ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ»

# ΤΟ ΜΕΓΑΛΟΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΟ $N = 1$ ΥΠΕΡΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

**Πατέλλης Γρηγόριος**

Επιβλέπων:

**Γιώργος Ζουπάνος**

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ, ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2017

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται το πεπερασμένο μεγαλοενοποιημένο $N = 1$ υπερσυμμετρικό μοντέλο $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$υπό το πρίσμα δύο θεωρητικών πλαισίων: της διαστατικής ελάττωσης σε χώρους πηλίκου (Coset Space Dimensional Reduction - CSDR) και της ελάττωσης παραμέτρων σε πεπερασμένες θεωρίες ενοποίησης (reduction of couplings σε Finite Unified Theories - FUT). Η πρώτη θεωρία χρησιμοποιεί επιπλέον διαστάσεις για να καταλήξει σε τετραδιάστατα μοντέλα που βελτιώνουν κάποια από τα προβλήματα του Καθιερωμένου Προτύπου (Standard Model - SM) και περιορίζουν ορισμένες ελεύθερες παραμέτρους, ενώ σκοπός της δεύτερης είναι να μειωθεί ο μεγάλος αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων που συναντώνται σήμερα στη σωματιδιακή φυσική (κατευθείαν στις τέσσερις διαστάσεις).

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε τέσσερις ενότητες. Στο πρώτο κεφάλαιο δίνεται μια περιγραφή του θεωρητικού πλαισίου του CSDR και στο δεύτερο εφαρμόζεται ο μηχανισμός Wilson flux ώστε η θεωρία να καταήξει στο $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$. Το τρίτο κεφάλαιο αφιερώνεται σε μια συνοπτική περιγραφή της αρχής της ελάττωσης παραμέτρων, ενώ στο τέταρτο περιγράφεται το μοντέλο $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$όπως προκύπτει από τα παραπάνω θεωρητικά πλαίσια.

In this master thesis the finite unified $N = 1$ supersymmetric $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$model is studied under two theoretical frameworks: the coset space dimensional reduction (CSDR) framework and the principle of the reduction of couplings in finite unified theories. The first framework uses extra dimensions to give 4-dimensional models that improve some problems of the Standard Model (SM) and reduce certain free parameters, while the goal of the second is to reduce the large number of free parameters that one encounters in particle physics today.

The thesis is organised as follows: In the first chapter a description of CSDR is given, and in the second chapter the concept of the Wilson flux mechanism is introduced, in order for the the theory to break down to $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$. The chapter is dedicated to a brief description of the principle of the reduction of couplings, while in chapter four the $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$model is studied.

# Περιεχόμενα


**1 Διαστατική Ελάττωση σε Χώρους Πηλίκου** **1**

1.1 Γεωμετρία χώρων πηλίκου . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.2 Ελάττωση μιας $D$-διάστατης Λαγκρανζιανής . . . . . . . . . . . 5

1.3 Η 4-διάστατη θεωρία . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

1.4 Διαστατική ελάττωση της $E_8$ πάνω στο $SU(3)/U(1) \times U(1)$ . . . 13

**2 Ο μηχανισμός Wilson flux** **19**

2.1 $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$ από Wilson flux . . . . . . . . . . . 20

**3 Ελάττωση Παραμέτρων και Finiteness** **23**

3.1 Ελάττωση παραμέτρων . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

3.2 $N = 1$ Finiteness . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

3.3 Soft σπάσιμο υπερσυμμετρίας σε $N = 1$ FUTs . . . . . . . . . . 25

**4 Το μοντέλο $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$** **27**

4.1 Σπάσιμο συμμετρίας βαθμίδας . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

4.2 Φερμιονικές μάζες . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

4.3 Finite $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

**Α΄ Από τον 32-σπίνορα στον 8-σπίνορα** **39**

**Β΄ Χρήσιμες σχέσεις για την gaugino mass** **41**

**Γ΄ Συναρτήσεις $\beta$ για το MSSM** **43**

# Εισαγωγή

Τις τελευταίες δεκαετίες η ενοποίηση των τεσσάρων αλληλεπιδράσεων αποτελεί τον κύριο στόχο της θεωρητικής φυσικής υψηλών ενεργειών και σε αυτήν την κατεύθυνση έχουν γίνει και γίνονται εντατικές προσπάθειες. Οι δύο βασικοί δρόμοι στον τομέα αυτό είναι οι θεωρίες υπερχορδών και η μη-μεταθετική γεωμετρία. Και οι δύο αναμένονταν αρχικά να συμπεριφέρονται καλύτερα από τις συνήθεις θεωρίες πεδίου όσον αφορά τις ιδιότητες επανακανονικοποίησης στην περιοχή του υπεριώδους (UV), ενώ έρχονται κοντά στα πλαίσια των D-branes της θεωρίας χορδών, όπου η γεωμετρία του χώρου γίνεται σε ορισμένες περιπτώσεις μη-μεταθετική.

Παρόλα αυτά, έχει μεγάλη σημασία να αναζητήσουμε πεπερασμένες θεωρίες (δηλαδή θεωρίες χωρίς απειρισμούς στο UV) και σε μικρότερες ενεργειακές κλίμακες, οι οποίες να ενοποιούν τις αλληλεπιδράσεις (αγνοώντας για την ώρα την βαρυτική). Έτσι, είναι δυνατόν να περιοριστεί το πολύ μεγάλο πλήθος ελεύθερων παραμέτρων που προκύπτουν απο το Καθιερωμένο Πρότυπο των στοιχειωδών σωματιδίων (αλλά και από την υπερσυμμετρική του επέκταση) και να εκφραστούν συναρτήσει κάποιων λίγων θεμελιωδών παραμέτρων. Μεγάλη προοπτική παρουσιάζουν σε αυτήν την κατεύθυνση οι $N = 1$ υπερσυμμετρικές Πεπερασμένες Θεωρίες Ενοποίησης ($N = 1$ FUTs), οι οποίες έχουν επιβιώσει από πολυάριθμες θεωρητικές και φαινομενολογικές δοκιμασίες. Επιπλέον, αφού βασίζονται στην αρχή της ελάττωσης παραμέτρων (η οποία εκφράζεται μέσα απο σχέσεις αναλλοίωτες-επανακανονικοποίησης στις διάφορες κλίμακες -RGI- μεταξύ συζεύξεων και μαζών), θέτουν αυστηρά κριτήρια στην επιλογή ρεαλιστικών μοντέλων που να οδηγούν σε ελέγξιμες προβλέψεις (π.χ. στη δεύτερη περίοδο λειτουργίας του επιταχυντή LHC του CERN). Ένα πολλά υποσχόμενο τέτοιο μοντέλο που χρήζει περαιτέρω μελέτης είναι το $N = 1$ υπερσυμμετρικό $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$.

Υπάρχουν δύο διαφορετικές θεωρητικές κατευθύνσεις οι οποίες δύνανται να καταλήξουν στην επιλογή αυτού του μοντέλου, η διαστατική ελάττωση σε χώρους πηλίκου (CSDR) και η μη-μεταθετική γεωμετρία σε ασαφείς (fuzzy) χώρους. Η παρούσα εργασία θα εξετάσει την διαστατική ελάττωση στο χώρο πηλίκου $SU(3)/U(1) \otimes U(1)$.

Η περίπτωση αυτή ξεκινά από τη διαστατική ελάττωση της Ετεροτικής Χορδής (Heterotic String) χρησιμοποιώντας μη-συμμετρικούς χώρους πηλίκου. Όσον αφορά την περίπτωση του $N = 1$ $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$, ξεκινώντας από μια $N = 1$ $E_8$ (η οποία είναι και το όριο της Heterotic String πάνω σε μια πολλαπλότητα $B/Z_3$ στις 10 διαστάσεις, όπου το $B$ είναι η περίπου Kahler πολλαπλότητα $SU(3)/U(1) \otimes U(1)$, προκύπτει τελικά (μέσω μιας ενδιάμεσης $E_6$ και του μηχανισμού Wilson flux) ένα χειραλικό (chiral) $N = 1$ $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$στις 4 διαστάσεις.

Το $N = 1$ $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$μοντέλο (το οποίο μετά την παραβίαση της υπερσυμμετρίας καταλήγει στο MSSM) ξεχωρίζει ως υποψήφιο μοντέλο ενοποίησης για έναν ακόμα λόγο: είναι αυτομάτως πεπερασμένο (FUT) σε προσέγγιση 1-βρόχου (1-loop) στη σύζευξη βαθμίδας (gauge coupling) εάν θεωρηθούν τρεις φερμιονικές γενιές. Αφού είναι $N = 1$ υπερσυμμετρικό, το μοντέλο αποτελεί έναν πολύ καλό υποψήφιο για κατασκευή μιας συνολικά πεπερασμένης θεωρίας μέσω της εφαρμογής της αρχής της ελάττωσης παραμέτρων, κάτι που του δίνει πολύ δυνατή προβλεπτική ικανότητα. Η ελάττωση των αδιάστατων συζεύξεων σε $N = 1$ θεωρίες επιτυγχάνεται αναζητώντας RGI σχέσεις μεταξύ τους που ισχύουν πάνω από την κλίμακα ενοποίησης. Ο πεπερασμένος χαρακτήρας της θεωρίας προκύπτει από το γεγονός ότι οι RGI αυτές εκφράσεις εγγυώνται το μηδενισμό όλων των β-συναρτήσεων (σε προσέγγιση δύο βρόχων). Ακόμα, πρόσφατη δουλειά στον τομέα του Απαλού Σπασίματος Υπερσυμμετρίας (Soft-Supersymmetry Breaking) καθιστά δυνατή την ελάττωση παραμέτρων και σε συζεύξεις με διαστάσεις. Είναι εντυπωσιακό ότι ορισμένες από τις θεωρίες αυτές δίνουν αποτελέσματα που επιβεβαιώνονται από τις τελευταίες μετρήσεις του LHC, ενώ προβλέπουν και νέα σωματίδια μέσα στο σημερινό ενεργειακό εύρος του LHC.

# Κεφάλαιο 1

# Διαστατική Ελάττωση σε Χώρους Πηλίκου

Η θεωρία Υπερχορδών είναι συνεπής μόνο στις 10 διαστάσεις. Αυτό δημιουργεί την ανάγκη να διαχωριστούν οι 4 φαινομενολογικά αποδεκτές διαστάσεις από τις 6 επιπλέον, αλλά και την ανάγκη να μειωθούν σε 4, δίνοντας μια 4-διάστατη θεωρία που τελικά μπορεί να παρατηρηθεί πειραματικά. Σε αυτήν την κατεύθυνση η πιο πολλά υποσχόμενη θεωρία είναι αυτή της Ετεροτικής Χορδής (Heterotic String). Μετά τη συμπαγοποίηση (compactification) του 10-διάστατου χώρου και τη διαστατική ελάττωση, η αρχική θεωρία βαθμίδας $E_8 \times E_8$ μπορεί να σπάσει σε ενδιαφέρουσες (φαινομενολογκά) μεγαλοενοποιημένες θεωρίες (Grand Unified Theories - GUT).

Για περισσότερο από 20 χρόνια γίνονται να βρεθεί ένα πλαίσιο συμπαγοποίησης και διαστατικής ελάττωσης που να οδηγεί σε μια ρεαλιστική θεωρία στις χαμηλές ενέργειες. Ένας τρόπος είναι με τη χρήση των πολλαπλοτήτων Calabi Yau (CY) ως συμπαγών εσωτερικών χώρων, ώστε να διατηρηθεί η $N = 1$ υπερσυμμετρία μετά τη διαστατική ελάττωση από 10 σε 4 διαστάσεις. Παρόλα αυτά, σε αυτήν την περίπτωση η 4-διάστατη θεωρία περιέχει κάποια άμαζα χειραλικά (chiral) σωματίδια "moduli", τα οποία αντιστοιχούν σε "flat directions" του effective δυναμικού και επομένως οι τιμές τους μένουν απροσδιόριστες. Αυτό οδήγησε σε μία ευρύτερη κλάση εσωτερικών χώρων, τις πολλαπλότητες με δομή $SU(3)$ (κλάση η οποία εμπεριέχει τις CY πολλαπλότητες). Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία τέτοιων πολλαπλοτήτων είναι οι περίπου-Kaehler (nearly-Kaehler) πολλαπλότητες. Οι ομοιογενείς nearly-Kaehler πολλαπλότητες σε 6 διαστάσεις έχουν κατηγοριοποιηθεί και είναι η πολλαπλότητα ομάδας $SU(2) \times SU(2)$ και οι μη-συμμετρικοί 6-διάστατοι χώροι πηλίκου $G_2/SU(3)$, $Sp(4)/(SU(2) \times U(1))_{non-max}$ και $SU(3)/U(1) \times U(1))$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαστατική ελάττωση των 10-διάστατων $N = 1$ θεωριών βαθμίδας $E_8$ πάνω σε μη-συμμετρικούς χώρους πηλίκου οδηγεί σε softly broken $N = 1$ θεωρίες σε 4 διαστάσεις.

Για να ελαττωθούν οι διαστάσεις μιας πολυδιάστατης θεωρίας βαθμίδας απαιτείται η εξάρτηση των πεδίων από τις επιπλέον διαστάσεις να είναι τέτοια, ώστε η Λαγκρανζιανή να είναι ανεξάρτητη από τις διαστάσεις αυτές. Ένας «αφελής» τρόπος να γίνει αυτό είναι τα πεδία να μην εξαρτώνται από τις επιπλέον διαστάσεις, υπάρχει όμως και ένας πιο «κομψός» τρόπος. Τα πεδία μπορούν να έχουν μια μη-τετριμμένη εξάρτηση από τις επιπλέον διαστάσεις, αλλά επιβάλλεται η συνθήκη ότι ένας μετασχηματισμός συμμετρίας από ένα στοιχείο της ομάδας ισομετρίας $S$ του χώρου $B$ (που σχηματίζεται από τις επιπλέον διαστάσεις) αντιστοιχεί σε έναν μετασχηματισμό βαθμίδας. Επομένως, η Λαγκρανζιανή θα είναι ανεξάρτητη των επιπλέον διαστάσεων επειδή είναι αναλοίωτη βαθμίδας (gauge invariant).

Στο πλαίσιο της διαστατικής ελάττωσης σε χώρους πηλίκου (Coset Space Dimensional Reduction - CSDR) στο άνω ενεργειακό όριο υπάρχει μια Λαγκρανζιανή Yang-Mills-Dirac με μια ομάδα βαθμίδας $G$ ορισμένη σε έναν $D$-διάστατο χωρόχρονο $M^D$ με μετρική $g^{MN}$, που συμπαγοποιείται στον $M^4 \times S/R$, όπου το $S/R$ είναι ένας χώρος πηλίκου. Η μετρική έχει τη μορφή

$$g^{MN} = \begin{bmatrix} \eta^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -g^{ab} \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

όπου $\eta^{\mu\nu}$ είναι η μετρική Minkowski και $g^{ab}$ η μετρική του χώρου πηλίκου. Η απαίτηση οι μετασχηματισμοί των πεδίων κάτω από την ομάδα συμμετρίας $S/R$ να αντισταθμίζονται από μετασχηματισμούς βαθμίδας οδηγεί σε ορισμένους περιορισμούς στα πεδία. Η λύση των περιορισμών αυτών δίνει τα 4-διάστατα μη-περιορισμένα πεδία και την αναλλοιότητα βαθμίδας που μένει στη θεωρία μετά τη διαστατική ελάττωση. Επιτυγχάνεται έτσι ένας εκ των αρχικών στόχων της θεωρίας, δηλαδή η ενοποίηση (σε χαμηλές ενέργειες) των συζεύξεων βαθμίδας, των συζεύξεων Yukawa και του τομέα Higgs.

Στην μέθοδο CSDR τα 4-διάστατα πεδία είναι στην πραγματικότητα οι πρώτοι όροι των αναπτυγμάτων των $D$-διάστατων πεδίων σε αρμονικές στον εσωτερικό χώρο $B$. Οι effective θεωρίες που προκύπτουν από την συμπαγοποίηση πολυδιάστατων θεωριών ενδέχεται να περιέχουν και «πύργους» Kaluza-Klein διεγέρσεων (excitations).

## 1.1 Γεωμετρία χώρων πηλίκου

Θα θεωρηθούν χώροι πηλίκου $S/R$, όπου το $S$ είναι μια ομάδα Lie και το $R$ μία συμπαγής Lie υποομάδα του $S$ (τα στοιχεία του $S/R$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας).

Η διάσταση του χώρου πηλίκου είναι

$$d = dimS/R = dimS - dimR.$$

Μπορούμε να διακρίνουμε τους γεννήτορες του $S$, $Q_A$, σε δύο κατηγορίες: τους γεννήτορες του $R$, $Q_i (i = 1, ..., dimR)$ και τους γεννήτορες του $S/R$,

$Q_a(a = dimR + 1, ..., dimS)$. Τότε, οι σχέσεις μετάθεσης των γεννητόρων θα είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_j] &= f_{ij}^k Q_k \\ [Q_i, Q_a] &= f_{ia}^b Q_b \\ [Q_a, Q_b] &= f_{ab}^i Q_i + f_{ab}^c Q_c \ , \end{aligned} \tag{1.2}$$

όπου εάν το $S/R$ είναι συμμετρικός χώρος, τότε $f_{ab}^c = 0$ (για να καταλήξει η θεωρία στο $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$χρησιμοποιείται ο μη-συμμετρικός χώρος $SU(3)/U(1) \times U(1)$). Ο διαχωρισμός $AlgS = AlgR + AlgK$ μπορεί να χαρακτηριστεί από τον καθορισμό του αναπτύγματος της συζυγούς (adjoint) αναπαράστασης του $S$ κάτω από το $R$,

$$adjS = adjR + \boldsymbol{v} \tag{1.3}$$

όπου το $\boldsymbol{v}$ αντιστοιχεί στου γεννήτορες του $K$ (γεννήτορεςτου χώρου πηλίκου).

Τα διανύσματα του εφαπτομενικού χώρου μετασχηματίζονται κάτω από περιστροφές της $SO(d)$. Οι γεννήτορες $Q_a$ (όπου το $a$ είναι δείκτης του εφαπτομενικού χώρου) σχηματίζουν ένα διάνυσμα στο χώρο πηλίκου, άρα μετασχηματίζονται όπως η διανυσματική αναπαράσταση της $SO(d)$, $d$. Οι $Q_a$ μετασχηματίζονται επίσης όπως το $\boldsymbol{v}$ του $R$, άρα πρέπει να υπάρχει μία εμβάπτιση του $R$ στην $SO(d)$ τέτοια ώστε $d = \boldsymbol{v}$. Η εμβάπτιση αυτή καθορίζεται μόλις γίνει η εμβάπτιση του $R$ στο $S$. Οι μεταθετικές σχέσεις της $SO(d)$ είναι:

$$[\Sigma^{ab}, \Sigma^{cd}] = -g^{ac}\Sigma^{bd} + g^{ad}\Sigma^{bc} + g^{bc}\Sigma^{ad} - g^{bd}\Sigma^{ac} \ , \tag{1.4}$$

όπου $\Sigma^{ab}$ είναι οι γεννήτορες της $SO(d)$ και $g^{ab}$ η μετρική του εφαπτομενικού χώρου. Η εμβάπτιση της $R$ στην $SO(d)$ καθορίζεται από:

$$T_i = -\frac{1}{2} f_{iab} \Sigma^{ab} \ , \tag{1.5}$$

εφόσον μπορεί να δειχθεί ότι οι $T_i$ σχηματίζουν μια $R$-υποάλγεβρα της $SO(d)$ χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Jacobi και τις μεταθετικές σχέσεις του $S$.

