



## ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ  
ΥΛΙΚΩΝ

### *Ζητήματα Αποκλίσεων σε Υπολογιστικές Μεθόδους Ηλεκτρομαγνητισμού*

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χατζηφώτη Νίκου

**Επιβλέπων:** Γιώργος Φικιώρης  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιανουάριος 2017





## ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ  
ΥΛΙΚΩΝ

### *Ζητήματα Αποκλίσεων σε Υπολογιστικές Μεθόδους Ηλεκτρομαγνητισμού*

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χατζηφώτη Νικόλαου

**Επιβλέπων:** Γεώργιος Φικιώρης  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την . . . . . Ιανουαρίου 2017.

.....  
Γεώργιος Φικιώρης  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Αθ. Δ. Παναγόπουλος  
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Χρήστος Καψάλης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιανουάριος 2017

.....  
Νικόλαος Χατζηφώτης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών  
Ε.Μ.Π.

Copyright © Νικόλαος Χατζηφώτης, 2017

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All right reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Περίληψη

Η παρούσα πτυχιακή εργασία περιστρέφεται γύρω από τα προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης και μαγνητικής καθαρότητας συστήματος.

Η πολυπλοκότητα των δύο αυτών προβλημάτων οδηγεί στην εφαρμογή αριθμητικών/υπολογιστικών μεθόδων, της MAS (Method of Auxiliary Sources/Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών) και της MDM (Multiple magnetic Dipole Model/Μοντέλο πολλαπλών μαγνητικών διπόλων) αντίστοιχα. Και στις δύο αυτές μεθόδους προσπαθούμε να προσεγγίσουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μέσα από πηγές τοποθετημένες στο εσωτερικό της δομής του προβλήματος. Σε μια τέτοια προσπάθεια εμφανίζονται τα ζητήματα της σύγκλισης της μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα, επιθυμούμε να προσεγγίσουμε το εκάστοτε πεδίο με όσο το δυνατόν λιγότερη απόκλιση από το πραγματικό αλλά και να ελέγξουμε αν η προσέγγιση αυτή γίνεται με μαθηματικά σωστό τρόπο.

Στα πρώτα δύο κεφάλαια παρουσιάζεται η MAS και τονίζονται τα πλεονεκτήματα της ως προς άλλες μεθόδους. Αρχικά αναλύεται ο τρόπος εφαρμογής της και οι εξισώσεις που την διέπουν. Στη συνέχεια ελέγχουμε τη σύγκλιση της μεθόδου ως προς το πραγματικό σκεδαζόμενο πεδίο. Προκύπτει ένα ιδιαιτέρως ενδιαφέρον συμπέρασμα: Αν οι πηγές τοποθετηθούν σε σημεία εσωτερικά μιας κρίσιμης επιφάνειας, παρουσιάζουν έντονες ταλαντώσεις που δεν οφείλονται σε σφάλματα στρογγυλοποίησης. Παρολ'αυτά προσεγγίζουν καλώς το σκεδαζόμενο πεδίο. Στο τρίτο κεφάλαιο συγκρίνουμε τη φύση των ταλαντώσεων αυτών με αυτές της EIE (Extended Integral Equation/ Εκτεταμένης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης) και αποδεικνύουμε ότι δεν είναι ίδιες.

Στα επόμενα δύο κεφάλαια παρουσιάζουμε την MDM. Η MDM είναι μια αριθμητική μέθοδος για τον υπολογισμό μαγνητικής υπογραφής κάποιου αντικειμένου, μια διαδικασία που είναι μείζονος σημασίας σε ζητήματα μαγνητικής καθαρότητας συστήματος. Αναλύουμε στη συνέχεια δύο βασικούς αλγορίθμους βελτιστοποίησης της μεθόδου.

Έπειτα δείχνουμε ότι τα ζητήματα αποκλίσεων που παρουσιάζονται στην MAS υπάρχουν και στην MDM χρησιμοποιώντας κώδικες στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab.

Τέλος, έχουμε το κεφάλαιο των συμπερασμάτων, που αφορά τη φύση των αποκλίσεων αυτών, το γιατί είναι σημαντικές και τι προβλήματα μπορούν να προκαλέσουν.

### **Λέξεις Κλειδιά:**

Σκέδαση, Μαγνητική καθαρότητα, αριθμητική μέθοδος, MAS, MDM, αποκλίσεις, Matlab

## Abstract

This thesis revolves around the problems of electromagnetic scattering and magnetic cleanliness of a system.

The complexity of these two problems leads to the application of numerical/computational methods such as MAS (Method of Auxiliary Sources) and MDM (Multiple magnetic Dipole Model) respectively. In both methods we try to approach an electromagnetic field through sources placed within the structure of the problem. In such efforts, issues of convergence of the method we use are due to appear. More specifically, we want to approach the respective field with the least possible deviation from the true field and to test whether our approach is mathematically correct.

In the first two chapters, we present the MAS and highlight its advantages over other methods. Initially, we analyze how one applies MAS and discuss the equations that govern the method. Then, we test the convergence of the method on the actual scattered field. An interesting fact arises: If the sources of MAS are located at points inside a critical area, they oscillate rapidly. Such oscillations are not due to roundoff error. Nevertheless we can still approach the scattered field correctly. In the third chapter we compare the nature of these oscillations with these appearing in the EIE (Extended Integral Equation) method and we prove that they are not the same.

In the next two chapters we present the MDM. The MDM is a numerical method for calculating the magnetic field of an object, a process that is of major importance in problems of magnetic cleanliness of system. Then, we analyze two key optimization algorithms for MDM. We show that the issues of oscillations/divergence that appear in MAS, also appear in MDM using codes in the Matlab environment

Finally, in the chapter of conclusions, we explain the nature of these oscillations, why they are important and what problems they may cause.

**Key words:**

Scattering, Magnetic Cleanliness, numerical method, MAS, MDM, divergence, Matlab

## *Ευχαριστίες*

*Με την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Γιώργο Φικιώρη που μου ανέθεσε την εν λόγω εργασία και είχε την υπομονή να με υποστηρίξει ώστε να φτάσω στο τελικό αποτέλεσμα.*

*Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα στελέχη του διδακτορικού τμήματος του κ. Καψάλη, Σαράντη Κακαράκη και Σωτήρη Σπαντιδέα για την πολύτιμη καθοδήγηση τους στα ζητήματα της MDM.*

*Τέλος, ευχαριστώ ιδιαίτερος την οικογένεια μου και τους φίλους μου για τη διαρκή τους στήριξη, τόσο στα χρόνια των σπουδών μου, όσο και γενικότερα στη ζωή μου.*





## Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Η μέθοδος βοηθητικών πηγών στα προβλήματα σκέδασης .....	10
Εισαγωγή .....	10
1.1 Ανάλυση απλού προβλήματος σκέδασης .....	19
Κεφάλαιο 2: Εφαρμογή της MAS .....	22
2.1 Ρεύματα MAS .....	22
2.2 Πεδίο MAS για $N \rightarrow \infty$ .....	25
2.3 Η Συνεχής MAS .....	29
2.4 Αποκλίσεις ρευμάτων: Σφάλματα στρογγύλευσης, εσωτερικός συντονισμός, υπερκατευθυντικότητα .....	30
Κεφάλαιο 3: Η Εκτεταμένη Ολοκληρωτική Εξίσωση .....	32
3.1 Λύση της ΕΙΕ .....	32
3.2 Διακριτοποίηση της ΕΙΕ .....	33
3.3 Αναλυτική συνέχεια του σκεδαζόμενου πεδίου .....	35
3.4 Σύνθετα προβλήματα σκέδασης, σφάλματα roundoff .....	36
Κεφάλαιο 4: Η μέθοδος πολλαπλών μαγνητικών διπόλων (MDM) .....	39
Εισαγωγή .....	39
4.1 Μετρήσεις μαγνητικού πεδίου .....	40
4.2 Εφαρμογή της MDM:Οι θέσεις και ροπές των διπόλων .....	42
4.2.1 Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης Gauss-Newton .....	45
4.2.2 Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης PSO .....	50
Κεφάλαιο 5: Αποκλίσεις Μαγνητικών ροπών στην MDM -Συσχέτιση με τις Αποκλίσεις της MAS .....	59
5.1 Παρουσίαση του προβλήματος .....	59
5.1.1 Υλοποίηση με ένα δίπολο-πηγή κάθετο στην επιφάνεια -Ένα μαγνητόμετρο .....	59
5.1.2 Υλοποίηση με ένα δίπολο-πηγή υπό γωνία προς την επιφάνεια -Τέσσερα μαγνητόμετρα .....	67
Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα-Ανάλυση αποτελεσμάτων .....	71
Appendix:Matlab .....	75
Βιβλιογραφία .....	85

## Κεφάλαιο 1: Η μέθοδος βοηθητικών πηγών στα προβλήματα σκέδασης

### Εισαγωγή

Η MAS (Method of Auxiliary Sources) είναι μια αριθμητική μέθοδος κατάλληλη για επίλυση συνοριακών προβλημάτων που εμφανίζονται στην ανάλυση ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης, στην μοντελοποίηση κεραιών, κατασκευής κυματοδηγών, κλπ. Αποτελεί μια ιδιαίτερα καλή εναλλακτική ως προς την κλασσική μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων και των μεθόδων ροπών καθώς έχει ισχυρά πλεονεκτήματα σε αριθμητική ευστάθεια, υπολογιστική ακρίβεια και ευκολία εκτέλεσης.

Στη κλασσική μέθοδο των επιφανειακών ολοκληρωτικών εξισώσεων το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε ένα ομογενή, ιστροπικό χώρο μιας οποιασδήποτε δομής μπορεί να εκφραστεί ως υπέρθεση ενός γνωστού προσπίπτοντος ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (διέγερση της δομής) και ενός άλλου πεδίου λόγω αγνώστων ηλεκτρικών και μαγνητικών ρευμάτων κατανεμημένων στην επιφάνεια της. Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τις συνοριακές συνθήκες προκύπτουν επιφανειακές ολοκληρωτικές εξισώσεις οι οποίες επιλύονται με την μέθοδο ροπών (Method of Moments)[14].

Η MAS δεν χρησιμοποιεί τα συγκεκριμένα επιφανειακά ρεύματα [1]. Αντίθετως θεωρεί ότι το συνολικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου προκύπτει από την υπέρθεση συγκεκριμένων θεωρητικών πηγών μετατοπισμένων από το σύνορο της δομής. Οι πηγές αυτές επιλέγονται έτσι ώστε το συνολικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που δημιουργούν να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες της δομής. Θεωρεί δηλαδή ότι το σκεδαζόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο προκύπτει από τις βοηθητικές πηγές αυτές (auxiliary sources). Θα έπρεπε να τονίσουμε εδώ ότι η γενική ιδέα της MAS χρησιμοποιείται και σε άλλες μεθόδους όπως η κλασσική Mie solution για σφαίρα. Το βασικό πλεονέκτημα της MAS είναι ότι δεν περιορίζεται από την γεωμετρία του προβλήματος όπως οι παραπάνω μέθοδοι.

Η επιλογή του τύπου των βοηθητικών πηγών που χρησιμοποιούμε είναι ζωτικής σημασίας στην εφαρμογή της MAS. Κατ'αρχήν, οποιοδήποτε σύνολο βοηθητικών/εικονικών πηγών εντός της δομής δημιουργεί πεδία που είναι αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων Maxwell εκτός της δομής και επομένως είναι αποδεκτό. Όταν πρόκειται για διδιάστατα προβλήματα, επιλέγουμε συνήθως ρευματοφόρα νήματα τα οποία παράγουν πεδίο ανάλογο της συνάρτησης Hankel (όπως προκύπτει από τη διδιάστατη συνάρτηση Green).

$$\vec{E}_n(\vec{\rho}) = \alpha_n H_0^{(1)}[k(\vec{\rho} - \vec{\rho}_n)] \hat{z} \quad (1)$$

όπου παραλείπουμε την προφανή χρονική εξάρτηση  $e^{-j\omega t}$

$k = \frac{\omega}{c}$  : ο κυματαριθμός κενού χώρου

$\vec{E}_n(\vec{\rho})$  : ηλεκτρικό πεδίο της n βοηθητικής πηγής στο σημείο μέτρησης  $\underline{\rho}$ ,

$\alpha_n$  : το άγνωστο βάρος της n βοηθητικής πηγής,

$H_0^{(1)}(\cdot)$  : η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης,

$\vec{\rho}_n$  : το διάνυσμα θέσης της βοηθητικής πηγής n

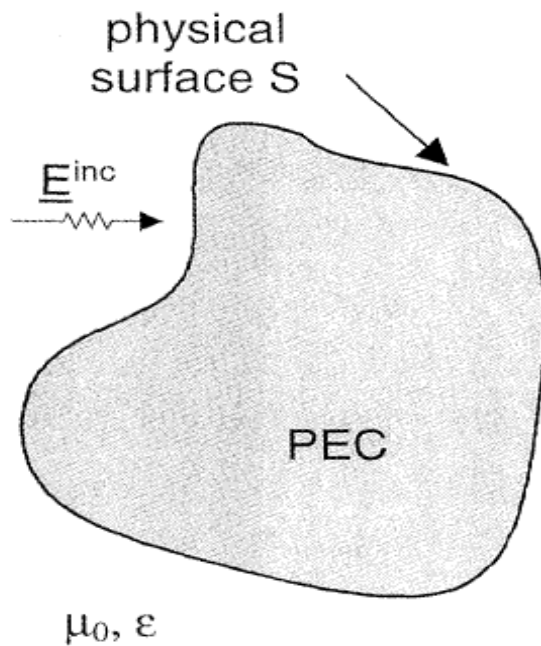
$\hat{z}$  : μοναδιαίο διάνυσμα

Στα τρισδιάστατα προβλήματα επιλέγουμε συνήθως ζεύγη διπόλων που ακτινοβολούν σύμφωνα με την τρισδιάστατη συνάρτηση Green. Τα δίπολα κάθε ζεύγους είναι κάθετα μεταξύ τους και εφαπτόμενα στην βοηθητική επιφάνεια του MAS για να ικανοποιούν την ασυνέχεια μαγνητικού πεδίου στο σύνορο της δομής. Παρ' όλα αυτά, άλλοι τύποι βοηθητικών πηγών μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα (τύπος διέγερσης, γεωμετρία δομής, κλπ).

Οι βοηθητικές πηγές είναι συνήθως κατανεμημένες ομοιογενώς σε μια βοηθητική επιφάνεια σύμμορφη με την πραγματική δομή του προβλήματος. Το συνολικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο χώρο προκύπτει από την υπέρθεση των πεδίων του εκάστοτε νήματος ή διπόλου. Το πεδίο των πηγών οφείλει επίσης να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες πεδίου της εκάστοτε δομής. Ο αριθμός των σημείων μέτρησης είναι συνήθως ίδιος με τον αριθμό των βοηθητικών πηγών.

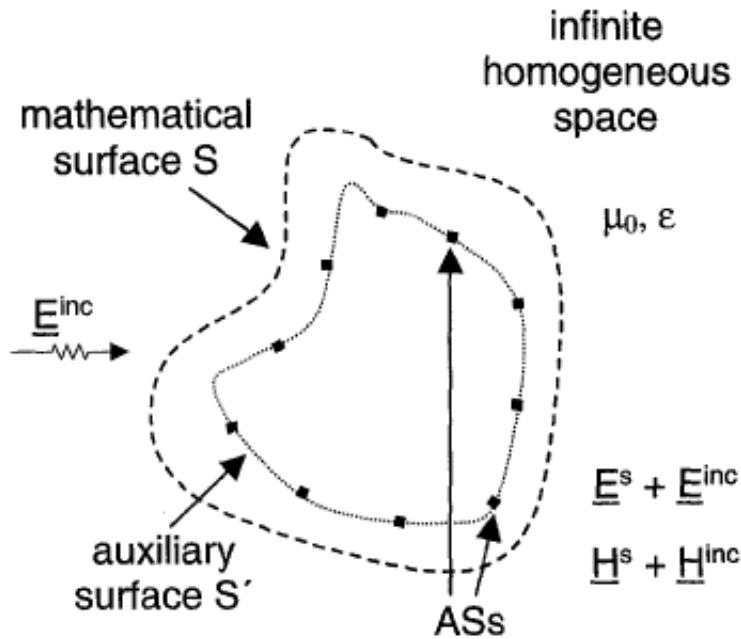
Θα θεωρήσουμε εδώ δύο γενικά προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης για την καλύτερη κατανόηση της MAS[1].

- a. Ηλεκτρομαγνητική σκέδαση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου  $\underline{E}^{inc}$  από τέλειο ηλεκτρικό αγωγό (PEC).



Εικόνα 1α: Ένας τέλειος αγωγίμος σκεδαστής επιφάνειας  $S$  με προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο  $\underline{E}^{inc}$  σε άπειρο ομογενή γραμμικό χώρο με διηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ .

Στο πρώτο πρόβλημα θεωρούμε ότι ο PEC βρίσκεται σε άπειρο, ομογενή, ιστροπικό και γραμμικό χώρο με διηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ . Θεωρούμε πως οι βοηθητικές πηγές της MAS ακτινοβολούν χωρίς την παρουσία του PEC και είναι τοποθετημένες σε μία θεωρητική επιφάνεια  $S'$  η οποία εσωκλείεται από την πραγματική δομή  $S$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



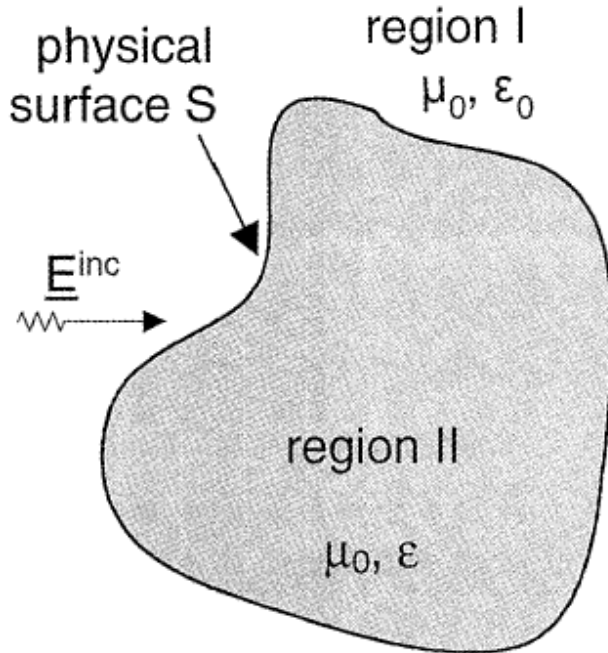
Εικόνα 1b: Το ισοδύναμο MAS μοντέλο της πρώτης περίπτωσης. Θεωρούμε ότι σκεδαστής PEC δεν υπάρχει. Οι βοηθητικές πηγές ακτινοβολούν σε άπειρο ομογενή χώρο με διηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$  και είναι τοποθετημένες σε μια θεωρητική επιφάνεια  $S'$ , η οποία εσωκλείεται από την πραγματική  $S$ . Τα σημεία μέτρησης βρίσκονται πάνω στην θεωρητική επιφάνεια  $S$ .

Τότε, το άγνωστο σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο  $\underline{E}^s$  υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\underline{E}^s = \sum_n \underline{E}_n^s = \sum_n \underline{G}_n \cdot \underline{a}_n \quad (2)$$

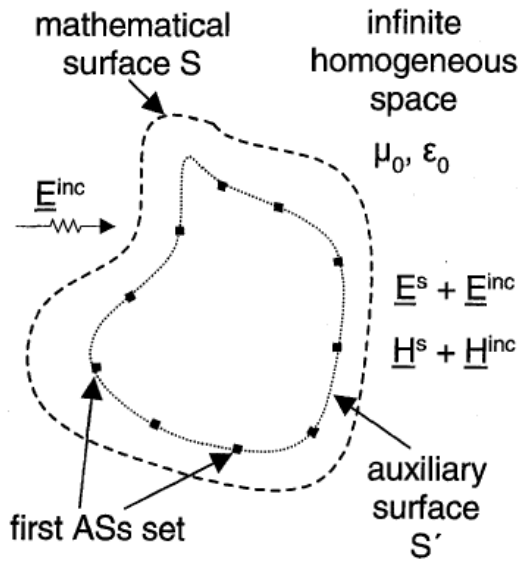
Το  $\underline{E}_n^s$  εκφράζει το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από τη βοηθητική πηγή  $n$ , τα  $\underline{G}_n$  είναι αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης κύματος και τα  $\underline{a}_n$  οι άγνωστοι συντελεστές του προβλήματος. Η εξίσωση (2) λύνεται χρησιμοποιώντας την συνοριακή συνθήκη στα σημεία μέτρησης: Αναφέραμε ήδη ότι τα σημεία μέτρησης του ηλεκτρικού πεδίου βρίσκονται στην επιφάνεια του PEC. Απαιτώντας λοιπόν το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία μέτρησης να είναι μηδενικό, αφού έχουμε αγωγό, προκύπτει ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων της μορφής:  $\sum_n \underline{G}_n \cdot \underline{a}_n(i) = 0$ . Έτσι προκύπτουν οι άγνωστοι  $\underline{a}_n$  από τους οποίους μπορούμε να υπολογίσουμε το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο σύμφωνα με την εξίσωση (2).

b. Ηλεκτρομαγνητική σκέδαση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου  $\underline{E}^{inc}$  από ομογενή διηλεκτρικό σκεδαστή.

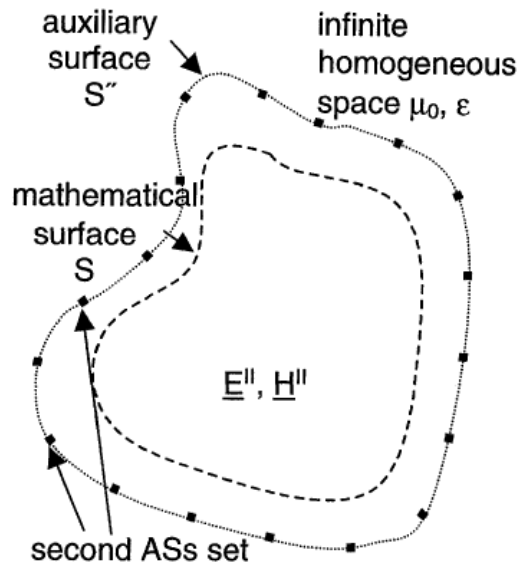


Εικόνα 2α: Ένας ομογενής, ιστροπικός και γραμμικός διηλεκτρικός σκεδαστής επιφάνειας  $S$  με διηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$  βρίσκεται στο κενό μεπροσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο  $\underline{E}^{inc}$ .

Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε έναν ομογενή, ιστροπικό και γραμμικό διηλεκτρικό σκεδαστή επιφάνειας  $S$  με διηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ . Σε αντίθεση με την πρώτο πρόβλημα που αναφέραμε, εδώ χρειαζόμαστε δύο σύνολα από βοηθητικές πηγές για να υπολογίσουμε το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Για το πρώτο σύνολο θεωρούμε ότι οι βοηθητικές πηγές του MAS ακτινοβολούν στο κενό χωρίς την παρουσία του σκεδαστή και βρίσκονται σε μια επιφάνεια  $S'$ , η οποία εσωκλείεται από την πραγματική δομή  $S$ . Για το δεύτερο σύνολο, θεωρούμε ότι οι πηγές ακτινοβολούν πλέον σε άπειρο χώρο που καλύπτεται από υλικό διηλεκτρικής επιτρεπτότητας  $\epsilon$  (χωρίς την παρουσία του σκεδαστή) και είναι τοποθετημένες σε επιφάνεια  $S''$ , η οποία εσωκλείει την πραγματική επιφάνεια  $S$ . Τα δύο αυτά σύνολα πηγών φαίνονται καλύτερα στα παρακάτω σχήματα.



Εικόνα 26: Το ισοδύναμο MAS μοντέλο της δεύτερης περίπτωσης για το πρώτο σύνολο πηγών. Θεωρούμε ότι σκεδαστής PEC δεν υπάρχει. Οι βοηθητικές πηγές ακτινοβολούν στο κενό και είναι τοποθετημένες σε μια θεωρητική επιφάνεια  $S'$ , η οποία εσωκλείεται από την πραγματική  $S$ . Τα σημεία μέτρησης βρίσκονται πάνω στην θεωρητική επιφάνεια  $S$ .



Εικόνα 27: Το ισοδύναμο MAS μοντέλο της δεύτερης περίπτωσης για το δεύτερο σύνολο πηγών. Θεωρούμε ότι σκεδαστής PEC δεν υπάρχει. Οι βοηθητικές πηγές ακτινοβολούν σε άπειρο ομογενή χώρο με διηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$  και είναι τοποθετημένες σε μια θεωρητική επιφάνεια  $S''$ , η οποία εσωκλείει την πραγματική  $S$ . Τα σημεία μέτρησης βρίσκονται πάνω στην θεωρητική επιφάνεια  $S$ .

Αντίστοιχα με το πρώτο πρόβλημα, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2)  $\underline{E}^S = \sum_n \underline{E}_n^S = \sum_n \underline{G}_n \cdot \underline{a}_n$  για τα δύο σύνολα πηγών μπορούμε να υπολογίσουμε το προκύπτον σκεδαζόμενο πεδίο: Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες του συνολικού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στα σημεία μέτρησης, τα οποία είναι εφαιπτόμενα στην πραγματική επιφάνεια  $S$  και υπολογίζουμε από τις εξισώσεις που προκύπτουν τα  $\underline{a}_n$  από τα οποία υπολογίζουμε τα άγνωστα πεδία των δύο σετ,  $\underline{E}^S$  και  $\underline{E}^{II}$ .

Ιδιαίτερα σημαντικά στην εφαρμογή της MAS είναι η θέση και ο αριθμός των βοηθητικών πηγών που χρησιμοποιούμε, όπως και η κατανομή και ο αριθμός των σημείων μέτρησης στα σύνορα της επιφάνειας  $S$ . Τα συγκεκριμένα ζητήματα εξαρτώνται κατά βάση από τον τύπο της διέγερσης στο εκάστοτε πρόβλημα, την γεωμετρία και τα ηλεκτρομαγνητικά χαρακτηριστικά της δομής. Αν και η MAS επιτρέπει την αυθαίρετη κατανομή, θέση και αριθμό των πηγών, συνηθίζεται οι βοηθητικές πηγές να είναι ομοιογενώς κατανεμημένες σε μια σύμμορφη ως προς την πραγματική επιφάνεια  $S$ . Ωστόσο, ανομοιόμορφες κατανομές και μη σύμμορφες επιφάνειες  $S'$ , έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμες σε εφαρμογές που αντιμετωπίζουμε προβλήματα υπολογισμού σκέδασης από γωνιές ή κοντά στην περιοχή διέγερσης. Εκτός αυτού, η απόσταση μεταξύ βοηθητικών πηγών και της επιφάνειας  $S$ , επηρεάζει σημαντικά την αποδοτικότητα της MAS. Η ταχύτητα σύγκλισης και η ακρίβεια αποτελεσμάτων ενός κώδικα MAS εξαρτάται από την σχετική θέση των πηγών ως προς τα πιθανά σημεία ιδιομορφίας (singularities) του πεδίου.

Αν υπάρχουν singularities μεταξύ των επιφανειών  $S$  και  $S'$ , τότε ο κώδικας της MAS δε συγκλίνει κατ'ανάγκη σε λύση (αλλά μπορεί ωστόσο να μας δώσει μια αρκετά καλή προσέγγιση του πεδίου). Η βέλτιστη λύση που θα μπορούσαμε να έχουμε από άποψη αριθμού βοηθητικών πηγών κατά την εφαρμογή του MAS προκύπτει αν τοποθετήσουμε τις πηγές στα σημεία που θα εμφανίζονταν singularities. Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα όμως, τα σημεία ιδιομορφίας δεν είναι γνωστά από πριν και εξαρτώνται από τη γεωμετρία του σκεδαστή, την ομαλότητα της επιφάνειάς του και τη συχνότητα.

Όσον αφορά τα σημεία μέτρησης, ο αριθμός τους είναι συνήθως ίδιος με τον αριθμό των βοηθητικών πηγών, προκειμένου να προκύψουν τετραγωνικοί πίνακες από την μοντελοποίηση των εξισώσεων που προκύπτουν σύμφωνα με την εξίσωση (1). Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις είναι χρήσιμο να έχουμε παραπάνω σημεία μέτρησης και σε αυτή τη περίπτωση καταφεύγουμε στην μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων για να λύσουμε το σύστημα.

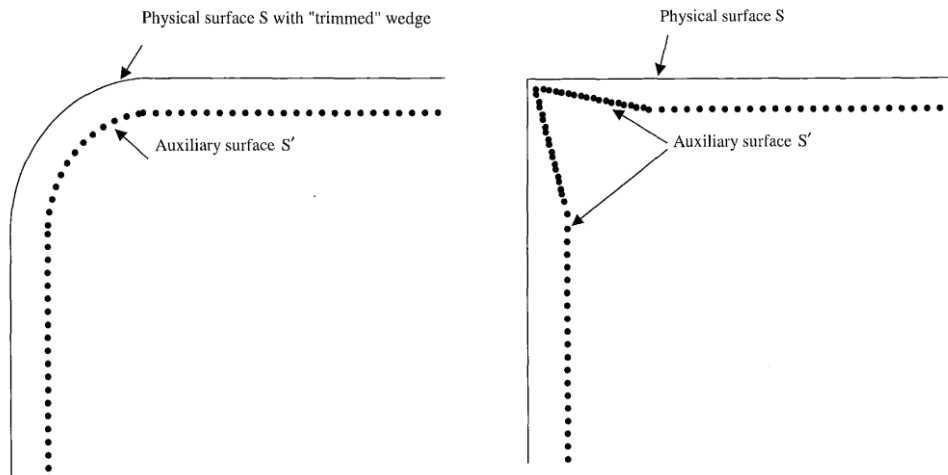
Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει πολλές έρευνες για τις δυνατότητες της MAS[1]. Η αποδοτικότητα της έχει βελτιωθεί σημαντικά και χρησιμοποιείται πλέον σε πιο περίπλοκα προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης:

- Συνδυασμός της MAS με τη μέθοδο των ροπών για επίλυση περίπλοκων προβλημάτων σκέδασης σε τρισδιάστατες δομές που αποτελούνται από αγωγίμα και διηλεκτρικά υλικά.
- Συνδυασμός της MAS με τη θεωρία ειδώλων σε περιπτώσεις διηλεκτρικών υλικών με απώλειες.
- Προβλήματα σκέδασης από γωνιές, όπου χρησιμοποιείται μια ανομοιόμορφη χωρική

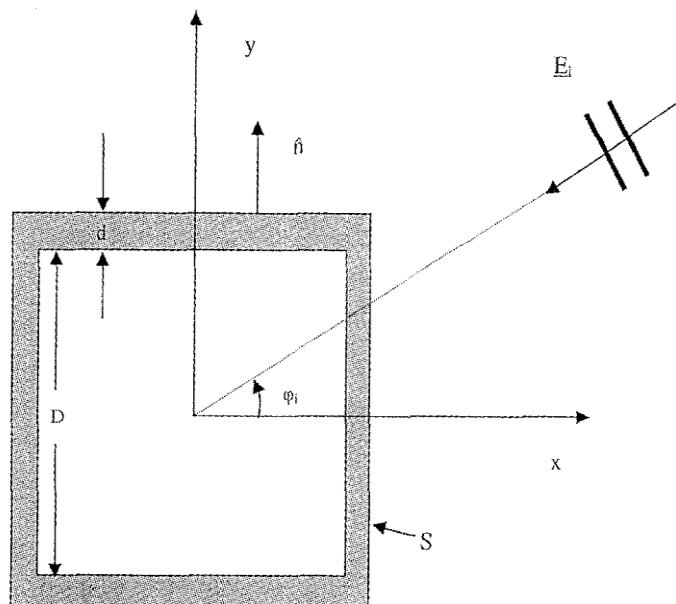


κατανομή για τις βοηθητικές πηγές. Στις περιπτώσεις αυτές η βοηθητική επιφάνεια  $S'$  δεν είναι σύμμορφη με την πραγματική κοντά στις γωνίες.

