



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**



Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Ολογραφική Υπεραγωγιμότητα με αυθόρμητη παραβίαση της διατήρησης της ορμής

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Του Γεωργίου Φίλιου

Επιβλέπων:

Ε. Παπαντωνόπουλος

Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ,

Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος, 2017

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον υπεύθυνο μου, καθηγητή Ελευθέριο Παπαντωνόπουλο, για την ευκαιρία που μου έδωσε να γίνω μέλος της Θεωρητικής Ομάδας Βαρυτικής Φυσικής της σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών και για όλη την στήριξη και τη βοήθεια που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας. Χωρίς την καθοδήγηση του θα ήταν αδύνατη η ολοκλήρωση αυτής της δουλειάς.

Ευγνωμοσύνη οφείλω στον υποψήφιο διδάκτορα, Κωνσταντίνο Ντρέκη, καθώς σε οποιαδήποτε είδους απορία ή λεπτομέρεια που μπορεί να είχα κατά τη διάρκεια αυτής της εργασίας, βρισκόταν πάντα εκεί για να με βοηθήσει με κάθε τρόπο. Οι συζητήσεις μαζί του πάντα είχαν να προσφέρουν κάτι.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τους φίλους μου, που όλα αυτά τα χρόνια βρίσκονται δίπλα μου σε κάθε τι που προσπαθώ να πετύχω. Ειδικότερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Αναστάσιο Κανελλακόπουλο και Κωνσταντίνα Κροκίδη για τους ατελείωτους και πολύτιμους εποικοδομητικούς διαλόγους που είχαμε και τον Κυριάκο Δεστούνη γιατί πάντα πίστευε σε μένα.

Περίληψη

Οι υπεραγωγοί είναι μια κατηγορία υλικών με πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, που περιγράφονται με μια αλλαγή φάσης σε κάποια κρίσιμη θερμοκρασία T_c . Οι ήδη υπάρχουσες θεωρίες, όπως η BCS και η Γινζβουργ-Λανδau, εξηγούν ικανοποιητικά τις ιδιότητες αυτών των υλικών, όπως το φαινόμενο Meissner και την άπειρη DC αγωγιμότητα. Όμως πειράματα στο εργαστήριο οδήγησαν στην ανακάλυψη υπεραγωγών που δεν μπορούν να εξηγηθούν από αυτές τις θεωρίες. Κύριο χαρακτηριστικό αυτών των υλικών είναι οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις, με αποτέλεσμα οι συμβατικοί τρόποι θεωρητικής μελέτης τέτοιων υλικών, όπως η θεωρία Διαταραχών, να μην μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Οπότε είναι αναγκαία η εύρεση μιας μικροσκοπικής θεωρίας που θα μπορεί να περιγράψει κβαντικές θεωρίες πεδίου με ισχυρές αλληλεπιδράσεις.

Στην παρούσα εργασία θα δωθεί μια θεωρητική περιγραφή για έναν υπεραγωγό στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT. Το μοντέλο ενός υπεραγωγού σε $2 + 1$ διαστάσεις θα επιλυθεί μέσω της θεωρίας Einstein-Maxwell με ένα βαθμωτό πεδίο, σε χώρο AdS σε $3 + 1$ διαστάσεις. Επιλύοντας αριθμητικά τις εξισώσεις κίνησης και παρέχοντας τις κατάλληλες αντιστοιχίες, θα πάρουμε αποτελέσματα για την ισχύ του συμπυκνώματος του υπεραγωγού και την οπτική του αγωγιμότητα, όπου θα αναπαράγουμε τα γνωστά αποτελέσματα της θεωρίας Drude. Με ανάλυση των αριθμητικών αποτελεσμάτων καταλήγουμε στη σχέση $2\Delta \approx 8.4T_c$ για το ενεργειακό χάσμα του υπεραγωγού, που είναι πολύ κοντά στη θεωρητική εκτίμηση $2\Delta \approx 3.54T_c$ της θεωρίας BCS, που επιβεβαιώνεται στο εργαστήριο.

Οι διαφορές του αποτελέσματος με τη θεωρητική εκτίμηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το μοντέλο χρειάζεται τροποποίηση για να περιγράψει τα πειραματικά δεδομένα. Για αυτόν τον λόγο θα εισαχθεί στη θεωρία Einstein-Maxwell μια σύζευξη του βαθμωτού πεδίου με τον ταυστή Einstein με ισχύ k . Επιλύοντας πάλι αριθμητικά τις εξισώσεις κίνησης, παρατηρείται πως η εισαγωγή της σταθεράς σύζευξης συνεπάγεται μείωση της κρίσιμης θερμοκρασίας του υπεραγωγού και της ισχύς του συμπυκνώματος. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται στα πραγματικά υλικά με την εισαγωγή παραμαγνητικών προσμίξεων. Επομένως η σταθερά σύζευξης με τον ταυστή Einstein προσομοιώνει αυτές τις παραμαγνητικές προσμίξεις. Μετά από ανάλυση καταλήγουμε στη σχέση $2\Delta \approx 4T_c$, αποτέλεσμα που είναι πολύ πιο κοντά στην πραγματική.

Το μοντέλο που μελετάμε διαθέτει μια συμμετρία στις χωρικές μεταθέσεις. Στα πραγματικά υλικά όμως, λόγω της παρουσίας του πλέγματος, αυτή η συμμετρία δεν υπάρχει. Επομένως στην τελευταία ενότητα εισάγουμε μια παραβίαση αυτής της συμμετρίας, δίνοντας χωρική εξάρτηση στο βαθμωτό πεδίο μέσω της εισαγωγής μιας νέας παραμέτρου τ . Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε την εμφάνιση νέων αιχμών στην αγωγιμότητα για θερμοκρασίες $T < T'_c$ όπου T'_c είναι μια νέα κρίσιμη θερμοκρασία με $T'_c < T_c$. Αυτές οι αιχμές σηματοδοτούν τη δημιουργία νέων φορτισμένων βαθμών ελευθερίας που συνεισφέρουν στο ρεύμα αγωγιμότητας και δεν περιγράφονται μέσω της θεωρίας BCS αλλά από τη θεωρία BEC.

Περιεχόμενα

1	Η έννοια της Ολογραφίας	3
1.1	Η σχέση GKPW	4
1.2	Το λεξικό της Αντιστοιχίας	6
1.3	Ένα παράδειγμα: Το Βαθμωτό Πεδίο	7
1.4	Γραμμική Απόκριση	9
2	Ολογραφική Υπεραγωγιμότητα	11
2.1	Τα Βασικά της Αγωγιμότητας	11
2.1.1	Το μοντέλο Drude	12
2.1.2	Δημιουργία Σωματιδίων-Οπών	13
2.2	Τι είναι ένας υπεραγωγός;	15
2.3	Τα ελάχιστα χαρακτηριστικά ενός Ολογραφικού Υπεραγωγού	17
3	Ο Ολογραφικός Υπεραγωγός	21
3.1	Το όριο Probe	22
3.2	Συμπύκνωμα	22
3.3	Διαταραχές Maxwell και Υπεραγωγιμότητα	28
4	Ολογραφικός Υπεραγωγός με σύζευξη με τον ταχυστή Einstein	33
4.1	Κατασκευή του μοντέλου	34
4.2	Συμπύκνωμα	35
4.3	Υπεραγωγιμότητα	37
5	Ολογραφικός Υπεραγωγός με αυθόρμητη παραβίαση της διατήρησης της ορμής	43
5.1	Κατασκευή του μοντέλου	44
5.2	Συμπύκνωμα	45

5.3 Υπεραγωγιμότητα	47
6 Βιβλιογραφία	51

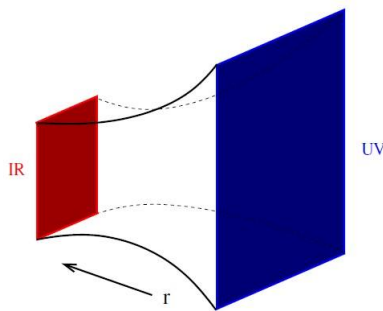
Κεφάλαιο 1

Η έννοια της Ολογραφίας

Ολογραφία είναι η διατύπωση της ισοδυναμίας δύο τελείως διαφορετικών θεωριών:

- Κβαντικών θεωριών πεδίου με ισχυρή σύζευξη σε d χωροχρονικές διαστάσεις
- Θεωριών βαρύτητας σε $d + 1$ διαστάσεις

Το επόμενο σχήμα βοηθάει να κατανοηθεί η αντιστοιχία με έναν εύκολο τρόπο. Το μπλε επίπεδο αναπαριστά έναν χώρο Minkowsky, $\mathbf{R}^{d-1,1}$ και ονομάζεται το σύνορο του χώρου. Σε αυτόν τον χώρο 'ζει' η κβαντική θεωρία πεδίου, η οποία περιγράφει ύλη με ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Ο όρος ύλη συνεπάγεται κβαντικά πεδία με σπίν 0, 1/2 ή 1.



Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση του χώρου AdS

Κάθετη στο σύνορο, υπάρχει μια επιπλέον χωρική διάσταση r που ορίζει έναν άλλον χώρο. Αυτός ο μεγαλύτερος χώρος συνήθως αναφέρεται ως κύριος

χώρος. Στον κύριο χώρο ‘ζει’ μια βαρυτική θεωρία, που περιγράφεται από τη Γενική σχετικότητα. Ο ισχυρισμός της ολογραφίας είναι ότι αυτές οι δύο θεωρίες, η βαρύτητα στον κύριο χώρο και η κβαντική θεωρία πεδίου στο σύνορο, είναι ισοδύναμες. Οτιδήποτε συμβαίνει στον κύριο χώρο αντικατοπτρίζεται στο σύνορο και αντίστροφα.

Η έξτρα χωρική διάσταση r έχει μια πολύ φυσική εξήγηση. Σύμφωνα με την θεωρία Επακανονικοποίησης, οι κβαντικές θεωρίες πεδίου οργανώνονται κατά μια κλίμακα μήκους, ή ισοδύναμα κατά μια ενεργειακή κλίμακα. Η διάσταση r είναι αυτή η κλίμακα μήκους. Διαδικασίες που συμβαίνουν σε διαφορετικά βάθη στον κύριο χώρο πραγματοποιούνται σε διαφορετικά μήκη κύματος και ενέργειες στο σύνορο. Το όριο $r \rightarrow 0$ στον κύριο χώρο αντιστοιχεί στο υπεριώδες όριο (UV) της θεωρίας πεδίου. Αντίστοιχα για $r \rightarrow \infty$ προκύπτει το υπέρυθρο όριο (IR). Επομένως, η αντιστοιχία AdS/CFT γεωμετροποιεί την ομάδα κανονικοποίησης, με τη βοήθεια της γενικής σχετικότητας σε μια έξτρα διάσταση.

Τα πρώτα παραδείγματα ολογραφίας συνέδεσαν σύμμορφες σχετικιστικές θεωρίες πεδίου (CFTs) στο σύνορο με θεωρίες βαρύτητας σε Anti-de Sitter χώρο στον κύριο χώρο. Αυτός είναι ο λόγος που επικράτησε η ονομασία AdS/CFT αντιστοιχία. Παρ’ όλα αυτά, βρέθηκαν παραδείγματα με πιο γενικές αντιστοιχίες. Για παράδειγμα υπάρχουν μη σχετικιστικές θεωρίες που είναι δυϊκές με γεωμετρίες που δεν είναι AdS. Επομένως, η ονομασία αυτή είναι μια παραπλανητική και περιοριστική, αλλά συνεχίζεται να χρησιμοποιείται για ιστορικούς λόγους.

1.1 Η σχέση GKPW

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετηθεί ένα παράδειγμα όπου η γεωμετρία του κύριου χώρου είναι AdS. Στις συντεταγμένες Poincare, όπου καλύπτεται μόνο ένα τμήμα του χώρου και το σύνορο είναι επίπεδο, η μετρική έχει τη μορφή:

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} (dr^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) \quad (1.1)$$

όπου L η κλίμακα AdS. Οι δείκτες $\mu, \nu = 0, \dots, d-1$ τρέχουν στις συνιστώσες του συνόρου. Το γεγονός πως ο κύριος χώρος έχει AdS γεωμετρία συνεπάγεται ότι η θεωρία του συνόρου είναι σύμμορφη. Αυτό ισχύει διότι ο χώρος AdS έχει ως ισομετρία την ομάδα $SO(d, 2)$, η οποία είναι ίδια με την

ομάδα συμμορφίας της θεωρίας στο σύνορο.

Σε μια κβαντική θεωρία πεδίου, όλη φυσική πληροφορία περιέχεται στην γεννήτρια συνάρτηση, η οποία έχει την μορφή:

$$Z_{QFT}[\phi_0] = \int DA \exp\left(iS_{QFT} + i \int \phi_0 \mathcal{O}(A)\right) \quad (1.2)$$

Το σύμβολο A αναπαριστά όλα τα θεμελιώδη πεδία της θεωρίας. Η ποσότητα S_{QFT} είναι η δράση, ενώ ο $\mathcal{O}(A)$ είναι ένας τελεστής που εξαρτάται από τα πεδία της θεωρίας και είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Μπορεί να είναι ένα από τα θεμελιώδη πεδία ή ένας πιο σύνθετος τελεστής.

Ο τελεστής $\mathcal{O}(A)$ παράγεται από το ϕ_0 , με την έννοια ότι ισχύει:

$$\langle \mathcal{O}(A) \rangle = \frac{1}{Z_{QFT}} \frac{\partial Z_{QFT}}{\partial \phi_0}$$

Το ϕ_0 δεν έχει δυναμικές ιδιότητες. Αποτελεί περισσότερο ένα μαθηματικό τέχνασμα. Στα πλαίσια όμως της φυσικής συμπυκνωμένης ύλης το ϕ_0 είναι κάτι πιο πραγματικό. Μπορεί να είναι ένα ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο ή κάποια πυκνότητα πίεσης. Σε οποιαδήποτε περίπτωση ο στόχος είναι ο υπολογισμός της συνάρτησης Z_{QFT} .

Η βασική ιδέα της ολογραφίας είναι να μετατρέψει το ϕ_0 σε ένα δυναμικό πεδίο με τις δικές τους εξισώσεις κίνησης. Η δυναμική του πεδίου θα καθορίζεται στον κύριο χώρο, επομένως θα περιέχεται ένα πεδίο $\phi(x, r)$ στη βαρυτική θεωρία. Για να είναι σωστή η αντιστοιχία και να διατηρηθεί ένας έλεγχος στις ιδιότητες του πεδίου πρέπει να απαιτηθεί $\phi(x, r) \rightarrow \phi_0$ καθώς $r \rightarrow 0$.

Η θεμελιώδης σχέση της ολογραφίας είναι η λεγόμενη σχέση GKPW (που πήρε το όνομα της από τους Gubser, Klebanov, Polyakov και Witten), η οποία συνδέει την γεννήτρια συνάρτηση του συνόρου με την συνάρτηση επιμερισμού του κυρίου χώρου:

$$Z_{QFT}[\phi_0] = Z_{QG}[\phi \rightarrow \phi_0 \text{ στο σύνορο}]$$

όπου τα αρχικά QG σημαίνουν κβαντική βαρύτητα. Το δεύτερο μέλος μπορεί να θεωρηθεί ως η συνάρτηση επιμερισμού της κβαντικής βαρύτητας στον κύριο χώρο AdS. Αρχικά αυτή η σχέση δεν φαίνεται ιδιαίτερα χρήσιμη. Ενώ είναι δύσκολος ο υπολογισμός της γεννήτριας συνάρτησης για μια κβαντική θεωρία πεδίου με ισχυρές αλληλεπιδράσεις, στην περίπτωση της κβαντικής βαρύτητας είναι ακόμα πιο δύσκολος. Παρ' όλα αυτά, υπάρχει ένα όριο που το δεύτερο

μέλος είναι επιλύσιμο: όταν η βαρύτητα είναι κλασική. Τότε:

$$Z_{QFT}[\phi_0] \approx e^{iS_{\text{bulk}}} \Big|_{\phi \rightarrow \phi_0} \quad (1.3)$$

Τώρα το δεύτερο μέλος είναι η δράση του κύριου χώρου υπολογισμένη στις λύσεις των εξισώσεων κίνησης κάτω από την απαίτηση $\phi \rightarrow \phi_0$.

Η παραπάνω σχέση είναι πολύ ισχυρή και απλή. Αλλά προκύπτει το εξής ερώτημα: Δεδομένης μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου S_{QFT} πως μπορεί να βρεθεί η θεωρία του κύριου χώρου S_{bulk} στην οποία αντιστοιχεί; Κάτω από ποιες προϋποθέσεις θα είναι κλασική, επιτρέποντας έτσι την χρήση της (1.3);

Δυστυχώς δεν υπάρχει κάποιος προκαθορισμένος τρόπος κατά τον οποίο να μπορεί να βρεθεί η δυϊκή βαρυτική θεωρία μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου S_{QFT} . Για την εύρεση ζευγαριών θεωριών συνόρου-κύριου χώρου απαιτείται η χρήση της θεωρίας χορδών. Υπάρχουν πια πολλά παραδείγματα τέτοιων ζευγαριών. Το πιο διάσημο είναι η $N = 4$ υπερσυμμετρική Yang-Mills θεωρία σε $d = 3 + 1$ διαστάσεις που αντιστοιχεί σε μια θεωρία χορδών τύπου IIB συμπαγοποιημένη στον χώρο $\text{AdS} \times \mathbf{S}^5$. Σε κάθε περίπτωση, προκειμένου η θεωρία του κύριου χώρου να προσεγγίζεται από μια κλασική θεωρία βαρύτητας, πρέπει η θεωρία στο σύνορο να έχει έναν μεγάλο αριθμό βαθμών ελευθερίας N (για παράδειγμα η θεωρία βαθμίδας $\text{SU}(N)$ στο όριο 't Hooft $N \rightarrow \infty$).

