

**ΕΘΝΙΚΟ
ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

&

ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΚΑΙ

*ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ SPLINES ΜΙΑΣ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ*

ΕΥΜΟΡΦΙΑ Ι. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΘΗΝΑ,

ΜΑΡΤΙΟΣ 2017

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΟΚΚΙΝΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τις παρακάτω ευχαριστίες μου. Πρώτα από όλους, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Βασίλειο Κοκκίνη, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, για την εμπιστοσύνη και τη καθοδήγηση που μου έδειξε καθ' όλη της διάρκειας της διπλωματικής εργασίας .

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την αμέριστη συμπαράσταση τους, οι οποίοι στήριξαν τις σπουδές μου όλα αυτά τα χρόνια.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	3
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	5
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

1.1 Εισαγωγή.....	9
1.2 Παρεμβολή τύπου Lagrange.....	9
1.2.1 Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας.....	9
1.2.2 Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής.....	11
1.2.3 Παράσταση και υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής.....	14
α) Παράσταση σε μορφή Lagrange.....	14
β) Παράσταση σε μορφή Newton.....	16
Παράσταση σε μορφή Newton με διαιρεμένες διαφορές.....	18
Ιδιότητες διαιρεμένων διαφορών.....	20
Το σφάλμα παρεμβολής με διαιρεμένες διαφορές.....	21
γ) Βαρυκεντρική μορφή Lagrange.....	22
1.2.4 Παρεμβολή σε ένα σημείο κατά Aitken-Neville.....	27
1.2.5 Βέλτιστα σημεία παρεμβολής – Πολυώνυμα Chebyshev.....	28
1.2.6 Συμπεριφορά του πολυωνύμου παρεμβολής για μεγάλο n	32
1.3 Παρεμβολή Hermite.....	43
Μορφή Newton με διαιρεμένες διαφορές σε επαναλαμβανόμενα σημεία.....	46

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ SPLINES

2.1 Εισαγωγή.....	51
2.2 Γενικά στοιχεία για τις splines.....	52
2.3 Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις.....	56
Η παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις είναι σχεδόν βέλτιστη.....	58
Η βάση αποκομμένης δύναμης για τον $S_1(\Delta)$	59

2.4 Παρεμβολή με κυβικές splines.....	60
Κατασκευή κυβικών splines παρεμβολής συναρτήσεων των τιμών $d_i = s''(x_i)$	61
Κατασκευή κυβικών splines παρεμβολής συναρτήσεων των τιμών $m_i = s'(x_i)$	67
Ελάχιστες ιδιότητες.....	69
Σφάλμα παρεμβολής με κυβικές splines.....	71
2.5 B-splines.....	72
Υπολογισμός και παραγωγή των splines.....	85
2.6 Τμηματικά κυβικές συναρτήσεις Hermite.....	90
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	95
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	97
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	103
ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	103

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με τον όρο παρεμβολή εννοούμε ένα συγκεκριμένο τρόπο προσέγγισης συναρτήσεων με άλλες πιο απλές συναρτήσεις (συνήθως πολυώνυμα). Το κύριο πρόβλημα της παρεμβολής μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Δίνοντας ένα σύνολο τιμών $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ που αντιστοιχούν στα σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ να βρεθεί μια άλλη συνάρτηση, για παράδειγμα $p(x)$, που να έχει τις ίδιες τιμές με την $f(x)$, στα σημεία x_1, x_2, \dots, x_n . Γνωρίζοντας τώρα τη συνάρτηση $p(x)$ θα μπορούμε να διαβάζουμε την $f(x)$ σε σημεία ενδιάμεσα των σημείων παρεμβολής x_1, x_2, \dots, x_n .

Πιο συγκεκριμένα, το απλούστερο πρόβλημα παρεμβολής, η παρεμβολή τύπου Lagrange, είναι να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση p από ένα ορισμένο σύνολο συναρτήσεων, η οποία να προσδιορίζεται μόνο από τις τιμές $f(x_i)$ και η οποία να παρεμβάλλεται στα σημεία $(x_i, f(x_i))$, δηλαδή πληροί τις συνθήκες $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Αν η παρεμβάλλουσα p υπολογίζεται εύκολα, τότε η τιμή της $p(x)$ για $x \neq x_i$ μπορεί να θεωρηθεί ως η ζητούμενη προσέγγιση της $f(x)$. Υπάρχουν βέβαια και άλλα είδη παρεμβολής, μεταξύ αυτών η παρεμβολή τύπου Hermite, που θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Στην παρούσα εργασία προσεγγίζονται οι συναρτήσεις με παρεμβολή με πολυώνυμα και με τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις. Ειδικότερα, τα πολυώνυμα χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο για την προσέγγιση συναρτήσεων, διότι οι τιμές τους μπορούν να υπολογισθούν εύκολα με ένα πεπερασμένο πλήθος προσθαφαιρέσεων και πολλαπλασιασμών, παραγωγίζονται και ολοκληρώνονται εύκολα, και τέλος έχουν καλές προσεγγιστικές ιδιότητες, σύμφωνα με το θεώρημα προσέγγισης Weierstrass. Το παραπάνω θεώρημα εξασφαλίζει ότι δοθέντων μιας συνάρτησης $f \in C[\alpha, b]$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο π τέτοιο ώστε

$$\max_{\alpha \leq x \leq b} |f(x) - \pi(x)| < \varepsilon.$$

Η παρεμβολή με πολυώνυμα έχει πολλές άλλες εφαρμογές όπως στην κατασκευή τύπων αριθμητικής ολοκλήρωσης και διαφορίσης και στην κατασκευή μεθόδων για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Επίσης η μορφή με την οποία γράφουμε ένα πολυώνυμο είναι σημαντική. Οι πράξεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό της τιμής ενός πολυωνύμου και η ακρίβεια των αριθμητικών υπολογισμών εξαρτώνται από τον τρόπο γραφής του πολυωνύμου.

Η παρεμβολή όμως με πολυώνυμα μεγάλου βαθμού αποτυγχάνει και για το λόγο αυτό καταφεύγουμε σε πιο ευέλικτες μεθόδους παρεμβολής με τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις, γνωστές και ως splines, για να έχουμε μεγάλη ακρίβεια στην προσέγγισή μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύεται κατ'αρχάς ότι υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n , το οποίο παρεμβάλλεται σε $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία, δηλαδή το γράφημα του διέρχεται από αυτά τα σημεία. Στη συνέχεια θα μελετηθούν δυο παραστάσεις του πολυωνύμου παρεμβολής, η παράσταση σε μορφή Lagrange η οποία είναι χρήσιμη στη θεωρία και η παράσταση σε μορφή Newton χρήσιμη στους υπολογισμούς. Για την τιμή του πολυωνύμου παρεμβολής σε ένα σημείο, χωρίς τον υπολογισμό των συντελεστών του, χρήσιμη είναι η μέθοδος Aitken-Neville. Στη συνέχεια θα μελετηθεί η συμπεριφορά των πολυωνύμων παρεμβολής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα $[a, b]$, καθώς το πλήθος των σημείων παρεμβολής αυξάνει. Μερικές φορές επιδιώκεται η παρεμβάλλουσα συνάρτηση να έχει στα σημεία παρεμβολής τις ίδιες παραγώγους μέχρι μια ορισμένη τάξη με την f , όπου η τάξη των παραγώγων μπορεί να διαφέρει από σημείο σε σημείο. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για παρεμβολή τύπου Hermite.

1.2 Παρεμβολή τύπου Lagrange

1.2.1 Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας

Θεώρημα 1.1

Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ σημεία ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n , συμβολίζουμε $p \in P_n$, έτσι ώστε

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (1.1)$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$, με άγνωστα $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Οι σχέσεις (1.1) γράφονται ως γραμμικό σύστημα $n+1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους, δηλαδή

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2 + \dots + \alpha_n x_i^n = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να τις γράψουμε στη μορφή

$$X\alpha = y$$

όπου $X = [x_i^j]$ με $i, j = 0, \dots, n$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)^T$, $y = [y_0, \dots, y_n]^T$.

Το σύστημα $X\alpha = y$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $X\beta = 0$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη λύση $\beta = 0$. Έστω $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_n)$ μια λύση του ομογενούς συστήματος $X\beta = 0$. Χρησιμοποιώντας αυτό το β ορίζουμε το πολυώνυμο

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n.$$

Από το σύστημα $X\beta = 0$ έχουμε ότι

$$p(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n$$

δηλαδή το πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n έχει $n+1$ διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες, συνεπώς μηδενίζεται ταυτοτικά. Δηλαδή $\beta_0 = \dots = \beta_n = 0$.

Άρα το πρόβλημα λύνεται μοναδικά. ■

Ορισμός 1.1

Το πολυώνυμο $p \in P_n$ η ύπαρξη και η μοναδικότητα του οποίου εξασφαλίζεται από το θεώρημα 1.1 είναι το πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού το πολύ n για τα δεδομένα (x_i, y_i) , $i=0, \dots, n$ με $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$.

Συνήθως οι πραγματικοί αριθμοί y_i , $i=0, \dots, n$ δίνονται σαν τιμές μιας συνάρτησης f στα σημεία x_i , $i=0, \dots, n$ του πεδίου ορισμού της f . Στην περίπτωση αυτή το $p \in P_n$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_i .

Να σημειώσουμε ότι υπάρχουν άπειρα το πλήθος πολυώνυμα βαθμού $m > n$, τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις παρεμβολής. Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.1

Ένα πολυώνυμο $\tilde{p} \in P_m$, $m > n$ ικανοποιεί τις συνθήκες παρεμβολής $\tilde{p}(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, αν και μόνο αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\tilde{p}(x) = p(x) + \Phi(x)q(x) \text{ για κάποιο } q \in P_{m-(n+1)} \quad (1.2)$$

όπου $p \in P_n$ το μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής και $\Phi(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$.

Απόδειξη

(\Rightarrow) Έστω ότι η (1.2) ισχύει. Τότε για $i = 0, \dots, n$ έχουμε

$$\tilde{p}(x_i) = p(x_i) + \Phi(x_i)q(x_i) = p(x_i), \text{ αφού εκ κατασκευής } \Phi(x_i) = 0, i = 0, \dots, n.$$

(\Leftarrow) Έστω $\tilde{p}(x)$ πολυώνυμο βαθμού $m > n$ το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες παρεμβολής $\tilde{p}(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$. Τότε η διαφορά $\tilde{p} - p$ είναι βαθμού το πολύ m και έχει ρίζες στα σημεία $x = x_i$, $i = 0, \dots, n$, τουλάχιστον. Άρα μπορούμε να γράψουμε $\tilde{p}(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)q(x)$ όπου $q(x) \in P_{m-(n+1)}$. Επειδή όμως εξ ορισμού $\Phi(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$, η προηγούμενη ισότητα γράφεται ως $\tilde{p}(x) = p(x) + \Phi(x)q(x)$.



1.2.2 Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μια παράσταση του σφάλματος παρεμβολής $f(x) - p(x)$ για ομαλές συναρτήσεις f .

Θεώρημα 1.2

Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}[\alpha, b]$, $x_0, \dots, x_n \in [\alpha, b]$ σημεία ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $p \in P_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_0, \dots, x_n . Τότε ισχύει

$$\forall x \in [\alpha, b] \exists \xi \in (\alpha, b) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (1.3)$$

Απόδειξη

Για $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ η σχέση (1.3) ισχύει προφανώς. Έστω ότι $x \in [\alpha, b]$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$. Θέτουμε

$$\Phi(t) := \prod_{i=0}^n (t - x_i),$$

και ορίζουμε την βοηθητική συνάρτηση

$$\varphi(t) := f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \Phi(t), \quad t \in [\alpha, b].$$

Προφανώς $\varphi \in C^{n+1}[\alpha, b]$. Επιλέον έχουμε ότι

$$\varphi(x_i) = f(x_i) - p(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

και

$$\varphi(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \Phi(x) = 0,$$

δηλαδή η φ έχει στο διάστημα $[\alpha, b]$ τουλάχιστον $n + 2$ διαφορετικές ρίζες. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, η φ' έχει στο (α, b) τουλάχιστον $n + 1$ ρίζες, η φ'' τουλάχιστον n ρίζες κ.λ.π. και τέλος η $\varphi^{(n+1)}$ τουλάχιστον μία ρίζα, έστω $\xi \in (\alpha, b)$. Προφανώς $p^{(n+1)}(t) = 0$ και $\Phi^{(n+1)}(t) = (n + 1)!$, αφού $\Phi(t) = t^{n+1} + q(t)$ με $q \in P_n$, συνεπώς

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} (n + 1)!, \quad t \in [\alpha, b].$$

Δεδομένου ότι $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$ από την παραπάνω σχέση για $t = \xi$ έχουμε ότι

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} (n + 1)!$$

από την οποία έπεται η σχέση (1.3). ■

Το ενδιάμεσο σημείο ξ στην παράσταση του σφάλματος παρεμβολής (1.3) εξαρτάται από το σημείο x στο οποίο υπολογίζουμε το σφάλμα παρεμβολής και δεν είναι γενικά γνωστό. Ως εκ τούτου, υπολογίζουμε μια εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1.1

Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}[\alpha, b]$, $x_0, \dots, x_n \in [\alpha, b]$ σημεία ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $p \in P_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_0, \dots, x_n . Τότε ισχύει

$$\|f - p\|_\infty \leq \max_{\alpha \leq x \leq b} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \quad (1.4)$$

όπου

$$\|g\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας την σχέση (1.3) έχουμε

$$|f(x) - p(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)| |\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty} |\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

από την οποία προκύπτει η (1.4). ■

Παράδειγμα 1.1

i) Έστω $f \in C^2[\alpha, \beta]$ και τα σημεία $x_0 = \alpha$, $x_1 = \beta$ και $h = x_1 - x_0$. Έστω p_1 το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_0, x_1 το πολύ 1^{ου} βαθμού. Τότε

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_0)(x - x_1), \quad x_0 < \xi < x_1$$

και

$$\begin{aligned} \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x) - p_1(x)| &\leq \frac{1}{2} \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |(x - \alpha)(x - \beta)| \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f''(x)| \\ &= \frac{h^2}{8} M_2, \quad M_2 = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f''(x)| \end{aligned}$$

ii) Έστω $f \in C^3[\alpha, \beta]$ και τα σημεία $x_0 = \alpha$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$ και p_2 το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_0, x_1, x_2 το πολύ 2^{ου} βαθμού. Τότε

$$f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{6} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad x_0 < \xi < x_2$$

και

$$\max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{M_3}{9\sqrt{3}} h^3, \quad M_3 = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f'''(x)|$$

Παρατήρηση 1.1

Έστω $f \in C^{n+1}[\alpha, \beta]$, $h = \frac{b-\alpha}{n}$, $x_i = \alpha + ih$, $i = 0, \dots, n$ και $p \in P_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία x_0, \dots, x_n . Τότε

$$\max_{x \in [\alpha, \beta]} |(x - x_0) \dots (x - x_n)| \leq \frac{n!}{4} h^{n+1}.$$

Συνεπώς από την (1.4) προκύπτει η εκτίμηση

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{4(n+1)} h^{n+1}.$$

1.2.3 Παράσταση και υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής

Ο υπολογισμός των συντελεστών του πολυωνύμου παρεμβολής με την επίλυση του γραμμικού συστήματος $Xa=y$ που παριστάνουν οι συνθήκες παρεμβολής δεν είναι αποτελεσματικός στην πράξη. Ο πίνακας X καλείται πίνακας Vandermonde και είναι γνωστό ότι οι πίνακες Vandermonde είναι αντιστρέψιμοι, αν τα σημεία παρεμβολής είναι διαφορετικά μεταξύ τους, αλλά δυστυχώς είναι συχνά κακής κατάστασης.

Θα περιγράψουμε τώρα άλλους τρόπους παράστασης του πολυωνύμου παρεμβολής. Σημειώνεται ότι το πολυώνυμο παρεμβολής είναι φυσικά το ίδιο σε κάθε περίπτωση αλλά είναι γραμμένο με διαφορετικό τρόπο.

α) Παράσταση σε μορφή Lagrange

Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ σημεία ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους. Για κάθε $i = 0, \dots, n$ υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο $L_i \in P_n$ τέτοιο ώστε

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad j = 0, \dots, n$$

όπου

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Επειδή το πολυώνυμο $L_i \in P_n$ έχει n το πλήθος ρίζες x_j , $j = 0, \dots, n$, $j \neq i$ γράφεται στη μορφή

$$L_i(x) = c_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) , \quad i = 0, \dots, n$$

με $c_i \in \mathbb{R}$. Προσδιορίζοντας τη σταθερά c_i από την σχέση $L_i(x_i) = 1$ έχουμε ότι $c_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$ και συνεπώς

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} , \quad i = 0, \dots, n.$$

Τα πολυώνυμα L_0, \dots, L_n λέγονται πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία x_0, \dots, x_n .

Έστω f μια συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε τις τιμές στα σημεία x_0, \dots, x_n . Τότε το πολυώνυμο

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad (1.5)$$

είναι προφανώς βαθμού το πολύ n , αφού κάθε L_i είναι πολυώνυμο βαθμού n και ικανοποιεί τις συνθήκες παρεμβολής

$$p(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x_j) = f(x_j) , \quad j = 0, \dots, n.$$

Συνεπώς συμπίπτει με το μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_0, \dots, x_n .

Η σχέση (1.5) λέγεται παράσταση σε μορφή του Lagrange του πολυωνύμου παρεμβολής.

Παρατήρηση 1.2

Με τη μορφή Lagrange βρίσκουμε εύκολα το πολυώνυμο παρεμβολής. Ο υπολογισμός όμως της τιμής του πολυωνύμου σε κάποιο σημείο απαιτεί $n^2 + 2n$ προσθέσεις/αφαιρέσεις και $n^2 + n$ πολλαπλασιασμούς (θεωρώντας ότι οι παρονομαστές των L_i έχουν υπολογιστεί μια για πάντα και διαιρούνται στις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης) δηλαδή περισσότερες πράξεις από τους n πολλαπλασιασμούς και τις n προσθέσεις που απαιτούνται στην κανονική μορφή ενός πολυωνύμου χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Horner. Επιπρόσθετα η παρεμβολή σε ένα επιπλέον σημείο x_{n+1} δηλαδή παρεμβολή στα σημεία x_0, \dots, x_n, x_{n+1} απαιτεί τον υπολογισμό των πολυωνύμων Lagrange από την αρχή, πράγμα που καθιστά τη μορφή αυτή ασύμφορη.

β) Παράσταση σε μορφή Newton

Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ σημεία ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Γράφοντας το πολυώνυμο $p \in P_n$, για το οποίο ισχύει $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, στη μορφή

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \alpha_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \quad (1.6)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τους συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Συνεπώς έχουμε

$$p(x_0) = y_0 \Rightarrow \alpha_0 = y_0$$

$$p(x_1) = y_1 \Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$p(x_2) = y_2 \Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Αυτό που πραγματικά κάνουμε εδώ είναι η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με πίνακα συντελεστών κάτω τριγωνικό με εμπρός αντικατάσταση :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & \dots & \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση 1.3

Ένα βασικό πλεονέκτημα της μορφής Newton είναι ότι αφού υπολογιστούν οι συντελεστές α_i , η τιμή του πολυωνύμου παρεμβολής σε ένα σημείο x υπολογίζεται με $O(n)$ πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις με βάση το σχήμα Horner, εάν παρατηρήσουμε ότι η σχέση (1.6) γράφεται στη μορφή

$$p(x) = \alpha_0 + (x - x_0)(\alpha_1 + (x - x_1)(\alpha_2 + \dots + (x - x_{n-1})\alpha_n) \dots) .$$

Έτσι η τιμή του πολυωνύμου σε ένα δεδομένο σημείο x υπολογίζεται ως εξής:

Θέτουμε $s_n = \alpha_n$

Για $i = n - 1, n - 2, \dots, 0$

$$s_i = \alpha_i + (x - x_i)s_{i+1}$$

Τελικά $p(x) = s_0$.

Ένα άλλο πλεονέκτημα που έχει η μορφή Newton σε σχέση με τη μορφή Lagrange είναι ότι η πρόσθεση νέων σημείων παρεμβολής δεν αλλάζει τους συντελεστές που έχουν ήδη υπολογιστεί.

Για κάθε ακέραιο k με $0 \leq k \leq n$, έστω το πολυώνυμο q_k , το οποίο παράγεται από τους $k + 1$ όρους του πολυωνύμου p της σχέσης (1.6), δηλαδή το

$$q_k(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \alpha_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}).$$

Κάθε όρος από τους υπόλοιπους της (1.6) έχει τον παράγοντα $(x - x_0) \dots (x - x_k)$. Άρα

$$p(x) = q_k(x) + (x - x_0) \dots (x - x_k)r(x),$$

όπου r κάποιο πολυώνυμο.

Ο τελευταίος όρος μηδενίζεται στα x_0, \dots, x_k συνεπώς

$$p(x_0) = q_k(x_0) = f(x_0)$$

⋮

$$p(x_k) = q_k(x_k) = f(x_k)$$

εφόσον το πολυώνυμο (1.6) παρεμβάλλει την f στα σημεία x_0, \dots, x_n , συνεπώς και στα σημεία x_0, \dots, x_k , αφού $0 \leq k \leq n$.

Το $q_k \in P_k$ και παρεμβάλλει την f στα σημεία x_0, \dots, x_k , δηλαδή το q_k είναι το μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_0, \dots, x_k .

Έτσι, εάν έχουμε υπολογίσει το q_k που παρεμβάλλει την f στα σημεία x_0, \dots, x_k και εισάγουμε επιπρόσθετα σημεία παρεμβολής x_{k+1}, \dots, x_n θα πρέπει να υπολογίσουμε τους νέους συντελεστές $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$, ενώ οι προηγούμενοι συντελεστές $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ παραμένουν αμετάβλητοι.

Παράσταση σε μορφή Newton με διαιρεμένες διαφορές

Ένας τρόπος υπολογισμού των συντελεστών α_i της μορφής Newton είναι με τη χρήση των διαιρεμένων διαφορών.

Έστω $f \in C[\alpha, b]$, $x_0, \dots, x_n \in [\alpha, b]$, $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$. Ορίζουμε επαγωγικά ως προς i :

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, \dots, x_i] - f[x_0, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}, \quad i \geq 1.$$

Ο αριθμός $f[x_0, x_1, \dots, x_i]$ λέγεται διαιρεμένη διαφορά τάξης i της f ως προς τα σημεία x_0, x_1, \dots, x_i .

Με το συμβολισμό αυτό αποδεικνύεται στο επόμενο θεώρημα ότι οι συντελεστές α_i στην παράσταση πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Newton, δίνονται από τις σχέσεις

$$\alpha_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i], \quad i = 0, \dots, n.$$

Θεώρημα 1.3

Έστω $x_0, \dots, x_n \in [\alpha, b]$ σημεία ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, $f \in C[\alpha, b]$ και $p(x_i, \dots, x_{i+j}; \cdot) \in P_j$ το πολυώνυμο που παρεμβάλλεται στην f στα σημεία x_i, \dots, x_{i+j} . Τότε ισχύει

$$p(x_0, \dots, x_n; x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad (1.7)$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε επαγωγικά ως προς n την παραπάνω σχέση.

Για $n = 0$ η σχέση (1.7) ισχύει προφανώς.

Δεχόμαστε ότι η σχέση (1.7) ισχύει για $n - 1$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για n .

