



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»

Μεταπτυχιακή Εργασία

Ευστάθεια και Έλεγχος Συστημάτων Παρουσία Σφαλμάτων Μέτρησης

Θωμαΐα Τριανταφύλλου

Επιβλέπων Καθηγητής: Αργύρης Σολδάτος

ΑΘΗΝΑ 2016

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια, το πρόβλημα της εκτίμησης θέσης ενός αντικειμένου έχει κινήσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών. Η ακριβής τοποθεσία στον χώρο παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλά πεδία όπως στην ρομποτική, στην ανάλυση της ανθρώπινης κίνησης και στην αντισεισμική προστασία κτιρίων. Το πρόβλημα εκτίμησης θέσης περιλαμβάνει την εκτίμηση της θέσης και του προσανατολισμού του αντικειμένου σε σχέση με το περιβάλλον του, χρησιμοποιώντας δεδομένα αισθητήρων.

Σε εσωτερικούς χώρους, ή γενικά όπου δεν νοείται η χρήση των αισθητήρων GPS, ο εντοπισμός των σωμάτων μπορεί να γίνει με την χρήση αισθητήρων IMU (Inertial Measurement Units). Οι αδρανειακοί αισθητήρες IMU ανήκουν στην κατηγορία MEMS (Microelectromechanical systems) είναι αρκετά μικροί σε μέγεθος, σχετικά χαμηλού κόστους καθώς και δεν καταναλώνουν πολύ ενέργεια, από άποψη εφαρμογών είναι αρκετά σημαντικοί και στον τομέα καταγραφής θέσης σωμάτων (π.χ. εύρεση της απόλυτης θέσης και προσανατολισμού ενός κτιρίου την ώρα του σεισμού) σε πραγματικό χρόνο. Όμως, όπως και οι υπόλοιποι αισθητήρες δεν είναι τέλειοι, αφού εισάγουν πόλωση, θόρυβο και αποκλίσεις λόγω διακριτοποίησης του σήματος. Τέλος, καθώς οι υπάρχοντες αισθητήρες δεν μετρούν απευθείας την απόλυτη θέση, αναπτύσσουμε μια σειρά από τεχνικές και αλγόριθμους αξιοποιώντας όσο το δυνατόν καλύτερα τα διαθέσιμα σήματα.

Οι προσεγγίσεις που αναλύουμε χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκει η προσέγγιση του φίλτρου Kalman, η οποία έχει αποδειχθεί ως η καλύτερη μέθοδος εκτίμησης κατάστασης. Στις περιπτώσεις όμως όπου η εύρεση του μοντέλου του συστήματος είναι εξαιρετικά δύσκολη προτείνονται εκτιμήσεις που στηρίζονται μόνο στην επεξεργασία των δεδομένων των αισθητήρων. Στη τελευταία κατηγορία, κύριο ρόλο παίζουν φίλτρα όπως τα υψιπερατά και τα βαθυπερατά.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα αξιολογήσουμε αυτές τις τεχνικές μέσα από εφαρμογές, παραδείγματα και πειράματα και θα εκθέσουμε τα συγκριτικά αποτελέσματα.

Abstract

Lately, the problem of estimating the position of an object has aroused the interest of many researchers. The exact location of an object in space plays an important role in many fields such as robotics, the analysis of human motion and seismic protection of buildings. The position estimation problem involves estimating the position and orientation of the object relative to its surroundings, using sensor data.

When the use of GPS sensors is impossible, finding the absolute position of a body can be achieved with the use of IMU sensors (Inertial Measurement Units). The IMU inertial sensors are quite significant at finding the body's position (e.g., the absolute position and orientation of a building at the time of the earthquake) in real time. However, sensors are not perfect as they introduce bias, noise and deviations due to the discretization of the signals. Finally, as the existing sensors cannot directly measure the absolute position, we develop a series of techniques and algorithms utilizing the available signals as much as possible.

The analyzed approaches are divided into two main categories. In the first category belongs the Kalman filter approach, which has proven to be the best method of state estimation. However, in situations where it is extremely difficult to find the system's model, we present estimations that are based only on the processing of sensor data.

In this thesis, we evaluate these techniques through applications, examples and experiments and report the comparative results.

*Στους γονείς μου που μου παρέχουν το καλύτερο δυνατό.
Στις αδερφές μου που πάντα με στηρίζουν.
Στην ανιψιά μου που μου δίνει ελπίδα για το μέλλον.
Στον καθηγητή μου Αργύρη Σολδάτο για την πολύτιμη βοήθειά του.
Στον Δημήτρη που τα κάνει όλα υπαρκτά.*

Περιεχόμενα

| | |
|--|-----------|
| Περίληψη..... | 3 |
| Abstract..... | 4 |
| Περιεχόμενα..... | 6 |
| 1 Εισαγωγή..... | 9 |
| 1.1 Σκοπός Εργασίας | 9 |
| 1.2 Δομή Εργασίας | 9 |
| 2 Κατασκευαστικό Κομμάτι..... | 11 |
| 2.1 Επιταχυνσιόμετρο | 11 |
| 2.1.1 Αριθμητικός Ολοκληρωτής για Μετρήσεις από Επιταχυνσιόμετρο | 14 |
| 2.2 Γυροσκόπιο..... | 16 |
| 2.2.1 Το μοντέλο του Γυροσκοπίου | 17 |
| 2.3 Μαγνητόμετρο..... | 18 |
| 2.4 Αισθητήρας IMU..... | 18 |
| 2.5 Διεπαφή I2C..... | 21 |
| 2.6 Βιβλιοθήκη Wire..... | 21 |
| 2.7 Αξιοποίηση της μονάδας IMU με χρήση Arduino | 22 |
| 2.7 Συνδεσμολογία | 22 |
| 2.8 Διάβασμα δεδομένων από τον αισθητήρα IMU..... | 23 |
| 2.8.1 ADXL345 Επιταχυνσιόμετρο | 24 |
| 2.8.2 ITG-3200 Γυροσκόπιο | 25 |
| 2.8.3 HMC5843 Μαγνητόμετρο | 26 |
| 2 Προσδιορισμός Προσανατολισμού..... | 30 |
| 3.1 Εισαγωγή..... | 30 |
| 3.2 Euler angles..... | 31 |
| 3.3 Αλγόριθμος του πίνακα στροφής DCM | 33 |
| 3.4 Quaternions | 35 |
| 3.5 Συστήματα Αναφοράς Θέσης και Πορείας - AHRS Συστήματα..... | 38 |
| 3.6 AHRS – Μια βασική προσέγγιση | 40 |
| 3.6.1 Προσανατολισμός από Γυροσκόπια | 40 |
| 3.6.2 Προσανατολισμός από το επιταχυνσιόμετρο και το μαγνητόμετρο ... | 41 |
| 3.6.3 Ενοποίηση των Δύο Βασικών Τμημάτων του AHRS | 42 |
| 3.6.4 Βελτιστοποιημένοι Αλγόριθμοι AHRS | 42 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.6.5 | Madgwick AHRS | 42 |
| 3.6.6 | Mahony AHRS | 45 |
| 3.7 | Φίλτρο Συνολικής διακύμανσης..... | 48 |
| 3.7.1 | Εισαγωγή | 48 |
| 3.7.2 | Συνολική διακύμανση..... | 48 |
| 3.7.3 | Φιλτράρισμα TV – Total Variance..... | 49 |
| 3.7.4 | Αλγόριθμος για Φιλτράρισμα TV..... | 49 |
| 3.7.5 | Παραδείγματα | 54 |
| 3.8 | Προτεινόμενη διάταξη Εύρεσης προσανατολισμού ενός αντικειμένου ... | 57 |
| 4 | Εκτίμηση θέσης με βάση δεδομένα επιτάχυνσης | 58 |
| 4.1 | Μέθοδοι ολοκλήρωσης | 58 |
| 4.1.1 | Αρχές ψηφιακής ολοκλήρωσης..... | 58 |
| 4.1.2 | Αρχές αναλογικής ολοκλήρωσης..... | 59 |
| 4.1.3 | Ψηφιακές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης..... | 60 |
| 4.2 | Μαθηματική προσέγγιση με διπλό ολοκληρωτή..... | 61 |
| 4.3 | Ο Ολοκληρωτής ως ένα κατωδιαβατό φίλτρο | 63 |
| 4.4 | Ολίσθηση του Επιταχυνσιόμετρου | 65 |
| 4.4.1 | Αρχικές Συνθήκες | 66 |
| 4.7 | Υψιπερατό Φίλτρο για την μείωση της ολίσθησης..... | 68 |
| 4.5 | Εκτίμηση Ταλαντωτικής κίνησης με χρήση υψιπερατών φίλτρων | 70 |
| 4.6 | Πολλαπλή baseline διόρθωση | 71 |
| 4.9 | Ανακεφαλαίωση | 72 |
| 4.10 | Πειραματικά δεδομένα σεισμών | 73 |
| 5 | Μοντελοποίηση Κτιρίου και Απόσβεση Σεισμικών Διαταραχών με τη Βοήθεια Φίλτρου Kalman..... | 75 |
| 5.1 | Επίδραση Σεισμών στα Κτίρια | 75 |
| 5.2 | Διάρκεια, ταχύτητα και μετατόπιση..... | 76 |
| 5.3 | Ενίσχυση του εδάφους..... | 77 |
| 5.4 | Φυσικές Περίοδοι | 77 |
| 5.5 | Μοντελοποίηση Συστήματος για Τριώροφο Κτίριο..... | 78 |
| 5.5.1 | Φίλτρο Kalman | 84 |
| 5.5.2 | Εφαρμογή του Φίλτρου Kalman | 90 |
| | Βιβλιογραφία | 97 |
| | Παράρτημα Α | 99 |
| | Φίλτρο Συνολικής διακύμανσης..... | 99 |
| | Κώδικας matlab | 99 |
| | Κώδικας C# | 99 |
| | Παράρτημα Β | 101 |

| | |
|---|------------|
| Υπολογισμός Quaternion μεταξύ δύο διανυσμάτων (κώδικας matlab) | 101 |
| Υπολογισμός του συζυγή ενός Quaternion (κώδικας matlab)..... | 101 |
| Υπολογισμός του γινομένου μεταξύ δύο quaternion (κώδικας matlab).... | 101 |
| Αναπαράσταση ενός quaternion σε Πίνακα στροφής (κώδικας matlab) .. | 101 |
| Παράρτημα Γ | 103 |
| Μετατροπή απο Quaternion σε Euler Angles (κώδικας C#)..... | 103 |
| Παράρτημα Δ | 104 |
| Κύριο μέρος κώδικα σε C#, υπολογισμός quaternions σύμφωνα με τις τρέχοντες τιμές απο το τον αισθητήρα IMU..... | 104 |
| Παράρτημα Ε | 107 |
| Υλοποίηση κατωδιαβατού και υπεραποκαταστάσιμου φίλτρου πρώτης τάξης (κώδικας C#) | 107 |

1 Εισαγωγή

1.1 Σκοπός Εργασίας

Ο σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η εύρεση της καλύτερης μεθόδου για την εξαγωγή σημάτων ταχύτητας και θέσης από δεδομένα επιτάχυνσης προερχόμενα από αντίστοιχους αισθητήρες.

Επίσης, περιλαμβάνει τη μελέτη ενός νέου στην βιβλιογραφία αισθητήρα (IMU) που αποτελείται από τριαξονικό επιταχυνσιόμετρο, γυροσκόπιο και μαγνητόμετρο. Ο αδρανειακός αυτός αισθητήρας δίνει έναυσμα για την αναζήτηση ενός αλγόριθμου ο οποίος θα κάνει τη βέλτιστη συγχώνευση δεδομένων των τριών παραπάνω σημάτων με σκοπό τον υπολογισμό του προσανατολισμού ενός αντικειμένου στο χώρο, χωρίς την γνώση του μοντέλου του.

Τόσο μέθοδοι που δεν λαμβάνουν υπόψη το μοντέλο, όσο και αλγόριθμοι που βασίζονται στο μοντέλο του συστήματος αναπτύσσονται και αξιολογούνται. Αναλόγως τον τύπο του προβλήματος που θέλουμε να αντιμετωπίσουμε και τα διαθέσιμα δεδομένα και εργαλεία που υπάρχουν στην διάθεσή μας προτείνεται και η αντίστοιχη μέθοδος.

Τέλος, στα πλαίσια αυτής της εργασίας, θα αναπτυχθεί η μελέτη μιας αντισεισμικής μεθόδου, η οποία περιλαμβάνει ενεργό έλεγχο και απαιτεί την εκτίμηση της απόλυτης θέσης του κτηρίου σε πραγματικό χρόνο.

1.2 Δομή Εργασίας

Η δομή της εργασίας ξεκινά με την περιγραφή των αισθητήρων που θα χρησιμοποιηθούν στην μελέτη και την έκθεση των αρχών λειτουργίας τους. Επίσης, μελετάτε ο τρόπος με τον οποίο επικοινωνούν οι αισθητήρες με τον υπολογιστή / μικροεπεξεργαστή και πως ακριβώς διαβάζονται τα δεδομένα τους. Επίσης παρέχονται πληροφορίες υλοποίησης των παραπάνω καθώς και παραδείγματα χρήσης.

Έπειτα, επικεντρωνόμαστε στην προσπάθεια εύρεσης του προσανατολισμού ενός αντικειμένου με νέες μεθόδους, οι οποίες στηρίζονται στην χρήση ενός αδρανειακού αισθητήρα IMU. Στις προσεγγίσεις αυτές χρησιμοποιούνται ήδη γνωστά πεδία όπως ελεγκτές PID και συμπληρωματικά φίλτρα, αλλά και νέες αρχιτεκτονικές αλγορίθμων οι οποίοι αξιοποιούν αποτελεσματικά τα διαφορετικά ήδη σημάτων που παρέχονται από τον αισθητήρα IMU.

Στο κεφάλαιο 4, επικεντρωνόμαστε στην εξαγωγή της απόλυτης θέσης χρησιμοποιώντας όμως μόνο τα δεδομένα επιταχυνσιόμετρου, χωρίς να ληφθεί υπόψη κάποιο μοντέλο. Οι μέθοδοι που αναλύονται ξεκινούν από την απλή διπλή ολοκλήρωση η οποία εισάγει διάφορα προβλήματα στο τελικό σήμα μέχρι την χρήση βαθυτερατών και υπηπερατών φίλτρων 1^{ης} και 2^{ης} τάξης σε διάφορες διατάξεις, ώστε να πετύχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Οι μέθοδοι στο τέλος του κεφαλαίου αξιολογούνται σύμφωνα με ήδη γνωστά πειραματικά δεδομένα σεισμών που έχουν καταγραφεί.

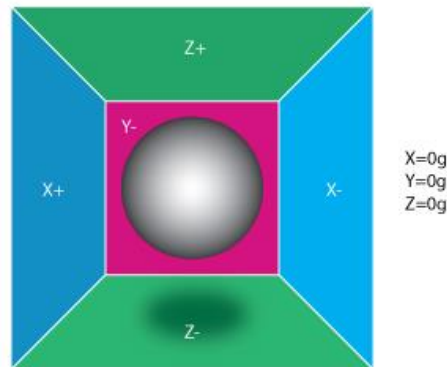
Το 5^ο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην αφαιρετική μοντελοποίηση ενός τριώροφου κτηρίου που σκοπό έχει την εκτίμηση της κατάστασης του κτιρίου (απόλυτη θέση και ταχύτητα) κατά τη διάρκεια του σεισμού. Στόχος είναι να εφαρμοστεί ενεργός έλεγχος με την χρήση ενός επενεργητή καθιστώντας το κτίριο σταθερό κατά την κίνηση του εδάφους. Δεδομένα από επιταχυνσιόμετρα χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με ένα φίλτρο Kalman στο οποίο είναι ενθυλακωμένο το μοντέλο του κτηρίου.

Τέλος, θα εκθέσουμε τα συμπεράσματά μας σχετικά με την σύγκριση των μεθόδων που χρησιμοποιούν αυτούσια δεδομένα αισθητήρων και μεθόδων που χρησιμοποιούν μοντέλα συστημάτων.

2 Κατασκευαστικό Κομμάτι

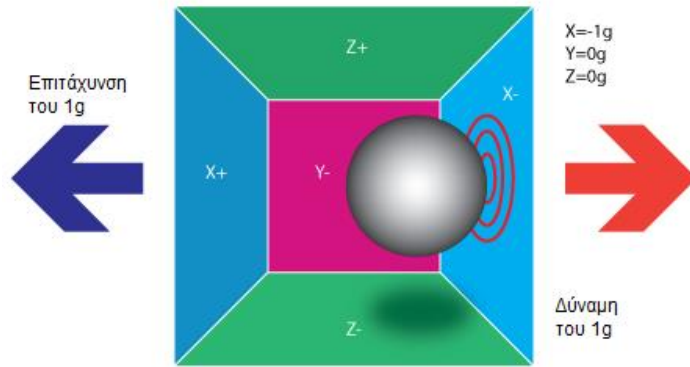
2.1 Επιταχυνσιόμετρο

Το επιταχυνσιόμετρο χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό τόσο στατικής επιτάχυνσης (όπως είναι η βαρύτητα) όσο και δυναμικής επιτάχυνσης (όπως ένα απότομο ξεκίνημα/σταμάτημα). Μία από τις πιο διαδεδομένες εφαρμογές του είναι ο εντοπισμός κλίσης (tilt-sensing). Όταν σκεφτόμαστε το επιταχυνσιόμετρο είναι συχνά χρήσιμο να το σκεφτόμαστε ως ένα κύβο με μία σφαίρα μέσα του.



Εικόνα 2.1. Αφαιρετική απεικόνιση μηχανισμού ανίχνευσης επιτάχυνσης με μια μάζα στο κέντρο του επιταχυνσιόμετρου

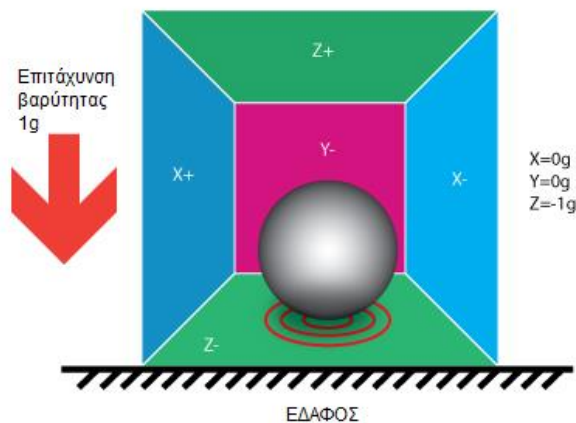
Αν τοποθετήσουμε αυτό το κουτί σε ένα πεδίο χωρίς βαρύτητα, ή χωρίς κάποιο άλλο πεδίο που μπορεί να επηρεάσει τη θέση της σφαίρας, τότε η σφαίρα απλά θα αιωρείται στο κέντρο του κουτιού. Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα έχουμε αντιστοιχίσει σε κάθε ζεύγος εδρών του κύβου τον κάθε άξονα (έχουμε αφαιρέσει τον Y+) ώστε να μπορούμε να κοιτάμε μέσα στο κουτί. Ας υποθέσουμε ότι κάθε έδρα είναι ευαίσθητη στην πίεση. Τότε, αν μετακινήσουμε το κουτί προς τα αριστερά (το επιταχύνουμε με επιτάχυνση, η σφαίρα θα χτυπήσει τον τοίχο X-. Στη συνέχεια μετρούμε την πίεση που ασκεί η σφαίρα στον τοίχο και παίρνουμε ως έξοδο την τιμή -1g στον άξονα X.



Εικόνα 2.2. Καθώς ο κύβος επιταχύνεται με επιτάχυνση 1g, η σφαίρα ασκεί στα τοιχώματα του μια αντίστοιχη μετρήσιμη δύναμη

Εδώ, πρέπει να σημειώσουμε ότι το επιταχυνσιόμετρο θα ανιχνεύσει μία κίνηση με αντίθετη φορά από το διάνυσμα επιτάχυνσης. Έτσι, το επιταχυνσιόμετρο μετρά την επιτάχυνση έμμεσα μέσω της δύναμης που ασκείται σε κάποια από τις έδρες του κύβου. Αυτή η δύναμη μπορεί να προκληθεί από την επιβαλλόμενη επιτάχυνση, αλλά όχι πάντα.

Αν μεταφέρουμε το μοντέλο μας στο πεδίο βαρύτητας της Γης, τότε η σφαίρα θα πέσει στον άξονα Z- και θα ασκήσει δύναμη 1g στην κάτω έδρα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

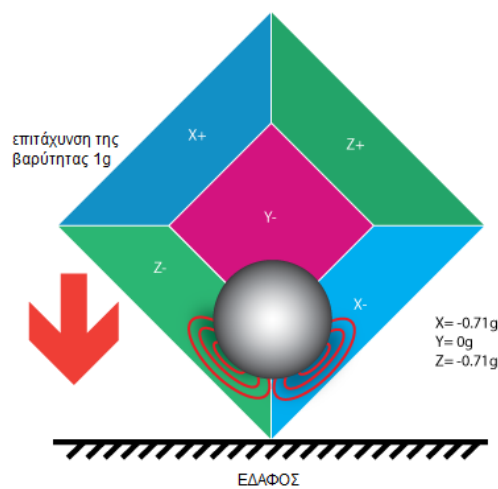


Εικόνα 2.3: Καθώς η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι η μόνη δύναμη που ασκείται η μάζα ασκεί μετρίσιμη δύναμη στη κάτω πλάκα του κύβου

Σε αυτή την περίπτωση το κουτί είναι ακίνητο, αλλά παρόλα αυτά λαμβάνουμε την τιμή -1g στον άξονα Z. Η πίεση που ασκεί η σφαίρα στην έδρα του κύβου προκλήθηκε από την δύναμη της βαρύτητας. Στην θεωρία, θα μπορούσε να είναι μια διαφορετική δύναμη, για παράδειγμα, αν φανταστούμε ότι η σφαίρα είναι μεταλλική, τότε αν τοποθετήσουμε ένα μαγνήτη δίπλα από το κουτί, θα μπορούσαμε να μετακινήσουμε τη

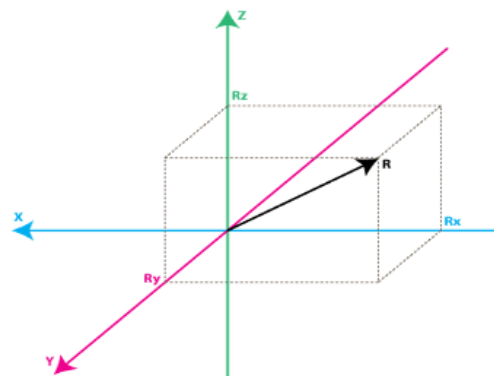
σφαίρα έτσι ώστε να χτυπήσει την άλλη έδρα του κύβου. Αυτό δείχνει ότι στην ουσία το επιταχυνσιόμετρο μετρά δύναμη και όχι επιτάχυνση. Απλά, η επιτάχυνση προκαλεί μια αδρανειακή δύναμη που ανιχνεύεται από τον μηχανισμό ανίχνευσης δυνάμεων του επιταχυνσιόμετρου.

Μέχρι τώρα αναλύσαμε την έξοδο ενός επιταχυνσιόμετρου σε έναν μόνο άξονα. Η πραγματική τιμή του τριαξονικού επιταχυνσιόμετρου προκύπτει όμως από το γεγονός ότι το επιταχυνσιόμετρο μπορεί να ανιχνεύει αδρανειακές δυνάμεις και στους τρεις άξονες. Αν στο αρχικό μας μοντέλο, περιστρέψουμε το κουτί κατά 45 μοίρες προς τα δεξιά η σφαίρα θα ακουμπήσει δυο έδρες: τους άξονες Z- και X- όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 2.4 Η δύναμη που ασκείται από την εσωτερική μάζα μοιράζεται σε 2 πλάκες λόγω του προσανατολισμού του κύβου

Παρότι, το παραπάνω παράδειγμα είναι χρήσιμο για να καταλάβουμε πως αλληλεπιδρά το επιταχυνσιόμετρο με εξωτερικές δυνάμεις, είναι πιο πρακτικό να εκτελούμε τους υπολογισμούς μας, αντιστοιχίζοντας το σύστημα συντεταγμένων στους άξονες του επιταχυνσιόμετρου και να φανταστούμε ότι το διάνυσμα της δύναμης περιστρέφεται γύρω μας.



Εικόνα 2.5 Αντιστοίχιση επιτάχυνσης με δύναμη

Στην παρούσα διπλωματική θα κατασκευάσουμε και θα καταγράψουμε δεδομένα επιτάχυνσης, δεδομένα από γυροσκόπιο και από μαγνητόμετρο. Στην διάταξη αυτή, χρησιμοποιούμε το IMU stick εννέα βαθμών ελευθερίας της sparkfun, το οποίο περιέχει τριαξονικό επιταχυνσιόμετρο, τριαξονικό γυροσκόπιο και τριαξονικό μαγνητόμετρο. Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε ένα Arduino για να επικοινωνήσει με το IMU μέσω I2C διεπαφής και με τον υπολογιστή μέσω σειριακής θύρας.

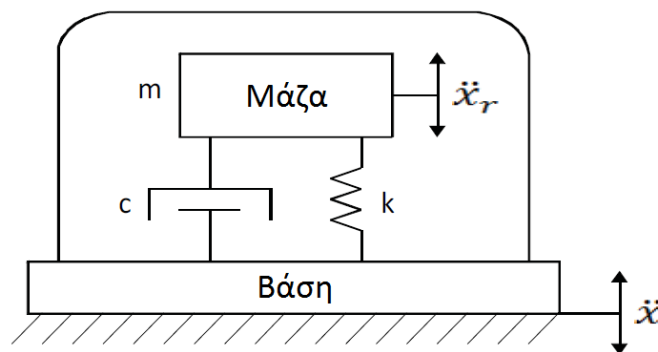
Το επιταχυνσιόμετρο που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή την εργασία είναι το ADXL345. Τα χαρακτηριστικά του απεικονίζονται στον παρακάτω πίνακα:

| | | |
|---------------------------|----------------|-----------|
| Εύρος: $\pm 2, 4, 8, 16g$ | Interface: I2C | Άξονες: 3 |
|---------------------------|----------------|-----------|

Πίνακας 2.1. με τα χαρακτηριστικά του ADXL345 επιταχυνσιόμετρου

2.1.1 Αριθμητικός Ολοκληρωτής για Μετρήσεις από Επιταχυνσιόμετρο

Το επιταχυνσιόμετρο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μηχανικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας. Μπορεί να μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας μια απλή μάζα m , συχνά αποκαλούμενη ως δραστική μάζα επιταχυνσιόμετρου, η οποία βρίσκεται στην άκρη ενός ελατηρίου σκληρότητας k και με έναν αποσβεστήρα με συντελεστή απόσβεσης c , ο οποίος βρίσκεται σε μια βάση, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 2.6 Αφαιρετική μοντελοποίηση ενός επιταχυνσιόμετρου

Εδώ το $\ddot{x}(t)$ είναι η επιτάχυνση που δρα πάνω στο επιταχυνσιόμετρο και $\ddot{x}_r(t)$ είναι η σχετική επιτάχυνση της δραστικής μάζας του επιταχυνσιόμετρου σε σχέση με την βάση.

Η αρχική δύναμη η οποία δρα πάνω στην δραστική μάζα του επιταχυνσιόμετρου δίνεται από την σχέση:

$$F = m(\ddot{x}(t) + \ddot{x}_r(t)) \quad (2.1)$$

Άρα, η εξίσωση κίνησης ενός επιταχυνσιόμετρου στο οποίο επιβάλλεται επιτάχυνση $\ddot{x}(t)$ δίνεται από τον παρακάτω τύπο, χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

$$m \ddot{x}_r(t) + c \dot{x}_r(t) + k x_r(t) = -m \ddot{x}(t) \quad (2.2)$$

Όταν το επιταχυνσιόμετρο δέχεται επιτάχυνση $\ddot{x}(t)$, μια δύναμη ίση με την μάζα επί την επιτάχυνση δρα πάνω στην δραστική μάζα, προκαλώντας την εκτροπή της. Αυτή η εκτροπή ανιχνεύεται και μετατρέπεται σε ηλεκτρικό σήμα. Αυτή την μετατροπή μπορούμε να την παριστάνουμε με ένα σταθερό κέρδος το οποίο ορίζεται ως κέρδος του επιταχυνσιόμετρου. Η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται ως εξής:

$$\ddot{x}_r(t) + 2\zeta\omega \dot{x}_r(t) + \omega^2 x_r(t) = k_a \ddot{x}(t) \quad (2.3)$$

Όπου k_a είναι το κέρδος του επιταχυνσιόμετρου, ζ είναι ο συντελεστής απόσβεσης του συστήματος και ω είναι η συχνότητα συντονισμού, όπου $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ και $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Εκτός από την επιτάχυνση, το σήμα εξόδου του επιταχυνσιόμετρου $a(t)$ περιέχει αποκλίσεις (*offset*) και θορύβους. Το επιταχυνσιόμετρο φέρει μια πόλωση (*bias*) η οποία ορίζεται ως τάση απόκλισης (*offset voltage*) ή *Og*-απόκλιση μετρούμενη κάτω από συνθήκες ακινησίας ή έλλειψης βαρύτητας (*Og*), η οποία είναι κανονικά ίση με το μισό της τροφοδοσίας ($V_{od}/2$). Αυτή η απόκλιση μπορεί να διαφέρει από τον ένα αισθητήρα στον άλλο. Οι κύριες αιτίες είναι το αισθητήριο υλικό, οι θερμοκρασιακές αλλαγές, η απόκλιση τάσης της τροφοδοσίας, η μηχανική καταπόνηση και σφάλματα αντιστάθμισης (*trim errors*). Αυτή η αλλαγή στην απόκλιση από την ιδανική τιμή ορίζεται ως σφάλμα απόκλισης (*offset error*). Η γνώση αυτού του σφάλματος απόκλισης μπορεί να βοηθήσει να απομακρύνει την πόλωση από το σήμα του επιταχυνσιόμετρου αποτελεσματικά. Το σφάλμα του επιταχυνσιόμετρου μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

$$a(t) = k_a \ddot{x}(t) + \omega(t) + d \quad (2.4)$$

όπου $\omega(t)$ είναι ο θόρυβος και η επιδράσεις των διαταραχών της μέτρησης, και το d συμβολίζει την *Og*-απόκλιση.

Μαθηματικά η ταχύτητα $\dot{x}(t)$ και η θέση $x(t)$ υπολογίζονται από την ολοκλήρωση της επιτάχυνσης $\ddot{x}(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau + \dot{x}(0) \\ x(t) &= \int_0^t \int_0^\tau \ddot{x}(\tau) d\tau dt + \dot{x}(0)t + x(0)\end{aligned}\quad (2.5)$$

Όπου $\dot{x}(0)$ και $x(0)$ είναι η αρχική ταχύτητα και θέση, αντίστοιχα.

Σε διακριτό χρόνο, η αριθμητική ολοκλήρωση γίνεται για να πάρουμε μια προσέγγιση εφαρμόζοντας την αριθμητική παρεμβολή:

$$\int_{t_0}^{t_n} \ddot{x}(t) dt \approx \sum_{i=1}^n \left[\frac{\ddot{x}(i-1) + \ddot{x}(i)}{2} \right] \Delta t \quad (2.6)$$

Υπάρχουν αρκετά είδη μεθόδων αριθμητικής παρεμβολής στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας. Ο κανόνας του τραπεζίου, ο κανόνας του Simpson, ο κανόνας του Tick και ο κανόνας του ορθογωνίου αποτελούν δημοφιλείς μεθόδους ολοκλήρωσης στο πεδίο του χρόνου. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια μέθοδος στο πεδίο της συχνότητας, το οποίο είναι ένα καλύτερο εργαλείο για τον σχεδιασμό μη-περιοδικών συναρτήσεων όπως είναι τα σήματα επιτάχυνσης. Στο πεδίο της συχνότητας ο μετασχηματισμός Fourier της επιτάχυνσης $H(\omega)$ είναι:

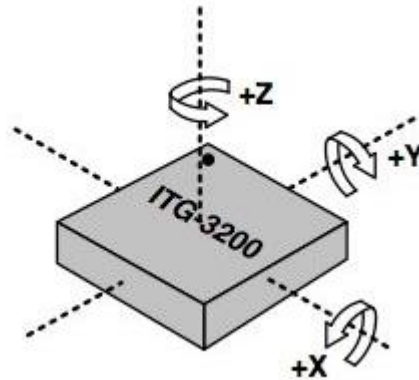
$$H(\omega) = \mathcal{F} \left\{ \ddot{x}(t) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.7)$$

Όπου \mathcal{F} είναι ο τελεστής του μετασχηματισμού Fourier. Η ταχύτητα και η θέση προκύπτουν διαιρώντας το $H(\omega)$ με $i\omega$ και $(i\omega)^2$, αντίστοιχα. Αυτά τότε μετασχηματίζονται και πάλι πίσω στο πεδίο του χρόνου με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

2.2 Γυροσκόπιο

Το γυροσκόπιο μετρά την γωνιακή ταχύτητα, δηλαδή πόσο γρήγορα περιστρέφεται ένα αντικείμενο γύρω από ένα άξονα. Αν θέλουμε να καταγράψουμε την περιστροφή ενός αντικειμένου σε κίνηση, το επιταχυνσιόμετρο μπορεί να μη μας δώσει αρκετή πληροφορία για το πώς ακριβώς είναι προσανατολισμένο το αντικείμενο. Αντίθετα με τα επιταχυνσιόμετρα, τα γυροσκόπια δεν επηρεάζονται από την ταχύτητα και έτσι αποτελούν τέλειο συμπλήρωμα το ένα για το άλλο. Συνήθως, η γωνιακή ταχύτητα μετράται σε μονάδες περιστροφής ανά λεπτό (*RPM*) ή μοίρες ανά *sec* (*%s*). Οι τρεις άξονες περιστροφής αναφέρονται ως γωνία κύλισης (*roll*), γωνία ανύψωσης (*pitch*) και γωνία στροφής (*yaw*). Άτυπα, η γωνία κύλισης εκφράζει την πλάγια περιστροφή, και η γωνία

ανύψωσης την περιστροφή μπρος ή πίσω. Η γωνία στροφής αναφέρεται στην κατεύθυνση που κινείται το αντικείμενο στο x-y επίπεδο.



Εικόνα 2.7 Αφαιρετική αναπαράσταση του τριαξονικού γυροσκοπίου ITG – 3200

Το γυροσκόπιο που χρησιμοποιούμε στην πειραματική διάταξη με την οποία θα καταγράψουμε δεδομένα, τα οποία στη συνέχεια θα τα επεξεργαστούμε με τους αλγορίθμους και τις μεθόδους που περιγράφουμε σε επόμενα κεφάλαια βρίσκεται προσαρτημένο στο IMU και είναι το *ITG-3200*. Τα χαρακτηριστικά του απεικονίζονται στον παρακάτω πίνακα:

| | |
|----------------------------------|-----------|
| Εύρος: $\pm 2000^\circ/\text{s}$ | Άξονες: 3 |
|----------------------------------|-----------|

Πίνακας 2.2. Πίνακας με τα χαρακτηριστικά του ITG-3200 γυροσκοπίου

2.2.1 Το μοντέλο του Γυροσκοπίου

Το σήμα που προέρχεται από το γυροσκόπιο μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας συνδυασμός από λευκό θόρυβο $V_{G,t}$, μια πόλωση του γυροσκοπίου b_t και την γωνιακή ταχύτητα ως ω_t

$$y_{G,t} = \omega_t + b_{gt} + V_{G,t} \quad (2.8)$$

Όπου $V_{G,t}$ είναι η διαδικασία λευκού θορύβου με διακύμανση Q_{uG}

$$V_{G,t} \sim N(0, \sigma_{g,t}^2) \quad (2.9)$$

Η πόλωση που προέρχεται από το γυροσκόπιο μοντελοποιείται ως ένα σήμα που αλλάζει με τον χρόνο. Η αλλαγή της πόλωσης οφείλεται στην αλλαγή παραμέτρων του αισθητήρα (όπως αλλαγή της θερμοκρασίας, επίπεδα μπαταρίας). Το μοντέλο είναι μια πρώτης τάξης διαδικασία *Markov* με ένα μικρό λευκό θόρυβο.

$$b_{g,t} = b_{g,t-1} + \Delta t w_{bg,t} \quad (2.10)$$

οπού ΔT είναι το χρονικό βήμα και $w_{bg,t}$ είναι ο λευκός θόρυβος με διακύμανση Q_{wg} .

$$w_{b,t} \sim N(0, \sigma_{wg,t}^2) \quad (2.11)$$

Η ισοδύναμη έκφραση για συνεχούς χρόνου σύστημα είναι η εξής:

$$\dot{b}_{g,t} = w_{bg,t} \quad (2.12)$$

Όπου το \dot{b} είναι η παράγωγος του b .

2.3 Μαγνητόμετρο

Τα μαγνητόμετρα είναι συσκευές που μετρούν μαγνητικά πεδία. Είναι ουσιαστικά ένας αισθητήρας που μετρά την πυκνότητα μαγνητικής ροής. Επειδή η πυκνότητα της μαγνητικής ροής είναι ανάλογη με την ένταση του μαγνητικού πεδίου, το μαγνητόμετρο είναι ικανό να ανιχνεύει τις αλλαγές στο πεδίο της Γης. Τα υλικά που διαστρεβλώνουν τις γραμμές μαγνητικής ροής λέμε ότι είναι μαγνητικά. Τα μαγνητόμετρα ανιχνεύουν αυτές τις παραμορφώσεις. Το μαγνητόμετρο μετρά την πυκνότητα μαγνητικής ροής στο σημείο του χώρου όπου βρίσκεται ο αισθητήρας. Η ευαισθησία του μαγνητόμετρου συνήθως μετράται σε Tesla.

Στην διάταξη μας χρησιμοποιούμε το μαγνητόμετρο το οποίο είναι ενσωματωμένο στο IMU εννέα βαθμών ελευθερίας και χρησιμοποιείται για την εύρεση του προσανατολισμού όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια.