1.2 Το λεξικό της Αντιστοιχίας

Αποδείχθηκε στην προηγούμενη ενότητα ότι οι πηγές στην θεωρία του συνόρου μετατρέπονται σε δυναμικά πεδία στον κύριο χώρο. Γενικά, για κάθε πεδίο στον κύριο χώρο υπάρχει και ένας τελεστής στο σύνορο. Επομένως ο αριθμός των πεδίων είναι πολύ μεγάλος (που έχει σχέση με το γεγονός ότι στα υπάρχοντα παραδείγματα ο κύριος χώρος είναι μια θεωρία χορδών με έναν τεράστιο αριθμό καταστάσεων υψηλής μάζας). Παρ' όλα αυτά, μόνο ένας μικρός αριθμός τελεστών είναι σημαντικός που αντιστοιχούν σε λίγα πεδία στον κύριο χώρο.

Το απλούστερο παράδειγμα αντιστοιχίζει έναν βαθμωτό τελεστή $\mathcal{O}(x)$ στο σύνορο σε ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(x, r)$ στον κύριο χώρο.

$$\phi(x, r) \longleftrightarrow \mathcal{O}(x)$$

Μπορούν να θεωρηθούν και πεδία με πιο γενικό σπίν. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι φερμιονικά πεδία στον κύριο χώρο αντιστοιχούν σε φερμιονικούς

τελεστές στο σύνορο και διανυσματικά πεδία στον κύριο χώρο αντιστοιχούν σε διανυσματικούς τελεστές στο σύνορο. Το πιο σημαντικό παράδειγμα είναι το ανυσματικό δυναμικό $A_A(x, r)$ στον κύριο χώρο, το οποίο αντιστοιχεί σε ένα διατηρούμενο ρεύμα στο σύνορο.

$$A_A(x, r) \longleftrightarrow J_\mu(x) \quad (1.4)$$

Η συμμετρία βαθμίδας στον κύριο χώρο υπονοεί διατήρηση του ρεύματος: $\partial^\mu J_\mu = 0$.

Το τελευταίο παράδειγμα είναι και το πιο σημαντικό. Όλες οι θεωρίες βαρύτητας έχουν μια μετρική g_{AB} στον κύριο χώρο. Στην θεωρία της ολογραφίας η μετρική αυτή αντιστοιχεί στον ταυστή ενέργειας-ορμής του συνόρου.

$$g_{AB}(x, r) \longleftrightarrow T_{\mu\nu}(x) \quad (1.5)$$

Η αναλλοιότητα διαφορομορφισμού στον κύριο χώρο εγγυάται την διατήρηση ενέργειας-ορμής: $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

1.3 Ένα παράδειγμα: Το Βαθμωτό Πεδίο

Πολλές βασικές ιδιότητες της αντιστοιχίας μεταξύ κύριου χώρου και συνόρου μπορούν να δειχθούν μέσα από ένα απλό μοντέλο. Για το παράδειγμα αυτό θα μελετηθεί ένα ελεύθερο βαθμωτό πεδίο σε έναν χώρο AdS $d + 1$ διαστάσεων με καθορισμένη μετρική. Δεν θα μελετηθεί το πλήρες πρόβλημα συμπεριλαμβανόμενης της βαρύτητας. Η δράση είναι:

$$S_{\text{scalar}} = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g} [g^{AB} \partial_A \phi \partial_B \phi + m^2 \phi] \quad (1.6)$$

όπου g^{AB} είναι η AdS μετρική (1.1). Η εξίσωση κίνησης για το βαθμωτό πεδίο είναι:

$$\partial_A (\sqrt{-g} g^{AB} \partial_B \phi) - \sqrt{-g} m^2 \phi = 0 \quad (1.7)$$

Εξαιτίας της συμμετρίας σε χωρικές μεταθέσεις, το πεδίο μπορεί να πάρει τη μορφή $\phi = \phi(r) e^{ik \cdot x}$. Η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή:

$$-r^{d+1} \partial_r (r^{-d+1} \partial_r \phi) + (k^2 r^2 + m^2 L^2) \phi = 0 \quad (1.8)$$

όπου $k^2 = -\omega^2 + \vec{k}^2$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι μια συνάρτηση Bessel. Για τον σκοπό όμως της παρούσας ανάλυσης, είναι απαραίτητη μόνο η συμπεριφορά της λύσης καθώς πλησιάζουμε το σύνορο, δηλαδή για $r = 0$. Για αυτόν τον λόγο, ο όρος k^2 θα αγνοηθεί και έστω ότι η λύση σε αυτό το όριο έχει τη μορφή:

$$\phi \sim r^\Delta \quad (1.9)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης προκύπτει ότι η μορφή αυτή είναι λύση αν $\Delta(\Delta - d) = m^2 L^2$, δηλαδή αν:

$$\Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2} \quad (1.10)$$

Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι η μάζα του βαθμωτού πεδίου, καθορίζει ουσιαστικά τη διάσταση του τελεστή $\mathcal{O}(x)$ στη θεωρία στο σύνορο. Δηλαδή:

$$\dim[\mathcal{O}] = \Delta \quad (1.11)$$

Αυτό είναι εύκολο να φανεί. Με έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων της μορφής $\{r, t, x^i\} \rightarrow \lambda\{r, t, x^i\}$ και $\phi_0 \rightarrow \lambda^{\Delta-d}\phi_0$, από τον ορισμό (1.2) προκύπτει εύκολα το ζητούμενο.

Μπορεί να αποδειχθεί, πως η λύση της εξίσωσης στο όριο $r = 0$ έχει τη γενική μορφή:

$$\phi(r) \rightarrow \left(\frac{r}{L}\right)^{\Delta_-} [\phi_0(x) + \dots] + \left(\frac{r}{L}\right)^{\Delta_+} [\phi_1(x) + \dots] \quad (1.12)$$

Στην προηγούμενη ενότητα διατυπώθηκε πως για να είναι σωστή η αντιστοιχία θα πρέπει να απαιτηθεί $\phi(x, r) \rightarrow \phi_0$ στο σύνορο. Βλέποντας τη μορφή της λύσης στο σύνορο, φαίνεται πως ο ισχυρισμός αυτός δεν ήταν απόλυτα σωστός. Η σωστή συνοριακή συνθήκη για να επιλυθούν σωστά οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\phi \rightarrow \left(\frac{r}{L}\right)^{\Delta_-} \phi_0 \quad (1.13)$$

καθώς το ϕ πλησιάζει στο σύνορο. Οπότε η συνάρτηση $\phi_0(x)$ ερμηνεύεται ως πηγή στην θεωρία στο σύνορο.

Τέλος, για να είναι οι ρίζες Δ_{\pm} πραγματικές πρέπει να ισχύει:

$$m^2 \geq -\left(\frac{d}{2L}\right)^2 = m_{BF}^2 \quad (1.14)$$

Δηλαδή, επιτρέπεται στη μάζα του βαθμωτού πεδίου να πάρει κάποιες μικρές αρνητικές τιμές. Αυτό το όριο ονομάζεται όριο Breitenlohner-Freedman. Τα βαθμωτά πεδία στον χώρο AdS μπορούν να είναι ταχυονικά διατηρώντας την ευστάθειά τους.

1.4 Γραμμική Απόκριση

Στην προηγούμενη ενότητα, η συνάρτηση $\phi_0(x)$ στη σχέση (1.12) ερμηνεύτηκε ως η πηγή στη θεωρία πεδίου. Οπότε γεννάται το εξής ερώτημα: Ποια είναι η ερμηνεία της συνάρτησης $\phi_1(x)$;

Η απάντηση αποτελεί το κλειδί σε πολλούς υπολογισμούς στα πλαίσια της ολογραφίας:

$$\phi_1(x) = \langle \mathcal{O}(x) \rangle \quad (1.15)$$

Η τιμή της συνάρτησης $\phi_1(x)$ μετράει την συνάρτηση ενός σημείου του τελεστή $\mathcal{O}(x)$ παρουσία της πηγής ϕ_0 . Με άλλα λόγια η συνάρτηση $\phi_1(x)$ δίνει την απόκριση του τελεστή στην πηγή.

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης θα ξεκινήσει με τον υπολογισμό της συνάρτησης ενός σημείου σε μια κβαντική θεωρία πεδίου ο οποίος πραγματοποιείται παραγωγίζοντας τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z_{QFT}} \frac{\partial Z_{QFT}[\phi_0]}{\partial \phi_0} = \frac{\partial \log Z_{QFT}[\phi_0]}{\partial \phi_0} = \frac{\partial S_{\text{bulk}}[\phi_0]}{\partial \phi_0} \quad (1.16)$$

όπου στην τελευταία ισότητα έγινε χρήση της σχέσης (1.3). Η $S_{\text{bulk}}[\phi_0]$ είναι η on-shell δράση του κύριου χώρου με σταθερές συνοριακές συνθήκες. Θα μελετηθεί η συμπεριφορά αυτής της δράσης καθώς θα μεταβληθούν οι συνοριακές συνθήκες.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με την θεωρία Hamilton-Jacobi στην κλασική μηχανική. Στην περίπτωση ενός σημειακού σωματιδίου, όταν μεταβάλλεται η δράση με τη θέση q , εμφανίζονται δύο είδη όρων:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_i}^{t_f} \quad (1.17)$$

Κατά τον υπολογισμό των εξισώσεων κίνησης σταθεροποιώντας τις συνο-

ριακές συνθήκες έτσι ώστε $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$, ο δεύτερος όρος μηδενίζεται. Επιβάλλοντας $\delta S = 0$ προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης Euler-Lagrange.

Αλλά στην θεωρία Hamilton-Jacobi ακολουθείται η αντίστροφη πορεία. Υπολογίζεται η δράση στις εξισώσεις κίνησης. Επομένως, η on-shell δράση εξαρτάται μόνο από τις συνοριακές τιμές των πεδίων $q_i = q(t_i)$ και $q_f = q(t_f)$. Έστω ότι μεταβάλλεται μόνο η τελική θέση του σωματιδίου. Τότε στην εξίσωση (1.17) μένει μόνο ο δεύτερος όρος και προκύπτει

$$\frac{\partial S[q_i; q_f]}{\partial q_f} = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right|_{t_f} = p_f \quad (1.18)$$

Γενικεύοντας τον παραπάνω συλλογισμό για το βαθμωτό πεδίο στον χώρο AdS, δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι:

$$\frac{\partial S}{\partial \phi_0} = \left(\frac{r}{L} \right)^{\Delta-} \left. \frac{\partial L}{\partial (\partial_r \phi)} \right|_{r=0} \quad (1.19)$$

όπου ο έξτρα παράγοντας $(r/L)^{\Delta-}$ προκύπτει εξαιτίας της συνοριακής συνθήκης (1.13). Επομένως, υπολογίζοντας τη μερική παράγωγο προκύπτει

$$\langle \mathcal{O} \rangle \sim \phi_1 \quad (1.20)$$

Όλες σχεδόν οι εφαρμογές της ολογραφίας χρησιμοποιούν κάποια εκδοχή του υπολογισμού που πραγματοποιήθηκε παραπάνω. Υπάρχει μια γενική μεθοδολογία που ακολουθείται σε όλους τους ολογραφικούς υπολογισμούς, η οποία παρατίθεται παρακάτω

- Επιλογή του ϕ_0 για $r \rightarrow 0$
- Επειδή οι εξισώσεις κίνησης είναι δευτεροτάξιες, απαιτείται ακόμα μια συνοριακή συνθήκη. Συνήθως επιβάλλεται στο υπέρυθρο της γεωμετρίας (δηλαδή καθώς $r \rightarrow \infty$). Το είδος της συνοριακής καθορίζεται από την περίπτωση. Στην περίπτωση μιας Ευκλείδειας μετρικής συνήθως απαιτείται τα πεδία να μην αποκλίνουν στο εσωτερικό της γεωμετρίας. Για μια Λορεντζιανή μετρική επιβάλλεται μια εισερχόμενη συνοριακή συνθήκη στο εσωτερικό.
- Με αυτές τις συνοριακές συνθήκες, επιλύονται οι εξισώσεις κίνησης και υπολογίζεται η απόκριση του συστήματος ϕ_1

Κεφάλαιο 2

Ολογραφική Υπεραγωγιμότητα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτυχθεί η θεωρία του Ολογραφικού υπεραγωγού. Χρησιμοποιώντας την έννοια της ολογραφίας που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα κατασκευαστεί ένα μοντέλο που καταλήγει να περιγράφει έναν υπεραγωγό. Πρώτα όμως θα μελετηθούν τα βασικά χαρακτηριστικά της αγωγιμότητας και στη συνέχεια θα παρουσιαστεί το μοντέλο Drude το οποίο θα δώσει ένα πλαίσιο στα αποτελέσματα των υπολογισμών που θα γίνουν.

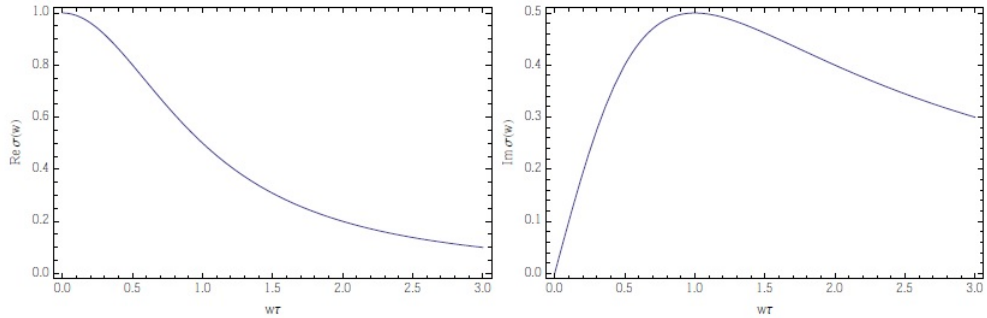
2.1 Τα Βασικά της Αγωγιμότητας

Σε απλοϊκή μορφή, ο νόμος του Ohm έχει τη μορφή $V = IR$ και συνδέει την πτώση τάσης V με το επαγόμενο ρεύμα I . Ο λόγος τους είναι η αντίσταση R . Χρησιμοποιώντας ποιο αυστηρό συμβολισμό, ο νόμος αυτός συνδέει την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος $\vec{j}(t, \vec{x})$ εξαιτίας της εφαρμογής ενός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}(t, \vec{x})$.

Το ηλεκτρικό πεδίο θα θεωρηθεί σταθερό στον χώρο, αλλά μεταβαλλόμενο με τον χρόνο. Με αυτήν την παραδοχή είναι πιο βολικό να ληφθούν οι μετασχηματισμοί Fourier των πεδίων, που ταλαντώνονται σε κάποια συχνότητα ω .

$$\vec{E}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \vec{E}(\omega), \quad \vec{j}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \vec{j}(\omega) \quad (2.1)$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, ο νόμος του Ohm έχει τη μορφή:



Σχήμα 2.1: Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας Drude

$$\vec{j}(\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\omega) \quad (2.2)$$

Εαν το ηλεκτρικό πεδίο διεγερθεί σε κάποια συχνότητα ω τότε το σύστημα αποκρίνεται στην ίδια συχνότητα ω . Αυτό είναι το όριο της γραμμικής απόκρισης. Ο λόγος $\sigma(\omega)$ ονομάζεται οπτική αγωγιμότητα. Λόγω του ότι χρησιμοποιούνται οι μετασχηματισμοί Fourier των πεδίων, η σ είναι μιγαδική. Το πραγματικό κομμάτι εκφράζει τη συμβατική αγωγιμότητα: δηλαδή περιγράφει τη διασπορά του ηλεκτρικού ρεύματος. Το φανταστικό κομμάτι περιγράφει την απόκριση του συστήματος.

2.1.1 Το μοντέλο Drude

Το μοντέλο Drude αποτελεί μια απλή περιγραφή της μεταφοράς φορτίων. Βασίζεται στην παραδοχή ότι φορείς φορτίων, που θυμίζουν μπάλες του μπιλιάρδου, ανακλώνται από άλλα εμπόδια σε ένα στερεό. Στη βάση του είναι Νευτώνεια φυσική. Παρ' όλα αυτά, είναι εντυπωσιακό πως πολλά από τα χαρακτηριστικά του μοντέλου έχουν επιβιώσει πολλές επαναστάσεις στη φυσική και θα χρησιμοποιηθούν και στους ολογραφικούς υπολογισμούς των επόμενων κεφαλαίων.

Έστω ένα σωματίο μάζας m , φορτίου q και ταχύτητας \vec{u} . Η βασική αρχή του μοντέλου είναι ο Νευτώνειος νόμος $F = ma$, όπου η δύναμη οφείλεται από ένα ηλεκτρικό πεδίο και έναν γραμμικό όρο τριβής:

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{m}{\tau} \vec{u} = q\vec{E} \quad (2.3)$$

Ο παράγοντας τ ονομάζεται χρόνος σκέδασης. Μπορεί να θεωρηθεί ως ο μέσος χρόνος κατά τον οποίο το σωματίο ταξιδεύει χωρίς να συγκρουστεί.

Το ρεύμα είναι $\vec{j} = nq\vec{u}$ όπου n είναι η πυκνότητα των φορέων φορτίου. Για ένα εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο, με συχνότητα ω , πρέπει να λύσουμε την εξίσωση (2.3) για να καθορίσουμε το ηλεκτρικό ρεύμα $\vec{j}(\omega)$. Από τον ορισμό της αγωγιμότητας τότε προκύπτει:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \quad (2.4)$$

όπου η DC αγωγιμότητα στο όριο $\omega \rightarrow 0$ είναι:

$$\sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m} \quad (2.5)$$

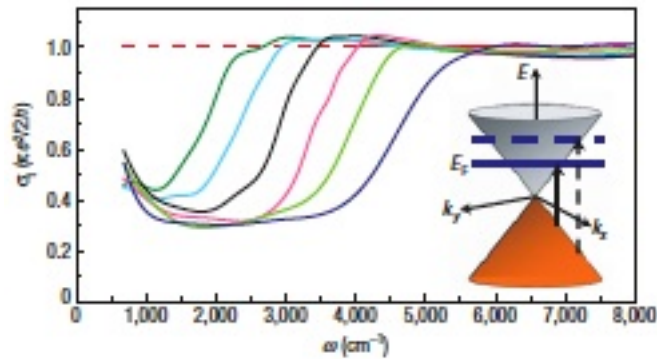
Στο σχήμα 2.1 φαίνονται το φανταστικό και το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας. Το πραγματικό μέρος εμφανίζει μια αιχμή για συχνότητες $\omega < 1/\tau$, αυτή η αιχμή θα αναφέρεται ως αιχμή Drude. Αυτή είναι η αγωγιμότητα ενός ελεύθερου σωματίου. Μπορεί να ερμηνευθεί με τον εξής τρόπο: το σωματίο διεγείρεται τόσο γρήγορα, που κάνει μεταβολή και αλλάζει κατεύθυνση πριν συγκρουστεί με οτιδήποτε.

