ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΠΜΣ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΣΥΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΝΔΟΓΕΝΟΥΣ ΑΙΤΙΑΣ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΝ: Η ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΩΝ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ ΜΕΣΟΥ ΧΡΕΟΥΣ

ΓΚΙΩΝΗ ΚΑΛΙΝΑ

Επιβλέπων:

ΣΤΑΥΡΑΚΑΚΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2017

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της Διπλωματικής Εργασίας,Καθηγητή ΕΜΠ,Νικόλαο Σταυρακάκη καθώς και την Καθηγήτρια ΕΜΠ,Μπελεγρή-Ρομπόλη Ανδριάνα-Αθηνά, για την καθοδήγηση τους.

Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Μαθηματική και Μακροοικονομική Θεωρία 6

2.1 Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις 6

2.2 Θεωρία ευστάθειας 8

2.3 Γραμμικά συστήματα 10

2.4 Μη γραμμικά συστήματα 12

2.5 Ολική θεωρία 14

2.6 Διακλαδώσεις 16

2.7 Υποδείγματα Lotka-Volterra 20

2.8 Μακροοικονομική θεωρία 27

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Το Πρότυπο 37

3.1 Προτυποποίηση του χρέους 37

3.2 Προτυποποίηση της συνάρτησης επένδυσης 42

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Μαθηματική Ανάλυση 48

4.1 Ολοκληρωμένο μοντέλο 48

4.2 Σταθερές καταστάσεις του μοντέλου 49

4.3 Ποιοτική ανάλυση του μοντέλου 51

4.4 Τοπική ευστάθεια των στάσιμων σημείων $\mathbf{E5}$ και $\mathbf{E6}$ 54

4.5 Κυκλική συμπεριφορά εξαιτίας της διακλάδωσης Poincare-Andronov-Hopf 56

4.6 Οικονομική ερμηνεία των διακλαδώσεων Hopf. 58

4.7 Κυκλική συμπεριφορά εξαιτίας του Θεωρήματος Poincare-Bendixon 58

4.8 Πολλαπλοί οριακοί κύκλοι 60

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Οικονομική Ερμηνεία των Αποτελεσμάτων-Συμπεράσματα 63

5.1 Οικονομικοί κύκλοι 63

5.2 Χρηματοοικονομικοί κύκλοι 66

5.3 Συμπεράσματα 68

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 69

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή

Οι οικονομικοί κύκλοι ορίζονται ως οι διακυμάνσεις των ρυθμών ανάπτυξης των μακροοικονομικών μεταβλητών, οι οποίες διακυμάνσεις μετρούνται ως αποκλίσεις από κάποια μακροπρόθεσμη τάση ρυθμού ανάπτυξης.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να ερευνηθεί εάν η αλληλεπίδραση του πραγματικού τομέα και του χρηματοοικονομικού τομέα μπορεί να αποτελέσει ενδογενή αιτία για την δημιουργία οικονομικών κύκλων σε κλειστές οικονομίες με περιορισμούς στη ζήτηση. Πιο συγκεκριμένα, μελετάται εάν η χρηματοδότηση των επενδύσεων μέσω δανείων μπορεί να προκαλέσει ενδογενώς οικονομικούς κύκλους,καθώς και η πιθανότητα εμφάνισης χρηματοοικονομικών κύκλων ως αποτέλεσμα της παραπάνω αλληλεπίδρασης

Η διερευνηση του ερευνητικού ερωτήματος,όπως ήδη έχουμε αναφέρει ,αφορά κλειστές οικονομίες με περιορισμούς στη ζήτηση. Οπότε, σ’ένα τέτοιο σύστημα,μία αύξηση στην επένδυση οδηγεί σε αύξηση του ΑΕΠ(output) μέσω της λειτουργίας του πολλαπλασιαστή, ενώ μια αύξηση στον ρυθμό ανάπτυξης του ΑΕΠ οδηγεί σε αύξηση της επένδυσης μέσω της λειτουργίας του επιταχυντή(Keynes). Συνεπώς ένα μοντέλο το οποίο μελετάει μόνο τον πραγματικό τομέα δεν θα είναι ενδογενώς φραγμένο ,εξαιτίας της αλληλεπίδρασης του πολλαπλασιαστή/επιταχυντή.Έτσι, είτε θα αυξάνονται ταυτόχρονα το ΑΕΠ και οι επενδύσεις, είτε θα μειώνονται ταυτόχρονα. Άρα θα απαιτεί εξωγενή φράγματα.

Η παρούσα εργασία στο παραπάνω σύστημα του Keynes εισάγει τον χρηματοοικονομικό τομέα μέσω της μορφής δανεισμού, έτσι ώστε να γίνει το σύστημα ενδογενώς φραγμένο. Ακολουθώντας την βιβλιογραφία των Fisher και Minsky ισχυριζόμαστε ότι η ανάπτυξη της επένδυσης και του ΑΕΠ μπορούν να οδηγήσουν, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, σε χειροτέρευση των χρηματοοικονομικών μεταβλητών. Άρα, έχουμε ένα ενδογενώς φραγμένο σύστημα, όπου, εάν γίνει σωστή μοντελοποίηση, η αλληλεπίδραση πραγματικού-χρηματοοικονομικού τομέα μπορεί να παρέχει μια ενδογενή εξήγηση για την εμφάνιση οικονομικών κύκλων.

Η παραπάνω αλληλεπίδραση του πραγματικού-χρηματοοικονομικού τομέα αναλύεται μέσω ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων στο επίπεδο, το οποίο μοιάζει με μια ομάδα μοντέλων από το πεδίο της οικολογίας που ονομάζονται «υποδείγματα Lotka-Volterra» ή «μοντέλα Θήραμα - Αρπακτικό». Τα μοντέλα αυτά αναπτύχθηκαν από το Lotka (1925) και το Volterra (1927) σε βιοχημικές και οικολογικές εφαρμογές αντίστοιχα. Το «υπόδειγμα Θήραμα-Αρπακτικό» περιγράφει στην πιο απλή μορφή του ένα περιβάλλον στο οποίο υπάρχουν μονάχα δυο είδη ζωής: το θήραμα και το αρπακτικό, που τρέφεται από το θήραμα.

Οι οικονομολόγοι είδαν ότι μακροοικονομικές διαδικασίες μπορούν με κατάλληλη διαδικασία προτυποποίησης να αναπαρασταθούν και να μελετηθούν ως «μοντέλα

Θηράματος- Αρπακτικού». Κάθε μακροοικονομικό μοντέλο για να έχει νόημα οικονομικά θα πρέπει να είναι φραγμένο.Η κατασκευή όμως ενός ενδογενούς φραγμένου μοντέλου απαιτεί κάποιες θετικές και κάποιες αρνητικές επιδράσεις. Ο λόγος είναι ότι αν δεν υπάρχουν οι αρνητικές επιδράσεις το μοντέλο θα ξεφεύγει από τις οικονομικά εφικτές περιοχές. Με άλλα λόγια δεν θα είναι φραγμένο. Τα κλασικά Κευνσιανά μοντέλα, τα οποία βασίζονται μόνο στην αλληλεπίδραση του πολλαπλασιαστή και του επιταχυντή απαιτούν εξωγενή φράγματα. Τα μοντέλα Θηράματος-Αρπακτικού όμως αποτελούνται από μια θετική επίδραση που έχει ο πληθυσμός του θηράματος στον πληθυσμό του αρπακτικού και από μια αρνητική επίδραση, που έχει ο πληθυσμός του αρπακτικού στον πληθυσμό του θηράματος.Η ιδιότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία, έτσι ώστε ο ρυθμός της επένδυσης να προτυποποιείται κατά αναλογία με τον πληθυσμό του θηράματος, ενώ οι χρηματοοικονομικές μεταβλητές να προτυποποιούνται κατά αναλογία με τον πληθυσμό του αρπακτικού. Επίσης στα μοντέλα Θηράματος-Αρπακτικού κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, ο τρόπος με τον οποίο ο πληθυσμός του θηράματος και του αρπακτικού αλληλοεπιδρούν οδηγεί σε κυκλικές συμπεριφορές. Η παραπάνω ιδιότητα είναι σημαντική γιατί και τα μακροοικονομικά μοντέλα, τα οποία μοιάζουν με τα μοντέλα Θηράματος-Αρπακτικού εμφανίζουν κυκλικές συμπεριφορές, οι οποίες μπορούν να ερμηνευθούν ως οικονομικοί κύκλοι. Συνεπώς, θα πρέπει να αναφερθεί σε αυτό το σημείο ότι το μοντέλο που αναπτύσσεται στην παρούσα εργασία χρησιμοποιεί ένα μοντέλο αλληλεπίδρασης πραγματικών -χρηματοοικονομικών μεταβλητών το οποίο αποτελεί μια εκδοχή των μοντέλων Θηράματος-Αρπακτικού και στο οποίο εμφανίζονται ενδογενή όρια και κυκλικές συμπεριφορές.

Στο κεφάλαιο 1 δίνεται η εισαγωγή. Στο κεφάλαιο 2, δίνονται κάποια θεωρητικά στοιχεία στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και στην μακροοικονομική θεωρία. Στο κεφάλαιο 3, αναλύεται η σύνθεση του μακροοικονομικού μοντέλου της εργασίας. Στο κεφάλαιο 4, γίνεται η μαθηματική ανάλυση του μοντέλου και αναλύονται οι διάφορες συμπεριφορές, που εμφανίζει του μοντέλο, οι οποίες είναι σύγκλιση στις σταθερές καταστάσεις και εμφάνιση οριακών κύκλων. Τέλος, στο κεφάλαιο 5, παρουσιάζεται η οικονομική ερμηνεία του μοντέλου και τα συμπεράσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Μαθηματική και Μακροοικονομική Θεωρία

2.1 Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις

2.1.1.Βασικοί ορισμοί και έννοιες

Διαφορική εξίσωση (δ.ε) ονομάζεται μια εξίσωση, η οποία αποτελείται από μια άγνωστη συνάρτηση και παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης.

Συνήθης Διαφορική εξίσωση(σ.δ.ε) ονομάζεται η διαφορική εξίσωση, της οποίας η άγνωστη συνάρτηση είναι μίας μεταβλητής, δηλαδή είναι της γενικής (πεπλεγμένης) μορφής

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0, \qquad t \in I \subset R, \tag{2.1.1}$$

όπου F: I x $\Omega \to$R , $\Omega \subset R^{n+1}$ και x: I $\to$R η άγνωστη συνάρτηση μιας μεταβλητής .Το t (που συνήθως αναπαριστά τον χρόνο) ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή.

Αν επιλύσουμε την εξίσωση (2.1.1) ως προς $x^{(n)}$, τότε λέμε ότι η συνήθης διαφορική εξίσωση βρίσκεται σε **κανονική μορφή** , δηλαδή

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}), \quad t \in I . \tag{2.1.2}$$

Μερική διαφορική εξίσωση(μ.δ.ε) είναι η διαφορική εξίσωση, που αποτελείται από την άγνωστη συνάρτηση, η οποία είναι δύο ή περισσότερων μεταβλητών και από τις μερικές παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης.

Τάξη μιας σ.δ.ε ονομάζεται η τάξη της ανώτερης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης μέσα στην εξίσωση.

Οι διαφορικές εξισώσεις διακρίνονται σε γραμμικές και μη γραμμικές .

Γραμμική ονομάζεται η σ.δ.ε όταν η συνάρτηση F είναι γραμμική ως προς τις $x, x', x'', \dots, x^{(n)}$. Αλλιώς ονομάζεται μη γραμμική.

Η γενική μορφή μιας γραμμικής σ.δ.ε τάξης n είναι

$$a_n(t)x^n(t) + a_{n-1}(t)x^{n-1}(t) + \dots + a_0(t)x^1(t) = f(t). \tag{2.1.3}$$

Ομογενής ονομάζεται η (2.1.3) αν ισχύει f(t) = 0, αλλιώς ονομάζεται μη ομογενής.

2.1.2 Σύστημα διαφορικών εξισώσεων

Σε κάποια προβλήματα μπορεί να απαιτείται να λύσουμε μια μονάχα διαφορική εξίσωση. Αντιθέτως σε κάποια άλλα μπορεί να χρειαστεί να λύσουμε n σε πλήθος συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Στην περίπτωση που συμβαίνει αυτό λέμε ότι έχουμε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Η μελέτη συστημάτων διαφορικών εξισώσεων είναι ιδιαιτέρως σημαντική γιατί, εκτός των πολλών άλλων λόγων, οποιαδήποτε εξίσωση n τάξης μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα n-διάστατο σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ως εξής:

Έστω ότι έχουμε την διαφορική εξίσωση n-τάξης (2.1.2)

$$x^{(n)}=f\,(t,x,x',x'',\ldots,x^{(n-1)})$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$x_1=x\ ,\ x_2=x',\ x_3=x'',\ldots,x_n=x^{(n-1)}$$

η εξίσωση (2.1.2) μετασχηματίζεται στο παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης,

$$\begin{aligned}
x_1{}' &= x_2,\\
x_2{}' &= x_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
x_n{}' &= f\,(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Συνεπώς ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης σε κανονική μορφή θα είναι στον n –διάστατο πραγματικό ευκλείδιο χώρο R^n το εξής,

$$\begin{aligned}
x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1}' &= f_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned} \qquad (2.1.4)$$

Όπου x=$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις του t και $f_1,\ldots, f_n$ είναι πραγματικές συναρτήσεις των t, $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Το (2.1.4) μπορεί να γραφτεί σε διανυσματική μορφή ως

$$x'(t)=f(t,x) \tag{2.1.5}$$

όπου x(t)= $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, x΄(t)= $(x_1', x_2', \dots, x_n')^T$, f(t,x)=(f_1(t, x), f_2(t, x), …, f_n(t, x)$)^T$.

2.1.3 Πρόβλημα αρχικών τιμών

Η εξίσωση (2.1.1) F(t,x,x΄,x΄΄,…,$x^{(n)}$)=0 , $t \in I \subset R$ λέμε ότι ικανοποιεί μια αρχική συνθήκη στο σημείο $t_0 \in$ I, αν γνωρίζουμε τους αριθμούς ψ_1, ψ_2,…, , $\psi_n \in$ R, έτσι ώστε

$$x(t_0) = \psi_1,\ x'(t_0) = \psi_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = \psi_n \tag{2.1.6}$$

Η εξίσωση (2.1..1) και η συνθήκη (2.1.6) αποτελούν ένα **πρόβλημα αρχικών συνθηκών**.

Ορισμός (2.1.3.1):**Λύση της διαφορικής εξίσωσης** F(t,x,x΄,x΄΄,…,$x^{(n)}$)=0 ονομάζεται μια συνάρτηση x:I $\to$R ,όπου $I \subset R$ αν $x \in C^n$(I) και επαληθεύει την εξίσωση (2.1.1) σε κάθε $t \in I$.

Παρατήρηση(2.1.3.1): Αν γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες τότε η λύση μπορεί να γραφτεί ως συνάρτηση του t και των αρχικών συνθηκών. Για παράδειγμα στην περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης, αν έχουμε την αρχική συνθήκη x=x_0 για t=t_0,τότε η λύση μπορεί να γραφτεί x=x(t, x_0, t_0) (Για να τονιστεί η εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες).

2.2 Θεωρία ευστάθειας

Πολλές φορές η εύρεση αναλυτικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης είναι δύσκολη ακόμα και αδύνατη. Ένας τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι η προσπάθεια εύρεσης λύσης μέσω αριθμητικών μεθόδων με τη χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Μια διαφορετική προσέγγιση αποτελεί η Ποιοτική Θεωρία των διαφορικών εξισώσεων και πιο συγκεκριμένα ένα τμήμα αυτής, που ονομάζεται Θεωρία Ευστάθειας. Η θεωρία της ευστάθειας επιτρέπει τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων χωρίς να καθίσταται απαραίτητη η εύρεση αναλυτικών λύσεων. Αυτή η Ενότητα περιλαμβάνει βασικούς ορισμούς για την κατανόηση της Θεωρίας ευστάθειας.

2.2.1Διανυσματικό πεδίο

Αρχικά θα πρέπει να δοθεί η έννοια του διανυσματικού πεδίου.

Έστω η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$x' = f(t,x) \tag{2.2.1}$$

όπου η συνάρτηση f(t,x) ορίζεται σε ένα πεδίο $D \subset R^2$.

Επειδή δεν ενδιαφερόμαστε για την εύρεση των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης αλλά για την ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτών, καθώς $t \to \infty$, ο σχεδιασμός των διαδρομών, δηλαδή των γραφικών παραστάσεων των λύσεων, μιας διαφορικής εξίσωσης μας επιτρέπει να κατανοήσουμε το τελευταίο. Σε κάθε σημείο (t,x) D, η τιμή x′ δίνει την κλίση της εφαπτομένης σε κάθε διαδρομή της εξίσωσης (2.2.1), που περνά από αυτό το σημείο. Έτσι σχεδιάζοντας ευθύγραμμα τμήματα με κλίση x′ σε διάφορα σημεία του πεδίου D, μπορούμε να βρούμε κατά προσέγγιση τις διαδρομές της διαφορικής εξίσωσης (2.2.1). Το διάγραμμα που δημιουργείται από αυτή τη διαδικασία ονομάζεται **διανυσματικό πεδίο**.

Η συνέχεια της θεωρίας θα αφορά μόνο τα **αυτόνομα** συστήματα διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή συστήματα της μορφής

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{2.2.2}$$

όπου $t \in J \subset R$, $x \in D$, όπου $D \subset R^n$,n=1,2,… και $f \in C^1(D)$.

Στα αυτόνομα συστήματα ,δηλαδή συστήματα της μορφής (2.2.2), το διανυσματικό πεδίο f(t,x) δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο .Αντιθέτως στα **μη αυτόνομα** συστήματα το διανυσματικό πεδίο εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, δηλαδή είναι της μορφής (2.2.1).

2.2.2 Ορισμοί

Ορισμός 2.2.1.1 **Διαδρομή** ονομάζεται η γραφική παράσταση της λύσης. **Τροχιά** ονομάζεται η προβολή της διαδρομής μιας λύσης στο χώρο των χωρικών μεταβλητών. Χώρος φάσεων (εικόνα φάσεων) ονομάζεται το σύνολο των τροχιών του συστήματος.

Ορισμός 2.2.1.2.**Στάσιμο σημείο** ή **κρίσιμο σημείο** ή **σημείο ισορροπίας** του συστήματος (2.2.2.) ονομάζεται ένα σημείο x_0 για το οποίο ισχύει $f(x_0)=0$.

Παρατήρηση 2.2.1.1 Η ύπαρξη των στάσιμων σημείων έχει μεγάλη σημασία γιατί η συμπεριφορά όλων των υπόλοιπων τροχιών στο χώρο φάσεων καθορίζεται κυρίως από τη φύση και τη θέση των στάσιμων σημείων. Για παράδειγμα εάν ένα στάσιμο σημείο είναι ασταθές, τότε οι τροχιές που βρίσκονται κοντά στο στάσιμο σημείο θα απομακρύνονται από αυτό.

Συγκεκριμένα για τα αυτόνομα συστήματα ισχύουν τα εξής:

-Τροχιές που ξεκινάνε από σημεία τα οποία δεν είναι στάσιμα σημεία του συστήματος δεν μπορούν να φτάσουν σε πεπερασμένο χρόνο στο στάσιμα σημεία.

-Οι τροχιές δεν τέμνονται, δηλαδή από κάθε σημείο x_0 περνάει μοναδική τροχιά.

-Το στάσιμο σημείο αποτελεί την απλούστερη μορφή τροχιάς.

-Η τροχιά μπορεί να αντιστοιχεί σε περιοδική λύση του συστήματος, δηλαδή μία τροχιά στην περίπτωση αυτή περνάει από ένα μη στάσιμο σημείο και ξαναπερνά από το ίδιο σημείο άπειρες φορές

Ορισμός Ευστάθειας 2.2.1.3(κατά Lyapunov) : Έστω x_0 ένα στάσιμο σημείο του αυτόνομου συστήματος $x'(t)=f(x(t))$. Τότε το x_0 ονομάζεται i) **Ευσταθές,** αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ=δ(ε)>0, έτσι ώστε η σχέση $|x(0)- x_0|<\delta$ να συνεπάγεται ότι $|x(t)- x_0|<\varepsilon$, για κάθε $t\geq 0$. ii) **Ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν είναι ευσταθές και επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x\to\infty} |x(t) - x_0|=0$.

iii) **Ασταθές**, αν δεν είναι ευσταθές.

Παρατήρηση 2.2.1.2 (Ερμηνεία της έννοιας της ευστάθειας)

Εάν ένα σωματίδιο βρίσκεται πάνω στο σημείο ισορροπίας και ύστερα μετατοπιστεί μας ενδιαφέρει η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης. Για την ακρίβεια εάν το σωματίδιο περιφέρεται γύρω από την αρχική θέση, τότε το στάσιμο σημείο είναι απλά ευσταθές. Εάν επαναφέρεται στην αρχική θέση τότε είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Εάν απομακρύνεται τότε είναι ασταθές.

2.3 Γραμμικά συστήματα

2.3.1 Θεωρία

Έστω το αυτόνομο γραμμικό σύστημα

$$x'(t)=Ax(t), \ t\in R, \tag{2.3.1}$$

όπου A είναι ο πίνακας σταθερών συντελεστών nxn με $|A|\neq 0$. Η αρχή είναι στάσιμο σημείο του συστήματος. Για να βρεθεί το είδος της ευστάθειας του γραμμικού συστήματος θα πρέπει να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Θεώρημα 2.3.1.1 (Ευστάθειας).Το στάσιμο σημείο(σ.σ.) $\chi_0=0$ είναι: i) Ασυμπτωτικά ευσταθές, αν τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του A είναι όλα αρνητικά. ii) Ευσταθές, αν ο A έχει ένα τουλάχιστον ζεύγος φανταστικών ιδιοτιμών πολλαπλότητας ένα και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές έχουν τα πραγματικά μέρη τους αρνητικά. iii) Ασταθές, σε άλλες περιπτώσεις.

2.3.2 Εικόνες φάσεων στο επίπεδο

Έστω ότι έχουμε ένα 2x2 σύστημα της μορφής (2.3.1) και έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων. Κάθε τέτοιο σύστημα μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ισοδύναμο κανονικό σύστημα

$$y' = Jy \tag{2.3.2}$$

όπου ο πίνακας J μπορεί να έχει μία από τις εξής μορφές:

i) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, ii) $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, iii) $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, iv) $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

Α) Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και άνισες: $\lambda_1 > \lambda_2$.

i) Αν $\lambda_1\lambda_2>0$, τότε η αρχή (0,0) στο επίπεδο φάσεων ονομάζεται κόμβος και είναι ασταθής για $\lambda_1 > \lambda_2>0$, ενώ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής για $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. ii) Αν $\lambda_1\lambda_2<0$, τότε η αρχή (0,0) στο επίπεδο φάσεων ονομάζεται σημείο σάγματος και είναι ασταθής.

Β) Οι ιδιοτιμές είναι ίσες : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$.

i)Αν ο J είναι διαγώνιος, τότε η αρχή (0,0) στο επίπεδο φάσεων ονομάζεται άστρο και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για $\lambda_0 < 0$ και ασταθές αν $\lambda_0 > 0$. ii) Αν ο J δεν είναι διαγώνιος, τότε η αρχή (0,0) στο επίπεδο φάσεων ονομάζεται νόθος κόμβος και είναι ασυμπτωτικά ευσταθής για $\lambda_0 < 0$ και ασταθής για $\lambda_0 > 0$.

Γ) Οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές : $\lambda_{1,2}=\alpha \pm i\beta$, $\beta>0$.

i)Αν $\alpha \neq 0$,τότε η αρχή (0,0) στο επίπεδο φάσεων ονομάζεται εστία ή σπειροειδές σημείο και είναι ασταθές αν α>0 ενώ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν α<0. ii) Αν α=0, τότε η αρχή ονομάζεται κέντρο και οι τροχιές είναι ομόκεντροι κύκλοι γύρω από την αρχή.

2.4 Μη γραμμικά συστήματα

2.4.1 Γραμμικοποίηση μη γραμμικών συστημάτων

Έστω το αυτόνομο μη γραμμικό σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων

$$x' = f(x,y) \quad , \quad y' = g(x,y) \tag{2.4.1}$$

Έστω (χ^*, y^*) το στάσιμο σημείο (σ.σ) του μη γραμμικού συστήματος (2.4.1).Υποθέτουμε ότι οι f(x,y) και g(x,y) του παραπάνω συστήματος έχουν συνεχείς παραγώγους σε μία περιοχή του (χ^*, y^*). Αναπτύσσοντας κατά Taylor γύρω από το στάσιμο σημείο θα έχουμε:

$$f(x,y) = f(x^*, y^*) + x f_x\,(x - x^*) + y\, f_y (y - y^*) + O(||x||^2)\,,$$

$$g(x,y) = g(x^*, y^*) + x\, g_x\,(x - x^*) + y\, g_y (y - y^*) + O(||x||^2)\,, \tag{2.4.2}$$

όπου $O(||x||^2)$ είναι οι όροι ανώτερης τάξης και οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο στάσιμο σημείο (x^*, y^*) . Επειδή το (x^*, y^*) είναι στάσιμο σημείο θα ισχύει ότι $f(x^*, y^*) = 0 = g(x^*, y^*)$. Εισάγοντας το μετασχηματισμό:

$$\upsilon_1 = x - x^*, \quad \upsilon_2 = y - y^*\,, \tag{2.4.3}$$

δηλαδή μετακινώντας την αρχή των αξόνων το σύστημα γράφεται

$$\upsilon_1' = f_x \upsilon_1 + f_y \upsilon_2 + O(2)\,,$$

$$\upsilon_2' = g_x\, \upsilon_1 + g_y \upsilon_2 + O(2). \tag{2.4.4}$$

Οπότε το γραμμικό σύστημα

$$\upsilon_1' = f_x \upsilon_1 + f_y \upsilon_2, \;\; \upsilon_2' = g_x\, \upsilon_1 + g_y \upsilon_2, \tag{2.4.5}$$

αποτελεί την τοπική γραμμικοποίηση του (2.4.1) στο στάσιμο σημείο (x^*, y^*). Σε διανυσματική μορφή γράφεται u΄=Au **,** όπου A=$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$ υπολογισμένο στο (x^*, y^*). Άρα ο πίνακας A ισούται με τον Ιακωβιανό πίνακα υπολογισμένο στο σημείο (x^*, y^*).

Η γραμμικοποίηση έχει μεγάλη σημασία, γιατί, κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις, καθιστά δυνατή την ανάλυση της τοπικής συμπεριφοράς ενός μη γραμμικού συστήματος κοντά στα σημεία ισορροπίας του από τη μελέτη του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος.

<u>Ορισμός 2.4.1.1</u> (Υπερβολικό στάσιμο σημείο) Έστω ότι έχουμε το σύστημα (2.4.1). Ένα στάσιμο σημείο (x^*, y^*) του συστήματος (2.4.1) ονομάζεται *υπερβολικό(ή απλό) στάσιμο σημείο* αν ισχύει ότι J[f,g] $(x^*, y^*) \equiv \det\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \neq 0$. (όπου οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y, g_x, g_y υπολογίζονται στο στάσιμο σημείο (x^*, y^*)).

<u>Θεώρημα2.4.1.1</u> (Hartman-Grobman) Έστω ότι το (x^*, y^*) είναι υπερβολικό στάσιμο σημείο του (2.4.1).Τότε σε μία γειτονιά του (x^*, y^*), το (2.4.1) και το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα (2.4.5) έχουν τοπολογικά ισοδύναμα επίπεδα φάσεων, έχουν δηλαδή το ίδιο είδος ευστάθειας, με εξαίρεση την περίπτωση εκείνη όπου το (x^*, y^*) αποτελεί κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα.□

<u>Παρατήρηση 2.4.1.1</u> Το θεώρημα λέει ότι στην περίπτωση όπου το (x^*, y^*) αποτελεί κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα δεν μπορούμε να αποφανθούμε με σιγουριά ότι αποτελεί κέντρο και για το μη γραμμικό σύστημα. Επίσης σε περίπτωση που ένα στάσιμο σημείο δεν είναι υπερβολικό, τότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 2.4.1.1 για τη μελέτη της ευστάθειας ενός μη γραμμικού αυτόνομου συστήματος της μορφής (2.4.1).

2.4.2 Άλλη μέθοδος μελέτης της ευστάθειας μη γραμμικών συστημάτων

<u>Μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες</u>.

Σε περίπτωση που το Θεώρημα της Γραμμικοποίησης δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα μη γραμμικό σύστημα, τότε ένας τρόπος μελέτης αυτού, που σε κάποιες φορές αποδεικνύεται αποτελεσματικός στηρίζεται στην εισαγωγή των πολικών συντεταγμένων. Η σχέση που υπάρχει μεταξύ των καρτεσιανών συντεταγμένων (x,y) και των πολικών συντεταγμένων (r, θ) είναι η ακόλουθη:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad \text{όπου } r=r(t) \text{ και } \theta=\theta(t). \tag{2.4.6}$$

Γνωρίζουμε ότι $x^2+y^2=r^2$ συνεπώς παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε την σχέση

$\frac{d}{dt}(x^2+y^2)=\frac{d}{dt}(r^2)$, η οποία είναι ισοδύναμη με την σχέση $2xx'+2yy'=2rr'$, απ' όπου με απλοποίηση έχουμε:

$$rr'=xx'+yy' . \tag{2.4.7}$$

Επίσης ισχύει ότι θ=arctan(y/x) συνεπώς παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε ότι

$\frac{d}{dt}(\theta)=\frac{d}{dt}(\arctan(y/x))$, απ' όπου τελικά καταλήγουμε στον εξής τύπο:

$$\theta'=\frac{y'x-yx'}{r^2} \tag{2.4.8}$$

Παρατήρηση 2.4.2.1 Για αναλυτικά διανυσματικά πεδία ισχύει ότι ένα κέντρο στο γραμμικοποιημένο παραμένει κέντρο ή μετατρέπεται σε ευσταθή ή ασταθή εστία.(Ιωάννης Μυριτζής, Δυναμικά συστήματα, ΣΕΑΒ, (2015),σελ.123,θεώρημα 6.1.2)

2.5 Ολική θεωρία

Έως τώρα ασχοληθήκαμε με τα στάσιμα σημεία ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Σε αυτή την Ενότητα θα ασχοληθούμε με τη μελέτη όχι τοπικών μεθόδων (όπως είδαμε νωρίτερα με τα στάσιμα σημεία),αλλά με ολικές μεθόδους. Στη συνέχεια δίνονται κάποιες βασικές έννοιες οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση αυτής της προσέγγισης.

