. Η Θεωρία Τάσεων Ζεύγους, εισάγει νέες σταθερές του υλικού, που υποδεικνύουν την παρουσία χαρακτηριστικού «εσωτερικού» μήκους στη συμπεριφορά του. Το χαρακτηριστικό αυτό μήκος μπορεί να συνδεθεί με το μέγεθος της μικροδομής του υλικού ενσωματώνοντας φαινόμενα κλίμακας στην ανάλυση μετατοπίσεων, κάτι που δεν μπορεί να επιτευχθεί με την Κλασσική Θεωρία. Μέσω της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους, μπορούν να περιγραφούν συνεχή μέσα με περιοδική δομή, όπως είναι π.χ. τα κρυσταλλικά πλέγματα, οι κρυσταλλίτες ενός πολυκρυσταλλικού υλικού ή οι κόκκοι ενός κοκκώδους υλικού.

Οι λύσεις που παρουσιάζονται αποτελούν τις συναρτήσεις Green για το πρόβλημα του ημιχώρου και της επικάλυψης στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους και αποτελούν το δομικό λίθο για την κατάστρωση και επίλυση σύνθετων προβλημάτων επαφών σε δύο διαστάσεις και κατ' επέκταση τη μελέτη προβλημάτων διείσδυσης.

Τα αποτελέσματα των προβλημάτων που επιλύθηκαν, στη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους, παρουσιάζουν σημαντική απόκλιση από τις προβλέψεις της Κλασσικής Θεωρίας Ελαστικότητας.

Συγκεκριμένα, σημειώνεται ότι στην περίπτωση φόρτισης με συγκεντρωμένο φορτίο του ημιχώρου όπως και στην περίπτωση της αντίστοιχης φόρτισης της επικάλυψης στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους, οι μετατοπίσεις παρουσιάζουν τα ίδια ασυμπτωτικά χαρακτηριστικά με αυτά της Κλασσικής Ελαστικότητας. Παρόλα αυτά τα λεπτομερή ποιοτικά χαρακτηριστικά των λύσεων διαφέρουν αρκετά από τις αντίστοιχες λύσεις της

Κλασσικής Ελαστικότητας. Επιπλέον σε αντίθεση με την Κλασσική Ελαστικότητα, οι στροφές στην επιφάνεια του ημιχώρου ή της επικάλυψης στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους, φράσσονται στο σημείο επιβολής του φορτίου. Σε κάθε περίπτωση οι αποκλίσεις από τα αποτελέσματα της Κλασσικής Ελαστικότητας εντείνονται όσο πλησιάζουμε προς το σημείο επιβολής του φορτίου, όπου οι στροφές / οι βαθμίδες τροπών είναι πιο εμφατικές, ενώ φθίνουν όσο απομακρυνόμαστε από αυτό και οι λύσεις συγκλίνουν σε αυτές της Κλασσικής Ελαστικότητας. Τέλος κατά τη μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς της επικάλυψης με μικροδομή διερευνήθηκε η επίδραση του νέου αδιάστατου χαρακτηριστικού μήκους h/ℓ στις μετρούμενες μετατοπίσεις και η στροφή στην επιφάνεια της επικάλυψης, ενώ παρατηρήθηκε ότι όταν το πάχος της επικάλυψης είναι περίπου ίσο με 50 ℓ τότε η Θεωρία Κλασσικής Ελαστικότητας είναι απολύτως επαρκής για τη μελέτη αντίστοιχων προβλημάτων, με την επίδραση της μικροδομής να θεωρείται ως αμελητέα.

5.2 Ζητήματα για Μελλοντική Έρευνα

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μελλοντική εργασία ως δομικός λίθος για την επίλυση πιο σύνθετων και πολύ ενδιαφερόντων προβλημάτων επαφής όπως για παράδειγμα η διείσδυση επικάλυψης από κυλινδρικό, επίπεδο ή διεισδυτή τύπου σφήνας. Τα προβλήματα αυτά ενώ έχουν προσφάτως μελετηθεί σε επίπεδο ημιχώρου στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους, δεν έχουν προσεγγισθεί για την περίπτωση επικαλύψεων.