2.1.2 Δημιουργία Σωματιδίων-Οπών

Σε υψηλές συχνότητες υπάρχει άλλο ένα φαινόμενο που συνεισφέρει στην αγωγιμότητα, το οποίο είναι κβαντικό και δεν μπορεί να ερμηνευθεί από το μοντέλο Drude. Στη φυσική υψηλών ενεργειών ονομάζεται δημιουργία ζεύγους σωματιδίου-αντισωματιδίου. Στη φυσική συμπυκνωμένης ύλης ονομάζεται δημιουργία σωματιδίου-οπής.

Το σχήμα 2.2 απεικονίζει το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας του γραφένιου. Το γραφένιο μπορεί να θεωρηθεί ως μια σχετικιστική θεωρία πεδίου στο εργαστήριο. Είναι μια σχετικά απλή κβαντική θεωρία πεδίου σε $d = 2 + 1$ διαστάσεις με 4 ελεύθερα φερμιόνια Dirac. Τα γραφήματα που απεικονίζονται στο σχήμα έχουν μετρηθεί σε πεπερασμένο χημικό δυναμικό. Οι καμπύλες που βρίσκονται προς τα δεξιά αντιστοιχούν σε υψηλότερη ενέργεια Fermi E_F .

Σε χαμηλές συχνότητες φαίνεται η απαρχή της αιχμής Drude. Σε υψηλότερες συχνότητες όμως, η αγωγιμότητα αρχίζει να αυξάνεται, σηματοδοτώντας την ύπαρξη νέων φορέων φορτίου, προτού σταθεροποιηθεί ξανά. Σε αυτές τις συχνότητες τα ηλεκτρόνια μπορούν να διεγερθούν από τη γεμάτη ζώνη σθένους στη ζώνη αγωγιμότητας και αυτά τα ζευγάρια σωματιδίων-οπών συνεισφέρουν



Σχήμα 2.2: Η οπτική αγωγιμότητα του γραφένιου

στην πυκνότητα φορτίου (Απαιτείται ενέργεια $2E_F$, διότι το διεγερμένο ηλεκτρόνιο πρέπει να έχει την ίδια ορμή με την οπή).

Πολύ ενδιαφέρουσα φυσική κρύβεται στην περιοχή όπου η αγωγιμότητα σταθεροποιείται σε πολύ υψηλή ενέργεια. Το γεγονός ότι η αγωγιμότητα δεν αλλάζει, δείχνει ότι έχουμε μια θεωρία που δεν εξαρτάται από κάποια κλίμακα: σε όλες τις κλίμακες υπάρχει η ίδια φυσική. Αυτό είναι χαρακτηριστικό των θεωριών σε $d = 2+1$ διαστάσεις. Με μια απλή διαστατική ανάλυση, η διάσταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι πάντα $[E] = 2$. Η διάσταση μιας διατηρούμενης πυκνότητας ρεύματος σε d χωροχρονικές διαστάσεις είναι πάντα $[J] = d-1$. Αυτό σημαίνει από τον νόμο του Ohm ότι η αγωγιμότητα έχει διάσταση $[\sigma] = d-3$. Οπότε σε $d = 2+1$ διαστάσεις η αγωγιμότητα είναι αδιάστατη, οπότε σε κάθε σύμμορφη θεωρία πεδίου αποκτάει μια σταθερή τιμή. Το μέγεθος αυτής της τιμής υποδεικνύει το πλήθος των βαθμών ελευθερίας της θεωρίας. Στη γενική περίπτωση είναι ο συντελεστής της συνάρτησης συσχέτισης $\langle JJ \rangle$. Στην παρούσα περίπτωση, όντως αποδεικνύεται ότι υπάρχουν 4 ηλεκτρόνια Dirac.

2.2 Τι είναι ένας υπεραγωγός;

Παρατηρήθηκε στις αρχές του 20ου αιώνα ότι η ηλεκτρική αντίσταση των περισσότερων μετάλλων μειώνεται απότομα στο μηδέν όταν η θερμοκρασία τους μειωθεί κάτω από μια κρίσιμη θερμοκρασία. Αυτά τα υλικά ονομάστηκαν υπεραγωγοί. Μια δεύτερη ανεξάρτητη ιδιότητα αυτών των υλικών είναι το φαινόμενο Meissner: Ένα μαγνητικό πεδίο εκδιώχνεται από το εσωτερικό του υπεραγωγού για $T < T_c$. Αυτό το φαινόμενο αποτελεί παράδειγμα τέλει διαμαγνητισμού και δεν προκύπτει από την τέλεια αγωγιμότητα (που από μόνη της θα υπονοούσε ότι ένα μαγνητικό πεδίο παγιδύεται στο εσωτερικό του δείγματος). Μια φαινομενολογική περιγραφή αυτών των δύο ιδιοτήτων δώθηκε για πρώτη φορά από τους αδερφούς London το 1935 με την απλή εξίσωση $J_i \propto A_i$. Πέρνοντας την πρώτη παράγωγο προκύπτει ότι $E_i \propto \partial J_i / \partial t$, που δείχνει ότι τα ηλεκτρικά πεδία επιταχύνουν τα υπεραγωγίμα ηλεκτρόνια αντί να διατηρούν την ταχύτητα τους σταθερή όπως προκύπτει από τον νόμο του Ohm με πεπερασμένη αγωγιμότητα. Λαμβάνοντας των στροβιλισμό των δύο μελών και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα με τις εξισώσεις Maxwell δίνει $\nabla^2 B_i \propto B_i$ δείχνοντας την μείωση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του υπεραγωγού.

Το 1950, οι Landau και Ginzburg περιγράψανε την υπεραγωγιμότητα με όρους μιας αλλαγής φάσης δεύτερης τάξης με παράμετρο τάξης ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο ϕ . Η πυκνότητα των υπεραγωγίμων ηλεκτρονίων δίνεται από τη σχέση $n_s = |\phi(x)|^2$. Η συνεισφορά του ϕ στην ελεύθερη ενέργεια θεωρείται ότι έχει τη μορφή:

$$F = \alpha(T - T_c)|\phi|^2 + \frac{\beta}{2}|\phi|^4 + \dots \quad (2.6)$$

όπου α και β είναι θετικές σταθερές και οι τελείες υποδηλώνουν όρους που εξαρτώνται από παραγώγους και ανώτερες δυνάμεις του ϕ . Φαίνεται ξεκάθαρα ότι για $T > T_c$ το ελάχιστο της ελεύθερης ενέργειας είναι για $\phi = 0$ ενώ για $T < T_c$ το ελάχιστο αποκτάται για μια μη μηδενική τιμή του ϕ . Ο μηχανισμός αυτός είναι παρόμοιος με τον μηχανισμό Higgs στη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων και συνδέεται με την παραβίαση μιας $U(1)$ συμμετρίας. Η εξίσωση London προκύπτει από αυτήν την αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας.

Μια πιο ολοκληρωμένη θεωρία για την υπεραγωγιμότητα δώθηκε από τους Bardeen, Cooper και Schrieffer το 1957 και είναι γνωστή ως θεωρία BCS. Δείξανε ότι οι αλληλεπιδράσεις με τα φωνόνια μπορούν να προκαλέσουν ζευγάρια ηλεκτρονίων με αντίθετο spin να δεσμευθούν και να σχηματίσουν ένα φορτι-

σμένο μποζόνιο που ονομάζεται ζευγάρι Cooper. Για θερμοκρασίες που είναι χαμηλότερες από την κρίσιμη θερμοκρασία T_c , εμφανίζεται μια αλλαγή φάσης δεύτερης τάξης και αυτά τα μποζόνια συμπυκνώνονται. Η DC αγωγιμότητα απειρίζεται και δημιουργείται ένας υπεραγωγός. Τα ζευγάρια δεν είναι δεσμευμένα με ισχυρές αλληλεπιδράσεις και συνήθως έχουν μέγεθος που είναι πολύ μεγαλύτερο από τις τυπικές αποστάσεις του πλέγματος. Στην υπεραγώγιμη θεμελιώδη κατάσταση, δημιουργείται ένα ενεργειακό χάσμα Δ για φορτισμένες διεγέρσεις. Το χάσμα αυτό συνήθως συνδεεται με την κρίσιμη θερμοκρασία σύμφωνα με τη σχέση $\Delta \approx 1.7T_c$. Οι φορτισμένες διεγέρσεις είναι ντυμένα ηλεκτρόνια που αποκαλούνται ημί-σωματίδια. Το χάσμα στο ενεργειακό φάσμα οδηγεί στην εμφάνιση ενο χάσματος στην οπτική αγωγιμότητα (που εξαρτάται από τη συχνότητα). Εάν ένα φωτόνιο συχνότητας ω συγκρουστεί με τον υπεραγωγό πρέπει να παράξει δύο ημί-σωματίδια. Η ενέργεια δέσμευσης του ζευγαριού Cooper είναι πολύ μικρή, αλλά η ενέργεια του κάθε ημί-σωματιδίου είναι Δ , οπότε το χάσμα στην οπτική αγωγιμότητα είναι $\omega_g = 2\Delta \approx 3.5T_c$.

Κάποτε θεωρούταν ότι η υψηλότερη κρίσιμη θερμοκρασία T_c για έναν BCS υπεραγωγό ήταν περίπου $30K$. Όμως το 2001, το MgB_2 βρέθηκε να είναι υπεραγώγιμο στους $40K$ και πιστεύεται ότι περιγράφεται από τη θεωρία BCS. Υπάρχει κόσμος που υποθέτει ότι η θεωρία BCS μπορεί να περιγράψει υπεραγωγούς με $T_c = 200K$.

Μια νέα οικογένεια υπεραγωγών με υψηλή κρίσιμη θερμοκρασία T_c ανακαλύφθηκε το 1986. Είναι χαλκούχοι και η υπεραγωγιμότητα βρίσκεται κατά μήκος των επιπέδων CuO_2 . Έως και σήμερα, η υψηλότερη γνωστή T_c (σε ατμοσφαιρική πίεση) είναι $T_c = 134K$ για ένα σύμπλοκο υδραργύρου, βαρίου και οξειδίου του χαλκού. Με εφαρμογή πίεσης, η T_c αυξάνεται στους $160K$. Μια άλλη οικογένεια υπεραγωγών ανακαλύφθηκαν το 2008, βασισμένοι στον σίδηρο και όχι στον χαλκό. Η υψηλότερη T_c έως και τώρα είναι $56K$. Αυτά τα υλικά έχουν δομή στρωμάτων και η αγωγιμότητα συνδέεται πάλι με δι-διάστατα επίπεδα. Υπάρχουν ενδείξεις ότι ο σχηματισμός ζευγαριών ηλεκτρονίων συμβαίνει και σε αυτά τα υλικά με υψηλές T_c , αλλά ο μηχανισμός σύνδεσης δεν είναι απόλυτα κατανοητός. Σε αντίθεση με την θεωρία BCS, οι αλληλεπιδράσεις είναι ισχυρές, οπότε οι μηχανισμοί αυτοί δεν μπορούν να εξηγηθούν σε αυτό το θεωρητικό πλαίσιο. Η ολογραφία αποτελεί ένα νέο εργαλείο για τη μελέτη των θεωριών με ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Ένας λόγος για την κατασκευή ενός ολογραφικού υπεραγωγού είναι η ύπαρξη μιας μικροσκοπικής (με άλλα λόγια, ενεργής) περιγραφής της εμφάνισης της υπεραγωγιμότητας στην οποία

δεν υπάρχουν ημί-σωματίδια: Δεν υπάρχουν ηλεκτρόνια ούτε κάποια αλληλεπίδραση που λειτουργεί ως σύνδεσμος. Στη θέση αυτού υπάρχει μια θεωρία με ισχυρές αλληλεπιδράσεις στην οποία ένας φορτισμένος τελεστής συμπεκνώνεται για θερμοκρασίες χαμηλότερης μιας κρίσιμης θερμοκρασίας. Επομένως, οι ολογραφικοί υπεραγωγοί αποτελούν της απαρχές για μια περιγραφή της υπεραγωγιμότητας χωρίς ηλεκτρόνια.

Το μοντέλο του ολογραφικού υπεραγωγού που θα περιγραφεί στις παρακάτω ενότητες έχει πολλές ομοιότητες με τη θεωρία Landau-Ginzburg για την υπεραγωγιμότητα. Είναι σημαντικό να τονισθεί εδώ ότι η αντιστοιχία AdS/CFT δεν αποτελεί μια ενεργό θεωρία πεδίου για χαμηλές ενέργειες, αλλά τη δυϊκή περιγραφή μιας μικροσκοπικής θεωρίας. Η κλασική φύση της βαρυτικής θεωρίας προκύπτει στο όριο όπου $N \rightarrow \infty$ (όπως αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο) και όχι από το γεγονός ότι η θεωρία περιγράφεται από μεγάλα μήκη κύματος και χαμηλές ενέργειες.

2.3 Τα ελάχιστα χαρακτηριστικά ενός Ολογραφικού Υπεραγωγού

Πως θα κατασκευαστεί ένα μοντέλο για τον ολογραφικό υπεραγωγό; Τα ελάχιστα χαρακτηριστικά είναι τα ακόλουθα. Σε έναν υπεραγωγό είναι απαραίτητη η έννοια της θερμοκρασίας. Στην πλευρά της βαρύτητας, αυτή η απαίτηση καλύπτεται από μια μαύρη τρύπα. Το 1970 ο Hawking (ακολουθώντας τη δουλειά του Bekenstein και άλλων φυσικών) έδειξε ότι οι στατικές μαύρες τρύπες μπορούν να θεωρηθούν ως θερμοδυναμικά σώματα με θερμοκρασία T που συνδέεται με την επιφανειακή βαρύτητα k με τη σχέση $T = k/2\pi$. Στην ολογραφία, η θερμοκρασία Hawking αντιστοιχίζεται με την θερμοκρασία της δυϊκής θεωρίας πεδίου. Όπως έχει αναφερθεί, επειδή η ολογραφία απαιτεί ο χώρος να τείνει ασυμπτωτικά σε έναν χώρο anti de Sitter (AdS) στο άπειρο, θα μελετηθούν μαύρες τρύπες εμβαπτισμένες σε έναν χώρο AdS. Σε αντίθεση με τις ασυμπτωτικά επίπεδες μαύρες τρύπες, η θερμοκρασία τους αυξάνεται με τη μάζα τους, δηλαδή έχουν θετική ειδική θερμοχωρητικότητα όπως γνωστά μη βαρυτικά συστήματα. Υπάρχουν επίσης επίπεδες AdS μαύρες τρύπες, οι οποίες έχουν μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Αυτές οι μαύρες τρύπες έχουν πάντα θετική θερμοχωρητικότητα.

Για να μπορέσει να μελετηθεί η διάδοση φορτίου σε μια θεωρία πεδίου απαιτείται η χρήση της θεωρίας Maxwell-Einstein στον κύριο χώρο. Οι δυναμικές

ιδιότητες του τελεστή ρεύματος J^μ περιγράφονται από την κλασική δυναμική του φωτονικού πεδίου A_μ . Επιπλέον, η υπεραγωγιμότητα οφείλεται στην αυθόρμητη παραβίαση μιας ηλεκτρομαγνητικής συμμετρίας $U(1)$. Αυθόρμητη παραβίαση μιας συμμετρίας συμβαίνει όταν ένας φορτισμένος τελεστής λαμβάνει μια μη μηδενική αναμενόμενη τιμή στο κενό. Επομένως για το μοντέλο του υπεραγωγού, απαιτείται η ύπαρξη ενός συμπυκνώματος. Σύμφωνα με τις σχέσεις (1.2) και (1.3) αυτό θα περιγράφεται στον κύριο χώρο από κάποιο πεδίο που είναι συζευγμένο με τη βαρύτητα. Ένα μη μηδενικό συμπύκνωμα αντιστοιχεί σε ένα μη μηδενικό πεδίο έξω από τη μαύρη τρύπα. Αυτό αποκαλείται ‘μαλλιά’ (hair) της μαύρης τρύπας. Οπότε για την περιγραφή ενός υπεραγωγού, πρέπει να βρεθεί μια μαύρη τρύπα με μη μηδενικά μαλλιά σε χαμηλές θερμοκρασίες και μηδενικά μαλλιά για υψηλές θερμοκρασίες. Πιο συγκεκριμένα, απαιτείται μια συνηθισμένη Schwarzschild ή Reissner-Nordstrom AdS μαύρη τρύπα (που είναι σταθερή σε όλες τις θερμοκρασίες) που να παρουσιάζει αστάθεια στη δημιουργία μαλλιών σε χαμηλές θερμοκρασίες. Αυτό δεν είναι εύκολο. Υπάρχουν θεωρήματα no-hair, τα οποία λένε ότι συγκεκριμένα πεδία ύλης πρέπει να είναι τετριμένα έξω από μια μαύρη τρύπα. Η βασική αρχή στην οποία βασίζονται αυτά τα θεωρήματα είναι ότι η ύλη που βρίσκεται στο εξωτερικό μιας μαύρης τρύπας θέλει να καταρεύσει στον ορίζοντα της (ή να ακτινοβοληθεί στο άπειρο στην περίπτωση μιας ασυμπτωτικά επίπεδης μαύρης τρύπας). Παρ’ όλα αυτά, δεν υπάρχει κάποιο γενικό θεώρημα. Κάθε πεδίο ύλης πρέπει να μελετηθεί μεμονωμένα. Το αποτέλεσμα είναι αρκετά θεωρήματα μοναδικότητας για μαύρες τρύπες τα οποία διατυπώνουν ότι οι στατικές μαύρες τρύπες προσδιορίζονται με μοναδικό τρόπο από τα διατηρούμενα φορτία τους: μάζα, στροφορμή και ηλεκτρομαγνητικό φορτίο. Αυτά τα θεωρήματα συνήθως απαιτούν γραμμικά πεδία ύλης ή βαθμωτά με συγκεκριμένα δυναμικά $V(\phi)$. Αντιπαράδειγμα σε γενικά no-hair θεωρήματα είναι γνωστά από τις αρχές του 1990. Για παράδειγμα έχειδειχθεί ότι στατικά πεδία Yang-Mills μπορούν να υπάρξουν έξω από τον ορίζοντα.