Ορισμός (2.5.1) Ένα **δυναμικό σύστημα** είναι μια συνάρτηση φ(t,x) που ορίζεται για κάθε t $\in$R και x $\in$D$\subset R^n$, η οποία περιγράφει πως τα σημεία x $\in$D κινούνται σε σχέση με τον χρόνο.

Έστω ότι έχουμε το αυτόνομο σύστημα:

$$x'(t)=f(x(t)) \tag{2.5.1}$$

όπου t$\in$J$\subset$R, x $\in$D, όπου D $\subset R^n$, n=1,2,... και f$\in C^1$(D).

Η **τροχιά** που περνάει από το σημείο $x_0\in$ D για t=0 μπορεί να θεωρηθεί ως κίνηση πάνω στην καμπύλη

$$\Gamma_{x_0}=\{\ x \in D \mid x=\phi(t, x_0),\ t\in R\}.$$

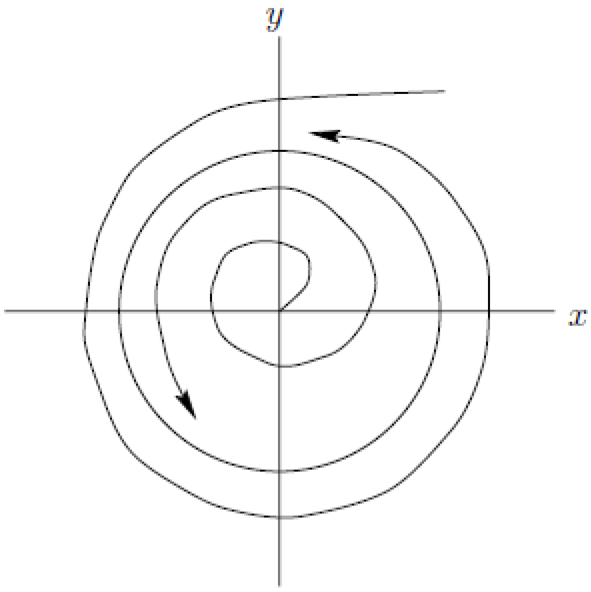
Ορισμός (2.5.2) Ένα σημείο p$\in$D ονομάζεται **ω-οριακό σημείο** της τροχιάς φ(. , x) του συστήματος (2.5.1), εάν υπάρχει μια ακολουθία $t_n \to \infty$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty}$ φ(t_n,x)= p.

Ορισμός (2.5.3) Ένα σημείο q$\in$D ονομάζεται **α-οριακό σημείο** της τροχιάς φ(. , x) του συστήματος (2.5.1), εάν υπάρχει μια ακολουθία $t_n \to -\infty$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty}$ φ(t_n,x)= q .

Ορισμός (2.5.4) Το σύνολο όλων των ω-οριακών σημείων μιας τροχιάς Γ ονομάζεται **ω-οριακό σύνολο της Γ** και συμβολίζεται ως ω(Γ). Το σύνολο όλων των α-οριακών σημείων μιας τροχιάς Γ ονομάζεται **α-οριακό σύνολο της Γ** και συμβολίζεται ως α(Γ). Το σύνολο όλων των οριακών σημείων μιας τροχιάς Γ ονομάζεται **οριακό σύνολο της Γ**.

Ορισμός (2.5.5) Ένας **οριακός κύκλος** Γ ενός συστήματος εξισώσεων στο επίπεδο είναι μια περιοδική τροχιά του (2.5.1), που είναι το α-οριακό σύνολο ή το ω-οριακό σύνολο κάποιας τροχιάς του (2.5.1) αλλά όχι της Γ. Εάν ο οριακός κύκλος Γ είναι το ω-οριακό σύνολο κάθε τροχιάς σε κάποια γειτονία του Γ, τότε ο Γ ονομάζεται **ω-οριακός κύκλος** ή **ευσταθής**

οριακός κύκλος. Εάν ο οριακός κύκλος Γ είναι το α-οριακό σύνολο κάθε τροχιάς σε κάποια γειτονία του Γ, τότε ο Γ ονομάζεται **α-οριακός κύκλος** ή **ασταθής οριακός κύκλος**.



Σχήμα 1.5.1 Οριακός κύκλος στο επίπεδο.

Ορισμός (2.5.6) Ένας εναλλακτικός ορισμός του οριακού κύκλου είναι ο εξής: **οριακός κύκλος** ονομάζεται μια απομονωμένη κλειστή τροχιά. Απομονωμένη κλειστή τροχιά σημαίνει ότι οι γειτονικές τροχιές δεν είναι κλειστές.

Ορισμός (2.5.7) **Περιοδική τροχιά** του συστήματος (2.5.1) ονομάζεται κάθε κλειστή καμπύλη που αποτελεί λύση του (2.5.1), η οποία δεν είναι στάσιμο σημείο του συστήματος.

Ορισμός (2.5.8) Ένα σύνολο S$\subset R^n$ ονομάζεται **αναλλοίωτο σύνολο** της λύσης (ροής) φ(t,x), αν για κάθε t $\in$ R και για κάθε x$\in$ S, φ(t,x) $\in$ S, δηλαδή κάθε τροχιά που ξεκινάει μέσα από το S παραμένει στο S, για κάθε t.

Θεώρημα (2.5.1) (**Θεώρημα καμπύλης Jordan**) Μια απλή, κλειστή (συνεχής) καμπύλη Γ χωρίζει το επίπεδο σε δύο ξένα ανοιχτά, συνεκτικά (connected) σύνολα, που έχουν το Γ ως το σύνορο τους. Ένα από αυτά τα σύνολα, που καλείται **εσωτερικό** του Γ, είναι φραγμένο (bounded) και απλά συνεκτικό. Το άλλο, που καλείται **εξωτερικό** του Γ, είναι μη φραγμένο και δεν είναι απλά συνεκτικό.

Θεώρημα (2.5.2) (**Poincare-Bendixon**) Έστω Ω ένα μη κενό συμπαγές(compact) ω-οριακό σύνολο της λύσης ενός επίπεδου δυναμικού συστήματος (ροής) , τότε αν το Ω δεν περιλαμβάνει κανένα στάσιμο σημείο, το Ω είναι μια περιοδική τροχιά.

2.6 Διακλαδώσεις

2.6.1 Θεωρία

Έστω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$x' = f(x,\alpha), \qquad x \in R^n, \quad \alpha \in R^\kappa, \tag{2.6.1}$$

όπου η f(x,α) είναι λεία ως προς x και ως προς α, α είναι οι παράμετροι του συστήματος.

Ονομάζομε **φαινόμενο διακλάδωσης** για ένα δυναμικό σύστημα (2.6.1) με παράμετρο α το φαινόμενο της μεταβολής της ποιοτικής δομής του συστήματος όταν η παράμετρος α μεταβαλλόμενη πάρει μια τιμή α_0 . Μεταβολή της ποιοτικής δομής σημαίνει για παράδειγμα, μεταβολή του είδους της ευστάθειας των στάσιμων σημείων, εξαφάνιση ή εμφάνιση στάσιμων σημείων ή περιοδικών λύσεων. Η τιμή α_0, στην οποία εμφανίζεται το φαινόμενο διακλάδωσης ονομάζεται **σημείο διακλάδωσης**. Η γραφική παράσταση στο χώρο xy, όπου ο x-άξονας αντιστοιχεί στην παράμετρο α και ο y-άξονας εμφανίζει τα στάσιμα σημεία , ονομάζεται **διάγραμμα διακλάδωσης.** Το διάγραμμα διακλάδωσης βοηθάει να φανεί γραφικά η αλλαγή στην ποιοτική δομή ενός συστήματος. Οι διακλαδώσεις διακρίνονται σε τοπικές (local) και ολικές(global). Οι τοπικές διακλαδώσεις μπορούν να εντοπιστούν αν αναλύσουμε το πρόβλημα σε μια γειτονία των στάσιμων σημείων ενώ οι ολικές (global) δεν μπορούν να εντοπιστούν με αυτόν τον τρόπο. Η συνέχεια της Ενότητας 2.6 αφορά την ανάλυση της διακλάδωσης Poincare' - Andronov-Hopf, η οποία είναι τοπική διακλάδωση.

Διακλάδωση συμβαίνει όταν το στάσιμο σημείο καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος α γίνεται μη υπερβολικό. Σε δυο περιπτώσεις ένα στάσιμο σημείο είναι μη υπερβολικό.

i) Μια πραγματική ιδιοτιμή παίρνει την τιμή μηδέν για κάποια τιμή της παραμέτρου α.

ii) Ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών $\lambda_{1,2} = \omega \pm i\omega_0$ περνάει ταυτόχρονα τον φανταστικό άξονα (ω=0), για κάποια τιμή της παραμέτρου, δηλαδή οι ιδιοτιμές γίνονται $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$.

Η συνέχεια της Ενότητας αφορά μόνο τη δεύτερη περίπτωση.

<u>Ορισμός 2.6.1.1:</u> Η διακλάδωση που αφορά την εμφάνιση ιδιοτιμών $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ ονομάζεται **διακλάδωση Hopf** (ή **διακλάδωση Andronov-Poincare' - Hopf**).

2.6.2 Κανονική μορφή της διακλάδωσης Hopf

1) Υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf.

Έστω ότι έχουμε το εξής μονοπαραμετρικό σύστημα στο επίπεδο

$$x' = \alpha x - y - x(x^2 + y^2)$$

$$y' = x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \qquad (2.6.2)$$

Το στάσιμο σημείο του συστήματος είναι το (x^*, y^*)=(0,0), για κάθε α. Ο Ιακωβιανός πίνακας A=$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_{1,2}$ =α$\pm$i.

Ένας τρόπος απλοποίησης του συστήματος (2.6.2) είναι η μετατροπή του σε πολικές συντεταγμένες. Χρησιμοποιώντας τους τύπους (2.4.6) και (2.4.7) έχουμε το σύστημα

$$r' = r(\alpha - r^2)$$

$$\theta' = 1 \qquad (2.6.3)$$

Η δεύτερη εξίσωση περιγράφει μια περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ίση με τη μονάδα Συνεπώς τώρα μπορεί να βρεθεί η ευστάθεια των στάσιμων σημείων.

Για α<0 , το στάσιμο σημείο (0,0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εστία.

Για α>0 , το στάσιμο σημείο (0,0) είναι ασταθής εστία.

Για α=0, το στάσιμο σημείο (0,0) είναι απλά ευσταθής εστία.

Όμως, ενώ για α<0 το διανυσματικό πεδίο της πρώτης εξίσωσης στη σχέση (2.6.3) μηδενίζεται μόνο στο (0,0) (δηλαδή r=0), μόλις το α γίνει μεγαλύτερο του 0, το διανυσματικό πεδίο r(α-r^2) αποκτά και μια 2η ρίζα στο σημείο r_0(α)=$\sqrt{\alpha}$, στην οποία αντιστοιχεί ένας μοναδικός οριακός κύκλος αντίστοιχης ακτίνας r_0(α)=$\sqrt{\alpha}$, με κέντρο το στάσιμο σημείο (0,0). Παρατηρούμε δε ότι κάθε τροχιά που ξεκινάει εντός ή εκτός του οριακού κύκλου τείνει προς αυτόν, καθώς το $t \to \infty$, ο οριακός κύκλος είναι δηλαδή ασυμπτωτικά ευσταθής.

Η παραπάνω διακλάδωση ονομάζεται υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf και είναι εκπρόσωπος των διακλαδώσεων Hopf.

Άρα στην υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf, καθώς η παράμετρος α αυξάνει από αρνητικές σε θετικές τιμές οι ιδιοτιμές $\lambda_{1,2}$ =α$\pm$i μετατοπίζονται στο μιγαδικό επίπεδο και για α=α_0=0 γίνονται καθαρά φανταστικές. Συνεπώς το α_0=0 είναι σημείο διακλάδωσης.

2) Υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf.

Έστω ότι έχουμε το εξής μονοπαραμετρικό σύστημα στο επίπεδο

$$x'=\alpha x-y+x(x^2+y^2),$$

$$y'=x+\alpha y+y(x^2+y^2). \qquad (2.6.4)$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο (x^*, y^*)=(0,0), είναι ένα στάσιμο σημείο του συστήματος (2.6.4) για κάθε τιμή του α. Ο Ιακωβιανός πίνακας A έχει ιδιοτιμές

$\lambda_{1,2}$ =α$\pm$i.

Ένας τρόπος απλοποίησης του συστήματος (2.6.4) είναι η μετατροπή του σε πολικές συντεταγμένες. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τους τύπους (2.4.6) και (2.4.7) έχουμε το σύστημα:

$$r'=r(\alpha+r^2)$$

$$\theta'=1 \qquad (2.6.5)$$

Η δεύτερη εξίσωση περιγράφει μια περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ίση με τη μονάδα Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση μπορεί να βρεθεί ότι για το στάσιμο σημείο (0,0) ισχύουν:

(i) Για α<0 ,το στάσιμο σημείο (0,0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εστία.
(ii) Για α>0 , το στάσιμο σημείο (0,0) είναι ασταθής εστία.
(iii) Για α=0, το στάσιμο σημείο (0,0) είναι απλά ευσταθής εστία .

Όμως για α<0 υπάρχει και ένα άλλο στάσιμο σημείο, το οποίο είναι ένας μοναδικός ασταθής οριακός κύκλος, ο οποίος εξαφανίζεται όταν το α γίνει μηδέν από αρνητικές σε θετικές τιμές. Η παραπάνω διακλάδωση Hopf ονομάζεται υποκρίσιμη. Άρα και στην υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf, καθώς η παράμετρος α αυξάνει από αρνητικές σε θετικές τιμές οι ιδιοτιμές $\lambda_{1,2}$ =α$\pm$i μετατοπίζονται στο μιγαδικό επίπεδο και για α=α_0=0 γίνονται καθαρά φανταστικές. Άρα το α_0=0 είναι και πάλι ένα σημείο διακλάδωσης.

Παρατηρήσεις 2.6.2.1

1) Η διακλάδωση Hopf διακρίνεται σε δύο είδη: Την υπερκρίσιμη και την υποκρίσιμη. Στην υπερκρίσιμη διακλάδωση η ευστάθεια του στάσιμου σημείου εξαρτάται από την παράμετρο α .Επίσης και το μέγεθος του ευσταθούς οριακού κύκλου μου εμφανίζεται εξαρτάται από την παράμετρο α καθώς η ακτίνα του οριακού κύκλου όπως είδαμε παραπάνω αυξάνεται συνεχώς από το μηδέν(αφού κινούμαστε από αρνητικές τιμές της παραμέτρου σε θετικές) και είναι ανάλογη του $\sqrt{\alpha}$.

2) Και στα δύο είδη για α=0 το στάσιμο σημείο (0,0) από ασυμπτωτικά ευσταθές μετατρέπεται σε ασταθές. Στην υπερκρίσιμη περίπτωση ένας ασυμπτωτικά ευσταθής

οριακός κύκλος μικρού πλάτους αντικαθιστά το ασυμπτωτικά ευσταθές στάσιμο σημείο. Στην υποκρίσιμη περίπτωση ένας ασταθής οριακός κύκλος μικραίνει και τελικά εξαφανίζεται για α>0 οπότε το στάσιμο σημείο (0,0) γίνεται ασταθές. Συνεπώς, η διάκριση μεταξύ υπερκρίσιμης και υποκρίσιμης διακλάδωσης γίνεται μέσω της εύρεσης του είδους ευστάθειας του στάσιμου σημείου για α=α_0.

3) Θα πρέπει να προσέξουμε την εμφάνιση της εκφυλισμένης διακλάδωσης Hopf**.** Στην εκφυλισμένη περίπτωση για α=0 δεν έχουμε πραγματική διακλάδωση Hopf , γιατί σε καμία μεριά της διακλάδωσης δεν υπάρχουν οριακοί κύκλοι(δηλαδή ούτε για α>0 ούτε για α<0).Αντιθέτως για α=0 η αρχή είναι κέντρο(ενώ στα δύο είδη Hopf διακλαδώσεων είδαμε ότι ήταν ασταθής ή ευσταθής σπείρα) οπότε πλήθος ομόκεντρων κλειστών τροχιών περικυκλώνουν την αρχή.

Γράφοντας το σύστημα (2.6.2) σε διανυσματική μορφή και παίρνοντας όρους υψηλότερης τάξης έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2+y^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(||x||^4) \qquad (2.6.6)$$

όπου x $= (\chi, y)^T$, O($||\chi||^4$) κα $||\chi||^2 = \chi^2+y^2$ εξαρτώνται ομαλά από την παράμετρο α.

<u>Λήμμα 2.6.2.1</u> Το σύστημα (2.6.6) είναι τοπολογικά ισοδύναμο κοντά στην αρχή με το σύστημα (2.6.2).(Yuri A.Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory,1998, pg 90, Lemma 3.2).

2.6.3 Generic Hopf διακλαδώσεις

<u>Θεώρημα 2.6.3.1</u> Έστω ότι το σύστημα δυο διαστάσεων

$$x' = f(x,\alpha), \quad x \in R^2, \alpha \in R^1 \qquad (2.6.7)$$

με f λεία, έχει για κάθε επαρκώς μικρό |α| το στάσιμο σημείο x=(0,0) με ιδιοτιμές

$\lambda_{1,2}(\alpha)$ =μ(α)$\pm$iω(α) , όπου μ(0)=0, ω(0)=ω_0>0. Έστω ότι οι ακόλουθες συνθήκες ικανοποιούνται :

(A.1) $l_1(0) \neq 0$,όπου l_1 είναι ο πρώτος συντελεστής Lyapunov.

(A.2) μ΄(0) $\neq 0$. Τότε, υπάρχουν αντιστρέψιμες μετατροπές στις συντεταγμένες και στην παράμετρο καθώς και μια παραμετροποίηση(reparametrization) του χρόνου που μετατρέπουν την (2.6.7) στην :

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pm (x^2+y^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(||x||^4) \qquad (2.6.8)$$

Παρατήρηση 2.6.3.1: Το (Α.1) είναι η συνθήκη μη εκφυλισμού και το (Α.2) είναι η συνθήκη transversality. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.6.1 μπορούμε να διώξουμε τους όρους $O(||x||^4)$ επομένως καταλήγουμε στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.6.3.2(Τοπολογική κανονική μορφή για τη διακλάδωση Hopf): Κάθε γενικό μονο-παραμετρικό σύστημα δύο διαστάσεων της μορφής x΄=f(x,α) , το οποίο έχει για α=0 το στάσιμο σημείο x=0 με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, ω_0 >0 , είναι τοπικά τοπολογικά ισοδύναμο κοντά στην αρχή με κάποια από τις παρακάτω κανονικές μορφές :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pm (x^2+y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.6.9}$$

Παρατήρηση2.6.3.1: Οι συνθήκες του θεωρήματος (2.6.2) είναι οι ίδιες συνθήκες (Α.1) και (Α.2) από το θεώρημα (2.6.1).

Παρατήρηση 2.6.3.2:Τα παραπάνω θεωρήματα είναι πολύ σημαντικά γιατί επιτρέπουν την ανάλυση της διακλάδωσης Hopf στα γενικά συστήματα δύο διαστάσεων ,μέσω της ανάλυσης που έγινε παραπάνω για την κανονική μορφή.(δηλαδή τις δυο περιπτώσεις που αναλύονται παραπάνω ,την υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf και την υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf).

2.7 Υποδείγματα Lotka-Volterra

Τα υποδείγματα ΄΄Lotka-Volterra΄΄ ή αλλιώς ΄΄Θηράματος- Αρπακτικού ΄΄ αναπτύχθηκαν ανεξάρτητα από τον Alfred J.Lotka(1925) σε βιοχημικές εφαρμογές και τον Vitto Volterra(1927) σε εφαρμογές οικολογίας. Τα υποδείγματα αυτά αποτελούν μέρος των μοντέλων του τομέα της βιολογίας που ονομάζεται πληθυσμιακή βιολογία. Τα υποδείγματα πληθυσμού προσπαθούν να περιγράψουν την ανάπτυξη του πληθυσμού ενός ή περισσοτέρων ειδών στον πλανήτη αλλά και πως διάφοροι πληθυσμοί αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Ιδρυτές των υποδειγμάτων πληθυσμών ήταν μεταξύ άλλων οι Maltheus(1798) και Verhust(1838), οι οποίοι ασχολήθηκαν με την μελέτη του πληθυσμού ενός είδους. Στη συνέχεια οι Lotka και Volterra ασχολήθηκαν μεταξύ άλλων με τα υποδείγματα αλληλεπίδρασης θηράματος-αρπακτικού και ανταγωνισμού δυο ειδών. Υπάρχουν διάφορα υποδείγματα θηράματος-αρπακτικού[1] αλλά το πιο απλό είναι το Lotka-Volterra, το οποίο συσχετίζει τον πληθυσμό ενός είδους αρπακτικού και τον πληθυσμό ενός είδους θηράματος.

[1] Ο Kolmogorov(1936) ασχολήθηκε με τα γενικά Kolmogorov-Lotka-Volterra υποδείγματα. Το απλό υπόδειγμα Lotka- Volterra έχει επεκταθεί και σε περισσότερες διαστάσεις. Επίσης έχουν γίνει διάφορες τροποποιήσεις του υποδείγματος μεταξύ άλλων από τους Ivlev(1961) και Holling(1965).

2.7.1 Το απλό υπόδειγμα Lotka-Volterra.

Το απλό υπόδειγμα Lotka-Volterra μελετάει ένα περιβάλλον στο οποίο αλληλεπιδρούν δυο μονάχα είδη πληθυσμών, ένα αρπακτικό και ένα θήραμα. Ο πληθυσμός του αρπακτικού συμβολίζεται με y ενώ ο πληθυσμός του θηράματος συμβολίζεται με x.Το υπόδειγμα υποθέτει ότι ισχύουν τα εξής: τα αρπακτικά τρέφονται αποκλειστικά με το θήραμα, το θήραμα στην απουσία αρπακτικού αυξάνεται απεριόριστα με σταθερό ρυθμό a και το αρπακτικό στην απουσία θηράματος μειώνεται με σταθερό ρυθμό d. Δηλαδή εάν ο πληθυσμός του αρπακτικού μηδενιστεί(y=0) αυτό σημαίνει ότι $\dot{x}$=αx, οπότε επιλύοντας την προηγούμενη διαφορική εξίσωση με την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών έχουμε ότι ο πληθυσμός του θηράματος αυξάνεται σύμφωνα με τον εξής τύπο : x(t)=$x_0 e^{at}$.

Αντίστοιχα, εάν ο πληθυσμός του θηράματος μηδενιστεί(x=0) αυτό σημαίνει ότι $\dot{y}$=-dy, οπότε επιλύοντας την προηγούμενη διαφορική εξίσωση με την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών έχουμε ότι ο πληθυσμός του αρπακτικού μειώνεται σύμφωνα με τον εξής τύπο: y(t)=$y_0 e^{-dt}$. Όμως εάν το θήραμα και το αρπακτικό αλληλεπιδρούν , τότε ο πληθυσμός του αρπακτικού αυξάνεται κατά cxy και ο πληθυσμός του θηράματος μειώνεται κατά bxy, όπου xy είναι ο παράγοντας που δηλώνει την αλληλεπίδραση των δυο ειδών. Όλες οι παραπάνω υποθέσεις μπορούν να διατυπωθούν μαθηματικά από το εξής σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x}(t) = \alpha x - bxy \tag{2.7.1.a}$$

$$\dot{y}(t) = cxy - dy \tag{2.7.1.b}$$

όπου a,b,c,d είναι θετικοί αριθμοί , οι οποίοι συμβολίζουν την επίδραση του ενός είδους στο άλλο.

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων βρίσκουμε ότι έχει δυο στάσιμα σημεία: το στάσιμο σημείο (0,0) και το στάσιμο σημείο ($\frac{d}{c}, \frac{a}{b}$), το οποίο ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο αφού ισχύει ότι α,b,c,d >0. Στη συνέχεια γίνεται η τοπική ανάλυση ευστάθειας των στάσιμων σημείων. Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι:

$$J=\begin{pmatrix} a-by & -bx \\ cy & cx-d \end{pmatrix} \tag{2.7.2}$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας υπολογισμένος στο στάσιμο σημείο (0,0) είναι :

$$J=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} \tag{2.7.3}$$

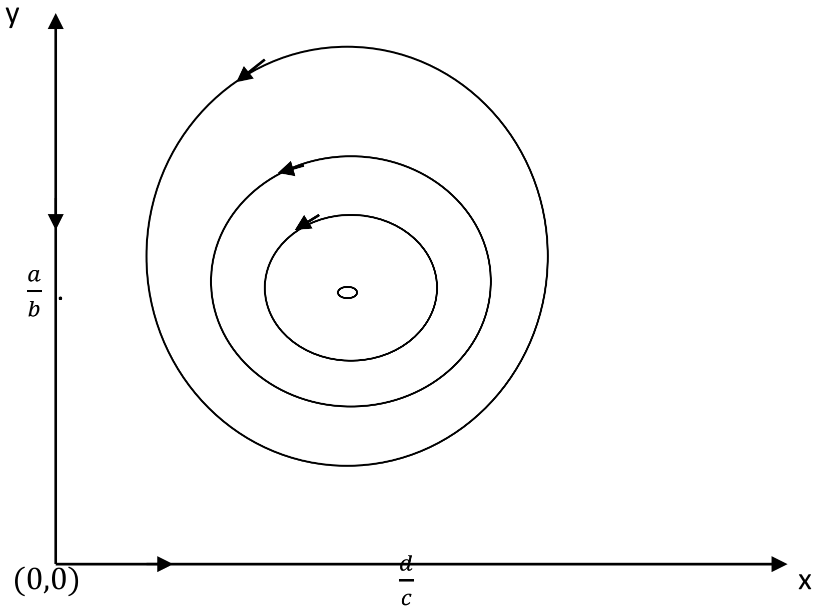
Οι ιδιοτιμές είναι λ_1=a και λ_2=-d , δηλαδή πραγματικές και άνισες και ισχύει ότι $\lambda_1\lambda_2$<0, οπότε η αρχή είναι ασταθές σημείο σάγματος.

Ο Ιακωβιανός πίνακας υπολογισμένος στο στάσιμο σημείο ($\frac{d}{c}$,$\frac{a}{b}$) είναι :

$$J=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-bd}{c} \\ \frac{ca}{b} & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.7.4)$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=i\sqrt{ad}$ και $\lambda_1=-i\sqrt{ad}$, δηλαδή είναι καθαρά μιγαδικές και το στάσιμο σημείο είναι κέντρο[2].

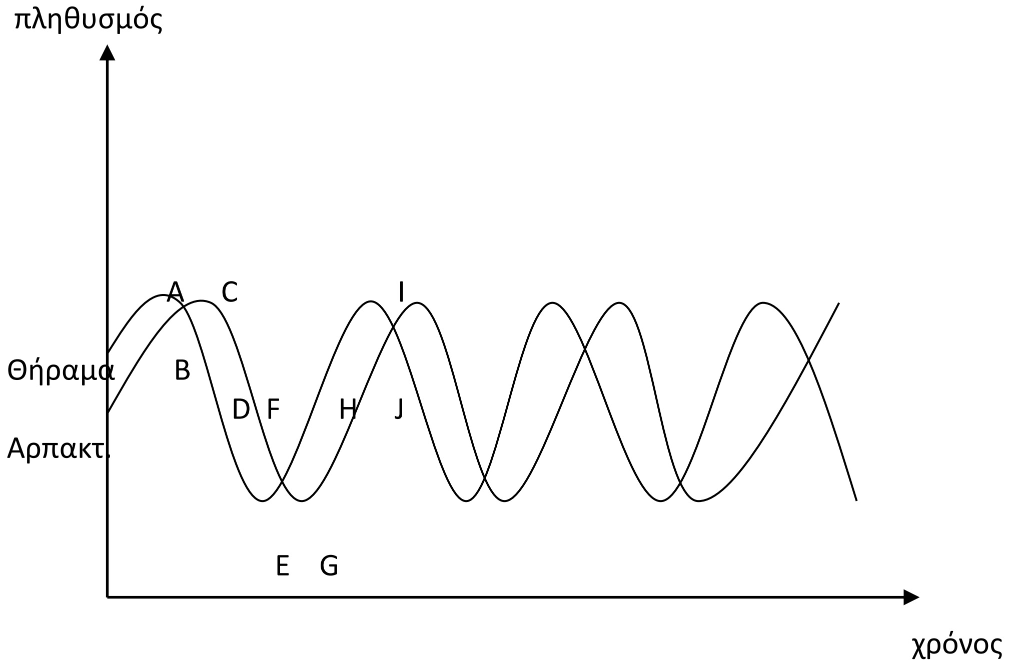
Στη συνέχεια δίνεται γραφικά το πορτραίτο φάσης του συστήματος Lotka-Volterra , όπου φαίνονται τα στάσιμα σημεία και οι τροχιές του συστήματος.



