ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ

ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ»

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Διπλωματική εργασία υποβληθείσα στον Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου ως μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση Προπτυχιακού Διπλώματος Σπουδών με ειδίκευση στις Ροές: Εφαρμοσμένη Ανάλυση, Εφαρμοσμένη Μηχανική/Υπολογιστική Προσομοίωση

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΤΣΙΝΙΑΣ

Αθήνα, Ιούλιος 2016

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ

ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

«ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΤΣΙΝΙΑΣ Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Παρουσιάσθηκε και εγκρίθηκε από τριμελή εξεταστική επιτροπή κατόπιν παρουσίασης και εξέτασης που διενεργήθηκε σε χώρο του Ε.Μ.Π. την Τετάρτη 13/7/2016 στις 09:30 προ μεσημβρίας.

Τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής:

....	....	....
Ιωάννης Τσινιάς	Ιάσων Καραφύλλης	Βασίλειος Κοκκίνης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π	Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2016

«ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ»

Σημαντικοί όροι: [ευστάθεια, συνάρτηση Lyapunov, ομοιόμορφη ευστάθεια, ασυμπτωτική ευστάθεια, ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια, θεώρημα ευστάθειας Lyapunov, αυτόνομα συστήματα, θεώρημα Barbashin – krasovskiey, σημείο ισορροπίας, ολική ασυμπτωτική ευστάθεια, ομοιόμορφη ολική ασυμπτωτική ευστάθεια, θεώρημα LaSalle, χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, είσοδος σε κατάσταση ευστάθειας, σταθεροποίηση, έλεγχος ανάδρασης, προσαρμοστικός έλεγχος, προσαρμοστικά συστήματα, έλεγχος, παραμετρικός έλεγχος, νόμος, παραμετρικός νόμος, φραξιμότητα, ενίσχυση προσαρμογής, ολοκληρωτική πίσω – αντικατάσταση, προσαρμοστική πίσω – αντικατάσταση]

Περίληψη

Στην εργασία αυτή προτείνεται μία μέθοδος εργασίας στα συστήματα προσαρμοστικού ελέγχου, και η μέθοδος αυτή λέγεται προσαρμοστική πίσω – αντικατάσταση. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει μεγάλη ευελιξία στην επίλυση προβλημάτων ευστάθειας, σύγκλισης και σταθεροποίησης, λαμβάνοντας λιγότερο αυστηρούς περιορισμούς συγκριτικά με άλλες μεθόδους. Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται η θεωρία ευστάθειας κατά Lyapunov, η οποία επεκτείνεται με την θεωρία αναλλοίωτου και το θεώρημα LaSalle (Κεφάλαιο 2) στα αυτόνομα συστήματα. Στο Κεφάλαιο 3 επεκτείνονται οι έννοιες της ευστάθειας στα χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα και τίθενται οι βάσεις της μεθόδου που θέλουμε να παρουσιάσουμε στα συστήματα προσαρμοστικού ελέγχου, παραθέτοντας την ολοκληρωτική πίσω αντικατάσταση στα μη αυτόνομα συστήματα. Στο Κεφάλαιο 4 αρχίζουμε από ένα παράδειγμα των προσαρμοστικών συστημάτων ελέγχου το οποίο και γενικεύουμε όλο και περισσότερο μέχρι την διατύπωση και την απόδειξη της πιο γενικής μορφής του, που είναι το θεώρημα προσαρμοστικής πίσω – αντικατάστασης.

Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της μεθόδου αυτής στην βιοχημεία.

“STABILITY STABILIZATION AND ADAPTIVE CONTROL”

Σημαντικοί όροι: [stability, Lyapunov’s function, uniform stability, asymptotic stability, uniform asymptotic stability, Lyapunov’s stability theorem, autonomous systems, Barbashin’s – krasovskiey’s theorem, equilibrium point, global asymptotic stability, global uniform asymptotic stability, LaSalle’s theorem, time varying systems, input to state stability, stabilization, feedback control, adaptive control, adaptive systems, control, parametric control, law, parametric law, boundness, adaptation gain, integrator back – stepping, adaptive back – stepping]

Abstract

In this bachelor’s thesis is proposed a working procedure for adaptive control systems, and is named adaptive back – stepping. This procedure exploits extra flexibility in solving stability, convergence and stabilization problems, under conditions less restrictive than those encountered in other methods. In Chapter 1 Lyapunov’s stability theory is presented, which is extended with invariance theory and LaSalle’s theorem (at Chapter 2) for autonomous systems. In Chapter 3 stability concepts are extended to time variant systems, and the foundation of the method, which we want to present at adaptive control systems, is laid by the integrator back – stepping method for non – autonomous systems. In Chapter 4 an adaptive control system becomes more abstractive in every step until it reaches at theorem form, which is stated and proved under the name adaptive back – stepping. An interesting application of this procedure at biochemistry is illustrated in Chapter 4.

Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Ευστάθεια Lyapunov

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.1: Εισαγωγή

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να προσδιοριστεί η ευστάθεια ενός συστήματος. Ο πιο εύχρηστος και πρακτικός στις εφαρμογές ήταν ο τρόπος που εφήρμοσε ο Lyapunov. Η ευστάθεια Lyapunov, την οποία παρουσιάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, είναι ένα εργαλείο ανάλυσης μη γραμμικών συστημάτων με εφαρμογές σε πολλούς τομείς των εφαρμοσμένων μαθηματικών και της μηχανικής, όπως η θεωρία συστημάτων και η θεωρία ελέγχου.

Στην παράγραφο 1.1 αυτό θα θέσουμε το είδος των συστημάτων με τα οποία θα εργαστούμε, και στα συστήματα αυτά θα ορίσουμε την έννοια της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας τους κατά Lyapunov. Θα θεωρήσουμε την συνάρτηση Lyapunov και θα εξάγουμε την παράγωγο της. Στην παράγραφο 1.2 θα αποδείξουμε το θεώρημα Lyapunov που καθιστά το μελετώμενο σημείο ισορροπίας ενός συστήματος ευσταθές ή ασυμπτωτικά ευσταθές και στην παράγραφο 1.4 θα λύσουμε αρκετά παραδείγματα επ' αυτού. Μετά το θεώρημα Lyapunov, στην παράγραφο 1.5 θα ακολουθήσει το θεώρημα Barbashin, που εξασφαλίζει τις ιδιότητες ολικής ασυμπτωτικής του σημείου ισορροπίας. Η παράγραφος και το κεφάλαιο κλείνουν με ένα παράδειγμα εφαρμογής του.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.2: Αυτόνομα Συστήματα

Τα συστήματα στα οποία θα αναπτύξουμε τις ιδιότητες ευστάθειας του Lyapunov, υπάγονται στα μη γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης.

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

όπου $f: D \to \mathbb{R}^n$ είναι τοπικά Lipschitz και $D \subset \mathbb{R}^n$.

Το σύστημα (1.1) έχει μοναδική λύση. Η ύπαρξη λύσης προκύπτει από το θεώρημα Peano. [Νικόλαος Μ. Σταυρακάκης, Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις ($2^η$ έκδοση), Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2011, σελ. 100] Η μοναδικότητα της λύσης απορρέει από την μοναδικότητα της λύσης των μη αυτόνομων συστημάτων. Η κρίσιμη ιδιότητα με βάση την οποία εξασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης των συστημάτων αυτών, είναι η ιδιότητα συνέχειας Lipschitz της συνάρτησης f σε ένα χωρίο του πεδίου ορισμού της.

Έστω $\bar{x} \in D$ ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.1), δηλαδή $f(\bar{x}) = 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σημείο ισορροπίας του (1.1) είναι το $\bar{x} = 0$, διότι αν $\bar{x} \neq 0$, τότε με μια αλλαγή συντεταγμένων $y = x - \bar{x}$, η παράγωγος του y δίνει: $\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) = g(y)$, με $g(0) = 0$. Οπότε με την νέα μεταβλητή y το σύστημα έχει σημείο ισορροπίας το $y = 0$ και γενικά θα μελετούμε την ευστάθεια ενός συστήματος όπως το (1.1), στο σημείο $x = 0$. Συμβολίζουμε την αρχική τιμή του x την χρονική στιγμή t_0 που αρχίζουμε να μελετάμε το σύστημα ως $x(t_0)$ και θεωρούμε ότι αν η αρχική τιμή του χρόνου είναι η $t_0 = 0$, τότε ισχύουν οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμοί: το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (1.1) λέγεται:

- **ευσταθές**, αν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t > 0$.
- **ασταθές**, αν δεν είναι ευσταθές.
- **ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν είναι ευσταθές και επιπλέον μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

Κατά την αναπαράσταση ενός φυσικού συστήματος, όπως το απλό εκκρεμές, θα μπορούσε κάποιος να προσδιορίσει τα σημεία ισορροπίας του συστήματος μέσα από τις εξισώσεις ισορροπίας ή με ενεργειακό τρόπο γράφοντας τις εξισώσεις που περιγράφουν τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας του συστήματος [http://www.physics.ntua.gr/~apekis/SIMEIOSEIS/SEMFE.FYS.I.2005.PDF/SEMFE.2005-KEF.6.pdf, σχέσεις (6.14) και (6.24) αντίστοιχα]. Ωστόσο το 1892 ο Lyapunov απέδειξε ότι συγκεκριμένες άλλες συναρτήσεις θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν αντί των ενεργειακών και να αποφανθούν για το είδος της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.3: Θεώρημα Lyapunov

Έστω $V: D \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση ορισμένη σε μια περιοχή $D \subset \mathbb{R}^n$ που περιέχει στο εσωτερικό της το σημείο ισορροπίας. Η παράγωγος του V κατά μήκος των τροχιών του (1.1) δίδεται από:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] \cdot \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (1.2)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης V κατά μήκος των τροχιών ενός συστήματος εξαρτάται από την εξίσωση του συστήματος. Η συνάρτηση V θα λέγεται συνάρτηση Lyapunov. Αν $\varphi(t; x)$ είναι η λύση του συστήματος (1.1) που ξεκινά με αρχικές συνθήκες x και χρόνο $t = 0$, τότε η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov ως προς την λύση φ του συστήματος, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις αρχικές συνθήκες, είναι:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\varphi(t; x))|_{t=0} \qquad (1.3)$$

Εάν $\dot{V}(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,η V θα είναι φθίνουσα κατά μήκος της λύσης του (1.1).

Για την απόδειξη του θεωρήματος Lyapunov που ακολουθεί, θα χρειαστεί το επόμενο λήμμα:

Λήμμα 1.1: Έστω $f(t, x)$ τμηματικά συνεχής ως προς το $t \in \mathbb{R}$, και τοπικά Lipschitz ως προς το x για όλα τα $t \geq t_o$ και για όλα τα x σε μια περιοχή $D \subset \mathbb{R}^n$. Έστω W ένα συμπαγές υποσύνολο του D και έστω $x_o \in W$, και υποθέτουμε ότι είναι γνωστό πως κάθε λύση του $\dot{x} = f(t, x), x(t_o) = x_o$ βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο W. Τότε, υπάρχει μοναδική λύση που ορίζεται για όλα τα $t \geq t_o$.

Θεώρημα 1.1: (Θεώρημα ευστάθειας Lyapunov)

Έστω ότι το $x = 0$ είναι ένα σημείο ισορροπίας για το σύστημα (1.1) και $D \subset \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο που περιέχει το $x = 0$ στο εσωτερικό του. Έστω $V: D \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$V(0) = 0 \tag{1.4}$$

και

$$V(x) > 0, \text{στο } D \backslash \{0\} \tag{1.5}$$

και

$$\dot{V}(x) \leq 0, \text{στο D} \tag{1.6}$$

τότε το $x = 0$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας. Επιπλέον, αν

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ στο } D \backslash \{0\} \tag{1.7}$$

τότε το $x = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $r \in (0, \varepsilon]$ τέτοιο ώστε η κλειστή μπάλα

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\} \subset D. \tag{1.8}$$

Επιλέγουμε

$$\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x). \tag{1.9}$$

Τότε, από την υπόθεση (1.5) θα είναι και

$$\alpha > 0. \tag{1.10}$$

Έστω $\beta \in (0, \alpha)$, τότε ορίζουμε το σύνολο

$$\Omega_\beta := \{x \in B_r : V(x) \leq \beta\}. \tag{1.11}$$

<u>Ισχυρισμός:</u> Το σύνολο Ω_β βρίσκεται στο εσωτερικό του B_r.

<u>Απόδειξη Ισχυρισμού:</u> Έστω ότι το σύνολο Ω_β δεν βρίσκεται στο εσωτερικό του B_r, τότε θα υπάρχει σημείο $p \in \Omega_\beta$ που βρίσκεται στο σύνορο του B_r. Στο σημείο αυτό ισχύει $V(p) \geq \alpha > \beta$, ενώ για όλα τα $x \in \Omega_\beta$ισχύει $V(x) \leq \beta$ πράγμα που είναι άτοπο.

Ο ορισμός του Ω_β έχει την εξής ιδιότητα: κάθε τροχιά που για $t = 0$ ξεκινά από το εσωτερικό του Ω_β, μένει εντός του Ω_β για όλους τους χρόνους $t \geq 0$. Αυτό έπεται από την υπόθεση του θεωρήματος, αφού από σχέση (1.6):

$$\dot{V}\big(x(t)\big) \leq 0 \Rightarrow V\big(x(0)\big) \leq \beta, \forall t \geq 0 \tag{1.12}$$

Το σύνολο Ω_β είναι κλειστό, λόγω του ορισμού (1.11), και φραγμένο, αφού περιέχεται εξ ολοκλήρου μέσα στο B_r, επομένως το Ω_β είναι συμπαγές σύνολο.

Επομένως εφαρμόζεται το **Λήμμα 1.1** για το σύστημα (1.1) και το συμπαγές σύνολο Ω_β και προκύπτει ότι υπάρχει μοναδική λύση για το (1.1) που ορίζεται για όλους τους χρόνους $t \geq 0$, όταν $x(0) \in \Omega_\beta$. Αφού η $V(x)$ είναι συνεχής, από την υπόθεση (1.4) έπεται ότι:

$$\exists \delta > 0 \colon \|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta. \tag{1.13}$$

Τότε, από τον ισχυρισμό και την σχέση (1.13) προκύπτει ότι:

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r \tag{1.14}$$

και

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r. \tag{1.15}$$

Επιπλέον,

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon, \forall t \geq 0 \tag{1.16}$$

που δείχνει ότι το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι ευσταθές.

Υποθέτουμε ότι ισχύει η επιπλέον υπόθεση (1.7) του θεωρήματος, $\dot{V}(x) < 0$ στο $D\backslash\{0\}$. Για να δείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια πρέπει να δείξουμε ότι $x(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$, δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\forall \alpha > 0, \exists T > 0 \colon \forall t > T \ \|x(t)\| < \alpha. \tag{1.17}$$

Επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα επιχειρήματα βρίσκουμε ότι $\forall \alpha > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $b > 0 \colon \Omega_b \subset B_\alpha$. Έπειτα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$V\big(x(t)\big) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0. \tag{1.18}$$

Εφόσον η απεικόνιση $t \to V\big(x(t)\big)$ είναι από την υπόθεση (1.7) γνησίως φθίνουσα και λόγω της σχέσης (1.10) κάτω φραγμένη από το 0, είναι

$$V\big(x(t)\big) \xrightarrow[t \to +\infty]{} c \geq 0. \tag{1.19}$$

Θα δείξουμε ότι $c = 0$.

Προς απαγωγή σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι είναι

$$c > 0. \tag{1.20}$$

Από συνέχεια του $V(x), \exists d > 0 \colon B_d \subset \Omega_c$. Το όριο

$$V\big(x(t)\big) \xrightarrow[t \to +\infty]{} c > 0 \tag{1.21}$$

σημαίνει ότι η τροχιά $x(t)$ βρίσκεται έξω από την μπάλα B_d για όλα τα $t \geq 0$. Έστω

$$-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x) \tag{1.22}$$

το οποίο υπάρχει διότι η συνεχής συνάρτηση $\dot{V}(x)$ έχει ένα μέγιστο πάνω στο συμπαγές σύνολο $\{d \leq \|x\| \leq r\}$. Από την επιπλέον υπόθεση (1.7) έπεται ότι $-\gamma < 0$ και εφαρμόζοντας το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού για την $V\big(x(\tau)\big)$ στο διάστημα $[0, t]$ λαμβάνουμε ότι

$$V\big(x(t)\big) = V\big(x(0)\big) + \int_0^t \dot{V}\big(x(\tau)\big)\,d\tau \le V\big(x(0)\big) + \int_0^t \max_{d\le\|x(\tau)\|\le r} \dot{V}\big(x(\tau)\big)\,d\tau$$

$$\le V\big(x(0)\big) - \gamma t \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$$

άτοπο, αφού από την σχέση (1.21) υποθέσαμε ότι

$$V\big(x(t)\big) \xrightarrow[t\to+\infty]{} c > 0$$

. ■

Μια κλάση βαθμωτών συναρτήσεων που είναι ευκόλως διαχειρίσιμες ως συναρτήσεις Lyapunov $V(x)$ και για τις οποίες το πρόσημό τους μπορεί με ευκολία να προσδιοριστεί και να ελεγχθεί είναι η κλάση των συναρτήσεων τετραγωνικής μορφής:

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i x_j \tag{1.23}$$

όπου $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, P συμμετρικός και το διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη (αντιστοίχως θετικά ημιορισμένη) αν και μόνον αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα P είναι θετικές (αντιστοίχως μη αρνητικές), που ισχύει αν και μόνον αν οι ορίζουσες των κυρίων υποπινάκων του P είναι θετικές (αντιστοίχως μη αρνητικές), και τότε ο πίνακας P θα λέμε ότι είναι θετικά ορισμένος (αντιστοίχως θετικά ημιορισμένος) και θα γράφουμε $P > 0$ (αντιστοίχως $P \ge 0$). Ανάλογα ορίζονται οι αρνητικά ορισμένες και οι αρνητικά ημιορισμένες συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.4: Παραδείγματα εφαρμογών

Στην παράγραφο αυτή εφαρμόζουμε την θεωρία όλου του κεφαλαίου μέχρι στιγμής. Το παράδειγμα 1.1 μας εισάγει στις έννοιες των θετικά και αρνητικά ορισμένων συναρτήσεων που είναι σημαντικές για την εφαρμογή των θεωρημάτων ευστάθειας, όχι μόνο του Lyapunov αλλά και γενικότερα όπως θα δούμε στα κεφάλαια 2 και 4. Του παραδείγματος 1.1 ακολουθεί μια σημαντική παρατήρηση για την επιλογή της συνάρτησης Lyapunov. Το παράδειγμα 1.2 είναι μια εφαρμογή του **Θεωρήματος 1.1** (θεώρημα Lyapunov). Το παράδειγμα 1.3 είναι το σύστημα του απλού εκκρεμούς χωρίς τριβή, και στο παράδειγμα 1.4 εισάγουμε την τριβή στο σύστημα και με τον τρόπο προσέγγισης του παραδείγματος αυτού αναδεικνύουμε την προηγούμενη παρατήρηση. Η παράγραφος κλείνει με μια παρατήρηση για το θεώρημα Lyapunov και τον χαρακτηρισμό των σημείων ισορροπίας του μελετώμενου συστήματος.

Παράδειγμα 1.1:

Έστω η συνάρτηση:

$$V(x) = \alpha x_1^2 + 2x_1x_3 + \alpha x_2^2 + 4x_2x_3 + \alpha x_3^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T P x$$

Οι κύριοι υποπίνακες του P είναι οι $A_1 = [\alpha]\,, A_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ $και\ A_3 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$. Οι ορίζουσες των κύριων υποπινάκων του P είναι πολυώνυμα ως προς α και είναι οι: $D_1 = \alpha, D_2 = \alpha^2, D_3 = \alpha(\alpha^2 - 4) + 1(-\alpha) = \alpha(\alpha^2 - 4 - 1) = \alpha(\alpha^2 - 5)$. Τα πολυώνυμα D_1, D_2, D_3 έχουν θετικό πρόσημο όταν οι ρίζες τους συναληθεύουν για $\alpha > \sqrt{5}$. Συνεπώς η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη (αντιστοίχως θετικά ημιορισμένη) για $\alpha > \sqrt{5}$ (αντιστοίχως $\alpha \geq \sqrt{5}$). Στον επόμενο πίνακα φαίνονται τα πρόσημα των πολυωνύμων για τις τιμές του α:

Πίνακας 1.1: τα πρόσημα των οριζουσών – πολυωνύμων ως προς α, D_1,D_2 και D_3

α	$(-\infty, -\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}$	$(-\sqrt{5}, 0)$	0	$(0, +\sqrt{5})$	$+\sqrt{5}$	$(+\sqrt{5}, +\infty)$
D_1	-	-	-	0	+	+	+
D_2	+	+	+	0	+	+	+
D_3	-	0	+	0	-	0	+

Για να βρούμε πού η $V(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη (αντιστοίχως αρνητικά ημιορισμένη) αναζητούμε για τον πίνακα $-P$, πού συναληθεύουν οι ρίζες των πολυωνύμων, τα οποία είναι οι ορίζουσες των κύριων υποπινάκων του $-P$, ώστε τα πολυώνυμα αυτά να έχουν θετικό πρόσημο. Οι κύριοι υποπίνακες του $-P$ είναι οι $-A_1, -A_2$ και $-A_3$, ενώ οι ορίζουσές τους είναι αντιστοίχως οι $D_1' = -D_1, D_2' = D_2$ και $D_3' = -\alpha(\alpha^2 - 4) + (-1)(-\alpha) = -\alpha(\alpha^2 - 4 - 1) = -\alpha(\alpha^2 - 5) = -D_3$. Τα πολυώνυμα $-D_1, D_2$ και $-D_3$ έχουν θετικό πρόσημο για $\alpha < -\sqrt{5}$, δηλαδή η $V(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη (αντιστοίχως αρνητικά ημιορισμένη) για $\alpha < -\sqrt{5}$ (αντιστοίχως $\alpha \leq -\sqrt{5}$), όπως φαίνεται αναλυτικά στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 1.2: τα πρόσημα των οριζουσών -D1, D2 και -D3

α	$(-\infty, -\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}$	$(-\sqrt{5}, 0)$	0	$(0, +\sqrt{5})$	$+\sqrt{5}$	$(+\sqrt{5}, +\infty)$
$-D_1$	+	+	+	0	-	-	-
D_2	+	+	+	0	+	+	+
$-D_3$	+	0	-	0	+	0	-

Από τους δύο πίνακες συνάγεται ότι για $\alpha \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ το πρόσημο της $V(x)$ είναι απροσδιόριστο.

Παρατήρηση: Με το **Θεώρημα 1.1** (θεώρημα Lyapunov) μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια των τροχιών των λύσεων του συστήματος (1.1) από δοθείσες αρχικές συνθήκες χωρίς επίλυσή του. Ωστόσο, η εύρεση μιας συνάρτησης Lyapunov είναι πολύ δύσκολη γιατί είναι αντικείμενο διαίσθησης και όχι αποτέλεσμα κάποιου συστηματικού τρόπου εργασίας. Πολλές φορές ως συναρτήσεις Lyapunov επιλέγονται κάποιες «παραλλαγές» συναρτήσεων που εκφράζουν την ενέργεια του μηχανικού συστήματος ή του ηλεκτρικού αναλόγου αυτού. Άλλες πάλι φορές η εύρεση μιας συνάρτησης Lyapunov επιχειρείται με την μέθοδο «δοκιμή και λάθος» (trial and error). Παρά όλα αυτά, η εύρεση μιας συνάρτησης Lyapunov δεν είναι εξασφαλισμένη.

Παράδειγμα 1.2:

Έστω η διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

$$\dot{x} = -g(x) \tag{1.24}$$

όπου η $g(x)$ είναι τοπικά Lipschitz στο διάστημα $(-\alpha, \alpha)$ και ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:

1. $g(0) = 0$
2. $xg(x) > 0, \forall x \in (-\alpha, 0) \cup (0, \alpha)$

Από την αρχική συνθήκη 2. και χωρίς να λάβουμε υπ' όψιν τις συναρτήσεις Lyapunov, παρατηρούμε ότι το πρόσημο της $g(x)$ είναι γνωστό στο διάστημα $(-\alpha, 0) \cup (0, \alpha)$ και από την διαφορική εξίσωση βλέπουμε το πρόσημο του $\dot{x}$, $\dot{x} < 0, \forall x \in (0, a)\ και\ \dot{x} > 0, \forall x \in (-a, 0)$. Για $x \in (0, a)$, από αρχική συνθήκη 2. το πρόσημο της σχέσης (1.24) είναι αρνητικό ($\dot{x} < 0$), και η τροχιά της λύσης τείνει ασυμπτωτικά στο 0. Με όμοιο τρόπο, για $x \in (-\alpha, 0)$ έχουμε $\dot{x} > 0$, και η τροχιά της λύσης τείνει ασυμπτωτικά στο 0. Για $x = 0$ από την αρχική συνθήκη 1. έχουμε: $\dot{x}(t) = 0, \forall t \geq 0$. Επομένως στο $x = 0$ έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια. Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.1 (θεώρημα Lyapunov), θεωρούμε την συνάρτηση:

$$V(x) = \int_0^x g(y)\, dy\, , όπου\ x \in D = (-a, a)$$

Η $V(x)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο D, $V(0) = 0$ και $V(x) > 0, \forall x \in D \backslash \{0\}$, αφού

$$V(x) = \int_0^x g(y)\, dy \overset{(1.24)}{\Longleftrightarrow}$$

$$V(x) = \int_0^x -\dot{y}\, dy = [-\dot{y}y]_0^x = -\dot{x}x - \big(-\dot{0}\big)0 \xLongleftrightarrow{αρχική\ συνθήκη\ 2.}$$

$$V(x) = xg(x) > 0, \forall x \in D\backslash\{0\}.$$

Μένει να δείξουμε ότι

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in D \; \varepsilon i\tau\varepsilon \; \dot{V}(x) < 0, \forall x \in D\backslash\{0\}$$

ώστε να εφαρμοστεί το **Θεώρημα 1.1** (θεώρημα Lyapunov). Είναι

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial}{\partial x}V(x)\cdot[-g(x)] = g(x)\cdot\big(-g(x)\big) = -g(x)^2 < 0, \forall x \in D\backslash\{0\}$$

Επομένως από το **Θεώρημα 1.1** (θεώρημα Lyapunov) έχουμε ότι το $x = 0$ είναι σημείο ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Παράδειγμα 1.3:

Ένα σύστημα μαθηματικού εκκρεμούς ταλαντώνεται χωρίς τριβή με την αρχή των αξόνων να τοποθετείται στην θέση της μάζας όταν το σύστημα είναι ακίνητο. Η εξίσωση κίνησης του συστήματος είναι: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ [http://www.physics.ntua.gr/~apekis/SIMEIOSEIS/SEMFE.FYS.I.2005.PDF/SEMFE.2005-KEF.6.pdf σχέση (6.13)] η οποία για $\theta = x_1$ και $\dot{\theta} = x_2$ δίνει το σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης:

$$\left\{\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\left(\frac{g}{l}\right)\sin x_1 \end{matrix}\right\} \tag{1.25}$$

Επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την κανονικοποιημένη συνάρτηση ενέργειας του συστήματος, ως προς χαρακτηριστικά της ράβδου και της ταλαντευόμενης μάζας [http://www.physics.ntua.gr/~apekis/SIMEIOSEIS/SEMFE.FYS.I.2005.PDF/SEMFE.2005-KEF.6.pdf σχέση $\frac{(6.19)}{ML^2}$, όπου M η μάζα του σφαιριδίου και L το μήκος της ράβδου]:

$$V(x) = V(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \tag{1.26}$$

Προς εφαρμογή του **Θεωρήματος 1.1** (θεώρημα Lyapunov), η $V(x)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $D = \{x_1 \in [-2\pi, 2\pi], x_2 \in \mathbb{R}\}$, και είναι $V(0) = 0$ και $V(x) > 0, \forall x \in D\backslash\{0\}$. Για την παράγωγο της V θα έχουμε:

$$\dot{V}(x) = \frac{g}{l}\dot{x}_1 \sin x_1 + \dot{x}_2 x_2 \overset{(1.25)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}(x) = \frac{g}{l}x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l}\sin x_1 \cdot x_2 = 0$$

Συνεπώς εφαρμόζεται το **Θεώρημα 1.1** (θεώρημα Lyapunov) και το σημείο $\tilde{x} = \tilde{0}$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας. Ωστόσο, επειδή $\dot{V}(x) \equiv 0, \forall x \in D$, αν το εκκρεμές τεθεί σε κίνηση δεν θα σταθεροποιηθεί στο σημείο ισορροπίας του ποτέ. Δηλαδή η αρχή των αξόνων δεν είναι σημείο ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Παράδειγμα 1.4:

