



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το Αντίστροφο Φασματικό Πρόβλημα της
Εύρεσης του Δείκτη Διάθλασης για το
Εσωτερικό Πρόβλημα Διαπερατότητας

Διδακτορική Διατριβή

του

Νικόλαου Παλληκαράκη

Αθήνα, Απρίλιος 2017



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα της εύρεσης του δείκτη διάθλασης για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας

Διδακτορική Διατριβή

του

Νικόλαου Παλληκαράκη

Διπλωματούχου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ
ΔΠΜΣ Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Επιστημών ΕΜΠ

Συμβουλευτική Επιτροπή: Γκιντίδης Δρόσος (επιβλέπων)
Cakoni Fioralba
Κυριάκη Κυριακή

Η παρούσα διατριβή έχει κατατεθεί στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου για τον επιστημονικό τίτλο του Διδάκτορα.

Εξεταστική Επιτροπή:

...
Δ. Γκιντίδης
Αν. Καθηγητής
ΕΜΠ

...
F. Cakoni
Καθηγήτρια
Rutgers University

...
Κ. Κυριάκη
Καθηγήτρια
ΕΜΠ

...
Α. Χαραλαμπίδης
Καθηγητής
ΕΜΠ

...
Ε. Γεωργούλης
Αν. Καθηγητής
ΕΜΠ

...
Ι. Γ. Στρατής
Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Αθηνών

...
Ν. Γιαννακάκης
Επ. Καθηγητής
ΕΜΠ

Αθήνα, Απρίλιος 2017

...

Νικόλαος Παλληκαράκης

© 2017 - Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Απαγορεύεται η αντιγραφή, η αποθήκευση σε αρχείο πληροφοριών, η διανομή, η αναπαραγωγή, η μετάφραση ή μετάδοση της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό, υπό οποιαδήποτε μορφή και με οποιοδήποτε μέσο επικοινωνίας, ηλεκτρονικό ή μηχανικό, χωρίς την προηγούμενη έγγραφη άδεια του συγγραφέα. Επιτρέπεται η αναπαραγωγή, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Η έγκριση της παρούσας διδακτορικής διατριβής από τη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).

Η παρούσα διδακτορική διατριβή χρηματοδοτήθηκε με υποτροφία από τον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων και Έρευνας του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι η μελέτη του αντίστροφου εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας (inverse transmission eigenvalue problem), δηλαδή του προσδιορισμού του δείκτη διάθλασης ενός μη ομογενούς μέσου από τις ιδιοτιμές διαπερατότητας (transmission eigenvalues). Βασιζόμενοι σε γνωστά αποτελέσματα για την περίπτωση όπου ο δείκτης διάθλασης είναι σφαιρικά συμμετρικός και C^2 συνάρτηση, διατυπώνουμε το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για τον δείκτη διάθλασης με ασυνέχειες. Διερευνάμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των ιδιοσυναρτήσεων για μεγάλες τιμές της φασματικής παραμέτρου, και μελετάμε την εξάρτησή τους από την ασυνέχεια. Αποδεικνύουμε ότι ο ασυνεχής δείκτης μπορεί να προσδιοριστεί μοναδικά από τη γνώση όλων των ιδιοτιμών διαπερατότητας, χωρίς περιορισμούς στη θέση της ασυνέχειας.

Στη συνέχεια, προτείνουμε μία αριθμητική μέθοδο για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών διαπερατότητας. Υιοθετούμε μία μέθοδο τύπου Galerkin η οποία βασίζεται στη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος. Με την κατάλληλη αναπαράσταση του προβλήματος ως ένα πρόβλημα τελεστών αποδεικνύουμε τη σύγκλιση της μεθόδου. Έπειτα, ορίζουμε το αντίστροφο πρόβλημα διαπερατότητας και δείχνουμε ότι το πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αντίστροφο τετραγωνικό πρόβλημα ιδιοτιμών (inverse quadratic eigenvalue problem). Μελετάμε την περίπτωση του σφαιρικά συμμετρικού και κατά τμήματα σταθερού δείκτη διάθλασης και δείχνουμε ότι ένας σχετικά μικρός αριθμός ιδιοτιμών επαρκεί για τις ανακατασκευές. Επίσης εισάγουμε έναν αλγόριθμο τύπου Newton για ανακατασκευές στη γενική περίπτωση του κατά τμήματα σταθερού δείκτη διάθλασης. Η μέθοδός μας συνοδεύεται από παραδείγματα.

Ανακεφαλαιώνοντας, σκοπός μας είναι να μελετήσουμε το ασυνεχές πρόβλημα διαπερατότητας εστιάζοντας στο κατά πόσο η ύπαρξη ασυνεχειών επιδρά στο αντίστροφο πρόβλημα. Κίνητρο για την εργασία μας είναι το αντίστροφο πρόβλημα της εύρεσης ιδιοτήτων υλικών με διαστρωματώσεις, το οποίο έχει εφαρμογή στο μη καταστροφικό έλεγχο και την αναγνώριση αντικειμένων.

ABSTRACT

The main object of this thesis is the investigation of the inverse transmission eigenvalue problem, that is the determination of the refractive index of an inhomogeneous medium from transmission eigenvalues. Using some known results for the case where the refractive index is a radially symmetric and C^2 function, we introduce the corresponding interior transmission eigenvalue problem for a discontinuous refractive index. We examine the asymptotic properties of the eigenfunctions for large values of the spectral parameter, and investigate their dependence upon the discontinuity. We prove that the discontinuous refractive index is uniquely determined from the knowledge of all transmission eigenvalues, with no restrictions on the position of the discontinuity.

Furthermore, we propose a numerical method to compute transmission eigenvalues. We adopt a Galerkin-type method which is based on the variational formulation of the problem. Using a proper operator representation we show convergence of the method. We define the inverse transmission problem and show that numerically the problem can be considered as an inverse quadratic eigenvalue problem. We investigate the case of a spherically symmetric and piecewise constant refractive index and show that a small number of eigenvalues is sufficient for the reconstructions. We also introduce a computational method based on a Newton-type algorithm for reconstructions of arbitrary piecewise constant index from transmission eigenvalues. We illustrate our method with several examples.

Particularly, our aim is to study the properties of the discontinuous transmission eigenvalue problem and examine how the presence of a discontinuity affect the inverse problem. Our work has been motivated by the inverse problem of recovering material properties of a medium with layers with applications in non-destructive testing and target identification.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρώτα και κύρια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διατριβής μου, Δρόσο Γκιντίδη, για την καθοδήγηση και το κίνητρο που μου έδωσε όλα αυτά τα χρόνια. Η υπομονή του και η συνεχής υποστήριξη ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής. Είμαι επίσης ευγνώμων στην καθηγήτρια Κυριακή Κυριάκη για τις γόνιμες συζητήσεις και συμβουλές που μου παρείχε από την εποχή των προπτυχιακών σπουδών μου. Οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την καθηγήτρια Fioralba Cakoni για τη συμμετοχή της στη συμβουλευτική επιτροπή, είναι τιμή μου. Είμαι βαθιά ευγνώμων στους δάσκαλους και φίλους μου, καθηγητές Αντώνη Χαραλαμπόπουλο, Νίκο Γιαννακάκη, Αλέκο Αρβανιτάκη και Γιώργο Σμυρλή. Δε θα μπορούσα να ξεχάσω τους συναδέλφους μου από τον Τομέα Μαθηματικών και ειδικά τους Μίλτο Καραμανλή και Γιάννη Καραγιώργο για τις πολύτιμες συζητήσεις σχετικά με τα Μαθηματικά και τη Ζωή. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου που στέκονται δίπλα μου όταν οι καιροί είναι δύσκολοι. Αφιερώνω τη διατριβή μου σε αυτούς.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	v
Abstract	vii
Ευχαριστίες	ix
1 Εισαγωγή	1
1.1 Ευθέα και αντίστροφα φασματικά προβλήματα	2
1.2 Αντίστροφη σκέδαση και ιδιοτιμές διαπερατότητας	4
1.2.1 Το πρόβλημα σκέδασης	4
1.2.2 Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας	6
1.3 Σύνοψη της διατριβής	11
2 Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας σε σφαιρικά διαστρωμα- τωμένο μέσο με συνεχή δείκτη διάθλασης	15
2.1 Διατύπωση του προβλήματος	16
2.2 Ύπαρξη και διακριτότητα των ιδιοτιμών διαπερατότητας	18
2.2.1 Η περίπτωση $l \geq 1$	19
2.2.2 Η περίπτωση $l = 0$	22
2.3 Μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα	24
2.3.1 Μοναδικότητα για τη γενική περίπτωση	24
2.3.2 Μοναδικότητα για τις ειδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας	28
2.4 Μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας	32
2.4.1 Μιγαδικές ιδιοτιμές στο \mathbb{R}^2	32
2.4.2 Μιγαδικές ιδιοτιμές στο \mathbb{R}^3	34
3 Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας σε σφαιρικά διαστρωμα- τωμένο μέσο με ασυνεχή δείκτη διάθλασης	35
3.1 Διατύπωση του προβλήματος	36
3.2 Ιδιότητες των ιδιοσυναρτήσεων και των οριζουσών	39
3.2.1 Η περίπτωση $l = 0$	40
3.2.2 Η περίπτωση $l \geq 1$	46
3.3 Μοναδικότητα για το αντίστροφο ασυνεχές πρόβλημα	50
3.3.1 Μοναδικότητα για τον προσδιορισμό της ασυνέχειας	50
3.3.2 Το θεώρημα μοναδικότητας	57
3.4 Ασυμπτωτική συμπεριφορά των ιδιοτιμών διαπερατότητας	62
4 Αριθμητικές μέθοδοι για το ευθύ εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότη- τας	67
4.1 Το διακριτό εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας	68
4.1.1 Το πρόβλημα ιδιοτιμών σε τελεστική μορφή	68

4.1.2	Μία μέθοδος τύπου Galerkin για το ευθύ πρόβλημα	70
4.2	Αριθμητικές μέθοδοι για τις ιδιοτιμές διαπερατότητας	75
5	Αριθμητικές μέθοδοι για το αντίστροφο εσωτερικό πρόβλημα δια-	
	περατότητας	77
5.1	Το αντίστροφο πρόβλημα για σφαιρικά συμμετρικά χωρία	78
5.1.1	Κυκλικό χωρίο	78
5.1.2	Χωρίο με δύο στρώματα	81
5.1.2.1	Ανακατασκευές με χρήση μόνο πραγματικών ιδιοτιμών .	82
5.1.2.2	Ανακατασκευές με χρήση πραγματικών και μιγαδικών ιδιοτιμών	83
5.2	Η μέθοδος Newton για το αντίστροφο πρόβλημα	85
5.2.1	Ο αλγόριθμος	87
5.2.2	Αριθμητικά παραδείγματα	89
5.2.2.1	Χωρία με δύο στρώματα	90
5.2.2.2	Χωρία με πολλά στρώματα	93
5.2.3	Γενίκευση της μεθόδου για μη σφαιρικά συμμετρικά χωρία	94
A'	Παράρτημα	97
A'.1	Η αναπαράσταση του c_{2l+2}	98
A'.2	Το ασυνεχές πρόβλημα Goursat	100
A'.3	Ο δείκτης διάθλασης με πεπερασμένες ασυνέχειες	103
A'.4	Ακέραιες συναρτήσεις	109
	Κατάλογος Πινάκων	113
	Κατάλογος Σχημάτων	115
	Βιβλιογραφία	117

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις βασικές ιδέες των ευθέων και αντίστροφων φασματικών προβλημάτων και δίνουμε ορισμένα κίνητρα από τη σκοπιά του φυσικού προβλήματος για τη μελέτη μας. Εισάγουμε τον αναγνώστη στην περιοχή της αντίστροφης σκέδασης και διατυπώνουμε ένα ειδικό πρόβλημα ιδιοτιμών, το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας (*interior transmission eigenvalue problem*). Στο τέλος παραθέτουμε μία σύνοψη της παρούσας διατριβής.

Περιεχόμενα

1.1	Ευθέα και αντίστροφα φασματικά προβλήματα	2
1.2	Αντίστροφη σκέδαση και ιδιοτιμές διαπερατότητας	4
1.2.1	Το πρόβλημα σκέδασης	4
1.2.2	Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας	6
1.3	Σύνοψη της διατριβής	11

1.1 Ευθέα και αντίστροφα φασματικά προβλήματα

Ως φασματικά προβλήματα, ονομάζουμε εν γένει τη μελέτη των ταλαντώσεων ή δονήσεων φυσικών συστημάτων όπως χορδές ή μεμβράνες, μηχανικά συστήματα, άτομα ή μόρια κτλ. Το ευθύ φασματικό πρόβλημα ορίζεται ως η εύρεση των συχνοτήτων των ταλαντώσεων του συστήματος για το οποίο όλες οι φυσικές ιδιότητες είναι γνωστές. Το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα αποτελεί τον προσδιορισμό κάποιων από τις άγνωστες ιδιότητες του συστήματος έχοντας ως δεδομένα τις φυσικές συχνότητες ταλάντωσης.

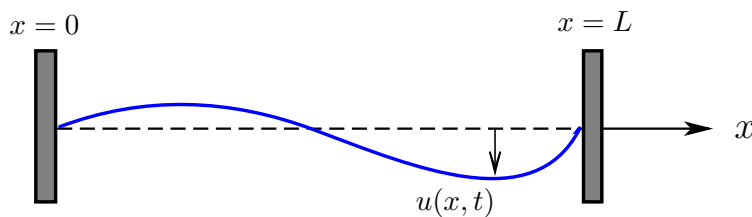
Από μαθηματική σκοπιά, με τα αντίστροφα φασματικά προβλήματα θέλουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές μίας διαφορικής εξίσωσης από τη γνώση των ιδιοτιμών, δηλαδή των φασματικών τιμών του αντίστοιχου διαφορικού τελεστή. Η πρώτη συστηματική μελέτη των φασματικών ιδιοτήτων του διαφορικού τελεστή

$$\ell y := -y'' + q(x)y = 0$$

έγινε από τους Sturm και Liouville το 1836 και το αντίστοιχο αντίστροφο φασματικό πρόβλημα από τον Ambartsumyan το 1929, (για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στα [26, 45, 79]).

Παράδειγμα 1.1.1. (πρόβλημα ιδιοτιμών *Sturm-Liouville*, [63])

Θεωρούμε μία χορδή μήκους L με κατανομή πυκνότητας $\rho = \rho(x) > 0$, $0 \leq x \leq L$ η οποία παραμένει ακίνητη στα άκρα $x = 0$ και $x = L$. Αν μία εξωτερική δύναμη θέσει σε κίνηση τη χορδή, τότε παράγονται τόνοι λόγω των ταλαντώσεων. Έστω $u(x, t)$ η εγκάρσια μετατόπιση στο σημείο x τη στιγμή t . Τότε η u ικανοποιεί την κυματική



Σχήμα 1.1: Η ταλαντούμενη χορδή

εξίσωση:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Μία περιοδική μετατόπιση της μορφής

$$u(x, t) = y(x)[a \cos kt + b \sin kt]$$

με συχνότητα k ονομάζεται θεμελιώδης τόνος. Συμπεραίνουμε ότι το u επιλύει το πρόβλημα συνοριακών τιμών αν και μόνο αν τα y και k ικανοποιούν το πρόβλημα ιδιοτιμών *Sturm-Liouville*:

$$\begin{cases} y''(x) + k^2 \rho(x)y(x) = 0, & 0 < x < L \\ y(0) = y(L) = 0. \end{cases}$$

Για το ευθύ πρόβλημα υποθέτουμε ότι το $\rho(x)$ είναι γνωστό και θέλουμε να υπολογίσουμε τις ιδιοσυχνότητες k και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις. Το αντίστροφο πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός της κατανομής πυκνότητας $\rho(x)$ από μετρήσεις των συχνοτήτων k . Αυτό το πρόβλημα σχετίζεται με το παρακάτω ζήτημα μοναδικότητας: “Ένα δεδομένο σύνολο συχνοτήτων αντιστοιχεί σε μία κατανομή μάζας κατά μοναδικό τρόπο;”. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δεν είναι τόσο απλή και εν γένει ένα φάσμα δεν αρκεί για τον προσδιορισμό του $\rho(x)$, [26].

Παράδειγμα 1.1.2. (Σκέδαση από δυναμικό, [26])

Θεωρούμε τη σκέδαση ενός μη σχετικιστικού σωματιδίου από μία κεντρική δύναμη ή τη σκέδαση μεταξύ δύο σωματιδίων, και χρησιμοποιούμε τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση *Schrödinger*:

$$i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi(t),$$

όπου η Χαμιλτονιανή δίνεται από το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας:

$$\mathcal{H} = -\Delta + V.$$

Άμα περιοριστούμε στη χρονοανεξάρτητη εξίσωση *Schrödinger* σε μία διάσταση έχουμε

$$-u'' + V(x)u = Eu,$$

όπου το E αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη ενεργειακή κατάσταση για το $u(x)$ το οποίο είναι το πλάτος στο σημείο x . Η ποσότητα

$$\int_x^{x+\delta x} |u(x)|^2 dx$$

αντιστοιχεί στην πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο μεταξύ x και $x + \delta x$. Για την περίπτωση όπου το διάστημα είναι φραγμένο, η σταθερά E μπορεί να λάβει μία διακριτή ακολουθία τιμών $\{E_n\}$, το οποίο σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να φτάσει το σύστημα σε οποιαδήποτε ενεργειακή κατάσταση. Το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα σε αυτή την περίπτωση είναι δεδομένων των δυνατών ενεργειακών καταστάσεων να βρεθεί το άγνωστο δυναμικό και κατά συνέπεια να προσδιοριστούν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της δύναμης που οδήγησε στη σκέδαση.

Υπάρχει μία ευρεία βιβλιογραφία σχετικά με την επίλυση αντίστροφων φασματικών προ-

βλημάτων, για παράδειγμα σε ταλαντώσεις διακριτών συστημάτων με εφαρμογές στη μηχανική [50]. Τα περισσότερα προβλήματα αυτής της κατηγορίας, όπως και τα παραπάνω παραδείγματα βασίζονται στον αυτοσυζυγή χαρακτήρα των προβλημάτων. Με μαθηματικούς όρους αυτό σημαίνει ότι οι αντίστοιχοι διαφορικοί τελεστές είναι αυτοσυζυγείς και άρα έχουν ένα άπειρο και διακριτό φάσμα από πραγματικές ιδιοτιμές. Αυτό το γεγονός είναι πολύ σημαντικό στις εφαρμογές όπου μόνο πραγματικά δεδομένα (συχνότητες) μπορούν να μετρηθούν.

1.2 Αντίστροφη σκέδαση και ιδιοτιμές διαπερατότητας

Σε αυτή την παράγραφο, παρουσιάζουμε μία εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία σκέδασης για μη ομογενή μέσα. Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας εμφανίζεται στη θεωρία σκέδασης ως ένα ειδικό πρόβλημα ιδιοτιμών που σχετίζεται με μη σκεδαζόμενα κύματα. Στη συνέχεια δείχνουμε πως οι ιδιοτιμές διαπερατότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το αντίστροφο πρόβλημα της εύρεσης του σχήματος και των ιδιοτήτων ενός σκεδαστή.

1.2.1 Το πρόβλημα σκέδασης

Εξετάζουμε το πρόβλημα σκέδασης από ένα μη ομογενές και ανισότροπο μέσο το οποίο έχει φραγμένο και απλά συνεκτικό φορέα $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ο οποίος υποθέτουμε ότι έχει σύνορο ∂D με ομαλότητα Lipschitz. Παρουσιάζουμε μόνο τις βασικές ιδέες της θεωρίας σκέδασης που είναι απαραίτητες για την εργασία μας και παραπέμπουμε στις μονογραφίες [12, 15, 22, 30, 63] για περισσότερες λεπτομέρειες και αποδείξεις. Οι φυσικές ιδιότητες του μέσου περιγράφονται από τη φραγμένη συνάρτηση $n \in L^\infty(D)$ και από μία συνάρτηση-πίνακα $A \in L^\infty(D, \mathbb{C}^{d \times d})$. Θεωρούμε ότι ο A είναι συμμετρικός έτσι ώστε $\xi \operatorname{Im}(A(x)) \xi \leq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^d$ και επίσης $\operatorname{Re}(n(x)) > 0$, $\operatorname{Im}(n(x)) \geq 0$. Το πρόβλημα σκέδασης για ένα προσπίπτον κύμα u^i το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$, στο \mathbb{R}^d είναι το ακόλουθο:

Να βρεθεί το ολικό πεδίο $u = u^i + u^s$ έτσι ώστε:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^d \setminus \bar{D}, \quad (1.2.1)$$

$$\nabla \cdot A(x) \nabla u + k^2 n(x) u = 0 \quad \text{στο } D, \quad (1.2.2)$$

$$u^+ = u^- \quad \text{στο } \partial D, \quad (1.2.3)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \right)^- \quad \text{στο } \partial D, \quad (1.2.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \quad (1.2.5)$$

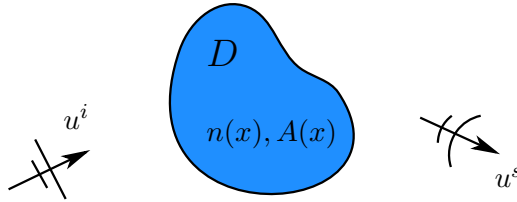
όπου το ν είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο, $k > 0$ είναι ο κυματάρριθμος, u^s είναι το σκεδαζόμενο πεδίο και $r = |x|$. Η συνθήκη (1.2.5) ονομάζεται συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και μας εξασφαλίζει ότι το κύμα είναι εξερχόμενο και ισχύει ομοιόμορφα για $\hat{x} := x/|x|$. Επίσης συμβολίζουμε ως f^\pm τα όρια $f^\pm := \lim_{h \rightarrow 0} f(x \pm h\nu)$, $h > 0$ για $x \in \partial D$ και επίσης

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} := \nu \cdot A(x) \nabla u, \quad x \in \partial D.$$

Το πρόβλημα σκέδασης (1.2.1)-(1.2.5) επιδέχεται μοναδική λύση στον χώρο $C^2(\mathbb{R}^d)$. Η εφαρμογή της μεταβολικής μεθόδου [12] εξασφαλίζει ύπαρξη λύσης στον “μεγαλύτερο” χώρο $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ όπου

$$H_{loc}^1(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in L^2(K) : \text{έτσι ώστε } \nabla u \in (L^2(K))^d, \text{ για κάθε μπάλα } K = K(0, R) \right\}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $\bar{\xi} \operatorname{Re}(A(x)) \xi \geq |\xi|^2 > 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^d$ σχεδόν παντού στο D .



Σχήμα 1.2: Σκέδαση από μη ομογενές μέσο

Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης στο \mathbb{R}^3 μοντελοποιεί τη διάδοση αρμονικών ακουστικών κυμάτων συχνότητας ω σε ένα μη ομογενές μέσο όπου $k = \omega/c_0$ είναι ο κυματάρριθμος και c_0 η ταχύτητα του ήχου στο ομογενές μέσο. Ο δείκτης διάθλασης ορίζεται ως:

$$n(x) := \frac{c_0^2}{c^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (1.2.6)$$

όπου $c(x)$ είναι η ταχύτητα του ήχου στο μέσο και $n(x) = 1$, για $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$. Σε απορροφητικό μέσο ο δείκτης διάθλασης είναι μιγαδική συνάρτηση.

Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης στο \mathbb{R}^2 μοντελοποιεί τη σκέδαση αρμονικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από έναν απείρου μήκους κύλινδρο όπου το αντίστοιχο (ηλεκτρικό ή μαγνητικό) πεδίο είναι πολωμένο παράλληλα στον άξονα του κυλίνδρου. Αυτό το μοντέλο αποτελεί μία ειδική περίπτωση του τρισδιάστατου διανυσματικού προβλήματος των

εξισώσεων Maxwell. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, το D είναι η διατομή του κυλίνδρου, για την οποία το A και το n σχετίζονται με την ηλεκτρική διαπερατότητα $\varepsilon(x)$ και τη μαγνητική διαπερατότητα $\mu(x)$ αντίστοιχα. Το ομογενές χωρίο θεωρείται μη αγώγιμο με σταθερή ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα ε_0 και μ_0 αντίστοιχα. Ο κυματάριθμος δίνεται από τη σχέση $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, όπου $\omega > 0$ είναι η συχνότητα του αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Το ιδιαίτερο ενδιαφέρον εστιάζεται στο *αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης* δηλαδή τον προσδιορισμό του σχήματος και των φυσικών ιδιοτήτων του άγνωστου μη ομογενούς μέσου ($n(x)$ και $A(x)$) από μετρήσεις του ολικού πεδίου u μακριά από τον σχεδαστή, για διάφορα προσπίπτοντα πεδία u^i και κυματάριθμους k . Το αντίστροφο πρόβλημα είναι μη γραμμικό και μη καλά τοποθετημένο υπό την έννοια ότι μικρές διαταραχές στις μετρήσεις μπορούν να δημιουργήσουν μεγάλα σφάλματα στην ανακατασκευή του σχεδαστή. Παρόλα αυτά, το αντίστροφο πρόβλημα έχει πολλές εφαρμογές στην τομογραφία, τη σεισμική ή ηλεκτρομαγνητική διασκόπηση, την ιατρική απεικόνιση και τον μη καταστροφικό έλεγχο υλικών.

Στη συνέχεια, θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου το μέσο είναι ισότροπο δηλαδή $A = I$. Το πρόβλημα σκέδασης (1.2.1)-(1.2.5) απλοποιείται στην παρακάτω μορφή:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^d \setminus \bar{D}, \quad (1.2.7)$$

$$\Delta u + k^2 n(x)u = 0 \quad \text{στο } D, \quad (1.2.8)$$

$$u^+ = u^- \quad \text{στο } \partial D, \quad (1.2.9)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^- \quad \text{στο } \partial D, \quad (1.2.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0. \quad (1.2.11)$$

1.2.2 Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας

Θέτουμε την παρακάτω ερώτηση:

“Υπάρχουν προσπίπτοντα πεδία u^i τέτοια ώστε το σκεδαζόμενο u^s να είναι ταυτοτικά μηδέν;”

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα μας οδηγεί στο *εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας*.

Για να γίνουμε πιο σαφείς, υποθέτουμε ότι το προσπίπτον πεδίο είναι ένα επίπεδο κύμα της μορφής $u^i(x) = e^{ikx \cdot \hat{\theta}}$ όπου $\hat{\theta}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο στη διεύθυνση διάδοσης. Σε αυτή την περίπτωση, το αντίστοιχο σκεδαζόμενο πεδίο ικανοποιεί την ασυμπτωτική σχέση [30]:

$$u^s(x) = e^{ikr} r^{-\frac{d-1}{2}} u_\infty(\hat{x}) + O\left(r^{-\frac{d+1}{2}}\right), \quad \text{στο } \mathbb{R}^d, \quad d = 2, 3, \quad (1.2.12)$$

για $r = |x| \rightarrow \infty$ και ομοιόμορφα για $\hat{x} = x/|x|$. Συμβολίζουμε με Ω την $(d-1)$ -διάστατη σφαίρα $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$. Το πλάτος σκέδασης $u_\infty : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζεται ως

$$u_\infty(\hat{x}) := \frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^d} (n(y) - 1) e^{-ik\hat{x} \cdot y} u(y) dy \quad \hat{x} \in \Omega. \quad (1.2.13)$$

και είναι αναλυτική συνάρτηση στο Ω . Το πλάτος σκέδασης με τη σειρά του ορίζει τον τελεστή πλάτους σκέδασης $F : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{\Omega} u_\infty(\hat{x}; \hat{\theta}) g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta}) \quad \hat{x} \in \Omega, \quad (1.2.14)$$

όπου $\hat{\theta}$ είναι η διεύθυνση πρόσπτωσης και \hat{x} η διεύθυνση παρατήρησης. Μία ειδική οικογένεια κυματοσυναρτήσεων, οι *κυματοσυναρτήσεις Herglotz*, ορίζονται ως:

$$v_g(x) := \int_{\Omega} e^{ikx \cdot \hat{\theta}} g(\hat{\theta}) ds(\hat{\theta}), \quad g \in L^2(\Omega), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d = 2, 3. \quad (1.2.15)$$

Τα μη σκεδαζόμενα κύματα σχετίζονται με το παρακάτω πρόβλημα ιδιοτιμών:

Εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας:

Να βρεθούν τα $k > 0$ και $v, w \in C^2(D)$ ώστε:

$$\Delta w + k^2 n(x)w = 0 \quad \text{στο } D, \quad (1.2.16)$$

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{στο } D, \quad (1.2.17)$$

$$w = v \quad \text{στο } \partial D, \quad (1.2.18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \text{στο } \partial D. \quad (1.2.19)$$

Οι τιμές του k για τις οποίες υπάρχει μία μη τετριμμένη λύση (v, w) του (1.2.16)-(1.2.19) ονομάζονται *ιδιοτιμές διαπερατότητας*.

Αυτό το πρόβλημα ιδιοτιμών προτάθηκε αρχικά από τον Kirsch [65], κατά τη μελέτη του τελεστή πλάτους σκέδασης. Λίγα χρόνια αργότερα, οι Colton και Monk [37] χρησιμοποίησαν το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης σε μη ομογενές μέσο. Παρακάτω, θα δείξουμε αναλυτικά ότι το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας είναι μη αυτοσυζυγές και η μελέτη του δεν καλύπτεται από την κλασική φασματική θεωρία για ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές. Προς στιγμή, υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές διαπερατότητας υπάρχουν και σχηματίζουν ένα διακριτό σύνολο. Αυτά τα ζητήματα θα συζητηθούν αναλυτικά στη συνέχεια.

Γενικά δεν είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα προσπίπτον πεδίο το οποίο δεν σκεδάζεται. Παρόλα αυτά, λόγω της πυκνότητας των συναρτήσεων Herglotz στον χώρο των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz στο D [31], καταλήγουμε ότι εάν το k είναι μία ιδιοτιμή διαπερατότητας που αντιστοιχεί σε ένα μη τετριμμένο ζεύγος λύσεων (v, w) τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει μία συνάρτηση Herglotz που προσεγγίζει το v κατά ε και το αντίστοιχο σκεδαζόμενο πεδίο είναι ε -μικρό, στην $L^2(D)$ -νόρμα. Σημειώνουμε επίσης ότι εάν το

n είναι ταυτοτικά ίσο με 1 τότε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας εκφυλίζεται. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση κάθε $k \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή και άρα κάθε προσπίπτον πεδίο δε θα σχεδιάζεται.

Το παρακάτω θεώρημα συνδέει το πότε ο τελεστής πλάτους σκέδασης είναι 1 – 1 με το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας [30, θεώρημα 8.9], ενώ ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για την ανισότροπη περίπτωση βρίσκεται στο [12, θεώρημα 6.2].

Θεώρημα 1.2.1. *Ο τελεστής πλάτους σκέδασης $F : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ που αντιστοιχεί στο πρόβλημα (1.2.7) – (1.2.11) είναι 1 – 1 και έχει πυκνό σύνολο τιμών αν και μόνο αν το k^2 δεν είναι ιδιοτιμή διαπερατότητας για το (1.2.16) – (1.2.19), έτσι ώστε η μη τετριμμένη λύση v να είναι της μορφής Herglotz (1.2.15).*

Μία εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος είναι για το αντίστροφο πρόβλημα της εύρεσης του άγνωστου σχήματος του σχεδαστή, μέσω της *Γραμμικής Μεθόδου Δειγματοληψίας* (Linear Sampling Method), η οποία εισήχθη πρώτη φορά από τους Colton και Kirsch [28]. Σκοπός αυτής της μεθόδου είναι η ανακατασκευή του φορέα του μη ομογενούς μέσου από τη γνώση του πλάτους σκέδασης του σχεδασζόμενου πεδίου. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην επίλυση μίας γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης 1^{ου} είδους και έπειτα τη χρήση της λύσης της ως δείκτριας συνάρτησης για την ανακατασκευή του συνόρου του σχεδαστή. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ένα σύνολο λύσεων $u_\infty(\hat{x}, \hat{\theta})$ για ένα εύρος κυματάρθμων, το οποίο συνεπάγεται τη γνώση του τελεστή πλάτους σκέδασης F . Ορίζουμε την εξίσωση πλάτους σκέδασης:

$$(Fg)(\hat{x}) = \Phi_\infty(\hat{x}, z) \quad (1.2.20)$$

όπου το $\Phi_\infty(\hat{x}, z)$ το πλάτος σκέδασης που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη λύση $\Phi(x, z)$ της εξίσωσης Helmholtz:

$$\begin{aligned} \Phi(x, z) &:= \frac{e^{ik|x-z|}}{4\pi|x-z|} && \text{στο } \mathbb{R}^3 \\ \Phi(x, z) &:= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-z|) && \text{στο } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

και $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel μηδενικής τάξης.

Προκειμένου να λύσουμε την εξίσωση (1.2.20), ορίζουμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας με μη ομογενείς συνθήκες διαπερατότητας στο σύνορο:

Μη ομογενές εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας:

$$\Delta w + k^2 n(x)w = 0 \quad \text{στο } D, \quad (1.2.21)$$

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{στο } D, \quad (1.2.22)$$

$$w - v = \Phi(\cdot, z) \quad \text{στο } \partial D, \quad (1.2.23)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} \quad \text{στο } \partial D. \quad (1.2.24)$$

και έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.2.2. ([30, θεώρημα 10.22]) Έστω ότι το k δεν είναι ιδιοτιμή διαπερατότητας. Δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει μία προσεγγιστική λύση της εξίσωσης πλάτους σκέδασης (1.2.20), που τη συμβολίζουμε με $g_{\varepsilon,z}$ (δηλαδή $\|Fg_{\varepsilon,z} - \Phi_{\infty}(\cdot, z)\|_{L^2}^2 < \varepsilon$) τέτοια ώστε

α'. εάν το $z \in D$, τότε η αντίστοιχη συνάρτηση Herglotz $v_{g_{\varepsilon,z}}$ ικανοποιεί το

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{g_{\varepsilon,z}}\| = \|v_z\| \quad \text{στο } L^2(D)$$

(w_z, v_z) είναι η μοναδική λύση του μη ομογενούς εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας

β'. εάν το $z \notin D$, τότε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{g_{\varepsilon,z}}\| = \infty \quad \text{στο } L^2(D)$$

Η εξίσωση πλάτους σκέδασης δεν είναι εν γένει επιλύσιμη επειδή το Φ_{∞} δεν ανήκει στην εικόνα του F . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη χρήση ομαλοποιητικών μεθόδων (π.χ. τη μέθοδο Tikhonov [30, 53]) για την επίλυση της εξίσωσης πλάτους σκέδασης για μία προσεγγιστική λύση $g_{z,\alpha}$. Το σύνορο ανακατασκευάζεται από τα σημεία εκείνα όπου η νόρμα $\|g_{z,\alpha}\|_{L^2}$ απειρίζεται.

Από όταν ορίστηκε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας, το κύριο ενδιαφέρον αφορούσε τη διακριτότητα των ιδιοτιμών [29, 81]. Το ζήτημα αυτό ήταν σημαντικό καθώς οι διάφορες μέθοδοι δειγματοληψίας για την ανακατασκευή του συνόρου δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε συχνότητες που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές διαπερατότητας. Για αυτές λοιπόν τις μεθόδους, οι ιδιοτιμές διαπερατότητας έπρεπε να αποφευχθούν και άρα το γεγονός ότι αποτελούν διακριτό σύνολο ήταν αρκετό. Σχεδόν 20 χρόνια αργότερα αποδείχθηκε ότι οι ιδιοτιμές διαπερατότητας περιέχουν πληροφορία για τις ιδιότητες του υλικού του σχεδαζόμενου αντικειμένου [11, 17, 18]. Άρα το ζήτημα της ύπαρξης πραγματικών ή μιγαδικών ιδιοτιμών απέκτησε ενδιαφέρον. Το πρώτο αποτέλεσμα ύπαρξης ιδιοτιμών για ένα τυχαίο (μη σφαιρικά συμμετρικό) μέσο δόθηκε από τους Päiväranta και Sylvester [77], για αρκούντως μεγάλους δείκτες διάθλασης και για τουλάχιστον μία ιδιοτιμή. Σύντομα ακολούθησαν και άλλες εργασίες [13, 20, 23, 64]. Το πρόβλημα της ύπαρξης πραγματικών ιδιοτιμών απαντήθηκε πλήρως από τους Cakoni, Gintides και Had-dar [21], υπό τον περιορισμό μόνο $0 < n < 1$ ή $n > 1$. Διατυπώνουμε εδώ το θεώρημα και μία αναλυτική απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [21]:

Θεώρημα 1.2.3. Συμβολίζουμε με $n_* = \inf n$ και $n^* = \sup n$. Υποθέτουμε ότι ο δείκτης $n \in L^{\infty}(D)$ ικανοποιεί μία από τις παρακάτω δύο συνθήκες:

$$\text{α'. } 1 + \alpha \leq n_* \leq n(x) \leq n^* < \infty$$

$$\text{β'. } 0 < n_* \leq n(x) \leq n^* < 1 - \beta$$

για σταθερές $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Τότε υπάρχει ένα άπειρο διακριτό σύνολο από πραγματικές ιδιοτιμές διαπερατότητας με το $+\infty$ το μόνο σημείο συσσώρευσης.

Το θεώρημα ύπαρξης ισχύει τόσο για ισότροπα όσο και ανισότροπα υλικά για τις εξισώσεις Helmholtz και Maxwell, συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης του μέσου με κοιλότητες.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι το σχήμα του αντικειμένου είναι γνωστό και θεωρούμε το αντίστροφο πρόβλημα της εύρεσης του άγνωστου δείκτη διάθλασης $n(x)$ από τις ιδιοτιμές διαπερατότητας. Γι αυτό το πρόβλημα, σε αντίθεση με τις μεθόδους δειγματοληψίας, απαιτούμε τη γνώση των ιδιοτιμών διαπερατότητας. Αποκαλούμε αυτό το πρόβλημα *αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για τις ιδιοτιμές διαπερατότητας* ή *αντίστροφο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας*. Βασικό κίνητρο για αυτό το αντίστροφο πρόβλημα είναι το γεγονός ότι οι πραγματικές ιδιοτιμές διαπερατότητας μπορούν να μετρηθούν από δεδομένα σκέδασης [16]:

Θεώρημα 1.2.4. Έστω ότι k είναι μία ιδιοτιμή διαπερατότητας, και δοθέντος $\varepsilon > 0$ έστω $g_{z,\varepsilon}$ τέτοια ώστε

$$\|Fg_{\varepsilon,z} - \Phi_\infty(\cdot, z)\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon$$

όπου $v_{g_{\varepsilon,z}}$ είναι η αντίστοιχη συνάρτηση Herglotz. Τότε, σχεδόν για κάθε $z \in D$, η νόρμα $\|v_{g_{\varepsilon,z}}\|_{L^2}$ απειρίζεται καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$.

Άρα, αν το D είναι γνωστό και αν προσδιορίσουμε μία ομαλοποιημένη λύση της εξίσωσης πλάτους σκέδασης για ένα συγκεκριμένο εύρος κυματάριθμων, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την L^2 -νόρμα της λύσης ως δείκτη για τις ιδιοτιμές διαπερατότητας σε αυτό το διάστημα. Στην πράξη, αν εφαρμόσουμε μία μέθοδο ομαλοποίησης για την επίλυση της εξίσωσης πλάτους σκέδασης, μπορούμε να κάνουμε το γράφημα της νόρμας $\|v_{g_{\varepsilon,z}}\|_{L^2}$ σε συνάρτηση με το k και έτσι οι ιδιοτιμές θα εμφανιστούν στις “μεγάλες” τιμές της στο γράφημα.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, οι ιδιοτιμές διαπερατότητας περιέχουν πληροφορία για τις φυσικές ιδιότητες του σχεδαστή. Αυτό το αποτέλεσμα έχει ελεγχθεί και με αριθμητικές μεθόδους [6, 18, 19, 48, 49, 84, 85], όπου οι ιδιοτιμές χρησιμοποιούνται για την ανακατασκευή του άγνωστου δείκτη διάθλασης. Έτσι, το αντίστροφο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας έχει μεγάλη σημασία για διάφορες εφαρμογές. Για παράδειγμα, οι ιδιοτιμές διαπερατότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον μη καταστροφικό έλεγχο υλικών και την εύρεση ρωγμών ή ατελειών σε μη ομογενή μέσα [11, 55, 56].

1.3 Σύνοψη της διατριβής

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή μελετάμε το αντίστροφο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας για την εύρεση του δείκτη διάθλασης από τις ιδιοτιμές διαπερατότητας. Εξετάζουμε αυτό το αντίστροφο πρόβλημα τόσο από θεωρητική όσο και από υπολογιστική σκοπιά.

Στο κεφάλαιο 2, θεωρούμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας για την ειδική περίπτωση του σφαιρικά διαστρωματωμένου, μη ομογενούς μέσου στο \mathbb{R}^3 . Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα γνωστά αποτελέσματα για το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα όταν ο δείκτης διάθλασης είναι μία C^2 συνάρτηση, τα οποία είναι απαραίτητα για τη μελέτη μας στα επόμενα κεφάλαια. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες το πρόβλημα απλοποιείται σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών όπου η φασματική παράμετρος εμφανίζεται και στη συνοριακή συνθήκη. Όσον αφορά ο ευθύ πρόβλημα, εξετάζουμε την ύπαρξη ενός άπειρου και διακριτού συνόλου ιδιοτιμών. Η μέθοδος που ακολουθείται, βασίζεται στα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των ιδιοσυναρτήσεων για μεγάλες τιμές της φασματικής παραμέτρου k . Στη συνέχεια, ορίζουμε το αντίστοιχο αντίστροφο φασματικό πρόβλημα και εξετάζουμε τις αναγκαίες συνθήκες υπό τις οποίες οι ιδιοτιμές διαπερατότητας προσδιορίζουν τον δείκτη διάθλασης κατά μοναδικό τρόπο. Τέλος, παρουσιάζουμε ορισμένα αποτελέσματα σχετικά με την ύπαρξη και την κατανομή μιγαδικών ιδιοτιμών διαπερατότητας, τα οποία μας πιστοποιούν ότι το πρόβλημα δεν είναι αυτοσυζυγές.

Στο κεφάλαιο 3, διατυπώνουμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας για το σφαιρικά συμμετρικό και ασυνεχή δείκτη διάθλασης. Ακολουθώντας τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 2, μελετάμε τις ιδιότητες του ευθέως προβλήματος για έναν κατά τμήματα C^2 δείκτη διάθλασης. Χρησιμοποιούμε τον χωρισμό μεταβλητών και καταλήγουμε σε ένα ασυνεχές πρόβλημα συνοριακών τιμών. Βασιζόμενοι στη διατύπωση του αντίστοιχου ασυνεχούς προβλήματος ιδιοτιμών τύπου Sturm-Liouville, αναπτύσσουμε τις ασυμπτωτικές μορφές των ιδιοσυναρτήσεων και αποδεικνύουμε την εξάρτησή τους από την ασυνέχεια. Στη συνέχεια θεωρούμε το αντίστοιχο αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για το ασυνεχές εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας. Αποδεικνύουμε ότι οι ειδικές ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να προσδιορίσουν ορισμένα χαρακτηριστικά της ασυνέχειας. Υποθέτουμε ότι έχουμε την πλήρη γνώση του φάσματος και δείχνουμε ότι ο δείκτης προσδιορίζεται μοναδικά από τις ιδιοτιμές, χωρίς περιορισμό στη θέση της ασυνέχειας. Η μοναδικότητα σε αυτό το αντίστροφο πρόβλημα μας δείχνει ότι οι ιδιοτιμές διαπερατότητας μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την ανάκτηση ιδιοτήτων σε υλικά με στρώματα. Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με τη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των ιδιοτιμών για μεγάλες τιμές της φασματικής παραμέτρου k . Παραθέτουμε ένα παράδειγμα το οποίο μας δείχνει ότι η ύπαρξη ασυνέχειας στον δείκτη μπορεί να έχει

ως αποτέλεσμα τη μη ύπαρξη ενός ασυμπτωτικού αναπτύγματος με αναλυτικό τύπο για τις ιδιοτιμές διαπερατότητας.

Στο κεφάλαιο 4 προτείνουμε μία αριθμητική μέθοδο για την επίλυση του ευθέως προβλήματος διαπερατότητας. Η μέθοδός μας βασίζεται στη μεταβολική διατύπωση ενός ισοδύναμου προβλήματος ιδιοτιμών 4^{ης} τάξης. Αρχικά δείχνουμε ότι το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα ιδιοτιμών ενός συμπαγούς και μη αυτοσυζυγούς τελεστή-πίνακα. Έπειτα, εισάγουμε μία μέθοδο τύπου Galerkin στον χώρο Sobolev H_0^2 και υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές διαπερατότητας από το αντίστοιχο διακριτό πρόβλημα. Η σύγκλιση των ιδιοτιμών του διακριτού προβλήματος σε αυτές του προβλήματος σε τελεστική μορφή, αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας κάποια αποτελέσματα για σύγκλιση σε χώρους Banach. Τέλος, παραθέτουμε μία συνοπτική παρουσίαση των υπαρχουσών αριθμητικών μεθόδων για τις ιδιοτιμές διαπερατότητας.

Στο κεφάλαιο 5 επιλύουμε το αντίστροφο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας αριθμητικά. Σκοπός μας είναι η ανακατασκευή ενός δισδιάστατου και κατά τμήματα σταθερού δείκτη διάθλασης από έναν αρχούντως μικρό αριθμό ιδιοτιμών. Αρχικά, θεωρούμε ένα σχήμα ελαχιστοποίησης για δίσκους με σταθερό ή κατά τμήματα σταθερό δείκτη διάθλασης. Ελαχιστοποιούμε το σφάλμα ανάμεσα στις αριθμητικά και αναλυτικά υπολογισμένες ιδιοτιμές. Οι ανακατασκευές των δεικτών γίνονται χρησιμοποιώντας τις μικρότερες ιδιοτιμές. Επιπλέον, δείχνουμε αριθμητικά ότι τόσο οι πραγματικές όσο και οι μιγαδικές ιδιοτιμές χρειάζονται για τις ανακατασκευές. Στη συνέχεια, προτείνουμε μία μέθοδο τύπου Newton για την ανακατασκευή του κατά τμήματα σταθερού δείκτη διάθλασης σε χωρία με γενικό σχήμα. Ο αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς να είναι γνωστή η ακριβής θέση των ιδιοτιμών στο φάσμα. Παραθέτουμε ορισμένα αριθμητικά παραδείγματα με ανακατασκευές σε χωρία με πολλά στρώματα και συγκρίνουμε τη μέθοδό μας με άλλες μεθόδους ελαχιστοποίησης. Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με την εφαρμογή της μεθόδου Newton σε μη σφαιρικά συμμετρικά χωρία.