Έχουμε ότι για έναν πραγματικό αριθμό α_n ισχύει

$$p(x_0, \dots, x_n; x) = p(x_0, \dots, x_{n-1}; x) + \alpha_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

εφόσον ο βαθμός του πολυωνύμου $p(x_0, \dots, x_n; x) - p(x_0, \dots, x_{n-1}; x)$ είναι το πολύ n και τα x_0, \dots, x_{n-1} είναι ρίζες του. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\alpha_n = f[x_0, \dots, x_n].$$

Σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι

$$p(x_0, \dots, x_{n-1}; x) = f[x_0, \dots, x_{n-1}]x^{n-1} + r(x) \quad , \quad r \in P_{n-2} \quad ,$$

$$p(x_1, \dots, x_n; x) = f[x_1, \dots, x_n]x^{n-1} + s(x) \quad , \quad s \in P_{n-2} \quad .$$

Το πολυώνυμο

$$q(x) = \frac{(x - x_0)p(x_1, \dots, x_n; x) - (x - x_n)p(x_0, \dots, x_{n-1}; x)}{x_n - x_0}$$

είναι βαθμού μικρότερου ή ίσου του n και εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι

$$q(x_0) = f(x_0), \quad q(x_n) = f(x_n) \quad \text{και} \quad q(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 1, \dots, n-1 \quad ,$$

δηλαδή ότι το $q \in P_n$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής της f στα x_0, \dots, x_n .

Όμως

$$q(x) = \frac{(x - x_0)[f[x_1, \dots, x_n]x^{n-1} + s(x)] - (x - x_n)[f[x_0, \dots, x_{n-1}]x^{n-1} + r(x)]}{x_n - x_0}$$

και ο συντελεστής του x^n του $q(x)$ είναι

$$\frac{1}{x_n - x_0} [f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]]$$

Επομένως από τον τύπο των διαιρεμένων διαφορών έχουμε ότι

$$\alpha_n = f[x_0, \dots, x_n] \quad .$$



Ο προσδιορισμός του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Newton γίνεται σε δυο βήματα. Πρώτα γίνεται ο υπολογισμός των διαιρεμένων διαφορών με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα διαφορών

x	0	1	2	3	...	n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$			$f[x_0, \dots, x_n]$
		$f[x_2, x_3]$				
x_3	$f[x_3]$					
\vdots						
x_n	$f[x_n]$					

Αυτό απαιτεί $n(n+1)$ αφαιρέσεις και $\frac{n(n+1)}{2}$ διαιρέσεις.

Στη συνέχεια η πάνω διαγώνιος του πίνακα διαφορών μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Newton

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) .$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως αφού υπολογιστούν οι συντελεστές $f[x_0, \dots, x_i]$, η τιμή του πολυωνύμου σε ένα σημείο x υπολογίζεται με $O(n)$ πράξεις.

Ιδιότητες διαιρεμένων διαφορών

Πρόταση 1.2

Έστω $x_0, \dots, x_n \in [\alpha, \beta]$ σημεία ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $f \in C[\alpha, \beta]$.

- i. Αν i_0, \dots, i_n είναι μια μετάθεση των $0, \dots, n$ τότε

$$f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{i_0}, \dots, x_{i_n}]$$

Η διαιρεμένη διαφορά είναι συμμετρική συνάρτηση των σημείων x_0, \dots, x_n , δηλαδή ανεξάρτητη της σειράς τους.

ii. Αν $f(x) = \alpha g(x) + \beta h(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε

$$f[x_0, \dots, x_n] = \alpha g[x_0, \dots, x_n] + \beta h[x_0, \dots, x_n].$$

iii.
$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i)}$$

δηλαδή η διαιρεμένη διαφορά είναι γραμμικός συνδιασμός τιμών της f στα σημεία x_0, \dots, x_n .

iv. Για $f \in P_{n-1}$ ισχύει

$$f[x_0, \dots, x_n] = 0$$

v. Κανόνας του Leibniz. Εάν $f(x) = u(x)v(x)$, $x \in [\alpha, b]$ τότε

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n u[x_0, \dots, x_j]v[x_j, \dots, x_n]$$

vi. Αν $f \in C^n[\alpha, b]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\min_{0 \leq i \leq n} x_i, \max_{0 \leq i \leq n} x_i)$, τέτοιο ώστε

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Το σφάλμα παρεμβολής με διαιρεμένες διαφορές

Το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια των διαιρεμένων διαφορών. Έστω p το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_0, \dots, x_n και p^* το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_0, \dots, x_n, t όπου $t \neq x_i, \forall i$. Τότε

$$p^*(x) = p(x) + f[x_0, \dots, x_n, t](x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Θέτοντας όπου $x = t$ επειδή $p^*(t) = f(t)$ έχουμε την εξής παράσταση του σφάλματος παρεμβολής στο t :

$$f(t) - p(t) = f[x_0, \dots, x_n, t](t - x_0) \dots (t - x_n) \quad (1.8)$$

Αν η $f \in C^{n+1}[\alpha, b]$, από την ιδιότητα (vi) των διαιρεμένων διαφορών έχουμε ότι $\exists \xi \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε

$$f[x_0, \dots, x_n, t] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Από την (1.8) προκύπτει η γνωστή παράσταση σφάλματος παρεμβολής (1.3).

γ) Βαρυκεντρική μορφή Lagrange

Η βαρυκεντρική παρεμβολή είναι μια παραλλαγή της παρεμβολής του Lagrange που είναι υπολογιστικά αποτελεσματική και που η πρόσθεση επιπλέον κόμβων παρεμβολής αντιμετωπίζεται με ευκολία.

Με τη βοήθεια της συνάρτησης Φ ,

$$\Phi(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

και επειδή $\Phi'(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k)$, τα πολυώνυμα του Lagrange L_i γράφονται στη μορφή

$$L_i(x) = \begin{cases} \frac{\Phi(x)}{(x-x_i)\Phi'(x_i)} & , \quad x \neq x_i \\ 1 & , \quad x = x_i \end{cases} \quad , \quad i = 0, \dots, n$$

Εάν ορίσουμε

$$w_i = \frac{1}{\Phi'(x_i)} \quad , \quad i = 0, \dots, n$$

τότε μπορούμε να γράψουμε το p ως

$$p(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)y_i = \sum_{i=0}^n \frac{\Phi(x)w_i}{x-x_i} y_i$$

Ο όρος $\Phi(x)$ είναι ανεξάρτητος του i και για αυτό το λόγο μπορεί να βγει εκτός αθροίσματος. Συνεπώς έχουμε την 1^η βαρυκεντρική μορφή

$$p(x) = \Phi(x) \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x-x_i} y_i \quad , \quad x \neq x_i \quad (1.9)$$

Μετά τον υπολογισμό των w_i που απαιτεί $O(n^2)$ πράξεις, ο υπολογισμός της τιμής του $p(x)$ για κάθε x γίνεται με $O(n)$ πράξεις. Επίσης η παρεμβολή σε ένα επιπλέον σημείο x_{n+1} διαφορετικό από τα προηγούμενα απαιτεί τον υπολογισμό του $w_{n+1} = \frac{1}{\prod_{k=0}^n (x_{n+1}-x_k)}$ και τη διαίρεση $\frac{w_i}{x_i-x_{n+1}}$, $i = 0, \dots, n$, δηλαδή συνολικά $O(n)$ πράξεις.

Αν $f \in P_n$ τότε το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_0, \dots, x_n είναι η ίδια η f .

Έστω $f(x) = 1$, $\forall x$ μια σταθερή συνάρτηση τότε

$$p(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i) \Rightarrow p(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)$$

Επειδή $f \in P_n \Rightarrow p \equiv 1$, δηλαδή $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1 \quad \forall x$.

Συνεπώς

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^n \frac{\Phi(x)w_i}{x-x_i} = 1 \Rightarrow \Phi(x) \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x-x_i} = 1$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x-x_i}}.$$

Άρα από την $1^{\text{η}}$ βαρυκεντρική μορφή προκύπτει η $2^{\text{η}}$ (ή κύρια) βαρυκεντρική μορφή

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x-x_i} y_i}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x-x_i}}, \quad x \neq x_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1.10)$$

Κοιτάζοντας τον τύπο (1.10) δεν είναι καθόλου σαφές ότι πράγματι ορίζει ένα πολυώνυμο, αλλά γνωρίζουμε ότι το κάνει στηριζόμενοι στον τρόπο κατασκευής του.

Για την ευστάθεια των τύπων (1.9),(1.10) παραπέμπουμε στο [11].

Τα βάρη w_i εμφανίζονται στον παρονομαστή ακριβώς όπως και στον αριθμητή χωρίς τα δεδομένα y_i . Αυτό σημαίνει ότι κάθε κοινός παράγοντας σε όλα τα βάρη w_i μπορεί να διαγραφεί χωρίς να επηρεάσει την τιμή του $p(x)$ για κάποιο x . Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ελευθερία.

Για ορισμένες ειδικές ομάδες κόμβων x_i μπορεί να δοθεί σαφής τύπος για τα βάρη w_i . Τα βάρη στα ισαπέχοντα σημεία με απόσταση $h = \frac{2}{n}$ στο διάστημα $[-1,1]$ μπορούν να υπολογιστούν με τον παρακάτω τρόπο.

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \Phi'(x_i) &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k) \\ &= (x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) \\ &= ih \cdot (i-1)h \dots h \cdot (-h) \cdot \dots \cdot (-(-i+n)h) \\ &= i! \cdot h^i \cdot (-1)^{-i+n} \cdot (-i+n)! \cdot h^{-i+n} \\ &= i! \cdot h^n \cdot (-1)^{-i+n} \cdot (-i+n)! \end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{\binom{n}{i}} h^n \cdot (-1)^{-i+n}$$

Συνεπώς

$$w_i = \frac{1}{\Phi'(x_i)} = \frac{\binom{n}{i}(-1)^{i-n}}{n!h^n}.$$

Όμως από τον τύπο (1.10) βλέπουμε ότι οι ανεξάρτητοι όροι του i απλοποιούνται, οπότε καταλήγουμε στην απλή μορφή

$$w_i = \binom{n}{i} (-1)^i.$$

Για το διάστημα $[\alpha, b]$ θα πολλαπλασιαστεί ο αυθεντικός τύπος των w_i με $2^n(b - \alpha)^{-n}$, αλλά αυτός ο σταθερός παράγοντας μπορεί να διαγραφεί καταλήγοντας πάλι στον παραπάνω τύπο των w_i ανεξαρτήτως από τα α και b .

Τα σημεία Chebyshev πρώτου είδους τα οποία θα μελετηθούν παρακάτω δίνονται από τη σχέση

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

βρίσκουμε ότι

$$x_i - x_k = -2s_{i+k+1}s_{i-k}$$

όπου $s_k := \sin \frac{k}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Επομένως

$$\begin{aligned} \Phi'(x_i) &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k) \\ &= (-2)^n \frac{s_{i+1}s_{i+2} \dots s_{i+n+1}}{s_{2i+1}} s_i s_{i-1} \dots s_1 s_{-1} \dots s_{i-n} \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση $s_{j+2n+2} = -s_j$ έχουμε ότι

$$\Phi'(x_i) = \frac{(-2)^n (-1)^{n-i}}{s_{2i+1}} s_1 s_2 \dots s_{2n+1}.$$

Συνεπώς τα βάρη w_i για τα σημεία Chebyshev είναι

$$w_i = \frac{1}{\Phi'(x_i)} = \frac{s_{2i+1}}{(-2)^n (-1)^{n-i} s_1 s_2 \dots s_{2n+1}}$$

Σε αυτήν την περίπτωση αφού διαγραφούν οι ανεξάρτητοι του i παράγοντες θα βρεθεί ότι

$$w_i = (-1)^i \sin \frac{(2i+1)\pi}{2n+2}.$$

Στο διάστημα $[\alpha, b]$ τα βάρη ορίζονται από τον τύπο $w_i = \frac{1}{\Phi'(x_i)}$ αλλά πολλαπλασιάζονται με $2^n(b-\alpha)^{-n}$. Όμως, ο παράγοντας αυτός μπορεί να διαγραφεί και δεν υπάρχει ανάγκη να συμπεριληφθεί ξανά. Οπότε καταλήγουμε στον ίδιο τύπο για τα w_i .

Παράδειγμα 1.2

Για τα δεδομένα

x_i	1	2	3
$y_i = f(x_i)$	-1	3	13

να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in P_2$:

- λύνοντας το γραμμικό σύστημα των συνθηκών παρεμβολής
- σε μορφή Lagrange
- σε μορφή Newton με διαιρεμένες διαφορές
- σε βαρυκεντρική μορφή

Λύση

α) Έστω το πολυώνυμο $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$.

Από τις σχέσεις

$$p(1) = -1$$

$$p(2) = 3$$

$$p(3) = 13$$

λύνοντας το σύστημα

$$-1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

$$3 = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2$$

$$13 = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2$$

βρίσκουμε την παρακάτω λύση

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = -5, \alpha_2 = 3.$$

Επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το ακόλουθο

$$p(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

β) Γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Lagrange δίνεται από τον τύπο

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)$$
$$\Rightarrow p(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{2}(-1) + \frac{(x-1)(x-3)}{-1}3 + \frac{(x-1)(x-2)}{2}13$$
$$\Rightarrow p(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

γ) Σύμφωνα με τον πίνακα των διαιρεμένων διαφορών

x	f(x)		
1	-1		
2	3	4	3
3	13	10	

Από τον τύπο (1.7) έχουμε

$$p(x) = -1 + 4(x-1) + 3(x-1)(x-2)$$
$$\Rightarrow p(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

δ)

$$\Phi(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$
$$\Rightarrow \Phi(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\Phi'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

Από τον τύπο $w_i = \frac{1}{\Phi'(x_i)}$ προκύπτει ότι

$$w_0 = \frac{1}{2}, w_1 = -1, w_2 = \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς από τον τύπο (1.10) έχουμε

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i} y_i}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i}}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{\frac{1}{x-1}(-1) + \frac{-1}{x-2}3 + \frac{1}{x-3}13}{\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}}$$

$$\Rightarrow p(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

1.2.4 Παρεμβολή σε ένα σημείο κατά Aitken-Neville

Για τον υπολογισμό της τιμής του πολυωνύμου παρεμβολής σε ένα σημείο, που να αποφεύγει τον υπολογισμό ολόκληρου του πολυωνύμου παρεμβολής, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των Aitken-Neville. Εάν $p_1, p_2 \in P_n$ είναι τα πολυώνυμα παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα σημεία x_m, \dots, x_{m+n} και $x_{m+1}, \dots, x_{m+1+n}$ αντίστοιχα, τότε το πολυώνυμο $q \in P_{n+1}$,

$$q(x) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} p_1(x) & x_m - x \\ p_2(x) & x_{m+n+1} - x \end{vmatrix}$$

παρεμβάλλει την f στα σημεία x_m, \dots, x_{m+n+1} .

Πράγματι εύκολα βλέπουμε ότι

$$q(x_{m+j}) = f(x_{m+j}), \quad j = 0, \dots, n + 1$$

Συμβολίζουμε με $p(x_i, \dots, x_{i+j}; \xi)$ την τιμή στο σημείο ξ του πολυωνύμου παρεμβολής της f στα σημεία x_i, \dots, x_{i+j} .

Στον πίνακα των Aitken-Neville φαίνονται οι τιμές για τον υπολογισμό κάποιου όρου στο σημείο ξ

x_i	y_i	$p \in P_1$	$p \in P_2$	$p \in P_3$...
x_0	y_0				
x_1	y_1	$p(x_0, x_1; \xi)$			
x_2	y_2	$p(x_1, x_2; \xi)$	$p(x_0, x_1, x_2; \xi)$		
x_3	y_3	$p(x_2, x_3; \xi)$	$p(x_1, x_2, x_3; \xi)$	$p(x_0, x_1, x_2, x_3; \xi)$	
\vdots	\vdots				

Για τον υπολογισμό του $p(x_0, x_1; \xi)$ και του $p(x_0, x_1, x_2; \xi)$ χρησιμοποιούμε τους παρακάτω τύπους αντίστοιχα

$$p(x_0, x_1; \xi) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - \xi \\ y_1 & x_1 - \xi \end{vmatrix}$$

$$p(x_0, x_1, x_2; \xi) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} p(x_0, x_1; \xi) & x_0 - \xi \\ p(x_1, x_2; \xi) & x_2 - \xi \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα 1.3

Να προσδιοριστεί η τιμή του πολυωνύμου που παρεμβάλλει τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα στο σημείο $\xi = 1.5$

x_i	-1	0	1	2
y_i	5	1	1	11

Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους έχουμε

-1	5				
0	1	-5			
1	1	1	2.5		
2	11	6	4.75	4.375	

Συνεπώς η τιμή του πολυωνύμου στο σημείο 1.5 είναι

$$p(x_0, x_1, x_2, x_3; 1.5) = 4.375.$$

1.2.5 Βέλτιστα σημεία παρεμβολής – Πολυώνυμα Chebyshev

Όταν η συνάρτηση που θέλουμε να παρεμβάλλουμε είναι γνωστή μόνο σε κάποια σημεία, παραδείγματος χάριν από πειραματικά δεδομένα, εμείς δεν έχουμε τη δυνατότητα να διαλέξουμε τα σημεία παρεμβολής. Στις περιπτώσεις που έχουμε τη δυνατότητα να διαλέξουμε τα σημεία παρεμβολής προκύπτει το ερώτημα αν μπορούμε να τα διαλέξουμε έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα παρεμβολής. Η ελαχιστοποίηση του σφάλματος

προυποθέτει την αναλυτική γνώση της $f^{(n+1)}$ καθώς και του τρόπου εξάρτησης του ξ από το x . Επειδή οι πληροφορίες αυτές δεν είναι γενικά διαθέσιμες προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε το ανω φράγμα του σφάλματος παρεμβολής (1.4), δηλαδή αναζητούμε σημεία παρεμβολής x_0, \dots, x_n , έτσι ώστε η $\|\Phi\|_\infty$ του πολυωνύμου $\Phi(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ να ελαχιστοποιείται.

Θα δούμε ότι για να ελαχιστοποιήσουμε τη νόρμα $\|\Phi\|_\infty$ αρκεί να επιλέξουμε τα σημεία x_0, \dots, x_n σαν ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev πρώτου είδους T_{n+1} ,

$$T_{n+1}(x) := \cos((n+1)\arccos x), \quad x \in [-1,1] \quad (1.11)$$

Προφανώς από την σχέση (1.11) έχουμε $T_0(x) = 1$ και $T_1(x) = x$. Θέτοντας $\theta = \arccos x$, έχουμε ότι $T_n(x) = \cos n\theta$ και $T_{n-2}(x) = \cos [(n-2)\theta]$.

Αλλά :

$$\cos n\theta + \cos [(n-2)\theta] = 2\cos[(n-1)\theta]\cos\theta.$$

Επομένως

$$\cos (n\arccos x) + \cos [(n-2)\arccos x] = 2x\cos[(n-1)\arccos x]$$

$$T_n(x) + T_{n-2}(x) = 2xT_{n-1}(x)$$

και λύνοντας ως προς T_n έχουμε τον αναδρομικό τύπο

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2.$$

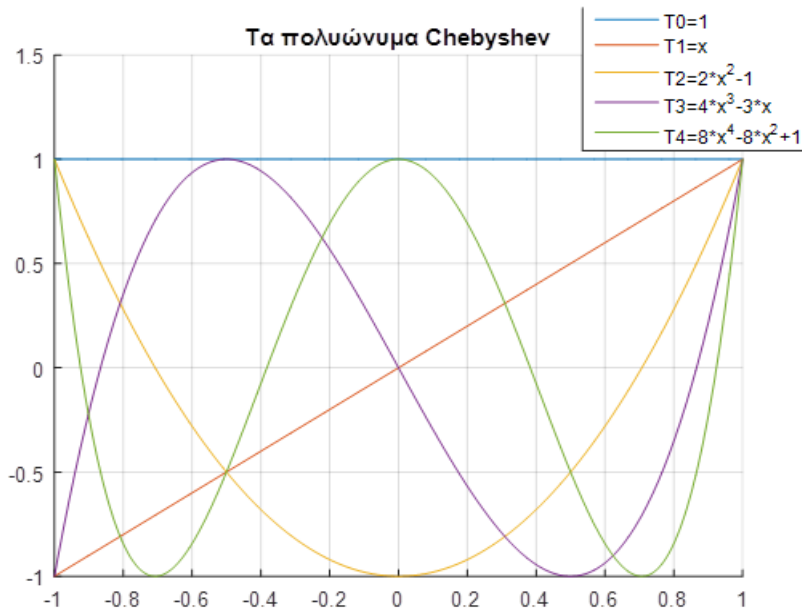
Εφαρμόζοντας αυτόν τον αναδρομικό τύπο μπορούμε να υπολογίσουμε για παράδειγμα τα πολυώνυμα Chebyshev T_2, T_3 και T_4

$$T_2(x) = 2xx - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των πολυωνύμων Chebyshev $T_i, i = 0, \dots, 4$



Σχήμα 1.1: Τα πολυώνυμα Chebyshev T_i , $i=0, \dots, 4$

Τα σημεία

$$x_i := \cos\left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2}\right), \quad i = 0, \dots, n \quad (1.12)$$

είναι ρίζες του πολυωνύμου T_{n+1} αφού

$$T_{n+1}(x_i) = \cos\left((2i+1) \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Τα σημεία αυτά ανήκουν βέβαια στο $[-1, 1]$, είναι διαφορετικά μεταξύ τους και συσσωρεύονται προς τα άκρα του διαστήματος.

Θεώρημα 1.4

Για $n \geq 1$ το T_n είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ακριβώς n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 2^{n-1} . Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$\hat{T}_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με τη μονάδα. Τα πολυώνυμα \hat{T}_n έχουν την εξής ιδιότητα:

$$\forall p \in \widehat{P}_n, p \neq \widehat{T}_n, \quad \frac{1}{2^{n-1}} = \|\widehat{T}_n\|_\infty < \|p\|_\infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

όπου \widehat{P}_n τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ n με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με τη μονάδα.

Απόδειξη

Έστω $p_n \in \widehat{P}_n$ τέτοιο ώστε $|p_n(x)| < 2^{1-n}, |x| \leq 1$.

Θέτουμε $q_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$ και έστω x_j τα ακόλουθα $n + 1$ σημεία

$$x_j = \cos \frac{j\pi}{n}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Επειδή

$$T_n\left(\cos \frac{j\pi}{n}\right) = (-1)^j$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} q_n(x_j) &= 2^{1-n}T_n(x_j) \\ &= 2^{1-n}(-1)^j \\ \Rightarrow q_n(x_j)(-1)^j &= 2^{1-n}. \end{aligned}$$

Άρα

$$(-1)^j p_n(x_j) \leq |p_n(x_j)| < 2^{1-n} = q_n(x_j)(-1)^j$$

$$(-1)^j [q_n(x_j) - p_n(x_j)] > 0, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι το πολυώνυμο $q_n - p_n$ θα έχει τουλάχιστον n διαφορετικές ρίζες στο διάστημα $[-1,1]$ το οποίο είναι άτοπο γιατί τα πολυώνυμα p_n, q_n έχουν μεγιστοβάθμιους συντελεστές ίσους με την μονάδα και η διαφορά τους είναι πολυώνυμο το πολύ βαθμού $n - 1$. ■

Από τη σχέση (1.3) το σφάλμα παρεμβολής στο διάστημα $[-1,1]$ για μια $f \in C^{n+1}[-1,1]$, δίνεται από τη σχέση

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Επειδή το $\Phi(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n + 1$ με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 για τα σημεία x_i που δίνονται από την σχέση (1.12) έχουμε ότι $\Phi(x) = \hat{T}_{n+1}(x)$. Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα 1.4 η ποσότητα $\|\Phi\|_\infty$ γίνεται ελάχιστη και μάλιστα

$$\|\Phi\|_\infty = \frac{1}{2^n}.$$

Συνεπώς, γι' αυτήν την επιλογή σημείων έχουμε από την (1.4) την εξής εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής

$$\|f - p\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}.$$

Σημείωση 1.1

Για την εύρεση των σημείων Chebyshev σε ένα διάστημα $[\alpha, b]$ εφαρμόζουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$x = \frac{b-\alpha}{2}t + \frac{\alpha+b}{2}, \quad \text{με } t \in [-1, 1]$$

Προφανώς $x \in [\alpha, b]$ και τα σημεία Chebyshev στο $[\alpha, b]$ είναι:

$$x_i = \frac{b-\alpha}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\alpha+b}{2}, \quad i = 0, \dots, n.$$

1.2.6 Συμπεριφορά του πολυωνύμου παρεμβολής για μεγάλο n

Ας εξετάσουμε τώρα τη συμπεριφορά των πολυωνύμων παρεμβολής μιας συνάρτησης f σε ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[\alpha, b]$ καθώς το πλήθος των σημείων αυξάνει. Έστω $h = \frac{b-\alpha}{n}$ και $x_i = \alpha + ih$, $i = 0, \dots, n$ και p_n το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_0, \dots, x_n . Τότε το ερώτημα που τίθεται είναι εάν $\max_{\alpha \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)|$ τείνει στο μηδέν καθώς $n \rightarrow \infty$.