Η μελέτη προβλημάτων διείσδυσης επικαλύψεων με μικροδομή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Έχει δε τεράστια πρακτική εφαρμογή ως προς την κατανόηση αποτελεσμάτων που εξάγονται με μεθόδους διείσδυσης και της επίδρασης της μικροδομής στις μακροσκοπικές πληροφορίες, σχετικά με το υλικό, που λαμβάνονται από τις μεθόδους αυτές (μήκος / επιφάνεια επαφής, μέση πίεση).

Επίσης ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η επέκταση και επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων όπου πλέον η επικάλυψη επικάθεται σε παραμορφώσιμο ημίχωρο. Η επίδραση των σχετικών μηχανικών ιδιοτήτων των

δύο επιφανειών έχει τεράστια σημασία για την μηχανική αλλά και την επιστήμη των υλικών και ιδιαίτερα ως προς τη συσχέτιση των σχετικών ιδιοτήτων των δύο επιφανειών με έμφαση στις αναπτυσσόμενες τάσεις στη διεπιφάνεια. Η μελέτη των χαρακτηριστικών του αναπτυσσόμενου τασικού πεδίου στη διεπιφάνεια υπό δεδομένη φόρτιση και η εξάρτηση αυτού από τις σχετικές μηχανικές, αλλά και βάσει των νέων αποτελεσμάτων, από τις μικροδομικές ιδιότητες των δύο υλικών μπορούν να δώσουν κατασκευαστικές οδηγίες ως προς την ανάπτυξη επικαλύψεων που ανθίσταται σε φαινόμενα αποφλοίωσης (delamination).

Βιβλιογραφία

- 1. Aero E. Kunshinskii E., 1961. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. Sov. Phys.-Sov. State 2, 1272-1281.
- 2. Altenbach H., Eremeyev V.A., 2013. Generalized Continua from the Theory to Engineering Applications. Springer.
- 3. Amanatidou E., Aravas N., 2002. Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 191, 1723-1751.
- 4. Aravas N., Giannakopoulos A.E., 2009. Plane asymptotic crack-tip solutions in gradient elasticity. Int. J. Solids Struct. 46, 4478-4503.
- 5. Barber J.R., 2010. Elasticity. Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 172. Springer, Netherlands.
- 6. Begley M.R., Hutchinson J.W., 1998. The mechanics of sizedependent indentation. J. Mech Phys. Solids 46, 2049–2068.
- 7. Beveridge A.J., Wheel M.A., Nash D.H., 2013. The micropolar elastic behaviour of model macroscopically heterogeneous materials. Int. J. Solids Struct. 50, 246–255.
- 8. Bigoni D., Drugan W.J., 2007. Analytical derivation of Cosserat Moduli via homogenization of heterogeneous elastic materials. ASME J Appl. Mech. 74, 741–753.
- 9. Bracewell R., 1965. The Fourier transform and its applications, McGraw-Hill, New York.
- 10. Charalambopoulos A., Gergidis L., 2008. On the dyadic scattering problem in threedimensional gradient elasticity: an analytic approach. J. Phys. A: Math. Theor. 41, 395203.
- 11. Chen X., Hutchinson J.W., Evans A.G., 2004. Simulation of the high temperature impression of thermal barrier coatings with columnar microstructure. Acta. Mater. 52, 565–571.
- 12. Chen J.Y., Huang Y., Ortiz M., 1998. Fracture analysis of cellular materials: a strain gradient model. J. Mech. Phys. Solids 46, 789–828.
- 13. Cook T.S., Weitsman Y., 1966. Strain-gradient effects around spherical inclusions and cavities. Int. J. Solids Struct. 2, 393-406.
- 14. Cosserat E., Cosserat F, 1909. Théorie des Corps deformables. Paris: A, Hermann et Fils, Paris. Dai, D.N., 2002. Modelling cracks in finite bodies by distributed dislocation dipoles. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 25, 27-39.
- 15. Engel G., Garikipati K., Hughes T.J.R., Larson M.G., Mazzei L., Taylor R.L., 2002. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity.
- 16. Eringen A.C., 1962. Nonlinear theory of Continuous Media. McGraw-Hill, New York.
- 17. Eringen A.C., 1999. Microcontinuum Field Theory I: Foundations and Solids. Springer-Verlag, New York.