Σχήμα 2.7.1.1: πορτραίτο φάσης του συστήματος Lotka-Volterra 2.7.1.a και 2.7.1.b.

Συνεπώς για κάθε αρχική τιμή (x_0,y_0)$\in\Re^2_{++}$ η λύση του συστήματος 2.7.1.a και 2.7.1.b είναι περιοδική. Δηλαδή για οποιοδήποτε πληθυσμό αρπακτικού και θηράματος που ανήκει στο θετικό τεταρτημόριο παρατηρούμε ότι ούτε ο πληθυσμός του αρπακτικού εξαφανίζεται, ούτε ο πληθυσμός του θηράματος αυξάνεται απεριόριστα. Αυτή η περιοδικότητα του συστήματος γίνεται φανερή και στο παρακάτω σχήμα:

[2] Για την ακρίβεια επειδή το σύστημα που μελετάμε είναι μη γραμμικό , το στάσιμο σημείο ($\frac{d}{c}$,$\frac{a}{b}$) μπορεί να είναι είτε κέντρο είτε σπείρα. Σύμφωνα με την Leah Edelstein-Keshet(2005,σελίδα 220) το στάσιμο σημείο είναι κέντρο.



Σχήμα 2.7.1.2: Γραφική παράσταση του πληθυσμού του θηράματος και του πληθυσμού του αρπακτικού σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε τα εξής: Στο σημείο A ο πληθυσμός του θηράματος έχει φτάσει στο επίπεδο όπου παίρνει την μεγαλύτερη τιμή του και από εκείνη την χρονική στιγμή και έπειτα αρχίζει και μειώνεται. Την ίδια χρονική στιγμή στο σημείο B ο πληθυσμός του αρπακτικού είναι μεγαλύτερος από νωρίτερα και συνεχίζει να αυξάνεται μετά την χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στο σημείο B. Δηλαδή ο πληθυσμός του θηράματος σε αυτή τη φάση επαρκεί για να θρέψει τα αρπακτικά. Στο σημείο D ο πληθυσμός του θηράματος συνεχίζει να μειώνεται και την ίδια χρονική στιγμή στο σημείο C ο πληθυσμός του αρπακτικού έχει φτάσει την υψηλότερη τιμή του. Από αυτή την χρονική στιγμή και έπειτα ο πληθυσμός του αρπακτικού αρχίζει να μειώνεται , δηλαδή η μείωση του πληθυσμού του θηράματος είναι τέτοιου μεγέθους που η τροφή για τα αρπακτικά δεν επαρκεί και κατά συνέπεια τα αρπακτικά αρχίζουν και πεθαίνουν. Από την χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στο σημείο E και έπειτα ο πληθυσμός του θηράματος αρχίζει να αυξάνεται και πάλι, ενώ την ίδια χρονική στιγμή ο πληθυσμός του αρπακτικού συνεχίζει να μειώνεται μέχρι να φτάσει στην κατώτερη τιμή του στο σημείο G. Από την χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στο σημείο G και έπειτα αυξάνονται και οι δύο πληθυσμοί εως ότου έχει γίνει ένας πλήρης κύκλος. Δηλαδή ο πληθυσμός του θηράματος και ο πληθυσμός του αρπακτικού έχουν επανέλθει στις τιμές από όπου ξεκίνησαν. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται εις άπειρον , όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.7.1.2.

Παρατηρήσεις για το απλό υπόδειγμα Lotka-Volterra:

1)Το στάσιμο σημείο ($\frac{d}{c}$,$\frac{a}{b}$) είναι ασταθές κέντρο, δηλαδή μια μικρή διαταραχή μπορεί να καταστρέψει την περιοδικότητα . Στον ιακωβιανό πίνακα (2.7.4) οι όροι $\frac{-bd}{c}$ και $\frac{ca}{b}$ έχουν αντίθετα πρόσημα για να δηλώσουν την αντίθετη επίδραση που έχει το ένα είδος στο άλλο. Αφού το στάσιμο σημείο ($\frac{d}{c}$,$\frac{a}{b}$) είναι κέντρο , οι λύσεις του συστήματος (2.7.1.a) και (2.1.7.b) είναι περιοδικές τροχιές ακτίνας $\sqrt{ad}$. Όσο πιο μεγάλη είναι η θνησιμότητα του αρπακτικού ή η αναπαραγωγή του θηράματος τόσο μεγαλύτερης ακτίνας θα είναι οι κύκλοι.

2) Επειδή το σύστημα (2.7.1.a) και (2.1.7.b) είναι πεπλεγμένο παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός της x μεταβλητής του στάσιμου σημείου ($\frac{d}{c}$,$\frac{a}{b}$),η οποία αντιστοιχεί στο θήραμα, δεν εξαρτάται από τον ρυθμό ανάπτυξης του θηράματος αλλά από παραμέτρους που αφορούν το αρπακτικό αφού x=$\frac{d}{c}$. Αντίστοιχα ο υπολογισμός της y μεταβλητής του στάσιμου σημείο, η οποία αντιστοιχεί στο αρπακτικό , εξαρτάται από παραμέτρους που αφορούν το θήραμα καθώς y=$\frac{a}{b}$. Συνεπώς για να παραμείνει ο πληθυσμός του αρπακτικού σταθερός , θα πρέπει να ισχύει xc=d και για να παραμείνει ο πληθυσμός του θηράματος σταθερός θα πρέπει να ισχύει α=by.

2.7.2 Το γενικό Kolmogorov- Lotka-Volterra υπόδειγμα.

Το απλό μοντέλο Lotka-Volterra έχει δεχτεί κριτική για το γεγονός ότι εάν τροποποιηθούν οι εξισώσεις 2.7.1.a και 2.7.1.b, τότε οι λύσεις του συστήματος παύουν να είναι περιοδικές. Για παράδειγμα, στην εξίσωση του θηράματος θεωρούμε ότι υπάρχει ένα όριο στο κατά πόσο μπορεί να συνεχίσει να αυξάνεται ο πληθυσμός του θηράματος, αφού ή τροφή του θηράματος δεν είναι απεριόριστη. Έτσι η εξίσωση 2.7.1.a αντικαθίσταται από την λογιστική εξίσωση και έτσι το σύστημα με τις εξισώσεις 2.7.1.a και 2.7.1.b παίρνει την εξής μορφή:

$$\dot{x}=\frac{ax(K-x)}{K} - \text{bxy} \tag{2.7.5.a}$$

$$\dot{y}= \text{cxy- dy} \tag{2.7.5.b}$$

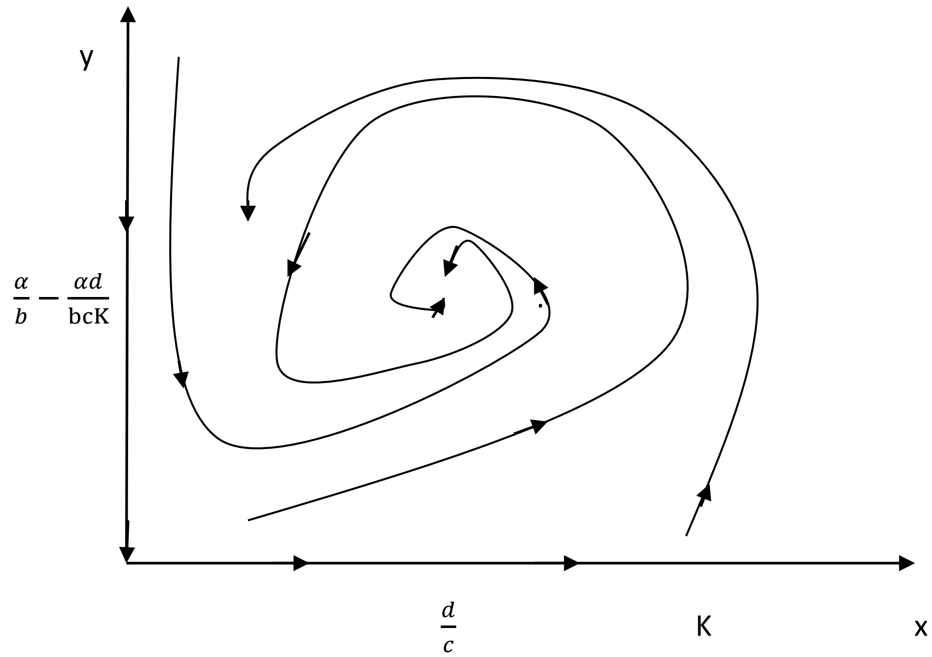
όπου Κ είναι θετικός αριθμός και δηλώνει τον μέγιστο πληθυσμό του θηράματος που μπορεί να υπάρξει στο σύστημα μας. Το σύστημα (2.7.5.a), (2.7.5.b) έχει τα εξής στάσιμα σημεία: (0,0), (K,0), ($\frac{d}{c}$,$\frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha d}{\text{bcK}}$). Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι:

$$J=\begin{pmatrix} a-\frac{2ax}{K}-by & -bx \\ cy & cx-d \end{pmatrix} \tag{2.7.6}$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας υπολογισμένος στο στάσιμο σημείο $(\frac{d}{c}, \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha d}{\mathrm{bcK}})$ είναι:

$$J=\begin{pmatrix} \frac{-\alpha d}{cK} & \frac{-bd}{c} \\ c(\frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha d}{\mathrm{bcK}}) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.7)$$

Το στάσιμο σημείο $(\frac{d}{c}, \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha d}{\mathrm{bcK}})$ είναι ευσταθής σπείρα. Συνεπώς είδαμε ότι με μια μικρή αλλαγή στις εξισώσεις του θηράματος και του αρπακτικού , το σύστημα δεν έχει πια περιοδικές λύσεις. Το γεγονός αυτό φαίνεται και γραφικά στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.7.2.1: Το στάσιμο σημείο είναι ευσταθής σπείρα όταν ο πληθυσμός του θηράματος αυξάνεται λογιστικά και όχι εκθετικά όπως στο σχήμα 2.7.1.1.

Με το παραπάνω πρόβλημα του απλού Lotka- Volterra μοντέλου ασχολήθηκε ο Kolmogorov(1936) , ο οποίος μελέτησε υπο ποιες συνθήκες έχει περιοδικές λύσεις το γενικό σύστημα Lotka- Volterra:

$$\dot{x}=xf(x,y) \quad (2.7.8.a)$$

$$\dot{y}=yg(x,y) \quad (2.7.8.b)$$

Οι συναρτήσεις f και g του παραπάνω συστήματος πρέπει να ικανοποιούν τις εξής συνθήκες: $\frac{\theta f}{\theta x} < 0$, $\frac{\theta f}{\theta y} < 0$, $\frac{\theta g}{\theta x} > 0$, $\frac{\theta g}{\theta y} < 0$.

2.7.3 Το μοντέλο Lotka-Volterra στην ερμηνεία οικονομικών προβλημάτων.

Τα υποδείγματα Lotka-Volterra όμως παρά το γεγονός ότι ανήκουν στον τομέα της οικολογίας έχουν εφαρμογή και στον οικονομικό κλάδο. Οι Samuelson(1967) και ο Goodwin(1967) μεταξύ άλλων παρατήρησαν ότι τα υποδείγματα αυτά μπορούσαν να εξηγήσουν οικονομικά θέματα. Πιο συγκεκριμένα ο Goodwin(1967) παρουσίασε ένα μακροοικονομικό μοντέλο με το οποίο προσπαθούσε να εξηγήσει ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ των μισθών των εργαζομένων μιας επιχείρησης και του ποσοστού απασχόλησης του εργατικού δυναμικού αποτελεί ενδογενή αιτία για την εμφάνιση οικονομικών κύκλων. Το μοντέλο του Goodwin βασίζεται στο μοντέλο Lotka-Volterra , όπου το ποσοστό απασχόλησης του εργατικού δυναμικού είναι το θήραμα και οι μισθοί των εργαζομένων είναι το αρπακτικό. Όταν το ποσοστό απασχόλησης του εργατικού δυναμικού είναι υψηλό οι εργάτες έχουν περισσότερη δύναμη στην διαπραγμάτευση του μισθού. Ο υψηλότερος μισθός για τους εργαζομένους σημαίνει λιγότερα κέρδη για τις επιχειρήσεις, με αποτέλεσμα οι επιχειρήσεις να προσλαμβάνουν λιγότερους εργάτες. Κατά συνέπεια υπάρχει αύξηση της ανεργίας ,οι εργάτες έχουν λιγότερη δύναμη στην διαπραγμάτευση του μισθού και τα κέρδη των επιχειρήσεων αυξάνονται. Αυτή η αύξηση των κερδών οδηγεί τις επιχειρήσεις σε προσλήψεις και κατά συνέπεια εμφανίζεται κυκλική συμπεριφορά. Οι λόγοι για τους οποίους τα οικονομικά υποδείγματα μπορούν να αναπαρασταθούν κατά αναλογία με τα υποδείγματα Lotka-Volterra είναι οι εξής: Πρώτον, κάθε μακροοικονομικό μοντέλο για να έχει νόημα οικονομικά θα πρέπει να είναι φραγμένο. Όμως η κατασκευή ενός ενδογενούς φραγμένου μοντέλου απαιτεί κάποιες θετικές και κάποιες αρνητικές επιδράσεις. Ο λόγος είναι ότι αν δεν υπάρχουν οι αρνητικές επιδράσεις το μοντέλο θα ξεφεύγει από τις οικονομικά εφικτές περιοχές. Τα κλασικά Κευνσιανά υποδείγματα τα οποία βασίζονται μόνο στην αλληλεπίδραση του πολλαπλασιαστή και του επιταχυντή απαιτούν εξωγενή φράγματα. Τα υποδείγματα ΄ Θηράματος-Αρπακτικού όμως αποτελούνται από μια θετική επίδραση που έχει ο πληθυσμός του θηράματος στον πληθυσμό του αρπακτικού και από μια αρνητική επίδραση που έχει ο πληθυσμός του αρπακτικού στον πληθυσμό του θηράματος. Η παραπάνω ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο μοντέλο που αναλύεται στην παρούσα εργασία οπότε ο ρυθμός της επένδυσης μοντελοποιείται κατά αναλογία με τον πληθυσμό του θηράματος , ενώ οι χρηματοοικονομικές μεταβλητές μοντελοποιούνται κατά αναλογία με τον πληθυσμό του αρπακτικού. Δεύτερον, στα υποδείγματα ΄ Θηράματος-Αρπακτικού΄ εμφανίζονται κυκλικές συμπεριφορές. Η παραπάνω ιδιότητα είναι σημαντική γιατί και τα μακροοικονομικά υποδείγματα τα οποία στηρίζονται στα υποδείγματα ΄ Θηράματος-Αρπακτικού΄ εμφανίζουν κυκλικές συμπεριφορές ,οι οποίες μπορούν να ερμηνευθούν ως οικονομικοί κύκλοι.

2.8 Μακροοικονομική θεωρία

Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη της διαδικασίας προτυποποίησης των οικονομικών κύκλων, θα πρέπει να δοθεί ένα κατάλληλο μακροοικονομικό πλαίσιο για την καλύτερη κατανόηση του μοντέλου.

Η οικονομική επιστήμη διακρίνεται σε δύο κλάδους. Ο πρώτος είναι η Μακροοικονομική επιστήμη και ο δεύτερος είναι η Μικροοικονομική επιστήμη. Η Μακροοικονομική μελετάει την συμπεριφορά της οικονομίας ως σύνολο ενώ η Μικροοικονομική μελετάει την συμπεριφορά των επιμέρους οικονομικών μονάδων, δηλαδή την συμπεριφορά των επιχειρήσεων και των νοικοκυριών[3]. Μεταξύ των θεμάτων της Μακροοικονομικής που διερευνούν οι οικονομολόγοι είναι τα προβλήματα που δημιουργούνται στην οικονομία και την απομακρύνουν από την ισορροπία,οι διάφοροι τρόποι αντιμετώπισης των εν λόγω προβλημάτων, ο τρόπος προσδιορισμού των οικονομικών μεγεθών , οι μεταξύ τους σχέσεις-αιτίας/αιτιατού- και ο τρόπος με τον οποίο η οικονομία μιας χώρας αλληλεπιδρά με τις οικονομίες άλλων χωρών κλπ. Για παράδειγμα, μακροοικονομικά θέματα τα οποία επηρεάζουν τις ζωές όλων των μελών μιας κοινωνίας είναι η ανεργία, ο πληθωρισμός, η οικονομική ύφεση και η μελέτη των παραγόντων που προκαλούν διακυμάνσεις της οικονομικής δραστηριότητας. Ένας ορισμός της Μακροοικονομικής δίνεται ως εξής[4]: ≪ Ως Μακροοικονομική μπορεί να οριστεί η επιστήμη που εξετάζει τη λειτουργία της οικονομίας ως συνόλου και που ασχολείται με τον προσδιορισμό και την συμπεριφορά των συνολικών μεγεθών και των παραγόντων που προκαλούν τις μεταβολές τους≫.

2.8.1 Ορισμός οικονομικού κύκλου

Ένα σοβαρό μακροοικονομικό ζήτημα αποτέλεσε από τον δέκατο ένατο αιώνα η μελέτη των οικονομικών κύκλων(ή αλλιώς οικονομικών διακυμάνσεων). Πιο συγκεκριμένα η πορεία της οικονομίας χαρακτηρίζεται από περιόδους ευημερίας και ύφεσης. Οι διακυμάνσεις της οικονομικής δραστηριότητας αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως οικονομικός κύκλος και διαφέρουν ως προς την συχνότητα εμφάνισης τους , την ένταση και την διάρκεια τους,καθώς και τις αιτίες τους. Πολλά είναι τα μακροοικονομικά μεγέθη που επηρεάζουν τη διακύμανση της οικονομικής δραστηριότητας. Οι οικονομολόγοι επικεντρώνονται κυρίως στις διακυμάνσεις του ΑΕΠ , των επενδύσεων και της παραγωγής. Όλα όμως σχεδόν τα μακροοικονομικά μεγέθη μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια του οικονομικού κύκλου. Κάποια μεγέθη όπως για παράδειγμα η επένδυση, οι εισαγωγές, τα κέρδη των επιχειρήσεων και το ύψος της δανειοδότησης προς τον ιδιωτικό τομέα μεταβάλλονται με την ίδια φορά του οικονομικού κύκλου, δηλαδή αυξάνονται όταν αυξάνεται το ΑΕΠ και μειώνονται όταν μειώνεται το ΑΕΠ. Κάποια άλλα μεγέθη μεταβάλλονται αντίθετα με τη φορά του οικονομικού κύκλου. Παραδείγματα τέτοιων μεγεθών αποτελούν η ανεργία, ο αριθμός των

[3] Το θέμα της εργασίας αφορά την αιτία δημιουργίας οικονομικών κύκλων, δηλαδή ένα μακροοικονομικό φαινόμενο. Οπότε δεν γίνεται σε βάθος μελέτη της μικροοικονομικής θεωρίας.
[4] Αθηνά Πετράκη Κώττη και Γεώργιος Χριστ.Κώττη, Μακροοικονομική Θεωρία και Πολιτική, ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ(2001).

απολύσεων και ο αριθμός των χρεοκοπημένων επιχειρήσεων. Και τέλος κάποια μεγέθη δεν επηρεάζονται από τις φάσεις του οικονομικού κύκλου.

Οι οικονομικοί κύκλοι ορίζονται στο βιβλίο ΄΄Measuring business cycles΄΄ των Burns and Mitchell(1946,σελίδα) ως εξής: ≪ Οι οικονομικοί κύκλοι είναι ένα είδος διακύμανσης που συναντάται στην συνολική οικονομική δραστηριότητα των εθνών που οργανώνουν την εργασία τους κυρίως στην επιχειρηματική δραστηριότητα. Ο κύκλος αποτελείται από επέκταση που συμβαίνει περίπου την ίδια χρονική στιγμή σε πολλές οικονομικές δραστηριότητες, η οποία ακολουθείται από παρόμοια γενική ύφεση, συστολή και ανάκαμψη που συνενώνεται με την φάση της επέκτασης του επόμενου κύκλου. Αυτή η σειρά των αλλαγών είναι επαναλαμβανόμενη αλλά όχι περιοδική. Η χρονική διάρκεια των οικονομικών κύκλων κυμαίνεται από ένα έτος και πάνω μέχρι δέκα ή δώδεκα χρόνια.>>

Ο παραπάνω ορισμός του οικονομικού κύκλου αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως ΄΄κλασσικός οικονομικός κύκλος ΄΄ (classical cycle) και αφορά τις διακυμάνσεις του απόλυτου μεγέθους του ΑΕΠ και των άλλων οικονομικών μεταβλητών γύρω από ένα σταθερό σημείο .Στις σύγχρονες οικονομίες όμως δεν παρατηρούνται διακυμάνσεις του απόλυτου μεγέθους αλλά του ρυθμού αύξησης των οικονομικών δεικτών γύρω από τον μακροχρόνιο ρυθμό μεγέθυνσής τους. Αυτός ο δεύτερος ορισμός του οικονομικού κύκλου ονομάζεται σύμφωνα με την βιβλιογραφία και με το National Bureau of Economic Research(NBER)[5] ώς κύκλος ανάπτυξης(growth cycle).

2.8.2 Φάσεις του οικονομικού κύκλου

Κάθε οικονομικός κύκλος διαφέρει από τους άλλους οικονομικούς κύκλους ως προς την ένταση, τη διάρκεια και άλλα χαρακτηριστικά του. Το κοινό όλων των οικονομικών κύκλων είναι ότι έχουν κοινές φάσεις. Πιο συγκεκριμένα κάθε οικονομικός κύκλος έχει τις εξής φάσεις, οι οποίες διαδέχονται η μια την άλλη: Κορυφή, ύφεση, βάθος, ανάκαμψη.

α)Φάση κορυφής: Στην φάση της κορυφής παρατηρείται αύξηση της απασχόλησης και της παραγωγής του προιόντος. Η οικονομία βρίσκεται σε υψηλό επίπεδο καθώς το ΑΕΠ αυξάνεται .Επίσης στη φάση αυτή αυξάνονται τα κέρδη των επιχειρήσεων , το επίπεδο των τιμών και το ύψος της δανειοδότησης.

β)Φάση ύφεσης : Στην φάση της ύφεσης παρατηρείται μείωση της παραγωγής του προιόντος, της απασχόλησης, του ρυθμού αύξησης των τιμών, των επενδύσεων και του εισοδήματος. Εάν το ακαθόριστο εθνικό προιόν παρουσιάζει μείωση για δυο συνεχόμενα τρίμηνα τότε λέμε ότι η οικονομία βρίσκεται σε περίοδο ύφεσης[6].

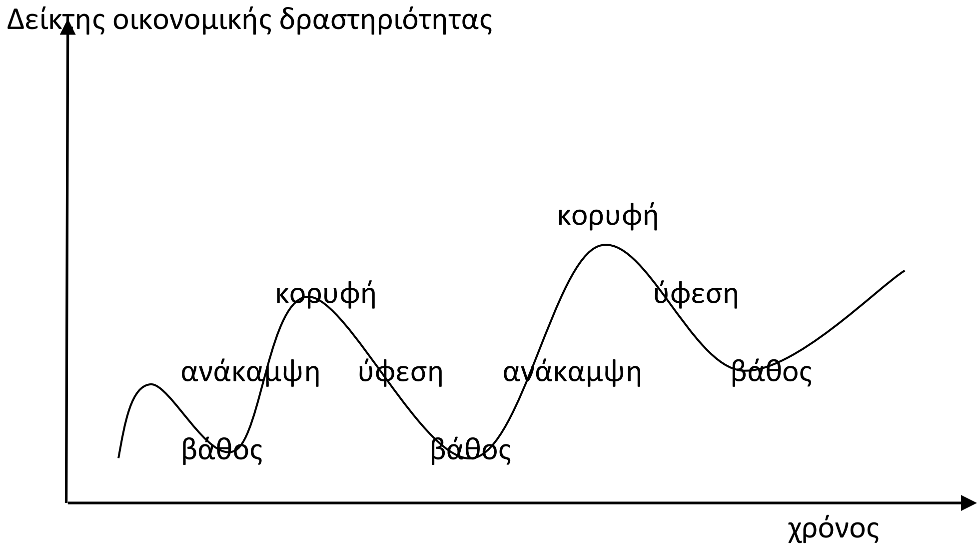
[5] To National Bureau of Economic Research(NBER) είναι μια αμερικάνικη μη-κερδοσκοπική οικονομική ερευνητική οργάνωση. Είναι μεταξύ άλλων υπεύθυνη για τον καθορισμό και την ανακοίνωση της ημερομηνίας έναρξης και λήξης του οικονομικού κύκλου.

[6] Εάν η ύφεση διαρκέσει μεγάλο χρονικό διάστημα και είναι σοβαρή χαρακτηρίζεται ως κρίση.

γ)Φάση βάθους: Στην φάση του βάθους η οικονομία φτάνει στο χαμηλότερο της επίπεδο καθώς η απασχόληση και η παραγωγή φτάνουν στα χαμηλότερα επίπεδα τους, η ανεργία κορυφώνεται και οι επενδύσεις συνεχίζουν την καθοδική τους πορεία.

δ)Φάση ανάκαμψης: Στην φάση της ανάκαμψης αυξάνονται το ΑΕΠ, η παραγωγή του προιόντος και η απασχόληση. Οι επιχειρήσεις αυξάνουν τις επενδύσεις τους και η οικονομία βαδίζει πάλι προς την φάση της κορυφής.

Στη συνέχεια δίνεται ένα διάγραμμα όπου φαίνονται οι φάσεις του οικονομικού κύκλου.



Σχήμα 2.8.1 Οι φάσεις του οικονομικού κύκλου.

2.8.3 Χαρακτηριστικά του οικονομικού κύκλου

Ο κάθε οικονομικός κύκλος εμφανίζει τα εξής χαρατηριστικά:

α)Παρατηρείται ασυμμετρία στην διάρκεια των ανοδικών και των καθοδικών φάσεων του κύκλου. Πιο συγκεκριμένα οι καθοδικές φάσεις διαρκούν λιγότερο από τις ανοδικές και είναι πιο απότομες.

β)Οι διακυμάνσεις αφορούν αυξομειώσεις όχι των απόλυτων τιμών των μεγεθών που αντιπροσωπεύουν την οικονομική δραστηριότητα αλλά του ρυθμού αύξησης τους.

γ)Οι ανοδικές και οι καθοδικές φάσεις του οικονομικού κύκλου μιας χώρας μπορεί να συγχρονίζονται ή μη με τις φάσεις του οικονομικού κύκλου άλλων χωρών.

δ)Ο οικονομικός κύκλος επηρεάζει τα κέρδη των επιχειρήσεων σε διαφορετικό βαθμό. Οι πωλήσεις κάποιων προιόντων επηρεάζονται από τον οικονομικό κύκλο, ενώ η κατανάλωση άλλων προιόντων μένει ανεπηρέαστη από τις φάσεις του οικονομικού κύκλου.

ε)Κάποια οικονομικά μεγέθη μεταβάλλονται αντίθετα από την οικονομική δραστηριότητα, όπως για παράδειγμα οι απολύσεις, οι χρεοκοπίες και η ανεργία. Με άλλα λόγια αυξάνονται στη φάση καθόδου του οικονομικού κύκλου και μειώνονται στην φάση ανόδου του οικονομικού κύκλου. Άλλα οικονομικά μεγέθη όπως είναι οι επενδύσεις, τα κέρδη των επιχειρήσεων, η παραγωγή, η απασχόληση και ο δανεισμό των ιδιωτικών επιχειρήσεων μεταβάλλονται με την ίδια φορά με τις φάσεις του οικονομικού κύκλου. Άλλα μεγέθη όπως είναι τα είδη διατροφής επηρεάζονται ελάχιστα ή καθόλου από τις φάσεις του οικονομικού κύκλου.

2.8.4 Αιτίες του οικονομικού κύκλου

Για την ερμηνεία των αιτιών των οικονομικών κύκλων δεν υπάρχει μια ενιαία θεωρία η οποία να είναι αποδεκτή από όλους τους οικονομολόγους. Αντιθέτως, ανάλογα με τις θεωρητικές σχολές που εκφράζει κάθε οικονομολόγος,έχουν διατυπωθεί διαφορετικές θεωρίες που εξηγούν τις αιτίες που προκαλούν τις οικονομικές διακυμάνσεις. Οι θεωρίες αυτές διακρίνονται σε δυο κατηγορίες, στις εξωγενείς και τις ενδογενείς. Πρώτον, οι εξωγενείς θεωρίες προσπαθούν να εξηγήσουν τις οικονομικές διακυμάνσεις ως αποτέλεσμα οικονομικών παραγόντων ή και άλλων αιτιών που δεν βρίσκονται μέσα στο οικονομικό σύστημα. Παραδείγματα εξωγενών παραγόντων είναι ένας πόλεμος ή μια τεχνολογική εξέλιξη. Δεύτερον, οι ενδογενείς θεωρίες προσπαθούν να εξηγήσουν τις οικονομικές διακυμάνσεις ως αποτέλεσμα παραγόντων που βρίσκονται μέσα στο οικονομικό σύστημα. Με άλλα λόγια, το ίδιο το σύστημα περιέχει στοιχεία στο εσωτερικό του που προκαλούν τις οικονομικές διακυμάνσεις.

Υπάρχουν δυο βασικές επικρατούσες θεωρίες που προσπαθούν να εξηγήσουν τα αίτια δημιουργίας των οικονομικών κύκλων: η Κλασική θεωρία και η Κευνσιανή θεωρία. Σύμφωνα με την Κλασική θεωρία εάν δεν υπάρξουν εξωτερικές παρεμβάσεις, τότε οι μηχανισμοί της αγοράς λειτουργούν αποτελεσματικά και οι μισθοί και οι τιμές επανέρχονται στις τιμές εκείνες που φέρνουν τις αγορές σε ισορροπία. Σύμφωνα με την Κευνσιανή θεωρία υπάρχει δυσκαμψία των τιμών και καθυστέρηση στην επαναφορά των αγορών σε ισορροπία.