Για πολλές συναρτήσεις το μέγιστο σφάλμα παρεμβολής στα σημεία x_0, \dots, x_n τείνει στο μηδέν καθώς $n \rightarrow \infty$.

Παραδείγματος χάριν εάν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \sin x$$

στο διάστημα $[0, \pi]$ και $x_i = ih, i = 0, \dots, n, h = \frac{\pi}{n}$ τότε έχουμε

$$|f^{(k)}(x)| \leq 1, \forall x \in [0, \pi] \text{ και } k = 0, \dots, n$$

και επειδή $|x - x_i| \leq \pi, \forall x \in [0, \pi]$ έχουμε ότι

$$|(x - x_0) \dots (x - x_n)| \leq \pi^{n+1}.$$

Συνεπώς από την εκτίμηση (1.4) έχουμε ότι

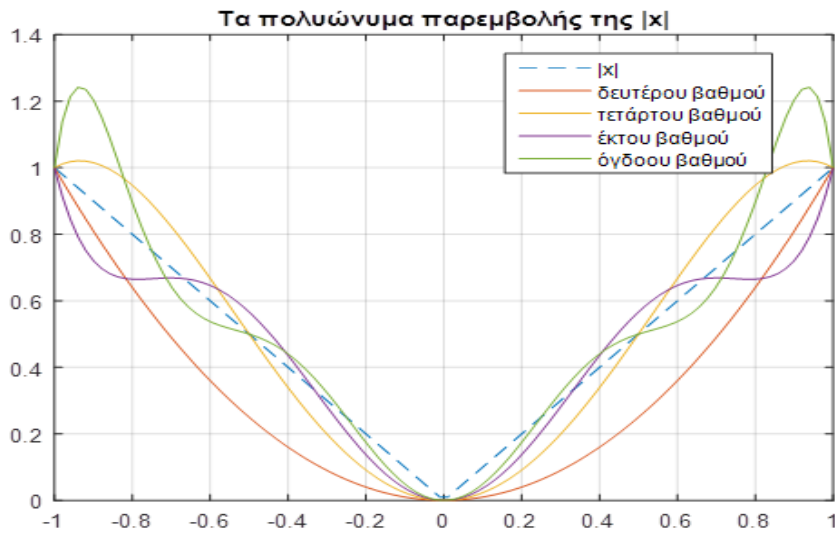
$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Άρα δεδομένης μιας συνεχούς συνάρτησης $f \in C[\alpha, b]$ είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η ακολουθία των πολυωνύμων παρεμβολής που αντιστοιχούν σε ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής, συγκλίνει στην f καθώς ο αριθμός των σημείων παρεμβολής αυξάνει. Τα ακόλουθα παραδείγματα όμως αποδεικνύουν το ανακριβές της υπόθεσης αυτής.

Παράδειγμα Bernstein

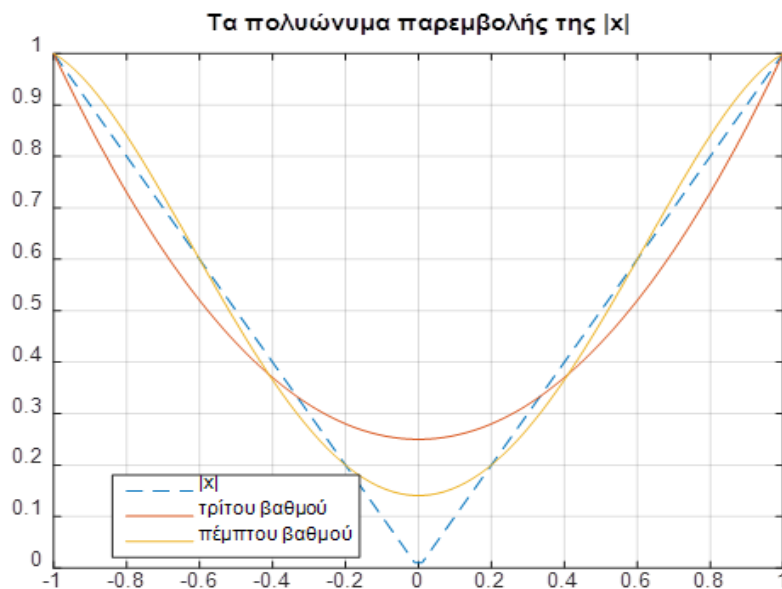
Η ακολουθία των πολυωνύμων τα οποία παρεμβάλλουν την $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, στα ισαπέχοντα σημεία $x_i = -1 + \frac{2i}{n}, i = 0, \dots, n$ αποκλίνει για όλα τα $x \in (-1, 1)$. Επειδή τα ακραία σημεία $x = \pm 1$ περιλαμβάνονται πάντα στα σημεία παρεμβολής, η πολυωνυμική ακολουθία συγκλίνει πάντα στα εν λόγω σημεία. Υπάρχουν πάντα υπακολουθίες συγκλίνουσες σε μεμονωμένα σημεία. Για παράδειγμα το σημείο $x = 0$ είναι σημείο παρεμβολής, όταν ο αριθμός των σημείων παρεμβολής είναι περιττός και συνεπώς η υπακολουθία των πολυωνύμων παρεμβολής συγκλίνει στο σημείο $x = 0$. Αντίθετα η συμπεριφορά της πλήρους ακολουθίας στο σημείο $x = 0$ δεν είναι τετριμμένη. Οι προηγούμενες παρατηρήσεις φαίνονται γραφικά στα παρακάτω σχήματα.

Τα πολυώνυμα $2^{\text{ου}}, 4^{\text{ου}}, 6^{\text{ου}}$ και $8^{\text{ου}}$ βαθμού, τα οποία παρεμβάλλουν την συνάρτηση $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$, σε ισαπέχοντα σημεία φαίνονται στην επόμενη γραφική παράσταση



Σχήμα 1.2: Η συνάρτηση $|x|$ καθώς και τα πολυώνυμα 2ου, 4ου, 6ου και 8ου βαθμού, τα οποία παρεμβάλλουν την συνάρτηση $|x|$ σε ισαπέχοντα σημεία, τα οποία περιλαμβάνουν τα σημεία $+1, -1$.

Τα πολυώνυμα 3^{ου} και 5^{ου} βαθμού, τα οποία παρεμβάλλουν την συνάρτηση $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$, σε ισαπέχοντα σημεία φαίνονται στην επόμενη γραφική παράσταση



Σχήμα 1.3: Η συνάρτηση $|x|$ καθώς και τα πολυώνυμα 3ου και 5ου βαθμού, τα οποία παρεμβάλλουν την συνάρτηση $|x|$ σε ισαπέχοντα σημεία, τα οποία περιλαμβάνουν πάντα τα σημεία $+1, -1$.

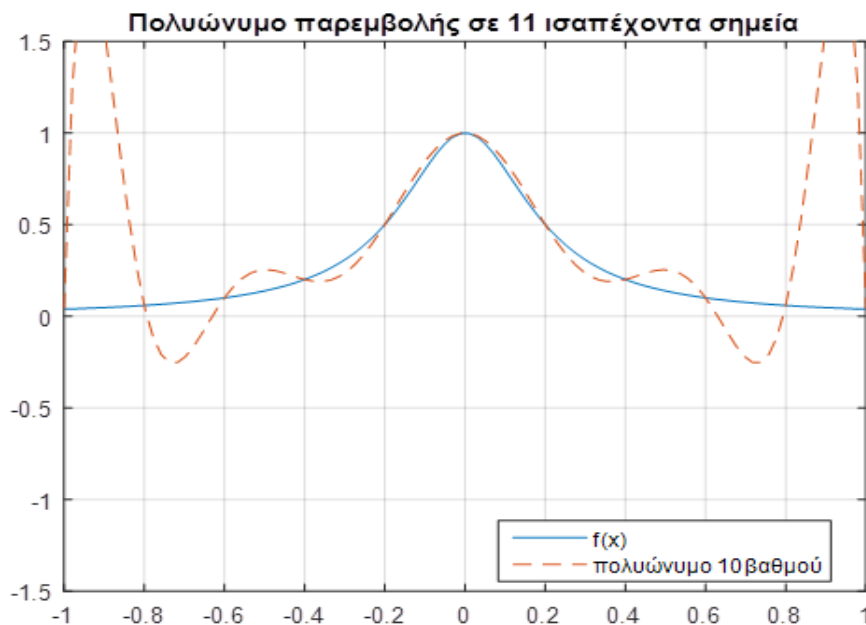
Παράδειγμα Runge

Από τον Runge δόθηκε το παράδειγμα της συνάρτησης

$$f(x) := \frac{1}{1 + 25x^2}$$

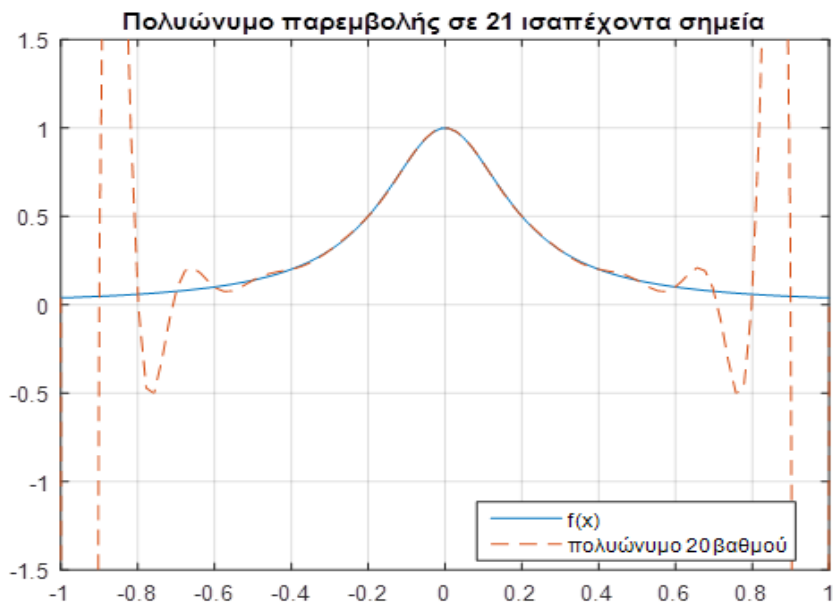
η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1,1]$ και για την οποία ισχύει ότι $\|f - p_n\|_\infty \rightarrow \infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το πολυώνυμο παρεμβολής p_n , $n = 10$, για τη συνάρτηση του Runge $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$



Σχήμα 1.4: Πολυώνυμο παρεμβολής 10ου βαθμού, για την συνάρτηση Runge. Ομοιόμορφος διαμερισμός.

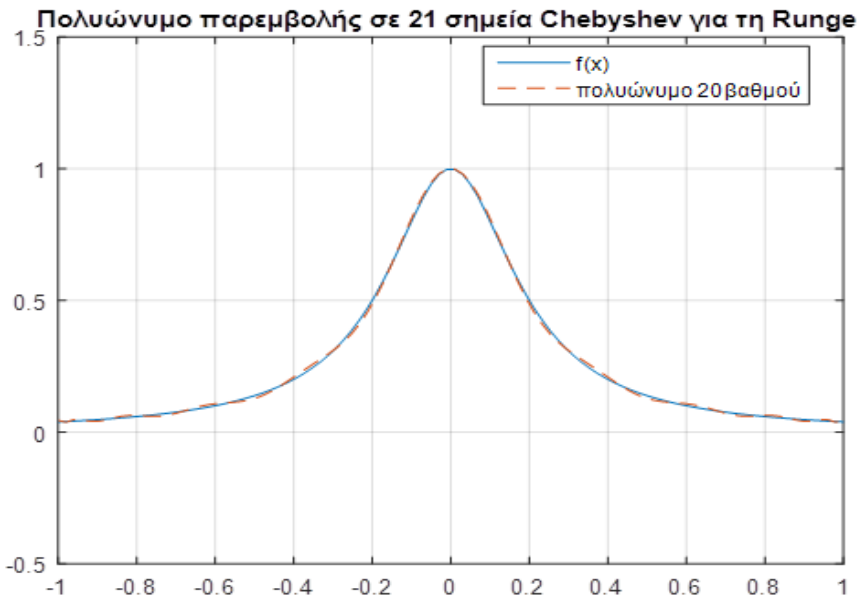
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το πολυώνυμο παρεμβολής p_n , $n = 20$, για τη συνάρτηση του Runge $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$



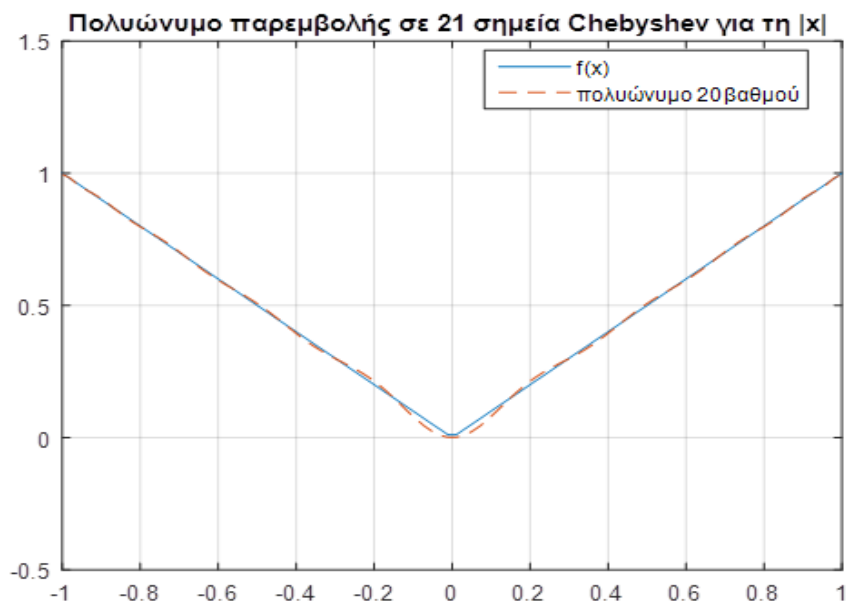
Σχήμα 1.5: Πολυώνυμο παρεμβολής 20ου βαθμού για την συνάρτηση Runge. Ομοιόμορφος διαμερισμός.

Στα σχήματα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του Runge καθώς και τη γραφική παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής για ομοιόμορφο διαμερισμό του $[-1,1]$ με $n = 10$ και $n = 20$. Παρατηρούμε ότι για μεγάλο n το πολυώνυμο παρεμβολής παρουσιάζει ταλαντώσεις μεταξύ εκείνων των σημείων της διαμέρισης που βρίσκονται κοντά στα άκρα του διαστήματος $[-1,1]$.

Βλέπουμε στα παρακάτω σχήματα ότι χρησιμοποιώντας τα σημεία Chebyshev αντί για τα ισαπέχοντα σημεία οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης τόσο του Runge όσο και του Bernstein δεν έχουν μεγάλες αποκλίσεις από τη γραφική παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής p_n για $n = 20$.



Σχήμα 1.6: Πολυώνυμο παρεμβολής 20ου βαθμού, για την συνάρτηση Runge, στα σημεία του Chebyshev.



Σχήμα 1.7: Πολυώνυμο παρεμβολής 20ου βαθμού, για την συνάρτηση Bernstein, στα σημεία του Chebyshev.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι για παρεμβολή στα σημεία Chebyshev έχουμε ότι $\forall f \in C^1[-1,1], \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_{\infty} = 0$.

Επομένως η νόρμα του τελεστή L_n ικανοποιεί

$$\|L_n\|_\infty \leq \|\lambda_n\|_\infty .$$

Θα δείξουμε ότι

$$\|L_n\|_\infty = \|\lambda_n\|_\infty \quad (1.14)$$

Επειδή η συνάρτηση λ_n είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, b]$, υπάρχει $\mu \in [\alpha, b]$ τέτοιο ώστε

$$\|\lambda_n\|_\infty = \lambda_n(\mu).$$

Έστω \bar{f} η συνάρτηση που ικανοποιεί

$$\bar{f}(x_{ni}) = \text{sgn}(L_i(\mu)) , \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{όπου } \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

και που είναι γραμμική σε κάθε διάστημα $[x_{n,i}, x_{n,i+1}]$ και σταθερή στα διαστήματα $[\alpha, x_{n0}]$ και $[x_{nn}, b]$. Τότε έχουμε ότι $\bar{f} \in C[\alpha, b]$, $\|\bar{f}\|_\infty = 1$ και

$$\begin{aligned} \|L_n\|_\infty &\geq L_n(\bar{f})(\mu) = \sum_{i=0}^n L_i(\mu) \bar{f}(x_i) = \sum_{i=0}^n \text{sgn}(L_i(\mu)) L_i(\mu) \\ &= \lambda_n(\mu) = \|\lambda_n\|_\infty . \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\|L_n\|_\infty = \|\lambda_n\|_\infty .$$

Χρησιμοποιώντας τη σταθερά Lebesgue μπορούμε να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα του σφάλματος παρεμβολής $\|f - p_n\|_\infty$ συναρτήσει της σταθεράς Lebesgue και του σφάλματος $\|f - p_n^*\|_\infty$, όπου p_n^* η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f στο P_n .

Επειδή ο τελεστής L_n είναι ταυτότητα στον P_n , δηλαδή $L_n(f) = f$, $\forall f \in P_n$ έχουμε

$$f - L_n(f) = f - p + L_n(p) - L_n(f) = f - p - L_n(f - p) , \quad \forall p \in P_n$$

οπότε από την (1.13)

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty + \|L_n(f - p)\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty + \|\lambda_n\|_\infty \|f - p\|_\infty$$

και παίρνοντας $p = p^*$:

$$\|f - p^*\|_\infty \leq \|f - L_n(f)\|_\infty \leq (1 + \|\lambda_n\|_\infty) \|f - p^*\|_\infty .$$

Δηλαδή το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής είναι χειρότερο από το σφάλμα της βέλτιστης προσέγγισης το πολύ κατά τον παράγοντα $1 + \|\lambda_n\|_\infty$.

Ας θεωρήσουμε το σύνολο των τιμών $\tilde{f}(x_i)$ που είναι μια διαταραχή των τιμών $f(x_i)$ στα σημεία x_i , $i = 0, \dots, n$ του διαστήματος $[\alpha, b]$. Παραδείγματος χάριν η διαταραχή μπορεί να οφείλεται σε σφάλματα στρογγυλοποίησης.

Συμβολίζοντας με \tilde{p}_n το πολυώνυμο παρεμβολής των τιμών $(x_i, \tilde{f}(x_i))$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty &= \max_{\alpha \leq x \leq b} \left\{ \sum_{j=0}^n (f(x_j) - \tilde{f}(x_j)) L_j(x) \right\} \\ &\leq \|\lambda_n\|_\infty \max_{i=0, \dots, n} |f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, μικρές αλλαγές στα δεδομένα οδηγούν σε μικρές αλλαγές στο πολυώνυμο παρεμβολής μόνο αν η σταθερά Lebesgue είναι μικρή. Δηλαδή αυτή η σταθερά παίζει το ρόλο του δείκτη κατάστασης για το πρόβλημα της παρεμβολής.

Για κάθε τριγωνικό σύστημα παρεμβολής υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε

$$\|\lambda_n\|_\infty \geq c_1 \log(n+1) + c_2 \quad (1.15)$$

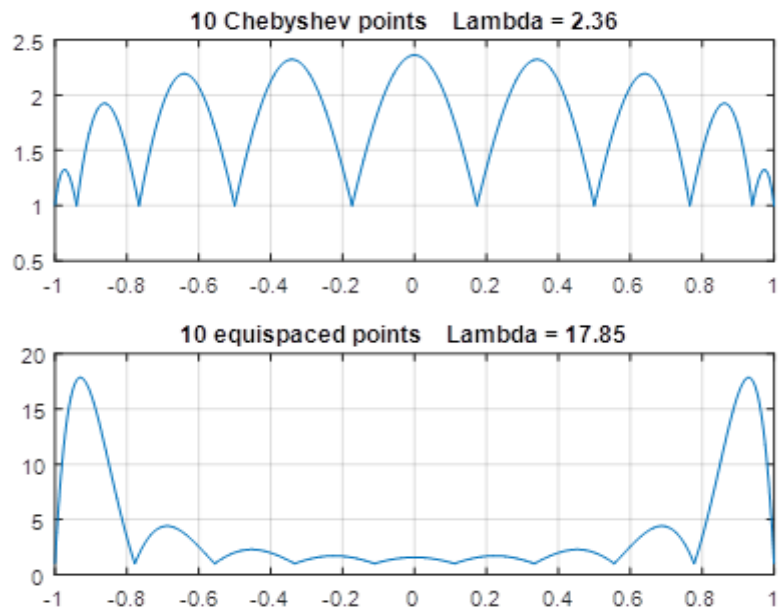
Για ισαπέχοντα σημεία μάλιστα είναι γνωστό ότι η σταθερά Lebesgue αυξάνεται εκθετικά και μάλιστα

$$\|\lambda_n\|_\infty \approx \frac{2^{n+1}}{en \log n} .$$

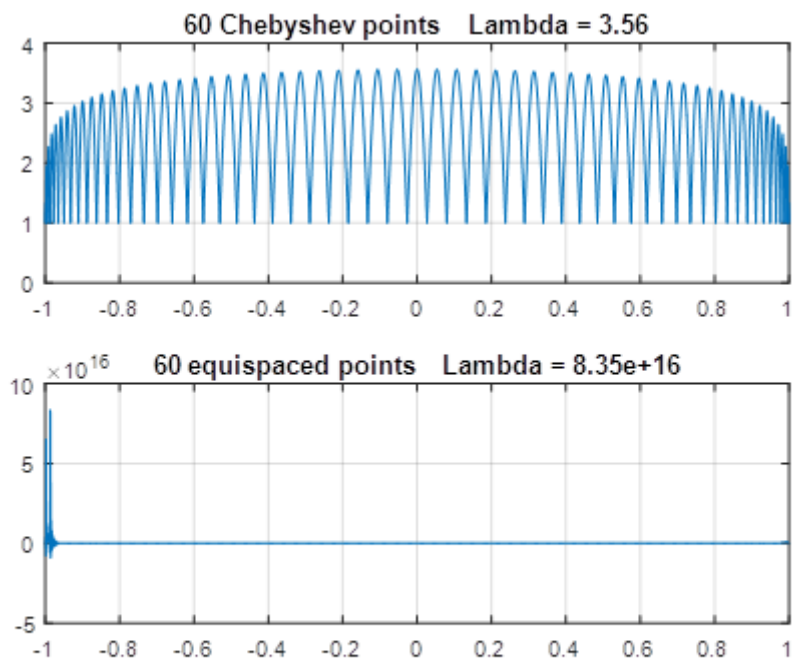
Για τα σημεία Chebyshev η σταθερά Lebesgue αυξάνεται λογαριθμικά και μάλιστα

$$\|\lambda_n\|_\infty \approx \frac{2}{\pi} \log n .$$

Στα παρακάτω σχήματα για $n = 10$ και $n = 60$ παρατηρούμε ότι για ισαπέχοντα σημεία η σταθερά Lebesgue όντως αυξάνεται εκθετικά καθώς το n αυξάνει, ενώ για τα σημεία Chebyshev η σταθερά Lebesgue αυξάνεται λογαριθμικά.



Σχήμα 1.8: Γραφική παράσταση της σταθεράς Lebesgue για Chebyshev και ισαπέχοντα σημεία, για $n=10$.



Σχήμα 1.9: Γραφική παράσταση της σταθεράς Lebesgue για Chebyshev και ισαπέχοντα σημεία, για $n=60$.

