

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
"ΝΑΥΤΙΚΗ & ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ & ΕΠΙΣΤΗΜΗ"
ΣΧΟΛΗ ΤΩΝ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



“ΝΑΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗ”

Μεταπτυχιακή Εργασία

του μεταπτυχιακού φοιτητή

ΤΕΛΩΝΗ ΑΓΓΕΛΟΥ

Αριθμός Μητρώου: 08114834

Θέμα:

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ
ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ
ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ**

Επιβλέπων

Κ.Α. ΜΠΕΛΙΜΠΑΣΑΚΗΣ
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2017

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά στην ανάπτυξη και εφαρμογή μεθοδολογίας για την επίλυση προβλημάτων κυματικής διάδοσης σε ηλεκτρομαγνητικούς (HM) κυματοδηγούς με ομοιόμορφα ή ανομοιόμορφα σύνορα και μεταβαλλόμενες παραμέτρους και την εφαρμογή της στην μελέτη απωλειών διάδοσης καμπύλων HM κυματοδηγών που λειτουργούν σε μικροκυματικές συχνότητες. Η σημασία μελέτης των σχετικών προβλημάτων είναι πολύ μεγάλη μιας και εφαρμογές που βασίζονται στην κυματοδηγήση συναντώνται ευρύτατα στην σύγχρονη επιστήμη και τεχνολογία, Elmore & Heald (1969). Ιδιαίτερα σε ότι αφορά τις εφαρμογές, HM κυματοδηγοί τύπου κλειστού σωλήνα μεταλλικού περιβλήματος βρίσκουν σημαντικές εφαρμογές ως γραμμές μεταφοράς ενέργειας και πληροφορίας στην περιοχή των μικροκυματικών συχνοτήτων (1GHz-300GHz), Balanis (1989), Collin (1991). Δίκτυο τέτοιων κυματοδηγών συνθέτει τις πηγές ειδικού τύπου κεραίων (spatial antennas). Αντίστοιχα, οπτικές ίνες, Sodha&Ghatak (1977), Cronin(1995), ως κυματοδηγοί τετραγωνικής ή/και κυκλικής διατομής από σύνθετο διηλεκτρικό υλικό, χρησιμοποιούνται για την HM κυματοδηγήση στις συχνότητες του ορατού φωτός (>300THz). Πέραν των ανωτέρω εφαρμογών τα φαινόμενα HM κυματοδηγήσης σε περιβαλλοντική κλίμακα, υποστηριζόμενα από τον φυσικό κυματοδηγό, βρίσκουν ευρύτατη εφαρμογή στην τεχνολογία radar και ραδιο/τηλεπικοινωνιών, Balanis (1982).

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε μέθοδος συνοριακών στοιχείων, κατάλληλη για την μελέτη των προβλημάτων διάδοσης-ανάκλασης-σκέδασης HM κυμάτων σε κλειστούς τρισδιάστατους κυματοδηγούς ορθογωνικής, κυκλικής και ελλειπτικής διατομής, με καμπύλα σύνορα, στη ζώνη των μικροκυματικών συχνοτήτων.

Παρουσιάζονται αποτελέσματα στη περίπτωση H-plane bend κυματοδηγών ορθογωνικής διατομής και συγκρίνονται με αντίστοιχα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου συζευγμένων ιδιομορφών η οποία αναπτύχθηκε από Athanassoulis et al (2002). Περαιτέρω διερευνήθηκε η επίδραση μικρών τοπικών σκεδαστών εντός του κυματοδηγού στις απώλειες διάδοσης.

Abstract

The objective of this thesis is the development and implementation of a methodology to solve electromagnetic propagating problems in waveguides with even or uneven borders and changing parameters and its application in the study of curved propagation losses of electromagnetic waveguides that are operating at microwave frequencies. There is great need of developing solutions in such problems as many applications are based on the guidance of waves and are found widely in modern science and technology, Elmore & Heald (1969). Particularly, in terms of applications, electromagnetic waveguides, closed - metal casing pipe type, have important applications in energy and information transmission lines in the microwave frequency range (1GHz-300GHz), Balanis (1989), Collin (1991). A network of such waveguides exist in the source of spatial antennas. Accordingly, optical fibers are used, Sodha & Ghatak (1977), Cronin (1995), as the waveguides are of square and / or circular section of dielectric material, for the electromagnetic waveguiding in the frequencies of visible light (greater than 300THz). In addition to the above applications electromagnetic waveguiding phenomena in environmental scale, supported by natural waveguide, find extensive applications in radar technology and radio / telecommunications, Balanis (1982).

As part of this thesis the boundary element method is being developed, suitable for the study of diffusion problems-reflectance-scattering of electromagnetic waves in enclosed three-dimensional rectangular waveguides, circular and elliptical cross-section, with curved boundaries, in the zone of microwave frequencies.

Results are presented in the case of H-plane bend waveguides of rectangular section and compared with corresponding results of the coupled mode method application developed by Athanassoulis et al (2002). Furthermore, the effect of small local scatterers within the waveguide to the propagation losses is investigated.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	5
2. Γεωμετρία καμπύλων κυματοδηγών.....	10
3. Κυματοδηγός ορθογωνικής διατομής.....	14
4. Διαφορική διατύπωση του προβλήματος.....	19
4.1 E-plane bend, η γενική αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου στους ημι-άπειρους οριζόντιους κυματοδηγούς.....	20
4.2 H-plane bend, η γενική αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου στους ημι-άπειρους οριζόντιους κυματοδηγούς.....	21
4.3 Εξισώσεις Maxwell σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες	23
5. Η μέθοδος των συζευγμένων ιδιομορφών	27
5.1 E-plane bend υπο-πρόβλημα, τοπική αναπαράσταση και σύστημα συζευγμένων ιδιομορφών.....	28
5.2 H-plane bend υπο-πρόβλημα, τοπική αναπαράσταση και σύστημα συζευγμένων ιδιομορφών.....	33
5.3 Αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου συζευγμένων ιδιομορφών	36
6. Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων και Προβλήματα Σκέδασης	45
6.1 Συναρτήσεις Green	45
6.2 Προβλήματα συνοριακών τιμών της εξίσωσης Helmholtz	46
6.3 Πρόβλημα σκέδασης – σώμα γενικού σχήματος πεπερασμένων διαστάσεων	47
6.3.1. Επίλυση προβλήματος με το θεώρημα ολοκληρωτικής αναπαράστασης Green....	47
6.3.2. Επίλυση του προβλήματος με κατανομές επιφανειακών δυναμικών	50
6.3.3 Χαμηλοτάξια Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων	52
6.3.4 Εφαρμογή μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων	56
7. Εφαρμογή Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων σε Καμπύλο Κυματοδηγό.....	63
7.1 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος	65
7.2 Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων με κατανομές πηγών	69
7.3 Αποτελέσματα εφαρμογής μεθόδου BEM στον κυματοδηγό WR75 H90°.....	76
8. Επίδραση πεπερασμένου σκεδαστή σε ομογενή κυματοδηγό	81
9. Συμπεράσματα μελέτης - Προτάσεις	89
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	90

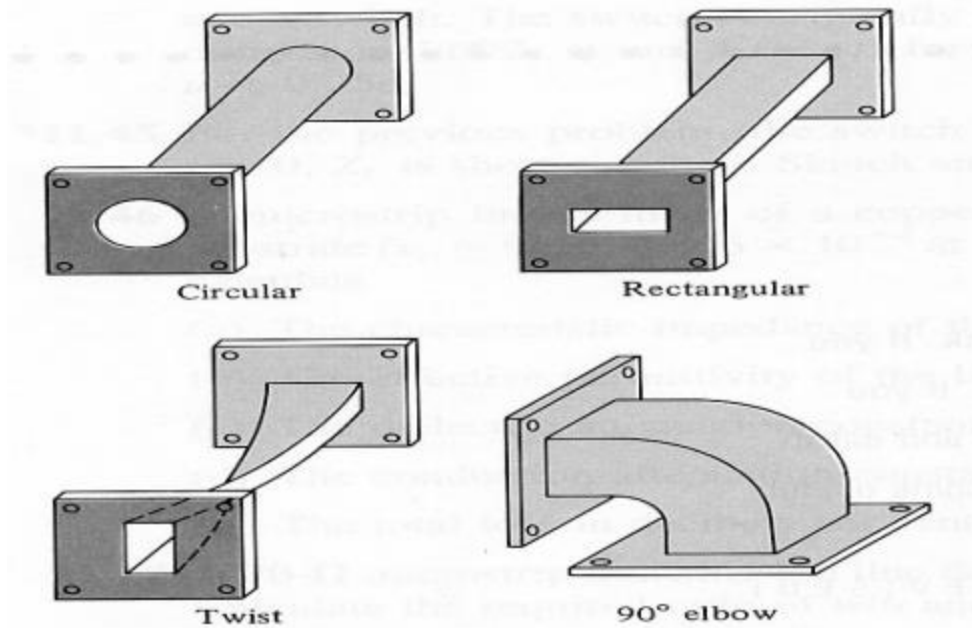
1. Εισαγωγή

Ο κυματοδηγός είναι ένα μέσο για να επιτευχθεί η καθοδήγηση ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας από ένα σημείο σε ένα άλλο. Είναι σωλήνας ειδικά κατασκευασμένος για τη μεταφορά ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στις μικροκυματικές συχνότητες. Η συμπεριφορά των γραμμών μεταφοράς είναι αρκετά ικανοποιητική στις χαμηλές συχνότητες λειτουργίας, εμφανίζει όμως πολλά προβλήματα στις πολύ υψηλές συχνότητες λόγω αυξημένων απωλειών και έτσι η μεταφορά της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας γίνεται με τη βοήθεια διατάξεων κυματοδηγών. Κυματοδηγοί κατασκευάστηκαν για πρώτη φορά τη δεκαετία του 1930. Αρχικά χρησιμοποιήθηκαν ως αγωγοί παροχής σε κεραιές. Έκτοτε, με την περαιτέρω έρευνα και την ταχύτατη ανάπτυξη των τεχνικών κατασκευής, η χρησιμοποίηση των κυματοδηγών επεκτάθηκε και σε άλλες εφαρμογές, όπου απαιτείται χρήση μικροκυμάτων (ραδιοτηλεσκοπία, ραδιομετεωρολογία, φασματοσκοπία, φούρνοι μικροκυμάτων κα). Στις περισσότερες τεχνολογικές εφαρμογές χρησιμοποιείται μία ακολουθία κυματοδηγών, κατάλληλα σχεδιασμένη για την ελαχιστοποίηση της σκέδασης, των απωλειών λόγω μετάδοσης και ανάκλασης. Γενικότερα αποτελεί ένα σύνθετο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Ένα παράδειγμα που επιβεβαιώνει τον προηγούμενο ισχυρισμό αποτελεί το δίκτυο κυματοδηγών που τροφοδοτεί τις πηγές κεραιών που βρίσκονται σε σταθμούς στο διάστημα. Σε μία τέτοια περίπτωση το δίκτυο περιλαμβάνει πλήθος από κυματοδηγούς με διαφορετικές γωνίες κλίσης μαζί με ευθύγραμμους κυματοδηγούς, όλοι ορθογωνικής διατομής, με το βάρος, την απόδοση και τις απώλειες να διαδραματίζουν σημαντικότατο ρόλο.

Το βασικό στοιχείο ενός τυπικού δικτύου κυματοδηγών είναι ο κυρτός κυματοδηγός ορθογωνικής διατομής, σταθερού ύψους και πλάτους. Σε κάποιες εφαρμογές το πλάτος μεταβάλλεται κατά την κατεύθυνση της διάδοσης. Για την κατανόηση της συμπεριφοράς των κυματοδηγών χρησιμοποιούνται αριθμητικές προσομοιώσεις με εφαρμογή εξισώσεων ανάκλασης, μετάδοσης, σκέδασης. Η γνώση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εντός του κυματοδηγού με αναλυτικό τρόπο, επιτρέπει την διατύπωση και λύση προβλημάτων βελτιστοποίησης του σχήματος των ενώσεων και του συνόλου του δικτύου.

Σε μία τυπική περίπτωση τέτοιου δικτύου, το ευθύ ηλεκτροδυναμικό πρόβλημα είναι το εξής: κύμα μοναδιαίου πλάτους και δεδομένης αναστροφής δομής του πεδίου προσπίπτει σε ανομοιογενή κυματοδηγό (καμπύλο τμήμα), τοποθετημένο ανάμεσα σε δύο ευθύς ομοιογενείς κυματοδηγούς. Το ακριβώς αντίστροφο ηλεκτροδυναμικό πρόβλημα αποτελεί η εύρεση των γεωμετρικών διαστάσεων του δικτύου και των ενώσεων για μία συγκεκριμένη έξοδο στην συχνότητα λειτουργίας.

Ποικίλες τεχνικές έχουν προταθεί με στόχο την εύρεση των παραμέτρων των κυματοδηγών. Κάποιες από αυτές ημιαναλυτικές, cross-section method “Theory of Non-uniform Waveguides” B.Z. Katsenelenbaum (1998), mitred-bent element method by



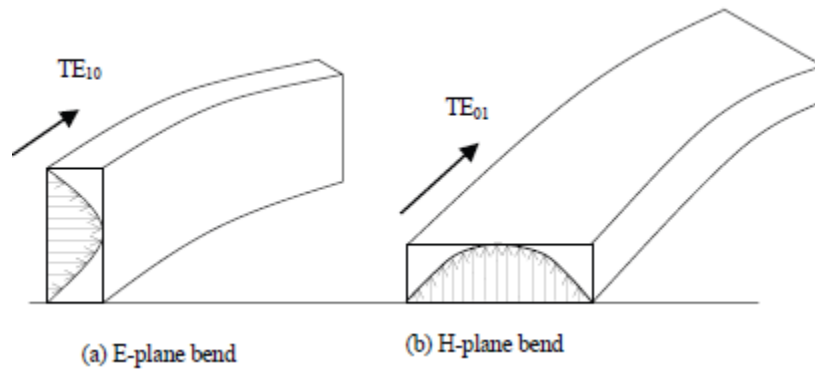
Εικ.1 Τύποι κυματοδηγών

Cornet et al (1999), και άλλες αναλυτικές, όπως η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, Chung (1994), Gopalakrishnan & Doyle (1994), Guillaume & Masmoudi (1997).

Για την ανάλυση των προβλημάτων της κυματοδότησης, αναζητούμε λύσεις των κυματικών εξισώσεων των διανυσμάτων ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, E και H, που ικανοποιούν τις σχετικές οριακές συνθήκες. Οι οριακές αυτές συνθήκες αναφέρονται στην καθετότητα του διανύσματος E και την εφαπτομενικότητα του H πάνω στα αγωγικά τοιχώματα των κυματοδηγών. Καθώς απαιτείται η οδήγηση του κύματος μέσω στροφής και εκτροπής του κυματοδηγού, είναι απαραίτητο να εξασφαλιστεί πως η στροφή θα επιτευχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μην επηρεαστούν τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία κατά μη επιθυμητό τρόπο. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε μεγάλες απώλειες και ανακλάσεις.

Υπάρχουν αρκετοί τύποι κυματοδηγών στρέψης του κύματος οι οποίοι χρησιμοποιούνται ανάλογα με την περίπτωση και την εκάστοτε εφαρμογή. Ένας κυματοδηγός μπορεί να πάρει οποιαδήποτε μορφή, με ομογενή όμως διατομή. Στην εικόνα 1 παρουσιάζονται κάποιοι κοινοί τύποι κυματοδηγών. Με τη σειρά, κυκλικής διατομής, ορθογωνικής διατομής, κυματοδηγός στρέψης, κυματοδηγός γωνίας 90°.

Οι κυματοδηγοί τύπου στρέψης E-plane bend και H-plane bend διαφοροποιούνται όπως φαίνεται σε ακόλουθο σχήμα (εικόνα 2).



Εικ.2 E-plane bend – H-plane bend

Ένας κυματοδηγός επιτρέπει την λειτουργία συγκεκριμένων λειτουργιών, μορφών του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Οι διαφορετικές λειτουργίες είναι γνωστές και ως ρυθμοί. Ένας ρυθμός εξαρτάται από την συχνότητα, τη θέση και το είδος της πηγής διέγερσης. Η κωδικοποίηση των ρυθμών μπορεί να γίνει μόνο για απλές γεωμετρίες των κυματοδηγών. Αυτή βασίζεται στην εξέταση των συνιστωσών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Η ταξινόμηση των ρυθμών είναι η ακόλουθη:

- Εγκάρσιος ηλεκτρομαγνητικός, TEM (Transverse Electro-Magnetic)
- Εγκάρσιος ηλεκτρικός ρυθμός, TE (Transverse Electric)
- Εγκάρσιος μαγνητικός ρυθμός, TM (Transverse Magnetic)
- Υβριδικοί ρυθμοί, HE και EH

Στους ορθογωνικής διατομής κυματοδηγούς οι εκφράσεις αυτές θα συνοδεύονται από δύο δείκτες, m και n . Οι δείκτες αυτοί είναι ακέραιοι που δείχνουν τον αριθμό μισών μηκών κύματος ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κυμάτων, το m μετράται κατά μήκος του άξονα X του κυματοδηγού, ενώ το n κατά μήκος του άξονα Y . Όπως φαίνεται στην Εικόνα 2, ο δείκτης 1 συμβολίζει, στην διάσταση X στην μία και Y στην δεύτερη περίπτωση, το ένα μισό μήκος κύματος ($1 \cdot \lambda/2$) που είναι η μία διάσταση του κυματοδηγού.



Εικ.3 κυματοδηγός ορθογωνικής διατομής



Εικ.4 κυματοδηγός κυκλικής διατομής

Η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και στα δύο είδη κυματοδηγών υπακούει στους ίδιους νόμους, οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι του σχήματος της διατομής και των διαστάσεων του κυματοδηγού. Συγκριτικά με τους ορθογωνικής διατομής κυματοδηγούς, σε αυτούς με κυκλική διατομή έχουμε και διαφορετική ονομασία των διαμορφώσεων. Ο ακέραιος δείκτης m συμβολίζει τον αριθμό διαφοροποιήσεων των εντάσεων πλήρους μήκους κύματος της περιφέρειας, ενώ ο αριθμός n τον αριθμό εναλλαγών του μισού μήκους κύματος στην ακτίνα από το κέντρο προς το τοίχωμα. Όπως είναι εμφανές από την περιγραφή των ρυθμών (διαμορφώσεων), στους κυκλικής διατομής κυματοδηγούς γίνεται χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων.

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφέρουμε την ύπαρξη φαινομένων σκέδασης στην διάδοση του κύματος μέσα στον κυματοδηγό. Με τον όρο σκέδαση περιγράφουμε την φυσική διαδικασία κατά την οποία η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, στην προκειμένη περίπτωση, αποκλίνει από την ευθύγραμμη πορεία διάδοσης κατά μία ή περισσότερες

διευθύνσεις λόγω ανομοιογενειών του μέσου (κυματοδηγός). Τα φαινόμενα σκέδασης που μπορεί να υπάρχουν εντός του κυματοδηγού είναι ποικίλων γεωμετριών και μεγεθών. Για να γίνει υπολογισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ενός κυματοδηγού, εντός του οποίου εμφανίζονται φαινόμενα σκέδασης, είναι απαραίτητο να υπολογιστεί το πρόσθετο πεδίο σκέδασης. Το ολικό πεδίο, ηλεκτρικό και μαγνητικό, προκύπτει σαν άθροισμα του αρχικού (χωρίς το εμπόδιο) και του πεδίου σκέδασης.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε μέθοδος συνοριακών στοιχείων, κατάλληλη για την μελέτη των προβλημάτων διάδοσης-ανάκλασης-σκέδασης ΗΜ κυμάτων σε κλειστούς τρισδιάστατους κυματοδηγούς ορθογωνικής, κυκλικής και ελλειπτικής διατομής, με καμπύλα σύνορα, στη ζώνη των μικροκυματικών συχνοτήτων.

Παρουσιάζονται αποτελέσματα στη περίπτωση H-plane bend κυματοδηγών ορθογωνικής διατομής και συγκρίνονται με αντίστοιχα από την εφαρμογή της μεθόδου συζευγμένων ιδιομορφών η οποία αναπτύχθηκε από Athanassoulis et al (2002). Περαιτέρω διερευνήθηκε η επίδραση μικρών τοπικών σκεδαστών εντός του κυματοδηγού στις απώλειες διάδοσης.

Οι υπολογισμοί και οι προσομοιώσεις καθώς και οι εικόνες που προέκυψαν από αυτά έγιναν στο πρόγραμμα MATLAB R2012a από The MathWorks, Inc.

2. Γεωμετρία καμπύλων κυματοδηγών

Θεωρούμε καμπύλο κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής $A \times B$, όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα (εικόνα 5) με κατά μήκος άξονα συμμετρίας $x_1 x_2$. Η διάσταση A , που συμβολίζει το πλάτος του κυματοδηγού, παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος αυτού. Δεδομένου αυτού, ο κυματοδηγός βρίσκεται ανάμεσα σε δύο παράλληλα όρια τα οποία βρίσκονται σε σημεία $x^3 = \pm A/2$, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στην Εικόνα 5. Στην διάσταση του πλάτους B , ο κυματοδηγός μπορεί να παρουσιάζει διαφοροποιήσεις, να ποικίλει με την αύξηση του μήκους, Στην είσοδο του κυματοδηγού το πλάτος έχει την τιμή B_1 , ενώ στην έξοδο καταλήγει σε πλάτος B_2 .

Ο άπειρος κυματοδηγός, που παρουσιάζεται στην εικόνα 5, μπορεί να αναλυθεί σε τρεις επιμέρους κυματοδηγούς: σε δύο ημι-άπειρους οριζόντιους κυματοδηγούς και έναν μη άπειρο καμπύλο. Τα ημι-άπειρα άκρα του κυματοδηγού περιγράφονται από τις καμπύλες $u^1(s)$, $u^2(s)$ και $\ell^1(s)$, $\ell^2(s)$. Με αυτό τον τρόπο ορίζονται και τα τόξα $U_1 U_2$ για την μία πλευρά του κυματοδηγού και $D_1 D_2$ για την άλλη. Ως s ορίζεται το φυσικό μήκος του κυματοδηγού μετρούμενο στον άξονα αυτού με τιμές $0 \leq s \leq L$, όπου L το μέσο μήκος του καμπύλου κυματοδηγού. Λόγω του καμπύλου σχήματος το συνολικό μήκος του κυματοδηγού διαφέρει για διαφορετικές θέσεις στο πλάτος αυτού. Στην παρούσα ανάλυση περιοριζόμαστε στην περίπτωση που το πλάτος $B(s)$ παρουσιάζει γνησίως μονότονη συμπεριφορά κατά μήκος του καμπύλου τμήματος, περίπτωση που συναντάται σε όλες τις πρακτικές εφαρμογές.

Τα άκρα (τοιχώματα) του κυματοδηγού $U_1 U_2$ και $D_1 D_2$ θεωρούνται παράλληλα μεταξύ τους στην αρχή και το τέλος του μη άπειρου καμπύλου κυματοδηγού. Επίσης, πριν την είσοδο $U_1 D_1$ στον καμπύλο κυματοδηγό και την έξοδο $U_2 D_2$ θεωρείται γραμμική επέκταση των άκρων, όπως είναι εμφανές και στην εικόνα 6.

Τα σημεία O_1 , O_2 με $O_1 = (0,0,0)$ και $O_2 = \frac{1}{2} (u^1(L) + \ell^1(L), u^2(L) + \ell^2(L), 0)$

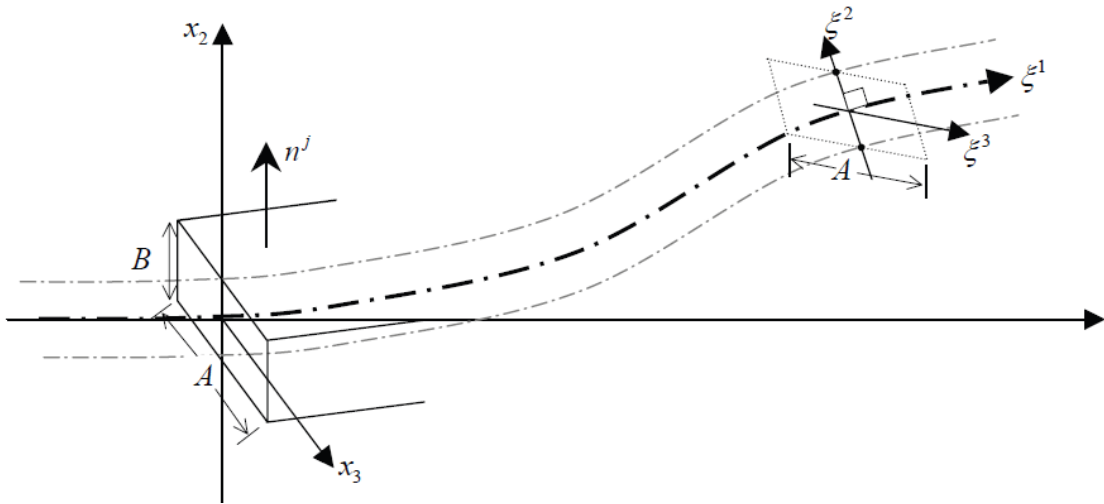
ορίζουν τα κέντρα της εισόδου και της εξόδου αντίστοιχα, όπως φαίνεται πάλι στην εικόνα 6. Επιπλέον, χρησιμοποιείται ένα δεύτερο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $\{x^i\}$, με κέντρο O_2 , όπου ο μετασχηματισμός μεταξύ των συστημάτων $\{x^i\}$ και $\{x^i\}$ δίνεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$x^1 = \frac{u^1(L) + \ell^1(L)}{2} + x^1 \cos\theta - x^2 \sin\theta$$

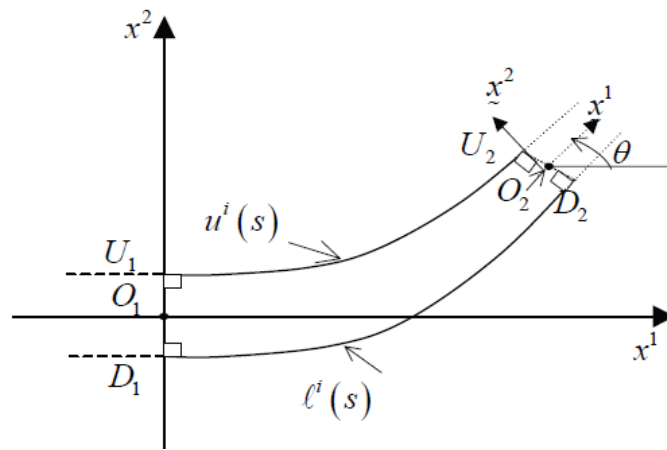
$$x^2 = \frac{u^2(L) + \ell^2(L)}{2} + x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta$$

$$x^3 = x^3$$

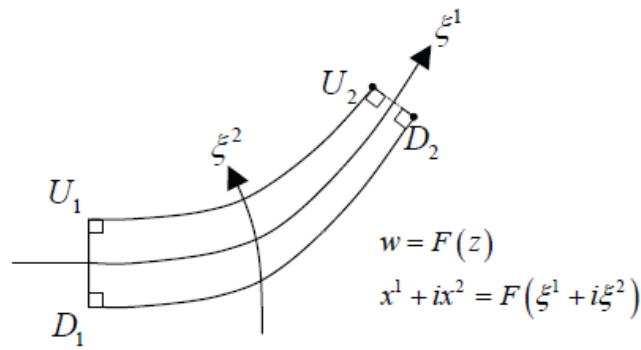
όπου θ η κλίση των τοιχωμάτων του κυματοδηγού σε σχέση με τον άξονα $O_1 x^1$ από την έξοδο του καμπύλου κυματοδηγού και έπειτα.



Εικ.5 Γεωμετρική διαμόρφωση ενός καμπύλου κυματοδηγού – ορισμός συντεταγμένων



Εικ.6 Τομή κατά μήκος του κυματοδηγού



Physical w -level

Εικ.7 Καμπύλος κυματοδηγός – ορισμός συντεταγμένων $\{\xi^i\}$

Επιπλέον, στην εικόνα 7 εισάγεται ένα νέο ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων $\{\xi^i\}$, που ορίζεται ως εξής:

ξ^1 διατρέχει τον άξονα του κυματοδηγού, τέτοιο ώστε $\xi^1 \in \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right)$,

βρίσκεται συνεχώς στο μέσο των τοιχωμάτων $U_i D_i$.

ξ^2 άξονας συνεχώς κάθετος στον ξ^1 και ταυτόχρονα διατρέχει τις καμπύλες $U_i D_i$, τέτοιο ώστε το άνω όριο να ορίζεται από την καμπύλη $U_1 U_2$ με τιμή

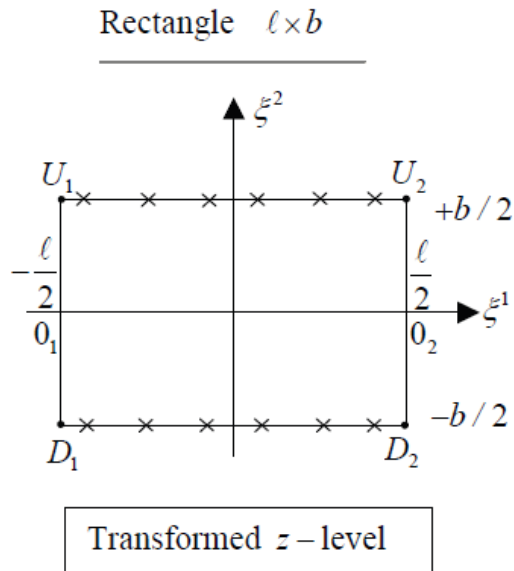
$$\xi^2 = +\frac{b}{2} = \text{σταθερό και το κάτω όριο από την καμπύλη } D_1 D_2 \text{ με τιμή}$$

$$\xi^2 = -\frac{b}{2} = \text{σταθερό.}$$

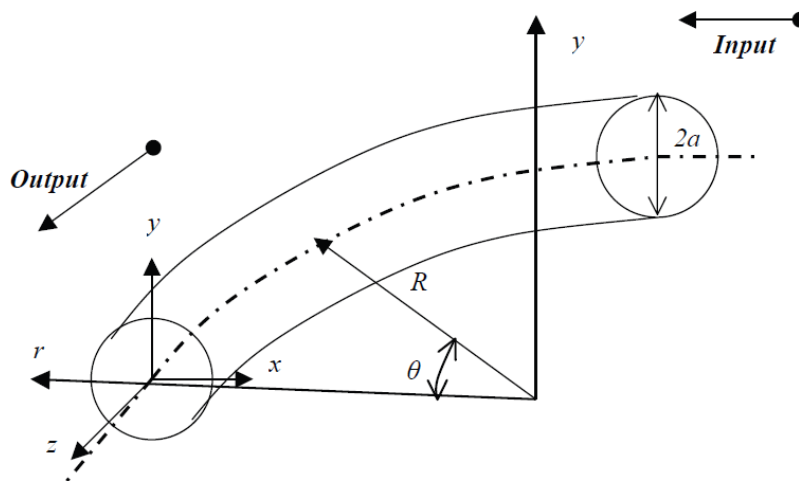
$\xi^3 = x^3$ ο τρίτος άξονας ξ^3 ταυτίζεται με τον τρίτο άξονα των καρτεσιανών συντεταγμένων όπως φαίνεται και από την εικόνα 5.

Στην γενική περίπτωση, όπου ο καμπύλος κυματοδηγός έχει μεταβλητό πλάτος, ο ορισμός του ορθογώνιου καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων $\{\xi^i\}$ πραγματοποιείται με σύμμορφη απεικόνιση του ορθογώνιου τετράπλευρου $U_1 U_2 D_2 D_1$, με μέσο μήκος L και πλάτος που ποικίλει από $B_1=U_1 D_1$ έως $B_2=U_2 D_2$, στο ορθογώνιο που ακολουθεί με διαστάσεις $\ell \times b$, εικόνα 8. Ο μετασχηματισμός ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$w = x^1 + ix^2 = F(z) = F(\xi^1 + i\xi^2)$$



Εικ.8 Ορθογώνιο $\ell \times b$ – Μετασχηματισμός συντεταγμένων

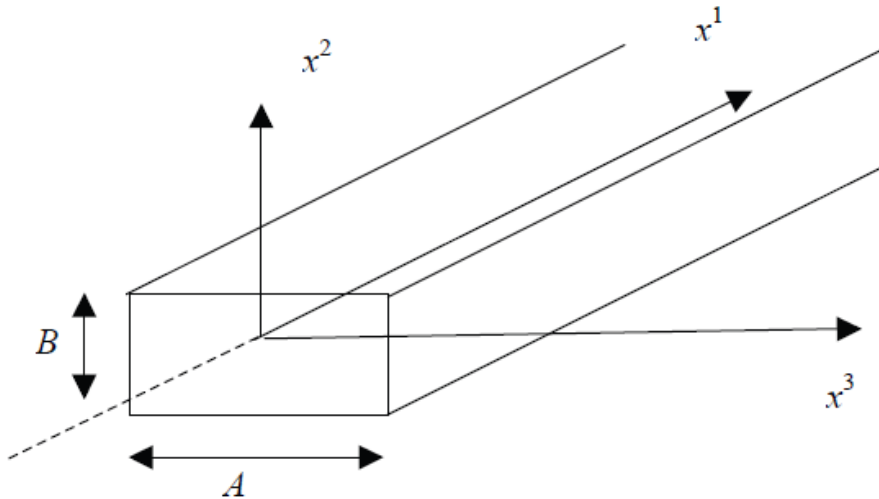


Εικ.9α Ορισμός γεωμετρίας κυματοδηγού κυκλικής διατομής

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και το σύστημα για την περίπτωση του κυκλικής διατομής κυματοδηγού. Ας υποθέσουμε κυματοδηγό σταθερής διατομής a σε όλο το μήκος αυτού, ο οποίος διατρέχει τροχιά με απόσταση R από την αρχή των αξόνων για τις κυλινδρικές συντεταγμένες, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (Εικ.9α). Η διατομή παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος, και με αυτό τον τρόπο περιγράφεται το σχήμα με κυκλικά τόξα και κέντρο σημεία της ίδιας γραμμής, τον άξονα z των κυλινδρικών συντεταγμένων $\{r, \theta, y\}$. Επομένως για σταθερή γωνία θ το επίπεδο τέμνει τον καμπύλο κυματοδηγό κατά μήκος κυκλικών κυματοδηγών ακτίνας a . Ο καμπύλος κυματοδηγός ορίζεται ανάμεσα στα επίπεδα $\theta = \Theta_{in}$ (είσοδος) και $\theta = \Theta_{out}$ (έξοδος). Εκτός των κυλινδρικών συντεταγμένων $\{r, \theta, y\}$, ορίζονται και οι τοπικές καρτεσιανές συντεταγμένες $\{x, y, z\}$ με κέντρο τον άξονα του κυματοδηγού, όπως είναι εμφανές και στην εικόνα 9α.