Σύμφωνα με την **Κλασική θεωρία**[7], οι μεταβολές της συνολικής προσφοράς επηρεάζουν τις διακυμάνσεις της οικονομικής δραστηριότητας. Οι κλασικοί οικονομολόγοι πιστεύουν ότι δεν υπάρχει ανάγκη εξωτερικής παρέμβασης για την επαναφορά της οικονομίας σε κατάσταση γενικής ισορροπίας.Θεωρούν ότι οι τιμές και οι μισθοί μπορούν να προσαρμοστούν στο επίπεδο εκείνο που αποκαθιστά την ισορροπία της οικονομίας στο επίπεδο της πλήρους απασχόλησης(φυσικό προιόν),χωρίς αύξηση του επιπέδου των τιμών.Οι κλασικοί πίστευαν ότι το πρόβλημα της ανεργίας οφειλόταν σε εξωτερικές παρεμβάσεις και ότι μπορούσε να εξαλειφθεί από αυτόματους μηχανισμούς της

[7] Οι σημαντικοί οικονομολόγοι της Κλασικής Σχολής είναι μεταξύ άλλων: ο Άνταμ Σμίθ (Adam Smith, 1723-1790), ο Σέι (Jean-Baptiste Say, 1767-1832), ο Ρικάρντο (David Ricardo, 1772-1823) και ο Φίσερ (Irving Fisher,1867-1947).

οικονομίας. Επίσης θεωρούσαν ότι το επίπεδο των τιμών προσδιορίζεται από την ποσότητα του χρήματος(ποσοτική θεωρία του χρήματος) που υπάρχει στην οικονομία και ότι οι μεταβολές της προσφοράς του επιδρούν μόνο στο επίπεδο των τιμών.Συνεπώς οι κλασικοί οικονομολόγοι πίστευαν ότι η οικονομία μακροχρόνια θα ισορροπούσε στο επίπεδο πλήρους απασχόλησης χωρίς εξωτερική παρέμβαση από το κράτος.

Αντίθετα η **Μαρξιστική θεωρία** (Karl Marx,1818-1883) υποστηρίζει ότι η οικονομία δεν περιέχει όλους τους μηχανισμούς που είναι ικανοί να διορθώσουν όλα τα προβλήματα της , χωρίς να χρειάζεται εξωτερική παρέμβαση.Ο Μάρξ πίστευε ότι,εν τέλει, το καπιταλιστικό σύστημα θα οδηγούνταν στην καταστροφή του γιατί θεωρούσε τα οικονομικά προβλήματα έμφυτα στο σύστημα αυτό.Ωστόσο, η πίστη στην Κλασική θεωρία ουσιαστικά κλονίστηκε στις αρχές του εικοστού αιώνα με την παγκόσμια οικονομική ύφεση του 1929,όπου παρά την πεποίθηση των κλασικών οικονομολόγων ότι η οικονομία θα επέστρεφε στο επίπεδο πλήρους απασχόλησης κάτι τέτοιο δεν συνέβη.Την περίοδο εκείνη διατυπωθήκε μια νέα θεωρία η οποία χρησιμοποιήθηκε για την αντιμετώπιση της οικονομικής ύφεσης και άλλαξε την Μακροοικονομική σκέψη(Keynes,1936).Η πεποίθηση των κλασικών οικονομολόγων ότι η συνολική προσφορά , δηλαδή το προιόν που παράγει η οικονομία από την τεχνολογία και τους παραγωγικούς συντελεστές, είναι εκείνη που καθορίζει το μέγεθος του προιόντος-εισοδήματος στην οικονομία αντιστράφηκε από τον Κευνς. Ο Κέυνς ισχυρίστηκε ότι δεν είναι η συνολική προσφορά εκείνη που καθορίζει το επίπεδο του προιόντος-εισοδήματος, άλλα η συνολική δαπάνη. Ισχυρίστηκε ότι η οικονομία μπορεί να παραμείνει σε μια κατάσταση στην οποία η απασχόληση των παραγωγικών συντελεστών της δεν είναι πλήρης και ότι δεν υπάρχουν τάσεις οι οποίες μπορούν να επαναφέρουν την οικονομία σε πλήρη απασχόληση.Συνεπώς το προιόν-εισόδημα που παράγεται στην οικονομία δεν είναι το μέγιστο.Σε αυτήν την κατάσταση ο Κέυνς καθιστά ιδιαιτέρως σημαντικό τον ρόλο της οικονομικής πολιτικής ώστε να επανέλθει η οικονομία σε κατάσταση πλήρους απασχόλησης. Ένα σημαντικό παράδειγμα στην οικονομική ιστορία είναι η χρήση **της Γενικής Θεωρίας του Κέυνς** στην αντιμετώπιση των οικονομικών προβλημάτων που συνδέονταν με την αντιμετώπιση της ύφεσης του 1929.

Στη συνέχεια διατυπώθηκε μια νέα θεωρία , η οποία περιλαμβάνει τροποποιήσεις και βελτιώσεις της θεωρίας του Κευνς καθώς και κάποια στοιχεία από τη κλασική θεωρία:**Κευνσιανή θεωρία-Νεοκλασική σύνθεση**.[8] Στην ουσία η θεωρία αυτή αναφέρει ότι οι μεταβολές της συνολικής ζήτησης και κυρίως οι μεταβολές της επένδυσης αποτελούν τα αίτια των οικονομικών κύκλων. Αν αυξηθούν οι επενδύσεις , τότε θα αυξηθεί η συνολική ζήτηση στην οικονομία, θα αυξηθεί το εισόδημα, η απασχόληση και η παραγωγή , οδηγώντας σε μια περίοδο οικονομικής ευημερίας. Όμως κάποια χρονική στιγμή οι επιχειρήσεις θα συνειδητοποιήσουν ότι έχουν επιτύχει τους στόχους τους, οπότε οι επενδύσεις θα αρχίσουν να μειώνονται. Αυτή η μείωση των επενδύσεων θα οδηγήσει σε

[8] Οι όροι ΄΄Θεωρία του Κέυνς ΄΄ και ΄΄Κευνσιανή θεωρία΄΄ δεν πρέπει να συγχέονται. Η Θεωρία του Κέυνς αναφέρεται στην θεωρία που προτάθηκε από τον Κέυνς, ενώ η Κευνσιανή θεωρία αποτελεί σύνθεση στοιχείων της θεωρίας του Κέυνς και της Κλασικής θεωρίας.

μείωση της συνολικής ζήτησης οδηγώντας σε περίοδο ύφεσης. Οι Κευνσιανοί οικονομολόγοι θεωρούν ότι παρατηρείται δυσκαμψία των μισθών και των τιμών προς τα κάτω , ότι χρειάζεται αρκετό χρονικό διάστημα για να επανέλθει η οικονομία στο μέγιστο επίπεδο παραγωγής και ότι κατά συνέπεια εμφανίζεται ανεργία. Για να επανέλθει ξανά η ισορροπία στις αγορές στο βραχυχρόνιο διάστημα, οι Κευνσιανοί προτείνουν ότι σε περίοδο ύφεσης και ανεργίας πρέπει να παρέμβει η κυβέρνηση με την αύξηση των κρατικών δαπανών, έτσι ώστε να μειωθεί η ανεργία και να αυξηθεί η συνολική ζήτηση, άρα και το προιόν. Η Κευνσιανή θεωρία επικράτησε ως βασική θεωρία μέχρι το τέλος της δεκαετίας του 1960 καθώς εκείνη την περίοδο εμφανίστηκε ένα οικονομικό φαινόμενο το οποίο η Κευνσιανή θεωρία δεν μπορούσε να αντιμετωπίσει. Το φαινόμενο αυτό ήταν ο στασιμοπληθωρισμός, δηλαδή η ταυτόχρονη εμφάνιση της ανεργίας και του πληθωρισμού. Αυτή η αδυναμία της Κευνσιανής θεωρίας να εξηγήσει το φαινόμενο του στασιμοπληθωρισμού ανάγκασε τους οικονομολόγους να στραφούν σε νέες θεωρίες.

Η **Νέα κλασική ή Μονεταριστική θεωρία**, η οποία διαδέχτηκε την Κευνσιανή θεωρία, αποτελεί συνέχεια την κλασικής θεωρίαςκαι διατυπώθηκε από τον Milton Friedmann και άλλους οικονομολόγους της Σχολής του Σικάγου[9]. Η θεωρία αυτή ακολουθεί εντελώς διαφορετική προσέγγιση για την εξήγηση του τρόπου λειτουργίας του οικονομικού συστήματος από αυτήν της Κευνσιανής θεωρίας. Η μονεταριστική θεωρία θεωρεί ότι αιτία των οικονομικών διακυμάνσεων αποτελεί η ελλιπής πληροφόρηση κατά την λήψη των οικονομικών αποφάσεων από τις επιχειρήσεις και τα άτομα. Από το 1970 και έπειτα οι πιο πρόσφατες θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί είναι η **Θεωρία του πραγματικού επιχειρηματικού κύκλου**(George.w.Stadler,1994.Kydland&Prescott,1990) και η **Νέα Κευνσιανή θεωρία**. Η θεωρία του πραγματικού επιχειρηματικού κύκλου αποτελεί μέρος της Μονεταριστικής θεωρίας αλλά διαφέρει γιατί θεωρεί ως αιτία των οικονομικών κύκλων τις μεταβολές της προσφοράς και της τεχνολογίας και όχι την ατελή πληροφόρηση των επιχειρήσεων και των ατόμων. Οι υποστηρικτές της Μονεταριστικής θεωρίας συμφωνούν με τους υποστηρικτές της θεωρίας του πραγματικού επιχειρηματικού κύκλου στο γεγονός ότι υπάρχει τάση για ισορροπία στην αγορά προιόντος και στην αγορά εργασίας. Όμως σύμφωνα με τη θεωρία του πραγματικού επιχειρηματικού κύκλου οι μεταβολές της παραγωγικότητας, δηλαδή οι μεταβολές στην συνολική προσφορά προκαλούν τις οικονομικές διακυμάνσεις. Οι Νέοι κευνσιανοί οικονομολόγοι πρότειναν μια βελτιωμένη Κευνσιανή θεωρία. Πιο συγκεκριμένα θέλησαν να εξηγήσουν τι προκαλεί τις ακαμψίες των μισθών και των τιμών προς τα κάτω και υποστήριξαν ότι οι ακαμψίες αυτές οδηγούν σε οικονομικούς κύκλους.

[9] Οι οικονομολόγοι της Σχολής του Σικάγου αποτελούσαν μια μικρή μειοψηφία, η οποία δεν δέχτηκε την Γενική θεωρία του Κέυνς και συνέχισε να ακολουθεί την Κλασική Θεωρία.

2.8.5 Οι θεωρίες των Keynes ,Fisher και Minsky.

Το μοντέλο που αναπτύσσεται στην παρούσα εργασία είναι ένα μοντέλο με περιορισμούς στη ζήτηση και ακολουθεί τη βιβλιογραφία, που προέκυψε από τον Keynes(1936) και πιο συγκεκριμένα είναι βασισμένο στην θεωρία του Fisher και του Minksy. Υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία που ακολουθεί τις ιδέες των Fisher(1932,1933) και Minsky(1975,1982,1986,1994), όπου η γενική ιδέα είναι ότι σε περιόδους ευημερίας, δηλαδή όταν το ΑΕΠ έχει ανοδική πορεία υπάρχει μια τάση για επέκταση του χρέους η οποία μπορεί να οδηγήσει σε χειροτέρευση των χρηματοοικονομικών μεταβλητών. Στη συνέχεια δημιουργείται μια χρηματοοικονομική κρίση ,η οποία με τη σειρά της επηρεάζει αρνητικά τον πραγματικό τομέα, δίνοντας τέλος στη φάση ευημερίας.Συνεπώς η αλληλεπίδραση του πραγματικού(επενδύσεις)και του χρηματοοικονομικού τομέα(χρέος) αποτελεί ενδογενή αιτία για την δημιουργία οικονομικών κύκλων καθώς και χρηματοοικονομικών κύκλων.

Ειδικότερα,τα υποδείγματα που ακολουθούν τον Keynes και έχουν περιορισμούς στη ζήτηση αποτελούνται από έναν πολλαπλασιαστή, ο οποίος δημιουργεί μια θετική επίδραση από την επένδυση στο ΑΕΠ και από μια συνάρτηση επένδυσης, η οποία περιέχει έναν επιταχυντή, ο οποίος δημιουργεί μια θετική επίδραση από το ΑΕΠ στην επένδυση. Ένα τέτοιο μοντέλο απαιτεί κάποιους επιπλέον παράγοντες, έτσι ώστε να παραμένει φραγμένο. Ο λόγος είναι ότι η σχέση μεταξύ του πολλαπλασιαστή και του επιταχυντή οδηγεί είτε σε μονότονη αύξηση του ΑΕΠ και της επένδυσης είτε σε μονότονη μείωση του ΑΕΠ και της επένδυσης. Οπότε ένας παράγοντας που θα μπορούσε να προστεθεί στο μοντέλο είναι ο χρηματοοικονομικός τομέας μέσω της μορφής δανεισμού γιατί παρέχει μια αρνητική επίδραση στο μοντέλο. Αυτή η αρνητική επιδρασή γίνεται αντιληπτή στη συνέχεια που αναφέρονται οι θεωρίες των Fisher και Minsky .

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφερθούν κάποια χαρακτηριστικά του χρηματοοικονομικού τομέα, τα οποία δεν εμφανίζονται στον πραγματικό και τονίζουν την δυσκολία που υπάρχει στην εισαγωγή του χρηματοοικονομικού τομέα στο μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα εμφανίζεται ο παράγοντας της αβεβαιότητας. Ενώ δηλαδή μια συναλλαγή που αφορά αγαθά και προϊόντα χαρακτηρίζεται από ταυτόχρονη παράδοση του πραγματικού αγαθού και της πληρωμής, μια χρηματοοικονομική συναλλαγή ξεκινάει και ολοκληρώνεται σε διαφορετικές χρονικές περιόδους. Έστω ότι η συναλλαγή αφορά ένα ομόλογο. Η συναλλαγή αρχίζει όταν ο δανειστής δανείσει ένα χρηματικό ποσό στο δανειολήπτη. Η συναλλαγή θα ολοκληρωθεί όταν ο δανειολήπτης ξεπληρώσει στον δανειστή όλες του τις υποχρεώσεις, δηλαδή το κεφάλαιο που δανείστηκε και τους τόκους που πρέπει να πληρώνει ανά τακτά χρονικά διαστήματα.Είναι μια διαδικασία που μπορεί να διαρκέσει ακόμη και χρόνια. Αυτή η χρονική διαφορά μεταξύ δανεισμού και πληρωμής αποτελεί αιτία αβεβαιότητας για τη συναλλαγή. Ο λόγος είναι ότι υπάρχει πιθανότητα οι δανειζόμενοι να αθετήσουν τις υποχρεώσεις τους είτε εσκεμμένα είτε λόγω αδυναμίας αποπληρωμής. Ένας τρόπος για να αντιμετωπιστεί η αβεβαιότητα είναι να γίνει η διάκριση μεταξύ 'καλών' και 'κακών' δανειοληπτών. Οι 'καλοί' δανειολήπτες χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι αποπληρώνουν τις υποχρεώσεις τους ενώ οι 'κακοί' δανειολήπτες δεν αποπληρώνουν τις υποχρεώσεις τους. Το πρόβλημα εμφανίζεται όταν υπάρχει ασύμμετρη πληροφόρηση ,δηλαδή όταν οι δανειστές δεν έχουν πλήρη πληροφόρηση για το ποιοι είναι 'καλοί' και ποιοι 'κακοί' δανειολήπτες. Οπότε σε αυτή την περίπτωση όταν υπάρχει πιθανότητα αδυναμίας αποπληρωμής του χρέους, οι δανειστές ακολουθούν μεθόδους μη εκκαθάρισης της αγοράς, όπως κόκκινες επενδύσεις(red lining) και δελτία πίστωσης(credit rationing). Με άλλα λόγια η προφορά των δανείων είναι μικρότερη από τη ζήτηση. Δηλαδή η φήμη και η ιδιότητα των δανειοληπτών θεωρείται σημαντικός παράγοντας στον καθορισμό της πιστοληπτικής ικανότητας των δανειοληπτών. Συνεπώς εάν στην αγορά υπάρχει ασύμμετρη πληροφόρηση, οι δανειστές (πέρα από το γεγονός ότι αποφασίζουν το επιτόκιο δανεισμού και το ποσό του δανείου) κάνουν την διάκριση των δανειοληπτών σε 'καλούς' και 'κακούς' με βάση την αξιολόγηση της πιστοληπτικής τους ικανότητας.

Ο Fisher(1932,1933) ήταν από τους πρώτους οικονομολόγους που αντιλήφθηκε τις επιπτώσεις που έχει η δυναμική του χρέους στην Μακροοικονομία. Σύμφωνα με τη *Θεωρία του Αποπληθωρισμού του χρέους των οικονομικών κύκλων*(*Debt deflation theory of business cycles*) ο Fisher ισχυρίζεται ότι αν υπάρχουν παρατεταμένοι περίοδοι οικονομικής ανάπτυξης (ΑΕΠ), οι επιχειρήσεις έχουν υπερβολικές προσδοκίες για τις επενδύσεις τους, θεωρώντας ότι μπορούν να επιτύχουν πολύ υψηλά κέρδη. Αυτό κατά συνέπεια σημαίνει ότι και οι δανειστές και οι δανειολήπτες είναι διατεθειμένοι να δεχτούν υψηλά επίπεδα μόχλευσης ή αλλιώς υψηλό δείκτη δανειακής επιβάρυνσης(debt-capital ratio), γεγονός που οδηγεί φυσικά σε επέκταση του χρέους. Αυτή η 'υπερχρέωση' όπως την ονομάζει ο Fisher οδηγεί σε χρεοκοπίες. Η αρχή των χρεοκοπιών σημαίνει σταδιακή μείωση των πιστώσεων, το οποίο με τη σειρά του οδηγεί σε μείωση των επενδύσεων, αφού οι εταιρίες θα έχουν λιγότερα χρήματα στην διάθεση τους. Άρα τελικά οι προσδοκίες των επενδυτών για μεγάλα κέρδη δεν θα είναι πια τόσο μεγάλες. Αυτό οδηγεί σε μια κατάσταση την οποία ο Fisher ονομάζει *αποπληθωρισμό*(*deflation*). Όταν ξεκινήσει ο αποπληθωρισμός θα οδηγήσει σε ανακατανομή του εισοδήματος από τους δανειολήπτες στους δανειστές. Ο Fisher λοιπόν ισχυρίζεται ότι το χρέος και ο πληθωρισμός είναι οι βασικοί παράγοντες, οι οποίοι αποτελούν αιτία δημιουργίας των οικονομικών κύκλων.

Ο Minsky μελέτησε τη *Θεωρία του αποπληθωρισμού του χρέους των οικονομικώνκύκλων* (*Debt deflation theory of business cycles*) του Fisher και πρότεινε ως επέκταση την *υπόθεση της χρηματοοικονομικής αστάθειας* (*financial instability hypothesis*), σύμφωνα με την οποία ο Minsky ισχυρίζεται ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ πραγματικών και χρηματοοικονομικών μεταβλητών οδηγεί τις καπιταλιστικές οικονομίες σε περιόδους ύφεσης(το ΑΕΠ μειώνεται) και ανάκαμψης(το ΑΕΠ αυξάνεται). Η βασική ουσία στην υπόθεση του Minsky (1982) είναι ότι η περίοδος ανάκαμψης κάποτε θα τελειώσει. Οι υπερβολικές προσδοκίες για μελλοντικά κέρδη σε περίοδο ανάκαμψης οδηγούν σε υπερβολικές επενδύσεις οι οποίες χρηματοδοτούνται από δανεισμό, οπότε δημιουργείται μια υπέρ-επέκταση του χρέους. Όταν τα πραγματικά κέρδη δεν συμπίπτουν με το υψηλό επίπεδο των προσδοκώμενων κερδών, τότε οι εταιρίες αδυνατούν να αποπληρώσουν το χρέος με αποτέλεσμα να τελειώσει η περίοδος της ανάκαμψης. Όπως ειπώθηκε από τον Minsky (1982), όταν οι εταιρίες χρηματοδοτούν τις επενδύσεις τους μέσω δανεισμού τότε υπάρχουν τρείς χρηματοοικονομικές στάσεις τις οποίες ακολουθούν:

1) *Χρηματοδότηση αντιστάθμισης του κινδύνου* (*Hedge finance*): Οι εταιρίες έχουν αρκετό εισόδημα ώστε να μπορούν να καλύψουν τις συνολικές υποχρεώσεις αποπληρωμής του δανείου (κεφάλαιο και επιτόκια) σε κάθε χρονική περίοδο.

2) *Κερδοσκοπική χρηματοδότηση*(*Speculative finance*): Οι εταιρίες έχουν τόσο εισόδημα ώστε να μπορούν να καλύψουν μόνο τα επιτόκια δανεισμού (όχι και το κεφάλαιο).

3) *Ponzi χρηματοδότηση* (*Ponzi finance*): Οι εταιρίες δεν έχουν εισόδημα ώστε να αποπληρώσουν ούτε το κεφάλαιο ούτε τα επιτόκια. Δηλαδή μια εταιρία η οποία ακολουθεί την συγκεκριμένη στάση θα πρέπει να δανείζεται συνεχώς για να επιβιώσει με αποτέλεσμα το συνολικό χρέος να αυξάνεται συνεχώς, γεγονός που καθιστά την συγκεκριμένη θέση την πιο επικίνδυνη για την μη εκπλήρωση των υποχρεώσεων της.

Παρόλα αυτά το να έχει μια εταιρία κερδοσκοπική ή Ponzi θέση δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι θα αθετήσει τις υποχρεώσεις της για αποπληρωμή του χρέους. Απλώς επειδή η επιβίωση των εταιριών αυτών βασίζεται στο δανεισμό, σε περίπτωση που οι δανειστές σταματήσουν να παρέχουν δανεισμό αυτό σημαίνει ότι οι εταιρίες δεν θα έχουν αρκετή ρευστότητα για τη σωστή λειτουργία τους. Οπότε η ουσία της υπόθεσης Minsky είναι ότι σε περιόδους παρατεταμένης ευημερίας η οικονομία μετακινείται από ένα σύστημα το οποίο είναι σταθερό σε ένα σύστημα το οποίο είναι ασταθές.Δηλαδή οι εταιρίες μετακινούνται από την χρηματοοικονομική στάση της αντιστάθμισης κινδύνου στην Ponzi στάση. Συνεπώς αυτή η μετακίνηση της χρηματοοικονομικής στάσης των εταιριών αποτελεί ένδειξη ότι μια χρηματοοικονομική κρίση είναι έτοιμη να συμβεί, δίνοντας έτσι ένα τέλος στην οικονομική άνθηση. Βασιζόμενοι στην υπόθεση του Minsky ,η αδυναμία επίτευξης των αναμενόμενων κερδών είναι αυτή που οδηγεί την οικονομική άνθηση στο τέλος της.

Υπάρχουν πολλά οικονομικά υποδείγματα στην βιβλιογραφία που έχουν επηρεαστεί από τον Minsky και τα οποία προσπαθούν να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο η επέκταση του χρέους σε περιόδους ευημερίας οδηγεί σε χειροτέρευση των χρηματοοικονομικών μεταβλητών και κατά συνέπεια σε οικονομικούς κύκλους.[10]

Το μοντέλο της παρούσας εργασίας ακολουθεί τις υποθέσεις και την θεωρία του Fisher και του Minsky ,όμως διαφοροποιείται στο ότι προσπαθεί να δώσει έναν εναλλακτικό λόγο ο οποίος μπορεί να εξηγήσει γιατί σε περιόδους ευημερίας η θέση των εταιριών μετατοπίζεται από θέση αντιστάθμισης του κινδύνου σε κερδοσκοπική ή Ponzi οδηγώντας σε υψηλή μόχλευση και κατά συνέπεια σε χρηματοοικονομική κρίση. Για να μπορέσει ο αποπληθωρισμός του χρέους(debt-deflation) να αποτελέσει αιτία δημιουργίας

[10] Lagunoff and Schreft(2001),Foley(2003),Chiarella,Flaschel and Semmler(2001),Taylor and O'Connell(1985).

οικονομικών κύκλων, θα πρέπει να δοθεί μια εξήγηση για το πώς μια αύξηση του συνολικού χρέους έχει αρνητική επίδραση στην επένδυση. Στην παρούσα εργασία ο χρηματοοικονομικός τομέας εισάγεται στην συνάρτηση επένδυσης υπό τη μορφή του *δείκτη της χρηματοοικονομικής ευθραυστότητας* (*financial fragility*) **λ**. Ο λόγος που εισάγεται ο συγκεκριμένος δείκτης εξηγείται εξετάζοντας τον τρόπο λήψης αποφάσεων των μάνατζερ μιας οποιασδήποτε εταιρίας. Ένας υψηλός δείκτης **λ** σημαίνει υψηλότερη πιθανότητα αδυναμίας αποπληρωμής του χρέους. Στην περίπτωση που συμβεί κάτι τέτοιο, τις εταιρίες που αδυνατούν να πληρώσουν τις αναλαμβάνουν εταιρίες οι οποίες είναι πιο ικανές στη διαχείριση του χρέους . Όμως οι μάνατζερ δεν είναι ευχαριστημένοι με μια τέτοιου είδους κατάσταση καθώς αλλαγές στη διαχείριση της εταιρίας μπορεί να σημαίνουν και αλλαγές στο διευθυντικό προσωπικό (managerial staff). Κατά συνέπεια προσπαθούν να κρατήσουν το δείκτη **λ** χαμηλό και το καταφέρνουν αυτό μειώνοντας τις επενδύσεις. Έτσι επιτυγχάνεται η αρνητική επίδραση καθώς η αύξηση στον δείκτη **λ** οδηγεί σε μείωση των επενδύσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Το Πρότυπο

3.1 Προτυποποίηση του χρέους

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω σκοπός της εργασίας είναι να μελετηθεί η αλληλεπίδραση του χρηματοοικονομικού και του πραγματικού τομέα. Σε αυτή την ενότητα μελετάται ο χρηματοοικονομικός τομέας και πιο συγκεκριμένα γίνεται η προτυποποίηση του χρέους. Το υπόδειγμα δίνεται ως εξής:

Το συνολικό χρέος σε κάποια χρονική περίοδο t δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\mathrm{D(t)}=\int_{\tau=0}^{t}\big(B(\tau)-R(\tau)\big)e^{r(t-\tau)}d\tau \tag{3.1.1}$$

όπου με B (t) συμβολίζεται ο δανεισμός, με R(t) συμβολίζεται η αποπληρωμή του δανείου και r είναι το επιτόκιο δανεισμού, το οποίο θεωρούμε ότι δίνεται εξωγενώς από την Κεντρική Τράπεζα.

Η σχέση (3.1.1) με απλοποίηση γίνεται:

$$\mathrm{D(t)}=e^{rt}\int_{\tau=0}^{t}\big(B(\tau)-R(\tau)\big)e^{-r\tau}d\tau \tag{3.1.2}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς t έχουμε:

$$\dot{\mathrm{D}}\mathrm{(t)}=\left(e^{rt}\int_{\tau=0}^{t}\big(B(\tau)-R(\tau)\big)e^{-r\tau}d\tau\right)',$$

η οποία με περαιτέρω ανάλυση γίνεται

$$\dot{\mathrm{D}}\mathrm{(t)}=(e^{rt})'\int_{\tau=0}^{t}\big(B(\tau)-R(\tau)\big)e^{-r\tau}d\tau+e^{rt}\left(\int_{\tau=0}^{t}\big(B(\tau)-R(\tau)\big)e^{-r\tau}d\tau\right)',$$

όπου τελικά καταλήγουμε στην εξής μορφή:

$$\dot{\mathrm{D}}\mathrm{(t)}=re^{rt}\int_{\tau=0}^{t}\big(B(\tau)-R(\tau)\big)e^{-r\tau}d\tau+e^{rt}\big(B(t)-R(t)\big)e^{-rt} \tag{3.1.3}$$

Από τις σχέσεις (3.1.2) και (3.1.3) με αντικατάσταση προκύπτει η εξής σχέση:

$$\dot{\mathrm{D}}\mathrm{(t)}=B(t)-R(t)+r\mathrm{D(t)} \tag{3.1.4}$$

Η σχέση (3.1.4) μας δείχνει πώς μεταβάλλεται το συνολικό χρέος.

Στη συνέχεια γίνεται η κατασκευή του μακροοικονομικού δείκτη δανειακής επιβάρυνσης ή χρηματοοικονομικής ευθραυστότητας , τον οποίο συμβολίζουμε με λ και δείχνει το επίπεδο του χρέους προς την δυνατότητα αποπληρωμής του χρέους[11].

[11] Όταν μιλάμε για χρέος στο υπόδειγμα μας αναφερόμαστε μόνο στο συνολικό χρέος των εταιριών. Δεν μελετάμε ούτε το δημόσιο χρέος ούτε το χρέος των νοικοκυριών.

Ο δείκτης δανειακής επιβάρυνσης λ εισάγεται στην συνάρτηση επένδυσης και εξηγεί την αρνητική επίδραση του χρηματοοικονομικού τομέα στον πραγματικό τομέα.

Πιο συγκεκριμένα, όταν αναφερόμαστε στον δείκτη χρηματοοικονομικής ευθραυστότητας στην Μακροοικονομία εννοούμε την τάση που υπάρχει για χρηματοοικονομική αστάθεια. Όσο πιο υψηλός ο δείκτης τόσο υψηλότερο είναι το ρίσκο για χρηματοοικονομική αστάθεια.