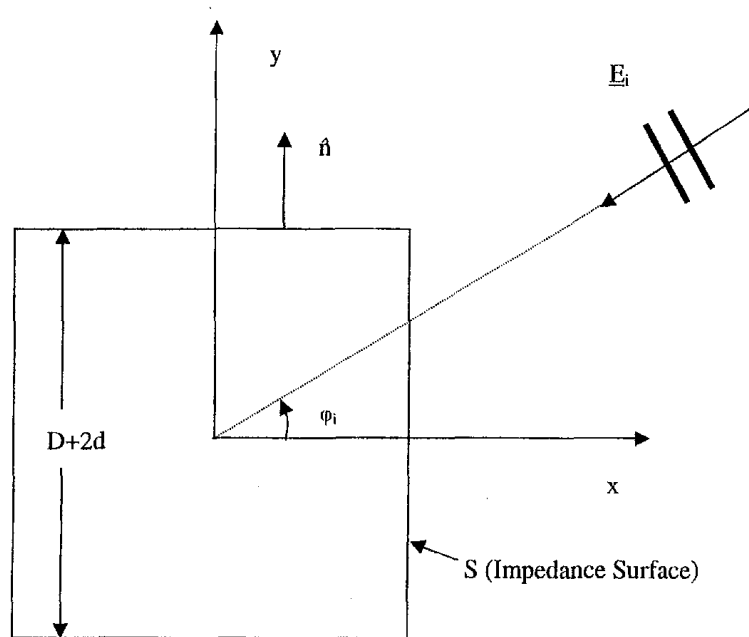
•Προβλήματα σκέδασης σε υλικά με διηλεκτρική επίστρωση, όπου χρησιμοποιείται το μοντέλο αντίστασης επιφάνειας.



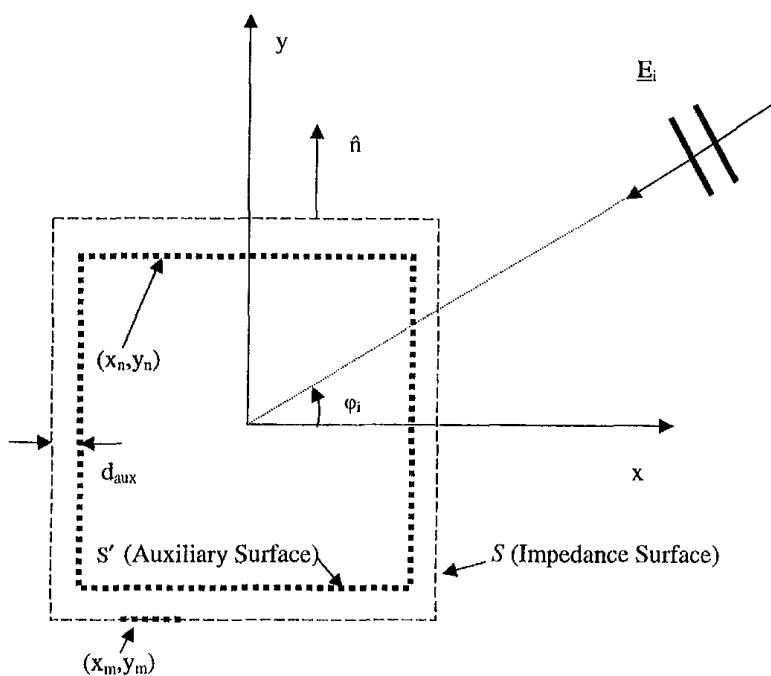
Εικόνα 3: Το πρόβλημα σκέδασης γωνιών με τα αντίστοιχα MAS μοντέλα.



Εικόνα 4α: Η γεωμετρία ενός επιστρωμένου τετραγωνικού κυλίνδρου PEC με προσπίπτον πεδίο  $E_i$ .



Εικόνα 4β: Το αντίστοιχο μοντέλο αντίστασης επιφάνειας της εικόνας 4α.



Εικόνα 4γ: Το αντίστοιχο MAS μοντέλο της 4β. Θεωρούμε ότι ο PEC δεν υπάρχει και ο χώρος είναι κενός. Οι θέσεις των βοηθητικών πηγών περιγράφονται από τις συντεταγμένες  $(x_n, y_n)$  και τα σημεία μέτρησης από τις  $(x_m, y_m)$ .

Επίσης είναι σημαντικό να αναφέρουμε και την τροποποιημένη εκδοχή του MAS που χρησιμοποιείται για προβλήματα λεπτών δομών όπου η απόσταση των βοηθητικών πηγών από τα σημεία μέτρησης είναι μικρή συγκριτικά με το μήκος κύματος, κάτι το οποίο καθιστά τις λύσεις που προκύπτουν ιδιαίτερα ασταθείς. Το βασικό χαρακτηριστικό της τροποποιημένης MAS (MMAS) είναι ότι το πρόβλημα επιλύεται χρησιμοποιώντας άγνωστες πυκνότητες φορτίων και ρευμάτων στην βοηθητική επιφάνεια αντί διακριτές πηγές ρευμάτων. Η MMAS εφαρμόζεται συνήθως σε κεραίες γεωμετρίας μικροταινίας[1].

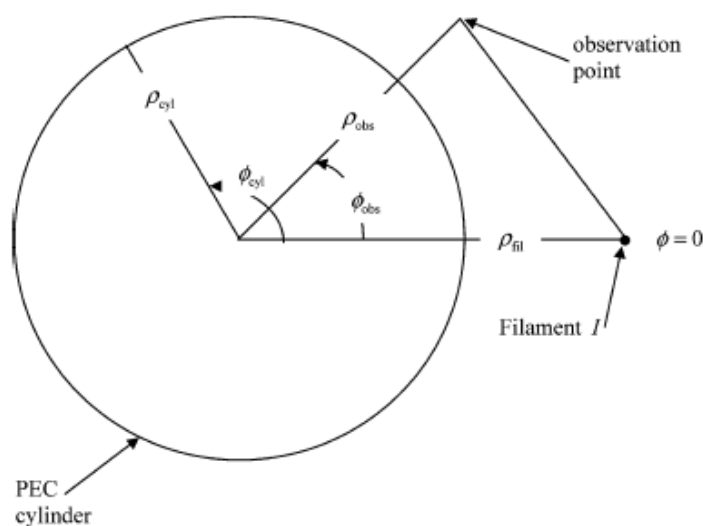
## 1.1 Ανάλυση απλού προβλήματος σκέδασης

Θα παρουσιάσουμε εδώ ένα απλό πρόβλημα σκέδασης και την αναλυτική του λύση προκειμένου να τονίσουμε προβλήματα και περιορισμούς που προκύπτουν κατά την εφαρμογή της MAS.

Εχουμε έναν άπειρο κατά τον  $z$  άξονα τέλειο κυλινδρικό αγωγό ακτίνας  $\rho_{cyl}$  με προσπίπτον πεδίο  $E_{inc}$ , το οποίο οφείλεται σε νήμα ρεύματος που βρίσκεται στον  $x$  άξονα. Θεωρούμε τις πολικές συντεταγμένες της επιφάνειας του PEC ( $\rho_{cyl}, \phi_{cyl}$ ), των σημείων παρατήρησης ( $\rho_{obs}, \phi_{obs}$ ) και της πηγής νήματος ( $\rho_{fil}, 0$ ). Ο PEC βρίσκεται σε κενό χώρο με διηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon_0$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ .

Θα γράψουμε επίσης την απόσταση μεταξύ δύο σημείων (A,B) στο χώρο ως:

$$R_{A,B} = \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2 - 2\rho_A\rho_B \cos \varphi_{AB}} \quad (1.1)$$



Εικόνα 1: Γεωμετρία του προβλήματος σκέδασης

Το προσπίπτον πεδίο που οφείλεται στο νήμα περιγράφεται από την εξίσωση

(1.2):

$$E_{fil} = H_0(kR_{obs,fil})$$

όπου  $R_{obs,fil}$  είναι η απόσταση μεταξύ σημείου παρατήρησης και πηγής νήματος και  $H_0 = H_0^{(1)}$  η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης. Μετά την σκέδαση του πεδίου λοιπόν το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο  $E_z$  ισούται με το προσπίπτον πλυν το σκεδαζόμενο πεδίο  $E_{scattered}$ [3].

(1.3):

$$E_z = H_0(kR_{obs,fil}) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{cyl})H_n(k\rho_{fil})}{H_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{obs}}, \rho_{obs} > \rho_{cyl}$$

όπου παραλείπουμε την προφανή χρονική εξάρτηση  $e^{-j\omega t}$  και τον παράγοντα  $\frac{-k^2 l}{4\omega\epsilon_0}$ .

$H_0(kR_{obs,fil})$  : το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο της πηγής

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{cyl})H_n(k\rho_{fil})}{H_n(k\rho_{cyl})} H_n(k\rho_{obs}) e^{in\varphi_{obs}}$  : το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο  $E_{scattered}$  σε μορφή σειράς Fourier

$J_n$  : η κυλινδρική συνάρτηση Bessel τάξης n

$H_n = H_n^{(1)}$  : η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους τάξης n

$k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  : ο κυματαριθμός κενού χώρου.

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα[3]:

$$H_0(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\min\{x_1, x_2\}) H_n(\max\{x_1, x_2\}) e^{in\theta} \quad (1.4)$$

( όπου το  $x_1 > 0, x_2 > 0, \theta$  πραγματικός), η (1.3) γίνεται:

(1.5):

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(k\rho_{fil}) \frac{J_n(k\rho_{obs})H_n(k\rho_{cyl}) - J_n(k\rho_{cyl})H_n(k\rho_{obs})}{H_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{obs}}, \rho_{obs} < \rho_{fil}$$

Η μερική παράγωγος της  $E_z$  ως προς την μεταβλητή  $\rho_{obs}$  είναι, σύμφωνα με το νόμο Faraday, ανάλογη του  $H_\varphi$ .

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho_{obs}} = \frac{\partial H_0(kR_{obs,fil})}{\partial \rho_{obs}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{cyl})H_n(k\rho_{fil})}{H_n(k\rho_{cyl})} \frac{\partial H_0(kR_{obs})}{\partial \rho_{obs}} e^{in\varphi_{obs}} \quad (1.6)$$

Χρησιμοποιώντας την ορίζουσα Wronski και θέτοντας  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = (\rho_{cyl}, \varphi_{cyl})$  στην (1.6) έχουμε την πόσοτητα

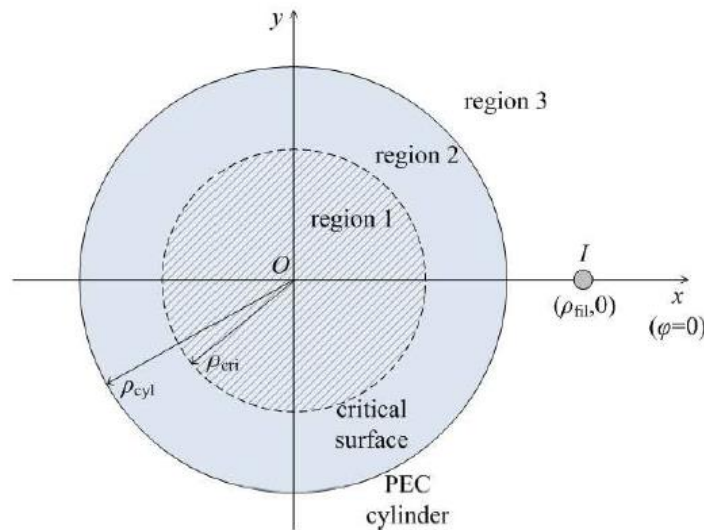
$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho_{obs}} = -\frac{2i}{\pi \rho_{cyl}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n(k\rho_{fil})}{H_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{cyl}} \quad (1.7)$$

η οποία είναι ανάλογη της επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος στον  $\hat{z}$  που εμφανίζεται στην επιφάνεια του σκεδαστή. Από την εξίσωση (1.3), είναι φανερό ότι το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται στο σύνορο του σκεδαστή ( $\rho_{obs} = \rho_{cyl}$ ), όπως ήταν αναμενόμενο. Η σύγκλιση της σειράς που εμφανίζεται στην εξίσωση (1.3) μπορεί να εξεταστεί χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel και Hankel[3]:

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ex}{2n}\right)^n, \quad n \rightarrow +\infty \quad (1.8)$$

$$H_n(x) = (-1)^n H_{-n}(x) \sim -i \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{ex}{2n}\right)^{-n}, \quad n \rightarrow +\infty \quad (1.9)$$

Για μεγάλα  $|n|$  λοιπόν, ο  $n$ -οστός όρος της σειράς είναι ανάλογος του  $\frac{1}{n} \left(\frac{\rho_{cri}}{\rho_{obs}}\right)^{|n|} e^{i|n|\varphi_{obs}}$ , όπου  $\rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}}$  και  $\rho_{cri} < \rho_{cyl}$ . Αυτό σημαίνει ότι η σειρά της εξίσωσης (1.3) συγκλίνει για κάθε  $\rho_{obs} > \rho_{cri}$  και αποκλίνει για  $\rho_{obs} < \rho_{cri}$ . Εδώ έχουμε και το πρώτο σημείο ενδιαφέροντος της ανάλυσης: Η εξίσωση (1.3), η οποία ισχύει για  $\rho_{obs} > \rho_{cyl}$ , μπορεί να μας δώσει αποτελέσματα και για την περιοχή ( $\rho_{cri} < \rho_{obs} < \rho_{cyl}$ ) (Region 2 στην εικόνα 2) μέσω αναλυτικής συνέχειας αφού συγκλίνει για  $\rho_{obs} > \rho_{cri}$  και αφού η (1.6) ορίζεται και αυτή στο Region 2.



Εικόνα 2: Γεωμετρική αναπαράσταση των περιοχών για το πρόβλημα σκέδασης.

Αναλύσαμε λοιπόν το πρόβλημα σκέδασης και αποδείξαμε ότι η εξίσωση (1.3) που μας δίνει το σκεδαζόμενο και προσπίπτον πεδίο ισχύει για τις περιοχές 2 και 3. Εδώ λοιπόν παρουσιάζεται το εξής ζήτημα: Τι αποτελέσματα θα έχουμε αν τοποθετήσουμε τις πηγές της MAS στη περιοχή 1, αφού οι εξισώσεις πεδίου αποκλίνουν στην περιοχή αυτή;

## Κεφάλαιο 2: Εφαρμογή της MAS

### 2.1 Ρεύματα MAS

Προχωρούμε λοιπόν στο επόμενο βήμα, την εφαρμογή της MAS[3]. Τοποθετούμε  $N$  βοηθητικές πηγές, οι οποίες είναι διακριτά νήματα ηλεκτρικού ρεύματος, σε μια θεωρητική επιφάνεια  $S'$  σύμμορφη με την γεωμετρία του σκεδαστή. Η  $S'$  είναι κύκλος ακτίνας  $\rho_{aux}$  και προφανώς ισχύει ότι  $0 < \rho_{aux} < \rho_{cyl}$ . Επιλέγουμε ομοιόμορφη κατανομή των  $N$  πηγών, όπως παρατηρούμε στο παρακάτω σχήμα. Οι πηγές τοποθετούνται στα σημεία  $(\rho_{aux}, \frac{2\pi l}{N})$ , όπου  $l = 0, 1, \dots, N - 1$  και τα σημεία μέτρησης στα σημεία  $(\rho_{cyl}, \frac{2\pi p}{N})$ ,  $p = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Ορίζουμε:

Το ρεύμα της εκάστοτε πηγής ως  $I_l$

Την απόσταση μεταξύ βοηθητικής πηγής και σημείου παρατήρησης ως

(2.1):

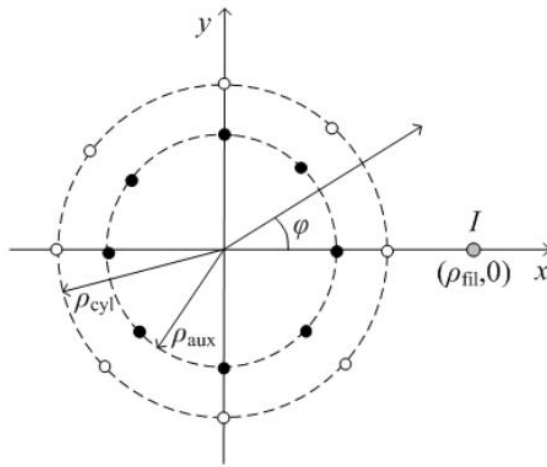
$$R_{l,obs} = \sqrt{\rho_{aux}^2 + \rho_{obs}^2 - 2\rho_{aux}\rho_{obs} \cos\left(\varphi_{obs} - \frac{2\pi l}{N}\right)}, \quad l = 0, 1, \dots, N - 1$$

Την απόσταση μεταξύ βοηθητικής πηγής και σημείου μέτρησης ως

$$b_{p,l} = b_{l,p} = \sqrt{\rho_{aux}^2 + \rho_{cyl}^2 - 2\rho_{aux}\rho_{cyl} \cos\frac{2\pi(p-l)}{N}} \quad (2.2)$$

Την απόσταση μεταξύ κύριας πηγής (νήματος  $I$ ) και σημείου μέτρησης ως

$$d_p = \sqrt{\rho_{fil}^2 + \rho_{cyl}^2 - 2\rho_{fil}\rho_{cyl} \cos\frac{2\pi p}{N}} \quad (2.3)$$



Εικόνα 3: Θέση και κατανομή των πηγών και σημείων μέτρησης για  $N=8$ . Οι πηγές εμφανίζονται με μαύρες τελείες ενώ τα σημεία μέτρησης με τις λευκές τελείες.

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο  $E_z$  περιγράφεται πλέον από την εξίσωση

(2.4):

$$E_z^N = H_0(kR_{fil,obs}) + \sum_{l=0}^{N-1} I_l H_0(kR_{l,obs})$$

όπου το σκεδαζόμενο πεδίο περιγράφεται από την υπέρθεση πεδίου των βοηθητικών πηγών. Συγκρίνοντας την (2.4) με την (1.3), προκύπτει το εξής:

**Το  $E_z^N$  πρέπει να ισούται με μηδέν στην επιφάνεια του σκεδαστή όπως προαναφέρθηκε.**

Δηλαδή  $E_z^N = 0$  για  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = (\rho_{cyl}, \frac{2\pi p}{N})$ . Άρα, από τις (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) προκύπτει ότι:

$$\sum_{l=0}^{N-1} H_0(kb_{p,l}) I_l = -H_0(kd_p), \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.5)$$

Η (2.5) αποτελεί ένα  $N \times N$  σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα ρεύματα των βοηθητικών πηγών  $I_l$ . Ο τετραγωνικός πίνακας που προκύπτει στην εξίσωση (2.5) είναι κυκλικός (circulant) αφού  $b_{p,l} = b_{0,l-p}$  και  $b_{0,l+qN} = b_{0,l}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ . Άρα μπορεί να λυθεί με DFT αντί να χρησιμοποιήσουμε κλασσικές λύσεις γραμμικών συστημάτων.

Ο DFT του  $I_l$  είναι:

$$I^{(m)} = \frac{1}{N} \frac{D^{(m)}}{B^{(N-m)}}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.6)$$

όπου

$$B^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} H_0(kb_{0,l}) e^{-\frac{iz\pi lm}{N}} \quad (2.7)$$

$$D^{(m)} = -\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} H_0(kd_p) e^{-\frac{iz\pi pm}{N}} \quad (2.8)$$

Οι (2.7) και (2.8) χρησιμοποιώντας τις (2.2) και (2.3) και την ταυτότητα για τις συναρτήσεις Hankel (1.4) σύμφωνα με τις ιδιότητες του κυκλικού πίνακα γίνονται :

$$B^{(m)} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{qN+m}(k\rho_{aux}) H_{qN+m}(k\rho_{cyl}) \quad (2.9)$$

$$D^{(m)} = -\sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{qN+m}(k\rho_{cyl}) H_{qN+m}(k\rho_{fil}) \quad (2.10)$$

όπου  $B^{(m)} = B^{(N-m)}$  και  $D^{(m)} = D^{(N-m)}$ .

$$\text{Άρα η (2.6) γίνεται } I^{(m)} = \frac{1}{N} \frac{D^{(m)}}{B^{(m)}} \quad (2.11)$$

Η λύση της (2.5) λοιπόν είναι η

(2.12):

$$I_l = \sum_{m=0}^{N-1} I^{(m)} e^{\frac{iz\pi lm}{N}}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

Για ευκολία θα θεωρήσουμε ότι ο αριθμός των πηγών  $N$  είναι περιττός προκειμένου η  $I_l$  να εκφράζεται από την

(2.13):

$$I_l = I^{(0)} + 2 \sum_{m=1}^{\frac{(N-1)}{2}} I^{(m)} \cos \frac{2\pi lm}{N}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

Τώρα που γνωρίζουμε τη λύση των ρευμάτων της εκάστοτε βοηθητικής πηγής, επιθυμούμε να ελέγξουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της (2.13) όταν  $N \rightarrow +\infty$ . Στο συγκεκριμένο όριο είναι προφανές ότι στη βοηθητική επιφάνεια δημιουργείται ένα επιφανειακό ρεύμα το οποίο ορίζεται από

$$J_{limit}^s(\varphi_{aux}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{NI_l}{2\pi\rho_{aux}} \quad (2.14)$$

Θα αναφερόμαστε στα  $\frac{NI_l}{2\pi\rho_{aux}}$  ( $l = 0, 1, \dots, N-1$ ) ως κανονικοποιημένα MAS ρεύματα. Χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές συμπεριφορές των συναρτήσεων Bessel και Hankel που μας δίνουν οι (1.8) και (1.9) με βάση ότι  $\left(0 \leq m \leq \left(\frac{N-1}{2}\right)\right)$  σύμφωνα με την (2.13), προκύπτει ότι μόνο ο  $q=0$  όρος επικρατεί στις (2.9) και (2.10) για το όριο  $N \rightarrow +\infty$ . Άρα από την (2.11) προκύπτει η ασυμπτωτική σχέση

$$I^{(m)} \sim -\frac{1}{N} \frac{J_m(k\rho_{cyl})H_m(k\rho_{fil})}{J_m(k\rho_{aux})H_m(k\rho_{cyl})}, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2} (N \rightarrow \infty) \quad (2.15)$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις (2.13), (2.14) και (2.15):

(2.16):

$$J_{limit}^s(\varphi_{aux}) = -\frac{1}{2\pi\rho_{aux}} \left[ \frac{J_0(k\rho_{cyl})H_0(k\rho_{fil})}{J_0(k\rho_{aux})H_0(k\rho_{cyl})} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(k\rho_{cyl})H_m(k\rho_{fil})}{J_m(k\rho_{aux})H_m(k\rho_{cyl})} \cos(m\varphi_{aux}) \right]$$

Το επιφανειακό ρεύμα  $J_{limit}^s(\varphi_{aux})$  της (2.16) σύμφωνα με την ασυμπτωτική ανάλυση από τις (1.8) και (1.9):

**Περίπτωση 1:** Συγκλίνει όταν οι βοηθητικές πηγές τοποθετηθούν στην περιοχή 2 της εικόνας 3 ( $\rho_{cri} < \rho_{aux} < \rho_{cyl}$ )

**Περίπτωση 2:** Αποκλίνει όταν οι βοηθητικές πηγές τοποθετηθούν στην περιοχή 1 της εικόνας 3 ( $\rho_{aux} < \rho_{cri}$ )



## 2.2 Πεδίο MAS για $N \rightarrow \infty$

Αποδείξαμε στην (2.12) λοιπόν ότι υπάρχουν ρεύματα MAS, τα οποία ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη του σκεδαστή  $E_z^N = 0$  για  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = (\rho_{cyl}, \frac{2\pi p}{N})$ . Πρέπει τώρα να αντιμετωπίσουμε το εξής ζήτημα: Οι βοηθητικές πηγές MAS πρέπει να παράγουν πεδίο που να μοντελοποιεί το σκεδαζόμενο πεδίο του προβλήματος. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό DFT των ρευμάτων  $I_l$ , ήτοι

$$I^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} I_l e^{-\frac{i2\pi lm}{N}} \quad (2.17)$$

Από τις (2.4),(1.4) και (2.17) έχουμε ότι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο για σημεία παρατήρησης εκτός της βοηθητικής επιφάνειας

(2.18):

$$E_z^N = H_0(kR_{fil,obs}) + N \sum_{n=-\infty}^{\infty} I^{(n)} J_n(k\rho_{aux}) H_n(k\rho_{obs}) e^{in\varphi_{obs}}, \rho_{obs} > \rho_{aux}$$

Εφαρμόζοντας τώρα το όριο  $N \rightarrow +\infty$  στην (2.18) και χρησιμοποιώντας την λύση (2.15) για μεγάλα  $N$ , έχουμε

(2.19):

$$E_z^N \sim H_0(kR_{fil,obs}) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho_{cyl}) H_n(k\rho_{fil})}{H_n(k\rho_{cyl})} H_n(k\rho_{obs}) e^{in\varphi_{obs}}$$

( $N \rightarrow \infty$ ),

η οποία είναι ταυτόσημη με τη εξίσωση (1.3). Άρα, το πεδίο που παράγουν οι πηγές MAS μοντελοποιεί τέλεια το σκεδαζόμενο για μεγάλα  $N$  και  $\rho_{obs} > \rho_{aux}$ . Όπως προειπώθηκε στο κεφάλαιο 1, η (2.19) συγκλίνει για κάθε  $\rho_{obs} > \rho_{cri}$  και αποκλίνει για  $\rho_{obs} < \rho_{cri}$ . Μπορούμε λοιπόν να διαχωρίσουμε τις εξής περιπτώσεις:

**Περίπτωση 1 ( $\rho_{cri} < \rho_{aux} < \rho_{cyl}$ ):**

Το πεδίο που παράγουν οι βοηθητικές πηγές MAS για ( $N \rightarrow \infty$ ) αποδίδουν το πραγματικό σκεδαζόμενο πεδίο στην περιοχή 3 της εικόνας 2 ( $\rho_{obs} > \rho_{cyl}$ ) και αποτελεί την αναλυτική συνέχεια του πεδίου στη περιοχή μεταξύ βοηθητικής επιφάνειας και συνόρου του σκεδαστή ( $\rho_{aux} < \rho_{obs} < \rho_{cyl}$ )

**Περίπτωση 2 ( $\rho_{aux} < \rho_{cri}$ ):**

**Το πεδίο που παράγουν οι βοηθητικές πηγές MAS για ( $N \rightarrow \infty$ ):**

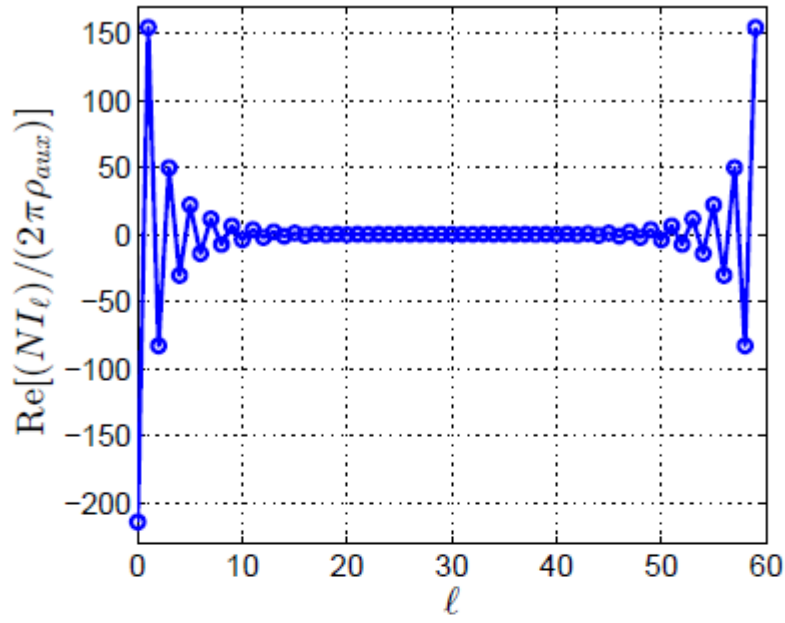
**(2.1) Υπάρχει και είναι το πραγματικό σκεδαζόμενο πεδίο στην περιοχή 3 ( $\rho_{obs} > \rho_{cyl}$ ).**

**(2.2) Υπάρχει και αποτελεί την αναλυτική συνέχεια του πεδίου στην περιοχή 2 ( $\rho_{cri} < \rho_{obs} < \rho_{cyl}$ )**

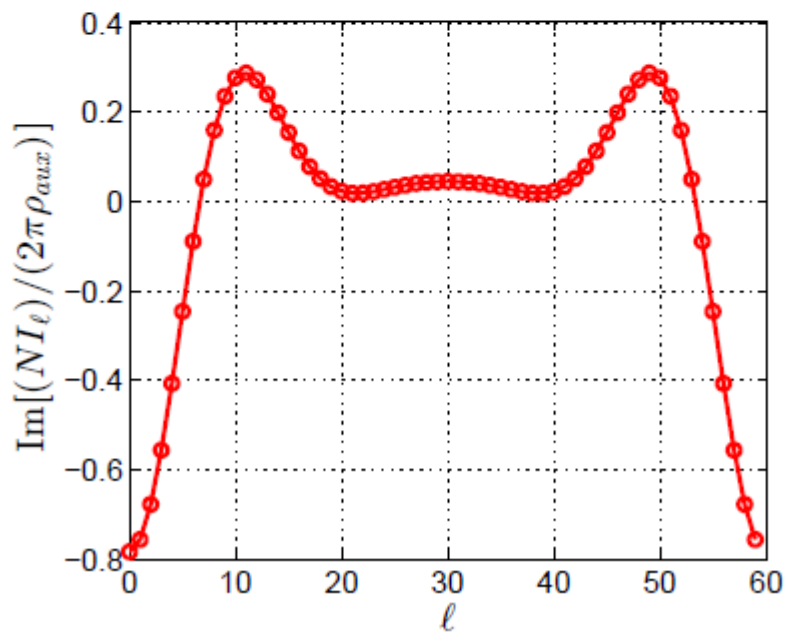
**(2.3) Δεν υπάρχει στο κομμάτι της περιοχής 1 του σκεδαστή ( $\rho_{aux} < \rho_{obs} < \rho_{cri}$ )**

Το σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση είναι ότι ενώ αποδείξαμε στο υποκεφάλαιο 2.1 ότι τα ρεύματα της MAS παρουσιάζουν αποκλίσεις για ( $\rho_{aux} < \rho_{cri}$ ), μπορούμε παρόλα αυτά να μοντελοποιήσουμε το σκεδαζόμενο πεδίο που αναζητούμε, όσο τα σημεία παρατήρησης βρίσκονται εκτός του συνόρου  $\rho_{cri}$ , όπου το σκεδαζόμενο πεδίο δεν υπολογίζεται σύμφωνα με την ασυμπτωτική ανάλυση του κεφαλαίου 1.