Το μαγνητόμετρο που χρησιμοποιούμε το οποίο είναι προσαρτημένο στο IMU είναι το *HMC5883L*.

| | |
|----------------------|----------------------------|
| Τρόπος επικοινωνίας: | I2C διεπαφή |
| Τρόπος τροφοδοσίας | 2.16 – 3.6 VDC |
| Ανάλυση | 5 milli – gauss resolution |

Πίνακας 2.3 Χαρακτηριστικά του *HMC5883L* μαγνητόμετρου

2.4 Αισθητήρας IMU

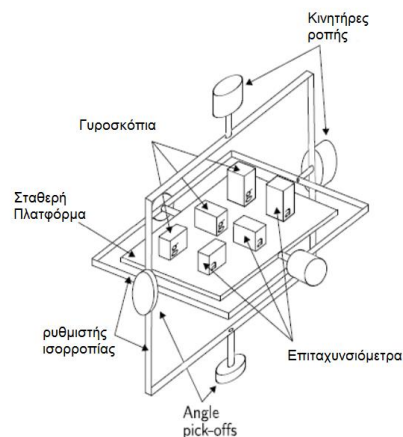
Η μονάδα IMU (Inertial Measurement Unit) είναι μια ηλεκτρονική συσκευή, η οποία μετρά και καταγράφει την ταχύτητα, τον προσανατολισμό και τις βαρυτικές δυνάμεις ενός αντικείμενου. Χρησιμοποιεί ένα συνδυασμό από επιταχυνσιόμετρα, γυροσκόπια και ενίοτε

μαγνητόμετρα. Με την επεξεργασία των σημάτων αυτής της συσκευής είναι δυνατή η εκτίμηση της θέσης και του προσανατολισμού ενός αντικειμένου, πράγμα το οποίο είναι και στόχος της παρούσας διπλωματικής.

Ο αισθητήρας αυτός ανήκει στην κατηγορία των MEMS (Microelectromechanical systems) και πρόκειται για μια μικροσκοπική κατασκευή, η οποία φέρει κινούμενα αντικείμενα μικρής κλίμακας (*nano-scale*). Οι τελευταίες εξελίξεις στην κατασκευή των μονάδων IMU έχουν καταστήσει ικανή την κατασκευή μικρών και ελαφριών συστημάτων, χαμηλής ενεργειακής κατανάλωσης.

Οι αισθητήρες αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, όπως για την εύρεση προσανατολισμού σε οχήματα, την πλοήγηση αεροσκαφών, τακτικών και στρατηγικών πυραύλων, διαστημικών σκαφών, υποβρυχίων και πλοίων.

Ο αισθητήρας IMU ανήκει στα συστήματα τύπου σταθερής πλατφόρμας. Αυτό σημαίνει ότι οι αδρανειακοί κωδικοποιητές του βρίσκονται σε μία πλατφόρμα, η οποία είναι απομονωμένη από οποιαδήποτε εξωτερική περιστροφική κίνηση. Αυτό είναι εφικτό με την χρήση πλαισίων που επιτρέπουν την ελευθερία κίνησης της πλατφόρμας και στους τρεις άξονες, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



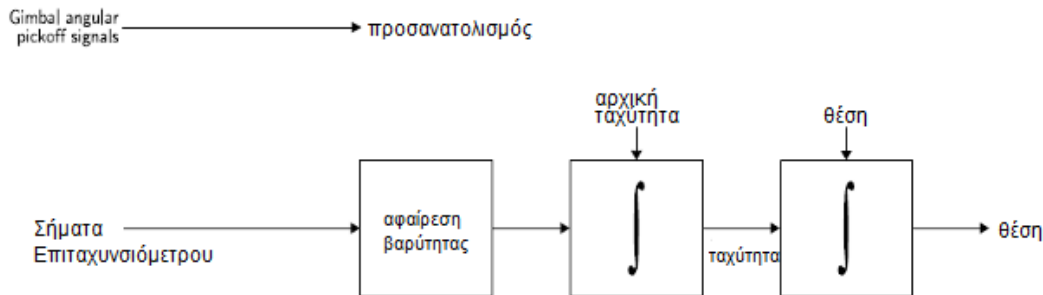
Εικόνα 2.8. Αφαιρετική απεικόνιση πλατφόρμας IMU

Τα γυροσκόπια τα οποία στηρίζονται πάνω στην πλατφόρμα ανιχνεύουν οποιαδήποτε περιστροφή της πλατφόρμας. Αυτά τα σήματα τροφοδοτούνται στους κινητήρες ροπής, οι οποίοι περιστρέφουν τα πλαίσια προκειμένου να εξουδετερώσουν τέτοιες περιστροφές. Προκειμένου να ανιχνεύσουμε τον προσανατολισμό της συσκευής μπορούμε να διαβάσουμε τις γωνίες μεταξύ γειτονικών πλαισίων.

Χονδρικά, για να υπολογίσουμε τη θέση της συσκευής ολοκληρώνουμε δύο φορές τα σήματα από τα επιταχυνσιόμετρα που προκύπτουν από τον αισθητήρα. Να

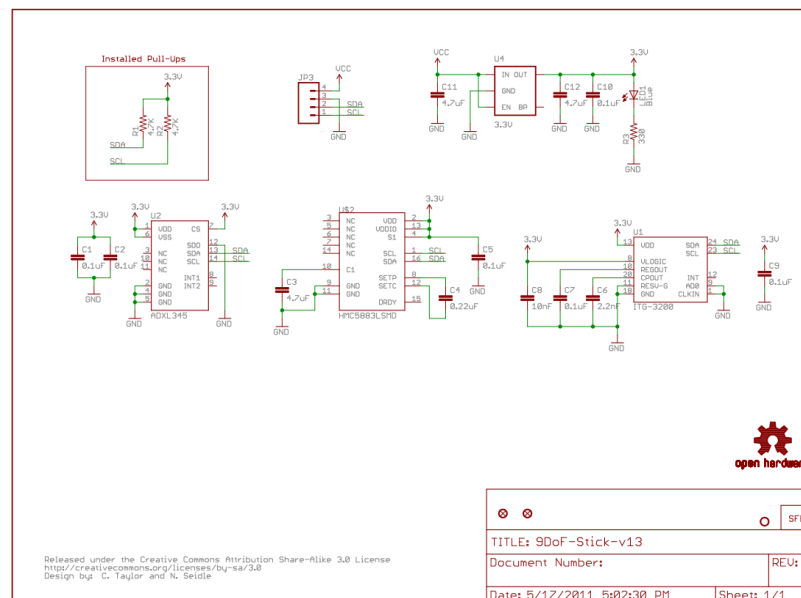
σημειώσουμε ότι είναι σημαντικό να αφαιρέσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας πριν ολοκληρώσουμε.

Ο αλγόριθμος στα συστήματα τύπου σταθερής πλατφόρμας απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 2.9 Μαθηματικός Αλγόριθμος εκτίμησης θέσης

Στα πλαίσια της διπλωματικής χρησιμοποιούμε την μονάδα IMU της SparkFun εννέα βαθμών ελευθερίας (μοντέλο IMU Sensor Stick SEN – 10724) το οποίο διαθέτει επιταχυνσιόμετρο, γυροσκόπιο και μαγνητόμετρο, το σχηματικό διάγραμμα του οποίου παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 2.10 Σχηματικό διάγραμμα μονάδας IMU (SEN – 10724)

Στη συνέχεια θα περιγραφούν με λεπτομέρεια και παραδείγματα ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιήθηκε η χρήση του IMU, καθώς και το διάβασμα των τιμών όλων των ενσωματωμένων αισθητήρων που περιέχει. Την διεπαφή I2C η οποία είναι η διεπαφή επικοινωνίας μεταξύ του IMU και του Arduino – ένας μικροεπεξεργαστής που μας επιτρέπει την διασύνδεση και χρήση σε χαμηλό επίπεδο με διάφορα περιφερειακά συστήματα, καθώς και την καταγραφή σε τελικό στάδιο, σε πραγματικό χρόνο των

δεδομένων από το Arduino στον υπολογιστή για μετέπειτα επεξεργασία ή επεξεργασία on-line

2.5 Διεπαφή I2C

Η επικοινωνία με το IMU επιτυγχάνεται μέσω μιας διεπαφής τύπου *I2C*. Η διεπαφή αυτή χρειάζεται 2 κανάλια όπως και στη σειριακή περίπτωση, αλλά αυτά τα δύο κανάλια μπορούν να υποστηρίξουν έως και 1008 *slave* συσκευές. Επίσης η εν λόγω διεπαφή μπορεί να υποστηρίξει ένα *multi – master* σύστημα επιτρέποντας έτσι παραπάνω από μια συσκευή να επικοινωνεί με όλες τις άλλες χρησιμοποιώντας τον δίαυλο επικοινωνίας.

Οι ρυθμοί με τους οποίους γίνεται η επικοινωνία είναι είτε στα 100kHz είτε στα 400 kHz.

Κάθε δίαυλος επικοινωνίας του πρωτοκόλλου αυτού αποτελείται από δύο ειδών σήματα, το *SCL* (clock signal) και το *SDA* (data signal). Το σήμα του *clock* παράγεται πάντα από την τρέχουσα *master* συσκευή. Στη περίπτωση μας, η συσκευή που παίζει το ρόλο του *master* είναι το *Arduino* και η συσκευή που παίζει το ρόλο του *slave* είναι το *IMU*.

Όσον αφορά την υλοποίηση το *Arduino* το οποίο χρησιμοποιείται για την επικοινωνία με το *IMU*, διαθέτει την βιβλιοθήκη *Wire* η οποία περιλαμβάνει όλη την πολυπλοκότητα για την επικοινωνία των δύο αυτών συσκευών.

2.6 Βιβλιοθήκη Wire

Η βιβλιοθήκη θα μας βοηθήσει να επικοινωνήσουμε μέσω *I2C* διεπαφής με το *IMU*. Η βιβλιοθήκη αυτή υπάρχει προεγκατεστημένη στο προγραμματιστικό περιβάλλον του *Arduino* (*Arduino IDE*), το οποίο χρησιμοποιείται ως ο κύριος επεξεργαστής για το σύστημά μας, και δεν υπάρχει ανάγκη να την εγκαταστήσουμε ξεχωριστά. Για να χρησιμοποιήσουμε μέσα στον κώδικα τη βιβλιοθήκη αυτή θα πρέπει να δηλώσουμε την βιβλιοθήκη στην αρχή του κώδικα ως εξής:

```
#include <Wire.h>
```

Μερικές από τις πιο σημαντικές συναρτήσεις που θα χρησιμοποιήσουμε για την επικοινωνία είναι οι εξής:

- *Wire.begin()*: Η συνάρτηση αυτή αρχικοποιεί την βιβλιοθήκη. Χρησιμοποιείται μέσα στην δεσμευμένη συνάρτηση *setup()* του *Arduino*, όπως χρησιμοποιείται και η *Serial.begin()*
- *Wire.requestFrom()*: Η συνάρτηση αυτή ζητά δεδομένα από την *I2C* συσκευή (στην περίπτωση μας το *IMU*). Αυτά τα δεδομένα μετά μπορούν να διαβαστούν με την *Wire.receive()* συνάρτηση.
- *Wire.receive()*: Με αυτή τη συνάρτηση διαβάζουμε ένα byte από δεδομένα από την *I2C* συσκευή.

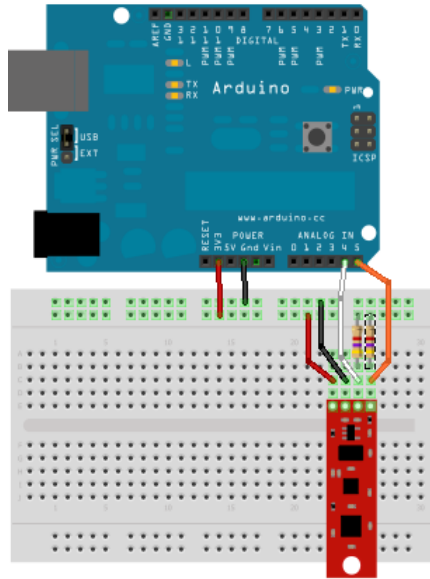
2.7 Αξιοποίηση της μονάδας IMU με χρήση Arduino

Ένας εύκολος και γρήγορος τρόπος προτυποποίησης και αξιοποίησης του αισθητήρα *IMU* είναι με χρήση *Arduino*. Το *Arduino* είναι μια χαμηλού κόστους προγραμματιζόμενη πλακέτα η οποία καθιστά εύκολη την χρήση χαμηλού επιπέδου συσκευών (όπως αισθητήρες, αντιστάσεις και άλλες σειριακές συσκευές), καθώς και τον έλεγχο διάφορων επενεργητών και περιφερειακών όπως κινητήρων, LEDs κ.α.

2.7 Συνδεσμολογία

Για να χρησιμοποιήσουμε το *IMU* αισθητήρα με το *Arduino* θα πρέπει να κάνουμε τις εξής συνδέσεις

1. IMU stick VCC → Arduino 3.3V
2. IMU stick GND → Arduino GND
3. IMU stick SDA → Arduino A4
4. IMU stick SCL → Arduino A5



Εικόνα 2.11 Βασική συνδεσμολογία μεταξύ Arduino και IMU αισθητήρα

2.8 Διάβασμα δεδομένων από τον αισθητήρα IMU

Για να διαβάσουμε ακολουθίες δεδομένων από το *IMU* θα πρέπει:

1. να γνωρίζουμε τις 7-bit *I2C* διευθύνσεις για κάθε ένα αισθητήρα στο *IMU* (επιταχυνσιόμετρο, γυροσκόπιο, μαγνητόμετρο).
2. να γνωρίζουμε τις διευθύνσεις για κάθε καταχωρητή που χρειαζόμαστε να προσπελάσουμε για κάθε αισθητήρα.
3. να γνωρίζουμε πως αρχικοποιήσουμε τους αισθητήρες, έτσι ώστε να βεβαιωθούμε ότι καταγράφουν δεδομένα, καθώς και να τους παραμετροποιήσουμε όπως χρειαζόμαστε.
4. να ξεκινήσουμε την δειγματοληψία των δεδομένων από τους αισθητήρες.

Αρχικά, μπορούμε να ξεκινήσουμε δημιουργώντας δύο συναρτήσεις: μια για διάβασμα και μια για γράψιμο οι οποίες θα είναι πολύ βασικές και θα χρησιμοποιούνται σε διάφορα σημεία στον κώδικα. Έτσι λοιπόν, για να διαβάσουμε από μια διεύθυνση *I2C* θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω συνάρτηση:

```
1 void i2c_read(int address, byte reg, int count, byte* data) {  
2   int i = 0;  
3  
4   // στέλνουμε την διεύθυνση του καταχωρητή  
5   Wire.beginTransmission(address);  
6   Wire.send(reg);  
7   Wire.endTransmission();  
8   // Συνδεόμαστε με τη συσκευή και ζητάμε δεδομένα  
9   Wire.beginTransmission(address);
```

```

10 Wire.requestFrom(address, count);
11 while(Wire.available()) // το IMU μπορεί να στείλει λιγότερα δεδομένα {
12     char c = Wire.receive(); // διαβάζουμε ένα byte ως έναν χαρακτήρα
13     data[i] = c;
14     i++;
15 }
16 Wire.endTransmission();
17 }

```

Όπως βλέπουμε μέσα της η συνάρτηση `i2c_read()` έχει ενθουλακώσει την πολυπλοκότητα της βιβλιοθήκης `Wire`, επιτρέποντας έτσι στο υπόλοιπο πρόγραμμα να μην χρειάζεται να γνωρίζει αυτές τις λεπτομέρειες. Έπειτα, για να γράψουμε δεδομένα σε ένα `I2C` κανάλι χρησιμοποιούμε την παρακάτω εντολή:

```

1 void i2c_write(int address, byte reg, byte data) {
2     // Στέλνουμε την διεύθυνση που θα γραφούν τα δεδομένα
3     Wire.beginTransmission(address);
4     Wire.send(reg);
5     // Συνδεόμαστε με τη συσκευή και στέλνουμε δεδομένα
6     Wire.send(data);
7     Wire.endTransmission();
8 }

```

Εφόσον έχουμε στη διάθεσή μας τις προαναφερθείσες συναρτήσεις μπορούμε να περάσουμε στις απαιτήσεις που έχουν συγκεκριμένα οι αισθητήρες του *IMU*. Όπως αναφέρεται και στην ενότητα 2.9, έχουμε τα εξής μοντέλα αισθητήρων στο *IMU*:

- *ADXL345* επιταχυνσιόμετρο
- *ITG-3200* γυροσκόπιο
- *HMC5843* μαγνητόμετρο

2.8.1 ADXL345 Επιταχυνσιόμετρο

Το επιταχυνσιόμετρο *ADXL345* είναι ένα μικρό λεπτό, χαμηλής κατανάλωσης, τριαξονικό επιταχυνσιόμετρο. Η συσκευή αυτή μετρά επιτάχυνση με την μικρότερη κλίμακα μέτρησης να είναι τα $3g$.

Σύμφωνα και με το σχεδιάγραμμα κυκλώματος της εικόνα 2.9, για το *ADXL345* επιταχυνσιόμετρο θα έχουμε την διεύθυνση `0xA6`. Η βιβλιοθήκη *Wire* απλά θέλει μια 7-bit διεύθυνση, αρά την ολισθαίνουμε προς τα δεξιά έχοντας την παρακάτω γραμμή κώδικα στην αρχή του προγράμματός μας:

```

1 #define ADXL345_ADDRESS (0xA6 >> 1)

```


Επίσης υπάρχουν ακόμα κάποιοι καταχωρητές που θα πρέπει να προσπελάσουμε, έχοντας τον παρακάτω κώδικα

```
1 #define ADXL345_REGISTER_XLSB (0x32)
2 // θα χρειαστούμε να έχουμε έλεγχο του adxl345
3 // για να το ξεκινήσουμε να δειγματοληπούμε
4 #define ADXL_REGISTER_PWRCTL (0x2D)
5 #define ADXL_PWRCTL_MEASURE (1 << 3)
```

Αρα καταλήγουμε στην τελική συνάρτηση αρχικοποίησης για τον *ADXL345* η οποία είναι η παρακάτω:

```
1 void init_adxl345() {
2   byte data = 0;
3   i2c_write(ADXL345_ADDRESS, ADXL_REGISTER_PWRCTL, ADXL_PWRCTL_MEASURE);
4   i2c_read(ADXL345_ADDRESS, ADXL_REGISTER_PWRCTL, 1, &data);
5   Serial.println((unsigned int)data);
6 }
```

Για να διαβάσουμε δεδομένα από τον αισθητήρα αυτόν θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω κώδικα.

```
1 int accelerometer_data[3];
2
3 void read_adxl345() {
4   byte bytes[6];
5   memset(bytes,0,6);
6
7   //διαβάζουμε 6 bytes απο τον ADXL345
8   i2c_read(ADXL345_ADDRESS, ADXL345_REGISTER_XLSB, 6, bytes);
9
10  // αναδιατάσσουμε τα bytes σύμφωνα με το πρωτόκολλο
11  for (int i=0;i<3;++i) {
12    accelerometer_data[i] = (int)bytes[2*i] + (((int)bytes[2*i + 1]) << 8);
13  }
14 }
```

Παρατηρούμε ότι τα δεδομένα έρχονται ανά ομάδες (chunks) των 6 bytes, το λιγότερο σημαντικό (*least significant*) byte του X, το περισσότερο σημαντικό (*most significant*) byte του X, το ίδιο και για το Y και για το Z.

2.8.2 ITG-3200 Γυροσκόπιο

Μελετώντας πάλι το κυκλωματικό διάγραμμα στην εικόνα 2.9, βρίσκουμε ότι ο *ITG-3200* έχει μια 8-bit διεύθυνση, την 0xD0. Επίσης θα πρέπει να θέσουμε κατά την αρχικοποίηση του την κλίμακα των δεδομένων καθώς και ένα ψηφιακό low pass φίλτρο.

Έτσι έχουμε τις παρακάτω δηλώσεις:

```
1 #define ITG3200_ADDRESS (0xD0 >> 1)
2 // ζητάμε 6 bytes από αυτή τη διεύθυνση
3 #define ITG3200_REGISTER_XMSB (0x1D)
4 #define ITG3200_REGISTER_DLPF_FS (0x16)
5 #define ITG3200_FULLSCALE (0x03 << 3)
6 #define ITG3200_42HZ (0x03)
```

Οπότε, αρχικοποιούμε τον αισθητήρα ως εξής:

```
1 void init_itg3200() {
2     byte data = 0;
3     //θέτουμε το lowpass φίλτρο στα 42 Hz
4     // και την κλίμακα σε "Full Scale"
5     i2c_write(ITG3200_ADDRESS, ITG3200_REGISTER_DLPF_FS, ITG3200_FULLSCALE | ITG3200_42HZ);
6     i2c_read(ITG3200_ADDRESS, ITG3200_REGISTER_DLPF_FS, 1, &data);
7 }
```

Έχοντας διαφορετική σειρά δεδομένων με τα λιγότερο και περισσότερο σημαντικά byte από τον *ADXL345*, θα έχουμε την παρακάτω συνάρτηση με την οποία θα διαβάζουμε δεδομένα από το *ITG-3200*

```
1 int gyro_data[3];
2
3 void read_itg3200() {
4     byte bytes[6];
5     memset(bytes, 0, 6);
6     // διαβάζουμε 6 bytes από τον ITG3200
7     i2c_read(ITG3200_ADDRESS, ITG3200_REGISTER_XMSB, 6, bytes);
8     // αναδιατάσσουμε τα bytes
9     for (int i=0; i<3; ++i) {
10        gyro_data[i] = (int)bytes[2*i + 1] + (((int)bytes[2*i]) << 8);
11    }
12 }
```

2.8.3 HMC5843 Μαγνητόμετρο

Με την ίδια προσέγγιση όπως στα προηγούμενα δύο μοντέλα, έχουμε τις παρακάτω δηλώσεις για το μαγνητόμετρο. Θα πρέπει να προσέξουμε να αλλάξουμε την προκαθορισμένη λειτουργία του σε “*continuous measurement*” από “*single measurement*”, έτσι ώστε να παίρνουμε σε πραγματικό χρόνο νέα δεδομένα.

```

1 #define HMC5843_ADDRESS (0x3C >> 1)
2 #define HMC5843_REGISTER_XMSB (0x03)
3 #define HMC5843_REGISTER_MEASMODE (0x02)
4 #define HMC5843_MEASMODE_CONT (0x00)

```

Κατά την αρχικοποίηση απλά αλλάζουμε το mode σε “*continuous measurement*”

```

1 void init_hmc5843() {
2   byte data = 0;
3   //θέτουμε το mode σε continuous measurement
4   i2c_write(HMC5843_ADDRESS, HMC5843_REGISTER_MEASMODE, HMC5843_MEASMODE_CONT);
5   i2c_read(HMC5843_ADDRESS, HMC5843_REGISTER_MEASMODE, 1, &data);
6 }

```

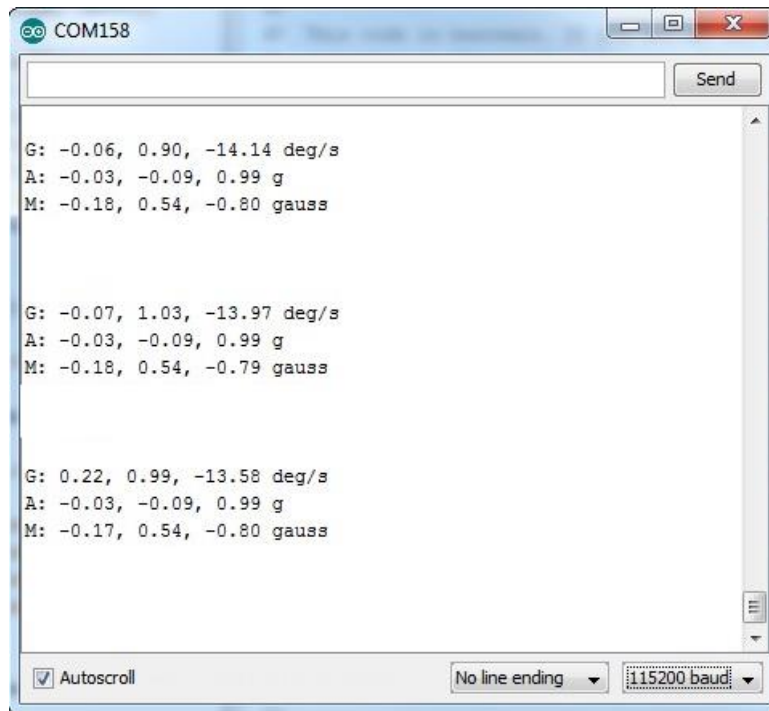
Με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που διαβάσαμε δεδομένα από το *ITG-3200* θα έχουμε τον παρακάτω κώδικα για να διαβάσουμε δεδομένα από το *HMC5843*:

```

1 int magnetometer_data[3];
2 void read_itg3200() {
3   byte bytes[6];
4   memset(bytes,0,6);
5   // διαβάζουμε 6 bytes απο τον HMC5843
6   i2c_read(HMC5843_ADDRESS, HMC5843_REGISTER_XMSB, 6, bytes);
7   //αναδιατάσσουμε τα bytes
8   for (int i=0;i<3;++i) {
9     magnetometer_data[i] = (int)bytes[2*i + 1] + (((int)bytes[2*i]) << 8);
10  }
11 }

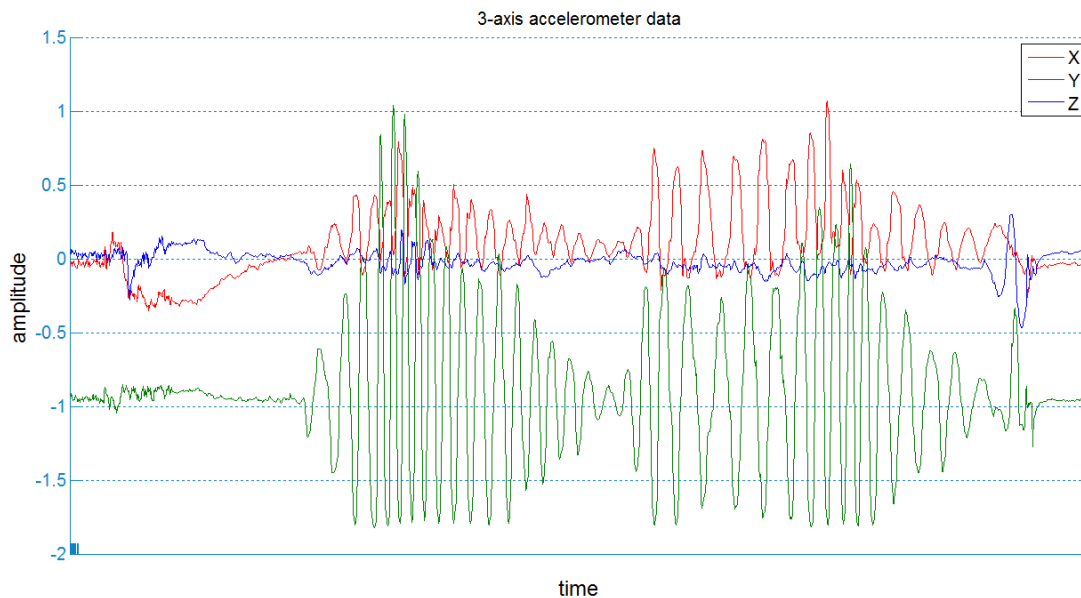
```

Τέλος, παραθέτουμε ένα παράδειγμα χρήσης – διαβάσματος τιμών (raw values) του αισθητήρα, όπου εμφανίζονται στο *serial monitor* του προγραμματιστικού περιβάλλοντος του *Arduino* (*Arduino IDE*).



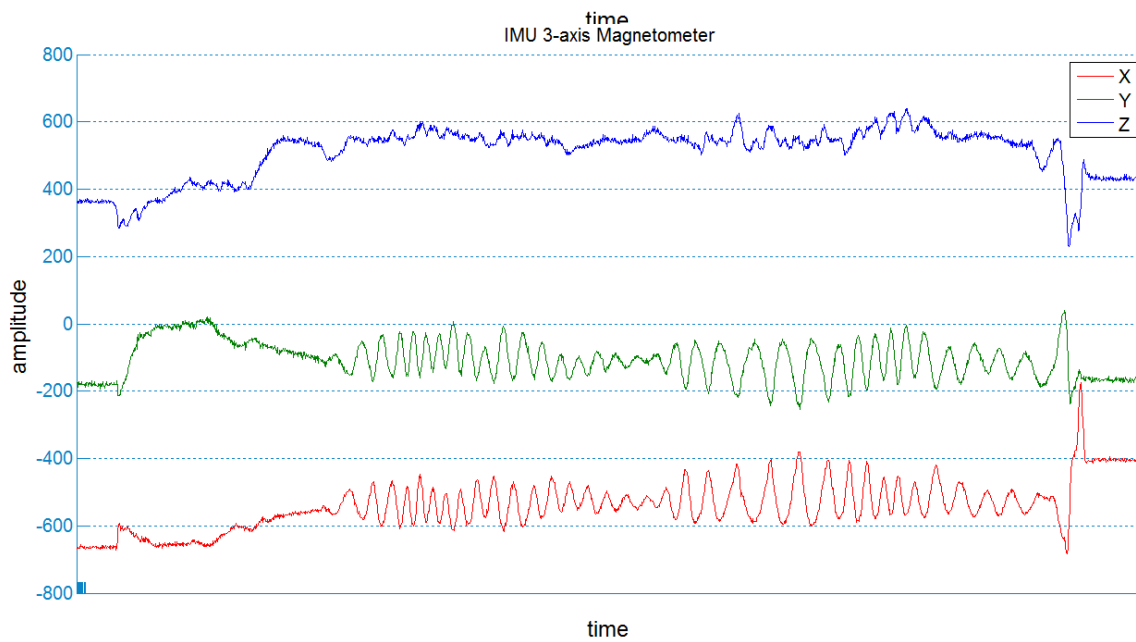
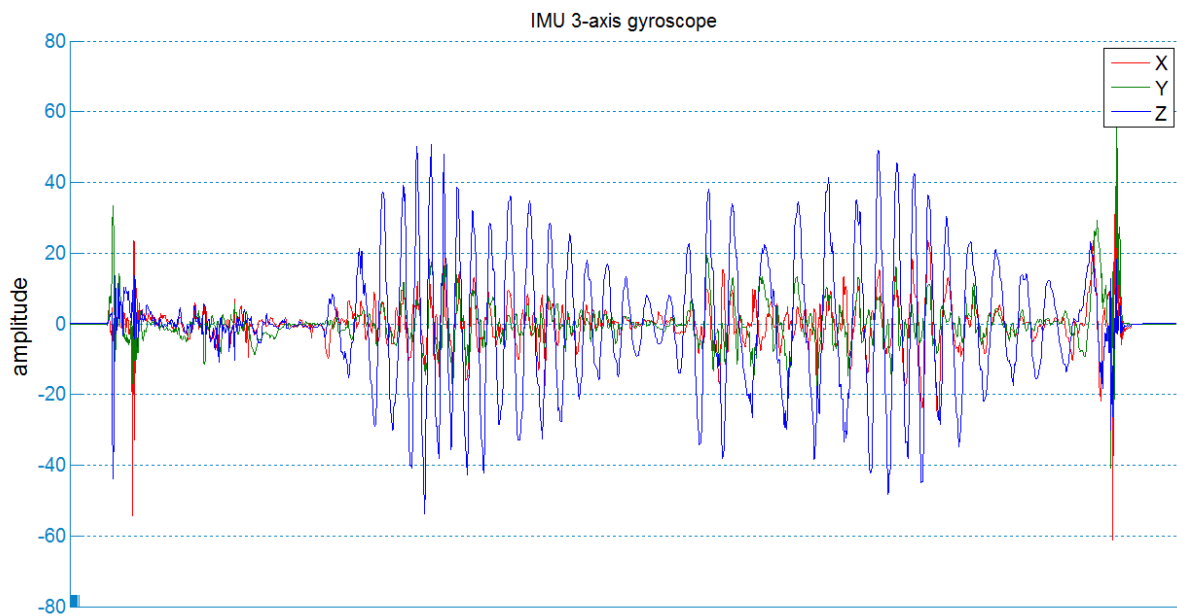
Εικόνα 2.12 Στο στιγμιότυπο εμφανίζονται οι τριάδες τιμών (για τους τρεις άξονες) των τριών αισθητήρων που φέρει το IMU. Με G έχουμε το Gyroscope, με A το Accelerometer και με M το Magnetometer.

Παρακάτω εμφανίζονται δεδομένα καταγραφής από το επιταχυνσιόμετρο, το



γυροσκόπιο και το μαγνητόμετρο αντίστοιχα.

Εικόνα 2.13 Καταγεγραμμένα δεδομένα από το ADXL345 επιταχυνσιόμετρο. Το πλάτος είναι σε m/s^2



Εικόνα 2.13 Καταγεγραμμένα δεδομένα από το ITG-3200 γυροσκόπιο. Το πλάτος είναι σε rad/sec
 Εικόνα 2.14 Καταγεγραμμένα δεδομένα από το HMC5843 μαγνητόμετρο. Το πλάτος είναι σε Tesla

2 Προσδιορισμός Προσανατολισμού

Οι αδρανειακοί αισθητήρες είναι αρκετά σημαντικοί και στον τομέα καταγραφής θέσης σωμάτων σε πραγματικό χρόνο. Όπως αναφέραμε και στο δεύτερο κεφάλαιο, είναι σχετικά χαμηλού κόστους, μικρού μεγέθους, αρκετά ελαφροί. Επίσης διαθέτουν επιπρόσθετα στοιχεία τα οποία καθιστούν αυτούς τους αισθητήρες ιδιαίτερα εύχρηστους. Οι ρυθμοί δειγματοληψίας φτάνουν σε ικανοποιητικά επίπεδα της τάξης των χιλιάδων δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο. Παρόλα τα πλεονεκτήματα, παρουσιάζουν ένα σημαντικό μειονέκτημα το οποίο δεν είναι εύκολο να λυθεί, αυτό της ολίσθησης (*drift*). Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για τους οποίους υπάρχει ολίσθηση σε ένα σύστημα, το οποίο εξάγει προσανατολισμό ολοκληρώνοντας την γωνιακή ταχύτητα από το γυροσκόπιο που διαθέτει:

- Μια σταθερή πόλωση (*constant bias*) $\delta\omega$ - Καθώς ολοκληρώνονται τα δείγματα ένα σταθερό σφάλμα αυξάνεται $\theta_i \delta\omega \cdot t$
- Θερμο – μηχανικός λευκός θόρυβος u_i
- Έλλειψη επαρκούς καλιμπραρίσματος (*calibration*) – Έχει ως αποτέλεσμα σφάλματα κατά την μέτρηση.
- Η μη σταθερότητα της πόλωσης – Με την έννοια αυτή εννοούμε ότι κατά την χρήση ο αισθητήρας μπορεί να μην έχει σταθερή πόλωση, αλλά κάθε φορά να υπάρχει μια διαφορετική τιμή για αυτήν (*Flicker Noise / Bias Stability*). Το φαινόμενο αυτό μοντελοποιείται συνήθως σαν μια *Gauss-Markov* διαδικασία.

3.1 Εισαγωγή

Για να βρούμε τον προσανατολισμό ενός αντικειμένου, θα πρέπει αρχικά να βρούμε μια ορθή αναπαράσταση του ίδιου του προσανατολισμού. Αρχικά, θα ξεκινήσουμε με την βοήθεια των γωνιών Euler και στη συνέχεια θα τις αντικαταστήσουμε από τα Quaternions. Έπειτα, θα πρέπει να συνδυάσουμε όλα τα διαθέσιμα σήματα που μας δίνονται από τον αισθητήρα IMU (επιτάχυνσης, γωνιακής ταχύτητας και γωνιακής θέσης) και με τη βοήθεια κατάλληλων αλγορίθμων να εξάγουμε σε πραγματικό χρόνο τον προσανατολισμό ενός αντικειμένου ως τρεις διαφορετικές γωνίες, μια για κάθε άξονα.

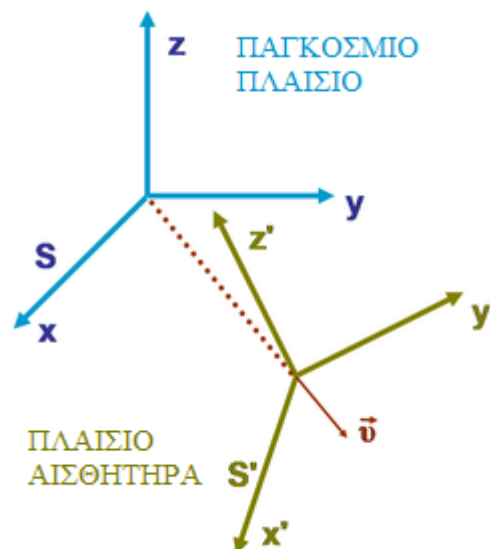
Αρχικά, θα αναλύσουμε τον αλγόριθμο του πίνακα στροφής (DCM, Direction Cosine Matrix), όπου χρησιμοποιούμε γωνίες Euler και έπειτα θα περάσουμε σε πρόσφατες μελέτες, όπου θα αναλύσουμε τα συστήματα προπορείας και θέσης, τα λεγόμενα

συστήματα AHRS. Για τα παραπάνω συστήματα παρατίθενται τμήματα κώδικα στα παραρτήματα Β, Γ, Δ, όπου παρουσιάζεται η υλοποίηση διάφορων τμημάτων τους.

3.2 Euler angles

Για να έχουμε μια σωστή εκτίμηση για τον προσανατολισμό ενός αντικειμένου, απαιτείται μια ακριβής εκτίμηση και της περιστροφής. Η απεικόνιση της περιστροφής μπορεί να γίνει μέσα από τις γωνίες Euler.

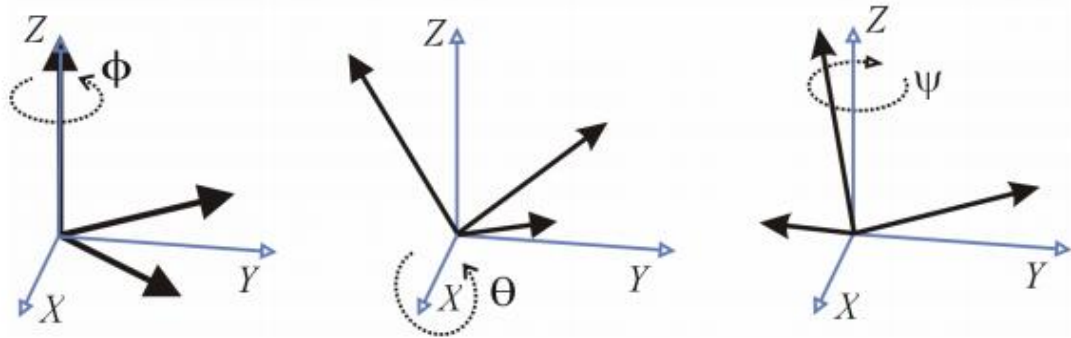
Σχετικά με την μελέτη περιστροφής ενός αντικειμένου υπάρχουν 3 συστήματα αναφοράς: το πλαίσιο αναφοράς του υπό μελέτη σώματος στο οποίο κινείται και περιγράφεται η επιτάχυνσή του, το πλαίσιο αναφοράς του αισθητήρα, όπου περιγράφεται η κίνηση του αισθητήρα, και το παγκόσμιο πλαίσιο (global frame) ή αλλιώς πλαίσιο αναφοράς της Γης, όπου παρουσιάζονται η γραμμική επιτάχυνση και ο ρυθμός της περιστροφής. Εάν ο αισθητήρας είναι τοποθετημένος πάνω στο αντικείμενο, τότε το πλαίσιο του σώματος και το πλαίσιο του αισθητήρα είναι ίδια. Οπότε το πλαίσιο του σώματος μπορεί να αγνοηθεί. Το πλαίσιο αναφοράς του αισθητήρα και το παγκόσμιο πλαίσιο αναφοράς είναι δύο συστήματα αναφοράς όπου αντιπροσωπεύονται τα δεδομένα του αισθητήρα. Επειδή στην περίπτωση μας όλα τα δεδομένα συλλέγονται από τον αισθητήρα, τα δεδομένα περιγράφονται σε σχέση με το πλαίσιο αναφοράς του αισθητήρα. Όμως μας ενδιαφέρει η θέση και αυτή περιγράφεται σε σχέση με το πλαίσιο αναφοράς της Γης. Άρα, θα πρέπει να περιστρέψουμε τα δεδομένα στο παγκόσμιο πλαίσιο αναφοράς.