3. Κυματοδηγός ορθογωνικής διατομής

Δεδομένου ενός ευθύγραμμου κυματοδηγού ορθογωνικής διατομής AxB , όπως φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα, θα παρουσιασθεί η αρμονική με τον χρόνο λύση των εξισώσεων Maxwell σε αυτή την περίπτωση. Το μήκος του κυματοδηγού θεωρείται άπειρο (διατρέχει τον άξονα x^1 – Εικόνα 9β).



Εικ.9β Ευθύγραμμος κυματοδηγός ορθογωνικής διατομής

Στο παρόν πρόβλημα γίνεται η θεώρηση πως επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στην κατεύθυνση του άξονα x^1 . Θα επικεντρωθούμε στην παραγωγή των λύσεων που αντιστοιχούν σε ανάστροφα ηλεκτρικά TE κύματα, καθώς ο χειρισμός και η παραγωγή των λύσεων σε ανάστροφα μαγνητικά κύματα TM είναι παρόμοια.

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες ο μετρικός τανυστής υπολογίζεται από την εξίσωση $g_{jk}=\delta_{jk}$ και ως αποτέλεσμα οι εξισώσεις Maxwell, γραμμένες για το ηλεκτρικό πεδίο, απλοποιούνται στις εξισώσεις Helmholtz της ακόλουθης μορφής:

$$\frac{\partial^2 E^k}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 E^k}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 E^k}{\partial (x^3)^2} + k^2 E^k = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

Επίσης, η παραπάνω εξίσωση, συνδέεται ταυτόχρονα και με την εξίσωση συνέχειας (χωρίς απόκλιση), όπου ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3} = 0 \quad (3.2)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις με k συμβολίζεται ο κυματαριθμός του κύματος, αριθμός που υπολογίζεται από την σχέση $k=\omega/c$. Η οριακή συνθήκη στο σταθερό

μεταλλικό τοίχωμα (Γ) του κυματοδηγού απαιτεί το ηλεκτρικό πεδίο να έχει μηδενική, παράλληλη στο τοίχωμα, συνιστώσα.

$$\varepsilon_{ijk} \cdot n^j \cdot E^k = 0 ,$$

στο Γ , όπου με $n^i = (0, n^2, n^3)$ συμβολίζεται το κάθετο διάνυσμα στο τοίχωμα Γ .

Η λύση της διαμόρφωσης TE βασίζεται στην ακόλουθη αναπαράσταση:

$$E^i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\varphi(x^2 x^3) \exp(\pm i\kappa x) \hat{e}_1 \right] , \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

Όπου $\hat{e}_1 = (1, 0, 0)$ υποδηλώνει το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του x^1 άξονα. Η παραπάνω εξίσωση ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας. Αν αναπτύξουμε την εξίσωση αυτή, έχουμε:

$$\text{TE field: } E^1 = 0 \quad E^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} e^{i\kappa x^1} \quad E^3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} e^{i\kappa x^1} , \quad (3.4)$$

Όπου κ η σταθερά που πρέπει να καθορισθεί. Από την λύση της εξίσωσης συνέχειας το μαγνητικό πεδίο H^r προσδιορίζεται από τον τελεστή ανάδελτα του ηλεκτρικού πεδίου, όπως φαίνεται στη συνέχεια:

$$H^r = \frac{i}{(\omega \mu)} \varepsilon^{rst} \frac{\partial E_t}{\partial x^s} , \quad r=1,2,3 \quad (3.5)$$

Η πορεία της λύσης που οδηγεί σε TM διαμόρφωση είναι παρόμοια και βασίζεται στην παραδοχή της αναπαράστασης της λύσης (3.3) με βάση όμως το μαγνητικό πεδίο:

$$H^i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\varphi(x^2 x^3) \exp(\pm i\kappa x) \hat{e}_1 \right] , \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

Και αναπτύσσοντας την εξίσωση προκύπτει:

$$\text{TM field: } H^1 = 0 \quad H^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} e^{i\kappa x^1} \quad H^3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} e^{i\kappa x^1} , \quad (3.7)$$

Στην τελευταία περίπτωση το ηλεκτρικό πεδίο E^r προσδιορίζεται από τον τελεστή ανάδελτα του μαγνητικού πεδίου:

$$E^r = \frac{i\mu c^2}{\omega} \varepsilon^{rst} \frac{\partial H_t}{\partial x^s} , \quad r=1,2,3 \quad (3.8)$$

Με χρήση των ανωτέρω εξισώσεων οδηγούμαστε στο ακόλουθο υπό-πρόβλημα δύο διαστάσεων του δυναμικού φ :

$$\Delta_2 \varphi + (k^2 - \kappa^2) \varphi = 0 , \text{ για τις διαστάσεις: } -\frac{B}{2} \leq x^2 \leq \frac{B}{2}, -\frac{A}{2} \leq x^3 \leq \frac{A}{2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = n^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + n^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} = 0, \quad \text{με } x^2 = \pm B/2 \text{ και } x^3 = \pm A/2 \quad (3.10)$$

Όπου $\Delta_2 = \frac{\partial}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial}{\partial (x^3)^2}$, υποδηλώνει τον διδιάστατο Λαπλασιανό τελεστή στις διαστάσεις του κυματοδηγού.

Με χρήση της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών, η γενική λύση των εξισώσεων (3.10) και (3.11) προκύπτει ως το ακόλουθο άθροισμα:

$$\varphi(x^2, x^3) = \sum_{n=0} \sum_{m=0} \varphi_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x^3}{A} + \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi x^2}{B} + \frac{m\pi}{2}\right), \quad (3.11)$$

Όπου οι σταθερές k και κ ικανοποιούν τον περιορισμό: $k^2 - \kappa^2 = \left(\frac{n\pi}{A}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{B}\right)^2$,

Και ως αποτέλεσμα η σταθερά κ ορίζεται ως εξής:

$$\kappa = \kappa_{nm} = \left[k^2 - \left(\frac{n\pi}{A}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{B}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad n, m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.12)$$

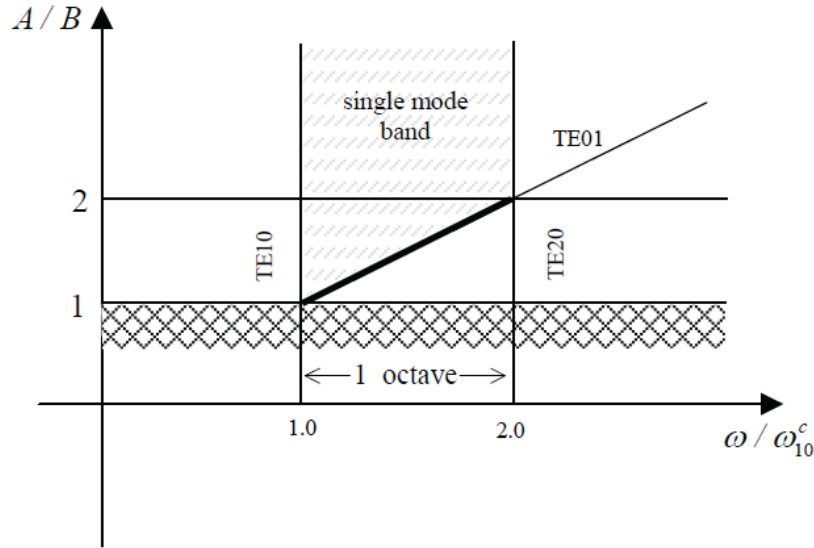
Με βάση τις τελευταίες εξισώσεις, η λύση της διαμόρφωσης TE καταλήγει στην ακόλουθη αναπαράσταση ηλεκτρικού πεδίου σε μορφή αναπτυγμάτων σειρών (3.13):

$$E^1(x^1, x^2, x^3) = 0$$

$$E^2(x^1, x^2, x^3) = -\sum_{n=0} \sum_{m=0} E_{nm}^2 = -\sum_{n=0} \sum_{m=0} \exp(\pm i\kappa_{nm} x^1) \varphi_{nm} \frac{n\pi}{A} \sin\left(\frac{n\pi x^3}{A} + \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi x^2}{B} + \frac{m\pi}{2}\right)$$

$$E^3(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=0} \sum_{m=0} E_{nm}^3 = \sum_{n=0} \sum_{m=0} \exp(\pm i\kappa_{nm} x^1) \varphi_{nm} \frac{m\pi}{B} \cos\left(\frac{n\pi x^3}{A} + \frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi x^2}{B} + \frac{m\pi}{2}\right)$$

Όπου φ_{nm} το πλάτος των TE_{nm} διαμορφώσεων και φ_{00} σταθερά που μπορεί να παραληφθεί. Οι κυματαριθμοί των διαμορφώσεων κ_{nm} , ορίζονται μέσα από την εξίσωση (3.12) και ταξινομούν τις αντίστοιχες διαμορφώσεις σε διαδιδόμενες και αποσβενύμενες. Όπως είναι προφανές, το $\kappa_{nm}^2 > 0$ οδηγεί σε διαδιδόμενες και μάλιστα στην κατεύθυνση της διάδοσης στον άξονα x^1 , και το $\kappa_{nm}^2 < 0$ οδηγεί σε αποσβενύμενες διαμορφώσεις.



Εικ.10 Διάγραμμα συχνοτήτων αποκοπής για ορθογώνιο κυματοδηγό

Η συχνότητα αποκοπής της κάθε διαμόρφωσης $(0, E_{nm}^2, E_{nm}^3)$ εξαρτάται από το μέγεθος της διατομής του κυματοδηγού. Για αυτό τον λόγο, για τη θεμελιώδη διαμόρφωση $n=1, m=0$ (TE₁₀), η συχνότητα αποκοπής ορίζεται ως:

$$\omega_{10}^c = \frac{\pi c_0}{A}$$

$$f_{10}^c = \frac{c_0}{2A}$$

Οι συχνότητες αποκοπής των υπόλοιπων διαμορφώσεων ικανοποιούν την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\omega_{nm}^c}{\omega_{10}^c} = \sqrt{n^2 + m^2 \left(\frac{A}{B}\right)^2} \quad (3.14)$$

Ως αποτέλεσμα, στην περίπτωση ορθογώνιου κυματοδηγού με διαστάσεις $A/B \geq 2$, το οποίο ικανοποιείται για κυκλική συχνότητα μεταξύ των τιμών $\omega_{10}^c < \omega < \omega_{20}^c$, διαδίδεται μόνο η μικρότερη TE₁₀ διαμόρφωση (κυρίαρχη διαμόρφωση). Σε αυτή την περίπτωση, το φάσμα συχνοτήτων που υποστηρίζει την κυρίαρχη διαμόρφωση TE₁₀ μεγιστοποιείται σε μία ολόκληρη μάντα συχνοτήτων, $\omega_{10}^c < \omega < \omega_{20}^c = 2\omega_{10}^c$.

Ακολουθώντας παρόμοια προσέγγιση, από τις εξισώσεις (3.7), (3.8) διαμορφώνεται η γενική αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου που αντιστοιχεί στην εγκάρσιο μαγνητική διαμόρφωση TM σε επίπεδο, ορθογωνικής διατομής κυματοδηγό.

Στην περίπτωση αυτή, το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τα ακόλουθα αναπτύγματα σειρών (3.15):

$$E^1(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=0} \sum_{m=0} \exp(\pm i\kappa_{nm} x^1) \psi_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x^3}{A} + \frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi x^2}{B} + \frac{m\pi}{2}\right)$$

$$E^2(x^1, x^2, x^3) = -\sum_{n=0} \sum_{m=0} \exp(\pm i\kappa_{nm} x^1) \psi_{nm} \frac{n\pi}{A} \sin\left(\frac{n\pi x^3}{A} + \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi x^2}{B} + \frac{m\pi}{2}\right)$$

$$E^3(x^1, x^2, x^3) = -\sum_{n=0} \sum_{m=0} \exp(\pm i\kappa_{nm} x^1) \psi_{nm} \frac{m\pi}{B} \cos\left(\frac{n\pi x^3}{A} + \frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi x^2}{B} + \frac{m\pi}{2}\right)$$

Όπου ψ_{nm} το πλάτος των TM_{nm} διαμορφώσεων και ψ_{00} σταθερά που μπορεί να παραληφθεί.

Στην περίπτωση του E-plane bend υποπροβλήματος, όπου ο καμπύλος κυματοδηγός διεγείρεται με διαμόρφωση TE_{10} στην περιοχή συχνοτήτων $\frac{c}{2A} < f < \frac{c}{2B}$, η παραγωγή του συνδυασμού διαμορφώσεων TE_{1n} και TM_{1n} είναι εφικτή. Σε αυτή την περίπτωση το τελικό ηλεκτρικό πεδίο παρουσιάζεται από τα αναπτύγματα των ακόλουθων σειρών (3.16):

$$E^1 = 0$$

$$E^2 = -\sum_{n=0} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi x^3}{A} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x^2}{B_1} + \frac{n\pi}{2}\right) \exp(\pm i\kappa_{1n} x^1)$$

$$E^3 = \sum_{n=1} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi x^3}{A} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x^2}{B_1} + \frac{n\pi}{2}\right) \exp(\pm i\kappa_{1n} x^1)$$

Στην περίπτωση του υποπροβλήματος H-plane bend, όπου ο καμπύλος κυματοδηγός διεγείρεται με διαμόρφωση TE_{01} στην περιοχή συχνοτήτων $\frac{c}{2B} < f < \frac{c}{B}$, έχουμε παραγωγή μόνο διαμορφώσεις TE_{0n} . Σε αυτή την περίπτωση οι όροι E^2 και E^3 από τις προηγούμενες εξισώσεις αλληλοανααιρούνται και το τελικό ηλεκτρικό πεδίο παρουσιάζεται από τα αναπτύγματα των ακόλουθων σειρών (3.17):

$$E^1 = 0$$

$$E^2 = 0$$

$$E^3 = \sum_{n=1} \varphi_n \sin\left(\frac{n\pi x^2}{B_2} + \frac{n\pi}{2}\right) \exp(\pm i\kappa_{0n} x^1)$$

4. Διαφορική διατύπωση του προβλήματος

Όπως προαναφέρθηκε, ένας άπειρος κυματοδηγός μπορεί να αναλυθεί σε τρεις επιμέρους κυματοδηγούς: σε δύο ημι-άπειρους οριζόντιους κυματοδηγούς και έναν μη άπειρο καμπύλο. Η γενική αναπαράσταση του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στα δύο ημι-άπειρα μέρη (οριζόντια) του κυματοδηγού, που ενώνονται με τον μη άπειρο καμπύλο, μπορούν να παρασταθούν με συντεταγμένες $\{x^i\}$ και $\{x^i\}$ αντίστοιχα, ως συνδυασμός της κατάλληλης κυρίαρχης λύσης (διαμόρφωσης) σε οριζόντιο κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής που είναι αποτέλεσμα των κατάλληλων διαμορφώσεων TE_{mn} $m,n=0,1,2,\dots$ και TM_{mn} $m,n=0,1,2,\dots$ διάδοσης και απόσβεσης. Στην αναπαράσταση του ηλεκτρο-μαγνητικού πεδίου στην περιοχή εισόδου του κυματοδηγού θα πρέπει να συμπεριληφθούν οι ρυθμοί διάδοσης-απόσβεσης και προς τα εμπρός και προς τα πίσω κατά μήκος του άξονα x^1 , καθώς λαμβάνονται υπόψιν τόσο τα προσπίπτοντα όσο και τα ανακλώμενα κύματα σε αυτή την περιοχή. Στην έξοδο μόνο οι εξερχόμενοι ρυθμοί διάδοσης και απόσβεσης κατά μήκος του άξονα x^1 πρέπει να χρησιμοποιηθούν στην αναπαράσταση του αντίστοιχου πεδίου καθώς μόνο το διερχόμενο κύμα συμβάλει σε αυτή.

Οι διαμορφώσεις που μπορούν να εμφανισθούν σε έναν ευθύγραμμο κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής σε δεδομένο σύστημα εξαρτώνται από τις διαστάσεις της διατομής και το μέσο που υπάρχει μέσα στον κυματοδηγό. Οι διαστάσεις διατομής και το μέσο καθορίζουν επίσης και τις συχνότητες αποκοπής για τις διάφορες διαμορφώσεις. Σε έναν πολλαπλού τύπου κυματοδηγό (πολλαπλοί ρυθμοί) η συνολική ενέργεια διανέμεται σε όλους τους εκάστοτε ρυθμούς και ως αποτέλεσμα ο απαιτούμενος εξοπλισμός για έλεγχο και εντοπισμό της μεταδιδόμενης ενέργειας είναι πιο ακριβός. Ο κυματοδηγός απλού τύπου παρουσιάζει πλεονέκτημα στο γεγονός ότι οι μικρές ασυνέχειες δεν μετατρέπουν την ενέργεια σε άλλες διαμορφώσεις με ανεξέλεγκτο τρόπο και έτσι είναι προτιμότερο ο κυματοδηγός να χρησιμοποιείται με έναν ρυθμό (απλός τύπος), όπως επισημαίνεται και από Balanis, K.A., 1989, Advanced Engineering Electromagnetics.

Στην πράξη χρησιμοποιούνται οι κυρίαρχοι ρυθμοί TE_{10} και TE_{01} . Θα περιοριστούμε στην περίπτωση των κυμάτων στον κυρίαρχο ρυθμό TE_{10} για E-plane bend και TE_{01} για H-plane bend, αν και η προσέγγιση που εξήχθη μπορεί να επεκταθεί ικανοποιητικά σε πιο γενικές περιπτώσεις E-plane και H-plane bend κυματοδηγών.

4.1 E-plane bend, η γενική αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου στους ημι-άπειρους οριζόντιους κυματοδηγούς

Θεωρούμε κυματοδηγό με διάσταση διατομής $A > B$ και λειτουργία σε φάσμα συχνοτήτων:

$$\frac{c}{2A} < f < \frac{c}{2} \min \left\{ \frac{1}{B_1}, \frac{1}{B_2} \right\}$$

Με c συμβολίζεται η ταχύτητα του φωτός (στο κενό ή στον ξηρό αέρα $c=2.99 \cdot 10^8$ m/s). Ο κυματικός κυματοδηγός λειτουργεί στον κυρίαρχο ρυθμό TE_{10} . Ο αντίστοιχος κυματαριθμός k ισούται με:

$$k = \frac{2\pi f}{c}$$

Στην είσοδο του οριζόντιου κυματοδηγού, η αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου E^r με μετασχηματισμό των συντεταγμένων, για $\xi^1 \leq -\ell/2$, καταλήγουμε με χρήση της εξίσωσης (3.16) και του μετασχηματισμού $E_x^r = \frac{\partial x^r}{\partial \xi^s} E_\xi^s = \gamma_s^r E_\xi^s$ στα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} E^1 &= \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) \sin \left(\frac{\pi \xi^3}{A} + \frac{\pi}{2} \right) \times \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^R \sin \left(\frac{n\pi \alpha_1 \xi^2}{B_1} + \frac{n\pi}{2} \right) \exp(-i\alpha_1 k_n^I \left(\xi^1 + \frac{1}{2} \right)) \\ E^2 &= \left(\frac{1}{a_1} \right) \sin \left(\frac{\pi \xi^3}{A} + \frac{\pi}{2} \right) \times \left(\varphi_0^I \exp \left(i\alpha_1 k_0^I \left(\xi^1 + \frac{1}{2} \right) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^R \cos \left(\frac{n\pi \alpha_1 \xi^2}{B_1} + \frac{n\pi}{2} \right) \exp(-i\alpha_1 k_n^I \left(\xi^1 + \frac{1}{2} \right)) \right) \\ E^3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\text{Όπου } k_n^I = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{A} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{B_1} \right)^2}, \quad n=0,1,2,3,\dots$$

Στις προηγούμενες εξισώσεις με φ_0^I συμβολίζεται το (γνωστή σταθερά) πλάτος της προσπίπτουσας διαμόρφωσης TE_{10} , ενώ με φ_0^R συμβολίζεται το πλάτος της ανακλώμενης TE_{10} διαμόρφωσης. Οι διαμορφώσεις με πλάτος (ψ_n, φ_n) , $n=1,2,\dots$ είναι όλες αποσβενύμενες. Αυτές μπορούν ισοδύναμα να παρασταθούν σαν συνδυασμός TE_{1n} και TM_{1n} ταυτόχρονων ρυθμών στο μέρος της εισόδου του κυματοδηγού.

Στην έξοδο του οριζόντιου κυματοδηγού, η αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου E^r με μετασχηματισμό των συντεταγμένων, για $\xi^1 \geq \ell/2$ παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
E^1 &= \left(\frac{1}{\alpha_2} \right) \sin \left(\frac{\pi \xi^3}{A} + \frac{\pi}{2} \right) \times \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^T \sin \left(\frac{n\pi \alpha_2 \xi^2}{B_2} + \frac{n\pi}{2} \right) \exp(-i\alpha_2 k_n^T \left(\xi^1 - \frac{1}{2} \right)) \\
E^2 &= \left(\frac{1}{\alpha_2} \right) \sin \left(\frac{\pi \xi^3}{A} + \frac{\pi}{2} \right) \times \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^T \cos \left(\frac{n\pi \alpha_2 \xi^2}{B_2} + \frac{n\pi}{2} \right) \exp(-i\alpha_2 k_n^T \left(\xi^1 - \frac{1}{2} \right)) \\
E^3 &= 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\text{Όπου } k_n^T = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{A} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{B_2} \right)^2}, \quad n=0,1,2,3,\dots$$

Με φ_0^T συμβολίζεται το πλάτος της μεταδιδόμενης διαμόρφωσης TE_{10} . Οι διαμορφώσεις με πλάτος (ψ_n, φ_n) , $n=1,2,\dots$ είναι όλες αποσβενύμενες. Αυτές μπορούν ισοδύναμα να παρασταθούν σαν συνδυασμός TE_{1n} και TM_{1n} ταυτόχρονων ρυθμών στην έξοδο του κυματοδηγού.

4.2 H-plane bend, η γενική αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου στους ημι-άπειρους οριζόντιους κυματοδηγούς

Θεωρούμε κυματοδηγό με διάσταση διατομής $B > A$ και λειτουργία σε φάσμα συχνοτήτων: $\frac{c}{2} \max \left\{ \frac{1}{B_1}, \frac{1}{B_2} \right\} < f < c \min \left\{ \frac{1}{B_1}, \frac{1}{B_2} \right\}$

Στην περίπτωση της εισόδου του κυματοδηγού η αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου E^T με μετασχηματισμό των συντεταγμένων είναι απλούστερη και καταλήγει για $\xi^1 \leq -l/2$ στις ακόλουθες εξισώσεις (4.3):

$$\begin{aligned}
E^1 &= 0 \\
E^2 &= 0 \\
E^3 &= \varphi_1^I \sin \left(\frac{\pi \alpha_1 \xi^2}{B_1} + \frac{\pi}{2} \right) \exp \left(i\alpha_1 k_n^I \left(\xi^1 + \frac{1}{2} \right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^R \sin \left(\frac{n\pi \alpha_1 \xi^2}{B_1} + \frac{n\pi}{2} \right) \exp(-i\alpha_1 k_n^I \left(\xi^1 + \frac{1}{2} \right))
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\text{όπου } k_n^I = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{B_1} \right)^2}, \quad n=1,2,3,\dots$$

Στις προηγούμενες εξισώσεις με φ_1^I συμβολίζεται το (γνωστή σταθερά) πλάτος της προσπίπτουσας διαμόρφωσης TE_{01} , ενώ με φ_1^R συμβολίζεται το πλάτος της

ανακλώμενης TE_{01} διαμόρφωσης. Οι διαμορφώσεις με πλάτος φ_n^R , $n=2,3,\dots$ είναι όλες αποσβενύμενες TE_{0n} διαμορφώσεις στο μέρος της εισόδου του κυματοδηγού.

Στην έξοδο του οριζόντιου κυματοδηγού, η αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου E^r με μετασχηματισμό των συντεταγμένων, για $\xi^1 \geq -\ell/2$ παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$E^1 = 0$$

$$E^2 = 0$$

$$E^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^T \sin\left(\frac{n\pi\alpha_1\xi^2}{B_2} + \frac{n\pi}{2}\right) \exp(i\alpha_2 k_n^T \left(\xi^1 - \frac{1}{2}\right)), \quad (4.4)$$

$$\text{όπου } k_n^T = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{B_2}\right)^2}, \quad n=1,2,3,\dots$$

Με φ_1^T συμβολίζεται το πλάτος της μεταδιδόμενης (διαδιδόμενης) διαμόρφωσης TE_{01} . Οι διαμορφώσεις με πλάτος φ_n^T , $n=1,2,\dots$ είναι όλες αποσβενύμενες TE_{0n} διαμορφώσεις στην έξοδο του κυματοδηγού.

4.3 Εξισώσεις Maxwell σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην περαιτέρω επεξεργασία του προβλήματος διάδοσης και υπολογισμού των απωλειών διάδοσης σε H-plane bend κυματοδηγούς κατωτέρω παρουσιάζονται οι εξισώσεις Maxwell σε καρτεσιανό και σε ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων.

Η γενική μορφή των εξισώσεων Maxwell σε διαφορική μορφή είναι η ακόλουθη:

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + J$$

$$\nabla E = \rho / \varepsilon$$

$$\nabla H = m / \mu$$

Θεωρώντας χρονικά αρμονικό πεδίο, με εξάρτηση της μορφής $e^{-i\omega t}$, οι εξισώσεις του Maxwell διαμορφώνονται ως εξής:

$$\nabla \times E = -j\omega\mu H$$

$$\nabla \times H = j\omega\varepsilon E + J$$

$$\nabla E = \rho / \varepsilon$$

$$\nabla H = m / \mu$$

Με μετασχηματισμό των συντεταγμένων σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες $\{\zeta^i\}$ καταλήγουμε, σύμφωνα και με McConnell (1957, Sec. 19), Balanis (1989, Ch.6), στα ακόλουθα (4.5):

$$-\varepsilon^{rst} E_{s,t} = i\omega\mu H^r$$

$$-\varepsilon^{rst} H_{s,t} = J^r - i\omega\varepsilon E^r$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^r} (\sqrt{g} E^r) = \frac{eQ}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^r} (\sqrt{g} H^r) = \frac{mQ}{\mu}$$

(4.5)

- E^r : διάνυσμα ηλεκτρικού πεδίου
 H^r : διάνυσμα μαγνητικού πεδίου
 g : μετρικός τανυστής
 ϵ : διηλεκτρική σταθερά του μέσου, στο κενό $\epsilon_0=10^{-9}/36\pi$ farad/m
 μ : μαγνητική διαπερατότητα του μέσου, στο κενό $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$ henry/m
 ${}^e Q$: ηλεκτρικό φορτίο
 ${}^m Q$: μαγνητικό φορτίο
 J^r : πυκνότητα ρεύματος

Σε περιοχές όπου δεν υπάρχουν πηγές και ρεύματα, όπως στο εσωτερικό ενός κυματοδηγού, ισχύει ${}^e Q = {}^m Q = J^r = 0$. Σε μία τέτοια περίπτωση και για ομογενή ιστροπικό μέσο, εξάγουμε για το ηλεκτρικό πεδίο σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες τα εξής:

$$g^{mn} E_{r,mn} + (\omega^2 \epsilon \mu) E_r = 0 \Rightarrow g^{mn} E_{r,mn} + k^2 E_r = 0 \quad (4.6)$$

g^{mn} - αναλλοίωτος μετρικός τανυστής

$k = \omega/c$ - χαρακτηριστικός κυμαριθμός

$c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ - ταχύτητα του φωτός

Μαζί με την εξίσωση (4.6) συμπεριλαμβάνουμε και την εξίσωση συνέχειας, η οποία καταλήγει στην απαίτηση, το ηλεκτρικό πεδίο να παραμένει σταθερό, να μην έχει δηλαδή διακύμανση, όπως φαίνεται και στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^r} (\sqrt{g} E^r) = 0 \quad (4.7)$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων (4.6) και (4.7), μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο από το ανάδελτα του ηλεκτρικού:

$$H^r = i \epsilon^{rst} E_{s,t} / (\omega \mu)$$

Θεωρώντας ως n^i το μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο του προβλήματος, στην προκειμένη περίπτωση η μεταλλική επιφάνεια Γ του κυματοδηγού, με φορά προς τα έξω. Επιπλέον, αν θεωρήσουμε τα τοιχώματα τέλειους αγωγούς, η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου μηδενίζεται, Balanis (1989).

$$\epsilon_{ijk} n^j E^k = 0, \text{ στο σύνορο } \Gamma$$

Σε μεγάλη απόσταση από τα άκρα (O_1) και (O_2) του καμπύλου κυματοδηγού (στο $x_1 \rightarrow -\infty$ και $x_1 \rightarrow +\infty$), το ηλεκτρικό πεδίο συμπεριφέρεται σαν υπέρθεση των διαδιδόμενων και των ανακλώμενων κυμάτων καθώς το x τείνει στο $-\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), τα οποία εκφράζονται από τις εξισώσεις για την είσοδο του κυματοδηγού (4.1) και (4.3) περιορισμένες για $n=1$. Στο μέρος της εξόδου του κυματοδηγού το ηλεκτρικό πεδίο συμπεριφέρεται σαν μεταδιδόμενο κύμα στο $x_1 \rightarrow \infty$, και για τους δύο καμπύλους κυματοδηγούς εκφράζεται όπως υπολογίσθηκε από τις εξισώσεις (4.2) και (4.4), επίσης με τον περιορισμό $n=1$.

Στην περίπτωση ορθογώνιου καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων $\{\xi^i\}$, λαμβάνοντας υπόψη πως ο μετρικός τανυστής g_{sp} είναι διαγώνιος ($\sqrt{g_{11}} = \sqrt{g_{22}} = a^2$, $g_{33} = 1$) και κάνοντας χρήση της εξίσωσης συνέχειας,

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial(a^2 E^1)}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(\alpha^2 E^2)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial(\alpha^2 E^3)}{\partial \xi^3} \right) = 0 \quad , \quad (4.8)$$

οι εξισώσεις Maxwell για το ηλεκτρικό πεδίο απλοποιούνται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha^2 E^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha^2 E^1}{\partial \xi^2} + k^2 a^2 E^1 + \alpha^2 \frac{\partial^2 E^1}{\partial (\xi^3)^2} + \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha^2 E^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \xi^2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha^2 E^2}{\partial \xi^1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha^2 E^2}{\partial \xi^1} + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha^2 E^2}{\partial \xi^2} + k^2 a^2 E^2 + \alpha^2 \frac{\partial^2 E^2}{\partial (\xi^3)^2} + \left(\frac{\partial}{\partial \xi^2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha^2 E^1}{\partial \xi^1} - \frac{\partial}{\partial \xi^1} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha^2 E^1}{\partial \xi^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 E^3}{\partial (\xi^1)^2} + \frac{\partial^2 E^3}{\partial (\xi^2)^2} + k^2 a^2 E^3 + \alpha^2 \frac{\partial^2 E^3}{\partial (\xi^3)^2} = 0 \quad (4.9)$$

Στην περίπτωση του προβλήματος H-plane bend σε καμπύλο HM κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής (βλ Εικόνα 5), ο οποίος διεγείρεται στην είσοδο από την TE_{01} μορφή, οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου $E^1 = E^2 = 0$, και η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα είναι η E^3 , οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου κατευθύνονται παράλληλα προς την πλευρά A της διατομής του κυματοδηγού και το πεδίο παραμένει ανεξάρτητο της εγκάρσιας συντεταγμένης $E^3 = E^3(\xi^1, \xi^2)$. Στην περίπτωση αυτή, οι ανωτέρω εξισώσεις εξαπλουστεύονται στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial^2 E^3}{\partial(\xi^1)^2} + \frac{\partial^2 E^3}{\partial(\xi^2)^2} + k^2 a^2 E^3 = 0 \quad (4.10)$$

και συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται σε επίλυση της εξίσωσης Helmholtz στις δύο διαστάσεις, για την συνιστώσα $E^3(\xi^1, \xi^2)$ στο κεντρικό επίπεδο του κυματοδηγού ($x^3 = 0$). Η ανωτέρω εξίσωση μπορεί να επιλυθεί είτε στο σύστημα των ορθογωνίων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (ξ^1, ξ^2) , όπου τα μεταλλικά σύνορα (άνω και κάτω επιφάνειες) είναι παραμετρικές καμπύλες του συστήματος (βλ. Κεφ. 2), όπως γίνεται με την εφαρμογή της μεθόδου Συζευγμένων ιδιομορφών που θα παρουσιαστεί συνοπτικά στο Κεφ.5, είτε στην ισοδύναμη μορφή που λαμβάνει η ανωτέρω εξίσωση Helmholtz της στο καρτεσιανό σύστημα (x^1, x^2) στο κεντρικό επίπεδο συμμετρίας του κυματοδηγού

$$\frac{\partial^2 E^3}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 E^3}{\partial(x^2)^2} + k^2 E^3 = 0, \quad (4.11)$$

συνοδευόμενη από τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στην άνω και κάτω μεταλλική επιφάνεια και τις συνθήκες στο στόμιο εισόδου (διέγερση κυματοδηγού) και εξόδου (σύνορο ακτινοβολίας). Στην παρούσα εργασία η επίλυση του προβλήματος H-plane bend στο κυματοδηγό με διέγερση από την TE01 μορφή θα γίνει με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (BEM) για την επίλυση της εξίσωσης (4.11) για το δυναμικό $\varphi(x_1, x_2) = E^3(x_1, x_2) = E^3(x^1, x^2)$ στο Καρτεσιανό σύστημα στο κεντρικό επίπεδο συμμετρίας του κυματοδηγού

$$\frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2)}{\partial(x_1)^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2)}{\partial(x_2)^2} + k^2 \varphi(x_1, x_2) = 0 \quad (4.12)$$

όπως παρουσιάζεται αναλυτικά στην συνέχεια στο Κεφ.7. Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων επιτρέπει πέρα από την ανάλυση του καμπύλου κυματοδηγού και την σύγκριση των αποτελεσμάτων υπολογισμού με τη μέθοδο των συζευγμένων ιδιομορφών, επιπροσθέτως και την διερεύνηση της επίδρασης πεπερασμένων σκεδαστών σε θέματα που αφορούν τις απώλειες διάδοσης εξαιτίας πρόσθετων ανακλάσεων που θα δημιουργηθούν από σώματα ή ατέλειες που μπορεί να υπάρξουν στο εσωτερικό του κυματοδηγού.