Οι συντεταγμένες του χώρου $M^4 \times S/R$ είναι οι $z^M = (x^m, y^\alpha)$, όπου το $\alpha$ είναι ένας δείκτης καμπυλότητας του χώρου πηλίκου και το $y$ ορίζει ένα στοιχείο του $S$ το οποίο είναι αντιπροσωπευτκό του χώρου το πηλίκου, το $L(y)$. Το vielbein και το R-connection ορίζονται από το Maurer-Cartan form, το οποίο παίρνει τιμές στην Lie άλγεβρα του $S$:

$$L^{-1}(y) dL(y) = e_\alpha^A Q_A dy^\alpha \tag{1.6}$$

Χρησιμοποιοώντας την (1.6), υπολογίζεται ότι στην αρχή $y = 0$ είναι $e_\alpha^a = \delta_\alpha^a$ και $e_\alpha^i = 0$. Ένα connection στο $S/R$ που περιγράφεται από ένα connection-form $\theta_b^a$ έχει εν γένει και καμπυλότητα και στρέψη (torsion). Στη γενική περίπτωση που η στρέψη μπορεί να είναι διάφορη του μηδενός, υπολογίζεται πρώτα το torsionless τμήμα $\omega^a_b$ θέτοντας το torsion form $T^a$ ίσο με μηδέν,

$$T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0 \ \ , \tag{1.7}$$

ενώ χρησιμοποιώντας τη σχέση Maurer-Cartan,

$$de^a = \frac{1}{2} f^a{}_{bc} e^b \wedge e^c + f^a{}_{bi} e^b \wedge e^i \ \ , \tag{1.8}$$

φαίνεται ότι η συνθήκη ώστε να η στρέψη να μηδενίζεται λύνεται από

$$\omega^a_b = -f^a{}_{ib} e^i - \frac{1}{2} f^a{}_{bc} e^c - \frac{1}{2} K^a{}_{bc} e^c \ \ , \tag{1.9}$$

όπου το $K^a{}_{bc}$ είανι συμετρικό ως προς του δείκτες $b$,$c$, οπότε $K^a{}_{bc} e^c \wedge e^b = 0$. Το $K^a{}_{bc}$ μπορεί να βρεθεί από την αντισυμμετρικότητα του $\omega^a_b$, $\omega^a_b g^{cb} = -\omega^b_c g^{ca}$, οδηγώντας στο

$$K^a{}_{bc} = g^{ad}(g_{be} f^e_{dc} + g_{ce} f_{db}{}^e). \tag{1.10}$$

Το $\omega^a_b$ γίνεται

$$\omega^a_b = -f^a{}_{ib} e^i - D^a{}_{bc} e^c \ \ , \tag{1.11}$$

όπου

$$D^a{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} [f_{db}{}^e g_{ec} + f_{cb}{}^e g_{de} - f_{cd}{}^e g_{be}]. \tag{1.12}$$

Τα $D$ μπορούν να συσχετιστούν με τα $f$ με ένα rescaling:

$$D^a{}_{bc} = (\lambda^a \lambda^b / \lambda^c) f^a{}_{bc} \ \ ,$$

όπου τα $\lambda$ εξαρτώνται από τις ακτίνες του χώρου πηλίκου. Σε περίπτωση που οι ακτίνες είναι ίσες ισχύει $D^a{}_{bc} = \frac{1}{2} f^a{}_{bc}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι το connection form $\omega^a_b$ είναι αναλλοίωτο κάτω από το $S$. Αυτό σημαίνει ότι το parallel transport μετατίθεται με τη δράση του $S$. Τότε, η πιο γενική μορφή ενός $S$-αναλλοίωτου connection πάνω στο $S/R$ θα είναι:

$$\omega^a_b = f^a{}_{ib} e^i + J^a{}_{cb} e^c, \tag{1.13}$$

όπου το $J$ είναι ένας τανυστής αναλλοίωτος κάτω από το $R$, δηλαδή

$$\delta J_{cb}{}^a = -f_{ic}{}^d J_{db}^{\ a} + f_{id}{}^a J_{cb}^{\ d} = f_{ib}{}^d J_{cd}^{\ a} = 0$$

Σε περίπτωση που η στρέψη δεν μηδενίζεται:

$$T^a = de^a + \theta^a_b \wedge e^b, \tag{1.14}$$

όπου $\theta^a_b = \omega^a_b + \tau^a_b$ με $\tau^a_b = -\frac{1}{2}\Sigma^a{}_{bc}e^c$ και $\Sigma^a_{bc} = T^a{}_{bc} + T_{bc}{}^a - T_{cb}{}^a$. Άρα εν γένει το connection form $\theta^a_b$ είναι

$$\theta^a_b = -f^a{}_{ic}e^i - (D^a{}_{bc} + \frac{1}{2}\Sigma^a{}_{bc})e^c = -f^a{}_{ic}e^i - G^a{}_{bc}e^c \tag{1.15}$$

Η φυσική επιλογή στρέψης που θα γενίκευε την περίπτωση των ίσων ακτίνων, $T^a{}_{bc} = \eta f^a{}_{bc}$ θα ήταν $T^a{}_{bc} = 2\tau D^a{}_{bc}$, με τη διαφορά ότι τα $D$ δεν έχουν τις απαιτούμενες ιδιότητες συμμετρίας. Επομένως, πρέπει να οριστεί το $\Sigma$ ως ένας συνδυασμός των $D$ που καθιστά το $\Sigma$ πλήρως αντισυμμετρικό και $S$-αναλλοίωτο σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

$$\Sigma_{abc} = 2\tau(D_{abc} + D_{bca} - D_{cba}) \tag{1.16}$$

Στη γενική αυτή περίπτωση η 2-form καμπυλότητα Riemann δίνεται από:

$$R^a{}_b = [-\frac{1}{2}f_{ib}{}^a f_{de}^{\ \ i} - \frac{1}{2}G_{cb}{}^a f_{de}^{\ \ c} + \frac{1}{2}(G_{dc}^{\ \ a}G_{eb}^{\ \ c} - G_{ec}^{\ \ a}G_{db}^{\ \ c})]e^d \wedge e^e, \tag{1.17}$$

ενώ ο τανυστής Ricci $R_{ab} = R^d{}_{adb}$ είναι

$$R_{ab} = G^c_{ba}G^d_{dc} - G^d_{bc}G^c_{da} - G^d_{ca}f^c_{db} - f^d_{ia}f^i_{ia}. \tag{1.18}$$

Επιλέγοντας την παράμετρο $\tau$ ίση με μηδέν, είναι δυνατόν να βρεθεί το Riemann connection $\theta_R{}^a{}_b$. Μπορεί επίσης να οριστεί το canonical connection ρυθμίζοντας τις ακτίνες και το $\tau$ έτσι ώστε το connection form να είναι $\theta_C{}^a{}_b = -f^a{}_{bi}e^i$, δηλαδή ένα πεδίο $R$-βαθμίδας (οι ρυθμίσεις θα πρέπει να είναι τέτοιες ώστε $G_{abc} = 0$). Στην περίπτωση του $SU(3)/U(1) \times U(1)$ που η μετρική είναι η $g_{ab} = diag(a, a, b, b, c, c)$, αρκεί να θεωρηθεί $a = b = c$ και $\tau = -\frac{1}{3}$. Με ανάλογα επιχειρήματα μπορεί να τεθεί ο τανυστής Ricci ίσος με μηδέν, ορίζοντας έτσι ένα Ricci flattening connection.

## 1.2 Ελάττωση μιας $D$-διάστατης Λαγκρανζιανής

Η ομάδα $S$ δρα ως ομάδα συμμετρίας στις επιπλέον συντεταγμένες. Το πλαίσιο του CSDR απαιτεί ότι ένας $S$-μετασχηματισμός στις επιπλέον $d$ συντεταγμένες είναι ένας μετασχηματισμός βαθμίδας των πεδίων που έχουν οριστεί στον $M^4 \times S/R$, συνεπώς μια Λαγκρανζιανή αναλλοίωτη βαθμίδας σε αυτόν το χώρο είναι ανεξάρτητη από τις επιπλέον διαστάσεις.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρείται μια $D$-διάστατη θεωρία Yang-Mills-Dirac με ομάδα βαθμίδας $G$ ορισμένη σε μια πολλαπλότητα $M^D$, η οποία θα συμπαγοποιηθεί στο $M^4 \times S/R$ ($D = 4 + d$):

$$A = \int d^4x d^d y \sqrt{-g}[-\frac{1}{4}Tr(F_{MN}F_{K\Lambda})g^{MK}g^{N\Lambda} + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^M D_M\psi], \tag{1.19}$$

όπου

$$D_M = \partial_M - \theta_M - A_M \tag{1.20}$$

με

$$\theta_M = \frac{1}{2}\theta_{MN\Lambda}\Sigma^{N\Lambda} \tag{1.21}$$

το spin connection του $M^D$ και

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M - [A_M, A_N] \tag{1.22}$$

όπου τα $M$,$N$ είναι δείκτες του $D$-διάστατου χώρου.

Τα πεδία $A_M$ και $\psi$ είναι συμμετρικά [1], υπό την έννοια ότι οποιοσδήποτε μετασχηματισμός κάτω απο συμμετρίες του $S/R$ αντισταθμίζεται από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Τα φερμιονικά πεδία μπορούν να βρίσκονται σε οποιαδήποτε αναπαράσταση $F$ του $G$, εκτός αν κάποια επιπλέον συμμετρία (όπως για παράδειγμα η υπερσυμμετρία) απαιτείται. Έστω $\xi_A^\alpha$ ($A = 1, ..., dimS$) τα διανύσματα Killing που γεννούν τις συμμετρίες του $S/R$ και $W_A$ ο αντισταθμίζων μετασχηματισμός βαθμίδας που σχετίζεται με τα $\xi_A$. Έστω και ο απειροστός μετασχηματισμός συντεταγμένων $\delta_A \equiv L_{\xi_A}$ (η παράγωγος Lie ως προς $\xi_A$). Για τα βαθμωτά, τα διανυσματικά και τα σπινοριακά πεδία θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
&\delta_A\phi = \xi_A^\alpha\partial_\alpha\phi = D(W_A)\phi \\
&\delta_A A_\alpha = \xi_A^\alpha\partial_\alpha A_\alpha + \partial_\alpha\xi_A^\beta A_\beta = \partial_\alpha W_A - [W_A, A_\alpha] \\
&\delta_A\psi = \xi_A^\alpha\psi - \frac{1}{2}G_{Abc}\Sigma^{bc}\psi = D(W_A)\psi
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Τα $W_A$ εξαρτώνται μόνο από τις εσωτερικές συντεταγμένες $y$ και το $D(W_A)$ αναπαριστά εναν μετασχηματισμό βαθμίδας στην κατάλληλη αναπαράσταση των πεδίων. το $G_{Abc}$ αναπαριστά μια περιστροφή στον εφαπτομενικό χώρο των σπινοριακών πεδίων. Οι μεταβολές $\delta_A$ ικανοποιούν τη σχέση $[\delta_A, \delta_B] = f_{AB}^C\delta_C$ και οδηγούν στην σχέση συνέπειας για τα $W_A$:

$$\xi_A^\alpha\partial_\alpha W_B - \xi_B^\alpha\partial_\alpha W_A - [W_A, W_B] = f_{AB}^{\ \ C}W_C \tag{1.24}$$

Ακόμα, τα $W$ μετασχηματίζονται κάτω από εναν μετασχηματιμό βαθιδας ως

$$\tilde{W}_A = gW_Ag^{-1} + (\delta_A g)g^{-1} \tag{1.25}$$

Χρησιμοποιώντας την 1.25 και το γεγονός ότι η Λαγκρανζιανή είναι ανεξάρτητη του $y$ είναι δυνατό να επιλεγεί να γίνουν όλοι οι υπολογισμοί στο $y = 0$ και στη βαθμίδα $W_a = 0$.

Η αναλυτική λύση των περιορισμών (1.23) [1] δίνει 4-διάστατα μη-περιορισμένα πεδία, αλλά και την αναλλοιότητα βαθμίδας που παραμένει στην θεωρία μετά τη διαστατική ελάττωση.

Οι συνιστώσες $A_\mu(x, y)$ του αρχικού πεδίου βαθμίδας $A_M(x, y)$ γίνονται (μετά τη διαστατική ελάττωση) τα 4-διάστατα πεδία βαθμίδας, τα οποία είναι ανεξάρτητα του $y$, ενώ μετατίθενται με τα στοιχεία της υποομάδας $R_G$ του

$G$. Άρα, η 4-διάστατη ομάδα βαθμίδας $H$ είναι ο centralizer του $R$ στο $G$ ($H = C_G(R_G)$). Παρομοίως, οι συνιστώσες $A_\alpha(x, y)$ γίνονται βαθμωτά στις 4 διαστάσεις. Αυτά τα πεδία μετασχηματίζονται κάτω από το $R$ ως ένα διάνυσμα $\nu$:

$$\begin{aligned} S &\supset R \\ adjS &= adjR + \nu \end{aligned} \tag{1.26}$$

Ακόμα, τα $\phi_\alpha(x, y)$ δρουν ως ένας διαπλεκόμενος τελεστής που συνδέει αναπαραστάσεις του $R$ που δρουν στο $G$ και στο $S/R$. Αυτό συνεπάγεται ότι οι ιδιότητες μετασχηματισμού τν πεδίων $\phi_{al}$ κάτω από το $H$ μπορούν να βρεθούν αν εκφραστεί η συζυγής αναπαράσταση του $G$ ως προς $R_G \times H$:

$$\begin{aligned} G &\supset R_G \times H \\ adjG &= (adjR, 1) + (1, adjH) + \sum(r_i, h_i) \end{aligned} \tag{1.27}$$

Τότε, αν $\nu = \sum s_i$, όπου κάθε $s_i$ είναι μια μη-αναγωγίσιμη αναπαράσταση (irrep) του $R$, επιζεί μία $h_i$ multiplet για κάθε ζεύγος $(r_i, s_i)$, όπου τα $r_i$ και $s_i$ είναι ίδιες irreps τοψ $R$.

Η περίπτωση των φερμιονικών πεδίων είναι παρόμοια με αυτή των βαθμωτών, καθώς δρουν ως διαπλεκόμενοι τελεστές μεταξύ αναπαραστάσεων που δρουν στο $G$ και στον εφαπτομενικό χώρο του $S/R$, $SO(d)$. Χρησιμοποιώντας παρόμοια διαδικασία (με την περίπτωση των βαθμωτών) για να βρεθεί η αναπαράσταση του $H$ κάτω από τη οποία μετασχηματίζονται τα 4-διάστατα φερμιόνια, πρέπει να αποσυντεθεί η αναπαράσταση $F$ της αρχικής ομάδας βαθμίδας στην οποία είχαν ανατεθεί τα φερμιόνια κάτω από το $R_G \times H$:

$$F = \sum(t_i, hy_i) \tag{1.28}$$

και ο σπίνορας της $SO(d)$ κάτω από το $R$:

$$\sigma_d = \sum \sigma_j \tag{1.29}$$

Τότε για κάθε ζεύγος $t_i$ και $\sigma_i$, όπου τα $t_i$ και $\sigma_i$ είναι ίδιες irreps, υπάρχει μια $h_i$ multiplet των σπινορικών πεδίων στην 4-διάστατη θεωρία. Όμως, για να είναι chiral τα φερμιόνια στην efective θεωρία, πρέπει να επιβληθούν περαιτέρω απαιτήσεις. Πρώτα επιβάλλεται η συνθήκη Weyl σε $D$ διαστάσεις. Στις $D = 4n + 2$ διαστάσεις (που είναι και η περίπτωση που θα εξεταστεί για το $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$) το ανάπτυγμα των αριστερόστροφων (left-handed) σπινόρων κάτω από $SU(2) \times SU(2) \times SO(d)$ θα είναι:

$$\sigma_D = (2, 1, \sigma_d) + (1, 2, \bar{\sigma}_d) \tag{1.30}$$

Οπότε έχουμε τα αναπτύγματα

$$\sigma_d = \sum \sigma_k \ , \ \ \bar{\sigma}_d = \sum \bar{\sigma}_k \tag{1.31}$$

Όσον αφορά την vector-like αναπαράσταση $F$ για τα φερμιόνια, κάθε όρος $(t_i, h_i)$ της (1.28) θα είναι είτε αυτοσυζυγής ή θα έχει ένα συζυγή $(\bar{t}_i, \bar{h}_i)$. Σύμφωνα με τις (1.28), (1.29) και θεωρώντας το $\sigma_d$, τα αριστερόστροφα φερμιόνια θια μετασχηματίζοντια στισ 4 διαστάσεις ως $f_L = \sum h_k^L$ (εφόσον το $\sigma_d$ είναι δεν αυτοσυζυγές, τότε ούτε και το $f_L$ θα είναι αυτοσυζυγές). Ομοίως θεωρώντας το $\bar{\sigma}_d$ θα ισχύει $f_R = \sum \bar{h}_k^R$, όμως, εφόσον το $F$ είναι vector-like, $\bar{h}_k^R \sim h_K^L$. Επομένως, εμφανίζονται δύο σετ φερμιονίων Weyl με τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς κάτω από το $H$. Ενώ η θεωρία είναι ήδη chiral, γίνεται να εφαρμοστεί και η συνθήκη Majorana, ώστε να αποφευχθεί το «διπλό» φερμιονικό φάσμα.[1] Οι συνθήκες Majorana και Weyl είναι συμβατές με $D = 4n + 2$ διαστάσεις. Σε αυτήν την περίπτωση, ξεκινώντας με ενγ Ωεψλ-Μαψορανα σπίνορες σε $D = 4n + 2$ διαστάσεις, πρέπει το $f_L$ να είναι το συζυγές (ως προς το φορτίο) του $f_R$, καταλήγοντας έτσι σε φερμιόνια μόνο σε $f_L$.

Μια σημαντική απαίτηση είναι οι 4-διάστατες θεωρίες που προκύπτουν να είναι ελεύθερες από ανωμαλίες. Για μια πολυδιάστατη θεωρία ελεύθερη από ανωμαλίες υπάρχει μια συνθήκη [5] για να καταλήγει σε μια 4-διάστατη θεωρία επίσης ελεύθερη από ανωμαλίες. Η συνθήκη αυτή περιορίζει τις επιτρεπόμενες εμβαπτίσεις του $R$ στο $G$ συσχετίζοντας τις με τις εμβαπτίσεις του $R$ στο $SO(6)$, τον εφαπτομενικό χώρο των 6-διάστατων χώρων πηλίκου που έχουν θεωρηθεί. Πιο συγκεκριμένα, εάν $L_a$ είναι οι γεννήτορες του $R$ στο $G$ και $T_a$ οι γεννήτορες του $R$ στο $SO(6)$, η συνθήκη είναι η

$$Tr(L_a L_b) = 30 Tr(T_a T_b) \tag{1.32}$$

Η συνθήκη 1.32 για την ακύρωση των ανωμαλιών ικανοποιείται αυτόματα για την επιλογή εμβάπτισης

$$E_8 \supset SO(6) \supset R \tag{1.33}$$

Τέλος, σχετικά με τους αβελιανούς παράγοντες της 4-διάστατης θεωρίας βαθμίδας σημειώνεται ότι τα αντίστοιχα μποζόνια βαθμίδας που επιζούν στις 4 διαστάσεις αποκτούν μάζα στην κλίμακα συμπαγοποίησης και συνεπώς δεν συνεισφέρουν στις ανωμαλίες (αντιστοιχούν μόνο σε global συμμετρίες).

## 1.3 Η 4-διάστατη θεωρία

Έστω η δράση μιας Yang-Mills θεωρίας με ομάδα βαθμίδας $G$ συζευγμένη με φερμιόνια σε μια πολλαπλότητα $M^D$:

$$A = \int d^D x \sqrt{-g} \Big[ -\frac{1}{8} Tr(F_{MN} F_{K\Lambda}) g^{MK} g^{N\Lambda} + \frac{1}{2} i \bar{\psi} \Gamma^M D_M \psi \Big], \tag{1.34}$$

όπου $D_M = \partial_M - \theta_M - A_M$ με $\theta_M = \frac{1}{2}\theta_{MN\Lambda}\Sigma^{N\Lambda}$ το spin connection του $M^D$, $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M - [A_M, A_N]$. Εάν το $M^D$ συμπαγοποιηθεί στο $M^4 \times$

[1] Πρέπει να τονιστεί ότι αν ξεκινούσε κανείς με μιγαδική $F$, θα κατέληγε πάλι σε chiral θεωρία με $\bar{h}_K^R$ διάφορο του $h_K^L$. Παρόλα αυτά, η περίπτωση της vector-like $F$ είναι πιο ελκυστική.

$S/R$ και τα πεδία της θεωρίας είναι συμμετρικά, η δράση γίνεται ανεξάρτητη των συντετεαγμένων του χώρου πηλίκου. Η ολοκλήρωση της δράσης πάνω στις συντεταγμένες αυτές δίνει την 4-διάστατη θεωρία. Παρόλα αυτά, τα πεδία θα πρέπει να υπακούουν σε ορισμένους περιορισμούς, οι οποίοι «αναμιγνύουν» με μη-τετριμμένο τρόπο τη δομή της ομάδας βαθμίδας και τη γεωμετρία του χώρου πηλλικου $S/R$. Η λύση αυτών των περιορισμών δίνει την 4-διάστατη ομάδα βαθμίδας, αλλά και τα πεδία της εναπομείνουσας θεωρίας.