Θα παραθέσουμε στη συνέχεια δύο θεωρήματα τα οποία αφορούν την σύγκλιση ακολουθιών πολυωνύμων παρεμβολής, όταν η προς προσέγγιση συνάρτηση f είναι συνεχής.

Θεώρημα 1.5 (Θεώρημα Faber)

Για κάθε τριγωνικό σύστημα παρεμβολής υπάρχει συνάρτηση $f \in C[\alpha, b]$, τέτοια ώστε αν $p_n \in P_n$ είναι το πολυώνυμο, το οποίο παρεμβάλλεται στην f στα σημεία x_{n0}, \dots, x_{nn} , τότε ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|f - p_n\|_{\infty} = \infty.$$

Απόδειξη

Από το θεώρημα Banach-Steinhaus, αν η ακολουθία $L_n(f)$ για κάθε $f \in C[\alpha, b]$ είναι φραγμένη, τότε υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $\|L_n\|_{\infty} \leq M$ για κάθε n .

Λόγω των σχέσεων (1.13) και (1.14) ο τελεστής παρεμβολής L_n ικανοποιεί την σχέση

$$\|L_n\|_{\infty} \geq c_1 \log(n+1) + c_2, \quad \text{για κάθε } n$$

και το θεώρημα έπεται αμέσως. ■

Θεώρημα 1.6 (Θεώρημα Marcinkiewicz)

Δεδομένης μιας συνάρτησης $f \in C[\alpha, b]$, υπάρχει πάντοτε τριγωνικό σύστημα παρεμβολής, τέτοιο ώστε η αντίστοιχη ακολουθία πολυωνύμων παρεμβολής p_n να συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση στο $[\alpha, b]$, καθώς $n \rightarrow \infty$.

Απόδειξη

Από το θεώρημα Chebyshev το πολυώνυμο $p^* \in P_n$ της βέλτιστης προσέγγισης της f από στοιχεία του P_n έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχουν $n+2$ σημεία $x_i \in [\alpha, b]$ στα οποία το σφάλμα $f - p^*$ έχει ίσες απολύτως και εναλλασσόμενες στο πρόσημο τιμές.

Άρα η διαφορά $f - p^*$ θα μηδενίζεται τουλάχιστον σε $n+1$ σημεία $x'_i \in [\alpha, b]$, δηλαδή το p^* είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x'_i , $i = 0, \dots, n$. Τώρα, λαμβάνοντας σαν τριγωνικό σύστημα παρεμβολής τα σημεία αυτά και χρησιμοποιώντας και το θεώρημα Weierstrass έπεται το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση 1.4

Το θεώρημα Faber μας λέει ότι δεν υπάρχει τριγωνικό σύστημα παρεμβολής που να εξασφαλίζει σύγκλιση των αντίστοιχων πολυωνύμων παρεμβολής για κάθε συνεχή συνάρτηση f .

Το θεώρημα Marcinkiewicz, για κάθε δεδομένη συνεχή συνάρτηση μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τριγωνικού συστήματος παρεμβολής που η αντίστοιχη ακολουθία πολυωνύμων παρεμβολής συγκλίνει, αλλά δεν μας δίνει κάποια χρήσιμη μέθοδο κατασκευής του.

Τέλος, θα αναφέρουμε ένα θεώρημα σύγκλισης πολυωνύμων παρεμβολής μιας συνάρτησης $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ που η αναλυτική της επέκταση $f(z)$ στο \mathbb{C} είναι ολόμορφη συνάρτηση.

Θεώρημα 1.7

Έστω f ολόμορφη συνάρτηση, η οποία παίρνει πραγματικές τιμές στον πραγματικό άξονα \mathbb{R} του μιγαδικού επιπέδου \mathbb{C} και έστω ένα τυχαίο τριγωνικό σύστημα παρεμβολής στο $[\alpha, b]$. Τότε η ακολουθία των αντίστοιχων πολυωνύμων παρεμβολής συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[\alpha, b]$.

1.3 Παρεμβολή Hermite

Η διαδικασία παρεμβολής κατά Hermite, στη βασική της μορφή, αφορά τον προσδιορισμό ενός πολυωνύμου που το ίδιο και η παράγωγος του λαμβάνουν δεδομένες τιμές στα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία παρεμβολής x_0, \dots, x_n .

Θεώρημα 1.8

Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ σημεία ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ και $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{R}$. Τότε

α) Υπάρχει ένα πολυώνυμο $q \in P_{2n+1}$ που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$q(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

$$q'(x_i) = z_i, \quad i = 0, \dots, n$$

β) Το πολυώνυμο q είναι μοναδικό και καλείται πολυώνυμο παρεμβολής Hermite για τα δεδομένα $(x_i, y_i), (x_i, z_i), i = 0, \dots, n$.

γ) Το q μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή

$$q(x) = \sum_{i=0}^n h_i(x)y_i + \sum_{i=0}^n \bar{h}_i(x) z_i$$

όπου

$$h_i(x) = [1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i)]L_i^2(x)$$

$$\bar{h}_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x), \quad i = 0, \dots, n$$

και τα L_i είναι τα πολυώνυμα που προκύπτουν στην παρεμβολή Lagrange.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι κάθε h_i και \bar{h}_i είναι πολυώνυμο βαθμού $2n+1$.

Εύκολα επαληθεύεται ότι

$$h_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\bar{h}_i(x_j) = 0$$

και συνεπώς

$$q(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Η παράγωγος του q είναι

$$q'(x) = \sum_{i=0}^n h'_i(x)y_i + \sum_{i=0}^n \bar{h}'_i(x)z_i$$

όπου

$$h'_i(x) = [1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i)]2L_i(x)L'_i(x) - 2L'_i(x)L_i^2(x)$$

$$\bar{h}'_i(x) = L_i^2(x) + (x - x_i)2L_i(x)L'_i(x).$$

$$\text{Επειδή } \bar{h}_i(x_j) = 0 \text{ και } h_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$q'(x_i) = z_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Αυτό αποδεικνύει την (α) και τη (γ). Για να δείξουμε τη (β), έστω $r \in P_{2n+1}$ ένα άλλο τυχόν πολυώνυμο τέτοιο ώστε

$$r(x_i) = y_i$$

$$r'(x_i) = z_i$$

για $i = 0, \dots, n$. Τότε προφανώς το πολυώνυμο $q - r$ που ανήκει στο P_{2n+1} θα είχε $n+1$ ρίζες με πολλαπλότητα ≥ 2 και επομένως

$$q - r \equiv 0$$

δηλαδή το q είναι μοναδικό. ■

Ορισμός 1.3

Έστω f μια συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε τις τιμές $f(x_0), \dots, f(x_n)$ και τις τιμές της παραγώγου $f'(x_0), \dots, f'(x_n)$ στα $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία x_0, \dots, x_n του $[\alpha, b]$. Τότε το πολυώνυμο

$$q(x) = \sum_{i=0}^n h_i(x)f(x_i) + \sum_{i=0}^n \bar{h}_i(x)f'(x_i)$$

καλείται πολυώνυμο παρεμβολής Hermite της f στα σημεία x_0, \dots, x_n .

Μορφή Newton με διαιρεμένες διαφορές σε επαναλαμβανόμενα σημεία

Το θεώρημα 1.8 μας δίνει μια πλήρη περιγραφή του πολυωνύμου Hermite, αλλά για τον υπολογισμό του απαιτείται ο υπολογισμός των πολυωνύμων Lagrange L_i . Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μορφή Newton με διαιρεμένες διαφορές σε επαναλαμβανόμενα σημεία.

Από τα x_0, \dots, x_n διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ορίζουμε τα σημεία $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}$ με

$$x_i^{(1)} = x_i^{(2)} = x_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Ορίζοντας $f[x_i^{(1)}, x_i^{(2)}] = f[x_i, x_i] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f[x_i, x_i + \varepsilon]$ προκύπτει, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_i , ότι

$$f[x_i^{(1)}, x_i^{(2)}] = f'(x_i).$$

Χρησιμοποιώντας τις τιμές $f'(x_0), \dots, f'(x_n)$ στη θέση των διαιρεμένων διαφορών $f[x_0^{(1)}, x_0^{(2)}], \dots, f[x_n^{(1)}, x_n^{(2)}]$ συμπληρώνουμε κατά τα γνωστά τον πίνακα των διαιρεμένων διαφορών και προκύπτουν οι συντελεστές του πολυωνύμου Hermite σε μορφή Newton με διαιρεμένες διαφορές.

Παραδείγματος χάριν

x_i	$f(x_i)$			
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$		
x_0	$f(x_0)$	$A = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$	$B = \frac{A - f'(x_0)}{x_1 - x_0}$	$D = \frac{C - B}{x_1 - x_0}$
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$C = \frac{f'(x_1) - A}{x_1 - x_0}$	
x_1	$f(x_1)$			

Συνεπώς το πολυώνυμο Hermite σε μορφή Newton με διαιρεμένες διαφορές σύμφωνα με τα παραπάνω είναι

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + B(x - x_0)^2 + D(x - x_0)^2(x - x_1).$$

Θεώρημα 1.9 (Σφάλμα παρεμβολής Hermite)

Έστω $f \in C^{2n+2}[\alpha, b]$ και x_0, \dots, x_n $n + 1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του διαστήματος $[\alpha, b]$. Έστω q το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite του θεωρήματος 1.8. Τότε, για κάθε $x \in [\alpha, b]$ υπάρχει $\xi(x) \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(x) - q(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \quad (1.16)$$

Απόδειξη

Για $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ η σχέση (1.16) είναι προφανής.

Για $x \in [\alpha, b]$, διάφορο του κάθε x_i , ορίζουμε τη συνάρτηση

$$F(t) = f(t) - q(t) - [f(x) - q(x)] \frac{\prod_{i=0}^n (t - x_i)^2}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)^2}.$$

Προφανώς $F \in C^{2n+2}[\alpha, b]$.

Η F έχει τουλάχιστον τις διπλές ρίζες x_0, \dots, x_n και την απλή ρίζα x (τα x_0, \dots, x_n είναι ρίζες της F'). Εφαρμόζοντας $n + 1$ φορές το θεώρημα Rolle στην F , δείχνουμε ότι η F' έχει τουλάχιστον $(n + 1)$ ρίζες διαφορετικές από τα x, x_0, \dots, x_n . Επίσης $F'(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$. Συνεπώς η F' έχει τουλάχιστον $2n + 2$ ρίζες στο $[\alpha, b]$. Εφαρμόζοντας $2n + 1$ φορές το θεώρημα Rolle στην F' , $2n$ φορές στην F'' κ.ο.κ. καταλήγουμε στην ύπαρξη ενός $\xi(x) \in (\alpha, b)$ τέτοιου ώστε

$$F^{(2n+2)}(\xi(x)) = 0.$$

Αλλά

$$F^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \frac{f(x) - q(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)^2} (2n + 2)!$$

και θέτοντας $t = \xi$ προκύπτει το θεώρημα. ■

Στην πιο γενική της μορφή, η διαδικασία παρεμβολής Hermite αφορά στον προσδιορισμό ενός πολυωνύμου που έχει στα σημεία παρεμβολής τις ίδιες παραγώγους μέχρι κάποιας τάξης με την f , όπου η τάξη των παραγώγων μπορεί να διαφέρει από σημείο σε σημείο.

Θεώρημα 1.10 (Γενική παρεμβολή τύπου Hermite)

Έστω $m_0, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$, $N := \sum_{i=0}^n (m_i + 1) - 1$ και $M := \max(m_0, \dots, m_n)$. Αν $x_0, \dots, x_n \in [\alpha, b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $f \in C^M[\alpha, b]$, τότε υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο $p \in P_N$ τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), & i = 0, \dots, m_0, \\ p^{(i)}(x_1) = f^{(i)}(x_1), & i = 0, \dots, m_1, \\ \vdots \\ p^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n), & i = 0, \dots, m_n. \end{cases}$$

Θεώρημα 1.11

Με τον συμβολισμό του θεωρήματος 1.10, αν $f \in C^{N+1}[\alpha, b]$ τότε για κάθε $x \in [\alpha, b]$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^{(m_i+1)}$$

Παρατήρηση 1.5

Τα θεωρήματα 1.2 και 1.9 είναι ειδικές περιπτώσεις του θεωρήματος 1.11 για $m_0 = m_1 = \dots = m_n = 0$ και $m_0 = m_1 = \dots = m_n = 1$ αντίστοιχα.

Ορίζουμε τη διαιρεμένη διαφορά $f[x, x, \dots, x]$ μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο που επαναλαμβάνεται $n+1$ φορές σαν το όριο της διαιρεμένης διαφοράς $f[x + \varepsilon_0, x + \varepsilon_1, \dots, x + \varepsilon_n]$ καθώς ε_i , $i = 0, \dots, n$, τείνουν στο 0. Αν η f είναι παραγωγίσιμη n φορές στο σημείο x , τότε

$$f[x, x, \dots, x] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Υπολογίζουμε τώρα το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite για $n = 0$ και $m_0 = 3$.

x_i	$f[x_i]$			
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_0] = f'(x_0)$		
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_0] = f'(x_0)$	$f[x_0, x_0, x_0] = \frac{f''(x_0)}{2}$	$f[x_0, x_0, x_0, x_0] = \frac{f'''(x_0)}{6}$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_0] = f'(x_0)$	$f[x_0, x_0, x_0] = \frac{f''(x_0)}{2}$	
x_0	$f[x_0]$			

Συνεπώς το πολυώνυμο Hermite σε μορφή Newton με διαιρεμένες διαφορές σύμφωνα με τα παραπάνω είναι

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{6}f'''(x_0)$$

δηλαδή το πολυώνυμο Taylor 3^{ου} βαθμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ SPLINES

2.1 Εισαγωγή

Στην Πολυωνυμική Παρεμβολή κατά Lagrange παρατηρούμε ότι όσο περισσότερα σημεία παίρνουμε, τόσο μεγαλύτερος θα είναι ο βαθμός του πολυωνύμου. Μας ενδιαφέρει να πάρουμε πολλά σημεία για καλύτερη ακρίβεια, αλλά τότε η μελέτη του προβλήματος γίνεται πιο πολύπλοκη αφού έχουμε να εργαστούμε με πολυώνυμα μεγάλου βαθμού. Ακόμη, και αυτή η ίδια η ακρίβεια δεν εξασφαλίζεται τελικά. Έχει αποδειχτεί ότι υπάρχουν συναρτήσεις όπου το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής τείνει στο άπειρο όταν ο βαθμός του πολυωνύμου τείνει στο άπειρο. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί γεωμετρικά από το γεγονός ότι τα πολυώνυμα μεγάλου βαθμού έχουν την τάση να ταλαντώνονται. Όσο πιο κοντά είναι τα σημεία παρεμβολής τόσο πιο έντονες είναι οι ταλαντώσεις με συνέπεια τα σφάλματα να μεγαλώνουν. Για να παρακαμφθεί αυτό το πρόβλημα έχει επινοηθεί η παρεμβολή με τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις. Χωρίζουμε δηλαδή το διάστημα σε υποδιαστήματα και σε αυτά κάνουμε παρεμβολή με πολυώνυμα προκαθορισμένου βαθμού, αρκεί να εξασφαλίζεται η συνέχεια. Όπως θα δούμε παρακάτω, μπορούμε να κατασκευάσουμε τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις απαιτώντας και κάποια ομαλότητα σε αυτές, δηλαδή να είναι συνεχείς και οι παράγωγοι μέχρι κάποιας τάξης. Η πιο απλή από αυτές είναι η παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις. Το μειονέκτημα αυτών είναι ότι δεν εξασφαλίζεται η ομαλότητα, για παράδειγμα στις τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις δεν υπάρχει συνέχεια της πρώτης παραγώγου στην άκρη των υποδιαστημάτων. Η παρεμβολή Hermite εξασφαλίζει την ομαλότητα μέχρι και τις πρώτες παραγώγους. Σημαντικό ρόλο στις εφαρμογές παίζουν οι κυβικές splines, δηλαδή οι συναρτήσεις που είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο διάστημα $[a, b]$ και είναι κυβικά πολυώνυμα σε κάθε υποδιάστημα ενός οποιουδήποτε διαμερισμού του $[a, b]$. Χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση δεδομένων, στον αυτόματο γεωμετρικό σχεδιασμό, στην αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων κλπ. Η εισαγωγή της ορολογίας “spline” οφείλεται στον Schoenberg το 1946 (βλέπε [14]), παρόλο που τέτοιου είδους συναρτήσεις είχαν χρησιμοποιηθεί από πολλούς συγγραφείς στο παρελθόν. Ο όρος “spline” αναφέρεται σε ένα όργανο που χρησιμοποιείται στη σχεδίαση. Είναι ένα λεπτό, εύκαμπτο ξύλινο ή πλαστικό εργαλείο, το οποίο διέρχεται μέσα από δοσμένα σημεία και ορίζει μία ομαλή καμπύλη ανάμεσα τους. Ο κόσμος των καμπύλων splines επεκτείνεται από τη βασική μονοδιάστατη

spline παρεμβολής με την οποία θα ασχοληθούμε κυρίως. Υπάρχουν πολυδιάστατες καμπύλες, καμπύλες μεταβλητών κόμβων και προσεγγιστικές καμπύλες splines.

2.2 Γενικά στοιχεία για τις splines

Ορισμός 2.1

Έστω $[\alpha, b] \subset \mathbb{R}$, $\Delta: \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[\alpha, b]$ και $m \in \mathbb{N}$. Τα στοιχεία του γραμμικού χώρου

$$S_m(\Delta) := \{s \in C^{m-1}[\alpha, b]: s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_m, i = 0, \dots, n-1\} \quad (2.1)$$

λέγονται (πολυωνυμικές) splines βαθμού m (ως προς Δ).

Απαιτούμε τα στοιχεία του $S_m(\Delta)$ να είναι $m-1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμα στους εσωτερικούς κόμβους και αυτή είναι η μέγιστη ομαλότητα που μας επιτρέπει να έχουμε στοιχεία στον $S_m(\Delta)$ που δεν είναι αναγκαστικά πολυώνυμα. Να σημειώσουμε ότι θα μπορούσαμε να ορίσουμε και splines με λιγότερη ομαλότητα.

Παρατήρηση 2.1

Κάθε πολυώνυμο στο $[\alpha, b]$, βαθμού m , είναι αυτόματα μια spline του $S_m(\Delta)$ για κάθε διαμέριση Δ του διαστήματος $[\alpha, b]$. Το αντίστροφο προφανώς δεν είναι αληθές.

Παράδειγμα 2.1

Έστω τα $(n+1)$ σημεία (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$. Τότε η πολυγωνική γραμμή, που αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα τα οποία συνδέουν τα διαδοχικά σημεία (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$, είναι στοιχείο του συνόλου $S_1(\Delta)$, $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^n$.

Ορισμός 2.2

Η συνάρτηση αποκομμένης δύναμης x_+^m ορίζεται από τη σχέση

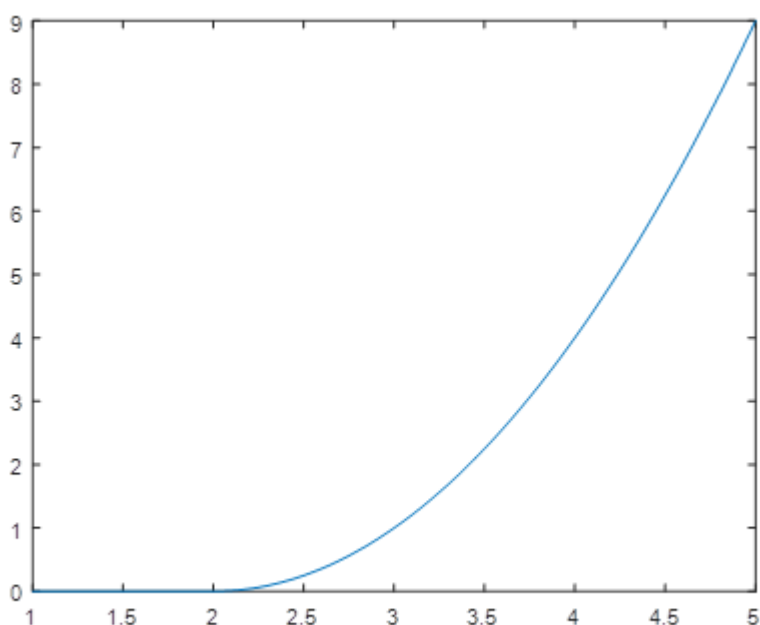
$$x_+^m = \begin{cases} x^m, & \text{αν } x \geq 0 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Πιο γενικά για $i = 0, \dots, n - 1$

$$(x - x_i)_+^m = \begin{cases} (x - x_i)^m, & \text{αν } x \geq x_i \\ 0, & \text{αν } x < x_i \end{cases} \quad (2.2)$$

Παράδειγμα 2.2

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη συνάρτηση $(x - 2)_+^2$



Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $(x - 2)_+^2$

Έστω $\tau_i(x) = (x - x_i)_+^m$. Τότε

$$\tau_i^{(j)}(x) = m(m - 1) \dots (m - j + 1)(x - x_i)_+^{m-j}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Συνεπώς $\tau_i^{(j)}(x_i^+) = 0 = \tau_i^{(j)}(x_i^-)$, $j = 1, 2, \dots, m - 1$ και τα τ_i είναι στοιχεία του $S_m(\Delta)$.

Επίσης $\tau_i^{(m)}(x) = m!(x - x_i)_+^0$ και $\tau_i^{(m)}(x_i^+) - \tau_i^{(m)}(x_i^-) = m!$.

Θεώρημα 2.1

Το σύνολο $S_m(\Delta)$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης $(n + m)$ και το σύνολο των συναρτήσεων

$$\{1, x, x^2, \dots, x^m, (x - x_1)_+^m, \dots, (x - x_{n-1})_+^m\}$$

αποτελεί μια βάση του χώρου αυτού.

Απόδειξη

Οι $m + n$ συναρτήσεις

$$u_k = x^k, \quad k = 0, \dots, m$$

$$v_k = (x - x_k)_+^m, \quad k = 1, \dots, n - 1$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι, έστω

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k v_k = 0.$$

Τότε

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k u_k = 0, \quad x \in [x_0, x_1]$$

άρα $\alpha_k = 0, k = 0, \dots, m$.

Επίσης $b_1(x - x_1)_+^m = 0, x \in [x_1, x_2]$ άρα $b_1 = 0$ και επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα έχουμε ότι $b_k = 0, k = 1, \dots, n - 1$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο $s \in S_m(\Delta)$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων u_k, v_k .

Έστω $s \in S_m(\Delta)$. Με επαγωγή θα δείξουμε ότι υπάρχουν σταθερές $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ και b_1, \dots, b_{n-1} τέτοιες ώστε

$$s(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^{j-1} b_k v_k, \quad x \in [x_0, x_j], \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Αυτό είναι αληθές για $j = 1$, γιατί στο $[x_0, x_1]$ η s είναι στοιχείο του P_m . Τώρα υποθέτουμε ότι η (2.3) ισχύει για κάποιο $j \geq 1$. Τότε η διαφορά

$$p(x) := s(x) - \sum_{k=0}^m \alpha_k u_k - \sum_{k=1}^{j-1} b_k v_k$$

στο διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ ανήκει στο P_m . Επειδή $s \in C^{m-1}[\alpha, b]$ και το p μηδενίζεται στο $[x_0, x_j]$, έχουμε ότι

$$p^{(i)}(x_j) = 0, \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Άρα $p(x) = b_j(x - x_j)_+^m$ στο $[x_j, x_{j+1}]$ για κάποια σταθερά b_j και επειδή $(x - x_j)_+^m = 0$ στο $[x_0, x_j]$ η παράσταση (2.3) αποδείχτηκε και για $j + 1$.