- Eringen A.C., Suhubi E.S., 1964. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids.-I. Int. J. Eng. Sci. 2, 189-203.
- 19. Eringen A.C., 1966. Linear theory of micropolar elasticity. J. Math. Mech. 15, 909-923.
- 20. Eringen A.C., 1968. Theory of micropolar elasticity, in: Liebowitz, H. (Ed.), Fracture-An Advanced Treatise, Vol. 2. Academic Press, New York, pp. 621-729.
- 21. Eringen A.C., 1971. Micropolar elastic solid with stretch, Prof. Dr Mustafa Inan Anisina. Ari Kitabevi Matbaasi, Istanbul, pp. 1-18.
- 22. Eringen A.C., 1990. Theory of thermo-microstretch elastic solids. Int. J. Eng. Sci. 28, 1291-1301.
- 23. Eshel N.N., Rosenfeld G., 1970. Effects of strain-gradient on the stress-concenstration at a cylindrical hole in a field of uniaxial tension. J. Eng. Math. 4, 97-111.
- Evans M. N., Cane M.A., Schrag D. P., Kaplan A., Linsley B. K., Villalba R. and Wellington G. M., 2001. Support for tropically-driven Pacific decadal variability based on paleoproxy evidence. Geophysical research letters, Vol. 28, NO. 19, PAGES 3689-3692.
- 25. Exadaktylos G.E., Vardoulakis I., 1998. Surface instability in grandient elasticity with surface energy. Int. Solids Struct. 35, 2251-2281.
- 26. Fafalis D.A., Filopoulos S.P., Tsamasphyros G. J., 2012. On the capability of generalized continuum theories to capture dispersion characteristics at the atomic scale. Eur. J. Mech. A. Solids 36, 25-37.
- 27. Farnell G.W., 1978. Types and properties of surface waves, in: Oliner, A.A. (Ed.), Acoustic Surface Waves, Springer, pp. 13-60.
- 28. Filopoulos S.P.,Papathanasiou T.K., Markolefas S.I.,Tsamasphyros G.J., 2010. Dynamic finite element analysis of a gradient elastic bar with micro-inertia. Comput. Mech. 45, 311-319.
- 29. Fleck N.A., Hutchinson J.W., 2001. A reformulation of strain gradient plasticity. J. Mech Phys. Solids 49, 2245–2271.
- 30. Fleck N.A., Shu, J.Y., 1995. Microbuckle initiation in fibre composites: a finite element study. J. Mech. Phys. Solids 43, 1887–1918
- 31. Fleck N.A., Zisis T., 2010. The erosion of EB-PVD thermal barrier coatings: the competition between mechanisms. Wear 268, 1214–1224.
- 32. Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F., et al., 1994. Strain gradient plasticity: theory and experiment. Acta. Metall. Mater. 42, 475–487.
- 33. Gao H., Huang Y., Nix W.D., Hutchinson J.W., 1999. Mechanism-based strain gradient plasticity— I. Theory. J. Mech. Phys. Solids 47, 1239-1263.
- 34. Gazis D.C., Herman R., Wallis R.F., 1960. Surface elastic waves in cubic crystals. Phys. Rev. 119, 533-544.
- 35. Georgiadis H. G., Anagnostou D. S., 2008. Problems of the Flamant Boussinesq and Kelvin type in dipolar gradient elasticity, Elast. 90, pp. 71-98.
- 36. Georgiadis H.G., Velgaki E.G., 2003. High-frequency Rayleigh waves in materials with microstructure and couple stress effects. Int. J. Solids Struct. 40, 2501–2520.