Αν στο παράδειγμα του εκκρεμούς λάβουμε υπ' όψιν μας και τις τριβές από τον αέρα (οι οποίες είναι πολύ μικρές), τότε στην διαφορική εξίσωση κίνησης θα πρέπει να προστεθεί όρος 1ης τάξης που σχετίζεται με την ταχύτητα κίνησης του σώματος. Αν ο συντελεστής τριβής είναι η θετική σταθερά k, τότε η εξίσωση κίνησης του συστήματος είναι:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{k}{m}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right)\sin\theta = 0$$

[https://services.math.duke.edu/education/ccp/materials/diffeq/pendulum/pend1.html, προτελευταία εξίσωση κίνησης] και αν θέσουμε $x_1 = \theta \; \kappa\alpha\iota \; x_2 = \dot{\theta}$ έχουμε το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης:

$$\left\{\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\left(\frac{g}{l}\right)\sin x_1 - \left(\frac{k}{m}\right)x_2 \end{matrix}\right\} \tag{1.27}$$

Αν θεωρήσουμε την ίδια συνάρτηση Lyapunov με το **Παράδειγμα 1.3**, την συνάρτηση ενέργειας

$$V(x) = V(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \tag{1.26}$$

τότε η παράγωγός της είναι:

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{g}{l}\right)\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 \overset{(1.27)}{\iff}$$

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{g}{l}\right)x_2 \sin x_1 - \left(\frac{g}{l}\right)x_2 \sin x_1 - \left(\frac{k}{m}\right)x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = -\left(\frac{k}{m}\right)x_2^2 \tag{1.28}$$

Η σχέση (1.28) και για $x_2 = 0$, δίνει $\dot{V}(x) = 0$, που σημαίνει ότι η $\dot{V}$ είναι αρνητικά ημιορισμένη γιατί για $x_2 = 0$ η $\dot{V}$ μηδενίζεται για κάθε τιμή της μεταβλητής $x_1 \in \mathbb{R}$, και από το **Θεώρημα 1.1** (θεώρημα Lyapunov) η αρχή των αξόνων είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας. Ωστόσο, από το διάγραμμα φάσεων του συστήματος [http://www.academia.edu/7337214/Damping_associated_with_Simple_Pendulum_A_phase_portrait_study, σελίδα 2, διάγραμμα 1] προκύπτει ότι η αρχή των αξόνων είναι σημείο ασυμπτωτικής ευστάθειας. Η επιλογή της συνάρτησης ενέργειας ως συνάρτησης Lyapunov μας οδήγησε στο ότι το σημείο ισορροπίας (0,0) είναι ευσταθές και όχι ασυμπτωτικά ευσταθές. Θα επανέλθουμε στο σημείο αυτό όταν παρουσιάσουμε το **Θεώρημα 2.1** (θεώρημα LaSalle) για να λάβουμε διαφορετικό αποτέλεσμα εφαρμόζοντάς το στην ίδια συνάρτηση Lyapunov. Συνεχίζοντας το παράδειγμα, για να παρακάμψουμε το εμπόδιο αυτό, θα αναζητήσουμε άλλη συνάρτηση Lyapunov $V(x)$, που να έχει αρνητικά ορισμένη παράγωγο $\dot{V}(x)$. Στην προηγούμενη συνάρτηση Lyapunov $V(x)$ από την σχέση (1.26) αντικαθιστούμε τον όρο $\frac{1}{2}x_2^2$ με τον γενικότερο όρο $\frac{1}{2}x^T P x$ που είναι η τετραγωνική μορφή του συμμετρικού και θετικά ορισμένου πίνακα $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Τότε,

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T P x + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) \Leftrightarrow$$

$$V(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) \Leftrightarrow$$

$$V(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11}x_1 + P_{12}x_2 \\ P_{12}x_1 + P_{22}x_2 \end{bmatrix} + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) \Leftrightarrow$$

$$V(x) = \frac{1}{2}[P_{11}x_1^2 + P_{12}x_1x_2 + P_{12}x_1x_2 + P_{22}x_2^2] + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) \Leftrightarrow$$

$$V(x) = \frac{1}{2}P_{11}x_1^2 + P_{12}x_1x_2 + \frac{1}{2}P_{22}x_2^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) \qquad (1.29)$$

και η παράγωγος της V είναι:

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} P_{11}x_1 + P_{12}x_2 + \frac{g}{l}\sin x_1 & P_{12}x_1 + P_{22}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = \left(P_{11}x_1 + P_{12}x_2 + \frac{g}{l}\sin x_1\right)x_2 + (P_{12}x_1 + P_{22}x_2)\left(-\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2\right) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = P_{11}x_1x_2 + P_{12}x_2^2 + \frac{g}{l}x_2\sin x_1 - \frac{g}{l}P_{12}x_1\sin x_1 - \frac{k}{m}P_{12}x_1x_2 - \frac{g}{l}P_{22}x_2\sin x_1 - \frac{k}{m}P_{22}x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = \frac{g}{l}(1 - P_{22})x_2\sin x_1 - \frac{g}{l}P_{12}x_1\sin x_1 + \left(P_{11} - \frac{k}{m}P_{12}\right)x_1x_2 + \left(P_{12} - \frac{k}{m}P_{22}\right)x_2^2 \qquad (1.30)$$

Θέλουμε να επιλέξουμε P_{11}, P_{12}, P_{22} έτσι ώστε ο πίνακας $P > 0$ και η παράγωγος $\dot{V}(x) < 0$. Αν ο $P > 0$ τότε είναι θετικά ορισμένη και η τετραγωνική μορφή του, και από σχέση (1.29) έχουμε ότι η

$$V(x) > 0, \forall x_1 \in (0,2\pi), \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

Από τις ορίζουσες των κύριων υποπινάκων, για να είναι ο P θετικά ορισμένος θα πρέπει $P_{11} > 0 \; και \; P_{11}P_{22} - {P_{12}}^2 > 0$, από όπου προκύπτει ότι θα πρέπει και $P_{22} > 0$. Το πρόσημο των όρων $x_2 \sin x_1$ και x_1x_2 είναι απροσδιόριστο για αυτό θα τους απαλείψουμε επιλέγοντας $P_{22} = 1 \; και \; P_{11} = \frac{k}{m}P_{12}$. Τότε η

$$P_{11}P_{22} - {P_{12}}^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$P_{12}\left(\frac{k}{m} - P_{12}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(P_{12} - \frac{k}{m}\right)P_{12} < 0 \Leftrightarrow$$

$$0 < P_{12} < \frac{k}{m}$$

Ισχύει για κάθε $P_{12} \in \left(0, \frac{k}{m}\right)$. Επιλέγουμε $P_{12} = \frac{1}{2}\frac{k}{m}$ και τότε είναι $V(x) > 0$ και $\dot{V}(x) < 0$ για $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x_1| < \pi\}$. Από **Θεώρημα 1.1** (θεώρημα Lyapunov), η αρχή των αξόνων είναι σημείο ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Παρατήρηση: Το παράδειγμα 1.4 δείχνει ότι το **Θεώρημα 1.1** (θεώρημα Lyapunov) είναι ικανή συνθήκη ευστάθειας και ασυμπτωτικής ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας, και η μη εκπλήρωση των συνθηκών (1.4), (1.5), (1.6) ή και (1.7) (του θεωρήματος από μία συνάρτηση δεν σημαίνει κάτι για το είδος της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας, αλλά σημαίνει ότι η συνάρτηση που επιλέξαμε δεν ήταν η κατάλληλη. Το να αποφανθούμε για την ευστάθεια και ασυμπτωτική ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας χρειάζεται περεταίρω μελέτη.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.5: Θεώρημα Barbashin - Krasovskiey

Το να αποφανθούμε για την ασυμπτωτική ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας είναι ένα ερώτημα. Το άλλο ερώτημα είναι να αποσαφηνίσουμε την περιοχή έλξης του σημείου αυτού. Δηλαδή ποια είναι η περιοχή, της οποίας το κάθε σημείο της αν το διαλέξουμε ως αρχικές συνθήκες, σε άπειρο χρόνο η τροχιά της λύσης να πηγαίνει στο σημείο ισορροπίας, και πότε η περιοχή αυτή δεν είναι κλειστή, ούτε φραγμένη και έχουμε ολική ασυμπτωτική ευστάθεια. Το πρώτο ερώτημα και εν μέρει το δεύτερο (όσον αφορά την περίπτωση της ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας) το πραγματεύεται το ακόλουθο θεώρημα. Η πλήρης απάντηση θα δοθεί κατόπιν ανάπτυξης της απαραίτητης εκείνης θεωρίας πάνω στην οποία στηρίζεται το θεώρημα LaSalle που επεκτείνει την ευστάθεια κατά Lyapunov όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 1.2:(θεώρημα Barbashin – Krasovskiey)

Έστω ότι το $x = 0$ είναι ένα σημείο ισορροπίας για το σύστημα (1.1). Έστω ότι η συνάρτηση $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$V(0) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; V(x) > 0, \forall x \neq 0 \qquad (1.31)$$

$$\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty \qquad (1.32)$$

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0 \qquad (1.33)$$

τότε, το σημείο $x = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Η σχέση (1.31) ισοδυναμεί με το: «η V είναι θετικά ορισμένη», και η σχέση (1.32) ισοδυναμεί με το: «η V είναι ακτινικά μη φραγμένη».

Απόδειξη: Δοθέντος ενός σημείου $p \in \mathbb{R}^n$, θα είναι $V(p) = c$. Η συνθήκη (1.32) επάγει πως

$$\forall c > 0, \exists r > 0: \alpha\nu \; \|x\| > r \; \tau\acute{o}\tau\varepsilon \; V(x) > c.$$

Συνεπώς $\Omega_c \subset B_r$, από το οποίο προκύπτει ότι το Ω_c είναι φραγμένο. Η απόδειξη συνεχίζεται με όμοιο τρόπο με την απόδειξη του **Θεωρήματος 1.1** (θεώρημα Lyapunov).■

Παράδειγμα 1.5: Έστω το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2 \end{Bmatrix} \qquad (1.34)$$

όπου $\alpha > 0, h(\cdot)$ τοπικά Lipschitz, $h(0) = 0$, και $yh(y) > 0, \forall y \neq 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση Lyapunov

$$V(x) = \frac{\delta}{2} x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y)\, dy \qquad (1.35)$$

όπου $\delta > 0, 0 < k < 1$. Η V είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή $V(0) = 0$ και $V(x) > 0, \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^2$, και ακτινικά μη φραγμένη. Από την σχέση (1.2), η παράγωγος της V είναι

$$\dot{V}(x) = -a\delta(1-k)x_2^2 - a\delta k x_1 h(x_1) \tag{1.36}$$

και είναι αρνητικά ορισμένη $\forall x \in \mathbb{R}^2$. Συνεπώς, από το **Θεώρημα 1.2** (θεώρημα Barbashin – Krasovskiey) η αρχή των αξόνων είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής.

Παρατήρηση: Αν ένα σημείο είναι σημείο ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας, τότε είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Επέκταση της θεωρίας ευστάθειας (LaSalle)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.1: Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο 2 θα επεκτείνουμε την Θεωρία Ευστάθειας Lyapunov κατά LaSalle. Βασιζόμενοι στα ίδια συστήματα του κεφαλαίου 1, και αναγνωρίζοντας ήδη από την εισαγωγή της παραγράφου 1.5 την αδυναμία προσδιορισμού της περιοχής έλξης ενός σημείου ισορροπίας που χαρακτηρίζεται ασυμπτωτικά ευσταθές, και πως για τις περιπτώσεις που η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov είναι αρνητικά ημιορισμένη και ενώ το σύστημα έχει σημείο ασυμπτωτικής ευστάθειας (θέση ισορροπίας του μαθηματικού εκκρεμούς με τριβή), αλλά η επιλογή της συνάρτησης Lyapunov αδυνατεί να το αποκαλύψει (παραπέμπουμε στο παράδειγμα 1.4 του κεφαλαίου 1), προκύπτει η αναγκαιότητα να επεκταθεί η θεωρία ευστάθειας κατά τρόπο τέτοιο που να καλύπτει αυτές τις περιπτώσεις παρέχοντάς μας ικανότερες συνθήκες χαρακτηρισμού της (ασυμπτωτικής) ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.2: Τα «εργαλεία» που επεκτείνουν την θεωρία ευστάθειας κατά Lyapunov

Για να επεκτείνουμε την θεωρία ευστάθειας θα χρειαστούμε να ορίσουμε νέες μαθηματικές έννοιες όπως την έννοια του οριακού συνόλου και του αναλλοίωτου συνόλου, αλλά και να αποδείξουμε ένα λήμμα το οποίο μας δίνει τις ιδιότητες ενός θετικού οριακού συνόλου μιας φραγμένης λύσης για το σύστημα που εξετάζουμε. και πάνω σε αυτά θα βασιστούμε για την επίτευξη της επέκτασης αυτής.

Ορισμοί: Έστω ότι $x(\cdot;x_0)$ είναι λύση του συστήματος (1.1).

- Θα λέμε ότι ένα σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ είναι θετικό οριακό σημείο της $x(t)$, αν $\exists\ ακολουθία\ (t_n)_{n\in\mathbb{N}}\ με\ t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty : x(t_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p.$

- Το σύνολο $L_p = \left\{p \in \mathbb{R}^n \mid \exists\ ακολουθία\ (t_n)_{n\in\mathbb{N}}\ με\ t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty : x(t_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p\right\}$ όλων των θετικών οριακών σημείων της $x(t)$ λέγεται θετικό οριακό σύνολο της $x(t)$.
- Ένα σύνολο M λέγεται αναλλοίωτο σύνολο του (1.1) αν $x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \in \mathbb{R}$.
- Ένα σύνολο M λέγεται θετικά αναλλοίωτο σύνολο αν $x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \geq 0$.
- Επίσης λέμε ότι «η λύση $x(t)$ τείνει στο σύνολο M καθώς ο χρόνος t τείνει στο ∞», $αν\ \forall \varepsilon > 0, \exists T > 0 :\ \forall t > T\ είναι\ dist(x(t), M) < \varepsilon$.
- $\forall t \in \mathbb{R}$, η απόσταση του σημείου $x(t)$ από το σύνολο M ορίζεται ως

$$dist(x(t), M) := \inf_{x_0 \in \overline{M}} \|x(t) - x_0\|,$$

όπου το x_0 ανήκει στην κλειστότητα του M ($συμβ. \overline{M}$), δηλαδή το x_0 μπορεί να είναι οριακό σημείο του M.

Λήμμα 2.1: Αν η λύση $x(\cdot)$ του συστήματος (1.1) είναι φραγμένη και ανήκει στο D, $\forall t \geq 0$, τότε το θετικό οριακό σύνολό της L^+ είναι:

1. *Μη κενό*
2. *Συμπαγές*
3. *Αναλλοίωτο*
4. *Επιπλέον,* $x(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} L^+$

Απόδειξη:

1. Επειδή η λύση $x(t)$ είναι φραγμένη, $\forall\ ακολουθία\ (t_n)_{n\in\mathbb{N}}\ με\ t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,\ η\ x(t_n)$ θα είναι φραγμένη ακολουθία και από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass θα έχει ένα σημείο σύγκλισης, το οποίο σημαίνει ότι το θετικό οριακό σύνολο $L^+ \neq \emptyset$.
2. Για να δείξουμε ότι L^+ συμπαγές, αρκεί να δείξουμε ότι L^+ φραγμένο και L^+ κλειστό.

   L^+ *φραγμένο:* Για κάθε $y \in L^+$, υπάρχει ακολουθία $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με $t_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$: $\left(x(t_i)\right)_{i\in\mathbb{N}}$

$\underset{i\to\infty}{\longrightarrow} y$. Αφού η ακολουθία $\left(x(t_i)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, έπεται ότι (σχεδόν ταυτοτικά) για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και το όριό της y είναι φραγμένο, άρα και το σύνολο L^+ είναι φραγμένο.

L^+ *κλειστό:* Έστω η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^+$που συγκλίνει στο y, δηλαδή $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. <u>Θα δείξουμε ότι $y \in L^+$.</u> Έστω ε>0. Προς απαγωγή σε άτοπο έστω ότι $y \notin L^+$, δηλαδή υπάρχει ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mu\varepsilon$ $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x(t_n)\right) \neq y$, δηλαδή για το δοθέν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}: \forall n > n_1$ να είναι

$$\|x(t_n) - y\| \geq \varepsilon \tag{2.1}$$

$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, δηλαδή για το δοθέν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}: \forall n > n_2$ να είναι

$$\|y_n - y\| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Η ακολουθία $\left(x(t_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, που σημαίνει ότι για το δοθέν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_3 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}$ με $n > n_3$, υπάρχει $y_n \in L^+$:

$$\|x(t_n) - y_n\| < \varepsilon \tag{2.3}$$

Για $n > max\{n_1, n_2, n_3\}, \eta$ (2.1) $\Rightarrow \varepsilon \leq \|x(t_n) - y\| = \|x(t_n) - y_n + y_n - y\|$

$\xRightarrow{\tau\rho\iota\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ \iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha} \varepsilon \leq \|x(t_n) - y_n\| + \|y_n - y\| \underbrace{<}_{(2.2),(2.3)} \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \acute{\alpha}\tau o\pi o.$

3. Έστω $y \in L^+$ και έστω η συνάρτηση $\varphi(t, y): D \to \mathbb{R}^n$ που είναι η λύση του (1.1) για αρχικές συνθήκες $\varphi(0, y) = y$. Για να δείξουμε ότι L^+ είναι αναλλοίωτο σύνολο, αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi(t, y) \in L^+, \forall t \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι για το σημείο $y \in L^+$, υπάρχει ακολουθία $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $\mu\varepsilon$ $t_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$: $x(t_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} y$, όπου $x(t) \in D$, είναι η λύση του συστήματος (1.1).Είναι $x(t_i) = \varphi(t_i, x_0), \forall i$, όπου $x_0 = x(0)$. Από τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) (1.1), έχουμε:

$$\varphi(t + t_i, x_0) = \varphi\left(t, \varphi(t_i, x_0)\right) = \varphi(t, x_i)$$

όπου για επαρκώς μεγάλα i είναι $t + t_i > 0$. Από την συνέχεια της λύσης είναι

$$\lim_{i\to\infty}\varphi(t+t_i,x_0)=\lim_{i\to\infty}\varphi(t+t_i,x_0)=\varphi(t,y)$$

και επειδή το $\varphi(t+t_i,x_0)$ συγκλίνει στο L^+, θα είναι και $\varphi(t,y)\in L^+,\forall t\in\mathbb{R}$.

4. Θα δείξουμε ότι η λύση $x(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}L^+$. Προς απαγωγή σε άτοπο έστω ότι το ζητούμενο δεν ισχύει. Τότε θα υπάρχει $\varepsilon>0$ και ακολουθία $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $\mu\varepsilon$ $t_i\xrightarrow[i\to\infty]{}\infty$:

$$dist(x(t_i),L^+)>\varepsilon \qquad (2.4)$$

Επειδή η ακολουθία $x(t_i)$ είναι φραγμένη, θα έχει συγκλίνουσα υποακολουθία $x(t_{ij})$ που ας υποθέσουμε ότι συγκλίνει στο σημείο x^*, δηλαδή $x(t_{ij})\xrightarrow[j\to\infty]{}x^*$. Το $x^*\in L^+$ εξ ορισμού του L^+, ως σημείο σύγκλισης της λύσης του συστήματος (1.1), και ταυτόχρονα από την σχέση (2.4) απέχει απόσταση ε από το L^+, το οποίο είναι άτοπο.■

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.3: Το Θεώρημα LaSalle

Με την χρήση των εργαλείων της παραγράφου 2.1 διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το πολύ σημαντικό θεώρημα LaSalle που γενικεύει την θεωρία ευστάθειας Lyapunov, εισάγοντας το περιοχή σημείων ισορροπίας του συστήματος καθιστώντας το **Θεώρημα 2.1** (θεώρημα LaSalle) καταλληλότερο του **Θεωρήματος 1.1** (θεώρημα Lyapunov) όταν το σύστημα έχει περιοχή σημείων ισορροπίας αντί ενός απομονωμένου σημείου ισορροπίας. Επίσης χαλαρώνει την αυστηρή προϋπόθεση της αρνητικά ορισμένης συνάρτησης $\dot{V}$ για την επίτευξη ασυμπτωτικής ευστάθειας. Επιπλέον, δίνει εκτίμηση της περιοχής έλξης του σημείου ισορροπίας ή της περιοχής σημείων ισορροπίας του συστήματος, και αυτή είναι ένα οποιοδήποτε συμπαγές θετικά αναλλοίωτο σύνολο μέσα στο οποίο ορίζεται η λύση του συστήματος. Τέλος, γενικεύει τα θεωρήματα του 1ου κεφαλαίου και τα καθιστά ειδικές περιπτώσεις των πορισμάτων του.

Θεώρημα 2.1:(Θεώρημα LaSalle)

Έστω D ένα ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει στο εσωτερικό του το σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.1). Έστω $\Omega\subset D$ κλειστό, φραγμένο και θετικά αναλλοίωτο σύνολο, που περιέχει στο εσωτερικό του το σημείο ισορροπίας του συστήματος, και στο οποίο ορίζεται η λύση $x(t)$ του συστήματος (1.1). Έστω $V: D \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$. Έστω E το σύνολο όλων των σημείων του Ω για τα οποία $\dot{V}(x) = 0$, δηλαδή $E = \{x \in \Omega \,|\, \dot{V}(x) = 0\}$, και έστω M το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο του E. Τότε, κάθε λύση $x(t)$ που ξεκινά στο Ω τείνει στο M καθώς $t \to \infty$.

Απόδειξη: Έστω $x(t)$ η λύση του συστήματος (1.1) με αρχικές τιμές να ανήκουν στο Ω. Επειδή $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \Omega$, η $V(x(t))$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t. Το σύνολο Ω είναι συμπαγές, επειδή είναι κλειστό και φραγμένο εξ υποθέσεως του θεωρήματος. Επειδή η $V(x)$ είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο Ω, είναι κάτω φραγμένη στο Ω. Συνεπώς θα $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{t\to\infty} V(x(t)) = \alpha$, για κάποιο $x_a \in \Omega : \lim_{t\to\infty} x(t) = x_a$, το οποίο θα ανήκει στο θετικό οριακό σύνολο L^+ εξ ορισμού. Και επειδή το Ω είναι κλειστό σύνολο, κάθε σημείο σύγκλισης του $V(x(t))$ είναι κάποιο $x \in \Omega$, δηλαδή $L^+ \subset \Omega$. Από ορισμό του L^+ έχουμε ότι:

$$\forall p \in L^+, \exists \alpha\kappa o\lambda o\upsilon\theta\acute{\iota}\alpha\ (t_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \mu\varepsilon\ t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty : x(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} p.$$

Από συνέχεια της $V(x)$, προκύπτει ότι

$$\exists p \in L^+ : V(p) = \lim_{n\to\infty} V(x(t_n)) = a.$$

Συνεπώς, $V(x) = a, \forall x \in L^+$. Επειδή το σύνολο L^+ είναι από το **Λήμμα 2.1** αναλλοίωτο σύνολο, θα είναι:

$$\dot{V}(x) = 0, \forall x \in L^+ \text{ και } L^+ \subset M$$

Συνεπώς,

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega \subset D.$$

Επειδή $x(t)$ φραγμένη, από το **Λήμμα 2.1** θα έχουμε ότι $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} L^+$. Συνεπώς $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} M$.■

Σχόλιο: Σε αντίθεση με το **Θεώρημα 1.1** (θεώρημα Lyapunov), στο **Θεώρημα 2.1** (θεώρημα LaSalle) δεν χρειάζεται η $V(x)$ να είναι θετικά ορισμένη. Επίσης, η κατασκευή του συνόλου Ω δεν χρειάζεται να συνδεθεί με την κατασκευή της $V(x)$, όπως στο **Θεώρημα 1.1** (θεώρημα Lyapunov).

Πόρισμα 1: Έστω ότι το $x = 0$ είναι ένα σημείο ισορροπίας του (1.1) και έστω ότι η συνάρτηση $V : D \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά ορισμένη συνάρτηση σε μια περιοχή D που περιέχει το $x = 0$, τέτοια ώστε $\dot{V}(x) \leq 0$ στο D. Έστω

$$S = \{x \in D \,|\, \dot{V}(x) = 0\}$$

και υποθέτουμε ότι καμία λύση $x(t)$ δεν μπορεί να μείνει ταυτοτικά στο S, εκτός από την τετριμμένη λύση. Τότε η αρχή των αξόνων $x = 0$ είναι σημείο ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Πόρισμα 2: Έστω ότι το $x = 0$ είναι ένα σημείο ισορροπίας για το (1.1) και έστω ότι η συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη, ακτινικά μη φραγμένη και θετικά ορισμένη συνάρτηση, τέτοια ώστε $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Έστω

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \dot{V}(x) = 0\}$$

και υποθέτουμε ότι καμία λύση $x(t)$ δεν μπορεί να μείνει ταυτοτικά στο S, εκτός από την τετριμμένη λύση. Τότε η αρχή των αξόνων $x = 0$ είναι σημείο ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Παρατήρηση: Όταν $\dot{V}(x) < 0$ (αρνητικά ορισμένη), τότε $S = \{0\}$ και τα **Πόρισμα 1, Πόρισμα 2** ταυτίζονται με τα **Θεώρημα 1.1** (θεώρημα Lyapunov), **Θεώρημα 1.2** (θεώρημα Barbashin-Krasovskiey) αντιστοίχως.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.4: Παραδείγματα εφαρμογών της επεκταθείσας θεωρίας ευστάθειας

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τρία παραδείγματα εφαρμογών της επέκτασης της θεωρίας ευστάθειας κατά LaSalle. Το πρώτο παράδειγμα χρησιμοποιεί το **Πόρισμα 1** για την επίτευξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας σε απομονωμένο σημείο ισορροπίας αντιμετωπίζοντας την προβληματική που αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου με την αρνητικά ημιορισμένη παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov. Το δεύτερο παράδειγμα πραγματεύεται εκ νέου το παράδειγμα 2.1 με την διαφορά ότι εισάγει την επιπλέον συνθήκη της ακτινικά μη φραγμένης συνάρτησης Lyapunov και κάνοντας χρήση του **Πορίσματος 2** συμπεραίνει την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του συστήματος. Το τρίτο παράδειγμα αφορά την εφαρμογή του **Θεωρήματος 2.1** (θεώρημα LaSalle) στα συστήματα προσαρμοζόμενου ελέγχου που θα αναπτύξουμε στο κεφάλαιο 4, αναδεικνύοντας εκείνο το κομμάτι του θεωρήματος LaSalle που επάγει σύγκλιση σε περιοχή σημείων ισορροπίας.