Στα πλαίσια της θεωρίας χορδών υπάρχουν πολλές μαύρες τρύπες που διαθέτουν βαθμωτά μαλλιά και είναι δελεαστικό να χρησιμοποιηθεί μία από αυτές για το μοντέλο του υπεραγωγού. Αλλά αν η δράση περιέχει έναν όρο της μορφής $e^{2\alpha\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, το μοντέλο θα αποτύχει. Σε αυτήν την περίπτωση ο όρος F^2 αποτελεί πηγή για το ϕ , οπότε όλες οι φορτισμένες μαύρες τρύπες έχουν μη μηδενικό ϕ . Αυτά τα δευτερεύοντα μαλλιά δεν είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα, διότι δεν μηδενίζονται σε υψηλές θερμοκρασίες. Ένα γενικό επιχείρημα

κατά της δημιουργίας βαθμωτών μαλλιών σε AdS μαύρες τρύπες δώθηκε από τον Hertog. Θεώρησε ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο και ένα τυχαίο δυναμικό $V(\phi)$ (με αρνητικό ακρότατο έτσι ώστε ο AdS να αποτελεί λύση) και έδειξε ότι ουδέτερες AdS μαύρες τρύπες μπορούν να αναπτύξουν βαθμωτά μαλλιά αν και μόνο αν ο χώρος AdS είναι ασταθής, κάτι το οποίο δεν μπορεί να είναι επιτρεπτό.

Μια αναπάντεχα απλή λύση στο πρόβλημα αυτό βρέθηκε από τον Gubser. Επιχειρηματολόγησε ότι ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο γύρω από μια φορτισμένη μαύρη τρύπα θα έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Θεώρησε την εξής δράση:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{6}{L^2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |\nabla\Psi - iqA\Psi|^2 - m^2|\Psi|^2 \right) \quad (2.7)$$

Αυτό το μοντέλο είναι απλά γενική σχετικότητα με αρνητική κοσμολογική σταθερά $\Lambda = -3/L^2$ συζευγμένη με ένα πεδίο Maxwell και ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο με μάζα m και φορτίο q . Είναι εύκολο να κατανοηθεί γιατί μαύρες τρύπες σε αυτήν τη θεωρία μπορεί να αναπτύσσουν αστάθεια ως προς τη δημιουργία βαθμωτών μαλλιών. Για μια ηλεκτρικά φορτισμένη μαύρη τρύπα, η ενεργός μάζα του Ψ είναι $m_{\text{eff}}^2 = m^2 + q^2 g^{tt} A_t^2$. Όμως, ο τελευταίος όρος είναι αρνητικός, οπότε υπάρχει μια περίπτωση η m_{eff}^2 να γίνει επαρκώς αρνητική κοντά στον ορίζοντα έτσι ώστε να αποσταθεροποιήσει το βαθμωτό πεδίο.

Θα αποδειχθεί ότι οι μαύρες τρύπες σε αυτήν τη θεωρία αναπτύσσουν βαθμωτά μαλλιά σε χαμηλές θερμοκρασίες. Ένας λόγος που αυτό το απλό μοντέλο δεν είχε παρατηρηθεί νωρίτερα είναι ότι δεν δουλεύει για ασυμπτωτικά επίπεδες μαύρες τρύπες. Οι συνοριακές συνθήκες AdS είναι κρίσιμες για την επιτυχία του μοντέλου. Ένας τρόπος να κατανοηθεί η διαφορά είναι με το επόμενο κβαντικό επιχείρημα. Έστω Q_i το αρχικό φορτίο της μαύρης τρύπας. Εάν η ποσότητα qQ_i είναι αρκετά μεγάλη, ακόμα και φορτισμένες μαύρες τρύπες που διαθέτουν το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο με μηδενική θερμοκρασία Hawking θα δημιουργήσουν ζευγάρια φορτισμένων σωματιδίων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το ηλεκτρικό πεδίο κοντά στον ορίζοντα είναι τόσο ισχυρό έτσι ώστε να έλξει ζευγάρια αντίθετα φορτισμένων σωματιδίων από το κενό μέσω του μηχανισμού Schwinger της κανονικής θεωρίας πεδίου. Το σωματίδιο με το αντίθετο φορτίο από αυτό της μαύρης τρύπας πέφτει μέσα στον ορίζοντα, μειώνοντας το Q_i , ενώ το άλλο σωματίδιο διαφεύγει μακριά. Σε έναν ασυμπτωτικά επίπεδο χωροχρόνο, αυτά τα σωματίδια καταλήγουν στο άπειρο, οπότε

το τελικό αποτέλεσμα είναι μια κλασική Reissner-Nordstrom μαύρη τρύπα με φορτίο $Q_f < Q_i$. Στον χώρο AdS, τα φορτισμένα σωματίδια δεν μπορούν να διαφύγουν αφού η αρνητική κοσμολογική σταθερά δρα σαν παγίδα, επομένως μένουν έξω από τον ορίζοντα. Αυτό το αέριο φορτισμένων σωματιδίων είναι η κβαντική περιγραφή των μαλλιών μιας μαύρης τρύπας.

Τέλος, όπως έχει αναφερθεί στην πρώτη ενότητα, στα πλαίσια της ολογραφίας, οι συμμετρίες βαθμίδας στον κύριο χώρο αντιστοιχούν σε ολικές συμμετρίες στην δυϊκή θεωρία πεδίου. Οπότε, παρότι τα βαθμωτά μαλλιά παραβιάζουν μια τοπική $U(1)$ συμμετρία στον κύριο χώρο, η δυϊκή περιγραφή αποτελείται από ένα συμπύκνωμα που παραβιάζει μια ολική $U(1)$ συμμετρία. Οπότε η δυϊκή θεωρία είναι ένα υπερευστό και όχι ένας υπεραγωγός. Παρόλα αυτά, η θεωρία μπορεί να θεωρηθεί ως μοντέλο για έναν υπεραγωγό στο όριο της ασθενούς βαθμίδας για τη συμμετρία $U(1)$ (που σημαίνει ότι η δράση περιέχει όρους της μορφής $|\nabla_i - ieA_i\phi|^2$ με ένα πολύ μικρό φορτίο e). Πράγματι, οι περισσότερες θεωρίες της φυσικής συμπυκνωμένης ύλης δεν περιλαμβάνουν φωτόνια με δυναμικές ιδιότητες, αφού η επίδραση τους είναι μικρή. Αυτό οφείλεται σε δύο λόγους: Πρώτον, η ηλεκτρομαγνητική σταθερά σύζευξης παρατηρείται ότι είναι μικρή. Δεύτερον, η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση θωρακίζεται σε ένα φορτισμένο μέσο. Πιο συγκεκριμένα, η θεωρία BCS περιλαμβάνει μόνο ηλεκτρόνια και φωνόνια. Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία εισάγονται συνήθως ως εξωτερικά πεδία, όπως θα γίνει και σε αυτό το μοντέλο.

Κεφάλαιο 3

Ο Ολογραφικός Υπεραγωγός

Όπως, αναφέρθηκε, το μοντέλο που θα μελετηθεί δίνεται από τη δράση:

$$\begin{aligned} S_{Bulk} &= S_{gravity} + S_{matter} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{6}{L^2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |\nabla\Psi - iqA\Psi|^2 - m^2|\Psi|^2 \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ελαχιστοποιώντας τη δράση αυτή ως προς τη μετρική $g_{\mu\nu}$ προκύπτουν οι εξισώσεις Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\psi)} + T_{\mu\nu}^{(EM)} \quad (3.2)$$

όπου

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(\psi)} &= D_\mu\psi(D_\nu\psi)^* + D_\nu\psi(D_\mu\psi)^* - g_{\mu\nu}(g^{ab}D_a\psi(D_b\psi)^* + m^2|\psi|^2) \\ T_{\mu\nu}^{(EM)} &= F_\mu{}^a F_{\nu a} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{ab}F^{ab} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ελαχιστοποιώντας ως προς το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A_μ προκύπτουν οι εξισώσεις Maxwell

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}[2q^2 A_\nu |\psi|^2 + iq(\psi^* \nabla_\nu \psi - \psi \nabla_\nu \psi^*)] = 0 \quad (3.4)$$

και τέλος, ελαχιστοποιώντας ως προς το βαθμωτό πεδίο προκύπτει η ισο-

δύναμη εξίσωση Klein-Gordon

$$(\partial_\mu - iqA_\mu)[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\nu - iqA_\nu)\psi] = \sqrt{-g}m^2\psi \quad (3.5)$$

3.1 Το όριο Probe

Μετασχηματίζοντας τα πεδία $A_\mu u$ και ψ

$$A_\mu = \frac{\tilde{A}_\mu}{q}, \quad \psi = \frac{\tilde{\psi}}{q} \quad (3.6)$$

τότε η δράση (3.1) μετασχηματίζεται ως:

$$S = S_{gravity} + \frac{1}{q^2}\tilde{S}_{matter} \quad (3.7)$$

Στο όριο $q \rightarrow \infty$ ο δεύτερος όρος είναι πάρα πολύ μικρός, οπότε η επίδραση των πεδίων ύλης στη μετρική είναι αμελητέα και μπορεί να αγνοηθεί, με αποτέλεσμα οι εξισώσεις Einstein να μπορούν να λυθούν μόνες τους. Το όριο αυτό ονομάζεται όριο Probe. Απλοποιεί το πρόβλημα, διατηρώντας παράλληλα όλη την ενδιαφέρουσα φυσική, αφού οι μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ του βαθμωτού πεδίου και του πεδίου Maxwell διατηρούνται. Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε το μοντέλο του υπεραγωγού σε αυτό το όριο. Πρώτα θα συζητηθεί η δημιουργία του συμπυκνώματος και έπειτα θα υπολογιστεί η αγωγιμότητα.

3.2 Συμπύκνωμα

Έστω μια επίπεδη Schwarzschild AdS μαύρη τρύπα σε 4 διαστάσεις

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2), \quad f(r) = r^2 - \frac{r_h^3}{r} \quad (3.8)$$

όπου

$$f = \frac{r^2}{L^2} \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) \quad (3.9)$$

Η ακτίνα Schwarzschild r_0 καθορίζει την θερμοκρασία Hawking της μαύρης

τρύπας:

$$T = \frac{3r_0}{4\pi L^2} \quad (3.10)$$

Στο όριο που δουλεύουμε η μετρική αυτή είναι ένα σταθερό υπόβαθρο στο οποίο θα επιλύσουμε τις εξισώσεις (3.4) και (3.5).

Έστω μια επίπεδη συμμετρική κατανομή,

$$\psi = \psi(r), \quad A_t = \phi(r) \quad (3.11)$$

Με $A_r = A_x = A_y = 0$, οι εξισώσεις Maxwell υπονοούν ότι η φάση του ψ πρέπει να είναι σταθερή. Χωρίς απώλεια της γενικότητας το ψ θα θεωρηθεί πραγματικό. Με αυτές τις παραδοχές οι εξισώσεις (3.4) και (3.5) παίρνουν τη μορφή:

$$\psi'' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r}\right)\psi' + \left(\frac{q^2\phi^2}{f^2} - \frac{m^2}{f}\right)\psi = 0 \quad (3.12)$$

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' - \frac{2|\psi|^2}{f}\phi = 0 \quad (3.13)$$

Ο σημαντικός όρος στην πρώτη εξίσωση είναι ο $(\phi^2/f^2)\psi$. Έχει το αντίθετο πρόσημο από τον όρο μάζας και θα προκαλέσει τη δημιουργία των βαθμωτών μαλλιών σε χαμηλές θερμοκρασίες. Για τη συνέχεια των υπολογισμών θα θεωρηθεί ότι $q = 1$ και ότι $L = 1$.

Τώρα θα θεωρηθούν οι συνοριακές συνθήκες. Στον ορίζοντα πολύ συχνά απαιτείται $\phi = A_t = 0$, προκειμένου ο όρος $g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu$ να είναι πεπερασμένος. Αυτό είναι σωστό, αλλά το πεδίο A_μ εξαρτάται από τη βαθμίδα που επιλέγεται, οπότε δεν είναι ξεκάθαρο ότι ένα αποκλίνων ανυσματικό δυναμικό είναι πρόβλημα αν το πεδίο Maxwell παραμένει πεπερασμένο. Ένα καλύτερο επιχειρήμα για αυτήν την επιλογή είναι το ακόλουθο. Η πηγή των εξισώσεων Maxwell στον κύριο χώρο δεν εξαρτώνται από την εκάστοτε βαθμίδα. Όμως, σε μια βαθμίδα όπου το ψ είναι πραγματικό, το ρεύμα είναι απλά $\psi^2 A_\mu$. Από τη στιγμή που το ρεύμα πρέπει να είναι πεπερασμένο στον ορίζοντα, πρέπει το A_μ να μένει πεπερασμένο, επομένως $\phi = A_t = 0$. Ακόμα και στη θεωρία Einstein-Maxwell (χωρίς φορτισμένες πηγές) η συνιστώσα A_t πρέπει να μηδενίζεται στον ορίζοντα μιας στατικής μαύρης τρύπας εξαιτίας του ακόλουθου επιχειρήματος: Για να περιγραφούν οι θερμικές ιδιότητες μιας μαύρης τρύπας, πρέπει να χρησιμοποιηθεί η Ευκλείδεια λύση. Ο βρόχος Wilson του A_μ γύρω από τον κύκλο του Ευκλείδειου χρόνου είναι πεπερασμένος και αναλοίωτος από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Αν η A_t είναι μη μηδενική στον ορίζοντα, τότε και ο βρόχος Wilson

θα είναι μη μηδενικός γύρω από έναν εκλίποντα κύκλο, γεγονός που σημαίνει ότι οι εξισώσεις Maxwell θα έχουν μια ιδιομορφία.

Υπάρχει άλλη μια απαίτηση που πρέπει να πληρείται προκειμένου η λύση να είναι ομαλή στον ορίζοντα. Πολλαπλασιάζοντας την (3.12) με f και υπολογίζοντας την για $r = r_0$ προκύπτει $f'\psi' = m^2\psi$, οπότε τα $\psi(r_0)$ και $\psi'(r_0)$ δεν είναι ανεξάρτητα. Επομένως, παρόλο που υπάρχουν δύο διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης που έχει μια οικογένεια λύσεων με 4 παραμέτρους, τελικά μόνο μια οικογένεια λύσεων 2 παραμέτρων είναι ομαλή στον ορίζοντα. Μπορεί να συμβολιστεί με $\psi(r_0)$ και $\phi'(r_0)$ (Ουσιαστικά το $\phi'(r_0)$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο στον ορίζοντα: $(\phi')^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$). Οι ασυμπτωτικές συνοριακές συνθήκες στο άπειρο έχουν τη μορφή:

$$\psi = \frac{\psi_-}{r^{\lambda_-}} + \frac{\psi_+}{r^{\lambda_+}} + \dots \quad (3.14)$$

όπου

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(3 \pm \sqrt{9 + 4m^2L^2} \right) \quad (3.15)$$

και

$$\phi = \mu - \frac{\rho}{r} + \dots \quad (3.16)$$

Για τη μάζα επιλέγεται η περίπτωση $m^2 = -2/L^2$. Η μάζα αυτή είναι ταχυονική, αλλά όπως συζητήθηκε στην πρώτη ενότητα, είναι επιτρεπτή αν τηρεί το όριο Breitenlohner-Freedman (1.14). Πρέπει να τονισθεί ότι μια ταχυονική μάζα στη θεωρία πεδίου δεν περιγράφει σωματίδια που κινούνται με ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτήν του φωτός στο κενό. Συνήθως περιγράφει μια αστάθεια. Η τιμή $\psi = 0$ είναι ασταθής και το πεδίο αποκτάει μια μη μηδενική τιμή.

Με αυτήν την επιλογή για τη μάζα, οι ρίζες λ_{\pm} αποκτούν τις τιμές

$$\lambda_+ = 2, \quad \lambda_- = 1 \quad (3.17)$$

ενώ η ασυμπτωτική συνοριακή συνθήκη στο άπειρο παίρνει τη μορφή:

$$\psi = \frac{\psi^{(1)}}{r} + \frac{\psi^{(2)}}{r^2} + \dots \quad (3.18)$$

Συνήθως η κανονικοποίηση επιβάλλει τον μηδενισμό του συντελεστή του κύριου όρου. Παρ' όλα αυτά, από τη στιγμή που επιλέχθηκε μια μάζα κοντά στο όριο BF, ακόμα και ο κύριος όρος είναι κανονικοποιήσιμος. Οπότε μπορεί να επιλεχθεί είτε $\psi^{(1)} = 0$ είτε $\psi^{(2)} = 0$. Στη μελέτη αυτή θα επιλεχθεί η πιο

συχνή συνοριακή συνθήκη, $\psi^{(1)} = 0$.

