



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

**«Μελέτη της επίδρασης συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια επίστρωσης
σε παραμορφώσιμο υπόστρωμα»**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δ.Π.Μ.Σ. «Εφαρμοσμένη Μηχανική»

Συγγραφέας:

ΠΑΠΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Επιβλέπων:

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΖΗΣΗΣ

Επίκουρος Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Αθήνα, Μάρτιος 2017

Η σελίδα αυτή αφέθηκε σκόπιμα λευκή.

Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στον Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών «Εφαρμοσμένη Μηχανική» κατά το χρονικό διάστημα Σεπτέμβριος 2016 - Φεβρουάριος 2017.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Αθανάσιο Ζήση για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστούμε, την πρόταση του συγκεκριμένου θέματος και την πολύτιμη βοήθειά του.

Η σελίδα αυτή αφέθηκε σκόπιμα λευκή.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετώνται προβλήματα μηχανικής επαφών που αφορούν την επίδραση συγκεντρωμένου κατακόρυφου φορτίου σε επιφάνεια ημιχώρου και σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, με έμφαση στο σύστημα επίστρωσης – υποστρώματος. Συγκεκριμένα, ο κύριος στόχος είναι η χαρτογράφηση του πεδίου μετατοπίσεων και του εντατικού πεδίου για το πρόβλημα του συστήματος επίστρωσης – υποστρώματος. Η μελέτη διεξάγεται κάτω από το πλαίσιο της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και των μικρών παραμορφώσεων.

Πριν τον κύριο στόχο τίθενται και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα δύο ενδιαμέσων στόχων: το κλασσικό πρόβλημα Flamant και το πρόβλημα της επίστρωσης επάνω σε άκαμπτο υπόστρωμα. Τα δύο ενδιαμέσα αυτά προβλήματα λειτουργούν ως εισαγωγή για την αντιμετώπιση του πιο σύνθετου προβλήματος και τα αποτελέσματα τους συγκρίνονται με αυτά του κύριου στόχου. Επίσης το πρόβλημα Flamant μελετήθηκε πειραματικά με τις οπτικές μεθόδους των καυστικών και της φωτοελαστικότητας.

Για να επιτευχθούν οι στόχοι χρησιμοποιείται η μέθοδος των μετασχηματισμών Fourier, η οποία αναπτύχθηκε το 1951 από τον I.N. Sneddon, προκειμένου να επιλυθεί η διαρμονική διαφορική εξίσωση και να ανακτηθεί η τασική συνάρτηση Airy. Με χρήση της τασικής συνάρτησης υπολογίζονται τα διαγράμματα των μετατοπίσεων και των τάσεων στην επιφάνεια της επίστρωσης και στην διεπιφάνεια μεταξύ επίστρωσης – υποστρώματος καθώς και δημιουργούνται χάρτες μετατοπίσεων και ισοτασικών καμπύλων για όλη την περιοχή μελέτης. Τέλος, διερευνώνται μέσω των αποτελεσμάτων για το πρόβλημα του συστήματος επίστρωσης – υποστρώματος οι επιρροές των λόγων των μέτρων διάτμησης και των λόγων Poisson των δύο υλικών στις συμπεριφορές των εντατικών μεγεθών.

Το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει από την διερεύνηση είναι ότι οι διαφορές στο μέτρο διάτμησης μεταξύ των υλικών επηρεάζουν σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό την συμπεριφορά του συστήματος επίστρωσης – υπόβαθρου, από ότι οι διαφορές στους λόγους Poisson. Επίσης πρέπει να σημειωθεί η εμφάνιση εφελκυστικών ορθών τάσεων στην διεπιφάνεια στην περίπτωση που η επίστρωση είναι κατά πολύ σκληρότερη του υποστρώματος.

Η σελίδα αυτή αφέθηκε σκόπιμα λευκή.

Summary

In this work we studied three basic contact mechanics problems concerning the effect of concentrated vertical load in half-space within plane strain conditions, with emphasis on the system of thin coating – elastic substrate. Specifically, the objective is to map the displacement and stress field and to assess the influence of their mechanical modules on their results. The study is conducted under the frame of the classical theory of elasticity and small deformations.

Before the main objective of the thin coating - substrate system two intermediate objectives are set and presented: the classic Flamant problem and the problem of thin coating on top of a rigid substrate. These two intermediate problems serve as an introduction to the more complex problem and their results are compared with those of the main objective. In addition, the Flamant problem was studied experimentally with the optical methods of caustics and photoelasticity and the results are presented in this work for the sake of completeness. Results demonstrate convergence between theory and experiment, as expected.

To achieve the objectives the method of Fourier transformation is used, which was developed in 1951 by I. Sneddon, in order to solve the biharmonic differential equation and recover the Airy stress-function. The stress function is used to calculate the displacements and the stress along the coating surface and of the interface between the coating and the substrate. Displacement and stress maps are also generated for the entire study area. Finally, the influence of the ratios of shear measures and Poisson ratios of the two materials is assessed concerning the displacement and stress fields for the problem of the coating system - substrate.

Results show that the difference in Poisson ratios between the two materials does not affect much the distribution of stress, while the difference in shear moduli greatly influences stress fields, approaching the behavior in the two limiting cases of: coating on a rigid substrate and that of a simply supported beam. It should also be noted that when the coating is much harder than the substrate tensile stresses appear at the interface.

Περιεχόμενα

Πρόλογος.....	iii
Περίληψη.....	v
Summary.....	vii
Περιεχόμενα.....	viii
Κεφάλαιο 1	1
1 Εισαγωγή	1
1.1 Γενικά για την μηχανική των επαφών.....	1
1.2 Η ανάγκη για επιστρώσεις.....	3
1.3 Προβλήματα επαφής σε ιδιόμορφα σημεία και φαινόμενα κλίμακας.....	7
1.4 Μέθοδοι ανάλυσης τάσεων σε ιδιόμορφες περιοχές.....	10
1.5 Αντικείμενο και Διάρθρωση της Διατριβής.....	11
Κεφάλαιο 2	13
2 Βασικές αρχές της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας.....	13
2.1 Εισαγωγή.....	13
2.2 Τανυστής τάσεων - Εξισώσεις ισορροπίας.....	14
2.3 Τανυστής τροπών – Εξισώσεις συμβιβαστού.....	18
2.4 Γενικευμένος νόμος του Hooke.....	21
2.5 Η περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης - Τασική συνάρτηση.....	23
Κεφάλαιο 3	25
3 Το πρόβλημα συγκεντρωμένης φόρτισης στην επιφάνεια ημιχώρου: θεωρητική και πειραματική μελέτη.....	25
3.1 Εισαγωγή.....	25
3.2 Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με τον μετασχηματισμό Fourier.....	26
3.3 Το πρόβλημα κατακόρυφου συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια ελαστικού ημιχώρου.....	30

3.3.1	Αναλυτική επίλυση του προβλήματος	31
3.3.2	Οπτική μέθοδος των Καυστικών.....	40
3.3.3	Οπτική μέθοδος της φωτοελαστικότητας	43
Κεφάλαιο 4	47
4	Το πρόβλημα κατακόρυφου συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια επιστρώσεως.....	47
4.1	Εισαγωγή.....	47
4.2	Το πρόβλημα κατακόρυφης σημειακής φόρτισης για το σύστημα επίστρωσης επάνω σε απαραμόρφωτο υπόβαθρο	47
4.3	Το πρόβλημα κατακόρυφης σημειακής φόρτισης για το σύστημα επίστρωσης σε παραμορφώσιμο υπόβαθρο.....	56
4.3.1	Αποτελέσματα για τις μετατοπίσεις.....	63
4.3.2	Αποτελέσματα για τις τάσεις	75
Κεφάλαιο 5	91
5	Συμπεράσματα και ζητήματα για μελλοντική έρευνα.....	91
5.1	Συμπεράσματα.....	91
5.2	Ζητήματα για μελλοντική έρευνα	92
6	Παράρτημα: αναλυτικές εκφράσεις σταθερών	93
7	Βιβλιογραφία.....	97

Η σελίδα αυτή αφέθηκε σκόπιμα λευκή.

Κεφάλαιο 1

1 Εισαγωγή

1.1 Γενικά για την μηχανική των επαφών

Η μηχανική των επαφών εξετάζει τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή και ειδικότερα στο σύνορο τους αναλύοντας και μελετώντας τα πεδία των μετατοπίσεων, των τάσεων και των παραμορφώσεων. Τα συνοριακά αυτά προβλήματα επαφής είναι θεμελιώδη για πρακτικώς οποιαδήποτε ανθρώπινη δραστηριότητα, εφαρμογή ή κατασκευή όπως για παράδειγμα το περπάτημα, η μετακίνηση ενός σώματος ή θεμελίωση ενός κτηρίου και ξεκινούν από την αρχαιότητα. Ο Wriggers (2002) αναφέρει ότι η μεταφορά των ογκόλιθων προκειμένου να χτίσουν τις πυραμίδες δημιούργησε στους αρχαίους Αιγυπτίους το πρόβλημα της τριβής μεταξύ του εδάφους και του ξύλινου ελκήθρου πάνω στο οποίο φόρτωναν τον ογκόλιθο.

Διάσημοι και πρωτοπόροι ερευνητές των περασμένων αιώνων ασχολήθηκαν με το πρόβλημα της τριβής που εμφανίζεται σχεδόν σε οποιαδήποτε τεχνική εφαρμογή. Ήδη από τον 15^ο αιώνα ο Da Vinci μελέτησε ποιοτικά το πρόβλημα της τριβής ενός σώματος που ολισθαίνει σε μια επιφάνεια καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι η δύναμη της τριβής είναι ανάλογη με το βάρος του σώματος και δεν εξαρτάται από την φαινομενική επιφάνεια τριβής. Το 1748 ο Euler ανέλυσε με μαθηματικό τρόπο το φαινόμενο της τριβής, μελετώντας σώμα που ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο και εισήγαγε το σύμβολο μ για τον συντελεστή τριβής, ενώ λίγο αργότερα, το 1785, ο Coulomb έγραψε τον νόμο που χρησιμοποιούμε μέχρι και σήμερα ως:

$$F_T = A + \mu N \quad (1)$$

όπου F_T είναι η δύναμη της τριβής, N η κατακόρυφη δύναμη, A είναι η συνοχή και μ είναι ο συντελεστής τριβής.

Αν και υπαρκτά από πολύ παλιά τα προβλήματα αυτά, η μηχανική των επαφών θεμελιώθηκε το 1882 με την δημοσίευση της εργασίας του Heinrich Hertz "On the contact of elastic solids". Το ενδιαφέρον του Hertz για το θέμα αυτό προέκυψε εκείνη την εποχή ενώ πειραματιζόταν πάνω στην συμβολή ακτινών φωτός διερχομένων δια μέσου

γυάλινων φακών. Η απορία του για το αν η ελαστική παραμόρφωση των φακών εξαιτίας της δύναμης που τους φέρνει σε επαφή μπορούσε να επηρεάσει τους κροσσούς συμβολής, τον οδήγησε στο συμπέρασμα ότι μια ελλειψοειδής κατανομή πιέσεων στην επαφή δημιουργεί τέτοιες ελαστικές μετατοπίσεις που να αντιστοιχούν σε ελλειπτική επιφάνεια επαφής (Johnson, 1985).

Η θεωρία του Hertz περιορίστηκε σε επιφάνειες χωρίς τριβή και σε τέλεια ελαστικά στερεά σώματα. Μεγάλη πρόοδος στην μηχανική των επαφών συντελέστηκε κατά το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα με την άρση αυτών των περιορισμών. Η ένταξη της τριβής στην επίλυση προβλημάτων σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή οδήγησε την θεωρία ελαστικότητας στην αντιμετώπιση των περιπτώσεων επαφών ολίσθησης και κύλισης. Την ίδια περίοδο η ανάπτυξη των θεωριών της πλαστικότητας και της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας βοήθησε στην μελέτη και ανάλυση των τάσεων και των παραμορφώσεων μη ελαστικών σωμάτων (Johnson, 1985).

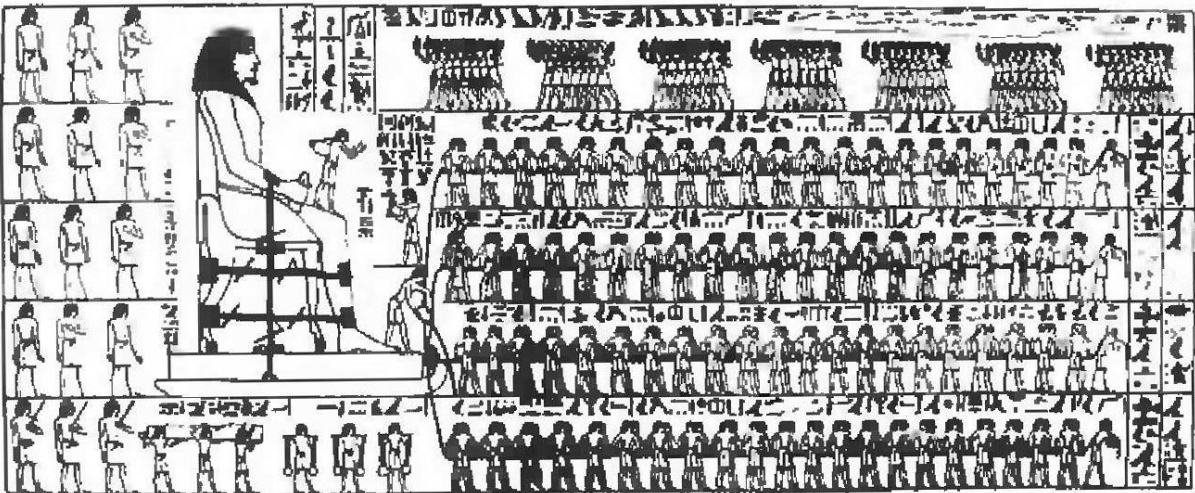
Παρόλη την εξέλιξη των θεωριών και των τεχνολογικών εφαρμογών τα σχετικά με το αντικείμενο των επαφών συγγράμματα είναι λίγα. Ο L. A. Galin το 1953 στο βιβλίο του με τίτλο «Contact Problems in the Theory of Elasticity» που εκδόθηκε στα ρωσικά περιγράφει την πρωτοποριακή δουλειά του Muskhelishvili στην ελαστοστατική μηχανική των επαφών. Το 1980 εκδόθηκε το βιβλίο του Gladwell με τίτλο: «Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity». Και στα δύο αυτά βιβλία αναλύονται προβλήματα επαφών που αφορούν τέλεια ελαστικά στερεά χωρίς να γίνεται αναφορά σε προβλήματα κύλισης ή μη σύμμορφων (non-conforming) επαφών. Το κενό αυτό ήρθε να καλύψει το 1985 ο Johnson με το βιβλίο του «Contact mechanics» όπου αναπτύσσει διεξοδικά τα προβλήματα μη σύμμορφων επαφών για διάφορα είδη υλικών όπως τα μη-γραμμικά ελαστικά, τα ιξωδοελαστικά και τα ελαστοπλαστικά υλικά. Αναπτύσσει επίσης και δυναμικά προβλήματα καθώς επίσης και προβλήματα θερμοελαστικότητας.

Στα προβλήματα μηχανικής των επαφών που περιγράφονται στα παραπάνω βιβλία η μαθηματική μοντελοποίηση γίνεται για απλά σύνορα λόγω της χρήσης αναλυτικών λύσεων και αποφεύγονται οι περίπλοκες δομές και γεωμετρίες. Η αλματώδης ανάπτυξη των υπολογιστών καθώς και των αριθμητικών μεθόδων προσομοίωσης, έδωσαν την δυνατότητα για την μοντελοποίηση πιο αντιπροσωπευτικών στην πραγματικότητα, περίπλοκων συνόρων επαφών. Στο βιβλίο του Wriggers (2002) με τίτλο: «Computational Contact Mechanics» περιγράφονται οι μοντέρνες μέθοδοι προσομοίωσης προβλημάτων επαφής με την χρήση μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονισθεί ότι ο χαρακτήρας των προβλημάτων της μηχανικής των επαφών είναι κατ' εσχόλην τοπικός, δηλαδή η μελέτη περιορίζεται μόνο στο σημείο ή στην μικρή επιφάνεια στην οποία ασκείται ο ελκυστής (πχ. σημειακή ή κατανεμημένη φόρτιση) ή στην διεπιφάνεια μεταξύ δύο σωμάτων (πχ. δύο κυλίνδρων σε επαφή) και αυτή η επιφάνεια είναι πολύ μικρή σε σχέση με το υπόλοιπο σώμα. Έτσι η τοπική συγκέντρωση τάσεων μπορεί να μελετηθεί ανεξάρτητα με το τι συμβαίνει στο εντατικό πεδίο του υπόλοιπου σώματος. Σε κάθε άλλη περίπτωση, όπου δηλαδή η επιφάνεια άσκησης του φορτίου είναι συγκρίσιμη με το μέγεθος του σώματος, τότε η μελέτη του εντατικού πεδίου αποκτά καθολικό χαρακτήρα και το πρόβλημα επαφής συμπίπτει με το πρόβλημα της κατανομής των τάσεων σε ολόκληρο το σώμα.

1.2 Η ανάγκη για επιστρώσεις

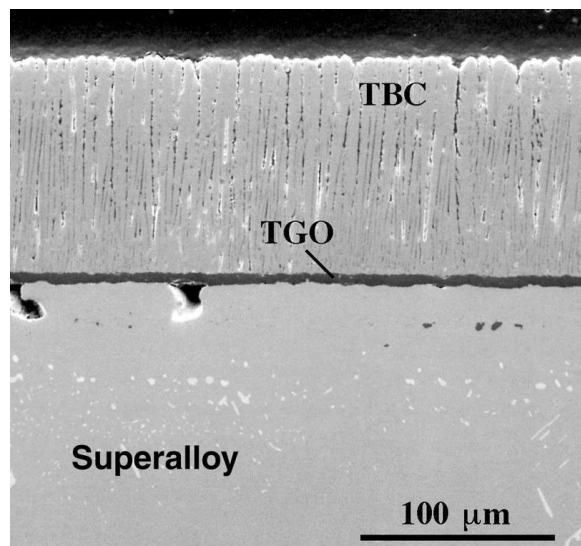
Η αποτελεσματική αντιμετώπιση του προβλήματος της τριβής μεταξύ εξαρτημάτων μηχανών που έρχονται σε επαφή καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την απόδοση και την διάρκεια ζωής των μηχανών αυτών. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι για να ξεπεράσουν το πρόβλημα της τριβής κατά την μεταφορά αντικειμένων που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, χρησιμοποιούσαν κάποιο είδος υγρού λιπαντικού το οποίο έριχναν έμπροσθεν του ελκίθρου (Εικόνα 1).



Εικόνα 1. Μεταφορά αγάλματος με έλκηθρο, όπου στο μπροστινό μέρος είναι ορατός άντρας να ρίχνει υγρό ακριβώς μπροστά από το σημείο επαφής με το έδαφος.

Η λίπανση ως μέθοδος ελάττωσης της τριβής και μείωσης της φθοράς είναι γνωστή από πολύ παλιά και είναι πολύ αποτελεσματική και χρήσιμη ακόμα και σήμερα. Τα λιπαντικά όμως μπορούν να εφαρμοστούν σε ορισμένο αριθμό εφαρμογών κυρίως λόγω περιοριστικών λειτουργικών θερμοκρασιών. Σε περιβάλλοντα υψηλών θερμοκρασιών, όπως οι μοντέρνοι στροβιλοκινητήρες (θερμοκρασίες άνω των 800° C), οι μηχανές diesel, οι σωληνώσεις εξατμίσεων αυτοκινήτων κ.α., η επίστρωση των αλληλοεπιδρώντων εξαρτημάτων με ένα στερεό λιπαντικό ή προστατευτικό στρώμα είναι ο μόνος τρόπος για την καλή λειτουργία και απόδοση τους (Gurta, 1990).

Τα πρώτα κεραμικά επιστρώματα για εφαρμογές αεροδιαστημικής αποτελούνταν από σμάλτα που προέκυψαν από θερμικά επεξεργασμένα κεραμικά (frit enamels) και αναπτύχθηκαν από την National Advisory Committee for Aeronautics (NACA). Για παράδειγμα, η επίστρωση άσβεστο-σταθεροποιημένου ζirkονίου (calcia stabilized zirconia) στο στόμιο εξαγωγής του επανδρωμένου πυραυλοκίνητου αεροσκάφους X-15 το 1960 πιστεύεται ότι αποτελεί την πρώτη χρήση επίστρωσης θερμικής προστασίας (thermal barrier coating, TBC) σε επανδρωμένη πτήση (Cao et al., 2004). Οι επιστρώσεις TBC είναι λεπτά φιλμ, πάχους από 100 μm έως 2 mm, από πυρίμαχο υλικό που προστατεύουν τα μεταλλικά μέρη από τις ακραίες θερμοκρασίες του καυσαερίου (Εικόνα 2).



Εικόνα 2. Φωτογραφία τομής επίστρωσης YSZ που εναποτέθηκε με εξάτμιση δέσμης ηλεκτρονίων σε επιφάνεια υπερκράματος νικελίου, (Clarke and Simon, 2005).

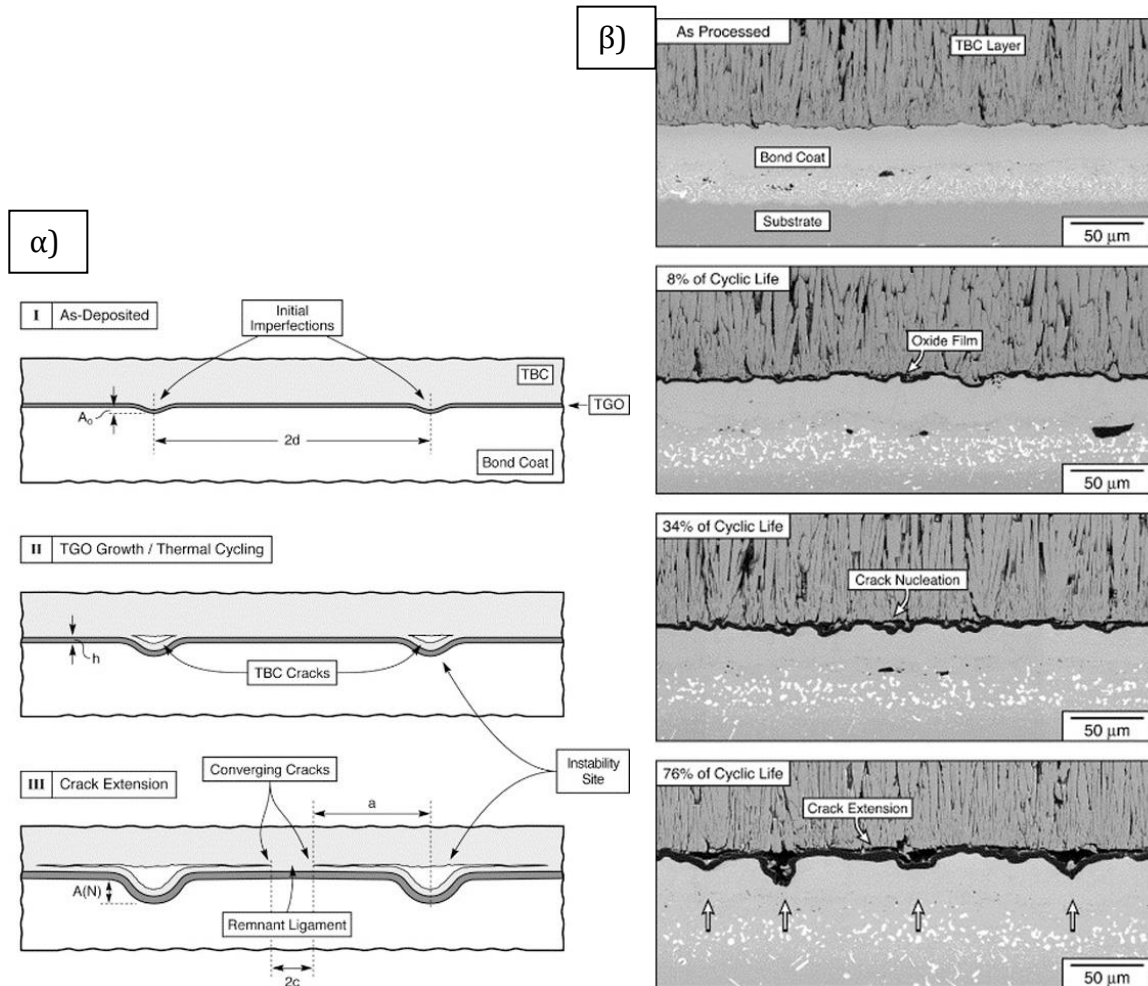
Οι επικαλύψεις TBC επιτρέπουν στα μεταλλικά κράματα που θα χρησιμοποιηθούν στα θερμότερα μέρη κινητήρων αεριοστρόβιλων, να λειτουργήσουν σε θερμοκρασίες αερίου πάνω από τα σημεία τήξης τους. Κάτω από τέτοιες συνθήκες ροής θερμότητας, η θερμική αγωγιμότητα της επίστρωσης TBC υπαγορεύει την πτώση της θερμοκρασίας κατά μήκος της επίστρωσης (Padture et al., 2002). Έχει υπολογισθεί ότι μείωση κατά 50% της θερμικής αγωγιμότητας της επίστρωσης θα μειώσει τη θερμοκρασία του κράματος κατά περίπου 55° C (Clarke and Simon, 2005).

Τα προηγμένα κεραμικά υλικά, που χρησιμοποιήθηκαν αρκετά νωρίς σε διαστημικές εφαρμογές, μπορούν να παίξουν πολύ σημαντικό ρόλο σαν προστατευτικές επιστρώσεις σε διάφορα μεταλλικά μηχανικά συστήματα και εφαρμογές. Κεραμικές επιστρώσεις με διάφορες συστάσεις όπως: αλουμίνα (Al_2O_3), TiO_2 , $CaO / MgO + ZrO_2$, ζirkονία σταθεροποιημένη με υττρία (YSZ), $CeO_2 + YSZ$, ζirkόνιο και $La_2Zr_2O_7$, έχουν αξιολογηθεί ως υλικά TBC και εφαρμόζονται στις επιφάνειες πλήθους μηχανικών συστημάτων μέσω διαφόρων τεχνικών εναπόθεσης, προκειμένου να προσδώσουν σε αυτές βελτιωμένες φυσικές και χημικές ιδιότητες (Cao et al., 2004).

Μία ειδική κατηγορία τέτοιων επιστρώσεων αποτελείται από ένα σύστημα που περιλαμβάνει εξωτερικά μία επιφάνεια θερμικής προστασίας από οξειδίο του ζirkονίου (ZrO_2) το οποίο εναποτίθεται σε συνδετικό υπόστρωμα (Bond-Coat) οξειδίου του αλουμινίου (Al_2O_3). Το σύστημα αυτό καλύπτει και προστατεύει θερμικά το υπερκράμα νικελίου (**Εικόνα 3β**) από το οποίο κατασκευάζονται οι λεπίδες των στροβιλοκινητήρων (Miller, 1984). Όμως τα εξαρτήματα των κινητήρων αεροσκαφών υποβάλλονται και σε μηχανικές καταπονήσεις.

Η φθορά στις επιστρώσεις θερμικής προστασίας εκτός από την σταδιακή οξείδωση της συνδετικής επιφάνειας μεταξύ της κεραμικής επικάλυψης και του υποστρώματος (Miller 1984, Wright and Evans 1999) επέρχεται και εξαιτίας εσωτερικά επιβαλλόμενων φορτίων λόγω ανάπτυξης θερμικά αναπτυσσόμενων οξειδίων (thermally grown oxide, TGO). Τα οξείδια αυτά, που εμφανίζονται κυρίως όταν η λειτουργία προκαλεί περιοδικά θερμικά φορτία, επεκτείνονται κατακόρυφα μέσα στο υπόστρωμα (**Εικόνα 3α**) και δημιουργούν ρωγμές παράλληλα στην διεπιφάνεια (Spitsberg et al., 2005). Για τον λόγο αυτό, ο σχεδιασμός ενός αποδεκτού συστήματος επίστρωσης-υποστρώματος πρέπει να περιλαμβάνει ένα μοντέλο των τάσεων που δημιουργούνται στην επίστρωση για το δεδομένο λειτουργικό περιβάλλον. Η κατανομή των τάσεων στην επίστρωση καθορίζει την μηχανική της αντοχή: οι εφελκυστικές τάσεις συχνά είναι υπεύθυνες για την

δημιουργία ρωγμών ενώ σε συνδυασμό με την ανάπτυξη διατμητικών τάσεων στην διεπιφάνεια επηρεάζουν την επικόλληση και την επαφή μεταξύ επίστρωσης και υποστρώματος. Μια αυστηρή αναλυτική μοντελοποίηση αυτών των τάσεων ως συνάρτηση των ιδιοτήτων των υλικών και του πάχους επίστρωσης είναι, ως εκ τούτου, ουσιώδης.



Εικόνα 3. Αστοχία επίστρωσης λόγω θερμικά αναπτυσσόμενων οξειδίων: α) σχηματική απεικόνιση των τριών σταδίων δημιουργίας και επέκτασης των ρωγμών, β) φωτογραφίες σε τομή της διεπιφάνειας μεταξύ επίστρωσης και υποστρώματος σε κάθε στάδιο, (Spitsberg et al., 2005).

Κατά την διάρκεια της λειτουργίας ενός στροβιλοκινητήρα όμως, σωματίδια, τα οποία εισέρχονται στο εσωτερικό του από το εξωτερικό περιβάλλον, συγκρούονται με την υπερκείμενη κεραμική επίστρωση. Για τον σωστό και αποτελεσματικό σχεδιασμό της επίστρωσης λοιπόν πρέπει να ληφθεί υπόψιν και η μηχανική καταπόνηση που αυτή θα δεχτεί κατά την άσκηση εξωτερικού φορτίου. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας

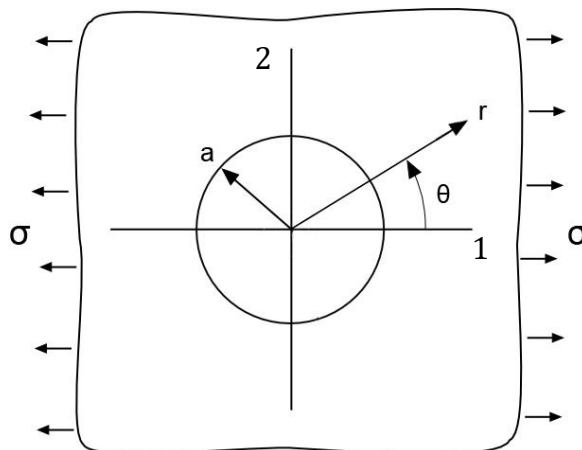
θεωρείται ως εξωτερική φόρτιση το σημειακό φορτίο, το οποίο χαρακτηρίζεται ως ιδιομορφία.

1.3 Προβλήματα επαφής σε ιδιόμορφα σημεία και φαινόμενα κλίμακας

Το 1898 ο G. Kirsch παρουσίασε την κατανομή των τάσεων γύρω από κυκλική οπή που βρίσκεται στο μέσον λεπτής πλάκας απείρων διαστάσεων στις παρειές της οποίας ασκείται ομοιόμορφος μονοαξονικός εφελκυσμός σ (Σχήμα 1). Τα σημεία που βρίσκονται στην περιφέρεια της οπής για $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ παρουσιάζουν συγκέντρωση τάσεων (stress concentration) λόγω του ότι η τάση $\sigma_{\theta\theta}$ γίνεται μέγιστη, αυξανόμενη κατά ένα συντελεστή K της ασκούμενης. Ο συντελεστής αυτός, που ονομάζεται συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων, υπολογίστηκε από τον Kirsch με βάση την γραμμική θεωρία ελαστικότητας σε $K = 3$ (Γεωργιάδης, 2003). Η σχέση (2) δίνει τον συντελεστή πάνω στην περιφέρεια της οπής ($r = a$) και για σύστημα αξόνων x,y με αρχή το κέντρο της οπής και άξονες παράλληλους στον κάθετο και οριζόντιο άξονα αντίστοιχα:

$$K = 1 - 2\cos 2\theta \quad (2)$$

όπου θ η γωνία της ακτίνας με τον άξονα άσκησης του φορτίου. Από την σχέση (2) παρατηρούμε ότι ο θεωρητικός συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων δεν εξαρτάται από το μέγεθος της οπής ούτε από τις μηχανικές σταθερές του υλικού.



Σχήμα 1: Κυκλική οπή στο μέσον λεπτής πλάκας στην οποία ασκείται μονοαξονικός εφελκυσμός.

Από τότε μέχρι σήμερα συνεχίζονται οι πειραματικές έρευνες και οι μελέτες για τον καθορισμό των τάσεων γύρω από ατέλειες των υλικών όπως είναι οι ασυνέχειες, οι ρωγμές και οι εξαρμώσεις. Σε πραγματικές εφαρμογές, όπως έχουν διαπιστώσει διάφοροι ερευνητές, υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο θεωρητικά υπολογιζόμενος συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων δεν αντικατοπτρίζει τα πειραματικά αποτελέσματα. Αυτό συμβαίνει για διάφορους λόγους όπως για παράδειγμα η παραδοχή ομοιογενούς και τέλεια ελαστικού υλικού ή σε άλλες περιπτώσεις η εξάρτηση από το μέγεθος της οπής σε σχέση με την πλάκα, ιδιαίτερα όταν το μέγεθος της οπής είναι συγκρίσιμο με τα δομικά συστατικά της πλάκας (φαινόμενα κλίμακας). Ο θεωρητικός υπολογισμός του συντελεστή με βάση την λύση του Kirsch είναι πολύ σημαντικός όταν εξετάζονται η αντοχή και η φθορά ψαθυρών υλικών, ενώ για υλικά που εμφανίζουν διαρροή (ανελαστικά υλικά) είναι πολύ μικρής αξίας (Heywood, 1955).