- 37. Georgiadis H.G., Vardoulakis I., Lykotrafitis G., 2000. Torsional surface waves in a gradient-Elastic. half-space. Wave Motion 31, 333-348.
- Georgiadis H.G., Vardoulakis I., Velgaki E.G., 2004. Dispersive Rayleigh-Wave Propagation in Microstructured Solids Characterized by Dipolar Gradient Elasticity . J. Elasticity 74, 17-45.
- 39. Georgiadis H.G., Velgaki E.G., 2003. High-frequency Rayleigh waves in materials with micro-structure and couple-stress effects. Int. J. Solids Struct. 40, 2501-2520.
- 40. Giannakopoulos A.E., Stamoulis K., 2007. Structural analysis of gradient elastic components. Int. J. Solids Struct. 44, 3440-3451.
- 41. Giannakopoulos A.E., Amanatidou E., Aravas N., 2006. A reciprocity theorem in linear gradient elasticity and the corresponding Saint-Venant principle. Int. J. Solids Struct. 43, 3875-3894.
- 42. Giannakopoulos A.E., Petridis S., Sophianopoulos D.S., 2012. Dipolar gradient elasticity of cables. Int. J. Solids Struct. 49, 1259-1265.
- 43. Giannakopoulos A.E., Aravas N., Papageorgopoulou A., Vardoulakis I., 2013. A structural gradient theory of torsion, the effects of pretwist, and the tension of pre-twisted DNA. Int. J. Solids Struct. 50, 3922-3923.
- 44. Gourgiotis P.A., Georgiadis H.G., 2007. Distributed dislocation approach for cracks in couple-stress elasticity: shear modes. Int. J. Fract. 147, 83–102.
- 45. Gourgiotis P.A., Georgiadis H.G., 2008. An approach based on distributed dislocations and disclinations for crack problems in couple-stress elasticity. Int J. Solids Struct. 45, 5521-5539.
- 46. Gourgiotis P.A., Georgiadis H.G., 2009. Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. J. Mech. Phys. Solids 57, 1898–1920.
- 47. Gourgiotis P.A., Zisis T., 2015. Two-dimensional indentation of microstructured solids characterized by couple-stress elasticity. J. of Strain Anal. for Engin. Design.
- 48. Gourgiotis P.A., Georgiadis H.G., 2013. On the reflection of waves in half-spaces of microstructured materials governed by dipolar gradient elasticity. Wave Motion 50, 437-455.
- 49. Gourgiotis P.A., Georgiadis H.G., 2012. Couple-stress effects for the problem of a crack under concentrated shear loading. Math. Mech. Solids 17, 433-459.
- 50. Green A.E., Rivlin R.S., 1964. Multipolar continuum mechanics. Arch. Ration. Mech. Anal. 17, 113-147.
- 51. Grentzelou C.G., Georgiadis H.G., 2005. Uniqueness for plane crack problems in dipolar gradient elasticity and in couple-stress elasticity. Int J. Solids Struct. 42, 6226–6244.
- 52. Grioli G., 1960. Elasticita asimmetrica. Ann. Mat. Pur. Appl. 50, 389-417.
- 53. Nikolov S., Han C.S. and Raabe D., 2007. On the origin of size effects in small-strain elasticity of solid polymers. Int J. Solids 44, 1582–1592.
- 54. Herrmann G., Achenbach J.D., 1968. Applications of theories of Generalized Cosserat Continua to the dynamics of composite materials, in: Kroner E. (Ed.), Mechanics of Generalized Continua. Springer Berlin Heidelberg, pp. 69-79.