Όσον αφορά το Μικροοικονομικό επίπεδο οι συνολικές υποχρεώσεις των εταιριών σε κάθε χρονική περίοδο t αποτελούνται από το επιτόκιο και από το κεφάλαιο. Όμως μεταξύ των δανειοληπτών υπάρχει διάκριση ανάμεσα σε εκείνους που θεωρούνται περισσότερο ασφαλείς και σε εκείνους που είναι πιο πιθανό να αθετήσουν την πληρωμή των υποχρεώσεων τους. Οι ασφαλείς δανειολήπτες έχουν το προνόμιο να πετυχαίνουν καλύτερούς όρους, δηλαδή μεγαλύτερο διάστημα αποπληρωμής του δανείου. Συνεπώς το ελάχιστο διάστημα αποπληρωμής του δανείου θα διαφέρει για τα δύο είδη των δανειοληπτών.

Σε Μακροοικονομικό επίπεδο όμως οι δανειστές περιμένουν στο σύνολο τους ότι σε κάθε χρονική περίοδο θα λαμβάνουν ένα ελάχιστο μέρος του συνολικού χρέους ως αποπληρωμή του κεφαλαίου. Αυτό το μέρος του συνολικού χρέους συμβολίζεται με q , το οποίο στο υπόδειγμα μας δίνεται εξωγενώς. Το επιτόκιο r όμως πληρώνεται στο σύνολο του σε κάθε χρονική περίοδο. Άρα λαμβάνοντας υπόψη ότι το συνολικό χρέος αποτελείται από το κεφάλαιο και από το επιτόκιο, τότε σε κάθε χρονική περίοδο το ποσό ελάχιστης αποπληρωμής προς τους δανειστές δίνεται από το (q+r) D(t) , όπου qD(t) είναι το μέρος της αποπληρωμής που αφορά το κεφάλαιο και r D(t) το μέρος της αποπληρωμής που αφορά το επιτόκιο. Αυτές οι πληρωμές θα πρέπει να γίνουν μέσω της εσωτερικής χρηματοδότησης των εταιριών, δηλαδή από τα αδιανέμητα κέρδη P(t). Συνεπώς ένα μέρος των κερδών χρησιμοποιείται για την αποπληρωμή των τρεχόντων υποχρεώσεων των εταιριών ως προς τους δανειστές. Αυτό το μέρος των συνολικών κερδών συμβολίζεται με σ. Άρα το σύνολο των κερδών που κατακρατείται σε κάθε χρονική περίοδο t δίνεται από το σ P(t) , το οποίο φανερώνει την ικανότητα αποπληρωμής ως προς τους δανειστές. Συνεπώς ο μακροοικονομικός δείκτης *της χρηματοοικονομικής ευθραυστότητας* λ είναι ο εξής :

$$\lambda(t)=\frac{(q+r)\,D(t)}{\sigma\,P(t)} \qquad (3.1.5)$$

Ο μακροοικονομικός δείκτης λ είναι διαφορετικός από τον μικροοικονομικό δείκτη δανειακής επιβάρυνσης. Ο μακροοικονομικός υπολογίζεται χρησιμοποιώντας μακροοικονομικά δεδομένα ενώ ο μικροοικονομικός χρησιμοποιώντας δεδομένα εταιριών. Η παρούσα εργασία αφορά μονάχα τον μακροοικονομικό δείκτη λ.

Ορίζουμε το συνολικό χρέος ως εξής:

$$d(t)\equiv\frac{D(t)}{K(t)} \qquad (3.1.6)$$

Με αντικατάσταση προκύπτει ότι :

$$\lambda(t)=\frac{(q+r)\, sd(t)}{\sigma\, \psi g(t)} \qquad (3.1.7)$$

Όμως παρά το γεγονός ότι σε κάθε χρονική περίοδο το ποσό ελάχιστης αποπληρωμής προς τους δανειστές δίνεται από το (q+r) D(t), το πραγματικό ποσό αποπληρωμής μπορεί να είναι περισσότερο ή λιγότερο από το (q+r) D(t) και εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά των δανειοληπτών. Το ποσό αποπληρωμής στην χρονική περίοδο t συμβολίζεται ως R(t) ,οπότε θεωρώντας ότι ένα μέρος ϕ(t) του συνολικού χρέους αποπληρώνεται στην περίοδο t τότε ο τύπος της αποπληρωμής είναι ο εξής :

$$R(t)= \phi(t)\, D(t) \qquad (3.1.8)$$

Το μέρος του ποσού του χρέους το οποίο αποπληρώνεται, δηλαδή το ϕ(t) εξαρτάται από τους εξής παράγοντες :

α) Απότον δείκτη $\frac{\sigma P(t)}{K(t)}$**..** Εάν οι εταιρίες έχουν υψηλά αδιανέμητα κέρδη, τότε έχουν την δυνατότητα να αποπληρώσουν μεγαλύτερο μέρος του δανείου τους, μέσω εσωτερικής χρηματοδότησης δηλαδή χωρίς να χρειαστεί να καταφύγουν σε επιπλέον μορφές εξωτερικού δανεισμού.

β) Από τον δείκτη λ. Αφού ο δείκτης λ δείχνει το ύψος του δανεισμού, τότε οι εταιρίες που έχουν χαμηλότερο δείκτη δανειακής επιβάρυνσης θα πληρώσουν χαμηλότερο μέρος του συνολικού χρέους. Άρα συνολικά στην οικονομία ένα χαμηλότερο μέρος του συνολικού χρέους θα αποπληρωθεί.

Τα παραπάνω φαίνονται στην εξής μαθηματική σχέση:

$$\phi(t)=\phi\left(\frac{\sigma P(t)}{K(t)}, \lambda(t)\right), \quad \text{όπου } \varphi_{\frac{\sigma P}{K}}>0 \quad \text{και} \quad \varphi_{\lambda}>0, \qquad (3.1.9)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ως:

$$\phi(t)=m\frac{\sigma P(t)}{K(t)}\lambda(t), \qquad (3.1.10)$$

όπου m είναι σταθερά και με αντικατάσταση έχουμε ότι:

$$\phi(t)= \frac{m(q+r)\, D(t)}{K(t)}\,. \qquad (3.1.11)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.1.11) την σχέση (3.1.6) , τότε η (3.1.11) γίνεται

$$\phi(t)= m(q + r)d(t) \qquad (3.1.12)$$

Όσον αφορά τη συνάρτηση δανεισμού $B(t)$, θεωρούμε ότι σε κάθε χρονική περίοδο t, οι εταιρίες χρηματοδοτούν ένα μέρος των νέων επενδύσεων μέσω νέου δανεισμού. Αυτό το μέρος των νέων επενδύσεων συμβολίζεται με α(t) και η συνάρτηση δανεισμού δίνεται από την εξής σχέση :

$$\mathrm{B(t)} = \mathrm{\alpha(t)I(t)} \tag{3.1.13}$$

Το μέρος των συνολικών επενδύσεων μέσω νέου δανεισμού, δηλαδή το α(t) εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο οι εταιρίες θα επιλέξουν να χρηματοδοτήσουν τις νέες επενδύσεις. Συνεπώς οι εταιρίες έχουν να πάρουν δυο ειδών αποφάσεις. Πρώτον να αποφασίσουν σε τι ποσοστό θα χρηματοδοτήσουν τις νέες επενδύσεις μέσω εσωτερικής μορφής χρηματοδότησης (δηλαδή αδιανέμητα κέρδη) και σε τι ποσοστό μέσω εξωτερικής μορφής χρηματοδότησης (δηλαδή μέσω χρέους ή μέσω έκδοσης μετοχών). Δεύτερον όσον αφορά την εξωτερική χρηματοδότηση έχουν να επιλέξουν σε τι ποσοστό θα χρηματοδοτήσουν τις επενδύσεις τους μέσω χρέους και σε τι ποσοστό μέσω έκδοσης μετοχών.

Στη συνέχεια δίνονται κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τις μορφές δανεισμού.

Παρατήρηση 1: Εάν η εταιρία έχει ένα συγκεκριμένο επίπεδο κερδών, τότε όσο αυξάνονται οι επενδύσεις τόσο θα αυξάνονται οι εξωτερικοί μέθοδοι χρηματοδότησης, δηλαδή σε περιόδους ευημερίας, κατά τις οποίες σημειώνεται αύξηση των επενδύσεων, αυξάνεται η εξωτερική χρηματοδότηση.

Παρατήρηση 2: Μεταξύ των δυο μορφών εξωτερικού δανεισμού προτιμάται περισσότερο το εξωτερικό χρέος. Οι λόγοι είναι οι εξής: Πρώτον, στην παρατήρηση 1 είδαμε ότι όσο αυξάνονται οι επενδύσεις τόσο αυξάνονται και οι εξωτερικές μορφές δανεισμού. Όμως οι μάνατζερ των εταιριών δεν έχουν συμφέρον από το γεγονός της αύξησης των μέτοχων γιατί η αλλαγή στην δομή της ιδιοκτησίας της επιχείρησης μπορεί να επιφέρει και αλλαγές στον έλεγχο της επιχείρησης. Συνεπώς οι μάνατζερ των εταιριών προτιμούν ως μέθοδο εξωτερικού δανεισμού τη χρηματοδότηση μέσω δανεισμού. Δεύτερον, οι υποχρεώσεις των επιχειρήσεων για αποπληρωμή του χρέους δεν εξαρτώνται από τα κέρδη, ενώ οι υποχρεώσεις για τη χρηματοδότηση μέσω έκδοσης μετοχών εξαρτώνται μέσω της μορφής αποπληρωμής μερισμάτων, (1-σ)P(t), στους μετόχους. Συνεπώς σε περίοδο ανάπτυξης, όπου αυξάνονται και οι επενδύσεις και τα κέρδη, το κόστος χρηματοδότησης των επενδύσεων μέσω έκδοσης μετοχών είναι μεγαλύτερο. Κατά συνέπεια συμφέρει περισσότερο τις εταιρίες η χρηματοδότηση μέσω δανεισμού.

Παρατήρηση 3: Όσο αυξάνεται ο δείκτης λ, τόσο περισσότερο αυξάνεται η πιθανότητα χρηματοδότησης νέων επενδύσεων μέσω χρέους.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω ο μαθηματικός τύπος για το α(t) είναι ο εξής:

$$\alpha(t)=\alpha(g(t),\lambda(t)) \text{ , όπου } \alpha_g>0 \text{ και } \alpha_\lambda>0 \text{ .} \tag{3.1.14}$$

Η σχέση (3.1.14) μπορεί να γραφτεί ως

$$\alpha(t)=\kappa g(t)\lambda(t)\text{ , όπου κ είναι σταθερά.} \quad (3.1.15)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.1.15) την σχέση (3.1.5) έχουμε

$$\alpha(t)= \frac{\kappa(q+r)\ D(t)g(t)}{\sigma\ P(t)} . \quad (3.1.16)$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται αλλιώς:

$$\alpha(t)= \frac{\kappa(q+r)sd(t)}{\sigma\,\psi} . \quad (3.1.17)$$

Συνεπώς αφού δόθηκαν οι παραπάνω σχέσεις, επιστρέφουμε πάλι στην ανάλυση της σχέσεως (3.1.13) στην οποία αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (3.1.17) καθώς και τη σχέση $g(t) = \frac{I(t)}{K(t)}$ έχουμε ως αποτέλεσμα την εξής σχέση:

$$B(t)=\frac{\kappa(q+r)sd(t)g(t)K(t)}{\sigma\,\psi} \quad (3.1.18)$$

Επίσης αν αντικατασταθούν στη σχέση (3.1.8) οι σχέσεις (3.1.6) και (3.1.12) έχουμε την εξής καινούργια σχέση:

$$R(t)= m(q + r)d(t)\ d(t)K(t). \quad (3.1.19)$$

Συνεπώς η σχέση (3.1.4) εάν αντικαταστήσουμε σε αυτήν τις σχέσεις (3.1.18) και (3.1.19) παίρνει την εξής μορφή:

$$\dot{D}(t)= \frac{\kappa(q+r)sd(t)g(t)K(t)}{\sigma\,\psi} - m(q + r)d(t)\ d(t)K(t) + rD(t). \quad (3.1.20)$$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης (3.1.6) έχουμε

$$\dot{d}(t)= \frac{\dot{D}(t)}{K(t)} - g(t)d(t), \quad (3.1.21)$$

όπου με αντικατάσταση από την (3.1.20) στην (3.1.21) έχω

$$\dot{d}(t)=\frac{\frac{\kappa(q+r)sd(t)}{\sigma\,\psi}g(t)K(t)- m(q+r)d(t)\ d(t)K(t) + rD(t)}{K(t)} - g(t)d(t). \quad (3.1.22)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ως :

$$\dot{d}(t)= \frac{\kappa(q+r)sd(t)g(t)}{\sigma\,\psi} - m(q + r)d(t)\ d(t) + \frac{rD(t)}{K(t)} - g(t)d(t) ,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξής σχέση:

$$\dot{d}(t)= [\{\frac{\kappa(q+r)s}{\sigma\,\psi} -1\}\, g(t) - m(q + r)d(t)+r]\ d(t). \quad (3.1.23)$$

3.2 Προτυποποίηση της συνάρτησης επένδυσης

Στο υπόδειγμα μας θεωρούμε μια κλειστή οικονομία, η οποία αποτελείται από εταιρίες και από νοικοκυριά. Υπάρχουν τα εξής είδη νοικοκυριών: Τα νοικοκυριά τύπου Α, όπου το εισόδημά τους προέρχεται από το μισθό. Τα νοικοκυριά τύπου Β, όπου το εισόδημα τους προέρχεται από χρέος. Τα νοικοκυριά τύπου Γ, όπου το εισόδημα τους προέρχεται από ιδία κεφάλαια(equities).

Η συνολική ζήτηση τη χρονική στιγμή t είναι :

$$AD(t)= C(t)+I(t), \tag{3.2.1}$$

όπου C(t) συμβολίζει την κατανάλωση από τα νοικοκυριά και I(t) συμβολίζει τις επενδύσεις από τις επιχειρήσεις. Το εθνικό εισόδημα το οποίο συμβολίζουμε Y(t) μετριέται μέσω της μεθόδου του εισοδήματος ως εξής :

$$Y(t)=W(t) + P(t), \tag{3.2.2.}$$

όπου W(t) είναι το άθροισμα των μισθών και P(t) συμβολίζει τα κέρδη των εταιριών. Ένας άλλος τρόπος μέτρησης το εισοδήματος είναι ο εξής :

$$Y(t)= Y_{\varepsilon}(t)+ Y_{\nu A}(t)+ Y_{\nu B}(t)+ Y_{\nu \Gamma}(t), \tag{3.2.3}$$

όπου Y_{ε}(t) είναι το εισόδημα των εταιριών (δηλαδή τα κέρδη αφού αφαιρεθούν τα μερίσματα που πρέπει να πληρώσουν οι εταιρίες στους μετόχους και οι υποχρεώσεις χρέους προς τους δανειστές , $Y_{\nu A}$(t) είναι το εισόδημα της εταιρίας τύπου Α , $Y_{\nu B}$(t) είναι το εισόδημα της εταιρίας τύπου Β και $Y_{\nu \Gamma}$(t) είναι το εισόδημα της εταιρίας τύπου Γ. Πιο συγκεκριμένα, Y_{ε}(t)=σ P(t) ,δηλαδή σ είναι ένα μέρος των κερδών που κρατιέται από τις εταιρίες αφού πληρώσουν τα μερίσματα και τις υποχρεώσεις χρέους. Για τα νοικοκυριά τύπου Α ισχύει ότι $Y_{\nu A}$(t)= W(t) ,όπου W(t) είναι οι μισθοί. Επίσης ισχύει ότι $Y_{\nu B}$(t)= (1-σ)P(t)- $Y_{\nu \Gamma}$(t), όπου $Y_{\nu B}$(t) είναι το μέρος των κερδών που προέρχεται από το χρέος και $Y_{\nu \Gamma}$(t) είναι το μέρος των κερδών που προέρχεται από ιδία κεφάλαια(equities).

Έστω ότι s_A είναι το μέρος του εισοδήματος που αποταμιεύεται από τα νοικοκυριά τύπου Α, s_B είναι το μέρος του εισοδήματος που αποταμιεύεται από τα νοικοκυριά τύπου Β, s_{Γ} είναι το μέρος του εισοδήματος που αποταμιεύεται από τα νοικοκυριά τύπου Γ, όπου s_A<$s_B = s_{\Gamma}$. Τότε

$$C(t)=(1-s_A)\, W(t)+(1-s_B)(1-\sigma)\, P(t), \tag{3.2.4}$$

όπου η συνάρτηση κέρδους P(t) δίνεται ως εξής:

$$P(t)=\psi\, Y(t), \tag{3.2.5}$$

όπου ψ είναι το μερίδιο των κερδών σε εθνικό εισόδημα.

Έτσι η κατανάλωση από τα νοικοκυριά μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$C(t) = (1-s)\, Y(t), \qquad (3.2.6)$$

όπου s=1-{(1-s_A)(1-ψ)+(1-s_B)(1-σ)ψ} δηλώνει την τάση για αποταμίευση από το εθνικό εισόδημα Y(t).

Έστω ότι με τον όρο δυνητική παραγωγή, η οποία συμβολίζεται με Y^* , εννοούμε τη μέγιστη παραγωγή που μπορεί να επιτευχθεί εάν λάβουμε υπόψη την υπάρχουσα τεχνολογία και τους υπάρχοντες συντελεστές της παραγωγής. Στο υπόδειγμα μας θεωρούμε ότι ο μοναδικός περιορισμός είναι η διαθεσιμότητα του κεφαλαίου. Συνεπώς έχουμε ότι η μέγιστη παραγωγή δίνεται από τον εξής τύπο :

$$Y^*(t) = bK(t)\,, \qquad (3.2.7)$$

όπου b είναι ένας δείκτης παραγωγής –κεφαλαίου που καθορίζεται από την υπάρχουσα τεχνολογία. Η πραγματική παραγωγή ή με άλλα λόγια το εθνικό εισόδημα Y έχει την εξής μορφή:

$$Y(t) = \min(AD(t)\,,\, Y^*(t))\,. \qquad (3.2.8)$$

Η παραπάνω εξίσωση (3.2.8) είναι σημαντική γιατί μας επιτρέπει να ξεχωρίσουμε εάν μια οικονομία λειτουργεί με περιορισμούς στην ζήτηση ή με περιορισμούς στην προσφορά Πιο συγκεκριμένα στην οικονομία που λειτουργεί με περιορισμούς στην ζήτησηισχύει ότι AD(t) $\leq$ Y^*(t), για κάθε t, δηλαδή η παραγωγή καθορίζεται από την αθροιστική ζήτηση και συνεπώς η αθροιστική ζήτηση λειτουργεί ως περιοριστικός παράγοντας στο επίπεδο της παραγωγής. Στην οικονομία που λειτουργεί με περιορισμούς στην προσφοράισχύει ότι AD(t) $\geq Y^*$(t), για κάθε t, δηλαδή η παραγωγή καθορίζεται από την αθροιστική προσφορά και συνεπώς η αθροιστική προσφορά λειτουργεί ως περιοριστικός παράγοντας στο επίπεδο της παραγωγής. Στην παρούσα εργασία θεωρούμε ότι η οικονομία που μελετάμε λειτουργεί με περιορισμούς στηνζήτηση.

Ορίζουμε ως *ικανότητα αξιοποίησης* (*capacity utilization*) u , τον λόγο της πραγματικής παραγωγής προς την δυνητική παραγωγή , δηλαδή

$$u(t) = \frac{Y(t)}{Y^*(t)} \qquad (3.2.9)$$

Στην οικονομία που λειτουργεί με περιορισμούς στηνζήτηση, η παραγωγή καθορίζεται από το επίπεδο της ζήτησης, άρα Y= AD < Y^*, δηλαδή τότε u<1. Στην οικονομία που λειτουργεί με περιορισμούς στην προσφορά, η παραγωγή καθορίζεται από το επίπεδο της προσφοράς , άρα Y^*= Y < AD, δηλαδή τότε u=1. Άρα τελικά ισχύει ότι $0 \leq u \leq 1$.

Στο σημείο ισορροπίας στην αγορά αγαθών ισχύει ότι η συνολική ζήτηση ισούται με την παραγωγή, όπως την ορίσαμε με την μέθοδο του εισοδήματος. Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι:

$$Y(t) = AD(t) \quad (3.2.10)$$

Η σχέση (3.2.10) μέσω της αντικατάστασης των σχέσεων (3.2.2) και (3.2.6) παίρνει την εξής μορφή : Y(t) - P(t)+ P(t) =(1-s) Y(t) +I(t) , η οποία γράφεται αναλυτικότερα ως εξής: Y(t)= Y(t)- sY(t) +I(t) . Με απαλοιφή όρων η προηγούμενη σχέση δίνεται από τον εξής τύπο: sY(t) = I(t).Διαιρώντας τελικά με τον όρο s καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$Y(t) = \frac{I(t)}{s}. \quad (3.2.11)$$

Το ποσοστό των επενδύσεων (rate of investment) ορίζεται ως εξής:

$$g(t) \equiv \frac{I(t)}{K(t)}, \quad (3.2.12)$$

όπου I(t) είναι το επίπεδο της επένδυσης και $K(t)$ είναι το συνολικό κεφάλαιο . Η σχέση (3.2.12) με τη βοήθεια της σχέσης (3.2.11) παίρνει την μορφή : $g(t)= \frac{sY(t)}{K(t)}$ Στην τελευταία σχέση αν αντικαταστήσουμε την (3.2.9) προκύπτει η $g(t)= \frac{suY^*(t)}{K(t)}$ και στη συνέχεια με αντικατάσταση της σχέσης(3.2.7) καταλήγουμε στην $g(t)= \frac{subK(t)}{K(t)}$, η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$g(t)= sbu(t) \quad (3.2.13)$$

όπου $0 \leq u \leq 1$. Με αντικατάσταση από τη σχέση (3.2.13) η ανισότητα γίνεται: $0 \leq \frac{g(t)}{sb} \leq 1$, η οποία τελικά παίρνει τη μορφή: $0 \leq g(t) \leq sb$. Ορίζουμε $g_{max} \equiv sb$ και το οποίο g_{max} αναπαριστά εκείνο το ποσοστό των επενδύσεων g, που αντιστοιχεί στο μέγιστο της *ικανότητας αξιοποίησης u*.

Έστω ότι g^* είναι το επιθυμητο ποσοστό των επενδύσεων (rate of investment). Θεωρούμε ότι η g^* εξαρτάται άμεσα και γραμμικά από την u. Δηλαδή η g^* έχει την εξής μορφή :

$$g^*(t)=\bar{\gamma} +\gamma(t)u(t), \quad (3.2.14)$$

όπου γ είναι ο βαθμός ευαισθησίας του g^* στο u και καθορίζεται από χρηματοοικονομικούς παράγοντες , ενώ το $\bar{\gamma}$ θεωρείται εξωγενής μεταβλητή.

Στη συνέχεια γίνεται ανάλυση των χρηματοοικονομικών παραγόντων που επηρεάζουν το ποσοστό των επενδύσεων g. Όσον αφορά τη διαδικασία αξιολόγησης μιας αίτησης για δάνειο θα πρέπει να γίνει αναλυτική μελέτη της δυνατότητας αποπληρωμής των δανειοληπτών , έτσι ώστε να ληφθεί η απόφαση για το ποιοι δανειολήπτες θα πάρουν τελικά το δάνειο. Η διαδικασία αξιολόγησης της δυνατότητας αποπληρωμής εξηγείται στη συνέχεια. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν δυο ειδών παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την αξιολόγηση της δυνατότητας αποπληρωμής. Πρώτον, εκείνοι οι οποίοι δεν μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια του οικονομικού κύκλου. Για παράδειγμα , η φήμη των δανειοληπτών και η ιστορία δανεισμού τους. Βασιζόμενα στους παραπάνω παράγοντες, τα ιδρύματα δανεισμού αξιολογούν τους δανειολήπτες με μια βαθμολογία πίστωσης. Οπότε ένας δανειολήπτης μπορεί να χαρακτηριστεί ως δανειολήπτης με χαμηλό ρίσκο ή ως δανειολήπτης με υψηλό ρίσκο. Μια αλλαγή στο u δεν επηρεάζει αυτή την ιδιότητα των δανειοληπτών, γιατί αναφερόμαστε στην πρώτη περίπτωση, όπου οι παράγοντες παραμένουν αναλλοίωτοι. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν εκείνοι οι παράγοντες οι οποίοι μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια του οικονομικού κύκλου. Για παράδειγμα, το τρέχον εισόδημα και το αναμενόμενο μελλοντικό εισόδημα. Πιο συγκεκριμένα, αφορά το ρίσκο που ενέχει η επένδυση για την οποία ο δανειολήπτης αποζητά το δάνειο. Συνεπώς οι παραπάνω μεταβλητοί παράγοντες εξαρτώνται από το u.

Εδώ αναλύονται οι σταθεροί παράγοντες που επηρεάζουν την αξιολόγηση της δυνατότητας αποπληρωμής. Όπως ειπώθηκε παραπάνω κάθε δανειολήπτης έχει τη δική του βαθμολογία πίστωσης. Έτσι εάν θεωρήσουμε το χαρτοφυλάκιο ενός δανειστή, αυτό θα αποτελείται από τα δυο είδη δανειοληπτών, δηλαδή τους δανειολήπτες χαμηλού ρίσκου και τους δανειολήπτες υψηλού ρίσκου. Εισάγουμε έναν δείκτη, τον οποίο συμβολίζουμε με η, ο οποίος δείχνει το ποσοστό των επισφαλών δανειοληπτών, που συμπεριλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο. Ένας χαμηλός δείκτης η σημαίνει ένα χαμηλό ποσοστό επισφαλών δανειοληπτών. Προφανώς $0 \leq \eta \leq 1$.

Η παρούσα εργασία ακολουθεί την πρόταση των Fisher-Minsky, δηλαδή ότι οι περίοδοι ευημερίας ακολουθούνται από χειροτέρευση των χρηματοοικονομικών μεταβλητών. Αυτή η χειροτέρευση ουσιαστικά σημαίνει ότι εισάγονται στο χαρτοφυλάκιο δανειολήπτες υψηλού ρίσκου ενώ εάν δεν υπήρχε αυτή η οικονομική ευημερία κανονικά δεν θα τους χορηγούνταν δάνειο. Η αιτία για την εισαγωγή τους αποτελεί το γεγονός ότι σε περιόδους ευημερίας μεγαλύτερος αριθμός δανειοληπτών είναι σε θέση να λάβει δάνειο καθώς οι κανόνες δανειοδότησης χαλαρώνουν εξαιτίας των αισιόδοξων προσδοκιών των δανειστών. Συνεπώς σε περιόδους ευημερίας ο δείκτης η αυξάνεται. Στη συνέχεια δίνεται ο μαθηματικός τύπος για το παραπάνω επιχείρημα. Στις περιόδους ευημερίας οι μεταβλητές u,Y,g αυξάνονται. Οπότε ο τύπος του δείκτη η είναι ο εξής:

$$\eta(t)=\eta_g \, g(t) \tag{3.2.15}$$

όπου η_g είναι μια σταθερά για την οποία ισχύει $0 \leq \eta_g \leq \frac{1}{g_{max}}$.

Συνδυάζοντας την σχέση (3.2.15) που αφορά τον δείκτη η και την σχέση (3.1.15) που αφορά τον δείκτη λ, μπορούμε να φτιάξουμε έναν αθροιστικό δείκτη ρίσκου, ο οποίος θα αντιπροσωπεύει το ρίσκο της αδυναμίας των δανειοληπτών και ορίζεται ως εξής :

$$\Lambda(t)=\Lambda_\eta \, \eta(t) + \Lambda_\lambda \, \lambda(t) \tag{3.2.16}$$

όπου το Λ_η αντιπροσωπεύει την ευαισθησία του αθροιστικού δείκτη Λ(t) στον δείκτη η και Λ_λ αντιπροσωπεύει την ευαισθησία του αθροιστικού δείκτη Λ(t) στον δείκτη λ.

Ο αθροιστικός δείκτης Λ αποτελείται από δυο διαφορετικά είδη ρίσκων, που αφορούν την επέκταση του χρέους. Πρώτον, ο δείκτης η είναι ένας δείκτης που αφορά την εισαγωγή νέων δανειοληπτών στο χαρτοφυλάκιο, όπου όπως ειπώθηκε παραπάνω κάποιοι από αυτούς είναι δανειολήπτες υψηλού ρίσκου. Δηλαδή το ρίσκο προκύπτει από διεύρυνση της πίστωσης (credit widening). Δεύτερον, ο δείκτης λ αφορά και την εμβάθυνση της πίστωσης (credit deepening) και την διεύρυνση της πίστωσης (credit widening). Άρα το συμπέρασμα είναι ότι ο αθροιστικός δείκτης Λ θεωρείται ένας καταλληλότερος μακροοικονομικός δείκτης για την αντίληψη του ρίσκου αδυναμίας αποπληρωμής καθώς λαμβάνει υπόψη και την εμβάθυνση της πίστωσης και διεύρυνση της πίστωσης. Στη συνέχεια δίνονται οι τρόποι με τους οποίους το ρίσκο της αδυναμίας αποπληρωμής (το οποίο όπως ειπώθηκε νωρίτερα αναπαρίσταται από τον αθροιστικό δείκτη Λ) μπορεί να επηρεάσει το ποσοστό των επενδύσεων g (rate of investment). Πρώτον, ο κίνδυνος αδυναμίας αποπληρωμής του χρέους απασχολεί τους μάνατζερ των εταιριών, γιατί σε περίπτωση που οι εταιρίες αποτύχουν να αποπληρώσουν τα χρέη τους, τότε η θέση των μάνατζερ απειλείται σε περίπτωση που αναλάβουν την εταιρία νέα μέλη. Έτσι λοιπόν μια αύξηση στον δείκτη Λ μπορεί να οδηγήσει στους μάνατζερ να μειώσουν τον επιταχυντή, δηλαδή το γ(t) που δηλώνει την ευαισθησία του g στο u. Δεύτερον, το ρίσκο της αδυναμίας αποπληρωμής ενδιαφέρει και τους δανειστές. Πιο συγκεκριμένα, εάν ο μακροοικονομικός δείκτης Λ αυξάνεται τότε οι δανειστές δανείζουν με μεγαλύτερη προσοχή και υιοθετούν τεχνικές (red lining και credit rationing). Αυτές οι τεχνικές όμως δεν επηρεάζουν μόνο τους δανειολήπτες πάνω στους οποίους εφαρμόζονται αλλά όλους τους δανειολήπτες. Ο λόγος είναι ότι οι δανειστές αποφασίζουν σε ποιες εταιρίες θα εφαρμόσουν κόκκινες επενδύσεις red lining και δελτία πίστωσης του χρέους (credit rationing) αναλόγως με τον δείκτη μόχλευσης (gearing ratio). Οπότε μια αύξηση στο Λ οδηγεί τις εταιρίες στο να μειώσουν το δείκτη μόχλευσης τους για να μην τις εφαρμοστούν και σε αυτές κόκκινες επενδύσεις (red lining) και δελτία πίστωσης του χρέους (credit rationing). Η παραπάνω λογική ισχύει για όλες τις εταιρίες , άρα μια αύξηση στον δείκτη Λ έχει αρνητική επίδραση στον επιταχυντή γ(t) της συνάρτησης επένδυσης.