Παράδειγμα 2.1: Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - h(x_2) \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

όπου $g(\cdot)\, και\, h(\cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz και ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$g(0) = 0, yg(y) > 0, \forall y \neq 0, y \in (-a, a) \tag{2.6}$$

και

$$h(0) = 0, yh(y) > 0, \forall y \neq 0, y \in (-a, a) \tag{2.7}$$

Το σύστημα έχει ένα απομονωμένο σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων. Από την μορφή των συναρτήσεων $g(\cdot), h(\cdot)$ το σύστημα (2.5) θα μπορούσε να έχει και άλλα σημεία ισορροπίας. Η εξίσωση που επάγει αυτό το σύστημα μπορεί να ειδωθεί ως μια γενικευμένη εξίσωση εκκρεμούς, όπου η συνάρτηση $h(\cdot)$ καταλαμβάνει όρους τριβής. Έτσι, ως συνάρτηση Lyapunov μπορούμε να επιλέξουμε την ενεργειακή συνάρτηση

$$V(x) = \int_0^{x_1} g(y)\, dy + \frac{1}{2} x_2^2 \tag{2.8}$$

Έστω $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_i \in (-a, a)\}$. Τότε, η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη στο D.

$$\dot{V}(x) = \dot{x}_1 g(x_1) + x_2 \dot{x}_2 \overset{(2.5)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}(x) = x_2 g(x_1) - x_2 g(x_1) - x_2 h(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = -x_2 h(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x_2 \in (-a, a).$$

Έτσι, η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη. Το σύνολο

$$S = \{x \in D \,|\, \dot{V}(x) = 0\} \Leftrightarrow$$

$$S = \{x \in D \,|\, x_2 h(x_2) = 0\} \Leftrightarrow$$

$$S = \{x_1 \in (-a, a), x_2 = 0\}.$$

Έστω $x(t)$ μία τροχιά της λύσης που ανήκει στο S. Τότε

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\dot{x}_2(t) \equiv 0 \xRightarrow{(2.5),(2.7)}$$

$$g\big(x_1(t)\big) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$x_1(t) \equiv 0.$$

Συνεπώς, η μόνη λύση που μένει ταυτοτικά στο S είναι η τετριμμένη λύση $x(t) = 0$. Επομένως, εφαρμόζεται το **Πόρισμα 1** και ως αποτέλεσμα η αρχή των αξόνων είναι σημείο ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Παράδειγμα 2.2: Θεωρούμε ξανά το (2.5) και τις συνθήκες (2.6) και (2.7) με την διαφορά ότι στο πεδίο ορισμού της μεταβλητής y στις συνθήκες (2.6) και (2.7) έχουμε αντικαταστήσει το α με το ∞ και υποθέτουμε ότι η $g(\cdot)$ ικανοποιεί την επιπλέον συνθήκη:

$$V(x) = \int_0^y g(z)\, dz \xrightarrow[|y|\to\infty]{} \infty \tag{2.9}$$

Η συνάρτηση Lyapunov (2.8) είναι ακτινικά μη φραγμένη. Όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα,

$$\dot{V}(x) = \dot{x}_1 g(x_1) + x_2 \dot{x}_2 \overset{(2.5)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}(x) = x_2 g(x_1) - x_2 g(x_1) - x_2 h(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = -x_2 h(x_2), \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

Άρα:

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^2$$

και το σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$ δεν περιέχει άλλες λύσεις παρά μόνο την τετριμμένη. Συνεπώς, από το **Πόρισμα 2** η αρχή των αξόνων είναι σημείο ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Παρατήρηση: Το **Θεώρημα 2.1** (θεώρημα LaSalle) επεκτείνει το **Θεώρημα 1.1** (θεώρημα Lyapunov) καθώς δεν χρειάζεται την αυστηρή συνθήκη της αρνητικά ορισμένης συνάρτησης $\dot{V}$, και η έννοια του αναλλοίωτου συνόλου Μ (επεκτείνει την περιοχή έλξης του σημείου ισορροπίας, αλλά και) εισάγει την έννοια της περιοχής σημείων ισορροπίας, το αναλλοίωτο σύνολο L^+, στο οποίο συγκλίνει η λύση.

Παράδειγμα 2.3: Θεωρούμε το 1ης τάξης σύστημα

$$\dot{y} = ay + u \tag{2.10}$$

με τον νόμο προσαρμοζόμενου ελέγχου

$$\begin{Bmatrix} u = -ky \\ \dot{k} = \gamma y^2, \gamma > 0 \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

Θέτοντας $x_1 = y$ και $x_2 = k$ το σύστημα κλειστού βρόγχου γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = -(x_2 - a)x_1 \\ \dot{x}_2 = \gamma x_1^2 \end{Bmatrix} \tag{2.12}$$

Όλα τα σημεία $(x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R})$ είναι σημεία ισορροπίας του (2.12). Το σύνολο $A = \{x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$ είναι το σύνολο των σημείων ισορροπίας του συστήματος. Θα δείξουμε ότι οι τροχιές των λύσεων του (2.12) προσεγγίζουν το σύνολο A των σημείων ισορροπίας καθώς ο χρόνος $t \to \infty$, που σημαίνει ότι ο προσαρμοστικός ελεγκτής u επέτυχε την «ρύθμιση» του y στο 0. Θεωρούμε την συνάρτηση Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2 \tag{2.13}$$

όπου $b > a$. Η παράγωγος

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{\gamma}(x_2 - b)\dot{x}_2 \overset{(2.12)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2(x_2 - a) + x_1^2(x_2 - b) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2(b - a) \leq 0 \tag{2.14}$$

Συνεπώς $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^2$. Επειδή η $V(\cdot)$ είναι ακτινικά μη φραγμένη, το σύνολο $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 | V(x) \leq c\}$ είναι ένα συμπαγές, θετικά αναλλοίωτο σύνολο. Για την εφαρμογή του **Θεωρήματος 2.1** (θεώρημα LaSalle) θέτουμε $\Omega = \Omega_c$ και όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος ισχύουν. Το σύνολο

$$E = \{x \in \Omega_c | \dot{V}(x) = 0\} \overset{(2.14)}{\Longleftrightarrow}$$

$$E = \{x \in \Omega_c | x_1 = 0\}$$

Επειδή κάθε σημείο της ευθείας $x_1 = 0$ είναι σημείο ισορροπίας του (2.12), το E είναι αναλλοίωτο σύνολο. Συνεπώς το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο M του E, εδώ ταυτίζεται με το E. Με την εφαρμογή του **Θεωρήματος 2.1** (θεώρημα LaSalle), κάθε τροχιά της λύσης $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ που ξεκινά από το Ω_c τείνει στο E για $t \to \infty$. Επειδή η $V(x)$ είναι ακτινικά μη φραγμένη, για κάθε αρχική συνθήκη $x(0)$,

$$\exists \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\ c > 0 : x(0) \in \Omega_c,$$

που σημαίνει ότι η σύγκλιση που προέκυψε από το **Θεώρημα 2.1** (θεώρημα LaSalle) είναι ολική.

Σχόλιο: Και στα τρία αυτά παραδείγματα παρουσιάζονται πτυχές της επέκτασης της θεωρίας ευστάθειας με εγκαθίδρυση των ιδιοτήτων ευστάθειας στα μελετώμενα συστήματα κάνοντας χρήση του **Θεωρήματος 2.1** (θεώρημα LaSalle) και των πορισμάτων του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Τα μη αυτόνομα συστήματα ως προαπαιτούμενα των Adaptive

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.1: Εισαγωγή

Πριν προχωρήσουμε στα συστήματα προσαρμοζόμενου ελέγχου, θα πρέπει να παραθέσουμε βοηθητικούς ορισμούς, λήμματα και θεωρήματα που θα χρειαστούν στην ανάλυση και στις αποδείξεις αυτών των συστημάτων.

Στην παράγραφο 3.2 θα παρουσιάσουμε βασικές ιδιότητες των χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων με στόχο να τις χρησιμοποιήσουμε στον προσαρμοστικό έλεγχο συστημάτων. Θα επεκτείνουμε τις ήδη γνωστές από τα προηγούμενα κεφάλαια έννοιες της ευστάθειας σε μη αυτόνομα συστήματα. Θα εισάγουμε την έννοια της ομοιόμορφης ευστάθειας ως προς τον χρόνο. Προς αυτό θα χρειαστούμε τις ισοδύναμες μορφές της που βασίζονται στις συναρτήσεις σύγκρισης (συναρτήσεις κλάσεως $\mathcal{K}$ και άλλες). Θα αποδείξουμε το σημαντικό θεώρημα LaSalle –Yoshizawa που αποτελεί την γενίκευση του θεωρήματος LaSalle στα χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα.

Την παράγραφο 3.3 την χωρίσαμε σε δύο μέρη. Στην παράγραφο 3.3.1 θα εισάγουμε τα μη αυτόνομα συστήματα σε στοιχεία της θεωρίας ελέγχου συστημάτων ορίζοντας την ISS (είσοδο σε κατάσταση ευστάθειας) και αποδεικνύοντας το θεώρημα 3.3 χαρακτηρισμού αυτής. Τέλος στην παράγραφο 3.3.2 θα παρουσιάσουμε δύο λήμματα, το **Λήμμα 3.3** (Ολοκληρωτική Πίσω – Αντικατάσταση) στο οποίο ένας έλεγχος υπό την ισχύ μιας υπόθεσης σταθεροποιεί το σύστημα και αναγκάζει την λύση του να είναι φραγμένη και να συγκλίνει, και το **Λήμμα 3.4** κατά το οποίο εισάγουμε μια φραγμένη διαταραχή και βλέπουμε πώς διαμορφώνεται το σύνολο στο οποίο συγκλίνει η λύση του συστήματος.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.2: Θεωρία των χρονικά μεταβαλόμενων συστημάτων

Τα χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα είναι υπερσύνολο των αυτόνομων συστημάτων.

Τα συστήματα που θα μελετήσουμε υπάγονται στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης.

Έστω το μη αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{3.1}$$

όπου η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ είναι τοπικά Lipschitz ως προς x και τμηματικά συνεχής ως προς t.

Τόσο η ύπαρξη, όσο και η μοναδικότητα των λύσεων αυτών των συστημάτων προέρχεται από το θεώρημα Picard [Νικόλαος Μ. Σταυρακάκης, Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις (2η έκδοση), Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2011, σελ. 96], το οποίο εφαρμόζεται στο σύστημα (3.1) γιατί η f είναι τοπικά Lipschitz.

Ορισμός: Η αρχή των αξόνων $x = 0$ είναι το σημείο ισορροπίας του συστήματος (3.1), αν

$$f(0,t) = 0, \forall t \geq 0 \tag{3.2}$$

Η λύση του συστήματος (3.1) που ξεκινά από το σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ την χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$, γράφεται ως $x(t; x_0, t_0)$ με $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$. Αν η αρχική συνθήκη x_0 προσεγγιστεί από την προσέγγιση $\tilde{x}_0$, τότε, για να έχουμε ευστάθεια, η προσεγγιστική λύση $x(t; \tilde{x}_0, t_0)$ είναι απαραίτητο να μένει συνεχώς, για όλους τους χρόνους $t \geq t_0$, κοντά στην πραγματική $x(t; x_0, t_0)$. Επιπλέον, για να έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια, απαιτούμε το σφάλμα $x(t; \tilde{x}_0, t_0) - x(t; x_0, t_0) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$. Συνεπώς, η λύση $x(t; x_0, t_0)$ του συστήματος (3.1) θα λέμε ότι είναι

- **ευσταθής**, αν $\forall \varepsilon > 0, \exists$ σταθερά $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 :$ αν $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < \delta$, τότε $\forall\ t \geq t_0$ είναι $\|x(t; \tilde{x}_0, t_0) - x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$.
- **ασυμπτωτικά ευσταθής**, αν είναι ευσταθής και επιπλέον αν $\exists$ σταθερά $r = r(t_0) > 0$ και $\forall \varepsilon > 0, \exists$ σταθερά $T = T(\varepsilon, t_0) > 0 :$ αν $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < r$, τότε $\forall\ t \geq t_0 + T$ είναι $\|x(t; \tilde{x}_0, t_0) - x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$.
- **ασταθής**, αν δεν είναι ευσταθής.

Παρατήρηση: Οι ιδιότητες ευστάθειας της λύσης $x(t; x_0, t_0)$ εξαρτώνται από την τιμή της αρχικής χρονικής συνθήκης t_0.

Αν οι τιμές των σταθερών $\delta(\varepsilon, t_0)$, $r(t_0)$, $T(\varepsilon, t_0)$ που ικανοποιούν τους παραπάνω ορισμούς είναι ανεξάρτητες της τιμής του t_0, τότε λέμε ότι οι ιδιότητες ευστάθειας είναι ομοιόμορφες ως προς τον χρόνο.

Παραθέτουμε τους ορισμούς νέων εννοιών, δηλαδή των συναρτήσεων σύγκρισης, που θα τους χρειαστούμε στους εναλλακτικούς ορισμούς ομοιόμορφης ευστάθειας στα μη αυτόνομα συστήματα, και θα οδηγηθούμε στο θεώρημα ομοιόμορφης ευστάθειας.

Ορισμοί: (συναρτήσεις κλάσεως $\mathcal{K}, \mathcal{K}_\infty, \mathcal{KL}, \mathcal{KL}_\infty$)

- Μια συνεχής συνάρτηση $a :\ [0, \alpha) \to [0, \infty)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση $\mathcal{K}$ αν:
    - i Είναι γνησίως αύξουσα, και
    - ii $a(0) = 0$.
- Μια συνεχής συνάρτηση $a :\ [0, \alpha) \to [0, \infty)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση $\mathcal{K}_\infty$ αν:
    - i Ανήκει στην κλάση $\mathcal{K}$
    - ii Είναι $\alpha = \infty$, και
    - iii Είναι

$$\lim_{r \to \infty} a(r) = \infty.$$

- Μία συνεχής συνάρτηση β: $[0, \alpha] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ θα λέμε ότι ανήκει στην κλάση $\mathcal{KL}$ αν:

i ∀ δεδομένο (fixed) s η συνάρτηση $\beta(r,s)$ ως προς r είναι κλάσης $\mathcal{K}$ και

ii ∀ δεδομένο (fixed) r η συνάρτηση $\beta(r,s)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς s με $\beta(r,s) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Μία συνεχής συνάρτηση $\beta: [0,\alpha] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ θα λέμε ότι ανήκει στην κλάση $\mathcal{KL}_\infty$ αν:

i Ανήκει στην κλάση $\mathcal{KL}$ και

ii ∀ δεδομένο (fixed) s η συνάρτηση $\beta(r,s)$ ως προς r είναι κλάσης $\mathcal{K}_\infty$.

Ισοδύναμοι Ορισμοί Ομοιόμορφης Ευστάθειας: το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (3.1) είναι: [βλέπε επίσης και την παράγραφο 3.3.1 το εισαγωγικό σημείωμα του **θεωρήματος 3.3** σχετικά με το λήμμα Sontag]

- **ομοιόμορφα ευσταθές**, αν ∃ συνάρτηση $\gamma(\cdot)$ κλάσεως $\mathcal{K}$ και θετική σταθερά c, ανεξάρτητη από την αρχική χρονική συνθήκη t_0, τέτοια ώστε $\forall\, t \geq t_0 \geq 0, \forall\, x(t_0) :\ \|x(t_0)\| < c$, να είναι $\|x(t)\| \leq \gamma(\|x(t_0)\|)$.
- **ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν ∃ συνάρτηση $\beta(\cdot,\cdot)$ κλάσεως $\mathcal{KL}$ και θετική σταθερά c, ανεξάρτητη από την αρχική χρονική συνθήκη t_0, τέτοια ώστε $\forall\, t \geq t_0 \geq 0, \forall\, x(t_0) :\ \|x(t_0)\| < c$, να είναι $\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$.
- **εκθετικά ευσταθές**, αν είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές με $\beta(r,s) = kre^{-as}, k > 0, a > 0$.
- **ολικά ομοιόμορφα ευσταθές**, αν είναι ομοιόμορφα ευσταθές με τη συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$, ∀ αρχική κατάσταση $x(t_0)$.
- **ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές με τη συνάρτηση $\beta \in \mathcal{KL}_\infty$, ∀ αρχική κατάσταση $x(t_0)$.
- **ολικά εκθετικά ευσταθές**, αν είναι εκθετικά ευσταθές ∀ αρχική κατάσταση $x(t_0)$.

Θεώρημα 3.1: (θεώρημα ομοιόμορφης ευστάθειας)

Έστω ότι $x = 0$ είναι ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος (3.1) και το σύνολο $D = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < r\}$. Έστω ότι $V : D \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\forall\, t \geq 0, \forall\, x \in D$ να ισχύει:

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V \leq \gamma_2(\|x\|) \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,t) \leq -\gamma_3(\|x\|) \tag{3.4}$$

Τότε το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι:

- **ομοιόμορφα ευσταθές**, αν οι συναρτήσεις γ_1 και γ_2 είναι κλάσης $\mathcal{K}$ στο διάστημα $[0, r)$ και η συνάρτηση $\gamma_3(\cdot) \geq 0$ στο διάστημα $[0, r)$.
- **ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν οι συναρτήσεις γ_1, γ_2 και γ_3 είναι κλάσης $\mathcal{K}$ στο διάστημα $[0, r)$.
- **εκθετικά ευσταθές**, αν οι συναρτήσεις $\gamma_i(\rho) = k_i \cdot \rho^\alpha$ είναι ορισμένες στο διάστημα $[0, r)$ όπου $k_i > 0, a > 0$ και $i = 1,2,3$.
- **ολικά ομοιόμορφα ευσταθές**, αν το σύνολο $D = \mathbb{R}^n$, οι συναρτήσεις γ_1 και γ_2 είναι κλάσης $\mathcal{K}$ στο διάστημα $[0, r)$ και η συνάρτηση $\gamma_3(\cdot) \geq 0$ στο διάστημα $\mathbb{R}_+$.
- **ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν το σύνολο $D = \mathbb{R}^n$, οι συναρτήσεις γ_1 και γ_2 είναι κλάσης $\mathcal{K}_\infty$, και η συνάρτηση $\gamma_3(\cdot) \geq 0$ στο διάστημα $\mathbb{R}_+$.
- **ολικά εκθετικά ευσταθές**, αν το σύνολο $D = \mathbb{R}^n$, και οι συναρτήσεις $\gamma_i(\rho) = k_i \cdot \rho^\alpha$ είναι ορισμένες στο διάστημα $\mathbb{R}_+$, όπου $k_i > 0, a > 0$ και $i = 1,2,3$.

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ένα θεώρημα που παρέχει ικανές συνθήκες για ολική ασυμπτωτική ευστάθεια σε μη αυτόνομα συστήματα. Για την απόδειξή του χρειαζόμαστε το κάτωθι λήμμα:

Λήμμα 3.1: (λήμμα Barbalat)

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Αν η φ είναι ομοιόμορφα συνεχής και το όριο

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε :

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0 \tag{3.5}$$

Απόδειξη: Προς απαγωγή σε άτοπο θεωρούμε ότι η σχέση (3.5) δεν ισχύει, που σημαίνει ότι το όριο είτε δεν υπάρχει, είτε υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, θα έχουμε:

$$\forall\, T>0, \exists\ ακολουθία\ (t_i)_{i\in\mathbb{N}} \geq T:\ \forall i, |\varphi(t_i)| > \varepsilon \tag{3.6}$$

Λόγω ομοιόμορφης συνέχειας της φ, ∃ θετική σταθερά $\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall\, t_i \geq 0\ και$ για όλους τους χρόνους $t:\ |t-t_i| \leq \delta(\varepsilon), να\ είναι$

$$|\varphi(t)-\varphi(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.7}$$

Συνεπώς $\forall\, t\ \in [t_i, t_i+\delta(\varepsilon)]$ θα έχουμε:

$$|\varphi(t)| = |\varphi(t)-\varphi(t_i)+\varphi(t_i)| \tag{3.8}$$

Όμως στο διάστημα $[t_i, t_i+\delta(\varepsilon)]$ ισχύει η ανισότητα

$$|\varphi(t_i)|-|\varphi(t)-\varphi(t_i)| \leq |\varphi(t)-\varphi(t_i)+\varphi(t_i)| \leq |\varphi(t_i)|+|\varphi(t)-\varphi(t_i)| \tag{3.9}$$

Και από το πρώτο σκέλος της ανισότητας (3.9) η σχέση (3.8) θα γίνει:

$$|\varphi(t)| \geq |\varphi(t_i)|-|\varphi(t)-\varphi(t_i)| \overset{(3.6),(3.7)}{\Longleftrightarrow}$$

$$|\varphi(t)| > \varepsilon-\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow$$

$$|\varphi(t)| > \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.10}$$

Η σχέση (3.10) επάγει ότι

$$\left|\int_{t_i}^{t_i+\delta(\varepsilon)}\varphi(\tau)d\tau\right| = \int_{t_i}^{t_i+\delta(\varepsilon)}|\varphi(\tau)|d\tau > \frac{\varepsilon}{2}(t_i+\delta(\varepsilon)-t_i) = \frac{\varepsilon}{2}\delta(\varepsilon) \tag{3.11}$$

Το απόλυτο στην σχέση (3.11) εισέρχεται στο εσωτερικό του ολοκληρώματος, επειδή η φ δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα$[t_i, t_i + \delta(\varepsilon)]$, αφού από την σχέση (3.7) θα έχουμε:

$$\varphi(t_i) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(t) \leq \varphi(t_i) + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(3.6)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\varphi(t) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}, \forall t \in [t_i, t_i + \delta(\varepsilon)]$$

Από την άλλη πλευρά, η $g(t) \triangleq \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$ έχει ένα πεπερασμένο όριο εξ υποθέσεως καθώς $t \to \infty$, που επάγει ότι υπάρχει κάποιο $T(\varepsilon) > 0 : \forall\, t_2 > t_1 > T(\varepsilon)$ έχουμε ότι

$$|g(t_1) - g(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2}\delta(\varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \varphi(\tau)d\tau\right| < \frac{\varepsilon}{2}\delta(\varepsilon) \tag{3.12}$$

Επιλέγοντας στην σχέση (3.12) όπου $t_2 = t_i + \delta(\varepsilon)$ και $t_1 = t_i$, προκύπτει άτοπο ως προς την σχέση (3.11). Συνεπώς ισχύει το συμπέρασμα, σχέση (3.5).■

Πόρισμα 3.1: (πόρισμα Barbalat)

Έστω η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Αν $\varphi, \dot{\varphi} \in \mathcal{L}_\infty$ και $\varphi \in \mathcal{L}_p$ για κάποιο $p \in [1, \infty)$, τότε ισχύει:

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0 \tag{3.5}$$

Λήμμα 3.2:(Θεώρημα LaSalle-Yoshizawa)

Έστω $x = 0$ ένα σημείο ισορροπίας του μη αυτόνομου συστήματος:

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{3.13}$$

όπου $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ και θεωρούμε ότι η συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής ως προς t και τοπικά Lipschitz ως προς x ομοιόμορφα ως προς τη μεταβλητή του χρόνου t. Έστω $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη τέτοια ώστε:

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \cdot f(x,t) \leq -W(x) \leq 0, \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{3.14}$$

όπου W είναι μια συνεχής συνάρτηση. Τότε όλες οι λύσεις $x(t)$ του (3.13) είναι ολικά φραγμένες ομοιόμορφα ως προς την μεταβλητή t του χρόνου και ικανοποιούν:

$$\lim_{t\to\infty} W\big(x(t)\big) = 0. \tag{3.15}$$

Αν επιπλέον η $W(x)$ είναι θετικά ορισμένη, τότε το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, ομοιόμορφα ως προς την μεταβλητή t του χρόνου.

Παρατήρηση: Θα χρησιμοποιούμε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας το θεώρημα LaSalle-Yoshizawa όπως παρουσιάστηκε στο **Λήμμα 3.2**, όμως θα αποδείξουμε μια πιο γενική μορφή του θεωρήματος αυτού.

Θεώρημα 3.2: (θεώρημα LaSalle-Yoshizawa)

Έστω $x = 0$ ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος (3.13) με την f να ικανοποιεί τις ίδιες απαιτήσεις όπως και προηγουμένως. Έστω ότι η συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x,t) \leq \gamma_2(\|x\|) \tag{3.16}$$

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \cdot f(x,t) \leq -W(x) \leq 0 \tag{3.17}$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, όπου οι συναρτήσεις γ_1 και γ_2 είναι κλάσης $\mathcal{K}_\infty$ και W είναι μια συνεχής συνάρτηση. Τότε όλες οι λύσεις του (3.13) είναι ολικά ομοιόμορφα φραγμένες και ικανοποιούν την σχέση (3.15). Επιπλέον, αν η συνάρτηση W είναι θετικά ορισμένη, τότε το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη: Επειδή $\dot{V} \leq 0$, η $V(x(t), t)$ δεν είναι αύξουσα συνάρτηση του t, $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Από την αριστερή ανισότητα της σχέσης (3.16) ότι η μεταβλητή κατάστασης $x = x(t)$ του συστήματος είναι ολικά ομοιόμορφα φραγμένη, που σημαίνει ότι ∃ σταθερά B ανεξάρτητη του χρόνου t τέτοια ώστε:

$$\|x(t)\| \leq B, \forall\, t \geq 0 \tag{3.18}$$

Επειδή η συνάρτηση $V(x(t),t)$ είναι μη αύξουσα και κάτω φραγμένη από το 0, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα όριο $V_\infty \in \mathbb{R}_+$ της $V(x(t),t)$ καθώς $t \to \infty$. Ολοκληρώνουμε την σχέση (3.17) στο διάστημα $[t_0,t]$ και στέλνοντας το t οριακά στο ∞ προκύπτει το εξής:

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} W\big(x(\tau)\big)d\tau \leq -\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\dot{V}(x(\tau),\tau)d\tau \Leftrightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} W\big(x(\tau)\big)d\tau \leq \lim_{t\to\infty}\{V(x(t_0),t_0) - V(x(t),t)\} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} W\big(x(\tau)\big)d\tau \leq V(x(t_0),t_0) - V_\infty \tag{3.19}$$

Η σχέση (3.19) ισοδυναμεί με το ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{t_0}^{\infty} W\big(x(\tau)\big)d\tau$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

<u>Ισχυρισμός</u>: Η $W\big(x(t)\big)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$.

<u>Απόδειξη Ισχυρισμού</u>: Επειδή από την σχέση (3.18) ισχύει $\|x(t)\| \leq B, \forall\, t \geq 0$ και η συνάρτηση f είναι τοπικά Lipschitz ως προς την μεταβλητή κατάστασης x ομοιόμορφα ως προς την μεταβλητή του χρόνου t, άρα και ως προς την αρχική τιμή του t_0, παρατηρούμε ότι $\forall\, t \geq t_0 \geq 0$, λαμβάνοντας υπ' όψιν και το σύστημα (3.13) θα έχουμε:

$$\|x(t) - x(t_0)\| = \left\|\int_{t_0}^{t}\dot{x}(\tau)d\tau\right\| \Leftrightarrow$$

$$\|x(t) - x(t_0)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)d\tau\right\| \Leftrightarrow$$

$$\|x(t) - x(t_0)\| = \int_{t_0}^{t}\|f(x(\tau),\tau)\|d\tau \leq L\int_{t_0}^{t}\|x(\tau)\|d\tau \leq LB(t-t_0)$$

Συνεπώς, $$\|x(t)-x(t_0)\| \leq LB|t-t_0| \tag{3.20}$$

όπου L είναι η σταθερά Lipschitz της συνάρτησης f στο φραγμένο σύνολο $\{\|x\| \leq B\}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγοντας $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{LB}$ τότε από την σχέση (3.20) λαμβάνουμε ότι

$$\forall t, t_0 \geq 0 \text{ με } |t-t_0| < \delta(\varepsilon) \text{ είναι και } \|x(t)-x(t_0)\| < \varepsilon \tag{3.21}$$

Η σχέση (3.21) σημαίνει ότι η $x(t)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της συνάρτησης $W(x)$ και της μεταβλητής κατάστασης $x(t)$ συνεπάγουμε ότι η $W(x(t)), t \in \mathbb{R}_+$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τέλος απόδειξης ισχυρισμού.

Συνεπώς, η συνάρτηση $W(x(t)), t \in \mathbb{R}_+$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του **Λήμματος 3.1** (Λήμμα Barbalat) και από το συμπέρασμα του λήμματος έχουμε: $W(x(t)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Αν επιπλέον η W είναι θετικά ορισμένη, τότε υπάρχει μια συνάρτηση $\gamma_3(\cdot)$ $\mathcal{K}-$κλάσης τέτοια ώστε $W(x) \geq \gamma_3(x), \forall x$. Με χρήση του **Θεωρήματος 3.1** (θεώρημα Ομοιόμορφης Ευστάθειας) προκύπτει ότι το σημείο ισορροπίας $x=0$ του συστήματος είναι ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας με ομοιομορφία ως προς την μεταβλητή του χρόνου t.■

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.3: Οι θεμέλιοι λίθοι για την ανάπτυξη της θεωρίας του προσαρμοζόμενου ελέγχου

Σε αυτήν την παράγραφο θέλουμε να βάλουμε τις βάσεις για την θεωρία προσαρμοζόμενου ελέγχου του επόμενου κεφαλαίου. Στο πρώτο μέρος θα εντάξουμε τον έλεγχο στην είσοδο του συστήματος και θα δούμε με ποιον τρόπο επιτυγχάνεται η ύπαρξη και η φραξιμότητα της λύσης ενός τέτοιου συστήματος. Στο δεύτερο μέρος θα αναζητήσουμε τις συνθήκες εκείνες που εξασφαλίζουν την ευστάθεια και την ακτίνα σύγκλισης των λύσεων και τέτοιων συστημάτων.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.3.1: Τα μη αυτόνομα συστήματα στην θεωρία ελέγχου συστημάτων

Εισάγοντας τα μη αυτόνομα συστήματα στην θεωρία ελέγχου θα πρέπει να εισάγουμε στα συστήματα μία μεταβλητή που περιγράφει την ύπαρξη του ελέγχου. Επιλέγοντας η είσοδος να είναι συνεχής και φραγμένη σε τίποτα δεν επηρεάζει την ύπαρξη και την μοναδικότητα των λύσεων των συστημάτων αυτών.