Εφόσον το $M^D$ συμπαγοποιείται στο $M^4 \times S/R$, είναι λογική η υπόθεση ότι η μετρική είναι block diagonal και συγκεκριμένα η (1.1) [2] Στην απλούστερη περίπτωση, όπου ο χώρος πηλίκου έχει μόνο μία ακτίνα, ισχύει $g^{ab} = a\delta^{ab} = R^{-2}\delta^{ab}$ με $R$ την κλίμακα συμπαγοποίησης. Επομένως, το Yang-Mills τμήμα της Λαγκρανζιανής θα γίνει:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{YM} &= -\frac{1}{8}Tr(F_{MN}F_{K\Lambda})g^{MK}g^{N\Lambda} \\
&= -\frac{1}{8}Tr\Big[(F_{\mu N}F_{K\Lambda})g^{\mu K}g^{N\Lambda} + (F_{aN}F_{K\Lambda})g^{aK}g^{N\Lambda}\Big] \\
&= -\frac{1}{8}Tr\Big[(F_{\mu\nu}F_{K\Lambda})g^{\mu K}g^{\nu\Lambda} + (F_{a\nu}F_{K\Lambda})g^{aK}g^{\nu\Lambda} \\
&\quad + (F_{\mu a}F_{K\Lambda})g^{\mu K}g^{a\Lambda} + (F_{ab}F_{K\Lambda})g^{aK}g^{b\Lambda}\Big] \\
&= -\frac{1}{8}Tr\Big[(F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda})g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} + (F_{\mu\nu}F_{\kappa d})g^{\mu\kappa}g^{\nu d} \\
&\quad + (F_{\mu\nu}F_{c\lambda})g^{\mu c}g^{\nu\lambda} + (F_{\mu\nu}F_{cd})g^{\mu c}g^{\nu d} \\
&\quad + (F_{\mu a}F_{\kappa\lambda})g^{\mu\kappa}g^{a\lambda} + (F_{\mu a}F_{\kappa d})g^{\mu\kappa}g^{ad} \\
&\quad + (F_{\mu a}F_{c\lambda})g^{\mu c}g^{a\lambda} + (F_{\mu a}F_{cd})g^{'muc}g^{ad} \\
&\quad + (F_{a\nu}F_{\kappa\lambda})g^{a\kappa}g^{\nu\lambda} + (F_{a\nu}F_{\kappa d})g^{a\kappa}g^{\nu d} \\
&\quad + (F_{a\nu}F_{c\lambda})g^{ac}g^{\nu\lambda} + (F_{a\nu}F_{cd})g^{ac}g^{\nu d} \\
&\quad + (F_{ab}F_{\kappa\lambda})g^{a\kappa}g^{b\lambda} + (F_{ab}F_{\kappa d})g^{a\kappa}g^{bd} \\
&\quad + (F_{ab}F_{c\lambda})g^{ac}g^{b\lambda} + (F_{ab}F_{cd})g^{ac}g^{bd}\Big] \\
&= -\frac{1}{8}Tr\Big[(F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda})\eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} - (F_{\mu a}F_{\kappa d})\eta^{\mu\kappa}g^{ad} \\
&\quad + (F_{a\nu}F_{c\lambda})g^{ac}\eta^{\nu\lambda} + (F_{ab}F_{cd})g^{ac}g^{bd}\Big] \\
&= -\frac{1}{8}TrF_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{8}TrF_{ab}F^{cd}g^{ac}g^{bd} \\
&\quad - \frac{1}{8}Tr\Big[F_{\mu a}F^{\mu}_{b}g^{ab} + F_{\mu a}F^{\mu}_{b}g^{ab}\Big]
\end{aligned}
$$

[2] Το αρνητικό πρόσημο μπροστά από το $g$ εμφανίζεται επειδή η $g^{MN}$ έχει θεωρηθεί να έχει αρνητική υπογραφή, αλλά $g^{ab} = diag(a_1, ..., a^d)$ με $a_i$ θετικό (οι σταθερές $a_i$ είναι οι κλίμακες του χώρου πηλίκου).

όποτε τελικά:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{8}TrF_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}TrF_{\mu a}F^{\mu}_{b}g^{ab} - \frac{1}{8}TrF_{ab}F_{cd}g^{ac}g^{bd}, \tag{1.35}$$

όπου το $F_{\mu\nu}$ είναι ο συνήθης τανυστής για το πεδίο βαθμίδας $A_\mu$. Το $F_{\mu a}$ τμήμα του τανυστή θα είναι:

$$F_{\mu a} = \partial_\mu \phi_a - [A_\mu, \phi_a] = D_\mu \phi_a \tag{1.36}$$

και το $F_{ab}$ τμήμα:

$$F_{ab} = f^{C}_{ab}\phi^{C} - [\phi_a, \phi_b]. \tag{1.37}$$

Για το φερμιονικό τμήμα της Λαγκρανζιανής η $D$-διάστατη $\Gamma$-άλγεβρα διαχωρίζεται σύμφωνα με την (1.1). Η $\Gamma$-άλγεβρα ικανοποιεί τη σχέση

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2g^{MN}, \tag{1.38}$$

η οποία μπορεί να ξαναγραφθεί και ως

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \ \ , \ \ \{\Gamma^a, \Gamma^a\} = 2g^{ab} \tag{1.39}$$

με

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes I_d \ \ , \ \ \Gamma^a = \gamma_5 \otimes \gamma^a, \tag{1.40}$$

όπου οι $\gamma^\mu$ είναι οι συνηθισμένοι 4-διάστατοι πίνακες Dirac και οι $\gamma^a$ ικανοποιούν την άλβεγρα που δίνεται στην (1.39). Ο παραπάνω διαχωρισμός καταλήγει:

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^a D_a \psi, \tag{1.41}$$

όπου $D_\mu = \partial_\mu - A_\mu$ και $D_a = \partial_a - \theta_a - \phi_a$ με $\theta_a = \frac{1}{2}\theta_{abc}\Sigma^{bc}$ το spin connection του χώρου πηλίκου. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω προκύπτει η 4-διάστατη δράση:[3]

$$\begin{aligned}
A = &\int d^4x d^d y \sqrt{-g}\Big[ -\frac{1}{8}TrF_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}TrF_{\mu a}F^{\mu}_{b}g^{ab} \\
&-\frac{1}{8}TrF_{ab}F_{cd}g^{ac}g^{bd} + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a D_a\psi\Big] \\
= &\int d^4x d^d y \sqrt{-det\eta}\sqrt{det(-g)}\Big[ -\frac{1}{8}TrF_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\Big(D_\mu \Phi_a D^\mu \Phi_b g^{ab}\Big) \\
&-\frac{1}{8}Tr\Big(f^{C}_{ab}\Phi^C - [\Phi_a, \Phi_b]\Big)\Big(f^{D}_{cd}\Phi_D - [\Phi_C, \Phi_D]\Big)g^{ac}g^{bd} + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a D_a\psi\Big]
\end{aligned}$$

[3]Για τους γεννήτορες της ομάδας βαθμίδας επιλέγεται η κανονικοποίηση $Tr(G_tG_s) = 2\delta_{ts}$.

$$A = C\int d^4x\Big( -\frac{1}{4}F^t_{\mu\nu}F^{t\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi_\alpha)^t + V(\phi) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a D_a\psi\Big), \tag{1.42}$$

όπου $C$ είναι ο όγκος του χώρου πηλίκου. Το δυναμικό $V(\phi)$ δίνεται από:

$$V(\phi) = -\frac{1}{4}g^{ac}g^{bd}Tr(f^C_{ab}\phi_C - [\phi_a, \phi_b])(f^D_{cd}\phi_D - [\phi_c, \phi_d]), \tag{1.43}$$

όπου $A = 1, ..., dimS$ και τα $f$ είναι οι σταθερές δομής της άλγεβρας Lie του $S$. Εκτός από τουσ κινητικούς όρους η θεωρία περιέχει και το δυναμικό (1.43), το οποίο συνήθως οδηγεί σε αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας της θεωρίας βαθμίδας. Ο τελευταίος όρος της (1.42) είναι ένας όρος Yukawa των φερμιονίων με τα πεδία Higgs και αναλυτικοί όροι μάζας γεωμετρικής προέλευσης.

Τα βαθμωτά πεδία $\phi_a$ πρέπει να ικανοποιούν του περιορισμούς που δίνονται στην (1.23,β), οι οποίοι στο $y = 0$ γίνονται:

$$[\phi_i, \phi_a] = f_{ia}{}^c\phi_c \tag{1.44}$$

όπου τα $\phi_i$ γεννούν το $R_G$. Ως συνέπεια, κάποια από τα $\phi_a$ ενδέχεται να μην επιβιώσουν της διαστατικής ελάττωσης. Στόχος είναι να εκφραστεί το δυναμικό $V(\phi)$ συναρτήσει των μη-περιορισμένων βαθμωτών πεδίων, τα οποία είναι τα φυσικά πεδία Higgs της θεωρίας. Σε αυτήν την περίπτωση το δυναμικό παραμένει πολυώνυμο τέταρτης τάξης, το οποίο είναι αναλλοίωτο κάτω από την 4-διάστατη ομάδα βαθμίδας $H$. Έπειτα, πρέπει να βρεθεί το ελάχιστο του δυναμικού, το οποίο θα καθορίσει την «άσπαστη» ομάδα βαθμίδας στο κενό, κάτι που είναι εν γένει ένα δύσκολο εγχείρημα.

Υπάρχει όμως μια ειδική περίπτωση όπου αυτό απλοποιείται αρκετά, συγκεκριμένα όταν το $S$ έχει μια ισόμορφη εικόνα $S_G$ στο $G$. Τότε η 4-διάστατη ομάδα βαθμίδας $H$ θα σπάσει αυθόρμητα στην υποομάδα $K$, η οποία είναι ο centralizer του $S_G$ στην ομάδα βαθμίδας $G$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} G \supset & S_G \times K \\ & \cup \quad\ \cap \\ G \supset & R_G \times H \end{aligned} \tag{1.45}$$

Είναι χρήσιμο να ανακαλεστεί η σχέση $\phi_C \equiv \phi^s_C G_s$, το πεδίο έχει δηλαδή ένα δείκτη $s$ που διατρέχει το $G$ [6]. Όταν $S \subset G$, ο περιορισμός (1.44) ικανοποιείται με τετριμμένο τρόπο εάν επιλεγεί το $\phi^s_C$ να παίρνει την τιμή $1$ όταν το $s$ είναι στο $S$ και $0$ διαφορετικά. Επομένως, η επιλεγμένη τιμή του $\phi^s_C$ αντιστοιχεί όντως στην επιτρεπόμενες τιμές των πεδίων Higgs. Επιπλέον, για αυτήν την τιμή του $\phi^s_C$ το δυναμικό μηδενίζεται (αυτή είναι προφανώς η ελάχιστη τιμή του, εφόσον είναι θετικό). Άρα αθτή η τιμή του $\phi^s_C$ είναι το vev (vacuum expectation value) των πεδίων Higgs. Είναι επομένως ξεκάθαρο ότι ο μετασχηματισμός βαθμίδας

$$\phi_C \to h\phi_C h^{-1} \ , \ \ h \in H \tag{1.46}$$

επάγει έναν μετασχηματισμό βαθμίδας στα πεδία Higgs. Οι επιλεγμένες τιμές των πεδίων Higgs παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό βαθμίδας (1.46) όταν το $h$ ανήκει σε μία υποομάδα $K$ της $H$, η οποία είναι ο centralizer του $S_G$ στο $G$. Τελικά, αν $S \subset G$, η τελική «άσπαστη» ομάδα είναι το $K = C_G(S)$.

Στο φερμιονικό τμήμα της Λαγκρανζιανής ο πρώτος όρος είναι απλά ο κινητικός όρος των φερμιονίων, ενώ ο δεύτερος είναι ο όρος Yukawa.Εφόσον το $\psi$ είναι σπίνορας Mayorana-Weyl στις 10 διαστάσεις, η αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας στην οποία ανατίθενται τα φερμιόνια είναι πραγματική. Ο τελευταίος όρος της (1.42) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\Big(\partial_a - \frac{1}{2}f_{ibc}e^i_\Gamma e^\Gamma_a\Sigma^{bc} - \frac{1}{2}G_{abc}\Sigma^{bc} - \phi_a\Big)\psi = \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\nabla_a\psi + \bar{\psi}V\psi \tag{1.47}$$

όπου

$$\nabla_a = -\partial_a + \frac{1}{2}f_{ibc}e^i_\Gamma e^\Gamma_a\Sigma^{bc} + \phi_a \tag{1.48}$$

$$V = \frac{i}{4}\Gamma^a G_{abc}\Sigma^{bc} \tag{1.49}$$

και χρησιμοποιήθηκε το πλήρες connection με τη στρέψη:

$$\theta^a{}_{cb} = -f^a{}_{ib}e^i_\alpha e^\alpha_c - (D^a{}_{cb} + \frac{1}{2}\Sigma^a{}_{cb}) = -f^a{}_{ib}e^i_\alpha e^\alpha_c - G^a{}_{cb} \tag{1.50}$$

με

$$D^a{}_{cb} = g^{ad}\frac{1}{2}[f_{db}{}^e g_{ec} + f_{cb}{}^e g_{de} - f_{cd}{}^e g_{be}] \tag{1.51}$$

$$\Sigma_{abc} = 2\tau(D_{abc} + D_{bca} + D_{cba}) \tag{1.52}$$

Οι περιορισμοί του CSDR υποδεικνύουν ότι $\partial_a\psi = 0$. Ακόμα, εφόσον η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη κάτω από $S$-μετασχηματισμούς, γίνεται να θεωρηθεί στο σημείο $y = 0$, οπότε $e^i_\Gamma = 0$. Άρα η (1.48) γίνεται απλά $\nabla_a = \phi_a$ και ο όρος $\frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\nabla_a\psi$ της (1.47) είναι ακριβώς ο όρος Yukawa.

Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι ο τελεστής $V$ αντιμετατίθεται με τον 6-διάστατο τελεστή της ελικότητας. Επιπλέον, το $V$ μετατίθεται με τους $T_i = -\frac{1}{2}f_{ibc}\Sigma^{bc}$ (οι $T_i$ κλείνουν την $R$-υποάλγεβρα)της $SO(6)$). Επομένως (χρησιμοποιώντας και το λήμμα του Schur) τα μη-μηδενικά στοιχεία του $V$ είναι μόνο αυτά που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα και των δύο singlets της $SO(6)$, $4$ και $\bar{4}$. Εφόσον αυτός ο όρος είναι καθαρά γεωμετρικής φύσης, οι singlets **4** και $\overline{\mathbf{4}}$ θα αποκτήσουν μεγάλες «γεωμετρικές) μάζες, γεγονός που επηρεάζει σοβαρά το φαινομενολογικό τμήμα της θεωρίας. Στις πολυδιάστατες υπερσυμμετρικές θεωρίες αυτό σημαίνει ότι τα gauginos που αποκτώνται στις 4 διαστάσεις μετά τη διαστατική ελάττωση παίρνουν μάζες συγκρίσιμες με την κλίμακα συμπαγοποίησης. αυτό το αποτέλεσμα αλλάζει παρουσία της στρέψης.[4]

## 1.4 Διαστατική ελάττωση της $E_8$ πάνω στο $SU(3)/U(1) \times U(1)$

Σε αυτό το μοντέλο θεωρείται ο χώρος πηλίκου $B = SU(3)/U(1) \times U(1)$, πάνω στον οποίο ελαττώνεται η 10-διάστατη θεωρία. Για να προσδιοριστεί η 4-διάστατη ομάδα βαθμίδας, η εμβάπτιση του $R = U(1) \times U(1)$ στην $E_8$ «προτείνεται» από το ανάπτυγμα:

$$E_8 \supset E_6 \times SU(3) \supset E_6 \times U(1)_A \times U(1)_B \tag{1.53}$$

Τότε, η ομάδα που επιζεί στις 4 διαστάσεις είναι η

$$H = C_{E_8}(U(1) \times U(1)) = E_6 \times U(1)_A \times U(1)_B \tag{1.54}$$

Η αναπαράσταση 248 της $E_8$ αναπτύσσεται κάτω από την $E_6 \times U(1)_A \times U(1)_B$ ως εξής:

$$\begin{aligned} 248 = {} & 1_{(0,0)} + 1_{(0,0)} + 1_{(3,\frac{1}{2})} + 1_{(-3,\frac{1}{2})} + 1_{(0,-1)} + 1_{(0,1)} + 1_{(-3,-\frac{1}{2})} + 1_{(3,-\frac{1}{2})} \\ & + 78_{(0,0)} + 27_{(3,\frac{1}{2})} + 27_{(-3,\frac{1}{2})} + 27_{(0,-1)} + \overline{27}_{(-3,-\frac{1}{2})} + \overline{27}_{(3,-\frac{1}{2})} + \overline{27}_{(0,1)} \end{aligned} \tag{1.55}$$

Το $R = U(1) \times U(1)$ ανάπτυγμα της διανυσματικής και σπινοριακής αναπαράστασης της $SO(6)$ είναι

$$6_{\upsilon} = (3, \frac{1}{2}) + (-3, \frac{1}{2}) + (0,1) + (-3, -\frac{1}{2}) + (3, -\frac{1}{2}) + (0,1) \tag{1.56}$$

και

$$4_s = (0,0) + (3, \frac{1}{2}) + (-3, \frac{1}{2}) + (0, 1-) \tag{1.57}$$

αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας τους κανόνες του CSDR προκύπτει ότι τα πεδία που επιζούν στις 4 διαστάσεις είναι 3 $N = 1$ διανυσματικές multiplets $V^{\alpha}$,

[4] Για συμμετρικούς χώρους πηλίκου ο τελεστής $V$ απουσιάζει καθώς τα $f_{ab}^{c}$ μηδενίζονται εξορισμού

$V_{(1)}$, $V_{(2)}$, [5] που περιέχουν τα πεδία βαθμίδας της$E_6 \times U(1)_A \times U(1)_B$. Το φερμιονικό περιεχόμενο αποτελείται από 3 $N = 1$ chiral multiplets $A^i$, $B^i$, $C^i$ (όπου $i$ είναι δείκτης της 27 της $E_6$) και 3 $N = 1$ chiral multiplets $A$, $B$, $C$ που είναι singlets της $E_6$ και φέρουν μόνο $U(1)_A \times U(1)_B$ φορτία.

Για να καθοριστεί το δυναμικό, πρέπει να εξεταστεί περαιτέρω το ανάπτυγμα της συζυγούς αναπαράστασης του $S = SU(3)$ κάτω από την $R = U(1) \times U(1)$ ($SU(3) \supset U(1) \times U(1)$):

$$8 = (0,0) + (0,0) + 6_v \tag{1.58}$$

Τότε, σύμφωνα με το ανάπτυγμα $(3,3)$ οι γεννήτορες της $SU(3)$ μπορούν να ομαδοποιηθούν ως:

$$Q_{SU(3)} = \{Q_0, Q_0', Q_1, Q_2, Q_3, Q^1, Q^2, Q^3\} \tag{1.59}$$

Οι μη-τετριμμένες σχέσεις μετάθεσεις των γεννητόρων της $SU(3)$ είναι οι εξής:

$$\begin{array}{lll}
[Q_1, Q_0] = \sqrt{3}Q_1 & [Q_1, Q_0'] = Q_1 & [Q_2, Q_0] = -\sqrt{3}Q_2 \\
[Q_1, Q_0'] = Q_2 & [Q_3, Q_0] = 0 & [Q_3, Q_0'] = -2Q_3 \\
[Q_1, Q^1] = \sqrt{3}Q_0 - Q_0' & [Q_2, Q^2] = -\sqrt{3}Q_0 - Q_0' & [Q_3, Q^3] = 2Q_0' \\
[Q_1, Q_2] = \sqrt{2}Q^3 & [Q_2, Q_3] = \sqrt{2}Q^1 & [Q_3, Q_1] = \sqrt{2}Q^2
\end{array}$$

Το ανάπτυγμα (1.59) «προτείνει» την εξής αλλαγή στο συμβολισμό των βαθμωτών πεδίων:

$$(\phi_I, I = 1, ..., 8) \to (\phi_0, \phi_0', \phi_1, \phi^1, \phi_2, \phi^2, \phi_3, \phi^3) \tag{1.60}$$

Το δυναμικό οποιασδήποτε θεωρίας με ελάττωση πάνω στο $SU(3)/U(1)\times U(1)$ δίνεται συναρτήσει των (1.60):

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= (3\Lambda^2 + \Lambda'^2)\Big(\frac{1}{R_1^4} + \frac{1}{R_2^4}\Big) + \frac{4\Lambda'^2}{R_3^2} \qquad (1.61)\\
&+ \frac{2}{R_2^2 R_3^2} Tr(\phi_1 \phi^1) + \frac{2}{R_1^2 R_3^2} Tr(\phi_2 \phi^2) + \frac{2}{R_1^2 R_2^2} Tr(\phi_3 \phi^3) \\
&+ \frac{\sqrt{3}\Lambda}{R_1^4} Tr(Q_0[\phi_1, \phi^1]) - \frac{\sqrt{3}\Lambda}{R_2^4} Tr(Q_0[\phi_2, \phi^2]) - \frac{\sqrt{3}\Lambda}{R_3^4} Tr(Q_0[\phi_3, \phi^3]) \\
&+ \frac{\Lambda'}{R_1^4} Tr(Q_0'[\phi_1, \phi^1]) + \frac{\Lambda'}{R_2^4} Tr(Q_0'[\phi_2, \phi^2]) - \frac{2\Lambda'}{R_3^4} Tr(Q_0'[\phi_3, \phi^3]) \\
&+ \Big[\frac{2\sqrt{2}}{R_1^2 R_2^2} Tr(\phi_3[\phi_1, \phi_2]) + \Big[\frac{2\sqrt{2}}{R_1^2 R_3^2} Tr(\phi_2[\phi_3, \phi_1]) + \Big[\frac{2\sqrt{2}}{R_2^2 R_3^2} Tr(\phi_1[\phi_2, \phi_3]) + h.c.\Big] \\
&+ \frac{1}{2} Tr\Big(\frac{1}{R_1^2}[\phi_1, \phi^1] + \frac{1}{R_2^2}[\phi_2, \phi^2] + \frac{1}{R_3^2}[\phi_3, \phi^3]\Big)^2 \\
&- \frac{1}{R_1^2 R_2^2} Tr([\phi_1, \phi_2][\phi^1, \phi^2]) - \frac{1}{R_1^2 R_3^2} Tr([\phi_1, \phi_3][\phi^1, \phi^3]) - \frac{1}{R_2^2 R_3^2} Tr([\phi_2, \phi_3][\phi^2, \phi^3])
\end{aligned}$$