Μετά την επιβολή των ασυμπτωτικών συνοριακών συνθηκών, παραμένει μια οικογένεια λύσεων μίας παραμέτρου, που μπορεί να βρεθεί αριθμητικά. Δεν θα παρουσιαστούν γραφήματα για τις συναρτήσεις $\psi(r)$ και $\phi(r)$ γιατί δεν έχουν κάποιο ενδιαφέρον. Είναι εύκολο να φανεί από την εξίσωση (3.13) ότι η συνάρτηση ϕ είναι μονοτονική. Ξεκινάει από το μηδέν στον ορίζοντα και σε κάθε τοπικό ακρότατο ισχύει $\phi'' \approx \phi$. Επομένως δεν μπορεί να έχει θετικό μέγιστο ή αρνητικό ελάχιστο. Εάν ξεκινήσει να αυξάνεται καθώς απομακρύνεται από τον ορίζοντα, θα συνεχίσει να αυξάνεται και ασυμπτωτικά θα πλησιάσει τη σταθερά μ . Η $\psi(r)$ δεν χρειάζεται να είναι μονοτονική. Υπάρχει μια διακριτή οικογένεια λύσεων για την $\psi(r)$ που ικανοποιεί τις ασυμπτωτικές συνοριακές συνθήκες. Μπορούν να οργανωθούν με βάση τον αριθμό κατά τον οποίο η ψ μηδενίζεται. Πιστεύεται ότι μόνο η χαμηλότερη λύση που μονοτονικά μειώνεται από την τιμή $\psi(r_0)$ στο μηδέν είναι σταθερή, παρ' ότι δεν έχει πραγματοποιηθεί κάποια ανάλυση έως και τώρα. Παρά το γεγονός ότι οι λύσεις είναι απλές μονοτονικές συναρτήσεις, έχουν σημαντικές συνέπειες για τη δυϊκή θεωρία πεδίου.

Το λεξικό της αντιστοιχίας της ολογραφίας επιτρέπει την εξαγωγή των ακόλουθων συμπερασμάτων. Η μαύρη τρύπα έχει διάσταση $3 + 1$ οπότε η δυϊκή θεωρία είναι μια σύμμορφη θεωρία πεδίου σε $2 + 1$ διαστάσεις με θερμοκρασία που δίνεται από τη σχέση (3.10). Η τοπική συμμετρία βαθμίδας στον κύριο χώρο αντιστοιχεί σε μια ολική συμμετρία $U(1)$ στη σύμμορφη θεωρία πεδίου. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης του κύριου χώρου καθορίζει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της δυϊκής θεωρίας πεδίου. Για παράδειγμα, από τη σχέση (3.16), μ είναι το χημικό δυναμικό και ρ η πυκνότητα φορτίου. Μπορεί να φανεί παράξενο ότι ο υπεραγωγός έχει μια μη μηδενική πυκνότητα φορτίου, αφού οι συνηθισμένοι υπεραγωγοί είναι ηλεκτρικά ουδέτεροι. Πιθανότατα, η καλύτερη αναλογία είναι ότι το μοντέλο του ολογραφικού υπεραγωγού περιγράφει μόνο τα ηλεκτρόνια, χωρίς να περιλαμβάνει το ατομικό πλέγμα. Αυτό το επιχείρημα ενισχύεται από το γεγονός ότι το μοντέλο έχει συμμετρία χωρικών μεταθέσεων και δεν υπάρχουν ενδείξεις για την ύπαρξη κάποιου πλέγματος. Πρακτικά, το φορτίο είναι απαραίτητο, αφού οι ουδέτερες μαύρες τρύπες δεν μπορούν να σχηματίσουν βαθμωτά μαλλιά. Επιπλέον, χωρίς το ηλεκτρικό φορτίο (ή το χημικό δυναμικό), η δυϊκή θεωρία έχει συμμετρία κλίμακας και δεν μπορεί να υποστεί αλλαγή φάσης.

Η δυϊκή θεωρία έχει έναν φορτισμένο τελεστή της $U(1)$, που είναι δυϊκός στο πεδίο ψ . Εξαιτίας της επιλογής της μάζας που έγινε, η οποία είναι κοντά

στο όριο BF, υπάρχουν δύο δυνατοί τελεστές, με βάση τον τρόπο που γίνεται η κβάντωση του ψ στον κύριο χώρο. Εάν οι κανονικοί τρόποι οριστούν με τις κανονικές συνοριακές συνθήκες (γρήγορη μείωση στο άπειρο) για το ψ στον κύριο χώρο, ο δυϊκός τελεστής έχει διάσταση 2. Σε αυτήν την περίπτωση, ένα μη μηδενικό $\psi^{(1)}$ αντιστοιχεί στην προσθήκη μια πηγής για τον τελεστή αυτό στη σύμμορφη θεωρία πεδίου και ένα μη μηδενικό $\psi^{(2)}$ αντιστοιχεί σε μια μη μηδενική αναμενόμενη τιμή

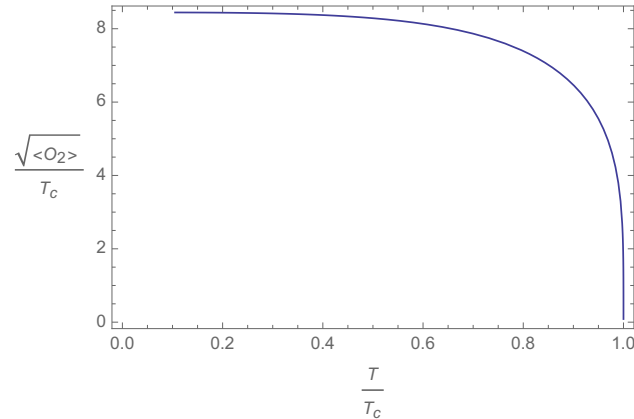
$$\langle O_2 \rangle = \sqrt{2}\psi^{(2)} \quad (3.19)$$

Επειδή πρέπει το συμπύκνωμα να δημιουργηθεί χωρίς την ύπαρξη κάποιας πηγής, επιλέχθηκε $\psi^{(1)} = 0$.

Πρέπει να μελετηθεί η συμπεριφορά του συμπυκνώματος ως συνάρτηση της θερμοκρασίας. Πριν παρουσιαστούν τα αποτελέσματα πρέπει να συζητηθεί η συμμετρία κλίμακας που διαθέτει το μοντέλο. Σε οποιαδήποτε σύμμορφη θεωρία στον R^n , η θερμοκρασία μπορεί να αλλάξει με έναν απλό μετασχηματισμό κλίμακας. Στον κύριο χώρο, αυτό αντικατοπτρίζεται στη δήλωση ότι ο μετασχηματισμός

$$r \rightarrow \alpha r, \quad (t, x, y) \rightarrow \frac{(t, x, y)}{\alpha}, \quad r_0 \rightarrow \alpha r_0 \quad (3.20)$$

Σχήμα 3.1: Το συμπύκνωμα ως συνάρτηση της θερμοκρασίας. Η κρίσιμη θερμοκρασία T_c είναι ανάλογη του χημικού δυναμικού



αφήνει αναλλοίωτη τη μορφή (3.8) της μαύρης τρύπας αναλλοίωτη με $f \rightarrow \alpha^2 f$. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι οι εξισώσεις (3.12) και (3.13) είναι αναλλοίωτες κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό αν $\phi \rightarrow \alpha\phi$ (έτσι ώστε το $A = \phi dt$ να είναι αναλλοίωτο) και $\psi \rightarrow \psi$. Επομένως αντί να συζητηθεί η τετριμμένη εξάρτηση από τη θερμοκρασία, που αντικατοπτρίζει αυτή τη συμμετρία, είναι

ενδιαφέρον να μελετηθεί η εξάρτηση από μια αδιάστατη ποσότητα που εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Είναι βολικό να χρησιμοποιηθεί το χημικό δυναμικό για να καθοριστεί μια κλίμακα και να θεωρηθεί η $\sqrt{\langle O_2 \rangle}/\mu$ ως συνάρτηση της ποσότητας T/μ . Όταν γίνει αυτό, παρατηρείται ότι το συμπύκνωμα είναι μη μηδενικό μόνο για μικρές τιμές της T/μ . Θέτοντας T_c ίση με τη θερμοκρασία όπου το συμπύκνωμα γίνεται μη μηδενικό για πρώτη φορά, προκύπτει το διάγραμμα 3.1.

Η καμπύλη είναι ποιοτικά όμοια με αυτήν που προκύπτει από τη θεωρία BCS και έχει παρατηρηθεί πειραματικά σε πολλά υλικά, όπου το συμπύκνωμα αυξάνεται γρήγορα καθώς το σύστημα ψύχεται σε θερμοκρασίες μικρότερες της κρίσιμης θερμοκρασίας και τείνει σε μια σταθερή τιμή καθώς $T \rightarrow 0$. Παρ' όλα αυτά, όταν το συμπύκνωμα γίνεται ισχυρό, τότε η επίδραση του στη μετρική δεν μπορεί να αγνοηθεί. Σε εξαιρετικά χαμηλές θερμοκρασίες η προσέγγιση που λήφθηκε για τη μελέτη του μοντέλου δεν θα είναι πια έγκυρη.

Προσαρμόζοντας τα αποτελέσματα για μικρές τιμές του συμπυκνώματος, παρατηρείται μια συμπεριφορά ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της θερμοκρασίας, που είναι τυπική για αλλαγές φάσεως δεύτερης τάξης. Πιο συγκεκριμένα:

$$\langle O_2 \rangle \approx 144T_c^2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

Μη μηδενικό συμπύκνωμα σημαίνει ότι η μαύρη τρύπα στον κύριο χώρο έχει αναπτύξει βαθμωτά μαλλιά. Μπορεί να υπολογιστεί η ελεύθερη ενέργεια (Ευκλίδεια δράση) για αυτήν τη μαύρη τρύπα και να συγκριθεί με τη λύση $\psi = 0$, $\phi = \rho(1/r_0 - 1/r$ που περιγράφει μια μαύρη τρύπα με το ίδιο φορτίο ή χημικό δυναμικό, αλλά χωρίς βαθμωτά μαλλιά. Προκύπτει ότι η ελεύθερη ενέργεια για τη μαύρη τρύπα που έχει αναπτύξει βαθμωτά μαλλιά είναι παντα μικρότερη και γίνεται ίση με την ελεύθερη ενέργεια της μαύρης τρύπας χωρίς βαθμωτά μαλλιά όταν $T \rightarrow T_c$. Η διαφορά των ελεύθερων ενεργειών συμπεριφέρεται ως $(T_c - T)^2$ κοντά στο κρίσιμο σημείο, δείχνοντας ότι πρόκειται για μια αλλαγή φάσης δεύτερης τάξης.

Επομένως, για $T < T_c$ ο βαθμωτός τελεστής $\langle O_2 \rangle$ συμπυκνώθηκε. Είναι αναμενόμενο ότι αυτό το συμπύκνωμα θα οδηγήσει σε υπεραγωγιμότητα του ρεύματος που συνδέεται με αυτό το φορτίο.

3.3 Διαταραχές Maxwell και Υπεραγωγιμότητα

Σε αυτήν την ενότητα θα υπολογιστεί η αγωγιμότητα ως συνάρτηση της συχνότητας. Εξαιτίας της συμμετρίας του προβλήματος, επαρκεί να υπολογιστεί η αγωγιμότητα στην x κατεύθυνση. Σύμφωνα με το λεξιλόγιο της ολογραφίας αυτό είναι δυνατόν αν λυθούν οι διακυμάνσεις του πεδίου Maxwell στον κύριο χώρο. Για μηδενική χωρική ορμή, και χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{i\omega t}$ οι εξισώσεις Maxwell για τη συνιστώσα $A_x(r)$ έχουν τη μορφή:

$$A_x'' + \frac{f'}{f} A_x' + \left(\frac{\omega^2}{f^2} - \frac{2\psi^2}{f} \right) A_x = 0 \quad (3.22)$$

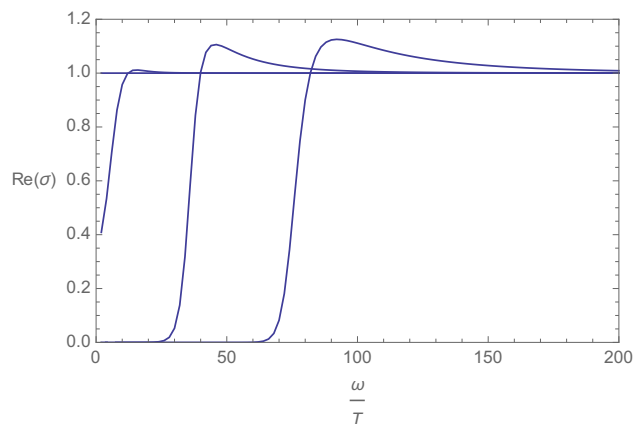
Η εξίσωση θα επιλυθεί με εισερχόμενες συνοριακές συνθήκες στον ορίζοντα, αφού αντιστοιχεί σε αιτιατή διάδοση στο σύνορο, δηλαδή δίνει την καθυστερημένη συνάρτηση Green. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του πεδίου για μεγάλες αποστάσεις είναι:

$$A_x = A_x^{(0)} + \frac{A_x^{(1)}}{r} + \dots \quad (3.23)$$

Το λεξικό της ολογραφίας υποδεικνύει ότι το όριο του ηλεκτρικού πεδίου στον κύριο χώρο είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο σύνορο: $E_x = -\dot{A}_x^{(0)}$ και η αναμενόμενη τιμή του επαγόμενου ρεύματος είναι ο επόμενος όρος: $J_x = A_x^{(1)}$. Από τον νόμο του Ohm προκύπτει:

$$\sigma(\omega) = \frac{\langle J_{x,CFT} \rangle}{E_{x,CFT}} = -\frac{\langle J_{x,CFT} \rangle}{\dot{A}_{x,CFT}^{(0)}} = -\frac{i \langle J_{x,CFT} \rangle}{\omega A_{x,CFT}^{(0)}} = -\frac{i A_x^{(1)}}{\omega A_x^{(0)}} \quad (3.24)$$

Σχήμα 3.2: Ο σχηματισμός του χάσματος στο πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας καθώς η θερμοκρασία γίνεται χαμηλότερη της κρίσιμης. Οι καμπύλες περιγράφουν διαδοχικά χαμηλότερες θερμοκρασίες. Για $\omega = 0$ υπάρχει μια συνάρτηση δέλτα.



Το πραγματικό μέρος της οπτικής αγωγιμότητας φαίνεται στο σχήμα 3.2. Η οριζόντια γραμμή αντιστοιχεί για θερμοκρασίες ίσες ή μεγαλύτερες της κρίσιμης θερμοκρασίας. Το γεγονός ότι η αγωγιμότητα δεν εξαρτάται από την συχνότητα στη μεταλλική φάση είναι χαρακτηριστικό των θεωριών που έχουν δυϊκές θερμοφίες στον AdS_4 . Οι επόμενες καμπύλες περιγράφουν διαδοχικά χαμηλότερες θερμοκρασίες. Παρατηρείται ότι καθώς η θερμοκρασία γίνεται χαμηλότερη σχηματίζεται ένα ενεργειακό χάσμα στην αγωγιμότητα. Το χάσμα αυτό γίνεται αρκετά βαθύ έως ότου το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας γίνει εκθετικά μικρό.

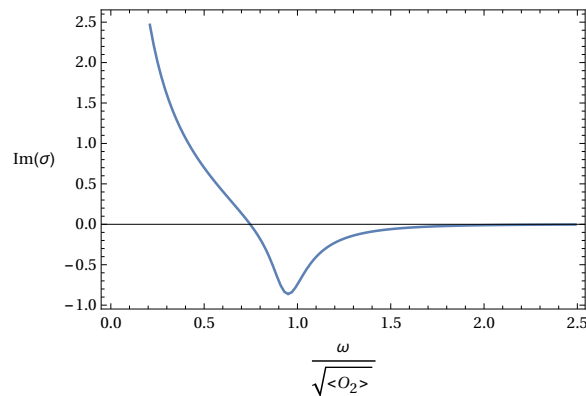
Υπάρχει επίσης μια συναρτηση δέλτα για $\omega = 0$. Αυτό δεν μπορεί να φανεί από την αριθμητική λύση για το πραγματικό κομμάτι, αλλά μπορεί να φανεί αναζητώντας έναν πόλο στο φανταστικό κομμάτι. Αυτή η συνάρτηση δέλτα είναι η αιχμή Drude, όπως προκύπτει από τη σχέση (2.4) που αναφέρθηκε στη δεύτερη ενότητα.

Οι σχέσεις Kramers-Kronig συνδέουν το φανταστικό και το πραγματικό μέρος κάθε αιτιατής ποσότητας, όπως η αγωγιμότητα, όταν εκφράζεται στον χώρο των συχνοτήτων. Μπορούν να αποδειχθούν με ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο και το γεγονός ότι συναρτήσεις που μηδενίζονται για $t < 0$ αποκτούν πόλους μόνο στο κάτω μισό επίπεδο όταν μετασχηματιστούν στον χώρο των συχνοτήτων. Μία από τις σχέσεις είναι:

$$Im[\sigma(\omega)] = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Re[\sigma(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (3.25)$$

Από αυτήν τη σχέση είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας περιέχει μια συνάρτηση δέλτα, $Re[\sigma(\omega)] = \pi\delta(\omega)$, αν και μόνο αν το φανταστικό κομμάτι έχει πόλο, $Im[\sigma(\omega)] = 1/\omega$. Όντως, υπάρχει ένας

Σχήμα 3.3: Το φανταστικό κομμάτι της αγωγιμότητας για χαμηλή θερμοκρασία, με τη συχνότητα κανονικοποιημένη ως προς το συμπύκνωμα



πόλος στο φανταστικό κομμάτι για $\omega = 0$ για όλες τις θερμοκρασίες $T < T_c$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.3, όπου έχει σχεδιαστεί το φανταστικό κομμάτι της αγωγιμότητας για χαμηλή θερμοκρασία.