Ορισμός: (Είσοδος σε κατάσταση ευστάθειας – Input to State Stability (ISS))

Το σύστημα

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3.22}$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n$ η κατάσταση του συστήματος και $u \in \mathbb{R}^m$ η είσοδος του συστήματος, λέμε ότι είναι είσοδος σε κατάσταση ευστάθειας, αν για κάθε αρχική συνθήκη $x(0)$ και για κάθε είσοδο $u(\cdot)$, συνεχή και φραγμένη στο $[0, \infty)$, η λύση $x(t)$ του συστήματος $\exists\ \forall t \geq 0$ και ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma\left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right), \forall t \geq 0 \tag{3.23}$$

όπου $\beta(s,\cdot)$ και $\gamma(s)$ είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις του $s \in \mathbb{R}_+$, με $\beta(0,\cdot) = 0$, $\gamma(0) = 0$, ενώ η $\beta(\cdot, t)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του t, με

$$\lim_{t \to \infty} \beta(s, t) = 0, \forall s \in \mathbb{R}_+ \tag{3.24}$$

Γενικευμένος ορισμός: (Είσοδος σε κατάσταση ευστάθειας-ISS)

Το σύστημα

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{3.25}$$

όπου η συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής ως προς την μεταβλητή του χρόνου t και τοπικά Lipschitz ως προς την μεταβλητή κατάστασης x και την είσοδο u, λέμε ότι είναι είσοδος σε κατάσταση ευστάθειας αν υπάρχει συνάρτηση $\beta(\cdot,\cdot)$ κλάσης $\mathcal{K}$ και συνάρτηση $\gamma(\cdot)$ κλάσης $\mathcal{KL}$, τέτοια ώστε για κάθε αρχική συνθήκη $x(0)$ και για κάθε είσοδο $u(\cdot)$ συνεχή και φραγμένη στο $[0,\infty)$, η λύση υπάρχει για όλους τους χρόνους $t \geq 0$ και ικανοποιεί:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right) \tag{3.26}$$

$\forall t, t_0 : 0 \leq t_0 \leq t$.

Για την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος θα χρειαστούμε ένα λήμμα, το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας συνάρτησης β που ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες, αλλά εμείς το επικαλούμαστε γιατί ικανοποιεί κάποια συνθήκη διάταξης ως προς μια άλλη συνάρτηση (με τα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων Lyapunov). Το λήμμα αυτό είναι το βασικό λήμμα προς την απόδειξη της ισοδυναμίας των ορισμών ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας ανάμεσα στην κλασσική μορφή και αυτήν με τις συναρτήσεις κλάσεως $\mathcal{K}$. Την διατύπωση που χρησιμοποιούμε είναι του Sontag, και για τον λόγο αυτό το επικαλούμαστε ως Λήμμα Sontag. Η διατύπωση και η απόδειξη αυτού του λήμματος βρίσκεται στην παραπομπή: [Eduardo D. Sontag, “Smooth Stabilization Implies Coprime Factorization”, IEEE Transactions on automatic control, vol.34, No 4, April 1989, Lemma 6.1]

Θεώρημα 3.3: (χαρακτηρισμός ISS)

Υποθέτουμε ότι για το σύστημα (3.25) υπάρχει μια κλάσης C^1 συνάρτηση $V(t,x)$: $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $\forall x \in \mathbb{R}^n$ και $\forall u \in \mathbb{R}^m$ να ισχύει:

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \gamma_2(\|x\|) \tag{3.27}$$

$$\|x\| \geq \rho(\|u\|) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x,u) \leq -\gamma_3(\|x\|) \tag{3.28}$$

όπου οι συναρτήσεις γ_1, γ_2 και ρ είναι κλάσης $\mathcal{K}_\infty$ και η συνάρτηση γ_3 είναι κλάσης $\mathcal{K}$. Τότε, το σύστημα (3.25) είναι είσοδος σε κατάσταση ευστάθειας με $\gamma = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \rho$.

Απόδειξη: Επειδή εξ ορισμού οι συναρτήσεις $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \rho$ είναι γνησίως αύξουσες, ως συναρτήσεις κλάσης $\mathcal{K}$ ή $\mathcal{K}_\infty$, αντιστρέφονται και οι αντίστροφες αυτών διατηρούν το ίδιο είδος μονοτονίας. Από την υπόθεση της σχέσης (3.28), $\|x\| \geq \rho(\|u\|)$, βλέπουμε ότι επειδή η ρ είναι γνησίως αύξουσα, η λύση x φράσσεται από:

$$\|x\| \geq \rho\left(\sup_{t_0 \leq \tau}\|u(\tau)\|\right) \geq \rho(\|u\|) \tag{3.29}$$

Συνεπώς, εάν η αρχική συνθήκη στον χρόνο t_0, $x(t_0)$, βρίσκεται εκτός του συνόλου

$$R_{t_0} := \left\{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq \rho\left(\sup_{\tau \geq t_0}\|u(\tau)\|\right)\right\} \tag{3.30}$$

τότε η λύση βρίσκεται στην περιοχή έλξης κάποιας περιοχής σημείων ισορροπίας, αφού τότε η (3.29) από την (3.28) συνεπάγεται

$$\dot{V} \leq -\gamma_3\left(\rho\left(\sup_{\tau \geq t_0}\|u(\tau)\|\right)\right)$$

και η λύση x συγκλίνει προς την περιοχή R_{t_0}. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή T η λύση φθάνει στο σύνολο R_{t_0}. Ορίζουμε το χρονικό διάστημα

$$B := [t_0, T)$$

κατά το οποίο η λύση $x(t)$ συγκλίνει στο R_{t_0}. Πολλαπλασιάζουμε την σχέση (3.27) με γ_2^{-1} και λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης γ_2 (γνησίως αύξουσα) δεν αλλάζει η φορά της ανισότητας (3.27) και $\forall t \geq t_0$ λαμβάνουμε:

$$\gamma_2^{-1}\big(\gamma_1(\|x\|)\big) \leq \gamma_2^{-1}\big(V(t,x)\big) \leq \|x\| \tag{3.31}$$

Αντικαθιστώντας την (3.31) στην (3.28) έχουμε ότι $\forall t \in B$,

$$\dot{V}(t,x) \leq -\gamma_3\left(\gamma_2^{-1}\big(V(t,x)\big)\right) \tag{3.32}$$

Τότε, από το λήμμα Sontag υπάρχει συνάρτηση $\beta_V(\cdot,\cdot)$ κλάσης $\mathcal{KL}$ τέτοια ώστε $\forall t \in B$

$$V(t,x) \leq \beta_V\big(V\big(t_0, x(t_0)\big), t - t_0\big) \tag{3.33}$$

αφού η β_V είναι φθίνουσα συνάρτηση του t για δεδομένο το πρώτο όρισμα. Από το δεξί μέλος της (3.27) η (3.33) $\forall t \in B$ γίνεται:

$$V\big(t, x(t)\big) \leq \beta_V(\gamma_2(\|x(t_0)\|), t - t_0) \tag{3.34}$$

Από την σχέση (3.34) η αριστερή ανισότητα της (3.27) $\forall t \in B$ καθίσταται:

$$\gamma_1(\|x(t)\|) \leq \beta_V(\gamma_2(\|x(t_0)\|), t - t_0) \tag{3.35}$$

και πολλαπλασιάζοντας την (3.35) με την γνησίως αύξουσα συνάρτηση γ_1^{-1} χωρίς να αλλάξει η φορά της ανισότητας, $\forall t \in B$ έχουμε:

$$\|x(t)\| \leq \gamma_1^{-1}\big(\beta_V(\gamma_2(\|x(t_0)\|), t - t_0)\big) \tag{3.36}$$

Εάν στην αρχική τιμή του χρόνου t_0, η αρχική συνθήκη $x(t_0)$ βρίσκεται εντός του συνόλου R_{t_0} της σχέσης (3.30), τότε πολλαπλασιάζοντας την (3.27) με την γνησίως αύξουσα συνάρτηση γ_1^{-1} (αφού και η γ_1 είναι γνησίως αύξουσα) η φορά της ανισότητας δεν αλλάζει και $\forall t \geq t_0$ λαμβάνουμε:

$$\|x(t)\| \leq \gamma_1^{-1}\left(V\big(t, x(t)\big)\right) \leq \gamma_1^{-1}\big(\gamma_2(\|x(t)\|)\big) \Rightarrow$$

$$\|x(t)\| \leq \gamma_1^{-1}\big(\gamma_2(\|x(t)\|)\big)$$

η οποία από τον περιορισμό της (3.30) καθίσταται $\forall t \geq t_0$ ως εξής:

$$\|x(t)\| \leq \gamma_1^{-1}\left(\gamma_2\left(\rho\left(\sup_{\tau \geq t_0}\|u(\tau)\|\right)\right)\right) \tag{3.37}$$

δηλαδή η λύση $x(t)$, $\forall t \geq t_0$ παραμένει εντός του συνόλου

$$S_{t_0} := \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| \leq \gamma_1^{-1}\left(\gamma_2\left(\rho\left(\sup_{\tau \geq t_0}\|u(\tau)\|\right)\right)\right)\right\} \tag{3.38}$$

Σε κάθε περίπτωση, η (3.37) ισχύει $\forall t \in [t_0, \infty)\backslash B$, δηλαδή από την στιγμή που η λύση $x(t)$ βρίσκεται εντός του R_{t_0}. Εφόσον η ανισότητα (3.36) ισχύει $\forall t \in B$, και η ανισότητα

(3.37) ισχύει $\forall t \in [t_0, \infty)\backslash B$, στην ένωση των χρονικών διαστημάτων ισχύει η επαλληλία των δύο ανισοτήτων, δηλαδή $\forall t \geq t_0 \geq 0$ έχουμε:

$$\|x(t)\| \leq \gamma_1^{-1}\big(\beta_V(\gamma_2(\|x(t_0)\|), t - t_0)\big) + \gamma_1^{-1}\left(\gamma_2\left(\rho\left(\sup_{\tau \geq t_0}\|u(\tau)\|\right)\right)\right) \qquad (3.39)$$

Εφόσον η (3.39) ισχύει για $\tau \geq t_0$ έπεται ότι θα ισχύει και για $t_0 \leq \tau \leq t$. Επιπλέον, εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς

$$\gamma := \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \rho$$

και

$$\beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) := \beta_V(\gamma_2(\|x(t_0)\|), t - t_0)$$

στην σχέση (3.39), $\forall t \geq t_0 \geq 0$ θα λάβουμε:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right) \qquad (3.40)$$

Η σχέση (3.40) είναι η σχέση (3.26), που σημαίνει ότι το σύστημα (3.25) είναι είσοδος σε κατάσταση ευστάθειας.■

Παρατήρηση: Ισχύει και το αντίστροφο του **Θεωρήματος 3.3**.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.3.2: Τα εργαλεία (σταθεροποίησης και σύγκλισης) από την θεωρία ελέγχου συστημάτων που θα χρησιμοποιηθεί στα προσαρμοζόμενα συστήματα ελέγχου

Ένα σύστημα ανεξαρτήτως χρονικής ή μη εξάρτησης είναι ανάγκη για τις εφαρμογές που θα χρησιμοποιηθεί να σταθεροποιηθεί. Το ακόλουθο **Λήμμα 3.3** (θεώρημα ολοκληρωτικής πίσω αντικατάστασης) παρέχει μεγάλες δυνατότητες σταθεροποίησης χωρίς να εξαντλεί το δυναμικό του σε αυτήν, καθώς ο στόχος του είναι να εξασφαλίσει την σύγκλιση της λύσης του συστήματος, υπό την δράση του ελέγχου, στο ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος ή στο μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο, όπως αυτά που προκύπτουν από το **Θεώρημα 2.1** (θεώρημα LaSalle), για το οποίο μηδενίζεται ο περιορισμός της παραγώγου της συναρτήσεως Lyapunov. Πριν διατυπώσουμε όμως το θεώρημα θα υποθέσουμε ότι το σύστημα χωρίς τον ολοκληρωτικό έλεγχο έχει έναν έλεγχο που του εξασφαλίζει επιθυμητές ιδιότητες για το σημείο ισορροπίας του συστήματος. Υπό την ισχύ της υπόθεσης αυτής θα αποδείξουμε και ένα ακόμα σημαντικό λήμμα, το **Λήμμα 3.4**, στόχος του οποίου είναι η εύρεση ενός ελέγχου που συνεπάγεται φραξιμότητα της λύσης του συστήματος και σύγκλιση αυτής σε ένα φραγμένο σύνολο.

Υπόθεση 3.1:

Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u, f(0) = 0 \tag{3.41}$$

όπου η κατάσταση $x \in \mathbb{R}^n$ και η είσοδος του ελέγχου $u \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ένας συνεχώς διαφορίσιμος ελεγκτικός νόμος ανάδρασης

$$u = a(x), a(0) = 0 \tag{3.42}$$

και μια ομαλή, θετικά ορισμένη, ακτινικά μη φραγμένη συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot [f(x) + g(x) \cdot u] \leq -W(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{3.43}$$

όπου $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θετικά ημιορισμένη.

Υπό αυτήν την υπόθεση, ο έλεγχος (3.42) εφαρμοζόμενος στο (3.41) δίνει ολική φραξιμότητα στη λύση $x(t)$, και από το **Λήμμα 3.2** (θεώρημα LaSalle - Yoshizawa), το οποίο εφαρμόζεται (και) σε μη αυτόνομα συστήματα, έχουμε κάτι λιγότερο από την ομοιόμορφη (ως προς την μεταβλητή του χρόνου) ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος, αλλά κάτι περισσότερο από την ομοιόμορφη (ως προς την μεταβλητή του χρόνου) ευστάθεια του συστήματος, καθώς το σταθερό[1] ως προς τον χρόνο σήμα αναφοράς $x(t)$ επάγει τον περιορισμό[2] της συνάρτησης $W(x(t))$ ώστε να είναι:

$$\lim_{t\to\infty} W(x(t)) = 0. \tag{3.44}$$

Χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα 2.1** (θεώρημα LaSalle), που χρησιμοποιείται για αυτόνομα συστήματα, λαμβάνουμε ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα σύγκλισης, θέτοντας $\Omega = \mathbb{R}^n$: η λύση $x(t)$ να συγκλίνει στο μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο $M \subset E = \{x \in \mathbb{R}^n | W(x) = 0\}$. Αν ο περιορισμός $W(x)$ είναι θετικά ορισμένος, ο έλεγχος (3.42) καθιστά το σημείο ισορροπίας $x = 0$ σημείο ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας του (3.41).

Λήμμα 3.3:(Ολοκληρωτική Πίσω – Αντικατάσταση)

Έστω το (3.41) στο οποίο προστέθηκε μία ολοκληρωτική σχέση:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} = f(x) + g(x) \cdot \xi \\ \dot{\xi} = u \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} (3.45\alpha) \\ (3.45\beta) \end{matrix}$$

και υποθέτουμε ότι το (3.45α) ικανοποιεί την **Υπόθεση 3.1** με έλεγχο τον $\xi \in \mathbb{R}$.

1. Αν $W(x)$ είναι θετικά ορισμένη, τότε η συνάρτηση

$$V_\alpha(x,\xi) = V(x) + \frac{1}{2}[\xi - \alpha(x)]^2 \tag{3.46}$$

είναι μία συνάρτηση Lyapunov που επάγει ολική ασυμπτωτική ευστάθεια στο σύστημα (3.45), που σημαίνει ότι υπάρχει ένας έλεγχος ανάδρασης $u = a_a(x,\xi)$ ο οποίος καθιστά το σημείο ισορροπίας $(x = 0, \xi = 0)$ ως σημείο ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας. Ένας τέτοιος έλεγχος είναι ο εξής:

$$u = -c\big(\xi - \alpha(x)\big) + \frac{\partial a}{\partial x}[f(x) + g(x) \cdot \xi] - \frac{\partial V}{\partial x} g(x), c > 0 \tag{3.47}$$

[1] Το σταθερό ως προς τον χρόνο σήμα αναφοράς έχει νόημα από την στιγμή που εξασφαλίζουμε την ομοιομορφία ως προς τον χρόνο του σήματος. Η μη ομοιομορφία ως προς τον χρόνο συνεπάγεται χρονικά μεταβαλλόμενο σήμα.

[2] Η ιδιότητα σύγκλισης μιας συνάρτησης του σήματος σταθερού χρόνου λέγεται περιορισμός (regulation). Για πληρότητα, αναφέρουμε ότι αν το σήμα δεν είναι χρονικά σταθερό, η αντίστοιχη ιδιότητα λέγεται ανίχνευση (tracking).

2. Αν $W(x)$ είναι μόνο θετικά ημιορισμένη, τότε υπάρχει ένας έλεγχος ανάδρασης που καθιστά την παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov
$$\dot{V}_\alpha \leq -W_\alpha(x,\xi) = -(W(x) + c[\xi - \alpha(x)]^2) \leq 0, c > 0$$
$$\mu\varepsilon\ W_\alpha(x,\xi) > 0, \acute{o}\tau\alpha\nu\ W(x) > 0 \text{ ή } \xi \neq \alpha(x). \tag{3.48}$$
Η (3.48) εγγυάται ολική φραξιμότητα και σύγκλιση του $\begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$ στο μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο
$$M_\alpha \subset E_\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} | W(x) = 0, \xi = \alpha(x) \right\}.$$

Απόδειξη: Εισάγουμε την μεταβλητή σφάλματος

$$z = \xi - \alpha(x) \tag{3.49}$$

και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο, το σύστημα (3.45) γράφεται ως εξής:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)[a(x) + z] \tag{3.50α}$$

$$\dot{z} = u - \frac{\partial a(x)}{\partial x}\big[f(x) + g(x)[a(x) + z]\big] \tag{3.50β}$$

Υπό την ισχύ της **Υπόθεσης 3.1** και από την σχέση (3.43) επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov του συστήματος (3.50) την σχέση

$$V_a(x,z) = V(x) + \frac{1}{2}z^2 \tag{3.51}$$

που είναι η σχέση (3.46). Παραγωγίζουμε την σχέση (3.46) και από το σύστημα (3.50) έχουμε:

$$\dot{V}_a(x,z) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x} + z\dot{z} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_a(x,z) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\big[f(x) + g(x)[a(x) + z]\big] + z\left[u - \frac{\partial a(x)}{\partial x}\big[f(x) + g(x)[a(x) + z]\big]\right] \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_a(x,z) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x)+g(x)a(x)]$$

$$+z\left[u-\frac{\partial a(x)}{\partial x}\left[f(x)+g(x)[a(x)+z]\right]+\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)\right] \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_a(x,z) \leq -W(x)+z\left[u-\frac{\partial a(x)}{\partial x}\left[f(x)+g(x)[a(x)+z]\right]+\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)\right] \quad (3.52)$$

Επιλέγουμε τον έλεγχο

$$u=-cz+\frac{\partial a(x)}{\partial x}\left[f(x)+g(x)\cdot\left(z+a(x)\right)\right]-\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x), c>0 \quad (3.53)$$

που είναι η σχέση (3.47), και η σχέση (3.52) καθίσταται:

$$\dot{V}_a(x,z) \leq -W(x)-cz^2 \leq 0 \quad (3.54)$$

Εφαρμόζουμε το **Λήμμα 3.2** (Θεώρημα LaSalle - Yoshizawa) στο σύστημα (3.50) με τον έλεγχο (3.53) και την συνάρτηση Lyapunov (3.51) και λαμβάνουμε ότι οι μεταβλητές x, z είναι ολικά φραγμένες και από την σχέση (3.49) και η $\xi = z+\alpha(x)$ είναι ολικά φραγμένη. Οι συναρτήσεις $W(t), z(t)$ είναι οι περιορισμοί που το εξασφαλίζουν αυτό. Η σχέση (3.54) μας λέει ότι η $\dot{V}_a$ είναι αρνητικά ημιορισμένη αν η W είναι αρνητικά ημιορισμένη και η $z=0 \Leftrightarrow \xi=\alpha(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας το **Θεώρημα 2.1** (θεώρημα LaSalle) έχουμε ότι το $\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ συγκλίνει στο μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο $M_a \subseteq E = \left\{\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} | W(x)=0, z=0\right\}$.

Επιπλέον, αν η συνάρτηση W είναι θετικά ορισμένη, το **Λήμμα 3.2** (Θεώρημα LaSalle - Yoshizawa) εγγυάται την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου $x=0, z=0$, το οποίο τελικά συνεπάγεται ότι η $V_a(x,\xi)$ από την σχέση (3.46) είναι μια συνάρτηση Lyapunov για την οποία υπάρχει ο έλεγχος (3.47) ώστε το σημείο x=0,ξ=0 είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές του συστήματος (3.45).■

Παρατήρηση: Ο έλεγχος (3.47) ο οποίος καθιστά την $\dot{V}_a$ αρνητικά (ημι-)ορισμένη είναι ένας μόνο από τους πολλούς διαφορετικούς ελέγχους που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν για την επίτευξη του ίδιου αποτελέσματος. Ο συγκεκριμένος είναι ο πιο προφανής. Μία οποιαδήποτε συνάρτηση $\varepsilon(x,\xi)$ που καθιστά την σχέση (3.52) μικρότερη από ή ίση με το μηδέν θα μπορούσε να επιλεγεί ως έλεγχος u. Η ποικιλία που έπεται στην επιλογή του ελέγχου u είναι μεγάλης σημασίας για την σταθεροποίηση συστημάτων μέσα από τον σχεδιασμό ελεγκτών ανάδρασης.

Σχόλιο: Κατά τον σχεδιασμό ελέγχων αυτού του είδους σε εφαρμογές είναι θεμιτό να επιτυγχάνονται οι ιδιότητες της $\dot{V}$ με όσο το δυνατόν λιγότερες απαλοιφές όρων, διότι, στην πράξη, η πραγματοποίηση μιας απαλοιφής δεν είναι πλήρης και εμπεριέχει σφάλματα.

Στο λήμμα που ακολουθεί έχουμε το ίδιο σύστημα όπως και προηγουμένως, και αφού το διαταράξουμε βρίσκουμε έναν έλεγχο που εγγυάται την ολική φραξιμότητα της λύσης του συστήματος και την σύγκλισή της σε ένα φραγμένο σύνολο, το φράγμα του οποίου εξαρτάται από την διαταραχή που επιβλήθηκε στο σύστημα.

Στην απόδειξη του επόμενου λήμματος θα γίνει χρήση μιας μορφής της ανισότητας Young:

Ανισότητα Young: Αν $p,q \in \mathbb{R}$ σταθεροί, τέτοιοι ώστε $p > 1$ και $q > 1$, και ικανοποιούν την σχέση $(p-1)(q-1) = 1$, τότε για όλα τα $\varepsilon > 0$ και όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει η σχέση: $xy \leq \frac{\varepsilon^p}{p}|x|^p + \frac{1}{q\varepsilon^q}|y|^q$.

Λήμμα 3.4: Έστω το σύστημα (3.41), το οποίο διαταράσσεται στο

$$\dot{x} = f(x) + g(x)[u + \varphi(x)^T \Delta(x,u,t)] \tag{3.55}$$

όπου $\varphi(x)$ είναι ένα διάνυσμα $(p \times 1)$ γνωστών συναρτήσεων ομαλών και μη γραμμικών, και η διαταραχή $\Delta(x,u,t)$ είναι ένα διάνυσμα $(p \times 1)$ αβέβαιης μη γραμμικότητας (δηλαδή οι συνιστώσες του μπορεί να είναι γραμμικές συναρτήσεις) του οποίου η φραξιμότητα είναι ομοιόμορφη ως προς τις μεταβλητές x, u, t. Αν η **Υπόθεση 3.1** ικανοποιείται με μια συνάρτηση $W(x) > 0$ (θετικά ορισμένη) και ακτινικά μη φραγμένη, τότε ο έλεγχος

$$u = a(x) - \kappa \cdot \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot g(x) \cdot \|\varphi(x)\|^2, \kappa > 0 \tag{3.56}$$

όταν εφαρμοστεί στο (3.55), καθιστά το σύστημα κλειστού βρόγχου «είσοδο σε κατάσταση ευστάθειας» που κάθε φορά εξαρτάται από την είσοδο της διαταραχής $\Delta(x, u, t)$. Συνεπώς ο έλεγχος (3.56) εγγυάται ολική φραξιμότητα της λύσης $x(t)$ με ανεξαρτησία ως προς τη μεταβλητή t, και σύγκλιση στο σύνολο υπολοίπου

$$\mathcal{R} = \left\{ x : \|x\| \leq \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_3^{-1} \left(\frac{\|\Delta\|_\infty^2}{4\kappa} \right) \right\} \tag{3.57}$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ είναι συναρτήσεις κλάσεως $\mathcal{K}_\infty$, τέτοιες ώστε:

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \gamma_2(\|x\|) \tag{3.58}$$

$$\gamma_3(\|x\|) \leq W(x) \tag{3.59}$$

όπου $\|x\|$ είναι η διανυσματική νόρμα του x που επάγεται από εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή $\|x\| = \langle x|x \rangle^{1/2} = (x^T x)^{1/2}$, και όπου $\|\Delta\|_\infty$ είναι η $\|\cdot\|_\infty$ του σήματος Δ στον χώρο $\mathcal{L}_\infty$των ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων.

Απόδειξη:

Η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov V από την σχέση (1.2) είναι:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} \overset{(3.55)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot \{f(x) + g(x)[u + \varphi(x)^T \Delta(x, u, t)]\} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot [f(x) + g(x)u] + \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot g(x)\varphi(x)^T \Delta(x, u, t) \overset{(3.56)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot \left[f(x) + g(x) \left\{ a(x) - \kappa \cdot \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot g(x) \cdot \|\varphi(x)\|^2 \right\} \right] + \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot g(x)\varphi(x)^T \Delta(x,u,t) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot [f(x) + g(x)a(x)] - \kappa \cdot \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot g(x) \right)^2 \cdot \|\varphi(x)\|^2 + \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot g(x)\varphi(x)^T \cdot \Delta(x,u,t) \tag{3.60}$$

Η οποία από την σχέση (3.43) της Υπόθεσης 3.1 ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\dot{V}(x) \leq -W(x) - \kappa \cdot \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot g(x) \right)^2 \cdot \|\varphi(x)\|^2 + \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot g(x)\varphi(x)^T \cdot \Delta(x,u,t) \Rightarrow$$

$$\dot{V}(x) \leq -W(x) - \kappa \cdot \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot g(x) \right)^2 \cdot \|\varphi(x)\|^2 + \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot g(x) \right\| \cdot \|\varphi(x)\| \cdot \|\Delta(x,u,t)\|_\infty \tag{3.61}$$

Η **Ανισότητα Young** για $p = q = 2$ και $\varepsilon^2 = 2\kappa$ γίνεται:

$$xy \leq \kappa x^2 + \frac{1}{4\kappa} y^2 \tag{3.62}$$

Η σχέση (3.61) από την σχέση (3.62) για $x = \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot g(x) \right\| \cdot \|\varphi(x)\|$ και $y = \|\Delta(x,u,t)\|_\infty$ γίνεται:

$$\dot{V}(x) \leq -W(x) + \frac{{\|\Delta(x,u,t)\|_\infty}^2}{4\kappa} \tag{3.63}$$

Από την σχέση (3.63) έπεται ότι η παράγωγος $\dot{V}$ της συνάρτησης Lyapunov είναι αρνητική όταν:

$$W(x) > \frac{{\|\Delta(x,u,t)\|_\infty}^2}{4\kappa} \tag{3.64}$$

Συνδυάζοντας την (3.64) με την (3.59) λαμβάνουμε το εξής:

$$\|x(t)\| > \gamma_3{}^{-1}\left(\frac{\|\Delta(x,u,t)\|_\infty{}^2}{4\kappa}\right) \Rightarrow \dot{V}(x) < 0 \qquad (3.65)$$

Αν $\|x(0)\| \le \gamma_3{}^{-1}\left(\frac{\|\Delta(x,u,t)\|_\infty{}^2}{4\kappa}\right)$, τότε από το δεξί μέλος της ανισότητας (3.58) θα έχουμε:

$$V\big(x(t)\big) \le \gamma_2 \circ \gamma_3{}^{-1}\left(\frac{\|\Delta(x,u,t)\|_\infty{}^2}{4\kappa}\right) \qquad (3.66)$$

Η σχέση (3.66) από το αριστερό μέλος της σχέσης (3.58) θα δώσει:

$$\|x(t)\| \le \gamma_1{}^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_3{}^{-1}\left(\frac{\|\Delta(x,u,t)\|_\infty{}^2}{4\kappa}\right) \qquad (3.67)$$

Από την άλλη πλευρά, αν $\|x(0)\| > \gamma_3{}^{-1}\left(\frac{\|\Delta(x,u,t)\|_\infty{}^2}{4\kappa}\right)$, η σχέση (3.65) συνεπάγεται ότι $V\big(x(t)\big) \le V\big(x(0)\big), \forall t > 0$ και από την σχέση (3.58) θα έχουμε:

$$\|x(t)\| \le \gamma_1{}^{-1} \circ \gamma_2(\|x(0)\|) \qquad (3.68)$$

Από τις σχέσεις (3.67) και (3.68) προκύπτει η ολική φραξιμότητα της λύσης $x(t)$ με ομοιομορφία ως προς την μεταβλητή του χρόνου t, αφού:

$$\|x\|_\infty \le \max\left\{\gamma_1{}^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_3{}^{-1}\left(\frac{\|\Delta\|_\infty{}^2}{4\kappa}\right), \gamma_1{}^{-1} \circ \gamma_2(\|x(0)\|)\right\} \qquad (3.69)$$

Από την σχέση (3.65) έπεται ότι η V είναι φθίνουσα συνάρτηση του x και από την σχέση (3.58) έπεται ότι η συνάρτηση V είναι κάτω φραγμένη. Από τις δύο αυτές σχέσεις έπεται η σύγκλιση της λύσης $x(t)$ στο σύνολο υπολοίπου (3.57). Τέλος, το ότι το σύστημα κλειστού βρόγχου είναι είσοδος σε κατάσταση ευστάθειας (ISS) με εξάρτηση ως προς την είσοδο της διαταραχής $\Delta(x,u,t)$, είναι απόρροια του **Θεωρήματος 3.3** (χαρακτηρισμός ISS).■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Προσαρμοστικός Έλεγχος (Adaptive Control)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 4.1: Εισαγωγή

Όλα τα συστήματα που θα αναλύσουμε είναι στην κατηγορία των προσαρμοζόμενων συστημάτων, δηλαδή είναι παραμετρικά μη γραμμικά συστήματα με την παράμετρό τους να είναι σταθερή.