5. Η μέθοδος των συζευγμένων ιδιομορφών

Μια ειδική εφαρμογή της μεθόδου συζευγμένων ιδιομορφών αναπτύχθηκε από Athanassoulis et al (2002) και θα περιγραφεί στην συνέχεια με απώτερο σκοπό να συγκριθεί με την μέθοδο συνοριακών στοιχείων στην περιγραφή του πεδίου.

Η μέθοδος αυτή βοηθά σημαντικά την συστηματική ανάλυση καμπύλων ΗΜ κυματοδηγών αλλά δεν μπορεί να χειριστεί στην απλή της μορφή πρόσθετες ανομοιομορφίες από πεπερασμένους σκεδαστές εντός του κυματοδηγού. Το ειδικό αυτό πρόβλημα είναι εύκολα διαχειρίσιμο με τη βοήθεια της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων που θα αναπτυχθεί στο επόμενο εδάφιο, και μπορεί να αποτελέσει την βάση για την μελλοντική ανάπτυξη υβριδικών προσεγγιστικών σχημάτων που βασίζονται σε συνδυασμό και κατάλληλη συναρμογή των ανωτέρων μεθόδων.

Θα παρουσιασθεί μία ημι-διακριτή τοπική σειρά αναπαράστασης του ηλεκτρικού πεδίου στους δύο καμπύλους κυματοδηγούς, γεγονός που μας επιτρέπει να μετατρέψουμε τις εξισώσεις που διέπουν τα δύο προβλήματα σε ισοδύναμα *couple-mode* συστήματα με βάση το πλάτος της μεθόδου.

Επιπλέον, πρέπει να σημειωθεί πως παρόμοια είδη αναπαραστάσεων, που οδηγούν σε συστήματα συζευγμένων ιδιομορφών, έχουν χρησιμοποιηθεί ευρύτατα σε προβλήματα ακουστικής σε αγωγούς, Abrahamsson & Kreiss (1994), επιφανειακά κύματα βαρύτητας, Massel (1993), Athanassoulis & Belibassakis (1999), σε προβλήματα υδρο-ακουστικής, Fawcett (1992), Athanassoulis et al (1997, 2000), όπως και σε προβλήματα διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην ατμόσφαιρα, Larsson (1999).

5.1 E-plane bend υπο-πρόβλημα, τοπική αναπαράσταση και σύστημα συζευγμένων ιδιομορφών

Παρατηρώντας την δομή των γενικών αναπαράστασεων σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες $\{\xi^k\}$ στους δύο ημίπαιρους κυματοδηγούς που συνθέτουν τα δύο από τα τρία μέρη του κυματοδηγού, εισάγουμε την ακόλουθη τοπική σειρά αναπαράστασεων του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E}^k , $k=1,2$, στα τμήματα του καμπύλου κυματοδηγού $D = \left\{ -\ell/2 \leq \xi^1 \leq \ell/2, -b/2 \leq \xi^2 \leq b/2 \right\}$,

$$\mathbf{E}^1(\xi^1, \xi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(1)}(\xi^1) Z_n^{(1)}(\xi^2; \xi^1) \quad (5.1.1)$$

$$\mathbf{E}^2(\xi^1, \xi^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(2)}(\xi^1) Z_n^{(2)}(\xi^2; \xi^1) \quad (5.1.2)$$

Στις εξισώσεις (5.1.1) και (5.1.2) οι συναρτήσεις $\left\{ Z_n^{(1)}(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=1,2,3,\dots}$ και $\left\{ Z_n^{(2)}(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=0,1,2,3,\dots}$, ελέγχοντας την εγκάρσια δομή της κάθε λειτουργίας, τοπικά σε συγκεκριμένη σταθερή θέση ξ^1 , ορίζονται ως οι ιδιοσυναρτήσεις του ακόλουθου Sturm-Liouville προβλήματος με συνεχείς συντελεστές:

$$\frac{d^2 Z_n^{(1)}}{d(\xi^2)^2} + \left(\alpha^2 \left(k^2 - \left(\frac{\pi}{A} \right)^2 \right) - \left(\lambda_n^{(1)} \right)^2 \right) Z_n^{(1)} = 0, \quad (5.1.3)$$

$$Z_n^{(1)}(\xi^2) = 0, \text{ στο } \xi^2 = \pm \frac{b}{2}, \quad (5.1.4)$$

και

$$\frac{d^2 Z_n^{(2)}}{d(\xi^2)^2} + \left(\alpha^2 \left(k^2 - \left(\frac{\pi}{A} \right)^2 \right) - \left(\lambda_n^{(2)} \right)^2 \right) Z_n^{(2)} = 0, \quad (5.1.5)$$

$$\frac{\partial Z_n^{(2)}(\xi^2)}{\partial \xi^2} = 0, \text{ στο } \xi^2 = \mp \frac{b}{2} \quad (5.1.6)$$

Μπορεί να επιβεβαιωθεί πως οι αναπαράστασεις (5.1.1) και (5.1.2), που αφορούν το ηλεκτρικό πεδίο, εξαιτίας των συγκεκριμένων συνοριακών συνθηκών από το σύστημα $\left\{ Z_n^{(1)}(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=1,2,3,\dots}$ and $\left\{ Z_n^{(2)}(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=0,1,2,3,\dots}$ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις ακόλουθες οριακές συνθήκες:

$$E^1 = 0, \text{ στο } \xi^2 = \pm \frac{b}{2} \quad -\ell/2 \leq \xi^1 \leq \ell/2$$

και με βάση την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial E^2}{\partial \xi^2} = 0, \text{ στο } \xi^2 = \pm \frac{b}{2} \quad -\ell/2 \leq \xi^1 \leq \ell/2$$

Με βάση την θεώρηση για ομαλότητα στα τοιχώματα του κυματοδηγού και με χρήση των απλοποιημένων συντελεστών που προκύπτουν από τη γεωμετρία, καταλήγουμε στην ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά των προηγούμενων Sturm-Liouville συστημάτων στα δύο άκρα στο τέλος των καμπυλών:

- στο $\xi^1 \rightarrow -\ell/2$, άκρο στο τέλος του κυματοδηγού εισόδου

$$\lambda_n^{(1)} \rightarrow \lambda_n^I = \alpha_1 k_n^I, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \left\{ Z_n^{(1)}(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=1,2,3,\dots} \rightarrow \sin\left(\frac{n\pi\alpha_1\xi^2}{B_1} + \frac{n\pi}{2}\right),$$

όπου, και

$$\lambda_n^{(2)} \rightarrow \lambda_n^I = \alpha_1 k_n^I, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \left\{ Z_n^{(2)}(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=0,1,2,3,\dots} \rightarrow \cos\left(\frac{n\pi\alpha_1\xi^2}{B_1} + \frac{n\pi}{2}\right),$$

- στο $\xi^1 \rightarrow +\ell/2$, άκρο στο τέλος του κυματοδηγού εξόδου

$$\lambda_n^{(1)} \rightarrow \lambda_n^T = \alpha_2 k_n^T, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \left\{ Z_n^{(1)}(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=1,2,3,\dots} \rightarrow \sin\left(\frac{n\pi\alpha_2\xi^2}{B_2} + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\text{όπου } k_n^T = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{A}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{B_2}\right)^2}, \text{ και}$$

$$\lambda_n^{(2)} \rightarrow \lambda_n^T = \alpha_2 k_n^T, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \left\{ Z_n^{(2)}(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=0,1,2,3,\dots} \rightarrow \cos\left(\frac{n\pi\alpha_2\xi^2}{B_2} + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Το σύστημα συζευγμένων ιδιομορφών, στην περίπτωση του προβλήματος E-plane bend, κατασκευάζεται ακολουθώντας την προσέγγιση Galerkin, αποτελούμενο από τις παραστάσεις που ακολουθούν, τις οποίες προβάλλουμε στη συνέχεια στις τοπικές βάσεις $\left\{ Z_n^{(1)}(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=1,2,3,\dots}$ και $\left\{ Z_n^{(2)}(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=0,1,2,3,\dots}$:

$$\Delta E^1 + p_1 \left(\frac{\partial E^1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial E^2}{\partial \xi^1} \right) + \alpha^2 \left(k^2 - \left(\frac{\pi}{A} \right)^2 \right) E^1 = 0 \tag{5.1.7}$$

$$\Delta E^2 + p_2 \left(\frac{\partial E^1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial E^2}{\partial \xi^1} \right) + \alpha^2 \left(k^2 - \left(\frac{\pi}{A} \right)^2 \right) E^2 = 0$$

όπου $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial(\xi^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(\xi^2)^2}$ είναι ο διδιάστατος Λαπλασιανός τελεστής και οι παράμετροι

p_1 και p_2 ορίζονται ως εξής:

$$p_1(\xi^1, \xi^2) = \alpha^2 \frac{\partial \alpha^{-2}}{\partial \xi^2}$$

$$p_2(\xi^1, \xi^2) = \alpha^2 \frac{\partial \alpha^{-2}}{\partial \xi^1}$$

Πιο συγκεκριμένα, η κατασκευή του συστήματος συζευγμένων ιδιομορφών επιτυγχάνεται με τις ακόλουθες ενέργειες:

- με αντικατάσταση των αναπαραστάσεων (5.1.1) και (5.1.2) στις εξισώσεις (5.1.7)
- πολλαπλασιάζοντας την (5.1.1) με $Z_m^{(1)}(\xi^2; \xi^1)$, $m=1,2,3\dots$ και την (5.1.2) με $Z_m^{(2)}(\xi^2; \xi^1)$, $m=0,1,2,3\dots$
- ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις στο διάστημα $-b/2 \leq \xi^2 \leq b/2$

Το αποτέλεσμα της εφαρμογής της μεθόδου συζευγμένων ιδιομορφών οδηγεί στα επόμενα αποτελέσματα:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1} \left(\langle Z_n^{(1)}, Z_m^{(1)} \rangle [\varphi_n^{(1)}]'' + 2 \left\langle \frac{\partial Z_n^{(1)}}{\partial \xi^1}, Z_m^{(1)} \right\rangle [\varphi_n^{(1)}]' + \right. \\ & \left. + \left\langle \frac{\partial^2 Z_n^{(1)}}{\partial (\xi^1)^2}, Z_m^{(1)} \right\rangle + \left\langle p_1 \frac{\partial Z_n^{(1)}}{\partial \xi^2}, Z_m^{(1)} \right\rangle + (\lambda_n^{(1)})^2 \langle Z_n^{(1)}, Z_m^{(1)} \rangle \right) [\varphi_n^{(1)}] + \\ & - \sum_{n=0} \left(\langle p_1 Z_n^{(2)}, Z_m^{(1)} \rangle [\varphi_n^{(2)}]' + \left\langle p_1 \frac{\partial Z_n^{(2)}}{\partial \xi^1}, Z_m^{(1)} \right\rangle [\varphi_n^{(2)}] \right) = 0, \quad m=1,2,3\dots \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

και

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1} \left(\langle Z_n^{(2)}, Z_m^{(2)} \rangle [\varphi_n^{(2)}]'' + \left\{ 2 \left\langle \frac{\partial Z_n^{(2)}}{\partial \xi^1}, Z_m^{(2)} \right\rangle - \langle p_2 Z_n^{(2)}, Z_m^{(2)} \rangle \right\} [\varphi_n^{(2)}]' + \right. \\ & \left. + \left\langle \frac{\partial Z_n^{(2)}}{\partial (\xi^1)^2}, Z_m^{(2)} \right\rangle - \left\langle p_2 \frac{\partial Z_n^{(2)}}{\partial \xi^1}, Z_m^{(2)} \right\rangle + (\lambda_n^{(2)})^2 \langle Z_n^{(2)}, Z_m^{(2)} \rangle \right) [\varphi_n^{(2)}] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1} \left\langle p_2 \frac{\partial Z_n^{(1)}}{\partial \xi^2}, Z_m^{(2)} \right\rangle [\varphi_n^{(1)}] = 0, \quad m=0,1,2,3,\dots$$

(5.1.9)

Οι συναρτήσεις που παρουσιάζονται με τόνο στις προηγούμενες εξισώσεις υποδηλώνουν διαφορίση με βάση το ξ^1 . Το σύμβολο $\langle f, g \rangle$ δηλώνει το ολοκλήρωμα του εσωτερικού γινομένου των συναρτήσεων $f(\xi^2), g(\xi^2)$, μεταξύ των ορίων $-b/2 < \xi^2 < +b/2$,

$$\langle f, g \rangle = \int_{\xi^2=-b/2}^{\xi^2=b/2} f(\xi^2) g(\xi^2) d\xi^2$$

Επιπλέον, θα απαιτήσουμε την ταύτιση του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου E^k , $k=1,2$ μεταξύ των τοπικών αναπαραστάσεων στον καμπύλο κυματοδηγό και των γενικών αναπαραστάσεων του ηλεκτρικού πεδίου στην είσοδο και την έξοδο των δύο ημι-άπειρων κυματοδηγών.

Το τροποποιημένο ηλεκτρικό πεδίο για $\xi^1 \leq -\ell/2$:

$$E^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^R \sin\left(\frac{n\pi\alpha_1\xi^2}{B_1} + \frac{n\pi}{2}\right) \exp(-i\alpha_1 k_n^I (\xi^1 + \ell/2))$$

και

$$E^2 = \Phi_0^I \exp(i\alpha_1 k_0^I (\xi^1 + \ell/2)) + \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^R \cos\left(\frac{n\pi\alpha_1\xi^2}{B_1} + \frac{n\pi}{2}\right) \exp(-i\alpha_1 k_n^I (\xi^1 + \ell/2))$$

όπου $\Phi_0^I = \alpha_1 \varphi_0^I$ και $\Phi_n^R = \alpha_1 \varphi_n^R, \Psi_n^R = \alpha_1 \psi_n^R, n=1,2,3,\dots$

Επίσης, για $\xi^1 \geq -\ell/2$ οδηγούμαστε στις αναπαραστάσεις:

$$E^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^T \sin\left(\frac{n\pi\alpha_2\xi^2}{B_2} + \frac{n\pi}{2}\right) \exp(-i\alpha_2 k_n^T (\xi^1 - \ell/2))$$

και

$$E^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^T \cos\left(\frac{n\pi\alpha_2\xi^2}{B_2} + \frac{n\pi}{2}\right) \exp(-i\alpha_2 k_n^T (\xi^1 - \ell/2))$$

όπου $\Phi_0^T = \alpha_2 \varphi_0^T$ και $\Phi_n^T = \alpha_2 \varphi_n^T, \Psi_n^T = \alpha_2 \psi_n^T, n=1,2,3,\dots$

Αναφερόμαστε στην περίπτωση E-plane bend με είσοδο TE₁₀ διαμόρφωση και πλάτος $\varphi_0^I = 1$ και οι οριακές συνθήκες που αφορούν το εύρος λειτουργίας υπολογίζονται από τα ακόλουθα:

- στο $\xi^1 \rightarrow -\ell / 2$, άκρο στο τέλος του κυματοδηγού εισόδου

$$\left(\varphi_n^{(2)}\right)' + i\sqrt{\left(\lambda_n^I\right)^2} \varphi_n^{(2)} = \begin{cases} 2i\sqrt{\left(\lambda_n^I\right)^2}, & n=0 \\ 0, & n=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (5.1.10)$$

$$\left(\varphi_n^{(1)}\right)' + i\sqrt{\left(\lambda_n^I\right)^2} \varphi_n^{(1)} = 0, \quad n=1,2,3,\dots \quad (5.1.11)$$

- στο $\xi^2 \rightarrow +\ell / 2$, άκρο στο τέλος του κυματοδηγού εξόδου

$$\left(\varphi_n^{(2)}\right)' - i\sqrt{\left(\lambda_n^T\right)^2} \varphi_n^{(2)} = 0, \quad n=0,1,2,3,\dots \quad (5.1.12)$$

$$\left(\varphi_n^{(1)}\right)' + i\sqrt{\left(\lambda_n^T\right)^2} \varphi_n^{(1)} = 0, \quad n=1,2,3,\dots \quad (5.1.13)$$

Ως αποτέλεσμα, η αριθμητική λύση του E-plane υποπροβλήματος μπορεί να προσδιοριστεί ισοδύναμα από την λύση της μεθόδου συζευγμένων ιδιομορφών, με δεδομένες τις οριακές συνθήκες, όπως αυτές ορίστηκαν στις προηγούμενες εξισώσεις.

5.2 H-plane bend υπο-πρόβλημα, τοπική αναπαράσταση και σύστημα συζευγμένων ιδιομορφών

Σε αυτή την περίπτωση, του H-plane bend υποπροβλήματος, το ηλεκτρικό πεδίο είναι απλούστερο, καθώς περιέχει μόνο μία μη μηδενική συνιστώσα. Παρατηρώντας την κατασκευή των γενικών αναπαραστάσεων των δύο ημιάπειρων κυματοδηγών για το H-plane bend υποπρόβλημα σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων $\{\xi^k\}$, εισάγουμε την ακόλουθη τοπική σειρά αναπαραστάσεων του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E}^3 , στα τμήματα του καμπύλου κυματοδηγού $D = \{ -\ell/2 \leq \xi^1 \leq \ell/2, -b/2 \leq \xi^2 \leq b/2 \}$,

$$\mathbf{E}^3(\xi^1, \xi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\xi^1) Z_n(\xi^2; \xi^1) \quad (5.2)$$

Στην τελευταία εξίσωση οι εκφράσεις $\{Z_n(\xi^2; \xi^1)\}_{n=1,2,3,\dots}$ ορίζονται ως οι ιδιοσυναρτήσεις, ελέγχοντας την εγκάρσια δομή κάθε ρυθμού, τοπικά σε ορισμένο σημείο $\xi^1 = \text{σταθερό}$, κατά μήκος του καμπύλου κυματοδηγού και οι αριθμοί $\{\lambda_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ ως οι ιδιοτιμές των τοπικών Sturm-Liouville προβλημάτων που ακολουθούν, με συνεχείς συντελεστές:

$$\frac{d^2 Z_n}{d(\xi^2)^2} + (\alpha^2 k^2 - (\lambda_n)^2) Z_n = 0$$

$$Z_n(\xi^2) = 0, \text{ στο σημείο } \xi^2 = \pm \frac{b}{2}$$

Μπορεί να αποδειχθεί απευθείας πως η αναπαράσταση (5.2.1), εξαιτίας των συγκεκριμένων οριακών συνθηκών που πληρούνται από το σύστημα $\{Z_n(\xi^2; \xi^1)\}_{n=1,2,3,\dots}$, ικανοποιεί αυτόματα την οριακή συνθήκη $E^3 = 0$, που αφορά το τροποποιημένο ηλεκτρικό πεδίο. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά των παραπάνω συστημάτων στα δύο άκρα της καμπύλης, με βάση τις υποθέσεις για την ομαλότητα των τοιχωμάτων στον καμπύλο κυματοδηγό.

- στο $\xi^1 \rightarrow -\ell/2$, άκρο στο τέλος του κυματοδηγού εισόδου

$$\lambda_n \rightarrow \lambda_n^I = \alpha_1 k_n^I, \quad n=1,2,3,\dots, \quad \{Z_n(\xi^2; \xi^1)\}_{n=1,2,3,\dots} \rightarrow \sin\left(\frac{n\pi\alpha_1 \xi^2}{B_1} + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\text{όπου } k_n^I = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{B_1}\right)^2}$$

και

- στο $\xi^1 \rightarrow +\ell/2$, άκρο στο τέλος του κυματοδηγού εξόδου

$$\lambda_n \rightarrow \lambda_n^T = \alpha_2 k_n^T, \quad n=1,2,3,\dots, \quad \left\{ Z_n(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=1,2,3,\dots} \rightarrow \sin\left(\frac{n\pi\alpha_2\xi^2}{B_2} + \frac{n\pi}{2} \right),$$

$$\text{όπου } k_n^T = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{B_2} \right)^2}$$

Στην περίπτωση του H-plane υποπροβλήματος, το σύστημα συζευγμένων ιδιομορφών (CMS) υπολογίζεται με προβολή της εξίσωσης Helmholtz στην τοπική βάση $\left\{ Z_n(\xi^2; \xi^1) \right\}_{n=1,2,3,\dots}$. Η κατασκευή της μεθόδου CMS επιτυγχάνεται ακολουθώντας την προσέγγιση Galerkin:

- (i) με αντικατάσταση της αναπαράστασης (5.2.1) στην εξίσωση Helmholtz,
- (ii) πολλαπλασιάζοντας αυτή με $Z_m^{(1)}(\xi^2; \xi^1)$, $m=1,2,3,\dots$ και
- (iii) ολοκληρώνοντας στο διάστημα $-b/2 < \xi^2 < +b/2$.

Το αποτέλεσμα της εφαρμογής της μεθόδου συζευγμένων ιδιομορφών όσων αφορά τη συνιστώσα \mathbf{E}^3 του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου ακολουθεί:

$$\sum_{n=1} \left\langle Z_n, Z_m \right\rangle \varphi_n'' + 2 \left\langle \frac{\partial Z_n}{\partial \xi^1}, Z_m \right\rangle \varphi_n' + \left\langle \frac{\partial^2 Z_n}{\partial (\xi^1)^2} + \lambda_n^2 Z_n, Z_m \right\rangle \varphi_n = 0, \quad m=1,2,3,\dots, \quad (5.2.1)$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει την διαφορίση με βάση το ξ^1 , και $\langle f, g \rangle$ το L_2 εσωτερικό γινόμενο στο διάστημα $-b/2 < \xi^2 < +b/2$.

Επιπρόσθετα, υπάρχει η απαίτηση για ταύτιση του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E}^3 , όπως δίνεται από τις τοπικές αναπαραστάσεις στις καμπυλόγραμμες και στις γενικές αναπαραστάσεις, τόσο στην είσοδο όσο και στην έξοδο των ημιάπειρων κυματοδηγών. αντίστοιχα. Όλα αυτά ισχύουν στην περίπτωση H-plane bend υπό την επίδραση διάδοσης με ρυθμό TE₀₁, πλάτους $\varphi_1' = 1$, και με βάση αυτά πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες οριακές συνθήκες:

- στο $\xi^1 \rightarrow -\ell/2$, άκρο στο τέλος του κυματοδηγού εισόδου

$$\varphi_n' + i\sqrt{(\lambda_n^I)^2} \varphi_n = \begin{cases} 2i\sqrt{(\lambda_n^I)^2}, & n=1 \\ 0, & n=2,3,\dots \end{cases} \quad (5.2.2)$$

- στο $\xi^1 \rightarrow +\ell/2$, άκρο στο τέλος του κυματοδηγού εξόδου

$$\varphi'_n - i\sqrt{(\lambda_n^T)^2} \varphi_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.2.3)$$

Ως αποτέλεσμα, η αριθμητική λύση του H-plane bend υποπροβλήματος μπορεί ισοδύναμα να υπολογισθεί με εφαρμογή της μεθόδου συζευγμένων ιδιομορφών, με βάση τις προηγούμενες οριακές συνθήκες.

5.3 Αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου συζευγμένων ιδιομορφών

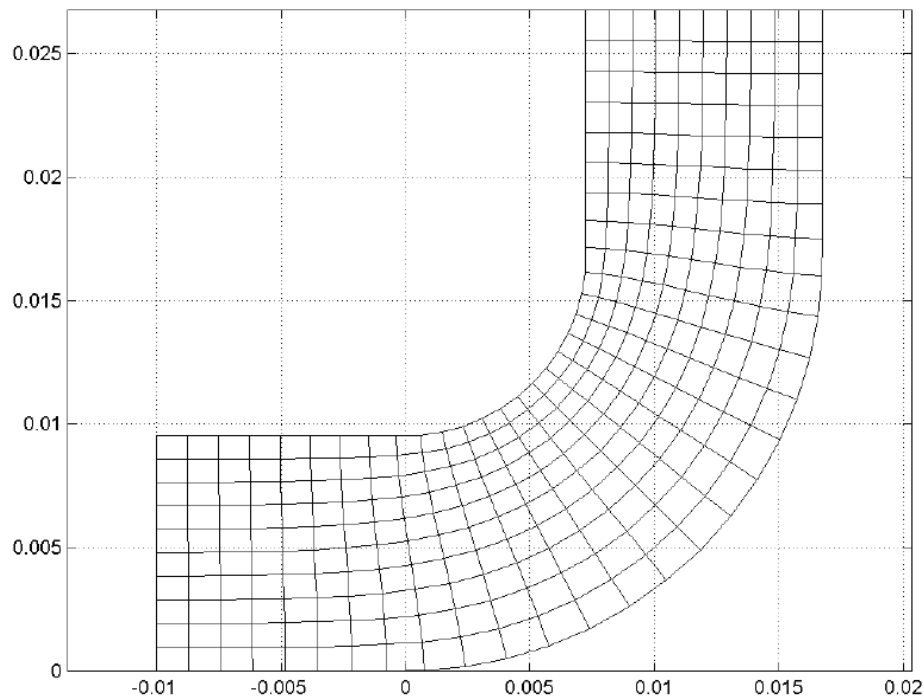
Σε αυτό το εδάφιο θα παρουσιασθούν αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό των δύο καμπύλων κυματοδηγών ορθογωνικής διατομής οι οποίοι κάμπτονται κατά μήκος μίας περιφέρειας τόξου 90° , που παρουσιάστηκαν στην εργασία Athanassoulis et al (2002). Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται επιλύσεις και για το E-plane bend και το H-plane bend υποπρόβλημα, και τα αποτελέσματα της συγκρίνονται και συμφωνούν σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό με δεδομένα από τη βιβλιογραφία.

Όσον αφορά τη γεωμετρία, επιλέχθηκε ο τυποποιημένος κυματοδηγός τύπου WR-75 για τους υπολογισμούς. Οι διαστάσεις των πλευρών είναι:

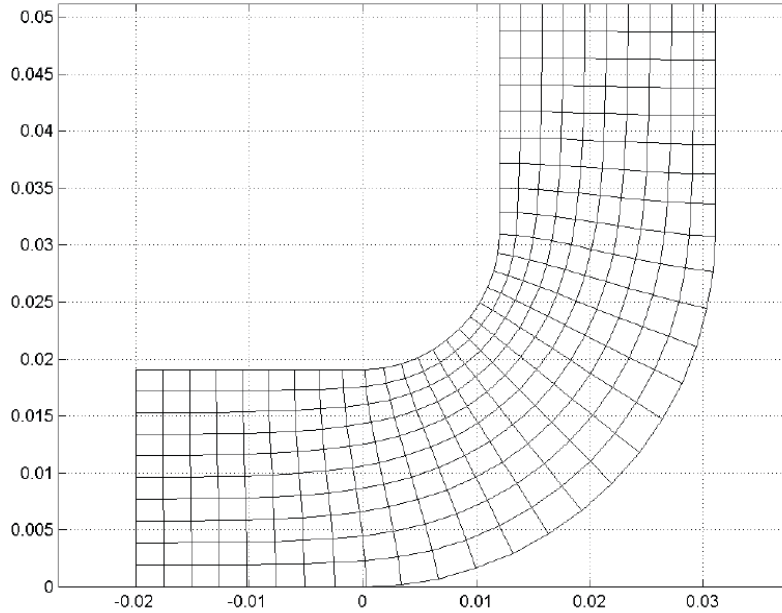
E-plane 90° bend : $A=1.905\text{cm}$, $B=0.9525\text{cm}$

H-plane 90° bend : $A=0.9525\text{cm}$, $B=1.905\text{cm}$

Οι καμπύλοι αυτοί κυματοδηγοί παρουσιάζονται και στις επόμενες εικόνες.



Εικ.11 Κυματοδηγός τύπου WR-75 E-plane 90° bend



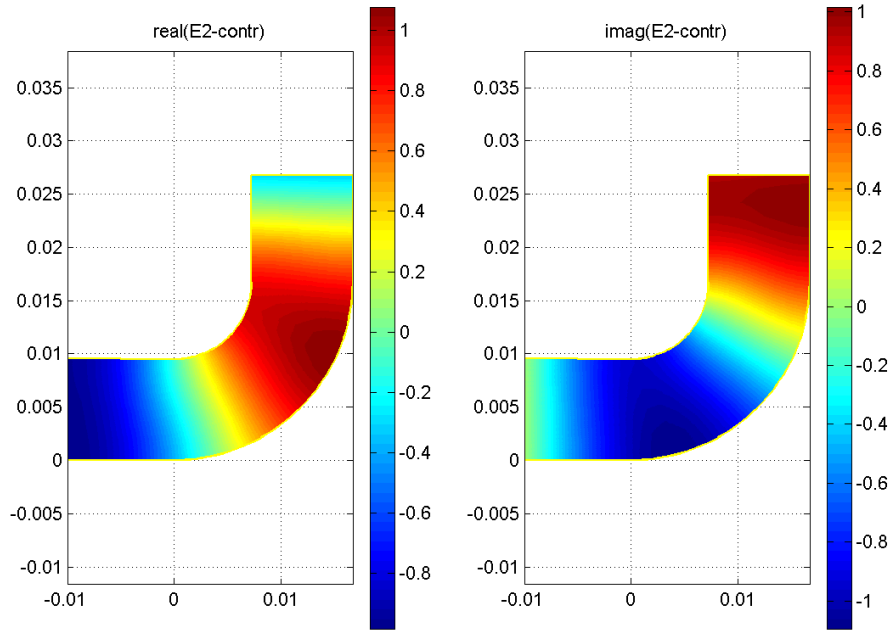
Εικ.12 Κυματοδηγός τύπου WR-75 H-plane 90° bend

Η διακριτοποίηση επιτυγχάνεται μέσω μετατροπής των τοπικών σειρών αναπαραστάσεων σε πεπερασμένο αριθμό N από όρους, διατηρώντας ένα μικρό αριθμό από αποσβενόμενους όρους. Η κατασκευή του διακριτού συστήματος ολοκληρώνεται κάνοντας χρήση του μέσου των δευτέρου βαθμού πεπερασμένων διαφορών για να προσεγγισθούν οι παραγώγοι στα συστήματα συζευγμένων ιδιομορφών, τόσο για το E-plane bend πρόβλημα, όσο και για το H-plane bend πρόβλημα. Οι διακριτές οριακές συνθήκες υπολογίζονται για το E-plane bend πρόβλημα με συνδυασμό των εξισώσεων (5.1.8) έως (5.1.13) και για το H-plane bend πρόβλημα με αυτών από τις σχέσεις (5.2.1) έως (5.2.3) και στη συνέχεια κάνοντας χρήση κεντρικών διαφορών για τον υπολογισμό των παραγώγων. Με αυτό τον τρόπο, το διακριτό σχήμα που προκύπτει είναι ομοιόμορφο δευτέρας τάξης στην διεύθυνση ξ^1 .