Η πυκνότητα του υπερευστού είναι ο συντελεστής της δέλτα συνάρτησης στο πραγματικό κομμάτι της αγωγιμότητας:

$$\text{Re}[\sigma(\omega)] \sim \pi n_s \delta(\omega) \quad (3.26)$$

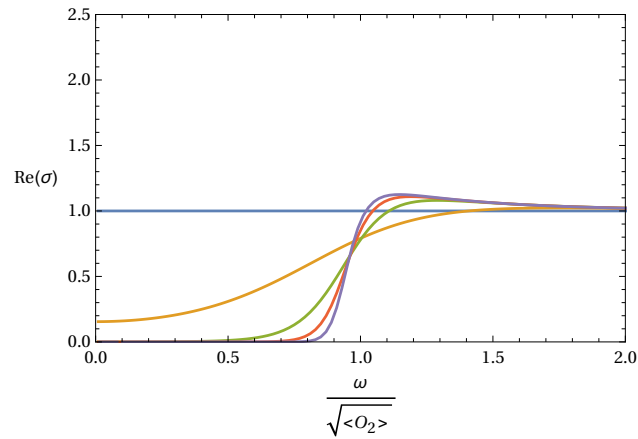
Εξαιτίας της σχέσης (3.25), το n_s είναι επίσης ο συντελεστής στον πόλο του φανταστικού κομματιού, $\text{Im}[\sigma(\omega)] \sim n_s/\omega$ καθώς $\omega \rightarrow 0$. Αποδεικνύεται πως η πυκνότητα n_s μειώνεται γραμμικά ως $(T_c - T)$:

$$n_s \approx C_i(T_c - T), \quad T \rightarrow T_c \quad (3.27)$$

με $C_i = 24$.

Στο σχήμα αλλάζουμε την κλίμακα στα γραφήματα T/T_c που παρουσιάστηκαν προηγουμένως εκφράζοντας τη συχνότητα ως προς το συμπύκνωμα και όχι τη θερμοκρασία. Οι καμπύλες πλησιάζουν σε ένα όριο όπου το ενεργειακό χάσμα είναι ανάλογο στο μέγεθος του συμπυκνώματος.

Σχήμα 3.4: Το χάσμα για μικρές τιμές του λόγου T/T_c με τη συχνότητα κανονικοποιημένη ως προς το συμπύκνωμα.



Τέλος, μπορεί να υπολογιστεί η κανονική, μη υπεραγώγιμη συνεισφορά στην DC αγωγιμότητα. Υποθέτοντας ότι:

$$n_n = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}[\sigma(\omega)] \quad (3.28)$$

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα προκύπτει ότι:

$$n_n \sim e^{\frac{\Delta}{T}}, \quad \text{για } \frac{\Delta}{T} \gg 1 \quad (3.29)$$

με $\Delta = \sqrt{O_2}/2$. Ο παράγοντας $1/2$ είναι ακριβής σε ποσοστό 4%. Λόγω της σχέσης (3.29) το Δ μπορεί να ερμηνευθεί ως το ενεργειακό χάσμα για τις φορτισμένες διεγέρσεις. Το χάσμα που βρέθηκε πριν στην αγωγιμότητα ήταν 2Δ . Ο έξτρα παράγοντας 2 αναμένεται αν τα φορτισμένα ημί-σωματίδια παράγονται σε ζευγάρια, γεγονός που υπονοεί ότι υπάρχει κάποιος μηχανισμός ζευγάρωσης στο μοντέλο. Από το σχήμα 3.1 για $T = 0$ προκύπτει ότι $2\Delta \approx 8.4T_c$, που μπορεί να συγκριθεί με το αποτέλεσμα της θεωρίας BCS, $2\Delta \approx 3.54T_c$. Οι μεγαλύτερες τιμές αναμένονται για ισχυρά δέσμια ζευγάρια Cooper.

Σε αυτήν την ενότητα δείχθηκε πως ένα μοντέλο $3 + 1$ διαστάσεων στον κύριο χώρο μπορεί να αναπαράγει τις βασικές ιδιότητες ενός υπεραγωγού σε $2 + 1$ διαστάσεις. Με μια αλλαγή φάσεως δεύτερης τάξης η DC αγωγιμότητα απειρίζεται και δημιουργείται ένα ενεργειακό χάσμα για φορτισμένες διεγέρσεις.

Υπάρχουν πολλές επεκτάσεις που μπορούν να γίνουν σε αυτό το μοντέλο. Στην επόμενη ενότητα θα μελετηθεί μια από αυτές, όπου θα εισαχθεί μια κινηματική σύζευξη του βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή Einstein.

Κεφάλαιο 4

Ολογραφικός Υπεραγωγός με σύζευξη με τον τανυστή Einstein

Στο μοντέλο της προηγούμενης ενότητας βρέθηκε ότι το ενεργειακό χάσμα για φορτισμένες διεγέρσεις σε χαμηλές θερμοκρασίες είναι $2\Delta \approx 8.4T_c$. Η υψηλή αυτή τιμή υποδεικνύει έναν ισχυρό μηχανισμό ζευγάρωσης στο μοντέλο, με αποτέλεσμα την ύπαρξη ισχυρά δεσμευμένων ζευγαριών Cooper. Η πρόβλεψη της θεωρίας Cooper για πραγματικά υλικά είναι μικρότερη, $2\Delta \approx 3.54T_c$, κάτι που οφείλεται στην ύπαρξη προσμίξεων στα υλικά αυτά.

Επιπλέον υπολογισμοί σχετικά με τις επιδράσεις των παραμαγνητικών επιδράσεων πραγματοποιήθηκαν, αξιοποιώντας την πληροφορία που κρύβεται στη συνάρτηση Green του συστήματος. Η πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων υπολογίστηκε για διάφορες τιμές του αντίστροφου χρόνου σκέδασης. Το ενεργειακό χάσμα Ω_g , ορίζεται ως η ενέργεια στην οποία μηδενίζεται η πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων. Υπολογίστηκε ο παράγοντας τάξης που εξαρτάται από τη θερμοκρασία και καθορίστηκε η συμπεριφορά του χάσματος $\Omega_g(T)$. Σύγκριση με πειράματα σήραγγος, έδειξε ότι οι δύο παράμετροι δεν βρίσκονται σε συμφωνία. Το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας βρέθηκε να είναι μηδέν για συχνότητες μικρότερες από $2\Omega_g$ και ανάλογο του τετραγώνου της πυκνότητας των καταστάσεων για απειροστά μικρές συχνότητες, στην περιοχή της συγχέντρωσης προσμίξεων στην οποία το χάσμα είναι μηδενικό. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι στα πραγματικά υλικά, η σημαντική ιδιότητα της υπεραγωγιμότητας είναι η συσχέτιση μεταξύ των ηλεκτρονίων και του σχηματισμού

των ζευγαριών Cooper και όχι η ύπαρξη του ενεργειακού χάσματος. Ακόμα και στην απουσία χάσματος, η ύπαρξη συσχέτισης οδηγεί στην εμφάνιση μιας κατάστασης για θερμοκρασίες χαμηλότερες από μια κρίσιμη, η οποία έχει τις γνωστές ιδιότητες ενός υπεραγωγού.

Σε αυτήν την ενότητα θα εισαχθεί η έννοια των παραμαγνητικών προσμίξεων μέσω μιας σύζευξης με παράγωγο του βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή Einstein. Αυτός ο όρος προέρχεται από μια γενική οικογένεια βαθμωτών-τανυστικών θεωριών βαρύτητας που προκύπτουν από την λαγκραζιανή Hordensky. Αυτές οι θεωρίες δίνουν εξισώσεις κίνησης δεύτερης τάξης και έχουν ως υποσύνολο μια θεωρία που διατηρεί τη Γαλιλαϊκή συμμετρία. Η εισαγωγή της σύζευξης με τον τανυστή Einstein εισάγει ουσιαστικά μια νέα κλίμακα στο μοντέλο που επηρεάζει τον σχηματισμό βαθμωτών μαλλιών για μια μαύρη τρύπα. Με άλλα λόγια η ύπαρξη αυτού του όρου επηρεάζει τη διάδοση του βαθμωτού πεδίου.

Θα χρησιμοποιηθεί αυτή η συμπεριφορά του βαθμωτού πεδίου για να προσομοιωθεί η συμπεριφορά των παραμαγνητικών προσμίξεων σε ένα υλικό μέσα από την ολογραφία. Η ύπαρξη των προσμίξεων αναγκάζει τον μηχανισμό ζευγάρωσης για το σχηματισμό των ζευγαριών Cooper λιγότερο αποτελεσματικό. Αυτό συμβαίνει διότι τα ζευγάρια των ημί-σωματιδίων χάνουν ενέργεια λόγω της υψηλής συγκέντρωσης προσμίξεων.

4.1 Κατασκευή του μοντέλου

Θεωρείται μια θεωρία Maxwell-Einstein με ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο που είναι συζευγμένο με τον τανυστή Einstein. Η δράση είναι:

$$S_{bulk} = S_{gravity} + S_{matter} = \quad (4.1)$$

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R + \Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu} + kG^{\mu\nu}) D_\mu \psi (D_\nu \psi)^* - m^2 |\psi|^2 \right] \quad (4.2)$$

όπου

$$D_\mu = \nabla_\mu - ieA_\mu \quad (4.3)$$

και e , m είναι το φορτίο και η μάζα του βαθμωτού πεδίου, ενώ η σταθερά k

δίνει την ισχύ της σύζευξης με τον ταυνοστή Einstein. Για ευκολία ορίζονται οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu\nu} &\equiv D_\mu\psi(D_\nu\psi)^* \\ \Phi &\equiv g^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} \\ C^{\mu\nu} &\equiv g^{\mu\nu} + kG^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein, όπως προκύπτουν από τη δράση (4.1), παίρνουν τη μορφή:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\psi)} + T_{\mu\nu}^{(EM)} + k\Theta_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

όπου οι ταυνοστές $T_{\mu\nu}^{(EM)}$ και $T_{\mu\nu}^{(\psi)}$ δίνονται από τις σχέσεις (3.3) και:

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu}R^{ab}\Phi_{ab} + R_\nu{}^a(\Phi_{\mu a} + \Phi_{a\mu}) + R_\mu{}^a(\Phi_{a\nu} + \Phi_{\nu a}) - \frac{1}{2}R(\Phi_{\mu\nu} + \Phi_{\nu\mu}) \\ &\quad - G_{\mu\nu}\Phi - \frac{1}{2}\nabla^a\nabla_\mu(\Phi_{a\nu} + \Phi_{\nu a}) - \frac{1}{2}\nabla^a\nabla_\nu(\Phi_{\mu a} + \Phi_{a\mu}) + \frac{1}{2}\square(\Phi_{\mu\nu} + \Phi_{\nu\mu}) \\ &\quad + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_a\nabla_b(\Phi^{ab} + \Phi^{ba}) + \frac{1}{2}(\nabla_\mu\nabla_\nu + \nabla_\nu\nabla_\mu)\Phi - g_{\mu\nu}\square\Phi\end{aligned} \quad (4.5)$$

Οι εξισώσεις Maxwell παίρνουν τη μορφή:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} + C^{\mu\nu}[2q^2 A_\nu|\psi|^2 + iq(\psi^*\nabla_\nu\psi - \psi\nabla_\nu\psi^*)] = 0 \quad (4.6)$$

και η εξίσωση Klein-Gordon

$$(\partial_\mu - iqA_\mu)[\sqrt{-g}C^{\mu\nu}(\partial_\nu - iqA_\nu)\psi] = \sqrt{-g}m^2\psi \quad (4.7)$$

Το μοντέλο αυτό θα μελετηθεί ξανά χρησιμοποιώντας το όριο Probe, στο οποίο δεν μελετάται η επίδραση των πεδίων ύλης στη μετρική.

4.2 Συμπύκνωμα

Λαμβάνεται πάλι μια επίπεδη συμμετρική κατανομή,

$$\psi = \psi(r), \quad A_t = \phi(r) \quad (4.8)$$

Οι εξισώσεις (4.6) και (4.7) παίρνουν τη μορφή:

$$\left(1 + k \left(\frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r}\right)\right) \psi'' + \left[\frac{2}{r} + \frac{f'}{f} + k \left(\frac{3f'}{r^2} + \frac{(f')^2}{rf} + \frac{f''}{r}\right)\right] \psi' + \left[\frac{q^2 \phi^2}{f^2} \left(1 + k \left(\frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r}\right)\right) - \frac{m^2}{f}\right] \psi = 0 \quad (4.9)$$

και

$$\phi'' + \frac{2}{r} \phi' - \frac{2|\psi|^2}{f} \left[1 + k \left(\frac{f'}{r} + \frac{f}{r^2}\right)\right] \phi = 0 \quad (4.10)$$

Εάν θέσουμε $k = 0$ είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή (3.12) και (3.13). Εξαιτίας του νέου όρου με τον ταυυστή του Einstein, οι νέες εξισώσεις εξαρτώνται από τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f , σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση που εμφανιζόταν μόνο η πρώτη παράγωγος.

Οι εξισώσεις αυτές θα επιλυθούν αριθμητικά με την ίδια ακριβώς μέθοδο που ακολουθήθηκε στην πρώτη ενότητα. Οι συνοριακές συνθήκες θα είναι ίδιες και θα υπολογιστεί η συμπίκνωση του τελεστή διάστασης 2, \mathcal{O}_2 . Θα μελετηθεί η επίδραση της σταθεράς σύζευξης k στην κρίσιμη θερμοκρασία και την ισχύ του συμπυκνώματος.

Η εξάρτηση της κρίσιμης θερμοκρασίας για διάφορες τιμές του k φαίνεται στον πίνακα 4.1. Φαίνεται ότι η κρίσιμη θερμοκρασία T_c μειώνεται καθώς η σύζευξη γίνεται ισχυρότερη, κάτι που σημαίνει ότι γίνεται πιο δύσκολη η πραγματοποίηση της αλλαγής φάσης.

Η ισχύς του συμπυκνώματος μειώνεται εξαιτίας της ύπαρξης της σύζευξης k με τον ταυυστή Einstein. Η συμπεριφορά αυτή φαίνεται και στο σχήμα 4.1. Με την αύξηση του k , η ισχύς του συμπυκνώματος μειώνεται γρηγορότερα από την κρίσιμη θερμοκρασία. Επομένως το ενεργειακό χάσμα τείνει στο μηδέν για χαμηλές θερμοκρασίες όταν η σύζευξη είναι ισχυρή. Η επίδραση αυτή της σταθεράς k είναι όμοια με την επίδραση που έχουν οι παραμαγνητικές προσμίξεις στους συμβατικούς υπεραγωγούς.

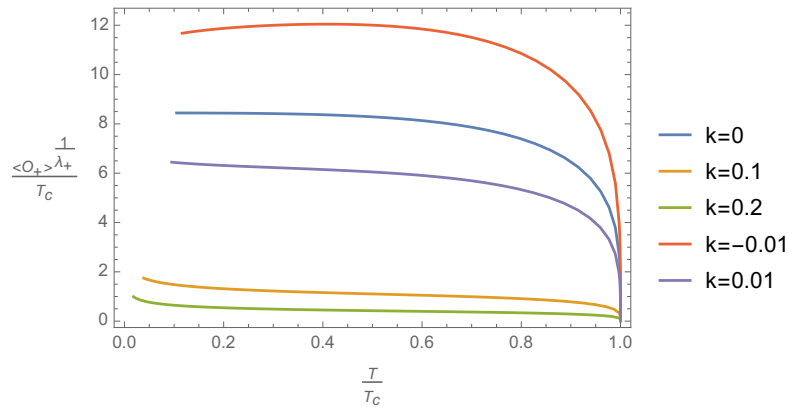
Προσαρμόζοντας τα αποτελέσματα για μικρές τιμές του συμπυκνώματος (δηλαδή για θερμοκρασίες κοντά στην κρίσιμη), παρατηρείται πάλι μια συμπεριφορά ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της θερμοκρασίας:

$$\langle \mathcal{O}_2 \rangle \approx C_1 T_c^2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

οι διάφορες τιμές της σταθεράς C_1 φαίνονται επίσης στον πίνακα 4.1. Πα-

k	-0.01	0	0.01	0.1	0.2
$T_c/\sqrt{\rho}$	0.1218	0.1184	0.1158	0.1043	0.099
C_1	243	144	73	2	1

Πίνακας 4.1: Η εξάρτηση της κρίσιμης θερμοκρασίας για τη συμπύκνωση του τελεστή O_2 για διάφορες τιμές του k



Σχήμα 4.1: Η ισχύς του συμπυκνώματος ως συνάρτηση της θερμοκρασίας για διάφορες τιμές της σύζευξης k

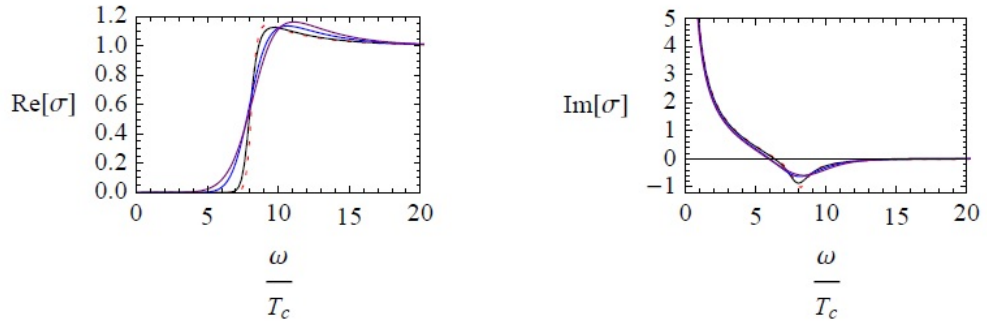
ρατηρείται ότι η σταθερά μειώνεται απότομα για να περιορίσει την ισχύ του συμπυκνώματος καθώς αυξάνεται η σύζευξη k . Η δύναμη παραμένει πάντα $1/2$, αποτέλεσμα που υπονοεί ότι η σταθερά k δεν επηρεάζει την τάξη της αλλαγής φάσης, η οποία παραμένει μια αλλαγή φάσης δεύτερης τάξης.