Ο έλεγχος ανάδρασης (των συστημάτων) που θα παρουσιάσουμε βασίζεται στην ύπαρξη μιας συνάρτησης Lyapunov της οποίας η παράγωγος έχει ιδιότητες που καθιστούν τις λύσεις του συστήματος φραγμένες και συγκλίνουσες σε ένα σημείο ισορροπίας. Σε αντίθεση με το κεφάλαιο 3 που οι έλεγχοι ανάδρασης ήταν στατικοί, σε αυτό το κεφάλαιο προσθέτουμε στο στατικό μέρος των ελέγχων και ένα δυναμικό, το οποίο θα προέλθει από την εισαγωγή της παραμετρικής εκτίμησης της παραμέτρου του συστήματος. Το δυναμικό μέρος του ελέγχου, σκοπό έχει να προσαρμόζει το στατικό μέρος στις παραμετρικές εκτιμήσεις που μεταβάλλονται διαρκώς. Στην παράγραφο 4.2 θα δούμε πώς αυτοί οι προσαρμοστικοί έλεγχοι εξασφαλίζουν την φραξιμότητα και την σύγκλιση σε σταθερή τιμή της μεταβλητής κατάστασης.

Η πίσω – αντικατάσταση συζευγνύει την επιλογή της συνάρτησης Lyapunov του συστήματος με την επιλογή του ελέγχου ανάδρασης. Η ολοκληρωτική της μορφή θα παρουσιαστεί στις παραγράφους 4.3, 4.5 σε προσαρμοζόμενα συστήματα και είναι εμπνευσμένη από το **Λήμμα 3.3** (Ολοκληρωτική πίσω – αντικατάσταση) του προηγούμενου κεφαλαίου. Στην εφαρμογή της παραγράφου 4.4 παρουσιάζουμε τις δυνατότητες που προσφέρει η ολοκληρωτική πίσω – αντικατάσταση στο σχεδιασμό ελέγχου συστημάτων με μη γραμμικότητες τα οποία δεν μπορούν να τα διαχειριστούν άλλες μέθοδοι.

Στην παράγραφο 4.6 θα γενικεύσουμε τα αποτελέσματα από τις διαδικασίες όλων των παραγράφων αποδεικνύοντας για adaptive συστήματα το αντίστοιχο θεώρημα του **Λήμματος 3.3** (Ολοκληρωτική πίσω – αντικατάσταση) από το κεφαλαίο 3.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 4.2: Προσαρμογή ως δυναμική ανάδραση

Στην παράγραφο αυτή θα αναδείξουμε την διαφορά μεταξύ στατικού και δυναμικού ελέγχου.

Έστω το μη γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = u + \theta\varphi(x) \tag{4.1}$$

όπου η κατάσταση του συστήματος $x \in D \subset \mathbb{R}$, η παράμετρος $\theta \in \mathbb{R}$ είναι άγνωστη σταθερά, και $\varphi(x)$ είναι γνωστή μη ομαλή συνάρτηση του x, $\mu\varepsilon\ \varphi : D \to \mathbb{R}$, και $u \in \mathbb{R}$ είναι η είσοδος του συστήματος.

Αρχικά θα εντοπίσουμε την περιοχή σημείων ισορροπίας του συστήματος (4.1). Θα οδηγηθούμε σε παραδοχές που καθιστούν την λύση του συστήματος με ιδιότητες σύγκλισης στο σημείο ισορροπίας του, το οποίο έχουμε καταστήσει ως σημείο ολικής ευστάθειας του συστήματος. Θα διαπιστώσουμε πώς με την προϋπόθεση ότι η παράμετρος θ είναι γνωστή, εξάγεται άμεσα η ύπαρξη ενός ελέγχου ο οποίος εγκαθιστά στο σύστημα την επιθυμητή ιδιότητα σύγκλισης σε φραγμένο σύνολο. Όμως το ότι η παράμετρος θ είναι άγνωστη στα adaptive συστήματα ελέγχου θα μας οδηγήσει στην αναγκαιότητα να εισάγουμε κάποια παραμετρική προσέγγιση της θ ως νόμο στον προσαρμοστικό έλεγχο ανάδρασης καθιστώντας τον δυναμικό. Έπεται αυτού, η απόδειξη των επιθυμητών ιδιοτήτων στο σύστημα που εισήχθη ο προσαρμοστικός έλεγχος ανάδρασης με την παραμετρική προσέγγιση. Διαπιστώνουμε την αμεσότητα του ελέγχου και παρουσιάζουμε την μέθοδο σε συστήματα 2ης τάξης. Με τον τρόπο αυτόν κάνουμε ένα βήμα γενίκευσης των συστημάτων μας με την χρήση εργαλείων του 3ου κεφαλαίου.

Συνήθως σε ένα σύστημα όπως το (4.1) θεωρούμε τουλάχιστον το x ως διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, όμως εδώ ορίζουμε το $x \in D \subset \mathbb{R}$, για να είναι συμβατές οι διαστάσεις του πεδίου τιμών των θεωρούμενων συναρτήσεων Lyapunov με αυτές που προβλέπεται από τον ορισμό τους (πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$). Το ίδιο ισχύει για τον έλεγχο u και για την συνάρτηση φ στις θεωρήσεις των ελέγχων για λόγους συμβατότητας των πράξεων.

Από το **Λήμμα 3.4** προκύπτει η ύπαρξη ενός στατικού μη γραμμικού ελεγκτή που εξασφαλίζει ολική φραξιμότητα του $x(t)$. Και ο ελεγκτής αυτός είναι:

$$u = -cx - \kappa x\varphi^2(x) \tag{4.2}$$

όπου $\kappa > 0$ και $c > 0$. Με αντικατάσταση της σχέσης (4.2) στο σύστημα (4.1) λαμβάνουμε το σύστημα κλειστού βρόγχου:

$$\dot{x} = -cx - \kappa x\varphi^2(x) + \theta\varphi(x) \tag{4.3}$$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \tag{4.4}$$

τότε η παράγωγός της από την σχέση (1.2) θα είναι:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot [-cx - \kappa x\varphi^2(x) + \theta\varphi(x)] \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = x \cdot [-cx - \kappa x\varphi^2(x) + \theta\varphi(x)] \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = -cx^2 - \kappa\left[x^2\varphi^2(x) - 2\frac{\theta x\varphi(x)}{2\kappa}\right] \xLeftrightarrow{\sigma\upsilon\mu\pi\lambda\acute{\eta}\rho\omega\sigma\eta\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omega\nu}$$

$$\dot{V}(x) = -cx^2 - \kappa\left[x^2\varphi^2(x) - 2\frac{\theta x\varphi(x)}{2\kappa} + \frac{\theta^2}{4\kappa^2} - \frac{\theta^2}{4\kappa^2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = -cx^2 - \kappa\left[\left(x\varphi(x) - \frac{\theta}{2\kappa}\right)^2 - \frac{\theta^2}{4\kappa^2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}(x) = -cx^2 \underbrace{- \underbrace{\kappa}_{>0} \underbrace{\left(x\varphi(x) - \frac{\theta}{2\kappa}\right)^2}_{\geq 0}}_{\leq 0} + \frac{\theta^2}{4\kappa} \Rightarrow$$

$$\dot{V}(x) \leq -cx^2 + \frac{\theta^2}{4\kappa} \tag{4.5}$$

από την οποία προκύπτει ότι η $\dot{V}(x) \leq 0$ όταν

$$-cx^2 + \frac{\theta^2}{4\kappa} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 \geq \frac{\theta^2}{4c\kappa} \Leftrightarrow$$

$$|x| \geq \frac{|\theta|}{2\sqrt{c\kappa}}$$

που σημαίνει ότι η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητική έξω από το συμπαγές σύνολο υπολοίπου

$$\mathcal{R} = \left\{x : |x| \leq \frac{|\theta|}{2\sqrt{c\kappa}}\right\},$$

δηλαδή η λύση συγκλίνει στο εσωτερικό του $\mathcal{R}$, το οποίο είναι «περιοχή σημείων ισορροπίας» του συστήματος. Η περιοχή $|x| \leq \frac{|\theta|}{2\sqrt{c\kappa}}$ μπορεί να «μικρύνει» αυξάνοντας τις σταθερές κ, c όμως η $x(t)$ δεν θα συγκλίνει στο 0 αν $\theta \neq 0$. Αυξάνοντας τις σταθερές

κ, c, μεγαλώνουμε *το εύρος μέσα στο οποίο το σήμα* $x(t)$ *εφαρμόζεται (ορισμός bandwidth)* και αυτό εν γένει δεν είναι επιθυμητό σε ένα σύστημα. Προς επίρρωση αυτού, αρκεί να δούμε πώς στο σύστημα (4.3), καθώς το c αυξάνει, το cx αυξάνει για δεδομένο (fixed) x. Δηλαδή το c είναι η ενίσχυση του x. Ομοίως και το κ. Οπότε αναζητούμε τις προϋποθέσεις εκείνες υπό τις οποίες $x(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ χωρίς να αυξήσουμε τις ενισχύσεις κ, c.

Έστω $\kappa = 0$. Θέτουμε $\kappa = 0$ για να απλοποιήσουμε το σύστημα (4.1) και να επιτύχουμε σύγκλιση της λύσης $x(t)$ στο σημείο ισορροπίας του συστήματος, διαφορετικά θα αναγκαστούμε να εισάγουμε περιορισμούς που θα μας οδηγήσουν σε τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια. Για να σχεδιάσουμε έναν προσαρμοζόμενο δυναμικό έλεγχο ανάδρασης που καθιστά το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (4.1) ως σημείο ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας, υποθέτουμε ότι η σταθερά θ είναι γνωστή, και τότε ο στατικός έλεγχος

$$u = -\theta\varphi(x) - c_1 x, c_1 > 0 \tag{4.6}$$

καθιστά την παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov $V_0(x) = \frac{1}{2}x^2$ αρνητικά ορισμένη, αφού από την σχέση (1.2) θα έχουμε:

$$\dot{V}_0(x) = x \cdot (-c_1 x) \Leftrightarrow$$
$$\dot{V}_0(x) = -c_1 x^2 < 0, \forall x \neq 0.$$

Οπότε, από το **θεώρημα 1.2** (θεώρημα Barbashin – Krasovskiey) το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι σημείο ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας. Όμως, ο νόμος ελέγχου (4.6) δεν μπορεί να εφαρμοστεί γιατί η σταθερά θ δεν είναι γνωστή. Αντί αυτού, στην σχέση (4.6) κάποιος θα μπορούσε να αντικαταστήσει την σταθερά θ από μια εκτίμηση της θ (συμβολισμός: $\hat{\theta}$), που σε μοντέλα έχει να κάνει με πειραματική προσέγγιση (μετρήσεις) της θ, και τότε θα είχαμε:

$$u = -\hat{\theta}\varphi(x) - c_1 x. \tag{4.7}$$

Αντικαθιστώντας τον δυναμικό έλεγχο της σχέσης (4.7) στο σύστημα (4.1), έχουμε:

$$\dot{x} = -c_1 x - \hat{\theta}\varphi(x) + \theta\varphi(x) \Leftrightarrow$$

$$\dot{x} = -c_1 x + \underbrace{\left(\theta - \hat{\theta}\right)}_{\tilde{\theta}}\varphi(x) \Leftrightarrow$$

$$\dot{x} = -c_1 x + \tilde{\theta}\varphi(x) \tag{4.8}$$

όπου

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} \tag{4.9}$$

λέμε το σφάλμα της παραμέτρου θ. Επιλέγοντας ξανά ως συνάρτηση Lyapunov την

$$V_0(x) = \frac{1}{2}x^2, \tag{4.10}$$

η παράγωγός της από την σχέση (1.2) και το σύστημα (4.8) θα είναι:

$$\dot{V}_0(x) = x \cdot \left[-c_1 x + \tilde{\theta}\varphi(x)\right] \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_0(x) = -c_1 x^2 + \tilde{\theta} x \varphi(x) \tag{4.11}$$

στην οποία η απροσδιοριστία του παραμετρικού σφάλματος δεν επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων για την ευστάθεια του συστήματος (4.8). Για τον λόγο αυτόν επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την τετραγωνική μορφή

$$V_1\left(x, \tilde{\theta}\right) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 \tag{4.12}$$

όπου γ>0 ονομάζουμε την ενίσχυση προσαρμογής. Η παράγωγος της σχέσεως (4.12) είναι:

$$\dot{V}_1\left(x, \tilde{\theta}\right) = x \cdot \dot{x} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta} \cdot \dot{\tilde{\theta}} \overset{(4.8)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_1\left(x, \tilde{\theta}\right) = x \cdot \left[-c_1 x + \tilde{\theta}\varphi(x)\right] + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta} \cdot \dot{\tilde{\theta}} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_1\left(x, \tilde{\theta}\right) = -c_1 x^2 + \tilde{\theta} x \varphi(x) + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta} \cdot \dot{\tilde{\theta}} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_1\left(x, \tilde{\theta}\right) = -c_1 x^2 + \tilde{\theta}\left[x\varphi(x) + \frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{\theta}}\right]. \tag{4.13}$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (4.9) λαμβάνουμε:

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} \overset{\theta\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}. \tag{4.14}$$

Επιλέγοντας κατάλληλα την παράγωγο της εκτίμησης $\hat{\theta}$ της παραμέτρου θ μπορούμε να άρουμε την απροσδιοριστία του σφάλματος $\tilde{\theta}$ στην σχέση (4.13), δηλαδή επιλέγουμε $\dot{\hat{\theta}}$ τέτοιο ώστε:

$$x\varphi(x) + \frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{\theta}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma x \varphi(x) \overset{(4.14)}{\Longleftrightarrow} \tag{4.15}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma x \varphi(x). \tag{4.16}$$

Αντικαθιστώντας τον παραμετρικό νόμο της σχέσης (4.16) στην σχέση (4.13) έχουμε:

$$\dot{V}_1\left(x, \tilde{\theta}\right) = -c_1 x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \tilde{\theta} \in \mathbb{R}. \tag{4.17}$$

Το σύστημα (4.8) με την σχέση (4.15) δίνει το σύστημα κλειστού βρόγχου:

$$\left\{\begin{matrix} \dot{x} = -c_1 x + \tilde{\theta}\varphi(x) \\ \dot{\tilde{\theta}} = -\gamma x \varphi(x) \end{matrix}\right\} \tag{4.18}$$

Από την σχέση (4.17), είναι $\dot{V}_1 \leq 0$ που σημαίνει ότι το σημείο $(x = 0, \tilde{\theta} = 0)$ είναι σημείο ολικής ευστάθειας του συστήματος (4.18), αφού και στο αρχικό σύστημα (4.1) με τον έλεγχο (4.7) η αρχή των αξόνων είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος αυτού.

Επιπλέον, θέλουμε να προσδώσουμε στο $x = 0$ την ιδιότητα $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Προς εφαρμογή του **Λήμματος 3.2** (Θεώρημα LaSalle - Yoshizawa) στο σύστημα (4.18), θέτουμε στο **Λήμμα 3.2** (Θεώρημα LaSalle - Yoshizawa) όπου $\boldsymbol{x} = (x, \tilde{\theta})$ και από την σχέση (4.17) λαμβάνουμε:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \dot{V}(x, \tilde{\theta}) = -c_1 x^2 = -W(\boldsymbol{x}) \leq 0, \forall t > 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \tag{4.19}$$

έχοντας θέσει:

$$W(\boldsymbol{x}) = c_1 x^2 \tag{4.20}$$

Τότε όλες οι λύσεις $\boldsymbol{x}(t)$ του (4.18) είναι ολικά φραγμένες ανεξαρτήτως του χρόνου t και ικανοποιούν το:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} W(\boldsymbol{x}(t)) = 0 \overset{(4.20)}{\Longleftrightarrow} \\
&\lim_{t\to\infty} c_1 x^2(t) = 0 \overset{c_1 σταθερό}{\Longleftrightarrow} \\
&c_1 \lim_{t\to\infty} x^2(t) = 0 \Leftrightarrow \\
&\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \forall t \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

που σημαίνει σύγκλιση του $x(t)$ στο σημείο ισορροπίας $x = 0$ καθώς ο χρόνος $t \to \infty$.

Εναλλακτικά για τα αυτόνομα συστήματα, από την σχέση (4.17) και το **Θεώρημα 2.1** (θεώρημα LaSalle), η περιοχή σημείων που μηδενίζουν την $\dot{V}$, είναι η $E = \{x = 0, \tilde{\theta} \in \mathbb{R}\} \equiv M$, όπου το M είναι το μέγιστο αναλλοίωτο υποσύνολο του E, οπότε κάθε λύση $(x(t), \tilde{\theta}(t))$ που ξεκινά από οπουδήποτε στο $\mathbb{R}^2$, συγκλίνει στο Μ καθώς ο χρόνος $t \to \infty$.

Ωστόσο, για την επίτευξη της σύγκλισης του παραμετρικού σφάλματος $\tilde{\theta}(t)$ στο 0, χρειάζονται να ληφθούν επιπλέον συνθήκες.

Ο προσαρμοζόμενος μη γραμμικός ελεγκτής που εγγυάται τις ανωτέρω ιδιότητες της ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας του σημείου ισορροπίας αυτού του συστήματος δίδεται από τις σχέσεις (4.7) και (4.16):

$$\begin{Bmatrix} u = -\hat{\theta}\varphi(x) - c_1 x \\ \dot{\hat{\theta}} = \gamma x \varphi(x) \end{Bmatrix} \tag{4.22}$$

ως μία άλλη μορφή του (4.18).

Ο σχεδιασμός του (4.22) είναι τόσο ευθύς, εξ αιτίας του ότι οι όροι που περιέχουν άγνωστες παραμέτρους στο (4.1) βρίσκονται μέσα στην έκταση του ελέγχου u, που σημαίνει ότι μπορούν να απαλειφθούν άμεσα από τον έλεγχο, όταν η θ είναι γνωστή σταθερά. Για να αναδειχθεί το συγκεκριμένο σημείο, θα θεωρήσουμε ένα σύστημα 2ης τάξης, όχι 1ης όπως το (4.1), στο οποίο πάλι οι όροι που προκαλούν απροσδιοριστία θα απαλείφονται άμεσα από κατάλληλη επιλογή του ελέγχου u:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = x_2 + \varphi_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = \theta\varphi_2(x) + u \end{Bmatrix} \tag{4.23}$$

Αν η σταθερή παράμετρος θ ήταν γνωστή, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το **Λήμμα 3.3** (Ολοκληρωτική Πίσω-Αντικατάσταση): Πρώτα θεωρούμε το x_2 ως έλεγχο, την συνάρτηση

$$a_1(x_1) = -c_1x_1 - \varphi_1(x_1) \tag{4.24}$$

η οποία θα χρησιμεύσει στην σταθεροποίηση του συστήματος, και τον έλεγχο

$$u = -c_2\big(x_2 - a_1(x_1)\big) - x_1 + \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1}\big(x_2 + \varphi_1(x_1)\big) - \theta\varphi_2(x). \tag{4.25}$$

Αν επιλέξουμε ως συνάρτηση Lyapunov την

$$V_c(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\big(x_2 - a_1(x_1)\big)^2 \tag{4.26}$$

τότε η παράγωγός της θα είναι:

$$\dot{V}_c(x) = x_1 \cdot \dot{x}_1 + \big(x_2 - a_1(x_1)\big) \cdot \left[\dot{x}_2 - \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1\right] \xLeftrightarrow{(4.23),(4.24),(4.25)}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_c(x) = {} & x_1 \cdot [x_2 + \varphi_1(x_1)] + [x_2 + c_1x_1 + \varphi_1(x_1)] \\ & \cdot \Big\{\overbrace{\theta\varphi_2(x)} - c_2[x_2 + c_1x_1 + \varphi_1(x_1)] - x_1 + \underbrace{[-c_1 - \dot{\varphi}_1(x_1)] \cdot [x_2 + \varphi_1(x_1)]} \\ & - \overbrace{\theta\varphi_2(x)} - \underbrace{[-c_1 - \dot{\varphi}_1(x_1)] \cdot [x_2 + \varphi_1(x_1)]}\Big\} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\dot{V}_c(x) = x_1x_2 + x_1\varphi_1(x_1) + [x_2 + c_1x_1 + \varphi_1(x_1)] \cdot [-c_2x_2 - c_2c_1x_1 - c_2\varphi_1(x_1) - x_1] \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_c(x) = {} & \overbrace{x_1x_2} + \underbrace{x_1\varphi_1(x_1)} - c_2x_2^2 - c_2c_1x_1x_2 - c_2x_2\varphi_1(x_1) - \overbrace{x_1x_2} - c_1^2x_1^2c_2 - c_2c_1x_1x_2 \\ & - c_2c_1x_1\varphi_1(x_1) - c_1x_1^2 - c_2x_2\varphi_1(x_1) - c_2c_1x_1\varphi_1(x_1) - c_2\varphi_1^2(x_1) \\ & - \underbrace{x_1\varphi_1(x_1)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\dot{V}_c(x) = -c_1x_1^2 - c_2x_2^2 \underbrace{-2c_2c_1x_1x_2 - 2c_2x_2\varphi_1(x_1)}_{-c_2[2x_2(c_1x_1 + \varphi_1(x_1))]} \underbrace{-2c_2c_1x_1\varphi_1(x_1) - c_2c_1^2x_1^2 - c_2\varphi_1^2(x_1)}_{-c_2[c_1x_1 + \varphi_1(x_1)]^2}$$

$$\xLeftrightarrow{(4.24)}$$

$$\dot{V}_c(x) = -c_1x_1^2 - c_2[x_2 - a_1(x_1)]^2 \tag{4.27}$$

Η $\dot{V}_c(x) < 0$ (είναι αρνητικά ορισμένη) και εφόσον η σταθερά θ είναι άγνωστη, μπορούμε να θέσουμε στον έλεγχο (4.25) όπου θ μια εκτίμηση του θ (συμβολισμός $\hat{\theta}$) και η (4.25) γίνεται:

$$u = -c_2\big(x_2 - a_1(x_1)\big) - x_1 + \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1}\big(x_2 + \varphi_1(x_1)\big) - \hat{\theta}\varphi_2(x). \tag{4.28}$$

Εισάγουμε την αλλαγή μεταβλητών:

$$\left\{\begin{matrix} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 - a_1(x_1) \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} (4.29\alpha) \\ (4.29\beta) \end{matrix}$$

και αντικαθιστώντας στο σύστημα (4.23) τις σχέσεις (4.28),(4.29) θα έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix} \dot{z}_1 = z_2 - c_1 z_1 \\ \dot{z}_2 + \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1}\underbrace{\dot{x}_1}_{\dot{z}_1} = (\theta - \hat{\theta})\tilde{\varphi}_2(z) - c_2\left(\underbrace{x_2 - a_1(x_1)}_{z_2}\right) + \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1}\left(\underbrace{x_2 + \varphi_1(x_1)}_{z_2 - c_1 z_1}\right) \end{matrix}\right\} \overset{(4.9)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} \dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1 - c_2 z_2 + \tilde{\theta}\tilde{\varphi}_2(z) \end{matrix}\right\} \xLongleftrightarrow{\sigma\varepsilon\ \mu o\rho\varphi\acute{\eta}\ \pi\iota\nu\acute{\alpha}\kappa\omega\nu} \tag{4.30}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\varphi}_2(z) \end{bmatrix}\tilde{\theta} \tag{4.31}$$

Το σύστημα (4.31) είναι το σύστημα με το σφάλμα $\tilde{\theta}$ της παραμέτρου θ ως είσοδο. Εμπλουτίζουμε την συνάρτηση Lyapunov της σχέσεως (4.26) με έναν τετραγωνικό όρο του παραμετρικού σφάλματος $\tilde{\theta}$ όπως έγινε και στην σχέση (4.12), και με την αλλαγή των μεταβλητών, σχέση (4.29), λαμβάνουμε:

$$V_1(z,\tilde{\theta}) = V_c + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 \Leftrightarrow$$

$$V_1(z,\tilde{\theta}) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 \tag{4.32}$$

όπου $\gamma > 0$ υπενθυμίζουμε ότι είναι η ενίσχυση προσαρμογής. Η παράγωγός της είναι:

$$\dot{V}_1(z,\tilde{\theta}) = z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} \xLongleftrightarrow{(4.30),(4.14)}$$

$$\dot{V}_1(z,\tilde{\theta}) = z_1(z_2 - c_1 z_1) + z_2\left[-z_1 - c_2 z_2 + \tilde{\theta}\tilde{\varphi}_2(z)\right] - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\hat{\theta}} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_1(z,\tilde{\theta}) = \underbrace{z_1 z_2} - c_1 z_1^2 - \underbrace{z_1 z_2} - c_2 z_2^2 + \tilde{\theta} z_2\tilde{\varphi}_2(z) - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\hat{\theta}} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_1(z,\tilde{\theta}) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + \tilde{\theta}\left[z_2\tilde{\varphi}_2(z) - \frac{1}{\gamma}\dot{\hat{\theta}}\right] \tag{4.33}$$

Επιλέγουμε τον νόμο

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma z_2\tilde{\varphi}_2(z) \tag{4.34}$$

που καθιστά την (4.33) μη θετική:

$$\dot{V}_1(z,\tilde{\theta}) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \leq 0, \forall z \in \mathbb{R}^2, \forall \tilde{\theta} \in \mathbb{R}. \tag{4.35}$$

Από την σχέση (4.35) έχουμε ότι η $\dot{V}_1 \leq 0$ που σημαίνει ότι το σημείο $(z_1 = 0, z_2 = 0, \tilde{\theta} = 0)$ είναι σημείο ολικής ευστάθειας του προσαρμοζόμενου συστήματος κλειστού βρόγχου που προκύπτει από την αντικατάσταση της σχέσης (4.14) στις σχέσεις (4.31) και (4.34):

$$\left\{\begin{matrix} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\varphi}_2(z) \end{bmatrix}\tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} = -\gamma z_2 \tilde{\varphi}_2(z) \end{matrix}\right\}. \tag{4.36}$$

Προς εφαρμογή του Λήμματος 3.2 (Θεώρημα LaSalle – Yoshizawa) θέτουμε $W\left(z,\tilde{\theta}\right) = c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2$ η οποία είναι θετικά ημιορισμένη. Με αντικατάσταση της W στην παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov, σχέση (4.35), θα έχουμε ότι $\dot{V}_1\left(z,\tilde{\theta}\right) = -W\left(z,\tilde{\theta}\right) \leq 0$. Συνεπώς εφαρμόζουμε το **Λήμμα 3.2** (Θεώρημα LaSalle – Yoshizawa) στο σύστημα (4.36) και λαμβάνουμε ότι όλες οι λύσεις $z_1(t)$, $z_2(t)$, $\tilde{\theta}(t)$ είναι ολικά φραγμένες με ομοιομορφία ως προς την μεταβλητή του χρόνου t, και επιπλέον ισχύει η ιδιότητα:

$$\lim_{t\to\infty} W\left(z(t),\tilde{\theta}(t)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty}[c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} z_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} z_2(t) = 0 \end{matrix}\right\} \overset{(4.29)}{\Longleftrightarrow} \tag{4.37}$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \alpha_1\left(x_1(t)\right) \end{matrix}\right\} \overset{(4.24)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \left(-c_1 x_1(t) - \varphi_1\left(x_1(t)\right)\right) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = 0 - \varphi_1(0) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = -\varphi_1(0) \end{matrix}\right\} \tag{4.38}$$

Η σχέση (4.38) σημαίνει ότι η λύση $\boldsymbol{x}(t) = \left(x_1(t), x_2(t)\right)$ του αρχικού συστήματος (4.23) με τον έλεγχο (4.28) συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας $(x_1, x_2) = \left(0, -\varphi_1(0)\right)$ καθώς ο χρόνος $t \to \infty$.