Από πειράματα σε πλάκες από σύνθετα υλικά με ίνες γραφίτη και εποξική μήτρα με οπή στις οποίες ασκούνταν μονοαξονικός εφελκυσμός, οι Nuismer και Whitney (1975) διαπίστωσαν ότι ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων για $\theta = \frac{\pi}{2}$ επηρεάζεται σημαντικά από τα φαινόμενα κλίμακας όταν η διάμετρος της οπής γίνεται μικρότερη των 3,048 cm και από εκεί και πέρα, όσο αυτή μειώνεται τόσο μειώνεται και ο συντελεστής μέχρι την τιμή 1 που αφορά την πλάκα χωρίς οπή. Επίσης, ο William (1985) εξετάζοντας τα σύνθετα υλικά που χρησιμοποίησε η NASA στο όχημα HiMAT (Highly Maneuverable Aircraft Technology) διαπίστωσε εξάρτηση του συντελεστή από την ανισοτροπία του υλικού. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας την θεωρία ανισοτροπικών πλακών (Anisotropic plate theory) ανέλυσε δεδομένα από πειράματα σε σύνθετα δείγματα με οπή και διαπίστωσε ότι ο ανισοτροπικός συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες και μικρότερες του 3.

Σε πολλές περιπτώσεις υλικών όπως τα μέταλλα και τα κεραμικά η μικρομηχανική αλληλεπίδραση των ατελειών καθορίζει την μακροσκοπική τους όγκιμη ή ψαθυρή συμπεριφορά. Στην διδακτορική του διατριβή ο Μπαξεβανάκης (2014) αναφέρει ότι ένα αρχικά αιχμηρό άκρο ρωγμής συνήθως αμβλύνεται κατά ένα ατομικό επίπεδο, καθώς η εξάρμωση επεκτείνεται υπό την εφαρμογή συγκεντρωμένου φορτίου στο άκρο της ρωγμής. Η άμβλυνση του άκρου της ρωγμής έχει ως αποτέλεσμα την θωράκισή της από την εξωτερικά επιβαλλόμενη φόρτιση, μειώνοντας κατά συνέπεια τον τοπικό συντελεστή έντασης τάσεων.

Φαινόμενα κλίμακας έχουν παρατηρηθεί επίσης και σε πειράματα μικροδιεισδύσεων και ιδιαίτερα όταν το χαρακτηριστικό μήκος της διείσδυσης – δηλαδή το πλάτος διείσδυσης ή η επιφάνεια διείσδυσης – είναι συγκρίσιμο με κάποιο χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής του ίδιου του υλικού υπό διείσδυση (Zisis et al., 2014). Συγκεκριμένα, ισχυρά φαινόμενα κλίμακας παρουσιάζονται στη μετρούμενη σκληρότητα πολυκρυσταλλικών, κυψελωτών αλλά και πολυμερικών υλικών και ειδικά σε πολύ μικρά βάθη διείσδυσης. Για παράδειγμα έχει παρατηρηθεί ότι η σκληρότητα διείσδυσης μετάλλων και κεραμικών υλικών διπλασιάζεται καθώς η επιφάνεια επαφής μειώνεται από τα 10 μm στο 1 μm (Stelmashenko et al., 1993; Ma and Clarke, 1995; Poole et al., 1996). Επιπλέον, πειράματα διείσδυσης λεπτών επιστρώσεων έδειξαν ότι το όριο διαρροής αυξάνεται μειούμενου του πάχους της επίστρωσης (Huber et al., 2002).

Από όσα παραδείγματα αναφέρθηκαν παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η γνώση της τοπικής εντατικής κατάστασης ενός σώματος κατά την άσκηση δυνάμεων στην επιφάνεια του είναι πολύ σημαντική. Για την ανάλυση ενός προβλήματος επαφής πολύ σημαντικό είναι επίσης να θεωρήσουμε, αν υπάρχουν, χαρακτηριστικά μεγέθη του υλικού (όπως πχ. χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής) ή ανισοτροπιών στις μηχανικές του ιδιότητες. Τα χαρακτηριστικά αυτά θα μας οδηγήσουν στην επιλογή της κατάλληλης θεωρίας που θα αποτελέσει το θεμέλιο στο οποίο θα βασιστεί η ανάλυση μας. Έτσι, για παράδειγμα, σε υλικά που συμπεριφέρονται γραμμικά ελαστικά εφαρμόζεται η κλασική θεωρία ελαστικότητας ενώ σε υλικά με κάποιο εσωτερικό χαρακτηριστικό μήκος μικροδομής, η θεωρία τάσεων ζεύγους.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η κλασική θεωρία ελαστικότητας διότι γίνεται η παραδοχή ότι τα υπό μελέτη υλικά συμπεριφέρονται ως γραμμικά ελαστικά. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση μεταξύ τάσεων και τροπών είναι γραμμική (νόμος του Hooke) καθώς και ότι υφίστανται απειροστές τροπές κατά την φόρτιση αλλά και δεν εμφανίζουν διαρροή. Άλλωστε, κατά την πραγματοποίηση πειραμάτων διείσδυσης σε πολύ μικρά βάθη η πλαστική διαρροή (plastic flow) δεν συμβαίνει έως ότου η ισοδύναμη τροπή φτάσει σε κάποια κρίσιμη τιμή. Επιπλέον η μετρούμενη μετατόπιση κατά την αποφόρτιση έχει ελαστικό χαρακτήρα. Συνεπώς η χρήση της θεωρίας ελαστικότητας κατά τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας από την ανάλυση της καμπύλης φορτίου – μετατόπισης ενός πειράματος διείσδυσης είναι γενικά αποδεκτή (Pharr et al., 1992).

1.4 Μέθοδοι ανάλυσης τάσεων σε ιδιόμορφες περιοχές

Πολύ μεγάλο ενδιαφέρον για τον σχεδιασμό και την επεξεργασία βιομηχανικών προϊόντων, παρουσιάζει η ανάλυση των τάσεων γύρω από ιδιόμορφες περιοχές όπως η επαφή δύο σωμάτων ή η περιοχή κάτω από συγκεντρωμένο φορτίο. Για την μελέτη των περιοχών αυτών έχουν αναπτυχθεί εκτός από τις θεωρητικές μεθόδους όπως αναφέρθηκε και προηγούμενως αριθμητικές και πειραματικές μέθοδοι. Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούν περιληπτικά για λόγους πληρότητας.

Προκειμένου να μελετηθούν τα φαινόμενα που παρατηρούνται στη μακροσκοπική συμπεριφορά κατά την φόρτιση ενός υλικού μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάποια αριθμητική – υπολογιστική μέθοδος. Η αριθμητική προσομοίωση απαιτεί να ληφθεί υπόψη η πλήρης μορφολογία της μικροδομής και αυτή να μοντελοποιηθεί λεπτομερώς είτε αναλυτικά είτε δια μέσου ενός λεπτομερούς υπολογιστικού – αριθμητικού κώδικα. Η προσέγγιση αυτή περιλαμβάνει πλήθος λεπτομερειών της δομής του υλικού αλλά προφανώς μειονεκτεί ως προς το απαιτούμενο συνολικό υπολογιστικό κόστος το οποίο αυξάνεται καθώς η πολυπλοκότητα της μικροδομής αυξάνεται. Τη σημερινή εποχή ξεχωρίζουν τρεις βασικοί κλάδοι της υπολογιστικής μηχανικής των επαφών που εφαρμόζονται στην επίλυση των διαφόρων κατηγοριών προβλημάτων (Wriggers, 2002):

- Οι μέθοδοι των πεπερασμένων στοιχείων, που εφαρμόζονται σε προβλήματα μικρών και μεγάλων παραμορφώσεων τόσο στην ελαστική όσο και στην ανελαστική περιοχή.
- Οι μέθοδοι των διακριτών στοιχείων, που χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλημάτων στα οποία έως 10^8 το πλήθος σωματίδια έρχονται σε επαφή.
- Συστήματα πολλαπλών σωμάτων, που βασίζονται στην παραδοχή ότι τα σώματα αυτά είναι άκαμπτα. Τα συστήματα αυτά είναι γενικά μικρά, και μπορούν να εφαρμοστούν σε μελέτες δυναμικής συμπεριφοράς των τεχνικών έργων στις οποίες επιτρέπεται επίσης η επαφή.

Από τις πειραματικές μεθόδους αξίζει να αναφερθεί η οπτική μέθοδος των καυστικών και η μέθοδος της φωτοελαστικότητας. Η μέθοδος των καυστικών αναπτύχθηκε κατά την δεκαετία του '60 από τους Manogg και Π. Θεοχάρη και βασίζεται στις αρχές της γεωμετρικής οπτικής. Έχει κριθεί ως η μόνη ενδεδειγμένη για την ικανοποιητική παρακολούθηση των απότομων μεταβολών του εντατικού πεδίου και της διανομής των τάσεων εντός της μικρής παρά το άκρο της ιδιόμορφης (singular) περιοχής. Με την

πειραματική αυτή μέθοδο η επικρατούσα κατάσταση των τάσεων στην ιδιόμορφη περιοχή μετατρέπεται βάσει αυστηρών μαθηματικών κανόνων σε οπτική ιδιομορφία, η οποία μετρούμενη με μεγάλη ακρίβεια παρέχει ικανοποιητικά στοιχεία.

Η οπτική αυτή ιδιομορφία προέρχεται από την συγκέντρωση επί ιδιόμορφης στο χώρο καμπύλης, η οποία καλείται καυστική, των ακτινών φωτός που αποκλίνουν από την ισχυρώς καταπονούμενη περιοχή. Η καυστική αυτή λαμβάνεται επάνω σε ένα πέτασμα και αφού βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία προς την περιοχή κοντά στο άκρο της ρωγμής επιτρέπει την μελέτη αυτής (Παπαδόπουλος, 2007). Με την οπτική μέθοδο των καυστικών μπορούν να μελετηθούν διαφανή κυρίως υλικά (μέθοδος των διερχομένων καυστικών) αλλά και αδιαφανή υλικά αρκεί να μπορούν να ανακλάσουν την φωτεινή ακτίνα (μέθοδος των ανακλώμενων καυστικών). Επίσης μπορούν να μελετηθούν πολλών ειδών προβλήματα ελαστικότητας είτε στατικά είτε δυναμικά τόσο σε οπτικώς ισότροπα όσο και σε ανισότροπα υλικά.

Η οπτική μέθοδος της φωτοελαστικότητας είναι μία πειραματική μέθοδος, που χρησιμοποιείται για την ανάλυση των τάσεων σε καταπονούμενο σώμα. Για την πειραματική διάταξη απαιτούνται ένα προσομοίωμα (μοντέλο) της προς μελέτη κατασκευής και δύο πολωτές για δημιουργία πολωμένου φωτός. Έτσι, με χρήση των φαινόμενων της ανάκλασης, διάθλασης και πόλωσης του φωτός που ερμηνεύονται με τη κυματική ή την ηλεκτρομαγνητική θεωρία του φωτός μπορούν να εξαχθούν πληροφορίες σχετικά με την εντατική κατάσταση του σώματος. Η αρχή λειτουργίας της μεθόδου βασίζεται στην μεταβολή της οπτικώς ισότροπης συμπεριφοράς του σώματος δηλαδή στην μεταβολή του δείκτη διαθλάσεως κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων που μεταβάλλονται κατά την φόρτιση. Η μεταβολή του δείκτη διαθλάσεως προκαλεί διπλοδιάθλαση όσο διαρκεί η φόρτιση του σώματος. Η διπλοδιάθλαση είναι ανάλογη της εντατικής κατάστασης του σώματος. Η αναλογία αυτή διατυπώνεται από τον φωτοτασεοπτικό νόμο (Παπαδόπουλος, 2007).

1.5 Αντικείμενο και Διάρθρωση της Διατριβής

Η παρούσα εργασία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη της συμπεριφοράς επίστρωσης άνωθεν υποστρώματος υπό την επίδραση κατακόρυφου συγκεντρωμένου γραμμικού φορτίου (line load) στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας και σε συνθήκες

επίπεδης παραμόρφωσης. Το σύστημα επίστρωσης-υποστρώματος έχει την μορφή ημιάπειρου χωρίου (ημίχωρος). Η επίλυση του προβλήματος παρουσιάζεται διαδοχικά με την έννοια ότι πρώτα επιλύονται τα «απλά» προβλήματα του ελαστικού ημιχώρου (Flamant) και της επίστρωσης επάνω σε απαραμόρφωτο υπόστρωμα και κατόπιν το σύνθετο. Συνεπώς η διατριβή διαρθρώνεται ως εξής:

Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζονται οι αρχές της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας αναπτύσσοντας τις βασικές έννοιες της τάσης και της τροπής και των σχέσεων που τις συνδέουν με τις μετατοπίσεις. Ακολουθεί η περιγραφή της τασικής συναρτήσεως και δίνονται οι βασικές εξισώσεις για την περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης.

Στο **Κεφάλαιο 3** γίνεται αρχικά μια εισαγωγή στο πρόβλημα συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια ή την διεπιφάνεια συστημάτων επιστρώσεων μέσω βιβλιογραφικής ανασκόπησης των εργασιών άλλων ερευνητών. Κατόπιν παρουσιάζεται η μέθοδος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων μέσω μετασχηματισμών Fourier που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία και στην συνέχεια μελετάται το πρόβλημα συγκεντρωμένης κατακόρυφης φόρτισης στην επιφάνεια ελαστικού ημιχώρου με χρήση της μεθόδου αυτής και των τασικών συναρτήσεων Airy. Ακολούθως παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της πειραματικής μελέτης του προβλήματος αυτού με τις μεθόδους των καυστικών και της φωτοελαστικότητας.

Στο **Κεφάλαιο 4** αναλύεται, ως εισαγωγή, το πρόβλημα της συγκεντρωμένης φόρτισης σε επίστρωση επάνω σε απαραμόρφωτο υπόστρωμα και κατόπιν επιλύεται το πρόβλημα κατακόρυφου συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια επιστρώσεως που βρίσκεται άνωθεν ελαστικού υποστρώματος με χρήση της μεθόδου Fourier και των τασικών συναρτήσεων Airy.

Η παρούσα διατριβή ολοκληρώνεται στο **Κεφάλαιο 5** με σύνοψη των συμπερασμάτων και προτάσεις για μελλοντική ερευνητική εργασία.

Κεφάλαιο 2

2 Βασικές αρχές της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας

2.1 Εισαγωγή

Στην Φυσική, η ιδιότητα ενός στερεού σώματος να αντιστέκεται στην επιβολή παραμορφωτικών (αλλαγή σχήματος) εξωτερικών δυνάμεων μέχρι ενός συγκεκριμένου ορίου (αστοχία υλικού) και να ανακτά το αρχικό του σχήμα όταν αρθούν οι δυνάμεις αυτές ονομάζεται ελαστικότητα. Προέρχεται από την αρχαία λέξη «ελατός» που σημαίνει: «αυτός που αλλάζει μορφή και σχήμα χωρίς να σπάσει αν του ασκηθεί δύναμη» (internet, Βικιλεξικό).

Η θεωρία της ελαστικότητας, ως μια θεωρία συνεχούς μέσου, αντιμετωπίζει τα στερεά σώματα: α) χωρίς να λαμβάνει υπόψη την εσωτερική δομή του σώματος (μικροδομή) και β) η ύλη του σώματος θεωρείται ως ομοιόμορφα κατανεμημένη σε όλο τον όγκο του έτσι ώστε εάν αποκοπεί ένα κομμάτι του σώματος, οσοδήποτε μικρό, αυτό θα κατέχει τις ίδιες φυσικές ιδιότητες με το αρχικό σώμα. Το χαρακτηριστικό αυτό ονομάζεται ομοιογένεια. Τα υλικά στην κλασική θεωρία ελαστικότητας θεωρούνται επίσης τέλεια ελαστικά, δηλαδή ανακτούν πλήρως το σχήμα τους όταν σταματήσει η επιβολή των δυνάμεων και ισότροπα δηλαδή οι ελαστικές ιδιότητες τους δεν εξαρτώνται από την διεύθυνση.

Τα δομικά υλικά όπως ο χάλυβας και το σκυρόδεμα στην πραγματικότητα δεν διαθέτουν καμία από τις παραπάνω ιδιότητες. Αποτελούνται από διαφόρων ειδών και διευθύνσεων κρυστάλλους ή κόκκους και συνεπώς δεν χαρακτηρίζονται ούτε από ομοιογένεια ούτε από ισοτροπία. Παρόλα αυτά η κλασική θεωρία της ελαστικότητας όταν εφαρμόζεται σε αυτά τα υλικά δίνει λύσεις με μεγάλη ακρίβεια. Αυτό συμβαίνει διότι οι κρύσταλλοι είναι κατανεμημένοι τυχαία μέσα στο στερεό με αποτέλεσμα η μακροσκοπική συμπεριφορά του να τείνει προς τον μέσο όρο των ιδιοτήτων των κρυστάλλων (Timoshenko and Goodier, 1970).

Μια ακόμα παραδοχή της κλασικής ελαστικότητας είναι ότι η τάση, η δύναμη δηλαδή ανά μονάδα επιφάνειας, εξαρτάται γραμμικά από την τροπή, την παραμόρφωση δηλαδή ανά μονάδα μήκους. Η σχέση αυτή γενικά είναι μη γραμμική αλλά για μικρές παραμορφώσεις μπορεί να θεωρηθεί γραμμική. Η γραμμικότητα της ελαστικότητας έχει

τις ρίζες της στον περίφημο νόμο του Robert Hooke, ο οποίος το 1678 διατύπωσε στα λατινικά ότι "Ut tensio, sic vis" δηλαδή «όπως η έκταση, έτσι και η δύναμη». Η διατύπωση αυτή εκφράζει την σχέση μεταξύ δύναμης και μετατόπισης η οποία μαθηματικά γράφεται ως:

$$F = kx \quad (3)$$

όπου F είναι η δύναμη, k η σταθερά του ελατηρίου και x η μετατόπιση. Από την σχέση (3) κατά αναλογία, περνάμε στην γραμμική σχέση μεταξύ τάσης - τροπής σε μία διάσταση ώστε διαιρώντας με την επιφάνεια παίρνουμε:

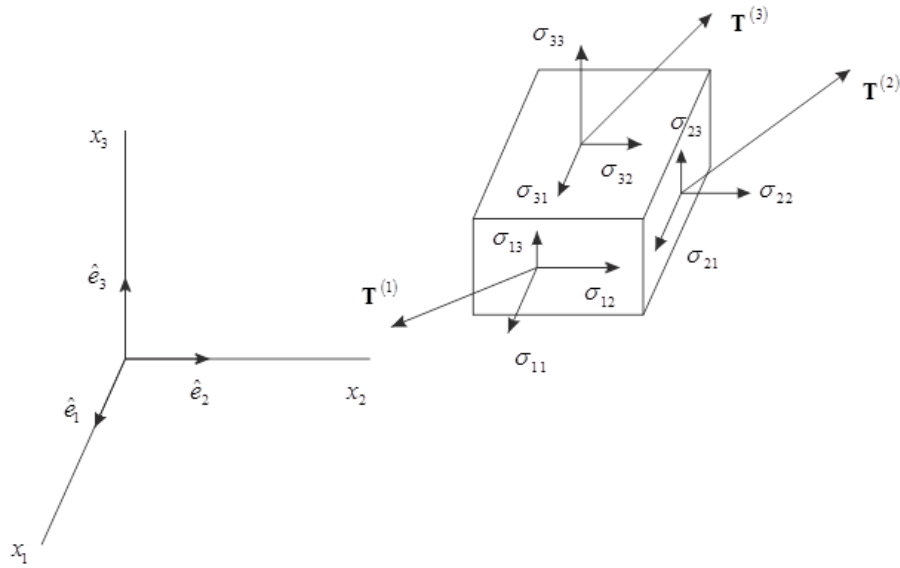
$$\sigma = E\varepsilon \quad (4)$$

όπου σ είναι τάση (stress), ε η τροπή (strain) και E το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young με μονάδα μέτρησης το Pascal (δύναμη ανά επιφάνεια).

Το μέτρο ελαστικότητας αν και πήρε το όνομα του από τον Βρετανό ερευνητή του 19^{ου} αιώνα Thomas Young, είχε εισαχθεί σαν ιδέα από το 1727 από τον Leonhard Euler και είχε επιβεβαιωθεί πειραματικά από τον Ιταλό επιστήμονα Giordano Riccati από το 1782 και αποτελεί μία από της μηχανικές σταθερές του υλικού. Άλλες μηχανικές σταθερές είναι το μέτρο διάτμησης (shear modulus) G ή μ , το μέτρο συμπίεστότητας (bulk modulus) K , και ο λόγος Poisson ν . Οι μηχανικές σταθερές G και K εκφράζουν την αντίσταση του υλικού στην επιβαλλόμενη εξωτερικά ένταση, ενώ ο λόγος Poisson είναι ο συντελεστής εγκάρσιας διαστολής και δίνεται από τον αρνητικό λόγο της εγκάρσιας προς την αξονική τροπή.

2.2 Τανυστής τάσεων - Εξισώσεις ισορροπίας

Το βασικό μέγεθος που περιγράφει την εντατική κατάσταση ενός σώματος στην θεωρία ελαστικότητας σε τρεις διαστάσεις είναι ο τανυστής των τάσεων κατά Cauchy. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως η τάση ορίζεται σαν την δύναμη που ασκείται σε κάποιο σημείο προς την στοιχειώδη επιφάνεια. Εξαρτάται συνεπώς από τον προσανατολισμό της επιφάνειας μιας και όταν αυτή στραφεί θα αλλάξει και ο ελκυστής (δύναμη). Για τον λόγο αυτό για κάθε σημείο ενός σώματος χρειάζονται τρεις συνιστώσες τάσης για την πλήρη περιγραφής της τασικής κατάστασης (**Σχήμα 2**).



Σχήμα 2. Ανάλυση τανυστή τάσης σε στοιχειώδες στερεό παραλληλεπίπεδο.

Θεωρώντας το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα \mathbf{n} , την στοιχειώδη επιφάνεια ΔS , τον ελκυστή \mathbf{T} και την σύμβαση άθροισης Einstein για τους δείκτες i, j οι οποίοι παίρνουν τις τιμές 1, 2, 3, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για την τάση (Γεωργιάδης, 2003):

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \mathbf{T}^{(n)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(1)} &= \sigma_{11}\hat{e}_1 + \sigma_{12}\hat{e}_2 + \sigma_{13}\hat{e}_3 \\ \mathbf{T}^{(2)} &= \sigma_{21}\hat{e}_1 + \sigma_{22}\hat{e}_2 + \sigma_{23}\hat{e}_3 \\ \mathbf{T}^{(3)} &= \sigma_{31}\hat{e}_1 + \sigma_{32}\hat{e}_2 + \sigma_{33}\hat{e}_3 \end{aligned} \quad (6)$$

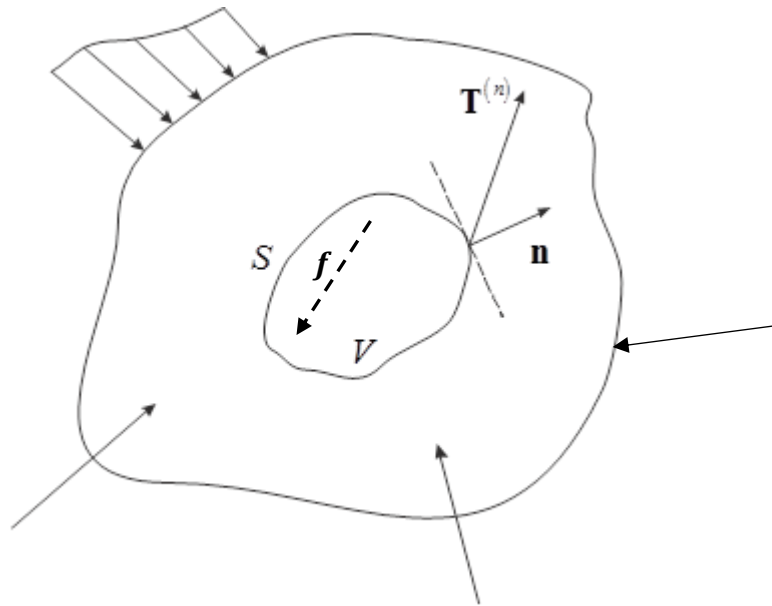
$$\mathbf{T}^{(i)} = \sigma_{ij}\hat{e}_j \quad \text{ή} \quad T_j^{(i)} = \sigma_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (7)$$

$$T_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} T_1^{(n)} \\ T_2^{(n)} \\ T_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Σε ανεπτυγμένη μορφή ο τανυστής της τάσης σ δίνεται από το μητρώο της σχέσης (9). Οι τάσεις $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ ονομάζονται ορθές ενώ οι τάσεις $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}$ ονομάζονται διατμητικές. Συνολικά ένας τανυστής μπορεί να έχει 9 διαφορετικά μεταξύ

τους στοιχεία αλλά όπως αποδεικνύεται στην συνέχεια, οι διατμητικές τάσεις είναι ανά 2 ίσες, δηλαδή $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.



Σχήμα 3. Στερεό σώμα με διαφόρων ειδών φορτία και δυνάμεις

Με βάση την Αρχή Διατήρησης της Ορμής γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα στερεό σώμα πρέπει να ισούται με μηδέν στην περίπτωση που το σώμα ισορροπεί. Έστω το τμήμα όγκου V και επιφάνειας S του σώματος στο **Σχήμα 3**, όπου \mathbf{f} οι καθολικές δυνάμεις που ασκούνται στον όγκο του τμήματος και \mathbf{T} οι ελκυστές που ασκούνται στην επιφάνεια του, τότε έχουμε:

$$\int_V \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{T} dS = 0 \Rightarrow \int_V f_i dV + \int_S T_i dS = 0 \Rightarrow \int_V f_i dV + \int_S \sigma_{ji} n_j dS = 0 \quad (10)$$

Λόγω του θεωρήματος της απόκλισης των Green-Gauss το επιφανειακό ολοκλήρωμα της εξίσωσης (10) γίνεται:

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \sigma_{ji,j} dV \quad (11)$$

Με αντικατάσταση της (11) στην εξίσωση (10) παίρνουμε:

$$\int_V f_i dV + \int_V \sigma_{ji,j} dV = 0 \Rightarrow \int_V (f_i + \sigma_{ji,j}) = 0 \Rightarrow$$

$$f_i + \sigma_{ji,j} = 0 \quad (12)$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής έχουμε ότι: για να ισορροπεί το σώμα πρέπει να μηδενίζονται οι ροπές γύρω από ένα σημείο. Αν ως σημείο αναφοράς των ροπών ληφθεί η αρχή των αξόνων O και r είναι το διάνυσμα θέσης από το O ενός τυχαίου σημείου του σώματος, έχουμε:

$$\int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{T} dS = 0 \Rightarrow \int_V e_{ijk} x_j f_k dV + \int_S e_{ijk} x_j T_k dS = 0 \Rightarrow$$

$$\int_V e_{ijk} x_j f_k dV + \int_S e_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dS = 0 \quad (13)$$

όπου e_{ijk} είναι το σύμβολο εναλλαγής (Levi-Civita). Το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην εξίσωση (13) μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα όγκου λόγω του θεωρήματος της απόκλισης των Green-Gauss όπως προηγουμένως:

$$\int_S e_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dS = \int_V (e_{ijk} x_j \sigma_{lk})_{,l} dV = \int_V e_{ijk} (x_{j,l} \sigma_{lk} + x_j \sigma_{lk,l}) dV =$$

$$\int_V e_{ijk} (\delta_{jl} \sigma_{lk} + x_j \sigma_{lk,l}) dV = \int_V e_{ijk} (\sigma_{jk} + x_j \sigma_{lk,l}) dV \quad (14)$$

Αντικαθιστούμε την (14) στην προηγούμενη και έχουμε:

$$\int_V e_{ijk} x_j f_k dV + \int_V e_{ijk} (\sigma_{jk} + x_j \sigma_{lk,l}) dV = 0 \Rightarrow$$

$$\int_V e_{ijk} (x_j f_k + \sigma_{jk} + x_j \sigma_{lk,l}) dV = 0 \quad (15)$$

Η εξίσωση (15) με χρήση της (12) γίνεται:

$$\int_V e_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0$$

η οποία για να ισχύει για κάθε όγκο του σώματος θα πρέπει:

$$e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (16)$$

Από την (16) έχουμε:

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0, \sigma_{23} - \sigma_{32} = 0, \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Δείξαμε συνεπώς ότι ο τανυστής τάσης είναι συμμετρικός ως προς την διαγώνιο και έχει μόνο 6 ανεξάρτητες συνιστώσες.

2.3 Τανυστής τροπών - Εξισώσεις συμβιβαστού

Κατά την άσκηση εξωτερικών δυνάμεων στο σώμα είπαμε ότι αυτό παραμορφώνεται (δηλαδή αλλάζει σχήμα) μιας και αλλάζουν οι αποστάσεις μεταξύ των στοιχείων από τα οποία αυτό αποτελείται (Γεωργιάδης, 2003). Βέβαια αυτό συμβαίνει επειδή δεχόμαστε ότι κατά την φόρτισή του το σώμα είναι επαρκώς ακινητοποιημένο έτσι ώστε τα στοιχεία του να μην υφίστανται μετατοπίσεις στερεού σώματος δηλαδή μετατοπίσεις χωρίς παραμόρφωση (Timoshenko and Goodier, 1970). Η θεμελιώδης κινηματική μεταβλητή για την περιγραφή και ποσοτικοποίηση της αλλαγής θέσης (συντεταγμένων) ενός στοιχείου που βρίσκεται αρχικά στο σημείο $\mathbf{x} = (x, y, z)$ είναι η μετατόπιση. Το διάνυσμα που συνδέει την αρχική με την τελική θέση $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ του σημείου ονομάζεται «η μετατόπιση του σημείου \mathbf{x} » και οι τρεις συνιστώσες του είναι: $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$.

Επειδή όπως είδαμε προηγουμένως οι τάσεις είναι άμεσα συνδεδεμένες με τις τροπές μέσω της καταστατικής σχέσης (4), προκειμένου να υπολογίσουμε την μετατόπιση για κάθε σημείο του παραμορφωμένου σώματος, χρειάζεται να ορίσουμε την τροπή σε σχέση με την μετατόπιση. Σε μία διάσταση, η τροπή ορίζεται σαν την σχετική μεταβολή του μήκους, είναι δηλαδή ο λόγος της μεταβολής του μήκους ΔL προς το αρχικό μήκος L :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (17)$$

Αν θεωρήσουμε ότι το αρχικό μήκος είναι η διαφορά μεταξύ των σημείων τέλους και αρχής ενός ευθύγραμμου τμήματος δηλαδή $L = \Delta x$ και ότι όταν υφίσταται παραμόρφωση το αριστερό άκρο του μετακινείται στην θέση $x - u(x)$, ενώ το δεξί άκρο του στην θέση $(x + \Delta x) - u(x + \Delta x)$, τότε η σχέση (17) μπορεί να γραφεί ως:

$$\varepsilon = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (18)$$

Η σχέση (18) δίνει την μέση τροπή στο σημείο x ενώ αν το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος τείνει στο μηδέν έχουμε:

$$\varepsilon(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \equiv \frac{du}{dx} \quad (19)$$

Από την σχέση (19) παρατηρούμε ότι η τροπή ταυτίζεται με την χωρική παράγωγο της μετατόπισης.

Κατά αναλογία σε τρεις διαστάσεις ορίζεται ως τανυστής τροπής η ποσότητα (Γεωργιάδης, 2003):

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(\delta_{jk} - X_{i,j}X_{i,k}) \quad (20)$$

όπου X_i οι αρχικές θέσεις των σημείων και x_i οι τελικές. Επίσης είναι:

$$u_i = x_i - X_i \quad (21)$$

η οποία με παραγωγή μας δίνει:

$$X_{i,j} = x_{i,j} - u_{i,j} = \delta_{ij} - u_{i,j} \quad (22)$$

Οι σχέσεις (20) και (22) δίνουν:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,j} - u_{i,j}u_{i,k}) \quad (23)$$

Η σχέση (23) δίνει τον τανυστή τροπής κατά Lagrange ο οποίος περιγράφει τις αλλαγές μηκών του σώματος εξαιτίας των μετατοπίσεων των υλικών σημείων (Lai et al., 2010) και χαρακτηρίζει πεπερασμένες τροπές. Θεωρώντας ότι οι βαθμίδες μετατοπίσεων είναι πολύ μικρές τότε το γινόμενο τους στην σχέση (23) είναι ακόμα πιο μικρό και

συνεπώς αμελητέο. Έτσι μπορεί να παραληφθεί και να πάρουμε την έκφραση του τανυστή για απειροστές τροπές ως:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{,i} + u_{,j}) \quad (24)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή της τροπής είναι:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (25)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (26)$$

Από τις σχέσεις (25) και (26) βλέπουμε ότι και ο τανυστής τροπής είναι ένας συμμετρικός τανυστής.

Στην περίπτωση που είναι γνωστό το διάνυσμα της μετατόπισης u_i σε ένα σημείο του σώματος τότε από την σχέση (24) μπορούν άμεσα να υπολογιστούν οι αντίστοιχες τροπές. Αντίστροφα, εάν είναι γνωστές οι συνιστώσες τις τροπής ε_{ij} και θέλουμε να υπολογίσουμε τις τρεις συνιστώσες της μετατόπισης γενικά μπορεί να μην υπάρχει διάνυσμα του οποίου οι συντεταγμένες να ικανοποιούν τις σχέσεις (25) και (26). Για να ικανοποιούνται οι σχέσεις αυτές πρέπει να ισχύει το ακόλουθο θεώρημα (Lai et al., 2010):

Αν οι $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και έχουν συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους σε απλώς συνεκτικό χωρίο, τότε οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να υπάρχουν και να είναι μονότιμες οι u_i και να επαληθεύουν τις σχέσεις (25) και (26) είναι οι παρακάτω:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right)
 \end{aligned} \tag{28}$$

Οι εξισώσεις (27) και (28) ονομάζονται εξισώσεις συμβιβαστού και μπορούν να γραφούν σε συνεπτυγμένη μορφή με δείκτες ως:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = \varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{jm,ik} = 0 \tag{29}$$

Παρόλο που στην σχέση (29) περιλαμβάνονται 81 εξισώσεις, μόνο 6 είναι ουσιαστικές και δίνονται από τις (27) και (28). Οι υπόλοιπες είναι επαναλήψεις λόγω συμμετριών (Fung, 1965). Για προβλήματα σε τρεις διαστάσεις πρέπει να γίνεται έλεγχος και για τις έξι παραπάνω εξισώσεις ενώ σε διδιάστατα προβλήματα υπάρχει μία μόνο εξίσωση συμβιβαστού, η πρώτη από τις σχέσεις (27).

