



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ  
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**Νέες προηγμένες μέθοδοι αναγνώρισης προτύπων  
με εφαρμογές στην επεξεργασία βιοσημάτων και  
την αυτόματη τρισδιάστατη ανακατασκευή  
θραυσμένων αντικειμένων**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Σολομών Α. Ζάννος

Αθήνα, Μάρτιος 2017





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ  
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**Νέες προηγμένες μέθοδοι αναγνώρισης προτύπων  
με εφαρμογές στην επεξεργασία βιοσημάτων και  
την αυτόματη τρισδιάστατη ανακατασκευή  
θραυσμένων αντικειμένων**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Σολομών Α. Ζάννος

**Συμβουλευτική Επιτροπή :** Ηλίας Κουκούτσης

Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς

Βασίλειος Λούμος

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 3<sup>η</sup> Μαρτίου 2017.

.....

Ηλίας Κουκούτσης  
Επ. Καθηγητής  
ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....

Μιχαήλ Θεολόγου  
Ομ. Καθηγητής  
ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....

Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς  
Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....

Νικόλαος Ουζούνογλου  
Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....

Μιχαήλ Παναγόπουλος  
Επ. Καθηγητής, Τμήμα  
Τεχνών Ήχου και Εικόνας,  
Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Αθήνα, Μάρτιος 2017

.....

Βασίλειος Λούμος  
Ομ. Καθηγητής  
ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....

Χρήστος Αναγνωστόπουλος  
Αν. Καθηγητής, Τμήμα  
Πολιτισμικής Τεχνολογίας  
και Επικοινωνίας,  
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

.....  
Σολομών Α. Ζάννος

Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Σολομών Α. Ζάννος, 2017

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διατριβή αναπτύσσονται μεθοδολογίες ανάλυσης, αναγνώρισης και προσαρμογής προτύπων. Κάθε μία από τις μεθοδολογίες αυτές υποστηρίζει την ανάπτυξη αντίστοιχου πληροφοριακού συστήματος για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων στις περιοχές της Βιοϊατρικής και της Αρχαιομετρίας.

Ειδικότερα, εν πρώτοις, παρουσιάζεται μία νέα μέθοδος επεξεργασίας των βιοσημάτων που ανήκουν στην κλάση των προκλητών δυναμικών. Η εργασία βασίζεται στα αποτελέσματα ενός πειράματος που καταγράφει ηλεκτροεγκεφαλικά σήματα, τα οποία παράγονται όταν ένα υγιές υποκείμενο καλείται να πραγματοποιήσει ορθούς (Αριστοτέλειους) συλλογισμούς ή να εξάγει "παράδοξα" (κατά Ζήνωνα) συμπεράσματα. Με χρήση προηγμένων τεχνικών αναγνώρισης προτύπων και επεξεργασίας σημάτων, πραγματοποιείται επιτυχής κατάταξη των βιοσημάτων αυτών σε διαφορετικές ομάδες, ανάλογα με την εκάστοτε υποκείμενη εγκεφαλική λειτουργία. Επιπρόσθετα, η παρούσα διατριβή υποστηρίζει σαφώς την άποψη ότι η Αριστοτέλεια λογική συνεπαγωγή αφενός και τα "παράδοξα" συμπεράσματα του Ζήνωνος αφετέρου, πέρα από την ουσιαστικά διαφορετική φιλοσοφική τους διάσταση, γεννώνται από διαφορετικές εγκεφαλικές λειτουργίες. Από τη σχετική ανάλυση προκύπτει ότι οι λειτουργίες αυτές πιθανόν εδράζονται σε διαφορετικές περιοχές του εγκεφάλου.

Εν συνεχεία, στην παρούσα διατριβή παρουσιάζονται επίσης καινοτόμες μέθοδοι αναγνώρισης προτύπων και επεξεργασίας τρισδιάστατων αναπαραστάσεων θραυσμάτων με σκοπό τον αυτόματο εντοπισμό πιθανών συνενώσεων των θραυσμάτων αυτών. Συγκεκριμένα, οι σχετικές μεθοδολογίες που αναπτύχθηκαν, εφαρμόστηκαν στη μερική εικονική αυτόματη ανακατασκευή θραυσμένων αρχαιολογικών ευρημάτων πολύ μεγάλης ιστορικής και αρχαιολογικής σημασίας. Τα ευρήματα αυτά αφορούν τόσο σε μυκηναϊκές τοιχογραφίες του 13 αιώνα π.Χ. από την ανασκαφή της Τίρυνθας, όσο και σε θραύσματα/όστρακα ταφικών αγγείων της ίδιας περιόδου που φυλάσσονται στην Προϊστορική Συλλογή του Εθνικού Αρχαιολογικού Μουσείου.

Συγκεκριμένα, αναπτύχθηκαν μία πρωτότυπη μέθοδος ανακατασκευής θραυσμένων αντικειμένων που έχουν την μία πλευρά τους σχεδόν επίπεδη, όπως είναι η περίπτωση των θραυσμένων τοιχογραφιών, ως και μία πρωτότυπη μέθοδος ανακατασκευής θραυσμένων αντικειμένων οποιασδήποτε γεωμετρικής μορφής, όπως είναι η περίπτωση των οστράκων ταφικών αγγείων. Η προσέγγιση που ακολουθήθηκε, λαμβάνει υπόψη την τρισδιάστατη απεικόνιση των θραυσμάτων, η οποία επιτυγχάνεται με τη χρήση τρισδιάστατου σαρωτή (3d scanner). Ακολουθώντας, η μεθοδολογία χρησιμοποιεί ένα σύνολο μαθηματικά θεμελιωμένων κριτηρίων ομοιότητας, επί τη βάση της Θεωρίας Μεταβολών, που οδηγούν στην αυτόματη διαπίστωση του εάν δύο θραύσματα μπορούν να συναρμολογηθούν μεταξύ τους ή όχι. Τα κριτήρια είναι είτε απορριπτικά, δηλαδή αποφαίνονται με μεγάλη επιτυχία εάν δύο θραύσματα δεν ταιριάζουν σε μία συγκεκριμένη θέση είτε ικανά, καθώς προσφέρουν τελεσίδικη απόφαση προσαρμογής και εφαρμόζονται μόνο σε θέσεις που τα πρώτα κριτήρια το επιτρέπουν.

Η εφαρμογή των μεθόδων έγινε με ανάπτυξη ειδικού πρωτότυπου πληροφοριακού συστήματος που υλοποιούσε τα προαναφερθέντα κριτήρια. Το σύστημα αυτό επιβεβαίωσε συνεώσεις θραυσμάτων που σχημάτιζαν νησίδες τοιχογραφιών ως και τμημάτων αγγείων, αλλά και εντόπισε νέες ορθές νησίδες ενώσεων για πρώτη φορά.

**Λέξεις κλειδιά:** Προκλητά Δυναμικά, Προσαρμογή Προτύπων, Έγκυροι Συλλογισμοί, Αριστοτέλεια Λογική, Παράδοξα Ζήνωνα, Παράδοξη Συλλογιστική, Επεξεργασία Τρισδιάστατων Αναπαραστάσεων, Ανακατασκευή Θραυσμένων Αντικειμένων, Κριτήρια Προσαρμογής Θραυσμάτων, Ανασύνθεση Τοιχογραφιών, Θεωρία Μεταβολών, Γεωμετρικές Ομοιότητες

## **ABSTRACT**

In the present thesis, new methodologies are presented in the fields of Pattern Analysis, Pattern Recognition and Curve and Surface Fitting. Each one of these methodologies supports the development of a corresponding information system for successfully tackling actual problems in the areas of Biomedicine and Archaeometry.

Firstly, a new method is presented for processing bio-signals which belong to the class of Evoked Potentials. The study is based on the results of an experiment, which records the electroencephalic signals produced when a healthy subject is called upon to decide between a logical (Aristotelian) or paradoxical (according to Zeno) conclusion. Using advanced Pattern Recognition and Signal Processing techniques, these bio-signals are classified in groups, according to the underlying brain functionality. Additionally, this thesis supports the assumption that logical (Aristotelian) deductions and Zeno's paradoxes derive from different brain activities. The relative analysis strongly supports the argument that these activities may be based in different areas of the brain.

Secondly, in the present work, new methods are presented for Pattern Recognition and Processing of 3-dimensional representations of fragments, aiming at developing an automated system for the determination of possible matches between fragments of any shape. Specifically, the application of the developed methodologies offered partial, virtual reconstruction of various fragmented archaeological findings of great historical significance. These findings include Mycenaean wall paintings belonging to the 13<sup>th</sup> century BC from the Tiryns excavation, as well as fragments of burial vessels of the same era, stored in the Prehistoric Collection of the National Archaeological Museum.

Specifically, a first novel methodology has been developed for the reconstruction of fragmented objects, which have one side almost flat (as in the case of wall paintings), and a second one, for the reconstruction of fragmented objects of any geometrical form (as in the case of vessels). The introduced approach takes into consideration the 3-dimensional representations of the fragments, obtained via a 3-D scanner. Subsequently, the methodology uses a series of mathematically established criteria based on Calculus of Variations, which lead to the conclusion of whether two fragments match at a certain relative position. These criteria are either rejecting, in the sense that they conclude that two fragments do not match in a certain position, or sufficient, when they offer an irrevocable decision about matching.

The application of these methods was accomplished through the development of corresponding original information systems, implementing the aforementioned criteria in a proper order. These systems offered islands of matching fragments belonging both to wall paintings and vessels. These islands of fragments have been spotted and virtually reconstructed for the first time.

**Keywords:** Event Related Potentials (ERPs), Curve Fitting, Valid Reasoning, Aristotle's Reasoning, Paradox Syllogism, Zeno's Paradoxes, fragmented objects reassembly, wall paintings reconstruction, 3D representations processing, pattern matching criteria, pattern analysis, geometrical similarities, Calculus of Variations

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

*«Της παιδείας την μεν ρίζαν είναι πικράν,  
τον δε καρπόν γλυκύν (φασίν)»*

*Ισοκράτης*

Ολοκληρώνοντας τη συγγραφή της παρούσας διατριβής, οφείλω να ευχαριστήσω όλους εκείνους που άμεσα ή έμμεσα με στήριξαν στην προσπάθειά μου αυτή.

Πρώτα και πάνω από όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω εκ βάθους καρδιάς τον καθηγητή μου κύριο Κωνσταντίνο Παπαοδυσσέα για τη δυνατότητα που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί του και την άοκνη καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της διαδρομής. Αποτελεί πρότυπο καθηγητή και κινητήρια δύναμη όλης αυτής της ερευνητικής προσπάθειας. Για όσα μου προσέφερε μέσω της καθημερινής και κυριότερα, ανθρώπινης επαφής μαζί του, θα του είμαι για πάντα ευγνώμων.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κύριο Ηλία Κουκούτση για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, επιλέγοντάς με ως υποψήφιο διδάκτορα και δίνοντας μου την ευκαιρία να συνεργαστώ μαζί του στην εκπαιδευτική διαδικασία. Τον ευχαριστώ, επιπλέον, για τη σταθερή καθοδήγησή του και την ελευθερία που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτόν τον ερευνητικό τομέα, καθώς και τον καθηγητή κύριο Βασίλειο Λούμο για τη συνεχή βοήθεια και την αμέριστη στήριξη του σε όλα τα επίπεδα.

Ευχαριστώ, επίσης, τους καθηγητές κ. Μιχάλη Θεολόγου, κ. Νικόλαο Ουζούνου, κ. Χρήστο Αναγνωστόπουλο και κ. Μιχάλη Παναγόπουλο για την τιμή να συμμετέχουν στην επταμελή επιτροπή εξέτασης της διατριβής μου, καθώς και τις παρατηρήσεις και συμβουλές τους στη συγγραφή της.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά και τους φίλους και συναδέλφους της ερευνητικής μας ομάδας. Τους ευχαριστώ για τη καθημερινή συνεργασία και την αλληλοϋποστήριξη τους. Χωρίς αυτούς, η παρούσα εργασία θα ήταν αδύνατο να ολοκληρωθεί.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω και να αφιερώσω αυτή τη διατριβή στους δικούς μου ανθρώπους που με αγαπούν και βρίσκονται δίπλα μου, για όλη την κατανόηση και συμπαράσταση που μου έδειξαν όλα αυτά τα χρόνια.

Σολομών Α. Ζάννος  
Αθήνα, Μάρτιος 2017



## Πίνακας περιεχομένων

<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</b> .....	<b>5</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>6</b>
<b>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ</b> .....	<b>7</b>
<b>ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ</b> .....	<b>9</b>
<b>ΜΕΡΟΣ Α. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΚΛΗΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΠΟΥ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΈΓΚΥΡΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΑΡΑΔΟΞΗΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ</b> .....	<b>14</b>
<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	<b>15</b>
<b>2. ΜΙΑ ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΗΘΗΚΕ</b> .....	<b>18</b>
<b>3. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΕΝΤΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ</b> .....	<b>22</b>
3.1 Η ΟΜΑΔΑ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΩΝ ΚΑΙ Η ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ.....	22
3.2 Η ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ .....	23
3.3 ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΤΩΝ ΕΓΚΥΡΩΝ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΟΞΩΝ .....	25
<b>4. ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΕΝΑΝ "ΙΔΕΑΤΟ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΟ" ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΟΜΑΔΑ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΩΝ ΜΕ ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΠΡΟΚΛΗΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ.....</b>	<b>26</b>
4.1 ΒΗΜΑ 1 - ΕΝΑ ΠΡΩΤΟ ΣΤΑΔΙΟ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ .....	26
4.2 ΒΗΜΑ 2 - ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΣΤΑ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΑ ERPs ΣΗΜΑΤΑ .....	28
4.3 ΒΗΜΑ 3 - ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΕΝΑ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ.....	30
4.4 ΒΗΜΑ 4 - ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΡΩΤΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΟΜΑΔΩΝ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΩΝ ΜΕ ΠΑΡΟΜΟΙΑ ERPs ΣΗΜΑΤΑ .....	31
4.5 ΒΗΜΑ 5 - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΝΟΣ ΠΡΩΤΟΥ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΟΥ ΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΙΑΣ ΟΜΑΔΑΣ .....	35
4.6 ΒΗΜΑ 6 - Η ΤΕΛΙΚΗ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ERP ΣΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΤΕΛΙΚΟΙ ΙΔΕΑΤΟΙ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΟΙ ΚΑΘΕ ΟΜΑΔΑΣ .....	36
<b>5. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΙΔΕΑΤΩΝ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΩΝ ΤΩΝ ΕΓΚΥΡΩΝ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΟΞΩΝ ΚΑΙ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΥΤΟΥ ...</b>	<b>40</b>
<b>6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</b> .....	<b>46</b>
<b>ΜΕΡΟΣ Β. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ</b>	

<b>ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΔΙΑΝ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΑΝΑΣΚΑΠΤΟΝΤΑΙ ΚΑΤΑΚΕΡΜΑΤΙΣΜΕΝΑ .....</b>	<b>48</b>
<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....</b>	<b>49</b>
<b>2. ΑΠΟΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΑΙΧΜΗΣ (STATE OF THE ART) ΣΤΗΝ ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ .....</b>	<b>54</b>
<b>3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΤΩΝ ΑΝΑΠΤΥΧΘΕΙΣΩΝ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΩΝ .....</b>	<b>57</b>
3.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ .....	57
3.2 ΚΑΜΠΥΛΕΣ, ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ, ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ LAGRANGE.....	58
3.3 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN .....	72
3.4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ (CALCULUS OF VARIATIONS) 73	
3.4.1 <i>Εντοπισμός βέλτιστης καμπύλης μέσω ολοκλήρωσης Lagrangian της μορφής <math>Lx_t, x_t, y_t, y_t</math> .....</i>	<i>73</i>
3.4.2 <i>Εξισώσεις Euler-Lagrange για την περίπτωση Lagrangian της μορφής <math>Lq_1t, \dots, qNt, q_1t, \dots, qNt</math> .....</i>	<i>77</i>
3.4.3 <i>Παράδειγμα εφαρμογής των προαναφερθεισών εξισώσεων Euler-Lagrange: το ιστορικής σημασίας πρόβλημα του βραχιστόχρονου .....</i>	<i>78</i>
3.4.4 <i>Παράδειγμα εφαρμογής των προαναφερθεισών εξισώσεων Euler-Lagrange στην ανακατασκευή θραυσμένων αντικειμένων επί τη βάση πληροφορίας δύο διαστάσεων (φωτογραφιών) .....</i>	<i>82</i>
3.4.5 <i>Η γενική περίπτωση εύρεσης των στασιμών σημείων μιας Lagrangian δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών: διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange που περιγράφουν τη βέλτιστη επιφάνεια .....</i>	<i>91</i>
3.5 ΣΤΡΟΦΗ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΩΝΙΩΝ EULER.....	96
<b>4. ΠΡΩΤΟΤΥΠΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΤΗΝ ΜΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΤΟΥΣ ΣΧΕΔΩΝ ΕΠΙΠΕΔΗ.....</b>	<b>98</b>
4.1 ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ .....	98
4.2 ΨΗΦΙΟΠΟΙΗΣΗ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΩΝ ΤΟΙΧΟΓΡΑΦΙΩΝ.....	102
4.3 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΤΩΝ ΠΡΟΣ ΣΥΝΕΝΩΣΗ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ .....	107
4.3.1 <i>Ορισμός και εντοπισμός των άνω και κάτω επιπέδων του κονιάματος, καθώς και της παράπλευρης του επιφάνειας.....</i>	<i>108</i>

4.3.2	Ορισμός και εντοπισμός του κεντρικού άξονα κάθε κονιάματος.....	111
4.3.3	Δημιουργία στραμμένων εκδοχών του κάθε κονιάματος για την αντιμετώπιση του προβλήματος του τυχαίου προσανατολισμού αυτού.....	112
4.4	ΟΡΙΣΜΟΣ «ΣΤΑΘΕΡΟΥ» ΚΑΙ «ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΙΜΟΥ» ΚΟΝΙΑΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΖΕΥΓΟΣ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ...	113
4.5	ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΘΕΣΕΩΝ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΙΜΟΥ ΘΡΑΥΣΜΑΤΟΣ .....	115
4.6	ΠΡΩΤΟ ΙΚΑΝΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΔΥΟ ΚΟΝΙΑΜΑΤΩΝ: Ο ΟΓΚΟΣ ΕΝΟΣ ΚΑΤΑΛΛΗΛΑ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟΥ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΜΕΤΑΞΥ ΑΥΤΩΝ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ ΑΠΟ ΕΝΑ ΚΑΤΩΦΛΙ	119
4.7	ΔΕΥΤΕΡΟ ΑΝΑΓΚΑΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΔΥΟ ΚΟΝΙΑΜΑΤΩΝ: ΑΠΑΓΟΡΕΥΣΗ ΤΟΠΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ ΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΕΚΑΣΤΟΤΕ ΠΙΘΑΝΗ ΘΕΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ.	121
4.8	ΤΡΙΤΟ ΑΝΑΓΚΑΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΔΥΟ ΚΟΝΙΑΜΑΤΩΝ: ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΤΩΝ ΚΡΗΜΝΩΝ <b>EF</b> ΚΑΙ <b>ER</b> ΣΤΗΝ ΕΚΑΣΤΟΤΕ ΠΙΘΑΝΗ ΘΕΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ .....	122
4.9	ΤΕΤΑΡΤΟ ΑΝΑΓΚΑΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΔΥΟ ΚΟΝΙΑΜΑΤΩΝ: Η ΜΕΓΙΣΤΗ ΕΠΙΤΡΕΠΤΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ ΤΩΝ ΑΛΥΣΙΔΩΝ <b>GF</b> ΚΑΙ <b>GR</b> ΤΩΝ ΑΝΩ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΕΚΑΣΤΟΤΕ ΠΙΘΑΝΗ ΘΕΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ .....	124
4.10	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΠΟΥ ΕΦΑΡΜΟΣΤΗΚΕ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΑΝΑΣΥΝΘΕΣΗ ΤΩΝ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΠΡΟΑΝΑΦΕΡΘΕΝΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ.....	128
<b>5. ΠΡΩΤΟΤΥΠΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΩΝ ΑΓΓΕΙΩΝ .....</b>		
<b>134</b>		
5.1	ΨΗΦΙΟΠΟΙΗΣΗ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ ΤΑΦΙΚΩΝ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΩΝ ΑΓΓΕΙΩΝ ΤΗΣ ΜΥΚΗΝΑΪΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ	135
5.2	ΠΡΩΤΟ ΣΤΑΔΙΟ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΛΗΦΘΕΙΣΩΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΤΩΝ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ .....	139
5.2.1	Τριγωνοποίηση των επιφανειών κάθε θραύσματος.....	139
5.2.2	Εξαγωγή έσω και έξω περιγράμματος και καθορισμός των επιφανειών κάθε θραύσματος.....	139
5.2.3	Δημιουργία ενιαίου προσανατολισμού σε όλα τα θραύσματα.....	143
5.3	ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΥΖΥΓΩΝ "ΑΛΥΣΙΔΩΝ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ" ΣΤΟ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΚΑΘΕ ΘΡΑΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ΚΡΗΜΝΟΥ .....	144
5.4	ΕΠΙΛΟΓΗ "ΣΤΑΘΕΡΟΥ" ΚΑΙ "ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΙΜΟΥ" ΘΡΑΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΤΗΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΑΥΤΩΝ .....	147

5.5	ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΑΛΥΣΙΔΩΝ: ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΖΕΥΓΩΝ ΚΑΤΕΝΑΝΤΙ ΑΛΥΣΙΔΩΝ ΣΤΑ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΥΟ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ ....	149
5.6	ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΤΑ ΑΝΩ ΚΑΤΕΝΑΝΤΙ ΣΗΜΕΙΑ: Η ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΕ ΚΑΤΕΝΑΝΤΙ ΣΗΜΕΙΑ ΤΩΝ ΑΛΥΣΙΔΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΘΕΣΗ .....	151
5.7	ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΗ ΕΙΣΧΩΡΗΣΗΣ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΘΡΑΥΣΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΑΛΛΟ: Η ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΨΗΦΙΑΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΘΡΑΥΣΜΑΤΟΣ ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ ΝΑ ΕΙΣΧΩΡΕΙ ΕΙΚΟΝΙΚΑ ΣΤΟ ΑΛΛΟ ΣΤΗ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΘΕΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ. ΕΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΙΣΧΩΡΗΣΗ, ΑΥΤΗ ΑΙΡΕΤΑΙ ΜΕ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΤΡΟΠΟ	155
5.7.1	Υπολογισμός του όγκου εισχώρησης του ενός θραύσματος στο άλλο σε κάθε πιθανή θέση προσαρμογής που προέκυψε από την εφαρμογή των προηγούμενων κριτηρίων .....	156
5.7.2	Διαδικασία άρσης της εισχώρησης/ εμπλοκής μεταξύ των θραυσμάτων σε κάθε πιθανή θέση προσαρμογής με χρήση αρχών Λογισμού των Μεταβολών .....	169
5.8	ΤΕΛΕΣΙΔΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΠΟΔΟΧΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΔΙΑΚΕΝΟΥ: ΤΕΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΧΗ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΔΥΟ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΚΕΝΟΥ ΠΟΥ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΟΥΣ ΚΡΗΜΝΟΥΣ ΕΠΑΦΗΣ ΑΥΤΩΝ <b>SF</b> ΚΑΙ <b>SR</b> ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΑΡΣΗ ΤΗΣ ΕΜΠΛΟΚΗΣ ΤΟΥΣ .....	173
5.9	Ένα επιπλέον ζεύγος σημαντικών αναγκαιών κριτηρίων αποδοχής μιας θέσης προσαρμογής δυο θραυσμάτων .....	178
5.9.1	Διατύπωση των εξισώσεων Euler-Lagrange για τη μέγιστη δυνατή διαφορά της Γεωμετρίας δύο κατέναντι κρημνών επαφής <b>SF</b> και <b>SR</b> υπό τον περιορισμό ο μεταξύ τους όγκος να είναι μικρότερος ενός κατωφλίου .....	179
5.9.2	Το πρώτο σημαντικό, αναγκαίο κριτήριο διαφοράς Γεωμετρίας μέσω του προσδιορισμού του πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda$ για τον έλεγχο της προσαρμογής δύο θραυσμάτων σε μία θέση .....	184
5.9.3	Υπολογισμός της σχέσης μεταξύ της διαφοράς των γωνιών των καθέτων διανυσμάτων στους κατέναντι κρημνούς και του όγκου του διακένου που αυτοί ορίζουν....	196
5.9.4	Δεύτερο σημαντικό, αναγκαίο κριτήριο προσαρμογής: η σχέση της συνολικής διαφοράς των γωνιών $\Omega$ των καθέτων διανυσμάτων και του όγκου $V$ του διακένου των κρημνών	209
5.10	ΑΛΛΗΛΟΥΧΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΥ ΕΝΩΣΕΩΝ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ .....	212

**6. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΔΥΟ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΟΥ ΑΝΑΠΤΥΧΘΗΚΑΝ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΗ ΑΥΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ, ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ**

**216**

6.1	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΑΝΑΠΤΥΧΘΕΙΣΑΣ ΜΕΘΟΔΟΥ. ΕΙΚΟΝΙΚΗ ΑΝΑΣΥΝΘΕΣΗ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΩΝ ΤΟΙΧΟΓΡΑΦΙΩΝ .....	216
6.1.1	<i>Εφαρμογή της μεθόδου στην ανακατασκευή τεχνητά θραυσμένου αντικειμένου.</i>	216
6.1.2	<i>Εφαρμογή της μεθόδου στην ανακατασκευή θραυσμένων προϊστορικών τοιχογραφιών πολύ μεγάλης αρχαιολογικής σημασίας .....</i>	217
6.2	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΑΝΑΠΤΥΧΘΕΙΣΑΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΣΤΗΝ ΕΙΚΟΝΙΚΗ ΑΝΑΣΥΝΘΕΣΗ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΤΑΦΙΚΩΝ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΩΝ ΑΓΓΕΙΩΝ ΤΗΣ ΜΥΚΗΝΑΪΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ	230
	<b>ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....</b>	<b>239</b>
	<b>ΣΥΝΟΠΤΙΚΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ .....</b>	<b>245</b>

**ΜΕΡΟΣ Α. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΚΛΗΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΠΟΥ  
ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΈΓΚΥΡΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ  
ΠΑΡΑΔΟΧΗΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ**

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μία από τις πιο ανεπτυγμένες διανοητικές ικανότητες των ανθρώπων είναι η ικανότητα τους να πραγματοποιούν συλλογισμούς. Στην επαγωγική συλλογιστική του Αριστοτέλη, ο συλλογισμός ξεκινά με δύο διατυπώσεις της μορφής: "Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί", "Όλοι οι Αθηναίοι είναι άνθρωποι". Ο Αριστοτέλης υποστήριξε ότι αυτές οι διατυπώσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι "όλοι οι Αθηναίοι είναι θνητοί" με απόλυτη βεβαιότητα. Μια σειρά από σχέσεις που περιγράφονται από το κατηγορηματικό συνδετικό ρήμα "είναι" και καθορίζονται από το ποσοτικό "όλοι", αποτελούν τη λογική μορφή της επαγωγής, καθορίζοντας την ισχύ του συγκεκριμένου συλλογισμού [18]. Η επαγωγική συλλογιστική ανέκαθεν υπήρξε αντικείμενο ενεργής φιλοσοφικής και ψυχολογικής έρευνας, αλλά μόνο πολύ πρόσφατα, προτάθηκαν συγκεκριμένα μοντέλα κωδικοποίησης και αποσαφήνισης του υποκείμενου μηχανισμού. Εντούτοις, ο υποκείμενος αυτός μηχανισμός της ανθρώπινης σκέψης είναι ακόμα ελάχιστα κατανοητός [7], [19].

Εν αντιθέσει με τον Αριστοτέλη, πρέπει να σημειωθεί ότι ο Ζήνων ο Ελεάτης, περίπου 2500 χρόνια πριν, συνέλαβε και διατύπωσε κάποια παράδοξα με σκοπό να αποδείξει την ασυνέπεια των Πυθαγόρειων ιδεών περί της πολλαπλότητας και της αλλαγής. Για να το πετύχει αυτό, ο Ζήνων βασίστηκε στο αξίωμα της ενότητας και της μονιμότητας της ύπαρξης (μια θεμελιώδης αρχή του δόγματος του δασκάλου του, του Παρμενίδη). Υπό αυτήν την έννοια, εφάρμοσε τη μέθοδο της έμμεσης απόδειξης των παραδόξων του χρησιμοποιώντας 3 βασικά βήματα: (α) προσωρινή υιοθέτηση μιας θέσης στην οποία αντιτίθετο, (β) την προσπάθεια να εξάγει ένα παράλογο συμπέρασμα ή μία αντίφαση και συνεπακόλουθα (γ) να αποδομήσει την υπόθεση που είχε, αρχικά, υιοθετήσει προσωρινά. Αυτά τα παράδοξα έχουν γίνει και παραμένουν αντικείμενο εκτεταμένης μελέτης και αναζήτησης από τους φιλοσόφους και τους μαθηματικούς και επηρέασαν σημαντικά την εξέλιξη της έρευνας σε αυτό το χώρο [1], [6], [20].

Γενικά, τα παράδοξα του Ζήνωνος αναδεικνύουν τη σχέση της λογικής με το φαινομενικά αδύνατο, που κατά κανόνα είναι αντίθετο με αυτό που διδάσκει η καθημερινή εμπειρία. Θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι ο Ζήνων ανέδειξε τις

αντιφάσεις σε αυτά που θεωρούνται καθημερινά ως αυτονόητα, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει έναν ερευνητή στο να διερευνήσει και να ελέγξει την ορθότητα υποθέσεων που υιοθετούνται άκριτα στην καθημερινή ζωή. Η συλλογιστική αυτή μπορεί εξάλλου να θεωρηθεί ως παρόμοια με τις γνωστικές ψευδαισθήσεις. Σύμφωνα με μερικούς ερευνητές [1], οι εν λόγω γνωστικές ψευδαισθήσεις φαίνεται να παραβιάζουν τους κανόνες της λογικής σκέψης μόνο σε φιλοσοφικό επίπεδο.

Η φύση των νοητικών διαδικασιών που συνδέονται με τα παράδοξα δεν έχει μελετηθεί εκτενώς και είναι ακόμα ένα ανοικτό πεδίο έρευνας. Μία τέτοια έρευνα δεν έχει μόνο ακαδημαϊκό ενδιαφέρον αλλά είναι επίσης και υψίστης σημασίας για την κλινική πράξη. Επομένως, για όλους τους προαναφερθέντες λόγους, είναι πολύ ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς τα παράδοξα του Ζήνωνα σε αντίθεση με την επαγωγική λογική του Αριστοτέλη χρησιμοποιώντας τα μέσα της σύγχρονης τεχνολογίας. Οι προαναφερθείσες, φαινομενικά άσχετες μεταξύ τους έννοιες, φαίνεται να αντανακλούν συγκεκριμένους βαθείς συμφυείς γνωστικούς μηχανισμούς που σχετίζονται με τη θεμελιώδη λειτουργία του συλλογισμού στην ακραία του μορφή [22].

Ως εκ τούτου, η παρούσα μελέτη αντλεί δεδομένα από σχετικά πραγματοποιηθέντα πειράματα που σχεδιάστηκαν για να μελετήσουν υγιή άτομα που εμπλέκονται σε δύο συλλογιστικές διαδικασίες: τους έγκυρους κατά Αριστοτέλη συλλογισμούς αφενός και τα παράδοξα του Ζήνωνα αφετέρου [48], [49].

Τα προαναφερθέντα πειράματα βασίζονται στην καταγραφή προκλητών δυναμικών, ενώ στο υποκείμενο υποβάλλονται ερωτήσεις σχετικά με έγκυρους και παράδοξους συλλογισμούς. Τα προκλητά δυναμικά είναι ευρέως γνωστά και χρησιμοποιούνται ως εργαλεία για την αποτύπωση των εγκεφαλικών λειτουργιών και την επεξεργασία της σχετικής πληροφορίας και φαίνεται να είναι ευαίσθητα σε λεπτές νευροφυσιολογικές αλλαγές [11], [12], [16], [15], [4], [3], [23]. Ο κύριος στόχος της παρούσας εργασίας είναι μέσω της ψηφιακής επεξεργασίας και αυτόματης κατάταξης των καταγεγραμμένων προκλητών δυναμικών, να θεμελιώσει, κατά το δυνατόν, την ύπαρξη ή μη συσχέτισης μεταξύ της Αριστοτέλειας συλλογιστικής αφενός και αυτής που προκαλείται κατά τη διάρκεια της έκθεσης σε παράδοξα αφετέρου. Μια συγκριτική μελέτη των τρόπων ενεργοποίησης των εγκεφαλικών λειτουργιών αναφορικά με την



Αριστοτέλεια λογική και τα παράδοξα του Ζήνωνα, θα μπορούσε να αποκαλύψει κρίσιμες πτυχές της συλλογιστικής διαδικασίας, που σχετίζονται με την αντίληψη, την προσοχή και τη γνωστική συμπεριφορά. Σημειώνουμε ότι οι πτυχές αυτές είναι μη παρατηρήσιμες με μεθόδους μελέτης μόνο της συμπεριφοράς.

## 2. ΜΙΑ ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΗΘΗΚΕ

Ένας αριθμός σαράντα πέντε υγιών ατόμων συμμετείχαν σε ένα πείραμα, όπου κάθε ένα από αυτά κλήθηκε να πιστοποιήσει την εγκυρότητα ή μη μιας σειράς συλλογισμών. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας, τριάντα ηλεκτρόδια Ag/AgCl είχαν τοποθετηθεί στο κρανίο του κάθε υποκειμένου, προκειμένου να καταγράψουν την ηλεκτρική δραστηριότητα του εγκεφάλου του, σύμφωνα με το Διεθνές σύστημα 10-20 του Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος (HEΓ) [10]. Τα δυναμικά του εγκεφάλου του κάθε υποκειμένου που κατεγράφησαν (προκλητά δυναμικά), κατεγράφησαν για διάστημα 2000 ms και ψηφιοποιήθηκαν με δειγματοληπτικό ρυθμό ίσο με 1 kHz. Περιορίσαμε το παραχθέν ψηφιακό σήμα κάθε υποκειμένου στο διάστημα (1100,1400] ms για λόγους που θα αναλύσουμε στην επόμενη Ενότητα 4.1. Συμβολίζουμε το περιορισμένο ψηφιακό σήμα των προκλητών δυναμικών με  $R_{k,q,j}^X$ , όπου ο δείκτης  $k$  διατρέχει τα ηλεκτρόδια, το  $q$  τον αριθμό των ερωτήσεων και το  $j$  τον αριθμό των ατόμων. Για να εξηγήσουμε τον άνω δείκτη, πρέπει να αναφέρουμε ότι οι προαναφερθέντες συλλογισμοί χωρίζονται σε 2 κατηγορίες, μία που αντιπροσωπεύει την έγκυρη συλλογιστική του Αριστοτέλη, όπου  $X = V$ , και μία που εκφράζει τα παράδοξα του Ζήνωνα, όπου  $X = P$ .

Η βασική ιδέα πάνω στην οποία βασίστηκε η παρούσα μελέτη μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως:

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει πράγματι μία κατηγορία κοινών εγκεφαλικών διεργασιών, οι οποίες ενεργοποιούνται όταν ένα άτομο καλείται να πιστοποιήσει την ορθότητα ή μη ενός έγκυρου ή παράδοξου συλλογισμού. Τότε, μπορεί κάποιος εύλογα να περιμένει ότι αυτή η κοινή υποκείμενη διεργασία θα αντανakλά στη μορφή κάποιου ηλεκτροεγκεφαλικού σήματος  $R_{k,j}^X$ . Για το λόγο αυτό, διατυπώνουμε το θεμελιώδη ισχυρισμό ότι για κάθε ομάδα, εφόσον αυτή υπάρχει, ατόμων που εμφανίζουν την ίδια νοητική συμπεριφορά σε σχέση με την έγκυρη συλλογιστική ή τα παράδοξα, υπάρχει μία υποφώσκουσα HEΓ καμπύλη πρότυπο  $\Pi_{k,j}^X$ , όπου ο δείκτης  $j$  αυτή τη φορά διατρέχει τις ομάδες αυτές των ατόμων. Επιπλέον, διατυπώνουμε τον ισχυρισμό ότι τα διάφορα

σήματα  $R_{k,j}^X$ , τα οποία αντιστοιχούν σε άτομα με παρόμοια νοητική συμπεριφορά απέναντι στην έγκυρη συλλογιστική και τα παράδοξα, είναι θορυβώδεις παραλλαγές/εκδοχές της  $\Pi_{k,j}^X$ . Επιπρόσθετα, διατυπώνουμε τη λογική υπόθεση ότι η παραμόρφωση του σήματος  $\Pi_{k,j}^X$ , η οποία δημιουργεί το σήμα  $R_{k,j}^X$  οφείλεται σε δύο ουσιωδώς διαφορετικούς παράγοντες: (α) έναν αιτιώδη και (β) έναν ακανόνιστο/στοχαστικό θόρυβο. Ο αιτιώδης παράγοντας της παραμόρφωσης σχετίζεται με εγκεφαλικές λειτουργίες που δεν επηρεάζουν την ουσιώδη πληροφορία του σήματος  $\Pi_{k,j}^X$ . Ειδικότερα, υποθέτουμε ότι οι πιο σημαντικές λειτουργίες που ανήκουν σε αυτό τον παράγοντα είναι: (i) η ένταση – πλάτος του εκπεμπόμενου ηλεκτρομαγνητικού κύματος, όπως αποτυπώνεται και στη μεταβλητότητα του πλάτους των προκλητών δυναμικών και (ii) η ταχύτητα απόκρισης του ατόμου. Για να άρουμε αυτούς τους αιτιώδεις παράγοντες, εφαρμόζουμε κατάλληλους μετασχηματισμούς στο σήμα των προκλητών δυναμικών  $R_{k,j}^X$ , ενώ για να εξαλείψουμε τον ακανόνιστο/τυχαίο θόρυβο, έχουμε αναπτύξει μία νέα προσέγγιση η οποία οδηγεί σε έναν πολύ καλό υπολογισμό του  $\Pi_{k,j}^X$ .

Με βάση τα παραπάνω, αναπτύξαμε μία μέθοδο για το διαχωρισμό των υποκειμένων σύμφωνα με την απόκρισή τους σε έγκυρους συλλογισμούς και παράδοξα, η οποία συνίσταται από τα επόμενα βήματα:

Βήμα 1 - Πραγματοποιήσαμε μία πρώτη κατάλληλη επεξεργασία των καταγεγραμμένων προκλητών δυναμικών  $R_{k,j}^X$ .

Βήμα 2 - Ορίσαμε ένα είδος ομοιοθεσίας ως προς το πλάτος και το χρόνο, την οποία εφαρμόσαμε σε κάθε σήμα  $R_{k,j}^X$  (Ενότητα 4.2). Αυτό έγινε για να εξαλείψουμε, όσο το δυνατόν, τις παραμορφώσεις που οφείλονται στους προαναφερθέντες αιτιώδεις παράγοντες και οι οποίες αντιστοιχούν σε δευτερογενείς διαφορές στις λογικές διεργασίες των υποκειμένων.

Βήμα 3 - Για να ελέγξουμε την ομοιότητα δύο καμπυλών, ορίσαμε μία κατάλληλη συνάρτηση λάθους, η οποία θα παρουσιαστεί στην Ενότητα 4.3. Αυτή η συνάρτηση λάθους λαμβάνει υπόψιν της τους μετασχηματισμούς που ορίσαμε στο βήμα 2 και είναι, πρακτικά, ανεξάρτητη της ενέργειας της καμπύλης.

Βήμα 4 - Σχηματίσαμε υπο-ομάδες από παρόμοιες καμπύλες εφαρμόζοντας τεχνικές βέλτιστης προσαρμογής στα σήματα  $R_{k,j}^X$  χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των βημάτων 2 και 3. Ειδικότερα, θέσαμε προς στιγμή κάθε σήμα  $R_{k,j}^X$  ως σήμα αναφοράς και αφήσαμε να ταιριάξουν επάνω του όλα τα ERP σήματα της ίδιας κλάσης  $X$  (ξεχωριστά για τους έγκυρους συλλογισμούς και τα παράδοξα) στη βάση των μετασχηματισμών και της συνάρτησης λάθους που ορίστηκαν στα βήματα 2 και 3. Όσο το λάθος προσαρμογής της κάθε καμπύλης με την καμπύλη αναφοράς παρέμενε μικρότερο από ένα κατάλληλα επιλεγμένο κατώφλι, καταχωρούσαμε προσωρινά την καμπύλη αυτή στην ίδια υπο-ομάδα, έστω την  $G_{k,j}^X$ . Με αυτόν τον τρόπο, για κάθε ERP  $R_{k,j}^X$  ως καμπύλη αναφοράς, αποδώσαμε προσωρινά στην ομάδα  $G_{k,j}^X$  όλα τα άλλα ERP σήματα που βέλτιστα προσαρμόστηκαν σε αυτήν με σφάλμα μικρότερο από ένα επιλεγμένο κατώφλι (Ενότητα 4.4).

Βήμα 5 – Επιλέξαμε την αρχική ομάδα με το μεγαλύτερο πλήθος υποκειμένων, έστω την  $G_{k,1}^X$ . Σε αυτή την ομάδα, παράξαμε ένα είδος "ιδεατού αντιπροσώπου"  $M_{k,1}^X$  υπολογίζοντας έναν κατάλληλο μέσο όρο των καμπυλών που ήταν μέλη της ομάδας αυτής. Μέσω της διαδικασίας αυτής, ο ακανόνιστος/τυχαίος θόρυβος των διάφορων  $R_{k,j}^X$  εξαλείφεται, προσφέροντας έτσι μία καλή πρώτη εκτίμηση του ιδεατού αντιπροσωπευτικού σήματος  $\Pi_{k,1}^X$  της ομάδας των υποκειμένων που την απαρτίζουν (Ενότητα 4.5).

Βήμα 6 - Επαναλάβαμε τη διαδικασία που περιεγράφη στα βήματα 4 και 5, χρησιμοποιώντας αυτήν τη φορά, ως πρότυπη καμπύλη την  $M_{k,1}^X$  αντί μιας  $R_{k,j}^X$ . Κατά την εφαρμογή της διαδικασίας αυτής, θεωρούμε ότι όσο το λάθος προσαρμογής παραμένει μικρότερο από το κατώφλι που περιεγράφη στο βήμα 4, οι καμπύλες που ταιριάζουν στην πρότυπη ανήκουν σε αυτήν την ομάδα. Με αυτόν τον τρόπο, πετυχαίνουμε μία νέα εκτίμηση για την ομάδα  $G_{k,1}^X$  ανεξάρτητη της επιλογής της καμπύλης που έχει παίξει το ρόλο της πρότυπης, εφόσον αυτή περιέχεται σαν μέλος της ομάδας.

Για κάθε σήμα-μέλος αυτής της ομάδας  $R_{k,m}^X$ , επαναλάβαμε την ίδια διαδικασία λαμβάνοντας αντίστοιχα μέσα σήματα  $M_{k,1,m}^X$  και εκτιμήσεις  $G_{k,1,m}^X$  της πρώτης ομάδας.

Καθορίσαμε τελεσιδίκως την πρώτη ομάδα  $G_{k,1}^X$  ως  $G_{k,1}^X = \bigcap_m G_{k,1,m}^X$  με ιδεατό αντιπρόσωπο αυτής εκείνο το  $M_{k,1,m}^X$  που προσέφερε το μικρότερο συνολικό λάθος προσαρμογής των μελών της ομάδας σε αυτό.

Στη συνέχεια, αφαιρέσαμε τα σήματα αυτής της ομάδας από τα συνολικά και εφαρμόσαμε την προαναφερθείσα διαδικασία στα υπόλοιπα σήματα. Με αυτόν τον τρόπο, καταλήξαμε σε έναν συγκεκριμένο, ιδιαίτερα μικρό αριθμό ομάδων  $G_{k,i}^X$  για κάθε εγκεφαλική λειτουργία  $X$ , όπου ο δείκτης  $i$  τώρα αναφέρεται στον αύξοντα αριθμό κάθε διακριτής ομάδας και όχι στον αύξοντα αριθμό του κάθε υποκειμένου που το συμβολίζουμε με το δείκτη  $j$  (Ενότητα 4.6). Παραδείγματος χάριν, αναφερόμενοι στους έγκυρους συλλογισμούς, ο δείκτης  $j$  διατρέχει τους αριθμούς από το 1 έως το 45 αντιπροσωπεύοντας, δηλαδή, τον αύξοντα αριθμό του κάθε υποκειμένου, ενώ μετά την ολοκλήρωση των 6 αυτών βημάτων, ο δείκτης  $i$  διατρέχει τους αριθμούς από το 1 έως το συνολικό αριθμό ομάδων που δημιουργήθηκαν ανά ηλεκτρόδιο και κλάση  $X$ . Όπως πριν, για κάθε ομάδα  $G_{k,i}^X$ , επιλέξαμε ως ιδεατό αντιπρόσωπο αυτής την μέση καμπύλη  $M_{k,i,m}^X$  που προσέφερε το χαμηλότερο συνολικό σφάλμα προσαρμογής των σημάτων της  $G_{k,i}^X$  σε αυτήν. Τον ιδεατό αντιπρόσωπο αυτόν συμβολίσαμε ως  $\Pi_{k,i}^X$ .

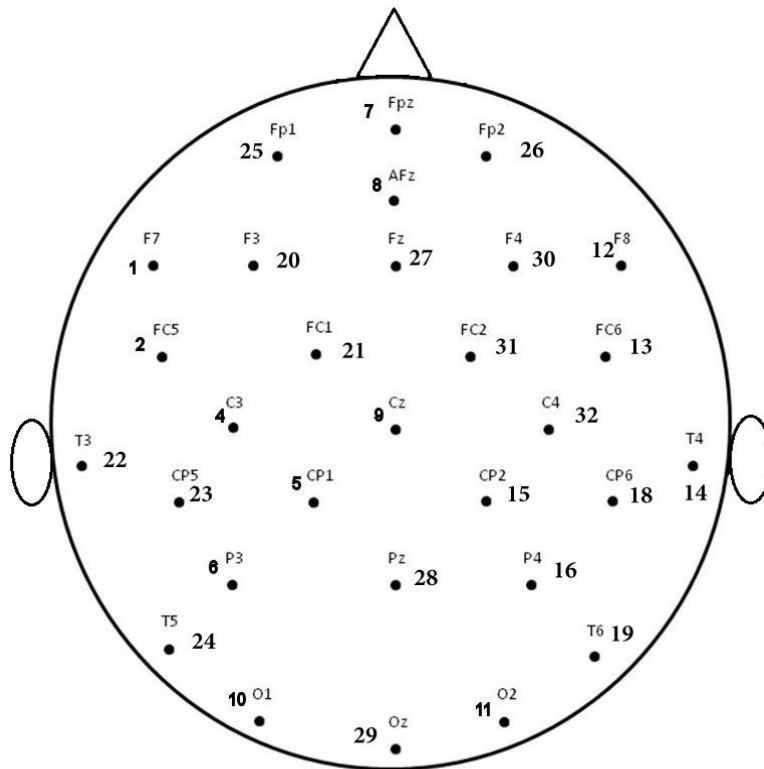
Βήμα 7 - Η τελική απόφαση σχετικά με την πιθανή διαφοροποίηση των σημάτων που σχετίζονται με την έγκυρη συλλογιστική από αυτά που σχετίζονται με τα παράδοξα, εξήχθη μέσω της ακόλουθης διαδικασίας: Αρχικά, σε κάθε υποκείμενο ξεχωριστά, αποδώσαμε τόσο τον ιδεατό αντιπρόσωπο της ομάδας που ανήκει, όσον αφορά τους έγκυρους συλλογισμούς  $\Pi_{k,i}^V$ , όσο και τον ιδεατό αντιπρόσωπο της ομάδας που ανήκει όσον αφορά τα παράδοξα  $\Pi_{k,i}^P$ . Στη συνέχεια, υποθέσαμε ότι οι διαφοροποιήσεις των εγκεφαλικών διεργασιών  $V$  και  $P$  αντικατοπτρίζονται στη διαφορά των ιδεατών αντιπροσώπων  $\Pi_{k,i}^V$  και  $\Pi_{k,i}^P$ , όπου η σύγκριση αυτών των δύο καμπυλών γίνεται ακριβώς όπως στα βήματα 2 και 3. Τελικά, η απόφαση σχετικά με την πιθανή διαφοροποίηση μεταξύ των σημάτων της έγκυρης συλλογιστικής και των παράδοξων λαμβάνεται με κατάλληλα, προτεινόμενα στατιστικά κριτήρια (Ενότητα 5).

### **3. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΕΝΤΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ**

#### **3.1 Η ΟΜΑΔΑ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΩΝ ΚΑΙ Η ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ**

Το πείραμα στο οποίο βασίστηκε η παρούσα εργασία έχει εγκριθεί από την Επιτροπή Δεοντολογίας του Ερευνητικού Πανεπιστημιακού Ινστιτούτου Ψυχικής Υγιεινής (ΕΠΙΨΥ). Στο διεξαχθέν πείραμα συμμετείχαν σαράντα πέντε υγιή άτομα, ηλικίας 33.1 ετών κατά μέσο όρο (τυπική απόκλιση 9.2) [48], [49]. Όλοι οι συμμετέχοντες είχαν κανονική όραση και κανένας από αυτούς δεν είχε νευρολογικό ή ψυχιατρικό ιστορικό ασθένειας.

Ο κάθε συμμετέχων καθόταν μπροστά από την οθόνη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή και σε απόσταση περίπου 1 μέτρου από αυτήν. Στο κεφάλι του κάθε συμμετέχοντα, σύμφωνα με το Διεθνές Σύστημα 10-20 του Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος (ΗΕΓ), προσκολλήθηκαν 30 Ag/AgCl ηλεκτρόδια για να καταγράψουν τα εγκεφαλικά σήματα - προκλητά δυναμικά (χάρτης ηλεκτροδίων φαίνεται στην Εικόνα 1). Δύο επιπλέον ηλεκτρόδια είχαν προσκολληθεί στους λοβούς των αφτιών του κάθε υποκειμένου με σκοπό τα καταγεγραμμένα από αυτά σήματα να χρησιμοποιηθούν ως σήματα αναφοράς.



**Εικόνα 1 - Ο χάρτης με τις θέσεις των 30 ηλεκτροδίων που χρησιμοποιήθηκαν για την καταγραφή των εγκεφαλικών σημάτων - προκλητών δυναμικών. Κάθε ηλεκτρόδιο χαρακτηρίζεται μοναδικά από έναν αύξοντα αριθμό.**

### **3.2 Η ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ**

Σε κάθε υποκείμενο, τέθηκε ένα σύνολο 39 ερωτήσεων, η μία μετά την άλλη, μέσω της οθόνης ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. Το περιεχόμενο και ο σκοπός αυτών των ερωτήσεων θα παρουσιαστούν αναλυτικά στην επόμενη υποενότητα. Κάθε ερώτηση εμφανιζόταν στην οθόνη του υπολογιστή για μία χρονική περίοδο ανάλογη του αριθμού των χαρακτήρων που συνθέταν αυτή την ερώτηση. Για παράδειγμα, μία ερώτηση που αποτελείτο από 92 χαρακτήρες, παρέμενε στην οθόνη του υπολογιστή για χρονικό διάστημα περίπου 11 δευτερολέπτων. Στο τέλος αυτής της περιόδου, η ερώτηση εξαφανιζόταν και μία μαύρη εικόνα έπαιρνε τη θέση της στην οθόνη για μία

περίοδο 1000 ms. Ακολουθώς, δύο ακουστικά ερεθίσματα διάρκειας 100 ms το καθένα ακουγόντουσαν με διαφορά 900 ms το ένα από το άλλο.

Μετά το δεύτερο ακουστικό ερέθισμα, το υποκείμενο καλείτο να πιστοποιήσει την ορθότητα ή μη της ερώτησης που προηγήθηκε. Για να αποφευχθεί εξοικείωση (αλλοτριώση) με τις συνθήκες του πειράματος, η παρουσίαση της επόμενης ερώτησης στην οθόνη του υπολογιστή γινόταν μετά από ένα μεταβλητό χρονικό διάστημα, το οποίο κυμαινόταν από 4 έως 9 δευτερόλεπτα μετά την ολοκλήρωση της προηγούμενης απάντησης του υποκειμένου.

Τονίζουμε ότι τα αποκτηθέντα σήματα καταγράφονταν για ένα χρονικό διάστημα 2000 ms και ειδικότερα, για 1000 ms πριν το πρώτο ακουστικό ερέθισμα (HEΓ) και για 1000 ms μετά από αυτό (Προκλητά Δυναμικά). Η προαναφερθείσα ακολουθία των βημάτων του πειράματος, μαζί με την αντίστοιχη διάρκεια του κάθε βήματος, παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1).

<b>Ενέργεια</b>	<b>Χρονική διάρκεια</b>
Οπτική παρουσίαση ενός έγκυρου ή ενός παράδοξου συλλογισμού	Ανάλογα του αριθμού των χαρακτήρων του συλλογισμού (περίπου 25 χαρακτήρες ανά 3 s)
Μαύρη εικόνα στην οθόνη	1000 ms
Καταγραφή HEΓ	1000 ms
Πρώτο ακουστικό ερέθισμα	100 ms
Καταγραφή προκλητών δυναμικών	1000 ms
Δεύτερο ακουστικό ερέθισμα	100 ms
Έναρξη απόκρισης	Σε διάστημα μικρότερο ή ίσο των 5 s
Παρουσίαση επόμενου συλλογισμού	4-9 s από την προηγούμενη απάντηση του υποκειμένου

**Πίνακας 1- Η ακολουθία των βημάτων του πειράματος μαζί με την χρονική τους διάρκεια σε ms (1 ms = 1/1000 s)**



### **3.3 Το ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΤΩΝ ΕΓΚΥΡΩΝ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΟΞΩΝ**

Τα δύο σύνολα, των 39 ερωτήσεων έκαστο, που τέθηκαν σε κάθε συμμετέχοντα ξεχωριστά μέσω της οθόνης του υπολογιστή, σχεδιάστηκαν με σκοπό να πιστοποιήσουν την ανθρώπινη εγκεφαλική λειτουργία σε σχέση με δύο λογικές διεργασίες, ήτοι (α) τους συλλογισμούς που μπορούν να χαρακτηριστούν ως "έγκυροι" και (β) τους συλλογισμούς που μπορούν να χαρακτηριστούν ως "παράδοξους". Όπως προαναφέρθηκε, συχνά, μπορεί κάποιος να αναφερθεί στους έγκυρους συλλογισμούς ως "Αριστοτέλεια συλλογιστική" και στους παράδοξους ως "παράδοξα του Ζήνωνα".

Δύο ενδεικτικά παραδείγματα τέτοιων συλλογισμών παρουσιάζονται παρακάτω:

A) Σχετικά με τους έγκυρους συλλογισμούς, ένα παράδειγμα που παρουσιάστηκε στους συμμετέχοντες ήταν: *"Όλοι οι άνθρωποι είναι ζώα. Όλα τα ζώα είναι θνητά. Επομένως, όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί."*

B) Σχετικά με τα παράδοξα, ένα παράδειγμα που παρουσιάστηκε στους συμμετέχοντες ήταν: *"Ένα κινούμενο βέλος καταλαμβάνει έναν ορισμένο χώρο σε κάθε στιγμή. Όμως, όταν ένα αντικείμενο καταλαμβάνει έναν συγκεκριμένο χώρο, είναι ακίνητο. Επομένως, το βέλος δεν μπορεί ταυτόχρονα να κινείται και να είναι ακίνητο."* [18].

#### **4. ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΕΝΑΝ "ΙΔΕΑΤΟ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΟ" ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΟΜΑΔΑ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΩΝ ΜΕ ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΠΡΟΚΛΗΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ**

Σε αυτή την ενότητα, θα κάνουμε μία εκτενή ανάλυση των βημάτων 1 έως 7 που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 2 με σκοπό τελικά να εξάγουμε τον καλύτερο δυνατός αντιπρόσωπο ενός συνόλου προκλητών δυναμικών που κατατάξαμε στην ίδια ομάδα.

##### **4.1 ΒΗΜΑ 1 - ΈΝΑ ΠΡΩΤΟ ΣΤΑΔΙΟ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ**

Όπως έχει ήδη αναφερθεί προηγουμένως, για κάθε ερώτηση και για κάθε ηλεκτρόδιο καταγραφής ξεχωριστά, 2000 δείγματα (μετρημένα σε mV) κατεγράφησαν σε 2 δευτερόλεπτα. Προφανώς, η δειγματική περίοδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν 1 ms. Θα χρησιμοποιήσουμε για αυτή την υπο-ακολουθία δεδομένων το σύμβολο  $S_{k,q,j}^X$ , όπου ο κάτω δείκτης  $k$  διατρέχει τα ηλεκτρόδια, ο δείκτης  $q$  το σύνολο των 39 ερωτήσεων, ο δείκτης  $j$  το σύνολο των υποκειμένων και ο άνω δείκτης  $X$  καθορίζει την κλάση. Δηλαδή,  $X \in \{V, P\}$  όπου το  $V$  συμβολίζει την έγκυρη συλλογιστική και το  $P$  τα παράδοξα. Για να βελτιστοποιήσουμε το λόγο σήματος προς θόρυβο (SNR) για κάθε υποκείμενο, για κάθε ηλεκτρόδιο και για κάθε κλάση ερωτήσεων ξεχωριστά, προχωρήσαμε ως ακολούθως, χρησιμοποιώντας μια μάλλον τυπική μεθοδολογία:

α) Για κάθε ερώτηση ξεχωριστά, πήραμε μέσο όρο των τιμών του EEG, δηλαδή των δεδομένων που κατεγράφησαν στα 1000 ms πριν το πρώτο ακουστικό ερέθισμα. Με αυτό τον τρόπο, λάβαμε τις ποσότητες  $\alpha_{k,q,j}^X$ .

β) Αφαιρέσαμε την ποσότητα  $\alpha_{k,q,j}^X$  από την ποσότητα  $S_{k,q,j}^X$ , λαμβάνοντας με αυτό τον τρόπο μία μετατοπισμένη έκδοση του ψηφιακού σήματος  $S_{k,q,j}^X$ , για το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύμβολο.

γ) Σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, πήραμε μέσο όρο του μετατοπισμένου  $S_{k,q,j}^X$  για το σύνολο των 39 ερωτήσεων, λαμβάνοντας με αυτό τον τρόπο μία μέση καμπύλη  $s_{k,j}^X$

δ) Υπολογίσαμε την ενδεχόμενη απόκλιση του μέσου όρου του EEG σήματος από το μηδέν στις 1000 τιμές του  $s_{k,j}^X$  και ονομάσαμε την απόκλιση αυτή  $\theta_{k,j}^X$ .

ε) Υπολογίσαμε την ακολουθία  $S_{k,j}^X = s_{k,j}^X - \theta_{k,j}^X$ . Συνεπώς, στο τέλος αυτό του βήματος, έχουμε δημιουργήσει σήματα  $S_{k,j}^X$  2000 ms με μέση τιμή μηδέν στα 1000 πρώτα ms, για κάθε ηλεκτρόδιο, για όλους τους συμμετέχοντες και για κάθε τύπο ερώτησης ( $V$  ή  $P$ ).

στ) Περιορίσαμε το καταγεγραμμένο ψηφιακό σήμα που πήραμε από το κάθε υποκείμενο σε ένα χρονικό διάστημα 400 ms, το οποίο εκκινεί αμέσως μετά το πρώτο ακουστικό ερέθισμα, δηλαδή, περιορίσαμε το  $S_{k,j}^X$  στο διάστημα [1001,1400] ms. Αποφασίσαμε να μελετήσουμε αυτή την περιορισμένη ακολουθία, καθώς το διάστημα [1,1000] ms αναφέρεται στα καταγεγραμμένα σήματα EEG που προηγούνται του πρώτου ακουστικού ερεθίσματος και δεν έχουν dc συνιστώσα, ενώ στο διάστημα [1401,2000] ms είναι κυρίαρχο το φαινόμενο που είναι διεθνώς γνωστό ως Contingent Negative Variation (CNV) [21], [14]. Η επιλογή αυτού του διαστήματος δικαιολογείται και νευροφυσιολογικά, καθώς δεν αναμένουμε το διάστημα [1401,2000] ms να συνδέεται με την απόφαση του υποκειμένου για την ορθότητα ή μη του τρέχοντος συλλογισμού. Γενικά και σε συμφωνία με τα προηγούμενα, στη μεθοδολογία που αναπτύξαμε και παρουσιάζουμε εδώ, θεωρούμε ότι τα ERPs σήματα στο χρονικό διάστημα [1001,1400] ms εκφράζουν βέλτιστα τις εγκεφαλικές λειτουργίες που σχετίζονται με την έγκυρη και την παράδοξη συλλογιστική. Τονίζουμε ότι τα 100 ms του διαστήματος [1001,1100] ms αγνοήθηκαν επίσης, διότι σε αυτό το διάστημα έλαβε χώρα το ακουστικό ερέθισμα. Θα χρησιμοποιήσουμε για αυτό το περιορισμένο σήμα το σύμβολο  $R_{k,j}^X$ , όπου, όπως πάντα, το  $X$  ανήκει στο σύνολο  $\{V, P\}$  και δείχνει την κλάση των ερωτήσεων, το  $k$  δείχνει τον αριθμό του ηλεκτροδίου, εκτός από τα ηλεκτρόδια εκείνα που είχαν προσαρμοστεί στους λοβούς των αφτιών των συμμετεχόντων και το  $j$  δείχνει τον αύξοντα αριθμό του υποκειμένου. Όλα αυτά τα ERPs σήματα  $R_{k,j}^X$  σχηματίζουν μία ομάδα την οποία συμβολίζουμε  $E_{k,0}^X$ .

## 4.2 ΒΗΜΑ 2 - ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΣΤΑ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΑ ERPs ΣΗΜΑΤΑ

Για να παρακάμψουμε μία ενδεχόμενη καθυστέρηση στην ανθρώπινη απόκριση, εφαρμόσαμε ομοιοθεσία στο χρόνο στο ψηφιακό σήμα  $R_{k,j}^X$ . Αυτό επετεύχθη μετασχηματίζοντας κατάλληλα τη διακριτή ακολουθία  $R_{k,j}^X$  με μία γενική μέθοδο, η οποία περιγράφεται ευθύς αμέσως.

Πράγματι, έστω ένα οποιοδήποτε ψηφιακό σήμα  $x(t_i)$ . Σε κάθε χρονική στιγμή  $t_i$  αντιστοιχίζουμε μία άλλη χρονική στιγμή  $\lambda t_i$ , όπου το  $\lambda$  είναι ένας τυχόν πραγματικός συντελεστής. Εάν το  $x(t_i)$  ήταν αναλογικό σήμα, τότε θα μπορούσαμε να παράξουμε ένα χρονικά μετατοπισμένο σήμα  $y(t_i) = x(\lambda t_i)$  για κάθε  $t_i$  της χρονικής ακολουθίας του σήματος. Εντούτοις, τα περιορισμένα σήματα που μελετούμε είναι ψηφιακά. Επομένως, οι τιμές του σήματος ενδιάμεσως των τιμών δειγματοληψίας είναι άγνωστες. Συνεπώς, στην πράξη, οι τιμές  $x(\lambda t_i)$  είναι άγνωστες. Για να ξεπεράσουμε αυτή την εγγενή δυσκολία, πρώτα εφαρμόζουμε στο σήμα κατάλληλη παρεμβολή, διασφαλίζοντας την συνέχεια τόσο του αναλογικού σήματος παρεμβολής, όσο και της πρώτης παραγώγου του στα σημεία μέτρησης. Ακολουθώντας, στρογγυλοποιούμε τον αριθμό  $\lambda t_i$  και αν ο στρογγυλοποιημένος αριθμός είναι ο  $\tau_i$ , αφήνουμε το  $y(\tau_i)$  να είναι η τιμή στο  $\lambda t_i$  του σήματος που προέκυψε από την παρεμβολή της αρχικής ψηφιακής καμπύλης. Θα πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι στρογγυλοποιούμε το  $\lambda t_i$  με τέτοιο τρόπο, ώστε να υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των δειγμάτων του μετασχηματισμένου και του αρχικού σήματος, έχοντας ως δεδομένο ότι η περίοδος δειγματοληψίας του αρχικού έχει πάντα περίοδο 1 ms.

Επιπλέον, είναι λογικό να υποθέσει κανείς ότι παρόμοια ERP σήματα που αντιστοιχούν στις ίδιες εγκεφαλικές διεργασίες μπορούν να παρουσιάσουν, πιθανώς, σημαντικές διαφορές στο πλάτος τους, ήτοι στην τιμή τους στον y-άξονα. Για να αντιμετωπίσουμε αυτές τις διαφορές πραγματοποιούμε ομοιοθεσία κατά μήκος του y-άξονα. Αυτός ο μετασχηματισμός, εφαρμοσμένος σε ένα σήμα  $x(t)$  οδηγεί στο  $ax(t)$ , όπου  $a$  είναι μια θετική σταθερά.

Ο συνδυασμός και των δύο αυτών μετασχηματισμών σε ένα σήμα  $x(t)$  οδηγεί σε ένα σήμα  $ax(\lambda t)$ . Βάσει αυτού, θεωρούμε ότι όλοι οι προαναφερθέντες μετασχηματισμοί εφαρμόζονται σε κάθε σήμα  $R_{k,j}^X$ , στο οποίο έχουμε δημιουργήσει κατάλληλη παρεμβολή. Θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύμβολο  $R_{k,j}^X$  για αυτή την εκδοχή των ψηφιακών σημάτων.

Σε αυτό το σημείο θα προχωρήσουμε σε μία σύγκριση της αναπτυχθείσας μεθόδου με παλαιότερες (παραδείγματος χάριν στα [3], [14], [15]). Πράγματι, σε προηγούμενα δημοσιευμένες εργασίες, συνήθως ακολουθείτο η ακόλουθη διαδικασία:

α) Γινόταν ορισμός τεσσάρων χρονικών διαστημάτων στο διάστημα [1101,1400] ms, και συγκεκριμένα τα  $I_{50} = [1130,1180]$  ms,  $I_{100} = [1170,1250]$  ms,  $I_{200a} = [1250,1350]$  ms και  $I_{200b} = [1280,1400]$  ms.

β) Γινόταν υπολογισμός της μέγιστης τιμής του  $R_{k,j}^X$  στο διάστημα  $I_{50}$ . Η μέγιστη τιμή αυτή συχνά συμβολίζεται ως  $P_{50}$  και το σημείο που αυτή επισυμβαίνει ως  $T_{50}$ .

γ) Γινόταν υπολογισμός της ελάχιστης τιμής του  $R_{k,j}^X$  στο διάστημα  $I_{100}$ , παράγοντας με αυτό τον τρόπο την τιμή  $N_{100}$  στη θέση  $T_{100}$ .

δ) Γινόταν υπολογισμός της ελάχιστης τιμής του  $R_{k,j}^X$  στο διάστημα  $I_{200a}$ , παράγοντας με αυτό τον τρόπο την τιμή  $N_{200a}$  στη θέση  $T_{200a}$ .

ε) Γινόταν υπολογισμός της μέγιστης τιμής του  $R_{k,j}^X$  στο διάστημα  $I_{200b}$ , παράγοντας με αυτό τον τρόπο την τιμή  $P_{200b}$  στη θέση  $T_{200b}$ .

στ) Πραγματοποιούντο στατιστικοί έλεγχοι για τη σύγκριση των κορυφών του πλάτους των σημάτων, μεταξύ των υποκειμένων και για κάθε ηλεκτρόδιο ξεχωριστά και

ζ) Πραγματοποιούντο στατιστικοί έλεγχοι για τη σύγκριση των θέσεων των κορυφών του πλάτους των σημάτων, μεταξύ των υποκειμένων και για κάθε ηλεκτρόδιο ξεχωριστά.

Εν αντιθέσει με τις προηγηθείσες μεθόδους, στην παρούσα εργασία, πριν την εφαρμογή των στατιστικών ελέγχων, ομαδοποιούμε τα σήματα  $R_{k,j}^X$  σε ξένες μεταξύ τους ομάδες, σύμφωνα με την ομοιότητά τους. Αυτή η ομοιότητα καθορίζεται με βάση τη διαδικασία που θα παρουσιαστεί στο βήμα 3 παρακάτω. Στη συνέχεια,

χρησιμοποιώντας τα σήματα κάθε ομάδας, υπολογίζουμε για κάθε μία από αυτές, μία πιο ομαλή καμπύλη, η οποία βέλτιστα αντιπροσωπεύει τα σήματα της ομάδας αυτής. Θα χρησιμοποιήσουμε για την ομαλή καμπύλη αυτή της κάθε ομάδας, τον όρο "ιδεατός αντιπρόσωπος" της τρέχουσας ομάδας. Ακολουθώντας, βασιζόμενοι σε αυτούς τους ιδεατούς αντιπροσώπους, θα διατυπώσουμε στατιστικές υποθέσεις και θα πραγματοποιήσουμε στατιστικούς ελέγχους για να ελέγξουμε τις εικασίες περί της σύγκρισης των σημάτων που αντιστοιχούν στις επιλεγμένες εγκεφαλικές λειτουργίες.

### 4.3 ΒΗΜΑ 3 - ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΕΝΑ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ

Έστω ένα σήμα  $x(t)$  που υπόκειται στους μετασχηματισμούς που περιγράφησαν στο 2ο βήμα και ένα άλλο, έστω  $y(t)$ , το οποίο θεωρούμε σαν καμπύλη αναφοράς. Θεωρούμε ότι το σήμα  $y(t)$  εκτείνεται από τη χρονική στιγμή  $t_1$  έως τη χρονική στιγμή  $t_2$ , όπου  $t_1$  και  $t_2$  θεωρούνται σταθερά. Πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό, ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  του σήματος  $y(t)$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $[t_1, t_2]$  και δεν υπόκειται σε μετασχηματισμούς. Αντιθέτως, το όρισμα του σήματος  $x(\lambda t)$  υποδηλώνει ότι συσχετίζουμε την τιμή του σήματος  $y(t)$  με την τιμή του σήματος  $x(\tau)$ , όπου  $\tau = \lambda t$ , για έναν συγκεκριμένο παράγοντα χρονικής ομοιοθεσίας  $\lambda$ . Μπορούμε, επομένως, στο συνεχές πεδίο, να συγκρίνουμε τα σήματα  $y(t)$  και το μετασχηματισμένο  $x(t)$ , δηλαδή το  $ax(\lambda t)$ , εισάγοντας και χρησιμοποιώντας την ακόλουθη συνάρτηση λάθους προσαρμογής  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon(\alpha, \lambda) = \frac{1}{2} \frac{\int_{t_1}^{t_2} (y(t) - ax(\lambda t))^2 dt}{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt} \quad (4.3-1)$$

Στην περίπτωση ψηφιακών σημάτων, τα ανωτέρω ολοκληρώματα μετατρέπονται σε άθροισμα.

#### 4.4 ΒΗΜΑ 4 - ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΠΡΩΤΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΟΜΑΔΩΝ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΩΝ ΜΕ ΠΑΡΟΜΟΙΑ ERPS ΣΗΜΑΤΑ

Θεωρώντας αρχικά ότι τα σήματα που μελετούμε είναι αναλογικά και έχοντας προηγουμένως εφαρμόσει κατάλληλη παρεμβολή, προσαρμόζουμε βέλτιστα δύο οποιεσδήποτε καμπύλες, έστω  $y(t)$  και το μετασχηματισμένο  $x(t)$ . Υπολογίζουμε εκείνες τις παραμέτρους μετασχηματισμού  $\lambda^*$  και  $\alpha^*$ , οι οποίες ελαχιστοποιούν την προαναφερθείσα συνάρτηση λάθους  $\varepsilon(\alpha, \lambda)$ , με βάση την ισοδύναμη έκφρασή της:

$$\varepsilon(\alpha, \lambda) = \frac{1}{2} \left( \frac{\int_0^{t_2-t_1} \alpha^2 x^2(\lambda(\tau + t_1)) d\tau}{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt} + \frac{\int_0^{t_2-t_1} y(\tau + t_1)^2 d\tau}{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt} \right) - \frac{\int_0^{t_2-t_1} \alpha x(\lambda(\tau + t_1)) y(\tau + t_1) d\tau}{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt} \quad (4.4-1)$$

Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι αυτή η ελαχιστοποίηση του σφάλματος έχει μια αναλυτική λύση στην οποία καταλήγουμε θέτοντας την παράγωγο της συνάρτησης  $\varepsilon(\alpha, \lambda)$  ίση με το μηδέν. Ειδικότερα, η τιμή  $\alpha^*$  που καθιστά την συνάρτηση  $\varepsilon(\alpha, \lambda)$  τοπικώς στάσιμη σε σχέση με το  $\alpha$  υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right|_{\alpha^*} = 0 \Rightarrow \alpha^* = \frac{\int_0^{t_2-t_1} x(\lambda(\tau + t_1)) y(\tau + t_1) d\tau}{\int_0^{t_2-t_1} x^2(\lambda(\tau + t_1)) d\tau} \quad (4.4-2)$$

Αντικαθιστώντας την παράμετρο  $\alpha^*$  στο  $\varepsilon$ , έχουμε:

$$\varepsilon(\alpha^*, \lambda) = \frac{1}{2} \left( \frac{\int_0^{t_2-t_1} y(\tau + t_1)^2 d\tau}{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt} - \frac{\int_0^{t_2-t_1} \alpha^{*2} x^2(\lambda(\tau + t_1)) d\tau}{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt} \right) \quad (4.4-3)$$

Με ανάλογο τρόπο, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.4-1), η τιμή της παραμέτρου  $\lambda^*$  που καθιστά τη συνάρτηση  $\varepsilon(\alpha, \lambda)$  τοπικώς στάσιμη σε σχέση με το  $\lambda$  υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \Big|_{(a, \lambda^*)} = 0 &\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{t_2-t_1} x^2(\lambda(\tau + t_1)) d\tau \\ &- \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{t_2-t_1} x(\lambda(\tau + t_1)) y(\tau + t_1) d\tau = 0 \end{aligned} \quad (4.4-4)$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο, και αντικαθιστώντας την (4.4-2) στην (4.4-4), έχουμε:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \Big|_{(a^*, \lambda^*)} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^*}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{t_2-t_1} x^2(\lambda(\tau + t_1)) d\tau - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \alpha^* \int_0^{t_2-t_1} x^2(\lambda(\tau + t_1)) d\tau \right) = 0$$

και τελικά,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \Big|_{(a^*, \lambda^*)} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha^* = -\frac{1}{2} \alpha^* \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{t_2-t_1} x^2(\lambda(\tau + t_1)) d\tau \Leftrightarrow \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \alpha^{*2} \int_0^{t_2-t_1} x^2(\lambda(\tau + t_1)) d\tau \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4-5)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.4-2) για την παράμετρο  $\alpha^*$ , μέσω της σχέσης (4.4-5) καταλήγουμε στην αποτίμηση της σχέσης (4.4-4) για  $\alpha^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \Big|_{(a^*, \lambda^*)} = 0 &\Leftrightarrow 2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{t_2-t_1} x(\lambda(\tau + t_1)) y(\tau + t_1) d\tau \\ &= \alpha^* \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{t_2-t_1} x^2(\lambda(\tau + t_1)) d\tau \end{aligned} \quad (4.4-6)$$

Αναπτύσσοντας, όμως, τη σχέση (4.4-6) και εφόσον τα όρια ολοκλήρωσης δεν εξαρτώνται από το  $\lambda$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \Big|_{(a^*, \lambda^*)} = 0 &\Leftrightarrow 2 \int_0^{t_2-t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} x(\lambda(\tau + t_1)) y(\tau + t_1) d\tau = \alpha^* \int_0^{t_2-t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} x^2(\lambda(\tau + t_1)) d\tau \Leftrightarrow \\ 2 \int_0^{t_2-t_1} \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=\lambda(\tau+t_1)} (\tau + t_1) y(\tau + t_1) d\tau &= \alpha^* \int_0^{t_2-t_1} \frac{d}{dt} x^2(t) \Big|_{t=\lambda(\tau+t_1)} (\tau + t_1) d\tau \end{aligned}$$

Κάνοντας στο σημείο αυτό την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητής  $\tilde{t} = \lambda(\tau + t_1)$ , αυτά τα ολοκληρώματα γράφονται ισοδυνάμως



$$\frac{2}{\lambda^2} \int_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=\tilde{\tau}} \tilde{\tau} y\left(\frac{\tilde{\tau}}{\lambda}\right) d\tilde{\tau} = \frac{\alpha^*}{\lambda^2} \int_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} \frac{d}{dt} x^2(t) \Big|_{t=\tilde{\tau}} \tilde{\tau} d\tilde{\tau}$$

Με ολοκλήρωση κατά μέλη και αντικαθιστώντας την (4.4-2), αυτή η σχέση γράφεται ως:

$$2 \int_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} x^2(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \int_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} \frac{dx(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}} \tilde{\tau} y\left(\frac{\tilde{\tau}}{\lambda}\right) d\tilde{\tau} = \int_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} x(\tilde{\tau}) y\left(\frac{\tilde{\tau}}{\lambda}\right) d\tilde{\tau} \left( [\tilde{\tau} x^2(\tilde{\tau})]_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} - \int_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} x^2(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \right)$$

και τελικά,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} x^2(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \left( 2 \int_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} \frac{dx(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}} \tilde{\tau} y\left(\frac{\tilde{\tau}}{\lambda}\right) d\tilde{\tau} + \int_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} x(\tilde{\tau}) y\left(\frac{\tilde{\tau}}{\lambda}\right) d\tilde{\tau} \right) \\ = [\tilde{\tau} x^2(\tilde{\tau})]_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} \int_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} x(\tilde{\tau}) y\left(\frac{\tilde{\tau}}{\lambda}\right) d\tilde{\tau} \end{aligned} \quad (4.4-7)$$

Στο σημείο αυτό, υιοθετούμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο σημάτων  $x$  και  $y$ :

$$\langle x, y \rangle = \int_{\lambda t_1}^{\lambda t_2} x(\tilde{\tau}) y\left(\frac{\tilde{\tau}}{\lambda}\right) d\tilde{\tau} \quad (4.4-8)$$

και επομένως, η στάσιμη συνθήκη που περιγράφεται από τη σχέση (4.4-7) γράφεται στη μορφή των παρακάτω σχέσεων (4.4-9) και (4.4-10), ενώ η (4.4-2) μετασχηματίζεται στη (4.4-11):

$$\lambda^* = \frac{\tau_2 - \tau_1}{t_2 - t_1} \quad (4.4-9)$$

$$[\tau_1, \tau_2]: \langle x, x \rangle (2\langle \tau x', y \rangle + \langle x, y \rangle) = (\tau_2 x^2(\tau_2) - \tau_1 x^2(\tau_1)) \langle x, y \rangle \quad (4.4-10)$$

$$a^* = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \quad (4.4-11)$$

όπου, προφανώς  $x'(\tau) = \frac{d}{dt} x(\tau)$  και  $\tau = \lambda t$   $[\tau_1, \tau_2]$  είναι το πεδίο ορισμού του σήματος  $x(\tau)$  που αντιστοιχεί στο δοσμένο διάστημα  $[t_1, t_2]$  του σήματος αναφοράς  $y(t)$ .