Παρακάτω παρουσιάζουμε γραφήματα για  $N = 60$  βοηθητικές πηγές στα όποια παρατηρούμε ότι ενώ υπάρχουν ισχυρές αποκλίσεις στις βοηθητικές πηγές της MAS κοντά στα όρια, το πεδίο MAS που παράγουν δεν παρουσιάζει αποκλίσεις[3].

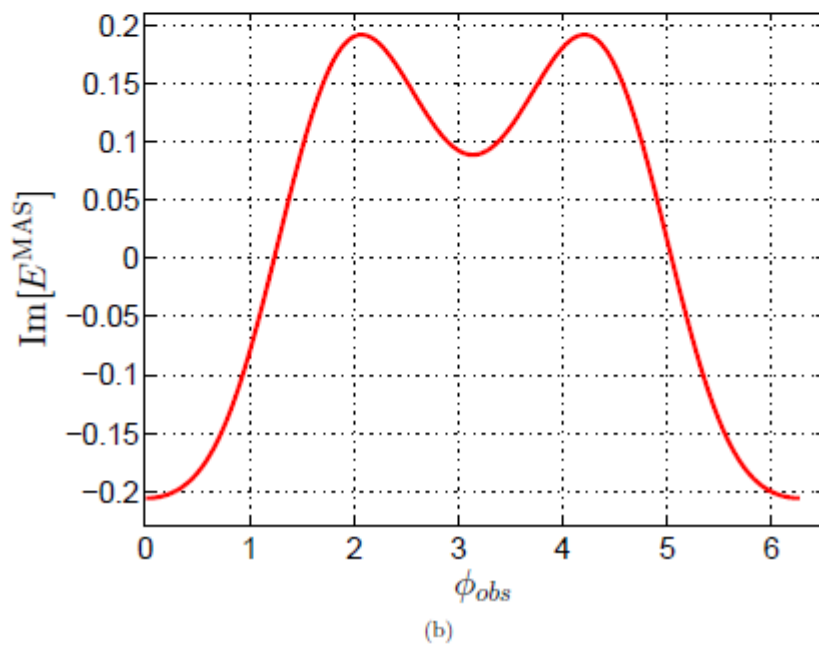
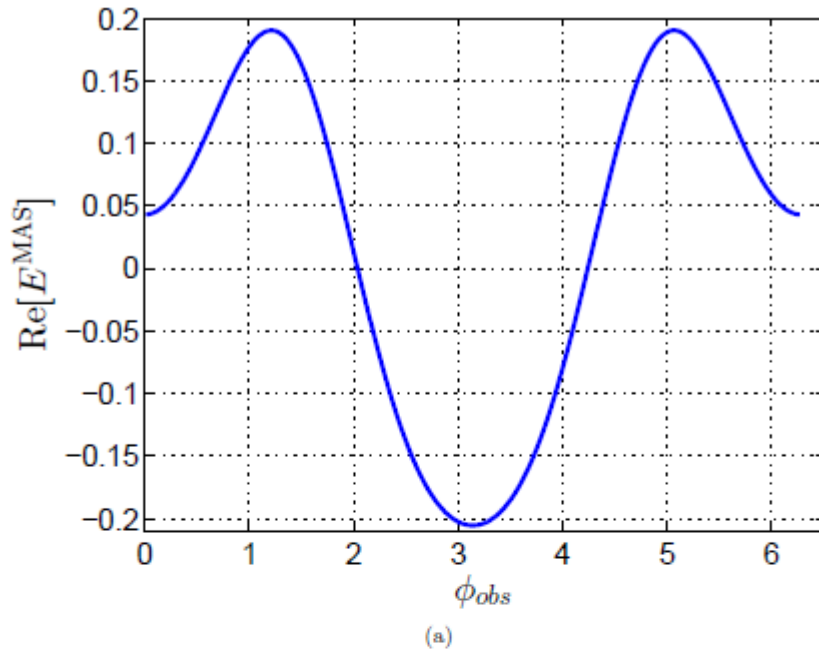


(a)



(b)

Εικόνα 4: Το πραγματικό και φανταστικό μέρος των κανονικοποιημένων ρευμάτων MAS  $\frac{NI_l}{2\pi\rho_{aux}}$  ως προς τον αριθμό τους  $l$ .



Εικόνα 5: Το πραγματικό και φανταστικό μέρος του πεδίου που παράγουν τα κανονικοποιημένα MAS ρεύματα  $E^{MAS}$  ως προς τη μεταβλητή  $\phi_{obs}$

## 2.3 Η Συνεχής MAS

Εδώ, αντί να χρησιμοποιήσουμε διακριτές βοηθητικές πηγές επιλέγουμε μια βοηθητική επιφάνεια  $S'$ , η οποία φέρει συνεχές επιφανειακό ρεύμα  $J^S(\varphi_{aux})$ [3-4]. Έτσι, σύμφωνα με την συνοριακή συνθήκη του προβλήματος  $E_z^N = 0$  για  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = (\rho_{cyl}, \frac{2\pi p}{N})$  προκύπτει η εξής ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

(2.20):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{H}_0(\mathbf{kR}_{aux,cyl}) J^S(\varphi_{aux}) d\varphi_{aux} = -\frac{1}{\rho_{aux}} \mathbf{H}_0(\mathbf{kR}_{fil,cyl}), \quad -\pi < \varphi_{cyl} < \pi$$

Συγκρίνοντας την (2.20) με την (2.5) είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι η (2.5) μπορεί να προκύψει από την (2.20) χρησιμοποιώντας την μέθοδο Nyström (ή ορθογωνική μέθοδο-rectangular rule). Πιο συγκεκριμένα επιλέγουμε μια διακριτοποίηση της  $\varphi_{aux} = \frac{2\pi}{N}$ , κάνουμε μια εκτίμηση του ολοκληρώματος της (2.20) χρησιμοποιώντας τον ορθογωνικό κανόνα και εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη στα σημεία μέτρησης  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = (\rho_{cyl}, \frac{2\pi p}{N})$ ,  $p = 0, 1, \dots, N - 1$ . Θα αναφερόμαστε στην (2.20) ως τη συνεχή ολοκληρωτική εξίσωση MAS (Continuous MAS Integral Equation / CMASIE). Χρησιμοποιώντας σειρά Fourier, η λύση της (2.20) προκύπτει[3]

$$J^S(\varphi_{aux}) = -\frac{1}{2\pi\rho_{aux}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(k\rho_{cyl})H_m(k\rho_{fil})}{J_m(k\rho_{aux})H_m(k\rho_{cyl})} e^{im\varphi_{aux}} \quad (2.21)$$

η οποία είναι ταυτόσημη με την (2.16).

Οφείλουμε να τονίσουμε πως η συγκεκριμένη πυκνότητα ρεύματος δεν είναι καλώς ορισμένη όταν  $J_m(k\rho_{aux}) = 0$  για κάποια  $m$ , σε περιπτώσεις δηλαδή όπου η ηλεκτρική ακτίνα της βοηθητικής επιφάνειας επιφέρει μηδενισμό στη συνάρτηση Bessel. Αυτές οι περιπτώσεις είναι ιδιόζουσες και δημιουργούν προβλήματα εσωτερικού συντονισμού. Είναι λογικό ο όρος  $J_m(k\rho_{aux})$  να εμφανίζεται στον παρονομαστή καθώς η ρευματική κατανομή  $J^S(\varphi_{aux}) = e^{im\varphi_{aux}}$  είναι μη ακτινοβολούμενη[3].

Συνεπώς, όπως και πριν, στην περιοχή  $(\rho_{cri} < \rho_{aux} < \rho_{cyl})$  η CMASIE έχει λύση ενώ παρουσιάζει απόκλιση στην περιοχή  $(\rho_{aux} < \rho_{cri})$ . Το σημαντικό που προκύπτει από την ανάλυση αυτή είναι ότι για  $N \rightarrow +\infty$ , η διακριτή MAS συγκλίνει όντως στην συνεχή αλλά και στο πραγματικό πεδίο.

## 2.4 Αποκλίσεις ρευμάτων: Σφάλματα στρογγύλευσης, εσωτερικός συντονισμός, υπερκατευθυντικότητα

Αποδείξαμε ότι ακόμα και αν τα ρεύματα MAS αποκλίνουν, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το σκεδαζόμενο πεδίο. Ας θέσουμε όμως εδώ το εξής ερώτημα: Πως γίνεται μια κατανομή ρευμάτων που παρουσιάζει τις αποκλίσεις που φαίνονται στην εικόνα 4 να δημιουργεί πεδίο το οποίο δεν παρουσιάζει καμία ταλάντωση, όπως στην εικόνα 5?

Είναι γνωστό ότι τα προβλήματα σκέδασης στην ηλεκτροστατική μπορούν να επιλυθούν εφαρμόζοντας τη θεωρία ειδώλων[15]. Τοποθετούμε ένα είδωλο στο σημείο ιδιομορφίας του πεδίου  $(\rho, \varphi) = (\rho_{cri}, 0)$  και θεωρούμε ότι ο σκεδαστής δεν υπάρχει πλέον. Υπολογίζουμε στη συνέχεια το πεδίο από την υπέρθεση πηγής και ειδώλου. Τι συμβαίνει λοιπόν όταν τοποθετήσουμε μια επιφάνεια "ειδώλων" ακτίνας  $\rho_{aux} < \rho_{cri}$ ? Πεδία τα οποία οφείλονται σε ομοιόμορφες κατανομές ρευμάτων είναι συνεχείς συναρτήσεις χωρικών μεταβλητών και δε μπορούν να εμφανίσουν σημεία ιδιομορφίας εκτός της δομής της κατανομής, κάτι το οποίο ισχύει γενικά για κάθε γεωμετρία προβλήματος. Όμως, στην προκειμένη περίπτωση, γνωρίζουμε ήδη ότι το πεδίο εμφανίζει ιδιομορφίες στην επιφάνεια ακτίνας  $\rho_{cri}$ . Σκεφτόμενοι λοιπόν αντίστροφα, η κατανομή ρεύματος η οποία εμφανίζει ιδιομορφία στο πεδίο που δημιουργεί, **ΔΕΝ** μπορεί να είναι ομοιόμορφη, αλλά θα εμφανίζει έντονες ταλαντώσεις, όπως φαίνεται στα παραπάνω γραφήματα. Το συμπέρασμα αυτό αποδεικνύεται από τα υποκεφάλαια 2.2 και 2.3.

Ένα συχνό πρόβλημα που εμφανίζεται στη χρήση αριθμητικών μεθόδων είναι τα σφάλματα στρογγύλευσης(groundoff). Τα σφάλματα αυτά οφείλονται στο γεγονός ότι είναι αδύνατο να αναπαραστήσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς σε ένα υπολογιστικό σύστημα με πεπερασμένο μήκος λέξης[8-10]. Λόγω της ορθότητας του αποτελέσματος που μας δίνει η εξίσωση (2.19), οδηγούμαστε στο ότι οι αποκλίσεις των ρευμάτων δεν αποτελούν προϊόν τέτοιων σφαλμάτων ούτε ότι οφείλονται σε κακή/ασταθή κατάσταση των μητρώων των εξισώσεων (matrixill-conditioning). Επιλύοντας την εξίσωση (2.5) με DFT, αλλά και με χρήση μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων (π.χ. μέθοδος ελάχιστων τετραγώνων) προκύπτουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα. Αν είχαμε προβλήματα groundoff, τότε τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων δε θα ήταν ίδια.

Επίσης, οι ταλαντώσεις των ρευμάτων δεν σχετίζονται με ζητήματα εσωτερικού συντονισμού. Προβλήματα εσωτερικού συντονισμού εμφανίζονται σε διακριτές τιμές του  $\rho_{aux}$  ή της συχνότητας του προβλήματος. Εδώ όμως, τα ρεύματα παρουσιάζουν αποκλίσεις για κάθε  $\rho_{aux} < \rho_{cri}$ .

Τέλος, το φαινόμενο των αποκλίσεων των ρευμάτων παρουσιάζει έντονες ομοιότητες με το φαινόμενο υπερκατευθυντικότητας (superdirectivity) στις κεραίες[7],[17]. Το φαινόμενο της υπερκατευθυντικότητας παρατηρείται όταν προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε το πεδίο που παράγεται από μια κεραία με μια άλλη μικρότερη σε μέγεθος. Έτσι, η απόσταση μεταξύ των στοιχείων της κεραίας μειώνεται και εμφανίζονται έντονες ταλαντώσεις στη ρευματική της κατανομή. Η ομοιότητα της διαδικασίας είναι προφανής: Επιλέξαμε να μοντελοποιήσουμε το σκεδαζόμενο πεδίο που προκύπτει από κάποιον PEC χρησιμοποιώντας  $N$  βοηθητικές πηγές ρεύματος. Οι πηγές αυτές τοποθετήθηκαν σε μια μικρότερη του PEC θεωρητική επιφάνεια και στη συνέχεια ελαχιστοποιήσαμε τη σχετική απόσταση των πηγών με το όριο  $N \rightarrow \infty$ .

## Κεφάλαιο 3: Η Εκτεταμένη Ολοκληρωτική Εξίσωση

### 3.1 Λύση της ΕΙΕ

Αφού ερευνήσαμε τις αποκλίσεις ρευμάτων που προκύπτουν στην εφαρμογή της MAS, τίθεται το ερώτημα αν στην εφαρμογή της εκτεταμένης ολοκληρωτικής εξίσωσης (extended integral equation/ EIE) παρουσιάζονται αντίστοιχα ζητήματα αποκλίσεων. Η ΕΙΕ χρησιμοποιεί την εκτεταμένη συνοριακή συνθήκη (Extended Boundary Condition-EBC): Σε προβλήματα σκέδασης από την πρόσπτωση Η/Μ κύματος σε κάποιον PEC εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη το ηλεκτρικό πεδίο να είναι μηδενικό στο σύνορο της επιφάνειας του PEC. Στην εφαρμογή της ΕΙΕ επεκτείνουμε την συνοριακή αυτή συνθήκη στο εσωτερικό του σκεδαστή, ικανοποιώντας δηλαδή την EBC σε μία επιλεγμένη κλειστή βοηθητική επιφάνεια. Απαιτούμε δηλαδή:  $\mathbf{E}_z = \mathbf{0}$ ,  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = (\rho_{aux}, \varphi_{aux})$ . Ο άγνωστος στην ΕΙΕ είναι το επιφανειακό ρεύμα του PEC.

Λόγω των ομοιοτήτων μεταξύ MAS και ΕΙΕ, θα περίμενε κανείς ότι η διακριτοποίηση της ΕΙΕ για  $N \rightarrow \infty$  εμφανίζει αντίστοιχα προβλήματα αποκλίσεων, κάτι το οποίο όμως δεν ισχύει. Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι οι ταλαντώσεις ρευμάτων που προκύπτουν στην ΕΙΕ οφείλονται σε προβλήματα roundoff και στο ill-conditioning, κάτι το οποίο μπορεί να μεγιστοποιήσει πιθανά σφάλματα, τα οποία θα ήταν ασήμαντα υπό άλλες συνθήκες[8-10]. Από την εξίσωση (1.7) προκύπτει ότι το επιφανειακό ρεύμα στην επιφάνεια του PEC δίνεται από την παρακάτω εξίσωση[8]:

$$J_{sz}(\varphi_{cyl}) = -\frac{I}{2\pi\rho_{cyl}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n(k\rho_{fil})}{H_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{cyl}} \quad (3.1)$$

όπου συμπεριλάβαμε τον παράγοντα  $\frac{-k^2 I}{4\omega\epsilon_0}$  που παραλείφθηκε στο κεφάλαιο 1. Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο σε κάποιο σημείο παρατήρησης  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs})$  εκφράζεται από την υπέρθεση του πεδίου διέγερσης και του σκεδαζόμενου πεδίου

(3.2):

$$\mathbf{E}_z(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = \frac{-k^2}{4\omega\epsilon_0} \left[ \mathbf{I}H_0(\mathbf{k}R_{obs,fil}) + \rho_{cyl} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\mathbf{k}R_{obs,cyl}) J_{sz}(\varphi_{cyl}) d\varphi_{cyl} \right]$$

Απαιτώντας τώρα την συνθήκη  $E_z = 0$ ,  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = (\rho_{aux}, \varphi_{aux})$  προκύπτει η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

(3.3):

$$\int_{-\pi}^{\pi} H_0(\mathbf{k}R_{aux,cyl}) J_{sz}(\varphi_{cyl}) d\varphi_{cyl} = -\frac{I}{\rho_{cyl}} H_0(\mathbf{k}R_{aux,fil}), \quad -\pi < \varphi_{aux} < \pi$$



Για την περίπτωση του απλού προβλήματος σκέδασης που αντιμετωπίζουμε, η (3.3) είναι η αντίστοιχη διδιάστατη εξίσωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης του Waterman, που ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο "εκτεταμένη ολοκληρωτική εξίσωση"[8]. Συγκρίνοντας τις (3.3) και (2.20) παρατηρούμε την σημαντική ομοιότητα ότι η EIE και η CMASIE έχουν τον ίδιο πυρήνα  $H_0(kR_{aux,cyl})$  στην εκάστοτε ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm.

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα (1.4) για τις συναρτήσεις Hankel στο δεξί μέρος της (3.3) και στον πυρήνα του ολοκληρώματος προκύπτουν οι

(3.4):

$$-\frac{I}{\rho_{cyl}} H_0(kR_{aux,fil}) = -\frac{I}{\rho_{cyl}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{aux}) H_n(k\rho_{fil}) e^{in\varphi_{aux}}$$

(3.5):

$$H_0(kR_{aux,cyl}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{aux}) H_n(k\rho_{cyl}) e^{in(\varphi_{cyl}-\varphi_{aux})}$$

Άρα, το επιφανειακό ρεύμα του σκεδαστή προκειμένου να ισχύει η συνθήκη  $E_z = 0$ ,  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = (\rho_{aux}, \varphi_{aux})$  προκύπτει από την

(3.6):

$$J_{sz}(\varphi_{cyl}) = -\frac{I}{2\pi\rho_{cyl}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n(k\rho_{fil})}{H_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{cyl}}$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις (3.3), (3.4), (3.5) παρατηρούμε ότι οι παράγοντες  $J_n(k\rho_{aux})$  αλληλοανααιρούνται. Η λύση της (3.3) λοιπόν, σε αντίθεση με την λύση της CMASIE (2.21), είναι **ανεξάρτητη** της θέσης της βοηθητικής επιφάνειας! Επίσης, η (3.6) είναι ίδια με την (3.1). Αυτό σημαίνει ότι η EIE μας δίνει το πραγματικό επιφανειακό ρεύμα του σκεδαστή. Τέλος, η ανεξαρτησία της (3.6) από τη θέση της βοηθητικής επιφάνειας αποδεικνύει ότι η (3.6) είναι και η μοναδική λύση της EIE, αφού ορίζεται για κάθε τιμή του  $k\rho_{aux}$ .

### 3.2 Διακριτοποίηση της EIE

Για την διακριτοποίηση της EIE θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την μέθοδο Nyström όπως και στο κεφάλαιο (2.3) επιλέγοντας τα  $N$  σημεία μέτρησης πάνω στη βοηθητική επιφάνεια  $(\rho_{obs}, \varphi_{obs}) = (\rho_{aux}, \frac{2\pi p}{N})$ ,  $p = 0, 1, \dots, N-1$ . Από την (3.3) λοιπόν προκύπτει το εξής γραμμικό σύστημα

$$\sum_{l=0}^{N-1} H_0(kb_{p,l}) I_l = -H_0(kd_p), \quad p = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.7)$$

όπου:

$b_{p,l}$  είναι η απόσταση μεταξύ  $(\rho_{cyl}, \frac{2\pi l}{N})$  και  $(\rho_{aux}, \frac{2\pi p}{N})$

$d_p$  είναι η απόσταση μεταξύ  $(\rho_{fil}, 0)$  και  $(\rho_{aux}, \frac{2\pi p}{N})$

$I_l = \frac{2\pi\rho_{cyl}J_{sz}\frac{2\pi l}{N}}{N}$  είναι το διακριτοποιημένο ρεύμα στα  $l = 0, 1, \dots, N-1$  σημεία της επιφάνειας του σκεδαστή.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (3.7) είναι ίδια με την (2.5) με την εξαίρεση του ορισμού της απόστασης  $d_p$ . Ομοίως λοιπόν με την διαδικασία επίλυσης που ακολουθήσαμε στο κεφάλαιο (2.1), αφού ο πίνακας  $b_{p,l}$  είναι κυκλικός, συνεχίζουμε με την εφαρμογή του DFT.

Για ευκολία επιλεγουμε πάλι περιττό  $N$ .

$$\frac{I_l}{I} = I^{(0)} + 2 \sum_{m=1}^{\frac{(N-1)}{2}} I^{(m)} \cos \frac{2\pi lm}{N}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.8)$$

όπου:

$$I^{(m)} = \frac{1}{N} \frac{D^{(m)}}{B^{(m)}} \quad (3.9)$$

$$B^{(m)} = J_m(k\rho_{aux})H_m(k\rho_{cyl}) + (\sum_{n=-\infty}^{-1} J_{nN+m}(k\rho_{aux})H_{nN+m}(k\rho_{cyl}) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{nN+m}(k\rho_{aux})H_{nN+m}(k\rho_{cyl})) \quad (3.10)$$

$$D^{(m)} = -J_m(k\rho_{aux})H_m(k\rho_{fil}) + (\sum_{n=-\infty}^{-1} J_{nN+m}(k\rho_{aux})H_{nN+m}(k\rho_{fil}) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{nN+m}(k\rho_{aux})H_{nN+m}(k\rho_{fil})) \quad (3.11)$$

(οι όροι  $n = 0$  εμφανίζονται εκτός αθροίσματος λόγω της ανεξαρτησίας τους από το  $N$ )

Χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές προσεγγίσεις των συναρτήσεων Bessel (1.8) και Hankel (1.9) για μεγάλα  $n$  παρατηρούμε ότι ο  $n$ -οστός όρος στη δεύτερη σειρά της (3.10)

είναι της τάξεως  $\frac{(\rho_{aux}/\rho_{cyl})^{nN}}{nN}$  και αφού  $\rho_{aux} < \rho_{cyl}$ , συμπεριφέρεται σαν τον  $n$ -οστό όρο της σειράς Taylor για  $\ln(1+x)$ , όπου ( $|x| < 1$ ) [8].

Άρα, μπορούμε να βρούμε το όριο της σειράς για  $N \rightarrow \infty$ , το οποίο προκύπτει μηδενικό. Αντίστοιχα, και τα άλλα αθροίσματα των (3.10), (3.11) δίνουν μηδενική τιμή. Επομένως, οι (3.10) και (3.11) γίνονται:

$$B^{(m)} = J_m(k\rho_{aux})H_m(k\rho_{cyl}) \quad (3.12)$$

$$D^{(m)} = -J_m(k\rho_{aux})H_m(k\rho_{fil}) \quad (3.13)$$

Στην (3.9) λοιπόν, τα  $J_m(k\rho_{aux})$  αλληλοαναιρούνται και προκύπτει πάλι λύση ανεξάρτητη της θέσης της βοηθητικής επιφάνειας, δηλαδή:

$$I^{(m)} \sim -\frac{1}{N} \frac{H_m(k\rho_{fil})}{H_m(k\rho_{cyl})}, \quad (N \rightarrow \infty) \quad (3.14)$$

Συνδυάζοντας τις (3.8) και (3.14) προκύπτει ότι το όριο  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{NI_l}{2\pi\rho_{cyl}}$ , ( $\varphi_{cyl} = \frac{2\pi l}{N}$ ) υπάρχει ανεξάρτητα από την τιμή της  $\rho_{aux}$  και ισχύει

(3.15) :

$$J_{sz}(\varphi_{cyl}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{NI_l}{2\pi\rho_{cyl}}$$

Η διακριτοποίηση λοιπόν της ΕΙΕ συγκλίνει πάντα σε λύση και αυτό σημαίνει ότι, αντίθετα με την MAS, δεν υπάρχουν φαινόμενα ταλαντώσεων στις ρευματικές πηγές.

### 3.3 Αναλυτική συνέχεια του σκεδαζόμενου πεδίου

Έστω  $E_z^S$  το σκεδαζόμενο πεδίο εξωτερικά του PEC. Όπως, προαναφέραμε στο κεφάλαιο 2, οι αποκλίσεις στην MAS συμβαίνουν όταν η βοηθητική επιφάνεια που χρησιμοποιούμε δεν εσωκλείει το σημείο ιδιομορφίας ( $\rho_{crit}, 0$ ) της αναλυτικής συνέχειας του  $E_z^S$ . Αντιθέτως, αποδείξαμε ότι η ΕΙΕ μας δίνει λύση ανεξάρτητα από τη θέση της βοηθητικής επιφάνειας και συνεπώς ανεξάρτητα και από το σημείο ιδιομορφίας. Αυτό συμβαίνει διότι η αναλυτική συνέχεια του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου  $E_z$  **δεν** μηδενίζεται στο εσωτερικό του σκεδαστή. Πιο συγκεκριμένα, το πεδίο διέγερσης, το οποίο είναι σαφώς καθορισμένο στο εσωτερικό του PEC, δεν αναιρείται από την αναλυτική συνέχεια του  $E_z^S$ , ήτοι

(3.16):

$$B = \frac{-\rho_{cyl}k^2}{4\omega\varepsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(kR_{cyl,obs}) J_{sz}(\varphi_{cyl}) d\varphi_{cyl}, \quad (\rho_{obs} > \rho_{cyl})$$

στα σημεία ( $\rho_{obs}, \varphi_{obs}$ ) για ( $\rho_{obs} < \rho_{cyl}$ ). Αντιθέτως, αναιρείται από το εσωτερικό πεδίο που προκαλείται από το επιφανειακό ρεύμα του σκεδαστή  $J_{sz}(\varphi_{cyl})$ :

$$A = \frac{-\rho_{cyl}k^2}{4\omega\varepsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(kR_{cyl,obs}) J_{sz}(\varphi_{cyl}) d\varphi_{cyl}, \quad (\rho_{cyl} > \rho_{obs}) \quad (3.17)$$

Οι (3.16) και οι (3.17) φαίνονται ίδιες αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι. Αντικαθιστώντας το  $H_0(kR_{cyl,obs})$  στην (3.16) μέσω της ταυτότητας (1.3) προκύπτει

$$H_0(kR_{cyl,obs}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{cyl}) H_n(k\rho_{obs}) e^{in(\varphi_{obs}-\varphi_{cyl})} \quad (3.18)$$

αφού ( $\rho_{obs} > \rho_{cyl}$ ).

Άρα, εναλλάσσοντας τους όρους ολοκλήρωσης και αθροίσματος και αντικαθιστώντας το  $J_{sz}(\varphi_{cyl})$  μέσω της (3.6), η (3.16) γίνεται

(3.19):

$$B = \frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{cyl}) H_n(k\rho_{obs}) \frac{H_n(k\rho_{fil})}{H_n(k\rho_{cyl})} e^{in\varphi_{obs}}, \quad (\rho_{obs} > \rho_{cyl})$$

Σύμφωνα με την ασυμπτωτική ανάλυση στο κεφάλαιο 1, η σειρά της (3.19) συγκλίνει όχι μόνο για  $(\rho_{obs} > \rho_{cyl})$ , αλλά και για  $(\rho_{obs} > \rho_{cri})$ . Επίσης, η μερική παράγωγος  $\frac{\partial B}{\partial \rho_{obs}}$  συγκλίνει για  $(\rho_{obs} > \rho_{cri})$ . Επομένως, η σειρά της (3.19) είναι αναλυτική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσουμε την αναλυτική συνέχεια του  $E_z^S$  στην περιοχή  $\rho_{cri} < \rho_{obs} < \rho_{cyl}$ . Εφαρμόζοντας την ταυτότητα (1.4) τώρα στο  $H_0(kR_{cyl,obs})$  της εξίσωσης (3.17), αφού  $(\rho_{cyl} > \rho_{obs})$  έχουμε

$$H_0(kR_{cyl,obs}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{obs}) H_n(k\rho_{cyl}) e^{in(\varphi_{obs}-\varphi_{cyl})} \quad (3.20)$$

Οπότε, η (3.17) γίνεται

(3.21):

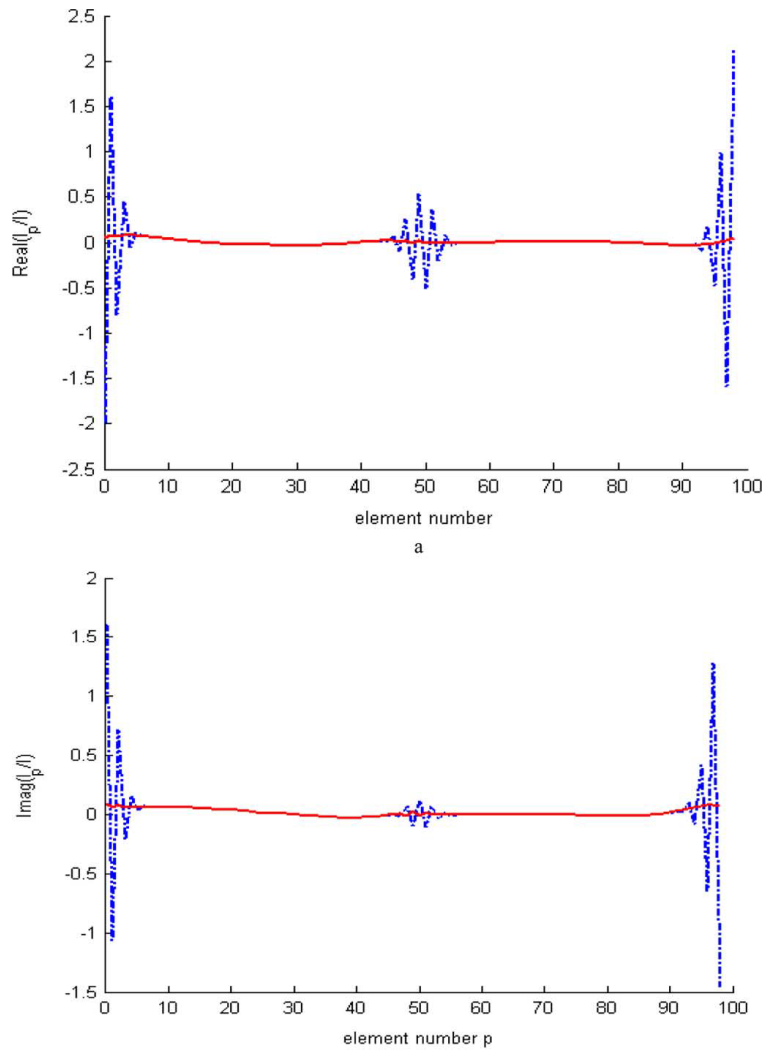
$$A = \frac{k^2 I}{4\omega\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho_{cyl}) H_n(k\rho_{fil}) e^{in\varphi_{obs}}, \quad (\rho_{cyl} > \rho_{obs})$$

Είναι σαφές ότι οι εξισώσεις (3.19) και (3.21) διαφέρουν. Επίσης, συγκρίνοντας την (3.21) με την εξίσωση πεδίου (3.2) και εφαρμόζοντας την ταυτότητα (1.4), είναι φανερό ότι η (3.21) εκφράζει μόνο το πεδίο διέγερσης στο εσωτερικό του σκεδαστή και όχι το σκεδαζόμενο πεδίο. Επομένως, οι ιδιομορφίες της αναλυτικής συνέχειας που παρουσιάστηκαν στην εφαρμογή της MAS, δε σχετίζονται με την ΕΙΕ.

