Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες
και στα Χρηματοοικονομικά

Στοχαστικός Λογισμός

και

Τιμολόγηση Χρηματοοικονομικών Παραγώγων

Επιμέλεια: **Ελένη Πύλια**
Αριθμός Μητρώου: 09314026

Επιβλέπων Καθηγητής: Ν. Σταυρακάκης

Αθήνα, Φεβρουάριος 2017

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες
και στα Χρηματοοικονομικά

Στοχαστικός Λογισμός

και

Τιμολόγηση Χρηματοοικονομικών Παραγώγων

Επιμέλεια: **Ελένη Πύλια**
Αριθμός Μητρώου: 09314026

Επιβλέπων Καθηγητής: Ν. Σταυρακάκης
Μέλος 1: Β. Παπανικολάου
Μέλος 2: Μ. Λουλάκης

Αθήνα, Φεβρουάριος 2017

Ευχαριστίες

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών "Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες και στα Χρηματοοικονομικά" του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.).

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Ν. Σταυρακάκη, για τη συνεχή και αδιάλειπτη καθοδήγησή του, την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και τις συμβουλές του, οι οποίες συνέβαλαν ουσιαστικά στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Β. Παπανικολάου, ο οποίος δέχτηκε να είναι συνεπιβλέπων. Με την υποστήριξη και την εκτίμηση που μου έδειξε στάθηκε σημαντικός αρωγός στην προσπάθειά μου.

Τις ευχαριστίες μου εκφράζω και στον Αναπληρωτή Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Μ. Λουλάκη που δέχτηκε να είναι μέλος της Τριμελούς Επιτροπής αξιολόγησης της εργασίας, γεγονός που συνετέλεσε στην περαιτέρω βελτίωση της δουλειάς μου.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την ηθική συμπαράσταση, η οποία μου έδωσε κουράγιο και υπομονή ώστε να ολοκληρώσω τις μεταπτυχιακές σπουδές μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στην παρούσα Μεταπτυχιακή Εργασία ασχολούμαστε με το Στοχαστικό Λογισμό και μελετάμε κάποιες εφαρμογές του στην τιμολόγηση χρηματοοικονομικών παραγώγων.

Στο πρώτο Κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια βασικά στοιχεία της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Αρχικά, ορίζονται οι σ-άλγεβρες και τα μέτρα πιθανότητας. Στη συνέχεια, διατυπώνεται η αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων και εισάγεται η έννοια της τυχαίας μεταβλητής σε έναν χώρο πιθανότητας. Έπειτα ορίζεται το ολοκλήρωμα Lebesgue και μέσω αυτού η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής. Στη συνέχεια, αναφέρονται τα βασικά οριακά Θεωρήματα και ορίζεται η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής, οι τρόποι σύγκλισης και η ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο μελετάμε το Στοχαστικό Λογισμό. Αρχικά, εισάγεται η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής και των στοχαστικών ανελίξεων. Στη συνέχεια, ορίζονται οι διαδικασίες martingale (συνεχούς και διακριτού χρόνου) και μελετάμε κάποιες ιδιότητες αυτών. Έπειτα, ορίζουμε τις ιδιότητες Markov και την κίνηση Brown. Στη συνέχεια, ορίζουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα, μελετάμε κάποιες βασικές ιδιότητές του και αναφέρουμε διάφορες μορφές του τύπου του Itô. Στο επόμενο υποκεφάλαιο, παρουσιάζουμε την απόδειξη του Θεωρηματος Cameron-Martin-Girsanov. Στο τέλος του Κεφαλαίου μελετάμε τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και τη σχέση τους με τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

Στο τρίτο Κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποιες εφαρμογές της παραπάνω θεωρίας στην τιμολόγηση χρηματοοικονομικών παραγώγων σε αγορές διακριτού χρόνου. Αρχικά, ορίζουμε τα βασικά χρηματοοικονομικά παράγωγα και μελετάμε την αρχή της μη επιτηδειότητας, η οποία είναι αξίωμα στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά. Στη συνέχεια, δίνεται η περιγραφή του διωνυμικού μοντέλου μιας περιόδου και του διωνυμικού μοντέλου πολλών

περιόδων. Έπειτα, ορίζονται τα μέτρα martingale, με τη βοήθεια των οποίων εξετάζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των τιμών των παραγώγων. Στο τέλος του Κεφαλαίου αποδεικνύονται οι τύποι για την τιμολόγηση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης, με βάση το μοντέλο Black & Scholes.

Στο τελευταίο Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην τιμολόγηση χρηματοοικονομικών παραγώγων σε αγορές συνεχούς χρόνου. Στην αρχή του κεφαλαίου μελετάμε τα χαρτοφυλάκια στα πλαίσια του μοντέλου Black & Scholes. Στη συνέχεια, δίνουμε τα εργαλεία με τα οποία είναι εφικτή η εύρεση της δίκαιης τιμής των δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου. Στο τέλος του Κεφαλαίου γράφουμε μερικά παραδείγματα τιμολόγησης παραγώγων.

Abstract

In this Master's Thesis we study Stochastic Calculus and some of its applications in derivatives pricing.

In the first Chapter we present some basic elements of Probability Theory. At first, we define σ-algebras and probability measures. Then, we refer to the axiomatic foundation of Probability Theory and we introduce the meaning of a random variable in a probability space. Furthermore, we define the Lebesgue integral and the expected value of a random variable. Finally, we mention the basic Limit Theorems and we define the distribution of a random variable, the convergence and the independence of random variables.

In the second Chapter we study Stochastic Calculus. At first, we introduce the meaning of the conditional expected value and the stochastic process. Then, we define martingales (in continuous and discrete time) and we study some of their properties. Furthermore, we define Markov properties and we provide an overview of the Brownian motion. In addition, we refer to the stochastic integral, we study some of its basic properties and we show various forms of the Itô's formula. Then, we refer to the proof of the Cameron-Martin-Girsanov Theorem. Finally, we refer to stochastic differential equations and their relationship with partial differential equations.

In the third Chapter we consider some applications of the above mentioned theory in derivatives pricing in discrete-time markets. At first, we define the basic financial derivatives and we study the principle of no arbitrage, which is an axiom in Financial Mathematics. Then, we describe the binomial model of one period and the multi-period binomial model. Furthermore, we define the martingale measures and then we examine the asymptotic behavior of the prices of derivatives. Finally, we prove the formulas for pricing european put and call options, based on the Black & Scholes model.

In the last Chapter we refer to derivatives pricing in continuous-time markets. In the beginning, we study portfolios in the context of the Black & Scholes model. Then, we provide the tools needed to compute the fair price of european options. In the end, we write some examples of derivatives pricing.

Κεφάλαιο 1

Θεωρία Πιθανοτήτων

1.1 σ-άλγεβρες

Έστω X σύνολο. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του X,δηλαδή:

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}.$$

Ορισμός 1.1.1. *Έστω X σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ λέγεται **άλγεβρα** στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$.*
2. *Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \backslash A \in \mathcal{A}$.*
3. *Για κάθε $n \geq 2$, αν $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, τότε $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$. Δηλαδή η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις.*

Παρατήρηση 1.1.1. *Για μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ ισχύουν επίσης:*

- *$X \in \mathcal{A}$ λόγω των (1) και (2) του παραπάνω ορισμού, εφόσον το X είναι το συμπλήρωμα του $\emptyset$.*
- *Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, εφόσον αν $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, τότε $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = X \backslash \{\bigcup_{i=1}^{n} (X \backslash A_i)\}$ και άρα, λόγω των (2) και (3), ισχύει $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.*
- *Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \backslash B \in \mathcal{A}$, εφόσον $A \backslash B = A \bigcap (X \backslash B)$ ([8]).*

Ορισμός 1.1.2. *Έστω X σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ λέγεται* ***σ-άλγεβρα*** *στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$.*
2. *Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \backslash A \in \mathcal{A}$.*
3. *Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, δηλαδή αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Παράδειγμα 1.1.1. *Αν X σύνολο, τότε οι οικογένειες:*

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X\},$$

$$\mathcal{A}_2 := \mathcal{P}(X)$$

είναι σ-άλγεβρες στο X. Η πρώτη είναι η ελάχιστη δυνατή και η δεύτερη η μέγιστη δυνατή σ-άλγεβρα στο X ([8]).

Οι σ-άλγεβρες συνήθως χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν δομές πληροφορίας. Τα στοιχεία του X μπορούν να θεωρηθούν σαν οι πιθανές καταστάσεις του κόσμου ή τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος ([1]).

Πρόταση 1.1.1. *Έστω X σύνολο και $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ οικογένεια σ-αλγεβρών στο X. Τότε η:*

$$\mathcal{H} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i := \{A \in X : A \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X.

Απόδειξη. Τα $\emptyset$ και X ανήκουν στην $\mathcal{H}$, γιατί και τα δύο είναι στοιχεία κάθε σ-άλγεβρας $\mathcal{A}_i$ στο X. Αν $A \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$, τότε, επειδή κάθε $\mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρα, έπεται ότι $X \backslash A \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I$, δηλαδή $X \backslash A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Τέλος, αν $\{A_n : n = 1, 2, ...\} \subset \mathcal{H}$, τότε $\{A_n : n = 1, 2, ...\} \subset \mathcal{A}_i$, για κάθε $i \in I$, άρα $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i$, για κάθε $i \in I$. Επομένως, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ ([8]). $\square$

Ορισμός 1.1.3. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. Ορίζουμε:*

$$\mathcal{J} := \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \text{ και η } \mathcal{A} \text{ είναι σ-άλγεβρα}\},$$

δηλαδή το σύνολο των σ-αλγεβρών στο X που κάθε μία τους περιέχει την οικογένεια $\mathcal{C}$. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από τη $\mathcal{C}$ ορίζεται ως η τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την $\mathcal{C}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{C})$, δηλαδή:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{J}} \mathcal{A}.$$

Η $\sigma(\mathcal{C})$ περιέχει ακριβώς όλα τα $B \subset X$ με την ιδιότητα $B \in \mathcal{A}$ για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X με $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$. Από την Πρόταση 1.1.1 έπεται ότι η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι πράγματι σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{C}$ και από την κατασκευή της είναι η μικρότερη με την ιδιότητα αυτή. Δηλαδή, η $\sigma(\mathcal{C})$ περιέχεται σε οποιαδήποτε σ-άλγεβρα περιέχει την $\mathcal{C}$. Αν η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα, τότε $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ ([8]).

Παράδειγμα 1.1.2. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{C} := \{A_i : i \in I\}$ αριθμήσιμη διαμέριση του X (δηλαδή τα A_i,$i \in I$ είναι μη κενά σύνολα, ξένα ανά δύο, με ένωση το X), με $I = \{1, 2, ..., k\}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ή $I = \mathbb{N}$. Η σ-άλγεβρα που παράγει η $\mathcal{C}$ περιγράφεται ως εξής:*

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\bigcup_{i \in J} A_i : J \subset I\}. \tag{1.1}$$

Δηλαδή, ένα στοιχείο της $\sigma(\mathcal{C})$ είναι ένωση κάποιων στοιχείων της διαμέρισης $\mathcal{C}$. Θέτουμε $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i \in J} A_i : J \subset I\}$. Η σχέση 1.1 προκύπτει από τις παρακάτω παρατηρήσεις:

- *Η οικογένεια $\mathcal{A}$ περιέχει τη $\mathcal{C}$. Πράγματι, οποιοδήποτε σύνολο της $\mathcal{C}$ είναι της μορφής A_{i_0} για κάποιο $i_0 \in I$. Η επιλογή $J = \{i_0\} \subset I$ στην περιγραφή στοιχείων της $\mathcal{A}$ δίνει $\bigcup_{i \in J} A_i = A_{i_0} \in \mathcal{A}$.*

- *Οποιαδήποτε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1$ περιέχει τη $\mathcal{C}$ πρέπει να περιέχει την $\mathcal{A}$. Πράγματι, οποιαδήποτε ένωση $\bigcup_{i \in J} A_i$ είναι αριθμήσιμη, αφού το I είναι αριθμήσιμο και εφόσον η $\mathcal{A}_1$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα A_i με $i \in J$, θα περιέχει και την ένωσή τους.*

- *Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Πράγματι, η επιλογή $J = \emptyset$ δίνει $\bigcup_{i \in J} A_i = \emptyset$. Επίσης, αν πάρουμε A της μορφής $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ για κάποιο $J \subset I$, τότε $X \setminus A = \bigcup_{i \in I \setminus J} A_i$ που είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$. Τέλος, αν έχουμε ακολουθία $(B_n)_{n \geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $B_n = \bigcup_{i \in J_n} A_i$, όπου $J_n \subset I$ για κάθε $n \geq 1$, τότε για $J := \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{i \in J} A_i$ που πάλι είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$ ([8]).*

*Η $\sigma(\mathcal{C})$ ονομάζεται **σ-άλγεβρα παραγόμενη από διαμέριση**.*

1.2 Τα σύνολα Borel

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα $A \subset X$ ονομάζεται **ανοικτό σύνολο** αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) := \{y \in X : d(y, x) < \delta\} \subset A$.

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ θα το θεωρούμε μετρικό χώρο με μετρική την Ευκλείδεια,δηλαδή:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

όπου $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $|\cdot|$ την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού.

Το σύνολο $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ το θεωρούμε μετρικό χώρο με τη μετρική:

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|,$$

όπου $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(-\infty) = -1, f(\infty) = 1$.

Γενικά, η οικογένεια $\mathcal{T}$ των ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο δεν είναι σ-άλγεβρα και συνήθως δεν είναι καν άλγεβρα ([8]).

Ορισμός 1.2.1. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{T})$ που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{T}$ των ανοικτών συνόλων του X ονομάζεται **σ-άλγεβρα Borel** και τα στοιχεία της **σύνολα Borel**. Συμβολίζουμε τη $\sigma(\mathcal{T})$ με $\mathcal{B}(X)$.*

Η $\mathcal{B}(X)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα.

Πρόταση 1.2.1. *Κάθε ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. ’Εστω $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοικτών συνόλων του X. Από τον ορισμό των συνόλων Borel έχουμε $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{T}) =: \mathcal{B}(X)$. Αν F είναι κλειστό, τότε $X \backslash F \in \mathcal{B}(X)$ ως ανοικτό. Αλλά η $\mathcal{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα, οπότε πρέπει και το συμπλήρωμα του $X \backslash F$ να ανήκει στην $\mathcal{B}(X)$. Άρα $F \in \mathcal{B}(X)$ ([8]).

□

Πρόταση 1.2.2. *Κάθε υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Τα διάφορα σενάρια για ένα υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ είναι τα εξής:

$$(-\infty, a], [a, \infty), (-\infty, a), (a, \infty), (a, b), [a, b], (a, b], [a, b).$$

Τα πρώτα δύο είναι κλειστά σύνολα, τα επόμενα τρία είναι ανοικτά και το $[a, b]$ είναι κλειστό, άρα από την Πρόταση 1.2.1 έπεται ότι είναι σύνολα Borel. Το $(a, b]$ το γράφουμε ως εξής:

$$(a, b] = \mathbb{R} \backslash ((-\infty, a] \bigcup (b, \infty)).$$

Επειδή η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και $(-\infty, a], (b, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, έπεται ότι $(-\infty, a] \bigcup (b, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $\mathbb{R} \backslash ((-\infty, a] \bigcup (b, \infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $[a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ([8]). □

Επειδή η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει όλα τα διαστήματα, έπεται ότι όλα τα σύνολα που φτιάχνονται ξεκινώντας από διαστήματα και εφαρμόζοντας αριθμήσιμο πλήθος επαναλήψεων των πράξεων της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος θα είναι επίσης στοιχεία της $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.3 Μέτρα σε μετρήσιμο χώρο

Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο X. Το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος**.

Ορισμός 1.3.1. ***Μέτρο*** *στον $(X, \mathcal{A})$ ονομάζεται κάθε συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, *για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n \geq 1}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$.*

*Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται **χώρος μέτρου** και τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ **μετρήσιμα σύνολα**.*

Παράδειγμα 1.3.1. *(Μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$) Έστω $X = \mathbb{R}$ και $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι δυνατόν να οριστεί ένα μέτρο λ τέτοιο ώστε:*

$$\lambda(I) = \mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma(I),$$

για κάθε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, τότε $\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = b - a$, $\lambda((a,\infty)) = \infty$.

Παράδειγμα 1.3.2. *Έστω X ένα σύνολο, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ και $x_0 \in X$ ένα δεδομένο σημείο του X. Ορίζουμε:*

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 & \text{αν } x_0 \in A, \\ 0 & \text{αν } x_0 \in X \backslash A \end{cases}$$

*για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Η συνάρτηση δ_{x_0} είναι μέτρο και ονομάζεται **μέτρο Dirac** στο x_0 ([8]).*

Ορισμός 1.3.2. *'Ενα μέτρο μ σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ ονομάζεται **πεπερασμένο** αν $\mu(X) < \infty$, και **μέτρο πιθανότητας** αν $\mu(X) = 1$. Αντίστοιχα, ο χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται **χώρος πεπερασμένου μέτρου** ή **χώρος πιθανότητας**. Για έναν χώρο πιθανότητας χρησιμοποιείται συνήθως ο συμβολισμός $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$.*

Παράδειγμα 1.3.3. *Έστω Ω αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Έστω $f : \Omega \to [0, \infty)$ ώστε $\sum_{x \in \Omega} f(x) = 1$. Για $A \in \mathcal{F}$, ορίζουμε:*

$$\boldsymbol{P}(A) := \sum_{x \in A} f(x).$$

*Η συνάρτηση $\boldsymbol{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στο Ω και ονομάζεται **διακριτό μέτρο πιθανότητας**. Η συνάρτηση αυτή δίνει σε κάθε σημείο $x \in \Omega$ μάζα $f(x)$. Το διακριτό μέτρο πιθανότητας είναι γενίκευση του μέτρου Dirac ([8]).*

Παράδειγμα 1.3.4. *Για το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος που έχει πιθανότητα $p \in [0,1]$ να φέρει κορώνα και $1 - p$ να φέρει γράμματα, ένας φυσιολογικός χώρος πιθανότητας προκύπτει ως ειδική περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος. Παίρνουμε $\Omega := \{ K, \Gamma\}$, $f(K) = p$ και $f(\Gamma) = 1 - p$. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένα μέτρο πιθανότητας, έστω $\boldsymbol{P}^{(p)}$, και τελικά ο χώρος πιθανότητας είναι ο $(\{K, \Gamma\}, \mathcal{P}(\{K, \Gamma\}), \boldsymbol{P}^{(p)})$ ([8]).*

Πρόταση 1.3.1. *Έστω μ ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Τότε,*

1. *$\mu(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$, για κάθε $n \geq 1$ και $\{A_k : 1 \leq k \leq n\}$ ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$.*

2. *Αν $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subset B$, τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$ και αν $\mu(A) < \infty$, τότε:*

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A).$$

3. *$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$.*

4. *Αν $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε:*

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

5. *Αν $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $\mu(A_1) < \infty$, τότε:*

$$\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Απόδειξη. 1. Τα σύνολα της ακολουθίας $(B_k)_{k\geq 1}$ με

$$B_k := \begin{cases} A_k & \text{αν } k \in \{1, 2, ..., n\} \\ \emptyset & \text{αν } k \in \mathbb{N}, k \geq n+1 \end{cases}$$

είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$. Από την ιδιότητα (2) του ορισμού του μέτρου προκύπτει το εξής:

$$\mu(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \mu(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k),$$

αφού $\mu(\emptyset) = 0$.

2. Ισχύει ότι $B = A \cup (B \backslash A)$, όπου τα $A, B\backslash A$ είναι ξένα σύνολα. Επομένως, με βάση

το (1) της Πρότασης,

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B\backslash A)) = \mu(A) + \mu(B\backslash A).$$

Επειδή $\mu(B\backslash A) \geq 0$, έπεται ότι $\mu(B) \geq \mu(A)$. Αν $\mu(A) < \infty$, τότε το αφαιρούμε από την παραπάνω ισότητα και προκύπτει ότι $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. Έστω $B_1 := A_1$ και $B_k := A_k\backslash(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{k-1})$, για κάθε $k \geq 2$. Τα $\{B_k : k \geq 1\}$ είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$. Επίσης, $B_n \subset A_n$, για κάθε $n \geq 1$, και $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Επομένως,

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει, επειδή τα $(B_n)_{n\geq 1}$ είναι ξένα ανά δύο. Η ανισότητα ισχύει λόγω της $B_n \subset A_n$ και του μέρους (2) της Πρότασης.

4. Έστω $B_1 := A_1$ και $B_k := A_k\backslash A_{k-1}$, για κάθε $k \geq 2$. Τα $\{B_k : k \geq 1\}$ είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$. Επίσης, $\cup_{k=1}^{n} B_k = A_n$ και $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Επομένως,

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

5. Θέτουμε $C_n := A_1\backslash A_n$, για κάθε $n \geq 1$. Τότε, η ακολουθία $(C_n)_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Από το (2) της Πρότασης και λόγω της ανισότητας $\mu(A_1) < \infty$ έπεται ότι:

$$\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n).$$

Ισχύει ότι:

$$A_1\backslash(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty}(A_1\backslash A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Από το (4) της Πρότασης έπεται ότι:

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} C_n) = \mu(A_1\backslash(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Όμως $\mu(A_1) < \infty$ οπότε:

$$\mu(A_1) - \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Άρα, $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ ([8],[6]). $\square$

1.4 Αξιωματική Θεμελίωση Θεωρίας Πιθανοτήτων

Ένα υπόδειγμα πειράματος που περιέχει κάτι το τυχαίο μπορεί να περιγραφεί σαν ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Πιο συγκεκριμένα:

- Ω είναι ο **χώρος δειγμάτων**, στον οποίο περιέχονται όλα τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος.
- Ένα στοιχείο $\omega \in \Omega$ ονομάζεται **σημείο δείγματος** και είναι η συγκεκριμένη έκβαση ενός πειράματος.
- Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ αποκαλείται **οικογένεια ενδεχομένων** (ή κλάση ενδεχομένων) και περιέχει όλες τις πιθανές ερωτήσεις που μπορεί κάποιος να θέσει για ένα πείραμα.
- Ένα **ενδεχόμενο** είναι ένα στοιχείο της $\mathcal{F}$, δηλαδή ένα μετρήσιμο υποσύνολο του Ω. Τα ενδεχόμενα μπορεί να είναι πιο περίπλοκα από μια απλή έκβαση ενός πειράματος.
- Το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ μας πληροφορεί πόσο εύκολο ή δύσκολο είναι να συμβεί ένα ενδεχόμενο. Δηλαδή, το $\mathbf{P}(F)$ μας πληροφορεί πόσο έυκολο είναι να συμβεί το ενδεχόμενο $F \in \mathcal{F}$. Αν $\mathbf{P}(F_1) > \mathbf{P}(F_2)$, με $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, τότε το ενδεχόμενο F_1 είναι πιο πιθανό να συμβεί από το ενδεχόμενο F_2.

Η διατύπωση της θεωρίας πιθανοτήτων με βάση τη χρήση της τριάδας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ συνηθίζεται να ονομάζεται **αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων** ([1]).

1.5 Μέτρα πιθανότητας σε αριθμήσιμο δειγματικό χώρο

Θεώρημα 1.5.1. *Έστω Ω αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Τότε:*

1. *Ένα μέτρο πιθανότητας **P** στον $(\Omega, \mathcal{F})$ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές $p_\omega = \boldsymbol{P}(\{\omega\}), \omega \in \Omega$.*

2. *Έστω $(q_\omega)_{\omega\in\Omega}$ ακολουθία αριθμών στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει μέτρο πιθανότητας **P** στον $(\Omega, \mathcal{F})$ με $\boldsymbol{P}(\{\omega\}) = q_\omega$, για κάθε $\omega \in \Omega$ αν και μόνο αν $q_\omega \geq 0$, για κάθε $\omega \in \Omega$ και $\sum_{\omega\in\Omega} q_\omega = 1$.*

Απόδειξη. 1. Έστω $A \subset \Omega$. Τότε $A = \cup_{\omega\in A}\{\omega\}$ και εφόσον το Ω είναι αριθμήσιμο:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

2. Για το ευθύ ισχύει ότι $q_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$, άρα $q_\omega \geq 0$ εφόσον το **P** είναι μέτρο στο Ω. Επιπλέον,

$$\sum_{\omega\in\Omega} q_\omega = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \mathbf{P}(\cup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα από το Παράδειγμα 1.3.3 ([8]). □

Ορισμός 1.5.1. *Έστω Ω πεπερασμένο σύνολο. Ένα μέτρο πιθανότητας **P** στον $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ λέγεται **ομοιόμορφο** αν υπάρχει $c > 0$ έτσι ώστε $\boldsymbol{P}(\{\omega\}) = c$, για κάθε $\omega \in \Omega$, δηλαδή το **P** δίνει την ίδια μάζα σε κάθε $\omega \in \Omega$.*

1.6 Περιγραφή μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$

Ορισμός 1.6.1. *Έστω **P** μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. **Συνάρτηση κατανομής** του **P** λέγεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ με*

$$F(x) = \boldsymbol{P}((-\infty, x])\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η $F(x)$ μετράει τη μάζα που δίνει το μέτρο στην ημιευθεία $(-\infty, x]$.

Παράδειγμα 1.6.1. *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και δ_{x_0} το μέτρο Dirac στην $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ στο x_0. Η συνάρτηση κατανομής του δ_{x_0} είναι η:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < x_0, \\ 1 & \text{αν } x \geq x_0. \end{cases}$$

Παρακάτω χρησιμοποιούνται οι εξής συμβολισμοί, όπου $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$F(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} F(x),\ F(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} F(x),$$

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x),\ F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x).$$

Πρόταση 1.6.1. *Έστω **P** μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ και F συνάρτηση κατανομής του **P**. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Η F είναι αύξουσα συνάρτηση.*
2. *Η F είναι δεξιά συνεχής.*
3. *$F(-\infty) = 0$ και $F(\infty) = 1$.*

Απόδειξη. 1. Έστω $x \leq y$. Τότε:

$$F(y) - F(x) = \mathbf{P}((-\infty, y]) - \mathbf{P}((-\infty, x]) = \mathbf{P}((-\infty, y] \setminus (-\infty, x]) = \mathbf{P}((x, y]) \geq 0.$$

Άρα η F είναι αύξουσα.
2.Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Η F είναι αύξουσα, επομένως το $\lim_{x \to x_0^+} F(x)$ υπάρχει και ισχύει το εξής:

$$F(x_0+) = \lim_{n \to \infty} F(x_0 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}((-\infty, x_0 + \frac{1}{n}]) = \mathbf{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} (-\infty, x_0 + \frac{1}{n}]) =$$

$$= \mathbf{P}((-\infty, x_0]) = F(x_0).$$

Άρα η F είναι δεξιά συνεχής.

3. Επειδή η F είναι αύξουσα, τα όρια υπάρχουν και ισχύουν τα παρακάτω:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{n \to \infty} F(-n) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}((-\infty, -n]) = \mathbf{P}(\cap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, -n]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{n \to \infty} F(n) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}((-\infty, n]) = \mathbf{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, n]) = \mathbf{P}(\mathbb{R}) = 1([8]).$$

□

Θεώρημα 1.6.1. *Έστω $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με την ίδια συνάρτηση κατανομής. Τότε $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}$.*

Θεώρημα 1.6.2. *Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση κατανομής ενός μέτρου $\boldsymbol{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ αν και μόνο αν ισχύουν τα $(1) - (3)$ της Πρότασης 1.6.1.*

1.7 Μετρήσιμες συναρτήσεις - Τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 1.7.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμοι χώροι. Μια συνάρτηση $f : \Omega \to E$ λέγεται $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-**μετρήσιμη** αν:*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F},\ \forall A \in \mathcal{E}.$$

Συμβολίζουμε το σύνολο $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$ με $f^{-1}(\mathcal{E})$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-μετρήσιμη αν $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$.

Μια $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-μετρήσιμη συνάρτηση θα λέγεται $\mathcal{F}$-μετρήσιμη ή $\mathcal{E}$-μετρήσιμη ή απλώς μετρήσιμη αν είναι σαφές ποια είναι η σ-άλγεβρα που δεν αναφέρεται. Επιπλέον, όταν κάποιος από τους χώρους Ω, E είναι μετρικός χώρος (π.χ. υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$),θα θεωρείται ότι η σ-άλγεβρα σε αυτόν τον χώρο είναι η σ-άλγεβρα των υποσυνόλων Borel του χώρου αυτού. Και τότε, π.χ., $\mathcal{F}$-μετρήσιμη σημαίνει $\mathcal{F}/\mathcal{B}(E)$-μετρήσιμη. Αν ο Ω (αντίστοιχα ο E) είναι μετρικός χώρος και η $\mathcal{E}$ (αντίστοιχα η $\mathcal{F}$) εννοείται, ονομάζουμε Borel-μετρήσιμη κάθε f η οποία είναι $\mathcal{B}(\Omega)/\mathcal{E}$-μετρήσιμη (αντίστοιχα $\mathcal{F}/\mathcal{B}(E)$-μετρήσιμη).

Πρόταση 1.7.1. *Έστω $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις στο μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε μετρήσιμες είναι επίσης οι παρακάτω συναρτήσεις:*

$$af, |f|, f+g, fg, \frac{f}{g}, min\{f,g\}, max\{f,g\}, f^+ = max\{f,0\}, f^- = max\{-f,0\},$$

όπου κάθεμια ορίζεται έτσι ώστε να είναι σταθερή και ίση με μια αυθαίρετη πεπερασμένη σταθερά στο σύνολο των σημείων απροσδιοριστίας $(\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0})$.

Ορισμός 1.7.2. *Σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ μια μετρήσιμη συνάρτηση ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή**. Μια **(πραγματική) τυχαία μεταβλητή** είναι μια $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$, όπου $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ είναι ένας χώρος πιθανότητας.*

Μια τυχαία μεταβλητή X μπορεί να θεωρηθεί σαν μια μεταβλητή που η τιμή της εξαρτάται από την έκβαση ενός τυχαίου πειράματος. Για να απαντήσουμε στην ερώτηση τι τιμή μπορεί να πάρει η X θα πρέπει να έχουμε την πληροφορία σχετικά με τις εκβάσεις του πειράματος που περιέχονται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ ([1]).