2.4 Γενικευμένος νόμος του Hooke

Στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου είδαμε πως προκύπτει ο νόμος του Hooke στην μία διάσταση (σχέση 4). Στην περίπτωση τριών διαστάσεων ο νόμος αυτός γενικεύεται με την χρήση κατάλληλων ενεργειακών θεωρήσεων. Έτσι αποδεικνύεται ότι (Γεωργιάδης, 2003) η σχέση που εκφράζει τον γενικό ελαστικό καταστατικό νόμο στα πλαίσια απειροστών τροπών και χωρίς να επηρεάζεται το φαινόμενο από τον ρυθμό επιβολής φορτίου, την θερμοκρασία και την βαθμίδα της τροπής δίνεται από:

$$\sigma_{ij} = E_{ij} + E_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} E_{ijklmnp} \varepsilon_{km} \varepsilon_{np} + \dots \tag{30}$$

Η σχέση (30) περιλαμβάνει τις παραμένουσες τάσεις στον όρο E_{ij} και την μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού (όροι με γινόμενα τροπών). Αν αυτά τα δύο φαινόμενα

αγνοηθούν τότε προκύπτει η γραμμική μορφή της καταστατικής εξίσωσης που αποτελεί τον γενικευμένο νόμο του Hooke:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (31)$$

όπου E_{ijkl} είναι το μητρώο των ελαστικών (μηχανικών) σταθερών, ένας τανυστής 4^{ης} τάξης, με 81 στοιχεία.

Στην περίπτωση τριδιάστατου και γενικά ανισότροπου υλικού, λόγω της συμμετρίας των τανυστών της τάσης και της τροπής και επειδή πρέπει να ισχύει: $E_{ijkl} = E_{ijlk} = E_{jikl} = E_{klij}$ τα ανεξάρτητα στοιχεία του τανυστή μειώνονται σε 21. Για την περίπτωση ισότροπου υλικού οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές είναι μόνο 2, το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος Poisson. Έτσι η εξίσωση (31) μπορεί να γραφεί με χρήση των μηχανικών σταθερών ως:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \quad (32)$$

ή με χρήση των σταθερών του Lamé ως:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (33)$$

Οι σχέσεις που συνδέουν τις μηχανικές σταθερές με τις σταθερές του Lamé είναι (Γεωργιάδης, 2003):

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, E = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda}, \nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} \quad (34)$$

Επίσης οι εξισώσεις (32) και (33) μπορούν να γραφούν και αντίστροφα ως:

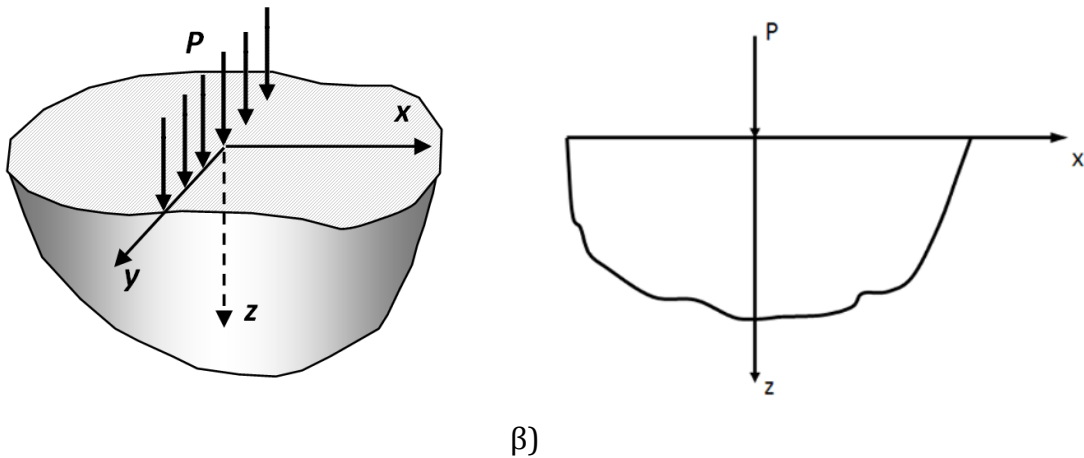
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk} \right] \quad (35)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (36)$$

2.5 Η περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης - Τασική συνάρτηση

Με όλα όσα αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους μπορούμε να αντιμετωπίσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα γραμμικής ελαστικότητας σε τρεις διαστάσεις για ομοιογενές και ισότροπο σώμα που φορτίζεται στατικά. Συγκεκριμένα οι βασικές εξισώσεις που οδηγούν στην επίλυση είναι: οι εξισώσεις ισορροπίας σχέση (12), οι σχέσεις τροπών μετατοπίσεων, σχέση (24), οι εξισώσεις συμβιβαστού, σχέση (29) και η καταστατική εξίσωση (ν. Hooke) σε οποιαδήποτε μορφή της (σχέσεις (33) και (35)).

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με την επίλυση προβλημάτων στο επίπεδο. Ειδικότερα, ένα πρόβλημα σε ημίχωρο όπως για παράδειγμα το πρόβλημα της άσκησης συγκεντρωμένου γραμμικού φορτίου (line load), παρουσιάζεται σε τρεις διαστάσεις όπως στο **Σχήμα 4α**. Λόγω συμμετρίας, η επίλυση του μπορεί να γίνει στο επίπεδο όπως φαίνεται στο **Σχήμα 4β**. Συνεπώς πρέπει να δοθούν οι βασικές εξισώσεις για την περίπτωση του επιπέδου και μάλιστα της επίπεδης παραμόρφωσης (plain strain), θεωρώντας ότι το σώμα εκτείνεται απείρως κατά την διεύθυνση του άξονα y και προς τις δύο φορές.



Σχήμα 4. Πρόβλημα Flamant σε: α) τρεις διαστάσεις β) δύο διαστάσεις.

Για την κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης θεωρούμε ότι η μετατόπιση κατά την διεύθυνση του άξονα κάθετα στον οποίο γίνεται η τομή, είναι μηδέν. Συνεπώς από την σχέση (24) συνεπάγεται κατευθείαν ότι:

$$u_z = 0 \Rightarrow \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (37)$$

Με χρήση των σχέσεων (34) και (35) έχουμε για τις τροπές:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2\mu} \left[(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{2\mu} \left[(1-\nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} \right] \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy}\end{aligned}\quad (38)$$

Και επίσης:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (39)$$

Για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν στην επίπεδη κατάσταση ο Airy (1862) εισήγαγε την τασική συνάρτηση. Η τασική συνάρτηση $\Phi(x,y)$ είναι μια συνάρτηση των x, y από την οποία με κατάλληλες παραγωγίσεις παίρνουμε τις τάσεις σε κάθε σημείο, αρκεί να ισχύουν ορισμένες συνθήκες όπως θα δούμε παρακάτω. Αν δεν υπάρχουν καθολικές δυνάμεις οι εξισώσεις ισορροπίας (12) στην επίπεδη περίπτωση γίνονται:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (40)$$

Με κατάλληλες παραγωγίσεις αποδεικνύεται (Barber, 2010) ότι υπάρχει συνάρτηση $\Phi(x,y)$ τέτοια ώστε:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (41)$$

Με χρήση των σχέσεων τάσης - τροπής (35), της εξίσωσης συμβιβαστού (27)α και των σχέσεων (41) η συνθήκη την οποία πρέπει να ικανοποιεί η $\Phi(x,y)$ ώστε να ισχύουν οι (41) είναι:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Phi = \quad (42)$$

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

η οποία ονομάζεται διαρμονική εξίσωση. Πρόκειται για μια ομογενή μερική διαφορική εξίσωση, ελλειπτικού τύπου.

Κεφάλαιο 3

3 Το πρόβλημα συγκεντρωμένης φόρτισης στην επιφάνεια ημιχώρου: θεωρητική και πειραματική μελέτη

3.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο η γνώση του εντατικού πεδίου στην επιφάνεια ή την διεπιφάνεια σε συστήματα επιστρώσεων είναι πολύ σημαντική. Πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν με το πρόβλημα αυτό για διάφορες περιπτώσεις φορτίσεως και το αντιμετώπισαν με διάφορες αναλυτικές ή αριθμητικές μεθόδους. Για παράδειγμα ο Burmister (1945) μελετώντας προβλήματα θεμελιώσεων, υπολόγισε αναλυτικά τις τάσεις και τις μετατοπίσεις για το τριδιάστατο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα κατανεμημένης επιφανειακής φόρτισης σε σύστημα επίστρωσης χρησιμοποιώντας ως τασική συνάρτηση συναρτήσεις Bessel. Ο Barovich και άλλοι (1964) μελέτησαν τις τάσεις σε σύστημα επίστρωσης που φορτίζεται με ελλειπτικά κατανεμημένο φορτίο με χρήση μετασχηματισμών Fourier και αριθμητική επίλυση. Ο Dhaliwal και ο Rua (Dhaliwal, 1970; Dhaliwal & Rua, 1970) χρησιμοποίησαν τα δυναμικά των Parkovich and Neuber για την έκφραση των πεδίων μετατοπίσεων με αρμονικές συναρτήσεις για να περιγράψουν το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα φόρτισης σε σύστημα επίστρωσης με χρήση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm και κατόπιν το επέλυσαν αριθμητικά για διάφορες μορφές συμμετρικών επίπεδων διεισδυτών.

Ο Chen (1971) επίσης χρησιμοποίησε την έκφραση των πεδίων μετατοπίσεων και τάσεων με αρμονικές συναρτήσεις σε προβλήματα αξονοσυμμετρίας και επίπεδης παραμόρφωσης. Οι Gupta και Walowit (1974) θεώρησαν το σύστημα επίστρωσης – υποβάθρου και παραβολικής μορφής διεισδυτή στην κατάσταση επίπεδης παραμόρφωση και το μελέτησαν με χρήση της τασικής συνάρτησης Airy, μετασχηματισμών Fourier και αριθμητική επίλυση. Ο Gupta και άλλοι (Gupta et al., 1973) με χρήση της ίδιας μεθοδολογίας μελέτησαν το πρόβλημα για ελλειπτικά κατανεμημένο φορτίο.

Από τις παραπάνω αναφορές παρατηρούμε ότι πολλοί ερευνητές χρησιμοποίησαν αναλυτικές μεθόδους και κυρίως τους μετασχηματισμούς Fourier για την μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος όμως για την επίλυση του οι υπολογισμοί των

μετατοπίσεων και των τάσεων ακόμα στον χώρο Fourier έγιναν αριθμητικά. Αναλυτική επίλυση μέχρι τέλους δεν χρησιμοποιούνταν παρόλο που είχε αναπτυχθεί από το 1951 από τον I.N. Sneddon. Ο Sneddon στο βιβλίο του «Fourier transforms» χρησιμοποίησε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης δυναμικού (τασική συνάρτηση Airy) για να υπολογίσει τις μετατοπίσεις και τις τάσεις σε ομοιογενές υλικό.

Οι λόγοι που συνέβαινε αυτό είναι αρκετοί. Κάποιους αναφέρουν στην εργασία τους οι Sosa and Bahar (1992): α) οι συνοριακές συνθήκες εκφράζονται μέσω φυσικών ποσοτήτων όπως οι μετατοπίσεις και όχι μέσω της συνάρτησης δυναμικού, β) ισχυρότερες απαιτήσεις σύγκλισης πρέπει να επιβληθούν στην συνάρτηση δυναμικού από ότι στις φυσικές ποσότητες και γ) με χρήση της μεθόδου αυτής προκύπτουν ολοκληρωτικές εκφράσεις οι οποίες δεν συγκλίνουν με την κλασική έννοια. Επίσης ο Amba-Rao στην εργασία του (1969) αναφέρει πως με την καθαρά αυστηρή μαθηματική έννοια, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μετασχηματισμοί Fourier στο πρόβλημα της γραμμικής φόρτισης σε ημίχωρο (Σχήμα 4α) γιατί τα εξωτερικά φορτία δεν τείνουν στο μηδέν όσο το y πηγαίνει σε μεγάλες τιμές.

Όμως επειδή όλα τα παραπάνω μειονεκτήματα έχουν ξεπεραστεί όπως αποδεικνύεται με την εργασία των Sosa and Bahar (1992) η μέθοδος της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης δυναμικού με μετασχηματισμό Fourier θα χρησιμοποιηθεί και στην εργασία αυτή μιας και απλοποιεί σε μεγάλο βαθμό την διαδικασία αναλυτικής επίλυσης και οδηγεί στην γρήγορη λύση του προβλήματος και στην πιο φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Άλλωστε, οι λύσεις που προκύπτουν με την μέθοδο αυτή, για θεμελιώδη προβλήματα, συμπεριφέρονται ως συναρτήσεις Green μπορούν δηλαδή να χρησιμοποιηθούν ως δομικά στοιχεία για την μελέτη περισσότερο πολύπλοκων προβλημάτων.

3.2 Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με τον μετασχηματισμό Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός και ανακαλύφθηκε από τον Joseph Fourier, ο οποίος τον δημοσίευσε στην εργασία του «La Theorie Analytique de la Chaleur» το 1822. Παρακάτω παρατίθενται οι ορισμοί και οι ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier, όπως αναπτύσσονται στο βιβλίο των Debnath και Bhatta (2007). Η διάσημη ολοκληρωτική φόρμουλα Fourier δίνεται από:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dk \quad (43)$$

και ισχύει για συναρτήσεις τμηματικά διαφορίσιμες σε κάθε πεπερασμένο διάστημα και απολύτως ολοκληρώσιμες από $(-\infty, \infty)$. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο $(-\infty, \infty)$ αν ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad (44)$$

Από την εξίσωση (43) μπορεί να ορισθεί ο ευθύς μετασχηματισμός Fourier ο οποίος συμβολίζεται με $\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$ ως:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (45)$$

όπου \mathcal{F} ο τελεστής του μετασχηματισμού Fourier που είναι γραμμικός τελεστής. Ικανή συνθήκη για να ισχύει η (45) είναι η $f(x)$ να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο $(-\infty, \infty)$. Αν ισχύει αυτό τότε το ολοκλήρωμα της (45) συγκλίνει.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ο οποίος συμβολίζεται με $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\xi)\} = f(x)$, δίνεται από:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\xi)\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (46)$$

όπου \mathcal{F}^{-1} ο τελεστής του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier.

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(\xi)$ έχει μεταξύ άλλων, τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\alpha) \mathcal{F}\{f(x-\alpha)\} = e^{-i\xi\alpha} \mathcal{F}\{f(x)\}$$

$$\beta) \mathcal{F}\{f(\alpha x)\} = \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$$

(47)

$$\gamma) \mathcal{F}\{e^{i\alpha x} f(x)\} = \hat{f}(\xi - \alpha)$$

$$\delta) \mathcal{F}\{\hat{f}(x)\} = f(-\xi)$$

Επίσης ισχύει το εξής θεώρημα: Εάν η $f(x)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και $f(x) \rightarrow 0$ όταν $|x| \rightarrow 0$ τότε:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = (i\xi)\mathcal{F}\{f(x)\} = i\xi \hat{f}(\xi) \quad (48)$$

Το θεώρημα αυτό επεκτείνεται στην περίπτωση που η $f(x)$ είναι n φορές παραγωγίσιμη και $f^{(k)}(x) \rightarrow 0$ όταν $|x| \rightarrow 0$ για $k=1,2,\dots, (n-1)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier για την n -οστή παράγωγο είναι:

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (i\xi)^n \mathcal{F}\{f(x)\} = (i\xi)^n \hat{f}(\xi) \quad (49)$$

Στο σημείο αυτό θα δώσουμε τον ορισμό της συνέλιξης δύο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$. Η συνέλιξη που συμβολίζεται με $(f * g)(x)$ ορίζεται ως:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi \quad (50)$$

Για τον μετασχηματισμό Fourier της συνέλιξης ισχύει το εξής θεώρημα: Αν $\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(\xi)$ και $\mathcal{F}\{g(x)\} = \hat{g}(\xi)$ τότε:

$$\mathcal{F}\{f(x)*g(x)\} = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \quad (51)$$

και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$f(x) * g(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\} \quad (52)$$

Με βάση όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο αυτή μέχρις εδώ, είμαστε σε θέση να επιλύσουμε μια μερική διαφορική εξίσωση σε ένα πρόβλημα αρχικών συνθηκών. Έστω η εξίσωση Laplace στο ημιεπίπεδο για την άγνωστη συνάρτηση $u(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \text{ με } -\infty < x < \infty \text{ και } y \geq 0 \quad (53)$$

και οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet:

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (54)$$

και

$$u(x, y) \rightarrow 0 \text{ για } |x| \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty \quad (55)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της $u(x, y)$ ως προς x είναι:

$$\hat{u}(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-i\xi x} dx \quad (56)$$

οπότε οι σχέσεις (53) έως (55), με χρήση της ιδιότητας (49), γίνονται:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dy^2} - \xi^2 \hat{u} = 0 \quad (57)$$

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), \quad \hat{u}(\xi, y) \rightarrow 0 \text{ για } y \rightarrow \infty \quad (58)$$

Για την συνήθη πλέον ομογενή διαφορική εξίσωση (57) με συνοριακή συνθήκη την (58) η λύση είναι:

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y} \quad (59)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης (52) στην (59) παίρνουμε:

$$u(x, y) = f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x - \xi)d\xi \quad (60)$$

όπου:

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-|\xi|y}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{(x^2 + y^2)} \quad (61)$$

Συνδυάζοντας τις (60) και (61), η άγνωστη συνάρτηση $u(x, y)$ προκύπτει από την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \quad \text{με } y > 0 \quad (62)$$

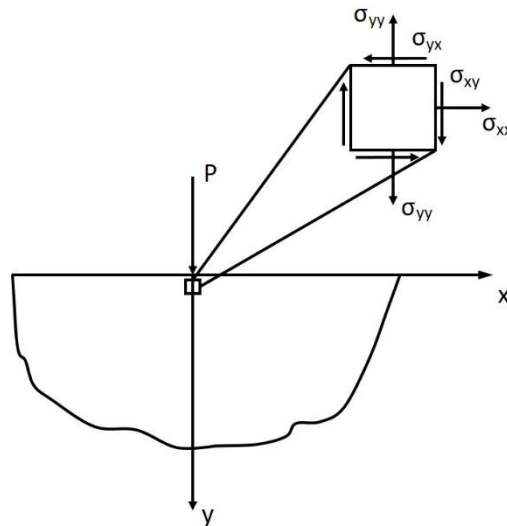
3.3 Το πρόβλημα κατακόρυφου συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια ελαστικού ημιχώρου

Στην παράγραφο αυτή μελετάται το πολύ γνωστό πρόβλημα Flamant, ως εισαγωγή στην επίλυση του πιο σύνθετου προβλήματος της φόρτισης ελαστικής επιστρώσεως σε ελαστικό ημίχωρο, από κάθετο συγκεντρωμένο φορτίο. Η μελέτη του γίνεται με τρεις τρόπους: αναλυτική επίλυση με χρήση των μετασχηματισμών Fourier και δύο πειραματικές μεθόδους. Η πειραματική μελέτη έγινε με τις οπτικές μεθόδους των καυστικών και της φωτοελαστικότητας με τις οποίες ασχολήθηκε ο γράφων κατά την διάρκεια του μαθήματος «Μηχανική των θραύσεων» στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Ως μέτρο σύγκρισης και επαλήθευσης των αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται η κλασική λύση του Flamant (1892) η οποία περιέχεται στα βιβλία, μεταξύ άλλων, των Love (1952), Fung (1965), Timoshenko και Goodier (1970) και Sadd (2009) αφού τυγχάνει εφαρμογής σε σημαντικά προβλήματα της μηχανικής των επαφών και της τριβολογίας, ως δομικό στοιχείο (συναρτήσεις Green) για την διαμόρφωση πολύπλοκων προβλημάτων επαφής (π.χ.: Johnson, 1985, Hills και Nowell, 1994, Barber, 2010).

3.3.1 Αναλυτική επίλυση του προβλήματος

Με βάση όσα αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο θα παρουσιαστεί εδώ η λύση για το πεδίο των μετατοπίσεων στο Flamant με χρήση των μετασχηματισμών Fourier. Θεωρούμε τον ημίχωρο ($-\infty < x < \infty$ και $y > 0$) όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5**, υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, όπου την επιφάνεια ασκείται κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο μέτρου P . Στο σημείο εφαρμογής του φορτίου τοποθετείται η αρχή ($x = y = 0$) του Καρτεσιανού συστήματος αναφοράς x, y . Οι διαστάσεις του συγκεντρωμένου φορτίου στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης είναι $(\text{force})(\text{length})^{-1}$.



Σχήμα 5. Ορισμός του προβλήματος συγκεντρωμένου φορτίου σε ημίχωρο. Σε μεγέθυνση παρουσιάζεται η θετική φορά των τάσεων σε στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο ακριβώς κάτω από την επιφάνεια του.

Οι συνοριακές συνθήκες για το συγκεκριμένο πρόβλημα κατά μήκος της επιφάνειας $y = 0$ γράφονται ως:

$$\sigma_{yy}(x,0) = -P\delta(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (63)$$

$$\sigma_{yx}(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (64)$$

όπου $\delta(x)$ είναι η κατανομή Dirac δέλτα.

Έστω ότι υπάρχει μια άγνωστη, αυθαίρετη συνάρτηση $\Phi(x, y)$ η οποία θα παίζει τον ρόλο της συνάρτησης δυναμικού για το τασικό πεδίο. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει όπως είδαμε στην παράγραφο 2.5 να ισχύει η διαρμονική εξίσωση, δηλαδή:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (65)$$

Για να βρούμε την $\Phi(x, y)$ αρκεί να επιλύσουμε την (65) χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 3.2. Ορίζουμε τον ευθύ μετασχηματισμό Fourier και τον αντίστροφο του ως:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx \quad (66)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad (67)$$

όπου i ο φανταστικός μοναδιαίος αριθμός: $i \equiv (-1)^{-1/2}$.

Με βάση την (66) και χρήση της ιδιότητας (49) μετασχηματίζουμε την (65) ως προς x και καταλήγουμε στην συνήθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^4 \hat{\Phi}}{dy^4} - 2\xi^2 \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} + \xi^4 \hat{\Phi} = 0 \quad (68)$$

όπου $\hat{\Phi}(\xi, y) = \mathcal{F}\{\Phi(x, y)\}$.

Η εξίσωση (68) ως μια 2ας τάξης, ομογενής, γραμμική δ.ε. με σταθερούς συντελεστές, έχει γενική λύση:

$$\hat{\Phi}(\xi, y) = (C_1 + yC_2)e^{-|\xi|y} + (C_3 + yC_4)e^{|\xi|y} \quad (69)$$

όπου τα C_1, C_2, C_3, C_4 είναι τυχαίες σταθερές συναρτήσει της παραμέτρου ξ .

Επειδή υπάρχει η απαίτηση το τασικό πεδίο να μηδενίζεται όσο το y τείνει στο άπειρο, αυτό συνεπάγεται ότι και η τασική συνάρτηση πρέπει να μηδενίζεται. Παρατηρώντας την (69) βλέπουμε ότι οι όροι που περιλαμβάνουν τις σταθερές C_3, C_4 δεν μηδενίζονται καθόσον το $y \rightarrow \infty$. Συνεπώς πρέπει να ισχύει ότι $C_3 = C_4 = 0$ άρα η (69) γίνεται:

$$\hat{\Phi}(\xi, y) = C_1 e^{-|\xi|y} + y C_2 e^{-|\xi|y} \quad (70)$$

Για να υπολογίσουμε της εναπομείνουσες 2 σταθερές C_1 και C_2 θα χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες (63) και (64) οι οποίες δίνονται μέσω των τάσεων σ_{yy} και σ_{yx} . Συνεπώς μετασχηματίζοντας τις εξισώσεις (41) μέσω (66) παίρνουμε:

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2}, \quad \hat{\sigma}_{yy} = (i\xi)^2 \hat{\Phi}, \quad \hat{\sigma}_{yx} = -(i\xi) \frac{d\hat{\Phi}}{dy} \quad (71)$$

Επίσης έχουμε, μετασχηματίζοντας τις (63) και (64):

$$\hat{\sigma}_{yy}(x, 0) = -P, \quad \hat{\sigma}_{yx}(x, 0) = 0 \quad (72)$$

Παραγωγίζοντας την (70) και αντικαθιστώντας στις (71) και το αποτέλεσμα αυτό στις (72) έχουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τις σταθερές C_1, C_2 , το οποίο μας δίνει:

$$C_1 = \frac{P}{\xi^2}, \quad C_2 = \frac{P}{\sqrt{\xi^2}} \quad (73)$$

Οπότε η (70) με αντικατάσταση των παραπάνω θα γίνει:

$$\hat{\Phi}(\xi, y) = \frac{P}{\xi^2} (1 + y|\xi|) e^{-|\xi|y} \quad (74)$$

Σημειώνεται ότι η $\hat{\Phi}$ είναι άρτια συνάρτηση του ξ .

Εφαρμόζουμε στην (74) τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, ώστε να ανακτήσουμε την τασική συνάρτηση στον φυσικό της χώρο οπότε από την σχέση (67) έχουμε:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi \quad (75)$$

Λόγω της ταυτότητας του Euler: $e^{-i\xi x} = \cos(\xi x) - i \sin(\xi x)$ και της αρτιότητας της $\hat{\Phi}$ η (75) γίνεται:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{\Phi}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi \quad (76)$$

Με χρήση της (76), των εκφράσεων (41) υπολογίζονται οι εκφράσεις των τάσεων ως ακολούθως, για παράδειγμα για την σ_{xx} :

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P}{\xi^2} (1 + y\xi) e^{-\xi y} \cos(\xi x) d\xi \right) \quad (77)$$

όπου η απόλυτη τιμή μπορεί να αφαιρεθεί διότι δουλεύουμε στο διάστημα $(0, \infty)$. Εισάγοντας την παράγωγο μέσα στο ολοκλήρωμα και παραγωγίζοντας την προς ολοκλήρωση ποσότητα έχουμε:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\xi^2} (1 + y\xi) e^{-\xi y} \cos(\xi x) \right) d\xi \\ &= -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - y\xi) e^{-\xi y} \cos(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (78)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί ότι για να μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά σε κλειστή μορφή το ολοκλήρωμα (78) (ολοκλήρωμα improper) πρέπει η ολοκληρωτέα ποσότητα να είναι φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης. Εδώ, αν θέσουμε $y = 0$ για να διαπιστώσουμε πως συμπεριφέρεται η έκφραση ως προς ξ , βλέπουμε ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα γίνεται $\cos(\xi x)$ η οποία είναι φραγμένη στα άκρα του

ολοκληρώματος $(0, \infty)$ στο διάστημα $[-1, 1]$. Συνεπώς μπορούμε να προχωρήσουμε στον αναλυτικό υπολογισμό του ολοκληρώματος.

Με όμοιο τρόπο για τις άλλες δύο τάσεις και την βοήθεια του προγράμματος Mathematica καταλήγουμε στις τελικές εκφράσεις:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= \frac{-2Pxy^2}{\pi(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_{yx}(x, y) &= \frac{-2Pxy^2}{\pi(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_{yy}(x, y) &= \frac{-2Py^3}{\pi(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}\quad (79)$$

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (79) είναι πανομοιότυπες με αυτές που δίνονται στην βιβλιογραφία που αναφέρθηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου.

Για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις τροπών – μετατοπίσεων και τον ν. Hooke στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης. Θεωρούμε ότι ο ημίχωρος συμπεριφέρεται ελαστικά, έχοντας μέτρο διάτμησης μ και λόγο Poisson ν . Από τις σχέσεις (25) και (26) για το σύστημα αναφοράς x, y έχουμε:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (80)$$

Με χρήση των (80) και του ν. Hooke στην μορφή των (38) έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{1}{2\mu} \left[(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} \right] \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \frac{1}{2\mu} \left[(1-\nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} \right] \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{1}{\mu} \sigma_{xy}\end{aligned}\quad (81)$$

Μετασχηματίζοντας την (81) με τον μετασχηματισμό Fourier και αντικαθιστώντας τις τάσεις με τις εκφράσεις (71) παίρνουμε για τις μετασχηματισμένες μετατοπίσεις:

$$\begin{aligned}\hat{u}_x(\xi, y) &= \frac{1}{2\mu\xi} \left[i(1-\nu) \frac{d^2\hat{\Phi}}{dy^2} + i\nu\xi^2\hat{\Phi} \right] \\ \hat{u}_y(\xi, y) &= \frac{1}{2\mu\xi^2} \left[(1-\nu) \frac{d^3\hat{\Phi}}{dy^3} - (2-\nu)\xi^2 \frac{d\hat{\Phi}}{dy} \right]\end{aligned}\quad (82)$$

Από τις (82) και την μετασχηματισμένη τασική συνάρτηση που δίνεται από την (74) παίρνουμε τελικά τις μετασχηματισμένες μετατοπίσεις ως:

$$\begin{aligned}\hat{u}_x(\xi, y) &= \frac{iP(2\nu-1+y|\xi|)e^{-y|\xi|}}{2\mu\xi} \\ \hat{u}_y(\xi, y) &= \frac{P(2(1-\nu)+y|\xi|)e^{-y|\xi|}}{2\mu|\xi|}\end{aligned}\quad (83)$$

Για να αντιστρέψουμε τις μετατοπίσεις στον φυσικό χώρο μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier θα πρέπει να ελέγξουμε την αρτιότητα τους ως προς ξ και την ύπαρξη του ολοκληρώματος στο διάστημα $(-\infty, \infty)$. Θέτοντας το $y=0$ όπως και προηγουμένως οι σχέσεις (83) γίνονται:

$$\begin{aligned}\hat{u}_x(\xi, 0) &= \frac{iP(2\nu-1)}{2\mu\xi} \\ \hat{u}_y(\xi, 0) &= \frac{P(1-\nu)}{\mu|\xi|}\end{aligned}\quad (84)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε από την (84) ότι η \hat{u}_x είναι περιττή συνάρτηση του ξ ενώ η \hat{u}_y άρτια. Εφαρμόζουμε στην (84) τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, σχέση (67) και την ταυτότητα του Euler και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}u_x(x, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iP(2\nu-1)}{2\mu\xi} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{iP(2\nu-1)}{2\mu\xi} (-i \sin(\xi x)) d\xi \\ u_y(x, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(1-\nu)}{\mu|\xi|} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(1-\nu)}{\mu\xi} \cos(\xi x) d\xi\end{aligned}\quad (85)$$

Οι σχέσεις (85) εκφράζουν τις μετατοπίσεις της επιφάνειας. Η πρώτη από τις δύο μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά καθώς η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι φραγμένη και στο 0 και στο ∞ ως προς ξ . Πράγματι είναι:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\sin(\xi x)}{\xi} = 0 \quad (86)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sin(\xi x)}{\xi} = 1$$

Η δεύτερη από τις (85) όμως δεν συγκλίνει, μιας και η ολοκληρωτέα ποσότητα απειρίζεται για $\xi = 0$:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\cos(\xi x)}{\xi} = 0 \quad (87)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\cos(\xi x)}{\xi} = \infty$$

Συνεπώς το u_y υπολογίζεται υπό την έννοια του πεπερασμένου μέρους (finite part) και οι σχέσεις (85) με χρήση του Mathematica τελικά δίνουν:

$$u_x(x, 0) = \frac{P(2\nu - 1)}{4\mu} \text{sign}(x) \quad (88)$$

$$u_y(x, 0) = \frac{P(1 - \nu)}{\pi\mu} \ln|x|$$

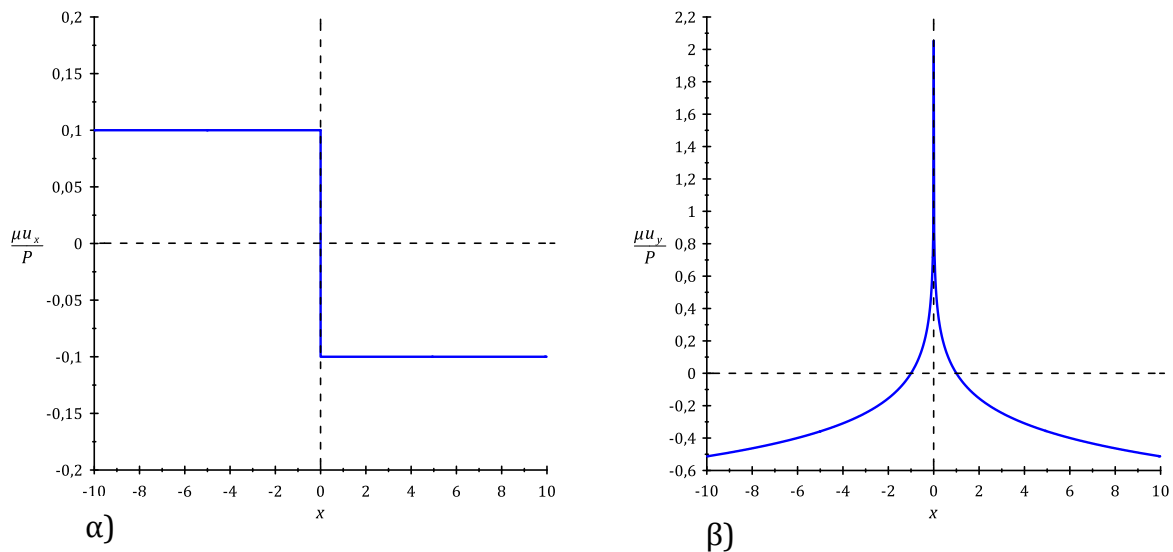
ενώ οι μετατοπίσεις για κάθε σημείο στον ημίσφαιρο δίνονται από:

$$u_x(x, y) = \frac{P}{2\pi\mu} \left[\frac{xy}{x^2 + y^2} - (1 - 2\nu) \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right] \quad (89)$$

$$u_y(x, y) = \frac{P}{2\pi\mu} \left[\frac{y^2}{x^2 + y^2} - (1 - \nu) \ln(x^2 + y^2) \right]$$

Σημειώνεται ότι στις εξισώσεις (89) και (90) το u_y περιλαμβάνει γενικά και έναν σταθερό όρο που εκφράζει την μετατόπιση στερεού σώματος η οποία εδώ αμελείται.