Τέλος, στο παράρτημα παρουσιάζουμε μία γενίκευση του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας για έναν δείκτη ο οποίος έχει έναν πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών. Με μία επαγωγική μέθοδο κατασκευάζουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος. Παραθέτουμε επίσης κάποια αποτελέσματα από τη θεωρία ακεραίων συναρτήσεων που απαιτούνται για τη μελέτη του αντίστροφου φασματικού προβλήματος.

Μέρος των αποτελεσμάτων της παρούσας διδακτορικής διατριβής περιλαμβάνονται στις εργασίες:

1. Gintides D. and Pallikarakis N. (2017), The inverse transmission eigenvalue problem for a discontinuous refractive index, *Inverse Problems* **33** 055006
2. Gintides D. and Pallikarakis N. (2013), A computational method for the inverse transmission eigenvalue problem, *Inverse Problems* **29** 104010

και παρουσιάστηκαν με διάλεξη στα παρακάτω διεθνή συνέδρια:

1. Gintides D. and Pallikarakis N. (2015), Uniqueness theorems for the inverse transmission eigenvalue problem with discontinuous refractive index, *International Conference on Modern Mathematical Methods in Science and Technology (M3ST)*, Kalamata-Greece
2. Gintides D. and Pallikarakis N. (2014), The inverse transmission eigenvalue problem for a discontinuous refractive index, *7th International Conference, Inverse Problems: Modeling and Simulation (IPMS)*, Fethiye-Turkey

ΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΠΕΡΑΤΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΜΕΝΟ ΜΕΣΟ ΜΕ ΣΥΝΕΧΗ ΔΕΙΚΤΗ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε όλα τα γνωστά αποτελέσματα για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας για την μπάλα $B \subset \mathbb{R}^3$, όπου ο αντίστοιχος δείκτης διάθλασης είναι μία συνεχής συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα της μπάλας. Τα αποτελέσματα αυτά είναι απαραίτητα για τα επόμενα κεφάλαια στα οποία χρησιμοποιούμε αντίστοιχες τεχνικές. Περιγράφουμε τις συνθήκες που απαιτούνται για την ύπαρξη ενός άπειρου και διακριτού συνόλου ιδιοτιμών διαπερατότητας. Επίσης, ορίζουμε το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα και παρουσιάζουμε τις συνθήκες που απαιτούνται ώστε οι ιδιοτιμές να προσδιορίζουν μοναδικά τον δείκτη διάθλασης. Επιπλέον, παραθέτουμε ορισμένα πρόσφατα αποτελέσματα σχετικά με την ύπαρξη και την κατανομή μιγαδικών ιδιοτιμών διαπερατότητας.

Περιεχόμενα

2.1 Διατύπωση του προβλήματος	16
2.2 Ύπαρξη και διακριτότητα των ιδιοτιμών διαπερατότητας	18
2.2.1 Η περίπτωση $l \geq 1$	19
2.2.2 Η περίπτωση $l = 0$	22
2.3 Μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα	24
2.3.1 Μοναδικότητα για τη γενική περίπτωση	24
2.3.2 Μοναδικότητα για τις ειδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας	28
2.4 Μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας	32
2.4.1 Μιγαδικές ιδιοτιμές στο \mathbb{R}^2	32
2.4.2 Μιγαδικές ιδιοτιμές στο \mathbb{R}^3	34

2.1 Διατύπωση του προβλήματος

Εξετάζουμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας που αντιστοιχεί στη σκέδαση ενός μη ομογενούς και ισότροπου μέσου B_a από ακουστικά κύματα, όπου υποθέτουμε ότι το μέσο είναι σφαιρικά διαστρωματωμένο στο \mathbb{R}^3 , δηλαδή $B_a := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < a\}$ και ο δείκτης διάθλασης $n(|x|) := n(r)$ είναι μία συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα. Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας σε αυτή την περίπτωση ορίζεται ως εξής:

Να βρεθεί ένα $k \in \mathbb{C}$ και μία μη τετριμμένη λύση $w, v \in L^2(B_a)$ τέτοια ώστε $w - v \in H_0^2(B_a)$, τα οποία να ικανοποιούν το πρόβλημα

$$\Delta w + k^2 n(r)w = 0 \quad \text{στο } B_a, \quad (2.1.1)$$

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{στο } B_a, \quad (2.1.2)$$

$$w = v \quad \text{στο } \partial B_a, \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \text{στο } \partial B_a, \quad (2.1.4)$$

όπου ο χώρος Sobolev H_0^2 ορίζεται ως:

$$H_0^2(D) = \left\{ u \in H^2(D) : \text{τέτοια ώστε } u = 0 \text{ και } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ στο } \partial D \right\}.$$

Όπως θα δείξουμε στο κεφάλαιο 4, οι παραπάνω συναρτησιακοί χώροι παρέχουν το κατάλληλο πλαίσιο για την ασθενή μορφή αυτού του προβλήματος ιδιοτιμών, το οποίο θα δούμε ότι είναι μη αυτοσυζυγές. Σε αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε μόνο κλασικές λύσεις δηλαδή $w, v \in C^2(B_a) \cap C^1(\overline{B_a})$. Το πρόβλημα (2.1.1)-(2.1.4), αντιστοιχεί στην απλούστερη περίπτωση του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας και ένα σύνολο από αποτελέσματα είναι γνωστά για τις ιδιοτιμές.

Κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις για τον δείκτη διάθλασης (εκτός αν διατυπωθεί διαφορετικά):

$$\text{Im}(n(r)) = 0, \quad n(r) > 0 \text{ και } n \in C^2[0, \infty), \quad (2.1.5)$$

και

$$n(r) = 1 \quad \text{για } r \geq a. \quad (2.1.6)$$

όπου υποθέτουμε επίσης ότι ο δείκτης $n(r)$ δεν είναι ταυτοτικά ίσος με 1. Η συνθήκη (2.1.6) συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει ανομογένεια για $r \geq a$ και εφόσον $n \in C^2$, ο δείκτης διάθλασης είναι αρκούντως ομαλός στο σύνορο $r = a$ (δηλαδή $n'(a) = 0$).

Ακολουθώντας τη μελέτη [30] που έχει γίνει για το σφαιρικά διαστρωματωμένο διηλεκτρικό μέσο (βλ. επίσης [37]), εισάγουμε τις σφαιρικές μεταβλητές (r, θ, ϕ) και χρησι-

μποιώντας τον χωρισμό μεταβλητών αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις w και v σε σειρές σφαιρικών αρμονικών

$$v(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} j_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$w(x) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_{lm} y_l(r) Y_l^m(\theta, \phi),$$

όπου j_l είναι η συνάρτηση Bessel. Επίσης, υποθέτοντας αζιμουθιακή συμμετρία, αναζητούμε ένα ζεύγος λύσεων για το πρόβλημα (2.1.1)-(2.1.4), στη μορφή:

$$v(r, \theta) = a_l j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad (2.1.7)$$

$$w(r, \theta) = b_l \frac{y_l(r)}{r} P_l(\cos \theta), \quad (2.1.8)$$

όπου P_l είναι τα πολυώνυμα Legendre, τα a_l και b_l είναι σταθερές και η συνάρτηση y_l ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y_l''(r) + \left(k^2 n(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y_l(r) = 0 \quad (2.1.9)$$

για $r > 0$, με

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{y_l(r)}{r} - j_l(kr) \right) = 0. \quad (2.1.10)$$

Σημειώνουμε ότι η συνήθης διαφορική εξίσωση (2.1.9) έχει ιδιόμορφο συντελεστή για $l \geq 1$. Η αρχική συνθήκη (2.1.10) επιλέγεται έτσι ώστε το $y_l(r)$ να συμπεριφέρεται όπως το $r j_l(kr)$ όταν το $r \rightarrow 0$, για λόγους απλότητας δηλαδή

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-(l+1)} y_l(r) = \frac{\sqrt{\pi} k^l}{2^{l+1} \Gamma(l+3/2)}.$$

Τώρα, οι συναρτήσεις (2.1.7)-(2.1.8) θα αποτελούν μία λύση του προβλήματος ιδιοτιμών (2.1.1)-(2.1.4) αν υπάρχει μία μη τετριμμένη λύση για το παρακάτω σύστημα

$$b_l \frac{y_l(a)}{a} - a_l j_l(ka) = 0$$

$$b_l \frac{d}{dr} \left(\frac{y_l(r)}{r} \right) \Big|_{r=a} - a_l \frac{d}{dr} j_l(kr) \Big|_{r=a} = 0.$$

Άρα, το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας γράφεται:

$$y_l''(r) + \left(k^2 n(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y_l(r) = 0 \quad \text{για } 0 < r < a, \quad (2.1.11)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{y_l(r)}{r} - j_l(kr) \right) = 0, \quad (2.1.12)$$

$$D_l(k) := \det \begin{pmatrix} \frac{y_l(r)}{r} & -j_l(kr) \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{y_l(r)}{r} \right) & -\frac{d}{dr} j_l(kr) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{για } r = a. \quad (2.1.13)$$

Οι τιμές του k για τις οποίες υπάρχει μία μη τετριμμένη λύση για το πρόβλημα (2.1.11)-(2.1.13), ονομάζονται *ιδιοτιμές διαπερατότητας*. Ισοδύναμα, το k είναι μία (πραγματική ή μιγαδική) ιδιοτιμή διαπερατότητας αν και μόνο αν $D_l(k) = 0$. Ονομάζουμε τις $\{D_l(k)\}_{l \geq 0}$ *χαρακτηριστικές συναρτήσεις* του προβλήματος.

Επιπλέον, μελετάμε μία ειδική περίπτωση του (2.1.1)-(2.1.4) όπου χρησιμοποιούμε μόνο τις σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις, δηλαδή όταν $l = 0$. Για αυτή την ειδική περίπτωση, οι ιδιοσυναρτήσεις απλοποιούνται ως εξής

$$v(r) = a_0 j_0(kr)$$

και

$$w(r) = b_0 \frac{y_0(r)}{r}.$$

Έτσι, το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι ισοδύναμο με το παρακάτω πρόβλημα τύπου Sturm-Liouville με τη φασματική παράμετρο να εμφανίζεται στη συνοριακή συνθήκη, στο δεξί άκρο [2]:

$$y_0''(r) + k^2 n(r) y_0(r) = 0, \quad 0 < r < a \quad (2.1.14)$$

$$y_0(0) = 0, \quad (2.1.15)$$

$$D_0(k) = \frac{\sin ka}{k} y_0'(a) - \cos ka y_0(a) = 0 \quad (2.1.16)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $j_0(kr) = \sin kr / kr$. Οι ιδιοτιμές του προβλήματος (2.1.14)-(2.1.16), ήτοι οι τιμές για τις οποίες το (2.1.14)-(2.1.16) έχει μία μη τετριμμένη λύση $y_0(r)$, είναι οι ιδιοτιμές διαπερατότητας. Τις ονομάζουμε *ειδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας*.

Στις επόμενες παραγράφους μελετάμε ζητήματα ύπαρξης, διακριτότητας και μοναδικότητας για τις ιδιοτιμές διαπερατότητας τόσο για την περίπτωση όπου $l = 0$ όσο και όταν $l \geq 1$. Αυτά τα δύο προβλήματα ιδιοτιμών έχουν διαφορετικές διατυπώσεις και η μελέτη τους απαιτεί χρήση διάφορων μαθηματικών μεθόδων.

2.2 Ύπαρξη και διακριτότητα των ιδιοτιμών διαπερατότητας

Για να δείξουμε την ύπαρξη ενός άπειρου και διακριτού συνόλου (πραγματικών) ιδιοτιμών διαπερατότητας έτσι ώστε το ζεύγος (2.1.7)-(2.1.8) να είναι μία μη τετριμμένη λύση του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας (2.1.1)-(2.1.4), πρέπει να μελετήσουμε την

ασυμπτωτική συμπεριφορά των y_l και D_l για μεγάλες τιμές του k . Εξετάζουμε και τις δύο περιπτώσεις $l \geq 1$ και $l = 0$.

2.2.1 Η περίπτωση $l \geq 1$

Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε αρχικά από τους Colton και Päivärinta [39]. Εδώ παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα από το κεφάλαιο 9.4 του [30]. Μετασχηματίζουμε την εξίσωση (2.1.11) χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Liouville

$$\xi(r) := \int_0^r \sqrt{n(t)} dt, \quad z(\xi) := n(r)^{1/4} y_l(r), \quad (2.2.17)$$

και ορίζουμε την ποσότητα

$$A := \int_0^a \sqrt{n(t)} dt \quad (2.2.18)$$

η οποία έχει τη φυσική σημασία του χρόνου μετακίνησης (travel time) ενός κύματος από το $r = 0$ στο $r = a$ στο αντίστοιχο πρόβλημα ακουστικής σκέδασης, [2, 57]. Επίσης, υποθέτουμε ότι $A \neq a$ το οποίο ικανοποιείται εάν $n(r) > 1$ ή $0 < n(r) < 1$ για $0 \leq r < a$. Θα δείξουμε ότι αυτή η συνθήκη αρκεί για την ύπαρξη ενός άπειρου και διακριτού αριθμού ιδιοτιμών διαπερατότητας.

Το πρόβλημα μετασχηματίζεται στη μορφή:

$$\frac{d^2 z(\xi)}{d\xi^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{\xi^2} - g(\xi) \right) z(\xi) = 0 \quad (2.2.19)$$

όπου

$$g(\xi) := \frac{l(l+1)}{r^2 n(r)} - \frac{l(l+1)}{\xi^2} + \frac{n''(r)}{4n(r)^2} - \frac{5 n'(r)^2}{16 n(r)^3}. \quad (2.2.20)$$

Εφόσον $n(r) > 0$ για $r \geq 0$, ο μετασχηματισμός Liouville είναι αντιστρέψιμος, το g είναι καλά ορισμένο και είναι συνεχής συνάρτηση για $r > 0$. Επίσης, η συνθήκη (2.1.6) συνεπάγεται ότι

$$\int_0^1 \xi |g(\xi)| d\xi < \infty \quad \text{και} \quad \int_1^\infty |g(\xi)| d\xi < \infty \quad (2.2.21)$$

Η εξίσωση (2.2.19) είναι μία ακτινική διαφορική εξίσωση Schrödinger, ιδιόμορφη για $\xi = 0$.

Βασιζόμενοι στην ανάλυση [76, σελ. 436-437], για $\lambda > 0$ ορίζουμε τις συναρτήσεις E_λ και M_λ :

$$E_\lambda(\xi) = \begin{cases} \left[-\frac{Y_\lambda(\xi)}{J_\lambda(\xi)} \right]^{1/2}, & 0 < \xi < \xi_\lambda \\ 1, & \xi_\lambda \leq \xi < \infty \end{cases} \quad (2.2.22)$$

$$M_\lambda(\xi) = \begin{cases} [2|Y_\lambda(\xi)|J_\lambda(\xi)]^{1/2}, & 0 < \xi < \xi_\lambda \\ [J_\lambda^2(\xi) + Y_\lambda^2(\xi)]^{1/2}, & \xi_\lambda \leq \xi < \infty \end{cases} \quad (2.2.23)$$

όπου J_λ , Y_λ είναι συναρτήσεις Bessel και Neumann αντίστοιχα και ξ_λ είναι η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης $J_\lambda(\xi) + Y_\lambda(\xi) = 0$. Ορίζουμε επίσης την ποσότητα G_λ ως:

$$G_\lambda(k, \xi) := \frac{\pi}{2} \int_0^\xi M_\lambda^2(kt) |g(t)| dt. \quad (2.2.24)$$

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.1. ([30, θεώρημα 9.9]) Έστω $k > 0$ και $l \geq -1/2$. Τότε η (2.2.19) έχει μία λύση z η οποία, ως συνάρτηση του ξ , είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \infty)$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$, και δίνεται από τη σχέση

$$z(\xi) = \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} \{J_\lambda(k\xi) + \varepsilon_l(k, \xi)\} \quad (2.2.25)$$

όπου

$$\lambda = l + \frac{1}{2}$$

και

$$|\varepsilon_l(k, \xi)| \leq \frac{M_\lambda(k\xi)}{E_\lambda(k\xi)} \{e^{G_\lambda(k, \xi)} - 1\}.$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για το y_l , χρειαζόμαστε τις παρακάτω εκτιμήσεις:

$$Y_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.2.26)$$

$$J_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.2.27)$$

$$Y_\lambda(x) \sim -\frac{\Gamma(\lambda)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\lambda, \quad x \rightarrow 0 \quad (2.2.28)$$

$$J_\lambda(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad x \rightarrow 0 \quad (2.2.29)$$

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε επίσης ότι

$$M_\lambda(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}, \quad x \rightarrow \infty$$

$$M_\lambda(x) \sim \left(\frac{2}{\pi\lambda}\right)^{1/2}, \quad x \rightarrow 0$$

Στη συνέχεια, για δεδομένο $\xi > 0$ και k μεγάλο, με βάση την εκτίμηση (2.2.21) έχουμε

το εξής φράγμα:

$$|G_\lambda(k, \xi)| \leq c \left(\frac{\ln k}{k} + \frac{1}{k} \right) \quad (2.2.30)$$

για μία θετική σταθερά c ανεξάρτητη του k , όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\frac{\pi}{2} \int_1^\infty M_\lambda^2(kt) |g(t)| dt \sim \frac{1}{k} \int_1^\infty |g(t)| dt$$

και

$$\frac{\pi}{2} \int_0^1 M_\lambda^2(kt) |g(t)| dt \leq c_1 \left(\int_0^{1/k} M_\lambda^2(kt) dt + \int_{1/k}^1 M_\lambda^2(kt) dt \right) \sim \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k} \int_{1/k}^1 \frac{dt}{t} \right)$$

για c_1 θετική σταθερά και $k \rightarrow \infty$. Άρα, καταλήγουμε ότι

$$z(\xi) = \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) = \frac{1}{k} \cos\left(k\xi - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) \quad (2.2.31)$$

για δεδομένο $\xi > 0$. Αυτή η εκτίμηση μπορεί να παραγωγιστεί ως προς ξ , με τον όρο του σφάλματος να είναι της τάξης $O(\ln k/k)$.

Ακολούθως, από τον μετασχηματισμό Liouville $y_l(r) = n(r)^{-1/4} z(\xi)$, έχουμε

$$y_l(r) = c \frac{1}{n(r)^{1/4}} \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

όπου η σταθερά c επιλέγεται έτσι ώστε το y_l να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη (2.1.10). Από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για $r \rightarrow 0$ έχουμε ότι $c = 1/(n(0)^{l/2+1/4})$. Τέλος, καταλήγουμε στο ανάπτυγμα

$$y_l(r) = \frac{1}{kn(r)^{1/4} n(0)^{l/2+1/4}} \cos\left(k\xi - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) \quad (2.2.32)$$

Η αντίστοιχη ασυμπτωτική εκτίμηση για τις ορίζουσες D_l προκύπτει από τη σχέση (2.1.13) και τα αναπτύγματα των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel:

$$j_l(kr) = \frac{1}{kr} \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.2.33)$$

$$\frac{d}{dr} j_l(kr) = \frac{1}{r} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.2.34)$$

Κάνοντας χρήση του τύπου αθροίσματος ημιτόνων, και διατηρώντας μόνο τους όρους μεγαλύτερης τάξης, προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$D_l(k) = \frac{1}{a^2 kn(0)^{l/2+1/4}} \sin k(a - A) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) \quad (2.2.35)$$

(η παραπάνω εκτίμηση ισχύει και για $l = 0$). Μία ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ενός άπειρου και διακριτού συνόλου πραγματικών ριζών της (2.1.13) είναι το όρισμα του ημιτόνου στη σχέση (2.2.35) να μην είναι τετριμμένο, δηλαδή $A \neq a$. Αυτή η απαίτηση ικανοποιείται αν $n(r) > 1$ ή $0 < n(r) < 1$ για $0 \leq r < a$.

Έτσι, προκύπτει το παρακάτω θεώρημα [30, 39]:

Θεώρημα 2.2.2. Υποθέτουμε ότι $\text{Im}(n) = 0$ και ότι ο δείκτης διάθλασης $n(x) = n(r)$ είναι σφαιρικά διαστρωματωμένος, $n(r) = 1$ για $r \geq a$, $n(r) > 1$ ή $0 < n(r) < 1$ για $0 \leq r < a$ και, ως συνάρτηση του r , $n \in C^2$. Τότε υπάρχει ένα άπειρο σύνολο από ιδιοτιμές διαπερατότητας για το πρόβλημα (2.1.1) – (2.1.4).

2.2.2 Η περίπτωση $l = 0$

Σε αυτή την παράγραφο, μελετάμε την ειδική περίπτωση όπου οι ιδιοσυναρτήσεις εξαρτώνται μόνο από το r , η οποία αντιστοιχεί στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.1.14)-(2.1.16) και μελετήθηκε αρχικά στην εργασία [37], (βλ. επίσης [12, 22, 30, 40]).

Θεώρημα 2.2.3. Υποθέτουμε ότι $n \in C^2[0, a]$, $\text{Im}(n(r)) = 0$ και είτε $n(a) \neq 1$ ή $n(a) = 1$ και $A \neq a$. Τότε υπάρχει ένα άπειρο και διακριτό σύνολο ιδιοτιμών για το πρόβλημα (2.1.1) – (2.1.4) με σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις.

Απόδειξη. Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y_0''(r) + k^2 n(r) y_0(r) = 0, \quad 0 < r < a \quad (2.2.36)$$

$$y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1 \quad (2.2.37)$$

Εφαρμόζοντας και πάλι τον μετασχηματισμό Liouville (2.2.17), το πρόβλημα γράφεται στην παρακάτω μορφή:

$$\frac{d^2 z(\xi)}{d\xi^2} + [k^2 - p(\xi)] z(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < A \quad (2.2.38)$$

$$z(0) = 0, \quad \frac{dz(0)}{d\xi} = n(0)^{-1/4} \quad (2.2.39)$$

όπου

$$p(\xi) := \frac{n''(r)}{4n(r)^2} - \frac{5}{16} \frac{n'(r)^2}{n(r)^3} \quad (2.2.40)$$

και το A δίνεται από τη σχέση (2.2.18). Μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.2.38)-(2.2.39) ως μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2^{ου} είδους [78]:

$$z(\xi) = \frac{\sin k\xi}{kn(0)^{1/4}} + \int_0^\xi \frac{\sin k(\xi - t)}{k} z(t) p(t) dt. \quad (2.2.41)$$

Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων για να υπολογίσουμε την τάξη του ολοκληρωτικού όρου της εξίσωσης (2.2.41) ως συνάρτηση του k , μπορεί να δειχθεί ότι η λύση του (2.2.38)-(2.2.39) ικανοποιεί

$$z(\xi) = \frac{\sin k\xi}{kn(0)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{και} \quad \frac{dz(\xi)}{d\xi} = \frac{\cos k\xi}{n(0)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Τέλος, ο μετασχηματισμός Liouville συνεπάγεται ότι:

$$y_0(r) = \frac{1}{k[n(r)n(0)]^{1/4}} \sin k\xi + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (2.2.42)$$

και

$$y'_0(r) = \left[\frac{n(r)}{n(0)}\right]^{1/4} \cos k\xi + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (2.2.43)$$

ομοιόμορφα στο $[0, a]$.

Πριν προχωρήσουμε στο ανάπτυγμα της ορίζουσας, κάνουμε την παρακάτω υπόθεση: θεωρούμε ότι είτε $n(a) \neq 1$ ή $n(a) = 1$ και $A \neq a$. Σημειώνουμε ότι εάν $n(a) \neq 1$ και $n(r) = 1$ για $r > a$, ο δείκτης διάθλασης είναι $C^2[0, a]$ με μία ασυνέχεια στο σύνορο ∂B_a της μη ομογενούς μπάλας. Δείχνουμε ότι υπάρχει ένα άπειρο σύνολο από ιδιοτιμές σε κάθε περίπτωση.

Από την χαρακτηριστική εξίσωση (2.1.16), και τις εκτιμήσεις (2.2.42)-(2.2.43) προκύπτει ότι:

$$D_0(k) = \frac{1}{a^2 k} \left[\left(\frac{n(a)}{n(0)}\right)^{1/4} \cos kA \sin ka - \frac{1}{(n(a)n(0))^{1/4}} \sin kA \cos ka \right] + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (2.2.44)$$

ή ισοδύναμα,

$$D_0(k) = \frac{1}{a^2 k} \{C \cos kA \sin ka - B \sin kA \cos ka\} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (2.2.45)$$

όπου

$$B = \frac{1}{(n(a)n(0))^{1/4}} \quad \text{και} \quad C = \left(\frac{n(a)}{n(0)}\right)^{1/4}. \quad (2.2.46)$$

Εάν $n(a) = 1$, τότε $B = C$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο αθροίσματος ημιτόνων έχουμε ότι

$$D_0(k) = \frac{1}{a^2 kn(0)^{1/4}} \sin k(a - A) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (2.2.47)$$

και άρα, εφόσον $A \neq a$, υπάρχει ένα άπειρο και διακριτό σύνολο από ιδιοτιμές διαπερατότητας. Επιπλέον, αν $n(a) \neq 1$ και όταν το A είναι ρητός αριθμός, τότε ο πρώτος όρος της σχέσης (2.2.45) είναι μία περιοδική συνάρτηση που παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές. Αυτό σημαίνει ότι για k αρκούντως μεγάλο, υπάρχουν άπειρες πραγματικές ιδιοτιμές. Αυτό το επιχείρημα ισχύει και όταν $A = a$. Τέλος, αν το A είναι άρρητος

αριθμός, τότε ο πρώτος όρος της (2.2.45) είναι σχεδόν-περιοδική συνάρτηση, που επίσης παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές [22, 40]. \square

Σημειώνουμε ότι οι ασυμπτωτικές αναπαραστάσεις (2.2.35) και (2.2.47) έχουν το ίδιο κύριο μέρος, αλλά η (2.2.35) παρέχει μία ακριβέστερη εκτίμηση για τον όρο σφάλματος.

2.3 Μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα

Το πιο ενδιαφέρον και σημαντικό ζήτημα σχετικά με το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας είναι το αντίστοιχο αντίστροφο φασματικό πρόβλημα, δηλαδή ο προσδιορισμός του δείκτη διάθλασης από τις ιδιοτιμές διαπερατότητας. Όπως περιγράψαμε στην εισαγωγή, οι ιδιοτιμές διαπερατότητας εμπεριέχουν πληροφορία για τον δείκτη διάθλασης και χρησιμοποιούνται σε μεθόδους δειγματοληψίας για την ανακατασκευή του φορέα του μη ομογενούς μέσου. Επίσης, ένα σημαντικό ερώτημα είναι το υπό ποιες προϋποθέσεις οι ιδιοτιμές μπορούν να προσδιορίσουν τον δείκτη κατά μοναδικό τρόπο. Το συγκεκριμένο αντίστροφο φασματικό πρόβλημα έχει μελετηθεί μόνο όταν το χωρίο είναι μία μπάλα στο \mathbb{R}^3 και ο δείκτης διάθλασης $n(|x|) := n(r)$ είναι σφαιρικά συμμετρικός. Το πρώτο πρόβλημα που εξετάζουμε είναι το γενικό αντίστροφο φασματικό πρόβλημα δηλαδή ο προσδιορισμός του δείκτη διάθλασης από τη γνώση όλων των ιδιοτιμών διαπερατότητας. Έπειτα, θεωρούμε το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για ένα υποσύνολο του φάσματος το οποίο είναι οι ειδικές ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις.

2.3.1 Μοναδικότητα για τη γενική περίπτωση

Θεωρούμε το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για το (2.1.1) - (2.1.4) και υποθέτουμε ότι όλο το φάσμα είναι γνωστό, συμπεριλαμβανομένων και των πολλαπλοτήτων των ιδιοτιμών. Παρουσιάζουμε τις ιδέες των Cakoni, Colton και Gintides [14, θεώρημα 2.1]. Η απόδειξη βασίζεται σε μία ισοδύναμη ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης του (2.1.9), τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των οριζουσών και μία τελική απλοποίηση του αντίστροφου προβλήματος σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα ροπών.

Ένα βασικό εργαλείο για τα αντίστροφα προβλήματα ιδιοτιμών τύπου Sturm-Liouville είναι ο τελεστής Gelfand-Levitan-Marchenko και η χρήση ενός προβλήματος Goursat για τον πυρήνα του τελεστή. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα προβλήματα τύπου Goursat παραπέμπουμε στα [26, κεφ. 3.6] και [63, κεφ. 4.4 και 4.5]. Εδώ,

χρησιμοποιούμε μία παραλλαγή της ολοκληρωτικής αναπαράστασης της λύσης του προβλήματος (2.1.1) σε εσωτερικά χωρία [33]. Ορίζουμε τη συνάρτηση $m(r) := 1 - n(r)$.

Θεώρημα 2.3.1. Υποθέτουμε ότι $n \in C^2[0, \infty)$, $\text{Im}(n(r)) = 0$ και το $m(r)$ δεν αλλάζει πρόσημο. Αν το $n(0)$ είναι γνωστό τότε ο δείκτης $n(r)$ προσδιορίζεται μοναδικά από τη γνώση όλων των ιδιοτιμών διαπερατότητας και την πολλαπλότητά τους ως ρίζες της συνάρτησης $D_l(k)$.

Απόδειξη. Για την περίπτωση όπου $n(r) \in C^2[0, \infty)$, ακολουθώντας την εργασία [33] μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $y_l(r)$ στη μορφή:

$$y_l(r) = j_l(kr) + \int_0^r G(r, s, k) j_l(ks) ds \quad (2.3.48)$$

όπου θεωρούμε

$$w(r, \theta) = b_l y_l(r) P_l(\cos \theta) \quad \text{και} \quad y_l'' + \frac{2}{r} y_l' + \left(k^2 n(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y_l = 0$$

αντί για τις σχέσεις (2.1.8) και (2.1.9) αντίστοιχα. Προφανώς, η χαρακτηριστική εξίσωση (2.1.13) γράφεται ως

$$D_l(k) = \det \begin{pmatrix} y_l(r) & -j_l(kr) \\ \frac{d}{dr} y_l(r) & -\frac{d}{dr} j_l(kr) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{για } r = a. \quad (2.3.49)$$

Αντικαθιστώντας την (2.3.48) στην εξίσωση (2.1.1) και ολοκληρώνοντας κατά μέρη προκύπτει ότι ο πυρήνας $G(r, s, k)$ ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα Goursat για $0 < s \leq r < a$

$$r^2 \left[\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + k^2 n(r) G \right] = s^2 \left[\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial G}{\partial s} + k^2 G \right] \quad (2.3.50)$$

$$G(r, r, k) = \frac{k^2}{2r} \int_0^r t m(t) dt \quad (2.3.51)$$

$$G(r, s, k) = O((rs)^{1/2}) \quad (2.3.52)$$

Από την αναπαράσταση (2.9) στην εργασία [33], έχουμε ότι το $G(r, s, k)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση

$$G(r, s, k) = -\frac{k^2}{2\sqrt{rs}} \int_0^{\sqrt{rs}} t(n(t) - 1) dt - \frac{k^2}{\sqrt{rs}} \int_1^{\sqrt{\frac{r}{s}}} \int_0^{\sqrt{rs}} t^2 \tau \left[n(t\tau) - \frac{1}{\tau^4} \right] G(t\tau, t/\tau, k) dt d\tau \quad (2.3.53)$$

όπου η μοναδικότητα του G αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας σειρές Neumann. Επιπλέον,

το G είναι μία ακέραια συνάρτηση του k , εκθετικού τύπου, άρτια και ικανοποιεί

$$G(r, s, k) = \frac{k^2}{2\sqrt{rs}} \int_0^{\sqrt{rs}} tm(t)dt \left(1 + O(k^2)\right). \quad (2.3.54)$$

(Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις ακέραιες συναρτήσεις παραπέμπουμε στο παράρτημα Α'.4). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το c_{2l+2} είναι ο συντελεστής του k^{2l+2} στο ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $D_l(k)$. Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή τη σταθερά από το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $D_l(k)$ για $k \rightarrow 0$. Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel ικανοποιούν

$$j_l(kr) = \frac{\sqrt{\pi}(kr)^l}{2^{l+1}\Gamma(l+3/2)}(1 + O(k^2r^2)), \quad k \rightarrow 0 \quad (2.3.55)$$

και κάνοντας χρήση των (2.3.48) και (2.3.54) έχουμε ότι

$$y_l(r) = j_l(kr) + \frac{k^2}{2} \int_0^r \int_0^{\sqrt{rs}} \frac{tm(t)}{\sqrt{rs}} j_l(ks) dt ds + O(k^{l+4}). \quad (2.3.56)$$

Μέσω της αντικατάστασης των (2.3.55) και (2.3.56) στην (2.3.49), έπειτα από ορισμένες πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} c_{2l+2} \left[\frac{2^{l+1}\Gamma(l+3/2)}{\sqrt{\pi}a^{(l-1)/2}} \right]^2 &= a \int_0^a \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\sqrt{rs}} \int_0^{\sqrt{rs}} tm(t)dt \right) \Big|_{r=a} s^l ds \\ &\quad - l \int_0^a \frac{1}{2\sqrt{as}} \int_0^{\sqrt{as}} tm(t)dt s^l ds + \frac{a^l}{2} \int_0^a tm(t)dt. \end{aligned} \quad (2.3.57)$$

Εναλλάσσοντας τη σειρά ολοκλήρωσης και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής, η παραπάνω σχέση απλοποιείται στη μορφή (βλ. παράρτημα Α'.1)

$$c_{2l+2} = \frac{\pi}{a^2(2^{l+1}\Gamma(l+3/2))^2} \int_0^a t^{2l+2}m(t)dt. \quad (2.3.58)$$

Επίσης, σημειώνουμε ότι η j_l είναι άρτια όταν το l είναι το άρτιο και περιττή όταν το l είναι περιττό. Έτσι, εφόσον το G είναι άρτιο και το γινόμενο δύο άρτιων ή δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια, συμπεραίνουμε ότι η D_l είναι άρτια συνάρτηση του k . Ακόμα, επειδή οι j_l και G είναι ακέραιες συναρτήσεις του k εκθετικού τύπου, έτσι θα είναι και η y_l και άρα και η D_l . Από την ασυμπτωτική συμπεριφορά (2.2.35) για $k \rightarrow \infty$, βλέπουμε ότι η τάξη της D_l ως συνάρτηση του k είναι ίση με ένα, και άρα από το θεώρημα παραγοντοποίησης του Hadamard (παράρτημα, θεώρημα Α'.4.8)

$$D_l(k) = k^{2l+2} c_{2l+2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2}{k_{nl}^2}\right) \quad (2.3.59)$$

όπου η c_{2l+2} δίνεται από τη (2.3.58) υπό την προϋπόθεση ότι το $m(r)$ δεν αλλάζει

πρόσημο (προκειμένου το $c_{2l+2} \neq 0$ για κάθε l) και οι k_{nl} είναι οι μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας στο δεξί ημιεπίπεδο.

Τώρα, υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές διαπερατότητας είναι γνωστές και άρα

$$\frac{D_l(k)}{c_{2l+2}} = k^{2l+2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2}{k_{nl}^2}\right) \quad (2.3.60)$$

το αριστερό μέρος της (2.3.60) θα είναι επίσης γνωστό. Επιπλέον, ορίζουμε τις βοηθητικές σταθερές

$$\gamma_l := \frac{1}{c_{2l+2} n(0)^{l/2+1/4}} \neq 0 \quad (2.3.61)$$

και μπορούμε να γράψουμε το ανάπτυγμα (2.2.35) ως

$$\frac{D_l(k)}{c_{2l+2}} = \frac{\gamma_l}{a^2 k} \sin k(a - A) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right). \quad (2.3.62)$$

Έπειτα, ισχυριζόμαστε ότι εφόσον το αριστερό μέρος της (2.3.62) είναι γνωστό, θα είναι γνωστές και οι σταθερές γ_l . Για να το δείξουμε αυτό, υποθέτουμε ότι για δύο δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 , που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του θεωρήματος, αντιστοιχούν οι ίδιες ιδιοτιμές διαπερατότητας. Εάν συμβολίσουμε με D_{l_i} , c_{2l+2_i} , γ_{l_i} , A_i για $i = 1, 2$ τις χαρακτηριστικές ποσότητες του κάθε προβλήματος, επειδή

$$\frac{D_{l_1}(k)}{c_{2l+2_1}} = \frac{D_{l_2}(k)}{c_{2l+2_2}}$$

έχουμε ότι

$$\gamma_{l_1} \sin k(a - A_1) = \gamma_{l_2} \sin k(a - A_2)$$

για k αρκούντως μεγάλο. Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα γραμμικής ανεξαρτησίας για τις ημιτονικές συναρτήσεις, καταλήγουμε στο ότι $A_1 = A_2$ και $\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2}$.

Τελικά, από τη σχέση (2.3.58) έχουμε ότι

$$\int_0^a t^{2l+2} m(t) dt = \frac{a^2 (2^{l+1} \Gamma(l + 3/2))^2}{n(0)^{l/2+1/4} \gamma_l \pi}. \quad (2.3.63)$$

Αν το $n(0)$ είναι δεδομένο, τότε το δεξί μέρος της (2.3.63) είναι γνωστό και ο δείκτης διάθλασης προσδιορίζεται μοναδικά εφαρμόζοντας το θεώρημα του Müntz [41] για τη C^2 συνάρτηση $m(t)$. \square

Σημείωση 2.3.2. Το θεώρημα του Müntz χρησιμοποιείται επίσης για την απόδειξη της ύπαρξης ενός αριθμήσιμου πλήθους ιδιοτιμών διαπερατότητας εάν $n \in C^2[0, a]$ και ο δείκτης $n(r)$ δεν είναι ταυτοτικά ίσος με ένα ([38, θεώρημα 2.1]).

2.3.2 Μοναδικότητα για τις ειδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας

Στη συνέχεια, εξετάζουμε το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα της εύρεσης του δείκτη διάθλασης από τις ειδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας συμπεριλαμβανομένων και των πολλαπλοτήτων, δηλαδή των ιδιοτιμών του (2.1.14)-(2.1.16). Παρακάτω παρουσιάζουμε τα κυριότερα αποτελέσματα για αυτό το πρόβλημα.

Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε αρχικά από τους McLaughlin και Polyakov [72], (βλ. επίσης [73, 74]). Ο δείκτης διάθλασης απαιτείται να ικανοποιεί: $n \in C^1(\mathbb{R})$, $n'' \in L^2[0, a]$ και $\text{Im}(n(r)) = 0$. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις και δεδομένου ότι $A \neq a$, οι συγγραφείς του [72, λήμμα 2] απέδειξαν την παρακάτω ασυμπτωτική σχέση για τις πραγματικές ιδιοτιμές διαπερατότητας

$$k_j^2 = \frac{j^2 \pi^2}{(A - a)^2} + O(1), \quad j \rightarrow +\infty. \quad (2.3.64)$$

Ως εκ τούτου, ο χρόνος μετακίνησης A μπορεί να προσδιοριστεί εφόσον οι πραγματικές ιδιοτιμές του (2.1.14)-(2.1.16) είναι γνωστές. Επίσης, απέδειξαν ένα θεώρημα μοναδικότητας για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα υπό κάποιες περιοριστικές υποθέσεις για τον δείκτη $n(r)$:

Θεώρημα 2.3.3. ([72, θεώρημα 3]) Έστω $n_1(r), n_2(r) \in C^1(\mathbb{R})$ θετικές συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $n_i''(r) \in L^2[0, a]$ και $n_i(r) = 1$ για $r \geq a$ ($i = 1, 2$). Έστω $A_i = \int_0^a \sqrt{n_i(r)} dr > a$ είτε $A_i < a$ για $i = 1, 2$. Έστω επίσης ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε όλες οι ιδιοτιμές του (2.1.14) – (2.1.16) για n_1 και n_2 , οι οποίες είναι μεγαλύτερες του M να συμπίπτουν. Τότε έχουμε ότι $A_1 = A_2$ και συμβολίζουμε με A την κοινή τους τιμή.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία κοινή υπακολουθία ιδιοτιμών του (2.1.14) – (2.1.16), k_j^2 , $j = 1, \dots, \infty$ για n_1 και n_2 που ικανοποιεί τις παρακάτω υποθέσεις:

- α'. υπάρχει ένα $m_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε $|k_j^2| < (m + 1/2)^2 \pi^2 / (A - a)^2$ για $j = 1, \dots, m$ και $m \geq m_0$ και
- β'. για $j > m_0$ κάθε k_j^2 είναι πραγματικός αριθμός και ικανοποιεί $|k_j^2| > (m_0 + 1/2)^2 \pi^2 / (A - a)^2$.

Εάν επίσης

1. $A \leq a/3$ ή,
2. $A < a < 3A$ και $n_1(r) = n_2(r)$ για r που ικανοποιεί $0 \leq \int_r^a \sqrt{n_i(r)} dr \leq (3A - a)/2$ ή,

3. $A > a \geq 0$ και $n_1(r) = n_2(r)$ για r που ικανοποιεί $0 \leq \int_r^a \sqrt{n_i(r)} dr \leq (A+a)/2$

τότε $n_1(r) = n_2(r)$.

Ορισμένα χρόνια αργότερα, οι Aktosun, Gintides και Papanikolaou [2] έδειξαν ότι οι ειδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας του (2.1.14)-(2.1.16) συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων, προσδιορίζουν μοναδικά το $n(r)$ υπό τη λιγότερο περιοριστική συνθήκη $A < a$:

Θεώρημα 2.3.4. ([2, θεώρημα 3.2]) Υποθέτουμε ότι $n(r) \in C^1(0, a)$ τέτοιο ώστε $n''(r) \in L^2(0, 1)$, $\text{Im}(n(r)) = 0$ και $A < a$. Τότε ο δείκτης $n(r)$ προσδιορίζεται μοναδικά από τις ιδιοτιμές του (2.1.14) – (2.1.16) και τις πολλαπλότητες τους ως ρίζες του $D_0(k)$.

Η απόδειξη βασίζεται στην απλοποίηση του αντίστροφου προβλήματος σε ένα κλασικό αντίστροφο πρόβλημα τύπου Sturm-Liouville, η οποία δεν μπορεί να εφαρμοστεί όταν $A > a$. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι αν $A = a$, οι ιδιοτιμές μαζί με τη σταθερά της αντίστοιχης παραγοντοποίησης Hadamard της ορίζουσας, προσδιορίζουν μοναδικά το $n(r)$. Πρόσφατα, οι Buterin, Yang και Yurko [10] απέδειξαν ότι το φάσμα μόνο του (χωρίς τη σταθερά) δεν αρκεί για τον προσδιορισμό του $n(r)$ εάν $A = a$.

Μία συντομότερη απόδειξη του θεωρήματος 2.3.4, δόθηκε από τους Colton και Leung [35] (βλ. επίσης [12, κεφ. 9.4]) υπό την προϋπόθεση ότι $n \in C^2[0, a]$, $0 < n < 1$ και με δεδομένο ότι το $n(0)$ είναι γνωστό. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις βασικές ιδέες αυτής της απόδειξης.

Θεώρημα 2.3.5. Υποθέτουμε ότι $n \in C^2[0, a]$, $n(a) = 1$, $n'(a) = 0$ και το $n(0)$ είναι γνωστό. Τότε αν $0 < n(r) < 1$ για $r \in (0, a)$, οι ιδιοτιμές διαπερατότητας (συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων) προσδιορίζουν μοναδικά τον δείκτη διάθλασης $n(r)$.

Απόδειξη. Βασιζόμενοι στη θεωρία των τελεστών μετασχηματισμού (transformation operators, [12, κεφ. 9.2]), μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη λύση του (2.2.38)-(2.2.39) στη μορφή

$$z(\xi) = \frac{1}{n(0)^{1/4}} \left[\frac{\sin k\xi}{k} + \int_0^\xi K(\xi, t) \frac{\sin kt}{k} dt \right], \quad 0 \leq \xi \leq A \quad (2.3.65)$$

όπου το $K(\xi, t)$ είναι η μοναδική λύση για το πρόβλημα

$$K_{\xi\xi} - K_{tt} - p(\xi)K = 0, \quad 0 < t < \xi < A$$

$$K(\xi, \xi) = \frac{1}{2} \int_0^\xi p(s) ds, \quad 0 \leq \xi \leq A$$

$$K(\xi, 0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq A.$$

Η ύπαρξη ενός τέτοιου K αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Τώρα, δοθέντος ότι $n(a) = 1$ και $n'(a) = 0$ καταλήγουμε ότι η λύση του (2.2.36)-(2.2.37) ικανοποιεί:

$$y_0(a) = \frac{1}{n(0)^{1/4}} \left[\frac{\sin kA}{k} + \int_0^A K(A, t) \frac{\sin kt}{k} dt \right], \quad (2.3.66)$$

$$y'_0(a) = \frac{1}{n(0)^{1/4}} \left[\cos kA + \frac{\sin kA}{2k} \int_0^A p(s) ds + \int_0^A K_\xi(A, t) \frac{\sin kt}{k} dt \right]. \quad (2.3.67)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση ικανοποιεί

$$D_0(k) = \frac{1}{a^2 k n(0)^{1/4}} \sin k(a - A) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

και από την παραγοντοποίηση Hadamard (2.3.59) έχουμε την αναπαράσταση

$$D_0(k) = c_0 k^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2}{k_{n0}^2} \right).$$

Η ορίζουσα έχει μία ρίζα τάξης 2 στο μηδέν, υπό την προϋπόθεση ότι $\int_0^a t^2 m(t) dt \neq 0$ και το c_0 δίνεται από τη (2.3.58). Ακολουθώντας αντίστοιχα επιχειρήματα με το θεώρημα 2.3.1, αν το $n(0)$ και οι ειδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας $\{k_{n0}\}_{n=1}^{\infty}$ (μαζί με τις πολλαπλότητες) είναι δεδομένα, τότε τα c_0 , A και ως αποτέλεσμα και το $D_0(k)$ είναι επίσης γνωστά.