### 3.4 Σύνθετα προβλήματα σκέδασης, σφάλματα roundoff

Αποδείξαμε στα προηγούμενα υποκεφάλαια ότι στην ΕΙΕ δεν παρουσιάζονται οι ταλαντώσεις ρευμάτων που προκύπτουν κατά την εφαρμογή της MAS. Συνεπώς, όποιες πιθανές ταλαντώσεις/αποκλίσεις μπορεί να εμφανιστούν κατά την εφαρμογή της ΕΙΕ σε κάποιο "απλό" πρόβλημα σκέδασης, θα οφείλονται λογικά σε πίνακες με μεγάλο δείκτη κατάστασης (condition number) που χρησιμοποιούνται, κάτι το οποίο οδηγεί σε σημαντικά σφάλματα roundoff. Σε εφαρμογές της ΕΙΕ, αλλά και σε άλλες αριθμητικές μεθόδους, τέτοια ζητήματα προκύπτουν κυρίως λόγω πεπερασμένου μήκους λέξης του υπολογιστικού συστήματος, "κακού" υπολογισμού συναρτήσεων Bessel, κλπ[8].

Για την περίπτωση της ΕΙΕ, θα παρουσιάσουμε εδώ τα αποτελέσματα ενός πιο σύνθετου προβλήματος σκέδασης[8]. Έχουμε έναν ελλειπτικό διδιάστατο σκεδαστή PEC, στον οποίο προσπίπτει Η/Μ κύμα κατά  $\hat{z}$  υπό γωνία  $\varphi_{inc} = \frac{\pi}{6}$ . Η βοηθητική επιφάνεια που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ο μέγιστος δυνατός κύκλος και η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι αρκετά μεγάλη έτσι ώστε οι δύο εστίες της που αποτελούν τις ιδιομορφίες της αναλυτικής συνέχειας του σκεδαζόμενου πεδίου να βρίσκονται εκτός βοηθητικής επιφάνειας.



Εικόνα 6: Το πραγματικό και φανταστικό μέρος των κανονικοποιημένων ρευμάτων της ΕΙΕ  $I_p/I$  ως προς τον αριθμό στοιχείου  $p$  για  $N = 99$  συνολικά στοιχεία. Οι διακεκομμένες γραμμές εκφράζουν τα αποτελέσματα για λύση με αντιστροφή πίνακα ενώ οι κόκκινες για λύση με απαλοιφή Gauss.

Όπως φαίνεται και από την εικόνα 6, επιλύοντας την ΕΙΕ με απλή αντιστροφή πίνακα, παρουσιάζονται έντονες ταλαντώσεις ρευμάτων ως προς τον αριθμό και κατά συνέπεια τη θέση του στοιχείου. Οι ταλαντώσεις αυτές είναι ισχυρότερες όταν τα στοιχεία βρίσκονται κοντά στα σημεία ιδιομορφίας και θυμίζουν τις ταλαντώσεις ρευμάτων που είδαμε στην εφαρμογή της MAS(βλ. εικόνα 4).

Η επίλυση της ΕΙΕ όμως με άλλη μεθοδολογία, ήτοι απαλοιφή Gauss, παρουσιάζει ελάχιστα μικρές διακυμάνσεις στις τιμές των ρευμάτων. Αυτό αποδεικνύει ότι οι ταλαντώσεις που παρατηρούμε στην εικόνα 6 **δεν** είναι ίδιας "φύσης" με αυτές που αντιμετωπίσαμε στη MAS, αλλά οφείλονται σε σφάλματα roundoff. Οφείλουμε να τονίσουμε ότι αυξάνοντας τον αριθμό των βοηθητικών στοιχείων (π.χ  $N = 200$ ), οι ταλαντώσεις αυτές θα είναι όλο και πιο έντονες και δε θα μπορούμε να τις αποφύγουμε ακόμα και με πιο ισχυρά υπολογιστικά εργαλεία, όπως η απαλοιφή Gauss.

Κάτι το ιδιαίτερος σημαντικό και εξίσου δύσκολο όταν αντιμετωπίζει κανείς προβλήματα ταλαντώσεων/αποκλίσεων είναι να καθορίσει το που οφείλονται. Όπως προαναφέραμε, ένας από τους πιο συνηθισμένους λόγους είναι ο μεγάλος δείκτης κατάστασης των πινάκων που χρησιμοποιούμε. Παρόλ' αυτά, σε πιο σύνθετα προβλήματα, είναι σημαντικό να ελέγξει κανείς τα αποτελέσματα του με άλλες υπολογιστικές μεθόδους ή χρησιμοποιώντας καλύτερο software/hardware. Έτσι, μπορεί κανείς να εντοπίσει σφάλματα roundoff ή και να τα διορθώσει όπως είναι σαφές και από την εικόνα 6.

Ένα ιδιαίτερος ενδιαφέρον συμπέρασμα όμως, το οποίο αποτέλεσε σημαντικό κομμάτι της παρούσας εργασίας είναι το εξής : Αν σε κάποια αριθμητική μέθοδο παρουσιάζονται ταλαντώσεις/αποκλίσεις στα αποτελέσματα, τα οποία **δεν** αποτελούν προϊόν σφαλμάτων roundoff, τότε μπορεί οι ταλαντώσεις αυτές να είναι ίδιας "φύσης" με αυτές της MAS.

## Κεφάλαιο 4: Η μέθοδος πολλαπλών μαγνητικών διπόλων (MDM)

### Εισαγωγή

Η MDM (multiple magnetic dipole method) είναι μία αριθμητική μέθοδος για την αντιμετώπιση προβλημάτων μαγνητικής καθαρότητας και εφαρμόζεται κυρίως σε προβλήματα σχεδίασης και κατασκευής διαστημικών σκαφών[22-24]. Άλλες εφαρμογές της MDM είναι στους κλάδους της αεροναυτικής, ανάλυσης κοντινού πεδίου κεραιών[18-19], γεωλογίας, ιατρικής, κλπ. Βασίζεται σε μετρήσεις κοντινού πεδίου κάποιας ηλεκτρονικής συσκευής και αποσκοπεί στη μοντελοποίηση της μαγνητικής υπογραφής της μέσω μαγνητικών διπόλων. Έχει αποδειχθεί ότι είναι ιδιαίτερα αποδοτική, ειδικά όταν συνδυάζεται με γενετικούς αλγορίθμους, όπως ο PSO (particle swarm optimization) για τον προσδιορισμό των μαγνητικών ροπών και θέσεων των διπόλων[25-26].

Μαγνητικά καθαρό θεωρείται ένα περιβάλλον όπου είτε δεν έχουμε μαγνητικό θόρυβο, κάτι το οποίο πρακτικά είναι αδύνατον, είτε ο μαγνητικός θόρυβος βρίσκεται κάτω από ένα συγκεκριμένο κατώφλι[26]. Σε σύγχρονες τεχνολογίες, όπου τα ηλεκτρονικά συστήματα και οι συσκευές που χρησιμοποιούνται απαιτούν την ταυτόχρονη λειτουργία πολλών ηλεκτρονικών κυκλωμάτων, παρουσιάζεται ιδιαίτερα συχνά το πρόβλημα των εσωτερικών ηλεκτρομαγνητικών παρεμβολών μεταξύ κυκλωμάτων, κάτι το οποίο προκαλεί μαγνητικό θόρυβο. Επίσης, καθώς το μέγεθος των συσκευών μικραίνει όλο και περισσότερο, περισσότερα κυκλώματα βρίσκονται στον ίδιο χώρο και το πρόβλημα γίνεται εντονότερο.

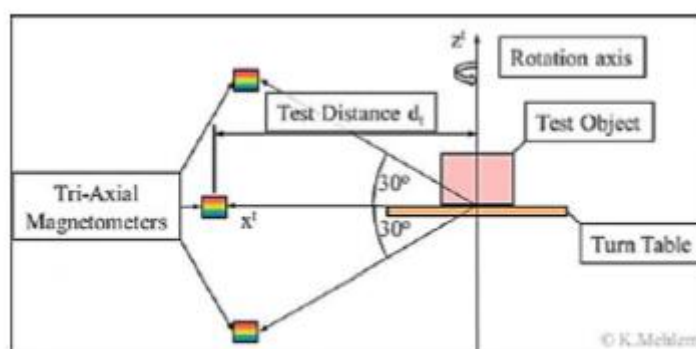
Συνεπώς, ο σχεδιασμός και η κατασκευή των διαφόρων ηλεκτρονικών συσκευών πρέπει να πραγματοποιείται με ιδιαίτερη προσοχή, έτσι ώστε να μπορούν να λειτουργούν το ίδιο σωστά εκτός ιδανικών συνθηκών εργαστηρίου κοντά σε άλλες συσκευές, να μην αποτελούν πηγή παρεμβολών για τις συσκευές αυτές και επιπλέον να ικανοποιούν τις εκάστοτε οδηγίες ηλεκτρομαγνητικής συμβατότητας. Για την επίτευξη μαγνητικής καθαρότητας σε ένα σύστημα ηλεκτρονικών συσκευών πρέπει αρχικά να εντοπιστούν οι πηγές παρεμβολών. Οι πηγές αυτές είναι κυρίως η καλωδίωση των συσκευών και τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται στις συσκευές και τα κυκλώματα.

Η επιλογή μη-μαγνητικών υλικών (τιτάνιο, κράματα αλουμινίου κλπ) στην κατασκευή των συσκευών βοηθάει στην επίτευξη μαγνητικής καθαρότητας, αλλά προφανώς δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο σύνολο του συστήματος. Στόχος είναι ο περιορισμός τους. Όσον αφορά τη καλωδίωση του συστήματος, εκτός της προφανούς ανάγκης για θωράκιση των καλωδίων, είναι σημαντικό να μη δημιουργούνται βρόχοι, καθώς συμπεριφέρονται ως μαγνητικά δίπολα όταν διαρρέονται από ρεύμα. Επίσης σημαντικό είναι η οδήγηση του ρεύματος σε μία συσκευή να βρίσκεται μαζί με την επιστροφή του, ώστε να αλληλοαναιρούνται τα μαγνητικά πεδία που προκύπτουν από τα ρεύματα των καλωδίων.

Λόγω της πολυπλοκότητας των σύγχρονων ηλεκτρονικών συστημάτων, οι τεχνικές αυτές δεν είναι όμως αρκετές για την επίλυση του προβλήματος. Σε προβλήματα μαγνητικής καθαρότητας είναι σημαντικό να γνωρίζουμε την μαγνητική υπογραφή της εκάστοτε συσκευής, προκειμένου να υπάρχει ένας αξιόπιστος έλεγχος προδιαγραφών αλλά και σωστή αντιστάθμιση του μαγνητικού πεδίου του συστήματος. Το 1977, ο Klaus Mehlem εισήγαγε την MDM ως μια αποδοτική λύση στα ζητήματα μαγνητικής καθαρότητας[22]. Η MDM βασίζεται στην αρχή ότι ένα δεδομένο DC μαγνητικό πεδίο γύρω από ένα δοκιμαστικό αντικείμενο μπορεί να μοντελοποιηθεί ικανά από ένα πεπερασμένο σύνολο διακριτών διπόλων εντός του αντικειμένου εάν αγνοηθούν οι πολυπολικές συνιστώσες του πεδίου. Αυτό απαιτεί προφανώς τον προσδιορισμό της θέσης και της μαγνητικής ροπής του κάθε διπόλου. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο είναι εφικτό να υπολογίσει κανείς το μαγνητικό πεδίο από κάποια συσκευή παντού στο χώρο.

#### 4.1 Μετρήσεις μαγνητικού πεδίου

Το πρώτο βήμα στην εφαρμογή της MDM είναι προφανώς να γίνουν μετρήσεις στο κοντινό πεδίο του μαγνητικού αντικειμένου[23],[26]. Οι μετρήσεις αυτές γίνονται σε ειδικές εγκαταστάσεις υψηλών απαιτήσεων, τα Magnetic Coil Facilities. Η διαδικασία μετρήσεων γίνεται συνήθως περιστρέφοντας τη συσκευή υπό έλεγχο (Equipment Under Test-EUT) ανά 10 μοίρες και λαμβάνοντας μετρήσεις μαγνητικού πεδίου από μαγνητόμετρα (probes) τοποθετημένα αρκετά κοντά έτσι ώστε το πεδίο να είναι τουλάχιστον της τάξης των 20nT. Τα συνολικά δεδομένα που έχουμε δηλαδή από τις μετρήσεις είναι (αριθμός περιστροφών·αριθμός probes· 3)(για κάθε συνιστώσα μαγνητικού πεδίου). Είναι σύνηθες να υπάρχει και ένα fluxgate μαγνητόμετρο για τη μέτρηση του θορύβου περιβάλλοντος για την βελτιστοποίηση της ακρίβειας μετρήσεων.

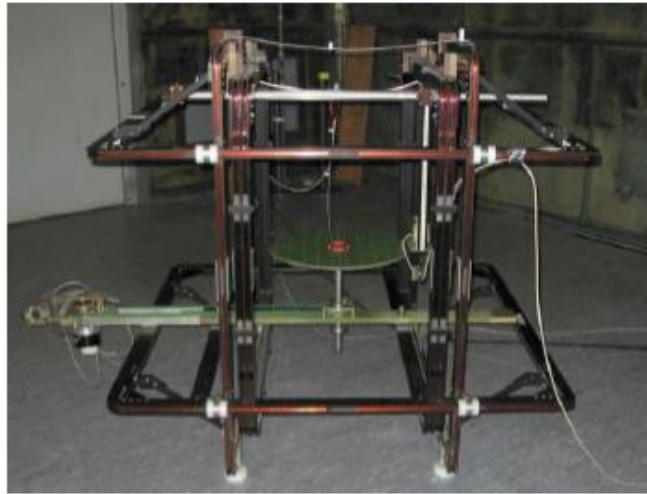


Εικόνα 4.1: Διάταξη μέτρησης μαγνητικού πεδίου

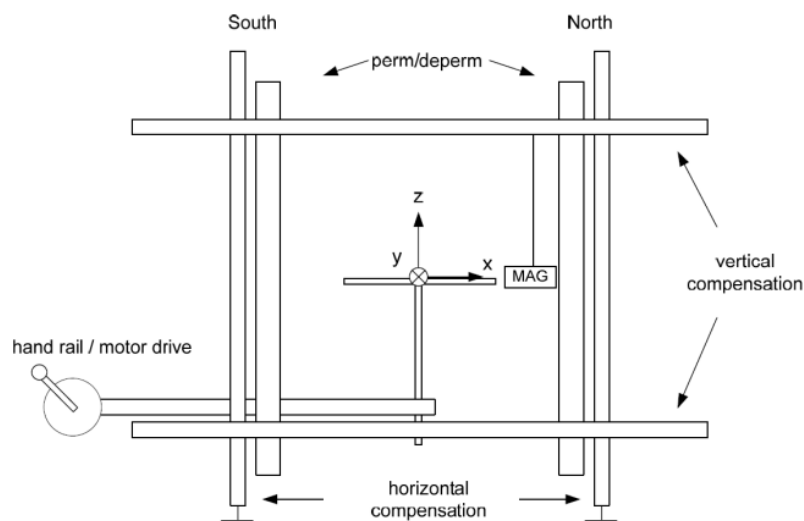
Η διαδικασία της μέτρησης κοντινού πεδίου περιλαμβάνει επίσης 3 ζεύγη πηνίων Helmholtz, εκ των οποίων τα δύο χρησιμοποιούνται για την αντιστάθμιση του κατακόρυφου και οριζόντιου πεδίου της Γης ενώ το τρίτο για μαγνήτιση και απομαγνήτιση.



Το ζεύγος για την αντιστάθμιση του κατακόρυφου πεδίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την παραγωγή μαγνητικής ροπής. Το σύστημα πηνίων έχει ακρίβεια μήκους  $\pm 10\text{ mm}$ , ενώ ο αριθμός περιελίξεων κυμαίνεται μεταξύ 100-110[26].



Εικόνα 4.2: Φωτογραφία του συστήματος πηνίων

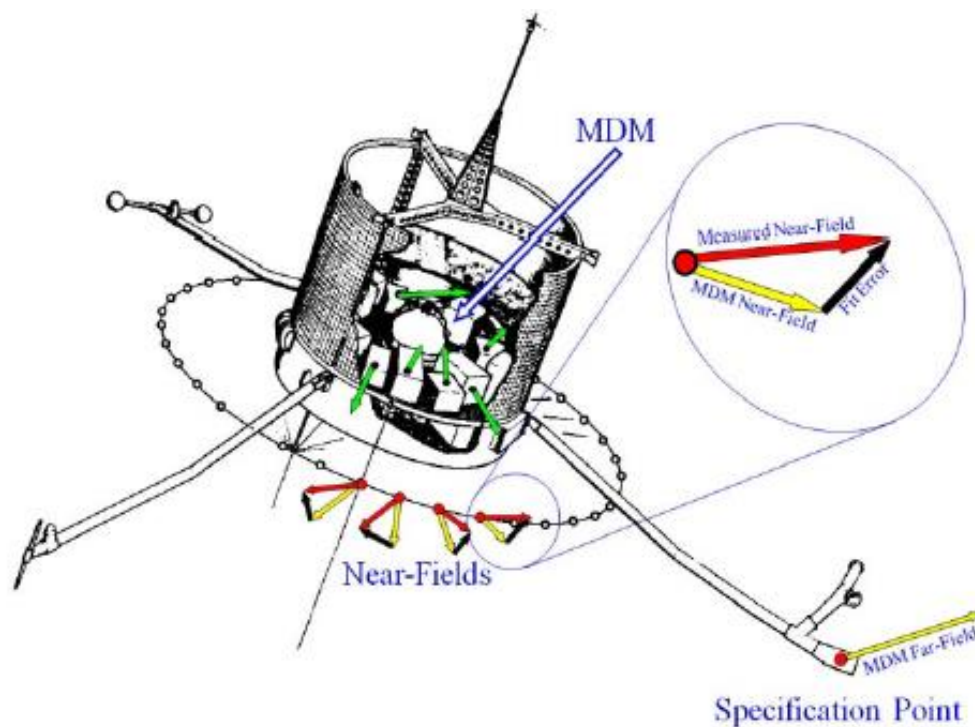


Εικόνα 4.3: Σχεδιάγραμμα του συστήματος πηνίων

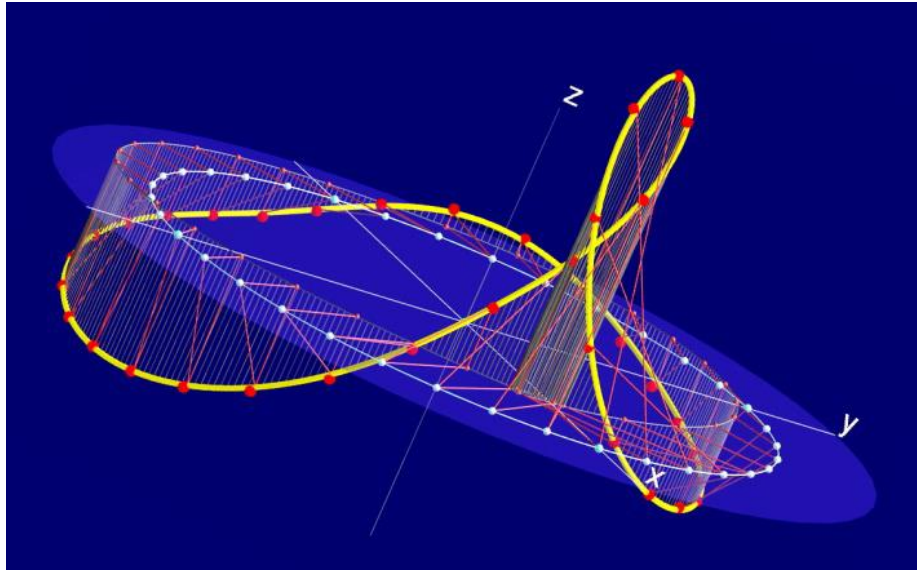
Τα ζεύγη των πηνίων αντιστάθμισης τροφοδοτούνται με συνεχές σταθερό ρεύμα. Υπάρχουν επίσης βαθμονομητές πολύ υψηλής σταθερότητας, ώστε το πεδίο που δημιουργείται να μην υπερβαίνει τις μερικές δεκάδες nT. Το σύστημα μαγνήτισης/απομαγνήτισης αποτελείται από μια προσαρμοσμένη (custom-built) γεννήτρια σήματος, ένα custom-built ενισχυτή DC ρεύματος για τη μαγνήτιση του EUT και έναν υψηλής ισχύος χαμηλής συχνότητας ενισχυτή για την μαγνήτιση και απομαγνήτιση.

## 4.2 Εφαρμογή της MDM: Οι θέσεις και ροπές των διπόλων

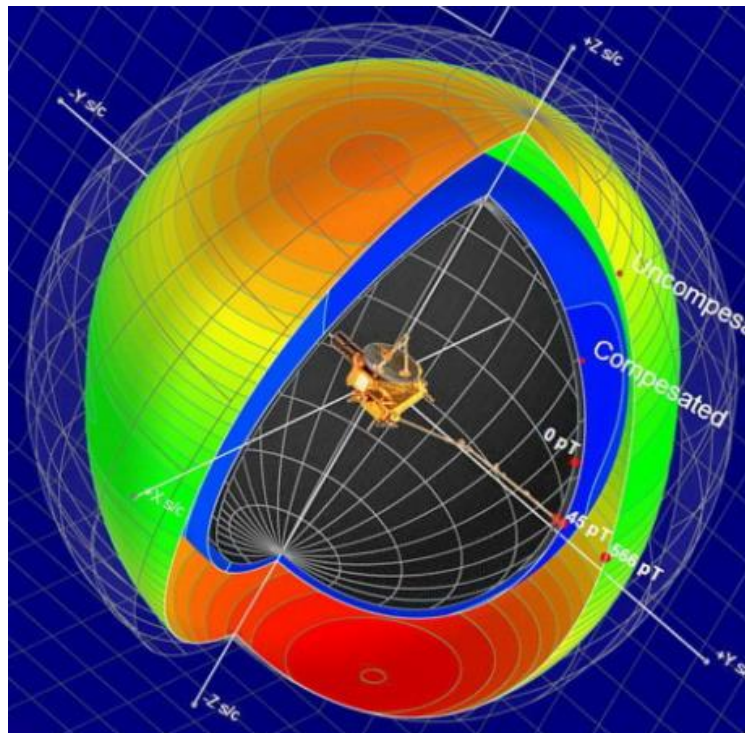
Το επόμενο βήμα μετά τις μετρήσεις κοντινού πεδίου του EUT είναι ο προσδιορισμός των θέσεων και των μαγνητικών ροπών των διπόλων. Όσον αφορά τον αριθμό των διπόλων που θα χρησιμοποιηθούν είναι προφανές ότι όσο περισσότερα δίπολα χρησιμοποιούμε, τόσο αυξάνει η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου αλλά έχουμε καλύτερη προσέγγιση στις πραγματικές τιμές μαγνητικού πεδίου. Το ζήτημα της μαγνητικής καθαρότητας λοιπόν ανάγεται σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με συνολικά 6 αγνώστους για κάθε δίπολο: 3 αγνώστες χωρικές μεταβλητές και 3 αγνώστες μαγνητικές ροπές[23].



Εικόνα 4.4: Προσδιορισμός των παραμέτρων των διπόλων βάση μετρήσεων κοντινού πεδίου και εκτίμησης μακρινού πεδίου στην MDM



Εικόνα 4.5: Ταύτιση του πεδίου από την MDM(κίτρινη γραμμή) πάνω στις μετρήσεις κοντινού πεδίου (κόκκινες τελείες)



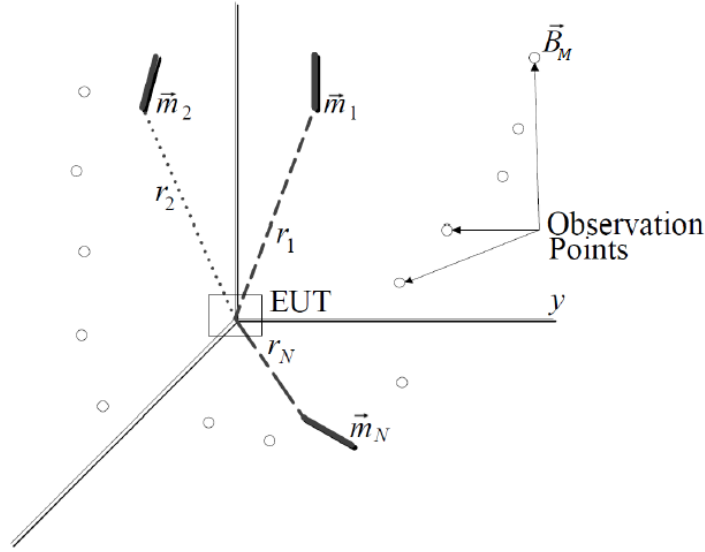
Εικόνα 4.6: Παράδειγμα εκτίμησης μακρινού πεδίου από την MDM.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η γεωμετρία του προβλήματος MDM[25-26].

Το EUT βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Τα  $m_i, i = 1, \dots, N$  είναι τα μαγνητικά δίπολα από τα οποία αποτελείται το ισοδύναμο μοντέλο που θα υπολογίσει ο αλγόριθμος. Οι θέσεις των διπόλων είναι  $(x_i, y_i, z_i)$ . Η μαγνητική ροπή του κάθε διπόλου δίνεται από την εξίσωση

$$\vec{m}_i = m_{x_i} \cdot \hat{x} + m_{y_i} \cdot \hat{y} + m_{z_i} \cdot \hat{z} \quad (4.1)$$

Τα  $M$  σημεία παρατήρησης είναι τοποθετημένα στα σημεία  $(x_{o_j}, y_{o_j}, z_{o_j})$ , όπου  $j = 1, \dots, M$ .



Εικόνα 4.7: Παρουσίαση του προβλήματος

Το μαγνητικό πεδίο του διπόλου  $i$  στο σημείο παρατήρησης  $j$  εκφράζεται ως υπέρθεση των  $B_x, B_y, B_z$ :

$$\vec{B}_{ij} = B_{x_{ij}} \cdot \hat{x} + B_{y_{ij}} \cdot \hat{y} + B_{z_{ij}} \cdot \hat{z} \quad (4.2)$$

Είναι γνωστό ότι το μαγνητικό πεδίο διπόλου υπολογίζεται από την εξίσωση[15]

(4.3):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{m}}{r^3}$$

όπου  $\vec{m}$  η μαγνητική ροπή του διπόλου που δίνεται από την εξίσωση (4.1) και  $r$  η απόσταση μεταξύ διπόλου και σημείου παρατήρησης:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(x_{o_j} - x_i, y_{o_j} - y_i, z_{o_j} - z_i)}{\sqrt{(x_{o_j} - x_i)^2 + (y_{o_j} - y_i)^2 + (z_{o_j} - z_i)^2}} \quad (4.4)$$

Αντικαθιστώντας τα μοναδιαία διανύσματα  $\hat{r}$  με τον λόγο διανύσματος προς μέτρο της (4.4) και υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{m} \cdot \vec{r}$  που προκύπτει

$$B_{x_{ij}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3 \cdot (x_{oj} - x_i)}{r_{ij}^5} \cdot (L_{ij}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m_{x_i}}{r_{ij}^3}$$

$$B_{y_{ij}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3 \cdot (y_{oj} - y_i)}{r_{ij}^5} \cdot (L_{ij}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m_{y_i}}{r_{ij}^3} \quad (4.5)$$

$$B_{z_{ij}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3 \cdot (z_{oj} - z_i)}{r_{ij}^5} \cdot (L_{ij}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m_{z_i}}{r_{ij}^3}$$

$$L_{ij} = m_{x_i} \cdot (x_{oj} - x_i) + m_{y_i} \cdot (y_{oj} - y_i) + m_{z_i} \cdot (z_{oj} - z_i) \quad (4.6)$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_{oj} - x_i)^2 + (y_{oj} - y_i)^2 + (z_{oj} - z_i)^2} \quad (4.7)$$

Το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο σημείο παρατήρησης  $j$  υπολογίζεται :

$$\vec{B}_j = \sum_{i=1}^N B_{x_{ij}} \cdot \hat{x} + \sum_{i=1}^N B_{y_{ij}} \cdot \hat{y} + \sum_{i=1}^N B_{z_{ij}} \cdot \hat{z} \quad (4.8)$$

#### 4.2.1 Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης Gauss-Newton

Θα παρουσιάσουμε τώρα τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης Gauss-Newton για τον προσδιορισμό των μεταβλητών  $p_i = (x_i, y_i, z_i)$  και  $\vec{m}_i = m_{x_i} \cdot \hat{x} + m_{y_i} \cdot \hat{y} + m_{z_i} \cdot \hat{z}$ , για  $i = 1, \dots, N$  δίπολα[22-23].

Επιλέγουμε τυχαία τις θέσεις και τον αριθμό των διπόλων  $N$  και στη συνέχεια βελτιστοποιούμε τη θέση και τη μαγνητική ροπή του κάθε διπόλου έτσι ώστε η διαφορά μεταξύ των μετρήσεων μαγνητικού πεδίου από το EUT (measured field) και τον υπολογισμό μαγνητικού πεδίου από τα δίπολα (calculated field) να ελαχιστοποιείται.