Στο **Σχήμα 6** βλέπουμε τα διαγράμματα των οριζόντιων και των κατακόρυφων επιφανειακών μετακινήσεων όπως προκύπτουν από τις σχέσεις (88). Στο **Σχήμα 6α** παρατηρούμε την ασυνέχεια των οριζόντιων μετατοπίσεων στο $x=0$. Στο **Σχήμα 6β** παρατηρούμε ότι οι μετατοπίσεις u_y απειρίζονται και στο σημείο $x=0$ και για $x \rightarrow \infty$.



Σχήμα 6. Αδιαστατοποιημένα διαγράμματα για τις επιφανειακές μετατοπίσεις του προβλήματος Flamant: α) οριζόντιες: $\frac{\mu u_x(x, y)}{P}$, β) κατακόρυφες: $\frac{\mu u_y(x, y)}{P}$.

Στο **Σχήμα 7** (α) παρουσιάζονται οι ισοτασικές καμπύλες της τάσης σ_r από την λύση Flamant για το τασικό πεδίο, όπως δίνεται από την σχέση (90) σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) (Sadd, 2009) έχοντας την μορφή κύκλων διαμέτρου d που εφάπτονται στην αρχή των αξόνων. Για κάθε ακτίνα r η τάση γίνεται μέγιστη και σταθερή στην περιφέρεια του κύκλου, ενώ όσο προσεγγίζει την επιφάνεια τείνει προς το μηδέν, εκτός του σημείου εφαρμογής του φορτίου όπου τείνει στο άπειρο.

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \sin \theta \quad (90)$$

Στην σχέση (90) μπορούμε να καταλήξουμε και από τις σχέσεις (79) αν τις μετασχηματίσουμε στο πολικό σύστημα συντεταγμένων. Οι σχέσεις μεταξύ των δύο συστημάτων είναι:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (91)$$

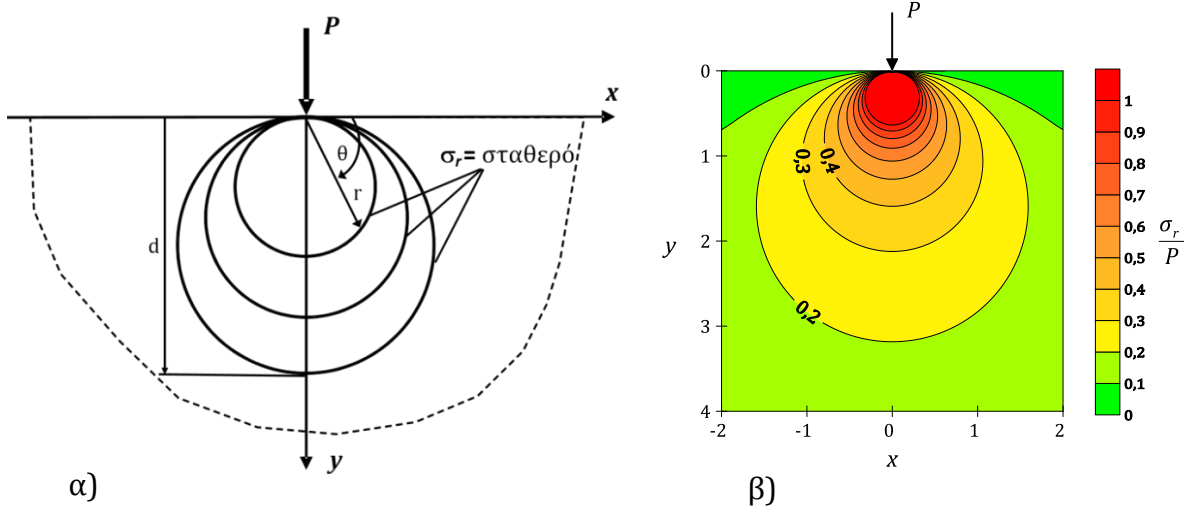
Αν αντικαταστήσουμε την (91) στις (79) θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_r \sin^2 \theta \\ \sigma_{yx} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{yy} &= \sigma_r \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (92)$$

Από την (92) είναι προφανές ότι:

$$\sigma_r = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \quad (93)$$

Στο **Σχήμα 7** (β) παρουσιάζεται το διάγραμμα αδιαστατοποιημένων ισοτασικών καμπύλων για την ακτινική τάση σ_r/P του προβλήματος όπως προκύπτει από τις σχέσεις (79) και (93).



Σχήμα 7. Διαγράμματα ισοτασικών καμπυλών: α) ακτινικής τάσης από την αξονοσυμμετρική επίλυση Flamant (Sadd, 2009), β) ακτινικής τάσης με αδιαστατοποίηση σ_r/P από την επίλυση με μετασχηματισμούς Fourier.

3.3.2 Οπτική μέθοδος των Καυστικών

Το πρόβλημα του κατακόρυφου συγκεντρωμένου φορτίου σε ημίχωρο μοντελοποιήθηκε στο εργαστήριο Φωτοελαστικότητας του τομέα Μηχανικής, ΕΜΠ, χρησιμοποιώντας ένα λεπτό, επίπεδο τεμάχιο από Plexiglas στο οποίο ασκείται σημειακά αξονικό φορτίο όπως φαίνεται στην **Εικόνα 4**. Στο σημείο επαφής της ακμής προσπίπτει η ακτίνα λέιζερ όπως φαίνεται στην **Εικόνα 5**, η οποία έχει προκύψει από κατάλληλη διάταξη που περιλαμβάνει τον προβολέα λέιζερ, το expander το οποίο φαρδαίνει την δέσμη και δύο φακούς: ο ένας κάνει την δέσμη παράλληλη και ο δεύτερος την εστιάζει. Στο συγκεκριμένο πείραμα η εστία του λέιζερ βρίσκεται εμπρός από το δοκίμιο και σε απόσταση 37 cm από αυτό.



Εικόνα 4. Διάταξη φόρτισης του δοκιμίου.

Οι ακτίνες του λέιζερ που ανακλώνται από το δοκίμιο συλλαμβάνονται σε κατάλληλο πέτασμα (**Εικόνα 6α**) το οποίο είναι τοποθετημένο απέναντι από το δοκίμιο σε απόσταση 2,02 μέτρων και φωτογραφίζονται προκειμένου να μετρηθούν αργότερα (**Εικόνα 6β**). Από τις φωτογραφίες που ελήφθησαν μπορούν να μετρηθούν απ' ευθείας οι μέγιστες διαμέτροι των καυστικών. Η μέγιστη διάμετρος της καυστικής D_{max} συνδέεται με το φορτίο μέσω της σχέσεως (Παπαδόπουλος, 2015):

$$P = \frac{4\pi D_{\max}^3}{81\sqrt{3}d\varepsilon\lambda_m^2 c_{r,t,f}} \quad (94)$$

όπου d το πάχος του δοκιμίου, λ_m ο συντελεστής μεγέθυνσης, $c_{r,t,f}$ η τασεοπτική σταθερά η οποία εξαρτάται από την ακτίνα ανάκλασης. Εδώ επειδή εξετάζουμε την καυστική που προκύπτει από την ανάκλαση της έμπροσθεν επιφάνειας παίρνουμε την σταθερά c_f η οποία δίνεται από την $c_f = \frac{V}{E}$. Το ε εξαρτάται επίσης από την ακτίνα ανάκλασης και εδώ $\varepsilon = 1$.



Εικόνα 5. Η ακτίνα λέιζερ προσπίπτει στο ιδιόμορφο σημείο.

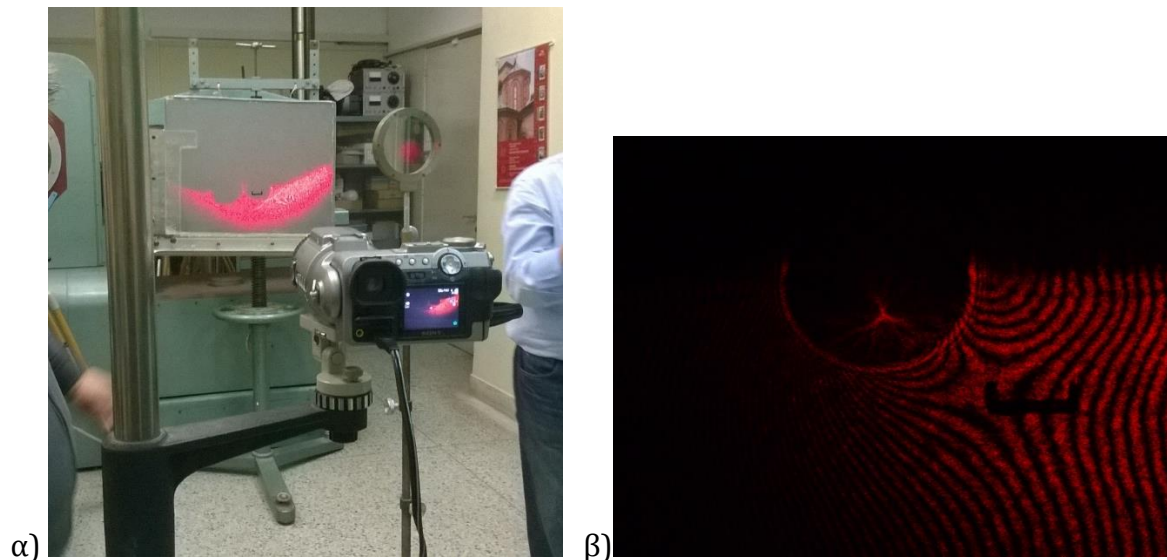
Επομένως μέσω των σχέσεων (90) και (94) μπορούμε να βρούμε το άγνωστο φορτίο P και ακολούθως την σ_r σε οποιοδήποτε σημείο (r, θ) οσοδήποτε κοντά στο σημείο εφαρμογής της δύναμews. Στον **Πίνακας 2** παρουσιάζεται η αλλαγή της τάσης για σημεία πολύ κοντά στο σημείο εφαρμογής, με το φορτίο που υπολογίστηκε από την καυστική της **Εικόνα 6** (β) η οποία έχει $D_{\max} = 36 \text{ mm}$. Το φορτίο υπολογίστηκε με βάση τα στοιχεία του **Πίνακας 1** και την σχέση (94) στα 159.2 N.

Πίνακας 1. Σταθερές και παράμετροι υπολογισμού του φορτίου από την σχέση (92).

λ_m (mm)	c_f (mm ² /N)	d (mm)	D_{max} (mm)	P (N)
6.46	0.000109	2.8	36	159.2

Πίνακας 2. Τιμές της τάσης σε διάφορα σημεία στην επιφάνεια.

r (mm)	θ (μοίρες)	σ_r (MPa)
0.001	0.1	101352.78
0.1	0.1	1013.53
1	0.1	101.35
2	0.1	50.67



Εικόνα 6. α) Η ανακλώμενη καυστική εμφανίζεται στο πέτασμα και φωτογραφίζεται.
β) Καυστική που προέκυψε από την ανάκλαση της εμπρός επιφάνειας του δοκιμίου.

Από το συγκεκριμένο πείραμα συμπεραίνουμε ότι το σημείο εφαρμογής της δύναμης αποτελεί ένα ιδιόμορφο σημείο, όχι με την έννοια του απειρισμού των τάσεων όπως προβλέπει η θεωρία, αφού στο σημείο αυτό η τάση είναι πεπερασμένη και μπορεί να υπολογιστεί, αλλά επειδή η τάση στο σημείο αυτό γίνεται πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με οποιοδήποτε άλλο σημείο του δοκιμίου. Αυτό συμβαίνει γιατί η θεωρητική επίλυση κάνει την παραδοχή ότι το φορτίο ασκείται σε ένα σημείο (line load) ενώ στην πράξη αυτό δεν μπορεί να συμβεί, καθώς πάντα το φορτίο θα ασκείται σε μια μικρή επιφάνεια.

3.3.3 Οπτική μέθοδος της φωτοελαστικότητας

Το πρόβλημα της εφαρμογής κατακόρυφου συγκεντρωμένου θλιπτικού φορτίου σε ημίχωρο μοντελοποιήθηκε στο εργαστήριο χρησιμοποιώντας ένα λεπτό, επίπεδο τεμάχιο από ρητίνη στο οποίο ασκείται σημειακά αξονικό φορτίο (**Εικόνα 7**). Η επιλογή της ρητίνης ως υλικού του δοκιμίου έγινε διότι πρόκειται για ένα υλικό που είναι διαφανές και οπτικά ισότροπο αλλά παρουσιάζει οπτική ανισοτροπία καθώς φορτίζεται. Οι ιδιότητες αυτές το καθιστούν κατάλληλο για την μέθοδο της φωτοελαστικότητας.

Η εφαρμογή φορτίου στο δοκίμιο προκαλεί την εμφάνιση κροσσών συμβολής επάνω στο δοκίμιο (**Εικόνα 8**) οι οποίοι γίνονται αντιληπτοί με το πολωσισκόπιο. Ο γεωμετρικός τύπος των σημείων του σώματος στα οποία η διαφορά των κυρίων τάσεων είναι σταθερή καλείται κροσσός και η τάξη του συμβολίζεται N . Οι κροσσοί αυτοί καλούνται και ισόχρωμες καμπύλες. Εάν το χρησιμοποιούμενο φως είναι μονοχρωματικό τότε οι ισόχρωμες καμπύλες είναι σκοτεινές (μαύρες) γραμμές ενώ εάν το φως είναι λευκό τότε οι ισόχρωμες είναι έγχρωμες γραμμές με διαφορετική διαδοχή χρωμάτων (**Εικόνες 9-10**).

Κατά τον φωτοτασεοπτικό νόμο, εφόσον το σώμα φορτίζεται στην ελαστική περιοχή, η εμφανιζόμενη διπλοδιάθλαση (οπτική ανισοτροπία) είναι ανάλογη της διαφοράς των κυρίων τάσεων σε κάθε σημείο του σώματος, σύμφωνα με την σχέση (Παπαδόπουλος, 2007):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = N \frac{f_{\sigma}}{2d} \quad (95)$$

όπου $f_{\sigma} = \frac{\lambda}{c_{\sigma}}$ η φωτοελαστική σταθερά του υλικού του σώματος η οποία εξαρτάται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας και υπολογίζεται πειραματικά για κάθε υλικό και για κάθε ακτινοβολία μήκους κύματος λ (μονοχρωματικό φως), d το πάχος του σώματος. Σύμφωνα με την σχέση (95), οι φωτοελαστικοί κροσσοί είναι ισοτασικές περιοχές που έχουν την αυτή μέγιστη διατμητική τάση.



Εικόνα 7. Διάταξη φόρτισης του δοκιμίου από ρητίνη.



Εικόνα 8. Εμφάνιση έγχρωμων ισόχρωμων κροσσών κατά την φόρτιση του δοκιμίου λόγω φωτισμού με λευκό φως.

Από την λύση Flamant έχουμε, (Παπαδόπουλος, 2007):

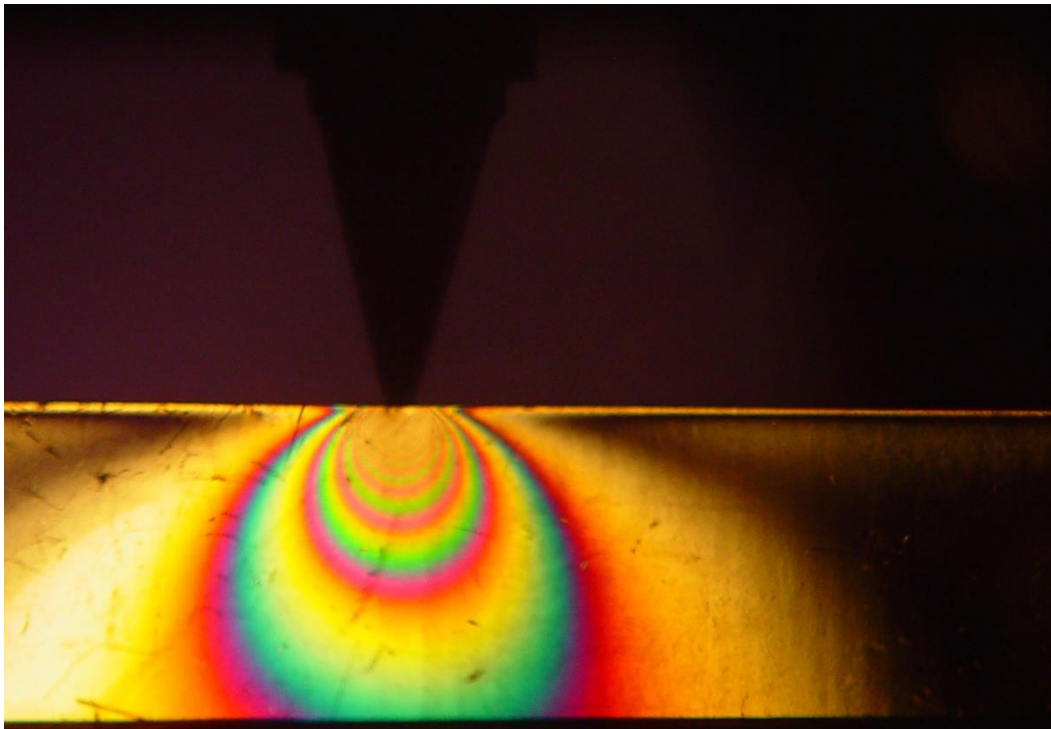
$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}, \quad \sigma_\theta = 0 \quad (96)$$

Οπότε, από την σχέση (95) παίρνουμε:

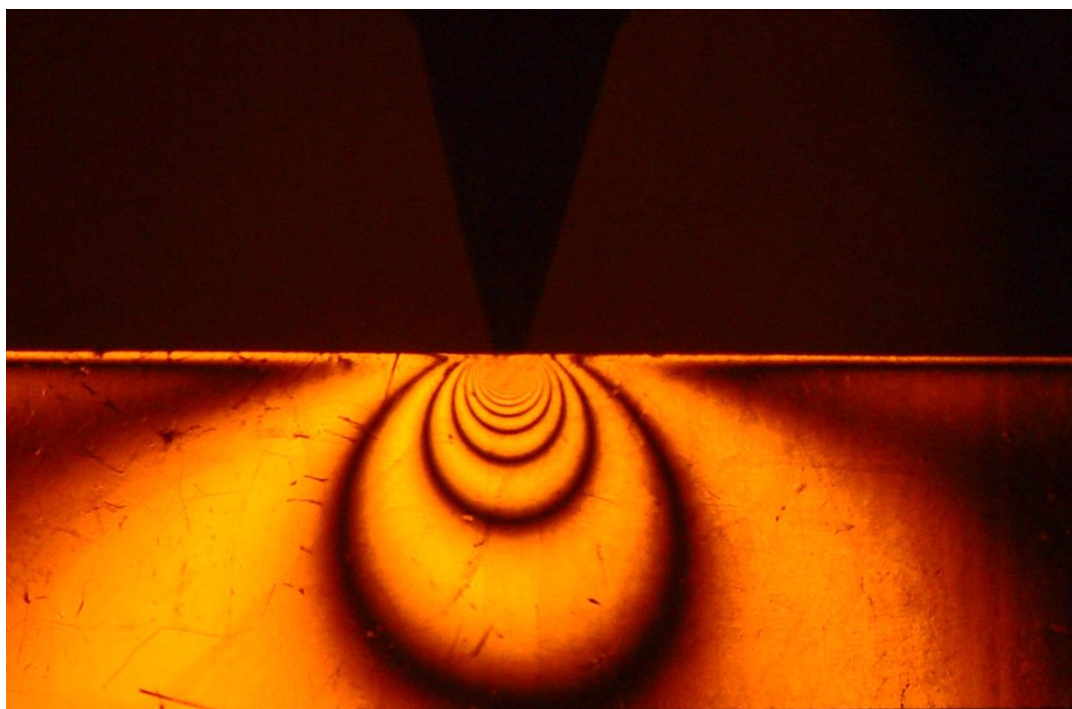
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_r}{2} = -\frac{P \cos \theta}{\pi r} = \frac{N f_\sigma}{2d} \quad (97)$$

Μέσω της σχέσης (97) έχουμε την συσχέτιση των οπτικών ιδιοτήτων του δοκιμίου N, f_σ με το πεδίο τάσεων.

Παρατηρώντας το **Σχήμα 7** και τις **Εικόνες 9** και **10** διαπιστώνουμε πλήρη ταύτιση των θεωρητικά υπολογιζόμενων τασικών καμπυλών με τις πειραματικά λαμβανόμενες ισόχρωμες καμπύλες. Βέβαια από το συγκεκριμένο πείραμα συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος της φωτοελαστικότητας παρέχει σημαντικές πληροφορίες για την κατανομή των τάσεων σε απόσταση από το σημείο εφαρμογής της δύναμης και όχι πλησίον αυτού, καθώς σε αυτήν την περιοχή η καταμέτρηση κροσσών είναι αδύνατη. Για τον λόγο αυτό, η μέθοδος της φωτοελαστικότητας θεωρείται μια μέθοδος πεδίου.



Εικόνα 9. Φωτογραφία έγχρωμων ισόχρωμων κροσσών – ισοτασικών καμπυλών κατά την φόρτιση του δοκιμίου (λευκό φως).



Εικόνα 10. Φωτογραφία μαύρων ισόχρωμων κροσσών – ισοτασικών καμπυλών κατά την φόρτιση του δοκιμίου (μονοχρωματικό φως).

Κεφάλαιο 4

4 Το πρόβλημα κατακόρυφου συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια επιστρώσεως

4.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο η γνώση του εντατικού πεδίου σε συστήματα επιστρώσεων είναι πολύ σημαντική. Στο κεφάλαιο αυτό θα επιχειρηθεί η επίλυση του προβλήματος φόρτισης ελαστικής επιστρώσεως από κατακόρυφη δύναμη σε δύο στάδια: στο πρώτο στάδιο επιλύεται το πρόβλημα για την επίστρωση επάνω σε απαραμόρφωτο υπόβαθρο και στο δεύτερο, η επίστρωση θεωρείται επάνω σε ελαστικό υπόβαθρο. Και στις δύο περιπτώσεις η επίλυση γίνεται με χρήση της τασικής συνάρτησης και των μετασχηματισμών Fourier όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο.

4.2 Το πρόβλημα κατακόρυφης σημειακής φόρτισης για το σύστημα επίστρωσης επάνω σε απαραμόρφωτο υπόβαθρο

Θεωρούμε επίστρωση άπειρου μήκους και πάχους h ($-\infty < x < \infty$ και $0 < y < h$) επάνω σε απαραμόρφωτο (rigid) υπόβαθρο, στην επιφάνεια της οποίας ασκείται υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο μέτρου P όπως φαίνεται στο Σχήμα 8. Στο σημείο εφαρμογής του φορτίου τοποθετείται και η αρχή ($x = y = 0$) του Καρτεσιανού συστήματος αναφοράς. Οι διαστάσεις του συγκεντρωμένου φορτίου στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης είναι (force)(length)⁻¹. Οι μηχανικές σταθερές της επίστρωσης είναι το μέτρο διάτμησης $\mu=1$ N/m² και ο λόγος Poisson $\nu=0,33$ ενώ το πάχος h λαμβάνεται ίσον με 1 m.

Οι συνοριακές συνθήκες για το συγκεκριμένο πρόβλημα κατά μήκος του άξονα x για $y = 0$ γράφονται ως:

$$\sigma_{yy}(x,0) = -P\delta(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (98)$$

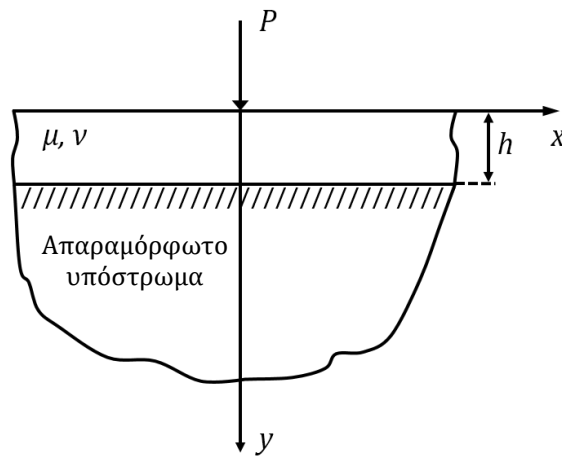
$$\sigma_{yx}(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (99)$$

όπου $\delta(x)$ είναι η κατανομή Dirac δέλτα.

Για την διεπιφάνεια μεταξύ επίστρωσης και απαραμόρφωτου ημιχώρου ($y=h$) ισχύουν οι εξής συνοριακές συνθήκες λόγω της ακαμψίας του υποβάθρου:

$$u_x(x, h) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (100)$$

$$u_y(x, h) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (101)$$



Σχήμα 8. Φόρτιση της ελαστικής επιστρώσεως σε απαραμόρφωτο υπόστρωμα άπειρων διαστάσεων από κατακόρυφη δύναμη.

Έστω η άγνωστη, αυθαίρετη συνάρτηση $\Phi(x, y)$ για την οποία ισχύει η διαρμονική εξίσωση:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (102)$$

Ορίζουμε τον ευθύ μετασχηματισμό Fourier και τον αντίστροφο του ως:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx \quad (103)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad (104)$$

όπου i ο φανταστικός μοναδιαίος αριθμός: $i \equiv (-1)^{-1/2}$.

Μετασχηματίζουμε την (102) ως προς x με χρήση της ιδιότητας (49) και καταλήγουμε στην συνήθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^4 \hat{\Phi}}{dy^4} - 2\xi^2 \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} + \xi^4 \hat{\Phi} = 0 \quad (105)$$

όπου $\hat{\Phi}(\xi, y) = \mathcal{F}\{\Phi(x, y)\}$.

Η εξίσωση (105) ως μια 2ας τάξης, ομογενής, γραμμική δ. ε. με σταθερούς συντελεστές, έχει γενική λύση:

$$\hat{\Phi}(\xi, y) = (C_1 + yC_2)e^{-|\xi|y} + (C_3 + yC_4)e^{|\xi|y} \quad (106)$$

όπου τα C_1, C_2, C_3, C_4 είναι τυχαίες σταθερές συναρτήσεως της παραμέτρου ξ .

Για να υπολογίζουμε τις σταθερές θα χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες (98) - (101). Οι μετασχηματισμένες τάσεις, όπως και στην παράγραφο 3.3 σχέση (71) δίνονται από:

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2}, \quad \hat{\sigma}_{yy} = (i\xi)^2 \hat{\Phi}, \quad \hat{\sigma}_{yx} = -(i\xi) \frac{d\hat{\Phi}}{dy} \quad (107)$$

Παρομοίως οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις από την σχέση (82) είναι:

$$\hat{u}_x(\xi, y) = \frac{1}{2\mu\xi} \left[i(1-\nu) \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} + i\nu\xi^2 \hat{\Phi} \right] \quad (108)$$

$$\hat{u}_y(\xi, y) = \frac{1}{2\mu\xi^2} \left[(1-\nu) \frac{d^3 \hat{\Phi}}{dy^3} - (2-\nu)\xi^2 \frac{d\hat{\Phi}}{dy} \right]$$

Το προς επίλυση σύστημα τεσσάρων αγνώστων και τεσσάρων εξισώσεων είναι:

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_{yy}(\xi, 0) &= -P \\
 \hat{\sigma}_{yx}(\xi, 0) &= 0 \\
 \hat{u}_x(\xi, h) &= 0 \\
 \hat{u}_y(\xi, h) &= 0
 \end{aligned} \tag{109}$$

το οποίο με χρήση του λογισμικού Mathematica δίνει:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{P\left(e^{2h\sqrt{\xi^2}}\left(e^{2h\sqrt{\xi^2}}(-3+4\nu)+2h\left(-h\xi^2+\sqrt{\xi^2}\right)\right)-\alpha_1(\xi)\right)}{\xi^2\pi_1(\xi)} \\
 C_2 &= -\frac{P\left(e^{6h\sqrt{\xi^2}}\left(-3h\xi^2+4h\nu\xi^2+\beta_1(\xi)\right)+e^{2h\sqrt{\xi^2}}\left(h\xi^2-4h\nu\xi^2+\beta_2(\xi)\right)+e^{4h\sqrt{\xi^2}}\left(-6h\xi^2+8h\nu\xi^2+\beta_3(\xi)\right)\right)}{4\sqrt{\xi^2}\pi_2(\xi)} \\
 C_3 &= \frac{P\left(3-4\nu+\alpha_1(\xi)+2he^{2h\sqrt{\xi^2}}\left(h\xi^2+\sqrt{\xi^2}\right)\right)}{\xi^2\pi_1(\xi)} \\
 C_4 &= \frac{P\left(3h\xi^2-4h\nu\xi^2+\beta_1(\xi)+e^{4h\sqrt{\xi^2}}\left(-h\xi^2+4h\nu\xi^2+\beta_2(\xi)\right)+e^{2h\sqrt{\xi^2}}\left(6h\xi^2-8h\nu\xi^2+\beta_3(\xi)\right)\right)}{4\sqrt{\xi^2}\pi_2(\xi)}
 \end{aligned} \tag{110}$$

όπου:

$$\alpha_1(\xi) = e^{2h\sqrt{\xi^2}}(5+4\nu(-3+2\nu))$$

$$\beta_1(\xi) = 3\sqrt{\xi^2} - 10\nu\sqrt{\xi^2} + 8\nu^2\sqrt{\xi^2}$$

$$\beta_2(\xi) = -\sqrt{\xi^2} + 2\nu\sqrt{\xi^2} + 2h^2(\xi^2)^{3/2}$$

$$\beta_3(\xi) = -2\sqrt{\xi^2} + 8\nu\sqrt{\xi^2} - 8\nu^2\sqrt{\xi^2} + 2h^2(\xi^2)^{3/2}$$

$$\pi_1(\xi) = 3-4\nu + e^{4h\sqrt{\xi^2}}(3-4\nu) + 2e^{2h\sqrt{\xi^2}}(5+4\nu(-3+2\nu) + 2h^2\xi^2)$$

$$\begin{aligned}
 \pi_2(\xi) &= (5+4\nu(-3+2\nu) + 2h^2\xi^2 + (3-4\nu)\cosh(2h\xi))(h\xi\cosh(h\xi) + (-1+2\nu)\sinh(h\xi)) \\
 &\quad (\xi\cosh(3h\xi) + \sqrt{\xi^2}\sinh(3h\xi))
 \end{aligned}$$

Ακολουθώντας, με αντικατάσταση των σταθερών C_1, C_2, C_3, C_4 όπως δίνονται από τις (110) στην (106) έχουμε την μετασχηματισμένη τασική συνάρτηση και μέσω αυτής και των σχέσεων (108) τις μετασχηματισμένες συνιστώσες του διανύσματος της μετατόπισης. Για να αντιστρέψουμε στον φυσικό χώρο τις συνιστώσες αυτές, θα χρησιμοποιήσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό και την πληροφορία ότι η $\hat{u}_x(\xi, y)$ είναι περιττή ενώ η $\hat{u}_y(\xi, y)$ είναι άρτια συνάρτηση του ξ . Έτσι προκύπτουν οι σχέσεις:

$$u_x(x, y) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{u}_x(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{u}_y(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi$$
(111)

Στο σημείο αυτό, όπως και στον ημίχωρο πρέπει να γίνει διερεύνηση των προς ολοκλήρωση συναρτήσεων για το αν φράσσονται στα όρια του ολοκληρώματος. Πράγματι αποδεικνύεται ότι τόσο η $\hat{u}_x(\xi, y)$ όσο και $\hat{u}_y(\xi, y)$ φράσσονται καθώς το ξ τείνει στο 0 και στο ∞ . Συνεπώς η αντιστροφή των μετατοπίσεων στην (111) μπορεί να πραγματοποιηθεί απευθείας αριθμητικά. Λόγω του μεγάλου μεγέθους των εκφράσεων για τις μετατοπίσεις στο επίπεδο x - y , παρατίθενται οι $\hat{u}_x(\xi, y)$, $\hat{u}_y(\xi, y)$ για την επιφάνεια της επίστρωσης όπου $y = 0$:

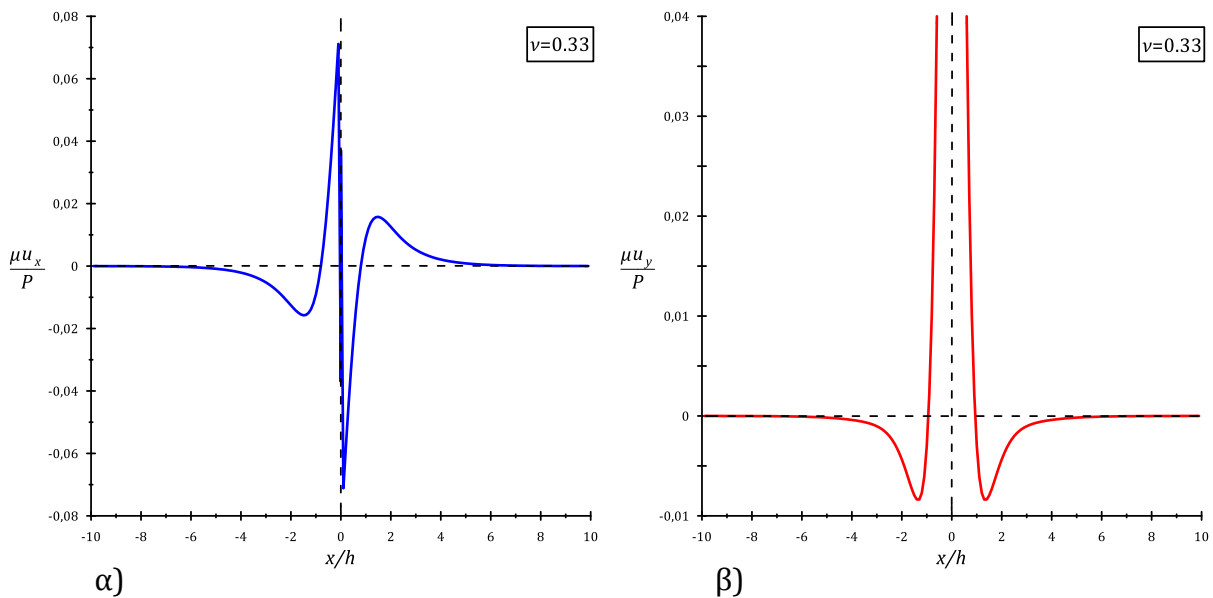
$$\hat{u}_x(\xi, 0) = \frac{iP(3 + 2\nu(-5 + 4\nu) + 2h^2\xi^2 + (-3 + 2(5 - 4\nu)\nu)\cosh(2h\xi))}{2\mu\xi(5 + 4\nu(-3 + 2\nu) + 2h^2\xi^2 + (3 - 4\nu)\cosh(2h\xi))}$$

$$\hat{u}_y(\xi, 0) = \frac{P(-1 + \nu)(2h\xi + (-3 + 4\nu)\sinh(2h\xi))}{\mu\xi(5 + 4\nu(-3 + 2\nu) + 2h^2\xi^2 + (3 - 4\nu)\cosh(2h\xi))}$$
(112)

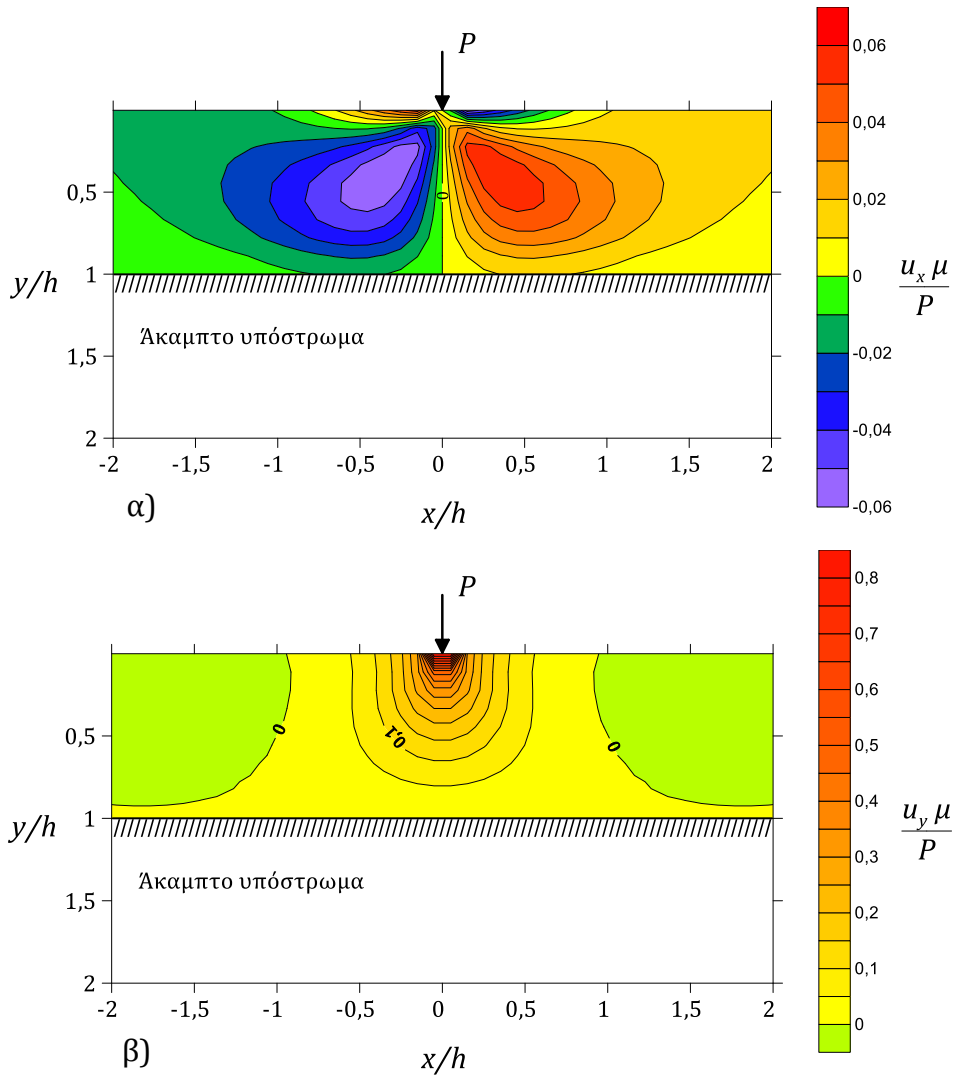
Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι και οι δύο συνιστώσες της μετατόπισης είναι φραγμένες σε αντίθεση με το πρόβλημα του ημιχώρου όπου η μετασχηματισμένη συνιστώσα \hat{u}_y απειρίζεται για $\xi \rightarrow 0$ και συνεπώς, λόγω των θεωρημάτων Abel-Tauber, απειρίζεται και η u_y όταν το $x \rightarrow \infty$. Έτσι, για το πρόβλημα του συγκεντρωμένου κατακόρυφου φορτίου σε επίστρωση επάνω σε άκαμπτο υπόστρωμα η λύση που

λαμβάνεται για την κατακόρυφη συνιστώσα των μετατοπίσεων δίνει ένα φυσικά αποδεκτό αποτέλεσμα, αυτό του μηδενισμού των κάθετων μετατοπίσεων αρκετά μακριά από το σημείο της φόρτισης.

Στο **Σχήμα 9** παρουσιάζονται τα διαγράμματα των επιφανειακών μετατοπίσεων και στο **Σχήμα 10** τα διαγράμματα με τους χάρτες των μετατοπίσεων σε όλο τον χώρο μελέτης. Για την αδιαστατοποίηση του προβλήματος, οι αποστάσεις διαιρέθηκαν με το πάχος της επίστρωσης (x/h) και οι μετατοπίσεις πολλαπλασιάστηκαν με το μέτρο διάτμησης και διαιρέθηκαν με το εφαρμοζόμενο φορτίο ($\frac{\mu u_x}{P}, \frac{\mu u_y}{P}$). Για την οριζόντια συνιστώσα της μετατόπισης στο **Σχήμα 9** (α) παρατηρούμε ότι τα σημεία της επιφάνειας αλλά και λίγο κάτω από αυτή **Σχήμα 10** (α) που βρίσκονται στον αρνητικό ημιάξονα x τείνουν να κινηθούν προς τον θετικό ενώ το αντίθετο ισχύει για εκείνα που βρίσκονται στην πλευρά του θετικού ημιάξονα x . Όσο αυξάνει το βάθος η συμπεριφορά αυτή αντιστρέφεται. Για τις κατακόρυφες μετατοπίσεις στην επιφάνεια, **Σχήμα 9** (β), παρατηρούμε τον απειρισμό τους στο σημείο εφαρμογής του φορτίου αλλά και τον γρήγορο μηδενισμό τους όσο αυξάνει το βάθος, **Σχήμα 10** (β), και μέχρι την διεπιφάνεια.



Σχήμα 9. Διαγράμματα αδιαστατοποιημένων επιφανειακών μετατοπίσεων για το πρόβλημα του συγκεντρωμένου κατακόρυφου φορτίου σε επίστρωση επάνω σε άκαμπτο υπόστρωμα: α) οριζόντια συνιστώσα u_x , β) κατακόρυφη συνιστώσα u_y .



Σχήμα 10. Χάρτες κατανομής των αδιαστατοποιημένων μετατοπίσεων για το πρόβλημα του συγκεντρωμένου κατακόρυφου φορτίου σε επίστρωση επάνω σε άκαμπτο υπόστρωμα: α) οριζόντια συνιστώσα u_x , β) κατακόρυφη συνιστώσα u_y .

Για τις τάσεις στην επίστρωση, αντικαθιστώντας τις σταθερές C_1, C_2, C_3, C_4 όπως δίνονται από τις (110) στην (106) και ακολούθως στις (107) και χρησιμοποιώντας την πληροφορία ότι οι $\hat{\sigma}_{xx}, \hat{\sigma}_{yy}$ είναι άρτιες συναρτήσεις του x ενώ η $\hat{\sigma}_{yx}$ περιττή, έχουμε:

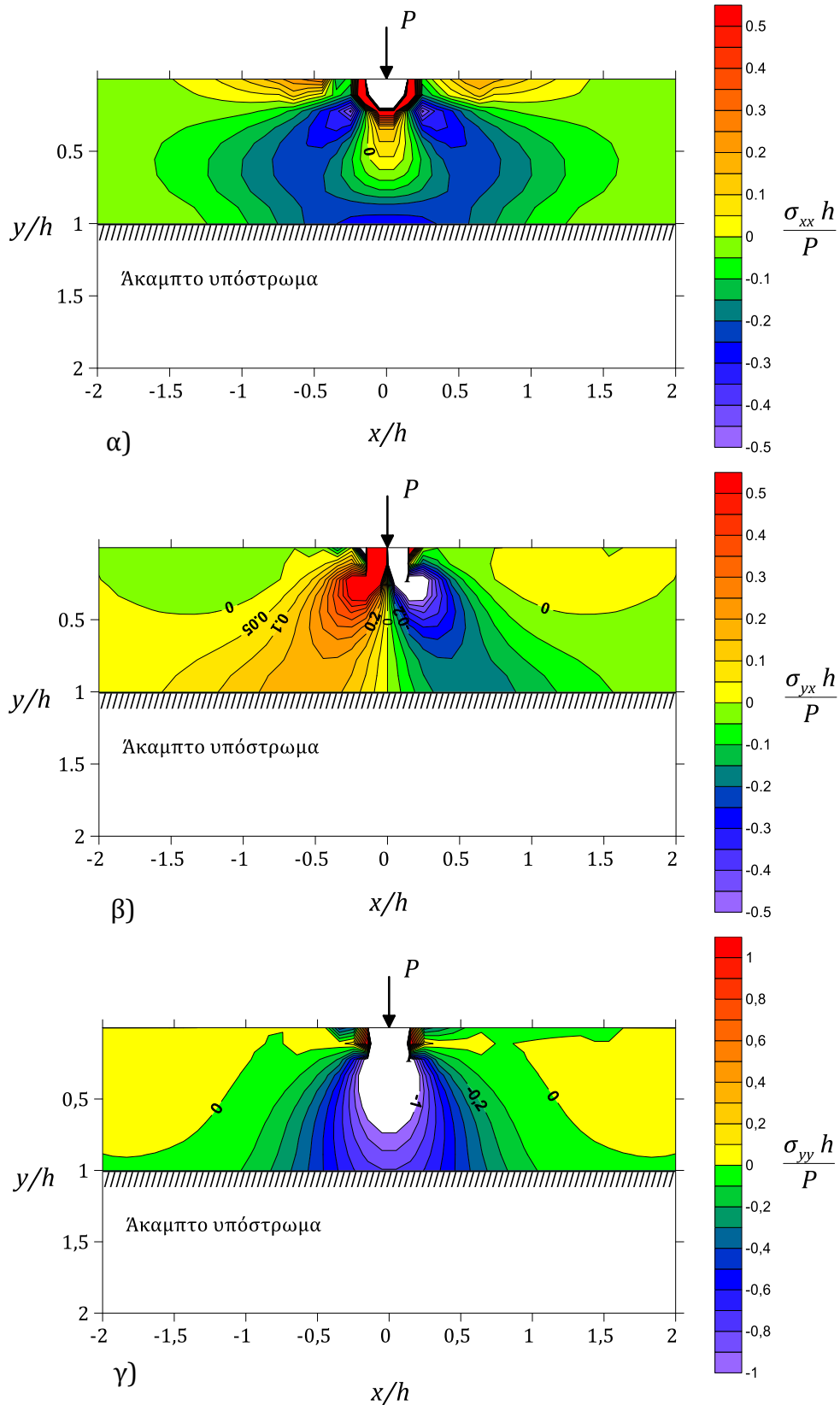
$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{\sigma}_{xx}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi \\ \sigma_{yy}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{\sigma}_{yy}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi \\ \sigma_{yx}(x, y) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{\sigma}_{yx}(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi\end{aligned}\quad (113)$$

Επειδή οι ολοκληρωτέες ποσότητες στην (113) είναι φραγμένες όταν το ξ τείνει στο 0 ή στο ∞ η αντιστροφή των τάσεων μπορεί να πραγματοποιηθεί απευθείας αριθμητικά.

Στο **Σχήμα 11** παρουσιάζονται οι χάρτες των αδιαστατοποιημένων τάσεων στο επίπεδο x - y με την μορφή ισοτασικών καμπύλων. Η αδιαστατοποίηση των αποστάσεων έγινε όπως και προηγουμένως ενώ οι τάσεις πολλαπλασιάστηκαν με το πάχος της επίστρωσης και διαιρέθηκαν με το εφαρμοζόμενο φορτίο $(\frac{\sigma_{xx}h}{P}, \frac{\sigma_{yy}h}{P}, \frac{\sigma_{yx}h}{P})$. Επίσης

ισχύει ότι $\frac{\mu h}{P} = 1$. Παρατηρούμε πως οι μέγιστες τάσεις εντοπίζονται κάτω από το εφαρμοζόμενο φορτίο και όσο μεγαλώνει η οριζόντια απόσταση από το σημείο εφαρμογής αυτές μηδενίζονται.

Για την $\frac{\sigma_{xx}h}{P}$ στο **Σχήμα 11** (α) βλέπουμε την δημιουργία μιας μικρής εφελκυστικής περιοχής ακριβώς κάτω από την μέγιστη θλιπτική περιοχή. Στο **Σχήμα 11** (β) βλέπουμε την κατανομή της $\frac{\sigma_{yy}h}{P}$ εκατέρωθεν του κατακόρυφου άξονα και η περιοχή της μέγιστης διατμητικής καλύπτει περίπου το μισό του πάχους της επίστρωσης. Για την $\frac{\sigma_{yx}h}{P}$ στο **Σχήμα 11** (β) η μέγιστη θλιπτική περιοχή καλύπτει σχεδόν τα 3/4 του πάχους της.

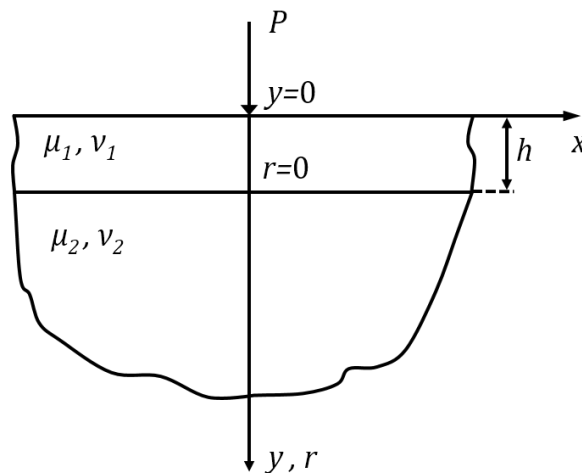


Σχήμα 11. Χάρτες κατανομής αδιαστατοποιημένων ισοστασικών καμπυλών που

προέκυψαν για $\frac{\mu h}{P} = 1$: α) $\frac{\sigma_{xx} h}{P}$, β) $\frac{\sigma_{yx} h}{P}$, γ) $\frac{\sigma_{yy} h}{P}$.

4.3 Το πρόβλημα κατακόρυφης σημειακής φόρτισης για το σύστημα επίστρωσης σε παραμορφώσιμο υπόβαθρο

Όπως ακριβώς και στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε επίστρωση άπειρου μήκους και πάχους h ($-\infty < x < \infty$ και $0 < y < h$) επάνω σε παραμορφώσιμο αυτή την φορά υπόβαθρο, στην επιφάνεια της οποίας ασκείται υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο μέτρου P όπως φαίνεται στο **Σχήμα 12**. Στο σημείο εφαρμογής του φορτίου τοποθετείται και η αρχή του Καρτεσιανού συστήματος αναφοράς ($x = y = 0$). Οι διαστάσεις του συγκεντρωμένου φορτίου στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης είναι $(\text{force})(\text{length})^{-1}$. Οι μηχανικές σταθερές της επίστρωσης είναι το μέτρο διάτμησης μ_1 και ο λόγος Poisson ν_1 ενώ για το υπόβαθρο μ_2 και ν_2 .



Σχήμα 12. Φόρτιση της ελαστικής επιστρώσεως σε ελαστικό υπόστρωμα ημι-άπειρων διαστάσεων από κατακόρυφη δύναμη.

Για να μπορέσουν να γραφούν οι συνοριακές συνθήκες και για τα δύο υλικά χρησιμοποιείται και μια δεύτερη μεταβλητή για τον κατακόρυφο άξονα. Έτσι ο άξονας y έχει ως αρχή του το σημείο τομής με τον άξονα x , ενώ ο άξονας r έχει ως αρχή του το σημείο τομής με την διεπιφάνεια όπως φαίνεται στο **Σχήμα 12**. Οι δύο αυτές μεταβλητές σχετίζονται μεταξύ τους μέσω της σχέσεως:

$$r = y - h \quad (114)$$

Ακολουθώντας, στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι συνοριακές συνθήκες για $y = 0$, κατά μήκος του άξονα x που ισχύουν για τις τάσεις στην επιφάνεια της επίστρωσης είναι:

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x, 0) = -P\delta(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (115)$$

$$\sigma_{yx}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (116)$$

όπου με τον άνω ή κάτω δείκτη 1 από εδώ και στο εξής θα συμβολίζονται τα μεγέθη που σχετίζονται με την επίστρωση, ενώ με τον άνω ή κάτω δείκτη 2 θα συμβολίζονται τα μεγέθη που σχετίζονται με το υπόστρωμα.

Συνοριακές συνθήκες όμως προκύπτουν και στην διεπιφάνεια μεταξύ των δύο στρώσεων, για $y = h$ (ή $r = 0$). Αυτές οφείλονται στην παραδοχή ότι οι δύο επιφάνειες είναι κολλημένες μεταξύ τους έτσι ώστε να μην υπάρχει σχετική μετακίνηση, στην θεώρηση δηλαδή της συνέχειας των τάσεων και των μετατοπίσεων στην διεπιφάνεια. Από αυτό εξάγονται οι κάτωθι συνοριακές συνθήκες:

$$u_x^{(1)}(x, h) = u_x^{(2)}(x, 0), \quad -\infty < x < \infty \quad (117)$$

$$u_y^{(1)}(x, h) = u_y^{(2)}(x, 0), \quad -\infty < x < \infty \quad (118)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x, h) = \sigma_{yy}^{(2)}(x, 0), \quad -\infty < x < \infty \quad (119)$$

$$\sigma_{yx}^{(1)}(x, h) = \sigma_{yx}^{(2)}(x, 0), \quad -\infty < x < \infty \quad (120)$$

Έστω οι άγνωστες και αυθαίρετες συναρτήσεις $\Phi_1(x, y)$ και $\Phi_2(x, r)$ για τις οποίες ισχύει η διαρμονική εξίσωση (102). Μετασχηματίζουμε τις δύο διαφορετικές διαρμονικές μέσω του μετασχηματισμού Fourier όπως δίνεται από την (103) και παίρνουμε το σύστημα των δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\left(\frac{d^4}{dy^4} - 2\xi^2 \frac{d^2}{dy^2} + \xi^4 \right) \hat{\Phi}_1(\xi, y) = 0 \quad (121)$$

$$\left(\frac{d^4}{dy^4} - 2\xi^2 \frac{d^2}{dy^2} + \xi^4 \right) \hat{\Phi}_2(\xi, r) = 0 \quad (122)$$

Οι εξισώσεις (121) και (122) ως 2ας τάξης, ομογενείς δ. ε. με σταθερούς συντελεστές, έχουν ως γενική λύση τις:

$$\hat{\Phi}_1(\xi, y) = (C_1 + yC_2)e^{-|\xi|y} + (C_3 + yC_4)e^{|\xi|y} \quad (123)$$

$$\hat{\Phi}_2(\xi, r) = (C_5 + yC_6)e^{-|\xi|r} + (C_7 + yC_8)e^{|\xi|r} \quad (124)$$

Όπως και στην περίπτωση του ημιχώρου έτσι και εδώ υπάρχει η απαίτηση το τασικό πεδίο να μηδενίζεται όσο το r τείνει στο άπειρο δηλαδή η δεύτερη τασική συνάρτηση που αφορά στο υπόβαθρο πρέπει να μηδενίζεται. Παρατηρώντας την (124) βλέπουμε ότι οι όροι που περιλαμβάνουν τις σταθερές C_7, C_8 δεν μηδενίζονται καθόσον το $r \rightarrow \infty$. Συνεπώς πρέπει να ισχύει ότι $C_7 = C_8 = 0$ άρα η (124) γίνεται:

$$\hat{\Phi}_2(\xi, y) = C_5 e^{-|\xi|(y-h)} + (y-h)C_6 e^{-|\xi|(y-h)} \quad (125)$$

όπου μέσω της (114) αντικαταστάθηκε η μεταβλητή r .

Για να υπολογίζουμε τις εναπομείνουσες έξι σταθερές C_1, C_2, \dots, C_6 θα χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες (115) έως (120). Οι μετασχηματισμένες τάσεις και μετατοπίσεις δίνονται από τις σχέσεις (105) και (106) αντίστοιχα, τις οποίες επαναλαμβάνουμε εδώ για λόγους πληρότητας, και σύμφωνα με τους δείκτες για κάθε στρώση είναι:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{xx}^{(1)} &= \frac{d^2 \hat{\Phi}_1}{dy^2}, & \hat{\sigma}_{yy}^{(1)} &= (i\xi)^2 \hat{\Phi}_1, & \hat{\sigma}_{yx}^{(1)} &= -(i\xi) \frac{d\hat{\Phi}_1}{dy} \\ \hat{\sigma}_{xx}^{(2)} &= \frac{d^2 \hat{\Phi}_2}{dy^2}, & \hat{\sigma}_{yy}^{(2)} &= (i\xi)^2 \hat{\Phi}_2, & \hat{\sigma}_{yx}^{(2)} &= -(i\xi) \frac{d\hat{\Phi}_2}{dy} \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned}\hat{u}_x^{(1)}(\xi, y) &= \frac{1}{2\mu_1\xi} \left[i(1-\nu_1) \frac{d^2\hat{\Phi}_1}{dy^2} + i\nu_1\xi^2\hat{\Phi}_1 \right], \quad \hat{u}_y^{(1)}(\xi, y) = \frac{1}{2\mu_1\xi^2} \left[(1-\nu_1) \frac{d^3\hat{\Phi}_1}{dy^3} - (2-\nu_1)\xi^2 \frac{d\hat{\Phi}_1}{dy} \right] \\ \hat{u}_x^{(2)}(\xi, y) &= \frac{1}{2\mu_2\xi} \left[i(1-\nu_2) \frac{d^2\hat{\Phi}_2}{dy^2} + i\nu_2\xi^2\hat{\Phi}_2 \right], \quad \hat{u}_y^{(2)}(\xi, y) = \frac{1}{2\mu_2\xi^2} \left[(1-\nu_2) \frac{d^3\hat{\Phi}_2}{dy^3} - (2-\nu_2)\xi^2 \frac{d\hat{\Phi}_2}{dy} \right]\end{aligned}\tag{127}$$

Το προς επίλυση σύστημα των έξι εξισώσεων και έξι αγνώστων στον μετασχηματισμένο χώρο είναι:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{yy}^{(1)}(\xi, 0) &= -P \\ \hat{\sigma}_{yx}^{(1)}(\xi, 0) &= 0 \\ \hat{\sigma}_{yy}^{(1)}(\xi, h) &= \hat{\sigma}_{yy}^{(2)}(\xi, h) \\ \hat{\sigma}_{yx}^{(1)}(\xi, h) &= \hat{\sigma}_{yx}^{(2)}(\xi, h) \\ \hat{u}_x^{(1)}(\xi, h) &= \hat{u}_x^{(2)}(\xi, h) \\ \hat{u}_y^{(1)}(\xi, h) &= \hat{u}_y^{(2)}(\xi, h)\end{aligned}\tag{128}$$

Αντικαθιστώντας τις (126) και (127) στις (128) και με χρήση του λογισμικού Mathematica υπολογίζονται οι άγνωστες σταθερές C_1, C_2, \dots, C_6 που δυστυχώς λόγω μεγέθους των εκφράσεων είναι αδύνατον να παρουσιαστούν εδώ σε πλήρη μορφή. Σε συνεπτυγμένη μορφή με την χρήση βοηθητικών συντελεστών δίνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{e^{2h\sqrt{\xi^2}} P\left(\frac{a_1}{b}\right)}{\xi^2} \\
 C_2 &= \frac{\left(e^{2h\sqrt{\xi^2}} P\left((fg) + \frac{e_1}{c}\right)\right)}{(\xi f)^2} \\
 C_3 &= \frac{P\left(\frac{d}{b}\right)}{\xi^2} \\
 C_4 &= \frac{1}{\xi^2} P\left(-\sqrt{\xi^2} + \frac{e^{2h\sqrt{\xi^2}} j_1 a_1}{cf} + \frac{e^{2h\sqrt{\xi^2}} (-g)}{f}\right) \\
 C_5 &= \frac{1}{\xi^2} e^{h\sqrt{\xi^2}} P\left(\frac{\left(1 - h\sqrt{\xi^2} + \frac{(-1 + e^{2h\sqrt{\xi^2}})h(-g)}{f}\right) \left(a_2 \left(\frac{-1 - e^{2h\sqrt{\xi^2}} h\sqrt{\xi^2} + e^{2h\sqrt{\xi^2}} (1 - h\sqrt{\xi^2}) + e^{2h\sqrt{\xi^2}} (-1 + e^{2h\sqrt{\xi^2}})h(-g)}{f} + \frac{(-1 + e^{2h\sqrt{\xi^2}})hj_2}{f} \right) \right)}{-c}\right) \\
 C_6 &= -\left(\left(4e^{h\sqrt{\xi^2}} P\mu_2(-1 + \nu_1)e_2 / (\xi^2 (-cf))\right)\right)
 \end{aligned} \tag{129}$$

όπου οι βοηθητικοί συντελεστές παραγοντοποίησης $a_1, a_2, b, c, d, e_1, e_2, f, g, j_1, j_2$ είναι συναρτήσεις του ξ και παρατίθενται στο «Παράρτημα: αναλυτικές εκφράσεις σταθερών».

Ακολουθώντας, με αντικατάσταση των συναρτήσεων $C_i(\xi)$ ($i=1, \dots, 6$) στις εξισώσεις (123), (125) και εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι οι $\hat{u}_x^{(i)}(x, \xi)$ και $\hat{u}_y^{(i)}(x, \xi)$ με ($i=1, 2$) είναι περιττές και άρτιες συναρτήσεις του ξ αντίστοιχα, και δεδομένου ότι από τη θεωρία ολοκληρωτικών μετασχηματισμών προκύπτει ότι οι ίδιες ιδιότητες θα ισχύουν και στο φυσικό πεδίο, οι συνιστώσες των διανυσμάτων μετατόπισης γράφονται ως:

$$u_x^{(i)}(x, y) = -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \hat{u}_x^{(i)}(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi \tag{130}$$

$$u_y^{(i)}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{u}_y^{(i)}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi$$

όπου $i=1$ για την επίστρωση και $i=2$ για το υπόστρωμα.

Στο σημείο αυτό, όπως και στον ημίχωρο πρέπει να γίνει διερεύνηση των προς ολοκλήρωση ποσοτήτων στις εξισώσεις (130) για το αν φράσσονται στα όρια του ολοκληρώματος. Για τις $\hat{u}_x^{(i)}(\xi, y)$ αποδεικνύεται εύκολα παίρνοντας το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor, ότι οι $\hat{u}_x^{(i)}(\xi, y)$ φράσσονται καθώς το ξ τείνει στο 0 και στο ∞ . Πράγματι, ο πρώτος όρος για τις δύο αυτές συναρτήσεις είναι ο $\frac{iP(-1+2\nu_2)}{2\mu_2\xi}$ που σημαίνει ότι θα

προκύψει απροσδιοριστία $\frac{1}{\xi}$ για $\xi \rightarrow 0$. Επειδή όμως ισχύουν ότι:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sin \xi}{\xi} = 1 \quad (131)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\sin \xi}{\xi} = 0$$

τελικά αίρεται η απροσδιοριστία.

Από την άλλη πλευρά, ο πρώτος όρος του αναπτύγματος σε σειρά Taylor των $\hat{u}_y^{(i)}(\xi, y)$ είναι ο $-\frac{P(-1+\nu_2)}{\mu_2\xi}$ άρα και εδώ προκύπτει απροσδιοριστία του τύπου $\frac{1}{\xi}$ για $\xi \rightarrow 0$. Λόγω του συνημίτονου ισχύει γενικά ότι:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\cos \xi}{\xi} = \infty \quad (132)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\cos \xi}{\xi} = 0$$

που σημαίνει ότι για $\xi \rightarrow 0$ τα ολοκληρώματα των $\hat{u}_y^{(i)}(\xi, y)$ στην (130) δεν μπορούν να υπολογιστούν εξαιτίας του απειρισμού της προς ολοκλήρωση ποσότητας.

Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε την λύση του προβλήματος Flamant για τον ημίχωρο. Πράγματι σε εκείνη την περίπτωση το ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας της μετατόπισης είχε υπολογιστεί ως CPV και η

λύση του δίνεται από την σχέση (89). Εξαιτίας του γεγονότος αυτού μπορούμε να γράψουμε τις (130) ως εξής:

$$\begin{aligned}
 u_y^{(i)}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{u}_y^{(i)}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\hat{u}_y^{(i)}(\xi, y) - \hat{u}_y^{halfspace}(\xi, y) + \hat{u}_y^{halfspace}(\xi, y) \right] \cos(\xi x) d\xi \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\hat{u}_y^{(i)}(\xi, y) - \hat{u}_y^{halfspace}(\xi, y) \right] \cos(\xi x) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{u}_y^{halfspace}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi
 \end{aligned}
 \tag{133}$$

όπου ο δεύτερος προσθετέος στην τελευταία ισότητα δίνεται από την σχέση (89). Άρα τελικά η (133) γίνεται:

$$u_y^{(i)}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\hat{u}_y^{(i)}(\xi, y) - \hat{u}_y^{halfspace}(\xi, y) \right] \cos(\xi x) d\xi + \frac{P}{2\pi\mu} \left[\frac{y^2}{x^2 + y^2} - (1-\nu) \log(x^2 + y^2) \right]
 \tag{134}$$

Ο πρώτος όρος στην (134) υπολογίζεται αριθμητικά. Φυσικά με τον ίδιο τρόπο μπορούν να υπολογιστούν και οι οριζόντιες συνιστώσες της μετατόπισης. Τα διαγράμματα των μετατοπίσεων για την επιφάνεια και την διεπιφάνεια παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο.

Όσον αφορά τις τάσεις, η διαδικασία είναι όπως αυτή που έγινε για το πρόβλημα της ελαστικής επίστρωσης σε άκαμπτο υπόστρωμα μόνο που σε αυτήν την περίπτωση έχουμε να υπολογίσουμε τις τάσεις και των δύο στρωμάτων. Έτσι για να βρούμε τις μετασχηματισμένες τάσεις αντικαθιστούμε τις σταθερές $C_i(\xi)$ ($i=1, \dots, 6$) στις εξισώσεις (123), (125) και αυτές με την σειρά τους στις (126). Επιπλέον χρησιμοποιώντας την πληροφορία ότι οι $\hat{\sigma}_{xx}^{(i)}$, $\hat{\sigma}_{yy}^{(i)}$ είναι άρτιες συναρτήσεις του ξ ενώ οι $\hat{\sigma}_{yx}^{(i)}$ περιττές, έχουμε:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(i)}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{\sigma}_{xx}^{(i)}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi \\ \sigma_{yy}^{(i)}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{\sigma}_{yy}^{(i)}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi \\ \sigma_{yx}^{(i)}(x, y) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{\sigma}_{yx}^{(i)}(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi\end{aligned}\quad (135)$$

όπου $i=1, 2$ οι δείκτες για κάθε στρώση.

Η διερεύνηση των προς ολοκλήρωση ποσοτήτων στις εξισώσεις (135) για το αν φράσσονται στα όρια του ολοκληρώματος γίνεται όπως και πριν και αποδεικνύεται ότι οι προς ολοκλήρωση ποσότητες φράσσονται. Συνεπώς η αντιστροφή των τάσεων μπορεί να πραγματοποιηθεί απευθείας αριθμητικά.

4.3.1 Αποτελέσματα για τις μετατοπίσεις

Στην παράγραφο αυτή δίνονται τα αποτελέσματα, ως προς την συμπεριφορά της επιφάνειας ($y=0$) και της διεπιφάνειας ($y=h$) του συστήματος επίστρωσης - υποστρώματος σε ημίχωρο υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας. Η αδιαστατοποίηση του προβλήματος, επιτάσσει οι αποστάσεις να αδιαστατοποιηθούν με το πάχος της επίστρωσης (x/h) και οι μετατοπίσεις με το μέτρο διάτμησης και το εφαρμοζόμενο φορτίο ($\frac{\mu_2 u_x^{(i)}}{P}, \frac{\mu_2 u_y^{(i)}}{P}$). Στο σημείο αυτό οφείλουμε να παρατηρήσουμε την εξάρτηση των μετατοπίσεων του υποστρώματος, κάτι που είναι αναμενόμενο, αλλά και της επίστρωσης από το μέτρο διάτμησης του υποστρώματος μ_2 . Αυτό συμβαίνει διότι ο βασικός παράγοντας που θα καθορίσει την συμπεριφορά των μετατοπίσεων και για τις δύο στρώσεις είναι το υπόστρωμα όπως φαίνεται καθαρά από τους πρώτους όρους των αναπτυγμάτων Taylor.