Επιπλέον, εφόσον το $D_0(k)$ ικανοποιεί

$$D_0(k) = \frac{\sin ka}{k} y'_0(a) - \cos ka y_0(a),$$

υπολογίζοντας το $D_0(k)$ στα $k = m\pi/a$, $m = 1, 2, \dots$ έχουμε

$$\frac{m\pi}{a} D_0\left(\frac{m\pi}{a}\right) = \frac{(-1)^{m+1}}{n(0)^{1/4}} \left[\sin \frac{m\pi A}{a} + \int_0^A K(A, t) \sin \frac{m\pi t}{a} dt \right].$$

Επίσης, επειδή το $\{\sin \frac{m\pi t}{a}\}_{m=1}^{\infty}$ αποτελεί ένα πλήρες σύνολο στον χώρο $L^2[0, A]$ αν το $A < a$ ([94, σελ. 97]) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα $n(0)$, A και D_0 είναι γνωστά, συμπεραίνουμε ότι το $K(A, t)$ προσδιορίζεται μοναδικά. Χρησιμοποιούμε παρόμοια επιχειρήματα για τα $k = m\pi/A$, $m = 1, 2, \dots$. Από τη σχέση (2.3.67) έχουμε

$$\frac{m\pi}{A} D_0\left(\frac{m\pi}{A}\right) = -y_0(a) \frac{m\pi}{A} \cos \frac{m\pi a}{A} + \frac{\sin \frac{m\pi a}{A}}{n(0)^{1/4}} \left[(-1)^m + \frac{A}{m\pi} \int_0^A K_\xi(A, t) \sin \frac{m\pi t}{A} dt \right].$$

Από την πληρότητα των $\{\sin \frac{m\pi t}{A}\}_{m=1}^{\infty}$ στον $L^2[0, A]$ και επειδή το $y_0(a)$ είναι γνωστό, καταλήγουμε ότι το $K_\xi(A, t)$ προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο. Από το [80] (βλ. επίσης [63, κεφ. 4.7]) προκύπτει ότι τα δεδομένα Cauchy $K(A, t)$, $K_\xi(A, t)$ προσδιορίζουν

μοναδικά το $p(\xi)$ για $0 \leq \xi \leq A$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι δύο δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 , οι οποίοι ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος, έχουν ίδιες ιδιοτιμές και πολλαπλότητες. Σε αυτή την περίπτωση, από τους παραπάνω συλλογισμούς έχουμε ότι $p(\xi_1) = p(\xi_2)$ για δεδομένο r όπου

$$\xi_i = \int_0^r \sqrt{n_i(t)} dt, \quad i = 1, 2.$$

Από τον ορισμό του $p(\xi)$ στη σχέση (2.2.40), εφόσον $n_1(a) = n_2(a) = 1$ και $n_1'(a) = n_2'(a) = 0$, έχουμε ότι οι συναρτήσεις $n_1^{1/4}(r(\xi_1))$ και $n_2^{1/4}(r(\xi_2))$ ικανοποιούν

$$\frac{d^2 n_i^{1/4}}{d\xi_i^2} - p(\xi_i) n_i^{1/4} = 0, \quad 0 \leq \xi_i \leq A,$$

$$n_i^{1/4}(r(A)) = 1,$$

$$\frac{dn_i^{1/4}(r(A))}{d\xi_i} = 0.$$

για $i = 1, 2$. Από το θεώρημα μοναδικότητας για προβλήματα αρχικών τιμών των συνηθών διαφορικών εξισώσεων καταλήγουμε ότι $n_1(\xi_1) = n_2(\xi_2)$ για κάθε δεδομένο r . Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα $r_i = r(\xi_i)$ ικανοποιούν

$$\frac{dr_i}{d\xi_i} = \frac{1}{\sqrt{n_i(\xi_i)}}, \quad 0 \leq \xi_i \leq A,$$

$$r_i(0) = 0$$

για $i = 1, 2$, και χρησιμοποιώντας και πάλι τη μοναδικότητα για το πρόβλημα αρχικών τιμών συμπεραίνουμε ότι $r(\xi_1) = r(\xi_2)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\xi_1 = \xi_2$ και άρα $n_1 = n_2$. □

Σημείωση 2.3.6. Σημειώνουμε ότι η συνθήκη $0 < n(r) < 1$ που χρησιμοποιήσαμε στο παραπάνω θεώρημα είναι κατά κάποιο τρόπο πιο ισχυρή από τη συνθήκη $0 < A < a$ του θεωρήματος 2.3.4.

Για περαιτέρω ζητήματα σχετικά με το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για ιδιοτιμές διαπερατότητας παραπέμπουμε στα [4, 9, 88, 91, 92].

2.4 Μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας είναι μη αυτοσυζυγές και άρα μπορούν να υπάρχουν και μιγαδικές ιδιοτιμές. Σημειώνουμε ότι οι μιγαδικές ιδιοτιμές δεν μπορούν να μετρηθούν από δεδομένα σκέδασης ή άλλες μεθόδους μέχρι τώρα. Εφόσον μόνο πραγματικές ιδιοτιμές μπορούν να προσδιοριστούν, ενδιαφερόμαστε για την ύπαρξη μιγαδικών ιδιοτιμών ή τις συνθήκες υπό τις οποίες δεν υπάρχουν καθόλου μιγαδικές ιδιοτιμές. Θεωρούμε χωρία στο \mathbb{R}^2 και στο \mathbb{R}^3 και εξετάζουμε τόσο την περίπτωση του σταθερού όσο και του μεταβλητού δείκτη διάθλασης.

2.4.1 Μιγαδικές ιδιοτιμές στο \mathbb{R}^2

Ένα πρώτο αποτέλεσμα ύπαρξης μιγαδικών ιδιοτιμών δόθηκε από τους Cakoni, Colton και Gintides [14, παράγραφος 2.2], για την απλή περίπτωση του μοναδιαίου δίσκου στο \mathbb{R}^2 με σταθερό δείκτη διάθλασης $n \neq 1$, αρκούντως μικρό. Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας (2.1.1) - (2.1.4), για σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις σε αυτή την περίπτωση γράφεται ως:

$$w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + k^2nw = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (2.4.68)$$

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + k^2v = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (2.4.69)$$

$$w(1) = v(1) \quad (2.4.70)$$

$$w_r(1) = v_r(1). \quad (2.4.71)$$

Θεώρημα 2.4.1. Θεωρούμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας (2.1.1) – (2.1.4) όπου το χωρίο είναι η μοναδιαία μπάλα του \mathbb{R}^2 . Εάν ο δείκτης διάθλασης είναι μία σταθερά $n > 1$ αρκετά μικρή, τότε υπάρχουν μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας.

Απόδειξη. Έστω ότι B_a είναι η μοναδιαία μπάλα του \mathbb{R}^2 και επίσης υποθέτουμε ότι ο δείκτης διάθλασης είναι μία θετική σταθερά. Οι λύσεις των εξισώσεων Helmholtz (2.1.1) και (2.1.2) είναι

$$w(r) = J_m(k\sqrt{n}r) \sin mr, \quad v(r) = J_m(k\sqrt{n}r) \cos mr, \quad m = 0, 1, \dots$$

και

$$v(r) = J_m(kr) \sin mr, \quad v(r) = J_m(kr) \cos mr, \quad m = 0, 1, \dots$$

αντίστοιχα. Υποθέτουμε μόνο σφαιρικά συμμετρικές λύσεις δηλαδή $m = 0$. Η αντίστοιχη χαρακτηριστική ορίζουσα είναι

$$D_0(k) = \det \begin{pmatrix} J_0(kr) & J_0(k\sqrt{nr}) \\ J'_0(kr) & J'_0(k\sqrt{nr}) \end{pmatrix} = 0, \quad \text{για } r = 1.$$

Έτσι, το k είναι μία ιδιοτιμή διαπερατότητας αν και μόνο αν

$$D_0(k) = k(J_1(k)J_0(k\sqrt{n}) - \sqrt{n}J_0(k)J_1(k\sqrt{n})) = 0, \quad (2.4.72)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $J'_0(kr) = -kJ_1(kr)$. Τώρα, αν θεωρήσουμε τη D_0 ως μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, $D_0(k, \sqrt{n})$, και την παραγωγίσουμε ως προς \sqrt{n} έχουμε

$$D'_0(k, \sqrt{n})|_{\sqrt{n}=1} = k(kJ_1(k)J'_0(k) - J_0(k)J_1(k) - kJ_0(k)J'_1(k))$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας ότι $\frac{d}{dt}(tJ_1(t)) = tJ_0(t)$ προκύπτει ότι

$$-kJ_0(k)J_1(k) - k^2J_0(k)J'_1(k) = -k^2J_0(k) \left(\frac{J_1(k)}{k} + J'_1(k) \right) = -k^2J'_0(k)$$

και άρα

$$D'_0(k, \sqrt{n})|_{\sqrt{n}=1} = -k^2(J_1^2(k) + J_0^2(k))$$

ή ισοδύναμα

$$f(k) := \lim_{\sqrt{n} \rightarrow 1^+} \frac{D_0(k, \sqrt{n}) - D_0(k, 1)}{\sqrt{n} - 1} = -k^2(J_1^2(k) + J_0^2(k)). \quad (2.4.73)$$

Δεδομένου ότι οι συναρτήσεις $J_0(k)$ και $J_1(k)$ δεν έχουν κοινές ρίζες, η $f(k)$ είναι αυστηρά αρνητική για $k \neq 0$ και οι μόνες πιθανές ρίζες της $f(k)$ είναι μιγαδικές. Επειδή η $f(k)$ είναι μία άρτια ακέραια συνάρτηση εκθετικού τύπου, από το θεώρημα παραγοντοποίησης του Hadamard, θα έχει έναν άπειρο αριθμό μιγαδικών ριζών. Επιπλέον, η σύγκλιση στη σχέση (2.4.73) είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{C} επειδή η ακολουθία στο δεξί μέλος του ορίου είναι τοπικά ομοιόμορφα φραγμένη στα συμπαγή υποσύνολα (θεώρημα του Montel, [32, σελ. 213]). Τέλος, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Hurwitz ([32, σελ. 213]), δεδομένου ότι η $f(k)$ είναι μη σταθερή αναλυτική συνάρτηση, για κάθε ρίζα k_0 του $f(k)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ μικρό, συμπεραίνουμε ότι η $D_0(k)$ έχει μία (μιγαδική) ρίζα στο δίσκο $|k - k_0| < \varepsilon$ για n αρκούντως κοντά στο 1. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Αργότερα, οι Colton και Leung απέδειξαν ότι υπάρχουν μιγαδικές ιδιοτιμές στο \mathbb{R}^2 για σταθερό n , όχι απαραίτητα μικρό.

Θεώρημα 2.4.2. ([69, θεώρημα 2.4]) Έστω ότι ο δείκτης $n = n(r)$ είναι μία θετική σταθερά, όχι ίση με 1. Τότε υπάρχει ένας άπειρος αριθμός από μιγαδικές ιδιοτιμές για το (2.4.68) – (2.4.71).

2.4.2 Μιγαδικές ιδιοτιμές στο \mathbb{R}^3

Παρουσιάζουμε τα κυριότερα αποτελέσματα όσον αφορά την ύπαρξη και την κατανομή των μιγαδικών ιδιοτιμών για τη μοναδιαία μπάλα του \mathbb{R}^3 . Αν ο δείκτης διάθλασης είναι σταθερός και οι ιδιοσυναρτήσεις είναι σφαιρικά συμμετρικές, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα [69]:

Θεώρημα 2.4.3. *Εάν το n είναι θετικός ακέραιος όχι ίσος με ένα τότε όλες οι ιδιοτιμές διαπερατότητας που αντιστοιχούν σε σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις είναι πραγματικές. Από την άλλη, αν το n είναι ένας ρητός θετικός αριθμός $n = p/q$ τέτοιος ώστε είτε $q < p < 2q$ ή $p < q < 2p$ τότε υπάρχουν άπειρες μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας.*

Για την περίπτωση του μεταβλητού δείκτη διάθλασης, στην εργασία [69, θεώρημα 4.2], οι συγγραφείς έδειξαν την ύπαρξη μιγαδικών ιδιοτιμών υπό κάποιους περιορισμούς στο $n(r)$. Ακόμα, οι Colton και Leung μελέτησαν την κατανομή των ιδιοτιμών στο μιγαδικό επίπεδο :

Θεώρημα 2.4.4. ([35, θεώρημα 2.1]) *Υποθέτουμε ότι $n(1) \neq 1$ και $n \in C^2[0, 1]$. Τότε, αν υπάρχουν μιγαδικές ιδιοτιμές, θα βρίσκονται σε μία λωρίδα παράλληλη στον πραγματικό άξονα.*

Πρόσφατα, οι Colton, Leung και Meng [36] εξέτασαν την ύπαρξη και την κατανομή των μιγαδικών ιδιοτιμών σε σχέση με την τιμή του χρόνου μετακίνησης $A = \int_0^1 \sqrt{n(t)} dt$ και των τιμών του $n(r)$ στο σύνορο, δηλ. των $n(1), n'(1)$ και $n''(1)$.

Θεώρημα 2.4.5. ([36, θεώρημα 4.1]) *Υποθέτουμε ότι ο δείκτης διάθλασης $n \in C^2[0, 1]$ με $n(1) = 1$, $n'(1) = 0$ και $A \neq 1$. Τότε, υπό την περαιτέρω προϋπόθεση ότι $n''(1) \neq 0$, η ακέραια συνάρτηση $D_0(k)$ έχει άπειρες μη πραγματικές και άπειρες πραγματικές ρίζες.*

Επίσης, σε αντίθεση με το θεώρημα 2.4.4, από την ίδια εργασία έχουμε:

Θεώρημα 2.4.6. ([36, θεώρημα 4.2]) *Υποθέτουμε ότι ο δείκτης διάθλασης $n \in C^2[0, 1]$ με $n(1) = 1$ και $A \neq 1$. Εάν είτε το $n'(1)$ ή το $n''(1)$ είναι μη μηδενικό, οι ρίζες της $D_0(k)$ δεν βρίσκονται σε μία φραγμένη λωρίδα, παράλληλη του πραγματικού άξονα.*

Τέλος, για την περίπτωση $A = 1$ έχουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 2.4.7. ([36, θεώρημα 5.1]) *Έστω ότι ο δείκτης διάθλασης $n \in C^2[0, 1]$. Υποθέτουμε ότι $A = 1$ και $n(1) \neq 1$. Τότε υπάρχουν το πολύ πεπερασμένες σε πλήθος μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας. Παρόλα αυτά, αν $A = 1$ και $n(1) = 1$, τότε είναι δυνατό να έχουμε μόνο πεπερασμένες σε πλήθος πραγματικές ιδιοτιμές.*

Για το μονοδιάστατο πρόβλημα και ορισμένα ακόμα αποτελέσματα παραπέμπουμε στα [34, 86, 97].

ΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΠΕΡΑΤΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΜΕΝΟ ΜΕΣΟ ΜΕ ΑΣΥΝΕΧΗ ΔΕΙΚΤΗ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ

Διατυπώνουμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας για έναν σφαιρικά συμμετρικό και ασυνεχή δείκτη διάθλασης και τα αντίστοιχα βοηθητικά προβλήματα αρχικών τιμών [47]. Μελετάμε τις ιδιότητες των λύσεων των προβλημάτων αρχικών τιμών και την ασυμπτωτική συμπεριφορά των οριζουσών. Στη συνέχεια εξετάζουμε το κατά πόσο οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να προσδιορίσουν κάποια απ' τα χαρακτηριστικά του ασυνεχή δείκτη διάθλασης. Αποδεικνύουμε ότι από τη γνώση όλων των ιδιοτιμών και των πολλαπλοτήτων τους μπορούμε να προσδιορίσουμε κατά μοναδικό τρόπο τον δείκτη. Τέλος, προσδιορίζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των πραγματικών ιδιοτιμών διαπερατότητας με τη μορφή μίας ασυμπτωτικής ανισότητας και παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα το οποίο δείχνει ότι εν γένει οι ιδιοτιμές δεν έχουν ασυμπτωτικό τύπο.

Περιεχόμενα

3.1 Διατύπωση του προβλήματος	36
3.2 Ιδιότητες των ιδιοσυναρτήσεων και των οριζουσών . .	39
3.2.1 Η περίπτωση $l = 0$	40
3.2.2 Η περίπτωση $l \geq 1$	46
3.3 Μοναδικότητα για το αντίστροφο ασυνεχές πρόβλημα	50
3.3.1 Μοναδικότητα για τον προσδιορισμό της ασυνέχειας	50
3.3.2 Το θεώρημα μοναδικότητας	57
3.4 Ασυμπτωτική συμπεριφορά των ιδιοτιμών διαπερατότητας	62

3.1 Διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας (2.1.1) - (2.1.4) για τη μοναδιαία μπάλα του \mathbb{R}^3 , δηλαδή $a = 1$, όπου ο αντίστοιχος δείκτης διάθλασης είναι ασυνεχής σε ένα σημείο $d \in (0, 1)$, βλ. σχήμα 3.1. Ακολουθούμε ανάλογα επιχειρήματα με το προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά η παρούσα διαδικασία είναι πιο περίπλοκη. Υποθέτουμε ότι ο δείκτης διάθλασης ικανοποιεί:

$$n(r) > 0, \operatorname{Im}(n(r)) = 0, n(r) = 1 \text{ για } r \geq 1, \text{ και } n'(1) = 0. \quad (3.1.1)$$

Επίσης, η συνάρτηση $n(r)$ είναι C^2 σε κάθε $[0, d), (d, \infty)$ και τα πλευρικά όρια στο d είναι πεπερασμένα. Ορίζουμε τις παρακάτω συνθήκες άλματος:

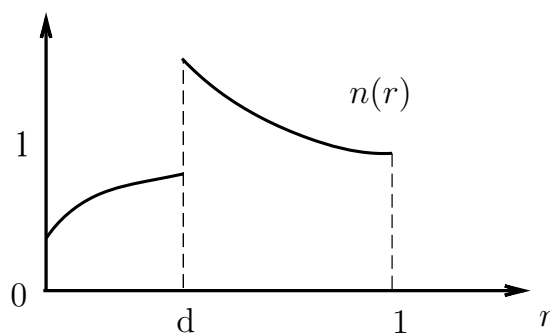
$$n(d^+) = an(d^-) \quad (3.1.2)$$

$$n'(d^+) = a^{-1}n'(d^-) + bn(d^-) \quad (3.1.3)$$

όπου οι σταθερές a και b ικανοποιούν:

$$a > 0, |a - 1| + |b| > 0 \quad (3.1.4)$$

(σημειώνουμε ότι το μέγεθος της ασυνέχειας a είναι διαφορετικό από την ακτίνα της μπάλας B_a). Η υπόθεση (3.1.4) εξασφαλίζει ότι το n ή/και το n' είναι ασυνεχές στο d .



Σχήμα 3.1: Ο ασυνεχής δείκτης διάθλασης

Χρησιμοποιώντας χωρισμό μεταβλητών, καταλήγουμε σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών ανάλογο του (2.1.11) - (2.1.13) για το $y_l(r)$:

$$y_l''(r) + \left(k^2 n(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y_l(r) = 0 \quad \text{για } 0 < r < 1, r \neq d \quad (3.1.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{y_l(r)}{r} - j_l(kr) \right) = 0, \quad (3.1.6)$$

$$D_l(k) := \det \begin{pmatrix} \frac{y_l(r)}{r} & -j_l(kr) \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{y_l(r)}{r} \right) & -\frac{d}{dr} j_l(kr) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{για } r = 1, \quad (3.1.7)$$

και άμα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Liouville (2.2.17), καταλήγουμε στο πρόβλημα:

$$\frac{d^2 z(\xi)}{d\xi^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{\xi^2} - g(\xi) \right) z(\xi) = 0 \quad \text{για } 0 < \xi < A \quad (3.1.8)$$

όπου

$$g(\xi) := \frac{l(l+1)}{r^2 n(r)} - \frac{l(l+1)}{\xi^2} + \frac{n''(r)}{4n(r)^2} - \frac{5}{16} \frac{n'(r)^2}{n(r)^3}.$$

Ο χρόνος μετακίνησης δίνεται από τη σχέση

$$A := \int_0^1 \sqrt{n(t)} dt \quad (3.1.9)$$

όπου επίσης ορίζουμε το σχετικό χρόνο μετακίνησης

$$\tilde{d} := \int_0^d \sqrt{n(t)} dt. \quad (3.1.10)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι για το ασυνεχές πρόβλημα, η συνάρτηση $g(\xi)$ δεν ορίζεται στο $\xi = \tilde{d}$. Δεδομένου ότι $n(r) > 0$ για $r \geq 0$, ο μετασχηματισμός Liouville είναι αντιστρέψιμος και το g είναι καλά ορισμένο σε κάθε διάστημα $(0, \tilde{d})$, (\tilde{d}, ∞) και είναι μία κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση για $r > 0$. Άρα, ο μετασχηματισμός Liouville μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο τοπικά, σε κάθε διάστημα $(0, d)$ και (d, ∞) , [3]. Επιπλέον, εφόσον $n(r) = 1$ για $r \geq 1$ έχουμε

$$\int_0^A \xi |g(\xi)| d\xi < \infty \quad \text{και} \quad \int_A^\infty |g(\xi)| d\xi < \infty \quad (3.1.11)$$

Το ακόλουθο λήμμα μας εξασφαλίζει ότι η z είναι ασυνεχής στο $\xi = \tilde{d}$ ακόμα και αν η y_l είναι συνεχής στο $r = d$.

Λήμμα 3.1.1. Η λύση $z(\xi)$ του μετασχηματισμένου προβλήματος (3.1.8), είναι ασυνεχής στο $\xi = \tilde{d}$ και ικανοποιεί τις συνθήκες άλματος:

$$z(\tilde{d}^+) = \tilde{a} z(\tilde{d}^-) \quad (3.1.12)$$

$$\frac{dz(\tilde{d}^+)}{d\xi} = \tilde{a}^{-1} \frac{dz(\tilde{d}^-)}{d\xi} + \tilde{b} z(\tilde{d}^-) \quad (3.1.13)$$

όπου:

$$\tilde{a} := a^{1/4} \quad (3.1.14)$$

$$\tilde{b} := \frac{1}{4} \left[\frac{n'(d^+)}{n(d^+)^{3/2}} \tilde{a} - \frac{n'(d^-)}{n(d^-)^{5/4} n(d^+)^{1/4}} \right]. \quad (3.1.15)$$

Απόδειξη. Εφόσον η y_l είναι συνεχής στο $r = d$ έχουμε ότι $y_l(d^+) = y_l(d^-)$ και από τη (2.2.17), $z(\tilde{d}^+)/n(d^+)^{1/4} = z(\tilde{d}^-)/n(d^-)^{1/4}$. Άρα, $z(\tilde{d}^+) = z(\tilde{d}^-)n(d^+)^{1/4}/n(d^-)^{1/4}$ το οποίο συνεπάγεται ότι

$$z(\tilde{d}^+) = \tilde{a}z(\tilde{d}^-) \quad \text{όπου} \quad \tilde{a} = \frac{n(d^+)^{1/4}}{n(d^-)^{1/4}} = a^{1/4}. \quad (3.1.16)$$

Παράλληλα, χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας έχουμε:

$$y_l'(r) = \frac{dz(\xi)}{d\xi} n(r)^{1/4} - \frac{1}{4} z(\xi) \frac{n'(r)}{n(r)^{5/4}}. \quad (3.1.17)$$

Από τη συνέχεια της y_l' στο $r = d$ έχουμε $y_l'(d^+) = y_l'(d^-)$ και από τη (3.1.17)

$$\frac{dz(\tilde{d}^+)}{d\xi} n(d^+)^{1/4} - \frac{1}{4} z(\tilde{d}^+) \frac{n'(d^+)}{n(d^+)^{5/4}} = \frac{dz(\tilde{d}^-)}{d\xi} n(d^-)^{1/4} - \frac{1}{4} z(\tilde{d}^-) \frac{n'(d^-)}{n(d^-)^{5/4}}$$

Έτσι,

$$\frac{dz(\tilde{d}^+)}{d\xi} = \frac{dz(\tilde{d}^-)}{d\xi} \frac{n(d^-)^{1/4}}{n(d^+)^{1/4}} - \frac{1}{4} z(\tilde{d}^-) \frac{n'(d^-)}{n(d^+)^{1/4} n(d^-)^{5/4}} + \frac{1}{4} z(\tilde{d}^+) \frac{n'(d^+)}{n(d^+)^{1/4} n(d^+)^{5/4}}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις (3.1.12) και (3.1.16) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{dz(\tilde{d}^+)}{d\xi} = \frac{dz(\tilde{d}^-)}{d\xi} \tilde{a}^{-1} + z(\tilde{d}^-) \left[\frac{1}{4} \frac{n'(d^+)}{n(d^+)^{3/2}} \tilde{a} - \frac{1}{4} \frac{n'(d^-)}{n(d^-)^{5/4} n(d^+)^{1/4}} \right].$$

□

Επιπρόσθετα, η σχέση ασυνέχειας (3.1.4) συνεπάγεται έναν αντίστοιχο περιορισμό για τις σταθερές \tilde{a} και \tilde{b} στο μετασχηματισμένο πρόβλημα.

Λήμμα 3.1.2. Η ύπαρξη μίας ασυνέχειας στον δείκτη διάθλασης, της μορφής (3.1.4) συνεπάγεται ότι

$$|\tilde{a} - 1| + |\tilde{b}| > 0 \quad (3.1.18)$$

για το μετασχηματισμένο πρόβλημα.

Απόδειξη. Από τις σχέσεις (3.1.3) και (3.1.15) έχουμε

$$\tilde{b} = \frac{1}{4} \frac{a^{1/4}}{n(d^+)^{3/2}} \left(bn(d^-) + a^{-1}n'(d^-) \right) - \frac{1}{4} \frac{n'(d^-)}{n(d^-)^{5/4} n(d^+)^{1/4}}$$

και με βάση τη (3.1.2) καταλήγουμε ότι

$$\tilde{b} = \frac{1}{4}b \frac{n(d^-)^{3/4}}{n(d^+)^{5/4}} + \frac{1}{4}n'(d^-) \left(\frac{1}{n(d^+)^{3/2}a^{3/4}} - \frac{1}{n(d^-)^{5/4}n(d^+)^{1/4}} \right) \quad (3.1.19)$$

Τώρα, ο τελευταίος όρος της (3.1.19) μας δίνει

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(d^+)^{3/2}a^{3/4}} - \frac{1}{n(d^-)^{5/4}n(d^+)^{1/4}} &= \frac{n(d^-)^{3/4}}{n(d^+)^{3/2}n(d^+)^{3/4}} - \frac{1}{n(d^-)^{5/4}n(d^+)^{1/4}} \\ &= \frac{n(d^-)^{3/4}}{n(d^+)^{9/4}} - \frac{1}{n(d^-)^{5/4}n(d^+)^{1/4}} \\ &= \frac{n(d^-)^{8/4} - n(d^+)^{8/4}}{n(d^-)^{5/4}n(d^+)^{9/4}} \\ &= \frac{n(d^-)^2(1 - a^2)}{n(d^-)^{5/4}n(d^+)^{9/4}} \\ &= \frac{n(d^-)^{3/4}}{n(d^+)^{9/4}}(1 - a^2) \end{aligned}$$

και η σχέση (3.1.19) γίνεται

$$\tilde{b} = \frac{1}{4}b \frac{n(d^-)^{3/4}}{n(d^+)^{5/4}} + \frac{1}{4}n'(d^-) \frac{n(d^-)^{3/4}}{n(d^+)^{9/4}}(1 - a^2) \quad (3.1.20)$$

Έστω ότι $|a - 1| + |b| > 0$, τότε $a \neq 1$ ή $b \neq 0$. Στην περίπτωση όπου $a \neq 1$ και $b \neq 0$ τότε από τις εξισώσεις (3.1.16) και (3.1.20) έχουμε ότι $|\tilde{a} - 1| + |\tilde{b}| > 0$. Έστω τώρα ότι $a = 1$ και $b \neq 0$. Τότε η (3.1.16) συνεπάγεται ότι $\tilde{a} = 1$ και η (3.1.20) ότι $\tilde{b} \neq 0$ και άρα $|\tilde{a} - 1| + |\tilde{b}| > 0$. Με παρόμοια επιχειρήματα, εάν $b = 0$ και $a \neq 1$ καταλήγουμε ότι $|\tilde{a} - 1| + |\tilde{b}| > 0$. \square

3.2 Ιδιότητες των ιδιοσυναρτήσεων και των οριζουσών

Στη συνέχεια μελετάμε τις ιδιότητες των λύσεων $y_l(r)$ και $z(\xi)$ για το ασυνεχές πρόβλημα. Κάνοντας αντίστοιχους συλλογισμούς με το συνεχές πρόβλημα, διακρίνουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση $l = 0$, η οποία αντιστοιχεί στο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας με σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις. Στη συνέχεια, αναζητούμε λύσεις που εξαρτώνται τόσο από το r όσο και από το θ , δηλαδή για $l \geq 1$, και μελετάμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά τους για μεγάλα k . Βασιζόμενοι σε αυτές τις ασυμπτωτικές εκτιμήσεις καταλήγουμε στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για τις ορίζουσες (3.1.7), το οποίο χρειάζεται για το αντίστροφο πρόβλημα.

3.2.1 Η περίπτωση $l = 0$

Για την ειδική περίπτωση του (2.1.1)-(2.1.4), όπου θεωρούμε μόνο τις σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις, το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι ισοδύναμο με το παρακάτω πρόβλημα ιδιοτιμών τύπου Sturm-Liouville

$$y_0''(r) + k^2 n(r) y_0(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad r \neq d \quad (3.2.21)$$

$$y_0(0) = 0, \quad (3.2.22)$$

$$D_0(k) = \frac{\sin k}{k} y_0'(1) - \cos k y_0(1) = 0 \quad (3.2.23)$$

Έστω ότι $y_0(r) = y_0(r; k)$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y_0''(r) + k^2 n(r) y_0(r) = 0, \quad 0 < r < 1 \quad (3.2.24)$$

$$y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1 \quad (3.2.25)$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Liouville (2.2.17), το πρόβλημα αρχικών τιμών γράφεται στη μορφή (2.2.38)-(2.2.39), όπου τώρα το $p(\xi)$ είναι κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση. Για τη διερεύνηση των ιδιοτήτων της $y_0(r)$, θεωρούμε τη λύση $z(\xi)$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες άλματος (3.1.12)-(3.1.13). Βασιζόμαστε στην εργασία του Hald [54] για το πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville, και την προσαρμόζουμε στο ασυνεχές πρόβλημα ιδιοτιμών διαπερατότητας.

Πρόταση 3.2.1. Η συνάρτηση $z(\xi)$ ικανοποιεί τις παρακάτω ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra:

$$z(\xi) = \frac{\sin k\xi}{kn(0)^{1/4}} + \int_0^\xi p(t) \frac{\sin k(\xi - t)}{k} z(t) dt, \quad 0 \leq \xi < \tilde{d} \quad (3.2.26)$$

$$\begin{aligned} z(\xi) = & \frac{1}{kn(0)^{1/4}} \left[\tilde{a} \sin k\tilde{d} \cos k(\xi - \tilde{d}) + \tilde{a}^{-1} \cos k\tilde{d} \sin k(\xi - \tilde{d}) + \frac{\tilde{b}}{k} \sin k\tilde{d} \sin k(\xi - \tilde{d}) \right] \\ & + \frac{1}{k} \int_0^{\tilde{d}} \left[\tilde{a} \sin k(\tilde{d} - t) \cos k(\xi - \tilde{d}) + \tilde{a}^{-1} \cos k(\tilde{d} - t) \sin k(\xi - \tilde{d}) \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{b}}{k} \sin k(\tilde{d} - t) \sin k(\xi - \tilde{d}) \right] p(t) z(t) dt + \int_{\tilde{d}}^\xi p(t) \frac{\sin k(\xi - t)}{k} z(t) dt, \quad \tilde{d} < \xi \leq A \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Απόδειξη. Για $\xi < \tilde{d}$ έχουμε ότι η z ικανοποιεί τη (3.2.26) εφόσον αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στο συνεχές πρόβλημα. Για $\xi > \tilde{d}$, ακολουθώντας την εργασία [54],

πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.2.38) με μία συνάρτηση $G(\xi, t)$, ολοκληρώνουμε ως προς t από \tilde{d} έως ξ και χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά μέρη δύο φορές. Αυτό μας οδηγεί στην αναπαράσταση:

$$\begin{aligned} \frac{dz(\xi)}{d\xi}G(\xi, \xi) - \frac{dz(\tilde{d}^+)}{d\xi}G(\xi, \tilde{d}) - z(\xi)G_t(\xi, \xi) + z(\tilde{d}^+)G_t(\xi, \tilde{d}) \\ + \int_{\tilde{d}}^{\xi} z(t) (G_{tt} + k^2G) dt = \int_{\tilde{d}}^{\xi} p(t)G(\xi, t)z(t)dt. \end{aligned}$$

Άμα επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση $G_{tt} + k^2G = 0$ με τις κατάλληλες συνθήκες $G(\xi, \xi) = 0$ και $G_t(\xi, \xi) = -1$, καταλήγουμε ότι:

$$z(\xi) = -z(\tilde{d}^+)G_t(\xi, \tilde{d}) + \frac{dz(\tilde{d}^+)}{d\xi}G(\xi, \tilde{d}) + \int_{\tilde{d}}^{\xi} p(t)G(\xi, t)z(t)dt \quad (3.2.28)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις συνθήκες άλματος (3.1.12)-(3.1.13), παίρνουμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra (3.2.27). \square

Η προηγούμενη πρόταση μας εξασφαλίζει ότι η λύση z ικανοποιεί μία εξίσωση Volterra για $\xi \neq \tilde{d}$, όπου ο μη ομογενής όρος είναι ασυνεχής στο $\xi = \tilde{d}$. Παρόλα αυτά, η y_0 είναι συνεχής στο $r = d$ και ικανοποιεί τις εξισώσεις Volterra (3.2.26)-(3.2.27) για $y_0(r) = z(\xi)n(r)^{-1/4}$.

Στη συνέχεια εξετάζουμε με ποιο τρόπο η λύση z εξαρτάται από το k , και την αντίστοιχη ασυμπτωτική συμπεριφορά για μεγάλες τιμές του k . Χρησιμοποιούμε το παρακάτω λήμμα το οποίο μπορεί να βρεθεί στην εργασία [54, λήμμα 1].

Λήμμα 3.2.2. Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$u(x) - \int_a^x K(x, t)p(t)u(t)dt = f(x)$$

όπου οι f και K είναι συνεχείς και η p είναι ολοκληρώσιμη. Αυτή η εξίσωση έχει μία μοναδική λύση u η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί

$$|u(x)| \leq M(x)e^{L(x)\rho(x)},$$

όπου

$$M(x) = \max_{a \leq t \leq x} |f(t)|, \quad L(x) = \max_{a \leq t \leq x} |K(x, t)| \quad \text{και} \quad \rho(x) = \int_a^x |p(t)|dt.$$

Πρόταση 3.2.3. Έστω z η λύση των εξισώσεων (3.2.26) και (3.2.27) σε κάθε διάστημα αντίστοιχα. Τότε, κάθε κλάδος της z είναι μία ακέραια συνάρτηση του k^2 της τάξης $1/2$.

Απόδειξη. Έστω $k = \sigma + i\tau$ και $|\tau| = |\operatorname{Im}(k)| := \nu$. Ξαναγράφουμε τη (3.2.26) ως

$$e^{-\nu\xi} z(\xi) = \frac{\sin k\xi}{kn(0)^{1/4}} e^{-\nu\xi} + \int_0^\xi p(t) \frac{\sin k(\xi-t)}{k} e^{-\nu(\xi-t)} e^{-\nu t} z(t) dt$$

Επίσης, οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις ικανοποιούν τις παρακάτω ανισότητες:

$$|\cos k\xi|, |\sin k\xi|, \frac{|\sin k\xi|}{|k\xi|} \leq e^{\nu\xi}, \text{ για } \xi \geq 0. \quad (3.2.29)$$

Με βάση αυτές τις εκτιμήσεις, και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του λήμματος 3.2.2 έχουμε

$$M(\xi) = \max_{0 \leq t \leq \xi} |f(t)| = \max_{0 \leq t \leq \xi} \left| \frac{\sin kt}{kt} \frac{t}{n(0)^{1/4}} e^{-\nu t} \right| \leq \frac{\xi}{|n(0)^{1/4}|}, \quad (3.2.30)$$

$$L(\xi) = \max_{0 \leq t \leq \xi} |K(\xi, t)| = \max_{0 \leq t \leq \xi} \left| \frac{\sin k(\xi-t)}{k(\xi-t)} e^{-\nu(\xi-t)} (\xi-t) \right| \leq \xi$$

Έτσι, από το λήμμα 3.2.2 προκύπτει ότι

$$|z(\xi)| \leq \frac{\xi}{|n(0)^{1/4}|} e^{\xi\rho(\xi)+\nu\xi} \quad (3.2.31)$$

Εφόσον οι f και K είναι ακέραιες συναρτήσεις του k , έχουμε ότι και η z θα είναι ακέραια συνάρτηση. Θέτουμε

$$m = \max \left\{ \frac{1}{|n(0)^{1/4}|}, \int_0^A |p(t)| dt, |\tilde{b}| \right\} \quad (3.2.32)$$

και μπορούμε να γράψουμε την ανισότητα (3.2.31) ως

$$|z(\xi)| \leq \xi m e^{\xi m + \nu\xi} < mA e^{\xi m + \nu\xi}, \text{ για } 0 \leq \xi \leq \tilde{d}. \quad (3.2.33)$$

Άρα, η z είναι μία ακέραια συνάρτηση του k^2 , της τάξης $1/2$. Ακολουθώντας αντίστοιχους συλλογισμούς, ξαναγράφουμε τη (3.2.27) ως

$$\begin{aligned} e^{-\nu\xi} z(\xi) = & \frac{1}{n(0)^{1/4}} \left[\tilde{a} \frac{\sin k\tilde{d}}{k} e^{-\nu\tilde{d}} \cos k(\xi - \tilde{d}) e^{-\nu(\xi-\tilde{d})} + \tilde{a}^{-1} \cos k\tilde{d} e^{-\nu\tilde{d}} \frac{\sin k(\xi - \tilde{d})}{k} e^{-\nu(\xi-\tilde{d})} \right. \\ & \left. + \tilde{b} \frac{\sin k\tilde{d}}{k} e^{-\nu\tilde{d}} \frac{\sin k(\xi - \tilde{d})}{k} e^{-\nu(\xi-\tilde{d})} \right] + \int_0^{\tilde{d}} \left[\tilde{a} \frac{\sin k(\tilde{d}-t)}{k} e^{-\nu(\tilde{d}-t)} \cos k(\xi - \tilde{d}) \right. \\ & \left. e^{-\nu(\xi-\tilde{d})} + \tilde{a}^{-1} \cos k(\tilde{d}-t) e^{-\nu(\tilde{d}-t)} \frac{\sin k(\xi - \tilde{d})}{k} e^{-\nu(\xi-\tilde{d})} + \tilde{b} \frac{\sin k(\tilde{d}-t)}{k} e^{-\nu(\tilde{d}-t)} \right. \\ & \left. \frac{\sin k(\xi - \tilde{d})}{k} e^{-\nu(\xi-\tilde{d})} \right] e^{-\nu t} p(t) z(t) dt + \int_{\tilde{d}}^\xi p(t) \frac{\sin k(\xi-t)}{k} e^{-\nu(\xi-t)} e^{-\nu t} z(t) dt. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι οι f και K είναι ακέραιες συναρτήσεις του k , το ίδιο θα ισχύει και για τη

z. Τώρα, η (3.2.29) και η ανισότητα (3.2.33) συνεπάγονται ότι

$$|f(\xi)| \leq \frac{1}{|n(0)^{1/4}|} \left[\tilde{a}\tilde{d} + \tilde{a}^{-1}(\xi - \tilde{d}) + |\tilde{b}|(\xi - \tilde{d})\tilde{d} \right] \\ + \int_0^{\tilde{d}} \left[\tilde{a}(\tilde{d} - t) + \tilde{a}^{-1}(\xi - \tilde{d}) + |\tilde{b}|(\xi - \tilde{d})(\tilde{d} - t) \right] |p(t)| mAe^{\tilde{\rho}(\tilde{d})} dt.$$

Επιπλέον, επειδή $\tilde{a} + \tilde{a}^{-1} > 1$ και από τον ορισμό (3.2.32), μετά από ορισμένες πράξεις έχουμε:

$$M(\xi) = \max_{\tilde{d} \leq t \leq \xi} |f(t)| < mA(1 + mA)^2(\tilde{a} + \tilde{a}^{-1})e^{\xi\rho(\tilde{d})}. \quad (3.2.34)$$

Επίσης,

$$L(\xi) = \max_{\tilde{d} \leq t \leq \xi} |K(\xi, t)| = \max_{\tilde{d} \leq t \leq \xi} \left| \frac{\sin k(\xi - t)}{k(\xi - t)} e^{-\nu(\xi - t)} (\xi - t) \right| < \xi$$

και από το λήμμα 3.2.2 συμπεραίνουμε ότι

$$|z(\xi)| < mA(1 + mA)^2(\tilde{a} + \tilde{a}^{-1})e^{m\xi + \nu\xi}, \quad \text{για } \tilde{d} \leq \xi \leq A. \quad (3.2.35)$$

άρα η z είναι μία ακέραια συνάρτηση του k^2 της τάξης $1/2$. \square

Συμπέρασμα 3.2.4. Η παράγωγος $dz/d\xi$ των (3.2.26) – (3.2.27) είναι μία ακέραια συνάρτηση του k^2 της τάξης $1/2$.

Συμπέρασμα 3.2.5. Οι συναρτήσεις y_0 και y'_0 είναι ακέραιες στη μεταβλητή k^2 , της τάξης $1/2$

Για να κατασκευάσουμε τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος πρέπει να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των z και y_0 για μεγάλα k. Εάν θέσουμε $p = \tilde{b} = 0$ στις (3.2.26) και (3.2.27), παίρνουμε το κύριο μέρος για τις ασυμπτωτικές ανισότητες.

Πρόταση 3.2.6. Έστω z η λύση των (3.2.26) – (3.2.27) και θέτουμε $\nu := |\text{Im}(k)|$. Τότε υπάρχουν θετικές σταθερές C και D τέτοιες ώστε:

$$\left| z(\xi) - \frac{\sin k\xi}{kn(0)^{1/4}} \right| \leq \frac{1}{|k|^2} \mathcal{C} e^{\nu\xi} \quad (3.2.36)$$

$$\left| \frac{dz(\xi)}{d\xi} - \frac{\cos k\xi}{n(0)^{1/4}} \right| \leq \frac{1}{|k|} \mathcal{C} e^{\nu\xi} \quad (3.2.37)$$

$$\left| z(\xi) - \frac{1}{kn(0)^{1/4}} \left[\tilde{a} \sin k\tilde{d} \cos k(\xi - \tilde{d}) + \tilde{a}^{-1} \cos k\tilde{d} \sin k(\xi - \tilde{d}) \right] \right| \leq \frac{1}{|k|^2} \mathcal{D} e^{\nu\xi} \quad (3.2.38)$$

$$\left| \frac{dz(\xi)}{d\xi} - \frac{1}{n(0)^{1/4}} \left[-\tilde{a} \sin k\tilde{d} \sin k(\xi - \tilde{d}) + \tilde{a}^{-1} \cos k\tilde{d} \cos k(\xi - \tilde{d}) \right] \right| \leq \frac{1}{|k|} \mathcal{D}e^{\nu\xi} \quad (3.2.39)$$

όπου οι (3.2.36), (3.2.37) ισχύουν για $0 \leq \xi \leq \tilde{d}$ και οι (3.2.38), (3.2.39) για $\tilde{d} \leq \xi \leq A$ αντίστοιχα.

Απόδειξη. Για μεγάλες τιμές του k , μπορούμε να εκφράσουμε το φράγμα του $z(\xi)$ με όρους του $1/|k|$ αντί του ξ . Από τον ορισμό της συνάρτησης $M(\xi)$ για την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra όταν $\xi \leq \tilde{d}$, έχουμε:

$$M(\xi) = \max_{0 \leq t \leq \xi} |f(t)| = \max_{0 \leq t \leq \xi} \left| \frac{\sin kt}{kn(0)^{1/4}} e^{-\nu t} \right| \leq \frac{1}{|kn(0)^{1/4}|}$$

και χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.2.2 προκύπτει ότι

$$|z(\xi)| \leq \frac{1}{|k|} m e^{\tilde{d}m + \nu\xi}, \quad 0 \leq \xi \leq \tilde{d}. \quad (3.2.40)$$

Από τη σχέση (3.2.26) έχουμε

$$e^{-\nu\xi} \left| z(\xi) - \frac{\sin k\xi}{kn(0)^{1/4}} \right| = \left| \int_0^\xi e^{-\nu\xi} p(t) \frac{\sin k(\xi - t)}{k} z(t) dt \right|$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τη (3.2.40):

$$e^{-\nu\xi} \left| z(\xi) - \frac{\sin k\xi}{kn(0)^{1/4}} \right| \leq \frac{1}{|k|^2} \int_0^\xi |p(t)| m e^{\tilde{d}m} dt$$

έχουμε ως αποτέλεσμα

$$\left| z(\xi) - \frac{\sin k\xi}{kn(0)^{1/4}} \right| \leq \frac{1}{|k|^2} m^2 e^{\tilde{d}m} e^{\nu\xi} := \frac{1}{|k|^2} \mathcal{C} e^{\nu\xi}.$$

Αντίστοιχα, για το $dz(\xi)/d\xi$ έχουμε

$$\left| \frac{dz(\xi)}{d\xi} - \frac{\cos k\xi}{n(0)^{1/4}} \right| \leq \frac{1}{|k|} m^2 e^{\tilde{d}m} e^{\nu\xi} = \frac{1}{|k|} \mathcal{C} e^{\nu\xi}.$$

Με τα ίδια επιχειρήματα, χρησιμοποιώντας και πάλι το λήμμα 3.2.2 και τον ορισμό του $M(\xi)$ για το διάστημα $\tilde{d} \leq t \leq \xi$, κάνοντας ορισμένες πράξεις προκύπτει

$$M(\xi) = \max_{\tilde{d} \leq t \leq \xi} |f(t)| < \frac{1}{|k|} m(1 + mA)^2 (\tilde{a} + \tilde{a}^{-1}) e^{\xi\rho(\tilde{d})}$$

και ως συνέπεια έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$|z(\xi)| < \frac{1}{|k|} m(1 + mA)^2 (\tilde{a} + \tilde{a}^{-1}) e^{mA + \nu\xi}, \quad \tilde{d} \leq \xi \leq A. \quad (3.2.41)$$

Για την ασυμπτωτική φόρμουλα όταν $\xi \geq \tilde{d}$, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.2.27) και (3.2.41):

$$\begin{aligned} e^{-\nu\xi} \left| z(\xi) - \frac{1}{kn(0)^{1/4}} \left[\tilde{a} \sin k\tilde{d} \cos k(\xi - \tilde{d}) + \tilde{a}^{-1} \cos k\tilde{d} \sin k(\xi - \tilde{d}) + \frac{\tilde{b}}{k} \sin k\tilde{d} \right. \right. \\ \left. \left. \sin k(\xi - \tilde{d}) \right] \right| &\leq \left| \frac{1}{k} \int_0^{\tilde{d}} e^{-\nu\xi} \left[\tilde{a} \sin k(\tilde{d} - t) \cos k(\xi - \tilde{d}) + \tilde{a}^{-1} \cos k(\tilde{d} - t) \sin k(\xi - \tilde{d}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\tilde{b}}{k} \sin k(\tilde{d} - t) \sin k(\xi - \tilde{d}) \right] p(t) z(t) dt \right| + \left| \int_{\tilde{d}}^{\xi} e^{-\nu\xi} p(t) \frac{\sin k(\xi - t)}{k} z(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|k|^2} \int_0^{\tilde{d}} [\tilde{a} + \tilde{a}^{-1} + mA] |p(t)| m e^{\tilde{d}m} dt \\ &\quad + \frac{1}{|k|^2} \int_{\tilde{d}}^{\xi} m(1 + mA)^2 (\tilde{a} + \tilde{a}^{-1}) e^{mA} |p(t)| dt \end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} \left| z(\xi) - \frac{1}{kn(0)^{1/4}} \left[\tilde{a} \sin k\tilde{d} \cos k(\xi - \tilde{d}) + \tilde{a}^{-1} \cos k\tilde{d} \sin k(\xi - \tilde{d}) + \frac{\tilde{b}}{k} \sin k\tilde{d} \sin k(\xi - \tilde{d}) \right] \right| \\ < \frac{1}{|k|^2} m^2 (\tilde{a} + \tilde{a}^{-1}) (1 + mA) (2 + mA) e^{mA} e^{\nu\xi} \end{aligned}$$

και δείξαμε τη (3.2.38). Αντίστοιχα, αποδεικνύουμε τη (3.2.39). \square

Σημείωση 3.2.7. Για τα αντίστοιχα αποτελέσματα του συνεχούς προβλήματος παραπέμπουμε στην εργασία [2, πρόταση 2.2].