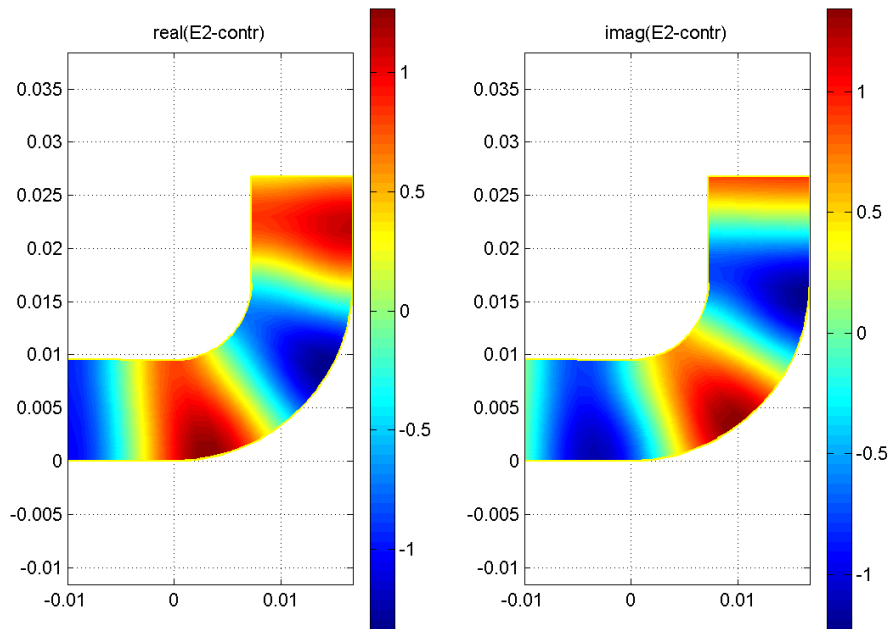
Με βάση τις παραπάνω θεωρήσεις, το σύστημα συζευγμένων ιδιομορφών των διαφορικών εξισώσεων μειώνονται στο αντίστοιχο γραμμικό αλγεβρικό σύστημα. Οι πίνακες συντελεστών του συστήματος είναι τριδιαγώνιοι, πίνακες με μη μηδενικά μόνο τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου και της διαγωνίου πάνω και κάτω από την κύρια. Οι πίνακες συντελεστών έχουν διαστάσεις ανάλογες με τον αριθμό των διαμορφώσεων που διατηρούνται στις αναπαραστάσεις και τον αριθμό των τμημάτων των υποδιαίρέσεων του διαστήματος $-\ell/2 \leq \xi^1 \leq \ell/2$. Η λύση εμφανίζεται μόνο σε μία εξίσωση και ανταποκρίνεται σε αριστερή διαμόρφωση TE_{10} , στην περίπτωση του E-plane bend προβλήματος και σε αριστερή TE_{01} διαμόρφωση, στην περίπτωση του H-plane bend προβλήματος, αντίστοιχα, στο αριστερό άκρο, $\xi^1 = -\ell/2$.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα του WR-75, οδηγούμενο από την TE_{10} διαμόρφωση που αναφέρθηκε, παρουσιάζονται στις επόμενες εικόνες. Σε αυτή την περίπτωση, τόσο η εγκάρσια όσο και η διαμήκης συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου

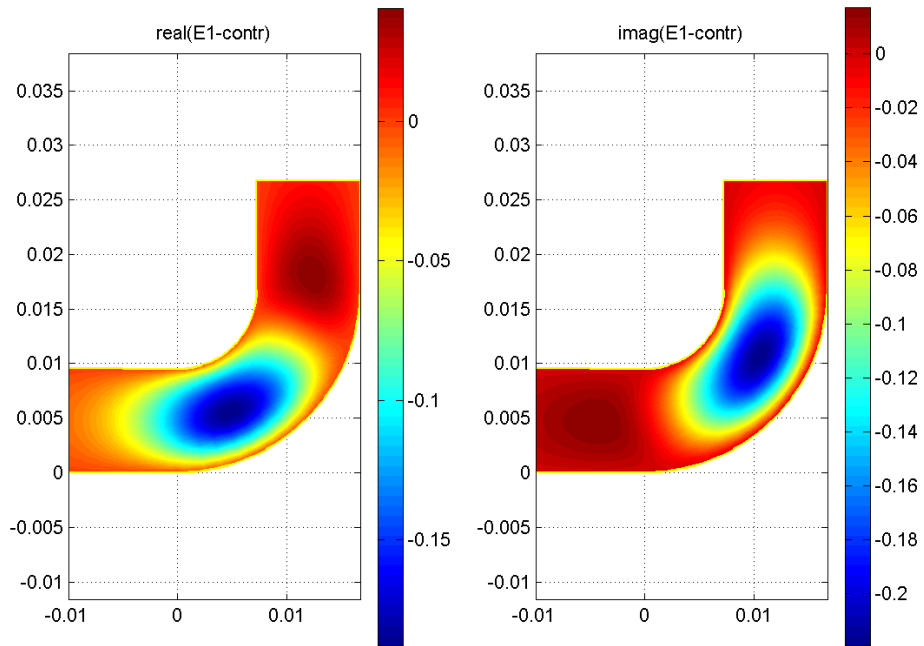
λαμβάνουν χώρα. Τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου, καθώς και το μέτρο αυτών, παρουσιάζονται στη συνέχεια, με διπλανάς φωτογραφίες ώστε να είναι άμεση η σύγκριση, για συχνότητες λειτουργίας του κυματοδηγού στην περιοχή των 10 GHz και των 15 GHz.



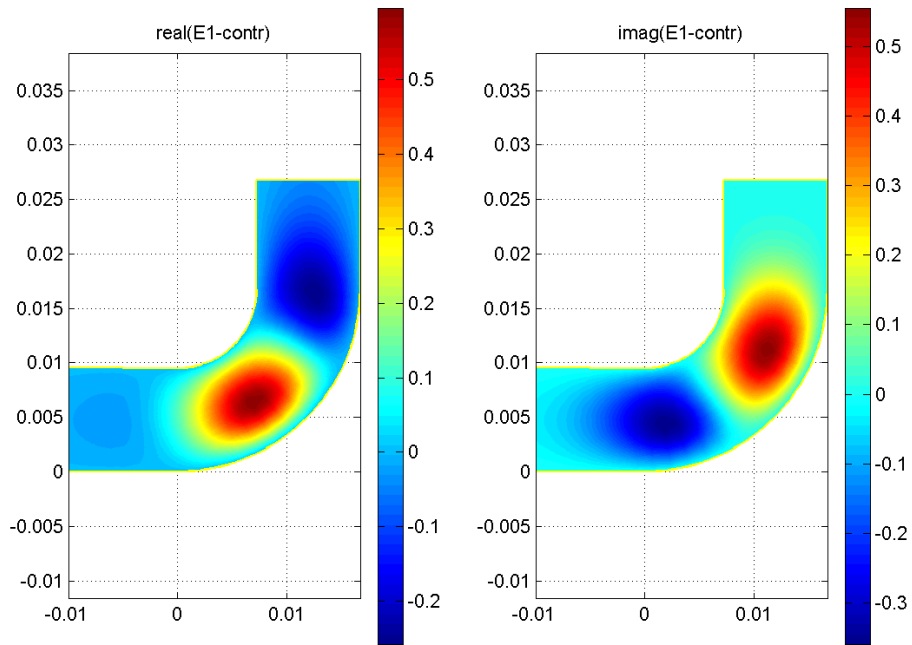
Εικ.13 Πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνιστώσας E^2 του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου, κυματοδηγός WR75 και E-plane bend 90° , συχνότητα λειτουργίας 10 GHz



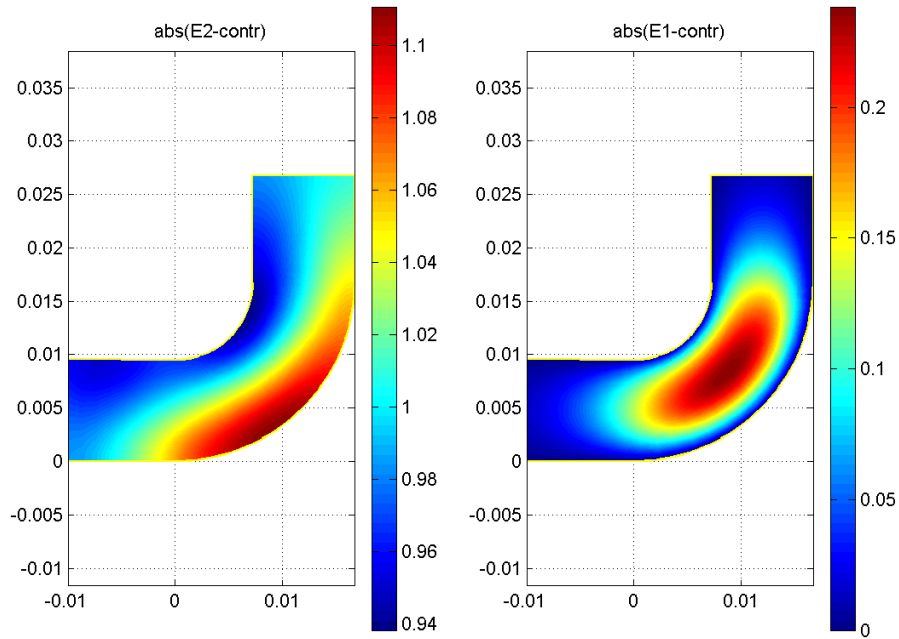
Εικ.14 Πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνιστώσας E^2 του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου, κυματοδηγός WR75 και E-plane bend 90° , συχνότητα λειτουργίας 15 GHz



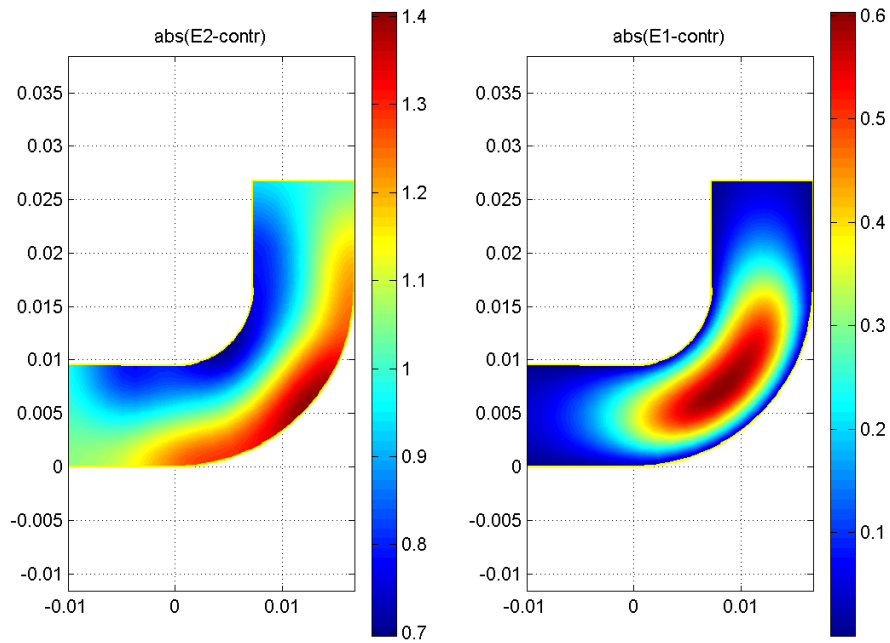
Εικ.15 Πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνιστώσας E^1 του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου, κυματοδηγός WR75 και E-plane bend 90° , συχνότητα λειτουργίας 10 GHz



Εικ.16 Πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνιστώσας E^1 του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου, κυματοδηγός WR75 και E-plane bend 90° , συχνότητα λειτουργίας 15 GHz

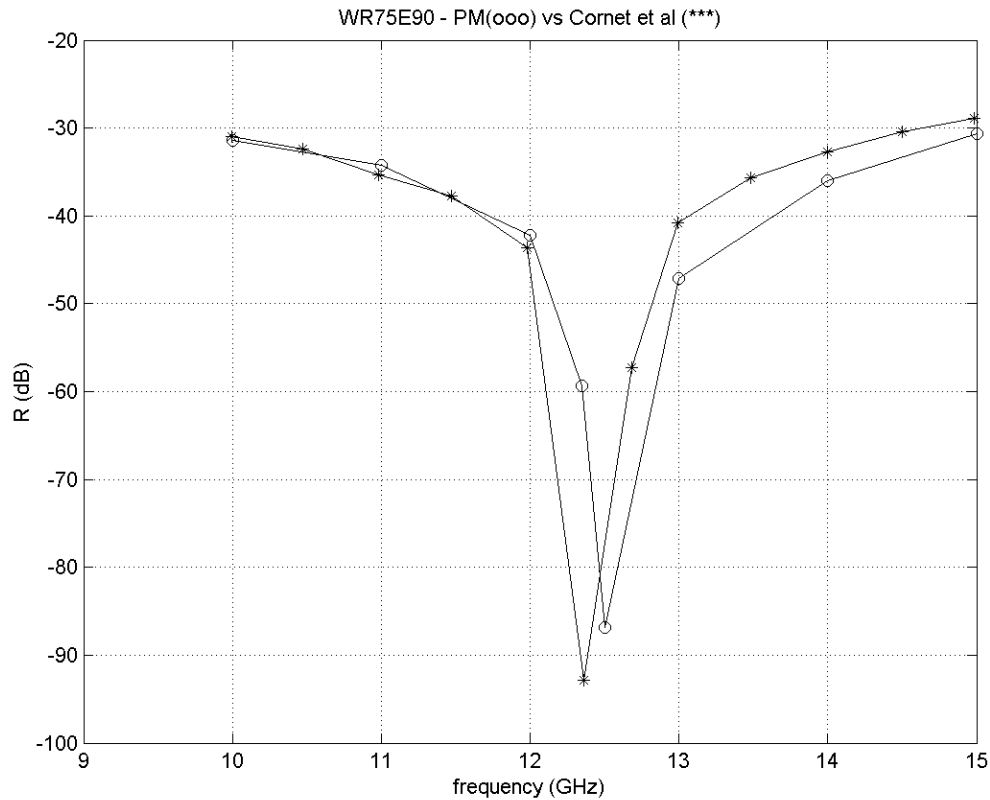


Εικ.17 Μέτρο των συνιστωσών E^2 (αριστερά) και E^1 (δεξιά) του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου, κυματοδηγός WR75 και E-plane bend 90° , συχνότητα λειτουργίας 10 GHz



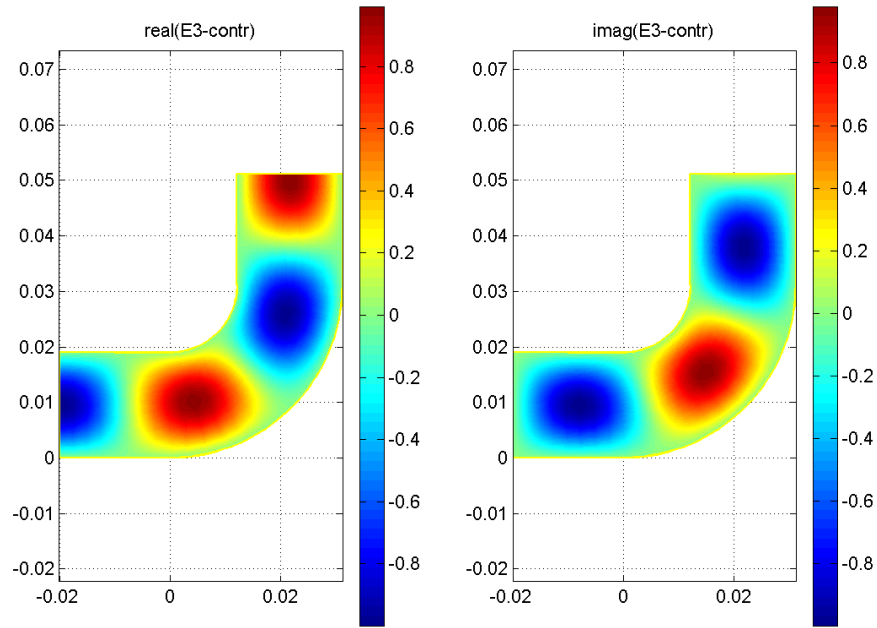
Εικ.18 Μέτρο των συνιστωσών E^2 (αριστερά) και E^1 (δεξιά) του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου, κυματοδηγός WR75 και E-plane bend 90° , συχνότητα λειτουργίας 15 GHz

Στην εικόνα που ακολουθεί εμφανίζεται το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης του WR75 κυματοδηγού για την περίπτωση E-plane bend 90°. Το φάσμα συχνοτήτων παίρνει τιμές από 10GHz έως 15GHz. Με κύκλο συμβολίζονται τα σημεία της παρούσης μεθόδου, με αστερίσκο τα αποτελέσματα από Cornet et al (1999), τα οποία εξυπηρετούν τη σύγκριση. Τα αποτελέσματα αυτά είναι επίσης σύμφωνα και με δεδομένα μετρήσεων και πειραμάτων.

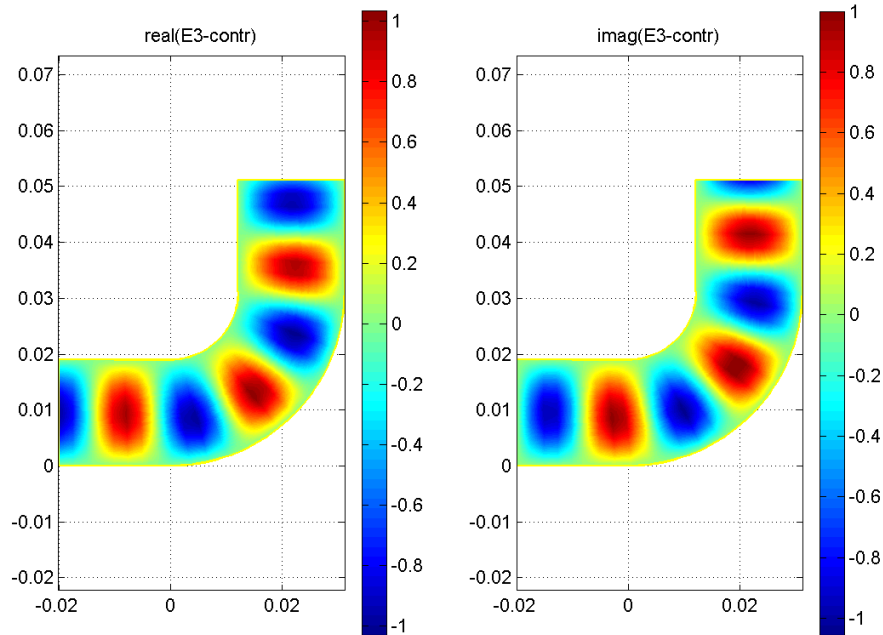


Εικ.19 Μέτρο του συντελεστή ανάκλασης του WR75 κυματοδηγού για την περίπτωση E-plane bend 90°, για φάσμα συχνοτήτων 10GHz έως 15GHz. Με κύκλο συμβολίζονται τα σημεία της παρούσης μεθόδου, με αστερίσκο τα αποτελέσματα από Cornet et al (1999) για σύγκριση

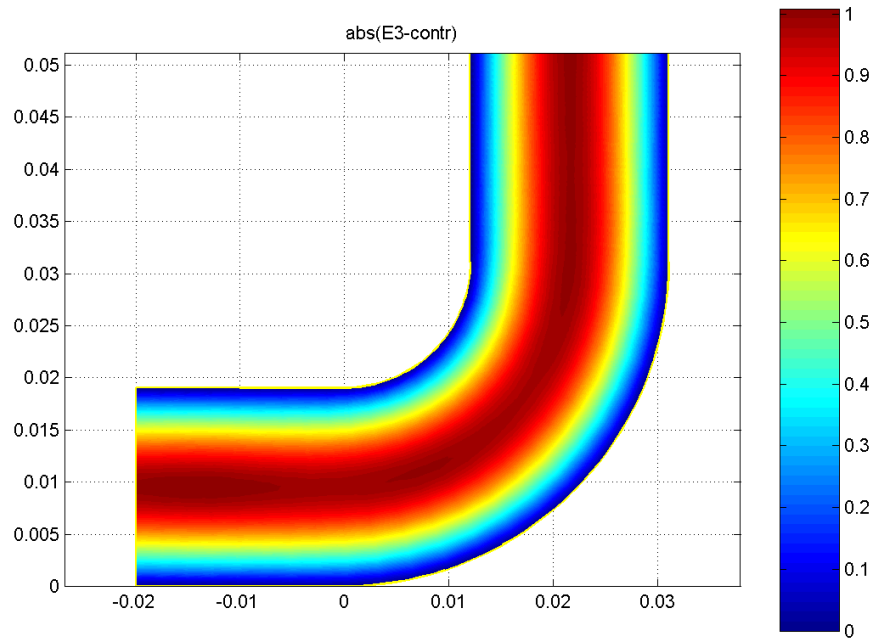
Τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα του κυματοδηγού WR75 για την περίπτωση H-plane bend 90°, υπό τον προσπίπτον εξ αριστερών TE₀₁ ρυθμό, παρουσιάζονται στις επόμενες εικόνες. Σε αυτή την περίπτωση διεγείρεται μόνο η εγκάρσια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, E³. Το πραγματικό και φανταστικό μέρος και το μέτρο της E³ συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στον κυματοδηγό παρουσιάζονται συγκριτικά για συχνότητες λειτουργίας 10GHz και 15GHz. Επίσης, γίνεται αποτύπωση και σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα αποτελέσματα από Cornet et al (1999), όσον αφορά το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης του WR75 κυματοδηγού για την περίπτωση H-plane bend 90° και φάσμα συχνοτήτων λειτουργίας 10GHz και 15GHz.



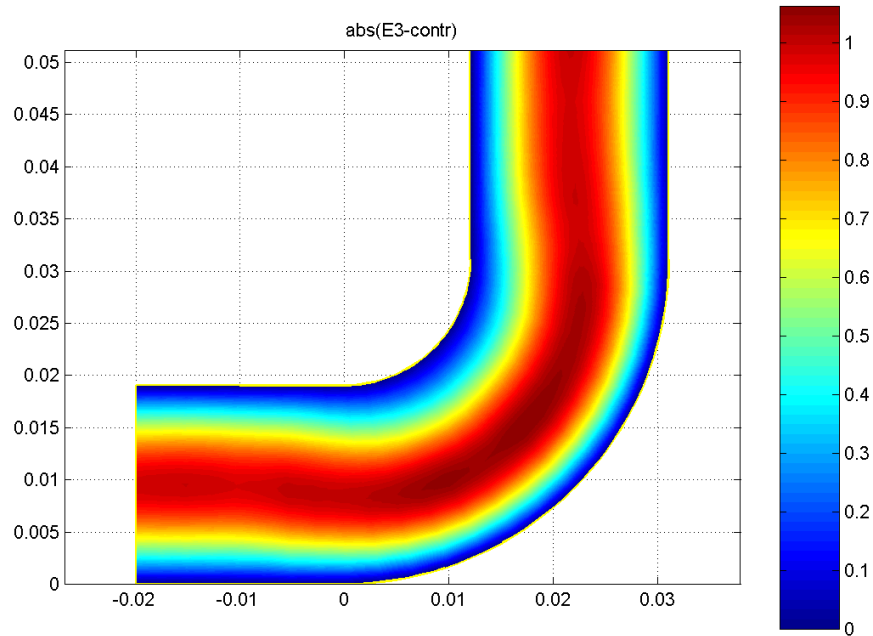
Εικ.20 Πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνιστώσας E^3 του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου, κυματοδηγός WR75 και H-plane bend 90° , συχνότητα λειτουργίας 10 GHz



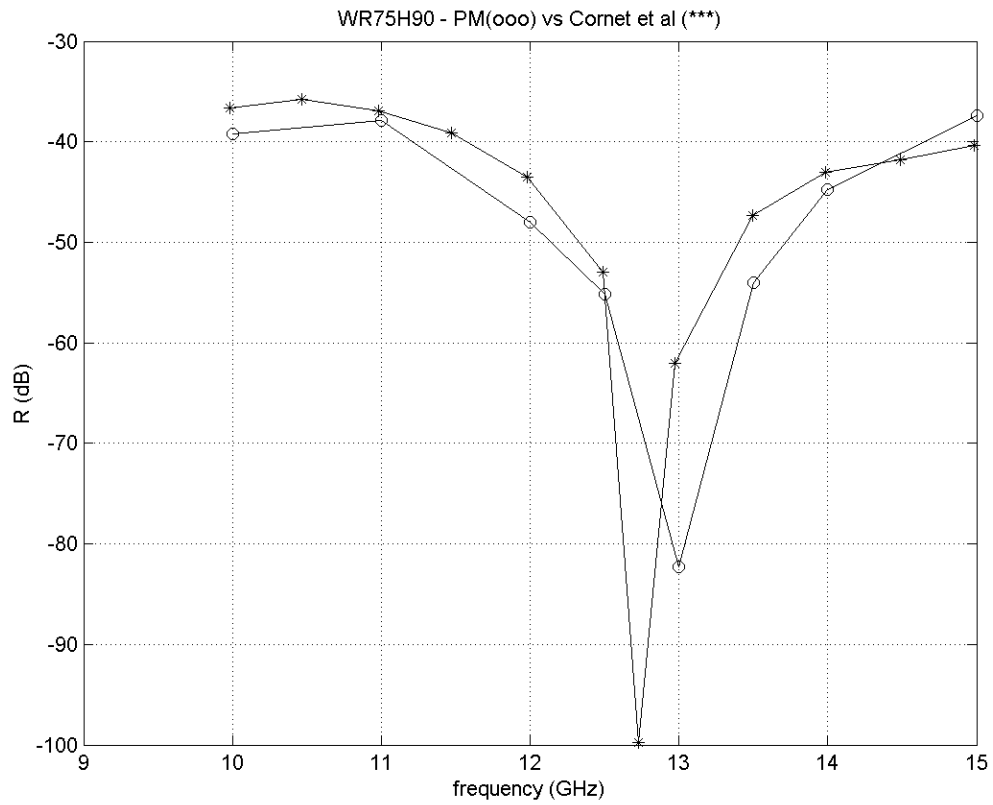
Εικ.21 Πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνιστώσας E^3 του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου, κυματοδηγός WR75 και H-plane bend 90° , συχνότητα λειτουργίας 15 GHz



Εικ.22 Μέτρο της συνιστώσας E^3 του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου, κυματοδηγός WR75 και H-plane bend 90° , συχνότητα λειτουργίας 10 GHz



Εικ.23 Μέτρο της συνιστώσας E^3 του τροποποιημένου ηλεκτρικού πεδίου, κυματοδηγός WR75 και H-plane bend 90° , συχνότητα λειτουργίας 15 GHz



Εικ.24 Μέτρο του συντελεστή ανάκλασης του WR75 κυματοδηγού για την περίπτωση H-plane bend 90°, για φάσμα συχνοτήτων 10GHz έως 15GHz. Με κύκλο συμβολίζονται τα σημεία της παρούσης μεθόδου, με αστερίσκο τα αποτελέσματα από Cornet et al (1999) για σύγκριση

6. Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων και Προβλήματα Σκέδασης

6.1 Συναρτήσεις Green

Στην αρχή αυτού του κεφαλαίου θα γίνει μία αναφορά στις συναρτήσεις Green για την ομογενή εξίσωση Helmholtz στις δύο διαστάσεις :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^2)^2} + k^2 \varphi = 0 \quad (6.1)$$

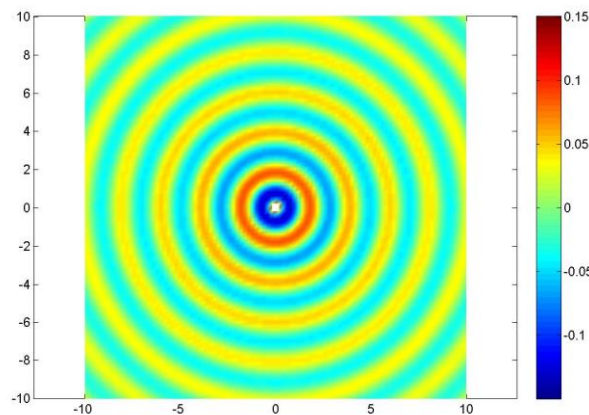
Χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις ακουστικών πηγών η γενική λύση της εξίσωσης Helmholtz είναι:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \int_s \sigma(\mathbf{y}) H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) ds(\mathbf{y}) , \quad (6.2)$$

όπου $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης.

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \frac{i}{4} (J_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + iY_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)) = G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) , \quad (6.3)$$

η αντίστοιχη συνάρτηση Green, η οποία αναπαριστά το πεδίο σε κάθε σημείο στο επίπεδο $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ από μια σημειακή πηγή που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, όπως παρουσιάζεται στην Εικ. 25.



Εικ.25 Επαγόμενο πεδίο (πραγματικό μέρος) από τη πηγή στο επίπεδο στη θέση $(y_1 = 0, y_2 = 0)$ για κυματαριθμό $k=3$

Η ανωτέρω σχέση ορίζει το πεδίο στο επίπεδο στο σημείο \mathbf{x} που παράγεται από σημειακή μονοχρωματικής πηγής που βρίσκεται στο σημείο \mathbf{y} που ακτινοβολεί εξερχόμενα κύματα, ικανοποιώντας σε μεγάλες αποστάσεις $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ από την πηγή

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} - ik\varphi = 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (6.4)$$

6.2 Προβλήματα συνοριακών τιμών της εξίσωσης Helmholtz

Μέσω κατάλληλων ολοκληρωτικών εκφράσεων που περιλαμβάνουν τις συναρτήσεις Green οδηγούμαστε σε αναπαραστάσεις των γενικών λύσεων των κυματικών προβλημάτων που διέπονται από την ομογενή εξίσωση Helmholtz και ικανοποιούν επιπρόσθετες συνοριακές συνθήκες (π.χ. στις επιφάνειες σύνορα ενός σκεδαστή η/και ενός κυματοδηγού κλπ). Περιοριζόμαστε στη συνέχεια, χάριν απλότητας, σε διδιάστατα προβλήματα, και θεωρούμε πεπερασμένο ανοιχτό χωρίο D (π.χ. απλός σκεδαστής), και το λείο σύνορο αυτού ως ∂D . Με \bar{D} συμβολίζουμε το κλειστό χωρίο και με $C^k(D)$ τον k -φορές παραγωγίσιμο γραμμικό χώρο συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το D . Αναζητούμε ως λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0, \quad \text{στο εξωτερικό χωρίο } D, \quad (6.5)$$

όπου $\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^2)^2}$ και η συνάρτηση φ ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας

(6.4) στο άπειρο, και κάποια (ή κατά τμήματα κάποιες) από τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

Εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet :

$$\varphi = g_D \quad \text{στο σύνορο } \partial D, \quad (6.6)$$

όπου g_D γνωστή συνεχής συνάρτηση πάνω στο σύνορο

Εξωτερικό πρόβλημα Neumann :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = g_N, \quad \text{στο σύνορο } \partial D, \quad (6.7)$$

όπου g_N γνωστή συνεχής συνάρτηση πάνω στο σύνορο

Μικτή συνθήκη (που μοντελοποιεί αγωγίμο σύνορο) :

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \beta \varphi = g_M, \quad (6.8)$$

όπου g_M επίσης γνωστή συνεχής συνάρτηση πάνω στο σύνορο ∂D , και α, β πραγματικές σταθερές, οι οποίες μοντελοποιούν κατάλληλα τις ανακλαστικές ιδιότητες της συνοριακής επιφάνειας.

6.3 Πρόβλημα σκέδασης – σώμα γενικού σχήματος πεπερασμένων διαστάσεων

Σημαντική εφαρμογή των συναρτήσεων Green είναι η ικανότητά τους να μας προσφέρουν, μέσω κατάλληλων ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων, τις γενικές λύσεις κυματικών προβλημάτων, στις δύο και τρεις διαστάσεις (λύσεις προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών), παρουσία διαφόρων ανομοιογενειών, όπως πεπερασμένοι σκεδαστές.

6.3.1. Επίλυση προβλήματος με το θεώρημα ολοκληρωτικής αναπαράστασης Green

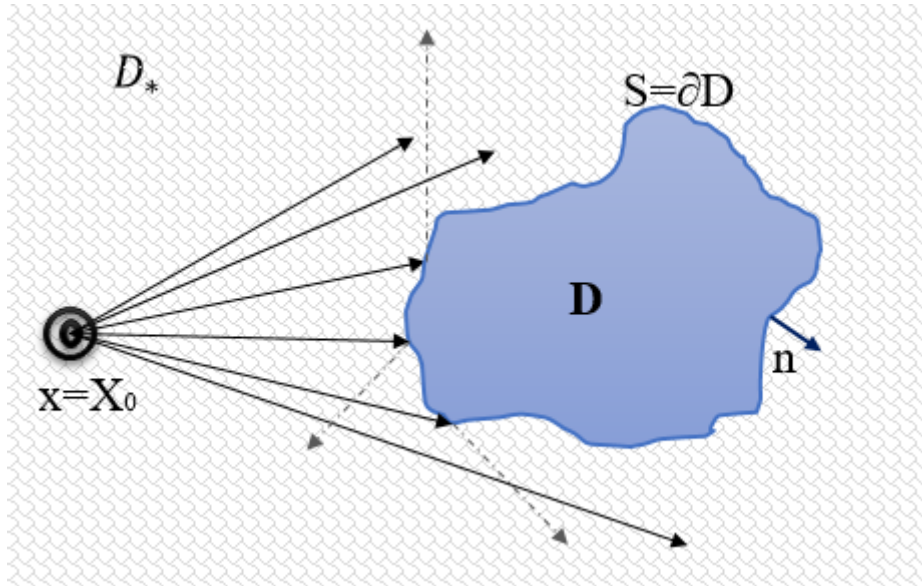
Εξετάζουμε την ειδική περίπτωση που αφορά τη σκέδαση αρμονικού κυματικού πεδίου που διεγείρεται από σημειακή αρμονική πηγή στη θέση $\mathbf{r} = \mathbf{X}_0$, από πεπερασμένο σκεδαστή (σώμα D), με σύνορο $S = \partial D$. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του σκεδαστή με διεύθυνση προς τον εξωτερικό του σώματος χώρο.