- 55. Hills D., Nowell D., 1994. Mechanics of fretting fatigue. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- 56. Hu G.K., Han B., Liao L., 1999. A note on microstructural interpretation of the material constants for couple stress theory. Mech. Res. Commun. 26, 541-545.
- 57. Huang Y., Gao H., Nix, Hutchinson J.W., 2000. Mechanism-based strain gradient crystal plasticity—II. Analysis. J. Mech. Phys. Solids 48, 99-128.
- 58. Huber N., Nix W.D., Gao H., 2002. Identification of elasticplastic material parameters from pyramidal indentation of thin films. Proc. R. Soc. Lon. Ser. A. 458, 1593–1620.
- 59. Hwang K.C., Jiang H., Huang Y., Gao H., Hu N., 2002. A finite deformation theory of strain gradient plasticity. J. Mech. Phys. Solids 50, 81-99.
- 60. Jaunzemis W., 1967. Continuum Mechanics. Macmillan, New York.
- 61. Johnson K., 1985. Contact mechanics. Cambridge: Cambridge University Press.
- 62. Kakunai S., Iwata K., Nagata R., Sekiguchi H., 1985. Measurement of three components of adisplacement vector using heterodyne holographic interferometry. Exp. Mech. 25, 408-412.
- 63. Karlsson A.M., Hutchinson J.W., Evans A.G., 2002. A fundamental model of cyclic instabilities in thermal barrier systems, J. Mech. Phys. Solids 50, 1565.
- 64. Koiter W., 1964. Couple stresses in the theory of elasticity. Parts I and II. Proc. Nederl. Akad. Wetensch B. 67,17–29.
- 65. Kröner E., 1968. Mechanics of Generalized Continua. Springer, Berlin.
- 66. Lakes R.S., 1986. Experimental microelasticity of two porous solids. Int. J. Solids Struct. 22, 55-63.
- 67. Lazar M., Maugin G.A., 2005. Nonsingular stress and strain fields of dislocations and disclinations in first strain gradient elasticity. Int. J. Eng. Sci. 43, 1157-1184.
- 68. Lord Kelvin W.T.B., 1882,1884,1890. Mathematical and plysical papers (vol. I-III). Cambridge University Press.
- 69. Love A.E.H., 1952. A treatise on the mathematical theory of elasticity. New York: Cambridge University Press.
- 70. Fung Y.C., 1965. Foundations of solid mechanics. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.
- Lubarda V.A., 2003. The effects of couple stresses on dislocation strain energy. Int. J. Solids Struct. 40, 3807-3826.
- 72. Ma Q., Clarke D.R., 1995. Size dependent hardness of silver single crystals. J. Mater. Res. 10, 853–863.
- 73. MacCullagh J., 1839. An Essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and reflection. Trans. Roy. Irish. Acad. Sci. 21, 17-50.
- 74. Marvel L., 1969. Introduction to the mechanics of a continuous medium. Prentice-Hall Inc. Engewood Cliffs, New Jersey.
- 75. Maranganti R., Sharma P. A., 2007. Novel atomistic approach to determine straingradient elasticity constants: tabulation and comparison for various metals,

semiconductors, silica, polymers and the (Ir) relevance for nanotechnologies. J. Mech, Phys, Solids 55, 1823–1852.

- 76. Markolefas S.I., Tsouvalas D.A., Tsamasphyros G.I., 2008. Some C0-continuous mixed formulations for general dipolar linear gradient elasticity boundary value problems and the associated energy theorems. Int. Solids Struct. 45, 3255-3281.
- 77. Markolefas S.I., Tsouvalas D.A., Tsamasphyros G.I., 2009. Mixed finite element formulation for the general anti-plane shear problem, including mode III crack computations, in the framework of dipolar linear gradient elasticity. Comput. Mech. 43, 715-730.
- 78. Maugin G.A., 2013. Continuum Mechanics Through the Twentieth Century: A Concise Historical Perspective. Springer.
- 79. Miller R.A., 1984. Oxidation-basedmodel for thermal barrier coating life, J. Am. Ceram. Soc. 67-517.
- Mindlin R.D., 1964. Micro-structure in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. 16, 51-78.
- 81. Mindlin R.D., 1965. Second gradient of strain and surface-tention in linear elasticity. Int. J. Solids Struct. 1, 417-438.
- 82. Mindlin R.D., Tiersten H.F., 1962. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. 11, 415–448.
- 83. Mishuris G., Piccolroaz A., Radi E., 2012. Steady-state propagation of a Mode III crack in couple stress elastic materials. Int. J. Eng. Sci. 61, 112-128.
- 84. Muki R. and Sternberg E., 1965. The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids. Z. Angew Math. Phys. 16, 611–648.
- 85. Mumm D.R., Evans A.G., Spitsberg I.T., 2001. Characterization of a cyclic displacement instability for a thermally grown oxide in a thermal barrier system. Acta. Mater. 49, 1793.
- 86. Nielsen K.L., Niordson C.F., Hutchinson J.W., 2014. Strain gradient effects in periodic flat punch indenting at small scales. Int J. Solids Struct. 51, 3549–3556.
- 87. Nikolov S., Han C.S., Raabe D., 2007. On the origin of size effects in small-strain elasticity of solid polymers. Int J. Solids 44, 1582–1592.
- 88. Nix W.D., Gao H., 1998. Indentation size effects in crystalline materials: a law for strain gradient plasticity. J. Mech. Phys. Solids 46, 411–425.
- 89. Nowacki W., 1972. Theory of micropolar elasticity. CISM International Centre for Mechanical Sciences No. 25. Springer-Verlag.
- 90. Nowacki W., 1986. Theory of Asymmetriv Elasticity. Pergamon Press, Oxford.
- 91. Oden J.T., Rigsby D.M., Cornett D., 1970. On the numerical solution of a class of problems in a linear first strain-gradient theory of elasticity. Int. J. Numer. Meth. Eng. 2, 159-174.
- 92. Pal'mov V.A., 1964. The plane problem in the theory of nonsymmetrical elasticity. Appl. Math. Meth. (PMM) 18, 1117-1120.
- 93. Papargyri-Beskou S., Tsepoura K.G., Polyzos D., Beskos D.E., 2003. Bending and stability analysis of gradient elastic beams. Int. J. Solids Sruct. 40, 385-400.