Ο μαθηματικός τύπος για τους παραπάνω ισχυρισμούς είναι ο εξής :

$$\gamma(t)=\overline{\mu} - \widehat{\mu}\Lambda(t) , \tag{3.2.17}$$

όπου $\widehat{\mu}$ είναι η ευαισθησία του επιταχυντή στο αθροιστικό ρίσκο της αδυναμίας αποπληρωμής και $\overline{\mu}$ είναι η μέγιστη τιμή, που μπορεί να πάρει ο επιταχυντής στην περίπτωση που το ρίσκο αδυναμίας αποπληρωμής είναι μηδενικό.

Με αντικατάσταση της σχέσης (3.2.16) στην (3.2.17) έχουμε την εξής σχέση:

$\gamma(t)=\overline{\mu} - \widehat{\mu}(\Lambda_\eta\ \eta(t) + \Lambda_\lambda\ \lambda(t))$, η οποία πιο αναλυτικά γράφεται: $\gamma(t)=\overline{\mu} - \widehat{\mu}\Lambda_\eta\ \eta(t) - \hat{\mu}\Lambda_\lambda\ \lambda(t)$.

Με αντικατάσταση των σχέσεων (3.2.7) και (3.2.15) στην προηγούμενη σχέση έχουμε τελικά:

$$\gamma(t)= \overline{\mu} - \widehat{\mu}\eta_g\, g(t) - \frac{(q+r)\, s d(t)\, \widehat{\mu}\Lambda_\lambda}{\sigma\, \psi g(t)} \; . \qquad (3.2.18)$$

Με αντικατάσταση στην (3.2.14) έχουμε ότι :

$$g^*(t)= \frac{\overline{\mu}\, g(t)}{sb} - \frac{\widehat{\mu}}{sb}\Lambda_\eta\eta_g g(t)^2 - \frac{\widehat{\mu}}{sb\psi}\Lambda_\lambda(q+r)d(t) + \bar{\gamma}. \qquad (3.2.19)$$

Έστω ότι το ποσοστό των επενδύσεων g (rate of investment) προσαρμόζεται έτσι ώστε να φτάσει ένα κλάσμα το οποίο συμβολίζεται h, μεταξύ του πραγματικού και του επιθυμητού ποσοστού της επένδυσης (rate of investment) , δηλαδή

$$\frac{\dot{g(t)}}{g(t)}= h(g^*(t)- g(t)) , \qquad (3.2.20)$$

όπου h αντιπροσωπεύει την ταχύτητα προσαρμογής της πραγματικής επένδυσης στην επιθυμητή και $0\leq g(t) \leq g_{max}$.

Αντικαθιστώντας την σχέση (3.2.19) στην (3.2.20) έχουμε την εξής σχέση

$$\dot{g(t)} = \left[\left(\frac{\overline{\mu}}{sb} -1\right) g(t) - \frac{\widehat{\mu}}{sb}\Lambda_\eta\eta_g g(t)^2 - \frac{\widehat{\mu}}{sb\psi}\Lambda_\lambda(q+r)d(t) + \bar{\gamma} \right] h\, g(t) , \qquad (3.2.21)$$

όπου για να έχει νόημα η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να ισχύει η εξής συνθήκη: $0\leq g(t) \leq g_{max}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Μαθηματική Ανάλυση

4.1 Ολοκληρωμένο μοντέλο

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκαν αναλυτικά η προτυποποίηση του χρέους καθώς και της επένδυσης, όπου καταλήξαμε στις σχέσεις (3.1.23) και (3.2.21). Οι σχέσεις αυτές αποτελούν τις βασικές σχέσεις του μοντέλου και πιο συγκεκριμένα συνιστούν ένα 2x2 σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, το οποίο έχει την εξής μορφή:

$$\dot{g}(t) = [(\frac{\overline{\mu}}{sb}-1)\, g(t) - \frac{\widehat{\mu}}{sb} \Lambda_\eta \eta_g g(t)^2 - \frac{\widehat{\mu}}{sb\psi} \Lambda_\lambda (q+r) d(t) + \bar{\gamma}\ ]\, h\, g(t)$$

$$\dot{d}(t) = [\{\frac{\kappa(q+r)s}{\sigma\psi} - 1\}\, g(t) - m(q+r)d(t) + r]\, d(t) \qquad (4.1.1)$$

Για την απλοποίηση του παραπάνω συστήματος θέτουμε $\alpha_1 = \frac{\overline{\mu}}{sb} - 1$, $\alpha_2 = \frac{\widehat{\mu}}{sb} \Lambda_\eta \eta_g$, $\alpha_3 = \frac{\widehat{\mu}}{sb\psi} \Lambda_\lambda (q+r)$, $\alpha_4 = \bar{\gamma}$, $\beta_1 = \frac{\kappa(q+r)s}{\sigma\psi} - 1$, $\beta_2 = m(q+r)$, $\beta_3 = r$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in (0,\infty)$. Οπότε η σχέση (4.1.1) παίρνει την μορφή:

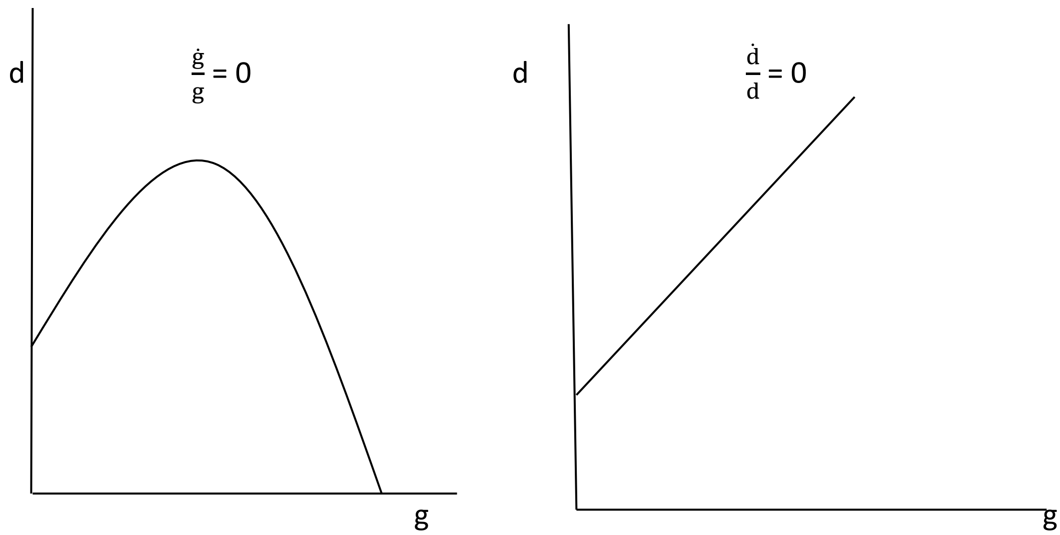
$$\dot{g}(t) = [\alpha_1 g(t) - \alpha_2 g(t)^2 - \alpha_3 d(t) + \alpha_4]\, h\, g(t)$$

$$\dot{d}(t) = [\beta_1 g(t) - \beta_2 d(t) + \beta_3]\, d(t) \qquad (4.1.2)$$

Το σύστημα (4.1.2) θυμίζει τα γενικευμένα μοντέλα ΄ Θηράματος -Αρπακτικού ΄ ή αλλιώς Kolmogorov-Lotka-Volterraπρότυπα. Ο δείκτης d αντιπροσωπεύει το αρπακτικό και η επένδυση το θήραμα. Υπάρχουν δυο μεταβλητές που μετριάζουν τη θετική επίδραση του επιταχυντή στην επένδυση g. Αρχικά η ίδια η επένδυση g επιδρά αρνητικά για κάθε $g > \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}$ εξαιτίας του δείκτη ρίσκου αδυναμίας της αποπληρωμής. Δεύτερον, ο δείκτης d επηρεάζει αρνητικά το σύστημα (4.1.2) μέσω του δείκτη λ.

Από τη σχέση (4.1.2) προκύπτουν δύο γεωμετρικοί τόποι. Πιο συγκεκριμένα, η εξίσωση $\frac{\dot{g}}{g} = 0$ αντιπροσωπεύει μια ανεστραμμένη παραβολή που τέμνει τον άξονα d στο σημείο $[0, \frac{\alpha_4}{\alpha_3}]$, τέμνει τον άξονα g στο σημείο E_3 και έχει κορυφή στο σημείο $[\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}, \left(\frac{{\alpha_1}^2}{4\alpha_2} + \alpha_1\right)\frac{1}{\alpha_3}]$. Η g έχει και θετική και αρνητική επίδραση στην $\frac{\dot{g}}{g}$. Για την ακρίβεια η αρνητική επίδραση εμφανίζεται μέσω του δείκτη αδυναμίας αποπληρωμής, ενώ η θετική επίδραση συμβαίνει με την λειτουργία του επιταχυντή και του πολλαπλασιαστή στην συνάρτηση επένδυσης. Για

$g > \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}$ η αρνητική επίδραση του g υπερισχύει και για αυτό η κλίση της καμπύλης είναι αρνητική. Για $g < \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}$ η θετική επίδραση του g υπερισχύει και για αυτό η κλίση της καμπύλης είναι θετική. Η εξίσωση $\frac{\dot{d}}{d}$ = 0 αντιπροσωπεύει μια ευθεία γραμμή που τέμνει τον άξονα d στο σημείο E_4 και η οποία έχει θετική κλίση ίση με $\frac{\beta_1}{\beta_2}$. Οι παραπάνω ισχυρισμοί γίνονται περισσότερο αντιληπτοί στη συνέχεια, όπου δίνονται οι γεωμετρικοί τόποι των $\frac{\dot{g}}{g}$ και $\frac{\dot{d}}{d}$ (Σχήμα 4.1.1).



Σχήμα 4.1.1 : Γεωμετρικοί τόποι των $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 και $\frac{\dot{d}}{d}$ = 0.

4.2 Σταθερές καταστάσεις του μοντέλου

Για να βρούμε τα στάσιμα σημεία του (4.1.2) θέτουμε $\dot{g}(t)$=0 και $\dot{d}(t)$ =0 και βρίσκουμε τα κοινά σημεία των δύο εξισώσεων. Συνεπώς προκύπτουν τα εξής στάσιμα σημεία:

E_1: $(\bar{g}_1, \bar{d}_1)$= (0,0), (4.2.1.α)

E_2: $(\bar{g}_2, \bar{d}_2)$= $\left(-\frac{-\alpha_1+\sqrt{4\alpha_2\alpha_4+\alpha_1^2}}{2\alpha_2}, 0\right)$, (4.2.1.β)

$$E_3: (\bar{g}_3, \bar{d}_3) = \left(\frac{\alpha_1+\sqrt{4\alpha_2\alpha_4+a_1^2}}{2\alpha_2}, 0\right), \qquad (4.2.1.γ)$$

$$E_4: (\bar{g}_4, \bar{d}_4) = \left(0, \frac{\beta_3}{\beta_2}\right), \qquad (4.2.1.δ)$$

$$E_5: (\bar{g}_5, \bar{d}_5) = \left(-\frac{\beta_1\alpha_3-\alpha_1\beta_2+\sqrt{\alpha_4\beta_2^2 4\alpha_2-4\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3+\beta_1^2 a_3^2-2\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3+\beta_2^2 a_1^2}}{2\alpha_2\beta_2},\right.$$

$$\left.-\frac{-2\alpha_2\beta_2\beta_3+\alpha_3\beta_1^2-\alpha_1\beta_2\beta_1+\beta_1\sqrt{\alpha_4\beta_2^2 4\alpha_2-4\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3+\beta_1^2 a_3^2-2\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3+\beta_2^2 a_1^2}}{2\alpha_2\beta_2^2}\right) \qquad (4.2.1.ε)$$

$$E_6: (\bar{g}_6, \bar{d}_6) = \left(\frac{-\beta_1\alpha_3+\alpha_1\beta_2+\sqrt{\alpha_4\beta_2^2 4\alpha_2-4\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3+\beta_1^2 a_3^2-2\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3+\beta_2^2 a_1^2}}{2\alpha_2\beta_2},\right.$$

$$\left.\frac{2\alpha_2\beta_2\beta_3-\alpha_3\beta_1^2+\alpha_1\beta_2\beta_1+\beta_1\sqrt{\alpha_4\beta_2^2 4\alpha_2-4\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3+\beta_1^2 a_3^2-2\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3+\beta_2^2 a_1^2}}{2\alpha_2\beta_2^2}\right) \qquad (4.2.1.στ)$$

Για το σύστημα (4.1.2) μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά των λύσεων στο θετικό πρώτο τεταρτημόριο ,δηλαδή στο $\Re_{++}^2$. Το E_1 είναι τετριμμένη λύση. Το $E_2 \notin \Re_{++}^2$ γιατί $\bar{g}_2 < 0$. Το E_3 είναι θετικό και βρίσκεται πάνω στον άξονα g. Το E_4 είναι θετικό και βρίσκεται πάνω στον άξονα d. Όσον αφορά τα στάσιμα σημεία E_5 και E_6 ισχύουν τα εξής: Τα $\bar{g}_5$ και $\bar{g}_6$ μετά από παραγοντοποίηση παίρνουν την εξής απλούστερη μορφή:

$$\bar{g}_5, \bar{g}_6 = \frac{\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1 \pm \sqrt{(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2)^2+4\alpha_2\beta_2(\alpha_4\beta_2-\alpha_3\beta_3)}}{2\alpha_2\beta_2}. \qquad (4.2.2)$$

Συνεπώς για να είναι τα στάσιμα σημεία E_5 και E_6 πραγματικοί αριθμοί και μάλιστα διαφορετικοί μεταξύ τους θα πρέπει ο όρος που βρίσκεται μέσα στην ρίζα στην σχέση(4.2.2) να είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.

Δηλαδή θα πρέπει $(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_2)^2 + 4\alpha_2\beta_2(\alpha_4\beta_2 - \alpha_3\beta_3)>0$ και κατά συνέπεια αν ισχύει ότι $\alpha_3\beta_3 < \alpha_4\beta_2$ έχουμε εξασφαλίσει ότι τα στάσιμα σημεία E_5 και E_6 είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους. Οπότε δεδομένου ότι ισχύει η σχέση $\alpha_3\beta_3 < \alpha_4\beta_2$, τότε:

$$\bar{g}_5 < \frac{\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1}{2\alpha_2\beta_2} < \bar{g}_6 \qquad (4.2.3)$$

Η σχέση (4.2.3) είναι ισοδύναμη με την εξής σχέση:

$$\frac{\alpha_1-2\alpha_2\bar{g}_5}{\alpha_3} > \frac{\beta_1}{\beta_2} > \frac{\alpha_1-2\alpha_2\bar{g}_6}{\alpha_3} \qquad (4.2.4)$$

Στην παραπάνω σχέση ο όρος $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ αντιπροσωπεύει την κλίση της ευθείας $\frac{\dot{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}}$ = 0 , ο όρος $\frac{\alpha_1-2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_5}{\alpha_3}$ αντιπροσωπεύει την κλίση της καμπύλης $\frac{\dot{\mathrm{g}}}{\mathrm{g}}$ = 0 στο σημείο E_5 και ο όρος $\frac{\alpha_1-2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_6}{\alpha_3}$ αντιπροσωπεύει την κλίση της καμπύλης $\frac{\dot{\mathrm{g}}}{\mathrm{g}}$ = 0 στο σημείο E_6.

Παρατήρηση 4.2.1 : Όταν ισχύει η σχέση $\alpha_3\beta_3 < \alpha_4\beta_2$, τότε στο στάσιμο σημείο E_5 η $\frac{\dot{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}}$ = 0 τέμνει την $\frac{\dot{\mathrm{g}}}{\mathrm{g}}$ = 0 από πάνω ενώ στο στάσιμο σημείο E_6 η $\frac{\dot{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}}$ = 0 τέμνει την $\frac{\dot{\mathrm{g}}}{\mathrm{g}}$ = 0 από κάτω. Στην περίπτωση που τα στάσιμα σημεία E_5 και E_6 είναι ίσα , τότε σε αυτό το στάσιμο σημείο η $\frac{\dot{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}}$ = 0 είναι εφαπτόμενη στην $\frac{\dot{\mathrm{g}}}{\mathrm{g}}$ = 0.

Παρατήρηση 4.2.2 : Η σχέση $\alpha_3\beta_3 < \alpha_4\beta_2$ είναι ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη έτσι ώστε το στάσιμο σημείο E_6 να ανήκει στο $\Re^2_{++}$.

4.3 Ποιοτική ανάλυση του μοντέλου

Στην προηγούμενη ενότητα βρήκαμε τα στάσιμα σημεία του συστήματος (4.1.2) και είδαμε τι μορφή θα έχουν οι εξισώσεις $\frac{\dot{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}}$ = 0 και $\frac{\dot{\mathrm{g}}}{\mathrm{g}}$ = 0. Σε αυτή την ενότητα θα γίνει η ανάλυση του πώς κινούνται οι τροχιές, δηλαδή οι λύσεις του συστήματος (4.1.2). Αρχικά αναλύεται η συμπεριφορά των τροχιών, που βρίσκονται πάνω στους άξονες g και d.

Για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $(\mathrm{g}^0, \mathrm{d}^0)$ που ανήκει στο int $\Re^2_{++}$ η λύση του συστήματος (4.1.2) μπορεί να γραφτεί με την εξής μορφή: S(t)= ($\mathrm{g}(t)$, $\mathrm{d}(t)$; $\mathrm{g}^0, \mathrm{d}^0$). Στην περίπτωση όπου η αρχική συνθήκη βρίσκεται πάνω σε έναν από τους άξονες διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Εάν το αρχικό σημείο βρίσκεται πάνω στον άξονα d τότε:

α_1)$\dot{\mathrm{g}}$=0 και $\dot{\mathrm{d}}$>0 , για κάθε $\{(\mathrm{g}^0, \mathrm{d}^0)$: g^0=0, $\mathrm{d}^0 \in (0, \bar{\mathrm{d}}_4)\}$.

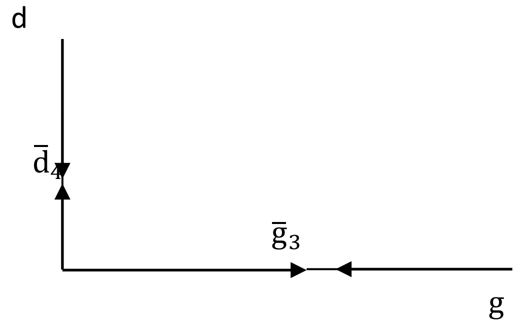
α_2) $\dot{\mathrm{g}}$=0 και $\dot{\mathrm{d}}$<0 ,για κάθε $\{(\mathrm{g}^0, \mathrm{d}^0)$: g^0=0, $\mathrm{d}^0 \in (\bar{\mathrm{d}}_4, \infty)\}$.

β) Εάν το αρχικό σημείο βρίσκεται πάνω στον άξονα g τότε:

β_1) $\dot{\mathrm{g}}$>0και $\dot{\mathrm{d}}$=0 ,για κάθε$\{(\mathrm{g}^0, \mathrm{d}^0)$: $\mathrm{g}^0 \in (0, \bar{\mathrm{g}}_3)$, d^0=0$\}$.

β_2) $\dot{\mathrm{g}}$<0και $\dot{\mathrm{d}}$=0 ,για κάθε$\{(\mathrm{g}^0, \mathrm{d}^0)$: $\mathrm{g}^0 \in (\bar{\mathrm{g}}_3, \infty)$, d^0=0$\}$.

Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι οι άξονες g και d είναι τροχιές ,γεγονός που γίνεται φανερό και στο σχήμα 4.3.1.



Σχήμα 4.3.1: Τροχιές που έχουν αρχικά σημεία πάνω στους άξονες.

Παρατήρηση 4.3.1 : Από τις περιπτώσεις που διακρίναμε παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για $g(t) \geq \bar{g}_3$ ισχύει ότι $\dot{g(t)} \leq 0$, για κάθε $d(t) \in \Re^2_{++}$. Δηλαδή εάν $\bar{g}_3 \leq g_{max}$ τότε ικανοποιείται πάντα η συνθήκη $0 \leq g(t) \leq g_{max}$.

Το γεγονός ότι οι τροχιές δεν μπορούν να τέμνονται μας εξασφαλίζει ότι το $\Re^2_{++}$ είναι αναλλοίωτο, δηλαδή τροχιές που ξεκινάνε με αρχικό σημείο μέσα στο $\Re^2_{++}$ παραμένουν πάντα στο $\Re^2_{++}$. Επειδή μονάχα οι λύσεις που ανήκουν στο $\Re^2_{++}$ έχουν οικονομική σημασία , επικεντρωνόμαστε μονάχα σε αυτές. Συνεπώς από εδώ και πέρα ασχολούμαστε μόνο με τα στάσιμα σημεία E_5 και E_6.

Αφού έγινε η ανάλυση των λύσεων που βρίσκονται πάνω στον άξονες, στη συνέχεια θα γίνει η ανάλυση τροχιών που ξεκινάνε από ένα αρχικό σημείο το οποίο βρίσκεται μέσα στο $\Re^2_{++}$. Πιο συγκεκριμένα για g, $d \neq 0$ παρατηρούμε τις εξής περιπτώσεις:

α)Η σχέση $\dot{g(t)} \leq 0$ είναι ισοδύναμη με την $d(t) \geq \frac{\alpha_1}{\alpha_3} g(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}(g(t))^2 + \frac{\alpha_4}{\alpha_3}$, (4.3.1.α)

β) Η σχέση $\dot{g(t)} > 0$ είναι ισοδύναμη με την $d(t) < \frac{\alpha_1}{\alpha_3} g(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}(g(t))^2 + \frac{\alpha_4}{\alpha_3}$ (4.3.1.β)

γ) Η σχέση $\dot{d(t)} \leq 0$ είναι ισοδύναμη με την $d(t) \geq \frac{\beta_1}{\beta_2} g(t) + \frac{\beta_3}{\beta_2}$

(4.3.1.γ)

δ) Η σχέση $\dot{d(t)} > 0$ είναι ισοδύναμη με την $d(t) < \frac{\beta_1}{\beta_2} g(t) + \frac{\beta_3}{\beta_2}$

(4.3.1.δ)

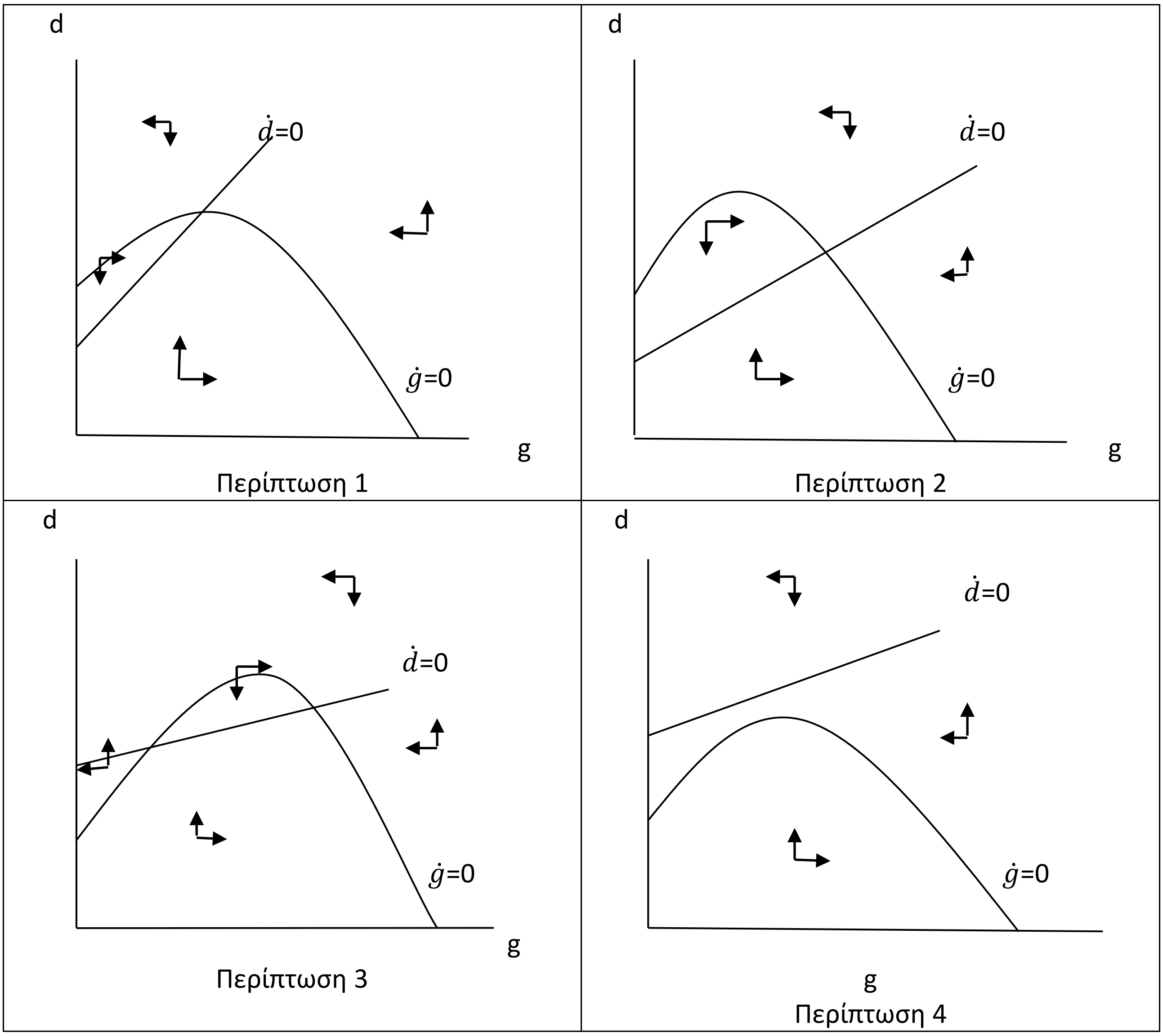
Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις, που εμφανίζουν διαφορετική ποιοτική συμπεριφορά , αναλόγως με τις τιμές που παίρνουν οι παράμετροι της σχέσης (4.1.2). Οι διαφορετικές αυτές περιπτώσεις φαίνονται στο σχήμα 4.3.1.

Περίπτωση 1: Ισχύει η σχέση $\alpha_4\beta_2$-$\alpha_3\beta_3 > 0$, δηλαδή το σημείο τομής της $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 με τον άξονα d είναι μεγαλύτερο από το σημείο τομής της $\frac{\dot{d}}{d}$ = 0 με τον άξονα d. Επίσης η $\frac{\dot{d}}{d}$ = 0 τέμνει την $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 από κάτω στο τμήμα της καμπύλης $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 που έχει θετική κλίση, δηλαδή ισχύει η σχέση $\frac{\beta_1}{\beta_2} > \frac{\alpha_1 - 2\alpha_2\bar{g}_6}{\alpha_3} > 0$. Το στάσιμο σημείο E_6 είναι το μοναδικό που ανήκει στο $int\Re^2_{++}$.

Περίπτωση 2: Ισχύει η σχέση $\alpha_4\beta_2$-$\alpha_3\beta_3 > 0$, δηλαδή το σημείο τομής της $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 με τον άξονα d είναι μεγαλύτερο από το σημείο τομής της $\frac{\dot{d}}{d}$ = 0 με τον άξονα d. Σε αυτή την περίπτωση όμως η $\frac{\dot{d}}{d}$ = 0 τέμνει την $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 από κάτω στο τμήμα της καμπύλης $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 που έχει αρνητική κλίση, δηλαδή ισχύει η σχέση $\frac{\alpha_1 - 2\alpha_2\bar{g}_6}{\alpha_3} < 0 < \frac{\beta_1}{\beta_2}$.Όπως και στην περίπτωση 1 , έτσι και σε αυτήν ισχύει ότι το στάσιμο σημείο E_6 είναι το μοναδικό που ανήκει στο $int\Re^2_{++}$.