Οι ανωτέρω σχέσεις προσφέρουν όλα τα ζεύγη παραμέτρων χρονικής ομοιοθεσίας ( $\lambda^*$ ) και ομοιοθεσίας πλάτους ( $\alpha^*$ ) που καθιστούν στάσιμο το σφάλμα προσαρμογής  $\varepsilon$  (4.4-1). Πράγματι, για  $\lambda^* < 1$ ,  $\tau_1 = 0$  και  $t_1 \in [0, t_2 - \tau_2 + \tau_1]$ , ενώ για  $\lambda^* > 1$ ,  $t_1 = 0$  και  $\tau_1 \in [0, \tau_2 - t_2 + t_1]$ . Για κάθε τέτοιο  $\lambda^*$ , υπολογίζουμε μέσω της σχέσεως (4.4-11) το αντίστοιχο  $\alpha^*$  και μόνο όταν  $\alpha^* > 0$ , υπολογίζουμε το σφάλμα προσαρμογής  $\varepsilon$ , καθώς οι τιμές του  $\alpha^* < 0$  υποδηλώνουν κατοπτρισμό του σήματος, ο οποίος δεν είναι ένας αποδεκτός μετασχηματισμός για ERP σήματα. Το ζεύγος  $(\tau_1, t_1)$  που ικανοποιεί τα προαναφερθέντα κριτήρια και προσφέρει το ελάχιστο σφάλμα προσαρμογής  $\varepsilon$ , ταυτόχρονα, καθορίζει τη βέλτιστη σχετική τοποθέτηση και τον καταλληλότερο μετασχηματισμό ενός σήματος  $x(t)$ , ώστε αυτό να ταιριάζει βέλτιστα με ένα σήμα αναφοράς  $y(t)$ . Αυτό το μετασχηματισμένο σήμα  $x(t)$ , μαζί με το αντίστοιχο σφάλμα προσαρμογής που προκύπτει για αυτό, χρησιμοποιούνται στη διαδικασία ομαδοποίησης που ακολουθεί και έχει ως σκοπό την κατάταξη των σημάτων σε ομάδες.

Συγκεκριμένα, αφήνουμε κάθε μία από τις ψηφιακές καμπύλες  $R_{k,j}^X$  να παίξουν το ρόλο της καμπύλης αναφοράς, όπως περιεγράφη παραπάνω. Επιπρόσθετα, θεωρούμε όλες τις άλλες ακολουθίες  $R_{k,i}^X$  για το ίδιο σύνολο  $X \in \{V, P\}$  και το ίδιο ηλεκτρόδιο  $k$ . Μετασχηματίζουμε και βέλτιστα προσαρμόζουμε όλες αυτές τις καμπύλες με την καμπύλη αναφοράς μέσω των μεθόδων που περιγράφησαν στην προηγούμενη ανάλυση. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το αντίστοιχο σφάλμα προσαρμογής ακολουθεί κατανομή Snedecor (F) με  $(n_y - 1, n_y - 1)$  βαθμούς ελευθερίας, όπου  $n_y$  είναι ο αριθμός των θέσεων της ψηφιακής ERP καμπύλης  $y_i(n)$ , η παρεμβολή των οποίων δημιούργησε το σήμα  $y(t)$ . Η υπόθεση αυτή δεν απερρίφθη από τον πραγματοποιηθέντα σχετικό έλεγχο Kolmogorov-Smirnoff ( $\alpha = 0.01$ ). Έστω δύο ERPs σήματα, καταγεγραμμένα από διαφορετικά υποκείμενα, τα οποία έχουν γεννηθεί από δύο απολύτως ανάλογες εγκεφαλικές διεργασίες. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι αυτά τα δύο ERPs σήματα είναι θορυβώδεις εκδοχές της ίδιας ιδεατής καμπύλης. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να περιμένουμε ότι, στατιστικά, το σφάλμα προσαρμογής τους (όπως έχει διατυπωθεί στον ανωτέρω τύπο (4.3-1) θα είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Κατά συνέπεια, υιοθετούμε την υπόθεση ότι το άνω σημείο  $\varepsilon^T$  της αριστερής υποπεριοχής (αριστερής ουράς) του 5% της παραπάνω κατανομής Snedecor είναι ένα

ικανοποιητικό άνω όριο αυτού του λάθους. Ως εκ τούτου, ομαδοποιούμε τα ERP σήματα, αφήνοντας δύο τέτοια σήματα να ανήκουν στην ίδια ομάδα εάν το σφάλμα προσαρμογής τους είναι μικρότερο από  $\varepsilon^T$ .

Μέσω της εφαρμογής της μεθόδου, συσχετίσαμε μία ομάδα από ακολουθία δεδομένων σε κάθε καμπύλη αναφοράς  $R_{k,j}^X$ . Επισημαίνουμε ότι, σε αυτό το στάδιο, αυτές οι ομάδες σημάτων μπορεί να επικαλύπτονται. Για το λόγο αυτό, στα ακόλουθα βήματα, θα δημιουργήσουμε ξένες ομάδες παρόμοιων ERP σημάτων, εξαιρώντας κατάλληλα τις επικαλύψεις των διαφόρων ομάδων που προέκυψαν στο παρόν στάδιο.

#### **4.5 ΒΗΜΑ 5 - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΝΟΣ ΠΡΩΤΟΥ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΟΥ ΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΙΑΣ ΟΜΑΔΑΣ**

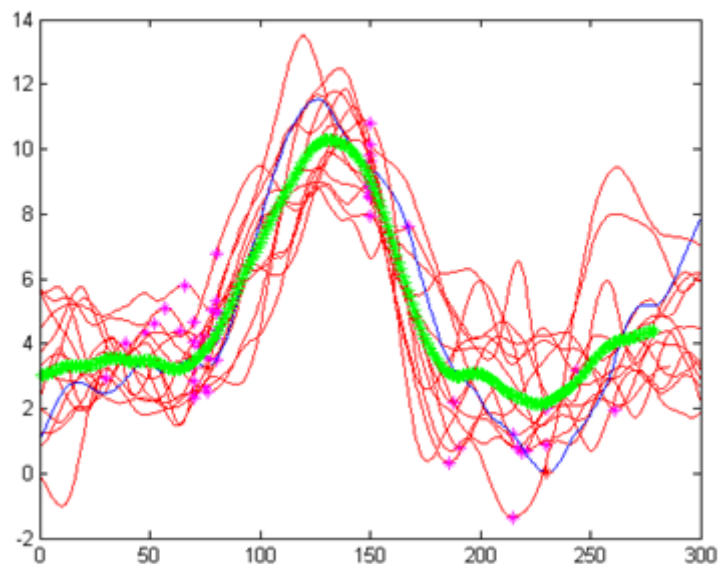
Εν πρώτοις, υπολογίζουμε έναν αρχικό αντιπρόσωπο για την ομάδα με τον μεγαλύτερο αριθμό βέλτιστα ταιριασμένων στο πρότυπο σημάτων. Χρησιμοποιούμε τον όρο "αρχικό" γιατί στη συνέχεια, στο επόμενο βήμα 6, υπολογίζουμε έναν καλύτερο αντιπρόσωπο κάθε ομάδας. Ο αρχικός αντιπρόσωπος είναι μία καμπύλη που προέκυψε από τον μέσο όρο όλων των καμπυλών που ανήκουν στην ομάδα των βέλτιστα ταιριασμένων σημάτων. Αυτή η καμπύλη είναι μια πιο ομαλή εκδοχή κάθε καμπύλης της ομάδας. Με άλλα λόγια, είναι μια πρώτη, λιγότερο θορυβώδης εκτίμηση της καμπύλης που αναπαριστά την κοινή συμπεριφορά των σημάτων της ομάδας. Θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο  $Y_{k,1}^X$  για το ERP σήμα αναφοράς που γέννησε αυτή την ομάδα, όπου ο άνω δείκτης  $X \in \{V, P\}$ , ο κάτω δείκτης  $k$  είναι ο αριθμός του ηλεκτροδίου και ο κάτω δείκτης 1 αναφέρεται στον αύξοντα αριθμό της ομάδας.

Εφαρμόζουμε το σύμβολο  $X_{k,m,1}^X$  για το σύνολο των καμπυλών που βέλτιστα ταιριάζουν στο  $Y_{k,1}^X$ , όπου ο επιπλέον κάτω δείκτης  $m$  είναι ο αύξων αριθμός των υπολοίπων σημάτων της ομάδας.

Σε αυτό το σημείο, παίρνουμε τον μέσο όρο των τιμών των  $X_{k,m,1}^X$  και  $Y_{k,1}^X$  για κάθε χρονικό σημείο στο διάστημα [1101, 1400] ms. Η ακολουθία των μέσων καμπυλών σε

κάθε χρονική στιγμή στο διάστημα [1101,1400] ms ορίζει μια μέση καμπύλη που συμβολίζουμε ως  $M_{k,1}^X$ .

Αναλογιζόμενοι την υπόθεση που κάναμε ότι τα μέλη αυτής της ομάδας θα παρουσιάζουν μια κοινή εγκεφαλική συμπεριφορά, αυτή η διαδικασία κατασκευής της μέσης καμπύλης οδηγεί στην μείωση του συνολικού ακανόνιστου/τυχαίου θορύβου. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί, για παράδειγμα, εύλογα κάποιος να υποστηρίξει ότι η ψηφιακή ακολουθία  $M_{k,1}^V$  αντιπροσωπεύει ικανοποιητικά την υποκείμενη αιτιατή διαδικασία της έγκυρης συλλογιστικής για όλα τα μέλη της 1ης ομάδας (βλ. Εικόνα 2), για το ηλεκτρόδιο υπ' αριθμόν  $k$ .



**Εικόνα 2 - Ο ιδεατός αντιπρόσωπος ενός ERP σήματος με πολύ χαμηλό λάθος, ο οποίος υποστηρίζει την υπόθεση ύπαρξης μιας υποκείμενης κοινής εγκεφαλικής λειτουργίας ανά ομάδα ατόμων. Η καμπύλη αναφοράς απεικονίζεται με μπλε χρώμα, οι βέλτιστα ταιριασμένες σε αυτήν καμπύλες απεικονίζονται με κόκκινο και ο ιδεατός αντιπρόσωπος των ταιριασμένων καμπυλών απεικονίζεται με πράσινο χρώμα. Ο x-άξονας αναπαριστά χρόνο σε milliseconds και ο y-άξονας Voltage σε  $\mu V$ .**

#### **4.6 ΒΗΜΑ 6 - Η ΤΕΛΙΚΗ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ERP ΣΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΤΕΛΙΚΟΙ ΙΔΕΑΤΟΙ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΟΙ ΚΑΘΕ ΟΜΑΔΑΣ**

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε την προηγούμενη διαδικασία προσαρμογής σε όλα τα σήματα  $R_{k,j}^V$ , χρησιμοποιώντας την  $M_{k,1}^V$  ως καμπύλη αναφοράς, λαμβάνοντας με αυτόν τον τρόπο μια πιο "ασφαλή" ομάδα βέλτιστα ταιριασμένων καμπυλών,  $G_{k,1}^V$ .

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία για όλα τα μέλη της ομάδας  $G_{k,1}^V$ . Συγκεκριμένα, έστω ότι μία ERP καμπύλη  $R_{k,m}^V$  ανήκει στην ομάδα  $G_{k,1}^V$ . Τότε επιλέγουμε την  $R_{k,m}^V$  να παίξει το ρόλο της πρότυπης καμπύλης και αφήνουμε όλες τις άλλες καμπύλες που σχετίζονται με την έγκυρη συλλογιστική να ταιριάζουν βέλτιστα σε αυτή, σύμφωνα με τη διαδικασία που περιεγράφη στα βήματα 1, 2 και 3 (Ενότητες 4.1-4.3). Με αυτόν τον τρόπο, δημιουργείται μία νέα ομάδα από βέλτιστα ταιριασμένα ERPs σήματα, έστω  $G_{k,1,m}^V$ . Χρησιμοποιούμε αυτήν την ομάδα για να αποκτήσουμε άλλη μία εκδοχή του ιδεατού αντιπροσώπου  $M_{k,1,m}^V$  αυτής της ομάδας. Ταιριάζουμε βέλτιστα όλες τις καμπύλες  $R_{k,j}^V$  στην  $M_{k,1,m}^V$ , αποκτώντας με αυτόν τον τρόπο μία άλλη εκδοχή της ίδιας ομάδας  $G_{k,1,m}^V$ . Στην πράξη, οι ομάδες  $G_{k,1,m}^V$  και  $G_{k,1}^V$  συμπίπτουν, γεγονός που αναδεικνύει την εσωτερική συνέπεια της αναπτυχθείσας μεθοδολογίας. Σε κάθε περίπτωση, επανορίζουμε την ομάδα  $G_{k,1}^V$  ως την τομή όλων των ομάδων  $G_{k,1,m}^V$  ( $G_{k,1}^X = \bigcap_m G_{k,1,m}^X$ ), με σκοπό να αποφευχθεί κάθε αμφιβολία ή ασάφεια στον ορισμό της αντίστοιχης ομάδας.

Αποδίδουμε στην τελική ομάδα  $G_{k,1}^V$  έναν ιδεατό αντιπρόσωπο  $\Pi_{k,1}^V$  όλων των μελών αυτής της ομάδας. Ειδικότερα, επιλέγουμε αυτός ο ιδεατός αντιπρόσωπος να είναι εκείνη η καμπύλη  $M_{k,1,m}^V$ , η οποία προσφέρει το μικρότερο σφάλμα προσαρμογής όλων των σημάτων της ομάδας σε αυτήν, όπως περιεγράφη στα βήματα 1, 2 και 3 (Ενότητες 4.1-4.3).

Στη συνέχεια, από την αρχική ομάδα  $E_{k,0}^V$  αφαιρούμε όλες εκείνες τις καμπύλες που ανήκουν στην ομάδα  $G_{k,1}^V$ , αποκτώντας με αυτό τον τρόπο μία κατάλληλη υπο-ομάδα  $E_{k,1}^V = E_{k,0}^V - G_{k,1}^V$ .

Εφαρμόζουμε σε όλα τα ERPs σήματα αυτής της περιορισμένης ομάδας  $E_{k,1}^V$  ακριβώς την ίδια διαδικασία, όπως περιεγράφη προηγουμένως. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί να

καταλήξουμε σε άλλη μία ομάδα  $G_{k,2}^V$  από ERPs σήματα, έχοντας μία καμπύλη, έστω  $\Pi_{k,2}^V$ , ως τον κοινό ιδεατό τους αντιπρόσωπο.

Αφαιρώντας τις καμπύλες της ομάδας  $G_{k,2}^V$  από την  $E_{k,1}^V$ , οδηγούμαστε σε ένα κατάλληλο υποσύνολο  $E_{k,2}^V = E_{k,1}^V - G_{k,2}^V$ .

Εφαρμογή της προαναφερθείσας μεθοδολογίας μπορεί να οδηγήσει σε μία νέα ομάδα  $G_{k,3}^V$  από πραγματικά καλά ταιριασμένα ERPs σήματα, τα οποία έχουν το  $\Pi_{k,3}^V$  ως κοινό ιδεατό τους αντιπρόσωπο. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρις ότου εξαντληθούν όλα τα μέλη του συνόλου  $E_{k,0}^V$  ή μέχρις ότου καμία νέα ομαδοποίηση ERP σήματος να μην γίνεται αποδεκτή. Ταυτόχρονα, ένας ιδεατός αντιπρόσωπος  $\Pi_{k,i}^V$  έχει συσχετισθεί με κάθε ομάδα  $G_{k,i}^V$  που δημιουργήθηκε. Με τον τρόπο αυτό, για παράδειγμα, όσον αφορά την έγκυρη συλλογιστική και σε σχέση με τα καταγεγραμμένα σήματα από το ηλεκτρόδιο  $k = 1$ , η προαναφερθείσα μεθοδολογία οδήγησε στη δημιουργία μιας πρώτης ομάδας ERPs σημάτων  $G_{1,1}^V$ , η οποία αποτελείτο από δώδεκα (12) καμπύλες. Εξαιρώντας τις καμπύλες αυτές από την ομάδα  $E_{1,0}^V$ , δημιουργήθηκε η υπο-ομάδα  $E_{1,1}^V$ , η οποία πλέον αποτελείτο από τριάντα τρία (33) ERPs σήματα. Από την υπο-ομάδα αυτή, μία νέα ομάδα  $G_{1,2}^V$  οκτώ (8) καλά ταιριασμένων σημάτων εξαιρέθηκε. Στη συνέχεια, μία ισοπληθής ομάδα  $G_{1,3}^V$  από οκτώ (8) σήματα-μέλη, προήλθε από την υπο-ομάδα  $E_{1,2}^V = E_{1,1}^V - G_{1,2}^V$ , ενώ, ακολούθως, προέκυψε μία ξένη ομάδα  $G_{1,4}^V$  από 6 καμπύλες. Με τον ίδιο τρόπο, άλλη μία ξένη ομάδα των πέντε (5) και εν συνεχεία, των τριών (3) ERPs σημάτων δημιουργήθηκαν, αφήνοντας, εν τέλει, μία ομάδα τριών (3) σημάτων, τα οποία δεν μπορούσαν να ομαδοποιηθούν. Προφανώς, κάθε ομάδα  $G_{1,i}^V$ ,  $i = 1,2, \dots, 6$  είχε έναν ιδεατό αντιπρόσωπο  $\Pi_{1,i}^V$ ,  $i = 1,2, \dots, 6$ , ο οποίος υπολογίστηκε με τη μεθοδολογία που περιεγράφη ανωτέρω. Αυτοί οι ιδεατοί αντιπρόσωποι, όταν ελέγχθηκαν σύμφωνα με την παρουσιασθείσα μεθοδολογία ανά ζεύγη, απεδείχθησαν ανόμοιοι.

Για λόγους συνέπειας της μεθοδολογίας μας, αφήσαμε κάθε ένα από τα τρία μη ομαδοποιημένα ERPs σήματα να παίξουν το ρόλο του ιδεατού τους αντιπροσώπου.

Εν συνεχεία, επαναλάβουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία για όλα τα άλλα ηλεκτρόδια που έχουν σχέση με την έγκυρη συλλογιστική, αποκτώντας με αυτόν τον τρόπο τις

ομάδες  $G_{2,i}^V, G_{3,i}^V, \dots, G_{30,i}^V$ , όπως επίσης και τους αντίστοιχους ιδεατούς τους αντιπροσώπους  $\Pi_{2,i}^V, \Pi_{3,i}^V, \dots, \Pi_{30,i}^V$ .

Τέλος, όσον αφορά τα ERPs σήματα  $R_{k,i}^P$  που ελήφθησαν σχετικά με τα παράδοξα, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, δημιουργήθηκαν οι ομάδες  $G_{k,i}^P$  και οι ιδεατοί τους αντιπρόσωποι  $\Pi_{k,i}^P$  για κάθε ηλεκτρόδιο ξεχωριστά.

## 5. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΙΔΕΑΤΩΝ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΩΝ ΤΩΝ ΕΓΚΥΡΩΝ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΟΞΩΝ ΚΑΙ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΥΤΟΥ

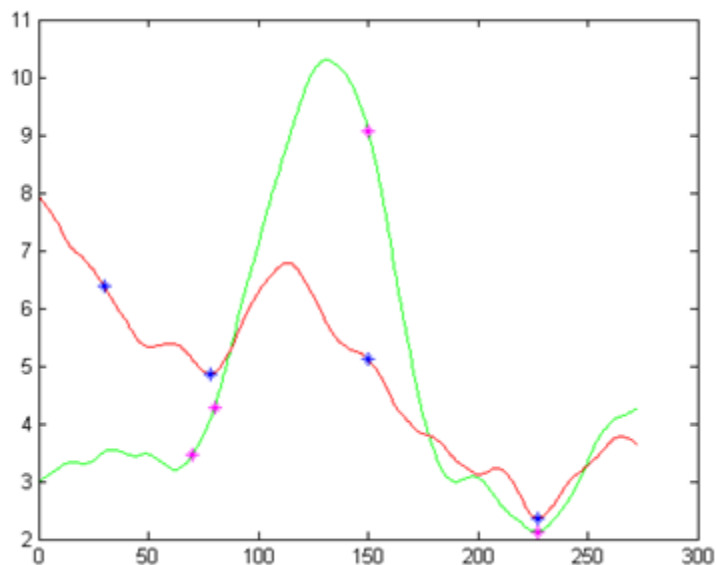
Μετά την εφαρμογή της μεθόδου που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 4, κάθε συμμετέχοντας στο πείραμα, βάσει των καταγεγραμμένων ERPs σημάτων της έγκυρης συλλογιστικής του, και για κάθε ηλεκτρόδιο ξεχωριστά, κατετάγη σε συγκεκριμένες υπο-ομάδες  $G_{k,i}^V$ , έχοντας έναν "σαφή" ιδεατό αντιπρόσωπο  $\Pi_{k,i}^V$ , όπου το  $i$  είναι ο αύξων αριθμός της εκάστοτε διακεκριμένης υπο-ομάδας.

Με όμοιο τρόπο, σε σχέση με τα παράδοξα, κάθε συμμετέχοντας για το τυχόν  $k$  ηλεκτρόδιο ομαδοποιήθηκε σε ένα διακεκριμένο υπο-σύνολο  $G_{k,i}^P$  με έναν συγκεκριμένο ιδεατό αντιπρόσωπο  $\Pi_{k,i}^P$ .

Ακολουθώντας, για κάθε ηλεκτρόδιο ξεχωριστά, εφαρμόσαμε μία μέθοδο στατιστικής ανάλυσης για να ελέγξουμε την ύπαρξη πιθανών στατιστικών διαφορών μεταξύ των εγκεφαλικών λειτουργιών που σχετίζονται με την έγκυρη συλλογιστική και τα παράδοξα (βλ. Εικόνα 3). Αυτοί οι στατιστικοί έλεγχοι εφαρμόστηκαν ανά ζεύγη, όπως αναλύουμε στα παρακάτω στάδια:

1) Έστω ένα οποιοδήποτε υποκείμενο  $A_1$ . Ας υποθέσουμε ότι το ERP σήμα του, που καταγράφηκε από το ηλεκτρόδιο  $k$ , όσον αφορά την έγκυρη συλλογιστική, έχει ομαδοποιηθεί στην  $m$  ομάδα, με ιδεατό αντιπρόσωπο  $\Pi_{k,m}^V$ . Υποθέτουμε, επίσης, ότι το ίδιο υποκείμενο, σε σχέση με το ίδιο ηλεκτρόδιο καταγραφής, έχει ομαδοποιηθεί στην  $n$  ομάδα όσον αφορά τα παράδοξα, έχοντας ως ιδεατό αντιπρόσωπο την ψηφιακή καμπύλη  $\Pi_{k,n}^P$ .





**Εικόνα 3 - Η καμπύλη που απεικονίζεται με πράσινο χρώμα είναι ο ιδεατός αντιπρόσωπος των ERPs σημάτων που σχετίζονται με τους έγκυρους συλλογισμούς, ενώ η καμπύλη που απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα είναι ο ιδεατός αντιπρόσωπος των ERPs σημάτων που σχετίζονται με τα παράδοξα. Αυτοί οι δύο ιδεατοί αντιπρόσωποι παρουσιάζουν σημαντικές στατιστικές διαφορές, υποστηρίζοντας την υπόθεση ότι αντίστοιχες διαφορές υπάρχουν και στις υποκείμενες εγκεφαλικές διεργασίες της έγκυρης συλλογιστικής και των παράδοξων. Ο x-άξονας αναπαριστά χρόνο σε milliseconds και ο y-άξονας Voltage σε  $\mu V$ .**

II) Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι οι υποκείμενες εγκεφαλικές λειτουργίες που σχετίζονται με την έγκυρη συλλογιστική αντικατοπτρίζονται ικανοποιητικά στον αντίστοιχο ιδεατό αντιπρόσωπο  $\Pi_{k,i}^V$  και ότι επίσης, οι εγκεφαλικές λειτουργίες που συνθέτουν το παράδοξο, απεικονίζονται ικανοποιητικά στο  $\Pi_{k,i}^P$  σε κάποια τουλάχιστον ηλεκτρόδια  $k$ . Ορίζουμε, επομένως, ένα μέτρο διαφοράς των δύο εγκεφαλικών διεργασιών της έγκυρης συλλογιστικής και των παράδοξων για το υποκείμενο  $A_1$  εισάγοντας μία κατάλληλα επιλεγμένη απόσταση μεταξύ των δύο ψηφιακών καμπυλών  $\Pi_{k,m}^V$  και  $\Pi_{k,n}^P$ .

Αρχικά, αφήνουμε έναν από τους δύο ιδεατούς αντιπροσώπους που έχουν συσχετιστεί με το υποκείμενο  $A_1$ , έστω αυτόν που αφορά τους έγκυρους συλλογισμούς, να παίξει το ρόλο της πρότυπης καμπύλης, στην οποία η άλλη, η οποία αφορά τα παράδοξα, προσπαθεί να ταιριάξει. Αυτή η διαδικασία της προσαρμογής πραγματοποιείται μέσω της μεθοδολογίας που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 4 (Ενότητες 4.3 και 4.4). Για

λόγους απλότητας στο συμβολισμό, θα χρησιμοποιήσουμε τα ίδια σύμβολα για τους δύο βέλτιστα ταιριασμένους ιδεατούς αντιπροσώπους, ήτοι  $\Pi_{k,m}^V$  και  $\Pi_{k,n}^P$ .

Στη συνέχεια, για ένα τυχόν σημείο, έστω το  $i$  του κοινού χρονικού διαστήματος των βέλτιστα ταιριασμένων καμπυλών  $\Pi_{k,m}^V$  και  $\Pi_{k,n}^P$ , υπολογίζουμε την προσημασμένη διαφορά  $d_i$  των τιμών των δύο καμπυλών σε αυτή τη θέση. Τότε, εάν  $N_1$  είναι το πλήθος των σημείων του κοινού διαστήματος ορισμού αυτών των δύο καμπυλών, υπολογίζουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της ανωτέρω προσημασμένης διαφοράς μέσω των τύπων:

$$\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} d_i}{N_1} \quad (4.6-1)$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_1} (d_i - \mu_1)^2}{N_1 - 1}} \quad (4.6-2)$$

Και εν συνεχεία υπολογίζεται η ποσότητα

$$t_1 = \frac{\mu_1 - \Delta_k^{V,P}}{S_1/\sqrt{N_1}} \quad (4.6-3)$$

όπου  $\Delta_k^{V,P}$  είναι η θεωρητική μέση τιμή της διαφοράς των καμπυλών των αντιπροσώπων των ομάδων  $m$  (για την έγκυρη συλλογιστική) και  $n$  (για τα παράδοξα), στις οποίες το υποκείμενο  $A_1$  ανήκει, για το τρέχον ηλεκτρόδιο  $k$ .

III) Υποθέτουμε ότι οι ιδεατοί αντιπρόσωποι  $\Pi_{k,m}^V$  και  $\Pi_{k,n}^P$  δεν παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές. Στην περίπτωση αυτή, είναι λογικό να συμπεράνει κάποιος ότι τα αντίστοιχα καταγεγραμμένα σήματα, για το τρέχον ηλεκτρόδιο  $k$ , δεν αντικατοπτρίζουν διαφορές των αντίστοιχων υποκειμένων εγκεφαλικών διεργασιών. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί κάποιος να υποστηρίξει ότι πράγματι υπάρχει μία κοινή υποκείμενη διαδικασία που γεννά αυτά τα παρόμοια ERP σήματα. Αντίθετα, ως υποθέσουμε ότι οι ιδεατοί αντιπρόσωποι  $\Pi_{k,m}^V$  και  $\Pi_{k,n}^P$  παρουσιάζουν στατιστικά

σημαντικές διαφορές. Τότε, είναι πολύ πιθανό ότι και οι σχετικές με αυτές εγκεφαλικές διεργασίες διαφέρουν.

IV) Για να ποσοτικοποιήσουμε τις παραπάνω παρατηρήσεις και τη σχετική ανάλυση που προηγήθηκε στο σημείο (III), προχωρήσαμε ως ακολούθως:

Αρχικά, διατυπώσαμε την υπόθεση ότι οι προσημασμένες διαφορές  $d_i$  που ορίστηκαν στο (II) ανήκουν σε κανονική κατανομή. Η υπόθεση αυτή πιστοποιήθηκε με την εφαρμογή ελέγχου Shapiro-Wilk. Τότε, η ποσότητα  $t_1$ , η οποία ορίστηκε στο (II) παραπάνω, ακολουθεί κατανομή Student, ή, δεδομένου ότι το  $N_1$  είναι αρκετά μεγάλο, ακολουθεί με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια μία τυπική, κανονική κατανομή.

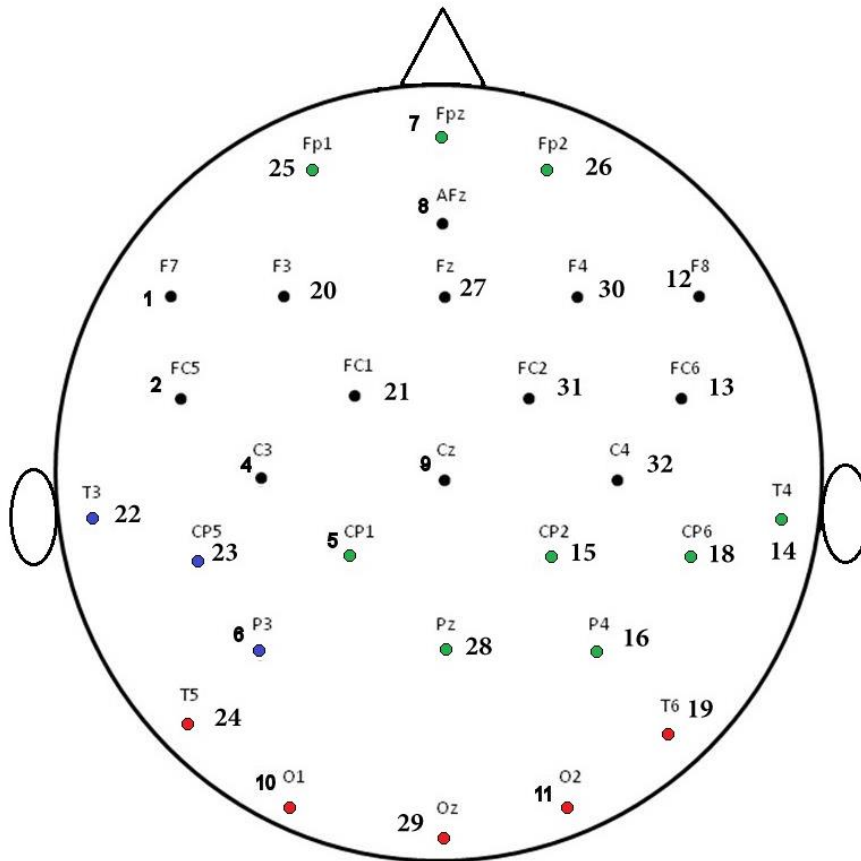
Επιπρόσθετα, εάν κάνουμε την υπόθεση  $H_0$  ότι οι δύο εγκεφαλικές διεργασίες (έγκυρη συλλογιστική και παράδοξα) δεν γεννούν διαφορές στους αντίστοιχους ιδεατούς αντιπροσώπους, τότε  $\Delta_k^{V,P} = 0$ . Ως εκ τούτου, η ποσότητα  $t_1$  έχει μία καλώς ορισμένη τιμή και επομένως, η εγκυρότητα της υπόθεσης  $H_0$  μπορεί άμεσα να ελεγχθεί, για το υποκείμενο  $A_1$  και το ηλεκτρόδιο  $k$ .

V) Η προαναφερθείσα προσέγγιση πραγματοποιήθηκε επαναλαμβανόμενα για όλα τα ηλεκτρόδια και όλα τα υποκείμενα. Στη συνέχεια, εφαρμόστηκαν μια σειρά από ελέγχους Bonferroni για κάθε ηλεκτρόδιο ξεχωριστά, με σκοπό να αποσαφηνιστεί στατιστικά η σημασία της διαφοροποίησης που εμφανίζουν οι ιδεατοί αντιπρόσωποι των διαφόρων ομάδων.

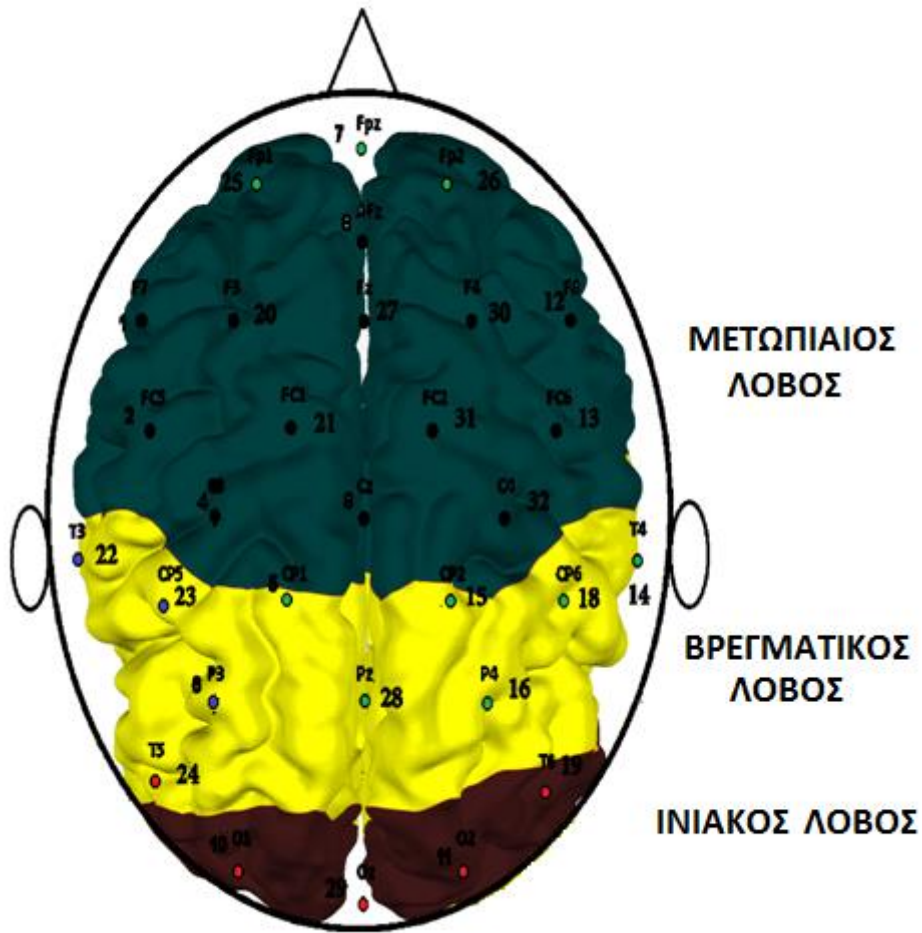
Εφαρμογή της μεθόδου σε 45 υποκείμενα, τα οποία συμμετείχαν στο προαναφερθέν πείραμα για την έγκυρη συλλογιστική και τα παράδοξα, κατέδειξε την ύπαρξη στατιστικά σημαντικών διαφορών σε έναν ικανό αριθμό ηλεκτροδίων. Ειδικότερα, όπως φαίνεται και στο χάρτη του εγκεφάλου στην Εικόνα 4, στατιστικά σημαντικές διαφορές εντοπίστηκαν σε:

- 5 ηλεκτρόδια με εμπιστοσύνη 99%, απεικονιζόμενα με κόκκινο χρώμα
- 14 ηλεκτρόδια με εμπιστοσύνη 95%, απεικονιζόμενα με κόκκινο και πράσινο χρώμα

- 17 ηλεκτρόδια με εμπιστοσύνη 90%, απεικονιζόμενα με κόκκινο, πράσινο και μπλε χρώμα



**Εικόνα 4 - Χάρτης που δείχνει τα ηλεκτρόδια για τα οποία η παρουσιασθείσα μέθοδος κατέδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των ιδεατών αντιπροσώπων που σχετίζονται με τις εγκεφαλικές διεργασίες της έγκυρης συλλογιστικής και των παράδοξων. Τα ηλεκτρόδια στα οποία οι διαφορές αυτές βρέθηκαν με εμπιστοσύνη 99% απεικονίζονται με κόκκινο χρώμα, εκείνα που βρέθηκαν με εμπιστοσύνη 95% απεικονίζονται με κόκκινο και πράσινο χρώμα και εκείνα που βρέθηκαν με εμπιστοσύνη 90% απεικονίζονται με κόκκινο, πράσινο και μπλε χρώμα.**



**Εικόνα 5 - Η προβολή του χάρτη που δείχνει τα ηλεκτρόδια για τα οποία η παρουσιασθείσα μέθοδος κατέδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των ιδεατών αντιπροσώπων που σχετίζονται με τις εγκεφαλικές διεργασίες της έγκυρης συλλογιστικής και των παράδοξων πάνω σε ένα ανατομικό σχέδιο του εγκεφάλου. Ο μετωπιαίος, ο βρεγματικός και ο ινιακός λοβός του εγκεφάλου έχουν χρωματιστεί και ονομαστεί για λόγους καλύτερης εποπτείας. Όπως στην Εικόνα 4, τα ηλεκτρόδια στα οποία οι διαφορές αυτές βρέθηκαν με εμπιστοσύνη 99% απεικονίζονται με κόκκινο χρώμα, εκείνα που βρέθηκαν με εμπιστοσύνη 95% απεικονίζονται με κόκκινο και πράσινο χρώμα και εκείνα που βρέθηκαν με εμπιστοσύνη 90% απεικονίζονται με κόκκινο, πράσινο και μπλε χρώμα.**

## 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία, επεξεργαστήκαμε τα αποτελέσματα ενός πειράματος που σχεδιάστηκε με σκοπό να καταγραφούν τα ERPs σήματα που σχετίζονται με την έγκυρη και παράδοση συλλογιστική του κάθε συμμετέχοντα. Στην συνέχεια, ομαδοποιήσαμε αυτά τα ERP σήματα εισάγοντας μία πρωτότυπη μεθοδολογία που περιλάμβανε τις ακόλουθες υπο-διαδικασίες:

- (α) Ομοιοθεσία στο χρόνο και το πλάτος των ψηφιοποιημένων ERP καμπυλών
- (β) Ελαχιστοποίηση μιας κατάλληλα επιλεγμένης συνάρτησης σφάλματος για το βέλτιστο υπολογισμό των παραμέτρων ομοιοθεσίας
- (γ) Ομαδοποίηση των ERP σημάτων, σύμφωνα με την τιμή μιας κατάλληλης συνάρτησης σφάλματος, για κάθε ηλεκτρόδιο και κάθε υποκείμενο
- (δ) Δημιουργία ενός αξιόπιστου αντιπροσώπου, τον οποίο ονομάζουμε "ιδεατό αντιπρόσωπο", για κάθε ομάδα ξεχωριστά και
- (ε) Πραγματοποίηση και έλεγχο στατιστικών υποθέσεων

Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές των ιδεατών αντιπροσώπων σε 5 ηλεκτρόδια με 99% εμπιστοσύνη, 14 ηλεκτρόδια με 95% εμπιστοσύνη και 17 ηλεκτρόδια με 90% εμπιστοσύνη.

Η μέθοδος που εφαρμόσαμε κατέδειξε ότι τα ERPs σήματα που αντιστοιχούν στην έγκυρη συλλογιστική προσαρμόζονται βέλτιστα στους αντίστοιχους ιδεατούς αντιπροσώπους κάθε ομάδας με πολύ μικρό λάθος. Το ίδιο, επίσης, κατεδείχθη για κάθε ομάδα των ERPs που αντιστοιχούν στα παράδοξα. Αυτά τα αποτελέσματα, ενισχύουν την υπόθεσή μας σχετικά με την ύπαρξη μιας υποκείμενης κοινής εγκεφαλικής συμπεριφοράς των ατόμων της κάθε ομάδας. Επιπρόσθετα, φαίνεται ότι οι ιδεατοί αντιπρόσωποι που αποδόθηκαν σε κάθε ομάδα εκφράζουν με ικανοποιητική πιστότητα την κοινή εγκεφαλική διεργασία των ERPs σημάτων της ομάδας.

Την ίδια στιγμή, οι ιδεατοί αντιπρόσωποι της έγκυρης συλλογιστικής και των παράδοξων εμφανίζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές για έναν ικανό αριθμό

ηλεκτροδίων ανά υποκείμενο. Το αποτέλεσμα αυτό ενισχύει την υπόθεση ότι αντίστοιχες διαφορές υπάρχουν και μεταξύ των εγκεφαλικών διεργασιών που σχετίζονται με τους έγκυρους συλλογισμούς και τα παράδοξα (δες Εικόνα 3).

Από νευροφυσιολογικής πλευράς, αναλύοντας τα αποτελέσματα που εξήχθησαν, θεμελιώνεται ότι οι δύο λογικές διεργασίες που μελετώνται, συσχετίζονται με διαφορετικές περιοχές του εγκεφάλου που περιλαμβάνουν το πρόσθιο τμήμα (προμετωπιαία ηλεκτρόδια), όπως επίσης και ένα σχετικά ευρύ οπίσθιο τμήμα (βρεγματο-κροταφικά και ινιακά ηλεκτρόδια - όπως φαίνεται και στην Εικόνα 5). Αυτό το συμπέρασμα φαίνεται να είναι συμβατό με άλλες μελέτες που έχουν διεξαχθεί και στοχεύουν στην ανατομία της συλλογιστικής διεργασίας [9]. Ωστόσο, είναι επίσης πιθανόν ότι τα πρότυπα των διεργασιών που παρατηρήθηκαν να υποδεικνύουν την ύπαρξη ενός κατακερματισμένου/αποκεντρωμένου συστήματος, δυναμικά ρυθμιζόμενου σε σχέση με την εκάστοτε εκτελούμενη εγκεφαλική διεργασία και με διάφορα περιβαλλοντικά ερεθίσματα, μία παρατήρηση που είναι συνεπής με υποθέσεις που έχουν πρόσφατα διατυπωθεί από άλλες νευρο-απεικονιστικές μελέτες [17].

Συνεπώς, μελλοντική μας έρευνα θα στοχεύσει σε: (α) έναν πιο ακριβή καθορισμό αυτών των αιτιατών λειτουργιών συμπεριφοράς, (β) την εύρεση πιθανής σχέσης μεταξύ των ERPs σημάτων των ιδεατών αντιπροσώπων και της ψυχικής κατάστασης του κάθε υποκειμένου και (γ) την επέκταση της παρούσας μεθοδολογίας, έτσι ώστε αυτή να συμπεριλάβει και άλλες εγκεφαλικές διεργασίες, όπως τους άκυρους συλλογισμούς και τις ψευδαισθήσεις.

**ΜΕΡΟΣ Β. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ  
ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΛΙΑΝ  
ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ ΠΟΥ  
ΑΝΑΣΚΑΠΤΟΝΤΑΙ ΚΑΤΑΚΕΡΜΑΤΙΣΜΕΝΑ**



## **1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Πάρα πολλά σημαντικά αρχαιολογικά αντικείμενα έρχονται στο φως από την αρχαιολογική σκαπάνη θραυσμένα σε πολλά κομμάτια και πολλές φορές, σε εκατοντάδες ή χιλιάδες θραύσματα, ανάλογα με το αντικείμενο και τον τρόπο θραύσης του. Το πρόβλημα της ανακατασκευής του αρχικού αντικειμένου από τα επιμέρους τμήματά του είναι μία, κατά κανόνα, πολύ σκληρή, κοπιώδης, απαιτητική και χρονοβόρα διαδικασία. Για παράδειγμα, μόνο στην Ελλάδα, υπάρχουν χιλιάδες θραυσμένα αρχαία αντικείμενα, τα οποία περιμένουν να ανακατασκευαστούν, όπως αυτά που θα αναφερθούν ευθύς αμέσως.

Μία πολύ σημαντική ομάδα τέτοιων θραυσμένων, ανασκαφέντων αντικειμένων είναι οι τοιχογραφίες, όπως για παράδειγμα αυτές που βρέθηκαν στις ανασκαφές στις Μυκήνες, στην Τίρυνθα, στο Ακρωτήρι της Θήρας, στην Κρήτη, στην Πύλο και αλλού. Υπάρχουν πολυάριθμες τοιχογραφίες σπουδαίας αρχαιολογικής αξίας κατακερματισμένες σε χιλιάδες κομμάτια, οι οποίες παραμένουν θραυσμένες και μη-διατηρημένες για δεκάδες χρόνια, ακριβώς διότι η ανακατασκευή τους είναι ιδιαίτερος χρονοβόρα και αντιμετωπίζει σοβαρές δυσκολίες.



**Εικόνα 6 – «Η Μυκηναία» Τοιχογραφία της Μυκηναϊκής εποχής που σώζεται στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο**



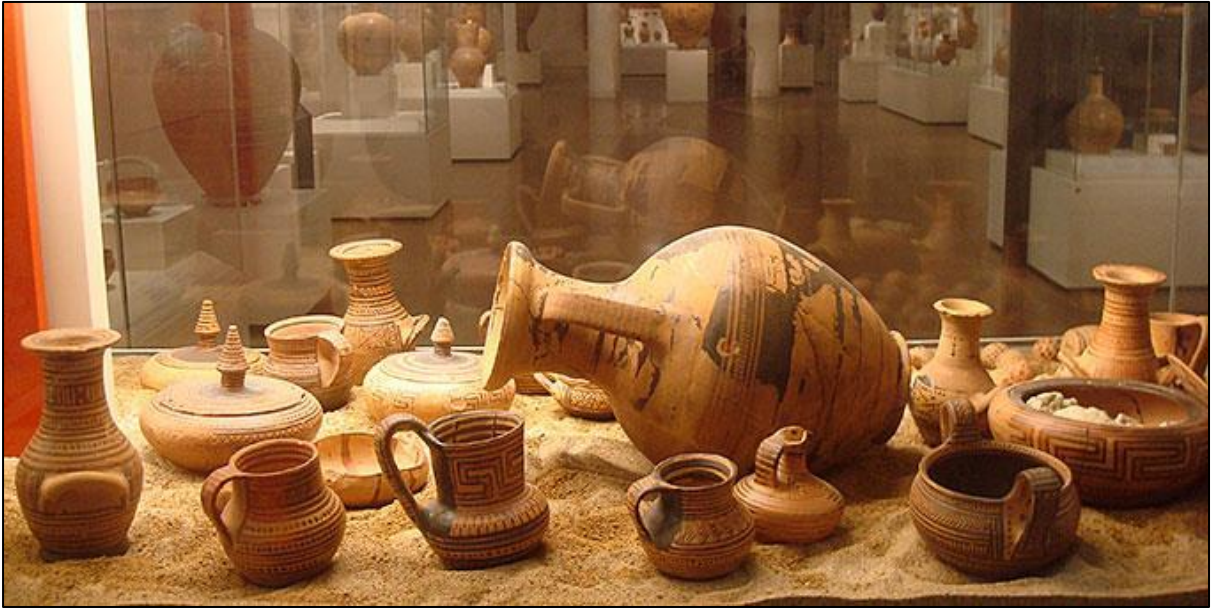
**Εικόνα 7 - Τοιχογραφία από τη Φυλακωπή της Μήλου (16<sup>ος</sup> αι. π.Χ.). Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο.**



**Εικόνα 8 – Η φημισμένη τοιχογραφία «Κροκοσυλλέκτριες» από το Ακρωτήρι Θήρας (Υστερη Εποχή Χαλκού, 17<sup>ος</sup> αι. π.Χ.)**

Αντιστοίχως, μία δεύτερη πολύ σημαντική ομάδα θραυσμένων αντικειμένων είναι αγγεία που έχουν ανασκαφεί σε πολλούς αρχαιολογικούς χώρους, όπως στην Τίρυνθα, τη Θήβα, την Κρήτη και αλλού. Ένας μεγάλος αριθμός αγγείων έχουν βρεθεί μέσα σε αρχαίους τάφους (ταφικά αγγεία) μαζί με άλλα κτερίσματα, όπως κοσμήματα και εργαλεία της εποχής, τα οποία έπαιζαν ένα σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της ταφής κατά την αρχαιότητα.





**Εικόνα 9 – Συλλογή αγγείων που διασώζονται στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο**



**Εικόνα 10 – Ανασυντεθειμένο αγγείο του 8<sup>ου</sup> αιώνα π.Χ. (Κρήτη)**

Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω, στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός νέου, πρωτοποριακού εργαλείου που επιτρέπει την εικονική αναπαράσταση θραυσμένων αντικειμένων, εξάγει τη μέγιστη δυνατή πληροφορία από τα θραύσματα, όσον αφορά την πιθανότητα αυτά να ενώνονται, και ελέγχει την πιθανότητα ένωσής τους. Η ανακατασκευή των θραυσμένων αυτών ευρημάτων αποτελεί βασική προϋπόθεση για την αρχαιολογική μελέτη τους και, ως εκ τούτου, συνιστά πολύτιμο εργαλείο της Αρχαιολογίας αλλά και της Ιστορίας. Από τις απεικονίσεις ή/και την τεχνοτροπία κατασκευής του εκάστοτε αντικειμένου είναι δυνατή όχι μόνο η ακριβής χρονολόγησή του, αλλά και η εξαγωγή πολύ χρήσιμων πληροφοριών σχετικά με το πολιτισμικό, κοινωνικό και τεχνολογικό επίπεδο της εποχής.

Στο πλαίσιο αυτό αναπτύχθηκαν δύο νέες μέθοδοι αυτόματης ανακατασκευής θραυσμένων αντικειμένων. Η πρώτη στοχεύει στην ανακατασκευή θραυσμένων αντικειμένων με μία τους πλευρά σχεδόν επίπεδη, όπως είναι η περίπτωση των τοιχογραφιών, και είναι μία επέκταση στις τρεις διαστάσεις της μεθόδου που για πρώτη φορά παρουσιάστηκε στο [32]. Η δεύτερη μεθοδολογία παρουσιάζεται για πρώτη φορά στην παρούσα εργασία και αναπτύχθηκε με σκοπό την ανασύνθεση ενός οποιουδήποτε θραυσμένου αντικειμένου, χρησιμοποιώντας την τρισδιάστατη απεικόνιση των θραυσμάτων του.

Η αποτελεσματικότητα και των δύο αναπτυχθέντων μεθόδων έχει ελεγχθεί και συνεχίζει να ελέγχεται σε έναν αριθμό από σημαντικά θραύσματα-ευρήματα αγγείων και τοιχογραφιών που φυλάσσονται στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο. Εκτενής αναφορά αυτών των εφαρμογών θα γίνει στην Ενότητα 6.

## **2. ΑΠΟΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΑΙΧΜΗΣ (STATE OF THE ART) ΣΤΗΝ ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ**

Έχουν γίνει διάφορες προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση του προβλήματος της αυτόματης ανασύνθεσης θραυσμένων αντικειμένων. Για παράδειγμα, στο [27] παρουσιάζεται μία μέθοδος για την ανακατασκευή διδιάστατων (2D) θραυσμένων ή διαμερισμένων αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τη σύγκριση των καμπυλοτήτων των περιγραμμάτων κομματιών χρησιμοποιώντας προοδευτικά αυξανόμενες κλίμακες ανάλυσης, μέσω ενός αλγορίθμου ταιριάσματος ακολουθιών βασισμένο σε δυναμικό προγραμματισμό. Στο [43] οι συγγραφείς προσεγγίζουν το πρόβλημα ανακατασκευής θραυσμένων αγγείων με τη χρήση συμμετρικών ως προς τους άξονες πολυωνυμικών μοντέλων επιφανειών. Ένα ανάλογο πρόβλημα αντιμετωπίζεται στο [36], όπου η ανακατασκευή πήλινων σκευών βασίζεται στη συνέχεια του μέσου χρωματισμού στα εικονοστοιχεία (pixels) των περιγραμμάτων γειτονικών κομματιών. Η προσέγγιση του [41] για την ανακατασκευή αγγείων χρησιμοποιεί συναρτήσεις της καμπυλότητας για να διακρίνει ταιριάσματα σε συνεχόμενα pixels των περιγραμμάτων δύο κομματιών. Τα άρθρα [25], [37], [38], [39], [40], [46] προσεγγίζουν την αυτόματη ανασύνθεση σχισμένων ή κατεστραμμένων εγγράφων βάσει των περιγραμμάτων τους, χρησιμοποιώντας διδιάστατες/τρισδιάστατες αναπαραστάσεις των εγγράφων.

Οι προσπάθειες αντιμετώπισης του προβλήματος της τρισδιάστατης ανακατασκευής θραυσμένων αντικειμένων, συνήθως περιλαμβάνει στοιχεία από ταίριασμα επιφανειών. Τέτοια παραδείγματα είναι ο αλγόριθμος ICP που παρουσιάζεται στο [46] ή σημείο προς σημείο προσεγγίσεις, όπως ο "Γενικευμένος Μετασχηματισμός Hough" [29], ως και μέθοδοι αναγνώρισης προτύπων με σκοπό να καθοριστεί η κατάλληλη ακολουθία βέλτιστα ευθυγραμμισμένων επιφανειών, οι οποίες, πιθανώς, οδηγούν στη λύση του προβλήματος της ανακατασκευής. Ειδικότερα, στο [44] οι συγγραφείς, αρχικά, μειώνουν τις διαστάσεις του προβλήματος ευθυγράμμισης επιφανειών, περιορίζοντας το πρόβλημα στην ευθυγράμμιση των καθέτων στην επιφάνεια διανυσμάτων και

αναζητώντας, στη συνέχεια, βέλτιστα ανά ζεύγη ταιριάσματα, μέσω ενός ειδικού τυχαίου σχήματος παρόμοιων δειγμάτων (RANSAC).

Στα [30] και [31], η αυτόματη τρισδιάστατη ανακατασκευή αντιμετωπίζεται μέσω αποστάσεων σημείου από σημείο (z-buffer) μεταξύ δεδομένων αντικρυστών επιφανειών των θραυσμάτων του αντικειμένου. Η βέλτιστη τοποθέτηση μεταξύ των γειτονικών θραυσμένων επιφανειών προσδιορίζεται μέσω αλγορίθμων προσομοιωμένης απόπτωσης. Στο [28] οι συγγραφείς παρουσιάζουν μία μέθοδο τρισδιάστατης ανακατασκευής που βασίζεται σε χαρακτηριστικά της επιφανείας των θραυσμάτων, τα οποία υπολογίζονται μέσω ολοκληρωμάτων που ορίζονται τοπικά. Οι πιθανές επιφάνειες θραύσης εντοπίζονται μέσω αλγορίθμων κατάτμησης των απεικονίσεών τους. Στη συνέχεια, ο τρόπος ανασύνθεσης του θραυσμένου αντικειμένου καθορίζεται αφενός μέσω γενικών κριτηρίων για το ταιρίασμα ανά δύο των θραυσμάτων και αφετέρου μέσω ταυτόχρονων τοπικών περιορισμών στο ταιρίασμα περισσότερων θραυσμάτων.

Η προσέγγιση που παρουσιάζεται στο [45] διαφέρει από τις προηγούμενες, με την έννοια ότι η μέθοδος που προτείνεται για την ανακατασκευή των θραυσμένων αντικειμένων δεν βασίζεται στα χαρακτηριστικά των κομματιών αλλά σε έναν αναδρομικό αλγόριθμο, ο οποίος, ουσιαστικά, αναφέρεται σε επαναληπτικές ενέργειες που πραγματοποιούνται πάνω σε μία μορφή πυκνών δυαδικών δένδρων που σχετίζεται με τα σημεία των πλευρικών επιφανειών των θραυσμάτων. Ειδικότερα, οι συγγραφείς εφαρμόζουν ένα μετασχηματισμό μεταξύ ζευγών σημείων σε γειτονικές επιφάνειες θραυσμάτων με σκοπό να καθοριστούν δυαδικές σχέσεις μεταξύ τους. Για να προσδιορίσουν τη μέγιστη ομάδα γειτονικών σημείων που ικανοποιούν την ίδια δυαδική σχέση, οι συγγραφείς χρησιμοποιούν έναν αλγόριθμο ιεραρχικής ομαδοποίησης, ο οποίος εφαρμόζεται αναδρομικά στο ομαδοποιημένο δυαδικό δένδρο με έναν "χωρικά αυξανόμενο" τρόπο, μειώνοντας έτσι την πυκνότητά του.

Το πρόβλημα της τρισδιάστατης ανακατασκευής θραυσμένων τοιχογραφιών προσεγγίζεται στο [26]. Οι συγγραφείς παρουσιάζουν ένα οικονομικό σύστημα για την καταγραφή και επεξεργασία πληροφορίας τρισδιάστατων θραυσμάτων. Στο [32], το πρόβλημα της ανακατασκευής θραυσμένων τοιχογραφιών αντιμετωπίζεται για την

περίπτωση που η μόνη διαθέσιμη πληροφορία για τα θραύσματα είναι ένα σύνολο διδιάστατων εικόνων. Η προσέγγιση είναι αποτελεσματική αλλά έχει εγγενώς τον περιορισμό της απουσίας τρισδιάστατης πληροφορίας των προς σύνθεση θραυσμάτων. Το σύστημα εφαρμόστηκε σε προϊστορικές τοιχογραφίες περί το 1600 π.Χ. από το Ακρωτήρι της Θήρας.



### 3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΤΩΝ ΑΝΑΠΤΥΧΘΕΙΣΩΝ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΩΝ

#### 3.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

##### Συμβολισμός

Σε όλη την παρούσα διατριβή, μόνο για λόγους απλότητας, θα συμβολίζουμε το διανυσματικό τελεστή  $\nabla$ , θεωρώντας σιωπηρά ότι ταυτίζεται με τα σύμβολα  $\vec{\nabla}$  ή το  $\nabla$ , όπως συχνά απαντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία.

##### Λήμμα 3.1

Εστω  $h(x_1, x_2, \dots, x_n), f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  βαθμωτές συναρτήσεις, συνεχώς παραγωγίσιμες, ορισμένες σε ένα ανοικτό χωρίο του  $\mathbb{R}^n$ . Εστω, επίσης,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  μία ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^n$  και ο τελεστής  $\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \vec{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ . Τότε, ισχύει:

$$\nabla \cdot \{h(f_1, f_2, \dots, f_n)\} = \nabla h \cdot (f_1, f_2, \dots, f_n) + h \nabla \cdot (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (3.1-1)$$

##### Απόδειξη

Για τη μερική παράγωγο ως προς την τυχούσα μεταβλητή  $x_i$  ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (hf_i) = \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i + h \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{h(f_1, f_2, \dots, f_n)\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (hf_i) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i + h \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i \right\} + h \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right\} \\ &\equiv \nabla h \cdot (f_1, f_2, \dots, f_n) + h \nabla \cdot (f_1, f_2, \dots, f_n) \end{aligned}$$

■

### Πόρισμα 3.1

Σε τυχόν ανοικτό χωρίο του  $\mathbb{R}^2$  που περιγράφεται από τις συντεταγμένες  $u, v$ , υπό τους περιορισμούς του ανωτέρω Λήμματος, ισχύει:

$$\nabla_{(u,v)} \cdot \{h(f, g)\} = \nabla_{(u,v)} h \cdot (f, g) + h \nabla_{(u,v)} \cdot (f, g) \quad (3.1-2)$$

## **3.2 ΚΑΜΠΥΛΕΣ, ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ, ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ LAGRANGE**

### Ορισμός καμπύλης στο $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε ως καμπύλη στον χώρο  $\mathbb{R}^n$  το σύνολο των σημείων, δηλαδή των διατεταγμένων  $n$ -άδων, όλες οι συνιστώσες των οποίων εξαρτώνται μόνο από μία ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$ , η οποία λαμβάνει τιμές σε ένα υποσύνολο  $I$  του  $\mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ). Για τις τμηματικώς συνεχείς καμπύλες στο  $\mathbb{R}^n$ , το  $I$  είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων του  $\mathbb{R}$ . Ισοδυνάμως, η καμπύλη είναι το σύνολο των σημείων  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  που συνιστούν το πεδίο τιμών μιας απεικόνισης του  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

### Ορισμός συνεχούς καμπύλης, ομαλής και καμπύλης $C_n$

Συνεχής λέγεται μία καμπύλη  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  όταν όλα τα  $x_i(t)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $I$ . Μία τέτοια καμπύλη, συχνά συμβολίζεται και ως  $C_0$ . Εάν μία καμπύλη είναι ένωση ξένων  $C_0$  καμπυλών λέγεται τμηματικώς συνεχής και συμβολίζεται με  $C_0^t$ .

Εάν όλες οι συναρτήσεις  $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο  $I$ , τότε η καμπύλη λέγεται ομαλή και συμβολίζεται με  $C_1$ . Η ένωση ξένων, τμηματικώς ομαλών καμπυλών συνιστά μια τμηματικώς ομαλή καμπύλη, η οποία συχνά συμβολίζεται  $C_1^t$ .

Επεκτείνοντας ευθύγραμμα, εάν όλες οι συντεταγμένες μίας καμπύλης είναι  $n$ -φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο  $I$ , τότε η καμπύλη ονομάζεται  $C_n$  ομαλή. Η ένωση ξένων  $C_n$  καμπυλών λέγεται τμηματικώς  $C_n$  και συμβολίζεται με  $C_n^t$ .

Επειδή, όπως είναι γνωστό, η ύπαρξη της παραγώγου τάξεως  $n$  εγγυάται τη συνέχεια της παραγώγου τάξεως  $n - 1$ , συνεπάγεται ότι μία  $C_n$  καμπύλη είναι και η ίδια συνεχής, αλλά έχει και όλες τις παραγώγους των  $x_i(t)$ , τάξεως από 1 έως  $n$ , συνεχείς.

Ορίζουμε σαν  $C_{n-}$  καμπύλη, αυτήν η οποία έχει όλες τις παραγώγους μέχρι τάξη  $n - 1$  συνεχείς, αλλά που η  $n$ -οστή τάξεως παράγωγος της  $x_i(t)$  τμηματικώς υπάρχει, δηλαδή υπάρχει παντού εκτός ενδεχομένως από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων.

Παραδείγματος χάριν, η  $f(x) = |x|$  είναι  $C_{1-}$  καθώς είναι συνεχής παντού στο  $\mathbb{R}$  και συνεχώς παραγωγίσιμη, επίσης, σε όλο το  $\mathbb{R}$  εκτός από το σημείο  $x = 0$ .

Ορισμός εφαπτομένου και μοναδιαίου εφαπτομένου διανύσματος ομαλής καμπύλης στο  $\mathbb{R}^n$

Έστω η ομαλή καμπύλη  $C$  του  $\mathbb{R}^n$  με ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  και έστω  $M(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), t \in I$  τυχόν σημείο της  $C$ . Τότε το διάνυσμα  $\vec{r}'(t) = x'_1(t)\vec{e}_1 + x'_2(t)\vec{e}_2 + \dots + x'_n(t)\vec{e}_n$  εφάπτεται σε αυτήν την καμπύλη στο σημείο  $M$ , όπου  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , τα μοναδιαία διανύσματα μιας βάσης του  $\mathbb{R}^n$  που στην παρούσα εργασία θεωρούμε ότι είναι ορθοκανονική. Σημειώνεται ότι η διανυσματική συνάρτηση  $\vec{r}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + \dots + x_n(t)\vec{e}_n$  ονομάζεται επιβατική ή διανυσματική ακτίνα της καμπύλης  $C$ .

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα σε αυτό το τυχόν σημείο  $M$  της καμπύλης είναι το

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad (3.2-1)$$

### Ορισμός συνεχούς και ομαλής επιφάνειας

#### α) Μέσω παραμετρικών εξισώσεων

Έστω ένα οποιοδήποτε συνεκτικό χωρίο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  και έστω οι συναρτήσεις  $x_1(u, v), x_2(u, v), \dots, x_n(u, v)$ , όπου  $u, v$  ανεξάρτητες μεταβλητές με το ζεύγος  $(u, v) \in D$ . Τότε, και εάν  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  είναι μία ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^n$ , το σύνολο των σημείων που είναι το πέρας της επιβατικής ακτίνας  $\vec{r}(u, v) = x_1(u, v)\vec{e}_1 + x_2(u, v)\vec{e}_2 + \dots + x_n(u, v)\vec{e}_n$  συνιστούν μία συγκεκριμένη επιφάνεια  $\mathcal{E}$  του  $\mathbb{R}^n$ . Ισοδυνάμως, μία επιφάνεια  $\mathcal{E}$  του  $\mathbb{R}^n$  είναι το πεδίο τιμών μιας απεικόνισης από ένα συνεκτικό χωρίο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  στο  $\mathbb{R}^n$ .

Εάν όλες οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών  $x_i(u, v), i = 1, 2, \dots, n$  είναι συνεχείς σε ένα κλειστό υπερσύνολο του  $D$ , τότε η επιφάνεια ονομάζεται συνεχής. Εάν, δε, οι συναρτήσεις  $x_i(u, v)$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους  $\frac{\partial x_i}{\partial u}, \frac{\partial x_i}{\partial v}, i = 1, 2, \dots, n$  σε ένα ανοικτό υπερσύνολο του χωρίου  $D$ , τότε η επιφάνεια ονομάζεται ομαλή. Όπως και στην περίπτωση των καμπυλών, η ένωση ξένων συνεχών επιφανειών συνιστά μία τμηματικώς συνεχή επιφάνεια, ενώ η ένωση ξένων ομαλών επιφανειών συνιστά μία τμηματικώς ομαλή επιφάνεια. Αυτή είναι η γενικότερη μορφή επιφάνειας στο  $\mathbb{R}^n$ .

#### β) Πεπλεγμένη εξίσωση επιφάνειας

Εντούτοις, ας θεωρήσουμε προς στιγμήν το χώρο  $\mathbb{R}^3$  και μία πεπλεγμένη εξίσωση της μορφής  $f(x, y, z) = 0$ , ορισμένη εντός αυτού. Έστω ότι είναι δυνατόν να λύσουμε την  $f(x, y, z) = 0$  ως προς  $z$ , λαμβάνοντας τη σχέση  $z = g(x, y)$ , όπου  $g$  μία συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα κατάλληλο συνεκτικό χωρίο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$ .

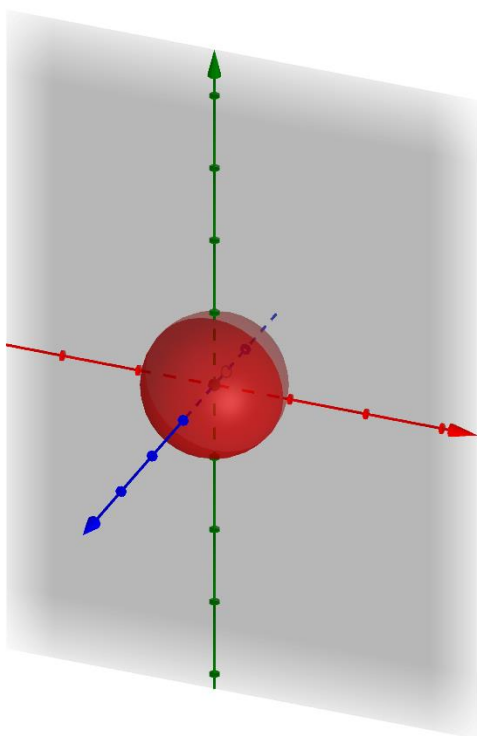
Τότε, το σύνολο των σημείων

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + g(x, y)\vec{e}_3 \quad (3.2-2)$$

όπου  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  είναι μία συγκεκριμένη επιφάνεια  $\mathcal{E}$  του  $\mathbb{R}^3$ , σύμφωνα με τον παραμετρικό ορισμό αυτής και εφόσον θέσουμε  $u = x, v = y, x_1(u, v) = x, x_2(u, v) = y$  και  $x_3(u, v) = x_3(x, y) = g(x, y)$ . Για τον λόγο αυτό, μία τέτοια εξίσωση  $f(x, y, z) = 0$

ονομάζεται πεπλεγμένη μορφή της επιφανείας  $\mathcal{E}$ . Αναφέρουμε ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να περιοριστεί σε ένα οποιοδήποτε χωρίο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$ .

Παραδείγματος χάριν, αν θέσουμε το χωρίο  $D = [0, 2\pi) \times [0, \pi]$  και ορίσουμε  $x(\varphi, \theta) = \alpha \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta$ ,  $y(\varphi, \theta) = \alpha \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$  και  $z(\varphi, \theta) = \alpha \cdot \cos\theta$ , όπου  $\alpha$  τυχούσα θετική σταθερά, τότε λαμβάνουμε τη σφαίρα ακτίνας  $\alpha$  και κέντρου  $(0, 0, 0)$  (Εικόνα 11).



**Εικόνα 11 – Τρισδιάστατη απεικόνιση μιας σφαίρας**

Εάν περιορίσουμε το χωρίο  $D$  στο μισό, θέτοντας  $D_1 = [0, 2\pi) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , τότε λαμβάνουμε το άνω ημισφαίριο της προηγούμενης σφαίρας, το οποίο με ευθύγραμμη άλγεβρα έχει την ισοδύναμη πεπλεγμένη εξίσωση  $x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 = 0$ .

Στο σημείο αυτό φαίνεται άμεσα η δύναμη της παραμετρικής παράστασης της τυχούσας επιφάνειας, έναντι της πεπλεγμένης παράστασης αυτής, καθόσον ολόκληρη η σφαίρα δεν είναι δυνατόν να παρασταθεί με μία πεπλεγμένη εξίσωση αλλά με δύο, ενώ μπορεί να παρασταθεί με μία μόνο παραμετρική. Σημειώνεται, μετ' επιτάσεως ότι

στη γενική περίπτωση επιφανειών που εμφανίζουν πολλές και πολύπλοκες αναδιπλώσεις, ο καθορισμός πεπλεγμένων συναρτήσεων επ' αυτών, κατά κανόνα, καθίσταται ιδιαιτέρως δύσκολος ή και ενίοτε αδύνατος. Εάν, όμως, μας δοθεί μία πεπλεγμένη εξίσωση  $f(x, y, z) = 0$ , τότε οι ενδεχόμενες διαφορετικές λύσεις αυτής, όπου μία μεταβλητή εκφράζεται αναλυτικά συναρτήσει δύο άλλων σε ένα συνεκτικό χωρίο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$ , πάντα μπορεί να μεταφραστεί σε μία παραμετρική εξίσωση επιφάνειας του προηγούμενου τύπου (3.2-2).

### Κάθετο διάνυσμα επί ομαλής επιφάνειας

#### α) Έκφραση αυτού με χρήση της παραμετρικής εξίσωσης της επιφάνειας

Για λόγους καλύτερης εποπτείας, αλλά και λόγω της φύσης του προβλήματος που έχουμε αντιμετωπίσει, θα χρησιμοποιήσουμε για την ανάλυσή μας την περίπτωση ομαλής επιφάνειας  $\mathcal{E}$  εντεθειμένης στο  $\mathbb{R}^3$ .

Πράγματι, έστω

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad (3.2-3)$$

ορισμένη σε ένα συνεκτικό χωρίο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$ , όπου καθαρά για λόγους εξοικείωσης, θέσαμε  $x_1(u, v) = x(u, v)$ ,  $x_2(u, v) = y(u, v)$ ,  $x_3(u, v) = z(u, v)$ ,  $\vec{e}_1 = \vec{i}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{j}$  και  $\vec{e}_3 = \vec{k}$ .

Ας θεωρήσουμε τώρα, προς στιγμήν, ότι κρατάμε την ανεξάρτητη μεταβλητή  $v$  σταθερή, έστω  $v = v_0$ , ενώ αφήνουμε την άλλη μεταβλητή  $u$  στο ζεύγος  $(u, v_0)$  να διατρέχει όλες τις δυνατές τιμές αυτού στο χωρίο  $D$ . Επειδή, με αυτόν τον περιορισμό, η  $\vec{r}(u, v_0)$  είναι συνάρτηση μόνο μίας ανεξάρτητης μεταβλητής, προφανώς, η  $\vec{r}(u, v_0)$  είναι εξ ορισμού καμπύλη (u-καμπύλη). Επιπλέον, επειδή έχουμε υποθέσει ότι η επιφάνεια  $\mathcal{E}$  είναι ομαλή, ορίζεται η μερική παράγωγος  $\frac{\partial \vec{r}(u, v_0)}{\partial u}$ , για κάθε  $u$ , τέτοιο ώστε  $(u, v_0) \in D$ . Είναι προφανές από την προηγούμενη ανάλυση ότι το διάνυσμα  $\frac{\partial \vec{r}(u, v_0)}{\partial u}$  εφάπτεται σε κάθε αντίστοιχο σημείο της u-καμπύλης. Με ακριβώς όμοιο τρόπο, θέτοντας  $u = u_0$  σταθερά, ορίζεται η συνάρτηση  $\vec{r}(u_0, v)$ , η οποία, επίσης, είναι εξ

ορισμού καμπύλη (*ν-καμπύλη*), καθώς και η μερική παράγωγος  $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v)}{\partial v}$ , η οποία είναι εφαπτομένη αυτής σε κάθε αντίστοιχο σημείο της *ν-καμπύλης*.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα διανύσματα  $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u}$  και  $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$  δεν είναι συγγραμμικά στο συγκεκριμένο, πλην τυχόν, σημείο  $(u_0, v_0)$ . Τότε, αυτά τα δύο διανύσματα ορίζουν ένα επίπεδο, έστω  $T(u_0, v_0)$ . Επιπλέον, τα διανύσματα  $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u}$  και  $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$  εφάπτονται και τα δύο σε δύο διαφορετικές καμπύλες της  $\mathcal{E}$  επιφάνειας και άρα και της  $\mathcal{E}$  αυτής καθ'εαυτής, γεγονός που υποδηλώνει ότι το  $T(u_0, v_0)$  είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας  $\mathcal{E}$  στο σημείο  $(u_0, v_0)$ . Αλλά, εφόσον τα  $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u}$  και  $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$  εξ υποθέσεως δεν είναι συγγραμμικά, το εξωτερικό γινόμενο  $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$  είναι αφενός μη μηδενικό διάνυσμα και αφετέρου είναι κάθετο στο επίπεδο  $T(u_0, v_0)$ . Συνεπώς, το  $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$  είναι κάθετο στην επιφάνεια  $\mathcal{E}$ , τοπικά στο σημείο  $(u_0, v_0)$  εκ της φύσεως της σχέσης της επιφάνειας  $\mathcal{E}$  και κάθε εφαπτομένου επιπέδου αυτής.

Προφανώς, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $\mathcal{E}$  στο σημείο  $(u_0, v_0)$  είναι το

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v} \right\|} \quad (3.2-4)$$

Αναφέρουμε, απλώς, ότι το στοιχειώδες εμβαδόν της επιφάνειας γύρω από το σημείο  $(u_0, v_0)$  είναι

$$dS = \left\| \frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v} \right\| du dv \quad (3.2-5)$$

δεδομένου ότι αυτό είναι το εμβαδόν του στοιχειώδους παραλληλογράμμου με πλευρές τα  $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial u} du$  και  $\frac{\partial \vec{r}(u_0, v_0)}{\partial v} dv$  (άμεση σχέση με το Λήμμα 5.3).

*β) Το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια επί τη βάσει της πεπλεγμένης μορφής αυτής*

Έστω η επιφάνεια  $\mathcal{E}$  του  $\mathbb{R}^3$ , η οποία περιγράφεται από την πεπλεγμένη εξίσωση  $f(x, y, z) = 0$  και ας θεωρηθεί, προς στιγμήν, χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας, ότι αυτή η πεπλεγμένη εξίσωση λύνεται ως προς  $z$ . Ισοδυνάμως, η σχέση  $f(x, y, z) = 0$  μετασχηματίζεται στην  $z = g(x, y)$ , όπου  $g$  μία συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα κατάλληλο συνεκτικό χωρίο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$ . Ας υποτεθεί, επιπλέον, ότι η συνάρτηση  $f(x, y, z)$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^3$ , καθώς, επίσης, και ότι η  $g(x, y)$  στο χωρίο  $D$ .

Επί τη βάση των προηγούμενων υποθέσεων, προκύπτει ότι η συνάρτηση  $q(x, y) = f(x, y, g(x, y))$  είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν στο χωρίο  $D$ , δηλαδή  $q(x, y) = f(x, y, g(x, y)) \equiv 0$  και επιπλέον ότι η  $q(x, y)$  είναι, επίσης, συνεχώς παραγωγίσιμη στο χωρίο  $D$ .

Ας θεωρήσουμε, τώρα, τυχόν σημείο  $M(x, y, z)$  επί της επιφανείας  $\mathcal{E}$ , του οποίου, προφανώς, η επιβατική ακτίνα από την αρχή των αξόνων  $O(0,0,0)$  είναι:

$$\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + g(x, y)\vec{k}$$

όπου  $x, y \in D$ .

Επομένως, σύμφωνα με την ανάλυση της αμέσως προηγούμενης ενότητας, το κάθετο διάνυσμα στο τυχόν σημείο  $(x, y, g(x, y))$  της επιφανείας  $\mathcal{E}$  είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}(x, y)}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}(x, y)}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= -\left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right)\vec{j} + \vec{k} \end{aligned} \quad (3.2-6)$$

Αλλά, παραγωγίζοντας ως προς  $x$  την ταυτότητα  $q(x, y) = f(x, y, g(x, y)) \equiv 0$  με εφαρμογή του κανόνα αλληλουκίας, λαμβάνουμε:



$$\begin{aligned}\frac{\partial q(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial z} \\ &\cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \equiv 0\end{aligned}\quad (3.2-7)$$

δεδομένου ότι  $z = g(x,y)$ .

Ομοίως,

$$\begin{aligned}\frac{\partial q(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial z} \\ &\cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \equiv 0\end{aligned}\quad (3.2-8)$$

Αλλά, παρατηρούμε ότι η σχέση (3.2-7) γράφεται ισοδυνάμως

$$\begin{aligned}\frac{\partial q(x,y)}{\partial x} &= \left( \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &\cdot \left( \vec{i} + 0\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial x} \vec{k} \right) \equiv \nabla f \cdot \frac{\partial \vec{r}(x,y,z)}{\partial x} \equiv 0\end{aligned}\quad (3.2-9)$$

για κάθε  $x, y \in D$ .

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι το  $\nabla f$  είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\frac{\partial \vec{r}(x,y)}{\partial x}$  που εφάπτεται στην  $x$  καμπύλη σε κάθε σημείο της  $\mathcal{E}$ .

Ομοίως, η σχέση (3.2-8) γράφεται ισοδυνάμως

$$\begin{aligned}\frac{\partial q(x,y)}{\partial y} &= \left( \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &\cdot \left( 0\vec{i} + \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{k} \right) \equiv \nabla f \cdot \frac{\partial \vec{r}(x,y,z)}{\partial y} \equiv 0\end{aligned}\quad (3.2-10)$$

από την οποία, επίσης, εξάγεται το συμπέρασμα ότι το  $\nabla f$  είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\frac{\partial \vec{r}(x,y)}{\partial y}$  που εφάπτεται στην  $y$  καμπύλη σε κάθε σημείο της  $\mathcal{E}$ .