- 94. Papargyri-Beskou S., Giannakopoulos A.E., Beskos D.E., 2010. Variational analysis of gradient elastic flexural plates under static loading. Int. Solids Struct. 47, 2755-2766.
- 95. Paulino G.H., Fannjiang A.C., Chan Y.S., 2003. Gradient elasticity theory for mode iii fracture in functionally graded materials Part I: crack perpendicular to the material gradation. ASME J. Appl. Mech. 70, 531–542.
- 96. Pharr G.M., Oliver W.C., Brotzen F.R., 1992. On the generality of the relationship among contact stiffness, contact area, and elastic modulus during indentation. J. Mater. Res. 7, 613–617.
- 97. Po G., Lazar M., Seif D., Ghoniem N., 2014. Singularity-free dislocation dynamics with strain gradient elasticity. J. Mech. Phys. Solids 68, 161-178.
- 98. Polyzos D., Tsepoura K.G., Tsinopoulos S.V., Beskos D.E., 2003. A boundary element method for solving 2-D and 3-D static gradient elastic problems: Part I: Integral formulation. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 192, 2845-2873.
- 99. Poole W.J., Ashby M.F., Fleck N.A., 1996. Micro-hardness of annealed and work hardened copper polycrystals. Scr. Mater. 34, 559–564.
- 100. Providas E., Kattis M.A., 2002. Finite element method in plane Cosserat elasticity. Comput. Struct. 80, 20159-2069.
- 101. Radi E., 2007. Effects of characteristic material lengths on mode III crack propagation in couple stress elastic-plastic materials. Int. J. Plast. 23, 1439– 1456.
- 102. Radi E., 2008. On the effects of characteristic lengths in bending and torsion on Mode III crack in couple stress elasticity. Int. J. Plast. 23, 1439-1456
- 103. Rajagopal E.S., 1960. The existence of interfacial couples in infinitesimal elasticity. Ann. Phys. 461, 192-201.
- 104. Roos B.W., 1969. Analytic functions and distributions in physics and engineering. New York: Wiley.
- 105. Ruud J.A. , Bartz A., Borom M.P., Johnson C.A., 2001. Strength degradation and failure mechanisms of electron-beam physical-vapor-deposited thermal barrier coatings, J. Am. Ceram. Soc. 84, 1545.
- 106. Shi M.X., Huang Y., Hwang K.C., 2000. Fracture in a higher-order elastic continuum. Mech. Phys. Solids 48, 2513-2538.
- 107. Shu J.Y., Fleck N.A., 1998. The prediction of a size effect in microindentation. Int. J. Solids Struct. 35, 1363–1383.
- 108. Shu J.Y., King W.E., Fleck N.A., 1999. Finite element for materials with strain gradient effects. Int. J. Numer. Mech. Eng. 44, 373-391.
- 109. Stelmashenko N.A., Walls M.G., Brown L.M., Milman, Y.V., 1993. Microindentations on W and Mo oriented single crystals: an STM study. Acta Metall. Mater. 41, 2855–2865.
- 110. Stupkiewicz S., 2007. Micromechanics of contact and interphase layers. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, 30. Springer, Berlin.
- 111. Tekoglu C., Onck P.R., 2008. Size effect sin two dimensional Voronoi foams. A comparison between generalized continua and discrete models. J. Mech. Phys. Solids 56, 3541–3564.