Σχόλιο: Αξίζει να σημειωθεί ότι ο σχεδιασμός του συστήματος $\{(4.23), (4.24), (4.25)\}$, αλλά και του (4.36), όπως και η εξαγωγή της σχέσεως (4.37) έγινε με βάση το **Λήμμα 3.3** (Ολοκληρωτική Πίσω-Αντικατάσταση), η εφαρμογή του οποίου δεν ήταν δυνατή και προς επίλυση αυτού ξεκίνησε η διαδικασία γενίκευσης της μεθόδου στα συστήματα προσαρμοστικού ελέγχου που θα ολοκληρωθεί στην Παράγραφο 4.6.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 4.3: Ελαχιστοποίηση παραμέτρων στην ολοκληρωτική πίσω - αντικατάσταση

Ο προσαρμοζόμενος σχεδιασμός των προηγούμενων παραδειγμάτων ήταν απλός γιατί η απροσδιόριστη παράμετρος βρισκόταν εντός της «ακτίνας» του εφαρμοζόμενου ελέγχου. Στην παρούσα παράγραφο θα γενικεύσουμε ακόμη περισσότερο το τελευταίο παράδειγμα σχεδιάζουμε το σύστημα έτσι ώστε η παραμετρική απροσδιοριστία να εισάγει στο σύστημα μία ολοκλήρωση, πριν την εισαγωγή του ελέγχου:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = x_2 + \theta\varphi(x_1) \\ \dot{x}_2 = u \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} (4.39\alpha) \\ (4.39\beta) \end{matrix}$$

Η μέθοδος που θα ακολουθηθεί είναι η ολοκληρωτική πίσω αντικατάσταση σε συστήματα προσαρμοζόμενου ελέγχου, η οποία σε πλήρη μορφή αναπτύσσεται στην παράγραφο 4.5, ωστόσο σε αυτήν την παράγραφο επιλέγουμε να εισάγουμε τον νόμο της παραμετρικής εκτίμησης αφού υπολογίσουμε την παράγωγο της προκριθείσας συνάρτησης Lyapunov για τον σχεδιασμό του ελέγχου του συστήματος. Η επιλογή αυτή καθορίζει στο σύστημα τον ελάχιστο δυνατό αριθμό παραμετρικών εκτιμήσεων.

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, αν η σταθερή παράμετρος θ ήταν γνωστή στο σύστημα (4.39), θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το **Λήμμα 3.3** (Ολοκληρωτική Πίσω-Αντικατάσταση) για να σχεδιάσουμε μια συνάρτηση $\alpha_1(x_1,\theta)$ που να σταθεροποιεί την μεταβλητή κατάστασης x_2:

$$a_1(x_1,\theta) = -c_1x_1 - \theta\varphi(x_1) \qquad (4.40)$$

και επιλέγοντας ως συνάρτηση Lyapunov την:

$$V_c(x,\theta) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\big(x_2 - \alpha_1(x_1,\theta)\big)^2 \qquad (4.41)$$

και ως έλεγχο τον:

$$u = -c_2\big(x_2 - \alpha_1(x_1,\theta)\big) - x_1 + \frac{\partial\alpha_1(x_1,\theta)}{\partial x_1}\big(x_2 + \theta\varphi(x_1)\big), \qquad (4.42)$$

τότε η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov στην σχέση (4.41) θα είναι:

$$\dot{V}_c = x_1\dot{x}_1 + [x_2 - \alpha_1(x_1,\theta)] \cdot \left[\dot{x}_2 - \frac{\partial\alpha_1(x_1,\theta)}{\partial x_1}\cdot\dot{x}_1\right] \overset{(4.39),(4.40)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_c(x,\theta) = x_1\big(x_2 + \theta\varphi(x_1)\big) + x_2 u + x_2\big(c_1 + \theta\dot{\varphi}(x_1)\big)\big(x_2 + \theta\varphi(x_1)\big) + \big(c_1x_1 + \theta\varphi(x_1)\big)u$$
$$+ \big(c_1x_1 + \theta\varphi(x_1)\big)\big(c_1 + \theta\dot{\varphi}(x_1)\big)\big(x_2 + \theta\varphi(x_1)\big) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_c(x,\theta) = x_1x_2 + \theta x_1\varphi(x_1) + x_2u + \left(x_2^2 + \theta x_2\varphi(x_1)\right)\left(c_1 + \theta\dot{\varphi}(x_1)\right) + c_1x_1u + \theta\varphi(x_1)u$$
$$+ [c_1x_1x_2 + c_1x_1\theta\varphi(x_1) + x_2\theta\varphi(x_1) + \theta^2\varphi^2(x_1)] \cdot \big(c_1 + \theta\dot{\varphi}(x_1)\big) \overset{(4.42)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_c(x,\theta) = x_1x_2 + \theta x_1\varphi(x_1) + x_2\left[-c_2\big(x_2 - \alpha_1(x_1,\theta)\big) - x_1 + \frac{\partial\alpha_1(x_1,\theta)}{\partial x_1}\big(x_2 + \theta\varphi(x_1)\big)\right]$$
$$+ c_1x_2^2 + c_1\theta x_2\varphi(x_1) + \theta x_2^2\dot{\varphi}(x_1) + \theta^2x_2\varphi(x_1)\dot{\varphi}(x_1)$$
$$+ c_1x_1\left[-c_2\big(x_2 - \alpha_1(x_1,\theta)\big) - x_1 + \frac{\partial\alpha_1(x_1,\theta)}{\partial x_1}\big(x_2 + \theta\varphi(x_1)\big)\right]$$
$$+ \theta\varphi(x_1)\left[-c_2\big(x_2 - \alpha_1(x_1,\theta)\big) - x_1 + \frac{\partial\alpha_1(x_1,\theta)}{\partial x_1}\big(x_2 + \theta\varphi(x_1)\big)\right]$$
$$+ c_1^2x_1x_2 + c_1^2x_1\theta\varphi(x_1) + c_1x_2\theta\varphi(x_1) + c_1\theta^2\varphi^2(x_1) + c_1\theta x_1x_2\dot{\varphi}(x_1)$$
$$+ c_1\theta^2x_1\varphi(x_1)\dot{\varphi}(x_1) + \theta^2x_2\varphi(x_1)\dot{\varphi}(x_1) + \theta^3\varphi^2(x_1)\dot{\varphi}(x_1) \overset{(4.40)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_c(x,\theta)$$
$$= \underbrace{x_1x_2} + \overbrace{\theta x_1\varphi(x_1)}\underline{-c_2x_2^2 - c_1c_2x_1x_2 - c_2\theta x_2\varphi(x_1)} - \underbrace{x_1x_2}$$
$$+ \underbrace{[-c_1x_2 - \theta x_2\dot{\varphi}(x_1)]\big(x_2 + \theta\varphi(x_1)\big)}_{-c_1x_2^2 - \theta x_2^2\dot{\varphi}(x_1) - c_1\theta x_2\varphi(x_1) - \theta^2x_2\varphi(x_1)\dot{\varphi}(x_1)} + c_1x_2^2 + c_1\theta x_2\varphi(x_1) + \theta x_2^2\dot{\varphi}(x_1)$$
$$+ \theta^2x_2\varphi(x_1)\dot{\varphi}(x_1)\underline{-c_1c_2x_1x_2 - c_1^2c_2x_1^2 - c_1c_2\theta x_1\varphi(x_1) - c_1x_1^2}$$
$$+ \underbrace{[-c_1^2x_1 - c_1\theta x_1\dot{\varphi}(x_1)]\big(x_2 + \theta\varphi(x_1)\big)}_{-c_1^2x_1x_2 - c_1\theta x_1x_2\dot{\varphi}(x_1) - c_1^2x_1\theta\varphi(x_1) - c_1\theta^2x_1\varphi(x_1)\dot{\varphi}(x_1)} \underline{-c_2\theta x_2\varphi(x_1) - c_1c_2\theta x_1\varphi(x_1) - c_2\theta^2\varphi^2(x_1)}$$
$$- \overbrace{\theta x_1\varphi(x_1)} + \underbrace{[-c_1\theta\varphi(x_1) - \theta^2\varphi(x_1)\dot{\varphi}(x_1)]\big(x_2 + \theta\varphi(x_1)\big)}_{-c_1x_2\theta\varphi(x_1) - \theta^2x_2\varphi(x_1)\dot{\varphi}(x_1) - c_1\theta^2\varphi^2(x_1) - \theta^3\varphi^2(x_1)\dot{\varphi}(x_1)} + c_1^2x_1x_2 + c_1^2x_1\theta\varphi(x_1)$$
$$+ c_1x_2\theta\varphi(x_1) + c_1\theta^2\varphi^2(x_1) + c_1\theta x_1x_2\dot{\varphi}(x_1) + c_1\theta^2x_1\varphi(x_1)\dot{\varphi}(x_1) + \theta^2x_2\varphi(x_1)\dot{\varphi}(x_1)$$
$$+ \theta^3\varphi^2(x_1)\dot{\varphi}(x_1) \xLongleftrightarrow{\substack{\textit{από τις απαλοιφές μένουν} \\ \textit{τα κάτω υπογραμμισμένα}}}$$

$$\dot{V}_c(x,\theta) = -c_2x_2^2 - 2c_1c_2x_1x_2 - 2c_2\theta x_2\varphi(x_1) - c_1^2c_2x_1^2 - 2c_1c_2\theta x_1\varphi(x_1) - c_1x_1^2 - c_2\theta^2\varphi^2(x_1) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_c(x,\theta) = -c_1x_1^2 - c_2\left[x_2^2 + 2x_2\big(c_1x_1 + \theta\varphi(x_1)\big) + \underbrace{c_1^2x_1^2 + \theta^2\varphi^2(x_1) + 2c_1\theta x_1\varphi(x_1)}_{\left(c_1x_1+\theta\varphi(x_1)\right)^2}\right]$$

$$\overset{(4.40)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_c(x,\theta) = -c_1x_1^2 - c_2\left[x_2^2 + 2x_2\big(-\alpha_1(x_1,\theta)\big) + \big(-\alpha_1(x_1,\theta)\big)^2\right] \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_c(x,\theta) = -c_1x_1^2 - c_2[x_2 - \alpha_1(x_1,\theta)]^2 \tag{4.43}$$

Από την σχέση (4.43), η $\dot{V}_c < 0$ είναι αρνητικά ορισμένη για κάθε $(x,\theta) \in \mathbb{R}^3$, με $(x,\theta) \neq (0,0)$, και όπου $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Αν θεωρήσουμε την κατάσταση x_2 ως τον έλεγχο στην σχέση (4.39α) τότε θα αναζητήσουμε έναν προσαρμοζόμενο ελεγκτή για τον έλεγχο στην σχέση αυτή. Και σε αυτό το παράδειγμα στην σχέση (4.40) αντικαθιστούμε την άγνωστη σταθερά θ με $\hat{\theta}$, όπου $\hat{\theta}$ είναι η παραμετρική εκτίμηση του θ, και από την σχέση (4.29α) θέτουμε z_1 όπου x_1 και λαμβάνουμε:

$$a_1\big(x_1,\hat{\theta}\big) = -c_1z_1 - \hat{\theta}\varphi(x_1) \tag{4.44}$$

Από την σχέση (4.29), η σχέση (4.39α) θα γινόταν:

$$\dot{z}_1 = z_2 + a_1\big(x_1,\hat{\theta}\big) + \theta\varphi(x_1) \overset{(4.44)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{z}_1 = z_2 - c_1z_1 + \big(\theta - \hat{\theta}\big)\varphi(x_1) \overset{(4.9)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{z}_1 = z_2 - c_1z_1 + \tilde{\theta}\varphi(x_1) \tag{4.45}$$

Κατά αντιστοιχία της σχέσεως (4.26), επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την:

$$V_1\big(z,\hat{\theta}\big) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2, \tag{4.46}$$

η παράγωγος της οποίας είναι:

$$\dot{V}_1\big(z,\hat{\theta}\big) = z_1\dot{z}_1 + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} \overset{(4.45),(4.14)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_1(z,\hat{\theta}) = z_1\left(z_2 - c_1 z_1 + \tilde{\theta}\varphi(x_1)\right) + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\left(-\dot{\hat{\theta}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_1(z,\hat{\theta}) = z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + \tilde{\theta}\left(z_1\varphi(x_1) - \frac{1}{\gamma}\dot{\hat{\theta}}\right) \tag{4.47}$$

Για τον προσδιορισμό της παραγώγου της z_2, παραγωγίζουμε την σχέση (4.29β) και λαμβάνουμε:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{a}_1(x_1,\hat{\theta}) \overset{(4.39\beta)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{z}_2 = u - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\cdot\dot{x}_1 - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial\hat{\theta}}\cdot\dot{\hat{\theta}} \overset{(4.39\alpha)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{z}_2 = u - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\left(x_2 + \underbrace{\theta}_{\hat{\theta}+\tilde{\theta}}\varphi(x_1)\right) - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} \overset{(4.9)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{z}_2 = u - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}x_2 - \hat{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) - \tilde{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} \tag{4.48}$$

Προς το σχεδιασμό του ελέγχου u θεωρούμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V_2(z,\hat{\theta}) = V_1(z,\hat{\theta}) + \frac{1}{2}z_2^2 \overset{(4.47)}{\Longleftrightarrow}$$

$$V_2(z,\hat{\theta}) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2}z_2^2 \tag{4.49}$$

της οποίας η παράγωγος θα είναι:

$$\dot{V}_2(z,\hat{\theta}) = \dot{V}_1(z,\hat{\theta}) + z_2\dot{z}_2 \overset{(4.48),(4.47)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_2(z,\hat{\theta}) = z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + \tilde{\theta}\left(z_1\varphi(x_1) - \frac{1}{\gamma}\dot{\hat{\theta}}\right)$$

$$+ z_2\left[u - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}x_2 - \hat{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) - \tilde{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1)\right.$$

$$\left. - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right] \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_2(z,\hat{\theta}) = -c_1 z_1^2 + \tilde{\theta}\left(z_1\varphi(x_1) - \frac{1}{\gamma}\dot{\hat{\theta}} - z_2\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1)\right)$$

$$+ z_2\left[z_1 + u - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}x_2 - \hat{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right] \quad (4.50)$$

Τώρα επιλέγουμε τον νόμο για την παραμετρική προσέγγιση $\hat{\theta}$ της θ:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\left(z_1\varphi(x_1) - z_2\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1)\right) \quad (4.51)$$

και ως έλεγχο u επιλέγουμε:

$$u = -z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}x_2 + \hat{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) + \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} \quad (4.52)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (4.51), (4.52) στην (4.50) και έχουμε:

$$\dot{V}_2(z,\hat{\theta}) = -c_1 z_1^2$$

$$+ \tilde{\theta}\left(z_1\varphi(x_1) - \frac{1}{\gamma}\gamma\left(z_1\varphi(x_1) - z_2\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1)\right)\right.$$

$$\left. - z_2\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1)\right)$$

$$+ z_2\left[z_1 - z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}x_2 + \hat{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) + \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right.$$

$$\left. - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}x_2 - \hat{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right] \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_2(z,\hat{\theta}) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \leq 0 \quad (4.53)$$

Επιπλέον, η σχέση (4.48) καθίσταται από τον νόμο της σχέσης (4.51) και τον έλεγχο της σχέσεως (4.52) ως εξής:

$$\dot{z}_2 = -z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1} x_2 + \hat{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) + \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1} x_2$$

$$- \hat{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) - \tilde{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) - \frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} \Leftrightarrow$$

$$\dot{z}_2 = -z_1 - c_2 z_2 - \tilde{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) \tag{4.54}$$

Σχηματίζουμε το προσαρμοζόμενο σύστημα κλειστού βρόγχου με τις μεταβλητές ως προς το σφάλμα από τις σχέσεις (4.45),(4.54),(4.51). Πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν και την σχέση (4.14), διότι θα επιχειρηματολογήσουμε για το σύστημα με την παράγωγο σφάλματος $\dot{\tilde{\theta}}$ και θα συμπερασματολογήσουμε για αυτό με την παράγωγο της παραμετρικής προσέγγισης $\dot{\hat{\theta}}$:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - c_1 z_1 + \tilde{\theta}\varphi(x_1) \\ \dot{z}_2 &= -z_1 - c_2 z_2 - \tilde{\theta}\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) \\ \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\tilde{\theta}} &= \gamma\left(z_1\varphi(x_1) - z_2\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1)\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.55}$$

και σε μορφή πινάκων γράφεται ως εξής:

$$\left[\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi(x_1) \\ -\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) \end{bmatrix}}_{B}\tilde{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\tilde{\theta}} &= \gamma\underbrace{\begin{bmatrix} \varphi(x_1) & -\frac{\partial a_1(x_1,\hat{\theta})}{\partial x_1}\varphi(x_1) \end{bmatrix}}_{B^T}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right] \tag{4.56}$$

Παρατήρηση:

1. Ο πίνακας Α είναι αντισυμμετρικός και οι όροι της διαγωνίου έχουν αρνητικές τιμές.
2. Ο πίνακας Β που πολλαπλασιάζει το παραμετρικό σφάλμα $\tilde{\theta}$ χρησιμοποιείται ανεστραμμένος στον νόμο εκτίμησης της παραμετρικής προσέγγισης $\hat{\theta}$.

Από την σχέση (4.53) έχουμε ότι η $\dot{V}_2 \leq 0$ και συνεπώς, στο σύστημα (4.56) το σημείο ισορροπίας $(z_1, z_2, \tilde{\theta}) = (0,0,0)$ είναι ολικά ευσταθές. Εφαρμόζουμε το **Λήμμα 3.2**

(Θεώρημα LaSalle - Yoshizawa) στο σύστημα (4.56) και θέτοντας όπου $\mathrm{W}(z,\tilde{\theta}) = c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2$ θα έχουμε από την σχέση (4.53) ότι $\dot{V}_2(z,\tilde{\theta}) = \dot{V}_2(z,\hat{\theta}) = -\mathrm{W}(z,\tilde{\theta}) \leq 0, \forall z \in \mathbb{R}^2$ και $\forall \tilde{\theta} \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, όλες οι λύσεις $z_1(t), z_2(t), \hat{\theta}(t)$ είναι ολικά ομοιόμορφα φραγμένες ως προς την μεταβλητή t του χρόνου και ισχύει το εξής:

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{W}\big(z(t),\tilde{\theta}(t)\big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty}[c_1 z_1^2(t) + c_2 z_2^2(t)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} z_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} z_2(t) = 0 \end{matrix}\right\} \overset{(4.29)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \lim\limits_{t\to\infty} a_1\big(x_1,\hat{\theta}\big) \end{matrix}\right\} \overset{(4.44)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\big[-c_1 z_1(t) - \hat{\theta}(t)\varphi\big(x_1(t)\big)\big] \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\big[-\hat{\theta}(t)\varphi\big(x_1(t)\big)\big] \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} (4.57\alpha) \\ (4.57\beta) \end{matrix}$$

Η σχέση (4.57α) δεν μπορεί να ισχύσει αν η $\dot{x}_1(t) \nrightarrow 0$ καθώς ο χρόνος $t \to \infty$. Συνεπώς, $\dot{x}_1(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, και από την η σχέση (4.39α) έχουμε ότι και $x_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} -\theta\varphi(0)$. Από την σχέση (4.57β) έχουμε ότι $-\hat{\theta}(t)\varphi\big(x_1(t)\big) \xrightarrow[t\to\infty]{} -\theta\varphi(0)$. Η ύπαρξη των ορίων της συνάρτησης $\varphi\big(x_2(t)\big)$ και του γινομένου συναρτήσεων $\hat{\theta}(t)\varphi\big(x_2(t)\big)$ δεν εξάγει και την ύπαρξη του ορίου της $\hat{\theta}(t)$. Για την σύγκλιση της παραμετρικής εκτίμησης $\hat{\theta}(t)$ στην άγνωστη παράμετρο θ θα χρειαστεί να ληφθούν περεταίρω συνθήκες. Συνοψίζοντας, το αρχικό σύστημα (4.39) έχει ως σημείο ισορροπίας το $(x_1,x_2) = \big(0,-\theta\varphi(0)\big)$.

Εναλλακτικά και πιο ισχυρά για τα Αυτόνομα συστήματα. Το $\big(z_1,z_2,\tilde{\theta}\big) = (0,0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος (4.56). θα δείξουμε ότι οι τροχιές των λύσεων

$\left(z_1(t), z_2(t), \tilde{\theta}(t)\right)$ του (4.56) συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας του συστήματος καθώς ο χρόνος $t \to \infty$. Η συνάρτηση $V_2\left(z_1(t), z_2(t), \tilde{\theta}(t)\right)$ από την σχέση (4.49) είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη. Από την σχέση (4.53) είναι $\dot{V}_2 \leq 0, \forall \left(z_1, z_2, \tilde{\theta}\right) \in \mathbb{R}^3$. Επειδή η V_2 είναι ακτινικά μη φραγμένη, το σύνολο $\Omega_d = \left\{\left(z_1, z_2, \tilde{\theta}\right) \in \mathbb{R}^3 | V_2\left(z_1, z_2, \tilde{\theta}\right) \leq d\right\}$ είναι συμπαγές και θετικά αναλλοίωτο σύνολο. Προς εφαρμογή του **Θεωρήματος 2.1** (Θεώρημα LaSalle) θέτουμε $\Omega = \Omega_d$ και ισχύουν όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος. Το σύνολο $E = \left\{\left(z_1, z_2, \tilde{\theta}\right) \in \Omega_d | \dot{V}_2\left(z_1, z_2, \tilde{\theta}\right) = 0\right\} \Leftrightarrow E = \left\{\left(z_1, z_2, \tilde{\theta}\right) \in \Omega_d | z_1 = 0, z_2 = 0\right\}$. Επειδή από όλα τα σημεία της ευθείας $\left(0,0,\tilde{\theta}\right)$ του $\mathbb{R}^3$ μόνο το (0,0,0) είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος (4.56), το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο M του E είναι το μονοσύνολο $M = (0,0,0)$. Εφαρμόζουμε το **Θεώρημα 2.1** (Θεώρημα LaSalle) στο σύστημα (4.56) και κάθε τροχιά της λύσης $\left(z_1(t), z_2(t), \tilde{\theta}(t)\right)$ που ξεκινά από το Ω_d τείνει στο M καθώς $t \to \infty$. Θεωρούμε $t_0 = 0$, την αρχική χρονική στιγμή μελέτης του συστήματος. Επειδή η $V_2\left(z_1, z_2, \tilde{\theta}\right)$ είναι ακτινικά μη φραγμένη, για κάθε αρχική συνθήκη $\left(z_1(0), z_2(0), \theta - \vartheta_1(0), \theta - \vartheta_2(0)\right)$ υπάρχει σταθερά $d > 0$: $\left(z_1(0), z_2(0), \tilde{\theta}(0)\right) \in \Omega_d$ που σημαίνει ότι η προκύπτουσα σύγκλιση από το συμπέρασμα του **θεωρήματος 2.1** είναι ολική. Η σύγκλιση του $z_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ συνεπάγεται την σύγκλιση της μεταβλητής κατάστασης του αρχικού συστήματος $x_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, και η σύγκλιση του $z_2(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ συνεπάγεται την σύγκλιση του $x_2(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\theta\varphi(0)$.

Αν $\varphi(0) = 0$, τότε στο αρχικό σύστημα (4.39) οι μεταβλητές κατάστασης συγκλίνουν στην αρχή των αξόνων είτε το σύστημα αυτό θεωρηθεί αυτόνομο είτε χρονικά μεταβαλλόμενο.

Στο σημείο αυτό αξίζει να προοικονομήσουμε ότι ταυτόσημη εφαρμογή τόσο του **Λήμματος 3.2** (θεώρημα LaSalle – Yoshizawa) όσο και του **Θεωρήματος 2.1** (Θεώρημα LaSalle) θα γίνει στην Παράγραφο 4.5, όταν εξετάσουμε ξανά το σύστημα (4.39) και παρουσιάσουμε σε πλήρη μορφή την προσαρμοζόμενη ολοκληρωτική πίσω αντικατάσταση.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 4.4: Εφαρμογή Βιοχημείας

Σε αυτήν την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της παραγράφου 4.3 και θα παρουσιάσουμε ένα απλό μοντέλο βιοτεχνολογικής διαδικασίας με αρκετές εφαρμογές σε άλλα πολυπλοκότερα μοντέλα. Η βιοχημική διεργασία πιστοποιείται στον Jacques Monod, ο οποίος θεωρείται ο πατέρας της μοριακής βιολογίας.

Το μοντέλο που θα αναλυθεί λέγεται fed – batch και ορίζεται ως μια επιχειρησιακή τεχνική στις βιοτεχνολογικές διεργασίες κατά την οποία ένα ή περισσότερα θρεπτικά συστατικά, που ονομάζονται θρεπτικό υπόστρωμα (substrates), παρέχονται (fed) στον βιοαντιδραστήρα κατά την διάρκεια της αύξησης της οργανικής ύλης (μικρόβια), και όλα τα προϊόντα της βιοαντίδρασης παραμένουν εντός του βιοαντιδραστήρα μέχρι το τέλος της διεργασίας.

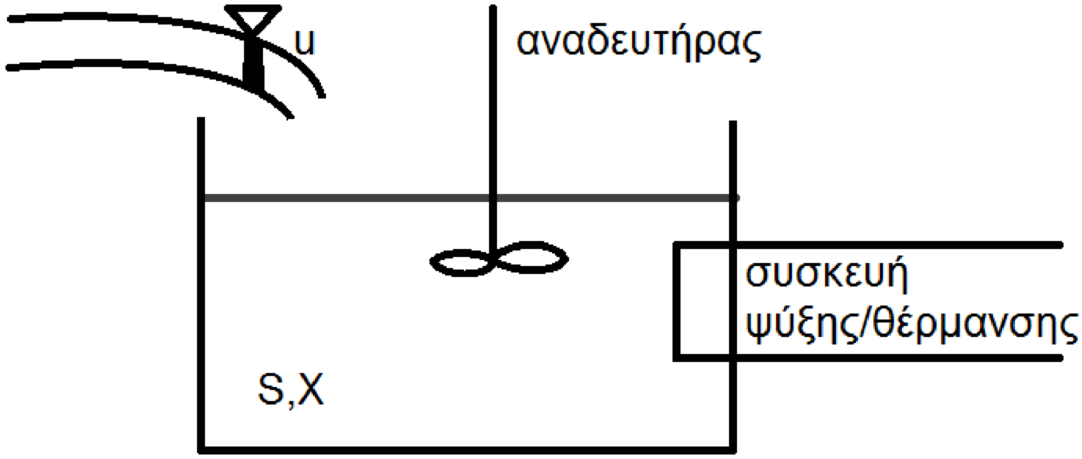
Στο μοντέλο που θα παρουσιάσουμε (σχήμα 4.1), συμβολίζουμε με:

1. S την συγκέντρωση του θρεπτικού υποστρώματος του βιοαντιδραστήρα.
2. X την συγκέντρωση του αυξανόμενου μικροβιακού πληθυσμού.
3. k την σταθερά απόδοσης της τροφής στον πληθυσμό.
4. D τον ρυθμό διάλυσης ουσίας ή μικροοργανισμού στο διάλυμα.
5. τον έλεγχο u, τον ρυθμό παροχής του θρεπτικού υποστρώματος στον αντιδραστήρα.

Εν γένει, σε ένα μοντέλο τύπου batch, το οποίο επιτυγχάνεται όταν $D = 0$ και $u = 0$, ο μικροβιακός ρυθμός ανάπτυξης $\dot{X}$ τυποποιείται ως:

$$\dot{X} = \mu(S) \cdot X$$

όπου $\mu(S)$ είναι ο ειδικός ρυθμός ανάπτυξης, και εξαρτάται από την συγκέντρωση του θρεπτικού υποστρώματος S στον βιοαντιδραστήρα. Για τον ειδικό ρυθμό ανάπτυξης ο Monod εφήρμοσε εμπειρικούς τύπους που εξαρτιόντουσαν από το είδος των μικροβίων που χρησιμοποιούσε στα πειράματά του κάθε φορά. [https://en.wikipedia.org/wiki/Monod_equation]



Σχήμα 4.1: βιοαντιδραστήρας τύπου fed – batch

Εδώ θα τον παραμετροποιήσουμε με την χρήση άγνωστων αλλά σταθερών παραμέτρων ως εξής:

$$\mu(S) = \varphi_0(S) + \theta_1\varphi_1(S) + \theta_2\varphi_2(S) \tag{4.58}$$

όπου $\varphi_i, i = 0,1,2$ είναι γνωστές μη γραμμικές συναρτήσεις.