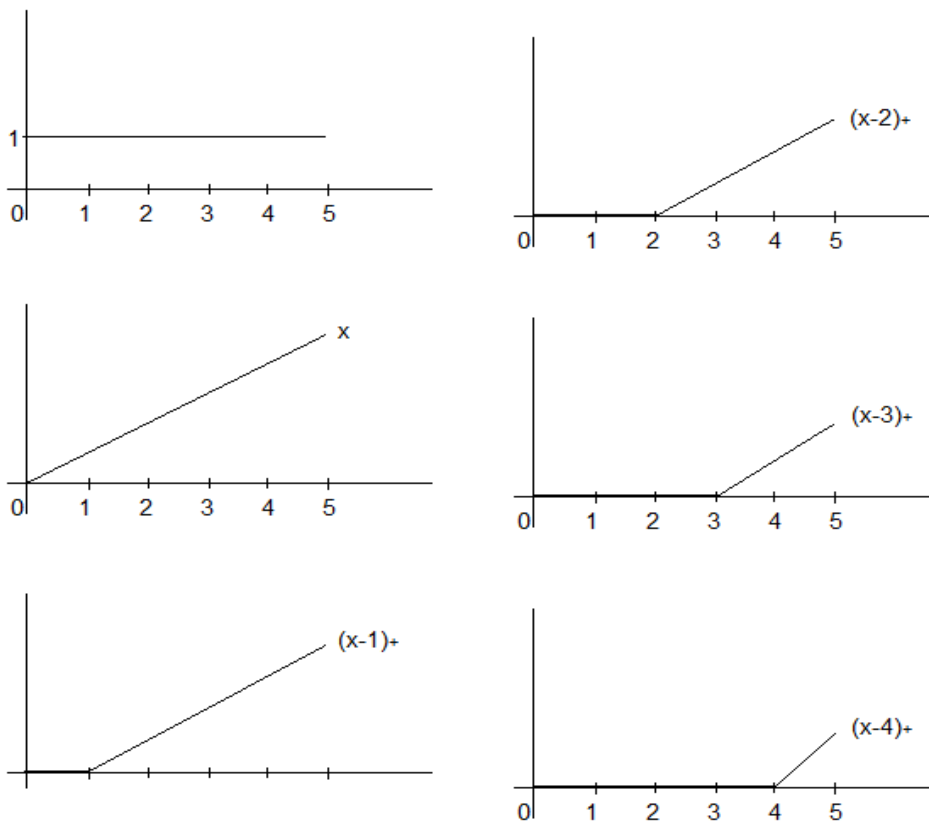


Παράδειγμα 2.3

Έστω $\Delta: 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5$. Μία βάση για το χώρο $S_1(\Delta)$ είναι η εξής:

$$\{1, x, (x-1)_+, (x-2)_+, (x-3)_+, (x-4)_+\}.$$

Δηλαδή σχηματικά έχουμε



Σχήμα 2.2: Γραφική παράσταση της βάσης $\{1, x, (x-1)_+, (x-2)_+, (x-3)_+, (x-4)_+\}$

Στην παράγραφο 2.5 θα ορίσουμε μια νέα βάση για το $S_m(\Delta)$ σαφώς καλύτερη για αριθμητικούς υπολογισμούς από την βάση του θεωρήματος 2.1.

2.3 Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις

Έστω $\Delta: \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του διαστήματος $[\alpha, b]$. Θεωρούμε το χώρο $S_1(\Delta)$, δηλαδή το γραμμικό χώρο των συνεχών στο $[\alpha, b]$ και τμηματικά ως προς Δ γραμμικών συναρτήσεων.

Για κάθε $f \in C[\alpha, b]$ υπάρχει μια συνάρτηση $s \in S_1(\Delta)$

$$s(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0, \dots, n.$$

Το γράφημα της s είναι η τεθλασμένη γραμμή που διέρχεται από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$.

Αν $p_i \in P_1$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_i, x_{i+1} δηλαδή

$$p_i(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) \quad , \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

τότε

$$s(x) = \begin{cases} p_0, & x \in [x_0, x_1] \\ \vdots \\ p_i, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \vdots \\ p_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μία εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής μιας $f \in C^2[\alpha, b]$ με συνάρτηση του $S_1(\Delta)$.

Θεώρημα 2.2

Έστω $f \in C^2[\alpha, b]$ και $s \in S_1(\Delta)$ η συνάρτηση παρεμβολής της f στα σημεία x_0, \dots, x_n . Τότε

$$\|f - s\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty \quad , \quad \text{όπου } h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i) \quad (2.4)$$

Απόδειξη

Στο $[x_i, x_{i+1}]$ η s συμπίπτει με το γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής τύπου Lagrange. Συνεπώς από (1.3)

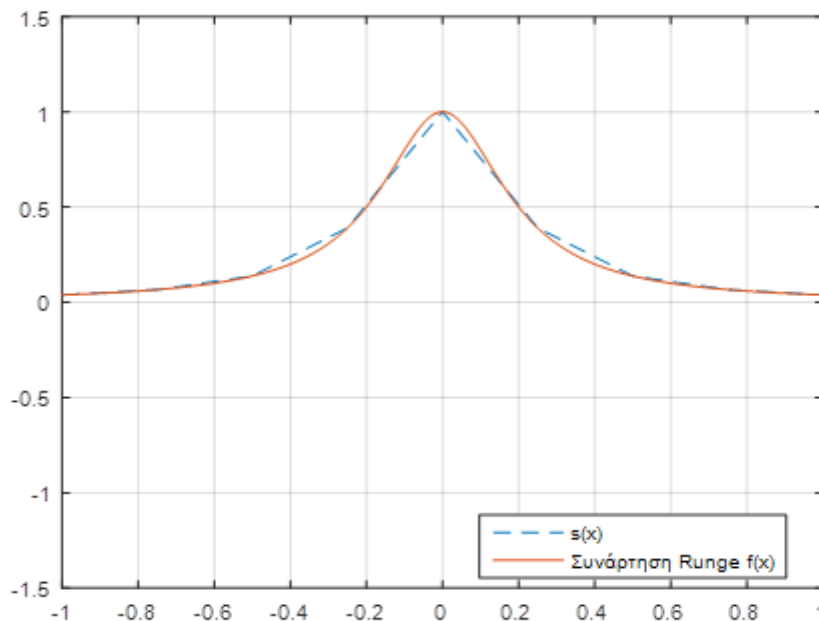
$$\begin{aligned} |f(x) - s(x)| &= |f(x) - p_i(x)| \\ &= \frac{1}{2} |(x - x_i)(x - x_{i+1})f''(\xi(x))| \end{aligned}$$

με $\xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$. Επομένως

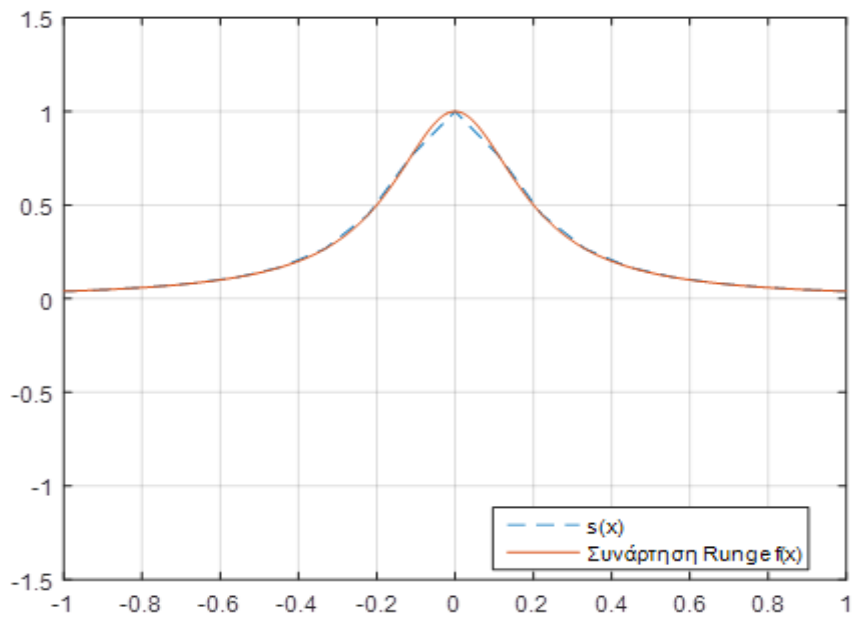
$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \|f''\|_\infty \leq \frac{h_{i+1}^2}{8} \|f''\|_\infty$$

όπου $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$
από την οποία έπεται η σχέση (2.4). ■

Συνεπώς μπορούμε να κάνουμε το σφάλμα όσο μικρό θέλουμε παίρνοντας λεπτότερους διαμερισμούς του διαστήματος $[\alpha, b]$ και αυτό δεν αυξάνει πραγματικά την πολυπλοκότητα της s , αφού τοπικά σε κάθε υποδιάστημα η s είναι απλά ένα ευθύγραμμο τμήμα.



Σχήμα 2.3: Προσέγγιση της Runge για $n=9$ με κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις.



Σχήμα 2.4: Προσέγγιση της Runge για $n=19$ με κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις.

Η παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις είναι σχεδόν βέλτιστη

Θα συγκρίνουμε τώρα το σφάλμα $\|f - s\|_\infty$ της συνάρτησης παρεμβολής $s \in S_1(\Delta)$ μιας συνάρτησης $f \in C[\alpha, b]$ με το ελάχιστο σφάλμα $\min_{\varphi \in S_1(\Delta)} \|f - \varphi\|_\infty$ που μπορούμε να πετύχουμε προσεγγίζοντας την f με στοιχεία του $S_1(\Delta)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$.

Ο τελεστής παρεμβολής $I_2: C[\alpha, b] \rightarrow S_1(\Delta)$, $I_2(f) = s$, είναι γραμμικός και $I_2\varphi = \varphi$, $\forall \varphi \in S_1(\Delta)$.

Επίσης

$$\|I_2 f\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |I_2 f(x_i)| = \max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)| \leq \|f\|_\infty, \quad \forall f \in C[\alpha, b]$$

Επομένως έχουμε για $f \in C[\alpha, b]$

$$\begin{aligned} \|f - I_2 f\|_\infty &= \|f - \varphi - I_2(f - \varphi)\|_\infty \leq \|f - \varphi\|_\infty + \|I_2(f - \varphi)\|_\infty \\ &\leq \|f - \varphi\|_\infty + \|f - \varphi\|_\infty = 2\|f - \varphi\|_\infty, \quad \forall \varphi \in S_1(\Delta). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\min_{\varphi \in S_1(\Delta)} \|f - \varphi\|_{\infty} \leq \|f - I_2 f\|_{\infty} \leq 2 \min_{\varphi \in S_1(\Delta)} \|f - \varphi\|_{\infty},$$

δηλαδή η $I_2 f$ είναι σχεδόν βέλτιστη προσέγγιση.

Η βάση αποκομμένης δύναμης για τον $S_1(\Delta)$

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.1 κάθε συνάρτηση $s \in S_1(\Delta)$ μπορεί να γραφεί στην μορφή

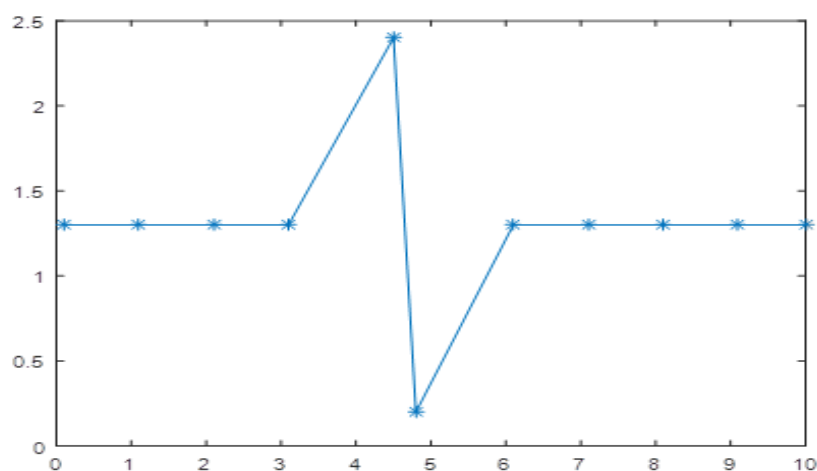
$$s(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \sum_{i=1}^{n-1} c_i (x - x_i)_+$$

Με αυτόν τον τρόπο δεν καθορίζεται η s σε κάθε υποδιάστημα αλλά εκφράζεται σαν γραμμικός συνδιασμός κατάλληλων συναρτήσεων βάσης .

Η παράσταση αυτή είναι κατάλληλη για θεωρητικούς σκοπούς αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις είναι αριθμητικά ασταθής όπως μας δείχνει και το παρακάτω παράδειγμα (Βλέπε [6]).

Παράδειγμα 2.4

Έστω $\Delta: 0.1 < 1.1 < 2.1 < 3.1 < 4.5 < 4.8 < 6.1 < 7.1 < 8.1 < 9.1 < 10$ και $s(x_i) = 1.3$ για όλα τα i εκτός από τα $s(4.5) = 2.4$ και $s(4.8) = 0.2$.



Σχήμα 2.5: Γραφική παράσταση των σημείων $(x_i, s(x_i))$.

Αν χρησιμοποιήσουμε αριθμητική με 2 σημαντικά ψηφία και στρογγύλλευση, από τις συνθήκες παρεμβολής λαμβάνουμε ότι

$$\beta_0 = 1.3, \beta_1 = 0, c_3 = 0.79, c_4 = -8.1, c_5 = 8.2, c_6 = -0.85$$

και τα υπόλοιπα c_i είναι μηδέν.

Έτσι η s γράφεται σαν

$$s(x) = 1.3 + 0.79(x - 3.1)_+ - 8.1(x - 4.5)_+ + 8.2(x - 4.8)_+ - 0.85(x - 6.1)_+$$

Αν υπολογίσουμε την s στο σημείο $x = 9.5$ βρίσκουμε την τιμή 2.1 αντί της σωστής τιμής 1.3.

Στην παράγραφο 2.5 θα ορίσουμε μια νέα βάση για τον $S_1(\Delta)$ σαφώς καλύτερη για αριθμητικούς σκοπούς σε σχέση με την παραπάνω βάση αποκομμένης δύναμης.

2.4 Παρεμβολή με κυβικές splines

Σε αυτήν την ενότητα θα περιοριστούμε στην περίπτωση ενός ομοιόμορφου διαμερισμού του $[\alpha, b]$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, και $\Delta_h : \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[\alpha, b]$ με βήμα h , δηλαδή $x_i = \alpha + ih$, $i = 0, \dots, n$.

Θεωρούμε το χώρο $S_3(\Delta_h)$, τον γραμμικό χώρο δηλαδή των συναρτήσεων, οι οποίες είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $[\alpha, b]$ και είναι κυβικά πολυώνυμα σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ του διαμερισμού Δ_h .

Αυτές οι συναρτήσεις λέγονται κυβικές splines.

Ορισμός 2.3

Μια spline $s \in S_3(\Delta)$ καλείται spline παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα x_0, \dots, x_n αν ικανοποιεί επιπλέον τις σχέσεις

$$s(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.5)$$

Θα εξετάσουμε αν μπορούμε να προσδιορίσουμε μια κυβική spline παρεμβολής της f στα σημεία x_i , $i = 0, \dots, n$.

Η συνάρτηση s είναι ένα διαφορετικό κυβικό πολυώνυμο σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$. Η κατασκευή του απαιτεί τον προσδιορισμό των συντελεστών των κυβικών πολυωνύμων σε κάθε υποδιάστημα, δηλαδή τον προσδιορισμό $4n$ συνολικά σταθερών.

Οι συνθήκες συνέχειας της s , s' και s'' στους εσωτερικούς κόμβους x_i , $i = 1, \dots, n-1$ είναι $3(n-1)$ και οι συνθήκες παρεμβολής στους κόμβους x_i , $i = 0, \dots, n$ είναι $n+1$. Οι συνθήκες αυτές συνολικά δίνουν $4n-2$ συνθήκες για τον προσδιορισμό των συντελεστών των κυβικών splines. Επομένως χρειαζόμαστε ακόμη δύο συνθήκες, οι οποίες συνήθως είναι διαφόρων τύπων συνοριακές συνθήκες για την s στους συνοριακούς κόμβους $x_0 = a$ και $x_n = b$.

Κατασκευή κυβικών splines παρεμβολής συναρτήσεων των τιμών $d_i = s''(x_i)$

Θέτουμε $h = \frac{b-a}{n}$ και

$$s''(x_i) = d_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Επειδή $s \in P_3$ στο $[x_i, x_{i+1}]$ έχουμε $s'' \in P_1$ στο $[x_i, x_{i+1}]$, άρα

$$s''(x) = d_i \frac{x_{i+1} - x}{h} + d_{i+1} \frac{x - x_i}{h}$$

για $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Με την ανάθεση της τιμής d_i και στα δυο υποδιαστήματα που ενώνονται στο x_i έχουμε αυτόματα απαιτήσει τη συνέχεια της 2ης παραγώγου της s .

Ολοκληρώνοντας δύο φορές την s'' προκύπτει

$$s(x) = d_i \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h} + d_{i+1} \frac{(x-x_i)^3}{6h} + c_1 x + c_2, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Υπολογίζοντας τις σταθερές c_1, c_2 συναρτήσεων των d_i και d_{i+1} από τις σχέσεις

$$s(x_i) = f(x_i), \quad s(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει

$$s(x) = d_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h} + d_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h} + \left(\frac{f_{i+1}}{h} - \frac{d_{i+1}h}{6} \right) (x - x_i) + \left(\frac{f_i}{h} - \frac{d_i h}{6} \right) (x_{i+1} - x) \quad (2.6)$$

για $x \in [x_i, x_{i+1}]$, όπου θέτουμε $f_i = f(x_i)$. Παραγωγίζοντας την (2.6) έχουμε

$$s'(x) = -d_i \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h} + d_{i+1} \frac{(x-x_i)^2}{2h} + \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i) + \frac{h}{6}(d_i - d_{i+1}),$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Η s' πρέπει να είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$, επομένως πρέπει να ισχύει

$$s'(x_i^+) = s'(x_i^-) \quad , \quad i = 1, \dots, n-1$$

δηλαδή

$$-\frac{d_i h}{2} + \frac{f_{i+1}}{h} - \frac{d_{i+1} h}{6} + \frac{d_i h}{6} - \frac{f_i}{h} = \frac{d_i h}{2} + \frac{f_i}{h} - \frac{d_i h}{6} + \frac{d_{i-1} h}{6} - \frac{f_{i-1}}{h}$$

$$\Rightarrow d_{i+1} + 4d_i + d_{i-1} = \frac{6}{h^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) := F_i \quad , \quad (2.7)$$

$$i = 1, \dots, n-1.$$

Οι εξισώσεις (2.7) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα $n-1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους d_0, \dots, d_n . Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τα d_0, \dots, d_n αρκεί να βρούμε επιπλέον δυο συνθήκες.

- Συνοριακές συνθήκες πρώτης παραγώγου

Θεώρημα 2.3

Έστω $f \in C^1[\alpha, b]$, $n \in \mathbb{N}$ και $\Delta_h : \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[\alpha, b]$ με βήμα h . Τότε υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $s \in S_3(\Delta_h)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} s(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0, \dots, n \\ s'(x_0) = f'(x_0) \\ s'(x_n) = f'(x_n) \end{cases} \quad (2.8)$$

Απόδειξη

Οι επιπλέον συνθήκες δίνουν τις σχέσεις

$$\begin{cases} 2d_0 + d_1 = \frac{6}{h^2} [(f_1 - f_0) - hf'(x_0)] \\ d_{n-1} + 2d_n = \frac{6}{h^2} [-(f_n - f_{n-1}) + hf'(x_n)] \end{cases} \quad (2.9)$$

Οι σχέσεις (2.7) και (2.9) αποτελούν γραμμικό σύστημα $n + 1$ εξισώσεων με $n + 1$ αγνώστους.

Το γραμμικό σύστημα είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} (f_1 - f_0) - hf'(x_0) \\ f_0 - 2f_1 + f_2 \\ f_1 - 2f_2 + f_3 \\ \vdots \\ -(f_n - f_{n-1}) + hf'(x_n) \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει αυστηρή διαγώνια υπεροχή και άρα μια μοναδική λύση.

Λύνοντας το τριδιαγώνιο σύστημα βρίσκουμε τα d_0, \dots, d_n και στη συνέχεια υπολογίζουμε την s από την σχέση (2.6).



Παρατηρούμε ότι ο προσδιορισμός της κυβικής spline παρεμβολής $s \in S_3(\Delta)$ απαιτεί τη λύση γραμμικού συστήματος και επομένως η τιμή της $s(x)$ εξαρτάται από όλες τις τιμές $f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ και τις $f'(x_0)$, $f'(x_n)$.

Στην περίπτωση της παρεμβολής με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις $s \in S_1(\Delta)$ για $x \in [x_j, x_{j+1}]$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές $f(x_j)$, $f(x_{j+1})$, δηλαδή εξαρτάται τοπικά από τη συνάρτηση f .

- Συνοριακές συνθήκες δεύτερης παραγώγου

Θεώρημα 2.4

Έστω $f \in C^2[\alpha, b]$, $n \in \mathbb{N}$ και $\Delta_h : \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[\alpha, b]$ με βήμα h . Τότε υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $s \in S_3(\Delta_h)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} s(x_i) = f(x_i) & , \quad i = 0, \dots, n \\ s''(x_0) = f''(x_0) \\ s''(x_n) = f''(x_n) \end{cases} \quad (2.10)$$

Απόδειξη

Οι σχέσεις (2.7) και οι $s''(x_0) = f''(x_0), s''(x_n) = f''(x_n)$ μας δίνουν το κάτωθι γραμμικό σύστημα $n + 1$ εξισώσεων με $n + 1$ αγνώστους

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f''(x_0) \\ \frac{6}{h^2}(f_0 - 2f_1 + f_2) \\ \frac{6}{h^2}(f_1 - 2f_2 + f_3) \\ \vdots \\ f''(x_n) \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει αυστηρή διαγώνια υπεροχή και άρα μια μοναδική λύση.

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε τα d_0, \dots, d_n και στη συνέχεια υπολογίζουμε την s από την σχέση (2.6).



- Φυσικές συνοριακές τιμές $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$

Ορισμός 2.4

Οι κυβικές splines s , για τις οποίες ισχύει $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ καλούνται φυσικές κυβικές splines.

Από το θεώρημα 2.4 προκύπτει ότι και το πρόβλημα παρεμβολής με φυσικές splines λύνεται μονοσήμαντα.

Στην περίπτωση αυτή προκύπτει το γραμμικό σύστημα της προηγούμενης περίπτωσης με μηδενικά στη θέση των $f''(x_0), f''(x_n)$.

- “not - a - knot” (όχι κόμβος)

Χρησιμοποιούμε μια κυβική συνάρτηση στα πρώτα δυο υποδιαστήματα $x_0 \leq x \leq x_2$ και στα δυο τελευταία υποδιαστήματα $x_{n-2} \leq x \leq x_n$, δηλαδή το x_1 και το x_{n-1} δεν είναι πια κόμβοι.