[5] το $\alpha$ είναι δείκτης της 78 της $E_6$ και οι άλλοι δύο αντιστοιχούν στις 2 $U(1)$

όπου $R_1$,$R_2$,$R_3$ είναι οι ακτίνες του χώρου πηλίκου και $\Lambda$ μια σταθερά που προσδιορίζεται από τους περιορισμούς του CSDR. Συναρτήσει των ακτίνων η πραγματική μετρική[6] του χώρου πηλίκου είναι

$$g_{ab} = diag(R_1^2, R_1^2, R_2^2, R_2^2, R_3^2, R_3^2) \tag{1.62}$$

Έπειτα, εξετάζονται οι σχέσεις μετάθεσης της $E_8$ κάτω από το ανάπτυγμα (1.55) και οι γεννήτορες της $E_8$ ομαδοποιούνται ως

$$Q_{E_8} = \{Q_0, Q'_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q^1, Q^2, Q^3, Q^\alpha, Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{3i}, Q^{1i}, Q^{2i}, Q^{3i}\} \tag{1.63}$$

όπου $\alpha = 1, ..., 78$ και $i = 1, ..., 27$. Οι μη-τετριμμένες σχέσεις μετάθεσης της $E_8$ θα είναι:

$$\begin{array}{lll}
[Q_1, Q_0] = \sqrt{30}Q_1 & [Q_1, Q'_0] = \sqrt{10}Q_1 & [Q_2, Q_0] = -\sqrt{30}Q_2 \\
[Q_1, Q'_0] = \sqrt{10}Q_2 & [Q_3, Q_0] = 0 & [Q_3, Q'_0] = -2\sqrt{10}Q_3 \\
[Q_1, Q^1] = -\sqrt{30}Q_0 - \sqrt{10}Q'_0 & [Q_2, Q^2] = \sqrt{30}Q_0 - \sqrt{10}Q'_0 & [Q_3, Q^3] = 2\sqrt{10}Q'_0 \\
[Q_1, Q_2] = \sqrt{20}Q^3 & [Q_2, Q_3] = \sqrt{20}Q^1 & [Q_3, Q_1] = \sqrt{20}Q^2 \\
[Q_{1i}, Q_0] = \sqrt{30}Q_{1i} & [Q_{1i}, Q'_0] = \sqrt{10}Q_{1i} & [Q_{2i}, Q_0] = -\sqrt{30}Q_{2i} \\
[Q_{1i}, Q'_0] = \sqrt{10}Q_{2i} & [Q_{3i}, Q_0] = 0 & [Q_{3i}, Q'_0] = -2\sqrt{10}Q_{3i} \\
[Q_{1i}, Q_{2j}] = \sqrt{20}d_{ijk}Q^{3k} & [Q_{2i}, Q_{3j}] = \sqrt{20}d_{ijk}Q^{1l} & [Q_{3i}, Q_{1j}] = \sqrt{20}d_{ijk}Q^{2k} \\
[Q^\alpha, Q^\beta] = 2ig^{\alpha\beta\gamma}Q^\gamma & [Q^\alpha, Q_0] = 0 & [Q^\alpha, Q'_0] = 0 \\
[Q^\alpha, Q_{1i}] = -(G^\alpha)_i^j Q^{1j} & [Q^\alpha, Q_{2i}] = -(G^\alpha)_i^j Q^{2j} & [Q^\alpha, Q_{3i}] = -(G^\alpha)_i^j Q^{3j}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
[Q_{1i}, Q^{1j}] = -\frac{1}{6}(G^\alpha)_i^j Q^\alpha - \sqrt{30}\delta_i^j Q_0 - \sqrt{10}\delta_i^j Q'_0 \\
[Q_{2i}, Q^{2j}] = -\frac{1}{6}(G^\alpha)_i^j Q^\alpha + \sqrt{30}\delta_i^j Q_0 - \sqrt{10}\delta_i^j Q'_0 \\
[Q_{3i}, Q^{3j}] = -\frac{1}{6}(G^\alpha)_i^j Q^\alpha + 2\sqrt{10}\delta_i^j Q'_0
\end{array}$$

Οπότε οι περιορισμοί (1.44) για τα πεδία, όπως αυτά ορίζονται από την (1.60), θα είναι:

$$\begin{array}{ll}
[\phi_1, \phi_0] = \sqrt{3}\phi_1 & [\phi_1, \phi'_0] = \phi_1 \\
[\phi_2, \phi_0] = -\sqrt{3}\phi_2 & [\phi_2, \phi'_0] = \phi_2 \\
[\phi_3, \phi_0] = 0 & [\phi_3, \phi'_0] = -2\phi_3
\end{array} \tag{1.64}$$

Οι λύσεις των περιορισμών (1.64) συναρτήσει των πεδίων Higgs και των γεννητόρων της $E_8$ (1.63) που αντιστοιχούν στην εμβάπτιση (1.55) της $R = U(1)\times U(1)$ στην $E_8$ είναι (για $\Lambda = \Lambda' = \frac{1}{\sqrt{10}}$):

[6] η μιγαδική μετρική που χρησιμοποιήθηκε ήταν η $g^{i\bar{i}} = \frac{1}{R_i^2}$

$$
\begin{aligned}
\phi_0 &= \Lambda Q_0 \\
\phi_0' &= \Lambda Q_0' \\
\phi_1 &= R_1 \alpha^i Q_{1i} + R_1 \alpha Q_1 \\
\phi_2 &= R_2 \beta^i Q_{2i} + R_2 \beta Q_2 \\
\phi_3 &= R_3 \gamma^i Q_{3i} + R_3 \gamma Q_3
\end{aligned} \tag{1.65}
$$

όπου τα μη-περιορισμένα βαθμωτά πεδία μετασχηματίζονται κάτω από την $E_6 \times U(1)_A \times U(1)_B$ ως:

$$
\begin{aligned}
\alpha_i &\sim 27_{(3,\frac{1}{2})} \ \ , \ \ \alpha \sim 1_{(3,\frac{1}{2})}, \\
\beta_i &\sim 27_{(-3,\frac{1}{2})} \ \ , \ \ \beta \sim 1_{(-3,\frac{1}{2})}, \\
\gamma_i &\sim 27_{(0,-1)} \ \ , \ \ \gamma \sim 1_{(0,-1)}
\end{aligned} \tag{1.66}
$$

Οπότε το δυναμικό (1.61) θα γίνει:

$$
\begin{aligned}
V(\alpha^i,\alpha,\beta^i,\beta,\gamma^i,\gamma) = const &+ \Big(\frac{4R_1^2}{R_2^2R_3^2} - \frac{8}{R_1^2}\Big)\alpha^i\alpha_i + \Big(\frac{4R_1^2}{R_2^2R_3^2} - \frac{8}{R_1^2}\Big)\overline{\alpha}\alpha \\
&+\Big(\frac{4R_2^2}{R_1^2R_3^2} - \frac{8}{R_2^2}\Big)\beta^i\beta_i + \Big(\frac{4R_2^2}{R_1^2R_3^2} - \frac{8}{R_2^2}\Big)\overline{\beta}\beta \\
&+\Big(\frac{4R_3^2}{R_1^2R_2^2} - \frac{8}{R_3^2}\Big)\gamma^i\gamma_i + \Big(\frac{4R_3^2}{R_1^2R_2^2} - \frac{8}{R_3^2}\Big)\overline{\gamma}\gamma \\
&+\Big[\sqrt{2}80\Big(\frac{R_1}{R_2R_3} + \frac{R_2}{R_1R_3} + \frac{R_3}{R_2R_1}\Big)d_{ijk}\alpha^i\beta^k\gamma^k \\
&+\sqrt{2}80\Big(\frac{R_1}{R_2R_3} + \frac{R_2}{R_1R_3} + \frac{R_3}{R_2R_1}\Big)\alpha\beta\gamma + h.c.\Big] \\
&+\frac{1}{6}\Big(\alpha^i(G^\alpha)_i^j\alpha_j + \beta^i(G^\alpha)_i^j\beta_j + \gamma^i(G^\alpha)_i^j\gamma_j\Big)^2 \\
&+\frac{10}{6}\Big(\alpha^i 3\delta_i^j\alpha_j + \overline{\alpha}3\alpha + +\beta^i(-3)\delta_i^j\beta_j + \overline{\beta}(-3)\beta\Big)^2 \\
+\frac{40}{6}\Big(\alpha^i\frac{1}{2}\delta_i^j\alpha_j + \overline{\alpha}\frac{1}{2}\alpha + \beta^i\frac{1}{2}\delta_i^j\beta_j + \overline{\beta}\frac{1}{2}\beta &+ \gamma^i(-1)\delta_i^j\gamma_j + \overline{\gamma}(-1)\gamma\Big)^2 \\
+40\alpha^i\beta^j d_{ijk}d^{klm}a_l\beta_m + 40\beta^i\gamma^j d_{ijk}d^{klm}\beta_l\gamma_m &+ 40\alpha^i\gamma^j d_{ijk}d^{klm}\alpha_l\gamma_m \\
&+40(\overline{\alpha}\overline{\beta})(\alpha\beta) + 40(\overline{\beta}\overline{\gamma})(\beta\gamma) + 40(\overline{\gamma}\overline{\alpha})(\gamma\alpha)
\end{aligned} \tag{1.67}
$$

Στο δυναμικό (1.67) εμπεριέχονται οι $F$όροι, οι $D$-όροι και οι soft scalar όροι. Οι $F$-όροι προέρχονται από το superpotential:

$$
\mathcal{W}(A^i,B^j,C^k,A,B,C) = \sqrt{40}d_{ijk}A^iB^jC^k + \sqrt{40}ABC \tag{1.68}
$$

Οι $D$-όροι έχουν δομή:

$$\frac{1}{2} = D^{\alpha}D^{\alpha} + \frac{1}{2}D_1D_1 + \frac{1}{2}D_2D_2 \tag{1.69}$$

όπου

$$\begin{aligned}
D^{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\alpha^i(G^{\alpha})_i^j\alpha_j + \beta^i(G^{\alpha})_i^j\beta_j + \gamma^i(G^{\alpha})_i^j\gamma_j\Big)\\
D_1 &= \sqrt{\frac{10}{3}}\Big(\alpha^i 3\delta_i^j\alpha^j + \overline{\alpha}3\alpha + \beta^i(-3)\delta_i^j\beta_j + \overline{\beta}(-3)\beta\Big)\\
D_2 &= \sqrt{\frac{40}{3}}\Big(\alpha^i\frac{1}{2}\delta_i^j\alpha^j + \overline{\alpha}\frac{1}{2}\alpha + \beta^i\frac{1}{2}\delta_i^j\beta_j + \overline{\beta}\frac{1}{2}\beta + \gamma^i(-1)\delta_i^j\gamma_j + \overline{\gamma}(-1)\gamma\Big)
\end{aligned}$$

που αντιστοιχεί στη δομή $E_6\times U(1)_A\times U(1)_B$ της ομάδας βαθμίδας. Οι υπόλοιποι όροι είναι οι τριγραμμικοί όροι και οι όροι μάζας που σπάνε «απαλά» (sofltly) την υπερσυμμετρία και σχηματίζουν το βαθμωτό SSB (soft breaking sector) της Λαγκρανζιανής:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{scalar\ \ SSB} &= \Big(\frac{4R_1^2}{R_2^2R_3^2} - \frac{8}{R_1^2}\Big)\alpha^i\alpha_i + \Big(\frac{4R_1^2}{R_2^2R_3^2} - \frac{8}{R_1^2}\Big)\overline{\alpha}\alpha\\
&+ \Big(\frac{4R_2^2}{R_1^2R_3^2} - \frac{8}{R_2^2}\Big)\beta^i\beta_i + \Big(\frac{4R_2^2}{R_1^2R_3^2} - \frac{8}{R_2^2}\Big)\overline{\beta}\beta + \Big(\frac{4R_3^2}{R_1^2R_2^2} - \frac{8}{R_3^2}\Big)\gamma^i\gamma_i + \Big(\frac{4R_3^2}{R_1^2R_2^2} - \frac{8}{R_3^2}\Big)\overline{\gamma}\gamma\\
&+ \Big[\sqrt{2}80\Big(\frac{R_1}{R_2R_3} + \frac{R_2}{R_1R_3} + \frac{R_3}{R_2R_1}\Big)d_{ijk}\alpha^i\beta^k\gamma^k\\
&+ \sqrt{2}80\Big(\frac{R_1}{R_2R_3} + \frac{R_2}{R_1R_3} + \frac{R_3}{R_2R_1}\Big)\alpha\beta\gamma + h.c.\Big]
\end{aligned} \tag{1.70}$$

Το δυναμικό (1.67) ανήκει στην περίπτωση που εξετάστηκε παραπάνω, όπου το $S$ έχει εικόνα στο $G$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το $S = SU(3)$ έχει εικόνα στο $G = E_8$ οπότε το ελάχιστο του δυναμικού είναι μηδέν. Τέλος, για να προσδσιοριστεί η μάζα των gauginos, υπολογίζεται ο τελεστής $V$ της (1.49) στην περίπτωση $SU(3)/U(1)\times U(1)$ χρησιμοποιώντας το Παράρτημα Α΄ και το Παράρτημα Β΄, από τα οποία χρησιμοποιούνται και οι πίνακες $\Gamma$ για να υπολογιστεί το $\Sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\Gamma^a, \Gamma^b]$ και στη συνέχεια το $G_{abc}\Gamma^a\Sigma^{bc}$. Ο συνδυασμός όλων αυτών οδηγεί στη μάζα των gaugino:

$$M = V = (1+3\tau)\frac{(R_1^2+R_2^2+R_3^2)}{8\sqrt{R_1^2R_2^2R_3^2}} \tag{1.71}$$

Η επιλεγμένη εμβάπτιση ικανοποιεί τη συνθήκη (1.32) και την απουσία στην 4-διάστατη θεωρία οποιουδήποτε άλλου όρου που δεν ανήκει στην υπερσυμμετρική $E_6\times U(1)_A\times U(1)_B$ θεωρία βαθμίδας ή στον SSB τομέα της.

| $S/R$ | $SO(6)$ vector | $SO(6)$ spinor |
|---|---|---|
| $SU(3)/U(1) \times U(1)$ | $(a,c)+(b,d)+(a+b,c+d)$ <br> $+(-a,-c)+(-b,-d)$ <br> $(-a-b,-c-d)$ | $(0,0)+(a,c)+(b,d)$ <br> $+(-a-b,-c-d)$ |

**Πίνακας 1**

Ανακεφαλαιώνοντας, το γεγονός ότι, ξεκινώντας με μία $N = 1$ υπερσυμμετρική θεωρία στις 10 διαστάσεις, το CSDR οδηγεί στο φερμιονικό περιεχόμενο μιας $N = 1$ υπερσυμμετρικής θεωρίας στην περίπτωση που ο 6-διάστατος χώρος πηλίκου είναι μη-συμμετρικός, φαίνεται εξετάζοντας τον Πίνακα 1. Πιο συγκεκριμένα, όταν ο χώρος πηλίκου είναι μη-συμμετρικόε, τα αναπτύγματα της σπινοριακής $4$ και της αντισπινοριακής $\overline{4}$ της $SO(6)$ κάτω απότην $R$ περιέχουν μια singlet, δηλαδή έχουν τη μορφή $1+r$ και $1+\overline{r}$ αντίστοιχα, όπου η $r$ είναι γενικά αναγωγίσιμη. Η singlet κάτω από την $R$ συνιστά στην 4-διάστατη θεωρία φερμιόνια που μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη συζυγή και αντιστοιχούν στα gauginos, τα οποία αποκτούν μάζες γεωμετρικής προέλευσης (αλλά και μάζες που προέρχονται από τη στρέψη). Όσον αφορά το ανάπτυγμα της διανυσματικής $6$ της $SO(6)$ κάτω από την $R$ στην μη-συμμετρική περίπτωση, η διανυσματική αναπαράσταση μπορεί να δημιουργηθεί από το τανυστικό γινόμενο $4 \times 4$ και επομένως έχει δομή $r + \overline{r}$. Τότε, οι περιορισμοί του CSDR υποδεικνύουν ότι η 4-διάστατη θεωρία θα περιέχει τις ίδιεσ αναπαραστάσεις φερμιονίων και βαθμωτών, εφόσον και τα δύο προέρχονται από την ομάδα βαθμίδας $G$ και πρέπει να ικανοποιούν τις ίδιες συνθήκες κάτω από το $R$. Επομένως, το πεδιακό περιεχόμενο της 4-διάστατης θεωρίας είναι $N = 1$ υπερσυμμετρικό (η $N = 1$ υπερσυμμετρία αυτή σπάει τελικά «απαλά»).

# Κεφάλαιο 2

# Ο μηχανισμός Wilson flux

Η ομάδα βαθμίδας του προηγούμενου κεφαλαίου πρέπει να μειωθεί περαιτέρω, κάτι που επιτυγχάνεται με το μηχανισμό Wilson flux.

Μέχρι στιγμής η θεωρία βαθμίδας θεωρήθηκε στο χώρο $M^4 \times B_0$, όπου $B_0$ μια simply connected πολλαπλότητα. Γίνεται όμως να επιλεγεί ο χώρος $M^4 \times B$, όπου $B = B_0/F^{S/R}$ και $F^{S/R}$ μια freely acting διακριτή συμμετρία του $B_0$. Το $B$ γίνεται τότε multiply connected. Για κάθε στοιχείο $g \in F^{S/R}$ επιλέγεται ένα στοιχείο $U_g$ στο $H$, δηλαδή στην 4-διάστατη ομάδα βαθμίδας της ελαττωμένης θεωρίας, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί ως Wilson loop (WL):

$$U_g = \mathcal{P}exp\Big( - i \int_{\gamma_g} T^a A^a_M(x) dx^M \Big) \tag{2.1}$$

όπου τα $A^a_M(x)$ είναι «vacuum H » πεδία με γεννήτορες ομάδας $T^a$, το $\gamma_g$ είναι ένα contour που αναπαριστά το «αφηρημένο» στοιχείο $g$ του $F^{S/R}$ και το $\mathcal{P}$ υποδηλώνει το path ordering. Αν το $\gamma_g$ επιλεγεί να μην μπορεί να «συσταλεί» σε σημείο, τότε $U_g \neq 1$, παρόλο που το vacuum field strength μηδενίζεται παντού. Με αυτόν το τρόπο ένας ομοιομορφισμός του $F^{S/R}$ στο $H$ επάγεται με εικόνα $T^H$, που είναι η υποομάδα του $H$ που γεννιέται από το $\{U_g\}$. Ένα πεδίο $f(x)$ στο $B_0$ είναι ισοδύναμο με ένα άλλο πεδίο στο $B_0$ που ικανοποιεί την $f(g(x)) = f(x)$ για κάθε $g \in F^{S/R}$. Παρουσία της ομάδας βαθμίδας $H$ το παραπάνω μπορεί να γενικευθεί στο:

$$f(g(x)) = U_g f(x) \tag{2.2}$$

Οι διακριτές συμμετρίες $F^{S/R}$, οι οποίες είναι freely acting πάνω στους χώρους πηλίκου $B_0 = S/R$ είναι το κέντρο των $S$, $Z(S)$ και $W = W_S/W_R$, όπου $W_S$ και $W_R$ είναι οι ομάδες Weyl των $S$ και $R$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που εξετάζεται σε αυτήν την εργασία ισχύει:

$$F^{S/R} = \mathbb{Z}_3 \subseteq W \tag{2.3}$$

## 2.1 $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$ από Wilson flux

Γιανα εξαχθεί η projected θεωρία παρουσία του WL, θα πρέπει να παραμείνουν τα πεδία που είναι αναλλοίωτα κάτω από τη συνδυασμένη δράση της διακριτής ομάδας $\mathbb{Z}_3$ στη γεωμετρία και στους δείκτες βαθμίδας. Η συμμετρία αυτή δρα μη-τετριμμένα στα πεδία βαθμίδας και στα πεδία ύλης στην 27 και στις singlets. Η δράση της στου δείκτες βαθμίδας εισάγεται μέσω του πίνακα $diag(\mathbf{1}_9, \omega\mathbf{1}_9,' omega^2\mathbf{1}_9)$ με $\omega = e^{2i\pi/3}$. Επομένως, τα πεδία βαθμίδας που επιζούν της προβολής είναι εκείνα ου ικανοποιούν:

$$A_\mu = \gamma_3 A_\mu \gamma_3^{-1} \tag{2.4}$$

ενώ οι συνιστώσες των πεδίων ύλης στην 27 που επιζούν είναι αυτά που ικανοποιούν:

$$\vec{\alpha} = \omega\gamma_3\vec{\alpha}, \;\; \vec{\beta} = \omega^2\gamma_3\vec{\beta}, \;\; \vec{\gamma} = \omega^3\gamma_3\vec{\gamma} \tag{2.5}$$

Τελικά, η προβολή στις μιγαδικές βαθμωτές singlets είναι:

$$\alpha = \omega\alpha, \;\; \beta = \omega^2\beta, \;\; \gamma = \omega^3\gamma \tag{2.6}$$

Φαίνεται εύκολα ότι μετά την προβολή $\mathbb{Z}_3$ η ομάδα βαθμίδας ελαττώνεται στην:

$$A_\mu^A, \qquad A \in SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes SU(3)_R \;\; ^1 \tag{2.7}$$

και τα βαθμωτά πεδία ύλης βρίσκονται στις bifundamental[2] αναπαραστάσεις:

$$\alpha_3 \sim H_1 \sim (\overline{3}, 1, 3)_{(3,1/2)}, \;\; \beta_2 \sim H_2 \sim (3, \overline{3}, 1)_{(-3,1/2)}, \;\; \gamma_1 \sim H_3 \sim (1, 3, \overline{3})_{(0,-1)} \tag{2.8}$$

Υπάρχουν και φερμιόνια και παρόμοιες αναπαραστάσεις. Το Higgs ταυτοποιείται με το διάνυσμα με 9 συνιστώσες $H_{3a}$ (με $a = 1, ..., 9$). Από τις singlets μόνο η $\gamma_{(0,-1)}$ επιβιώνει. Παρακάτω θα χρησιμοποιηθούν οι δείκτες $a, b, c, ...$ για τις μιγαδικές συνιστώσες μιας δωθείσας bifundamental αναπαράστασης και οι $i, j, k, ... = 1, 2, 3$ για διαφορετικές bifundamental αναπαραστάσεις.