Σε αυτή την ειδική περίπτωση, το συνολικό (μιγαδικό) κυματικό δυναμικό $\varphi_T(\mathbf{x})$ ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz:

$$\nabla^2 \varphi_T(\mathbf{x}) + k^2 \varphi_T(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0), \quad \mathbf{x} \in D_*, \quad (6.9)$$

όπου $D_* = \mathbb{R}^2 \setminus D$ το χωρίο στο οποίο ορίζονται η συνάρτηση $\varphi(\mathbf{x})$ στις δύο διαστάσεις, που αποτελεί το χώρο εκτός της περιοχής που καταλαμβάνει ο πεπερασμένος σκεδαστής.

Στο πρόβλημα αυτό θεωρούμε το μέσο διάδοσης ομογενές, δηλαδή $k = \text{σταθερό}$ σε όλο το χώρο, ενώ θα ισχύει η ιδανική περίπτωση αδιαπέρατου σκεδαστή και οι συνοριακές συνθήκες (6.6), (6.7) ή (6.8), αναλόγως.



Εικ.26 Σκέδαση αρμονικού κυματικού πεδίου, διεγερόμενου από σημειακή πηγή στη θέση $r=X_0$, από αδιαπέρατο πεπερασμένο σκεδαστή D

Επιπλέον, επιβάλλουμε την απαίτηση η λύση να συμπεριφέρεται ως εξερχόμενα κύματα σε πολύ μακρινές αποστάσεις από την πηγή.

Το θεώρημα Green που συνδέεται με τον διαφορικό τελεστή Laplace, ο οποίος εμπλέκεται στην εξίσωση Helmholtz και θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια για την κατασκευή της λύσεως του κυματικού προβλήματος είναι το ακόλουθο:

$$\int_{D_*} (\psi_1 \Delta \psi_2 - \psi_2 \Delta \psi_1) dx = \int_{\partial D_*} \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \right) ds \quad (6.10)$$

όπου D_* το χωρίο στο οποίο ορίζονται οι συναρτήσεις ψ_1 και ψ_2 . Υπενθυμίζουμε ότι εκ κατασκευής η συνάρτηση Green G της εξίσωσης Helmholtz στον ελεύθερο χώρο, ικανοποιεί

$$\Delta_x G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + k^2 G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad (6.11)$$

όπου ο δείκτης \mathbf{x} στον διαφορικό τελεστή $\Delta_x = \nabla_x^2$ στις δύο διαστάσεις έχει προστεθεί για να μας υπενθυμίζει την χωρική μεταβλητή ως προς την οποία πραγματοποιείται η διαφορίση. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, σε ομογενές μέσο διάδοσης με κυματαριθμό $k = \omega/c$ δίδεται από τη σχέση $G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ στον διδιάστατο χώρο.

Την εξίσωση (6.13) θα μπορούσαμε να τη γράψουμε και στην παρακάτω μορφή:

$$\Delta_y G(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + k^2 G(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad (6.12)$$

και με χρήση της ιδιότητας της αμοιβαιότητας και συμμετρίας καταλήγουμε στη:

$$\Delta_y G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + k^2 G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \quad (6.13)$$

Η εξίσωση (6.9) μπορεί να γραφεί επίσης στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$\Delta_y \varphi_T(\mathbf{y}) + k^2 \varphi_T(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{X}_0) \quad (6.14)$$

Πολλαπλασιάζουμε στην συνέχεια την (6.13) με τη συνάρτηση κυματικού δυναμικού $\varphi(\mathbf{y})$ και την (6.14) με τη συνάρτηση Green $G(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ και αφαιρούμε κατά μέλη τα αποτελέσματα των γινομένων. Συνεχίζοντας, ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα στο χωρίο D_* , λαμβάνοντας:

$$\begin{aligned} & \int_{D_*(\tau_0)} \{G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \Delta_y \varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}) \Delta_y G(\mathbf{x}; \mathbf{y})\} d\mathbf{y} = \\ & = \int_{D_*(\tau_0)} \{\varphi(\mathbf{y}) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \cdot \delta(\mathbf{y} - \mathbf{X}_0)\} d\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) \end{aligned} \quad (6.15)$$

και αντικαθιστώντας στην σχέση (6.10) λαμβάνουμε τελικά:

$$\varphi_T(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) + \int_{\partial D} \left\{ G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \frac{\partial \varphi_T(\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - \varphi_T(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right\} ds(\mathbf{y}) \quad (6.16)$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί στην εξεταζόμενη περίπτωση την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσεως του ανωτέρω προβλήματος σκέδασης με χρήση του θεωρήματος Green, η οποία μας περιγράφει ότι το συνολικό πεδίο δίδεται από τον όρο πηγής $G(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0)$ που αποτελεί τη διέγερση και το συνοριακό ολοκληρωτικό όρο

$$\int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \varphi_T(\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - \varphi_T(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \right\} ds(\mathbf{y}) \quad (6.16)$$

για την αναπαράσταση του σκεδαζόμενου πεδίου, το οποίο συνίσταται από την υπέρθεση συνεχούς κατανομής πηγών (πρώτος όρος στο ολοκλήρωμα) με ένταση

$$\sigma(\mathbf{y}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})}, \quad \mathbf{y} \in \partial D, \quad (6.17)$$

και συνεχή κατανομή διπόλων (δεύτερος όρος στο ολοκλήρωμα) με ένταση

$$m(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \partial D, \quad (6.18)$$

πάνω στο σύνορο- επιφάνεια του σκεδαστή.

Εναλλακτικά, η λύση του ιδίου προβλήματος σκέδασης δύναται να κατασκευαστεί μέσω απλών κατανομών πηγών στο σύνορο που προσφέρουν ισοδύναμα την ολοκληρωτική αναπαράσταση του πεδίου σε προβλήματα σκέδασης όπως θα παρουσιαστεί στην συνέχεια, και θα εφαρμοστεί στην περίπτωση του προβλήματος H-plane bend διάδοσης στον καμπύλο HM κυματοδηγό.

6.3.2. Επίλυση του προβλήματος με κατανομές επιφανειακών δυναμικών

Στην περίπτωση της εξίσωσης Helmholtz μπορούμε να ανάγουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών σε συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις πρώτου ή δευτέρου είδους, αναζητώντας λύσεις σε μορφή κατάλληλου επιφανειακού δυναμικού.

Περιγράφουμε ακολούθως την μέθοδο που βασίζεται σε επιφανειακές κατανομές απλών πηγών (που συνθέτουν το δυναμικό απλού στρώματος). Δοσμένης μίας συνάρτησης στο σύνορο $\sigma \in C(\partial D)$, με την σ να περιγράφει την κατανομή απλών πηγών, το δυναμικό απλού στρώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D \quad (6.19)$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί λύση της εξίσωσης Helmholtz και άρα είναι αναλυτική στο πεδίο ορισμού. Το δυναμικό αυτό είναι λύση του εξωτερικού προβλήματος Neumann στο χώρο εάν η πυκνότητα σ αποτελεί λύση της ακόλουθης ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$\sigma(\mathbf{x}) - 2 \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} ds(\mathbf{y}) = -2g_N(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D \quad (6.20)$$

Η συνάρτηση g_N είναι η συνεχής συνάρτηση που αφορά τα συνοριακά δεδομένα για την κάθετη παράγωγο που παρουσιάστηκε στο εξωτερικό πρόβλημα Neumann. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι για την μοναδικότητα της λύσης του εξωτερικού προβλήματος Neumann ισχύει η επιπρόσθετη προϋπόθεση $\int_{\partial D} g_N ds = 0$.

Για να οδηγηθούμε στην εξίσωση (6.20) θα διαφορίσουμε αρχικά την σχέση (6.19):

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$$

και παρατηρούμε ότι καθώς προσεγγίζουμε το σύνορο του σκεδαστή από το χωρίο η παραπάνω σχέση λαμβάνει οριακά την μορφή:

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = -\frac{\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \partial D \quad (6.21)$$

Πολλαπλασιάζοντας, σε κάθε σημείο \mathbf{x} πάνω στο σύνορο, την τελευταία σχέση με το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} βρίσκουμε το εσωτερικό γινόμενο με το κάθετο στην επιφάνεια, του σκεδαστή, μοναδιαίο διάνυσμα. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την συνοριακή συνθήκη Neumann και να καταλήξουμε στην εξίσωση (6.20). Το αρνητικό πρόσημο στον πρώτο όρο του δεύτερου μέλους οφείλεται στην ειδική μορφή της συνάρτησης Green η οποία αντιστοιχεί σε πηγή αρνητικής έντασης.

Αντίστοιχα με τα προηγούμενα, στη συνέχεια περιγράφεται η μέθοδος που βασίζεται στο δυναμικό διπλού στρώματος και η εφαρμογή της στην επίλυση του προβλήματος Dirichlet. Δοσμένης μίας συνάρτησης $m \in C(\partial D)$, με την m να περιγράφει την πυκνότητα διπόλων, το δυναμικό διπλού στρώματος με συνεχή πυκνότητα διπόλων m δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} m(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (6.22)$$

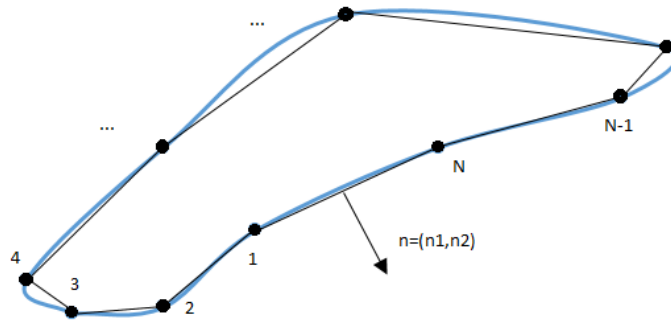
Το δυναμικό διπλού στρώματος είναι και αυτό λύση της εξίσωσης Helmholtz και επομένως αναλυτικό στο πεδίο $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$. Το δυναμικό φ θα είναι λύση του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet στο χώρο με την προϋπόθεση η συνεχής συνάρτηση m να είναι λύση της εξίσωσης:

$$m(\mathbf{x}) + 2 \int_{\partial D} m(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} ds(\mathbf{y}) = 2g_D(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D \quad (6.23)$$

6.3.3 Χαμηλοτάξια Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων

Αναζητώντας λύση με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων (Boundary Element Method, βλ. π.χ., Beer et al 2008), για την περίπτωση σκεδαστή γενικού σχήματος πεπερασμένων διαστάσεων καταλήγουμε σε διάφορες μεθόδους προσέγγισης του προβλήματος, όπως στην μέθοδο που βασίζεται στα θεωρήματα Green και στις μεθόδους που βασίζονται στις συνοριακές κατανομές δυναμικού απλού στρώματος (πηγές) και διπλού στρώματος (δίπολα). Λόγω της απλότητας της θα εστιάσουμε στην παρούσα εργασία στην μέθοδο των πηγών (αναπαράσταση δυναμικού απλού στρώματος) για την επίλυση των εξεταζόμενων προβλημάτων σκέδασης σε διδιάστατο άπειρο χώρο, εξωτερικά ενός σκεδαστή (σώματος) πεπερασμένων διαστάσεων.

Για να επιτευχθεί η προσέγγιση ενός σχήματος χωρίζουμε την επιφάνεια του σώματος σε στοιχειώδη τμήματα. Η μέθοδος αυτή καλείται “panel method” και τα στοιχειώδη τμήματα στην πιο απλή τους εκδοχή είναι ευθύγραμμα και συνθέτουν μια κλειστή πολυγωνική γραμμή, που προσεγγίζει τη γεωμετρία του σώματος. Πράγματι, όσο αυξάνονται στο πλήθος τα στοιχεία, τόσο προσεγγίζεται καλύτερα το πραγματικό σώμα, το πραγματικό δηλαδή σύνορο του σκεδαστή. Όλα αυτά γίνονται εμφανή στο σχήμα που ακολουθεί.



Εικ.27 Σκεδαστής πεπερασμένων διαστάσεων με στοιχειώδη τμήματα

Το μέσο των στοιχειωδών τμημάτων, όπως φαίνεται και στην προηγούμενη εικόνα, δεν ανήκει απαραίτητα στην πραγματική επιφάνεια του σκεδαστή. Κατά την χαμηλοτάξια μέθοδο, η τιμή της πυκνότητας πηγών σ στην επιφάνεια του σκεδαστή θα λαμβάνεται διαφορετική αλλά σταθερή σε κάθε στοιχειώδες τμήμα. Η πυκνότητα σ θεωρούμε πως διατηρείται αμετάβλητη σε κάθε τμήμα με σκοπό να επιτευχθεί αναλυτικά η ολοκλήρωση που παρέχει το επαγόμενο πεδίο. Το σ_i δείχνει την τιμή στο κάθε στοιχείο του συνόρου και ο δείκτης θα παίρνει τιμές $i=1,2,3,\dots,N^{(BEM)}$. Με αυτό τον τρόπο οδηγούμαστε σε ένα πρόβλημα με N διακριτών αγνώστων. Ακολούθως, ισχύει:

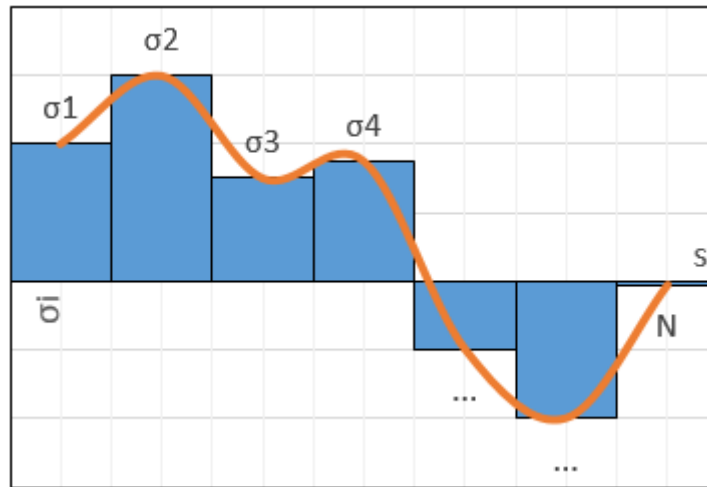
$$\partial D_N \rightarrow \partial D, \text{ για την περίπτωση όπου } N \rightarrow \infty,$$

με N συμβολίζεται το πλήθος των στοιχείων μερισμού του συνόρου - επιφάνεια του σκεδαστή ∂D . Σε ότι αφορά την άγνωστη συνάρτηση που είναι η ένταση πηγών

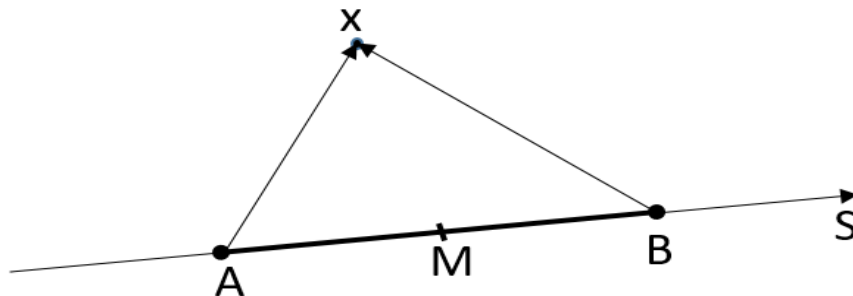
$\sigma(s) \equiv \sigma(y(s))$ πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή αυτή προσεγγίζεται τμηματικώς σταθερή σε κάθε ένα από τα στοιχεία (panels) του συνόρου ($i=1,2,\dots,N$ στο σχήμα 26), όπου θα έχει και διαφορετική τιμή $\sigma_i, i=1,2,\dots,N$ και προσεγγίζει την πραγματική ένταση πηγών στην επιφάνεια του σκεδαστή,

$$\|\sigma_N - \sigma(s)\|_{N \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Στην χαμηλοτάξια μέθοδο συνοριακών στοιχείων θεωρούμε ότι η ένταση πηγών σ διατηρείται σταθερή σε κάθε στοιχειώδες τμήμα (στοιχείο), όπου σ_i θα δείχνει την τιμή στο κάθε στοιχείο του συνόρου, και η ολοκληρωτική εξίσωση που αντιστοιχεί στην ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης (ανάλογα με το πρόβλημα) θα ικανοποιηθεί στο κέντρο κάθε στοιχείου το οποίο θα αριθμείται με τον ίδιο δείκτη ($i=1,2,\dots,N$). Με αυτό το τρόπο έχουμε δημιουργήσει λοιπόν ένα πρόβλημα N διακριτών αγνώστων $\sigma_i, i=1,2,\dots,N$, όπου N ο βαθμός μερισμού του συνόρου.



Εικ.28 Πυκνότητα των τμημάτων του σκεδαστή με τη γραμμική κατανομής



Εικ.29 Επαγόμενο δυναμικό από ευθύγραμμο συνοριακό στοιχείο AB

Για ένα στοιχείο AB, με άκρα A και B, θα ισχύει πως το δυναμικό σκέδασης που παράγει σε κάποιο σημείο του χώρου θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση, καθώς επιλέξαμε δυναμικό απλού στρώματος:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_A^B \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y})$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση Green για διδιάστατο χώρο δίνεται από τη σχέση $G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ και σε συνδυασμό με το παραπάνω δυναμικό, και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ένταση πηγών είναι σταθερή εντός κάθε στοιχείου, οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση που θα μας δίνει το δυναμικό σκέδασης του συγκεκριμένου στοιχείου AB:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \sigma_{AB} \int_A^B H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) ds(\mathbf{y}) = \sigma_{AB} U_{AB}, \quad (6.24)$$

όπου $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in AB$ και

$$U_{AB}(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \int_A^B H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) ds, \quad (6.25)$$

για $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ ή $\mathbf{x} \in \partial D$,

το επαγόμενο δυναμικό από το στοιχείο AB με σταθερή ένταση πηγών σ_{AB} στο πεδιακό σημείο \mathbf{x} . Συνεχίζοντας, με παραγωγή της (6.24) καταλήγουμε στην σχέση:

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial n} = \sigma_{AB} (D_{AB} + \mathbf{n} F_{AB}(\mathbf{x})), \quad (6.26)$$

όπου $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ το κάθετο διάνυσμα στο σημείο υπολογισμού \mathbf{x} πάνω στο σύνορο

$D_{AB} = 1/2$ αν $\mathbf{x} \in AB$, και $D_{AB}(\mathbf{x}) = 0$ σε άλλη περίπτωση,

$$F_{AB}(\mathbf{x}) = -\frac{ik}{4} \int_A^B H_1^{(1)}\left(k\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) Q ds, \quad (6.27\alpha)$$

η επαγόμενη κάθετη ταχύτητα από το στοιχείο AB στο σημείο \mathbf{x} πάνω στο σύνορο και

$$Q = \left(\frac{x_1 - y_1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} n_2 \right) \quad (6.27\beta)$$

Όπως αναφέρθηκε ήδη, τα ολοκληρώματα στις σχέσεις (6.25) και (6.27) είναι ιδιόμορφα όταν το \mathbf{x} ανήκει πάνω στο ευθύγραμμο στοιχείο AB. Σύμφωνα με τη εφαρμοζόμενη μέθοδο Boundary Element Method – collocation, κάτι τέτοιο θα συμβεί στην περίπτωση που το στοιχείο ελέγχου θα συμπίπτει με το κέντρο του εκάστοτε στοιχείου. Όμως τότε το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα (6.24) παρουσιάζει ασθενή ολοκληρώσιμη ιδιομορφία (λογαριθμικό απειρισμό), υπολογίζεται εύκολα με απλό μετασχηματισμό. Αντιθέτως το ολοκλήρωμα της σχέσης (6.27) είναι ισχυρά ιδιόμορφο καθώς η συνάρτηση:

$$H_1^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \approx -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

όταν $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ παρουσιάζει ισχυρή ιδιομορφία και το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα υπάρχει μόνο κατά την έννοια της κύριας κατά Cauchy τιμής αυτής. Αυτό θα συμβεί όταν υπολογίζεται η επαγόμενη κάθετη ταχύτητα (σχέση 6.27) από το κάθε ευθύγραμμο στοιχείο AB στο κέντρο του, δηλαδή όταν το σημείο, στην εικόνα 28, λαμβάνεται στο κοινό μέσο M του στοιχείου AB. Από το ολοκλήρωμα της σχέσεως (6.27) παρατηρούμε πως οι συνεισφορές απειρίζονται για κάθε $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ αλλά είναι συμμετρικά αντίθετες από τις κατανεμημένες πηγές εκατέρωθεν του κέντρου του στοιχείου. Επομένως, λόγω συμμετρίας προκύπτει ότι το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα (6.27) μηδενίζεται ως συνεισφορά στην κάθετη ταχύτητα στο κέντρο του στοιχείου από την κάθε πηγή σταθερής έντασης στο κέντρο του ίδιου στοιχείου.

Πρόβλημα Neumann

Η κάθετη παράγωγος του πεδίου στο σύνορο από όλη την κατανομή πηγών σταθερής έντασης $\sigma_i, i=1,2,\dots,N$, υπολογιζόμενη στα κέντρα $\mathbf{x}_i, i=1,2,\dots,N$ των στοιχείων θα δίνεται από τη σχέση:

$$\sum_{j=1}^N \sigma_j F_j(\mathbf{x}_i) = \hat{g}_N(\mathbf{x}_i) = -\mathbf{n}(\mathbf{x}_i) \varphi_i(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_i \in \partial D_N, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (6.28)$$

όπου $\varphi_i(\mathbf{x})$ το δυναμικό του προσπίπτοντος κύματος. Η τελευταία σχέση αποτελεί ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους, από όπου υπολογίζεται η ένταση των πηγών $\sigma_i, i=1,2,\dots,N$, στα στοιχεία του συνόρου. Από την ανάλυση που προηγήθηκε γνωρίζουμε ότι η αυτεπαγόμενη συνεισφορά του κάθε στοιχείου σταθερής κατανομής πηγών στην κάθετη ταχύτητα στο κέντρο του θα είναι $F_j(\mathbf{x}_i) = 0.5$ (με την επιλογή του καθέτου διανύσματος με φορά προς τα εξωτερικά του χωρίου).

Ακολουθώντας, το δυναμικό σε κάθε σημείο του χώρου και πάνω στο σύνορο υπολογίζεται με τη βοήθεια των ανωτέρω σχέσεων ως:

$$\varphi(\mathbf{x} \in \partial D) = \sum_{j=1}^N \sigma_j U_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D. \quad (6.29)$$

Πρόβλημα Dirichlet

Στην περίπτωση του προβλήματος Dirichlet χρησιμοποιώντας την σχέση που παρέχει το δυναμικό που προκαλείται από το στοιχειώδες συνοριακό στοιχείο AB στο σημείο x , λαμβάνουμε από την υπέρθεση:

$$\sum_{j=1}^N \sigma_j U_j(\mathbf{x}_i) = \hat{g}_D(\mathbf{x}_i) \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, N, \quad (6.30)$$

όπου

$$\hat{g}_D(\mathbf{x}_i) = -\varphi_I(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_i \in \partial D_N, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6.31)$$

τα δεδομένα Dirichlet πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή.

Μικτό πρόβλημα

Προφανώς η λύση του μικτού προβλήματος παρέχεται από τη λύση του συστήματος

$$\sum_{j=1}^N \sigma_j (\alpha F_j(\mathbf{x}_i) + \beta U_j(\mathbf{x}_i)) = \hat{g}_M(\mathbf{x}_i), \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, N$$

όπου

$$\hat{g}_M(\mathbf{x}_i) = -(\alpha \mathbf{n}(\mathbf{x}_i) \nabla \varphi_I(\mathbf{x}_i) + \beta \varphi_I(\mathbf{x}_i)), \quad \mathbf{x}_i \in \partial D_N, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

με α, β κατάλληλα ορισμένους συντελεστές στο σύνορο-επιφάνεια του σκεδαστή.

6.3.4 Εφαρμογή μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων

Προκειμένου να παρουσιαστεί η αξιοπιστία της μεθόδου BEM στην μοντελοποίηση προβλημάτων σε φραγμένα χωρία, με σύνορα της μορφής των θεωρούμενων ΗΜ κυματοδηγών, εξετάζουμε στη συνέχεια τη διακριτοποίηση καμπύλου 90° κυματοδηγού, τύπου WR75 σε συνοριακά στοιχεία, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 30. Λεπτομέρειες για τις γεωμετρικές διαστάσεις και λοιπά στοιχεία του καμπύλου κυματοδηγού παρέχονται στο επόμενο κεφάλαιο. Για παραγωγή ενδεικτικών αποτελεσμάτων τα συνοριακά στοιχεία στα οποία έχουμε χωρίσει το σύνορο είναι:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4,$$

και η κατανομή είναι

Πλευρά (1), $N_1 \rightarrow 20$ στοιχεία

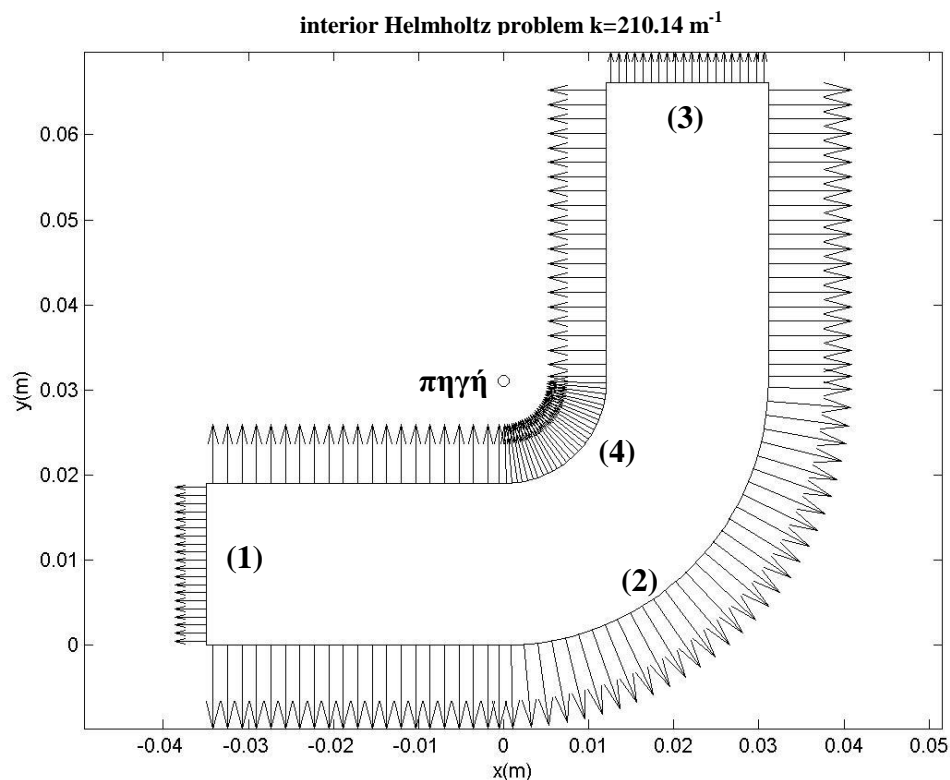
Πλευρά (2), $N_2 \rightarrow 72$ στοιχεία

Πλευρά (3), $N_3 \rightarrow 20$ στοιχεία

Πλευρά (4), $N_4 \rightarrow 56$ στοιχεία

Σύνολο, $N \rightarrow 168$ στοιχεία

Εξετάζουμε στην συνέχεια υπολογισμούς πεδίων με την μέθοδο BEM σε αντιπροσωπευτικές συχνότητες 10GHz και 15GHz που αντιστοιχούν στα όρια του διαστήματος συχνοτήτων όπου ο κυματοδηγός λειτουργεί στην περιοχή H-single mode bend.

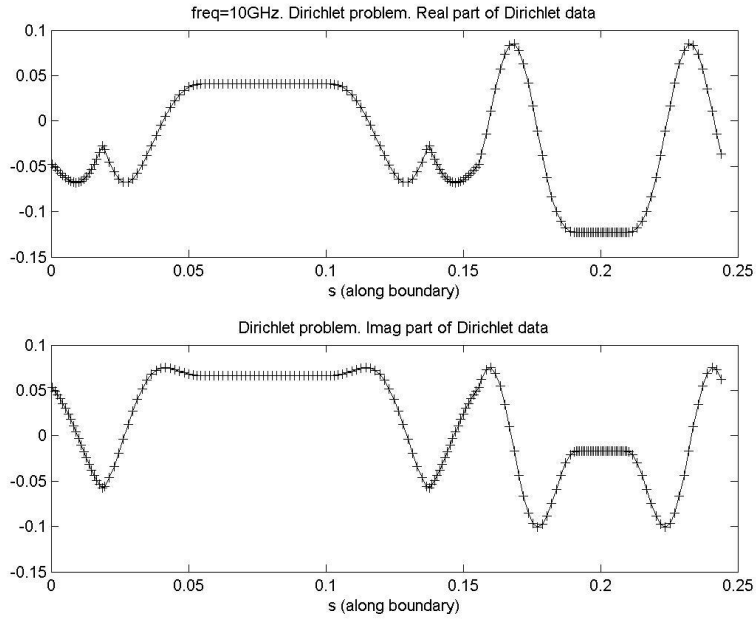


Εικ.30. Διακριτοποίηση τμήματος HM κυματοδηγού WR75-90° σε συνοριακά στοιχεία και απεικόνιση της κατανομής του καθέτου διανύσματος με διεύθυνση προς τα εξωτερικά του σώματος

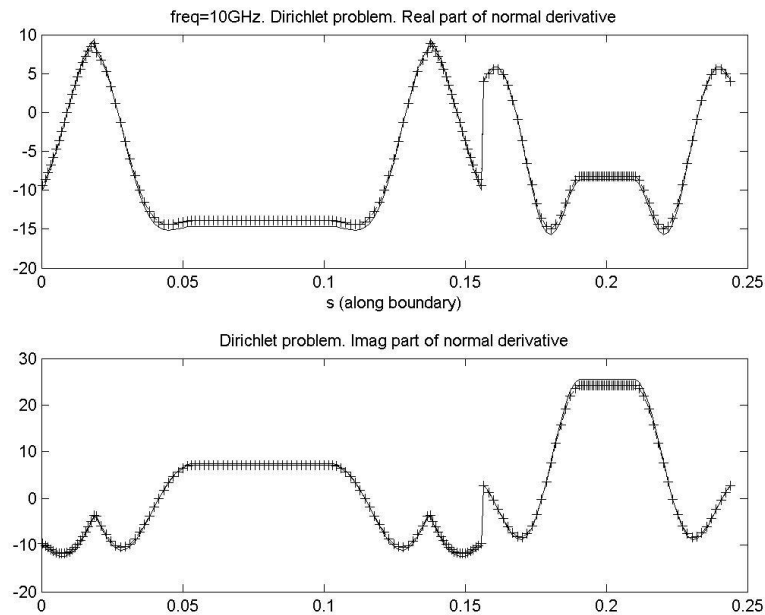
Για την κατασκευή αναλυτικών λύσεων και σύγκριση με τους υπολογισμούς στο φραγμένο χωρίο, θεωρούμε τα πεδία από σημειακή μονοχρωματική πηγή εκτός του χωρίου που αντιπροσωπεύει το κυματοδηγό, η θέση της οποίας είναι $\mathbf{x}_s = (x_s = 0, y_s = 3.1\text{cm})$ που εικονίζεται στην εικόνα 30. Διαθέτουμε λοιπόν την αναλυτική δομή του πεδίου:

$$\varphi(\mathbf{x}/\mathbf{x}_s) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|), \quad k = \omega / c$$

από την οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε αναλυτικά συνοριακά δεδομένα Dirichlet, Neumann, μικτά κλπ, προκειμένου να διατυπώσουμε προβλήματα συνοριακών τιμών στο κλειστο χωρίο και στη συνέχεια να τα επιλύσουμε με τη μέθοδο BEM και να συγκρίνουμε με την ανωτέρω αναλυτική λύση εντός του χωρίου και στο σύνορο (από την εσωτερική πλευρά). Προφανώς μπορεί να κατασκευαστεί συνδυαστικά πληθώρα λύσεων για το έλεγχο της μεθόδου. Η ανωτέρω επιλογή δημιουργεί απότομη μεταβολή των συνοριακών δεδομένων στην γειτονιά της πηγής και μπορεί να δημιουργήσει σημαντική