Πρέπει

$$s'''(x_1^+) = s'''(x_1^-) \quad \text{και} \quad s'''(x_{n-1}^+) = s'''(x_{n-1}^-) .$$

Γνωρίζουμε ότι

$$s'''(x) = \frac{-d_i}{h} + \frac{d_{i+1}}{h}$$

για $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Έτσι οι παραπάνω δυο συνθήκες μας δίνουν τις εξισώσεις

$$d_0 - 2d_1 + d_2 = 0$$

$$d_{n-2} - 2d_{n-1} + d_n = 0$$

Το γραμμικό σύστημα είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ f_0 - 2f_1 + f_2 \\ f_1 - 2f_2 + f_3 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Απαλείφοντας τα d_0 και d_n από την δεύτερη και την $n-1$ εξίσωση λαμβάνουμε το γραμμικό σύστημα

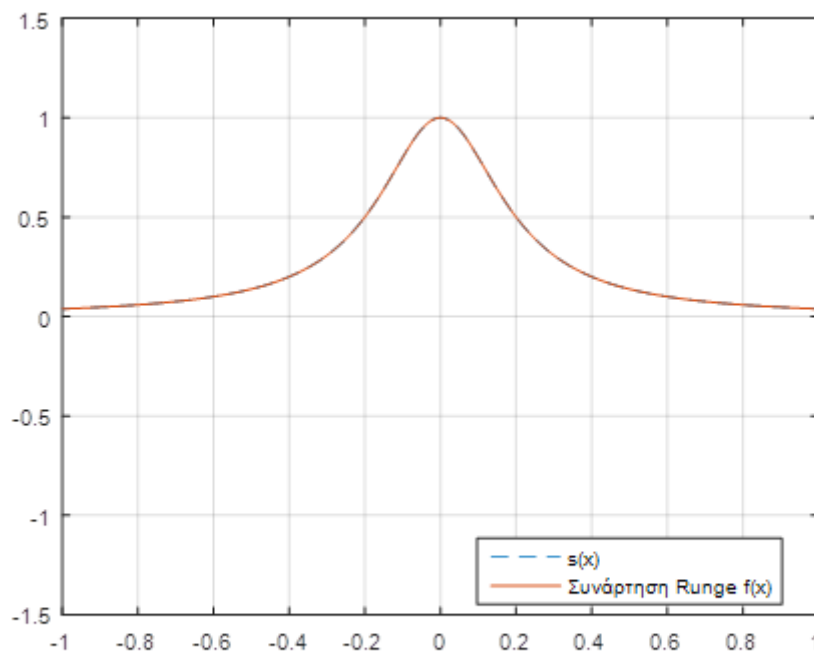
$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} f_0 - 2f_1 + f_2 \\ f_1 - 2f_2 + f_3 \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{bmatrix}$$

του οποίου ο πίνακας συντελεστών έχει αυστηρή διαγώνια υπεροχή και συνεπώς αντιστρέφεται.

Άρα υπάρχει μοναδική κυβική spline με ‘not - a - knot’ συνοριακές συνθήκες για $n \geq 3$.

Στο σχήμα 2.6 βλέπουμε την κυβική spline παρεμβολής της συνάρτησης του Runge σε ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[-1,1]$. Παρατηρούμε ότι δεν φαίνεται καμία διαφορά μεταξύ της συνάρτησης Runge και της κυβικής spline παρεμβολής.

Η spline αυτή κατασκευάστηκε με την εντολή spline του matlab που χρησιμοποιεί “not - a - knot” συνοριακές συνθήκες.



Σχήμα 2.6: Παρεμβολή με κυβική spline $s(x)$ της συνάρτησης Runge. Ομοιόμορφος διαμερισμός.

Παρατήρηση 2.2

Η γενίκευση για μη ομοιόμορφο διαμερισμό δεν παρουσιάζει πρόβλημα.

Η σχέση (2.6) παραμένει ίδια με $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ στη θέση του h . Το γραμμικό σύστημα (2.7) παίρνει τη μορφή

$$h_i d_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})d_i + h_{i+1}d_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}\right), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Κατασκευή κυβικών splines παρεμβολής συναρτήσεων των τιμών $m_i = s'(x_i)$

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση Newton του κυβικού πολυωνύμου Hermite η s μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$s(x) = f_{i-1} + s[x_{i-1}, x_{i-1}](x - x_{i-1}) + s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})^2 + \\ + s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i](x - x_{i-1})^2(x - x_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (2.11)$$

όπου

$$s[x_{i-1}, x_{i-1}] = f'_{i-1} = m_{i-1} \\ s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] = \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{h} (f_i - f_{i-1}) - m_{i-1} \right\} \\ s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i] = \frac{1}{h^2} \left\{ m_i - \frac{2}{h} (f_i - f_{i-1}) + m_{i-1} \right\}$$

Άρα

$$s'(x) = s[x_{i-1}, x_{i-1}] + 2s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1}) + \\ + s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i]\{2(x - x_{i-1})(x - x_i) + (x - x_{i-1})^2\}$$

και

$$s''(x) = 2s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] + \\ + s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i]\{2(x - x_i) + 4(x - x_{i-1})\}. \quad (2.12)$$

Ο παραπάνω τρόπος κατασκευής συνεπάγεται ότι τόσο η s όσο και η πρώτη παράγωγος της, s' , είναι συνεχείς στο $[a, b]$. Για την συνέχεια της s'' πρέπει επίσης να ισχύει

$$s''(x_i^-) = s''(x_i^+) \quad , \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (2.13)$$

Από την (2.12) έχουμε

$$s''(x_i^-) = 2s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] + 4hs[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i] = \frac{2}{h}(m_{i-1} + 2m_i) - \frac{6}{h^2}(f_i - f_{i-1})$$

Από την (2.12) αν $x \in [x_i, x_{i+1}]$ τότε

$$\begin{aligned} s''(x_i^+) &= 2s[x_i, x_i, x_{i+1}] - 2hs[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}] \\ &= -\frac{2}{h}(2m_i + m_{i+1}) + \frac{6}{h^2}(f_{i+1} - f_i) \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι συνθήκες συνέχειας (2.13) οδηγούν στις $n - 1$ σχέσεις

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3}{h}(f_{i+1} - f_{i-1}) \quad , \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (2.14).$$

Οι εξισώσεις συνέχειας (2.14) μαζί με δύο επιπλέον εξισώσεις που προκύπτουν από τις δύο συνθήκες άκρων δίνουν ένα σύστημα $n + 1$ γραμμικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των $n + 1$ αγνώστων συντελεστών m_0, m_1, \dots, m_n της αναπαράστασης (2.11).

Στην περίπτωση συνοριακών τιμών 1^{ης} παραγώγου $s'(x_0) = f'(x_0)$, $s'(x_n) = f'(x_n)$ οι δύο επιπλέον συνθήκες είναι προφανείς.

Στην περίπτωση συνοριακών τιμών 2^{ης} παραγώγου $s''(x_0) = f''(x_0)$, $s''(x_n) = f''(x_n)$ μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των παραμέτρων m_i ως εξής:

$$\begin{aligned} 2m_0 + m_1 &= \frac{3}{h}(f_1 - f_0) - \frac{h}{2}f''(x_0) \\ m_{n-1} + 2m_n &= \frac{3}{h}(f_n - f_{n-1}) + \frac{h}{2}f''(x_n) \end{aligned}$$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή το γραμμικό σύστημα για τον υπολογισμό των παραμέτρων m_i , $i = 0, \dots, n$ της αναπαράστασης (2.11) της s είναι το εξής:

$$\begin{aligned} 2m_0 + m_1 &= \frac{3}{h}(f_1 - f_0) - \frac{h}{2}f''(x_0) \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} &= \frac{3}{h}(f_{i+1} - f_{i-1}) \quad , \quad i = 1, \dots, n - 1 \\ m_{n-1} + 2m_n &= \frac{3}{h}(f_n - f_{n-1}) + \frac{h}{2}f''(x_n) \end{aligned}$$

Ελάχιστες ιδιότητες

Θεώρημα 2.5

Έστω $f \in C^2[\alpha, b]$. Αν η spline s παρεμβάλλει την f στα σημεία x_0, \dots, x_n και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $s''(x_0) = 0$, $s''(x_n) = 0$, τότε για οποιαδήποτε συνάρτηση g που παρεμβάλλει την f στα σημεία x_0, \dots, x_n , ισχύει

$$\int_{\alpha}^b (g'')^2 dx = \int_{\alpha}^b (g'' - s'')^2 dx + \int_{\alpha}^b (s'')^2 dx$$

και

$$\int_{\alpha}^b (g'')^2 dx \geq \int_{\alpha}^b (s'')^2 dx$$

Απόδειξη

Μπορούμε να γράψουμε

$$g'' = (g'' - s'') + s''$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη έχουμε

$$\int_{\alpha}^b (g'')^2 dx = \int_{\alpha}^b (g'' - s'')^2 dx + 2 \int_{\alpha}^b (g'' - s'')s'' dx + \int_{\alpha}^b (s'')^2 dx$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος και ο τελευταίος όρος του δεύτερου μέλους είναι μη αρνητικοί. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη το δεύτερο όρο του δεύτερου μέλους έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^b (g'' - s'')s'' dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g'' - s'')s'' dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (g' - s')s'' \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s'''(g' - s') dx \end{aligned}$$

Επειδή οι g' , s' , s'' είναι συνεχείς

$$\sum_{i=0}^{n-1} (g' - s')s'' \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = [g'(b) - s'(b)]s''(b) - [g'(\alpha) - s'(\alpha)]s''(\alpha) = 0$$

Άρα, επειδή η s''' είναι σταθερή, έστω c_i , σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^b (g'' - s'')s'' dx &= - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g' - s') dx \\
&= - \sum_{i=0}^{n-1} c_i (g - s)|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&= - \sum_{i=0}^{n-1} c_i [(g(x_{i+1}) - s(x_{i+1})) - (g(x_i) - s(x_i))] = 0
\end{aligned}$$

αφού η g και η s παρεμβάλλουν την f .

Συνεπώς

$$\int_{\alpha}^b (g'')^2 dx = \int_{\alpha}^b (g'' - s'')^2 dx + \int_{\alpha}^b (s'')^2 dx$$

οπότε και

$$\int_{\alpha}^b (g'')^2 dx = \int_{\alpha}^b (g'' - s'')^2 dx + \int_{\alpha}^b (s'')^2 dx \geq \int_{\alpha}^b (s'')^2 dx$$



Θεώρημα 2.6

Έστω $f \in C^2[\alpha, b]$ και s κυβική spline που παρεμβάλλει την f στα σημεία x_0, \dots, x_n και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$f'(x_0) = s'(x_0),$$

$$f'(x_n) = s'(x_n),$$

τότε για οποιαδήποτε συνάρτηση g που παρεμβάλλει την f στα σημεία x_0, \dots, x_n και ικανοποιεί τις ίδιες συνοριακές συνθήκες ισχύει

$$\int_{\alpha}^b (g'')^2 dx \geq \int_{\alpha}^b (s'')^2 dx$$

Απόδειξη

Εργαζόμαστε όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 2.5.

Η παρακάτω σχέση

$$\sum_{i=0}^{n-1} (g' - s')s''|_{x_i}^{x_{i+1}} = [g'(b) - s'(b)]s''(b) - [g'(a) - s'(a)]s''(a)$$

μηδενίζεται τώρα διότι σύμφωνα με τα δεδομένα ισχύουν $g'(x_0) = f'(x_0)$ και $g'(x_n) = f'(x_n)$.

Οπότε καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. ■

Παρατήρηση 2.3

Η καμπυλότητα $k(x)$ στο σημείο x μιας καμπύλης που εκφράζεται από τη συνάρτηση $y = g(x)$ δίνεται από τη σχέση

$$k(x) = \frac{g''(x)}{(1+(g'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Αν υποθέσουμε ότι $|g'(x)| \ll 1$ τότε έχουμε

$$\int_a^b (k(x))^2 dx \cong \int_a^b (g''(x))^2 dx .$$

Επομένως οι ιδιότητες του θεωρήματος 2.5 και του θεωρήματος 2.6 των κυβικών splines συνεπάγονται ότι η κυβική spline παρεμβολής s ελαχιστοποιεί το $\int_a^b (k(x))^2 dx$ της καμπυλότητας k για όλες τις συναρτήσεις $g \in C^2[\alpha, b]$ που ικανοποιούν τις ίδιες συνθήκες παρεμβολής με την s .

Σφάλμα παρεμβολής με κυβικές splines

Θεώρημα 2.7

Έστω $\Delta: \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του διαστήματος $[\alpha, b]$,

$$h := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

$f \in C^4[\alpha, b]$ και $s \in S_3(\Delta)$ η spline για την οποία ισχύουν οι συνθήκες (2.8). Τότε υπάρχουν σταθερές C_m , $m = 0, 1, 2, 3$, ανεξάρτητες των f και h τέτοιες ώστε

$$\|f^{(m)} - s^{(m)}\|_{\infty} \leq C_m h^{4-m} \|f^{(4)}\|_{\infty}, \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

Παρατήρηση 2.4

Η σχέση (2.15) ισχύει με τις εξής τιμές των σταθερών:

$$C_0 = \frac{5}{384}, C_1 = \frac{1}{24}, C_2 = \frac{3}{8}, C_3 = \frac{1}{2}(M + M^{-1})$$

$$\text{όπου } M := \frac{h}{\min_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})}.$$

Επιπλέον οι σταθερές C_0, C_1 είναι οι καλύτερες δυνατές με την έννοια ότι

$$C_k = \sup \frac{\|(f - s)^{(k)}\|_{\infty}}{h^{4-k} \|f^{(4)}\|_{\infty}} \quad k = 0, 1,$$

όπου το \sup λαμβάνεται για όλους τους διαμερισμούς και όλες τις $f \in C^4[\alpha, b]$ με $f^{(4)} \not\equiv 0$. (Βλέπε (10))

Ανάλογες εκτιμήσεις σφαλμάτων ισχύουν για τη spline παρεμβολής με συνοριακές συνθήκες δευτέρων παραγώγων.

Αν s είναι φυσική spline παρεμβολής της f και οι τιμές $f''(x_0), f''(x_n)$ δεν είναι και οι δύο μηδενικές τότε η τάξη προσέγγισης μειώνεται από $O(h^{4-m})$ σε $O(h^{2-m})$.

2.5 B-splines

Έστω $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n(x; t) := (t - x)_+^{n-1} = \begin{cases} (t - x)^{n-1}, & t \geq x \\ 0, & t < x \end{cases} \quad (2.16)$$

Ορισμός 2.5

Η συνάρτηση B-spline $M_{n,i}$, τάξης n (βαθμού $n - 1$) και με κόμβους στα $n + 1$ σημεία $x_i < x_{i+1} < \dots < x_{i+n}$, $i \in \mathbb{Z}$ είναι η διαιρεμένη διαφορά της συνάρτησης $M_n(x; t)$ ως προς τη μεταβλητή t στα σημεία αυτά. Δηλαδή

$$M_{n,i}(x) := M_n[x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}]. \quad (2.17)$$

Επειδή η διαιρεμένη διαφορά μιας συνάρτησης f στα σημεία $x_i < x_{i+1} < \dots < x_{i+n}$, $i \in \mathbb{Z}$ είναι

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \sum_{k=i}^{i+n} \frac{f(x_k)}{\Phi'_{n+1,i}(x_k)},$$

όπου $\Phi_{n+1,i}(t) := (t - x_i)(t - x_{i+1}) \dots (t - x_{i+n})$

ο ορισμός 2.5 συνεπάγεται ότι

$$M_{n,i}(x) = M_n[x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=i}^{i+n} \frac{M_n(x; x_k)}{\Phi'_{n+1,i}(x_k)} \\ &= \sum_{k=i}^{i+n} \frac{(x_k - x)_+^{n-1}}{\Phi'_{n+1,i}(x_k)}. \end{aligned}$$

Άρα

$$M_{n,i}(x) = \sum_{k=i}^{i+n} \alpha_k (x_k - x)_+^{n-1},$$

όπου

$$\alpha_k = \frac{1}{\Phi'_{n+1,i}(x_k)}.$$

Δηλαδή η $M_{n,i}$ είναι μια συνάρτηση spline βαθμού $n - 1$ και με κόμβους στα $n + 1$ σημεία $x_i < x_{i+1} < \dots < x_{i+n}$, $i \in \mathbb{Z}$.

Αν $x > x_{i+n}$ τότε $(x_k - x)_+^{n-1} = 0$, $i \leq k \leq i + n$ και αν $x < x_i$, τότε η $M_{n,i}$ είναι η διαιρεμένη διαφορά ενός πολυωνύμου βαθμού $n - 1$. Συνεπώς, η $M_{n,i}$ μηδενίζεται εκτός του διαστήματος $[x_i, x_{i+n}]$. Δηλαδή

$$M_{n,i}(x) = 0, \quad x \notin [x_i, x_{i+n}]. \quad (2.18)$$

Παρατήρηση 2.5

Η συνάρτηση $M_{1,i}$ είναι ιδιαίτερα απλή. Έχει δύο κόμβους, x_i και $x_{i+1} := x_i + h$, και δίνεται από την τμηματικά σταθερή συνάρτηση

$$M_{1,i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin (x_i, x_{i+1}] \end{cases} \quad (2.19)$$

Θεωρούμε το χώρο $S_{n-1}(\Delta_{k+1})$, όπου

$$\Delta_{k+1}: \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_{k+1} = b,$$

και θέτουμε $s \in S_{n-1}(\Delta_{k+1})$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.1 η s στο διάστημα $[x_0, x_{k+1}]$ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i x^i + \sum_{i=1}^k c_i (x - x_i)_+^{n-1}.$$

Η χρήση της βάσης του θεωρήματος 2.1 για την αναπαράσταση των συναρτήσεων *splines* διευκολύνει την ανάπτυξη της θεωρίας και συνεπώς προσφέρεται για θεωρητικούς σκοπούς. Στην πράξη όμως η χρήση της βάσης αυτής παρουσιάζει σοβαρά μειονεκτήματα. Τα γραμμικά συστήματα για τον υπολογισμό των β_i, c_i που προκύπτουν από την εφαρμογή των συνθηκών παρεμβολής είναι συνήθως κακής κατάστασης.

Ο υπολογισμός της *spline* σε κάποιο σημείο $x \in [\alpha, b]$ είναι αριθμητικά ασταθής και αριθμητικά δαπανηρός ιδίως αν το σημείο x βρίσκεται στο δεξιό άκρο του διαστήματος, γιατί τότε είναι απαραίτητος ο υπολογισμός όλων των στοιχείων της βάσης στο σημείο x .

Οι πιο πάνω δυσκολίες μπορούν να αποφευχθούν χρησιμοποιώντας σαν βάση του $S_{n-1}(\Delta_{k+1})$ τις συναρτήσεις *B-splines*.

Το κύριο αποτέλεσμα είναι το θεώρημα 2.9, το οποίο δείχνει ότι το σύνολο των συναρτήσεων *B-spline* $\{M_{n,i}\}_{i=-n+1}^k$ αποτελεί βάση του γραμμικού χώρου $S_{n-1}(\Delta_{k+1})$. Δηλαδή, σύμφωνα με αυτό το θεώρημα, κάθε συνάρτηση $s \in S_{n-1}(\Delta_{k+1})$, μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$s(x) = \sum_{i=-n+1}^k d_i M_{n,i}(x), \quad x \in [x_0, x_{k+1}]. \quad (2.20)$$

Η σημασία του αποτελέσματος αυτού είναι ότι οι συναρτήσεις *B-spline* προσφέρουν μια βάση “καλής κατάστασης” για την αναπαράσταση των

συναρτήσεων spline. Είναι εύκολο ναδειχτεί, για κάθε $x \in [x_0, x_{k+1}]$, μόνο n από τις $k + n$ συναρτήσεις $M_{n,i}$, $i = -n + 1, -n + 2, \dots, k$, είναι μη μηδενικές.

Πιο συγκεκριμένα

$$s(x) = \sum_{i=j-n+1}^j d_i M_{n,i}(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad (2.21)$$

και ο τοπικός χαρακτήρας της σχέσης (2.21) οδηγεί σε υπολογιστικά οφέλη.

Ορισμός 2.6

Ο φορέας μιας συνάρτησης f είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το

$$\{x : f(x) \neq 0\}.$$

Θεώρημα 2.8

Ο φορέας μιας συνάρτησης spline s , βαθμού $n - 1$ και με κόμβους $\{x_i\}$, όπου $x_i < x_{i+1}$, δεν μπορεί να είναι ο μικρότερος από n διαδοχικά διαστήματα $[x_j, x_{j+1}]$, εκτός αν $s(x) = 0, \forall x$.

Απόδειξη

Πρέπει να δείξουμε ότι αν ο φορέας I της s αποτελείται από $n - 1$ διαδοχικά διαστήματα $[x_j, x_{j+1}]$, τότε $s(x) = 0, \forall x$. Έστω ότι $I = [x_1, x_n]$. Έχουμε υποθέσει δηλαδή ότι

$$s(x) = 0, \quad \text{για } x < x_1 \quad (2.22)$$

και

$$s(x) = 0, \quad \text{για } x > x_n. \quad (2.23)$$

Λόγω της (2.22) η s μπορεί να εκφραστεί ως

$$s(x) = c_1(x - x_1)_+^{n-1} + c_2(x - x_2)_+^{n-1} + \dots + c_n(x - x_n)_+^{n-1} \quad (2.24)$$

όπου οι κάτω δείκτες + μπορούν να αγνοηθούν αν $x > x_n$. Συνεπώς η (2.23) συνεπάγεται ότι

$$s(x) = c_1(x - x_1)^{n-1} + c_2(x - x_2)^{n-1} + \dots + c_n(x - x_n)^{n-1} = 0, \quad x > x_n$$

ή ισοδύναμα αναπτύσσοντας τα διώνυμα και μηδενίζοντας τους συντελεστές των δυνάμεων της x , έχουμε

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_0 & \dots & b_0 \\ b_1 x_1 & b_1 x_2 & \dots & b_1 x_n \\ b_2 x_1^2 & b_2 x_2^2 & \dots & b_2 x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} x_1^{n-1} & b_{n-1} x_2^{n-1} & \dots & b_{n-1} x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

όπου b_i είναι οι διωνυμικοί συντελεστές

$$b_i = (-1)^i \frac{(n-1)!}{(n-1-i)!i!}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ο πίνακας A του πιο πάνω $n \times n$ ομογενούς γραμμικού συστήματος μπορεί να γραφτεί ως

$$A = DV,$$

όπου D είναι ο διαγώνιος πίνακας

$$D := \text{diag}(d_i), \quad \text{με } d_i := b_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

και V ο πίνακας

$$V := (v_{i,j}), \quad \text{με } v_{i,j} := x_j^{i-1}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Προφανώς $\det D \neq 0$. Επίσης η $\det V$ είναι μια ορίζουσα Vandermonde και τα σημεία x_1, \dots, x_n είναι διακεκριμένα, $\det V \neq 0$. Άρα

$$\det A = \det D \det V \neq 0.$$

Συνεπώς ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, το γραμμικό σύστημα (2.25) έχει μόνο την τετριμμένη μηδενική λύση $c_1 = \dots = c_n = 0$ και από την (2.24) έπεται ότι $s(x) = 0, \forall x$.



Θεώρημα 2.9

Έστω $\{x_i\}_{i=-n+1}^{k+n}$, $k+2n$ σημεία τέτοια ώστε $x_i < x_{i+1}$. Τότε κάθε συνάρτηση spline $s \in S_{n-1}(\Delta_{k+1})$, όπου

$$\Delta_{k+1}: x_0 < x_1 < \dots < x_{k+1}$$

μπορεί να εκφραστεί μονοσήμαντα ως

$$s(x) = \sum_{i=-n+1}^k d_i M_{n,i}(x) \quad , \quad x \in [x_0, x_{k+1}].$$

Απόδειξη: Βλέπε [4].



Το επόμενο θεώρημα μας δίνει τον αναδρομικό τύπο (2.26) που οδηγεί σε ευσταθείς και ιδιαίτερα αποτελεσματικούς αλγορίθμους για τον υπολογισμό των συναρτήσεων B-spline.