4.3 Υπεραγωγιμότητα

Ομοίως με πριν, για να υπολογισθεί η οπτική αγωγιμότητα πρέπει να λυθούν οι διακυμάνσεις του πεδίου Maxwell στον κύριο χώρο. Για μηδενική χωρική ορμή, και χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{i\omega t}$ οι εξισώσεις Maxwell για τη συνιστώσα $A_x(r)$ έχουν σε αυτήν την περίπτωση τη μορφή:

$$A_x'' + \frac{f'}{f} A_x' + \left[\frac{\omega^2}{f^2} - \frac{2|\psi|^2}{f} \left(1 + k \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} \right) \right) \right] A_x = 0 \quad (4.12)$$

Η εξίσωση θα επιλυθεί χρησιμοποιώντας πάλι εισερχόμενες συνοριακές συνθήκες τις μορφής $f^{-i\omega/3r_0}$ στον ορίζοντα. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του πε-



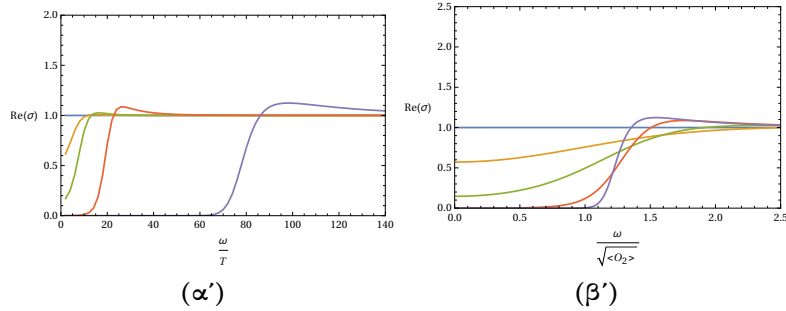
Σχήμα 4.2: Το πραγματικό και το φανταστικό της οπτικής αγωγιμότητας για διάφορες τιμές του k όταν $T/T_c \approx 0.1$. Οι τιμές του k είναι $k = -0.01$ (κόκκινο), $k = 0$ (μαύρο), $k = 0.1$ (μπλέ) και $k = 0.5$ (μωβ).

δίου Maxwell δίνεται από την (3.23). Σύμφωνα με το λεξιλόγιο της ολογραφίας, η οπτική αγωγιμότητα θα υπολογιστεί από την (3.24).

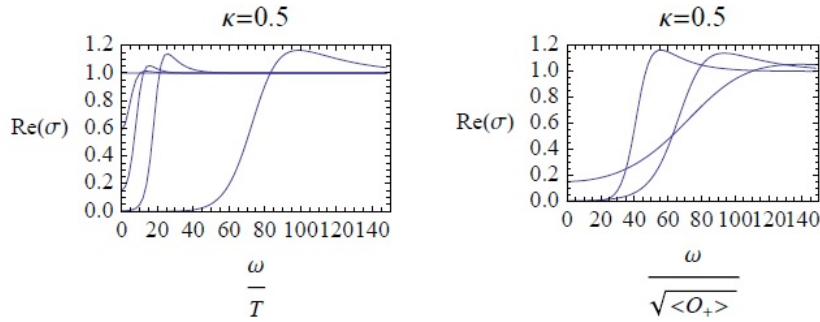
Τα αριθμητικά αποτελέσματα για την αγωγιμότητα σε θερμοκρασία $T/T_c \approx 0.1$ φαίνονται στο σχήμα 4.2. Πάλι για $\omega = 0$ η ύπαρξη της συνάρτησης δέλτα στο πραγματικό μέρος φαίνεται από τον πόλο του φανταστικού μέρους καθώς $\omega \rightarrow 0$, λόγω της σχέσης Kramers-Kronig (3.25). Για χαμηλές θερμοκρασίες, το ενεργειακό χάσμα στο πραγματικό κομμάτι της αγωγιμότητας μειώνεται καθώς αυξάνεται η σύζευξη, συμπεριφορά που συμφωνεί με αυτή της ισχύος του συμπυκνώματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1 της προηγούμενης ενότητας.

Για ναδειχθεί η δημιουργία του ενεργειακού χάσματος, στο σχήμα 4.3 έχει σχεδιαστεί το πραγματικό κομμάτι της αγωγιμότητας με $k = 0.01$ για διάφορες θερμοκρασίες. Στο αριστερό διάγραμμα, η οριζόντια γραμμή αντιστοιχεί στην αγωγιμότητα για θερμοκρασία ίση ή υψηλότερη της κρίσιμης, όπου δεν υπάρχει συμπύκνωμα. Καθώς χαμηλώνει η θερμοκρασία στις επόμενες διαδοχικές καμπύλες, παρατηρείται η δημιουργία του χάσματος ω_g , το οποίο αυξάνεται καθώς η θερμοκρασία γίνεται χαμηλότερη. Στο δεξί γράφημα σχεδιάζεται το πραγματικό κομμάτι της αγωγιμότητας ως συνάρτηση της συχνότητας κανονικοποιημένη ως προς την ισχύ του συμπυκνώματος. Είναι προφανές ότι οι καμπύλες τείνουν σε ένα όριο όπου το χάσμα είναι ανάλογο του συμπυκνώματος, $\omega_g \approx \sqrt{\langle \mathcal{O}_2 \rangle}$. Τα συμπεράσματα ποιοτικά είναι τα ίδια με αυτά της προηγούμενης ενότητας.

Επιπρόσθετα, παρουσιάζεται το πραγματικό κομμάτι της οπτικής αγωγιμότητας με $k = 0.5$ για διάφορες θερμοκρασίες στο σχήμα 4.4. Όμοιας με την περίπτωση $k = 0.01$, καθώς χαμηλώνει η θερμοκρασία αυξάνεται το ενεργειακό χάσμα. Συγκρίνοντας τα αριστερά γραφήματα των σχημάτων 4.3 και 4.4,



Σχήμα 4.3: Το πραγματικό κομμάτι της αγωγιμότητας με $k = 0.01$ για θερμοκρασίες μικρότερες της κρίσιμης. Από αριστερά προς τα δεξιά οι θερμοκρασίες είναι $T/T_c = 1$, $T/T_c \approx 0.94$, $T/T_c \approx 0.80$, $T/T_c \approx 0.40$ και $T/T_c \approx 0.10$.



Σχήμα 4.4: Το πραγματικό και το φανταστικό της οπτικής αγωγιμότητας για διάφορες τιμές του k όταν $T/T_c \approx 0.1$. Οι τιμές του k είναι $k = -0.01$ (κόκκινο), $k = 0$ (μαύρο), $k = 0.1$ (μπλέ) και $k = 0.5$ (μωβ).

παρατηρείται ότι για την ίδια θερμοκρασία T/T_c , το ενεργειακό χάσμα είναι μικρότερο όταν η σταθερά σύζευξης είναι μικρότερη, γεγονός που είναι συνεπές με τα αποτελέσματα των γραφημάτων 4.1 και 4.2. Όμως, όταν η συχνότητα κανονικοποιηθεί ως προς το συμπύκνωμα στο δεξί γράφημα για $k = 0.5$, η συμπεριφορά $\omega_g \approx \sqrt{\langle O_2 \rangle}$ για χαμηλή T/T_c παραβιάζεται και ισχύει $\omega_g \approx 20\sqrt{\langle O_2 \rangle}$ για $T/T_c \approx 0.1$. Η σχέση αυτή μπορεί να επιβεβαιωθεί και από τα σχήματα 4.1 και 4.2. Αφού $\sqrt{\langle O_2 \rangle} \approx 0.2T_c$ και $\omega_g \approx 4T_c$, προκύπτει $\omega_g \approx 20\sqrt{\langle O_2 \rangle}$.

Για συστήματα που είναι πολύ μακριά από την κρίσιμη θερμοκρασία ($T/T_c \approx 0.1$), συνοψίζονται οι τιμές της ποσότητας $\omega_g/\sqrt{\langle O_2 \rangle}$ για διάφορες τιμές του k στον πίνακα 4.2. Είναι προφανές ότι καθώς το $|k|$ απομακρύνεται από την ελάχιστη σύζευξη, η σχέση $\omega_g \approx \sqrt{\langle O_2 \rangle}$, παραβιάζεται. Αυτό είναι ένα κύριο χαρακτηριστικό των υπεραγωγών με προσμίξεις. Όταν $T < T_c$, το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας περιέχει μια δέλτα συνάρτηση για $\omega = 0$.

k	-0.01	0	0.01	0.05	0.1	0.5
$\omega_g/\sqrt{\langle \mathcal{O}_2 \rangle}$	0.61	0.80	1	1.9	2.7	20

Πίνακας 4.2: Ο λόγος $\omega_g/\sqrt{\langle \mathcal{O}_2 \rangle}$ σε πολύ χαμηλή θερμοκρασία για διάφορες τιμές του k .

Πιο συγκεκριμένα, καθώς $\omega \rightarrow 0$, το πραγματικό μέρος συμπεριφέρεται ως $\text{Re}[\sigma] \approx \pi n_s \delta(\omega)$ και λόγω της σχέσης Kramers-Kronig (3.25), $\text{Im}[\sigma] \approx n_s/\omega$, όπου ο συντελεστής n_s είναι η πυκνότητα του υπερεισοστού. Προσαρμόζοντας τα δεδομένα προκύπτει:

$$n_s \approx C_2 T_c \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \quad (4.13)$$

αποτέλεσμα που σημαίνει ότι η πυκνότητα μηδενίζεται καθώς $T \rightarrow T_c$ και είναι συνεπές με την ανάλυση της προηγούμενης ενότητας. Επίσης, ο συντελεστής C_2 δεν είναι ευαίσθητος στη σταθερά σύζευξης και η τιμή του ταλαντεύεται γύρω από την τιμή 24 ± 2 για τις διάφορες τιμές του k . Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι στην περιοχή κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία, το σύστημα μετατοπίζεται ελάχιστα από την μεταλλική φάση, οπότε η σταθερά k έχει μικρή επίδραση στη συμπεριφορά της λύσης. Επιπλέον, όπως πάρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η μη υπεραγώγιμη πυκνότητα μπορεί να οριστεί ως $n_n = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}[\sigma]$. Προσαρμόζοντας τα δεδομένα όταν $T/T_c \approx 0.1$ προκύπτει ότι:

$$n_n \sim e^{-\Omega_g/T} \quad (4.14)$$

όπου η ποσότητα Ω_g μπορεί να ερμηνευθεί ως το ενεργειακό χάσμα για φορτισμένες διεγέρσεις στην αντίστοιχη θερμοκρασία. Η τιμές της συνοψίζονται στον πίνακα 4.3. Σύγκριση με το ενεργειακό χάσμα ω_g/T_c , όπως προκύπτει από το αριστερό γράφημα του σχήματος 4.2, δίνει τη σχέση $\omega_g \approx 2\Omega_g$. Ο παράγοντας 2 υπονοεί ότι τα φορτισμένα ημί-σωματίδια δημιουργούνται σε ζευγάρια. Επίσης, για $k = 0.5$ ισχύει $\omega_g \approx 2\Omega_g \approx 4T_c$, αποτέλεσμα το οποίο είναι πολύ κοντά στο προβλεπόμενο από τη θεωρία BCS, $\omega_g \approx 3.54T_c$. Οπότε, η σύζευξη που εισήχθη μεμείται την επίδραση παραμαγνητικών προσμίξεων σε ένα πραγματικό υλικό.

Σε αυτήν την ενότητα μελετήθηκε μια επέκταση του μοντέλου της ενότητας 3. Εισήχθη μια επιπλέον σύζευξη με τον ταυιστή Einstein με σκοπό την προσομοίωση παραμαγνητικών προσμίξεων σε ένα υλικό. Συνοψίζοντας

k	-0.01	0	0.01	0.05	0.1	0.5
Ω_g/T_c	4	3.8	3.5	3.0	2.8	2.0

Πίνακας 4.3: Το ενεργειακό χάσμα για φορτισμένες διεγέρσεις για διάφορες τιμές του k .

τα αποτελέσματα, η εμφάνιση της σταθεράς σύζευξης k , μειώνει την κρίσιμη θερμοκρασία T_c , την ισχύ του συμπυκνώματος και το ενεργειακό χάσμα, ενώ η σχέση $\omega_g \approx \sqrt{\langle \mathcal{O}_2 \rangle}$ παραβιάζεται. Αναλύοντας την οπτική αγωγιμότητα προκύπτει ότι $\omega_g \approx 2\Omega_g \approx 4T_c$, σχέση που είναι πολύ κοντά στην πρόβλεψη της θεωρίας BCS, $\omega_g \approx 3.54T_c$.

Πιστεύεται ότι το οριο Probe, περιέχει όλα τα βασικά χαρακτηριστικά του μοντέλου. Παρόλα αυτά, θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί η επίδραση των πεδίων ύλης στη μετρική για το πρόβλημα αυτό. Όμως, το πρόβλημα δεν είναι καθόλου εύκολο λόγω της ύπαρξης του ταυιστή (4.5).

Κεφάλαιο 5

Ολογραφικός Υπεραγωγός με αυθόρμητη παραβίαση της διατήρησης της ορμής

Το μοντέλο του ολογραφικού υπεραγωγού που μελετήθηκε στις προηγούμενες ενότητες διαθέτει συμμετρία στις χωρικές μεταθέσεις. Για μετασχηματισμούς της μορφής $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$ η δράση παραμένει αναλλοίωτη. Σύμφωνα με το λεξικό της ολογραφίας, αυτό οδηγεί σε μια θεωρία στο σύνορο που διαθέτει την ίδια συμμετρία. Στα πλαίσια της φυσικής συμπυκνωμένης ύλης αυτή η συμμετρία συνεπάγεται διατήρηση της ορμής. Οι φορείς φορτίου δεν έχουν κάποιον τρόπο να απελευθερώσουν την ορμή τους και το ρεύμα παραμένει σταθερό. Αυτή είναι και η προέλευση της αιχμής Drude στο πραγματικό κομμάτι της αγωγιμότητας.

Όμως στα πραγματικά υλικά δεν υπάρχει αυτή η συμμετρία στις χωρικές μεταθέσεις. Ακόμα και χωρίς την ύπαρξη προσμίξεων, υπάρχει μια δομή πλέγματος η οποία οδηγεί στην παραβίαση της διατήρησης της ορμής. Αυτό οδηγεί στην εξομάλυνση της αιχμής Drude εισάγοντας μια χαρακτηριστική χρονική κλίμακα απελευθέρωσης της ορμής. Για να κατανοηθεί πλήρως η αγωγιμότητα στις θεωρίες με ισχυρές αλληλεπιδράσεις, πρέπει να εισαχθεί στο μοντέλο του ολογραφικού υπεραγωγού η παραβίαση της συμμετρίας στις χωρικές μεταθέσεις. Αυτό θα πραγματοποιηθεί δίνοντας στο βαθμωτό πεδίο μια εξάρτηση από τη συνιστώσα x του συνόρου. Στο μοντέλο που πρόκειται να μελετηθεί σε αυτήν την ενότητα θα διατηρηθεί η σύζευξη με τον τανυστή Einstein.

5.1 Κατασκευή του μοντέλου

Θεωρείται ξανά μια θεωρία Maxwell-Einstein με ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο που είναι συζευγμένο με τον ταυιστή Einstein. Η δράση είναι:

$$S_{bulk} = S_{gravity} + S_{matter} = \quad (5.1)$$

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R + \Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu} + kG^{\mu\nu}) D_\mu \psi (D_\nu \psi)^* - m^2 |\psi|^2 \right] \quad (5.2)$$

όπου

$$D_\mu = \nabla_\mu - ieA_\mu \quad (5.3)$$

και e , m είναι το φορτίο και η μάζα του βαθμωτού πεδίου, ενώ η σταθερά k δίνει την ισχύ της σύζευξης με τον ταυιστή Einstein. Σε αυτό το μοντέλο θα εισαχθεί η παραβίαση της συμμετρίας στις χωρικές μεταθέσεις δίνοντας x εξάρτηση στο βαθμωτό πεδίο.

Για ευκολία ορίζονται οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu\nu} &\equiv D_\mu \psi (D_\nu \psi)^* \\ \Phi &\equiv g^{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu} \\ C^{\mu\nu} &\equiv g^{\mu\nu} + kG^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein, όπως προκύπτουν από τη δράση (4.1), παίρνουν τη μορφή:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\psi)} + T_{\mu\nu}^{(EM)} + k\Theta_{\mu\nu} \quad (5.4)$$

όπου οι ταυιστές $T_{\mu\nu}^{(EM)}$ και $T_{\mu\nu}^{(\psi)}$ δίνονται από τις σχέσεις (3.3) και:

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu} R^{ab} \Phi_{ab} + R_\nu^a (\Phi_{\mu a} + \Phi_{a\mu}) + R_\mu^a (\Phi_{a\nu} + \Phi_{\nu a}) - \frac{1}{2} R (\Phi_{\mu\nu} + \Phi_{\nu\mu}) \\ &\quad - G_{\mu\nu} \Phi - \frac{1}{2} \nabla^a \nabla_\mu (\Phi_{a\nu} + \Phi_{\nu a}) - \frac{1}{2} \nabla^a \nabla_\nu (\Phi_{\mu a} + \Phi_{a\mu}) + \frac{1}{2} \square (\Phi_{\mu\nu} + \Phi_{\nu\mu}) \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\Phi^{ab} + \Phi^{ba}) + \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu) \Phi - g_{\mu\nu} \square \Phi \end{aligned} \quad (5.5)$$

Οι εξισώσεις Maxwell παίρνουν τη μορφή:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} + C^{\mu\nu} [2q^2 A_\nu |\psi|^2 + iq(\psi^* \nabla_\nu \psi - \psi \nabla_\nu \psi^*)] = 0 \quad (5.6)$$

και η εξίσωση Klein-Gordon

$$(\partial_\mu - iqA_\mu) [\sqrt{-g} C^{\mu\nu} (\partial_\nu - iqA_\nu) \psi] = \sqrt{-g} m^2 \psi \quad (5.7)$$

Το μοντέλο αυτό θα μελετηθεί ξανά χρησιμοποιώντας το όριο Probe, στο οποίο δεν μελετάται η επίδραση των πεδίων ύλης στη μετρική.