Πρέπει ακόμα να γίνουν τα κατάλληλα βήματα ώστε να υπάρχουν 3 ίδιες οικογένειες για καθένα από τα bifundamental πεδία. Αυτό μπρεί (εν γένει) να επιτευχθεί εισάγοντας μη-τετριμμένα windings στο $R$. Τα 3 «αντίγραφα» των bifundamental πεδίων συμβολίζονται ως (χρησιμοποιείται ο δείκτης $l = 1, 2, 3$ για τον προσδιορισμό των οικογενειών):

$$\begin{aligned} 3 \cdot H_1 &\rightarrow H_1^{(l)} \sim 3 \cdot (\overline{3}, 1, 3)_{(3,1/2)} \\ 3 \cdot H_2 &\rightarrow H_2^{(l)} \sim 3 \cdot (3, \overline{3}, 1)_{(-3,1/2)} \\ 3 \cdot H_3 &\rightarrow H_3^{(l)} \sim 3 \cdot (1, 3, \overline{3})_{(0,-1)} \end{aligned} \tag{2.9}$$

[1] όπου ο δείκτης $c$ συμβολίζει το χρώμα (πρόκειται για την $SU(3)_c$ του $SM$)

[2] bifundamental αναπαράσταση είναι μια αναπαράσταση που προκύπτει ως τανυστικό γινόμενο δύο fundamental ή antifundamental αναπαραστάσεων

Ομοίως, τα 3 «αντίγραφα» των βαθμωτών συμβολίζονται ως:

$$3\cdot\gamma_{(0,-1)}\rightarrow\theta^{(l)}_{(0,-1)} \tag{2.10}$$

Το βαθμωτό δυναμικό παίρνει αντιστοίχως 3 «αντίγραφα» από κάθε συνεισφορά.

Παρακάτω, όποτε δεν προκαλεί σύγχυση, θα συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα ένα chiral superfield με το βαθμωτό αντίστοιχό του. Επίσης, το δυναμικό μετά την προβολή θα έχει την ίδια μορφή με πριν, με τη μόνη διαφορά ότι μόνο το $\theta^{(l)}$ δεν μηδενίζεται από τις singlets και ότι τα αθροίσματα των συνιστωσών τώρα θα περιλαμβάνουν μόνο τις άρτιες κάτω από την προβολή. Το βαθμωτό δυναμικό μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

$$V_{sc}=3(3\Lambda^2+\Lambda'^2)\Big(\frac{1}{R_1^4}+\frac{1}{R_2^4}\Big)+\frac{3\cdot 4\Lambda'^2}{R_3^4}+\sum_{l=1,2,3}V^{(l)} \tag{2.11}$$

όπου $V^{(l)}=V_{SUSY}+V_{soft}$ με $V_{SUSY}=V_D+V_F$. Εφόσον υπάρχουν 3 πανομοιότυπες συνεισφορές στο δυναμικό, τουλάχιστον μέχρι να δοθούν vevs στα Higgs (που εν γένει μπορεί να είναι διαφορετικές για κάθε $l$), μπορεί να παραλείπεται πλέον ο δείκτης $(l)$ από τα περισσότερα πεδία. Τότε, η αναλυτική μορφή των $D$-όρων και $F$-όρων θα είναι:

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{1}{2}\sum_A D^A D^A+\frac{1}{2}D_1D_1+\frac{1}{2}D_2D_2\\ V_f &= \sum_{i=1,2,3}|F_{H_i}|^2+|F_\theta|^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

όπου $F_{H_i}=\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial H_i}$ και $F_\theta=\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\theta}$. Οι $F$-όροι εξάγονται από το

$$\mathcal{W}=\sqrt{40}d_{abc}H_1^aH_2^bH_3^c \tag{2.13}$$

και οι $D$-όροι είναι οι

$$\begin{aligned} D^A &= \frac{1}{\sqrt{3}}\langle H_i|G^A|H_i\rangle\\ D_1 &= 3\sqrt{\frac{10}{3}}(\langle H_1|H_1\rangle-\langle H_2|H_2\rangle)\\ D_2 &= \sqrt{\frac{10}{3}}(\langle H_1|H_1\rangle+\langle H_2|H_2\rangle-2\langle H_3|H_3\rangle-2|\theta|^2) \end{aligned} \tag{2.14}$$

όπου

$$\begin{aligned} \langle H_i|G^A|H_i\rangle &= \sum_{i=1,2,3}H_i^a(G^A)_a^bH_{ib}\\ \langle H_i|H_i\rangle &= \sum_{i=1,2,3}H_i^a\delta_a^bH_{ib} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Τέλος, οι soft breaking όροι είναι:

$$\begin{aligned}V_{soft} =&\Big(\frac{4R_1^2}{R_2^2R_3^2}-\frac{8}{R_1^2}\Big)\langle H_1|H_1\rangle+\Big(\frac{4R_2^2}{R_1^2R_3^2}-\frac{8}{R_2^2}\Big)\langle H_2|H_2\rangle\\&+\Big(\frac{4R_3^2}{R_1^2R_2^2}-\frac{8}{R_3^2}\Big)(\langle H_3|H_3\rangle+|\theta|^2)\\&+80\sqrt{2}\Big(\frac{R_1}{R_2R_3}+\frac{R_2}{R_1R_3}+\frac{R_3}{R_1R_2}\Big)(d_{abc}H_1^aH_2^bH_3^c+h.c.)\end{aligned} \tag{2.16}$$

Τα $(G^A)_a^b$ είναι σταθερές δομής, αντισυμμετρικές ως προς τα $a, b$. Το διάνυσμα $|\phi\rangle$ και το ερμιτιανό συζυγές του $\langle\phi|$ αναπαριστούν τα 9-διάστατα bifundamental πεδία παραπάνω.

Το δυναμικό μπορεί να γραφτεί και σε πιο «βολική» μορφή αν γραφτούν τα διανύσματα σε μιγαδική $3\times 3$ μορφή πίνακα. Οι διάφοροι όροι στο βαθμωτό δυναμικό μπορούν τότε να ερμηνευθούν ως πολυώνυμα Lie. Ταυτοποιούνται τα ακόλουθα:

$$H_1\sim(\overline{3},1,3)\rightarrow(q^c)_p^\alpha \;\; H_2\sim(3,\overline{3},1)\rightarrow Q_\alpha^a \;\; H_3\sim(1,3,\overline{3})\rightarrow L_a^p \tag{2.17}$$

όπου

$$q^c=\begin{pmatrix}d_R^1 & u_R^1 & D_R^1\\ d_R^2 & u_R^2 & D_R^2\\ d_R^3 & u_R^3 & D_R^3\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}d_L^1 & d_L^2 & d_L^3\\ u_L^1 & u_L^2 & u_L^3\\ D_L^1 & D_L^2 & D_L^3\end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix}H_d^0 & H_u^+ & \nu_L\\ H_d^- & H_u^0 & e_L\\ \nu_R & e^R & S\end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Προφανώς τα $d_{L,R}$, $u_{L,R}$ και $D_{L,R}$ μετασχηματίζονται ως 3,$\overline{3}$ κάτω από την $SU(3)_c$. Εισάγονται τα

$$\hat{q^c}_\alpha^p=\frac{1}{3}\frac{\partial I_3}{\partial q^{c\alpha}_p},\quad \hat{L}_p^a=\frac{1}{3}\frac{\partial I_3}{\partial L_a^p},\quad \hat{Q}_a^\alpha=\frac{1}{3}\frac{\partial I_3}{\partial Q_\alpha^a} \tag{2.19}$$

όπου $I_3=det[Q]+det[q^c]+det[L]-tr(q^c\cdot L\cdot Q)$. Συναρτήσει των παραπάνω:

$$\langle H_1|H_1\rangle=tr(q^{c\dagger}q^c),\;\;\langle H_2|H_2\rangle=tr(Q^\dagger Q),\;\;\langle H_3|H_3\rangle=tr(L^\dagger L) \tag{2.20}$$

και

$$d_{abc}H_1^aH_2^bH_3^c=detq^{c\dagger}+detM^\dagger+detL^\dagger=tr(N^\dagger M^\dagger L^\dagger) \tag{2.21}$$

Οι $F$-όροι που αναλυτικά ήταν:

$$V_F=40d_{abc}d^{cde}(H_1^aH_2^bH_{1d}H_{2e}+H_2^aH_3^bH_{2d}H_{3e}H_1^aH_3^bH_{1d}H_{3e}) \tag{2.22}$$

μπορούν πλέον να γραφτούν ως:

$$V_F=40tr(\hat{q^c}^\dagger\hat{q^c}+\hat{Q}^\dagger\hat{Q}+\hat{L}^\dagger\hat{L}). \tag{2.23}$$

# Κεφάλαιο 3

# Ελάττωση Παραμέτρων και Finiteness

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δοθεί μια σύνοψη της αρχής της ελάττωσης παραμέτρων. Ακόμα θα περιγραφούν συντόμως οι ($N = 1$ υπερσυμμετρικές) πεπερασμένες μεγαλοενοποιημένες θεωρίες (Finite Unified Theories - FUT).

## 3.1 Ελάττωση παραμέτρων

Όσον αφορά τις αδιάστατες συζεύξεις, μια σχέση ανεξάρτητη της ομάδας επανακανονικοποίησης (renormalization group invariant - RGI) μεταξύ συζεύξεων $g$:

$$\mathcal{F}(g_1, ..., g_N) = 0 \tag{3.1}$$

πρέπει να ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση

$$\mu \frac{d\mathcal{F}}{d\mu} = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial g_i} = 0 \tag{3.2}$$

όπου $\beta_i$ είναι η συνάρτηση $\beta$ του $g_i$. Υπάρχουν $(N-1)$ ανεξάρτητες $\mathcal{F}$ και η εύρεση του πλήρους συνόλου αυτών των λύσεων είναι ισοδύναμη με τη λύση των *εξισώσεων ελάττωσης (RE)*:

$$\beta_g \left( \frac{dg_i}{dg} \right) = \beta_i \ , \qquad i = 1, ..., N \tag{3.3}$$

όπου το $g$ είναι η κύρια σύζευξη και $\beta_g$ η συνάρτηση $\beta$ του. Χρησιμοποιώντας όλες τις $(N-1)$ $\mathcal{F}$ για να επιβληθούν RGI σχέσεις, είναι δυνατό να εκφραστούν όλες οι συζεύξεις συναρτήσει μίας σύζευξης $g$.Η πλήρης ελάττωση (η οποία διατηρεί τη διαταρακτική επανακανονικοποιησιμότητα) μπορεί να επιτευχθεί με μια λύση σε μορφή δυναμοσειράς, η μοναδικότητα της οποία μπορεί να διερευνηθεί σε 1-loop.

## 3.2 $N = 1$ Finiteness

Όσον αφορά τη finiteness, είναι αναπόφευκτο να θεωρηθούν υπερσυμμετρικές θεωρίες. Έστω μια chiral, ελεύθερη ανωμαλιών, $N = 1$ υπερσυμμετρική υεωρία βαθμίδας βασισμένη σε μια ομάδα βαθμίδας $G$ με σταθερά σύζευξης $g$. Το superpotential της θεωρίας αυτής δίνεται από:

$$W = \frac{1}{2}m^{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{6}C^{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \tag{3.4}$$

όπου τα $m^{ij}$ και $C^{ijk}$ είναι τανυστές αναλλοίωτοι βαθμίδας και το πεδίο ύλης $\Phi_i$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με την irrep $R_i$ της ομάδας βαθμίδας $G$. Όλες οι 1-loop συναρτήσεις $\beta$ της θεωρίας μηδενίζονται εάν τα $\beta_g^{(1)}$ και $\gamma_i^{j(1)}$ (τα δεύτερα είναι τα anomalous dimensions των superfields) μηδενίζονται. Οι συνθήκες αυτές είναι δηλαδή οι:

$$\sum_i l(R_i) = 3C_2(G) \ , \qquad \frac{1}{2}C_{ipq}C^{jpq} = 2\delta_i^j g^2 C_2(R_i) \tag{3.5}$$

όπου $l(R_i)$ είναι ο δείκτης Dynkin της $R_i$ και $C_2(G)$, $C_2(R_i)$ είναι αντίστοιχα οι τετραγωνικοί τελεστές Casimir της συζυγούς αναπαράστασης του $G$ και της αναπαράστασης $R_i$. Μια αναμενόμενη ερώτηση είναι τι γίνεται σε υψηλότερες τάξεις. Ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι ότι οι συνθήκες (3.5) είναι *αναγκαίες και ικανές για finiteness σε επίπεδο 2-loop.*

Οι συνθήκες (3.5) για 1-loop και 2-loop finiteness περιορίζουν σημαντικά τις πιθανές επιλογές των irrep $R_i$ για μια ομάδα βαθμίδας $G$, αλλά και τις συζεύξεις Yukawa του superpotential.Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συνθήκες αυτές δεν μπορούν να εφαρμοστούν για το MSSM, καθώς η παρουσία της ομάδας βαθμίδας $U(1)$ δεν είναι συμβατή με την πρώτη συνθήκη (3.5), επειδή $C_2[U(1)] = 0$. Άρα, η finiteness θα συναντάται μόνο στο (ενεργειακό) επίπεδο μιας μεγαλοενοποιημένης θεωρίας, με το SM να είναι μόνο η αντίστοιχη effective θεωρία στις χαμηλές ενέργειες.

Οι συνθήκες (3.5) επιβάλλουν σχέσεις μεταξύ των συζεύξεων βαθμίδας και Yukawa. Πρέπει λοιπόν να εγγυηθεί ότι τέτοιες σχέσεις που οδηγούν σε ελάττωση παραμέτρων ισχύουν σε κάθε σημείο επανακανονικοποίησης. Η αναγκαία (αλλά και ικανή) συνθήκη για να συμβεί αυτό είναι η απαίτηση τέτοιες σχέσεις να είναι λύσεις στις εξισώσεις ελάττωσης (RE) (3.3) σε όλες τις τάξεις θεωρίας διαταραχών. Συγκεκριμένα, υπάρχει ένα θεώρημα [7] που εγγυάται το μηδενισμό των συναρτήσεων $\beta$ σε όλες τις τάξεις θεωρίας διαταραχών αν απαιτηθεί ελάττωση παραμέτρων και ότι όλες οι 1-loop anomalous dimensions των πεδίων ύλης στην πλήρως και κατά μοναδικό τρόπο ελαττωμένη θεωρία μηδενίζονται ταυτοτικά.

## 3.3 Soft σπάσιμο υπερσυμμετρίας σε $N = 1$ FUTs

Η παραπάνω μέθοδος ελάττωσης των αδιάστατων συζεύξεων μπορεί να επεκταθεί και στις soft supersymmetry breaking (SSB) συζεύξεις με διαστάσεις μιας $N = 1$ υπερσυμμετρικής θεωρίας. Επιπλέον, οι RGI SSB μάζες βαθμωτών σε ένα γενικό μοντέλο Gauge-Yukawa ενοποίησης (GYU) ικανοποιούν έναν καθολικό κανόνα άθροισης σε 1-loop, ο οποίος επεκτείνεται και σε όλες τις τάξεις θεωρίας διαταραχών.

Έστω το superpotential (3.4) μαζί με τη λαγκρανζιανή για τους SSB όρους:

$$-\mathcal{L}_{SB} = \frac{1}{6}h^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + \frac{1}{2}b^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{2}(m^2)^j_i\phi^{*i}\phi_j + \frac{1}{2}M\lambda\lambda + h.c. \tag{3.6}$$

όπου τα $\phi_i$ είναι οι βαθμωτές συνιστώσες των chiral superfields $\Phi_i$, τα $\lambda$ είναι τα gauginos και το $M$ είναι η μάζα ενοποίησης. Εφόσον η συζήτηση αφορά μόνο πεπερασμένες (finite) θεωρίες, λαμβάνεται υπόψιν η υπόθεση ότι η 1-loop συνάρτηση $\beta$ της σύζευξης βαθμίδας $g$ μηδενίζεται, αλλά και ότι οι εξισώσεις ελάττωσης (3.3) έχουν λύσεις σε μορφή δυναμοσειράς της μορφής:

$$C^{ijk} = g\sum_{n=0}\rho^{ijk}_{(n)}g^{2n} \tag{3.7}$$

Η θεωρία είναι τότε πεπερασμένη σε όλες τις τάξεις θεωρίας διαταραχών εάν, μεταξύ άλλων, οι 1-loop anomalous dimensions $\gamma_i^{j(1)}$ μηδενίζονται. Η 1-loop και 2-loop finiteness για το $h^{ijk}$ επιτυγχάνονται με την επιβολή της συνθήκης:

$$h^{ijk} = -MC^{ijk} + ... = -M\rho^{ijk}_{(0)}g + O(g^5) \tag{3.8}$$

Επιπλέον, η 1-loop και 2-loop finiteness απαιτεί να ικανοποιείται ο παρακάτω 2-loop κανόνας άθροισης για τις μάζες των βαθμωτών:

$$\frac{(m_i^2 + m_j^2 + m_k^2)}{MM^\dagger} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\Delta^{(2)} + O(g^4) \tag{3.9}$$

όπου $\Delta^{(2)}$ είναι η 2-loop διόρθωση:

$$\Delta^{(2)} = -2\sum_l\Big[\Big(\frac{m_l^2}{MM^\dagger}\Big) - \Big(\frac{1}{3}\Big)\Big]T(R_i) \tag{3.10}$$

η οποία μηδενίζεται για την καθολική επιλογή. Ακόμα, έχει βρεθεί ότι η σχέση

$$h^{ijk} = -M(C^{ijk})' \equiv -M\frac{dC^{ijk}(g)}{d\ln g} \tag{3.11}$$

μεταξύ συζεύξεων είναι RGI σε όλες τις τάξεις θεωρίας διαταραχών.

# Κεφάλαιο 4

# Το μοντέλο $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξεταστεί το μοντέλο $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$, τόσο ως μία θεωρία που προέρχεται από την μεγαλοδιάστατη θεωρία που περιγράφθηκε στα πρώτα κεφάλαια, όσο και ως μια πεπερασμένη (finite) θεωρία ενοποίησης στην οποία μπορεί να εφαρμοστεί η αρχή της ελάττωσης παραμέτρων που συνοψίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αξίζει, αρχικά, να παρατεθεί ο τρόπος με τον οποίο το $N = 1$ υπερσυμμετρικό $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$σπάει στο MSSM.