Παράδειγμα 1.7.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ ένας χώρος πιθανότητας. Για $A \subset \Omega$ η συνάρτηση $\boldsymbol{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως εξής:*

$$\boldsymbol{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \textit{αν}\ \omega \in A \\ 0 & \textit{αν}\ \omega \notin A \end{cases}$$

*είναι μια τυχαία μεταβλητή αν $A \in \mathcal{F}$. Η τυχαία αυτή μεταβλητή ονομάζεται **δείκτρια συνάρτηση** ([1]).*

Ορισμός 1.7.3. *Μια συνάρτηση $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ λέγεται **απλή** αν η εικόνα της είναι πεπερασμένο σύνολο.*

Αν οι διαφορετικές τιμές που παίρνει μια απλή συνάρτηση είναι $a_1, a_2, ..., a_n$ και θέσουμε $A_i := f^{-1}(\{a_i\})$, τότε η $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ είναι διαμέριση του Ω και η f γράφεται ως εξής:

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}. \tag{1.2}$$

Μια απλή συνάρτηση f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν τα σύνολα $A_1, A_2, ..., A_n$ είναι μετρήσιμα ([8]).

Μια απλή συνάρτηση δε γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός από δείκτριες συναρτήσεις. Αν τα $A_1, A_2, ..., A_n$ δεν είναι απαραίτητα ξένα, τότε η σχέση (1.2) ορίζει πάλι μια απλή συνάρτηση. Αν όμως τα $A_1, A_2, ..., A_n$ είναι ξένα ανά δύο και οι αριθμοί $a_1, a_2, ..., a_n$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, τότε η γραφή (1.2) είναι μοναδική και ονομάζεται **κανονική μορφή της** f.

Ορισμός 1.7.4. *Έστω Ω σύνολο. Για μια συνάρτηση $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$, **σ-άλγεβρα παραγόμενη από την** f ονομάζεται το σύνολο:*

$$\sigma(f) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}([-\infty, \infty])\} = f^{-1}(\mathcal{B}([-\infty, \infty])).$$

Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο Ω η οποία κάνει την f μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{A})$. Αν η f είναι μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{F})$, τότε $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$ ([8]).

Ορισμός 1.7.5. *Έστω Ω σύνολο. Αν $\{f_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια συναρτήσεων στο Ω με τιμές στο $[-\infty, \infty]$,* ***σ-άλγεβρα παραγόμενη από τις συναρτήσεις*** *$\{f_i : i \in I\}$ ονομάζεται το σύνολο:*

$$\sigma(\{f_i : i \in I\}) := \sigma(\cup_{i \in I} \sigma(f_i)).$$

Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που κάνει όλες τις $\{f_i : i \in I\}$ μετρήσιμες. Αν $I = \{1, 2, ..., n\}$, συμβολίζεται με $\sigma(f_1, f_2, ..., f_n)$ ([8]).

1.8 Ολοκλήρωμα Lebesgue

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Παρακάτω θα οριστεί το ολοκλήρωμα μιας $\mathcal{A}/\mathcal{B}([-\infty, \infty])$-μετρήσιμης συνάρτησης $f : X \to [-\infty, \infty]$ σε τρία βήματα. Πρώτα για $f \geq 0$ απλή μετρήσιμη, έπειτα για $f \geq 0$ μετρήσιμη και τέλος για f μετρήσιμη με τιμές στο $[-\infty, \infty]$.

Ορισμός 1.8.1. *Έστω $f : X \to [0, \infty]$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση με κανονική μορφή $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{1}_{A_i}$. Ορίζουμε το* ***ολοκλήρωμα Lebesgue της*** *f* ***ως προς το μέτρο*** *μ ως εξής:*

$$\int f \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i),$$

με τη σύμβαση $0 \cdot (+\infty) = 0$. Το ολοκλήρωμα είναι στοιχείο του $[0, \infty]$.

Ορισμός 1.8.2. *Έστω $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ ορίζεται ως εξής:*

$$\int f \, d\mu := sup\{\int s \, d\mu : s \text{ απλή, μετρήσιμη με } 0 \leq s \leq f\}.$$

Ορισμός 1.8.3. *Έστω $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ ορίζεται ως εξής:*

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu,$$

εφόσον στο δεξί μέλος της ισότητας δεν εμφανίζεται απροσδιοριστία της μορφής $+\infty - \infty$. *Οι* $f^+ = max\{f, 0\}$,$f^- = max\{-f, 0\}$ *είναι μετρήσιμες μη αρνητικές συναρτήσεις. Το ολοκλήρωμα μιας μετρήσιμης συνάρτησης, όταν αυτό ορίζεται, είναι στοιχείο του* $[-\infty, \infty]$. *Στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός, λέμε ότι η συνάρτηση* f *είναι* ***(Lebesgue) ολοκληρώσιμη****.*

Μια μετρήσιμη συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν και τα δύο ολοκληρώματα $\int f^+\,d\mu$, $\int f^-\,d\mu$ είναι πεπερασμένα.

Πρόταση 1.8.1. *Έστω* $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ *μετρήσιμες συναρτήσεις των οποίων το ολοκλήρωμα ορίζεται. Τότε:*

1. $\int af\,d\mu = a\int f\,d\mu, \forall a \in \mathbb{R}$.
2. $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$.
3. *Αν* $f \leq g$, *τότε* $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.
4. $|\int f\,d\mu| \leq \int |f|\,d\mu$.

Η (2) ισχύει με την προϋπόθεση ότι στο δεξί μέλος δεν εμφανίζεται η μορφή $\infty - \infty$.

Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, $f : X \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη και $A \in \mathcal{A}$, ορίζουμε το **ολοκλήρωμα της** f **ως προς το μέτρο** μ **στο** A ως εξής:

$$\int_A f\,d\mu := \int f\mathbf{1}_A\,d\mu,$$

εφόσον ορίζεται το δεξί μέλος της ισότητας. Όταν $A = X$, τότε $\int_X f\,d\mu = \int f\,d\mu$. Επιπλέον, αν $f \geq 0$ και $A \subset B$, τότε $\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu$.

1.9 Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός 1.9.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή. Η **μέση τιμή της** X ορίζεται ως εξής:*

$$\boldsymbol{E}[X] := \int X \, d\boldsymbol{P}$$

εφόσον το δεξί μέλος της ισότητας ορίζεται.

Αν $A \in \mathcal{F}$, ορίζουμε τη **μέση τιμή της** X **πάνω στο** A ως $\mathbf{E}[X\mathbf{1}_A]$ εφόσον αυτή ορίζεται. Συμβολίζουμε με $\mathbf{E}[X; A]$.

Δύο ειδικές περιπτώσεις για τη μέση τιμή είναι οι παρακάτω:

- Αν $X = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, τότε η X είναι απλή και $\mathbf{E}[X] = c$.
- Αν $X = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mathbf{E}[X] = \mathbf{P}(A)$.

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Μια ιδιότητα Ψ ισχύει **σχεδόν παντού** αν υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\{x \in X : \text{ η } \Psi \text{ δεν ισχύει}\} \subset A$ και $\mu(A) = 0$. Αν το μ είναι μέτρο πιθανότητας, λέμε ότι η Ψ ισχύει με **με πιθανότητα 1** ή **σχεδόν βέβαια**.

Πρόταση 1.9.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε:*

1. *Αν $\mu(\{f \neq g\}) = \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, τότε $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.*
2. *$\int f \, d\mu = 0$ αν και μόνο αν $\mu(\{f \neq 0\}) = \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$.*
3. *Αν $\int f \, d\mu < \infty$, τότε $\mu(f = \infty) = 0$.*

Στην περίπτωση ενός χώρου πιθανότητας η Πρόταση (1.9.1) παίρνει την παρακάτω μορφή:

Πρόταση 1.9.2. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας και $X, Y : \Omega \to [0, \infty]$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Αν $\boldsymbol{P}(X = Y) = 1$, τότε $\boldsymbol{E}[X] = \boldsymbol{E}[Y]$.*

2. $\boldsymbol{E}[X] = 0$ *αν και μόνο αν* $\boldsymbol{P}(X = 0) = 1$.

3. *Αν* $\boldsymbol{E}[X] < \infty$, *τότε* $\boldsymbol{P}(X = \infty) = 0$.

Μια χρήσιμη ιδιότητα της μέσης τιμής είναι η παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 1.9.3. *(Ανισότητα Jensen) Έστω* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *χώρος πιθανότητας και* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *τυχαία μεταβλητή με* $\boldsymbol{E}[|X|] < \infty$ *και* $\Phi : I \to \mathbb{R}$ *κυρτή συνάρτηση σε ένα διάστημα* $I \subset \mathbb{R}$ *με* $\boldsymbol{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}) = \boldsymbol{P}(\{X \in I\}) = 1$ *και* $\boldsymbol{E}[|\Phi(X)|] < \infty$. *Τότε:*

$$\Phi(\boldsymbol{E}[X]) \leq \boldsymbol{E}[\Phi(X)].$$

Ορισμός 1.9.2. *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *χώρος πιθανότητας και* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *τυχαία μεταβλητή με* $\boldsymbol{E}[|X|] < \infty$. *Η* ***διασπορά*** $Var(X)$ ***της*** X *ορίζεται ως εξής:*

$$Var(X) := \boldsymbol{E}[(X - \boldsymbol{E}[X])^2].$$

Ακολουθουν δύο σημαντικές ανισότητες που σχετίζονται με τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής.

Πρόταση 1.9.4. *(Ανισότητα Markov) Έστω* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *χώρος πιθανότητας. Αν* $X : \Omega \to [0, \infty]$ *τυχαία μεταβλητή και* $a > 0$, *τότε:*

$$\boldsymbol{P}(X \geq a) \leq \frac{\boldsymbol{E}[X]}{a}.$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι $X \geq a\mathbf{1}_{X \geq a}$. Πράγματι, αν το $\omega \in \Omega$ είναι τέτοιο ώστε $X(\omega) \geq a$, τότε η ανισότητα ισχύει. Αν το ω είναι τέτοιο ώστε $X(\omega) < a$, τότε η ανισότητα γίνεται $X \geq 0$ και ισχύει πάντα. Επομένως,

$$\mathbf{E}[X] \geq \mathbf{E}[a\mathbf{1}_{X \geq a}] = a\mathbf{P}(X \geq a).$$

□

Πρόταση 1.9.5. *(Ανισότητα Chebyshev) Έστω* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *χώρος πιθανότητας. Αν* $X : \Omega \to$

$[-\infty, \infty]$ *τυχαία μεταβλητή με* $\boldsymbol{E}[|X|] < \infty$ *και* $a > 0$*, τότε:*

$$\boldsymbol{P}(|X - \boldsymbol{E}[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση (1.9.4) στην τυχαία μεταβλητή $|X - \mathbf{E}[X]|^2$ και έχουμε:

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| \geq a) = \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]|^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbf{E}[|X - \mathbf{E}[X]|^2]}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}.$$

□

1.10 Οι χώροι $\mathcal{L}^p$ με $p \in [1, \infty)$

Ορισμός 1.10.1. *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *χώρος πιθανότητας,* $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ *τυχαία μεταβλητή και* $p \in [1, \infty)$*. Ορίζουμε:*

$$||X||_p := (\boldsymbol{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$$

και

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}) := \{X | X : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ τυχαία μεταβλητή και } ||X||_p < \infty\}.$$

Ο χώρος $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *συμβολίζεται με* $\mathcal{L}^p(\boldsymbol{P})$ *όταν είναι σαφές ποιος είναι ο χώρος* Ω *και ποια η σ-άλγεβρα* $\mathcal{F}$*.*

Η συνάρτηση $|| \cdot ||_p : \mathcal{L}^p \to [0, \infty)$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $||\lambda X||_p = |\lambda| ||X||_p$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $||X + Y||_p \leq ||X||_p + ||Y||_p$,

και το σύνολο $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ είναι διανυσματικός χώρος ([8]).

Πρόταση 1.10.1. *(Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *τυχαίες μεταβλητές* *που ανήκουν στο χώρο* $\mathcal{L}^2$*. Τότε* $XY \in \mathcal{L}^1$ *και*

$$|\boldsymbol{E}[XY]| \leq ||X||_2||Y||_2.$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι $2|XY| \leq X^2 + Y^2$, επομένως $XY \in \mathcal{L}^1$. Επίσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$0 \leq \mathbf{E}[(\lambda X + Y)^2] = \lambda^2\mathbf{E}[X^2] + 2\lambda\mathbf{E}[XY] + \mathbf{E}[Y^2].$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω τετραγωνικής μορφής ως προς λ ισούται με:

$$4\mathbf{E}[XY]^2 - 4\mathbf{E}[X^2]\mathbf{E}[Y^2].$$

Εφόσον η μορφή αυτή είναι μη αρνητική για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι:

$$|\mathbf{E}[XY]| \leq \mathbf{E}[X^2]^{\frac{1}{2}}\mathbf{E}[Y^2]^{\frac{1}{2}},$$

το οποίο είναι το ζητούμενο ([8]). □

Πρόταση 1.10.2. *(Ανισότητα Hölder) Έστω* $p, q \in (1, \infty)$ *με* $p^{-1} + q^{-1} = 1$ *και* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *τυχαίες μεταβλητές με* $||X||_p < \infty, ||Y||_q < \infty$*. Τότε* $XY \in \mathcal{L}^1$ *και*

$$|\boldsymbol{E}[XY]| \leq ||X||_p||Y||_q.$$

Πρόταση 1.10.3. *Έστω* X *τυχαία μεταβλητή με τιμές στο* $[-\infty, \infty]$*. Τότε για* $1 \leq r < s$ *ισχύει το παρακάτω:*

$$||X||_r \leq ||X||_s.$$

Από την παραπάνω Πρόταση έπεται ότι αν $1 \leq r < s$, τότε $\mathcal{L}^s(\mathbf{P}) \subset \mathcal{L}^r(\mathbf{P})$. Ακολουθεί η απόδειξη της Πρότασης 1.10.3.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την ανισότητα $Hölder$, στην οποία τη θέση της X έχει η $|X|^r$, τη θέση της Y έχει η σταθερή συνάρτηση 1 και $p = \frac{s}{r}, q = \frac{s}{(s-r)}$. Προκύπτει το εξής:

$$\mathbf{E}[|X|^r] = \mathbf{E}[|X|^r 1] \leq \mathbf{E}[|X|^s]^{r/s}\mathbf{E}[1^q]^{1/q} = \mathbf{E}[|X|^s]^{r/s}.$$

$\square$

Ορισμός 1.10.2. *Έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $\boldsymbol{E}[|X|], \boldsymbol{E}[|Y|] < \infty$ και η $\boldsymbol{E}[XY]$ ορίζεται (στο $[-\infty, \infty]$). Ως **συνδιακύμανση των** X, Y ορίζεται η ποσότητα:*

$$Cov(X, Y) = \boldsymbol{E}[(X - \boldsymbol{E}[X])(Y - \boldsymbol{E}[Y])],$$

η οποία είναι στοιχείο του $[-\infty, \infty]$.

Πρόταση 1.10.4. *Έστω $X, Y \in \mathcal{L}^2$. Τότε:*

$$|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}.$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned} |Cov(X, Y)| &= |\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])]| \\ &\leq \sqrt{\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]}\sqrt{\mathbf{E}[(Y - \mathbf{E}[Y])^2]} = \sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}. \end{aligned}$$

$\square$

1.11 Τα βασικά οριακά θεωρήματα

Έστω X ένα σύνολο και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία υποσυνόλων του. Ορίζουμε τα σύνολα:

$$\begin{aligned} \lim infA_n &:= \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k, \\ \lim supA_n &:= \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k. \end{aligned}$$

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ που συγκλίνουν σημειακά σε μια συνάρτηση f.

Θεώρημα 1.11.1. *(Θεώρημα μονότονης σύγκλισης) Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $f_n : X \to [0, +\infty]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Θέτουμε $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Τότε ισχύει το εξής:*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Θεώρημα 1.11.2. *(Λήμμα Fatou) Έστω $(f_n)_{n\geq 1}$ με $f_n : X \to [0, +\infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε*

$$\int \lim_{n\to\infty} inf f_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} inf \int f_n \, d\mu.$$

Θεώρημα 1.11.3. *(Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού και $|f_n(x)| \leq g(x)$, για κάθε $x \in X$, όπου $g : X \to [0, \infty]$ είναι μετρήσιμη με $\int g \, d\mu < \infty$. Τότε $\int |f| \, d\mu < \infty$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχει την εξής χρήσιμη συνέπεια.

Θεώρημα 1.11.4. *(Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ και $|f_n| \leq M$, όπου $M < \infty$ σταθερά. Τότε $\int |f| \, d\mu < \infty$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

1.12 Κατανομή τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός 1.12.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος και $X : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή. Το μέτρο πιθανότητας $\boldsymbol{P}^X : \mathcal{E} \to [0, 1]$ στον E με:*

$$\boldsymbol{P}^X(B) := \boldsymbol{P}(X^{-1}(B)) = \boldsymbol{P}(X \in B),$$

*για κάθε $B \in \mathcal{E}$ λέγεται **κατανομή της** X. Το $\boldsymbol{P}^X$ λέγεται και εικόνα του $\boldsymbol{P}$ μέσω της X.*

Πρόταση 1.12.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος και $X : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\boldsymbol{P}^X$. Για κάθε $h : E \to [0, \infty]$ ισχύει*

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}[h(X)] = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}^X}[h]. \tag{1.3}$$

Δηλαδή ισχύει

$$\int h(X(\omega))\, d\boldsymbol{P}(\omega) = \int h(x)\, d\boldsymbol{P}^X(x).$$

Επίσης, αν η $h : E \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε ή και τα δύο μέλη της (1.3) ορίζονται και είναι ίσα ή και τα δύο δεν ορίζονται.

Ορισμός 1.12.2. *Έστω **P** ένα μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, λ το μέτρο Lebesgue και $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Η f λέγεται **πυκνότητα του P** αν*

$$\boldsymbol{P}(A) = \int_A f(x)\, d\lambda(x), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Η πυκνότητα ενός μέτρου (αν υπάρχει) δεν είναι μοναδική. Αυτό συμβαίνει επειδή αν ένα μέτρο **P** έχει πυκνότητα f, τότε αλλάζοντας την f σε ένα σύνολο Borel που έχει μέτρο Lebesgue 0, παίρνουμε μια νέα συνάρτηση, η οποία είναι και αυτή πυκνότητα του **P**. Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της πυκνότητας του μέτρου και από την Πρόταση (1.9.1).

Πρόταση 1.12.2. *Αν δύο Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις f_1, f_2 είναι πυκνότητες για το ίδιο μέτρο πιθανότητας **P** στο $\mathbb{R}$, τότε $\lambda(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.*

Ορισμός 1.12.3. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to [0, \infty]$ τυχαία μεταβλητή και $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Η f είναι μια **πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής** X αν είναι πυκνότητα της κατανομής $\boldsymbol{P}^X$ της X.*

Πρόταση 1.12.3. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$. Αν η $h : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε*

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}[h(X)] = \int h(x) f(x)\, dx,$$

όποτε κάποια από τις δύο ποσότητες ορίζεται (δηλαδή τότε ορίζεται και η άλλη και είναι ίσες).

Διακριτή κατανομή στο σύνολο E ονομάζεται ένα μέτρο πιθανότητας **P** στο μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{P}(E))$ για το οποίο υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \subset E$, ώστε $\mathbf{P}(S) = 1$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{P}(\{x\}) > 0$ για κάθε $x \in S$, αλλιώς αντικαθιστούμε το S με το $\hat{S} = \{x \in S : \mathbf{P}(\{x\}) > 0\}$. Το σύνολο $A \subset S$ γράφεται ως $A = \cup_{x \in A}\{x\}$ και επειδή το A

είναι αριθμήσιμο, ισχύει το ακόλουθο:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{x \in A} \mathbf{P}(\{x\}).$$

Το **P** δίνει μάζα $\mathbf{P}(\{x\})$ σε κάθε σημείο x που ανήκει στο S και μάζα μηδέν στο E/S. Επομένως, για κάθε $A \subset E$ ισχύει $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap S)$ και

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{x \in A} \mathbf{P}(\{x\}).$$

Πρόταση 1.12.4. *Έστω **P** διακριτό μέτρο πιθανότητας στο E. Τότε ισχύει το παρακάτω:*

$$\int h(x)\, d\boldsymbol{P}(x) = \sum_{x \in E} h(x) \boldsymbol{P}(\{x\}),$$

για κάθε $h : E \to [-\infty, \infty]$. Δηλαδή, για κάθε τέτοια h ή και τα δύο μέλη ορίζονται και είναι ίσα μεταξύ τους ή και τα δύο δεν ορίζονται.

Διακριτή τυχαία μεταβλητή στο E ονομάζεται μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to E$ της οποίας η εικόνα $S := X(\Omega)$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Η κατανομή $\mathbf{P}^X$ της τυχαίας μεταβλητής X είναι μια διακριτή κατανομή αφού $\mathbf{P}^X(S) = 1$. Επίσης, ισχύει:

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{x \in E} h(x) \mathbf{P}^X(\{x\}) = \sum_{x \in E} h(x) \mathbf{P}(X = x),$$

για κάθε $h : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ για την οποία κάποιο από τα δύο μέλη της ισότητας ορίζεται. Η συνάρτηση $f : E \to [0, 1]$ με $f(x) := \mathbf{P}(X = x)$ ονομάζεται **συνάρτηση πιθανότητας** της X ([8]).

1.13 Τρόποι σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών

Ορισμός 1.13.1. *Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, με τιμές στο $[-\infty, \infty]$.*

1. *Λέμε ότι η $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε μια τυχαία μεταβλητή X **με πιθανότητα 1** ή **σχεδόν***

βέβαια, *και γράφουμε* $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X$, *αν:*

$$\boldsymbol{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = \boldsymbol{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

2. *Για* $p \geq 1$ *και* $X_n, X \in \mathcal{L}^p$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *λέμε ότι η* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στη* X ***στον*** $\mathcal{L}^p$, *και γράφουμε* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$, *αν:*

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

3. *Λέμε ότι η* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στη* X ***κατά πιθανότητα***, *και γράφουμε* $X_n \xrightarrow{\boldsymbol{P}} X$, *αν:*

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0,$$

για κάθε $\epsilon > 0$.

Αν $X_n \to X$ κατά σημείο, τότε $\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = \Omega$, επομένως ισχύει ότι $X_n \xrightarrow{\text{σ.β}} X$.

Θεώρημα 1.13.1. *Έστω* $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *τυχαίες μεταβλητές και* $p \geq 1$.

1. *Αν* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$, *τότε* $X_n \xrightarrow{\boldsymbol{P}} X$.
2. *Αν* $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X$, *τότε* $X_n \xrightarrow{\boldsymbol{P}} X$.

Απόδειξη. 1. Έστω $\epsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με χρήση της ανισότητας Markov, προκύπτει το εξής:

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbf{P}(|X_n - X|^p > \epsilon^p) \leq \frac{1}{\epsilon^p}\mathbf{E}[|X_n - X|^p].$$

Για $n \to \infty$ προκύπτει το ζητούμενο.

2. Έστω $\epsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{|X_n - X| > \epsilon}] = \mathbf{E}[g_n],$$

όπου $g_n = \mathbf{1}_{|X_n - X|>\epsilon}$. Αν $X_n \xrightarrow{\text{σ.β}} X$, έπεται ότι $g_n \xrightarrow{\text{σ.β}} 0$. Επίσης $|g_n| \leq 1$, άρα από το

Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έπεται ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[g_n] = \mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} g_n] = 0.$$

$\square$

Θεώρημα 1.13.2. *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και X τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε $X_n \xrightarrow{P} X$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$ έτσι ώστε $X_{n_k} \xrightarrow{\sigma.\beta} X$.*

Θεώρημα 1.13.3. *Έστω $p \geq 1$ και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ όπως στο Θεώρημα (1.13.2) με την επιπλέον υπόθεση ότι υπάρχει $Y \in \mathcal{L}^p$ ώστε $|X_n| \leq Y$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $X \in \mathcal{L}^p$ και $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$.*

Πρόταση 1.13.1. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ τυχαίες μεταβλητές.*

1. *Αν $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X$, τότε $f(X_n) \xrightarrow{\sigma.\beta} f(X)$.*
2. *Αν $X_n \xrightarrow{P} X$, τότε $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.*

1.14 Μέτρα γινόμενο

Ορισμός 1.14.1. *Σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ ένα μέτρο μ ονομάζεται **σ-πεπερασμένο** αν υπάρχει ακολουθία $(C_n)_{n\geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$, ώστε $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = X$ και $\mu(C_n) < \infty$, για κάθε $n \geq 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται **χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου**.*

Ορισμός 1.14.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. **Μετρήσιμο ορθογώνιο** στον $X \times Y$ ονομάζεται κάθε σύνολο της μορφής $A \times B$ με $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$. **Σ-άλγεβρα γινόμενο** των $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ καλείται η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια, δηλαδή:*

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο m στον μετρήσιμο χώρο $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ ώστε:

$$m(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. Το m ονομάζεται **μέτρο γινόμενο** των μ, ν και συμβολίζεται με $\mu \times \nu$. Ο χώρος $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ καλείται **χώρος γινόμενο** των $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται ο χώρος γινόμενο για πεπερασμένο πλήθος σ-πεπερασμένων χώρων μέτρου $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Το μέτρο γινόμενο $m := \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes ... \otimes \mu_n$ είναι το μοναδικό μέτρο στη σ-άλγεβρα γινόμενο με την ιδιότητα:

$$m(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)...\mu_n(A_n),$$

για κάθε $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2, ..., A_n \in \mathcal{A}_n$ ([8]).

Το παρακάτω Θεώρημα λέει πως αν σε μια μετρήσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών σταθεροποιηθεί η μία, τότε η συνάρτηση (μιας μεταβλητής) που προκύπτει είναι πάλι μετρήσιμη.

Θεώρημα 1.14.1. *Έστω $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{C})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ μια $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}/\mathcal{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε*

1. *Για $x \in X$, η συνάρτηση $y \mapsto f(x, y)$ είναι $\mathcal{C}/\mathcal{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη.*
2. *Για $y \in Y$, η συνάρτηση $x \mapsto f(x, y)$ είναι $\mathcal{A}/\mathcal{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη.*

Σχετικά με το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο γινόμενο έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο αφορά μη αρνητικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.14.2. *(Θεώρημα Tonelli) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{C}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}, \mu \times \nu)$ ο χώρος γινόμενο και $f : X \times Y \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε οι συναρτήσεις:*

$$x \mapsto \int f(x, y)\, d\nu(y), \ y \mapsto \int f(x, y)\, d\mu(x) \tag{1.4}$$

είναι $\mathcal{A}/\mathcal{B}([-\infty,\infty])$, $\mathcal{C}/\mathcal{B}([-\infty,\infty])$ μετρήσιμες, αντίστοιχα, και

$$\int f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int (\int f(x,y)\, d\nu(y))\, d\mu(x) = \int (\int f(x,y)\, d\mu(x))\, d\nu(y).$$

Τα ολοκληρώματα της (1.4) ορίζονται, επειδή από το Θεώρημα (1.14.1) οι συναρτήσεις τις οποίες ολοκληρώνουμε είναι μετρήσιμες.

Το παρακάτω αποτέλεσμα αφορά συναρτήσεις οι οποίες δε διατηρούν απαραίτητα πρόσημο.

Θεώρημα 1.14.3. *(Θεώρημα Fubini) Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{C},\nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{C}, \mu\times\nu)$ ο χώρος γινόμενο και $f: X\times Y \to [-\infty,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\int |f(x,y)|\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) < \infty$, τότε ισχύουν οι ισχυρισμοί του Θεωρήματος (1.14.2).*

Από το Θεώρημα Tonelli προκύπτει το εξής:

$$\int |f(x,y)|\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int (\int |f(x,y)|\, d\nu(y))\, d\mu(x) = \int (\int |f(x,y)|\, d\mu(x))\, d\nu(y). \tag{1.5}$$

Επομένως, για να εφαρμοστεί το Θεώρημα Fubini αρκεί να ελεγθεί αν κάποιο από τα ολοκληρώματα της (1.5) είναι πεπερασμένο.

Στη συνέχεια θα οριστεί ο χώρος γινόμενο αυθαίρετου πλήθους χώρων πιθανότητας.

Ορισμός 1.14.3. *Έστω σύνολο δεικτών $I \neq \emptyset$ και $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \boldsymbol{P}_i)$ χώρος πιθανότητας για κάθε $i\in I$. Θεωρούμε το χώρο γινόμενο:*

$$\Omega = \prod_{i\in I}\Omega_i = \{(\omega_i)_{i\in I} : \omega_i \in \Omega_i, \forall i\in I\} = \{\omega : I \to \cup_{i\in I}\Omega_i | \omega_i\in\Omega_i, \forall i \in I\}.$$

Μετρήσιμο κύλινδρο *στο Ω λέμε κάθε $A\subset\Omega$ της μορφής:*

$$A = \prod_{i\in I} A_i,$$

ώστε $A_i\in\mathcal{F}_i$, για κάθε $i\in I$, και με το σύνολο $J=\{i\in I : A_i\neq\Omega_i\}$ πεπερασμένο.

Με άλλα λόγια, ένας μετρήσιμος κύλινδρος είναι καρτεσιανό γινόμενο μετρήσιμων συνόλων, αλλά μόνο πεπερασμένα από αυτά διαφέρουν από το δειγματικό χώρο του οποίου είναι υποσύνολα.

Η σ-άλγεβρα που παράγει το σύνολο των μετρήσιμων κυλίνδρων συμβολίζεται με $\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Δηλαδή:

$$\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i = \sigma(\{A \subset \Omega : A \text{ μετρήσιμος κύλινδρος}\}).$$

Για έναν μετρήσιμο κύλινδρο A όπως πριν, ορίζουμε:

$$\mathbf{P}(A) := \prod_{i\in I} \mathbf{P}_i(A_i) = \prod_{i\in J} \mathbf{P}_i(A_i).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει, επειδή παραλείπονται οι όροι του γινομένου που είναι ίσοι με 1, δηλαδή οι όροι με $i \in I\backslash J$. Αποδεικνύεται ότι η **P** επεκτείνεται μοναδικά σε μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i$ ([8]). Αυτή η επέκταση ονομάζεται **μέτρο γινόμενο** των $(\mathbf{P}_i)_{i\in I}$ και συμβολίζεται με $\otimes_{i\in I}\mathbf{P}_i$. Αν το I είναι πεπερασμένο, έστω $I = \{1, 2, ..., n\}$, τότε το μέτρο γινόμενο των $(\mathbf{P}_i)_{i\in I}$ συμβολίζεται με $\mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2 \otimes ... \otimes \mathbf{P}_n$.

Με αυτόν τον τρόπο έχει οριστεί ένας νέος χώρος πιθανότητας, ο **χώρος γινόμενο**

$$(\prod_{i\in I} \Omega_i, \otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i, \otimes_{i\in I}\mathbf{P}_i)$$

των $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) : i \in I\}$.

1.15 Ανεξαρτησία

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας.