Μέσω των αποτελεσμάτων εξετάζονται δύο βασικές περιπτώσεις σε σχέση με τους λόγους των μέτρων διάτμησης μ και των λόγων Poisson ν , σχέσεις (136) και (137) αντίστοιχα. Αυτό γιατί όταν $\mu > 1$ η επίστρωση είναι πιο άκαμπτη από το υπόστρωμα ενώ για $\mu < 1$ πιο μαλακή. Έτσι η πρώτη περίπτωση είναι όταν το $\mu = 1$, και

εξετάζονται οι μετατοπίσεις όταν το ν γίνεται 0, 1 ή ∞ και η δεύτερη περίπτωση είναι όταν το $\nu = 1$ όπου διερευνάται η συμπεριφορά όταν το μ είναι 0, 1 ή ∞ όπου:

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (136)$$

$$\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2} \quad (137)$$

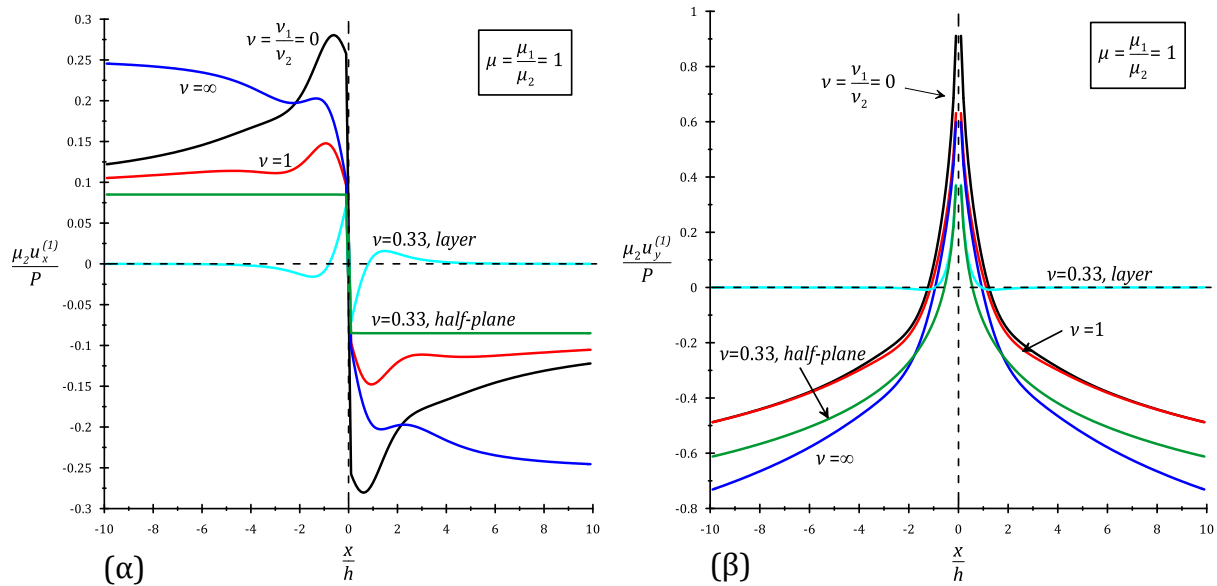
Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι για να τείνει το ν στο άπειρο λαμβάνεται ότι $\nu_2 \rightarrow 0$ μιας και το ν_1 δεν μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες από 0,5 κάτι που σημαίνει ότι το υπόστρωμα εμφανίζει ελάχιστα το φαινόμενο Poisson (π.χ. φελλός). Επίσης στα αποτελέσματα για την επιφάνεια έχουν προστεθεί και οι λύσεις του ημιχώρου και του συστήματος επικάλυψης σε άκαμπτο υπόβαθρο για την τιμή του λόγου Poisson: 0,33, προκειμένου να διευκολύνεται η σύγκριση. Έτσι το $\nu = 1$ προκύπτει για το σύστημα επίστρωσης -υποστρώματος όταν $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$.

Στο **Σχήμα 13** παρουσιάζεται η συμπεριφορά ως προς το αδιάστατο πεδίο μετατοπίσεων της επιφανείας της επίστρωσης ($y = 0$) για τα προβλήματα ελαστικής επίστρωσης – ελαστικό υπόβαθρο, ελαστικής επίστρωσης – απαραμόρφωτο υπόβαθρο και ημιχώρου υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας στην περίπτωση όπου $\mu = 1$ στην (136). Τα αποτελέσματα αφορούν τις δύο αδιάστατες μετατοπίσεις, $\mu_2 u_x^{(1)}(x, 0)/P$ και $\mu_2 u_y^{(1)}(x, 0)/P$, και δίνονται συναρτήσει της αδιάστατης απόστασης x/h από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P . Η εξάρτηση των οριζόντιων και κάθετων μετατοπίσεων του συστήματος ελαστικής επίστρωσης – ελαστικό υπόβαθρο από τον λόγο (137) των λόγων Poisson των δύο υλικών είναι προφανής.

Επιπλέον, για τις οριζόντιες μετατοπίσεις του συστήματος ελαστικής επίστρωσης – ελαστικό υπόβαθρο (**Σχήμα 13α**) παρατηρούμε διαφορετική συμπεριφορά με μεγαλύτερες οριζόντιες μετατοπίσεις σε σχέση με τον ημίχωρο, για τον οποίο η μετατόπιση είναι σταθερή για όλα τα σημεία της επιφάνειας. Επίσης, διαφορετική είναι η συμπεριφορά σε σχέση με το σύστημα επίστρωσης – απαραμόρφωτου υποβάθρου με μεγαλύτερες οριζόντιες μετατοπίσεις και εδώ, για το οποίο όμως καθώς απομακρυνόμαστε από το σημείο εφαρμογής του φορτίου, οι μετατοπίσεις φθίνουν και

για $x/h \geq |5|$ πρακτικά μηδενίζονται. Έτσι, το σύστημα επίστρωσης – ελαστικού υπόβαθρου παρουσιάζει μεγαλύτερες οριζόντιες μετατοπίσεις από τα άλλα δύο προβλήματα και οι μέγιστες μετατοπίσεις εμφανίζονται στην περίπτωση $\nu_1 \rightarrow 0$ ενώ οι μετατοπίσεις δεν μηδενίζονται όσο το x τείνει στο άπειρο. Και στα τρία προβλήματα παρατηρείται ασυνέχεια των οριζόντιων μετατοπίσεων στο σημείο εφαρμογής του φορτίου.

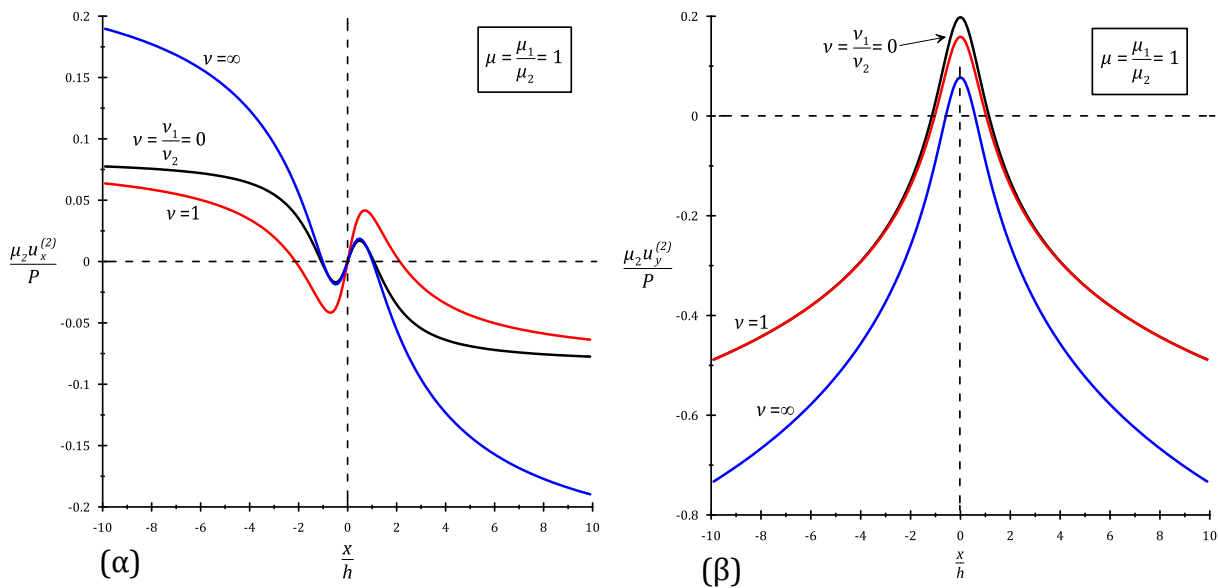
Για τις κατακόρυφες μετατοπίσεις (**Σχήμα 13β**) παρατηρούμε ότι στο σημείο εφαρμογής του φορτίου απειρίζονται και για τα τρία προβλήματα, και επίσης ότι οι καμπύλες για $\nu \rightarrow 0$ και $\nu = 1$ σχεδόν ταυτίζονται. Για $x \rightarrow \infty$ οι μετατοπίσεις για το σύστημα και τον ημίχωρο απειρίζονται σε αντίθεση με την επικάλυψη που μηδενίζονται.



Σχήμα 13. Διαγράμματα μετατοπίσεων επιφάνειας ($y = 0$) υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου για τα προβλήματα ελαστική επίστρωση – ελαστικό υπόβαθρο, ελαστική επίστρωση – άκαμπτο υπόβαθρο και ημίχωρος, στην περίπτωση που $\mu = 1$: α) οριζόντια συνιστώσα και β) κατακόρυφη συνιστώσα.

Ομοίως, στο **Σχήμα 14** παρουσιάζεται η συμπεριφορά της διεπιφάνειας μεταξύ των δύο στρώσεων για την περίπτωση $\mu = 1$. Παρατηρείται ομαλός μηδενισμός των οριζοντίων μετατοπίσεων $\mu_2 u_x^{(2)}(x,1)/P$ και για τις τρεις περιπτώσεις του ν όσο το x πλησιάζει στον άξονα επίδρασης του φορτίου, σε αντίθεση με την ασυνέχεια που δημιουργείται όταν βρισκόμαστε στην επιφάνεια (**Σχήμα 14α**). Επίσης όσο απομακρυνόμαστε από αυτό τον άξονα οι οριζόντιες μετατοπίσεις απειρίζονται, ενώ για

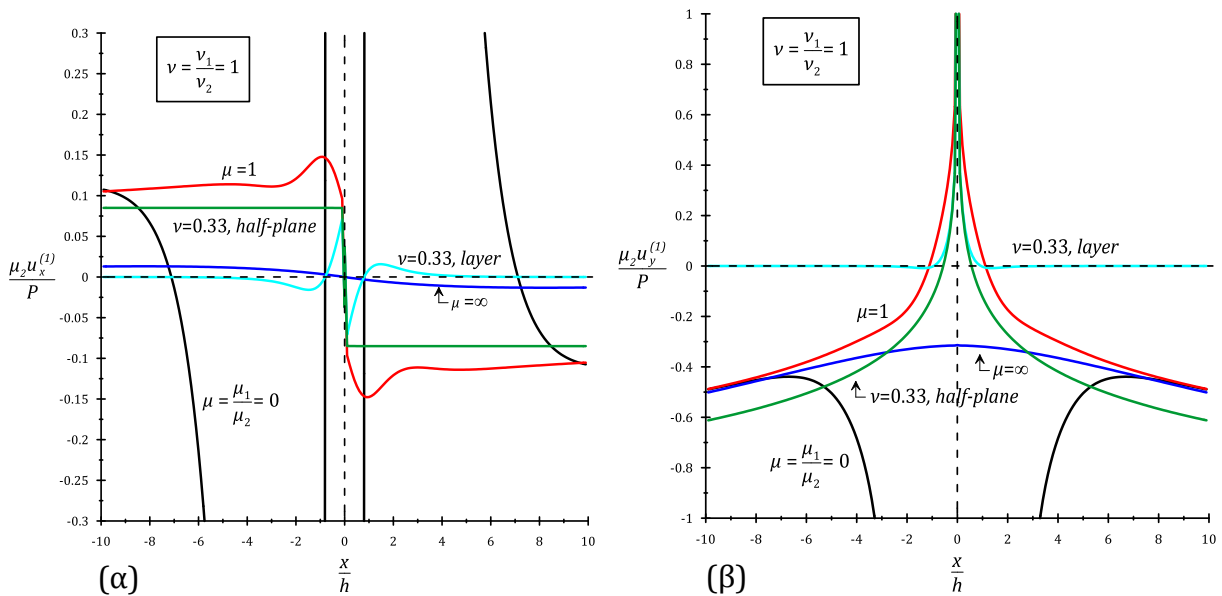
$x/h \leq |1|$ οι καμπύλες των $\nu \rightarrow 0$ και $\nu \rightarrow \infty$ σχεδόν ταυτίζονται. Από τις καμπύλες των κατακόρυφων μετατοπίσεων $\mu_2 u_y^{(2)}(x,1)/P$ (Σχήμα 14β) παρατηρούμε ότι όσο απομακρυνόμαστε από τον άξονα επίδρασης του φορτίου αυτές απειρίζονται ενώ όσο πλησιάζουμε παρουσιάζουν ένα πεπερασμένο μέγιστο. Η μεγαλύτερη τιμή αυτών των μέγιστων μετατοπίσεων παρουσιάζεται στην περίπτωση που το $\nu_1 \rightarrow 0$. Εδώ οι καμπύλες των $\nu = 0$ και $\nu = 1$ σχεδόν ταυτίζονται για $x/h \geq |2|$.



Σχήμα 14. Διαγράμματα μετατοπίσεων διεπιφάνειας ($y = h$) $\mu_2 u_x^{(2)}/P$ και $\mu_2 u_y^{(2)}/P$ υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου για το πρόβλημα ελαστικής επίστρωσης – ελαστικό υπόβαθρο στην περίπτωση που $\mu = 1$: α) οριζόντια συνιστώσα και β) κατακόρυφη συνιστώσα.

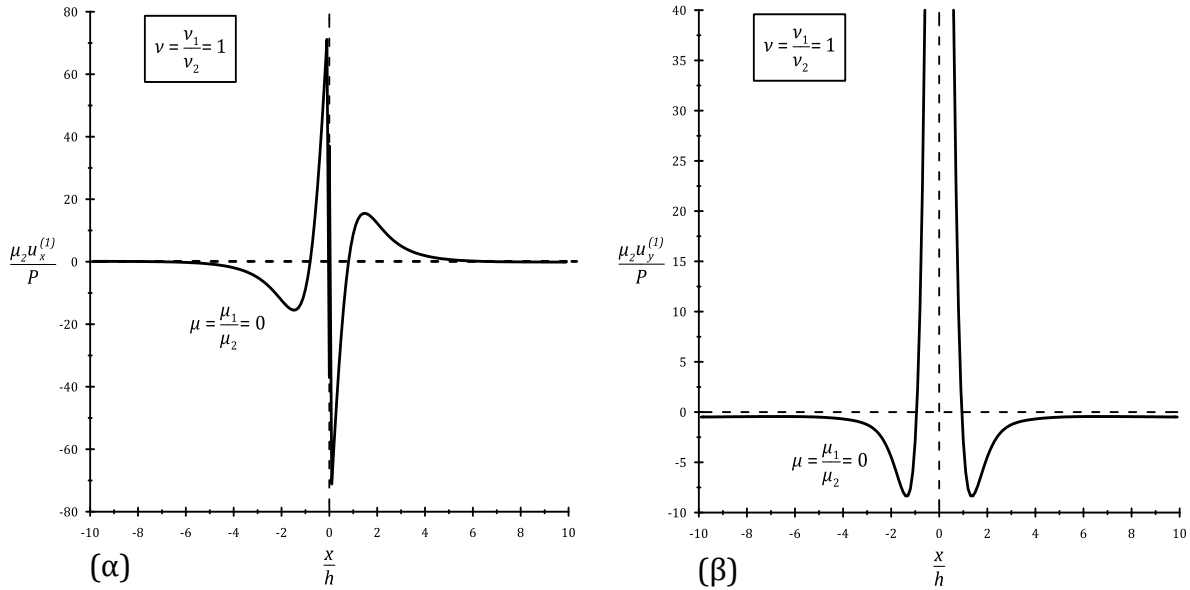
Στο **Σχήμα 15** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την συμπεριφορά ως προς το αδιάστατο πεδίο μετατοπίσεων της επιφανείας ($y = 0$) της επίστρωσης για τα προβλήματα ελαστικής επίστρωσης – ελαστικό υπόβαθρο, ελαστικής επίστρωσης – άκαμπτο υπόβαθρο και ημιχώρου υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας στην περίπτωση όπου $\nu = 1$ και $\mu \rightarrow 0, 1, \infty$ ώστε να φανεί η επίδραση του λόγου των μέτρων διάτμησης των δύο στρώσεων. Επειδή τα διαγράμματα των οριζόντιων και κατακόρυφων μετατοπίσεων στην περίπτωση $\mu \rightarrow 0$ βγαίνουν εκτός της κλίμακας των υπολοίπων, δίνονται χωριστά στο **Σχήμα 16** ώστε να αντιληφθούμε την πλήρη μορφή τους. Από το **Σχήμα 15α**

παρατηρούμε ότι η $\nu = 1$ και $\mu \rightarrow \infty$ είναι η άλλη περίπτωση που διαφοροποιείται εκτός της $\nu = 1$ και $\mu \rightarrow 0$. Εδώ το $\mu \rightarrow \infty$ προέκυψε λαμβάνοντας $\mu_2 \rightarrow 0$ κάτι που πρακτικά σημαίνει ότι το υπόστρωμα είναι πολύ μαλακό. Για τον λόγο αυτό η καμπύλη των οριζόντιων επιφανειακών μετατοπίσεων δεν παρουσιάζει ασυνέχεια, είναι ομαλή και σχεδόν ευθεία, δείχνοντας ανεπαίσθητη μεταβολή εκατέρωθεν του σημείου φορτίσεως. Η καμπύλη για τις κατακόρυφες επιφανειακές μετατοπίσεις (Σχήμα 15β) στην περίπτωση $\mu \rightarrow \infty$ είναι επίσης ομαλή και παρουσιάζει πεπερασμένο τοπικό μέγιστο, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες που απειρίζονται στο σημείο εφαρμογής.



Σχήμα 15. Διαγράμματα μετατοπίσεων επιφάνειας ($y = 0$) $\mu_2 u_x^{(1)} / P$ και $\mu_2 u_y^{(1)} / P$ υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου για τα προβλήματα ελαστικής επίστρωσης – ελαστικό υπόβαθρο, ελαστικής επίστρωσης – άκαμπτο υπόβαθρο και ημίχωρος, στην περίπτωση που $\nu = 1$: α) οριζόντια και β) κατακόρυφη συνιστώσα.

Οι κατακόρυφες μετατοπίσεις και εδώ σε όλες τις περιπτώσεις εκτός της επικάλυψης, της $\nu = 1$ και $\mu \rightarrow 0$ δίνουν ένα μη αποδεκτό αποτέλεσμα από άποψη φυσικής, αυτό του απειρισμού των κάθετων μετατοπίσεων αρκετά μακριά από το σημείο της φόρτισης.

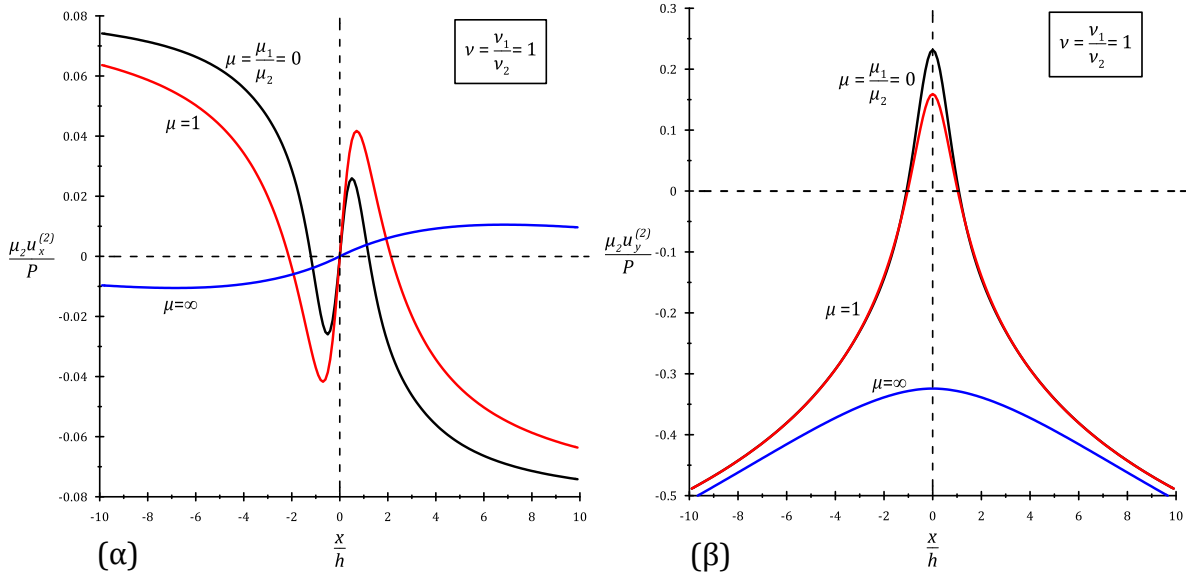


Σχήμα 16. Διαγράμματα μετατοπίσεων επιφάνειας $\mu_2 u_x^{(1)}/P$ και $\mu_2 u_y^{(1)}/P$ για το πρόβλημα ελαστικής επίστρωσης – ελαστικό υπόβαθρο στην περίπτωση που $\nu = 1$ και $\mu \rightarrow 0$: α) οριζόντια συνιστώσα και β) κατακόρυφη συνιστώσα.

Από το **Σχήμα 16** συμπεραίνουμε ότι η περίπτωση $\nu = 1$ και $\mu \rightarrow 0$ για το πρόβλημα αυτό δίνει όμοια αποτελέσματα για τις οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις με το πρόβλημα του συγκεντρωμένου κατακόρυφου φορτίου σε επίστρωση επάνω σε άκαμπτο υπόστρωμα (**Σχήμα 9**). Αυτό συμβαίνει διότι προκειμένου το μ να τείνει στο μηδέν ελήφθη ότι $\mu_2 \gg \mu_1$, που πρακτικά σημαίνει ότι το υπόβαθρο είναι άκαμπτο σε σχέση με την επίστρωση.

Στο **Σχήμα 17** παρουσιάζεται η συμπεριφορά των μετατοπίσεων της διεπιφάνειας μεταξύ των δύο στρώσεων για την περίπτωση $\nu = 1$. Παρατηρούνται και εδώ ομαλές καμπύλες και μηδενισμός των οριζοντίων μετατοπίσεων (**Σχήμα 17α**) και για τις τρεις περιπτώσεις του μ όσο το x πλησιάζει στο σημείο επίδρασης του φορτίου, σε αντίθεση με την ασυνέχεια που δημιουργείται όταν βρισκόμαστε στην επιφάνεια. Επίσης όσο απομακρυνόμαστε από αυτό το σημείο οι οριζόντιες μετατοπίσεις απειρίζονται. Από τις καμπύλες των κατακόρυφων μετατοπίσεων (**Σχήμα 17β**) παρατηρούμε ότι όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο εφαρμογής αυτές απειρίζονται ενώ όσο το πλησιάζουμε αυτές παρουσιάζουν ένα πεπερασμένο μέγιστο. Η μεγαλύτερη τιμή αυτών

των μέγιστων μετατοπίσεων παρουσιάζεται στην περίπτωση που το $\mu_1 \rightarrow 0$. Εδώ οι καμπύλες των $\mu=0$ και $\mu=1$ σχεδόν ταυτίζονται για $x/h \geq |1|$.



Σχήμα 17. Διαγράμματα μετατοπίσεων διεπιφάνειας ($y = h$) υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου για το πρόβλημα ελαστικής επίστρωσης – ελαστικό υπόβαθρο για την περίπτωση $\nu = 1$: α) οριζόντια και β) κατακόρυφη συνιστώσα.

Στο **Σχήμα 18** παρουσιάζονται οι χάρτες σε 2 διαστάσεις (contour plots) για τις αδιαστατοποιημένες οριζόντιες μετατοπίσεις $\mu_2 u_x / P$ και για τα δύο στρώματα για την περίπτωση $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1$ όταν το ν γίνεται 0, 1, ∞ . Η αδιαστατοποίηση του προβλήματος, επιτάσσει οι αποστάσεις να αδιαστατοποιηθούν με το πάχος της επίστρωσης (x/h και y/h). Στο $\frac{y}{h} = 1$ βρίσκεται η διεπιφάνεια μεταξύ επίστρωσης και υποβάθρου. Παρατηρούμε ότι και στα τρία διαγράμματα οι οριζόντιες μετατοπίσεις είναι μηδέν όσο κινούμαστε επάνω στον άξονα y και προς τα κάτω ενώ εκατέρωθεν αυτού αυξάνονται και μεγιστοποιούνται όσο πλησιάζουμε στην επιφάνεια (κατά απόλυτη τιμή). Φαίνεται επίσης πως η διαφορά των λόγων Poisson των δύο στρωμάτων έχει κάποια επίδραση στα αποτελέσματα αλλά όχι πάρα πολύ σημαντική.

Στο **Σχήμα 19** παρουσιάζονται οι χάρτες για τις αδιαστατοποιημένες κατακόρυφες μετατοπίσεις $\mu_2 u_y / P$ στην περίπτωση $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1$ και όταν το ν γίνεται 0, 1, ∞ . Η

αδιαστατοποίηση του προβλήματος έγινε όπως και προηγουμένως. Εδώ παρατηρούμε ότι όσο πλησιάζουμε προς το σημείο εφαρμογής του φορτίου τόσο μεγαλώνει η μετατόπιση. Και σε αυτήν την περίπτωση, η διαφορά των λόγων Poisson των δύο στρωμάτων δεν έχει πολύ σημαντική επίδραση στα αποτελέσματα.

Στο σημείο αυτό πρέπει να υπογραμμισθεί ότι το πρόσημο της τιμής της μετατόπισης, τόσο των οριζόντιων όσο και των κατακόρυφων, υποδηλώνει φορά κίνησης. Το θετικό πρόσημο σημαίνει πως η φορά είναι προς τα δεξιά και προς τα κάτω δηλαδή προς τα θετικά x και y αντίστοιχα, ενώ αρνητικό πρόσημο σημαίνει μετακίνηση προς τα αριστερά και προς τα πάνω.

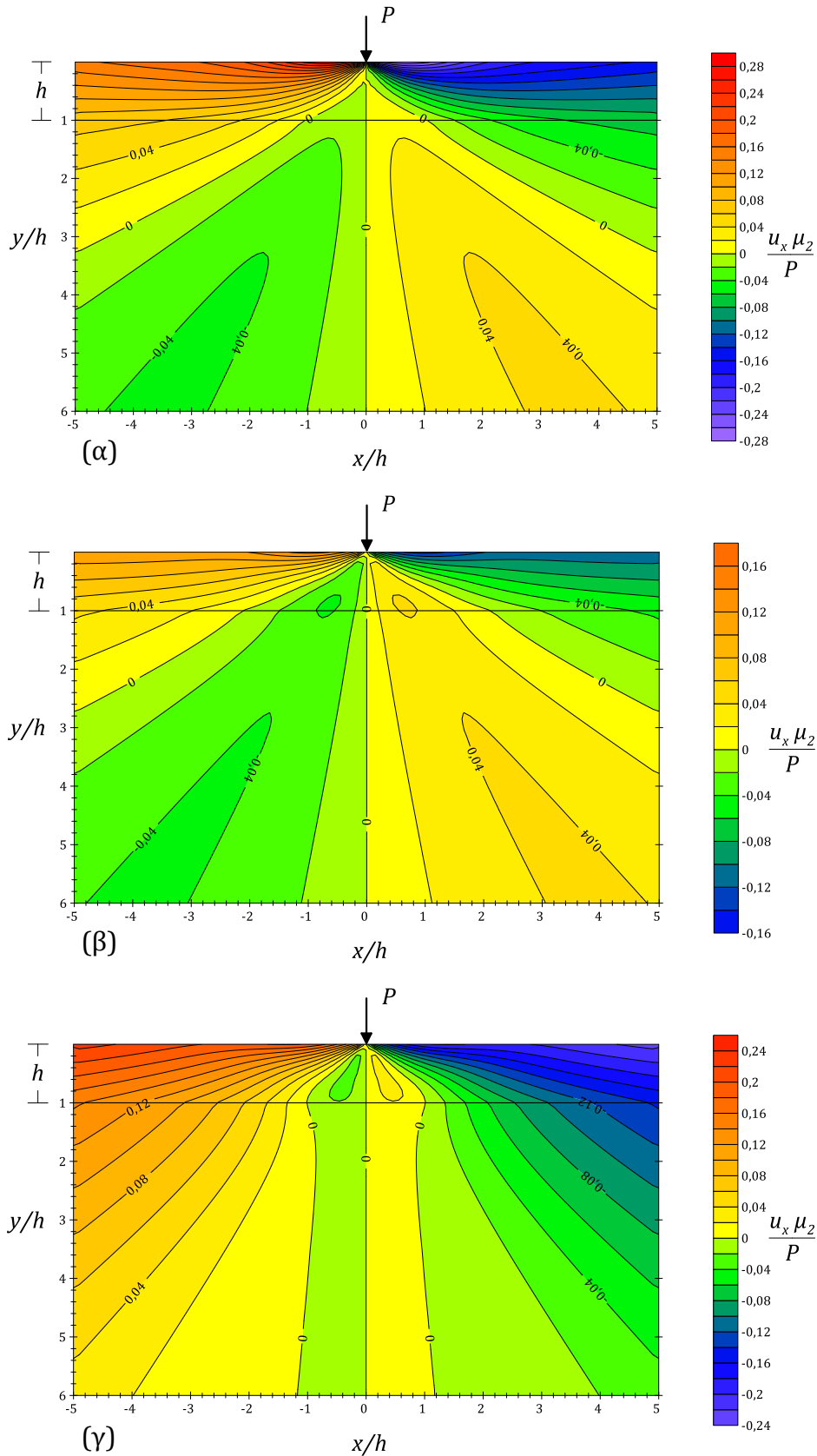
Στο **Σχήμα 20** παρουσιάζονται οι χάρτες για τις αδιαστατοποιημένες οριζόντιες μετατοπίσεις $\mu_2 u_x / P$ και για τα δύο στρώματα σε όλο τον χώρο για την περίπτωση

$\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2} = 1$ όταν το μ γίνεται $0, 1, \infty$. Εδώ παρατηρούμε πως η επίδραση της διαφοράς

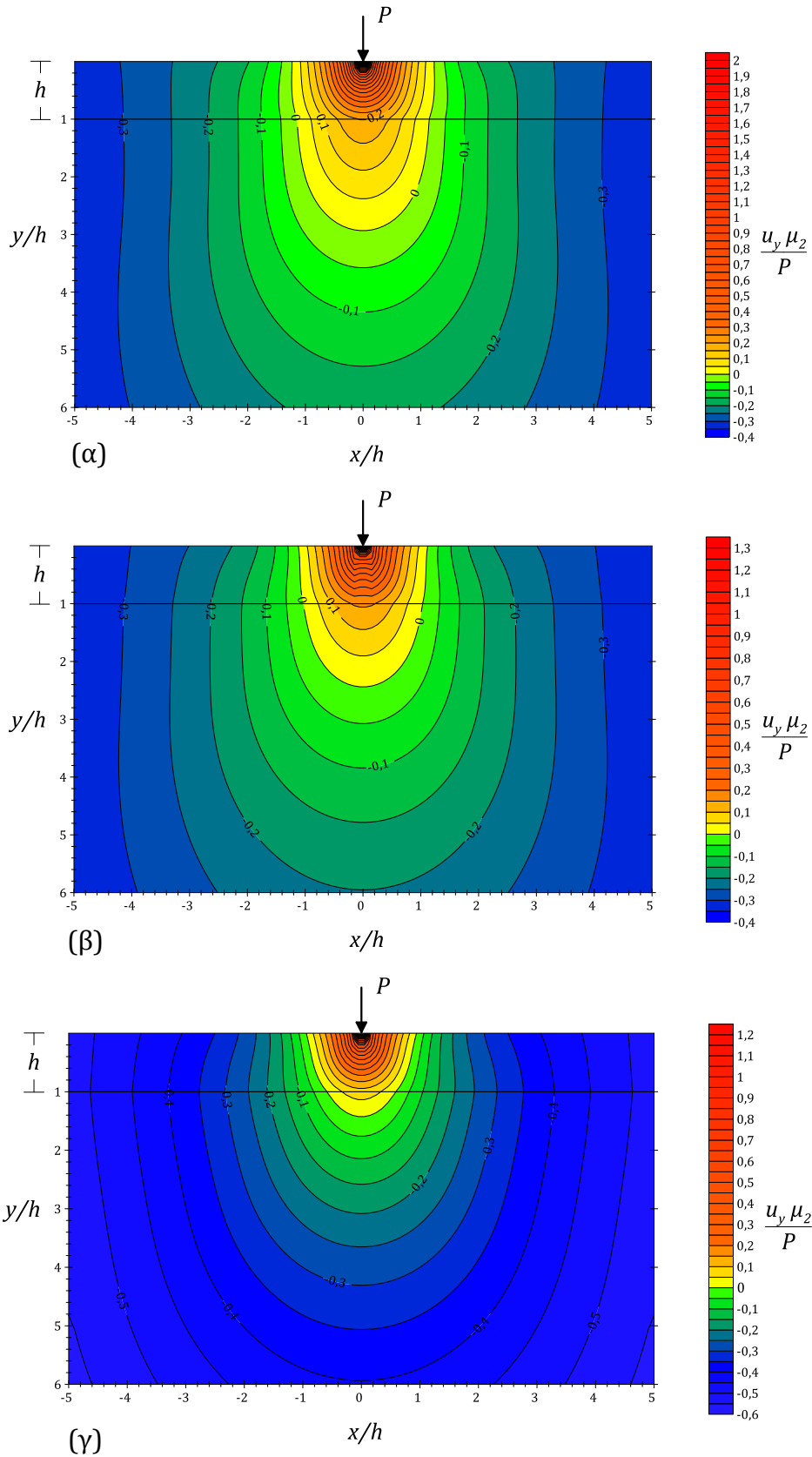
των μέτρων διάτμησης των δύο στρωμάτων είναι πολύ σημαντική μιας και τα διαγράμματα έχουν άλλη μορφή για κάθε τιμή του λόγου μ . Επίσης, συγκρίνοντας το **Σχήμα 20** (α) με το **Σχήμα 10** (α) παρατηρούμε την ομοιότητα των κατανομών. Αυτό συμβαίνει επειδή όσο πιο πολύ αυξάνεται το μ_2 τόσο πιο άκαμπτη γίνεται η συμπεριφορά του υποστρώματος και τείνει να ταυτιστεί με αυτήν του προβλήματος συγκεντρωμένου κατακόρυφου φορτίου σε επίστρωση επάνω σε άκαμπτο υπόστρωμα.