Άρα, το διάνυσμα  $\nabla f$  είναι κάθετο τόσο στο διάνυσμα  $\frac{\partial \vec{r}(x,y)}{\partial x}$ , όσο και στο διάνυσμα  $\frac{\partial \vec{r}(x,y)}{\partial y}$  για κάθε  $x, y \in D$ . Επομένως, το  $\nabla f$  είναι κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα διανύσματα  $\frac{\partial \vec{r}(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial \vec{r}(x,y)}{\partial y}$ , εφόσον είναι μη συγγραμμικά, το οποίο εφάπτεται στο τυχόν σημείο  $(x, y)$  της επιφανείας  $\mathcal{E}$ . Δηλαδή, το  $\nabla f$  είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο  $T(x, y)$  της επιφανείας  $\mathcal{E}$  σε κάθε σημείο αυτής και συνεπώς, συγγραμμικό με το  $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}(x,y)}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}(x,y)}{\partial y}$ , εφόσον  $\vec{N} \neq 0$ .

Ελαχιστοποίηση πραγματικής συναρτήσεως  $n$ -μεταβλητών υπό περιορισμό, με χρήση πολλαπλασιαστή Lagrange

Χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας, θα περιγράψουμε τη χρήση του πολλαπλασιαστή Lagrange για την ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης κάτω από έναν περιορισμό για μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο  $\mathbb{R}^3$ . Όπως, έστω η πραγματική συνάρτηση  $f(x, y, z)$  συνεχώς παραγωγίσιμη και ορισμένη σε ένα ανοικτό χωρίο  $D$  του  $\mathbb{R}^3$  και ένας περιορισμός, ορισμένος με την πεπλεγμένη του μορφή, έστω  $g(x, y, z) = 0$ .

Καταρχήν, ας υποθέσουμε ότι ο περιορισμός  $g(x, y, z) = 0$  μπορεί να λυθεί ως προς τη μεταβλητή  $z$ , προσφέροντας τη συναρτησιακή σχέση  $z = u(x, y)$ , ορισμένη σε ένα ανοικτό χωρίο  $X$  του  $\mathbb{R}^2$ . Τότε, επί του περιορισμού αυτού, η συνάρτηση  $f(x, y, z)$  γίνεται μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, έστω η  $q(x, y)$ , η οποία είναι ταυτοτικά ίση με την  $f(x, y, u(x, y))$ , ορισμένη στο χωρίο  $X$ . Δηλαδή,  $q(x, y) \triangleq f(x, y, u(x, y))$ ,  $x, y \in X$ .

Ας υποθεθεί, τώρα, ότι πράγματι η  $f(x, y, z)$  έχει ένα τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $(x_0, y_0, z_0) \in D$  ενώ ταυτόχρονα υπόκειται στον περιορισμό  $g(x, y, z) = 0$ . Αυτή η υπόθεση ισοδυναμεί με το γεγονός ότι η  $q(x, y)$  έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $(x_0, y_0)$ , χωρίς να υπόκειται σε κανέναν περιορισμό. Τότε, στο σημείο αυτό θα ισχύει

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \nabla q|_{(x_0, y_0)} = 0$$

Όμως, με εφαρμογή του κανόνα αλληλουχίας (chain rule), ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y, u(x, y))}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=u(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial q}{\partial x} \\ &= \nabla f \cdot \left(1, 0, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0\end{aligned}\quad (3.2-11)$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y, u(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=u(x, y)} \frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial q}{\partial y} \\ &= \nabla f \cdot \left(0, 1, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\end{aligned}\quad (3.2-12)$$

Αλλά, έχουμε ήδη θεμελιώσει ότι το διάνυσμα  $\left(1, 0, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ , το οποίο γράφεται, ισοδυνάμως, ως  $\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x} \vec{k}$ , εφάπτεται σε κάθε σημείο της  $x$  καμπύλης της επιφάνειας  $\mathcal{E}$  που ορίζεται από τη σχέση  $g(x, y, z) = 0$ .

Επιπλέον, έχουμε ήδη θεμελιώσει ότι το διάνυσμα  $\left(0, 1, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ , το οποίο επίσης γράφεται, ισοδυνάμως, ως  $\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{k}$ , εφάπτεται σε κάθε σημείο της  $y$  καμπύλης της επιφάνειας  $\mathcal{E}$  που ορίζεται από τη σχέση  $g(x, y, z) = 0$ .

Συνδέοντας όλα τα ανωτέρω και λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (3.2-11) και (3.2-12), προκύπτει άμεσα ότι το  $\nabla f$  είναι κάθετο στην επιφάνεια  $\mathcal{E}$  που ορίζει η σχέση  $g(x, y, z) = 0$  στο σημείο ελαχίστου  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Έχουμε, όμως, ήδη θεμελιώσει, επίσης, ότι ένα κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $\mathcal{E}$  είναι το  $\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k}$  σε κάθε σημείο αυτής. Συνεπώς, στο σημείο  $(x_0, y_0, z_0)$  της επιφάνειας αυτής, στο οποίο η  $f(x, y, z)$  εμφανίζει τοπικό ελάχιστο, τα διανύσματα  $\nabla f$  και  $\nabla g$  είναι συγγραμμικά, άρα υπάρχει πραγματική σταθερά  $\lambda$ , τέτοια ώστε  $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ . Ισοδυνάμως, πάνω στο σημείο τοπικού ελαχίστου της  $f(x, y, z)$  υποκειμένης στον περιορισμό  $g(x, y, z) = 0$  ισχύει η σχέση

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0 \quad (3.2-13)$$

γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μπορούμε να βρούμε το σημείο αυτό ελαχιστοποιώντας το ενεργειακό:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \quad (3.2-14)$$

θεωρώντας όλες τις μεταβλητές  $x, y, z, \lambda$  ως ανεξάρτητες.

Πράγματι, στο σημείο τοπικού ελαχίστου της  $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda)$  θα ισχύει:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.2-15)$$

Όμως,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Η ισοδυναμώς,  $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ , δηλαδή η σχέση (3.2-13).

Τέλος, η απαίτηση

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

οδηγεί άμεσα στην ικανοποίηση του περιορισμού  $g(x, y, z) = 0$ .

Γενικά, σημειώνουμε ότι, σε σχέση με όλα όσα έχουν αναφερθεί σε αυτήν την ενότητα, η απαίτηση  $g(x, y, z) = 0$  να μεταφράζεται στην εξίσωση  $z = u(x, y)$  επί ενός χωρίου  $X \subseteq \mathbb{R}^2$ , ισοδυναμεί με την απαίτηση κάθε σημείο  $(x, y)$  του χωρίου  $X$  να έχει μόνο μία εικόνα στην επιφάνεια  $\mathcal{E}$ . Σε ισοδύναμη διατύπωση, η  $\mathcal{E}$  δεν πρέπει να εμφανίζει αναδιπλώσεις, τέτοιες ώστε δύο διαφορετικά σημεία αυτής να προβάλλονται στο ίδιο σημείο του χωρίου  $X$ . Εάν κάτι τέτοιο συμβαίνει, τότε, εφόσον η  $\mathcal{E}$  έχει εφαιπόμενο επίπεδο σε ένα τυχόν σημείο αυτής, προκύπτει ότι τοπικά η  $\mathcal{E}$  μπορεί να προβληθεί ως συνάρτηση σε ένα από τα άλλα δύο επίπεδα συντεταγμένων, το  $yz$  ή το  $xz$ . Αυτό σημαίνει ότι η σχέση  $g(x, y, z) = 0$  θα ισοδυναμεί ή με μία σχέση της μορφής  $x =$

$v_1(y, z)$  ή της μορφής  $y = v_2(x, z)$ , οπότε η απόδειξη προκύπτει άμεσα, με βάση τα προηγούμενα, με ευθύγραμμες τροποποιήσεις.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα για την αποσαφήνιση των προηγούμενων

1α) Ζητάμε να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης  $f(x, y)$  υπό κάποιον περιορισμό.

Έστω η  $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$  όπου  $x, y \in \mathbb{R}$  είναι οι ανεξάρτητες παράμετροι.

Η εξίσωση  $z = f(x, y)$  στο  $\mathbb{R}^3$  γίνεται  $z - f(x, y) = 0$

Το  $\nabla$  της  $h(x, y, z) = z - x^2 - y^2 + 4$  είναι κάθετο στην επιφάνεια που περιγράφει η εξίσωση  $z = f(x, y)$ , δηλαδή κάθετο στην επιφάνεια αυτή είναι το:

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$$

1β) Αν δεν υπάρχει περιορισμός στα  $x, y$ , τότε στα σημεία μεγίστου ή ελαχίστου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο  $x, y$  επίπεδο, άρα το κάθετο διάνυσμα είναι παράλληλο στο  $z$  οπότε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Άρα,

$$\nabla f = 0$$

2) Έστω ο περιορισμός  $g(x, y) = x + y - 1$ , δηλαδή περιορίζουμε τώρα το πεδίο ορισμού της  $f(x, y)$ .

Ζητούνται τα ακρότατα της  $f(x, y)$  υπό τον παραπάνω περιορισμό. Στο παράδειγμα αυτό ενώ το πεδίο ορισμού ήταν όλο το  $\mathbb{R}^2$  τώρα έγινε μόνο μια ευθεία.

2α) Η  $g(x, y) = 0$  λύνεται πολύ εύκολα:

$$y = 1 - x$$

Άρα,

$$z = x^2 + (1 - x)^2 - 4$$

δηλαδή η καμπύλη  $x\vec{i} + (1 - x)\vec{j} + z\vec{k}$  παραγωγίζοντας

$$\frac{dz(x)}{dx} = 2x - 2(1 - x) = 2x - 2 + 2x \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}$$

και

$$y = \frac{1}{2}$$

με τιμή  $z = -3.5$  για το  $z$ .

2β) Όμως, στις περισσότερες περιπτώσεις, δεν μπορούμε να λύσουμε την  $g(x, y) = 0$  ούτε ως προς  $x$  ούτε ως προς  $y$ .

Για παράδειγμα, έστω ο περιορισμός:

$$g(x, y) = \sin(x + y) - xy = 0$$

Στην περίπτωση αυτή, μόνο με χρήση ενός πολλαπλασιαστή Lagrange λαμβάνουμε τις παρακάτω αλγεβρικές εξισώσεις, οι οποίες εν γένει λύνονται με αριθμητικές μεθόδους ή/και κατά περίπτωση και αναλυτικά, ως προς τις τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές  $x, y, \lambda$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + \lambda(\cos(x + y) - y) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y + \lambda(\cos(x + y) - x) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sin(x + y) - xy = 0$$

Ελαχιστοποίηση πραγματικής συναρτήσεως n-μεταβλητών υπό πολλούς περιορισμούς, με χρήση αντίστοιχου πλήθους πολλαπλασιαστών Lagrange

Με όμοιο τρόπο, θα περιγράψουμε τη χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange για την ελαχιστοποίηση μιας πραγματικής συνάρτησης, ορισμένης στο  $\mathbb{R}^n$ , κάτω από πολλούς περιορισμούς.

Όντως, έστω η πραγματική συνάρτηση  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  συνεχώς παραγωγίσιμη και ορισμένη σε ένα ανοικτό χωρίο  $D$  του  $\mathbb{R}^n$  και οι περιορισμοί, ορισμένοι με την πεπλεγμένη τους μορφή, έστω  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Με βάση τα όσα αναλύσαμε προηγουμένως, μπορούμε να βρούμε το σημείο τοπικού ελαχίστου της  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  κάτω από τους ανωτέρω  $m$  περιορισμούς, ελαχιστοποιώντας το ενεργειακό:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (3.2-16)$$

θεωρώντας όλες τις μεταβλητές  $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ως ανεξάρτητες.

Με αυτόν τον τρόπο, στο σημείο τοπικού ελαχίστου της  $\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  θα ισχύει:

$$\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + \dots + \lambda_m \nabla g_m = 0 \quad (3.2-17)$$

ενώ, ταυτόχρονα οι σχέσεις  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0$  οδηγούν άμεσα στην ικανοποίηση των περιορισμών  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  όπου  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται πολλές φορές στην πράξη για την ελαχιστοποίηση μιας πραγματικής συνάρτησης κάτω από περιορισμούς, μέσω της επίλυσης ενός συστήματος  $m + n$  αγνώστων με  $m + n$  εξισώσεις, αφού όλες οι μεταβλητές θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η επίλυση αυτή, τις περισσότερες φορές, γίνεται με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης.

### 3.3 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN

Έστω μία τμηματικώς ομαλή και προσανατολισίμη επιφάνεια  $\mathcal{E}$ , η οποία περατούται σε μία απλή, κλειστή καμπύλη Jordan, έστω  $C$ . Έστω, επίσης, δύο βαθμωτές συναρτήσεις  $f(x, y, z)$  και  $g(x, y, z)$ , οι οποίες είναι συνεχώς παραγωγίσιμες σε ένα ανοικτό τρισδιάστατο χωρίο  $V$  που συμπεριλαμβάνει την επιφάνεια  $\mathcal{E}$ . Ας θεωρήσουμε, επιπλέον, ότι η επιφάνεια  $\mathcal{E}$  περιγράφεται από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $u$  και  $v$ , ορισμένες σε κάποιο συνεκτικό χωρίο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  με σύνορο  $\partial D$ . Έστω, επίσης, ότι το  $\vec{n}$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο  $\partial D$  στο τυχόν σημείο  $(u, v)$  επί του  $\mathbb{R}^2$ , ενώ  $d\ell$  είναι το στοιχειώδες μήκος της καμπύλης  $\partial D$  στο σημείο  $(u, v)$ .

Τότε ισχύει:

$$\iint_{\mathcal{E}} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) du dv = \oint_{\partial D} (f, g) \cdot \vec{n} d\ell \quad (3.3-1)$$

#### Λήμμα 3.2 – Επέκταση της μεθόδου ολοκλήρωσης κατά μέρη στα επιφανειακά ολοκληρώματα

Έστω ότι ισχύουν οι περιορισμοί του ανωτέρω γενικευμένου θεωρήματος Green και έστω, επίσης, τρεις βαθμωτές συναρτήσεις, συνεχώς παραγωγίσιμες σε ένα ανοικτό χωρίο του  $\mathbb{R}^2$  που περικλείει το  $D$ . Τότε, ισχύει:

$$\iint_{\mathcal{E}} \nabla_{(u,v)} h \cdot (f, g) du dv = \oint_{\partial D} (hf, hg) \cdot \vec{n} d\ell - \iint_{\mathcal{E}} h \nabla_{(u,v)} \cdot (f, g) du dv \quad (3.3-2)$$

#### Απόδειξη

Βάσει του Πορίσματος της υποενότητας 3.1, ισχύει ο τύπος (3.1-2)

$$\nabla_{(u,v)} \cdot \{h(f, g)\} = \nabla_{(u,v)} h \cdot (f, g) + h \nabla_{(u,v)} \cdot (f, g)$$

Ολοκληρώνοντας επί της επιφανείας  $\mathcal{E}$  την ανωτέρω σχέση, λαμβάνουμε:



$$\iint_{\mathcal{E}} \nabla_{(u,v)} \cdot \{h(f,g)\} du dv = \iint_{\mathcal{E}} \nabla_{(u,v)} h \cdot (f,g) du dv + \iint_{\mathcal{E}} h \nabla_{(u,v)} \cdot (f,g) du dv$$

Όμως, στο αριστερό μέλος της ανωτέρω ισότητας μπορούμε να εφαρμόσουμε το γενικευμένο θεώρημα Green, αφού εξ ορισμού  $\nabla_{(u,v)} \cdot \{h(f,g)\} \equiv \frac{\partial}{\partial u}(hf) + \frac{\partial}{\partial v}(hg)$ , οπότε λαμβάνουμε:

$$\oint_{\partial D} (hf, hg) \cdot \vec{n} d\ell = \iint_{\mathcal{E}} \nabla_{(u,v)} h \cdot (f,g) du dv + \iint_{\mathcal{E}} h \nabla_{(u,v)} \cdot (f,g) du dv$$

■

### 3.4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ (CALCULUS OF VARIATIONS)

#### 3.4.1 Εντοπισμός βέλτιστης καμπύλης μέσω ολοκλήρωσης Lagrangian της μορφής $\mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t))$

Εν γένει, σε αυτό το πρώτο θεμελιώδες της Θεωρίας Μεταβολών, θέλουμε να υπολογίσουμε τα στάσιμα σημεία ενός ολοκληρώματος

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t)) dt$$

όπου οι  $x(t)$ ,  $y(t)$  είναι συναρτήσεις μίας ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$  και  $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$  και  $\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}y(t)$ .

Επειδή αυτή η βελτιστοποίηση γίνεται κατά μήκος μιας διαδρομής ολοκλήρωσης επί της οποίας το  $I$  παρουσιάζει ακρότατο, υποχρεωτικά θα ισχύει ότι

$$\delta I = 0$$

Έστω ότι  $(x(t), y(t))$ , όπου  $t \in [t_1, t_2]$  είναι η ζητούμενη βέλτιστη διαδρομή ολοκλήρωσης/καμπύλη. Οποιαδήποτε άλλη καμπύλη με άκρα  $(x(t_1), y(t_1))$  αφενός

και  $(x(t_2), y(t_2))$  αφετέρου, είναι της μορφής  $\tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon\eta_1(t)$  και  $\tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon\eta_2(t)$ , όπου  $\eta_1(t)$  και  $\eta_2(t)$  είναι τυχούσες ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο διάστημα  $[t_1, t_2]$  και  $\varepsilon$  οποιαδήποτε «μικρή» πραγματική ποσότητα. Στο σημείο αυτό, πρέπει να γίνει η διευκρίνιση ότι τα ακρότατα του  $I$  και άρα η καμπύλη  $(x(t), y(t))$ , εξαρτώνται άμεσα, όπως θα δειχθεί στη συνέχεια, από την απαίτηση της μορφής της καμπύλης στα άκρα  $t_1$  και  $t_2$  του διαστήματος ορισμού της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ .

Θα διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

A1) Τα άκρα όλων των διαδρομών που συμμετέχουν στον υπολογισμό του ολοκληρώματος  $I$  είναι σταθερά, δηλαδή  $\delta x(t_1) = \delta y(t_1) = \delta x(t_2) = \delta y(t_2) = 0$ . Ισοδυνάμως, οι τιμές στα άκρα όλων των πιθανών διαδρομών είναι σταθερές.

A2) Μόνο το ένα άκρο όλων των διαδρομών που συμμετέχουν στον υπολογισμό του ολοκληρώματος  $I$  είναι δεσμευμένο/σταθερό, δηλαδή μόνο για ένα άκρο, έστω για αυτό που αντιστοιχεί στο  $t = t_1$ , ισχύει ότι  $\delta x(t_1) = \delta y(t_1) = 0$ . Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση τα  $\delta x(t_2)$  και  $\delta y(t_2)$  είναι εντελώς ελεύθερα.

A3) Τα άκρα όλων των διαδρομών που συμμετέχουν στον υπολογισμό του ολοκληρώματος  $I$  είναι ελεύθερα.

Σε όλες τις περιπτώσεις, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t), \tilde{y}(t), \dot{\tilde{y}}(t)) dt &\Leftrightarrow \delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t), \tilde{y}(t), \dot{\tilde{y}}(t)) dt \Leftrightarrow \delta I \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t), \tilde{y}(t), \dot{\tilde{y}}(t)) dt \end{aligned}$$

όπου η εναλλαγή του  $\delta$  με το ολοκλήρωμα  $\int_{t_1}^{t_2}$  είναι επιτρεπτή, δεδομένου ότι  $t_1$  και  $t_2$  είναι εξ υποθέσεως σταθερά.

Αλλά,

$$\delta \mathcal{L}(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t), \tilde{y}(t), \dot{\tilde{y}}(t)) = \frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

ενώ,

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{x}}} \frac{d\dot{\tilde{x}}}{d\varepsilon} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{d\varepsilon} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{y}}} \frac{d\dot{\tilde{y}}}{d\varepsilon}$$

Όμως,

$$\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}(x(t) + \varepsilon\eta_1(t)) = \eta_1(t)$$

$$\frac{d\dot{\tilde{x}}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}(\dot{x}(t) + \varepsilon\dot{\eta}_1(t)) = \dot{\eta}_1(t)$$

$$\frac{d\tilde{y}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}(y(t) + \varepsilon\eta_2(t)) = \eta_2(t)$$

$$\frac{d\dot{\tilde{y}}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}(\dot{y}(t) + \varepsilon\dot{\eta}_2(t)) = \dot{\eta}_2(t)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \delta I = 0 \Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{x}} \eta_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{x}}} \dot{\eta}_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{y}} \eta_2(t) dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{y}}} \dot{\eta}_2(t) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.4-1)$$

Με εφαρμογή της ολοκλήρωσης κατά μέρη, συνάγεται άμεσα ότι

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{x}}} \dot{\eta}_1(t) dt = \left. \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{x}}} \eta_1(t) \right|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{x}}} \right) \eta_1(t) dt$$

και

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{y}}} \dot{\eta}_2(t) dt = \left. \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{y}}} \eta_2(t) \right|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{y}}} \right) \eta_2(t) dt$$

Οπότε, η (3.4-1) γίνεται:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{x}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tilde{x}}} \right) \right\} \eta_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{y}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tilde{y}}} \right) \right\} \eta_2(t) dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{x}} \eta_1(t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{y}} \eta_2(t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = 0 \quad (3.4-2)$$

Όμως, η τυχαιότητα των συναρτήσεων  $\eta_1(t)$  και  $\eta_2(t)$  στο διάστημα  $(t_1, t_2)$  συνεπάγεται υποχρεωτικά ότι στη θέση ακροτάτου οι όροι εντός των αγκίστρων που πολλαπλασιάζουν αυτές τις συναρτήσεις πρέπει να είναι 0. Επιπλέον, στην καμπύλη ακροτάτου, ισχύει εξ υποθέσεως ότι  $\varepsilon = 0$ , γεγονός που σημαίνει ότι επί της διαδρομής αυτής ισχύει  $\tilde{x}(t) = x(t)$ ,  $\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t)$ ,  $\tilde{y}(t) = y(t)$ ,  $\dot{\tilde{y}}(t) = \dot{y}(t)$  για  $t \in [t_1, t_2]$ .

Από όλα τα παραπάνω, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4-3)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις αυτές αποτελούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange που συνιστούν ακρογωνιαίο λίθο πολλών σύγχρονων θεωριών. Όσον αφορά τους συνοριακούς όρους, μελετούμε το ρόλο αυτών κατά περίπτωση.

A1) Στην περίπτωση όπου τα άκρα όλων των δυνατών διαδρομών ολοκλήρωσης είναι δεσμευμένα, τότε

$$\delta \tilde{x}(t_1) = \delta \tilde{y}(t_1) = 0 \Rightarrow \eta_1(t_1) = \eta_2(t_1) = 0$$

και

$$\delta \tilde{x}(t_2) = \delta \tilde{y}(t_2) = 0 \Rightarrow \eta_1(t_2) = \eta_2(t_2) = 0$$

Επομένως, δεν υπάρχει κανένας περιορισμός για τα  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(t_1)$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}(t_1)$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(t_2)$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}(t_2)$ . Ισοδυνάμως, στην περίπτωση αυτή, αρκεί να λύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange θεωρώντας δεδομένα τα  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  στα άκρα  $t_1, t_2$ .

A2) Επειδή το άκρο που αντιστοιχεί στο  $t = t_1$  είναι δεσμευμένο, ενώ το άλλο είναι ελεύθερο, ισχύει ότι  $\eta_1(t_1) = \eta_2(t_1) = 0$ , ενώ η τυχαιότητα των  $\eta_1(t_2)$  και  $\eta_2(t_2)$  μας

οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για να ισχύει η (3.4-2) πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(t_2) = 0$$

και

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}(t_2) = 0 \quad (3.4-4)$$

μαζί με τις εξισώσεις Euler-Lagrange (3.4-3).

A3) Όταν και τα δύο άκρα είναι ελεύθερα, τότε η τυχαιότητα των  $\eta_1(t_2)$  και  $\eta_2(t_2)$  επιβάλλει ότι για να ισχύει η (3.4-2) πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(t_1) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}(t_1) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(t_2) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}(t_2) = 0 \quad (3.4-5)$$

μαζί με τις εξισώσεις Euler-Lagrange.

### 3.4.2 Εξισώσεις Euler-Lagrange για την περίπτωση Lagrangian της μορφής $\mathcal{L}(q_1(t), \dots, q_N(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_N(t))$

Η ανάλυση αυτής της ενότητας είναι άμεση, ευθύγραμμη επέκταση αυτής που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, και γι' αυτό παραθέτουμε ευθύς τις τελικές εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.4-6)$$

Αντίστοιχα, οι συνοριακές εξισώσεις Euler-Lagrange είναι οι:

A1) Στην περίπτωση όπου τα άκρα όλων των δυνατών διαδρομών ολοκλήρωσης είναι δεσμευμένα, αρκεί να λύσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων Euler-Lagrange (3.4-6) θεωρώντας δεδομένα τα  $q_i(t_1), \dot{q}_i(t_1), q_i(t_2), \dot{q}_i(t_2)$  για  $i = 1, 2, \dots, N$ .

A2) Θεωρώντας δεσμευμένο το άκρο που αντιστοιχεί στο  $t = t_1$  και το άλλο άκρο ελεύθερο, πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(t_2) = 0 \quad (3.4-7)$$

μαζί με τις εξισώσεις Euler-Lagrange και έχοντας ως δεδομένα τα  $q_i(t_1), \dot{q}_i(t_1)$  για  $i = 1, 2, \dots, N$ .

A3) Όταν και τα δύο άκρα είναι ελεύθερα, τότε πρέπει να ισχύουν τα κάτωθι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(t_1) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(t_2) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.4-8)$$

μαζί με τις εξισώσεις Euler-Lagrange.

### 3.4.3 Παράδειγμα εφαρμογής των προαναφερθεισών εξισώσεων Euler-Lagrange: το ιστορικής σημασίας πρόβλημα του βραχιστόχρονου

#### Το πρόβλημα του βραχιστόχρονου

Δίνονται δύο σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  και έστω  $\Pi$  το κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από αυτά. Έστω  $C$  μια οποιαδήποτε ομαλή καμπύλη επί αυτού του κατακόρυφου επιπέδου, η οποία εκκινεί από το  $A$  και περατούται στο  $B$ . Κατά μήκος της  $C$  αφήνεται να ολισθήσει υλικό σημείο, μάζας  $M$ , που έχει στο  $A$  αρχική ταχύτητα  $\vec{v}_1$  αγνώστου διεύθυνσεως που φτάνει στο  $B$  μετά από πάροδο χρόνου  $t_c$ . Ζητείται η καμπύλη του  $\Pi$  η οποία δίδει το ελάχιστο  $t_c$ .

### Επίλυση

Η επιβατική ακτίνα τυχούσας καμπύλης δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

και το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη αυτή είναι:

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$$

Αν έχω  $y = y(x)$ , δηλαδή η ανεξάρτητη παράμετρος είναι το  $x$  (δηλαδή  $x(t) = x$ ) τότε ισχύει ότι

$$\vec{r}(x) = x\vec{i} + y(x)\vec{j}$$

και

$$\vec{r}'(x) = \vec{i} + \frac{dy}{dx}\vec{j}$$

Παίρνοντας το στοιχειώδες  $d\vec{r}$ , έχουμε  $d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t) = (x(t + dt) - x(t))\vec{i} + (y(t + dt) - y(t))\vec{j}$

Όμως,  $x(t + dt) - x(t) = x'(t)dt$ , ενώ  $y(t + dt) - y(t) = y'(t)dt$ .

Επομένως,  $d\vec{r} = \vec{r}'(t)dt$ , όταν  $dt \cong 0$ .

Τοπικά ισχύει  $d\vec{r} = d\vec{s}$ , δηλαδή το εφαπτόμενο διάνυσμα ταυτίζεται με το στοιχειώδες διανυσματικό μήκος της πύλης στο σημείο αυτό, δηλαδή  $d\vec{s} = \vec{r}'(t)dt$

Το πραγματικό μήκος της καμπύλης είναι, γενικά  $ds = |d\vec{s}| = (\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2})dt$ .

Εάν  $x(t) = x$ ,

$$d\vec{s} = \vec{r}'(x)dx$$

και

$$ds = |d\vec{s}| = (\sqrt{1 + y'(x)^2}) dx$$

Η ταχύτητα πάνω στην καμπύλη είναι

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

οπότε

$$dt = \frac{|d\vec{s}|}{|\vec{v}|} = \frac{ds}{v}$$

Επομένως, ο συνολικός χρόνος δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2} dx}{v}$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας, έχουμε:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg(y - y_1) \Rightarrow v^2 = v_1^2 + 2g(y - y_1)$$

οπότε  $v = \sqrt{2g}\sqrt{y - y_0}$ ,

όπου  $y_0 = y_1 - \left(\frac{v_1^2}{2g}\right)$ .

Επομένως, για την περίπτωση του χρόνου έχω

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y - y_0}} dx$$

Ορίζουμε την Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y - y_0}}$$

Οπότε, από την Euler-Lagrange εξίσωση έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = 0$$

χωρίς κανέναν άλλον περιορισμό γιατί όλες οι καμπύλες είναι δεσμευμένες στα άκρα  $t_1, t_2$ , δεδομένου ότι υποθέτω πως το υλικό σημείο μάζας  $M$  ξεκινάει από το γνωστό σημείο  $A$  και περατούται στο  $B$ .



$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left( \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{y - y_0}} \right) = \frac{\dot{y}}{\sqrt{y - y_0} \sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{y - y_0}} \right) = -\frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{2\sqrt{y - y_0}^3}$$

Θέτουμε

$$f(y, \dot{y}) = \frac{\dot{y}}{\sqrt{y - y_0} \sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

και έχουμε:

$$\frac{df(y, \dot{y})}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \ddot{y}$$

Θέτουμε

$$S(y, \dot{y}) = \mathcal{L} - \dot{y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}$$

και έχουμε:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\partial S}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial S}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dx} = \frac{\partial S}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial S}{\partial \dot{y}} \ddot{y}$$

Αλλά

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \dot{y} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial \dot{y}}$$

και

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{y}} = -\dot{y} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^2}$$

Άρα,

$$\frac{dS}{dx} = \dot{y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \dot{y}^2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial \dot{y}} - \dot{y} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^2} \ddot{y} = \dot{y} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \left( \dot{y} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial \dot{y}} + \ddot{y} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^2} \right) \right) = \dot{y} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) \right)$$

καθώς είχαμε θέσει  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = f$  και είδαμε ότι

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \ddot{y} = \dot{y} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial \dot{y}} + \ddot{y} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^2}$$

Καταλήξαμε, δηλαδή, στην εξίσωση Euler-Lagrange, αφού  $\frac{dS}{dx} = 0$  για κάθε  $x$ .

Άρα,

$$\mathcal{L} - \dot{y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = C \Rightarrow \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{y - y_0}} - \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{y - y_0} \sqrt{1 + \dot{y}^2}} = C \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y - y_0} \sqrt{1 + \dot{y}^2}} = C \Rightarrow$$

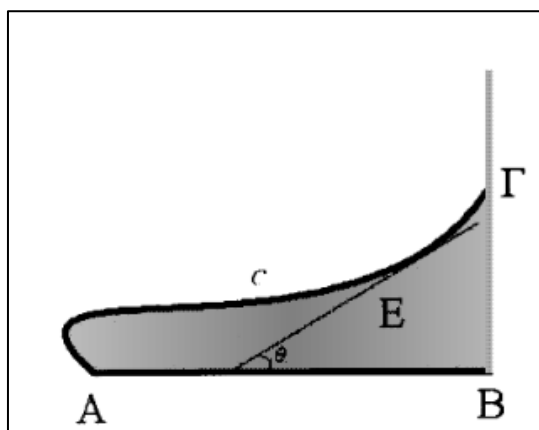
$$(y - y_0)(1 + \dot{y}^2) = C \Rightarrow \dot{y} = \sqrt{\frac{C}{y - y_0} - 1}$$

#### **3.4.4 Παράδειγμα εφαρμογής των προαναφερθεισών εξισώσεων Euler-Lagrange στην ανακατασκευή θραυσμένων αντικειμένων επί τη βάσει πληροφορίας δύο διαστάσεων (φωτογραφιών)**

Στο άρθρο [32] εδόθη για πρώτη φορά μια εύρωστη λύση του προβλήματος ανακατασκευής θραυσμένων τοιχογραφιών, με χρήση φωτογραφιών της επίπεδης επιφάνειας ανασκαφέντων θραυσμάτων/κονιαμάτων. Πολύ συνοπτικά αναφέρεται ότι ως τελεσίδικο κριτήριο πιθανής συνένωσης δύο θραυσμάτων στην άνω (ζωγραφισμένη) επιφάνειά τους, είναι η ικανοποίηση της απαίτησης το εμβαδόν μεταξύ των καμπυλών επαφής να είναι μικρότερο από ένα κατάλληλα επιλεγμένο κατώφλι. Ήδη στην [32] είχε θεμελιωθεί από τους συγγραφείς η άποψη ότι αυτό το τελεσίδικο κριτήριο συνδέεται άμεσα με τις Γεωμετρικές διαφοροποιήσεις μεταξύ των συνοριακών καμπυλών επαφής. Στον παρόν πόνημα, θα δοθεί μια αναλυτική απόδειξη της άποψης αυτής μαζί με νέα συμπεράσματα με κατάλληλη εφαρμογή της Θεωρίας Μεταβολών. Πράγματι, ένα βασικό συμπέρασμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Υπολογισμός μέγιστης διαφοράς του ολοκληρώματος των γωνιών δύο καμπυλών περιγράμματος κονιαμάτων με δεδομένο το εμβαδόν ανάμεσά τους

Έστωσαν δύο κονιάματα, που ονομάζουμε  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , όπου το καθένα έχει μία επίπεδη πλευρά, ενώ χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο και για τις φωτογραφίες των πλευρών αυτών. Ας υποθεθεί, επίσης, ότι οι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  πιθανώς αρμόζουν κατά μήκος δύο τμημάτων των συνόρων τους, έστωσαν  $\widehat{AB}$  και  $\widehat{AT}$ .



**Εικόνα 12 – Απεικόνιση μιας πιθανής θέσης προσαρμογής των άνω επιπέδων επιφανειών δύο θραυσμάτων  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , κατά μήκος των τμημάτων  $\widehat{AB}$  και  $\widehat{AT}$  των περιγραμμάτων αυτών. Για απλότητα, το σχήμα απεικονίζει μόνο την περιοχή συνένωσης, ενώ επίσης, χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας, η καμπύλη  $\widehat{AB}$  έχει επιλεγεί να είναι ευθύγραμμο τμήμα. Η γωνία  $\theta$  είναι η πολική γωνία που σχηματίζει το εφαπτόμενο διάνυσμα στο τυχόν σημείο E της καμπύλης  $\widehat{AT}$**

Η καμπύλη  $\widehat{AT}$  περατούται στην ημιευθεία ( $\varepsilon$ ), η οποία είναι κάθετη στη χορδή  $\widehat{AB}$  και κείται εκτός του θραύσματος  $\varepsilon_1$  (Εικόνα 12, στην οποία για απλότητα η καμπύλη  $\widehat{AB}$  έχει επιλεγεί να είναι ευθύγραμμο τμήμα για απλότητα). Το τελεσίδικο κριτήριο αποδεκτής συνένωσης των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στη συγκεκριμένη θέση επιβάλλει το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες  $\widehat{AB}$  και  $\widehat{AT}$ , ως και από το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$ , να είναι μικρότερο από ένα κατάλληλα επιλεγμένο κατώφλι,  $\alpha^T$ . Για ευκολία αναφοράς, σημειώνουμε ότι, για λόγους που καθίστανται απολύτως σαφείς στο [32], η καμπύλη  $\widehat{AB}$  αποκαλείται «σταθερή αλυσίδα», η  $\widehat{AT}$  «μετακινήσιμη αλυσίδα» και η ( $\varepsilon$ ) «ευθεία περάτωσης».

Στην Εικόνα 12 φαίνεται η πολική γωνία  $\theta$ , την οποία σχηματίζει η εφαπτομένη σε τυχόν σημείο της καμπύλης  $\widehat{AT}$ , προφανώς με τον άξονα  $x'x$ . Ας φανταστούμε ότι το σημείο επαφής της εφαπτομένης διατρέχει ωρολογιακά την καμπύλη  $\widehat{AT}$ , εν συνεχεία το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και ύστερα την καμπύλη  $\widehat{BA}$  και ας υπολογίσουμε το

ολοκλήρωμα όλων αυτών των πολικών γωνιών  $\theta$ . Στην ιδανική περίπτωση της τελείας προσαρμογής των  $\mathcal{E}_1$  και  $\mathcal{E}_2$ , οι καμπύλες  $\widehat{AB}$  και  $\widehat{A\Gamma}$  θα ήταν σε απόλυτη επαφή, οπότε το ολοκλήρωμα αυτών των γωνιών θα ήταν μηδενικό. Στην πράξη, όμως, λόγω της φθοράς που μπορεί να έχουν υποστεί τα θραύσματα  $\mathcal{E}_1$  και  $\mathcal{E}_2$ , σε μία πραγματική θέση προσαρμογής αυτών, το εμβαδόν του σχήματος  $\widehat{A\Gamma B A}$  θα είναι διάφορο του μηδενός, αλλά λογικά πολύ κοντά σε αυτό. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, η διαίσθηση υποβάλλει την λίαν εύλογη ιδέα ότι το ολοκλήρωμα αυτών των γωνιών  $\theta$  θα είναι επίσης φραγμένο και δει από μία σχετικά μικρή τιμή, η οποία εξαρτάται άμεσα από το κατώφλι  $\alpha^T$  του εμβαδού  $\widehat{A\Gamma B A}$ .

Επί τη βάσει των ανωτέρω, θα αποδείξουμε την ορθότητα της εξής πρότασης:

### Πρόταση 3.1

Έστω μία καμπύλη που άρχεται στο  $A(x_1, y_1) = (0,0)$  και περατούται στην ευθεία ( $\varepsilon$ ):  $x(t) = x(t_2) = x_2$ . Θεωρώ όλες τις καμπύλες  $C(t) = u(t)\vec{i} + v(t)\vec{j}$  που άρχονται στο  $A$  και περατούνται στην ( $\varepsilon$ ). Αναζητώ την καμπύλη  $(u(t), v(t))$ , η οποία έχει το μεγαλύτερο δυνατό ολοκλήρωμα των πολικών γωνιών που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα διανύσματα σε κάθε σημείο αυτής με τον άξονα  $x'x$ , υπό τον περιορισμό ότι το εμβαδόν που ορίζει αυτή η καμπύλη με τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $\varepsilon$  είναι σταθερό. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι το ευθύγραμμο τμήμα, έστω  $AB$ , όπου  $B$  το σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon$  και του  $x'x$ , παίζει το ρόλο της σταθερής αλυσίδας. Δηλαδή, χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η σταθερή αλυσίδα είναι το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και η γραμμή περάτωσης είναι η ευθεία ( $\varepsilon$ ) που είναι κάθετη στο  $x'x$  στο σημείο  $B$ .

Τότε, αναζητούμε το άνω όριο του ολοκληρώματος των πολικών γωνιών των εφαπτόμενων διανυσμάτων στην μετακινήσιμη αλυσίδα  $A\Gamma$ , όπου  $\Gamma$  είναι το σημείο τομής της αλυσίδας αυτής με την ευθεία περάτωσης ( $\varepsilon$ ), υπό έναν περιορισμό: πρέπει να είναι σταθερό το εμβαδόν του σχήματος που έχει ως μία πλευρά την σταθερή αλυσίδα  $AB$ , ως δεύτερη πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  (με μεταβλητό το σημείο  $\Gamma$ ) και ως τρίτη πλευρά την μετακινήσιμη αλυσίδα  $A\Gamma$ , η οποία όμως είναι απροσδιορίστου μορφής.

Για την ποσοτικοποίηση αυτής της φυσικής απαίτησης χρησιμοποιούμε την κάτωθι Lagrangian:

$$F(u, u', v, v') = \arctan\left(\frac{v'(t)}{u'(t)}\right) + \frac{\lambda}{2}(v'(t)u(t) - v(t)u'(t))$$

όπου ο όρος  $\arctan\left(\frac{v'(t)}{u'(t)}\right)$  εκφράζει την πολική γωνία ενός εφαπτομένου διανύσματος στην μετακινήσιμη αλυσίδα  $AG$  στο τυχόν σημείο  $(u(t), v(t))$  και ο όρος  $(v'(t)u(t) - v(t)u'(t))$  εκφράζει τη στοιχειώδη συμβολή στο εμβαδόν της διαφορικής περιοχής γύρω από το σημείο αυτό.

Στην πράξη αποδείχθηκε ότι η επιλογή αυτής της Lagrangian είναι πολύ ικανοποιητική και αποδοτική [32].

Στην περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις Euler Lagrange διατυπώνονται ως εξής:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial v'}\right) = 0$$

με τον περιορισμό, η βέλτιστη λύση-καμπύλη να περατούται στην ευθεία ( $\varepsilon$ ), δηλαδή, να ισχύει:

$$\frac{\partial F}{\partial v'} \Big|_{u=u_2} = 0$$

όπου  $u(t), v(t)$  είναι η βέλτιστη καμπύλη και  $u_2$  σταθερός αριθμός που εκφράζει τη  $x$  συντεταγμένη της ευθείας περάτωσης (barrier line).

Για τη συγκεκριμένη επιλογή Lagrangian  $F$  έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \lambda v'$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \lambda u'$$

$$\frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{\partial}{\partial u'}\left(\arctan\left(\frac{v'}{u'}\right)\right) - \lambda v = -\frac{v'}{(u')^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{v'}{u'}\right)^2} - \lambda v = -\frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} - \lambda v$$

Ομοίως:

$$\frac{\partial F}{\partial v'} = \frac{u'}{(u')^2 + (v')^2} + \lambda u$$

Άρα,

$$\lambda v' - \frac{d}{dt} \left( -\frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} - \lambda v \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( 2\lambda v + \frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} \right) = 0 \quad (3.4-9)$$

και

$$-\lambda u' - \frac{d}{dt} \left( -\frac{u'}{(u')^2 + (v')^2} - \lambda u \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( 2\lambda u + \frac{u'}{(u')^2 + (v')^2} \right) = 0 \quad (3.4-10)$$

Επομένως,

$$2\lambda v + \frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} = C_1 \Leftrightarrow C_1 - 2\lambda v = \frac{v'}{(u')^2 + (v')^2}$$

$$2\lambda u + \frac{u'}{(u')^2 + (v')^2} = C_2 \Leftrightarrow C_2 - 2\lambda u = \frac{u'}{(u')^2 + (v')^2}$$

Διαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{C_1 - 2\lambda v}{C_2 - 2\lambda u} = \frac{v'}{u'} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = \frac{dv}{du} \Leftrightarrow \frac{dv}{C_1 - 2\lambda v} = \frac{du}{C_2 - 2\lambda u} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dv}{C_1 - 2\lambda v} = \int \frac{du}{C_2 - 2\lambda u}$$

Θέτοντας  $z = C_1 - 2\lambda v$  και  $w = C_2 - 2\lambda u$ , οπότε  $dz = -2\lambda dv$ ,  $dw = -2\lambda du$  και έχουμε:

$$-\frac{1}{2\lambda} \int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2\lambda} \int \frac{dw}{w} \Leftrightarrow \ln|C_2 - 2\lambda u| = \ln|C_1 - 2\lambda v| + C$$

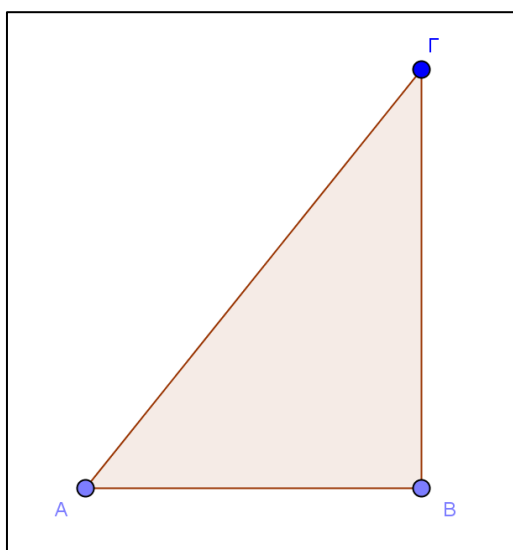
και τελικά

$$C_2 - 2\lambda u = k(C_1 - 2\lambda v)$$

που είναι μια εξίσωση που εκφράζει ένα σύνολο ευθειών και εν προκειμένω, μία πολυγωνική γραμμή, η οποία αρχίζει από το σημείο  $A$  και περατούται στην ευθεία  $(\varepsilon)$ .

Ακριβής προσδιορισμός και θεμελίωση του μεγίστου του ολοκληρώματος των γωνιών

Στην παρούσα παράγραφο, θα αποδείξουμε για πρώτη φορά ότι η αλυσίδα που ικανοποιεί τη φυσική απαίτηση μεγίστου ολοκληρώματος πολικών γωνιών των εφαπτομένων διανυσμάτων, υπό τον περιορισμό δεδομένου εμβαδού του σχήματος  $\widehat{A\Gamma B A}$ , είναι η υποτεινούσα του τριγώνου  $AB\Gamma$  (όρα Εικόνα 13)



**Εικόνα 13 – Το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  που αντιπροσωπεύει το κωρίο μεταξύ των καμπυλών επαφής δύο θραυσμάτων**

Πράγματι, έστω το τρίγωνο  $\widehat{AB\Gamma}$ , όπου  $AB$  είναι η σταθερή αλυσίδα,  $B\Gamma$  η καμπύλη περάτωσης και  $A\Gamma$  η καμπύλη που μεγιστοποιεί την Lagrangian  $F$ . Θεωρούμε  $\omega = B\hat{A}\Gamma$  και  $\alpha^T$  το εμβαδόν του τριγώνου  $\widehat{AB\Gamma}$ , το οποίο θεωρείται δεδομένο. Επιπλέον, επειδή η σταθερή αλυσίδα  $AB$  θεωρείται, επίσης, δεδομένη, ισχύει ότι το

$$B\Gamma = 2 \frac{\alpha^T}{AB}$$

Άρα,

$$\tan\omega = \frac{B\Gamma}{BA} = \frac{2\alpha^T}{AB^2}$$

Επομένως, για το ολοκλήρωμα των πολικών γωνιών επί του μεταβλητού σχήματος  $A\Gamma B$

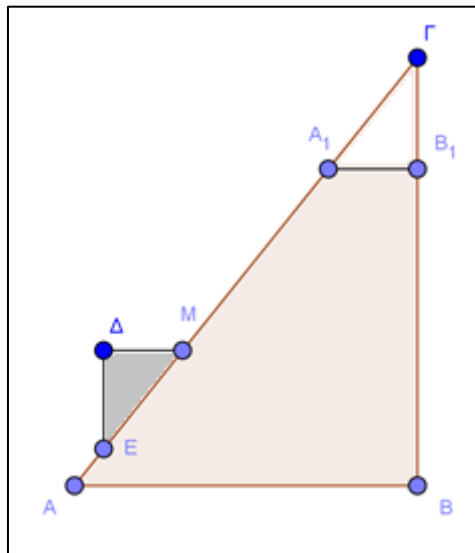
$$I_G = \oint_{A\Gamma B} \operatorname{atan}\left(\frac{v'(t)}{u'(t)}\right) dt$$

προκύπτει ευθύγραμμο ότι:

$$I_G = 0 \cdot AB + \frac{\pi}{2} \cdot B\Gamma - \omega \cdot A\Gamma = \frac{\pi}{2} \cdot B\Gamma - \omega \cdot A\Gamma$$

Θα αποδείξουμε ότι αυτή η τιμή του  $I_G$  είναι μέγιστη μεταξύ όλων των καμπυλών  $A\Gamma$  που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος. Προς το σκοπό αυτό, θα θεωρήσουμε όλες τις δυνατές μικρές διαταραχές γύρω από την  $A\Gamma$ , οι οποίες σέβονται τους δεδομένους περιορισμούς και θα αποδείξουμε ότι αυτές δίνουν μικρότερη τιμή του  $I_G$ .

Όντως, έστω η διαταραχή  $M\Delta E$  τύπου 1 που απεικονίζεται στην Εικόνα 14. Για να ικανοποιείται ο περιορισμός σταθερού εμβαδού του σχήματος  $AB\Gamma$  που απαιτεί το πρόβλημα, πρέπει το εμβαδόν που προσθέτει ή αφαιρεί η διαταραχή αυτή στο  $\alpha^T$  να αντισταθμίζεται από μία άλλη ισεμβαδική διαταραχή, σαν την  $A_1B_1\Gamma$  που φαίνεται στην ίδια Εικόνα 14.



**Εικόνα 14 - Διαταραχή 1<sup>ου</sup> τύπου**



Πράγματι, τα τρίγωνα  $\Delta\hat{M}E$  και  $\Gamma\hat{A}_1B_1$  είναι ίσα και ισεμβαδικά αφού έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία και έχουν κατασκευαστεί, έτσι ώστε  $\Gamma B_1 = \Delta E$

Άρα,

$$E_{BB_1A_1M\Delta EA} = \text{σταθερό} = \alpha^T$$

Επομένως, τώρα το ολοκλήρωμα των γωνιών γίνεται

$$I_{G1} = 0 \cdot AB + \frac{\pi}{2} \cdot BB_1 - 0 \cdot B_1A_1 - \omega \cdot A_1M - 0 \cdot M\Delta - \frac{\pi}{2} \cdot \Delta E - \omega \cdot EA$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$I_{G1} < I_G \Leftrightarrow I_{G1} - I_G < 0$$

Όντως, ισχύει:

$$I_{G1} - I_G = -\frac{\pi}{2} \cdot B_1\Gamma + \omega \cdot \Gamma A_1 - \frac{\pi}{2} \cdot \Delta E + \omega \cdot ME$$

Όμως  $\Gamma B_1 = \Delta E$  και  $ME = A_1\Gamma$

Άρα,

$$I_{G1} - I_G = -\pi \cdot \Gamma B_1 + 2\omega \cdot \Gamma A_1$$

Όμως,  $B_1\hat{A}_1\Gamma = \omega$  και άρα,  $\sin \omega = \frac{\Gamma B_1}{\Gamma A_1} \Leftrightarrow \Gamma B_1 = \Gamma A_1 \cdot \sin \omega$

Επομένως,

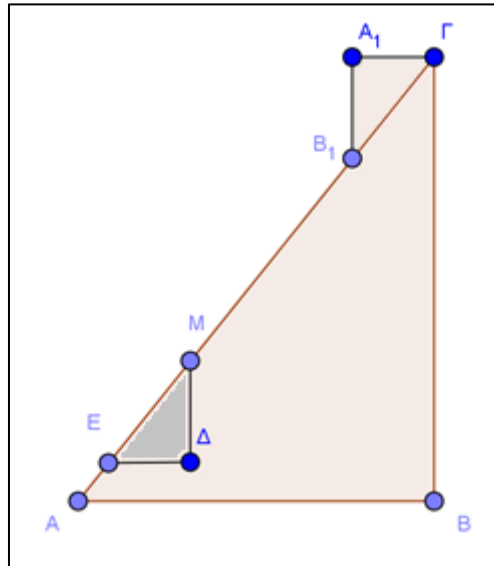
$$I_{G1} - I_G = \Gamma A_1 \cdot (-\pi \cdot \sin \omega + 2\omega)$$

Αλλά, η ποσότητα  $\Gamma A_1$  είναι προφανώς θετική, ενώ για τη δεύτερη ποσότητα ισχύει

$$(-\pi \cdot \sin \omega + 2\omega) < 0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\sin \omega} < \frac{\pi}{2} \quad (3.4-11)$$

αφού, δεδομένης της απόστασης των δύο θραυσμάτων, η γωνία αυτή είναι πάντα οξεία (και μάλιστα, κατά κανόνα, ιδιαίτερος μικρή), οπότε η σχέση (3.4-11) πάντα ικανοποιείται, σύμφωνα με μελέτη της συναρτήσεως  $\frac{\omega}{\sin \omega}$  με στοιχειώδη τρόπο.

Εντελώς ανάλογη απόδειξη ισχύει και για διαταραχή  $M\Delta E$  τύπου 2 που απεικονίζεται στην Εικόνα 15, η οποία, ομοίως, απαιτεί την εμφάνιση μίας άλλης ισεμβαδικής διαταραχής  $A_1B_1\Gamma$  που φαίνεται στην ίδια Εικόνα 15.



**Εικόνα 15 - Διαταραχή 2<sup>ου</sup> τύπου**

Πράγματι, τα τρίγωνα  $M\Delta E$  και  $A_1\Gamma B_1$  είναι ίσα και ισεμβαδικά ως όμοια με μία πλευρά ίση.

Άρα,

$$E_{B\Gamma A_1 B_1 M \Delta E A} = \text{σταθερό} = \alpha^T$$

Επομένως, τώρα το ολοκλήρωμα των γωνιών γίνεται

$$I_{G2} = \frac{\pi}{2} \cdot B\Gamma - \frac{\pi}{2} \cdot A_1 B_1 - \omega \cdot B_1 M - \frac{\pi}{2} \cdot M\Delta - \omega \cdot EA$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$I_{G2} < I_G \Leftrightarrow I_{G2} - I_G < 0$$

Όντως, ισχύει:

$$I_{G2} - I_G = -\frac{\pi}{2} \cdot M\Delta - \frac{\pi}{2} \cdot A_1 B_1 + \omega \cdot \Gamma B_1 + \omega \cdot ME$$

Όμως  $\Gamma B_1 = ME$  και  $M\Delta = A_1 B_1$

Άρα,

$$I_{G2} - I_G = -\pi \cdot A_1 B_1 + 2\omega \cdot \Gamma B_1$$

Όμως,  $A_1 \widehat{B_1} \Gamma = \omega$  και άρα,  $\sin \omega = \frac{A_1 B_1}{\Gamma B_1} \Leftrightarrow A_1 B_1 = \Gamma B_1 \cdot \sin \omega$

Επομένως,

$$I_{G2} - I_G = \Gamma B_1 \cdot (-\pi \cdot \sin \omega + 2\omega)$$

όπου, όπως και προηγουμένως, η ποσότητα  $\Gamma B_1$  είναι προφανώς θετική, ενώ για τη δεύτερη ποσότητα ισχύει

$$(-\pi \cdot \sin \omega + 2\omega) < 0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\sin \omega} < \frac{\pi}{2}$$

αφού, δεδομένης της απόστασης των δύο θραυσμάτων, η γωνία αυτή είναι πάντα οξεία (και μάλιστα, κατά κανόνα, ιδιαίτερος μικρή), οπότε η σχέση (3.4-11) πάντα ικανοποιείται, σύμφωνα με μελέτη της συναρτήσεως  $\frac{\omega}{\sin \omega}$  με στοιχειώδη τρόπο.

Άρα αποδείχθη το ζητούμενο.

### 3.4.5 Η γενική περίπτωση εύρεσης των στασίμων σημείων μιας Lagrangian δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών: διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange που περιγράφουν τη βέλτιστη επιφάνεια

Εστω ένα ενεργειακό (Lagrangian function) της μορφής

$$\mathcal{L} \left( \vec{r}(u, v), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right)$$

ή σε σύντομη γραφή  $\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ , όπου εννοείται ότι  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ,  $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v)$  και  $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v)$ . Ζητείται η επιφάνεια  $\mathcal{E}_\beta$  στο  $\mathbb{R}^3$  επί της οποίας το ενεργειακό αυτό έχει ελάχιστο ή μέγιστο (ακρότατο). Η επιφάνεια αυτή  $\mathcal{E}_\beta$  θα προσδιοριστεί από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων Euler-Lagrange τις οποίες θα συνάγουμε ακολούθως.

### Επίλυση

Πράγματι, ας υποτεθεί ότι ζητούμε το μέγιστο του ενεργειακού  $\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$  και έστω ότι αυτό επισυμβαίνει επί της επιφάνειας  $E_\beta$ , η οποία περιγράφεται πλήρως από τη διανυσματική ακτίνα  $\vec{r}(u, v)$ . Το γεγονός ότι η  $E_\beta$  είναι βέλτιστη σημαίνει ότι σε κάθε άλλη επιφάνεια  $E$  «κοντά» στην  $E_\beta$ , το ολοκλήρωμα του ενεργειακού  $\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$  παίρνει μικρότερη τιμή εάν το ακρότατο είναι μέγιστο, αλλιώς, προφανώς, ισχύει το αντίστροφο.

Δηλαδή, το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_E \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) du dv$$

έχει στάσιμο σημείο την τιμή του επί της  $E_\beta$ . Ισοδυνάμως, η στοιχειώδης/διαφορική μεταβολή του  $I$  επί της  $E_\beta$  είναι 0 ή σε αυστηρή μαθηματική διατύπωση

$$\delta I = 0$$

Επειδή αυτή η στοιχειώδης μεταβολή  $\delta$  αντιστοιχεί σε στοιχειώδη απομάκρυνση από την  $E_\beta$ , θεωρούμε ότι η  $E$  που προκύπτει περιγράφεται από την επιβατική ακτίνα  $\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u, v) + \varepsilon \vec{\eta}(u, v)$ , όπου  $\vec{\eta}(u, v) = (\eta_1(u, v), \eta_2(u, v), \eta_3(u, v))$  είναι μία **οποιαδήποτε** τυχούσα διανυσματική συνάρτηση του  $(u, v)$  με πεδίο τιμών στο  $\mathbb{R}^3$  και  $\varepsilon$  οποιαδήποτε «μικρή» πραγματική ποσότητα. Το τυχαίο στην επιλογή του  $\vec{\eta}(u, v)$  εγγυάται ότι οποιαδήποτε επιφάνεια  $E$  «κοντά» στη βέλτιστη  $E_\beta$  μπορεί να παραχθεί με αυτόν τον τρόπο. Σημειώνουμε ότι η επιβατική ακτίνα  $\vec{r}(u, v)$  είναι αφεαυτής ένα διάνυσμα με συντεταγμένες  $(\vec{r}_1(u, v), \vec{r}_2(u, v), \vec{r}_3(u, v))$ , ενώ, επίσης,  $\vec{r}_u(u, v) = (\vec{r}_{1u}(u, v), \vec{r}_{2u}(u, v), \vec{r}_{3u}(u, v))$  και  $\vec{r}_v(u, v) = (\vec{r}_{1v}(u, v), \vec{r}_{2v}(u, v), \vec{r}_{3v}(u, v))$ . Επίσης, αναφέρουμε ότι τόσο η  $\vec{r}(u, v)$ , όσο και η  $\vec{r}(u, v)$ , δηλαδή οι διανυσματικές ακτίνες/περιγραφές των  $E_\beta$  και  $E$  αντίστοιχα, ορίζονται σε ένα χωρίο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$ , το οποίο έχει σύνορο  $\partial D$ .

Επί τη βάση των ανωτέρω, προκύπτει ότι η μεταβολή  $\delta I$  επί της  $E_\beta$  εξαρτάται μόνο από την ποσότητα  $\varepsilon$ , συνεπώς

$$\delta I = 0 \Leftrightarrow \delta \iint_{\varepsilon} \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) dudv = 0 \Leftrightarrow \iint_{\varepsilon} \delta \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) dudv = 0$$

Αλλά, η απειροστή μεταβολή  $\delta \mathcal{L}$  του ενεργειακού εκφράζεται ως εξής:

$$\delta \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = \frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

ενώ

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{d\varepsilon} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \frac{du}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \frac{dv}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_1} \frac{d\tilde{r}_1}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_2} \frac{d\tilde{r}_2}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_3} \frac{d\tilde{r}_3}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{1u}} \frac{d\tilde{r}_{1u}}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2u}} \frac{d\tilde{r}_{2u}}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3u}} \frac{d\tilde{r}_{3u}}{d\varepsilon} \\ &+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{1v}} \frac{d\tilde{r}_{1v}}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2v}} \frac{d\tilde{r}_{2v}}{d\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3v}} \frac{d\tilde{r}_{3v}}{d\varepsilon} \end{aligned}$$

Όμως, τα  $u$  και  $v$  είναι ανεξάρτητα του  $\varepsilon$ , άρα

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \frac{dv}{d\varepsilon} = 0$$

ενώ, επίσης:

$$\frac{d\tilde{r}_1}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} (r_1(u, v) + \varepsilon \eta_1(u, v)) = \eta_1(u, v)$$

$$\frac{d\tilde{r}_2}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} (r_2(u, v) + \varepsilon \eta_2(u, v)) = \eta_2(u, v)$$

$$\frac{d\tilde{r}_3}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} (r_3(u, v) + \varepsilon \eta_3(u, v)) = \eta_3(u, v)$$

$$\frac{d\tilde{r}_{1u}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} (r_{1u}(u, v) + \varepsilon \eta_{1u}(u, v)) = \eta_{1u}(u, v)$$

$$\frac{d\tilde{r}_{2u}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} (r_{2u}(u, v) + \varepsilon \eta_{2u}(u, v)) = \eta_{2u}(u, v)$$

$$\frac{d\tilde{r}_{3u}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} (r_{3u}(u, v) + \varepsilon \eta_{3u}(u, v)) = \eta_{3u}(u, v)$$

$$\frac{d\tilde{r}_{1v}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} (r_{1v}(u, v) + \varepsilon \eta_{1v}(u, v)) = \eta_{1v}(u, v)$$

$$\frac{d\tilde{r}_{2v}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} (r_{2v}(u, v) + \varepsilon \eta_{2v}(u, v)) = \eta_{2v}(u, v)$$

$$\frac{d\tilde{r}_{3v}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} (r_{3v}(u, v) + \varepsilon\eta_{3v}(u, v)) = \eta_{3v}(u, v)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}(\vec{\tilde{r}}, \vec{\tilde{r}}_u, \vec{\tilde{r}}_v)}{d\varepsilon} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_1}\eta_1(u, v) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_2}\eta_2(u, v) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_3}\eta_3(u, v) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1u}}\eta_{1u}(u, v) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{2u}}\eta_{2u}(u, v) \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{3u}}\eta_{3u}(u, v) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1v}}\eta_{1v}(u, v) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{2v}}\eta_{2v}(u, v) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{3v}}\eta_{3v}(u, v) \end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \delta I &= \iint_{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_1}\eta_1 + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_2}\eta_2 + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_3}\eta_3 \right\} dudv + \\ &\iint_{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1u}}\eta_{1u} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1v}}\eta_{1v} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{2u}}\eta_{2u} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{2v}}\eta_{2v} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{3u}}\eta_{3u} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{3v}}\eta_{3v} \right\} dudv \end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \iint_{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1u}}\eta_{1u} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1v}}\eta_{1v} \right\} dudv &\equiv \iint_{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1u}}\frac{\partial\eta_1}{\partial u} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1v}}\frac{\partial\eta_1}{\partial v} \right\} dudv \\ &= \iint_{\varepsilon} \left\{ \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1u}}, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1v}} \right) \cdot \nabla_{(u,v)}\eta_1 \right\} dudv \end{aligned}$$

Με εφαρμογή του λήμματος της υποενότητας 3.1 (Πόρισμα 3.1) όπου  $h = \eta_1$ ,  $f = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1u}}$  και  $g = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1v}}$  για την προηγούμενη σχέση προκύπτει άμεσα:

$$\begin{aligned} \iint_{\varepsilon} \left\{ \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1u}}, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1v}} \right) \cdot \nabla_{(u,v)}\eta_1 \right\} dudv \\ = \oint_{\partial D} \left\{ \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1u}}, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1v}} \right) \eta_1 \right\} \cdot \vec{n} dl - \iint_{\varepsilon} \left\{ \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1u}}, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{r}_{1v}} \right) \right\} \eta_1(u, v) dudv \end{aligned}$$

όπου, με σύμβαση, το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο  $\varepsilon$ , στην ουσία, είναι διπλό ολοκλήρωμα στο χωρίο  $D$ ,  $\partial D$  είναι το κλειστό σύνορο του χωρίου  $D$ , όπως προαναφέρθηκε και  $\vec{n}$  και  $dl$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και το στοιχειώδες μήκος του συνόρου  $\partial D$  αντίστοιχα, όπως ορίζονται στο γενικευμένο θεώρημα Green της υποενότητας 3.3.

Ομοίως,

$$\begin{aligned}
& \iint_{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2u}} \eta_{2u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2v}} \eta_{2v} \right\} dudv \\
&= \oint_{\partial D} \left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2v}} \right) \eta_2 \right\} \cdot \vec{n} dl - \iint_{\varepsilon} \left\{ \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2v}} \right) \right\} \eta_2(u,v) dudv \\
& \iint_{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3u}} \eta_{3u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3v}} \eta_{3v} \right\} dudv \\
&= \oint_{\partial D} \left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3v}} \right) \eta_3 \right\} \cdot \vec{n} dl - \iint_{\varepsilon} \left\{ \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3v}} \right) \right\} \eta_3(u,v) dudv
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\delta I &= \iint_{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_1} - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{1u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{1v}} \right) \right\} \eta_1(u,v) dudv \\
&+ \iint_{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_2} - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2v}} \right) \right\} \eta_2(u,v) dudv \\
&+ \iint_{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_3} - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3v}} \right) \right\} \eta_3(u,v) dudv \\
&+ \oint_{\partial D} \left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{1u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{1v}} \right) \eta_1 \right\} \cdot \vec{n} dl + \oint_{\partial D} \left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{2v}} \right) \eta_2 \right\} \cdot \vec{n} dl + \oint_{\partial D} \left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{r}_{3v}} \right) \eta_3 \right\} \cdot \vec{n} dl
\end{aligned}$$

Επειδή η λύση που επιθυμούμε επισυμβαίνει στο  $\delta I = 0$  και δεδομένης της τυχαιότητας των συναρτήσεων  $\eta_1(u,v)$ ,  $\eta_2(u,v)$ ,  $\eta_3(u,v)$  οι ποσότητες εντός των αγκιστρών των διπλών ολοκληρωμάτων πρέπει να είναι 0, γεγονός που γεννά τις αντίστοιχες 3 εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1v}} \right) &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{2u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{2v}} \right) &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_3} - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{3u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{3v}} \right) &= 0 \tag{3.4-12}
\end{aligned}$$

όπου αντικαταστήσαμε το  $\tilde{r}$  με  $r$  διότι οι λύσεις αυτών των εξισώσεων προσφέρουν τη βέλτιστη επιφάνεια  $\mathcal{E}_\beta$ , η οποία προκύπτει για  $\varepsilon = 0$ .

Επιπλέον, και πάλι λόγω της τυχαιότητας των συναρτήσεων  $\eta_1(u, v)$ ,  $\eta_2(u, v)$ ,  $\eta_3(u, v)$ , τα επικαμπύλια ολοκληρώματα επί του συνόρου  $\partial D$  πρέπει να είναι 0 και επομένως, πρέπει να είναι 0 και οι αντίστοιχες ολοκληρωτέες ποσότητες εντός των αγκίστρων. Συνεπώς, λαμβάνουμε τις συνοριακές συνθήκες:

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1v}} \right) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{2u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{2v}} \right) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{3u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{3v}} \right) \cdot \vec{n} = 0$$

όπου  $\vec{n}$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο  $\partial D$ , το οποίο γεννά το σύνορο  $C$  της επιφάνειας  $E_\beta$ , μέσω της απεικόνισης  $\vec{r}(u, v)$ .

Προφανώς, εάν η λύση είναι καθορισμένη πάνω στο  $C$ , τότε το ενεργειακό  $\mathcal{L}$  δεν επιτρέπεται να μεταβάλλεται ούτε πάνω στο  $C$ , ούτε πάνω στο  $D$ , άρα όλες οι μερικές παράγωγοι του  $\mathcal{L}$  στις συνοριακές αυτές συνθήκες είναι 0 και συνεπώς, αυτές ταυτοτικά ικανοποιούνται. Επομένως, σε μία τέτοια περίπτωση που η τιμή της λύσης είναι καθορισμένη στο σύνορο της βέλτιστης επιφάνειας  $E_\beta$ , η λύση προσδιορίζεται μόνο από τις εξισώσεις Euler-Lagrange (3.4-12).

### 3.5 ΣΤΡΟΦΗ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΩΝΙΩΝ EULER

Η στροφή ενός σημείου  $(x, y, z)$  γύρω από τον άξονα  $x'x$  ανθρωρολογιακά κατά γωνία  $\varphi_x$  πραγματοποιείται πολλαπλασιάζοντας από αριστερά το διάνυσμα στήλη συντεταγμένων  $(x, y, z)^T$  με τον  $3 \times 3$  πίνακα στροφής

$$\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & -\sin(\varphi_x) \\ 0 & \sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) \end{bmatrix}$$

Επομένως, μετά από αυτή τη στροφή θα έχουμε:



$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & -\sin(\varphi_x) \\ 0 & \sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) \end{bmatrix} (x, y, z)^T \quad (1)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & -\sin(\varphi_x) \\ 0 & \sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) \end{bmatrix} (x, y, z)^T \quad (3.5-1)$$

Αντιστοίχως, για στροφή ανθρωρολογιακά κατά  $\varphi_y$  γύρω από τον  $y'y$  ισχύει:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mathbf{S}_y(x, y, z)^T \equiv \begin{bmatrix} \cos(\varphi_y) & 0 & -\sin(\varphi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi_y) & 0 & \cos(\varphi_y) \end{bmatrix} (x, y, z)^T \quad (2)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mathbf{S}_y(x, y, z)^T \equiv \begin{bmatrix} \cos(\varphi_y) & 0 & -\sin(\varphi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi_y) & 0 & \cos(\varphi_y) \end{bmatrix} (x, y, z)^T \quad (3.5-2)$$

και για στροφή ανθρωρολογιακά κατά  $\varphi_z$  γύρω από τον  $z'z$  ισχύει:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mathbf{S}_z(x, y, z)^T = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_z) & -\sin(\varphi_z) & 0 \\ \sin(\varphi_z) & \cos(\varphi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (x, y, z)^T \quad (3)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mathbf{S}_z(x, y, z)^T = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_z) & -\sin(\varphi_z) & 0 \\ \sin(\varphi_z) & \cos(\varphi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (x, y, z)^T \quad (3.5-3)$$

Η συνολική στροφή και επί των τριών αξόνων, πρώτα κατά  $\varphi_x$ , μετά κατά  $\varphi_y$  και τέλος κατά  $\varphi_z$ , δίνεται από τη σχέση

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mathbf{S}_z \mathbf{S}_y \mathbf{S}_x (x, y, z)^T$$

#### **4. ΠΡΩΤΟΤΥΠΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΤΗΝ ΜΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΤΟΥΣ ΣΧΕΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΗ**

Στην παρούσα ενότητα, παρουσιάζονται μία νέα μεθοδολογία και το σχετικό με αυτήν πληροφοριακό σύστημα που αναπτύχθηκαν για την αντιμετώπιση του προβλήματος της αυτόματης ανακατασκευής ενός τυχαία θραυσμένου αντικειμένου, με τον μόνο περιορισμό ότι μία, τουλάχιστον, από τις επιφάνειες κάθε θραύσματος είναι επίπεδη ή σχεδόν επίπεδη, όπως στην περίπτωση των τοιχογραφιών [33]. Η μεθοδολογία αυτή και το σχετικό πληροφοριακό σύστημα αντλούν πληροφορία από τις τρισδιάστατες απεικονίσεις των θραυσμάτων, οι οποίες λαμβάνονται με τη χρήση τρισδιάστατου σαρωτή.

Πιο συγκεκριμένα, το αναπτυχθέν σύστημα χρησιμοποιεί αρχές και μεθόδους της Διαφορικής και Αναλυτικής Γεωμετρίας και της Θεωρίας Μεταβολών, όπως αυτές παρουσιάζονται στην Ενότητα 3.4, που οδήγησαν στην ανάπτυξη νέων αλγορίθμων στην προσπάθεια προσομοίωσης της διαδικασίας που οι εξειδικευμένοι μελετητές ενστικτωδώς ακολουθούν ώστε να ανασυνθέσουν μία θραυσμένη τοιχογραφία.

Επιπρόσθετα, η μεθοδολογία λαμβάνει υπόψιν την αναπόφευκτη φθορά, την οποία έχουν υποστεί τα αρχαιολογικά ευρήματα και ορίζει ακραίες περιπτώσεις που αφορούν τη διαφορά Γεωμετρίας γειτονικών θραυσμάτων μέσω της Θεωρίας Μεταβολών.

##### **4.1 ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ**

Αρχικά, πραγματοποιήθηκε μία τρισδιάστατη σάρωση όλων των διαθέσιμων θραυσμάτων (Ενότητα 4.2). Στη συνέχεια, σε κάθε θραύσμα, εντοπίστηκε αυτόματα η άνω σχεδόν επίπεδη επιφάνεια (Ενότητα 4.3.1). Καθορίστηκε, επίσης, ο άξονας ελάχιστης ροπής αδράνειας, ο οποίος είναι κάθετος στην άνω επίπεδη επιφάνεια και θα θεωρείται πλέον ο κεντρικός άξονας του θραύσματος (Ενότητα 4.3.2). Εν συνεχεία, όλα τα θραύσματα περιστράφησαν ώστε τελικά, ο κεντρικός τους άξονας να είναι

παράλληλος με τον  $z$ -άξονα. Ακολούθως, δημιουργήθηκε μία μεγάλη ομάδα από στραμμένες εκδοχές του κάθε θραύσματος, στρέφοντας το κομμάτι γύρω από τον κεντρικό του άξονα κατά μία μικρή γωνία-βήμα  $\delta\theta$  (Ενότητα 4.3.3). Τονίζουμε ότι, γενικά, αυτή η διαδικασία πραγματοποιείται άπαξ για κάθε θραύσμα.

Για να ελέγξουμε αν δύο θραύσματα  $A$ ,  $B$  ταιριάζουν, τοποθετούμε κατάλληλα κάθε μία στραμμένη εκδοχή του  $B$  γειτονικά στο  $A$  (Ενότητα 4.4) και ορίζουμε πιθανές επιφάνειες επαφής μεταξύ τους. Σε κάθε μία τέτοια θέση ελέγχουμε τη δυνατότητα προσαρμογής, εφαρμόζοντας τέσσερα κριτήρια, τρία αναγκαία και ένα ικανό.

Συγκεκριμένα:

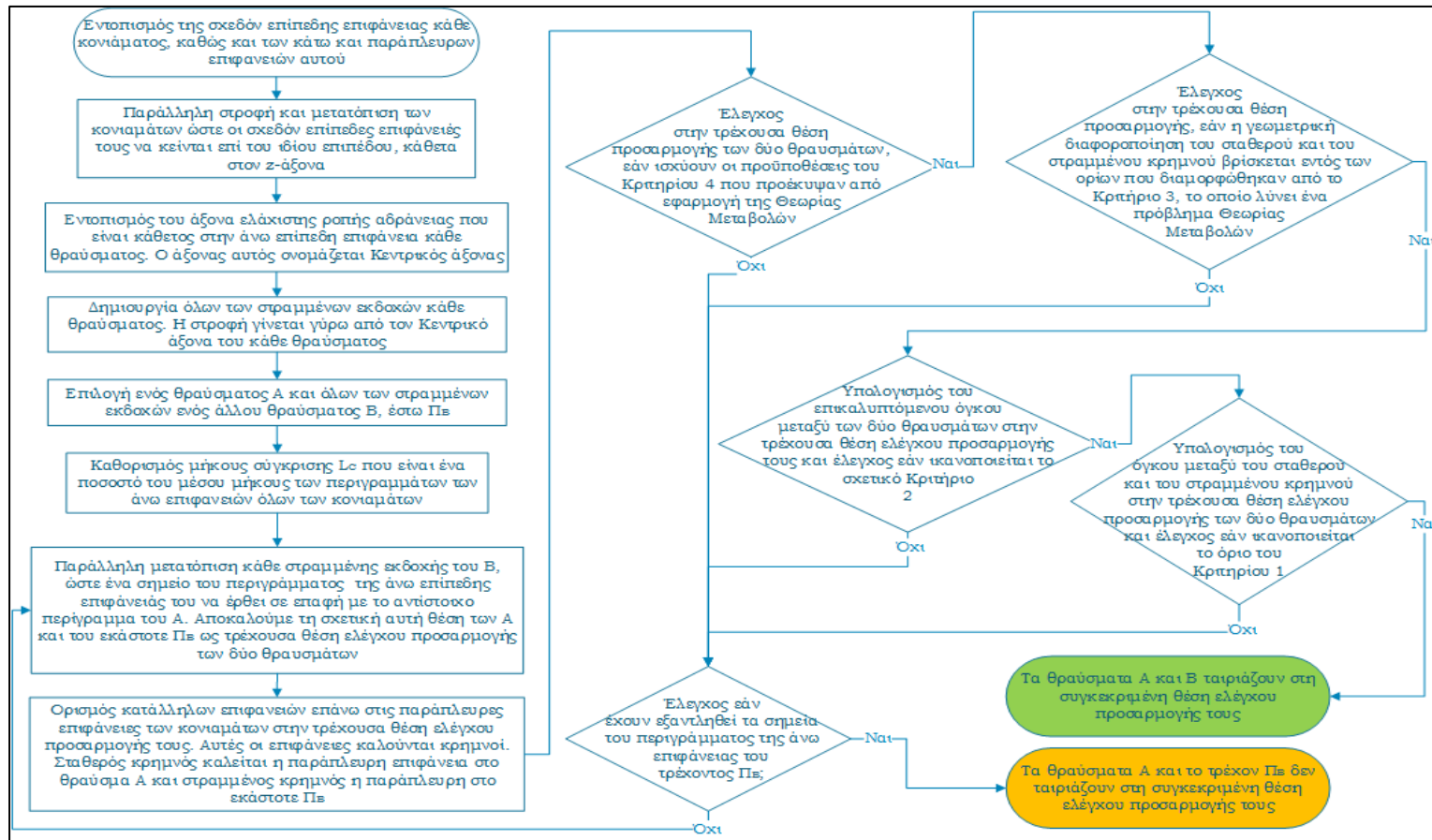
Κριτήριο A: Ελέγχουμε εάν είναι αποδεκτή η απόκλιση των Γεωμετριών των άνω καμπυλών επαφής των δύο κονιαμάτων σύμφωνα με την πρόταση που παρουσιάζεται στην Ενότητα 4.9. Για τον έλεγχο, χρησιμοποιήθηκαν έννοιες και θεωρήματα από τη Θεωρία Μεταβολών (Ενότητα 3.4).

Κριτήριο B: Εξετάζουμε εάν η περιοχή των επιφανειών επαφής των δύο θραυσμάτων στη συγκεκριμένη θέση ικανοποιεί το Θεώρημα που διατυπώνεται στην Ενότητα 4.8. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού χρησιμοποιεί έννοιες και θεωρήματα από τη Θεωρία Μεταβολών (Ενότητα 3.4).

Κριτήριο Γ: Αναζητούμε πιθανές επικαλύψεις μεταξύ των τρισδιάστατων ψηφιακών απεικονίσεων των δύο θραυσμάτων στην τρέχουσα σχετική τους θέση, όπως περιγράφεται στην Ενότητα 4.7.

Κριτήριο Δ: Εφόσον πληρούνται όλα τα προηγούμενα κριτήρια  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  κατά σειρά, τότε για την τρέχουσα σχετική θέση των θραυσμάτων, ορίζουμε ένα κατάλληλο τρισδιάστατο χωρίο μεταξύ των 2 θραυσμάτων και υπολογίζουμε τον όγκο του. Εάν η τιμή του όγκου είναι μικρότερη από ένα κατάλληλα προκαθορισμένο κατώφλι, τότε η

σχετική αυτή θέση των θραυσμάτων χαρακτηρίζεται ως αποδεκτή θέση προσαρμογής. Σε αντίθετη περίπτωση, το σύστημα προχωρεί εξαντλητικά στον έλεγχο όλων των δυνατών σχετικών θέσεων προσαρμογής των δύο θραυσμάτων. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται σε μορφή διαγράμματος ροής στην Εικόνα 16.