Ορίζουμε τις εξής μεταβλητές του αλγορίθμου:

- $M$  =αριθμός συνολικών μετρήσεων=(αριθμός περιστροφικών βημάτων\*αριθμός αισθητήρων)
- $N$  = αριθμός διπόλων

- $B_c = [3M \times 1]$  διάνυσμα υπολογισμένου μαγνητικού πεδίου που προκύπτει από την (4.8)
- $B_m = [3M \times 1]$  διάνυσμα μετρημένου μαγνητικού πεδίου του αντικειμένου
- $p_o = [3M \times 1]$  διάνυσμα με τις χωρικές συντεταγμένες των μετρήσεων
- $p = [3N \times 1]$  διάνυσμα με τις χωρικές συντεταγμένες των διπόλων
- $m = [3N \times 1]$  διάνυσμα με τις μαγνητικές ροπές των διπόλων
- $G = [3M \times 3N]$  μήτρα μεταφοράς τέτοια ώστε το υπολογισμένο μαγνητικό πεδίο  $B_c$  να προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση

(4.9):

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

Ορίζουμε επίσης το σφάλμα μεταξύ μετρημένου και υπολογισμένου μαγνητικού πεδίου ως ένα  $[3M \times 1]$  διάνυσμα:

$$e(p, m) = (B_m - B_c(p, m)) \quad (4.10)$$

Από την (4.10) προκύπτει η βαθμωτή συνάρτηση κόστους που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε

(4.11):

$$c = (\mathbf{B}_m - \mathbf{B}_c)^T \cdot (\mathbf{B}_m - \mathbf{B}_c)$$

Αντικαθιστώντας τώρα το υπολογισμένο μαγνητικό πεδίο από την εξίσωση (4.9) η συνάρτηση κόστους παίρνει τη μορφή

(4.12):

$$c = \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{B}_m - 2\mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{m} + (\mathbf{G} \cdot \mathbf{m})^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$$

Η ελάχιστη τιμή της (4.11) υπολογίζεται από την

(4.13):

$$dc/dm = 0$$

και δίνει τη λύση για το βέλτιστο διάνυσμα μαγνητικών ροπών

(4.14):

$$\mathbf{m}^* = [\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{B}_m$$

Η  $[\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}]^{-1}$  υπολογίζεται μέσω της μεθόδου Cholesky. Συνεχίζουμε με το επόμενη βήμα που είναι ο προσδιορισμός των βέλτιστων θέσεων των διπόλων.

Η συνάρτηση κόστους εξαρτάται πλέον μόνο από τις θέσεις των διπόλων αφού οι ροπές βρέθηκαν ως συνάρτηση των θέσεων. Δηλαδή

(4.15):

$$c = c\{p, m^*(p)\} = c(p)$$

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης κόστους ως προς τη μήτρα θέσεων  $p$  μέσω της εξίσωσης (4.10) προκύπτει

$$C_p = \frac{dc}{dp} = 2 \cdot \left[ \frac{de}{dp} \right]^T \cdot e = 2 \cdot J^T \cdot e \quad (4.16)$$

, όπου  $J$  η ιακωβιανή μήτρα με  $J = \frac{de}{dp} \approx \frac{\Delta e}{\Delta p}$

Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης κόστους ως προς τη μήτρα θέσεων  $p$  μέσω των εξισώσεων (4.10) και (4.16) προκύπτει

$$C_{p^2} = \frac{d^2c}{dp^2} = 2 \cdot [J^T \cdot J] + \left[ \frac{d^2e}{dp^2} \right]^T \cdot e \quad (4.17)$$

Αφού όμως αναζητούμε τη βέλτιστη λύση, ισχύει ότι  $|e| \rightarrow 0$ .

Άρα το δεύτερο μέρος της (4.17) μηδενίζεται και έχουμε

$$C_{p^2} = 2 \cdot [J^T \cdot J] \quad (4.18)$$

Το δεύτερο ανάπτυγμα λοιπόν της συνάρτησης κόστους εκφράζεται με την εξίσωση

(4.19):

$$\Delta c = \left[ \frac{dc}{dp} \right]^T \cdot \Delta p + \left[ \left[ \frac{d^2c}{dp^2} \right] \cdot \Delta p \right]^T \cdot \Delta p$$

Επιλέγοντας λοιπόν την συνθήκη ελαχιστοποίησης η παράγωγος να είναι μηδέν προκύπτει η

(4.20):

$$\frac{d(\Delta c)}{d(\Delta p)} = 0 = \left[ \frac{dc}{dp} \right] + \left[ \frac{d^2c}{dp^2} \right] \cdot \Delta p$$

από την οποία προκύπτει η λύση

(4.21):

$$\Delta p = -\frac{1}{2} \left[ \frac{d^2c}{dp^2} \right]^{-1} \cdot \left[ \frac{dc}{dp} \right]$$

Αντικαθιστώντας τα διαφορικά με την ιακωβιανή από τις εξισώσεις (4.16) και (4.18) έχουμε

$$\Delta p = -\frac{1}{2} [J^T \cdot J]^{-1} \cdot 2 \cdot J^T \cdot e$$

και τελική λύση

(4.22):

$$\Delta p = -J^+ \cdot e$$

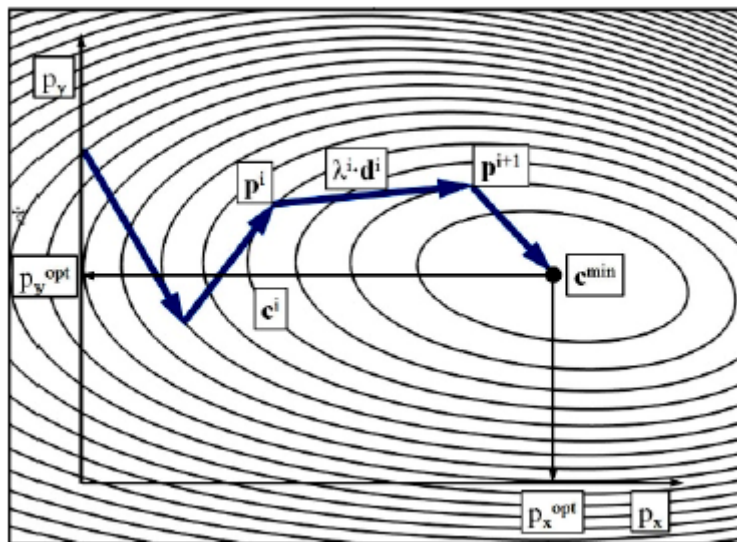
από την οποία παίρνουμε το βήμα επανάληψης του αλγορίθμου

(4.23):

$$p^{i+1} = p^i - \lambda \cdot J^+ \cdot e = p^i - \lambda \cdot d^i$$

Ο παράγοντας  $\lambda$  που παρουσιάζεται στην (4.23) αποτελεί τον progress factor του αλγορίθμου και προσδιορίζεται από αριθμητικούς ελέγχους στην κατεύθυνση του  $d^i$ .

Η επανάληψη του αλγορίθμου διακόπτεται όταν επιτύχουμε αρκετά χαμηλή τιμή στη συνάρτηση κόστους, κάτι το οποίο εξαρτάται από τις προδιαγραφές μαγνητικής καθαρότητας που επιθυμούμε.



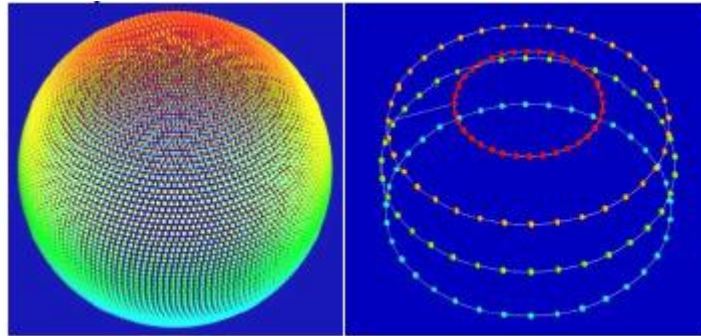
Εικόνα 4.8: Επαναληπτική αναζήτηση του ελαχίστου της συνάρτησης κόστους.

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος έχει διάφορα πλεονεκτήματα[22-23]. Καταρχάς έχει μεγάλο πεδίο σύγκλισης, κάτι το οποίο μας δίνει την ελευθερία να επιλέξουμε αρχικά τυχαίες θέσεις διπόλων. Επίσης, χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε διαφορικά τα οποία προκύπτουν μέσω πεπερασμένων διαφορών, όπως στην ιακωβιανή από την (4.16). Η ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου είναι γραμμική στην αρχή και καταλήγει τετραγωνική κοντά στην βέλτιστη λύση. Τέλος, η μήτρα  $[J^T \cdot J]$  είναι πάντα θετικά ημιορισμένη και έτσι αποφεύγουμε τη πιθανότητα ο αλγόριθμος να αποκλίνει. Κάτι, το οποίο θα έπρεπε να τονίσουμε όμως είναι ότι ο αλγόριθμος παρουσιάζει ιδιομορφία στη μήτρα  $J$  αν επιλέξουμε αριθμό διπόλων μεγαλύτερο από τον αριθμό μετρήσεων, αλλά αυτή η περίπτωση είναι ιδιαίτερα ασυνήθιστη.

Παρόλ'αυτα, ο αλγόριθμος παρουσιάζει και κάποια σημαντικά προβλήματα σε πρακτική εφαρμογή[23].



1. Η λύση της MDM είναι μοναδική μόνο όταν το μετρημένο μαγνητικό πεδίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο γύρω από το EUT. Αυτό σημαίνει ότι, προκειμένου να βρούμε τη λύση, η οποία όχι μόνο δίνει το κοντινό μαγνητικό πεδίο, αλλά παρέχει μια καλή εκτίμηση για το μακρινό πεδίο του αντικειμένου απαιτείται καλύτερη πυκνότητα κάλυψης του χώρου στις μετρήσεις που γίνονται.



Εικόνα 4.9: Κάλυψη τρισδιάστατου χώρου με μετρήσεις ανά 2 μοίρες και μία τυπική κάλυψη MDM με 4 μαγνητόμετρα ανά 10 μοίρες

2. Εκτός αυτού, δεν είναι πάντα δυνατόν να βρούμε αρχικές τυχαίες θέσεις διπόλων που θα οδηγήσουν σε σύγκλιση του αλγορίθμου όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε σύνθετα προβλήματα μαγνητικής καθαρότητας όπως σχεδίαση διαστημικών σκαφών. Για τέτοιου είδους περιπτώσεις είναι σημαντικό να βρούμε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης κόστους και να μην καταλήξουμε σε κάποιο τοπικό ελάχιστο λόγω της πολυπλοκότητας του πρακτικού προβλήματος.

3. Κατά τις επαναλήψεις του αλγορίθμου είναι σύνηθες δύο δίπολα να τοποθετηθούν "κοντά" το ένα με το άλλο (σύγκρουση θέσης διπόλων). Αυτό οδηγεί σε ιακωβιανή μήτρα μειωμένης τάξης με αποτέλεσμα η  $J$  να παρουσιάζει προβλήματα ιδιομορφίας και να επηρεάζεται η σύγκλιση του αλγορίθμου.

4. Τέλος, σημαντικό πρόβλημα είναι ότι ο αλγόριθμος δεν προσφέρει κάποιον έλεγχο στη θέση των διπόλων. Ο αλγόριθμος Gauss-Newton έχει σχεδιαστεί για παραμέτρους χωρίς περιορισμούς. Η θέση που μπορούν να τοποθετηθούν τα δίπολα όμως πρέπει να είναι στο εσωτερικό του μαγνητικού αντικειμένου. Έτσι, κατά τις επαναλήψεις, αν οι περιορισμοί θέσης παραβιάστούν, η μόνη επιλογή που έχουμε στην προκειμένη περίπτωση, είναι να ξεκινήσουμε τη διαδικασία από την αρχή (trial-and-error method) με άλλες τυχαίες τιμές, κάτι το οποίο είναι ιδιαιτέρως χρονοβόρο και κουραστικό.

## 4.2.2 Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης PSO

Η PSO (particle swarm optimization-βελτιστοποίηση σμήνους μονάδων) είναι μια στοχαστική εξελικτική μέθοδος υπολογισμού η οποία αναπτύχθηκε από τους Kennedy και Eberhart το 1995 και εκσυγχρονίστηκε ως προς την αποδοτικότητα της από τον Eberhart το 2001[26]. Η PSO είναι ιδιαιτέρως αποδοτική σε σύνθετα προβλήματα βελτιστοποίησης, αφού δεν απαιτεί αρχικό σημείο για να συγκλίνει σε λύση, κάτι το οποίο την καθιστά μια πολύ καλή εναλλακτική για αντιμετώπιση προβλημάτων μαγνητικής καθαρότητας[25-27].

Στην εφαρμογή της PSO για κάποιο πρόβλημα βελτιστοποίησης, το σύστημα αρχικοποιείται με ένα πληθυσμό τυχαίων λύσεων. Σε κάθε πιθανή λύση ανατίθεται μια τυχαία "ταχύτητα" υπό την έννοια του αντίστοιχου progress factor  $\lambda$  στον προηγούμενο αλγόριθμο. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι τυχαίες λύσεις, "σωματίδια", που έχουμε στην αρχή κινούνται στον χώρο του προβλήματος. Κάθε σωματίδιο παρακολουθεί τις συντεταγμένες του στο χώρο και λαμβάνει μια τιμή καταλληλότητας  $p_{best}$  (personal best). Η τιμή αυτή εκφράζει την κοντινότερη τοποθεσία που βρέθηκε το σωματίδιο στην βέλτιστη λύση. Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου συγκρίνονται τα  $p_{best}$  των σωματιδίων και προκύπτει η ολική βέλτιστη τιμή  $g_{best}$  (global best), που εκφράζει το βέλτιστο  $p_{best}$  που έχει επιτευχθεί μέχρι στιγμής από το σύνολο των σωματιδίων (σμήνος). Οι ταχύτητες των σωματιδίων αλλάζουν σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου ώστε να κινηθούν προς τις  $p_{best}$  και  $g_{best}$ .

Μια άλλη σημαντική παράμετρος της PSO είναι η μέγιστη τιμή ταχύτητας  $V_{max}$  που μπορεί να πάρει κάποιο σωματίδιο. Είναι προφανές ότι αν η ταχύτητα σωματιδίου  $v_{id}$  λάβει τιμή μεγαλύτερη της  $V_{max}$ , τότε η  $v_{id}$  περιορίζεται στη  $V_{max}$ . Η παράμετρος αυτή εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο οι περιοχές μεταξύ θέσης σωματιδίου και θέσης βέλτιστης λύσης ερευνούνται. Μεγάλη τιμή στη  $V_{max}$  μπορεί να οδηγήσει τα σωματίδια να προσπεράσουν κάποια θέση, η οποία θα ήταν δυνητικά βέλτιστη, ενώ με μικρή τιμή της  $V_{max}$  τα σωματίδια εγκλωβίζονται σε περιοχές τοπικών βελτίστων και δε μπορούν να κινήθουν σε καλύτερες θέσεις στο χώρο.

Τα βήματα κατά την εφαρμογή της PSO είναι λοιπόν τα εξής[26]:

1. Αρχικοποίηση ενός πληθυσμού σωματιδίων-λύσεων με τυχαίες θέσεις και ταχύτητες σε  $d$  διαστάσεις στο χώρο του προβλήματος, όπου  $d$  ο αριθμός των λύσεων που επιθυμούμε (Στην MDM, οι διαστάσεις του χώρου προκύπτουν από τον αριθμό διπόλων που επιλέξαμε για να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα).
2. Για κάθε σωματίδιο, γίνεται αξιολόγηση της επιθυμούμενης συνάρτησης βελτιστοποίησης (αντικειμενική συνάρτηση) σε  $d$  μεταβλητές. Ελέγχουμε δηλαδή, αν το εκάστοτε σωματίδιο λύση βρίσκεται κοντά στη βέλτιστη λύση που αναζητούμε.
3. Συγκρίνουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με το  $p_{best}$  του σωματιδίου. Αν η νέα τιμή είναι καλύτερη από το  $p_{best}$ , τότε το  $p_{best}$  γίνεται η νέα τιμή και η θέση του  $p_{best}$  γίνεται η νέα θέση του  $d$ -διάστατου χώρου.

4. Συγκρίνουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του σωματιδίου με το  $g_{best}$  του σμήνους. Αν η νέα τιμή είναι καλύτερη από το  $g_{best}$ , τότε το  $g_{best}$  γίνεται η νέα τιμή και η θέση του  $g_{best}$  γίνεται η νέα θέση του  $d$ -διάστατου χώρου.
5. Μεταβολή της ταχύτητας και της θέσης του εκάστοτε σωματιδίου σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις:

(4.23):

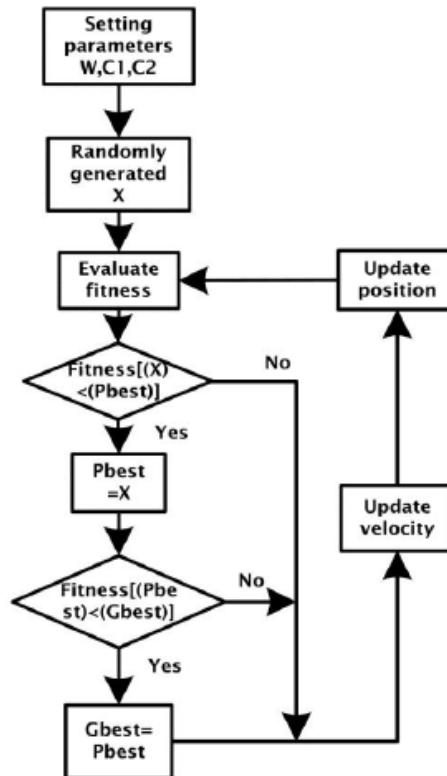
$$v_{id} = w \cdot v_{id} + c_1 \cdot rand() \cdot (p_{id} - x_{id}) + c_2 \cdot rand() \cdot (p_{gd} - x_{gd})$$

(4.24):

$$x_{id} = x_{id} + v_{id}$$

6. Επιστροφή στο βήμα 2 μέχρι να ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο τερματισμού, όπως ικανοποιητική τιμή αντικειμενικής συνάρτησης κάποιου σωματιδίου.

Οι σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  που εμφανίζονται στην εξίσωση (4.23) εκπροσωπούν την στάθμιση των στοχαστικών όρων επιτάχυνσης που τραβούν κάθε σωματίδιο προς τις θέσεις των  $p_{best}$  και  $g_{best}$ . Αντίστοιχα με την  $V_{max}$  λοιπόν, δίνοντας υψηλές τιμές στις σταθερές αυτές οδηγούμαστε σε απότομες κινήσεις των σωματιδίων προς ή δίπλα στις περιοχές βέλτιστης λύσης, ενώ με χαμηλές τιμές τα σωματίδια αργούν πολύ να φτάσουν στις περιοχές-στόχους. Με τη μέθοδο trial-and-error έχει παρατηρηθεί ότι οι καταλληλότερες τιμές για τις  $c_1$  και  $c_2$  είναι 2, για τις περισσότερες εφαρμογές. Αντίστοιχα, η παράμετρος  $V_{max}$  ρυθμίζεται συνήθως στο 10-20% του δυναμικού εύρους της μεταβλητής σε κάθε διάσταση.



Εικόνα 4.10: Διάγραμμα ροής PSO

Οι Shi και Eberhart εισήγαγαν το 1998 την παράμετρο του βάρους αδράνειας  $w$ , έτσι ώστε να εξαλειφθεί η χρήση της  $V_{max}$ . Το βάρος αδράνειας εισήχθει ως πολλαπλασιαστικός παράγοντας στην ταχύτητα  $v_{id}$  της εξίσωσης (4.23) προκειμένου να υπάρχει η ελευθερία για μεγαλύτερη ή μικρότερη ταχύτητα των σωματιδίων ανάλογα την περίπτωση.

Η (4.23) γίνεται λοιπόν

(4.25):

$$v_{id} = w \cdot v_{id} + c_1 \cdot rand() \cdot (p_{id} - x_{id}) + c_2 \cdot rand() \cdot (p_{gd} - x_{gd})$$

Η χρήση του βάρους αδράνειας αύξησε την αποδοτικότητα της PSO. Το  $w$  μειώνεται γραμμικά από περίπου 0.9 σε 0.4 μέσα σε ένα τρέξιμο. Κατάλληλη επιλογή του βάρους αδράνειας προσφέρει ισορροπία μεταξύ αναζήτησης του χώρου και τοπικής εκμετάλλευσης και οδηγεί σε λιγότερες γενεές (μικρότερο χρόνο εκτέλεσης) κατά μέσο όρο για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

Το 1999 ο Clerc τροποποίησε την PSO εισάγοντας τον περιοριστικό παράγοντα  $K$ , προκειμένου να πετύχει καλύτερη σύγκλιση στην μέθοδο. Ο παράγοντας  $K$  ορίζεται ως

$$K = \frac{2}{|2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}|} \quad (4.26)$$

$$\varphi = c_1 + c_2, \varphi > 4 \quad (4.27)$$

και λειτουργεί περιοριστικά στην ταχύτητα  $v_{id}$

(4.28):

$$v_{id} = K \cdot [v_{id} + c_1 \text{rand}() \cdot (p_{id} - x_{id}) + c_2 \text{rand}() \cdot (p_{gd} - x_{gd})]$$

Πρόσφατα έχουν γίνει έρευνες στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο για την αποδοτικότητα της PSO σε ζητήματα μαγνητικής καθαρότητας[25-26]. Πιο συγκεκριμένα, η PSO εφαρμόστηκε στο MDM πρόβλημα και τα αποτελέσματα ήταν ιδιαιτέρως ικανοποιητικά. Παρουσιάζουμε εδώ τα αποτελέσματα αυτά στα πλαίσια της σφαιρικής προσέγγισης του θέματος.

Ορίζουμε τους εξής πίνακες που θα χρησιμοποιηθούν στον αλγόριθμο:

$TB_{th} = [3 \times M]$  μήτρα με στοιχεία τις τιμές μετρήσεων κοντινού πεδίου από το EUT (measuredfield) στα σημεία  $j = 1, \dots, M$ .

$TB = [3 \times M]$  μήτρα με στοιχεία τις τιμές μαγνητικού πεδίου που υπολογίζονται από τη κάθε γενιά (calculatedfield) σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου.

$TB_p = [3 \times M]$  μήτρα με στοιχεία τις τιμές μαγνητικού πεδίου που υπολογίζονται από το κάθε  $p_{best}$ .

$TB_g = [3 \times M]$  μήτρα με στοιχεία τις τιμές μαγνητικού πεδίου που υπολογίζονται από το κάθε  $g_{best}$  της εκάστοτε γενιάς.

Το πρώτο βήμα είναι όπως είπαμε να κάνουμε μια αρχικοποίηση των πιθανών λύσεων με τυχαίες θέσεις και ταχύτητες στο χώρο του προβλήματος. Καθώς ο αλγόριθμος "ξεδιπλώνεται", κάθε πράκτορας ανανεώνει την ταχύτητα και τη θέση του σύμφωνα με τις εξισώσεις

(4.29):

$$v_{in} = w \cdot v_{in} + c_1 \cdot \text{rand}() \cdot (p_{best_{in}} - p_{in}) + c_2 \cdot \text{rand}() \cdot (g_{best_{in}} - p_{in})$$

(4.30):

$$p_{in} = p_{in} + v_{in}$$

για κάθε στοιχείο  $i$  κάθε διπόλου  $n$ .

Στις παραπάνω εξισώσεις η  $p_{in}$  εκφράζει τη θέση του στοιχείου  $i$  του διπόλου  $n$  (θέση του στοιχείου  $k$  του διανύσματος του πράκτορα), το  $w$  είναι η κλίμακα της ταχύτητας της προηγούμενης γενιάς και τα  $c_1$  και  $c_2$  είναι οι παράγοντες που καθορίζουν το trade-off μεταξύ τοπικής εκμετάλλευσης και εξερεύνησης του χώρου.

Οι τιμές των παραπάνω σταθερών επιλέχθηκαν  $w = 0.5$  και  $c_1 = c_2 = 2$ .

Από τις καινούριες θέσεις ανανεώνονται οι τιμές του πίνακα  $T\mathbf{B}$  και του  $T\mathbf{B}_p$  χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.1)-(4.8). Αναλόγως, σε κάθε επανάληψη ανανεώνονται και οι τιμές του  $T\mathbf{B}_g$ .

Για την αξιολόγηση κάθε λύσης επιλέχθηκε σαν αντικειμενική συνάρτηση το RMS

(4.31):

$$F = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (T\mathbf{B}_{ij} - T\mathbf{B}th_{ij})^2}{N}}$$

Σε κάθε επανάληψη συγκρίνεται η τιμή του  $pbest$  με την αντικειμενική συνάρτηση. Αν η τιμή της  $F$  είναι μικρότερη της  $pbest$ , τότε η  $pbest$  αντικαθίσταται με την τιμή της  $F$ . Αντίστοιχα και για την  $gbest$ .

Για να ελεγχθεί η αποδοτικότητα της PSO, έγινε το ακόλουθο πείραμα. Επιλέχθηκε ένα σετ από  $N$  δίπολα τα οποία δημιούργησαν το μαγνητικό πεδίο σε  $M$  σημεία του χώρου, σύμφωνα με τις (4.1)-(4.8). Το συγκεκριμένο δείγμα πεδίου χρησιμοποιήθηκε ως measured field. Εφαρμόστηκε η PSO στο συγκεκριμένο measured field, προκειμένου να ελέγξουμε αν συγκλίνει καλώς σε λύση, αν δηλαδή θα μας δώσει τις ήδη γνωστές πηγές του προβλήματος. Αρχικά επιλέχθηκε μόνο ένα δίπολο με τα εξής χαρακτηριστικά:

$$(x=-0.03, y=-0.05, z=-4.05,$$

$$m_x=452.344, m_y=-484.63, m_z=-550.47)$$

όπου οι θέσεις μετρήθηκαν σε cm και οι ροπές σε  $\text{mAm}^2$ .

Το αποτέλεσμα ήταν ότι η PSO συνέκλινε βάση της αντικειμενικής συνάρτησης στην λύση:

$$D1 = (-0.03, 0.05, -4.0499, 452,3406, -484,627, -550.471)$$

Είναι σαφές ότι τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζουν εξαιρετικά καλή ταύτιση με την πηγή του μαγνητικού πεδίου.

Στη συνέχεια, προχωρώντας ένα βήμα ακόμα, έγινε αξιολόγηση της μεθόδου σε συνθήκες μαγνητικού θορύβου. Πιο συγκεκριμένα, η  $T\mathbf{B}_{th}$  που περιέχει τις "μετρήσεις" τροποποιήθηκε προσθέτοντας θόρυβο:

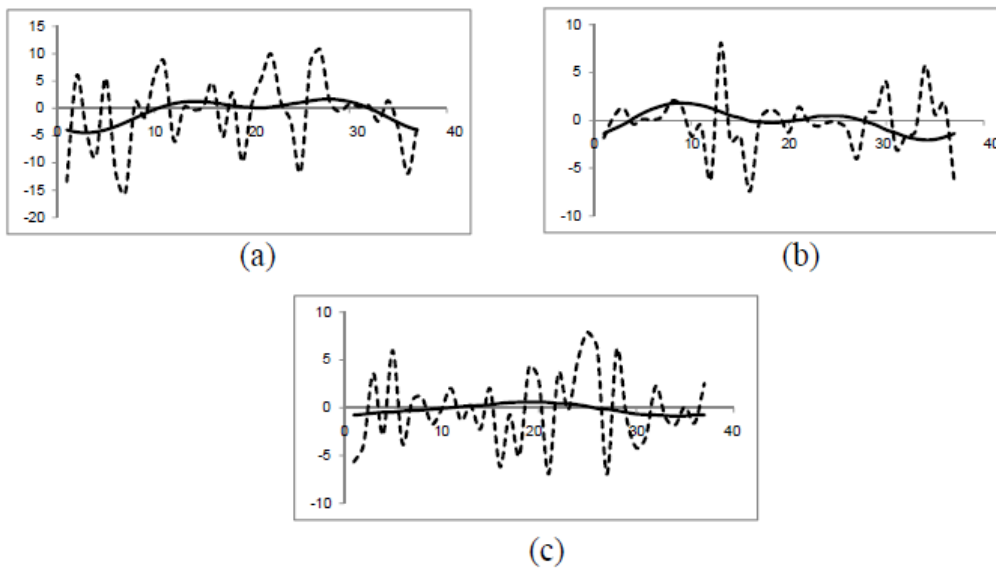
(4.32):

$$T\mathbf{B}th_{ij} = T\mathbf{B}th_{ij} + T\mathbf{B}th_{ij} \cdot (a \cdot \text{rand}() - a \cdot \text{rand}())$$

όπου ο  $a$  εκφράζει το μέγιστο ποσοστό παραμόρφωσης στις μετρήσεις. Επιλέχθηκαν δύο διαφορετικές τιμές για το  $a$ , ήτοι 1% και 5%. Στο παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα. Παρατηρούμε ότι όσο το ποσοστό της παραμόρφωσης στα δεδομένα εισόδου αυξάνεται, η απόκλιση μεταξύ των λύσεων της MDM και των θεωρητικών τιμών αυξάνεται επίσης. Παρ' ολ'αυτά, οι λύσεις που προκύπτουν είναι ξανά ικανοποιητικές. Η διαφορά μεταξύ θεωρητικού πεδίου και MDM δεν καταλήγει απαγορευτικά μεγάλη.

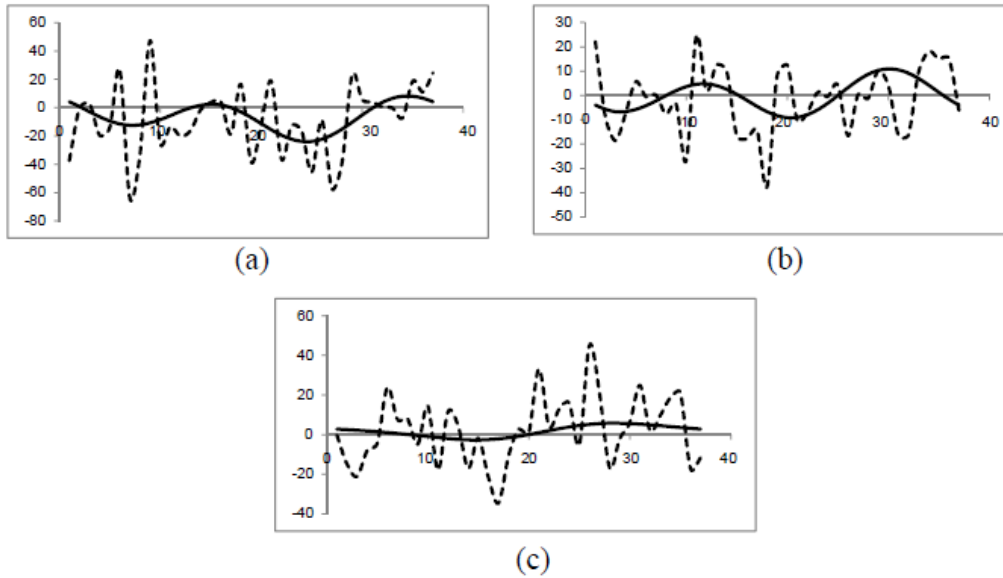
	Theoretical	MDM 1%	MDM 5%
$x$ (cm)	-0.03	-0.0158	-0.0146
$y$ (cm)	0.05	0.0495	-0.0502
$z$ (cm)	-4.05	-4.0476	-3.9933
$m_x$ (mAm <sup>2</sup> )	452.34	452.9344	450.8042
$m_y$ (mAm <sup>2</sup> )	-484.63	-485.013	-483.137
$m_z$ (mAm <sup>2</sup> )	-550.47	-550.608	-549.991

Εικόνα 4.11: Σύγκριση χαρακτηριστικών διπόλου από το θεωρητικό πεδίο, από το πεδίο MDM με 1% παραμόρφωση και από το πεδίο MDM με 5% παραμόρφωση.