Στο **Σχήμα 21** παρουσιάζονται οι αδιαστατοποιημένες κατακόρυφες μετατοπίσεις $\mu_2 u_y / P$ συνολικά και για τα δύο στρώματα για την περίπτωση $\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2} = 1$ όταν το μ

γίνεται $0, 1, \infty$. Και για τις κατακόρυφες μετατοπίσεις η επίδραση της διαφοράς των μέτρων διάτμησης των δύο στρωμάτων είναι καθοριστικής σημασίας μιας και τα διαγράμματα έχουν άλλη μορφή για κάθε τιμή του λόγου μ . Μάλιστα, βλέπουμε πως οι κατανομές στο **Σχήμα 21** (α) και στο **Σχήμα 10** (β) έχουν παρόμοια μορφή λόγω της πολύ μεγάλης τιμής του μ_2 σε σχέση με το μ_1 . Αντίθετα, στο **Σχήμα 21** (γ) λόγω της πολύ μεγάλης τιμής του μ_1 δεν εμφανίζονται τόσο μεγάλες μετατοπίσεις όπως πριν ούτε στην επίστρωση ούτε και στο υπόστρωμα.

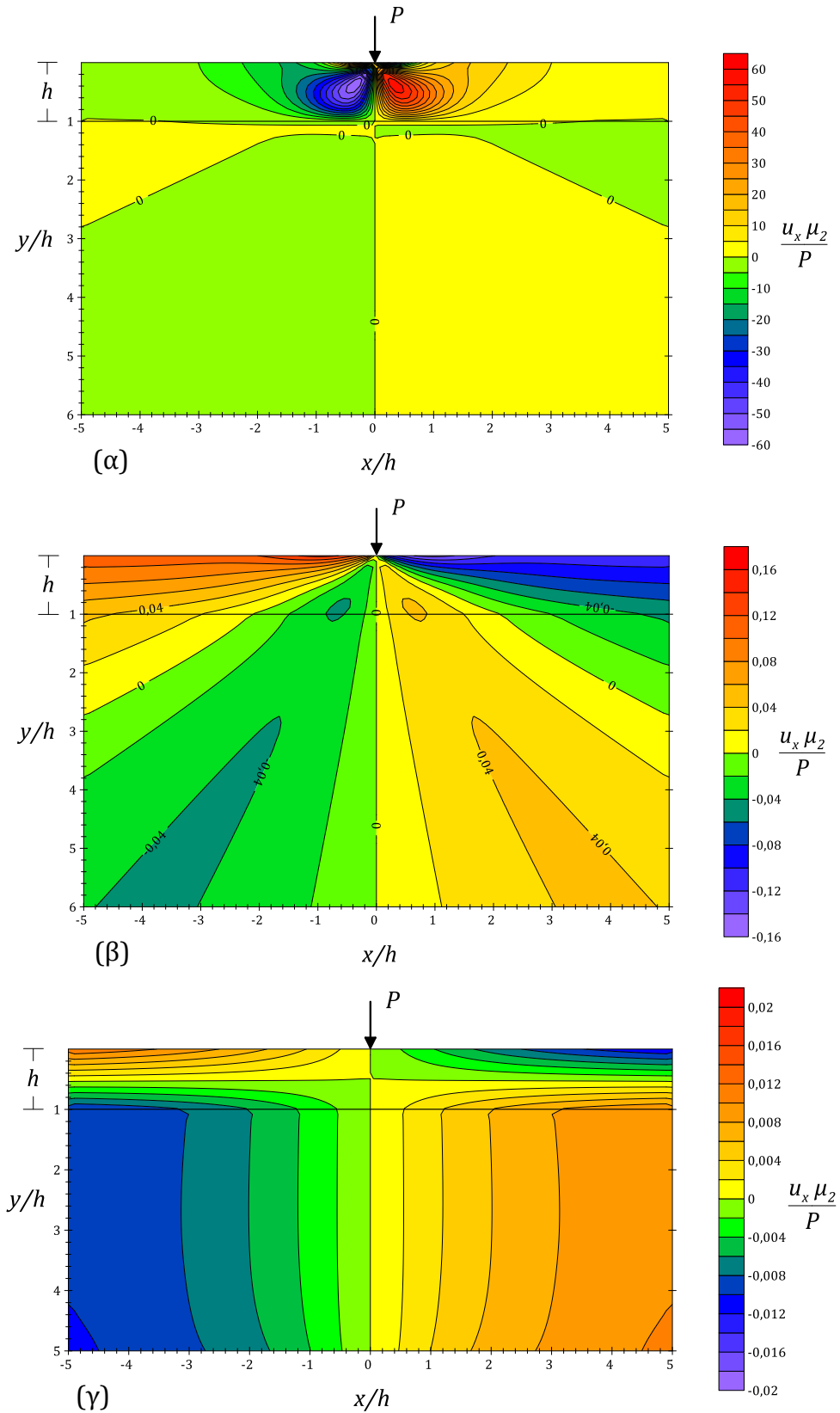


Σχήμα 18. Οριζόντιες μετατοπίσεις του συστήματος ελαστικής επίστρωσης-ελαστικού υποστρώματος, για την περίπτωση $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1$: α) $\nu \rightarrow 0$, β) $\nu = 1$, γ) $\nu \rightarrow \infty$, ($\nu = \frac{V_1}{V_2}$).

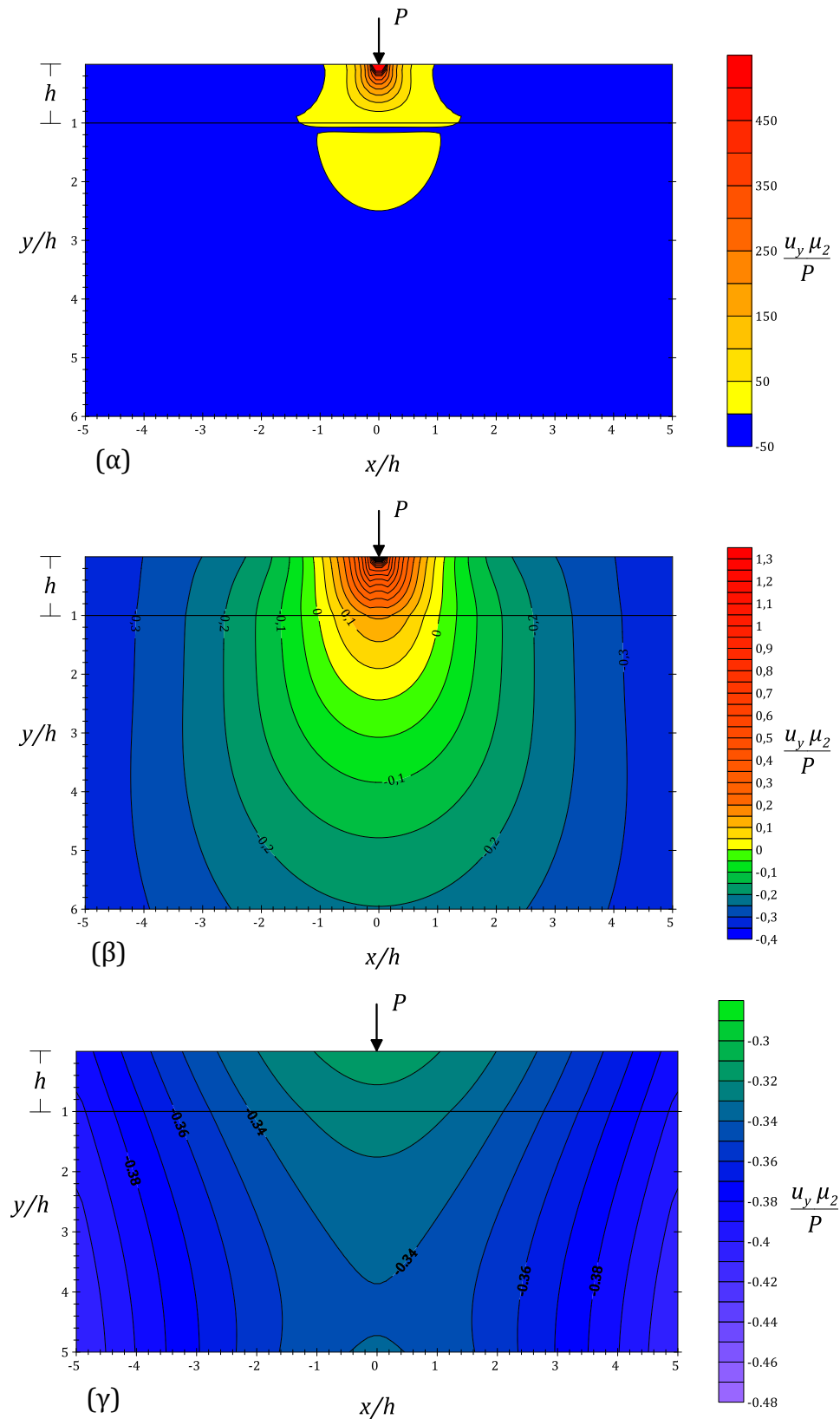


Σχήμα 19. Κατακόρυφες μετατοπίσεις συστήματος ελαστικής επίστρωσης-ελαστικού

υποστρώματος, για την περίπτωση $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1$: α) $\nu \rightarrow 0$, β) $\nu = 1$, γ) $\nu \rightarrow \infty$, ($\nu = \frac{V_1}{V_2}$).



Σχήμα 20. Οριζόντιες μετατοπίσεις του συστήματος ελαστικής επίστρωσης-ελαστικού υποστρώματος, για την περίπτωση $\nu = \frac{V_1}{V_2} = 1$: α) $\mu \rightarrow 0$, β) $\mu = 1$, γ) $\mu \rightarrow \infty$ ($\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$).



Σχήμα 21. Κατακόρυφες μετατοπίσεις συστήματος ελαστικής επίστρωσης-ελαστικού υποστρώματος, για την περίπτωση $\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2} = 1$: α) $\mu \rightarrow 0$, β) $\mu = 1$, γ) $\mu \rightarrow \infty$ ($\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$).

4.3.2 Αποτελέσματα για τις τάσεις

Στην παράγραφο αυτή δίνονται τα αποτελέσματα για τις τάσεις που αναπτύσσονται στο σύστημα ελαστικής επίστρωσης – παραμορφώσιμου υποστρώματος υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας. Για την αδιαστατοποίηση του προβλήματος οι αποστάσεις έχουν διαιρεθεί με το πάχος της επίστρωσης $(x/h, y/h)$ ενώ οι τάσεις πολλαπλασιάστηκαν με το πάχος της επίστρωσης και διαιρέθηκαν με το εφαρμοζόμενο φορτίο $(\frac{\sigma_{ij}h}{P})$.

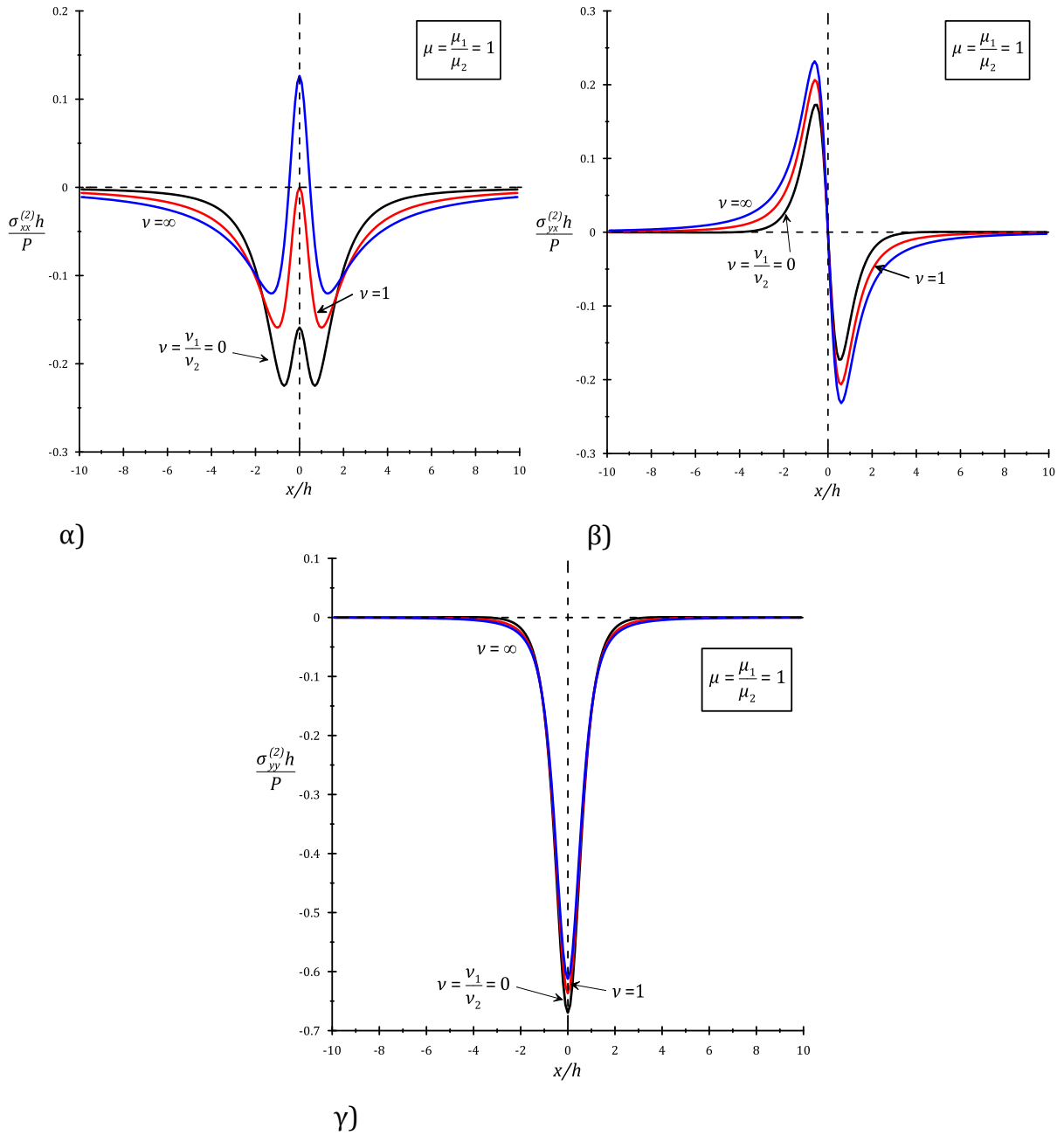
Όπως για τις μετατοπίσεις έτσι και για τις τάσεις εξετάζονται δύο περιπτώσεις σε σχέση με τους λόγους των μέτρων διάτμησης $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ και των λόγων Poisson $\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ των στρωμάτων. Ο δείκτης 1 αντιστοιχεί στην επίστρωση και ο δείκτης 2 στο υπόβαθρο και για τους λόγους ισχύουν τα ίδια πράγματα με την προηγούμενη παράγραφο. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν το $\mu = 1$ και εξετάζονται οι τάσεις όταν το ν γίνεται 0, 1 ή ∞ . Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν το $\nu = 1$ οπότε διερευνάται η συμπεριφορά του πεδίου τάσεων όταν το μ είναι 0, 1, ∞ . Αρχικά παρουσιάζονται τα διαγράμματα των τάσεων για την διεπιφάνεια και ακολούθως οι χάρτες κατανομής των τάσεων σε όλο το χωρίο.

Στο **Σχήμα 22** παρουσιάζονται τα διαγράμματα των τάσεων στην διεπιφάνεια (όπου $y = h$) για την περίπτωση $\mu = 1$. Και στα τρία διαγράμματα παρατηρούμε ότι οι τρεις τάσεις παρουσιάζουν παρόμοια μορφή για ν ίσον με 0, 1 ή ∞ , αλλά με σημαντικές διαφορές στις μέγιστες τιμές. Πιο συγκεκριμένα, για ν ίσον με 0 (**Σχήμα 22α**), η $\frac{\sigma_{xx}^{(2)}h}{P}$ στον άξονα εφαρμογής του φορτίου παρουσιάζει τοπικά μέγιστη θλιπτική τιμή αλλά αριθμητικά είναι μικρότερη από τις τιμές στα σημεία $x/h \approx 1$ και $x/h \approx -1$ στα οποία έχει την μέγιστη θλιπτική. Όσο απομακρυνόμαστε οριζόντια και εκατέρωθεν του κατακόρυφου άξονα, η τιμή της πέφτει και τελικά σε αρκετά μεγάλη απόσταση μηδενίζεται. Όταν το $\nu = 1$ τότε το σύστημα συμπεριφέρεται ως ημίχωρος και η ορθή οριζόντια τάση στον άξονα εφαρμογής του φορτίου μηδενίζεται. Όταν το $\nu \rightarrow \infty$ δηλαδή το $\nu_2 \rightarrow 0$ η ορθή οριζόντια τάση στην διεπιφάνεια στον άξονα εφαρμογής του φορτίου παίρνει την μέγιστη εφελκυστική της τιμή, γεγονός που θα μπορούσε να οδηγήσει στην εμφάνιση ρωγμών παράλληλων στον κατακόρυφο άξονα. Συμπερασματικά, η ορθή οριζόντια τάση στην διεπιφάνεια είναι παντού θλιπτική στις περιπτώσεις επίστρωσης με

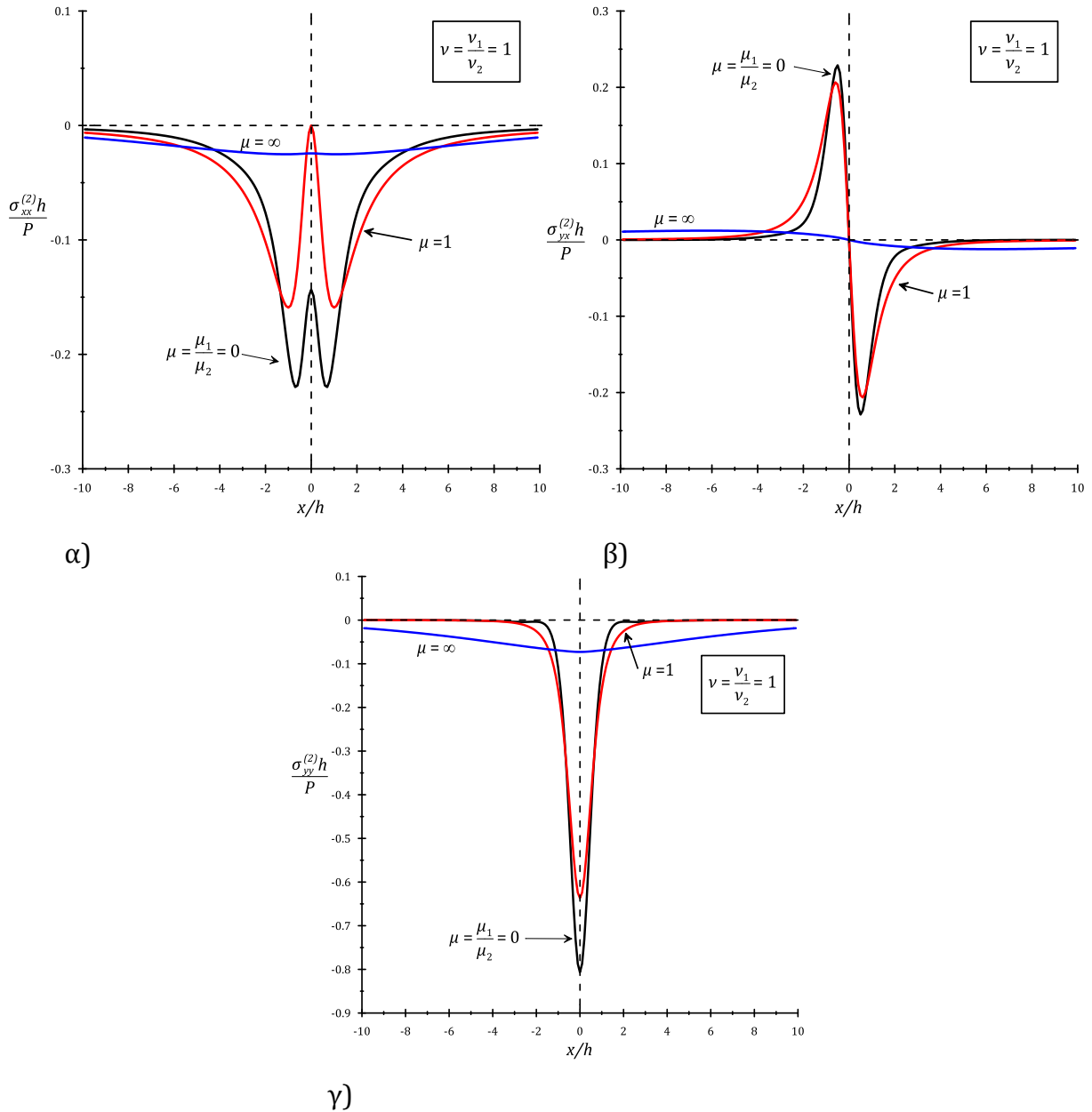
$\nu_1 \rightarrow 0$ και ημιχώρου ενώ για υπόστρωμα με $\nu_2 \rightarrow 0$ γίνεται εφελκυστική κοντά στον άξονα εφαρμογής του φορτίου.

Η διατμητική τάση $\frac{\sigma_{yx}^{(2)}h}{P}$ (**Σχήμα 22β**) μηδενίζεται στον άξονα εφαρμογής και στις τρεις περιπτώσεις, όπως άλλωστε είναι και το δεδομένο του προβλήματος μας, ενώ εκατέρωθεν αυτού παρουσιάζει τοπικά ακρότατα με διαφορετικό πρόσημο. Όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο αυτό φθίνει μέχρι να μηδενιστεί για $x/h \approx 8$. Η καμπύλη για $\nu = 0$ μηδενίζεται πολύ πιο γρήγορα, για $x/h \approx 4$ ενώ η διατμητική τάση στην περίπτωση $\nu \rightarrow \infty$ δηλαδή το $\nu_2 \rightarrow 0$ παρουσιάζει την μεγαλύτερη τιμή από τις τρεις περιπτώσεις. Τέλος, οι καμπύλες των διαγραμμάτων για την $\frac{\sigma_{yy}^{(2)}h}{P}$ (**Σχήμα 22γ**), σχεδόν ταυτίζονται και για τις τρεις τιμές του ν . Παρουσιάζουν μέγιστο στον άξονα εφαρμογής του φορτίου, διαφορετικό στην κάθε περίπτωση με μεγαλύτερο για την περίπτωση $\nu \rightarrow 0$. Εκατέρωθεν του άξονα φθίνουν το ίδιο γρήγορα και μηδενίζονται για $x/h \geq |5|$ περίπου.

Για την περίπτωση $\nu = 1$ στο **Σχήμα 23**, παρατηρούμε από τα διαγράμματα ότι οι καμπύλες για κάθε μια από τις τρεις τάσεις παρουσιάζουν την ίδια μορφή μεταξύ τους όταν το μ είναι 0 και 1 ενώ για $\mu \rightarrow \infty$ διαφοροποιούνται από τις άλλες 2 περιπτώσεις. Έτσι για $\nu = 1$ και $\mu \rightarrow 0$, **Σχήμα 23 (α)**, ισχύει ότι και στην περίπτωση $\mu = 1$ και $\nu \rightarrow 0$ στο **Σχήμα 22(α)**, ενώ για $\nu = 1$ και $\mu \rightarrow \infty$ βλέπουμε ότι η καμπύλες των τάσεων ομοιάζουν περισσότερο σε ευθεία. Η συμπεριφορά αυτή για τις τάσεις όταν $\mu \rightarrow \infty$ είναι αναμενόμενη καθώς το $\mu_2 \rightarrow 0$. Επίσης στο **Σχήμα 23(β)** παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή για την διατμητική τάση παρουσιάζεται στην περίπτωση $\mu \rightarrow 0$. Το ίδιο ισχύει και για την κατακόρυφη ορθή τάση, **Σχήμα 23(γ)** μόνο που η τιμή της είναι μεγαλύτερη από ότι στο **Σχήμα 22 (γ)**. Αυτό συμβαίνει γιατί η επίστρωση είναι πολύ μαλακή, αφού το $\mu_1 \rightarrow 0$ και επομένως στην διεπιφάνεια ασκείται η μέγιστη κατακόρυφη ορθή τάση.



Σχήμα 22. Διαγράμματα αδιαστατοποιημένων τάσεων στην διεπιφάνεια συστήματος επίστρωσης- υποστρώματος, για $\mu = 1$: α) $\frac{\sigma_{xx}^{(2)}h}{P}$, β) $\frac{\sigma_{yx}^{(2)}h}{P}$, γ) $\frac{\sigma_{yy}^{(2)}h}{P}$.



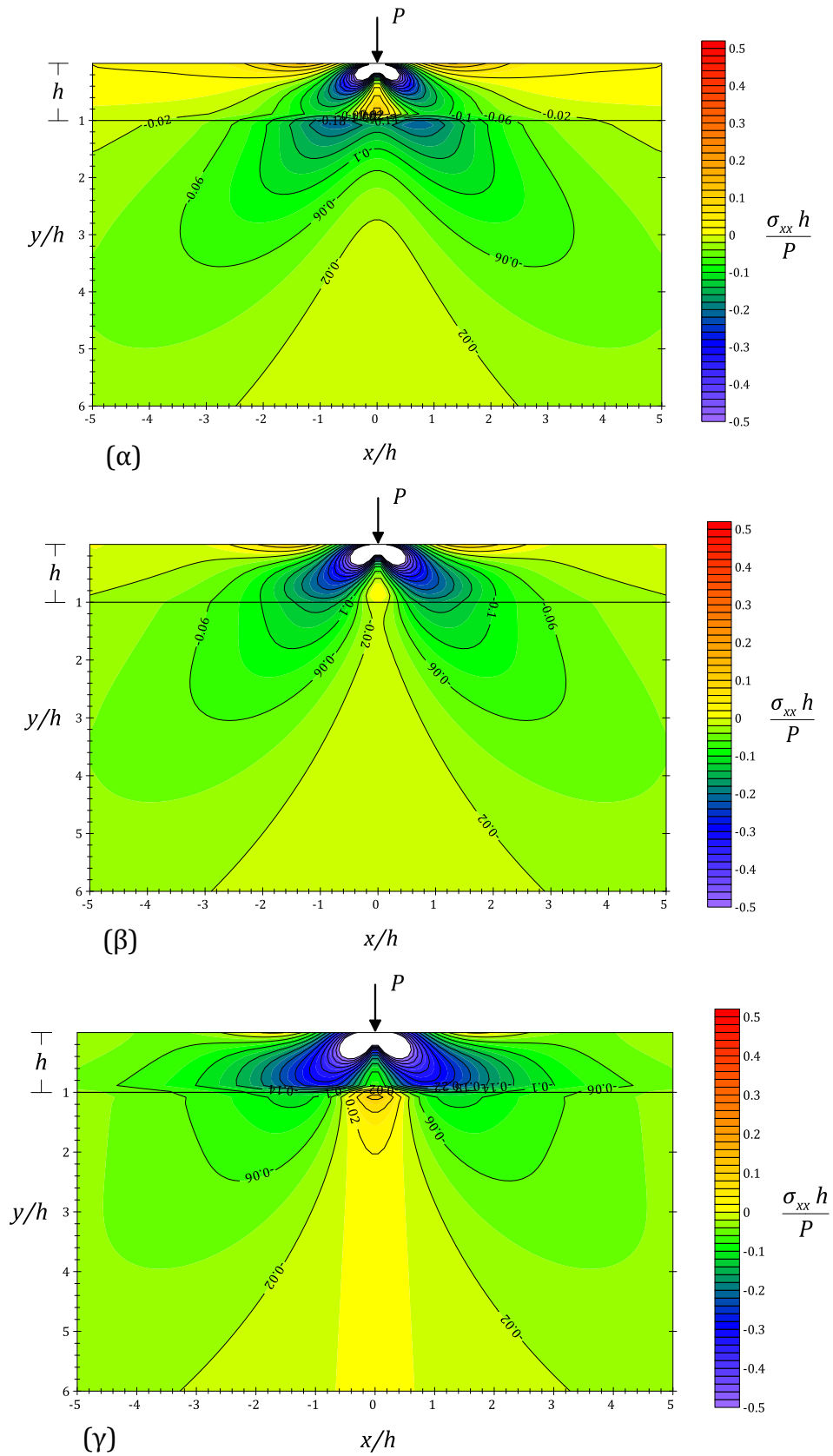
Σχήμα 23. Διαγράμματα αδιαστατοποιημένων τάσεων στην διεπιφάνεια συστήματος επίστρωσης- υποστρώματος, για $\nu = 1$: α) $\frac{\sigma_{xx}^{(2)}h}{P}$, β) $\frac{\sigma_{yx}^{(2)}h}{P}$, γ) $\frac{\sigma_{yy}^{(2)}h}{P}$.

Ακολούθως παρουσιάζονται οι χάρτες κατανομής των αδιαστατοποιημένων τάσεων $\frac{\sigma_{xx}h}{P}$, $\frac{\sigma_{yx}h}{P}$, $\frac{\sigma_{yy}h}{P}$ σε όλο το χωρίο για την περίπτωση $\mu = 1$. Στο **Σχήμα 24** δίνονται τα πεδία της αδιαστατοποιημένης οριζόντιας ορθής τάσης $\frac{\sigma_{xx}h}{P}$ για $\mu = 1$ όταν το ν γίνεται 0, 1 ή ∞ . Παρατηρούμε ότι η μορφή των ισοτασικών καμπύλων είναι περίπου η ίδια και στα τρία διαγράμματα με μικρές διαφοροποιήσεις που έχουν να κάνουν κυρίως με τα μεγέθη

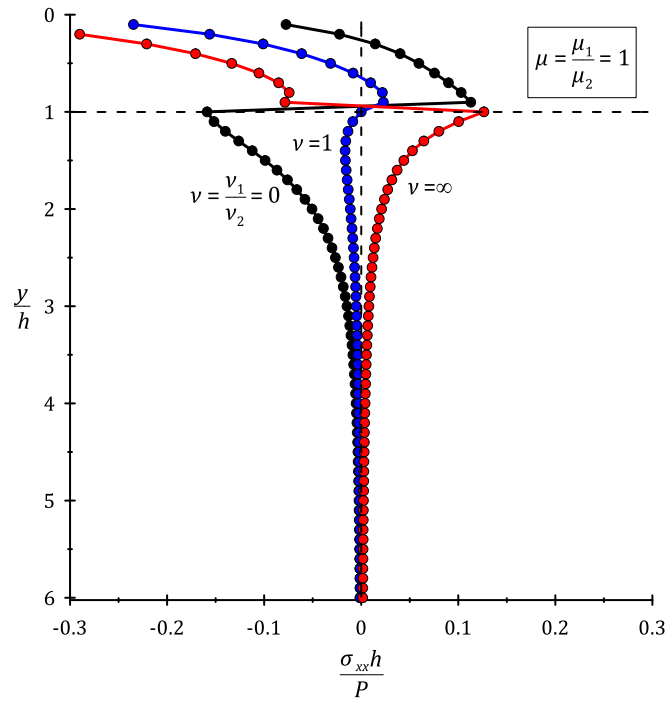
της τάσης σε κάθε περίπτωση. Συνεπώς η διαφορά των λόγων Poisson των δύο στρωμάτων έχει κάποια επίδραση στα αποτελέσματα αλλά όχι πάρα πολύ σημαντική. Όπως στο **Σχήμα 22** έτσι και εδώ παρατηρούμε την δημιουργία ζώνης εφελκυστικής οριζόντιας ορθής τάσης στην διεπιφάνεια και γύρω από τον άξονα εφαρμογής του φορτίου μέσα στην επίστρωση για την περίπτωση που το $\nu \rightarrow 0$ ενώ στην περίπτωση που το $\nu \rightarrow \infty$ η ζώνη σχηματίζεται μέσα στο υπόστρωμα. Επίσης παρατηρούμε στην περιοχή της διεπιφάνειας την ασυνέχεια της οριζόντιας ορθής τάσης από το ένα στρώμα στο άλλο στις περιπτώσεις α) $\nu \rightarrow 0$ και γ) $\nu \rightarrow \infty$ όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο **Σχήμα 25** το οποίο παρουσιάζει τις τάσεις στις διάφορες περιπτώσεις και την μεταβολή τους κατά τον κατακόρυφο άξονα. Στην περίπτωση που τα υλικά έχουν τις ίδιες μηχανικές σταθερές (περίπτωση ημιχώρου) δεν υπάρχει ασυνέχεια.