Εικόνα 16 - Διάγραμμα ροής της προτεινόμενης διαδικασίας ελέγχου ύπαρξης θέσης ταιριάσματος μεταξύ δύο θραυσμάτων

Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφερθεί ότι, φαινομενικά, ο έλεγχος για κάθε στραμμένη εκδοχή του εκάστοτε θραύσματος είναι μία αρκετά σριφνή και υπολογιστικά απαιτητική διαδικασία. Πράγματι, τα απορριπτικά κριτήρια των Ενοτήτων 4.8 και 4.9 θα μπορούσαν να έχουν οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι ανεξάρτητα της στροφής. Για παράδειγμα, θα μπορούσαν για τον υπολογισμό των κριτηρίων να έχουν χρησιμοποιηθεί ένα σύνολο αλυσίδων σημείων ίσου μήκους ή τμήματα σταθερής διεδρης γωνίας, τόσο στα σταθερά θραύσματα, όσο και στα μετακινήσιμα, χωρίς να απαιτείται να εφαρμοστεί περιστροφή σε κάποιο από τα θραύσματα. Εντούτοις, μία τέτοια προσέγγιση θα μείωνε την ακρίβεια του συστήματος, όσον αφορά τον καθορισμό των βέλτιστων επιφανειών πραγματικής προσαρμογής, η οποία δεν έχει νόημα για την μεθοδολογία που προτείνουμε, αφού στόχος της είναι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της και όχι η ταχύτητα στον υπολογισμό τους. Ο υπολογισμός όλων των στραμμένων εκδοχών κάθε θραύσματος είναι αναγκαίος για τον υπολογισμό του όγκου που περικλείεται από τις γειτονικές θραυσμένες επιφάνειες, χωρίς παράλληλα να δημιουργούνται επικαλύψεις μεταξύ των απεικονίσεων των θραυσμάτων. Παρ' όλα αυτά, όπως ήδη προαναφέρθηκε, τα απορριπτικά κριτήρια που αναπτύχθηκαν μέσω εφαρμογής μεθόδων και αρχών Διαφορικής και Αναλυτικής Γεωμετρίας και Θεωρίας Μεταβολών, μειώνουν δραστικά τον αριθμό των απαιτούμενων υπολογισμών και συνεπώς, μειώνουν το χρόνο απόκρισης του συστήματος.

## **4.2 ΨΗΦΙΟΠΟΙΗΣΗ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΩΝ ΤΟΙΧΟΓΡΑΦΙΩΝ**

Πριν από την εφαρμογή της μεθοδολογίας της αυτόματης ανακατασκευής θραυσμένων αντικειμένων, είναι φυσικά απαραίτητο να προηγηθεί η λήψη της ψηφιακής αναπαράστασης των προς συνένωση θραυσμάτων.

Προς το σκοπό αυτό, χρησιμοποιήσαμε ένα πρωτότυπο σύστημα IMETRIC GMBH, ειδικά παραμετροποιημένο για αρχαιολογικά ευρήματα. Το σύστημα αποτελείται από 2 κάμερες και ένα προβολικό μηχανήμα υψηλής ποιότητας DLP με κανονική ακρίβεια σάρωσης in vivo 3 – 7  $\mu\text{m}$  (Εικόνα 17).

Τα προς σάρωση αντικείμενα τοποθετήθηκαν σε μία πλάκα αναφοράς, η οποία έφερε φωτογραμμειτρικούς στόχους. Η πλάκα αναφοράς, αρχικά, σαρώθηκε χωρίς να περιέχει κάποιο αντικείμενο ώστε να καταγραφούν οι *xyz* συντεταγμένες όλων των στόχων που περιείχε. Η μέση ακρίβεια αυτής της μέτρησης ήταν  $5\mu m/1m$ . Στη συνέχεια, η πλάκα αναφοράς, τοποθετήθηκε σε μία περιστρεφόμενη συσκευή και για κάθε γωνία στροφής μετρήθηκαν πάλι οι συντεταγμένες των στόχων αναφοράς. Ακολούθως, τοποθετήθηκαν επάνω της όλα τα κομμάτια, ένα προς ένα, και μετρήθηκαν τα σημεία της επιφάνειάς τους σε σχέση με τις προηγούμενες μετρήσεις αναφοράς.

Οι συντεταγμένες των σημείων της επιφάνειας υπολογίστηκαν μέσω της φωτογραμμειτρικής ανακατασκευής δύο διαφορετικών διδιάστατων προβολών των θραυσμάτων, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της κλιμακωτής σάρωσης με τη χρήση φωτός, όπως περιγράφεται εκτενώς στο [42]. Η διαδικασία σάρωσης πραγματοποιήθηκε με διακριτική ικανότητα δειγματοληψίας (resolution)  $0.14mm$ .



**Εικόνα 17 - Στιγμιότυπο χρήσης του τρισδιάστατου σαρωτή για την ψηφιοποίηση θραυσμάτων**

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, πραγματοποιήθηκε η ψηφιακή καταγραφή διδιάστατων και τρισδιάστατων απεικονίσεων τοιχογραφιών μεγάλης αρχαιολογικής και ιστορικής αξίας που είναι αποθηκευμένα στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο. Λόγω της μεγάλης πολυπλοκότητας αυτής της διαδικασίας καταγραφής, του μεγάλου χρόνου που απαιτεί, ως και του μεγάλου πλήθους των θραυσμάτων, κατέστη απαραίτητη η συνδρομή πρακτικά όλων των μελών της ερευνητικής μας ομάδας στη διαδικασία της ψηφιοποίησης. Στη συνέχεια παρατίθενται διαφορετικά στιγμιότυπα της ερευνητικής μας ομάδας επί τω έργω (Εικόνα 18, Εικόνα 19, Εικόνα 20).





**Εικόνα 18 - Στιγμιότυπο από τη διαδικασία ψηφιοποίησης θραυσμάτων στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο από μέλη της ερευνητικής μας ομάδας**



**Εικόνα 19 - Στιγμιότυπο από τη διαδικασία ψηφιοποίησης θραυσμάτων στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο από μέλη της ερευνητικής μας ομάδας**





**Εικόνα 20 - Στιγμιότυπο από τη διαδικασία ψηφιοποίησης θραυσμάτων στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο από μέλη της ερευνητικής μας ομάδας**

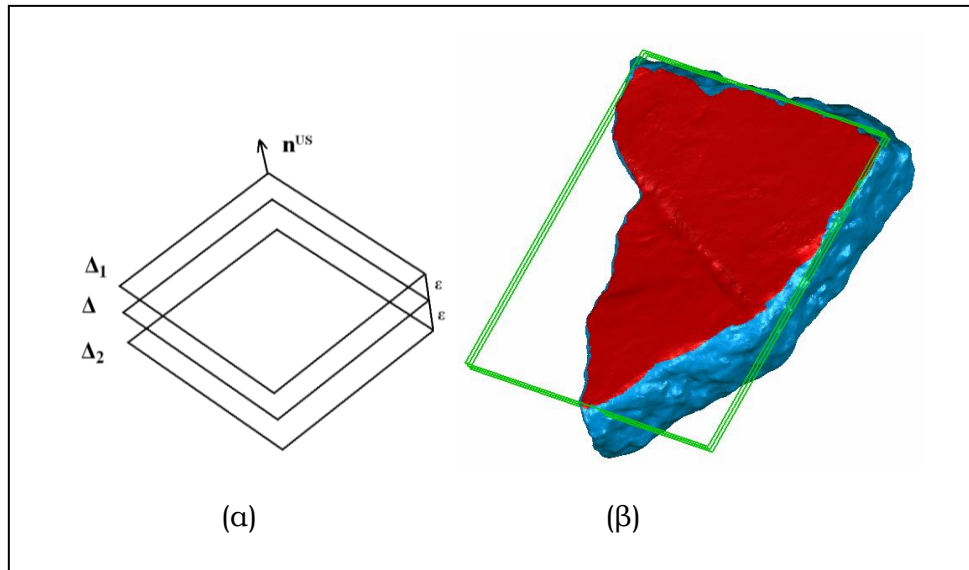
#### **4.3 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΤΩΝ ΠΡΟΣ ΣΥΝΕΝΩΣΗ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ**

Μετά τη διαδικασία της σάρωσης, είναι απαραίτητο οι ληφθείσες ψηφιακές αναπαραστάσεις των θραυσμάτων να υποστούν κατάλληλη επεξεργασία, ώστε να έρθουν στη μορφή που είναι απαραίτητη για την εφαρμογή της μεθόδου. Οι προκαταρκτικές αυτές διαδικασίες θα περιγραφούν αναλυτικά στην παρούσα ενότητα.

### 4.3.1 Ορισμός και εντοπισμός των άνω και κάτω επιπέδων του κονιάματος, καθώς και της παράπλευρης του επιφάνειας

Αρχικά, εντοπίζουμε την άνω, συχνά ζωγραφισμένη, σχεδόν επίπεδη επιφάνεια του θραύσματος της τοιχογραφίας μέσω της μεθόδου που παρατίθεται κατωτέρω: Έστω  $A^{US}x + B^{US}y + C^{US}z + D^{US} = 0$  η εξίσωση του άνω επιπέδου, όπου ο άνω δείκτης  $US$  προκύπτει από τα αρχικά γράμματα του αγγλικού όρου "upper surface" για την άνω επιφάνεια. Μετατοπίζουμε παράλληλα το επίπεδο αυτό κατά μήκος του καθέτου σε αυτό διανύσματος προς την κατεύθυνση κατά την οποία το επίπεδο έχει μη κενή τομή με τη συνοριακή επιφάνεια του θραύσματος. Αυτή η παράλληλη μετατόπιση επισυμβαίνει μέχρις ότου αυτή η τομή να είναι το κενό σύνολο. Σε αυτό το σημείο, μετακινούμαστε προς τα πίσω μέχρις ότου η τομή του επιπέδου με την εξωτερική επιφάνεια του θραύσματος να σχηματίζει μία κλειστή καμπύλη, η οποία περικλείει ένα επίπεδο χωρίο με εμβαδόν ίσο ή οριακά μεγαλύτερο από ένα επιθυμητό κατώφλι  $\alpha^{min}$ . Το αντίστοιχο επίπεδο  $A^{US}x + B^{US}y + C^{US}z + D^{BS} = 0$  θεωρείται ως το κάτω επίπεδο του τρέχοντος θραύσματος, όπου ο άνω δείκτης  $BS$  υποδηλοί "bottom surface" για την κάτω επιφάνεια. Επισημαίνουμε ότι αυτό το επίπεδο χρησιμοποιείται βοηθητικά και αλλάζει σύμφωνα με το βάθος του εκάστοτε θραύσματος. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός ότι η φυσική πίσω πλευρά του κονιάματος πρέπει υποχρεωτικά να είναι επίπεδη, πόσο μάλλον να είναι παράλληλη στο άνω επίπεδο.

Τελικά, ορίζουμε την παράπλευρη επιφάνεια του θραύσματος ως το μεγαλύτερο συνεκτικό υποσύνολο της εξωτερικής επιφάνειας αυτού που κείται μεταξύ των άνω και κάτω επιπέδων (βλ. Εικόνα 21β και Εικόνα 22).



**Εικόνα 21 - Το βοηθητικό σχήμα και η χρήση του για τον καθορισμό της άνω, σχεδόν επίπεδης, επιφάνειας του κονιάματος/θραύσματος. (α) Για κάθε θέση του βοηθητικού σχήματος, υπολογίζουμε τις προσημασμένες μέσες αποστάσεις όλων των σημείων εντός του βοηθητικού σχήματος από το επίπεδο  $\Delta$ . (β) Το βοηθητικό σχήμα με τον προσανατολισμό και τη θέση που προσφέρει το μέγιστο αριθμό σημείων εντός αυτού (σημεία με κόκκινο χρώμα), αλλά και την κοντινότερη στο μηδέν μέση τιμή των προσημασμένων αποστάσεων των σημείων αυτών από το επίπεδο  $\Delta$ .**

Για τον εντοπισμό της άνω επιφάνειας που θεωρούμε ότι είναι σχεδόν επίπεδη, πραγματοποιούμε τη κάτωθι διαδικασία:

Κατασκευάζουμε ένα βοηθητικό σχήμα (βλ. Εικόνα 21α) που αποτελείται από δύο παράλληλα επίπεδα  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ , τα οποία βρίσκονται σε απόσταση  $2\varepsilon$  το ένα από το άλλο, όπου η ποσότητα  $\varepsilon$  είναι μία κατάλληλα επιλεγμένη μικρή ποσότητα, η επιλογή της οποίας θα περιγραφεί κατωτέρω. Έστω  $\Delta$  το επίπεδο, παράλληλο στα  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ , το οποίο βρίσκεται στο μέσο της απόστασης αυτών.

Εάν φανταστούμε την περίπτωση όπου το  $\Delta$  συμπίπτει με την άνω, σχεδόν επίπεδη, επιφάνεια του θραύσματος, τότε για κατάλληλα επιλεγμένη τιμή της ποσότητας  $\varepsilon$ , πρακτικά όλα τα σημεία της επίπεδης επιφάνειας του θραύσματος θα βρίσκονται στο χώρο μεταξύ των επιπέδων  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ . Έστω  $N^{US}$  ο αριθμός αυτών των σημείων. Επιπρόσθετα, εάν λάβουμε υπόψιν μας την προσημασμένη απόσταση αυτών των  $N^{US}$

σημείων από το  $\Delta$ , είναι λογικό να περιμένουμε ότι στην ιδανική αυτή περίπτωση, η μέση τιμή αυτών των προσημασμένων αποστάσεων θα είναι κοντά στο μηδέν.

Εν αντιθέσει, είναι απολύτως λογικό να υποθέσουμε ότι σε οποιαδήποτε άλλη θέση αυτού του βοηθητικού σχήματος, ο αριθμός των σημείων της επιφάνειας του θραύσματος που βρίσκονται μεταξύ των  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  θα είναι μικρότερος από  $N^{US}$  ή/και ότι η μέση τιμή της προσημασμένης διαφοράς των αποστάσεών τους από το  $\Delta$  θα απέχει, κατ' απόλυτη τιμή από το μηδέν, περισσότερο απ' ό,τι προηγουμένως.

Η τιμή της σταθεράς  $\varepsilon$  που μπορεί να εγγυηθεί μια τέτοια συμπεριφορά, εξαρτάται από τη διακύμανση (το κυματισμό ή/και την τραχύτητα) της επίπεδης επιφάνειας των θραυσμάτων, όπως επίσης και από την ανάλυση της τρισδιάστατης ψηφιακής αναπαράστασης, και μπορεί να υπολογιστεί μέσω μιας μεθόδου "δοκιμών και απόρριψης" (trial and error). Μία ικανοποιητική επιλογή για όλες τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν στην παρούσα μελέτη φαίνεται να είναι  $\varepsilon = 2,6 \cdot resolution$ .

Επομένως, η επίπεδη επιφάνεια του θραύσματος καθορίζεται μέσω του επόμενου κριτηρίου.

#### Κριτήριο εντοπισμού άνω επιπέδου κονιάματος:

Θεωρούμε τον χώρο, καταρχήν το πολύ έξι διαστάσεων, που αποτελείται από τις τρεις γωνίες Euler  $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$  και τις τρεις μετατοπίσεις  $\delta x, \delta y, \delta z$  που γίνονται παράλληλα στους άξονες  $x, y, z$  αντίστοιχα. Για κάθε σημείο  $(\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta x, \delta y, \delta z)$  αυτού του χώρου, εφαρμόζουμε τους αντίστοιχους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς στο βοηθητικό σχήμα που οριοθετείται από τα δύο παράλληλα επίπεδα  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  και περιέχει το επίπεδο  $\Delta$ . Στην εκάστοτε θέση του βοηθητικού σχήματος που προκύπτει μετά την εφαρμογή ενός κάθε τέτοιου μετασχηματισμού, υπολογίζουμε τον αριθμό  $N$  των σημείων επιφάνειας του θραύσματος που βρίσκονται μεταξύ  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ , όπως επίσης και τη μέση τιμή  $\mu^D$  και την τυπική απόκλιση  $S^D$  της προσημασμένης απόστασης αυτών των σημείων από το  $\Delta$ . Εντοπίζουμε το σημείο  $(\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta x, \delta y, \delta z)$  για το οποίο το  $N$  είναι μέγιστο και η απόλυτη μέση τιμή  $\mu^D$  είναι μικρότερη από  $3.1 S^D / \sqrt{N}$ . Αυτό

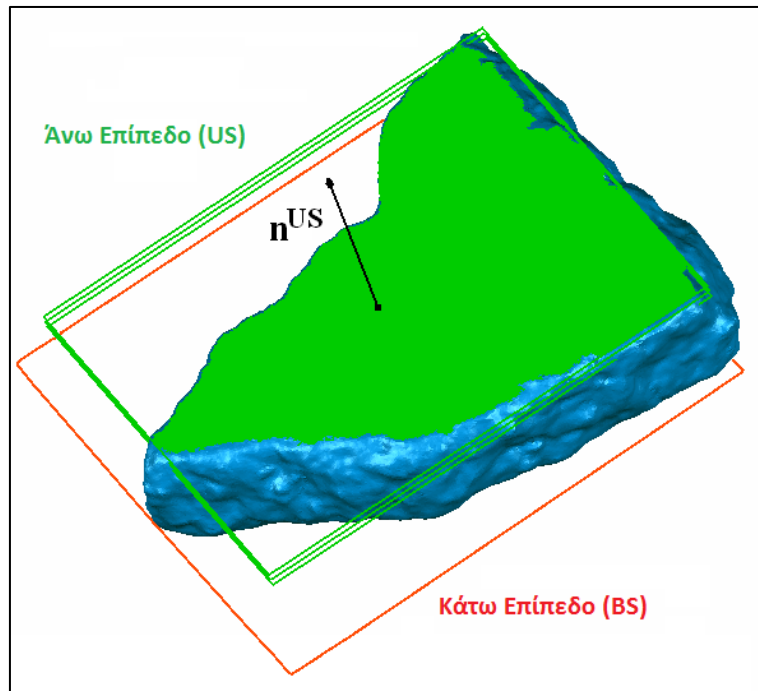
το σημείο αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη θέση του βοηθητικού σχήματος, για την οποία η άνω επίπεδη επιφάνεια του θραύσματος βέλτιστα ταιριάζει στο  $\Delta$ .

Ο λόγος για την απαίτηση  $|\mu^D| < 3.1 S^D / \sqrt{N}$  εντοπίζεται στο ότι εύλογα υποθέτουμε πως οι προσημασμένες αποστάσεις των  $N^{US}$  σημείων από το  $\Delta$  ακολουθούν μία κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και ότι το 99.9% του κανονικού πληθυσμού ικανοποιεί αυτήν την ανισότητα. Στην πράξη, αυτό το κριτήριο αντικαθίσταται από την εφαρμογή ενός αλγορίθμου μεγιστοποίησης στο χώρο των  $(\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta\chi, \delta\psi, \delta\zeta)$ . Το επίπεδο  $\Delta_2$ , δηλαδή το κάτω επίπεδο του βέλτιστα ταιριασμένου βοηθητικού σχήματος (δες Εικόνα 21), ορίζεται ως το άνω επίπεδο του κονιάματος. Επιλέγουμε το επίπεδο  $\Delta_2$  αντί του  $\Delta$  ως την άνω επίπεδη επιφάνεια του θραύσματος, ώστε όλα τα σημεία αυτού να είναι οριακά εντός του κονιάματος.

#### **4.3.2 Ορισμός και εντοπισμός του κεντρικού άξονα κάθε κονιάματος**

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι το θραύσμα έχει το σχήμα που ορίζεται από την τομή του άνω επιπέδου με την επιφάνεια του θραύσματος, την τομή του κάτω συνοριακού επιπέδου με την επιφάνεια του θραύσματος (η οποία μπορεί να είναι σημείο ή ένωση καμπυλών πολύ μικρού πλήθους σημείων) και την παράπλευρη επιφάνεια του θραύσματος. Θεωρούμε, επίσης, ότι αυτό το σχήμα είναι ένα ομογενές τρισδιάστατο αντικείμενο.

Καθορίζουμε τον άξονα που περνάει από το κέντρο βάρους του αντικειμένου, ο οποίος, επιπλέον, είναι και ο άξονας ελάχιστης ροπής αδράνειας αυτού. Επιπλέον, ο άξονας αυτός είναι παράλληλος στο διάνυσμα  $\vec{n}^{US} = (A^{US}, B^{US}, C^{US})$  και επομένως, κάθετος στα άνω και κάτω συνοριακά επίπεδα. Τον άξονα αυτό τον ονομάζουμε κεντρικό άξονα του θραύσματος (βλ. Εικόνα 22).



**Εικόνα 22 - Μία πρώτη επεξεργασία των απεικονίσεων των θραυσμάτων. Η άνω επίπεδη επιφάνεια του θραύσματος και το βοηθητικό της σχήμα απεικονίζονται στην πράσινη επιφάνεια και το πράσινο πλαίσιο αντίστοιχα. Ο κεντρικός άξονας του θραύσματος είναι στη διεύθυνση του  $n^{US}$  και περνάει από το κέντρο βάρους του θραύσματος. Το κάτω επίπεδο του θραύσματος απεικονίζεται στο κόκκινο πλαίσιο, είναι παράλληλο στο άνω επίπεδο και υπολογίζεται όπως περιγράφεται στην Ενότητα 4.3.1**

Επιπρόσθετα, στρέφουμε όλα τα θραύσματα μέσω κατάλληλων γωνιών Euler (Ενότητα 3.5) και τα μετατοπίζουμε παράλληλα, ούτως ώστε όλοι οι κεντρικοί άξονες αυτών να συμπίπτουν με τον z-άξονα.

#### **4.3.3 Δημιουργία στραμμένων εκδοχών του κάθε κονιάματος για την αντιμετώπιση του προβλήματος του τυχαίου προσανατολισμού αυτού**

Στην προσπάθειά μας να εντοπίσουμε δύο κονιάματα που πραγματικά ταιριάζουν, πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας την τυχειότητα στον προσανατολισμό τους κατά τη στιγμή που σαρώθηκαν. Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία, θα δημιουργήσουμε



ικανό αριθμό στραμμένων εκδοχών όλων των διαθέσιμων θραυσμάτων. Το περιεχόμενο του χαρακτηρισμού "ικανός αριθμός στραμμένων εκδοχών" θα καθοριστεί κατωτέρω.

Συγκεκριμένα, στρέφουμε κάθε θραύσμα γύρω από τον κεντρικό του άξονα (που προηγουμένως τον έχουμε ταυτίσει με τον z-άξονα) με μία μικρή γωνία-βήμα  $\delta\theta$ . Η ακριβής τιμή της γωνίας  $\delta\theta$  επιλέγεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι πλευρές της γωνίας αυτής, σε κάθε περίπτωση, να περιλαμβάνουν τουλάχιστον δύο σημεία της εξωτερικής επιφάνειας του θραύσματος. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι σε όλες τις εφαρμογές που έχουμε αντιμετωπίσει ως τώρα, η μέση ακτίνα της άνω επιφάνειας των υπό εξέταση θραυσμάτων ποικίλει στο διάστημα  $[2 - 10] \text{ cm}$ , μία πολύ καλή επιλογή για τη γωνία  $\delta\theta$  είναι  $\delta\theta = 1^\circ$ . Εννοείται ότι η μέθοδος που περιγράφεται στην παρούσα εργασία λειτουργεί για οποιαδήποτε τιμή του  $\delta\theta$ , με περιορισμούς την επιθυμητή ακρίβεια και τον διαθέσιμο χρόνο. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει μία ακολουθία από γωνίες  $\theta_i = \delta\theta \cdot i, \theta_i \in [0, 2\pi)$  και όλες οι αντίστοιχες στραμμένες εκδοχές του κάθε θραύσματος γύρω από τον άξονα z. Το σύνολο όλων των στραμμένων εκδοχών ενός θραύσματος σχηματίζουν το σύνολο  $\Pi^R$ .

#### **4.4 ΟΡΙΣΜΟΣ «ΣΤΑΘΕΡΟΥ» ΚΑΙ «ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΙΜΟΥ» ΚΟΝΙΑΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΝΑ ΖΕΥΓΟΣ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ**

Έστω ότι επιθυμούμε να αποφασίσουμε αν δύο δοσμένα θραύσματα ταιριάζουν, χρησιμοποιώντας όλη τη διαθέσιμη για αυτά τρισδιάστατη πληροφορία και, εφόσον αυτά όντως αρμόζουν, να εντοπίζουμε και σε ποιο σημείο επισυμβαίνει αυτό. Για να πετύχουμε τα ανωτέρω, προχωρούμε ως ακολούθως:

Ένα πρώτο, τυχαία επιλεγμένο θραύσμα, το οποίο θα αποκαλούμε «σταθερό» κόνιαμα, τοποθετείται σε ένα σύστημα αναφοράς με τέτοιο τρόπο, ώστε ο κεντρικός του άξονας να συμπίπτει με τον z-άξονα του συστήματος. Θεωρούμε την ψηφιακή/διακριτή καμπύλη  $C^F$  επί της άνω επίπεδης επιφάνειας του θραύσματος, η οποία είναι η τομή του άνω επιπέδου  $\Delta_2$  και της παράπλευρης επιφάνειας του συγκεκριμένου θραύσματος. Επειδή στην πράξη, ένα σημείο του νέφους (point cloud) της παράπλευρης επιφάνειας έχει πιθανότητα μηδέν να ανήκει στο άνω επίπεδο  $\Delta_2$ , γι'

αυτό θεωρούμε την τομή του  $\Delta_2$  με τις πλευρές όλων των τριγώνων που προσφέρει ο τρισδιάστατος σαρωτής, τρίγωνα, τα οποία, στην ουσία, συνθέτουν την επιφάνεια αυτή. Θεωρούμε ότι κάθε τέτοιο σημείο επαφής είναι ένα σημείο pixel επί του επιπέδου  $\Delta_2$  και της παράπλευρης επιφάνειας του θραύσματος. Αριθμούμε με εντελώς τυχαίο τρόπο τα pixels αυτά, με μοναδικό περιορισμό, το  $(i + 1)$  pixel να είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το υπ' αριθμόν  $i$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο, σχηματίζουμε την προαναφερθείσα διακριτή καμπύλη  $C^F$  και με σύμβαση επιλέγουμε, τόσο το πρώτο σημείο της, όσο και την υποχρέωσή μας να τη διαγράψουμε ωρολογιακά.

Εν συνεχεία, λαμβάνουμε υπόψιν ένα μήκος σύγκρισης, έστω  $L_C$  μετρημένο σε pixels, όπως αυτά ορίστηκαν ανωτέρω. Αρχικά, θεωρούμε μία ομάδα από  $L_C$  διαδοχικά σημεία, εκκινώντας από το σημείο με αύξοντα αριθμό 1 του περιγράμματος της καμπύλης  $C^F$  της άνω επίπεδης επιφάνειας του θραύσματος. Αυτή η ακολουθία των pixels του περιγράμματος στην παρούσα μελέτη, θα αποκαλείται «σταθερή αλυσίδα» και θα συμβολίζεται  $\Gamma_1^F$ , όπου το  $F$  (από τον αγγλικό όρο Fixed) αντιπροσωπεύει το «σταθερό» θραύσμα και το 1 αναφέρεται στον αύξοντα αριθμό του σημείου εκκίνησης του περιγράμματος  $C^F$  (βλ. Εικόνα 23).

Στη συνέχεια, τοποθετούμε το δεύτερο θραύσμα στο ίδιο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, έτσι ώστε ο κεντρικός του άξονας να είναι παράλληλος με τον z-άξονα και επιπλέον, οι άνω συνοριακές επίπεδες επιφάνειες αυτού καθώς και του σταθερού θραύσματος, να συμπίπτουν. Αυτό το θραύσμα είναι τυχαία τοποθετημένο στο χώρο και έχει, επίσης, έναν τυχαίο προσανατολισμό γύρω από τον κεντρικό του άξονα. Θεωρούμε ότι στο δεύτερο αυτό κονίαμα έχει ήδη οριστεί η άνω διακριτή καμπύλη του περιγράμματος αυτού  $C^R$ , κατά εντελώς ανάλογο τρόπο με τη  $C^F$ , όπου τώρα ο δείκτης  $R$  αντιπροσωπεύει τη λέξη Rotated-to-be. Στην επόμενη Ενότητα θα περιγράψουμε τη διαδικασία και τους μετασχηματισμούς που επιτελούνται, ώστε να δημιουργηθούν όλες οι πιθανές θέσεις προσαρμογής μεταξύ των δύο συγκεκριμένων κονιαμάτων. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν τα κριτήρια επί τη βάση των οποίων το αναπτυσθέν σύστημα ελέγχει αν μία θέση προσαρμογής δύο οποιωνδήποτε θραυσμάτων είναι αποδεκτή.

#### 4.5 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΘΕΣΕΩΝ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΚΑΙ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΙΜΟΥ ΘΡΑΥΣΜΑΤΟΣ

Σε προηγούμενη ενότητα (Ενότητα 4.3.3), περιεγράφη ο τρόπος με τον οποίο έχουν δημιουργηθεί όλες οι στραμμένες εκδοχές  $\Pi^R$  του κονιάματος που επιλέξαμε να παίξει, προς στιγμής, το ρόλο του μετακινήσιμου.

Σε αυτό το σημείο, για κάθε γωνία  $\theta_i$ , μετατοπίζουμε παράλληλα το στραμμένο κονίαμα ώστε να γειτνιάσει με το σταθερό, όπως περιγράφεται παρακάτω:

Έστω ότι η καμπύλη  $C^R$  του περιγράμματος της άνω επίπεδης επιφάνειας του μετακινήσιμου κονιάματος αποτελείται από  $M$  pixels. Τότε, μετατοπίζουμε το κονίαμα αυτό παράλληλα, μέχρις ότου το πρώτο σημείο της καμπύλης  $C^F$  και το τελευταίο σημείο της  $C^R$  να συμπέσουν (βλ. Εικόνα 23). Στη συνέχεια, ορίζουμε το «τελικό σύνορο επιφάνειας»  $B_1^T$  ως το επίπεδο που περνάει από το τελευταίο σημείο της σταθερής αλυσίδας και είναι παράλληλο με τον κεντρικό άξονα του σταθερού κομματιού και κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το πρώτο και το τελευταίο σημείο της σταθερής αλυσίδας (Εικόνα 23β).

Δημιουργούμε μία μετακινήσιμη αλυσίδα  $\Gamma_{1,M}^R$  που μετακινείται στο  $C^R$  ανθρωπολογικά εκκινώντας από το σημείο με αύξοντα αριθμό  $M$ , καταλήγοντας στην τομή του τελικού συνόρου επιφάνειας με το  $C^R$ , εάν υπάρχει. Όπως κινούμαστε ανθρωπολογικά στο  $C^R$ , αυξάνοντας το μήκος του  $\Gamma_{1,M}^R$ , εάν ο αριθμός των σημείων του υπερβαίνει ένα καθορισμένο κατώφλι  $L_{EX}$ , τότε κρατάμε ένα δείκτη ότι απορρίπτουμε την τρέχουσα θέση προσαρμογής.

Η τιμή αυτή του κατώφλιου  $L_{EX}$  επιλέγεται εμπειρικά και με χρήση ευρεστικής λογικής. Παραδείγματος χάριν, έστω ότι ελέγχουμε εάν δύο οποιαδήποτε θραύσματα αρμόζουν σε μία συγκεκριμένη σχετική τους θέση, σε ένα μήκος περίπου 3 cm επί του σταθερού περιγράμματος  $C^F$ . Τότε είναι απολύτως εύλογο να θεωρήσουμε ότι το μήκος  $L^R$  της μετακινήσιμης αλυσίδας  $\Gamma^R$  δεν μπορεί να υπερβαίνει τα 6 cm ή ακόμα

και τα 5 cm, με δεδομένο ότι τα δύο θραύσματα είσαι σε θέση αποδεκτής προσαρμογής. Γενικώς, εάν  $L_C$  είναι το μήκος σύγκρισης επί του σταθερού περιγράμματος  $C^F$ , τότε είναι απολύτως εύλογο να θέτουμε a priori  $L_{EX} = 2 L_C$ . Αυτό το εμπειρικό κατώφλι επιβεβαιώθηκε πλήρως από όλες τις πραγματοποιηθείσες δοκιμές ως τώρα και μάλιστα, φαίνεται ότι και ένα μικρότερο κατώφλι, πχ.  $L_{EX} = 1,3 L_C$  θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για αύξηση των επιδόσεων του συστήματος με ασφάλεια και μεγάλη επιτυχία. Στην Ενότητα 4.9 θα παρουσιαστεί αναλυτικά ένα κριτήριο ελέγχου αποδεκτής θέσης προσαρμογής που βασίζεται στον υπολογισμό του μεγίστου επιτρεπτού μήκους  $L_{max}^R$  της μετακινήσιμης αλυσίδας, όπου προφανώς  $L_{max}^R < L_{EX}$ .

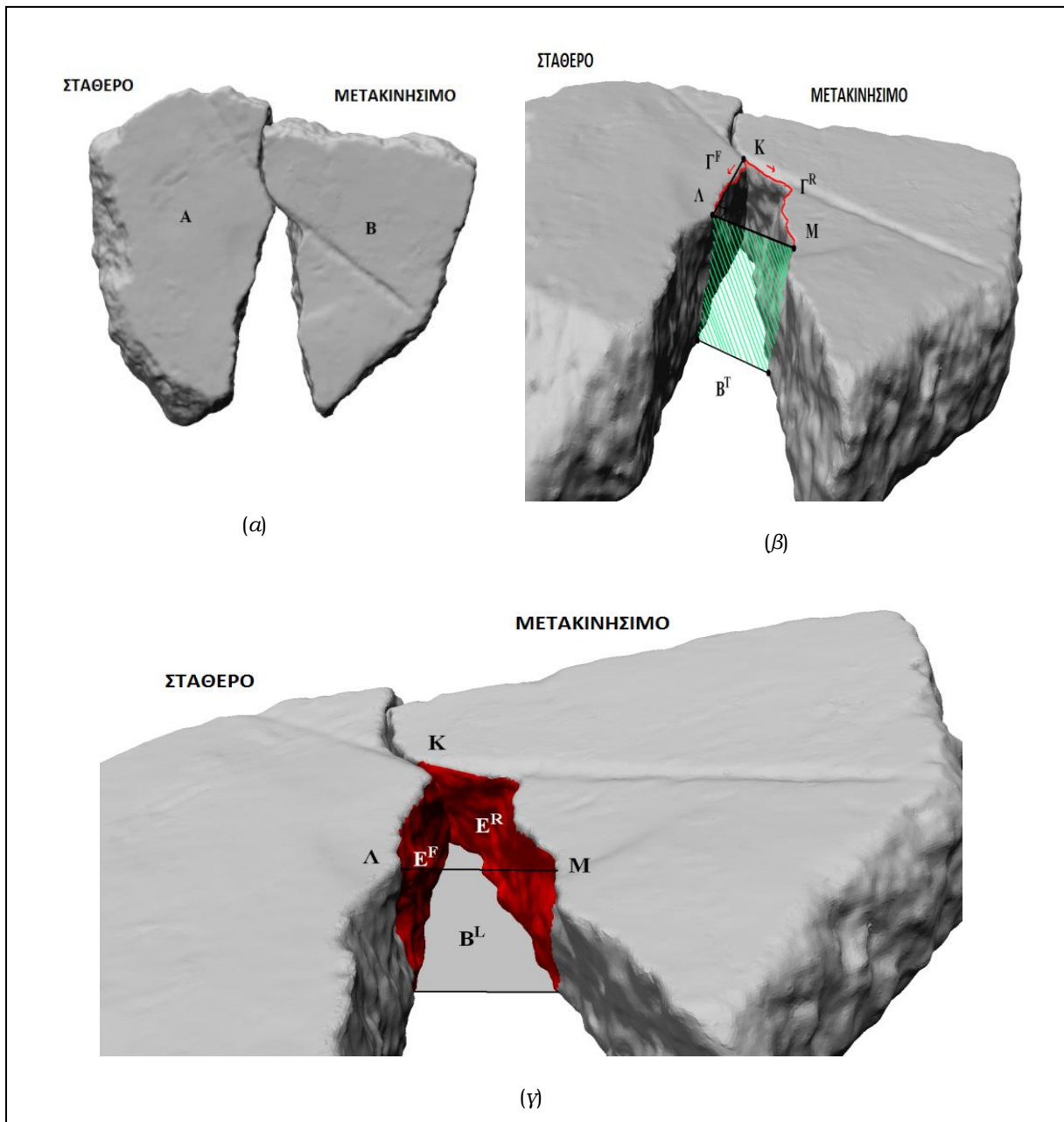
Ακολουθώντας, ορίζουμε τις έννοιες του "σταθερού κρημνού" και του "μετακινήσιμου κρημνού". Κατά τη διαδικασία αυτή, ορίζουμε πρώτα το "αρχικό σύνορο επιφάνειας"  $B_1^S$  ως το επίπεδο που διέρχεται από το πρώτο σημείο της σταθερής αλυσίδας και είναι παράλληλο στο τελικό σύνορο επιφάνειας  $B_1^T$ . Ορίζουμε, επίσης, το κοινό κάτω επίπεδο του ζεύγους θραυσμάτων A και B, το οποίο είναι το κάτω επίπεδο είτε του A, είτε του B, το οποίο είναι κοντινότερο στην κοινή άνω τους επιφάνεια. Έπειτα, ορίζουμε το "σταθερό κρημνό"  $E_1^F$  ως την επιφάνεια που βρίσκεται στην παράπλευρη επιφάνεια του σταθερού κομματιού και η οποία περικλείεται από την άνω επίπεδη επιφάνεια του θραύσματος, την κοινή κάτω επίπεδη επιφάνεια και τα αρχικά και τελικά σύνορα επιφάνειας. Ομοίως, ορίζουμε την έννοια του "μετακινήσιμου κρημνού"  $E_{1,M}^R$ , ως το τμήμα της παράπλευρης επιφάνειας του μετακινήσιμου κομματιού, η οποία περιορίζεται από την άνω επίπεδη επιφάνειά της, το κάτω επίπεδο και τα αρχικά και τελικά σύνορα επιφάνειας (βλ. Εικόνα 23γ).

Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία, αλλάζοντας το σημείο εκκίνησης της μετακινήσιμης αλυσίδας, μετακινούμενοι από το σημείο υπ' αριθμόν  $M$  στο σημείο  $M - 1$  και εν συνεχεία, στο σημείο  $M - 2$ , κ.ο.κ. έως ότου φτάσουμε στο σημείο υπ' αριθμόν 1 της  $C^R$ , σχηματίζοντας με αυτόν τον τρόπο ένα σύνολο από μετακινήσιμες αλυσίδες και μετακινήσιμους κρημνούς  $\Gamma_{1,m}^R, E_{1,m}^R, m = M, M - 1, \dots, 1$ , εν γένει διαφορετικούς.

Εν συνεχεία, μετακινούμενοι επί της καμπύλης  $C^F$ , δημιουργούμε κάθε φορά μια σταθερή αλυσίδα που εκκινεί από το εκάστοτε τρέχον k-οστό σημείο της  $C^F$  και

αποτελείται από  $L_C$  pixels, ως και τον αντίστοιχο τρέχοντα κρημνό, τα οποία συμβολίζονται  $\Gamma_k^F$ ,  $E_k^F$ ,  $k = 1, 2, \dots$  αντίστοιχα. Επιπλέον, προχωρώντας όπως προηγουμένως, δημιουργούμε και τις αντίστοιχες μετακινήσιμες αλυσίδες και μετακινήσιμους κρημνούς  $\Gamma_{k,m}^R$ ,  $E_{k,m}^R$ ,  $m = M, M - 1, \dots, 1$ .

Επισημαίνουμε ότι για δύο δεδομένα θραύσματα, η ακριβής μορφή του σταθερού και του μετακινήσιμου κρημνού  $E_k^F$ ,  $E_{k,m}^R$  εξαρτώνται από το πρώτο και το τελευταίο σημείο των αλυσίδων  $\Gamma_k^F$ ,  $\Gamma_{k,m}^R$ , τη θέση των κοινών κάτω επιπέδων τους σε σχέση με το κοινό άνω επίπεδό τους και τη γωνία στροφής  $\theta_i$ . Θα πρέπει να τονιστεί, επίσης, ότι εάν για μία συγκεκριμένη θέση του σταθερού κρημνού, δεν υπάρχει καμία τομή μεταξύ του τελικού συνόρου επιφανείας και του μετακινήσιμου θραύσματος, τότε στην περίπτωση αυτή, ο μετακινήσιμος κρημνός δεν μπορεί να οριστεί. Για το αναπτυχθέν σύστημα, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ταίριασμα στη συγκεκριμένη σχετική θέση των κονιαμάτων A και B.



Εικόνα 23 - Σχετική θέση του σταθερού και του μετακινήσιμου θραύσματος και ορισμός του χώρου επαφής.

(α): Κατάλληλη σχετική τοποθέτηση ενός ζεύγους θραυσμάτων που ελέγχονται για πιθανό τσίρισμα.

(β): Το τελικό σύνορο επιφανείας των θραυσμάτων και οι προκύπτουσες καμπύλες επαφής,  $\Gamma^F$  για τη σταθερή αλυσίδα και  $\Gamma^R$  για τη μετακινήσιμη.

(γ): Καθορισμός των κρημών επαφής για το ζεύγος θραυσμάτων,  $E^F$  στο σταθερό και  $E^R$  στο μετακινήσιμο θραύσμα.

#### **4.6 ΠΡΩΤΟ ΙΚΑΝΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΔΥΟ ΚΟΝΙΑΜΑΤΩΝ: Ο ΟΓΚΟΣ ΕΝΟΣ ΚΑΤΑΛΛΗΛΑ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟΥ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΜΕΤΑΞΥ ΑΥΤΩΝ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ ΑΠΟ ΕΝΑ ΚΑΤΩΦΛΙ**

Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε θραύσματα A, B τοποθετημένα στο ίδιο σύστημα αναφοράς, όπως περιεγράφη στις Ενότητες 4.4 και 4.5, με τέτοιο τρόπο, ώστε οι άνω επίπεδες επιφάνειές τους να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, κάθετα στον άξονα z, ενώ επιπλέον το μετακινήσιμο κονίαμα έχει μετατοπιστεί ώστε ένα σημείο του άνω περιγράμματός του  $C^F$ , έστω το k-οστό, να συμπίπτει με το m-οστό σημείο του άνω περιγράμματός του  $C^R$ .

Επιπροσθέτως, θεωρούμε όλα τα σχετικά υπάρχοντα ζεύγη:

- α) Σταθερών και μετακινήσιμων αλυσίδων  $(\Gamma_k^F, \Gamma_{k,m}^R)$  που εκκινούν από το k-οστό pixel της  $C^F$
- β) Των αντίστοιχων σταθερών και μετακινήσιμων κρημνών  $(E_k^F, E_{k,m}^R)$
- γ) Των αντίστοιχων αρχικών και τελικών συνόρων επιφανείας  $(B_k^S, B_k^T)$ .

Στη συνέχεια, θεωρούμε το κλειστό τρισδιάστατο χωρίο  $V_{k,m}$  (βλ. Εικόνα 24) που ορίζεται από:

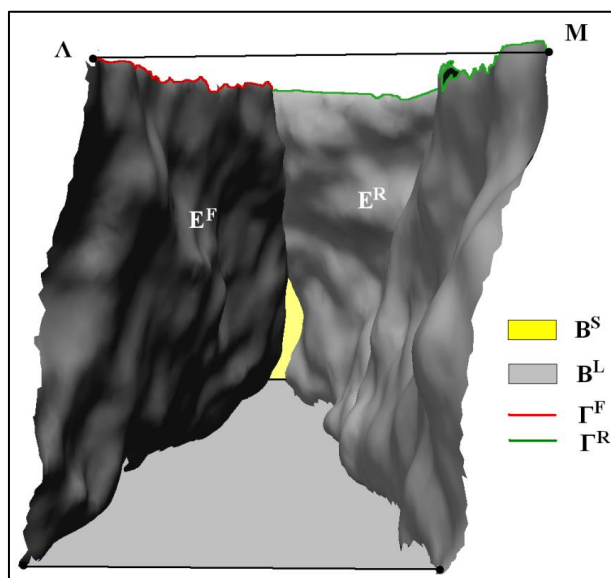
- 1) Το σταθερό και το μετακινήσιμο κρημνό του συγκεκριμένου ζεύγους κονιαμάτων  $(E_k^F, E_{k,m}^R)$
- 2) Το αρχικό και τελικό σύνορο επιφανείας του ίδιου ζεύγους  $(B_k^S, B_k^T)$  στη συγκεκριμένη σχετική τους θέση
- 3) Το κοινό άνω επίπεδο των δύο θραυσμάτων και
- 4) Το κάτω επίπεδο του A ή του B, το οποίο είναι κοντινότερο στο κοινό άνω επίπεδο

Υπολογίζουμε τον όγκο  $\tau_{k,m}$  αυτού του κλειστού χωρίου  $V_{k,m}$ . Εάν η τιμή  $\tau_{k,m}$  είναι μικρότερη από μία προκαθορισμένη τιμή κατωφλίου  $\tau^T$ , τότε θεωρούμε τη

συγκεκριμένη θέση ως θέση πιθανού ταιριάσματος αυτών των δύο θραυσμάτων A και B.

Να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι η κατάλληλη επιλογή του  $\tau^T$  εξαρτάται από το μήκος σύγκρισης  $L_C$ , την απόσταση του κοινού κάτω και των άνω επιπέδων και το κενό μεταξύ δύο θραυσμάτων που πραγματικά ταιριάζουν και το οποίο είμαστε διατεθειμένοι να αποδεχτούμε. Εμφατικά αναφέρουμε ότι στην ιδανική περίπτωση της τέλει προσαρμογής των κονιαμάτων A και B στη συγκεκριμένη σχετική τους θέση, ο όγκος του αντίστοιχου κωρίου  $V_{k,m}$  θα ήταν 0. Στην πράξη όμως, λόγω των συνεπειών του φαινομένου της θραύσης, αλλά και της φθοράς που προκαλεί ο χρόνος, ο όγκος αυτός, σε πραγματική θέση προσαρμογής, μπορεί να είναι αρκετά μεγαλύτερος του μηδενός, κατά περίπτωση. Το γεγονός αυτό παρατηρήθηκε σαφώς κατά την εφαρμογή της μεθόδου σε κονιάματα τοιχογραφιών της Μινωικής και Μυκηναϊκής περιόδου που συχνά θραύστηκαν με βίαιο τρόπο και τα οποία παρέμειναν ενταφιασμένα για πολλούς αιώνες.

Τέλος, αναφέρουμε ότι αυτό το κριτήριο, αν και αναφέρεται πρώτο, είναι τελεσίδικο και προηγούνται της τελικής εφαρμογής αυτού τα τρία απορριπτικά κριτήρια που ακολουθούν.



**Εικόνα 24 - Απομόνωση του κώρου  $V_{k,m}$ , στον όγκο του οποίου εφαρμόζεται ο έλεγχος του Κριτηρίου 1.**



#### **4.7 ΔΕΥΤΕΡΟ ΑΝΑΓΚΑΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΔΥΟ ΚΟΝΙΑΜΑΤΩΝ: ΑΠΑΓΟΡΕΥΣΗ ΤΟΠΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ ΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΕΚΑΣΤΟΤΕ ΠΙΘΑΝΗ ΘΕΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ**

Στην ιδανική περίπτωση, κατά την οποία δύο θραύσματα A, B πραγματικά ταιριάζουν, δεν θα έπρεπε να υπάρχει η παραμικρή επικάλυψη μεταξύ των αντίστοιχων κρημνών, σταθερού και μετακινήσιμου. Εντούτοις, στην πράξη, εξαιτίας των αναπόφευκτων ανακριβειών της ψηφιακής αναπαράστασης των θραυσμάτων, ακόμα και στην περίπτωση της τέλει προσαρμογής αυτών, είναι πιθανή η ύπαρξη κάποιας μικρής επικάλυψης μεταξύ των αντίστοιχων κρημνών. Ως εκ τούτου, εάν σε μία συγκεκριμένη θέση των θραυσμάτων A, B, το Κριτήριο 1 αρχικά ικανοποιείται, τότε απαιτούμε τοπικά η εικονική αλληλοεισχώρηση του σταθερού κρημνού  $E_k^F$  και του μετακινήσιμου κρημνού  $E_{k,m}^R$  να είναι μικρότερη από ένα αποδεκτό κατώφλι  $\tau^0$ . Εάν η επικάλυψη είναι μεγαλύτερη αυτού του κατωφλίου, πρέπει και πάλι να λάβουμε υπόψιν μας την τυχαιότητα στην παράλληλη μετατόπιση του θραύσματος B. Συνεπώς, για να άρουμε αυτή την τυχαιότητα, προχωρούμε ως ακολούθως:

Για κάθε σημείο 'p' του μετακινήσιμου κρημνού, εντοπίζουμε την τομή του επιπέδου που είναι κάθετο στον z-άξονα και περνάει από το σημείο 'p', με το σταθερό κρημνό. Υπολογίζουμε την μικρότερη απόσταση  $\mu^p$  του 'p' από όλα τα σημεία αυτής της τομής και έστω  $\vec{\mu}^p$  ο αντίστοιχος πίνακας. Μεταξύ όλων των  $\vec{\mu}^p$  εντοπίζουμε αυτόν με το μεγαλύτερο μήκος, έστω  $\vec{\mu}$ . Μετατοπίζουμε παράλληλα κατά  $-\vec{\mu}$  το θραύσμα B από τη θέση που προέκυψε από τη διαδικασία που περιεγράφη στην Ενότητα 4.5 και επαναυπολογίζουμε τον επικαλυπτόμενο όγκο. Εάν αυτός είναι μικρότερος από  $\tau^0$  και το Κριτήριο 1 ικανοποιείται ακόμα, τότε λαμβάνουμε υπόψιν μας τη συνολική επικάλυψη των δύο θραυσμάτων. Ειδικότερα, επιτρέπουμε την ύπαρξη μίας συνολικής επικάλυψης μεταξύ των ψηφιακών αναπαραστάσεων των δύο θραυσμάτων και απαιτούμε ο όγκος της επικάλυψης αυτής να είναι μικρότερος από ένα κατάλληλα επιλεγμένο κατώφλι  $\tau^{F0}$ . Προφανώς, η ακριβής τιμή αυτού του κατωφλίου εξαρτάται από τον όγκο των δύο θραυσμάτων και την ποιότητα των ψηφιακών αναπαραστάσεών τους. Μετά από ενδελεχείς ελέγχους βρέθηκε ότι μία πολύ καλή τιμή κατωφλίου  $\tau^{F0}$

για την ψηφιακή μέθοδο αναπαράστασης που χρησιμοποιήθηκε είναι το 0.20% του μικρότερου όγκου εκ των δύο θραυσμάτων A και B.

Μετά την άρση της εισχώρησης και εφόσον ο όγκος επικάλυψης επί των κρημνών, ως και ο συνολικός όγκος της επικάλυψης, είναι μικρότεροι από  $\tau^0$  και  $\tau^{F0}$  αντίστοιχα, επανυπολογίζουμε τον όγκο του χωρίου  $V_{k,m}$ , όπως αυτός ορίστηκε στο Κριτήριο 1. Εάν ο όγκος αυτός είναι μικρότερος του κατωφλίου  $\tau^T$ , τότε θεωρούμε ότι το σύστημα έχει εντοπίσει αποδεκτή θέση προσαρμογής μεταξύ των κονιαμάτων A και B.

#### **4.8 ΤΡΙΤΟ ΑΝΑΓΚΑΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΔΥΟ ΚΟΝΙΑΜΑΤΩΝ: ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΤΩΝ ΚΡΗΜΝΩΝ $E^F$ ΚΑΙ $E^R$ ΣΤΗΝ ΕΚΑΣΤΟΤΕ ΠΙΘΑΝΗ ΘΕΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ**

Διατυπώνεται εδώ ένα τρίτο αναγκαίο κριτήριο, το οποίο λειτουργώντας ως ένα απορριπτικό φίλτρο, συνετέλεσε στη ραγδαία επιτάχυνση της αποδοτικότητας της παρουσιαζόμενης μεθόδου. Η βασική ιδέα επί της οποίας βασίζεται αυτό το κριτήριο είναι η εξής:

Έστω ότι επιτυγχάνεται τέλεια προσαρμογή σε μία συγκεκριμένη θέση των θραυσμάτων A και B. Ως τέλεια προσαρμογή θεωρείται εκείνο όπου το  $\tau_{k,m}$  είναι μηδέν, ή αντίστοιχα, εκείνο όπου οι κρημνοί  $E_k^F$ ,  $E_{k,m}^R$  συμπίπτουν, χωρίς καμία γενικώς εικονική επικάλυψη των κονιαμάτων. Σε αυτή την ιδεατή περίπτωση, σε κάθε σημείο των κρημνών, τα κάθετα σε αυτά διανύσματα  $\vec{n}_F$  και  $\vec{n}_R$  θα είναι αντίθετα.

Στην πράξη, θα υπάρχουν σίγουρα διαφοροποιήσεις από αυτήν την ιδανική περίπτωση, λόγω της αναπόφευκτης ύπαρξης κενού μεταξύ των ταιριασμένων κονιαμάτων που οφείλεται, όπως προαναφέρθηκε, στον τρόπο θραύσης και τη φθορά του χρόνου. Παρ' όλα αυτά, ένα αντίστοιχο κριτήριο θα παραμένει αναγκαίο. Πράγματι, διαισθητικά, κάποιος μπορεί να περιμένει ότι εάν υπάρχει μία σημαντική συνολική διαφοροποίηση των μοναδιαίων καθέτων διανυσμάτων  $\hat{n}$  καθ' όλη τη συνοριακή επιφάνεια του χωρίου  $V_{k,m}$ , τότε ο όγκος  $\tau_{k,m}$  δεν μπορεί να είναι ικανοποιητικά μικρός και επομένως, δεν θα ικανοποιείται το Κριτήριο 1.

Μια αυστηρή διατύπωση του παραπάνω είναι η εξής:

### 3ο Κριτήριο Προσαρμογής:

Έστω ότι τα κονιάματα A, B είναι τοποθετημένα όπως περιεγράφη στην Ενότητα 4.5 και έστω, επίσης, ότι ο όγκος  $\tau_{k,m}$  είναι μικρότερος ή ίσος της μέγιστης αποδεκτής τιμής  $\tau^T$ . Τότε, το ολοκλήρωμα των γωνιών που ορίζεται μέσω της σχέσης

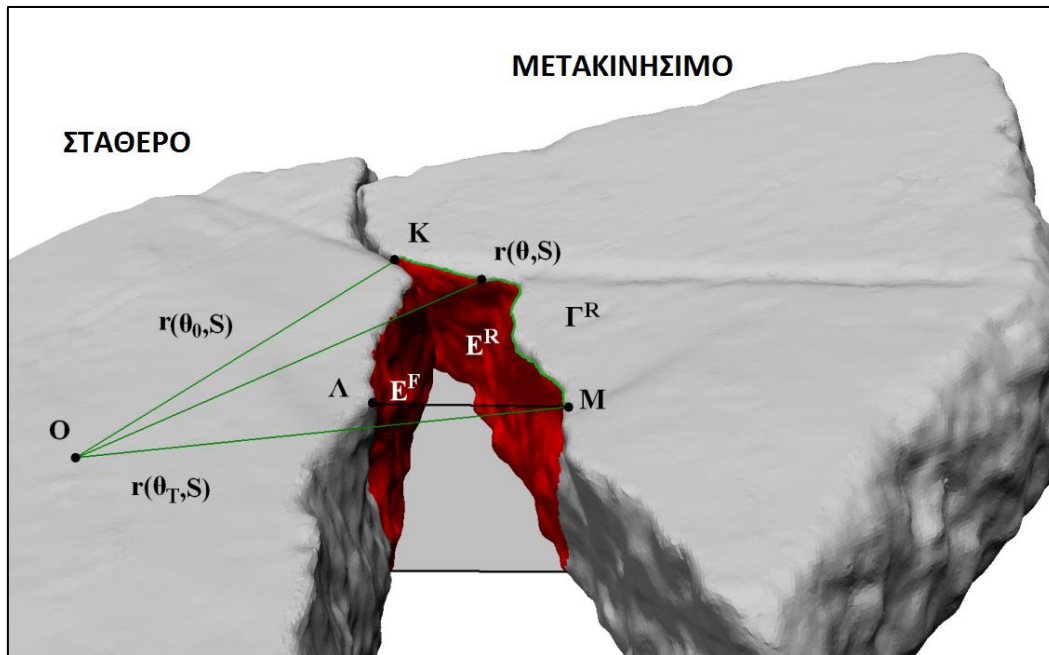
$$\mu = \oint_{\partial V_{k,m}} \arctan\left(\frac{\vec{n} \cdot \hat{j}}{\vec{n} \cdot \hat{i}}\right) dS \quad (4.8-1)$$

ικανοποιεί την ανισότητα

$$\left| \frac{\mu}{\Delta\theta \Delta z} \right| \leq \left| \ln\left(\frac{r_T}{r_0}\right) + \left[ \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\Delta z}{6\tau^T} \left[ -r_0^2 + \frac{1}{\Delta\theta \Delta z} \int_{\theta_0}^{\theta_T} (T r(\theta, T)^2 - S r(\theta, S)^2) d\theta \right] \right] \right| \quad (4.8-2)$$

όπου  $r_T, r_0$  είναι οι αποστάσεις των  $B_k^S, B_k^T$  από τον κεντρικό άξονα του  $E_k^F$ ,  $\Delta\theta = \theta_T - \theta_0$  είναι η διεδρη γωνία που περικλείει το  $E_{k,m}^R$ ,  $\Delta z = T - S$  η απόσταση μεταξύ των άνω και κάτω συνοριακών επιπέδων των θραυσμάτων και  $r(\theta, T), r(\theta, S)$  είναι οι άνω και κάτω αντίστοιχα συνοριακές καμπύλες του  $E_{k,m}^R$  (βλ. Εικόνα 25).

Ισοδυνάμως, εάν για την τρέχουσα θέση των θραυσμάτων A, B, η μέση γωνία των καθέτων διανυσμάτων του  $\partial V_{k,m}$  υπερβαίνει αυτό το άνω όριο (4.8-2), τότε η τρέχουσα αυτή θέση δεν μπορεί να είναι θέση πραγματικού ταιριάσματος. Το απορριπτικό αυτό κριτήριο προέκυψε με εφαρμογή Θεωρίας Μεταβολών [47] (Ενότητα 3.4).



Εικόνα 25 - Επεξήγηση συμβολισμών του 3ου Κριτηρίου. Η συνάρτηση  $r(\theta, S)$  αντιστοιχεί στην απόσταση των σημείων του  $\Gamma^R$  από τον κεντρικό άξονα του σταθερού θραύσματος, ενώ η συνάρτηση  $r(\theta, T)$  αντιστοιχεί στην απόσταση των σημείων που ανήκουν στην τομή του  $E^R$  με το  $B^L$  από τον άξονα.

#### 4.9 ΤΕΤΑΡΤΟ ΑΝΑΓΚΑΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΔΥΟ ΚΟΝΙΑΜΑΤΩΝ: Η ΜΕΓΙΣΤΗ ΕΠΙΤΡΕΠΤΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ ΤΩΝ ΑΛΥΣΙΔΩΝ $\Gamma^F$ ΚΑΙ $\Gamma^R$ ΤΩΝ ΑΝΩ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΕΚΑΣΤΟΤΕ ΠΙΘΑΝΗ ΘΕΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ

Σε αυτήν την υποενότητα, θα διατυπώσουμε ένα τέταρτο αναγκαίο κριτήριο ταιριάσματος δύο θραυσμάτων Α, Β. Το περιεχόμενο αυτού του κριτηρίου μπορεί διαισθητικά να περιγραφεί ως ακολούθως:

Εστω ότι τα δύο κονιάματα είναι σε επαφή στο  $k$ -οστό pixel του  $C^F$  και το  $m$ -οστό pixel του  $C^R$ , όπως ορίστηκε στην Ενότητα 4.5. Σε αυτή τη θέση, το αρχικό  $B_k^S$  και το τελικό  $B_k^T$  σύνορα επιφανείας είναι σαφώς ορισμένα. Για να προσδιορίσουμε μία αποδεκτή θέση προσαρμογής, το θραύσμα Β στρέφεται γύρω από τον κεντρικό του άξονα, έχοντας πάντα την αρχή της εκάστοτε μετακινήσιμης αλυσίδας του σε επαφή με την

αρχή της σταθεράς αλυσίδας επί του θραύσματος A. Καθώς το θραύσμα B στρέφεται, μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να μην τέμνεται με το τελικό σύνορο επιφάνειας, το οποίο εξαρτάται μόνο από το θραύσμα A και άρα παραμένει σταθερό ή η τομή τους μπορεί να είναι σε τέτοιο σημείο, ώστε ο μετακινήσιμος κρημνός που σχηματίζεται να είναι πολύ ευρύς και σε μεγάλη απόσταση από τον σταθερό. Επομένως, γεννάται το ερώτημα "πώς μπορεί να συσχετιστεί το μέγιστο επιτρεπτό εμβαδό του μετακινήσιμου κρημνού  $E_{k,m}^R$  με τον μέγιστο επιτρεπτό όγκο  $\tau^T$  του χωρίου  $V_{k,m}$ ;" Κάτω από συγκεκριμένες, λίαν εύλογες προϋποθέσεις, οι οποίες μάλιστα φαίνονται να ισχύουν στην πράξη, μπορούμε να εκφράσουμε το εμβαδόν της επιφάνειας του κρημνού  $E_{k,m}^R$  μέσω του μήκους της μετακινήσιμης αλυσίδας  $\Gamma_{k,m}^R$ , δεδομένου ότι το κάτω επίπεδο παραμένει το ίδιο. Επομένως, η παραπάνω ερώτηση μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής: "ποιο είναι το άνω όριο του μήκους της αλυσίδας  $\Gamma_{k,m}^R$  όταν τα Κριτήρια 1 και 3 ικανοποιούνται στη θέση αυτή  $(k, m)$ "; Μία απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

#### Πρόταση 4.1

Έστω ότι σε ένα επίπεδο υπάρχει μία καμπύλη  $\Gamma^F$  που αποκαλούμε σταθερή, καθώς και μία καμπύλη  $\Gamma^R$ , η οποία αποκαλείται μετακινήσιμη και περιγράφεται με χρήση μιας παραμέτρου  $t$ ,  $t \in [t_A, t_B]$ . Έστωσαν, επίσης, δύο παράλληλα ευθύγραμμα συννοριακά τμήματα, ένα αρχικό, έστω  $\varepsilon^I$  και ένα τελικό, έστω  $\varepsilon^T$  (βλ. Εικόνα 26).

Ας υποθεθεί, επιπλέον, ότι:

- 1) το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από αυτές τις τέσσερις καμπύλες  $\Gamma^F, \Gamma^R, \varepsilon^I, \varepsilon^T$  (βλ. Εικόνα 26) παραμένει σταθερό, ίσο με  $\alpha$
- 2) το μήκος της σταθερής καμπύλης  $\Gamma^F$  έχει σταθερή τιμή, έστω  $L_C$
- 3) το μήκος της καμπύλης  $\Gamma^R$  δεν υπερβαίνει μία τιμή, έστω  $L_{EX}$ , η οποία έχει επιλεγεί a priori, όπως περιεγράφη στην Ενότητα 4.5.

Τότε το ολοκλήρωμα των γωνιών επί της  $\Gamma^R$  υπολογίζεται ως:

$$\gamma = \int_{t_A}^{t_B} \arctan\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) dt$$

και ισχύουν τα κάτωθι:

- I. Εάν  $d$  είναι η απόσταση μεταξύ των συνοριακών παραλλήλων ευθυγράμμων τμημάτων  $\varepsilon^I$  και  $\varepsilon^T$ , τότε η συνολική διαφορά των γωνιών των καμπυλών  $\Gamma^F$  και  $\Gamma^R$  δεν υπερβαίνει την τιμή

$$\gamma_{max} = \sqrt{d^2 + \left(\frac{2a}{d}\right)^2} \arctan\left(\frac{2a}{d^2}\right) + \left(L_{EX} - \sqrt{d^2 + \left(\frac{2a}{d}\right)^2}\right) \frac{\pi}{2}$$

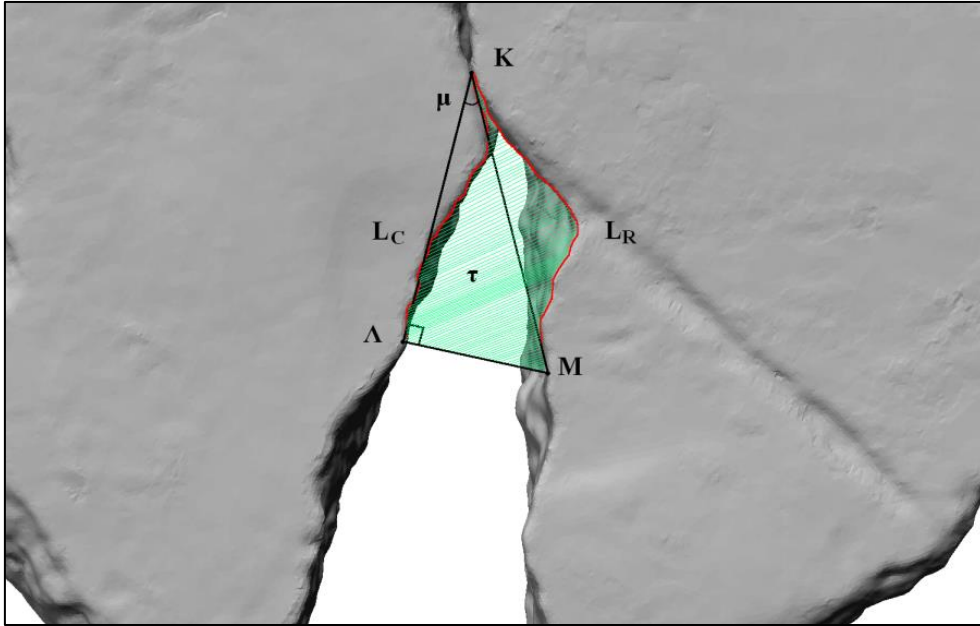
- II. Για μια δεδομένη τιμή  $\gamma$  του ολοκληρώματος των γωνιών της  $\Gamma^R$ , το συνολικό μήκος της μεταβλητής καμπύλης  $\Gamma^R$  δεν μπορεί να ξεπερνάει την τιμή

$$L_{max}^R = \frac{a}{L_C/2} \sqrt{\frac{1}{\tan\left(\frac{\gamma}{T_B - T_A}\right)^2} + 1}$$

Προφανώς, η τιμή  $L_{max}^R$  δεν μπορεί να υπερβαίνει το κατώφλι  $L_{EX}$  που έχουμε θέσει αργότερα στη Ενότητα 4.5.

■

Η απόδειξη της ανωτέρω Πρότασης παρουσιάζεται αναλυτικά στην Ενότητα 3.4.4 και στα άρθρα [32], [47].



**Εικόνα 26 - Οπτική αναπαράσταση του Κριτηρίου 4 σε μία τυχαία σχετική θέση των δύο θραυσμάτων. Το μέγιστο αποδεκτό μήκος  $L_R$  του  $\Gamma^R$  υπολογίζεται μέσω του εμβαδού  $a$  που περικλείεται από τα  $\Gamma^F$ ,  $\Gamma^R$  και  $M\Lambda$ , όπου το  $M\Lambda$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon^T$ , ενώ προφανώς η ευθεία  $\varepsilon^I$  είναι παράλληλη προς την  $\varepsilon^T$  και διέρχεται από το σημείο επαφής  $K$ .**

Για καλύτερη κατανόηση της παραπάνω πρότασης, θα δοθεί ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Έστω ότι το μήκος της σταθερής καμπύλης  $\Gamma^F$  είναι  $L_C = 100$  pixels, το μέγιστο επιτρεπτό εμβαδό που περικλείεται από τις καμπύλες  $\Gamma^F, \Gamma^R, \varepsilon^I, \varepsilon^T$  είναι  $a = 1000$  pixels (χρησιμοποιούμε τη μονάδα μέτρησης pixels αντί cm/mm για να αποφύγουμε την εξάρτησή μας από την διακριτική ικανότητα-resolution του τρισδιάστατου σαρωτή). Τότε η μέση γωνία των επαπτόμενων διανυσμάτων στην προηγούμενη καμπύλη είναι  $\bar{\gamma} = 0,1745$  rad ή ισοδυνάμως  $\bar{\gamma} = 10^\circ$ . Τότε, το μέγιστο επιτρεπτό μήκος  $L_{max}^R$  της μετακινήσιμης αλυσίδας, ούτως ώστε να ισχύουν οι περιορισμοί της παραπάνω πρότασης, είναι  $L_{max}^R \approx 115$  pixels.

Για να εφαρμόσουμε το προαναφερθέν Κριτήριο 4, είναι απαραίτητο να κάνουμε μία εκτίμηση του άνω ορίου του εμβαδού  $a$  της περιοχής που περικλείεται από τα  $\Gamma^F, \Gamma^R, \varepsilon^I, \varepsilon^T$ . Αυτό το άνω όριο, μπορεί είτε να προσδιοριστεί κατά περίπτωση, είτε να υπολογιστεί ως ακολούθως: Είναι απόλυτα λογικό να υποθέσουμε ότι τα εμβαδά όλων

των διατομών του τρισδιάστατου χωρίου  $V_{k,m}$  ακολουθούν κανονική κατανομή. Με εφαρμογή του ελέγχου Shapiro-Wilk για τον έλεγχο αυτής της υπόθεσης (με επίπεδο εμπιστοσύνης 0,001) προέκυψε ότι η υπόθεση αυτή δεν μπορεί να απορριφθεί. Επομένως, ένα λογικό άνω κατώφλι  $\alpha$  για το εμβαδόν της άνω διατομής που μας ενδιαφέρει είναι

$$\alpha = 3,1 \frac{\tau^T}{\Delta z}$$

αφού το 99.9% της κανονικής κατανομής των εμβαδών των διατομών παραμένει μικρότερο από αυτό. Όπως πάντα, το  $\tau^T$  είναι ο μέγιστος αποδεκτός όγκος του  $V_{k,m}$  και  $\Delta z$  η διαφορά στον άξονα  $z$  μεταξύ των άνω και κάτω επιπέδων.

#### **4.10 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΠΟΥ ΕΦΑΡΜΟΣΤΗΚΕ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΑΝΑΣΥΝΘΕΣΗ ΤΩΝ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΠΡΟΑΝΑΦΕΡΘΕΝΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ**

Έστω ότι έχουμε  $N$  διαθέσιμα θραύσματα και τις τρισδιάστατες αναπαραστάσεις τους που αποκτήθηκαν μέσω της διαδικασίας που περιεγράφη στην Ενότητα 4.2. Για να πετύχουμε τη βέλτιστη ανασύνθεση αυτών των θραυσμάτων, εφαρμόσαμε την ακόλουθη διαδικασία:

**Βήμα 1:** Εντοπίσαμε το άνω επίπεδο, το οποίο βέλτιστα αντιπροσωπεύει την άνω σχεδόν επίπεδη επιφάνεια κάθε θραύσματος, κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων (Ενότητα 4.3.1). Ακολουθώντας, εντοπίσαμε το κάτω επίπεδο κάθε θραύσματος, ως το επίπεδο εκείνο που φράσσει το κονίαμα κάτωθεν, ως και την παράπλευρη επιφάνεια αυτού (Ενότητα 4.3.1). Επιπλέον, υπολογίσαμε τον κεντρικό άξονα κάθε εικονικού θραύσματος, ως τον άξονα ελάχιστης ροπής αδρανείας που είναι κάθετος στο άνω επίπεδο (Ενότητα 4.3.2). Τέλος, στρέψαμε κάθε κονίαμα με χρήση γωνιών Euler (βλ. Ενότητα 3.5), ώστε ο κεντρικός του άξονας να είναι παράλληλος με τον άξονα  $z$ .



**Βήμα 2:** Δημιουργήσαμε όλες τις στραμμένες εκδοχές των θραυσμάτων και επιλέξαμε τις κατάλληλες παραμέτρους (Ενότητα 4.3.3).

Αρχικά, θέσαμε ένα βήμα γωνίας  $\delta\theta = 1^\circ$  και με βάση αυτό δημιουργήσαμε όλες τις στραμμένες, γύρω από τον Κεντρικό άξονα, εκδοχές κάθε θραύσματος. Στη συνέχεια, επιλέξαμε το μήκος σύγκρισης  $L_C$  της καμπύλης επαφής στην άνω επιφάνεια των σταθερών θραυσμάτων, ως ένα ποσοστό, εν προκειμένω 15%, του μέσου μήκους/περιμέτρου των περιγραμμάτων των άνω επιφανειών όλων των θραυσμάτων, τα οποία θα παίξουν διαδοχικά το ρόλο του σταθερού κονιάματος. Επιπροσθέτως, υπολογίσαμε το μέσο εμβαδόν όλων των παράπλευρων επιφανειών των θραυσμάτων και το χρησιμοποιήσαμε, σε συνδυασμό με το  $L_C$ , με σκοπό να καθορίσουμε κατάλληλο κατώφλι όγκου  $\tau^T$ , ώστε να είναι αποδεκτή η μέγιστη μέση απόσταση  $h$  μεταξύ των πραγματικά ταιριασμένων θραυσμάτων. Εκκινήσαμε από μία πολύ μικρή τιμή για το  $h$ ,  $h = 0.4$  mm για να συμπεριλάβουμε όλα τα σχεδόν τέλεια ταιριάσματα μεταξύ γειτονικών θραυσμάτων. Ακολουθώντας, αυξήσαμε την τιμή του  $h$  μέχρι τα 1.2 mm για να επιτρέψουμε και την ύπαρξη μεγαλύτερων διακένων μεταξύ θραυσμάτων που πράγματι ταιριάζουν αλλά υποφέρουν από σοβαρή φθορά.

Επιπλέον, για κάθε τιμή του  $h$  χωριστά, θέσαμε ως κατώφλι για το εμβαδόν της περιοχής που περικλείουν οι άνω αλυσίδες επαφής  $\Gamma_k^F$  και  $\Gamma_{k,m}^R$ , την τιμή

$$\mathcal{E}_R = hL_C$$

καθώς και τη μέγιστη a priori αποδεκτή γωνιακή απόκλιση

$$\gamma_{ap} = \arctan\left(\frac{h}{L_C}\right)$$

**Βήμα 3:** Εφαρμόσαμε όλα τα αναπτυχθέντα κριτήρια για την τρέχουσα τιμή της παραμέτρου  $h$ , θεωρώντας το μεγαλύτερο θραύσμα από όλα τα διαθέσιμα ως το σταθερό κομμάτι.

Εντοπίσαμε το θραύσμα με τη μεγαλύτερη άνω επιφάνεια, έστω  $F_1$ , και το αφήσαμε να παίξει το ρόλο του σταθερού κομματιού στη διαδικασία ταιριάσματος. Ακολουθώντας,

ελέγξαμε για πιθανές θέσεις ταιριάσματος μεταξύ του  $F_1$  και διαδοχικά, κατά σειρά, όλων των άλλων θραυσμάτων, κάθε ένα από τα οποία θεωρήθηκε ως μετακινήσιμο κονίαμα, σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάσαμε στην Ενότητα 4.4.

Συγκεκριμένα:

- 1) Εφαρμόσαμε το Κριτήριο 4 ελέγχοντας τα σχετικά μήκη των αλυσίδων επαφής και τη διαφοροποίηση των γωνιών. Για κάθε δεδομένη θέση ελέγχου προσαρμογής των θραυσμάτων  $A \equiv F_1$  και B, υπολογίσαμε τα  $\gamma_{max}$  (μέγιστη γωνιακή απόκλιση των άνω αλυσίδων επαφής  $\Gamma_k^F$  και  $\Gamma_{k,m}^R$ ) και  $L_{max}^R$  (το μέγιστο επιτρεπτό μήκος της μετακινήσιμης αλυσίδας  $\Gamma_{k,m}^R$ ) όπως αυτά περιγράφονται στο Κριτήριο 4 (Ενότητα 4.9). Υπενθυμίζουμε ότι σε κάθε θέση ελέγχου προσαρμογής, η αλυσίδα  $\Gamma_k^F$  θεωρείται γνωστή και δεδομένη, όπως και το μέγιστο επιτρεπτό εμβαδόν  $a$  του άνω διακένου.

Επί τη βάση αυτών, υπολογίσαμε δυναμικά τα  $\gamma_{max}$  και  $L_{max}^R$ .

Εάν, για τη συγκεκριμένη θέση και το συγκεκριμένο  $h$ , μία εκ των ανισώσεων:

$$\gamma_{max} \leq \gamma_{ap}$$

$$L_{k,m}^R \leq L_{max}^R$$

καταστρατηγείται, τότε θεωρούμε ότι η συγκεκριμένη θέση ελέγχου προσαρμογής των δύο θραυσμάτων δεν είναι αποδεκτή.

- 2) Εάν και οι δύο ανισώσεις ικανοποιούνται στη συγκεκριμένη σχετική θέση των A και B, τότε και μόνον τότε ελέγξαμε εάν οι κρημνοί επαφής  $E_k^F$ ,  $E_{k,m}^R$  των δύο θραυσμάτων που εξετάζαμε, ικανοποιούσαν το Κριτήριο 3 στη συγκεκριμένη σχετική τους θέση (Ενότητα 4.8).
- 3) Στην περίπτωση που το Κριτήριο 3 ικανοποιείτο, ελέγξαμε μέσω του Κριτηρίου 2 πιθανές επικαλύψεις μεταξύ των δύο θραυσμάτων στην τρέχουσα σχετική τους θέση, τόσο τοπικά, όσο και γενικά, σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφεται στην Ενότητα 4.7.

- 4) Όποτε τα εκάστοτε εξεταζόμενα κονιάματα, σε μία συγκεκριμένη σχετική θέση, ικανοποιούσαν αυτά τα τρία απορριπτικά κριτήρια, τότε και μόνο τότε, το σύστημα προχωρούσε σε έλεγχο του τελικού Κριτηρίου 1, ελέγχοντας εάν ο όγκος, έστω  $V_{k,m}$ , του τρισδιάστατου χωρίου ανάμεσα στους δύο κρημούς  $E_k^F$ ,  $E_{k,m}^R$  των δύο θραυσμάτων είναι μικρότερος από ένα καταλλήλως επιλεγέν κατώφλι  $\tau^T$ .

Η ακριβής τιμή του  $\tau^T$  υπολογιζόταν δυναμικά για κάθε ζεύγος θραυσμάτων, επί τη βάσει των εκάστοτε επιλεγμένων  $h$  και  $L_C$ , ως και της απόστασης  $\Delta z$  των κοινών άνω και κάτω επίπεδων επιφανειών των δύο εξεταζόμενων θραυσμάτων.

Συγκεκριμένα, σε κάθε έλεγχο ενός ζεύγους θραυσμάτων θέταμε  $\tau^T = hL_C\Delta z$ .