Ορισμός 1.15.1. *Έστω $(A_i)_{i\in I}$ στοιχεία της $\mathcal{F}$. Τα $(A_i)_{i\in I}$ λέγονται **ανεξάρτητα** αν για κάθε $J \subset I$ πεπερασμένο ισχύει ότι:*

$$\boldsymbol{P}(\cap_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in J} \boldsymbol{P}(A_i). \tag{1.6}$$

Ορισμός 1.15.2. *Έστω $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ οικογένεια συνόλων έτσι ώστε $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, για κάθε $i \in I$. Τα $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ λέγονται **ανεξάρτητα** αν για κάθε $J \subset I$ πεπερασμένο και $A_i \in \mathcal{F}_i$, για κάθε $i \in J$*

ισχύει η (1.6).

Ορισμός 1.15.3. *Έστω $\{(E_i, \mathcal{E}_i) : i \in I\}$ μετρήσιμοι χώροι και $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με $X_i : \Omega \to E_i$, για κάθε $i \in I$. Οι $(X_i)_{i\in I}$ λέγονται* ***ανεξάρτητες*** *αν οι αντίστοιχες σ-άλγεβρες $(\sigma(X_i))_{i\in I}$, που είναι υποσύνολα της $\mathcal{F}$, είναι ανεξάρτητες.*

Παρατήρηση 1.15.1. *Ο Ορισμός (1.15.3), με βάση τον Ορισμό (1.15.2) απαιτεί να ισχύει το παρακάτω:*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(X_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap X_{i_2}^{-1}(A_{i_2}) \cap ... \cap X_{i_n}^{-1}(A_{i_n})) &= \boldsymbol{P}(X_{i_1} \in A_{i_1}, X_{i_2} \in A_{i_2}, ..., X_{i_n} \in A_{i_n}) \\ &= \boldsymbol{P}(X_{i_1}^{-1}(A_{i_1}))\boldsymbol{P}(X_{i_2}^{-1}(A_{i_2}))...\boldsymbol{P}(X_{i_n}^{-1}(A_{i_n}))\end{aligned} \tag{1.7}$$

για κάθε $n \geq 2$, κάθε επιλογή δεικτών $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ και κάθε $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, ..., A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$, αφού κάθε στοιχείο μιας $\sigma(X_i)$ είναι της μορφής $X_i^{-1}(A_i) = \{X_i \in A_i\}$, με $A_i \in \mathcal{E}_i$ ([8]).

Πρόταση 1.15.1. *Έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε οι X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν:*

$$\boldsymbol{P}(X \leq x, Y \leq y) = \boldsymbol{P}(X \leq x)\boldsymbol{P}(Y \leq y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.15.1. *Έστω $X, Y : \Omega \to [-\infty, \infty]$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές μη αρνητικές ή με $\boldsymbol{E}[|X|], \boldsymbol{E}[|Y|] < \infty$. Τότε:*

$$\boldsymbol{E}[XY] = \boldsymbol{E}[X]\boldsymbol{E}[Y].$$

Πρόταση 1.15.2. *Έστω $X := (X_1, X_2, ..., X_n)$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Τότε οι $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν:*

$$\boldsymbol{P}^X = \boldsymbol{P}^{X_1} \otimes \boldsymbol{P}^{X_2} \otimes ... \otimes \boldsymbol{P}^{X_n}.$$

Απόδειξη. $\Rightarrow$ Έστω $A := A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ μετρήσιμος κύλινδρος του $\mathbb{R}^n$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^X(A) &= \mathbf{P}(X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n) \\
&= \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\mathbf{P}(X_2 \in A_2)...\mathbf{P}(X_n \in A_n) \\
&= \mathbf{P}^{X_1}(A_1)\mathbf{P}^{X_2}(A_2)...\mathbf{P}^{X_n}(A_n) \\
&= \mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes ... \otimes \mathbf{P}^{X_n}(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n).
\end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει επειδή οι $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες. Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή το $\mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes ... \otimes \mathbf{P}^{X_n}$ είναι το μοναδικό μέτρο που παίρνει την τιμή $\mathbf{P}^{X_1}(A_1)\mathbf{P}^{X_2}(A_2)...\mathbf{P}^{X_n}(A_n)$.

$\Leftarrow$ Έστω $A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n) &= \mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes ... \otimes \mathbf{P}^{X_n}(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) \\
&= \mathbf{P}^{X_1}(A_1)\mathbf{P}^{X_2}(A_2)...\mathbf{P}^{X_n}(A_n) \\
&= \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\mathbf{P}(X_2 \in A_2)...\mathbf{P}(X_n \in A_n).
\end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει από την υπόθεση και η δεύτερη από τον ορισμό του μέτρου γινομένου ([8]). $\square$

Κεφάλαιο 2

Στοχαστικός Λογισμός

2.1 Δεσμευμένη μέση τιμή

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ με $\boldsymbol{E}[|X|] < \infty$. **Δεσμευμένη μέση τιμή** της X ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$ ονομάζεται οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. *Η Y είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη.*

2. *Ισχύει*
$$\int_A X \, d\boldsymbol{P} = \int_A Y \, d\boldsymbol{P}, \tag{2.1}$$
για κάθε $A \in \mathcal{G}$.

Οποιαδήποτε δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς τη $\mathcal{G}$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}]$.

Πρόταση 2.1.1. *(Ύπαρξη και μοναδικότητα)*

1. *Μια δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς την $\mathcal{G}$ υπάρχει.*

2. *Για οποιαδήποτε δεσμευμένη μέση τιμή Y της X ως προς την $\mathcal{G}$ ισχύει $\boldsymbol{E}[|Y|] \leq \boldsymbol{E}[|X|] < \infty$.*

3. *Αν Y, Y' είναι δύο δεσμευμένες μέσες τιμές της X ως προς την $\mathcal{G}$, τότε $\boldsymbol{P}(Y = Y') = 1$.*

Η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ δίνει την καλύτερη εκτίμηση για τη X δεδομένης της πληροφορίας που δίνει η σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$ ([9]).

Παρακάτω θα αναφερθούν κάποιες ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής. Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν με πιθανότητα 1 ([9]).

Πρόταση 2.1.2. *Έστω $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ και $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα. Ισχύουν τα εξής:*

1. $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}]] = \boldsymbol{E}[X]$.

2. *Αν η X είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, τότε* $\boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}] = X$.

3. *Αν η X είναι ανεξάρτητη από τη $\mathcal{G}$, τότε* $\boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}] = \boldsymbol{E}[X]$.

Απόδειξη. 1. Θέτουμε $A = \Omega$ στην (2.1) και προκύπτει το παρακάτω, δεδομένου ότι $\Omega \in \mathcal{G}$:

$$\mathbf{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbf{P} = \int_\Omega \mathbf{E}[X|\mathcal{G}] \, d\mathbf{P} = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]].$$

2. Η X ικανοποιεί τις δύο απαιτήσεις του ορισμού της δεσμευμένης μέσης τιμής.

3. Ισχύει ότι η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{E}[X]$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη και για $A \in \mathcal{G}$ έχουμε:

$$\int_A X \, d\mathbf{P} = \mathbf{E}[\mathbf{1}_A X] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_A]\mathbf{E}[X] = \mathbf{P}(A)\mathbf{E}[X] = \int_A \mathbf{E}[X] \, d\mathbf{P}.$$

□

Πρόταση 2.1.3. *Έστω $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\boldsymbol{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}] + b\boldsymbol{E}[Y|\mathcal{G}]$.

2. *Αν $X \geq 0$, τότε* $\boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$.

3. *Αν $X \leq Y$, τότε* $\boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}] \leq \boldsymbol{E}[Y|\mathcal{G}]$.

Πρόταση 2.1.4. *Έστω $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ και $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρες. Τότε:*

1. $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] = \boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}_1]$.

2. $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = \boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}_1]$.

Απόδειξη. 1. Η τυχαία μεταβλητή $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}_1]$ είναι $\mathcal{G}_2$-μετρήσιμη αφού είναι $\mathcal{G}_1$-μετρήσιμη και $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. Από την Πρόταση (2.1.2) έπεται το ζητούμενο.
2. Η $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}_1]$ είναι $\mathcal{G}_1$-μετρήσιμη και για $A \in \mathcal{G}_1$ έχουμε:

$$\int_A \mathbf{E}[X|\mathcal{G}_1]\, d\mathbf{P} = \int_A X\, d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}[X|\mathcal{G}_2]\, d\mathbf{P}.$$

□

Πρόταση 2.1.5. *Έστω $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ και $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ συνάρτηση $\mathcal{G}$-μετρήσιμη ώστε $\boldsymbol{E}[|XY|] < \infty$. Τότε ισχύει:*

$$\boldsymbol{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\boldsymbol{E}[X|\mathcal{G}].$$

2.2 Στοχαστικές ανελίξεις

Ορισμός 2.2.1. *Έστω $(S, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Μια* ***στοχαστική ανέλιξη*** *(ή στοχαστική διαδικασία) είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $(X_t)_{t\in T}$ οι οποίες ορίζονται σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ και παίρνουν τιμές στο S.*

Το T είναι ένα αυθαίρετο διατεταγμένο σύνολο δεικτών, αλλά συνήθως είναι το $\mathbb{N}$ ή το $[0, \infty)$ και τότε ερμηνεύουμε το t ως χρόνο και το X_t ως την τιμή ενός μεγέθους τη χρονική στιγμή t. Αν $T = \mathbb{N}$, τότε η οικογένεια $(X_t)_{t\in T}$ ονομάζεται **στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου**. Αν $T = [0, \infty)$, τότε η οικογένεια $(X_t)_{t\in T}$ ονομάζεται **στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου**. Για σταθερό $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $t \mapsto X_t(\omega)$ ονομάζεται **τροχιά** (ή μονοπάτι) της ανέλιξης ([1],[9]).

Μια ανέλιξη μπορεί να θεωρηθεί σαν μια απεικόνιση $X : T\times\Omega \to S$, με $X(t, \omega) = X_t(\omega)$ ή σαν απεικόνιση $\hat{X} : \Omega \to S^T$, με $\hat{X}(\omega)$ να είναι η συνάρτηση με τιμές $\hat{X}(\omega)(t) = X(t, \omega)$. Ο χώρος S^T εφοδιάζεται με την άλγεβρα γινόμενο και ως προς αυτήν η $\hat{X}$ είναι τυχαία μεταβλητή ([9]).

Ορισμός 2.2.2. ***Κατανομή*** *της ανέλιξης X ονομάζεται η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\hat{X}$, δηλαδή το μέτρο πιθανότητας $\boldsymbol{P}^X(A) = \boldsymbol{P}(\hat{X} \in A)$, για κάθε $A \subset S^T$ στη σ-άλγεβρα γινόμενο.*

Ορισμός 2.2.3. *Έστω $X = (X_t)_{t\in T}$, $Y = (Y_t)_{t\in T}$ στοχαστικές ανελίξεις ορισμένες στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}^m$. Οι ανελίξεις X, Y ονομάζονται **εκδοχή (ή τροποποίηση)** η μία της άλλης αν για κάθε $t \in T$ ισχύει:*

$$X_t = Y_t, \ \textit{σχεδόν βέβαια ως προς } \boldsymbol{P},$$

όταν, δηλαδή, για κάθε $t \in T$ υπάρχει $N_t \in \mathcal{F}$ με $\boldsymbol{P}(N_t) = 0$, έτσι ώστε $X_t = Y_t$ για κάθε $\omega \in \Omega \backslash N_t$.

2.3 Διαδικασίες martingale διακριτού χρόνου και χρόνοι διακοπής

Ορισμός 2.3.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας. **Διήθηση** στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ ονομάζεται μια αύξουσα ακολουθία $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σ-αλγεβρών, όπου $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Ορισμός 2.3.2. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας. Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον Ω ονομάζεται **προσαρμοσμένη** στη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η X_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη.*

Ορισμός 2.3.3. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον Ω. Η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **martingale** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και το μέτρο $\boldsymbol{P}$ αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. *Η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *$\boldsymbol{E}[|X_n|] < \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
3. *$\boldsymbol{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ σχεδόν βέβαια, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

*Αν αντί της ιδιότητας (3) ισχύει η $\boldsymbol{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$, τότε η ακολουθία ονομάζεται **submartingale**, ενώ αν ισχύει η $\boldsymbol{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$, τότε η ακολουθία ονομάζεται **supermartingale**.*

Παράδειγμα 2.3.1. *Έστω ένας παίκτης ο οποίος συμμετέχει σε ένα παιχνίδι που γίνεται σε βήματα και X_n δηλώνει την περιουσία του μετά το n-οστό βήμα. Τότε η $\boldsymbol{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$*

είναι η καλύτερη εκτίμηση για την περιουσία του παίκτη μετά από ένα βήμα με δεδομένη όλη την πληροφορία κατά το χρόνο n. Επομένως, αν η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι submartingale (αντίστοιχα, supermartingale), το παιχνίδι είναι υπέρ (αντίστοιχα, κατά) του παίκτη, ενώ αν είναι martingale, το παιχνίδι είναι δίκαιο ([9]).

Πρόταση 2.3.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ανέλιξη στον Ω και $m, n \in \mathbb{N}$ με $n > m$. Επίσης, έστω $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια διήθηση στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$.*

1. *Αν η X είναι supermartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε:*

$$\boldsymbol{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \leq X_m.$$

2. *Αν η X είναι submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε:*

$$\boldsymbol{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \geq X_m.$$

3. *Αν η X είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε:*

$$\boldsymbol{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m.$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί το (1). Έστω $m \in \mathbb{N}$ σταθερό. Με επαγωγή στο n προκύπτει:
Για $n = m + 1$ η ζητούμενη ανισότητα ισχύει από τον ορισμό του supermartingale. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n > m$. Τότε από την Πρόταση (2.1.4) έπεται:

$$\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_m] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_m],$$

επειδή $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$. Όμως, η X είναι supermartingale, άρα από την Πρόταση (2.1.3) έχουμε ότι:

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_m] \leq \mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}_m].$$

Τέλος, από την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $\mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \leq X_m$, άρα αποδείχτηκε το ζητούμενο ([9]). □

Ορισμός 2.3.4. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια διήθηση στο χώρο αυτό. Μια συνάρτηση $T : \Omega \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ ονομάζεται **χρόνος διακοπής** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:*

$$\{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Ο χρόνος διακοπής T είναι μία τυχαία μεταβλητή ([10]).

Για χρόνο διακοπής T και μια προσαρμοσμένη στοχαστική ανέλιξη $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ορίζεται η **σταματημένη ανέλιξη** X^T ως $X_n^T = X_{n\wedge T}$. Δηλαδή για $n \in \mathbb{N}$ η $X_n^T : \Omega \to [-\infty, \infty]$ έχει τιμές:

$$X_n^T(\omega) = X_{n\wedge T(\omega)}(\omega) = \begin{cases} X_i(\omega) & \text{αν } T(\omega) = i < n, \\ X_n(\omega) & \text{αν } T(\omega) \geq n. \end{cases}$$

Για κάθε $\omega \in \Omega$ αν θέσουμε $r := T(\omega)$, τότε η X^T ακολουθεί τη X στις τιμές $X_0, X_1, ..., X_r$ και έπειτα σταθεροποιείται στην τιμή X_r. Αν $T(\omega) = \infty$, τότε για τη συγκεκριμένη τιμή του ω η X^T έχει την ίδια τροχιά με τη X ([9]).

Πρόταση 2.3.2. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια διήθηση στο χώρο αυτό. Επίσης, έστω $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ χρόνος διακοπής και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον Ω, η οποία είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

1. *Αν η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι (sub)supermartingale, τότε η X^T είναι (sub)supermartingale.*

2. *Αν η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι martingale, τότε η X^T είναι martingale.*

Θεώρημα 2.3.1. *(Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στοιχείων του $\mathcal{L}^1(\boldsymbol{P})$. Επίσης, έστω T τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ισχύει ότι:*

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}[X_{n\wedge T}] = \boldsymbol{E}[X_T]$$

αν μία από τις παρακάτω προϋποθέσεις ικανοποιείται:

1. *Η T είναι φραγμένη τυχαία μεταβλητή.*

2. *$\boldsymbol{P}(T < \infty) = 1$ και υπάρχει $M < \infty$, ώστε $|X_n(\omega)| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \Omega$.*

3. *$\boldsymbol{E}[T], \boldsymbol{E}[|X_0|] < \infty$ και υπάρχει $M < \infty$, ώστε $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ και $\omega \in \Omega$.*

Αν επιπλέον ο T είναι χρόνος διακοπής, τότε ισχύει:

- *$\boldsymbol{E}[X_T] \leq \boldsymbol{E}[X_0]$ για X supermartingale.*
- *$\boldsymbol{E}[X_T] \geq \boldsymbol{E}[X_0]$ για X submartingale.*
- *$\boldsymbol{E}[X_T] = \boldsymbol{E}[X_0]$ για X martingale.*

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια διήθηση στο χώρο αυτό. Επίσης, έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον Ω, η οποία είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ορισμός 2.3.5. *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ στον Ω λέγεται **προβλέψιμη** αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, η A_n είναι $\mathcal{F}_{n-1}$-μετρήσιμη.*

Για δύο ακολουθίες $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ όπως πιο πάνω, ορίζεται η ανέλιξη $A \bullet X$ ως εξής:

$$(A \bullet X)_0 := 0,$$
$$(A \bullet X)_n := \sum_{k=1}^{n} A_k(X_k - X_{k-1}), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^+.$$

Η ανέλιξη $A \bullet X$ ονομάζεται **διακριτό στοχαστικό ολοκλήρωμα**.

Παράδειγμα 2.3.2. *Έστω ένα παιχνίδι το οποίο παίζεται σε πολλά στάδια (τις χρονικές στιγμές 1,2,3, κ.ο.κ.). Αν κάποιος παίκτης ποντάρει μια μονάδα για το στάδιο της χρονικής στιγμής n, τότε το κέρδος του ή η ζημιά του ισούται με $X_n - X_{n-1}$. Στα πλαίσια ενός παιχνιδιού, η ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ λέγεται στρατηγική πονταρίσματος. Για το αποτέλεσμα του σταδίου n ο παίκτης ποντάρει A_n μονάδες. Το ότι η $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ είναι προβλέψιμη σημαίνει ότι η ποσότητα A_n μπορεί να εξαρτάται μόνο από την πληροφορία που είναι διαθέσιμη πριν πραγματοποιηθεί το στάδιο n του παιχνιδιού, δηλαδή την $\mathcal{F}_{n-1}$. Ο αριθμός $(A \bullet X)_n$ είναι* *το συνολικό κέρδος του παίκτη μετά το στάδιο n αν ακολουθεί τη στρατηγική $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ([9]).*

Πρόταση 2.3.3. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια διήθηση στο χώρο αυτό. Επίσης, έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον Ω, η οποία είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ προβλέψιμη ακολουθία στον Ω.*

1. *Αν η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι (sub)supermartingale και κάθε $A_n, n \in \mathbb{N}^+$ είναι μη αρνητική φραγμένη τυχαία μεταβλητή, τότε η $A \bullet X$ είναι (sub)supermartingale.*

2. *Αν η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι martingale και κάθε $A_n, n \in \mathbb{N}^+$ είναι φραγμένη τυχαία μεταβλητή, τότε η $A \bullet X$ είναι martingale.*

Απόδειξη. Από τις υποθέσεις για τις ακολουθίες $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ έπεται ότι η $A\bullet X$ είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Επίσης, ισχύει ότι $\mathbf{E}[|(A \bullet X)_n|] < \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λόγω του ότι κάθε $A_n, n \in \mathbb{N}^+$ είναι φραγμένη τυχαία μεταβλητή. Τέλος, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(A \bullet X)_{n+1}|\mathcal{F}_n] - (A \bullet X)_n &= \mathbf{E}[(A \bullet X)_{n+1} - (A \bullet X)_n|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbf{E}[A_n(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= A_n(\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n).\end{aligned}$$

Με τις υποθέσεις του (1), επειδή $A_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$ η τελευταία ποσότητα είναι μη θετική αν η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι supermartingale και μη αρνητική αν η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι submartingale. Με τις υποθέσεις του (2) η τελευταία ποσότητα ισούται με 0. □

2.4 Διαδικασίες martingale συνεχούς χρόνου και χρόνοι διακοπής

Ορισμός 2.4.1. ***Διήθηση*** *στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ ονομάζεται μια αύξουσα οικογένεια $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ σ-αλγεβρών, με $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, για κάθε $t \geq 0$. Δηλαδή, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, για κάθε $0 \leq s < t$.*

Αν υποθέσουμε ότι το t είναι ο χρόνος, τότε μια διήθηση μπορεί να θεωρηθεί σαν μια αυξανόμενη δομή πληροφορίας καθώς περνάει ο χρόνος ([1]).

Ορισμός 2.4.2. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας. Μια στοχαστική ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ στον Ω καλείται **προσαρμοσμένη** στη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ αν για κάθε $t \geq 0$ η X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη.*

Μια ερμηνεία του παραπάνω ορισμού είναι ότι όλη η πληροφορία η οποία αφορά τη στοχαστική μεταβλητή X_t μέχρι τη χρονική στιγμή t περιέχεται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ ([1]).

Αν $X = (X_t)_{t\geq 0}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη, τότε η ελάχιστη διήθηση ως προς την οποία η X είναι προσαρμοσμένη είναι η εξής:

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\{X_s : 0 \leq s \leq t\}), \forall t \geq 0,$$

δηλαδή η διήθηση που παράγεται από τη X ([9]). Αυτή η διήθηση ονομάζεται **φυσική διήθηση** και όσο περνάει ο χρόνος και παρατηρούμε την εν λόγω στοχαστική διαδικασία, τόσο αυξάνει η πληροφορία που έχουμε για τη διαδικασία αυτή ([1]).

Ορισμός 2.4.3. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας και $(X_t)_{t\geq 0}$ μια ανέλιξη στον Ω. Επίσης, έστω $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ μια διήθηση στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$. Αν η στοχαστική ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

1. *Η $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$,*
2. *$\boldsymbol{E}[|X_t|] < \infty$, για κάθε $t \geq 0$,*
3. *$\boldsymbol{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ σχεδόν βέβαια, για κάθε $0 \leq s < t$,*

*τότε ονομάζεται (συνεχές) **martingale** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Αν αντί της ιδιότητας (3) ισχύει η $\boldsymbol{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$, τότε η ανέλιξη ονομάζεται **submartingale**, ενώ αν ισχύει η $\boldsymbol{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$, τότε η ανέλιξη ονομάζεται **supermartingale**.*

Ο παραπάνω ορισμός μας λέει ότι για μια martingale έχοντας στη διάθεση μας την πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}_s$, η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της X_t είναι η τιμή X_s ([1]).

Ορισμός 2.4.4. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας. Μια συνάρτηση $T : \Omega \to [0, \infty]$ λέγεται **χρόνος διακοπής** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ αν για κάθε $t \geq 0$ ισχύει:*

$$\{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Με άλλα λόγια, η τυχαία μεταβλητή T είναι ένας χρόνος στάσης αν η τιμή της μπορεί να καθοριστεί από τη γνώση της στοχαστικής διαδικασίας μόνο κατά το παρελθόν και δε χρειάζεται πληροφορία από το μέλλον ([1]).

Αν $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι μια ανέλιξη και $T : \Omega \to [0, \infty]$ χρόνος διακοπής, τότε η **σταματημένη ανέλιξη** X^T ορίζεται ως $X_t^T = X_{t\wedge T}$, για κάθε $t \geq 0$.

Θεώρημα 2.4.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ συνεχές martingale και T χρόνος διακοπής. Τότε η ανέλιξη X^T είναι martingale.*

Θεώρημα 2.4.2. *(Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ συνεχές martingale και T φραγμένος χρόνος διακοπής. Τοτε:*

$$\boldsymbol{E}[X_T] = \boldsymbol{E}[X_0].$$

2.5 Ιδιότητες Markov

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $I \subset \mathbb{R}$ σύνολο δεικτών, $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ μια διήθηση, $(S, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $X = (X_t)_{t\in I}$ μια ανέλιξη με τιμές στον S και προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$.

Ορισμός 2.5.1. *Η ανέλιξη X έχει την **ιδιότητα Markov** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ αν για κάθε $s, t \in I$ με $s \leq t$ και $A \in \mathcal{A}$ ισχύει:*

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{1}_{X_t^{-1}(A)}|\mathcal{F}_s] = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{1}_{X_t^{-1}(A)}|\sigma(X_s)].$$

Ένας ισοδύναμος τρόπος γραφής είναι ο εξής:

$$\boldsymbol{P}(X_t^{-1}(A)|\mathcal{F}_s) = \boldsymbol{P}(X_t^{-1}(A)|\sigma(X_s)).$$

Αν μια ανέλιξη X έχει την ιδιότητα Markov και τοποθετήσουμε τον εαυτό μας στη χρονική στιγμή s, τότε η κατανομή της X σε ένα δεδομένο μελλοντικό χρόνο t, δεδομένου του παρελθόντος από τη χρονική στιγμή s και πριν, είναι η ίδια αν δεδομένη είναι απλώς η τιμή X_s της X κατά τον παρόντα χρόνο s ([9]).

Στη συνέχεια θα οριστεί η ισχυρή ιδιότητα Markov. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_T$, όπου T είναι πεπερασμένος χρόνος διακοπής.

Ορισμός 2.5.2. *Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_T$, όπου T είναι πεπερασμένος χρόνος διακοπής ορίζεται ως εξής:*

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ για κάθε } t \in I\}.$$

Η $\mathcal{F}_T$ περιέχει όλα τα γεγονότα που σχετίζονται με τη στοχαστική διαδικασία μέχρι τον χρόνο στάσης T ([1]). Οι τυχαίες μεταβλητές που είναι μετρήσιμες ως προς την $\mathcal{F}_T$ είναι εκείνες των οποίων η τιμή μπορεί να καθοριστεί από την πληροφορία ως και τον χρόνο T ([9]).

Έστω σημείο $\delta \notin S$. Ορίζουμε $X_t = \delta$, για κάθε $t \in \mathbb{R} \backslash I$.

Ορισμός 2.5.3. *Η ανέλιξη X έχει την **ισχυρή ιδιότητα Markov** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ αν για κάθε χρόνο διακοπής T που παίρνει τιμές στο I, $t > 0$ και $A \in \mathcal{A}$ ισχύει:*

$$\boldsymbol{P}(X_{T+t}^{-1}(A)|\mathcal{F}_T) = \boldsymbol{P}(X_{T+t}^{-1}(A)|\sigma(X_T)).$$

2.6 Κίνηση Brown

Ορισμός 2.6.1. *Μια στοχαστική ανέλιξη $\{B_t : t \geq 0\}$ ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$ ονομάζεται (μονοδιάστατη) **κίνηση Brown** αν ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Η ανέλιξη έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Δηλαδή, για κάθε $n \geq 1$ και $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές*

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), B(t_3) - B(t_2), ..., B(t_n) - B(t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες.

2. *Για κάθε* $0 \leq s < t$*,*
$$B(t) - B(s) \sim N(0, t-s),$$
δηλαδή οι μεταβολές της ανέλιξης ακολουθούν την κανονική κατανομή.

3. *Οι τροχιές της ανέλιξης είναι συνεχείς με πιθανότητα 1. Δηλαδή, η συνάρτηση* $t \mapsto B(t)$ *είναι συνεχής με πιθανότητα 1.*

Μια κίνηση Brown για την οποία με πιθανότητα 1 ισχύει $B(0) = x$ *λέγεται κίνηση Brown που ξεκινάει από το* x*. Αν* $x = 0$*, τότε μια τέτοια ανέλιξη ονομάζεται* ***τυπική κίνηση Brown****.*

Έστω B μια τυπική κίνηση Brown και X τυχαία μεταβλητή (στον ίδιο χώρο πιθανότητας) ανεξάρτητη της B και με κατανομή μ. Τότε η ανέλιξη W με:

$$W(t) := X + B(t)$$

για κάθε $t \geq 0$ είναι κίνηση Brown με αρχική κατανομή μ, δηλαδή η $W(0)$ είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή μ. Όταν το μ δίνει όλη του τη μάζα σε ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$, τότε προκύπτει $W(t) := x + B(t)$, δηλαδή η κίνηση Brown που ξεκινά από το x ([9]).

Κάθε κίνηση Brown ορίζει στον χώρο πιθανότητας στον οποίο ορίζεται μια φυσιολογική διήθηση, την $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ με:
$$\mathcal{F}_t := \sigma(\{B(s) : s \in [0, t]\}),$$

για κάθε $t \in [0, \infty)$.

Πρόταση 2.6.1. *Έστω* B *κίνηση Brown και* $t_0 \geq 0$*. Τότε η ανέλιξη* X *που ορίζεται ως:*

$$X(t) := B(t_0 + t) - B(t_0), \text{ για κάθε } t \in [0, \infty)$$

είναι τυπική κίνηση Brown.

Απόδειξη. Αρκεί να ελέγξουμε τις ιδιότητες του ορισμού. Για $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ έχουμε:

$(X(t_1), X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})) =$
$= (B(t_0 + t_1) - B(t_0), B(t_0 + t_2) - B(t_0 + t_1), B(t_0 + t_3) - B(t_0 + t_2), ..., B(t_0 + t_n) - B(t_0 + t_{n-1}))$.
Η B είναι κίνηση Brown, επομένως οι συντεταγμένες του τελευταίου διανύσματος είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
Για $0 \leq s < t$ έχουμε:

$$X(t) - X(s) = B(t_0 + t) - B(t_0 + s) \sim N(0, s - t),$$

επειδή η B είναι κίνηση Brown και $(t_0 + t) - (t_0 + s) = t - s$.

Επίσης, με πιθανότητα 1 η συναρτήση $t \mapsto X(t)$ είναι συνεχής, αφού η B είναι συνεχής με πιθανότητα 1 και ο όρος $B(t_0)$ είναι ένας αριθμός, ο οποίος εξαρτάται από το $\omega \in \Omega$, αλλά όχι από το t.

Τέλος, $X(0) = B(t_0 + 0) - B(t_0) = 0$.

$\square$

Η ανέλιξη X που ορίστηκε στην παραπάνω Πρόταση είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{t_0}$. Αυτό σημαίνει ότι για δεδομένο $t_0 > 0$ η $B(t_0 + t) - B(t_0)$ είναι μια κίνηση Brown, η οποία είναι ανεξάρτητη από το τι συνέβη πριν τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, η κίνηση Brown ξαναγεννιέται τη χρονική στιγμή t_0 με την έννοια ότι αυτό που ακολουθεί επηρεάζεται από το παρελθόν $\{B(s) : s \in [0, t_0]\}$ μόνο από την τιμή $B(t_0)$. Το υπόλοιπο τμήμα της κίνησης, δηλαδή το $B(t_0 + t) - B(t_0), t \geq 0$ δεν εξαρτάται από το παρελθόν. Από τα παραπάνω έπεται ότι η B έχει την ιδιότητα Markov ως προς τη διήθηση που παράγει ([1],[9]).