Εικόνα 3.1: Τα θεωρούμενα συστήματα αναφοράς

Η παραπάνω εικόνα απεικονίζει δύο συστήματα αναφοράς που αφορούν το πρόβλημά μας. Το πάνω αριστερά σύστημα αναφοράς συμβολίζει το πλαίσιο της Γης. Το

σύστημα αναφοράς κάτω δεξιά συμβολίζει το πλαίσιο του αισθητήρα καθώς και το πλαίσιο του σώματος. Η περιστροφή γύρω από τους άξονες X, Y, Z ονομάζεται αντίστοιχα γωνία κύλισης (*roll*), γωνία ανύψωσης (*pitch*) και γωνία στροφής (*yaw*).



Εικόνα 3.2: Γωνίες Euler

Οι γωνίες Euler είναι ένας τρόπος για να αντιπροσωπεύσουμε τον προσανατολισμό στο Ειδικό Ορθογώνιο Γκρουπ SO(3). Οι γωνίες Euler είναι τρεις γωνίες που αντιστοιχούν σε μια ακολουθία από τρεις στοιχειακές περιστροφές αντίστοιχα, δηλαδή περιστροφές γύρω από τους άξονες ενός συστήματος αναφοράς. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να αρχικοποιήσουμε ένα σετ από γωνίες Euler. Κατάλληλες γωνίες Euler περιλαμβάνουν Z-X-Z (γωνία περιστροφής γύρω από τον άξονα Z, γωνία περιστροφής γύρω από τον άξονα X και γωνία περιστροφής γύρω από τον άξονα Z ξανά), X-Y-X, Y-Z-Y, Z-Y-Z, X-Z-X, Y-X-Y. Υπάρχουν επίσης και οι γωνίες Tait–Bryan που περιλαμβάνουν X-Y-Z, Y-Z-X, Z-X-Y, X-Z-Y, Z-Y-X, Y-X-Z. Για παράδειγμα, η εικόνα παραπάνω δείχνει την Z-X-Z κατάσταση, όπου ϕ , θ , και ψ είναι οι γωνίες που περιστρέφονται γύρω από τον Z άξονα, X άξονα και Z άξονα ξανά αντίστοιχα. Οι Euler γωνίες αντιπροσωπεύονται ως εξής:

$$r_{zyx} = (\phi \quad \theta \quad \psi)^T \quad (3.1)$$

Εάν μετατρέψουμε αυτό σε πίνακα περιστροφής, μια αυθαίρετη περιστροφή στο SO(3) έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} R_{zyx}(\phi, \theta, \psi) &= R_z(\psi)R_x(\theta)R_z(\phi) \\ &= \begin{pmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\Theta c\Psi & s\Phi s\Theta c\Psi - c\Phi s\Psi & c\Phi s\Theta c\Psi + s\Phi s\Psi \\ c\Theta s\Psi & s\Phi s\Theta s\Psi - c\Phi c\Psi & c\Phi s\Theta s\Psi - s\Phi c\Psi \\ -s\Theta & s\Phi c\Theta & c\Phi c\Theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

όπου c συμβολίζουμε το cos και όπου s συμβολίζουμε το sin.

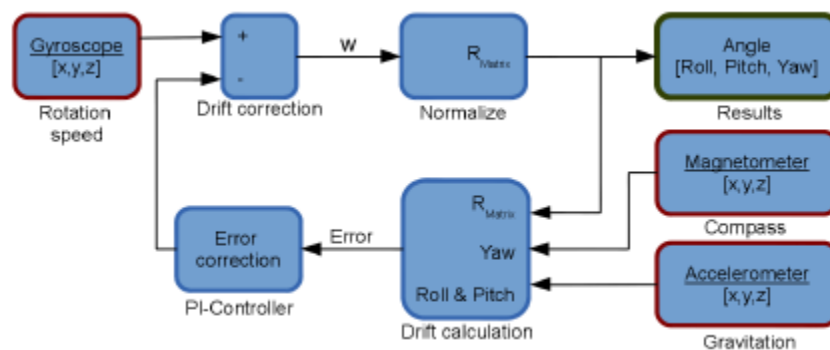
Οι γωνίες Euler υποφέρουν από ένα φαινόμενο το οποίο αποκαλείται κλείδωμα ευθυγράμμισης (*Gimbal Lock*), το οποίο είναι η απώλεια ενός βαθμού ελευθερίας όταν δύο από τους τρεις άξονες είναι ευθυγραμμισμένοι. Αυτό σημαίνει ότι, και οι τρεις αναρτήρες μπορούν να περιστρέφονται γύρω από τους άξονές τους. Αλλά επειδή δύο από τους τρεις άξονες είναι ευθυγραμμισμένοι, δεν υπάρχει αναρτήρας διαθέσιμος για να εξυπηρετήσει την περιστροφή γύρω από τον ένα άξονα του πλαισίου της Γης. Ακόμα και αν το φαινόμενο Gimbal Lock αντιμετωπιστεί μέσα από μέθοδο μετατροπής πινάκων, η εκπροσώπηση σε γωνίες Euler είναι υπολογιστικά ακριβή.

3.3 Αλγόριθμος του πίνακα στροφής DCM

Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο, ο οποίος στηρίζεται στις γωνίες Euler, τον αλγόριθμο του πίνακα στροφής DCM (*Direction Cosine Matrix, DCM*). Ο αλγόριθμος του Πινάκα Στροφής αναπτύχθηκε προκειμένου να είναι επιτυχής η συγχώνευση των δεδομένων από επιταχυνσιόμετρο, γυροσκόπιο και μαγνητόμετρο. Στο παράδειγμά μας, θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον αλγόριθμο για την συγχώνευση δεδομένων από αισθητήρα IMU με εννιά βαθμούς ελευθερίας (δεδομένα από τριαξονικό επιταχυνσιόμετρο, τριαξονικό γυροσκόπιο και τριαξονικό μαγνητόμετρο) και των δεδομένων των κωδικοποιητών (*encoders*) που φέρει το υπό μελέτη σώμα.

Ο αλγόριθμος του Πινάκα Στροφής συγχωνεύει και φιλτράρει τα δεδομένα των τριών αισθητήρων, αλλά λαμβάνει υπόψη το θόρυβο των αισθητήρων και τα αριθμητικά σφάλματα κατά τη διάρκεια των υπολογισμών. Ουσιαστικά, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τα δεδομένα του επιταχυνσιόμετρου προκειμένου να υπολογίσει τη γωνία κύλισης (*roll*) και τη γωνία ανύψωσης (*pitch*) και τα δεδομένα του μαγνητόμετρου προκειμένου να υπολογίσει τη γωνία στροφής (*yaw*).

Μια περίληψη του αλγορίθμου απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 3.3: Αφαιρετική αναπαράσταση του αλγορίθμου πίνακα στροφής (DCM)

Ο αλγόριθμος του Πινάκα Στροφής στο πρώτο βήμα αρχικοποιεί τον πίνακα στροφής R με τις γωνίες Euler (roll= Φ , pitch= Θ , yaw= Ψ). Για παράδειγμα $cX = \cos(X)$, $sX = \sin(X)$:

$$R = \begin{pmatrix} c\Theta c\Psi & s\Phi s\Theta c\Psi - c\Phi s\Psi & c\Phi s\Theta c\Psi + s\Phi s\Psi \\ c\Theta s\Psi & s\Phi s\Theta s\Psi - c\Phi c\Psi & c\Phi s\Theta s\Psi + s\Phi c\Psi \\ -s\Theta & s\Phi c\Theta & c\Phi c\Theta \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Τα δεδομένα από το γυροσκόπιο δίνουν μία αρχική πληροφορία σχετικά με τις αλλαγές στις γωνίες γύρω από τους $x-$, $y-$ και τον άξονα $z-$. Προκειμένου, να δουλέψουμε με τα δεδομένα μας στον αλγόριθμο του Πινάκα Στροφής, κάθε μέτρηση από το γυροσκόπιο θα πρέπει να ενσωματώνεται αριθμητικώς σε βήματα χρόνου (εξαρτάται από τον ρυθμό των δεδομένων).

Τα αριθμητικά σφάλματα από αυτήν την ενσωμάτωση βαθμιαία θα παραβιάζουν τους περιορισμούς ορθογωνιότητας που θα πρέπει να ικανοποιεί ο πίνακας στροφής. Κατά συνέπεια, το σφάλμα e του νέου πίνακα στροφής $R = [\bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z}]$ θα πρέπει να υπολογίζεται και να κανονικοποιείται ως εξής:

$$e = \bar{x}^T \cdot \bar{y} = [r_{xx} \ r_{xy} \ r_{xz}] \cdot \begin{bmatrix} r_{yx} \\ r_{yy} \\ r_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\bar{x}_{ortho} = \bar{x} - \frac{e}{2} \bar{y}$$

$$\bar{y}_{ortho} = \bar{y} - \frac{e}{2} \bar{x} \quad (3.5)$$

$$\bar{z}_{ortho} = \bar{x}_{ortho} \times \bar{y}_{ortho}$$

Οι επόμενες εξισώσεις κανονικοποιούν τον πίνακα:

$$\bar{x}_{norm} = \frac{1}{2} (3 - \bar{x}_{ortho} \cdot \bar{x}_{ortho}) \bar{x}_{ortho}$$

$$\bar{y}_{norm} = \frac{1}{2} (3 - \bar{y}_{ortho} \cdot \bar{y}_{ortho}) \bar{y}_{ortho} \quad (3.6)$$

$$\bar{z}_{norm} = \frac{1}{2} (3 - \bar{z}_{ortho} \cdot \bar{z}_{ortho}) \bar{z}_{ortho}$$

Προκειμένου να συγχωνεύσουμε τα δεδομένα από τον αισθητήρα IMU με τα δεδομένα του κωδικοποιητή που φέρει το σώμα, λαμβάνουμε υπόψη ότι κάθε δεδομένο του κωδικοποιητή περιλαμβάνει την θέση του στο επίπεδο (planar position) και τις πληροφορίες προσανατολισμού.

Υπολογίζοντας την απόλυτη τιμή της απόστασης μεταξύ δυο διαδοχικών θέσεων, λαμβάνουμε την διαδρομή του ταξιδιού s_i του σώματος:

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (3.7)$$

Με αυτό το διάστημα αποστάσεων και την γωνία στροφής του IMU Ψ , θα υπολογίσουμε τις βελτιωμένες συνιστώσες x , y . Το άθροισμα όλων των μετρήσεων αντιστοιχούν στο νέο μετρημένο μονοπάτι s_n του οχήματος.

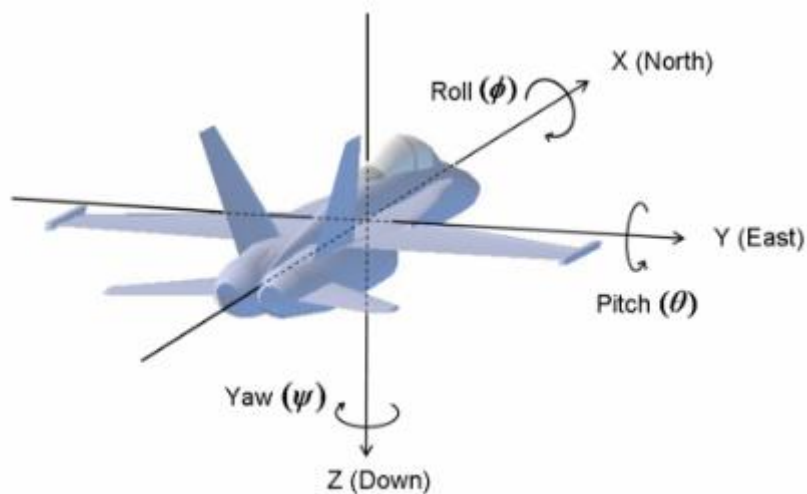
$$s_n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} s_i \cdot \sin(\Psi) \\ s_i \cdot \cos(\Psi) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

3.4 Quaternions

Η ακριβής τοποθεσία στον χώρο παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλά πεδία όπως στην ρομποτική και στην ανάλυση της ανθρώπινης κίνησης. Οι αισθητήρες χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση της κίνησης στον χώρο. Όμως, οι αισθητήρες δεν είναι τέλει και ούτε είναι όλοι κατάλληλοι για όλες τις εφαρμογές. Συχνά, πολλαπλοί αισθητήρες χρησιμοποιούνται για να μετρήσουν διάφορα φυσικά μεγέθη όπως: γραμμική επιτάχυνση, γωνιακή επιτάχυνση και το μαγνητικό πεδίο. Δεδομένα που συλλέγονται από αυτούς τους αισθητήρες πρέπει να συνδυαστούν με στόχο να αποκτήσουμε πλήρη πληροφορία της θέσης στον χώρο. Η σύνδεση δεδομένων γίνεται χρησιμοποιώντας μαθηματικούς μετασχηματισμούς που περιγράφουν την θέση στον χώρο χρησιμοποιώντας είτε γωνίες Euler είτε quaternions.

Σε σχέση με τα quaternions, οι γωνίες Euler είναι απλές και χρησιμοποιούνται στην απλή ανάλυση και στον απλό έλεγχο. Από την άλλη, οι γωνίες Euler περιορίζονται από ένα φαινόμενο το οποίο αποκαλείται κλείδωμα ευθυγράμμισης (*gimbal lock*), το οποίο αποτρέπει από το μετρήσουμε τον προσανατολισμό όταν η γωνία ανύψωσης πλησιάζει τις +/- 90 μοίρες. Τα quaternions παρέχουν μια εναλλακτική μέθοδο μέτρησης, η οποία δεν υποφέρει από το gimbal lock φαινόμενο. Τα μαθηματικά των quaternions είναι όμως πιο πολύπλοκα.

Το quaternion είναι ένας τετραδιάστατος μιγαδικός αριθμός ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αντιπροσωπεύσει τον προσανατολισμό ενός στερεού σώματος ή ενός συστήματος συντεταγμένων στον τρισδιάστατο χώρο. Πρακτικά, το quaternion αποτελείται από ένα πραγματικό στοιχείο και τρία φανταστικά στοιχεία. Το quaternion κωδικοποιεί την περιστροφή από το ένα αδρανειακό πλαίσιο στο πλαίσιο του αισθητήρα. Το αδρανειακό πλαίσιο είναι ένα σύστημα συντεταγμένων με βάση την Γη ορισμένο κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε ο x-άξονας να δείχνει προς τα βόρεια, ο y-άξονας να δείχνει ανατολικά και ο z-άξονας να δείχνει προς τα κάτω όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε αντίθεση με τις γωνίες Euler, μόνο το αδρανειακό πλαίσιο και το πλαίσιο του αισθητήρα χρειάζονται όταν τα quaternions χρησιμοποιούνται για εκτίμηση.



Εικόνα 3.4: Απεικόνιση των roll, pitch και yaw πάνω σε ένα σώμα

Έστω ότι το διάνυσμα q_i^b ορίζεται ως το μοναδιαίο διάνυσμα του quaternion το οποίο κωδικοποιεί την περιστροφή από το αδρανειακό πλαίσιο στο πλαίσιο του αισθητήρα.

$$q_i^b = (q_0 q_1 q_2 q_3)^T \quad (3.9)$$

Οι εξισώσεις (1)-(3) δείχνουν τις συνιστώσες q_0 , q_1 , q_2 που αποτελούν τις διανυσματικές συνιστώσες του quaternion, τις οποίες μπορούμε να θεωρήσουμε ως το διάνυσμα γύρω από το οποίο πρέπει να γίνει η περιστροφή. Το q_3 που περιγράφεται από την εξίσωση (4) είναι η μονόμετρη συνιστώσα, η οποία προσδιορίζει το ποσό της περιστροφής που πρέπει να γίνει γύρω από το διανυσματικό κομμάτι. Συγκεκριμένα, εάν θ είναι η γωνία περιστροφής και το διάνυσμα $(e_x e_y e_z)^T$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο αντιπροσωπεύει τον άξονα της περιστροφής, τότε τα στοιχεία του quaternion ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
q_0 &= e_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
q_1 &= e_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
q_2 &= e_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
q_3 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Το quaternion q_i^b μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιστρέψει ένα τυχαίο διάνυσμα με 3 στοιχεία από το αδρανειακό πλαίσιο στο πλαίσιο του αισθητήρα χρησιμοποιώντας την παρακάτω πράξη:

$$v_B = q_i^b \begin{pmatrix} 0 \\ v_I \end{pmatrix} (q_i^b)^{-1} \tag{3.11}$$

Δηλαδή, ένα διάνυσμα μπορεί να περιστραφεί εάν του συμπεριφερθούμε σαν ένα quaternion με μηδενικό πραγματικό μέρος και πολλαπλασιάζοντάς το με το quaternion και τον αντίστροφό του. Ο αντίστροφος του quaternion είναι ισοδύναμος με τον συζυγή του, το οποίο σημαίνει ότι όλα τα στοιχεία του διανύσματος (τα τρία τελευταία στοιχεία στο διάνυσμα) είναι αρνητικά. Η περιστροφή χρησιμοποιεί πολλαπλασιασμό quaternion.

Ας ορίσουμε τα quaternions $q_1 = (a_1 \ b_1 \ c_1 \ d_1)^T$ και $q_2 = (a_2 \ b_2 \ c_2 \ d_2)^T$. Τότε το προϊόν $q_1 q_2$ ορίζεται:

$$q_1 q_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2 \\ a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 \\ a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Για να περιστρέψουμε ένα διάνυσμα από το πλαίσιο του αισθητήρα στο αδρανειακό πλαίσιο, δύο quaternion πολλαπλασιασμοί είναι απαραίτητοι. Εναλλακτικά, το quaternion μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευαστεί ένας 3x3 πίνακας ώστε να γίνει η περιστροφή με έναν μόνο πολλαπλασιασμό πίνακα. Ο πίνακας περιστροφής από το αδρανειακό πλαίσιο στο πλαίσιο του αισθητήρα με την χρήση quaternions ορίζεται ως εξής:

$$R_i^b(q_i^b) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2bd + 2ac \\ 2bc + 2ad & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2db - 2ac & 2cd + 2ab & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Τότε η περιστροφή από το αδρανειακό πλαίσιο στο πλαίσιο του αισθητήρα μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας έναν πολλαπλασιασμό πινάκων:

$$v_B = R_i^b(q_i^b)v_I \quad (3.14)$$

Ανεξάρτητα από το εάν θα χρησιμοποιήσουμε πολλαπλασιασμό quaternion ή πολλαπλασιασμό πίνακα για να κάνουμε την περιστροφή, η περιστροφή μπορεί να αντιστραφεί αντιστρέφοντας απλώς το quaternion πριν κάνουμε την περιστροφή. Αναιρώντας το διανυσματικό κομμάτι του quaternion διανύσματος, η πράξη μπορεί να αντιστραφεί.

Η μετατροπή από quaternion σε γωνίες Euler είναι απλή. Μπορεί να γίνει μέσω των εξισώσεων (3.15).

$$\begin{aligned} roll &= \tan^{-1}\left(\frac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 + q_0^2}\right) \\ pitch &= \sin^{-1}(-2(q_0q_2 + q_1q_3)) \\ yaw &= \tan^{-1}\left(\frac{2(q_0q_1 + q_3q_2)}{q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 + q_0^2}\right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Να σημειώσουμε ότι όταν μετατρέπουμε από quaternions σε γωνίες Euler, το gimbal lock φαινόμενο εμφανίζεται και πάλι.

3.5 Συστήματα Αναφοράς Θέσης και Πορείας - AHRS Συστήματα

Τα συστήματα αναφοράς θέσης και πορείας (*Attitude and Heading Reference Systems AHRS*) χρησιμοποιούν ένα μικροεπεξεργαστή, ένα μαγνητόμετρο, ένα γυροσκόπιο, και ένα επιταχυνσιόμετρο και στους τρεις άξονες. Το καλιμπράρισμα των αισθητήρων αποτελεί κλειδί για την ακρίβεια του αλγορίθμου, οπότε, οι έξοδοι των αισθητήρων θα πρέπει να καλιμπράρονται πριν γίνουν είσοδοι στον αλγόριθμο του πίνακα στροφής (*DCM*). Ο αλγόριθμος του πίνακα στροφής εφαρμόζεται στις καλιμπραρισμένες μετρήσεις του αισθητήρα για να υπολογίσει τις γωνίες Euler περιγράφοντας τον προσανατολισμό ενός σώματος. Ο προσανατολισμός ενός σώματος αποτελείται από τις γωνίες: γωνία κύλισης (*roll*), γωνία ανύψωσης (*pitch*) και γωνία στροφής (*yaw*).

Η μοντελοποίηση του προσανατολισμού ενός άκαμπτου σώματος, όπως αεροπλάνα, τηλεκατευθυνόμενα παιχνίδια, άνθρωποι, κτίρια, κτλ μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τον DCM αλγόριθμο. Όταν δημιουργούμε ένα AHRS σύστημα, ένα μαγνητόμετρο, ένα γυροσκόπιο και ένα επιταχυνσιόμετρο είναι απαραίτητα. Οι καλιμπραρισμένες ενδείξεις των αισθητήρων γίνονται είσοδοι για τον DCM αλγόριθμο, ο

οποίος παρέχει μια πλήρη μέτρηση του προσανατολισμού, σε σχέση με το μαγνητικό πεδίο της Γης και την διεύθυνση της επιτάχυνσης, εκφρασμένη από τις γωνίες Euler.

Φθηνά συστήματα αναφοράς θέσης και πορείας πλέον χρησιμοποιούνται και για την ανίχνευση ανθρώπινων κινήσεων σε εσωτερικούς χώρους εκτιμώντας τον τρισδιάστατο προσανατολισμό και την θέση των σωμάτων. Σε πολλά από αυτά τα συστήματα, η εκτίμηση επιτυγχάνεται από την δύναμη του μαγνητικού πεδίου της Γης. Βέβαια, το μαγνητικό πεδίο της Γης μπορεί να παραμορφωθεί λόγω της παρουσίας φερρομαγνητικών ή/και μαγνητικών αντικειμένων. Η απόδοση των AHRS αλγορίθμων εξαρτάται κυρίως από τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται για να απορρίψουν διαταραχές (ξαφνικές επιταχύνσεις ή ανωμαλίες στο μαγνητικό πεδίο της Γης) και την ικανότητα των συστημάτων να εκτιμήσουν τις πολώσεις των γυροσκοπίων.

Σε εσωτερικούς χώρους, ή γενικά όπου δεν νοείται η χρήση των αισθητήρων GPS, ο εντοπισμός των σωμάτων μπορεί να γίνει με την χρήση αισθητήρων IMU και αλγορίθμων υπολογισμού μέσω επαγωγής (Dead Reckoning Algorithms). Η ακρίβεια του υπολογισμού της θέσης των σωμάτων εξαρτάται κυρίως από την ποιότητα του αισθητήρα και την ικανότητα του αλγόριθμου να υπολογίζει με ακρίβεια τον προσανατολισμό του αισθητήρα. Τα σφάλματα στις γωνίες παράγουν ένα αυξανόμενο σφάλμα θέσης, λόγω της ολοκληρωτικής φύσης των Dead Reckoning αλγορίθμων.

Αρκετοί συγγραφείς στην βιβλιογραφία συνδιάζουν με κατάλληλους τρόπους τις μετρήσεις από ένα IMU, έτσι ώστε να αποκτήσουν ακριβείς εκτιμήσεις του προσανατολισμού. Αυτοί οι αισθητήρες είναι γνωστοί και ως MARG (Magnetic, Angular Rate, and Gravity – Μονάδα Μαγνητικής Μέτρησης, Γωνιακής Ταχύτητας και Βαρύτητας) ή MIMU (Magnetic and Inertial Measurement Unit – Μονάδα Μαγνητικής και Αδρανειακής Μέτρησης). Ο συνδυασμός του γυροσκοπίου και της μαγνητικής πυξίδας εφαρμόζεται ευρέως για την εύρεση του προσανατολισμού. Η ενσωμάτωση των γυροσκοπικών μετρήσεων, από ένα αρχικά γνωστό προσανατολισμό, παρέχει την αλλαγή στον προσανατολισμό. Όμως, λόγω των γυροσκοπικών θορύβων και των πολώσεων, υπάρχει ένα χρονικά συσσωρευόμενο σφάλμα (drift) που πρέπει να διορθωθεί. Το μαγνητόμετρο, μόλις καλιμπραριστεί, χρησιμοποιείται για να μειώσει αυτό το χρονικά συσσωρευόμενο σφάλμα στην οριζόντια διεύθυνση. Επιπλέον, η βραχύχρονη ακρίβεια του γυροσκοπίου επιτρέπει την ανίχνευση των βραχυχρόνιων εξωτερικών διαταραχών στο μαγνητικό πεδίο.

Για τον καθορισμό του προσανατολισμού, θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο AHRS (αλγόριθμος συστημάτων αναφοράς θέσης και πορείας), ο οποίος συνδυάζει τις μετρήσεις του επιταχυνσιόμετρου, του γυροσκοπίου και του μαγνητόμετρου. Δύο απόλυτα πεδία, το μαγνητικό πεδίο της Γης και το βαρυτικό πεδίο, των οποίων οι διευθύνσεις και οι εντάσεις είναι γνωστές, βοηθούν στην εκτίμηση του προσανατολισμού.

Υπάρχουν αρκετοί AHRS αλγόριθμοι στην βιβλιογραφία. Στόχος τους είναι να συνδυάσουν βέλτιστα τις πληροφορίες από γυροσκόπια, επιταχυνσιόμετρα και μαγνητόμετρα προκειμένου να βρουν τον προσανατολισμό σε σχέση με ένα πλαίσιο πλοήγησης (navigation frame). Ο προσανατολισμός γενικά εκπροσωπείται από τις γωνίες Euler. Ο αλγόριθμος AHRS εννοιολογικά χωρίζεται σε δύο ξεχωριστά μέρη: 1) στον προσανατολισμό από τα γυροσκόπια, και 2) στον προσανατολισμό από το επιταχυνσιόμετρο και το μαγνητόμετρο. Κάθε κομμάτι δίνει μια ανεξάρτητη εκτίμηση του προσανατολισμού, αλλά οι ακριβείς AHRS αλγόριθμοι πρέπει να ενσωματώνουν και τις δύο προσεγγίσεις συγχωνευμένες σε μια λύση λαμβάνοντας υπόψη τα οφέλη από κάθε πηγή πληροφορίας.

3.6 AHRS – Μια βασική προσέγγιση

3.6.1 Προσανατολισμός από Γυροσκόπια

Χρησιμοποιώντας ένα γυροσκόπιο και μετρώντας τη γωνιακή ταχύτητα στο πλαίσιο αναφοράς του αισθητήρα $\omega_s = (\omega_s x, \omega_s y, \omega_s z)$ είναι δυνατόν να εκτιμήσουμε τον προσανατολισμό του MIMU (Μονάδα Μαγνητικής και Αδρανειακής Μέτρησης). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί συσσωρεύοντας την αλλαγή του προσανατολισμού που έχει προκύψει από τις μετρήσεις του γυροσκοπίου. Ένας πίνακας περιστροφής ή DCM πίνακας στροφής είναι ένας 3X3 πίνακας, στον οποίο η κάθε στήλη είναι μια περιστροφή γύρω από τους άξονες του αισθητήρα σε σχέση με το πλαίσιο πλοήγησης. Πίνακες περιστροφής, γωνίες Euler και quaternions αποτελούν διάφορους τρόπους για να απεικονίσουμε τον προσανατολισμό. Έστω ότι το $C(t)$ αντιπροσωπεύει τον πίνακα περιστροφής την χρονική στιγμή t . Οπότε η αλλαγή του προσανατολισμού είναι:

$$\dot{C} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{C(t + \delta t) - C(t)}{\delta t} \quad (3.16)$$

Για διευκόλυνση, το $C(t + \delta t)$ μπορεί να γραφτεί σαν το προϊόν δύο πινάκων ως εξής:

$$C(t + \delta t) = C(t)A(t) \quad (3.17)$$

όπου $A(t)$ είναι ο πίνακας περιστροφής που σχετίζεται τον χρόνο t και $t + \delta t$ στο πλαίσιο του αισθητήρα.

Εάν ο αισθητήρας βιώσει μια μικρή περιστροφή, μπορεί να εφαρμοστεί μια μικρή προσέγγιση γωνίας παράγοντας την σχέση:

$$A(t) = I + \delta\Psi \quad (3.18)$$

Λόγω της υψηλής συχνότητας δειγματοληψίας, η μικρή προσέγγιση της γωνίας είναι έγκυρη. Ο πίνακας δΨ αντιπροσωπεύει τις μικρές περιστροφές. Το όριο αυτού του πίνακα είναι ίσο με:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \Psi}{\delta t} = \Omega(t) \quad (3.19)$$

όπου το $\Omega(t)$ είναι η λοξή συμμετρική μορφή του διανύσματος γωνιακής ταχύτητας ω^s . Λαμβάνοντας αυτό υπόψιν, η αλλαγή του προσανατολισμού στην **σχέση (1)** παράγει:

$$\dot{C} = C(t)\Omega(t) \quad (3.20)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέρη της εξίσωσης έχουμε:

$$C(t) = C(0) \exp\left(\int_0^t \Omega(\tau) d\tau\right) \quad (3.21)$$

όπου $C(0)$ ο αρχικός προσανατολισμός του αισθητήρα.

3.6.2 Προσανατολισμός από το επιταχυνσιόμετρο και το μαγνητόμετρο

Τα επιταχυνσιόμετρα που είναι ενσωματωμένα στο MIMU μετρούν το βαρυτικό πεδίο σε μέγεθος και διεύθυνση στο πλαίσιο του αισθητήρα $a^s = (a_x^s, a_y^s, a_z^s)$. Ομοίως, τα ορθογώνια μαγνητόμετρα μετρούν το μαγνητικό πεδίο της Γης σε μέγεθος και διεύθυνση στο πλαίσιο του αισθητήρα $m^s = (m_x^s, m_y^s, m_z^s)$. Ανάλογα με την κατανομή αυτών των δύο πεδίων στους τρεις άξονες του *MIMU*, μπορεί να υπολογιστεί ο προσανατολισμός σε σχέση με το πλαίσιο πλοήγησης.

Σαν μια πρώτη προσέγγιση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο αισθητήρας είναι είτε ακίνητος ή κινείται με σταθερή ταχύτητα και οπότε οι αισθητήρες μετρούν μόνο το διάνυσμα της βαρύτητας. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι έχουμε ένα μαγνητικό πεδίο ελεύθερο από διαταραχές και άρα τα μαγνητόμετρα μετρούν μόνο το μαγνητικό πεδίο της Γης.

Η γνώση του βαρυτικού πεδίου παράγει μια εκτίμηση των γωνιών στροφής (attitude angles):

$$\varphi = \tan\left(\frac{a_y^s}{a_z^s}\right)^{-1} \quad (3.22)$$

$$\theta = \tan\left(\frac{-a_x^s}{\sqrt{(a_y^s)^2 + (a_z^s)^2}}\right)^{-1} \quad (3.23)$$

όπου το φ είναι η γωνία κύλισης (*roll*), το θ είναι η γωνία ανύψωσης (*pitch*) και α_i^s για $i=x,y,z$ είναι η μέτρηση της επιτάχυνσης για τον i -άξονα μετρημένα στο πλαίσιο του αισθητήρα.

Ομοίως, η γνώση του μαγνητικού πεδίου της Γης παράγει μια εκτίμηση του προσανατολισμού:

$$\psi = \tan\left(\frac{-m_x^h}{m_y^h}\right)^{-1} \pm D \quad (3.24)$$

όπου το ψ είναι η γωνία στροφής και m_i^h όπου $i=x,y$ είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου για τον i -άξονα προβαλλόμενη στο οριζόντιο επίπεδο του πλαισίου πλοήγησης. Η μεταβλητή D αντιπροσωπεύει την γωνία απόκλισης.

3.6.3 Ενοποίηση των Δύο Βασικών Τμημάτων του AHRS

Η πιο βασική λύση για την ενοποίηση των δύο ανεξάρτητων αλγορίθμων για την εκτίμηση του προσανατολισμού (γυροσκοπικού και επιταχυνσιομετρικού/μαγνητικού πεδίου προσέγγιση) είναι ένας απλός σταθμισμένος μέσος όρος.

Αυτό μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$q_{f_used}(k) = \gamma q_g(k) + (1-\gamma)q_{a/m}(k) \quad (3.25)$$

όπου $q_g(k)$ είναι ο προσανατολισμός εκτιμώμενος από την ολοκλήρωση των γυροσκοπίων, την στιγμή k , και $q_{a/m}(k)$ είναι ο προσανατολισμός υπολογισμένος από τις μετρήσεις του επιταχυνσιόμετρου και του μαγνητόμετρου (Εξισώσεις 3.22,3.23, 3.24), και οι δύο εκφρασμένοι με βάση τα quaternions. Η παράμετρος γ είναι το βάρος που πρέπει να είναι βέλτιστα υπολογισμένο για κατάλληλη επίδοση.

3.6.4 Βελτιστοποιημένοι Αλγόριθμοι AHRS

Κάποιοι πρόσφατοι AHRS αλγόριθμοι στην βιβλιογραφία οι οποίοι συγχωνεύουν πληροφορία από το γυροσκόπιο και το επιταχυνσιόμετρο είναι οι μέθοδοι *Madgwick* και του *Mahony*.

3.6.5 Madgwick AHRS

Αυτή η μέθοδος είναι βασισμένη σε μια βελτιστοποίηση του αλγόριθμου κλίσης καθόδου (*gradient descent*), η οποία μας επιτρέπει την απόκτηση του τρισδιάστατου προσανατολισμού του *MIMU* σε σχέση με το βαρυτικό πεδίο βασισμένο στις μετρήσεις

του επιταχυνσιόμετρου, και τον προσανατολισμό σε σχέση με το μαγνητικό πεδίο της Γης χρησιμοποιώντας μαγνητόμετρα. Μια παράμετρος χρησιμοποιείται για τον έλεγχο του ρυθμού σύγκλισης στην εκτίμηση του προσανατολισμού ρυθμίζοντας καταλλήλως τα βάρη της συνεισφοράς του κάθε αισθητήρα. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί αριθμητική ολοκλήρωση των δεδομένων προσανατολισμού σε μορφή *quaternions*.

Σύγκριση με το φίλτρο Kalman

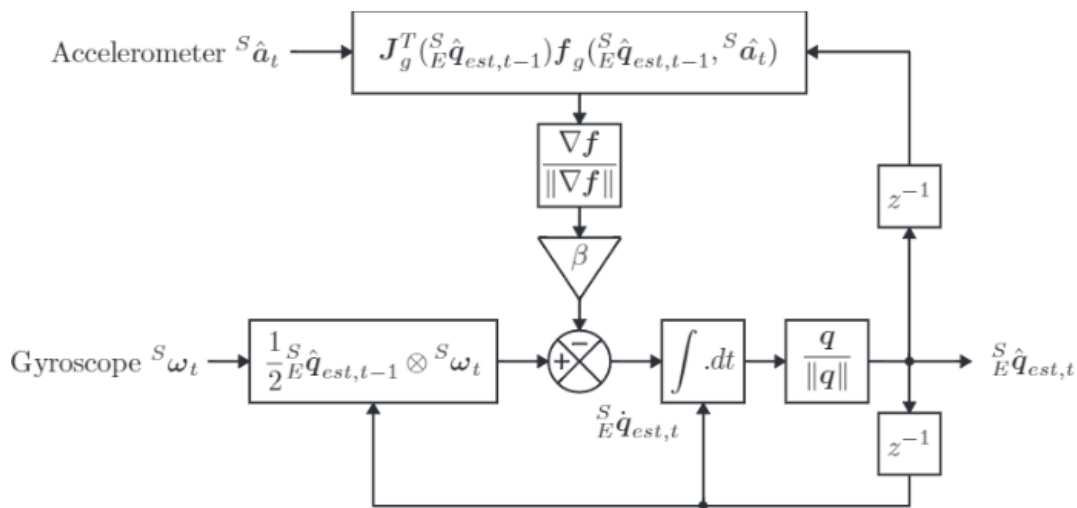
Το φίλτρο Kalman έχει γίνει η αποδεικτική βάση για την πλειοψηφία των αλγορίθμων προσανατολισμού και για τους εμπορικούς αισθητήρες, που στηρίζουν την λειτουργία τους στην χρήση του. Η διαδεδομένη χρήση του Kalman αποτελεί απόδειξη της ακρίβειας και της αποτελεσματικότητας του, αλλά το φίλτρο Kalman έχει και κάποια μειονεκτήματα. Μπορεί να είναι πολύπλοκα ως προς την υλοποίηση. Οι γραμμικές επαναλήψεις παλινδρόμησης, θεμελιώδεις στην διαδικασία του Kalman, απαιτούν δειγματοληπτικούς ρυθμούς η οποίοι μπορούν να ξεπεράσουν το υποκείμενο εύρος ζώνης. Οι σχέσεις στον χώρο κατάστασης που περιγράφουν την περιστροφική κινηματική στους τρεις άξονες τυπικά απαιτούν μεγάλα διανύσματα κατάστασης και μια εφαρμογή του εκτεταμένου φίλτρου Kalman για να γραμμικοποιηθεί το πρόβλημα.

Αυτές οι δυσκολίες για να ξεπεραστούν απαιτούν ένα μεγάλο υπολογιστικό κόστος για την εφαρμογή των λύσεων που είναι βασισμένες στο Kalman και παρέχουν ένα κίνητρο για εναλλακτικές προσεγγίσεις. Προηγούμενες προσεγγίσεις εφάρμοζαν είτε επεξεργασία ασαφών πληροφοριών ή φίλτρα στο πεδίο της συχνότητας για να ευνοήσουν τις μετρήσεις προσανατολισμού του επιταχυνσιόμετρου στις χαμηλές γωνιακές ταχύτητες και τις ολοκληρωμένες γυροσκοπικές μετρήσεις στις υψηλές γωνιακές ταχύτητες. Αυτές οι προσεγγίσεις είναι απλές αλλά μπορούν να είναι αποτελεσματικές κάτω από ορισμένες συνθήκες λειτουργίας.