Εάν και το Κριτήριο 1 ικανοποιείτο στη σχετική αυτή θέση των κομματιών, τότε το σύστημα χαρακτήριζε τη συγκεκριμένη θέση ως αποδεκτή θέση προσαρμογής του συγκεκριμένου ζεύγους κονιαμάτων.

**Βήμα 4:** Η διαδικασία του Βήματος 3, επανελήφθη για:

- 1) όλες τις σχετικές θέσεις των δύο συγκεκριμένων κονιαμάτων A και B, δηλαδή για όλα τα ζεύγη αλυσίδων επαφής  $\Gamma_k^F$  και  $\Gamma_{k,m}^R$ , εφόσον το τελευταίο οριζόταν.
- 2) όλα τα μετακινήσιμα θραύσματα

**Βήμα 5:** Συνενώσαμε εικονικά τα θραύσματα που όντως ταίριαζαν με σκοπό τη δημιουργία πρώτων νησίδων ενώσεων.

Χρησιμοποιήσαμε τις αποδεκτές θέσεις προσαρμογής με το  $F_1$  που προέκυψαν από την εφαρμογή των προηγούμενων βημάτων και δημιουργήσαμε εικονικές συνενώσεις ζευγών θραυσμάτων σε αυτές τις θέσεις προσαρμογής. Κατ' αυτόν τον τρόπο, δημιουργήσαμε ένα σύνολο πρώτων πιθανών νησίδων συνενώσεων.

Ακολουθώντας, από αυτό το σύνολο νησίδων, επιλέξαμε εκείνη που η άνω επιφάνειά της είχε το μεγαλύτερο εμβαδόν, την οποία για λόγους απλότητας συμβολίσαμε  $I_{1,1}$ . Στη συνέχεια, αφήσαμε την νησίδα  $I_{1,1}$  να παίξει το ρόλο του  $F_1 \equiv A$  και επαναλάβαμε τα ανωτέρω Βήματα 3 και 4 δημιουργώντας νέες νησίδες  $I_{1,2}, I_{1,3}, \dots$  κοκ. Όταν δεν υπήρχαν πλέον θραύσματα που μπορούσαν να ενσωματωθούν στην επεκτειταμένη νησίδα του  $F_1$ , την οποία για λόγους απλότητας θα συμβολίζουμε  $I_1$ , προχωρήσαμε στο επόμενο βήμα.

**Βήμα 6:** Επαναλάβαμε τη διαδικασία της ανασύνθεσης για τα θραύσματα που δεν ταίριαζαν.

Μετά και το 5<sup>ο</sup> Βήμα, το πιθανότερο είναι να υπάρχουν θραύσματα που δεν ανήκουν στη νησίδα  $I_1$ . Από αυτά, εντοπίσαμε εκείνο το θραύσμα που έχει τη μεγαλύτερη άνω επιφάνεια και το αφήσαμε να έχει το ρόλο του  $F_1$ . Στη συνέχεια, επαναλάβαμε τα Βήματα 3, 4 και 5, αποκτώντας με αυτόν τον τρόπο μία νέα ομάδα επεκτειταμένων νησίδων  $I_n$ . Η διαδικασία ολοκληρώθηκε όταν όλα τα μη ταίριασμα θραύσματα εξαντλήθηκαν και η εφαρμογή δεν προσέφερε νέες αποδεκτές θέσεις προσαρμογής.

**Βήμα 7:** Επαναλάβαμε τη διαδικασία για μια νέα τιμή της σταθεράς  $h$  μέχρι να εξαντληθούν όλα τα επιλεγέντα  $h$

Μετά και την εφαρμογή του Βήματος 6, προέκυψε ένας αριθμός νησίδων  $I_n$ , μερικές από τις οποίες είναι πιθανό να αποτελούνται και μόνο από ένα θραύσμα. Σε αυτό το σημείο, αυξήσαμε την τιμή της  $h$  κατά μία μικρή ποσότητα,  $0.2 \text{ mm}$ , με σκοπό να επιτρέψουμε μεγαλύτερο κενό μεταξύ δύο γειτονικών θραυσμάτων και επαναλάβαμε τα Βήματα 1-5. Εννοείται ότι το κατώφλι  $\tau^T$  αποκτούσε μία νέα τιμή, γι' αυτό και το συμβολίζουμε ως  $\tau^{Ti}$ , όπου ο κάτω δείκτης  $i$  είναι ο αύξων αριθμός του εκάστοτε επιλεγμένου  $h_i$ . Η διαδικασία ολοκληρώθηκε όταν το  $h_i$  έλαβε την τιμή ενός προκαθορισμένου κατωφλίου  $h_T$ , όπως προαναφέρθηκε στο 2<sup>ο</sup> Βήμα. Η τιμή αυτού του κατωφλίου καθορίζεται από το βαθμό φθοράς που αναμένουμε να έχουν υποστεί τα θραύσματα σε κάθε εφαρμογή και, εν προκειμένω, σε συνεργασία με τους

συντηρητές και αρχαιολόγους του Εθνικού Αρχαιολογικού Μουσείου επελέγη το κατώφλι  $h_T$  να έχει την τιμή  $1,2 \text{ mm}$ .

**Βήμα 8:** Επαναλάβουμε όλα τα Βήματα 2 έως 7 για διαφορετικά μήκη σύγκρισης  $L_C$

Επαναλάβουμε όλη τη διαδικασία σύγκρισης για διαφορετικά μήκη σύγκρισης  $L_C$ , δηλαδή για διαφορετικά μήκη της σταθερής αλυσίδας  $\Gamma_k^F$ , όπου υπενθυμίζουμε ότι  $k$  είναι ο αύξων αριθμός του εκάστοτε σημείου εκκίνησης της σταθερής αλυσίδας. Είναι ευνόητο να αναμένει κανείς ότι, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του  $L_C$ , τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα να υπάρξουν τυχαίες, ψευδείς συνενώσεις θραυσμάτων. Από την άλλη πλευρά, είναι πάλι λογικό να φοβάται κανείς ότι όταν ένα αρχικό αντικείμενο θραύεται, τότε το μέσο μήκος πραγματικής επαφής  $L_{C^H}$  των άνω αλυσίδων δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλο. Πρέπει, επομένως, να υπάρχει μία ισορροπία ανάμεσα στο χρησιμοποιούμενο  $L_C$  και στο μέσο πραγματικό μήκος επαφής  $L_{C^H}$  που προέκυψε κατά τη θραύση.

Επισημαίνεται ότι στη δική μας περίπτωση, όπου τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πραγματικά, η εφαρμογή της διαδικασίας που περιεγράφη προηγουμένως δεν επέστρεψε καμία τέτοια ψευδώς θετική προσαρμογή όταν χρησιμοποιήθηκε μήκος σύγκρισης  $L_C \geq 3 \text{ cm}$ . Επειδή το μήκος αυτό σύγκρισης είναι πολύ εύλογο, θεωρούμε ότι τα αποτελέσματα που προσέφερε το σύστημα είναι πολύ ενθαρρυντικά, τουλάχιστον. Εάν, μάλιστα, συνυπολογιστεί και το γεγονός ότι η μέθοδος που αναπτύξαμε εφαρμόστηκε σε προϊστορικές τοιχογραφίες που ανασκάφηκαν περίπου στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα, όπου είναι λογικό να περιμένει κανείς ότι τα ανευρεθέντα θραύσματα θα έχουν μεγάλη φθορά, τότε μπορεί κάποιος να υποστηρίξει ότι το σύστημα που αναπτύχθηκε έχει μεγάλο πλεονέκτημα στην ακρίβεια και τη μοναδικότητα της λύσης που προσφέρει.

Παρ' όλα αυτά, στην περίπτωση που, κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, προκύψουν ψευδώς θετικά ταιριάσματα, τότε είναι εφικτό να επιστρέψουμε πίσω στο σημείο που πρωτοπαρουσιάστηκε η ασυνέπεια και να ελέγξουμε όλες τις πιθανές προσαρμογές μέχρι να βρούμε τη νησίδα που αίρει την ασυνέπεια.

## **5. ΠΡΩΤΟΤΥΠΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΩΝ ΑΓΓΕΙΩΝ**

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η μέθοδος επί τη βάσει της οποίας αναπτύχθηκε ένα πρωτότυπο σύστημα, το οποίο επιτρέπει βέλτιστη τρισδιάστατη προσαρμογή θραυσμάτων, δίνει ποσοτική εκτίμηση της αξιοπιστίας της προσαρμογής αυτής και προτείνει όλες τις πιθανές ενώσεις μεταξύ ενός τυχόντος πλήθους θραυσμάτων, υποβοηθώντας σημαντικά το έργο του συντηρητή/μελετητή αρχαιολόγου που επιχειρεί την ανακατασκευή των αντίστοιχων ευρημάτων.

Τονίζεται ότι η διαφοροποίηση από την ανάλυση που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4 προηγουμένως έγκειται στο γεγονός ότι τώρα, το αρχαιολογικό εύρημα δεν είναι απαραίτητο να έχει μία πλευρά σχεδόν επίπεδη, κάτι που ήταν προαπαιτήση στην ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου. Επίσης, διευκρινίζεται ότι η εφαρμογή της μεθοδολογίας που παρουσιάζεται ακολούθως έγινε, κατ' ανάγκην, σε προϊστορικά αγγεία, διότι σε αυτά ζήτησε τη συνδρομή μας το Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο. Για το λόγο αυτό, η μέθοδος αυτόματης ανακατασκευής που αναλύεται στο παρόν κεφάλαιο, αν και γενικά εφαρμόσιμη, συχνά αναφέρεται σε αγγεία. Όσον αφορά τα θραύσματα των αγγείων ειδικότερα, αντί του όρου «θραύσμα» χρησιμοποιείται, εναλλακτικά, και ο επιστημονικός όρος «όστρακο».

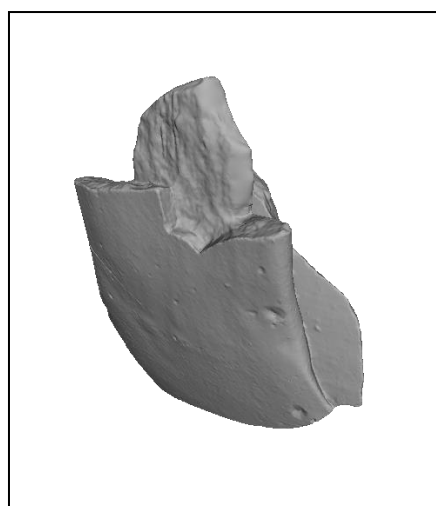
Το σχετικό σύστημα που έχει αναπτυχθεί βασίζεται στην εφαρμογή πρωτότυπων μεθόδων και κριτηρίων που ενσωματώνουν αρχές Διαφορικής Γεωμετρίας και σχετικών Μαθηματικών και επιτρέπουν τη βέλτιστη εικονική σχετική τοποθέτηση των θραυσμάτων σε τρεις διαστάσεις. Η υλοποίηση του συστήματος αυτού βασίζεται σε πρωτότυπους αλγορίθμους ψηφιακής επεξεργασίας τρισδιάστατων απεικονίσεων των θραυσμάτων και ενσωματώνει νέες μεθόδους αναγνώρισης προτύπων.

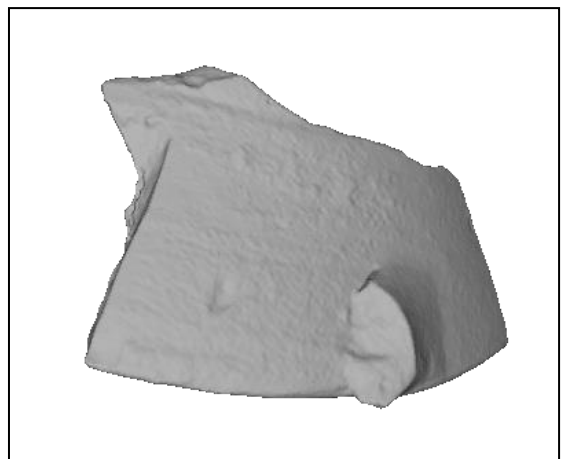
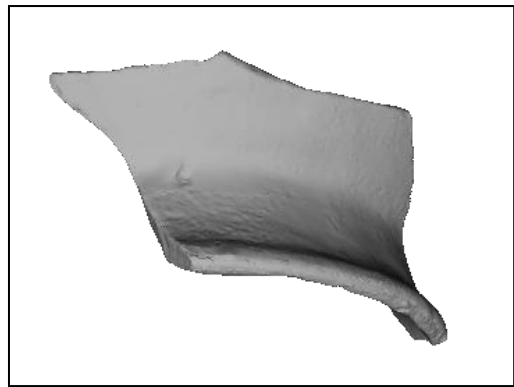
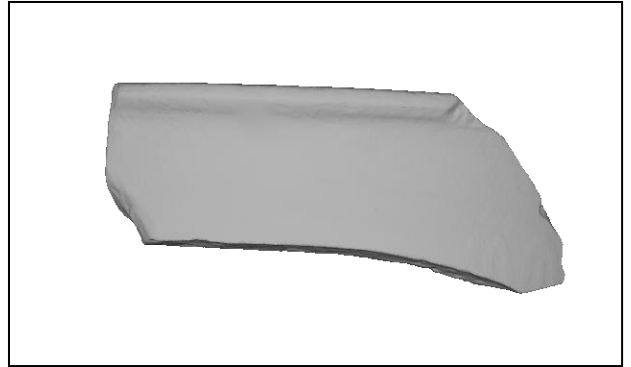
Επομένως, απαραίτητη προϋπόθεση εφαρμογής του συστήματος αποτελεί η ύπαρξη τρισδιάστατων ψηφιακών απεικονίσεων των θραυσμάτων σε υπολογιστή.

## 5.1 ΨΗΦΙΟΠΟΙΗΣΗ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ ΤΑΦΙΚΩΝ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΩΝ ΑΓΓΕΙΩΝ ΤΗΣ ΜΥΚΗΝΑΪΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ

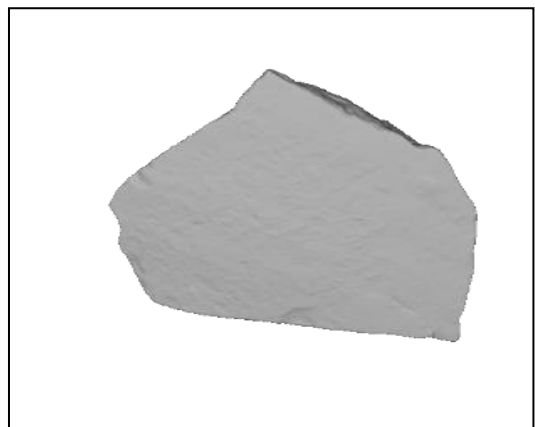
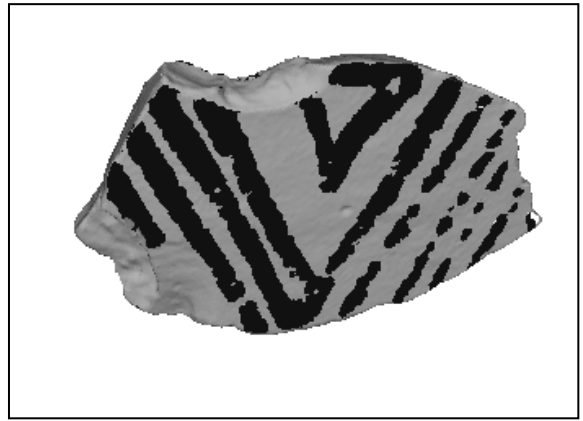
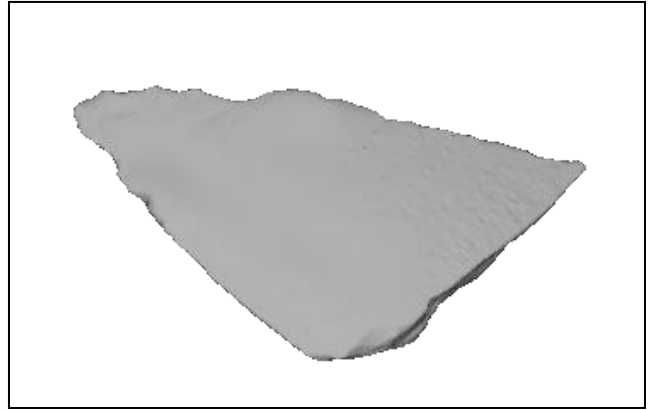
Στα πλαίσια του παρόντος πονήματος, πραγματοποιήθηκε ψηφιοποίηση σε 2 και 3 διαστάσεις σημαντικού αριθμού θραυσμάτων, πολλά από τα οποία χρησιμοποιήθηκαν και θα χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της επίδοσης του συστήματος που έχει αναπτυχθεί. Σημειώνουμε ότι οι τρισδιάστατες απεικονίσεις των οστράκων ελήφθησαν με τη χρήση τρισδιάστατου σαρωτή (3d scanner), ενώ οι διδιάστατες απεικονίσεις με τη χρήση ψηφιακής φωτογραφικής μηχανής, υψηλής ευκρίνειας. Συγκεκριμένα, ξεκίνησε και συνεχίζεται η ψηφιακή καταγραφή διδιάστατων και τρισδιάστατων απεικονίσεων οστράκων μεγάλης αρχαιολογικής και ιστορικής αξίας που είναι αποθηκευμένα στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο. Η ανασκαφή αυτών των οστράκων είχε αρχίσει από τον Ερρίκο Σλήμαν και από την Γερμανική Αρχαιολογική Σχολή και συνεχίζεται μέχρι τις μέρες μας και με σημαντική συμβολή Ελλήνων αρχαιολόγων.

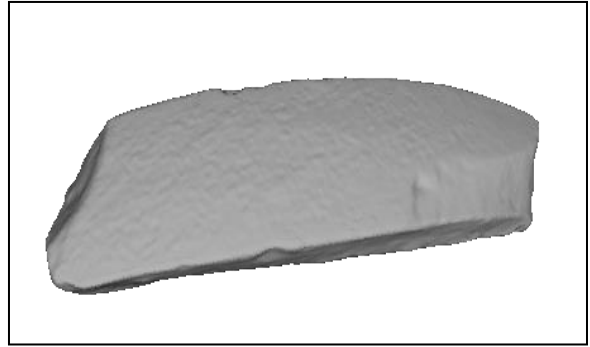
Η διαδικασία της ψηφιοποίησης είναι αρκετά παρόμοια με αυτήν που περιγράφεται στην Ενότητα 4.2 και αφορά τα κονιάματα. Αποτελέσματα της ψηφιοποίησης αυτής σε δύο και τρεις διαστάσεις παρουσιάζονται στις κάτωθι εικόνες που για λόγους απλότητας συναποτελούν την Εικόνα 27.











**Εικόνα 27 - Παραδείγματα απεικονίσεων θραυσμάτων σε δύο (2Δ) και τρεις (3Δ) διαστάσεις. Ο προσανατολισμός των τρισδιάστατων απεικονίσεων των παραδειγμάτων επελέγη εκ των υστέρων καθαρά για λόγους εποπτικούς, δηλαδή ούτως ώστε να αναδεικνύονται η τρισδιάστατη υπόσταση και οι γεωμετρικές ιδιαιτερότητες των θραυσμάτων.**

## **5.2 ΠΡΩΤΟ ΣΤΑΔΙΟ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΛΗΦΘΕΙΣΩΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΤΩΝ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ**

### **5.2.1 Τριγωνοποίηση των επιφανειών κάθε θραύσματος**

Επειδή ο τρισδιάστατος σαρωτής (3D scanner) παράγει ένα σύνολο σημείων εν είδει νέφους (point cloud), η πρώτη ενέργεια είναι η ψηφιακή αναπαραγωγή της επιφάνειας του οστράκου ή γενικά του θραύσματος σε μορφή κατάλληλη ώστε να έχει νόημα για τον ερευνητή/χρήστη, αλλά και να είναι άμεσα χρησιμοποιήσιμη στα επόμενα στάδια επεξεργασίας και ανάλυσης. Προς το σκοπό αυτό, τριγωνοποιούμε ολόκληρη την εξωτερική επιφάνεια της τρισδιάστατης απεικόνισης κάθε οστράκου με χρήση ενός σχετικού τυπικού ελεύθερου λογισμικού (freeware). Σε κάθε προκύπτον τρίγωνο, υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των κορυφών του, το βαρύκεντρό του, τη διανυσματική παράσταση των πλευρών του, ως και το εμβαδόν του.

### **5.2.2 Εξαγωγή έσω και έξω περιγράμματος και καθορισμός των επιφανειών κάθε θραύσματος**

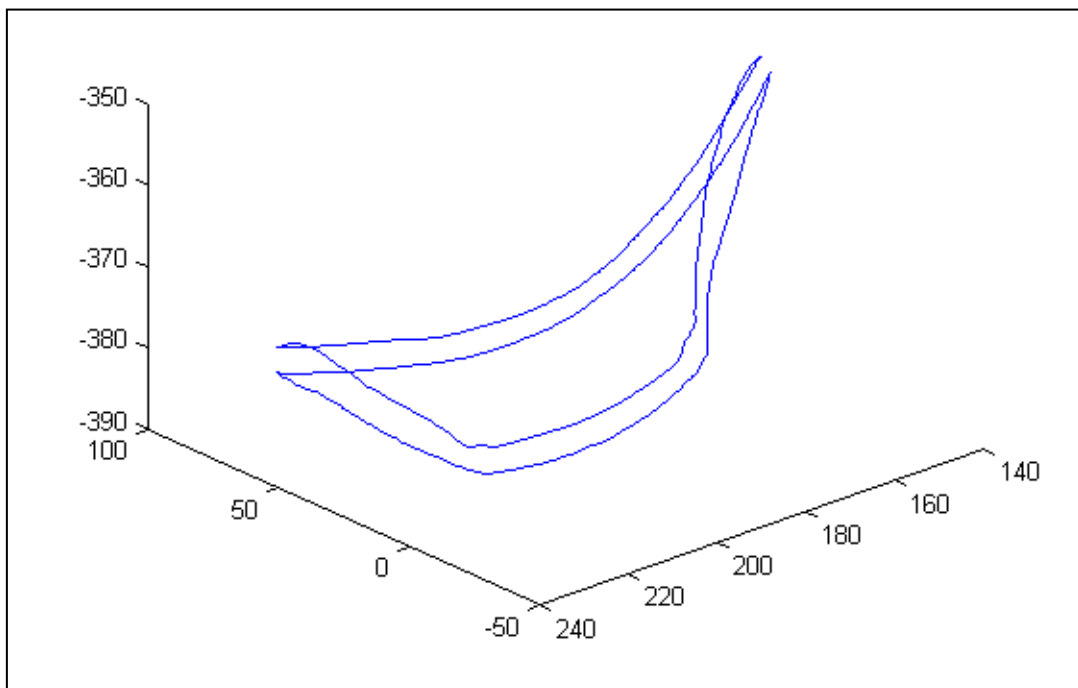
Με χρήση ενός αλληλοδραστικού συστήματος επεξεργασίας των τρισδιάστατων μετρήσεων του scanner, κάθε ψηφιακή αναπαράσταση ενός οστράκου ακολουθεί την εξής δομή:

**α)** Περιλαμβάνει μία διακριτή καμπύλη, η οποία αντιπροσωπεύει το τρισδιάστατο περίγραμμα της εξωτερικής επιφάνειας του οστράκου. Θα αναφερόμαστε σε αυτή με τον όρο «άνω ή έξω περίγραμμα» (βλ. Εικόνα 29 και Εικόνα 31). Ομοίως, το περίγραμμα της εσωτερικής επιφάνειας του οστράκου είναι μία άλλη διακριτή καμπύλη, στην οποία αποδίδουμε το όνομα «κάτω ή έσω περίγραμμα» (βλ. Εικόνα 29 και Εικόνα 31). Τονίζουμε ότι οι όροι «εξωτερικό» και «εσωτερικό» του οστράκου καθορίζονται από την αρχική θέση αυτού στο ταφικό αγγείο. Σημειώνεται ότι η έξω επιφάνεια είναι, κατά κανόνα, επεξεργασμένη ή/και διακοσμημένη, γιατί αυτή

απευθύνεται στην αισθητική του χρήστη του αγγείου (Εικόνα 28 και Εικόνα 30). Επομένως, εάν η μία πλευρά του οστράκου φέρει απεικονίσεις, τότε αυτή αυτομάτως θεωρείται ως η εξωτερική επιφάνεια αυτού. Εναλλακτικά, κατά κανόνα, ως εξωτερική επιφάνεια θεωρείται η περισσότερο λεία.



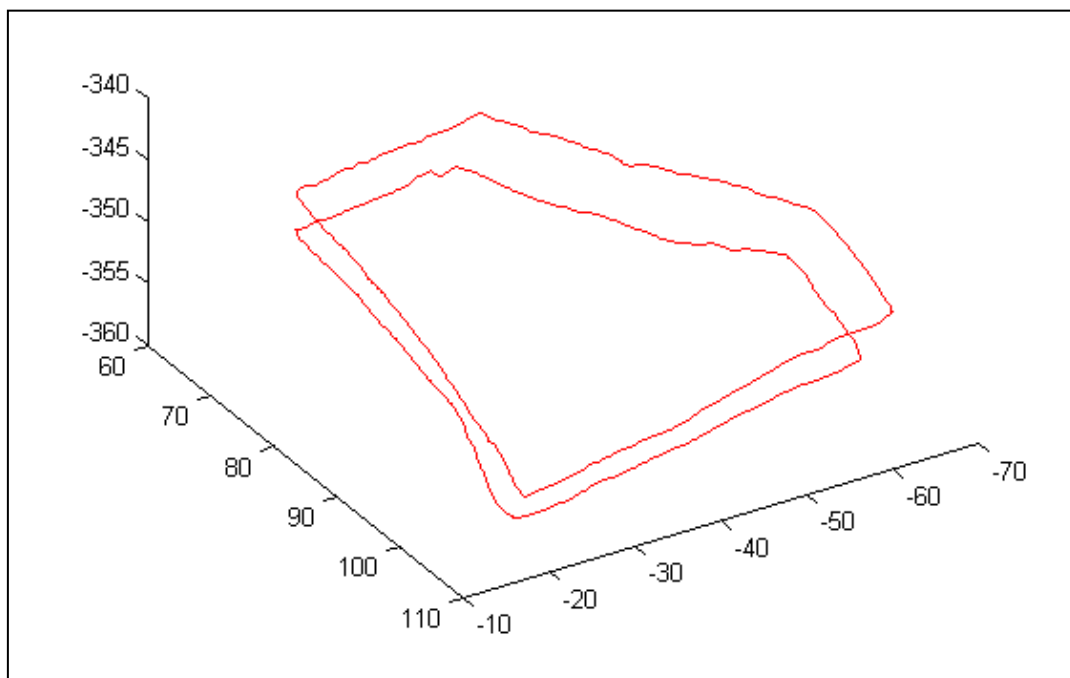
**Εικόνα 28 - Φωτογραφία του πρώτου θραύσματος**



**Εικόνα 29 - Έσω και έξω περίγραμμα του πρώτου θραύσματος**



**Εικόνα 30 - Φωτογραφία του δεύτερου θραύσματος**

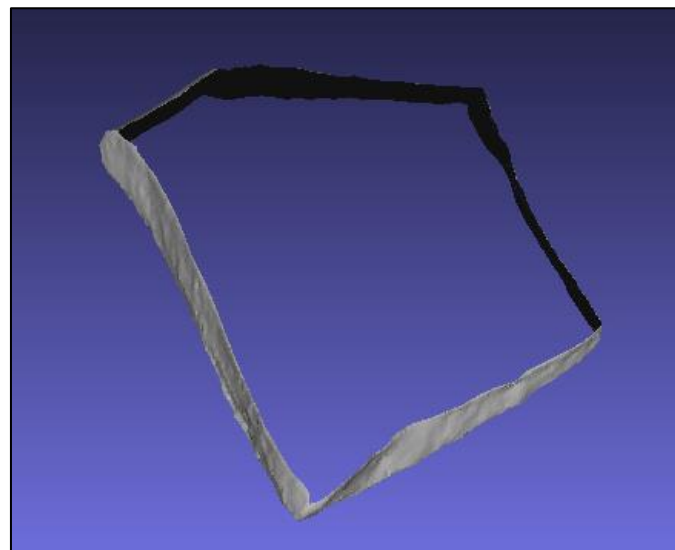


**Εικόνα 31 - Έσω και έξω περίγραμμα του δεύτερου θραύσματος**

**β)** Τα άνω και κάτω περιγράμματα αυτά, από κοινού, οριοθετούν την παράπλευρη επιφάνεια του οστράκου, η οποία είναι, σχεδόν πάντα, η επιφάνεια θραύσης (βλ. Εικόνα 32 και Εικόνα 33).



**Εικόνα 32 – Παράπλευρη επιφάνεια του πρώτου θραύσματος**



**Εικόνα 33 – Παράπλευρη επιφάνεια του δεύτερου θραύσματος**

Σε όλες τις περιπτώσεις οστράκων που συναντήσαμε, η ένωση της έξω επιφάνειας με την έσω και την παράπλευρη, δημιουργούν μία κλειστή επιφάνεια, την οποίαν ονομάζουμε συνοριακή επιφάνεια του οστράκου. Επειδή η συνοριακή αυτή επιφάνεια είναι κλειστή, απλή και προσανατολισίμη, χωρίζει τον τρισδιάστατο χώρο σε δύο τρισδιάστατα χωρία, το εσωτερικό του οστράκου αφενός και το εξωτερικό αφετέρου. Σύμφωνα με όλες τις ενδείξεις, η τοπολογία αυτή θα ισχύει για όλα τα διαθέσιμα όστρακα.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειωθεί ότι σε κάθε τρίγωνο που προέκυψε από τη διαδικασία της τριγωνοποίησης που περιεγράφη στην Ενότητα 5.2.1, παράγουμε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο συγκεκριμένο τρίγωνο και δείχνει προς τα έξω του οστράκου. Να αναφέρουμε, απλά, ότι η ιδιότητα ενός σημείου να είναι εντός ή εκτός του θραύσματος ορίζεται μαθηματικά, και κατ' επέκταση προγραμματιστικά, με μοναδικό τρόπο, δεδομένου ότι έχουμε ορίσει τα έσω και έξω χωρία του οστράκου.

### **5.2.3 Δημιουργία ενιαίου προσανατολισμού σε όλα τα θραύσματα**

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την ανάλυση που ακολουθεί, έπρεπε να εξασφαλίσουμε ότι όλα τα όστρακα θα έχουν την έξω επιφάνειά τους προς τα άνω. Δηλαδή, για κάθε ζεύγος συντεταγμένων  $x, y$  απαιτούμε η συντεταγμένη  $z_{έξω}$  του σημείου  $(x, y, z_{έξω})$  της έξω επιφάνειας να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη συντεταγμένη του σημείο  $(x, y, z_{έσω})$  της έσω επιφάνειας.

Προς το σκοπό αυτό:

α) Υπολογίσαμε τον διανυσματικό μέσο όρο, έστω  $\vec{N}_{έξω}$ , όλων των μοναδιαίων καθέτων διανυσμάτων της έξω επιφάνειας του εκάστοτε οστράκου. Υπενθυμίζουμε ότι εκ κατασκευής, τα κάθετα αυτά μοναδιαία διανύσματα δείχνουν πάντα από το εσωτερικό προς το εξωτερικό τρισδιάστατο χωρίο του οστράκου.

β) Ελέγξαμε εάν το  $\vec{N}_{\xi\omega}$  έδειχνε προς τα θετικά του άξονα των  $z$  ή όχι. Δηλαδή, ελέγξαμε το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου  $\vec{N}_{\xi\omega} \cdot \vec{k}$ , όπου  $\vec{k}$  το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα  $z'$ .

γ) Στην περίπτωση όπου το  $\vec{N}_{\xi\omega}$  δεν έδειχνε προς τα θετικά του  $z$  άξονα, εφαρμόσαμε στροφή κατά τις γωνίες Euler (Ενότητα 3.5), ώστε να καταστήσουμε το  $\vec{N}_{\xi\omega}$  παράλληλο και ίδιας φοράς με το  $\vec{k}$ .

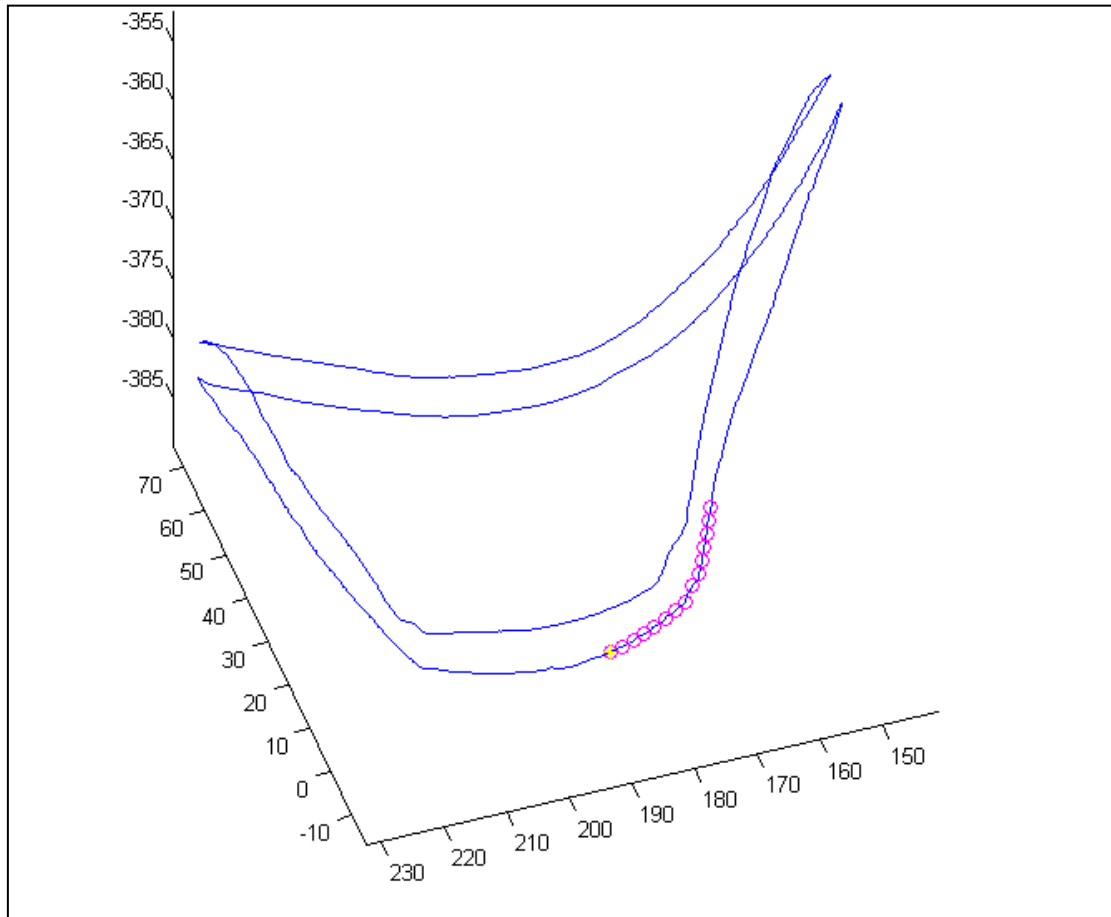
Με το πέρας αυτής της διαδικασίας, όπως προαναφέρθηκε, το έξω περίγραμμα θα βρίσκεται άνωθεν του έσω. Για το λόγο αυτό, τονίζουμε ότι θα χρησιμοποιούμε τους όρους «άνω περίγραμμα» και «έξω περίγραμμα» ως ισοδύναμους, καθώς και τους όρους «κάτω περίγραμμα» και «έσω περίγραμμα», αλλά και «άνω επιφάνεια» και «έξω επιφάνεια» αφενός και «κάτω επιφάνεια» και «έσω επιφάνεια» αφετέρου.

### **5.3 ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΥΖΥΓΩΝ "ΑΛΥΣΙΔΩΝ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ" ΣΤΟ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΚΑΘΕ ΘΡΑΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ΚΡΗΜΝΟΥ**

Επιλέξαμε ένα μήκος σύγκρισης ανά περίγραμμα και ένα σχετικό σύνολο σημείων όπως περιγράφεται ακολούθως: Με αρχή το τυχόν  $n$ -οστό σημείο του άνω περιγράμματος (βλ. Εικόνα 34), έστω  $P_n^{up}(x_n, y_n, z_n)$ , δημιουργήσαμε μία ακολουθία διαδοχικών σημείων  $Q_1^{up}, Q_2^{up}, \dots, Q_N^{up}$  τέτοια ώστε το μήκος της σχετικής αλυσίδας αυτών  $L_C$  να είναι πολύ κοντά σε ένα αποδεκτό μήκος σύγκρισης, π.χ. 2.3cm. Τονίζουμε ότι η μέθοδος που θα περιγραφεί κατωτέρω αφήνει ελεύθερη την επιλογή αυτού του μήκους, ώστε η δυνατότητα βέλτιστου ταιριάσματος δύο οστράκων να ελεγχθεί για μεγάλο εύρος μηκών σύγκρισης.

Επίσης, για λόγους που θα αναφερθούν στη συνέχεια, παράξαμε αυτές τις "αλυσίδες" τόσο κατά την ωρολογιακή όσο και κατά την ανθρωπολογιακή φορά και για το έσω και για το έξω περίγραμμα, ώστε να εξαντλήσουμε όλες τις δυνατότητες προσαρμογής δύο οποιωνδήποτε θραυσμάτων.





**Εικόνα 34 - Παράδειγμα αλυσίδας πλήθους 15 σημείων στο έξω περιγράμμα του πρώτου θραύσματος. Με κίτρινο χρώμα σημειώνεται το σημείο εκκίνησης της αλυσίδας.**

Εν συνεχεία, ορίσαμε μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του έξω και του έσω περιγράμματος, ως εξής: Κατ' αρχήν, σε κάθε σημείο του έξω περιγράμματος, έστω  $P_n^{up}$ , διαθέτουμε, από τη διαδικασία τριγωνοποίησης που προηγήθηκε, το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα  $\xi_n^{up}$  στην άνω επιφάνεια στο σημείο αυτό. Ακολουθώντας, βρίσκουμε το σημείο του έσω περιγράμματος που είναι κοντινότερο στο (έχει την μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από)  $P_n^{up}$ , έστω το σημείο  $P_m^{low}$ , όπου ο δείκτης  $m$  αντιστοιχεί στην αρίθμηση των σημείων του έσω περιγράμματος, με την επιπλέον απαίτηση το ευθύγραμμο τμήμα  $P_n^{up}P_m^{low}$  να σχηματίζει γωνία περίπου  $\pi$  με

το  $\xi_n^{up}$ . Σημειώνουμε ότι ο όρος «περίπου  $\pi$ » σημαίνει  $\pi \pm \varepsilon$ , όπου  $\varepsilon$  ένα μικρό κατώφλι γωνίας, π.χ.  $\frac{\pi}{12}$ . Ο λόγος που απαιτούμε αυτήν τη "σχεδόν αντιπαλληλία" έγκειται στο να αποφευχθούν ακραίες, μη αποδεκτές αντιστοιχίσεις σημείων μεταξύ του έσω και του έξω περιγράμματος.

Θεωρούμε ότι τα σημεία  $(P_n^{up}, P_m^{low})$  που προσδιορίστηκαν κατ' αυτόν τον τρόπο, βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, γι' αυτό θα τα αποκαλούμε συζυγή. Τα συζυγή αυτά σημεία θεωρούμε ότι καθορίζουν το υπ' αριθμόν  $n$  ζεύγος σημείων των άνω και κάτω περιγραμμάτων του συγκεκριμένου θραύσματος. Σημειώνουμε ότι εάν δύο σημεία της έξω αλυσίδας αντιστοιχούν στο ίδιο της έσω, τότε επιλέγουμε ως συζυγές το επόμενο σημείο αυτής  $P_{m+1}^{low}$ . Εάν και αυτό είναι ήδη συζυγές κάποιου άλλου σημείου του έξω περιγράμματος, γεγονός εξαιρετικά απίθανο, τότε επιλέγουμε ως συζυγές του  $P_n^{up}$  το μέσο του διαστήματος  $P_m^{low} P_{m+1}^{low}$ .

Ακολουθώντας, δημιουργούμε μία επιπλέον αλυσίδα σημείων του έσω περιγράμματος με αρχή το σημείο  $P_m^{low}$ , η οποία αποτελείται από όλα τα συζυγή σημεία των έξω αλυσίδας και επομένως, έχει ακριβώς το ίδιο πλήθος σημείων με αυτήν και άρα, πρακτικά, πολύ παραπλήσιο μήκος. Αυτές οι δύο αλυσίδες του έξω και έσω περιγράμματος, εκτός του ότι έχουν την ιδιότητα τα ισοπληθή σημεία τους να βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, επιπλέον, φροντίζουμε να είναι ομόρροπες.

Επομένως, με το πέρας αυτής της διαδικασίας, έχουμε δημιουργήσει ζεύγη αλυσίδων σημείων στο έσω και έξω περίγραμμα, τα οποία βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, εκκινούν από όλα τα σημεία του άνω περιγράμματος και παράγονται τόσο κατά την ωρολογιακή, όσο και κατά την ανθωρολογιακή φορά. Αυτά τα ζεύγη αλυσίδων θα παίξουν καθοριστικό ρόλο στον έλεγχο της δυνατότητας προσαρμογής δύο οστράκων/θραυσμάτων.

Εν συνεχεία, θα ορίσουμε τους «κρημνούς» του θραύσματος, έναν για κάθε ζεύγος αλυσίδας. Πράγματι, για ένα τυχόν ζεύγος αλυσίδων, πχ το  $n$ -οστό, έστω  $A$  το πρώτο σημείο της άνω αλυσίδας και  $B$  το τελευταίο. Έστω επίσης,  $A_1$  η αρχή της κάτω αλυσίδας, η οποία είναι και το συζυγές σημείο του  $A$ , καθώς και  $B_1$  το τελευταίο σημείο της κάτω αλυσίδας.

Στο σημείο αυτό, θεωρούμε το διάνυσμα  $\vec{k}_A^{up} = \vec{\xi}_A^{up} \times \overline{AB}$  και το επίπεδο που ορίζεται από το  $AA_1$  και το  $\vec{k}_A^{up}$ , το οποίο συμβολίζουμε ως  $\varepsilon_{αρχής}$ . Αντιστοίχως, θεωρούμε το διάνυσμα  $\vec{k}_B^{up} = \vec{\xi}_B^{up} \times \overline{AB}$  και το επίπεδο που ορίζεται από το  $BB_1$  και το  $\vec{k}_B^{up}$ , το οποίο συμβολίζουμε ως  $\varepsilon_{τέλους}$ . Σημειώνουμε ότι, εάν το επιλεγμένο μήκος αλυσίδας είναι σχετικά μικρό ή/και η καμπυλότητα της αντίστοιχης άνω αλυσίδας μικρή, τότε τα δύο αυτά επίπεδα  $\varepsilon_{αρχής}$  και  $\varepsilon_{τέλους}$  θα είναι περίπου παράλληλα. Πάντως, η παρατήρηση αυτή ουδόλως επηρεάζει την παρούσα ανάλυση. Το σύνολο των σημείων της παράπλευρης επιφάνειας του θραύσματος που εντοπίζεται μεταξύ των επιπέδων  $\varepsilon_{αρχής}$  και  $\varepsilon_{τέλους}$ , περιλαμβάνει τα σημεία της έσω και έξω αλυσίδας και κάθε ένα από αυτά τα σημεία απέχει από τα γειτονικά του λιγότερο από τη μέγιστη απόσταση των συζυγών σημείων αυτού του ζεύγους αλυσίδων, θεωρούμε ότι αποτελούν τον κρημό  $S^n$  του συγκεκριμένου θραύσματος.

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου ορισμού του κρημού είναι το γεγονός ότι ο κρημός  $S^n$  αποτελεί μια διακριτή επιφάνεια, καθώς και ότι υπάρχουν τόσοι κρημοί, όσα και τα ζεύγη αλυσίδων αυτού του θραύσματος. Επιπλέον, ακριβώς επειδή ο κρημός είναι διακριτή επιφάνεια, μπορεί να οριστεί το περιθώριο ή σύνορό του, το οποίο συμβολίζεται με  $\partial S^n$  και θεωρούμε ότι διαγράφεται πάντα ανθρωπολογικά.

#### **5.4 ΕΠΙΛΟΓΗ "ΣΤΑΘΕΡΟΥ" ΚΑΙ "ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΙΜΟΥ" ΘΡΑΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΤΗΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΑΥΤΩΝ**

Θεωρούμε δύο θραύσματα  $\theta^F$  και  $\theta^R$ , τα οποία θέλουμε να ελέγξουμε αν μπορούν να ταιριάξουν για ένα οποιοδήποτε μήκος σύγκρισης εντός "λογικών" ορίων, π.χ. για  $1\text{cm} \leq \text{μήκος σύγκρισης} \leq 10\text{cm}$ . Σημειώνουμε ότι μπορεί να πραγματοποιηθεί πρακτικά αυστηρώς ορισμός των ανωτέρω ορίων, επί τη βάση της κατανομής του μήκους και της καμπυλότητας του άνω περιγράμματος του συνόλου των διαθέσιμων οστράκων. Για κάθε επιλεγέν μήκος σύγκρισης πραγματοποιούμε την εξής διαδικασία:

Επιλέγουμε το ένα θραύσμα ως σταθερό, έστω το  $\theta^F$ , όπου ο άνω δείκτης F προέρχεται από τον αγγλικό όρο Fixed, ενώ το  $\theta^R$  ως μετακινήσιμο (R εκ του Rotated-Translated). Επιλέγουμε, κατά κανόνα, ως μετακινήσιμο το όστρακο με το μικρότερο συνολικό μήκος περιγραμμάτων έσω και έξω, για μείωση του αριθμού των πράξεων.

Θεωρούμε όλα τα ζεύγη αλυσίδων σύγκρισης στο  $\theta^F$ , παραγόμενα με ωρολογιακή φορά, καθώς επίσης και τις αλυσίδες σύγκρισης στο  $\theta^R$  παραγόμενες με ανθωρολογιακή φορά και για ένα δεδομένο μήκος σύγκρισης. Ας είναι  $f^{up} = (f_x^{up}, f_y^{up}, f_z^{up})$  μία τυχούσα αλυσίδα σύγκρισης αποτελούμενη από  $N$  σημεία του έξω περιγράμματος του  $\theta^F$  και  $f^{low} = (f_x^{low}, f_y^{low}, f_z^{low})$  η μοναδική αντίστοιχη αλυσίδα σύγκρισης του έσω περιγράμματος πάλι του  $\theta^F$ , επίσης αποτελούμενη από  $N$  σημεία. Οι δύο αυτές αλυσίδες στο  $\theta^F$  διαγράφουν σημεία των αντίστοιχων περιγραμμάτων με ωρολογιακή φορά.

Αντιστοίχως, δημιουργούμε ένα ζεύγος αλυσίδων στο  $\theta^R$ ,  $r^{up} = (r_x^{up}, r_y^{up}, r_z^{up})$  και  $r^{low} = (r_x^{low}, r_y^{low}, r_z^{low})$ , ίδιου πλήθους σημείων με αυτές του  $\theta^F$  αλλά διαγραφόμενες με ανθωρολογιακή φορά.

Σε αυτό το σημείο, επιβάλλουμε στις  $r^{up}$  και  $r^{low}$  τους εξής Ευκλείδειους μετασχηματισμούς:

α) Στροφή των  $r^{up}$  και  $r^{low}$  γύρω από το κέντρο βάρους  $(x_0, y_0, z_0)$  του  $r^{up}$  τρεις φορές διαδοχικά: μία φορά κατά τον άξονα των  $x$  κατά γωνία  $\omega_x$ , μία φορά κατά τον άξονα των  $y$  κατά γωνία  $\omega_y$  και μία φορά κατά τον άξονα  $z$  κατά γωνία  $\omega_z$ . Οι αντίστοιχοι πίνακες μετασχηματισμού είναι:

$$S_x = [1 \ 0 \ 0; 0 \ \cos(\omega_x) \ -\sin(\omega_x); 0 \ \sin(\omega_x) \ \cos(\omega_x)]$$

$$S_y = [\cos(\omega_y) \ 0 \ -\sin(\omega_y); 0 \ 1 \ 0; \sin(\omega_y) \ 0 \ \cos(\omega_y)]$$

$$S_z = [\cos(\omega_z) \ -\sin(\omega_z) \ 0; \sin(\omega_z) \ \cos(\omega_z) \ 0; 0 \ 0 \ 1]$$

ενώ η συνολική περιστροφή πραγματοποιείται με τον πίνακα

$$S = S_z \cdot S_y \cdot S_x$$

Το αποτέλεσμα της συνολικής περιστροφής των  $r^{up}$  και  $r^{low}$  είναι

$$t^{up} = S \cdot \begin{pmatrix} r_x^{up} - x_0 \\ r_y^{up} - y_0 \\ r_z^{up} - z_0 \end{pmatrix} \quad (5.4-1)$$

και

$$t^{low} = S \cdot \begin{pmatrix} r_x^{low} - x_0 \\ r_y^{low} - y_0 \\ r_z^{low} - z_0 \end{pmatrix} \quad (5.4-2)$$

όπου, όπως προαναφέρθηκε,  $(x_0, y_0, z_0)$  οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του μετακινήσιμου οστράκου  $\theta^R$ .

β) Μετατοπίζουμε παράλληλα τα σημεία των  $t^{up}$  και  $t^{low}$  κατά  $(\delta x, \delta y, \delta z)$ . Δηλαδή, ο πίνακας  $t^{up}$  είναι  $3 \times N$ , όπου η πρώτη γραμμή του περιλαμβάνει τις  $x$  συνιστώσες των εστραμμένων σημείων του  $r^{up}$ , η δεύτερη γραμμή τις  $y$  συνιστώσες και η τρίτη γραμμή τις  $z$  συνιστώσες του εστραμμένου  $r^{up}$ , οπότε με την παράλληλη μετατόπιση, τα σημεία των περιστραμμένων αλυσίδων θα μετατοπιστούν στα σημεία με συντεταγμένες:

$$\tau_x^{up} = t_x^{up} + \delta x$$

$$\tau_y^{up} = t_y^{up} + \delta y$$

$$\tau_z^{up} = t_z^{up} + \delta z$$

και

$$\tau_x^{low} = t_x^{low} + \delta x$$

$$\tau_y^{low} = t_y^{low} + \delta y$$

$$\tau_z^{low} = t_z^{low} + \delta z$$

## 5.5 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΑΛΥΣΙΔΩΝ: ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΖΕΥΓΩΝ ΚΑΤΕΝΑΝΤΙ ΑΛΥΣΙΔΩΝ ΣΤΑ ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΥΟ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ

Η κεντρική ιδέα πάνω στην οποία βασίστηκε το συγκεκριμένο εφαρμοσθέν κριτήριο μπορεί, γενικά, να περιγραφεί ως εξής:

Θεωρούμε ότι οι αλυσίδες σημείων επί του  $\theta^R$  έχουν ήδη μετασχηματιστεί σύμφωνα με την ανάλυση της Ενότητας 5.4, οπότε και ορίζουμε τους πίνακες  $\sigma^{up}$  και  $\sigma^{low}$  που εκφράζουν την απόκλιση (σφάλμα) της προσαρμογής των αλυσίδων των δύο θραυσμάτων μέσω των σχέσεων:

$$\sigma^{up} = \sqrt{(f_x^{up} - \tau_x^{up})^2 + (f_y^{up} - \tau_y^{up})^2 + (f_z^{up} - \tau_z^{up})^2} \quad (5.5-1)$$

και

$$\sigma^{low} = \sqrt{(f_x^{low} - \tau_x^{low})^2 + (f_y^{low} - \tau_y^{low})^2 + (f_z^{low} - \tau_z^{low})^2} \quad (5.5-2)$$

Δηλαδή, οι  $\sigma^{up}$  και  $\sigma^{low}$  είναι οι πίνακες των Ευκλειδείων αποστάσεων όλων των σημείων των σταθερών αλυσίδων  $f^{up}$  και  $f^{low}$  από τα κατέναντι σημεία των μετασχηματισμένων αλυσίδων  $\tau^{up}$  και  $\tau^{low}$  ένα προς ένα.

Στη συνέχεια, ελαχιστοποιούμε τόσο τη μέση τιμή των στοιχείων των  $\sigma^{up}$  και  $\sigma^{low}$ , όσο και τη μέγιστη τιμή αυτών, ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \delta x, \delta y, \delta z$ . Η ελαχιστοποίηση έγινε με χρήση του αλγορίθμου Nelder–Mead, ο οποίος στη συγκεκριμένη εφαρμογή έδωσε εξαιρετικά αποτελέσματα σε σχέση με όλα τα διαθέσιμα όστρακα. Εντούτοις, αναπτύξαμε και κώδικα βασισμένο στην ελαχιστοποίηση με τη μέθοδο των συζυγών ανάδελτα (conjugate gradients), ο οποίος, όμως, δεν φαίνεται να δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

#### Πρώτο κριτήριο ελέγχου προσαρμογής δύο θραυσμάτων επί τη βάση των ανωτέρω

Έστω δύο όστρακα  $\theta^F$  και  $\theta^R$  των οποίων την προσαρμογή επιθυμούμε να ελέγξουμε, όπου σύμφωνα με τους προηγούμενους ορισμούς,  $\theta^F$  είναι το σταθερό θραύσμα και  $\theta^R$  το μετακινήσιμο. Στην προσπάθεια να ελέγξουμε την προσαρμοσιμότητα αυτών των δύο οστράκων, πραγματοποιούμε την ελαχιστοποίηση των  $\sigma^{up}$  και  $\sigma^{low}$ , για κάθε συνδυασμό ζευγών πιθανών αλυσίδων επί των  $\theta^F$  και  $\theta^R$  και για φθίνοντα μήκη

σύγκρισης-πλήθη σημείων αλυσίδων. Όταν το λάθος σύγκρισης καθίσταται μικρότερο από ένα κατώφλι, θεωρούμε ότι έχουμε βρει ένα πιθανό σημείο προσαρμογής/ένωσης των 2 θραυσμάτων. Οι πλέον αποδοτικές τιμές των κατωφλίων αυτών φαίνεται να είναι η 0.5mm για τη μέση Ευκλείδεια απόσταση και 1mm για τη μέγιστη.

Τονίζουμε ότι το παρόν κριτήριο, με κανένα τρόπο, δεν οδηγεί σε τελεσίδικη απόφαση όσον αφορά το ταίριασμα των δύο οστράκων, αλλά συνιστά ένα πρώτο, πολύ χρήσιμο βήμα προς τον τελικό στόχο της ανακατασκευής.

Εντούτοις, το κριτήριο αυτό, όταν ικανοποιείται, προσφέρει μια αρχική εκτίμηση των πινάκων της παράλληλης μετατόπισης  $\mathbf{A}_1$  και στροφής  $\mathbf{\Psi}_1$ , τις οποίες πρέπει να υποστεί το μετακινήσιμο θραύσμα  $\theta^R$ , ούτως ώστε τα ζεύγη των άνω και κάτω αλυσίδων των  $\theta^F$  και  $\theta^R$  σε αυτήν τη θέση να ταιριάζουν βέλτιστα κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Ισοδυνάμως, όταν το κριτήριο αυτό ικανοποιείται, τότε το τυχόν σημείο  $(x, y, z)$  των άνω, κάτω και παράπλευρων επιφανειών του μετακινήσιμου θραύσματος  $\theta^R$  μεταβαίνει στο σημείο  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  μέσω της σχέσης

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mathbf{A}_1 + \mathbf{\Psi}_1(x, y, z)^T \quad (5.5-3)$$

Επιπρόσθετα, η προαναφερθείσα ελαχιστοποίηση **δεν** εξασφαλίζει τη φυσική συνέχεια των άνω επιφανειών, ακόμα και όταν τα θραύσματα όντως ταιριάζουν σε αυτό το σημείο, κάτι που είναι απολύτως αναγκαίο. Γι' αυτό καθορίσαμε και ακολουθήσαμε τη διαδικασία που περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

## **5.6 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΤΑ ΑΝΩ ΚΑΤΕΝΑΝΤΙ ΣΗΜΕΙΑ: Η ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΩΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΕ ΚΑΤΕΝΑΝΤΙ ΣΗΜΕΙΑ ΤΩΝ ΑΛΥΣΙΔΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΘΕΣΗ**

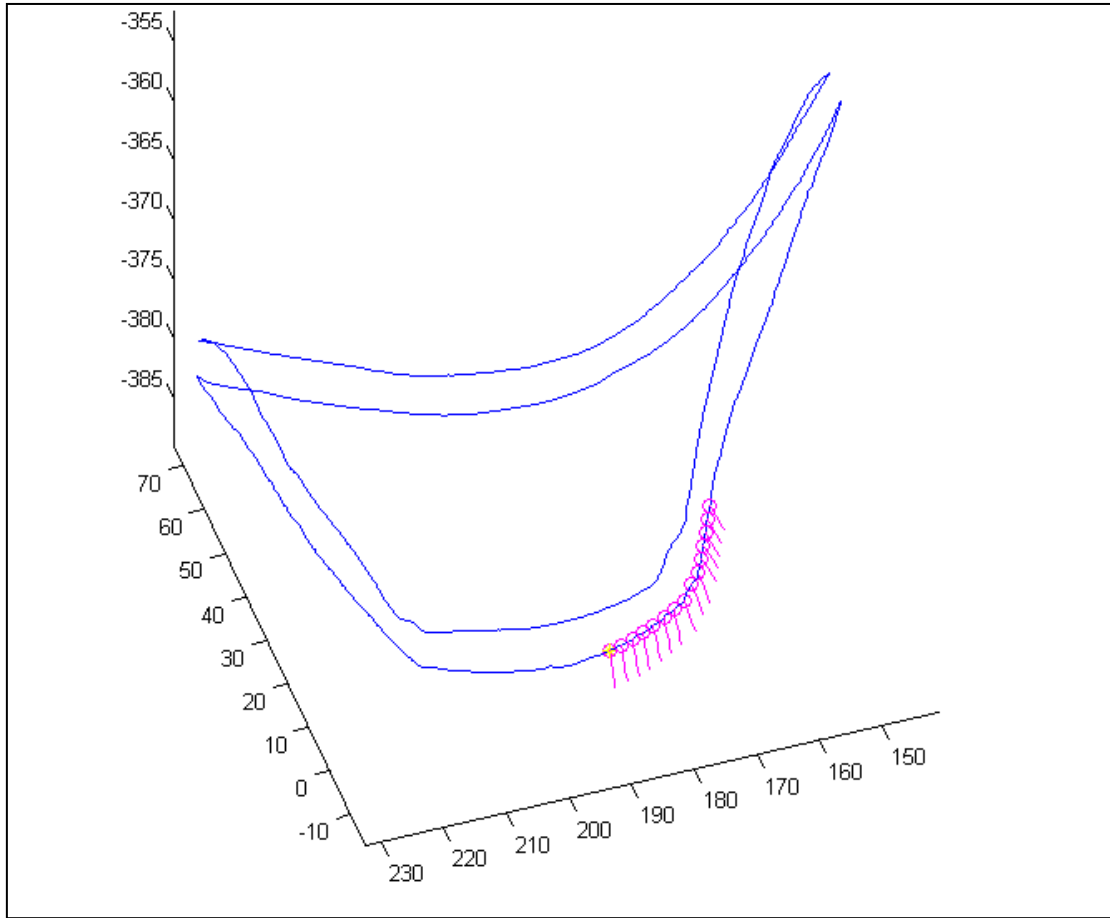
Για να εξασφαλιστεί η συνέχεια των εφαπτομένων επιπέδων στις άνω επιφάνειες των  $\theta^F$  και  $\theta^R$ , σε κάθε ζεύγος κατέναντι (αντικριστών) σημείων των άνω αλυσίδων τους, προχωρήσαμε όπως περιγράφεται κατωτέρω.

Καταρχήν, σε κάθε σημείο της άνω αλυσίδας του  $\theta^F$  αποδώσαμε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, το οποίο ορίσαμε με το ακόλουθο σκεπτικό:

Θέλαμε να αποφύγουμε μεγάλες διακυμάνσεις στην κλίση του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος, οι οποίες μπορεί να οφείλονται στην τραχύτητα της άνω επιφάνειας του πηλού, στην ενδεχόμενη απεικόνιση επ' αυτής, στη φθορά που έχει υποστεί το θραύσμα, αλλά και σε ενδεχόμενες ατέλειες της διαδικασίας τρισδιάστατης σάρωσης που εφαρμόστηκε. Προς το σκοπό αυτό, θεωρήσαμε μία μικρή, περίπου ημικυκλική περιοχή επί της έξω επιφάνειας του  $\theta^F$  με κέντρο το τρέχον σημείο της αλυσίδας και υπολογίσαμε το μέσο όρο των μοναδιαίων καθέτων διανυσμάτων των τριγώνων που βρίσκονται εντός αυτής της περιοχής. Εντελώς αντίστοιχη διαδικασία εφαρμόσαμε σε σχέση με τα σημεία κάθε άνω αλυσίδας του  $\theta^R$ . Είναι ευνόητο ότι για λόγους υπολογιστικής και χρονικής απόδοσης του αναπτυχθέντος συστήματος, η διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε σε κάθε θραύσμα άπαξ και τα αποτελέσματα αποθηκεύθηκαν σε πλήρη αντιστοιχία με τα ήδη παραχθέντα ζεύγη αλυσίδων (Εικόνα 35).

Επομένως, εάν  $\widehat{AB}$  είναι μία οποιαδήποτε άνω αλυσίδα του  $\theta^F$  και  $M_1^F, M_2^F, \dots, M_N^F$  είναι τα σημεία αυτής, όπου βεβαίως  $A \equiv M_1^F$  και  $B \equiv M_N^F$ , τότε σε κάθε σημείο  $M_i^F, i = 1, 2, \dots, N$  "έχουμε υψώσει" ένα αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, έστω  $\vec{n}_i^F$ , πρακτικά κάθετο στην άνω επιφάνεια του  $\theta^F$  στο σημείο εκείνο. Εντελώς ανάλογα ορίζονται τα  $\vec{n}_i^R, i = 1, 2, \dots, N$  πρακτικά κάθετα στην άνω επιφάνεια του  $\theta^R$  στα σημεία  $M_i^R$  της αλυσίδας  $\widehat{\Gamma\Delta}$ . Σε αμφότερες τις περιπτώσεις, ο όρος «πρακτικά» υποδηλοί ότι τα  $\vec{n}_i^F$  και  $\vec{n}_i^R$  είναι αποτέλεσμα τοπικής ομαλοποίησης των όντως καθέτων διανυσμάτων γύρω από τα σημεία  $M_i^F$  και  $M_i^R$  αντίστοιχα.





**Εικόνα 35 - Κάθετα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{n}_i^F$  στα σημεία  $M_i^F$  μίας αλυσίδας που βρίσκεται στο έξω περίγραμμα του πρώτου θραύσματος.**

Εάν όντως τα δύο θραύσματα  $\theta^F$  και  $\theta^R$  ταιριάζουν ικανοποιητικά κατά μήκος των αλυσίδων  $\widehat{AB}$  και  $\widehat{\Gamma\Delta}$ , τότε τα εφαπτόμενα επίπεδα των άνω επιφανειών σε κάθε ζεύγος γειτονικών σημείων  $(M_i^F, M_i^R)$  έχουν φυσική και μαθηματική συνέχεια, όταν και μόνο όταν τα αντίστοιχα κάθετα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{n}_i^F$  και  $\vec{n}_i^R$  συμπίπτουν. Στην πράξη, τα διανύσματα  $\vec{n}_i^F$  και  $\vec{n}_i^R$  μπορεί να διαφέρουν κατά μία πολύ μικρή γωνία λόγω των όσων αναφέρθηκαν προηγουμένως, αλλά και λόγω της ενδεχόμενης ύπαρξης κενού μεταξύ των σημείων  $M_i^F$  και  $M_i^R$ . Αυτή η μικρή γωνιακή απόκλιση μπορεί να εκτιμηθεί είτε με αυστηρό μαθηματικό τρόπο με χρήση της τρισδιάστατης καμπυλότητας, είτε με εκμετάλλευση της ήδη υπάρχουσας πληροφορίας, δηλαδή με ποσοτικοποίηση της αίσθησης των αρχαιολόγων και συντηρητών για το πότε δύο ήδη ταιριασμένα

Θραύσματα παρουσιάζουν φυσική συνέχεια ή όχι. Σε κάθε περίπτωση, θεωρήσαμε ότι ο μέσος όρος των γωνιών απόκλισης των  $\vec{n}_i^F$  και  $\vec{n}_i^R, i = 1, 2, \dots, N$  δεν πρέπει να υπερβαίνει κατ' απόλυτη τιμή ένα άνω κατώφλι  $\zeta_{threshold}$ , περίπου ίσο με 10 μοίρες. Εντός αυτού του ορίου απόκλισης, έμπειροι συντηρητές και αρχαιολόγοι φαίνεται να αναγνωρίζουν οπτικά την ύπαρξη φυσικής συνέχειας των δύο θραυσμάτων  $\theta^F$  και  $\theta^R$ , κατά μήκος των αλυσίδων επαφής. Δηλαδή, με μαθηματικούς όρους, εντός αυτού του ορίου απόκλισης, οι ειδικοί διαισθητικά αναγνωρίζουν ότι οι άνω επιφάνειες των προς ταίριασμα οστράκων παρουσιάζουν συνέχεια των εφαπτομένων επιπέδων τους στα κατέναντι σημεία των αλυσίδων επαφής.

Συνεπώς, ένα επιπλέον κριτήριο προσαρμογής των θραυσμάτων  $\theta^F$  και  $\theta^R$  στις αλυσίδες  $\widehat{AB}$  και  $\widehat{\Gamma\Delta}$  είναι η απαίτηση η ποσότητα

$$\zeta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \arccos(\vec{n}_i^F \cdot \vec{n}_i^R) \quad (5.6-1)$$

να παραμένει μικρότερη ή ίση από

$$\zeta_{threshold} = 10^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0.18 \text{ rad} \quad (5.6-2)$$

Τονίζεται ότι η απαίτηση

$$|\zeta| \leq \zeta_{threshold} \quad (5.6-3)$$

δεν καταστρατηγεί την ικανοποίηση του πρώτου κριτηρίου που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 5.5. Δηλαδή, αλγοριθμικά η ελαχιστοποίηση των  $\sigma^{up}$  (5.5-1) και  $\sigma^{low}$  (5.5-2) που απαιτεί το κριτήριο της Ενότητας 5.5, πραγματοποιείται υπό τον ανωτέρω περιορισμό (5.6-3).

Συγκεκριμένα, η υλοποίηση των δύο κριτηρίων έγινε σε αλληλουχία:

- Πρώτα εντοπίστηκε η σχετική θέση των αλυσίδων επαφής μέσω της επιλεγείσας μεθόδου ελαχιστοποίησης.
- Γύρω από τη θέση επαφής που συνέκλινε το προηγούμενο βήμα και πολύ κοντά σε αυτήν, πραγματοποιήσαμε εξαντλητική στροφή με γωνίες Euler

(Ενότητα 3.5), ως και παράλληλη μετατόπιση του μετακινήσιμου θραύσματος  $\theta^R$  και επιλέξαμε εκείνη την εξάδα γωνιών στροφής και βελών μετατόπισης, οι οποίες ελαχιστοποιούσαν το κριτήριο της παρούσας Ενότητας (5.6), ενώ ταυτόχρονα επηρέαζαν ελάχιστα την τελική τιμή του κριτηρίου της Ενότητας 5.5. Αυτοί οι πίνακες συμβολίζονται  $\mathbf{A}_2$  για την παράλληλη μετατόπιση και  $\mathbf{\Psi}_2$  για τη στροφή.

Επομένως, η ικανοποίηση του παρόντος κριτηρίου προσφέρει μια αρχική εκτίμηση των πινάκων της παράλληλης μετατόπισης  $\mathbf{A}_2$  και στροφής  $\mathbf{\Psi}_2$ , τις οποίες πρέπει να υποστεί το μετακινήσιμο θραύσμα  $\theta^R$ , ούτως ώστε τα ζεύγη των άνω και κάτω αλυσίδων των  $\theta^F$  και  $\theta^R$  σε αυτήν τη θέση, αφενός να ταιριάζουν πρακτικά βέλτιστα κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων και αφετέρου να εξασφαλίζεται η συνέχεια των εφαπτομένων επιπέδων στα κατέναντι σημεία των άνω επιφανειών, στην πράξη. Δηλαδή, όταν τα δύο προαναφερθέντα κριτήρια ικανοποιούνται, τότε το τυχόν σημείο  $(x, y, z)$  των άνω, κάτω και παράπλευρων επιφανειών του μετακινήσιμου θραύσματος  $\theta^R$  μεταβαίνει στο σημείο  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  μέσω της σχέσης

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mathbf{A}_2 + \mathbf{\Psi}_2(x, y, z)^T \quad (5.6-4)$$

Σημειώνουμε τέλος πως περιορίσαμε το δεύτερο αυτό κριτήριο μόνο στις εξωτερικές (άνω) επιφάνειες των προς σύγκριση θραυσμάτων, καθώς οι έσω (κάτω) επιφάνειες ενδέχεται να είναι ιδιαίτερος τραχείες. Επιπλέον, η επιθυμία του εκάστοτε δημιουργού να προσφέρει ικανοποιητικό αισθητικό αποτέλεσμα κατά κανόνα συνδέεται με τη φυσική συνέχεια της έξω επιφάνειας του αγγείου, η οποία προσφέρεται στην οπτική του χρήστη, εν αντιθέσει με την εσωτερική επιφάνεια.

## **5.7 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΗ ΕΙΣΧΩΡΗΣΗΣ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΘΡΑΥΣΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΑΛΛΟ: Η ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΨΗΦΙΑΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΘΡΑΥΣΜΑΤΟΣ ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ ΝΑ ΕΙΣΧΩΡΕΙ ΕΙΚΟΝΙΚΑ ΣΤΟ ΑΛΛΟ ΣΤΗ**

## **ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΘΕΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ. ΕΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΙΣΧΩΡΗΣΗ, ΑΥΤΗ ΑΙΡΕΤΑΙ ΜΕ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΤΡΟΠΟ**

Η Ενότητα αυτή αναφέρεται στην απαίτηση δύο θραύσματα που ελέγχονται για συνένωση σε μία σχετική τους θέση να μην έχουν «εμπλοκή», δηλαδή η ψηφιακή αναπαράσταση του ενός να μην εισέρχεται εντός της ψηφιακής αναπαράστασης του άλλου. Είναι ευνόητο ότι αυτή η απαίτηση είναι απολύτως αναγκαία δεδομένου ότι τα δύο θραύσματα είναι στερεά, ανένδοτα σώματα, τα οποία αρχικά ανήκαν σε ένα αντικείμενο. Εντούτοις, οι ψηφιακές αναπαραστάσεις μπορούν να εισέρχονται εικονικά η μία εντός της άλλης είτε λόγω μη ορθής μετακίνησης του  $\theta^R$ , είτε λόγω ατελειών στη διαδικασία ψηφιοποίησης. Για το λόγο αυτό, καταρχήν υπολογίζεται ο όγκος εμπλοκής των ψηφιακών αναπαραστάσεων των θραυσμάτων  $\theta^F$  και  $\theta^R$  στην Ενότητα 5.7.1.

Στην περίπτωση που οι ψηφιακές αναπαραστάσεις των θραυσμάτων όντως εισέρχονται η μία εντός της άλλης σε ένα μικρό βαθμό, τότε εντοπίζουμε την ελάχιστη παράλληλη μετατόπιση που πρέπει να υποστεί το  $\theta^R$ , ώστε να αρθεί η εισχώρηση αυτού εντός του  $\theta^F$ . Ο υπολογισμός αυτής της παράλληλης μετατόπισης γίνεται με εφαρμογή Θεωρίας Μεταβολών και παρουσιάζεται στην Ενότητα 5.7.2.

### **5.7.1 Υπολογισμός του όγκου εισχώρησης του ενός θραύσματος στο άλλο σε κάθε πιθανή θέση προσαρμογής που προέκυψε από την εφαρμογή των προηγούμενων κριτηρίων**

Κατά κανόνα, σε κάθε θέση καλής προσαρμογής των θραυσμάτων  $\theta^F$  και  $\theta^R$ , η οποία προκύπτει αυτόματα με την ολοκλήρωση των προηγούμενων βημάτων, το  $\theta^R$  θα έχει εν γένει εισχωρήσει εντός του  $\theta^F$ . Εννοείται, ότι αυτή η "εισχώρηση" ή "εμπλοκή" των δύο θραυσμάτων είναι μόνο εικονική, ενώ δεν πρέπει να υφίσταται στην πράξη, διότι τα δύο θραύσματα είναι στερεά, μη ενδοτικά σώματα (βλ. Εικόνα 36). Στοχεύοντας στο να άρουμε αυτή την αντίφαση, ένα πρώτο βήμα είναι ο υπολογισμός του όγκου εισχώρησης ή εμπλοκής, έστω  $V_{εμ}$ , των δύο θραυσμάτων στη συγκεκριμένη θέση. Ο

υπολογισμός αυτού του όγκου γίνεται με τη σειρά του σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο εντοπίζονται τα τρίγωνα τόσο της επιφάνειας  $\theta^R$  που ευρίσκονται εντός του  $\theta^F$ , όσο και αντίστροφα, δηλαδή τα τρίγωνα του  $\theta^F$  που είναι εντός του  $\theta^R$ . Στο δεύτερο στάδιο, υπολογίζεται ο όγκος  $V_{\varepsilon\mu}$  με κατάλληλη χρήση του θεωρήματος Gauss.

Αναλυτικότερα:

### 1<sup>ο</sup> Στάδιο

Έστω  $\Lambda$  ένα οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας του θραύσματος  $\theta^F$ , και έστω  $K_\Lambda$  το σημείο της επιφάνειας του  $\theta^R$  που είναι κοντινότερο στο  $\Lambda$ . Θεωρούμε ότι τόσο το  $\Lambda$  όσο και το  $K_\Lambda$  είναι τα κέντρα βάρους κάποιων τριγώνων, δεδομένου ότι όλες οι επιφάνειες των  $\theta^F$  και  $\theta^R$  έχουν ήδη τριγωνοποιηθεί, όπως περιεγράφη στην Ενότητα 5.2.1. Έστω  $\vec{n}_\Lambda$  και  $\vec{n}_{K_\Lambda}$  τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα στα συγκεκριμένα τρίγωνα με προφανή σημεία εφαρμογής τα  $\Lambda$  και  $K_\Lambda$  αντίστοιχα. Τότε, ορίζουμε και χρησιμοποιούμε το κάτωθι λήμμα:

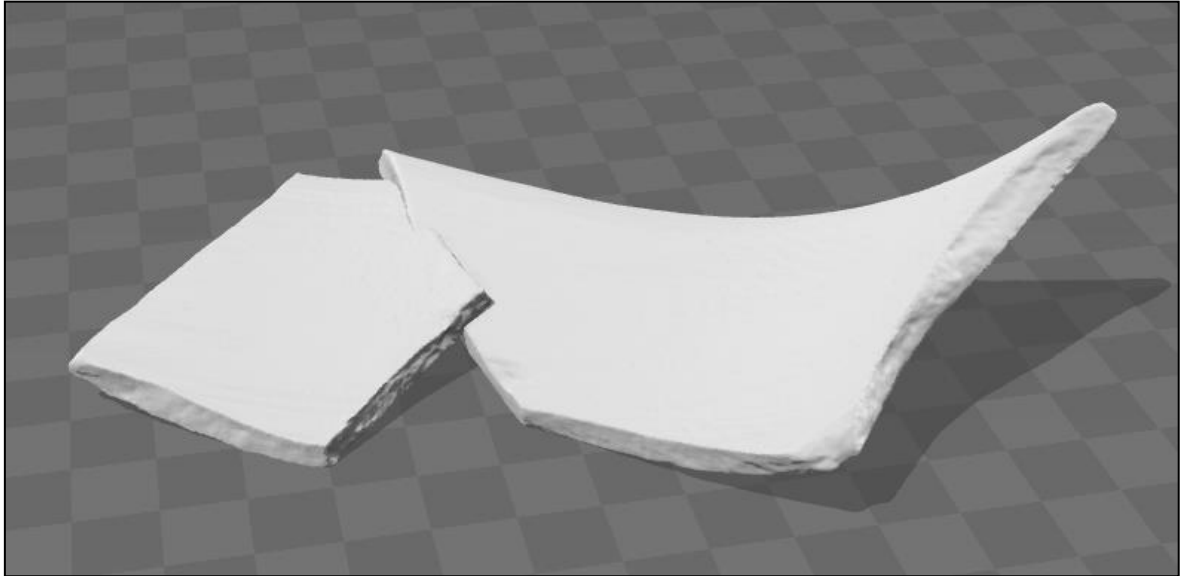
### Λήμμα 5.1

Το σημείο  $\Lambda$  είναι εκτός του μετακινήσιμου θραύσματος  $\theta^R$ , αν και μόνο αν

$$\vec{n}_\Lambda \cdot \overrightarrow{\Lambda K_\Lambda} \geq 0$$

Αντιστρόφως, αν το  $\vec{n}_\Lambda \cdot \overrightarrow{\Lambda K_\Lambda} < 0$ , τότε το ένα κομμάτι έχει εισχωρήσει εντός του άλλου, τουλάχιστον σε μια περιοχή του σημείου  $\Lambda$ . Τα δυϊκώς αντίστοιχα ισχύουν για να ελέγξουμε αν ένα σημείο  $N$  της πλευρικής επιφάνειας του  $\theta^F$  έχει εισχωρήσει εντός του  $\theta^R$ .

■



**Εικόνα 36 – Απεικόνιση παραδείγματος de facto μη επιτρεπτής εισχώρησης του ενός θραύσματος στο άλλο**

### 2<sup>ο</sup> Στάδιο

Για να υπολογίσουμε τον όγκο εισχώρησης χρησιμοποιούμε το κάτωθι λήμμα που είναι συνέπεια του θεωρήματος Gauss.

### Λήμμα 5.2

Έστω  $X$  ένα κλειστό χωρίο του  $\mathbb{R}^3$ , τα σύνορα του οποίου είναι μία κλειστή, τμηματικώς συνεχώς παραγωγίσιμη, προσανατολίσιμη επιφάνεια  $S$ . Έστω  $V$  ο όγκος του χωρίου αυτού. Τότε, ισχύει

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} \quad (5.7-1)$$

όπου  $\vec{r}(x, y, z)$  είναι το διάνυσμα θέσης του τυχόντος σημείου  $M(x, y, z)$  της συνοριακής επιφάνειας  $S$  και  $d\vec{S}$  το στοιχειώδες διανυσματικό εμβαδόν της επιφάνειας  $S$  στο σημείο  $M$ , το οποίο είναι πάντα κάθετο στην  $S$  και δείχνει προς τα έξω του χωρίου  $X$ .

Σημειώνουμε ότι ως διάνυσμα θέσης μπορεί να οριστεί η διανυσματική απόσταση του τυχόντος σημείου  $M(x, y, z)$  της επιφάνειας  $S$  από ένα σταθερό σημείο  $O$ , ανεξάρτητα από το αν αυτό είναι η αρχή των αξόνων ή όχι.