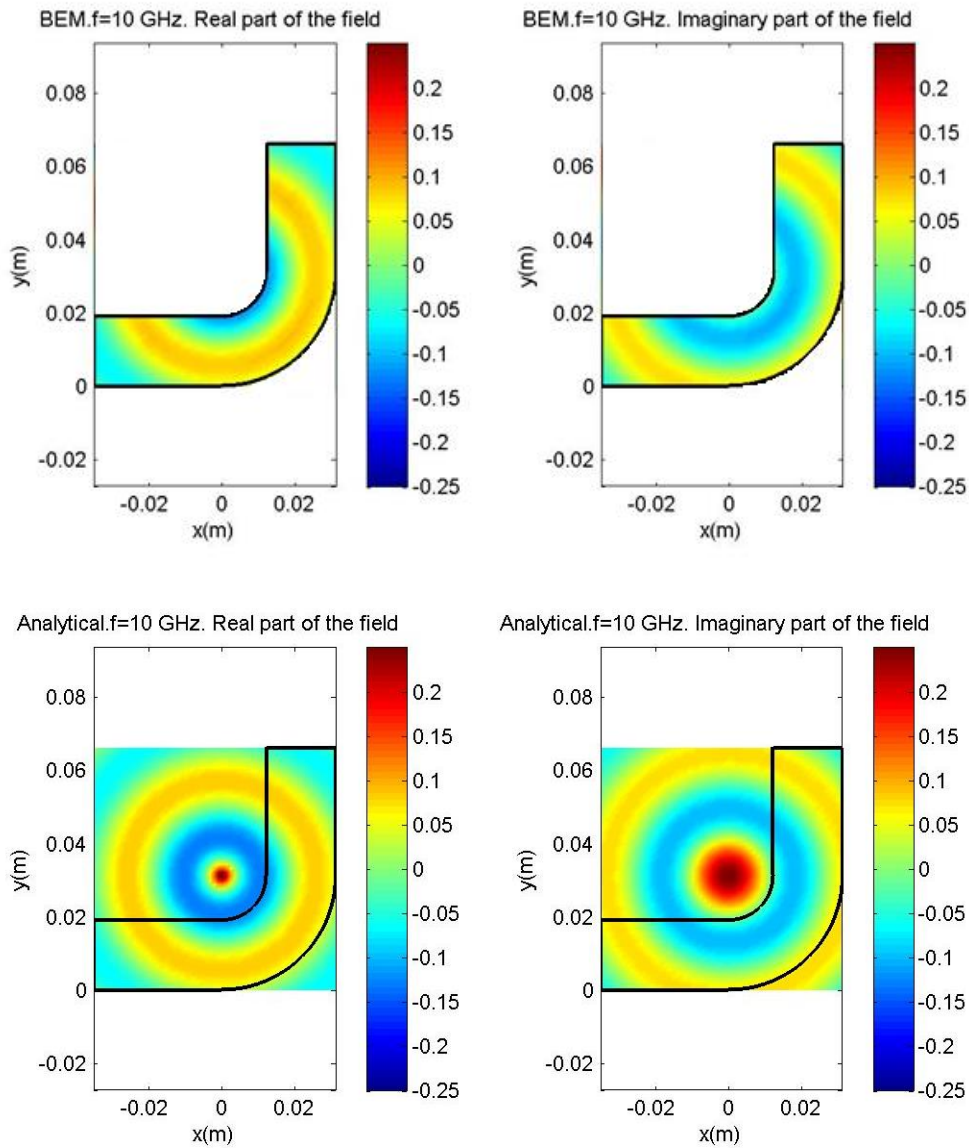


Εικ.31 Αποτελέσματα στο σύνορο S στην περίπτωση πηγής, συχνότητα 10GHz

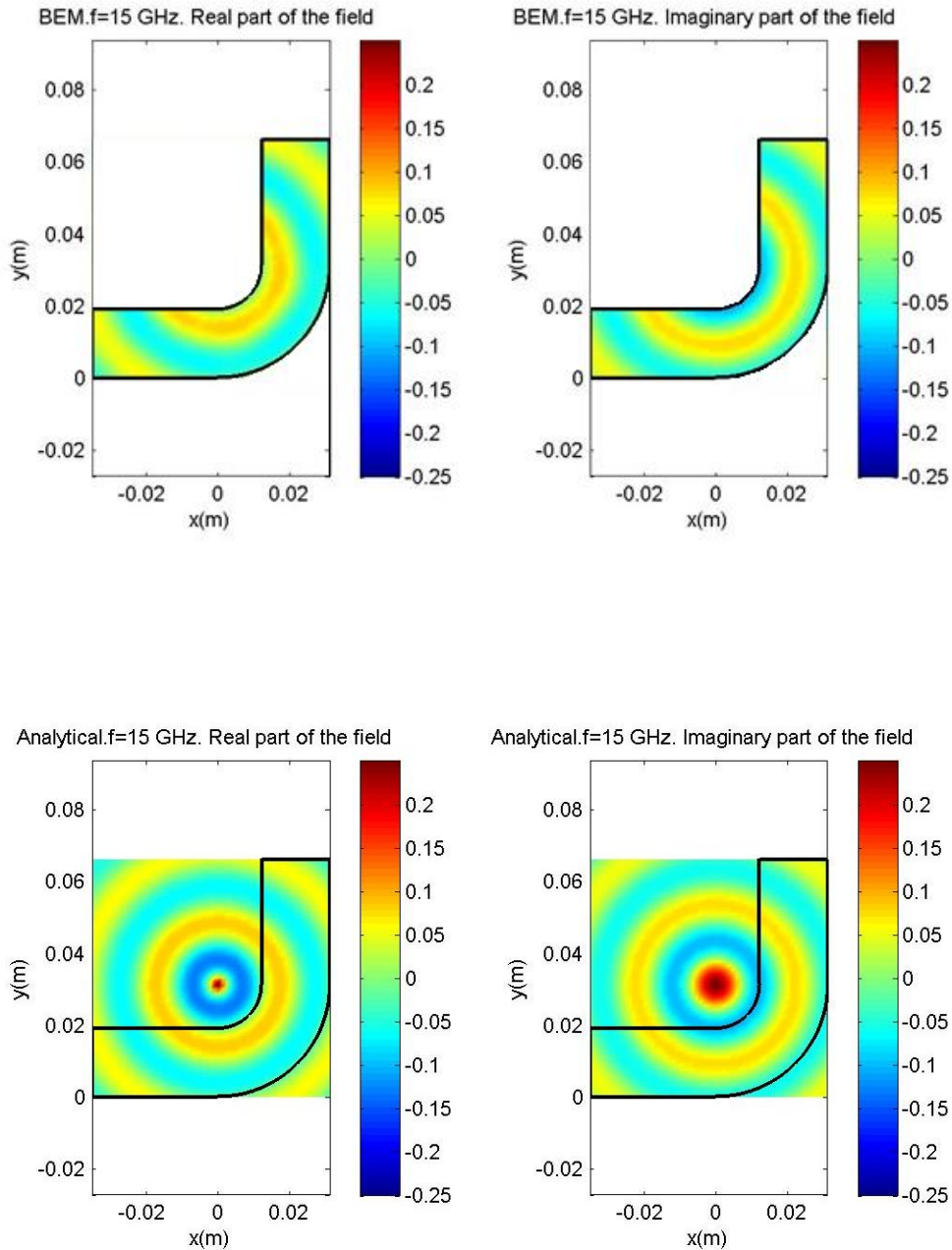


Εικ.32 Αποτελέσματα στο σύνορο S στην περίπτωση πηγής, συχνότητα 10GHz

δυσκολία στην επίλυση του προβλήματος λόγω ιδιομορφίας καθώς η πηγή προσεγγίζει το σύνορο. Ενδεικτικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στις Εικόνες 31-32 για συχνότητα 10GHz ($c=10^9$ m/s).



Εικ.33 Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σε χωρίο που αντιστοιχεί σε HM κυματοδηγό WR75-90° σε συχνότητα 10GHz



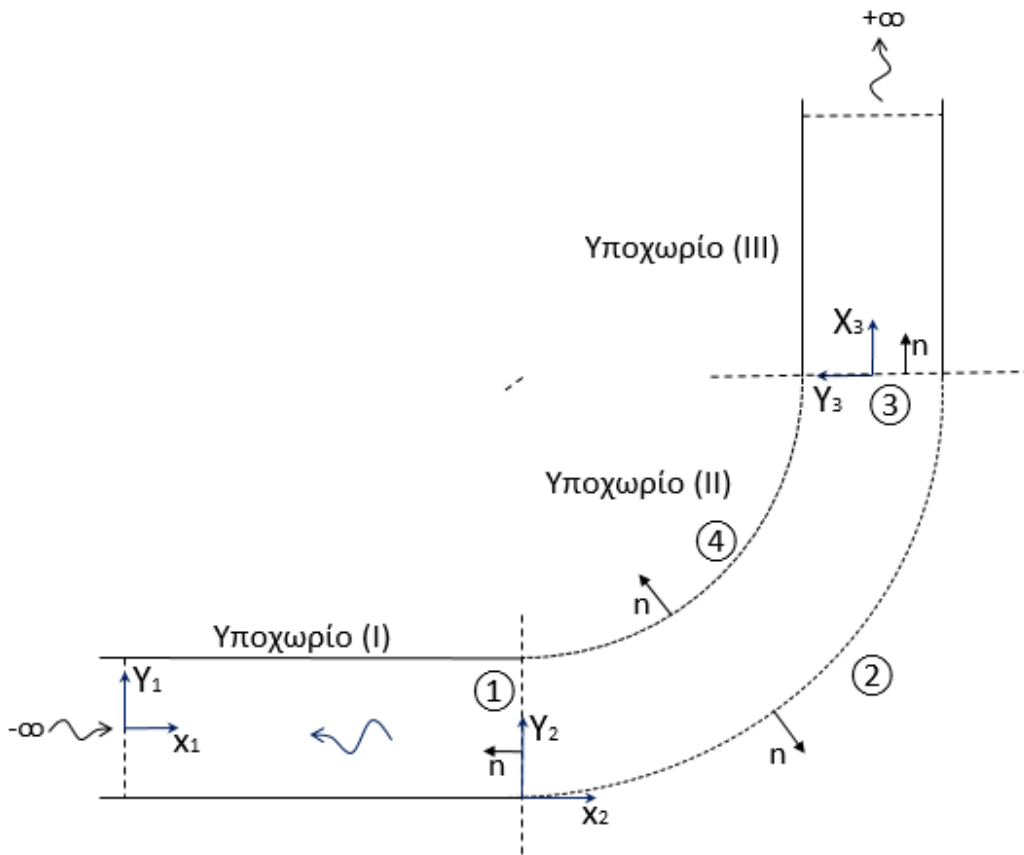
Εικ.34 Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης σε χωρίο που αντιστοιχεί σε ΗΜ κυματοδηγό WR75-90° σε συχνότητα 15GHz

Από τα παραπάνω σχήματα που επιλέξαμε για την αριθμητική επίλυση των προβλημάτων, παρατηρούμε πως έχουμε πολύ καλή ταύτιση των αριθμητικών (διακεκομμένη γραμμή με σταυρούς) με τις αναλυτικές λύσεις (συνεχής γραμμή) για το

δυναμικό, όσον αφορά το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος για τις εξεταζόμενες συχνότητες. Το αποτέλεσμα μας αποδεικνύει πως η μέθοδος συνοριακών στοιχείων είναι κατάλληλη για την αναζήτηση αριθμητικών λύσεων πιο σύνθετων προβλημάτων κυματικής διάδοσης σε καμπύλους ΗΜ χωρίς και με τη παρουσία σκεδαστή, όπως αυτά που θα παρουσιαστούν στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει η προαναφερθείσα μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για πεπερασμένο σχήμα, γενικής γεωμετρίας, όχι μόνο σε εσωτερικά αλλά και σε εξωτερικά προβλήματα (που ικανοποιούν τη κατάλληλη συμπεριφορά στο άπειρο).

7. Εφαρμογή Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων σε Καμπύλο Κυματοδηγό



Εικ.35 Ανάλυση καμπύλου κυματοδηγού

Στο κεφάλαιο 2 έγινε μία αναφορά σε καμπυλόγραμμο κυματοδηγό. Ο κυματοδηγός του ακόλουθου σχήματος μπορεί να αναλυθεί σε τρεις επιμέρους κυματοδηγούς: δύο ημι-άπειρους οριζώντιους κυματοδηγούς και ένα ενδιάμεσο πεπερασμένο καμπύλο τμήμα. Κατά αυτό τον τρόπο ορίζονται τα υποχωρία I, II και III. Για τα τμήματα του συνόρου του φραγμένου τμήματος του κυματοδηγού στο ενδιάμεσο χωρίο χρησιμοποιείται η ακόλουθη αρίθμηση:

- (1) διαχωριστική διεπιφάνεια μεταξύ ημι-άπειρου κυματοδηγού – εισόδου (I) και καμπύλου τμήματος (II)
- (2) κάτω μεταλλική επιφάνεια καμπύλου τμήματος (II)
- (3) διαχωριστική διεπιφάνεια μεταξύ ημι-άπειρου κυματοδηγού – εξόδου (III) και καμπύλου τμήματος (II)
- (4) άνω μεταλλική επιφάνεια καμπύλου τμήματος (II) ,

όπως παρουσιάζεται στην εικόνα 35.

Όπως επίσης προαναφέρθηκε, η συχνότητα αποκοπής της κάθε διαμόρφωσης εξαρτάται από το μέγεθος της διατομής του κυματοδηγού. Για αυτό τον λόγο, για τη θεμελιώδη διαμόρφωση $n=1, m=0$ (TE_{10}), η συχνότητα αποκοπής ορίζεται ως:

$$\omega_{10}^c = \frac{\pi c_0}{A}$$

$$f_{10}^c = \frac{c_0}{2A}$$

Οι συχνότητες αποκοπής των υπόλοιπων διαμορφώσεων ικανοποιούν την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\omega_{nm}^c}{\omega_{10}^c} = \sqrt{n^2 + m^2 \left(\frac{A}{B}\right)^2}$$

Στην περίπτωση κυματοδηγού ορθογωνικής διατομής με διαστάσεις $A/B \geq 2$, το οποίο ικανοποιείται για κυκλική συχνότητα μεταξύ των τιμών $\omega_{10}^c < \omega < \omega_{20}^c$, διαδίδεται μόνο η μικρότερη TE_{10} διαμόρφωση (κυρίαρχη διαμόρφωση). Σε αυτή την περίπτωση, το φάσμα συχνοτήτων που υποστηρίζει την κυρίαρχη διαμόρφωση TE_{10} μεγιστοποιείται σε μία ολόκληρη μάντα συχνοτήτων, $\omega_{10}^c < \omega < \omega_{20}^c = 2\omega_{10}^c$

Για την H -plane bend αναπαράσταση του πεδίου το φάσμα συχνοτήτων για την κυρίαρχη διαμόρφωση μεγιστοποιείται στο διάστημα $\omega^c < \omega < 2\omega^c$ και οι τιμές του

κυματαριθμού υπολογίζονται με βάση την σχέση: $k_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2}$

Να υπενθυμίσουμε ότι $E^1=0, E^2=0$ και το E^3 που είναι συνάρτηση και των τριών διαστάσεων, αποδίδεται τελικά από μία συνάρτηση $\varphi(x_i, y_i)$ γιατί στην τρίτη διεύθυνση έχουμε διαλέξει η ένταση E^3 που αντιστοιχεί να είναι σταθερή.

7.1 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Με βάση τις ανωτέρω παρατηρήσεις το πρόβλημα διέπεται από την εξίσωση Helmholtz στο κεντρικό επίπεδο συμμετρίας του κυματοδηγού:

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \quad (7.1)$$

με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet στα άνω και κάτω μεταλλικά τοιχώματα:

$$\varphi = 0,$$

και στην φυσική απαίτηση όταν ο κυματοδηγός διεγείρεται από την κύρια μορφή, σε μακρινές αποστάσεις στο ημι-άπειρο τμήμα εισόδου το πεδίο να συμπεριφέρεται ως ένα εισερχόμενο κύμα που αντιστοιχεί στη διεγείρουσα ιδιομορφή και το αντίστοιχο ανακλώμενο κύμα, και στην άλλη πλευρά, σε μακρινές αποστάσεις στο ημι-άπειρο τμήμα εξόδου να συμπεριφέρεται ως ένα διαδιδόμενο κύμα στην κύρια ιδιομορφή. Οι απαιτήσεις αυτές εκφράζονται καλύτερα εισάγοντας τοπικά συστήματα συντεταγμένων σε κάθε τμήμα και χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις αναπαραστάσεις του πεδίου στα ημι-άπειρα τμήματα, όπως περιγράφεται αναλυτικά και στην συνέχεια:

▪ Υποχωρίο (I)

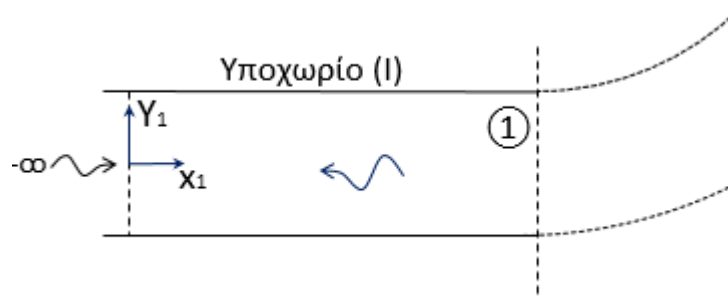
Στο υποχωρίο I - αριστερή ημι-άπειρη λωρίδα –το πεδίο αποτελείται από το άθροισμα του ηλεκτρομαγνητικού σήματος που εισέρχεται στον κυματοδηγό, του ανακλώμενου κύματος που επιστρέφει με φορά από το υποχωρίο II στο I, και των αποσβενύμενων (evanescent) κυμάτων, που μηδενίζονται σε μεγάλες αποστάσεις στο υποχωρίο I (μακρινές από την καμπύλωση). Ο δείκτης I στις συντεταγμένες x και y , υποδηλώνει το τοπικό σύστημα συντεταγμένων στην περιοχή στην οποία αναφερόμαστε. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Κεφ.4.2, η αναπαράσταση του πεδίου στο υποχωρίο I είναι:

$$\varphi_1(x_1, y_1) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y_1}{B_1} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp(ik_1^{(I)}x_1) + A_1^{(I)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y_1}{B_1} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp(-ik_1^{(I)}x_1) + \sum_{n \geq 2} A_n^{(I)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_1}{B_1} + \frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \exp(k_n^{(I)}x_1) \quad (7.2)$$

όπου με

$$A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y_1}{B_1} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp(ik_1^{(I)}x_1)$$

περιγράφεται το ηλεκτρομαγνητικό σήμα που εισέρχεται στον κυματοδηγό, το A αποτελεί σταθερό συντελεστή και θα ορισθεί αυθαίρετα ίσο με την μονάδα,



Εικ.36 Υποχωρίο (I) – είσοδος καμπύλου κυματοδηγού

$A_1^{(l)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y_1}{B_1} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp(-ik_1^{(l)} x_1)$ το ανακλώμενο κύμα με φορά από την περιοχή II στην I, και επομένως ο συντελεστής ανάκλασης (reflection coefficient, ο οποίος θα είναι προφανώς συνάρτηση της συχνότητας) θα δίνεται από τη σχέση

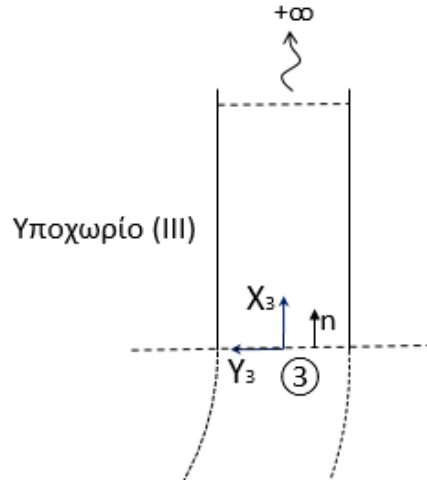
$$R(\omega) = A_1^{(l)} / A \quad (7.3)$$

Επίσης, οι υπόλοιποι όροι της ανωτέρω σχέσης (7.2)

$$\sum_{n \geq 2} A_n^{(l)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_1}{B_1} + \frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \exp(k_n^{(l)} x_1) \quad (7.4)$$

αποτελούν το άθροισμα των αποσβενύμενων ιδιομορφών.

▪ Υποχωρίο (III)



Εικ.37 Υποχωρίο (III) – έξοδος καμπύλου κυματοδηγού

Στο υποχωρίο III - δεξιά ημι-άπειρη λωρίδα – το πεδίο αποτελείται από το άθροισμα του ηλεκτρομαγνητικού σήματος που εξέρχεται από τον κυματοδηγό (διαδιδόμενο κύμα) και των αποσβενόμενων (evanescent) κυμάτων, που μηδενίζονται στο χωρίο σε μεγάλες αποστάσεις από το καμπύλο τμήμα. Δεν θεωρείτε σε αυτή την περίπτωση συνιστώσα επιστροφής του σήματος. Ο δείκτης 3, υποδηλώνει το τοπικό σύστημα συντεταγμένων στην περιοχή στην οποία αναφερόμαστε. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Κεφ.4.2, η αναπαράσταση του πεδίου στο υποχωρίο III είναι:

$$\begin{aligned} \varphi_{III}(x_3, y_3) = & A_1^{(III)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y_3}{B_2} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp(ik_1^{(III)} x_3) + \\ & + \sum_{n \geq 2} A_n^{(III)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_3}{B_2} + \frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \exp(-k_n^{(III)} x_3) \end{aligned} \quad (7.5)$$

όπου με

$A_1^{(III)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y_3}{B_2} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp(ik_1^{(III)} x_3)$ περιγράφεται το ηλεκτρομαγνητικό σήμα που εξέρχεται από τον κυματοδηγό στην περιοχή III, και επομένως ο συντελεστής διάδοσης (transmission coefficient, ο οποίος θα είναι προφανώς συνάρτηση της συχνότητας) θα δίνεται από τη σχέση:

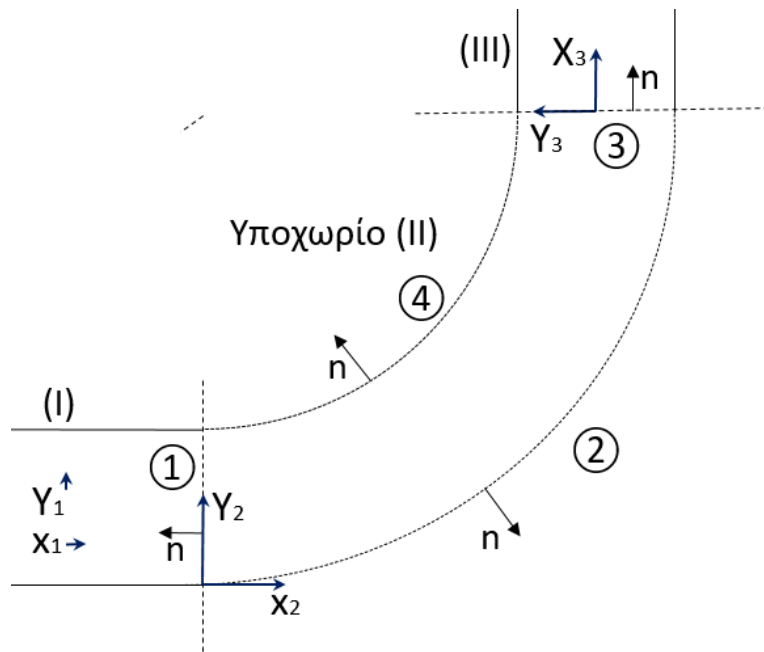
$$T(\omega) = A_1^{(III)} / A \quad (7.6)$$

Επίσης, οι υπόλοιποι όροι της ανωτέρω σχέσης (7.5)

$$\sum_{n \geq 2} A_n^{(III)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_3}{B_2} + \frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \exp(-k_n^{(I)} x_3), \quad (7.7)$$

αποτελούν το άθροισμα των αποσβενύμενων κυμάτων στην περιοχή αυτή.

▪ **Υποχωρίο (II) – ενδιάμεση περιοχή**



Εικ.38 Υποχωρίο (II) – καμπύλος κυματοδηγός

Το πεδίο $\varphi_{II}(x_2, y_2)$ στην ενδιάμεση περιοχή II, η οποία περιλαμβάνει την ανομοιογένεια λόγω μεταβαλλόμενης γεωμετρίας συνόρων κυματοδηγού (και στο επόμενο κεφάλαιο και την υπαρξη πρόσθετων ανομοιογενειών τύπου πεπερασμένων σκεδαστών εντός του καμπύλου κυματοδηγού), ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz

$$\Delta\varphi_{II}(x_2, y_2) + k^2\varphi_{II}(x_2, y_2) = 0, \tag{7.8}$$

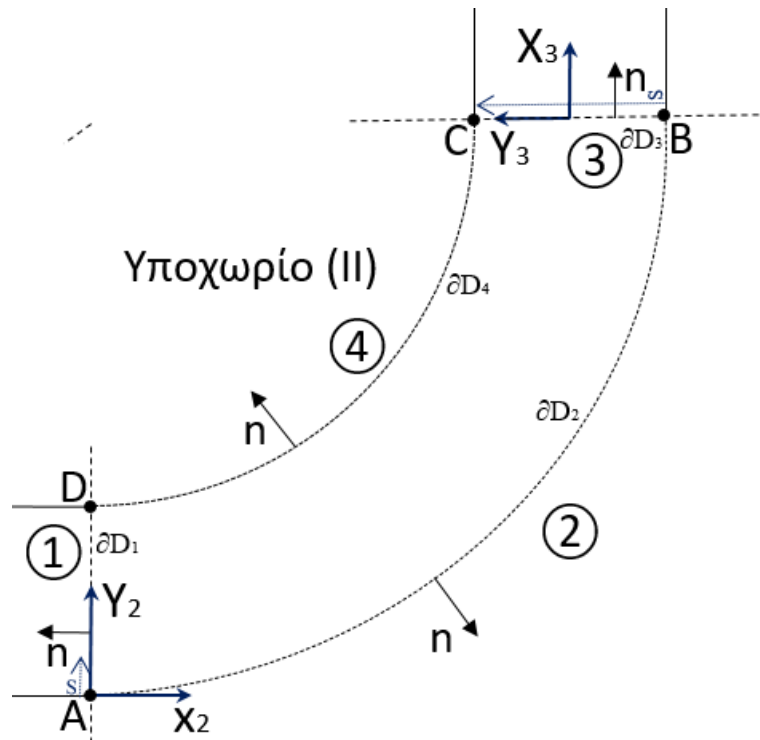
τις συνοριακές συνθήκες στα μεταλλικά τοιχώματα του κυματοδηγού

$$\varphi_{II}(x_2, y_2) = 0, \text{ στα τμήματα (2) και (4)} \tag{7.9}$$

καθώς και τις συνθήκες συναρμογής του πεδίου στις διατομές εισόδου και εξόδου του κυματοδηγού που γράφονται στη ακόλουθη μορφή:

Συνθήκες συναρμογής στην είσοδο του καμπύλου τμήματος

- $\varphi_{II}(x_2, y_2) = \varphi(AD)$, όπως αυτό παρέχεται από την αναπαράσταση (7.2) στο υποχωρίο (I)
- $\frac{\partial\varphi_{II}(x_2, y_2)}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi(AD)}{\partial x_1}$, επίσης όπως αυτό παρέχεται από την αναπαράσταση (7.2) στο υποχωρίο (I)



Εικ.39 Υποχωρίο (II) – σημεία κυματοδηγού

Συνθήκες συναρμογής στην έξοδο του καμπύλου τμήματος

- $\varphi_{II}(x_2, y_2) = \varphi(BC)$, όπως αυτό παρέχεται από την αναπαράσταση (7.5) στο υποχωρίο (III)
- $\frac{\partial \varphi_{II}(x_2, y_2)}{\partial n} = \frac{\partial \varphi(BC)}{\partial x_3}$, επίσης όπως αυτό παρέχεται από την αναπαράσταση (7.5) στο υποχωρίο (III)

7.2 Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων με κατανομές πηγών

Για να υπολογίσουμε το πεδίο στην ενδιάμεση αυτή περιοχή θα κάνουμε χρήση της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων (Boundary Element Method).

Αρχικά, χωρίζουμε την εξωτερική επιφάνεια, τις πλευρές του υποχωρίου II σε N στοιχεία. Τα N στοιχεία προκύπτουν ως άθροισμα των στοιχείων που ορίζουν οι τέσσερις επιμέρους πλευρές, (1) - (DA), (2) - (AB), (3) - (BC), (4) - (CD), οπότε

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 ,$$

όπου N_1, N_2, N_3, N_4 είναι τα συνοριακά στοιχεία των συνόρων ∂D_1 (είσοδος – input), ∂D_2 (κάτω μεταλλικό τοίχωμα), ∂D_3 (έξοδος – output) και ∂D_4 (άνω μεταλλικό τοίχωμα), αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας το δυναμικό απλού στρώματος (βλ. Κεφ.6) θα έχουμε τη γενική απεικόνιση του δυναμικού σε όλο το υποχωρίο Π που συμβολίζεται με D , εκτός των συνόρων, να δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(P, Q) = \int_{\partial D} \sigma(Q) G(P, Q) ds(Q), \text{ για } P \in D \cup \partial D \quad (7.10)$$

Λόγω της ιδιαιτερότητας της συνοριακής κατανομής πηγών γνωρίζουμε πως η διαφορίση του αναπαριστάμενου δυναμικού παρουσιάζει μια ιδιομορφία καθώς προσεγγίζουμε το σύνορο του χώρου, και επομένως η γενική έκφραση θα γράφεται στη μορφή:

$$\nabla \varphi = \begin{cases} \nabla_x \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \text{ για } \mathbf{x} \in D \\ \frac{\sigma(\mathbf{x}) \mathbf{n}}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \text{ για } \mathbf{x} \in \partial D \end{cases} \quad (7.11)$$

Υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο της σχέσης (7.11) με το κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} και καταλήγουμε στη σχέση:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\partial D} \equiv \mathbf{n} \nabla \varphi = \frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n(\mathbf{y})} ds(\mathbf{y}) \quad (7.12)$$

όπου συμβολίζουμε με τον όρο $\mathbf{n} \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial G}{\partial n}$. Σε αντιδιαστολή με τη σχέση (6.21), σε αυτή την περίπτωση ο συντελεστής του πρώτου όρου στο δεξί μέλος των ανωτέρω εξισώσεων για σημεία πάνω στο σύνορο έχει θετικό πρόσημο, καθότι, σε αντίθεση με το προηγούμενο Κεφάλαιο, εδώ έχει επιλεγεί στο φραγμένο υποχωρίο Π (καμπύλο τμήμα του κυματοδηγού) το κάθετο διάνυσμα με φορά του προς τα εξωτερικά του χωρίου.

Με χρήση των σχέσεων (7.9), (7.10) και (7.12) βρίσκουμε τις συνοριακές συνθήκες για τις επιμέρους επιφάνειες-σύνορα του υποχωρίου Π .

Η συνθήκη μαλακού συνόρου (ομογενής Dirichlet) που θα ικανοποιείται στα άνω και κάτω μεταλλικά τοιχώματα, θα είναι:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = 0, \text{ για } x \in \partial D_{2,4} \quad (7.13)$$

Τέλος, θα χρησιμοποιηθούν και οι σχέσεις που εξασφαλίζουν την ομαλή συναρμογή του πεδίου στις διεπιφάνειες μεταξύ των υποχωρίων I και II, καθώς και μεταξύ των υποχωρίων II και III, δηλαδή στις διατομές εισόδου (AD) και εξόδου (BC) του καμπύλου τμήματος του ΗΜ κυματοδηγού.

Σχέσεις συναρμογής στην είσοδο του καμπύλου τμήματος

Στο πρώτο κατακόρυφο σύνορο διεπιφανειών στο ∂D_1 - είσοδος, οι σχέσεις συναρμογής θα έχουν την παρακάτω μορφή ώστε να εξασφαλιστεί η συνέχεια των εξισώσεων δυναμικού:

$$\varphi(x_2(s), y_2(s)) = \varphi_I(x_1, y_1), \text{ για } x_1 \in AD \text{ και } -B_1/2 < y_1 < B_1/2, \quad (7.14)$$

και

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}(x_2(s), y_2(s)) = -\frac{\partial \varphi_I}{\partial x_1}(x_1, y_1), \text{ για } x_1 \in AD \text{ και } -B_1/2 < y_1 < B_1/2, \quad (7.15)$$

Η παράγωγος ως προς το x_1 εμφανίζει αρνητικό πρόσημο καθώς έχει αντίθετη φορά από το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} στη διατομή εισόδου (AD) στο ενδιαμέσο χωρίο.