Ο αλγόριθμος Madgwick παρουσιάζει μια προσέγγιση η οποία είναι εφαρμόσιμη και σε IMU και MARG συστήματα. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια αντιπροσώπευση του προσανατολισμού με *quaternions* για να περιγράψει την συζευγμένη φύση των προσανατολισμών στις τρεις διαστάσεις και δεν υπόκειται στις προβληματικές ιδιαιτερότητες οι οποίες συσχετίζονται με τις γωνίες Euler.

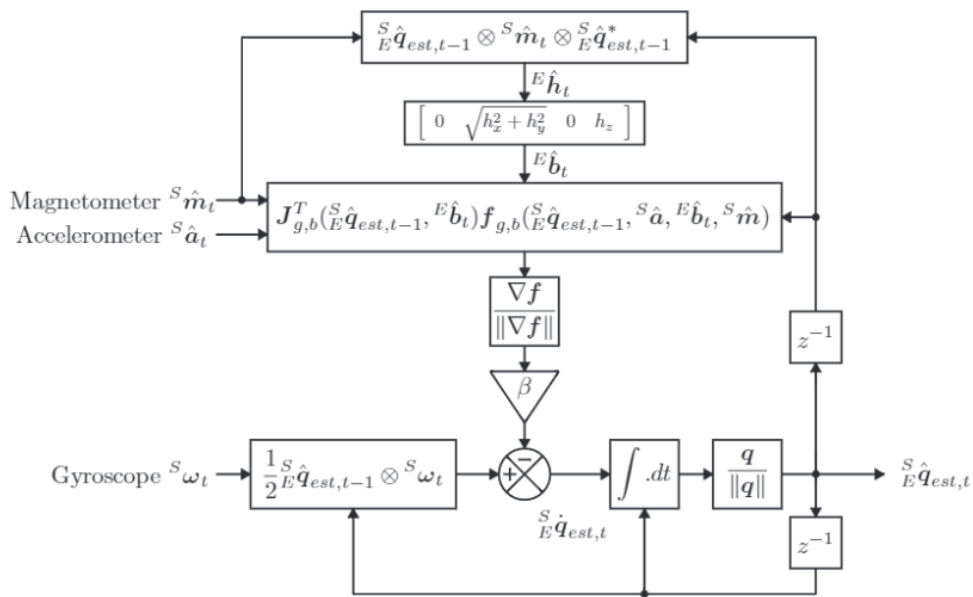
Αρχικά υπολογίζουμε τα *quaternions* από τις γωνιακές ταχύτητες του γυροσκοπίου. Στην συνέχεια, υποθέτοντας ότι το επιταχυνσιόμετρο μετράει μόνο την βαρύτητα και το μαγνητόμετρο μόνο το μαγνητικό πεδίο της Γης, εφαρμόζουμε τον απλό *gradient descent* αλγόριθμο για η επαναλήψεις με βήμα μ που καταλήγει σε μια εκτίμηση του προσανατολισμού βασισμένη σε μια αρχική εκτίμηση. Στην πραγματικότητα όμως, εάν ο υπολογισμός των *quaternions* ξεκινήσει από εσφαλμένες αρχικές συνθήκες και

ταυτόχρονα εγκλιματίσουν σφάλματα που οφείλονται στο θόρυβο μετρήσεων του γυροσκοπίου, θα καταλήξουμε σε λάθος εκτίμηση. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο συγχώνευσης (δύο ξεχωριστών εκτιμήσεων προσανατολισμού), ο οποίος φιλτράρει σφάλματα υψηλών συχνοτήτων, αποζημιώνει την ολίσθηση λόγω ολοκλήρωσης και παρέχει σύγκλιση από τις αρχικές συνθήκες. Το παρακάτω μπλοκ διάγραμμα απεικονίζει τον πλήρη αλγόριθμο εκτίμησης του προσανατολισμού για IMU εφαρμογές.



Εικόνα 3.5: Μπλοκ διάγραμμα του πλήρη αλγόριθμου εκτίμησης του προσανατολισμού για IMU εφαρμογές

Οι μαγνητικές παραμορφώσεις από πηγές όπως ηλεκτρικές συσκευές ή μεταλλικές κατασκευές, προκαλούν ουσιώδη σφάλματα στην επίδοση του αισθητήρα. Οι πηγές παρεμβολής, όπως πολώσεις σκληρού σιδήρου, μπορούν να αφαιρεθούν από το πλαίσιο του αισθητήρα με καλιμπράρισμα. Αλλά σφάλματα μαλακού σιδήρου μπορούν μόνο να αφαιρεθούν εάν μια επιπλέον αναφορά του προσανατολισμού είναι διαθέσιμη. Το επιταχυνσιόμετρο παρέχει μια τέτοια αναφορά και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξομαλύνει τα σφάλματα στο μετρούμενο μαγνητικό πεδίο της Γης. Το παρακάτω μπλοκ διάγραμμα απεικονίζει τον πλήρη αλγόριθμο εκτίμησης του προσανατολισμού για MARG εφαρμογές, συμπεριλαμβανομένης της αντιστάθμισης της μαγνητικής παραμόρφωσης.



Εικόνα 3.6: Μπλοκ διάγραμμα του πλήρη αλγόριθμου εκτίμησης του προσανατολισμού με αντιστάθμιση της μαγνητικής παραμόρφωσης

3.6.6 Mahony AHRS

Αυτή η μέθοδος είναι βασισμένη σε ένα συμπληρωματικό φίλτρο (explicit complementary filter) το οποίο απαιτεί εξόδους από επιταχυνσιόμετρο, γυροσκόπιο και μαγνητόμετρο. Η δομή του είναι κατάλληλη για την προσαρμογή του σε ενσωματωμένους επεξεργαστές. Εκτιμά εξίσου καλά τις πολώσεις των γυροσκοπίων.

Συμπληρωματικά Φίλτρα

Τα συμπληρωματικά φίλτρα παρέχουν ένα τρόπο για να συγχωνεύονται πολλαπλές και ανεξάρτητες θορυβώδεις μετρήσεις του ίδιου σήματος που έχουν συμπληρωματικά φασματικά χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε δύο μετρήσεις $y_1 = x + \mu_1$ και $y_2 = x + \mu_2$ ενός σήματος x , όπου μ_1 είναι ο κυρίαρχος θόρυβος υψηλών συχνοτήτων και μ_2 είναι η κυρίαρχη διαταραχή χαμηλών συχνοτήτων. Επιλέγοντας ένα ζεύγος συμπληρωματικών συναρτήσεων μεταφοράς $F_1(s) + F_2(s) = 1$ με $F_1(s)$ χαμηλοδιαβατό και $F_2(s)$ υψιπερατό, η φιλτραρισμένη εκτίμηση δίνεται από την σχέση:

$$\hat{X}(s) = F_1(s)Y_1 + F_2(s)Y_2 = X(s) + F_1(s)\mu_1(s) + F_2(s)\mu_2(s) \quad (3.26)$$

Το σήμα $X(s)$ είναι φίλτρο διάβασης στο φίλτρο εξόδου, ενώ οι συνιστώσες θορύβου είναι όσο υψιπερατά ή χαμηλοδιαβατά επιθυμούμε. Αυτό το είδος φίλτρου είναι γνωστό ως άνευ παραμόρφωσης φίλτρο (distortionless filter) αφού το σήμα $x(t)$ δεν παραμορφώνεται από το φίλτρο. Τα συμπληρωματικά φίλτρα είναι ιδιαίτερα κατάλληλα για να συγχωνεύουν μετρήσεις θέσεων χαμηλού εύρους ζώνης με ρυθμούς μετρήσεων

υψηλού εύρους ζώνης για πρώτης τάξης κινηματικά συστήματα. Ας θεωρήσουμε την γραμμική κινηματική

$$\dot{x} = u \quad (3.27)$$

με τυπικά χαρακτηριστικά μετρήσεων:

$$y_x = L(s)x + \mu_x$$

$$y_u = u + \mu_u + b(t) \quad (3.28)$$

όπου $L(s)$ είναι το χαμηλοδιαβατό φίλτρο συσχετιζόμενο με χαρακτηριστικά του αισθητήρα, το μ εκπροσωπεί τον θόρυβο και στις δύο μετρήσεις και $b(t)$ είναι μια ντετερμινιστική διαταραχή που κυριαρχείται από περιεχόμενο χαμηλής συχνότητας. Κανονικά το χαμηλοπερατό φίλτρο $L(s)$ ισούται περίπου με την μονάδα στο εύρος συχνοτήτων όπου η μέτρηση y_x μας ενδιαφέρει. Ο ρυθμός των μετρήσεων ολοκληρώνεται $(y_u)/(s)$ για να λάβουμε μια εκτίμηση της κατάστασης και ο θόρυβος και τα χαρακτηριστικά της πόλωσης του ολοκληρωμένου σήματος είναι φαινόμενα χαμηλών συχνοτήτων. Επιλέγοντας:

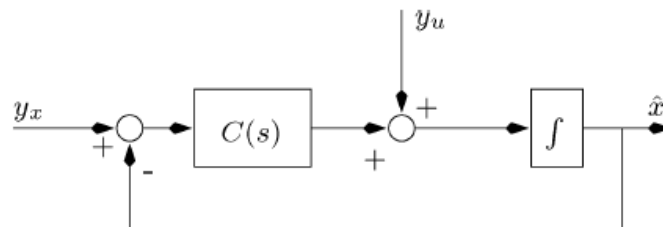
$$F_1(s) = \frac{C(s)}{C(s) + s}$$

$$F_2(s) = 1 - F_1(s) = \frac{s}{C(s) + s} \quad (3.29)$$

με $C(s)$ φίλτρο διάβασης έτσι ώστε $L(s)F_1(s)$ να ισούται περίπου με την μονάδα στο εύρος του $L(s)$, τότε:

$$\hat{X}(s) \approx X(s) + F_1(s)\mu_x(s) + \frac{\mu_u(s) + b(s)}{C(s) + s} \quad (3.30)$$

Να σημειώσουμε ότι ενώ το $F_2(s)$ είναι υπερπερατό, ο θόρυβος $\mu(s) + b(s)$ είναι χαμηλοδιαβατά φιλτραρισμένος. Στην πράξη, η δομή του φίλτρου υλοποιείται με την εκμετάλλευση της δομής της συμπληρωματικής ευαισθησίας του γραμμικού ανατροφοδοτούμενου συστήματος σε διαταραχή του φορτίου. Ας θεωρήσουμε το παρακάτω μπλοκ διάγραμμα:



Εικόνα 3.7: Μπλοκ διάγραμμα του κλασσικού συμπληρωματικού φίλτρου

Η έξοδος μπορεί να γραφτεί:

$$\begin{aligned}\hat{x}(s) &= \frac{C(s)}{s+C(s)} y_x(s) + \frac{s}{s+C(s)} \frac{y_u(s)}{s} = \\ &= T(s)y_x(s) + S(s) \frac{y_u(s)}{s}\end{aligned}\quad (3.31)$$

όπου $S(s)$ είναι η συνάρτηση ευαισθησίας του κλειστού βρόχου συστήματος και $T(s)$ είναι η συμπληρωματική ευαισθησία. Αυτή η αρχιτεκτονική είναι εύκολη να υλοποιηθεί αποτελεσματικά και επιτρέπει σε κάποιον να χρησιμοποιήσει κλασσικές μεθόδους σχεδιασμού ελέγχου για τον $C(s)$ στο φίλτρο. Η απλούστερη επιλογή είναι μια αναλογική ανατροφοδότηση $C(s)=k_p$. Σε αυτή την περίπτωση, η δυναμική του κλειστού βρόχου του φίλτρου δίνεται από την σχέση:

$$\dot{\hat{x}} = y_u + k_p(y_x - \hat{x}) \quad (3.32)$$

Τα συμπληρωματικά φίλτρα του πεδίου της συχνότητας που σχετίζονται με αυτή την επιλογή είναι $F_1(s) = (s)/(s+k_p)$. Ας σημειώσουμε ότι η συχνότητα crossover για το φίλτρο είναι στα k_p rad/s. Το κέρδος k_p συνήθως επιλέγεται με βάση τα χαμηλόσυχα χαρακτηριστικά του y_x και τα χαρακτηριστικά χαμηλών συχνοτήτων του y_u για να επιλέξουμε την καλύτερη crossover συχνότητα για να ανταλλάξουμε τις δύο μετρήσεις. Αν η πόλωση του ρυθμού μέτρησης, $b(t)=b_0$ είναι σταθερή, τότε είναι φυσικό να προσθέσουμε ένα ολοκληρωτή στον αντισταθμιστή για να κάνουμε το σύστημα τύπου I:

$$C(s) = k_p + \frac{k_I}{s} \quad (3.33)$$

Ένα σύστημα τύπου I θα απορρίψει την σταθερή διαταραχή φορτίου b_0 από την έξοδο. Η επιλογή των κερδών k_p και k_I βασίζεται σε κλασσικές συχνοτικές μεθόδους σχεδιασμού. Η μη-γραμμική ανάπτυξη απαιτεί μια ανάλυση Lyapunov του συστήματος κλειστού βρόχου. Εφαρμόζοντας τον PI αντισταθμιστή λαμβάνουμε το φίλτρο στον χώρο κατάστασης με δυναμικές εξισώσεις:

$$\dot{\hat{x}} = y_u - \hat{b} + k(y_x - \hat{x}) \quad (3.34)$$

$$\dot{\hat{b}} = -k_I(y_x - \hat{x}) \quad (3.35)$$

Το αρνητικό πρόσημο της κατάστασης του ολοκληρωτή εισάγεται για να υποδείξει ότι η κατάσταση b θα ακυρώσει την πόλωση στο y_u . Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} |x - \hat{x}|^2 + \frac{1}{2k_I} |b_0 - \hat{b}|^2 \quad (3.36)$$

Αν θεωρήσουμε:

$$\hat{x} = (x - \hat{x}) \quad (3.37)$$

$$\hat{b} = (b_0 - \hat{b}) \quad (3.38)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} = -k_p \tilde{x}^2 - \mu_u \tilde{x} + \mu_x (\hat{b} - k \tilde{x}) \quad (3.39)$$

Στην απουσία θορύβου μπορούμε να εφαρμόσουμε την άμεση μέθοδο Lyapunov για να αποδείξει την σύγκλιση της εκτίμησης κατάστασης. Όταν το σύστημα είναι γραμμικό, τότε το κλειστό σύστημα είναι γραμμικό και ασυμπτωτικά ευσταθές.

3.7 Φίλτρο Συνολικής διακύμανσης

3.7.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε έναν απλό αλγόριθμο για φιλτράρισμα σήματος που βασίζεται στην συνολική διακύμανση (*total variation (TV)*). Η εισαγωγή της έννοιας της συνολικής διακύμανσης έγινε από τους Rudin, Osher, and Fatemi. Το φιλτράρισμα συνολικής διακύμανσης είναι μία αποτελεσματική μέθοδος φιλτραρίσματος για την ανάκτηση σημάτων με τμηματική σταθερά. Έχουν προταθεί πολλοί αλγόριθμοι για την εφαρμογή του φίλτρου συνολικής διακύμανσης. Ο αλγόριθμος που θα παρουσιάσουμε παρακάτω προτείνεται στην εργασία του Chambolle. Βασίζεται στην ιδιότητα ελαχίστου-μεγίστου και στην διαδικασία μεγιστοποίησης-ελαχιστοποίησης.

Η συνολική διακύμανση χρησιμοποιείται συχνά για φιλτράρισμα και αποκατάσταση εικόνας, παρόλα αυτά σε αυτή την εργασία για να απλοποιήσουμε την παρουσίαση του αλγορίθμου φιλτραρίσματος TV θα επικεντρωθούμε μόνο στο φιλτράρισμα μονοδιάστατου σήματος.

3.7.2 Συνολική διακύμανση

Η συνολική διακύμανση (TV) ενός σήματος μετρά πόσο αλλάζει το σήμα μεταξύ τιμών. Πιο συγκεκριμένα, η συνολική διακύμανση ενός σήματος N -σημείων, $x(n)$, $1 \leq n \leq N$ ορίζεται ως:

$$TV(x) = \sum_{n=2}^N |x(n) - x(n-1)| \quad (3.40)$$

Η συνολική διακύμανση του \mathbf{x} μπορεί επίσης να γραφεί ως:

$$TV(x) = \|Dx\|_1 \quad (3.41)$$

όπου $\|\cdot\|_1$ είναι η ℓ_1 -νόρμα και

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

είναι ένας $(N-1) \times N$ πίνακας .

3.7.3 Φιλτράρισμα TV – Total Variance

Υποθέτουμε ότι παρατηρούμε ένα σήμα \mathbf{x} το οποίο αλλοιώνεται από επιπρόσθετο λευκό θόρυβο Gauss,

$$y = x + n, \quad y, x, n \in \mathbb{R}^N. \quad (3.43)$$

Μια μέθοδος προσέγγισης για την εκτίμηση του σήματος \mathbf{x} είναι με το να βρούμε το σήμα \mathbf{x} που ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση

$$J(x) = \|y - x\|_2^2 + \lambda \|Dx\|_1. \quad (3.44)$$

Αυτή η μέθοδος ονομάζεται φιλτράρισμα TV. Η παράμετρος κανονικοποίησης, λ , ελέγχει πόσο ομαλοποίηση έχει γίνει. Μεγαλύτερα επίπεδα θορύβου απαιτούν μεγαλύτερο λ .

3.7.4 Αλγόριθμος για Φιλτράρισμα TV

Θα θεωρήσουμε μία πιο γενική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$J(x) = \|y - x\|_2^2 + \lambda \|Ax\|_1 \quad (3.45)$$

όπου A είναι ένας πίνακας $M \times N$. Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ορίζεται:

$$J_* = \min_x \|y - x\|_2^2 + \lambda \|Ax\|_1. \quad (3.46)$$

Η ελαχιστοποίηση αυτής της αντικειμενικής συνάρτησης περιπλέκεται από το ότι η ℓ_1 -νόρμα είναι μη-διαφοροποιήσιμη. Έτσι, ένας τρόπος για να ελαχιστοποιήσουμε την $J(x)$ είναι να χρησιμοποιήσουμε την διπλή μορφοποίηση (dual formulation).

Προκειμένου να λάβουμε την διπλή μορφοποίηση, σημειώνουμε ότι η απόλυτη τιμή του βαθμωτού x μπορεί να γραφτεί με την ακόλουθη μορφή:

$$|x| = \max_{|z| \leq 1} zx. \quad (3.47)$$

Ομοίως, η ℓ_1 -νόρμα του διανύσματος \mathbf{x} μπορεί να γραφτεί:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \max_{|z| \leq 1} \mathbf{z}' \mathbf{x}. \quad (3.48)$$

Ομοίως,

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{|z| \leq 1} \mathbf{z}' A\mathbf{x}. \quad (3.49)$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε την αντικειμενική συνάρτηση:

$$J(x) = \|y - x\|_2^2 + \lambda \max_{|z| \leq 1} \mathbf{z}' A\mathbf{x} \quad (3.50)$$

ή

$$J(x) = \max_{|z| \leq 1} \|y - x\|_2^2 + \lambda \mathbf{z}' A\mathbf{x}. \quad (3.51)$$

Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$J_* = \min_x \max_{|z| \leq 1} \|y - x\|_2^2 + \lambda \mathbf{z}' A\mathbf{x}. \quad (3.52)$$

Θέλουμε να βρούμε το διάνυσμα ελαχιστοποίησης \mathbf{x} , αλλά θα ήταν βολικό να βρούμε και το βοηθητικό διάνυσμα \mathbf{z} . Αν ορίσουμε:

$$F(x, z) = \|y - x\|_2^2 + \lambda \mathbf{z}' A\mathbf{x} \quad (3.53)$$

μπορούμε να γράψουμε:

$$J_* = \min_x \max_{|z| \leq 1} F(x, z) \quad (3.54)$$

Επειδή η $F(x, z)$ είναι κυρτή στο x και κοίλη στο z , η βέλτιστη τιμή J_* είναι σημείο ισορροπίας της $F(x, z)$. Από την ιδιότητα ελαχίστου-μεγίστου, μπορούμε να ανταλλάξουμε την σειρά μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης:

$$J_* = \max_{|z| \leq 1} \min_x F(x, z) \quad (3.55)$$

ή

$$J_* = \max_{|z| \leq 1} \|y - x\|_2^2 + \lambda \mathbf{z}' \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (3.56)$$

που είναι η διπλή μορφοποίηση του φιλτραρίσματος TV.

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να λυθεί ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, z) = -2(y - x) + \lambda \mathbf{A}' z \quad (3.57)$$

Έτσι, $\frac{\partial}{\partial x} F(x, z) = 0 \Rightarrow x = y - \frac{\lambda}{2} \mathbf{A}' z$. Μετά από αντικατάσταση έχουμε:

$$J_* = \max_{|z| \leq 1} \left\| \frac{\lambda}{2} \mathbf{A}' z \right\|_2^2 + \lambda \mathbf{z}' \mathbf{A} \left(y - \frac{\lambda}{2} \mathbf{A}' z \right) \quad (3.58)$$

Μετά από απλοποίηση έχουμε:

$$J_* = \max_{|z| \leq 1} -\frac{\lambda^2}{4} \mathbf{z}' \mathbf{A} \mathbf{A}' z + \lambda \mathbf{z}' \mathbf{A} y, \quad (3.59)$$

ή ισοδύναμα το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$z_* = \arg \min_{|z| \leq 1} \mathbf{z}' \mathbf{A} \mathbf{A}' z - \frac{4}{\lambda} \mathbf{z}' \mathbf{A} y. \quad (3.60)$$

Αν θέσουμε την παράγωγο ως προς z ίση με το μηδέν, τότε έχουμε

$$\mathbf{A} \mathbf{A}' z = \frac{2}{\lambda} \mathbf{A} y. \quad (3.61)$$

Η παραπάνω σχέση απαιτεί την λύση πιθανώς ενός μεγάλου πλήθους γραμμικών εξισώσεων και επιπλέον δεν παράγει μια λύση z που ικανοποιεί την συνθήκη $|z| \leq 1$. Προκειμένου να βρούμε το z , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο μεγιστοποίησης-ελαχιστοποίησης (majorization-minimization method). Αν ορίσουμε

$$D(z) = \mathbf{z}' \mathbf{A} \mathbf{A}' z - \frac{4}{\lambda} \mathbf{z}' \mathbf{A} \mathbf{y} \quad (3.62)$$

και θέσουμε $z^{(i)}$ ως σημείο σύμπτωσης μπορούμε να βρούμε μια ξεχωριστή μεγιστοποίηση για το $D(z)$ με την πρόσθεση της μη-αρνητικής συνάρτησης

$$(z - z^{(i)})' (aI - AA')(z - z^{(i)}) \quad (3.63)$$

στο $D(z)$, όπου α είναι μεγαλύτερο ή ίσο από την μέγιστη ιδιοτιμή του AA' . Έτσι, μια μεγιστοποίηση για το $D(z)$ δίνεται από:

$$D(z) + (z - z^{(i)})' (aI - AA')(z - z^{(i)}) \quad (3.64)$$

και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μεγιστοποίησης-ελαχιστοποίησης:

$$\begin{aligned} z^{(i+1)} &= \arg \min_{|z| \leq 1} D(z) + (z - z^{(i)})' (aI - AA')(z - z^{(i)}) \\ &= \arg \min_{|z| \leq 1} \alpha z' z - 2(A(\frac{2}{\lambda} y - A' z^{(i)}) + \alpha z^{(i)})' z + K \\ &= \arg \min_{|z| \leq 1} z' z - 2(\frac{1}{\alpha} A(\frac{2}{\lambda} y - A' z^{(i)}) + z^{(i)})' z \\ &= \arg \min_{|z| \leq 1} z' z - 2b' z \end{aligned} \quad (3.65)$$

όπου $b = z^{(i)} + \frac{1}{\alpha} A(\frac{2}{\lambda} y - A' z^{(i)})$.

Σκοπός είναι να βρούμε ένα διάνυσμα $z \in \mathbb{R}^M$, το οποίο ελαχιστοποιεί την παράσταση $z' z - 2b' z$ και ικανοποιεί την συνθήκη $|z| \leq 1$. Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση

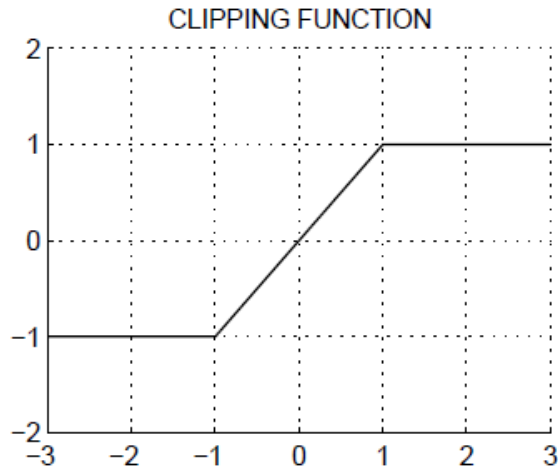
$$\arg \min_{|z| \leq 1} z^2 - 2bz \quad (3.66)$$

Το ελάχιστο του $z^2 - 2bz$ είναι για $z = b$. Αν $|b| \leq 1$ τότε η λύση είναι $z = b$. Αν $|b| > 1$, τότε η λύση είναι $z = \text{sign}(b)$. Αν ορίσουμε τη δίκλαδη συνάρτηση,

$$\text{clip}(b, T) := \begin{cases} b & |b| \leq T \\ T \text{sign}(b) & |b| > T \end{cases} \quad (3.67)$$

όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 3.8, τότε μπορούμε να γράψουμε ως λύση, $z = \text{clip}(b, 1)$. Έτσι,

$$z^{(i+1)} = \text{clip}(z^{(i)} + \frac{1}{\alpha} A(\frac{2}{\lambda} y - A' z^{(i)}), 1) \quad (3.68)$$



Εικόνα 3.8: Δίκλαδη συνάρτηση

Μόλις το $z^{(i)}$ συγκλίνει ικανοποιητικά, το σήμα δίνεται από:

$$x = y - \frac{\lambda}{2} \mathbf{A}^t z \quad (3.69)$$

Ο αλγόριθμος μπορεί επίσης να γραφτεί:

$$\begin{aligned} x^{(i+1)} &= y - \frac{\lambda}{2} \mathbf{A}^t z^{(i)} \\ z^{(i+1)} &= \text{clip}\left(z^{(i)} + \frac{2}{\alpha\lambda} \mathbf{A}x^{(i+1)}, 1\right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Με κλιμάκωση του z από το $\lambda/2$, έχουμε την ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$\begin{aligned} x^{(i+1)} &= y - \mathbf{A}^t z^{(i)} \\ z^{(i+1)} &= \text{clip}\left(z^{(i)} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}x^{(i+1)}, \frac{\lambda}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Για τον πίνακα

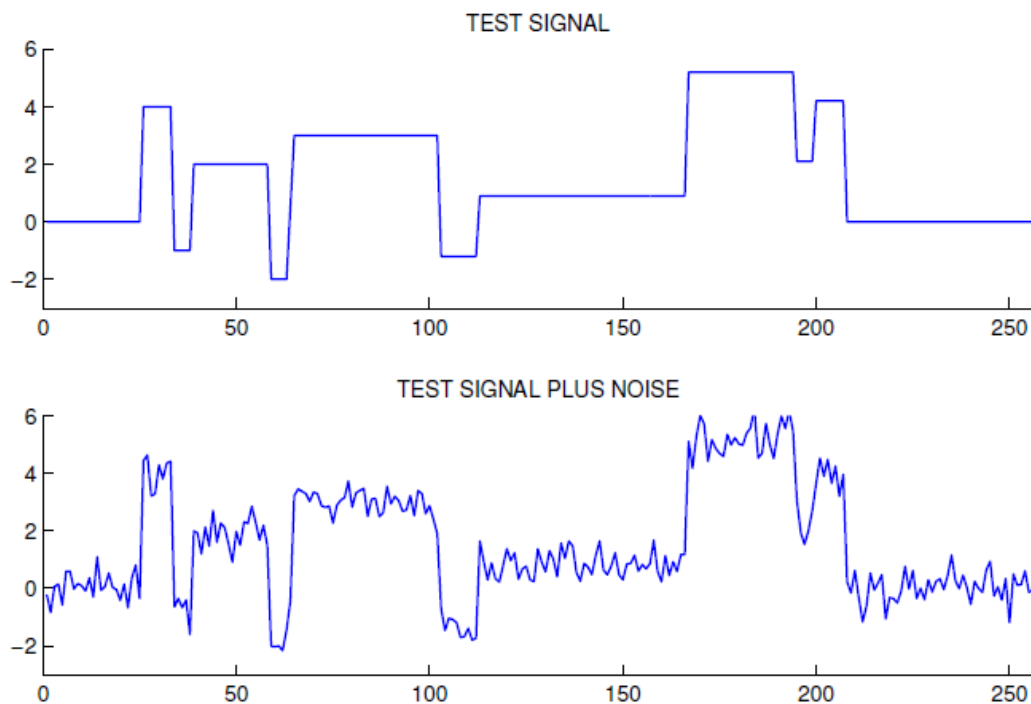
$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

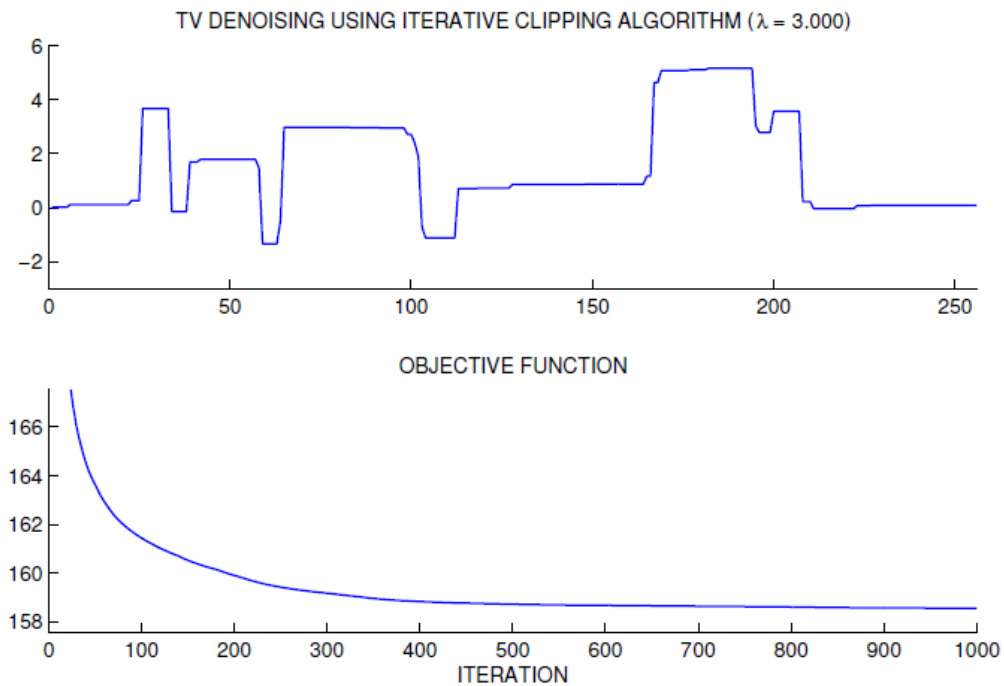
η μέγιστη ιδιοτιμή του DD^t είναι μικρότερη από 4, ανεξαρτήτως του N , έτσι στο φιλτράρισμα TV μπορούμε να θέσουμε $\alpha=4$. Η υλοποίηση του φιλτραρίσματος συνολικής διακύμανσης δίνεται στο παράρτημα Α.

3.7.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Τα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζουν ένα παράδειγμα φιλτραρίσματος TV. Χρησιμοποιούμε τα σήματα 'Blocks' στο MATLAB Wavelab Toolbox σαν τεστ σήματος. Το πρώτο διάγραμμα δείχνει το σήμα ελεύθερο από θόρυβο, το δεύτερο το σήμα με θόρυβο και το τρίτο το σήμα που λαμβάνουμε με το φίλτρο TV. Να σημειώσουμε ότι το φίλτρο TV διατηρεί τις ασυνέχειες του σήματος αρκετά καλά. Τα συνηθισμένα φίλτρα ομαλοποίησης έχουν μεγαλύτερη τάση να 'θολώσουν' τις ασυνέχειες. Να σημειώσουμε επίσης ότι η αντικειμενική συνάρτηση, που απεικονίζεται στο σχήμα, είναι γνησίως μονότονη. Αυτό οφείλεται στην διαδικασία μεγιστοποίησης-ελαχιστοποίησης στον αλγόριθμο. Επειδή η συνάρτηση μεγιστοποίησης είναι κυρτή, η διαδικασία μεγιστοποίησης-ελαχιστοποίησης εγγυάται ότι η αντικειμενική συνάρτηση μειώνεται σε κάθε επανάληψη.

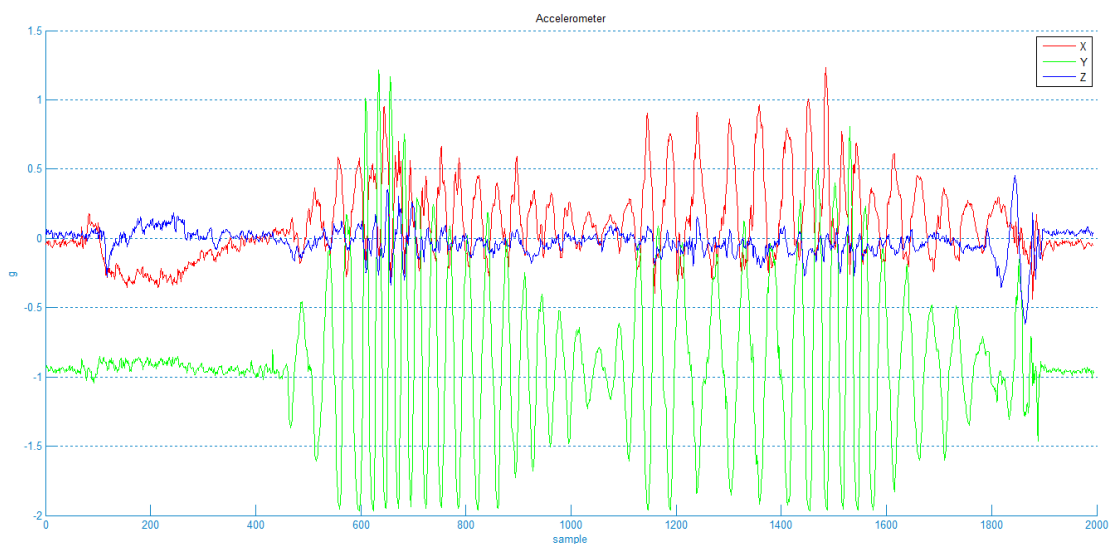




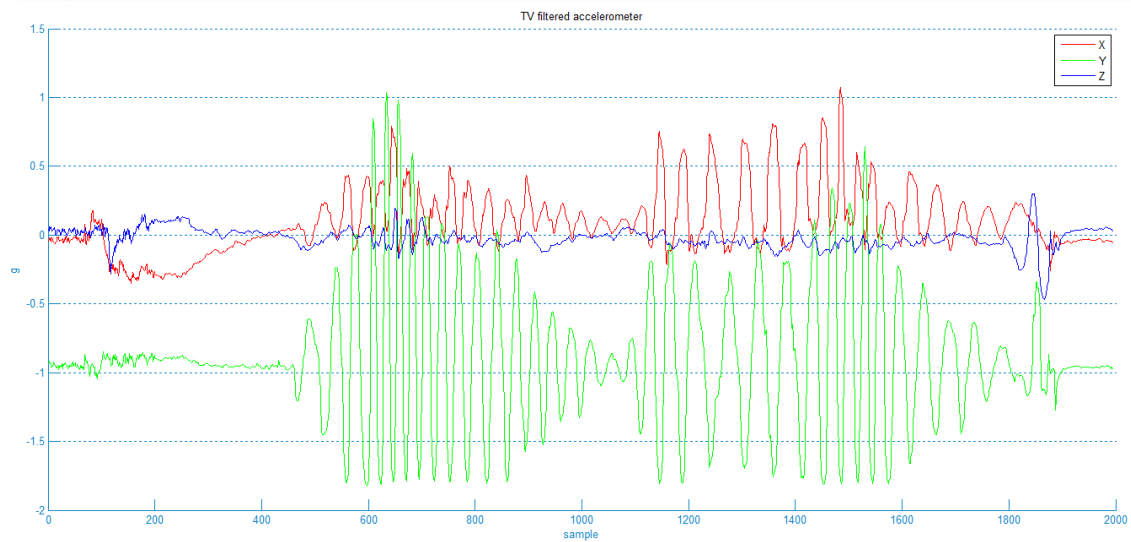
Εικόνα 3.9: Αποτελέσματα Παραδείγματος 1

Παράδειγμα 2. Χρήση δεδομένων διάταξης με IMU

Επίσης, παρακάτω παραθέτουμε το αποτέλεσμα που είχε το φίλτρο συνολικής διακύμανσης στα δεδομένα επιτάχυνσης τα οποία καταγράφηκαν με χρήση της διάταξης με το IMU – Arduino η οποία αναπτύχθηκε στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας όπως αναλύεται στο κεφάλαιο 2.