Έπειτα, μελετάμε τις ιδιότητες της χαρακτηριστικής συνάρτησης (3.2.23). Από το πόρισμα 3.2.5 και δεδομένου ότι τα $\sin k/k$ και $\cos k$ είναι ακέραιες συναρτήσεις του k^2 της τάξης $1/2$ προκύπτει ότι η $D_0(k)$ είναι επίσης ακέραια στο k^2 με τάξη το πολύ $1/2$. Επίσης, από τον ορισμό (3.2.23), την ολοκληρωτική εξίσωση (3.2.27), και χρησιμοποιώντας ότι $n(1) = 1$ και $n'(1) = 0$ καταλήγουμε στην παρακάτω αναπαράσταση για τη $D_0(k)$:

$$\begin{aligned} D_0(k) &= \frac{1}{kn(0)^{1/4}} \left[\frac{\tilde{a}^2 + 1}{2\tilde{a}} \sin k(1 - A) + \frac{1 - \tilde{a}^2}{2\tilde{a}} \sin k(1 - A + 2\tilde{d}) \right] \\ &\quad + \frac{\tilde{b}}{2k^2 n(0)^{1/4}} \left[\cos k(1 - A) - \cos k(1 - A + 2\tilde{d}) \right] \\ &\quad + \frac{\sin k}{k} \int_0^{\tilde{d}} \left[-\tilde{a} \sin k(A - \tilde{d}) \sin k(\tilde{d} - t) + \tilde{a}^{-1} \cos k(A - \tilde{d}) \cos k(\tilde{d} - t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{b}}{k} \cos k(A - \tilde{d}) \sin k(\tilde{d} - t) \right] p(t) z(t) dt - \frac{\cos k}{k} \int_0^{\tilde{d}} \left[\tilde{a} \cos k(A - \tilde{d}) \sin k(\tilde{d} - t) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \tilde{a}^{-1} \sin k(A - \tilde{d}) \cos k(\tilde{d} - t) + \frac{\tilde{b}}{k} \sin k(A - \tilde{d}) \sin k(\tilde{d} - t) \Big] p(t)z(t)dt \\
 & + \frac{\sin k}{k} \int_{\tilde{d}}^A \cos k(A - t)p(t)z(t)dt - \frac{\cos k}{k} \int_{\tilde{d}}^A \sin k(A - t)p(t)z(t)dt. \quad (3.2.42)
 \end{aligned}$$

Επιπροσθέτως, εξετάζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της χαρακτηριστικής συνάρτησης. Εφαρμόζοντας τις ανισότητες της πρότασης 3.2.6 και τον μετασχηματισμό Liouville $y_0(r) = z(\xi)n(r)^{-1/4}$ στη (3.2.23), προκύπτει ότι η $D_0(k)$ ικανοποιεί την παρακάτω σχέση για $k \rightarrow \infty$ κατά μήκος του θετικού πραγματικού άξονα:

$$D_0(k) = \frac{1}{kn(0)^{1/4}} \left[\frac{\tilde{a}^2 + 1}{2\tilde{a}} \sin k(1 - A) + \frac{1 - \tilde{a}^2}{2\tilde{a}} \sin k(1 - A + 2\tilde{d}) \right] + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (3.2.43)$$

Σημείωση 3.2.8. Εάν θεωρήσουμε ότι $\tilde{a} = 1$ το οποίο αντιστοιχεί στο συνεχές πρόβλημα, το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα (3.2.43) απλοποιείται στο αντίστοιχο της σχέσης (2.2.47).

3.2.2 Η περίπτωση $l \geq 1$

Σε αυτή την παράγραφο, μελετάμε τις ιδιότητες των (3.1.5) και (3.1.8) για $l \geq 1$. Από το θεώρημα 2.2.1, έχουμε ότι για $\xi < \tilde{d}$, η $z(\xi)$ ικανοποιεί το ακόλουθο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για μεγάλες τιμές του k :

$$z(\xi) = \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) \quad (3.2.44)$$

όπου $\lambda = l + 1/2$. Αυτός ο τύπος, ο οποίος περιγράφει το συνεχές πρόβλημα, ισχύει και για την περίπτωση που εξετάζουμε καθώς $n(r) \in C^2[0, d]$. Για $\xi > \tilde{d}$ έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 3.2.9. Έστω ότι $k > 0$ και ότι $l \geq -1/2$. Τότε η λύση της εξίσωσης (3.1.8) είναι ασυνεχής για $\xi = \tilde{d}$, ικανοποιεί τις συνθήκες άλματος (3.1.12) και (3.1.13), και για $\xi > \tilde{d}$ και μεγάλο k :

$$\begin{aligned}
 z(\xi) = & \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) \left[\frac{\pi}{2} \tilde{d}k \left(\tilde{a}^{-1} Y_\lambda(k\tilde{d}) J_{\lambda+1}(k\tilde{d}) - \tilde{a} J_\lambda(k\tilde{d}) Y_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) \right] \\
 & + \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} Y_\lambda(k\xi) \left(\frac{\pi}{2} \tilde{d}k (\tilde{a} - \tilde{a}^{-1}) J_\lambda(k\tilde{d}) J_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) \quad (3.2.45)
 \end{aligned}$$

όπου J_λ και Y_λ είναι οι συναρτήσεις Bessel και Neumann αντίστοιχα.

Απόδειξη. Η z επιλύει την ολοκληρωτική εξίσωση

$$z(\xi) = \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) + \frac{\pi}{2} \int_0^\xi \sqrt{t\xi} (Y_\lambda(k\xi)J_\lambda(kt) - J_\lambda(k\xi)Y_\lambda(kt)) g(t)z(t)dt \quad (3.2.46)$$

για $0 < \xi < \tilde{d}$, [76, σελ. 449-451]. Για να μελετήσουμε τη λύση όταν $\xi > \tilde{d}$, χρησιμοποιούμε την ίδια τεχνική με την πρόταση 3.2.1. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2.2.19) με μία συνάρτηση $G(\xi, t)$ και ολοκληρώνουμε ως προς το t από \tilde{d} έως ξ . Μία ολοκλήρωση κατά μέρη δύο φορές μας οδηγεί στην (3.2.28), όπου τώρα λύνουμε το πρόβλημα:

$$G_{tt} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{t^2}\right) G = 0, \quad G(\xi, \xi) = 0 \quad \text{και} \quad G_t(\xi, \xi) = -1$$

και άρα

$$G(\xi, t) = \sqrt{t\xi} \frac{\pi}{2} (Y_\lambda(k\xi)J_\lambda(kt) - J_\lambda(k\xi)Y_\lambda(kt)). \quad (3.2.47)$$

Από τη σχέση (3.2.46) και τη συνθήκη άλματος (3.1.12) έχουμε:

$$z(\tilde{d}^+) = \tilde{a}z(\tilde{d}^-) = \tilde{a}\sqrt{\frac{\pi\tilde{d}}{2k}} J_\lambda(k\tilde{d}) + \tilde{a}\frac{\pi}{2} \int_0^{\tilde{d}} \sqrt{t\tilde{d}} (Y_\lambda(k\tilde{d})J_\lambda(kt) - J_\lambda(k\tilde{d})Y_\lambda(kt)) g(t)z(t)dt.$$

Επιπλέον, από την (3.2.46) και τη συνθήκη (3.1.13) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{dz(\tilde{d}^+)}{d\xi} &= \tilde{a}^{-1} \frac{dz(\tilde{d}^-)}{d\xi} + \tilde{b}z(\tilde{d}^-) = \tilde{a}^{-1} \sqrt{\frac{\pi}{2k\tilde{d}}} \left((l+1)J_\lambda(k\tilde{d}) - k\tilde{d}J_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) \\ &+ \tilde{a}^{-1} \frac{\pi}{2\sqrt{\tilde{d}}} \int_0^{\tilde{d}} \sqrt{t} \left[-(l+1)J_\lambda(k\tilde{d})Y_\lambda(kt) + k\tilde{d}J_{\lambda+1}(k\tilde{d})Y_\lambda(kt) \right. \\ &+ \left. J_\lambda(kt) \left((l+1)Y_\lambda(k\tilde{d}) - k\tilde{d}Y_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) \right] g(t)z(t)dt + \tilde{b}\sqrt{\frac{\pi\tilde{d}}{2k}} J_\lambda(k\tilde{d}) \\ &+ \tilde{b}\frac{\pi}{2} \int_0^{\tilde{d}} \sqrt{t\tilde{d}} (Y_\lambda(k\tilde{d})J_\lambda(kt) - J_\lambda(k\tilde{d})Y_\lambda(kt)) g(t)z(t)dt \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω αναπαραστάσεις στη σχέση (3.2.28) και χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις για το G και το G_t , μπορούμε να γράψουμε το z ως:

$$z(\xi) = \sqrt{\xi} Y_\lambda(k\xi) \mathcal{A}(k, \tilde{d}) + \sqrt{\xi} J_\lambda(k\xi) \mathcal{B}(k, \tilde{d}) + \sqrt{\xi} \varepsilon_l(k, \xi) \quad (3.2.48)$$

όπου

$$\varepsilon_l(k, \xi) = \int_{\tilde{d}}^\xi \frac{\pi}{2} \sqrt{t} (Y_\lambda(k\xi)J_\lambda(kt) - J_\lambda(k\xi)Y_\lambda(kt)) g(t)z(t)dt, \quad (3.2.49)$$

$$\mathcal{A}(k, \tilde{d}) = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \frac{\pi}{2} \left[J_\lambda(k\tilde{d})(\tilde{a}^{-1} - \tilde{a}) \left((l+1)J_\lambda(k\tilde{d}) - k\tilde{d}J_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) + \tilde{b}\tilde{d}J_\lambda^2(k\tilde{d}) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\tilde{d}} \frac{\pi^2}{4} \sqrt{t} \left\{ \tilde{a} \left(Y_\lambda(k\tilde{d}) J_\lambda(kt) - J_\lambda(k\tilde{d}) Y_\lambda(kt) \right) \left(-(l+1) J_\lambda(k\tilde{d}) + k\tilde{d} J_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) \right. \\
& + \tilde{a}^{-1} J_\lambda(k\tilde{d}) \left[Y_\lambda(kt) \left(-(l+1) J_\lambda(k\tilde{d}) + k\tilde{d} J_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) + J_\lambda(kt) \left((l+1) Y_\lambda(k\tilde{d}) \right. \right. \\
& \left. \left. - k\tilde{d} Y_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) \right] + \tilde{b} \tilde{d} J_\lambda(k\tilde{d}) \left(Y_\lambda(k\tilde{d}) J_\lambda(kt) - J_\lambda(k\tilde{d}) Y_\lambda(kt) \right) \left. \right\} g(t) z(t) dt,
\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(k, \tilde{d}) &= \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \frac{\pi}{2} \left[J_\lambda(k\tilde{d}) \tilde{a} \left((l+1) Y_\lambda(k\tilde{d}) - k\tilde{d} Y_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) \right. \\
& \left. + Y_\lambda(k\tilde{d}) \tilde{a}^{-1} \left(-(l+1) J_\lambda(k\tilde{d}) + k\tilde{d} J_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) - \tilde{b} \tilde{d} J_\lambda(k\tilde{d}) Y_\lambda(k\tilde{d}) \right] \\
& + \int_0^{\tilde{d}} \frac{\pi^2}{4} \sqrt{t} \left\{ \tilde{a} \left(Y_\lambda(k\tilde{d}) J_\lambda(kt) - J_\lambda(k\tilde{d}) Y_\lambda(kt) \right) \left((l+1) Y_\lambda(k\tilde{d}) - k\tilde{d} Y_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) \right. \\
& + \tilde{a}^{-1} Y_\lambda(k\tilde{d}) \left[Y_\lambda(kt) \left((l+1) J_\lambda(k\tilde{d}) - k\tilde{d} J_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) - J_\lambda(kt) \left((l+1) Y_\lambda(k\tilde{d}) \right. \right. \\
& \left. \left. - k\tilde{d} Y_{\lambda+1}(k\tilde{d}) \right) \right] - \tilde{b} \tilde{d} Y_\lambda(k\tilde{d}) \left(Y_\lambda(k\tilde{d}) J_\lambda(kt) - J_\lambda(k\tilde{d}) Y_\lambda(kt) \right) \left. \right\} g(t) z(t) dt.
\end{aligned} \tag{3.2.51}$$

Τώρα, από την εφαρμογή του ασυμπτωτικού τύπου (3.2.44) για το z , προκύπτει ότι οι ποσότητες \mathcal{A} και \mathcal{B} ικανοποιούν τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$\mathcal{A}(k, \tilde{d}) = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \frac{\pi}{2} k\tilde{d} (\tilde{a} - \tilde{a}^{-1}) J_\lambda(k\tilde{d}) J_{\lambda+1}(k\tilde{d}) + O\left(\frac{\ln k}{k^{3/2}}\right) \tag{3.2.52}$$

$$\mathcal{B}(k, \tilde{d}) = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \frac{\pi}{2} k\tilde{d} (\tilde{a}^{-1} Y_\lambda(k\tilde{d}) J_{\lambda+1}(k\tilde{d}) - \tilde{a} J_\lambda(k\tilde{d}) Y_{\lambda+1}(k\tilde{d})) + O\left(\frac{\ln k}{k^{3/2}}\right) \tag{3.2.53}$$

Ο όρος σφάλματος ε_l μπορεί να εκτιμηθεί μέσω της μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων, βασιζόμενοι στα επιχειρήματα της παραγράφου 2.2.1 για το συνεχές πρόβλημα. Ορίζουμε τις συναρτήσεις E_λ και M_λ μέσω των σχέσεων (2.2.22)-(2.2.23) και εισάγουμε τις ποσότητες $G_\lambda^{(1)}$ και $G_\lambda^{(2)}$:

$$G_\lambda^{(1)}(k, \xi) := \frac{\pi}{2} \int_{\tilde{d}}^{\xi} M_\lambda^2(kt) t |g(t)| dt$$

$$G_\lambda^{(2)}(k, \xi) := \frac{\pi}{2} \int_{\tilde{d}}^{\xi} M_\lambda^2(kt) E_\lambda^2(kt) t |g(t)| dt.$$

Από την ολοκληρωτική εξίσωση (3.2.49) και τις ασυμπτωτικές εκτιμήσεις (3.2.52), (3.2.53) έχουμε ότι:

$$|\varepsilon_l(k, \xi)| \leq \frac{c}{\sqrt{k}} \frac{M_\lambda(k\xi)}{E_\lambda(k\xi)} \left\{ e^{G_\lambda^{(1)}(k, \xi)} + e^{G_\lambda^{(2)}(k, \xi)} - 2 \right\} \tag{3.2.54}$$

για κάποια θετική σταθερά c και k αρκούντως μεγάλο. Επίσης, επειδή $n(r) = 1$ για $r \geq 1$, από τη σχέση (3.1.11) έχουμε:

$$\int_{\tilde{d}}^A \xi |g(\xi)| d\xi < \infty, \quad \text{και} \quad \int_A^\infty |g(\xi)| d\xi < \infty.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση (3.2.54) προκύπτει ότι $e_l(k, \xi) = O(1/k^2)$ για k μεγάλο. Τελικά, καταλήγουμε στον ασυμπτωτικό τύπο (3.2.45) από την εφαρμογή των (3.2.52) και (3.2.53) στη σχέση (3.2.48). \square

Ακόμα, από την προηγούμενη πρόταση και τον μετασχηματισμό Liouville (2.2.17) εξάγουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 3.2.10. *Η λύση των (3.1.5) και (3.1.6) για $r > d$ και μεγάλες τιμές του k ικανοποιεί την εκτίμηση:*

$$y_l(r) = \frac{1}{kn(r)^{1/4}n(0)^{l/2+1/4}} \left[\frac{\tilde{a}+1}{2\tilde{a}} \sin\left(k\xi - \frac{l\pi}{2}\right) + \frac{1-\tilde{a}^2}{2\tilde{a}} \sin\left(k\xi + \frac{l\pi}{2} - 2k\tilde{d}\right) \right] + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) \quad (3.2.55)$$

Απόδειξη. Τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των συναρτήσεων Neumann και Bessel είναι:

$$Y_\lambda(k\xi) = \sqrt{\frac{2}{k\pi\xi}} \sin\left(k\xi - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right), \quad k \rightarrow +\infty$$

$$J_\lambda(k\xi) = \sqrt{\frac{2}{k\pi\xi}} \cos\left(k\xi - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα αναπτύγματα και τη σχέση (3.2.45) καταλήγουμε ότι

$$z(\xi) = \frac{1}{k} \cos\left(k\xi - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left[\tilde{a} \sin^2\left(k\tilde{d} - \frac{l\pi}{2}\right) + \tilde{a}^{-1} \cos^2\left(k\tilde{d} - \frac{l\pi}{2}\right) \right] + \frac{1}{k} \sin\left(k\xi - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\tilde{a}^{-1} - \tilde{a}}{2} \sin(2k\tilde{d} - l\pi) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

Έτσι, ο μετασχηματισμός Liouville και η αρχική συνθήκη (3.1.6) συνεπάγονται τη σχέση (3.2.55). \square

Το παραπάνω ανάπτυγμα μπορεί να παραγωγιστεί ως προς r με τον όρο σφάλματος να είναι της τάξης $O(\ln k/k)$. Τέλος, εφαρμόζοντας τους ασυμπτωτικούς τύπους για τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel $j_l(kr)$, $j'_l(kr)$ στη χαρακτηριστική εξίσωση (3.1.7), προκύπτει η ακόλουθη αναπαράσταση:

$$D_l(k) = \frac{1}{kn(0)^{l/2+1/4}} \left[\frac{\tilde{a}^2+1}{2\tilde{a}} \sin k(1-A) + (-1)^l \frac{1-\tilde{a}^2}{2\tilde{a}} \sin k(1-A+2\tilde{d}) \right] + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) \quad (3.2.56)$$

Σημείωση 3.2.11. *Στην περίπτωση όπου $\tilde{a} = 1$, οι σχέσεις (3.2.45), (3.2.55) και (3.2.56) απλοποιούνται στις αντίστοιχες της παραγράφου 2.2.1.*

Στο παράρτημα Α'.3, θεωρούμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας για έναν δείκτη διάθλασης με ένα πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών και εφαρμόζοντας ένα επαγωγικό επιχείρημα προκύπτει ένας ασυμπτωτικός τύπος, αντίστοιχος του τύπου (3.2.56).

3.3 Μοναδικότητα για το αντίστροφο ασυνεχές πρόβλημα

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε το αντίστροφο ασυνεχές εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας. Στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείξαμε τη μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα όταν ο δείκτης διάθλασης είναι συνεχής. Εξετάζουμε κατά πόσο αυτό είναι δυνατό όταν ο δείκτης έχει μία ασυνέχεια. Αρχικά μελετάμε το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα του προσδιορισμού ορισμένων χαρακτηριστικών της ασυνέχειας από τις ειδικές ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις. Δείχνουμε έπειτα, ότι εάν το $n(0)$ είναι γνωστό τότε ο δείκτης $n(r)$ προσδιορίζεται μοναδικά από όλες τις ιδιοτιμές διαπερατότητας, συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων.

Η μοναδικότητα για αυτό το πρόβλημα έχει μεγάλη σημασία καθώς μία πιθανή θετική απάντησή μας δείχνει ότι μέθοδοι που βασίζονται στις ιδιοτιμές διαπερατότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μη καταστροφικούς ελέγχους υλικών με διαστρωματώσεις. Εν δυνάμει, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την αριθμητική επίλυση του αντίστροφου προβλήματος με μεθόδους τύπου Newton που βασίζονται σε μία κατά τμήματα σταθερή προσέγγιση του δείκτη, επειδή εξασφαλίζει την αντιστρεψιμότητα (βλ. παράγραφο 5.2 και [48]). Υπάρχει μία εκτενής βιβλιογραφία σχετικά με αντίστροφα φασματικά προβλήματα τύπου Sturm-Liouville στα οποία οι ιδιοσυναρτήσεις έχουν ασυνέχειες (βλ. για παράδειγμα [5, 45, 54, 89]). Τα περισσότερα αντίστροφα προβλήματα αυτής της κατηγορίας βασίζονται στην αυτοσυζυγή διατύπωση των προβλημάτων.

3.3.1 Μοναδικότητα για τον προσδιορισμό της ασυνέχειας

Εξετάζουμε κατά πόσο οι άγνωστες παράμετροι της ασυνέχειας, όπως η θέση d ή τα μεγέθη a και b , μπορούν να προσδιοριστούν με μοναδικό τρόπο από τις ιδιοτιμές διαπερατότητας. Μελετάμε την περίπτωση $l = 0$, όπου θεωρούμε μόνο σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις. Εφόσον η χαρακτηριστική συνάρτηση $D_0(k)$ είναι ακέραια στο k^2 της τάξης το πολύ $1/2$, από το θεώρημα παραγοντοποίησης του Hadamard έχουμε ότι

$$D_0(k) = c_0 k^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2}{k_{n0}^2} \right) \quad (3.3.57)$$

όπου το c_0 είναι μία σταθερά και τα k_{n_0} είναι οι ρίζες στο δεξί ημιεπίπεδο (κατά αντιστοιχία με τη (2.3.59)). Ορίζουμε επίσης τη βοηθητική σταθερά

$$\gamma_0 := \frac{1}{c_0 n(0)^{1/4}} \neq 0 \quad (3.3.58)$$

και διατυπώνουμε την ασυμπτωτική σχέση (3.2.43) ως

$$\frac{D_0(k)}{c_0} = \frac{\gamma_0}{k} \left[\frac{\tilde{a}^2 + 1}{2\tilde{a}} \sin k(1 - A) + \frac{1 - \tilde{a}^2}{2\tilde{a}} \sin k(1 - A + 2\tilde{d}) \right] + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (3.3.59)$$

Υποθέτουμε τώρα, ότι δύο εσωτερικά προβλήματα διαπερατότητας που αντιστοιχούν σε δύο ασυνεχείς δείκτες $n_1(r)$ και $n_2(r)$, έχουν τις ίδιες ειδικές ιδιοτιμές. Έστω $D_{0_i}(k)$, c_{0_i} , γ_{0_i} , A_i , \tilde{d}_i , και \tilde{a}_i τα χαρακτηριστικά του κάθε προβλήματος για $i = 1, 2$. Εφόσον τα δύο προβλήματα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, από τη σχέση (3.3.57) έχουμε ότι $D_{0_1}/c_{0_1} = D_{0_2}/c_{0_2}$ για κάθε $k \in \mathbb{C}$ και άρα από την (3.3.59):

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_{0_1}}{k} \left[\frac{\tilde{a}_1^2 + 1}{2\tilde{a}_1} \sin k(1 - A_1) + \frac{1 - \tilde{a}_1^2}{2\tilde{a}_1} \sin k(1 - A_1 + 2\tilde{d}_1) \right] + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &= \frac{\gamma_{0_2}}{k} \left[\frac{\tilde{a}_2^2 + 1}{2\tilde{a}_2} \sin k(1 - A_2) + \frac{1 - \tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_2} \sin k(1 - A_2 + 2\tilde{d}_2) \right] + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

για κάθε $k > 0$ αρκετά μεγάλο. Στο θεώρημα 2.3.1 αποδείξαμε ότι τα A και c_0 προσδιορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από τις ιδιοτιμές του συνεχούς δείκτη. Για το ασυνεχές πρόβλημα απαιτείται μια πιο εις βάθος ανάλυση.

Λήμμα 3.3.1. Υποθέτουμε ότι σε δύο ασυνεχείς δείκτες διάθλασης αντιστοιχούν οι ίδιες ειδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας. Τότε οι αντίστοιχοι χρόνοι μετακίνησης είναι επίσης ίσοι, υπό την προϋπόθεση ότι $A_i > 1$, $i = 1, 2$ ή $A_i < 1$, $i = 1, 2$.

Απόδειξη. Από την ασυμπτωτική εξίσωση (3.3.60) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \gamma_{0_1} \frac{\tilde{a}_1^2 + 1}{2\tilde{a}_1} \sin k(1 - A_1) - \gamma_{0_2} \frac{\tilde{a}_2^2 + 1}{2\tilde{a}_2} \sin k(1 - A_2) \\ & + \gamma_{0_1} \frac{1 - \tilde{a}_1^2}{2\tilde{a}_1} \sin k(1 - A_1 + 2\tilde{d}_1) - \gamma_{0_2} \frac{1 - \tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_2} \sin k(1 - A_2 + 2\tilde{d}_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.61)$$

για κάθε $k > 0$ αρκετά μεγάλο. Εξετάζουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για τις οποίες οι ημιτονικές συναρτήσεις της σχέσης (3.3.61) μπορούν να είναι γραμμικά εξαρτημένες. Εφόσον $A_1, A_2 > 1$ ή $A_1, A_2 < 1$ και υποθέτοντας ότι $A_1 \neq A_2$, έχουμε ότι τα $\sin k(1 - A_1)$ και $\sin k(1 - A_2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις.

Αρχικά υποθέτουμε ότι $A_1 \neq A_2$ και $\tilde{d}_1 \neq \tilde{d}_2$. Έτσι, πρέπει να εξετάσουμε όλους συνδυασμούς για τα \tilde{d}_1 και \tilde{d}_2 αντίστοιχα. Για κάθε περίπτωση, χρησιμοποιούμε την

(3.3.61) και το γεγονός ότι τα γ_{0_1} και γ_{0_2} δεν είναι ποτέ ίσα με μηδέν. Καταλήγουμε σε άτοπο σε όλες τις περιπτώσεις, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Περίπτωση	Συμπέρασμα
1. $\tilde{d}_1 \neq A_1 - 1, \frac{A_1 - A_2}{2}, \frac{A_1 + A_2}{2} - 1$ $\tilde{d}_2 \neq A_2 - 1, \frac{A_2 - A_1}{2}, \frac{A_1 + A_2}{2} - 1$	$\gamma_{0_1} = 0$ και $\gamma_{0_2} = 0$
2. $\tilde{d}_1 = A_1 - 1, \tilde{d}_2 \neq A_2 - 1$	$\gamma_{0_1} \tilde{a}_1 = 0$ και $\gamma_{0_2} = 0$
3. $\tilde{d}_1 = \frac{A_1 - A_2}{2}, \tilde{d}_2 \neq \frac{A_1 + A_2}{2} - 1$	$\gamma_{0_1} = 0$ και $\gamma_{0_2} = 0$
4. $\tilde{d}_1 = \frac{A_1 + A_2}{2} - 1, \tilde{d}_2 \neq \frac{A_2 - A_1}{2}$	$\gamma_{0_1} = 0$ και $\gamma_{0_2} = 0$
5. $\tilde{d}_2 = A_2 - 1, \tilde{d}_1 \neq A_1 - 1$	$\gamma_{0_1} = 0$ και $\gamma_{0_2} \tilde{a}_2 = 0$
6. $\tilde{d}_2 = \frac{A_2 - A_1}{2}, \tilde{d}_1 \neq \frac{A_1 + A_2}{2} - 1$	$\gamma_{0_1} = 0$ και $\gamma_{0_2} = 0$
7. $\tilde{d}_2 = \frac{A_1 + A_2}{2} - 1, \tilde{d}_1 \neq \frac{A_1 - A_2}{2}$	$\gamma_{0_1} = 0$ και $\gamma_{0_2} = 0$
8. $\tilde{d}_1 = A_1 - 1, \tilde{d}_2 = A_2 - 1$	$\gamma_{0_1} \tilde{a}_1 = 0$ και $\gamma_{0_2} \tilde{a}_2 = 0$
9. $\tilde{d}_1 = \frac{A_1 - A_2}{2}, \tilde{d}_2 = \frac{A_1 + A_2}{2} - 1$	$\tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 = -1$
10. $\tilde{d}_1 = \frac{A_1 + A_2}{2} - 1, \tilde{d}_2 = \frac{A_2 - A_1}{2}$	$\tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 = -1$

Οι περιπτώσεις 1 – 7 είναι άμεσες. Για παράδειγμα, στην περίπτωση 2 υποθέτουμε ότι $\tilde{d}_1 = A_1 - 1$ και $\tilde{d}_2 \neq A_2 - 1$. Άρα, τα $\sin k(1 - A_1)$ και $\sin k(1 - A_1 + 2\tilde{d}_1)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα επειδή $\sin k(1 - A_1 + 2\tilde{d}_1) = -\sin k(1 - A_1)$. Επίσης, τα $\sin k(1 - A_2)$ και $\sin k(1 - A_2 + 2\tilde{d}_2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι, η εξίσωση (3.3.61) συνεπάγεται ότι:

$$\gamma_{0_1} \tilde{a}_1 \sin k(1 - A_1) - \gamma_{0_2} \frac{\tilde{a}_2^2 + 1}{2\tilde{a}_2} \sin k(1 - A_2) - \gamma_{0_2} \frac{1 - \tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_2} \sin k(1 - A_2 + 2\tilde{d}_2) = 0$$

για κάθε k αρκούντως μεγάλο, το οποίο είναι δυνατό αν και μόνο αν $\gamma_{0_1} \tilde{a}_1 = 0$ και $\gamma_{0_2} = 0$.

Για την 8, η εξίσωση (3.3.61) συνεπάγεται:

$$\gamma_{0_1} \left(\frac{\tilde{a}_1^2 + 1 - (1 - \tilde{a}_1^2)}{2\tilde{a}_1} \right) = 0 \text{ και } \gamma_{0_2} \left(\frac{\tilde{a}_2^2 + 1 - (1 - \tilde{a}_2^2)}{2\tilde{a}_2} \right) = 0,$$

και άρα $\gamma_{0_1} \tilde{a}_1 = \gamma_{0_2} \tilde{a}_2 = 0$. Στην περίπτωση 9, από την (3.3.61) έχουμε

$$\gamma_{0_1} \frac{\tilde{a}_1^2 + 1}{2\tilde{a}_1} + \gamma_{0_2} \frac{1 - \tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_2} = 0 \text{ και } \gamma_{0_1} \frac{1 - \tilde{a}_1^2}{2\tilde{a}_1} - \gamma_{0_2} \frac{\tilde{a}_2^2 + 1}{2\tilde{a}_2} = 0$$

και λύνοντας το σύστημα καταλήγουμε ότι $\tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 = -1$. Τέλος, η περίπτωση 10 αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο. Χρησιμοποιήσαμε επίσης ότι $A_1 - 1 \neq \frac{A_1 - A_2}{2} \neq \frac{A_1 + A_2}{2} - 1$ και $A_2 - 1 \neq \frac{A_2 - A_1}{2} \neq \frac{A_1 + A_2}{2} - 1$, το οποίο ισχύει εφόσον είτε $A_1, A_2 > 1$ ή $A_1, A_2 < 1$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = \tilde{d}$ και $A_1 \neq A_2$. Η σχέση (3.3.61) γράφεται ως

$$\begin{aligned} & \gamma_{01} \frac{\tilde{a}_1^2 + 1}{2\tilde{a}_1} \sin k(1 - A_1) - \gamma_{02} \frac{\tilde{a}_2^2 + 1}{2\tilde{a}_2} \sin k(1 - A_2) \\ & + \gamma_{01} \frac{1 - \tilde{a}_1^2}{2\tilde{a}_1} \sin k(1 - A_1 + 2\tilde{d}) - \gamma_{02} \frac{1 - \tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_2} \sin k(1 - A_2 + 2\tilde{d}) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.62)$$

Χρησιμοποιώντας αντίστοιχα επιχειρήματα, εξετάζουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το \tilde{d} :

Περίπτωση	Συμπέρασμα
1. $\tilde{d} \neq A_1 - 1, \frac{A_1 - A_2}{2}, \frac{A_1 + A_2}{2} - 1, A_2 - 1, \frac{A_2 - A_1}{2}$	$\gamma_{01} = 0$ και $\gamma_{02} = 0$
2. $\tilde{d} = A_1 - 1$	$\gamma_{01} \tilde{a}_1 = 0$ και $\gamma_{02} = 0$
3. $\tilde{d} = A_2 - 1$	$\gamma_{01} = 0$ και $\gamma_{02} \tilde{a}_2 = 0$
4. $\tilde{d} = \frac{A_1 - A_2}{2}$	$\gamma_{01} = 0$ και $\gamma_{02} = 0$
5. $\tilde{d} = \frac{A_2 - A_1}{2}$	$\gamma_{01} = 0$ και $\gamma_{02} = 0$
6. $\tilde{d} = \frac{A_1 + A_2}{2} - 1$	$\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2 = 0$

και καταλήγουμε σε άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι τελικά $A_1 = A_2$. □

Το ακόλουθο θεώρημα συνδέει τις ιδιοτιμές με την ασυνέχεια του μετασχηματισμένου προβλήματος και βασίζεται στο [54, λήμμα 6].

Θεώρημα 3.3.2. Η σταθερά \tilde{a} και η ασυνέχεια \tilde{d} του μετασχηματισμένου προβλήματος προσδιορίζονται μοναδικά από τις ιδιοτιμές του (3.2.21) – (3.2.23) υπό την προϋπόθεση ότι $|\tilde{a} - 1| + |\tilde{b}| > 0$ στις περιπτώσεις:

1. $0 < A < 1$ και $\tilde{d} \in (0, A)$
2. $A > 1$ και $\tilde{d} \in (0, \frac{A-1}{2})$ ή $\tilde{d} \in (\frac{A-1}{2}, A-1) \cup (A-1, A)$

Απόδειξη. Εάν $\tilde{a} = 1$ και $\tilde{b} = 0$ τότε $a = 1$ και $b = 0$. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει ασυνέχεια στον δείκτη, και άρα απαιτούμε να ισχύει ότι $|\tilde{a} - 1| + |\tilde{b}| > 0$.

Θεωρούμε δύο προβλήματα με τις ίδιες ειδικές ιδιοτιμές. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $A_1 = A_2 = A$ και έστω $\gamma_{01}, \tilde{d}_1, \tilde{a}_1$ και $\gamma_{02}, \tilde{d}_2, \tilde{a}_2$ οι σταθερές του κάθε προβλήματος αντίστοιχα. Έτσι, από την εξίσωση (3.3.61) έχουμε

$$\begin{aligned} & \left(\gamma_{01} \frac{\tilde{a}_1^2 + 1}{2\tilde{a}_1} - \gamma_{02} \frac{\tilde{a}_2^2 + 1}{2\tilde{a}_2} \right) \sin k(1 - A) + \gamma_{01} \frac{1 - \tilde{a}_1^2}{2\tilde{a}_1} \sin k(1 - A + 2\tilde{d}_1) \\ & - \gamma_{02} \frac{1 - \tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_2} \sin k(1 - A + 2\tilde{d}_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.63)$$

για κάθε $k > 0$ αρκετά μεγάλο.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Πρώτα υποθέτουμε ότι $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = \tilde{d}$ και άρα

$$\left(\gamma_{01} \frac{\tilde{a}_1^2 + 1}{2\tilde{a}_1} - \gamma_{02} \frac{\tilde{a}_2^2 + 1}{2\tilde{a}_2}\right) \sin k(1 - A) + \left(\gamma_{01} \frac{1 - \tilde{a}_1^2}{2\tilde{a}_1} - \gamma_{02} \frac{1 - \tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_2}\right) \sin k(1 - A + 2\tilde{d}) = 0 \quad (3.3.64)$$

Από την παραπάνω σχέση, αν $\tilde{d} \neq (A - 1)/2$, $A - 1$ οι συναρτήσεις ημιτόνου είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Λύνοντας το σύστημα των συντελεστών καταλήγουμε ότι $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ και $\gamma_{01} = \gamma_{02}$. Άρα δείξαμε ότι $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ εάν $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2$.

Για τη δεύτερη περίπτωση υποθέτουμε ότι $\tilde{d}_1 \neq \tilde{d}_2$ και θα δείξουμε ότι αυτό μας οδηγεί σε άτοπο. Από την (3.3.63), αν $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2 \neq (A - 1)/2, A - 1$ και $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 \neq A - 1$, οι συναρτήσεις ημιτόνου είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έτσι, έχουμε ως αποτέλεσμα ότι $\gamma_{01} = \gamma_{02}$ και $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 1$.

Προκειμένου να καταλήξουμε σε άτοπο, αρκεί να δείξουμε ότι $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = 0$. Δεδομένου ότι $\tilde{a}_1 = 1, \tilde{a}_2 = 1$, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (3.2.42) στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} D_0(k) &= \frac{\sin k(1 - A)}{kn(0)^{1/4}} + \frac{\tilde{b}}{2k^2n(0)^{1/4}} \cos k(1 - A) - \frac{\tilde{b}}{2k^2n(0)^{1/4}} \cos k(1 - A + 2\tilde{d}) \\ &+ \frac{\sin k}{k} \int_0^{\tilde{d}} \cos k(A - t)p(t)z(t)dt + \frac{\sin k}{k^2} \tilde{b} \int_0^{\tilde{d}} \cos k(A - \tilde{d}) \sin k(\tilde{d} - t)p(t)z(t)dt \\ &- \frac{\cos k}{k} \int_0^{\tilde{d}} \sin k(A - t)p(t)z(t)dt - \frac{\cos k}{k^2} \tilde{b} \int_0^{\tilde{d}} \sin k(A - \tilde{d}) \sin k(\tilde{d} - t)p(t)z(t)dt \\ &+ \frac{\sin k}{k} \int_{\tilde{d}}^A \cos k(A - t)p(t)z(t)dt - \frac{\cos k}{k} \int_{\tilde{d}}^A \sin k(A - t)p(t)z(t)dt \quad (3.3.65) \end{aligned}$$

Έπειτα από ορισμένες πράξεις, η παραπάνω σχέση εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} D_0(k) &= \frac{\sin k(1 - A)}{kn(0)^{1/4}} + \frac{\tilde{b}}{2k^2n(0)^{1/4}} \cos k(1 - A) - \frac{\tilde{b}}{2k^2n(0)^{1/4}} \cos k(1 - A + 2\tilde{d}) \\ &+ \frac{\sin k}{k^2n(0)^{1/4}} \int_0^A \cos k(A - t) \sin kt p(t)dt - \frac{\cos k}{k^2n(0)^{1/4}} \int_0^A \sin k(A - t) \sin kt p(t)dt \\ &+ \frac{E(k)}{k^2} \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} E(k) &:= k \sin k \int_0^{\tilde{d}} \cos k(A - t)p(t) \left[z(t) - \frac{\sin kt}{kn(0)^{1/4}} \right] dt \\ &+ k \sin k \int_{\tilde{d}}^A \cos k(A - t)p(t) \left[z(t) - \frac{\sin kt}{kn(0)^{1/4}} \right] dt \\ &+ \tilde{b} \sin k \int_0^{\tilde{d}} \cos k(A - \tilde{d}) \sin k(\tilde{d} - t)p(t)z(t)dt \\ &- k \cos k \int_0^{\tilde{d}} \sin k(A - t)p(t) \left[z(t) - \frac{\sin kt}{kn(0)^{1/4}} \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -k \cos k \int_{\tilde{d}}^A \sin k(A-t)p(t) \left[z(t) - \frac{\sin kt}{kn(0)^{1/4}} \right] dt \\
& -\tilde{b} \cos k \int_0^{\tilde{d}} \sin k(A-\tilde{d}) \sin k(\tilde{d}-t)p(t)z(t)dt
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η E είναι μία άρτια συνάρτηση του k και είναι πραγματική όταν το k είναι πραγματικό. Έτσι, από τις προτάσεις 3.2.3 και 3.2.6 προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E(x)|^2 dx < \infty \quad \text{και} \quad |E(k)| \leq Ce^{(A+1)|\text{Im}(k)|}, \quad C > 0.$$

Επομένως, η E ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Paley-Wiener (παράρτημα, θεώρημα Α'4.12) και υπάρχει μία συνάρτηση $V \in L^2(0, A+1)$ τέτοια ώστε

$$E(k) = \int_0^{A+1} V(t) \cos ktdt$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin k}{k^2 n(0)^{1/4}} \int_0^A \cos k(A-t) \sin ktp(t)dt - \frac{\cos k}{k^2 n(0)^{1/4}} \int_0^A \sin k(A-t) \sin ktp(t)dt \\
& = \frac{\cos k(1-A)}{2k^2 n(0)^{1/4}} \int_0^A p(t)dt - \frac{\cos k}{2k^2 n(0)^{1/4}} \int_0^A \cos k(A-2t)p(t)dt \\
& - \frac{\sin k}{2k^2 n(0)^{1/4}} \int_0^A \sin k(A-2t)p(t)dt
\end{aligned}$$

και κάνοντας χρήση αλλαγής μεταβλητής, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_0^A \sin k(A-2t)p(t)dt = \int_0^A W(t) \sin ktdt$$

και

$$\int_0^A \cos k(A-2t)p(t)dt = \int_0^A U(t) \cos ktdt$$

όπου

$$U(t) := \frac{1}{2} \left[p\left(\frac{A+t}{2}\right) - p\left(\frac{A-t}{2}\right) \right], \quad W(t) := -\frac{1}{2} \left[p\left(\frac{A+t}{2}\right) + p\left(\frac{A-t}{2}\right) \right]$$

Τελικά, η σχέση (3.3.65) γράφεται ως

$$\begin{aligned}
D_0(k) & = \frac{\sin k(1-A)}{kn(0)^{1/4}} + \frac{\tilde{b}}{2k^2 n(0)^{1/4}} \cos k(1-A) - \frac{\tilde{b}}{2k^2 n(0)^{1/4}} \cos k(1-A+2\tilde{d}) \\
& + \frac{\cos k(1-A)}{2k^2 n(0)^{1/4}} \int_0^A p(t)dt - \frac{\cos k}{2k^2 n(0)^{1/4}} \int_0^A U(t) \cos ktdt \\
& - \frac{\sin k}{2k^2 n(0)^{1/4}} \int_0^A W(t) \sin ktdt + \frac{1}{k^2} \int_0^{A+1} V(t) \cos ktdt
\end{aligned} \tag{3.3.66}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\gamma_{0_1} = \gamma_{0_2}$ και $D_{0_1}/c_{0_1} = D_{0_2}/c_{0_2}$, η εξίσωση (3.3.58) συνεπάγεται ότι:

$$D_{0_1}(k) = \frac{n_2(0)^{1/4}}{n_1(0)^{1/4}} D_{0_2}(k).$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την εξίσωση και την αναπαράσταση (3.3.66) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\cos k(1-A)}{2k^2 n_1(0)^{1/4}} (\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2) + \frac{\cos k(1-A)}{2k^2 n_1(0)^{1/4}} \left[\int_0^A p_1(t) dt - \int_0^A p_2(t) dt \right] - \frac{\cos k(1-A+2\tilde{d}_1)}{2k^2 n_1(0)^{1/4}} \tilde{b}_1 \\ + \frac{\cos k(1-A+2\tilde{d}_2)}{2k^2 n_1(0)^{1/4}} \tilde{b}_2 = \frac{\sin k}{2k^2 n_1(0)^{1/4}} \int_0^A (W_1(t) - W_2(t)) \sin ktdt \\ + \frac{\cos k}{2k^2 n_1(0)^{1/4}} \int_0^A (U_1(t) - U_2(t)) \cos ktdt \\ + \frac{1}{k^2} \int_0^{A+1} \left(\frac{n_2(0)^{1/4}}{n_1(0)^{1/4}} V_2(t) - V_1(t) \right) \cos ktdt \quad (3.3.67) \end{aligned}$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε την (3.3.67) με $2n_1(0)^{1/4} k^2 \cos k(1-A+2\tilde{d}_1) T^{-1}$ και ολοκληρώσουμε ως προς k από τ έως T για κάποιο $\tau > 0$, προκειμένου να ισχύουν οι προτάσεις 3.2.3 και 3.2.6, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} (\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2) O\left(\frac{1}{T}\right) + \left[\int_0^A p_1(t) dt - \int_0^A p_2(t) dt \right] O\left(\frac{1}{T}\right) - \tilde{b}_1 \left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right) \right) + \tilde{b}_2 O\left(\frac{1}{T}\right) \\ = \int_0^A \left[(W_1(t) - W_2(t)) \int_\tau^T \frac{1}{T} \sin k \cos k(1-A+2\tilde{d}_1) \sin ktdk \right] dt \\ + \int_0^A \left[(U_1(t) - U_2(t)) \int_\tau^T \frac{1}{T} \cos k \cos k(1-A+2\tilde{d}_1) \cos ktdk \right] dt \\ + 2 \int_0^{A+1} \left[(n_2(0)^{1/4} V_2(t) - n_1(0)^{1/4} V_1(t)) \int_\tau^T \frac{1}{T} \cos k(1-A+2\tilde{d}_1) \cos ktdk \right] dt \quad (3.3.68) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα του Fubini για να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης στο δεξί μέλος της εξίσωσης. Μπορούμε να γράψουμε το δεξί μέλος της (3.3.68) στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} \int_0^A (W_1(t) - W_2(t)) f_T dt + \int_0^A (U_1(t) - U_2(t)) h_T dt \\ + 2 \int_0^{A+1} (n_2(0)^{1/4} V_2(t) - n_1(0)^{1/4} V_1(t)) g_T dt \end{aligned}$$

όπου $|f_T|, |g_T|, |h_T| \leq 1$ και $f_T, g_T, h_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$ σχεδόν παντού. Παίρνοντας το όριο $T \rightarrow \infty$ στην (3.3.68) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue καταλήγουμε ότι $\tilde{b}_1 = 0$ υπό την προϋπόθεση να ισχύουν οι περιορισμοί $\tilde{d}_1 \neq (A-1)/2$, $A-1$ και $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 \neq A-1$.