Εικόνα 4.12: Διαφορές μεταξύ θεωρητικού πεδίου με το διαταραγμένο (διακεκομμένη μαύρη γραμμή) και θεωρητικού πεδίου με το παραγόμενο MDM για 1% παραμόρφωση.

(a)  $x$  συνιστώσα, (b)  $y$  συνιστώσα, (c)  $z$  συνιστώσα.



Εικόνα 4.13: Διαφορές μεταξύ θεωρητικού πεδίου με το διαταραγμένο (διακεκομμένη μαύρη γραμμή) και θεωρητικού πεδίου με το παραγόμενο MDM για 5% παραμόρφωση.

(a) x συνιστώσα, (b) y συνιστώσα, (c) z συνιστώσα.

Στη συνέχεια έγινε η αξιολόγηση του αλγορίθμου για πιο απαιτητικά EUT. Το σετ διπόλων που παράγουν το "measured field" αυτή τη φορά αποτελείται από 3 δίπολα. Οι παράμετροι των διπόλων φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

	Θεωρητικό μοντέλο		
	Δίπολο 1	Δίπολο 2	Δίπολο 3
$x$ (cm)	0.3	1	1.4
$y$ (cm)	1.1	0.5	2
$z$ (cm)	1.6	1.8	0.5
$m_x$ (mA $m^2$ )	400	-500	600
$m_y$ (mA $m^2$ )	-400	500	-600
$m_z$ (mA $m^2$ )	450	-550	450

Εικόνα 4.14: Παράμετροι του θεωρητικού μοντέλου τριών διπόλων



Όταν αυξάνεται ο αριθμός των διπόλων που θα χρησιμοποιήσουμε, θα πρέπει να προσέχουμε οι εξισώσεις που οδηγούν στους επιθυμητούς αγνώστους να είναι καλώς ορισμένες και ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για κάθε σημείο μέτρησης προκύπτουν 3 ανεξάρτητες εξισώσεις όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (4.1)-(4.8). Οι συνολικοί άγνωστοι παράμετροι για κάθε δίπολο είναι 6 (τρεις για τη μαγνητική ροπή και τρεις για τη θέση). Από αυτά προκύπτει ότι για κάθε δίπολο χρειάζονται τουλάχιστον 2 σημεία παρατήρησης για να είναι το πρόβλημα επαρκώς ορισμένο και να μπορεί να λύθει. Στην περίπτωση των 3 διπόλων λοιπόν χρειαζόμαστε τουλάχιστον 6 σημεία παρατήρησης ( $M = 6$ ). Τα σημεία μέτρησης τοποθετήθηκαν σε γεωμετρικό τόπο κύκλου γύρω από το EUT με κάποια συμμετρία. Πιο συγκεκριμένα, οι θέσεις των σημείων που επιλέχθηκαν είναι:

(20, 0, 0), (0, 20, 0), (0, 0, 20), (15, 15, 0), (15, 0, 15) και (0, 15, 15) cm.

Όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα, ο αλγόριθμος προσέγγισε εξαιρετικά καλά τις θεωρητικές πηγές του πεδίου. Επιλέγοντας διαφορετικά τερματικά κριτήρια με βάση την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Παρατηρούμε πως η επιλογή διαφορετικών τερματικών κριτηρίων αλλάζει τα αποτελέσματα της PSO και πως για καλή τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης τα χαρακτηριστικά των διπόλων που προκύπτουν ως λύση είναι σχεδόν ταυτόσημα με τα θεωρητικά. Τέλος, προκειμένου να βρεθούν οι βέλτιστες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης πρέπει να γίνουν μεγάλα simulations ώστε να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε τα όρια στις τιμές των παραμέτρων. Η διαδικασία αυτή είναι μείζονος σημασίας, καθώς η ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου εξαρτάται από τα όρια αυτά.

Αντικειμενική συνάρτηση (rms)	5.6667 (καλή)		
	Δίπολο 1	Δίπολο 2	Δίπολο 3
$x (cm)$	0.2487	1.0171	1.4131
$y (cm)$	1.2204	0.5908	1.9635
$z (cm)$	1.6019	1.7444	0.5067
$m_x (mam^2)$	374.106	-494.8	619.969
$m_y (mam^2)$	-392.61	512.55	-619.3
$m_z (mam^2)$	429.484	-554.98	474.991
Αντικειμενική συνάρτηση (rms)	26.5556 (μέτρια)		
	Δίπολο 1	Δίπολο 2	Δίπολο 3
$x (cm)$	0.5495	1.3353	1.5443
$y (cm)$	1.5492	0.532	1.7487
$z (cm)$	1.2256	1.6128	0.561
$m_x (mam^2)$	402.338	-498.13	593.288
$m_y (mam^2)$	-413.97	481.764	-569.15
$m_z (mam^2)$	426.542	-512.79	436.88
Αντικειμενική συνάρτηση (rms)	49.3333 (κακή)		
	Δίπολο 1	Δίπολο 2	Δίπολο 3
$x (cm)$	1.8863	1.8044	1.0036
$y (cm)$	-0.2348	-0.4224	2.1399
$z (cm)$	0.2558	1.0537	0.5857
$m_x (mam^2)$	400.917	-496.6	585.527
$m_y (mam^2)$	-355.01	475.602	-623.26
$m_z (mam^2)$	454.146	-537.38	441.947

Εικόνα 4.15: Τρία διαφορετικά MDM solutions για διαφορετικές τιμές αντικειμενικής συνάρτησης στο πρόβλημα των 3 διπόλων.

## Κεφάλαιο 5: Αποκλίσεις Μαγνητικών ροπών στην MDM - Συσχέτιση με τις Αποκλίσεις της MAS

Στην εφαρμογή της MAS ζητήσαμε να βρούμε βοηθητικές πηγές σε κάποια επιφάνεια εσωτερικά του σκεδαστή έτσι ώστε οι πηγές αυτές να ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του σκεδαστή να είναι μηδενικό. Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν αυτά που ειπώθηκαν στα πρώτα κεφάλαια, αναζητήσαμε πηγές MAS οι οποίες να προσεγγίζουν το σκεδαζόμενο πεδίο του προβλήματος στην επιφάνεια του σκεδαστή. Στη συνέχεια, ελέγξαμε το όριο των πηγών αυτών για  $N \rightarrow \infty$  για να ελέγξουμε αν και κατά πόσο το πεδίο που δημιουργούν συγκλίνει στο πραγματικό σκεδαζόμενο πεδίο του χώρου. Παράλληλα, παρακολουθήσαμε το πρόβλημα της τοποθεσίας των πηγών MAS και αποδείξαμε το πρόβλημα απόκλισης των ρευματικών κατανομών, όταν βρίσκονται εντός μιας κρίσιμης επιφάνειας.

Αντίστοιχα, στην MDM αναζητούμε δίπολα στο εσωτερικό του μαγνητικού αντικειμένου τα οποία θα δημιουργούν πεδίο που προσεγγίζει την μαγνητική υπογραφή του EUT. Όπως στη MAS λοιπόν είχαμε να λύσουμε το πρόβλημα  $E_{MAS} = E_{scattered}$ , στην MDM αντιμετωπίζουμε την εξίσωση  $B_{calculated} = B_m$ .

### 5.1 Παρουσίαση του προβλήματος

Θέλουμε λοιπόν να ελέγξουμε αν το φαινόμενο των ταλαντώσεων των πηγών της MAS εμφανίζεται και στην MDM, αν επιλέξουμε μεγάλο αριθμό διπόλων (αντίστοιχα με  $N \rightarrow \infty$  για τις πηγές MAS). Για την υπόθεση αυτή κάνουμε την εξής θεώρηση: Έστω ένα EUT τοποθετημένο στο κέντρο των αξόνων. Μοντελοποιούμε μέσω της MDM την μαγνητική υπογραφή του αντικειμένου με δίπολα τοποθετημένα σε μια εσωτερική επιφάνεια  $S$ . Θα αναφερόμαστε στα δίπολα αυτά ως δίπολα-πηγή (dipole source). Ο αριθμός των dipole source ορίζεται ως  $N_s$ . Το μαγνητικό πεδίο που παράγουν τα δίπολα αυτά ταυτίζεται με το μαγνητικό πεδίο  $B_m$  του EUT που επιλέξαμε. Οι μετρήσεις μαγνητικού πεδίου λαμβάνονται σε μια εξωτερική επιφάνεια  $C$ . Θέλουμε λοιπόν τώρα να προσεγγίσουμε το μαγνητικό πεδίο αυτό με μια καινούρια κατανομή διπόλων (dipole auxiliary) τοποθετημένα σε μια επιφάνεια  $D$ . Ο αριθμός διπόλων της καινούριας κατανομής ορίζεται ως  $N_d$ . Το πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε είναι το που μπορεί να τοποθετηθεί η καινούρια κατανομή των dipole auxiliary (επιφάνεια  $D$ ) για να προσεγγίζει καλώς το μαγνητικό πεδίο των dipole source και τι συμβαίνει όταν επιλέξουμε μεγάλο αριθμό καινούριων διπόλων  $N_d$ .

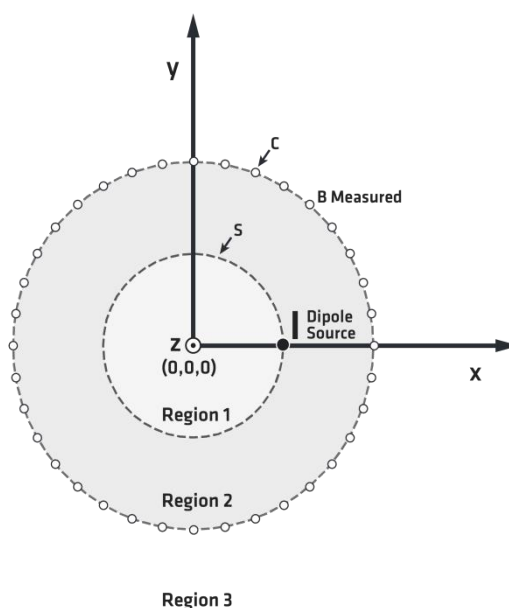
#### 5.1.1 Υλοποίηση με ένα δίπολο-πηγή κάθετο στην επιφάνεια -Ένα μαγνητόμετρο

Παρουσιάζουμε αρχικά το απλούστερο δυνατό πρόβλημα βάση προσομοίωσης. Για την ευκολία των προσομοιώσεων θεωρήσαμε ότι η επιφάνεια  $S$  είναι κύκλος ακτίνας  $r_s = 5cm$  με κέντρο την αρχή των αξόνων. Επιλέξαμε ένα dipole source με τα εξής χαρακτηριστικά:

$(x=5cm, y=0, z=0,$

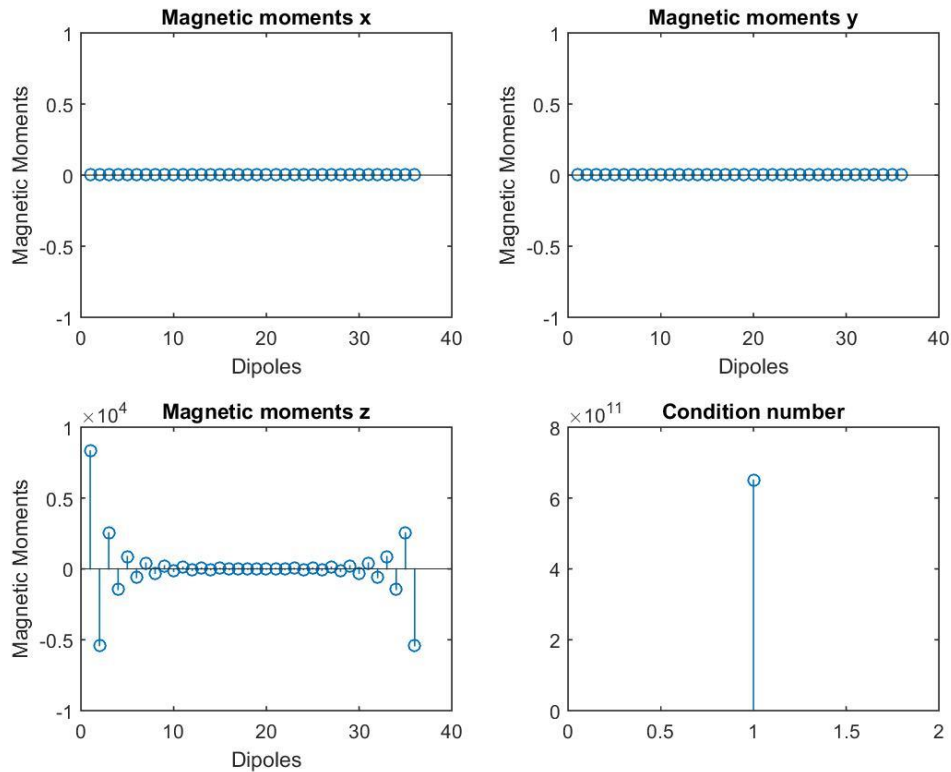
$m_x=0, m_y=0, m_z=500mA\cdot m^2)$

Στη συνέχεια πήραμε μετρήσεις μαγνητικού πεδίου από το dipole source προσομοιώνοντας έτσι ένα μαγνητόμετρο. Οι μετρήσεις αυτές ταυτίζονται με τις μετρήσεις του EUT που θεωρήσαμε στην αρχή. Η επιφάνεια C των μετρήσεων είναι κύκλος ακτίνας  $r_c = 10cm$  με κέντρο την αρχή των αξόνων. Ο αριθμός των μετρήσεων που πήραμε ήταν  $N_m = 36$ . Στην παρακάτω εικόνα το σύνορο του Region 1 με το Region 2 είναι η επιφάνεια S ενώ το σύνορο του Region 2 με το Region 3 είναι η επιφάνεια C.



Εικόνα 5.1: Γεωμετρία του προβλήματος

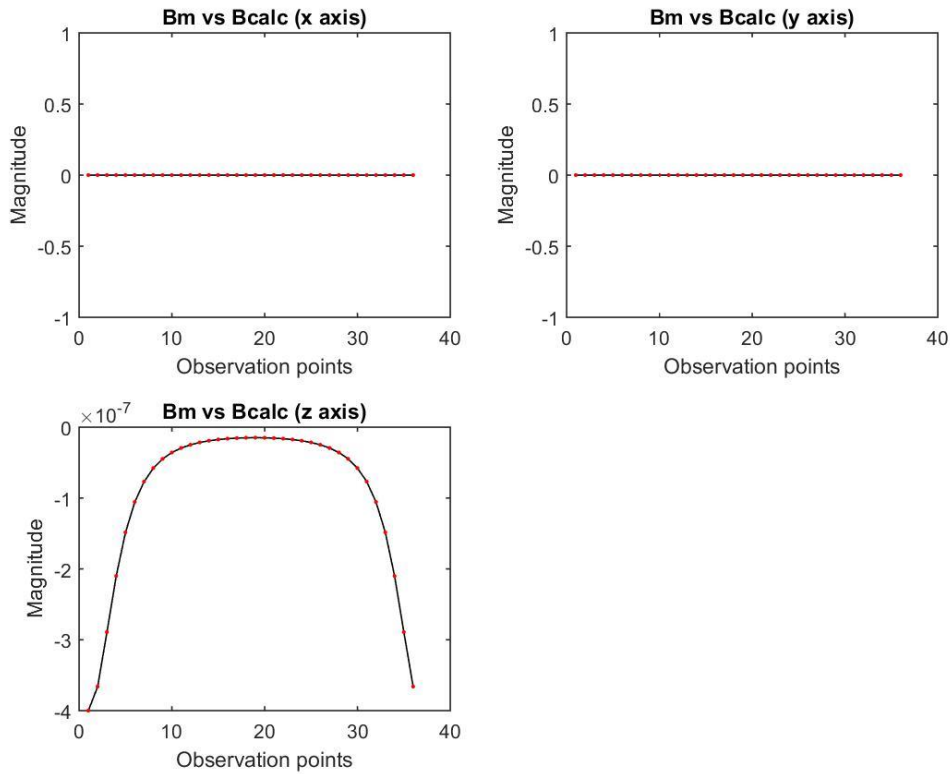
Είναι σαφές ότι το μαγνητικό πεδίο που έχουμε μετρήσει στην επιφάνεια C παρουσιάζει σημείο ιδιομορφίας στη θέση που είναι τοποθετημένο το dipole source. Άρα λοιπόν, αναμένουμε το εξής: Αν τοποθετήσουμε την καινούρια κατανομή διπόλων (dipole auxiliary) στο region 1 και επιλέξουμε  $N_d = N_m$  προκειμένου να έχουμε τον μέγιστο δυνατό αριθμό διπόλων για να είναι το σύστημα επιλύσιμο, τότε οι μαγνητικές ροπές των διπόλων θα παρουσιάζουν ταλαντώσεις. Αντίστοιχα, αν τοποθετήσουμε την καινούρια κατανομή στο region 2, οι μαγνητικές ροπές θα είναι μη-ταλαντούμενες επειδή θα περικλείουν το σημείο ιδιομορφίας του πεδίου. Η θεώρηση αυτή συμφωνεί με την ανάλυση που είχαμε για τις ταλαντώσεις της MAS στο κεφάλαιο 2.4. Όπως και για τις άλλες επιφάνειες του προβλήματος, θεωρούμε ότι η επιφάνεια D είναι κύκλος ακτίνας  $r_d < r_s$  με κέντρο την αρχή των αξόνων. Παρουσιάζουμε παρακάτω τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων.



Εικόνα 5.2: Οι καινούριες μαγνητικές ροπές των *dipole auxiliary* για  $rd=4$ ,  $Nd=Nm=36$

Έχουμε την πρώτη ένδειξη ότι η υπόθεση μας ήταν σωστή. Οι ταλαντώσεις που παρατηρούμε στις μαγνητικές ροπές κατά  $z$  είναι αρκετά όμοιες με αυτές που είδαμε στην ρευματική κατανομή των πηγών της MAS στην εικόνα 4 του κεφαλαίου 2.2. Εκτός αυτού παρατηρούμε μεγάλη διαφορά στο μέτρο ροπής μεταξύ γειτονικών διπόλων. Δείχνουμε στα διαγράμματα και τον δείκτη κατάστασης (*condition number*). Η τιμή του *condition number* που προκύπτει δεν είναι αρκετά μεγάλη ώστε μπορούμε να αποδώσουμε τις ταλαντώσεις που προκύπτουν σε σφάλματα *roundoff*. Ενδεικτικά αναφέρουμε τον εξής εμπειρικό κανόνα: ο δείκτης κατάστασης μπορεί να οριστεί ως προβληματικός όταν είναι της τάξης του  $10^{15}$  και άνω. Εκτός αυτού, το προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab που εκτελέσαμε τις προσομοιώσεις, εμφανίζει προειδοποιητικό σφάλμα όταν το *condition number* είναι ιδιαίτερα μεγάλο. Επίσης, αν οι ταλαντώσεις οφείλονταν σε ψηλό *condition number*, τότε δε θα είχαμε τη συμμετρία που παρατηρούμε στις μαγνητικές ροπές ως προς το πρώτο δίπολο (του οποίου η θέση ταυτίζεται με το *dipole source*).

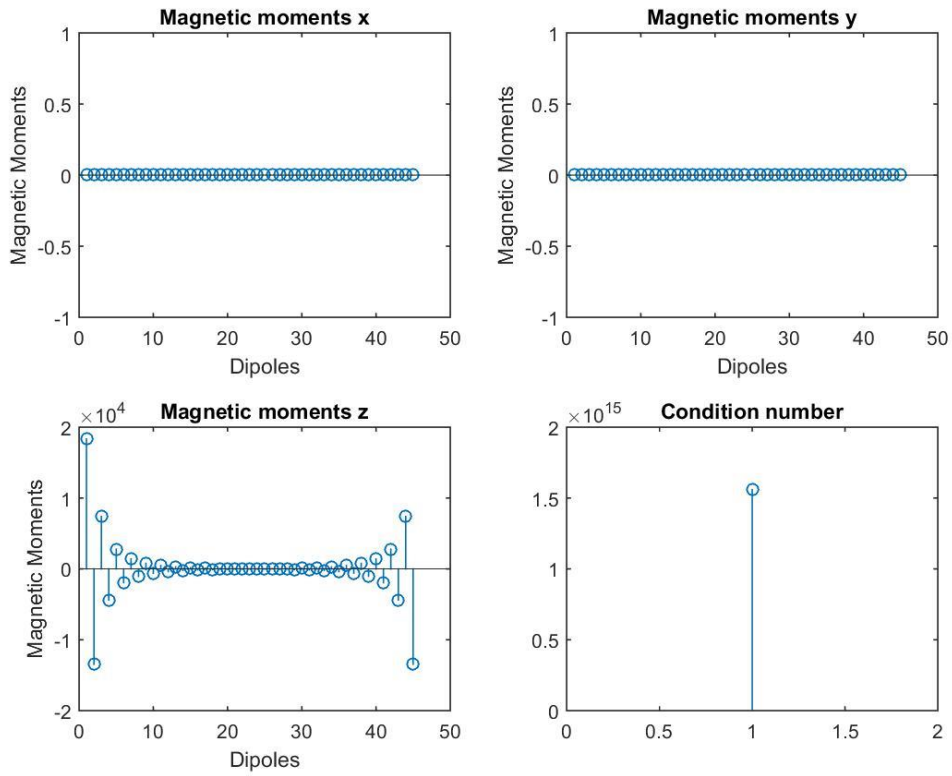
Το δεύτερο βήμα της προσομοίωσης είναι να ελέγξουμε αν οι καινούριες μαγνητικές ροπές παράγουν όντως το σωστό πεδίο στην επιφάνεια C (*collocation points*).



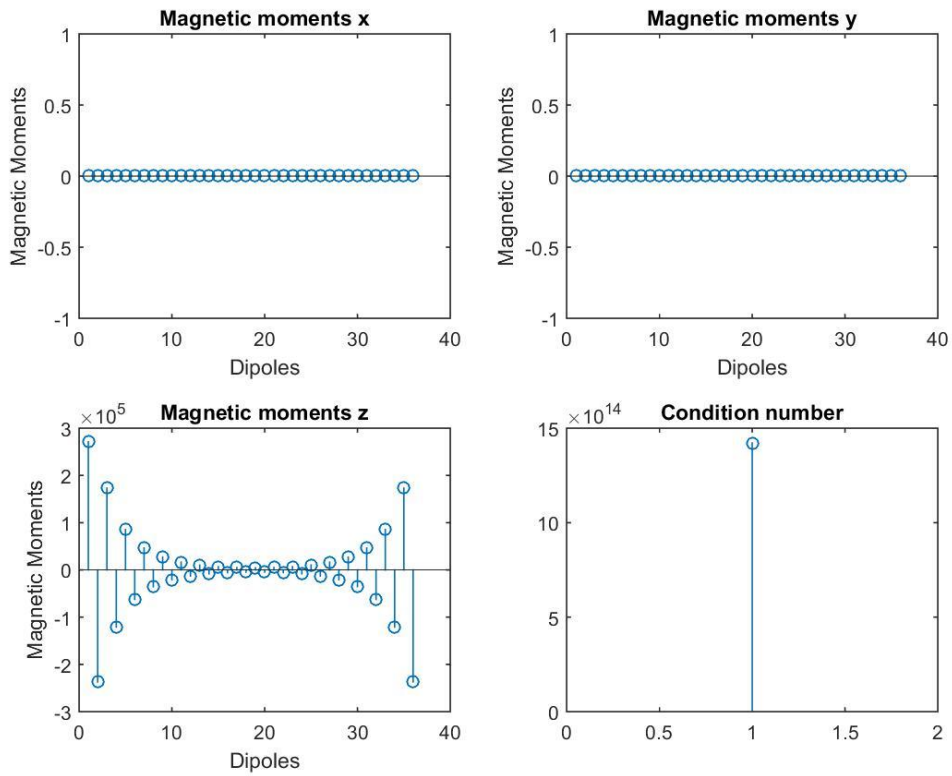
Εικόνα 5.3: Το πεδίο στα σημεία μέτρησης της επιφάνειας C για  $rd=4, Nd=Nm=36$ . Με μαύρη γραμμή έχουμε το μετρημένο πεδίο από το *dipole source* ενώ με τις κόκκινες τελείες το πεδίο που παράγεται από τα *dipole auxiliary*.

Όπως παρατηρούμε από την εικόνα 5.3, έχουμε απόλυτη ταύτιση του πεδίου των καινούριων διπόλων με αυτό του *dipole source*. Το ιδιαίτερο ζήτημα που προκύπτει είναι ότι μαγνητικές ροπές που ταλαντώνονται τόσο έντονα όπως αυτές της εικόνας 5.2 παράγουν ένα τόσο ομοιόμορφο πεδίο όπως αυτό της εικόνας 5.3.

Το επόμενο βήμα της προσομοίωσης είναι να ελέγξουμε αν οι ταλαντώσεις των ροπών γίνονται πιο έντονες όταν μειώσουμε και άλλο την ακτίνα της επιφάνειας D ή όταν αυξήσουμε τον αριθμό των καινούριων διπόλων αυξάνοντας έτσι αναγκαστικά και τα σημεία μέτρησης στην επιφάνεια C.



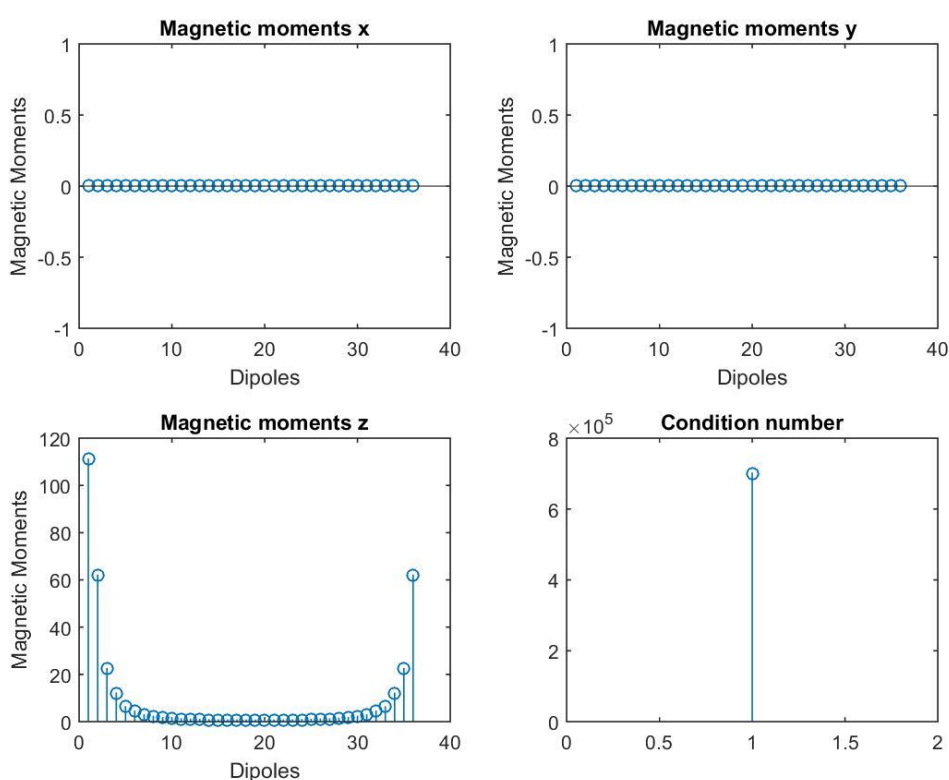
Εικόνα 5.4: Οι καινούριες μαγνητικές ροπές των *dipole auxiliary* για  $rd=4, Nd=Nm=45$



Εικόνα 5.5: Οι καινούριες μαγνητικές ροπές των *dipole auxiliary* για  $rd=3.2, Nd=Nm=36$

Δεν μπορούμε να δείξουμε αποτελέσματα για ακόμα μεγαλύτερο αριθμό διπόλων ή για ακόμα μικρότερη ακτίνα της επιφάνειας D γιατί αυξάνεται πολύ το condition number και τα δεδομένα παύουν να είναι αξιόπιστα. Παρατηρούμε όμως ότι όντως οι ταλαντώσεις έγιναν πιο έντονες.