Με αντικατάσταση των εξισώσεων από τις σχέσεις (7.2), (7.4), καθώς και (7.10) και (7.12) στις ανωτέρω εξισώσεις βρίσκουμε τις παρακάτω σχέσεις συναρμογής για $\mathbf{x} \in AD$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = & A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y_1}{B_1} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp(ik_1^{(1)} x_1) + A_1^{(1)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y_1}{B_1} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp(-ik_1^{(1)} x_1) + \\ & + \sum_{n \geq 2} A_n^{(1)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_1}{B_1} + \frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \exp(k_n^{(1)} x_1) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Σε αυτό το σημείο ορίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων

$$Z_n'(s) = \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_1(s)}{B_1} + \frac{n \cdot \pi}{2}\right), \text{ n}=1,2,3,\dots, \quad (7.17)$$

με πεδίο ορισμού σημεία πάνω στη διατομή εισόδου, και άρα

$$Z_1^I(s) = \sin\left(\frac{\pi \cdot y_1(s)}{B_1} + \frac{\pi}{2}\right). \text{ Ορίζουμε επίσης}$$

$$E_1 = \exp(ik_1^{(l)} x_1), \quad E_1^{-1} = \exp(-ik_1^{(l)} x_1) \quad \text{και} \quad E_{n,1} = \exp(k_n^{(l)} x_1). \quad (7.18)$$

και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\langle f(s), g(s) \rangle_{AD} = \int_{AD} f(s) \cdot g(s) ds \quad (7.19)$$

που δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο των συναρτήσεων πάνω στο διάστημα AD. Παρατηρώντας ότι το σύνολο συναρτήσεων (7.17) είναι ορθογώνιο,

$$\langle Z_n^I, Z_m^I \rangle_{AD} = \int_{AD} Z_n^I(s) \cdot Z_m^I(s) ds = \delta_{nm} \|Z_n^I\|^2, \quad (7.20)$$

όπου $\|Z_n^I\|$ δηλώνει την αντίστοιχη L_2 νόρμα στο διάστημα AD, και κάνοντας χρήση των ανωτέρω σχέσεων στην Εξ. (7.16) καταλήγουμε για $\mathbf{x} \in AD$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) &= \varphi_1(x_1, y_1) = \\ &= A \cdot Z_1^I(s) \cdot \exp(ik_1^{(l)} x_1) + A_1^{(l)} \cdot Z_1^I(s) \cdot \exp(-ik_1^{(l)} x_1) + \sum_{n \geq 2} A_n^{(l)} \cdot Z_n^I(s) \cdot \exp(k_n^{(l)} x_1) = \\ &= A \cdot Z_1^I(s) \cdot E_{1,1} + A_1^{(l)} \cdot Z_1^I(s) \cdot E_{1,1}^{-1} + \sum_{n \geq 2} k_n^{(l)} A_n^{(l)} \cdot Z_n^I(s) \cdot E_{n,1}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

από όπου προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις (απαλοιφής) για το $A_1^{(l)}$ και το $A_n^{(l)}$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1, Z_1^I \rangle_{AD} &= A \cdot E_{1,1} \cdot \|Z_1^I\|^2 + A_1^{(l)} \cdot E_{1,1}^{-1} \cdot \|Z_1^I\|^2 \Rightarrow \frac{\langle \varphi_1, Z_1^I \rangle_{AD}}{\|Z_1^I\|^2} = A \cdot E_{1,1} + A_1^{(l)} \cdot E_{1,1}^{-1} \Rightarrow \\ A_1^{(l)} &= \frac{\langle \varphi_1, Z_1^I \rangle_{AD}}{\|Z_1^I\|^2} E_{1,1} - A \cdot E_{1,1}^{-1}, \quad n=1, \end{aligned} \quad (7.22)$$

και

$$\langle \varphi_1, Z_n^I \rangle_{AD} = A_n^{(l)} \cdot \|Z_n^I\|^2 \cdot E_{n,1} \Rightarrow A_n^{(l)} = \frac{\langle \varphi_1, Z_n^I \rangle_{AD}}{\|Z_n^I\|^2 \cdot E_{n,1}}, \quad n=2,3,4,\dots \quad (7.23)$$

Ομοίως με αντίστοιχη επεξεργασία της Εξ (7.12) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n(\mathbf{y})} ds(\mathbf{y}) &= -ik_1^{(l)} Z_1'(s) \cdot [A \cdot E_{1,1} - A_1^{(l)} \cdot E_{1,1}^{-1}] - \sum_{n \geq 2} k_n^{(l)} A_n^{(l)} \cdot Z_n'(s) \cdot E_{n,1} = \\
&= -ik_1^{(l)} Z_1'(s) \cdot \left[A \cdot E_{1,1} - \left(\frac{\langle \varphi_1, Z_1' \rangle_{AD}}{\|Z_1'\|^2} \cdot E_{1,1} - A \cdot E_{1,1}^{-1} \right) \cdot E_{1,1}^{-1} \right] - \sum_{n \geq 2} k_n^{(l)} \left(\frac{\langle \varphi_1, Z_n' \rangle_{AD}}{\|Z_1'\|^2 \cdot E_{n,1}} \right) \cdot Z_n'(s) \cdot E_{n,1} \quad (7.24)
\end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, χρησιμοποιείται η συντεταγμένη $x_1 = 0$ για τη θέση της εισόδου AD στο υποχωρίο (I), οπότε η ανωτέρω Εξ. (7.24) έρχεται στη μορφή:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial n} &= -ik_1^{(l)} Z_1'(s) \cdot \left[A - \left(\frac{\langle \varphi, Z_1' \rangle_{AD}}{\|Z_1'\|^2} - A \right) \right] - \sum_{n \geq 2} k_n^{(l)} \left(\frac{\langle \varphi, Z_n' \rangle_{AD}}{\|Z_1'\|^2} \right) \cdot Z_n'(s) \Rightarrow \\
\frac{\partial \varphi}{\partial n} - ik_1^{(l)} \frac{\langle \varphi, Z_1' \rangle_{AD} Z_1'(s)}{\|Z_1'\|^2} + \sum_{n \geq 2} k_n^{(l)} \frac{\langle \varphi, Z_n' \rangle_{AD} Z_n'(s)}{\|Z_1'\|^2} &= -2ik_1^{(l)} A Z_1'(s) \quad (7.25)
\end{aligned}$$

Η ανωτέρω εξίσωση αποτελεί τη συνθήκη συναρμογής της διατομής εισόδου και ισχύει πάνω σε όλα τα σημεία $\mathbf{x}(s) = (x_2(s), y_2(s)) \in AD$ του διαστήματος αυτού. Αποτελεί μια μη τοπική συνθήκη για το δυναμικό στην ενδιάμεση περιοχή, όπου τόσο το $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ όσο και το φ στην ανωτέρω συνθήκη θα εννοούνται μέσω των συνοριακών ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων κατανομής πηγών, οι οποίες παρέχονται από τις Εξ.(7.12) και (7.10), αντίστοιχα.

Τέλος, ο συντελεστής ανάκλασης θα δίνεται από

$$R = \frac{A_1^{(l)}}{A} = \frac{\langle \varphi, Z_1' \rangle_{AD}}{A \|Z_1'\|^2} - 1$$

Σχέσεις συναρμογής στην έξοδο του καμπύλου τμήματος

Αντίστοιχα, στο κατακόρυφο σύνορο διεπιφανειών ∂D_3 - έξοδος, οι σχέσεις συναρμογής θα έχουν την παρακάτω μορφή ώστε να εξασφαλιστεί η συνέχεια των εξισώσεων δυναμικού:

$$\varphi(x_2(s), y_2(s)) = \varphi_{III}(x_3, y_3), \text{ για } (x_3, y_3) \in BC \quad (7.26)$$

και

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}(x_2(s), y_2(s)) = \frac{\partial \varphi_{III}}{\partial x_3}(x_3, y_3), \text{ για } (x_3, y_3) \in BC \quad (7.27)$$

Με αντικατάσταση των εξισώσεων από τις σχέσεις (7.5), (7.7), καθώς και (7.10) και (7.12) στις ανωτέρω εξισώσεις βρίσκουμε τις παρακάτω σχέσεις συναρμογής για $\mathbf{x} \in BC$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) &= \varphi_{III}(x_3, y_3) = \\ &= A_1^{(III)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y_3}{B_2} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp(ik_1^{(III)} x_3) + \sum_{n \geq 2} A_n^{(III)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_3}{B_2} + \frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \exp(-k_n^{(III)} x_3) \end{aligned} \quad (7.28)$$

Σε αυτό το σημείο ορίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων

$$Z_n^{III}(s) = \sin\left(\frac{\pi \cdot y_3(s)}{B_2} + \frac{n \cdot \pi}{2}\right), n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.29)$$

με πεδίο ορισμού σημεία πάνω στην διατομή εξόδου και άρα

$$\begin{aligned} Z_1^{III}(s) &= \sin\left(\frac{\pi \cdot y_3(s)}{B_2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ E_3 &= \exp(ik_1^{(III)} x_3) \text{ και } E_{n,3} = \exp(k_n^{(III)} x_3) \end{aligned} \quad (7.30)$$

και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\langle f(s), g(s) \rangle_{BC} = \int_{BC} f(s) \cdot g(s) ds$$

που δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο των συναρτήσεων πάνω στο διάστημα BC. Παρατηρώντας ότι το σύνολο συναρτήσεων (7.29) είναι ορθογώνιο,

$$\langle Z_n^{III}, Z_m^{III} \rangle_{BC} = \int_{BC} Z_n^{III}(s) \cdot Z_m^{III}(s) ds = \delta_{nm} \|Z_n^{III}\|^2, \quad (7.31)$$

όπου $\|Z_n^{III}\|$ δηλώνει την αντίστοιχη L_2 νόρμα στο διάστημα BC, και κάνοντας χρήση των ανωτέρω σχέσεων στην Εξ. (7.28) καταλήγουμε για $\mathbf{x} \in BC$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = \varphi_{III}(x_3, y_3) = \\
& = A_1^{(III)} \cdot Z_1^{III}(s) \cdot \exp(ik_1^{(III)} x_3) + \sum A_n^{(III)} \cdot Z_n^{III}(s) \cdot \exp(-k_n^{(III)} x_3) \\
& = A_1^{(III)} \cdot Z_1^{III}(s) \cdot E_{3,3} + \sum_{n \geq 2} k_n^{(I)} A_n^{(III)} \cdot Z_n^{III}(s) \cdot E_{n,3}^{-1} \tag{7.32}
\end{aligned}$$

από όπου προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις (απαλοιφής) για το $A_1^{(III)}$ και το $A_n^{(III)}$

$$\begin{aligned}
& \langle \varphi_{III}, Z_1^{III} \rangle_{BC} = A_1^{(III)} \cdot E_{3,3} \cdot \|Z_1^{III}\|^2 \\
& \Rightarrow A_1^{(III)} = \frac{\langle \varphi_{III}, Z_1^{III} \rangle_{BC}}{\|Z_1^{III}\|^2 \cdot E_{3,3}}, \quad n=1, \tag{7.33}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \langle \varphi_{III}, Z_n^{III} \rangle_{BC} = A_n^{(III)} \cdot \|Z_1^{III}\|^2 \cdot E_{n,3}^{-1} \\
& \Rightarrow A_n^{(III)} = \frac{\langle \varphi_{III}, Z_n^{III} \rangle_{BC}}{\|Z_1^{III}\|^2} \cdot E_{n,3}, \quad n=2,3,4\dots \tag{7.34}
\end{aligned}$$

Ομοίως με αντίστοιχη επεξεργασία της Εξ (7.12) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n(\mathbf{y})} ds(\mathbf{y}) = \\
& = ik_1^{(III)} A_1^{(III)} \cdot Z_1^{III}(s) \cdot \exp(ik_1^{(III)} x_3) + \sum_{n \geq 2} (-k_n^{(III)}) A_n^{(III)} \cdot Z_n^{III}(s) \cdot \exp(-k_n^{(III)} x_3) \\
& = ik_1^{(III)} \frac{\langle \varphi_{III}, Z_1^{III} \rangle_{BC}}{\|Z_1^{III}\|^2 \cdot E_{3,3}} \cdot Z_1^{III}(s) \cdot E_{3,3} - \sum_{n \geq 2} k_n^{(I)} k_n^{(III)} \frac{\langle \varphi_{III}, Z_1^{III} \rangle_{BC}}{\|Z_1^{III}\|^2} \cdot E_{n,3} \cdot Z_n^{III}(s) \cdot E_{n,3}^{-1} \tag{7.35}
\end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, χρησιμοποιείται η συντεταγμένη $x_3 = 0$ για τη θέση της εξόδου BC στο υποχωρίο (III), οπότε η ανωτέρω Εξ. (7.35) έρχεται στη μορφή:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} - ik_1^{(III)} \frac{\langle \varphi, Z_1^{III} \rangle_{BC} Z_1^{III}(s)}{\|Z_1^{III}\|^2} - \sum_{n \geq 2} k_n^{(III)} \frac{\langle \varphi, Z_n^{III} \rangle_{BC} Z_n^{III}(s)}{\|Z_1^{III}\|^2} = 0 \tag{7.36}$$

Η ανωτέρω εξίσωση αποτελεί τη συνθήκη συναρμογής της διατομής εξόδου και ισχύει πάνω σε όλα τα σημεία $\mathbf{x}(s) = (x_2(s), y_2(s)) \in BC$ του διαστήματος αυτού. Αποτελεί μια μη τοπική συνθήκη για το δυναμικό στην ενδιάμεση περιοχή, όπου τόσο το $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ όσο και το φ στην ανωτέρω συνθήκη θα εννοούνται μέσω των συνοριακών ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων κατανομής πηγών, οι οποίες παρέχονται από τις Εξ.(7.12) και (7.10), αντίστοιχα.

Τέλος, ο συντελεστής διάδοσης θα δίνεται από τη σχέση:

$$T = \frac{A_1^{(III)}}{A} = \frac{\langle \varphi_1, Z_1^{III} \rangle_{BC}}{A \|Z_1^{III}\|^2}$$

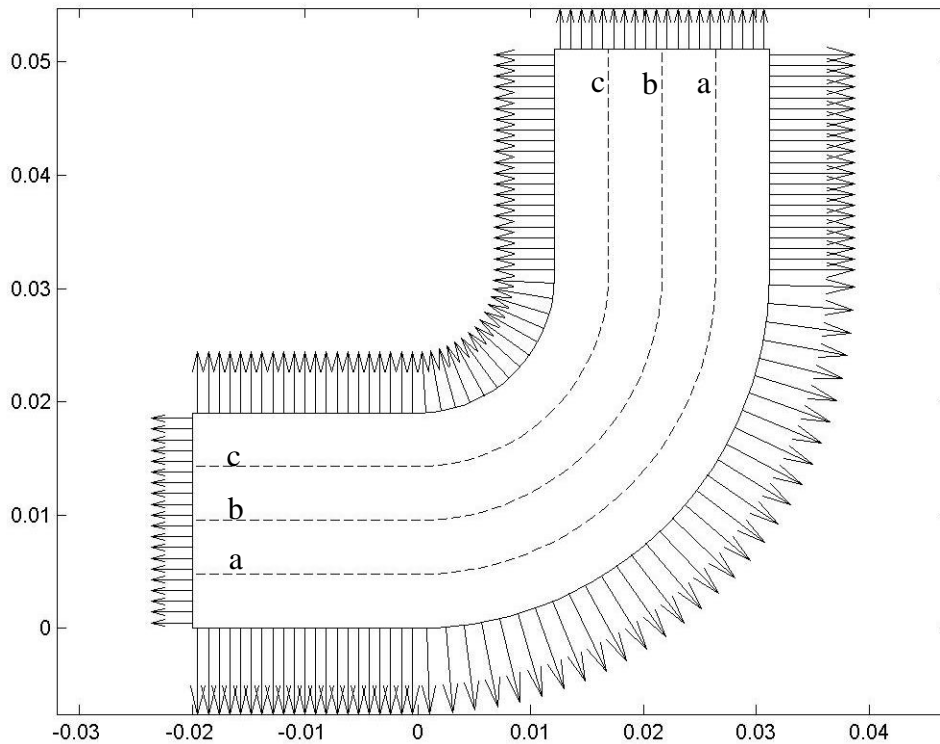
7.3 Αποτελέσματα εφαρμογής μεθόδου BEM στον κυματοδηγό WR75 H90°

Οι κυματοδηγοί ορθογωνικής διατομής έχουν κατηγοριοποιηθεί με βάση κάποιες πρότυπες διαστάσεις κυματοδηγών. Το WR στον χαρακτηρισμό του κυματοδηγού σημαίνει ορθογώνιος κυματοδηγός (Waveguide Rectangular) και το νούμερο 75 ορίζει την εσωτερική διάσταση του πλάτους του κυματοδηγού σε εκατοστά της ίντσας (0.01 ίντσα ισούται με 0.254 χιλιοστά) στρογγυλοποιημένη στο πλησιέστερο εκατοστό της ίντσας. Ο κυματοδηγός WR75 προτείνεται για χρήση σε φάσμα συχνοτήτων 10-15 GHz και οι διαστάσεις σε ίντσες είναι 0.750×0.375 . Αντίστοιχα, σε χιλιοστά οι διαστάσεις είναι 19.05×9.525 χιλιοστά. Όπως έχει επισημανθεί και στα προηγούμενα κεφάλαια H-plane bend 90° σημαίνει ανάστροφα ηλεκτρικός καμπύλος κυματοδηγός υπό γωνία 90° .

Ο κυματοδηγός που επιλέχθηκε για τους υπολογισμούς έχει τις ακόλουθες διαστάσεις πλευρών: $A=0.9525\text{cm}$, $B=1.905\text{cm}$.

Η διακριτοποίηση επιτυγχάνεται μέσω μετατροπής των τοπικών σειρών αναπαραστάσεων σε πεπερασμένο αριθμό N από όρους, διατηρώντας ένα μικρό αριθμό από αποσβενδύμενους όρους. Η κατασκευή του διακριτού συστήματος ολοκληρώνεται κάνοντας χρήση του μέσου των δευτέρου βαθμού πεπερασμένων διαφορών για να προσεγγισθούν οι παραγώγοι στα συστήματα.

Οι διακριτές οριακές συνθήκες υπολογίζονται για το H-plane bend πρόβλημα με αυτών από τις σχέσεις (5.2.1) έως (5.2.3) και στη συνέχεια κάνοντας χρήση κεντρικών διαφορών για τον υπολογισμό των παραγώγων. Με αυτό τον τρόπο, το διακριτό σχήμα που προκύπτει είναι ομοιόμορφο δευτέρας τάξης στην διεύθυνση ξ^1 . Το κάθετο διάνυσμα στην περιοχή Π παρέχει ακτινική διεύθυνση προς τα έξω, με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίσουμε την ισχύ των συνοριακών συνθηκών και την πλήρη ισχύ των συνθηκών συναρμογής τόσο στην είσοδο όσο και στην έξοδο του κυματοδηγού. Όλα αυτά θα φανούν και στις παρακάτω κατανομές.



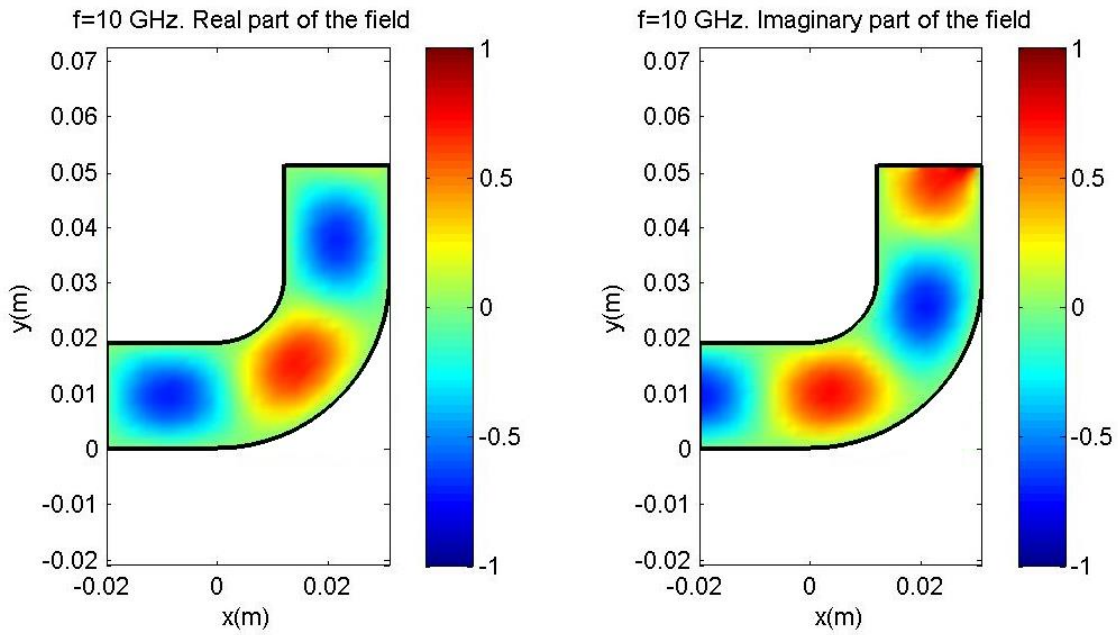
Εικ.40 Διακριτοποίηση καμπύλου κυματοδηγού WR75-H90° σε N=168 συνοριακά στοιχεία, καταναμημένα στα 4 τμήματα

Το πλήθος των συνοριακών στοιχείων σε κάθε πλευρά είναι:

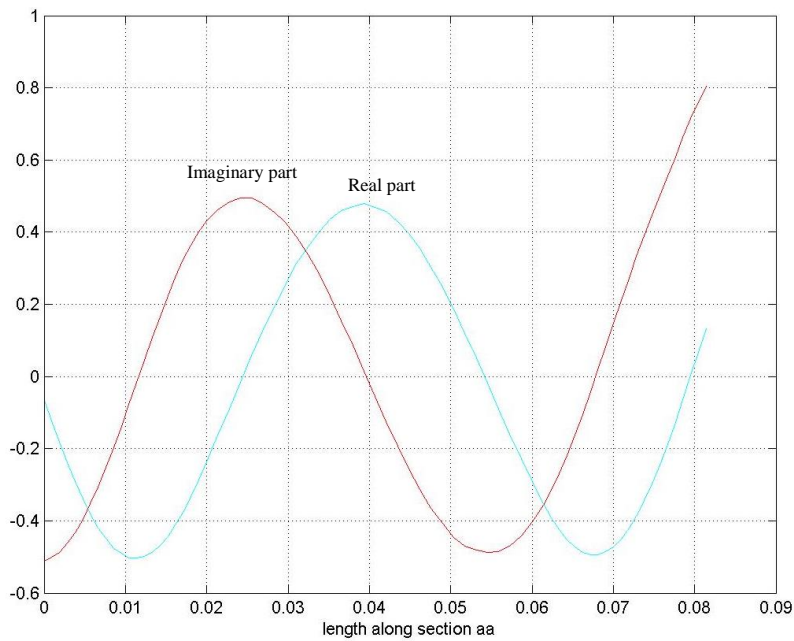
Πλευρά (1) ,	N_1	→	20 στοιχεία
Πλευρά (2) ,	N_2	→	72 στοιχεία
Πλευρά (3) ,	N_3	→	20 στοιχεία
Πλευρά (4) ,	N_4	→	56 στοιχεία
Σύνολο ,	N	→	168 στοιχεία

Όπως είναι εμφανές και από την εικόνα 40, επιλέχθηκαν τρεις τομές που διατρέχουν όλο το καμπύλο μήκος του κυματοδηγού σε διαφορετικές αποστάσεις από το άκρο, ώστε να υπολογιστεί το πραγματικό και φανταστικό μέρος του πεδίου στην εκάστοτε διαδρομή. Οι καμπύλες αυτές ονομάστηκαν aa, bb και cc, ενώ η θέση τους ως προς την διάσταση B είναι στο 25%, 50% και 75% του μήκους του τμήματος.

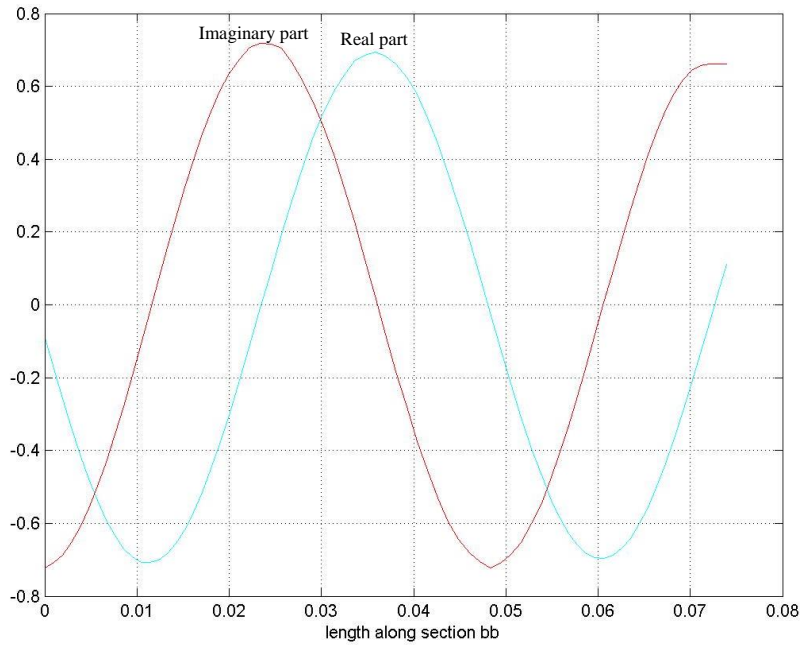
Η συχνότητα λειτουργίας του κυματοδηγού επιλέχθηκε για αυτή την περίπτωση στην περιοχή των 10 GHz..



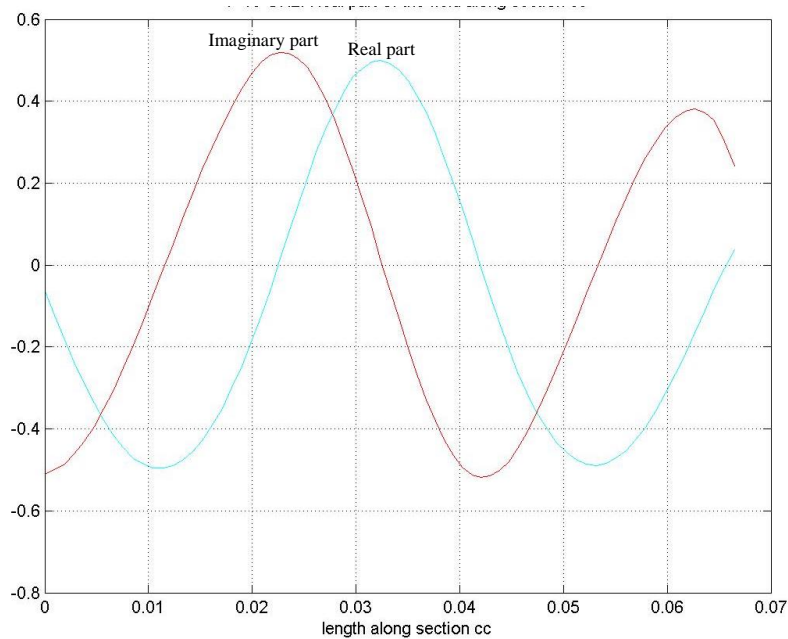
Εικ.41 Υπολογισμός πεδίου ($E^3=\varphi$) στην περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90 για συχνότητα 10 GHz, με τη μέθοδο BEM, διακριτοποίηση με $N=168$ συνοριακά στοιχεία



Εικ.42 Κατανομή του υπολογισθέντος πεδίου ($E^3=\varphi$) κατά μήκος της τομής (aa) στην ενδιάμεση περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90° για συχνότητα 10 GHz



Εικ.43 Κατανομή του υπολογισθέντος πεδίου ($E^3=\varphi$) κατά μήκος της τομής (bb) στην ενδιάμεση περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90° για συχνότητα 10 GHz

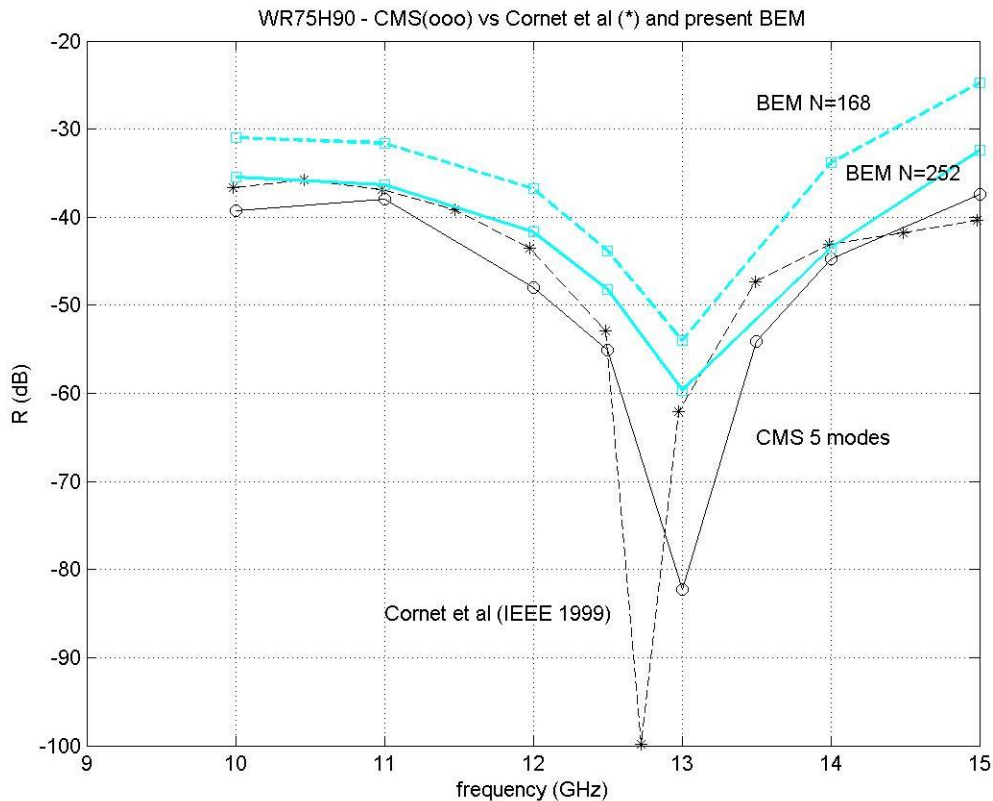


Εικ.44 Κατανομή του υπολογισθέντος πεδίου ($E^3=\varphi$) κατά μήκος της τομής (cc) στην ενδιάμεση περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90° για συχνότητα 10 GHz

Μελετώντας την εικόνα 41, διακρίνουμε τον τρόπο με τον οποίο το πεδίο κατανέμεται στο εσωτερικό του κυματοδηγού. Στα άνω και κάτω σύνορα του κυματοδηγού παρατηρούμε τις δυναμικές γραμμές να είναι παράλληλες με αυτή, δηλαδή εφαρμόζεται η συνθήκη Dirichlet. Επιπλέον οι τιμές στα εξωτερικά σημεία του κυματοδηγού είναι πολύ κοντά στο μηδέν.

Στις εικόνες 42, 43 και 44 παρουσιάζεται η τιμή του πεδίου (πραγματικό και φανταστικό μέρος) στις τομές aa, bb και cc του κυματοδηγού, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στην αρχή του κεφαλαίου.

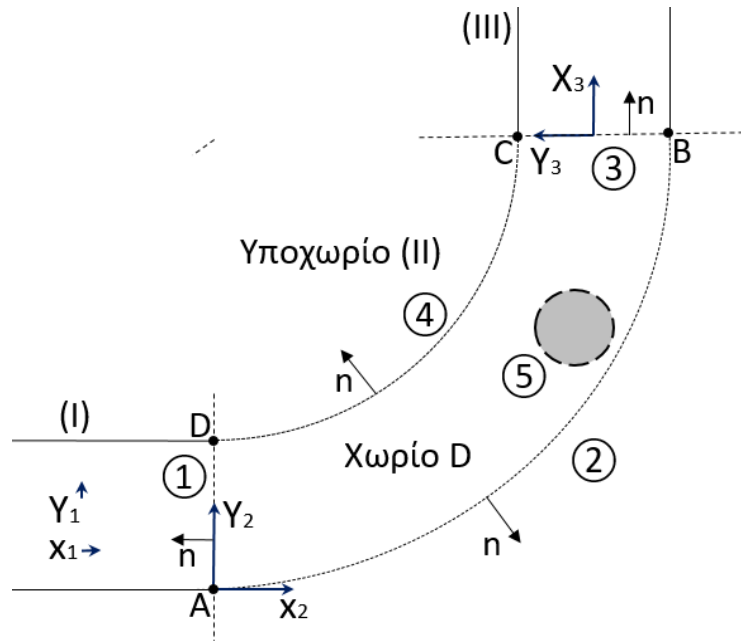
Παρατηρούμε παρόμοια συμπεριφορά στις τρεις τομές aa, bb και cc του πραγματικού και φανταστικού μέρους του πεδίου στον κυματοδηγό. Οι τιμές παρουσιάζουν μικρή απόσβεση με το μήκος. Στο τμήμα aa παρατηρείται μία μικρή αύξηση της τιμής, ενώ στην cc μια αντίστοιχα μικρή μείωση, λόγω της αριστερής 90° στροφής του κυματοδηγού.



Εικ.45 Μέτρο του συντελεστή ανάκλασης για τον κυματοδηγό WR75 H90° σε συχνότητα λειτουργίας 10GHz. Σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου με άλλες μεθόδους

Όπως φαίνεται και στην εικόνα 45, οι συχνότητες από 10 έως 15GHz, στην περίπτωση του κυματοδηγού WR75 H90°, οδηγούν σε όλες τις μεθόδους στην ελάχιστη δυνατή ανάκλαση κύματος. Συνεπώς επιβεβαιώνεται πως οι κατάλληλες συχνότητες λειτουργίας του κυματοδηγού WR75 H90° είναι στην περιοχή 10-15 GHz. Στο σχήμα συγκρίνεται η μέθοδος Boundary Element Method, που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία με 168 συνοριακά στοιχεία, με την ίδια μέθοδο αλλά με 252 συνοριακά στοιχεία την μέθοδο Couple Mode (CMS) που περιγράψαμε αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο και την Cornet et al (IEEE 1999). Επίσης στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε περισσότερα στοιχεία στην μέθοδο BEM, οδηγούμαστε σε κοντινότερη συμπεριφορά προς τις άλλες μεθόδους.