Αντίστοιχα, πολλαπλασιάζοντας την (3.3.67) με $2n_1(0)^{1/4}k^2 \cos k(1 - A + 2\tilde{d}_2)T^{-1}$ και ολοκληρώνοντας ως προς k από τ έως T προκύπτει ότι $\tilde{b}_2 = 0$, υπό τον όρο να ισχύει $\tilde{d}_2 \neq (A - 1)/2, A - 1$. Τώρα, εφόσον $|\tilde{a}_i - 1| + |\tilde{b}_i| > 0$ για $i = 1, 2$, καταλήγουμε σε άτοπο και άρα $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2$.

Τέλος, πρέπει να προσδιορίσουμε τα κατάλληλα υποδιαστήματα του $(0, A)$ όπου ισχύει το αποτέλεσμα της μοναδικότητας, λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς στη θέση της ασυνέχειας. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Στην πρώτη περίπτωση υποθέτουμε ότι $0 < A < 1$. Προφανώς, όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται. Έτσι, για αυτή την περίπτωση $\tilde{d} \in (0, A)$.
2. Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε ότι $A > 1$. Τώρα πρέπει να υιοθετήσουμε όλους του περιορισμούς και άρα:

$$\tilde{d} \in \left(0, \frac{A-1}{2}\right) \quad \text{ή} \quad \tilde{d} \in \left(\frac{A-1}{2}, A-1\right) \cup \left(A-1, A\right).$$

□

Σημείωση 3.3.3. Το παραπάνω θεώρημα μας δείχνει ότι εάν δύο ασυνεχή προβλήματα διαπερατότητας έχουν ίδιες ειδικές ιδιοτιμές, τότε οι ασυνέχειες των αντίστοιχων μετασχηματισμένων προβλημάτων πρέπει να βρίσκονται στο ίδιο σημείο και τα μεγέθη των ασυνεχειών της σχέσης (3.1.2), είναι επίσης ίσα.

Σημείωση 3.3.4. Σημειώνουμε ότι ένα πρόβλημα με μία ασυνέχεια τέτοια ώστε $\tilde{d} \neq (A - 1)/2, A - 1$, δεν μπορεί να έχει τις ίδιες ειδικές ιδιοτιμές με ένα συνεχές πρόβλημα. Υποθέτοντας ότι κάτι τέτοιο θα μπορούσε να ισχύει τότε $D_{0_1}/c_{0_1} = D_{0_2}/c_{0_2}$ όπου η D_{0_1} ικανοποιεί τη (2.2.47):

$$D_{0_1}(k) = \frac{1}{kn_1(0)^{1/4}} \sin k(1 - A_1) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

και η D_{0_2} ικανοποιεί την (3.2.43). Βασιζόμενοι στην απόδειξη του λήμματος 3.3.1 και του θεωρήματος 3.3.2 καταλήγουμε ότι $\tilde{a} = 1$ και $\tilde{b} = 0$ και αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας. Παρόλα αυτά, δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε άτοπο εάν $\tilde{d} = (A - 1)/2$ ή $\tilde{d} = A - 1$. Αυτές οι ειδικές περιπτώσεις θα μελετηθούν στο ακόλουθο θεώρημα μοναδικότητας.

3.3.2 Το θεώρημα μοναδικότητας

Ολοκληρώνουμε τη μελέτη μας με μία απόδειξη για τη μοναδικότητα του αντίστροφου προβλήματος. Στην προηγούμενη παράγραφο δείξαμε ότι οι ιδιοτιμές διαπερατότητας που

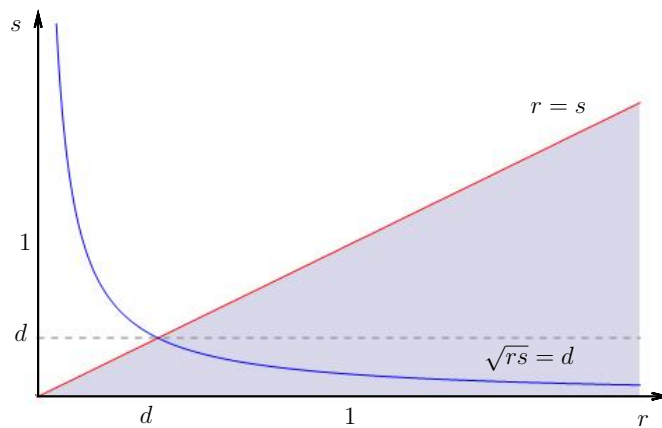
αντιστοιχούν σε σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις, αρκούν μόνο για τον προσδιορισμό του άλματος της ασυνέχειας στο μετασχηματισμένο πρόβλημα. Έτσι, τώρα υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ολόκληρο το φάσμα, όπως και τις πολλαπλότητες. Η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα του Müntz (βλ. επίσης το θεώρημα 2.3.1).

Στην περίπτωση όπου $n(r) \in C^2[0, 1]$, μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $y_l(r)$ στη μορφή (2.3.48):

$$y_l(r) = j_l(kr) + \int_0^r G(r, s, k) j_l(ks) ds$$

όπου ο πυρήνας $G(r, s, k)$ ικανοποιεί το πρόβλημα Goursat (2.3.50)-(2.3.52).

Υποθέτουμε τώρα ότι ο δείκτης διάθλασης είναι κατά τμήματα C^2 και ικανοποιεί τις συνθήκες άλματος (3.1.1)-(3.1.4). Σε αυτή την περίπτωση, από την αναπαράσταση (2.3.53) έχουμε ότι ο $G(r, s, k)$ είναι συνεχής για $0 \leq s \leq r \leq 1$. Επίσης, παραγωγίζοντας κατά μέρη προκύπτει ότι τα $G_r(r, s, k)$ και $G_s(r, s, k)$ είναι ασυνεχή για $\sqrt{rs} = d$ και τα $G_{rr}(r, s, k)$, $G_{ss}(r, s, k)$ είναι ασυνεχή για $r = d$ και $\sqrt{rs} = d$ (βλ. παράρτημα Α'.2). Άρα η εξίσωση (2.3.48) είναι καλά ορισμένη για το ασυνεχές πρόβλημα, και το y_l ικανοποιεί τις συνθήκες συνέχειας $y_l(d^+) = y_l(d^-)$, $y_l'(d^+) = y_l'(d^-)$.



Σχήμα 3.2: Το πρόβλημα Goursat για τον ασυνεχή $n(r)$

Βασιζόμενοι σε ανάλογα επιχειρήματα με το θεώρημα 2.3.1, από τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των y_l και D_l για $k \rightarrow 0$, προκύπτει ο τύπος

$$c_{2l+2} = \frac{\pi}{(2^{l+1}\Gamma(l + 3/2))^2} \int_0^1 t^{2l+2} m(t) dt. \tag{3.3.69}$$

όπου c_{2l+2} είναι ο συντελεστής του k^{2l+2} στο ανάπτυγμα Taylor του $D_l(k)$. Παρατηρούμε ότι το c_{2l+2} είναι συναρτησιακά εξαρτημένο από τον δείκτη $n(r)$ και άρα από τις σταθερές ασυνέχειας a, b και d . Η συνάρτηση $D_l(k)$ είναι ακέραια στο k με τάξη ίση με ένα, και άρα από το θεώρημα παραγοντοποίησης του Hadamard,

$$D_l(k) = k^{2l+2} c_{2l+2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2}{k_{nl}^2} \right) \tag{3.3.70}$$

όπου το c_{2l+2} δίνεται από τον τύπο (3.3.69) υπό την προϋπόθεση ότι το $m(r) = 1 - n(r)$ δεν αλλάζει πρόσημο και τα k_{nl} είναι οι μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας στο δεξί ημιεπίπεδο.

Ορίζουμε τις βοηθητικές σταθερές

$$\gamma_l := \frac{1}{c_{2l+2}n(0)^{l/2+1/4}} \neq 0 \quad (3.3.71)$$

και στην ακόλουθη πρόταση εξετάζουμε κατά πόσο τα γ_l μπορούν να προσδιοριστούν με μοναδικό τρόπο. Αυτό το αποτέλεσμα είναι άμεσο στο συνεχές πρόβλημα αλλά η ασυνεχής περίπτωση είναι πιο σύνθετη.

Πρόταση 3.3.5. Υποθέτουμε ότι δύο δείκτες διάθλασης έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές συμπεριλαμβανομένων και των πολλαπλοτήτων τους και είτε $A_i > 1, i = 1, 2$ ή $A_i < 1, i = 1, 2$. Τότε $A_1 = A_2 = A$ και οι αντίστοιχες σταθερές γ_{l_1} και γ_{l_2} είναι επίσης ίσες, εάν $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2 \neq (A-1)/2, A-1$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις $\gamma_{l_1} = \tilde{c}\gamma_{l_2}$ όπου \tilde{c} είναι μία σταθερά που εξαρτάται από τα \tilde{a}_1 και \tilde{a}_2 .

Απόδειξη. Έστω ότι τα $\gamma_{l_i}, \tilde{d}_i$, και \tilde{a}_i είναι τα χαρακτηριστικά του κάθε προβλήματος για $i = 1, 2$. Ακολουθούμε αντίστοιχα επιχειρήματα με το πρώτο μέρος της απόδειξης του θεωρήματος 3.3.2. Εφόσον τα δύο προβλήματα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, από το λήμμα 3.3.1 προκύπτει άμεσα ότι $A_1 = A_2 = A$. Επίσης, από τις σχέσεις (3.2.56) και (3.3.70) έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left(\gamma_{l_1} \frac{\tilde{a}_1^2 + 1}{2\tilde{a}_1} - \gamma_{l_2} \frac{\tilde{a}_2^2 + 1}{2\tilde{a}_2} \right) \sin k(1-A) + \gamma_{l_1} (-1)^l \frac{1 - \tilde{a}_1^2}{2\tilde{a}_1} \sin k(1-A + 2\tilde{d}_1) \\ & - \gamma_{l_2} (-1)^l \frac{1 - \tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_2} \sin k(1-A + 2\tilde{d}_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.72)$$

για κάθε $k > 0$ αρκετά μεγάλο. Βασιζόμενοι σε ανάλογες ιδέες με το λήμμα 3.3.1, εξετάζουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για τις οποίες οι συναρτήσεις ημιτόνου της σχέσης (3.3.72) είναι γραμμικά εξαρτημένες και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα γ_{l_1} και γ_{l_2} δεν είναι ποτέ ίσα με μηδέν. Όταν $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = \tilde{d} \neq (A-1)/2, A-1$, οι συναρτήσεις $\sin k(1-A)$ και $\sin k(1-A + 2\tilde{d})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και καταλήγουμε ότι $\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2}$ και $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$. Έπειτα εξετάζουμε την περίπτωση όπου $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 = A-1$. Έτσι έχουμε ότι $\sin k(1-A + 2\tilde{d}_1)$ και $\sin k(1-A + 2\tilde{d}_2)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες και από τη σχέση (3.3.72) έχουμε ότι:

$$\gamma_{l_1} \frac{\tilde{a}_1^2 + 1}{2\tilde{a}_1} - \gamma_{l_2} \frac{\tilde{a}_2^2 + 1}{2\tilde{a}_2} = 0 \quad \text{και} \quad \gamma_{l_1} \frac{1 - \tilde{a}_1^2}{2\tilde{a}_1} + \gamma_{l_2} \frac{1 - \tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_2} = 0.$$

Επιλύοντας το σύστημα συμπεραίνουμε ότι $\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2}$ και $\tilde{a}_1 = 1/\tilde{a}_2$.

Στη συνέχεια εξετάζουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις όπου τα γ_l δεν προσδιορίζονται μοναδικά. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = A-1$. Σε αυτή την περίπτωση, όλες οι

συναρτήσεις ημιτόνου εκφυλίζονται στο $\sin k(1 - A)$ και από την (3.3.72) παίρνουμε:

$$\gamma_{l_1} \frac{\tilde{a}_1^2 + 1 - (-1)^l(1 - \tilde{a}_1^2)}{2\tilde{a}_1} = \gamma_{l_2} \frac{\tilde{a}_2^2 + 1 - (-1)^l(1 - \tilde{a}_2^2)}{2\tilde{a}_2}.$$

Έτσι, για l άρτιο προκύπτει ότι $\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2}\tilde{a}_2/\tilde{a}_1$ και για l περιττό, $\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2}\tilde{a}_1/\tilde{a}_2$. Έπειτα υποθέτουμε ότι $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = (A - 1)/2$ και από την (3.3.72) έχουμε

$$\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2} \frac{\tilde{a}_1\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_1}{\tilde{a}_1^2\tilde{a}_2 + \tilde{a}_2}.$$

Τέλος, θεωρούμε όλες τις άλλες δυνατές περιπτώσεις, όταν ισχύει ότι $\tilde{d}_1 \neq \tilde{d}_2$. Χρησιμοποιούμε τη γραμμική ανεξαρτησία των ημιτόνων και λύνοντας το σύστημα των συντελεστών καταλήγουμε στο αποτέλεσμα. Σε ορισμένες περιπτώσεις πρέπει να διακρίνουμε μεταξύ άρτιων και περιττών τιμών του l .

Περίπτωση	Συμπέρασμα
1. $\tilde{d}_1 = A - 1, \tilde{d}_2 \neq \frac{A-1}{2}$	$\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2}/\tilde{a}_1$, για $l =$ άρτιο $\gamma_{l_1} = \tilde{a}_1\gamma_{l_2}$, για $l =$ περιττό
2. $\tilde{d}_2 = A - 1, \tilde{d}_1 \neq \frac{A-1}{2}$	$\gamma_{l_1} = \tilde{a}_2\gamma_{l_2}$, για $l =$ άρτιο $\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2}/\tilde{a}_2$, για $l =$ περιττό
3. $\tilde{d}_1 = A - 1, \tilde{d}_2 = \frac{A-1}{2}$	$\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2} \frac{\tilde{a}_2^2 + 1}{2\tilde{a}_1\tilde{a}_2}$, για $l =$ άρτιο $\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2} \frac{\tilde{a}_1\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_1}{2\tilde{a}_2}$, για $l =$ περιττό
4. $\tilde{d}_2 = A - 1, \tilde{d}_1 = \frac{A-1}{2}$	$\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2} \frac{2\tilde{a}_1\tilde{a}_2}{1 + \tilde{a}_1^2}$, για $l =$ άρτιο $\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2} \frac{2\tilde{a}_1}{\tilde{a}_1^2\tilde{a}_2 + \tilde{a}_2}$, για $l =$ περιττό
5. $\tilde{d}_1 = \frac{A-1}{2}, \tilde{d}_2 \neq A - 1$	$\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2} \frac{2\tilde{a}_1}{1 + \tilde{a}_1^2}$
6. $\tilde{d}_2 = \frac{A-1}{2}, \tilde{d}_1 \neq A - 1$	$\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2} \frac{\tilde{a}_2^2 + 1}{2\tilde{a}_2}$

□

Το ακόλουθο θεώρημα μας εξασφαλίζει μοναδικότητα για το αντίστροφο πρόβλημα ανεξάρτητα από το εάν ο δείκτης είναι μία συνεχής συνάρτηση ή όχι, χωρίς περιορισμούς στη θέση της ασυνέχειας.

Θεώρημα 3.3.6. Θεωρούμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας (2.1.1) – (2.1.4) για τη μοναδιαία μπάλα του \mathbb{R}^3 , όπου ο δείκτης διάθλασης $n(r)$ είναι μία C^2 ή κατά τμήματα C^2 συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις (3.1.1) – (3.1.4) και το $m(r)$ δεν αλλάζει πρόσημο. Τότε αν το $n(0)$ είναι γνωστό, ο $n(r)$ προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τη γνώση όλων των ιδιοτιμών διαπερατότητας, συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι ίδιες ιδιοτιμές διαπερατότητας αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικούς δείκτες διάθλασης $n_1(r)$ και $n_2(r)$ όπου $n_1(0) = n_2(0) = n(0)$. Από τις εξισώσεις (3.3.69) και (3.3.71) έχουμε τα ακόλουθα προβλήματα ροπών:

$$\int_0^1 t^{2l+2} m_i(t) dt = \frac{(2^{l+1} \Gamma(l+3/2))^2}{n(0)^{l/2+1/4} \gamma_l \pi}, \quad i = 1, 2 \quad (3.3.73)$$

για τις αντίστοιχες συναρτήσεις $m_i(r)$, $i = 1, 2$. Εφόσον τα $m_i(r)$, $i = 1, 2$ δεν αλλάζουν πρόσημο, είτε $A > 1$ ή $A < 1$. Σημειώνουμε ότι από το λήμμα 3.3.1 έχουμε $A_1 = A_2 = A$. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση πρέπει να εξετάσουμε διάφορες περιπτώσεις. Αν $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 \neq (A-1)/2$, $A-1$ τότε $\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Müntz [41] για την κατά τμήματα C^2 συνάρτηση $m(t)$ στην εξίσωση (3.3.73) καταλήγουμε ότι $n_1(r) = n_2(r)$. Έπειτα υποθέτουμε ότι $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = (A-1)/2$. Από την πρόταση 3.3.5 γνωρίζουμε ότι $\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2} \frac{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_1}{\tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2 + \tilde{a}_2}$ και η σχέση (3.3.73) συνεπάγεται ότι

$$(1 - n_1(r)) = \frac{\tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2 + \tilde{a}_2}{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_1} (1 - n_2(r)).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $n_1(0) = n_2(0)$, προκύπτει ότι $n_1(r) = n_2(r)$. Για την περίπτωση όπου $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = A-1$ μελετάμε τα άρτια και τα περιττά l χωριστά. Για l άρτιο, $\gamma_{l_1} = \gamma_{l_2} \tilde{a}_2 / \tilde{a}_1$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Müntz στην (3.3.73) για τους εκθέτες με άρτιο l , και να καταλήξουμε ότι

$$(1 - n_1(r)) = \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2} (1 - n_2(r)).$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι ότι $n_1(0) = n_2(0)$ προκύπτει η μοναδικότητα. Για τα περιττά l μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία. Αντίστοιχα, για όλες τις άλλες δυνατές περιπτώσεις της πρότασης 3.3.5, όπου $\tilde{d}_1 \neq \tilde{d}_2$, αποδεικνύουμε ότι $n_1(r) = n_2(r)$ και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

Τέλος, θεωρούμε δύο προβλήματα όπου το πρώτο αντιστοιχεί σε συνεχή δείκτη και το δεύτερο έχει μία ασυνέχεια, και υποθέτουμε ότι έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές διαπερατότητας. Τότε, $D_{l_1}(k)/c_{2l+2_1} = D_{l_2}(k)/c_{2l+2_2}$ όπου τα $D_{l_1}(k)$ έχουν την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά (2.2.35):

$$D_{l_1}(k) = \frac{1}{kn(0)^{l/2+1/4}} \sin k(1 - A_1) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

Ακολουθώντας τα βήματα του λήμματος 3.3.1 και της πρότασης 3.3.5 και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Müntz για την (3.3.73), καταλήγουμε σε άτοπο ακόμα και όταν $\tilde{d} = (A-1)/2$ ή $\tilde{d} = A-1$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Σημείωση 3.3.7. Σημειώνουμε ότι η θέση και το μέγεθος της ασυνέχειας του δείκτη διάθλασης προσδιορίζονται μοναδικά από τις ιδιοτιμές διαπερατότητας.

Σημείωση 3.3.8. Πιστεύουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα μοναδικότητας θα μπορούσε να επεκταθεί σε έναν κατά τμήματα C^2 δείκτη διάθλασης με περισσότερες ασυνέχειες

(βλ. παράρτημα Α'.3). Μία ανάλογη τεχνική θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αλλά η διαδικασία θα είναι σίγουρα πιο πολύπλοκη. Για το αντίστροφο πρόβλημα τύπου Sturm-Liouville με δύο ασυνέχεις παραπέμπουμε στο [89]. Επιπλέον, οι παραπάνω συλλογισμοί θα μπορούσαν να εφαρμοστούν και σε άλλα ασυνεχή προβλήματα ιδιοτιμών που μπορούν να απλοποιηθούν σε μονοδιάστατα (π.χ. εξίσωση Schrödinger με ασυνεχές δυναμικό).

3.4 Ασυμπτωτική συμπεριφορά των ιδιοτιμών διαπερατότητας

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ορισμένα αποτελέσματα όσον αφορά την ασυμπτωτική συμπεριφορά των ιδιοτιμών διαπερατότητας για το ασυνεχές πρόβλημα. Όπως έχουμε αναφέρει νωρίτερα, οι πραγματικές ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις ενός δείκτη διάθλασης $n(r) \in C^2$, ικανοποιούν την εκτίμηση (2.3.64):

$$k_m^2 = \frac{m^2\pi^2}{(A-1)^2} + O(1), \quad (3.4.74)$$

(όπου θεωρούμε τη μοναδιαία μπάλα στο \mathbb{R}^3). Αυτή η σχέση προκύπτει από μία αναπαράσταση για τις ιδιοτιμές [72], η οποία συμπεριλαμβάνει και τους συντελεστές Fourier για το $p(t)$

$$k_m^2 = \frac{m^2\pi^2}{(1-A)^2} + \frac{1}{1-A} \int_0^1 p(t) dt - \frac{1}{1-A} \int_0^1 p(t) \cos \frac{2\pi mt}{1-A} dt + O\left(\frac{1}{m}\right)$$

για m αρκούντως μεγάλο και το $p(t)$ να δίνεται από τη σχέση (2.2.40). Στην εργασία [72, λήμμα 2], οι συγγραφείς απέδειξαν ότι υπάρχει μία μοναδική ιδιοτιμή διαπερατότητας σε κάθε διάστημα της μορφής

$$I_m(C_1, C_2) = \left(\frac{\pi m}{|1-A|} (1 - C_1/m), \frac{\pi m}{|1-A|} (1 + C_2/m) \right)$$

για κάποιες κατάλληλα μικρές σταθερές C_1, C_2 . Εξετάζουμε κατά πόσο κάτι τέτοιο θα μπορούσε να ισχύει για το ασυνεχές πρόβλημα.

Πρόταση 3.4.1. Θεωρούμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας (3.2.21)–(3.2.23) για έναν κατά τμήματα C^2 δείκτη διάθλασης που ικανοποιεί τις συνθήκες (3.1.1)–(3.1.4). Τότε υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή k_m σε κάθε διάστημα

$$I_m = \left(-\frac{\pi}{2|1-A|} + \frac{\pi m}{|1-A|}, \frac{\pi m}{|1-A|} + \frac{\pi}{2|1-A|} \right),$$

για m αρκούντως μεγάλο.

Απόδειξη. Η χαρακτηριστική ορίζουσα του ασυνεχούς προβλήματος ικανοποιεί τον ασυμπτωτικό τύπο (3.2.43):

$$D_0(k) = \frac{1}{kn(0)^{1/4}} \left[\frac{\tilde{a}^2 + 1}{2\tilde{a}} \sin k(1 - A) + \frac{1 - \tilde{a}^2}{2\tilde{a}} \sin k(1 - A + 2\tilde{d}) \right] + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

και άρα υπάρχει μία θετική σταθερά C τέτοια ώστε

$$\left| D_0(k) - \frac{1}{kn(0)^{1/4}} \left[\frac{\tilde{a}^2 + 1}{2\tilde{a}} \sin k(1 - A) + \frac{1 - \tilde{a}^2}{2\tilde{a}} \sin k(1 - A + 2\tilde{d}) \right] \right| \leq \frac{C}{k^2}. \quad (3.4.75)$$

Εάν θέσουμε $k_m^+ := \frac{\pi m}{|1-A|} + \frac{\pi}{2|1-A|}$ και υπολογίσουμε το $D_0(k)$ στο k_m^+ έχουμε

$$\begin{aligned} D_0(k_m^+) &\geq \frac{\tilde{a}^2 + 1}{k_m^+ 2\tilde{a}n(0)^{1/4}} \left[\sin \frac{1-A}{|1-A|} \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1 - \tilde{a}^2}{\tilde{a}^2 + 1} \sin k_m^+(1 - A + 2\tilde{d}) \right] - \frac{C}{k_m^{+2}} \\ &= \frac{\tilde{a}^2 + 1}{k_m^+ 2\tilde{a}n(0)^{1/4}} \left[(-1)^m \operatorname{sgn}(1 - A) + \frac{1 - \tilde{a}^2}{\tilde{a}^2 + 1} \sin k_m^+(1 - A + 2\tilde{d}) \right] - \frac{C}{k_m^{+2}}. \end{aligned}$$

Τώρα, εφόσον $-1 < \frac{1-\tilde{a}^2}{\tilde{a}^2+1} < 1$, εάν το m είναι άρτιος αριθμός και το $A < 1$ ή το m είναι περιττός και $A > 1$, καταλήγουμε ότι

$$D_0(k_m^+) \geq \left(1 - \frac{1 - \tilde{a}^2}{\tilde{a}^2 + 1} \right) \frac{\tilde{a}^2 + 1}{k_m^+ 2\tilde{a}n(0)^{1/4}} - \frac{C}{k_m^{+2}} > 0 \quad (3.4.76)$$

για m κατάλληλα μεγάλο.

Στη συνέχεια θέτουμε $k_m^- := \frac{\pi m}{|1-A|} - \frac{\pi}{2|1-A|}$ και υπολογίζουμε το $D_0(k)$ για k_m^- . Από τη σχέση (3.4.75) προκύπτει

$$D_0(k_m^-) \leq \frac{\tilde{a}^2 + 1}{k_m^- 2\tilde{a}n(0)^{1/4}} \left[(-1)^{m+1} \operatorname{sgn}(1 - A) + \frac{1 - \tilde{a}^2}{\tilde{a}^2 + 1} \sin k_m^-(1 - A + 2\tilde{d}) \right] + \frac{C}{k_m^{-2}}$$

και άρα, αν το m είναι άρτιος και $A < 1$ ή το m είναι περιττός και $A > 1$ θα ισχύει ότι

$$D_0(k_m^-) \leq \left(\frac{1 - \tilde{a}^2}{\tilde{a}^2 + 1} - 1 \right) \frac{\tilde{a}^2 + 1}{k_m^- 2\tilde{a}n(0)^{1/4}} + \frac{C}{k_m^{-2}} < 0 \quad (3.4.77)$$

για m κατάλληλα μεγάλο. Οι ανισότητες (3.4.76) και (3.4.77) συνεπάγονται ότι το $D_0(k)$ θα λαμβάνει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα I_m για m άρτιο και $A < 1$ ή για m περιττό και $A > 1$.

Με ανάλογους συλλογισμούς, όταν το m είναι άρτιο και το $A > 1$ ή το m περιττό και $A < 1$ καταλήγουμε ότι η $D_0(k)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε κάθε I_m για m κατάλληλα μεγάλο και $A \neq 1$. \square

Η προηγούμενη πρόταση δε μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας μοναδικής ιδιοτιμής σε κάθε διάστημα I_m . Η μοναδικότητα για το συνεχές πρόβλημα εξασφαλίζεται αποδεικνύοντας

ότι το $dD_0(k)/dk$ δε μηδενίζεται ποτέ σε κάθε διάστημα $I_m(C_1, C_2)$. Αυτό το επιχείρημα δεν εφαρμόζεται στην περίπτωση μας. Επιπλέον, στο [54, λήμμα 4], αποδεικνύεται ότι κάθε ιδιοτιμή του ασυνεχούς προβλήματος Sturm-Liouville βρίσκεται σε ένα διάστημα της μορφής $J_m = |k_m - m| < 1/2$, ως εφαρμογή του θεωρήματος Rouché [82]. Η απόδειξη βασίζεται στη διαπίστωση ότι η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση και η συνάρτηση $\sin k\rho$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών σε κάθε διάστημα J_m . Δε θα μπορούσαμε να περιμένουμε να ισχύει κάτι τέτοιο στο δικό μας πρόβλημα αφού η $D_0(k)$ μπορεί να έχει μιγαδικές ρίζες.

Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνουμε ότι η ύπαρξη μίας ασυνέχειας στον δείκτη διάθλασης συνεπάγεται ότι μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία ρίζες σε κάθε διάστημα I_m .

Παράδειγμα 3.4.2. Ορίζουμε τον ακόλουθο δείκτη διάθλασης τύπου Halm (βλ. [36, παράδειγμα 2])

$$n_1(r) := \frac{(0.9)^2}{(0.9 + (1 - r)^2)^2} \quad (3.4.78)$$

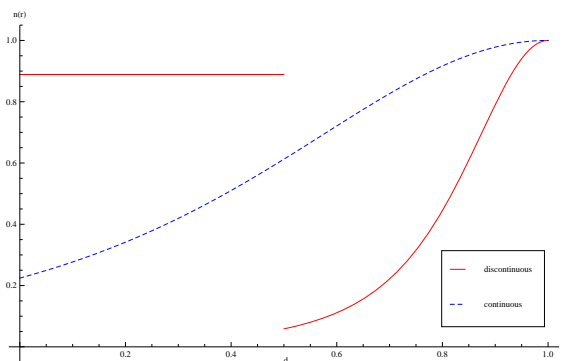
ο οποίος ικανοποιεί: $n_1(r) \in C^2[0, 1]$, $n_1(1) = 1$ και $n_1'(1) = 0$. Επίσης, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Liouville είναι σταθερός, $p(\xi) \simeq -1.11$ και ο χρόνος μετακίνησης ισούται με $A = \int_0^1 (n_1(t))^{1/2} dt \simeq 0.77$.

Θεωρούμε επίσης τον δείκτη διάθλασης $n_2(r)$ ο οποίος είναι ασυνεχής για $r = d = 1/2$

$$n_2(r) := \begin{cases} n_c \simeq 0.88, & 0 < r < 1/2 \\ \frac{(0.08)^2}{(0.08 + (1 - r)^2)^2}, & 1/2 < r < 1 \end{cases} \quad (3.4.79)$$

όπου η σταθερή τιμή n_c επιλέγεται έτσι ώστε οι n_1 και n_2 να έχουν ίσους χρόνους μετακίνησης, δηλαδή

$$\int_0^1 (n_1(t))^{1/2} dt = \int_0^{1/2} (n_c)^{1/2} dt + \int_{1/2}^1 \left(\frac{(0.08)^2}{(0.08 + (1 - t)^2)^2} \right)^{1/2} dt.$$



Σχήμα 3.3: Οι δείκτες διάθλασης $n_1(r)$ και $n_2(r)$

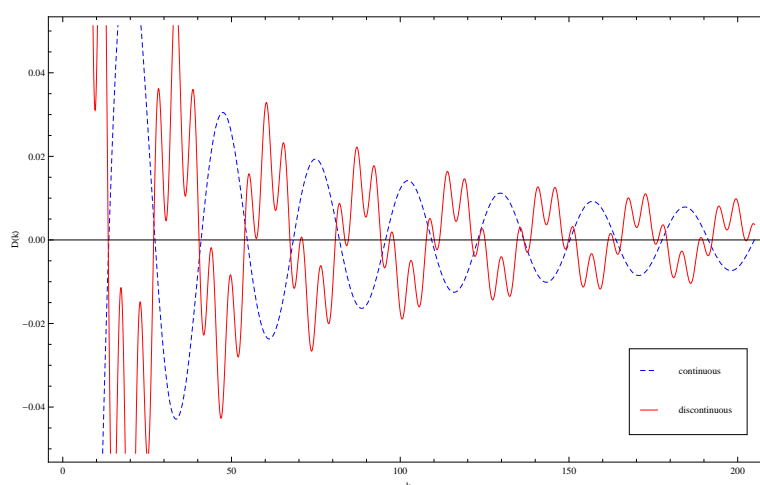
Για τους ασυμπτωτικούς τύπους (2.2.47) και (3.2.43) των οριζουσών έχουμε

$$D_{0_1}(k) = \frac{1}{kn_1(0)^{1/4}} \sin k(1-A) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (3.4.80)$$

και

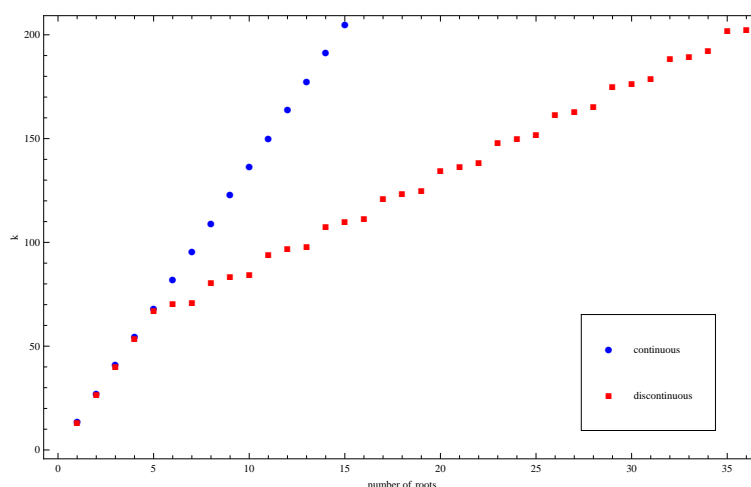
$$D_{0_2}(k) = \frac{1}{kn_c^{1/4}} \left[\frac{\tilde{a}^2 + 1}{2\tilde{a}} \sin k(1-A) + \frac{1 - \tilde{a}^2}{2\tilde{a}} \sin k(1-A + 2\tilde{d}) \right] + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (3.4.81)$$

όπου $\tilde{d} = \int_0^{1/2} (n_c)^{1/2} dt \simeq 0.47$ και $\tilde{a} = (n_2(1/2)/n_c)^{1/4} \simeq 0.51$. Προφανώς, το $D_{0_1}(k)$ έχει μόνο μία ρίζα σε κάθε διάστημα I_m αλλά αυτό δεν ισχύει για το $D_{0_2}(k)$, όπως μπορούμε να δούμε στο σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Η κατανομή των πραγματικών ριζών για τα $D_{0_1}(k)$ και $D_{0_2}(k)$

Χρησιμοποιώντας λογισμικό εύρεσης ριζών, υπολογίζουμε τις πραγματικές ρίζες των κυρίαρχων όρων των (3.4.80) και (3.4.81) στο διάστημα $[0, 15\pi/|1-A|]$. Όπως μπορούμε



Σχήμα 3.5: Αριθμός των ριζών για τον συνεχή και τον ασυνεχή δείκτη διάθλασης

να διαπιστώσουμε, για $m \geq 5$, το $D_{0_2}(k)$ έχει περισσότερες από μία ρίζες σε κάθε διάστημα I_m και άρα ένας ασυμπτωτικός τύπος της μορφής (3.4.74) δεν ισχύει για τον ασυνεχή δείκτη διάθλασης $n_2(r)$. Ως αποτέλεσμα, καταλήγουμε ότι εν γένει οι ιδιοτιμές διαπερατότητας μπορεί να μην ικανοποιούν ένα αναλυτικό ασυμπτωτικό ανάπτυγμα. Παρόλα αυτά, κατανέμονται με ένα συγκεκριμένο τρόπο όπως μας εξασφαλίζει η πρόταση 3.4.1, με το $+\infty$ να είναι το μόνο σημείο συσσώρευσης.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΥΘΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΠΕΡΑΤΟΤΗΤΑΣ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε μία αριθμητική μέθοδο για το ευθύ εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας [48]. Αρχικά, δείχνουμε ότι το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας είναι ένα μη αυτοσυζυγές πρόβλημα ιδιοτιμών υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση $n-1$ δεν αλλάζει πρόσημο. Εξετάζουμε τη διακριτή μορφή του ευθέως προβλήματος χρησιμοποιώντας την κλασική μεταβολική διατύπωση για ελλειπτικά προβλήματα. Διατυπώνουμε επίσης μία μέθοδο τύπου Galerkin στον χώρο Sobolev $H_0^2(D)$ για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών διαπερατότητας. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας μία κατάλληλη αναπαράσταση του προβλήματος ως ένα πρόβλημα τελεστών αποδεικνύουμε τη σύγκληση της μεθόδου. Τέλος, παρουσιάζουμε ορισμένα πρόσφατα αποτελέσματα από αριθμητικές μεθόδους για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών διαπερατότητας.

Περιεχόμενα

4.1 Το διακριτό εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας . . .	68
4.1.1 Το πρόβλημα ιδιοτιμών σε τελεστική μορφή	68
4.1.2 Μία μέθοδος τύπου Galerkin για το ευθύ πρόβλημα	70
4.2 Αριθμητικές μέθοδοι για τις ιδιοτιμές διαπερατότητας	75

4.1 Το διακριτό εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας

Θεωρούμε το πρόβλημα του υπολογισμού των ιδιοτιμών διαπερατότητας που αντιστοιχούν σε ένα γνωστό δείκτη διάθλασης $n(x)$. Η πρώτη αριθμητική μελέτη αυτού του προβλήματος πραγματοποιήθηκε στην εργασία [38]. Από τότε, η έρευνα στην περιοχή των αριθμητικών μεθόδων για τις ιδιοτιμές διαπερατότητας έχει αναπτυχθεί πολύ και συνεχίζεται μέχρι σήμερα. Στη συνέχεια, προτείνουμε μία απλή υπολογιστική μέθοδο που βασίζεται σε μία ισοδύναμη διατύπωση του προβλήματος ως ένα πρόβλημα ιδιοτιμών τέταρτης τάξης.

4.1.1 Το πρόβλημα ιδιοτιμών σε τελεστική μορφή

Έστω ότι το D είναι ένα φραγμένο και απλά συνεκτικό χωρίο στο \mathbb{R}^2 με κατά τμήματα ομαλό σύνορο ∂D και $n \in L^\infty(D)$. Υποθέτουμε ότι το $n(x)$ και το $1/|n(x) - 1| > 0$ είναι φραγμένες, θετικές και πραγματικές συναρτήσεις, ορισμένες στο D . Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας (1.2.16)-(1.2.19) μπορεί να μετασχηματιστεί σε μία εξίσωση τέταρτης τάξης για μία συνάρτηση $u := w - v \in H_0^2(D)$

$$(\Delta + k^2 n) \frac{1}{n-1} (\Delta + k^2) u = 0, \quad \text{στο } D \quad (4.1.1)$$

μαζί με τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$u = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \text{στο } \partial D \quad (4.1.2)$$

όπου με ν συμβολίζουμε το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο ∂D (βλ. [22, 81]). Πράγματι, εφόσον $u = w - v$, έχουμε ότι το u ικανοποιεί τη σχέση

$$(\Delta + k^2) u = k^2 (1 - n) w \quad (4.1.3)$$

και το w ικανοποιεί την (1.2.16) στο D . Για να απαλείψουμε το w από την (4.1.3) διαιρούμε με $n - 1$ και εφαρμόζουμε τον τελεστή $(\Delta + k^2 n)$. Έτσι καταλήγουμε στην (4.1.1). Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου μπορούν να εφαρμοστούν για τις ίδιες εξισώσεις στο \mathbb{R}^3 . Για λόγους απλότητας, υποθέτουμε ότι $n(x) - 1 \geq \delta > 0$ σχεδόν παντού, αλλά παρόλα αυτά, η ακόλουθη θεωρία ισχύει και όταν το $n(x)$ είναι αυστηρά μικρότερο του 1.

Στη μεταβολική διατύπωση, το πρόβλημα (4.1.1) – (4.1.2) είναι ισοδύναμο με την εύρεση

μίας συνάρτησης $u \in H_0^2(D)$ έτσι ώστε:

$$\int_D \frac{1}{n-1} (\Delta u + k^2 u) (\Delta \bar{\phi} + k^2 n \bar{\phi}) dx = 0, \quad \forall \phi \in H_0^2(D). \quad (4.1.4)$$

Ορίζουμε τις ακόλουθες φραγμένες ημιγραμμικές μορφές στον $H_0^2(D) \times H_0^2(D)$:

$$\begin{aligned} a(u, \phi) &:= \left(\frac{1}{n-1} \Delta u, \Delta \phi \right)_D \\ a_1(u, \phi) &:= - \left(\frac{n}{n-1} \Delta u, \phi \right)_D - \left(\frac{1}{n-1} u, \Delta \phi \right)_D \\ a_2(u, \phi) &:= \left(\frac{n}{n-1} u, \phi \right)_D \end{aligned}$$

$\forall u, \phi \in H_0^2(D)$, όπου με $(\cdot, \cdot)_D$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(D)$. Το πρόβλημα (4.1.4) γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$a(u, \phi) - k^2 a_1(u, \phi) + k^4 a_2(u, \phi) = 0, \quad \forall \phi \in H_0^2(D).$$

Όταν το $n(x) - 1 \geq \delta > 0$, η $a(u, \phi)$ είναι πιεστική, δηλαδή:

$$a(u, u) \geq c \|u\|_{H_0^2(D)}^2$$

για κάποια θετική σταθερά c . Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $H_0^2(D)$ -νόρμα μίας συνάρτησης είναι ισοδύναμη με την $L^2(D)$ -νόρμα της Λαπλασιανής της, ως αποτέλεσμα της ανισότητας Poincaré. Η πιεστικότητα της $a(u, \phi)$ συνεπάγεται ότι το $k = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή αυτού του προβλήματος. Επίσης, η $a_2(u, \phi)$ είναι μη αρνητική.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz ορίζουμε τους ακόλουθους φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T : H_0^2(D) \rightarrow H_0^2(D)$, $T_1 : H_0^2(D) \rightarrow H_0^2(D)$, $T_2 : H_0^2(D) \rightarrow H_0^2(D)$ μέσω των σχέσεων:

$$a(u, \phi) = (Tu, \phi)_{H^2(D)}$$

$$a_1(u, \phi) = (T_1 u, \phi)_{H^2(D)}$$

$$a_2(u, \phi) = (T_2 u, \phi)_{H^2(D)}$$

Θέτοντας $k^2 := \tau$ μπορούμε να γράψουμε την (4.1.4) ως ένα τετραγωνικό πρόβλημα τελεστών:

$$Tu - \tau T_1 u + \tau^2 T_2 u = 0 \quad (4.1.5)$$

Δεδομένου ότι οι $a(u, \phi)$, $a_1(u, \phi)$ και $a_2(u, \phi)$ είναι ερμιτιανές, οι τελεστές T, T_1 και T_2 είναι αυτοσυζυγείς. Εξ ορισμού, ο T είναι θετικά ορισμένος. Ακόμα, από τη συμπαγή εμφύτευση του $H_0^2(D)$ στον $L^2(D)$, έχουμε ότι οι T_1, T_2 είναι συμπαγείς τελεστές. Από την πιεστικότητα του T έχουμε ότι ο T^{-1} είναι φραγμένος, και το εσωτερικό πρόβλημα

διαπερατότητας μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα στην παρακάτω μορφή:

$$u - \tau K_1 u + \tau^2 K_2 u = 0 \quad (4.1.6)$$

όπου οι K_1 και K_2 είναι αυτοσυζυγείς, συμπαγείς τελεστές και ο K_2 είναι μη αρνητικός, και ορίζονται από τις σχέσεις [22]:

$$K_1 = T^{-1/2} T_1 T^{-1/2} \quad \text{και} \quad K_2 = T^{-1/2} T_2 T^{-1/2}. \quad (4.1.7)$$

Χρησιμοποιούμε για λόγους απλότητας στη σχέση (4.1.6) το σύμβολο u αντί για το $T^{1/2}u$, ακολουθώντας το συμβολισμό στη σχετική βιβλιογραφία. Σημειώνουμε ότι εάν ο U είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και ο A είναι ένας φραγμένος, θετικά ορισμένος και αυτοσυζυγής τελεστής στον U , ορίζουμε τους τελεστές $A^{\pm 1/2} := \int_0^\infty \lambda^{\pm 1/2} dE_\lambda$ όπου το dE_λ είναι το φασματικό μέτρο σχετιζόμενο με τον A . Είναι γνωστό ότι οι τελεστές $A^{\pm 1/2}$ είναι επίσης φραγμένοι, θετικά ορισμένοι και αυτοσυζυγείς στον U , $A^{-1/2} A^{1/2} = I$ και $A^{1/2} A^{1/2} = A$.

Τώρα, το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας μπορεί να γραφτεί σε τελεστική μορφή ως το γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$(\mathbb{K} - \xi \mathbb{I})U = 0, \quad U = (u, \tau K_2^{1/2} u)^\top, \quad \xi := \frac{1}{\tau} \quad (4.1.8)$$

για τον μη αυτοσυζυγή και συμπαγή τελεστή $\mathbb{K} : H_0^2(D) \times H_0^2(D) \rightarrow H_0^2(D) \times H_0^2(D)$, ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbb{K} := \begin{pmatrix} K_1 & -K_2^{1/2} \\ K_2^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

Σημειώνουμε ότι το ξ είναι καλά ορισμένο εφόσον το $\tau = k^2 = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του προβλήματος. Η παραπάνω αναπαράσταση είναι εντελώς ισοδύναμη με την τετραγωνική μορφή (4.1.6). Ακόμα, αυτή η έκφραση για τον \mathbb{K} υποδηλώνει ότι το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας είναι μη αυτοσυζυγές. Έτσι, από αυτό το σημείο μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι το σύνολο των ιδιοτιμών διαπερατότητας είναι διακριτό, με το $+\infty$ να είναι το μόνο πιθανό σημείο συσσώρευσης.

4.1.2 Μία μέθοδος τύπου Galerkin για το ευθύ πρόβλημα

Υιοθετούμε μία απλή μέθοδο τύπου Galerkin, η οποία βασίζεται στην ασθενή μορφή του προβλήματος. Η κυριότερη δυσκολία της προσεγγιστικής μας μεθόδου είναι ότι αφορά ένα πρόβλημα ιδιοτιμών το οποίο δεν είναι αυτοσυζυγές.