## 4.1 Σπάσιμο συμμετρίας βαθμίδας

Θεωρούνται οι παρακάτω vevs:

$$\langle L_s^{(1)} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_1 \end{pmatrix}, \qquad \langle L_s^{(2)} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

όπου $L_s$ είναι η βαθμωτή συνιστώσα της λεπτονικής supermultiplet $L$[1]. Για απλότητα θα θεωρηθεί ότι μόνο μία οικογένεια παίρνει vevs. Οι δύο αυτές vevs αφήνουν άσπαστη την ομάδα χρώματος $SU(3)^c$ αλλά σπάνε τις άλλες ως εξής:

$$SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R \to SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \tag{4.2}$$

από την $\langle L_s^{(1)} \rangle$ και

$$SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R \to SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)'_R \times U(1)' \tag{4.3}$$

από την $\langle L_s^{(2)} \rangle$. Ο συνδυασμός των δύο δίνει τελικά

$$SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R \to SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \tag{4.4}$$

[1]Υπενθυμίζεται ότι η $L$ μετασχηματίζεται ως $(1, 3, \overline{3})$ κάτω από το $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$

που είναι το MSSM. Το σπάσιμο του gauge τμήματος της θεωρίας προκύπτει από τον όρο $Tr|D_\mu L_s|^2$, με το $D_\mu L_s$ να δίνεται από:

$$D_\mu L_s = \partial_\mu L_s \underbrace{-ig_L(A_\mu^\alpha T^\alpha)L_s}_{SU(3)_L} - \underbrace{iL_s(g_R B_\mu^\alpha T^\alpha)^\dagger}_{SU(3)_R} \tag{4.5}$$

όπου $T^\alpha$ είναι οι πίνακες Gell-Mann με $\alpha = 1,...,8$ ($T^{\alpha\dagger} = -T^{\alpha *}$) και $g_{L,R}$ είναι οι συζεύξεις βαθμίδας των δύο ομάδων, ενώ $A_\mu^\alpha$ και $B_\mu^\alpha$ τα πεδία των δύο ομάδων βαθμίδας αντίστοιχα. Εφόσον το $L$ είναι singlet κάτω από την $SU(3)_c$, δεν υπεισέρχεται όρος χρώματος στην συναλλοίωτη παράγωγο.[2] «Αφήνοντας» προσωρινά τους δείκτες $\mu$ για διευκόλυνση:

$$\begin{gathered}
A^1T^1 = \begin{pmatrix} 0 & A^1 & 0 \\ A^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^2T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -iA^2 & 0 \\ iA^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^3T^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 0 & 0 \\ 0 & -A^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A^4T^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A^4 \\ 0 & 0 & 0 \\ A^4 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^5T^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -iA^5 \\ 0 & 0 & 0 \\ iA^5 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^6T^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^6 \\ 0 & A^6 & 0 \end{pmatrix}, \\
A^7T^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iA^7 \\ 0 & iA^7 & 0 \end{pmatrix},\ A^8T^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} A^8 & 0 & 0 \\ 0 & A^8 & 0 \\ 0 & 0 & -2A^8 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{4.6}$$

και όμοια για τα $B^\alpha T^\alpha$. Οπότε:

$$A_\mu \equiv A_\mu^\alpha T^\alpha = \begin{pmatrix} A^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A^8 & A^1 - iA^2 & A^4 - iA^5 \\ A^1 + iA^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}A^8 - A^3 & A^6 - iA^7 \\ A^4 + iA^5 & A^6 + iA^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}A^8 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

$$B_\mu \equiv B_\mu^\alpha T^{\alpha *} = \begin{pmatrix} B^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}B^8 & B^1 + iB^2 & B^4 + iB^5 \\ B^1 - iB^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}B^8 - B^3 & B^6 + iB^7 \\ B^4 - iB^5 & B^6 - iB^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}B^8 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

ενώ χρησιμοποιείται και ο επαναορισμός:

$$-ig_l A_\mu L_s + iL_s g_R B_\mu \equiv -i\tilde{A}_\mu L_s + iL_s \tilde{B}_\mu \tag{4.9}$$

[2] Στον όρο της $SU(3)_R$ το $L_s$ βρίσκεται αριστερά του $(B_\mu^\alpha T^\alpha)^\dagger$ καθώς η ομάδα πρέπει να δρα στις γραμμές και όχι τις στήλες του πίνακα.

## $1^o$ **Σπάσιμο**

Στο κενό της θεωρίας θα ισχύει:

$$
\begin{aligned}
-i\tilde{A}_\mu \langle L_s^{(1)} \rangle + i \langle L_s^{(1)} \rangle \tilde{B}_\mu = \\
= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{A}^4 - i\tilde{A}^5 \\ 0 & 0 & \tilde{A}^6 - i\tilde{A}^7 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{A}^8 \end{pmatrix} V_1 \\
+ i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{B}^4 - i\tilde{B}^5 & \tilde{B}^6 - i\tilde{B}^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{B}^8 \end{pmatrix} V_1 \\
= -iV_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{A}^4 - i\tilde{A}^5 \\ 0 & 0 & \tilde{A}^6 - i\tilde{A}^7 \\ -(\tilde{B}^4 - i\tilde{B}^5) & -(\tilde{B}^6 - i\tilde{B}^7) & \frac{2}{\sqrt{3}}(\tilde{B}^8 - \tilde{A}^8) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Το τετράγωνο του απολύτου της παραπάνω έκφρασης δίνει:

$$
\begin{aligned}
|D_\mu L_s|^2 = V_1^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\tilde{B}^4 - i\tilde{B}^5) \\ 0 & 0 & -(\tilde{B}^6 - i\tilde{B}^7) \\ \tilde{A}^4 - i\tilde{A}^5 & \tilde{A}^6 - i\tilde{A}^7 & \frac{2}{\sqrt{3}}(\tilde{B}^8 - \tilde{A}^8) \end{pmatrix} \\
\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{A}^4 - i\tilde{A}^5 \\ 0 & 0 & \tilde{A}^6 - i\tilde{A}^7 \\ -(\tilde{B}^4 - i\tilde{B}^5) & -(\tilde{B}^6 - i\tilde{B}^7) & \frac{2}{\sqrt{3}}(\tilde{B}^8 - \tilde{A}^8) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= V_1^2 \begin{pmatrix} |\tilde{B}^4 - i\tilde{B}^5|^2 & \begin{matrix}(\tilde{B}^6 - i\tilde{B}^7)\times \\ \times(\tilde{B}^4 - i\tilde{B}^5)\end{matrix} & \begin{matrix}(\tilde{B}^6 - i\tilde{B}^7)\times \\ \times(\tilde{B}^4 - i\tilde{B}^5)\end{matrix} \\
\begin{matrix}(\tilde{B}^6 + i\tilde{B}^7)\times \\ \times(\tilde{B}^4 + i\tilde{B}^5)\end{matrix} & |\tilde{B}^6 - i\tilde{B}^7|^2 & \begin{matrix}(\tilde{B}^6 + i\tilde{B}^7)\times \\ \times(\tilde{B}^4 + i\tilde{B}^5)\end{matrix} \\
\begin{matrix}\frac{2}{\sqrt{3}}(\tilde{A}^8 - \tilde{B}^8)\times \\ \times(\tilde{B}^4 - i\tilde{B}^5)\end{matrix} & \begin{matrix}\frac{2}{\sqrt{3}}(\tilde{A}^8 - \tilde{B}^8)\times \\ \times(\tilde{B}^6 - i\tilde{B}^7)\end{matrix} & \begin{matrix}|\tilde{A}^4 + i\tilde{A}^5|^2 + \\ +|\tilde{A}^6 - i\tilde{A}^7|^2 + \\ +\frac{4}{3}(\tilde{B}^8 - \tilde{A}^8)^2\end{matrix} \end{pmatrix}
$$

Οπότε το ίχνος της παραπάνω έκφρασης θα είναι:

$$
\begin{aligned}
Tr|D_\mu L_s|^2 = & V_1^2 \Big( (\tilde{A}^4)^2 + (\tilde{A}^5)^2 + (\tilde{A}^6)^2 + (\tilde{A}^7)^2 \\
& + (\tilde{B}^4)^2 + (\tilde{B}^5)^2 + (\tilde{B}^6)^2 + (\tilde{B}^7)^2 \\
& + \frac{4}{3}(\tilde{B}^8)^2 + \frac{4}{3}(\tilde{A}^8)^2 - \frac{4}{3}\tilde{A}^8\tilde{B}^8 - \frac{4}{3}\tilde{B}^8\tilde{A}^8 \Big)
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Είναι φανερό ότι 9 πεδία βαθμίδας παίρνουν μάζα, τα $A^4$, $A^5$, $A^6$, $A^7$, $B^4$, $B^5$, $B^6$, $B^7$ και ένας γραμμικός συνδιασμός των $A^8$, $B^8$. Ξεκινώντας με 24 πεδία βαθμίδας, η θεωρία μετά το πρώτο σπάσιμο καταλήγει σε $24 - 9 = 15$ πεδία. Όμως το SM έχει $8 + 3 + 1 = 12$ πεδία, οπότε το ένα σπάσιμο δεν είναι αρκετό.

$$\underbrace{SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R}_{24 \text{ γεννήτορες}} \rightarrow \underbrace{SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)}_{15 \text{ γεννήτορες}} \quad (4.11)$$

Σημειώνεται ότι ο γραμμικός συνδιασμός των $A^8$, $B^8$ που παραμένει άμαζος αντιστοιχεί στην καινούρια $U(1)$.

## $2^o$ **Σπάσιμο**

Χρησιμοποιώντας και τη δεύτερη vev:

$$\begin{aligned}
&-i\tilde{A}_\mu \langle L_s^{(2)} \rangle + i \langle L_s^{(2)} \rangle \tilde{B}_\mu = \\
&= -iV_2 \begin{pmatrix} \tilde{A}^4 - i\tilde{A}^5 & 0 & 0 \\ \tilde{A}^6 - i\tilde{A}^7 & 0 & 0 \\ -(\tilde{B}^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{B}^8) - \frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{A}^8 & -(\tilde{B}^1 + i\tilde{B}^2) & -(\tilde{B}^4 + i\tilde{B}^5) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

και με όμοιο τρόπο τελικά:

$$|D_\mu L_s|^2 = V_2^2 \times$$
$$\begin{pmatrix}
\begin{matrix}|\tilde{A}^4 - i\tilde{A}^5|^2 + |\tilde{A}^6 - i\tilde{A}^7|^2 + \\ +(\tilde{B}^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{B}^8 + \frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{A}^8)^2\end{matrix} & \begin{matrix}\tilde{B}^1 + i\tilde{B}^2)\times \\ \times(\tilde{B}^3 + + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{B}^8 + \frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{A}^8)\end{matrix} & \begin{matrix}-(\tilde{B}^4 + i\tilde{B}^5)\times \\ \times(\tilde{B}^3 + + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{B}^8 + \frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{A}^8)\end{matrix} \\
\begin{matrix}-(\tilde{B}^1 i\tilde{B}^2)\times \\ \times(\tilde{B}^3 + + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{B}^8 + \frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{A}^8)\end{matrix} & |\tilde{B}^1 + i\tilde{B}^2|^2 & \begin{matrix}(\tilde{B}^4 + i\tilde{B}^5)\times \\ \times(\tilde{B}^1 - i\tilde{B}^2)\end{matrix} \\
\begin{matrix}\tilde{B}^4 - i\tilde{B}^5)\times \\ \times(\tilde{B}^3 + + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{B}^8 + \frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{A}^8)\end{matrix} & \begin{matrix}\tilde{B}^1 + i\tilde{B}^2)\times \\ \times(\tilde{B}^4 - i\tilde{B}^5)\end{matrix} & |\tilde{B}^4 + i\tilde{B}^5|^2
\end{pmatrix}$$

Οπότε το ίχνος του θα είναι:

$$\begin{aligned}
Tr|D_\mu L_s|^2 = &V_2^2 \Big( (\tilde{B}^4)^2 + (\tilde{B}^5)^2 + (\tilde{B}^1)^2 + (\tilde{B}^2)^2 \\
&+ (\tilde{A}^4)^2 + (\tilde{A}^5)^2 + (\tilde{A}^6)^2 + (\tilde{A}^7)^2 \\
&+ (\tilde{B}^3)^2 + \frac{1}{3}(\tilde{B}^8)^2 + \frac{4}{3}(\tilde{A}^8)^2 \\
&+ \frac{1}{\sqrt{3}}(\tilde{B}^3\tilde{B}^8 + \tilde{B}^8\tilde{B}^3) + \frac{2}{\sqrt{3}}(\tilde{B}^3\tilde{A}^8 + \tilde{A}^8\tilde{B}^3) \\
&+ \frac{2}{3}(\tilde{B}^8\tilde{A}^8 + \tilde{A}^8\tilde{B}^8) \Big) \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις εκφράσεις (4.10) και (4.12), παίρνουν τελικά μάζα τα $A^4$, $A^5$, $A^6$, $A^7$, $B^1$, $B^2$, $B^4$, $B^5$, $B^6$, $B^7$ και μένει και ένας μη-διαγώνιος πίνακας μαζών για τα $A^8$, $B^3$, $B^8$:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \tilde{B}^3 & \tilde{B}^8 & \tilde{A}^8 \\
\hline
\tilde{B}^3 & V_2^2 & \frac{V_2^2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}}V_2^2 \\
\tilde{B}^8 & \frac{V_2^2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3}(4V_1^2+V_2^2) & \frac{2}{3}V_2^2-\frac{4}{3}V_1^2 \\
\tilde{A}^8 & \frac{2}{\sqrt{3}}V_2^2 & \frac{2}{3}V_2^2-\frac{4}{3}V_1^2 & \frac{4}{3}(V_1^2+V_2^2)
\end{array} \tag{4.13}$$

Διαγωνοποιώντας τον πίνακα, τελικά οι μάζες των πεδίων βαθμίδας θα είναι:

$$\begin{aligned}
m_{A^4} &= m_{A^5} = m_{A^6} = m_{A^7} = \sqrt{V_1^2+V_2^2}g_L \\
m_{B^4} &= m_{B^5} = \sqrt{V_1^2+V_2^2}g_R \\
m_{B^6} &= m_{B^7} = V_1 g_R \\
m_{B^1} &= m_{B^2} = V_2 g_R \\
m_{A^8} &= \frac{1}{6}\Big[4(V_1^2+V_2^2)(g_L^2+g_R^2) \\
&\quad + \sqrt{16[(V_1^2+V_2^2)(g_L^2+g_R^2)]^2-12(16g_L^2g_R^2V_1^2V_2^2+4g_R^2V_1^2V_2^2)}\Big]^{\frac{1}{2}} \\
m_{B^8} &= \frac{1}{6}\Big[4(V_1^2+V_2^2)(g_L^2+g_R^2) \\
&\quad - \sqrt{16[(V_1^2+V_2^2)(g_L^2+g_R^2)]^2-12(16g_L^2g_R^2V_1^2V_2^2+4g_R^2V_1^2V_2^2)}\Big]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Πλέον άμαζα πεδία βαθμίδας είναι μόνο 12, όσα και τα πεδία βαθμίδας του SM.

$$\underbrace{SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R}_{24\ \text{γεννήτορες}} \to \underbrace{SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y}_{12\ \text{γεννήτορες}} \tag{4.14}$$

Πιο συγκεκριμένα, τα 8 γλουόνια έμειναν ως είχαν, ενώ από τα 8 πεδία της $SU(3)_L$ τα $A^1$, $A^2$, $A^3$ παραμένουν άμαζα και αντιστοιχούν στα 3 πεδία της $SU(2)_L$. Από την $SU(3)_R$ πήραν μάζα όλα εκτός του $B^3$, το οποίο αντιστοιχεί στο πεδίο βαθμίδας της $U(1)_Y$.

## 4.2 Φερμιονικές μάζες

Λαμβάνοντας υπόψιν και τις vevs των δύο Higgs doublets που συναντώνται στην $L_s$ (και θεωρώντας ότι μόνο η μία γενιά παίρνει vevs), προκύπτουν οι

$$\langle L_s^{(1+)} \rangle = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_1 \end{pmatrix}, \qquad \langle L_s^{(2)} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

οι οποίες και θα χρησιμοποιηθούν για να πάρουν μάζα τα φερμιόνια.

### Μάζες quarks

Ξεκινώντας από τις $Q$ και $q^c$ (οι οποίες γράφονται αγνώοντας το χρώμα), τα κουάρκς (θεωρώντας μία γενιά) θα παίρνουν μάζα από τους όρους Yukawa: [3]

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}^{quark}_{mass} =& f_1 \overline{\psi}_Q \psi_{q^c} \langle L_s^{(1+)} \rangle + f_2 \overline{\psi}_Q \psi_{q^c} \langle L_s^{(2)} \rangle \\
=& f_1 \begin{pmatrix} \overline{d}_L \\ \overline{u}_L \\ \overline{D}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R & u_R & D_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_1 \end{pmatrix} \\
&+ f_2 \begin{pmatrix} \overline{d}_L \\ \overline{u}_L \\ \overline{D}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R & u_R & D_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
=& \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{d}_L d_R & \overline{d}_L u_R & \overline{d}_L D_R \\ \overline{u}_L d_R & \overline{u}_L u_R & \overline{u}_L D_R \\ \overline{D}_L d_R & \overline{D}_L u_R & \overline{D}_L D_R \end{pmatrix}}_{\equiv A} \left[ f_1 \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_1 \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Σε επίπεδο αναπαραστάσεων ισχύει:

$$
\begin{aligned}
(3, \overline{3}, 1) \otimes (\overline{3}, 1, 3) \otimes (1, 3, \overline{3}) =& (8+1, \overline{3}, 3) \otimes (1, 3, \overline{3}) \\
=& (8+1, 8+1, 8+1)
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, εφόσον το γινόμενο περιέχει (για κάθε ομάδα βαθμίδας) μια singlet, η έκφραση (4.16) ισούται με το ίχνος της:

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}^{quark}_{mass} =& f_1 Tr[A \langle L_s^{(1+)} ] + f_2 Tr[A \langle L_s^{(2)} ] \\
=& f_1 \Big( u_1 \overline{d}_L d_R + u_2 \overline{u}_L u_R + V_1 \overline{D}_L D_R \Big) + f_2 \Big( V_2 \overline{d}_L D_R \Big)
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Προκύπτει, οπότε, η μάζα του $u$ $m_u = f_1 u_2$ και ο πόνακας

$$
M_{d,D} = \begin{pmatrix} f_1 u_1 & f_2 V_2 \\ 0 & f_1 V_1 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 u_1 & 0 \\ 0 & f_1 V_1 \end{pmatrix}}_{diagonalized} \tag{4.18}
$$

Άρα, οι μάζες τους θα είναι $m_d = f_1 u_1$ και $m_D = f_1 V_1$. Παρατηρείται ότι τα $m_{u,d} \sim O(M_{EW})$, ενώ $m_D \sim O(M_{GUT})$.

### Μάζες λεπτονίων

Η εξαγωγή των λεπτονικών μαζών είναι ένα ελαφρώς πιο πολύπλοκο πρόβλημα. Εφόσον ο όρος Yukawa είναι σε επίπεδο αναπαραστάσεων

$$
(1, 3, \overline{3}) \otimes (1, 3, \overline{3}) \otimes (1, 3, \overline{3}) \tag{4.19}
$$

[3] Σε όλη την παρακάτω συζήτηση εννοείται όπου χρειάζεται το ερμιτιανό συζυγές των αντίστοιχων εκφράσεων.

θα ισχύει για κάθε ομάδα βαθμίδας:

$$
\begin{aligned}
SU(3)_c: &\quad 1 \otimes 1 \otimes 1 = 1 \\
SU(3)_L: &\quad 3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 + \overline{3}) \otimes 3 = 10 + 8 + 8 + 1 \\
SU(3)_R: &\quad \overline{3} \otimes \overline{3} \otimes \overline{3} = (\overline{6} + 3) \otimes 3 = \overline{10} + 8 + 8 + 1
\end{aligned}
$$