■

### Απόδειξη

Έστω μια οποιαδήποτε διανυσματική συνάρτηση  $\vec{F}(x, y, z)$ , ορισμένη και συνεχώς παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό χωρίο  $X_1$  του  $\mathbb{R}^3$ , το οποίο περιλαμβάνει το χωρίο  $X$  και τη συνοριακή του επιφάνεια  $S$  όπως αυτή ορίζεται στην εκφώνηση του λήμματος. Τότε, ισχύει το γνωστό θεώρημα του Gauss:

$$\iiint_X \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (5.7-2)$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα αυτό για μία συγκεκριμένη συνάρτηση  $\vec{F}(x, y, z)$ , η οποία ορίζεται ως εξής: Για ένα οποιοδήποτε σημείο αναφοράς  $O$  και ένα τυχόν σημείο  $M(x, y, z)$  του χωρίου  $X \cup S$ , ορίζουμε το διάνυσμα  $\vec{r}(x, y, z) = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$ . Προφανώς, η συνάρτηση  $\vec{r}(x, y, z)$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε όλο το  $\mathbb{R}^3$  και ισχύει

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} = 3$$

Εφαρμόζοντας το ανωτέρω θεώρημα Gauss (5.7-2) για τη συνάρτηση αυτή, το χωρίο  $X$  και το σύνορό του  $S$ , λαμβάνουμε

$$\iiint_X \operatorname{div} \vec{r} dV = \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow 3 \iiint_X dV = \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$$

Στην τελευταία ισοδυναμία, χρησιμοποιήσαμε τον προφανή ορισμό του όγκου  $V$  του χωρίου  $X$ .

■

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ανωτέρω Λήμμα 5.2 για να υπολογίσουμε τον όγκο εισχώρησης  $V_{\varepsilon\mu}$  ενός μετακινήσιμου θραύσματος σε ένα άλλο που θεωρούμε σταθερό, όπως περιγράφεται κατωτέρω.

### Πόρισμα 5.1

Έστω δύο χωρία  $X_1$  και  $X_2$  του  $\mathbb{R}^3$ , του τύπου του παραπάνω Λήμματος (Λήμμα 5.2), με αντίστοιχες συνοριακές κλειστές προσανατολισίμες επιφάνειες  $S_1$  και  $S_2$ . Έστω, επίσης, ότι το χωρίο  $X_2$  εισχωρεί εντός του  $X_1$ , σύμφωνα με τα όσα ορίζει το Λήμμα 5.1. Ας υποτεθεί για απλότητα ότι το χωρίο εισχώρησης του  $X_2$  στο  $X_1$  είναι, επίσης, ένα κλειστό χωρίο  $X_{\varepsilon\mu}$  που έχει, ομοίως, κλειστό τμηματικώς ομαλό, προσανατολισίμο σύνορο  $S_{\varepsilon\mu}$ , με διάνυσμα θέσης  $\vec{r}_{\varepsilon\mu}$  στο τυχόν του σημείο. Τότε, ο όγκος εισχώρησης του  $X_2$  στο  $X_1$  δίνεται από τη σχέση:

$$V_{\varepsilon\mu} = \frac{1}{3} \iint_{S_{\varepsilon\mu}} \vec{r}_{\varepsilon\mu} \cdot d\vec{S}_{\varepsilon\mu} \quad (5.7-3)$$

Εάν, στη γενική περίπτωση, το  $X_2$  εισχωρεί στο  $X_1$  δημιουργώντας πολλά χωρία εισχώρησης  $X_{\varepsilon\mu,k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ακριβώς του ανωτέρου τύπου, με συνοριακές επιφάνειες και διανύσματα θέσης  $S_{\varepsilon\mu,k}$  και  $\vec{r}_{\varepsilon\mu,k}$  αντίστοιχα, τότε,

$$V_{\varepsilon\mu} = \frac{1}{3} \sum_k \iint_{S_{\varepsilon\mu,k}} \vec{r}_{\varepsilon\mu,k} \cdot d\vec{S}_{\varepsilon\mu,k} \quad (5.7-4)$$

■

Στο προκείμενο, η επιφάνεια που περιβάλλει το χωρίο ενδιαφέροντος δίνεται σε ψηφιακή μορφή, τριγωνοποιημένη. Επομένως, για τον υπολογισμό του όγκου εισχώρησης, απαιτείται να χρησιμοποιήσουμε το κάτωθι, εναλλακτικό συμπέρασμα.

### Πόρισμα 5.2



Έστω ότι η εικονική αναπαράσταση του θραύσματος  $\theta^F$  εισέρχεται εντός της ψηφιακής αναπαράστασης του  $\theta^R$  δημιουργώντας ένα τρισδιάστατο χωρίο  $X_{\varepsilon\mu}$  που έχει ως σύνορο μία μόνο κλειστή, τμηματικώς ομαλή και προσανατολισίμη, τριγωνοποιημένη επιφάνεια  $S_{\varepsilon\mu}$ . Έστω, επίσης, ότι  $S_{\varepsilon\mu}^R$  είναι το σύνολο των τριγώνων της συνοριακής επιφάνειας του  $\theta^R$  που έχουν εισχωρήσει εντός του  $\theta^F$  και  $S_{\varepsilon\mu}^F$  το αντίστοιχο σύνολο των τριγώνων της συνοριακής επιφάνειας του  $\theta^F$  που έχουν εισχωρήσει εντός του  $\theta^R$ .

Θεωρούμε ότι η ένωση των δύο αυτών επιφανειών δίνει πάντα την συνολική επιφάνεια εμπλοκής  $S_{\varepsilon\mu}$ . Δηλαδή ότι

$$S_{\varepsilon\mu} = S_{\varepsilon\mu}^F \cup S_{\varepsilon\mu}^R \quad (5.7-5)$$

γεγονός που έχει παρατηρηθεί πάντοτε στην πράξη ως τώρα.

Τότε, για τον όγκο εμπλοκής  $V_{\varepsilon\mu}$  ισχύει, με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση, ότι

$$V_{\varepsilon\mu} \simeq \frac{1}{3} \left( \sum_{\substack{\text{Σε όλα τα τρίγωνα} \\ \text{της } S_{\varepsilon\mu}^R}} (\vec{r}_{\varepsilon\mu,i}^R \cdot \vec{n}_{\varepsilon\mu,i}^R) \mu_{\varepsilon\mu,i}^R + \sum_{\substack{\text{Σε όλα τα τρίγωνα} \\ \text{της } S_{\varepsilon\mu}^F}} (\vec{r}_{\varepsilon\mu,i}^F \cdot \vec{n}_{\varepsilon\mu,i}^F) \mu_{\varepsilon\mu,i}^F \right) \quad (5.7-6)$$

όπου

$\vec{n}_{\varepsilon\mu,i}^R$  είναι το κάθετο διάνυσμα στο υπ' αριθμόν  $i$  τρίγωνο της επιφάνειας  $S_{\varepsilon\mu}^R$ ,

$\vec{r}_{\varepsilon\mu,i}^R$  είναι η διανυσματική θέση του βαρυκέντρου αυτού του τριγώνου από ένα συγκεκριμένο σημείο αναφοράς  $O$ , το ίδιο για όλα τα τρίγωνα και

$\mu_{\varepsilon\mu,i}^R$  είναι το εμβαδόν αυτού του υπ' αριθμόν  $i$  τριγώνου.

Ακριβώς με αντίστοιχο τρόπο ορίζονται και τα  $\vec{n}_{\varepsilon\mu,i}^F$ ,  $\vec{r}_{\varepsilon\mu,i}^F$ ,  $\mu_{\varepsilon\mu,i}^F$  για το υπ' αριθμόν  $i$  τρίγωνο της επιφάνειας  $S_{\varepsilon\mu}^F$ .

Προφανώς, και η περίπτωση πολλών χωρίων εισχώρησης  $X_{\varepsilon\mu,k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  που είναι όλα της μορφής που απαιτεί το Λήμμα 5.2, καλύπτεται από το παρόν Πόρισμα μέσω κατάλληλου ορισμού των  $S_{\varepsilon\mu}^F$  και  $S_{\varepsilon\mu}^R$ .

■

### Απόδειξη

Για την απόδειξη του Πορίσματος θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του βαρυκέντρου. Είναι γνωστό ότι σε ένα επίπεδο χωρίο  $T$  με εμβαδόν  $\mu$ , το διάνυσμα θέσης  $\vec{r}_G$  του βαρυκέντρου  $G$  είναι ίσο με:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{\mu} \iint_T \vec{r}(x, y, z) dS \quad (5.7-7)$$

όπου

$\vec{r}(x, y, z)$  είναι το διάνυσμα θέσης κάθε σημείου του χωρίου  $T$  από ένα συγκεκριμένο σημείο αναφοράς  $O$  και

$dS$  είναι το στοιχειώδες εμβαδόν γύρω από αυτό το σημείο, εντός αυτού του χωρίου  $T$ .

Όμως, το χωρίο εμπλοκής/εισχώρησης είναι σε τριγωνοποιημένη ψηφιακή μορφή και επομένως, αποτελείται από ένα σύνολο τέτοιων επίπεδων χωρίων-τριγώνων  $T_i$ . Αλλά, κάθε τέτοιο τρίγωνο  $T_i$ , το οποίο αποτελεί τμήμα του συνόρου ενός κλειστού χωρίου, συμβάλει στον όγκο του χωρίου αυτού μέσω των σχέσεων:

$$V_i = \frac{1}{3} \iint_{T_i} \vec{r} \cdot \vec{n}_i dS = \frac{1}{3} \vec{n}_i \left( \iint_{T_i} \vec{r} \cdot dS \right) = \frac{1}{3} \vec{n}_i (\mu_i \vec{r}_{G,i}) \quad (5.7-8)$$

όπου λάβαμε υπόψιν ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\vec{n}_i$  σε όλα τα σημεία του τριγώνου  $T_i$  είναι πάντα το ίδιο.

Συνεπώς, η σχέση που υπολογίζει τον όγκο εισχώρησης ενός χωρίου  $X_2$  στο  $X_1$ , σύμφωνα και με τα όσα έχουμε διατυπώσει στο Πόρισμα 5.1, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$V_{\varepsilon\mu} = \frac{1}{3} \iint_{S_{\varepsilon\mu}} \vec{r}_{\varepsilon\mu} \cdot d\vec{S}_{\varepsilon\mu} = \frac{1}{3} \iint_{S_{\varepsilon\mu}} \vec{r}_{\varepsilon\mu} \cdot \vec{n} dS_{\varepsilon\mu} \simeq \frac{1}{3} \sum_{\substack{\text{Σε όλα τα τρίγωνα} \\ \text{της } S_{\varepsilon\mu}}} (\vec{r}_{\varepsilon\mu,i} \cdot \vec{n}_{\varepsilon\mu,i}) \mu_{\varepsilon\mu,i}$$

όπου

$\vec{r}_{\varepsilon\mu,i}$  είναι το διάνυσμα θέσης του βαρυκέντρου του τριγώνου  $T_i$  της επιφανείας  $S_{\varepsilon\mu}$  από ένα συγκεκριμένο σημείο αναφοράς  $O$ , το ίδιο για όλα τα τρίγωνα

$\vec{n}_{\varepsilon\mu,i}$  είναι το κάθετο διάνυσμα στο τρίγωνο  $T_i$  και

$\mu_{\varepsilon\mu,i}$  είναι το εμβαδόν του τριγώνου αυτού.

■

Για να εκμεταλλευτούμε όλη την πληροφορία που δίνει ο τρισδιάστατος scanner στον υπολογισμό του όγκου εισχώρησης και ειδικότερα στο εμβαδόν των τριγώνων που συνθέτουν την εκάστοτε συνοριακή επιφάνεια ενδιαφέροντος, θα χρησιμοποιήσουμε μία γνωστή ιδιότητα που διατυπώνεται στο κάτωθι λήμμα.

### Λήμμα 5.3

Το εμβαδόν ενός τυχόντος τριγώνου στο  $\mathbb{R}^3$  με κορυφές τα σημεία  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$D_x = \det \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix}$$

$$D_y = \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix}$$

$$D_z = \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} \quad (5.7-9)$$

■

### Απόδειξη

Θα κάνουμε την απόδειξη σε διαδοχικά βήματα.

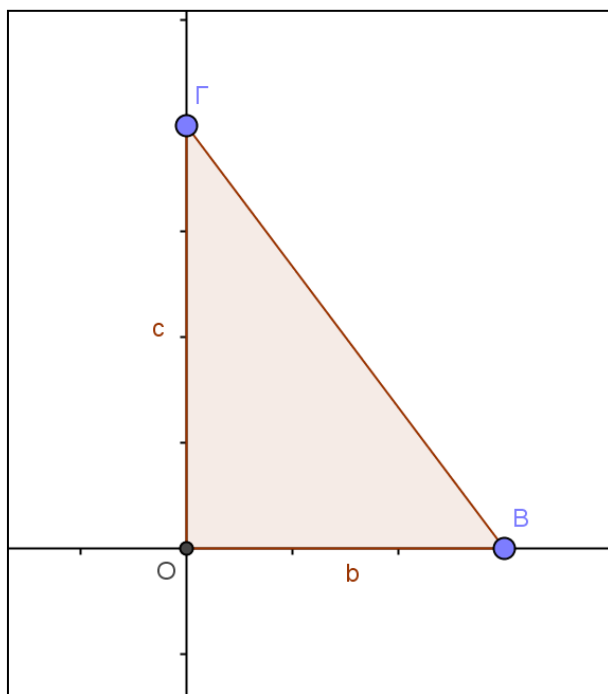
Πράγματι, έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο  $\mathbb{R}^2$  με την κορυφή της ορθής γωνίας στο  $O(0,0)$  και πλευρές κατά μήκος των αξόνων και με συντεταγμένες των άλλων δύο κορυφών τις  $B(0,b)$  και  $\Gamma(c,0)$  (βλ. Εικόνα 37). Τότε, εξ' ορισμού, το εμβαδόν  $\mu_1$  αυτού του τριγώνου είναι  $\mu_1 = \frac{1}{2}bc$ . Παρατηρούμε, όμως επίσης, ότι το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων των πλευρών  $\overrightarrow{OB}$  και  $\overrightarrow{O\Gamma}$  είναι εξ' ορισμού:

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{O\Gamma} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} = \vec{k}(bc)$$

Συνεπώς, το μέτρο αυτού του διανύσματος είναι ίσο με  $bc$  και επομένως, το εμβαδόν του τριγώνου  $\widehat{OB\Gamma}$  δίνεται άμεσα από τη σχέση:

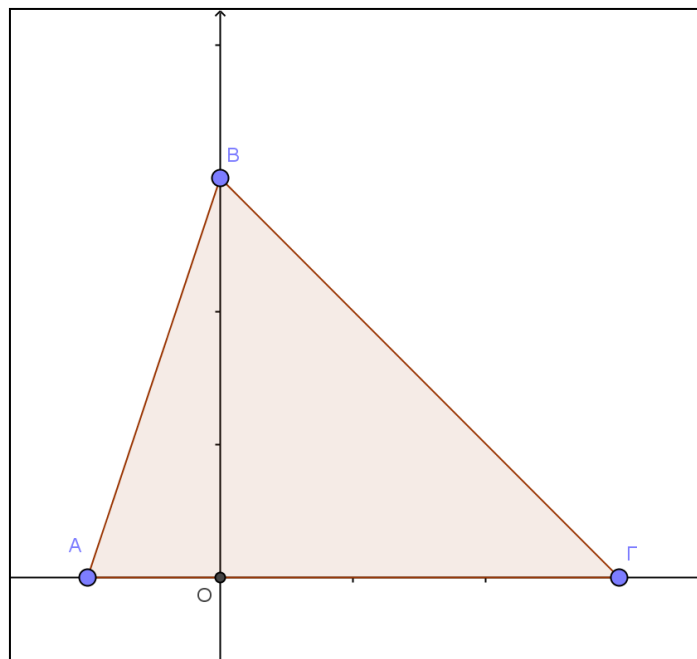
$$\mu = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{O\Gamma}\|$$

Σημειώνουμε ότι η ανωτέρω σχέση ισχύει τόσο στην περίπτωση που το  $\Gamma$  βρίσκεται στα θετικά του άξονα  $x'x$ , όσο και στην περίπτωση που βρίσκεται στα αρνητικά αυτού.



**Εικόνα 37** – Ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $OB\Gamma$  του οποίου υπολογίζουμε το εμβαδόν ως  $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{O\Gamma}\|$

Εν συνεχεία, έστω τυχόν, οξυγώνιο τρίγωνο  $\widehat{AB\Gamma}$  στο  $\mathbb{R}^2$ . Επειδή, εξ' ορισμού το εμβαδόν σταθερών γεωμετρικών σχημάτων είναι ανεξάρτητο στροφής και παράλληλης μετατόπισης, επάγεται άμεσα ότι μπορούμε να θέσουμε τον άξονα  $x'x$  κατά μήκος της  $A\Gamma$  και τον ορθογώνιο σε αυτόν  $y'y$  κατά τρόπον ώστε να διέρχεται από την κορυφή  $B$  (βλ.Εικόνα 38).



**Εικόνα 38** – Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  οξυγώνιο στις κορυφές  $A$  και  $\Gamma$  του οποίου υπολογίζουμε το εμβαδόν ως  $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{A\Gamma} \times \overrightarrow{AB}\|$

Αλλά, από τον ορισμό και τις προφανείς ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{A\Gamma} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} \times (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{A\Gamma} \times \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{A\Gamma} \times \overrightarrow{OB}$$

και επειδή,  $\overrightarrow{AO}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma}$  είναι συγγραμμικά, τότε ισχύει ότι  $\overrightarrow{A\Gamma} \times \overrightarrow{AO} = 0$ .

Επομένως,

$$\overrightarrow{A\Gamma} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} \times \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{O\Gamma}) \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} \times \overrightarrow{OB}$$

Εάν, επιπλέον, οι κορυφές του τριγώνου έχουν συντεταγμένες  $A(a,0), B(0,b)$  και  $\Gamma(c,0)$  με  $a < 0, b > 0, c > 0$ , τότε εξ' ορισμού ισχύει:

$$\overrightarrow{AO} = -a\vec{i}, \overrightarrow{OG} = c\vec{i}, \overrightarrow{OB} = b\vec{j}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG} \times \overrightarrow{OB} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} = \vec{k}(-ab + bc) \\ &= \vec{k}(|a|b + bc) \end{aligned}$$

Επειδή το εμβαδόν του τυχόντος οξυγώνιου τριγώνου  $\widehat{ABG}$  ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων  $\widehat{AOB}$  και  $\widehat{OBG}$ , προκύπτει, σύμφωνα και με το πρώτο στάδιο της απόδειξης, ότι

$$\mu = E(ABG) = E(AOB) + E(OBG) \triangleq \frac{1}{2}|a|b + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}(|a|b + bc) \Leftrightarrow$$

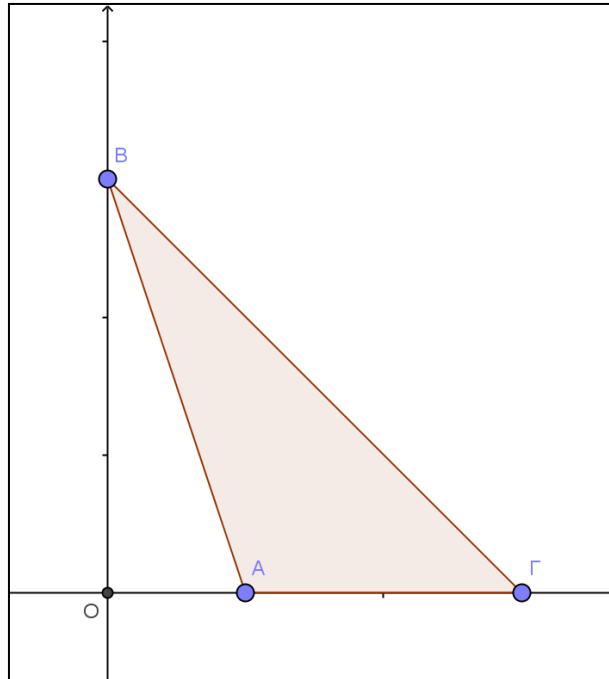
$$\mu = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AB}\| \quad (5.7-10)$$

Στην ανωτέρω απόδειξη θεωρήσαμε ότι η αρχή των αξόνων  $O$  είναι μεταξύ των κορυφών  $A$  και  $G$  του τριγώνου  $\widehat{ABG}$ , δηλαδή, ισοδυνάμως, ότι οι γωνίες  $A$  και  $G$  είναι οξείες. Εάν, μία εκ των δύο γωνιών είναι αμβλεία, πχ. η  $A$ , τότε από την κάτωθι Εικόνα 39 προκύπτει ότι  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}$ , οπότε

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}) \times (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OG} \times \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{OB} \\ &= \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c-a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} = \vec{k}(b(c-a)) \end{aligned}$$

Άρα, εκ νέου,

$$\mu \triangleq \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AG}\| \|\overrightarrow{OB}\| = \frac{1}{2}(c-a)b = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AB}\|$$



**Εικόνα 39** - Ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με αμβλεία την γωνία  $A$  του οποίου υπολογίζουμε το εμβαδόν ως  $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{A\Gamma} \times \overrightarrow{AB}\|$

Στη γενική περίπτωση, όπου το τρίγωνο  $\widehat{AB\Gamma}$  είναι τυχαία τοποθετημένο στον  $\mathbb{R}^3$  με κορυφές  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $\Gamma(x_3, y_3, z_3)$ , επειδή πάντα το εμβαδόν ενός σταθερού γεωμετρικού σχήματος είναι ανεξάρτητο από στροφή και μετατόπιση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι άξονες  $x, y, z$  είναι τοποθετημένοι όπως στις ανωτέρω εικόνες (Εικόνα 38 και Εικόνα 39).

Άρα, το συμπέρασμα

$$\mu = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{A\Gamma} \times \overrightarrow{AB}\| \equiv \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma}\|$$

ισχύει πάλι, ενώ, σε σχέση με την αρχική θέση των αξόνων, λαμβάνουμε

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} \equiv D_x \vec{i} - D_y \vec{j} + D_z \vec{k}$$

Άρα, τελικά,

$$\mu = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AF}\| = \frac{1}{2} \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2}$$

■

Ο συνδυασμός όλων των ανωτέρω επιτρέπει τώρα τον υπολογισμό του εκάστοτε όγκου ενδιαφέροντος μόνο επί τη βάσει των δεδομένων που παρέχει ο τρισδιάστατος scanner, όπως θα περιγραφεί στα επόμενα.

### Πόρισμα 5.3

Το ανωτέρω Πόρισμα 5.2 και το Λήμμα 5.3 καθιστούν τον υπολογισμό του όγκου εισχώρησης/εμπλοκής  $V_{\varepsilon\mu}$  άμεσο, συναρτήσκει μόνο των συντεταγμένων των κορυφών των τριγώνων των επιφανειών  $S_{\varepsilon\mu}^R, S_{\varepsilon\mu}^F$ .

■

### Απόδειξη

Καταρχάς, υπενθυμίζουμε ότι στον τύπο (5.7-6) (Πόρισμα 5.2) τα διανύσματα θέσης  $\vec{r}_{\varepsilon\mu,i}^R$  και  $\vec{r}_{\varepsilon\mu,i}^F$  των τριγώνων των κωρίων εισχώρησης είναι οι διανυσματικές ακτίνες των βαρυκέντρων των τριγώνων αυτών. Όμως, εάν  $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), \Gamma(x_3, y_3, z_3)$  είναι οι κορυφές ενός τυχόντος τριγώνου, τότε η διανυσματική ακτίνα του βαρυκέντρου αυτού του τριγώνου δίνεται από τη σχέση  $\vec{r} = \frac{1}{3} \left( (x_1 + x_2 + x_3)\vec{i} + (y_1 + y_2 + y_3)\vec{j} + (z_1 + z_2 + z_3)\vec{k} \right)$ , ενώ, ταυτόχρονα, σύμφωνα με το Λήμμα 5.3, το εμβαδόν του εκφράζεται άμεσα συναρτήσκει των συντεταγμένων των κορυφών του  $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$ . Συνεπώς, στον τύπο υπολογισμού (5.7-6) του όγκου εμπλοκής  $V_{\varepsilon\mu}$ , όλες οι ποσότητες εντός των δύο αθροισμάτων εκφράζονται συναρτήσκει των συντεταγμένων των κορυφών των αντίστοιχων τριγώνων, ενώ ταυτόχρονα, τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα είναι δεδομένα.

■



Αξίζει να αναφερθεί ότι ο συνολικός όγκος εμπλοκής/εισχώρησης  $V_{\varepsilon\mu}$  είναι αυστηρά ακριβής όταν δεν υπάρχει τρίγωνο της  $S_{\varepsilon\mu}^R$  που να είναι εν μέρει εντός και εν μέρει εκτός του  $\theta^F$ . Αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει και για τα τρίγωνα της  $S_{\varepsilon\mu}^F$ . Εν τούτοις, θεωρούμε ότι αν το κέντρο βάρους ενός τριγώνου της  $S_{\varepsilon\mu}^R$  είναι εντός του  $\theta^F$ , τότε όλο το τρίγωνο είναι πρακτικά εντός του σταθερού θραύσματος. Αναμέναμε εξαρχής μία τέτοια προσέγγιση να δώσει ένα λάθος στην εκτίμηση του όγκου εμπλοκής  $V_{\varepsilon\mu}$  μικρότερο από μερικά κυβικά μικρά, που λογικά δεν θα έπρεπε με κανένα τρόπο να επηρεάσει τα αποτελέσματα της μεθοδολογίας. Όλα τα πειράματα που πραγματοποιήσαμε, επιβεβαίωσαν την ορθότητα αυτής της υπόθεσης εργασίας μας. Παρ' όλα αυτά, εάν στο μέλλον διαπιστώσουμε αξιοσημείωτη απόκλιση, απλά το αναπτυχθέν σύστημα θα υπολογίσει και τις τομές των επιφανειών των δύο θραυσμάτων, ώστε να οριοθετήσουμε επακριβώς τις  $S_{\varepsilon\mu}^R$  και  $S_{\varepsilon\mu}^F$ , με αυξημένο όμως υπολογιστικό κόστος.

Όπως προαναφέρθηκε, σε κάθε περίπτωση, εφόσον εντοπισθεί εισχώρηση μεταξύ των ψηφιακών αναπαραστάσεων των θραυσμάτων  $\theta^F$  και  $\theta^R$ , αυτή υπολογίζεται και επιχειρείται πρωτότυπη διαδικασία άρσης αυτής της εισχώρησης, η οποία θα αναλυθεί διεξοδικά στην επόμενη ενότητα.

### **5.7.2 Διαδικασία άρσης της εισχώρησης/εμπλοκής μεταξύ των θραυσμάτων σε κάθε πιθανή θέση προσαρμογής με χρήση αρχών Λογισμού των Μεταβολών**

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η πρωτότυπη μέθοδος που ακολουθήθηκε για τον εντοπισμό και την πραγματοποίηση της βέλτιστης μετατόπισης που πρέπει να εφαρμοστεί στο θραύσμα  $\theta^R$ , ώστε όλα τα σημεία αυτού, ει δυνατόν, να ευρεθούν εκτός του  $\theta^F$ , διατηρώντας ταυτόχρονα τον ελάχιστο όγκο μεταξύ των θραυσμάτων στη συγκεκριμένη θέση προσαρμογής. Σε εναλλακτική διατύπωση, προφανώς, υπάρχουν, εν γένει, απείρου πλήθους παράλληλες μετατοπίσεις κατά  $\vec{\delta} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}$ , οι οποίες μπορούν να άρουν την εισχώρηση του  $\theta^F$  στο  $\theta^R$ , όμως, αναζητείται η βέλτιστη

μετατόπιση, με την έννοια ότι το μέτρο αυτής  $\|\vec{\delta}\|$  πρέπει να είναι ελάχιστο. Ο λόγος που η μετατόπιση κατά ελάχιστο  $\|\vec{\delta}\|$  είναι βέλτιστη, οφείλεται στο γεγονός ότι μία τέτοια πολύ μικρή μετατόπιση, πρακτικά, επηρεάζει σε αμελητέο βαθμό τον ελάχιστο όγκο  $V$  μεταξύ των κρημνών  $S^F$  και  $S^R$ , ο οποίος συνιστά το τελεσίδικο κριτήριο προσαρμογής των δύο θραυσμάτων στη συγκεκριμένη θέση (Ενότητα 5.8).

Επιπλέον, τονίζουμε ότι το κριτήριο αυτό παρουσιάζεται μεν τρίτο κατά σειρά για λόγους καλύτερης ροής του κειμένου της παρούσας εργασίας, αλλά στην πράξη, εφαρμόζεται μετά και από τα δύο αναγκαία κριτήρια Γεωμετρίας που θα οριστούν στις Ενότητες 5.9.2 και 5.9.4. Η συνολική ακολουθία εφαρμογής των κριτηρίων παρουσιάζεται στην Ενότητα 5.10.

Συνεπώς, με βάση τα ανωτέρω, στο παρόν κριτήριο θα τροποποιήσουμε τις επιβατικές ακτίνες  $\vec{r}_i^R$  της σχέσεως (5.7-6) κατά  $\vec{\delta} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}$ , ούτως ώστε ο όγκος εισχώρησης να μηδενιστεί και ταυτόχρονα, το μήκος της μετατόπισης  $\vec{\delta}$  να είναι ελάχιστο.

Δηλαδή, απαιτούμε:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \{(\vec{r}_i^R + \vec{\delta}) \cdot \vec{n}_i^R\} \mu_i^R + \sum_{j=1}^{\lambda} \{\vec{r}_j^F \cdot \vec{n}_j^F\} \mu_j^F = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = 3V_{\varepsilon\mu} + \delta_x \sum_{i=1}^{\kappa} (\vec{n}_i^R)_x \mu_i^R + \delta_y \sum_{i=1}^{\kappa} (\vec{n}_i^R)_y \mu_i^R + \delta_z \sum_{i=1}^{\kappa} (\vec{n}_i^R)_z \mu_i^R \quad (5.7-11)$$

Ταυτόχρονα, απαιτούμε ελαχιστοποίηση του

$$\xi = \delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2 \quad (5.7-12)$$

υπό τον περιορισμό που εκφράζει η σχέση (5.7-11). Η ελαχιστοποίηση αυτή επιδέχεται αναλυτική λύση, με χρήση κατάλληλης Lagrangian (όπως περιγράφεται στην υποενότητα 3.4.2), η οποία παρατίθεται κατωτέρω:

$$\mathcal{L} = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 + \lambda \tilde{V}_{\varepsilon\mu} \quad (5.7-13)$$

όπου  $\lambda$  είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange, ενώ ο περιορισμός συνίσταται στην απαίτηση

$$\tilde{V}_{\varepsilon\mu} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3V_{\varepsilon\mu} + \delta_x \sum_{i=1}^{\kappa} (\vec{n}_i^R)_x \mu_i^R + \delta_y \sum_{i=1}^{\kappa} (\vec{n}_i^R)_y \mu_i^R + \delta_z \sum_{i=1}^{\kappa} (\vec{n}_i^R)_z \mu_i^R = 0 \quad (5.7-14)$$

Στην προηγούμενη σχέση, όπως και στη (5.7-11),  $V_{\varepsilon\mu}$  είναι ο πραγματικός όγκος εισχώρησης, ο οποίος προέκυψε από τη διαδικασία εικονικής προσαρμογής των δύο θραυσμάτων που περιεγράφη στις ενότητες 5.4, 5.5 και 5.6, ενώ  $\tilde{V}_{\varepsilon\mu}$  είναι ο όγκος που προκύπτει μετά τη μετατόπιση του μετακινήσιμου  $\theta^R$  κατά  $\vec{\delta} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}$ , τον οποίο επιθυμούμε να παραμένει 0.

Αρχικά, λύνουμε τη σχέση περιορισμού (5.7-14) ως προς  $\delta_z$  λαμβάνοντας

$$\delta_z = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_z}^R \mu_i^R} \left[ -3V_{\varepsilon\mu} - \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_x}^R \mu_i^R \right) \delta_x - \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_y}^R \mu_i^R \right) \delta_y \right]$$

και ταυτόχρονα απαιτούμε ελαχιστοποίηση της (5.7-12):

$$\xi = \delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2 \Leftrightarrow$$

$$\xi = \delta_x^2 + \delta_y^2 + \left\{ \frac{1}{\sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_z}^R \mu_i^R} \left[ -3V_{\varepsilon\mu} - \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_x}^R \mu_i^R \right) \delta_x - \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_y}^R \mu_i^R \right) \delta_y \right] \right\}^2 \quad (5.7-15)$$

Αλλά τώρα τα  $\delta_x$  και  $\delta_y$  είναι εντελώς ανεξάρτητα. Άρα το  $\xi$  έχει ακρότατο εκεί όπου

$$\frac{\partial \xi}{\partial \delta_x} = \frac{\partial \xi}{\partial \delta_y} = 0$$

Εκτελώντας αναλυτικά τις παραγωγίσεις, καταλήγουμε στο ότι στα σημεία αυτά ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \delta_x} = 2\delta_x + \frac{2 \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_x}^R \mu_i^R}{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_z}^R \mu_i^R \right)^2} \left( 3V_{\varepsilon\mu} + \delta_x \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_x}^R \mu_i^R + \delta_y \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_y}^R \mu_i^R \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\delta_x \left[ 1 + \frac{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_x}^R \mu_i^R \right)^2}{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_z}^R \mu_i^R \right)^2} \right] + \delta_y \frac{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_x}^R \mu_i^R \right) \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_y}^R \mu_i^R \right)}{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_z}^R \mu_i^R \right)^2} = - \frac{3V_{\varepsilon\mu} \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_x}^R \mu_i^R}{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_z}^R \mu_i^R \right)^2} \quad (5.7-16)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \delta_y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\delta_x \frac{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_x}^R \mu_i^R \right) \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_y}^R \mu_i^R \right)}{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_z}^R \mu_i^R \right)^2} + \delta_y \left[ 1 + \frac{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_y}^R \mu_i^R \right)^2}{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_z}^R \mu_i^R \right)^2} \right] = - \frac{3V_{\varepsilon\mu} \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_y}^R \mu_i^R}{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_z}^R \mu_i^R \right)^2} \quad (5.7-17)$$

Επιλύοντας το ανωτέρω γραμμικό σύστημα (5.7-16), (5.7-17) δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα  $\delta_x$  και  $\delta_y$ , λαμβάνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$\delta_x = - \frac{3V_{\varepsilon\mu} \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_x}^R \mu_i^R}{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_x}^R \mu_i^R \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_y}^R \mu_i^R \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_z}^R \mu_i^R \right)^2} \quad (5.7-18)$$

$$\delta_y = - \frac{3V_{\varepsilon\mu} \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_y}^R \mu_i^R}{\left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_x}^R \mu_i^R \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_y}^R \mu_i^R \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{\kappa} \vec{n}_{i_z}^R \mu_i^R \right)^2} \quad (5.7-19)$$

Με βάση τα ανωτέρω, μπορούμε να διατυπώσουμε την κάτωθι απαίτηση/κριτήριο, η οποία ενέχει τον ρόλο ενδιάμεσου βήματος πριν από την εφαρμογή του τελεσιδίκου κριτηρίου αποδοχής ελάχιστου όγκου διακένου μεταξύ των κρημνών επαφής  $S^F$  και  $S^R$  που θα παρουσιαστεί στην επόμενη Ενότητα 5.8.

#### Απαίτηση/Κριτήριο

Εάν ο συνολικός όγκος εισχώρησης  $V_{\varepsilon\mu}$  δύο θραυσμάτων  $\theta^F$  και  $\theta^R$  σε μία συγκεκριμένη σχετική τους θέση, η οποία πληροί τα κριτήρια 1 και 2, είναι περίπου ίσος με μηδέν, τότε προχωρούμε στον έλεγχο του επόμενου τελεσιδίκου κριτηρίου σε αυτή τη σχετική θέση των δύο θραυσμάτων. Ο όρος περίπου ίσος με το μηδέν αναφέρεται διότι λόγω των ατελειών της τρισδιάστατης απεικόνισης των θραυσμάτων, δεν αποκλείουμε την πιθανότητα ύπαρξης ελάχιστης/ασήμαντης εικονικής επικάλυψης μεταξύ των δύο θραυσμάτων, της τάξεως του  $10^{-3}$ .

Αντιθέτως, εάν στη δεδομένη σχετική θέση των  $\theta^F$  και  $\theta^R$  υπάρχει μη αμελητέος όγκος εισχώρησης  $V_{εμ}$ , τότε προχωρούμε στην άρση της εισχώρησης αυτής μέσω της διαδικασίας που περιεγράφη προηγουμένως στην παρούσα Ενότητα, λαμβάνοντας μία νέα σχετική θέση των δύο θραυσμάτων, πρακτικά χωρίς εισχώρηση του ενός οστράκου στο άλλο. Σε αυτή τη νέα σχετική θέση, εφαρμόζουμε το τελεσιδικό κριτήριο που παρουσιάζεται στην επόμενη Ενότητα 5.8.

Τονίζουμε ότι εάν η διαδικασία άρσης της εμπλοκής των δύο θραυσμάτων οδηγήσει σε μία ελάχιστη μετατόπιση του θραύσματος  $\theta^R$  κατά  $\vec{\delta}$ , τέτοιο ώστε  $\|\vec{\delta}\| > 5 \text{ mm}$ , τότε θεωρούμε de facto ότι τα δύο θραύσματα δεν ταιριάζουν στη συγκεκριμένη σχετική τους θέση και δεν προχωρούμε στον έλεγχο του τελεσιδικού κριτηρίου. Η απαίτηση  $\|\vec{\delta}\| < 5 \text{ mm}$ , ώστε να προχωρήσουμε στον έλεγχο του τελεσιδικού κριτηρίου, είναι απαραίτητη για τους εξής λόγους: Πρώτον, διότι τότε το χωρίο μεταξύ των κρημνών  $S^F$  και  $S^R$  θα έχει σχεδόν με βεβαιότητα μεγάλο μη αποδεκτό όγκο. Δεύτερον, διότι μια τόσο μεγάλη μετακίνηση είναι πολύ πιθανό να αναιρέσει την ικανοποίηση των προηγούμενων κριτηρίων.

## **5.8 ΤΕΛΕΣΙΔΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΠΟΔΟΧΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΔΙΑΚΕΝΟΥ: ΤΕΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΧΗ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΔΥΟ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΚΕΝΟΥ ΠΟΥ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΟΥΣ ΚΡΗΜΝΟΥΣ ΕΠΑΦΗΣ ΑΥΤΩΝ $S^F$ ΚΑΙ $S^R$ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΑΡΣΗ ΤΗΣ ΕΜΠΛΟΚΗΣ ΤΟΥΣ**

Έστω  $\widehat{AB}$  και  $\widehat{A_1B_1}$  το ζεύγος των άνω και κάτω αλυσίδων επί του σταθερού θραύσματος  $\theta^F$ , όπως αυτές ορίστηκαν προηγουμένως. Η αλυσίδα  $\widehat{AB}$  ευρίσκεται επί του έξω (άνω) περιγράμματος ενώ η  $\widehat{A_1B_1}$  επί του έσω (κάτω) περιγράμματος του  $\theta^F$ . Ομοίως  $\widehat{\Gamma\Delta}$  είναι μία αλυσίδα επί του έξω περιγράμματος του  $\theta^R$  και  $\widehat{\Gamma_1\Delta_1}$  επί του έσω περιγράμματος.

Έχοντας εφαρμόσει όλα τα προηγούμενα βήματα έχουν επιτευχθεί τα εξής:

α) Οι αλυσίδες  $\widehat{AB}$  και  $\widehat{\Gamma\Delta}$  αφενός και  $\widehat{A_1B_1}$  και  $\widehat{\Gamma_1\Delta_1}$  αφετέρου έχουν καταρχήν προσαρμοστεί βέλτιστα κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

β) Έχει πρακτικά εξασφαλιστεί η συνέχεια των εφαπτομένων επιπέδων στις άνω επιφάνειες των δύο θραυσμάτων στα κατέναντι σημεία αυτών, προκαλώντας ελάχιστη μεταβολή του λάθους προσαρμογής που υπολογίστηκε στο (α).

γ) Έχει ικανοποιηθεί ένα πρώτο αναγκαίο κριτήριο Γεωμετρίας που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια στην Ενότητα 5.9.2.

δ) Έχει ικανοποιηθεί ένα δεύτερο αναγκαίο κριτήριο Γεωμετρίας που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια στην Ενότητα 5.9.4.

και ε) Έχουμε αποπλέξει τα δύο θραύσματα, εφόσον η σχετική τους θέση το απαιτούσε, με τη διαδικασία που περιεγράφη στην προηγούμενη Ενότητα 5.7.2, δηλαδή, πρακτικά, το ένα θραύσμα δεν εισχωρεί στο άλλο.

Στο σημείο αυτό επαναλαμβάνουμε ότι η αλληλουκία εφαρμογής όλων των βημάτων ελέγχου προσαρμογής δύο θραυσμάτων παρουσιάζεται αναλυτικά στην Ενότητα 5.10.

Όσον αφορά το τρέχον κριτήριο, με χρήση του Λήμματος της Ενότητας 5.7.1 (Λήμμα 5.2) και της ψηφιακής του εκδοχής που προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 5.2, υπολογίζεται ο όγκος  $V$  του διακένου μεταξύ των θραυσμάτων  $\theta^F$  και  $\theta^R$ , δηλαδή, ο όγκος που περικλείεται από τους κρημνούς επαφής  $S^F$  και  $S^R$  που ορίστηκαν προηγουμένως στην Ενότητα 5.3 και τις σχετικές πολυεπίπεδες συνοριακές επιφάνειες, που ονομάζουμε «παραπέτασμα» και αναλύονται διεξοδικά κατωτέρω.

Στο σημείο αυτό, θα δώσουμε αυστηρό ορισμό του χωρίου (διακένου)  $X_{\text{διακ}}$  που μεσολαβεί μεταξύ των δύο θραυσμάτων για τα ζεύγη αλυσίδων  $\widehat{AB}$  και  $\widehat{\Gamma\Delta}$  αφενός και  $\widehat{A_1B_1}$  και  $\widehat{\Gamma_1\Delta_1}$  αφετέρου στη συγκεκριμένη θέση προσαρμογής που ελέγχεται.

Όντως, θεωρούμε τα επίπεδα  $\varepsilon_{\alpha\rho\chi\eta\varsigma}^F$  και  $\varepsilon_{\tau\acute{\epsilon}\lambda\omicron\upsilon\varsigma}^F$  που μαζί με το αντίστοιχο ζεύγος αλυσίδων ορίζουν τον κρημό  $S^F$  του σταθερού θραύσματος στην τρέχουσα θέση (Ενότητα 5.3). Ομοίως, θεωρούμε και τα επίπεδα  $\varepsilon_{\alpha\rho\chi\eta\varsigma}^R$  και  $\varepsilon_{\tau\acute{\epsilon}\lambda\omicron\upsilon\varsigma}^R$  που μαζί με το αντίστοιχο ζεύγος αλυσίδων ορίζουν τον κρημό  $S^R$  του μετακινήσιμου θραύσματος στην τρέχουσα θέση σύγκρισης. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι τα  $\varepsilon_{\alpha\rho\chi\eta\varsigma}^R$  και  $\varepsilon_{\tau\acute{\epsilon}\lambda\omicron\upsilon\varsigma}^R$  ακολουθούν τον κρημό  $S^R$  ως στερεό σώμα, δηλαδή το μετακινήσιμο θραύσμα,

σε κάθε στροφή και παράλληλη μετατόπιση που επιτελούμε στην προσπάθεια εντοπισμού της βέλτιστης σχετικής θέσης προσαρμογής των  $S^F$  και  $S^R$ .

Έστω  $\Sigma_1^{\text{up}}, \Sigma_2^{\text{up}}, \dots, \Sigma_N^{\text{up}}$  τα σημεία της άνω σταθερής αλυσίδας όπου το  $A \equiv \Sigma_1^{\text{up}}$  και  $B \equiv \Sigma_N^{\text{up}}$ . Έστω επίσης  $K_1^{\text{up}}, K_2^{\text{up}}, \dots, K_N^{\text{up}}$  τα σημεία της άνω μετακινήσιμης αλυσίδας με  $\Gamma \equiv K_1^{\text{up}}$  και  $\Delta \equiv K_N^{\text{up}}$  και  $M_1^{\text{up}}, M_2^{\text{up}}, \dots, M_{N-1}^{\text{up}}$  τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων  $\Sigma_1^{\text{up}} K_1^{\text{up}}, \Sigma_2^{\text{up}} K_2^{\text{up}}, \dots, \Sigma_N^{\text{up}} K_N^{\text{up}}$  αντίστοιχα. Αντιστοίχως, ορίζονται τα  $\Sigma_1^{\text{low}}, \Sigma_2^{\text{low}}, \dots, \Sigma_N^{\text{low}}$  και  $K_1^{\text{low}}, K_2^{\text{low}}, \dots, K_N^{\text{low}}$  σημεία στις κάτω αλυσίδες, στη σταθερή και μετακινήσιμη αντίστοιχα.

Επιπλέον, ορίζουμε την ακολουθία σημείων  $M_1^{\text{low}}, M_2^{\text{low}}, \dots, M_{N-1}^{\text{low}}$  ως εξής: το σημείο  $M_1^{\text{low}}$  είναι το κέντρο βάρους του τρισδιάστατου τετραπλεύρου  $\Sigma_1^{\text{low}} \Sigma_2^{\text{low}} K_1^{\text{low}} K_2^{\text{low}}$ , ομοίως το σημείο  $M_2^{\text{low}}$  είναι το κέντρο βάρους του τρισδιάστατου τετραπλεύρου  $\Sigma_2^{\text{low}} \Sigma_3^{\text{low}} K_2^{\text{low}} K_3^{\text{low}}$ , κοκ. Θεωρούμε την ακολουθία επιπέδων  $\varepsilon_i^{\Pi}, i = 1, 2, \dots, N - 1$  όπου το επίπεδο  $\varepsilon_1^{\Pi}$  διέρχεται από το ευθύγραμμο τμήμα  $M_1^{\text{up}} M_2^{\text{up}}$  και το σημείο  $M_1^{\text{low}}$ , το  $\varepsilon_2^{\Pi}$  διέρχεται από το ευθύγραμμο τμήμα  $M_2^{\text{up}} M_3^{\text{up}}$  και το σημείο  $M_2^{\text{low}}$ , κοκ. Είναι ευνόητο ότι εάν δύο οποιαδήποτε σημεία  $K_i^{\text{up}}$  και  $\Sigma_i^{\text{up}}$  συμπίπτουν, τότε το ρόλο του  $M_i^{\text{up}}$  τον παίζει το ίδιο το  $\Sigma_i^{\text{up}}$ . Με εντελώς ανάλογο τρόπο, αντιμετωπίζεται και η περίπτωση όπου δύο ή περισσότερα σημεία  $K_i^{\text{low}}$  και  $\Sigma_i^{\text{low}}$  συμπίπτουν, όπου τότε το σημείο  $M_i^{\text{low}}$  είναι το βαρύκεντρο του αντίστοιχου τριγώνου ή το μέσο του αντίστοιχου ευθυγράμμου τμήματος, εφόσον δύο διαδοχικά ζεύγη σημείων ( $\Sigma_i^{\text{low}} K_i^{\text{low}}$ ) συμπίπτουν.

Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε μία ακολουθία επιπέδων, τα οποία συμπίπτουν ή τέμνονται διαδοχικά, δημιουργώντας μία πολυεδρική επιφάνεια που αποκαλούμε «παραπέτασμα» των  $S^F$  και  $S^R$  στη συγκεκριμένη θέση σύγκρισης. Υπενθυμίζουμε ότι η πιθανή εισχώρηση του ενός θραύσματος εντός του άλλου έχει πλήρως αρθεί σύμφωνα με τη διαδικασία που περιεγράφη στην Ενότητα 5.7.2. Επίσης, θα θέλαμε να τονίσουμε ότι εάν η εφαρμογή συμπεριλαμβάνει επιφάνειες θραύσης με μεγάλες μεταβολές της καμπυλότητας και της κυρτότητας, μπορούμε να ορίσουμε χωριστά παραπετάσματα, ένα για τον καθορισμό της οροφής και ένα για τον καθορισμό του δαπέδου, χωρίς να αλλάξει ούτε κατ' ελάχιστον η ανάλυση που ακολουθεί. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή όμως, επειδή το πάχος των οστράκων είναι μικρό και ο

τρόπος θραύσης των αγγείων ακολουθεί συγκεκριμένες νομοτέλειες, η επιλογή του ενιαίου παραπέτασματος που αναφέρθηκε φαίνεται να λειτουργεί πάρα πολύ ικανοποιητικά.

Εν συνεχεία, για το σταθερό θραύσμα θεωρούμε πρώτα το επίπεδο  $\varepsilon_{\sigma\rho 1}^F$ , το οποίο διέρχεται από το ευθύγραμμο τμήμα  $\Sigma_1^{\text{up}}\Sigma_2^{\text{up}}$  και είναι κάθετο στο  $\vec{\xi}_1^F$ , όπου το  $\vec{\xi}_1^F$  είναι το μοναδιαίο ομαλοποιημένο κάθετο διάνυσμα στην άνω επιφάνεια του  $\theta^F$  στο σημείο  $\Sigma_1^{\text{up}}$  (Ενότητα 5.6). Ακολούθως, θεωρούμε το επίπεδο  $\varepsilon_{\sigma\rho 2}^F$  που διέρχεται από το ευθύγραμμο τμήμα  $\Sigma_2^{\text{up}}\Sigma_3^{\text{up}}$  και είναι κάθετο στο  $\vec{\xi}_2^F$ , δηλαδή, το μοναδιαίο ομαλοποιημένο κάθετο διάνυσμα στο σημείο  $\Sigma_2^{\text{up}}$  κοκ. Εκ νέου, δύο τέτοια διαδοχικά επίπεδα ή τέμνονται ή συμπίπτουν. Το σύνολο αυτών των επιπέδων ορίζει πάλι μία πολυεδρική επιφάνεια την οποία ονομάζουμε «οροφή του σταθερού κρημνού» και τη συμβολίζουμε ως  $\varepsilon_{\sigma\rho}^F$ .

Με όμοιο τρόπο, ορίζεται το δάπεδο του σταθερού κρημνού  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi}^F$ , αλλά και η οροφή και το δάπεδο  $\varepsilon_{\sigma\rho}^R$  και  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi}^R$  του μετακινήσιμου θραύσματος.

Στην ιδανική περίπτωση που οι κρημνοί  $S^F$  και  $S^R$  ταιριάζουν τέλεια, όπως και στην αρχική τους θέση πριν τη θραύση, τα  $\varepsilon_{\sigma\rho}^F$  και  $\varepsilon_{\sigma\rho}^R$  αφενός, ως και τα  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi}^F$  και  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi}^R$  αντίστοιχα, θα ταυτίζονται. Στην περίπτωση αυτή, θα ταυτίζονται και τα επίπεδα  $\varepsilon_{\alpha\rho\chi\eta\varsigma}$  και  $\varepsilon_{\tau\acute{\epsilon}\lambda\omicron\upsilon\varsigma}$ . Στην πράξη, είναι σχεδόν αναπόφευκτο να εμφανίζεται μικρή διαφοροποίηση των αντίστοιχων ζευγών επιπέδων, γι' αυτό χρησιμοποιήσαμε και την πολυεδρική επιφάνεια που ονομάσαμε παραπέτασμα.

Θεωρούμε ως συνολική οροφή του διακένου μεταξύ των  $S^F$  και  $S^R$ , την πολυεπίπεδη-πολυεδρική επιφάνεια  $\varepsilon_{\sigma\rho}^{FR}$ , η οποία ορίζεται από την  $\varepsilon_{\sigma\rho}^F$ , το παραπέτασμα και την  $\varepsilon_{\sigma\rho}^R$ . Τονίζουμε ότι, όσον αφορά την οροφή, το παραπέτασμα σε κάθε επίπεδη έδρα του, εντοπίζεται μεταξύ των σημείων με την τοπικά υψηλότερη τιμή των τομών αυτής με τις  $\varepsilon_{\sigma\rho}^F$  και  $\varepsilon_{\sigma\rho}^R$  και των σημείων με τις τοπικά ελάχιστες τιμές αυτών των τομών.

Αντίστοιχα, θεωρούμε ως συνολικό δάπεδο του διακένου μεταξύ των  $S^F$  και  $S^R$ , την πολυεπίπεδη-πολυεδρική επιφάνεια  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi}^{FR}$ , η οποία ορίζεται από την  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi}^F$ , το παραπέτασμα και την  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi}^R$ . Τονίζουμε ότι, όσον αφορά το δάπεδο, το παραπέτασμα σε



κάθε επίπεδη έδρα του, εντοπίζεται μεταξύ των σημείων με την τοπικά υψηλότερη τιμή των τομών αυτής με τις  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi}^F$  και  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi}^R$  και των σημείων με τις τοπικά ελάχιστες τιμές αυτών των τομών.

Επομένως, θεωρούμε το χωρίο (διάκενο)  $X_{\delta\alpha\kappa}$  που "εγκλωβίζουν" οι επιφάνειες επαφής, ως το σύνολο των σημείων του  $\mathbb{R}^3$  που φράσσεται από την κλειστή προσανατολίσιμη, τμηματικώς συνεχώς παραγωγίσιμη, επιφάνεια

$$S^X = S_F \cup S_R \cup \varepsilon_{\alpha\rho\chi\acute{\iota}\varsigma} \cup \varepsilon_{\tau\acute{\epsilon}\lambda\omicron\upsilon\varsigma} \cup \varepsilon_{\omicron\rho}^{FR} \cup \varepsilon_{\delta\alpha\pi}^{FR} \quad (5.8-1)$$

Εύλογα θεωρούμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο  $\varepsilon_{\omicron\rho 1}^F$  επεκτείνεται έως ότου συναντήσει το  $\varepsilon_{\alpha\rho\chi\acute{\iota}\varsigma}^F$ , ώστε να «κλείσει» συνολικά η οροφή από αυτήν την πλευρά. Ομοίως, το εφαπτόμενο επίπεδο  $\varepsilon_{\omicron\rho 1}^R$  επεκτείνεται έως ότου συναντήσει το  $\varepsilon_{\alpha\rho\chi\acute{\iota}\varsigma}^R$ , αλλά και το εφαπτόμενο επίπεδο  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi N-1}^F$  ώστε να συναντήσει την  $\varepsilon_{\tau\acute{\epsilon}\lambda\omicron\upsilon\varsigma}^F$ , καθώς και το επίπεδο  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi N-1}^R$  μέχρι να συναντήσει το  $\varepsilon_{\tau\acute{\epsilon}\lambda\omicron\upsilon\varsigma}^R$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο, η επιφάνεια  $S^X$  είναι κλειστή και ακολουθεί ικανοποιητικά πιστά τις ιδιομορφίες των  $S^F$  και  $S^R$  που επέβαλε η θραύση.

Με βάση τα ανωτέρω, μπορούμε να διατυπώσουμε το τελεσίδικο κριτήριο ύπαρξης αποδεκτής προσαρμογής σε μία σχετική θέση των οστράκων  $\theta^F$  και  $\theta^R$ .

### Τελεσίδικο κριτήριο

Το τελεσίδικο κριτήριο ότι τα δύο θραύσματα ταιριάζουν για το συγκεκριμένο μήκος σύγκρισης και στις θέσεις  $A$  και  $A_1$  του  $\theta^F$  αφενός και  $\Gamma$  και  $\Gamma_1$  του  $\theta^R$  αφετέρου, είναι η απαίτηση ο υπολογιζόμενος σε αυτό το βήμα όγκος  $V$  του χωρίου  $X_{\delta\alpha\kappa}$ , όπως αυτό καθορίζεται από τη συννοριακή του επιφάνεια  $S^X$  που ορίστηκε στην (5.8-1), να είναι μικρότερος ή ίσος από έναν όγκο κατωφλίου, έστω  $V_{threshold}$ . Η ακριβής τιμή του κατωφλίου  $V_{threshold}$  εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως:

- 1) το επιλεγέν μήκος σύγκρισης
- 2) το ύψος των προς σύγκριση θραυσμάτων και

3) το βαθμό της φθοράς που έχουν υποστεί τα προς προσαρμογή θραύσματα λόγω της θραύσης αυτής καθ' εαυτής, καθώς και του χρόνου που έχει μεσολαβήσει.

Οι παράγοντες 1 και 2 μπορούν εύκολα να ενσωματωθούν σε απλές γεωμετρικές θεωρήσεις. Ο παράγοντας 3 έχει ένα βαθμό τυχαιότητας, τον οποίον προσπαθήσαμε να περιορίσουμε σημαντικά, εκμεταλλευόμενοι τη σχετική εμπειρία των αρχαιολόγων και συντηρητών όσον αφορά τη μέση απόσταση δύο οστράκων/θραυσμάτων, όταν αυτά θεωρείται ότι ταιριάζουν καλά.

Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να τονίσουμε το εξής:

Εάν ο όγκος του χωρίου  $X_{\delta\iota\alpha\kappa}$  που ορίστηκε προηγουμένως ήταν ίσος με μηδέν, τότε θα είχαμε την ιδανική περίπτωση προσαρμογής, όπου οι κρημνοί επαφής  $S^F$  και  $S^R$  θα συνέπιπταν πλήρως. Σε αυτή την περίπτωση, όλα τα κατέναντι σημεία των  $S^F$  και  $S^R$  θα συνέπιπταν επίσης και επιπλέον, τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα επί των  $S^F$  και  $S^R$  θα ήταν αντίθετα σε κάθε ζεύγος κατέναντι σημείων. Δηλαδή, στην ιδανική αυτή περίπτωση, το τυχόν τρίγωνο  $T_i^F$  του  $S^F$  θα συνέπιπτε με το κατέναντι  $T_i^R$  του  $S^R$ , ενώ για τα κάθετα επ' αυτών μοναδιαία διανύσματα θα ίσχυε  $\vec{n}_i^F = -\vec{n}_i^R$ .

Στην πράξη, η πιθανότητα εμφάνισης μίας τέτοιας ιδανικής σύμπτωσης είναι αμελητέα. Εντούτοις, είναι εύλογο να αναμένει κανείς ότι εάν ο όγκος  $V$  του χωρίου  $X_{\delta\iota\alpha\kappa}$  είναι πάντα φραγμένος από ένα κατώφλι  $V_{threshold}$ , τότε η συνολική διαφοροποίηση των  $\vec{n}_i^F$  αφενός και  $\vec{n}_i^R$  αφετέρου δεν μπορεί να υπερβαίνει και αυτή ένα κατώφλι που εξαρτάται άμεσα από το  $V_{threshold}$ . Στην αμέσως επόμενη ενότητα θα παρουσιαστεί η σχέση αυτών των δύο κατωφλίων που θα οδηγήσει σε δύο νέα απορριπτικά κριτήρια.

## **5.9 ΈΝΑ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΖΕΥΓΟΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΑΝΑΓΚΑΙΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΠΟΔΟΧΗΣ ΜΙΑΣ ΘΕΣΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΔΥΟ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ**

Στο τέλος της προηγούμενης Ενότητας 5.8, ουσιαστικά διατυπώσαμε την εύλογη παρατήρηση ότι δεν είναι δυνατόν το χωρίο που πρακτικά ορίζουν οι δύο κρημνοί επαφής  $S^F$  και  $S^R$  να έχει μικρό όγκο, φραγμένο από ένα μικρό  $V_{threshold}$ , ενώ

ταυτόχρονα, οι γεωμετρικές ιδιότητες των επιφανειών  $S^F$  και  $S^R$  διαφέρουν αισθητά. Αυτή η σημαντική παρατήρηση, διατυπωμένη αντίστροφα, συνιστά ένα άλλο σύνολο ισχυρών αναγκαίων κριτηρίων αποδοχής μιας πιθανής θέσης προσαρμογής δύο θραυσμάτων.

Πράγματι, ας υποθεθεί ότι αποδεικνύουμε ότι η απαίτηση  $V \leq V_{threshold}$  επιβάλλει τη συνολική γωνιακή απομάκρυνση των (ομαλοποιημένων) μοναδιαίων καθέτων διανυσμάτων  $\vec{\xi}_i^F$  και  $\vec{\xi}_i^R$  που αντιστοιχούν σε κατέναντι σημεία, να μην υπερβαίνει ένα κατώφλι  $\Delta\Omega_{threshold}$ . Επομένως, έστω ότι επιθυμούμε να ελέγξουμε την ύπαρξη ή μη αποδεκτής προσαρμογής των  $\theta^F$  και  $\theta^R$  επί των ζευγών αλυσίδων  $(AB, A_1B_1)$  επί του  $\theta^F$  και  $(\Gamma\Delta, \Gamma_1\Delta_1)$  επί του  $\theta^R$ . Σε αυτή την περίπτωση, εάν το άθροισμα των γωνιακών αποκλίσεων των μοναδιαίων καθέτων διανυσμάτων  $\vec{\xi}_i^F$  αφενός και των  $\vec{\xi}_i^R$  αφετέρου έχουν απόλυτη διαφορά μεγαλύτερη από το κατώφλι  $\Delta\Omega_{threshold}$ , τότε μπορούμε αμέσως να αποφανθούμε με ασφάλεια ότι η συγκεκριμένη θέση προσαρμογής δεν είναι αποδεκτή. Συνεπώς, δεν είναι απαραίτητο, ούτε ορθό, να προχωρήσουμε στον έλεγχο των υπολοίπων κριτηρίων που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες Ενότητες 5.5, 5.6, 5.7 και 5.8.

Για το λόγο αυτό, τα κριτήρια που θα παρουσιαστούν στην παρούσα ενότητα ελέγχονται πριν από τα κριτήρια που σχετίζονται με τον όγκο μεταξύ των δύο κρημνών επαφής  $S^F$  και  $S^R$  (Ενότητες 5.7 και 5.8) και ενδεχομένως πριν και από τα κριτήρια που αφορούν την προσαρμογή των σταθερών και μετακινήσιμων αλυσίδων, ως και τη συνέχεια των εφαπτομένων επιπέδων στα σημεία των άνω αλυσίδων επαφής (Ενότητες 5.5 και 5.6). Τα δύο αυτά αναγκαία κριτήρια βασίζονται σε έννοιες και θεωρήματα της Θεωρίας Μεταβολών, τα οποία παρουσιάζονται για πρώτη φορά στα αμέσως επόμενα.

### **5.9.1 Διατύπωση των εξισώσεων Euler-Lagrange για τη μέγιστη δυνατή διαφορά της Γεωμετρίας δύο κατέναντι κρημνών επαφής $S^F$ και $S^R$ υπό τον περιορισμό ο μεταξύ τους όγκος να είναι μικρότερος ενός κατωφλίου**

Έστω η επιφάνεια  $\mathcal{E}$  με επιβατική ακτίνα  $\vec{r}(u, v)$ , όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές  $u, v$  που περιγράφουν την επιφάνεια είναι ορισμένες σε ένα χωρίο  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Έστω, επίσης,  $\vec{n}$  το κάθετο σε αυτήν διάνυσμα που ορίζεται ως

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \quad (5.9-1)$$

και

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \quad (5.9-2)$$

το μοναδιαίο κάθετο επ' αυτής στο σημείο  $(u, v)$ .

Ορίζουμε τη Lagrangian-ενεργειακό

$$\mathcal{L}(\vec{n}, \vec{r}) \triangleq \varphi(\vec{\xi})|\vec{n}| + 2\lambda \vec{n} \cdot \vec{r} \quad (5.9-3)$$

όπου  $\varphi(\vec{\xi})$  είναι κατάλληλη συνάρτηση, η οποία θα επιλεγεί αργότερα και περιγράφει τη Γεωμετρία των  $S^F$  και  $S^R$  επί τη βάσει γωνιών των μοναδιαίων καθέτων επ' αυτών διανυσμάτων.

Σημειώνουμε εκ νέου ότι η επιβατική ακτίνα  $\vec{r}(u, v)$  είναι αφεαυτής ένα διάνυσμα με συντεταγμένες  $(r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$  και ότι χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς:

$$\begin{aligned} r_{1u} &\triangleq \frac{\partial r_1}{\partial u}, & r_{2u} &\triangleq \frac{\partial r_2}{\partial u}, & r_{3u} &\triangleq \frac{\partial r_3}{\partial u} \\ r_{1v} &\triangleq \frac{\partial r_1}{\partial v}, & r_{2v} &\triangleq \frac{\partial r_2}{\partial v}, & r_{3v} &\triangleq \frac{\partial r_3}{\partial v} \end{aligned} \quad (5.9-4)$$

### Πρόταση 5.1

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς (5.9-4) και τη Lagrangian  $\mathcal{L}(\vec{n}, \vec{r})$  του ορισμού (5.9-3), οι εξισώσεις Euler-Lagrange γράφονται στη μορφή

$$\nabla_{(u,v)} \cdot \left( \lambda(r_3 r_{2v} - r_2 r_{3v}) + r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2}, \lambda(r_2 r_{3u} - r_3 r_{2u}) + r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \lambda(r_1 r_{3v} - r_3 r_{1v}) + r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_{1v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3}, \lambda(r_3 r_{1u} - r_1 r_{3u}) + r_{1u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) = 0 \\ \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \lambda(r_2 r_{1v} - r_1 r_{2v}) + r_{1v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1}, \lambda(r_1 r_{2u} - r_2 r_{1u}) + r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right. \\ \left. - r_{1u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.9-5)$$

### Απόδειξη

Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στην Ενότητα 3.4.5 και τις εξισώσεις (3.4-12), οι εξισώσεις Euler-Lagrange που υπολογίζουν τα στάσιμα σημεία του

$$I = \iint_{\mathcal{E}} \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) dudv$$

και δεδομένου ότι τα  $\vec{n}$  και  $\vec{\xi}$  είναι συναρτήσεις των  $\vec{r}_u$  και  $\vec{r}_v$  είναι οι κάτωθι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1v}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{2u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{2v}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_3} - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{3u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{3v}} \right) = 0$$

Με βάση τα προηγούμενα, για την 1<sup>η</sup> εξίσωση Lagrange έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} = 2\lambda n_1$$

ενώ, εφαρμόζοντας τον κανόνα αλληλουχίας, λαμβάνουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1u}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial r_{1u}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial r_{1u}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \frac{\partial n_3}{\partial r_{1u}}$$

και αντίστοιχα,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1v}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial r_{1v}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial r_{1v}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \frac{\partial n_3}{\partial r_{1v}}$$

Αλλά, ισχύει ότι

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{1u} & r_{2u} & r_{3u} \\ r_{1v} & r_{2v} & r_{3v} \end{vmatrix} \equiv \vec{i}(r_{2u}r_{3v} - r_{3u}r_{2v}) - \vec{j}(r_{1u}r_{3v} - r_{3u}r_{1v}) + \vec{k}(r_{1u}r_{2v} - r_{2u}r_{1v})$$

Άρα, είναι:

$$\frac{\partial n_1}{\partial r_{1u}} = 0 \quad \frac{\partial n_2}{\partial r_{1u}} = -r_{3v} \quad \frac{\partial n_3}{\partial r_{1u}} = r_{2v}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial r_{2u}} = r_{3v} \quad \frac{\partial n_2}{\partial r_{2u}} = 0 \quad \frac{\partial n_3}{\partial r_{2u}} = -r_{1v}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial r_{3u}} = -r_{2v} \quad \frac{\partial n_2}{\partial r_{3u}} = r_{1v} \quad \frac{\partial n_3}{\partial r_{3u}} = 0$$

και αντίστοιχα,

$$\frac{\partial n_1}{\partial r_{1v}} = 0 \quad \frac{\partial n_2}{\partial r_{1v}} = r_{3u} \quad \frac{\partial n_3}{\partial r_{1v}} = -r_{2u}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial r_{2v}} = -r_{3u} \quad \frac{\partial n_2}{\partial r_{2v}} = 0 \quad \frac{\partial n_3}{\partial r_{2v}} = r_{1u}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial r_{3v}} = r_{2u} \quad \frac{\partial n_2}{\partial r_{3v}} = -r_{1u} \quad \frac{\partial n_3}{\partial r_{3v}} = 0$$

Επομένως, ισχύει:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1u}} = \left( -r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} + r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right)$$

και

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1v}} = \left( r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right)$$

Συνεπώς, η 1η εξίσωση του Euler-Lagrange γράφεται ως

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{1v}} \right) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda n_1 - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( -r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} + r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3}, r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) = 0$$

Όμως,  $n_1 = \frac{1}{2} \nabla_{(u,v)} \cdot (r_2 r_{3v} - r_3 r_{2v}, r_3 r_{2u} - r_2 r_{3u})$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
2\lambda n_1 - \nabla_{(u,v)} \cdot \left( -r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} + r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3}, r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) &= 0 \Leftrightarrow \\
\nabla_{(u,v)} \cdot \left( \lambda(r_2 r_{3v} - r_3 r_{2v}) + r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3}, \lambda(r_3 r_{2u} - r_2 r_{3u}) - r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} + r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) &= 0 \Leftrightarrow \\
\nabla_{(u,v)} \cdot \left( \lambda(r_3 r_{2v} - r_2 r_{3v}) + r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2}, \lambda(r_2 r_{3u} - r_3 r_{2u}) + r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) &= 0
\end{aligned}$$

Ομοίως, αποδεικνύονται οι τύποι (5.9-5) για τις δύο άλλες εξισώσεις Euler-Lagrange. ■

Συμβολίζουμε

$$\vec{\Pi}^v \triangleq (\Pi_{1,1}, \Pi_{2,1}, \Pi_{3,1}) \quad (5.9-6)$$

και

$$\vec{\Pi}^u \triangleq (\Pi_{1,2}, \Pi_{2,2}, \Pi_{3,2}) \quad (5.9-7)$$

όπου

$$\Pi_{1,1} = \lambda(r_3 r_{2v} - r_2 r_{3v}) + r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2}$$

$$\Pi_{1,2} = \lambda(r_2 r_{3u} - r_3 r_{2u}) + r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3}$$

$$\Pi_{2,1} = \lambda(r_1 r_{3v} - r_3 r_{1v}) + r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_{1v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3}$$

$$\Pi_{2,2} = \lambda(r_3 r_{1u} - r_1 r_{3u}) + r_{1u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1}$$

$$\Pi_{3,1} = \lambda(r_2 r_{1v} - r_1 r_{2v}) + r_{1v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1}$$

$$\Pi_{3,2} = \lambda(r_1 r_{2u} - r_2 r_{1u}) + r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_{1u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2}$$

ενώ, επιπλέον θέτουμε

$$\begin{aligned}\vec{P}_1 &= (P_{1,1}, P_{1,2}) \\ \vec{P}_2 &= (P_{2,1}, P_{2,2}) \\ \vec{P}_3 &= (P_{3,1}, P_{3,2})\end{aligned}\tag{5.9-8}$$

Οπότε, οι τρεις εξισώσεις Euler-Lagrange γράφονται στη μορφή

$$\begin{aligned}\nabla_{(u,v)} \cdot \vec{P}_1 &= 0 \\ \nabla_{(u,v)} \cdot \vec{P}_2 &= 0 \\ \nabla_{(u,v)} \cdot \vec{P}_3 &= 0\end{aligned}\tag{5.9-9}$$

### 5.9.2 Το πρώτο σημαντικό, αναγκαίο κριτήριο διαφοράς Γεωμετρίας μέσω του προσδιορισμού του πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda$ για τον έλεγχο της προσαρμογής δύο θραυσμάτων σε μία θέση

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange της μορφής των σχέσεων (5.9-9)

$$\begin{aligned}\nabla_{(u,v)} \cdot \vec{P}_1 &= 0 \\ \nabla_{(u,v)} \cdot \vec{P}_2 &= 0 \\ \nabla_{(u,v)} \cdot \vec{P}_3 &= 0\end{aligned}$$

Από την 1<sup>η</sup> εξίσωση Euler-Lagrange έχουμε

$$\nabla_{(u,v)} \cdot \vec{P}_1 = 0$$

Ολοκληρώνοντας πάνω στην επιφάνεια  $\mathcal{E}_R$ , η οποία, όπως θα αναλυθεί διεξοδικότερα στο τέλος της παρούσας ενότητας, είναι μία κατάλληλη εκδοχή του μετακινήσιμου κρημονού του θραύσματος  $\theta^R$  σε μία συγκεκριμένη θέση, έχουμε:

$$\iint_{\mathcal{E}_R} \nabla_{(u,v)} \cdot \vec{P}_1 \, dudv = 0$$

Με εφαρμογή του Θεωρήματος Green (Ενότητα 3.3) έχουμε:



$$\begin{aligned}
& \oint_{\partial \varepsilon_R} \vec{\Pi}_1 \cdot (dv, -du) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\partial \varepsilon_R} \Pi_{1,1} dv - \Pi_{1,2} du = 0 \Leftrightarrow \\
& \oint_{\partial \varepsilon_R} \left( \lambda(r_3 r_{2v} - r_2 r_{3v}) + r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) dv - \left( \lambda(r_2 r_{3u} - r_3 r_{2u}) + r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) du = 0 \\
& \Leftrightarrow \\
& \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ \lambda((r_3 r_{2v} - r_2 r_{3v}) dv - (r_2 r_{3u} - r_3 r_{2u}) du) + \left( r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) dv \right. \\
& \quad \left. - \left( r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) du \right\} = 0 \Leftrightarrow \\
& \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ \lambda(-r_2(r_{3u} du + r_{3v} dv) + r_3(r_{2u} du + r_{2v} dv)) + (r_{2v} dv + r_{2u} du) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right. \\
& \quad \left. - (r_{3u} du + r_{3v} dv) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right\} = 0 \Leftrightarrow \\
& \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ \lambda(-r_2 dr_3 + r_3 dr_2) + dr_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - dr_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right\} = 0 \Leftrightarrow \\
& \lambda \oint_{\partial \varepsilon_R} (r_3 dr_2 - r_2 dr_3) = - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dr_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - dr_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right\}
\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, αποδεικνύουμε ότι για τις δύο άλλες εξισώσεις Euler-Lagrange, ισχύει:

$$\lambda \oint_{\partial \varepsilon_R} (r_1 dr_3 - r_3 dr_1) = - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dr_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - dr_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right\}$$

και

$$\lambda \oint_{\partial \varepsilon_R} (r_2 dr_1 - r_1 dr_2) = - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dr_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - dr_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right\} \quad (5.9-10)$$

Στο Λήμμα που ακολουθεί θα αποδείξουμε ότι οι 3 εξισώσεις αυτές είναι ανεξάρτητες μετατόπισης.

Λήμμα 5.4: Ανεξαρτησία ως προς παράλληλη μετατόπιση των 3 εξισώσεων (5.9-10)

Έστω ότι πραγματοποιούμε παράλληλη μετατόπιση κατά  $\vec{\Delta}$ , σε όλα τα σημεία του θραύσματος  $\theta^R$ . Δηλαδή, εάν  $\vec{r}^R$  είναι η επιβατική ακτίνα τυχόντος σημείου του θραύσματος  $\theta^R$  στο οικείο σύστημα αναφοράς, τότε κατά την παράλληλη μετατόπιση, το σημείο αυτό μεταβαίνει στο  $\vec{r} = \vec{\Delta} + \vec{r}^R$ , όπου το  $\vec{\Delta}$  είναι κοινό για όλα τα σημεία του  $\theta^R$ . Υπό τον μετασχηματισμό αυτόν, οι εξισώσεις (5.9-10) παραμένουν αναλλοίωτες.

### Απόδειξη

Έστω ότι για την αρχική θέση του  $\partial\mathcal{E}_R$  στο δικό του σύστημα συντεταγμένων, η διανυσματική ακτίνα κάθε σημείου του είναι  $\vec{r}^R = (r_1^R, r_2^R, r_3^R)$ , όπου εννοείται ότι όλες οι συνιστώσες του  $\vec{r}^R$  εξαρτώνται από δύο παραμέτρους  $(u, v)$  και οι οποίες είναι πλήρως γνωστές διότι στο μετακινήσιμο θραύσμα έχουμε ορίσει ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το σημείο  $O^R$ .

Τότε, η πρώτη εξίσωση των σχέσεων (5.9-10) πριν την μετατόπιση γράφεται:

$$\lambda \oint_{\partial\mathcal{E}_R} (r_3^R dr_2^R - r_2^R dr_3^R) = - \oint_{\partial\mathcal{E}_R} \left\{ dr_2^R \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_3} - dr_3^R \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_2} \right\} \quad (5.9-11)$$

Εφαρμόζουμε στο  $\vec{r}^R$ , δηλαδή στο  $\partial\mathcal{E}_R$ , παράλληλη μετατόπιση κατά ένα διάνυσμα  $\vec{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ .

Επομένως, ισχύει

$$r_1 = \Delta_1 + r_1^R$$

$$r_2 = \Delta_2 + r_2^R$$

$$r_3 = \Delta_3 + r_3^R$$

και εφόσον η μετατόπιση αυτή γίνεται σε όλο το  $\partial\mathcal{E}_R$  σαν στερεό σώμα και δεν εξαρτάται από τα  $(u, v)$ , ισχύει προφανώς  $d\vec{r} = d\vec{r}^R$ .

Τότε, η εξίσωση (5.9-10) γίνεται:

$$\lambda \oint_{\partial\mathcal{E}_R} \left( (\Delta_3 + r_3^R) dr_2^R - (\Delta_2 + r_2^R) dr_3^R \right) = - \oint_{\partial\mathcal{E}_R} \left\{ dr_2^R \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_3} - dr_3^R \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_2} \right\} \quad (5.9-12)$$

Θα αποδείξουμε ότι οι ανωτέρω εξισώσεις (5.9-11) και (5.9-12) είναι ισοδύναμες.

Όντως, όσον αφορά το αριστερό μέλος της ανωτέρω σχέσης (5.9-12), έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} \left( (\Delta_3 + r_3^R) dr_2^R - (\Delta_2 + r_2^R) dr_3^R \right) &= \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} (\Delta_3 + r_3^R) dr_2^R - \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} (\Delta_2 + r_2^R) dr_3^R \\
 &= \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} \Delta_3 dr_2^R + \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} r_3^R dr_2^R - \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} \Delta_2 dr_3^R - \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} r_2^R dr_3^R \\
 &= \lambda \Delta_3 \oint_{\partial \mathcal{E}_R} dr_2^R + \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} r_3^R dr_2^R - \lambda \Delta_2 \oint_{\partial \mathcal{E}_R} dr_3^R - \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} r_2^R dr_3^R \\
 &= \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} r_3^R dr_2^R - \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} r_2^R dr_3^R = \lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} (r_3^R dr_2^R - r_2^R dr_3^R)
 \end{aligned}$$

αφού

$$\oint_{\partial \mathcal{E}_R} dr_i^R = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

καθώς η καμπύλη  $\partial \mathcal{E}_R$  είναι κλειστή.