Έστω ότι $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ένα σύνολο ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος:

$$L\phi_i = \mu_i\phi_i \text{ στο } D \quad (4.1.9)$$

$$\phi_i = 0, \quad \frac{\partial\phi_i}{\partial\nu} = 0 \text{ στο } \partial D \quad (4.1.10)$$

όπου ο L είναι ένας ελλειπτικός τελεστής τέταρτης τάξης. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιονδήποτε ελλειπτικό τελεστή L . Στην εργασία μας θεωρούμε τον τελεστή της 2-Λαπλασιανής για τον οποίο τα ιδιοζεύγη μπορούν εύκολα να υπολογιστούν και οι ιδιοσυναρτήσεις αποτελούν μία βάση Hilbert στον χώρο $H_0^2(D)$. Για τέταρτης τάξης προβλήματα ιδιοτιμών υπάρχουν διάφορες προσεγγιστικές μέθοδοι, όπως π.χ. αυτή των Weinstein-Aronszajn [52], που βασίζονται σε παρόμοιες απλές βάσεις Hilbert.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι το $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ένα τέτοιο σύνολο και κάθε ιδιοσυνάρτηση διαπερατότητας u_k μπορεί να αναπτυχθεί σε αυτό το σύστημα μέσω της έκφρασης:

$$u_k = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\phi_i. \quad (4.1.11)$$

η οποία είναι μία συγκλίνουσα σειρά στον $H_0^2(D)$. Μπορούμε να προσεγγίσουμε τη u_k από το άθροισμα:

$$u_k^{(N)} = \sum_{i=1}^{(N)} c_i\phi_i. \quad (4.1.12)$$

Εισάγουμε τη $u_k^{(N)}$ στην (4.1.4) και χρησιμοποιούμε για δοκιμαστικές συναρτήσεις τις ιδιοσυναρτήσεις ϕ_i , $i = 1, \dots, N$. Έτσι, το προσεγγιστικό μη γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών γράφεται σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$[A^{(N)} - (k^{(N)})^2 B^{(N)} + (k^{(N)})^4 C^{(N)}] \mathbf{c} = 0, \quad (4.1.13)$$

όπου

$$\begin{aligned} A^{(N)} &:= \int_D \frac{1}{n(x) - 1} \Delta\phi_i \Delta\bar{\phi}_j dx \\ B^{(N)} &:= - \left(\int_D \frac{n(x)}{n(x) - 1} \Delta\phi_i \bar{\phi}_j dx + \int_D \frac{1}{n(x) - 1} \phi_i \Delta\bar{\phi}_j dx \right) \\ C^{(N)} &:= \int_D \frac{n(x)}{n(x) - 1} \phi_i \bar{\phi}_j dx \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

είναι $N \times N$ πίνακες και $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)^\top$, $i, j = 1, \dots, N$.

Η εξίσωση (4.1.13) είναι ένα τυπικό τετραγωνικό πρόβλημα ιδιοτιμών [87] και είναι εντελώς ανάλογο με το πρόβλημα τελεστών (4.1.5). Πιο συγκεκριμένα, οι $A^{(N)}, B^{(N)}, C^{(N)}$ είναι αυτοσυζυγείς και οι $A^{(N)}, C^{(N)}$ θετικά ορισμένοι. Αυτές οι ιδιότητες για τους πίνακες προκύπτουν απευθείας από τις ιδιότητες των αντίστοιχων τελεστών της σχέσης (4.1.5). Έπειτα, μπορούμε να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα (4.1.13) σε ένα γραμμικό

πρόβλημα ιδιοτιμών για έναν μπλοκ-πίνακα:

$$(\mathbb{K}^{(N)} - \xi^{(N)}\mathbb{I}^{(N)})U^{(N)} = 0, \quad (4.1.15)$$

όπου

$$U^{(N)} = (\mathbf{c}, \tau^{(N)}(K_2^{(N)})^{1/2}\mathbf{c})^\top, \quad \xi^{(N)} := \frac{1}{\tau^{(N)}},$$

και ο μπλοκ-πίνακας ορίζεται ως

$$\mathbb{K}^{(N)} := \begin{pmatrix} K_1^{(N)} & -(K_2^{(N)})^{1/2} \\ (K_2^{(N)})^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.16)$$

και

$$K_1^{(N)} := (A^{(N)})^{-1/2}B^{(N)}(A^{(N)})^{-1/2} \quad (4.1.17)$$

$$K_2^{(N)} := (A^{(N)})^{-1/2}C^{(N)}(A^{(N)})^{-1/2} \quad (4.1.18)$$

Σημειώνουμε ότι κάθε θετικά ημιορισμένος πίνακας έχει μία μοναδική θετικά ημιορισμένη τετραγωνική ρίζα [67].

Συνεχίζοντας, μελετάμε την ύπαρξη και τη σύγκλιση των ιδιοτιμών του διακριτού προβλήματος. Η επόμενη πρόταση μας εξασφαλίζει την ύπαρξη των ιδιοτιμών του προβλήματος (4.1.13).

Πρόταση 4.1.1. Υποθέτουμε ότι $n(x) > 1$ για $x \in \bar{D}$. Τότε υπάρχουν $2N$ ιδιοτιμές για το πρόβλημα (4.1.13).

Απόδειξη. Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το γραμμικοποιημένο πρόβλημα (4.1.15), το οποίο είναι ένα κλασικό πρόβλημα ιδιοτιμών για έναν τετραγωνικό $2N \times 2N$ πίνακα. Άρα ισοδύναμα, υπάρχουν $2N$ ιδιοτιμές για το (4.1.13). \square

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ένα αποτέλεσμα ύπαρξης και για την περίπτωση $0 < n(x) < 1$, έπειτα από ορισμένες αλλαγές στη διατύπωση των ημιγραμμικών μορφών (βλ. επίσης [38]).

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι οι ιδιοτιμές του διακριτού προβλήματος συγκλίνουν στις αντίστοιχες του αρχικού προβλήματος, πρέπει να δείξουμε ότι $\tau^{(N)} \rightarrow \tau$ (ή ισοδύναμα $\xi^{(N)} \rightarrow \xi$). Αλλά η βασική δυσκολία έγκειται στο ότι το πρόβλημά μας δεν είναι αυτοσυζυγές και άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αποτελέσματα σύγκλισης για συμπαγή και αυτοσυζυγή προβλήματα ιδιοτιμών. Για να παρακάμψουμε αυτή τη δυσκολία χρησιμοποιούμε ορισμένα γενικά αποτελέσματα για σύγκλιση σε χώρους Banach, [8, 43] όπου τα βασικά εργαλεία είναι επιχειρήματα συμπάγειας και σύγκλισης απομονωμένων ιδιοτιμών.

Έστω ότι X είναι ένας μιγαδικός χώρος Banach εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|$ -νόρμα και $\{X_n\}$ είναι μία ακολουθία από πεπερασμένης διάστασης υπόχωρους του X , τους οποίους

παραμετροποιούμε με το n , το οποίο θα συμβολίζει τη διάσταση. Εισάγουμε το ακόλουθο πλαίσιο, [43]: $\Pi_n : X \rightarrow X$ είναι γραμμικές προβολές με εικόνα το X_n , $A : X \rightarrow X$ είναι ένας γραμμικός φραγμένος τελεστής και οι γραμμικοί τελεστές $B_n : X \rightarrow X$, με εικόνα το X_n , υποθέτουμε ότι προσεγγίζουν τον A . Τότε, οι A_n ορίζονται ως ο περιορισμός των B_n στο X_n . Οι B_n θα ονομάζονται προσεγγίσεις Galerkin του A εάν $B_n = \Pi_n A$ και τότε $A_n := \Pi_n A|_{X_n} : X_n \rightarrow X_n$.

Βασιζόμενοι στο [8], εισάγουμε το κατάλληλο πλαίσιο για τη σύγκλιση συμπαγών τελεστών. Έστω ότι ο H είναι ένας μιγαδικός χώρος Banach και $\mathbb{K} : H \rightarrow H$ είναι ένας γραμμικός και συμπαγής τελεστής. Υποθέτουμε ότι το μ είναι μία μη μηδενική ιδιοτιμή του \mathbb{K} με αλγεβρική πολλαπλότητα m και ότι οι $\mathbb{K}^{(N)} : H \rightarrow H$ αποτελούν μία ακολουθία από γραμμικούς τελεστές που συγκλίνει στον \mathbb{K} , στην τοπολογία της νόρμας, για $N \rightarrow \infty$. Έστω ότι Γ είναι ένας κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο μ , ο οποίος βρίσκεται στο επιλύων σύνολο

$$\rho(\mathbb{K}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\mathbb{K} - \lambda)^{-1} \text{ είναι γραμμικός και φραγμένος}\},$$

και καμία άλλη ιδιοτιμή του \mathbb{K} δεν περιέχεται στο Γ . Σε αυτή την περίπτωση, στο [8] αποδεικνύεται ότι για N αρκούντως μεγάλο, το $\Gamma \subset \rho(\mathbb{K}^{(N)})$ και μετρώντας με βάση την αλγεβρική πολλαπλότητα υπάρχουν m το πλήθος ιδιοτιμές του $\mathbb{K}^{(N)}$ στο Γ . Εάν συμβολίσουμε αυτές τις ιδιοτιμές με $\mu_{1,N}, \mu_{2,N}, \dots, \mu_{m,N}$ και αν Γ' είναι ένας άλλος κύκλος με κέντρο το μ με οσοδήποτε μικρή ακτίνα θέλουμε, έχουμε ότι όλες οι $\mu_{1,N}, \mu_{2,N}, \dots, \mu_{m,N}$ περικλείονται στον Γ' για N κατάλληλα μεγάλο. Έτσι έχουμε ότι $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{j,N} = \mu$ για $j = 1, \dots, m$.

Τώρα, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο μας εξασφαλίζει την απαιτούμενη σύγκλιση για τις ιδιοτιμές:

Θεώρημα 4.1.2. *Οι ιδιοτιμές του γραμμικού προβλήματος πινάκων (4.1.15) συγκλίνουν στις αντίστοιχες ιδιοτιμές του προβλήματος τελεστών (4.1.8) όταν $N \rightarrow \infty$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε ως $X := H_0^2(D)$, ως $X_N := H_0^2(D)_{,N}$ ένα N -διάστατο υπόχωρο του $H_0^2(D)$ και ως $\Pi_N : H_0^2(D) \rightarrow H_0^2(D)$ τις γραμμικές ορθογώνιες προβολές με εικόνα τον $H_0^2(D)_{,N}$. Ορίζουμε επίσης τους ακόλουθους γραμμικούς φραγμένους τελεστές:

$$T^{(N)} := \Pi_N T|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N$$

$$T_1^{(N)} := \Pi_N T_1|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N$$

$$T_2^{(N)} := \Pi_N T_2|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N.$$

Οι πίνακες που δίνονται στη σχέση (4.1.14) και εκφράζουν την προσέγγιση Galerkin του προβλήματος, αντιστοιχούν στους παραπάνω γραμμικούς τελεστές. Ακόμα ορίζουμε

$$K_1^{(N)} := (T^{(N)})^{-1/2} T_1^{(N)} (T^{(N)})^{-1/2}, \quad (4.1.19)$$

$$K_2^{(N)} := (T^{(N)})^{-1/2} T_2^{(N)} (T^{(N)})^{-1/2} \quad (4.1.20)$$

με τους αντίστοιχους πίνακες να δίνονται στις (4.1.17)-(4.1.18). Έστω $H := H_0^2(D) \times H_0^2(D)$, τότε ο $\mathbb{K} : H \rightarrow H$ είναι συμπαγής. Επιπλέον, θέτουμε

$$\mathbb{K}^{(N)} := \begin{pmatrix} K_1^{(N)} & -(K_2^{(N)})^{1/2} \\ (K_2^{(N)})^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

με τον αντίστοιχο μπλοκ-πίνακα να ορίζεται στη (4.1.16). Οι $\mathbb{K}^{(N)}$ αναπαριστούν μία ακολουθία από τελεστές που προσεγγίζουν τον τελεστή \mathbb{K} και έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές με τους μπλοκ-πίνακες (4.1.16). Έτσι, μπορούμε να δείξουμε ότι οι ιδιοτιμές των $\mathbb{K}^{(N)}$ συγκλίνουν σε αυτές του \mathbb{K} εάν επαληθεύσουμε ότι $\mathbb{K}^{(N)} \rightarrow \mathbb{K}$ στη νόρμα για $N \rightarrow \infty$. Από τον ορισμό της νόρμας τελεστή για έναν μπλοκ-τελεστή έχουμε:

$$\|\mathbb{K} - \mathbb{K}^{(N)}\| \leq \|K_1 - K_1^{(N)}\| + 2\|K_2^{1/2} - (K_2^{(N)})^{1/2}\|.$$

Η μορφή των K_1 και $K_1^{(N)}$ ως γινόμενα τελεστών, που δίνεται στις (4.1.7) και (4.1.19) αντίστοιχα, έχει ως αποτέλεσμα ότι:

$$\begin{aligned} \|K_1 - K_1^{(N)}\| &= \|T^{-1/2}T_1T^{-1/2} - (T^{(N)})^{-1/2}T_1^{(N)}(T^{(N)})^{-1/2}\| \\ &\leq \|(T^{-1/2} - (T^{(N)})^{-1/2})T_1T^{-1/2}\| + \|(T^{(N)})^{-1/2}\| \|T_1(T^{-1/2} - (T^{(N)})^{-1/2})\| \\ &\quad + \|T_1 - T_1^{(N)}\| \|(T^{(N)})^{-1/2}\|^2 \end{aligned}$$

Η ακολουθία $(T^{(N)})^{-1/2}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και κατά σημείο συγκλίνουσα, ο T_1 είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής και ο $T^{-1/2}$ είναι αυτοσυζυγής. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι αν πολλαπλασιαστεί από δεξιά μία σημειακά συγκλίνουσα ακολουθία φραγμένων τελεστών με έναν συμπαγή τελεστή τότε συγκλίνει και στη νόρμα [51, σελ. 108], συμπεραίνουμε ότι

$$\|(T^{-1/2} - (T^{(N)})^{-1/2})T_1T^{-1/2}\| \rightarrow 0$$

και

$$\|(T^{(N)})^{-1/2}\| \|T_1(T^{-1/2} - (T^{(N)})^{-1/2})\| = \|(T^{(N)})^{-1/2}\| \|(T^{-1/2} - (T^{(N)})^{-1/2})T_1\| \rightarrow 0.$$

Δεδομένου ότι ο T_1 είναι συμπαγής και η ακολουθία $(T^{(N)})^{-1/2}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, προκύπτει άμεσα ότι

$$\|(T_1 - T_1^{(N)})\| \|(T^{(N)})^{-1/2}\|^2 \rightarrow 0.$$

Έτσι, καταλήγουμε ότι $\|K_1 - K_1^{(N)}\| \rightarrow 0$. Με αντίστοιχα επιχειρήματα για τους $K_2^{1/2}$ και $(K_2^{(N)})^{1/2}$, οι οποίοι έχουν όμοια δομή με τους K_1 και $K_1^{(N)}$ αντίστοιχα, επαληθεύουμε ότι $\|K_2^{1/2} - (K_2^{(N)})^{1/2}\| \rightarrow 0$. Άρα, το ζητούμενο αποτέλεσμα σύγκλισης έπεται. \square

4.2 Αριθμητικές μέθοδοι για τις ιδιοτιμές διαπερατότητας

Το πρόβλημα του υπολογισμού των ιδιοτιμών διαπερατότητας έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών από το 2010, με κύριο ζήτημα την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων για ακριβείς υπολογισμούς. Αυτό το πρόβλημα είναι πολύ απαιτητικό επειδή δεν είναι ούτε γραμμικό ούτε αυτοσυζυγές (όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, όλες οι υπολογιστικές μέθοδοι να έχουν αναπτυχθεί πολύ πρόσφατα.

Οι περισσότερες από τις αριθμητικές μεθόδους μέχρι τώρα, έχουν αναπτυχθεί για την περίπτωση των ιδιοτιμών διαπερατότητας που αντιστοιχούν στη σκέδαση από μη ομογενές μέσο (δηλαδή τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz). Στην εργασία [38], οι Colton, Monk και Sun πρότειναν για πρώτη φορά τρεις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων τύπου Argyris, συνεχών και μεικτών στοιχείων, για να υπολογίσουν τις ιδιοτιμές διαπερατότητας σε διάφορα χωρία. Η πρώτη αριθμητική μέθοδος που συνοδεύτηκε από μία αυστηρή ανάλυση της σύγκλισης εισήχθη από τον Sun [83]. Στη συνέχεια, οι περισσότερες υπολογιστικές μέθοδοι για ιδιοτιμές διαπερατότητας βασίστηκαν σε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, όπου διερευνήθηκαν και ορισμένα ζητήματα σύγκλισης (βλ. [25, 27, 58, 61, 62, 71, 90, 93]). Στην εργασία [46], οι Geng κ.α. χρησιμοποίησαν μία ασυνεχή μέθοδο Galerkin με C^0 στοιχεία Lagrange για την επίλυση του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας, η οποία είναι απλούστερη στην εκτέλεση από τα κλασικά πεπερασμένα στοιχεία. Οι An και Shen ανέπτυξαν φασματικές μεθόδους Galerkin στις εργασίες [6] και [7]. Επίσης, για ορισμένες εργασίες που βασίζονται σε ολοκληρωτικές μεθόδους παραπέμπουμε στα [24, 60, 66, 68, 95]. Η διανυσματική περίπτωση, δηλαδή ο υπολογισμός των ιδιοτιμών διαπερατότητας για τις εξισώσεις Maxwell, εξετάζεται στις εργασίες [59, 75, 85, 96].

Η υπολογιστική μέθοδος που αναπτύξαμε παρουσιάζει ορισμένα πλεονεκτήματα. Δεδομένου ότι βασίζεται σε μία ισοδύναμη μορφή τέταρτης τάξης, η μηδενική ιδιοτιμή εξαιρείται με φυσιολογικό τρόπο. Επιπλέον, χάρη στην εύκολα κατασκευάσιμη βάση Hilbert, είναι απλή στην εκτέλεση. Επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε όσες πραγματικές και μιγαδικές ιδιοτιμές απαιτείται την ίδια στιγμή. Ωστόσο, η μεθόδός μας στερείται σε ακρίβεια σε σχέση με άλλες μεθόδους αλλά είναι χρήσιμη για την αριθμητική επίλυση του αντίστροφου προβλήματος, το οποίο είναι το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΠΕΡΑΤΟΤΗΤΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα για το αντίστροφο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας [48]. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο *Galerkin*, όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και επιλύουμε το αντίστροφο πρόβλημα για τον κατά τμήματα σταθερό δείκτη διάθλασης $n(x)$. Αρχικά μελετάμε την περίπτωση του σφαιρικά συμμετρικού χωρίου στο \mathbb{R}^2 . Προτείνουμε επίσης μία αριθμητική μέθοδο *Newton* για το πρόβλημα του μη σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης. Σε όλες τις περιπτώσεις, δεδομένου ότι δεν υπάρχει ένα γενικό θεώρημα μοναδικότητας για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα, υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές διαπερατότητας είναι απομονωμένες και οι προσεγγιστικές ιδιοτιμές είναι πολύ κοντά στις αντίστοιχες του αρχικού προβλήματος. Εξετάζουμε παραδείγματα όπου αυτή η υπόθεση έχει ελεγχθεί και με αναλυτικό τρόπο.

Περιεχόμενα

5.1 Το αντίστροφο πρόβλημα για σφαιρικά συμμετρικά χωρία	78
5.1.1 Κυκλικό χωρίο	78
5.1.2 Χωρίο με δύο στρώματα	81
5.1.2.1 Ανακατασκευές με χρήση μόνο πραγματικών ιδιοτιμών	82
5.1.2.2 Ανακατασκευές με χρήση πραγματικών και μιγαδικών ιδιοτιμών	83
5.2 Η μέθοδος Newton για το αντίστροφο πρόβλημα	85
5.2.1 Ο αλγόριθμος	87
5.2.2 Αριθμητικά παραδείγματα	89
5.2.2.1 Χωρία με δύο στρώματα	90
5.2.2.2 Χωρία με πολλά στρώματα	93
5.2.3 Γενίκευση της μεθόδου για μη σφαιρικά συμμετρικά χωρία .	94

5.1 Το αντίστροφο πρόβλημα για σφαιρικά συμμετρικά χωρία

Μελετάμε το αντίστροφο πρόβλημα της ανακατασκευής ενός άγνωστου δείκτη διάθλασης από τις ιδιοτιμές διαπερατότητας. Εξετάζουμε περιπτώσεις όπου το χωρίο είναι σφαιρικά διαστρωματωμένο στο \mathbb{R}^2 (όπου ο όρος *σφαιρικά διαστρωματωμένο* μπορεί να χρησιμοποιηθεί για χωρία του \mathbb{R}^2 ή του \mathbb{R}^3 χωρίς βλάβη της γενικότητας). Οι ακόλουθες υπολογιστικές μέθοδοι που προτείνουμε, μπορούν να εφαρμοστούν και σε χωρία του \mathbb{R}^3 . Η επίλυση του αντίστροφου εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας με αριθμητικές μεθόδους μελετήθηκε πολύ πρόσφατα. Για ορισμένα αποτελέσματα σχετικά με την ανακατασκευή του δείκτη διάθλασης από τη μικρότερη ιδιοτιμή παραπέμπουμε στα [6, 18, 19, 49, 84, 85]. Σε αυτές τις εργασίες, οι συγγραφείς εστιάζουν στη χρήση μόνο της πρώτης πραγματικής ιδιοτιμής και μίας ανισότητας τύπου Faber-Krahn [40] για να εκτιμήσουν ένα κάτω φράγμα για τον δείκτη διάθλασης.

5.1.1 Κυκλικό χωρίο

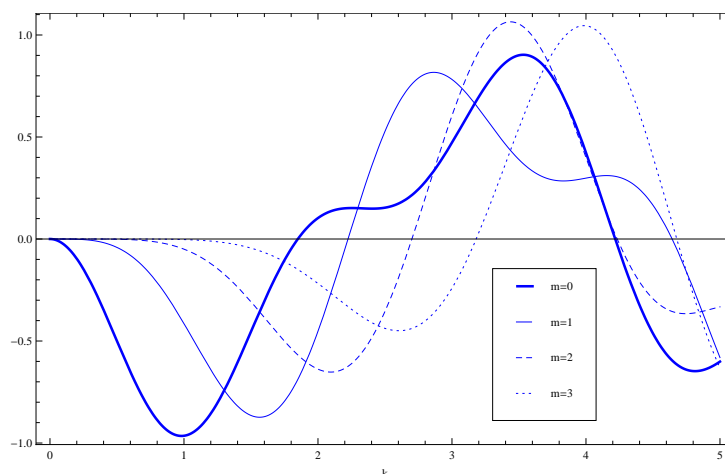
Έστω D ένα κυκλικό χωρίο με ακτίνα r το οποίο έχει σταθερό δείκτη διάθλασης $n(x) = n$. Είναι γνωστό ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τον δείκτη n από τη γνώση μόνο της πρώτης ιδιοτιμής διαπερατότητας, [14]:

Θεώρημα 5.1.1. *Ο σταθερός δείκτης διάθλασης n προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από την αντίστοιχη μικρότερη ιδιοτιμή διαπερατότητας $k_{1,n} > 0$ υπό την προϋπόθεση ότι είναι γνωστό εάν $n > 1$ ή $0 < n < 1$.*

Χρησιμοποιούμε αυτό το αποτέλεσμα για να ανακατασκευάσουμε τον δείκτη διάθλασης σε μοναδιαίους δίσκους. Μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος πακτωμένης πλάκας (4.1.9)-(4.1.10), και τις ιδιοτιμές διαπερατότητας. Η πρώτη ιδιοτιμή διαπερατότητας είναι η μικρότερη θετική τιμή k για την οποία ισχύει ότι [30, 40]:

$$\det \begin{pmatrix} J_m(kr) & J_m(k\sqrt{n}r) \\ J'_m(kr) & J'_m(k\sqrt{n}r) \end{pmatrix} = 0, \quad m = 0, 1, \dots \quad (5.1.1)$$

όπου οι J_m είναι συναρτήσεις Bessel, πρώτου είδους. Αυτή η σχέση προκύπτει από τον χωρισμό μεταβλητών για τις εξισώσεις Helmholtz (2.1.1), (2.1.2) ορισμένες στη μπάλα του \mathbb{R}^2 με ακτίνα r . Χρησιμοποιώντας λογισμικό εύρεσης ριζών, μπορούμε να υπολογίσουμε τις μικρότερες ιδιοτιμές k_0 από την (5.1.1). Η κατανομή των οριζουσών ως συναρτήσεις του k για τον μοναδιαίο δίσκο με δείκτη διάθλασης $n = 6$ απεικονίζεται στο σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1: Η κατανομή των πραγματικών ιδιοτιμών διαπερατότητας για $n = 6$ και $m = 0, 1, 2, 3$ αντίστοιχα

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε μία βάση $\{\phi_i\}_{i=1}^{(N)}$ για το πρόβλημα (4.1.9) – (4.1.10) όπου θεωρούμε $L = \Delta\Delta$. Σε πολικές συντεταγμένες, οι ιδιοσυναρτήσεις u_i για κάθε μ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των

$$J_i(\mu r) \cos i\theta, J_i(\mu r) \sin i\theta, I_i(\mu r) \cos i\theta, I_i(\mu r) \sin i\theta,$$

όπου I_i είναι οι υπερβολικές συναρτήσεις Bessel. Οι ιδιοτιμές μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση:

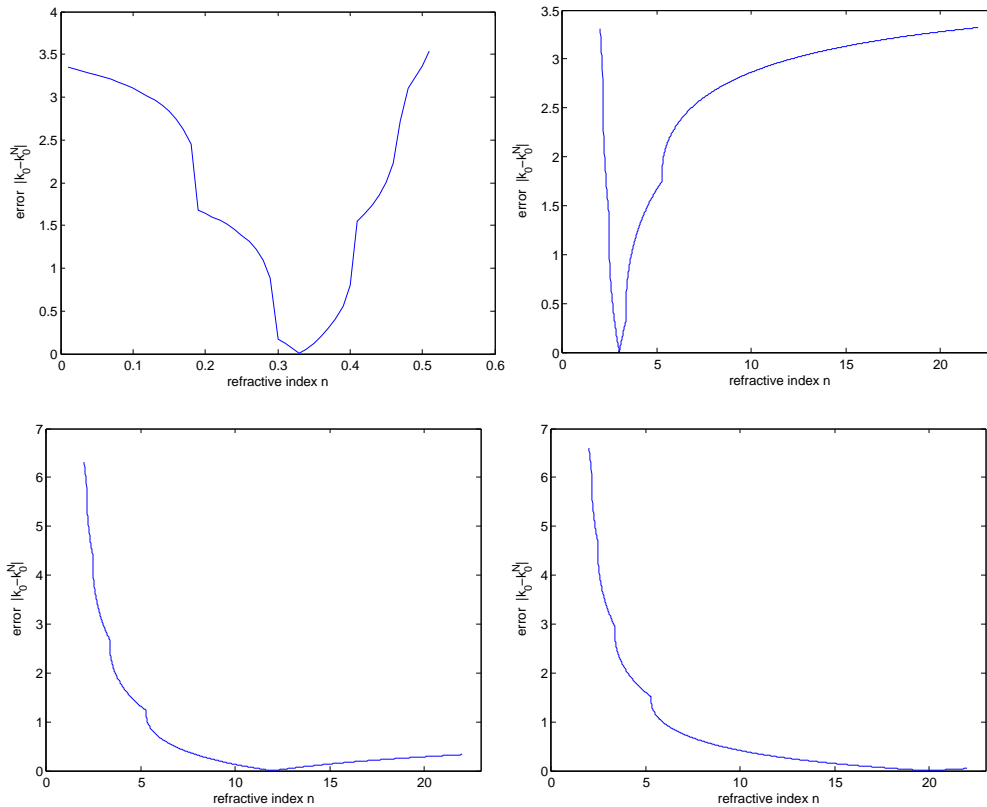
$$\det \begin{pmatrix} J_i(kr) & J'_i(kr) \\ I_i(kr) & I'_i(kr) \end{pmatrix} = 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (5.1.2)$$

Κατασκευάζουμε μία βάση με 20 ιδιοσυναρτήσεις $\{\phi_i\}_{i=1}^{20}$ και υπολογίζουμε τους 20×20 πίνακες $A^{(N)}, B^{(N)}, C^{(N)}$ για $r = 1$. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `polyeig` του Matlab με βήμα 0.01 για να λύσουμε το ευθύ τετραγωνικό πρόβλημα ιδιοτιμών (4.1.13) για διάφορες τιμές του n στα διαστήματα $[0.01, 0.5]$ και $[2, 21]$, και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.1: Ανακατασκευές για σταθερό δείκτη διάθλασης

πραγματικό n	πρώτη ιδιοτιμή k_0	σφάλμα $ k_0 - k_0^{(N)} $	προσεγγιστικό n^*
1/10	4.0992	6.05×10^{-4}	0.10
1/3	7.20401	0.0060	0.33
3	4.15924	0.0027	3.01
6	1.84972	5.81×10^{-4}	6.00
10	1.29630	1.91×10^{-4}	10.00
12	1.16612	1.53×10^{-4}	12.00
20	0.88154	9.47×10^{-5}	20.00

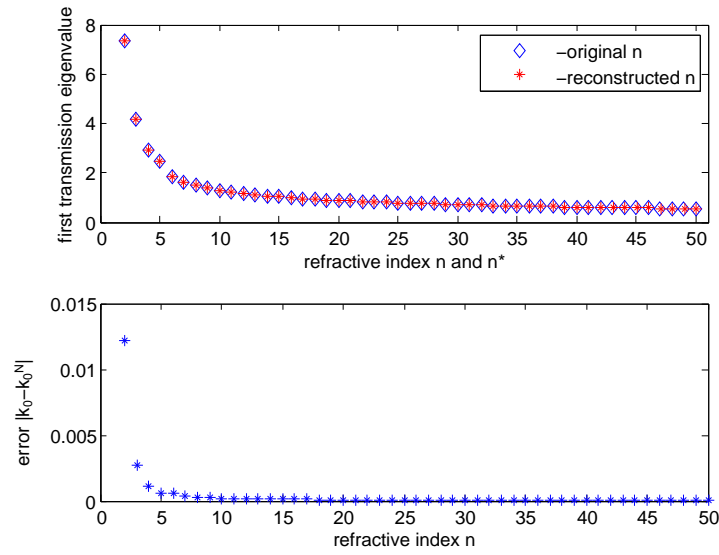
Χρησιμοποιώντας μόνο τη μικρότερη ιδιοτιμή διαπερατότητας και λίγες ιδιοσυναρτήσεις



Σχήμα 5.2: Γραφήματα του σφάλματος $|k_0 - k_0^{(N)}|$ σε σχέση με το n για δείκτες $n = 1/3$, $n = 3$, $n = 12$ και $n = 20$ αντίστοιχα

για το πρόβλημα πακτωμένης πλάκας, μπορούμε να προσεγγίσουμε το n πολύ καλά, ελαχιστοποιώντας το σφάλμα $|k_0^{(N)} - k_0|$ αφού θεωρήσουμε $k_0^{(N)} = k_0^{(N)}(n)$. Ορισμένα γραφήματα του σφάλματος $|k_0^{(N)} - k_0|$ σε σχέση με τον δείκτη n παρουσιάζονται στο σχήμα 5.2. Παρατηρούμε ότι το σφάλμα ελαχιστοποιείται για δείκτη πολύ κοντά στον αντίστοιχο πραγματικό που αντιστοιχεί στην αναλυτικά γνωστή πρώτη ιδιοτιμή διαπερατότητας. Ακόμα, ελέγξαμε τη μέθοδο προσθέτοντας ένα μικρό σφάλμα στην ιδιοτιμή και τα αποτελέσματα είναι επίσης ικανοποιητικά.

Στην εργασία [49], οι συγγραφείς αναπτύσσουν μία αριθμητική μέθοδο για τον υπολογισμό του άγνωστου σταθερού δείκτη διάθλασης από τη μικρότερη ιδιοτιμή διαπερατότητας. Σε αυτή τη μέθοδο, όταν το χωρίο είναι δίσκος με σταθερό δείκτη διάθλασης, οι ανακατασκευές είναι ακριβείς αλλά για μεγαλύτερες τιμές του n η προσέγγιση της μικρότερης ιδιοτιμής δεν είναι αρκετά ακριβής ([49, σχήμα 2]). Για τη μέθοδό μας, παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερες τιμές του n το σφάλμα $|k_0^{(N)} - k_0|$ μειώνεται και οι ανακατασκευές είναι ακριβείς όπως φαίνεται στον πίνακα 5.1. Επιπλέον, για να επιδείξουμε τους παραπάνω συλλογισμούς, σχεδιάζουμε το σφάλμα σε σχέση με τις τιμές του n για $n \in [2, 50]$ και τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 5.3.



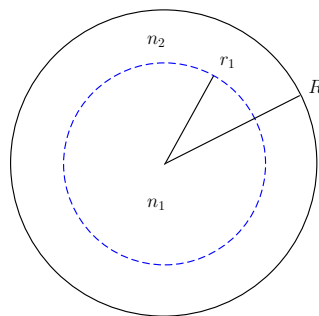
Σχήμα 5.3: Ανακατασκευές του σταθερού δείκτη διάθλασης σε δίσκο και το αντίστοιχο σχετικό σφάλμα

5.1.2 Χωρίο με δύο στρώματα

Επιλέγουμε το χωρίο D να είναι ένας δίσκος ακτίνας $r = R$, αλλά τώρα υποθέτουμε ότι ο δείκτης διάθλασης είναι μία σταθερή συνάρτηση με διαφορετικές τιμές σε κάθε στρώμα:

$$n(r) = \begin{cases} n_1, & 0 < r < r_1 \\ n_2, & r_1 < r < R \end{cases}$$

Οι ιδιοτιμές διαπερατότητας υπολογίζονται αναλυτικά από τη σχέση:



Σχήμα 5.4: Ένας δίσκος με δύο στρώματα

$$\det \begin{pmatrix} J_m(kR) & 0 & J_m(k\sqrt{n_2}R) & N_m(k\sqrt{n_2}R) \\ J'_m(kr)|_{r=R} & 0 & J'_m(k\sqrt{n_2}r)|_{r=R} & N'_m(k\sqrt{n_2}r)|_{r=R} \\ 0 & J_m(k\sqrt{n_1}r_1) & J_m(k\sqrt{n_2}r_1) & N_m(k\sqrt{n_2}r_1) \\ 0 & J'_m(k\sqrt{n_1}r)|_{r=r_1} & J'_m(k\sqrt{n_2}r)|_{r=r_1} & N'_m(k\sqrt{n_2}r)|_{r=r_1} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.1.3)$$

για $m = 0, 1, \dots$, όπου N_m είναι οι συναρτήσεις Neumann και r_1 είναι η εσωτερική ακτίνα. Η σχέση αυτή είναι απολύτως ανάλογη με την (5.1.1). Οι ιδιοσυναρτήσεις για τις εξισώσεις Helmholtz (2.1.1), (2.1.2) είναι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων Bessel και Neumann εφόσον το χωρίο είναι σφαιρικά διαστρωματωμένο. Χρησιμοποιώντας λογισμικό εύρεσης ριζών μπορούμε να υπολογίσουμε πραγματικές και μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας.

Η κύρια ιδέα για το αντίστροφο πρόβλημα είναι η ακόλουθη. Υποθέτουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις γνωρίζουμε τη θέση της κάθε ιδιοτιμής στο φάσμα και ελαχιστοποιούμε το σφάλμα $\sum_{i=1}^l |k_i^{(N)} - k_i|$ θεωρώντας ότι οι υπολογισμένες ιδιοτιμές είναι συναρτήσεις των (n_1, n_2, r_1) . Εξετάζουμε δύο διαφορετικά προβλήματα: στο πρώτο γνωρίζουμε τις πρώτες πραγματικές ιδιοτιμές και στο δεύτερο τις πρώτες πραγματικές και μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας.

5.1.2.1 Ανακατασκευές με χρήση μόνο πραγματικών ιδιοτιμών

Ανακατασκευάζουμε τον άγνωστο δείκτη διάθλασης χρησιμοποιώντας τις 4 πρώτες πραγματικές ιδιοτιμές για παραδείγματα στο εύρος $0.1 \leq r_1 \leq 1$ και $5 \leq n_1, n_2 \leq 20$. Σε αυτή την περίπτωση, ο δείκτης διάθλασης δεν είναι αρκετά κοντά στο $n(x) = 1$. Από αριθμητικούς υπολογισμούς έχουμε ότι δεν παρουσιάζονται μιγαδικές ιδιοτιμές με μικρό μέτρο και άρα χρησιμοποιούμε μόνο πραγματικές ιδιοτιμές.

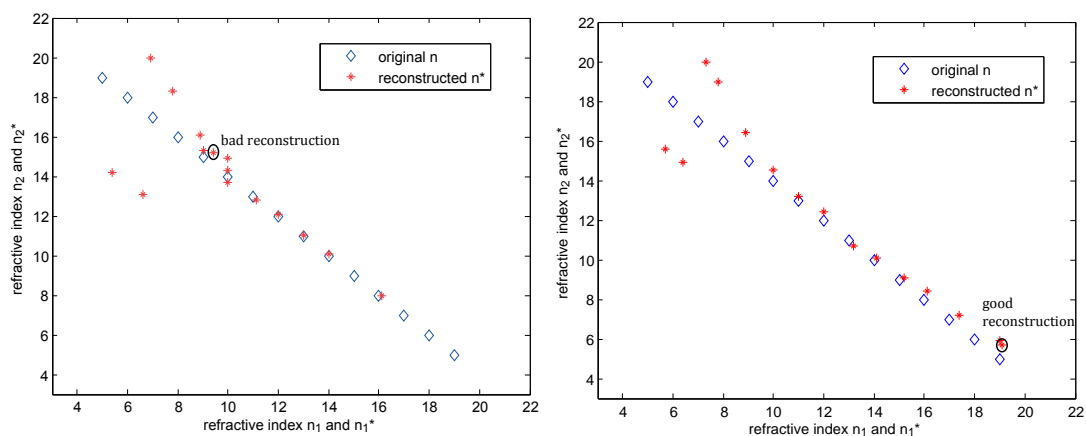
Χρησιμοποιούμε την ίδια βάση $\{\phi_i\}_{i=1}^{20}$ με την περίπτωση του σταθερού δείκτη και υπολογίζουμε τους πίνακες $A^{(N)}, B^{(N)}, C^{(N)}$ για $0.1 \leq r_1 \leq 1$ με βήμα 0.1. Λύνουμε το ευθύ πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `polyeig` του Matlab για $5 \leq n_1, n_2 \leq 20$ με βήμα 0.1 και κατασκευάζουμε μία βάση δεδομένων από τις ιδιοτιμές $k^{(N)}$, για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των n_1, n_2 και r_1 . Ο αλγόριθμος για το αντίστροφο πρόβλημα βασίζεται στην ελαχιστοποίηση του σφάλματος μεταξύ των μικρότερων πραγματικών ιδιοτιμών διαπερατότητας και των αντίστοιχων προσεγγιστικών ιδιοτιμών. Ελαχιστοποιώντας το σφάλμα $\sum_{i=1}^l |k_i - k_i^{(N)}|^2$ για $l = 4$, ανακατασκευάζουμε τον $n(x)$ με σχετικά καλή ακρίβεια όπως μπορούμε να δούμε στον πίνακα 5.2. Σημειώνουμε ότι εδώ θεωρούμε την εσωτερική ακτίνα ως μία άγνωστη παράμετρο. Έτσι, η μέθοδος μπορεί να καλύψει περιπτώσεις όπου το ακριβές μέγεθος του στρώματος δεν είναι γνωστό. Ακόμα, ορισμένες ανακατασκευές στον πίνακα 5.2 είναι πιο ακριβείς από αυτές στην εργασία [48, πίνακας 2], επειδή εδώ χρησιμοποιήσαμε μεγαλύτερη βάση για τη μέθοδο Galerkin.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η ανακατασκευή του άγνωστου δείκτη δεν είναι αρκετά ακριβής. Για παράδειγμα ο δείκτης (19, 5, 0.7) ανακατασκευάζεται ως (9, 15.3, 0.4). Αυτό το πρόβλημα επιλύεται αν χρησιμοποιήσουμε περισσότερες ιδιοτιμές. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε ως δεδομένα 8 ιδιοτιμές αντί για 4, ο δείκτης προσεγγίζεται ως (19, 5.9, 0.7) (βλ. σχήμα 5.5). Παρατηρούμε ότι οι μη ικανοποιητικές ανακατασκευές αντιστοιχούν

Πίνακας 5.2: Ανακατασκευές για κατά τμήματα σταθερό δείκτη διάθλασης χρησιμοποιώντας μόνο πραγματικές ιδιοτιμές διαπερατότητας

(n_1, n_2, r_1)	αναλυτικές ι.δ. $\{k_0, k_1, k_2, k_3\}$	προσεγγιστικές $\{k_0^*, k_1^*, k_2^*, k_3^*\}$	(n_1^*, n_2^*, r_1^*)
(5 14 0.1)	1.0916, 1.4019, 1.7279, 2.0480	1.0915, 1.4028, 1.7290, 2.0495	(7.9 14 0.1)
(16 8 0.2)	1.3121, 1.8406, 2.3058, 2.7321	1.3108, 1.8538, 2.2972, 2.7175	(17.2 8.1 0.2)
(18 5 0.3)	1.3787, 1.8635, 2.6059, 3.3562	1.4699, 1.8619, 2.5485, 3.3044	(14 5 0.4)
(7 17 0.4)	1.1847, 1.4027, 1.6352, 1.8894	1.1743, 1.4186, 1.6368, 1.8814	(7.6 17.3 0.4)
(13 5 0.5)	1.4957, 1.7336, 2.1694, 2.6974	1.4654, 1.7104, 2.1691, 2.7361	(14 5 0.5)
(5 8 0.6)	1.7889, 2.2483, 2.6654, 3.0329	1.7612, 2.2483, 2.6766, 3.0430	(5.0 8.4 0.6)
(10 8 0.7)	1.3716, 1.7304, 2.1086, 2.4934	1.3723, 1.7309, 2.1098, 2.4955	(10.0 8.0 0.7)
(13 11 0.8)	1.1487, 1.4884, 1.8248, 2.1547	1.1472, 1.4872, 1.8242, 2.1550	(13.0 11.1 0.8)
(6 13 0.9)	1.5885, 2.0239, 2.5120, 3.0009	1.5849, 2.0260, 2.5124, 3.0014	(5.9 15.4 0.9)

σε δείκτες με σχετικά μεγάλο άλμα ανάμεσα στα δύο στρώματα. Για να επαληθεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα, θεωρούμε για παράδειγμα το αντίστροφο πρόβλημα για δείκτες διάθλασης σε δίσκο με εσωτερική ακτίνα $r_1 = 0.7$ και τιμές $n_1, n_2 \in [5, 19]$ έτσι ώστε $n_1 + n_2 = 24$ (π.χ. (5, 19), (6, 18), ...). Λύνουμε το αντίστροφο πρόβλημα χρησιμοποιώντας 4 και 8 ιδιοτιμές αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 5.5. Παρόλα αυτά, η αριθμητική μέθοδος που παρουσιάσαμε παραπάνω μπορεί να είναι χρήσιμη σε εφαρμογές όπως ο μη καταστροφικός έλεγχος υλικών, επειδή μπορεί να προσδιορίσει τον άγνωστο δείκτη χρησιμοποιώντας λίγες ιδιοτιμές διαπερατότητας.

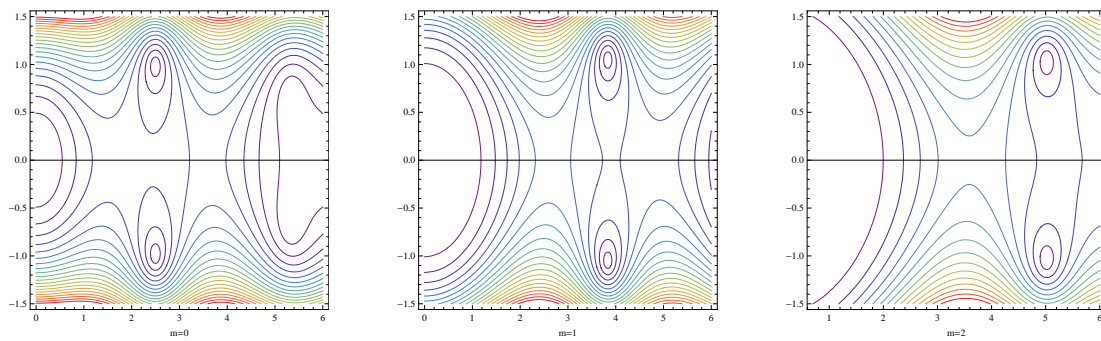
**Σχήμα 5.5:** Ανακατασκευές για $r_1 = 0.7$ χρησιμοποιώντας 4 ιδιοτιμές (αριστερά) και 8 ιδιοτιμές (δεξιά)**5.1.2.2** Ανακατασκευές με χρήση πραγματικών και μιγαδικών ιδιοτιμών

Στην περίπτωση όπου ο δείκτης $n(x)$ παίρνει τιμές κοντά στο 1, περισσότερες μιγαδικές ιδιοτιμές εμφανίζονται όπως αποδεικνύεται στο θεώρημα 2.4.1. Για περισσότερα αποτε-

Πίνακας 5.3: Ανακατασκευές για κατά τμήματα σταθερό δείκτη διάθλασης χρησιμοποιώντας πραγματικές και μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας

(n_1, n_2, r_1)	αναλυτικές ι.δ. $\{k_0, k_1, k_2, k_3\}$	προσεγγιστικές $\{k_0^*, k_1^*, k_2^*, k_3^*\}$	(n_1^*, n_2^*, r_1^*)
(5 2 0.1)	2.4965+0.9904i, 3.8331+1.0549i, 5.0181+1.0370i, 5.3422+0.6662i	2.4450+0.9839i, 3.8243+1.0543i, 5.0163+1.0480i, 5.2558+0.6727i	(4.5 2.0 0.2)
(4 3 0.3)	2.3183+0.74235i, 3.7319+0.4273i, 3.8728, 4.0985	2.3135+0.7357i, 3.7259+0.4588i, 3.8397, 4.1180	(4.2 3.0 0.3)
(2 4 0.5)	2.4317+0.6964i, 3.5768+0.5709i, 3.9082, 4.1101	2.3847+0.7374i, 3.5806+0.5381i, 3.9076, 4.1165	(2.4 3.5 0.4)
(5 3 0.6)	2.2966+0.7428i, 2.8845, 3.1834, 3.2932	2.2827+0.7408i, 2.8600, 3.1933, 3.2845	(5.1 3.0 0.6)
(2 4 0.7)	2.4257+0.6292i, 3.7545+0.6136i, 4.9642+0.4386i, 5.0402	2.3969+0.6496i, 3.6879+0.6052i, 4.9051+0.4229i, 5.0442	(2.1 3.9 0.7)
(3 6 0.8)	2.2202+0.4778i, 3.0247, 3.6685, 3.7963	2.2063+0.5026i, 3.0612, 3.6779, 3.8045	(3.0 6.0 0.8)
(6 2 0.9)	2.0212, 2.4177, 2.7382+0.4470i, 2.9295	2.0344, 2.4250, 2.7187+0.4648i, 2.9778	(6.0 2.6 0.9)

λέσματα σχετικά με μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας παραπέμπουμε στην παράγραφο 2.4. Σημειώνουμε ότι εφόσον ο δείκτης διάθλασης $n(x)$ είναι πραγματική συνάρτηση, οι μιγαδικές ιδιοτιμές πρέπει να εμφανίζονται ως συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. Χρησιμοποιώντας λογισμικό εύρεσης ριζών και γραφήματα ισοϋψών καμπύλων, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές από τις εξισώσεις που προκύπτουν από τον χωρισμό μεταβλητών (5.1.3). Στο σχήμα 5.6 παρουσιάζονται οι ιδιοτιμές διαπερατότητας με μικρότερο μέτρο για τον δείκτη διάθλασης (5, 2, 0.1).