Θα ήταν δυνατό να χρησιμοποιηθεί το ίχνος αν επρόκειτο για ένα μόνο γινόμενο που να δίνει singlet (πχ. $(\overline{3} \otimes 3)_L,\ (3 \otimes \overline{3})_R$). Εφόσον όμως μεσολαβεί και το $(6 \otimes 3)_L,\ (\overline{6} \otimes 3)_R$, γινόμενο το οποίο δεν έχει singlets, πρέπει να αναζητηθεί άλλος τρόπος. Μια λύση είναι να θεωρηθεί το ίχνος της έκφρασης και έπειτα να επιλεγούν από αυτό μόνο οι όροι που είναι αναλλοίωτοι κάτω από τις ομάδε βαθμίδας του SM. Ο όρος Yukawa θα είναι λοιπόν:

$$-\mathcal{L}^{lepton}_{mass} \sim f' \overline{\psi}_L \psi_L \langle L_s \rangle =$$

$$
\begin{pmatrix}
\begin{array}{c} \overline{H}^0_d H^0_d \langle H^0_d \rangle + \overline{H}^+_u H^-_d \langle H^0_d \rangle + \overline{\nu}_L \nu_R \langle H^0_d \rangle \\ + \overline{H}^0_d H^+_u \langle H^-_d \rangle + \overline{H}^+_u H^0_u \langle H^-_d \rangle + \overline{\nu}_L e_R \langle H^-_d \rangle \\ + \overline{H}^0_d \nu_L \langle \nu_R \rangle + \overline{H}^+_u e_L \langle \nu_R \rangle + \overline{\nu}_L S \langle \nu_R \rangle \end{array} &
\begin{array}{c} \overline{H}^0_d H^0_d \langle H^+_u \rangle + \overline{H}^+_u H^-_d \langle H^+_u \rangle + \overline{\nu}_L \nu_R \langle H^+_u \rangle \\ + \overline{H}^0_d H^+_u \langle H^0_u \rangle + \overline{H}^+_u H^0_u \langle H^0_u \rangle + \overline{\nu}_L e_R \langle H^0_u \rangle \\ + \overline{H}^0_d \nu_L \langle e_R \rangle + \overline{H}^+_u e_L \langle e_R \rangle + \overline{\nu}_L S \langle e_R \rangle \end{array} &
\begin{array}{c} \overline{H}^0_d H^0_d \langle \nu_L \rangle + \overline{H}^+_u H^-_d \langle \nu_L \rangle + \overline{\nu}_L \nu_R \langle \nu_L \rangle \\ + \overline{H}^0_d H^+_u \langle e_L \rangle + \overline{H}^+_u H^0_u \langle e_L \rangle + \overline{\nu}_L e_R \langle e_L \rangle \\ + \overline{H}^0_d \nu_L \langle S \rangle + \overline{H}^+_u e_L \langle S \rangle + \overline{\nu}_L S \langle S \rangle \end{array} \\
\begin{array}{c} \overline{H}^-_d H^0_d \langle H^0_d \rangle + \overline{H}^0_u H^-_d \langle H^0_d \rangle + \overline{e}_L \nu_R \langle H^0_d \rangle \\ + \overline{H}^-_d H^+_u \langle H^-_d \rangle + \overline{H}^0_u H^0_u \langle H^-_d \rangle + \overline{e}_L e_R \langle H^-_d \rangle \\ + \overline{H}^-_d \nu_L \langle \nu_R \rangle + \overline{H}^0_u e_R \langle \nu_R \rangle + \overline{e}_L S \langle \nu_R \rangle \end{array} &
\begin{array}{c} \overline{H}^-_d H^0_d \langle H^+_u \rangle + \overline{H}^0_d H^-_d \langle H^+_u \rangle + \overline{e}_L \nu_R \langle H^+_u \rangle \\ + \overline{H}^-_d H^+_u \langle H^0_u \rangle + \overline{H}^0_u H^0_u \langle H^0_u \rangle + \overline{e}_L e_R \langle H^0_u \rangle \\ + \overline{H}^-_d \nu_L \langle e_R \rangle + \overline{H}^0_u e_R \langle e_R \rangle + \overline{e}_L S \langle e_R \rangle \end{array} &
\begin{array}{c} \overline{H}^-_d H^0_d \langle \nu_L \rangle + \overline{H}^0_u H^-_d \langle \nu_L \rangle + \overline{e}_L \nu_R \langle \nu_L \rangle \\ + \overline{H}^-_d H^+_u \langle e_L \rangle + \overline{H}^0_u H^0_u \langle e_L \rangle + \overline{e}_L e_R \langle e_L \rangle \\ + \overline{H}^-_d \nu_L \langle S \rangle + \overline{H}^0_u e_R \langle S \rangle + \overline{e}_L S \langle S \rangle \end{array} \\
\begin{array}{c} \overline{\nu}_R H^0_d \langle H^0_d \rangle + \overline{e}_R H^-_d \langle H^0_d \rangle + \overline{S} \nu_R \langle H^0_d \rangle \\ + \overline{\nu}_R H^+_u \langle H^-_d \rangle + \overline{e}_R H^0_u \langle H^-_d \rangle + \overline{S} e_R \langle H^-_d \rangle \\ + \overline{\nu}_R \nu_L \langle \nu_R \rangle + \overline{e}_R e_L \langle \nu_R \rangle + \overline{S} S \langle \nu_R \rangle \end{array} &
\begin{array}{c} \overline{\nu}_R H^0_d \langle H^+_u \rangle + \overline{e}_R H^-_d \langle H^+_u \rangle + \overline{S} \nu_R \langle H^+_u \rangle \\ + \overline{\nu}_R H^+_u \langle H^0_u \rangle + \overline{e}_R H^0_u \langle H^0_u \rangle + \overline{S} e_R \langle H^0_u \rangle \\ + \overline{\nu}_R \nu_L \langle e_R \rangle + \overline{e}_R e_L \langle e_R \rangle + \overline{S} S \langle e_R \rangle \end{array} &
\begin{array}{c} \overline{\nu}_R H^0_d \langle \nu_L \rangle + \overline{e}_R H^-_d \langle \nu_L \rangle + \overline{S} \nu_R \langle \nu_L \rangle \\ + \overline{\nu}_R H^+_u \langle e_L \rangle + \overline{e}_R H^0_u \langle e_L \rangle + \overline{S} e_R \langle e_L \rangle \\ + \overline{\nu}_R \nu_L \langle S \rangle + \overline{e}_R e_L \langle S \rangle + \overline{S} S \langle S \rangle \end{array}
\end{pmatrix}
$$

[4] και τελικά μετά την παραπάνω διαδικασία θα μένει:

$$-\mathcal{L}^{lepton}_{mass} = f'_1 \Big( u_1 \overline{\nu}_l \nu_R + u_1 \overline{e}_L e_R + V_1 \overline{S} S \Big) + f'_2 \Big( V_2 \overline{H}^0_d \nu_L \Big) \qquad (4.20)$$

και τελικά οι μάζες θα είναι $m_e = f'_1 u_2$, $m_\nu = f'_1 u_1$ ($\sim O(M_{EW})$) και $m_S = f'_1 V_1$ ($\sim O(M_{GUT})$). Οι μάζες των νετρίνων μπορούν να μειωθούν δραστικά με έναν μηχανισμό «radiative see-saw».[5]

## 4.3 Finite $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$

Όπως προαναφέρθηκε, το $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$είναι ένα αυτομάτως πεπερασμένο μοντέλο σε **1-loop** για την επιλογή 3 φερμιονικών γενεών, δηλαδή η συνάρτηση $\beta$ μηδενίζεται. Αρχίζοντας από τη σχέση (Γ'.5) του Παραρτήματος

[4]Στα παραπάνω θεωρείται ότι τα πεδία που παίρνουν vevs προέρχονται από την αντίστοιχη βαθμωτή συνιστώσα $L_s$

[5]Στην περίπτωση που τοπ $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$προκύπτει από το χώρο πηλίκου $SU(3)/U(1) \times U(1)$, υπάρχουν δύο global $U(1)$s. Η πρώτη αντιστοιχεί στον βαρυονικό αριθμό $B$ ($U(1)_A = -9B$), ενώ η δεύτερη είναι μια συμμετρία τύπου Peccei-Quinn. Ενώ οι όροι μάζας των κουάρκς είναι αναλλοίωτοι κάτων από αυτή τη συμμετρία, δεν ισχύει το ίδιο και για τα λεπτόνια και άρα δεν μπορούν να πάρουν μάζα με αυτόν τον τρόπο. Η λύση έρχεται από όρους higher dimensional τελεστές.

Γ΄, όπως αυτή δίνεται από το [8] και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Γ΄.1)-(Γ΄.4), υπολογίζεται για τις τρεις $SU(3)$ διαδοχικά, απλοποιώντας αρχικά σε

$$\beta_i = (16\pi^2)^{-1} a_i g_i^3$$

με

$$a_i = T(R_1)d(R_2) - 3C_2(G_1)$$

<u>$SU(3)_c$</u> $\times SU(3)_L \times SU(3)_R$

Μόνο οι multiplets $Q$ και $q^c$ δεν είναι singlets κάτω από την $SU(3)_c$ ενώ για την $L$ ισχύει $T(1) = 0$. Οπότε:

$$\begin{aligned} a_c &= T(R_1)d(R_2) - 3C_2(G_1) \\ &= (\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3)n_G - 3 \cdot 3 \\ &= 3n_G - 9 \end{aligned}$$

όπου $n_G$ οι γενιές των φερμιονίων.

<u>$SU(3)_L$</u> $\times SU(3)_c \times SU(3)_R$

Αντιστοίχως, η $q^c$ είναι singlet κάτω από την $SU(3)_L$:

$$\begin{aligned} a_L &= T(R_1)d(R_2) - 3C_2(G_1) \\ &= (\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3)n_G - 3 \cdot 3 \\ &= 3n_G - 9 \end{aligned}$$

<u>$SU(3)_R$</u> $\times SU(3)_c \times SU(3)_L$

Με την ίδια ακριβώς λογική θα ισχύει:

$$\begin{aligned} a_R &= T(R_1)d(R_2) - 3C_2(G_1) \\ &= (\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3)n_G - 3 \cdot 3 \\ &= 3n_G - 9 \end{aligned}$$

Προκύπτει από τα παραπάνω ότι

$$\beta_i = (16\pi^2)^{-1} g_i^3 (3n_G - 9) \tag{4.21}$$

οπότε για 3 φερμιονικές γενιές οι συναρτήσεις $\beta$ της θεωρίας σε 1-loop μηδενίζονται.

### All-loop finite $SU(3)\otimes SU(3)\otimes SU(3)$

Για να είναι όλες οι συζεύξεις βαθμίδας ίσες στην κλίμακα ενοποίησης, πρέπει να επιβληθεί η κυκλική ομάδα συμμετρίας $Z_3$:

$$Q \to L \to q^c \to Q \tag{4.22}$$

Έτσι, η πρώτη συνθήκη των (3.5) ικανοποιείται. Όσον αφορά τη δεύτερη συνθήκη, δηλαδή το μηδενισμό των anomalous dimensions όλων των superfields, είναι χρήσιμο να ξαναγραφτεί το superpotential. Θεωρώντας αρχικά ότι υπάρχει μόνο μία οικογένεια, μένουν μόνο δύο αναλλοίωτοι τριγραμμικοί όροι και το superpotential θα είναι:

$$fTr(Lq^cQ) + \frac{1}{6}f'\epsilon_{ijk}\epsilon_{abc}(L_{ia}L_{jb}L_{kc} + q^c_{ia}q^c_{jb}q^c_{kc} + Q_{ia}Q_{jb}Q_{kc}) \tag{4.23}$$

Σε αυτήν την περίπτωση η anomalous dimension του κάθε superfield θα δίνεται από:

$$\frac{1}{2}(3|f|^2 + 2|f'|^2) = 2\Big(\frac{4}{3}g^2\Big) \tag{4.24}$$

Γυρνώντας πίσω στις 3 οικογένειες, το πιο γενικό superpotential περιέχει 11 $f$ συζεύξεις και 11 $f'$ συζεύξεις, στις οποίες αντιστοιχούν 9 συνθήκες λόγω του μηδενισμού των anomalous dimensions του κάθε superfield. Οι συνθήκες είναι οι ακόλουθες:

$$\sum_{j,k} f_{ijk}(f_{ljk})^* + \frac{2}{3}\sum_{j,k} f'_{ijk}(f'_{ljk})^* = \frac{16}{9}g^2\delta_{il} \tag{4.25}$$

όπου

$$f_{ijk} = f_{jki} = f_{kij} \tag{4.26}$$
$$f'_{ijk} = f'_{jki} = f'_{kij} = f'_{ikj} = f'_{kji} = f'_{jik} \tag{4.27}$$

Οπότε, γενικεύοντας την προηγούμενη ενότητα οι μάζες των κουάρκς και των λεπτονίων θα είναι:[6]

$$(\mathcal{M}_d)_{ij} = \sum_k f_{kij}\langle H^0_{dk}\rangle \ \ , \ \ (\mathcal{M}_u)_{ij} = \sum_k f_{kij}\langle H^0_{uk}\rangle \tag{4.28}$$
$$(\mathcal{M}_e)_{ij} = \sum_k f'_{kij}\langle H^0_{dk}\rangle \ \ , \ \ (\mathcal{M}_\nu)_{ij} = \sum_k f'_{kij}\langle H^0_{uk}\rangle \tag{4.29}$$

(4.30)

[6] Θεωρείται ότι και στις τρεις λεπτονικές multiplets παίρνουν μάζα τα αντίστοιχα Higgs πεδία, δηλαδή τα $H^0_{d1,2,3}$ και $H^0_{u1,2,3}$

Για να μειωθούν τα παραπάνω σε ένα μοντέλο με 2 Higgs doublets, επιλέγονται οι γραμμικοί συνδυασμοί

$$H_u^0 = \sum_i a_i H_{ui}^0$$
$$H_d^0 = \sum_i b_i H_{di}^0$$

Αυτό μπορεί να γίνει με κατάλληλη επιλογή των μαζών του superpotential, εφόσον δεν περιορίζονται από τις συνθήκες περατότητας. Ακόμα, τα Higgs επιλέγονται να είναι εξαρχής συζευγμένα στην τρίτη γενιά, επομένως οι δύο Higgs doublets συζεύγνυνται διαφορετικά με τις 3 γενιές.

Εάν όλα τα $f'$ μηδενίζονται, τότε η (4.25) έχει isolated λύση:

$$f^2 = f_{111}^2 = f_{222}^2 = f_{333}^2 = \frac{16}{9} g^2 \tag{4.31}$$

Αυτό δίνει ένα μοντέλο που είναι πεπερσμένο σε όλες τις τάξεις θεωρίας διαταραχών. Ξεκινώντας από την $M_{GUT}$ με διαφορετικές συζεύξεις Yukawa για όλα τα κουάρκς

$$f_t = f a_3, \quad f_c = f a_2, \quad f_u = f a_1 \tag{4.32}$$
$$f_b = f b_3, \quad f_s = f b_2, \quad f_d = f b_1 \tag{4.33}$$

οι οποίες είναι παρόμοιες με του MSSM (εκτός του ότι τα $f$ είναι προκαθορισμένα στο $M_{GUT}$ και $a_3 \simeq 1$, $b + 3 \simeq 1$ από κατασκευής), προκύπτει στο $M_{GUT}$ ότι $f_t \simeq f_b \simeq f$. Όσον αφορά τις λεπτονικές μάζες, επειδή τα $f'$ έχουν τεθεί μηδέν σε αυτήν την τάξη, θεωρητικά προκύπτουν radiatively από τις βαθμωτές λεπτονικές μάζες του SSB τμήματος της θεωρίας. Όμως, λόγω της (3.8), αυτό δεν γίνεται. Μία λύση είναι απλά να θεωρηθούν μη-μηδενικά (και να πάρουν μάζες κανονικά τα λεπτόνια). Σε αυτήν την περίπτωση το μοντέλο είναι πλέον πεπερασμένο μόνο μέχρι 2-loop, καθώς η λύση της (4.31) δεν είναι πια isolated.

Αγνοώντας το SSB τμήμα, ακολουθεί συνοπτικά η πρόβλεψη σε 1-loop της μάζα του top κουάρκ. Σύμφωνα με το Παράρτημα Γ', οι συναρτήσεις $\beta$ των συζεύξεων βαθμίδας και των $t$ και $b$ Yukawas στο MSSM (δηλαδή κάτω από την κλίμακα ενοποίησης της θεωρίας) δίνονται από τις (;;),(Γ΄.8) και (Γ΄.9) ως:

$$\beta_3 = -\frac{1}{16\pi^2}3g_3^3 \tag{4.34}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{16\pi^2}g_2^3 \tag{4.35}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{16\pi^2}\frac{33}{5}g_1^3 \tag{4.36}$$

$$\beta_t = \frac{f_t}{16\pi^2}\Big[-\frac{13}{15}g_1^2 - 3g_2^2 - \frac{16}{3}g_3^2 + 6f_t^2 + f_b^2\Big] \tag{4.37}$$

$$\beta_b = \frac{f_b}{16\pi^2}\Big[-\frac{7}{15}g_1^2 - 3g_2^2 - \frac{16}{3}g_3^2 + 6f_b^2 + f_t^2\Big] \tag{4.38}$$

Για $t = \ln(M_{GUT}/M)$ οι συναρτήσεις $\beta$ για τις συζεύξεις βαθμίδας έχουν λύση εκφρασμένη ως προς τα $a_i = g_i^2/4\pi$:

$$a_3(M)^{-1} = a_3(M_{GUT})^{-1} - \Big(\frac{3}{2\pi}\Big)\ln\Big(\frac{M_{GUT}}{M}\Big) \tag{4.39}$$

$$a_2(M)^{-1} = a_2(M_{GUT})^{-1} + \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)\ln\Big(\frac{M_{GUT}}{M}\Big) \tag{4.40}$$

$$a_1(M)^{-1} = a_1(M_{GUT})^{-1} + \Big(\frac{33}{10\pi}\Big)\ln\Big(\frac{M_{GUT}}{M}\Big) \tag{4.41}$$

Εφόσον οι 3 παραπάνω συζεύξεις είναι ίσες από την κλίμακα ενοποίησης και πάνω, δηλαδή

$$a_1(M_{GUT}) = a_2(M_{GUT}) = a_3(M_{GUT}) \equiv a(M_{GUT}) \tag{4.42}$$

γίνεται να βρεθεί η τιμή της σύζευξης βαθμίδας στην κλίμακα ενοποίησης στην κλίμακα της μάζας του topπαίρνοντας τις πειραματικές τιμές των συζεύξεων στην κλίμακα της μάζας του top$\hat{M}_t = 173.34GeV$ ($g_1(\hat{M}_t) = 0.35940$, $g_2(\hat{M}_t) = 0.64754$ και $g_3(\hat{M}_t) = 1.1888$)

$$\begin{gathered} a_3(M_{GUT}) = a_2(M_{GUT}) \\ a_3(\hat{M}_t)^{-1} - \Big(\frac{3}{2\pi}\Big)\ln\Big(\frac{M_{GUT}}{\hat{M}_t}\Big) = a_2(\hat{M}_t)^{-1} + \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)\ln\Big(\frac{M_{GUT}}{\hat{M}_t}\Big) \\ \Rightarrow M_{GUT} \sim 10^{16} \end{gathered}$$

και άρα

$$a(M_{GUT})^{-1} = a_3(M_{GUT})^{-1} = a(M_{GUT})^{-1} + \frac{3}{2\pi}\ln\Big(\frac{M_{GUT}}{\hat{M}_t}\Big) \tag{4.43}$$

$$a(M_{GUT}) \simeq 0.04 \tag{4.44}$$

ενώ από την (4.31) θα ισχύει

$$a_t(M_{GUT}) = a_b(M_{GUT}) = \Big(\frac{16}{9}\Big)a_i(M_{GUT}) \tag{4.45}$$

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (4.37) και (4.38) από το $M = M_{EW}$ ως το $M = M_{GUT}$ προσδιορίζονται τα $f_t$ και $f_b$ στην κλίμακα $M_{EW}$.

Τότε, εφόσον $m_t = f_t u_2$ και $m_b = f_b u_1$ (δεδομένου ότι $u_1^2 + u_2^2 = v^2 = (174.3GeV)^2$), μπορεί να υπολογιστεί το $m_t$ αν είναι γνωστό το $m_b$ (πχ από πειραματικά δεδομένα). Για $m_b = 4.18\ GeV$ το $m_t$ υπολογίζεται $m_t = 182.78\ GeV$.

# Παράρτημα Α΄

# Από τον 32-σπίνορα στον 8-σπίνορα

Θα εξεταστεί η περίπτωση μιας $N = 1$ SYM θεωρίας για $D = 10$ και, πιο συγκεκριμένα, πώς ο σπίνορας Dirac με $2^{D/2} = 32$ συνιστώσες ελαττώνεται σε έναν Weyl-Mayorana σπίνορα με $8$ συνιστώσες έτσι, ώστε να έχει τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας με τα πεδία βαθμίδας. Επιλέγεται η εξής αναπαράσταση για τους πίνακες $\Gamma$:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes I_8 \ \ , \ \ \mu = 0,1,2,3 \tag{Α΄.1}$$

Ο σπίνορας Dirac μπορεί να γραφεί ως:

$$\psi = (\psi_1 ... \psi_4 \chi_1 ... \chi_4)^T \tag{Α΄.2}$$

όπου όλα τα $\psi_i$, $\chi_i$ ($i = 1, ..., 4$) μετασχηματίζονται ως $SO(1,3)$ σπίνορες Dirac. Οι υπόλοιποι πίνακες $\Gamma$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^4 = \gamma^5 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^2 &&, \ \Gamma^5 = \gamma^5 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^2 \ \ , \\
&\Gamma^6 = \gamma^5 \otimes I_2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^2 &&, \ \Gamma^7 = \gamma^5 \otimes I_4 \otimes \sigma^1 \ \ , \\
&\Gamma^8 = \gamma^5 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^2 &&, \ \Gamma^9 = \gamma^5 \otimes I_2 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^2
\end{aligned} \tag{Α΄.3}$$

κι έτσι

$$\Gamma^{11} = \Gamma^0 ... \Gamma^9 = -\gamma^5 \otimes I_2 \otimes I_2 \otimes \sigma^3 = \gamma^5 \otimes \begin{pmatrix} -I_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{pmatrix} \tag{Α΄.4}$$

ο σπίνορας $\psi$ είναι αναγωγίσιμος, $\Gamma^{11}\psi_\pm = \pm\psi_\pm$, όπου $\psi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma^{11})\psi$. Τότε η συνθήκη Weyl $\Gamma^{11}\psi = \psi$ επιλέγει το $\psi_+$, όπου

$$\psi_+ = (L\psi_1 ... L\psi_4 R\chi_1 ... R\chi_4)^T \tag{Α΄.5}$$

όπου $L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ (left-handed) και $R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$ (right-handed). Τα $\psi_i$ σχηματίζουν την $4$ και τα $\chi_i$ την $\overline{4}$ αναπαράσταση της $SO(6)$. Επιβάλλοντας περαιτέρω τις συνθήκη Mayorana στον 10-διάστατο σπίνορα

$$\psi = C_{10}\Gamma^0\psi^* \tag{Α΄.6}$$

όπου $C_{10} = C_4 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes I_2$, προκύπτουν οι σχέσεις $\chi_{1,3} = C\gamma_0\psi^*_{2,4}$ και $\chi_{2,4} = -C\gamma_0\psi^*_{1,3}$. Επομένως, επιβάλλοντας τις συνθήκες Weyl και Mayorana στις 10 διαστάσεις προκύπτει ένας Weyl σπίνορας στις 4 διαστάσεις που μετασχηματίζεται στην 4 της $SO(6)$:

$$\psi = (L\psi_1 \;\; L\psi_2 \;\; L\psi_3 \;\; L\psi_4 \;\; R\tilde{\psi_1} \;\; R\tilde{\psi_2} \;\; R\tilde{\psi_3} \;\; R\tilde{\psi_4} \;\; )^T \;\; , \;\; \tilde{\psi_i} = (-1)^i C\gamma_0\psi_i^* \tag{Α΄.7}$$