Ορισμός 2.6.2. *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ *χώρος πιθανότητας,* $d \in \mathbb{N}^+$ *και* $B^{(1)}, B^{(2)}, ..., B^{(d)}$ *ανε-*

*ξάρτητες μονοδιάστατες κινήσεις Brown. Ως **d-διάστατη κίνηση Brown** ορίζεται η ανέλιξη:*

$$B(t) = \begin{pmatrix} B^{(1)}(t) \\ B^{(2)}(t) \\ . \\ . \\ . \\ B^{(d)}(t) \end{pmatrix}, t \in [0, \infty).$$

*Αν $B(0) = 0 \in \mathbb{R}^d$, για κάθε $\omega \in \Omega$, τότε η B ονομάζεται **d-διάστατη τυπική κίνηση Brown**.*

Κάθε d-διάστατη κίνηση Brown ορίζει στον χώρο πιθανότητας στον οποίο ορίζεται μια φυσιολογική διήθηση, την $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ με:

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\{B(s) : s \in [0, t]\}), \text{ για κάθε } t \in [0, \infty).$$

Θεώρημα 2.6.1. *Έστω $B = (B(t))_{t\geq 0}$ μια d-διάστατη κίνηση Brown ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ και T χρόνος διακοπής ο οποίος με πιθανότητα 1 παίρνει πεπερασμένες τιμές. Τότε η ανέλιξη $(B(t_0 + t) - B(t_0))_{t\geq 0}$ είναι κίνηση Brown ανεξάρτητη από τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_T$.*

Το παραπάνω Θεώρημα συνεπάγεται ότι η B έχει την ισχυρή ιδιότητα Markov, δηλαδή η κατανομή της $\{B(t) : t \geq T\}$ με δεδομένο το παρελθόν $\mathcal{F}_T$ είναι η ίδια με την κατανομή της αν δεδομένη είναι μόνο η τιμή $B(T)$. Αυτό συμβαίνει, επειδή $B(t) = B(T) + B(t) - B(T)$ και άρα η $\{B(t) : t \geq T\}$ καθορίζεται από την τιμή $B(T)$ και την ανέλιξη $\{B(t) : t \geq T\}$, η οποία είναι ανεξάρτητη από τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_T$ ([9]).

Θεώρημα 2.6.2. *Έστω $B = (B(t))_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$. Τότε οι ακόλουθες ανελίξεις είναι martingales:*

1. $\{B(t) : t \geq 0\}$.

2. $\{B(t)^2 - t : t \geq 0\}$.

3. $\{e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2} t} : t \geq 0\}$, *με $\lambda \in \mathbb{R}$ δεδομένο.*

Η παρακάτω Πρόταση αναφέρεται σε μια χαρακτηριστική ιδιότητα της κίνησης Brown, η οποία σχετίζεται με τη διαφορισιμότητά της:

Πρόταση 2.6.2. *Έστω $B = (B(t))_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$. Με πιθανότητα 1, η $B(t)$ δεν είναι διαφορίσιμη σε κανένα σημείο $t \in [0, \infty)$.*

2.7 Το ολοκλήρωμα $It\hat{o}$

Έστω $B = (B(t))_{t\geq 0}$ μονοδιάστατη κίνηση Brown ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ η διήθηση που αυτή παράγει. Επίσης, έστω $(X_t)_{t\in I}$ μια ανέλιξη στον Ω, όπου I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών.

Ορισμός 2.7.1. *Μια ανέλιξη $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **μετρήσιμη** αν είναι μετρήσιμη ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}$.*

Ορισμός 2.7.2. *Ως $\mathcal{H}^2$ ορίζεται το σύνολο όλων των μετρήσιμων και προσαρμοσμένων ανελίξεων που ικανοποιούν:*

$$||X||^2_{\mathcal{L}^2(\lambda\times \boldsymbol{P})} := \boldsymbol{E}[\int X(s, \omega)^2\, ds] < \infty. \tag{2.2}$$

Η $||\cdot||^2_{\mathcal{L}^2(\lambda\times \boldsymbol{P})}$ είναι η $\mathcal{L}^2$ νόρμα στο χώρο $([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}, \lambda \times \boldsymbol{P})$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue.

Ορισμός 2.7.3. *Ως $\mathcal{H}^2_0$ ορίζεται το σύνολο των ανελίξεων της μορφής:*

$$X(t, \omega) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)\boldsymbol{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \tag{2.3}$$

όπου $k \in \mathbb{N}^+$, $0 \leq t_1 < ... < t_{k+1}$, A_i είναι $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρήσιμη και $\boldsymbol{E}[A_i^2] < \infty$, για κάθε $i = 1, 2, ..., k$.

Ισχύει $\mathcal{H}^2_0 \subset \mathcal{H}^2$. Πράγματι, έστω $X \in \mathcal{H}^2_0$. Τότε, η X ικανοποιεί την (2.2) και είναι προσαρμοσμένη. Επιπλέον, η X είναι μετρήσιμη, επειδή για κάθε $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει:

$$X^{-1}(C) = \cup_{i=1}^{k}(t_i, t_{i+1}] \times A_i^{-1}(C) \in \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}.$$

Ορισμός 2.7.4. *Έστω $X \in \mathcal{H}_0^2$. Το ολοκλήρωμα της X ως προς την κίνηση Brown B ορίζεται ως εξής:*

$$I(X) := \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \tag{2.4}$$

Το $I(X)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή στον Ω και συνήθως γράφεται ως $\displaystyle\int_0^\infty X(s,\omega)\, dB_s$.

Πρόταση 2.7.1. *Έστω $X, Y \in \mathcal{H}_0^2$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $I(aX + Y) = aI(X) + I(Y)$.

2. $\boldsymbol{E}[I(X)] = 0$.

Απόδειξη. 1. Αρκεί να το δείξουμε για $Y = 0$ και για $a = 1$. Αν $X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \in \mathcal{H}_0^2$, τότε

$$aX(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} aA_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \in \mathcal{H}_0^2,$$

επομένως $I(aX) = aI(X)$. Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι $I(X+Y) = I(X)+I(Y)$. Έστω ότι $X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \in \mathcal{H}_0^2$ και $Y(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} M_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \in \mathcal{H}_0^2$. Τότε:

$$X + Y = \sum_{i=1}^{k} (A_i(\omega) + M_i(\omega))\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} I(X+Y) &= \sum_{i=1}^{k} (A_i(\omega) + M_i(\omega))(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \sum_{i=1}^{k} M_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ &= I(X) + I(Y). \end{aligned}$$

2. Έστω $X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \in \mathcal{H}_0^2$. Για κάθε $i = 1, ..., k$ οι $A_i, B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ είναι ανεξάρτητες, επειδή η A_i είναι $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρήσιμη, ενώ η $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_{t_i}$. Επομένως,

$$\mathbf{E}[A_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = \mathbf{E}[A_i]\mathbf{E}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] = 0,$$

για κάθε $i = 1, ..., k$. Άρα, $\mathbf{E}[I(X)] = 0$. $\square$

Λήμμα 2.7.1. *(Ισομετρία Itô στον $\mathcal{H}_0^2$) Αν $X \in \mathcal{H}_0^2$, τότε:*

$$\boldsymbol{E}[(\int_0^\infty X(s,\omega)\,dB_s)^2] = \boldsymbol{E}[\int_0^\infty X(s,\omega)^2\,ds]$$

Δηλαδή,

$$||I(X)||_{\mathcal{L}^2(\boldsymbol{P})} = ||X||_{\mathcal{L}^2(\lambda\times\boldsymbol{P})}.$$

Απόδειξη. Έστω $X(t,\omega) = \sum_{i=1}^k A_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \in \mathcal{H}_0^2$. Τότε,

$$X(s,\omega)^2 = \sum_{i=1}^k A_i^2(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(s),$$

για κάθε $s \geq 0$. Επομένως,

$$\mathbf{E}[\int_0^\infty X(s,\omega)^2\,ds] = \sum_{i=1}^k \mathbf{E}[A_i^2(\omega)](t_{i+1}-t_i).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbf{E}[(\int_0^\infty X(s,\omega)\,dB_s)^2] = \mathbf{E}[I(X)^2] = \sum_{i=1}^k \mathbf{E}[A_i^2(\omega)](t_{i+1}-t_i).$$

Ισχύει ότι $I(X)^2 = (\sum_{i=1}^k A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))^2$. Παρατηρούμε ότι για $i < j$ η τυχαία μεταβλητή:

$$A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})A_j(\omega)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

έχει μέση τιμή 0. Αυτό συμβαίνει, επειδή η $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ έχει μέση τιμή 0 και είναι ανεξάρτητη από την $A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})A_j(\omega)$, γιατί η τελευταία είναι $\mathcal{F}_{t_j}$-μετρήσιμη, ενώ η

$B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_{t_j}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[I(X)^2] &= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}[A_i^2(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}[A_i^2(\omega)]\mathbf{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}[A_i^2(\omega)](t_{i+1} - t_i).
\end{aligned}$$

□

Στη συνέχεια θα οριστεί το $I(X)$ για $X \in \mathcal{H}^2$. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστεί το παρακάτω Λήμμα ([9]):

Λήμμα 2.7.2. *Ο $\mathcal{H}_0^2$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{H}^2$.*

Θεώρημα 2.7.1. *Έστω $X \in \mathcal{H}^2$ και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στον $\mathcal{H}_0^2$ με:*

$$||X - X_n||_{\mathcal{L}^2(\lambda\times\boldsymbol{P})} \to 0.$$

Τότε:

1. *Η ακολουθία $(I(X_n))_{n\geq 1}$ συγκλίνει στον $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$.*
2. *Το όριο δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας $(X_n)_{n\geq 1}$.*

Απόδειξη. 1. Για $m, n \geq 1$ ισχύει το εξής:

$$||I(X_n) - I(X_m)||_{\mathcal{L}^2(\mathbf{P})} = ||I(X_n - X_m)||_{\mathcal{L}^2(\mathbf{P})} = ||X_n - X_m||_{\mathcal{L}^2(\lambda\times\mathbf{P})}.$$

Για $m, n \to \infty$, η ποσότητα $||X_n - X_m||_{\mathcal{L}^2(\lambda\times\mathbf{P})}$ τείνει στο μηδέν, αφού η $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει. Επομένως, η $(I(X_n))_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$, ο οποίος είναι πλήρης. Άρα η $(I(X_n))_{n\geq 1}$ συγκλίνει στον $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$.
2. Έστω δύο ακολουθίες $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ στον $\mathcal{H}_0^2$ οι οποίες συγκλίνουν στη X ως προς τη νόρμα $||\cdot||_{\mathcal{L}^2(\lambda\times\mathbf{P})}$. Τότε και η ακολουθία $(Z_n)_{n\geq 1}$, που ορίζεται ως $X_1, Y_1, X_2, Y_2, ...$

συγκλίνει στη X. Επομένως, από το (1), η $(I(Z_n))_{n\geq 1}$ συγκλίνει. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} I(X_n) = \lim_{n\to\infty} I(Z_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} I(Z_{2n}) = \lim_{n\to\infty} I(Y_n).$$

□

Ορισμός 2.7.5. *Έστω $X \in \mathcal{H}^2$. Τότε:*

$$I(X) := \lim_{n\to\infty} I(X_n),$$

όπου $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι μια οποιαδήποτε ακολουθία στον $\mathcal{H}_0^2$ με $||X - X_n||_{\mathcal{L}^2(\lambda\times\boldsymbol{P})} \to 0$. Το $I(X)$ συμβολίζεται ως $\displaystyle\int_0^\infty X(s,\omega)\,dB_s$.

Το $I(X)$ συμβολίζεται ως $\displaystyle\int_0^\infty X(s,\omega)\,dB_s$.

Πρόταση 2.7.2. *Έστω $X, Y \in \mathcal{H}^2$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $I(aX + Y) = aI(X) + I(Y)$.
2. $\boldsymbol{E}[I(X)] = 0$.

Απόδειξη. 1. Έστω δύο ακολουθίες $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ στον $\mathcal{H}_0^2$ οι οποίες συγκλίνουν στις X, Y αντίστοιχα ως προς τη νόρμα $||\cdot||_{\mathcal{L}^2(\lambda\times\mathbf{P})}$. Τότε, $aX_n+Y_n \to aX+Y$ στον $\mathcal{L}^2(\lambda\times\mathbf{P})$. Άρα,

$$I(aX + Y) = \lim_{n\to\infty} I(aX_n + Y_n) = \lim_{n\to\infty}[I(aX_n) + I(Y_n)] = aI(X) + I(Y).$$

2. Για $X \in \mathcal{H}^2$ θεωρούμε ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ στον $\mathcal{H}_0^2$ με $||X - X_n||_{\mathcal{L}^2(\lambda\times\mathbf{P})} \to 0$. Η $(I(X_n))_{n\geq 1}$ συγκλίνει στην $I(X)$ στον $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, άρα και στον $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, αφού $\mathcal{L}^2(\mathbf{P}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$. Επομένως, ισχύει ότι $\mathbf{E}[I(X_n)] \to \mathbf{E}[I(X)]$ και το συμπέρασμα έπεται.

□

Πόρισμα 2.7.1. *(Ισομετρία Itô στον $\mathcal{H}^2$) Αν $X \in \mathcal{H}^2$, τότε:*

$$||I(X)||_{\mathcal{L}^2(\boldsymbol{P})} = ||X||_{\mathcal{L}^2(\lambda\times\boldsymbol{P})}.$$

Δηλαδή,

$$\boldsymbol{E}[(\int_0^\infty X(s,\omega)\,dB_s)^2] = \boldsymbol{E}[\int_0^\infty X(s,\omega)^2\,ds]$$

Ορισμός 2.7.6. *Έστω* $[a,b] \subset [0,\infty)$.

- *Μια ανέλιξη* $X : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ *ονομάζεται* ***μετρήσιμη*** *αν είναι μετρήσιμη ως προς τη σ-άλγεβρα* $\mathcal{B}([a,b]) \otimes \mathcal{F}$.

- *Ο χώρος* $\mathcal{H}^2[a,b]$ *περιέχει ακριβώς τις μετρήσιμες προσαρμοσμένες ανελίξεις* $X : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ *με:*

$$\boldsymbol{E}[\int X(s,\omega)^2\,ds] < \infty.$$

- *Ο χώρος* $\mathcal{H}_0^2[a,b]$ *περιέχει τις ανελίξεις* $X : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ *της μορφής:*

$$X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)\boldsymbol{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \text{ για κάθε } (t,\omega) \in [a,b] \times \Omega,$$

όπου $k \in \mathbb{N}^+$, $a \le t_0 < ... < t_{k+1} \le b$, A_i *είναι* $\mathcal{F}_{t_i}$*-μετρήσιμη και* $\boldsymbol{E}[A_i^2] < \infty$, *για κάθε* $i = 1, 2, ..., k$.

- *Αν* $X \in \mathcal{H}^2[a,b]$, *τότε η* ***επέκταση*** $\hat{X} : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *της* X *ορίζεται ως:*

$$\hat{X}(t,\omega) := \begin{cases} X(t,\omega) & \text{αν } t \in [a,b] \\ 0 & \text{αν } t \in [0,\infty)\backslash[a,b], \end{cases}$$

και είναι στοιχείο του $\mathcal{H}^2$.

- *Ορίζουμε,*

$$\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s := I(\hat{X}) = \int_0^\infty \hat{X}(s,\omega)\,dB_s.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s$ συμβολίζεται ως $I_t(X)$.

Πρόταση 2.7.3. *Έστω* $0 \le a < c < b$ *και* $X \in \mathcal{H}^2[a,b]$. *Τότε:*

1. *Η* $\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s$ *είναι* $\mathcal{F}_b$*-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Δηλαδή, το ολοκλήρωμα* $\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s$ *ως στοιχείο του* $\mathcal{L}^2(\boldsymbol{P})$ *έχει αντιπρόσωπο τυχαία μεταβλητή που είναι είναι* $\mathcal{F}_b$*-μετρήσιμη.*

2. *Με πιθανότητα 1 ισχύει:*

$$\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s = \int_a^c X(s,\omega)\,dB_s + \int_c^b X(s,\omega)\,dB_s.$$

3. *Με πιθανότητα 1 ισχύει:*

$$\boldsymbol{E}[\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s|\mathcal{F}_a] = 0.$$

4. *(Ισομετρία Itô με δέσμευση) Με πιθανότητα 1 ισχύει:*

$$\boldsymbol{E}[(\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s)^2|\mathcal{F}_a] = \boldsymbol{E}[\int_a^b X(s,\omega)^2\,ds|\mathcal{F}_a].$$

2.8 Το ολοκλήρωμα $It\hat{o}$ ως στοχαστική διαδικασία

Πρόταση 2.8.1. *Έστω $X \in \mathcal{H}_0^2$. Τότε η ανέλιξη $(I_t(X))_{t\geq 0}$ είναι ένα συνεχές martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση (2.7.3)(1) έπεται ότι η ανέλιξη $(I_t(X))_{t\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη. Από τον ορισμό του ολοκληρώματος $It\hat{o}$ ισχύει ότι $I_t(X) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P})$, για κάθε $X \in \mathcal{H}_0^2$. Επομένως, $I_t(X) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$, αφού $\mathcal{L}^2(\mathbf{P}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$. Επίσης, για $0 \leq s < t$ έχουμε:

$$\mathbf{E}[I_t(X)|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[I_s(X) + \int_s^t X(r,\omega)\,dB_r|\mathcal{F}_s] = I_s(X) + 0 = I_s(X).$$

Άρα η ανέλιξη $(I_t(X))_{t\geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Μένει να δειχθεί ότι η $(I_t(X))_{t\geq 0}$ είναι συνεχής. Έστω ότι η X γράφεται όπως στη σχέση (2.3), δηλαδή είναι της μορφής $X(t,\omega) = \sum_{i=1}^k A_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$. Για $r \in \{1,...,k\}$ και $t \in [t_r, t_{r+1})$, έχουμε:

$$X\mathbf{1}_{[0,t]}(s) = \sum_{i=1}^{r-1} A_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]} + A_r(\omega)\mathbf{1}_{(t_r,t]}.$$

Για το συγκεκριμένο t, με βάση τον Ορισμό (2.7.4),

$$I_t(X) = \sum_{i=1}^{r-1} A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + A_r(\omega)(B_t - B_{t_r}).$$

Επιπλέον, $I_t(X) = 0$ για $t < t_0$ και $I_t(X) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ για $t \geq t_{k+1}$. Το ζητούμενο προκύπτει από το ότι η συνάρτηση $t \mapsto B(t)$ είναι συνεχής. $\square$

Ένα αποτέλεσμα αντίστοιχο της παραπάνω Πρότασης για $X \in \mathcal{H}^2$ είναι το παρακάτω Θεώρημα ([9]):

Θεώρημα 2.8.1. *(Συνεχής εκδοχή του ολοκληρώματος) Έστω $(X_t)_{t\geq 0}$ μετρήσιμη, προσαρμοσμένη ανέλιξη με:*

$$\boldsymbol{E}[\int X(s,\omega)^2\, ds] < \infty, \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

Τότε υπάρχει μια εκδοχή της:

$$(\int_0^t X(s,\omega)\, dB_s)_{t\geq 0}$$

η οποία με πιθανότητα 1 είναι συνεχής συνάρτηση του t. Επιπλέον, αυτή η εκδοχή είναι martingale.

2.9 Ο τύπος του $It\hat{o}$

Έστω $B = (B(t))_{t\geq 0}$ μονοδιάστατη κίνηση Brown ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Θεώρημα 2.9.1. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει το εξής:*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds \tag{2.5}$$

για κάθε $t > 0$.

Συμβολίζουμε με $C^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ το σύνολο των συναρτήσεων $f(x,t) : \mathbb{R}\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχουν παντού οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial t}$ και είναι συνεχείς.

Θεώρημα 2.9.2. *Έστω $f \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει το εξής:*

$$f(B_t,t) = f(B_0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(B_s,s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B_s,s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s,s)\,ds. \quad (2.6)$$

Έστω d θετικός ακέραιος και $f : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Τότε το διάνυσμα κλίσης της f είναι το εξής:

$$\nabla_x f(x,t) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,t), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x,t), ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}(x,t)).$$

Επιπλέον, η Λαπλασιανή της f όταν θεωρείται μόνο ως συνάρτηση του x είναι:

$$\Delta_x f(x,t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x,t).$$

Θεώρημα 2.9.3. *Έστω $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$ και $B = (B^{(1)}, B^{(2)}, ..., B^{(d)})$ μια d-διάστατη κίνηση Brown. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει:*

$$f(B_t,t) = f(B_0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(B_s,s)\,ds + \int_0^t \nabla_x f(B_s,s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_x f(B_s,s)\,ds. \quad (2.7)$$

Ορισμός 2.9.1. *Μια **διαδικασία** $It\hat{o}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία της μορφής:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)\,ds + \int_0^t v(s,\omega)\,dB_s,$$

όπου οι u, v ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\int_0^t v^2(s,\omega)\,ds < \infty, \text{ σ.β.}, \int_0^t u^2(s,\omega)^2\,ds < \infty, \text{ σ.β.}$$

Η διαδικασία αυτή γράφεται σε διαφορική μορφή:

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

Ακολουθεί το Λήμμα του $It\hat{o}$, το οποίο δίνει έναν κανόνα ανταλλαγής μεταβλητών τροποποιημένο κατάλληλα ώστε να ισχύει για στοχαστικά ολοκληρώματα ([1]):

Θεώρημα 2.9.4. *(Το Λήμμα του $It\hat{o}$) Έστω X_t μια διαδικασία $It\hat{o}$ η οποία γράφεται ως* *εξής:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)\,ds + \int_0^t v(s,\omega)\,dB_s,$$

Τότε οποιαδήποτε συνάρτηση της X_t της μορφής $g(t,x) \in C^{1,2}$ μπορεί να εκφραστεί επίσης σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα της μορφής:

$$g(t,X_t) = g(0,X_0) + \int_0^t (\frac{\partial g}{\partial s} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2})\,ds + \int_0^t v\frac{\partial g}{\partial x}\,dB_s. \qquad (2.8)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα γράφεται σε ισοδύναμη διαφορική μορφή ως εξής:

$$dg(t,X_t) = (\frac{\partial g}{\partial t} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2})dt + v\frac{\partial g}{\partial x}dB_t.$$

'Ενας μνημονικός κανόνας για το Λήμμα του $Itô$ είναι ο παρακάτω ([1]): Αν $Y_t = g(t,X_t)$, τότε:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dX_t)^2,$$

όπου χρησιμοποιούνται οι εξής κανόνες:

$$\begin{aligned} dtdt &= 0, \\ dB_tdt &= 0, \\ dtdB_t &= 0, \\ dB_tdB_t &= dt. \end{aligned}$$

Ορισμός 2.9.2. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ χώρος πιθανότητας και B μια m-διάστατη κίνηση Brown ορισμένη στο χώρο αυτό. Επίσης, έστω $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ η διήθηση που παράγει η κίνηση Brown.* ***Διαδικασία*** *$Itô$ στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται κάθε ανέλιξη $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, η οποία γράφεται ως:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t U(s,\omega)\,ds + \int_0^t V(s,\omega)\cdot\,dB_s,$$

για κάθε $t > 0$ με πιθανότητα 1, όπου:

1. *Η X_0 είναι $\mathcal{F}_0$ προσαρμοσμένη.*

2. *Οι* $U(t,\omega) = (u^{(i)}(t,\omega))_{1\leq i\leq d}$, $V(t,\omega) = (v_{i,j}(t,\omega))_{1\leq i\leq d, 1\leq j\leq m}$ *είναι μετρήσιμες προσαρμοσμένες ανελίξεις με τιμές στον* $\mathbb{R}^d$ *και στον* $\mathbb{R}^{d\times m}$ *αντίστοιχα.*

3. *Για κάθε* $t > 0$ *και* $i = 1, ..., d$, $j = 1, ..., m$, *με πιθανότητα 1, ισχύει:*

$$\int_0^t |u^{(i)}(s,\omega)|\, ds < \infty, \ \int_0^t v_{i,j}(s,\omega)^2\, ds < \infty.$$

Η ανέλιξη $Itô$ γράφεται και ως εξής:

$$dX_t = U(t,\omega)dt + V(t,\omega)dB_t.$$

Θεώρημα 2.9.5. *Έστω* $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ *και* X *μια* d*-διάστατη ανέλιξη* $Itô$. *Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\, dX_s^{(i)} dX_s^{(j)}$$

για κάθε $t > 0$.

Για τον υπολογισμό του γινομένου $dX_s^{(i)} dX_s^{(j)}$ χρησιμοποιούμε τις εξής συμβάσεις:

$$\begin{aligned} dtdt &= 0 \\ dB_t^{(i)}dt &= 0, \text{ για κάθε } i = 1, ..., m. \\ dB_t^{(i)}dB_t^{(i)} &= dt, \text{ για κάθε } i = 1, ..., m. \\ dB_t^{(i)}dB_t^{(j)} &= 0, \text{ για κάθε } i, j = 1, ..., m \text{ με } i \neq j. \end{aligned}$$

Ένα χρήσιμο αποτέλεσμα, το οποίο θα χρειαστεί παρακάτω, είναι το εξής:

Πρόταση 2.9.1. *Έστω* $(X_t)_{t\geq 0}$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ *δύο μονοδιάστατες ανελίξεις* $Itô$. *Τότε ισχύει:*

$$d(X_tY_t) = Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t dY_t.$$

Η αυστηρή μορφή του παραπάνω τύπου είναι η ολοκληρωτική:

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t dX_s\, dY_s,$$

και η X_tY_t είναι ανέλιξη $It\hat{o}$ ([9]).

2.10 Το Θεώρημα Cameron-Martin-Girsanov (CMG)

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας. Για να εισάγουμε ένα άλλο μέτρο πιθανότητας στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή Θ στον $(\Omega, \mathcal{F})$, τέτοια ώστε:

- $\Theta \geq 0$, σχεδόν βέβαια ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ και
- $\mathbf{E_P}[\Theta] = 1$,

όπου $\mathbf{E_P}[\cdot]$ είναι η μέση τιμή ως προς το $\mathbf{P}$. Στη συνέχεια θέτουμε:

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E_P}[\Theta \mathbf{1}_A], \text{ για κάθε } A \in \mathcal{F}. \tag{2.9}$$

Το $\mathbf{Q}$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$ και ισχύει το παρακάτω ([5]):

$$\mathbf{Q}(A) = 0 \text{ όταν } \mathbf{P}(A) = 0. \tag{2.10}$$

Αν για δύο μέτρα πιθανότητας $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ ισχύει η σχέση (2.10), τότε λέμε ότι το $\mathbf{Q}$ είναι **απολύτως συνεχές σε σχέση με το P** και συμβολίζεται $\mathbf{Q} << \mathbf{P}$. Το παρακάτω Θεώρημα αναφέρει ότι η παραπάνω κατασκευή του $\mathbf{Q}$ είναι ο μόνος τρόπος να δημιουργηθούν μέτρα πιθανότητας, τα οποία είναι απολύτως συνεχή σε σχέση με το $\mathbf{P}$ ([5]).

Θεώρημα 2.10.1. *(Θεώρημα Radom-Nicodym) Αν $\boldsymbol{Q}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$ και $\boldsymbol{Q} << \boldsymbol{P}$, τότε υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή Θ στον $(\Omega, \mathcal{F})$, όπως πιο πάνω, για την οποία ισχύει $\boldsymbol{Q}(A) = \boldsymbol{E_P}[\Theta \boldsymbol{1}_A]$, για κάθε $A \in \mathcal{F}$.*

Η τυχαία μεταβλητή Θ ονομάζεται **παράγωγος Radom-Nicodym του Q σε σχέση με το P** και είναι μοναδική, σχεδόν βέβαια ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ ([5]). Συμβολικά:

$$\Theta = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}.$$

Αν ισχύει επίσης ότι $\mathbf{P} << \mathbf{Q}$, τότε:

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} = \frac{1}{\Theta}.$$

Αν $\mathbf{E_Q}[\cdot]$ είναι η μέση τιμή ως προς το $\mathbf{Q}$, τότε:

$$\mathbf{E_Q}[\mathbf{1}_A] = \mathbf{Q}(A) = \mathbf{E_P}[\Theta \mathbf{1}_A].$$

Επομένως,

$$\mathbf{E_Q}[X] = \mathbf{E_P}[\Theta X],$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή X στον $(\Omega, \mathcal{F})$.