Σχήμα 5.6: Γραφήματα ισοϋψών καμπύλων για $n_1 = 5$, $n_2 = 2$ και $r_1 = 0.1$

Χρησιμοποιούμε την ίδια βάση $\{\phi_i\}_{i=1}^{20}$ και λύνουμε το αντίστροφο πρόβλημα για το εύρος δεικτών $2 \leq n_1, n_2 \leq 6$ με βήμα 0.1 και εσωτερική ακτίνα $0.1 \leq r_1 \leq 1$ με βήμα 0.1. Ελαχιστοποιώντας το σφάλμα

$$\sum_{i=1}^l (|\operatorname{Re}k_i - \operatorname{Re}k_i^{(N)}|^2 + |\operatorname{Im}k_i - \operatorname{Im}k_i^{(N)}|^2)$$

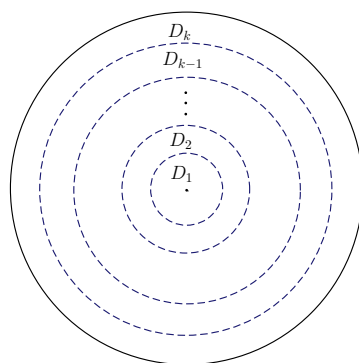
προσεγγίζουμε τον δείκτη $n(x)$.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στον πίνακα 5.3, έχουμε ανακατασκευές του $n(x)$ με καλή ακρίβεια για την περίπτωση όπου ο δείκτης παίρνει τιμές κοντά στο 1. Σημειώνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση, αν χρησιμοποιήσουμε μόνο τις 4 πρώτες πραγματικές ιδιοτιμές, οι ανακατασκευές δεν είναι αρκετά ικανοποιητικές. Για παράδειγμα, ο δείκτης $(5, 2, 0.1)$ ανακατασκευάζεται ως $(2.5, 2, 0.3)$. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο μελετήσαμε αυτή την περίπτωση χωριστά. Αυτό το αποτέλεσμα είναι σημαντικό καθώς από αυτή την αριθμητική μέθοδο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τόσο οι πραγματικές όσο και οι μιγαδικές ιδιοτιμές εμπεριέχουν πληροφορία για τον δείκτη διάθλασης.

5.2 Η μέθοδος Newton για το αντίστροφο πρόβλημα

Στη συνέχεια προτείνουμε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό του άγνωστου δείκτη διάθλασης για χωρία με δύο ή περισσότερα στρώματα. Το βασικότερο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου, πέρα από το γεγονός ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε χωρία με πιο σύνθετη γεωμετρία, είναι το ότι δεν απαιτείται να συγκρίνουμε τις αναλυτικά γνωστές ιδιοτιμές με τις αντίστοιχες προσεγγιστικές με βάση τη θέση τους στο φάσμα.

Υποθέτουμε ότι το $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα σφαιρικά συμμετρικό χωρίο με k -στρώματα έτσι ώστε $D = \cup_{i=1}^k D_i$ και τα $\{\partial D_i\}_{i=1}^k$ είναι ομόκεντροι κύκλοι



Σχήμα 5.7: Ένας δίσκος με k -στρώματα

Ο άγνωστος, κατά τμήματα σταθερός δείκτης διάθλασης $n(x)$ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & x \in D_1 \\ \vdots & \\ n_k, & x \in D_k \end{cases}$$

Θεωρούμε ότι $n(x) > 1$. Οι ιδιοτιμές διαπερατότητας είναι οι ρίζες της ορίζουσας ενός $2k \times 2k$ τετραγωνικού πίνακα, ανάλογης της (5.1.3), η οποία προκύπτει από τον χωρισμό μεταβλητών.

Μπορούμε να επιλύσουμε το αντίστοιχο αντίστροφο τετραγωνικό πρόβλημα ιδιοτιμών (4.1.13), χρησιμοποιώντας μία μέθοδο Newton [44]. Οι $N \times N$ πίνακες $A^{(N)}, B^{(N)}, C^{(N)}$ γράφονται στην ακόλουθη μορφή:

$$A^{(N)} = \sum_{l=1}^k \frac{1}{n_l - 1} A_l \quad (5.2.4)$$

$$B^{(N)} = \sum_{l=1}^k \left(\frac{n_l}{n_l - 1} B_l^{(1)} + \frac{1}{n_l - 1} B_l^{(2)} \right) \quad (5.2.5)$$

$$C^{(N)} = \sum_{l=1}^k \frac{n_l}{n_l - 1} C_l \quad (5.2.6)$$

όπου:

$A_l = \int_{D_l} \Delta \phi_i \Delta \bar{\phi}_j dx$, $B_l^{(1)} = \int_{D_l} \Delta \phi_i \bar{\phi}_j dx$, $B_l^{(2)} = \int_{D_l} \phi_i \Delta \bar{\phi}_j dx$ και $C_l = \int_{D_l} \phi_i \bar{\phi}_j dx$, για $i, j = 1, \dots, N$. Από την ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου, έχουμε ότι οι $\{A_l\}_{l=1}^k$, $\{(B_l^{(1)} + B_l^{(2)})\}_{l=1}^k$, $\{C_l\}_{l=1}^k$ είναι συμμετρικοί και οι $\{A_l\}_{l=1}^k$ είναι θετικά ορισμένοι. Επίσης, εάν θέσουμε $a_l := 1/(n_l - 1)$ τότε οι πίνακες (5.2.4)-(5.2.6) μπορούν να εκφραστούν ως:

$$A^{(N)} = \sum_{l=1}^k a_l A_l \quad (5.2.7)$$

$$B^{(N)} = \sum_{l=1}^k B_l^{(1)} + \sum_{l=1}^k a_l (B_l^{(1)} + B_l^{(2)}) \quad (5.2.8)$$

$$C^{(N)} = \sum_{l=1}^k C_l + \sum_{l=1}^k a_l C_l \quad (5.2.9)$$

Τώρα, το αντίστροφο πρόβλημα διατυπώνεται στην ακόλουθη μορφή:

δοθέντος ενός συνόλου ιδιοτιμών $S = \{\mu_i\}_{i=1}^k$, να βρεθούν οι τιμές $\{a_l\}_{l=1}^k$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(\lambda) = \lambda^4 C^{(N)} + \lambda^2 B^{(N)} + A^{(N)}$ να έχει φάσμα $\sigma(A^{(N)}, B^{(N)}, C^{(N)}) = S$.

Χρησιμοποιούμε μία τροποποίηση ενός αλγόριθμου σχεδιασμένου για αντίστροφα προβλήματα ιδιοτιμών σε πολυώνυμα πινάκων, από την εργασία [44], τον οποίο προσαρμόσαμε στο δικό μας τετραγωνικό πρόβλημα. Συμβολίζουμε με $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ το σύνολο των αγνώστων σταθερών. Η κύρια ιδέα σε αυτή τη βηματική μέθοδο τύπου Newton είναι η επίλυση του μη γραμμικού συστήματος $f(a) := (f_1(a), \dots, f_k(a))^T = (0, \dots, 0)^T$ όπου:

$$f_i(a) = \det \left[\mu_i^4 \left(\sum_{l=1}^k C_l + \sum_{l=1}^k a_l C_l \right) + \mu_i^2 \left(\sum_{l=1}^k B_l^{(1)} + \sum_{l=1}^k a_l (B_l^{(1)} + B_l^{(2)}) \right) + \sum_{l=1}^k a_l A_l \right]$$

αντί της ελαχιστοποίησης ενός συναρτησιακού όπως το

$$g(a) = \sum_{i=1}^k |\lambda_i(a) - \mu_i|$$

η οποία ήταν και η πρώτη προσέγγιση για το πρόβλημά μας, στην προηγούμενη παράγραφο.

Με την προηγούμενη μέθοδο έπρεπε να συγκρίνουμε το $\lambda_i(a)$ με το μ_i σωστά σε κάθε βήμα. Με τη νέα μέθοδο, αυτό το πρόβλημα παρακάμπτεται. Αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό για τις εφαρμογές επειδή έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε έναν άγνωστο δείκτη διάθλασης $n(x)$ χρησιμοποιώντας ιδιοτιμές για τις οποίες δε γνωρίζουμε την ακριβή θέση τους στο φάσμα του προβλήματος διαπερατότητας. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί εάν οι ιδιοτιμές προέκυπταν από δεδομένα σκέδασης σε ένα συγκεκριμένο διάστημα κυματάρθμων.

Στην περίπτωση όπου ο αριθμός των στρωμάτων του χωρίου είναι ίσος με το πλήθος των ιδιοτιμών, το αντίστροφο πρόβλημα απλοποιείται στην ειδική περίπτωση της επίλυσης ενός συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων. Όταν το k είναι μικρότερο από το πλήθος των ιδιοτιμών (και άρα του αριθμού των εξισώσεων του συστήματος), έχουμε ένα υπερκαθορισμένο σύστημα εξισώσεων και το αντίστροφο πρόβλημα αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης χωρίς περιορισμούς [42]. Σε αυτή την περίπτωση, αντικείμενο ελαχιστοποίησης είναι το συναρτησιακό:

$$\min_{a \in \mathbb{R}^k} g(a) := \frac{1}{2} f(a)^\top f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(a)^2$$

όπου η συνάρτηση υπολοίπου $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ είναι μη γραμμική στο a . Η αντίστοιχη βηματική μέθοδος αντιστοιχεί σε μία μέθοδο Gauss-Newton, η οποία έχει το πλεονέκτημα ότι οι δεύτερες παράγωγοι, οι οποίες έχουν μεγάλο υπολογιστικό κόστος, παραλείπονται. Η τάξη σύγκλισης της μεθόδου Gauss-Newton εξαρτάται από τη σχετική μη γραμμικότητα και τη νόρμα της συνάρτησης υπολοίπου στο σημείο ελαχιστοποίησης ([42, θεώρημα 10.2.1]).

5.2.1 Ο αλγόριθμος

Παρακάτω, περιγράφουμε τα βασικά βήματα της επαναληπτικής μεθόδου Newton.

Η μέθοδος Newton

Είσοδος

- το σύνολο $\{A_l\}_{l=1}^k, \{B_l\}_{l=1}^k, \{C_l\}_{l=1}^k$ των $N \times N$ πινάκων.
- μία αρχική εκτίμηση $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_k^{(0)})$ των άγνωστων παραμέτρων $\{a_l\}_{l=1}^k$.
- το σύνολο $S = \{\mu_i\}_{i=1}^k$ των ιδιοτιμών διαπερατότητας.

Έξοδος

στο όριο η μέθοδος μας δίνει ένα διάνυσμα από τις άγνωστες παραμέτρους $\{a_l\}$ έτσι ώστε να ισχύει $\sigma(A^{(N)}, B^{(N)}, C^{(N)}) = S$.

Βήμα

1. επιλέγουμε μία αρχική τιμή $a^{(0)}$ για το διάνυσμα των άγνωστων σταθερών
 2. για $m = 0, 1, \dots$
 - α') υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα $J(a^{(m)})$ και τη συνάρτηση $f(a^{(m)})$ από τον αλγόριθμο παρακάτω
 - β') λύνουμε το σύστημα: $J(a^{(m)})\xi^{(m)} = -f(a^{(m)})$ ως προς το $\xi^{(m)}$
 - γ') υπολογίζουμε τη νέα εκτίμηση για το διάνυσμα των παραμέτρων $a^{(m+1)} = \xi^{(m)} + a^{(m)}$
 - δ') σταματάμε αν το σφάλμα $\|\xi^{(m)}\|$ είναι αρκούντως μικρό
- τέλος του βρόχου (2) (m -βρόχος).

Υπολογισμός του Ιακωβιανού πίνακα*Είσοδος*

- το σύνολο $\{A_l\}_{l=1}^k, \{B_l\}_{l=1}^k, \{C_l\}_{l=1}^k$ των $N \times N$ πινάκων.
- το k -διάνυσμα από τις παραμέτρους $a^{(m)}$ που αντιστοιχούν στο m -βήμα της μεθόδου.
- το σύνολο $S = \{\mu_i\}_{i=1}^k$ των ιδιοτιμών διαπερατότητας.

Έξοδος

- η συνάρτηση $f(a^{(m)})$
- ο Ιακωβιανός πίνακας $J(a^{(m)})$ με il -στοιχείο τη μερική παράγωγο $\partial f_i(a^{(m)})/\partial a_l$

Ο αλγόριθμος

1. για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$
 - α') υπολογίζουμε τον $N \times N$ πίνακα

$$H = \mu_i^4 \left(\sum_{l=1}^k C_l + \sum_{l=1}^k a_l C_l \right) + \mu_i^2 \left(\sum_{l=1}^k B_l^{(1)} + \sum_{l=1}^k a_l (B_l^{(1)} + B_l^{(2)}) \right) + \sum_{l=1}^k a_l A_l$$

β') χρησιμοποιούμε LU ή QR παραγοντοποίηση για τον πίνακα H και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f(a^{(m)})$ ως το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων των τριγωνικών πινάκων

γ') για κάθε $l = 1, 2, \dots, k$

i. υπολογίζουμε τον $N \times N$ πίνακα:

$$D = \mu_i^4 \left(\sum_{j=1}^k C_j + \sum_{j=1, j \neq l}^k a_j C_j \right) + \mu_i^2 \left(\sum_{j=1}^k B_j^{(1)} + \sum_{j=1, j \neq l}^k a_j (B_j^{(1)} + B_j^{(2)}) \right) + \sum_{j=1, j \neq l}^k a_j A_j$$

ii. χρησιμοποιούμε την παραγοντοποίηση QZ (γενικευμένη παραγοντοποίηση Schur) και υπολογίζουμε τους πίνακες Q και R με μοναδιαία ορίζουσα, οι οποίοι τριγωνοποιούν το ζεύγος $A_l + \mu_i^2 (B_l^{(1)} + B_l^{(2)}) + \mu_i^4 C_l, D$

iii. συμβολίζουμε $(\alpha_i, \beta_i)_{i=1}^N$ τα ζεύγη των διαγώνιων στοιχείων των QZ πινάκων

iv. βρίσκουμε τα μη μηδενικά στοιχεία α_i

v. επανατοποθετούμε τα ζεύγη (α_i, β_i) έτσι ώστε $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \dots = \alpha_N = 0$

vi. θέτουμε:

$$\left[J(a^{(m)}) \right]_{il} = \left(\prod_{i=r+1}^N \beta_i \right) \sum_{i=1}^r \alpha_i \prod_{j=1, j \neq i}^N (a_i^{(m)} \alpha_j + \beta_j)$$

τέλος του βρόχου (γ') (l -βρόχος)

τέλος του βρόχου (1) (i -βρόχος).

Σημείωση 5.2.1. Σημειώνουμε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος προϋποθέτει ίδιο αριθμό k για τις γνωστές ιδιοτιμές διαπερατότητας και για το πλήθος των στρωμάτων του χωρίου. Στην περίπτωση όπου το πλήθος των στρωμάτων είναι μικρότερο από αυτό των ιδιοτιμών, ο Ιακωβιανός πίνακας του βήματος (γ')-vi δεν είναι τετραγωνικός και τότε το σύστημα (2)-b μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας το γενικευμένο αντίστροφο του Ιακωβιανού πίνακα, ή μία μέθοδο τύπου Tikhonov.

5.2.2 Αριθμητικά παραδείγματα

Στα ακόλουθα παραδείγματα, ελέγχουμε τον αλγόριθμο σε χωρία με δύο ή περισσότερα στρώματα, χρησιμοποιώντας ως δεδομένα ένα σύνολο από ιδιοτιμές διαπερατότητας. Επίσης συγκρίνουμε τη μέθοδό μας με άλλες μεθόδους ελαχιστοποίησης του Matlab

και του Mathematica. Όλοι οι υπολογισμοί έγιναν σε έναν συνηθισμένο intel core i5 υπολογιστή.

5.2.2.1 Χωρία με δύο στρώματα

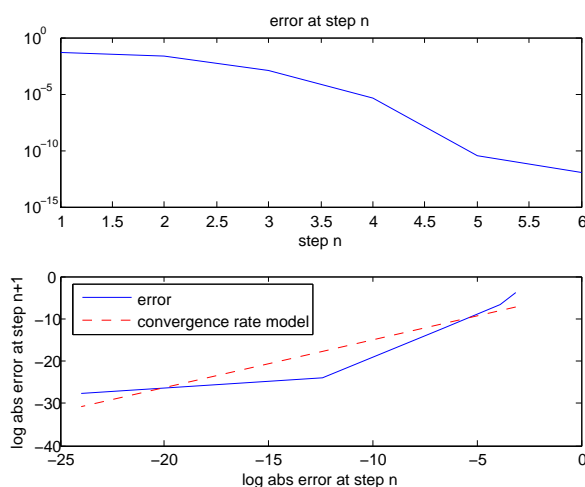
Ελέγξαμε τον αλγόριθμο στην απλή περίπτωση του σφαιρικά διαστρωματωμένου χωρίου με δύο στρώματα όπου η θέση της ασυνέχειας είναι γνωστή. Χρησιμοποιήσαμε ένα σύνολο από πίνακες A, B, C διάστασης 8×8 της μορφής (5.2.7), (5.2.8) και (5.2.9). Το σύνολο S των 16 πραγματικών και μιγαδικών ιδιοτιμών υπολογίστηκε αριθμητικά από το πολυώνυμο $P(\lambda) = \lambda^4 C + \lambda^2 B + A$, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `polyeig` του Matlab.

Παράδειγμα 5.2.2. Θεωρούμε ένα μοναδιαίο δίσκο με δύο στρώματα και έναν κατά τμήματα σταθερό δείκτη διάθλασης με τιμές 12 και 6 αντίστοιχα. Η θέση της ασυνέχειας είναι στο $r = 0.8$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

(n_1, n_2)	αρχική εκτίμηση	σφάλμα	ανακατασκευή	βήματα	νόρμα υπολοίπου
(12, 6)	(9, 9)	10^{-6}	(12.000, 5.999)	6	10^8

Σημειώνουμε ότι η νόρμα της συνάρτησης υπολοίπου είναι μεγάλη επειδή η ορίζουσα του πολυωνύμου $\lambda^4 C + \lambda^2 B + A$ είναι ισχυρά μη γραμμική στο λ . Η νόρμα γίνεται αρκετά μικρότερη εάν χρησιμοποιήσουμε αυθαίρετη ακρίβεια στους υπολογισμούς, αντί της προεπιλεγμένης κινητής υποδιαστολής διπλής ακρίβειας (βλ. για παράδειγμα [1]).

Υπολογίζουμε επίσης την τάξη σύγκλισης της μεθόδου Gauss-Newton από την κλίση της γραμμής που προσεγγίζει το σφάλμα στο βήμα $n + 1$ και n αντίστοιχα.

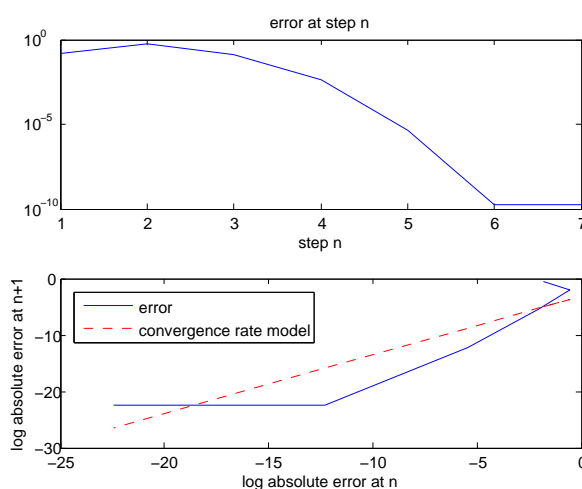


Σχήμα 5.8: Τάξη σύγκλισης για το παράδειγμα 5.2.2

Η κλίση της κόκκινης γραμμής στο σχήμα 5.8 υποδεικνύει ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει με τάξη 1.13.

Παράδειγμα 5.2.3. Θεωρούμε ένα μοναδιαίο δίσκο με δύο στρώματα και έναν κατά τμήματα σταθερό δείκτη διάθλασης με τιμές $\sqrt{2}$ και 12.31 αντίστοιχα. Η θέση της ασυνέχειας είναι στο $r = 0.2$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

(n_1, n_2)	αρχική εκτίμηση	σφάλμα	ανακατασκευή	βήματα	νόρμα υπολοίπου
$(\sqrt{2}, 12.31)$	(8, 8)	10^{-6}	(1.4142, 12.310)	7	10^7



Σχήμα 5.9: Τάξη σύγκλισης για το παράδειγμα 5.2.3

Η κλίση της κόκκινης γραμμής στο σχήμα 5.9 υποδεικνύει ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει με τάξη 1.04.

Αναλυτικά υπολογισμένες ιδιοτιμές διαπερατότητας:

Δοκιμάσαμε επίσης τον αλγόριθμο χρησιμοποιώντας ως δεδομένα τις πρώτες 6 αναλυτικά υπολογισμένες ιδιοτιμές διαπερατότητας από τον χωρισμό μεταβλητών (5.1.3). Για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης, χρησιμοποιήσαμε ένα σύνολο από 20×20 τετραγωνικούς πίνακες. Εάν χρησιμοποιήσουμε πίνακες μικρότερης διάστασης (δηλ. μία μικρότερη βάση για τη μέθοδο Galerkin) οι ανακατασκευές δεν είναι ικανοποιητικές. Αυτό προκύπτει ως μία άμεση συνέπεια του θεωρήματος σύγκλισης 4.1.2 για το διακριτό πρόβλημα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

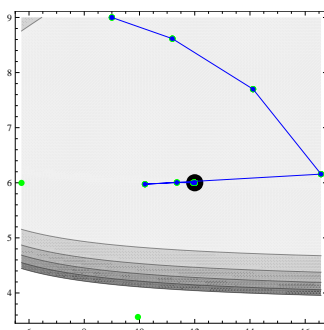
(n_1, n_2)	αρχική εκτίμηση	σφάλμα	ανακατασκευή	βήματα	νόρμα υπολοίπου
(12, 6)	(9, 9)	10^{-6}	(11.922, 6.524)	25	10^{33}
$(\sqrt{2}, 12.31)$	(8, 8)	10^{-6}	(3.189, 12.598)	15	10^{31}

Άλλες μέθοδοι ελαχιστοποίησης:

Συγκρίνουμε τη μέθοδό μας με τις ρουτίνες `lsqnonlin` του *Matlab* και `FindMinimum` του *Mathematica*. Χρησιμοποιήσαμε πίνακες διάστασης 8×8 και τις αντίστοιχες 16 πραγματικές και μιγαδικές ιδιοτιμές.

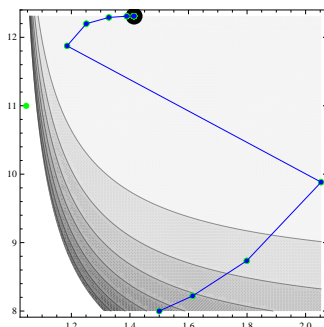
Πίνακας 5.4: Ανακατασκευές για το παράδειγμα 5.2.2

μέθοδος	αρχική εκτίμηση	ανακατασκευή	βήματα	χρόνος σύγκλισης
Gauss-Newton	(9, 9)	(12.000, 5.999)	6	0.41 sec
lsqnonlin	(9, 9)	(11.999, 6.000)	139	21.04 sec
FindMinimum	(9, 9)	(12.000, 6.000)	8	2.41 sec

**Σχήμα 5.10:** Ελαχιστοποίηση με `FindMinimum` για το παράδειγμα 5.2.2**Πίνακας 5.5:** Ανακατασκευές για το παράδειγμα 5.2.3

μέθοδος	αρχική εκτίμηση	ανακατασκευή	βήματα	χρόνος σύγκλισης
Gauss-Newton	(8, 8)	(1.414, 12.310)	7	0.39 sec
lsqnonlin	(1.5, 8)	(1.414, 12.309)	9	1.45 sec
FindMinimum	(1.5, 8)	(1.414, 12.310)	10	2.17 sec

Σημειώνουμε ότι για το παράδειγμα 5.2.3, οι άλλες μέθοδοι δεν συγκλίνουν εάν χρησιμοποιήσουμε ως αρχική εκτίμηση τις τιμές (8, 8).

**Σχήμα 5.11:** Ελαχιστοποίηση με `FindMinimum` για το παράδειγμα 5.2.3

5.2.2.2 Χωρία με πολλά στρώματα

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο σε χωρία με περισσότερα από δύο στρώματα. Θεωρούμε έναν μοναδιαίο δίσκο με πέντε στρώματα τα οποία έχουν πλάτος 0.2 και υπολογίζουμε τους αντίστοιχους πίνακες από τις σχέσεις (5.2.7), (5.2.8) και (5.2.9). Χρησιμοποιούμε πίνακες διάστασης 8×8 και τις αντίστοιχες 16 πραγματικές και μιγαδικές ιδιοτιμές. Για το αντίστροφο πρόβλημα, υποθέτουμε ότι η θέση κάθε στρώματος δεν είναι γνωστή από πριν. Αυτή η μέθοδος μπορεί να είναι χρήσιμη σε εφαρμογές όπως ο έλεγχος υλικών, όπου η εσωτερική δομή του χωρίου δεν είναι γνωστή.

Παράδειγμα 5.2.4. Θεωρούμε έναν μοναδιαίο δίσκο με πέντε στρώματα και έναν κατά τμήματα σταθερό δείκτη με τιμές (15.2, 5.3, 19.2, 18, 8.3) σε κάθε στρώμα αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$	αρχική εκτίμηση	σφάλμα	ανακατασκευή	βήματα
(15.2, 5.3, 19.2, 18, 8.3)	(10, 10, 10, 10, 10)	10^{-6}	(15.200, 5.299, 19.200, 17.999, 8.300)	6

Παράδειγμα 5.2.5. Θεωρούμε έναν μοναδιαίο δίσκο με δύο στρώματα και έναν κατά τμήματα σταθερό δείκτη διάθλασης με τιμές 5 και 8 όπου η θέση της ασυνέχειας είναι για $r = 0.6$. Δοκιμάζουμε τον αλγόριθμο υποθέτοντας ότι ο άγνωστος δείκτης έχει το πολύ πέντε στρώματα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$	αρχική εκτίμηση	σφάλμα	ανακατασκευή	βήματα
(5, 5, 5, 8, 8)	(6.5, 6.5, 6.5, 6.5, 6.5)	10^{-6}	(4.999, 5.000, 4.999, 8.000, 8.000)	7

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη θέση της ασυνέχειας.

Δοκιμάζουμε τον αλγόριθμο για τον παραπάνω κατά τμήματα σταθερό δείκτη, παίρνοντας ως δεδομένα τις πρώτες 6 αναλυτικά υπολογισμένες ιδιοτιμές διαπερατότητας και ένα σύνολο από 20×20 πίνακες. Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε την ανακατασκευή:

$(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$	αρχική εκτίμηση	σφάλμα	ανακατασκευή	βήματα
(5, 5, 5, 8, 8)	(6.5, 6.5, 6.5, 6.5, 6.5)	10^{-6}	(5.279, 4.721, 5.408, 7.915, 8.038)	12

Από αυτό το παράδειγμα επαληθεύουμε ότι μπορούμε να ανακτήσουμε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του άγνωστου δείκτη διάθλασης χρησιμοποιώντας και τις αναλυτικά υπολογισμένες ιδιοτιμές του προβλήματος.

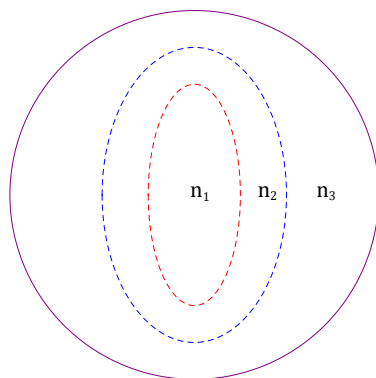
5.2.3 Γενίκευση της μεθόδου για μη σφαιρικά συμμετρικά χωρία

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο σε κάθε φραγμένο και απλά συνεκτικό χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$, $D = \cup_{i=1}^m D_i$, $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$, όπου ο δείκτης διάθλασης είναι κατά τμήματα σταθερός:

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & x \in D_1 \\ \vdots \\ n_m, & x \in D_m \end{cases}$$

Το τελικό αριθμητικό σχήμα και ο αλγόριθμος είναι ίδια, με μόνη διαφορά ότι οι πίνακες (5.2.4), (5.2.5) και (5.2.6), ορίζονται στα αντίστοιχα χωρία $D_i, i = 1, \dots, m$. Υποθέτουμε ότι η ακριβής γεωμετρία των χωρίων είναι γνωστή.

Παράδειγμα 5.2.6. Δίνουμε το παράδειγμα ενός δίσκου με δύο εσωτερικά ελλειπτικά στρώματα τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις $(2x)^2 + (5y/4)^2 = 1$ και $(4x)^2 + (5y/3)^2 = 1$.



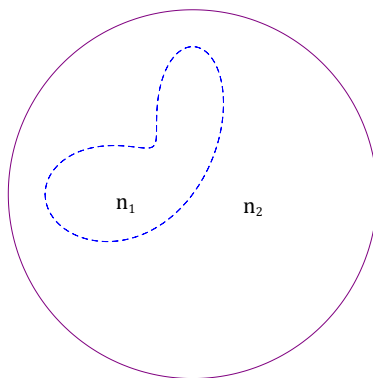
Σχήμα 5.12: Ένας δίσκος με δύο ελλειπτικά στρώματα

Δοκιμάσαμε τον αλγόριθμο χρησιμοποιώντας 8×8 πίνακες και 16 ιδιοτιμές και η ανακατασκευή δίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

(n_1, n_2, n_3)	αρχική εκτίμηση	σφάλμα	ανακατασκευή	βήματα
(12.2, 2.3, 8.7)	(6, 6, 6)	10^{-6}	(12.199, 2.299, 8.700)	7

Παράδειγμα 5.2.7. Θεωρούμε έναν μοναδιαίο δίσκο με ένα έγκλεισμα σε σχήμα φυστικού το οποίο δίνεται από την εξίσωση $4(\sin^7 \theta - \cos^3 \theta)/5$ σε πολικές συντεταγμένες.

Χρησιμοποιήσαμε 8×8 πίνακες και 16 ιδιοτιμές και στον ακόλουθο πίνακα δίνεται η ανακατασκευή:



Σχήμα 5.13: Ένας δίσκος με έγκλεισμα σε σχήμα φυστικιού

(n_1, n_2)	αρχική εκτίμηση	σφάλμα	ανακατασκευή	βήματα
(6.2, 18.1)	(12, 12)	10^{-6}	(6.199, 18.100)	6

Σημείωση 5.2.8. Η μέθοδος Newton που χρησιμοποιήσαμε στα παραπάνω παραδείγματα μας εξασφαλίζει ακριβείς ανακατασκευές για απλά χωρία με κατά τμήματα σταθερό δείκτη διάθλασης. Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου σε χωρία με πιο σύνθετη γεωμετρία και η αντίστοιχη ανάλυση σφάλματος και ευστάθειας είναι ένα μελλοντικό έργο που αξίζει τον κόπο.

Περιεχόμενα

Παράρτημα 1	Η αναπαράσταση του c_{2l+2}
Παράρτημα 2	Το ασυνεχές πρόβλημα Goursat
Παράρτημα 3	Ο δείκτης διάθλασης με πεπερασμένες ασυνέχειες
Παράρτημα 4	Ακέραιες συναρτήσεις

Α'.1

 Η αναπαράσταση του c_{2l+2}

Από την εξίσωση (2.3.57) έχουμε

$$c_{2l+2} \left[\frac{2^{l+1} \Gamma(l+3/2)}{\sqrt{\pi} a^{(l-1)/2}} \right]^2 = a \int_0^a \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\sqrt{rs}} \int_0^{\sqrt{rs}} tm(t) dt \right) \Big|_{r=a} s^l ds - l \int_0^a \frac{1}{2\sqrt{as}} \int_0^{\sqrt{as}} tm(t) dt s^l ds + \frac{a^l}{2} \int_0^a tm(t) dt \quad (\text{A'.1.1})$$

Υπολογίζουμε:

$$a \int_0^a \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\sqrt{rs}} \int_0^{\sqrt{rs}} tm(t) dt \right) \Big|_{r=a} s^l ds = a \int_0^a \frac{sm(\sqrt{as})}{4\sqrt{as}} s^l ds - a \int_0^a \frac{s}{4(as)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{as}} tm(t) dt s^l ds \quad (\text{A'.1.2})$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{as}$, $ds = 2y/ady$ και $0 < y < a$, οπότε:

$$a \int_0^a \frac{sm(\sqrt{as})}{4\sqrt{as}} s^l ds = a \int_0^a \frac{m(y)y^2 y^{2l} 2y}{4ay a^l a} dy = \int_0^a \frac{y^{2l+2} m(y)}{2a^{l+1}} dy \quad (\text{A'.1.3})$$

Επίσης, το χωρίο ολοκλήρωσης για το διπλό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (A'.1.2) γίνεται:

$$D = \{(t, s) : 0 < t < \sqrt{as} \text{ και } 0 < s < a\} = \{(t, s) : 0 < t < a \text{ και } t^2/a < s < a\}$$

Έτσι, εάν αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης έχουμε

$$\begin{aligned} -a \int_0^a \frac{s}{4(as)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{as}} tm(t) dt s^l ds &= -a \int_{t^2/a}^a \int_0^a \frac{s}{4(as)^{3/2}} tm(t) s^l dt ds \\ &= -a \int_0^a \int_{t^2/a}^a \frac{s}{4(as)^{3/2}} tm(t) s^l ds dt \\ &= -a \int_0^a \frac{tm(t)}{4a^{3/2}} \int_{t^2/a}^a s^{l-1/2} ds dt \\ &= -a \int_0^a \frac{tm(t)}{4a^{3/2}} \left(\frac{a^{l+1/2}}{l+1/2} - \frac{t^{2(l+1/2)}}{a^{l+1/2}(l+1/2)} \right) dt \\ &= \frac{-a^l}{2(2l+1)} \int_0^a tm(t) dt + \frac{1}{2(2l+1)a^{l+1}} \int_0^a t^{2l+2} m(t) dt \end{aligned} \quad (\text{A'.1.4})$$

Μία αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης για τον δεύτερο όρο της εξίσωσης (Α'.1.1) συνεπάγεται:

$$\begin{aligned}
 -l \int_0^a \frac{1}{2\sqrt{as}} \int_0^{\sqrt{as}} tm(t)dt s^l ds &= -l \int_0^a \frac{tm(t)}{2\sqrt{a}} \int_{t^2/a}^a s^{l-1/2} ds dt \\
 &= -l \int_0^a \frac{tm(t)}{2\sqrt{a}} \left(\frac{a^{l+1/2}}{l+1/2} - \frac{t^{2(l+1/2)}}{a^{l+1/2}(l+1/2)} \right) dt \\
 &= \frac{-la^l}{2l+1} \int_0^a tm(t)dt + \frac{l}{(2l+1)a^{l+1}} \int_0^a t^{2l+2}m(t)dt
 \end{aligned} \tag{Α'.1.5}$$

Άρα, αφού αντικαταστήσουμε τις (Α'.1.3)-(Α'.1.5) στην (Α'.1.1) καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}
 c_{2l+2} &= \frac{\pi a^{l-1}}{(2^{l+1}\Gamma(l+3/2))^2} \left[\frac{1}{2a^{l+1}} \int_0^a t^{2l+2}m(t)dt - \frac{a^l}{2(2l+1)} \int_0^a tm(t)dt \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2(2l+1)a^{l+1}} \int_0^a t^{2l+2}m(t)dt - \frac{la^l}{2l+1} \int_0^a tm(t)dt + \frac{l}{(2l+1)a^{l+1}} \int_0^a t^{2l+2}m(t)dt \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a^l}{2} \int_0^a tm(t)dt \right] \\
 &= \frac{\pi a^{l-1}}{(2^{l+1}\Gamma(l+3/2))^2} \left[\left(\frac{1}{2a^{l+1}} + \frac{1}{2(2l+1)a^{l+1}} + \frac{l}{(2l+1)a^{l+1}} \right) \int_0^a t^{2l+2}m(t)dt \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{a^l}{2(2l+1)} - \frac{la^l}{2l+1} + \frac{a^l}{2} \right) \int_0^a tm(t)dt \right] \\
 &= \frac{\pi a^{l-1}}{(2^{l+1}\Gamma(l+3/2))^2} \left[\frac{1}{a^{l+1}} \int_0^a t^{2l+2}m(t)dt \right] \\
 &= \frac{\pi}{a^2 (2^{l+1}\Gamma(l+3/2))^2} \int_0^a t^{2l+2}m(t)dt
 \end{aligned}$$

και η αναπαράσταση (2.3.58) αποδείχθηκε.

A'.2 Το ασυνεχές πρόβλημα Goursat

Από την αναπαράσταση (2.3.53), έχουμε:

$$G(r, s, k) = -\frac{k^2}{2\sqrt{rs}} \int_0^{\sqrt{rs}} t(n(t) - 1) dt - \frac{k^2}{\sqrt{rs}} \int_1^{\sqrt{r/s}} \int_0^{\sqrt{rs}} t^2 \tau \left[n(t\tau) - \frac{1}{\tau^4} \right] G\left(t\tau, \frac{t}{\tau}, k\right) dt d\tau \quad (A'.2.6)$$

όπου το G είναι η μοναδική λύση του προβλήματος Goursat (2.3.50)-(2.3.52), για $0 < s \leq r < 1$.

Τώρα υποθέτουμε ότι ο δείκτης διάθλασης $n(r)$ είναι ασυνεχής στο $d \in (0, 1)$, και ικανοποιεί τις συνθήκες άλματος (3.1.2)-(3.1.4). Εξετάζουμε κατά πόσο η ασυνέχεια του δείκτη διάθλασης επηρεάζει το πρόβλημα Goursat.

Εάν παραγωγίσουμε την (A'.2.6) ως προς r , παίρνουμε:

$$G_r(r, s) = -\frac{k^2 \sqrt{s}}{4\sqrt{r}} (n(\sqrt{rs}) - 1) + \frac{k^2}{4\sqrt{sr}^{3/2}} \int_0^{\sqrt{rs}} t(n(t) - 1) dt - \frac{k^2 s}{2} \int_1^{\sqrt{r/s}} \tau \left[n(\tau\sqrt{rs}) - \frac{1}{\tau^4} \right] G\left(\tau\sqrt{rs}, \frac{\sqrt{rs}}{\tau}\right) d\tau - \frac{k^2}{2\sqrt{rs}^{3/2}} \int_0^{\sqrt{rs}} t^2 \left[n\left(\sqrt{\frac{r}{s}}t\right) - \frac{s^2}{r^2} \right] G\left(\sqrt{\frac{r}{s}}t, \sqrt{\frac{s}{r}}t\right) dt + \frac{k^2}{2\sqrt{sr}^{3/2}} \int_1^{\sqrt{r/s}} \int_0^{\sqrt{rs}} \tau t^2 \left[n(t\tau) - \frac{1}{\tau^4} \right] G\left(t\tau, \frac{t}{\tau}\right) dt d\tau. \quad (A'.2.7)$$

Άρα, εφόσον το $n(r)$ είναι ασυνεχές για $r = d$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.1.2) και (A'.2.7) καταλήγουμε ότι:

$$G_r(r, s)|_{\sqrt{rs}=d^+} = G_r(r, s)|_{\sqrt{rs}=d^-} - \frac{k^2 \sqrt{s}}{4\sqrt{r}} (a - 1)n(d^-)$$

και έτσι το $G_r(r, s)$ είναι ασυνεχές για $\sqrt{rs} = d$.

Με αντίστοιχα επιχειρήματα, παραγωγίζουμε την (A'.2.6) ως προς s και έχουμε:

$$G_s(r, s) = -\frac{k^2 \sqrt{r}}{4\sqrt{s}} (n(\sqrt{rs}) - 1) + \frac{k^2}{4\sqrt{rs}^{3/2}} \int_0^{\sqrt{rs}} t(n(t) - 1) dt - \frac{k^2 r}{2} \int_1^{\sqrt{r/s}} \tau \left[n(\tau\sqrt{rs}) - \frac{1}{\tau^4} \right] G\left(\tau\sqrt{rs}, \frac{\sqrt{rs}}{\tau}\right) d\tau$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{k^2 \sqrt{r}}{2s^{5/2}} \int_0^{\sqrt{rs}} t^2 \left[n \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t \right) - \frac{s^2}{r^2} \right] G \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t, \sqrt{\frac{s}{r}} t \right) dt \\
 & + \frac{k^2}{2\sqrt{r}s^{3/2}} \int_1^{\sqrt{r/s}} \int_0^{\sqrt{rs}} \tau t^2 \left[n(t\tau) - \frac{1}{\tau^4} \right] G \left(t\tau, \frac{t}{\tau} \right) dt d\tau. \quad (A'.2.8)
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι τη σχέση άλματος (3.1.2), προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για την ασυνέχεια του $G_s(r, s)$, όταν $\sqrt{rs} = d$:

$$G_s(r, s)|_{\sqrt{rs}=d^+} = G_s(r, s)|_{\sqrt{rs}=d^-} - \frac{k^2 \sqrt{r}}{4\sqrt{s}} (a-1)n(d^-).$$

Για τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους, παραγωγίζουμε την (A'.2.6) δύο φορές ως προς r και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
 G_{rr}(r, s) &= \frac{k^2 \sqrt{s}}{4r^{3/2}} \left(n(\sqrt{rs}) - 1 \right) - \frac{k^2}{2} G(r, s) \left(n(r) - \frac{s^2}{r^2} \right) - \frac{k^2 s}{8r} n'(\sqrt{rs}) \\
 & - \frac{3k^2}{8\sqrt{sr}^{5/2}} \int_0^{\sqrt{rs}} t(n(t) - 1) dt \\
 & + \frac{k^2 s}{2r} \int_1^{\sqrt{r/s}} \tau \left[n(\tau\sqrt{rs}) - \frac{1}{\tau^4} \right] G \left(\tau\sqrt{rs}, \frac{\sqrt{rs}}{\tau} \right) d\tau \\
 & + \frac{3k^2}{4(rs)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{rs}} t^2 \left[n \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t \right) - \frac{s^2}{r^2} \right] G \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t, \sqrt{\frac{s}{r}} t \right) dt \\
 & - \frac{3k^2}{4\sqrt{sr}^{5/2}} \int_1^{\sqrt{r/s}} \int_0^{\sqrt{rs}} \tau t^2 \left[n(t\tau) - \frac{1}{\tau^4} \right] G \left(t\tau, \frac{t}{\tau} \right) dt d\tau \\
 & - \frac{k^2 s}{4r} \int_1^{\sqrt{r/s}} \frac{1}{\tau^4} \left\{ \sqrt{rs} \left(\tau^4 n(\tau\sqrt{rs}) - 1 \right) \left[\tau^2 G_r \left(\tau\sqrt{rs}, \frac{\sqrt{rs}}{\tau} \right) + G_s \left(\tau\sqrt{rs}, \frac{\sqrt{rs}}{\tau} \right) \right] \right. \\
 & \left. + \tau G \left(\tau\sqrt{rs}, \frac{\sqrt{rs}}{\tau} \right) \left[\tau^4 \left(\tau\sqrt{rs} n'(\tau\sqrt{rs}) + n(\tau\sqrt{rs}) \right) - 1 \right] \right\} d\tau \\
 & - \frac{k^2}{4r^4 s^2} \int_0^{\sqrt{rs}} t^2 \left\{ t \left(s^2 - r^2 n \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t \right) \right) \left[s G_s \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t, \sqrt{\frac{s}{r}} t \right) - r G_r \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t, \sqrt{\frac{s}{r}} t \right) \right] \right. \\
 & \left. + G \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t, \sqrt{\frac{s}{r}} t \right) \left(r^3 t n' \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t \right) + r^2 \sqrt{rs} n \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t \right) + 3s^3 \sqrt{\frac{r}{s}} \right) \right\} dt \quad (A'.2.9)
 \end{aligned}$$

Εφόσον τόσο το n όσο και το n' εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και τις δύο σχέσεις άλματος (3.1.2) και (3.1.3). Έχουμε την ακόλουθη σχέση ασυνέχειας του G_{rr} , κατά μήκος της καμπύλης $\sqrt{rs} = d$:

$$G_{rr}(r, s)|_{\sqrt{rs}=d^+} = G_{rr}(r, s)|_{\sqrt{rs}=d^-} - \frac{k^2 s}{8r} (a^{-1} - 1)n'(d^-) + \frac{k^2}{4} n(d^-) \left(\frac{\sqrt{s}}{r^{3/2}} (a-1) - \frac{s}{2r} \right)$$

και

$$G_{rr}(r, s)|_{r=d^+} = G_{rr}(r, s)|_{r=d^-} - \frac{k^2}{2} (a-1)n(d^-)G(d^-, s)$$

για $r = d$.

Με ανάλογο τρόπο, παραγωγίζουμε την (Α'.2.6) δύο φορές ως προς s και καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\begin{aligned}
G_{ss}(r, s) &= \frac{k^2 \sqrt{r}}{4s^{3/2}} \left(n(\sqrt{rs}) - 1 \right) + \frac{k^2 r^2}{2s^2} G(r, s) \left(n(r) - \frac{s^2}{r^2} \right) - \frac{k^2 r}{8s} n'(\sqrt{rs}) \\
&\quad - \frac{3k^2}{8\sqrt{r} s^{5/2}} \int_0^{\sqrt{rs}} t(n(t) - 1) dt \\
&\quad + \frac{k^2 r}{2s} \int_1^{\sqrt{r/s}} \tau \left[n(\tau\sqrt{rs}) - \frac{1}{\tau^4} \right] G \left(\tau\sqrt{rs}, \frac{\sqrt{rs}}{\tau} \right) d\tau \\
&\quad - \frac{5k^2 \sqrt{r}}{4s^{7/2}} \int_0^{\sqrt{rs}} t^2 \left[n \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t \right) - \frac{s^2}{r^2} \right] G \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t, \sqrt{\frac{s}{r}} t \right) dt \\
&\quad - \frac{3k^2}{4\sqrt{r} s^{5/2}} \int_1^{\sqrt{r/s}} \int_0^{\sqrt{rs}} \tau t^2 \left[n(t\tau) - \frac{1}{\tau^4} \right] G \left(t\tau, \frac{t}{\tau} \right) dt d\tau \\
&\quad - \frac{k^2 r}{4s} \int_1^{\sqrt{r/s}} \frac{1}{\tau^4} \left\{ \sqrt{rs} \left(\tau^4 n(\tau\sqrt{rs}) - 1 \right) \left[\tau^2 G_r \left(\tau\sqrt{rs}, \frac{\sqrt{rs}}{\tau} \right) + G_s \left(\tau\sqrt{rs}, \frac{\sqrt{rs}}{\tau} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \tau G \left(\tau\sqrt{rs}, \frac{\sqrt{rs}}{\tau} \right) \left[\tau^4 \left(\tau\sqrt{rs} n'(\tau\sqrt{rs}) + n(\tau\sqrt{rs}) \right) - 1 \right] \right\} d\tau \\
&\quad - \frac{k^2}{4s^4 r^2} \int_0^{\sqrt{rs}} t^2 \left\{ t \left(s^2 - r^2 n \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t \right) \right) \left[s G_s \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t, \sqrt{\frac{s}{r}} t \right) - r G_r \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t, \sqrt{\frac{s}{r}} t \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + G \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t, \sqrt{\frac{s}{r}} t \right) \left(r^3 t n' \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t \right) + r^2 \sqrt{rs} n \left(\sqrt{\frac{r}{s}} t \right) + 3s^3 \sqrt{\frac{r}{s}} \right) \right\} dt \quad (\text{Α'.2.10})
\end{aligned}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας τις σχέσεις άλματος στην (Α'.2.10) καταλήγουμε ότι:

$$G_{ss}(r, s)|_{\sqrt{rs}=d^+} = G_{ss}(r, s)|_{\sqrt{rs}=d^-} - \frac{k^2 r}{8s} (a^{-1} - 1) n'(d^-) + \frac{k^2}{4} n(d^-) \left(\frac{\sqrt{r}}{s^{3/2}} (a - 1) - \frac{r}{2s} b \right)$$

όταν $\sqrt{rs} = d$ και

$$G_{ss}(r, s)|_{r=d^+} = G_{ss}(r, s)|_{r=d^-} + \frac{k^2 d^2}{2s^2} (a - 1) n(d^-) G(d^-, s)$$

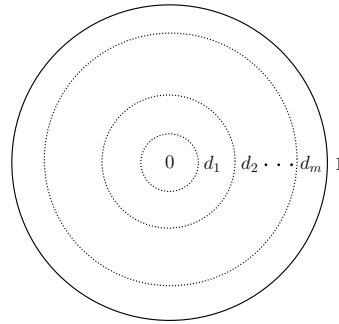
όταν $r = d$.