Ακόμα, χρειάζονται και οι πίνακες $\gamma$ στο χώρο πηλίκου $SU(3)/U(1)\times U(1)$. Η μετρική είναι η $g_{ab} = diag(R_1^2, R_1^2, R_2^2, R_2^2, R_3^2, R_3^2)$, $g^{ab} = diag(\frac{1}{R_1^2}\frac{1}{R_1^2}\frac{1}{R_2^2}\frac{1}{R_2^2}\frac{1}{R_3^2}\frac{1}{R_3^2},)$ και άρα οι πίνακες $\Gamma$ δίνονται από

$$\begin{aligned}
\Gamma^4 &= \frac{1}{R_1}\gamma^5 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^2 \qquad &, \;\; \Gamma^5 = \frac{1}{R_1}\gamma^5 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^2 \;\; , \\
\Gamma^6 &= \frac{1}{R_2}\gamma^5 \otimes I_2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^2 \qquad &, \;\; \Gamma^7 = \frac{1}{R_2}\gamma^5 \otimes I_4 \otimes \sigma^1 \;\; , \\
\Gamma^8 &= \frac{1}{R_3}\gamma^5 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^2 \qquad &, \;\; \Gamma^9 = \frac{1}{R_3}\gamma^5 \otimes I_2 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^2
\end{aligned} \tag{Α΄.8}$$

# Παράρτημα Β΄

# Χρήσιμες σχέσεις για την gaugino mass

Θα χρησιμοποιηθεί (όπως και πριν) η πραγματική μετρική του χώρου πηλίκου, $g_{ab} = diag(R_1^2, R_1^2, R_2^2, R_2^2, R_3^2, R_3^2)$. Χρησιμοποιώντας τις σταθερές δομής της $SU(3)$, $f_{12}^3 = 2$, $f_{45}^8 = f_{67}^8 = \sqrt{3}$, $f_{24}^6 = f_{14}^7 = -f_{36}^7 = -f_{15}^6 = f_{34}^5 = 1$ (όπου οι δείκτες 3 και 8 αντιστοιχούν στο $U(1) \times U(1)$ και οι υπόλοιποι είναι δείκτες του χώρου πηλίκου) υπολογίζονται τα $D_{abc}$:

$$D_{523} = D_{613} = D_{624} = D_{541} = -D_{514} = -D_{532} = -D_{631} = -D_{624} = \frac{1}{2}(c - a - b)$$

$$D_{235} = D_{136} = D_{264} = D_{154} = -D_{145} = -D_{253} = -D_{163} = -D_{264} = \frac{1}{2}(a - b - c)$$

$$D_{352} = D_{361} = D_{462} = D_{415} = -D_{451} = -D_{325} = -D_{316} = -D_{426} = \frac{1}{2}(b - c - a)$$

Από τα $D$ υπολογίζεται ο contorsion tensor:

$$\Sigma_{abc} = 2\tau(D_{abc} + D_{bca} + D_{cba})$$

και στη συνέχεια ο τανυστής

$$G_{abc} = D_{abc} + \frac{1}{2}\Sigma_{abc}$$

που είναι:

$$G_{523} = G_{613} = G_{642} = G_{541} = -G_{514} = -G_{532} = -G_{631} = -G_{642} = \frac{1}{2}[(1-\tau)c - (1+\tau)a - (1+\tau)b]$$

$$G_{235} = G_{136} = G_{246} = G_{154} = -G_{145} = -G_{253} = -G_{163} = -G_{264} = \frac{1}{2}[-(1-\tau)a + (1+\tau)b + (1+\tau)c]$$

$$G_{352} = G_{361} = G_{462} = G_{415} = -G_{451} = -G_{325} = -G_{316} = -G_{426} = \frac{1}{2}[-(1+\tau)a + (1-\tau)b - (1+\tau)c]$$

# Παράρτημα Γ΄

# Συναρτήσεις $\beta$ για το MSSM

Για ένα γινόμενο (στην *μη υπερσυμμετρική περίπτωση*) 2 ομάδων βαθμίδας $G_1 \otimes G_2$ με αντίστοιχες σταθερές σύζευξης $g_1$ και $g_2$, η συνάρτηση $\beta_{g_1}$ δίνεται σε 2-loop προσέγγιση από τη σχέση:

$$
\begin{aligned}
\beta_{g_1} =& \Big[(16\pi^2)^{-1} g_1^3 [\frac{2}{3}T(R_1)d(R_2) + \frac{1}{3}T(S_1)d(S_2) - \frac{11}{3}C_2(G_1)]\Big]^{1-loop} \\
&+ \Big[(16\pi^2)^{-2} g_1^5 \{[\frac{10}{3}C_2(G_1) + 2C_2(R_1)]T(R_1)d(R_2) \\
&+ [\frac{2}{3}C_2(G_1) + 4C_2(S_1)]T(S_1)d(S_2) - \frac{34}{3}[C_2(G_1)]^2\} \\
&+ (16\pi^2)^{-2} g_1^3 g_2^2 [2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1) + 4C_2(S_2)d(S_2)T(S_1)]\Big]^{2-loop}
\end{aligned}
$$

όπου η πρώτη γραμμή δίνει τον 1-loop όρο και οι υπόλοιπες τον 2-loop όρο. Οι φερμιονικές multiplets μετασχηματίζονται σύμφωνα με την αναπαράσταση $R_1$ για την $G_1$ και σύμφωνα με την αναπαράσταση $R_2$ για την $G_2$, ενώ οι μποζονικές multiplets μετασχηματίζονται σύμφωνα με την αναπαράσταση $S_1$ για την $G_1$ και σύμφωνα με την αναπαράσταση $S_2$ για την $G_2$.

Ο $C_2(R)$ είναι ο τετραγωνικός τελεστής Casimir, ενώ με $G$ συμβολίζουμε την συζυγή αναπαράσταση. Ισχύουν οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
&R^\alpha R^\alpha = C_2(R) I \\
&Tr[R^\alpha, R^\beta] = T(R)\delta^{\alpha,\beta} \\
&C_2(R)d(R) = T(R)r
\end{aligned}
\tag{Γ΄.1}
$$

όπου $R^\alpha$ μία αναπαράσταση των γεννητόρων της ομάδας σε μορφή πίνακα, $r$ ο αριθμός των γεννητόρων της ομάδας και $d(R)$ η διάσταση της αναπαράστασης. Για τις μη αβελιανές ομάδες ισχύει

$$C_2(G) = N \tag{Γ΄.2}$$

και επιλέγεται η σύμβαση

$$T(fundamental) = \frac{1}{2} \tag{Γ΄.3}$$

Για την αβελιανή $U(1)$ ισχύουν:

$$\begin{aligned} C_2(G) &= 0 \\ C_2(R) &= T(R) = Y^2 \end{aligned} \tag{Γ'.4}$$

όπου $Y$ είναι το υπερφορτίο (με την κατάλληλη κανονικοποίηση). Ακόμα, αξίζει να σημειωθεί ότι οι βαθμωτές αναπαραστάσεις έχουν θεωρηθεί μιγαδικές και οι φερμιονικές αναπαραστάσεις complex και chiral, καθώς στις παρακάτω θεωρίες τα αριστερόστροφα πεδία συχνά μετασχηματίζονται διαφορετικά από τα δεξιόστροφα.

Θα θεωρηθούν διαδοχικά ως $G_1$ η $SU(3)$, η $SU(2)$ και η $U(1)$. Στο 1-loop τμήμα της σχέσης υπάρχουν τρεις όροι: ένας που αφορά τις αλληλεπιδράσεις των φερμιονίων μέσω της εκάστοτε αλληλεπίδρασης (εφόσον σε 1-loop δεν «μπερδεύονται» οι αλληλεπιδράσεις), τον δεύτερο των βαθμωτών μποζονίων (δηλαδή της διπλέτας Higgs) και τον τρίτο που αφορά το self-coupling των διανυσματικών μποζονίων (οπότε στην περίπτωση της $U(1)$ δεν υπάρχει).

Η περίπτωση του MSSM προκύπτει σχεδόν αβίαστα από το SM. Στο MSSM υπάρχει διπλός αριθμός σωματιδίων, αφού κάθε σωματίδιο έχει και τον supersymmetric partner του. Επίσης, υπάρχουν δύο διπλέτες Higgs. Όλα τα πεδία αναγράφονται στους παρακάτω πίνακες:

| Names | | spin 0 | spin 1/2 | $SU(3)_c, SU(2)_L, U(1)_y$ |
|---|---|---|---|---|
| squarks, quarks (× 3 families) | $Q$ | $(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$ | $(u_L, d_L)$ or $(\chi_u, \chi_d)$ | $\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/3$ |
| | $\bar{u}$ | $\tilde{\bar{u}}_L = \tilde{u}_R^\dagger$ | $\bar{u}_L = (u_R)^c$ or $\chi_{\bar{u}} = \psi_u^c$ | $\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -4/3$ |
| | $\bar{d}$ | $\tilde{\bar{d}}_L = \tilde{d}_R^\dagger$ | $\bar{d}_L = (d_R)^c$ or $\chi_{\bar{d}} = \psi_d^c$ | $\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, 2/3$ |
| sleptons, leptons (× 3 families) | $L$ | $(\tilde{\nu}_{eL}, \tilde{e}_L)$ | $(\nu_{eL}, e_L)$ or $(\chi_{\nu_e}, \chi_e)$ | $\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1$ |
| | $\bar{e}$ | $\tilde{\bar{e}}_L = \tilde{e}_R^\dagger$ | $\bar{e}_L = (e_R)^c$ or $\chi_{\bar{e}} = \psi_e^c$ | $\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2$ |
| Higgs, Higgsinos | $H_u$ | $(H_u^+, H_u^0)$ | $(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0)$ | $\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1$ |
| | $H_d$ | $(H_d^0, H_d^-)$ | $(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-)$ | $\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1$ |

| Names | spin 1/2 | spin 1 | $SU(3)_c, SU(2)_L, U(1)_y$ |
|---|---|---|---|
| gluinos, gluons | $\tilde{g}$ | $g$ | $\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0$ |
| winos, W bosons | $\widetilde{W}^\pm, \widetilde{W}^0$ | $W^\pm, W^0$ | $\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0$ |
| bino, B boson | $\tilde{B}$ | $B$ | $\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0$ |

Η εξίσωση που περιγράφει την συνάρτηση $\beta$ είναι η εξής:

$$
\begin{aligned}
\beta_{g_1} =&(16\pi^2)^{-1}g_1^3[T(R_1)d(R_2)-3C_2(G_1)]\\
&+(16\pi^2)^{-2}g_1^5\{[2C_2(G_1)+4C_2(R_1)]T(R_1)d(R_2)-6[C_2(G_1)]^2\\
&+(16\pi^2)^{-2}g_1^3g_2^2[4C_2(R_2)d(R_2)T(R_1)]
\end{aligned}
\tag{Γ'.5}
$$

Στον 1-loop όρο η συνεισφορά από τα βαθμωτά δεν εμφανίζεται. Αυτό συμβαίνει διότι για κάθε βαθμωτό υπάρχει ένα φερμιόνιο και αντιστρόφως, οπότε θα προκύπτει τελικά $(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})=1$ όρος από το καθένα. Όμως οι multiplets θα είναι ταυτόσημες. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο εντελώς ίδιοι όροι. Άρα παραλείπεται ο ένας.

Επιπλέον, στο φερμιονικό όρο υπεισέρχονται πλέον και τα gauginos από τις διανυσματικές supermultiplets. Για κάθε περίπτωση θα είναι της μορφής $\frac{2}{3}C_2(G_1)$, οπότε αφαιρώντας τον όρο αυτόν από τον ήδη υπάρχοντα $-\frac{11}{3}C_2(G_1)$ γίνεται τελικά $-3C_2(G_1)$. Ομοίως προκύπτουν και οι όροι σε 2-loop.

Οι συναρτήσεις $\beta$ μπορούν να γραφτούν και στη μορφή:

$$\beta_i=(16\pi^2)^{-1}a_ig_i^3+(16\pi^2)^{-2}\sum_{j=1}^{3}G_{ij}g_j^2g_i^3$$

ενώ ο 1-loop όρος που θα υπολογιστεί θα είναι

$$\beta_i^{(1-loop)}=(16\pi^2)^{-1}a_ig_i^3$$

$\underline{SU(3)}\otimes SU(2)\otimes U(1)$

Τα μόνα πεδία που μετασχηματίζονται με την **3** είναι τα πεδία των κουάρκς. Τα υπόλοιπα είναι singlet κάτω από την $SU(3)$, οπότε $T(\mathbf{1})=0$. Άρα για το 1-loop λαβάνονται υπόψιν μόνο τα κουάρκς (το ίδιο ισχύει με το Higgs και έτσι δεν υπεισέρχεται στην έκφραση):

$$
\begin{aligned}
a_3 &= T(R_1)d(R_2)-3C_2(G_1)\\
&=(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1)n_G-3\cdot 3\\
&=2n_G-9
\end{aligned}
$$

όπου $n_G$ οι γενιές των φερμιονίων.

$\underline{SU(2)}\otimes SU(3)\otimes U(1)$

Τα μόνα πεδία που μετασχηματίζονται κάτω από την **2** της $SU(2)$ (δηλαδή τη θεμελιώδη της) είναι οι δύο αριστερόστροφες φερμιονικές doublets και η

Higgs doublet. Για όλα τα υπόλοιπα το $T(\mathbf{1}) = 0$. Άρα:

$$\begin{aligned} a_2 &= T(R_1)d(R_2) - 3C_2(G_1) \\ &= (\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1)n_G + (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1)n_H - 3 \cdot 2 \\ &= 2n_G + \frac{1}{1}n_H - 6 \end{aligned}$$

όπου $n_G$ οι γενιές των πεδίων Higgs.

$\underline{U(1)}\otimes SU(3) \otimes SU(2)$

Για την ομάδα $U(1)$ ισχύει $C_2(G) = 0$, γεγονός υποδεικνύει ότι δεν υπάρχει όρος αλληλεπίδρασης των μποζονίων της θεωρίας (αναμενόμενο, εφόσον είναι αβελιανή ομάδα). Άρα:

$$\begin{aligned} a_1 &= T(R_1)d(R_2) \\ &= (\frac{1}{9} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{16}{9} \cdot 3 \cdot 1 + \frac{4}{9} \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 1)n_G + (1 \cdot 2 \cdot 1)n_H \\ &= \frac{40}{3}n_G + 2n_H \end{aligned}$$

Στην περίπτωση του $SU(5)$ προτιμάται ο νορμαλισμός $Q = T_3 + \sqrt{\frac{5}{3}}Y_{SM}$ αντί για τον $Q = T_3 + \frac{1}{2}Y_{SM}$ του SM. Τότε, αρκεί να πολλαπλασιαστούν τα τετράγωνα των υπερφορτίων με τον όρο $\frac{3}{4 \cdot 5}$. Οι συντελεστές θα είναι τελικά:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{10}n_H + 2n_G \\ a_2 &= \frac{1}{2}n_H + 2n_G - 6 \\ a_3 &= 2n_G - 9 \end{aligned}$$

όπου για το MSSM ισχύει $n_G = 3$ και $n_H = 2$, άρα $a_1 = \frac{33}{5}$, $a_2 = 1$ και $a_3 = -3$. Επομένως, οι εξισώσεις ομάδας επανακανονικοποίησης για της συζεύξεις βαθμίδας στο MSSM θα είναι:

$$\begin{aligned} 16\pi^2\Big(\frac{dg_3}{dt}\Big) &= -3g_3^3 \\ 16\pi^2\Big(\frac{dg_2}{dt}\Big) &= g_2^3 \\ 16\pi^2\Big(\frac{dg_1}{dt}\Big) &= \frac{33}{5}g_1^3 \end{aligned}$$

### Yukawa $\beta$s

Αντίστοιχα, για μία σύζευξη Yukawa, $C_{ijk}$ όπως αυτή προκύπτει από το superpotential (3.4), η συνάρτηση $\beta$ σε 1-loop δίνεται για το MSSM από τη σχέση:

$$\beta_{ijk}\frac{dC_{ijk}}{dt} = C_{ijl}\gamma^l_k + C_{ikl}\gamma^l_j + C_{jkl}\gamma^l_i \tag{Γ'.6}$$

όπου τα $C_{ijk}$ είναι συμμετρικά και πραγματικά, ενώ οι anomalous dimensions δίνονται από τον τύπο

$$\gamma^j_i = \frac{1}{16\pi^2}\Big(\frac{1}{2}C^{jkl}C_{jkl} - 2g^2C_2(R_i)\delta^j_i\Big) \tag{Γ'.7}$$

Άρα, για $Q$ τη doublet της τρίτης γενιάς, $t$ τη singlet και $H_{1,2}$ τιςHiggs doublets, η συνάρτηση $\beta$ της top Yukawa σύζευξης θα είναι:

$$\begin{aligned}
\beta_{QtH_1} =& C_{Qtl}\gamma^l_{H_{1,2}} + C_{QlH_{1,2}}\gamma^l_t + C_{ltH_{1,2}}\gamma^l_Q \\
=& \frac{C_{Qtl}}{16\pi^2}\Big[\frac{1}{2}C^{lij}C_{H_{1,2}ij} - 2g^2_\alpha C_2(R_{H_{1,2}})\delta^l_{H_{1,2}}\Big] + \\
&+ \frac{C_{QlH_{1,2}}}{16\pi^2}\Big[\frac{1}{2}C^{lij}C_{tij} - 2g^2_\alpha C_2(R_t)\delta^l_t\Big] + \\
&+ \frac{C_{ltH_{1,2}}}{16\pi^2}\Big[\frac{1}{2}C^{lij}C_{Qij} - 2g^2_\alpha C_2(R_Q)\delta^l_Q\Big] \\
=& \frac{C_{QtH_1}}{16\pi^2}\Big[\frac{1}{2}\underbrace{C^{H_1ij}C_{H_1ij}}_{2\cdot C_{H_1Qt}\times 3} - \frac{3}{10}g^2_1 - \frac{3}{2}g^2_2\Big] + \\
&+ \frac{C_{QtH_1}}{16\pi^2}\Big[\frac{1}{2}\underbrace{C^{tij}C_{tij}}_{2\cdot C_{H_1Qt}\times 2} - \frac{8}{15}g^2_1 - \frac{8}{3}g^2_3\Big] + \\
&+ \frac{C_{QtH_1}}{16\pi^2}\Big[\frac{1}{2}\underbrace{C^{Qij}C_{Qij}}_{2\cdot(C_{H_1Qt}+C_{H_2Qb})} - \frac{1}{30}g^2_1 - \frac{3}{2}g^2_2 - \frac{8}{3}g^2_3\Big]
\end{aligned}$$

όπου οι πολλαπλότητες στις αθροιζόμενες συζεύξεις οφείλονται στα 1-loop διαγράμματα που έχουν ως εξωτερικά «πόδια» τα πεδία που δεν αθροίζονται σε κάθε περίπτωση. Άρα τελικά

$$\beta_t = \frac{f_t}{16\pi^2}\Big[-\frac{13}{15}g^2_1 - 3g^2_2 - \frac{16}{3}g^2_3 + 6f^2_t + f^2_b\Big] \tag{Γ'.8}$$

και με όμοιο τρόπο για το $b$ κουάρκ

$$\beta_b = \frac{f_b}{16\pi^2}\Big[-\frac{7}{15}g^2_1 - 3g^2_2 - \frac{16}{3}g^2_3 + 6f^2_b + f^2_t\Big] \tag{Γ'.9}$$

# Βιβλιογραφία


[1] D. Kapetanakis and G. Zoupanos, Phys. Rept. **219**, 1 (1992)

[2] N. Irges and G. Zoupanos, Phys. Lett. B698 (2011) 146-151 [hep-ph/1102.2220]

[3] E. Ma, M. Mondragon and G. Zoupanos, JHEP 0412 (2004) 026 [hep-ph/0407236]

[4] D. Gavriil, G. Manolakos, G. Orfanidis and G. Zoupanos, (2015) [hep-th/1504.07276v1]

[5] E. Witten, Phys. Lett. **B144**. 351 (1984)

[6] G. Chapline and N.S. Manton, Nucl. Phys. **B 184** (1981)

[7] C. Lucchesi, O. Piguet and K. Sibold, *Vanishing beta functions in* $N = 1$ *supersymmetric gauge theories*, Helv. Phys. Acta 61 321 (1988);
C. Lucchesi and G. Zoupanos, *All order finiteness in* $N = 1$ *SYM theories: criteria and applications*, Fortschr. Phys. 45 129 (1997)

[8] D. R. T. Jones, *Two loop* $beta$ *function for a* $G_1 \times G_2$ *gauge theory*, Phys. Rev. D **25** 2 (1982)

[9] S. Martin , *A Supersymmetry Primer*, [hep-ph/9709356] (1997v1, 2916v7)

[10] V. Barger, M.S. Berger and P. Ohmann, Phys. Rev. D 47 3 (1993)

[11] M. Machacek and M. Vaughn, Nucl. Phys. b236 (1984) 221-232

[12] J. Sayre, S Wiesenfeldt and S. Willenbrock, *Minimal Trinification*, (2006) [hep-ph/0601040v1]

[13] K.S. Babu, X.G. He and S. Pakvasa, Phys, Rev. D 33 3 (1986)