5.2 Συμπύκνωμα

Λαμβάνεται πάλι μια επίπεδη συμμετρική κατανομή,

$$\psi = \psi(r) e^{-i\tau t}, \quad A_t = \phi(r) \quad (5.8)$$

Όπου η σταθερά τ εκφράζει την ισχύ της παραβίασης της συμμετρίας στις χωρικές μεταθέσεις. Οι εξισώσεις (5.6) και (5.7) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} & \left(1 + k \left(\frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r}\right)\right) \psi'' + \left[\frac{2}{r} + \frac{f'}{f} + k \left(\frac{3f'}{r^2} + \frac{(f')^2}{rf} + \frac{f''}{r}\right)\right] \psi' + \frac{1}{r^2 f} \left(1 + k \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{r}\right)\right) \nabla_2^2 \psi \\ & + \left[\frac{q^2 \phi^2}{f^2} \left(1 + k \left(\frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r}\right)\right) - \frac{m^2}{f}\right] \psi = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

και

$$\phi'' + \frac{2}{r} \phi' - \frac{2|\psi|^2}{f} \left[1 + k \left(\frac{f'}{r} + \frac{f}{r^2}\right)\right] \phi = 0 \quad (5.10)$$

με

$$\nabla_2^2 \psi = -\tau^2 \psi \quad (5.11)$$

Εάν θέσουμε $k = 0$ και $\tau = 0$ είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή (3.12) και (3.13). Εξαιτίας του νέου όρου με τον τανυστή του Einstein, οι νέες εξισώσεις εξαρτώνται από τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f , σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση που εμφανιζόταν μόνο η πρώτη παράγωγος.

Οι εξισώσεις αυτές θα επιλυθούν αριθμητικά με την ίδια ακριβώς μέθοδο

τ	0	0.2	0.5
T_c	0.099	0.098	0.097

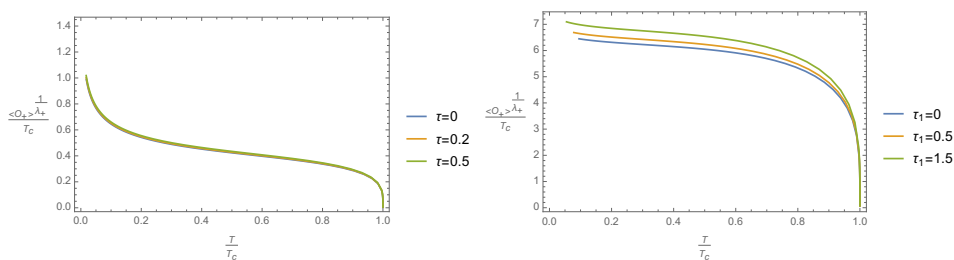
Πίνακας 5.1: Η εξάρτηση της κρίσιμης θερμοκρασίας για τη συμπύκνωση του τελεστή O_2 για διάφορες τιμές της σταθεράς τ .

που ακολουθήθηκε στην πρώτη ενότητα. Οι συνοριακές συνθήκες θα είναι ίδιες και θα υπολογιστεί η συμπύκνωση του τελεστή διάστασης 2, O_2 .

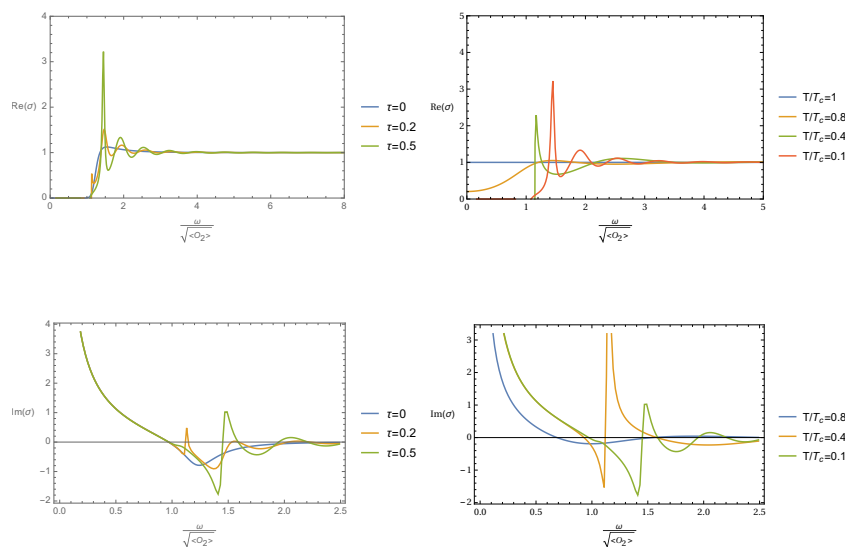
Η εξάρτηση της κρίσιμης θερμοκρασίας για διάφορες τιμές του τ φαίνεται στον πίνακα 5.1. Παρατηρείται μια πολύ μικρή μείωση της κρίσιμης θερμοκρασίας T_c με την αύξηση της σταθεράς τ . Ο ρυθμός μείωσης αυξάνεται καθώς λαμβάνονται μεγαλύτερες τιμές για το τ .

Η αντίθετη συμπεριφορά παρατηρείται ως προς την ισχύ του συμπυκνώματος, το οποίο αυξάνεται με την αύξηση της σταθεράς τ , που εκφράζει την ισχύ της παραβίασης της συμμετρίας στις χωρικές μεταθέσεις. Η συμπεριφορά του συμπυκνώματος φαίνεται στο σχήμα 5.1 για $k = 0.2$ και $k = 0.01$. Επίσης, φαίνεται πως η επίδραση της σταθεράς τ στο συμπύκνωμα ενισχύεται καθώς μειώνεται η ισχύς της σύζευξης με τον ταχυστή Einstein k .

Παρατηρείται ότι ποιοτικά η καμπύλη της ισχύς του συμπυκνώματος διατηρεί τα χαρακτηριστικά των προηγούμενων περιπτώσεων, που υποδεικνύουν ότι η αλλαγή φάσης είναι δεύτερης τάξης.



Σχήμα 5.1: Η ισχύς του συμπυκνώματος ως συνάρτηση της θερμοκρασίας για διάφορες τιμές της σταθεράς τ για $k = 0.2$ (αριστερά) και $k = 0.01$ (δεξιά).



Σχήμα 5.2: Το πραγματικό και το φανταστικό κομμάτι της αγωγιμότητας. Τα αριστερά διαγράμματα έχουν σχεδιαστεί για $k = 0.01$ και $T/T_c \approx 0.1$. Τα δεξιά διαγράμματα έχουν σχεδιαστεί για $k = 0.01$ και $\tau = 0.5$.

5.3 Υπεραγωγιμότητα

Ομοίως με πριν, για να υπολογισθεί η οπτική αγωγιμότητα πρέπει να λυθούν οι διακυμάνσεις του πεδίου Maxwell στον κύριο χώρο. Για μηδενική χωρική ορμή, και χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{i\omega t}$ οι εξισώσεις Maxwell για τη συνιστώσα $A_x(r)$ έχουν σε αυτήν την περίπτωση τη μορφή:

$$A_x'' + \frac{f'}{f} A_x' + \left[\frac{\omega^2}{f^2} - \frac{2|\psi|^2}{f} \left(1 + k \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} \right) \right) \right] A_x - \frac{2\tau|\psi|^2}{f} \left(1 + k \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} \right) \right) = 0$$

Η εξίσωση θα επιλυθεί χρησιμοποιώντας πάλι εισερχόμενες συνοριακές συνθήκες τις μορφής $f^{-i\omega/3r_0}$ στον ορίζοντα. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του πεδίου Maxwell δίνεται από την (3.23). Σύμφωνα με το λεξιλόγιο της ολογραφίας, η οπτική αγωγιμότητα θα υπολογιστεί από την (3.24).

Στο διάγραμμα 5.2 έχει σχεδιαστεί το πραγματικό και το φανταστικό κομμάτι της αγωγιμότητας για διάφορες τιμές των παραμέτρων τ και k . Όπως και στις προηγούμενες ενότητες, παρατηρείται πάλι η δημιουργία του ενεργειακού χάσματος, το οποίο αυξάνεται.

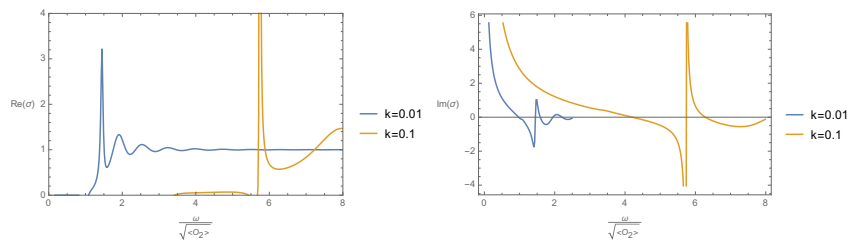
Στην περίπτωση που η συμμετρία στις χωρικές μεταθέσεις παραβιάζεται με

την εισαγωγή της παραμέτρου τ , παρατηρείται η εμφάνιση νέων αιχμών στο πραγματικό κομμάτι της αγωγιμότητας για συχνότητες $\omega \neq 0$, όπως φαίνεται στα αριστερά διαγράμματα του σχήματος 5.2, όπου έχει σχεδιαστεί η αγωγιμότητα για $k = 0.01$ και $T/T_c \approx 0.1$. Αυτές οι αιχμές εμφανίζονται για την ίδια τιμή της συχνότητας και στο φανταστικό κομμάτι της αγωγιμότητας, όπως είναι αναμενόμενο από τις σχέσεις Kramers-Kronig 3.25.

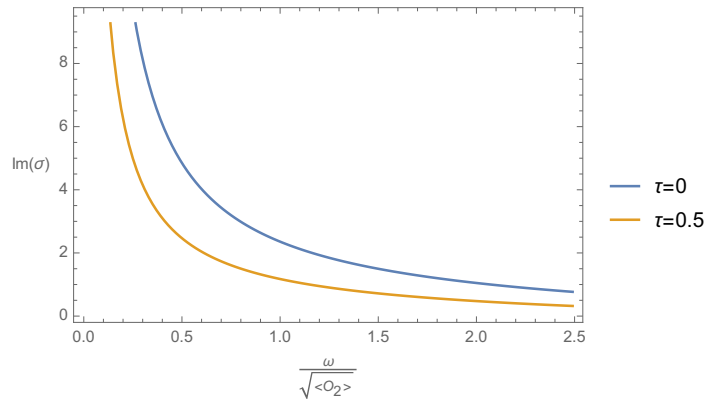
Σχεδιάζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας για διάφορες θερμοκρασίες $T < T_c$ στα δεξιά διαγράμματα του σχήματος 5.2, φαίνεται πως αυτές οι αιχμές δεν σχηματίζονται για όλες τις θερμοκρασίες. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μια δεύτερη κρίσιμη θερμοκρασία $T'_c \approx 0.5$, μετά την οποία αρχίζουν και σχηματίζονται οι αιχμές. Δηλαδή υπάρχει μια νέα φάση μέσα στην υπεραγώγιμη φάση που μελετάται και η οποία περιγράφεται από αυτές τις αιχμές.

Αυτές οι αιχμές στο πραγματικό κομμάτι της αγωγιμότητας σηματοδοτούν τη δημιουργία νέων φορτισμένων βαθμών ελευθερίας που είναι ζευγάρια σωματιδίων. Η ενέργεια αυτών των σωματιδίων μπορεί να βρεθεί μετρώντας την απόσταση του ενεργειακού χάσματος και του σημείου που εντοπίζεται ο πόλος. Αυτά τα νέα ζευγάρια συνεισφέρουν στο ρεύμα αγωγιμότητας και η συμπεριφορά δεν περιγράφεται από τη θεωρία BCS, αλλά από τη θεωρία BEC (συμπύκνωμα Bose-Einstein). Κατά αυτόν τον τρόπο εξηγείται και η αύξηση που παρατηρείται στην ισχύ του συμπυκνώματος, που φαίνεται στο σχήμα 5.1. Αυτά τα νέα ζευγάρια σωματιδίων που δημιουργούνται, συμπυκνώνονται όταν η θερμοκρασία γίνει μικρότερη της κρίσιμης θερμοκρασίας T'_c .

Στο σχήμα 5.3 φαίνεται η επίδραση της σταθεράς σύζευξης k στο πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας όταν η σταθερά τ είναι μη μηδενική. Όπως αποδείχθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, η σταθερά k μετατοπίζει τα διαγράμματα



Σχήμα 5.3: Το πραγματικό και το φανταστικό κομμάτι της αγωγιμότητας για $\tau = 0.5$ και $T/T_c \approx 0.1$.



Σχήμα 5.4: Η εξομάλυνση της αιχμής Drude με την εισαγωγή της σταθεράς τ που παραβιάζει τη συμμετρία στις χωρικές μεταθέσεις για $k = 0.01$ και $T/T_c \approx 0.1$.

σε μεγαλύτερες συχνότητες, παραβιάζοντας τη σχέση $\omega_g \approx \sqrt{\langle O_2 \rangle}$. Η μεταβολή της σταθεράς k δεν φαίνεται να έχει επίδραση στις νέες αιχμές που εμφανίζονται στην αγωγιμότητα.

Το κίνητρο για τη μελέτη του μοντέλου του ολογραφικού υπεραγωγού με παραβίαση της συμμετρίας στις χωρικές μεταθέσεις ήταν το γεγονός ότι στα πραγματικά υλικά η αιχμή Drude στο πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εξομαλύνεται. Επειδή στα αριθμητικά αποτελέσματα δεν φαίνεται η αιχμή Drude στο πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας, θα σχεδιαστεί το φανταστικό μέρος. Στο σχήμα 5.4 φαίνεται το φανταστικό κομμάτι της αγωγιμότητας για $k = 0.01$ και $T/T_c \approx 0.1$. Παρατηρείται ότι η αιχμή Drude φαίνεται να γίνεται πιο ομαλή, σε σχέση με την περίπτωση όπου το μοντέλο διατηρεί τη χωρική συμμετρία στις μεταθέσεις.

Σε αυτήν την ενότητα μελετήθηκε το μοντέλο του ολογραφικού υπεραγωγού με παραβίαση της συμμετρίας στις χωρικές μεταθέσεις ως επέκτασης του μοντέλου των προηγούμενων ενοτήτων. Με την εισαγωγή της σταθεράς τ που παραβιάζει τη συγκεκριμένη συμμετρία, το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εμφάνισε νέες αιχμές για συχνότητες $\omega \neq 0$, οι οποίες σηματοδοτούν τη δημιουργία νέω φορτισμένων βαθμών ελευθερίας. Οι αιχμές αυτές εμφανίζονται για θερμοκρασίες $T < T'_c$ όπου T'_c είναι μια νέα κρίσιμη θερμοκρασία μικρότερη της κρίσιμης θερμοκρασίας της υπεραγωγίμης φάσης T_c . Επίσης, η αιχμή Drude εξομαλύνθηκε, όπως αναμενόταν από τις μελέτες σε πραγματικά υλικά όπου λόγω της ύπαρξης πλέγματος δεν υπάρχει αυτή η συμμετρία.

Η μελέτη της φύσης αυτών των αιχμών και του μηχανισμού που τις εξηγεί

παρουσιάζει πολύ ενδιαφέρον. Αυτά τα νέα ζευγάρια σωματιδίων που συμπυκνώνονται δεν περιγράφονται από τη θεωρία BCS. Μια υποψήφια θεωρία για την εξήγηση της συμπεριφοράς τους είναι η θεωρία BEC. Στα πλαίσια της θεωρίας αυτής, στη μεταλλική φάση για $T > T_c$, εμφανίζεται ένα μη μηδενικό ενεργειακό χάσμα, το οποίο ονομάζεται ψεύδο-χάσμα. Το επόμενο στάδιο για την κατανόηση αυτών των αιχμών είναι η μελέτη της μεταλλικής φάσης στο μοντέλο του ολογραφικού υπεραγωγού για να αποδειχθεί αν εμφανίζεται αυτό το ψεύδο-χάσμα.

Κεφάλαιο 6

Βιβλιογραφία

- [1] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, and G. T. Horowitz, “Building a Holographic Superconductor,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 031601 (2008).
- [2] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, and G. T. Horowitz, *J. High Energy Phys.* **0812**, 015 (2008).
- [3] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, and G. T. Horowitz, “Holographic Superconductors,” *JHEP* **828**, 313 (2011) [arXiv:1002.1722 [hep-th]].
- [4] G. T. Horowitz, “Introduction to Holographic Superconductors,” *Lect. Notes Phys.* **0812**, 015 (2008) [arXiv:0810.1563 [hep-th]].
- [5] S. A. Hartnoll, “Lectures on Holographic Methods for Condensed Matter Physics,” *Class. Quant. Grav.* **26**, 224002 (2009) [arXiv:0903.3246 [hep-th]].
- [6] David Tong, “Lectures on Holographic Conductivity,” 2013.
- [7] X. M. Kuang, E. Papantonopoulos, G. Siopsis and B. Wang, “Building a Holographic Superconductor with Higher-derivative Couplings,” *Phys. Rev. D* **88**, 086008 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.88.086008 [arXiv:1303.2575 [hep-th]].
- [8]
- [8] X. M. Kuang, E. Papantonopoulos and B. Wang, “Entanglement Entropy as a Probe of the Proximity Effect in Holographic Superconductors,” *JHEP* **1405**, 130 (2014) doi:10.1007/JHEP05(2014)130 [arXiv:1401.5720 [hep-th]].

- [9] J. Alsup, E. Papantonopoulos, G. Siopsis and K. Yeter, “Spontaneously Generated Inhomogeneous Phases via Holography,” *Phys. Rev. D* **88**, no. 10, 105028 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.88.105028 [arXiv:1305.2507 [hep-th]].
- [10] S. S. Gubser, “Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon,” *Phys. Rev. D* **78**, 065034 (2008).
- [11] K. Lin, A. B. Pavan, Q. Pan and E. Abdalla, arXiv:1512.02718 [gr-qc].