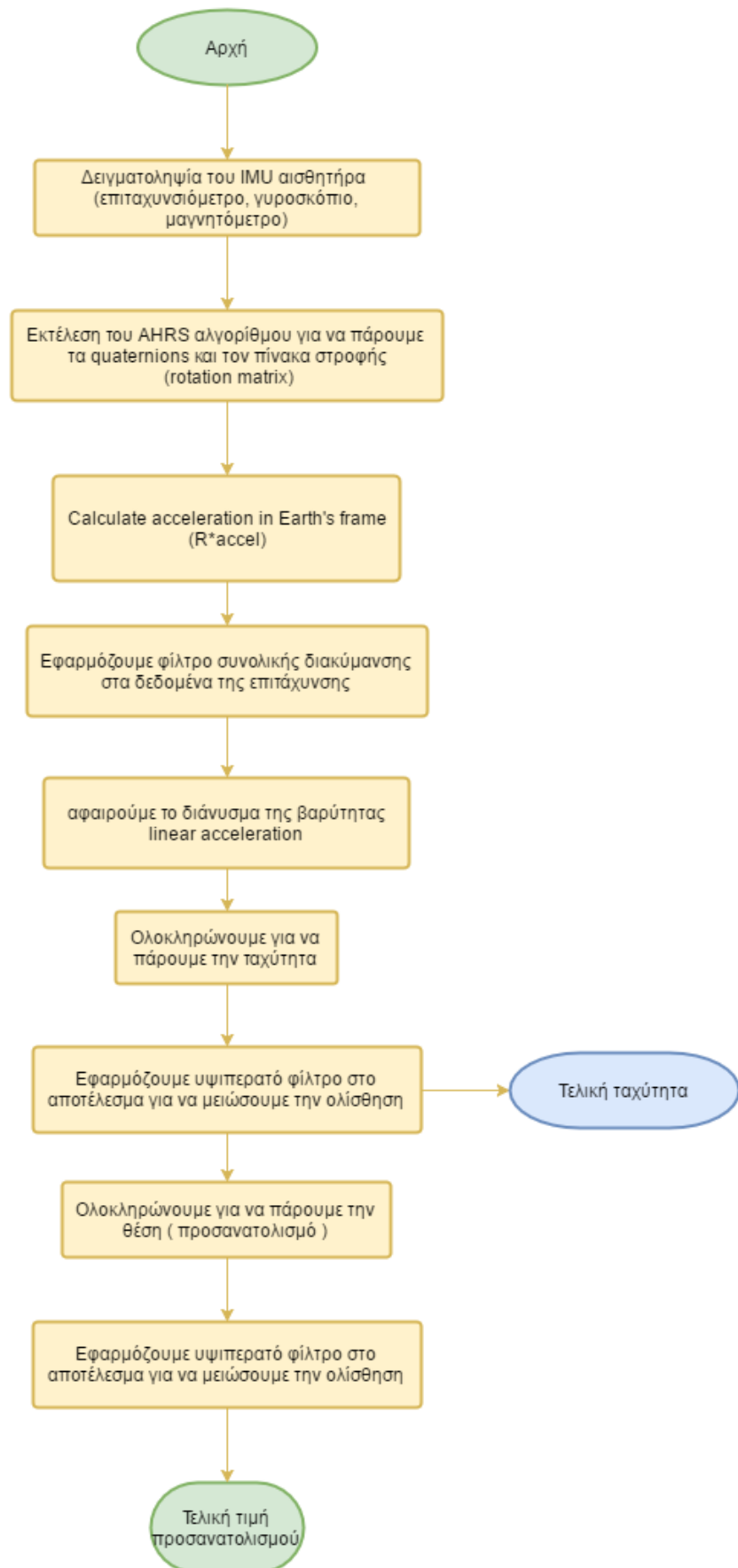


Εικόνα 3.10: Αφιλτράριστα δεδομένα επιτάχυνσης, καταγεγραμμένα απο την διάταξη με IMU



Εικόνα 3.11: Φιλτραρισμένα δεδομένα επιτάχυνσης, καταγεγραμμένα από την διάταξη με IMU

3.8 Προτεινόμενη διάταξη Εύρεσης προσανατολισμού ενός αντικειμένου



4 Εκτίμηση θέσης με βάση δεδομένα επιτάχυνσης

Σε σύγκριση με τον προσανατολισμό το πρόβλημα εύρεσης ακριβούς θέσης είναι ακόμα πιο δύσκολο. Αρχικά τα σφάλματα που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3, συμβαίνουν ακριβώς με τον ίδιο τρόπο και στην περίπτωση των επιταχυνσιόμετρων. Επιπλέον, από τη στιγμή που η θέση εξάγεται με χρήση διπλής ολοκλήρωσης της επιτάχυνσης, μια σταθερή πόλωση η οποία προέρχεται από το επιταχυνσιόμετρο, οδηγεί σε σφάλμα ολίσθησης το οποίο αυξάνεται τετραγωνικά με τον χρόνο.

4.1 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Υπάρχουν αρκετά είδη μεθόδων αριθμητικής παρεμβολής στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας. Ο κανόνας του τραπεζιού, ο κανόνας του Simpson, ο κανόνας του Tick και ο κανόνας του ορθογωνίου αποτελούν δημοφιλείς μεθόδους ολοκλήρωσης στο πεδίο του χρόνου.

4.1.1 Αρχές ψηφιακής ολοκλήρωσης

Δεδομένης μιας θέσης ενός αντικειμένου στο πεδίο του χρόνου $x(t)$, η ταχύτητα $v(t)$, μπορεί να βρεθεί παίρνοντας την πρώτη παράγωγο.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad (4.1)$$

Η επιτάχυνση $a(t)$, μπορεί να βρεθεί παίρνοντας την δεύτερη παράγωγο της θέσης ή την πρώτη παράγωγο της ταχύτητας.

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \quad (4.2)$$

Όμως, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να αντιστρέψουμε την διαδικασία και να βρούμε την θέση με δεδομένο το σήμα της επιτάχυνσης. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει να ολοκληρώσουμε δύο φορές το σήμα της επιτάχυνσης.

Κατ' αρχήν, για να κάνουμε διπλή ολοκλήρωση στο σήμα της επιτάχυνσης ώστε να πάρουμε το σήμα της θέσης, θα πρέπει να γνωρίζουμε την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα. Μετά την πρώτη ολοκλήρωση, η αρχική ταχύτητα θα πρέπει να προστεθεί στο αποτέλεσμα, όπως και η αρχική θέση πρέπει να προστεθεί μετά την δεύτερη ολοκλήρωση. Αυτές οι λειτουργίες απεικονίζονται στις παρακάτω εξισώσεις:

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

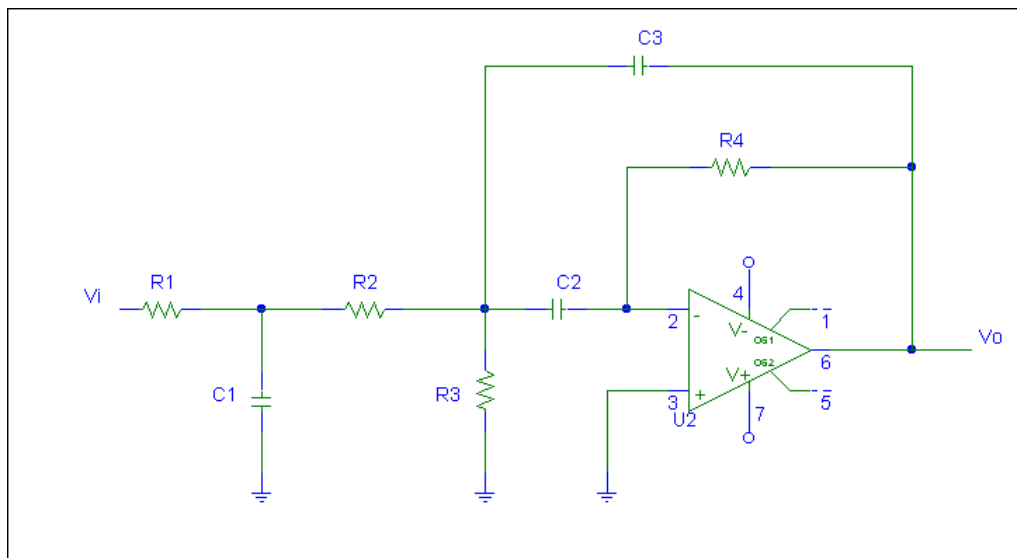
όπου t_0 είναι ο αρχικός χρόνος και $v(t_0)$ είναι η αρχική ταχύτητα, η οποία είναι μια σταθερά. Για να πάρουμε το σήμα της θέσης από την ταχύτητα, χρησιμοποιείται μια παρόμοια σχέση:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \quad (4.4)$$

Για αυτό το λόγο, για να εκτελεστεί μια διπλή ολοκλήρωση πάνω στην επιτάχυνση, οι δύο αρχικές συνθήκες (ταχύτητας και θέσης) πρέπει να είναι γνωστές για να αποφευχθούν τα λάθη ολοκλήρωσης. Όμως, ο μόνος τρόπος για να πάρουμε αυτές τις αρχικές συνθήκες είναι μέσω άμεσης μέτρησης, το οποίο είναι συχνά μη πρακτικό ή δυσεύρετο. Ένα σημαντικό κομμάτι αυτής της ενότητας είναι να αναπτυχθεί μια προσέγγιση η οποία δεν απαιτεί την γνώση των αρχικών συνθηκών.

4.1.2 Αρχές αναλογικής ολοκλήρωσης

Κατ'αρχήν, η διαδικασία της διπλής ολοκλήρωσης μπορεί να γίνει ηλεκτρονική με ένα απλό κύκλωμα τελεστικού ενισχυτή RC op-Amp circuit, όπως αυτό που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Ribiero).



Εικόνα 4.1: Κύκλωμα διπλού ολοκληρωτή που χρησιμοποιείται για να βρει μετατόπιση από δεδομένα επιτάχυνσης

Αυτό το κύκλωμα παίρνει το σήμα της επιτάχυνσης (από ένα επιταχυνσιόμετρο) ως εισόδο και επιστρέφει το σήμα της μετατόπισης. Ο Ribiero έκανε μια μελέτη χρησιμοποιώντας αναλογικά κυκλώματα για να εκτελέσει την διπλή ολοκλήρωση και διαπίστωσε ότι τα λάθη ήταν αρκετά για τους παρακάτω λόγους:

1. Η παροδική απόκριση του κυκλώματος βρέθηκε να έχει σφάλματα πάνω από 200% σε κάποιες περιπτώσεις. Αυτό το είδος σφάλματος συνέβαινε όποτε η

μετρούμενη μετατόπιση ήταν μια ξαφνική αλλαγή στο πλάτος προερχόμενη από εξωτερικές δυνάμεις ή δονήσεις.

2. Το σφάλμα προκαλούνταν από την μη-γραμμική φάση του συστήματος όποτε η μετατόπιση περιελάμβανε περισσότερες από μια συχνότητες. Η παραμόρφωση θα οδηγούσε τις συνιστώσες της συχνότητας στο μη-γραμμικό εύρος, διότι διαφορετικές συχνότητες έχουν διαφορετικές καθυστερήσεις από τον ολοκληρωτή.
3. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ολοκληρώσει πολύ χαμηλές συχνότητες εξαιτίας της συχνοτικής απόκρισης του ολοκληρωτή.

Ο συγγραφέας καταλήγει στο ότι ο αναλογικός διπλός ολοκληρωτής είναι αξιόπιστος μόνο για τις μετρήσεις μετατόπισης σε ημιτονοειδή σταθερή κατάσταση (steady state). Αλλιώς, ένας άλλος τύπος ανάλυσης προτείνεται ανεπιφύλακτα. Για αυτούς τους λόγους, η ψηφιακή ολοκλήρωση είναι πολύ καλύτερη για να πάρουμε μετατόπιση από επιτάχυνση.

4.1.3 Ψηφιακές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι διακριτής ολοκλήρωσης διαθέσιμοι για να εκτελέσουμε αριθμητική ολοκλήρωση. Το σήμα της επιτάχυνσης δειγματοληπτείται, αναγκάζοντας την διακριτή συνάρτηση του χρόνου να συσχετίζεται με την συχνότητα δειγματοληψίας f_s . Ο απλούστερος τρόπος για να εκτελέσουμε αριθμητική ολοκλήρωση είναι να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης με ορθογώνια. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί έναν αθροιστή για να αθροίσει όλες τις παλιές εισόδους που έχουν δειγματοληπτηθεί και το τρέχων δείγμα εισόδου που έχει διαιρεθεί με τον ρυθμό δειγματοληψίας.

Η ορθογώνια ολοκλήρωση εκπροσωπείται από την παρακάτω εξίσωση διαφοράς:

$$y(n) = \frac{1}{f_s} \sum_{k=0}^n x(n-k) = y(n-1) + \frac{1}{f_s} x(n) \quad (4.5)$$

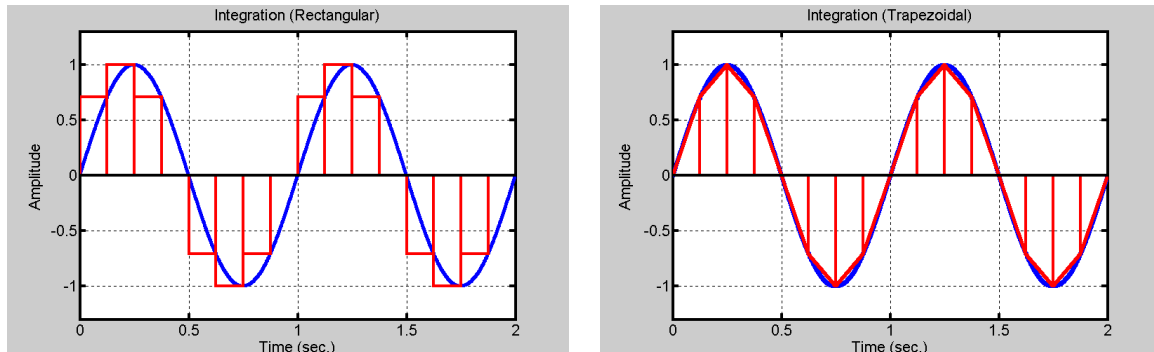
όπου το x είναι ο όρος προς ολοκλήρωση, y είναι η έξοδος του ολοκληρωτή, και f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας.

Μια άλλη αριθμητική μέθοδος χρησιμοποιεί τον τραπεζοειδή κανόνα. Τα αποτελέσματα είναι πιο ακριβή με αυτή την μέθοδο σε σχέση με την ορθογώνια μέθοδο. Η εξίσωση διαφοράς για την τραπεζοειδή ολοκλήρωση είναι:

$$y(n) = y(n-1) + \frac{1}{2f_s} [x(n-1) + x(n)], \quad n > 0 \quad (4.6)$$

Η τραπεζοειδής ολοκλήρωση ενεργεί ως ένας συγκρατητής πρώτου βαθμού, ενώ η ορθογώνια ολοκλήρωση ενεργεί ως έναν συγκρατητής μηδενικού βαθμού. Στο παρακάτω

σχήμα, το ημιτονοειδές σήμα 1Hz ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας και τις δύο μεθόδους, και ξεκάθαρα η τραπεζοειδής μέθοδος είναι πιο ακριβής στην εκτίμησης της περιοχής κάτω από την καμπύλη.



Εικόνα 4.2: Ολοκλήρωση με την χρήση της ορθογώνιας και της τραπεζοειδούς μεθόδου

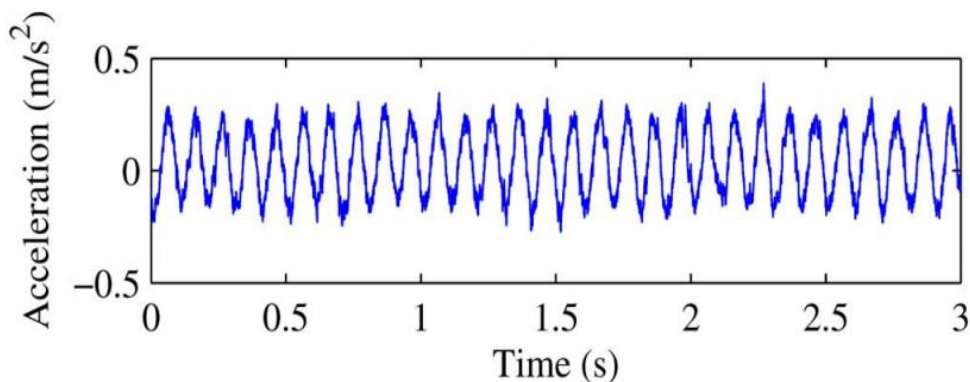
Υπάρχει μια άλλη μέθοδος ολοκλήρωσης η οποία χρησιμοποιεί τον κανόνα του Simpson. Ορίζεται με την παρακάτω εξίσωση διαφοράς:

$$y(n) = y(n-1) + \frac{1}{f_s} \cdot \frac{x(n-1) + 4x(n) + x(n+1)}{6} \quad (4.7)$$

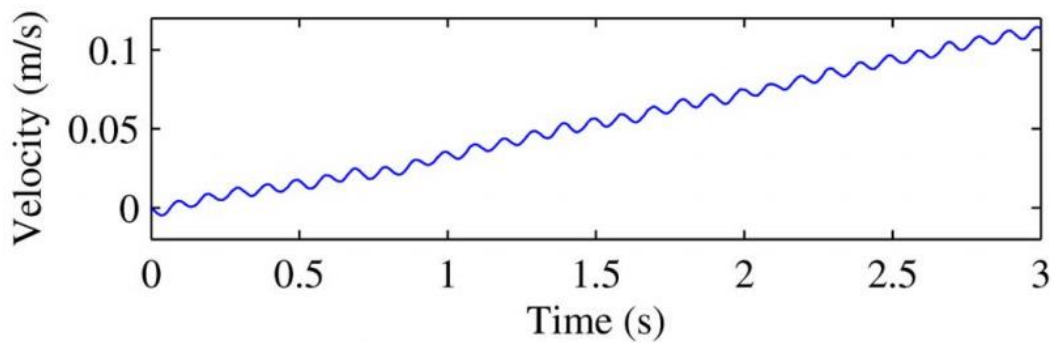
Σε αντίθεση με τις άλλες μεθόδους, αυτή απαιτεί ένα μελλοντικό δείγμα από τον όρο προς ολοκλήρωση, x , για να πάρει το τρέχον δείγμα από το ολοκληρωμένο σήμα, για αυτό δεν μπορεί να εκτελεστεί σε πραγματικό χρόνο.

4.2 Μαθηματική προσέγγιση με διπλό ολοκληρωτή

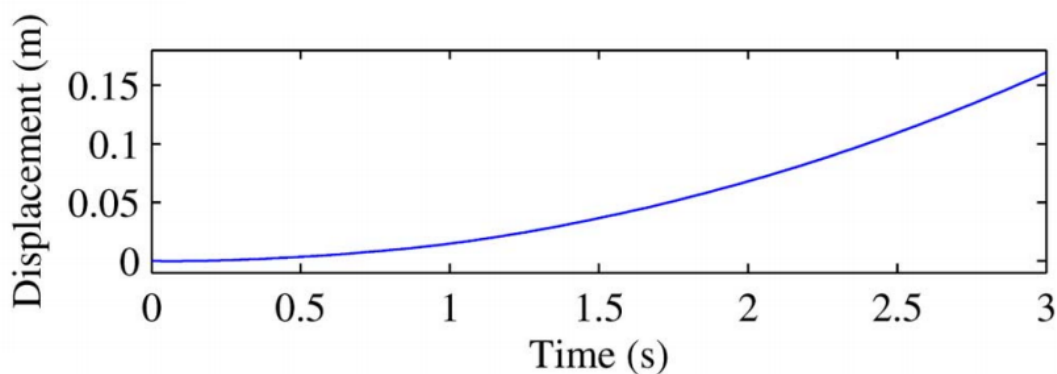
Σύμφωνα με αυτή τη προσέγγιση ένας διπλός ολοκληρωτής χρησιμοποιείται για την διπλή ολοκλήρωση του αρχικού σήματος της επιτάχυνσης ώστε να πάρουμε σαν αποτέλεσμα τη θέση.



Εικόνα 4.3: Δεδομένα επιτάχυνσης



Εικόνα 4.4: Δεδομένα ταχύτητας μετά απο ολοκλήρωση

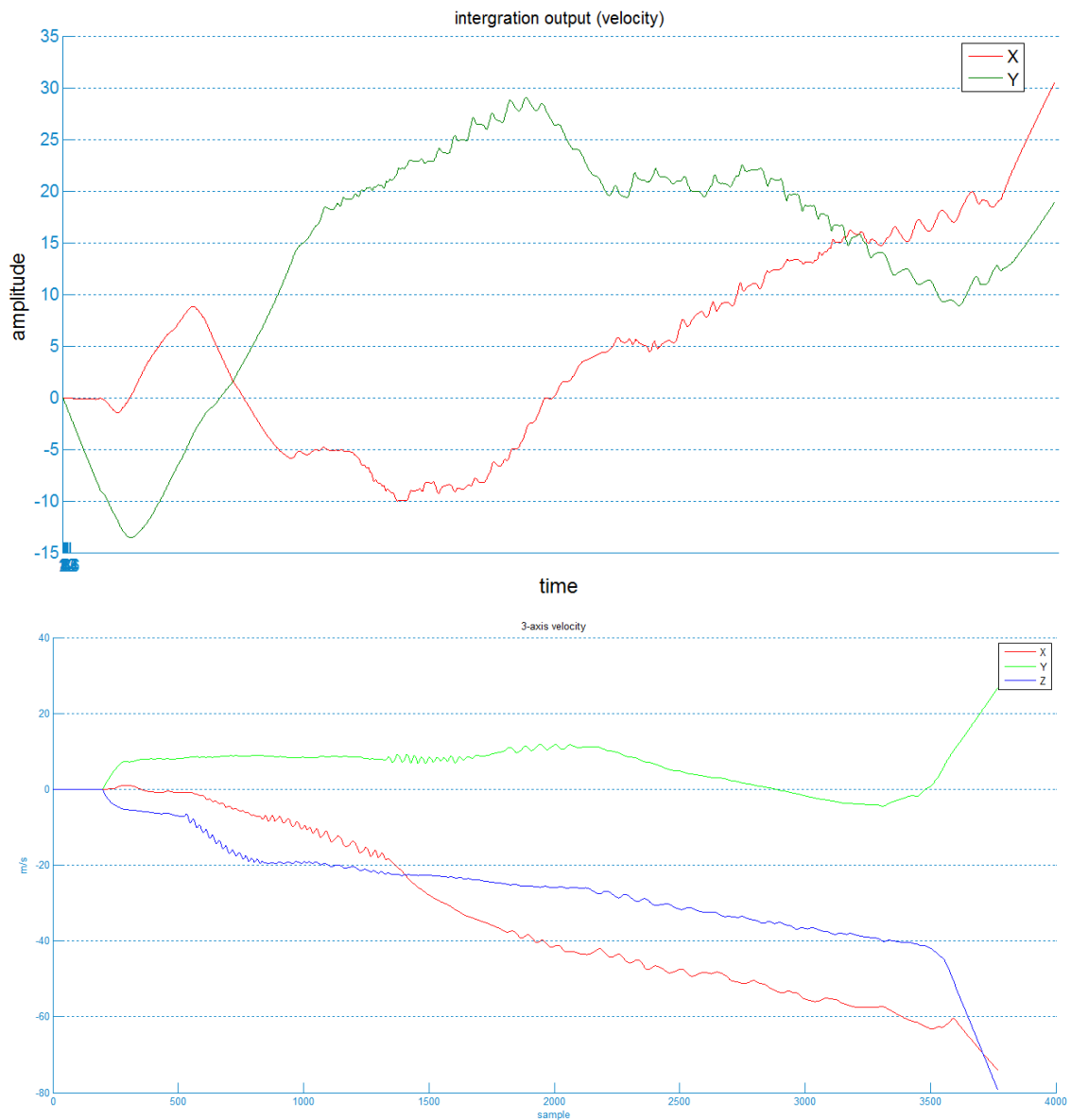


Εικόνα 4.5: Δεδομένα θέσης, μετά την ολοκλήρωση της ταχύτητας

Από τη στιγμή που η μετρούμενη επιτάχυνση από το επιταχυνσιόμετρο περιέχει μετατοπίσεις (offset) λόγω ελλιπούς βαθμονόμησης (calibration) του οργάνου αλλά και χαμηλής συχνότητας θόρυβο, δεν είναι σωστό να χρησιμοποιήσουμε την ολοκλήρωση απευθείας στο σήμα. Γενικά, υπάρχουν δύο τύποι ολοκλήρωσης της επιτάχυνσης: ο ένας στο πεδίο του χρόνου και ο άλλος στο πεδίο της συχνότητας. Ο τελευταίος δεν είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου.

Όλες οι μετατοπίσεις και ο θόρυβος που περιέχει το σήμα της επιτάχυνσης τελικά οδηγούν σε μεγάλες μετατοπίσεις κατά την ολοκλήρωση.

Κατόπιν ολοκλήρωσης των καταγεγραμμένων δεδομένων του επιταχυνσιόμετρου (όπως εμφανίζονται στην ενότητα 2.8) έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα για τους άξονες X και Y.



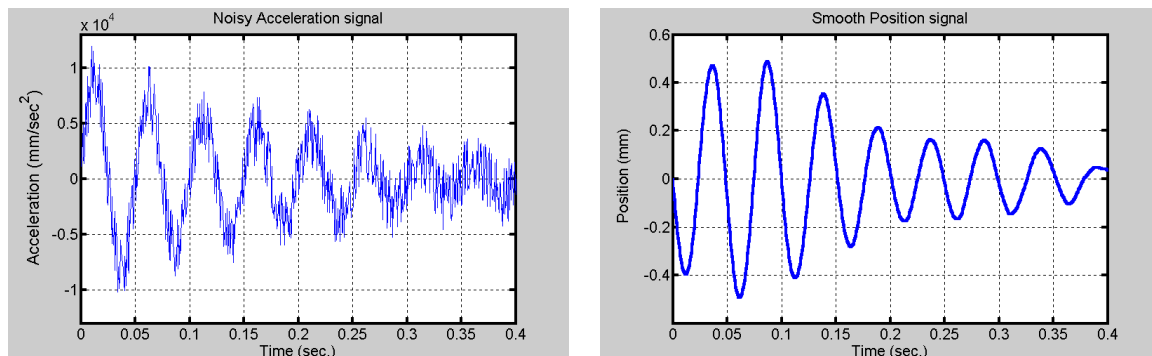
Εικόνα 4.6: Ολοκλήρωση της επιτάχυνσης στην ενότητα 2.8 χωρίς χρήση κάποιου φίλτρου

Όπως εμφανίζεται και στην προηγούμενη εικόνα έχουμε αρκετή ολίσθηση στα δεδομένα της ταχύτητας.

4.3 Ο Ολοκληρωτής ως ένα κατωδιαβατό φίλτρο

Είναι χαρακτηριστικό των μηχανικών συστημάτων να συμβαίνει η μετατόπιση κυρίως στις χαμηλές συχνότητες. Όταν η ολοκλήρωση γίνεται στο σήμα, το σήμα απλώς διαιρείται με μια σταθερά αναλογική με την συχνότητα (αγνοώντας τυχόν προσαρμογές φάσης). Όταν η συχνότητα του ολοκληρώματος είναι υψηλότερη, τότε η σταθερά θα είναι υψηλότερη και το εύρος της εξόδου του ολοκληρωτή μικρότερο. Έτσι, η απόκριση συχνότητας του ολοκληρωτή είναι σαν αυτή ενός κατωδιαβατού φίλτρου. Το παρακάτω

σχήμα δείχνει ότι το σήμα της επιτάχυνσης στα αριστερά περιέχει περιεχόμενο μεγαλύτερων συχνοτήτων, το οποίο κάνει το σήμα να φαίνεται θορυβώδες.



Εικόνα 4.7: Απεικόνιση του φαινομένου εξομάλυνσης του ολοκληρωτή

Τα δεδομένα της επιτάχυνσης ολοκληρώθηκαν δύο φορές για να πάρουμε την θέση στα δεξιά. Τα δεδομένα θέσης είναι πολύ πιο εξομαλυσμένα διότι το περιεχόμενο υψηλών συχνοτήτων στο σήμα της επιτάχυνσης φιλτράρεται μέσω της διαδικασίας της διπλής ολοκλήρωσης. Επίσης, έχει 180° διαφορά φάσης με την επιτάχυνση, όπως ήταν αναμενόμενο. Κάθε φορά που εφαρμόζεται ο τελεστής της ολοκλήρωσης το σήμα μετατοπίζεται κατά 90° .

Για κάθε συχνοτική είσοδο σε έναν ολοκληρωτή, η έξοδος θα είναι μοναδική, της ίδιας συχνότητας με την είσοδο. Εάν έχουμε το εξής σήμα επιτάχυνσης ως είσοδο,

$$a(t) = A \sin(\omega_1 t + \phi), \quad (4.8)$$

η έξοδος της (ταχύτητα), χωρίς να έχουμε θεωρήσει αρχικές συνθήκες, είναι

$$v(t) = \frac{-A}{\omega_1} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (4.9)$$

Αυτό έχει διαφορά φάσης -90° σε σχέση με την είσοδο. Ολοκληρώνοντας ξανά (πάλι χωρίς να έχουμε θεωρήσει αρχικές συνθήκες), η έξοδος της (θέση) θα είναι

$$x(t) = \frac{-A}{\omega_1^2} \sin(\omega_1 t + \phi) \quad (4.10)$$

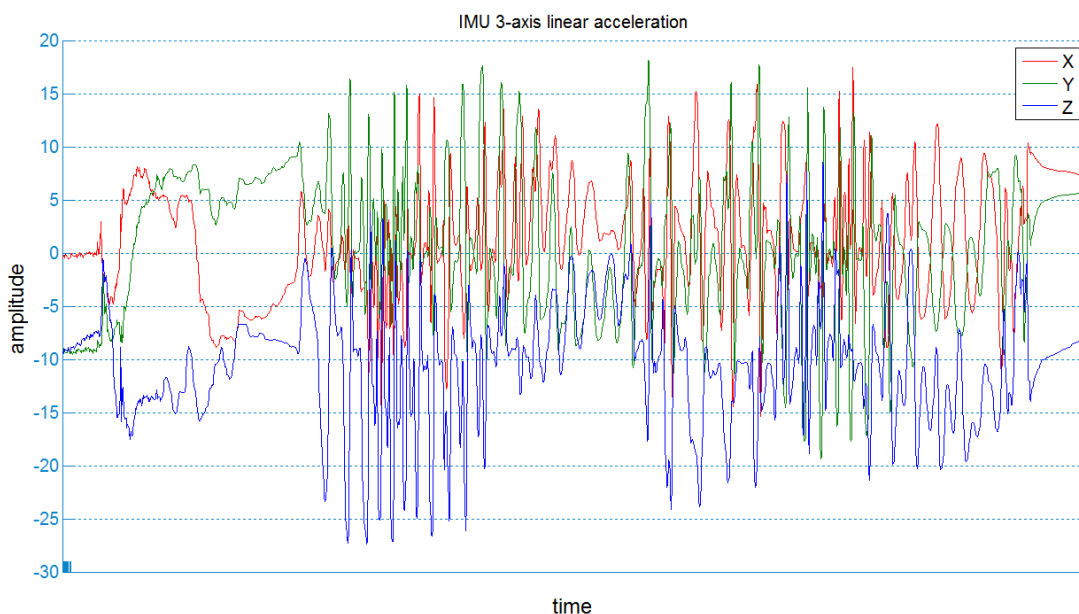
το οποίο έχει διαφορά φάσης 180° με την επιτάχυνση $a(t)$.

Εάν η συχνότητα της εισόδου της επιτάχυνσης, ω_1 αυξηθεί, το πλάτος της εξόδου του διπλού ολοκληρωτή, της θέσης δηλαδή, μειώνεται. Αν η συχνότητα μειωθεί, τότε το πλάτος της εξόδου θα αυξηθεί. Αυτή η αντιστρόφως ανάλογη θέση είναι σημαντική. Δείχνει πως ο ολοκληρωτής μπορεί να λειτουργήσει ως ένα κατωδιαβατό φίλτρο. Επίσης,

δείχνει πως η συνάρτηση της επιτάχυνσης θα έχει ένα πολύ μεγαλύτερο εύρος από την θέση, εκτός από την περίπτωση όπου η συχνότητα μειώνει πολύ (λιγότερο από 1rad/s).

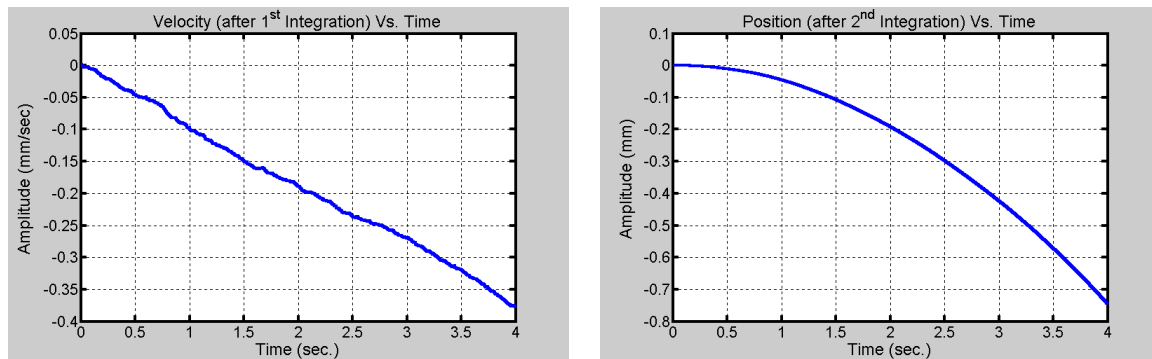
4.4 Ολίσθηση του Επιταχυνσιόμετρου

Για να μετρήσουμε επιτάχυνση, χρησιμοποιούμε τα επιταχυνσιόμετρα για να μετατρέψουν την επιτάχυνση σε ένα ηλεκτρικό σήμα. Δυστυχώς, τα επιταχυνσιόμετρα έχουν ένα ανεπιθύμητο φαινόμενο που καλείται ολίσθηση (drift) το οποίο προκαλείται από μια μικρή DC πόλωση (bias) στο σήμα του επιταχυνσιόμετρου. Ιδανικά, δεν θα έπρεπε να υπάρχει DC πόλωση από το επιταχυνσιόμετρο για την μέτρηση μιας δόνησης. Μια δόνηση συμβαίνει γύρω από ένα σταθερό σημείο και έχει μηδενική μέση τιμή στη πάροδο του χρόνου. Η παρουσία της ολίσθησης μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλα σφάλματα ολοκλήρωσης. Αν το σήμα της επιτάχυνσης από ένα πραγματικό επιταχυνσιόμετρο ολοκληρωθεί χωρίς καθόλου φιλτράρισμα η έξοδος μπορεί να γίνει απεριόριστη στην πάροδο του χρόνου. Η παρακάτω εικόνα δείχνει τι συχνά συμβαίνει σε ένα σήμα επιτάχυνσης μετά από μια διπλή ολοκλήρωση. Η εικόνα είναι ένα παράδειγμα ενός σήματος επιτάχυνσης το οποίο έχει μια ελάχιστη αρνητική DC πόλωση. Το σήμα δεν προέρχεται από αληθινά δεδομένα επιτάχυνσης, αλλά δημιουργήθηκε τυχαία για την επίδειξη του προβλήματος της ολίσθησης.



Εικόνα 4.8: Παράδειγμα καταγραφής δεδομένων από την διάταξη με τον αισθητήρα IMU

Στο παρακάτω διάγραμμα σχεδιάζεται το σήμα της ταχύτητας το οποίο προκύπτει από την πρώτη ολοκλήρωση και το σήμα της θέσης μετά την δεύτερη ολοκλήρωση.



Εικόνα 4.9 Απεικόνιση των σφαλμάτων ολοκλήρωσης λόγω της ολίσθησης σε έναν μονο άξονα

Το αριστερό διάγραμμα δείχνει το αποτέλεσμα της πρώτης ολοκλήρωσης. Η αρνητική DC πόλωση μπορεί να θεωρηθεί ως μια αρνητική βηματική συνάρτηση. Ολοκληρώνοντας μια βηματική συνάρτηση έχουμε ως αποτέλεσμα μια συνάρτηση τύπου ράμπας, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα της ταχύτητας. Όταν ολοκληρώσουμε και πάλι, η θέση αλλάζει με τετραγωνικό τρόπο. Το διάγραμμα της μετατόπισης υποδηλώνει ότι το αντικείμενο κινείται μακριά από το σταθερό σημείο, ενώ στην πραγματικότητα, η δόνηση είναι γύρω από ένα σταθερό σημείο και το αντικείμενο δεν κινείται με την πάροδο του χρόνου.

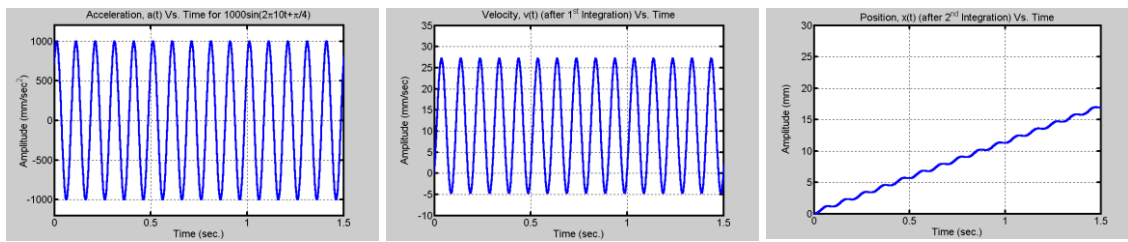
Για να λύσουμε το πρόβλημα της ολίσθησης, ένα υπερβατικό φίλτρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αφαιρέσει την DC συνιστώσα στο σήμα της επιτάχυνσης. Η συχνотική απόκριση του φίλτρου πρέπει να έχει μια πολύ χαμηλή συχνότητα αποκοπής σε σχέση με το εύρος του σήματος. Φιλτράροντας πριν την ολοκλήρωση μειώνονται τα σφάλματα της ολίσθησης.

4.4.1 Αρχικές Συνθήκες

Ένα άλλο πρόβλημα της διπλής ολοκλήρωσης ενός σήματος επιτάχυνσης είναι η έλλειψη αρχικών συνθηκών. Για σωστή ολοκλήρωση, πρέπει να γνωρίζουμε και την αρχική ταχύτητα και την αρχική θέση από μια άμεση μέτρηση. Βέβαια, ένας σημαντικός στόχος είναι να μειώσουμε την ανάγκη για αρχικές συνθήκες. Για να απεικονίσουμε την επίδραση της έλλειψης των αρχικών συνθηκών, θεωρούμε το ακόλουθο σήμα επιτάχυνσης (με τις αρχικές συνθήκες να δίνονται αλλά να μην χρησιμοποιούνται):

$$a(t) = 1000 \sin\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{4}\right), \quad v(0) = \frac{-50}{\pi\sqrt{2}} \approx -11.2540, \quad x(0) = \frac{-10}{4\pi^2\sqrt{2}} \approx -0.1791$$

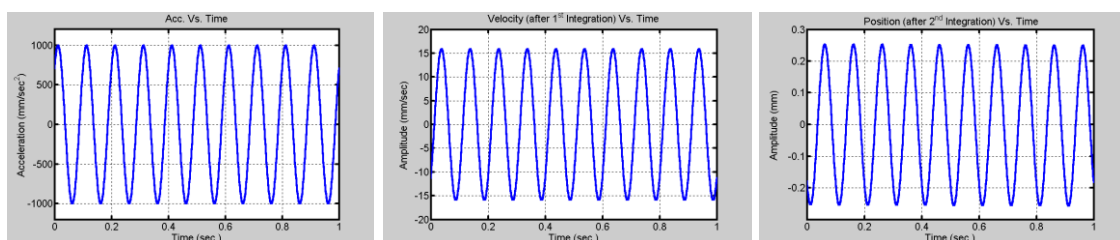
Τώρα, μια διπλή ολοκλήρωση εφαρμόζεται πάνω στην επιτάχυνση, $a(t)$, για να πάρουμε την ταχύτητα, $v(t)$ (μετά την πρώτη ολοκλήρωση), και την θέση, $x(t)$.