Αντίστοιχα, για το δεξιό μέλος της σχέσης (5.9-12), έχουμε ότι

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_1} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_1} + 2\lambda r_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} = \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_2} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_2} + 2\lambda r_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} = \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_3} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_3} + 2\lambda r_3$$

Αντικαθιστώντας, όπως προηγουμένως, τις συνιστώσες του  $\vec{r}$  και λόγω του ότι

$$\oint_{\partial \mathcal{E}_R} dr_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

για την κλειστή καμπύλη  $\partial \mathcal{E}_R$ , επιπλέον, όπως προαναφέρθη,  $d\vec{r} = d\vec{r}^R$ , καθώς επίσης και λόγω του ότι τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{\xi}$  παραμένουν αναλλοίωτα σε κάθε παράλληλη μετατόπιση του  $\partial \mathcal{E}_R$  σαν στερεό σώμα, έχουμε:

$$\begin{aligned}
& - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dr_2^R \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - dr_3^R \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right\} = \\
& - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left( \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_3} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_3} + 2\lambda r_3 \right) dr_2^R - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left( \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_2} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_2} + 2\lambda r_2 \right) dr_3^R = \\
& - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left( \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_3} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_3} + 2\lambda(\Delta_3 + r_3^R) \right) dr_2^R \\
& - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left( \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_2} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_2} + 2\lambda(\Delta_2 + r_2^R) \right) dr_3^R = \\
& - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left( \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_3} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_3} + 2\lambda r_3^R \right) dr_2^R - 2\lambda \oint_{\partial \varepsilon_R} \Delta_3 dr_2^R \\
& - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left( \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_2} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_2} + 2\lambda r_2^R \right) dr_3^R - 2\lambda \oint_{\partial \varepsilon_R} \Delta_2 dr_3^R = \\
& - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left( \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_3} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_3} + 2\lambda r_3^R \right) dr_2^R - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left( \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_2} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_2} + 2\lambda r_2^R \right) dr_3^R = \\
& - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dr_2^R \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - dr_3^R \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right\}
\end{aligned}$$

Αποδείξαμε, επομένως, ότι η εξίσωση (5.9-12) είναι ανεξάρτητη της παράλληλης μετατόπισης, γεγονός που ισχύει αντίστοιχα και για τις υπόλοιπες σχέσεις τις (5.9-10). ■

Στο Λήμμα που ακολουθεί θα αποδείξουμε ότι οι εξισώσεις (5.9-10) είναι ανεξάρτητες στροφής.

### Λήμμα 5.5

Έστω ότι στρέφουμε το στερεό σώμα  $\theta^R$  κατά πίνακα  $\Psi$  με κέντρο οποιοδήποτε σημείο του. Δηλαδή, υπό τον μετασχηματισμό αυτό, κάθε σημείο του  $\theta^R$  με συντεταγμένες σε

μητρική μορφή  $\mathbf{r}^R$  μετακινείται στο σημείο με συντεταγμένες σε μητρική μορφή  $\mathbf{r}$ , όπου ισχύει

$$\mathbf{r} = \Psi \mathbf{r}^R$$

Τότε οι εξισώσεις (5.9-10) γράφονται συνολικά στη μορφή

$$3\lambda \oint_{\partial \varepsilon_R} \Psi \left( d\mathbf{r}^R (\mathbf{r}^R)^T - \mathbf{r}^R (d\mathbf{r}^R)^T \right) \Psi^T = - \oint_{\partial \varepsilon_R} \left( \Psi d\mathbf{r}^R \partial \Phi^T - \partial \Phi (d\mathbf{r}^R)^T \Psi^T \right)$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι οι εξισώσεις αυτές παραμένουν σε ισχύ ανεξαρτήτως στροφής.

### Απόδειξη

Γράφουμε τις 3 εξισώσεις σε μητρική μορφή ως εξής:

Όπως έχουμε ορίσει

$$\vec{r} = r_1 \vec{i} + r_2 \vec{j} + r_3 \vec{k} \Rightarrow d\vec{r} = dr_1 \vec{i} + dr_2 \vec{j} + dr_3 \vec{k}$$

Ομοίως, ορίζουμε το διάνυσμα

$$\vec{\partial \mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \vec{i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \vec{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \vec{k}$$

Παρατηρούμε ότι και οι τρεις εξισώσεις συμπυκνώνονται στην κάτωθι διανυσματική εξίσωση:

$$\lambda \oint_{\partial \varepsilon_R} d\vec{r} \times \vec{r} = - \oint_{\partial \varepsilon_R} d\vec{r} \times \vec{\partial \mathcal{L}} \quad (5.9-13)$$

Πράγματι, εκ του ορισμού του εξωτερικού γινομένου λαμβάνουμε ότι

$$d\vec{r} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dr_1 & dr_2 & dr_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = (r_3 dr_2 - r_2 dr_3) \vec{i} + (r_1 dr_3 - r_3 dr_1) \vec{j} + (r_2 dr_1 - r_1 dr_2) \vec{k}$$

και παρατηρούμε ότι οι 3 συντεταγμένες του εξωτερικού γινομένου είναι ακριβώς οι συντελεστές του  $\lambda$  στα αριστερά μέλη των παραπάνω εξισώσεων.

Ομοίως,

$$d\vec{r} \times \overline{\partial\mathcal{L}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dr_1 & dr_2 & dr_3 \\ \partial\mathcal{L}_1 & \partial\mathcal{L}_2 & \partial\mathcal{L}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left( dr_2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_3} - dr_3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_2} \right) \vec{i} + \left( dr_3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_1} - dr_1 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_3} \right) \vec{j} + \left( dr_1 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_2} - dr_2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_1} \right) \vec{k}$$

τα οποία είναι τα αντίστοιχα δεξιά μέλη των 3 ανωτέρω εξισώσεων.

Στο σημείο αυτό, για περαιτέρω απλοποίηση της ανωτέρω σχέσης, θα ορίσουμε το διάνυσμα

$$\overline{\partial\varphi} = \left( \frac{\partial}{\partial n_1} (\varphi(\vec{\xi})|\vec{n}|), \frac{\partial}{\partial n_2} (\varphi(\vec{\xi})|\vec{n}|), \frac{\partial}{\partial n_3} (\varphi(\vec{\xi})|\vec{n}|) \right) \quad (5.9-14)$$

Οπότε, λαμβάνουμε

$$\overline{\partial\mathcal{L}} = \overline{\partial\varphi} + 2\lambda\vec{r}$$

Συνεπώς,

$$d\vec{r} \times \overline{\partial\mathcal{L}} = d\vec{r} \times \overline{\partial\varphi} + 2\lambda d\vec{r} \times \vec{r}$$

και επομένως, η σχέση (5.9-13) γίνεται:

$$\lambda \oint_{\partial\mathcal{E}_R} d\vec{r} \times \vec{r} = - \oint_{\partial\mathcal{E}_R} d\vec{r} \times \overline{\partial\mathcal{L}} \Leftrightarrow$$

$$\lambda \oint_{\partial\mathcal{E}_R} d\vec{r} \times \vec{r} = - \oint_{\partial\mathcal{E}_R} d\vec{r} \times (\overline{\partial\varphi} + 2\lambda\vec{r}) \Leftrightarrow$$

$$\lambda \oint_{\partial\mathcal{E}_R} d\vec{r} \times \vec{r} = - \oint_{\partial\mathcal{E}_R} d\vec{r} \times \overline{\partial\varphi} - 2\lambda \oint_{\partial\mathcal{E}_R} d\vec{r} \times \vec{r} \Leftrightarrow$$

$$3\lambda \oint_{\partial\mathcal{E}_R} d\vec{r} \times \vec{r} = - \oint_{\partial\mathcal{E}_R} d\vec{r} \times \overline{\partial\varphi} \quad (5.9-15)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε στο σημείο αυτό μια γνωστή ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου:

Εστω δύο διανύσματα  $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$  και  $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ .

Το εξωτερικό τους γινόμενο είναι  $\vec{A} \times \vec{B} = (A_2B_3 - A_3B_2, A_3B_1 - A_1B_3, A_1B_2 - A_2B_1)$

Ορίζουμε τους πίνακες  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$  και σχηματίζουμε τον πίνακα

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= \mathbf{AB}^T - \mathbf{BA}^T \Leftrightarrow \\ \mathbf{\Gamma} &= \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1A_1 & B_1A_2 & B_1A_3 \\ B_2A_1 & B_2A_2 & B_2A_3 \\ B_3A_1 & B_3A_2 & B_3A_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \mathbf{\Gamma} &= \begin{bmatrix} A_1B_1 - B_1A_1 & A_1B_2 - B_1A_2 & A_1B_3 - B_1A_3 \\ A_2B_1 - B_2A_1 & A_2B_2 - B_2A_2 & A_2B_3 - B_2A_3 \\ A_3B_1 - B_3A_1 & A_3B_2 - B_3A_2 & A_3B_3 - B_3A_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το εξωτερικό γινόμενο  $\vec{A} \times \vec{B}$  είναι τα στοιχεία  $(\mathbf{\Gamma}_{2,3}, \mathbf{\Gamma}_{1,3}, \mathbf{\Gamma}_{1,2})$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανωτέρω σχέση για να αποδείξουμε το Λήμμα.

Όντως, έστω ότι η αρχική θέση του  $\partial\mathcal{E}_R$  στο δικό του σύστημα συντεταγμένων είναι  $\vec{r}^R = (r_1^R, r_2^R, r_3^R)$ , όπου εννοείται ότι όλες οι συνιστώσες του  $\vec{r}^R$  εξαρτώνται από δύο παραμέτρους  $(u, v)$  και οι οποίες είναι πλήρως γνωστές διότι στο μετακινήσιμο θραύσμα έχουμε ορίσει ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το σημείο  $O^R$ .

Εφαρμόζουμε στο  $\vec{r}^R$ , δηλαδή στο  $\partial\mathcal{E}_R$ , στροφή κατά έναν τρισδιάστατο πίνακα στροφής  $3 \times 3$  που τον συμβολίζουμε  $\Psi$ . Τότε, εάν ορίσουμε τον πίνακα

$$\mathbf{r}^R = \begin{bmatrix} r_1^R \\ r_2^R \\ r_3^R \end{bmatrix}$$

η δράση στροφής κατά  $\Psi$  οδηγεί την  $\partial\mathcal{E}_R$  σε μία νέα θέση, όπου κάθε σημείο της έχει διανυσματική ακτίνα με συντεταγμένες  $(r_1, r_2, r_3)$ . Συνεπώς, για  $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$ , ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{r} = \Psi \mathbf{r}^R \quad (5.9-16)$$

Θα υπολογίσουμε την τιμή των ολοκληρωμάτων στα δύο μέλη της (5.9-15) υπό τον γενικό μετασχηματισμό στροφής (5.9-16).

Πράγματι, με διαφορίση και εφόσον το  $\Psi$  θεωρείται δεδομένο, λαμβάνουμε  $dr = \Psi dr^R$ . Άρα, για τον υπολογισμό του ολοκληρωτέου του αριστερού μέλους της εξίσωσης (5.9-15), χρησιμοποιούμε τον πίνακα

$$\Gamma_1 = dr r^T - r dr^T$$

ο οποίος λόγω του μετασχηματισμού στροφής (5.9-16) γράφεται και ως

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Psi dr^R (r^R)^T \Psi^T - \Psi r^R (dr^R)^T \Psi^T \Leftrightarrow \\ \Gamma_1 &= \Psi \left( dr^R (r^R)^T - r^R (dr^R)^T \right) \Psi^T \end{aligned} \quad (5.9-17)$$

Εν συνεχεία, όσον αφορά το δεξί μέλος της σχέσης (5.9-15), γνωρίζουμε ότι το  $\varphi(\vec{\xi})$  και άρα και το  $\overline{\partial\varphi}$  εξαρτώνται μόνο από τα  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  και εφόσον το περιθώριο  $\partial\mathcal{E}_R$  στρέφεται ως στερεό σώμα, επομένως και τα  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  στρέφονται με τον ίδιο πίνακα στροφής  $\Psi$ . Συνεπώς, στη νέα θέση μετά τη στροφή, ο ολοκληρωτέος θα έχει τη μορφή  $\partial\varphi(\xi) = \partial\varphi(\xi^R)$ , όπου  $\xi^R$  είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στο  $\partial\mathcal{S}_R$  και την  $\mathcal{S}_R$  στο οικείο σύστημα συντεταγμένων του μετακινήσιμου θραύσματος  $\theta^R$ .

Με αυτόν τον τρόπο, για τον υπολογισμό του ολοκληρωτέου του δεξιού μέλους της εξίσωσης (5.9-15)  $d\vec{r} \times \overline{\partial\varphi}$  χρησιμοποιούμε τον πίνακα

$$\Gamma_2 = dr \partial\varphi^T - \partial\varphi dr^T$$

ο οποίος λόγω του μετασχηματισμού στροφής (5.9-16) γράφεται και ως

$$\Gamma_2 = \Psi dr^R \partial\varphi^T - \partial\varphi (dr^R)^T \Psi^T \quad (5.9-18)$$

Επομένως, η (5.9-15) καταλήγει στην

$$\begin{aligned} 3\lambda \oint_{\partial\mathcal{E}_R} \Psi \left( dr^R (r^R)^T - r^R (dr^R)^T \right) \Psi^T \\ = - \oint_{\partial\mathcal{E}_R} \left( \Psi dr^R \partial\varphi^T - \partial\varphi (dr^R)^T \Psi^T \right) \end{aligned} \quad (5.9-19)$$



Προφανώς, η παραπάνω σχέση δεν είναι χρήσιμη για όλα τα στοιχεία των πινάκων  $\mathbf{\Gamma}$ , αλλά μόνο για τα στοιχεία που βρίσκονται στις θέσεις  $(\mathbf{\Gamma}_{2,3}, \mathbf{\Gamma}_{1,3}, \mathbf{\Gamma}_{1,2})$  σε πλήρη αντιστοιχία.

Για να καταστήσουμε σαφέστερο ότι οι εξισώσεις (5.9-10) είναι ανεξάρτητες στροφής, μετασχηματίζουμε την ανωτέρω μητρική σχέση (5.9-19) ως:

$$3\lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} \left\{ \boldsymbol{\Psi} (d\mathbf{r}^R (\mathbf{r}^R)^T) \boldsymbol{\Psi}^T - \boldsymbol{\Psi} (\mathbf{r}^R (d\mathbf{r}^R)^T) \boldsymbol{\Psi}^T \right\} = - \oint_{\partial \mathcal{E}_R} (\boldsymbol{\Psi} d\mathbf{r}^R \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{\varphi}^T - \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{\varphi} (d\mathbf{r}^R)^T \boldsymbol{\Psi}^T) \Leftrightarrow$$

$$3\lambda \oint_{\partial \mathcal{E}_R} (d\mathbf{r} \mathbf{r}^T - \mathbf{r} d\mathbf{r}^T) = - \oint_{\partial \mathcal{E}_R} (d\mathbf{r} \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{\varphi}^T - \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{r}^T)$$

αφού, όπως προαναφέρθηκε,  $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\Psi} d\mathbf{r}^R$  και  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R$  και ο όρος  $\boldsymbol{\partial} \boldsymbol{\varphi}$  είναι ανεξάρτητος στροφής.

■

Επειδή από τη μητρική σχέση (5.9-19) που αποδείξαμε στο Λήμμα 5.5 μας ενδιαφέρουν μόνο 3 στοιχεία των πινάκων  $(3 \times 3)$  του αριστερού και δεξιού μέλους, θα θεωρήσουμε ότι τα ολοκληρώματα του αριστερού μέλους συνιστούν έναν πίνακα γραμμή  $(1 \times 3)$  και στο δεξί, έναν άλλο πίνακα γραμμή  $(1 \times 3)$ . Για λόγους απλοποίησης της ανάλυσης που ακολουθεί, θα χρησιμοποιήσουμε για τα ολοκληρώματα του αριστερού μέλους που πολλαπλασιάζουν το  $\lambda$  το συμβολισμό  $(J_1, J_2, J_3)$  και για τα ολοκληρώματα του δεξιού μέλους τα  $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ .

Είναι, ίσως, χρήσιμο να επαναλάβουμε ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρίας μεταβολών, ο κρημνός  $S^F$  του σταθερού θραύσματος, μαζί με τα  $\varepsilon_{\alpha\rho\chi\acute{\iota}\varsigma}$ ,  $\varepsilon_{\tau\epsilon\lambda\omicron\upsilon\varsigma}$ ,  $\varepsilon_{\omicron\rho\rho\varphi}$ ,  $\varepsilon_{\delta\alpha\pi\epsilon\delta}$  (Ενότητα 5.8) που τον συνοδεύουν, θεωρούνται δεδομένα και πάγια. Αντιστρόφως, ο μετακινήσιμος κρημνός  $S^R$  είναι αυτός ο οποίος μετασχηματίζεται ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις Euler-Lagrange. Επομένως, στα συγκεκριμένα δύο αναγκαία κριτήρια Γεωμετρίας, θεωρούμε ότι η  $S^R$  δεν έχει κατ' ανάγκην τη μορφή που της επιβάλλει το μετακινήσιμο θραύσμα  $\boldsymbol{\theta}^R$ , αλλά τη μορφή που της επιβάλλουν οι Euler-Lagrange, γι' αυτό και την έχουμε μετονομάσει σε  $\mathcal{E}_R$ . Εντούτοις, λόγω της ελευθερίας που υπάρχει στην επιλογή των συνοριακών συνθηκών κατά τη γραφή των εξισώσεων

Euler-Lagrange, θεωρούμε ότι το περιθώριο  $\partial E_R$  της λύσεως των εξισώσεων Euler-Lagrange είναι σταθερό και ταυτοτικά ίδιο με το περιθώριο της  $S^R$  στο θραύσμα  $\theta^R$ .

Τα ολοκληρώματα  $(J_1, J_2, J_3)$  και  $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ , εν γένει, εξαρτώνται από τον πίνακα στροφής  $\Psi_2$  που προέκυψε από την εφαρμογή των δύο πρώτων κριτηρίων (Ενότητες 5.5 και 5.6). Επιπλέον, τα  $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$  του δεξιού μέλους δεν είναι, κατά κανόνα, γνωστά εφόσον τα  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  που περιέχονται στο  $\overrightarrow{\partial\varphi}$  εξαρτώνται από την  $E_R$  που μεταβάλλεται ώστε να ικανοποιήσει τις εξισώσεις Euler-Lagrange, κρατώντας σταθερό το περιθώριο της  $\partial E_R$ . Όμως η φύση του συγκεκριμένου προβλήματος, επιβάλλει στην ιδανική περίπτωση ανακατασκευής να υπάρχει φυσική συνέχεια των εφαπτομένων επιπέδων τόσο στις άνω και κάτω επιφάνειες, όσο και στις παράπλευρες, μεταξύ του σταθερού και του μετακινήσιμου θραύσματος. Αυτό σημαίνει ότι στην ιδανική περίπτωση τέλει προσαρμογής:

(α) Για τις άνω και κάτω αλυσίδες των  $\partial S^F$  και  $\partial E_R = \partial S^R$ , θα ισχύει

$$\vec{\xi}_{U,L}^F = \vec{\xi}_{U,L}^R$$

όπου,  $\vec{\xi}_{U,L}^F$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο τυχόν σημείο της άνω ή της κάτω επιφάνειας του σταθερού θραύσματος στο  $\partial S^F$ , ενώ  $\vec{\xi}_{U,L}^R$  αντίστοιχα είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο τυχόν σημείο της άνω ή της κάτω επιφάνειας του μετακινήσιμου θραύσματος στο  $\partial S^R$ .

Εάν  $\vec{\ell}^F$  και  $\vec{\ell}^R$  είναι τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα επί των άνω και κάτω αλυσίδων στους δύο κρημνούς, τότε ισχύει

$$\vec{\xi}^F = \pm(\vec{\xi}_{U,L}^F \times \vec{\ell}^F)$$

και αντίστοιχα,

$$\vec{\xi}^R = \pm(\vec{\xi}_{U,L}^R \times \vec{\ell}^R)$$

όπου το πρόσημο εξαρτάται από την εκάστοτε επιλεγείσα φορά διαγραφής των  $\partial S^F$  και  $\partial S^R$ .

Σε κάθε περίπτωση, στην ιδανική αυτή θέση, τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα επί των παράπλευρων κρημνών και επί των άνω και κάτω αλυσίδων τους, θα είναι αντίθετα. Δηλαδή,

$$\vec{\xi}^R = -\vec{\xi}^F$$

επί των κρημνών  $S^F$  και  $S^R$  στα σημεία των άνω και κάτω αλυσίδων.

(β) Για τις παράπλευρες καμπύλες των  $S^F$  και  $S^R$ , δηλαδή σύμφωνα με τον προηγούμενο συμβολισμό, για τα ζεύγη των διακριτών καμπυλών  $(AA_1, \Gamma\Gamma_1)$  αφενός και  $(BB_1, \Delta\Delta_1)$  αφετέρου, ισχύει

$$\vec{\xi}^R = -\vec{\xi}^F$$

όπου, όπως προηγουμένως, με  $\vec{\xi}^F$  συμβολίζουμε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα επί του σταθερού κρημνού και με  $\vec{\xi}^R$  τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα επί του μετακινήσιμου κρημνού.

Στην πράξη, η ισότητα  $\vec{\xi}^R = -\vec{\xi}^F$  δεν θα ισχύει ακριβώς, ούτε στην περίπτωση (α) ούτε στην (β), λόγω της φθοράς που έχουν υποστεί τα προς σύγκριση θραύσματα, αλλά και λόγω του διακένου που υπάρχει μεταξύ των κρημνών  $S^F$  και  $S^R$ . Άρα, χρησιμοποιούμε τους τρισδιάστατους πίνακες στροφής  $\Psi_2$  και παράλληλης μετατόπισης  $\Delta_2$  που υπολογίσαμε από τα κριτήρια προσαρμογής ζεύγους αλυσίδων (Ενότητα 5.5) και απαίτησης συνέχειας εφαιπτομένων επιπέδων (Ενότητα 5.6) και κινούμαστε εξαντλητικά γύρω από τις παραμέτρους των πινάκων αυτών σε μια μικρή περιοχή μεταβολής, απαιτώντας οι σχέσεις που αποδείχθηκαν στο Λήμμα 5.5 να συναληθεύουν για κοινό  $\lambda$ . Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα του αριστερού μέλους των εξισώσεων  $(J_1, J_2, J_3)$  και του δεξιού  $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$  πρέπει να είναι σχεδόν παράλληλα.

Η ανωτέρω απαίτηση συνιστά το πρώτο αναγκαίο κριτήριο ομοιότητας Γεωμετρίας μεταξύ των κρημνών  $S^F$  και  $S^R$ , το οποίο, ισοδυνάμως, εκφράζεται μέσω όλων των  $2 \times 2$  υποοριζουσών του πίνακα

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ \mathcal{H}_1 & \mathcal{H}_2 & \mathcal{H}_3 \end{pmatrix} \quad (5.9-20)$$

οι οποίες πρέπει να είναι πολύ κοντά στο 0 και για την ακρίβεια πρέπει να φράσσονται απολύτως από ένα μικρό κατώφλι  $\delta p_{th}$ .

Εφόσον το κριτήριο αυτό δεν ικανοποιείται, δεν προχωρούμε στον έλεγχο των υπολοίπων κριτηρίων. Εάν ικανοποιείται, αποθηκεύουμε τους πίνακες παράλληλης μετατόπισης  $\mathbf{A}$  και  $\Psi$  που προέκυψαν από την απαίτηση της πρακτικά παραλληλίας των  $(J_1, J_2, J_3)$  και  $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$  και ελέγχουμε το δεύτερο κριτήριο που περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

### 5.9.3 Υπολογισμός της σχέσης μεταξύ της διαφοράς των γωνιών των καθέτων διανυσμάτων στους κατέναντι κρημούς και του όγκου του διακένου που αυτοί ορίζουν

Αποδείξαμε ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange οδηγούν στο κάτωθι σημαντικό συμπέρασμα, το οποίο θα αποτελέσει τη βάση ενός νέου αναγκαίου κριτηρίου.

#### Λήμμα 5.6

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορισμού του  $\vec{\Pi}_1$  (5.9-8) και επί της βέλτιστης επιφάνειας  $\mathcal{E}_R$  ισχύει η σχέση:

$$\nabla_{(u,v)} \cdot (r_1 \Pi_{1,1}, r_1 \Pi_{1,2}) = \nabla_{(u,v)} \cdot (r_1 \vec{\Pi}_1) \equiv \nabla_{(u,v)} r_1 \cdot \vec{\Pi}_1 \quad (5.9-21)$$

#### Απόδειξη

Έχουμε θεμελιώσει στο Πρόγραμμα 3.1 από το μαθηματικό υπόβαθρο ότι αν  $r_1$  είναι μια βαθμωτή συνάρτηση του  $(u, v)$  και  $\vec{A} = (A_1, A_2)$  είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα ορισμένο στο χωρίο  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , στο οποίο ανήκει κάθε ζεύγος  $(u, v)$  τότε έχω:

$$\nabla_{(u,v)} \cdot (r_1 \vec{A}) \equiv \nabla_{(u,v)} r_1 \cdot \vec{A} + r_1 \nabla_{(u,v)} \cdot \vec{A} \quad (5.9-22)$$

Εφαρμόζοντας την ανωτέρω σχέση, θέτοντας  $\vec{A} = \vec{\Pi}_1 = (\Pi_{1,1}, \Pi_{1,2})$  λαμβάνουμε:

$$\nabla_{(u,v)} \cdot (r_1 \vec{\Pi}_1) \equiv \nabla_{(u,v)} r_1 \cdot \vec{\Pi}_1 + r_1 \nabla_{(u,v)} \cdot \vec{\Pi}_1 = \nabla_{(u,v)} r_1 \cdot \vec{\Pi}_1$$

το οποίο ισχύει πάνω στη βέλτιστη επιφάνεια  $\mathcal{E}_R$ , αφού από τη σχέση (5.9-9) έχουμε αποδείξει ότι  $\nabla_{(u,v)} \cdot \vec{\Pi}_1 = 0$  επί της  $\mathcal{E}_R$ .

■

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.6, ισχύει:

$$\nabla_{(u,v)} \cdot (r_1 \Pi_{1,1}, r_1 \Pi_{1,2}) = \nabla_{(u,v)} r_1 \cdot \vec{\Pi}_1$$

$$\nabla_{(u,v)} \cdot (r_2 \Pi_{2,1}, r_2 \Pi_{2,2}) = \nabla_{(u,v)} r_2 \cdot \vec{\Pi}_2$$

$$\nabla_{(u,v)} \cdot (r_3 \Pi_{3,1}, r_3 \Pi_{3,2}) = \nabla_{(u,v)} r_3 \cdot \vec{\Pi}_3$$

Αθροίζουμε και τις 3 εξισώσεις και έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla_{(u,v)} \cdot (r_1 \Pi_{1,1} + r_2 \Pi_{2,1} + r_3 \Pi_{3,1}, r_1 \Pi_{1,2} + r_2 \Pi_{2,2} + r_3 \Pi_{3,2}) \\ = \nabla_{(u,v)} r_1 \cdot \vec{\Pi}_1 + \nabla_{(u,v)} r_2 \cdot \vec{\Pi}_2 + \nabla_{(u,v)} r_3 \cdot \vec{\Pi}_3 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό που ορίστηκε στις (5.9-6) και (5.9-7) και έχουμε:

$$r_1 \Pi_{1,1} + r_2 \Pi_{2,1} + r_3 \Pi_{3,1} \triangleq (r_1, r_2, r_3) \cdot (\Pi_{1,1}, \Pi_{2,1}, \Pi_{3,1}) = \vec{r} \cdot \vec{\Pi}^v$$

Ομοίως,

$$r_1 \Pi_{1,2} + r_2 \Pi_{2,2} + r_3 \Pi_{3,2} \triangleq (r_1, r_2, r_3) \cdot (\Pi_{1,2}, \Pi_{2,2}, \Pi_{3,2}) = \vec{r} \cdot \vec{\Pi}^u$$

Επομένως, το παραπάνω άθροισμα καταλήγει στη σχέση:

$$\nabla_{(u,v)} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\Pi}^v, \vec{r} \cdot \vec{\Pi}^u) = \nabla_{(u,v)} r_1 \cdot \vec{\Pi}_1 + \nabla_{(u,v)} r_2 \cdot \vec{\Pi}_2 + \nabla_{(u,v)} r_3 \cdot \vec{\Pi}_3 \quad (5.9-23)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση πάνω στη βέλτιστη επιφάνεια  $\mathcal{E}_R$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{E}_R} \nabla_{(u,v)} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\Pi}^v, \vec{r} \cdot \vec{\Pi}^u) \, dudv \\ = \iint_{\mathcal{E}_R} \{ \nabla_{(u,v)} r_1 \cdot \vec{\Pi}_1 + \nabla_{(u,v)} r_2 \cdot \vec{\Pi}_2 + \nabla_{(u,v)} r_3 \cdot \vec{\Pi}_3 \} \, dudv \end{aligned} \quad (5.9-24)$$

Χρησιμοποιούμε, τώρα, το θεώρημα Green (Ενότητα 3.3) για το αριστερό μέλος της ανωτέρω σχέσης, πηγαίνοντας στο σύνορο/περιθώριο  $\partial \mathcal{E}_R$  της επιφάνειας  $\mathcal{E}_R$ .

Επισημαίνουμε στο σημείο αυτό, ότι η βέλτιστη επιφάνεια  $\mathcal{E}_R$  θεωρούμε πως είναι μία συνεχώς παραγωγίσιμη απεικόνιση ενός κλειστού συνεκτικού χωρίου  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  που έχει σύνορο μία ομαλή κλειστή καμπύλη Jordan, έστω  $\partial D$ . Τότε, το σύνορο  $\partial \mathcal{E}_R$  της βέλτιστης επιφάνειας  $\mathcal{E}_R$  είναι η εικόνα του περιθωρίου  $\partial D$  μέσω της ίδιας απεικόνισης  $D \xrightarrow{\vec{r}(u,v)} \mathcal{E}_R$ . Το στοιχειώδες εφαπτόμενο διάνυσμα στο περιθώριο αυτό  $\partial D$  είναι το  $(du, dv)$  και επομένως, εάν  $\vec{n}$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο  $\partial D$  στο συγκεκριμένο σημείο, ισχύει  $\vec{n} d\ell = (dv, -du)$  και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} (\vec{r} \cdot \vec{\Pi}^v, \vec{r} \cdot \vec{\Pi}^u) \cdot (dv, -du) \\ = \iint_{\mathcal{E}_R} \{ \nabla_{(u,v)} r_1 \cdot \vec{\Pi}_1 + \nabla_{(u,v)} r_2 \cdot \vec{\Pi}_2 + \nabla_{(u,v)} r_3 \cdot \vec{\Pi}_3 \} dudv \end{aligned} \quad (5.9-25)$$

όπου

$$\begin{aligned} \nabla_{(u,v)} r_1 \cdot \vec{\Pi}_1 &= r_{1u} \Pi_{1,1} + r_{1v} \Pi_{1,2} \\ &= \lambda (r_{1u} (r_3 r_{2v} - r_2 r_{3v}) + r_{1v} (r_2 r_{3u} - r_3 r_{2u})) + (r_{3u} r_{1v} - r_{1u} r_{3v}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \\ &\quad + (r_{1u} r_{2v} - r_{2u} r_{1v}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \\ &= \lambda (r_2 (r_{3u} r_{1v} - r_{1u} r_{3v}) + r_3 (r_{1u} r_{2v} - r_{1v} r_{2u})) + n_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} + n_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\nabla_{(u,v)} r_1 \cdot \vec{\Pi}_1 = r_{1u} \Pi_{1,1} + r_{1v} \Pi_{1,2} = \lambda (n_2 r_2 + n_3 r_3) + n_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} + n_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3}$$

Ομοίως,

$$\nabla_{(u,v)} r_2 \cdot \vec{\Pi}_2 = r_{2u} \Pi_{2,1} + r_{2v} \Pi_{2,2} = \lambda (n_3 r_3 + n_1 r_1) + n_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} + n_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1}$$

$$\nabla_{(u,v)} r_3 \cdot \vec{\Pi}_3 = r_{3u} \Pi_{3,1} + r_{3v} \Pi_{3,2} = \lambda (n_2 r_2 + n_1 r_1) + n_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} + n_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1}$$

Επομένως, η σχέση (5.9-25) γίνεται:

$$\oint_{\partial D} (\vec{r} \cdot \vec{\Pi}^v, \vec{r} \cdot \vec{\Pi}^u) \cdot (dv, -du) = \iint_{\varepsilon_R} 2 \left\{ \lambda(n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3) + n_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} + n_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} + n_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right\} dudv$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial D} (\vec{r} \cdot \vec{\Pi}^v, \vec{r} \cdot \vec{\Pi}^u) \cdot (dv, -du) \\ &= \iint_{\varepsilon_R} 2 \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} n_1 + \lambda n_1 r_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} n_2 + \lambda n_2 r_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} n_3 \right. \\ & \quad \left. + \lambda n_3 r_3 \right\} dudv \end{aligned} \quad (5.9-26)$$

Για την παράσταση  $\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} n_1 + \lambda n_1 r_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} n_2 + \lambda n_2 r_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} n_3 + \lambda n_3 r_3 \right)$  γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_1} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_1} + 2\lambda r_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} = \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_2} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_2} + 2\lambda r_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} = \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_3} |\vec{n}| + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_3} + 2\lambda r_3$$

Επομένως, θέτοντας

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} n_1 + \lambda n_1 r_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} n_2 + \lambda n_2 r_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} n_3 + \lambda n_3 r_3 \right) = W_1 + W_2 + W_3$$

όπου:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_1} |\vec{n}| n_1 + \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_2} |\vec{n}| n_2 + \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_3} |\vec{n}| n_3 \\ &= |\vec{n}| \left( \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_1} n_1 + \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_2} n_2 + \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial n_3} n_3 \right) \end{aligned} \quad (5.9-27)$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_1} n_1 + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_2} n_2 + \varphi(\vec{\xi}) \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_3} n_3 \\
&= \varphi(\vec{\xi}) \left( \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_1} n_1 + \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_2} n_2 + \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_3} n_3 \right) = \varphi(\vec{\xi})
\end{aligned} \tag{5.9-28}$$

και

$$W_3 = 3\lambda(r_1 n_1 + r_2 n_2 + r_3 n_3) \tag{5.9-29}$$

Για τον υπολογισμό της ποσότητας  $W_1$  χρησιμοποιούμε το κάτωθι Λήμμα γενικότερας εφαρμοσιμότητας.

Λήμμα 5.7

Έστω μία ομαλή προσανατολισιμη επιφάνεια με επιβατική ακτίνα  $\vec{r}(u, v)$  όπου  $u, v \in D \subseteq \mathbb{R}^2$  και έστω  $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$  το κάθετο σε αυτήν διάνυσμα στο τυχόν σημείο αυτής  $\vec{r}(u, v)$ . Έστω επίσης  $\vec{\xi}$  το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια στο ίδιο σημείο  $\vec{r}(u, v)$ , δηλαδή  $\vec{\xi} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$  και μία οποιαδήποτε συνεχώς παραγωγίσιμη βαθμωτή συνάρτηση  $\varphi(\vec{\xi})$  ορισμένη στην επιφάνεια.

Τότε ισχύουν τα κάτωθι:

α)

$$\frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_1} = \xi_1, \quad \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_2} = \xi_2, \quad \frac{\partial |\vec{n}|}{\partial n_3} = \xi_3$$

β)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n_1} (\xi_1) &= \frac{n_2^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3}, & \frac{\partial}{\partial n_1} (\xi_2) &= -\frac{n_1 n_2}{|\vec{n}|^3}, & \frac{\partial}{\partial n_1} (\xi_3) &= -\frac{n_1 n_3}{|\vec{n}|^3} \\
\frac{\partial}{\partial n_2} (\xi_1) &= -\frac{n_1 n_2}{|\vec{n}|^3}, & \frac{\partial}{\partial n_2} (\xi_2) &= \frac{n_1^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3}, & \frac{\partial}{\partial n_2} (\xi_3) &= -\frac{n_2 n_3}{|\vec{n}|^3} \\
\frac{\partial}{\partial n_3} (\xi_1) &= -\frac{n_1 n_3}{|\vec{n}|^3}, & \frac{\partial}{\partial n_3} (\xi_2) &= -\frac{n_2 n_3}{|\vec{n}|^3}, & \frac{\partial}{\partial n_3} (\xi_3) &= \frac{n_1^2 + n_2^2}{|\vec{n}|^3}
\end{aligned}$$



γ)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_1}(\varphi(\vec{\xi})) &= \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_1} \frac{n_2^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_2} \frac{n_1 n_2}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_3} \frac{n_1 n_3}{|\vec{n}|^3} \\ \frac{\partial}{\partial n_2}(\varphi(\vec{\xi})) &= -\frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_1} \frac{n_1 n_2}{|\vec{n}|^3} + \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_2} \frac{n_1^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_3} \frac{n_2 n_3}{|\vec{n}|^3} \\ \frac{\partial}{\partial n_3}(\varphi(\vec{\xi})) &= -\frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_1} \frac{n_1 n_3}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_2} \frac{n_2 n_3}{|\vec{n}|^3} + \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_3} \frac{n_1^2 + n_2^2}{|\vec{n}|^3}\end{aligned}$$

### Απόδειξη

α) Ισχύουν εξ ορισμού:

$$|\vec{n}| \triangleq \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$\vec{\xi} \triangleq \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Άρα,

$$\frac{\partial|\vec{n}|}{\partial n_1} = \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \xi_1$$

$$\frac{\partial|\vec{n}|}{\partial n_2} = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \xi_2$$

$$\frac{\partial|\vec{n}|}{\partial n_3} = \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \xi_3$$

β)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_1}(\xi_1) &= \frac{\partial}{\partial n_1} \left( \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right) = \frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} - n_1 \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}}{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - n_1^2}{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{n_2^2 + n_3^2}{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{n_2^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3}\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_1}(\xi_2) &= -\frac{n_1 n_2}{|\vec{n}|^3}, & \frac{\partial}{\partial n_1}(\xi_3) &= -\frac{n_1 n_3}{|\vec{n}|^3} \\ \frac{\partial}{\partial n_2}(\xi_1) &= -\frac{n_1 n_2}{|\vec{n}|^3}, & \frac{\partial}{\partial n_2}(\xi_2) &= \frac{n_1^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3}, & \frac{\partial}{\partial n_2}(\xi_3) &= -\frac{n_2 n_3}{|\vec{n}|^3} \\ \frac{\partial}{\partial n_3}(\xi_1) &= -\frac{n_1 n_3}{|\vec{n}|^3}, & \frac{\partial}{\partial n_3}(\xi_2) &= -\frac{n_2 n_3}{|\vec{n}|^3}, & \frac{\partial}{\partial n_3}(\xi_3) &= \frac{n_1^2 + n_2^2}{|\vec{n}|^3}\end{aligned}$$

γ) Σύμφωνα με τα ανωτέρω,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_1}(\varphi(\vec{\xi})) &= \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial n_1} = \\ &= \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_1} \frac{n_2^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_2} \frac{n_1 n_2}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_3} \frac{n_1 n_3}{|\vec{n}|^3}\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_2}(\varphi(\vec{\xi})) &= -\frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_1} \frac{n_1 n_2}{|\vec{n}|^3} + \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_2} \frac{n_1^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_3} \frac{n_2 n_3}{|\vec{n}|^3} \\ \frac{\partial}{\partial n_3}(\varphi(\vec{\xi})) &= -\frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_1} \frac{n_1 n_3}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_2} \frac{n_2 n_3}{|\vec{n}|^3} + \frac{\partial \varphi(\vec{\xi})}{\partial \xi_3} \frac{n_1^2 + n_2^2}{|\vec{n}|^3}\end{aligned}$$

■

#### Πόρισμα 5.4

Κάτω από τους περιορισμούς που ίσχυαν στο Λήμμα 5.7 ισχύει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial n_1}(\varphi(\vec{\xi})) n_1 + \frac{\partial}{\partial n_2}(\varphi(\vec{\xi})) n_2 + \frac{\partial}{\partial n_3}(\varphi(\vec{\xi})) n_3 = 0$$

#### Απόδειξη

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial n_1}(\varphi(\vec{\xi}))n_1 + \frac{\partial}{\partial n_2}(\varphi(\vec{\xi}))n_2 + \frac{\partial}{\partial n_3}(\varphi(\vec{\xi}))n_3 \\
&= \left( \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_1} \frac{n_2^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_2} \frac{n_1n_2}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_3} \frac{n_1n_3}{|\vec{n}|^3} \right) n_1 \\
&+ \left( -\frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_1} \frac{n_1n_2}{|\vec{n}|^3} + \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_2} \frac{n_1^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_3} \frac{n_2n_3}{|\vec{n}|^3} \right) n_2 \\
&+ \left( -\frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_1} \frac{n_1n_3}{|\vec{n}|^3} - \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_2} \frac{n_2n_3}{|\vec{n}|^3} + \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_3} \frac{n_1^2 + n_2^2}{|\vec{n}|^3} \right) n_3 = \\
& \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_1} \left( \frac{n_2^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3} n_1 - \frac{n_1n_2^2}{|\vec{n}|^3} - \frac{n_1n_3^2}{|\vec{n}|^3} \right) + \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_2} \left( \frac{n_1^2 + n_3^2}{|\vec{n}|^3} n_2 - \frac{n_1^2n_2}{|\vec{n}|^3} - \frac{n_2n_3^2}{|\vec{n}|^3} \right) \\
&+ \frac{\partial\varphi(\vec{\xi})}{\partial\xi_3} \left( \frac{n_1^2 + n_2^2}{|\vec{n}|^3} n_3 - \frac{n_1^2n_3}{|\vec{n}|^3} - \frac{n_2^2n_3}{|\vec{n}|^3} \right) = 0
\end{aligned}$$

■

Επομένως, βάσει του ανωτέρου Πορίσματος (Πόρισμα 5.4) και των (5.9-27), (5.9-28), (5.9-29) η σχέση (5.9-26) γίνεται:

$$\oint_{\partial\mathcal{E}_R} \{(\vec{r} \cdot \vec{\Pi}^v, \vec{r} \cdot \vec{\Pi}^u) \cdot (dv, -du)\} = 2 \iint_{\mathcal{E}_R} \{\varphi(\vec{\xi}) + 3\lambda\vec{r} \cdot \vec{n}\} dudv \quad (5.9-30)$$

Για το αριστερό μέλος της σχέσης αυτής ισχύει:

$$\begin{aligned}
& \oint_{\partial\mathcal{E}_R} \{(\vec{r} \cdot \vec{\Pi}^v, \vec{r} \cdot \vec{\Pi}^u) \cdot (dv, -du)\} \\
&= \oint_{\partial\mathcal{E}_R} \{(r_1\Pi_{1,1} + r_2\Pi_{2,1} + r_3\Pi_{3,1}, r_1\Pi_{1,2} + r_2\Pi_{2,2} + r_3\Pi_{3,2}) \cdot (dv, -du)\} \\
&= \oint_{\partial\mathcal{E}_R} \{dv(r_1\Pi_{1,1} + r_2\Pi_{2,1} + r_3\Pi_{3,1}) - du(r_1\Pi_{1,2} + r_2\Pi_{2,2} + r_3\Pi_{3,2})\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dv \left[ r_1 \left( \lambda(r_3 r_{2v} - r_2 r_{3v}) + r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) + r_2 \left( \lambda(r_1 r_{3v} - r_3 r_{1v}) + r_{3v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_{1v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + r_3 \left( \lambda(r_2 r_{1v} - r_1 r_{2v}) + r_{1v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - du \left[ r_1 \left( \lambda(r_2 r_{3u} - r_3 r_{2u}) + r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + r_2 \left( \lambda(r_3 r_{1u} - r_1 r_{3u}) + r_{1u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_{3u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + r_3 \left( \lambda(r_1 r_{2u} - r_2 r_{1u}) + r_{2u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_{1u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) \right] \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dv \left[ r_{1v} \left( r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) + r_{2v} \left( r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) + r_{3v} \left( r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - du \left[ r_{1u} \left( r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) + r_{2u} \left( r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) + r_{3u} \left( r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) \right] \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dv \left[ r_{1v} \left( r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) + r_{2v} \left( r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) + r_{3v} \left( r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + du \left[ r_{1u} \left( r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) + r_{2u} \left( r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) + r_{3u} \left( r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) \right] \right\} =
\end{aligned}$$

$$\oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dr_1 \left( r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) + dr_2 \left( r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) + dr_3 \left( r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) \right\}$$

Επομένως, τελικά η σχέση (5.9-30) καταλήγει στο:

$$\begin{aligned}
& \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dr_1 \left( r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) + dr_2 \left( r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) + dr_3 \left( r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) \right\} \\
& \quad = 2 \iint_{\varepsilon_\beta} \{ \varphi(\vec{\xi}) + 3\lambda \vec{r} \cdot \vec{n} \} dudv
\end{aligned} \tag{5.9-31}$$

Χρησιμοποιούμε την ποσότητα:

$$V = \frac{1}{3} \iiint_{S^X} (\vec{r} \cdot \vec{n}) dudv$$

η οποία εκφράζει τον όγκο του διακένου  $X$ , όπως αυτό ορίστηκε στο τελεσίδικο κριτήριο της Ενότητας 5.8, όπου, όμως, τώρα

$$S_\beta^X = S_F \cup \mathcal{E}_R \cup \mathcal{E}_{\alpha\rho\chi\gamma\delta} \cup \mathcal{E}_{\tau\epsilon\lambda\sigma\upsilon} \cup \mathcal{E}_{\sigma\rho}^{FR} \cup \mathcal{E}_{\delta\alpha\pi}^{FR} \quad (5.9-32)$$

Δηλαδή, στην επιφάνεια που περιβάλλει το διάκενο  $X$ , αντικαταστήσαμε μόνο την επιφάνεια  $S^R$ , δηλαδή μόνο τον μετακινήσιμο κρημό, με την επιφάνεια  $\mathcal{E}_R$  για την οποία ικανοποιούνται οι εξισώσεις Euler-Lagrange.

Επομένως,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \iint_{S^X} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{E}_R} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv + \frac{1}{3} \iint_{S_F \cup \mathcal{E}_{\alpha\rho\chi\gamma\delta} \cup \mathcal{E}_{\tau\epsilon\lambda\sigma\upsilon} \cup \mathcal{E}_{\sigma\rho}^{FR} \cup \mathcal{E}_{\delta\alpha\pi}^{FR}} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv = \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{E}_R} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv + \frac{1}{3} \iint_{S_F} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \\ &\quad + \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{E}_{\alpha\rho\chi\gamma\delta} \cup \mathcal{E}_{\tau\epsilon\lambda\sigma\upsilon} \cup \mathcal{E}_{\sigma\rho}^{FR} \cup \mathcal{E}_{\delta\alpha\pi}^{FR}} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{E}_R} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv + \frac{1}{3} \iint_{S_F} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \\ &\quad + \frac{1}{3} \iint_{\substack{\text{παράπλευρα} \\ \text{πολύεδρα}}} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \end{aligned} \quad (5.9-33)$$

η οποία εκφράζει τον όγκο του χωρίου που περιβάλλει η βέλτιστη κλειστή επιφάνεια  $\mathcal{E}_R$  μαζί με την  $S^F$  και τα παράπλευρα πολύεδρα.

Επίσης, ορίζουμε την ποσότητα

$$\Omega = \iint_{\mathcal{E}_R} \varphi(\vec{\xi}) \, dudv \quad (5.9-34)$$

η οποία εκφράζει ολοκλήρωμα γωνιών των μοναδιαίων διανυσμάτων  $\vec{\xi}$  που είναι κάθετα στην βέλτιστη επιφάνεια  $\mathcal{E}_R$ .

Οπότε, η ανωτέρω σχέση (5.9-31) γράφεται:

$$\begin{aligned}
& 2 \left( \Omega + 9\lambda \left( V - \frac{1}{3} \iint_{S^F} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv - \frac{1}{3} \iint_{\substack{\text{παράπλευρα} \\ \text{πολύεδρα}}} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \right) \right) \\
&= \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dr_1 \left( r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) + dr_2 \left( r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) + dr_3 \left( r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) \right\} \Leftrightarrow \\
&\Omega = \frac{9\lambda}{2} \left( \frac{1}{3} \iint_{S^F} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv + \frac{1}{3} \iint_{\substack{\text{παράπλευρα} \\ \text{πολύεδρα}}} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv - V \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dr_1 \left( r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) + dr_2 \left( r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + dr_3 \left( r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) \right\} \right) \quad (5.9-35)
\end{aligned}$$

όπου το  $\lambda$  είναι εκείνο που έχει υπολογιστεί στο πρώτο αναγκαίο κριτήριο Γεωμετρίας (Ενότητα 5.9.2).

Όσον αφορά το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης,

$$\oint_{\partial \varepsilon_R} \left\{ dr_1 \left( r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} - r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \right) + dr_2 \left( r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} - r_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \right) + dr_3 \left( r_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} - r_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \right) \right\}$$

θα γράψουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα σε μητρική μορφή, όπως κάναμε και στην Ενότητα 5.9.2.

Ορίζοντας, όπως και προηγουμένως,

$$\vec{r} = r_1 \vec{i} + r_2 \vec{j} + r_3 \vec{k} \Rightarrow d\vec{r} = dr_1 \vec{i} + dr_2 \vec{j} + dr_3 \vec{k}$$

και

$$\overrightarrow{\partial \mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_1} \vec{i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_2} \vec{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_3} \vec{k}$$

Επιπλέον, τονίζουμε ότι η βέλτιστη επιφάνεια  $\varepsilon_R$  θεωρούμε ότι έχει σταθερό περιθώριο και δη το σύνορο  $\partial S^R$  του μετακινήσιμο κρημνού  $S^R$ . Με σταθερό το σύνορο της  $\partial \varepsilon_R \equiv \partial S^R$ , η  $\varepsilon_R$  μετασχηματίζεται και λαμβάνει την τελική της μορφή μόλις οι προαναφερθείσες εξισώσεις Euler-Lagrange ικανοποιούνται επ' αυτής. Για το λόγο

αυτό, από εδώ και στο εξής, θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα  $\partial\mathcal{E}_R$  και  $\partial S^R$  ως ισοδύναμα.

Με αυτά ως δεδομένα, παρατηρούμε ότι η ανωτέρω σχέση εκφράζεται στην κάτωθι μορφή:

$$\oint_{\partial S^R} d\vec{r} \cdot (\vec{\partial\mathcal{L}} \times \vec{r}) \quad (5.9-36)$$

Πράγματι, εκ του ορισμού του εξωτερικού γινομένου έχουμε ότι

$$\vec{\partial\mathcal{L}} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_1} & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_2} & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_3} \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = \left( r_3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_2} - r_2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_3} \right) \vec{i} + \left( r_1 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_3} - r_3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_1} \right) \vec{j} + \left( r_2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_1} - r_1 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_2} \right) \vec{k}$$

και

$$d\vec{r} \cdot (\vec{\partial\mathcal{L}} \times \vec{r}) = dr_1 \left( r_3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_2} - r_2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_3} \right) + dr_2 \left( r_1 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_3} - r_3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_1} \right) + dr_3 \left( r_2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_1} - r_1 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_2} \right)$$

δηλαδή, την εσωτερική παράσταση του ανωτέρου ολοκληρώματος.

Χρησιμοποιώντας τους ίδιους συμβολισμούς, όπως και στο πρώτο αναγκαίο κριτήριο Γεωμετρίας (Ενότητα 5.9.2), για τη στροφή (τριδιάστατος πίνακας στροφής  $3 \times 3$   $\Psi$ ) και την παράλληλη μετατόπιση (τριδιάστατος πίνακας στήλη  $\Delta$ ), τις οποίες υφίσταται το περιθώριο  $\partial S^R$  του μετακινήσιμου κρημνού ως σταθερό σώμα, έχουμε  $\mathbf{r} = \Delta + \Psi \mathbf{r}^R$ .

Με διαφορίση και εφόσον το  $\Delta$  και το  $\Psi$  είναι σταθερά, κοινά για όλα τα σημεία του  $\partial S^R$ , λαμβάνουμε  $d\mathbf{r} = \Psi d\mathbf{r}^R$

Επομένως, η σχέση (5.9-36) γίνεται:

$$\oint_{\partial S^R} d\mathbf{r}^T \cdot (\partial\mathcal{L} \times \mathbf{r}) \quad (5.9-37)$$

Τώρα, εκφράζοντας το  $\partial\mathcal{L} = \partial\boldsymbol{\varphi} + 2\lambda\mathbf{r}$ , όπως προηγουμένως, όπου  $\partial\boldsymbol{\varphi} = \left( \frac{\partial}{\partial n_1}(\varphi(\boldsymbol{\xi})|\mathbf{n}|), \frac{\partial}{\partial n_2}(\varphi(\boldsymbol{\xi})|\mathbf{n}|), \frac{\partial}{\partial n_3}(\varphi(\boldsymbol{\xi})|\mathbf{n}|) \right)$  και, εφόσον, ως γνωστόν, ισχύει  $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$  έχουμε ότι

$$\oint_{\partial S^R} d\mathbf{r}^T \cdot (\partial\mathcal{L} \times \mathbf{r}) = \oint_{\partial S^R} d\mathbf{r}^T \cdot (\partial\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}) \quad (5.9-38)$$

Επομένως, για τα μετασχηματισμένα  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi}\mathbf{r}^R$  και  $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\Psi}d\mathbf{r}^R$ , προκύπτει για το ολοκλήρωμα η μητρική μορφή:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S^R} d\mathbf{r}^T \cdot (\partial\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}) &= \oint_{\partial \varepsilon_R} d\mathbf{r}^{R^T} \boldsymbol{\Psi}^T (\partial\boldsymbol{\varphi}\mathbf{r}^T - \mathbf{r}\partial\boldsymbol{\varphi}^T) \\ &= \oint_{\partial S^R} d\mathbf{r}^{R^T} \boldsymbol{\Psi}^T \left( \partial\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi}\mathbf{r}^R)^T - (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi}\mathbf{r}^R)\partial\boldsymbol{\varphi}^T \right) \end{aligned} \quad (5.9-39)$$

Σχετικά με την παράσταση αυτή αναφέρουμε τα εξής:

Για να φτάσουμε σε αυτό το κριτήριο, έχουμε διαπιστώσει ότι ικανοποιούνται και τα τρία προηγούμενα κριτήρια (Ενότητες 5.5, 5.6, 5.9.2), γεγονός που σημαίνει ότι γνωρίζουμε τόσο την παράλληλη μετατόπιση  $\boldsymbol{\Delta}$ , όσο και τη μήτρα στροφής  $\boldsymbol{\Psi}$  που μετέφεραν το μετακινήσιμο θραύσμα από την αρχική του τυχαία θέση σε εκείνη που ικανοποιεί και τα 3 προηγούμενα κριτήρια.

Εκ νέου θα έπρεπε να ξέρουμε τα  $\xi^R$  επί του περιθωρίου  $\partial S^R$  για να μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα. Εντούτοις, από τη φύση του συγκεκριμένου προβλήματος που απαιτεί συνέχεια ή/και παραλληλία των εφαπτομένων επιπέδων στην ορθή σχετική θέση προσαρμογής των δύο κρημνών, όπως προαναφέρθηκε και στο πρώτο αναγκαίο κριτήριο Γεωμετρίας (Ενότητα 5.9.2), προκύπτει ότι όλες οι ποσότητες στο ολοκλήρωμα  $\oint_{\partial S^R} d\mathbf{r}^{R^T} \boldsymbol{\Psi}^T \left( \partial\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi}\mathbf{r}^R)^T - (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi}\mathbf{r}^R)\partial\boldsymbol{\varphi}^T \right)$  είναι γνωστές και υπολογίζονται άμεσα και γρήγορα με αριθμητικό τρόπο.

Με βάση όλα τα ανωτέρω, η σχέση (5.9-35) μαζί με το πρώτο κριτήριο Γεωμετρίας οδηγούν σε ένα δεύτερο αναγκαίο κριτήριο Γεωμετρίας, η διατύπωση του οποίου ακολουθεί στην αμέσως επόμενη ενότητα.



#### 5.9.4 Δεύτερο σημαντικό, αναγκαίο κριτήριο προσαρμογής: η σχέση της συνολικής διαφοράς των γωνιών $\Omega$ των καθέτων διανυσμάτων και του όγκου $V$ του διακένου των κρημών

Εφόσον έχει ικανοποιηθεί το πρώτο κριτήριο Γεωμετρίας (Ενότητα 5.9.2), υπάρχει ένα  $\lambda$  που το ικανοποιεί και υπολογίζεται άμεσα εντός των ορίων που καθορίζει το κατώφλι του πρώτου αναγκαίου κριτηρίου Γεωμετρίας. Για το  $\lambda$  αυτό, πρέπει η σχέση γωνιών  $\Omega$  και όγκου  $V$

$$\Omega = \frac{9\lambda}{2} \left( \frac{1}{3} \iint_{S^F} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv + \frac{1}{3} \iint_{\substack{\text{παράπλευρα} \\ \text{πολύεδρα}}} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv - V \right) + \frac{1}{2} \left( \oint_{\partial S^R} d\mathbf{r}^R \mathbf{\Psi}^T \left( \partial \varphi (\Delta + \mathbf{\Psi} \mathbf{r}^R)^T - (\Delta + \mathbf{\Psi} \mathbf{r}^R) \partial \varphi^T \right) \right) \quad (5.9-40)$$

να ικανοποιείται με πολύ καλή προσέγγιση.

Στην πράξη, όμως, ο όγκος του διακένου  $V$  στην περίπτωση που η  $\varepsilon_R$  είναι η βέλτιστη επιφάνεια των εξισώσεων Euler-Lagrange είναι άγνωστος. Εντούτοις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (5.9-35) για να προσδιορίσουμε μία ανίσωση, η οποία θα χρησιμοποιηθεί σαν "φίλτρο" απόρριψης εκείνων των μετακινήσιμων κρημών  $S^R$  που δεν την ικανοποιούν.

Πράγματι, σύμφωνα με τη φύση του προβλήματος της ορθής συνένωσης δύο θραυσμάτων, αλλά και τη διαδικασία βελτιστοποίησης Euler-Lagrange που ακολουθήσαμε, προκύπτει ότι η ποσότητα  $\Omega$  στο αριστερό μέλος της (5.9-35) είναι η μέγιστη δυνατή ανάμεσα σε όλες τις επιφάνειες που περατούνται στο καθορισμένο σύνορο  $\partial S^R$ . Συνεπώς, εάν θέλουμε να ελέγξουμε εάν ένα θραύσμα  $\theta^R$  όντως προσαρμόζεται στο  $\theta^F$  που θεωρήσαμε ως σταθερό και μάλιστα επί των κρημών  $S^F$  και  $S^R$ , τότε υπολογίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\Omega^R = \iint_{S^R} \varphi(\vec{\xi}) \, dudv \quad (5.9-41)$$

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν, προφανώς ισχύει

$$\Omega^R \leq \Omega \quad (5.9-42)$$

και, προφανώς, πρέπει  $\Omega^R$  να είναι θετικό.

Επί τη βάση των ανωτέρω, η σχέση (5.9-35) γεννά την ανίσωση

$$\begin{aligned} \Omega^R \leq \Omega \leq & \left| \frac{9\lambda}{2} \left( \frac{1}{3} \iint_{S^F} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv + \frac{1}{3} \iint_{\substack{\text{παράπλευρα} \\ \text{πολύεδρα}}} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv - V \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \oint_{\partial \varepsilon_R} d\mathbf{r}^{R^T} \boldsymbol{\Psi}^T \left( \partial \boldsymbol{\varphi} (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R)^T - (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R) \partial \boldsymbol{\varphi}^T \right) \right) \right| \\ \Leftrightarrow \Omega^R \leq & \frac{3|\lambda|}{2} \left| \iint_{S^F} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \right| + \frac{3|\lambda|}{2} \left| \iint_{\substack{\text{παράπλευρα} \\ \text{πολύεδρα}}} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \right| + \frac{9|\lambda|}{2} V \\ & + \frac{1}{2} \left| \oint_{\partial \varepsilon_R} d\mathbf{r}^{R^T} \boldsymbol{\Psi}^T \left( \partial \boldsymbol{\varphi} (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R)^T - (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R) \partial \boldsymbol{\varphi}^T \right) \right| \end{aligned} \quad (5.9-43)$$

Οι ποσότητες

$$\frac{1}{2} \left| \oint_{\partial \varepsilon_R} d\mathbf{r}^{R^T} \boldsymbol{\Psi}^T \left( \partial \boldsymbol{\varphi} (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R)^T - (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R) \partial \boldsymbol{\varphi}^T \right) \right|$$

και

$$\left| \iint_{S^F} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \right|$$

μπορούν να υπολογιστούν άμεσα και γρήγορα με αριθμητικό τρόπο.

Επίσης, σύμφωνα με τα όσα αναπτύχθηκαν στο τελεσίδικο κριτήριο της Ενότητας 5.8,  $V \leq V_{threshold}$ , ενώ, βέβαια, το  $|\lambda|$  έχει υπολογιστεί στο πρώτο αναγκαίο κριτήριο Γεωμετρίας με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση.

Επιπλέον, η ποσότητα  $\Omega^R$  μπορεί και αυτή να υπολογιστεί άμεσα και γρήγορα με αριθμητικό τρόπο, οπότε η ανίσωση (5.9-43) μετασχηματίζεται στην ενισχυμένη μορφή:

$$\begin{aligned}
\Omega^R \leq & \frac{9|\lambda|}{2} \left| \iint_{S^F} \frac{1}{3} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \right| + \frac{9|\lambda|}{2} \left| \iint_{\substack{\text{παράπλευρα} \\ \text{πολύεδρα}}} \frac{1}{3} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \right| \\
& + \frac{9|\lambda|}{2} V_{threshold} \\
& + \frac{1}{2} \left| \oint_{\partial \varepsilon_R} d\mathbf{r}^R \mathbf{T}^T (\partial \boldsymbol{\varphi} (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R)^T - (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R) \partial \boldsymbol{\varphi}^T) \right|
\end{aligned} \tag{5.9-44}$$

Όλοι οι όροι της ανωτέρω ανίσωσης είναι γνωστοί, εκτός από το ολοκλήρωμα στα παράπλευρα πολύεδρα

$$\iint_{\substack{\text{παράπλευρα} \\ \text{πολύεδρα}}} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv$$

το οποίο, επίσης, μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά αλλά με μία περισσότερο χρονοβόρο διαδικασία από ό,τι οι προαναφερθέντες όροι.

Για να μειώσουμε το υπολογιστικό αυτό κόστος, βρήκαμε ένα άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα στα παράπλευρα πολύεδρα, το οποίο ίσχυσε σε όλες τις περιπτώσεις που ελέγξαμε ως τώρα. Το άνω αυτό όριο εξηγείται εύλογα, φυσικά, ως εξής: Γενικά, η συμβολή στον όγκο της παράπλευρης επιφάνειας έχει υπολογιστεί ότι είναι της τάξεως του 10% στην περίπτωση που δύο θραύσματα, όντως, ταιριάζουν. Επομένως, με ασφάλεια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συμβολή του όρου

$$\left| \iint_{\substack{\text{παράπλευρα} \\ \text{πολύεδρα}}} \frac{1}{3} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \right|$$

στον όγκο  $V$  του διακένου, και άρα και στην ανίσωση (5.9-44) είναι μικρότερη ή ίση του  $0,35 V_{threshold}$ .

Επομένως, η ανίσωση (5.9-44) εκφράζεται τελικά από την ανίσωση:

$$\begin{aligned}
\Omega^R \leq & \frac{9|\lambda|}{2} \left| \iint_{S^F} \frac{1}{3} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \right| + \frac{9 \cdot 1,35|\lambda|}{2} V_{threshold} \\
& + \frac{1}{2} \oint_{\partial \varepsilon_R} d\mathbf{r}^R \mathbf{T}^T (\partial \boldsymbol{\varphi} (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R)^T - (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R) \partial \boldsymbol{\varphi}^T)
\end{aligned} \tag{5.9-45}$$

Χρησιμοποιώντας όλα τα ανωτέρω, διατυπώνουμε το δεύτερο αναγκαίο κριτήριο ομοιότητας Γεωμετρίας μεταξύ των κρημνών  $S^F$  και  $S^R$  ως ακολούθως:

Εάν τα αριθμητικώς υπολογισθέντα

$$\iint_{S^F} \frac{1}{3} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv$$

$$\oint_{\partial \varepsilon_R} d\mathbf{r}^{R^T} \boldsymbol{\Psi}^T \left( \partial \varphi (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R)^T - (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R) \partial \varphi^T \right)$$

και

$$\Omega^R = \iint_{S^R} \varphi(\vec{\xi}) \, dudv$$

δεν ικανοποιούν την ανίσωση

$$\begin{aligned} \Omega^R \leq \frac{9|\lambda|}{2} \left| \iint_{S^F} \frac{1}{3} (\vec{r} \cdot \vec{n}) \, dudv \right| + \frac{9 \cdot 1,35|\lambda|}{2} V_{threshold} \\ + \frac{1}{2} \oint_{\partial \varepsilon_R} d\mathbf{r}^{R^T} \boldsymbol{\Psi}^T \left( \partial \varphi (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R)^T - (\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r}^R) \partial \varphi^T \right) \end{aligned}$$

τότε θεωρούμε de facto ότι τα θραύσματα  $\theta^F$ ,  $\theta^R$  δεν ταιριάζουν στη συγκεκριμένη σχετική θέση αυτών.

## 5.10 ΑΛΛΗΛΟΥΧΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΥ ΕΝΩΣΕΩΝ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ

**Βήμα 1:** Μετά την ψηφιοποίηση κάθε θραύσματος έχουμε ορίσει την άνω, κάτω και παράπλευρη επιφάνειά του (βλ. Ενότητα 5.2.2). Επιπλέον, έχουμε ορίσει σε κατάλληλη μορφή το περιγράμμα-σύνορο τόσο της άνω, όσο και της κάτω επιφάνειας. Τα δύο αυτά σύνορα θεωρούμε ότι διαγράφονται πάντα με την ίδια φορά και βεβαίως, καθορίζουν και την παράπλευρη επιφάνεια του κάθε θραύσματος.

**Βήμα 2:** Σε κάθε θραύσμα ορίζουμε ζεύγη συζυγών αλυσίδων, όπως περιεγράφη στην Ενότητα 5.3. Επιλέγεται μεγάλο εύρος μήκους αλυσίδας, καθώς το πραγματικό μήκος θραύσης μεταξύ δύο θραυσμάτων είναι άγνωστο. Εκκινούμε από ένα μικρό μήκος, περίπου 2 cm, και εάν εντοπίσουμε πιθανή ένωση, αυξάνουμε συνεχώς αυτό το μήκος των αλυσίδων, όσο η μέθοδος επιβεβαιώνει την ύπαρξη ένωσης.

**Βήμα 3:** Ταυτόχρονα με την επιλογή του ζεύγους αλυσίδων, καθορίζουμε άμεσα μία επιφάνεια πιθανής ένωσης με άλλο θραύσμα, την οποία ονομάζουμε κρημνό επαφής (βλ. Ενότητα 5.3).

**Βήμα 4:** Επιλέγουμε ένα ζεύγος θραυσμάτων και θεωρούμε το μεγαλύτερο ως το σταθερό θραύσμα  $\theta^F$  του ζεύγους. Αντίστοιχα, το άλλο θραύσμα  $\theta^R$  το θεωρούμε μετακινήσιμο. Τονίζουμε ότι το ζεύγος των αλυσίδων στο σταθερό θραύσμα γεννάται πρώτα κατά την ωρολογιακή και έπειτα κατά την ανθωρολογιακή φορά. Σε κάθε περίπτωση, το αντίστοιχο ζεύγος αλυσίδων στο μετακινήσιμο θραύσμα διαγράφεται κατά την αντίθετη φορά. Αυτό συμβαίνει διότι σε οποιαδήποτε πιθανή συνένωση, τα κατέναντι σημεία των δύο θραυσμάτων στις επιφάνειες θραύσης/κρημνούς επαφής  $S^F$  και  $S^R$  διαγράφονται με αντίθετη φορά, όπως ακριβώς προσαρμόζονται δύο γρανάζια.

**Βήμα 5:** Εφαρμογή 1<sup>ου</sup> κριτηρίου: Εφαρμόζουμε το κριτήριο βέλτιστης προσαρμογής των κατέναντι αλυσίδων, κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, όπως περιεγράφη στην Ενότητα 5.5. Τονίζουμε ότι η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ζευγών αλυσίδων που μπορούν να δημιουργηθούν με τον τρόπο που προαναφέρθηκε στο σταθερό και μετακινήσιμο θραύσμα, όπου το ένα ζεύγος αλυσίδων ανήκει στο  $\theta^F$  και το άλλο στο  $\theta^R$ . Για κάθε μία τέτοια επιλογή ζευγών αλυσίδων στο  $\theta^F$  και  $\theta^R$  δημιουργείται

και μία σχετική θέση των δύο θραυσμάτων, στην οποία θα ελεγχθεί η πιθανότητα συνένωσης αυτών, σύμφωνα με τα κριτήρια που έχουν αναπτυχθεί.

**Βήμα 6:** Όταν και μόνον όταν ικανοποιείται το πρώτο κριτήριο για μία συγκεκριμένη σχετική θέση των δύο θραυσμάτων, προχωρούμε στην εφαρμογή του 2ου κριτηρίου: Δηλαδή, εφαρμόζουμε το κριτήριο συνέχειας των εφαπτόμενων επιπέδων στα κατέναντι σημεία των άνω αλυσίδων των δύο θραυσμάτων. Ισοδυνάμως, ελέγχουμε στις άνω επιφάνειες των θραυσμάτων, εάν τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στα κατέναντι σημεία είναι «πρακτικά» ίσα. Με τον όρο «πρακτικά» ίσα εννοούμε ότι η μεταξύ τους γωνία θα είναι συνολικά πολύ μικρή, όπως περιγράφεται στην Ενότητα 5.6.

**Βήμα 7:** Εφόσον τα δύο πρώτα κριτήρια ικανοποιούνται, προχωρούμε στην εφαρμογή του 3ου κριτηρίου, το οποίο έχει προκύψει χρησιμοποιώντας τη Θεωρία Μεταβολών, όπως περιεγράφη στην Ενότητα 5.9.2. Το κριτήριο αυτό συνίσταται στον έλεγχο της παραλληλίας δύο κατάλληλα ορισμένων διανυσμάτων (5.9-20) και στην εύρεση ενός ενιαίου συντελεστή Lagrange  $\lambda$  (5.9-10). Το κριτήριο αυτό βασίζεται στην εύλογη αίσθηση, η οποία θεμελιώθηκε μαθηματικά αυστηρώς στην Ενότητα 5.9.2, σύμφωνα με την οποία, σε μία πραγματική θέση συνένωσης δύο θραυσμάτων, η Γεωμετρία των κατέναντι κρημνών επαφής δεν μπορεί να διαφέρει σημαντικά. Ακριβώς αυτή η παρατήρηση, οδήγησε στη διατύπωση και εφαρμογή και του επόμενου κριτηρίου.

**Βήμα 8:** Όταν και μόνον όταν όλα τα προηγούμενα κριτήρια ικανοποιούνται, προχωρούμε στην εφαρμογή του 4ου κριτηρίου, το οποίο βασίζεται εκ νέου στο γεγονός ότι σε μία πραγματική θέση επαφής δύο θραυσμάτων, η διαφορά Γεωμετρίας των δύο κρημνών επαφής πρέπει να είναι φραγμένη. Για την εφαρμογή αυτού του κριτηρίου, χρησιμοποιούμε την ανίσωση (5.9-45) που αποδείξαμε στην

Ενότητα 5.9.4 και η οποία αφορά το ολοκλήρωμα γωνιών των μοναδιαίων διανυσμάτων που είναι κάθετα στο μετακινήσιμο κρημνό  $S^R$ .

**Βήμα 9:** Εάν όλα τα προηγούμενα κριτήρια ικανοποιούνται στην τρέχουσα σχετική θέση των δύο θραυσμάτων  $\theta^F$  και  $\theta^R$ , τότε και μόνον τότε προχωρούμε στον υπολογισμό τους όγκου εισχώρησης του ενός θραύσματος στο άλλο (βλ. Ενότητα 5.7.1) και στην απαίτηση αυτός να είναι περίπου ίσος με μηδέν. Εφόσον αυτός ο όγκος εικονικής εισχώρησης είναι μεγαλύτερος του μηδενός (της τάξεως του  $10^{-3}$ ), τότε, με χρήση της Θεωρίας Μεταβολών, υπολογίζουμε την ελάχιστη παράλληλη μετατόπιση του  $\theta^R$ , η οποία τον μηδενίζει (βλ. Ενότητα 5.7.2). Με τον τρόπο αυτό, δημιουργούμε μία νέα σχετική θέση μεταξύ των θραυσμάτων  $\theta^F$  και  $\theta^R$  και ένα νέο διάκενο  $X$  μεταξύ των κρημνών  $S^F$  και  $S^R$ .

**Βήμα 10:** Τελεσιδικό κριτήριο συνένωσης των δύο θραυσμάτων: Στη θέση που έχει προκύψει από την εφαρμογή/ικανοποίηση όλων των προηγούμενων κριτηρίων, υπολογίζουμε τον όγκο του διακένου-χωρίου ανάμεσα στα δύο προς έλεγχο θραύσματα (βλ. Ενότητα 5.8). Εφόσον ο όγκος αυτός είναι μικρότερος από ένα κατώφλι, θεωρούμε ότι στη θέση αυτή πράγματι τα δύο θραύσματα ενώνονται επί των επιλεγέντων κρημνών επαφής.

## **6. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΔΥΟ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΟΥ ΑΝΑΠΤΥΧΘΗΚΑΝ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΗ ΑΥΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ, ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ**

Στην παρούσα ενότητα, θα αναφερθούμε στις εφαρμογές των αναπτυχθεισών μεθόδων στο πρόβλημα της ανακατασκευής θραυσμένων αντικειμένων.

### **6.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΑΝΑΠΤΥΧΘΕΙΣΑΣ ΜΕΘΟΔΟΥ. ΕΙΚΟΝΙΚΗ ΑΝΑΣΥΝΘΕΣΗ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΩΝ ΤΟΙΧΟΓΡΑΦΙΩΝ**

Η παρουσιαζόμενη μεθοδολογία και το σχετικό με αυτήν αναπτυχθέν πληροφοριακό σύστημα έχουν εφαρμοστεί σε:

- α) ένα τεχνητά κατασκευασμένο δείγμα ελέγχου και
- β) στην ανασύνθεση πραγματικών, πολύ σημαντικών προϊστορικών θραυσμάτων τοιχογραφιών με μεγάλη επιτυχία.

Σε αμφότερες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις, τα συνιστώσα θραύσματα προσάρμοσαν επιτυχώς και εντοπίστηκε με μοναδικό τρόπο η κατάλληλη θέση προσαρμογής μεταξύ πραγματικά γειτονικών θραυσμάτων. Ιδιαίτερα, στην περίπτωση των τοιχογραφιών, η επιτυχία του συστήματος επιβεβαιώθηκε από εξειδικευμένους επιστήμονες (αρχαιολόγους και μελετητές), οι οποίοι συμφώνησαν πλήρως με τις συνενώσεις που πρότεινε το αναπτυχθέν σύστημα.

#### **6.1.1 Εφαρμογή της μεθόδου στην ανακατασκευή τεχνητά θραυσμένου αντικειμένου**

Αρχικά, η μέθοδος και το σχετικό με αυτή αναπτυχθέν σύστημα δοκιμάστηκαν σε δύο αντικείμενα που προηγουμένως έσπασαν με τεχνητό τρόπο σε ελεγχόμενο χώρο, όπως



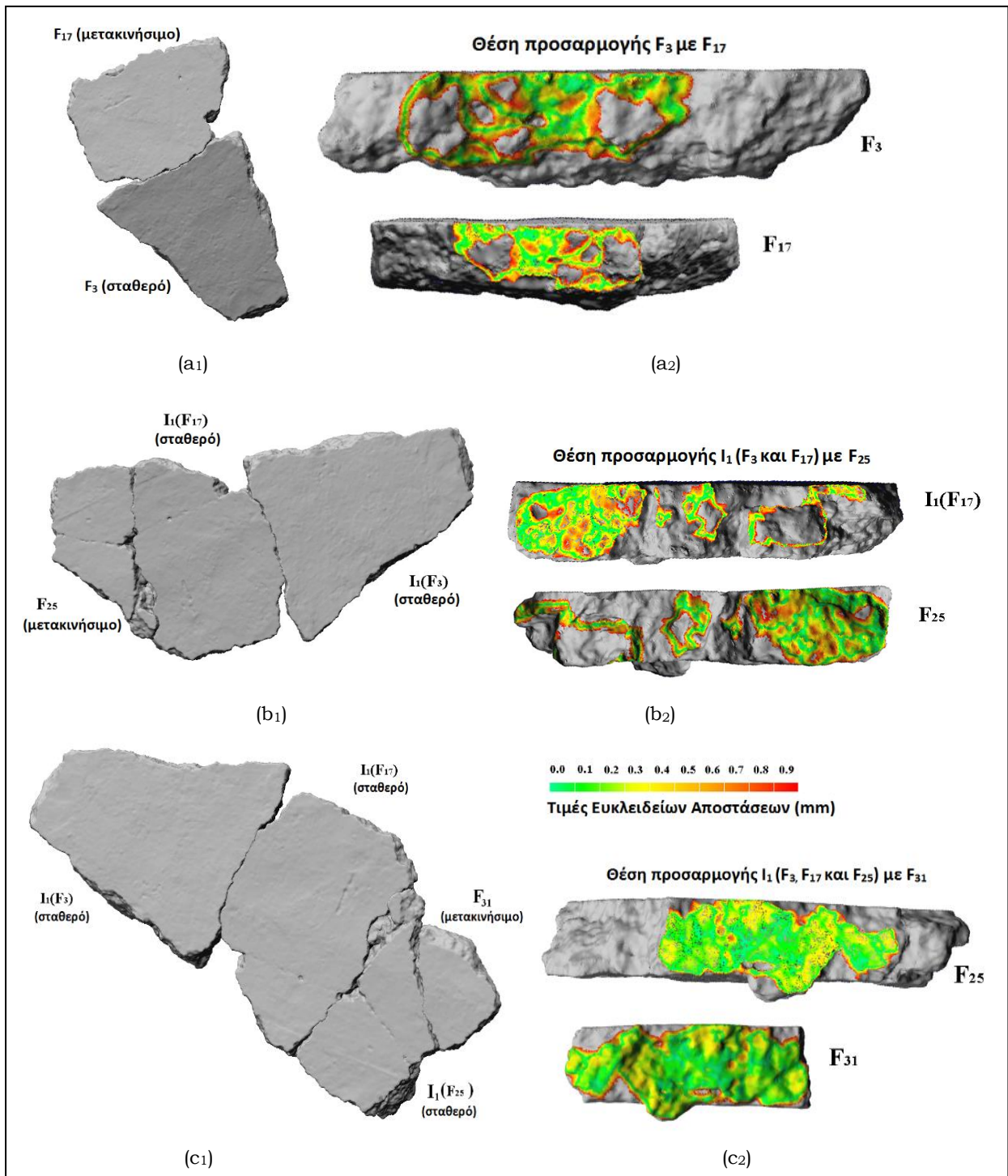
θα περιγραφεί αναλυτικά κατωτέρω. Ο λόγος για τον οποίο η πρώτη αυτή δοκιμή περιελάμβανε τεχνητά δημιουργημένα θραύσματα έχει να κάνει με τη δυσκολία ανεύρεσης ικανού πλήθους ζευγών θραυσμάτων που ταιριάζουν σε πραγματικά δεδομένα από αρχαίες τοιχογραφίες, σαν και αυτές που ανασκάφηκαν στην Τίρυνθα. Ειδικότερα, εξαιτίας των περίπου 3.300 ετών που παρήλθαν από τη στιγμή που οι τοιχογραφίες υπέστησαν θραύση, είναι λογικό να περιμένει κανείς ότι πολλά θραύσματα θα λείπουν, όπως επίσης και ότι όλα τα θραύσματα θα υποφέρουν από έντονη φθορά. Επιπρόσθετα, δεν γνωρίζουμε, a priori, το θεματικό περιεχόμενο της τοιχογραφίας και επομένως, δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τον ακριβή τρόπο με τον οποίο αυτή πρέπει να ανασυντεθεί. Επιπλέον, επιθυμούσαμε να δοκιμάσουμε την απόδοση του συστήματος που αναπτύχθηκε στην επίλυση ενός κλειστού προβλήματος, δηλαδή, στην πλήρη ανασύνθεση ενός θραυσμένου αντικειμένου, το οποίο αρχικά γνωρίζαμε πλήρως.