Πρόταση 2.10.1. *Έστω $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα. Τότε:*

$$\boldsymbol{E_Q}[X|\mathcal{B}] = \frac{\boldsymbol{E_P}[\Theta X|\mathcal{B}]}{\boldsymbol{E_P}[\Theta|\mathcal{B}]}, \tag{2.11}$$

σχεδόν βέβαια ως προς το μέτρο πιθανότητας $\boldsymbol{Q}$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$\Psi := \mathbf{E_P}[\Theta|\mathcal{B}].$$

Ισχύει ότι η Ψ είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη, $\Psi \geq 0$ σχεδόν βέβαια ως προς το $\mathbf{P}$ και

$$\mathbf{E_P}[\Psi] = \mathbf{E_P}[\mathbf{E_P}[\Theta|\mathcal{B}]] = \mathbf{E_P}[\Theta] = 1.$$

Ορίζουμε στον $(\Omega, \mathcal{F})$ το μέτρο πιθανότητας:

$$\tilde{\mathbf{Q}}(A) = \mathbf{E_P}[\Psi \mathbf{1}_A].$$

Για $A \in \mathcal{B}$ έχουμε:

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E_P}[\Theta \mathbf{1}_A] = \mathbf{E_P}[\mathbf{E_P}[\Theta \mathbf{1}_A|\mathcal{B}]] = \mathbf{E_P}[\mathbf{1}_A \mathbf{E_P}[\Theta|\mathcal{B}]] = \mathbf{E_P}[\Psi \mathbf{1}_A].$$

Επομένως,

$$\mathbf{Q}(A) = \tilde{\mathbf{Q}}(A), \text{ για κάθε } A \in \mathcal{B},$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X] = \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{Q}}}[X],$$

για κάθε $\mathcal{B}$-μετρήσιμη X. Στη συνέχεια θέτουμε

$$Y_1 := \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\Theta X|\mathcal{B}] \text{ και } Y_2 := \Psi \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X|\mathcal{B}].$$

Τότε η (2.11) είναι ισοδύναμη με το εξής:

$$Y_1 = Y_2, \text{ σχεδόν βέβαια ως προς το } \mathbf{Q}.$$

Οι Y_1, Y_2 είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμες, άρα αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{Q}}}[Y_1 \mathbf{1}_A] = \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{Q}}}[Y_2 \mathbf{1}_A], \text{ για κάθε } A \in \mathcal{B}.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{Q}}}[Y_1 \mathbf{1}_A] &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\Psi Y_1 \mathbf{1}_A] = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\Psi \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\Theta X|\mathcal{B}]\mathbf{1}_A] \\
&= \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\Psi\Theta X \mathbf{1}_A|\mathcal{B}]] = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\Psi\Theta X \mathbf{1}_A] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\Psi X \mathbf{1}_A]. \\
\mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{Q}}}[Y_2 \mathbf{1}_A] &= \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{Q}}}[\Psi \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X|\mathcal{B}]\mathbf{1}_A] = \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{Q}}}[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\Psi X \mathbf{1}_A|\mathcal{B}]] \\
&= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\Psi X \mathbf{1}_A|\mathcal{B}]] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\Psi X \mathbf{1}_A].
\end{aligned}$$

□

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(B_t)_{t\geq 0}$ μονοδιάστατη κίνηση Brown. Επίσης, έστω $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ η διήθηση που παράγει η κίνηση Brown και $(X_t)_{t\geq 0}$ στοχαστική διαδικασία, η οποία είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $T > 0$ ισχύει:

$$\int_0^T X_t^2 \, dt < \infty, \text{ σχεδόν βέβαια ως προς το } \mathbf{P}.$$

Θέτουμε
$$M_t := e^{Y_t},\ \text{όπου}\ Y_t := -\frac{1}{2}\int_0^t X_s^2\,ds + \int_0^t X_s\,dB_s.$$
Παρατηρούμε ότι $M_t > 0$ σχεδόν βέβαια ως προς το **P**. Σε διαφορική μορφή έχουμε:

$$dY_t = -\frac{1}{2}X_t^2dt + X_tdB_t,\ Y_0 = 0.$$

Από το Λήμμα του $It\hat{o}$ έπεται ότι:

$$dM_t = e^{Y_t}dY_t + \frac{1}{2}e^{Y_t}X_t^2dt = M_tX_tdB_t,\ M_0 = 1.$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται ως:

$$M_t = 1 + \int_0^t M_sX_s\,dB_s.$$

Η ανέλιξη $It\hat{o}$ M_t είναι $\mathcal{F}_t$-martingale ως προς το **P** και ισχύει ότι:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[M_t] = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[M_0] = 1,\ \text{για κάθε}\ t \in [0,T].$$

Στη συνέχεια, εισάγουμε νέα μέτρα πιθανότητας στον $(\Omega,\mathcal{F})$ με τον παρακάτω τρόπο:

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[M_T\mathbf{1}_A],\ \ \mathbf{Q}_t(A) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[M_t\mathbf{1}_A],\ 0 < t < T.$$

Το ότι η M_t είναι $\mathcal{F}_t$-martingale συνεπάγεται ότι για $0 \le t \le T$ έχουμε $M_t = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[M_T|\mathcal{F}_t]$. Επομένως,
$$\mathbf{Q}_t(A) = \mathbf{Q}(A),\ \text{για κάθε}\ A \in \mathcal{F}_t.$$

Θεώρημα 2.10.2. *(Θεώρημα CMG στον $\mathbb{R}^1$) Έστω $(\Omega,\mathcal{F},\boldsymbol{P})$, $(B_t)_{t\ge0}$, $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$, $(X_t)_{t\ge0}$ και T όπως ορίστηκαν παραπάνω. Θέτουμε:*

$$W_t := B_t - \int_0^t X_s\,ds,\ \ t \in [0,T].$$

Τότε για κάθε $T > 0$ η διαδικασία W_t, $0 \le t \le T$ είναι κίνηση Brown στον $(\Omega,\mathcal{F},\boldsymbol{Q})$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το χαρακτηρισμό $L\acute{e}vy$ της κίνησης

Brown στον $\mathbb{R}^1$:

Μια συνεχής στοχαστική διαδικασία $(W_t)_{t\geq 0}$ σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$ είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown αν και μόνο αν:

1. Η $(W_t)_{t\geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)^W_{t\geq 0}$ που παράγει και

2. Η $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)^W_{t\geq 0}$.

Θέτουμε $K_t := M_t W_t$ και από το Λήμμα του *Itô* έχουμε:

$$\begin{aligned} dK_t &= W_t dM_t + M_t dW_t + dW_t dM_t \\ &= (B_t - \int_0^t X_s\, ds) M_t X_t dB_t + M_t (dB_t - X_t dt) + M_t X_t dt \\ &= [(B_t - \int_0^t X_s\, ds) M_t X_t + M_t] dB_t. \end{aligned}$$

Επομένως η K_t είναι $\mathcal{F}_t$-martingale ως προς το **P**. Από την Πρόταση (2.10.1), για $0 \leq s \leq t \leq T$ προκύπτει ότι:

$$\mathbf{E_Q}[W_t|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_t}[W_t|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbf{E_P}[M_t W_t|\mathcal{F}_s]}{\mathbf{E_P}[M_t|\mathcal{F}_s]} = \frac{M_s W_s}{M_s} = W_s, \text{ σχεδόν βέβαια ως προς } \mathbf{Q}.$$

Άρα η $(W_t)_{t\geq 0}$ είναι $\mathcal{F}_t$-martingale ως προς το **Q** ([5]).
Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ είναι $\mathcal{F}_t$-martingale ως προς το **Q** ([12]). Από το Λήμμα του *Itô* έχουμε:

$$d(W_t^2) = 2W_t dW_t + (dW_t)^2 = 2W_t dW_t + dt.$$

Άρα,

$$d(W_t^2) - dt = 2W_t dW_t.$$

Επομένως,

$$W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s\, dW_s$$

και προκύπτει το ζητούμενο, δεδομένου ότι η $(W_t)_{t\geq 0}$ είναι $\mathcal{F}_t$-martingale ως προς το **Q** ([12]). □

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε το Θεώρημα CMG στον $\mathbb{R}^d$.

Θεώρημα 2.10.3. *(Θεώρημα CMG στον $\mathbb{R}^d$) Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ μια d-διάστατη κίνηση Brown στον $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ η διήθηση που παράγει και $(X_t)_{t\geq 0}$ μια στοχαστική διαδικασία με τιμές στον $\mathbb{R}^d$, η οποία είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $T > 0$ ισχύει:*

$$\int_0^T |X_t|^2 \, dt < \infty, \text{ σχεδόν βέβαια ως προς το } \boldsymbol{P}.$$

Θέτουμε

$$M_t := e^{Y_t}, \text{ όπου } Y_t := -\frac{1}{2}\int_0^t |X_s|^2 \, ds + \int_0^t X_s \cdot \, dB_s.$$

*Ισχύει ότι $M_t > 0$ σχεδόν βέβαια ως προς το **P** και η M_t είναι **P**-martingale με $\boldsymbol{E_P}[M_t] = 1$, για κάθε $t \in [0, T]$. Έστω **Q** μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$, το οποίο ορίζεται ως:*

$$\boldsymbol{Q}(A) = \boldsymbol{E_P}[M_T \boldsymbol{1}_A].$$

Τότε για κάθε $T > 0$ η διαδικασία:

$$W_t := B_t - \int_0^t X_s \, ds, \;\; t \in [0, T]$$

είναι d-διάστατη κίνηση Brown στον $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{Q})$.

2.11 Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 2.11.1. ***Στοχαστική διαφορική εξίσωση*** *ονομάζεται μια εξίσωση της μορφής:*

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

όπου $\mu, \sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις, $x_0 \in \mathbb{R}$ και B (μονοδιάστατη) κίνηση Brown.

Έστω $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ η διήθηση που παράγεται από την κίνηση Brown. **Λύση** της (2.12) ονομάζεται κάθε ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- Η $(X_t)_{t\geq 0}$ έχει συνεχή μονοπάτια.

- Η $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

- Για κάθε $t > 0$, με πιθανότητα 1, ισχύει:

$$\int_0^t |\mu(s, X_s)|\, ds < \infty, \quad \int_0^t \sigma^2(s, X_s)\, ds < \infty.$$

- Με πιθανότητα 1 ισχύει:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s, \text{ για κάθε } t > 0. \tag{2.13}$$

Οι λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων πολλές φορές ονομάζονται **διαδικασίες διάχυσης**.

Έστω ότι οι μ, σ είναι φραγμένες και συνεχείς συναρτήσεις. Από τη σχέση (2.13) έχουμε:

$$\mathbf{E}[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t] = \int_t^{t+h} \mathbf{E}[\mu(s, X_s)|\mathcal{F}_t]\, ds \approx h\mu(t, X_t),$$

δηλαδή η $\mu(t, x)$ δίνει το ρυθμό της μέσης μεταβολής της X τον χρόνο t δεδομένου του παρελθόντος $\mathcal{F}_t$ αν $X_t = x$ ([9]). Για την ερμηνεία της σ έχουμε:

$$\begin{aligned}
Var(X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t) &= \mathbf{E}[(X_{t+h} - X_t - \mathbf{E}[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t])^2|\mathcal{F}_t] \\
&= \mathbf{E}[(\int_t^{t+h} (\mu(s, X_s) - \mathbf{E}[\mu(s, X_s)|\mathcal{F}_t])\, ds + \int_t^{t+h} \sigma(s, X_s)\, dB_s)^2|\mathcal{F}_t] \\
&= o(h) + \mathbf{E}[(\int_t^{t+h} \sigma(s, X_s)\, dB_s)^2|\mathcal{F}_t] \\
&= \mathbf{E}[\int_t^{t+h} \sigma^2(s, X_s)\, ds|\mathcal{F}_t] + o(h) \\
&\approx h\sigma^2(t, X_t),
\end{aligned}$$

όπου $o(h)$ είναι ο συμβολισμός μιας συνάρτησης $g(h)$ η οποία έχει την ιδιότητα $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$. Επομένως, αν $X_t = x$, για μικρό h, η διασπορά της μεταβολής $X_{t+h} - X_t$ δεδομένου του παρελθόντος $\mathcal{F}_t$ είναι ανάλογη του h και η $\sigma^2(t, X_t)$ είναι η σταθερά αναλογίας ([9]).

Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση, η οποία ορίζει τη **γεωμετρική κίνηση Brown**:

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned}$$

όπου $x_0 > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ και B είναι μια τυπική κίνηση Brown. Θέτουμε $Y_t := \log X_t$ και από τον τύπο του $It\hat{o}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}(dX_t)^2 \\ &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Επομένως

$$Y_t - Y_0 = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t.$$

Άρα,

$$X_t = x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}, \text{ για κάθε } t > 0.$$

Για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της X ισχύουν τα εξής ([9]):

- Αν $\mu < \frac{\sigma^2}{2}$, τότε $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$.
- Αν $\mu > \frac{\sigma^2}{2}$, τότε $\lim_{t\to\infty} X_t = \infty$.
- Αν $\mu = \frac{\sigma^2}{2}$, τότε $\lim_{t\to\infty} inf X_t = 0$ και $\lim_{t\to\infty} sup X_t = \infty$.

Θεώρημα 2.11.1. *Έστω $T > 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $K > 0$ ώστε:*

$$\begin{aligned} |\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| &\le K|x-y|, \\ |\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| &\le K(1+|x|), \end{aligned} \tag{2.14}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$. Τότε υπάρχει λύση της (2.12) στο διάστημα $[0,T]$ και οποιεσδήποτε δύο λύσεις X, Y είναι μη διακρινόμενες στο $[0,T]$. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{P}(X_t = Y_t \text{ για κάθε } t \in [0,T]) = 1.$$

Η πρώτη ανισότητα της (2.14) λέει ότι για κάθε t σταθερό οι $\mu(t,\cdot), \sigma(t,\cdot)$ είναι Lipschitz σε όλο το $\mathbb{R}$. Η δεύτερη ανισότητα της (2.14) λέει ότι οι μ, σ αυξάνουν το πολύ γραμμικά ως προς x και επιπλέον έχουν γραμμικό άνω φράγμα το οποίο δεν εξαρτάται από το $t \in [0, T]$.

Μια άμεση συνέπεια του παραπάνω Θεωρήματος είναι το παρακάτω Πόρισμα, το οποίο αφορά ύπαρξη και μοναδικότητα στο $[0, \infty)$.

Πόρισμα 2.11.1. *Έστω ότι για κάθε $T > 0$ υπάρχει $K_T > 0$ ώστε:*

$$\begin{aligned} |\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| &\leq K_T|x-y|, \\ |\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| &\leq K_T(1+|x|), \end{aligned} \tag{2.15}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$. Τότε υπάρχει λύση της (2.12) στο διάστημα $[0, \infty)$ και οποιεσδήποτε δύο λύσεις X, Y είναι μη διακρινόμενες στο $[0, \infty)$. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{P}(X_t = Y_t \text{ για κάθε } t \in [0, \infty)) = 1.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο Θεώρημα για $T = n \in \mathbb{N}^+$ και προκύπτει ότι υπάρχει λύση $X^{(n)}$ της (2.12) στο διάστημα $[0, n]$. Για $j, k \in \mathbb{N}^+$ με $j < k$ θέτουμε:

$$A_{j,k} := \{\omega \in \Omega \ : \ X_t^{(j)} \neq X_t^{(k)} \text{ για κάποιο } t \in [0, j]\},$$

το οποίο λόγω του προηγούμενου Θεωρήματος έχει πιθανότητα 0. Τότε και το $A := \cup_{1 \leq j < k} A_{j,k}$ έχει πιθανότητα 0. Θέτουμε:

$$X_t := X_t^{(n)} \text{ για κάθε } t \in [n-1, n) \text{ και } n \in \mathbb{N}^+.$$

Για $\omega \in \Omega \backslash A$ ισχύει:

$$X_t = X_t^{(n)} \text{ για κάθε } t \in [0, n],$$

οπότε η X είναι λύση της (2.12) στο διάστημα $[0, n]$. Επειδή το n είναι αυθαίρετο και $\mathbf{P}(A) = 0$, έπεται ότι η X είναι λύση της (2.12) στο $[0, \infty)$.

Αν X, Y είναι δύο λύσεις, τότε, με βάση το προηγούμενο Θεώρημα, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ το σύνολο:

$$C_n := \{\omega \in \Omega \ : \ X_t \neq Y_t \text{ για κάποιο } t \in [0, n]\}$$

έχει πιθανότητα 0. Άρα και το

$$\{\omega \in \Omega \ : \ X_t \neq Y_t \text{ για κάποιο } t \in [0,\infty)\}$$

έχει πιθανότητα 0 ως υποσύνολο του $\cup_{n=1}^{\infty} C_n$. □

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα πιο γενικό ορισμό των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Ορισμός 2.11.2. *Μια **στοχαστική διαφορική εξίσωση** είναι μια εξίσωση της μορφής:*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \tag{2.16}$$

όπου B_t είναι μία m-διάστατη κίνηση Brown, $\sigma : [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mu : [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις και $X_t \in \mathbb{R}^n$.

Η (2.16) ονομάζεται **αυτόνομη στοχαστική διαφορική εξίσωση** αν ισχύει $\mu = \mu(X_t)$ και $\sigma = \sigma(X_t)$.
Μια στοχαστική διαφορική εξίσωση έχει λύση αν υπάρχει μια διαδικασία $It\hat{o}$ η οποία την ικανοποιεί. Τέτοιες λύσεις ονομάζονται **τροχιακές λύσεις** ([1]).

Θεώρημα 2.11.2. *(Ιδιότητα Markov) Αν X_t είναι λύση της αυτόνομης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (2.16) και f είναι μια φραγμένη συνάρτηση, τότε για οποιαδήποτε t και s με $t, s \geq 0$ ισχύει:*

$$\boldsymbol{E}_x[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s] = \boldsymbol{E}_{X_s}[f(X_t)].$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας μπορεί να ερμηνευθεί σαν η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας X η οποία ξεκινάει στο σημείο x τη χρονική στιγμή 0 και ”τρέχει” για χρονικό διάστημα $t+s$. Το δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας μπορεί να ερμηνευθεί σαν η μέση τιμή πάνω στις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας X η οποία ξεκίνησε τη χρονική στιγμή 0 στο σημείο X_s και ”τρέχει” για χρονικό διάστημα t ([1]).
Η διαισθητική ερμηνεία της ιδιότητας Markov είναι ότι η μελλοντική συμπεριφορά της διαδικασίας, δεδομένου ότι έγινε μέχρι τη χρονική στιγμή t, μπορεί να καθοριστεί απλά και μόνο από το να ξεκινούσαμε μια νέα διαδικασία διάχυσης στη θέση X_t ([1]).

Η ιδιότητα Markov μπορεί να γενικευθεί και για λύσεις μη αυτόνομων στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Σε προηγούμενο υποκεφάλαιο είχαμε διατυπώσει τον ορισμό της ιδιότητας Markov για μια στοχαστική διαδικασία X. Μια τέτοια διαδικασία ονομάζεται διαδικασία Markov και η ιδιότητα Markov είναι ισοδύναμη με την παρακάτω ιδιότητα:

$$\mathbf{E}[\phi(X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[\phi(X_t)|\sigma(X_s)],$$

όπου $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, Borel μετρήσιμη συνάρτηση και X d-διάστατη στοχαστική διαδικασία ([1]).

Η υπό συνθήκη μέση τιμή $\mathbf{E}[\phi(X_t)|\sigma(X_s)]$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας X_t που "ξεκινάνε" στο σημείο X_s τη χρονική στιγμή s και συμβολίζεται με $\mathbf{E}_{s,X_s}[\phi(X_t)]$. Ένας άλλος τρόπος έκφρασης αυτής της μέσης τιμής είναι με τη βοήθεια τη **πιθανότητας μετάβασης**:

$$p(s, x; t, A) := \mathbf{P}(X_t \in A|\mathcal{F}_s), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

της διαδικασίας Markov X_t. Αν ορίσουμε τη συνάρτηση:

$$v(s, x) := \mathbf{E}_{s,x}[\phi(X_t)] := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)p(s, x; t, y)\, dy,$$

τότε:

$$\mathbf{E}_{s,X_s}[\phi(X_t)] = v(s, X_s).$$

Η πιθανότητα μετάβασης είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και για κάθε $0 \le s \le t$ πεπερασμένα. Η πιθανότητα μετάβασης $p(s, x; t, A)$ μπορεί να ερμηνευθεί σαν η πιθανότητα να βρεθεί η διαδικασία X_t, η οποία ξεκινάει τη χρονική στιγμή s στο σημείο x, στο σύνολο A τη χρονική στιγμή t. Ως **πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης** ορίζουμε την $p(s, x; t, y)$ για την οποία ισχύει:

$$p(s, x; t, A) = \int_A p(s, x; t, y)\, dy.$$

Για την πιθανότητα μετάβασης ισχύει η εξίσωση Chapman-Kolmogorov:

$$p(s,x;t,A)=\int_{\mathbb{R}^d} p(r,y;t,A)p(s,x;r,y)\,dy,\ \forall s\leq r\leq t.$$

Η εξίσωση αυτή λέει ότι η μετάβαση από το x τη χρονική στιγμή s στο A τη χρονική στιγμή t μπορεί να γραφεί σαν η μετάβαση από το (x,s) στο ενδιάμεσο σημείο y τη χρονική στιγμή r και κατόπιν σαν η μετάβαση από το (y,r) στο A τη χρονική στιγμή t. Η ολοκλήρωση πάνω σε όλα τα $y\in\mathbb{R}^d$ γίνεται για να ληφθούν υπόψη όλα τα πιθανά ενδιάμεσα σημεία y ([1]).
Στην περίπτωση που η πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης μεταξύ των (s,x) και (t,y) εξαρτάται μόνο από τη χρονική διάρκεια $t-s$ και όχι από τις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές που ξεκινήσαμε, λέμε ότι η διαδικασία Markov είναι **χρονικά ομογενής**. Για χρονικά ομογενείς διαδικασίες Markov ισχύει το εξής:

$$p(s,x;t,y)=p(0,x;t-s,y):=p(t-s,x;y).$$

Η συνάρτηση $p(t,x;y)$ αντιστοιχεί στην πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης της στοχαστικής διαδικασίας από το σημείο x στο σημείο y σε χρονικό διάστημα $t-s$. Δεν παίζει κανένα ρόλο το πότε ξεκινήσαμε τη διαδικασία ([1]).

Θεώρημα 2.11.3. *(Η ιδιότητα Markov) Έστω X_t η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:*

$$dX_t=\mu(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t,$$

όπου οι συντελεστές πληρούν τις συνθήκες Lipschitz και τη συνθήκη γραμμικής αύξησης. Τότε η X_t είναι μια διαδικασία Markov με πιθανότητα μετάβασης που ορίζεται από τη σχέση:

$$p(s,x;t,A)=\boldsymbol{P}(X_t^{(s,x)}\in A),$$

όπου $X_t^{(s,x)}$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:

$$X_t^{(s,x)}=x+\int_s^t f(r,X_r^{(s,x)})\,dr+\int_s^t g(r,X_r^{(s,x)})\,dB_r,$$

για $t\geq s$. Η $X_t^{(s,x)}$ ουσιαστικά είναι η λύση της αρχικής στοχαστικής εξίσωσης με αρχική *τιμή x τη χρονική στιγμή s, δηλαδή για $X_s = x$.*

Αν η στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι αυτόνομη, τότε η διαδικασία Markov X_t είναι και χρονικά ομογενής.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη σχέση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων με τις διαφορικές εξισώσεις με **μερικές παραγώγους**. Με κάθε διαδικασία διάχυσης μπορούμε να συνδέσουμε ένα διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης με μερικές παραγώγους. Ο τελεστής αυτός ονομάζεται **γεννήτορας της διάχυσης** X_t.

Ορισμός 2.11.3. *Έστω X_t μια χρονικά ομογενής διάχυση Itô στον $\mathbb{R}^n$. Ο* ***απειροστός γεννήτορας*** *A της X_t ορίζεται από το:*

$$Af(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\boldsymbol{E}_x[f(X_t)] - f(x)}{t}, \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Ο παραπάνω τύπος λέει με λόγια ότι για τον υπολογισμό της δράσης του γεννήτορα τελεστή της X_t σε μια συνάρτηση $f(x)$ θα πρέπει να ξεκινήσουμε μια διαδικασία $Itô$ στο σημείο x και να την αφήσουμε να "τρέξει" για χρόνο t. Υπολογίζουμε την τιμή της f στο σημείο που έφτασε η διαδικασία διάχυσης, δηλαδή υπολογίζουμε το $f(X_t)$. Επαναλαμβάνουμε για πολλές πραγματοποιήσεις της διαδικασίας αυτής (ξεκινώντας πάντοτε από το αρχικό σημείο x) και υπολογίζουμε τη μέση τιμή. Μετά αφαιρούμε την $f(x)$ και παίρνουμε το όριο για $t \to 0$. Η συνάρτηση που προκύπτει είναι η δράση του τελεστή A στη συνάρτηση $f(x)$ ([1]).

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να γενικευθεί και για μη χρονικά ομογενείς διαχύσεις $Itô$ στον $\mathbb{R}^n$. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να ληφθεί υπόψη και το χρονικό σημείο στο οποίο έχουμε ξεκινήσει. Αν θεωρήσουμε ότι η διάχυση $Itô$ ξεκινάει τη χρονική στιγμή t_0 στο σημείο x_0, τότε ο τελεστής A επιδρά τόσο στις χωρικές όσο και στις χρονικές συντεταγμένες και ορίζεται ως εξής ([1]):

$$Af(t_0, x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{E}_x[f(X_t^{(t_0,x_0)})] - f(t_0, x_0)}{t}, \;\; x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}^+.$$

Θεώρημα 2.11.4. *Έστω X_t μια χρονικά ομογενής διάχυση Itô στον $\mathbb{R}^n$ που δίνεται σαν* *λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:*

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

όπου η κίνηση Brown θεωρείται να είναι m-διάστατη και τα μ, σ είναι κατάλληλα επιλεγμένα διανύσματα και πίνακες, αντίστοιχα. Τότε:

$$Af(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

όπου με σ^T συμβολίζεται ο ανάστροφος πίνακας.

Η τυπική μορφή του τελεστή στην περίπτωση που δεν ισχύει η συνθήκη της χρονικής ομοιογένειας των συντελεστών είναι:

$$Af(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t,x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma(t,x)\sigma^T(t,x))_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Έστω τώρα ο τελεστής:

$$A := \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Επίσης, έστω το πρόβλημα Cauchy:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = Au + cu, \\ &u(t,x) \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n), \\ &u(0,x) = f(x), \end{aligned} \tag{2.17}$$

όπου c συνεχής και φραγμένη και $f \in C_0^2$.

Θεώρημα 2.11.5. *(Αναπαράσταση Feynman-Kac) Η λύση στο πρόβλημα Cauchy μπορεί να γραφεί ως:*

$$u(t,x) = \boldsymbol{E}_x[f(X_t)exp(\int_0^t c(X_s)\,ds)].$$

Δηλαδή, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη λύση του προβλήματος (2.17) στο σημείο x τη χρονική στιγμή t, εργαζόμαστε ως εξής: Παίρνουμε μια σειρά από διαχύσεις $X_t(\omega_i)$, οι οποίες έχουν γεννήτορα τελεστή A και ξεκινάνε τη χρονική στιγμή 0 στο σημείο x. Αφήνουμε τις διαχύσεις να τρέξουν για χρόνο t και για κάθε μία από τις τροχιές υπολογίζουμε την ποσότητα $f(X_t(\omega_i))exp(\int_0^t c(X_s(\omega_i))\,ds)$. Στη συνέχεια, παίρνουμε τη μέση τιμή επάνω σε όλες τις τροχιές (όλα τα ω_i) και η μέση τιμή αυτή είναι η λύση της εξίσωσης ([1]).

Με τη βοήθεια της αναπαράστασης Feynman-Kac μπορούμε να υπολογίσουμε ενδιαφέρουσες ποσότητες για διαδικασίες διάχυσης.

- **Χρονικά ομογενείς διαχύσεις.**

  Αν στον τύπο Feynman-Kac για το πρόβλημα Cauchy θέσουμε $c = 0$, τότε η $u(t,x) = \mathbf{E}_x[f(X_t)]$ ικανοποιεί την **ανάστροφη εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov (backward Fokker-Planck-Kolmogorov equation)**, η οποία έχει τη μορφή:

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = Au.$$

  Η λύση για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη που δίνεται από μια συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφεί σαν το ολοκλήρωμα:

  $$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)p(t,x;y)\,dy.$$

  Η πυκνότητα μετάβασης $p(t,x;y)$ ικανοποιεί την **ευθεία εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov (forward Fokker-Planck-Kolmogorov equation)** στις μεταβλητές t και y:

  $$\frac{\partial p(t,x;y)}{\partial t} = A_y^* p(t,x;y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}((\sigma\sigma^T)_{ij}(y)p(t,x;y)) - \sum_{i}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(\mu_i(y)p(t,x;y)).$$

  Η παραπάνω εξίσωση είναι η συζυγής εξίσωση της ανάστροφης εξίσωσης.

- **Μη χρονικά ομογενείς διαχύσεις.**

  Για μια μη χρονικά ομογενή διαδικασία διάχυσης η πυκνότητα μετάβασης $p(s,x;t,y)$ ικανοποιεί την **ανάστροφη εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov (backward Fokker-**

Planck-Kolmogorov equation):

$$(\frac{\partial}{\partial s} + A_{s,x})p(s,x;t,y) = 0,\ s < t,$$

και την **ευθεία εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov (forward Fokker-Planck-Kolmogorov equation)**:

$$(\frac{\partial}{\partial t} - A^*_{t,y})p(s,x;t,y) = 0,\ s < t.$$

Κεφάλαιο 3

Τιμολόγηση Χρηματοοικονομικών Παραγώγων σε Αγορές Διακριτού Χρόνου

3.1 Η αξία του χρήματος στο χρόνο

Πριν αναφερθούμε στα βασικότερα χρηματοοικονομικά παράγωγα, θα εισάγουμε την έννοια της αξίας του χρήματος στο χρόνο. Είναι γνωστό ότι οι τράπεζες πληρώνουν τόκους στους καταθέτες τους και χρεώνουν τόκους σε όσους δανείζονται από αυτές. Έστω ότι κάποιος παραχωρεί στην τράπεζα ένα κεφάλαιο που του ανήκει για κάποια χρονική περίοδο. Στο τέλος της περιόδου, το κεφάλαιο του επιστρέφεται και γι'αυτό λέμε ότι η συγκεκριμένη επένδυση είναι χωρίς κίνδυνο (risk-free). Ο τόκος είναι το κέρδος που του επιφέρει αυτή η επένδυση και το επιτόκιο (interest rate) είναι ο ρυθμός απόδοσής της. Προκειμένου να συγκρίνουμε διαφορετικές επενδύσεις, το επιτόκιο αναφέρεται πάντα σε ετήσια βάση ([4]).

Έστω ότι μια τράπεζα προσφέρει επιτόκιο r και πληρώνει τόκους n φορές το χρόνο. Ένα αρχικό κεφάλαιο $A(0)$ θα αποφέρει τόκους $A(0) \times \frac{r}{n}$ την πρώτη φορά που θα πληρωθούν τόκοι. Το συνολικό κεφάλαιο που θα βρίσκεται τότε στο λογαριασμό είναι:

$$A(\frac{1}{n}) = A(0)(1 + \frac{r}{n}).$$

Αυτό θα λειτουργήσει ως αρχικό κεφάλαιο για τη δεύτερη περίοδο διάρκειας $\frac{1}{n}$ του έτους. Στο τέλος της δεύτερης περιόδου, μαζί με τους τόκους που θα πληρωθούν σε αυτήν την περίοδο, το κεφάλαιο θα έχει γίνει:

$$A(\frac{2}{n}) = A(\frac{1}{n}) \times (1 + \frac{r}{n}) = A(0)(1 + \frac{r}{n})^2.$$

Αν ο χρόνος t, μετρημένος σε έτη, είναι πολλαπλάσιο της περιόδου ανατοκισμού $\frac{1}{n}$, τότε το αρχικό κεφάλαιο θα έχει ανατοκιστεί nt φορές μέχρι το χρόνο t και το κεφάλαιο στο λογαριασμό θα είναι:

$$A(t) = A(0)(1 + \frac{r}{n})^{nt}.$$

Αν ο καταθέτης αποσύρει τα χρήματά του κάποια χρονική στιγμή t που δεν είναι πολλαπλάσιο του $\frac{1}{n}$, τότε το κεφάλαιό του θα είχε ανατοκιστεί $[nt]$ φορές. Μαζί με τους τόκους που αναλογούν μέχρι τη στιγμή t, τα χρήματα που θα έπαιρνε θα ήταν:

$$A(t) = A(0)(1 + \frac{r}{n})^{[nt]}(1 + r(t - \frac{[nt]}{n})).$$

Η ακολουθία $n \mapsto (1 + \frac{r}{n})^{nt}(1 + r(t - \frac{[nt]}{n}))$ είναι αύξουσα, το οποίο σημαίνει ότι όσο πιο συχνά ανατοκίζεται η κατάθεση, τόσο μεγαλύτερη απόδοση έχει. Υπάρχει όμως ένα όριο στην αύξηση αυτής της απόδοσης. Όταν $n \to \infty$, δηλαδή ο ανατοκισμός είναι συνεχής, η αρχική επένδυση θα έχει αξία:

$$A(t) = A(0)e^{rt}$$

τη χρονική στιγμή t ([4]). Είναι χρήσιμο να σημειωθεί ότι για οποιοδήποτε σχήμα ανατοκισμού με επιτόκιο r_1, υπάρχει ένα ισοδύναμο επιτόκιο r, το οποίο με συνεχή ανατοκισμό δίνει την ίδια απόδοση στο τέλος κάθε περιόδου ανατοκισμού. Το επιτόκιο r μπορεί να βρεθεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$(1 + \frac{r_1}{n}) = e^{\frac{r}{n}} \Leftrightarrow r = n \log(1 + \frac{r_1}{n}).$$

Για το λόγο αυτό, παρακάτω θα ακολουθήσουμε τη σύμβαση ότι ο ανατοκισμός είναι συνεχής. Ένας καταθετικός λογαριασμός με συνεχή ανατοκισμό που προσφέρει επιτόκιο

r είναι ένα παράδειγμα προϊόντος χωρίς κίνδυνο.