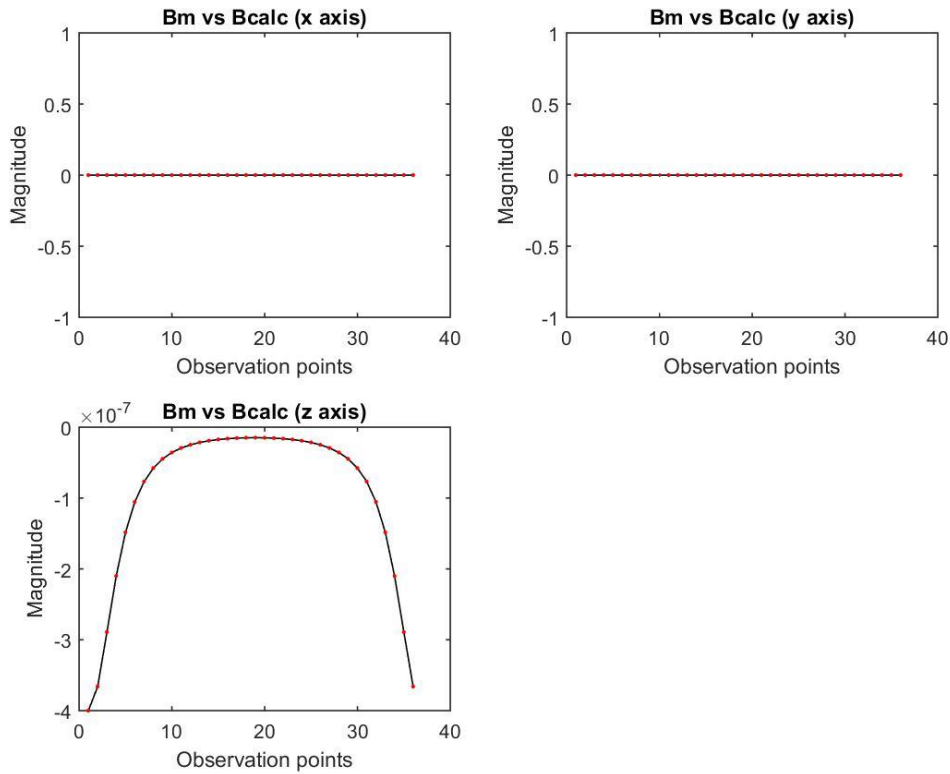
Στη συνέχεια επιθυμούμε να ελέγξουμε αν οι ταλαντώσεις των ροπών εξαφανίζονται αν η επιφάνεια D τοποθετηθεί στο region 2. Σύμφωνα με την ανάλυση που είχαμε για το σημείο ιδιομορφίας του μαγνητικού πεδίου αναμένουμε ότι η κατανομή των μαγνητικών ροπών σε αυτή τη περίπτωση θα είναι μη-ταλαντούμενη. Επιλέγοντας  $r_d=6$  λουπόν



Εικόνα 5.6: Οι καινούριες μαγνητικές ροπές των *dipoleauxiliary* για  $rd=6, Nd=Nm=36$

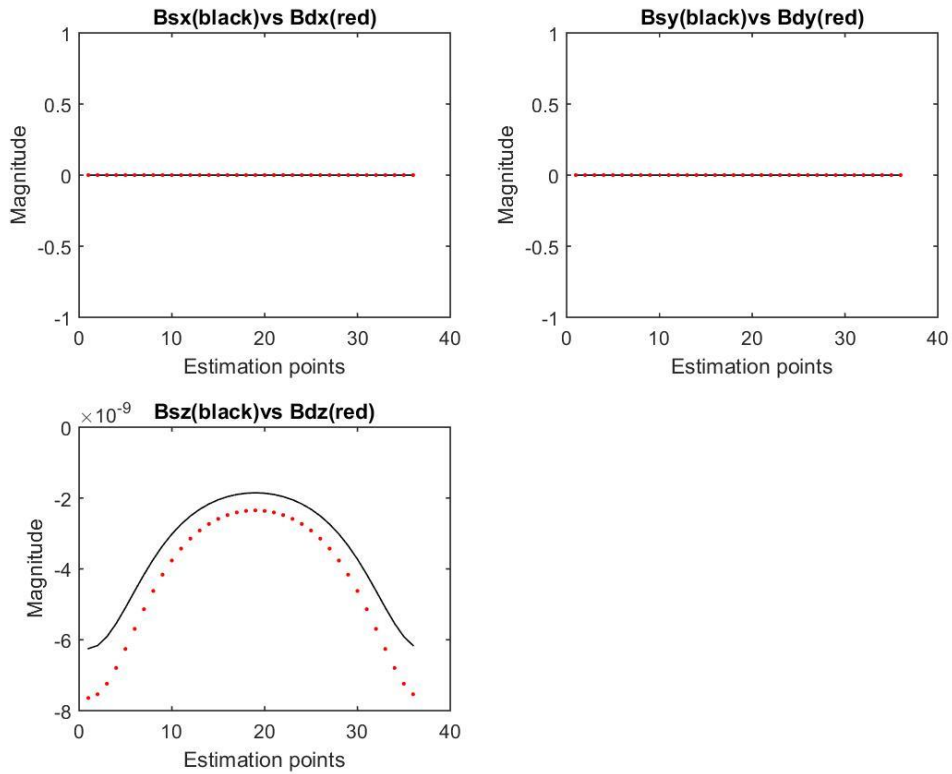
Είναι σαφές ότι η συγκεκριμένη κατανομή μαγνητικών ροπών είναι ομοιόμορφη. Πράγματι οι ταλαντώσεις δεν υφίστανται πλέον. Εκτός αυτού, συγκρίνοντας τις μέγιστες τιμές των μαγνητικών ροπών στις εικόνες 5.2 και 5.6 παρατηρούμε το εξής: Το δίπολο πηγή είχε μαγνητική ροπή τάξης μεγέθους  $10^2 \text{mAm}^2$ . Η μέγιστη διαφορά στο μέτρο ροπής μεταξύ γειτονικών διπόλων (μέγιστο πλάτος ταλάντωσης) στα καινούρια δίπολα είναι της τάξης του  $10^4 \text{mAm}^2$  για  $r_d=4$ . Για  $r_d=6$  το μέτρο ροπής των διπόλων δεν αλλάζει ιδιαίτερα πολύ. Επίσης, αναμέναμε ότι το condition number θα μειωθεί πολύ, όπως και έγινε. Αναμένουμε πως και οι ροπές της εικόνας 5.6 παράγουν με ακρίβεια το σωστό πεδίο στην επιφάνεια C. Πράγματι:





Εικόνα 5.7: Το πεδίο στα σημεία μέτρησης της επιφάνειας C για  $rd=6, Nd=Nm=36$ . Με μαύρη γραμμή έχουμε το μετρημένο πεδίο από το *dipole source* ενώ με τις κόκκινες τελείες το πεδίο που παράγεται από τα *dipole auxiliary*.

Ένα τελευταίο και ιδιαίτερα σημαντικό κομμάτι είναι το εξής: Τα καινούρια δίπολα, εκτός του ότι πρέπει να παράγουν το σωστό πεδίο στα collocation points, πρέπει να προσεγγίζουν καλώς και το μακρινό πεδίο. Ορίζουμε μια καινούρια κυκλική επιφάνεια E με ακτίνα  $r_e=25\text{cm}$  και κέντρο την αρχή των αξόνων. Πρέπει τώρα να ελέγξουμε αν τα καινούρια δίπολα παράγουν το ίδιο πεδίο στην επιφάνεια E με αυτό που παράγει το δίπολο πηγή. Καθώς έχουμε επιλέξει μετρήσεις με μόνο ένα μαγνητόμετρο αναμένουμε μια απόκλιση του μακρινού πεδίου των καινούριων διπόλων με το μακρινό πεδίο του διπόλου πηγή.



Εικόνα 5.8: Το μακρινό πεδίο στα σημεία μέτρησης της επιφάνειας  $E$  για  $rd=4, Nd=Nm=36$ . Με μαύρη γραμμή έχουμε το μετρημένο πεδίο από το *dipole source* ενώ με τις κόκκινες τελείες το πεδίο που παράγεται από τα *dipole auxiliary*.

Πράγματι, έχουμε μια σαφή απόκλιση πεδίων. Το ενδιαφέρον του παραπάνω διαγράμματος είναι ότι το πεδίο που υπολογίζουν τα καινούρια δίπολα ακολουθεί τη μορφή του πραγματικού πεδίου στην επιφάνεια  $E$ , αλλά με μικρότερο μέτρο. Εικάζουμε πως η απόκλιση αυτή είναι εύκολα διορθώσιμη επιλέγοντας μετρήσεις με περισσότερα μαγνητόμετρα.

### 5.1.2 Υλοποίηση με ένα δίπολο-πηγή υπό γωνία προς την επιφάνεια -Τέσσερα μαγνητόμετρα

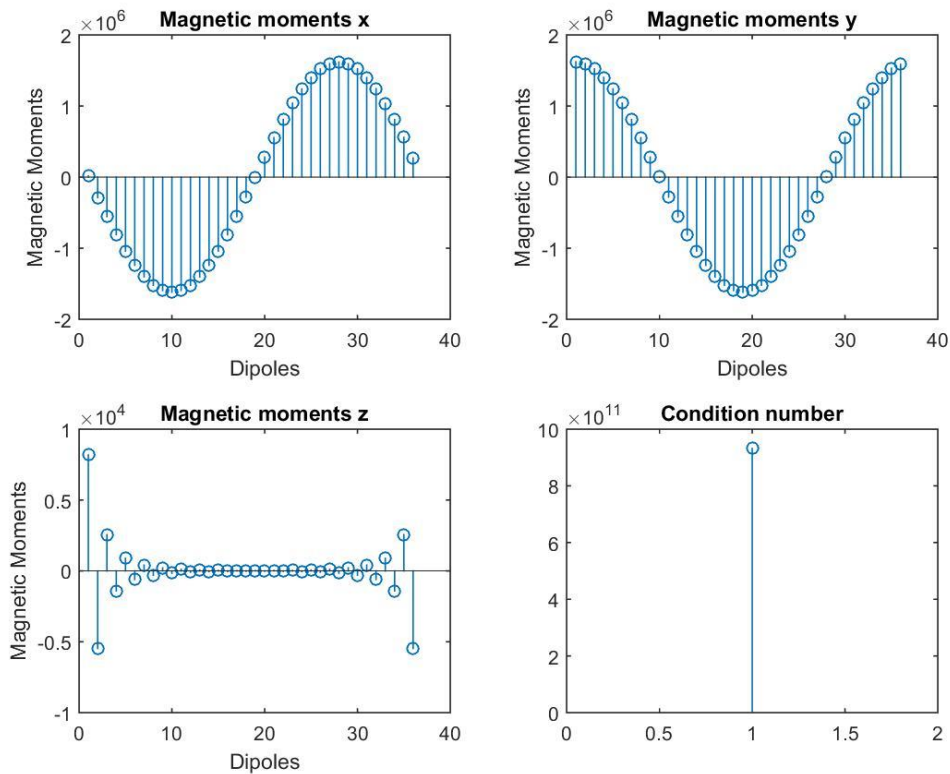
Παρουσιάζουμε τώρα ένα πιο σύνθετο πρόβλημα. Θεωρήσαμε ξανά ότι η επιφάνεια S είναι κύκλος ακτίνας  $r_s = 5cm$  με κέντρο την αρχή των αξόνων. Επιλέξαμε ένα dipole source με τα εξής χαρακτηριστικά:

$$(x=5cm, y=0, z=0,$$

$$m_x=500mA\cdot m^2, m_y=500mA\cdot m^2, m_z=500mA\cdot m^2)$$

Στη συνέχεια πήραμε μετρήσεις μαγνητικού πεδίου από το dipole source προσομοιώνοντας  $N_p = 4$  μαγνητόμετρα. Οι μετρήσεις αυτές έγιναν με σφαιρική συμμετρία σύμφωνα με την εικόνα 4.9 του υποκεφαλαίου 4.2.1. Η επιφάνεια C των μετρήσεων είναι σφαίρα ακτίνας  $r_c = 10cm$  με κέντρο την αρχή των αξόνων. Ο αριθμός των μετρήσεων που πήραμε ήταν  $N_m = 36$  ανά μαγνητόμετρο. Άρα, ο συνολικός αριθμός collocation point ήταν  $N_p \cdot N_m = 144$ . Η επιφάνεια D των καινούριων διπόλων (dipole auxiliary) επιλέχθηκε πάλι κύκλος ακτίνας  $r_d$  με κέντρο την αρχή των αξόνων. Ο αριθμός των καινούριων διπόλων επιλέχθηκε  $N_d = 36$ , προκειμένου να μην έχουμε προβλήματα με τον δείκτη κατάστασης της εξίσωσης υπολογισμού μαγνητικών ροπών. Τέλος να αναφέρουμε ότι είναι σημαντικό οι επιφάνειες S και D να είναι σύμμορφες προκειμένου να εξασφαλίσουμε μια καλή αριθμητική σταθερότητα στον κώδικα και έναν σχετικά καλό δείκτη κατάστασης.

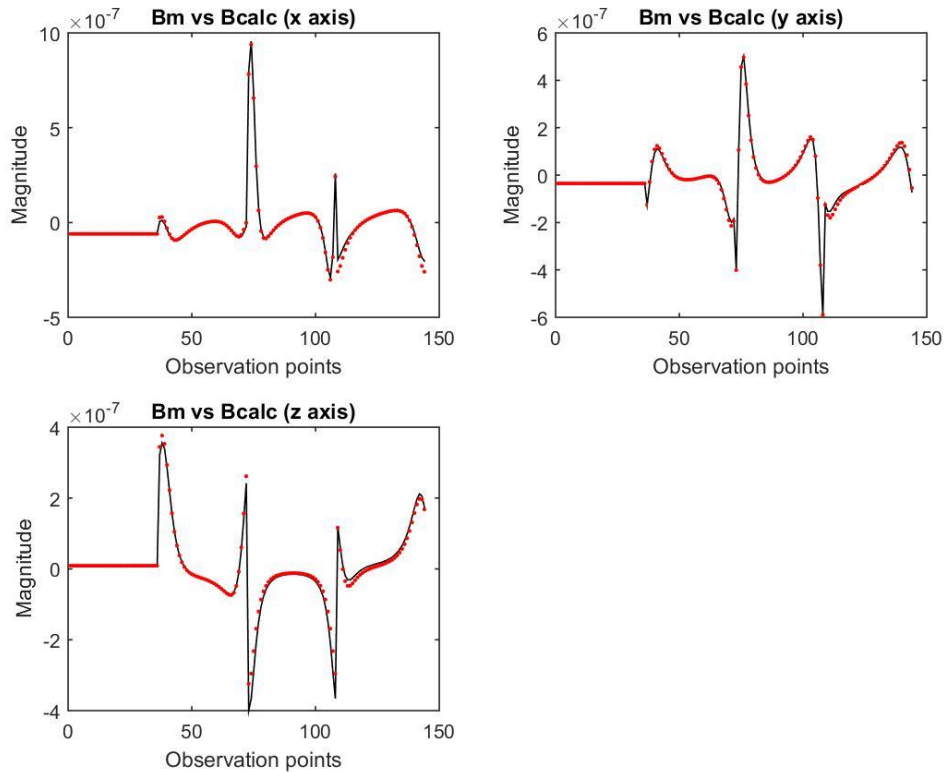
Ξεκινάμε τώρα την παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Επιλέξαμε αρχικά να τοποθετήσουμε την επιφάνεια D στη περιοχή 1 προκειμένου να ελέγξουμε την ύπαρξη ταλαντώσεων που είχαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο για κάθετο δίπολο. Πιο συγκεκριμένα, για να έχουμε μια καλή σύγκριση μεταξύ των δύο περιπτώσεων, επιλέξαμε πάλι  $r_d = 4$ . Αναμένουμε ότι οι μαγνητικές ροπές που θα προκύψουν στον z θα είναι ίδιες με αυτές του κάθετου διπόλου (εικόνα 5.2). Στη συνέχεια ελέγχουμε αν οι καινούριες μαγνητικές ροπές αποδίδουν με ακρίβεια το πεδίο στα 144 collocation point και επίσης πόσο καλή προσέγγιση μακρινού πεδίου του διπόλου-πηγή επιτυγχάνουν.



Εικόνα 5.9: Οι καινούριες μαγνητικές ροπές των *dipole auxiliary* για  $rd=4, Nd=Nm=36$

Είναι σαφές ότι οι μαγνητικές ροπές κατά  $z$ , όχι μόνο ταλαντώνονται, αλλά είναι και ίδιες με αυτές του κάθετου διπόλου (εικόνα 5.2), τόσο κατά μέτρο όσο και κατά μορφή κατανομής. Παρατηρούμε όμως ότι οι ροπές κατά  $x$  και  $y$  δεν εμφανίζουν το ίδιο φαινόμενο. Αντίθετα παρουσιάζουν μια ομαλότητα. Η τάξη μεγέθους τους όμως είναι ιδιαίτερα υψηλή, εξίσου υψηλή με τις ροπές κατά  $z$ . Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ δύο γειτονικών διπόλων υπάρχει μια ιδιαίτερα μεγάλη διαφορά ροπής. Ενδεικτικά να αναφέρουμε ότι το πρώτο δίπολο κατά  $x$  έχει μαγνητική ροπή  $1.5188 \cdot 10^4 \text{ mAm}^2$  ενώ το δεύτερο  $-2.8705 \cdot 10^5 \text{ mAm}^2$ .

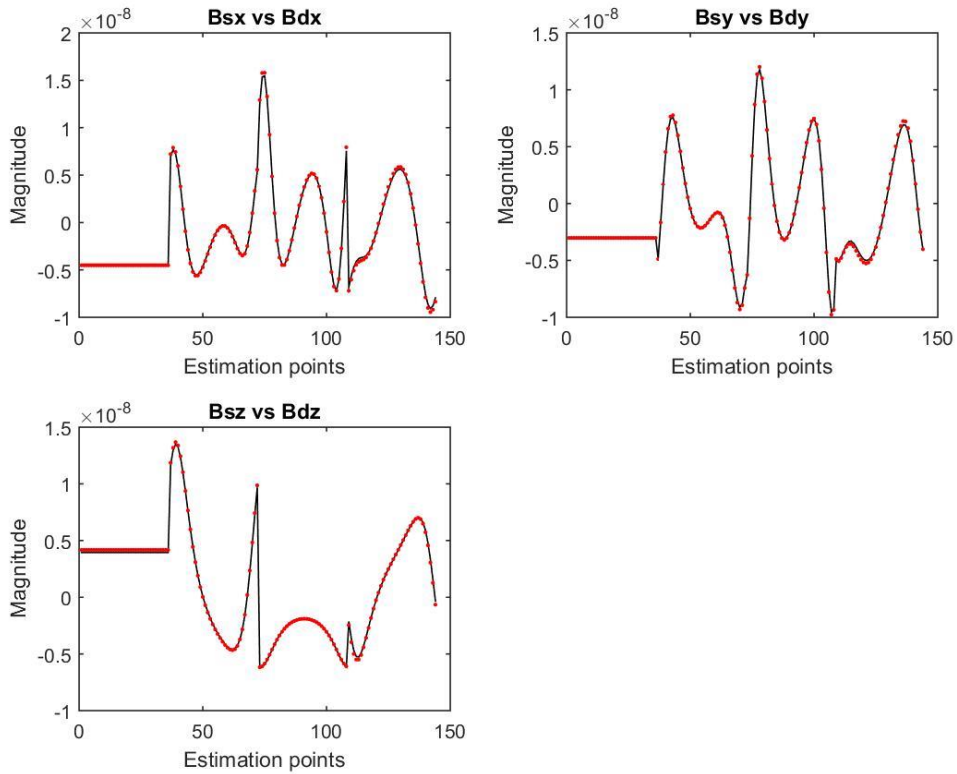
Θέλουμε τώρα να ελέγξουμε αν οι καινούριες μαγνητικές ροπές αποδίδουν το σωστό πεδίο στην επιφάνεια  $C$ . Θυμίζουμε ότι η επιφάνεια  $C$  αποτελείται από  $N_p$  κυκλικές επιφάνειες με  $N_m$  μετρήσεις η καθεμία.



Εικόνα 5.10: Το πεδίο στα σημεία μέτρησης της επιφάνειας C για  $d=4, Nd=Nm=36$ . Με μαύρη γραμμή έχουμε το μετρημένο πεδίο από το *dipole source* ενώ με τις κόκκινες τελείες το πεδίο που παράγεται από τα *dipole auxiliary*.

Είναι σαφές ότι έχουμε μια πολύ καλή ταύτιση των δύο πεδίων. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε εδώ ότι τα παραπάνω διαγράμματα παρουσιάζουν τις μετρήσεις σε κάθε έναν επιμέρους κύκλο της σφαιρικής επιφάνειας C. Αυτός είναι και ο λόγος που έχουμε αυτές τις απότομες ασυνέχειες. Πιο συγκεκριμένα για 0-36 observation points έχουμε το πεδίο που μέτρησε το πρώτο μαγνητόμετρο. Για 37-73 points έχουμε το πεδίο που μέτρησε το δεύτερο μαγνητόμετρο κ.ο.κ. Το πεδίο που μέτρησε το κάθε μαγνητόμετρο δηλαδή είναι ομοιόμορφο. Ο λόγος που παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα με αυτό το τρόπο ήταν καθαρά πρακτικός ώστε να μην εμφανίσουμε  $N_p$  διαφορετικά διαγράμματα.

Επιθυμούμε τώρα να ελέγξουμε αν οι καινούριες μαγνητικές ροπές της εικόνας 5.9 αποδίδουν καλώς το μακρινό πεδίο του διπόλου πηγή. Επιλέγουμε σφαιρική επιφάνεια E σύμμορφη με την επιφάνεια C, προκειμένου να μπορούμε να παρουσιάσουμε την προσέγγιση μακρινού πεδίου σε περισσότερα σημεία του χώρου και όχι μόνο στους χγ άξονες όπως είχαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Η ακτίνα της σφαιρικής επιφάνειας E επιλέχθηκε  $r_e=25\text{cm}$  και το κέντρο της ήταν η αρχή των αξόνων.



Εικόνα 5.11: Το μακρινό πεδίο στα σημεία μέτρησης της επιφάνειας  $E$  για  $rd=4, Nd=Nm=36$ . Με μαύρη γραμμή έχουμε το μετρημένο πεδίο από το *dipole source* ενώ με τις κόκκινες τελείες το πεδίο που παράγεται από τα *dipole auxiliary*.

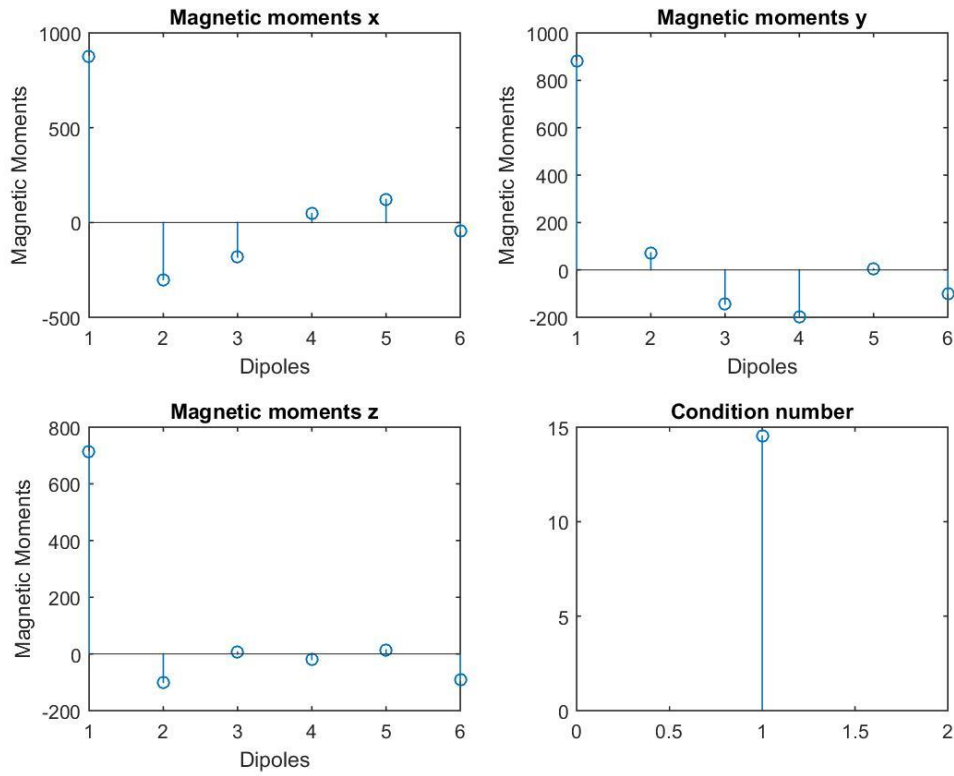
Παρατηρούμε ότι το μακρινό πεδίο προσεγγίζεται καλώς από τα καινούρια δίπολα. Όπως και με την εικόνα 5.10, τα διαγράμματα της 5.11 παρουσιάζουν τις μετρήσεις σε κάθε έναν επιμέρους κύκλο της σφαιρικής επιφάνειας  $E$ . Μπορούμε να πούμε με ασφάλεια ότι τα καινούρια δίπολα (*dipole auxiliary*) προσεγγίζουν με ακρίβεια το πεδίο που δημιουργεί το δίπολο πηγή στο χώρο.

## Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα-Ανάλυση αποτελεσμάτων

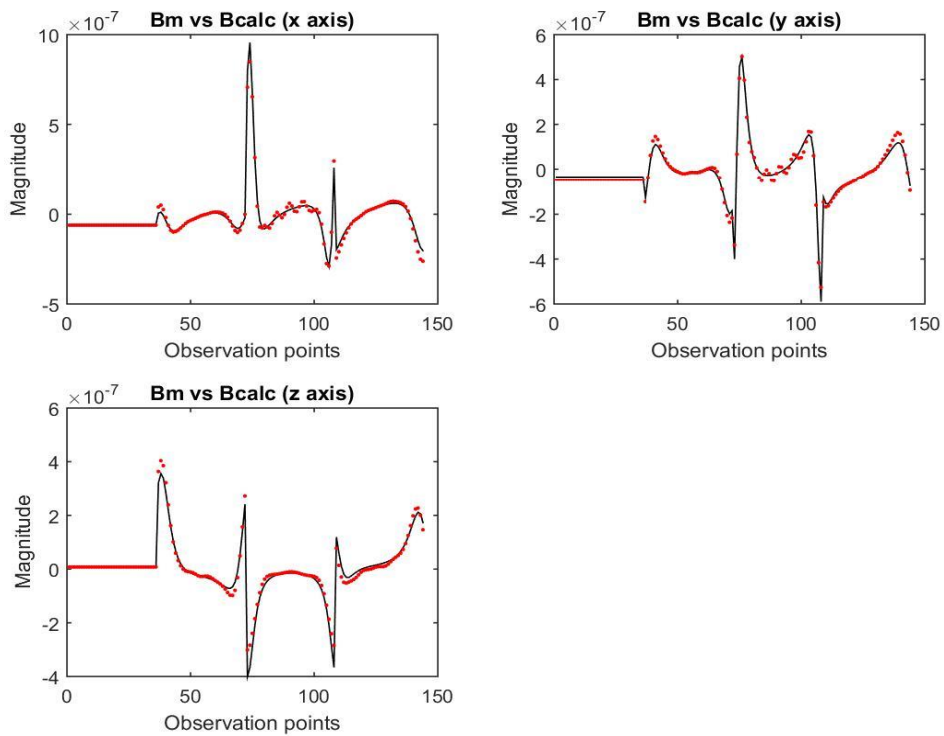
Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο της παρούσας πτυχιακής εργασίας θα προβούμε σε μια γρήγορη ανακεφαλαίωση όσων ειπώθηκαν. Παρουσιάσαμε την μελέτη που είχε γίνει για την αριθμητική μέθοδο MAS σε προβλήματα σκέδασης και επικεντρωθήκαμε στο θέμα των αποκλίσεων που παρουσιάζεται στις ρευματικές κατανομές των βοηθητικών πηγών. Εξηγήσαμε ότι οι αποκλίσεις αυτές δεν οφείλονται σε σφάλματα roundoff ή κακής κατάστασης των πινάκων, σε αντίθεση με τις αποκλίσεις που παρουσιάζονται στην εκτεταμένη ολοκληρωτική εξίσωση. Στη συνέχεια αναλύσαμε την αριθμητική μέθοδο MDM, που χρησιμοποιείται σε προβλήματα μαγνητικής καθαρότητας και ελέγξαμε αν τα προβλήματα αποκλίσεων που αντιμετωπίζουμε στην MAS προκύπτουν και στην MDM.

Σκοπός και των δύο αυτών μεθόδων είναι η μοντελοποίηση ενός φυσικού φαινομένου από ένα ντετερμινιστικό και ελέγξιμο σύστημα. Πιο συγκεκριμένα, στην MAS προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε το σκεδαζόμενο πεδίο μέσα από βοηθητικές πηγές ρεύματος στο εσωτερικό του σκεδαστή και στην MDM την μαγνητική υπογραφή κάποιου αντικειμένου μέσα από μαγνητικά δίπολα τοποθετημένα στο εσωτερικό του. Η ομοιότητα αυτή έδωσε πνοή στην ιδέα ότι οι ταλαντώσεις που προκύπτουν στην ρευματική κατανομή των πηγών της MAS μπορεί να προκύπτουν στις μαγνητικές ροπές των διπόλων της MDM.

Οι ταλαντώσεις αυτές αποτελούν ένα καθαρά μαθηματικό πρόβλημα και σχετίζονται άμεσα με την απόσταση που έχουν οι πηγές μεταξύ τους. Αυτός είναι και ο λόγος που και στις δύο περιπτώσεις, η ένταση των ταλαντώσεων αυξάνεται όταν μειώνουμε το μέγεθος του γεωμετρικού τύπου των πηγών ή/και όταν αυξάνουμε τον αριθμό των πηγών που τοποθετούμε. Επίσης ενδιαφέρον είναι ότι και στις δύο περιπτώσεις το πεδίο που προσπαθούμε να προσεγγίσουμε είναι σχετικά ασθενές. Το γεγονός αυτό δημιουργεί ερωτήματα σχετικά με το εύρος τιμών που λαμβάνουν τα βοηθητικά ρεύματα στη MAS και οι μαγνητικές ροπές στην MDM. Πως γίνεται ένα σύστημα πηγών με τόσο ισχυρές ταλαντώσεις και τόσο μεγάλες τιμές στα χαρακτηριστικά των πηγών (ρεύματα για τη MAS και μαγνητικές ροπές για την MDM) να προσεγγίζει τέλεια ένα τόσο ασθενές πεδίο; Είναι σαφές ότι η απάντηση βρίσκεται στην έννοια της αφαιρετικής συμβολής. Η αφαιρετική συμβολή σε συνδυασμό με την ανάλυση που είχαμε περι ιδιομορφίας του πεδίου αποτελούν τον κύριο λόγο ύπαρξης αυτών των αποκλίσεων. Πράγματι, επιλέγοντας λιγότερα καινούρια δίπολα, π.χ.  $N_d = 6$  για την προσέγγιση του πεδίου του διπόλου πηγή είναι σαφές ότι η σχετική απόσταση μεταξύ των καινούριων διπόλων θα αυξηθεί. Τα μέτρα των ροπών θα είναι πλέον ίδιας τάξης με αυτή του διπόλου πηγή. Παρόλα αυτά όμως, χάνουμε σε προσέγγιση του πεδίου, όπως παρατηρούμε στα επόμενα διαγράμματα.



Εικόνα 6.1: Οι καινούριες μαγνητικές ροπές των *dipole auxiliary* για  $rd=4, Nd=6, Nm=36$



Εικόνα 6.2: Το πεδίο στα σημεία μέτρησης της επιφάνειας  $C$  για  $rd=4, Nd=6, Nm=36$ . Με μαύρη γραμμή έχουμε το μετρημένο πεδίο από το *dipole source* ενώ με τις κόκκινες τελείες το πεδίο που παράγεται από τα *dipole auxiliary*.



Γιατί όμως το φαινόμενο αυτό είναι σημαντικό; Εξάλλου, όπως αναφέραμε στην ανάλυση και των δύο μεθόδων, παρά τις ταλαντώσεις των πηγών, το πεδίο συνεχίζει να προσεγγίζεται τέλεια στο χώρο που μας απασχολεί. Όταν κατασκευάζει κανείς κάποιον αλγόριθμο, δύο βασικά χαρακτηριστικά είναι ο αλγόριθμός αυτός να είναι ευσταθής και να δίνει ακριβή αποτελέσματα. Τα συγκεκριμένα είναι ιδιαιτέρως σημαντικά σε υπολογιστικές μεθόδους. Σε αυτή τη προσπάθεια λοιπόν θα πρέπει να αποφεύγουμε δεδομένα που παρουσιάζουν ισχυρές αποκλίσεις μεταξύ τους καθώς αυτό αυξάνει κατακόρυφα τους δείκτες κατάστασης των πινάκων και οδηγεί σε αποτελέσματα ιδιαιτέρως επιρρεπή σε σφάλματα, τα οποία μπορεί να έχουν καταστροφικές συνέπειες. Πρέπει λοιπόν να αναζητούμε λύσεις, οι οποίες να είναι αριθμητικά ευσταθείς. Αυτός είναι και ο λόγος που στην εικόνα 5.9 τονίσαμε τη διαφορά μέτρου ροπής μεταξύ γειτονικών διπόλων ακόμα και αν οι ροπές κατά  $x$  και  $y$  δεν εμφάνιζαν την ίδια κατανομή με αυτές κατά  $z$ .