Εικόνα 4.10: Διπλή Ολοκλήρωση χωρίς την χρήση αρχικών συνθηκών

Παρατηρούμε ένα το μεσαίο διάγραμμα της ταχύτητας περιέχει μια DC τιμή περίπου 11.2540. Εάν είχαμε προσθέσει την αρχική τιμή της ταχύτητας, $v(0)$, η ίδια ποσότητα θα είχε αφαιρεθεί και το διάγραμμα θα ήταν κεντραρισμένο γύρω από το μηδέν, όπως θα έπρεπε. Επειδή η αρχική τιμή δεν χρησιμοποιήθηκε και η συνάρτηση ολοκληρώθηκε για δεύτερη φορά, η έξοδος αυξάνεται γραμμικά. Αυτό το παράδειγμα απεικονίζει επίσης ένα ακόμα σημαντικό σημείο: εκεί που η ολοκλήρωση αρχίζει να κάνει την διαφορά στο αποτέλεσμα. Ας θεωρήσουμε μια συνημιτονική συνάρτηση για σήμα επιτάχυνσης, η οποία δεν έχει μετατόπιση φάσης (δηλαδή η ολοκλήρωση θα αρχίσει από την μέγιστη θετική τιμή της συνάρτησης). Αν ολοκληρωθεί για ένα ακέραιο αριθμό περιόδων, τότε η συνάρτηση της ταχύτητας δεν θα έχει DC συνιστώσα και έτσι, δεν θα υπάρχει λόγος να προσθέσουμε μια αρχική συνθήκη. Αυτό είναι κάτι που συμβαίνει όταν έχουμε μηδενική αρχική συνθήκη για την ταχύτητα.

Η εικόνα παρακάτω δείχνει το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας αρχικές συνθήκες. Το σήμα της θέσης είναι ημιτονοειδής και έχει την ίδια συχνότητα με το σήμα της επιτάχυνσης. Αυτό είναι το σωστό αποτέλεσμα, διότι ολοκληρώνοντας μια ημιτονοειδή συνάρτηση διπλά παίρνουμε μια ακόμη ημιτονοειδή συνάρτηση με την ίδια συχνότητα, αλλά με διαφορετικό πλάτος και φάση. Τα διαγράμματα της εικόνας δεν έχουν εμφανή σφάλματα ολοκλήρωσης.

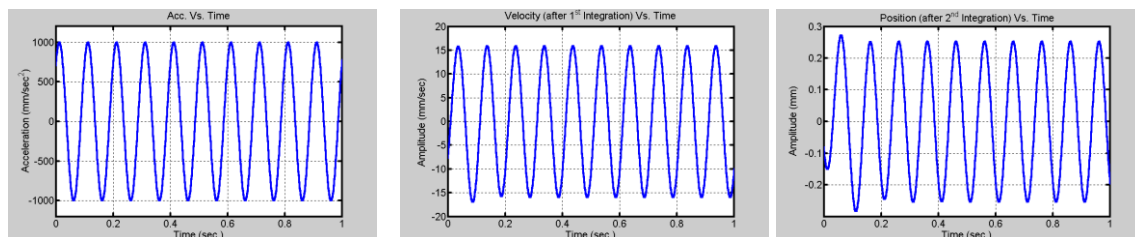


Εικόνα 4.11 Διπλή ολοκλήρωση με αρχικές συνθήκες

Επίσης, βλέπουμε άλλο ένα σημαντικό φαινόμενο της διπλής ολοκλήρωσης. Αυτό είναι το γεγονός ότι το σήμα της θέσης έχει διαφορά φάσης 180° με το σήμα της

επιτάχυνσης. Η διπλή ολοκλήρωση μιας συχνότητας προκαλεί αλλαγή προσήμου. Η ολοκλήρωση δουλεύει κανονικά με γνωστές αρχικές συνθήκες. Όμως, θα ήταν αδύνατο να εφαρμόσουμε διπλή ολοκλήρωση έτσι (χωρίς φιλτράρισμα) σε μια πειραματική περίπτωση εξαιτίας της έλλειψης των αρχικών συνθηκών και του όφσετ σφάλματος. Για αυτό θα πρέπει να αναπτύξουμε μια μέθοδο διπλής ολοκλήρωσης χωρίς αυτά.

Μια λύση στο πρόβλημα των αρχικών συνθηκών είναι να χρησιμοποιήσουμε φιλτράρισμα. Μετά την ολοκλήρωση του σήματος της επιτάχυνσης, θα υπάρχει πιθανόν μια DC συνιστώσα. Ένα υψιδιαβατό φίλτρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αφαιρέσει την DC συνιστώσα από το σήμα. Ομοίως, αφού το σήμα ολοκληρωθεί για να πάρουμε την θέση, το σήμα της θέσης μπορεί επίσης να φιλτραρισθεί με ένα υψιδιαβατό φίλτρο. Η εικόνα παρακάτω δείχνει την διπλή ολοκλήρωση με φιλτράρισμα για να πάρουμε καλύτερα αποτελέσματα ελαχιστοποιώντας τα σφάλματα ολοκλήρωσης τα οποία προκαλούνται από την έλλειψη αρχικών συνθηκών.



Εικόνα4.12 Διπλή ολοκλήρωση με φιλτράρισμα

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το φιλτράρισμα μπορεί να είναι πολύ χρήσιμο για να δουλέψει η διαδικασία της διπλής ολοκλήρωσης. Όμως, προκαλούνται ορισμένα ανεπιθύμητα φαινόμενα από το φιλτράρισμα. Το διάγραμμα της θέσης παραπάνω περιέχει κάποια μεταβατικά φαινόμενα από το φιλτράρισμα.

4.7 Υψιπερατό Φίλτρο για την μείωση της ολίσθησης

Το υψιπερατό φίλτρο έχει τον ρόλο μείωσης του θορύβου χαμηλής συχνότητας, ο οποίος προκαλεί ολίσθηση στο παραγόμενο σήμα κατά την ολοκλήρωση.

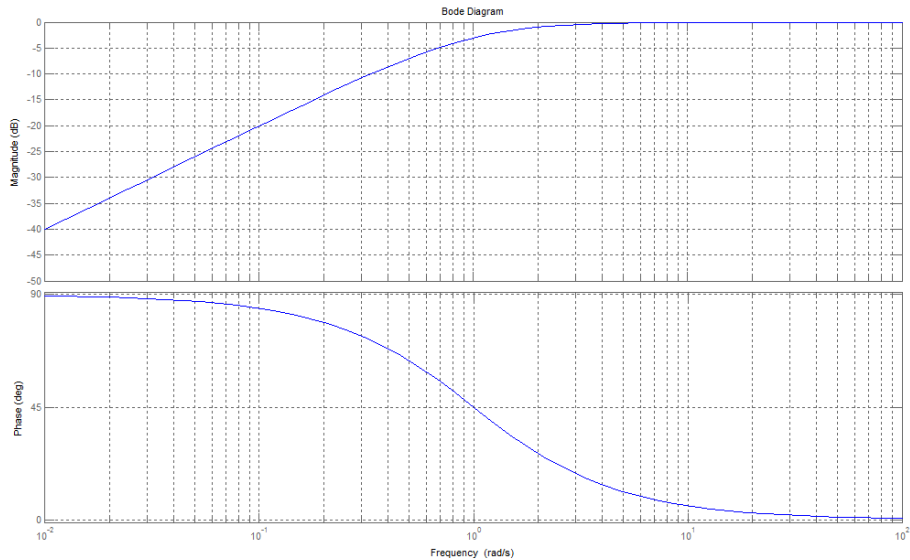
Η συνάρτηση μεταφοράς ενός τέτοιου υψιπερατού φίλτρου είναι της μορφής:

$$H(s) = \frac{s}{s + 1/\tau} \quad (4.11)$$

όπου η παράμετρος τ εκτιμάται χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier (Fast Fourier Transform) και η συνάρτηση αποκοπής είναι:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (4.12)$$

Το διάγραμμα bode του υπερβατικού φίλτρου φαίνεται στην εικόνα



Εικόνα 4.13 Διάγραμμα Bode υπερβατικού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής 1 rad/s.

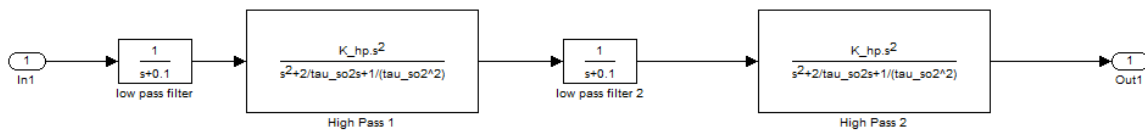
Όπως εύκολα διακρίνεται από το διάγραμμα Bode, το υπερβατικό φίλτρο θα καταπιέσει τις χαμηλές συχνότητες στο σύστημα, ενώ για τις υπόλοιπες θα διατηρήσει σταθερό το κέρδος. Παρόλα αυτά όμως, είναι σημαντικό να επισημάνουμε εδώ, ότι σε μία περιοχή κοντά στην συχνότητα αποκοπής, το φίλτρο προσθέτει παραμόρφωση στην φάση των αντίστοιχων χαμηλών συχνοτήτων.

Στη παρούσα διάταξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεύτερης τάξης υπερβατικό φίλτρο. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός τέτοιου φίλτρου έχει την εξής μορφή:

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\tau^{-1}s + \tau^{-2}} \quad (4.13)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier θα μας δώσει την κατανομή συχνοτήτων της επιτάχυνσης. Η συχνότητα αποκοπής του φίλτρου υπολογίζεται ανάλογα με την κατανομή αυτή. Ο σχεδιασμός του υπερβατικού φίλτρου γίνεται off – line. Κατά τη διαδικασία αυτή θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η επιρροή του φίλτρου σε σήματα χαμηλής συχνότητας. Η συχνότητα αποκοπής θα πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να μην εξασθενήσει τα χαμηλής συχνότητας χρήσιμα σήματα.

Το μπλοκ διάγραμμα μιας διαδικασίας διπλής ολοκλήρωσης χωρίς ολίσθησης (drift free) της μετατόπισης (κατόπιν δύο ολοκληρώσεων) δίνει παρακάτω το σχήμα 4.14.



Εικόνα 4.14: Μπλοκ διάγραμμα διπλής ολοκλήρωσης με χρήση υπερπαρατάτων φίλτρων για την απομάκρυνση της ολίσθησης

Το διάγραμμα περιέχει δύο στάδια ολοκλήρωσης, όπου το πρώτο στάδιο μετατρέπει την επιτάχυνση σε ταχύτητα και το δεύτερο την ταχύτητα σε θέση - μετατόπιση και τρία στάδια υπερπαρατάτων φίλτρων.

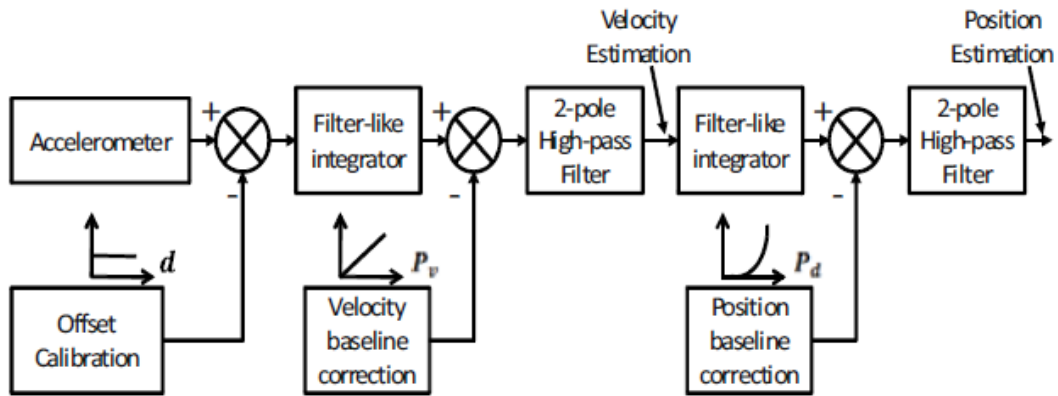
4.5 Εκτίμηση Ταλαντωτικής κίνησης με χρήση υπερπαρατάτων φίλτρων

Από τη στιγμή που η μέτρηση από το επιταχυνσιόμετρο περιέχει κάποιο *offset* και κάποιο χαμηλής συχνότητας θορύβο, δεν είναι κατάλληλο να κάνουμε απλή διπλή ολοκλήρωση απευθείας στο σήμα.

Γενικά υπάρχουν δύο τρόποι σχεδιασμού ολοκληρωτών για τα δεδομένα της επιτάχυνσης. Ο πρώτος είναι στο πεδίο του χρόνου και ο δεύτερος στο πεδίο της συχνότητας. Ο δεύτερος τρόπος, αυτός στο πεδίο της συχνότητας είναι πολύ δύσκολο να εφαρμοστεί σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου (*real time*).

Επίσης, η απόκλιση λόγω μη γνωστών αρχικών συνθηκών του επιταχυνσιόμετρου οδηγούν σε ολίσθηση κατά την ολοκλήρωση. Η διόρθωση *baseline* είναι μια μέθοδος ελαχιστοποίησης της ολίσθησης κατά τη διάρκεια της ολοκλήρωσης. Παρακάτω μια πολυωνυμική *baseline* (ενότητα 4.5) διόρθωση εφαρμόζεται ώστε να διορθώσει το *offset*. Η διόρθωση αυτή εφαρμόζεται σε δύο στάδια (ώστε να υπάρχει μια πιο αποδοτική μείωση της ολίσθησης) στην έξοδο από τους ολοκληρωτές. Οι ολοκληρωτές στην μέθοδο αυτή είναι κατωδιαβατά φίλτρα με σταθερά χρόνου πολύ μικρή, λόγω των *baseline* διορθωτών. Το πλεονέκτημα της χρησιμοποίησης μικρής σταθεράς χρόνου είναι ότι αυξάνουμε την ακρίβεια της φάσης σχετικά με τον κλασικό ολοκληρωτή, έτσι χρησιμοποιούμε έναν ολοκληρωτή ο οποίος είναι πιο κοντά στον ιδανικό.

Μετά την διόρθωση *baseline*, το ολοκληρωμένο σήμα πηγαίνει σε ένα υπερπαρατό φίλτρο το οποίο μειώνει την ολίσθηση η οποία έχει προέλθει από τον θόρυβο χαμηλής συχνότητας. Το προτεινόμενο διάγραμμα βρίσκεται στην παρακάτω εικόνα



Εικόνα 4.15: Σχεδιάγραμμα διπλής ολοκλήρωσης με εφαρμογή υπερεπατών φίλτρων και διορθώσεις *baseline*

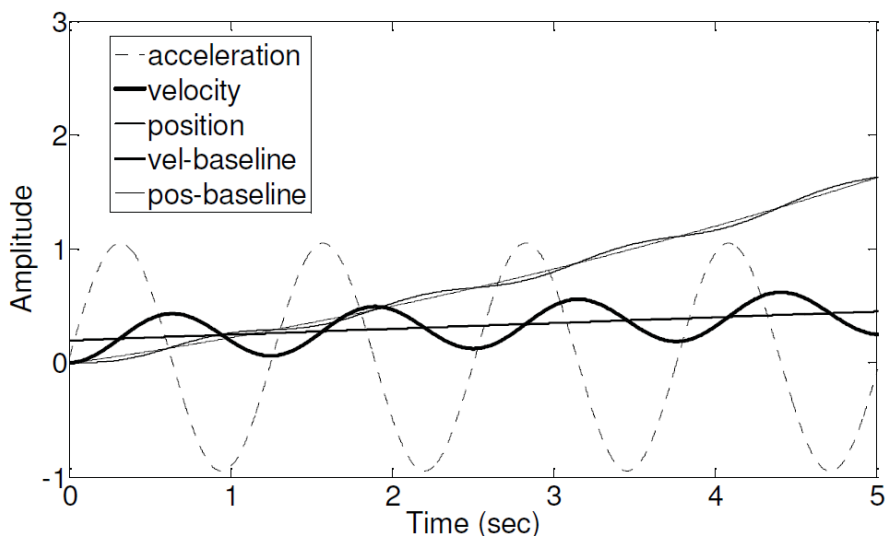
4.6 Πολλαπλή *baseline* διόρθωση

Εφαρμόζοντας πολλαπλή διόρθωση *baseline*, ένα κατωδιαβατό φίλτρο με μικρή σταθερά χρόνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί προσεγγίζοντας έτσι έναν ιδανικό ολοκληρωτή. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός τέτοιου ολοκληρωτή – φίλτρου είναι η εξής:

$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta} \quad (4.14)$$

όπου το α είναι το κέρδος (*gain*), και το β είναι η σταθερά χρόνου η οποία είναι κοντά στο μηδέν. Σε περίπτωση που το β είναι μηδέν το παραπάνω σύστημα είναι ένας ιδανικός ολοκληρωτής. Όμως ο ιδανικός ολοκληρωτής ($\beta = 0$) ενισχύει το DC *offset* πολύ γρήγορα. Από την άλλη μεριά, ένα μεγάλο β μειώνει την ακρίβεια φάσης. Διαλέγοντας την καλύτερη τιμή της παραμέτρου είναι ένα *trade – off* μεταξύ χαμηλού DC *offset* και καλύτερης ακρίβειας φάσης.

Τα αποτελέσματα που έχουν μια απόκλιση (*offset*) στην αριθμητική ολοκλήρωση εμφανίζονται και στο παρακάτω παράδειγμα.



Εικόνα 4.16 Διάγραμμα με διόρθωση baseline

Στην ουσία αυτό που πετυχαίνουμε χρησιμοποιώντας ένα κατωδιαβατό φίλτρο στην έξοδο του επιταχυνσιόμετρου είναι να μειώσουμε τον υψηλής συχνότητας θόρυβο. Αντίστοιχα, με ένα υψιπερατό φίλτρο καταφέρνουμε να εξασθενήσουμε τον θόρυβο χαμηλής συχνότητας και να μειώσουμε την ολίσθηση της εξόδου με τον χρόνο, δίνοντας έτσι στο σύστημά μας μια απόσβεση (*damping*). Η τάξη του φίλτρου και η συχνότητα αποκοπής επιλέγονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η περιοχή συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει να επιρεάζεται στο ελάχιστο από το φίλτρο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση σεισμικών διαταραχών οι συχνότητες είναι σχετικά χαμηλές, όπως θα δούμε σε εφαρμογές στη συνέχεια.

Για τον λόγο ότι θα αναφερθούμε σε χαμηλών συχνοτήτων φαινόμενα (όπως οι σεισμικές διαταραχές) οι μέθοδοι ολοκλήρωσης όπως η τραπεζοειδής (Trapezium rule), η μέθοδος Simpson (Simpson's rule) και η μέθοδος Tick (Tick's rule) δεν θα χρησιμοποιηθούν σε αυτή τη διάταξη, διότι δεν είναι αρκετά αποδοτικές σε χαμηλές συχνότητες. Αντιθέτως, η μέθοδος Dormand – Prince χρησιμοποιεί μια υψηλότερης τάξης συνάρτηση, η οποία έχει ως αποτέλεσμα ένα πιο ακριβές και σταθερό αποτέλεσμα στις χαμηλές συχνότητες.

4.9 Ανακεφαλαίωση

Η προτεινόμενη προσέγγιση χρησιμοποιεί διπλή ολοκλήρωση για να εξαγάγει ένα σήμα θέσης από ένα σήμα επιτάχυνσης όπως φαίνεται στην εικόνα 4.16. Η διαδικασία αποτελείται από 5 βήματα, τα οποία συνοψίζονται παρακάτω:

Βήμα 1: Κατωδιαβατό φίλτρο #1 Λειτουργεί ως ολοκληρωτής του σήματος της επιτάχυνσης για την εξαγωγή της ταχύτητας και παράλληλα δεν εισάγει μεγάλο σφάλμα φάσης

Βήμα 2: Υψιπερατό φίλτρο #1 Αφαιρεί την ολίσθηση του επιταχυνσιόμετρου

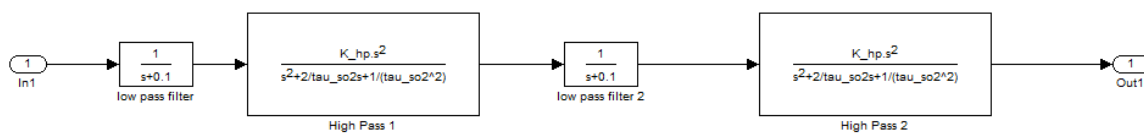
Βήμα 3: Κατωδιαβατό φίλτρο #2 Δεύτερη ολοκλήρωση για την εξαγωγή της θέσης

Βήμα 4: Υψιπερατό φίλτρο #2 αφαιρεί περιεχόμενο χαμηλών συχνοτήτων από το σήμα της θέσης

Αυτή η προτεινόμενη μέθοδος διορθώνει το πρόβλημα των σφαλμάτων ολοκλήρωσης από τα ταυτόχρονα φαινόμενα της ολίσθησης του επιταχυνσιόμετρου και της έλλειψης των αρχικών συνθηκών.

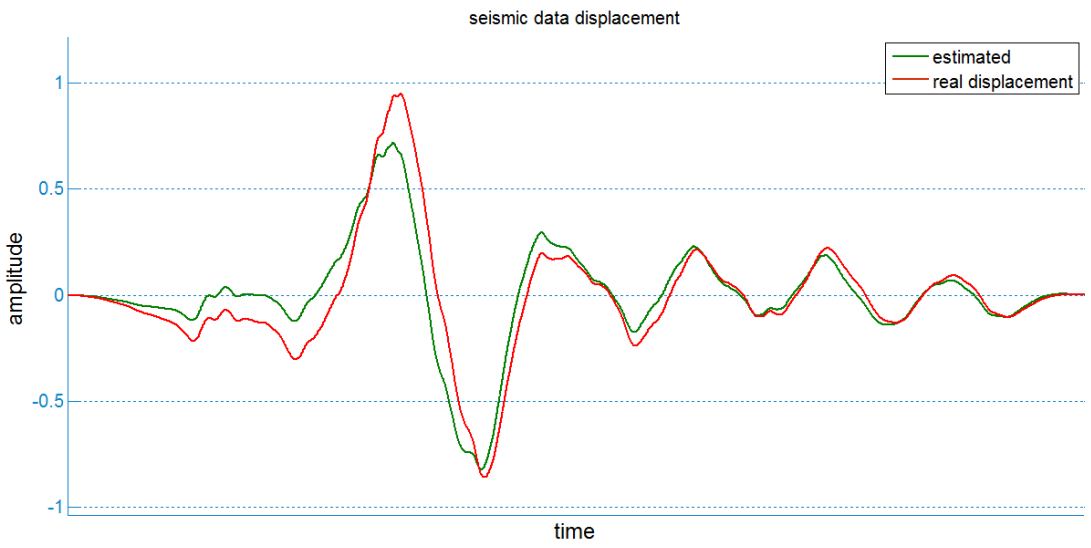
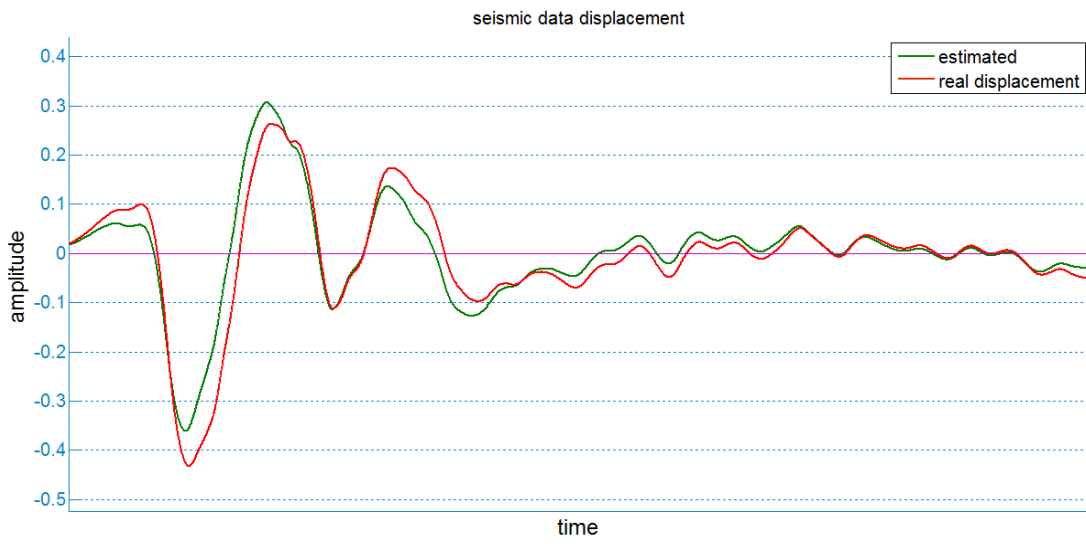
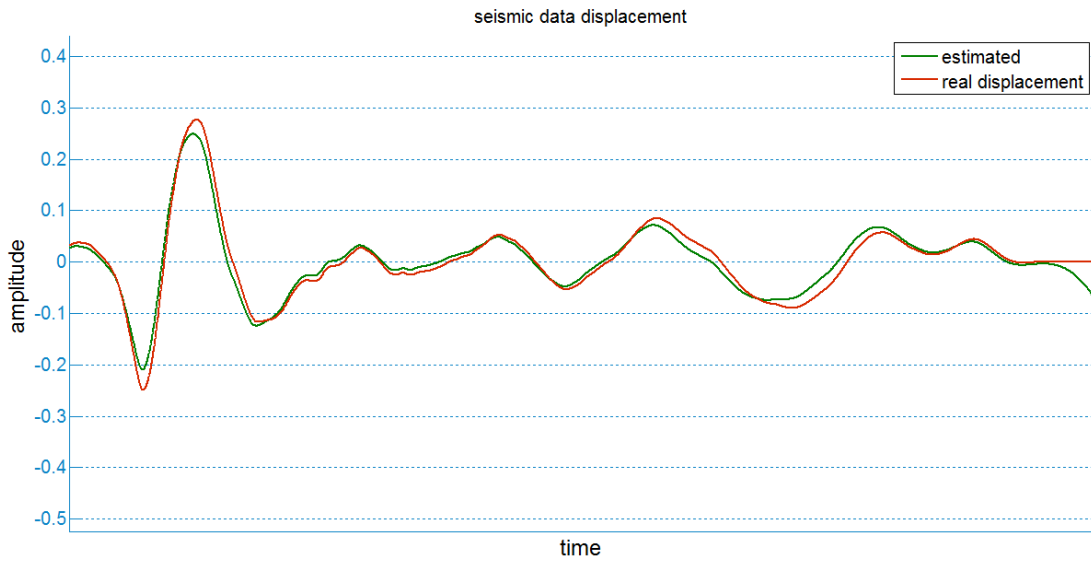
4.10 Πειραματικά δεδομένα σεισμών

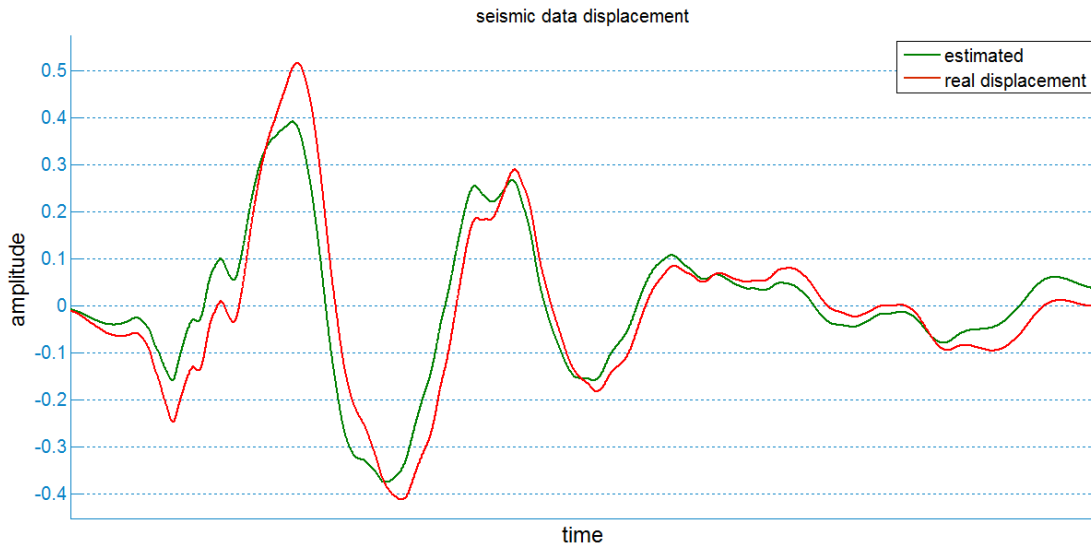
Προτεινόμενη μέθοδος



Εικόνα 4.17: Τελική αφαιρετική απεικόνιση χρησιμοποιούμενης μεθόδου για διπλή ολοκλήρωση και εκτίμηση θέσης

Τα δεδομένα προέρχονται από επεξεργασμένα δεδομένα επιτάχυνσης 4 μεγάλων σεισμών (όπως El Centro 1940) και γίνεται η σύγκριση μεταξύ της μετατόπισης που είχε πραγματικά ο σεισμός με την μετατόπιση που είναι αποτέλεσμα της προτεινόμενης μεθόδου με τα υψιπερατά φίλτρα δεύτερης τάξης και τους κατωδιαβατούς ολοκληρωτές. Μετά από εφαρμογή θορύβου Gaussian στο αρχικό σήμα επιτάχυνσης και κατόπιν εφαρμογής της μεθόδου της διπλής ολοκλήρωσης με τους low-pass ολοκληρωτές και τα δευτέρας τάξης υψιπερατά φίλτρα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:





Εικόνα 4.18: Σύγκριση μεταξύ της μετατόπισης που είχαν τέσσερις σεισμοί με την εκτιμώμενη μετατόπιση της μεθόδου των υπερατών φίλτρων δεύτερης τάξης και των κατωδιαβατών ολοκληρωτών

5. Μοντελοποίηση Κτιρίου και Απόσβεση Σεισμικών Διαταραχών με τη Βοήθεια Φίλτρου Kalman

5.1 Επίδραση Σεισμών στα Κτίρια

Το σεισμικό σώμα και τα επιφανειακά κύματα δημιουργούν αδρανειακές δυνάμεις μέσα στο κτίριο. Αδρανειακές δυνάμεις δημιουργούνται μέσα σε ένα αντικείμενο όταν μια εξωτερική δύναμη προσπαθεί να το κινήσει εάν βρίσκεται σε ακινησία ή να του αλλάξει τον ρυθμό ή την κατεύθυνση της κίνησης εάν κινείται. Εδώ εφαρμόζεται ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα:

$$F = ma \quad (5.0)$$

Η μάζα m μπορεί να θεωρηθεί ίση (στο επίπεδο του ισογείου) με το βάρος του κτιρίου, για αυτό και εξηγείται γιατί τα κτίρια με ελαφρύ ξύλινο σκελετό ανταποκρίνονται καλύτερα στους σεισμούς από τα βαρύτερα κτίρια, διότι οι δυνάμεις στο κτίριο είναι μικρότερες.

Η επιτάχυνση των κυμάτων που θέτουν το κτίριο σε κίνηση, καθορίζει το ποσοστό της μάζας του κτιρίου το οποίο πρέπει να αντιμετωπιστεί ως μια οριζόντια δύναμη.

Ένα κτίριο κατά την διάρκεια ενός σεισμού βιώνει σε ένα κλάσμα του δευτερολέπτου g επιταχύνσεις σε μια διεύθυνση πριν αλλάξει απότομα ξανά η διεύθυνση. Τα κακώς κατασκευασμένα κτίρια παθαίνουν ζημιά στο 10% της επιτάχυνσης της βαρύτητας (0.1g). Σε έναν μέτριο σεισμό, τα κύματα της δόνησης μπορεί να διαρκέσουν για λίγα δευτερόλεπτα, και οι επιταχύνσεις μπορεί να βρίσκονται περίπου στα 0.2g.

5.2 Διάρκεια, ταχύτητα και μετατόπιση

Εξαιτίας της φύσης της αδρανειακής δύναμης, η επιτάχυνση είναι ένας παράγοντας κλειδί όταν πρόκειται να καθοριστούν οι δυνάμεις σε ένα κτίριο, αλλά μια πιο σημαντική μέτρηση είναι η μέτρηση της επιτάχυνσης σε συνδυασμό με την διάρκεια, η οποία λαμβάνει υπ'όψιν την επίδραση των σεισμικών δυνάμεων στο πέρασμα του χρόνου. Γενικά, το κτίριο δέχεται πολύ πιο δύσκολα έναν αριθμό κύκλων μιας μέτριας επιτάχυνσης παρατεταμένης στο χρόνο, από ένα μοναδικό κύκλο με μεγαλύτερο πλάτος. Συνεχόμενη δόνηση του κτιρίου αποδυναμώνει την δομή του κτιρίου και μειώνει την αντίστασή του στις ζημιές του σεισμού.

Οι δύο άλλες μετρήσεις της κυματοειδούς κίνησης είναι ευθέως συσχετιζόμενες με την επιτάχυνση και μπορούν μαθηματικά να προκύψουν από αυτήν. Η ταχύτητα αναφέρεται στον ρυθμό της κίνησης των σεισμικών κυμάτων καθώς ταξιδεύουν μέσα από την Γη. Αυτό γίνεται πολύ γρήγορα. Τυπικά, το P κύμα ταξιδεύει με 3km/sec έως και 8km/sec. Το S κύμα είναι πιο αργό, ταξιδεύοντας με ταχύτητες από 2km/sec έως και 5km/sec.

Η μετατόπιση από τα σεισμικά κύματα αναφέρεται στην μετατόπιση των σημείων του εδάφους από την αρχική τους θέση. Αυτές οι αποστάσεις, με εξαίρεση τα σημεία τα οποία είναι γειτονικά ή βρίσκονται πάνω από το επίκεντρο του σεισμού, είναι πολύ μικρά και μετριούνται σε cm. Για παράδειγμα, στον σεισμό του Νόρθριτζ, ένα κτίριο για πάρκινγκ 29km από το επίκεντρο του σεισμού κατέγραψε μετατόπιση της σκεπής στα 4cm σε επιτάχυνση 0.47g. Ο ίδιος σεισμός σε ένα νοσοκομείο 12km από το επίκεντρο του σεισμού κατέγραψε μετατόπιση της σκεπής στα 34cm σε επιτάχυνση 1.50g.

Η ταχύτητα της κίνησης στο έδαφος η οποία προκαλείται από τα σεισμικά κύματα είναι αρκετά αργή – τεράστιες ποσότητες από γη και πέτρα μετακινούνται. Η ταχύτητα κυμαίνεται από 2cm/sec σε ένα μικρό σεισμό έως 60cm/sec σε έναν μεγάλο. Έτσι, ναι μεν η κίνηση του εδάφους είναι μικρή, αλλά χιλιάδες τόνοι ατσαλιού και τσιμέντου στρέφονται βιαίως προς όλες τις κατευθύνσεις αρκετές φορές το δευτερόλεπτο.

Στους σεισμούς, οι τιμές της επιτάχυνσης, της ταχύτητας, και της μετατόπισης του εδάφους μπορεί να διαφέρουν κατά πολύ σε σχέση με την συχνότητα της κυματικής κίνησης. Τα υψηλής συχνότητας κύματα (μεγαλύτερα από 10Hz) έχουν την τάση να έχουν υψηλά πλάτη επιτάχυνσης και μικρά πλάτη μετατόπισης, σε σχέση με τα χαμηλής συχνότητας κύματα, τα οποία έχουν μικρές επιταχύνσεις και σχετικά μεγάλες ταχύτητες και μετατοπίσεις.

5.3 Ενίσχυση του εδάφους

Καθώς το σεισμικό κύμα αναδύεται στην επιφάνεια, μπορεί να ενισχυθεί, αναλόγως με την ένταση της δόνησης, τη φύση της πέτρας και πάνω απ'όλα τον τύπο και το βάθος του εδάφους στην επιφάνεια.

Ένα επίπεδο μαλακού εδάφους, το οποίο εκτείνεται από μερικά μέτρα μέχρι εκατό μέτρα, μπορεί να προκαλέσει ένα παράγοντα ενίσχυσης που κυμαίνεται από 1.5 έως 6 πάνω στην σεισμική δόνηση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η ζημιές λόγω σεισμού να είναι πιο αισθητές σε περιοχές με μαλακό χώμα. Αυτό το χαρακτηριστικό έγινε πολύ σαφές όταν μελετήθηκε το 1906 ο σεισμός του Σαν Φρανσίσκο.

5.4 Φυσικές Περίοδοι

Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό για να καθορίσουμε τις σεισμικές δυνάμεις οι οποίες θα ασκηθούν πάνω στο κτίριο είναι οι περίοδος ή αλλιώς η συχνότητα των σεισμικών κυμάτων.

Όλα τα αντικείμενα έχουν μια φυσική περίοδο, η οποία ορίζεται ως ο ρυθμός με την οποίο θα κινηθούν εμπρός και πίσω εάν τους ασκηθεί μια οριζόντια εξωτερική δύναμη. Έτσι, όταν η σεισμική κίνηση αρχίζει να δονεί ένα κτίριο, θα αρχίσει να κινείται προς και πίσω στην φυσική του συχνότητα.

Η περίοδος είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρώσει ένα κύκλο το σεισμικό κύμα. Η συχνότητα είναι το ακριβώς αντίστροφο: ο αριθμός των κύκλων που θα συμβούν στο δευτερόλεπτο.

Οι φυσικές περίοδοι μπορεί να ξεκινούν από 0.1sec για μια μονοκατοικία, 0.5sec για ένα τετραόροφο κτίριο, και 1-2sec για δεκαόροφα ή εικοσαόροφα κτίρια, άρα είναι άμεσα σχετιζόμενες με το ύψος του κτιρίου. Η φυσική περίοδος ενός 60όροφου κτιρίου στην Νέα Υόρκη είχε μετρηθεί στα 7sec.

Όταν ένα δονούμενο αντικείμενο επιδέχεται περαιτέρω εξωτερικές δυνάμεις οι οποίες είναι στην φυσική του περίοδο, οι δονήσεις του αυξάνονται δραματικά ακόμα και στην μικρότερη δύναμη, και οι επιταχύνσεις του μπορεί να αυξηθούν έως και τέσσερις με πέντε φορές.