Περίπτωση 3: Ισχύει η σχέση $\alpha_4\beta_2$-$\alpha_3\beta_3 < 0$, δηλαδή το σημείο τομής της $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 με τον άξονα d είναι μικρότερο από το σημείο τομής της $\frac{\dot{d}}{d}$ = 0 με τον άξονα d. Επίσης η $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 τέμνει την $\frac{\dot{d}}{d}$ = 0 από πάνω στο στάσιμο σημείο E_6 , δηλαδή στο τμήμα της καμπύλης $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 που έχει αρνητική κλίση και από κάτω στο στάσιμο σημείο E_5 δηλαδή στο τμήμα της καμπύλης $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 που έχει θετική κλίση. Με άλλα λόγια ισχύει η σχέση $\frac{\alpha_1 - 2\alpha_2\bar{g}_5}{\alpha_3} > \frac{\beta_1}{\beta_2} > 0 > \frac{\alpha_1 - 2\alpha_2\bar{g}_6}{\alpha_3}$. Στην περίπτωση 3 και το στάσιμο σημείο E_5 αλλά και το E_6 ανήκουν στο $int\Re^2_{++}$, η $\frac{\dot{d}}{d}$ = 0 και η $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 έχουν δύο σημεία τομής στο $\Re^2_{++}$.

Περίπτωση 4: Ισχύει η σχέση $\alpha_4\beta_2$-$\alpha_3\beta_3 < 0$, δηλαδή το σημείο τομής της $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 με τον άξονα d είναι μικρότερο από το σημείο τομής της $\frac{\dot{d}}{d}$ = 0 με τον άξονα d. Σε αυτήν την περίπτωση όμως οι σχέσεις $\frac{\dot{d}}{d}$ = 0 και η $\frac{\dot{g}}{g}$ = 0 δεν έχουν κανένα κοινό σημείο στο $\Re^2_{++}$, δηλαδή τα στάσιμα σημεία E_5 και E_6 δεν ανήκουν στο $int\Re^2_{++}$.



Σχήμα 4.3.1: Διαγράμματα φάσης για τις τέσσερις περιπτώσεις.

4.4 Τοπική ευστάθεια των στάσιμων σημείων E_5 και E_6

Τα στάσιμα σημεία που έχουν οικονομική σημασία είναι τα E_5 και E_6 οπότε σε αυτή την Ενότητα γίνεται η τοπική ανάλυση ευστάθειας αυτών των δυο στάσιμων σημείων μόνο. Για την ακρίβεια με την βοήθεια του κριτηρίου Routh-Hurwitz καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα όσον αφορά τα στάσιμα σημεία E_5 και E_6:

Λήμμα 4.4.1 : Όταν το στάσιμο σημείο E_5 υπάρχει , βρίσκεται στο εσωτερικό του $\Re^2_{++}$ και διαφέρει από το στάσιμο σημείο E_6 (περίπτωση 3), τότε είναι σαγματικό σημείο.

Απόδειξη : Κάνοντας γραμμικοποίηση του μη γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων (4.1.2) γύρω από στάσιμο σημείο E_5 έχουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathrm{g}(t)} \\ \dot{\mathrm{d}(\mathrm{t})} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_5)\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_5 & -\alpha_3\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_5 \\ \beta_1\bar{\mathrm{d}}_5 & -\beta_2\bar{\mathrm{d}}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{g}\,(\mathrm{t}) - \bar{\mathrm{g}}_5 \\ \mathrm{d}(\mathrm{t}) - \bar{\mathrm{d}}_5 \end{pmatrix}, \qquad (4.4.1)$$

όπου ο Ιακωβιανός πίνακας υπολογισμένος στο στάσιμο σημείο E_5 έχει την μορφή:

$$J_{\mathrm{E}_5}=\begin{pmatrix}(\alpha_1-2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_5)\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_5 & -\alpha_3\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_5\\ \beta_1\bar{\mathrm{d}}_5 & -\beta_2\bar{\mathrm{d}}_5\end{pmatrix} \tag{4.4.2}$$

Η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα δίνεται από την σχέση $(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_2\bar{\mathrm{g}}_5)\,\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_5\bar{\mathrm{d}}_5$, όπου στην περίπτωση 3 ισχύει ότι:

$$(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_2\bar{\mathrm{g}}_5)\,\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_5\bar{\mathrm{d}}_5<0 \tag{4.4.3}$$

Από το κριτήριο Routh-Hurwitz, αφού η ορίζουσα είναι αρνητική τότε τα πραγματικά μέρη των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης της σχέσης (4.1.2) είναι ετερόσημα. Κατά συνέπεια το E_5 είναι σημείο σάγματος.

<u>Λήμμα 4.4.2 :</u> Όταν το στάσιμο σημείο E_6 υπάρχει , βρίσκεται στο εσωτερικό του $\mathfrak{R}^2_{++}$ και διαφέρει από το στάσιμο σημείο E_5, τότε αναλόγως με τις τιμές των παραμέτρων είναι πηγή ή –καταβόθρα στην περίπτωση 1. Στις περιπτώσεις 2 και 3 το E_6 είναι καταβόθρα για οποιαδήποτε τιμή των παραμέτρων.

Απόδειξη : Κάνοντας γραμμικοποίηση του μη γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων (4.1.2) γύρω από στάσιμο σημείο E_6 έχουμε ότι:

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathrm{g}}(t)\\ \dot{\mathrm{d}}(\mathrm{t})\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}(\alpha_1-2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_6)\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_6 & -\alpha_3\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_6\\ \beta_1\bar{\mathrm{d}}_6 & -\beta_2\bar{\mathrm{d}}_6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{g}\,(\mathrm{t})-\bar{\mathrm{g}}_6\\ \mathrm{d}(\mathrm{t})-\bar{\mathrm{d}}_6\end{pmatrix}, \tag{4.4.4}$$

όπου ο Ιακωβιανός πίνακας υπολογισμένος στο στάσιμο σημείο E_6 έχει την μορφή:

$$J_{\mathrm{E}_6}=\begin{pmatrix}(\alpha_1-2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_6)\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_6 & -\alpha_3\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_6\\ \beta_1\bar{\mathrm{d}}_6 & -\beta_2\bar{\mathrm{d}}_6\end{pmatrix}. \tag{4.4.5}$$

Η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα δίνεται από την σχέση $(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_2\bar{\mathrm{g}}_6)\,\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_6\bar{\mathrm{d}}_6$, όπου όποτε το E_6 υπάρχει και διαφέρει από το E_5 και βρίσκεται στο εσωτερικό του $\mathfrak{R}^2_{++}$ ισχύει ότι:

$$(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_2\bar{\mathrm{g}}_6)\,\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_6\bar{\mathrm{d}}_6>0\ . \tag{4.4.6}$$

Από το κριτήριο Routh-Hurwitz, αφού η ορίζουσα είναι θετική τότε τα πραγματικά μέρη των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης της σχέσης (4.1.2) είναι ομόσημα. Το ίχνος του Ιακωβιανού πίνακα (4.4.5) έχει την μορφή :

$$(\alpha_1\text{-}2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_6)\,\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_6\text{-}\beta_2\bar{\mathrm{d}}_6\ . \tag{4.4.7}$$

Στην περίπτωση 1 ισχύει ότι α_1-$2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_6$>0. Άρα αναλόγως με τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παράμετροι, το E_6 είναι πηγή ή καταβόθρα στην περίπτωση 1. Αντιθέτως στις περιπτώσεις 2 και 3 ισχύει ότι α_1-$2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_6$<0, δηλαδή το E_6 είναι καταβόθρα, αφού τα πραγματικά μέρη της χαρακτηριστικής εξίσωσης της σχέσης (4.1.2) είναι αρνητικά.

4.5 Κυκλική συμπεριφορά εξαιτίας της διακλάδωσης Poincare-Andronov-Hopf

Περιορίζουμε την ανάλυση των Ενοτήτων 4.5, 4.6 και 4.8 στην περίπτωση 1 του σχήματος 4.3.1, γιατί είναι η μοναδική περίπτωση, όπου υπάρχει η δυνατότητα εμφάνισης περιοδικών τροχιών. Η πρώτη αιτία εμφάνισης περιοδικών τροχιών οφείλεται στην ύπαρξη του φαινομένου διακλάδωσης Poincare –Andronov –Hopf. Έχοντας το σύστημα (4.1.2) θα πρέπει να εξετάσουμε, αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.6.3.1 του Κεφαλαίου 2 της εργασίας για να εφαρμόσουμε το θεώρημα. Καθίσταται έτσι δυνατή η απόδειξη ότι το σύστημα (4.1.2) εμφανίζει διακλάδωση Poincare –Andronov –Hopf και κατά συνέπεια υπάρχουν περιοδικές λύσεις, οι οποίες ερμηνεύονται ως οικονομικοί κύκλοι.

Λήμμα 4.5.1 : Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της σχέσης (4.1.2) με γενική μορφή $\lambda_{1,2} = \mu(h) \pm i\omega(h)$ υπολογισμένες στο στάσιμο σημείο E_6 είναι καθαρά μιγαδικές για κατάλληλη τιμή της παραμέτρου h.

Απόδειξη: Από την σχέση (4.4.7) γνωρίζουμε ότι το ίχνος της Ιακωβιανής ορίζουσας υπολογισμένης στο στάσιμο σημείο E_6 είναι $(\alpha_1$-$2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_6)$ $\mathrm{h}\bar{\mathrm{g}}_6$-$\beta_2\bar{\mathrm{d}}_6$. Οπότε ξέρουμε ότι

$$\frac{\theta(tr)}{\theta h}=(\alpha_1\text{-}2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_6)\ \bar{\mathrm{g}}_6 >0\ , \tag{4.5.1}$$

αφού στην περίπτωση 1 του σχήματος 4.3.1 ισχύουν οι εξής σχέσεις: $\bar{\mathrm{g}}_6$>0, $\bar{\mathrm{d}}_6$>0 και $(\alpha_1$-$2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_6)$ >0 . Επίσης το ίχνος παίρνει την τιμή μηδέν όταν h=$\hat{\mathrm{h}}$, όπου $\hat{\mathrm{h}}$ είναι η κρίσιμη τιμή της παραμέτρου h. Άρα για να μηδενιστεί το ίχνος θα πρέπει να ισχύει η σχέση :

$$(\alpha_1\text{-}2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_6)\ \bar{\mathrm{g}}_6\hat{\mathrm{h}} - \beta_2\bar{\mathrm{d}}_6 = 0, \tag{4.5.2}$$

δηλαδή με άλλα λόγια η κρίσιμη τιμή $\hat{\mathrm{h}}$ θα πρέπει να πάρει την τιμή:

$$\hat{\mathrm{h}} = \frac{\beta_2\bar{\mathrm{d}}_6}{(\alpha_1-2\alpha_2\bar{\mathrm{g}}_6)\ \bar{\mathrm{g}}_6}\ \ ,\ \text{όπου}\ \hat{\mathrm{h}}>0\ . \tag{4.5.3}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $\bar{\mathrm{g}}_6$, $\bar{\mathrm{d}}_6$ από τη σχέση (4.2.1.στ) στη σχέση (4.5.3) έχουμε:

$$\hat{\mathrm{h}} = \frac{2\alpha_2{\beta_2}^2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\beta_1^2 + \alpha_1\beta_1{\beta_2}^2 + \beta_2\beta_1\sqrt{\alpha_4\beta_2^2 4\alpha_2 - 4\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3 + \beta_1^2 a_3^2 - 2\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3 + \beta_2^2 a_1^2})}{(2\beta_1\alpha_3 - \alpha_1\beta_2)\sqrt{\alpha_4\beta_2^2 4\alpha_2 - 4\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3 + \beta_1^2 a_3^2 - 2\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3 + \beta_2^2 a_1^2}) - 4\alpha_2{\beta_2}^2\alpha_4 + 4\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3 - 2\beta_1^2 a_3^2 + 3\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_3 - \beta_2^2 a_1^2}$$

(4.5.4)

Άρα για h=$\hat{\mathrm{h}}$ οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της σχέσης (4.1.2) υπολογισμένες στο στάσιμο σημείο E_6 είναι καθαρά μιγαδικές.

Παρατήρηση 4.5.1: Για να ικανοποιείται η transversality συνθήκη θα πρέπει η μερική παράγωγος του πραγματικού μέρους των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης της σχέσης (4.1.2) ως προς την παράμετρο h να είναι διαφορετική του μηδενός. Από τις σχέσεις μ(h)=$\boldsymbol{tr/2}$ και (4.5.1) ικανοποιείται η transversality συνθήκη. Επίσης από το λήμμα (4.5.1) για h=$\hat{\mathbf{h}}$ οι ιδιοτιμές $\boldsymbol{\lambda_{1,2}}$ είναι καθαρά μιγαδικές . Άρα το h=$\hat{\mathbf{h}}$ είναι σημείο διακλάδωσης της Poincare –Andronov –Hopf διακλάδωσης.

Παρατήρηση 4.5.2: Για να ικανοποιείται η non-degeneracy συνθήκη θα πρέπει ο πρώτος Liapunov coefficient l_1(h) να είναι διάφορος του μηδενός.

Εφαρμογή Θεωρήματος 2.6.3.1 του Κεφαλαίου 2 : Αφού δείξαμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ,τότε καταλήγουμε στην τοπολογική κανονική μορφή :

$$\binom{x'}{y'}=\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\binom{x}{y} \pm (x^2+y^2)\binom{x}{y} , \tag{4.5.5}$$

όπου έχουμε μετατοπίσει το στάσιμο σημείο E_6 στην αρχή μέσω του μετασχηματισμού g(t)=x(t) +$\bar{\mathrm{g}}_6$ και d(t)=y(t) +$\bar{\mathrm{d}}_6$.

Παρατήρηση 4.5.3: Για h=$\hat{\mathrm{h}}$ έχουμε φαινόμενο διακλάδωσης , όπου υπάρχουν δυο διαφορετικά ενδεχόμενα. Είτε θα εμφανίζεται υπερκρίσιμη Poincare –Andronov –Hopf διακλάδωση , είτε υποκρίσιμη Poincare –Andronov –Hopf διακλάδωση αναλόγως με την τιμή του β:

1)Υπερκρίσιμη Poincare –Andronov –Hopf διακλάδωση: Για β≤0 το στάσιμο σημείο το οποίο έχει μετατοπιστεί στην αρχή των αξόνων είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και ασταθές για β>0. Επίσης για β>0 εμφανίζεται ένας μοναδικός και ευσταθής οριακός κύκλος ακτίνας $\sqrt{\beta}$.

2)Υποκρίσιμη Poincare –Andronov –Hopf διακλάδωση: Για β<0 το στάσιμο σημείο το οποίο έχει μετατοπιστεί στην αρχή των αξόνων είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και ασταθές για β≥0. Επίσης για β<0 εμφανίζεται ένας μοναδικός, ασταθής οριακός κύκλος.

Παρατήρηση 4.5.2: Από το πρόσημο του l_1(h) μπορούμε να βρούμε την ευστάθεια των οριακών κύκλων. Πιο συγκεκριμένα η διακλάδωση Poincare –Andronov –Hopf είναι υπερκρίσιμη και ο οριακός κύκλος είναι ευσταθής αν l_1(h)<0. Η διακλάδωση Poincare –Andronov –Hopf είναι υποκρίσιμη και ο οριακός κύκλος είναι ασταθής αν l_1(h)>0.

4.6 Οικονομική ερμηνεία των διακλαδώσεων Hopf.

Στο παραπάνω κεφάλαιο 4.5 είδαμε ότι το σύστημα που αναλύουμε εμφανίζει για h=$\hat{h}$ φαινόμενο διακλάδωσης Hopf, όπου υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι η υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf, στην οποία εμφανίζεται ένας ευσταθής οριακός κύκλος. Σύμφωνα με τον Kind(1998) σε αυτή την περίπτωση ο οριακός κύκλος ερμηνεύεται ως οικονομικός κύκλος. Η δεύτερη περίπτωση είναι η υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf, στην οποία εμφανίζεται ένας ασταθής οριακός κύκλος. Σύμφωνα με τον Kind(1998) σε αυτή τη περίπτωση ο οριακός κύκλος ερμηνεύεται ως corridor stability μια έννοια που αναπτύχθηκε από τον Leijonhufvud(1973).

4.7 Κυκλική συμπεριφορά εξαιτίας του Θεωρήματος Poincare-Bendixon.

Στην Ενότητα 4.5 είδαμε ότι η ύπαρξη φαινομένου διακλάδωσης στο σύστημα 4.1.2 αποτελεί αιτία εμφάνισης περιοδικών τροχιών. Στην Ενότητα 4.7 εφαρμόζοντας το Θεώρημα Poincare-Bendixon αποδεικνύεται η ύπαρξη περιοδικής τροχιάς. Αυτό που μας ενδιαφέρει σε αυτό το κεφάλαιο είναι η μακροπρόθεσμη συμπεριφορά των λύσεων , δηλαδή πως συμπεριφέρονται οι λύσεις καθώς t→∞. Όπως και στην Ενότητα4.5, έτσι και σε αυτό περιοριζόμαστε στην περίπτωση 1 του Σχήματος 4.3.1.

Ορίζουμε το σύνολο Q⊆ int $\Re^2_{++}$ ως εξής:

$$Q=\{ (g,d) : g\in[0, \bar{g}_3] , d\in[0, d_{max}]\} , \tag{4.7.1}$$

όπου το d_{max} είναι το σημείο τομής της $\frac{\dot{d}}{d} = 0$ με την ευθεία g=$\bar{g}_3$ και δίνεται από τον τύπο:

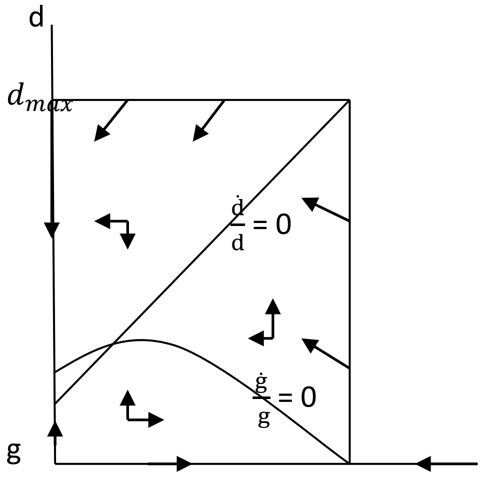
$$d_{max}=\frac{\beta_1}{\beta_2}\bar{g}_3+\frac{\beta_3}{\beta_2} . \tag{4.7.2}$$

Αντικαθιστώντας τον τύπο της $\bar{g}_3$ στην 4.6.2. η d_{max} δίνεται ως:

$$d_{max}=\frac{\beta_1\alpha_1+2\beta_3\alpha_2+\beta_1\sqrt{4\alpha_2\alpha_4+a_1^2}}{2\alpha_2\beta_2} . \tag{4.7.3}$$

Επίσης ορίζουμε Q_B ⊆ Q ως το σύνορο του Q και το οποίο δίνεται ως εξής:

$$Q_B = \{ (g,d): g = 0, d \in [0, d_{max}]\} \cup \{ (g,d): g = \bar{g}_3, d \in [0, d_{max}]\}$$
$$\cup \{ (g,d): g \in [0, \bar{g}_3], d = 0\} \cup \{ (g,d): g \in [0, \bar{g}_3], d = d_{max}\} . \tag{4.7.4}$$



Σχήμα 4.7.1:Αναλλοίωτο σύνολο Q

<u>Λήμμα 4.7.1</u> : Για κάθε λύση, την οποία συμβολίζουμε με S(t)= ($g(t)$, $d(t)$; g^0, d^0), το σύνολο Q όπως ορίστηκε στην σχέση 4.6.1 είναι αναλλοίωτο.

Απόδειξη: Έστω ότι το αρχικό σημείο μιας λύσης S(t) βρίσκεται πάνω στο σύνορο, δηλαδή (g^0, d^0) $\in Q_B$. Από τις σχέσεις 4.3.1.α-4.3.1.δ συμπεράναμε ότι οι άξονες d και g είναι τροχιές. Εάν το αρχικό σημείο βρίσκεται πάνω στα στάσιμα σημεία E_1, E_3 και E_4 τότε η τροχιά παραμένει στο αρχικό σημείο. Πιο συγκεκριμένα, ισχύουν οι σχέσεις:

Εάν (g^0, d^0)= E_1(0,0) , τότε S(t)= E_1(0,0) για κάθε t∈$\Re$ (4.7.5)

Εάν (g^0, d^0)= $E_3(\bar{g}_3$,0) , τότε S(t)=$E_3(\bar{g}_3, 0)$ για κάθε t∈$\Re$ (4.7.6)

Εάν (g^0, d^0)= E_4(0, $\bar{d}_4$) , τότε S(t)= E_4(0, $\bar{d}_4$) για κάθε t∈$\Re$ (4.7.7)

Επίσης πάλι από τις σχέσεις 4.3.1.α-4.3.1.δ συμπεραίνουμε ότι εάν το αρχικό σημείο βρίσκεται πάνω στον άξονα g αλλά όχι πάνω στο στάσιμο σημείο , τότε θα πλησιάζει το στάσιμο σημείο E_3. Ενώ εάν το αρχικό σημείο βρίσκεται πάνω στον άξονα d αλλά όχι πάνω στο στάσιμο σημείο , τότε θα πλησιάζει το στάσιμο σημείο E_4. Ισχύει ότι $\dot{g}$<0 και $\dot{d}$>0 εάν (g^0, d^0)∈ { (g ,d) : g=$\bar{g}_3$, d ∈]0, d_{max}[}. Ενώ εάν (g^0, d^0)∈ { (g ,d) : g∈]0, $\bar{g}_3$ [,d=d_{max} } ισχύει ότι $\dot{g}$<0 και $\dot{d}$<0. Με άλλα λόγια και στις δυο παραπάνω περιπτώσεις οι τροχιές σπρώχνονται προς το εσωτερικό του Q. Συνεπώς αποδείξαμε ότι το σύνολο Q είναι αναλλοίωτο , αφού οποιαδήποτε τροχιά έχει αρχικό σημείο, το οποίο ανήκει στο Q_B, τότε η τροχιά είτε παραμένει στο Q_B είτε σπρώχνεται στο εσωτερικό του Q. Δηλαδή δεν μπορούν να φύγουν από το Q, αφού βρισκόμαστε στο επίπεδο οπότε καμία τροχιά που ξεκινάει στο εσωτερικό του Q χωρίς να τέμνει την Q_B.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το Θεώρημα Poincare΄-Bendixon για να ισχυριστούμε το Λήμμα 4.7.2.

<u>Λήμμα 4.7.2</u> : Για οποιοδήποτε $(\mathrm{g}^0, \mathrm{d}^0) \in$ int $\Re^2_{++}$ η τροχιά S(t) είτε θα πλησιάζει το στάσιμο σημείο E_6, είτε θα είναι ένας οριακός κύκλος που περικυκλώνει το στάσιμο σημείο E_6.

Απόδειξη: Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση όπου το αρχικό σημείο ανήκει στο int Q. Επειδή βρισκόμαστε στην περίπτωση 1 του σχήματος 4.3.1 ξέρουμε από τις Ενότητες4.3 και 4.4 ότι στην περίπτωση 1 το στάσιμο σημείο E_6 είναι το μοναδικό στάσιμο σημείο στο εσωτερικό του $\Re^2_{++}$ και ότι είναι είτε πηγή είτε καταβόθρα. Πιο συγκεκριμένα από την Ενότητα4.5 έχουμε ότι εάν h<$\hat{\mathrm{h}}$,τότε το στάσιμο σημείο E_6 είναι καταβόθρα. Δηλαδή αποδείξαμε ότι η τροχιά S(t) θα πλησιάζει το στάσιμο σημείο E_6. Από την Ενότητα4.5 έχουμε ότι εάν h>$\hat{\mathrm{h}}$,τότε το στάσιμο σημείο E_6 είναι πηγή, έτσι ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του Θεωρήματος Poincare-Bendixon , οπότε σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένας οριακός κύκλος που περικυκλώνει το στάσιμο σημείο E_6. Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση όπου το αρχικό σημείο ανήκει στο int $[\Re^2_{++} \backslash \mathrm{Q}\ ]$. Σε αυτή την περίπτωση η τροχιά S(t) θα εισέλθει στο Q, οπότε είτε θα συγκλίνει στο E_6 , είτε θα πλησιάζει τον οριακό κύκλο που περικυκλώνει το E_6. Συνεπώς δείξαμε ότι για οποιοδήποτε $(\mathrm{g}^0, \mathrm{d}^0) \in$ int $\Re^2_{++}$ η τροχιά S(t) είτε θα πλησιάζει το στάσιμο σημείο E_6, είτε θα είναι ένας οριακός κύκλος που περικυκλώνει το στάσιμο σημείο E_6.

4.8 Πολλαπλοί οριακοί κύκλοι

Στην Ενότητα4.5 δείξαμε ότι το φαινόμενο διακλάδωσης Poincare –Andronov –Hopf οδηγεί στην εμφάνιση οριακών κύκλων , οι οποίοι μπορεί να είναι είτε ευσταθείς είτε ασταθείς ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων και πιο συγκεκριμένα ανάλογα με την τιμή του β στην σχέση 4.5.5. Σε αυτή την Ενότητα θέλουμε να αποδείξουμε ότι στην περίπτωση που εμφανίζεται υποκρίσιμη Poincare –Andronov –Hopf διακλάδωση, η οποία όπως ξέρουμε οδηγεί στην εμφάνιση ενός ασταθούς οριακού κύκλου και εάν ο οριακός κύκλος αυτός βρίσκεται μέσα σε ένα αναλλοίωτο σύνολο, τότε μέσω της εφαρμογής του Θεωρήματος Poincare- Bendixon εμφανίζεται ένας επιπλέον οριακός κύκλος, ο οποίος μάλιστα είναι ευσταθής.

Γνωρίζουμε ήδη από το Λήμμα 4.4.1 ότι το στάσιμο σημείο E_6 είναι πηγή ή καταβόθρα. Στη συνέχεια από την ανάλυση της διακλάδωσης Poincare –Andronov –Hopf που έγινε στην Ενότητα 4.5 έγινε φανερό ότι το κριτήριο για το αν το E_6 είναι πηγή ή καταβόθρα είναι η τιμή της παραμέτρου h. Πιο συγκεκριμένα για h<$\hat{\mathrm{h}}$, τότε το στάσιμο σημείο E_6 είναι καταβόθρα , ενώ για h>$\hat{\mathrm{h}}$, τότε το στάσιμο σημείο E_6 είναι πηγή. Επίσης από την παρατήρηση 4.5.1 είδαμε ότι όταν h=$\hat{\mathrm{h}}$ έχουμε σημείο διακλάδωσης, άρα έχουμε την εμφάνιση ενός οριακού κύκλου μικρού πλάτους. Συμβολίζουμε αυτόν τον οριακό κύκλο που προκύπτει από το φαινόμενο της διακλάδωσης Poincare –Andronov –Hopf ως Γ_h , όπου $\Gamma_h \in Q$ επειδή έχει μικρό πλάτος. Από την εφαρμογή του Θεωρήματος Jordan curve [Jordan Curve Theorem], το σύνολο Q χωρίζεται σε δυο σύνολα. Για την ακρίβεια χωρίζεται στο συμπαγές σύνολο A(Γ_h) ,δηλαδή στην περιοχή που είναι περιφραγμένη από τον οριακό κύκλο Γ_h τέτοιο ώστε A(Γ_h)⊆ Q και στο ημι-ανοιχτό φραγμένο σύνολο Q\ A(Γ_h), όπου Q\ A(Γ_h)≡{ (g ,d) : (g ,d) ∈ Q και (g ,d) ∉ A(Γ_h) }. Το A(Γ_h) είναι φραγμένο από το Γ_h.

Για την συνέχεια της ανάλυσης μας παίρνουμε την περίπτωση εκείνη όπου η διακλάδωση Poincare –Andronov –Hopf είναι υποκρίσιμη, δηλαδή ο οριακός κύκλος Γ_h είναι ασταθής.

<u>Λήμμα 4.8.1 :</u> Το σύνολο Q\ A(Γ_h) δεν είναι κενό.

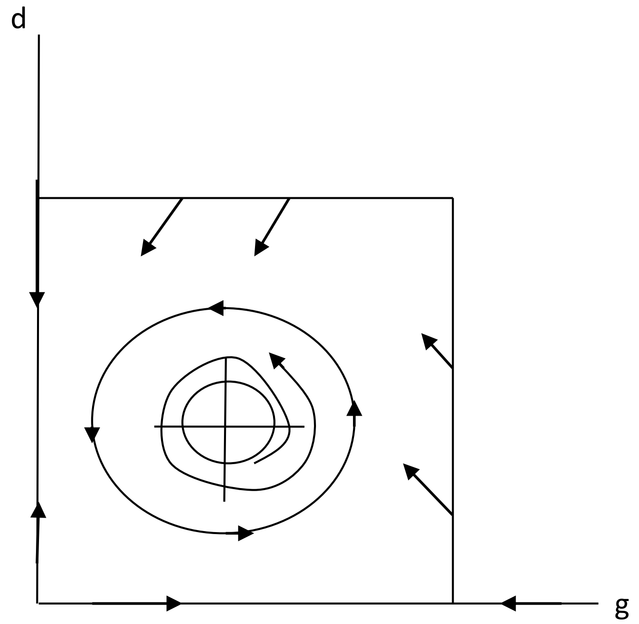
Απόδειξη : Ξέρουμε από την Ενότητα 4.7 ότι το Q είναι ένα συμπαγές , αναλλοίωτο σύνολο το οποίο είναι περιφραγμένο από το Q_B και ότι όλες οι τροχιές που έχουν αρχικό σημείο στο Q_B σπρώχνονται προς το εσωτερικό του Q. Άρα το Q_B δεν μπορεί να είναι το ω-οριακό σύνολο καμίας τροχιάς. Όμως το Γ_h είναι οριακός κύκλος και μάλιστα ασταθής όπως υποθέσαμε, ο οποίος προκύπτει από την υπερκρίσιμη διακλάδωση. Άρα το Q\ A(Γ_h) δεν είναι κενό.