Ένα ακόμα ερώτημα το οποίο τίθεται είναι το εξής: Από τη στιγμή που τόσο στην MAS όσο και στην MDM υπάρχουν ικανοποιητικές λύσεις στις οποίες δεν παρουσιάζονται αποκλίσεις, ποιος ο λόγος της εν λόγω μελέτης; Εκτός της προφανής απάντησης της επιστημονικής περιέργειας, υπάρχουν σαφέστατα και πρακτικοί λόγοι. Στην MAS υπάρχει μια σχετική ελευθερία στην κατανομή των βοηθητικών πηγών, όσον αφορά την μορφή και το μέγεθος της βοηθητικής επιφάνειας. Ο μοναδικός περιορισμός είναι η βοηθητική επιφάνεια να εσωκλείεται του σκεδαστή. Εκτός αυτού, ο αριθμός των βοηθητικών πηγών εξαρτάται από την ανάγκη προσέγγισης του σκεδαζόμενου πεδίου. Είναι σημαντικό λοιπόν, αν προκύπτουν χωρικοί περιορισμοί στην αποδοτικότητα της μεθόδου, οι περιορισμοί αυτοί να παρουσιάζονται, να αναλύονται και να εξηγούνται.

Αντίστοιχοι λόγοι παρουσιάζονται και στην MDM, όπου υπάρχει ο χωρικός περιορισμός τα δίπολα να βρίσκονται στο εσωτερικού του μαγνητικού αντικειμένου. Σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά του αλγορίθμου Gauss-Newtonπου αναφέραμε στο υποκεφάλαιο 4.2.1, ένα από τα σημαντικότερα μειονεκτήματα του αλγορίθμου είναι ότι δεν προσφέρει κάποιον έλεγχο στην θέση που τοποθετούνται τα δίπολα. Αυτό αποτελεί πρόβλημα για δύο λόγους:

1. Είναι σύνηθες δύο δίπολα της MDM να πλησιάζουν αρκετά κοντά μεταξύ τους με αποτέλεσμα να παρουσιάζονται σημεία σύγκρουσης θέσης (collision point).
2. Τα δίπολα της MDM πρέπει να τοποθετηθούν στο **εσωτερικό** του EUT προκειμένου η εκτίμηση κοντινού και μακρινού πεδίου να είναι σωστή. Ο αλγόριθμος δεν συνυπολογίζει αυτόν τον περιορισμό κατά την εύρεση θέσης.

Η λύση σε αυτά τα προβλήματα είναι είτε να ξεκινήσουμε τον αλγόριθμο από την αρχή με άλλη αρχική θέση διπόλου είτε να χρησιμοποιήσουμε καλύτερο λογισμικό όπως το GAMAG[23].

Η ιδέα που προκύπτει λοιπόν είναι η εξής: Μπορούμε να προσεγγίσουμε το πεδίο κάποιου διπόλου από περισσότερα δίπολα (dipole auxiliary) σε θέσεις στο εσωτερικό του EUT έτσι ώστε να μπορούμε να αναιρέσουμε αυτούς τους περιορισμούς στον αλγόριθμο; Αν ναι, για να έχουμε τέλεια προσέγγιση του πεδίου του διπόλου πρέπει ο αριθμός των dipole auxiliary να είναι μεγάλος. Όταν ο αριθμός των dipole auxiliary όμως είναι μεγάλος

και είναι τοποθετημένα πιο κοντά στο κέντρο των αξόνων(στο εσωτερικό του EUT) προκύπτουν οι αποκλίσεις που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 5.

Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι τόσο στην MAS όσο και στην MDM παρουσιάζονται ταλαντώσεις στις πηγές όταν αυτές τοποθετηθούν σε ιδιαίτερα κοντινές αποστάσεις μεταξύ τους. Παρολ'αυτά, το πεδίο των πηγών προσεγγίζει τέλεια το θεωρητικό του εκάστοτε προβλήματος. Όπως αναφέραμε παραπάνω όμως, είναι σημαντικό τέτοιου είδους αποκλίσεις να αποφεύγονται καθώς αυξάνουν τις πιθανότητες σφάλματος σε αλγορίθμους υπολογιστικών μεθόδων.

Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι από τη στιγμή που αυτού του είδους οι αποκλίσεις παρουσιάζονται σε προβλήματα σχετικά απλής γεωμετρίας (όπως είχαμε στην MAS), είναι λογικό να εμφανίζονται και σε πιο σύνθετα προβλήματα[12]. Οι αποκλίσεις αυτές αποτελούν έναν περιορισμό στις συγκεκριμένες υπολογιστικές μεθόδους. Ένας περιορισμός που εμφανίζεται σε σχετικά απλά προβλήματα είναι λογικό και αναμενόμενο να εμφανίζεται και σε πιο σύνθετα.

## Appendix: Matlab

### 5.1.1 Code

```
%%On the Convergence Of Magnetic Dipoles In MDM%%
clear all;close all;clc;
Nm=36;      %Number of Measurements
Ns=1;      %Number of Dipole Source
Nd=36;     %Number of New Dipoles
rc=10;     %Radius of Measurement Locus
rs=5;      %Radius of Dipole source Locus
rd=4;      %Radius of New Dipoles Locus
re=25;     %Radius of Estimation Locus
u=4*pi*10^(-7);
%Magnetic Moments of Sources
mx=zeros(1, Ns);
my=zeros(1, Ns);
mz=zeros(1, Ns);

mx(1)=0;
my(1)=0;
mz(1)=500;

%%
%Measurement Points
%C surface
for j = 1:Nm
    xc(j) = rc*cos((j-1)*pi/(0.5*Nm));
    yc(j) = rc*sin((j-1)*pi/(0.5*Nm));
    zc(j) = 0;
end

%Estimation Points
%E surface
for j = 1:Nm
    xe(j) = re*cos((j-1)*pi/(0.5*Nm));
    ye(j) = re*sin((j-1)*pi/(0.5*Nm));
    ze(j) = 0;
end

%Source Dipole Locus
%S surface
for i = 1:Ns
    x(i) = rs*cos((i-1)*pi/(0.5*Ns));
    y(i) = rs*sin((i-1)*pi/(0.5*Ns));
    z(i) = 0;
end

%Dipole Locus Change
%D surface
for i = 1:Nd
    xnew(i) = rd*cos((i-1)*pi/(0.5*Nd));
    ynew(i) = rd*sin((i-1)*pi/(0.5*Nd));
    znew(i) = 0;
end
```

```

%%
%Magnetic field measurements
for i = 1:Ns
for j = 1:Nm
    L(i,j)=(mx(i)*(xc(j)-x(i)))+(my(i)*(yc(j)-
y(i)))+(mz(i)*(zc(j)-z(i)));
    r(i,j) = sqrt((xc(j)-x(i))^2+(yc(j)-y(i))^2+(zc(j)-z(i))^2);
    Bx(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(xc(j) - x(i))*L(i,j)/(r(i,j)^5)-
mx(i)/(r(i,j)^3));
    By(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(yc(j) - y(i))*L(i,j)/(r(i,j)^5)-
my(i)/(r(i,j)^3));
    Bz(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(zc(j) - z(i))*L(i,j)/(r(i,j)^5)-
mz(i)/(r(i,j)^3));
end
end

TBx = zeros(1,Nm);
TBy = zeros(1,Nm);
TBz = zeros(1,Nm);

for j = 1:Nm
for i=1:Ns
    TBx(j) = TBx(j) + Bx(i,j);
    TBy(j) = TBy(j) + By(i,j);
    TBz(j) = TBz(j) + Bz(i,j);
end
end

TB = [TBx;TBy;TBz];

%%
%New magnetic moments from Total Magnetic field

%New Distances
rnew=zeros(Nm,Nd);
for i=1:Nm
for j=1:Nd
    rnew(i,j) = sqrt((xc(i)-xnew(j))^2+(yc(i)-ynew(j))^2+(zc(i)-
znew(j))^2);
end
end

%Transfer matrix G
Xx=zeros(Nm,Nd);
Yx=zeros(Nm,Nd);
Zx=zeros(Nm,Nd);
Yy=zeros(Nm,Nd);
Zy=zeros(Nm,Nd);
Zz=zeros(Nm,Nd);
for i=1:Nm
for j=1:Nd
    Xx(i,j)=(3*u/(4*pi))*((xc(i)-xnew(j))^2)/(rnew(i,j)^5)-
(u/(4*pi))/(rnew(i,j)^3);
    Yy(i,j)=(3*u/(4*pi))*((yc(i)-ynew(j))^2)/(rnew(i,j)^5)-
(u/(4*pi))/(rnew(i,j)^3);
    Zz(i,j)=(3*u/(4*pi))*((zc(i)-znew(j))^2)/(rnew(i,j)^5)-
(u/(4*pi))/(rnew(i,j)^3);

```

```

        Yx(i,j)=(3*u/(4*pi))*((xc(i)-xnew(j))*(yc(i)-
ynew(j)))/(rnew(i,j)^5);
        Zx(i,j)=(3*u/(4*pi))*((xc(i)-xnew(j))*(zc(i)-
znew(j)))/(rnew(i,j)^5);
        Zy(i,j)=(3*u/(4*pi))*((yc(i)-ynew(j))*(zc(i)-
znew(j)))/(rnew(i,j)^5);
end
end
G=[Xx Yx Zx;
   Yx Yy Zy;
   Zx Zy Zz];
%TBxpr=mx*Xx+my*Yx+mz*Zx;
%TBypr=mx*Yx+my*Yy+mz*Zy;
%TBzpr=mx*Zx+my*Zy+mz*Zz;

%Solve for New Magnetic Moments
TBth=[TBx TBy TBz];
TBth=TBth';
Mnew=linsolve(G,TBth);
%Mnew=mldivide(G,TBth);
C=cond(G);

%Magnetic Moments
MX=Mnew(1:Nd);
MY=Mnew((Nd+1):2*Nd);
MZ=Mnew(((2*Nd)+1):3*Nd);

%Diagrams showing the new magnetic Moments
figure;
subplot(2,2,1);stem(MX);
title('Magnetic moments x');xlabel('Dipoles');ylabel('Magnetic
Moments');
subplot(2,2,2);stem(MY);
title('Magnetic moments y');xlabel('Dipoles');ylabel('Magnetic
Moments');
subplot(2,2,3);stem(MZ);
title('Magnetic moments z');xlabel('Dipoles');ylabel('Magnetic
Moments');
subplot(2,2,4);stem(C);
title('Condition number');
print('figure1','-djpeg');
pause;
%%
%Field from new magnetic moments on collocation points
TBpr=G*Mnew;
TBprx=TBpr(1:Nm);
TBpry=TBpr(Nm+1:2*Nm);
TBprz=TBpr(2*Nm+1:3*Nm);

figure;
subplot(2,2,1);plot(TBx,'k');hold on;plot(TBprx,'r. ');
title('Bm vs Bcalc (x axis)');xlabel('Observation
points');ylabel('Magnitude');
subplot(2,2,2);plot(TBy,'k');hold on;plot(TBpry,'r. ');
title('Bm vs Bcalc (y axis)');xlabel('Observation
points');ylabel('Magnitude');
subplot(2,2,3);plot(TBz,'k');hold on;plot(TBprz,'r. ');
title('Bm vs Bcalc (z axis)');xlabel('Observation
points');ylabel('Magnitude');

```

```

print('figure2 ', '-djpeg');
pause;

%%
%Far field estimation and comparison

%estimated field from new dipoles
for i = 1:Nd
for j = 1:Nm
    Lde(i,j)=(MX(i)*(xe(j)-xnew(i)))+(MY(i)*(ye(j)-
ynew(i)))+(MZ(i)*(ze(j)-znew(i)));
    Rde(i,j) = sqrt((xe(j)-xnew(i))^2+(ye(j)-ynew(i))^2+(ze(j)-
znew(i))^2);
    Bxde(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(xe(j) -
xnew(i))*Lde(i,j)/(Rde(i,j)^5)-MX(i)/(Rde(i,j)^3));
    Bxde(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(ye(j) -
ynew(i))*Lde(i,j)/(Rde(i,j)^5)-MY(i)/(Rde(i,j)^3));
    Bzde(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(ze(j) -
znew(i))*Lde(i,j)/(Rde(i,j)^5)-MZ(i)/(Rde(i,j)^3));
end
end

TBxde = zeros(1,Nm);
TByde = zeros(1,Nm);
TBzde = zeros(1,Nm);

for j = 1:Nm
for i=1:Nd
    TBxde(j) = TBxde(j) + Bxde(i,j);
    TByde(j) = TByde(j) + Bxde(i,j);
    TBzde(j) = TBzde(j) + Bzde(i,j);
end
end

TBde = [TBxde;TByde;TBzde];

%Far field from source
for i = 1:Ns
for j = 1:Nm
    Lse(i,j)=(mx(i)*(xe(j)-x(i)))+(my(i)*(ye(j)-
y(i)))+(mz(i)*(ze(j)-z(i)));
    Rse(i,j) = sqrt((xe(j)-x(i))^2+(ye(j)-y(i))^2+(ze(j)-
z(i))^2);
    Bxse(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(xe(j) -
x(i))*Lse(i,j)/(Rse(i,j)^5)-mx(i)/(Rse(i,j)^3));
    Bxse(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(ye(j) -
y(i))*Lse(i,j)/(Rse(i,j)^5)-my(i)/(Rse(i,j)^3));
    Bzse(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(ze(j) -
z(i))*Lse(i,j)/(Rse(i,j)^5)-mz(i)/(Rse(i,j)^3));
end
end

TBxse = zeros(1,Nm);
TByse = zeros(1,Nm);
TBzse = zeros(1,Nm);

for j = 1:Nm
for i=1:Ns
    TBxse(j) = TBxse(j) + Bxse(i,j);
    TByse(j) = TByse(j) + Bxse(i,j);
    TBzse(j) = TBzse(j) + Bzse(i,j);
end
end

```

```

        TBzse(j) = TBzse(j) + Bzse(i,j);
end
end

TBse = [TBxse;TByse;TBzse];

figure;
subplot(2,2,1);plot(TBxse,'k');hold on;plot(TBxde,'r. ');
title('Bsx(black)vs Bdx(red)');xlabel('Estimation
points');ylabel('Magnitude');
subplot(2,2,2);plot(TByse,'k');hold on;plot(TByde,'r. ');
title('Bsy(black)vs Bdy(red)');xlabel('Estimation
points');ylabel('Magnitude');
subplot(2,2,3);plot(TBzse,'k');hold on;plot(TBzde,'r. ');
title('Bsz(black)vs Bdz(red)');xlabel('Estimation
points');ylabel('Magnitude');
print('figure3 ','-djpeg');
pause;

```

### 5.1.2. Code

```

%%On the Convergence Of Magnetic Dipoles In MDM%%
clear all;close all;clc;
Nm=36;      %Number of Measurements
Ns=1;      %Number of Dipole Source
Np=4;      %Number of Probes
Nd=36;     %Number of New Dipoles
rc=10;     %Radius of Measurement Locus
rd=5;      %Radius of Dipole source Locus
rdnew=4;   %Radius of New Dipoles Locus
re=25;     %Radius of Estimation Locus
u=4*pi*10^(-7);
%Magnetic Moments of Sources
mx=zeros(1, Ns);
my=zeros(1, Ns);
mz=zeros(1, Ns);

mx(1)=500;
my(1)=500;
mz(1)=500;

%%
%Measurement Points
%C surface
for i = 1:Np
for j = 1:Nm
    xc(i,j) = rc*cos((j-1)*pi/(0.5*Nm))*sin((i-1)*pi/(Np));
    yc(i,j) = rc*sin((j-1)*pi/(0.5*Nm))*sin((i-1)*pi/(Np));
    zc(i,j) = rc*cos((i-1)*pi/(Np));
end
end
xc=xc';xc=xc(:);
yc=yc';yc=yc(:);
zc=zc';zc=zc(:);

```

```

%Estimation Points
%E surface
for i = 1:Np
for j = 1:Nm
    xe(i,j) = re*cos((j-1)*pi/(0.5*Nm))*sin((i-1)*pi/(Np));
    ye(i,j) = re*sin((j-1)*pi/(0.5*Nm))*sin((i-1)*pi/(Np));
    ze(i,j) = re*cos((i-1)*pi/(Np));
end
end
xe=xe';xe=xe(:);
ye=ye';ye=ye(:);
ze=ze';ze=ze(:);

%Source Dipole Locus
%S surface
for i = 1:Ns
    x(i) = rd*cos((i-1)*pi/(0.5*Ns));
    y(i) = rd*sin((i-1)*pi/(0.5*Ns));
    z(i) = 0;
end

%Dipole Locus Change
%D surface
for i = 1:Nd
    xnew(i) = rdnew*cos((i-1)*pi/(0.5*Nd));
    ynew(i) = rdnew*sin((i-1)*pi/(0.5*Nd));
    znew(i) = 0;
end
%%
%Magnetic field measurements
for i = 1:Ns
for j = 1:Np*Nm
    L(i,j)=(mx(i)*(xc(j)-x(i)))+(my(i)*(yc(j)-
y(i)))+(mz(i)*(zc(j)-z(i)));
    r(i,j) = sqrt((xc(j)-x(i))^2+(yc(j)-y(i))^2+(zc(j)-z(i))^2);
    Bx(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(xc(j) - x(i))*L(i,j)/(r(i,j)^5)-
mx(i)/(r(i,j)^3));
    By(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(yc(j) - y(i))*L(i,j)/(r(i,j)^5)-
my(i)/(r(i,j)^3));
    Bz(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(zc(j) - z(i))*L(i,j)/(r(i,j)^5)-
mz(i)/(r(i,j)^3));
end
end

TBx = zeros(1,Np*Nm);
TBy = zeros(1,Np*Nm);
TBz = zeros(1,Np*Nm);

for j = 1:Np*Nm
for i=1:Ns
    TBx(j) = TBx(j) + Bx(i,j);
    TBy(j) = TBy(j) + By(i,j);
    TBz(j) = TBz(j) + Bz(i,j);
end
end

TB = [TBx;TBy;TBz];

%%

```



```

%New magnetic moments from Total Magnetic field

%New Distances
rnew=zeros(Np*Nm,Nd);
for i=1:Np*Nm
for j=1:Nd
    rnew(i,j) = sqrt((xc(i)-xnew(j))^2+(yc(i)-ynew(j))^2+(zc(i)-
znew(j))^2);
end
end

%Transfer matrix G
Xx=zeros(Np*Nm,Nd);
Yx=zeros(Np*Nm,Nd);
Zx=zeros(Np*Nm,Nd);
Yy=zeros(Np*Nm,Nd);
Zy=zeros(Np*Nm,Nd);
Zz=zeros(Np*Nm,Nd);
for i=1:Np*Nm
for j=1:Nd
    Xx(i,j)=(3*u/(4*pi))*((xc(i)-xnew(j))^2)/(rnew(i,j)^5)-
(u/(4*pi))/(rnew(i,j)^3);
    Yy(i,j)=(3*u/(4*pi))*((yc(i)-ynew(j))^2)/(rnew(i,j)^5)-
(u/(4*pi))/(rnew(i,j)^3);
    Zz(i,j)=(3*u/(4*pi))*((zc(i)-znew(j))^2)/(rnew(i,j)^5)-
(u/(4*pi))/(rnew(i,j)^3);
    Yx(i,j)=(3*u/(4*pi))*((xc(i)-xnew(j))*(yc(i)-
ynew(j)))/(rnew(i,j)^5);
    Zx(i,j)=(3*u/(4*pi))*((xc(i)-xnew(j))*(zc(i)-
znew(j)))/(rnew(i,j)^5);
    Zy(i,j)=(3*u/(4*pi))*((yc(i)-ynew(j))*(zc(i)-
znew(j)))/(rnew(i,j)^5);
end
end
G=[Xx Yx Zx;
    Yx Yy Zy;
    Zx Zy Zz];
%TBxpr=mx*Xx+my*Yx+mz*Zx;
%TBypr=mx*Yx+my*Yy+mz*Zy;
%TBzpr=mx*Zx+my*Zy+mz*Zz;

%Solve for New Magnetic Moments
TBth=[TBx TBy TBz];
TBth=TBth';
Mnew=linsolve(G,TBth);
%Mnew=mldivide(G,TBth);
C=cond(G);

%Magnetic Moments
MX=Mnew(1:Nd);
MY=Mnew((Nd+1):2*Nd);
MZ=Mnew(((2*Nd)+1):3*Nd);

%Diagrams showing the new magnetic Moments
figure;
subplot(2,2,1);stem(MX);
title('Magnetic moments x');xlabel('Dipoles');ylabel('Magnetic
Moments');
subplot(2,2,2);stem(MY);

```

```

title('Magnetic moments y');xlabel('Dipoles');ylabel('Magnetic
Moments');
subplot(2,2,3);stem(MZ);
title('Magnetic moments z');xlabel('Dipoles');ylabel('Magnetic
Moments');
subplot(2,2,4);stem(C);
title('Condition number');
print('figure1','-djpeg');
pause;
%%
%Field from new magnetic moments on collocation points
TBpr=G*Mnew;
TBprx=TBpr(1:Np*Nm);
TBpry=TBpr(Np*Nm+1:2*Np*Nm);
TBprz=TBpr(2*Np*Nm+1:3*Np*Nm);

figure;
subplot(2,2,1);plot(TBx,'k');hold on;plot(TBprx,'r. ');
title('Bm vs Bcalc (x axis)');xlabel('Observation
points');ylabel('Magnitude');
subplot(2,2,2);plot(TBy,'k');hold on;plot(TBpry,'r. ');
title('Bm vs Bcalc (y axis)');xlabel('Observation
points');ylabel('Magnitude');
subplot(2,2,3);plot(TBz,'k');hold on;plot(TBprz,'r. ');
title('Bm vs Bcalc (z axis)');xlabel('Observation
points');ylabel('Magnitude');
print('figure2 ','-djpeg');
pause;

%%
%Far field estimation and comparison

%estimated field from new dipoles
for i = 1:Nd
for j = 1:Np*Nm
Lde(i,j)=(MX(i)*(xe(j)-xnew(i)))+(MY(i)*(ye(j)-
ynew(i)))+(MZ(i)*(ze(j)-znew(i)));
Rde(i,j) = sqrt((xe(j)-xnew(i))^2+(ye(j)-ynew(i))^2+(ze(j)-
znew(i))^2);
Bxde(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(xe(j) -
xnew(i))*Lde(i,j)/(Rde(i,j)^5)-MX(i)/(Rde(i,j)^3));
Byde(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(ye(j) -
ynew(i))*Lde(i,j)/(Rde(i,j)^5)-MY(i)/(Rde(i,j)^3));
Bzde(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(ze(j) -
znew(i))*Lde(i,j)/(Rde(i,j)^5)-MZ(i)/(Rde(i,j)^3));
end
end

TBxde = zeros(1,Np*Nm);
TByde = zeros(1,Np*Nm);
TBzde = zeros(1,Np*Nm);

for j = 1:Np*Nm
for i=1:Nd
TBxde(j) = TBxde(j) + Bxde(i,j);
TByde(j) = TByde(j) + Byde(i,j);
TBzde(j) = TBzde(j) + Bzde(i,j);
end
end

```

```

TBde = [TBxde;TByde;TBzde];

%Far field from source
for i = 1:Ns
for j = 1:Np*Nm
    Lse(i,j)=(mx(i)*(xe(j)-x(i)))+(my(i)*(ye(j)-
y(i)))+(mz(i)*(ze(j)-z(i)));
    Rse(i,j) = sqrt((xe(j)-x(i))^2+(ye(j)-y(i))^2+(ze(j)-
z(i))^2);
    Bxse(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(xe(j) -
x(i))*Lse(i,j)/(Rse(i,j)^5)-mx(i)/(Rse(i,j)^3));
    Byse(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(ye(j) -
y(i))*Lse(i,j)/(Rse(i,j)^5)-my(i)/(Rse(i,j)^3));
    Bzse(i,j) = (u/(4*pi))*(3*(ze(j) -
z(i))*Lse(i,j)/(Rse(i,j)^5)-mz(i)/(Rse(i,j)^3));
end
end

TBxse = zeros(1,Np*Nm);
TByse = zeros(1,Np*Nm);
TBzse = zeros(1,Np*Nm);

for j = 1:Np*Nm
for i=1:Ns
    TBxse(j) = TBxse(j) + Bxse(i,j);
    TByse(j) = TByse(j) + Byse(i,j);
    TBzse(j) = TBzse(j) + Bzse(i,j);
end
end

TBse = [TBxse;TByse;TBzse];

figure;
subplot(2,2,1);plot(TBxse,'k');hold on;plot(TBxde,'r.');
title('Bsx vs Bdx');xlabel('Estimation points');ylabel('Magnitude');
subplot(2,2,2);plot(TByse,'k');hold on;plot(TByde,'r.');
title('Bsy vs Bdy');xlabel('Estimation points');ylabel('Magnitude');
subplot(2,2,3);plot(TBzse,'k');hold on;plot(TBzde,'r.');
title('Bsz vs Bdz');xlabel('Estimation points');ylabel('Magnitude');
print('figure3 ','-djpeg');
pause;

```



## Βιβλιογραφία

1. Dimitra I. Kaklamani, Hristos T. Anastassiou  
*Aspects of the Method of Auxiliary Sources (MAS) in Computational Electromagnetics*  
IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 44, No. 3, June 2002, pp. 48-64
2. Dimitra I. Kaklamani, Hristos T. Anastassiou, Dimitrios G. Lymperopoulos  
*Accuracy Analysis and Optimization of the Method of Auxiliary Sources (MAS) for Scattering by a Circular Cylinder*  
IEEE transactions on Antennas and Propagation, Vol. 52, No. 6, June 2004, pp. 1541-1547
3. George Fikioris  
*On Two Types of Convergence in the Method of Auxiliary Sources*  
IEEE transactions on Antennas and Propagation, Vol. 54, No. 7, July 2006, pp. 2022-2033
4. George Fikioris, Ioannis Psarros  
*On the Phenomenon of Oscillations in the Method of Auxiliary Sources*  
IEEE transactions on Antennas and Propagation, Vol. 55, No. 5, May 2007, pp. 1293-1304
5. George Fikioris, Ioannis Psarros  
*Convergence and Oscillations in the Method of Auxiliary Sources*
6. C. A. Valagiannopoulos, N. L. Tsitsas, G. Fikioris  
*Convergence analysis and oscillations in the method of fictitious sources applied to dielectric scattering problems*  
Valagiannopoulos et al., Vol 29. No. 1 / January 2012/ J.Opt. Soc. Am. A, pp.1-10
7. Panagiotis Andrianeisis, George Fikioris  
*Superdirective-Type Near Fields in the Method of Auxiliary Sources*  
IEEE transactions on Antennas and Propagation, Vol. 60, No. 6, June 2012, pp. 3056-3060
8. G. Fikioris, N.L. Tsitsas, I. Psarros  
*On the nature of Oscillations in Discretizations of the Extended Integral Equation*  
IEEE transactions on Antennas and Propagation, Vol. 59, No. 4, April 2011, pp. 1415-1419
9. G. Fikioris, N.L. Tsitsas, I. Psarros  
*Differences between Extended-Integral-Equation and Method-of-Auxiliary-Sources Solutions of a Simple Scattering Problem*  
2010 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory, pp. 966-969
10. G. Fikioris, Odysseas N. Bakas, Grigorios. P. Zouros  
*Study of Convergence, Divergence, and Oscillations in Method-of-Auxiliary-Sources (MAS) and Extended-Integral-Equation (EIE) Solutions to a Simple Cavity Problem*  
IEEE transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 61, No. 8, August 2013, pp. 2773-2782
11. Panagiotis J. Papakanellos, George Fikioris, Asimina Michalopoulou  
*On the Oscillation Appearing in Numerical Solutions of Solvable and Nonsolvable Integral Equations for Thin-Wire Antennas*

- IEEE transactions on Antennas and Propagation, Vol. 58, No. 5, May 2010, pp. 1635-1644
12. N.L. Tsitsas, G. Palaiopoulos, G. Fikioris  
*The Method of auxiliary sources applied to three-dimensional Acoustic Scattering: Convergence Issues and Inherent Oscillations*  
Acta Acustica united with Acustica, Vol. 102 (2016) 322-333
  13. I. Abramowitz and I. A. Stegun, Eds., *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, Vol. 55.)*. Washington, D.C.: U. S. Government Printing Office, 1972.
  14. Rainer Kress  
*Linear Integral Equations*
  15. Roumeliotis, I. Tsalamegas  
*Ηλεκτρομαγνητικά πεδία, Τόμος Β'*
  16. John L. Volakis, Kubilay Sertel  
*Integral Equation Methods for Electromagnetics*
  17. C. A. Balanis  
*Antenna Theory, Analysis and Design*
  18. S. M. Mikki, Y. M. M. Antar  
*Near-Field analysis of electromagnetic interactions in antenna arrays through equivalent dipole models*  
IEEE transactions on Antennas and Propagation, Vol. 60, No. 3, March 2012, pp. 1381-1389
  19. S.M. Mikki, Ahmed A. Kishk  
*Theory and applications of Infinitesimal Dipole Models for Computational Electromagnetics*  
IEEE transactions on Antennas and Propagation, Vol. 55, No. 5, May 2007
  20. H. Endo, T. Takagi, Y. Saito  
*A new current dipole model satisfying current continuity for inverse magnetic field source problems*  
IEEE transactions on Magnetics, Vol. 41, No. 5, May 2005, pp. 1748-1751
  21. Song, H., J. Chen, D. Zhou, D. Hou, J. Lin  
*An equivalent model of magnetic dipole for the slot coupling of shielding cavity*
  22. K. Mehlem  
*Multiple Magnetic Dipole Modeling and Field Prediction Of Satellites*  
IEEE transactions on Magnetics, Vol. Mag-14, No. 5, September 1978, pp. 1064-1071
  23. K. Mehlem, A. Wiegand  
*Magnetostatic Cleanliness of Spacecraft*  
2010 Asia-Pacific International Symposium on Electromagnetic Compatibility, April 12-16, 2010, Beijing, China, pp. 936-944
  24. Junge, F. Marliani  
*Prediction of DC Magnetic Fields for Magnetic Cleanliness on Spacecraft*
  25. N. C. Kapsalis, S. D. J. Kakarakis, C. N. Kapsalis  
*Prediction of multiple magnetic dipole model parameters from near field*

*measurements employing stochastic algorithms*

Progress In Electromagnetics Research Letter, Vol. 34, 2012, pp. 111-122

26. S. D. Kakarakis

*Ανάπτυξη Μεθόδων Μέτρησης και Ανάπτυξη Αλγορίθμων Μοντελοποίησης και Ανάλυσης Μαγνητικής Συμπεριφοράς Συσκευών για Επίτευξη Μαγνητικής Καθαρότητας σε Διαστημικές Αποστολές*

Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ ΣΗΜΜΥ, Αθήνα 2016

27. E. Carrubba, A. Junge, F. Marliani, A. Monorchio

*Particle Swarm Optimization for multiple dipole modeling of space equipment*

IEEE transactions on Magnetics, Vol. 50, No. 12, December 2014

28. T. Nara, S. Suzuki, S. Ando

*A closed-form formula for magnetic dipole localization by measurement of its magnetic field and spatial gradients*

IEEE transactions on Magnetics, Vol. 42, No. 10, October 2006, pp. 3291-329