Ορισμός 3.1.1. *Ονομάζουμε **προϊόν χωρίς κίνδυνο** με σταθερό επιτόκιο r ένα προϊόν η αξία του οποίου μεταβάλλεται στο χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:*

$$A(t) = A(0)e^{rt}.$$

Ένα βασικό χαρακτηριστικό του προϊόντος χωρίς κίνδυνο είναι ότι γνωρίζουμε σήμερα την αξία που θα έχει στο μέλλον. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να συγκρίνουμε ποσά που καταβάλλονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, αν μπορούμε να δανείζουμε και να δανειζόμαστε χωρίς κίνδυνο με επιτόκιο r ([4]).

Ένα **απλό ομόλογο** (zero-coupon bond) με χρόνο ωρίμανσης (maturity) T και τιμή όψεως A δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να εισπράξει από τον εκδότη του ομολόγου το ποσόν A, στον χρόνο T. Ο κάτοχος του ομολόγου λέμε ότι έχει **θετική θέση** (long position) σε αυτή τη συμφωνία, ενώ ο εκδότης του ομολόγου λέμε ότι έχει **αρνητική θέση** (short position).

Ο εκδότης του ομολόγου προκειμένου να πάρει αρνητική θέση σε αυτήν τη συμφωνία, εισπράττει σήμερα ένα ποσό από τον κάτοχο του ομολόγου. Η τιμή που συμφωνείται να καταβληθεί σήμερα, για ένα ομόλογο με ωρίμανση T και τιμή όψεως 1, είναι η παρούσα αξία αυτού του ομολόγου και τη συμβολίζουμε με $B(0,T)$. Αντίστοιχα, ένα ομόλογο με την ίδια ωρίμανση και τιμή όψεως A έχει παρούσα αξία $A \times B(0,T)$. Στην ουσία, ο εκδότης του ομολόγου δανείζεται σήμερα ένα ποσό $A \times B(0,T)$ από τον αγοραστή του ομολόγου και αναλαμβάνει την υποχρέωση να επιστρέψει στον κάτοχο του ομολόγου το ποσό A, τη συμφωνημένη χρονική στιγμή T. Για αυτήν την πράξη δανεισμού υπάρχει ένα συμφωνημένο σταθερό επιτόκιο r για τη χρονική περίοδο $(0,T)$, το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A \times B(0,T) = Ae^{rT} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{T}\ln B(0,T).$$

Τα ομόλογα είναι προϊόντα που μπορεί κανείς να διαπραγματευτεί και η αξία τους αλλάζει στο χρόνο, με τρόπο που δε μπορούμε εν γένει να προβλέψουμε. Αν $0 < t < T$, συμβολίζουμε με $B(t,T)$ την αξία ενός ομολόγου με ωρίμανση T και τιμή όψεως 1 κατά τη χρονική στιγμή t. Αυτή δε μπορεί να είναι γνωστή σήμερα, όμως το ισοδύναμο σταθερό επιτόκιο δανεισμού $r(t,T)$ για την περίοδο (t,T) είναι τέτοιο ώστε:

$$B(t,T) = e^{r(t,T)(T-t)} \Leftrightarrow r(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln B(t,T).$$

Παρακάτω γίνεται η σύμβαση ότι στις αγορές που θα θεωρήσουμε θα υπάρχει πάντα ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο με σταθερό επιτόκιο r, το οποίο μπορούμε είτε να αγοράζουμε είτε να πουλάμε. Πρέπει να σημειωθεί ότι στην πραγματικότητα τα προϊόντα χωρίς κίνδυνο και τα ομόλογα είναι προϊόντα με κίνδυνο, καθώς υπάρχει πάντα ο κίνδυνος να μην επιστραφεί ποτέ ένα ποσό που δανειστήκαμε ή ένα απλό ομόλογο να μην πληρώσει την τιμή όψεως (να κουρευτεί). Παρακάτω θα θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει ο κίνδυνος αυτός, γιατί σκοπός είναι να μελετήσουμε τις αγορές των παραγώγων ([4]).

3.2 Τα βασικά χρηματοοικονομικά παράγωγα

Τα **παράγωγα προϊόντα** (derivative securities) είναι συμβόλαια που καθορίζουν μια συμφωνία, η οποία πρόκειται να υλοποιηθεί στο μέλλον και η αξία της οποίας εξαρτάται από κάποιο άλλο προϊόν, που ονομάζεται πρωτογενές (underlying asset). Το πρωτογενές προϊόν μπορεί να είναι μια μετοχή, ένα ξένο νόμισμα, ένα αγαθό (π.χ. πετρέλαιο), ένας χρηματιστηριακός δείκτης, ένα ομόλογο, ακόμα και ένα άλλο παράγωγο προϊόν. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε κάποια παράγωγα ([4]).

Ένα **προθεσμιακό συμβόλαιο** (forward contract) με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή παράδοσης K είναι μια συμφωνία για την αγορά ενός πρωτογενούς προϊόντος στον χρόνο T έναντι τιμήματος K. Ο αγοραστής λέμε ότι έχει θετική θέση ενώ ο πωλητής αρνητική θέση. Η αξία της συμφωνίας αυτής στην ωρίμανση εξαρτάται από την αξία S_T που θα έχει τότε το πρωτογενές προϊόν. Η απόδοση του προθεσμιακού συμβολαίου στην ωρίμανση για τον κάτοχο της θετικής θέσης είναι $S_T - K$ και μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

Ένα **ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς** (european call option) με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K δίνει στον κάτοχό του (θετική θέση) το δικαίωμα να αγοράσει από τον αντισυμβαλλόμενο (αρνητική θέση) το πρωτογενές προϊόν στον χρόνο T έναντι τιμήματος K. Ο λογικός επενδυτής με θετική θέση θα ασκήσει το δικαίωμα αγοράς μόνο όταν η τιμή S_T του πρωτογενούς προϊόντος στην ωρίμανση είναι μεγαλύτερη του K. Επομένως, η απόδοση για τον κάτοχο ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στην ωρίμανση είναι $(S_T - K)^+ = max\{S_T - K, 0\}$ και είναι πάντοτε μη αρνητική. Ο κάτοχος του δικαιώματος θα πρέπει να καταβάλει στον αντισυμβαλλόμενό του ένα αρχικό τίμημα προκειμένου να το αποκτήσει.

Ένα **αμερικανικό δικαίωμα αγοράς** (american call option) διαφέρει από το αντίστοιχο ευρωπαϊκό στο ότι μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι και την ωρίμανσή του.

Ένα **ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης** (european put option) με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K δίνει στον κάτοχό του (θετική θέση) το δικαίωμα να πουλήσει στον αντισυμβαλλόμενο (αρνητική θέση) το πρωτογενές προϊόν στον χρόνο T έναντι τιμήματος K. Ο λογικός επενδυτής με θετική θέση θα ασκήσει το δικαίωμα πώλησης μόνο όταν η τιμή S_T του πρωτογενούς προϊόντος στην ωρίμανση είναι μικρότερη του K. Επομένως, η απόδοση για τον κάτοχο ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης στην ωρίμανση είναι $(K - S_T)^+$ και είναι πάντοτε μη αρνητική. Ο κάτοχος του δικαιώματος θα πρέπει να καταβάλει στον αντισυμβαλλόμενό του ένα αρχικό τίμημα προκειμένου να το αποκτήσει.

Ένα **αμερικανικό δικαίωμα πώλησης** (american put option) διαφέρει από το αντίστοιχο ευρωπαϊκό στο ότι μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι και την ωρίμανσή του.

Ένα **συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης**, όπως και ένα προθεσμιακό συμβόλαιο είναι μια συμφωνία για την αγοραπωλησία καθορισμένης ποσότητας ενός προϊόντος, σε καθορισμένο χρόνο, έναντι καθορισμένου τιμήματος. Η βασικότερη διαφορά μεταξύ προθεσμιακών συμβολαίων και συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης είναι ότι, ενώ στα προθεσμιακά συμβόλαια το συμφωνηθέν τίμημα καταβάλλεται εξ' ολοκλήρου στην ωρίμανση, στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης το τίμημα καταβάλλεται σταδιακά, όσο το συμβόλαιο είναι σε ισχύ, και στην ωρίμανση το προϊόν πωλείται στην τιμή διαπραγμάτευσής του. Επίσης, τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι τυποποιημένα.

3.3 Η αρχή της μη επιτηδειότητας

Η **αρχή της μη επιτηδειότητας** αξιώνει ότι δε μπορεί να υπάρξει δυνατότητα κέρδους χωρίς την ανάληψη ρίσκου. Στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά αυτή η αρχή θεωρείται αξίωμα.

Συνήθως μια αγορά μοντελοποιείται από ένα χώρο πιθανότητας, τα σημεία του οποίου αντιπροσωπεύουν τα δυνατά σενάρια εξέλιξης της αγοράς. Οι τιμές των διαφόρων προϊόντων είναι στοχαστικές διαδικασίες, ορισμένες σε αυτόν το χώρο πιθανότητας. Η τιμολόγηση παραγώγων βασίζεται στην αρχή της μη επιτηδειότητας, αλλά εξαρτάται εν γένει και από τις λεπτομέρειες του υποδείγματος αγοράς που υιοθετείται.
Η ακόλουθη Πρόταση είναι άμεση συνέπεια της αρχής της μη επιτηδειότητας. Το αντίστροφο της παρακάτω Πρότασης δεν ισχύει.

Πρόταση 3.3.1.

1. *Αν τη στιγμή $T \geq 0$ ένα χαρτοφυλάκιο A έχει σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο μη αρνητική τιμή, τότε η αρχική του αξία πρέπει να είναι μη αρνητική. Συγκεκριμένα,*

$$V_T(A) \geq 0 \Rightarrow V_0(A) \geq 0.$$

2. *Αν τη στιγμή $T \geq 0$ η αξία ενός χαρτοφυλακίου A είναι σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο τουλάχιστον όση η αξία ενός χαρτοφυλακίου B, τότε η αρχική αξία του A πρέπει να είναι τουλάχιστον όση αυτή του B. Συγκεκριμένα,*

$$V_T(A) \geq V_T(B) \Rightarrow V_0(A) \geq V_0(B).$$

3. *Αν τη στιγμή $T \geq 0$ η αξία ενός χαρτοφυλακίου A ταυτίζεται με την αξία ενός χαρτοφυλακίου B σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο, τότε η αρχική αξία των A και B πρέπει να είναι η ίδια. Συγκεκριμένα,*

$$V_T(A) = V_T(B) \Rightarrow V_0(A) = V_0(B).$$

Παρατήρηση 3.3.1. *Εν γένει, ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από τίτλους, η αξία των οποίων στον χρόνο T δε μας είναι σήμερα γνωστή, αλλά εξαρτάται από το τι θα συμβεί στην αγορά μέχρι τη στιγμή T. Όταν μοντελοποιούνται τα δυνατά σενάρια εξέλιξης της αγοράς ως σημεία ενός χώρου πιθανότητας, η $V_T(A)$ θα είναι μια τυχαία μεταβλητή. Επομένως, όταν λέμε ότι σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο ισχύει $V_T(A) \geq 0$, εννοούμε ότι αυτή η τυχαία μεταβλητή είναι μη αρνητική με πιθανότητα 1.*

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση (3.3.1) μπορούμε να εξαγάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την αρχική αξία των παραγώγων.

Πρόταση 3.3.2. *Η αξία $F(S_0, T, K)$ ενός προθεσμιακού συμβολαίου με ωρίμανση T και τιμή παράδοσης K είναι:*

$$F(S_0, T, K) = S_0 - KB(0, T) = S_0 - Ke^{-rT}.$$

Απόδειξη. Η απόδοση ενός προθεσμιακού συμβολαίου στην ωρίμανση είναι $S_T - K$. Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο A που αποτελείται από το πρωτογενές προϊόν και αρνητική θέση σε ένα ομόλογο όψεως K και ωρίμανσης T. Θεωρούμε επίσης χαρτοφυλάκιο B που αποτελείται από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή παράδοσης K. Η αξία του χαρτοφυλακίου A στην ωρίμανση είναι $S_T - K$. Επομένως, είναι ίση με την αξία του B, ανεξάρτητα από την τιμή που μπορεί να έχει η S_T. Σύμφωνα με την αρχή της μη επιτηδειότητας τα δύο χαρτοφυλάκια πρέπει να έχουν την ίδια αρχική αξία. Η τρέχουσα αξία του A όμως είναι $S_0 - KB(0, T)$. □

Πρόταση 3.3.3. *Η αξία $c(S_0, T, K)$ ενός ευρωπαϊκου δικαιώματος αγοράς με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K ικανοποιεί τις ανισότητες:*

$$(S_0 - KB(0, T))^+ \leq c(S_0, T, K) \leq S_0.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε χαρτοφυλάκιο A το οποίο αποτελείται από ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K. Είδαμε ότι η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου στην ωρίμανση είναι $V_T(A) = (S_T - K)^+ \geq 0$. Έστω ότι η αρχική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου συμβολίζεται με $c(S_0, T, K)$. Από την Πρόταση (3.3.1) θα πρέπει $c(S_0, T, K) \geq 0$. Έστω τώρα χαρτοφυλάκιο B που αποτελείται από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο για την αγορά του πρωτογενούς προϊόντος με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή παράδοσης K. Η απόδοση του χαρτοφυλακίου B στην ωρίμανση είναι $V_T(B) = S_T - K \leq (S_T - K)^+ = V_T(A)$, ανεξάρτητα από την τιμή που μπορεί να έχει η S_T. Επομένως, η αρχική αξία του B δε μπορεί να υπερβαίνει την αρχική αξία του A. Άρα ισχύει $c(S_0, T, K) \geq S_0 - KB(0, T)$ και:

$$c(S_0, T, K) \geq max\{S_0 - KB(0, T), 0\} = (S_0 - KB(0, T))^+.$$

Έστω τώρα χαρτοφυλάκιο B' που περιλαμβάνει μόνο το πρωτογενές προϊόν. Η αξία του χαρτοφυλακίου B' στην ωρίμανση είναι S_T και είναι μεγαλύτερη από $(S_T - K)^+$. Από την Πρόταση (3.3.1) η αρχική αξία του B' είναι τουλάχιστον όση του δικαιώματος αγοράς. Άρα, $c(S_0, T, K) \leq S_0$. □

Πρόταση 3.3.4. *(Ισοτιμία ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης) Οι αρχικές αξίες $c(S_0, T, K)$ και $p(S_0, T, K)$ των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης συνδέονται με τη σχέση:*

$$F(S_0, T, K) = S_0 - KB(0, T) = c(S_0, T, K) - p(S_0, T, K).$$

Απόδειξη. Από την ταυτότητα $x = x^+ - (-x)^+$, η οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι:

$$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+, \ \forall S_T \geq 0.$$

Θεωρούμε χαρτοφυλάκιο A, το οποίο αποτελείται από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο, και χαρτοφυλάκιο B, το οποίο αποτελείται από ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και μια αρνητική θέση σε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης. Όλα τα παραπάνω παράγωγα έχουν χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K. Από την παραπάνω ισότητα οι αποδόσεις των δύο χαρτοφυλακίων στην ωρίμανση συμπίπτουν. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της μη επιτηδειότητας οι αρχικές τους αξίες πρέπει να είναι ίσες. □

Στα παραπάνω έχουμε υποθέσει ότι η κατοχή του πρωτογενούς προϊόντος δε συνεπάγεται κάποιο κόστος ή όφελος. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι σε κάποιες περιπτώσεις αυτό δεν είναι ακριβές. Για παράδειγμα, μια μετοχή μπορεί να πληρώσει μέρισμα στους κατόχους της κάποια στιγμή πριν την ωρίμανση ή ένα αγαθό μπορεί να επιφέρει κάποιο κόστος αποθήκευσης.

3.4 Το διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου

Παραπάνω αναφέραμε ότι ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς ή πώλησης θα πρέπει να καταβάλει στον αντισυμβαλλόμενό του ένα αρχικό τίμημα προκειμένου να το αποκτήσει. Το αν υπάρχει κάποιο τίμημα που μπορεί να θεωρηθεί δίκαιο και το ποιο ακριβώς είναι αυτό είναι ένα μη τετριμμένο πρόβλημα ([4]). Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών παραγώγων.

Κάθε ρεαλιστικό υπόδειγμα για την τιμολόγηση παραγώγων θα πρέπει να περιλαμβάνει την τυχαιότητα ως προς τη χρονική εξέλιξη της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος και να λαμβάνει υπ' όψιν τη μεταβολή της αξίας του χρήματος με το χρόνο. Το **διωνυμικό υπόδειγμα** (binomial model) μιας περιόδου είναι ένα διακριτό υπόδειγμα και έχει αυτά τα χαρακτηριστικά στην απλούστερη δυνατή μορφή ([4]).

Έστω ότι η αγορά αποτελείται μόνο από το πρωτογενές προϊόν και ένα ομόλογο. Η τρέχουσα τιμή του προϊόντος είναι $S_0 = s_0$ και έστω ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή T. Η S_T θα είναι μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές: την τιμή s_1 με πιθανότητα p $(0 < p < 1)$ ή την τιμή s_2 με πιθανότητα $1 - p$. Υποθέτουμε ότι $s_1 > s_2$. Τότε από την αρχή της μη επιτηδειότητας έχουμε ότι:

$$s_2 < s_0 e^{rT} < s_1.$$

Η αρχική αξία του ομολόγου θα είναι e^{-rT}, ενώ η αξία του στον χρόνο T θα είναι 1.

Η απόδοση $f(S_T)$ ενός ευρωπαϊκού παραγώγου επί αυτού του προϊόντος με χρόνο ωρίμανσης T είναι κι αυτή μια τυχαία μεταβλητή, η οποία μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές: $f_1 = f(s_1)$ με πιθανότητα p και $f_2 = f(s_2)$ με πιθανότητα $1-p$. Σκοπός μας είναι να τιμολογήσουμε ένα τέτοιο παράγωγο. Μια απλοϊκή προσέγγιση θα ήταν να το τιμολογήσουμε όσο είναι η σημερινή αξία της αναμενόμενης απόδοσής του στην ωρίμανση. Δηλαδή:

$$A_0 = e^{-rT}\mathbf{E}_p[f(S_T)] := e^{-rT}(pf_1 + (1-p)f_2).$$

Μια τέτοια τιμολόγηση όμως μπορεί να επιτρέψει στρατηγικές επιτηδειότητας. Για παράδειγμα, έστω $s_0 = \$80$, $s_1 = \$100$, $s_2 = \$70$, $p = \frac{1}{2}$, $r = 0$. Η αξία που θα δίνει ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού σε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς στην τιμή $\$90$ (με απόδοση $f_1 = \$(100-90)^+ = \$10$, $f_2 = \$(70-90)^+ = \$0$) είναι $A_0 = \frac{1}{2}\$10 + \frac{1}{2}0 = \$5$. Αν η τιμή διαπραγμάτευσης αυτού του παραγώγου στην αγορά ήταν $\$5$, τότε θα μπορούσαμε να φτιάξουμε μια στρατηγική επιτηδειότητας με τον εξής τρόπο: φτιάχνουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από αρνητική θέση σε 3 παράγωγα, θετική θέση στο προϊόν και δανεισμό (αρνητική θέση στο ομόλογο) $\$65$. Η αρχική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου είναι: $-3 \times \$5 + \$80 - \$65 = 0$. Αν στο χρόνο T το προϊόν έχει πάρει την τιμή $s_1 = \$100$, η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι: $-3 \times \$10 + \$100 - \$65 = \$5$. Αν πάλι το προϊόν πάρει την τιμή $s_2 = \$70$, τότε η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι: $-3 \times 0 + \$70 - \$65 = \$5$. Έχουμε δηλαδή κέρδος $\$5$ χωρίς κίνδυνο.

Για να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο με απόδοση f κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από ϕ μέρη του πρωτογενούς προϊόντος και ψ ομόλογα, έτσι ώστε η αξία του χαρτοφυλακίου στον χρόνο T να ταυτίζεται με την αξία του παραγώγου, ανεξάρτητα από την τιμή της τυχαίας μεταβλητής S_T. Δηλαδή:

$$\phi S_T + \psi = f(S_T).$$

Στο διωνυμικό υπόδειγμα αυτό ισοδυναμεί με το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \phi s_1 + \psi &= f_1 \\ \phi s_2 + \psi &= f_2. \end{aligned}$$

Για κάθε (f_1, f_2) η λύση του συστήματος είναι η εξής:

$$\phi = \frac{f_1 - f_2}{s_1 - s_2}, \quad \psi = \frac{s_1 f_2 - s_2 f_1}{s_1 - s_2}.$$

Αφού το χαρτοφυλάκιο έχει την ίδια αξία με το παράγωγο στο χρόνο T, από την αρχή της μη επιτηδειότητας θα πρέπει να έχουν και την ίδια αρχική αξία. Επομένως, η θεωρητικά δίκαιη τιμή του παραγώγου είναι:

$$\begin{aligned} f_0 &= \phi s_0 + \psi e^{-rT} \\ &= e^{-rT}(q f_1 + (1-q) f_2) \\ &= e^{-rT}\mathbf{E}_q[f(S_T)], \end{aligned}$$

όπου $q = \frac{e^{rT}s_0 - s_2}{s_1 - s_2}$. Άμεση συνέπεια της $s_2 < s_0 e^{rT} < s_1$ είναι ότι $0 < q < 1$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι στα πλαίσια του διωνυμικού υποδείγματος κάθε παράγωγο μπορεί να τιμολογηθεί βάσει της αρχής μη επιτηδειότητας. Όταν συμβαίνει αυτό, λέμε ότι η αγορά που περιγράφεται από το υπόδειγμα που χρησιμοποιούμε είναι **πλήρης**.

Αν η τιμή διαπραγμάτευσης F_0 ενός παραγώγου είναι διαφορετική από τη θεωρητικά δίκαιη τιμή f_0, τότε μπορεί να κατασκευαστεί μια στρατηγική επιτηδειότητας. Συνθέτουμε ένα χαρτοφυλάκιο X, το οποίο αποτελείται από το παράγωγο, αρνητική θέση στο χαρτοφυλάκιο που το αναπαράγει και μετρητά $f_0 - F_0$. Η αρχική τιμή του X είναι μηδενική. Η αξία του X στο χρόνο T θα είναι:

$$V_T(X) = f(S_T) - f(S_T) + (f_0 - F_0)e^{rT} = (f_0 - F_0)e^{rT}.$$

Παίρνοντας θετική ή αρνητική θέση στο X, ανάλογα αν η f_0 είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της F_0, δημιουργούμε μια στρατηγική επιτηδειότητας.

Το χαρακτηριστικό του χαρτοφυλακίου X είναι ότι, αν και περιέχει το παράγωγο, η αξία του δεν εξαρτάται από την έκβαση της τιμής του προϊόντος με κίνδυνο. Μια τέτοια στρατηγική ονομάζεται **αντιστάθμιση κινδύνου** (hedging) και το χαρτοφυλάκιο που την υλοποιεί **αντισταθμιστικό** (replicating portfolio).

3.5 Το διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων

Το διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων είναι ένα διακριτό, αλλά περισσότερο ρεαλιστικό υπόδειγμα αγοράς, στο οποίο το χρονικό διάστημα αναφοράς $[0, T]$ διαμερίζεται σε μικρότερα διαστήματα, σε καθένα από τα οποία η δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος ακολουθεί την απλή δυναμική του διωνυμικού υποδείγματος μιας περιόδου. Με αυτόν τον τρόπο, καθώς η λεπτότητα της διαμέρισης μικραίνει, οι τροχιές της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος πλησιάζουν περισσότερο στην ιδέα που έχουμε για το πώς μεταβάλλονται π.χ. οι τιμές των μετοχών, ενώ ταυτόχρονα διατηρούμε την ικανότητα να μελετήσουμε αναλυτικά το μοντέλο ([4]).

Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα η αγορά αποτελείται από ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο και ένα με κίνδυνο. Θεωρούμε ότι το προϊόν με κίνδυνο είναι το πρωτογενές προϊόν ενός παραγώγου με χρόνο ωρίμανσης T. Το χρονικό διάστημα $[0, T]$ διαμερίζεται από τους χρόνους:

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = T,$$

σε N μικρότερα διαστήματα, τα οποία υποθέτουμε ότι είναι ίσα. Επομένως, κάθε τέτοιο χρονικό διάστημα έχει εύρος $h = T/N$, ενώ $t_k = kh,\ k = 0, 1, ..., N$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η σημερινή αξία του άνευ κινδύνου προϊόντος είναι $B_0 = 1$, ενώ μεταβάλλεται στο χρόνο με ένα σταθερό ρυθμό, δηλαδή $B_{t_{k+1}}/B_{t_k} = \Lambda$. Επίσης, υποθέτουμε ότι το προϊόν χωρίς κίνδυνο είναι ένας λογαριασμός με συνεχή ανατοκισμό και σταθερό επιτόκιο r. Επομένως, $\Lambda = e^{rh}$.

Η σημερινή αξία του πρωτογενούς προϊόντος είναι $S_0 > 0$, ενώ η εξέλιξή της στο χρόνο είναι στοχαστική. Αν τη χρονική στιγμή t_k η αξία του πρωτογενούς προϊόντος είναι S_{t_k}, τότε:

$$S_{t_{k+1}} = S_{t_k} \xi_{k+1},$$

όπου η $\{\xi_k\}_{k \in \{1,2,...,N\}}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (δηλαδή είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής). Η κατανομή των ξ_k είναι η εξής:

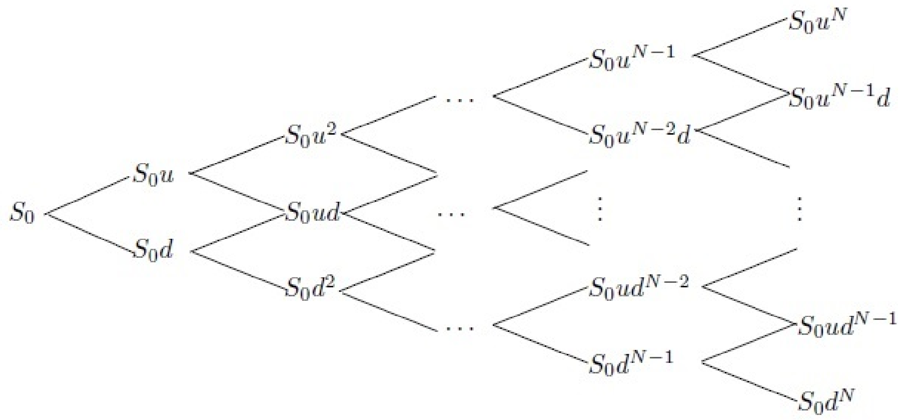
$$\xi_k = \begin{cases} u, & \text{με πιθανότητα } p \\ d, & \text{με πιθανότητα } 1 - p. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε διάστημα η δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος είναι ίδια με αυτή του διωνυμικού υποδείγματος μιας περιόδου, όπου $s_0 = S_{t_k}$, $s_1 = S_{t_k} u$ και $s_2 = S_{t_k} d$. Όπως συμβαίνει και στο διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου, θα πρέπει τα u, d να ικανοποιούν τον περιορισμό:

$$d < e^{rh} < u,$$

ώστε να μην παρουσιάζονται ευκαιρίες επιτηδειότητας. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $d > 0$, ώστε η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος να είναι πάντα αυστηρά θετική. Αυτό το μοντέλο για τη δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος ονομάζεται **διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων** (multiperiod binomial model) ή υπόδειγμα των Cox, Ross & Rubinstein (CRR).

Η δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος στο υπόδειγμα αυτό μπορεί να παρασταθεί διαγραμματικά με το ακόλουθο ανασυνδυασμένο δένδρο ([4]):



Σε κάθε κόμβο του δένδρου το ενδεχόμενο να μετακινηθούμε προς τα πάνω έχει πιθανότητα p. Επίσης, ισχύει:

$$S_{t_k} = S_0 \prod_{j=1}^{k} \xi_j.$$

Οι πιθανές τροχιές της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος είναι 2^N, όσοι είναι και οι συνδυασμοί τιμών που μπορούν να πάρουν οι τυχαίες μεταβλητές $\{\xi_k\}_{k\in\{1,\ldots,N\}}$.

Η αφετηρία της σύγχρονης θεωρίας της Μαθηματικής Χρηματοοικονομίας είναι να θεωρήσουμε (όπως και στα υποδείγματα μιας περιόδου) το μοντέλο μας σαν ένα χώρο πιθανότητας Ω, κάθε σημείο του οποίου αντιστοιχεί σε ένα από τα πιθανά σενάρια εξέλιξης της αγοράς. Επομένως, στο διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων κάθε σημείο του Ω είναι ένα μονοπάτι N βημάτων, στο παραπάνω δένδρο, που ξεκινά από την S_0 ([4]).