Για απλοποίηση του μοντέλου, θεωρούμε ότι τόσο το θρεπτικό υπόστρωμα όσο και ο πληθυσμός των μικροβίων διαλύονται στο διάλυμα με τον ίδιο ρυθμό D. Με την παραμετροποίηση που έγινε, και αν θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία στον βιοαντιδραστήρα παραμένει σταθερή καθ' όλη την διάρκεια της βιοχημικής διεργασίας με τεχνητό τρόπο, προσαρτώντας στον βιοαντιδραστήρα μια συσκευή ψύξης/θέρμανσης, τότε από την αρχή διατήρησης μάζας καταλήγουμε σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων διατήρησης μάζας για το μοντέλο:

$$\dot{X} = [\varphi_0(S) + \theta_1\varphi_1(S) + \theta_2\varphi_2(S)]X - DX \tag{4.59a}$$
$$\dot{S} = -k[\varphi_0(S) + \theta_1\varphi_1(S) + \theta_2\varphi_2(S)]X - DS + u \tag{4.59β}$$

Ο στόχος του ελέγχου u είναι ο περιορισμός της μεταβλητής X σε ένα σημειακό σύνολο αναφοράς X_r, το οποίο προσδίδει στο σύστημα (4.59) ιδιότητες ευστάθειας. Για περισσότερη ευκολία εισάγουμε στο σύστημα (4.59) την αλλαγή συντεταγμένων:

$$x_1 = \ln X \qquad (4.60\alpha)$$
$$x_2 = S \qquad (4.60\beta)$$

Η αλλαγή συντεταγμένων (4.60) είναι καλά ορισμένη και αντιστρέψιμη, αφού πάντα η συγκέντρωση X λαμβάνει θετικές τιμές. Τότε, το σύστημα (4.59) με την αλλαγή συντεταγμένων (4.60) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\dot{x}_1 = \varphi_0(x_2) + \theta_1\varphi_1(x_2) + \theta_2\varphi_2(x_2) - D \qquad (4.61a)$$
$$\dot{x}_2 = -k[\varphi_0(x_2) + \theta_1\varphi_1(x_2) + \theta_2\varphi_2(x_2)]e^{x_1} - Dx_2 + u \qquad (4.61\beta)$$

Το adaptive σύστημα (4.61) είναι της μορφής parametric pure – feedback [S.S. Ge, C. Wang, Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure – feedback systems, Automatica 38 (2002), σελίδα 672]και αυτό σημαίνει ότι οι ιδιότητες ευστάθειας του συστήματος αυτού είναι τοπικού χαρακτήρα. Εξασφαλίζονται μόνο για ένα συμπαγές σύνολο αρχικών συνθηκών.

Επιλέγουμε ως μεταβλητή εικονικού ελέγχου στην σχέση (4.61α) την μη γραμμική συνάρτηση φ_0 και σχεδιάζουμε για αυτήν μια συνάρτηση α_1 που θα την σταθεροποιεί:

$$\alpha_1\big(x_1, x_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\big) = -c_1(x_1 - \ln X_r) - \hat{\theta}_1\varphi_1(x_2) - \hat{\theta}_2\varphi_2(x_2) + D \qquad (4.62)$$

όπου $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ είναι οι παραμετρικές εκτιμήσεις των παραμέτρων θ_1, θ_2 αντιστοίχως. Από την σχέση (4.60α) βλέπουμε ότι η ποσότητα $x_1 - \ln X_r = \ln X - \ln X_r = \ln\frac{X}{X_r}$ μπορεί να μας βοηθήσει στον περιορισμό της μεταβλητής X, με τον εξής τρόπο, εισάγοντας ως πρώτη μεταβλητή σφάλματος την ποσότητα αυτή,

$$z_1 = x_1 - \ln X_r \qquad (4.63)$$

και εξασφαλίζοντας την σύγκλιση $z_1 \rightarrow 0$, να συνεπάγεται και η σύγκλιση $X \rightarrow X_r$. Η παράγωγος της σχέσης (4.63) δίνει:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 \tag{4.64}$$

Ως δεύτερη μεταβλητή σφάλματος επιλέγουμε την σταθεροποίηση του εικονικού ελέγχου:

$$z_2 = \varphi_0(x_2) - \alpha_1(x_1, x_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \tag{4.65}$$

Από τις σχέσεις (4.63), (4.64), (4.65) και (4.62), η σχέση (4.61α) καθίσταται:

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 + (\theta_1 - \hat{\theta}_1)\varphi_1(x_2) + (\theta_2 - \hat{\theta}_2)\varphi_2(x_2) \tag{4.66}$$

Η παράγωγος της σχέσης (4.65) είναι:

$$\dot{z}_2 = \frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2}\dot{x}_2 - \frac{\partial \alpha_1(x_1, x_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}{\partial x_1}\dot{x}_1 - \frac{\partial \alpha_1(x_1, x_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}{\partial x_2}\dot{x}_2 - \frac{\partial \alpha_1(x_1, x_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}{\partial \hat{\theta}_1}\dot{\hat{\theta}}_1$$
$$- \frac{\partial \alpha_1(x_1, x_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}{\partial \hat{\theta}_2}\dot{\hat{\theta}}_2 \overset{(4.62)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2}\dot{x}_2 + c_1\dot{x}_1 + \hat{\theta}_1\frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \hat{\theta}_2\frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \varphi_1(x_2)\dot{\hat{\theta}}_1 + \varphi_2(x_2)\dot{\hat{\theta}}_2 \overset{(4.64)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{z}_2 = \left[\frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1\frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2\frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right]\dot{x}_2 + c_1\dot{z}_1 + \varphi_1(x_2)\dot{\hat{\theta}}_1 + \varphi_2(x_2)\dot{\hat{\theta}}_2 \overset{(4.61\beta),(4.66)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{z}_2 = \left[\frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1\frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2\frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right]\{-k[\varphi_0(x_2) + \theta_1\varphi_1(x_2) + \theta_2\varphi_2(x_2)]e^{x_1}$$
$$- Dx_2 + u\} + c_1\left[-c_1 z_1 + z_2 + (\theta_1 - \hat{\theta}_1)\varphi_1(x_2) + (\theta_2 - \hat{\theta}_2)\varphi_2(x_2)\right]$$
$$+ \varphi_1(x_2)\dot{\hat{\theta}}_1 + \varphi_2(x_2)\dot{\hat{\theta}}_2 \tag{4.67}$$

Επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την τετραγωνική μορφή:

$$V(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}{z_1}^2 + \frac{1}{2}{z_2}^2 + \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^T \Gamma^{-1}(\theta - \hat{\theta}) \tag{4.68}$$

όπου Γ είναι ο συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας ενίσχυσης προσαρμογής, $\theta = \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}$ και $\hat{\theta} = \begin{bmatrix}\hat{\theta}_1\\ \hat{\theta}_2\end{bmatrix}$. Η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov V είναι:

$$\dot{V}\left(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\right)$$
$$= z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 - \frac{1}{2}\left(\dot{\hat{\theta}}\right)^T \Gamma^{-1}\left(\theta - \hat{\theta}\right) - \frac{1}{2}\left(\theta - \hat{\theta}\right)^T \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}} \overset{(4.66),(4.67)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}\left(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\right)$$
$$= z_1\left(-c_1 z_1 + z_2 + \left(\theta_1 - \hat{\theta}_1\right)\varphi_1(x_2) + \left(\theta_2 - \hat{\theta}_2\right)\varphi_2(x_2)\right)$$
$$+ z_2\left(\left[\frac{\partial\varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1\frac{\partial\varphi_1(x_2)}{\partial x_2}\right.\right.$$
$$\left. + \hat{\theta}_2\frac{\partial\varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right]\{-k[\varphi_0(x_2) + \theta_1\varphi_1(x_2) + \theta_2\varphi_2(x_2)]e^{x_1} - Dx_2 + u\}$$
$$+ c_1\left[-c_1 z_1 + z_2 + \left(\theta_1 - \hat{\theta}_1\right)\varphi_1(x_2) + \left(\theta_2 - \hat{\theta}_2\right)\varphi_2(x_2)\right] + \varphi_1(x_2)\dot{\hat{\theta}}_1$$
$$\left. + \varphi_2(x_2)\dot{\hat{\theta}}_2\right) - \frac{1}{2}\left(\dot{\hat{\theta}}\right)^T \Gamma^{-1}\left(\theta - \hat{\theta}\right) - \frac{1}{2}\left(\theta - \hat{\theta}\right)^T \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}\left(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\right)$$
$$= -c_1 {z_1}^2 + \left(\theta_1 - \hat{\theta}_1\right)\varphi_1(x_2) z_1 + \left(\theta_2 - \hat{\theta}_2\right)\varphi_2(x_2) z_1$$
$$+ z_2\left[\frac{\partial\varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1\frac{\partial\varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2\frac{\partial\varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right]$$
$$\cdot\{-k[\varphi_0(x_2) + \theta_1\varphi_1(x_2) + \theta_2\varphi_2(x_2)]e^{x_1} - Dx_2 + u\} + z_1 z_2$$
$$+ c_1 z_2\left[-c_1 z_1 + z_2 + \left(\theta_1 - \hat{\theta}_1\right)\varphi_1(x_2) + \left(\theta_2 - \hat{\theta}_2\right)\varphi_2(x_2)\right] + \varphi_1(x_2)\dot{\hat{\theta}}_1 z_2$$
$$+ \varphi_2(x_2)\dot{\hat{\theta}}_2 z_2 - \frac{1}{2}\left(\dot{\hat{\theta}}\right)^T \Gamma^{-1}\left(\theta - \hat{\theta}\right) - \frac{1}{2}\left(\theta - \hat{\theta}\right)^T \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}} \qquad (4.69)$$

Θέλουμε να καταστήσουμε την σχέση (4.69) μικρότερη ή ίση του μηδενός. Θα το επιτύχουμε αυτό με την χρήση του παραμετρικού νόμου $\dot{\hat{\theta}}$ και του ελέγχου u. Ως έλεγχο u επιλέγουμε:

$$u = k\left[\varphi_0(x_2) + \hat{\theta}_1\varphi_1(x_2) + \hat{\theta}_2\varphi_2(x_2)\right]e^{x_1} + Dx_2 + \frac{1}{\frac{\partial\varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1\frac{\partial\varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2\frac{\partial\varphi_2(x_2)}{\partial x_2}}$$

$$\cdot\left\{-c_1[-c_1z_1 + z_2] - z_1 - c_2z_2 - \varphi_1(x_2)\dot{\hat{\theta}}_1 - \varphi_2(x_2)\dot{\hat{\theta}}_2\right\} \tag{4.70}$$

Αντικαθιστούμε τον έλεγχο (4.70) στην σχέση (4.69) και λαμβάνουμε:

$$\dot{V}\left(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\right)$$

$$= -c_1{z_1}^2 + \left(\theta_1 - \hat{\theta}_1\right)\varphi_1(x_2)z_1 + \left(\theta_2 - \hat{\theta}_2\right)\varphi_2(x_2)z_1$$

$$+ z_2\left[\frac{\partial\varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1\frac{\partial\varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2\frac{\partial\varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right]$$

$$\cdot\left\{-k[\varphi_0(x_2) + \theta_1\varphi_1(x_2) + \theta_2\varphi_2(x_2)]e^{x_1} - Dx_2\right.$$

$$+ k\left[\varphi_0(x_2) + \hat{\theta}_1\varphi_1(x_2) + \hat{\theta}_2\varphi_2(x_2)\right]e^{x_1} + Dx_2$$

$$+ \frac{1}{\frac{\partial\varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1\frac{\partial\varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2\frac{\partial\varphi_2(x_2)}{\partial x_2}}$$

$$\left.\cdot\left\{-c_1[-c_1z_1 + z_2] - z_1 - c_2z_2 - \varphi_1(x_2)\dot{\hat{\theta}}_1 - \varphi_2(x_2)\dot{\hat{\theta}}_2\right\}\right\} + z_1z_2$$

$$+ c_1z_2\left[-c_1z_1 + z_2 + \left(\theta_1 - \hat{\theta}_1\right)\varphi_1(x_2) + \left(\theta_2 - \hat{\theta}_2\right)\varphi_2(x_2)\right] + \varphi_1(x_2)\dot{\hat{\theta}}_1z_2$$

$$+ \varphi_2(x_2)\dot{\hat{\theta}}_2z_2 - \frac{1}{2}\left(\dot{\hat{\theta}}\right)^T\Gamma^{-1}\left(\theta - \hat{\theta}\right) - \frac{1}{2}\left(\theta - \hat{\theta}\right)^T\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}\big(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\big)$$

$$= -c_1 {z_1}^2 - c_2 {z_2}^2 + z_2 \left[\frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right] \cdot (-k)$$

$$\cdot \left[\big(\theta_1 - \hat{\theta}_1\big)\varphi_1(x_2) + \big(\theta_2 - \hat{\theta}_2\big)\varphi_2(x_2)\right] \cdot e^{x_1} + c_1 z_2$$

$$\cdot \left[\big(\theta_1 - \hat{\theta}_1\big)\varphi_1(x_2) + \big(\theta_2 - \hat{\theta}_2\big)\varphi_2(x_2)\right] + z_1$$

$$\cdot \left[\big(\theta_1 - \hat{\theta}_1\big)\varphi_1(x_2) + \big(\theta_2 - \hat{\theta}_2\big)\varphi_2(x_2)\right] - \frac{1}{2}\left(\dot{\hat{\theta}}\right)^T \Gamma^{-1}\big(\theta - \hat{\theta}\big)$$

$$-\frac{1}{2}\big(\theta - \hat{\theta}\big)^T \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}\big(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\big)$$

$$= -c_1 {z_1}^2 - c_2 {z_2}^2 - \frac{1}{2}\left(\dot{\hat{\theta}}\right)^T \Gamma^{-1}\big(\theta - \hat{\theta}\big) - \frac{1}{2}\big(\theta - \hat{\theta}\big)^T \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}$$

$$+ \left[\big(\theta_1 - \hat{\theta}_1\big)\varphi_1(x_2) + \big(\theta_2 - \hat{\theta}_2\big)\varphi_2(x_2)\right]$$

$$\cdot \left\{z_1 + \left[c_1 - k \cdot \left(\frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right) \cdot e^{x_1}\right] \cdot z_2\right\} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}\big(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\big)$$

$$= -c_1 {z_1}^2 - c_2 {z_2}^2 - \frac{1}{2}\left(\dot{\hat{\theta}}\right)^T \Gamma^{-1}\big(\theta - \hat{\theta}\big) - \frac{1}{2}\big(\theta - \hat{\theta}\big)^T \Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}$$

$$+ \big(\theta - \hat{\theta}\big)^T \begin{bmatrix} \varphi_1(x_2) \\ \varphi_2(x_2) \end{bmatrix}$$

$$\cdot \left\{z_1 + \left[c_1 - k \cdot \left(\frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right) \cdot e^{x_1}\right] \cdot z_2\right\} \quad (4.70)$$

και επιλέγουμε για το διάνυσμα των παραμετρικών εκτιμήσεων $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix}$ τον νόμο:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \begin{bmatrix} \varphi_1(x_2) \\ \varphi_2(x_2) \end{bmatrix} \cdot \left\{z_1 + \left[c_1 - k \cdot \left(\frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right) \cdot e^{x_1}\right] \cdot z_2\right\} (4.71)$$

και η $\dot{V}$ της σχέσης (4.70) από τον προσαρμοστικό νόμο της σχέσης (4.71) γίνεται:

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}\left(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\right) \\
&\qquad = -c_1 {z_1}^2 - c_2 {z_2}^2 \\
&\qquad - \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} \varphi_1(x_2) \\ \varphi_2(x_2) \end{bmatrix}\right)^T \Gamma^T \Gamma^{-1}\left(\theta - \hat{\theta}\right)\Bigg\{ z_1 \\
&\qquad + \left[c_1 - k \cdot \left(\frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right) \cdot e^{x_1}\right] \cdot z_2 \Bigg\} \\
&\qquad - \frac{1}{2}\left(\theta - \hat{\theta}\right)^T \Gamma^{-1} \Gamma \begin{bmatrix} \varphi_1(x_2) \\ \varphi_2(x_2) \end{bmatrix} \\
&\qquad \cdot \left\{ z_1 + \left[c_1 - k \cdot \left(\frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right) \cdot e^{x_1}\right] \cdot z_2 \right\} \\
&\qquad + \left(\theta - \hat{\theta}\right)^T \begin{bmatrix} \varphi_1(x_2) \\ \varphi_2(x_2) \end{bmatrix} \\
&\qquad \cdot \left\{ z_1 + \left[c_1 - k \cdot \left(\frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right) \cdot e^{x_1}\right] \cdot z_2 \right\} \overset{\Gamma^T = \Gamma}{\iff}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}\left(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\right) \\
&\qquad = -c_1 {z_1}^2 - c_2 {z_2}^2 \\
&\qquad - \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x_2) \quad \varphi_2(x_2)\right] \begin{pmatrix} \theta_1 - \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 - \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} \Bigg\{ z_1 \\
&\qquad + \left[c_1 - k \cdot \left(\frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right) \cdot e^{x_1}\right] \cdot z_2 \Bigg\} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \theta_1 - \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 - \hat{\theta}_2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi_1(x_2) \\ \varphi_2(x_2) \end{bmatrix} \\
&\qquad \cdot \left\{ z_1 + \left[c_1 - k \cdot \left(\frac{\partial \varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right) \cdot e^{x_1}\right] \cdot z_2 \right\} \iff
\end{aligned}
$$

$$\dot{V}\left(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\right)$$
$$= -c_1 {z_1}^2 - c_2 {z_2}^2$$
$$+ \left[-\frac{1}{2}\left(\left(\theta_1 - \hat{\theta}_1\right)\varphi_1(x_2) + \left(\theta_2 - \hat{\theta}_2\right)\varphi_2(x_2)\right)\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{2}\left(\left(\theta_1 - \hat{\theta}_1\right)\varphi_1(x_2) + \left(\theta_2 - \hat{\theta}_2\right)\varphi_2(x_2)\right)\right]$$
$$\cdot \left\{z_1 + \left[c_1 - k \cdot \left(\frac{\partial\varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial\varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial\varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right) \cdot e^{x_1}\right] \cdot z_2\right\} \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}\left(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\right) = -c_1 {z_1}^2 - c_2 {z_2}^2 \leq 0 \tag{4.72}$$

Συνεπώς, υπό την επίδραση του προσαρμοστικού ελέγχου (4.70) και του παραμετρικού νόμου (4.71) η συνάρτηση Lyapunov από την σχέση (4.68) έχει αρνητικά ημιορισμένη παράγωγο (σχέση (4.72)). Υπό την δράση των ανωτέρω νόμου και ελέγχου στις σχέσεις (4.66) και (4.67) το σύστημα για το οποίο επιλέξαμε την συνάρτηση Lyapunov και έδρασαν ο έλεγχος και ο νόμος καθίσταται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 + \left(\theta - \hat{\theta}\right)^T \begin{bmatrix}\varphi_1(x_2) \\ \varphi_2(x_2)\end{bmatrix} \\ \dot{z}_2 = \left[\frac{\partial\varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial\varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial\varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right] \cdot \left\{\left[c_1 - k \cdot e^{x_1}\right] \cdot \left(\theta - \hat{\theta}\right)^T \begin{bmatrix}\varphi_1(x_2) \\ \varphi_2(x_2)\end{bmatrix} - z_1 - c_2 z_2\right\} \\ \left(\theta - \hat{\theta}\right)^{\cdot} = -\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \begin{bmatrix}\varphi_1(x_2) \\ \varphi_2(x_2)\end{bmatrix} \cdot \left\{z_1 + \left[c_1 - k \cdot \left(\frac{\partial\varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial\varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial\varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right) \cdot e^{x_1}\right] \cdot z_2\right\} \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

Για την εφαρμογή του ελέγχου (4.70) που μας οδήγησε στο σύστημα (4.73), με την βοήθεια και του νόμου (4.71), επιβάλλεται ο περιορισμός

$$\frac{\partial\varphi_0(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial\varphi_1(x_2)}{\partial x_2} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial\varphi_2(x_2)}{\partial x_2} \neq 0 \tag{4.74}$$

Στην περιοχή που ισχύει ο περιορισμός (4.74) θα εγκαταστήσουμε ιδιότητες ευστάθειας του συστήματος (4.73). Που σημαίνει ότι στην περιοχή που ισχύει η σχέση (4.74), επειδή η $\dot{V}$ από την σχέση (4.72) είναι αρνητικά ημιορισμένη, το σημείο

$$\left(z_1, z_2, \theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2\right) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$(1,1,-1,-1)\cdot\left(z_1,z_2,\theta_1-\hat{\theta}_1,\theta_2-\hat{\theta}_2\right)=(1,1,-1,-1)\cdot(0,0,0,0)\Leftrightarrow$$

$$\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1-\theta_1,\hat{\theta}_2-\theta_2\right)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow$$

$$\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)=(0,0,\theta_1,\theta_2)$$

είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (4.73).

Προς εφαρμογή του **Λήμματος 3.2** (θεώρημα LaSalle – Yoshizawa) σε μια περιοχή που έχει ισχύ ο περιορισμός (4.74) για το σύστημα (4.73) επιλέγουμε την συνάρτηση $W(z_1,z_2)=-\dot{V}\left(z_1,z_2,\theta_1-\hat{\theta}_1,\theta_2-\hat{\theta}_2\right)=c_1{z_1}^2+c_2{z_2}^2$ και ως αποτέλεσμα έχουμε ότι όλες οι λύσεις $\left(z_1(t),z_2(t),\theta_1-\hat{\theta}_1(t),\theta_2-\hat{\theta}_2(t)\right)$ του συστήματος είναι ομοιόμορφα φραγμένες ως προς την μεταβλητή του χρόνου και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{t\to\infty}W(z_1(t),z_2(t))=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty}(c_1z_1(t)^2+c_2z_2(t)^2)=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty}z_1(t)=0 \text{ και } \lim_{t\to\infty}z_2(t)=0$$

Από την σύγκλιση της μεταβλητής σφάλματος $z_1(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$ συνεπάγεται, όπως είδαμε και στην αρχή της εφαρμογής, ότι η συγκέντρωση του μικροβιακού πληθυσμού $X(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}X_r$.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 4.5: Προσαρμοζόμενη ολοκληρωτική πίσω – αντικατάσταση

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε εκ νέου το σύστημα (4.39) της παραγράφου 4.3 μόνο που αυτή την φορά δεν θα ελαχιστοποιήσουμε το πλήθος των παραμέτρων που θα εισάγουμε και θα οδηγηθούμε σε ένα προσαρμοζόμενο υπερπαραμετροποιημένο σύστημα κλειστού βρόγχου ανάλογο του συστήματος (4.56).

Τα πρώτα βήματα ταυτίζονται με αυτά της παραγράφου 4.3, κατά τα οποία αν θεωρήσουμε την σταθερή παράμετρο θ γνωστή και εφαρμόζαμε το **Λήμμα 3.3** (Ολοκληρωτική Πίσω-Αντικατάσταση) θα σχεδιάζαμε μια συνάρτηση $\alpha_1(x_1, \theta)$ που σταθεροποιεί την μεταβλητή κατάστασης x_2 και αυτή θα δινόταν από την σχέση (4.40), και θα επιλέγαμε ως συνάρτηση Lyapunov την σχέση (4.41) και ως έλεγχο την σχέση (4.42), οπότε ως παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov θα είχαμε την σχέση (4.43) που είναι αρνητικά ορισμένη για κάθε $(x, \theta) \in \mathbb{R}^3$ $\mu\varepsilon$ $(x, \theta) \neq (0,0), \kappa\alpha\iota$ $\acute{o}\pi o\upsilon$ $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Από το σημείο αυτό που θεωρούμε την μεταβλητή κατάστασης x_2 ως εικονικό έλεγχο στην σχέση (4.39α) διαφοροποιούμαστε από την παράγραφο 4.3. Και ενώ στην αρχή όπως και στην παράγραφο 4.3 αντικαθιστούμε στην σχέση (4.40) την άγνωστη σταθερά θ με την παραμετρική της εκτίμηση ϑ_1 και από την σχέση (4.29α) έχουμε:

$$a_1(x_1, \vartheta_1) = -c_1 z_1 - \vartheta_1 \varphi(x_1) \tag{4.75}$$

στην συνέχεια, από την σχέση (4.75) και από το σύστημα (4.22) με την αντικατάσταση σε αυτό της σχέσης (4.29α) και θέτοντας ϑ_1 στην θέση του $\hat{\theta}$, έχουμε τον ακόλουθο προσαρμοζόμενο ελεγκτή για την σχέση (4.39α):

$$\begin{cases} a_1(x_1, \vartheta_1) = -c_1 z_1 - \vartheta_1 \varphi(x_1) & (4.76\alpha) \\ \dot{\vartheta}_1 = \gamma z_1 \varphi(x_1) & (4.76\beta) \end{cases}$$

Τώρα πλέον, από την αλλαγή μεταβλητών (4.29) και προσαρμόζοντας τα δεδομένα της συνάρτησης a_1 στο τωρινό παράδειγμα, η σχέση (4.39α) καθίσταται:

$$\dot{z}_1 = z_2 + a_1(x_1, \vartheta_1) + \theta \varphi(x_1) \overset{(4.76\alpha)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{z}_1 = z_2 - c_1 z_1 + (\theta - \vartheta_1)\varphi(x_1) \tag{4.77}$$

Επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την:

$$V_1(z, \vartheta_1) = \frac{1}{2} {z_1}^2 + \frac{1}{2\gamma} (\theta - \vartheta_1)^2 \tag{4.78}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov είναι:

$$\dot{V}_1(z,\vartheta_1) = z_1\dot{z}_1 + \frac{1}{\gamma}(\theta - \vartheta_1)\big(-\dot{\vartheta}_1\big) \overset{(4.76\beta),(4.77)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_1(z,\vartheta_1) = z_1\big(z_2 - c_1 z_1 + (\theta - \vartheta_1)\varphi(x_1)\big) - \frac{1}{\gamma}(\theta - \vartheta_1)\gamma z_1 \varphi(x_1) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_1(z,\vartheta_1) = z_1 z_2 - c_1 {z_1}^2 + (\theta - \vartheta_1) z_1 \varphi(x_1) - (\theta - \vartheta_1) z_1 \varphi(x_1) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_1(z,\vartheta_1) = z_1 z_2 - c_1 {z_1}^2 \tag{4.79}$$

Από την σχέση (4.29β) με παραγώγιση θέλουμε να προσδιορίσουμε την παράγωγο της z_2:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{a}_1(x_1,\vartheta_1) \overset{(4.39\beta)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{z}_2 = u - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}\cdot \dot{x}_1 - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial \vartheta_1}\cdot \dot{\vartheta}_1 \overset{(4.76\beta),(4.39\alpha)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{z}_2 = u - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}\big(x_2 + \theta\varphi(x_1)\big) - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial \vartheta_1}\gamma z_1 \varphi(x_1) \Leftrightarrow$$

$$\dot{z}_2 = u - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial \vartheta_1}\gamma z_1 \varphi(x_1) - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}\theta\varphi(x_1) \tag{4.80}$$

Επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την:

$$V_2(z_1,z_2,\vartheta_1) = V_1(z_1,\vartheta_1) + \frac{1}{2}{z_2}^2 \tag{4.81}$$

της οποίας η παράγωγος είναι:

$$\dot{V}_2(z_1,z_2,\vartheta_1) = \dot{V}_1(z_1,\vartheta_1) + z_2\dot{z}_2 \overset{(4.79),(4.80)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_2(z_1,z_2,\vartheta_1) = z_1 z_2 - c_1 {z_1}^2 + z_2\left[u - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial \vartheta_1}\gamma z_1 \varphi(x_1) - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}\theta\varphi(x_1)\right] \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_2(z_1,z_2,\vartheta_1) = -c_1{z_1}^2 + z_2 \cdot \left[z_1 + u - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial \vartheta_1}\gamma z_1\varphi(x_1) - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}\cdot\theta \cdot \varphi(x_1)\right] \quad (4.82)$$

Επιλέγουμε u τέτοιο ώστε να αίρονται οι απροσδιόριστοι όροι της $\dot{V}_2$ και να είναι μη θετική. Εδώ επιλέγουμε:

$$u = -z_1 - c_2z_2 + \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial \vartheta_1}\gamma z_1\varphi(x_1) + \vartheta_1\frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}\varphi(x_1) \quad (4.83)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4.83) στην σχέση (4.82) λαμβάνουμε:

$$\dot{V}_2(z_1,z_2,\vartheta_1) = -c_1{z_1}^2 - c_2{z_2}^2 - (\theta - \vartheta_1)\frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}\varphi(x_1)z_2 \quad (4.84)$$

Στην συνάρτηση Lyapunov από την σχέση (4.84) βλέπουμε ότι δεν μπορούμε να άρουμε την απροσδιοριστία στο πρόσημο του όρου $(\theta - \vartheta_1)\frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}\varphi(x_1)z_2$.