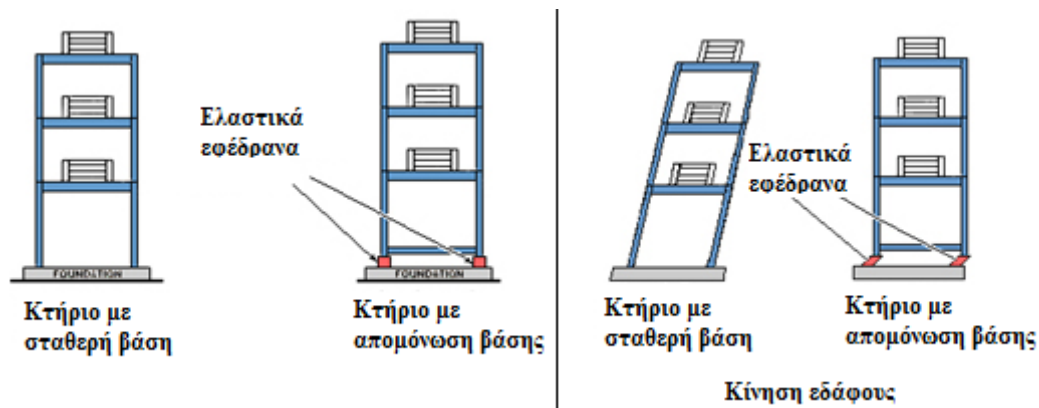
Η περίοδος του κτιρίου μπορεί να αλλάξει από την ζημιά του σεισμού. Όταν μια τσιμεντένια δομή βιώνει έντονες δονήσεις, αρχίζει να σπάζει: αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της περιόδου της δομής: η δομή αρχίζει να «μαλακώνει». Εάν η περίοδος του κτιρίου πλησιάσει αυτή του εδάφους οι συνέπειες θα είναι καταστροφικές.

5.5 Μοντελοποίηση Συστήματος για Τριώροφο Κτίριο

Στο πρόβλημα που θα μελετήσουμε, θέλουμε να ελέγξουμε την ανεξέλεγκτη μετακίνηση ενός κτιρίου κατά τη διάρκεια ενός σεισμού. Το κτίριο αποτελείται από τρεις ορόφους, σκεπή και μόνωση βάσης. Είναι επιθυμητό να κρατήσουμε την κίνηση ενός δεδομένου ορόφου σε σχέση με τους ορόφους που έχει από πάνω ή από κάτω του όσο μικρή γίνεται. Γενικά, αν η κίνηση είναι μικρή τότε και οι ζημιογόνες εσωτερικές τάσεις είναι επίσης μικρές. Με τη μόνωση βάσης προσπαθούμε να διατηρήσουμε ακίνητο το κτίριο, ενώ το έδαφος κινείται.

Η απομόνωση βάσης (base isolation) είναι μια δοκιμασμένη και πρωτοποριακή μέθοδος αντισεισμικής προστασίας. Το κτίριο αναπαύεται σε ελαστικά εφέδρανα τα οποία αποτρέπουν την οριζόντια κίνηση του κτιρίου, η οποία είναι εξαιρετικά ζημιογόνα, κατά την διάρκεια του σεισμού. Η φιλοσοφία της απομόνωσης βάσης είναι να διατηρείται ολόκληρη η κατασκευή σταθερή σχετικά με την αρχική, αδιατάραχτη σύνδεσή της και ουσιαστικά να αφήνουμε το έδαφος να κινείται κάτω από την κατασκευή. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση, η κατάλληλη περιγραφή του συστήματος είναι με όρους απόλυτων συντεταγμένων, δηλαδή, με συντεταγμένες αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Οι μονωτές βάσης γενικά είναι παθητικές συσκευές ελέγχου. Στο παράδειγμά μας, όμως θα ασχοληθούμε με ένα υβριδικό μοντέλο το οποίο συνδυάζει απομόνωση βάσης και ενεργό έλεγχο, ο οποίος στηρίζεται σε μια εξωτερική πηγή ενέργειας.

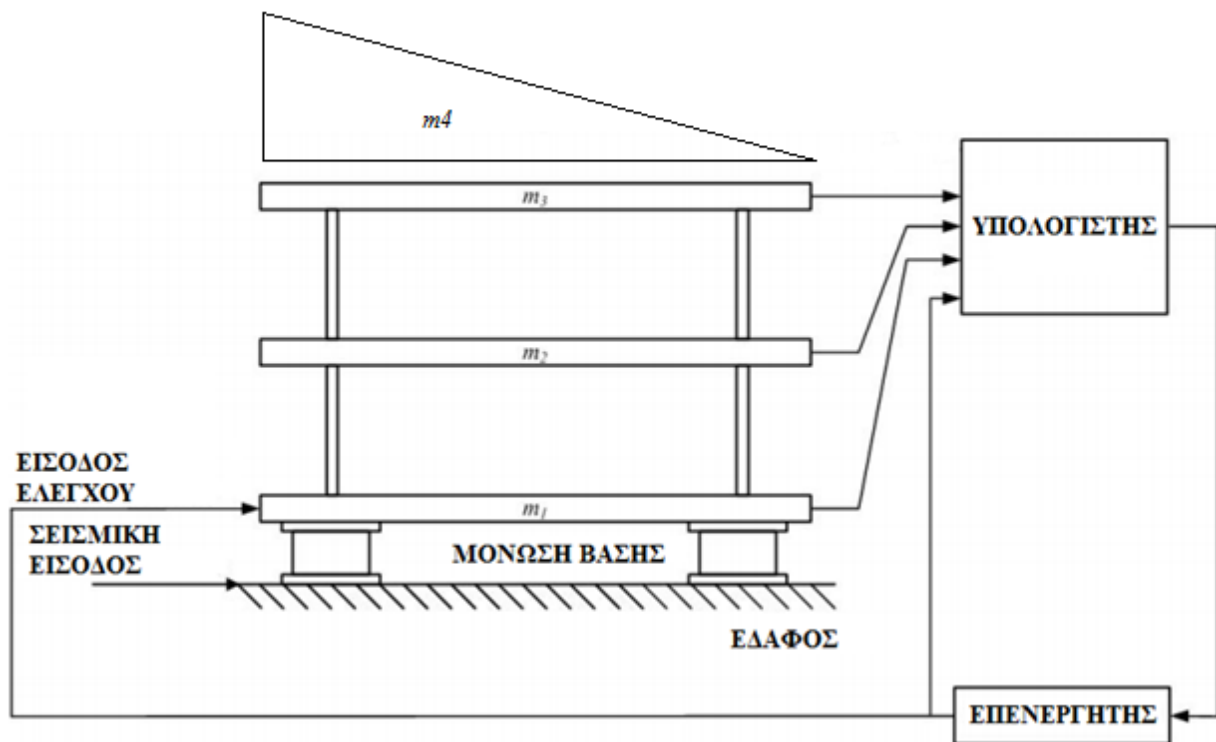
Ο ενεργός έλεγχος υιοθετείται έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε την ασφάλεια του κτιρίου, μετατοπίζοντας ολόκληρη την κατασκευή με τρόπο που να ακολουθεί την κίνηση του εδάφους. Η διατάραξη που παράγεται από το έδαφος επιδρά μόνο στον πρώτο όροφο. Κατά συνέπεια, οι δυνάμεις ελέγχου μπορούν να εφαρμοστούν μόνο εκεί.



Εικόνα 5.1: Απομόνωση βάσης

Μεγάλο ρόλο για τον έλεγχο παίζουν οι σωστές μετρήσεις της θέσης και της ταχύτητας του κάθε ορόφου. Αυτές οι μετρήσεις ανατροφοδοτούν την επιλογή της τιμής της δύναμης ελέγχου. Η μόνη γνωστή είσοδος στο σύστημα είναι οι επιταχύνσεις των ορόφων. Η μέθοδος που θα επιλέξουμε για την εξαγωγή της ταχύτητας και της μετατόπισης από τα δεδομένα της επιτάχυνσης είναι το φίλτρο Kalman. Η εφαρμογή του φίλτρου Kalman απαιτεί την μοντελοποίηση του κτίριου και να παρουσιάσουμε τις μαθηματικές εξισώσεις κατάστασης που θα επιτρέψουν τον έλεγχό του. Το σύστημα που θα μελετήσουμε αποτελείται από τρεις ορόφους και μια σεισμική μόνωση βάσης.

Αρχικά, θα χρησιμοποιήσουμε ένα εξιδανικευμένο γραμμικό μοντέλο, το οποίο θα αντιστοιχίζει τους ορόφους του κτιρίου σε μάζες και την διασύνδεση των ορόφων σε ελατήρια και αποσβεστήρες. Το ελατήριο και ο αποσβεστήρας θεωρούνται ότι λειτουργούν μέσα στο γραμμικό τους πλαίσιο και η κίνηση περιορίζεται μόνο σε μία οριζόντια κατεύθυνση. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο θα μετρούμε την μετατόπιση του κτιρίου. Η είσοδος του σεισμού μεταβάλλεται ταχύτατα με απρόβλεπτο τρόπο, με αποτέλεσμα η εκτίμηση του να μην είναι εύκολη. Έτσι, θεωρούμε ένα άγνωστο αλλά φραγμένο προφίλ του σεισμού σαν είσοδο διατάραξης.



Εικόνα 5.2: Το υπο μελέτη σύστημα

Έστω $y_0(t)$ η μετατόπιση εδάφους και $y(t)$ η μετατόπιση της μάζας τη χρονική στιγμή t , σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Τέλος, έστω ότι η τελεία ορίζει την παραγώγιση ως προς το χρόνο.

Τότε, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τον πρώτο όροφο του κτιρίου δίνεται από την σχέση:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = c\dot{y}_0(t) + ky_0(t) \quad (5.1)$$

όπου m , c και k δηλώνουν την μάζα, και τους συντελεστές απόσβεσης και ελατηρίου αντίστοιχα. Η επίδραση του σεισμού πάνω στη μάζα εξαρτάται από τις παραμέτρους απομόνωσης βάσης c και k . Αν αυτές ήταν ίσες με το μηδέν, δεν θα υπήρχε καμία είσοδος σχετική με το σεισμό. Παρόλα αυτά, άλλες εξωτερικές διαταραχές, όπως το φορτίο του αέρα, το οποίο δεν λαμβάνεται υπόψη στην εξίσωση (5.1), μπορούν να θέσουν την μάζα σε ακούσια κίνηση. Έτσι, πρακτικοί λόγοι αλλά και λόγοι σχεδιασμού αποδίδουν κάποιες, κατά προτίμηση χαμηλές, τιμές για τις παραμέτρους απομόνωσης βάσης.

Κατά τη διάρκεια του σεισμού, η κατασκευή μπορεί να θεωρηθεί ότι λειτουργεί σε μία συνεχώς μεταβατική φάση. Μόλις περάσει ο σεισμός, η κατασκευή παρουσιάζει μία ελεύθερη αντίδραση που βασίζεται μόνο στις αρχικές συνθήκες.

Μας ενδιαφέρει να κρατήσουμε τη μάζα της κατασκευής που έχει διεγερθεί από το σεισμό κοντά στην αδιατάραχτη κατάστασή της. Έτσι, είναι επιθυμητό να βελτιώσουμε την μεταβατική απόκριση του κτιρίου.

Ας θεωρήσουμε μια εξωτερική δύναμη ελέγχου πάνω στη μάζα:

$$u(t) = -K_p y(t) - K_p T_d \dot{y}(t) \quad (5.2)$$

όπου K_p και T_d είναι θετικοί πίνακες. Αυτός ο έλεγχος είναι μία ανατροφοδότηση κατάστασης αφού το διάνυσμα $[y(t) \quad \dot{y}(t)]^T$ αποτελεί μία κατάσταση του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση (5.1). Οι εξισώσεις (5.1) και (5.2) μπορούν να συνδυαστούν στην μορφή

$$m\ddot{y}(t) + (c + K_p T_d)\dot{y}(t) + (k + K_p)y(t) = c\dot{y}_0(t) + ky_0(t) \quad (5.3a)$$

ή,

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \frac{c}{m}\dot{y}_0(t) + \frac{k}{m}y_0(t) \quad (5.3b)$$

όπου,

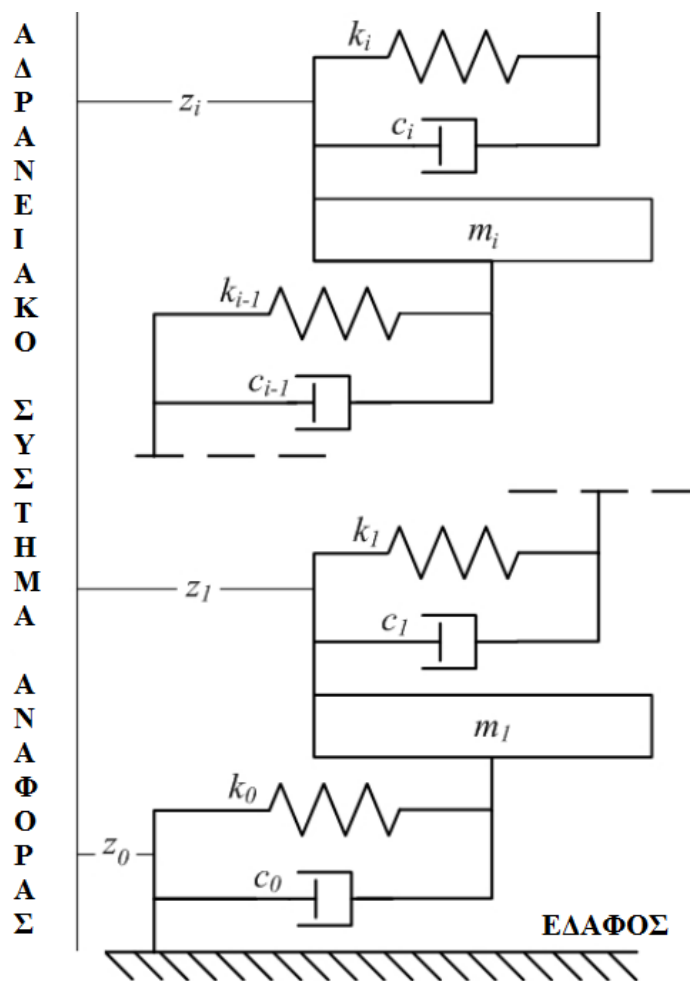
$$\omega_n = \left(\frac{k + K_p}{m} \right)^{1/2} \quad \text{και} \quad \zeta = \frac{c + K_p T_d}{2(m(k + K_p))^{1/2}}.$$

Ο έλεγχος $u(t)$ της εξίσωσης (5.2) αναφέρεται ως αναλογικός συν παράγωγος (proportional plus derivative). Το κομμάτι της παραγώγου στον έλεγχο εισάγει ένα αποτέλεσμα απόσβεσης. Η χαρακτηριστική εξίσωση της εξίσωσης (5.3b) έχει δύο λύσεις,

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n (\zeta^2 - 1)^{1/2} = -\frac{c + K_p T_d}{2m} \pm \left(\frac{k + K_p}{m} \right)^{1/2} \left(\frac{(c + K_p T_d)^2}{4m(k + K_p)^{-1}} \right)^{1/2} \quad (5.4)$$

Αυτές οι ρίζες επηρεάζουν την μεταβατική απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου, π.χ εξίσωση (5.3a) ή (5.3b). Είναι επιθυμητό να μειώνουμε σημαντικά την μεταβατική απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου, έτσι ώστε να μειωθεί η επίδραση του σεισμού. Σε όρους παραμέτρου του συστήματος αυτό σημαίνει ότι το ω_n πρέπει να είναι 'όσο πιο μικρό γίνεται' και το ζ 'όσο πιο μεγάλο γίνεται'. Κατάλληλες τιμές για τα ω_n και ζ μπορούν να επιλεχθούν με την επιλογή των K_p και T_d .

Η παραπάνω ανάλυση υπονοεί ότι η μάζα μπορεί 'σχεδόν να αποκοπεί' από το έδαφος με τον κατάλληλο σχεδιασμό του συστήματος απομόνωσης βάσης. Τότε, η απόσβεση και τα ελατήρια που χαρακτηρίζουν την κίνηση επανακαθορίζονται από τις εισόδους ελέγχου.



Εικόνα 5.3: Μοντέλο πολυόροφου κτιρίου με απομονωμένη βάση

Έστω V μία συνεχής βαθωτή πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών. Έστω ότι αυτές οι μεταβλητές είναι οι $y(t)$ και $\dot{y}(t)$ της εξίσωσης (5.1) για κάθε $t > 0$. Τότε, ένα χρήσιμο παράδειγμα μίας τέτοιας συνάρτησης, V , συσχετίζει την μηχανική ενέργεια του συστήματος και ονομάζεται συνάρτηση Lyapunov. Πρακτικά μιλώντας, μικρές τιμές των συναρτήσεων $y(t)$ και $\dot{y}(t)$, που δηλώνουν ότι η μάζα είναι κοντά στις αρχικές της συνθήκες, αντιστοιχούν σε χαμηλά επίπεδα ενέργειας.

Έτσι, σχεδιάζουμε έναν έλεγχο για την εξίσωση (5.1) που για μία δεδομένη επιτρεπτή γειτονιά της αδιατάραχτης κατάστασης της κατασκευής, εξασφαλίζει τα παρακάτω: Αν ο σεισμός οδηγήσει την μάζα έξω από αυτή την γειτονιά, η μηχανική του ενέργεια θα μειώνεται ως προς το χρόνο. Σε αυτή την περίπτωση, με την μείωση της ενέργειας επιβάλλουμε στη μάζα τελικά να ξαναμπει μέσα στη γειτονιά και να παραμείνει εκεί.

Ο έλεγχος της ανατροφοδότησης κατάστασης είναι γραμμικός για 'μικρές' τιμές των συναρτήσεων $y(t)$ και $\dot{y}(t)$ ή σταθερές αλλιώς. Δηλαδή, ανταποκρίνεται σε ένα

κορεσμένο τύπο μη-γραμμικότητας. Γενικά μιλώντας, μία μικρότερη επιτρεπτή γειτονιά απαιτεί μια πιο αυξημένη προσπάθεια ελέγχου.

Έστω ότι $y_0(t)$ είναι η μετατόπιση του εδάφους και $y_i(t)$ η μετατόπιση του i^{th} ορόφου τον χρόνο t ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (Σχήμα 5.3). Έστω m_i η μάζα του i^{th} ορόφου, c_{i-1} οι συντελεστές απόσβεσης και k_{i-1} η σταθερά του ελατηρίου που συνδέει τον i^{th} όροφο με τον όροφο ή το έδαφος που βρίσκεται από κάτω του. Οι ποσότητες c_0 και k_0 αντιστοιχούν στην απομόνωση βάσης. Κατά συνέπεια, ο χρόνος, t , παραλείπεται όταν δεν μπορούν να προκύψουν συγχύσεις.

Τότε, εφαρμόζοντας τις παραπάνω παραδοχές για το τριώροφο κτίριο (τρεις όροφοι και σκεπή), έχουμε:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -\dot{y}_1(c_0 + c_1) + c_1 \dot{y}_2 - y_1(k_1 + k_0) + k_1 y_2 + c_0 \dot{y}_0 + k_0 y_0 + u \\ m_2 \ddot{y}_2 &= c_1 \dot{y}_1 - (c_2 + c_1) \dot{y}_2 + c_2 \dot{y}_3 + k_1 y_1 - (k_1 + k_2) y_2 + k_2 y_3 \\ (5.5a) \\ m_3 \ddot{y}_3 &= c_2 \dot{y}_2 - (c_2 + c_3) \dot{y}_3 + c_3 \dot{y}_4 + k_2 y_2 - (k_3 + k_2) y_3 + k_3 y_4 \\ m_4 \ddot{y}_4 &= -c_3(\dot{y}_4 - \dot{y}_3) - k_3(y_4 - y_3) \end{aligned}$$

Και

$$y_i(t_0) = y_i^0, \quad \dot{y}_i(t_0) = \dot{y}_i^0 \quad (5.5b)$$

για $i = 1, 2, 3, 4$, είναι οι αρχικές συνθήκες για $t = t_0$.

Συνεπώς, η διατάραξη του ισογείου επηρεάζει μόνο τον πρώτο (βάση) όροφο. Προκειμένου να εφαρμόσουμε κατάλληλες στρατηγικές ελέγχου, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση με απόλυτες συντεταγμένες, ένα μοντέλο κατάστασης μπορεί να προκύψει αν θεωρήσουμε ως μεταβλητές κατάστασης τις εισόδους του διανύσματος $x = [x_1, x_2, \dots, x_{2N}]^T$, όπου $x_i = \dot{y}_i$, $x_{i+N} = y_i$ για $i = 1, 2, 3, 4$. Οι εξισώσεις της κίνησης (5.5a) και (5.5b) μπορούν να γραφούν με την μορφή καταστατικών εξισώσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Cv(t) + Bu(t) \quad (5.6a)$$

και

$$x(t_0) = x_0 \quad (5.6b)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ I_{4 \times 4} & O_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

με

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \frac{(-c_0 - c_1)}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{c_1}{m_2} & \frac{(-c_1 - c_2)}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{m_3} & \frac{(-c_3 - c_2)}{m_3} & \frac{c_3}{m_3} \\ 0 & 0 & \frac{c_3}{m_4} & \frac{-c_3}{m_4} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{(-k_0 - k_1)}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{(-k_1 - k_2)}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_3} & \frac{(-k_3 - k_2)}{m_3} & \frac{k_3}{m_3} \\ 0 & 0 & \frac{k_3}{m_4} & \frac{-k_3}{m_4} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{c_0}{m_1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & O_{3 \times 2} & O_{4 \times 2} & \vdots \\ \frac{k_0}{m_1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}^T \quad (5.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{m_1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & O_{3 \times 1} & O_{4 \times 1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}^T \quad (5.11)$$

$$D = 0 \quad (5.12)$$

όπου $v = [\dot{y}_0 \quad y_0]^T$ είναι η αναφορά σεισμού και $u(t)$ είναι η δύναμη που ασκείται από την επενεργητή του ενεργού ελέγχου στον πρώτο όροφο του κτιρίου.

5.5.1 Φίλτρο Kalman

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το φίλτρο Kalman όποτε έχουμε αβέβαιη πληροφορία για ένα δυναμικό σύστημα και θέλουμε να κάνουμε μια καλή εκτίμηση για το

το πως θα συμπεριφερθεί το σύστημα στην συνέχεια. Τα φίλτρα Kalman είναι ιδανικά για συστήματα τα οποία συνεχώς αλλάζουν. Έχουν το πλεονέκτημα ότι δεν χρειάζονται πολύ μνήμη (το μόνο ιστορικό που κρατούν είναι της προηγούμενης κατάστασης) και είναι πολύ γρήγορα, καθιστώντας τα ιδανικά για προβλήματα πραγματικού χρόνου και ενσωματωμένα συστήματα.

Έστω ότι x_k είναι το διάνυσμα κατάστασης το οποίο στην περίπτωση μας είναι η θέση και η ταχύτητα.

$$x = \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Δεν ξέρουμε την ακριβή θέση και ταχύτητα και υπάρχει μια μεγάλη γκάμα από πιθανούς συνδυασμούς θέσης και ταχύτητας που μπορεί να είναι αληθινοί, αλλά κάποιοι είναι πιο πιθανοί από τους άλλους.

Το φίλτρο Kalman υποθέτει ότι και οι δύο μεταβλητές (θέση και ταχύτητα, στην περίπτωση μας) είναι τυχαίες και γκαουσιανά κατανοημένες. Κάθε μεταβλητή έχει μια μέση τιμή μ , η οποία είναι το κέντρο της τυχαίας κατανομής (και η πιθανότερη της κατάσταση), και μια διακύμανση σ^2 , η οποία είναι η αβεβαιότητα. Η θέση και η ταχύτητα είναι συσχετιζόμενες, δηλαδή η πιθανότητα να παρατηρήσουμε ότι σε μια συγκεκριμένη θέση το σώμα εξαρτάται από την ταχύτητα που έχει.

Αυτή η κατάσταση μπορεί να προκύψει εάν εκτιμούμε μια νέα θέση βασιζόμενοι στην παλιά. Εάν η ταχύτητά του σώματος ήταν μεγάλη, θα έχει μετακινηθεί πολύ, και η μετατόπιση θα είναι μεγάλη. Αν το σώμα κινούταν αργά, δεν θα έχει το σώμα τόσο μεγάλη μετατόπιση.

Αυτού του είδους η παραδοχή είναι πολύ σημαντικό να καταγραφεί, διότι μας δίνει περισσότερη πληροφορία: Μια μέτρηση μας οδηγεί σε συμπεράσματα για την επόμενη. Αυτός ακριβώς είναι ο στόχος του φίλτρου Kalman: να αντλήσει όση περισσότερη πληροφορία γίνεται από τις αβέβαιες μετρήσεις μας.

Αυτή η συσχέτιση αποτυπώνεται στον πίνακα συνδιασποράς. Κάθε στοιχείο του πίνακα Σ_{ij} είναι ο βαθμός της συσχέτισης μεταξύ της i -οστής μεταβλητής κατάστασης και της j -οστής μεταβλητής κατάστασης. Ο πίνακας συνδιασποράς είναι συμμετρικός και δεν έχει σημασία εάν αναποδογυρίσουμε τα i και j .

Μοντελοποιούμε την γνώση για την κατάσταση ως μια γκαουσιανή συγκέντρωση, για αυτό και χρειαζόμαστε δύο, κομμάτια πληροφορίας ταυτόχρονα για την χρονική στιγμή k . Έστω \hat{x}_k η καλύτερη εκτίμηση (η μέση τιμή μ) και ο P_k ο αντίστοιχος πίνακας συνδιασποράς.

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \text{θέση} \\ \text{ταχύτητα} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$P_k = \begin{bmatrix} \Sigma_{pp} & \Sigma_{pu} \\ \Sigma_{ip} & \Sigma_{iu} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Στην συνέχεια, θεωρούμε ως k-1 την τωρινή κατάσταση και την χρησιμοποιούμε για να προβλέψουμε την επόμενη κατάσταση την χρονική στιγμή k. Δεν γνωρίζουμε την αληθινή τιμή, αλλά αυτό δεν επηρεάζει την συνάρτηση πρόβλεψης, καθώς λαμβάνει υπόψη όλες τις τιμές και μας δίνει μια νέα κατανομή.

Μπορούμε να συμβολίσουμε αυτό το βήμα της πρόβλεψης με έναν πίνακα, τον F_k . Παίρνει κάθε σημείο της αρχικής μας εκτίμησης και το μετακινεί στην νέα του προβλεπόμενη θέση, η οποία είναι αυτή που θα κινούνταν το σύστημα εάν η αρχική εκτίμηση ήταν η σωστή.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω πρόταση, χρησιμοποιήσουμε την βασική κινητική εξίσωση για να βρούμε έναν πίνακα που να εκτιμά την θέση και την ταχύτητα την επόμενη στιγμή:

$$\begin{aligned} p_k &= p_{k-1} + \Delta t u_{k-1} \\ u_k &= u_{k-1} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Αλλιώς:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ &= F_k \hat{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Τώρα έχουμε έναν πίνακα πρόβλεψης οποίος μας δίνει την επόμενη θέση. Για να ενημερώσουμε και τον πίνακα συνδιασποράς, θα πολλαπλασιάσουμε κάθε σημείο της διασποράς με τον πίνακα A.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x) &= \Sigma \\ \text{Cov}(Ax) &= A \Sigma A^T \end{aligned} \quad (5.18)$$

Εάν συνδιάσουμε την (5.18) με την σχέση (5.17) έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= F_k \hat{x}_{k-1} \\ P_k &= F_k P_{k-1} F_k^T \end{aligned} \quad (5.19)$$

Υπάρχουν όμως και κάποιες αλλαγές οι οποίες δεν σχετίζονται με την ίδια την κατάσταση: ο εξωτερικός κόσμος μπορεί να επηρεάζει το σύστημα. Εάν γνωρίζουμε αυτήν την παραπάνω πληροφορία για το τι συμβαίνει στον εξωτερικό κόσμο του συστήματος, θα μπορούσαμε να τοποθετήσουμε την πληροφορία σε ένα διάνυσμα u_k και να το προσθέσουμε ως διόρθωση στην πρόβλεψη μας.

Έστω ότι ξέρουμε την αναμενόμενη επιτάχυνση a . Από απλή κινηματική έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$p_k = p_{k-1} + \Delta t u_{k-1} + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \quad (5.20)$$

$$u_k = u_{k-1} + a \Delta t$$

Σε μητρική μορφή έχουμε:

$$\hat{x}_k = F_k \hat{x}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} a \quad (5.21)$$

$$= F_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_k$$

όπου B_k είναι ο πίνακας ελέγχου και u_k είναι το διάνυσμα ελέγχου.

Τα πάντα είναι ελεγχόμενα, εάν η κατάσταση εξελίσσεται βάση των ιδιοτήτων της. Τα πάντα είναι ελεγχόμενα ακόμη και αν η κατάσταση εξελίσσεται με βάση τις εξωτερικές δυνάμεις, αρκεί να ξέρουμε ποιες είναι αυτές. Εάν όμως δεν υπολογίσουμε και τις εξωτερικές διαταραχές, η πρόβλεψή μας δεν θα είναι σωστή. Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε αυτή την αβεβαιότητα που σχετίζεται με το εξωτερικό περιβάλλον προσθέτοντας μια νέα αβεβαιότητα μετά από κάθε βήμα πρόβλεψης.

Κάθε κατάσταση στην αρχική μας εκτίμηση μπορεί να μετακινηθεί σε ένα εύρος καταστάσεων. Υποθέτουμε ότι κάθε σημείο του \hat{x}_{k-1} μετακινείται κάπου μέσα στην γκαουσιανή συγκέντρωση με συνδιασπορά Q_k . Μπορούμε να θεωρήσουμε αυτές τις εξωτερικές διαταραχές και επιρροές ως θόρυβο με συνδιασπορά Q_k . Αυτό παράγει μια νέα γκαουσιανή συγκέντρωση, με διαφορετική συνδιασπορά (αλλά ίδιο μέσο όρο).

Μπορούμε να πάρουμε την επεκτεταμένη συνδιασπορά προσθέτοντας απλώς το Q_k και να δώσουμε πλήρη έκφραση στο βήμα της πρόβλεψης:

$$\hat{x}_k = F_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_k \quad (5.22)$$

$$P_k = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k$$

Η νέα βέλτιστη εκτίμηση είναι μια πρόβλεψη βασισμένη σε προηγούμενη βέλτιστη εκτίμηση, συν μια διόρθωση από γνωστές εξωτερικές δυνάμεις. Επίσης, η νέα αβεβαιότητα προβλέπεται από την παλιά αβεβαιότητα, με κάποια επιπλέον αβεβαιότητα από το περιβάλλον. Έτσι έχουμε μια ασαφή πρόβλεψη για το που βρίσκεται το σύστημα δεδομένων των \hat{x}_k και P_k . Στην συνέχεια, θα εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν παίρνουμε δεδομένα από αισθητήρες.

Μπορεί να έχουμε διάφορους αισθητήρες οι οποίοι να μας δίνουν πληροφορία για την κατάσταση του συστήματος. Κάθε αισθητήρας εμμέσως μας λέει κάτι για την

κατάσταση. Με άλλα λόγια, οι αισθητήρες λειτουργούν πάνω στην μια κατάσταση και παράγουν ένα σετ μετρήσεων.

Η μονάδα μέτρησης και η κλίμακα των μετρήσεων μπορεί να μην είναι οι ίδιες με τις μονάδες μέτρησης και την κλίμακα της κατάστασης την οποία μελετούμε. Για αυτό θα μοντελοποιήσουμε τους αισθητήρες με έναν πίνακα H_k .

Μπορούμε να βρούμε την κατανομή των τιμών του αισθητήρα με όμοιο τρόπο:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{αναμενόμενο}} &= H_k \hat{x}_k \\ \Sigma_{\text{αναμενόμενο}} &= H_k P_k H_k^T\end{aligned}\quad (5.23)$$

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα του φίλτρου Kalman είναι ότι είναι ιδανικό για να αντιμετωπίζει τον θόρυβο του αισθητήρα. Με άλλα λόγια, οι αισθητήρες είναι κάπως αναξιόπιστοι, και κάθε κατάσταση της αρχικής μας εκτίμηση μπορεί να καταλήξει σε ένα εύρος μετρήσεων του αισθητήρα.

Από κάθε μέτρηση που παρατηρούμε, μπορεί να μαντέψουμε ότι το σύστημα ήταν σε μια συγκεκριμένη κατάσταση. Αλλά επειδή υπάρχει αβεβαιότητα, κάποιες καταστάσεις είναι πιο πιθανές από τις άλλες, οι οποίες έχουν παράγει την μέτρηση που πήραμε.

Θα αποκαλέσουμε την συνδιασπορά αυτής της αβεβαιότητας (π.χ. του θορύβου του αισθητήρα) R_k . Η κατανομή έχει μέση τιμή ίση με την μέτρηση που πήραμε, την οποία θα αποκαλέσουμε z_k .

Τώρα λοιπόν έχουμε δύο γκαουσιανές συγκεντρώσεις: μια γύρω από την μέση τιμή της μετασχηματισμένης μας πρόβλεψης και μια γύρω από την πραγματική μέτρηση που πήραμε από τον αισθητήρα.

Πρέπει να συμφιλιώσουμε την εκτίμησή μας για τις μετρήσεις που πιστεύαμε ότι θα δούμε βασισμένοι στην προβλεπόμενη κατάσταση, με την εκτίμηση η οποία βασίζεται στις μετρήσεις του αισθητήρα που παρατηρήσαμε στην πραγματικότητα. Εάν έχουμε δύο πιθανότητες και θέλουμε να γνωρίζουμε ποια είναι η πιθανότητα να είναι και οι δύο αληθινές, απλώς τις πολλαπλασιάζουμε. Άρα, θα πολλαπλασιάσουμε τις δύο γκαουσιανές συγκεντρώσεις.

Το αποτέλεσμα θα είναι μια περιοχή όπου έχουμε την αλληλοεπικάλυψη των δύο αυτών συγκεντρώσεων, η οποία είναι και πολύ πιο ακριβής από όλες τις προηγούμενες εκτιμήσεις μας. Η μέση τιμή αυτής της κατανομής είναι ο συνδυασμός όπου και οι δύο εκτιμήσεις είναι πιθανότερες, και έτσι η καλύτερη εκτίμηση του δεδομένου του όγκου πληροφορίας που έχουμε. Η περιοχή αυτή είναι άλλη μια γκαουσιανή συγκέντρωση. Διότι, όταν πολλαπλασιαστούν δύο γκαουσιανές συγκεντρώσεις με διαφορετικούς μέσους όρους και συνδιασπορές, προκύπτει μια νέα γκαουσιανή συγκέντρωση με νέο μέσο όρο και νέο πίνακα συνδιασποράς.

Για λόγους απλοποίησης, θα το εξετάσουμε αρχικά σε μια διάσταση. Μια μονοδιάστατη γκαουσιανή καμπύλη με σ^2 και μέση τιμή μ ορίζεται ως εξής:

$$N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.24)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε τις δύο γκαουσιανές καμπύλες θα έχουμε:

$$N(x, \mu_0, \sigma_0)N(x, \mu_1, \sigma_1) = N(x, \mu', \sigma') \quad (5.25)$$

Λύνοντας αλγεβρικά βρίσκουμε:

$$\mu' = \mu_0 + \frac{\sigma_0^2(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \quad (5.26)$$

$$\sigma'^2 = \sigma_0^2 - \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \quad (5.27)$$

Θέτοντας όπου:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \\ \mu' &= \mu_0 + k(\mu_1 - \mu_0) \\ \sigma'^2 &= \sigma_0^2 - k\sigma_0^2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις σε μητρική μορφή γίνονται:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1)^{-1} \\ \mu' &= \mu_0 + \mathbf{K}(\mu_1 - \mu_0) \\ \Sigma' &= \Sigma_0 - \mathbf{K}\Sigma_0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

όπου Σ είναι ο πίνακας συνδυασποράς της γκαουσιανής συγκέντρωσης και μ είναι η μέση τιμή σε κάθε άξονα. Το \mathbf{K} είναι ένας πίνακας ο οποίος αποκαλείται κέρδος Kalman.

Έχουμε δύο κατανομές: την προβλεπόμενη μέτρηση με $(\mu_0, \Sigma_0) = (\hat{H}_k \hat{x}_k, H_k P_k H_k^T)$ και την πραγματική μέτρηση που έχουμε πάρει με $(\mu_1, \Sigma_1) = (z_k, R_k)$. Εάν τα αντικαταστήσουμε στις παραπάνω τιμές θα βρούμε την αλληλοεπικάλυψή τους.

$$\begin{aligned} \hat{H}_k \hat{x}_k' &= \hat{H}_k \hat{x}_k + \mathbf{K}(z_k - \hat{H}_k \hat{x}_k) \\ H_k P_k' H_k^T &= H_k P_k H_k^T - \mathbf{K} H_k P_k H_k^T \end{aligned} \quad (5.30)$$

Άρα το κέρδος Kalman είναι:

$$\mathbf{K} = H_k P_k H_k^T (H_k P_k H_k^T + R_k)^{-1}$$

Αν απλοποιήσουμε το H_k από κάθε όρο της (5.30 α) και το H_k^T από κάθε όρο της (5.30.β):

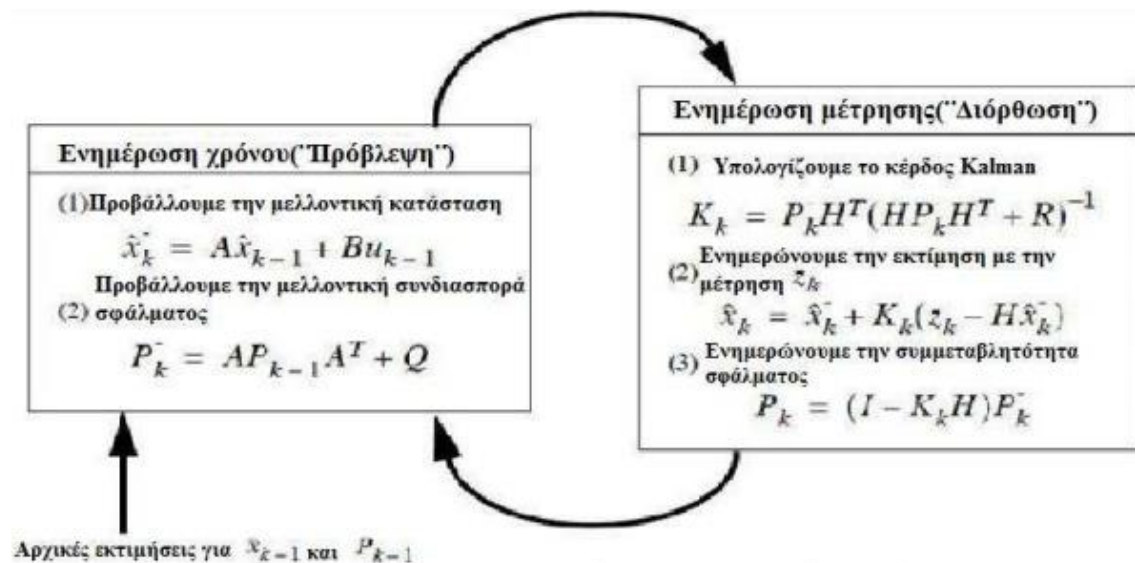
$$\begin{aligned}\hat{x}_k' &= \hat{x}_k + K'(z_k - H_k \hat{x}_k) \\ P_k' &= P_k - K'H_k P_k \\ K' &= P_k H_k^T (H_k P_k H_k^T + R_k)^{-1}\end{aligned}\quad (5.31)$$

θα έχουμε τις πλήρεις εξισώσεις για το βήμα της ενημέρωσης. Η \hat{x}_k' είναι η καλύτερη νέα εκτίμηση και μπορούμε να την ανατροφοδοτήσουμε μαζί με το P_k' σε ένα νέο γύρο πρόβλεψης.