- 112. Timoshenko S.P., Goodier J.N., 1970 Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill.
- 113. Toupin R.A., 1962. Elastic materials with couple-stresses. Arch. Ration. Mech. Anal. 11, 385-414.
- 114. Toupin R.A., 1964. Theories of elasticity with couple-stress. Arch. Ration. Mech. Anal. 17, 85-112.
- 115. Tsamasphyros G.I., Vrettos C., 2010. A mixed finite volume formulation for the solution of gradient elasticity problem. Arch. Appl. Mech. 80, 609-627.
- 116. Tsamasphyros G.I., Markolefas S., Tsouvalas D.A., 2007. Convergence and performance of the h- and p- extensions with mixed finite element C0-continuity formulations, for tension and buckling of a gradient elastic beam. Int. J. Solids Struct. 44, 5056-5074.
- 117. Tsepoura K.G., Papargyri-Beskou S., Polyzos D., 2002. A boundary element method forsolving 3-D static gradient elastic problems with surface energy. Comput. Mech. 29, 361-181.
- 118. Vardoulakis I., Georgiadis H.G., 1997. SH surface waves in a homogeneous gradientelastic half-space with surface energy. J. Elasticity 47. 147-165.
- 119. Vardoulakis I., Sulem J., 1995. Bifurcation Analysis in Geomechanics. Blackie Academic & Professional (Chapman and Hall), London.
- Vavva M.G., Protopappas V.C., Gergidis L.N. Charalampopoulos A., Fotidis D.I., Polyzos D., 2009. Velocity dispersion of guided waves propagating in a free gradient elastic plane: Application to cortical bone. J. Acoust. Soc. Am. 125, 3414-3427.
- 121. Voigh W., 1887. Theretishe studien uber die elasticitatsverhalnisse der krystalle. Abh. Ges. Wiss. Gottingen 34, 3-100.
- 122. Wei Y., Hutchinson J.W., 2003. Hardness trends in micron scale indentation. J. Mech. Phys. Solids 51, 2037–2056.
- 123. Wei Y., 2006. A new finite element methods for strain gradient theories and applications to fracture analyses. Eur. J. Mech. A. Solids 25, 897-913.
- 124. Weistman Y., 1965. Couple-stress effects in stress concentration around a cylindrical inclusion in a field of uniaxial tention. J. Appl. Mech. 32, 424-428.
- 125. Wright P.K., Evans A.G., 1999. Mechanisms governing the performance of thermal barrier coatings, Curr. Opin. Solid State Mater. Sci. 4 (3) 255–265.
- 126. Zhang L., Huang Y., Chen J.K., Hwang K.C., 1998. The mode III full-field solution in elastic materials with strain gradient effects. Int. J. Fract. 92, 325-348.
- 127. Zisis T., Fleck N.A., 2010. The elastic-plastic indentation response of a columnar thermal barrier coating. Wear 268, 443–454.
- 128. Zisis T., Gourgiotis P.A., Baxevanakis K.P., Georgiadis H.G., 2014. Some basic contact problems in couple-stress elasticity. Int J. Solids Struct. 51, 2084–2095.
- 129. Zisis T., Gourgiotis P.A., Dal Corso F, 2015. "A contact problem in couple stress thermoelasticity: The indentation by a hot flat punch", International Journal of Solids and Structures. 63, 2084-2095.