Για τον λόγο αυτόν, επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την σχέση (4.81), την οποία συμπληρώνουμε με έναν νέο όρο, ο οποίος εισάγει μια νέα παραμετρική προσέγγιση ϑ_2 της θ, ως εξής:

$$V_2(z_1,z_2,\vartheta_1,\vartheta_2) = V_2(z_1,z_2,\vartheta_1) + \frac{1}{2\gamma}(\theta - \vartheta_2)^2 \overset{(4.81)}{\Longleftrightarrow}$$

$$V_2(z_1,z_2,\vartheta_1,\vartheta_2) = V_1(z_1,\vartheta_1) + \frac{1}{2}{z_2}^2 + \frac{1}{2\gamma}(\theta - \vartheta_2)^2 \overset{(4.78)}{\Longleftrightarrow}$$

$$V_2(z_1,z_2,\vartheta_1,\vartheta_2) = \frac{1}{2}{z_1}^2 + \frac{1}{2}{z_2}^2 + \frac{1}{2\gamma}(\theta - \vartheta_1)^2 + \frac{1}{2\gamma}(\theta - \vartheta_2)^2 \quad (4.85)$$

της οποίας η παράγωγος είναι:

$$\dot{V}_2(z_1,z_2,\vartheta_1,\vartheta_2) = \dot{V}_2(z_1,z_2,\vartheta_1) - \frac{1}{\gamma}(\theta - \vartheta_2)\dot{\vartheta}_2 \overset{(4.82)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_2(z_1, z_2, \vartheta_1, \vartheta_2)$$
$$= -c_1{z_1}^2 + z_2 \cdot \left[z_1 + u - \frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial \vartheta_1}\gamma z_1 \varphi(x_1) - \frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial x_1}\theta\varphi(x_1)\right]$$
$$- \frac{1}{\gamma}(\theta - \vartheta_2)\dot{\vartheta}_2 \tag{4.86}$$

και επιλέγουμε για έλεγχο τον:

$$u = -z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial \vartheta_1}\gamma z_1 \varphi(x_1) + \vartheta_2 \frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial x_1}\varphi(x_1) \tag{4.87}$$

ο οποίος με αντικατάσταση στην σχέση (4.86) δίνει:

$$\dot{V}_2(z_1, z_2, \vartheta_1, \vartheta_2)$$
$$= -c_1{z_1}^2 + z_2$$
$$\cdot \left[z_1 - z_1 - c_2 z_2 + \underbrace{\frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial x_1}x_2}_{} + \overbrace{\frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial \vartheta_1}\gamma z_1 \varphi(x_1)}^{} + \vartheta_2\right.$$
$$\cdot \frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial x_1}\varphi(x_1) - \underbrace{\frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial x_1}x_2}_{} - \overbrace{\frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial \vartheta_1}\gamma z_1 \varphi(x_1)}^{}$$
$$\left. - \frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial x_1}\theta\varphi(x_1)\right] - \frac{1}{\gamma}(\theta - \vartheta_2)\dot{\vartheta}_2 \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_2(z_1, z_2, \vartheta_1, \vartheta_2) = -c_1{z_1}^2 - c_2{z_2}^2 - (\theta - \vartheta_2)\left[\frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial x_1}z_2\varphi(x_1) + \frac{1}{\gamma}\dot{\vartheta}_2\right] \tag{4.88}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov από την σχέση (4.88) μπορεί να καταστεί μη θετική με την εισαγωγή του νόμου:

$$\dot{\vartheta}_2 = -\gamma z_2 \frac{\partial a_1(x_1, \vartheta_1)}{\partial x_1}\varphi(x_1) \tag{4.89}$$

οπότε {στην σχέση (4.88)} θα έχουμε:

$$\dot{V}_2(z_1, z_2, \vartheta_1, \vartheta_2) = -c_1{z_1}^2 - c_2{z_2}^2 \tag{4.90}$$

Η $\dot{V}_2$ είναι αρνητικά ημιορισμένη $\forall(z_1, z_2, \vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^4$και μηδενίζεται όταν $(z_1, z_2, \vartheta_1, \vartheta_2) = (0,0, \vartheta_1, \vartheta_2)$, όπου $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$.

Αντικαθιστούμε τον έλεγχο από την σχέση (4.87), στην σχέση (4.80) της παραγώγου της μεταβλητής σφάλματος z_2, και λαμβάνουμε:

$$\dot{z}_2 = -z_1 - c_2 z_2 + \underbrace{\frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1} x_2} + \overbrace{\frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial \vartheta_1} \gamma z_1 \varphi(x_1)} + \vartheta_2 \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1} \varphi(x_1)$$

$$- \underbrace{\frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1} x_2} - \overbrace{\frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial \vartheta_1} \gamma z_1 \varphi(x_1)} - \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1} \theta \varphi(x_1) \Leftrightarrow$$

$$\dot{z}_2 = -z_1 - c_2 z_2 - (\theta - \vartheta_2) \frac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1} \varphi(x_1) \tag{4.91}$$

Σχηματίζουμε το σύστημα με τις μεταβλητές ως προς το σφάλμα από τις σχέσεις (4.76β), (4.77), (4.91) και (4.89). Το προσαρμοζόμενο σύστημα κλειστού βρόγχου που προκύπτει είναι το ακόλουθο:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{z}_1 = z_2 - c_1 z_1 + (\theta - \vartheta_1)\varphi(x_1) \\ \dot{z}_2 = -z_1 - c_2 z_2 - (\theta - \vartheta_2) \dfrac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1} \varphi(x_1) \\ \dot{\vartheta}_1 = \gamma z_1 \varphi(x_1) \\ \dot{\vartheta}_2 = -\gamma z_2 \dfrac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1} \varphi(x_1) \end{array} \right\} \tag{4.92}$$

το οποίο σε μορφή πινάκων γράφεται ως εξής:

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi(x_1) & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}\varphi(x_1) \end{bmatrix}}_{\Gamma} \begin{bmatrix} \theta - \vartheta_1 \\ \theta - \vartheta_2 \end{bmatrix} \\ \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi(x_1) & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial a_1(x_1,\vartheta_1)}{\partial x_1}\varphi(x_1) \end{bmatrix}}_{\Gamma} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{array} \right] \tag{4.93}$$

Παρατηρούμε ότι:

1. Όπως και στο σύστημα (4.56), ο πίνακας Α είναι αντισυμμετρικός και οι όροι της διαγωνίου του έχουν αρνητικές τιμές.
2. Ο πίνακας Γ ο οποίος πολλαπλασιάζει τα παραμετρικά σφάλματα, είναι τετραγωνικός, σε αντίθεση με τον αντίστοιχο του συστήματος (4.56) που ήταν

διάστασης (2×1), χρησιμοποιείται αυτούσιος και στους νόμους εκτίμησης των παραμέτρων ϑ_1, ϑ_2, ενώ στο σύστημα (4.56) υπενθυμίζουμε ότι τον αναστρέφαμε.

Στο σύστημα (4.93), η επιλογή της συνάρτησης Lyapunov από την σχέση (4.85) με την αρνητικά ημιορισμένη παράγωγο από την σχέση (4.90) καθιστά το σημείο ισορροπίας $(z_1, z_2, \vartheta_1, \vartheta_2) = (0, 0, \theta, \theta) \in \mathbb{R}^4$, σημείο ολικής ευστάθειας για το σύστημα. Εφαρμόζουμε το **Λήμμα 3.2** (Θεώρημα LaSalle – Yoshizawa) στο σύστημα (4.93) θέτοντας $W(z_1, z_2, \vartheta_1, \vartheta_2) = c_1 {z_1}^2 + c_2 {z_2}^2$ η σχέση (4.90) μας παρέχει $\dot{V}_2(z_1, z_2, \vartheta_1, \vartheta_2) = -W(z_1, z_2, \vartheta_1, \vartheta_2) \leq 0$ και ως συμπέρασμα λαμβάνουμε την ολική φραξιμότητα με ομοιομορφία ως προς τον χρόνο t όλων των λύσεων $z_1(t), z_2(t), \vartheta_1(t), \vartheta_2(t)$, και επιπλέον ισχύει ότι:

$$\lim_{t\to\infty} W(z_1(t), z_2(t), \vartheta_1(t), \vartheta_2(t)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} [c_1 z_1(t)^2 + c_2 z_2(t)^2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} z_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} z_2(t) = 0 \end{matrix}\right\} \overset{(4.29)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} [x_2(t) - a_1(x_1(t), \vartheta_1(t))] = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \lim\limits_{t\to\infty} a_1(x_1(t), \vartheta_1(t)) \end{matrix}\right\} \overset{(4.75)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \lim\limits_{t\to\infty} [-c_1 z_1(t) - \vartheta_1(t)\varphi(x_1(t))] \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = \lim\limits_{t\to\infty} [-\vartheta_1(t)\varphi(x_1(t))] \end{matrix}\right\}$$

Από $x_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ συνεπάγεται ότι και $\dot{x}_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, διαφορετικά δεν θα συνέκλινε η λύση x_1. Από $\dot{x}_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ και την σχέση (4.39α), προκύπτει ότι $\big(x_2(t) + \theta\varphi(x_1(t))\big) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow x_2(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\theta\varphi(0)$, αφού το $\lim_{t\to\infty} \varphi(x_1(t)) = \varphi(0)$ υπάρχει επειδή η συνάρτηση φ είναι εξ ορισμού Lipschitz στο πεδίο ορισμού της που είναι το $\mathbb{R}$. Συνεπώς, στο αρχικό σύστημα (4.39) με τον έλεγχο u και τους παραμετρικούς νόμους $\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2$ που επιλέξαμε, ως προς τις κανονικές μεταβλητές, έχουμε ότι το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης $\big(x_1(t), x_2(t)\big) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \big(0, -\theta\varphi(0)\big)$, με το σημείο $\big(0, -\theta\varphi(0)\big)$ να είναι σημείο ισορροπίας του αρχικού συστήματος.

Εναλλακτικά και πιο ισχυρά για τα Αυτόνομα συστήματα. Το $(z_1, z_2, \theta - \vartheta_1, \theta - \vartheta_2) = (0,0,0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος (4.93). θα δείξουμε ότι οι τροχιές των λύσεων $\big(z_1(t), z_2(t), \theta - \vartheta_1(t), \theta - \vartheta_2(t)\big)$ του (4.93) συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας του συστήματος καθώς ο χρόνος $t \to \infty$. Η συνάρτηση $V_2\big(z_1(t), z_2(t), \theta - \vartheta_1(t), \theta - \vartheta_2(t)\big)$ από την σχέση (4.85) είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη. Από την σχέση (4.90) είναι $\dot{V}_2 \le 0, \forall (z_1, z_2, \theta - \vartheta_1, \theta - \vartheta_2) \in \mathbb{R}^4$. Επειδή η V_2 είναι ακτινικά μη φραγμένη, το σύνολο $\Omega_d = \{(z_1, z_2, \theta - \vartheta_1, \theta - \vartheta_2) \in \mathbb{R}^4 | V_2(z_1, z_2, \theta - \vartheta_1, \theta - \vartheta_2) \le d\}$ είναι συμπαγές και θετικά αναλλοίωτο σύνολο. Προς εφαρμογή του **Θεωρήματος 2.1** (Θεώρημα LaSalle) θέτουμε $\Omega = \Omega_d$ και ισχύουν όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος. Το σύνολο $E = \big\{(z_1, z_2, \theta - \vartheta_1, \theta - \vartheta_2) \in \Omega_d | \dot{V}_2(z_1, z_2, \theta - \vartheta_1, \theta - \vartheta_2) = 0\big\} \Leftrightarrow E = \{(z_1, z_2, \theta - \vartheta_1, \theta - \vartheta_2) \in \Omega_d | z_1 = 0, z_2 = 0\}$. Επειδή από όλα τα σημεία του επιπέδου $(0,0, \theta - \vartheta_1, \theta - \vartheta_2)$ του $\mathbb{R}^4$ μόνο το $(0,0,0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος (4.93), το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο M του E είναι το μονοσύνολο $M = (0,0,0,0)$. Εφαρμόζουμε το **Θεώρημα 2.1** (Θεώρημα LaSalle) στο σύστημα (4.93) και κάθε τροχιά της λύσης $\big(z_1(t), z_2(t), \theta - \vartheta_1(t), \theta - \vartheta_2(t)\big)$ που ξεκινά από το Ω_d τείνει στο M καθώς $t \to \infty$. Θεωρούμε $t_0 = 0$, την αρχική χρονική στιγμή μελέτης του συστήματος. Επειδή η $V_2(z_1, z_2, \theta - \vartheta_1, \theta - \vartheta_2)$ είναι ακτινικά μη φραγμένη, για κάθε αρχική συνθήκη $\left(z_1(0), z_2(0), \theta - \vartheta_1(0), \theta - \vartheta_2(0)\right)$ υπάρχει σταθερά $d > 0$: $\left(z_1(0), z_2(0), \theta - \vartheta_1(0), \theta - \vartheta_2(0)\right) \in \Omega_d$ που σημαίνει ότι η προκύπτουσα σύγκλιση από το συμπέρασμα του **θεωρήματος 2.1** είναι ολική. Η σύγκλιση του $z_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ συνεπάγεται την σύγκλιση της μεταβλητής κατάστασης του αρχικού συστήματος $x_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, και η σύγκλιση του $z_2(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ συνεπάγεται την σύγκλιση του $x_2(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\theta\varphi(0)$.

Είτε το αρχικό σύστημα (4.39) θεωρηθεί αυτόνομο είτε χρονικά μεταβαλλόμενο, αν $\varphi(0) = 0$, τότε οι μεταβλητές κατάστασης του συστήματος αυτού συγκλίνουν στην αρχή των αξόνων.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 4.6: Γενικεύοντας την ολοκληρωτική πίσω αντικατάσταση σε συστήματα προσαρμοζόμενου ελέγχου

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως ξεκινώντας από την αρχή του κεφαλαίου αυτού των προσαρμοστικών συστημάτων χτίσαμε μια μεθοδολογία που σε κάθε βήμα εμπλουτιζόταν όλο και περισσότερο έως την γενικότερη έκφραση αυτής μεθόδου, η οποία θα είναι η απόδειξη του θεωρήματος που θα παρουσιάσουμε.

Στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου παρουσιάσαμε την προσαρμοζόμενη ολοκληρωτική πίσω αντικατάσταση. Σε αυτήν την παράγραφο σκοπό έχουμε να την εδραιώσουμε στα συστήματα προσαρμοζόμενου ελέγχου αποδεικνύοντας ένα θεώρημα που είναι το αντίστοιχο του **Λήμματος 3.3** (Ολοκληρωτική πίσω – αντικατάσταση) για συστήματα adaptive.

Στην υπόθεση που ακολουθεί, υποθέτουμε ότι ένας προσαρμοζόμενος ελεγκτής είναι γνωστός για ένα αρχικό σύστημα. Την υπόθεση αυτή την χρειαζόμαστε διότι υπό την ισχύ αυτής θα αποδείξουμε το επόμενο αυτής θεώρημα.

Υπόθεση 4.1:

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\theta + g(x)u \qquad (4.94)$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n$ είναι η κατάσταση του συστήματος, το διάνυσμα $\theta \in \mathbb{R}^q$ είναι άγνωστη παραμετρική σταθερά και $u \in \mathbb{R}$ είναι η είσοδος του ελέγχου. Τότε, υπάρχει ένας προσαρμοστικός ελεγκτής

$$\begin{Bmatrix} u = a(x,\vartheta) \\ \dot{\vartheta} = T(x,\vartheta) \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} (4.95\alpha) \\ (4.95\beta) \end{matrix}$$

με την παραμετρική εκτίμηση $\vartheta \in \mathbb{R}^q$, και μία ομαλή συνάρτηση $V(x,\vartheta) : \mathbb{R}^{n+q} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη ως προς τις μεταβλητές $(x, \vartheta - \theta)$ τέτοια ώστε για όλα τα $(x,\vartheta) \in \mathbb{R}^{n+q}$ να ισχύει:

$$\frac{\partial V(x,\vartheta)}{\partial x}[f(x) + F(x)\theta + g(x)a(x,\vartheta)] + \frac{\partial V(x,\vartheta)}{\partial \vartheta}T(x,\vartheta) \le -W(x,\vartheta) \le 0 \qquad (4.96)$$

όπου η συνάρτηση $W : \mathbb{R}^{n+q} \to \mathbb{R}$ είναι θετικά ημιορισμένη.

Υπό την **Υπόθεση 4.1**, ο έλεγχος (4.95) εφαρμόζεται στο σύστημα (4.94) και εγγυάται την ολική φραξιμότητα των $x(t), \vartheta(t)$. Από το **Λήμμα 3.2** (θεώρημα LaSalle-Yoshizawa) το σταθερό ως προς τον χρόνο σήμα αναφοράς εγγυάται τον περιορισμό της συνάρτησης $W\big(x(t), \vartheta(t)\big)$ που εξασφαλίζει στο σύστημα (4.94) ιδιότητες ομοιόμορφης ευστάθειας, αλλά και κάτι παραπάνω από αυτήν, καθώς το σφάλμα $(\vartheta(t) - \theta) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Θεώρημα 4.1:(Προσαρμοστική Πίσω – Αντικατάσταση (Adaptive Back - Stepping))

Έστω ότι το σύστημα (4.94) εμπλουτίζεται στην μορφή:

$$\begin{matrix} \dot{x} = f(x) + F(x)\theta + g(x)\xi \\ \dot{\xi} = u \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (4.97a) \\ (4.97\beta) \end{matrix}$$

όπου $\xi \in \mathbb{R}$, το διάνυσμα $\theta \in \mathbb{R}^q$ είναι άγνωστη παραμετρική σταθερά και οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times q}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε για το σύστημα (4.97) τον δυναμικό έλεγχο ανάδρασης:

$$u = -c\big(\xi - a(x,\vartheta)\big) + \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial x}[f(x) + F(x)\bar{\vartheta} + g(x)\xi] + \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial \vartheta}T(x,\vartheta)$$
$$-\frac{\partial V(x,\vartheta)}{\partial x}g(x), c > 0 \qquad (4.98)$$

$$\dot{\vartheta} = T(x,\vartheta) \qquad (4.99)$$

$$\dot{\bar{\vartheta}} = -\Gamma\left[\frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial x}F(x)\right]^T \cdot \big(\xi - a(x,\vartheta)\big) \qquad (4.100)$$

όπου $\vartheta, \bar{\vartheta} \in \mathbb{R}^q$ είναι διαφορετικές παραμετρικές εκτιμήσεις του θ, ο συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας $\Gamma \in \mathbb{R}^{q\times n}$ είναι ο πίνακας ενίσχυσης προσαρμογής, και οι συναρτήσεις $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$. Τότε, υπό την ισχύ της **Υπόθεσης 4.1**, ο προσαρμοστικός ελεγκτής που αποτελείται από τις σχέσεις (4.98)–(4.100) εγγυάται ολική φραξιμότητα όλων των λύσεων του συστήματος (4.97) $x(t), \xi(t), \vartheta(t), \bar{\vartheta}(t)$ με ομοιομορφία ως προς την μεταβλητή t του χρόνου, και περιορισμό των συναρτήσεων $W\big(x(t),\vartheta(t)\big)$, $\xi(t) - a\big(x(t),\vartheta(t)\big)$ που συγκλίνουν στο 0. Και ως συνάρτηση Lyapunov που εδραιώνει το συμπέρασμα επιλέγεται η:

$$V_a(x,\xi,\vartheta,\bar{\vartheta}) = V(x,\vartheta) + \frac{1}{2}[\xi - a(x,\vartheta)]^2 + \frac{1}{2}(\theta - \bar{\vartheta})^T\Gamma^{-1}(\theta - \bar{\vartheta}) \qquad (4.101)$$

Απόδειξη:

Επιλέγοντας ως μεταβλητή σφάλματος την z που δίνεται από την σχέση:

$$z = \xi - a(x,\vartheta) \qquad (4.102)$$

το σύστημα (4.97) υπό την ισχύ της **Υπόθεσης 4.1** ξαναγράφεται:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + F(x)\theta + g(x)[z + a(x,\vartheta)] \\ \dot{z} &= u - \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta} \end{aligned}\right\} \overset{(4.95\beta)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{x} = f(x) + F(x)\theta + g(x)[z + a(x,\vartheta)] \\ &\dot{z} = u - \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial x}\big[f(x) + F(x)\theta + g(x)[z + a(x,\vartheta)]\big] - \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial \vartheta}T(x,\vartheta) \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(4.103\alpha)\\(4.103\beta)\end{matrix}$$

Η σχέση (4.95β) της **Υπόθεσης 4.1** είναι η σχέση (4.99) της υπόθεσης του λήμματος. Επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapynov $V(x,\vartheta)$ μια τετραγωνική μορφή των x,ϑ που ικανοποιεί την **Υπόθεση 4.1**, και εισάγοντας μια νέα παραμετρική εκτίμηση $\bar{\vartheta}$ του άγνωστου αλλά σταθερού διανύσματος θ, εκφράζουμε με πιο γενική μορφή την συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα ως εξής:

$$V_a(x,\xi,\vartheta,\bar{\vartheta}) = V(x,\vartheta) + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}(\theta-\bar{\vartheta})^T\Gamma^{-1}(\theta-\bar{\vartheta}) \tag{4.104}$$

όπου Γ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας, που τον ονομάζουμε πίνακα ενίσχυσης προσαρμογής. Παραγωγίζοντας την (4.104) λαμβάνουμε:

$$\dot{V}_a(x,\xi,\vartheta,\bar{\vartheta}) = \frac{\partial V(x,\vartheta)}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V(x,\vartheta)}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta} + z\dot{z} - \dot{\bar{\vartheta}}^T\Gamma^{-1}(\theta-\bar{\vartheta}) \overset{(4.103),(4.99)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_a(x,\xi,\vartheta,\bar{\vartheta}) = \frac{\partial V(x,\vartheta)}{\partial x}(f(x)+F(x)\theta+g(x)[z+a(x,\vartheta)]) + \frac{\partial V(x,\vartheta)}{\partial \vartheta}T(x,\vartheta)$$
$$+ z\left[u - \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial x}\left[f(x)+F(x)\cdot \underbrace{\theta}_{\theta+\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}} + g(x)[z+a(x,\vartheta)]\right]\right.$$
$$\left. - \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial \vartheta}T(x,\vartheta)\right] - \dot{\bar{\vartheta}}^T\Gamma^{-1}(\theta-\bar{\vartheta}) \Leftrightarrow$$

$$\dot{V}_a(x,\xi,\vartheta,\bar{\vartheta}) = \frac{\partial V(x,\vartheta)}{\partial x}\big(f(x)+F(x)\theta+g(x)a(x,\vartheta)\big) + \frac{\partial V(x,\vartheta)}{\partial \vartheta}T(x,\vartheta)$$
$$+ z\left[u - \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial x}\left[f(x)+F(x)\cdot\bar{\vartheta}+g(x)[z+a(x,\vartheta)]\right] - \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial \vartheta}T(x,\vartheta)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial V(x,\vartheta)}{\partial x}g(x)\right] - \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial x}F(x)z(\theta-\bar{\vartheta}) - \dot{\bar{\vartheta}}^T\Gamma^{-1}(\theta-\bar{\vartheta}) \overset{(4.96)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\dot{V}_a(x,\xi,\vartheta,\bar{\vartheta}) \le -W(x,\vartheta)$$
$$+ z\left[u - \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial x}\left[f(x)+F(x)\cdot\bar{\vartheta}+g(x)[z+a(x,\vartheta)]\right] - \frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial \vartheta}T(x,\vartheta)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial V(x,\vartheta)}{\partial x}g(x)\right] - \left[\frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial x}F(x)z + \dot{\bar{\vartheta}}^T\Gamma^{-1}\right](\theta-\bar{\vartheta}) \tag{4.105}$$

Ο όρος $-\left[\frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial x}F(x)z + \dot{\bar{\vartheta}}^T\Gamma^{-1}\right](\theta - \bar{\vartheta})$ απαλείφεται με επιλογή του νόμου:

$$\dot{\bar{\vartheta}} = -\Gamma\left(\frac{\partial a(x,\vartheta)}{\partial x}F(x)\right)^T \cdot z \qquad (4.106)$$

που είναι η υπόθεση (4.100) του λήμματος. Επιπλέον, επιλέγουμε τον έλεγχο (4.98), που έχει πολλές ομοιότητες με τον έλεγχο (3.47) του **Λήμματος 3.3** (Ολοκληρωτική πίσω – αντικατάσταση), και η σχέση (4.105) γίνεται:

$$\dot{V}_\alpha(x,\xi,\vartheta,\bar{\vartheta}) \leq -W(x,\vartheta) - cz^2 \leq 0 \qquad (4.107)$$

Επειδή $V_\alpha \geq 0$ και $\dot{V}_\alpha \leq 0$ οι ποσότητες $V, \bar{\vartheta}, z$ στην σχέση (4.104) είναι φραγμένες. Συνεπώς, από την **Υπόθεση 4.1**, οι μεταβλητές $x(t), \vartheta(t)$ είναι φραγμένες και από αυτό έπεται ότι η $\xi = z + a(x,\vartheta)$ και ο έλεγχος u είναι φραγμένοι. Εν κατακλείδι, το **Λήμμα 3.2** (Θεώρημα LaSalle-Yoshizawa) αποδεικνύει την ολική φραξιμότητα των $x(t), \xi(t), \vartheta(t), \bar{\vartheta}(t)$ με ομοιομορφία ως προς την μεταβλητή t του χρόνου καθώς και τον περιορισμό των συναρτήσεων W, z που συγκλίνουν στο 0.■

Σχόλιο: Η δομή του αρχικού συστήματος (4.97) στο συγκεκριμένο λήμμα και του ελέγχου (4.98) παραπέμπει ευθέως στο **Λήμμα 3.3** (Ολοκληρωτική πίσω – αντικατάσταση), όμως δεν επικαλεστήκαμε το Λήμμα 3.3 στην απόδειξη του παρόντος λήμματος και ο λόγος είναι η ύπαρξη των εκτιμήσεων $\vartheta, \bar{\vartheta}$ της διανυσματικής σταθεράς θ, περί των οποίων θέλαμε να συμπερασματολογήσουμε. Επειδή τα συμπεράσματα αφορούν και τις παραμετρικές εκτιμήσεις πέραν των μεταβλητών εισόδου και ελέγχου x, ξ αντίστοιχα, το παρόν θεώρημα γίνεται εξαιρετικά χρήσιμο σε εφαρμογές μοντελοποίησης και εκτίμησης σταθερών παραμέτρων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αντώνιος – Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, «Εισαγωγή στην μαθηματική θεωρία σημάτων συστημάτων και ελέγχου. Τόμος Α΄: Κλασσική θεωρία ελέγχου», Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 2012
2. William E. Boyce & Richard C. DiPrima, «Στοιχειώδεις διαφορικές εξισώσεις και προβλήματα συνοριακών τιμών», Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π. (2η έκδοση – μετάφραση της 10ης έκδοσης του πρωτοτύπου) 2015
3. Νικόλαος Μ. Σταυρακάκης, «Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις» (2η έκδοση), Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2011
4. Haim Brezis, «Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές», Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1997

ΞΕΝΟΓΛΩΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Petros A. Ioannou & Jing Sun, "Robust Adaptive Control", Dover Publications Inc., Mineola, New York (Dover Edition) 2012
2. Hassan K. Khalil, "Nonlinear Systems" (3rd edition), Prentice Hall, 2002
3. Miroslav Krstić & Ioannis Kanellakopoulos & Petar Kokotovic, "Nonlinear and Adaptive Control Design", Wiley 1995
4. S.S. Ge, C. Wang, "Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure – feedback systems", Automatica 38 (2002)
5. Eduardo D. Sontag, "Smooth Stabilization Implies Coprime Factorization", IEEE Transactions on automatic control, vol.34, No 4, April 1989

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. http://www.physics.ntua.gr/~apekis/SIMEIOSEIS/SEMFE.FYS.I.2005.PDF/SEMFE.2005-KEF.6.pdf
2. https://services.math.duke.edu/education/ccp/materials/diffeq/pendulum/pend1.html
3. http://www.academia.edu/7337214/Damping_associated_with_Simple_Pendulum_A_phase_portrait_study
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Monod_equation