Για την υλοποίηση του φίλτρου Kalman θα χρειαστούμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= F_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_k \\ P_k &= F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k\end{aligned}\quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_k' &= \hat{x}_k + K'(z_k - H_k \hat{x}_k) \\ P_k' &= P_k - K'H_k P_k \\ K' &= P_k H_k^T (H_k P_k H_k^T + R_k)^{-1}\end{aligned}\quad (5.33)$$



Εικόνα 5.4: Μια πλήρης εικόνα λειτουργίας του φίλτρου Kalman

5.5.2 Εφαρμογή του Φίλτρου Kalman

Μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν παρατηρητή κατάστασης για το σύστημα, μέσω της εξίσωσης του συστήματος:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Cv(t) + Bu(t) \quad (5.34)$$

Το σύστημα έχει άγνωστη είσοδο από τον σεισμό το διάνυσμα:

$$d(t) = [\dot{z}_0 \quad z_0]^T \quad (5.35)$$

Δίνοντας σχεδόν μηδενικές τιμές στα σήματα \dot{z}_0 και z_0 εισάγουμε υψηλή αβεβαιότητα για αυτά μέσω υψηλών τιμών $\sigma_{\dot{z}_0}^2$ και $\sigma_{z_0}^2$ για την διακύμανση του θορύβου στην είσοδο του συστήματος.

Η έξοδος θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$y(t) = Cx(t) + D_E d(t) + D_u u(t) + v(t) \quad (5.36)$$

$$y = \begin{bmatrix} \ddots \\ z_1 \\ \ddots \\ z_2 \\ \ddots \\ z_3 \\ \ddots \\ z_4 \\ z_0 - z_1 \\ z_1 - z_2 \\ z_2 - z_3 \\ z_3 - z_4 \end{bmatrix} + v = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O_{4 \times 4} & C_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{c_0}{m_1} & \frac{k_0}{m_1} \\ O_{3 \times 2} \\ 1 \\ O_{3 \times 2} \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ O_{7 \times 1} \end{bmatrix} u + v \quad (5.37)$$

όπου A_{11} και A_{12} είναι οι αντίστοιχες υπο-μήτρες του πίνακα A της εξίσωσης (5.34) και

$$C_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Με βάση το παραπάνω μοντέλο, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν αντίστοιχο παρατηρητή Kalman με εξισώσεις κατάστασης:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Ed + K_{std}(y - C\hat{x} - D_u u) \quad (5.39)$$

$$x(t_0) = x_0$$

όπου \hat{x} είναι το διάνυσμα κατάστασης του παρατηρητή και το οποίο αποτελεί εκτίμηση για το διάνυσμα x του πραγματικού συστήματος, ενώ K είναι ο πίνακας κερδών του παρατηρητή Kalman, ο οποίος βρίσκεται από την εξίσωση:

$$K = PC^T R^{-1} \quad (5.40)$$

όπου P είναι η λύση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης Ricatti:

$$\dot{P} = -PC^T R^{-1} CP + AP + PA^T + Q \quad (5.41)$$

Με

$$P(0) = E\{(x(0) - \hat{x}(0))(x(0) - \hat{x}(0))^T\} \quad (5.42)$$

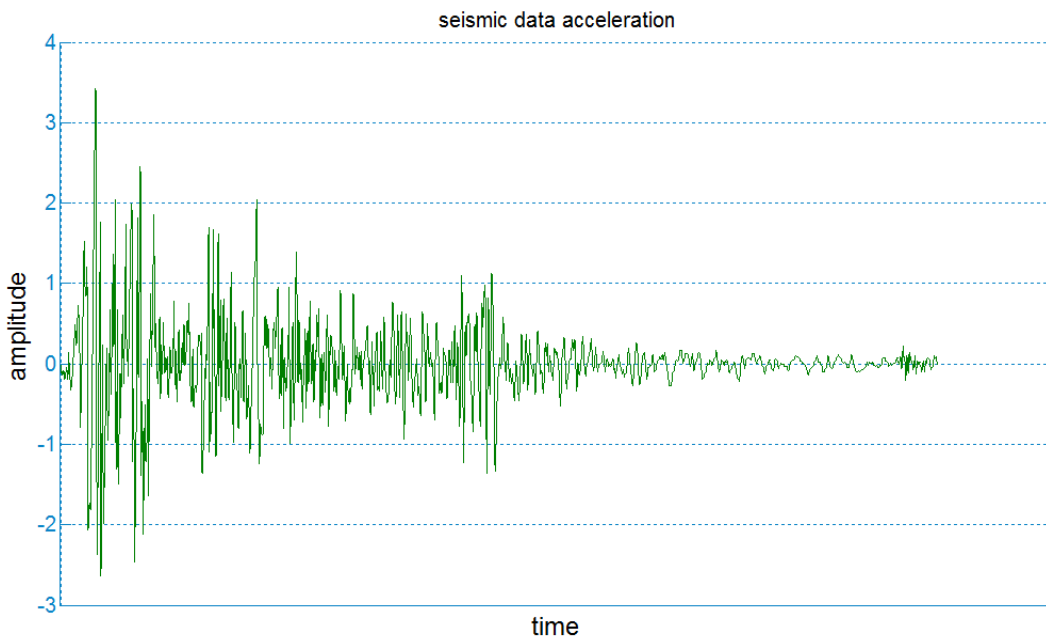
Οι μήτρες Q και R κατασκευάζονται ως εξής:

$$Q_{std} = \begin{bmatrix} \sigma_{z_0}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_0}^2 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

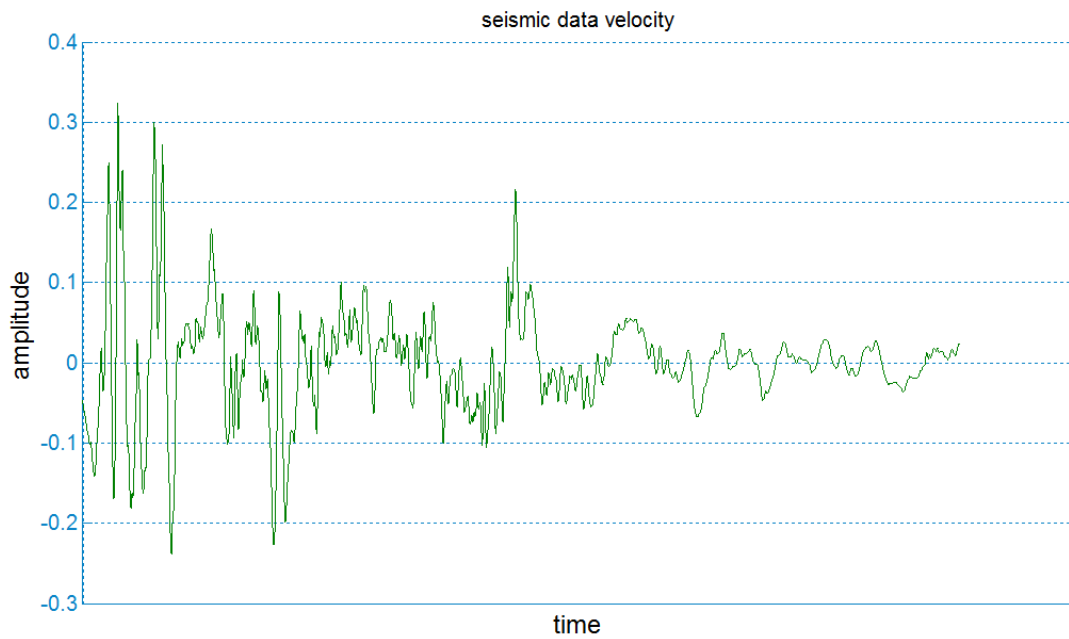
$$R_{std} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 I_{4 \times 4} & O_{4 \times 4} \\ O_{4 \times 4} & \sigma_z^2 I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Μπορούμε έτσι να ρυθμίσουμε την διακύμανση του σφάλματος για τα z_0 και \dot{z}_0 . Ελαχιστοποιώντας τις τιμές των $\sigma_{z_0}^2$ και $\sigma_{\dot{z}_0}^2$ ελαχιστοποιούμε και την ολίσθηση στις μετρήσεις, όμως επηρεάζουμε το σφάλμα εκτίμησης σε υψηλότερες συχνότητες. Με $Q_{std}=E$ και $H_{std}=D_d$ λύνουμε την παρακάτω εξίσωση Ricatti και υπολογίζουμε το αντίστοιχο κέρδος Kalman K_{std} .

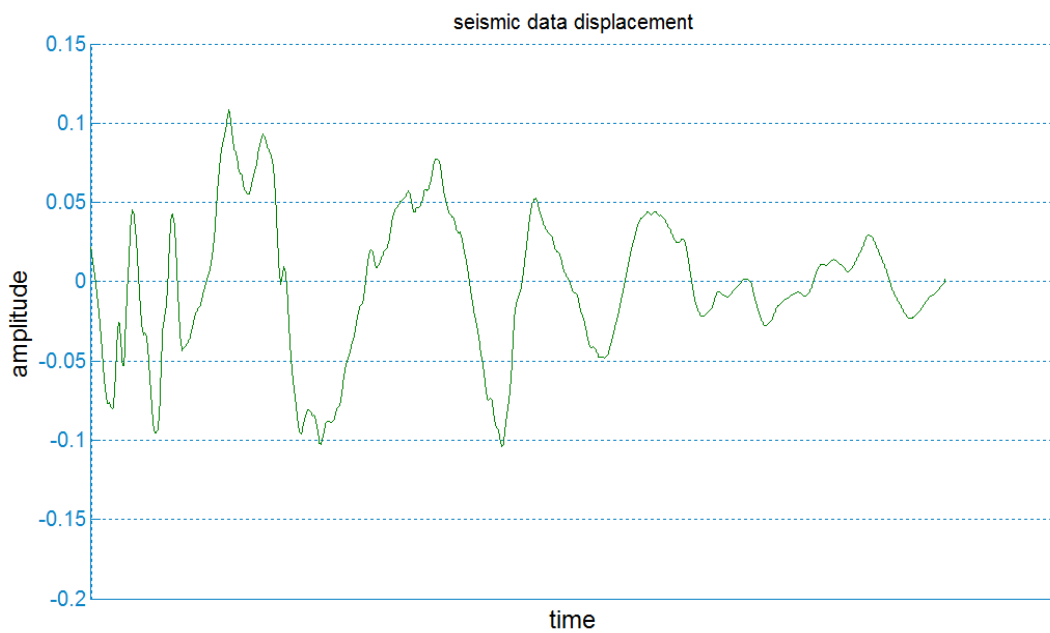
Για το κηρίό μας θα χρησιμοποιήσουμε ως είσοδο τα σήματα του σεισμού που πραγματοποιήθηκε το 1940 στο El Centro. Οι διαταραχές του σήματος απεικονίζονται στο παρακάτω διαγράμματα μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης του εδάφους κατά την διάρκεια του σεισμού:



Εικόνα 5.5: Δεδομένα επιτάχυνσης του σεισμού El Centro



Εικόνα 5.6: Δεδομένα ταχύτητας του σεισμού El Centro



Εικόνα 5.7: Δεδομένα θέσης του σεισμού El Centro

Για την προσομοίωση, θα κάνουμε χρήση των παρακάτω χαρακτηριστικών τιμών μαζών, ελατηρίων και αποσβεστήρων του τετραρόφου κτιρίου που μελετάμε:

| Μάζα (m_i) | Συντελεστής Ελατηρίου (k_i) | Συντελεστής Απόσβεσης (c_i) |
|-------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| $m_1 = 6800 \text{ kg}$ | $k_1 = 1200000 \text{ N/m}$ | $c_1 = 2400 \text{ Ns/m}$ |

| | | |
|-------------------------|------------------------------|----------------------------|
| $m_2 = 5897 \text{ kg}$ | $k_2 = 33732000 \text{ N/m}$ | $c_2 = 67000 \text{ Ns/m}$ |
| $m_3 = 5897 \text{ kg}$ | $k_3 = 29093000 \text{ N/m}$ | $c_3 = 58000 \text{ Ns/m}$ |
| $m_4 = 5897 \text{ kg}$ | $k_4 = 28621000 \text{ N/m}$ | $c_4 = 57000 \text{ Ns/m}$ |

Πίνακας 5.1: Χαρακτηριστικές τιμές του τετραρόφου κτιρίου

Η προσομοίωσή μας περιλαμβάνει: ανατροφοδότηση κατάστασης, ελεγκτή και παρατηρητή κατάστασης για την εκτίμηση του διανύσματος x . Το διάνυσμα κατάστασης του κτιρίου είναι άγνωστο και οι μόνες μετρήσιμες ποσότητες του συστήματος είναι τα σήματα από τους αισθητήρες που δίνουν τις επιταχύνσεις των ορόφων, τις αποστάσεις μεταξύ τους και την απόσταση του εδάφους από τον πρώτο όροφο.

Μπορούμε να μελετήσουμε την ευστάθεια ενός γραμμικού πολυμεταβλητού συστήματος, μελετώντας τις ιδιοτιμές του πίνακα κατάστασης A του συστήματος. Οι ιδιοτιμές αυτές βρίσκονται τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου:

$$\Psi(s) = \det(s \cdot I_{4 \times 4} - A) \quad (5.45)$$

Για να αποσβένουν οι διαταραχές το συντομότερο δυνατό και να μειωθεί η επίδραση του σεισμού, θα πρέπει να τοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές του συστήματος στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο. Η μετακίνηση των ιδιοτιμών επιτυγχάνεται μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης, βάζοντας ως είσοδο $u(t)$ την δύναμη που ασκεί ο επενεργητής στη βάση του κτιρίου:

$$u(t) = -K_c x(t) \quad (5.46)$$

Άρα, πλέον ο νέος πίνακας κατάστασης του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι:

$$A_c = A - BK_c \quad (5.47)$$

Με αποτέλεσμα το νέο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου να παίρνει την εξής μορφή:

$$\Psi_c(s) = \det(s \cdot I_{4 \times 4} - A + BK_c) \quad (5.48)$$

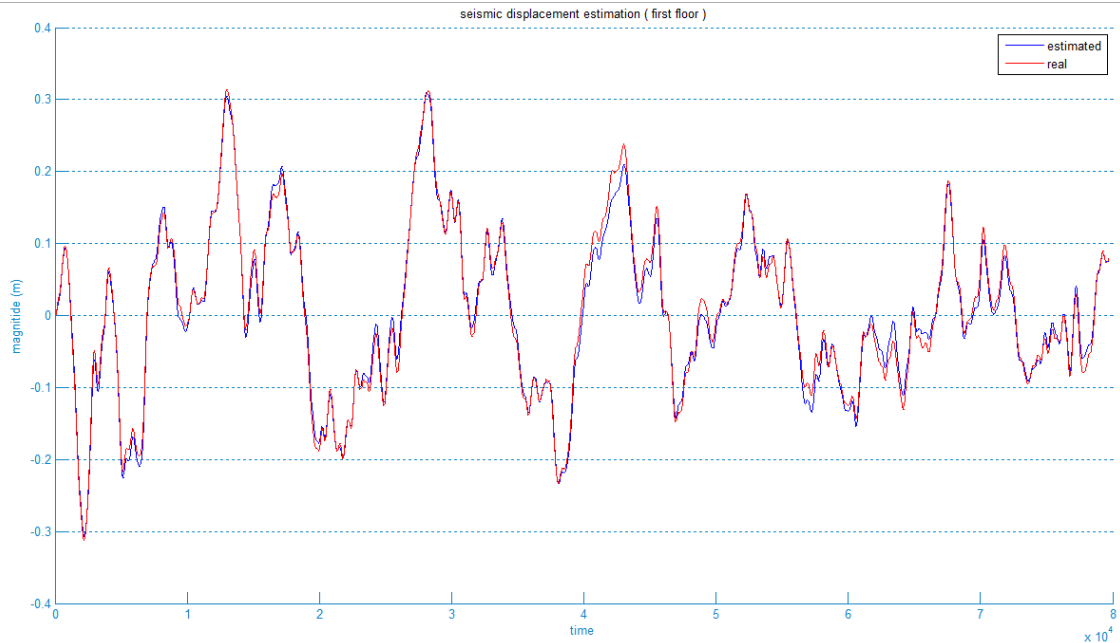
Επιλέγουμε, λοιπόν, τους επιθυμητούς πόλους του συστήματος κλειστού βρόχου στις θέσεις:

$$p = [-100 \ -20 \ -30 \ -40 \ -50 \ -60 \ -70 \ -80] \quad (5.49)$$

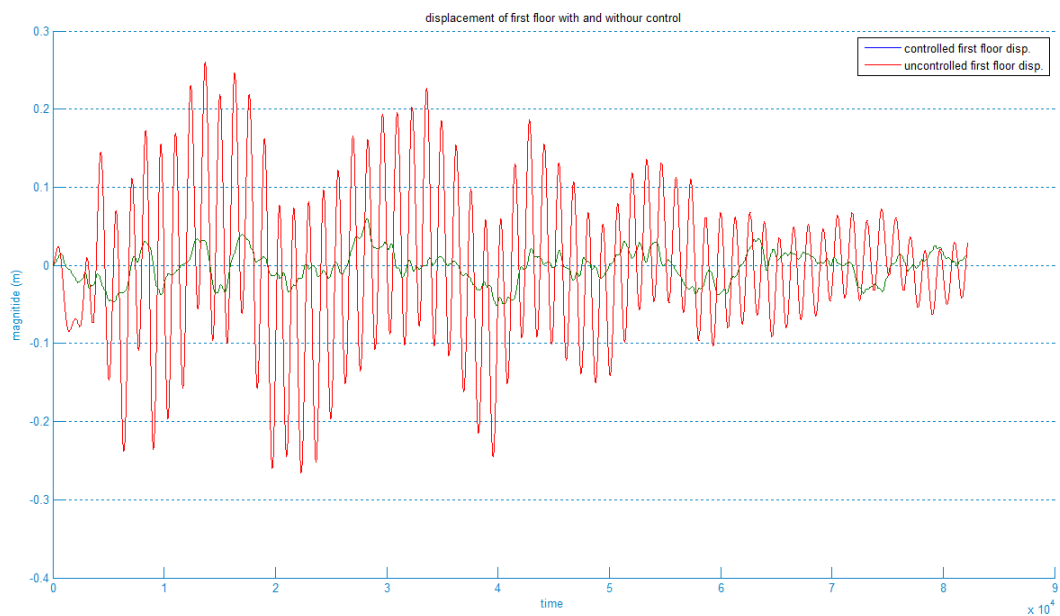
Θέτουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\Psi(s)$ να είναι ίσο με το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο και κατά αυτόν τον τρόπο προκύπτει ο πίνακας κερδών του ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης K_c .

Για τον καθορισμό της μήτρας κερδών K του παρατηρητή, θέτουμε τις τιμές των διακυμάνσεων για τα z_0 και \dot{z}_0 ίσες με $\sigma_{z_0}^2 = 0.01$ και $\sigma_{\dot{z}_0}^2 = 0.01$ αντίστοιχα. Επίσης,

θέτουμε τις τιμές διακύμανσης του θορύβου του επιταχυνσιόμετρου και του θορύβου μετρήσεων διαφορών θέσης μεταξύ των ορόφων ίσες με $\sigma_a^2 = 0.00005$ και $\sigma_z^2 = 0.0005^2$, αντίστοιχα. Τα παρακάτω διαγράμματα προβάλλουν αποτελέσματα της προσομοίωσης:



Εικόνα 5.8: Εκτίμηση φίλτρου Kalman σε σύγκριση με το πραγματικό displacement του σεισμού El Centro



Εικόνα 5.9: Με ένα απλό state feedback έλεγχο με κόκκινο βλέπουμε την κίνηση του κτιρίου χωρίς τον έλεγχο και με πράσινο την κίνησή του μετά τον έλεγχο

Συνεπώς, καταλήγουμε στο ότι ο έλεγχος που εφαρμόσαμε στο σύστημα είχε καλύτερα αποτελέσματα πάνω στην προστασία του κτιρίου κατά τη διάρκεια της

σεισμικής διαταραχής σε σύγκριση με την προστασία που θα παρείχε μια απλή αντισεισμική μέθοδος που θα περιελάμβανε μόνο ελαστικά εφέδρανα.

Βιβλιογραφία

- [1] Gilbert, Hunter B., Ozkan Celik and O'Malley, Marcia K., "Long-Term Double Integration of Acceleration for Position Sensing and Frequency Domain System Identification," *2010 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, Montreal, Canada, July 6 - 9 2000.
- [2] Thenozhi, Suresh and Yu, Wen, "A Novel Numerical Intergrator for Structural Control and Monitoring," *IEEE 13th International Conference on Information Reuse and Integration (IRI)*, 2012.
- [3] Thenozhi, Suresh, "Fuzzy Control fof Building Structures Subjected to Earthquakes or Wind-Induced Vibrations," *Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute*, Mexico, March 2014.
- [4] Datta, T. K., "Seismic Analysis of Structures", *John Wiley & Sons (Asia)*, Singapore, 2010.
- [5] Fu, Z.F. and He, J., "Modal analysis", *Butterworth Heinemann*, 2001.
- [6] Thong, Y., Woolfson, M., Crowe, J., Hayes, B. and Jones, D. J., "Numerical double integration of acceleration measurements in noise," *Measurement*, vol. 36, pp. 73 – 92, 2004.
- [7] Hensley, J. M., Peters, A. and Chu, S., "Active low frequency vertical vibration isolation," *Review of scientific instruments*, vol. 70, no. 6, pp. 2735-2741, 1999.
- [8] Djuric, Z., "Mechanisms of noise sources in microelectromechanical systems," *Microelectronics Reliability*, vol. 40, pp. 919-932, 2000.
- [9] Thong, Y., Woolfson, M., Crowe, J., Hayes-Gill, B., and Jones, D. J., "Numerical double integration of acceleration," *Measurement*, vol. 36, pp. 73-92, 2004.
- [10] Thong, Y. K., Woolfson, M. S., Crowe, J. A., Hayes-Gill, B. R., and Challis, R. E., "Dependence of inertial measurements of distance on accelerometer noise," *Measurement Science and Technology*, no. 13, p. 1163–1172, 2002.

- [11] Link, A., and von Martens, H.-J., "Accelerometer identification using shock excitation," *Measurement*, vol. 35, pp. 191-199, 2004.
- [12] Alam, Fakhri, ZhaiHe, Zhou, and JiaJia, Hu, "A Comparative Analysis of Orientation Estimation Filters using MEMS based IMU", *2nd International Conference on Research in Science, Engineering and Technology (ICRSET'2014)*, Dubai (UAE), March 21-22, 2014.
- [13] Zhi, Ruoyu, "A Drift Eliminated Attitude & Position Estimation Algorithm In 3D", *Graduate College Dissertations and Theses, Paper 450*, 2016.
- [14] Yang, J., Li, JB, and Lin, G., "A simple approach to integration of acceleration data for dynamic soil–structure interaction analysis," *Soil dynamics and earthquake engineering*, Elsevier, 2006.
- [15] Gavin, Henri P., Morales, Rodrigo, and Reilly, Kathryn, "Drift-free integrators", *Department of Civil & Environmental Engineering, Duke University*, Durham, North Carolina, 1998.
- [16] Hernández, W., "Improving the response of an accelerometer by using optimal filtering," *Sensors and Actuators A: Physical*, Elsevier, 2001.
- [17] Slifka, Lance D, "An Accelerometer based approach to measuring displacement of a vehicle body," *Diss. PhD thesis, Horace Rackham School Of Graduate Studies of the University of Michigan*, Michigan, 2004.

Παράρτημα Α

Φίλτρο Συνολικής διακύμανσης

Κώδικας matlab

```
1 function [ x, J ] = denoiseTV( y, lambda, Nit )
2
3 % [x,J] = denoiseTV(y,lambda,a,Nit)
4 % Total variation filtering (denoising) using
5 % iterative clipping algorithm.
6 % INPUT
7 % y - noisy signal (row vector)
8 % lambda - regularization parameter
9 % Nit - number of iterations
10 % OUTPUT
11 % x - result of denoising
12 % J - objective function
13 J = zeros(1,Nit); % objective function
14 N = length(y);
15 z = zeros(1,N-1); % initialize z
16 alpha = 4;
17 T = lambda/2;
18 for k = 1:Nit
19     temp = [-z(1) -diff(z) z(end)];
20     x = y - temp; % y - D' z
21     J(k) = sum(abs(x-y).^2) + lambda * sum(abs(diff(x)));
22     temp2 = 1/alpha * diff(x);
23     z = z + temp2; % z + 1/alpha D z
24     z = max(min(z,T),-T); % clip(z,T)
25
26 end
```

Κώδικας C#

```
1 List<float> denoiseTV(List<float> y, float lambda, int Nit)
2     {
3         int N = y.Count;
4         List<float> z = new List<float>();
5         Utilities.Utills.zeros(z, N - 1);
6         float alpha = 4;
7         float T = lambda / 2;
8         List<float> J = new List<float>();
9         Utilities.Utills.zeros(J, Nit);
10        List<float> x = new List<float>();
11
12        for (int i = 0; i < Nit; i++)
13            {
14                List<float> temp = Utilities.Utills.diff_minus(z);
15
16                temp.Insert(0, -z[0]);
17                temp.Add(z[z.Count - 1]);
18                x = Utilities.Utills.sub(y, temp);
19                // J[i] = ...
20                List<float> temp2 = Utilities.Utills.multi(1 / alpha,
```

```
21 Utilities.Utils.diff(x);
22         z = Utilities.Utils.add(z, temp2);
23         z = Utilities.Utils.max(Utilities.Utils.min(z, T), -
24 T);
25     }
26     return x;
}
```

Παράρτημα Β

Υπολογισμός Quaternion μεταξύ δύο διανυσμάτων (κώδικας matlab)

```
1 function quat = calcQuat(v1,v2)
2     a = cross(v1,v2);
3     b = acos(dot(v1,v2)/(norm(v1)*norm(v2)));
4     quat = [cos(b/2) a];
5     k = sqrt((quat(2)^2 + quat(3)^2 + quat(4)^2)/(1-quat(1)^2));
6     quat = [cos(b/2) a/k];
7     % b = sqrt((norm(v1))^2 + (norm(v2))^2 + dot(v1,v2));
8     % quat = [b a];
9     % quat = quat/norm(quat);
10 end
```

Υπολογισμός του συζυγή ενός Quaternion (κώδικας matlab)

```
1 function qConj = quaternConj(q)
2     qConj = [q(:,1) -q(:,2) -q(:,3) -q(:,4)];
3 end
```

Υπολογισμός του γινομένου μεταξύ δύο quaternion (κώδικας matlab)

```
1 function ab = quaternProd(a, b)
2     ab(:,1) = a(:,1).*b(:,1)-a(:,2).*b(:,2)-a(:,3).*b(:,3)-
3     a(:,4).*b(:,4);
4     ab(:,2) = a(:,1).*b(:,2)+a(:,2).*b(:,1)+a(:,3).*b(:,4)-
5     a(:,4).*b(:,3);
6     ab(:,3) = a(:,1).*b(:,3)-
7     a(:,2).*b(:,4)+a(:,3).*b(:,1)+a(:,4).*b(:,2);
8     ab(:,4) = a(:,1).*b(:,4)+a(:,2).*b(:,3)-
9     a(:,3).*b(:,2)+a(:,4).*b(:,1);
10 end
```

Αναπαράσταση ενός quaternion σε Πίνακα στροφής (κώδικας matlab)

```
1 public static float[,] quatern2rotMat(Quaternion q)
2 {
3     // 3x3
4     float[,] R = new float[,]
5     {
6         {0, 0, 0},
7         {0, 0, 0},
8         {0, 0, 0}
9     };
10
11     R[0, 0] = (float)(2 * Math.Pow((double)q.w, 2) - 1 +
12     2 * Math.Pow((double)q.x, 2));
```

```
13     R[0, 1] = 2 * (q.x * q.y + q.w * q.z);
14     R[0, 2] = 2 * (q.x * q.z - q.w * q.y);
15
16     R[1, 0] = 2 * (q.x * q.y - q.w * q.z);
17     R[1, 1] = (float)(2 * Math.Pow(q.w, 2) - 1 +
18     2 * Math.Pow(q.y, 2));
19     R[1, 2] = 2 * (q.y * q.z + q.w * q.x);
20
21     R[2, 0] = 2 * (q.x * q.z + q.w * q.y);
22     R[2, 1] = 2 * (q.y * q.z - q.w * q.x);
23     R[2, 2] = (float)(2 * Math.Pow(q.w, 2) - 1 +
24     2 * Math.Pow(q.z, 2));
25
26     return R;
27 }
```

Παράρτημα Γ

Μετατροπή από Quaternion σε Euler Angles (κώδικας C#)

```
1 public Vector3 EulerAngles
2 {
3     get
4     {
5         Vector3 v = new Vector3();
6         float x = Quaternion[0], y = Quaternion[1], z = Quaternion[2],
7             w = Quaternion[3];
8         double sqz = z * z;
9         double sqw = w*w;
10        double sqx = x*x;
11        double sqy = y*y;
12        v.y = (float)Math.Atan2(2f * x * w + 2f * y * z,
13            1 - 2f *(sqz + sqw)); // Yaw
14        v.x = (float)Math.Asin(2f * (x * z - w * y)); // Pitch
15        v.z = (float)Math.Atan2(2f * x * y + 2f * z * w,
16            1 - 2f * (sqy + sqz)); // Roll
17
18        v.y *= 100;
19        v.x *= 100;
20        v.z *= 100;
21
22        return v;
23 }
24 }
```

Παράρτημα Δ

Κύριο μέρος κώδικα σε C#, υπολογισμός quaternions σύμφωνα με τις τρέχοντες τιμές απο τον αισθητήρα IMU

```
1 public void _Update(float gx, float gy, float gz, float ax, float ay,
2                     float az, float mx, float my, float mz)
3 {
4     float q1 = Quaternion[0], q2 = Quaternion[1],
5           q3 = Quaternion[2], q4 = Quaternion[3];
6     float norm;
7     float hx, hy, _2bx, _2bz;
8     float s1, s2, s3, s4;
9     float qDot1, qDot2, qDot3, qDot4;
10
11 // Auxiliary variables to avoid repeated arithmetic
12 float _2q1mx;
13 float _2q1my;
14 float _2q1mz;
15 float _2q2mx;
16 float _4bx;
17 float _4bz;
18 float _2q1 = 2f * q1;
19 float _2q2 = 2f * q2;
20 float _2q3 = 2f * q3;
21 float _2q4 = 2f * q4;
22 float _2q1q3 = 2f * q1 * q3;
23 float _2q3q4 = 2f * q3 * q4;
24 float q1q1 = q1 * q1;
25 float q1q2 = q1 * q2;
26 float q1q3 = q1 * q3;
27 float q1q4 = q1 * q4;
28 float q2q2 = q2 * q2;
29 float q2q3 = q2 * q3;
30 float q2q4 = q2 * q4;
31 float q3q3 = q3 * q3;
32 float q3q4 = q3 * q4;
33 float q4q4 = q4 * q4;
34
35 // Normalise accelerometer measurement
36 norm = (float)Math.Sqrt(ax * ax + ay * ay + az * az);
37 if (norm == 0f) return; // handle NaN
38 norm = 1 / norm; // use reciprocal for division
39 ax *= norm;
40 ay *= norm;
41 az *= norm;
42
43 // Normalise magnetometer measurement
44 norm = (float)Math.Sqrt(mx * mx + my * my + mz * mz);
45 if (norm == 0f) return; // handle NaN
46 norm = 1 / norm; // use reciprocal for division
47 mx *= norm;
48 my *= norm;
49 mz *= norm;
50
```



```

51 // Reference direction of Earth's magnetic field
52 _2q1mx = 2f * q1 * mx;
53 _2q1my = 2f * q1 * my;
54 _2q1mz = 2f * q1 * mz;
55 _2q2mx = 2f * q2 * mx;
56 hx = mx * q1q1 - _2q1my * q4 + _2q1mz * q3 + mx * q2q2 +
57 _2q2 * my * q3 + _2q2 * mz * q4 - mx * q3q3 - mx * q4q4;
58 hy = _2q1mx * q4 + my * q1q1 - _2q1mz * q2 + _2q2mx * q3 -
59 my * q2q2 + my * q3q3 + _2q3 * mz * q4 - my * q4q4;
60 _2bx = (float)Math.Sqrt(hx * hx + hy * hy);
61 _2bz = -_2q1mx * q3 + _2q1my * q2 + mz * q1q1 + _2q2mx * q4 -
62 mz * q2q2 + _2q3 * my * q4 - mz * q3q3 + mz * q4q4;
63 _4bx = 2f * _2bx;
64 _4bz = 2f * _2bz;
65
66 // Gradient decent algorithm corrective step
67 s1 = -_2q3 * (2f * q2q4 - _2q1q3 - ax) + _2q2 * (2f * q1q2 + _2q3q4 - ay) -
68 _2bz * q3 * (_2bx * (0.5f - q3q3 - q4q4) + _2bz * (q2q4 - q1q3) - mx) +
69 (-_2bx * q4 + _2bz * q2) * (_2bx * (q2q3 - q1q4) + _2bz * (q1q2 + q3q4) - my) +
70 _2bx * q3 * (_2bx * (q1q3 + q2q4) + _2bz * (0.5f - q2q2 - q3q3) - mz);
71 s2 = _2q4 * (2f * q2q4 - _2q1q3 - ax) + _2q1 * (2f * q1q2 + _2q3q4 - ay) -
72 4f * q2 * (1 - 2f * q2q2 - 2f * q3q3 - az) + _2bz * q4 * (_2bx * (0.5f - q3q3 - q4q4)
73 +
74 _2bz * (q2q4 - q1q3) - mx) + (_2bx * q3 + _2bz * q1) * (_2bx * (q2q3 - q1q4) +
75 _2bz * (q1q2 + q3q4) - my) + (_2bx * q4 - _4bz * q2) * (_2bx * (q1q3 + q2q4) +
76 _2bz * (0.5f - q2q2 - q3q3) - mz);
77 s3 = -_2q1 * (2f * q2q4 - _2q1q3 - ax) + _2q4 * (2f * q1q2 + _2q3q4 - ay) - 4f *
78 q3 * (1 - 2f * q2q2 - 2f * q3q3 - az) + (-_4bx * q3 - _2bz * q1) * (_2bx *
79 (0.5f - q3q3 - q4q4) + _2bz * (q2q4 - q1q3) - mx) + (_2bx * q2 + _2bz * q4) *
80 (_2bx * (q2q3 - q1q4) + _2bz * (q1q2 + q3q4) - my) + (_2bx * q1 - _4bz * q3) *
81 (_2bx * (q1q3 + q2q4) + _2bz * (0.5f - q2q2 - q3q3) - mz);
82 s4 = _2q2 * (2f * q2q4 - _2q1q3 - ax) + _2q3 * (2f * q1q2 + _2q3q4 - ay) +
83 (-_4bx * q4 + _2bz * q2) * (_2bx * (0.5f - q3q3 - q4q4) + _2bz * (q2q4 - q1q3) - mx) +
84 (-_2bx * q1 + _2bz * q3) * (_2bx * (q2q3 - q1q4) + _2bz * (q1q2 + q3q4) - my) +
85 _2bx * q2 * (_2bx * (q1q3 + q2q4) + _2bz * (0.5f - q2q2 - q3q3) - mz);
86 norm = 1f / (float)Math.Sqrt(s1 * s1 + s2 * s2 + s3 * s3 + s4 * s4); // normalise
87 s1 *= norm;
88 s2 *= norm;
89 s3 *= norm;
90 s4 *= norm;
91
92 // Compute rate of change of quaternion
93 qDot1 = 0.5f * (-q2 * gx - q3 * gy - q4 * gz) - Beta * s1;
94 qDot2 = 0.5f * (q1 * gx + q3 * gz - q4 * gy) - Beta * s2;
95 qDot3 = 0.5f * (q1 * gy - q2 * gz + q4 * gx) - Beta * s3;
96 qDot4 = 0.5f * (q1 * gz + q2 * gy - q3 * gx) - Beta * s4;
97
98 // Integrate to yield quaternion
99 q1 += qDot1 * SamplePeriod;
100 q2 += qDot2 * SamplePeriod;
101 q3 += qDot3 * SamplePeriod;
102 q4 += qDot4 * SamplePeriod;
103 norm = 1f / (float)Math.Sqrt(q1 * q1 + q2 * q2 + q3 *
104 q3 + q4 * q4); // normalise quaternion
105 Quaternion[0] = q1 * norm;
106 Quaternion[1] = q2 * norm;

```

```
107 Quaternion[2] = q3 * norm;  
108 Quaternion[3] = q4 * norm;  
    }
```

Παράρτημα Ε

Υλοποίηση κατωδιαβατού και υπηπερατού φίλτρου πρώτης τάξης (κώδικας C#)

```
1 public FilterButterworth(float frequency, float sampleRate,
2 PassType passType, float resonance)
3 {
4     this.resonance = resonance;
5     this.frequency = frequency;
6     this.sampleRate = sampleRate;
7     this.passType = passType;
8
9     switch (passType)
10 {
11     case PassType.Lowpass:
12         c = 1.0f / (float) Math.Tan(Math.PI*frequency/sampleRate);
13         a1 = 1.0f / (1.0f + resonance * c + c * c);
14         a2 = 2f * a1;
15         a3 = a1;
16         b1 = 2.0f * (1.0f - c * c) * a1;
17         b2 = (1.0f - resonance * c + c * c) * a1;
18         break;
19     case PassType.Highpass:
20         c = (float) Math.Tan(Math.PI*frequency/sampleRate);
21         a1 = 1.0f / (1.0f + resonance * c + c * c);
22         a2 = -2f * a1;
23         a3 = a1;
24         b1 = 2.0f * (c * c - 1.0f) * a1;
25         b2 = (1.0f - resonance * c + c * c) * a1;
26         break;
27 }
28 }

1 public void Update(float newInput)
2 {
3     float newOutput = a1 * newInput + a2 * this.inputHistory[0] +
4     a3 * this.inputHistory[1] - b1 * this.outputHistory[0] -
5     b2 * this.outputHistory[1];
6
7     this.inputHistory[1] = this.inputHistory[0];
8     this.inputHistory[0] = newInput;
9
10    this.outputHistory[2] = this.outputHistory[1];
11    this.outputHistory[1] = this.outputHistory[0];
12    this.outputHistory[0] = newOutput;
13 }
```