Για όλους αυτούς τους λόγους, αρχικά, μία πέτρινη πλάκα τοποθετήθηκε μέσα σε ένα σφραγισμένο σάκο, ο οποίος αφέθηκε από ένα συγκεκριμένο ύψος. Το αποτέλεσμα αυτού ήταν η πλάκα να σπάσει σε 9 κομμάτια. Επαναλάβαμε την ίδια διαδικασία με μία δεύτερη πλάκα, η οποία έσπασε σε 15 κομμάτια. Και τα 24 αυτά θραύσματα σαρώθηκαν και οι ληφθείσες ψηφιακές τους αναπαραστάσεις «ανεμίχθησαν» χωρίς να σημειωθεί καμία ένδειξη για το που ανήκει η καθεμία. Στη συνέχεια, οι ψηφιακές αναπαραστάσεις των θραυσμάτων υπέστησαν μία πρώτη επεξεργασία σαν αυτή που περιγράφει στην Ενότητα 5.2 και ακολούθως, εφαρμόστηκε η αναπτυχθείσα διαδικασία προσαρμογής που περιγράφει στην Ενότητα 5.10. Η εφαρμογή αυτής της διαδικασίας προσέφερε δύο νησίδες, οι οποίες αντιστοιχούσαν ακριβώς στις δύο θραυσμένες πλάκες.

### **6.1.2 Εφαρμογή της μεθόδου στην ανακατασκευή θραυσμένων προϊστορικών τοιχογραφιών πολύ μεγάλης αρχαιολογικής σημασίας**

Ο πρώτος μεγάλος στόχος της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε και παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία είναι να συνεισφέρει στην ανασύνθεση θραυσμένων τοιχογραφιών πολύ μεγάλης αρχαιολογικής σημασίας. Πράγματι, τα θραύσματα των τοιχογραφιών που χρησιμοποιήθηκαν στα πλαίσια της έρευνάς μας βρίσκονται αποθηκευμένα στη Συλλογή Προϊστορικών Αρχαιοτήτων του Εθνικού Αρχαιολογικού Μουσείου της Αθήνας (inv. nos 1596, 1655, 1668, 5881-3) και προέρχονται από τις ανασκαφές στο Μυκηναϊκό παλάτι της Τίρυνθας που έκανε ο H. Schliemann το 1885-1886 (H. Schliemann, *Tiryns*, Leipzig 1886, pls V, VI, XI) και το Γερμανικό Ινστιτούτο τα έτη 1909-1910 (D. Rodenwaldt, *Die Fresken des Palastes, Tiryns II*, Athen 1912, pl. III, XXI). Τα θραύσματα χρονολογούνται από τον 14-13 αιώνα π.Χ. και παρουσιάζουν μία ποικιλία μοτίβων διακόσμησης, περιλαμβάνοντας σπείρες, σχηματικά φυτά, ροζέτες και αφηρημένα σχέδια. Μερικά από αυτά, με κόνιαμα πάχους 2.5cm περίπου ανήκουν στο μικρότερο πάτωμα του παλατιού (Schliemann 1886 pl. XI, Rodenwaldt 1912 pl. XXI).

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, σαρώθηκαν 41 θραύσματα που ανήκουν σε αυτή τη συλλογή και εφαρμόστηκε σε αυτά, η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε προηγουμένως στην Ενότητα 4.10, με σκοπό την ανεύρεση πιθανών νησίδων από αποδεκτά ταιριάσματα μεταξύ τους. Το σύστημα, τελικώς, προσέφερε 9 νησίδες πιθανών ταιριασμάτων, όπου η κάθε νησίδα αποτελούνταν από 2 έως 4 θραύσματα. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες (Πίνακας 2 και Πίνακας 3), όπου οι νησίδες  $I_n$  δίνονται με τη σειρά που προέκυψαν από το σύστημα, μαζί με τα θραύσματα από τα οποία αποτελούνται και τον αριθμό των εναπομεινάντων θραυσμάτων κάθε φορά που δημιουργούνταν μία νησίδα  $I_n$  (π.χ. δεξ Εικόνα 40). Επισημαίνεται ότι τα θραύσματα που δεν ανήκαν σε κάποια, τουλάχιστον διμελή νησίδα, δηλαδή μία εκ των  $I_1, I_3, I_7, I_8, I_{11}, I_{18}, I_{20}, I_{21}, I_{23}$ , δεν προσέφεραν καμία αποδεκτή θέση προσαρμογής ούτε μεταξύ τους, ούτε με καμία από τις σχηματισθείσες νησίδες.



**Εικόνα 40 – Η ακολουθία εντοπισμού ταιριασμάτων που προσέφερε τη νησιδα  $I_1$ . (a1), (b1), (c1): Ζεύγη προτεινόμενων από το σύστημα ταιριασμάτων και επακολούθως, η ένωση των τρισδιάστατων αναπαραστάσεων των δύο θραυσμάτων στη θέση ταιριάσματος. (a2), (b2), (c2): Οπτική αναπαράσταση των Ευκλειδείων αποστάσεων μεταξύ των επιφανειών των θραυσμάτων στις θέσεις ταιριάσματος που απεικονίζονται στα (a1), (b1) και (c1) αντίστοιχα.**

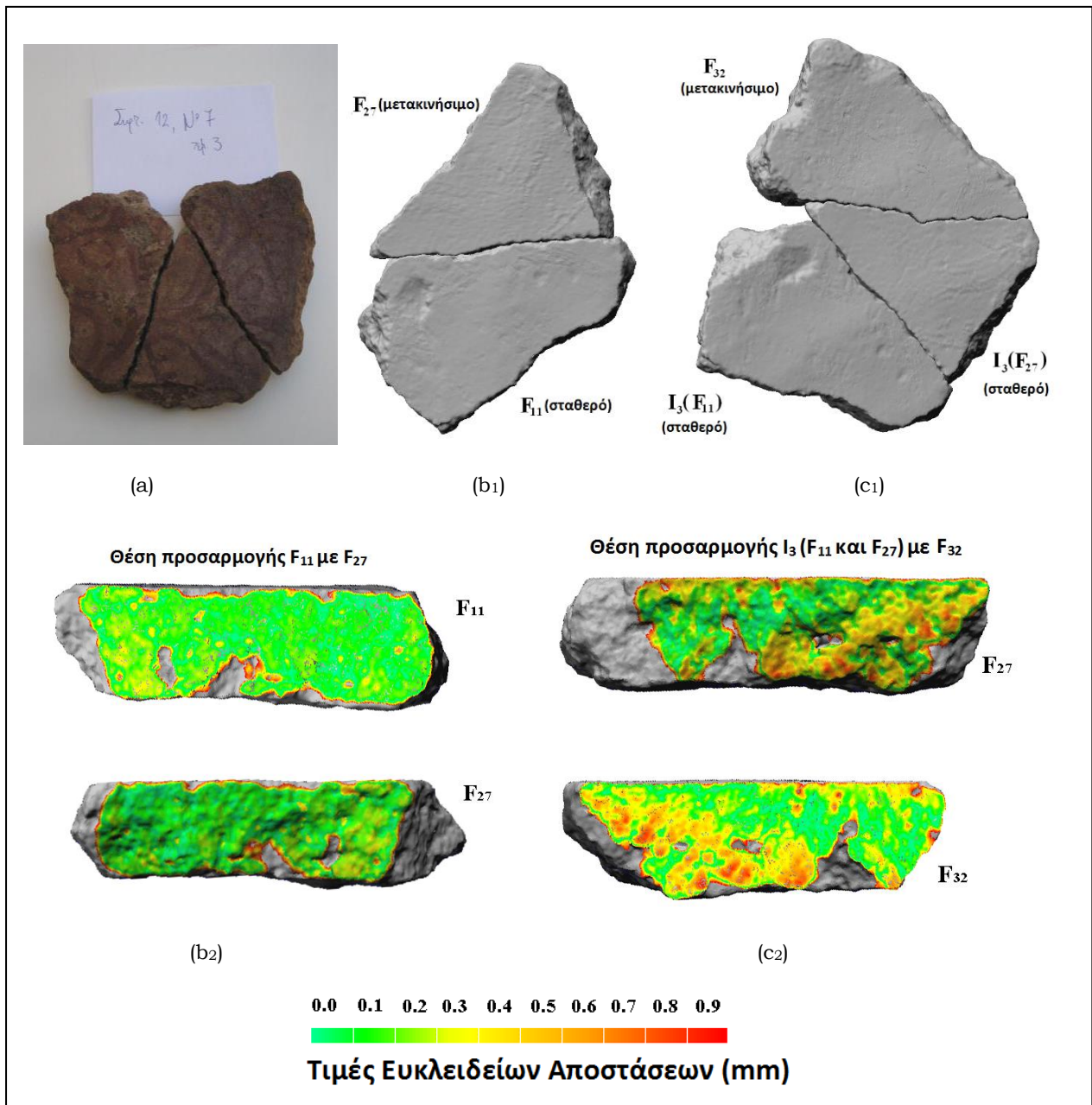
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το σύστημα ελέγχθηκαν από εξειδικευμένους συντηρητές και αρχαιολόγους. Συγκεκριμένα, παραδώσαμε στους εξειδικευμένους επιστήμονες τις εικόνες των θραυσμάτων στις θέσεις ταιριάσματος που αυτόματα προέκυψαν από το σύστημα και εκείνοι τοποθέτησαν με το χέρι τα πραγματικά θραύσματα της κάθε εικόνας στη σχετική θέση που αυτή έδειχνε και επιβεβαίωσαν ότι όλα τα προτεινόμενα ταιριάσματα είναι αποδεκτά, σύμφωνα με τη γνώση τους και την εμπειρία τους. Στις εικόνες που ακολουθούν (Εικόνα 41 έως Εικόνα 48) φαίνεται ενδεικτικά η αντιστοιχία μεταξύ των αυτοματοποιημένων εικονικών προσαρμογών που προέκυψαν από το σύστημα και εκείνων που πραγματοποίησαν οι ειδικοί.

	Νησίδες Θραυσμάτων								
	$I_1$	$I_3$	$I_7$	$I_8$	$I_{11}$	$I_{18}$	$I_{20}$	$I_{21}$	$I_{23}$
<b>Θραύσματα που απαρτίζουν την κάθε νησίδα</b>	$F_3$	$F_{11}$	$F_{20}$	$F_4$	$F_8$	$F_{14}$	$F_9$	$F_{19}$	$F_{24}$
	$F_{17}$	$F_{27}$	$F_{23}$	$F_{33}$	$F_{22}$	$F_{28}$	$F_{12}$	$F_{40}$	$F_{39}$
	$F_{25}$	$F_{32}$	-	-	-	$F_{30}$	$F_{14}$	-	-
	$F_{31}$	-	-	-	-	-	$F_{29}$	-	-
<b>Θραύσματα που δεν ταιρίαξαν με το εκάστοτε σταθερό</b>	37	33	28	26	22	13	8	6	3

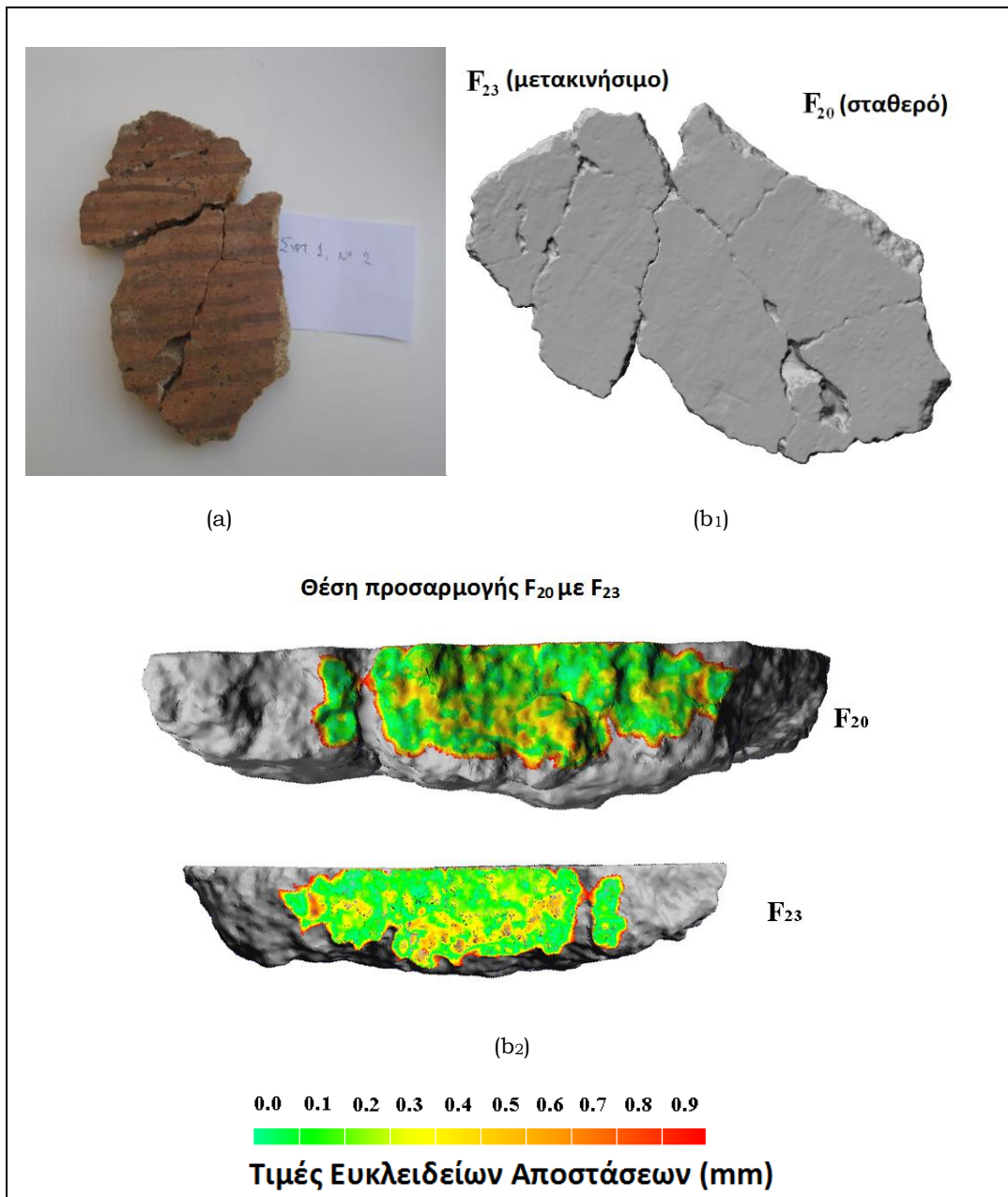
**Πίνακας 2 - Η ακολουθία των νησίδων θραυσμάτων που εντοπίστηκαν από το αναπτυχθέν σύστημα μετά από 27 επαναλήψεις. Η νησίδα  $I_1$  εντοπίστηκε πρώτη, η  $I_3$  δεύτερη, η  $I_7$  τρίτη, κ.ο.κ. Ο κάτω δείκτης του  $I_n$  αντιστοιχεί στον αύξοντα αριθμό της επανάληψης κατά την οποία ένα νέο θραύσμα χρησιμοποιήθηκε ως σταθερό για τον εντοπισμό μιας νέας νησίδας. Αυτό σημαίνει ότι η νησίδα  $I_2$  αποτελείται από ένα μόνο θραύσμα και παραλείπεται, καθώς δεν βρέθηκε κανένα πιθανό ταιρίασμα με αυτό. Οι νησίδες που εντοπίστηκαν φαίνονται στην Εικόνα 40 έως και την Εικόνα 48, μαζί με τις φωτογραφίες της ανακατασκευής που πραγματοποίησαν οι μελετητές. Τα θραύσματα συμβολίζονται με  $F_m$  με τη σειρά που περιεγράφη στην Ενότητα 4.10.**

	Νησίδες Θραυσμάτων								
	$I_1$	$I_3$	$I_7$	$I_8$	$I_{11}$	$I_{18}$	$I_{20}$	$I_{21}$	$I_{23}$
<b>Θραύσματα που απαρτίζουν την κάθε νησίδα</b>	$F_3$	$F_{11}$	$F_{20}$	$F_4$	$F_8$	$F_{14}$	$F_9$	$F_{19}$	$F_{24}$
	$F_{17}$	$F_{27}$	$F_{23}$	$F_{33}$	$F_{22}$	$F_{28}$	$F_{12}$	$F_{40}$	$F_{39}$
	$F_{25}$	$F_{32}$	-	-	-	$F_{30}$	$F_{14}$	-	-
	$F_{31}$	-	-	-	-	-	$F_{29}$	-	-
<b>Μέσες Ευκλείδειες αποστάσεις μεταξύ των κορυφών των τριγώνων κάθε χωρίου <math>V_{k,m}</math> (mm)</b>	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.510	0.400	0.360	0.400	0.398	0.548	0.955	0.282	0.444
	0.499	0.284				0.393	0.261		
	0.350						0.270		

Πίνακας 3 - Η ακολουθία των μέσων Ευκλειδείων αποστάσεων είναι σε μία προς μία αντιστοιχία με τα θραύσματα τα οποία ταιριάζουν κάθε φορά στην αντίστοιχη νησίδα. Για παράδειγμα, το  $F_{17}$  ταιριάζει βέλτιστα με το  $F_3$  με 0.510 mm μέση Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ του σταθερού και του μετακινήσιμου κρημνού, το  $F_{25}$  ταιριάζει με τη νησίδα  $I_1$  που σχηματίστηκε από το ταίριασμα του  $F_3$  με το  $F_{17}$  με αντίστοιχο μέσο σφάλμα 0.499 mm, κοκ. Τα σχετικά ταιριάσματα απεικονίζονται στην Εικόνα 40 έως και την Εικόνα 48

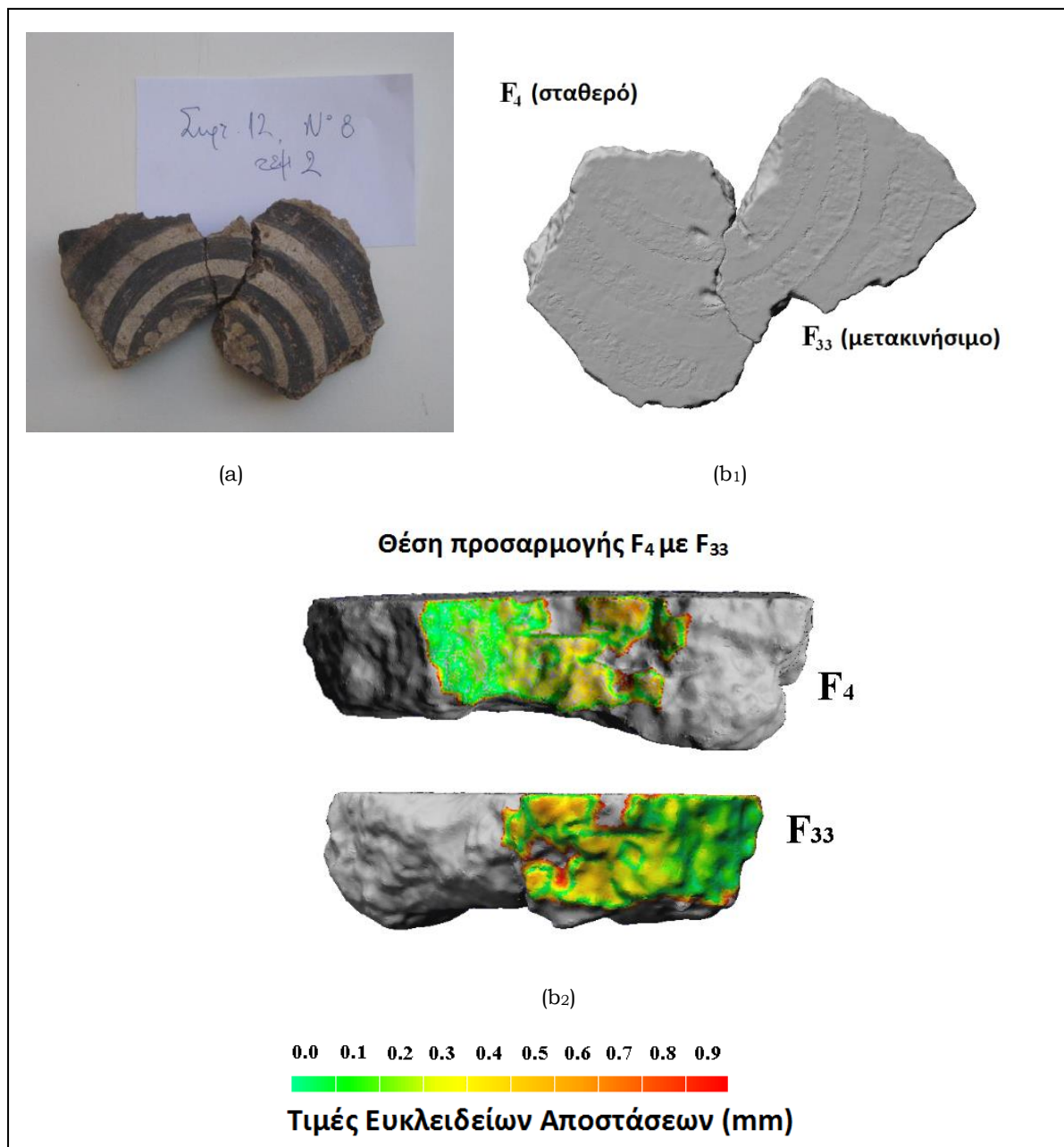


Εικόνα 41 - Αποτελέσματα διαδικασίας ταιριάσματος και επιβεβαίωση νησίδας  $I_3$ . (a): Η πραγματική νησίδα, ανακατασκευασμένη από τους συντηρητές, βάσει των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το αναπτυχθέν σύστημα. (b<sub>1</sub>), (c<sub>1</sub>): Ζεύγη προτεινόμενων από το σύστημα ταιριασμάτων και επακολούθως, η ένωση των τρισδιάστατων αναπαραστάσεων των δύο θραυσμάτων στη θέση ταιριάσματος. (b<sub>2</sub>), (c<sub>2</sub>): Οπτική αναπαράσταση των Ευκλειδείων αποστάσεων μεταξύ των επιφανειών των θραυσμάτων στις θέσεις ταιριάσματος που απεικονίζονται στα (b<sub>1</sub>) και (c<sub>1</sub>) αντίστοιχα.



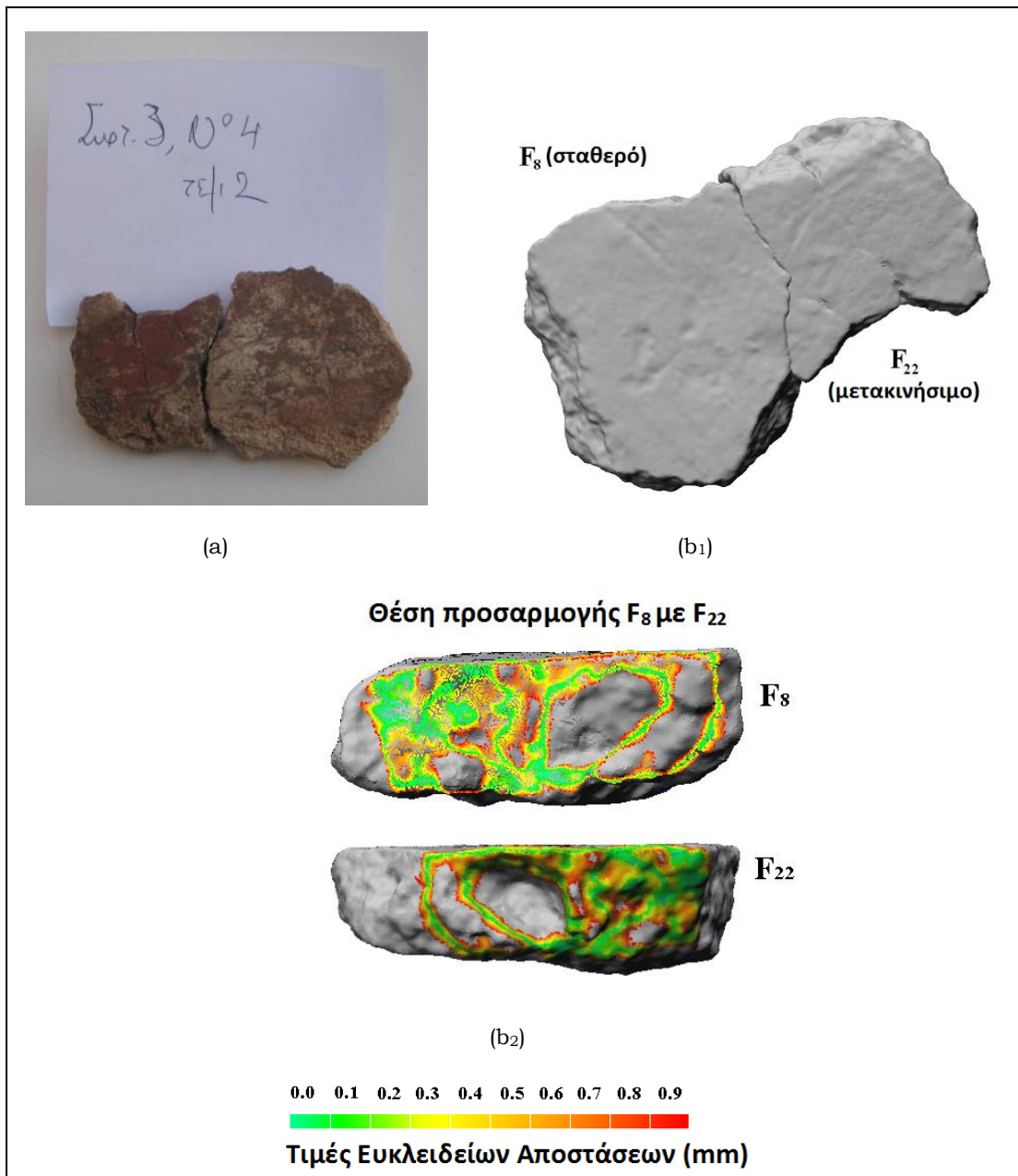
**Εικόνα 42 - Αποτελέσματα διαδικασίας ταιριάσματος και επιβεβαίωση νησίδας I7. (a): Η πραγματική νησίδα, ανακατασκευασμένη από τους συντηρητές, βάσει των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το αναπτυχθέν σύστημα. (b1): Ζεύγη προτεινόμενων από το σύστημα ταιριασμάτων και επακολούθως, η ένωση των τρισδιάστατων αναπαραστάσεων των δύο θραυσμάτων στη θέση ταιριάσματος. (b2): Οπτική αναπαράσταση των Ευκλειδίων αποστάσεων μεταξύ των επιφανειών των θραυσμάτων στις θέσεις ταιριάσματος που απεικονίζονται στο (b1).**



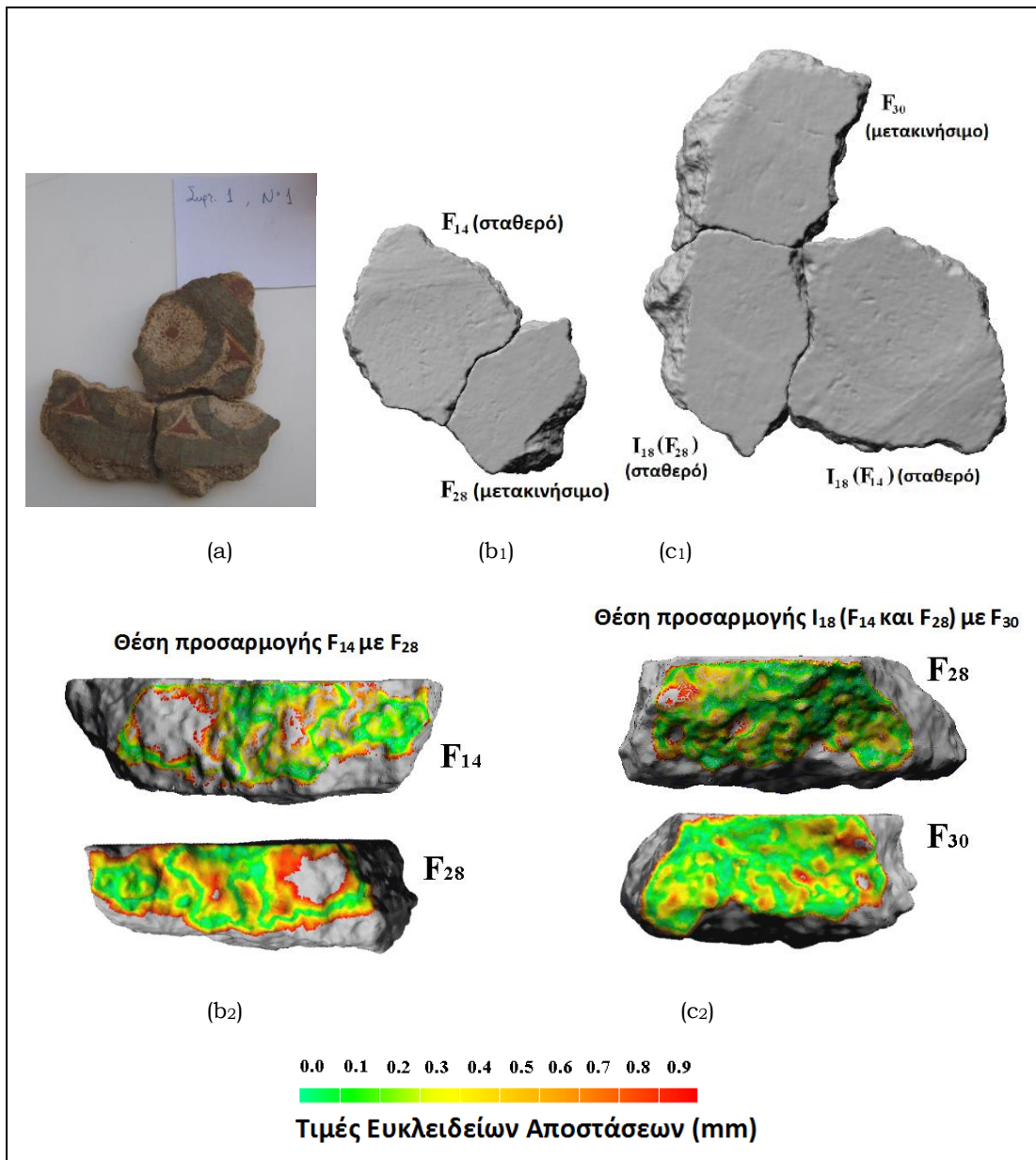


Εικόνα 43 - Αποτελέσματα διαδικασίας ταιριάσματος και επιβεβαίωση νησίδας Is. (a): Η πραγματική νησίδα, ανακατασκευασμένη από τους συντηρητές, βάσει των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το αναπτυχθέν σύστημα. (b1): Ζεύγη προτεινόμενων από το σύστημα ταιριασμάτων και επακολούθως, η ένωση των τρισδιάστατων αναπαραστάσεων των δύο θραυσμάτων στη θέση ταιριάσματος. (b2): Οπτική αναπαράσταση των Ευκλειδείων αποστάσεων μεταξύ των επιφανειών των θραυσμάτων στις θέσεις ταιριάσματος που απεικονίζονται στο (b1).

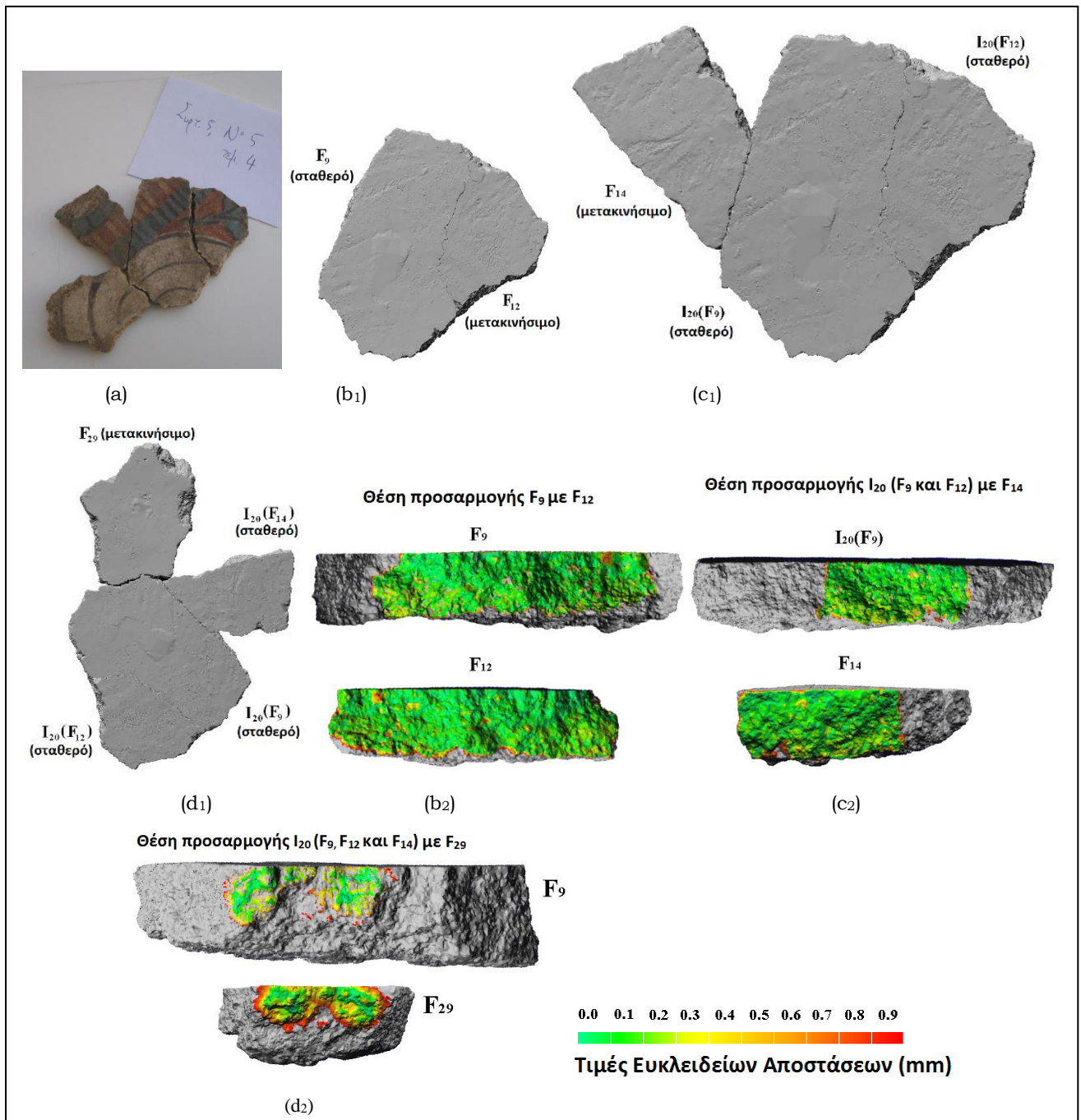




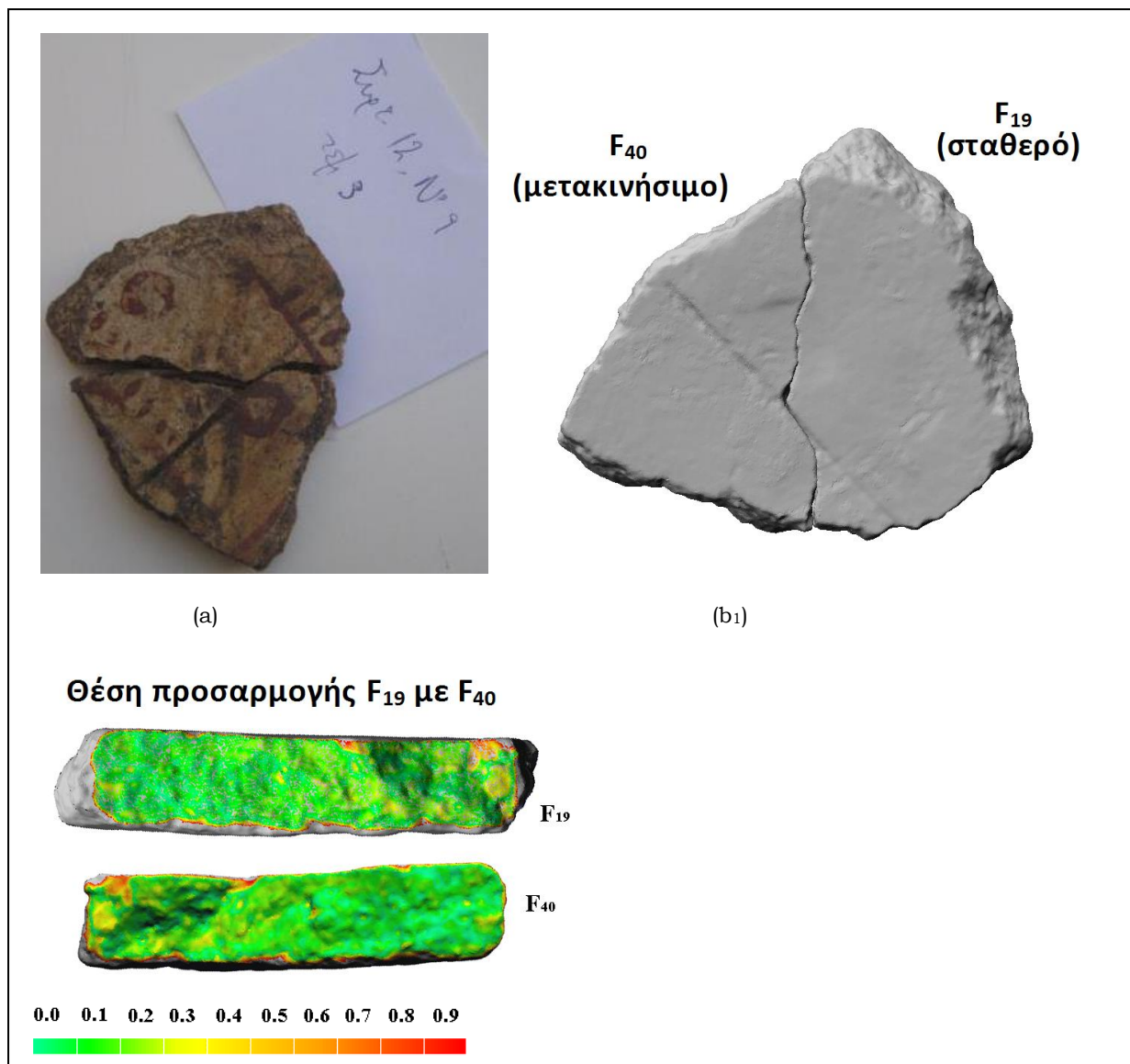
**Εικόνα 44 - Αποτελέσματα διαδικασίας ταιριάσματος και επιβεβαίωση νησίδας I<sub>11</sub>. (a): Η πραγματική νησίδα, ανακατασκευασμένη από τους συντηρητές, βάσει των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το αναπτυχθέν σύστημα. (b<sub>1</sub>): Ζεύγη προτεινόμενων από το σύστημα ταιριασμάτων και επακολούθως, η ένωση των τρισδιάστατων αναπαραστάσεων των δύο θραυσμάτων στη θέση ταιριάσματος. (b<sub>2</sub>): Οπτική αναπαράσταση των Ευκλειδείου αποστάσεων μεταξύ των επιφανειών των θραυσμάτων στις θέσεις ταιριάσματος που απεικονίζονται στο (b<sub>1</sub>).**



**Εικόνα 45 – Αποτελέσματα διαδικασίας ταιριάσματος και επιβεβαίωση νησίδας  $I_{18}$ . (a): Η πραγματική νησίδα, ανακατασκευασμένη από τους συντηρητές, βάσει των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το αναπτυχθέν σύστημα. (b1), (c1): Ζεύγη προτεινόμενων από το σύστημα ταιριασμάτων και επακολούθως, η ένωση των τρισδιάστατων αναπαραστάσεων των δύο θραυσμάτων στη θέση ταιριάσματος. (b2), (c2): Οπτική αναπαράσταση των Ευκλειδείων αποστάσεων μεταξύ των επιφανειών των θραυσμάτων στις θέσεις ταιριάσματος που απεικονίζονται στα (b1) και (c1) αντίστοιχα.**

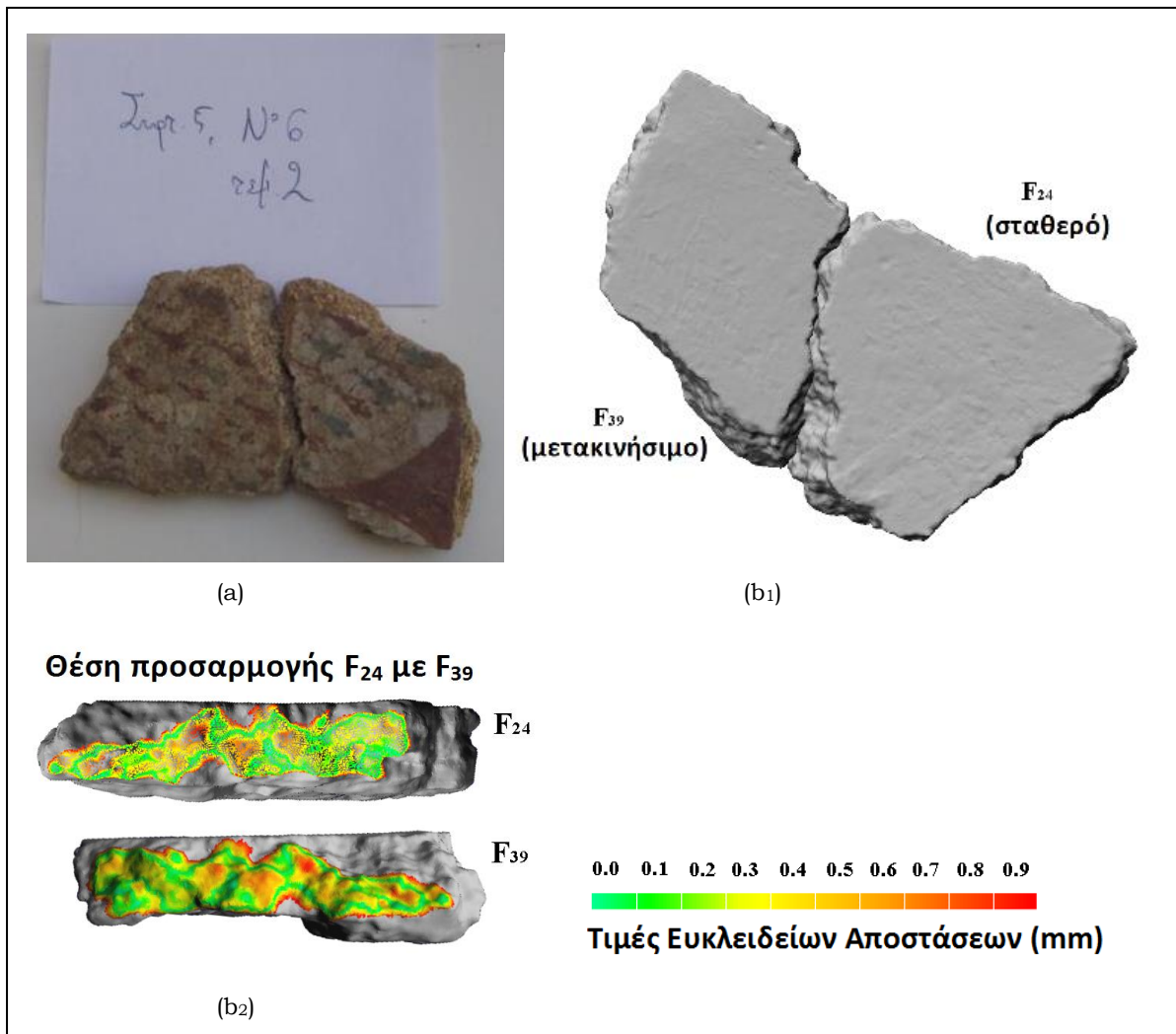


**Εικόνα 46 - Αποτελέσματα διαδικασίας ταιριάσματος και επιβεβαίωση νησίδας I<sub>20</sub>.** (a): Η πραγματική νησίδα, ανακατασκευασμένη από τους συντηρητές, βάσει των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το αναπτυχθέν σύστημα. (b<sub>1</sub>), (c<sub>1</sub>), (d<sub>1</sub>): Ζεύγη προτεινόμενων από το σύστημα ταιριασμάτων και επακολούθως, η ένωση των τρισδιάστατων αναπαραστάσεων των δύο θραυσμάτων στη θέση ταιριάσματος. (b<sub>2</sub>), (c<sub>2</sub>), (d<sub>2</sub>): Οπτική αναπαράσταση των Ευκλειδείων αποστάσεων μεταξύ των επιφανειών των θραυσμάτων στις θέσεις ταιριάσματος που απεικονίζονται στα (b<sub>1</sub>), (c<sub>1</sub>) και (d<sub>1</sub>) αντίστοιχα.



**Εικόνα 47 - Αποτελέσματα διαδικασίας ταιριάσματος και επιβεβαίωση νησίδας I<sub>21</sub>. (a): Η πραγματική νησίδα, ανακατασκευασμένη από τους συντηρητές, βάσει των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το αναπτυχθέν σύστημα. (b<sub>1</sub>): Ζεύγη προτεινόμενων από το σύστημα ταιριάσματος και επακολούθως, η ένωση των τρισδιάστατων αναπαραστάσεων των δύο θραυσμάτων στη θέση ταιριάσματος. (b<sub>2</sub>): Οπτική αναπαράσταση των Ευκλειδείων αποστάσεων μεταξύ των επιφανειών των θραυσμάτων στις θέσεις ταιριάσματος που απεικονίζονται στο (b<sub>1</sub>).**





**Εικόνα 48 - Αποτελέσματα διαδικασίας ταιριάσματος και επιβεβαίωση νησίδας  $I_{23}$ . (a): Η πραγματική νησίδα, ανακατασκευασμένη από τους συντηρητές, βάσει των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το αναπτυχθέν σύστημα. (b1): Ζεύγη προτεινόμενων από το σύστημα ταιριάσματος και επακολούθως, η ένωση των τρισδιάστατων αναπαραστάσεων των δύο θραυσμάτων στη θέση ταιριάσματος. (b2): Οπτική αναπαράσταση των Ευκλειδείων αποστάσεων μεταξύ των επιφανειών των θραυσμάτων στις θέσεις ταιριάσματος που απεικονίζονται στο (b1).**

Αναφορικά με τις χρονικές απαιτήσεις του συστήματος, σημειώνουμε ότι η μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία, έχει εφαρμοστεί και εκτελεστεί σε Η/Υ, ο οποίος αποτελούνταν από έναν επεξεργαστή Intel Core 2 Duo 3.2 GHz, με 4 GB RAM με χρονισμό στα 1033 MHz.

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ανασύνθεσης, αντιμετωπίσαμε 2 διακριτές περιπτώσεις, όσον αφορά το χρόνο εκτέλεσης:

Όταν το σύστημα δεν εντόπιζε προσαρμογή μεταξύ ενός ζεύγους θραυσμάτων, ο χρόνος που απαιτείτο για το αποτέλεσμα δεν υπερέβαινε τα 14 δευτερόλεπτα. Αυτή η πολύ γρήγορη απόφαση οφείλεται στα απορριπτικά Κριτήρια που περιγράφονται στις Ενότητες 4.8 και 4.9. Προφανώς, ο ακριβής χρόνος εκτέλεσης εξαρτάται και από το μέγεθος των εξεταζόμενων θραυσμάτων ή νησίδων, ως και το εκάστοτε επιλεγέν μήκος σύγκρισης  $L_C$ .

Όταν το σύστημα εντόπιζε προσαρμογή μεταξύ του εξεταζόμενου ζεύγους θραυσμάτων, απαιτούντο περίπου 8 λεπτά για την ολοκλήρωση της εκτέλεσης του αναπτυσθέντος προγράμματος και την εύρεση της βέλτιστης θέσης προσαρμογής. Αυτό οφειλόταν στο γεγονός ότι υπήρχαν πολυάριθμες γειτονικές σχετικές θέσεις του σταθερού και του μετακινήσιμου θραύσματος, στις οποίες ικανοποιούνται όλα τα κριτήρια και επομένως, έπρεπε να υπολογιστούν οι όγκοι  $\tau_{k,m}$  των χωρίων  $V_{k,m}$  και όλες οι άλλες ποσότητες των σχετικών κριτηρίων πολλές φορές. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας ήταν να εντοπιστεί η βέλτιστη θέση προσαρμογής, στην οποία ικανοποιούνται όλα τα κριτήρια, ενώ ταυτόχρονα, ο όγκος  $\tau_{k,m}$  ήταν ελάχιστος.

Σε κάθε περίπτωση, τονίζεται ότι η όλη διαδικασία είναι άμεσα παραλληλοποιήσιμη και συνεπώς, ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση της διαδικασίας ανακατασκευής μπορεί σχεδόν γραμμικά να ελαχιστοποιηθεί μέσω της αύξησης του αριθμού των επεξεργασιών που χρησιμοποιούνται στον έλεγχο ύπαρξης προσαρμογής κάθε ζεύγους θραυσμάτων.

## **6.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΑΝΑΠΤΥΧΘΕΙΣΑΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΣΤΗΝ ΕΙΚΟΝΙΚΗ ΑΝΑΣΥΝΘΕΣΗ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΤΑΦΙΚΩΝ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΩΝ ΑΓΓΕΙΩΝ ΤΗΣ ΜΥΚΗΝΑΪΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ**

Όπως ήδη ακροθιγώς αναφέραμε, το σύστημα που έχει αναπτυχθεί, εφαρμόστηκε και συνεχίζει να εφαρμόζεται σε σημαντικά αρχαιολογικά ευρήματα, τα οποία αυτή τη

στιγμή φυλάσσονται σε χιλιάδες θραύσματα/όστρακα στις αποθήκες του Εθνικού Αρχαιολογικού Μουσείου. Τα όστρακα αυτά προέρχονται από τη θραύση ταφικών αγγείων, που χρονολογούνται πριν το 12ο αιώνα π.Χ., θραύση η οποία αποτελούσε μέρος της τελετουργίας και ιεροτελεστίας της ταφής κατά τη Μυκηναϊκή περίοδο.

Η ανακατασκευή των ευρημάτων αυτών αποτελεί έργο μεγάλης σημασίας για το Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο αλλά και γενικότερα για τις επιστήμες της Αρχαιολογίας και της Ιστορίας. Είναι, ωστόσο, εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία δεδομένης της φθοράς που έχουν υποστεί τα θραύσματα σε βάθος χρόνου, του τεράστιου αριθμού τους, αλλά και του γεγονότος ότι ανασκάπτονται ισχυρώς αναμειγμένα.

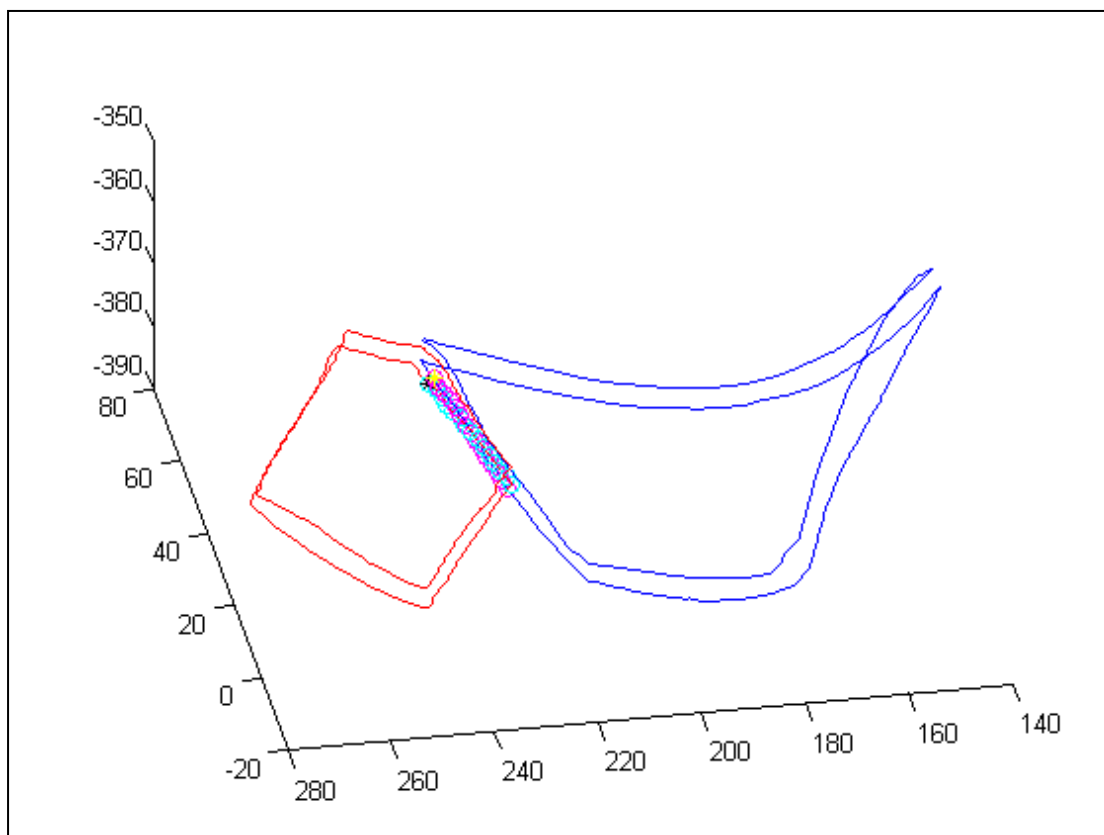
Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, έχει ξεκινήσει μία μεγάλη προσπάθεια δημιουργίας μια ψηφιακής βιβλιοθήκης, μέσω της ψηφιοποίησης σε δύο και τρεις διαστάσεις ενός μεγάλου αριθμού οστράκων από αγγεία που έχουν ανασκαφεί σε ποικίλα ταφικά συμπλέγματα της Μυκηναϊκής Περιόδου σε μορφή χιλιάδων θραυσμάτων (Εικόνα 27).

Σε κάποια από αυτά τα θραύσματα επιλεκτικά, τα οποία οι επιστήμονες μας υπέδειξαν, εφαρμόσαμε τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε και παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5, ώστε να διερευνήσουμε την ύπαρξη συνενώσεων μεταξύ τους. Από τα 109 όστρακα που ελέγχθηκαν, βρέθηκαν 2 επιβεβαιωμένες συνενώσεις μεταξύ θραυσμάτων με μέγιστο μήκος γύρω στα 15 cm (Εικόνα 49 έως και Εικόνα 55).

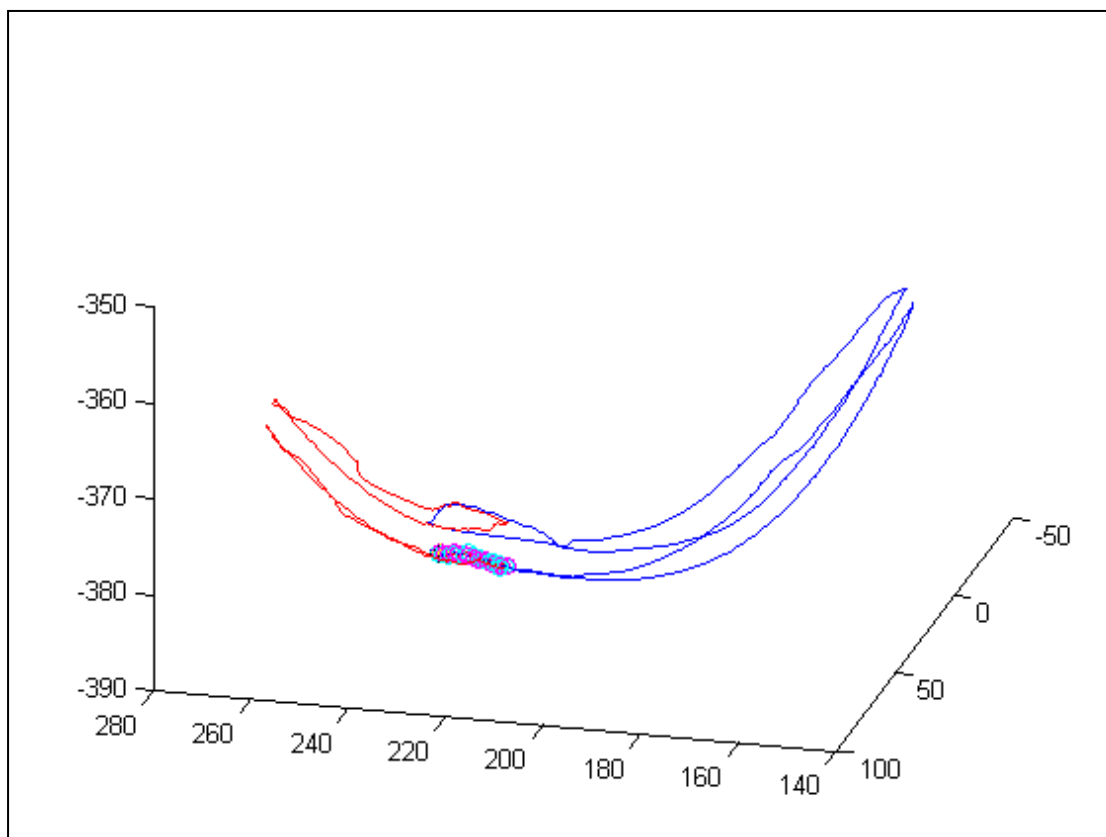


**Εικόνα 49 - Διδιάστατη απεικόνιση της πρώτης επιβεβαιωμένης συνένωσης δύο θραυσμάτων που προέκυψε από το σύστημα**

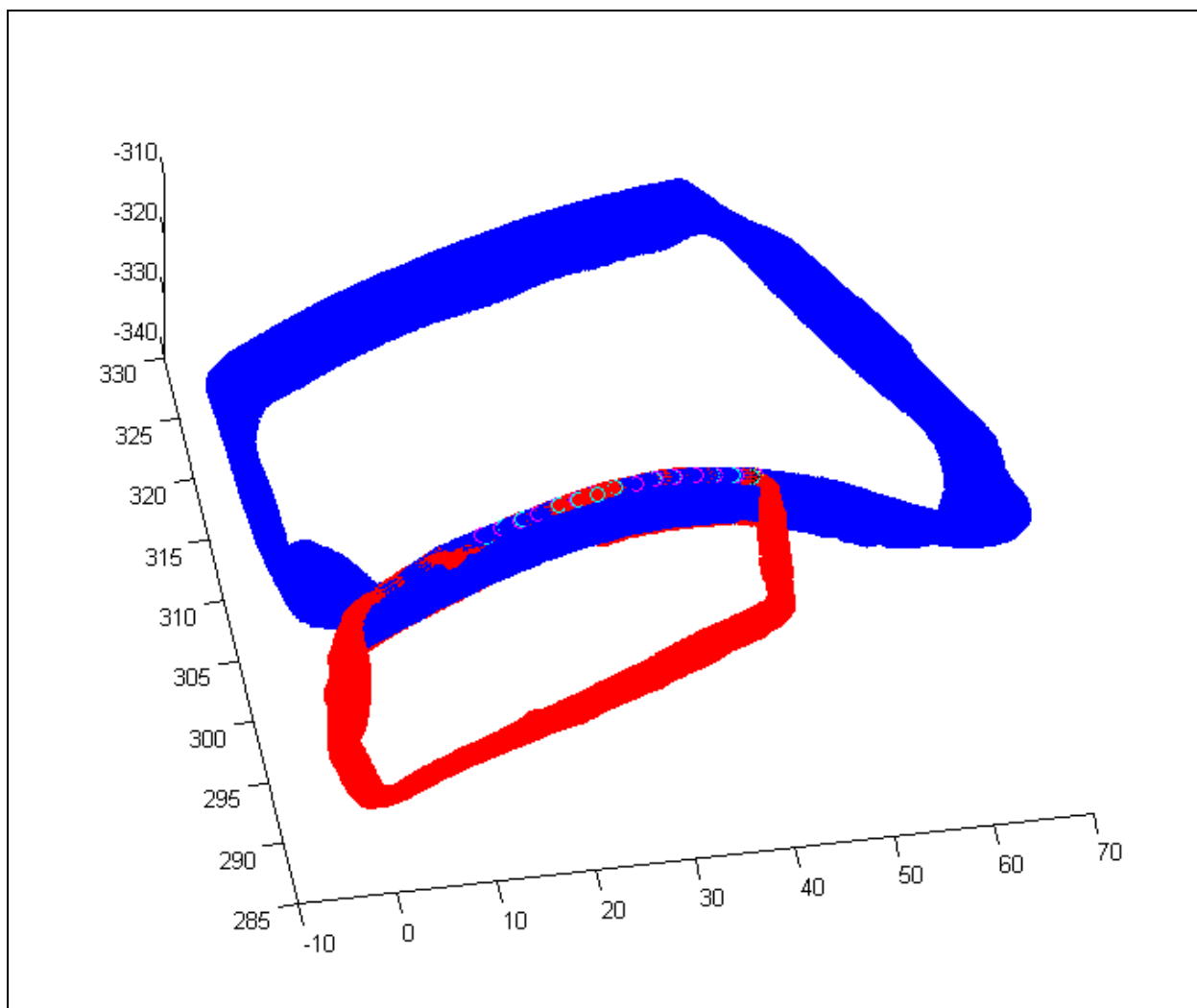




**Εικόνα 50 - Τρισδιάστατη απεικόνιση της πρώτης επιβεβαιωμένης συνένωσης δύο θραυσμάτων που προέκυψε από το σύστημα**



**Εικόνα 51 - Τρισδιάστατη απεικόνιση της πρώτης επιβεβαιωμένης συνένωσης δύο θραυσμάτων από άλλη οπτική.**



**Εικόνα 52 - Ένα δεύτερο παράδειγμα επιβεβαιωμένης ένωσης που εντόπισε για πρώτη φορά το σύστημα. Το σημείο παρατήρησης έχει επιλεγεί κατάλληλα, ώστε να αναδεικνύεται σαφέστερα το κριτήριο ελαχιστοποίησης του όγκου ανάμεσα στα δύο θραύσματα, τοπικά κοντά στο σημείο βέλτιστης προσαρμογής.**



**Εικόνα 53 - Διδιάστατη απεικόνιση της προηγούμενης ένωσης που εντόπισε το σύστημα για πρώτη φορά.**



**Εικόνα 54 - Διδιάστατη απεικόνιση της προηγούμενης ένωσης που εντόπισε το σύστημα για πρώτη φορά από άλλη οπτική.**



**Εικόνα 55 - Διδιάστατη απεικόνιση της προηγούμενης ένωσης που εντόπισε το σύστημα για πρώτη φορά από άλλη οπτική.**

Χάρη στα απορριπτικά κριτήρια που αναπτύξαμε και εφαρμόσαμε στα συγκεκριμένα ταφικά όστρακα, η χρονική απόκριση του συστήματος παραμένει σε αντίστοιχα επίπεδα με αυτά της προηγούμενης μεθόδου που εφαρμόσαμε στις τοιχογραφίες. Σημειώνουμε, εκ νέου, ότι η ταχύτητα αυτή του συστήματος μπορεί να αυξηθεί, εφόσον οι ανάγκες το επιτάσσουν, αφού η μέθοδος που αναπτύχθηκε είναι άμεσα παραλληλοποιήσιμη.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Atmanspacher, H., T. Filk and H. Römer. Quantum Zeno features of bistable perception. *Biological Cybernetics*. 90:17:33-40, 2004.
2. Baddeley, A. Recent developments in working memory. *Curr. Opin. Neurobiol.* 8:834-838, 1998.
3. Balconi, M., R. Arangio and C. Guarnerio. Disorders of Consciousness and N400 ERP Measures in Response to a Semantic Task. *The Journal of Neuropsychiatry and Clinical Neurosciences*. 25:237-243, 2013.
4. Beratis, I. N., A. Rabavilas, E.D. Nanou, C. Hountala, A. E. Maganioti, C. N. Capsalis, G. N. Papadimitriou and C. Papageorgiou. Effect of initiation-inhibition and handedness on the patterns of the P50 event-related potential component: a low resolution electromagnetic tomography study. *Behav. Brain Funct.* 5:51, 2009.
5. Caveing, M. *Zeno Greek Thought. A Guide to Classical Knowledge*. London: Brunshwig J. & Lloyd E. R. G; The Belknap Press of Harvard University Press, 2000, 783-795 pp.
6. Collette, F. and M. Van der Linden. Brain imaging of the central executive component of working memory. *Neurosci. Biobehav. Rev.* 26:105-125, 2002.
7. De Neys, W. Dual processing in reasoning: Two systems but one reasoner. *Psychological Science*. 17:428-433, 2006.
8. Glassman, R. B. A "theory of relativity" for cognitive elasticity of time and modality dimensions supporting constant working memory capacity: Involvement of harmonics among ultradian clocks? *Prog. Neuropsychopharmacol. Biol. Psychiatry*. 24:163-182, 2000.
9. Goel, V. Oct. [Anatomy of deductive reasoning](#). *Trends Cogn. Sci.* 11:10:435-41, 2007.
10. Jasper, H. The ten-twenty electrode system of the international federation. *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.* 10:371-375, 1958.

11. Kotchoubey, B. Event-related potentials, cognition, and behavior: A biological approach. *Neurosci. Biobehav. Rev.* 30:1: 42-65. Review, 2006.
12. Kotchoubey, B., S. Lang, V. Bostanov and N. Birbaumer. Is there a mind? Electrophysiology of unconscious patients. *News Physiol. Sci. Review.* 17:38-42, 2002.
13. Miyake, A. and P. Shah. *Models of Working Memory*. New York: Cambridge University Press, 1999.
14. Neumann, N., A. Kübler, J. Kaiser, T. Hinterberger and N. Birbaumer. Conscious perception of brain states: mental strategies for brain-computer communication. *Neuropsychologia.* 41:8:1028-36, 2003.
15. Papageorgiou, C., I. Liappas, E. Ventouras, C. Nikolaou, E. Kitsonas, N. Uzunoglu and A. Rabavilas. Long-term abstinence syndrome in heroin addicts: Indices of P300 alterations associated with a short memory task. *Progress in Neuropsychopharmacology & Biological Psychiatry.* 28:1109-1115, 2004.
16. Papageorgiou, C. C. and A. D. Rabavilas. Abnormal P600 in obsessive-compulsive disorder. A comparison with healthy controls. *Psychiatry Res.* 119:133-43, 2003.
17. Prado, J., A. Chadha and J. R. Booth. The brain network for deductive reasoning: a quantitative meta-analysis of 28 neuroimaging studies. *J. Cogn. Neurosci.* 23:11:3483-97, 2011 Nov.
18. Prior Analytics, *The complete Works of Aristotle. The revised Oxford Translation.* Vol. 1. NJ: Princeton University Press. Chichester, West Sussex, 1995, 39-113 pp.
19. Rodriguez-Moreno, D. and J. Hirsch. The dynamics of deductive reasoning: an fMRI investigation. *Neuropsychologia.* 47:4: 949-61, 2009 Mar.
20. Simplicious. In *Physica*. Berlin: Ed. Hermann Diels, 1882, 18.
21. Tecce, J. J. Contingent negative variation (CNV) and psychological processes in man. *Psychological Bulletin.* **77**:2: 73-108, 1972.



22. Turner, W. Zeno of Elea: Where Space, Time, Physics, and Philosophy converge an everyman's introduction to an unsung hero of Philosophy. Western Kentucky University: Honors College Capstone Experience/Thesis Projects. Paper 111, 2007.
23. M. Balconi, R. Arangio, C. Guarnerio, Disorders of Consciousness and N400 ERP Measures in Response to a Semantic Task, *The Journal of Neuropsychiatry and Clinical Neurosciences* 2013;25:237-243
24. Besl, P.J. and McKay, H.D. (1992). A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(2), 239-256.
25. Biswas, A., Bhowmick, P., and Bhattacharya, B.B. (2005). Reconstruction of torn documents using contour maps. *IEEE Int. Conf. on Image Processing*, 3, 517-520.
26. Brown, B.J., Toler-Fraklin, C., Nehab, D., Burns, M., Dobkin, D., Vlachopoulos, A., Doumas, C. Rusinkiewicz, C. and Weyrich, T. (2008). A system for high-volume acquisition and matching of fresco fragments: reassembling Theran wall paintings. *ACM Transactions on Graphics*, 27(3).
27. da Gama Leitao, H.C., Stolfi, J. (2002). A multiscale method for the reassembly of two-dimensional fragmented objects. *IEEE Trans. on PAMI*, 24(9), 1239-1251.
28. Huang, Q.X., Flöry, S., Gelfand, N., Hofer, M. and Pottmann, H. (2006). Reassembling fractured objects by geometric matching. *ACM Transactions on Graphics*, 25(3), 569-578.
29. Linnainmaa, S., Harwood, D., and Davis, L. S. (1988). Pose determination of a three-dimensional object using triangle pairs. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(5), 634-647.
30. Papaioannou, G., Karabassi, E.A., and Theoharis, T. (2002). Reconstruction of Three-Dimensional Objects through Matching of Their Parts. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(1), 114-124.

31. Papaioannou, G. and Karabassi, E.A. (2003). On the automatic assemblage of arbitrary broken solid artefacts. Elsevier Image and Vision Computing, 21, 401-412.
32. Papaodysseus, C. Panagopoulos, T. Exarhos, M. Triantafillou, C. Fragoulis, D. Doulas, C. (2002). Contour-shape based reconstruction of fragmented, 1600 BC wall-paintings. IEEE Transactions on [Signal Processing](#), 50(6), 1277-1288.
33. Papaodysseus, C., Arabadjis, D., Panagopoulos, M., Rousopoulos, P., Exarhos, M. and Papazoglou, E. (2008). Automated reconstruction of fragmented objects using their 3D representation - application to important archaeological finds. IEEE Proc. of ICSP 08, 769-772.
34. Papaodysseus, C. Panagopoulos, T. Exarhos, M. Triantafillou, C. Fragoulis, D. Doulas, C. (2008). Image and Pattern Analysis of 1650 B.C. Wall Paintings and Reconstruction. IEEE Transactions on [Systems, Man and Cybernetics](#), 38(4), 958-965.
35. W. Puech, A.G. Bors, I. Pitas, J.-M. Chassery (2001). "Projection Distortion Analysis for Flattened Image Mosaicing from Straight Uniform Generalized Cylinders," Pattern Recognition, vol. 34, no. 8, pp. 1657-1670.
36. Shogo, Y., Shohei, K., Satoshi, K. and Hidenori, I. (2005). An Earthenware Reconstruction Method Based on the Matching of Both Contour Curve and Color Pattern on the Surface of Potsherds. Journal of the Institute of Image Electronics Engineers of Japan, 34(2), 126-133.
37. de Smet, P. (2008). Reconstruction of ripped-up documents using fragment stack analysis procedures, Elsevier Forensic Science International, 176(2-3), 124-136.
38. Stanco F., Tenze L., Ramponi G., and de Polo A., (2004). Virtual restoration of fragmented glass plate photographs. 12th IEEE Medit. Electrotechnical Conf., 1, 243-246.

39. Ukovic, A., and Ramponi, G. (2008). Feature extraction and clustering for the computer-aided reconstruction of strip-cut shredded documents. *J. Electron. Imaging*, 17(1).
40. Ukovic, A., Ramponi, G., Doulaverakis, H., Kompatsiaris, Y., and Strintzis, M.G. (2004). Shredded document reconstruction using MPEG-7 standard descriptors. *4th IEEE Int. Symp. on Signal Processing*, 334-337.
41. Ucoluk, G., Toroslu, I.H. (1999). Automatic reconstruction of 3D surface objects. *Elsevier Computers & Graphics*, 23(4), 573-582.
42. Valkenburg, R. J. and McIvor, A. M. (1998). Accurate 3D measurement using a structured light system, *Elsevier Image Vision and Computing*, 16(2), 99-110.
43. Willis, A., Orriols, X., Cooper, D.B. (2003). Accurately Estimating Shred 3D Surface Geometry with Application to Pot Reconstruction. *Proceedings on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1-7.
44. Winkelbach, S., Rilk, M., Schönfelder, C. and Wahl, F. M. (2004). Fast random sample matching of 3D fragments. *Lecture Notes in Computer Science: 3175. Pattern recognition, 26th DAGM symposium, Berlin: Springer*, 129-136.
45. Winkelbach, S. and Wahl, F.M. (2008). Pairwise Matching of 3D Fragments Using Cluster Trees. *Springer Int. J. Computer Vision*, 78(1), 1-13.
46. Zhu, L., Zhou, Z. and Hu, D. (2008). Globally Consistent Reconstruction of Ripped-Up Documents. *IEEE Trans. on PAMI*, 30(1), 1-13.
47. C. Papaodysseus, D. Arabadjis, M. Exarhos, P. Rousopoulos, S. Zannos, M. Panagopoulos, L. Papazoglou-Manioudaki, "Efficient Solution to the 3D Problem of Automatic Wall Paintings Reassembly", *Computers and Mathematics with Applications*, Elsevier, vol. 64, no.8, pp. 2712-2734, 2012
48. C. Papaodysseus, S. Zannos, F. Giannopoulos, D. Arabadjis, P. Rousopoulos, X. Stachteia, C. Papageorgiou, A new approach for the classification of event related potentials for valid and paradox reasoning, *Biocybernetics and Biomedical*

Engineering, Available online 31 December 2015, ISSN 0208-5216, <http://dx.doi.org/10.1016/j.bbe.2015.12.004>.

49. Zannos, S. Giannopoulos, F. Arabadjis, D. Rousopoulos, P. Papageorgiou, P. Koukoutsis, E. Papaodysseus, C. and Papageorgiou, C., Classifying Event Related Potentials For Valid And Paradox Reasoning, 5<sup>th</sup> International Joint Conference on Biomedical Engineering Systems and Technologies, 2012

## **ΣΥΝΟΠΤΙΚΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ**

Ο Σολομών Ζάννος γεννήθηκε το 1986 στην Ι.Π. Μεσολογγίου, έλαβε το δίπλωμα του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών από το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο το 2009 και εκπόνησε τη διδακτορική του διατριβή στη Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα συμπεριλαμβάνουν τους τομείς της Αναγνώρισης Προτύπων, της Ψηφιακής Επεξεργασίας Εικόνας με πρωτότυπες εφαρμογές στην Αρχαιολογία και τη Βιοϊατρική Μηχανική, των Αλγορίθμων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, των Βάσεων Δεδομένων και της μελέτης του Λάθους Πεπερασμένης Ακρίβειας.

## **ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ**

### **Διεθνή Επιστημονικά Περιοδικά με Κριτές**

**[J1]** C. Papaodysseus, S. Zannos, F. Giannopoulos, D. Arabadjis, P. Rousopoulos, X. Stachteia, C. Papageorgiou, "A new approach for the classification of event related potentials for valid and paradox reasoning", *Biocybernetics and Biomedical Engineering*, Available online 31 December 2015, ISSN 0208-5216, <http://dx.doi.org/10.1016/j.bbe.2015.12.004>

**[J2]** C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, F. Giannopoulos, S. Zannos, D. Arabadjis, M. Panagopoulos, E. Kalfa, C. Blackwell, S. Tracy, "Identifying the writer of ancient inscriptions and Byzantine codices. A novel approach", *Computer Vision and Image Understanding*, Volume 121, April 2014, Pages 57-73, ISSN 1077-3142, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cviu.2014.01.003>

**[J3]** D. Arabadjis, F. Giannopoulos, C. Papaodysseus, S. Zannos, P. Rousopoulos, M. Panagopoulos, C. Blackwell, "New Mathematical and Algorithmic Schemes for Pattern Classification with Application to the Identification of Writers of Important Ancient Documents", *Pattern Recognition*, Elsevier, vol. 46, no. 8, pp. 2278-2296, 2013

**[J4]** C. Papaodysseus, D. Arabadjis, M. Exarhos, P. Rosuopoulos, S. Zannos, M. Panagopoulos, L. Papazoglou-Manioudaki, "Efficient Solution to the 3D Problem of Automatic Wall Paintings Reassembly", Computers and Mathematics with Applications, Elsevier, vol. 64, no.8, pp. 2712-2734, 2012

### **Διεθνή Επιστημονικά Συνέδρια με Κριτές**

**[C1]** M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, D. Arabadjis, F. Giannopoulos, S. Zannos, E.Kalfa, C. Papaodysseus, "Methods and Algorithms for the Automatic Identification of Writer of Ancient Documents", 1st Conference on Computer Applications and Quantitative Methods in Archaeology Greek Chapter (CAA-GR) Rethymno, Crete, 2014

**[C2]** C Papaodysseus, C. Chalatsis, D Arabadjis, S Zannos, F Giannopoulos, P Rousopoulos, E Kalfa, "A general, novel methodology for studying the generation of finite precision error in any algorithm", 2013 IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), 2013

**[C3]** D Arabadjis, C Papaodysseus, S Zannos, F Giannopoulos, E Kalfa, P Rousopoulos, M Panagopoulos, C Blackwell, "A new approach for the identification of writers of important ancient documents", Digital Signal Processing (DSP), 2013 18th International Conference on, pp. 1-6, 2013

**[C4]** 20 September 2012 – Dagstuhl Perspectives Workshop in "Computation and Palaeography: Potentials and Limits" (id. 12382), Schloss Dagstuhl Leibniz Zentrum für Informatik.

**[C5]** Zannos, S. Giannopoulos, F. Arabadjis, D. Rousopoulos, P. Papageorgiou, P. Koukoutsis, E. Papaodysseus, C. and Papageorgiou, C., Classifying Event Related Potentials For Valid And Paradox Reasoning, 5th International Joint Conference on Biomedical Engineering Systems and Technologies, 2012

**[C6]** Panayiotis Rousopoulos, Michail Panagopoulos, Constantin Papaodysseus, Fivi Panopoulou, Dimitris Arabadjis, Stephen Tracy, Fotios Giannopoulos, Solomon

Zannos, "A new approach for ancient inscriptions' writer identification", Digital Signal Processing (DSP), 2011 17th International Conference on, 2011

### **Κεφάλαια σε Βιβλία**

[B1] Papaodysseus, Constantin, Michail Panagopoulos, Panayotis Rousopoulos, Dimitris Arabadjis, Fivi Panopoulou, Solomon Zannos, Fotios Giannopoulos and Steven Tracy. "Automatic Identification of the Writer of Ancient Greek Inscriptions, Employing Methods of Computer Engineering and Mathematics." Pattern Recognition and Signal Processing in Archaeometry: Mathematical and Computational Solutions for Archaeology. IGI Global, 2012. 212-262. Web. 16 Jan. 2014. doi:10.4018/978-1-60960-786-9.ch007-ch008