8. Επίδραση πεπερασμένου σκεδαστή σε ομογενή κυματοδηγό



Εικ.46 Ομογενής Ηλεκτρομαγνητικός κυματοδηγός με ύπαρξη πεπερασμένου σκεδαστή στο καμπύλο τμήμα αυτού

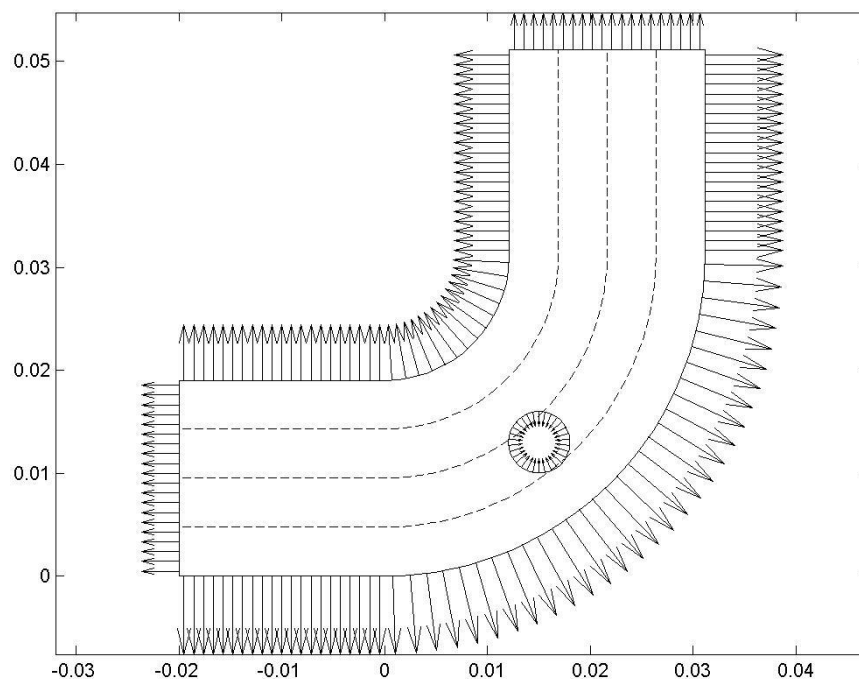
Στην περίπτωση ενός πεπερασμένου σκεδαστή, θα εξάγουμε με την ίδια μέθοδο το πεδίο, για να καταλήξουμε τόσο για σκεδαστή Dirichlet όσο και Neumann στην σύγκριση της τιμής του συντελεστή ανάκλασης με την απουσία του σκεδαστή. Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα θα παραμείνουν ίδιες με αυτές του προηγούμενου κεφαλαίου. Στο υποχωρίο II θα πρέπει να εισαχθεί και η σχέση που θα καλύπτει τις συνθήκες στην επιφάνεια του πεπερασμένου σκεδαστή, που θα είναι η ακόλουθη μικτή συνθήκη:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial D_5} \equiv \mathbf{n} \nabla \varphi = \frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = 0, \text{ για } \mathbf{x} \in \partial D_5,$$

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \beta \varphi = 0, \text{ για } \mathbf{x} \in \partial D_5, \quad (8.1)$$

με α και β να είναι πραγματικοί συντελεστές, οι οποίοι μοντελοποιούν τις ανακλαστικές ιδιότητες του σκεδαστή. Οι συντελεστές αυτοί εξαρτώνται γενικά από τη συχνότητα διέγερσης και το είδος (φύση) του σκεδαστή.

Ο σκεδαστής μπορεί ασφαλώς να είναι ένα φυσικό εμπόδιο, μία ατέλεια στην κατασκευή του κυματοδηγού ή ακόμα μπορεί να υποδηλώνει την ύπαρξη κάποιου διηλεκτρικού, γεγονότα που πολλές φορές αποτελούν πραγματικά προβλήματα και θέματα προς ανάλυση.



Εικ.47 Διακριτοποίηση καμπύλου κυματοδηγού WR75-H90° σε N=198 συνοριακά στοιχεία, καταναμημένα στα 4 τμήματα

Η επιφάνεια του πεπερασμένου σκεδαστή θα είναι η 5 όπως φαίνεται και στο σχήμα 47. Τα συνοριακά στοιχεία στα οποία πλέον θα έχουμε χωρίσει το χώρο θα δίνονται από τη σχέση:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5, \quad (8.2)$$

όπου N_5 θα είναι τα μέρη στα οποία θα έχουμε διαχωρίσει το σύνορο του πεπερασμένου σκεδαστή ∂D_5 .

Πλευρά (1), $N_1 \rightarrow 20$ στοιχεία

Πλευρά (2), $N_2 \rightarrow 72$ στοιχεία

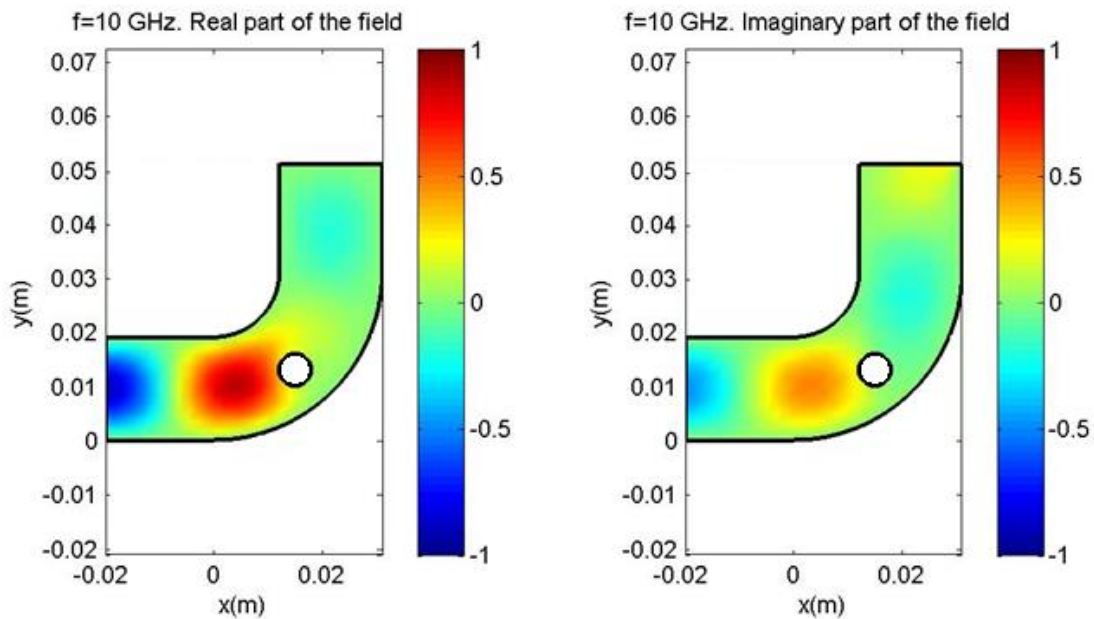
Πλευρά (3), $N_3 \rightarrow 20$ στοιχεία

Πλευρά (4), $N_4 \rightarrow 56$ στοιχεία

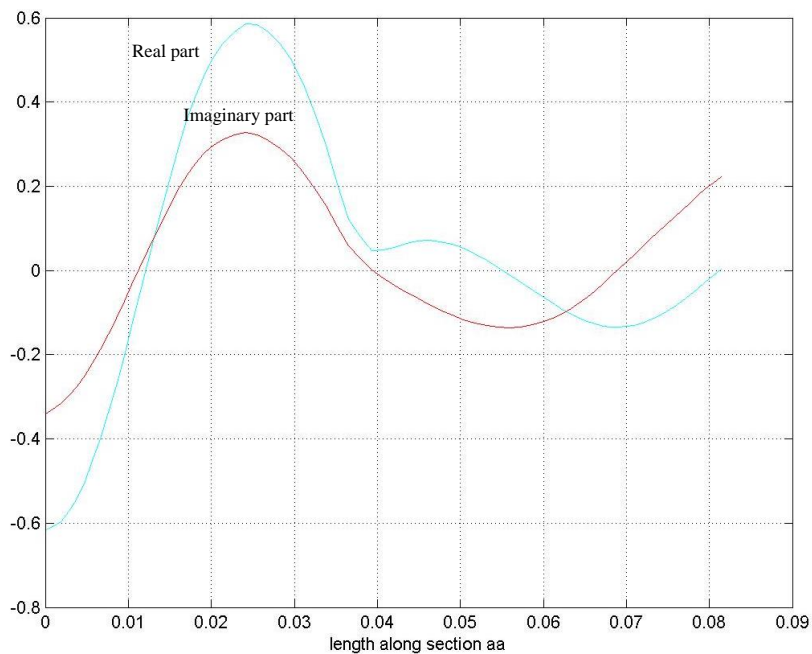
Πλευρά (5), $N \rightarrow 30$ στοιχεία (σκεδαστής)

Σύνολο, $N \rightarrow 198$ στοιχεία

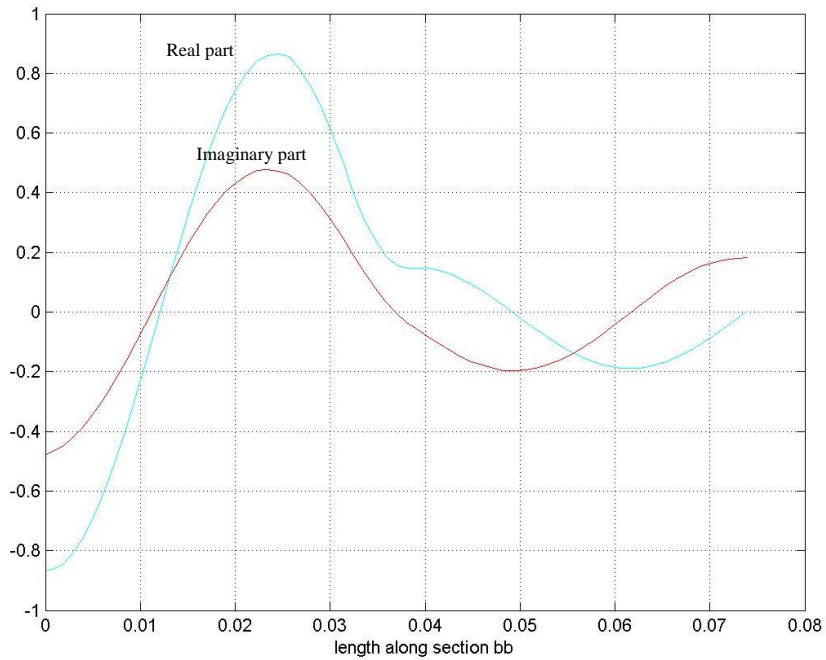
Με αντίστοιχη εισαγωγή των εξισώσεων και των στοιχείων συχνότητας, τα οποία διατηρήθηκαν όμοια με του προηγούμενου υποκεφαλαίου, για να υπάρχει η δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων, λάβαμε τα παρακάτω αποτελέσματα.



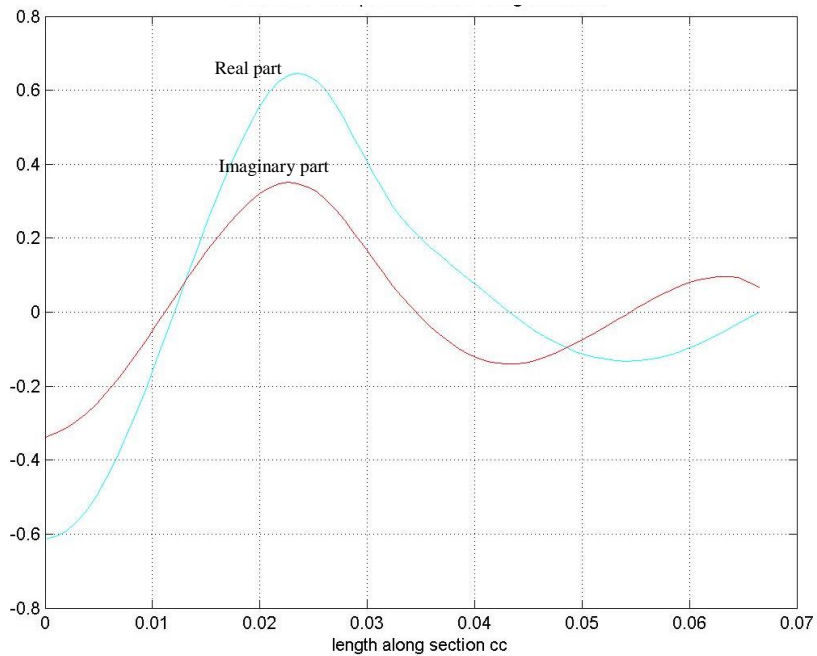
Εικ.48 Υπολογισμός πεδίου ($E^3=\varphi$) στην ενδιάμεση περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90° για συχνότητα 10 GHz, με τη μέθοδο BEM, N=198 συνοριακά στοιχεία με ύπαρξη πεπερασμένου κυκλικού σκεδαστή Dirichlet



Εικ.49 Κατανομή του υπολογισθέντος πεδίου ($E^3=\varphi$) κατά μήκος της τομής (aa) στην ενδιάμεση περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90° με την παρουσία σκεδαστή Dirichlet για συχνότητα 10 GHz



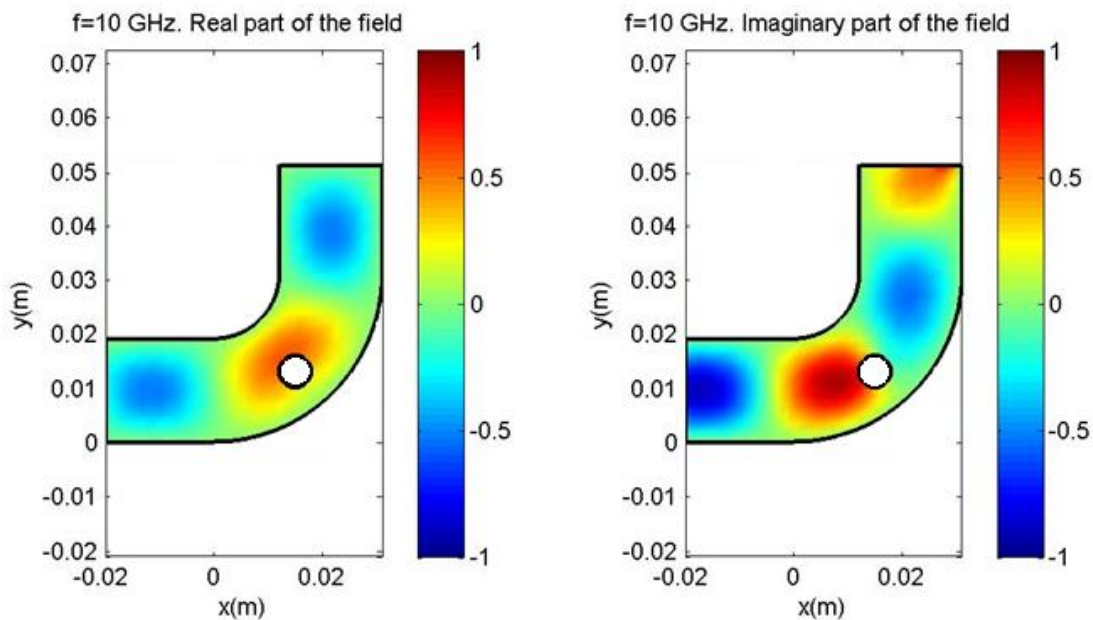
Εικ.50 Κατανομή του υπολογισθέντος πεδίου ($E^3=\varphi$) κατά μήκος της τομής (bb) στην ενδιάμεση περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90° με την παρουσία σκεδαστή Dirichlet για συχνότητα 10 GHz



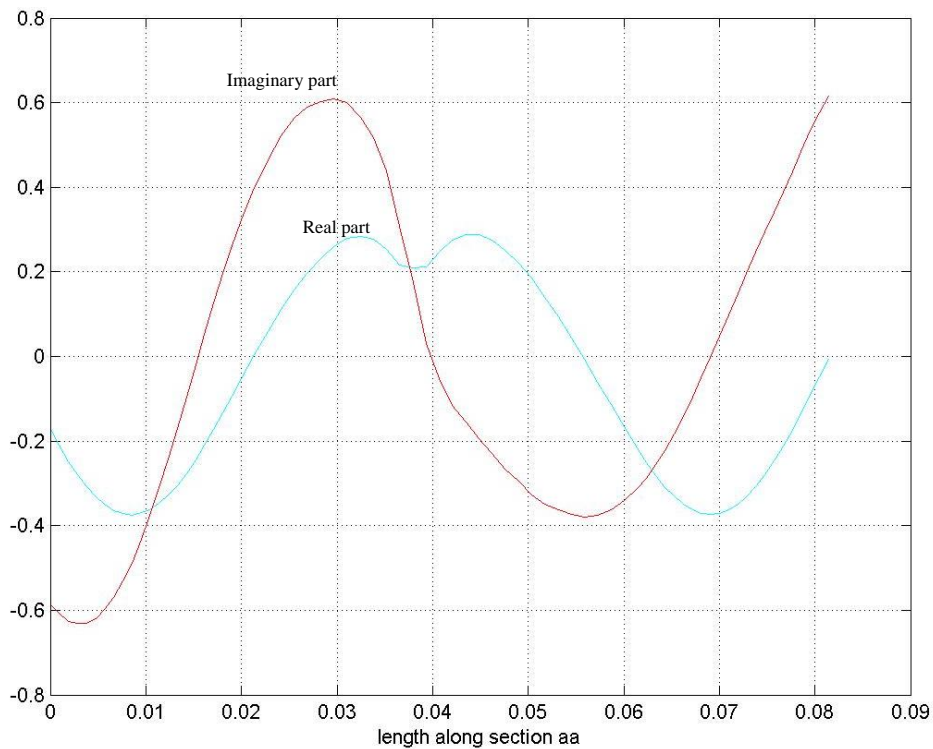
Εικ.51 Κατανομή του υπολογισθέντος πεδίου ($E^3=\varphi$) κατά μήκος της τομής (cc) στην ενδιάμεση περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90° με την παρουσία σκεδαστή Dirichlet για συχνότητα 10 GHz

Στην περίπτωση του σκεδαστή όπου έχουμε συνθήκες Dirichlet, παρατηρούμε πως το πεδίο επηρεάζεται από την ύπαρξη του σκεδαστή και οδηγούμαστε σε ραγδαία μείωση αυτού. Πάνω στα όρια του σκεδαστή βλέπουμε όσο είναι δυνατόν να διακριθεί από την ανάλυση της εικόνας μας, το μηδενισμό του δυναμικού όπως επιβάλλουν οι συνθήκες Dirichlet. Το πεδίο εξασθενεί όπως είναι εμφανές τόσο από το διδιάστατο σχήμα του κυματοδηγού (εικόνα 48), όσο και από τις τιμές στις τρεις τομές (aa, bb, cc). Και στις τρεις αυτές διαδρομές βλέπουμε πως μετά την ύπαρξη του κυματοδηγού, όπου επιβάλλαμε συνθήκες Dirichlet, το πεδίο εξασθενεί σημαντικά.

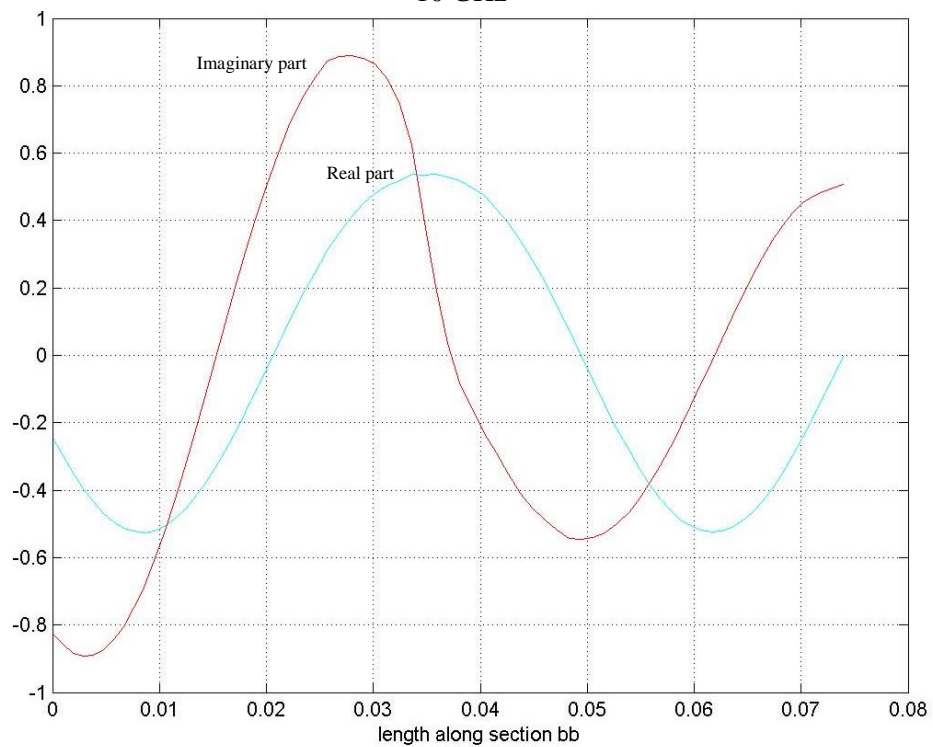
Ακολούθως παρουσιάζονται τα αντίστοιχα σχήματα στην περίπτωση του σκεδαστή στον οποίο ισχύουν οι συνθήκες Neumann.



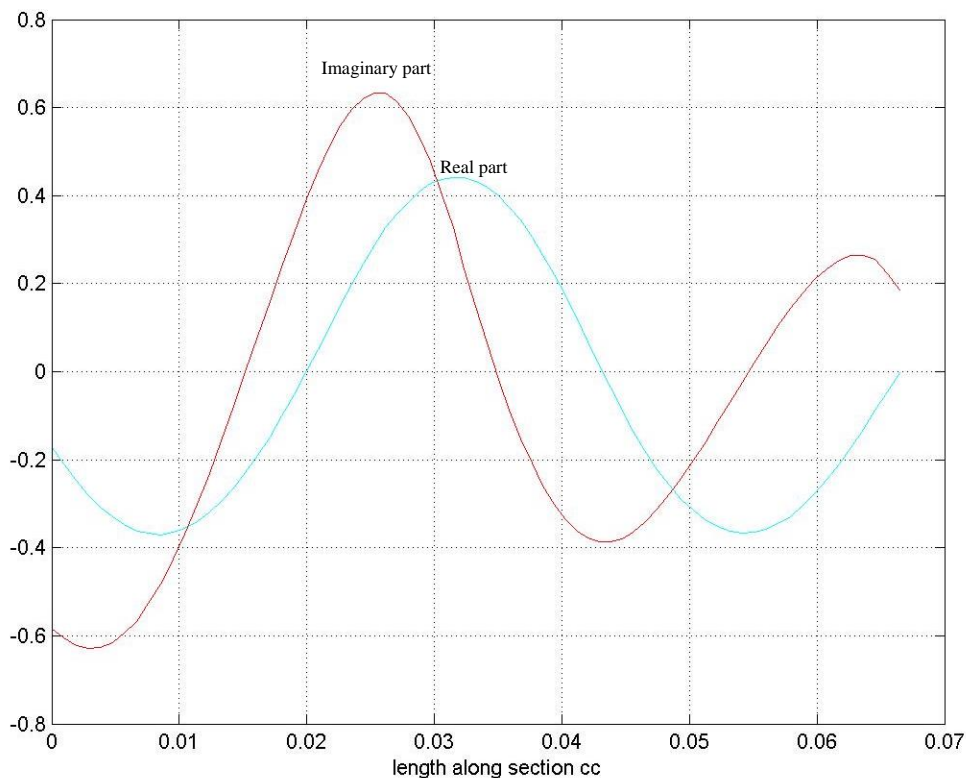
Εικ.52 Υπολογισμός πεδίου ($E^3=\varphi$) στην ενδιάμεση περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90° για συχνότητα 10 GHz, με τη μέθοδο BEM, N=198 συνοριακά στοιχεία με ύπαρξη πεπερασμένου κυκλικού σκεδαστή Neumann



Εικ.53 Κατανομή του υπολογισθέντος πεδίου ($E^3=\varphi$) κατά μήκος της τομής (aa) στην ενδιάμεση περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90° με την παρουσία σκεδαστή Neumann για συχνότητα 10 GHz



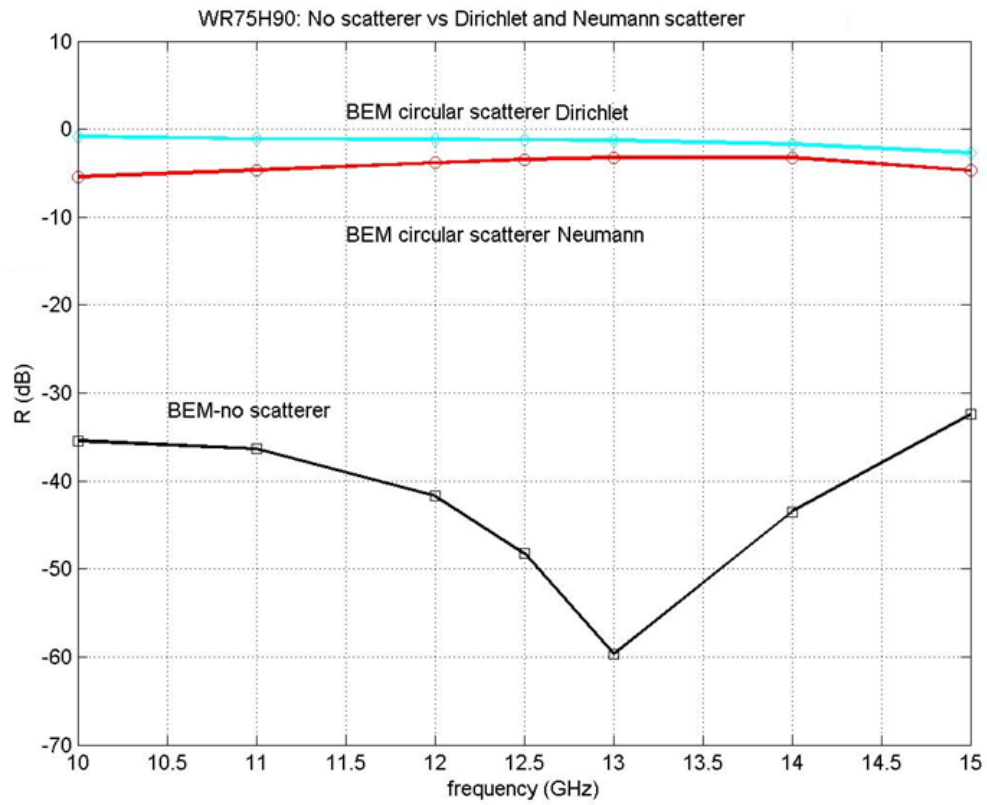
Εικ.54 Κατανομή του υπολογισθέντος πεδίου ($E^3=\varphi$) κατά μήκος της τομής (bb) στην ενδιάμεση περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90° με την παρουσία σκεδαστή Neumann για συχνότητα 10 GHz



Εικ.55 Κατανομή του υπολογισθέντος πεδίου ($E^3=\varphi$) κατά μήκος της τομής (cc) στην ενδιάμεση περιοχή (II) του κυματοδηγού WR75-H90° με την παρουσία σκεδαστή Neumann για συχνότητα 10 GHz

Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε πως η διάδοση του πεδίου συνεχίζεται κανονικά και η εξασθένιση συμβαίνει σε μεγαλύτερο βαθμό από την ολική απουσία του σκεδαστή αλλά πολύ μικρή συγκριτικά με την ύπαρξη σκεδαστή Dirichlet. Επιπλέον παρατίθενται και τα σχήματα με την κατανομή του πεδίου στις τρεις τομές, όπως αυτές ορίστηκαν από τα τμήματα aa, bb, cc.

Τέλος στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης για τον κυματοδηγό WR75 H90° σε συχνότητα λειτουργίας 10GHz και εμφανίζονται αποτελέσματα των περιπτώσεων χωρίς σκεδαστή, με σκεδαστή Dirichlet και με σκεδαστή Neumann.



Εικ.56 Μέτρο του συντελεστή ανάκλασης για τον κυματοδηγό WR75-H90° σε συχνότητα λειτουργίας 10GHz. Σύγκριση αποτελεσμάτων των περιπτώσεων χωρίς σκεδαστή, με σκεδαστή Dirichlet και με σκεδαστή Neumann

9. Συμπεράσματα μελέτης - Προτάσεις

Στην παρούσα εργασία εφαρμόστηκε χαμηλοτάξια μέθοδος συνοριακών στοιχείων (BEM) για τη λύση προβλημάτων κυματικής διάδοσης σε καμπύλους ΗΜ κυματοδηγούς, τον υπολογισμό του κυματικού πεδίου και των απωλειών διάδοσης. Η μέθοδος παρέχει τη δυνατότητα μοντελοποίησης κυματοδηγών με περίπλοκα σύνορα και την διερεύνηση των επιδράσεων στις απώλειες διάδοσης από τη παρουσία πεπερασμένων σκεδαστών εντός του κυματοδηγού.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας περιορίστηκαν στην περίπτωση του προβλήματος απωλειών διάδοσης H-plane bend 90° σε καμπύλο κυματοδηγό WR75, με σταθερή ορθογωνική διατομή σε όλο το μήκος αυτού, στις συχνότητες όπου ο κυματοδηγός διεγείρεται από την κύρια μορφή TE_{01} . Οι δοκιμές θα μπορούσαν να επεκταθούν σε περισσότερες συχνότητες και να προκύψουν εκτός της μάντας όπου ο κυματοδηγός διεγείρεται μόνο από την πρώτη (κύρια) ιδιομορφή. Επίσης, η διατομή εισόδου θα μπορούσε να διαφέρει από την διατομή εξόδου και με αυτό τον τρόπο να μελετηθούν οι απώλειες κατά την διάδοση ΗΜ πεδίου εντός ενός πιο σύνθετου κυματοδηγού, που παρουσιάζει βαθμιαία στένωση διατομής.

Για την επιβεβαίωση της μεθόδου συνοριακών στοιχείων τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αντίστοιχα απο αναλυτική λύση και διαπιστώθηκε ότι η μέθοδος είναι σε θέση να παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα με μικρό σχετικά υπολογιστικό κόστος, στο διάστημα των συχνοτήτων που εξετάστηκαν. Περαιτέρω, εξετάστηκε το πρόβλημα της επίδρασης πεπερασμένων σκεδαστών εντός του καμπύλου ΗΜ κυματοδηγού που μπορούν να αυξήσουν δραματικά τις απώλειες διάδοσης. Ο πεπερασμένος σκεδαστής μπορεί να προσεγγίζει διάφορες είτε εσωτερικές λειτουργίες και ατέλειες του ίδιου του κυματοδηγού είτε εξωτερικούς παράγοντες ή σώματα που αλλάζουν τη διαμόρφωση του πεδίου και την διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα στον κυματοδηγό.

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε η επίδραση κυκλικού σκεδαστή διαστάσεων συγκρίσιμων του μήκους κύματος που αντιστοιχεί στη πρώτη κύρια ιδιομορφή διέγερσης, και η επίδραση του στις απώλειες διάδοσης. Σημειώνουμε ότι, αν και στη παρούσα μελέτη ο σκεδαστής ορίστηκε με κυκλικό σχήμα, η θεώρηση σκεδαστή γενικότερου σχήματος είναι άμεση. Εξετάστηκε ιδιαίτερα η περίπτωση μεταλλικού σκεδαστή και προέκυψε πολύ μεγάλη αύξηση του συντελεστή ανάκλασης και σημαντική απώλεια της απόδοσης λειτουργίας του κυματοδηγού. Αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν για άλλη επιλογή συνοριακών συνθηκών στο σκεδαστή και προέκυψαν ποιοτικά συμπεράσματα για την περίπτωση αύξησης των απωλειών διάδοσης από τη παρουσία ανομοιογενειών/σκεδαστών διαφορετικών διηλεκτρικών υλικών.

Τέλος, η επέκταση της παρούσας μεθόδου σε προβλήματα E-plane bend, καθώς και σε ΗΜ κυματοδηγούς άλλης (π.χ. κυκλικής) διατομής, θα μπορούσε να αποτελέσει ενδιαφέρουσα μελλοντική εργασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Balanis, K.A., 1989, Advanced Engineering Electromagnetics, John Wiley & Sons
- [2] Collin, R.E., 1991, Field Theory of Guided Waves, 2nd Edn, IEEE Press
- [3] Cronin, N.J., 1995, Microwave and Optical Waveguides, Institute of Physics Publishing
- [4] Elmore W., Heald M, 1969, Physics of waves, Dover
- [5] Sohda, M.S., Ghatak, A.K., Inhomogeneously Optical Waveguides, Plenum Press
- [6] Athanassoulis, G.A., Belibassakis, K.A., Kanellopoulos, J., 2002, A coupled-mode model for the solution to the time-harmonic Maxwell's equations in a curved waveguide of rectangular cross section, 2nd European Symposium Numerical Methods in Electromagnetics, JEE'2002, Toulouse 2002
- [7] John D.Kraus, Antennas, Second Edition, 1988, McGraw-Hill Inc.
- [8] David J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Second Edition, 1997, Prentice Hall International
- [9] Hermann A. Haus, James R. Melcher, 1989, Electromagnetic Fields and Energy, Massachussets Intitute of Technology
- [10] Ιωάννης Λ. Τσαλαμέγκας, Ιωάννης Α. Ρουμελιώτης, Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία και Κύματα, Τόμος Α
- [11] Δημήτριος Π. Χρυσουλίδης, Εισαγωγή στην Σκέδαση Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων, Πολυτεχνική Σχολή ΑΠΘ
- [12] Βασίλειος Βαβουράκης, 2006, Χρήση Μεθόδων Συνοριακών Στοιχείων και Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση για την Αριθμητική Επίλυση Προβλημάτων Κυματικής Διάδοσης σε Εφαρμογές Μη-καταστροφικού Ελέγχου, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
- [13] Πανεπιστήμιο Κύπρου, τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών, Σημειώσεις ΗΜΥ 331, Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Δρ. Γεώργιος Η. Γεωργίου – Αντωνιάδης Μάρκος
http://www.eng.ucy.ac.cy/ece331/notes/notes_05_sv.pdf

- [14] Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών, Τομές Τηλεπικοινωνιών, Σημειώσεις Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία – Αναπληρωτής Καθηγητής Παπαγιαννάκης Αντώνιος
http://genesis.ee.auth.gr/papagiannakis/public/tsib/ask/Vol_2/Ch15.pdf
- [15] Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής, Σημειώσεις Κυματοδηγών, Καθηγητής Αλεξίου Γεώργιος
https://www.ceid.upatras.gr/webpages/faculty/alexiou/ahts/presentations/10_waveguides.pdf
- [16] Beer G., Smith I., Duenser, C., The Boundary Element Method with Programming, Springer 2008