Θεώρημα 2.10

Για $n > 1$ και κάθε x

$$M_{n,i}(x) = \frac{1}{x_{i+n} - x_i} \{ (x - x_i) M_{n-1,i}(x) + (x_{i+n} - x) M_{n-1,i+1}(x) \} \quad (2.26)$$

Απόδειξη

Η $M_{n,i}$ είναι

$$M_{n,i}(x) := M_n[x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}]$$

όπου

$$\begin{aligned} M_n(x; t) &= (t - x)_+^{n-1} \\ &= (t - x)(t - x)_+^{n-2} \\ &= (t - x)M_{n-1}(x; t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Η πρώτη διαιρεμένη διαφορά του πολυωνύμου $t - x$ είναι 1 και οι άλλες διαφορές 0. Συνεπώς η εφαρμογή του τύπου Leibniz στο γινόμενο (2.27) δίνει ότι

$$\begin{aligned} M_{n,i}(x) &= M_n[x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] \\ &= (x_i - x)M_{n-1}[x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] + 1 \cdot M_{n-1}[x; x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] \\ &= (x_i - x)M_{n-1}[x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] + M_{n-1,i+1}(x). \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} M_{n-1}[x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] &= \frac{1}{x_{i+n} - x_i} \{M_{n-1}[x; x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - M_{n-1}[x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]\} \\ &= \frac{1}{x_{i+n} - x_i} \{M_{n-1,i+1}(x) - M_{n-1,i}(x)\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} M_{n,i}(x) &= \frac{x_i - x}{x_{i+n} - x_i} \{M_{n-1,i+1}(x) - M_{n-1,i}(x)\} + M_{n-1,i+1}(x) \\ &= \frac{1}{x_{i+n} - x_i} \{(x - x_i)M_{n-1,i}(x) + (x_{i+n} - x)M_{n-1,i+1}(x)\} \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 2.6

Ο αναδρομικός τύπος (2.26) οφείλεται στους C. De Boor και M.G.Cox, οι οποίοι τον απέδειξαν το 1972, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον στις δημοσιεύσεις [7] και [8] αντίστοιχα.

Παρατήρηση 2.7

Επειδή $M_{n,i}(x) > 0$, $x \in (x_i, x_{i+n})$ και $M_{n,i}(x) = 0$, $x \notin [x_i, x_{i+n}]$, ο τύπος (2.26) οδηγεί σε ευσταθείς αναδρομικούς αλγορίθμους (που βασίζονται στον υπολογισμό θετικών γραμμικών συνδιασμών μη αρνητικών τιμών) για τον υπολογισμό των συναρτήσεων B-spline. Η σημαντική αυτή ιδιότητα του (2.26) σε συνδυασμό με τον τοπικό χαρακτήρα των συναρτήσεων B-spline, έχουν καθιερώσει τις B-spline ως τις συναρτήσεις που προσφέρουν την πιο κατάλληλη βάση για την αναπαράσταση συναρτήσεων spline.

Παρατήρηση 2.8

Η αναπαράσταση

$$s(x) = \sum_{i=-n+1}^k d_i M_{n,i}(x), \quad x \in [x_0, x_{k+1}],$$

μιας συνάρτησης spline $s \in S_{n-1}(\Delta_{k+1})$, με

$$\Delta_{k+1}: x_0 < x_1 < \dots < x_{k+1},$$

απαιτεί τον προσδιορισμό $2n - 2$ επιπρόσθετων κόμβων

$$x_{-n+1}, x_{-n+2}, \dots, x_{-1} \text{ και } x_{k+2}, \dots, x_{k+n}.$$

Δύο κατάλληλες επιλογές των επιπρόσθετων αυτών κόμβων είναι οι εξής:

- i) $x_{-i} := x_0 - ih$ και $x_{k+1+i} := x_{k+1} + ih$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, όπου $h := \frac{x_{k+1} - x_0}{k+1}$
- ii) $x_{-i} := x_0 - ih_1$ και $x_{k+1+i} := x_{k+1} + ih_{k+1}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, όπου $h_1 := x_1 - x_0$ και $h_{k+1} := x_{k+1} - x_k$.

Ορισμός 2.7

Η κανονικοποιημένη συνάρτηση B-spline είναι

$$N_{n,i}(x) = (x_{i+n} - x_i)M_{n,i}(x)$$

Η $N_{1,i}$ δίνεται από την τμηματικά σταθερή συνάρτηση

$$N_{1,i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin (x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τα $N_{n,i}(x)$ η σχέση (2.26) γίνεται

$$N_{n,i}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+n-1} - x_i} N_{n-1,i}(x) + \frac{x_{i+n} - x}{x_{i+n} - x_{i+1}} N_{n-1,i+1}(x). \quad (2.28)$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} N_{n,i}(x) &= (x_{i+n} - x_i)M_{n,i}(x) \\ &= (x_{i+n} - x_i) \frac{1}{x_{i+n} - x_i} \{(x - x_i)M_{n-1,i}(x) + (x_{i+n} - x)M_{n-1,i+1}(x)\} \end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} N_{n-1,i}(x) &= (x_{i+n-1} - x_i)M_{n-1,i}(x) \\ N_{n-1,i+1}(x) &= (x_{i+1+n-1} - x_{i+1})M_{n-1,i+1}(x) \\ &= (x_{i+n} - x_{i+1})M_{n-1,i+1}(x) \end{aligned}$$

Άρα

$$N_{n,i}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+n-1} - x_i} N_{n-1,i}(x) + \frac{x_{i+n} - x}{x_{i+n} - x_{i+1}} N_{n-1,i+1}(x).$$

Παρατήρηση 2.9

Οι B-splines είναι δυνατόν να ορισθούν και στην περίπτωση που μερικοί κόμβοι συμπίπτουν, με την κατάλληλη επέκταση του ορισμού των διαιρεμένων διαφορών:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \begin{cases} \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, & \text{αν } x_0 < x_1 < \dots < x_n \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, & \text{αν } x_0 = x_1 = \dots = x_n \end{cases}$$

Αν m ($1 < m < n + 1$) από τους κόμβους $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}$ συμπίπτουν στο σημείο c η διαιρεμένη διαφορά $f[x_0, \dots, x_n]$ θα περιέχει την $(m - 1)$ παράγωγο της f στο σημείο c . Έτσι η $N_{n,i}$ θα είναι τουλάχιστον $(n - 1 - m)$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

Στην περίπτωση κόμβων που συμπίπτουν έχουμε παραδείγματος χάριν

$$N_{1,i} = 0, \text{ αν } x_i = x_{i+1},$$

και οι αντίστοιχοι όροι παραλείπονται στη σχέση (2.28) σύμφωνα με τη σύμβαση $\frac{0}{0} = 0$.

Έτσι, ακόμα και αν οι κόμβοι συμπίπτουν, οι B-splines $N_{n,i}$ είναι καλά ορισμένες από τη σχέση (2.28).

Γραμμικές B-splines

Γνωρίζουμε ότι

$$N_{1,i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

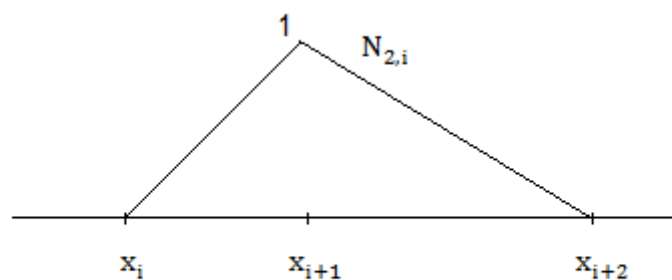
$$N_{1,i+1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση (2.28) έχουμε

$$N_{2,i}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} N_{1,i}(x) + \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} N_{1,i+1}(x)$$

$$= \begin{cases} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}}, & x \in (x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Για $x_i < x_{i+1} < x_{i+2}$ η γραφική παράσταση της $N_{2,i}(x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 2.7: Γραφική παράσταση της $N_{2,i}$ για $x_i < x_{i+1} < x_{i+2}$.

Ομοίως

$$N_{2,i+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}}, & x \in (x_{i+1}, x_{i+2}] \\ \frac{x_{i+3} - x}{x_{i+3} - x_{i+2}}, & x \in (x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για $x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]$

$$\sum_j N_{2,j}(x) = N_{2,i}(x) + N_{2,i+1}(x) = 1.$$

Έστω $\Delta: \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[\alpha, b]$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\varphi_i(x) = N_{2,i-1}(x), \quad i = 0, \dots, n.$$

Η φ_0 και φ_n είναι μόνο το μέρος ορισμένο στο διάστημα $[x_0, x_1]$ και $[x_{n-1}, x_n]$ αντίστοιχα.

Δηλαδή σχηματικά έχουμε



Οι συναρτήσεις $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ αποτελούν μια βάση του $S_1(\Delta)$ και κάθε $s \in S_1(\Delta)$ γράφεται στη μορφή

$$s(x) = \sum_{i=0}^n s(x_i) \varphi_i(x).$$

Παρατηρούμε ότι ο φορέας των συναρτήσεων βάσης φ_i είναι μικρός, πράγμα σημαντικό για τις εφαρμογές.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο παράδειγμα της παραγράφου 2.3.

Η s γράφεται στη μορφή:

$$s(x) = 1.3\varphi_0 + \dots + 2.4\varphi_4 + 0.2\varphi_5 + 1.3\varphi_6 + \dots + 1.3\varphi_{10}$$

και για $x = 9.5$ εδώ έχουμε ότι

$$s(9.5) = 1.3\varphi_9(9.5) + 1.3\varphi_{10}(9.5)$$

και με αριθμητική 2 σημαντικών ψηφίων προκύπτει ότι

$$s(9.5) = 1.3.$$

Τετραγωνικές B-splines

Από την αναδρομική σχέση (2.28) έχουμε

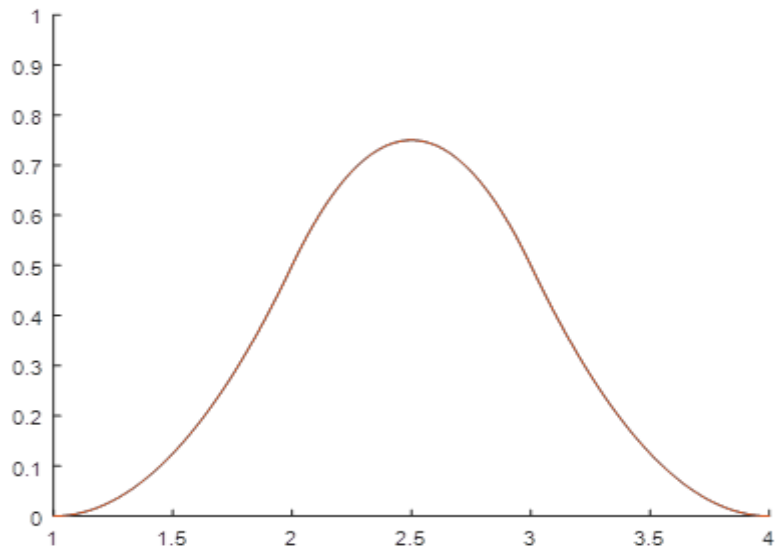
$$N_{3,i}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+2} - x_i} N_{2,i}(x) + \frac{x_{i+3} - x}{x_{i+3} - x_{i+1}} N_{2,i+1}(x)$$

$$= \begin{cases} \frac{x-x_i}{x_{i+2}-x_i} \cdot \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} , & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ \frac{x-x_i}{x_{i+2}-x_i} \cdot \frac{x_{i+2}-x}{x_{i+2}-x_{i+1}} + \frac{x_{i+3}-x}{x_{i+3}-x_{i+1}} \cdot \frac{x-x_{i+1}}{x_{i+2}-x_{i+1}} , & x \in (x_{i+1}, x_{i+2}] \\ \frac{x_{i+3}-x}{x_{i+3}-x_{i+1}} \cdot \frac{x_{i+3}-x}{x_{i+3}-x_{i+2}} , & x \in (x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 0 , & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Στην περίπτωση που τα σημεία είναι ισαπέχοντα έχουμε ότι

$$N_{3,i}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)^2}{2h^2} , & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ \frac{h^2+2h(x-x_{i+1})-2(x-x_{i+1})^2}{2h^2} , & x \in (x_{i+1}, x_{i+2}] \\ \frac{(x_{i+3}-x)^2}{2h^2} , & x \in (x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 0 , & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $N_{3,i}(x)$ για $x \in (1,4]$ στην περίπτωση που τα σημεία είναι ισαπέχοντα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 2.8: Γραφική παράσταση της $N_{3,i}$ για $x \in (1,4]$.

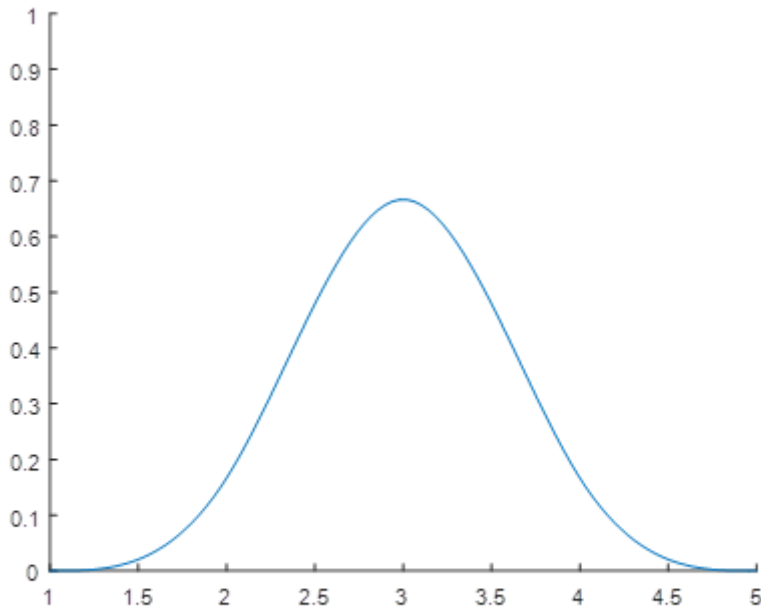
Κυβικές B-splines

$$N_{4,i}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+3} - x_i} N_{3,i}(x) + \frac{x_{i+4} - x}{x_{i+4} - x_{i+1}} N_{3,i+1}(x)$$

Στην περίπτωση ισαπέχοντων σημείων προκύπτει

$$N_{4,i}(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x - x_i)^3, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i+1}) + 3h(x - x_{i+1})^2 - 3(x - x_{i+1})^3, & x \in (x_{i+1}, x_{i+2}] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+3} - x) + 3h(x_{i+3} - x)^2 - 3(x_{i+3} - x)^3, & x \in (x_{i+2}, x_{i+3}] \\ (x_{i+4} - x)^3, & x \in (x_{i+3}, x_{i+4}] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $N_{4,i}(x)$ για $x \in (1,5]$ στην περίπτωση που τα σημεία είναι ισαπέχοντα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 2.9: Γραφική παράσταση της $N_{4,i}$ για $x \in (1,5]$.

Έστω $\Delta: \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ομοιόμορφος διαμερισμός του $[\alpha, b]$.

Οι $n + 3$ συναρτήσεις φ_i , $i = -3, \dots, n - 1$, που ορίζονται ως $\varphi_i = N_{4,i}|_{[\alpha,b]}$ αποτελούν βάση του χώρου $S_3(\Delta)$ με μικρό φορέα, γιατί $N_{4,i} = 0$ αν $x \notin (x_i, x_{i+4}]$. Χρησιμοποιώντας την βάση αυτή μπορούμε, λύνοντας γραμμικά συστήματα με αραιούς πίνακες, να λύσουμε αποτελεσματικά διάφορα προβλήματα όπως για παράδειγμα διαφορικές εξισώσεις με μεθόδους Galerkin, το πρόβλημα της παρεμβολής στον $S_3(\Delta)$ κλπ.

Υπολογισμός και παραγωγή των splines

Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση

$$F(x) = \sum_i A_i N_{n,i}(x) \quad (2.29)$$

στο σημείο $\hat{x} \in (x_j, x_{j+1}]$ είναι αναγκαίο να υπολογιστούν οι n αριθμοί

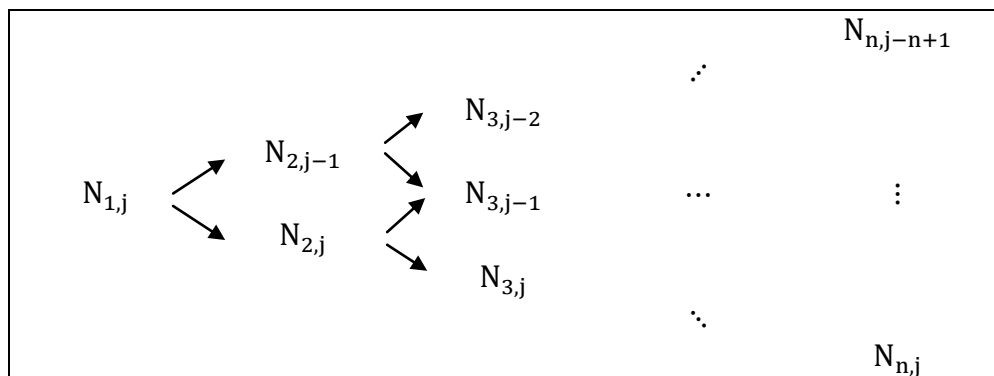
$$N_{n,i}(\hat{x}), \quad i = j - n + 1, \dots, j.$$

Το $N_{1,j}(\hat{x})$ είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$. Τα $N_{2,j}(\hat{x}), N_{2,j-1}(\hat{x})$ είναι μη μηδενικά επειδή και τα δυο χρησιμοποιούν το $N_{1,j}(\hat{x})$.

Ομοίως τα $N_{3,j}(\hat{x}), N_{3,j-1}(\hat{x}), N_{3,j-2}(\hat{x})$ είναι μη μηδενικά επειδή χρησιμοποιούν τα $N_{2,j}(\hat{x}), N_{2,j-1}(\hat{x})$.

Χρησιμοποιώντας επαναληπτικά αυτό το επιχείρημα έχουμε ότι υπάρχουν n μη μηδενικά

$$N_{n,i}(\hat{x}), \quad i = j - n + 1, \dots, j.$$



Παρατηρούμε ότι όσο η τάξη των B-splines μεγαλώνει, ο αριθμός των μη μηδενικών B-splines στο διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ αυξάνει.

Τότε η $F(\hat{x})$ δίνεται από τον τύπο

$$F(\hat{x}) = \sum_{i=j-n+1}^j A_i N_{n,i}(\hat{x}).$$

Η παραγωγή της $F(x)$ είναι εξίσου απλή.

Έστω $f[x; x_0, \dots, x_n]$ η διαιρεμένη διαφορά τάξης n μιας συνάρτησης $f(x, t)$ ως προς την μεταβλητή t στα $n + 1$ διακεκριμένα σημεία x_0, \dots, x_n . Τότε

$$f[x; x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x, x_j).$$

Άρα

$$\frac{\partial}{\partial x} f[x; x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial x} f(x, x_j).$$

Δηλαδή η παράγωγος, ως προς την μεταβλητή x , της $f[x; x_0, \dots, x_n]$ είναι η διαιρεμένη διαφορά ως προς την μεταβλητή t της παραγώγου $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)$ στα σημεία x_0, \dots, x_n . Συνεπώς η παράγωγος $M_{n,i}^{(1)}(x)$ της B-spline $M_{n,i}$ είναι η διαιρεμένη διαφορά ως προς την μεταβλητή t της συνάρτησης

$$\frac{\partial}{\partial x} M_n(x, t) = -(n-1)(t-x)_+^{n-2} = -(n-1)M_{n-1}(x, t).$$

Έτσι

$$\begin{aligned} N_{n,i}^{(1)}(x) &= \frac{d}{dx} [(x_{i+n} - x_i)M_{n,i}(x)] \\ &= \frac{d}{dx} [(x_{i+n} - x_i)M_n[x; x_i, \dots, x_{i+n}]] \\ &= \frac{d}{dx} \left[(x_{i+n} - x_i) \frac{M_n[x; x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - M_n[x; x_i, \dots, x_{i+n-1}]}{(x_{i+n} - x_i)} \right] \\ &= -(n-1)[M_{n-1,i+1}(x) - M_{n-1,i}(x)]. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} F^{(1)}(x) &= (n-1) \sum_i A_i [M_{n-1,i}(x) - M_{n-1,i+1}(x)] \\ &= (n-1) \sum_i A_i^{(1)} N_{n-1,i}(x) \end{aligned}$$

όπου

$$A_i^{(1)} = \frac{A_i - A_{i-1}}{x_{i+n-1} - x_i}.$$

Πιο γενικά με

$$\begin{aligned} A_i^{(0)} &= A_i \\ A_i^{(j)} &= \frac{A_i^{(j-1)} - A_{i-1}^{(j-1)}}{x_{i+n-j} - x_i}, \quad j > 0, \end{aligned}$$

προκύπτει

$$F^{(j)}(x) = (n-1) \dots (n-j) \sum_i A_i^{(j)} N_{n-j,i}(x). \quad (2.30)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.26) μπορούμε να ξαναγράψουμε την $F(x)$ με κανονικοποιημένες B-splines μικρότερης τάξης, με συγκεκριμένους πολυωνυμικούς συντελεστές. Έτσι είναι

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_i A_i N_{n,i}(x) \\
 &= \sum_i A_i \{ (x - x_i) M_{n-1,i}(x) + (x_{i+n} - x) M_{n-1,i+1}(x) \} \\
 &= \sum_i \{ A_i (x - x_i) + A_{i-1} (x_{i+n-1} - x) \} M_{n-1,i}(x) \\
 &= \sum_i A_i^{[1]}(x) N_{n-1,i}(x),
 \end{aligned}$$

όπου

$$A_i^{[1]}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+n-1} - x_i} A_i + \frac{x_{i+n-1} - x}{x_{i+n-1} - x_i} A_{i-1}.$$

Πιο γενικά θέτοντας

$$A_i^{[j]}(x) = \begin{cases} A_i, & j = 0 \\ \frac{x - x_i}{x_{i+n-j} - x_i} A_i^{[j-1]}(x) + \frac{x_{i+n-j} - x}{x_{i+n-j} - x_i} A_{i-1}^{[j-1]}(x), & j > 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

προκύπτει

$$F(x) = \sum_i A_i^{[j]}(x) N_{n-j,i}(x).$$

$$\text{Αφού } N_{1,i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

προκύπτει

$$F(x) = A_i^{[n-1]}(x) \quad , \quad x \in (x_i, x_{i+1}] \quad (2.32)$$

Έτσι, αν $x \in (x_i, x_{i+1})$ η $F(x)$ μπορεί επίσης να υπολογιστεί από τα A_{i-n+1}, \dots, A_i σχηματίζοντας κατ' επανάληψη ορισμένους κυρτούς συνδυασμούς σύμφωνα με την σχέση (2.31).

Αφού βρούμε i τέτοιο ώστε $x \in (x_i, x_{i+1}]$, υπολογίζουμε όλα τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα χρησιμοποιώντας την σχέση (2.31):

$A_{i-n+1}^{[0]}(x)$				
$A_{i-n+2}^{[0]}(x)$	$A_{i-n+2}^{[1]}(x)$			
\vdots				
$A_{i-1}^{[0]}(x)$	$A_{i-1}^{[1]}(x)$			$A_{i-1}^{[n-2]}(x)$
$A_i^{[0]}(x)$	$A_i^{[1]}(x)$	\dots	$A_i^{[n-2]}(x)$	$A_i^{[n-1]}(x)$

Το πιο δεξί στοιχείο είναι η ζητούμενη τιμή $F(x)$.

Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό της απλής B-splines $N_{n,i}(x)$, θέτοντας $A_j = \delta_{ij}$, $\forall j$.

Παράδειγμα 2.5

Θα υπολογίσουμε την $N_{3,i}(x)$, $x \in (x_i, x_{i+1}]$.

$A_{i-2}^{[0]}(x) = 0$		
$A_{i-1}^{[0]}(x) = 0$	$A_{i-1}^{[1]}(x) = 0$	
$A_i^{[0]}(x) = 1$	$A_i^{[1]}(x) = \frac{x - x_i}{x_{j+2} - x_j}$	$A_i^{[2]}(x) = \frac{x - x_i}{x_{j+1} - x_j} \cdot \frac{x - x_i}{x_{j+2} - x_j}$

2.6 Τμηματικά κυβικές συναρτήσεις Hermite

Ορισμός 2.8

Έστω $[\alpha, b] \subset \mathbb{R}$ και $\Delta : \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[\alpha, b]$. Συναρτήσεις $s \in C^1[\alpha, b]$, για τις οποίες ισχύει

$$s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_3, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

λέγονται κυβικές συναρτήσεις του Hermite ως προς το διαμερισμό Δ .

Μια διαφορά μεταξύ κυβικών splines και κυβικών splines του Hermite είναι η ομαλότητα τους: οι κυβικές splines είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, ενώ οι κυβικές splines του Hermite μόνο μία φορά.