<u>Λήμμα 4.8.2 :</u> Για S(t)= ($\mathrm{g(t)}$, $\mathrm{d(t)}$; $\mathrm{g^0, d^0}$),το σύνολο Q\ A(Γ_h) είναι αναλλοίωτο.

Απόδειξη : Έστω μια τροχιά S(t) που ξεκινάει από ένα αρχικό σημείο ($\mathrm{g^0, d^0}$) το οποίο βρίσκεται μέσα στο Q\ A(Γ_h). Από το λήμμα 4.6.1 ισχύει ότι το σύνολο Q είναι αναλλοίωτο , δηλαδή για κάθε ($\mathrm{g^0, d^0}$) το οποίο βρίσκεται μέσα στο Q , η λύση S(t) δεν μπορεί να τέμνει το σύνορο Q_B.Επίσης επειδή μελετάμε την περίπτωση στην οποία ο οριακός κύκλος Γ_h είναι ασταθής , τότε για κάθε ($\mathrm{g^0, d^0}$) το οποίο βρίσκεται μέσα στο Q\ A(Γ_h) η λύση S(t) δεν μπορεί να τέμνει τον οριακό κύκλο Γ_h. Επειδή το σύνολο Q\ A(Γ_h) είναι κατασκευασμένο στο επίπεδο ο μόνος τρόπος για να φύγει η λύση S(t) από το σύνολο Q\ A(Γ_h) είναι να τέμνει είτε τον οριακό κύκλο Γ_h είτε το σύνορο Q_B. Παραπάνω όμως αποδείξαμε ότι κανένα από τα δύο ενδεχόμενα δεν μπορεί να συμβεί. Οπότε δείξαμε ότι το σύνολο Q\ A(Γ_h) είναι αναλλοίωτο.

<u>Θεώρημα 4.8.1 :</u> Εάν στο στάσιμο σημείο E_6 εμφανίζεται υποκρίσιμη διακλάδωση Poincare –Andronov –Hopf στην κρίσιμη τιμή $\hat{\mathrm{h}}$, τότε καθώς η παράμετρος h περνάει μέσα από την κρίσιμη τιμή $\hat{\mathrm{h}}$ ισχύει ότι εκτός από έναν ασταθή οριακό κύκλο Γ_h μικρού πλάτους , υπάρχει τουλάχιστον ένας ευσταθής οριακός κύκλος μεγάλου πλάτους.

Απόδειξη: Δείξαμε στο λήμμα 4.8.2 ότι το σύνολο Q\ A(Γ_h) είναι αναλλοίωτο. Επίσης εκ κατασκευής του συνόλου Q\ A(Γ_h) ισχύει ότι το σύνολο Q\ A(Γ_h) δεν περιέχει κανένα ευσταθές στάσιμο σημείο. Συνεπώς εφαρμόζοντας το Θεώρημα Poincare-Bendixson έχουμε ότι για κάθε $(\mathrm{g}^0, \mathrm{d}^0)\in$ Q\ A(Γ_h) , το ω-οριακό σύνολο της λύσης S(t) είναι κλειστή τροχιά. Επίσης ο οριακός κύκλος Γ_h ο οποίος προκύπτει από την Poincare –Andronov –Hopf διακλάδωση δεν ανήκει στο σύνολο Q\ A(Γ_h) από την κατασκευή του. Κατά συνέπεια ο ω-οριακός κύκλος της S(t) είναι ένας οριακός κύκλος μεγάλου πλάτους, ο οποίος διαφέρει από τον Γ_h και ο οποίος είναι ευσταθής.



Σχήμα 4.8.1: Ένας ευσταθής οριακός κύκλος μεγάλου πλάτους περικυκλώνει έναν ασταθή οριακό κύκλο μικρού πλάτους.

<u>Παρατήρηση 4.8.1</u> : Στην περίπτωση που εμφανίζεται το φαινόμενο της υποκρίσιμης διακλάδωσης Poincare –Andronov –Hopf παρατηρούμε από το θεώρημα 4.8.1 ότι εμφανίζονται δύο ειδών τροχιές:

α)Για οποιοδήποτε αρχικό σημείο $(\mathrm{g}^0, \mathrm{d}^0)\in$ Q\ A(Γ_h), το ω-οριακό σύνολο των λύσεων είναι ένας οριακός κύκλος μεγάλου πλάτους.

β)Για οποιοδήποτε αρχικό σημείο $(\mathrm{g}^0, \mathrm{d}^0)\in$ int A(Γ_h), το ω-οριακό σύνολο των λύσεων είναι το στάσιμο σημείο E_6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Οικονομική Ερμηνεία των Αποτελεσμάτων-Συμπεράσματα

5.1 Οικονομικοί κύκλοι

Ένας οικονομικός κύκλος έχει τέσσερα στάδια τα οποία εμφανίζονται με την ακόλουθη σειρά: Φάση κορυφής, φάση ύφεσης, φάση βάθους και φάση ανάκαμψης.

1) Φάση κορυφής : Σε αυτή τη φάση αυξάνονται και το ποσοστό της επένδυσης g και ο δείκτης χρέους-κεφαλαίων(debt-capital) d. Η περίοδος της υψηλής ανάπτυξης χαρακτηρίζεται απο αισιόδοξες προσδοκίες. Όμως ακολουθώντας τους ισχυρισμούς των Fisher-Minsky ,οι περίοδοι ευημερίας ακολουθούνται εν τέλει από χειροτέρευση των χρηματοοικονομικών μεταβλητών. Στην παρούσα εργασία η χειροτέρευση αυτή εξηγείται ως εξής : Πρώτον, μια αύξηση του ποσοστού των επενδύσεων g σημαίνει ότι έχει αυξηθεί ο δανεισμός γιατί όπως ειπώθηκε στο Κεφάλαιο 3, οι εταιρίες προτιμούν να χρηματοδοτούν τις επενδύσεις τους μέσω εξωτερικού δανεισμού. Σε συνδυασμό με τις αισιόδοξες προσδοκίες των επενδυτών, μια αύξηση του g σημαίνει ότι θα αυξηθεί ο αριθμός των επικίνδυνων δανειοληπτών. Στο πρότυποπου αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3 , ο παραπάνω ισχυρισμός γίνεται αντιληπτός από μια αύξηση στον δείκτη η , ο ποίος δείχνει το ποσοστό των επικίνδυνων δανειοληπτών που περιέχονται σε ένα χαρτοφυλάκιο. Άρα ο αθροιστικός δείκτης αδυναμίας αποπληρωμής Λ αυξάνεται. Δεύτερον, μια αύξηση στον δείκτη d, κρατώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές , οδηγεί σε αύξηση του δείκτη λ. Συνεπώς ο αθροιστικός δείκτης Λ και σε αυτήν την περίπτωση αυξάνεται.

Η αύξηση του αθροιστικού δείκτη Λ έχει αρνητική επίδραση στο ποσοστό της επένδυσης g στο μοντέλο μας. Οι λόγοι είναι οι εξής : Πρώτον , το ρίσκο αδυναμίας αποπληρωμής ενδιαφέρει τους μάνατζερ των εταιριών γιατί σε περίπτωση εξαγοράς της εταιρίας μπορεί να γίνουν αλλαγές στο προσωπικό με συνέπεια να υπάρχει πιθανότητα να χάσουν τη δουλεία τους. Άρα μια αύξηση στον δείκτη λ τους οδηγεί στο να μειώσουν την ευαισθησία του g στο u. Δεύτερον, οι δανειστές ενδιαφέρονται για το ρίσκο αποπληρωμής .Μια αύξηση στον δείκτη Λ οδηγεί τους δανειστές στο να είναι περισσότερο προσεκτικοί με την χορήγηση δανείου. Επειδή η τιμή του δείκτη δανειακής επιβάρυνσης(gearing ratio) είναι ένας παράγοντας που επηρεάζει την απόφαση των δανειστών για την χορήγηση δανείων , οι εταιρίες προσπαθούν να μειώσουν τον μειώσουν. Συνεπώς μια αύξηση του δείκτη Λ έχει αρνητική επίδραση στον επιταχυντή της συνάρτησης επένδυσης. Η αρνητική επίδραση όμως που είδαμε παραπάνω αντισταθμίζεται από την θετική επίδραση που έχει η αύξηση του g. Δηλαδή μια αύξηση στην ζήτηση έχει θετική επίδραση στην επένδυση μέσω του πολλαπλασιαστή και του επιταχυντή. Μια επιπλέον θετική επίδραση φαίνεται από το γεγονός ότι μια αύξηση του g, αυξάνοντας τα αδιανέμητα κέρδη και κρατώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές, έχει αρνητική επίδραση στον δείκτη λ, άρα κατά συνέπεια έχει θετική επίδραση στο g.

2) Φάση ύφεσης: Όταν ο αρνητικός παράγοντας που αναφέρθηκε παραπάνω αρχίσει να υπερισχύει των θετικών παραγόντων, τότε οδηγούμαστε σε μείωση του και στην φάση της ύφεσης. Η μείωση του g οδηγεί σε μείωση του δανεισμού και σε αρνητική επίδραση του δείκτη d. Η αύξηση του δείκτη λ αποτελεί επίσης μια αρνητική επίδραση στον δείκτη d γιατί οδηγεί σε αύξηση της πίεσης για την αποπληρωμή του χρέους. Όμως η αρνητική επίδραση στον δείκτη d φαίνεται με καθυστέρηση, δηλαδή δεν είναι φανερή σε αυτή την φάση του οικονομικού κύκλου. Άρα αυτή η φάση του οικονομικού κύκλου χαρακτηρίζεται από μείωση του g και αύξηση του δείκτη d.

3) Φάση βάθους : Σε αυτή την φάση το ποσοστό των επενδύσεων g συνεχίζει την καθοδική του πορεία, αλλά η αρνητική επίδραση στον δείκτη d γίνεται αντιληπτή οδηγώντας στην μείωση του. Άρα στην φάση του βάθους μειώνονται και το g και το d. Όμως σε αυτό το στάδιο είναι που δημιουργείται η δυνατότητα βελτίωσης των χρηματοοικονομικών μεταβλητών οδηγώντας έτσι στο επόμενο στάδιο που θα δούμε στη συνέχεια.

Πιο συγκεκριμένα όσον αφορά την βελτίωση ισχύουν τα εξής: Πρώτον, μια μείωση του d, κρατώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές, οδηγεί σε μείωση του δείκτη λ και κατά συνέπεια σε μείωση του αθροιστικού δείκτη Λ. Δεύτερον, μια μείωση του g οδηγεί σε μείωση του ποσοστού των επικίνδυνων δανειοληπτών και κατά συνέπεια σε μείωση του αθροιστικού δείκτη Λ. Αυτή μείωση του δείκτη Λ αναμένεται να έχει θετική επίδραση στο g.Πιο συγκεκριμένα, εάν ο κίνδυνος αδυναμίας αποπληρωμής μειωθεί οι δανειστές είναι διατεθειμένοι να δανείσουν περισσότερα χρήματα οδηγώντας σε αύξηση των επενδύσεων. Επίσης, η μείωση του Λ συνεπάγεται μείωση του φόβου για αδυναμία αποπληρωμής από την μεριά των μάνατζερ των εταιριών, γεγονός που τους επιτρέπει να αυξήσουν τις επενδύσεις της εταιρίας.

Όμως η θετική επίδραση που αναλύθηκε παραπάνω αντισταθμίζεται από την αρνητική επίδραση της μείωσης του g. Για την ακρίβεια , η μείωση της ζήτησης έχει αρνητική επίδραση στο g μέσω της λειτουργίας του πολλαπλασιαστή και του επιταχυντή. Επίσης η μείωση της g, μέσω της μείωσης των κερδών οδηγεί σε αύξηση του λ, η οποία μέσω της συνάρτησης επένδυσης έχει αρνητική επίδραση στο g. Συνεπώς στην φάση του βάθους η αρνητική επίδραση είναι αυτή που κυριαρχεί.

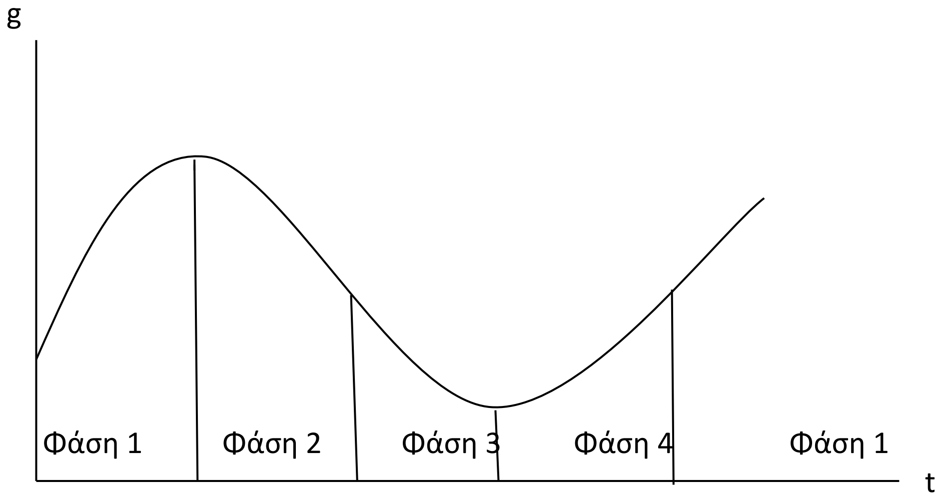
4) Φάση ανάκαμψης : Όταν οι παράγοντες που έχουν θετική επίδραση στο g αρχίσουν να υπερισχύουν των παραγόντων που έχουν αρνητική επίδραση, τότε το g αυξάνεται και αρχίζει η φάση της ανάκαμψης. Η αύξηση του g θα οδηγήσει σε αύξηση του δείκτη d , γιατί αν αυξηθεί το ποσοστό των επενδύσεων θα αυξηθεί και ο δανεισμός. Όμως η αύξηση του d συμβαίνει με καθυστέρηση ,δηλαδή δεν είναι φανερή στην φάση της ανάκαμψης. Συνεπώς σε αυτή τη φάση το g αυξάνεται ενώ ο δείκτης d μειώνεται. Όταν το d αρχίζει να αυξάνεται , τότε η οικονομία βρίσκεται πάλι στην φάση1,δηλαδή στην περίοδο της ανάπτυξης όπου αυξάνονται και το g και το d.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται συγκεντρωτικά πως κινούνται τα g και d στις τέσσερεις φάσεις του οικονομικού κύκλου.

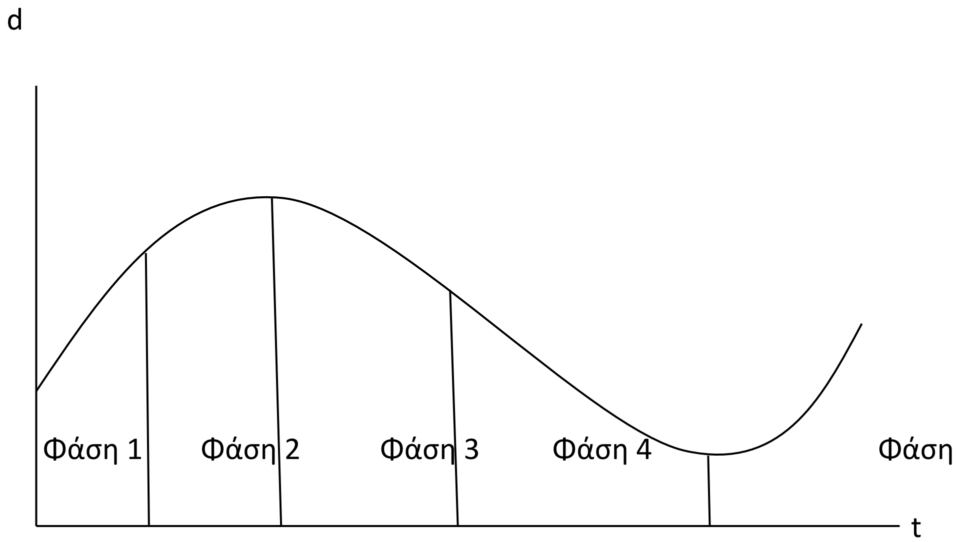
1)Φάση κορυφής	g↑ και d↑
2)Φάση ύφεσης	g↓ και d↑
3)Φάση βάθους	g↓ και d↓
4)Φάση ανάκαμψης	g↑ και d↓

5.1.1:Φάσεις του οικονομικού κύκλου.

Επίσης το ίδιο αποτέλεσμα φαίνεται και στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 5.1.2: Ο οικονομικός κύκλος της επένδυσης.



Σχήμα 5.1.3: Ο οικονομικός κύκλος του δείκτη d.

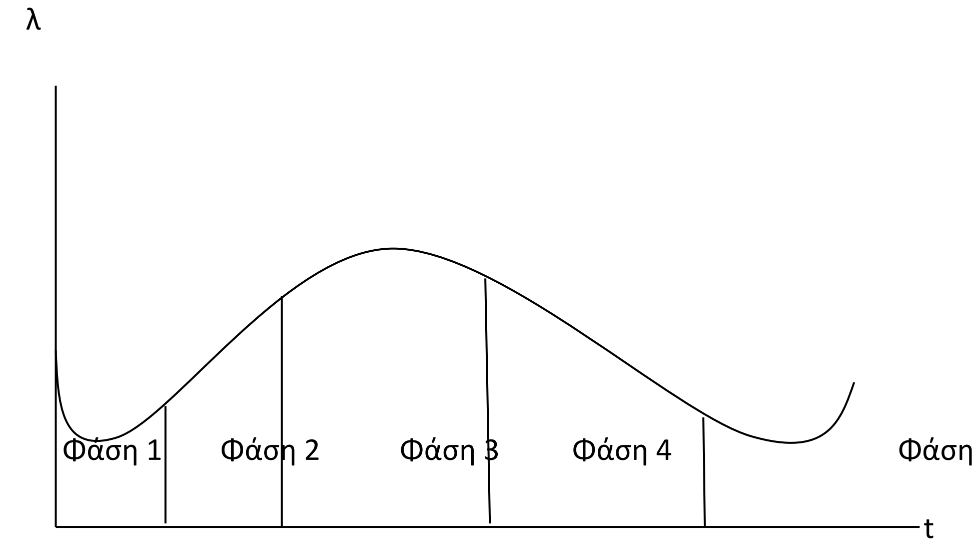
5.2 Χρηματοοικονομικοί κύκλοι

Ο χρηματοοικονομικός κύκλος και ο οικονομικός κύκλος δεν είναι συγχρονισμένοι. Για την ακρίβεια ο χρηματοοικονομικός κύκλος προηγείται του οικονομικού. Η παραπάνω δήλωση φαίνεται από τον δείκτη λ, οποίος δίνεται από τον εξής τύπο: $\lambda(t)=\frac{(q+r)\, sd(t)}{\sigma\, \psi g(t)}$ οπότε κάνοντας λογαριθμική παραγώγιση έχουμε τον εξής τύπο: $\ln(\lambda(t))=\ln(\frac{(q+r)\, sd(t)}{\sigma\, \psi g(t)})$, ο οποίος γράφεται πιο αναλυτικά ως εξής: $\ln(\lambda(t))=\ln(\ (q+r)\, sd(t)) - \ln\ (\sigma\, \psi g(t)\ )$.Οπότε παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της προηγούμενης σχέσης καταλήγουμε στον τύπο

$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{(q+r)\, s\dot{d}}{(q+r)\, sd} - \frac{\sigma\, \psi \dot{g}}{\sigma\, \psi g}$ και τελικά στην εξής σχέση:

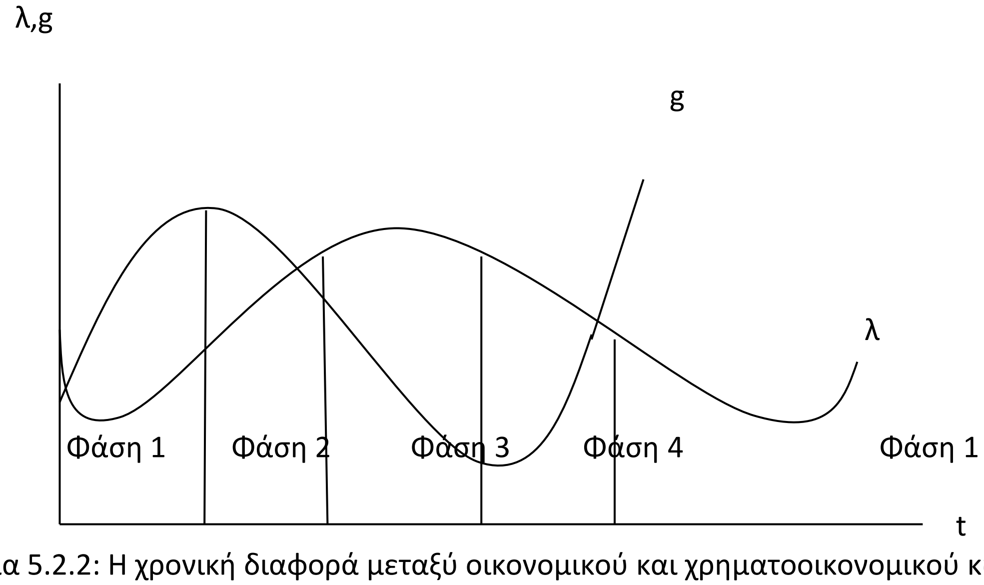
$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{d}}{d} - \frac{\dot{g}}{g} \qquad (5.2.1)$$

Από την παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι στη φάση1 του χρηματοοικονομικού κύκλου το λ αρχικά φθίνει και μετά αρχίζει να αυξάνει όσο βρίσκεται ακόμα στην φάση 1. Στη φάση2 του κύκλου συνεχίζει να αυξάνει. Στην φάση3 συνεχίζει να αυξάνει και μετά φθίνει ενώ βρίσκεται ακόμα στην ίδια φάση. Στην φάση4 φθίνει. Τα παραπάνω φαίνονται γραφικά στο εξής σχήμα :



Σχήμα 5.2.1:Ο χρηματοοικονομικός κύκλος.

Ο χρηματοοικονομικός κύκλος προηγείται του οικονομικού κύκλου(δηλαδή του κύκλου του g) γεγονός που γίνεται φανερό από τα εξής : Η αλλαγή στον χρηματοοικονομικό κύκλο συμβαίνει στην φάση1, όπου το λ ενώ αρχικά μειώνεται, στα μέσα της φάσης1 αρχίζει να αυξάνεται. Αντιθέτως στον οικονομικό κύκλο η αλλαγή συμβαίνει στο τέλος της φάσης1, όπου το g αρχίζει να μειώνεται. Επίσης η επόμενη αλλαγή στον χρηματοοικονομικό κύκλο γίνεται στα μέσα της φάσης3, όπου ενώ το λ αυξάνεται ,στα μέσα του κύκλου αρχίζει να μειώνεται. Η επόμενη αλλαγή στον οικονομικό κύκλο συμβαίνει στο τέλος της φάσης3 όπου το g αρχίζει να αυξάνεται. Αυτή η χρονική διαφορά μεταξύ του οικονομικού και του χρηματοοικονομικού κύκλου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Σχήμα 5.2.2: Η χρονική διαφορά μεταξύ οικονομικού και χρηματοοικονομικού κύκλου.

5.3 Συμπεράσματα

Το μοντέλο της παρούσας εργασίας βασίζεται πάνω στην υπόθεση των Fisher-Minsky που στην ουσία αναφέρει ότι στην περίοδο ανάπτυξης εμφανίζεται μια χειροτέρευση των χρηματοοικονομικών μεταβλητών , η οποία στο μοντέλο μας φαίνεται με την αύξηση του δείκτη Λ. Το μοντέλο αποτελείται από μια συνάρτηση επένδυσης(η οποία αντιπροσωπεύει τον πραγματικό τομέα) και από μια συνάρτηση χρέους (η οποία αντιπροσωπεύει τον χρηματοοικονομικό τομέα). Πιο συγκεκριμένα , η μεταβλητή Λ παρέχει μια αιτία ενδογενώς ορίου στο μοντέλο καθώς ένα μοντέλο το οποίο αποτελείται μόνο από μια συνάρτηση επένδυσης δεν είναι φραγμένο. Στις παραγράφους 4.1 και 4.2 είδαμε πως αυτή η χειροτέρευση των χρηματοοικονομικών μεταβλητών μπορεί να οδηγήσει στο τέλος της περιόδου ανάπτυξης. Επίσης το μοντέλο εμφανίζει τις εξής δυναμικές δυνατότητες: Σύγκλιση σε μια τετριμμένη σταθερή κατάσταση , η οποία έχει νόημα οικονομικά και εμφάνιση κύκλων ανάπτυξης. Αυτοί οι κύκλοι ερμηνεύονται στα οικονομικά ως οικονομικοί κύκλοι. Συνεπώς η εργασία απέδειξε ότι η αλληλεπίδραση του πραγματικού και του χρηματοοικονομικού τομέα μπορεί να αποτελέσει μια ενδογενή αιτία ,σε κλειστές οικονομίες με περιορισμό στην ζήτηση, για την δημιουργία οικονομικών κύκλων και χρηματοοικονομικών κρίσεων , οι οποίες μάλιστα προηγούνται των οικονομικών κύκλων.

Το μοντέλο όμως έχει και κάποιους περιορισμούς. Πρώτον, η φύση του χρηματοοικονομικού τομέα είναι τέτοια ώστε η αρχή και το τέλος μιας χρηματοοικονομικής συναλλαγής να μην συγχρονίζονται, όπως συμβαίνει στον πραγματικό τομέα. Οπότε η εξαγωγή των επικίνδυνων δανειοληπτών απαιτεί χρόνο. Ο λόγος είναι ότι ενώ οι καινούργιοι επικίνδυνοι δανειολήπτες μπορούν να απορριφθούν κατευθείαν, οι ήδη υπάρχοντες μπορούν να αποκλειστούν μόνο όταν ξεπληρώσουν όλες τους τις δανειακές υποχρεώσεις. Στην πραγματικότητα λοιπόν ενώ το τέλος της ανάπτυξης μπορεί να συμβεί ενδογενώς(κάτι το οποίο το συλλαμβάνει και το μοντέλο της εργασίας) , το τέλος της ύφεσης δεν είναι τόσο απλό καθώς μπορεί να χρειαστεί κρατική παρέμβαση. Δεν αναλύονται στο μοντέλο οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να τελειώσει η ύφεση. Δεύτερον, το μοντέλο της εργασίας δεν λαμβάνει υπόψη την διανομή του εισοδήματος και τις προσδοκίες των επενδυτών , οι οποίες οδηγούν σε αλλαγές των τιμών των χρηματοοικονομικών αγαθών(assets). Τέλος , το μοντέλο λαμβάνει υπόψιν μόνο το χρέος των επιχειρήσεων ,οπότε η ανάλυση του δημόσιου χρέους και του χρέους των νοικοκυριών θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο μελλοντικής μελέτης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arthur F. Burns and Wesley C. Mitchell, Measuring Business Cycles, NBER(1946).

Carmen Chicone, Ordinary Differential Equations with Applications, Springer Science+Business Media, Inc(2006).

Stijn Claessens, M. Ayhan Kose and Marco E. Terrones , How Do Business and Financial Cycles Interact?, International Monetary Fund(2011).

Soumya Datta, Macrodynamics of Financing Investment: Applications of Lotka-Volterra Class of Models, Ph.D Centre for Economic Studies and Planning, Scool of Social Sciences(2010).

Soumya Datta, Cycles and Crises in a Model of Debt-financed Investment-led Growth, Faculty of Economics, South Asian University, New Delhi, India(2012).

Leah Edelstein-Keshet, Mathematical models in Biology, Society for Industrial and Applied Mathematics (2005).

Irving Fisher, The Debt-Deflation theory of Great Depressions, Econometrica 1, 337-357.

David Harvie, Mark A.Kelmanson and David G. Knapp, A Dynamic Model of Business- Cycle Asymmetries: Extending Goodwin, Economic Issues, Vol.12(2006).

Morris W.Hirsch ,Stephen Smale, Robert L.Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, Elsevier (2004)

Christoph Kind, Remarks on the economic interpretation of Hopf bifurcations, Elsevier Economics Letters 62 (1999) 147–154

Yuri A.Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory ,Second Edition, Springer-Verlag, New York, Inc(1998).

Finn E. Kydland and Edward C. Prescott, Business Cycles:Real Facts and a Monetary Myth, Federal Reserve Bank of Minneapolis,Vol. 14, No. 2 ISSN 0271-5287

Hyman P. Minsky, The Financial Instability Hypothesis, The Jerome Levy Economics Institute of Bard College(Working Paper No. 74)(1992)

Lawrence Perko,Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York. Inc.(2001)

George W. Stadler, Real Business Cycles, *Journal of Economics Literatute Vol. XXXII* (*December 1994*)*, pp. 1750–1783*

Steven H.Strogatz , Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications in Physics, Biology, Chemistry,and Engineering, Addison-Wesley (1994).

Eric Tymoigne , Measuring Macroprudential Risk: Financial Fragility Indexes, Levy Economic Institute of Bard College, working paper(2011).

Αθηνά Πετράκη Κώττη και Γεώργιος Χριστ.Κώττη, Σύγχρονη Μακροοικονομική, Ευγ.Μπένου(2000).

Αθηνά Πετράκη Κώττη και Γεώργιος Χριστ.Κώττη, Μακροοικονομική Θεωρία και Πολιτική, Παπαζήση ΑΕΒΕ(2001).

Ιωάννης Μυριτζής, Δυναμικά συστήματα, ΣΕΑΒ, (2015).

Νικόλαος Μ.Σταυρακάκης, Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις, Γραμμική και μη γραμμική θεωρία με εφαρμογές από τη φύση και τη ζωή, Α. Παπασωτηρίου &ΣΙΑ Ο.Ε (2011).