Οι ξ_k είναι τυχαίες μεταβλητές από τον Ω στο σύνολο $\{u, d\}$, άρα η αξία S_{t_k} του προϊόντος με κίνδυνο τη χρονική στιγμή t_k είναι κι αυτή μια τυχαία μεταβλητή. Επομένως, η αξία του προϊόντος με κίνδυνο είναι μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου ορισμένη στον Ω. Επιπλέον, το μοντέλο το οποίο μελετάμε καθορίζει και την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή ξ_k να πάρει την τιμή u ή την τιμή d. Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος πιθανότητας Ω έχει εφοδιαστεί με ένα μέτρο πιθανότητας **P**. Αν στον Ω θεωρήσουμε ένα άλλο μέτρο πιθανότητας, οι ίδιες τυχαίες μεταβλητές θα έχουν διαφορετική κατανομή.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε μια διήθηση, με σκοπό να έχουμε μια έννοια η οποία θα προσδίδει την κατεύθυνση του χρόνου. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_k$ τη διαμέριση του Ω που επάγει η συνελεχθείσα από την αξία του πρωτογενούς προϊόντος πληροφορία μέχρι τη χρονική στιγμή t_k. Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 &= \{\Omega\},\\ \mathcal{F}_1 &= \{K_u, K_d\},\\ \mathcal{F}_2 &= \{K_{uu}, K_{ud}, K_{du}, K_{dd}\},\end{aligned}$$

κ.τ.λ, όπου K_u (αντίστοιχα K_d) είναι το ενδεχόμενο το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία του Ω (μονοπάτια) για τα οποία ισχύει $\xi_1 = u$ (αντίστοιχα $\xi_1 = d$). Επίσης, K_{ud} είναι το ενδεχόμενο το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία του Ω (μονοπάτια) για τα οποία ισχύει $\xi_1 = u$ και $\xi_2 = d$. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{F}_k$ παριστάνει μια δυνατή εξέλιξη της αγοράς μέχρι τη στιγμή t_k ([4]).

Η απόδοση ενός παραγώγου με ωρίμανση T είναι μια τυχαία μεταβλητή X ορισμένη στον Ω. Κάθε $\omega \in \Omega$ αντιστοιχεί σε ένα πιθανό σενάριο εξέλιξης της αγοράς και η $X(\omega)$ είναι η απόδοση του παραγώγου σε αυτό το σενάριο. Αν το παράγωγο είναι ευρωπαϊκού τύπου, η απόδοσή του εξαρτάται μόνο από την τιμή του πρωτογενούς προϊόντος στην ωρίμανση. Σε αυτήν την περίπτωση, θα ισχύει:

$$X(\omega) = f(S_T(\omega)).$$

Για παράδειγμα, ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K έχει απόδοση $X(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+$.

Ορισμός 3.5.1. *Ένα χαρτοφυλάκιο που εξελίσσεται στο χρόνο με μια σειρά από συναλλαγές, οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την πληροφορία που είναι διαθέσιμη ως τη στιγμή που συντελούνται και δε μεταβάλουν την αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή που συντελούνται, ονομάζεται* ***αυτοχρηματοδοτούμενο*** *(self-financing).*

Προκειμένου να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο, προσπαθούμε να αναπαράγουμε την απόδοσή του, χρησιμοποιώντας ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από τα δύο προϊόντα της αγοράς. Εν γένει, δεν είναι δυνατό να συνθέσουμε ένα χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή $t = 0$, το οποίο να έχει την ίδια απόδοση με το παράγωγο τη στιγμή T. Στο μοντέλο μας όμως έχει νόημα να επιτρέψουμε τις συναλλαγές στους χρόνους $t_0, t_1, ..., t_{N-1}$. Μπορούμε να ξεκινήσουμε από ένα χαρτοφυλάκιο (ϕ_0, ψ_0), να αλλάξουμε τη θέση μας με ένα αυτοχρηματοδοτούμενο τρόπο τη στιγμή t_1 σε (ϕ_1, ψ_1) ανάλογα με την τιμή της S_{t_1}, τη στιγμή t_2 να αλλάξουμε και πάλι τη θέση μας σε (ϕ_2, ψ_2) ανάλογα με την πληροφορία που έχουμε διαθέσιμη ως τότε (δηλαδή τις τιμές των S_{t_1}, S_{t_2}) κ.λ.π.

Ορισμός 3.5.2. *Μια* ***αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική*** *θα είναι μια ακολουθία χαρτοφυλακίων $\{(\phi_k, \psi_k)\}_k$, τέτοια ώστε για κάθε $k = 0, 1, ..., N-1$ να ισχύουν:*

1. *Οι ϕ_k, ψ_k είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές.*

2. $\phi_k S_{t_{k+1}} + \psi_k B_{t_{k+1}} = \phi_{k+1} S_{t_{k+1}} + \psi_{k+1} B_{t_{k+1}}$.

Η πρώτη από τις δύο παραπάνω συνθήκες σημαίνει ότι η θέση που λαμβάνουμε τη χρονική στιγμή t_k εξαρτάται μόνο από τη γνώση που έχουμε για την εξέλιξη της αγοράς μέχρι τότε. Η δεύτερη συνθήκη σημαίνει ότι η αλλαγή της θέσης που κάνουμε τη χρονική στιγμή t_{k+1} είναι αυτοχρηματοδοτούμενη. Το αριστερό μέλος της σχέσης είναι η αξία του χαρτοφυλακίου (ϕ_k, ψ_k) αμέσως πριν την αλλαγή θέσης, ενώ το δεξί μέλος της είναι η αξία του χαρτοφυλακίου (ϕ_{k+1}, ψ_{k+1}) που θέλουμε να συνθέσουμε τη χρονική στιγμή t_{k+1}.

Έστω ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο, το οποίο έχει δεδομένη απόδοση τη στιγμή T ίση με:

$$V_T = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, ..., S_{t_N}).$$

Η απόδοση αυτή εξαρτάται από όλη την τροχιά της τιμής του πρωτογενούς προϊόντος. Θα κατασκευάσουμε μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική που αναπαράγει την παραπάνω απόδοση στην ωρίμανση, δηλαδή:

$$\phi_{N-1} S_T + \psi_{N-1} B_T = V_T.$$

Για να ισχύει η παραπάνω, τόσο στο ενδεχόμενο $\{\xi_N = u\}$ όσο και στο $\{\xi_N = d\}$, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω γραμμικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
\phi_{N-1} S_{t_{N-1}} u + \psi_{N-1} B_{t_N} &= U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, ..., S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}} u), \\
\phi_{N-1} S_{t_{N-1}} d + \psi_{N-1} B_{t_N} &= U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, ..., S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}} d),
\end{aligned}$$

από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τις (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}). Ορίζουμε:

$$
\begin{aligned}
V_N^{\uparrow} &= U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, ..., S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}}u),\\
V_N^{\downarrow} &= U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, ..., S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}}d).
\end{aligned}
$$

Τότε έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\phi_{N-1} &= \frac{V_N^{\uparrow} - V_N^{\downarrow}}{S_{t_{N-1}}(u-d)},\\
\psi_{N-1} &= \frac{V_N^{\downarrow} \times u - V_N^{\uparrow} \times d}{B_{t_N}(u-d)}.
\end{aligned}
$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι οι ϕ_{N-1}, ψ_{N-1} είναι συναρτήσεις των $S_{t_0}, S_{t_1}, ..., S_{t_{N-1}}$, είναι δηλαδή $\mathcal{F}_{N-1}$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές. Για την αξία του παραγώγου τη στιγμή t_{N-1} έχουμε:

$$
V_{t_{N-1}} = U_{t_{N-1}}(S_{t_0}, S_{t_1}, ..., S_{t_{N-1}}) = \phi_{N-1} S_{t_{N-1}} + \psi_{N-1} B_{t_{N-1}}.
$$

Αντικαθιστώντας τα ϕ_{N-1}, ψ_{N-1} προκύπτει:

$$
V_{t_{N-1}} = e^{-rh}(qV_N^{\uparrow} + (1-q)V_N^{\downarrow}),
$$

όπου

$$
q = \frac{e^{rh} - d}{u - d}.
$$

Μπορούμε να επαναλάβουμε τα παραπάνω βήματα μέχρι να φτάσουμε στο χρόνο t_0. Ο **αναδρομικός αλγόριθμος τιμολόγησης** είναι ο εξής:

- Ορίζουμε $V_{t_N} = V_T = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, ..., S_{t_N})$.
- Για $k = N, N-1, N-2, ..., 1$, έχοντας ορίσει την $V_{t_k} = U_{t_k}(S_{t_0}, S_{t_1}, ..., S_{t_k})$,

    1. βρίσκουμε χαρτοφυλάκιο (ϕ_{k-1}, ψ_{k-1}) ώστε οι ϕ_{k-1}, ψ_{k-1} να είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές και

$$
\phi_{k-1} S_{t_k} + \psi_{k-1} B_{t_k} = V_{t_k},
$$

2. ορίζουμε την αξία του παραγώγου τη στιγμή t_{k-1} ως την αξία του χαρτοφυλακίου (ϕ_{k-1}, ψ_{k-1})

$$\begin{aligned} V_{t_{k-1}} = U_{t_{k-1}}(S_{t_0}, S_{t_1}, ..., S_{t_{k-1}}) &= \phi_{k-1} S_{t_{k-1}} + \psi_{k-1} B_{t_{k-1}} \\ &= e^{-rh}(q V_k^{\uparrow} + (1-q) V_k^{\downarrow}). \end{aligned}$$

Από την κατασκευή του το χαρτοφυλάκιο (ϕ_{j-1}, ψ_{j-1}) έχει τη στιγμή t_j αξία ίση με αυτή του χαρτοφυλακίου (ϕ_j, ψ_j). Επομένως, η αλλαγή θέσης από (ϕ_{j-1}, ψ_{j-1}) σε (ϕ_j, ψ_j) είναι αυτοχρηματοδοτούμενη. Επομένως, η στρατηγική που κατασκευάστηκε είναι αυτοχρηματοδοτούμενη και αναπαράγει την απόδοση του παραγώγου στην ωρίμανση. Προκειμένου να μην υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας θα πρέπει:

$$V_{t_0} = \phi_0 S_{t_0} + \psi_0.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι η υποκειμενική πιθανότητα που το μοντέλο αποδίδει σε κάθε τροχιά δεν υπεισέρχεται στον προσδιορισμό της αρχικής αξίας του παραγώγου.

3.6 Μέτρα martingale και τιμολόγηση παραγώγων

Ορισμός 3.6.1. *Έστω ότι οι $(X_{t_k})_{\{k=0,1,...,N\}}$ και $(Y_{t_k})_{\{k=0,1,...,N\}}$ είναι στοχαστικές διαδικασίες, τέτοιες ώστε οι X_{t_k}, Y_{t_k} να είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες για κάθε $k = 0, 1, ..., N-1$. Η στοχαστική διαδικασία $((Y \cdot X)_{t_k})_{\{k=0,1,...,N\}}$ που ορίζεται ως εξής:*

$$(Y \cdot X)_{t_0} = 0 \ \textit{και} \ (Y \cdot X)_{t_k} := \sum_{j=0}^{k-1} Y_{t_j}(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}), \ k = 1, 2, ..., N,$$

*ονομάζεται **μετασχηματισμός martingale** και η $(Y \cdot X)_{t_k}$ είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη.*

Θεώρημα 3.6.1. *Αν η διαδικασία X είναι martingale, τότε και η $(Y \cdot X)$ είναι martingale.*

Έστω ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο $(\phi_k, \psi_k)_{k=0,1,...,N}$ με αξία στους χρόνους t_k, $k = 0, 1, ..., N$:

$$V_{t_k} = \phi_k S_{t_k} + \psi_k B_{t_k}.$$

Για $k \leq N-1$ έχουμε:

$$\frac{V_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{V_{t_k}}{B_{t_k}} = \phi_{k+1}\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \phi_k\frac{S_{t_k}}{B_{t_k}} + \psi_{k+1} - \psi_k. \tag{3.1}$$

Από τη συνθήκη αυτοχρηματοδότησης έχουμε ότι:

$$\phi_k S_{t_{k+1}} + \psi_k B_{t_{k+1}} = \phi_{k+1} S_{t_{k+1}} + \psi_{k+1} B_{t_{k+1}}.$$

Διαιρώντας τα δύο μέλη με $B_{t_{k+1}}$ προκύπτει το εξής:

$$\phi_k\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \phi_{k+1}\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} = \psi_{k+1} - \psi_k.$$

Επομένως, η σχέση (3.1) ξαναγράφεται ως εξής:

$$\frac{V_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{V_{t_k}}{B_{t_k}} = \phi_k(\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}}).$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις για $k = 0, 1, ..., N-1$ με $n \in \{1, 2, ..., N\}$ έχουμε:

$$\frac{V_n}{B_{t_n}} = V_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}}). \tag{3.2}$$

Επομένως, η $e^{-rt_k}V_{t_k} - V_0$ είναι ένας μετασχηματισμός martingale.

Ορισμός 3.6.2. *Ένα μέτρο πιθανότητας στον χώρο των τροχιών του πρωτογενούς προϊόντος ως προς το οποίο η προεξοφλημένη αξία του πρωτογενούς προϊόντος* $e^{-rt}S_t$ *είναι martingale ονομάζεται* ***αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας*** *ή* ***μέτρο martingale***.

Θεώρημα 3.6.2. *Αν το* $\boldsymbol{Q}$ *είναι μέτρο martingale στον* Ω*, τότε η προεξοφλημένη αξία κάθε αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου* $e^{-rt_k}V_{t_k}$ *είναι* $(\boldsymbol{Q}, \mathcal{F}_k)$*-martingale.*

Θεώρημα 3.6.3. *Αν το* $\boldsymbol{Q}$ *είναι μέτρο martingale στον* Ω*, τότε η παρούσα αξία ενός παραγώγου με απόδοση στην ωρίμανση* U_T *δίνεται από τη σχέση:*

$$U_0 = e^{-rT}\boldsymbol{E_Q}[U_T]. \tag{3.3}$$

Συνέπεια του Θεωρήματος (3.6.3) είναι ότι, αν μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο martingale $\mathbf{Q}$ στον Ω, τότε δεν είναι απαραίτητο να τρέξουμε έναν αναδρομικό αλγόριθμο για να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο. Η σημερινή αξία κάθε παραγώγου είναι η προεξοφλημένη αναμενόμενη (ως προς $\mathbf{Q}$) απόδοσή του στην ωρίμανση. Επίσης, η (3.3) υπολογίζει την παρούσα αξία ενός παραγώγου χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε το χαρτοφυλάκιο που αντισταθμίζει το παράγωγο ([4]).

Για να βρούμε ένα μέτρο martingale $\mathbf{Q}$ στο χώρο Ω των μονοπατιών του διωνυμικού υποδείγματος πολλών περιόδων, αρχικά ορίζουμε για κάθε $k = 1, 2, ..., N$ την τυχαία μεταβλητή $\xi_k = \frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}$. Στο διωνυμικό υπόδειγμα αυτές οι τυχαίες μεταβλητές μπορούν να πάρουν είτε την τιμή u είτε την τιμή d. Για οποιοδήποτε μέτρο πιθανότητας $\mathbf{Q}$ στον Ω έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] &= S_{t_k}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\
&= S_{t_k}(u\mathbf{Q}(\xi_{k+1} = u|\mathcal{F}_k) + d\mathbf{Q}(\xi_{k+1} = d|\mathcal{F}_k)) \\
&= S_{t_k}(d + (u - d)\mathbf{Q}(\xi_{k+1} = u|\mathcal{F}_k)).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[e^{-rt_{k+1}}S_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] = e^{-rt_k}S_{t_k} \times e^{-rh}(d + (u - d)\mathbf{Q}(\xi_{k+1} = u|\mathcal{F}_k)).$$

Άρα το $\mathbf{Q}$ είναι μέτρο martingale αν και μόνο αν:

$$\mathbf{Q}(\xi_{k+1} = u|\mathcal{F}_k) = \frac{e^{rh} - d}{u - d} = q, \;\; \forall k = 0, 1, ..., N - 1. \tag{3.4}$$

Από την υπόθεση $d < e^{rh} < u$, προκύπτει ότι $0 < q < 1$. Επίσης, η ιδιότητα (3.4) επιβάλλει την $\mathbf{Q}$-πιθανότητα κάθε τροχιάς, επομένως το μέτρο $\mathbf{Q}$ που κατασκευάστηκε είναι το μοναδικό μέτρο martingale στον Ω. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι το μέτρο $\mathbf{Q}$ δεν εξαρτάται από την παράμετρο p του μοντέλου ([4]).

3.7 Το όριο κλίμακας του διωνυμικού υποδείγματος

Έστω ένα διωνυμικό υπόδειγμα N περιόδων για τη δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος στο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Η κάθε περίοδος του μοντέλου αντιστοιχεί σε χρονική διάρκεια $h = T/N$. Επίσης, αφού η παράμετρος p δεν υπεισέρχεται στην τιμολόγηση παραγώγων, θεωρούμε $p = 1/2$. Όταν το N είναι μεγάλο, το h είναι μικρό, επομένως επιλέγουμε παραμέτρους u, d του διωνυμικού υποδείγματος πολύ κοντά στο 1:

$$u = u(h) = e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}} \text{ και } d = d(h) = e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}},$$

όπου μ, σ είναι θετικές παράμετροι. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι στην αγορά είναι διαθέσιμο και ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο με επιτόκιο r. Παρατηρούμε ότι, όταν το h είναι κατάλληλα μικρό, όταν δηλαδή το πλήθος N των περιόδων είναι κατάλληλα μεγάλο, οι περιορισμοί που επιβάλλει η αρχή της μη επιτηδειότητας,

$$e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}} < e^{rh} < e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}},$$

ικανοποιούνται για οποιαδήποτε επιλογή των μ, σ, r ([4]).

Για την αξία του πρωτογενούς προϊόντος κατά τις χρονικές στιγμές $0 = t_0, t_1, ..., t_N$, με $t_k = kh$, έχουμε ότι:

$$S_{t_k} = S_0 \prod_{i=1}^{k} \xi_i, \ k = 1, 2, ..., N,$$

όπου $(\xi_k)_{\{k=0,1,...,N\}}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες παίρνουν είτε την τιμή u είτε την τιμή d, καθεμία με πιθανότητα $1/2$. Η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$E_{t_k} := \log(\frac{S_{t_k}}{S_0}) = \sum_{i=1}^{k} \log \xi_i = \sum_{i=1}^{k} (\mu h + \sigma\sqrt{h} J_i) = \mu t_k + \sigma\sqrt{h} \sum_{i=1}^{k} J_i, \tag{3.5}$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές $(J_k)_{\{k=0,1,...,N\}}$ είναι ανεξάρτητες και παίρνουν τις τιμές ± 1 με πιθανότητα $1/2$. Επομένως οι $(J_k)_{\{k=0,1,...,N\}}$ έχουν μέση τιμή ίση με μηδέν και διασπορά ίση με ένα.

Για να εξετάσουμε την οριακή συμπεριφορά της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος, καθώς $N \to \infty$, επεκτείνουμε τον ορισμό της για κάθε $t \in [0, T]$ με γραμμική παρεμβολή των E_{t_k} της σχέσης (3.5). Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε κάποια χρονική στιγμή $t \in [0, T]$, αυτή θα βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές φάσεις t_k, t_{k+1} του διακριτού διωνυμικού υποδείγματος με N περιόδους,

$$t_k \leq t < t_{k+1} \Leftrightarrow kh \leq t < (k+1)h, \text{ για } k = [\frac{tN}{T}] = [\frac{t}{h}].$$

Ορίζουμε:

$$E_t^{(h)} = E_{t_k} + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}(E_{t_{k+1}} - E_{t_k})$$

και από την (3.5) έχουμε:

$$E_t^{(h)} = \mu t + \sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{k} J_i + \frac{\sigma(t - t_k)}{\sqrt{h}} J_{k+1}, \; kh \leq t < (k+1)h. \tag{3.6}$$

Επεκτείνουμε την αξία του πρωτογενούς προϊόντος για κάθε $t \in [0, T]$ ως:

$$S_t^{(h)} = S_0 e^{E_t^{(h)}}.$$

Προκειμένου να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $S_t^{(h)}$, καθώς $N \to \infty$ ($h \to 0$), θα χρειαστούμε τους παρακάτω Ορισμούς και τα παρακάτω Λήμματα.

Ορισμός 3.7.1. *Έστω $\mu, (\mu_n)_{n\geq 1}$ μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η $(\mu_n)_{n\geq 1}$ **συγκλίνει ασθενώς** στο μ αν:*

$$\mu_n((-\infty, x]) \to \mu((-\infty, x]),$$

καθώς $n \to \infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\mu(\{x\}) = 0$.

Ορισμός 3.7.2. *Έστω $X, (X_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η $(X_n)_{n\geq 1}$ **συγκλίνει κατά κατανομή** στη X και γράφουμε $X_n \xrightarrow{d} X$ αν η ακολουθία κατανομών $(\boldsymbol{P}^{X_n})_{n\geq 1}$ των X_n συγκλίνει ασθενώς στην κατανομή $\boldsymbol{P}^X$ της X.*

Λήμμα 3.7.1. *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_N)_{N\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X ($X_N \xrightarrow{d} X$) αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη και συνεχή συνάρτηση f έχουμε:*

$$\boldsymbol{E}[f(X_N)] \to \boldsymbol{E}[f(X)]. \tag{3.7}$$

Επιπλέον, αν $X_n \xrightarrow{d} X$ και η συνάρτηση f είναι φραγμένη και συνεχής έξω από ένα σύνολο A, τότε η (3.7) ισχύει με την προϋπόθεση $\boldsymbol{P}(X \in A) = 0$.

Λήμμα 3.7.2. *Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_N)_{N\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $X_N \xrightarrow{d} X$ για κάποια τυχαία μεταβλητή X. Αν η $(Y_N)_{N\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, τέτοια ώστε για κάποια σταθερά $\beta \in \mathbb{R}$ έχουμε:*

$$\boldsymbol{P}(|Y_N - \beta| > \epsilon) \to 0, \ \forall \epsilon > 0$$

και $(\alpha_N)_{N\in\mathbb{N}}$ είναι μια πραγματική ακολουθία με $\lim \alpha_N = \alpha$, τότε:

$$\alpha_N X_N + Y_N \xrightarrow{d} \alpha X + \beta.$$

Λήμμα 3.7.3. *Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_N)_{N\in\mathbb{N}}$ και g μια συνεχής συνάρτηση. Τότε:*

$$X_N \xrightarrow{d} X \Rightarrow g(X_N) \xrightarrow{d} g(X).$$

Θεώρημα 3.7.1. *(Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\boldsymbol{E}[X_1] = \mu$ και $Var(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Θέτουμε $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε:*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} Z, \ \text{όπου} \ Z \sim N(0,1).$$

Επιστρέφοντας στη σχέση (3.6), εφόσον $t - t_k \leq t_{k+1} - t_k \leq h$, έχουμε ότι:

$$\sup_{0\leq t\leq T} \left|\frac{\sigma(t-t_k)}{\sqrt{h}} J_{k+1}\right| \leq \sigma\sqrt{h} \xrightarrow{N\to\infty} 0. \tag{3.8}$$

Από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, για κάθε $t > 0$ έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} J_i \xrightarrow{d} Z, \ \text{όπου} \ Z \sim N(0,1) \text{ και } k = [\frac{t}{h}] \text{ με } h \to 0. \tag{3.9}$$

Για κάθε $t \in [0, T]$, από το Λήμμα (3.7.2) έχουμε:

$$E_t^{(h)} \xrightarrow{d} \mu t + \sigma\sqrt{t}Z, \ \text{όπου } Z \sim N(0,1)$$

και από το Λήμμα (3.7.3):

$$S_t^{(h)} \xrightarrow{d} S_0 e^{\mu t+\sigma\sqrt{t}Z}.$$

Από το Λήμμα (3.7.1) έχουμε ότι για κάθε φραγμένη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$\mathbf{E}[f(S_t^{(h)})] \xrightarrow{h\to 0} \mathbf{E}[f(S_0 e^{\mu t+\sigma\sqrt{t}Z})].$$

Στη σχέση (3.9) μπορούμε, αντί του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, να χρησιμοποιήσουμε την αρχή του αναλλοίωτου του Monroe Donsker. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα μας δίνει πληροφορία για την κατανομή της $E_t^{(h)}$ σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t. Η αρχή του Donsker περιγράφει την ασυμπτωτική συμπεριφορά ολόκληρης της στοχαστικής διαδικασίας $(W_t^{(h)})_{0\le t\le T}$, με:

$$W_t^{(h)} = \sqrt{h}\sum_{i=1}^{[\frac{t}{h}]} J_i.$$

Το συμπέρασμα της αρχής του Donsker είναι ότι η $(W_t^{(h)})_{0\le t\le T}$ συμπεριφέρεται ασυμπτωτικά όπως η κίνηση Brown $(W_t^{(h)})_{0\le t\le T}$ ([4]). Συγκεκριμένα, αν $0\le s\le t$, η τυχαία μεταβλητή $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη από τις $(W_r)_{0\le r\le s}$ και ακολουθεί κανονική κατανομή $N(0,t-s)$. Ειδικότερα, για κάθε $t\ge 0$ ισχύει $W_t\sim N(0,t)$.

Εφοδιάζουμε το χώρο των συνεχών μονοπατιών $C([0,T];\mathbb{R})$ με την τοπολογία που προέρχεται από τη νόρμα $||x|| = \sup_{0\le t\le T}|x(t)|$ και θεωρούμε μια φραγμένη και συνεχή συνάρτηση $f : C([0,T];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Από τη σχέση (3.8), την αρχή του Donsker και το Λήμμα (3.7.1) προκύπτει το παρακάτω:

$$\mathbf{E}[f((S_t^{(h)})_{0\le t\le T})] \xrightarrow{h\to 0} \mathbf{E}[f((S_0 e^{\mu t+\sigma W_t})_{0\le t\le T})].$$

Η παραπάνω ασυμπτωτική συμπεριφορά της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος στο όριο, καθώς $h\to 0$, είναι ακριβώς η υπόθεση του μοντέλου των **Black & Scholes**, στο οποίο η αξία $(S_t)_{t\ge 0}$ του πρωτογενούς προϊόντος δίνεται από τη σχέση:

$$S_t = S_0 e^{\mu t+\sigma W_t}, \tag{3.10}$$

όπου $(W_t)_{t\geq 0}$ είναι κίνηση Brown. Η στοχαστική διαδικασία στο δεξί μέλος της (3.10) αναφέρεται ως γεωμετρική κίνηση Brown. Η παράμετρος μ του μοντέλου ονομάζεται τάση, ενώ η παράμετρος σ του μοντέλου ονομάζεται μεταβλητότητα.

3.8 Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των τιμών των παραγώγων

Έστω ένα ευρωπαϊκού τύπου παράγωγο με ωρίμανση T και απόδοση $f(S_T)$. Αναφέραμε ότι για να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα, αρκεί να υπολογίσουμε την αναμενόμενή του απόδοση στην ωρίμανση T ως προς το αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας και να την προεξοφλήσουμε στο χρόνο , πολλαπλασιάζοντας με τον παράγοντα e^{-rT}. Το αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας $\mathbf{Q}_N$ για το διωνυμικό υπόδειγμα με N περιόδους κάνει τις $(\xi_k)_{1\leq k\leq N}$ ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή που δίνεται από τις:

$$\mathbf{Q}_N(\xi_k = u) = q_h = \frac{e^{rh} - d}{u - d} = \frac{e^{rh} - e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}}}{e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}} - e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}}}$$

και

$$\mathbf{Q}_N(\xi_k = d) = 1 - q_h = \frac{u - e^{rh}}{u - d} = \frac{e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}} - e^{rh}}{e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}} - e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}}}.$$

Γράφουμε:

$$E_{t_k} := \log(\frac{S_{t_k}}{S_0}) = \sum_{i=1}^{k} \log \xi_i = \sum_{i=1}^{k} (\mu h + \sigma\sqrt{h} J_i) = \mu t_k + \sigma\sqrt{h} \sum_{i=1}^{k} J_i. \tag{3.11}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $(J_k)_{1\leq k\leq N}$ είναι ανεξάρτητες ως προς οποιοδήποτε $\mathbf{Q}_N$, η κατανομή τους όμως είναι διαφορετική ως προς διαφορετικά $\mathbf{Q}_N$. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\mathbf{Q}_N(J_k = 1) = q_h \;\text{ και }\; \mathbf{Q}_N(J_k = -1) = 1 - q_h.$$

Οι J_k έχουν μέση τιμή:

$$m_h = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_N}[J_k] = 2q_h - 1$$

και διασπορά:

$$\sigma_h^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_N}[J_k^2] - (\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_N}[J_k])^2 = 1 - (2q_h - 1)^2 = 4q_h(1 - q_h).$$

Για να επεκτείνουμε τον ορισμό της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος σε όλους τους χρόνους $t \in [0, T]$, εισάγουμε τις μεταβλητές:

$$J_k^{(N)} = \frac{J_k + 1 - 2q_h}{\sqrt{4q_h(1 - q_h)}},$$

οι οποίες ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{Q}_N$ έχουν μέση τιμή 0 και διασπορά ίση με 1. Στη συνέχεια, για $kh \leq t \leq (k+1)h$, γράφουμε:

$$\begin{aligned}
E_t^{(h)} &= \mu t + \sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{k} J_i + \frac{\sigma(t - t_k)}{\sqrt{h}} J_{k+1} \\
&= \mu t + (\sigma\sqrt{h}k + \frac{\sigma(t - t_k)}{\sqrt{h}})(2q_h - 1) + \sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{k}(J_i + 1 - 2q_h) + \frac{\sigma(t - t_k)}{\sqrt{h}}(J_{k+1} + 1 - 2q_h) \\
&= (\mu + \frac{(2q_h - 1)\sigma}{\sqrt{h}})t + \sigma\sqrt{4q_h(1 - q_h)}\sum_{i=1}^{k} J_i^{(N)} + \frac{\sigma(t - t_k)}{\sqrt{h}}(J_{k+1} + 1 - 2q_h).
\end{aligned}$$

Επιπλέον, ισχύει:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\frac{\sigma(t - t_k)}{\sqrt{h}}(J_{k+1} + 1 - 2q_h)| \leq 2\sigma\sqrt{h} \xrightarrow{N\to\infty} 0. \tag{3.12}$$

Για να προσδιορίσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του όρου:

$$\frac{(2q_h - 1)\sigma}{\sqrt{h}}$$

εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{2q_h - 1}{\sqrt{h}} &= \frac{2e^{(r-\mu)h} - e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{\sqrt{h}(e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}})} \\
&= \frac{2(e^{(r-\mu)h} - 1) - (e^{\sigma\sqrt{h}/2} - e^{-\sigma\sqrt{h}/2})^2}{\sqrt{h}(e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}})}.
\end{aligned}$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή του δεξιού μέλους με h και χρησιμοποιώντας ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(ax)}{x}=2a,$$

προκύπτει ότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{2q_h-1}{\sqrt{h}}=\frac{2(r-\mu)-\sigma^2}{2\sigma}. \tag{3.13}$$

Επιπλέον,

$$4q_h(1-q_h)=1-(2q_h-1)^2\to 1,\ h\to 0.$$

Η κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $J_k^{(N)}$ μεταβάλλεται με το N, είναι δηλαδή διαφορετική σε κάθε διωνυμικό δένδρο που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση. Δηλαδή εδώ υπάρχει μια τριγωνική διάταξη τυχαίων μεταβλητών:

$$\begin{aligned}
&J_1^{(1)}\\
&J_1^{(2)},J_2^{(2)}\\
&J_1^{(3)},J_2^{(3)}J_3^{(3)}\\
&\vdots\\
&J_1^{(N)},J_2^{(N)},J_3^{(N)},...,J_N^{(N)}.
\end{aligned}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές κάθε γραμμής είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, αλλά η κοινή κατανομή κάθε γραμμής μπορεί να είναι διαφορετική. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα γενικεύεται και για τριγωνικές διατάξεις. Συγκεκριμένα, για κάθε $t>0$:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{k}J_i^{(N)}=\frac{1}{[\frac{t}{h}]}\sum_{i=1}^{[\frac{t}{h}]}J_i^{(N)}\xrightarrow{d}Z,\ \text{με}\ Z\sim N(0,1),h\to 0.$$

Από τις σχέσεις (3.11),(3.12),(3.13) και το Λήμμα (3.7.2) προκύπτει ότι για κάθε $t\in[0,T]$:

$$E_t^{(h)}\xrightarrow{d}(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\sqrt{t}Z,\ \text{με}\ Z\sim N(0,1).$$

Από το Λήμμα (3.7.3) έχουμε:

$$S_t^{(h)}\xrightarrow{d}S_0e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\sqrt{t}Z}.$$

Τέλος, επειδή η κανονική κατανομή είναι συνεχής, από το Λήμμα (3.7.1) έχουμε ότι για κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία έχει το πολύ αριθμήσιμα σημεία ασυνέχειας:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_N}[f(S_t)] \to \mathbf{E}[f(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\sqrt{t}Z})]. \tag{3.14}$$

Από το Θεώρημα (3.6.3) έχουμε ότι, αν τιμολογήσουμε με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα N περιόδων ένα ευρωπαϊκό παράγωγο με απόδοση $V_T = f(S_T)$, η αρχική αξία του παραγώγου είναι ίση με:

$$V_0^{(N)} = e^{-rT}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_N}[f(S_T)].$$

Αν η συνάρτηση f της απόδοσης του παραγώγου είναι φραγμένη και έχει το πολύ αριθμήσιμα σημεία ασυνέχειας, τότε σύμφωνα με τη σχέση (3.14), η ακολουθία των αρχικών αξιών του παραγώγου συγκλίνει, καθώς $N \to \infty$ και το όριό της δίνεται από τη σχέση:

$$V_0 = e^{-rT}\mathbf{E}[f(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}Z})],$$

όπου $Z \sim N(0,1)$. Δηλαδή,

$$V_0 = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} f(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x})e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.15}$$

Αυτός είναι ο **τύπος των Black & Scholes για την τιμολόγηση παραγώγων ευρωπαϊκού τύπου**.