Θεώρημα 2.11

Έστω $f \in C^1[\alpha, b]$ και $\Delta : \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[\alpha, b]$. Τότε υπάρχει ακριβώς μια κυβική spline του Hermite s ως προς Δ , τέτοια ώστε

$$s(x_i) = f(x_i), \quad s'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Αν επιπλέον $f \in C^4[\alpha, b]$ τότε ισχύει

$$\|f - s\|_\infty \leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty \quad (2.33)$$

όπου $h := \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.10 υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο $p_i \in P_3$ για το οποίο ισχύει

$$p_i(x_j) = f(x_j), \quad p_i'(x_j) = f'(x_j), \quad j = i, i+1$$

για $i = 0, \dots, n-1$. Τώρα η συνάρτηση $s: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) := p_i(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ είναι η προφανώς μοναδική ζητούμενη παρεμβάλλουσα spline του Hermite.

Από την σχέση (1.16) του σφάλματος παρεμβολής Hermite έχουμε

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \quad \exists \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

$$f(x) - p_i(x) = \frac{1}{24} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2 f^{(4)}(\xi).$$

Συνεπώς, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x) - s(x)| &= |f(x) - p_i(x)| \\ &= \frac{1}{24} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2 |f^{(4)}(\xi(x))| \\ &\leq \frac{1}{24} \frac{(x_{i+1} - x_i)^4}{16} \|f^{(4)}\|_{\infty}, \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει η σχέση (2.33). ■

Ο γραμμικός χώρος $H(\Delta)$ των κυβικών splines του Hermite έχει διάσταση $2n + 2$. Αυτό αφήνουν να εννοηθεί οι $2n + 2$ συνθήκες παρεμβολής στο θεώρημα 2.11 και μπορεί να αποδειχθεί και πάλι με την κατασκευή μιας κατάλληλης βάσης του χώρου. Μια κατάλληλη, από πλευράς εφαρμογών, βάση αποτελείται από τις συναρτήσεις V_i και S_i , $0 \leq i \leq n$, όπου V_i και S_i είναι τα (μοναδικά) στοιχεία του $H(\Delta)$ για τα οποία πληρούνται, αντίστοιχα, για $0 \leq i, j \leq n$, οι συνθήκες

$$\begin{cases} V_i(x_j) = \delta_{ij} & , & V_i'(x_j) = 0, \\ S_i(x_j) = 0 & , & S_i'(x_j) = \delta_{ij}. \end{cases}$$

Πρόταση 2.1

Ο $H(\Delta)$ είναι υπόχωρος του $C^1[\alpha, b]$ με διάσταση $2n + 2$ και οι V_i, S_i , $0 \leq i \leq n$ αποτελούν βάση του.

Απόδειξη

Προφανώς ο $H(\Delta)$ είναι διανυσματικός χώρος, υπόχωρος του $C^1[\alpha, b]$. Συμβολίζοντας $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, n - 1$, θεωρούμε τις συναρτήσεις $V_i, S_i \in H(\Delta)$, $0 < i < n$ που δίνονται από

$$V_0(x) = \begin{cases} 2h_0^{-3}(x - x_0)^3 - 3h_0^{-2}(x - x_0)^2 + 1 & , & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & , & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για $1 \leq i \leq n-1$

$$V_i(x) = \begin{cases} -2h_{i-1}^{-3}(x-x_{i-1})^3 + 3h_{i-1}^{-2}(x-x_{i-1})^2 & , x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 2h_i^{-3}(x-x_i)^3 - 3h_i^{-2}(x-x_i)^2 + 1 & , x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$V_n(x) = \begin{cases} -2h_{n-1}^{-3}(x-x_{n-1})^3 + 3h_{n-1}^{-2}(x-x_{n-1})^2 & , x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$S_0(x) = \begin{cases} h_1^{-2}(x-x_0)(x_1-x)^2 & , x \in [x_0, x_1] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για $1 \leq i \leq n-1$

$$S_i(x) = \begin{cases} h_{i-1}^{-2}(x-x_{i-1})^2(x-x_i) & , x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h_i^{-2}(x-x_i)(x_{i+1}-x)^2 & , x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$S_n(x) = \begin{cases} h_{n-1}^{-2}(x-x_{n-1})^2(x-x_n) & , x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι $V_i, S_i \in H(\Delta)$, $0 \leq i \leq n$ και ότι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{cases} V_i(x_j) = \delta_{ij} & , & V_i'(x_j) = 0, \\ S_i(x_j) = 0 & , & S_i'(x_j) = \delta_{ij}. \end{cases} \quad 0 \leq i, j \leq n \quad (2.34)$$

Επιπλέον οι V_i, S_i είναι οι συναρτήσεις του $H(\Delta)$ με τον μικρότερο δυνατό φορέα που ικανοποιούν τις σχέσεις (2.34).

Επίσης είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι, αν

$$\sum_{j=0}^n \{c_j V_j(x) + d_j S_j(x)\} = 0 \quad , \quad \forall x \in [\alpha, b] \quad (2.35)$$

θα έχουμε και

$$\sum_{j=0}^n \{c_j V_j'(x) + d_j S_j'(x)\} = 0 \quad , \quad \forall x \in [\alpha, b]. \quad (2.36)$$

Θέτοντας $x = x_i$, $0 \leq i \leq n$ από την σχέση (2.35) παίρνουμε $c_i = 0$ για $i = 0, \dots, n$, ενώ από την σχέση (2.36) $d_i = 0$ για $i = 0, \dots, n$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο (V_i, S_i) παράγει τον $H(\Delta)$. Πράγματι για $\varphi \in H(\Delta)$ ισχύει

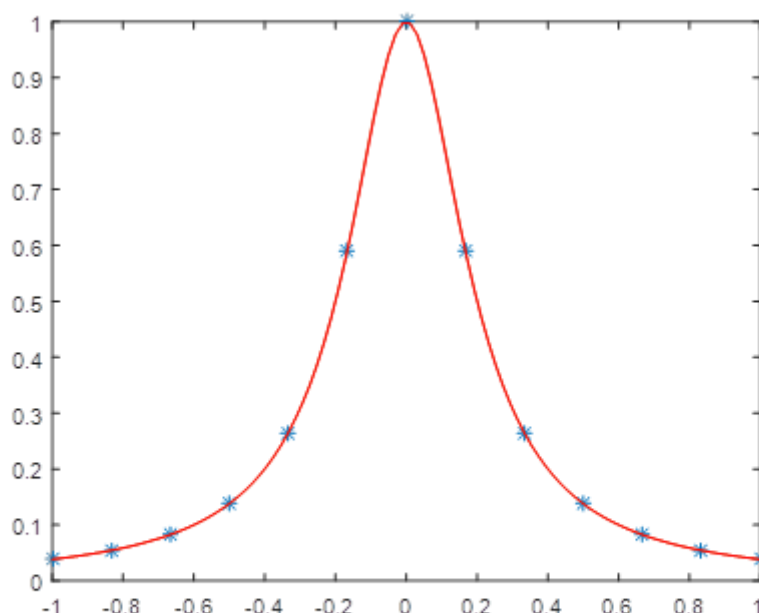
$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i) V_i(x) + \varphi'(x_i) S_i(x)]. \quad (2.37)$$

Για $x = x_k$, $0 \leq k \leq n$ οι τιμές και οι τιμές των παραγώγων της σχέσης (2.37) προφανώς συμπίπτουν. Σε οποιοδήποτε διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n - 1$ και τα δυο μέλη της σχέσης (2.37) είναι κυβικά πολυώνυμα των οποίων οι τιμές και οι τιμές των παραγώγων συμπίπτουν στα άκρα x_k, x_{k+1} του διαστήματος. Συνεπώς θα συμπίπτουν και για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$, επειδή κάθε κυβικό πολυώνυμο ορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές του και τις τιμές της παραγώγου του σε δύο διακριτά σημεία. ■

Κάθε στοιχείο φ του $H(\Delta)$ μπορεί τώρα να παρασταθεί στη μορφή

$$\varphi = \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i) V_i + \varphi'(x_i) S_i].$$

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την κυβική spline Hermite παρεμβολής της συνάρτησης του Runge για $n = 12$.



Σχήμα 2.10: Κυβική spline Hermite παρεμβολής της συνάρτησης Runge για $n=12$.

Η μέθοδος αυτή ωστόσο απαιτεί τη γνώση των κλίσεων στα σημεία παρεμβολής και συχνά η πληροφορία αυτή δεν είναι διαθέσιμη. Όταν αυτό συμβαίνει είναι ένα απλό θέμα να χρησιμοποιήσουμε τοπικά δεδομένα για την προσέγγιση των κλίσεων.

Τέλος, θα αναφέρουμε ακόμα μια βασική διαφορά μεταξύ των κυβικών splines και των τμηματικών κυβικών συναρτήσεων Hermite.

Στις τμηματικά κυβικές συναρτήσεις Hermite η τοπική συμπεριφορά της συνάρτησης παρεμβολής εξαρτάται μόνο από την τοπική συμπεριφορά της f . Αυτό φαίνεται εύκολα από το γεγονός ότι η τμηματικά κυβική Hermite σε ένα διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ κατασκευάζεται μόνο από τις τιμές $f(x_i), f'(x_i), f(x_{i+1}), f'(x_{i+1})$, ενώ για να κατασκευάσουμε την κυβική spline παρεμβολής πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα που εμφανίζονται όλες οι τιμές της f .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Θεώρημα 1 (Weierstrass)

Έστω $f \in C[\alpha, b]$. Τότε για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα πολυώνυμο p που ικανοποιεί

$$\|f - p\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Θεώρημα 2

Το πολυώνυμο $p \in P_n$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση στο διάστημα $[\alpha, b]$ της $f \in C[\alpha, b]$ αν και μόνο αν υπάρχει εναλλασσόμενο σύνολο σημείων για την συνάρτηση $f - p_n$ αποτελούμενο από $n - 2$ σημεία δηλαδή αν υπάρχουν $\alpha \leq x_0 < \dots < x_{n+1} \leq b$ τέτοια ώστε :

$$|f(x_j) - p(x_j)| = \|f - p\|_{\infty} \quad , \quad j = 0, \dots, n$$

και

$$f(x_{j+1}) - p(x_{j+1}) = -(f(x_j) - p(x_j)) \quad , \quad j = 0, \dots, n.$$

Θεώρημα 3 (Banach-Steinhaus)

Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα και $\{T_n\}$ μια ακολουθία φραγμένων τελεστών από το X στο Y . Αν η ακολουθία $\{T_n(x)\}$ είναι φραγμένη στο Y για κάθε $x \in X$, τότε υπάρχει σταθερά M τέτοια ώστε

$$\|T_n\| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Αν δεν υπάρχει τέτοια σταθερά M , τότε υπάρχει ένα πυκνό υποσύνολο D του X τέτοιο ώστε

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\|_Y = +\infty, \quad \text{για κάθε } x \in D.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Για το σχήμα 1.1 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```
clf;hold all;
x=linspace(-1,1,1000);
t0=1+0*x;
plot(x,t0)
t1=x;
plot(x,t1)
t2=2.*x.^2-1;
plot(x,t2)
t3=4.*x.^3-3*x;
plot(x,t3)
t4=8.*x.^4-8.*x.^2+1
plot(x,t4)
axis([-1 1 -1 1.5])
title('Τα πολυώνυμα Chebyshev')
grid on
legend('T0=1', 'T1=x', 'T2=2*x^2-1', 'T3=4*x^3-3*x', 'T4=8*x^4-
8*x^2+1', 'Location', 'Best')
```

Για το σχήμα 1.2 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```
bernstein=inline('abs(x)');
equnodes=linspace(-1,1,3);
peq=polyfit(equnodes,bernstein(equnodes),2);
equnodes1=linspace(-1,1,5);
peq1=polyfit(equnodes1,bernstein(equnodes1),4);
equnodes2=linspace(-1,1,7);
peq2=polyfit(equnodes2,bernstein(equnodes2),6);
equnodes3=linspace(-1,1,9);
peq3=polyfit(equnodes3,bernstein(equnodes3),8);
x=linspace(-1,1);
plot(x,bernstein(x),'--')
hold on;
plot(x,polyval(peq,x))
hold on;
plot(x,polyval(peq1,x))
hold on;
plot(x,polyval(peq2,x))
hold on;
plot(x,polyval(peq3,x))
title('Τα πολυώνυμα παρεμβολής της |x|')
grid on
legend('|x|', 'δευτέρου βαθμού', 'τετάρτου βαθμού', 'έκτου
βαθμού', 'όγδοου βαθμού', 'Location', 'Best')
```

Για το σχήμα 1.3 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```
bernstein=inline('abs(x)');
equnodes=linspace(-1,1,4);
peq=polyfit(equnodes,bernstein(equnodes),3);
equnodes1=linspace(-1,1,6);
peq1=polyfit(equnodes1,bernstein(equnodes1),5);
x=linspace(-1,1);
plot(x,bernstein(x),'--')
```

```

hold on;
plot(x,polyval(peq,x))
hold on;
plot(x,polyval(peq1,x))
title('Τα πολυώνυμα παρεμβολής της |x|')
grid on
legend('|x|','τρίτου βαθμού','πέμπτου βαθμού','Location','Best')

```

Για το σχήμα 1.4 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```

runge=inline('1./(1+25*x.^2)');
equnodes=linspace(-1,1,11);
peq=polyfit(equnodes,runge(equnodes),10);
x=linspace(-1,1);
plot(x,runge(x))
hold on;
plot(x,polyval(peq,x),'--')
axis([-1 1 -1.5 1.5])
title('Πολυώνυμο παρεμβολής σε 11 ισαπέχοντα σημεία')
grid on
legend('f(x)','πολυώνυμο 10 βαθμού','Location','Best')

```

Για το σχήμα 1.5 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```

runge=inline('1./(1+25*x.^2)');
equnodes=linspace(-1,1,21);
peq=polyfit(equnodes,runge(equnodes),20);
x=linspace(-1,1);
plot(x,runge(x))
hold on;
plot(x,polyval(peq,x),'--')
axis([-1 1 -1.5 1.5])
title('Πολυώνυμο παρεμβολής σε 21 ισαπέχοντα σημεία')
grid on
legend('f(x)','πολυώνυμο 20 βαθμού','Location','Best')

```

Για το σχήμα 1.6 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```

runge=inline('1./(1+25*x.^2)');
i=0:20;chebnodes=cos(((2*i+1)/(42))*pi)
x=linspace(-1,1);
peq=polyfit(chebnodes,runge(chebnodes),20);
plot(x,runge(x))
hold on;
plot(x,polyval(peq,x),'--')
axis([-1 1 -0.5 1.5])
title('Πολυώνυμο παρεμβολής σε 21 σημεία Chebyshev για τη Runge')
grid on
legend('f(x)','πολυώνυμο 20 βαθμού','Location','Best')

```

Για το σχήμα 1.7 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```

bernstein=inline('abs(x)');
i=0:20;chebnodes=cos(((2*i+1)/(42))*pi)

```

```

x=linspace(-1,1);
peq=polyfit(chebnodes,bernstein(chebnodes),20);
plot(x,bernstein(x))
hold on;
plot(x,polyval(peq,x),'--')
axis([-1 1 -0.5 1.5])
title('Πολυώνυμο παρεμβολής σε 21 σημεία Chebyshev για τη |x|')
grid on
legend('f(x)', 'πολυώνυμο 20 βαθμού', 'Location', 'Best')

```

Για το σχήμα 1.8 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```

[Lfun,Lambda] = lebesgue(chebpts(10));
subplot(2,1,1), plot(Lfun), grid on
title(sprintf('10 Chebyshev points Lambda = %3.2f',Lambda))
[Lfun,Lambda] = lebesgue(linspace(-1,1,10));
subplot(2,1,2), plot(Lfun), grid on
title(sprintf('10 equispaced points Lambda = %4.2f',Lambda))

```

Για το σχήμα 1.9 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```

[Lfun,Lambda] = lebesgue(chebpts(60));
subplot(2,1,1), plot(Lfun), grid on
title(sprintf('60 Chebyshev points Lambda = %3.2f',Lambda))
[Lfun,Lambda] = lebesgue(linspace(-1,1,60));
subplot(2,1,2), plot(Lfun), grid on
title(sprintf('60 equispaced points Lambda = %5.2e',Lambda))

```

Για το σχήμα 2.1 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```

x=[1:0.05:5];
for i=1:81
    if i<=20
        y(i)=0;
    else
        y(i)=(x(i)-2)^2;
    end
end
plot(x,y)

```

Για το σχήμα 2.3 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```

runge=inline('1./(1+25*x.^2)');
xx=-1:0.01:1;
x=linspace(-1,1,9);
y=runge(x);
plot(x,y,'--')
hold on;
plot(xx,runge(xx))
axis([-1 1 -1.5 1.5])
grid on
legend('s(x)', 'Συνάρτηση Runge f(x)', 'Location', 'Best')

```

Για το σχήμα 2.4 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```
runge=inline('1./(1+25*x.^2)');
xx=-1:0.01:1;
x=linspace(-1,1,19);
y=runge(x);
plot(x,y,'--')
hold on;
plot(xx,runge(xx))
axis([-1 1 -1.5 1.5])
grid on
legend('s(x)', 'Συνάρτηση Runge f(x)', 'Location', 'Best')
```

Για το σχήμα 2.5 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```
x=[0.1,1.1,2.1,3.1,4.5,4.8,6.1,7.1,8.1,9.1,10];
y=[1.3,1.3,1.3,1.3,2.4,0.2,1.3,1.3,1.3,1.3,1.3];
plot(x,y,'*-')
```

Για το σχήμα 2.6 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```
runge=inline('1./(1+25*x.^2)');
xx=-1:0.01:1;
x=linspace(-1,1);
y=runge(x);
yy=spline(x,y,xx);
plot(xx,yy,'--')
hold on;
plot(xx,runge(xx))
axis([-1 1 -1.5 1.5])
grid on
legend('s(x)', 'Συνάρτηση Runge f(x)', 'Location', 'Best')
```

Για τα σχήματα 2.8 και 2.9 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```
function Nni=bs(x,n,i,knots)
%Προγραμματίζει την σχέση 2.28
%x:το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε την spline
%Μπορεί να είναι και διάνυσμα
%n:η τάξη της spline
%i:το πρώτο σημείο
%knots:το σύνολο των κόμβων αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει
%τον φορέα της spline
if n==1
    Nni=(x>knots(i)) & (x<=knots(i+1));
else
    Nni=((x-knots(i))/(knots(i+n)-knots(i)))*bs(x,n-1,i,knots)...
        +((knots(i+n)-x)/(knots(i+n)-knots(i+1)))*bs(x,n-
1,i+1,knots);
end
```

και συγκεκριμένα τα σχοιχεία

```
>> knots=[1,2,3,4];
```

```
>> xx=linspace(1,4);
>> axis([1 4 0 1]);hold on; plot(xx,bs(xx,3,1,knots))
```

για το σχήμα 2.8.

Για το σχήμα 2.9 χρησιμοποιήθηκαν τα στοιχεία

```
>> knots=[1,2,3,4,5];
>> xx=linspace(1,5);
>> axis([1 5 0 1]);hold on; plot(xx,bs(xx,4,1,knots))

>> knots=[1,2,3,4];
>> xx=linspace(1,4);
>> axis([1 4 0 1]);hold on; plot(xx,bs(xx,3,1,knots))
```

Για το σχήμα 2.10 χρησιμοποιήθηκε ο παρακάτω κώδικας:

```
clear all

f = @(t) 1./(1.+25.*t.^2);
df = @(t) (-50.*t)./(1+25.*t.^2).^2;
n = 12;
a = -1;
b = 1;
x = linspace(a,b,n+1);
h= (b-a)/n;
xx=linspace(a,b);

V0=@(t) (2.*h.^(-3).* (t-x(1)).^3-3.*h.^(-2).* (t-x(1)).^2.+1).* (t<=x(2)).*...
(t>=x(1))+0.*(t<x(1)).* (t>x(2));

Vi=@(i,t) (2.*h.^(-3).* (t-x(i+1)).^3-3.*h.^(-2).* (t-x(i+1)).^2.+1)...
.* (t<=x(i+2)).* (t>=x(i+1))+(-2.*h.^(-3).* (t-x(i)).^3+3.*h.^(-2)...
2)...
.* (t-x(i)).^2).* (t<x(i+1)).* (t>=x(i))+0.*(t<x(i)).* (t>x(i+2));

Vn=@(t) (-2.*h.^(-3).* (t-x(n)).^3+3.*h.^(-2).* (t-x(n)).^2).*...
(t<=x(n+1)).* (t>=x(n))+0.*(t<x(n)).* (t>x(n+1));

S0=@(t) h.^(-3).* (t-x(1)).* (x(2)-t).^2.* (t>=x(1)).* (t<=x(2))...
+0.*(t<x(1)).* (t>x(2));

Si=@(i,t) h.^(-3).* (t-x(i)).^2.*(t-x(i+1)).* (t>=x(i)).* (t<=x(i+1))...
```

```

+h.^(-3).* (t-x(i+1)).*(x(i+2)-t).^2.*(t>x(i+1)).*(t<=x(i+2)) ...
+0.*(t<x(i)).*(t>x(i+2));

Sn=@(t) h.^(-3).* (t-x(n)).^2.*(t-x(n+1)).*(t>=x(n)).*(t<=x(n+1)) ...
+0.*(t<x(n)).*(t>x(n+1));

hermite_spline = @(t) f(x(1)).*V0(t)+h.*df(x(1)).*S0(t);

for i =2 : n
    hermite_spline = @(t) hermite_spline(t)+f(x(i)).*Vi(i-1,t) ...
+h.*df(x(i)).*Si(i-1,t);
end

hermite_spline = @(t) hermite_spline(t)+f(x(n+1)).*Vn(t) ...
+h.*df(x(n+1)).*Sn(t);

plot(x,hermite_spline(x), '*')
hold on;
plot(xx,hermite_spline(xx))
plot(xx,f(xx), 'r')

```

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) Ακρίβης Γ. Δ. και Δουγαλής Β. Α., *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*, (4^η εκδ.), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2013.
- 2) Δουγαλής Β., *Αριθμητική Ανάλυση, Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος*, Ινστιτούτο Υπολογιστικών Μαθηματικών Κρήτης.
- 3) Μπακόπουλος Α. και Χρυσοβέργης Ι., *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση Με Βιβλιοθήκη Προγραμμάτων και Δισκέτα*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1994.
- 4) Παπαμιχαήλ Ν., *Εισαγωγή στη Θεωρία Συναρτήσεων Splines μιας Μεταβλητής*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2004.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 5) J.P. Berrut, L.N. Trefethen, *Barycentric Lagrange Interpolation*, SIAM Review (2004), Vol 46 (3), 501-517.
- 6) C. de Boor, *A practical Guide to Splines*, Applied Mathematical Sciences 27, Springer- Verlag, 1978.
- 7) C. de Boor, *On Calculating with B-splines*, J. Approx. Theory 6 (1972), 50-62.
- 8) M.G. Cox, *The Numerical Evaluation of B-splines*, J. Inst. Maths Applics 10 (1972), 134-149.
- 9) C.A. Hall, *On Error Bounds for Spline Approximations*, J. Approx. Theory 1 (1968), 209-218.
- 10) C.A. Hall and W.W. Meyer, *Optimal Error Bounds for Cubic Splines Interpolation*, J. Approx. Theory 16 (1976), 105-122.
- 11) G. Hammerlin, K.H. Hoffmann, *Numerical Mathematics Springer-Verlag*, 1989.
- 12) N.J. Higham, *The Numerical Stability of Barycentric Lagrange Interpolation*, IMA Journal of Numerical Analysis (2004) 24, 547-556.
- 13) M.J.D. Powell, *Approximation Theory and Methods*, Cambridge University Press, Cambridge – New York, 1981.

- 14) I.J. Schoenberg, *Contribution to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions*, Quart. Appl. Math 4 (1946), 45-99 and 112-141.
- 15) L.L. Schumaker, *Spline Functions : Basic Theory*, John Wiley, New York, 1981.
- 16) L.N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practise*, SIAM, 2013.