A'.3 Ο δείκτης διάθλασης με πεπερασμένες ασυνέχειες

Μελετάμε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας για έναν σφαιρικά συμμετρικό και κατά τμήματα C^2 δείκτη διάθλασης ο οποίος έχει έναν πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών και διευρύνουμε τα αποτελέσματα των παραγράφων 3.1 και 3.2.2. Υποθέτουμε ότι ο δείκτης διάθλασης είναι ασυνεχής στα σημεία $\{d_i\}_{i=1}^m$, $m \in \mathbb{N}$ και ικανοποιεί:

$$n(r) > 0, \text{Im}(n(r)) = 0, n(r) = 1 \text{ για } r \geq 1, \text{ και } n'(1) = 0. \tag{A'.3.11}$$

Επίσης, το $n(r)$ είναι C^2 σε κάθε $[0, d_1), (d_1, d_2), \dots, (d_m, \infty)$ και τα πλευρικά όρια



Σχήμα A'.1: Η διατομή του σφαιρικού μέσου με m -ασυνέχειες

στα d_i είναι πεπερασμένα. Εισάγουμε τις ακόλουθες συνθήκες ασυνέχειας:

$$n(d_i^+) = a_i n(d_i^-) \tag{A'.3.12}$$

$$n'(d_i^+) = a_i^{-1} n'(d_i^-) + b_i n(d_i^-) \tag{A'.3.13}$$

όπου

$$a_i > 0, |a_i - 1| + |b_i| > 0 \text{ για } i = 1, \dots, m \tag{A'.3.14}$$

Το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.1.5)-(3.1.7), για τον κατά τμήματα C^2 δείκτη διάθλασης. Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό Liouville (2.2.17) και ορίζουμε τους αντίστοιχους σχετικούς χρόνους μετακίνησης:

$$\tilde{d}_i := \int_0^{d_i} \sqrt{n(t)} dt, \quad i = 1, \dots, m \tag{A'.3.15}$$

Η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{d^2 z(\xi)}{d\xi^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{\xi^2} - g(\xi) \right) z(\xi) = 0 \tag{A'.3.16}$$

όπου το $g(\xi)$ ορίζεται για $\xi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_m\}$. Εφόσον το $n(r) > 0$ για $r \geq 0$, ο

μετασχηματισμός Liouville είναι αντιστρέψιμος και το g είναι καλά ορισμένο σε κάθε διάστημα $(0, \tilde{d}_1), \dots, (\tilde{d}_m, \infty)$ και είναι μία κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση για $r > 0$. Έτσι, ο μετασχηματισμός Liouville μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο τοπικά, σε κάθε διάστημα $(0, d_1), \dots, (d_m, \infty)$.

Το ακόλουθο λήμμα μας εξασφαλίζει ότι το z είναι ασυνεχές για $\xi = \tilde{d}_i$ ακόμα και αν το y_l είναι συνεχές για $r = d_i$, για κάθε $i = 1, \dots, m$.

Λήμμα Α'.3.1. Η λύση $z(\xi)$ του μετασχηματισμένου προβλήματος (Α'.3.16), είναι ασυνεχής για $\xi = \tilde{d}_i$ και ικανοποιεί τις συνθήκες άλματος:

$$z(\tilde{d}_i^+) = \tilde{a}_i z(\tilde{d}_i^-) \quad (\text{Α'.3.17})$$

$$\frac{dz(\tilde{d}_i^+)}{d\xi} = \tilde{a}_i^{-1} \frac{dz(\tilde{d}_i^-)}{d\xi} + \tilde{b}_i z(\tilde{d}_i^-) \quad (\text{Α'.3.18})$$

όπου:

$$\tilde{a}_i := a_i^{1/4} \quad (\text{Α'.3.19})$$

$$\tilde{b}_i := \frac{1}{4} \left[\frac{n'(d_i^+)}{n(d_i^+)^{3/2}} \tilde{a}_i - \frac{n'(d_i^-)}{n(d_i^-)^{5/4} n(d_i^+)^{1/4}} \right] \quad (\text{Α'.3.20})$$

για $i = 1, \dots, m$.

Στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των ιδιοσυναρτήσεων και των οριζουσών για μεγάλες τιμές του k . Ακολουθούμε τις ιδέες της απλής περίπτωσης όπου ο δείκτης έχει μία ασυνέχεια, αλλά η γενική περίπτωση είναι πιο περίπλοκη. Ορίζουμε τις ακόλουθες ποσότητες:

$$A(k, \tilde{d}_i) = \frac{\pi}{2} k \tilde{d}_i (\tilde{a}_i - \tilde{a}_i^{-1}) J_\lambda(k \tilde{d}_i) J_{\lambda+1}(k \tilde{d}_i) \quad (\text{Α'.3.21})$$

$$B(k, \tilde{d}_i) = \frac{\pi}{2} k \tilde{d}_i (\tilde{a}_i^{-1} Y_\lambda(k \tilde{d}_i) J_{\lambda+1}(k \tilde{d}_i) - \tilde{a}_i J_\lambda(k \tilde{d}_i) Y_{\lambda+1}(k \tilde{d}_i)) \quad (\text{Α'.3.22})$$

$$C(k, \tilde{d}_i) = \frac{\pi}{2} k \tilde{d}_i (\tilde{a}_i^{-1} - \tilde{a}_i) Y_\lambda(k \tilde{d}_i) Y_{\lambda+1}(k \tilde{d}_i) \quad (\text{Α'.3.23})$$

$$D(k, \tilde{d}_i) = \frac{\pi}{2} k \tilde{d}_i (\tilde{a}_i Y_\lambda(k \tilde{d}_i) J_{\lambda+1}(k \tilde{d}_i) - \tilde{a}_i^{-1} J_\lambda(k \tilde{d}_i) Y_{\lambda+1}(k \tilde{d}_i)) \quad (\text{Α'.3.24})$$

Επιπλέον, για $m \geq 2$ ορίζουμε τα $P_m(k, \tilde{d}_i)$ και $Q_m(k, \tilde{d}_i)$ ως

$$\begin{aligned} P_m &:= P_{m-1} D(k, \tilde{d}_m) + Q_{m-1} A(k, \tilde{d}_m) \\ Q_m &:= P_{m-1} C(k, \tilde{d}_m) + Q_{m-1} B(k, \tilde{d}_m) \end{aligned} \quad (\text{Α'.3.25})$$

όπου

$$P_1 := A(k, \tilde{d}_1) \quad \text{και} \quad Q_1 := B(k, \tilde{d}_1).$$

Έτσι, γράφουμε τον ασυμπτωτικό τύπο (3.2.45)

$$z(\xi) = \sqrt{\frac{\pi \xi}{2k}} J_\lambda(k \xi) \left(\frac{\pi}{2} \tilde{d}_1 k [\tilde{a}_1^{-1} Y_\lambda(k \tilde{d}_1) J_{\lambda+1}(k \tilde{d}_1) - \tilde{a}_1 J_\lambda(k \tilde{d}_1) Y_{\lambda+1}(k \tilde{d}_1)] \right)$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} Y_\lambda(k\xi) \left(\frac{\pi}{2} \tilde{d}_1 k (\tilde{a}_1 - \tilde{a}_1^{-1}) J_\lambda(k\tilde{d}_1) J_{\lambda+1}(k\tilde{d}_1) \right) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

ως εξής:

$$z(\xi) = \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} Y_\lambda(k\xi) P_1 + \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) Q_1 + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

Πρόταση Α'.3.2. Η λύση του (Α'.3.16), για μεγάλες τιμές του k και $\xi > \tilde{d}_m$, ικανοποιεί την εκτίμηση

$$z(\xi) = \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} Y_\lambda(k\xi) P_m + \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) Q_m + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) \quad (\text{Α'.3.26})$$

Απόδειξη. Για $m = 1$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. υποθέτουμε ότι η (Α'.3.26) ισχύει για m και θα δείξουμε ότι ικανοποιείται και για $m + 1$ με επαγωγή. Πράγματι, έστω

$$z(\xi) = \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} Y_\lambda(k\xi) P_m + \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) Q_m + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right). \quad (\text{Α'.3.27})$$

Βασιζόμενοι σε αντίστοιχα επιχειρήματα με την πρόταση 3.2.9, για $\xi > \tilde{d}_{m+1}$

$$z(\xi) = -z(\tilde{d}_{m+1}^+) G_t(\xi, \tilde{d}_{m+1}) + \frac{dz(\tilde{d}_{m+1}^+)}{d\xi} G(\xi, \tilde{d}_{m+1}) + \int_{\tilde{d}_{m+1}}^{\xi} g(t) G(\xi, t) z(t) dt.$$

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση (Α'.3.27) για το m και τις συνθήκες (Α'.3.17)-(Α'.3.18), έπειτα από ορισμένες πράξεις καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} z(\xi) &= \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} Y_\lambda(k\xi) Q_m \frac{\pi}{2} k \tilde{d}_{m+1} (\tilde{a}_{m+1} - \tilde{a}_{m+1}^{-1}) J_\lambda(k\tilde{d}_{m+1}) J_\lambda(k\tilde{d}_{m+1}) \\ &+ \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} Y_\lambda(k\xi) P_m \frac{\pi}{2} k \tilde{d}_{m+1} \left(\tilde{a}_{m+1} Y_\lambda(k\tilde{d}_{m+1}) J_{\lambda+1}(k\tilde{d}_{m+1}) - \tilde{a}_{m+1}^{-1} J_\lambda(k\tilde{d}_{m+1}) Y_{\lambda+1}(k\tilde{d}_{m+1}) \right) \\ &+ \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) Q_m \frac{\pi}{2} k \tilde{d}_{m+1} \left(\tilde{a}_{m+1}^{-1} Y_\lambda(k\tilde{d}_{m+1}) J_{\lambda+1}(k\tilde{d}_{m+1}) - \tilde{a}_{m+1} J_\lambda(k\tilde{d}_{m+1}) Y_{\lambda+1}(k\tilde{d}_{m+1}) \right) \\ &+ \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) P_m \frac{\pi}{2} k \tilde{d}_{m+1} (\tilde{a}_{m+1}^{-1} - \tilde{a}_{m+1}) Y_\lambda(k\tilde{d}_{m+1}) Y_{\lambda+1}(k\tilde{d}_{m+1}) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right), \quad \xi > \tilde{d}_{m+1} \end{aligned}$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} z(\xi) &= \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} Y_\lambda(k\xi) \left(P_m D(k, \tilde{d}_{m+1}) + Q_m A(k, \tilde{d}_{m+1}) \right) \\ &+ \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) \left(P_m C(k, \tilde{d}_{m+1}) + Q_m B(k, \tilde{d}_{m+1}) \right) + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Άρα, για $\xi > \tilde{d}_{m+1}$

$$z(\xi) = \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} Y_\lambda(k\xi) P_{m+1} + \sqrt{\frac{\pi\xi}{2k}} J_\lambda(k\xi) Q_{m+1} + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

και το αποτέλεσμα έπεται. \square

Επίσης, χρησιμοποιώντας τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των συναρτήσεων Bessel και Neumann για μεγάλες τιμές του k έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} A(k, \tilde{d}_i) &= C(k, \tilde{d}_i) = \frac{\tilde{a}_i^{-1} - \tilde{a}_i}{2} \sin(2k\tilde{d}_i - l\pi) + O\left(\frac{1}{k}\right) \\ B(k, \tilde{d}_i) &= \tilde{a}_i^{-1} \cos^2\left(k\tilde{d}_i - \frac{l\pi}{2}\right) + \tilde{a}_i \sin^2\left(k\tilde{d}_i - \frac{l\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{k}\right) \\ D(k, \tilde{d}_i) &= \tilde{a}_i \cos^2\left(k\tilde{d}_i - \frac{l\pi}{2}\right) + \tilde{a}_i^{-1} \sin^2\left(k\tilde{d}_i - \frac{l\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα αναπτύγματα, τον γενικό ασυμπτωτικό τύπο του z και τον μετασχηματισμό Liouville μπορούμε να εκφράσουμε τα y_l σε μία κλειστή ασυμπτωτική μορφή. Ορίζουμε αρχικά τα ακόλουθα σύνολα:

$$I = \{1, \dots, m\} \text{ και } I_s = \{J \subset I : \#J = s\} \quad (\text{A'.3.28})$$

όπου το I_s είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του I με πληθάρημο s . Επίσης, για κάθε $J \in I_s$ ορίζουμε το διατεταγμένο σύνολο

$$\tilde{J} = \langle i_j \rangle_{1 \leq j \leq s}, \quad i_j < i_{j+1} \text{ για κάθε } i_j \in J. \quad (\text{A'.3.29})$$

Τελικά, για μεγάλο k και $r > d_m$:

$$\begin{aligned} y_l(r) &= \frac{1}{kn(r)^{1/4} n(0)^{l/2+1/4} 2^m \prod_{i=1}^m \tilde{a}_i} \left[\sum_{s=0}^m \sum_{J \in I_s} \left\{ \prod_{i \in J} (\tilde{a}_i^2 - 1) \prod_{i \in I \setminus J} (\tilde{a}_i^2 + 1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sin \left(\sum_{i_j \in \tilde{J}} (-1)^{j+1} 2k\tilde{d}_{i_j} - \frac{l\pi}{2} + (-1)^s k\xi \right) \right\} \right] + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right) \quad (\text{A'.3.30}) \end{aligned}$$

όπου, για $J = \{\emptyset\}$ παίρνουμε $\prod_{i \in J} (\tilde{a}_i^2 - 1) = 1$ και $\sum_{i_j \in \tilde{J}} (-1)^{j+1} 2k\tilde{d}_{i_j} = 0$ και για $I \setminus J = \{\emptyset\}$ θεωρούμε $\prod_{i \in I \setminus J} (\tilde{a}_i^2 + 1) = 1$.

Προκειμένου να ξεκαθαρίσουμε το παραπάνω περίπλοκο ανάπτυγμα, ας θεωρήσουμε πρώτα ότι $s = 0$. Τότε $I_s, J = \{\emptyset\}$ και $I = I \setminus J = \{1, \dots, m\}$. Έτσι ο αντίστοιχος όρος στο άθροισμα είναι:

$$(\tilde{a}_1^2 + 1) \cdots (\tilde{a}_m^2 + 1) \sin\left(k\xi - \frac{l\pi}{2}\right).$$

Για $s = 1$, $I_s = \{\{1\}, \dots, \{m\}\}$ και $J = \{1\}, \dots, \{m\}$. Τώρα, οι αντίστοιχοι όροι στο άθροισμα είναι:

$$\begin{aligned} & (\tilde{a}_1^2 - 1)(\tilde{a}_2^2 + 1) \cdots (\tilde{a}_m^2 + 1) \sin \left(2k\tilde{d}_1 - \frac{l\pi}{2} - k\xi \right), \\ & \quad \vdots \\ & (\tilde{a}_1^2 + 1) \cdots (\tilde{a}_{m-1}^2 + 1)(\tilde{a}_m^2 - 1) \sin \left(2k\tilde{d}_m - \frac{l\pi}{2} - k\xi \right). \end{aligned}$$

Όταν το $s \geq 2$, το J αποτελείται από σύνολα πλήθους s , και για τα αντίστοιχα αθροίσματα στις συναρτήσεις ημιτόνου θεωρούμε τα διατεταγμένα σύνολα \tilde{J} . Τελικά για $s = m$, $I_s = J = \{1, \dots, m\}$ και $I \setminus J = \{\emptyset\}$. Έτσι, ο αντίστοιχος όρος είναι:

$$(\tilde{a}_1^2 - 1) \cdots (\tilde{a}_m^2 - 1) \sin \left(2k\tilde{d}_1 - 2k\tilde{d}_2 + \cdots + (-1)^{m+1} 2k\tilde{d}_m - \frac{l\pi}{2} + (-1)^m k\xi \right).$$

Επιπλέον, αντικαθιστώντας τη σχέση (Α'.3.30) και τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα για τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel στη χαρακτηριστική εξίσωση (3.1.7), προκύπτει η ακόλουθη ασυμπτωτική μορφή:

$$\begin{aligned} d_l(k) = & \frac{1}{kn(0)^{l/2+1/4} 2^m \prod_{i=1}^m \tilde{a}_i} \left[\sum_{s=0}^m \left(\sum_{\substack{J \in I_s \\ s=\text{odd}}} \left\{ - \prod_{i \in J} (\tilde{a}_i^2 - 1) \prod_{i \in I \setminus J} (\tilde{a}_i^2 + 1) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \sin \left(k - kA + \sum_{i_j \in \tilde{J}} (-1)^{j+1} 2k\tilde{d}_{i_j} - l\pi \right) \right\} + \sum_{\substack{J \in I_s \\ s=\text{even}}} \left\{ \prod_{i \in J} (\tilde{a}_i^2 - 1) \prod_{i \in I \setminus J} (\tilde{a}_i^2 + 1) \right. \right. \\ & \left. \left. \sin \left(k - kA + \sum_{i_j \in \tilde{J}} (-1)^j 2k\tilde{d}_{i_j} \right) \right\} \right) \right] + O \left(\frac{\ln k}{k^2} \right) \quad (\text{Α'.3.31}) \end{aligned}$$

Παράδειγμα Α'.3.3. Στην περίπτωση όπου $m = 2$, το αντίστοιχο ανάπτυγμα για τα y_l είναι:

$$\begin{aligned} y_l(r) = & \frac{1}{kn(r)^{1/4} n(0)^{l/2+1/4} 4\tilde{a}_1\tilde{a}_2} \left[(\tilde{a}_1^2 + 1)(\tilde{a}_2^2 + 1) \sin \left(k\xi - \frac{l\pi}{2} \right) + (\tilde{a}_1^2 - 1)(\tilde{a}_2^2 + 1) \right. \\ & \left. \sin \left(2k\tilde{d}_1 - \frac{l\pi}{2} - k\xi \right) + (\tilde{a}_1^2 + 1)(\tilde{a}_2^2 - 1) \sin \left(2k\tilde{d}_2 - \frac{l\pi}{2} - k\xi \right) \right. \\ & \left. + (\tilde{a}_1^2 - 1)(\tilde{a}_2^2 - 1) \sin \left(2k\tilde{d}_1 - 2k\tilde{d}_2 - \frac{l\pi}{2} + k\xi \right) \right] + O \left(\frac{\ln k}{k^2} \right), \quad r > d_2 \end{aligned}$$

και η οριζουσα ικανοποιεί:

$$d_l(k) = \frac{1}{kn(0)^{l/2+1/4} 4\tilde{a}_1\tilde{a}_2} \left[(\tilde{a}_1^2 + 1)(\tilde{a}_2^2 + 1) \sin(k - kA) - (\tilde{a}_1^2 - 1)(\tilde{a}_2^2 + 1) \right]$$

$$\begin{aligned} & \sin(k - kA + 2k\tilde{d}_1 - l\pi) - (\tilde{a}_1^2 + 1)(\tilde{a}_2^2 - 1) \sin(k - kA + 2k\tilde{d}_2 - l\pi) \\ & + (\tilde{a}_1^2 - 1)(\tilde{a}_2^2 - 1) \sin(k - kA - 2k\tilde{d}_1 + 2k\tilde{d}_2) \Big] + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right). \end{aligned}$$

A'.4 Ακέραιες συναρτήσεις

Παρουσιάζουμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα από τη θεωρία ακέραιων συναρτήσεων τα οποία απαιτούνται για τη μελέτη του αντίστροφου φασματικού προβλήματος για τις ιδιοτιμές διαπερατότητας. Παραθέτουμε αποτελέσματα από τα [12, 70, 94] και παραπέμπουμε εκεί για περισσότερες λεπτομέρειες και αποδείξεις.

Ορισμός A'.4.1. Μία συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής z η οποία είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή μία συνάρτηση που μπορεί να αναπαρασταθεί από μία δυναμοσειρά στη μορφή:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0 \quad (\text{A'.4.32})$$

ονομάζεται *ακέραια συνάρτηση*.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα ακέραιων συναρτήσεων είναι τα πολυώνυμα και η εκθετική συνάρτηση. Ορίζουμε το μέγιστο μέτρο

$$M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|. \quad (\text{A'.4.33})$$

Η σχέση μεταξύ της κατανομής των ριζών μίας ακέραιας συνάρτησης και της σχετικής της αύξησης είναι το βασικότερο αντικείμενο της θεωρίας ακέραιων συναρτήσεων. Προκειμένου να κατατάξουμε τις ακέραιες συναρτήσεις σε σχέση με την αύξησή τους, ορίζουμε τις παρακάτω έννοιες:

Ορισμός A'.4.2. Η τάξη ρ μίας ακέραιας συνάρτησης $f(z)$ ορίζεται ως

$$\rho := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}. \quad (\text{A'.4.34})$$

ή ισοδύναμα:

Ορισμός A'.4.3. Η τάξη ρ μίας ακέραιας συνάρτησης $f(z)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα για όλα τα $\rho > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho}, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}$$

και για κάποιες θετικές σταθερές A, B .

Ορισμός A'.4.4. Μία ακέραια συνάρτηση $f(z)$ με πεπερασμένη τάξη ρ θα έχει τύπο τ , όπου

$$\tau := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho}. \quad (\text{A'.4.35})$$

Ορισμός Α'.4.5. Μία ακέραια μιγαδική συνάρτηση με τάξη $\rho = 1$ και πεπερασμένο τύπο ονομάζεται εκθετικού τύπου.

Διευκρινίζουμε τους παραπάνω ορισμούς με τα ακόλουθα παραδείγματα:

Παράδειγμα Α'.4.6. Η συνάρτηση $f(z) = \sin Az$ είναι τάξης $\rho = 1$ και τύπου $\tau = |A|$, (εκθετικού τύπου $|A|$).

Πράγματι, εφόσον $|f(z)| = |e^{iAz} - e^{-iAz}|/|2i| \leq e^{|A||z|}$, έχουμε ότι $M(r) = e^{|A|r}$. Υπολογίζοντας τα όρια (Α'.4.34) και (Α'.4.35) καταλήγουμε ότι $\rho = 1$ και $\tau = |A|$.

Παράδειγμα Α'.4.7. Η συνάρτηση $f(z) = \sin \sqrt{z}/\sqrt{z}$ είναι τάξης $\rho = 1/2$ και τύπου $\tau = 1$.

Από την ανισότητα

$$\left| \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} \right| \leq \int_0^1 |\cos \sqrt{zt}| dt \leq \int_0^1 \cosh |\operatorname{Im}(\sqrt{z})|t dt \leq e^{|\operatorname{Im}(\sqrt{z})|} \leq e^{|z|^{1/2}}$$

έχουμε ότι $M(r) = e^{r^{1/2}}$ και έτσι υπολογίζουμε $\rho = 1/2$ και $\tau = 1$.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα για τις ακέραίες συναρτήσεις πεπερασμένης τάξης είναι το θεώρημα παραγοντοποίησης του Hadamard. Η βασική ιδέα είναι να συσχετίσουμε την αύξηση μίας ακέραιας συνάρτησης με τον αριθμό των ριζών που επιδέχεται. Πριν διατυπώσουμε το θεώρημα, ορίζουμε τους κύριους παράγοντες του Weierstrass:

$$G(u, p) := \begin{cases} 1 - u, & p = 0 \\ (1 - u) \exp \left(u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p} \right), & p > 0. \end{cases} \quad (\text{Α'.4.36})$$

Θεώρημα Α'.4.8. Μία ακέραια συνάρτηση πεπερασμένης τάξης ρ μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή:

$$f(z) = z^m e^{P_q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \quad (\text{Α'.4.37})$$

όπου z_1, z_2, \dots είναι οι μη μηδενικές ρίζες της $f(z)$, $p \leq \rho$, $P_q(z)$ είναι ένα πολυώνυμο του z με βαθμό $q \leq \rho$ και m είναι η πολλαπλότητα της ρίζας στο μηδέν. Η σταθερά p είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος έτσι ώστε το $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-p-1}$ να συγκλίνει.

Παραπέμπουμε στο [70] για τη λεπτομερή απόδειξη. Ο ακέραιος αριθμός $g = \max(p, q)$ ονομάζεται γένος της ακέραιας συνάρτησης f . Εάν η τάξη δεν είναι ακέραιος, τότε το g ισούται με το ακέραιο μέρος του ρ , $g = [\rho]$. Αλλιώς, $g = \rho$ ή $g = \rho - 1$.

Παράδειγμα Α'.4.9. Μία ακέραια συνάρτηση συνάρτηση μηδενικής τάξης ή με τάξη $\rho < 1$ έχει την ακόλουθη αναπαράσταση:

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\omega} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right),$$

όπου $\omega \leq \infty$ και $\sum_{n=1}^{\omega} 1/|z_n| < \infty$.

Παράδειγμα Α'.4.10. Μία ακέραια συνάρτηση με γένος ίσο με ένα έχει την ακόλουθη αναπαράσταση:

$$f(z) = Cz^m e^{az+b} \prod_{n=1}^{\omega} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n},$$

για κάποιες σταθερές C, a, b .

Παράδειγμα Α'.4.11. Η ακέραια συνάρτηση $\sin \pi \sqrt{z}/\pi \sqrt{z}$ αναπαρίσταται ως:

$$\frac{\sin \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}} = \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{z}}{n}\right) e^{\sqrt{z}/n}.$$

Όπως δείξαμε στο παράδειγμα Α'.4.7, η $f(z)$ είναι ακέραια, τάξης $\rho = 1/2$ και έχει μόνο πραγματικές ρίζες στα $z_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Έτσι, από το θεώρημα του Hadamard

$$\frac{\sin \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}} = C \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right).$$

Εφόσον $f(0) = 1$, καταλήγουμε ότι $C = 1$. Ακόμα, αν αντικαταστήσουμε z^2 αντί για z έχουμε:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{Α'.4.38}$$

και ισχυριζόμαστε ότι το γινόμενο μπορεί να γραφτεί ως

$$\prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}.$$

Πράγματι, από το παραπάνω γινόμενο έχουμε:

$$\dots \left(1 - \frac{z}{-2}\right) e^{-z/2} (1+z) e^{-z} (1-z) e^z \left(1 - \frac{z}{2}\right) e^{z/2} \dots$$

ή ισοδύναμα

$$\dots (1+z)(1-z) \left(1 + \frac{z}{2}\right) \left(1 - \frac{z}{2}\right) \dots = (1-z^2) \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) \dots$$

και έτσι, καταλήγουμε στην (Α'.4.38).

Το τελευταίο θέμα που θα μας απασχολήσει είναι το θεώρημα Paley-Wiener. Θεωρούμε μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\phi \in L^2[-A, A]$ και ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f(z) = \int_{-A}^A \phi(t) e^{izt} dt.$$

Τότε, επαληθεύεται εύκολα ότι η $f(z)$ είναι ακέραια συνάρτηση εκθετικού τύπου και ανήκει στον χώρο L^2 , στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Το θεώρημα Paley-Wiener μας λέει ότι κάθε ακέραια συνάρτηση εκθετικού τύπου προκύπτει με αυτόν τον τρόπο.

Θεώρημα Α'.4.12. Έστω $f(z)$ μία ακέραια συνάρτηση εκθετικού τύπου το πολύ A τέτοια ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Τότε υπάρχει μία $\phi \in L^2[-A, A]$ έτσι ώστε

$$f(z) = \int_{-A}^A \phi(t) e^{izt} dt.$$

Μία λεπτομερής απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [94].

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

5.1	Ανακατασκευές για σταθερό δείκτη διάθλασης	79
5.2	Ανακατασκευές για κατά τμήματα σταθερό δείκτη διάθλασης χρησιμοποιώντας μόνο πραγματικές ιδιοτιμές διαπερατότητας	83
5.3	Ανακατασκευές για κατά τμήματα σταθερό δείκτη διάθλασης χρησιμοποιώντας πραγματικές και μιγαδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας	84
5.4	Ανακατασκευές για το παράδειγμα 5.2.2	92
5.5	Ανακατασκευές για το παράδειγμα 5.2.3	92

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1.1	Η ταλαντούμενη χορδή	2
1.2	Σκέδαση από μη ομογενές μέσο	5
3.1	Ο ασυνεχής δείκτης διάθλασης	36
3.2	Το πρόβλημα Goursat για τον ασυνεχή $n(r)$	58
3.3	Οι δείκτες διάθλασης $n_1(r)$ και $n_2(r)$	64
3.4	Η κατανομή των πραγματικών ριζών για τα $D_{0_1}(k)$ και $D_{0_2}(k)$	65
3.5	Αριθμός των ριζών για τον συνεχή και τον ασυνεχή δείκτη διάθλασης	65
5.1	Η κατανομή των πραγματικών ιδιοτιμών διαπερατότητας για $n = 6$ και $m = 0, 1, 2, 3$ αντίστοιχα	79
5.2	Γραφήματα του σφάλματος $ k_0 - k_0^{(N)} $ σε σχέση με το n για δείκτες $n = 1/3, n = 3, n = 12$ και $n = 20$ αντίστοιχα	80
5.3	Ανακατασκευές του σταθερού δείκτη διάθλασης σε δίσκο και το αντίστοιχο σχετικό σφάλμα	81
5.4	Ένας δίσκος με δύο στρώματα	81
5.5	Ανακατασκευές για $r_1 = 0.7$ χρησιμοποιώντας 4 ιδιοτιμές (αριστερά) και 8 ιδιοτιμές (δεξιά)	83
5.6	Γραφήματα ισοϋψών καμπύλων για $n_1 = 5, n_2 = 2$ και $r_1 = 0.1$	84
5.7	Ένας δίσκος με k -στρώματα	85
5.8	Τάξη σύγκλισης για το παράδειγμα 5.2.2	90
5.9	Τάξη σύγκλισης για το παράδειγμα 5.2.3	91
5.10	Ελαχιστοποίηση με FindMinimum για το παράδειγμα 5.2.2	92
5.11	Ελαχιστοποίηση με FindMinimum για το παράδειγμα 5.2.3	92
5.12	Ένας δίσκος με δύο ελλειπτικά στρώματα	94
5.13	Ένας δίσκος με έγκλεισμα σε σχήμα φυστικιού	95
A'1	Η διατομή του σφαιρικού μέσου με m -ασυνέχειες	103

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Advanpix L. L. C. (2016), *Multiprecision Computing Toolbox for MATLAB*, ver. 4.2.3.12016, Tokyo, <http://www.advanpix.com/>
- [2] Aktosun T., Gintides D. and Papanikolaou V. G. (2011), The uniqueness in the inverse problem for transmission eigenvalues for the spherically symmetric variable-speed wave equation, *Inverse Problems* **27** 115004
- [3] Aktosun T., Klaus M. and van der Mee C. (1995), Inverse wave scattering with discontinuous wave speed, *J. Math. Phys.* **36** 2880-2928
- [4] Aktosun T. and Papanicolaou V. G. (2013), Reconstruction of the wave speed from transmission eigenvalues for the spherically symmetric variable-speed wave equation, *Inverse Problems* **29** 065007
- [5] Amirov R. K. (2006), On Sturm Liouville operators with discontinuity conditions inside an interval, *J. Math. Anal. Appl.* **317** 163-176
- [6] An J. and Shen J. (2015), Spectral approximation to a transmission eigenvalue problem and its applications to an inverse problem, *Comput. Math. Appl.* **69** 1132-1143
- [7] An J. and Shen J. (2013), A spectral-element method for transmission eigenvalue problems, *J. Sci. Comput.* **57** 670-688
- [8] Babuška I. and Osborn J. (1991), *Eigenvalue problems* (Handbook of Numerical Analysis vol 2), (NorthHolland: Elsevier) 641-787
- [9] Buterin S. A. and Yang C.-F. (2015), On an inverse transmission problem from complex eigenvalues, *Results Math.* doi:10.1007/s00025-015-0512-9
- [10] Buterin S. A., Yang C.-F. and Yurko V. A. (2015), On an open question in the inverse transmission eigenvalue problem, *Inverse Problems* **31** 045003
- [11] Cakoni F., Çayören M. and Colton D. (2008), Transmission eigenvalues and the nondestructive testing of dielectrics, *Inverse Problems* **24** 065016
- [12] Cakoni F. and Colton D. (2014), *A Qualitative Approach to Inverse Scattering Theory*, (New York: Springer)
- [13] Cakoni F., Colton D. and Gintides D. (2010), The transmission eigenvalue problem, *Advanced Topics in Scattering and Biomedical Engineering: Proc. of the 9th Int. Workshop on Mathematical Methods in Scattering Theory and Biomedical Engineering* ed. Charalambopoulos A., Fotiadis D. I. and Polyzos D. (World Scientific Publishing) 368-380

-
- [14] Cakoni F., Colton D. and Gintides D. (2010), The interior transmission eigenvalue problem, *SIAM J. Math. Anal.* **42** 2912-2921
- [15] Cakoni F., Colton D., and Haddar H. (2016), *Inverse Scattering Theory and Transmission Eigenvalues*, vol. 88 of *CBMS Series*, (Philadelphia: SIAM Publications)
- [16] Cakoni F., Colton D. and Haddar H. (2010), On the determination of Dirichlet or transmission eigenvalues from far field data, *Comptes Rendus Mathematique* **348** 379-383
- [17] Cakoni F., Colton D. and Haddar H. (2009), The computation of lower bounds for the norm of the index of refraction in an anisotropic media, *J. Integral Equations and Applications* **21** 203-227
- [18] Cakoni F., Colton D. and Monk P. (2007), On the use of transmission eigenvalues to estimate the index of refraction from far field data, *Inverse Problems* **23** 507-522
- [19] Cakoni F., Colton D., Monk P. and Sun J. (2010), The inverse electromagnetic scattering problem for anisotropic media, *Inverse Problems* **26** 074004
- [20] Cakoni F. and Gintides D. (2010), New results on transmission eigenvalues, *Inverse Problems Imaging* **4** 39-48
- [21] Cakoni F., Gintides D. and Haddar H. (2010), The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues, *SIAM J. Math. Anal.* **42** 237-255
- [22] Cakoni F. and Haddar H. (2012), Transmission eigenvalues in inverse scattering theory, *Inverse Problems and Applications: Inside Out II (MSRI Publications 60)* ed. Uhlmann G. (Cambridge: Cambridge University Press) 527-578
- [23] Cakoni F. and Haddar H. (2009), On the existence of transmission eigenvalues in an inhomogeneous medium, *Applicable Analysis* **88** 475-493
- [24] Cakoni F. and Kress R. (2017), A boundary integral equation method for the transmission eigenvalue problem, *Applicable Analysis* **96** 23-38
- [25] Cakoni F., Monk P. and Sun J. (2014), Error analysis for the finite element approximation of transmission eigenvalues, *Comput. Methods Appl. Math.* **14** 419-427
- [26] Chadan K., Colton D., Päivärinta L. and Rundell W. (1997), *An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems*, (Philadelphia: SIAM Publications)
- [27] Cheng X. and Yang J. (2015), Computational method for transmission eigenvalues for a spherically stratified medium, *J. Opt. Soc. Am. A* **32** 1243-1246
- [28] Colton D. and Kirsch A. (1996), A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region, *Inverse Problems* **12** 383-393

- [29] Colton D., Kirsch A. and Päivärinta L. (1989), Far-field patterns for acoustic waves in an inhomogeneous medium, *SIAM J. Math. Anal.* **20** 1472-1483
- [30] Colton D. and Kress R. (2013), *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 3rd edn (New York: Springer)
- [31] Colton D. and Kress R. (2001), On the denseness of Herglotz wave functions and electromagnetic Herglotz pairs in Sobolev spaces, *Math. Meth. Appl. Sci.* **24** 1289-1303
- [32] Colton D. and Kress R. (1983), *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, (New York: John Wiley)
- [33] Colton D. and Kress R. (1978), The construction of solutions to acoustic scattering problems in a spherically stratified medium II, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **32** 53-62
- [34] Colton D. and Leung Y.-J. (2017), The existence of complex transmission eigenvalues for spherically stratified media, *Applicable Analysis* **96** 39-47
- [35] Colton D. and Leung Y.-J. (2013), Complex eigenvalues and the inverse spectral problem for transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **29** 104008
- [36] Colton D., Leung Y.-J. and Meng S. (2015), Distribution of complex transmission eigenvalues for spherically stratified media, *Inverse Problems* **31** 035006
- [37] Colton D. and Monk P. (1988), The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous medium, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **41** 97-125
- [38] Colton D., Monk P. and Sun J. (2010), Analytical and computational methods for transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **26** 045011
- [39] Colton D. and Päivärinta L. (1990), Far-field patterns for electromagnetic waves in an inhomogeneous medium, *SIAM J. Math. Anal.* **21** 1537-1549
- [40] Colton D., Päivärinta L. and Sylvester J. (2007), The interior transmission problem, *Inverse Problems Imaging* **1** 13-28
- [41] Davis P. J. (1975), *Interpolation and Approximation*, (New York: Dover)
- [42] Dennis J. E. and Schnabel R. B. (1996), *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, (Philadelphia: SIAM)
- [43] Descloux J., Nassif N. and Rapaz J. (1978), On spectral approximation: Part 1. The problem of convergence, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.* 97-112
- [44] Elhay S. and Ram Y. M. (2002), An affine inverse eigenvalue problem, *Inverse Problems* **18** 455-466
- [45] Freiling G, and Yurko V. A. (2001), *Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications*, (New York: Nova)

-
- [46] Geng H., Ji X., Sun J. and Xu L. (2016), C^0 IP Methods for the transmission eigenvalue problem, *J. Sci. Comput.* **68** 326-338
- [47] Gintides D. and Pallikarakis N. (2017), The inverse transmission eigenvalue problem for a discontinuous refractive index, *Inverse Problems* **33** 055006
- [48] Gintides D. and Pallikarakis N. (2013), A computational method for the inverse transmission eigenvalue problem, *Inverse Problems* **29** 104010
- [49] Giorgi G. and Haddar H. (2012), Computing estimates of material properties from transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **28** 055009
- [50] Gladwell G. M. L. (2004), *Inverse Problems in Vibration* (Solid Mechanics and Its Applications), 2nd edn (Kluwer Academic Publishers).
- [51] Gohberg I., Goldberg S. and Kaashoek A. M. (2000), *Basic Classes of Linear Operators*, (Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag)
- [52] Gould S. H. (1996), *Variational Methods for Eigenvalue Problems*, (New York: Dover Publications Inc.)
- [53] Groetsch C. W. (1984), *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*, (Boston: Pitman)
- [54] Hald O. (1984), Discontinuous inverse eigenvalue problems, *Commun. Pure Appl. Math.* **37** 539-577
- [55] Harris I. (2015), Non-destructive testing of anisotropic materials, *PhD Thesis* University of Delaware
- [56] Harris I., Cakoni F. and Sun J. (2014), Transmission eigenvalues and non-destructive testing of anisotropic magnetic materials with voids, *Inverse Problems* **30** 035016
- [57] Hickmann K. S. (2012), The interior transmission spectrum in one dimension, *Inverse Problems* **28** 115007
- [58] Hsiao G. C., Liu F., Sun J. and Xu L. (2011), A coupled BEM and FEM for the interior transmission problem in acoustics, *J. Comput. Appl. Math.* **235** 5213-5221
- [59] Huang T.-M., Huang W.-Q. and Lin W.-W. (2015), A robust numerical algorithm for computing Maxwell's transmission eigenvalue problems, *SIAM J. Sci. Comput.* **37** 2403-2423
- [60] Huang R., Struthers A., Sun J. and Zhang R. (2016), Recursive integral method for transmission eigenvalues, *J. Comput. Phys.* **327** 830-840
- [61] Ji X., Sun J. and Turner T. (2012), Algorithm 922: A mixed finite element method for Helmholtz transmission eigenvalues, *ACM T. Math. Software* **38** 1-8

- [62] Ji X., Sun J. and Xie H. (2014), A multigrid method for Helmholtz transmission eigenvalue problems, *J. Sci. Comput.* **60** 276-294
- [63] Kirsch A. (2011), *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, 2nd edn (New York: Springer)
- [64] Kirsch A. (2009), On the existence of transmission eigenvalues, *Inverse Problems Imaging* **3** 155-172
- [65] Kirsch A. (1986), The denseness of the far field patterns for the transmission problem, *IMA J. Appl. Math.* **37** 213-225
- [66] Kleefeld A. (2013), A numerical method to compute interior transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **29** 104012
- [67] Lancaster P. and Tismenetsky M. (1985), *The Theory Of Matrices*, 2nd edn (San Diego-London: Academic Press)
- [68] Lechleiter A. and Peters S. (2015), Determining transmission eigenvalues of anisotropic inhomogeneous media from far field data, *Commun. Math. Sci.* **13** 1803 – 1827
- [69] Leung Y. and Colton D. (2012), Complex transmission eigenvalues for spherically stratified media, *Inverse Problems* **28** 075005.
- [70] Levin B. Y. (1991), *Lectures on Entire Functions*, (Providence: Amer. Math. Soc.)
- [71] Li T., Huang W.-Q., Lin W.-W. and Liu J. (2015), On spectral analysis and a novel algorithm for transmission eigenvalue problems, *J. Sci. Comput.* **64** 83–108
- [72] McLaughlin J. R. and Polyakov P. L. (1994), On the uniqueness of a spherically symmetric speed of sound from transmission eigenvalues, *J. Differ. Equ.* **107** 351-382
- [73] McLaughlin J. R., Polyakov P. L. and Sacks P. E. (1994), Reconstruction of a spherically symmetric speed of sound, *SIAM J. Appl. Math.* **54** 1203-1223
- [74] McLaughlin J. R., Sacks P. E. and Somasundaram M. (1997), Inverse scattering in acoustic media using interior transmission eigenvalues, *Inverse Problems in Wave Propagation* ed. Chavent G., Papanicolaou G., Sacks P. and Symes W. (Berlin: Springer-Verlag) 357-374
- [75] Monk P. and Sun J. (2012), Finite element methods for Maxwell transmission eigenvalues, *SIAM J. Sci. Comput.* **34** 247–264
- [76] Olver F. W. J. (1974), *Asymptotics and Special Functions*, (New York: Academic Press)
- [77] Päivärinta L. and Sylvester J. (2008), Transmission eigenvalues, *SIAM J. Math. Anal.* **40** 738-753

- [78] Porter D. and Stirling D. G. (1990), *Integral Equations: a practical treatment from spectral theory to applications*, (Cambridge: Cambridge University Press)
- [79] Pöschel J. and Trubowitz E. (1987), *Inverse Spectral Theory*, (Boston: Academic Press)
- [80] Rundell W. and Sacks P. (1992), Reconstruction techniques for classical inverse Sturm-Liouville problems, *Math. Comp.* **58** 161–183
- [81] Rynne B. P. and Sleeman B. D. (1991), The interior transmission problem and inverse scattering from inhomogeneous media, *SIAM J. Math. Anal.* **22** 1755-1762
- [82] Stein E. M. and Shakarchi R. (2003), *Complex Analysis*, (Princeton: Princeton University Press)
- [83] Sun J. (2011), Iterative methods for transmission eigenvalues, *SIAM J. Numer. Anal.* **49** 1860-1874
- [84] Sun J. (2011), Estimation of transmission eigenvalues and the index of refraction from Cauchy data, *Inverse Problems* **27** 015009
- [85] Sun J. and Xu L. (2013), Computation of Maxwell's transmission eigenvalues and its applications in inverse medium problems, *Inverse Problems* **29** 104013
- [86] Sylvester J. (2013), Transmission eigenvalues in one dimension, *Inverse Problems* **29** 104009
- [87] Tisseur F. and Meerbergen K. (2001), The quadratic eigenvalue problem, *SIAM Rev.* **43** 235-286
- [88] Wei G. and Xu H.-K. (2013), Inverse spectral analysis for the transmission eigenvalue problem, *Inverse Problems* **29** 115012
- [89] Willis C. (1985), Inverse Sturm-Liouville problems with two discontinuities, *Inverse Problems* **1** 263-289
- [90] Wu X. and Chen W. (2013), Error estimates of the finite element method for interior transmission problems, *J. Sci. Comput.* **57** 331–348
- [91] Xu X.-C. and Yang C.-F. (2015), Reconstruction of the refractive index from transmission eigenvalues for spherically stratified media, *J. Inverse Ill-Posed Probl.* doi:10.1515/jiip-2015-0081
- [92] Yang C.-F. and Buterin S. A. (2016), Uniqueness of the interior transmission problem with partial information on the potential and eigenvalues, *J. Differ. Equ.* **260** 4871-4887
- [93] Yang Y., Han J. and Bi H. (2015), A new weak formulation and finite element approximation for transmission eigenvalues, *arXiv:1506.06486v1*

-
- [94] Young R. M. (2001), *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, (San Diego: Academic Press)
- [95] Zeng F., Sun J. and Xu L. (2016), A spectral projection method for transmission eigenvalues, *Sci. China Math.* **59** 1613–1622
- [96] Zeng F., Turner T. and Sun J. (2015), Some results on electromagnetic transmission eigenvalues, *Math. Meth. Appl. Sci.* **38** 155–163
- [97] Zhang Y., Wang Y., Shi G. and Liao S. (2014), Complex transmission eigenvalues in one dimension, *Abstr. Appl. Anal.* doi:10.1155/2014/561349