3.9 Τιμολόγηση με βάση το υπόδειγμα Black & Scholes

Έστω ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K. Η απόδοση αυτού του δικαιώματος στην ωρίμανση είναι $V_T = (S_T - K)^+$. Η σημερινή αξία αυτού του δικαιώματος δίνεται από τον τύπο Black & Scholes (3.15). Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος αυτής της σχέσης θα υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Θεώρημα 3.9.1. *Αν η τρέχουσα τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι S_0, τότε η αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K, με βάση το μοντέλο Black & Scholes, δίνεται από τη σχέση:*

$$c(S_0, T, K) = S_0 F(d_+) - K e^{-rT} F(d_-),$$

όπου

$$d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln(\frac{S_0 e^{rT}}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}.$$

Απόδειξη. Από τον τύπο των Black & Scholes έχουμε:

$$c(S_0, T, K) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}x} - K)^+ e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Για $x = -d_-$, η παρένθεση στην παραπάνω έκφραση μηδενίζεται. Συμβολίζουμε $F_0 = S_0 e^{rT}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} c(S_0, T, K) &= e^{-rT} \int_{-d_-}^{\infty} (F_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\sqrt{T}x} - K) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{-rT} (F_0 \int_{-d_-}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T})^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} - K \int_{-d_-}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}) \\ &= e^{-rT} (F_0 \int_{-\infty}^{d_+} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} - K \int_{-\infty}^{d_-} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}) \\ &= S_0 F(d_+) - K e^{-rT} F(d_-). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.9.2. *Αν η τρέχουσα τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι S_0, τότε η αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης, με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K, με βάση το μοντέλο Black & Scholes, δίνεται από τη σχέση:*

$$p(S_0, T, K) = K e^{-rT} F(-d_-) - S_0 F(-d_+),$$

όπου

$$d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln(\frac{S_0 e^{rT}}{K}) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}.$$

Απόδειξη. Από την ισοτιμία ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης έχουμε:

$$\begin{aligned} p(S_0, T, K) &= c(S_0, T, K) - S_0 + Ke^{-rT} \\ &= S_0(F(d_+) - 1) + Ke^{-rT}(1 - F(d_-)) \\ &= Ke^{-rT}F(-d_-) - S_0e^{-rT}F(-d_+). \end{aligned}$$

$\square$

Κεφάλαιο 4

Τιμολόγηση Χρηματοοικονομικών Παραγώγων σε Αγορές Συνεχούς Χρόνου

4.1 Χαρτοφυλάκια στα πλαίσια του μοντέλου Black & Scholes

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $\{B_t : t \geq 0\}$ μια μονοδιάστατη κίνηση Brown, η οποία ορίζεται στο χώρο αυτό. Επιπλέον, έστω η τυπική διήθηση της κίνησης Brown $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^B \cup \mathcal{N}_{\mathbf{P}})$, $t \geq 0$, όπου $\mathcal{F}_t^B$ η φυσιολογική διήθηση που ορίστηκε στο 2ο Κεφάλαιο, δηλαδή $\mathcal{F}_t^B = \sigma(\{B_s : s \in [0, t]\})$, και:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{P}} = \{\Lambda \subset \Omega : \exists N \in \mathcal{F} \text{ με } \Lambda \subset N \text{ και } \mathbf{P}(N) = 0\}.$$

Ως μοντέλο αγοράς (β, X) θεωρούμε το μοντέλο Black & Scholes, όπου:

$$\beta(t) = 1 + \int_0^t r\beta(s)\, ds, 0 \leq t \leq T \tag{4.1}$$

$$X_t = x + \int_0^t bX_s\, ds + \int_0^t \sigma X_s\, dB_s, 0 \leq t \leq T, \tag{4.2}$$

όπου $r \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $x > 0$ και $T > 0$. Ως X_t ορίζεται η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος των δικαιωμάτων, που θα μελετήσουμε παρακάτω, τη χρονική στιγμή t. Το r

είναι το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού, το x είναι η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ και T ο χρόνος ωρίμανσης (άσκησης) των δικαιωμάτων. Να σημειώσουμε ότι η εξίσωση (4.1) γράφεται και ως εξής:

$$\beta(t) = e^{rt}, 0 \leq t \leq T, \tag{4.3}$$

και η $\beta^{-1}(t) = e^{-rt}, 0 \leq t \leq T$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\beta^{-1}(t) = 1 + \int_0^t -r\beta^{-1}(s)\, ds. \tag{4.4}$$

Έστω ότι έχουμε πραγματοποιήσει μια επένδυση σε ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο (κατάθεση ή δανεισμός). Για παράδειγμα, έστω ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ καταθέσαμε στην τράπεζα κεφάλαιο αξίας $A(0)$. Αν ο ανατοκισμός είναι συνεχής, τότε η αξία της επένδυσης τη χρονική στιγμή t θα ισούται με $A(t) = A(0)\beta(t) = A(0)e^{rt}$. Επομένως, το β χρησιμοποιείται για να μελετήσουμε τη χρονική συμπεριφορά μιας ντετερμινιστικής επένδυσης. Για να μελετήσουμε τη χρονική συμπεριφορά της τιμής του πρωτογενούς προϊόντος ενός δικαιώματος, χρειαζόμαστε ένα στοχαστικό και όχι ένα ντετερμινιστικό μοντέλο. Το στοχαστικό μοντέλο περιγράφεται από τη σχέση (4.2).

Ορισμός 4.1.1. *Έστω το μοντέλο αγοράς (β, X). **Χαρτοφυλάκιο** για την αγορά αυτή ονομάζεται ένα ζεύγος $\phi = (\phi_0, \phi_1)$, όπου ϕ_0, ϕ_1 είναι στοχαστικές ανελίξεις με τιμές στο $\mathbb{R}$, μετρήσιμες και $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένες. Η στοχαστική ανέλιξη:*

$$Y_t^{\phi} = \phi_0(t)\beta(t) + \phi_1(t)X_t, 0 \leq t \leq T, \tag{4.5}$$

*ονομάζεται **ανέλιξη αξίας** του χαρτοφυλακίου $\phi = (\phi_0, \phi_1)$.*

Ορισμός 4.1.2. *Έστω το μοντέλο αγοράς (β, X), όπως ορίστηκε παραπάνω. Ένα χαρτοφυλάκιο $\phi = (\phi_0, \phi_1)$ ονομάζεται **αυτοχρηματοδοτούμενο** για την (β, X) αν ικανοποιεί την:*

$$\int_0^T |\phi_0(s)|\, ds + \int_0^T |\phi_1(s)X_s|^2\, ds < \infty, \boldsymbol{P} - \sigma.\beta.$$

και η ανέλιξη αξίας του ικανοποιεί την:

$$dY_t^{\phi} = \phi_0(t)d\beta(t) + \phi_1(t)dX_t, \tag{4.6}$$

ή ισοδύναμα την

$$Y_t^{\phi} = Y_0^{\phi} + \int_0^t [r\phi_0(s)\beta(s) + b\phi_1(s)X_s]\, ds + \int_0^t \sigma\phi_1(s)X_s\, dB_s, 0 \leq t \leq T. \tag{4.7}$$

Το σύνολο των αυτοχρηματοδοτούμενων χαρτοφυλακίων συμβολίζεται με $\mathcal{X}$. *Επιπλέον, για* $y \in \mathbb{R}$ *ορίζουμε:*

$$\mathcal{X}_y = \{\phi \in \mathcal{X} : Y_0^{\phi} = y, \boldsymbol{P} - \text{σχεδόν βέβαια}\}.$$

Όταν $\phi \in \mathcal{X}_y$ *θα γράφουμε* $Y^{y,\phi}$.

Με άλλα λόγια, ένα χαρτοφυλάκιο ονομάζεται αυτοχρηματοδοτούμενο αν οι μεταβολές της αξίας του οφείλονται μόνο στις μεταβολές των τιμών των τίτλων που το απαρτίζουν και όχι από εισροή ή εκροή κεφαλαίων ([2],[7]).

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία ενός πρωτογενούς προϊόντος (αντίστοιχα ενός χαρτοφυλακίου) που έχει τιμή X_t (αντίστοιχα Y_t^{ϕ}) κατά τη μελλοντική στιγμή $t > 0$, τότε χρησιμοποιούμε την παρακάτω Πρόταση η οποία αποδεικνύεται με τη βοήθεια της Πρότασης (2.9.1).

Πρόταση 4.1.1. *Έστω ένα μοντέλο αγοράς* (β, X), *όπως ορίστηκε παραπάνω και* $\phi \in \mathcal{X}$. *Τότε για* $t \in [0, T]$ *ισχύει:*

$$\beta_t^{-1}X_t = x + \int_0^t (b-r)\beta^{-1}(s)X_s]\, ds + \int_0^t \sigma\beta^{-1}(s)X_s\, dB_s, \tag{4.8}$$

$$\beta_t^{-1}Y_t^{\phi} = Y_0^{\phi} + \int_0^t (b-r)\phi_1(s)\beta^{-1}(s)X_s\, ds + \int_0^t \sigma\phi_1(s)\beta^{-1}(s)X_s\, dB_s. \tag{4.9}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} d(\beta_t^{-1}X_t) &= \beta^{-1}(t)(bX_tdt + \sigma X_tdB_t) - r\beta^{-1}(t)X_tdt \\ &= (b-r)\beta^{-1}X_tdt + \beta^{-1}\sigma X_tdB_t. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\beta_t^{-1}X_t = x + \int_0^t (b-r)\beta^{-1}(s)X_s]\,ds + \int_0^t \sigma\beta^{-1}(s)X_s\,dB_s.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\beta_t^{-1}Y_t^{\phi} &= Y_0^{\phi} + \int_0^t [-r\beta^{-1}(s)Y_s + r\phi_0(s) + b\beta^{-1}(s)\phi_1(s)X_s]\,ds + \int_0^t \sigma\beta^{-1}(s)\phi_1(s)X_s\,dB_s \\ &= \int_0^t (b-r)\phi_1(s)\beta^{-1}(s)X_s\,ds + \int_0^t \sigma\phi_1(s)\beta^{-1}(s)X_s\,dB_s.\end{aligned}$$

□

Στη συνέχεια θα ορίσουμε ποια χαρτοφυλάκια θεωρούνται αποδεκτά. Γενικά, αν για οποιοδήποτε αριθμό $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει χαρτοφυλάκιο ϕ του οποίου η αξία κατά τη χρονική στιγμή T είναι $Y_T^{\phi} = a$, τότε αυτό το χαρτοφυλάκιο δε θεωρείται ρεαλιστικό ([7]).

Ορισμός 4.1.3. *Ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο $\phi \in \mathcal{X}$ ονομάζεται **αποδεκτό** όταν υπάρχει $\Lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $Y^{\phi} \geq \Lambda$ σχεδόν βέβαια ως προς το μέτρο $\lambda \otimes \boldsymbol{P}$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue. Το σύνολο των αποδεκτών χαρτοφυλακίων συμβολίζεται με $\tilde{\mathcal{X}}$. Επιπλέον, για $y \in \mathbb{R}$ έχουμε $\tilde{\mathcal{X}}_y = \{\phi \in \tilde{\mathcal{X}} : Y_0^{\phi} = y, \boldsymbol{P} - \sigma.\beta.\}$.*

Στη συνέχεια, θέτουμε $\theta = \frac{b-r}{\sigma}$ και $Z_t = e^{-\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t}, t \geq 0$. Γνωρίζουμε ότι η $(Z_t)_{t\geq 0}$ είναι $\mathcal{F}_t$-martingale, επομένως μπορούμε να ορίσουμε στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ το μέτρο πιθανότητας:

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}[Z_T \mathbf{1}_A], A \in \mathcal{F}_T.$$

Για το μέτρο πιθανότητας **Q** ισχύει:

$$\mathbf{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}(A) = 0, \forall A \in \mathcal{F}_T.$$

Από το Θεώρημα Girsanov προκύπτει ότι η στοχαστική ανέλιξη:

$$W_t = B_t + \theta t, 0 \leq t \leq T$$

είναι μια $\mathcal{F}_t$-κίνηση Brown για το μέτρο **Q** ([7]). Χρησιμοποιώντας το νέο μέτρο πιθανότητας που ορίστηκε, έχουμε τα εξής αποτελέσματα.

Πρόταση 4.1.2. *Έστω το μοντέλο αγοράς (β, X) και το μέτρο πιθανότητας **Q** στον $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, όπως ορίστηκαν παραπάνω. Τότε υπό το **Q** και για τυχόν $\phi = (\phi_0, \phi_1) \in \mathcal{X}$ ισχύουν τα παρακάτω:*

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t, 0 \leq t \leq T \tag{4.10}$$

$$\beta_t^{-1} X_t = x + \int_0^t \sigma \beta^{-1}(s) X_s \, dW_s, 0 \leq t \leq T \tag{4.11}$$

$$\beta_t^{-1} Y_t^{\phi} = Y_0^{\phi} + \int_0^t \sigma \phi_1(s) \beta^{-1}(s) X_s \, dW_s, 0 \leq t \leq T. \tag{4.12}$$

Πόρισμα 4.1.1. *Υπό το μέτρο πιθανότητας **Q** η στοχαστική ανέλιξη $\{\beta_t^{-1} X_t, 0 \leq t \leq T\}$ είναι $\mathcal{F}_t$-martingale. Επίσης, αν $\phi \in \tilde{\mathcal{X}}$, η στοχαστική ανέλιξη $\{\beta_t^{-1} Y_t^{\phi}, 0 \leq t \leq T\}$ είναι $\mathcal{F}_t$-supermartingale.*

Το μέτρο πιθανότητας **Q** θεωρείται, λόγω του παραπάνω Πορίσματος, ότι είναι ουδέτερο κινδύνου, αφού υπό το μέτρο αυτό η ανέλιξη αξίας του πρωτογενούς προϊόντος είναι ένα martingale ([7]).

4.2 Αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου

Ορισμός 4.2.1. *Έστω $T > 0$ και (β, X) μοντέλο αγοράς , όπως ορίστηκε παραπάνω. **Δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου χρόνου άσκησης** T ονομάζεται μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή $Y : \Omega \to [0, \infty)$ που είναι $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη.*

Επομένως, αν $h : (0, \infty) \to [0, \infty)$ είναι μη αρνητική Borel μετρήσιμη συνάρτηση, τότε η $Y = h(X_T)$ είναι ένα δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου χρόνου ωρίμανσης T.

Ορισμός 4.2.2. *Έστω Y ένα δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου χρόνου ωρίμανσης $T > 0$ στο μοντέλο αγοράς (β, X). **Στρατηγική αντιστάθμισης κινδύνου** για το Y με αρχική αξία $y \geq 0$ ονομάζεται ένα χαρτοφυλάκιο $\phi = (\phi_0, \phi_1) \in \tilde{\mathcal{X}}_y$ με $Y_T^{y,\phi} = Y$ σχεδόν βέβαια ως προς το **P**. **Δίκαιη τιμή** για το δικαίωμα Y λέγεται το:*

$$\rho(Y) = \inf\{y \geq 0 : \exists \phi \in \tilde{\mathcal{X}}_y \text{ με } Y_T^{y,\phi} = Y \text{ σχεδόν βέβαια ως προς } \boldsymbol{P}\}. \tag{4.13}$$

Δηλαδή, η δίκαιη τιμή ενός δικαιώματος ισούται με το ελάχιστο των αριθμών $y \geq 0$ για τους οποίους είναι εφικτή η κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου $\phi \in \tilde{\mathcal{X}}$ με αρχική αξία $Y_0^{\phi} = y$ και τελική $Y_T^{\phi} = Y$.

Η Πρόταση που ακολουθεί μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τη δίκαιη τιμή ενός δικαιώματος.

Πρόταση 4.2.1. *Έστω Y ένα δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου χρόνου ωρίμανσης $T > 0$ στο μοντέλο αγοράς (β, X). Επιπλέον, έστω $\boldsymbol{Q}$ το μέτρο πιθανότητας που ορίστηκε παραπάνω. Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{E_Q}[Y] < \infty$. Τότε:*

$$\rho(Y) = \boldsymbol{E_Q}[\beta_T^{-1} Y] \equiv \hat{y}$$

και υπάρχει μια μοναδική στρατηγική αντιστάθμισης κινδύνου $\hat{\phi} \in \tilde{\mathcal{X}}_{\hat{y}}$ με αρχική αξία $\hat{y}$ για το δικαίωμα Y.

Αν θέσουμε $\hat{Y}_t = Y_t^{\hat{y},\hat{\phi}}, 0 \leq t \leq T$, τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{\hat{Y}_t, 0 \leq t \leq T\}$ ονομάζεται ανέλιξη αξίας του δικαιώματος Y.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα $Y = h(X_T)$, όπου $h : (0, \infty) \to [0, \infty)$ συνεχής με $\boldsymbol{E_Q}[h(X_T)] < \infty$. Τότε:*

$$\hat{Y}_t = g(t, X_t), 0 \leq t \leq T,$$

$$\rho(Y) = g(0, x),$$

όπου

$$g(t,\xi) = \begin{cases} \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi e^{\lambda(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}}) e^{\frac{-y^2}{2}}\, dy, & 0 \leq t \leq T \\ h(\xi), & t = T \end{cases}$$

με $\lambda = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

4.3 Τιμολόγηση Down and out Barrier δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης

Στα δικαιώματα Barrier χρόνου άσκησης $T > 0$ και τιμής άσκησης $K > 0$ προσυμφωνείται ένα φράγμα $H > 0$. Το πρωτογενές προϊόν είναι το X και:

$$\overline{X}_T = \max_{0 \le t \le T} X_t,$$

$$\underline{X}_T = \min_{0 \le t \le T} X_t.$$

Ένα είδος δικαιωμάτων Barrier είναι τα down and out Barrier δικαιώματα. Για τα down and out Barrier δικαιώματα αγοράς ισχύει:

$$Y = (X_T - K)^+ I_{\{\underline{X}_T \ge H\}} = \begin{cases} (X_T - K)^+, & \underline{X}_T \ge H \\ 0, & \underline{X}_T < H \end{cases}$$

Σύμφωνα με τους όρους του δικαιώματος αυτού, ο κάτοχος έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει κατά τη χρονική στιγμή $t = T$ το προϊόν X έναντι τιμής K με την προϋπόθεση ότι η τιμή X_t δεν πέφτει κάτω του φράγματος H σε καμία χρονική στιγμή $t \in [0, T]$.

Για την τιμολόγηση αυτών των δικαιωμάτων θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 4.3.1. *Για $x > v$ και $u \ge v > 0$ ισχύουν:*

1. $\boldsymbol{Q}(X_T \ge u, \underline{X}_T \ge v) = F(\frac{\ln(x/u)+\lambda T}{\sigma\sqrt{T}}) - (\frac{v}{x})^{2\lambda\sigma^{-2}} F(\frac{\ln(v^2/xu)+\lambda T}{\sigma\sqrt{T}})$
2. $\boldsymbol{E_Q}[X_T I(X_T \ge u, \underline{X}_T \ge v] = xe^{rT}[F(\frac{\ln(x/u)+\lambda' T}{\sigma\sqrt{T}}) - (\frac{v}{x})^{2\lambda'\sigma^{-2}} F(\frac{\ln(v^2/xu)+\lambda' T}{\sigma\sqrt{T}})],$

όπου $\lambda = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ και $\lambda' = r + \frac{1}{2}\sigma^2$.

Για $x > v$ και $0 < u < v$ οι απαντήσεις προκύπτουν από το γεγονός ότι το ενδεχόμενο $\{X_T \ge u, \underline{X}_T \ge v\} = \{X_T \ge v, \underline{X}_T \ge v\}$.

Για $x \le u$ οι παραπάνω ποσότητες είναι ίσες με μηδέν.

Για να βρούμε τη δίκαιη τιμή των δικαιωμάτων αγοράς αυτού του τύπου, εργαζόμαστε ως εξής, λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο λογικός επενδυτής θα ασκήσει το δικαίωμα αγοράς αν τη χρονική στιγμή T ισχύει $X_T \geq K$:

$$\begin{aligned}
\rho(Y) &= \mathbf{E_Q}[e^{-rT}Y] \\
&= e^{-rT}\mathbf{E_Q}[YI(X_T \geq K)] \\
&= e^{-rT}\mathbf{E_Q}[(X_T - K)I(X_T \geq K, \underline{X}_T \geq H)] \\
&= e^{-rT}\mathbf{E_Q}[X_T I(X_T \geq K, \underline{X}_T \geq H)] - Ke^{-rT}\mathbf{Q}(X_T \geq K, \underline{X}_T \geq H).
\end{aligned}$$

Η παραπάνω ποσότητα μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της Πρότασης (4.3.1).

Για να τιμολογήσουμε τα down and out Barrier δικαιώματα πώλησης χρησιμοποιούμε τις εξής σχέσεις:

$$Y' = (K - X_T)^+ I_{\{\underline{X}_T \geq H\}},$$

$$(K - X_T)^+ = (X_T - K)^+ - (X_T - K).$$

Εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{aligned}
\rho(Y') &= \mathbf{E_Q}[e^{-rT}Y'] \\
&= \mathbf{E_Q}[e^{-rT}Y] - \mathbf{E_Q}[e^{-rT}(X_T - K)I(\underline{X}_T \geq H)] \\
&= \rho(Y) - e^{-rT}\mathbf{E_Q}[X_T I(\underline{X}_T \geq H)] + Ke^{-rT}\mathbf{Q}(X_T \geq H, \underline{X}_T \geq H).
\end{aligned}$$

4.4 Τιμολόγηση Asian Geometric δικαιωμάτων αγοράς και Standard Lookback δικαιωμάτων πώλησης

Στα **Asian geometric δικαιώματα** χρόνου άσκησης $T > 0$ και τιμής άσκησης $K > 0$ καθορίζεται ένα σύνολο S από προηγούμενες μελλοντικές χρονικές στιγμές, το οποίο περιέχει και τη χρονική στιγμή T. Τη χρονική στιγμή T ο κάτοχος του δικαιώματος έχει το δικαίωμα να ζητήσει από τον αντισυμβαλλόμενό του τη διαφορά $M - K$, όπου M είναι ο γεωμετρικός μέσος της τιμής της προκαθορισμένης ποσότητας του πρωτογενούς προϊόντος κατά τις χρονικές στιγμές του συνόλου S. Ο λογικός επενδυτής θα ασκήσει το δικαίωμα αγοράς αν η διαφορά $M - K$ είναι θετική ([3]).

Έστω ότι η ανέλιξη αξίας του πρωτογενούς προϊόντος είναι η $(X_t)_{t\in[0,T]}$. Τότε η δίκαιη τιμή των δικαιωμάτων αγοράς αυτού του τύπου δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\rho(Y) = \mathbf{E_Q}[e^{-rT}(\sqrt[m]{\prod_{i=0}^{m-1} X(T-i)} - K)^+],$$

όπου $m \leq T+1$. Έχουμε:

$$\sqrt[m]{\prod_{i=0}^{m-1} X(T-i)} = e^{\frac{1}{m}(\ln X(T-m+1)+\ln X(T-m+2)+\ldots+\ln X(T))}.$$

Από τη σχέση (4.11) έχουμε:

$$\beta_t^{-1} X_t = x + \int_0^t \sigma \beta_s^{-1} X_s \, dW_s, 0 \leq t \leq T,$$

δηλαδή:

$$d(\beta_t^{-1} X_t) = \sigma \beta_t^{-1} X_t dW_t.$$

Αν θέσουμε $X^*(t) = \beta_t^{-1} X_t$, τότε:

$$d(X^*(t)) = \sigma X^*(t) dW_t.$$

Η στοχαστική διαφορική εξίσωση που προέκυψε έχει μελετηθεί στο Κεφάλαιο 2 και η λύση της είναι η εξής:

$$X^*(t) = x e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t}.$$

Επομένως,

$$X(t) = \beta(t) X^*(t) = x e^{rt} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W_t} = x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}.$$

Άρα, έχουμε:

$$\sqrt[m]{\prod_{i=0}^{m-1} X(T-i)} = e^{\ln x + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} i) + \frac{\sigma}{m}(\sum_{i=0}^{m-1} W_{T-i})}.$$

Επίσης, από τις ιδιότητες της κίνησης Brown, έχουμε:

$$\sum_{i=0}^{m-1} W_{T-i} = \sum_{i=1}^{m-1} i(W_{T-i} - W_{T-i-1}) + mW_{T-m+1} \sim N(0, \sum_{i=1}^{m-1} i^2 + m^2(T-m+1)).$$

Αποδεικνύεται ότι ([3]):

$$\begin{aligned}\rho(Y) &= e^{-rT}\mathbf{E_Q}[(\sqrt[m]{\prod_{i=0}^{m-1} X(T-i)} - K)^+] \\ &= xe^{-\frac{\sigma^2(m+1)}{4} - r\frac{m-1}{2} + \frac{\sigma^2(m+1)(2m+1)}{12m}} F(D_2 - D_1) - Ke^{-rT}F(-D_1),\end{aligned}$$

όπου

$$D_1 = \frac{\ln(\frac{K}{x}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - \frac{m-1}{2})}{\frac{\sigma}{m}\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + Tm^2 - m^3}}$$

και

$$D_2 = \frac{\sigma}{m}\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + Tm^2 - m^3}.$$

Ένα **Standard Lookback δικαίωμα πώλησης** είναι μια παραλλαγή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης, κατά την οποία η τιμή K δεν καθορίζεται όταν υπογράφεται το συμβόλαιο, αλλά ορίζεται ως η μεγαλύτερη τιμή που θα πάρει η προκαθορισμένη ποσότητα του πρωτογενούς προϊόντος X, από τη στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο μεταξύ των δύο αντισυμβαλλομένων μέχρι τη χρονική στιγμή της ωρίμανσης ([3]). Αποδεικνύεται ότι η δίκαιη τιμή ενός δικαιώματος πώλησης αυτού του τύπου είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned}\rho(Y) &= e^{-rT}\mathbf{E_Q}[\max_{0\le s\le T} X(s) - X(T)] \\ &= -e^{-rT}x\frac{\sigma^2}{2r}F(a) + -e^{-rT}xF(a) + x\frac{\sigma^2}{2r}F(b) - xF(-b),\end{aligned}$$

όπου $a = -\sqrt{T}(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})$ και $b = \sqrt{T}(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})$.

Βιβλιογραφία

[1] Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Τόμος Ι, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Φεβρουάριος 2003.

[2] Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Τόμος ΙΙ, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ιανουάριος 2004.

[3] Ν. Κολλιόπουλος, Μέθοδοι Monte Carlo για την τιμολόγηση Χρηματοοικονομικών Παραγώγων, Διπλωματική Εργασία, Επιβλέπων: Μ. Λουλάκης, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2013.

[4] Μ. Λουλάκης, Εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομία, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράματα και Βοηθήματα, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015.

[5] Β. Παπανικολάου, The Cameron-Martin-Girsanov (CMG) Theorem (Σημειώσεις για το μάθημα των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων, 2014).

[6] Γ. Κ. Σαραντόπουλος, Σημειώσεις Θεωρίας Μέτρου και Ολοκλήρωσης, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Φεβρουάριος 2010.

[7] Ι. Σπηλιώτης, Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2004.

[8] Δ. Χελιώτης, Ένα δεύτερο μάθημα στις Πιθανότητες, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράματα και Βοηθήματα, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015.

[9] Δ. Χελιώτης, Εισαγωγή στο Στοχαστικό Λογισμό, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράματα και Βοηθήματα, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015.

[10] Ο. Χρυσαφίνου, Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις, Εκδόσεις ”σοφία”, Θεσσαλονίκη, 2012.

[11] F. Delban, W. Schachermayer, What is a Free Lunch?, Notices of AMC, vol. 51 (5),p. 526-528.

[12] E. Kopp, From Measures to $It\hat{o}$ Integrals, Cambridge University Press, 31 March 2011.