Στο **Σχήμα 26** δίνονται τα πεδία της αδιαστατοποιημένης διατμητικής τάσης $\frac{\sigma_{yx}h}{P}$ για $\mu=1$ όταν το ν γίνεται 0, 1, ∞ . Όπως και προηγουμένως παρατηρούμε μικρές διαφοροποιήσεις στην μορφή των διαγραμμάτων που έχουν να κάνουν κυρίως με τα μεγέθη της τάσης σε κάθε περίπτωση. Συνεπώς και εδώ η διαφορά των λόγων Poisson των δύο στρωμάτων έχει μικρή επίδραση στα αποτελέσματα.

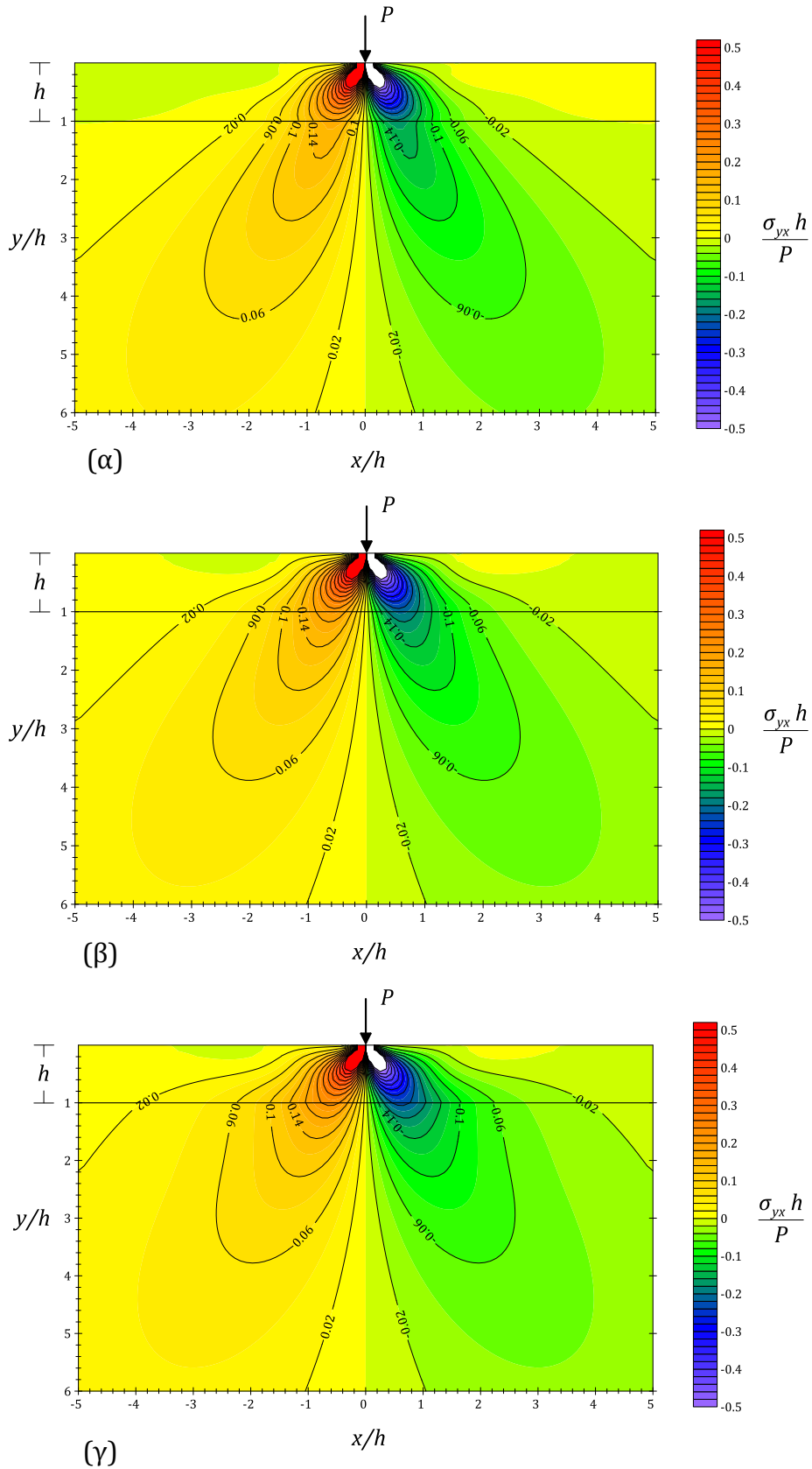
Στο **Σχήμα 27** παρατίθενται τα διαγράμματα αδιαστατοποιημένων ισοτασικών καμπύλων για την κατακόρυφη ορθή τάση $\frac{\sigma_{yy}h}{P}$ στην περίπτωση $\mu=1$ όταν το ν γίνεται 0, 1, ∞ . Και εδώ παρατηρούμε σχετικά μικρές διαφοροποιήσεις των μορφών των ισοτασικών καμπύλων καθώς μεταβάλλεται ο λόγος ν . Επίσης βλέπουμε ότι το ποσοστό της περιοχής μέγιστης ορθής τάσης (λευκή περιοχή) μέσα στο υπόστρωμα είναι μεγαλύτερο για την περίπτωση $\nu \rightarrow 0$ και μειώνεται όσο μεγαλώνει το ν .



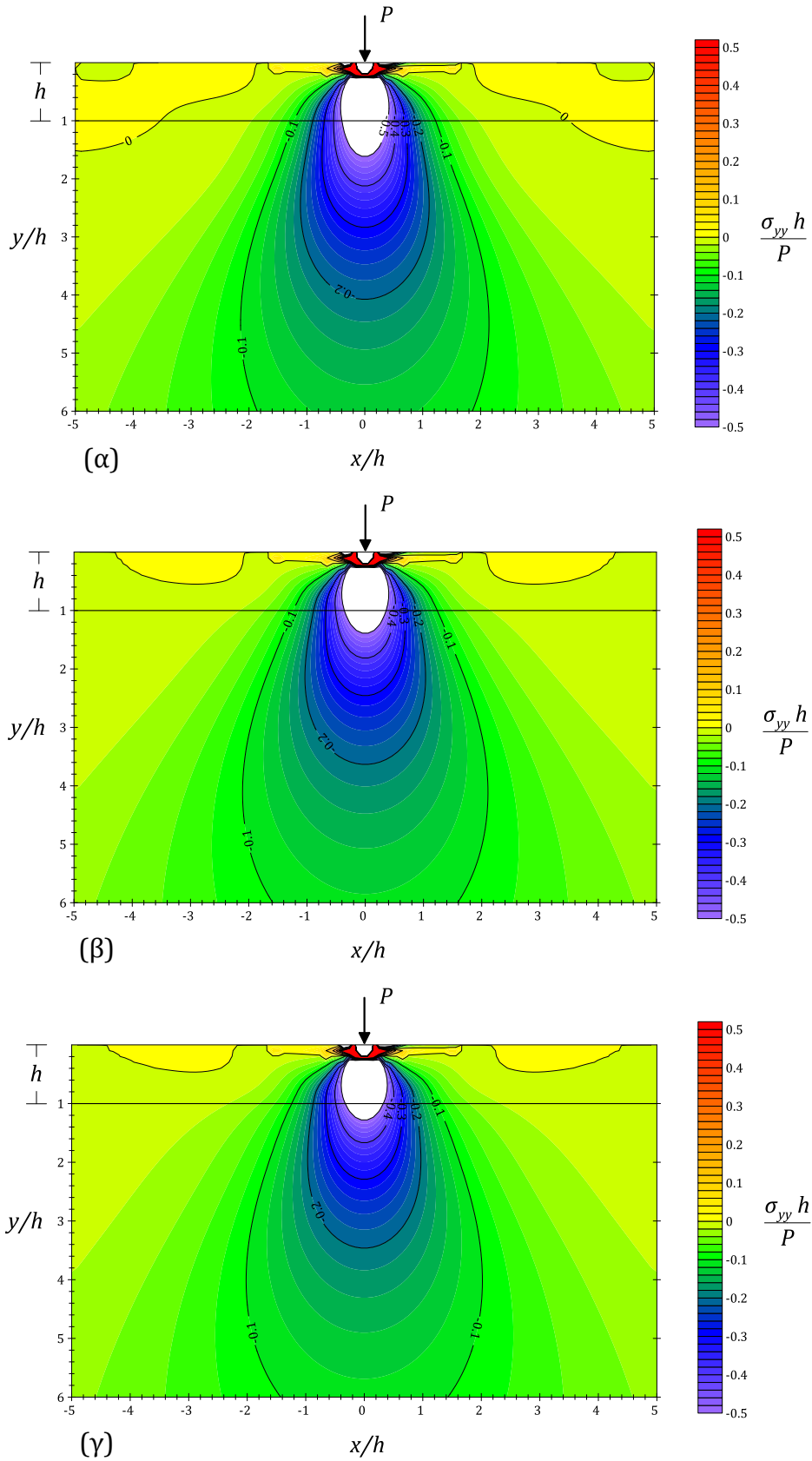
Σχήμα 24. Χάρτες κατανομής της αδιαστατοποιημένης οριζόντιας ορθής τάσης $\frac{\sigma_{xx} h}{P}$ στην περίπτωση $\mu=1$ και α) $\nu \rightarrow 0$, β) $\nu = 1$, γ) $\nu \rightarrow \infty$.



Σχήμα 25. Διαγράμματα της τάσης $\frac{\sigma_{xx}h}{P}$ κατά τον κατακόρυφο άξονα στην θέση $x=0$ για την περίπτωση $\mu=1$ και α) $\nu \rightarrow 0$, β) $\nu = 1$, γ) $\nu \rightarrow \infty$



Σχήμα 26. Χάρτες κατανομής της αδιαστατοποιημένης διαμητικής τάσης $\frac{\sigma_{yx}h}{P}$ στην περίπτωση $\mu=1$ και α) $\nu \rightarrow 0$, β) $\nu = 1$, γ) $\nu \rightarrow \infty$.



Σχήμα 27. Χάρτες κατανομής της αδιαστατοποιημένης κατακόρυφης ορθής τάσης $\frac{\sigma_{yy} h}{P}$

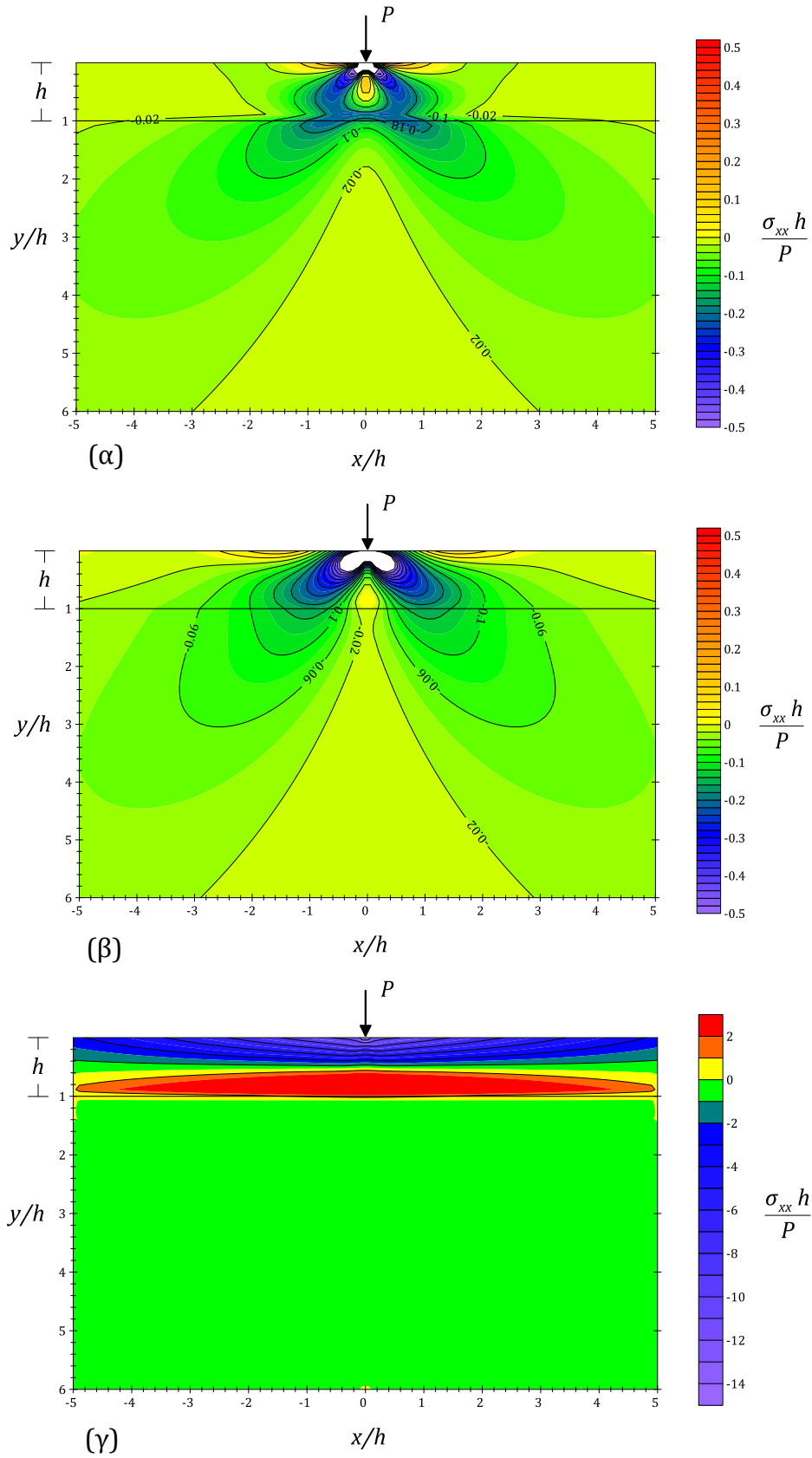
στην περίπτωση $\mu = 1$ και α) $\nu \rightarrow 0$, β) $\nu = 1$, γ) $\nu \rightarrow \infty$.

Ακολουθώς παρουσιάζονται οι χάρτες κατανομής των τάσεων σε όλο το χωρίο για την περίπτωση $\nu = 1$. Στο **Σχήμα 28** παρουσιάζεται η κατανομή της οριζόντιας ορθής τάσης $\frac{\sigma_{xx}h}{P}$ στην περίπτωση όπου το $\nu = 1$ και το μ είναι $0, 1, \infty$. Στο **Σχήμα 28** (α) και (β) στις περιπτώσεις δηλαδή μαλακής επίστρωσης ($\mu = 0$) ή επίστρωσης με το ίδιο μέτρο διάτμησης με το υπόστρωμα (ομογενής περίπτωση, $\mu = 1$) παρατηρούμε την συμμετρική κατανομή της οριζόντιας ορθής τάσης εκατέρωθεν του άξονα επιβολής του φορτίου. Η τάση είναι θλιπτική και μεγιστοποιείται ακριβώς κάτω από το σημείο φόρτισης (περιοχές άσπρου χρώματος) ενώ διατηρείται θλιπτική και στην διεπιφάνεια. Επίσης παρατηρούμε ότι οι θλιπτικές τάσεις μετασχηματίζονται σε εφελκυστικές σε κάποια οριζόντια απόσταση από το σημείο εφαρμογής αριστερά και δεξιά του φορτίου. Επιπλέον, το **Σχήμα 28** (α) παρουσιάζει την ίδια μορφή με το **Σχήμα 11** (α) της επίστρωσης σε άκαμπτο υπόστρωμα, κάτι που είναι αναμενόμενο λόγω του $\mu \rightarrow 0$ δηλαδή το $\mu_1 \rightarrow 0$. Από την άλλη πλευρά στο **Σχήμα 28** (γ) όπου το $\mu \rightarrow \infty$ δηλαδή το $\mu_2 \rightarrow 0$ παρατηρούμε ότι η $\frac{\sigma_{xx}h}{P}$ κατανέμεται αποκλειστικά στην επίστρωση ενώ στο υπόστρωμα είναι παντού μηδέν. Στην περιοχή της επίστρωσης η ορθή τάση διαχωρίζεται σε δύο ζώνες εκατέρωθεν της οριζοντίου στο $y = h/2$: μια θλιπτική στην επάνω περιοχή της επίστρωσης με την μέγιστη τιμή στην επιφάνεια και μια εφελκυστική ζώνη στην κάτω περιοχή με μέγιστη τιμή στην διεπιφάνεια. Συνεπώς στην περίπτωση πολύ σκληρής επίστρωσης ($\mu = \infty$) οι ρωγμές αναμένονται κοντά στην διεπιφάνεια αν η τάση ξεπεράσει την εφελκυστική αντοχή της επίστρωσης. Επίσης μπορούμε να πούμε πως επειδή το υπόστρωμα στην περίπτωση αυτή δεν παίζει κανένα σημαντικό ρόλο στο εντατικό πεδίο, η συμπεριφορά της επίστρωσης προσεγγίζει αυτήν της αμφιέριστης δοκού υπό κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο. Τέλος, τόσο στο **Σχήμα 28** αλλά ακόμα καλύτερα στο **Σχήμα 29**, παρατηρούμε την ασυνέχεια της οριζόντιας ορθής τάσης στην διεπιφάνεια στις περιπτώσεις α) $\mu = 0$ και γ) $\mu = \infty$.

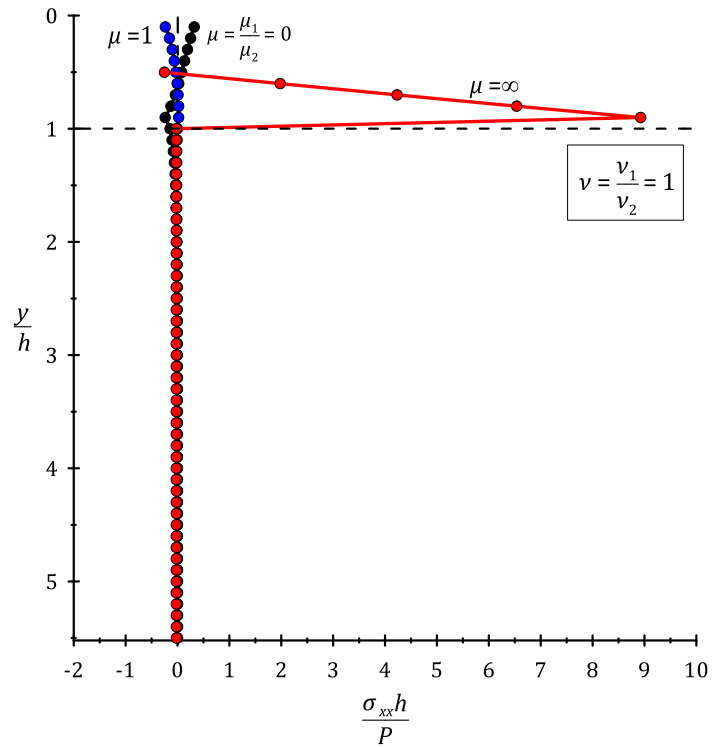
Στο **Σχήμα 30** παρουσιάζονται τα διαγράμματα της $\frac{\sigma_{yx}h}{P}$ στην περίπτωση όπου το $\nu = 1$ και το μ είναι $0, 1, \infty$. Παρατηρούμε την κατοπτρική κατανομή της διατμητικής τάσης εκατέρωθεν του άξονα επιβολής του φορτίου σε όλο τον ημίχωρο στις περιπτώσεις (α) $\mu \rightarrow 0$ και β) $\mu = 1$ ενώ στην περίπτωση (γ) όπου το $\mu \rightarrow \infty$ φαίνεται

ότι η διατμητική τάση κατανέμεται αποκλειστικά στην επίστρωση και το υπόστρωμα είναι σαν να μην υπάρχει. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι το **Σχήμα 30** (α) παρουσιάζει την ίδια μορφή με το **Σχήμα 11** (β) κάτι που είναι αναμενόμενο επειδή λόγω του $\mu \rightarrow 0$ το υπόστρωμα συμπεριφέρεται ως άκαμπτο.

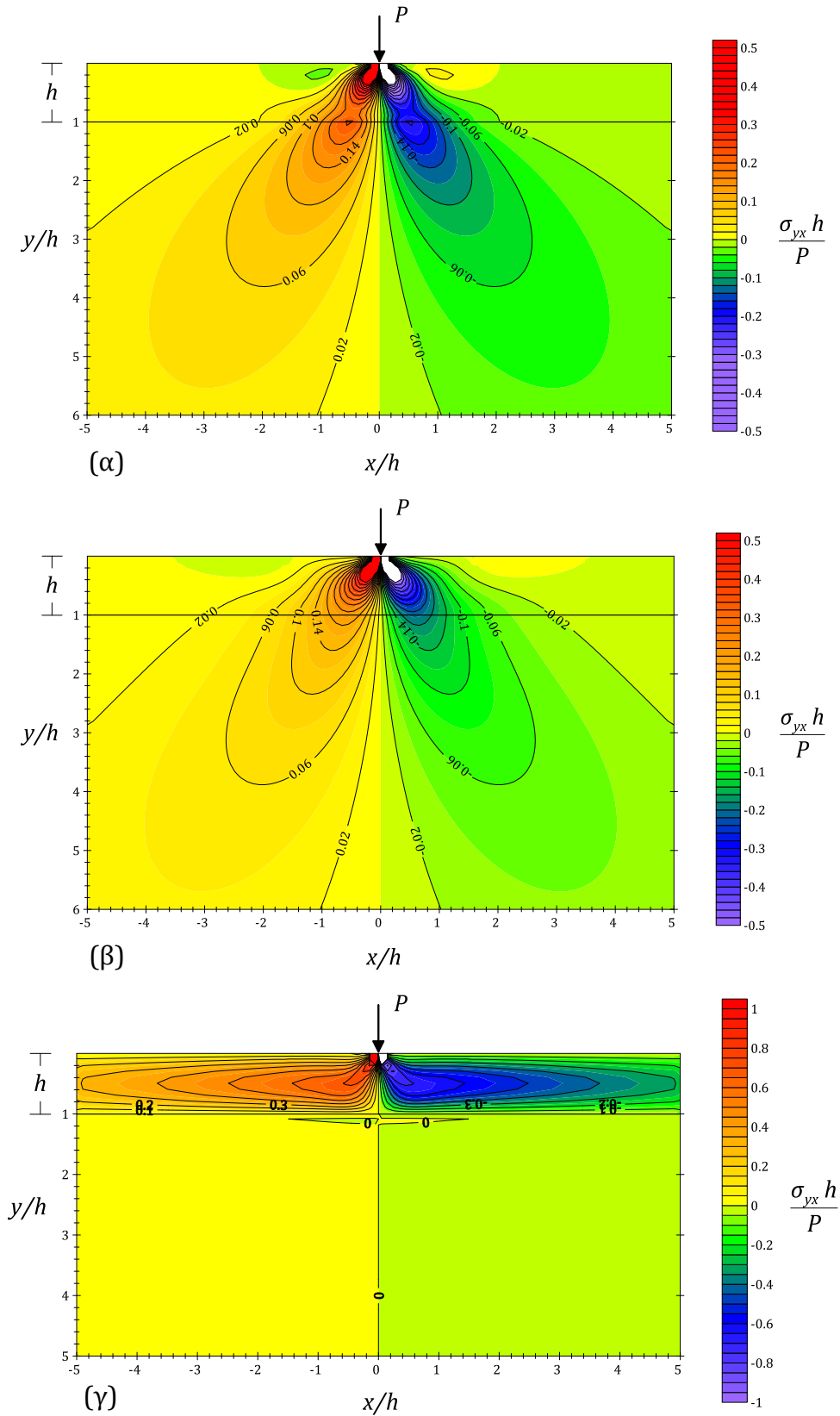
Στο **Σχήμα 31** παρουσιάζεται το τασικό πεδίο της $\frac{\sigma_{yy} h}{P}$ στην περίπτωση όπου το $\nu = 1$ και το μ είναι $0, 1, \infty$. Και εδώ στις περιπτώσεις α) μαλακής επίστρωσης ($\mu \rightarrow 0$) και β) ομογενούς επίστρωσης ($\mu = 1$) παρατηρούμε όμοια μορφή των διαγραμμάτων που περιλαμβάνει την συμμετρική κατανομή της κατακόρυφης ορθής τάσης εκατέρωθεν του άξονα επιβολής του φορτίου και την εμφάνιση της μέγιστης θλιπτικής τιμής ακριβώς κάτω από το σημείο φόρτισης στην επιφάνεια (περιοχές άσπρου χρώματος) ενώ στην περίπτωση γ) σκληρής επίστρωσης ($\mu \rightarrow \infty$) το φαινόμενο περιορίζεται στα όρια της επίστρωσης. Η τάση διατηρείται θλιπτική κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα και στις τρεις περιπτώσεις αλλά βαίνει μειούμενη σε σχέση με το βάθος. Ο ρυθμός ελάττωσης εξαρτάται από τον λόγο των μέτρων διάτμησης και όπως βλέπουμε όσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο διάτμησης της επίστρωσης σε σχέση με του υποστρώματος τόσο γρηγορότερα μειώνεται η θλιπτική τάση με το βάθος. Επίσης παρατηρούμε μια μικρή εφελκυστική περιοχή σε μικρή οριζόντια απόσταση από το σημείο εφαρμογής του φορτίου, η οποία όμως μηδενίζεται σύντομα. Είναι προφανές πως η περίπτωση (α) $\mu \rightarrow 0$ προσεγγίζει την συμπεριφορά που παρουσιάζεται στο **Σχήμα 11** (γ) δηλαδή του άκαμπτου υποστρώματος. Από την άλλη πλευρά στο διάγραμμα (γ) όπου το $\mu \rightarrow \infty$ βλέπουμε πως η κατακόρυφη τάση ουσιαστικά επιδρά μόνο στην επίστρωση.



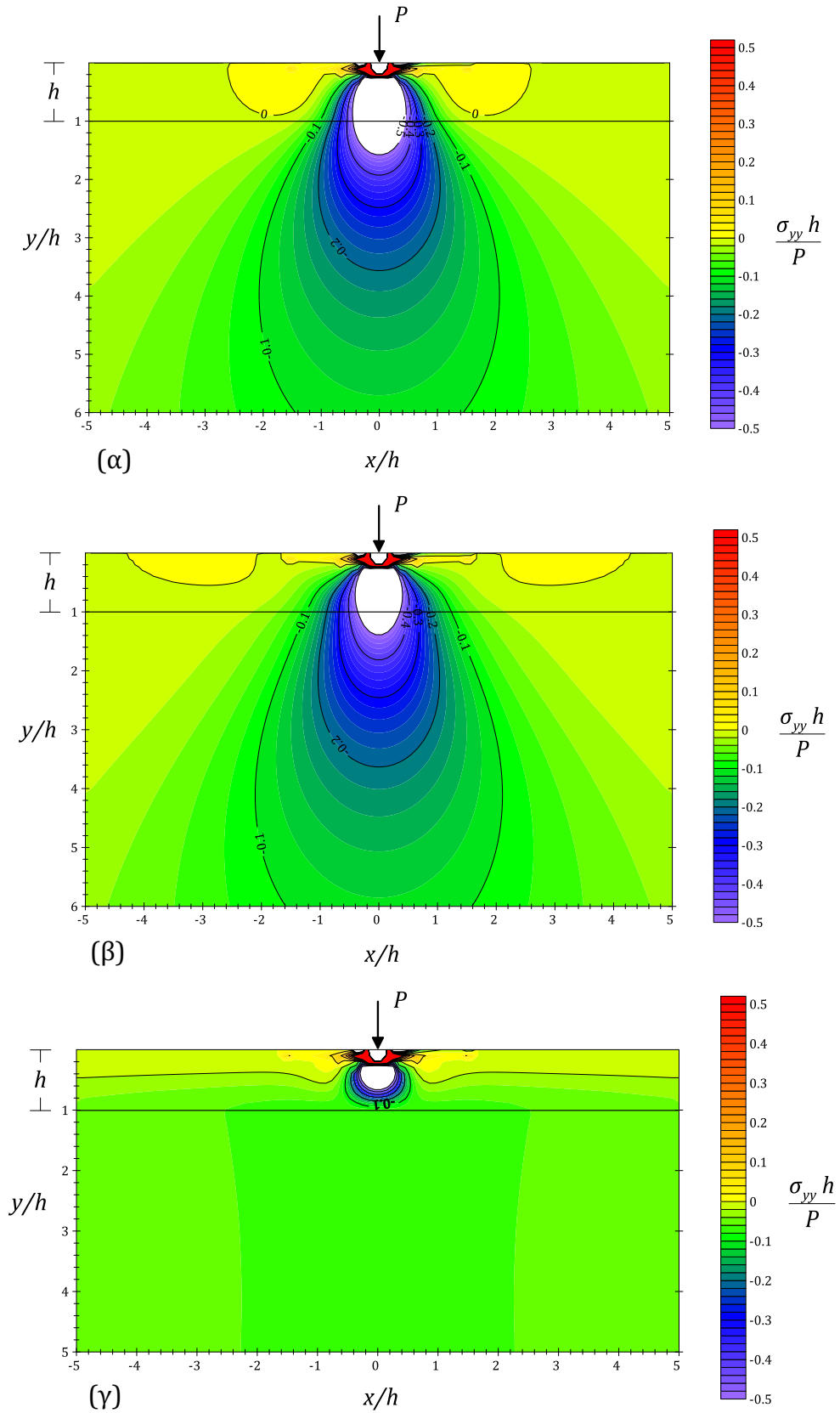
Σχήμα 28. Χάρτες κατανομής της αδιαστατοποιημένης οριζόντιας ορθής τάσης $\frac{\sigma_{xx} h}{P}$ στην περίπτωση $\nu = 1$ και α) $\mu \rightarrow 0$, β) $\mu = 1$, γ) $\mu \rightarrow \infty$.



Σχήμα 29. Διαγράμματα για την $\frac{\sigma_{xx}h}{P}$ κατά τον κατακόρυφο άξονα στην θέση $x=0$ στην περίπτωση $\nu = 1$ και α) $\mu \rightarrow 0$, β) $\mu = 1$, γ) $\mu \rightarrow \infty$.



Σχήμα 30. Χάρτες κατανομής της αδιαστατοποιημένης διατμητικής τάσης $\frac{\sigma_{yx} h}{P}$ στην περίπτωση $\nu = 1$ και α) $\mu \rightarrow 0$, β) $\mu = 1$, γ) $\mu \rightarrow \infty$.



Σχήμα 31. Χάρτες κατανομής της αδιαστατοποιημένης οριζόντιας ορθής τάσης $\frac{\sigma_{yy} h}{P}$

στην περίπτωση $\nu = 1$ και α) $\mu \rightarrow 0$, β) $\mu = 1$, γ) $\mu \rightarrow \infty$.

Αφέθηκε σκόπιμα λευκή η σελίδα

Κεφάλαιο 5

5 Συμπεράσματα και ζητήματα για μελλοντική έρευνα

5.1 Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήθηκαν τρία προβλήματα επιβολής κατακόρυφου συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια ημιχώρων και επιστρώσεων στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας: το πρόβλημα Flamant-Bousinesq, το πρόβλημα επίστρωσης σε άκαμπτο υπόβαθρο και το πρόβλημα του συστήματος ελαστικής επίστρωσης σε παραμορφώσιμο υπόβαθρο. Ειδικά για το τελευταίο, διερευνήθηκε η επιρροή των λόγων των μηχανικών σταθερών των υλικών της επίστρωσης και του υποβάθρου στα αποτελέσματα τόσο για τις μετατοπίσεις όσο και για τις τάσεις.

Συγκεκριμένα μελετήθηκαν 2 περιπτώσεις: α) τα δύο υλικά να έχουν το ίδιο μέτρο διάτμησης ενώ ο λόγος των λόγων Poisson τους να τείνει στο 0, 1, ∞ και β) τα δύο υλικά να έχουν τους ίδιους λόγους Poisson και ο λόγος των μέτρων διάτμησης να τείνει στο 0, 1, ∞ . Τα αποτελέσματα δίνονται σε χάρτες μετατοπίσεων και τάσεων για την κάθε περίπτωση.

Το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει από την διερεύνηση είναι ότι οι διαφορές στο μέτρο διάτμησης μεταξύ των υλικών επηρεάζουν σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό την συμπεριφορά του συστήματος επίστρωσης - υπόβαθρου, από ότι οι διαφορές στους λόγους Poisson. Πιο αναλυτικά, οι κατανομές στον χώρο των πεδίων τόσο των μετατοπίσεων όσο και των τάσεων στην περίπτωση που τα υλικά έχουν το ίδιο μέτρο διάτμησης και διαφορετικούς λόγους Poisson παραμένουν σχετικά ανεπηρέαστες και κρατούν την ίδια μορφή και για τις τρεις ακραίες περιπτώσεις του λόγου των λόγων Poisson. Από την άλλη πλευρά, όταν οι λόγοι Poisson των υλικών είναι ίδιοι αλλά τα μέτρα διάτμησης διαφέρουν τότε οι συμπεριφορές τόσο των μετατοπίσεων όσο και των τάσεων μεταβάλλονται εμφανώς.

Στην περίπτωση που τα υλικά επίστρωσης και υποστρώματος έχουν ίδιο μέτρο διάτμησης και διαφορετικούς λόγους Poisson παρατηρείται η εμφάνιση εφελκυστικών ορθών τάσεων στην περιοχή της διεπιφάνειας. Συγκεκριμένα εάν η επίστρωση εμφανίζει ελάχιστα ή καθόλου το φαινόμενο Poisson τότε η εφελκυστική περιοχή δημιουργείται μέσα στην επίστρωση. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν το υπόστρωμα εμφανίζει

ελάχιστα ή καθόλου το φαινόμενο Poisson τότε η εφελκυστική περιοχή δημιουργείται μέσα στο υπόστρωμα.

Στην περίπτωση που τα υλικά επίστρωσης και υποστρώματος έχουν ίδιο λόγο Poisson αλλά το μέτρο διάτμησης της επίστρωσης είναι πολύ μικρότερο του υποστρώματος τότε η συμπεριφορά των μετατοπίσεων και των τάσεων προσεγγίζουν αυτές του προβλήματος της επίστρωσης σε άκαμπτο υπόστρωμα. Στην αντίθετη περίπτωση όταν δηλαδή το μέτρο διάτμησης της επίστρωσης είναι πολύ μεγαλύτερο του υποστρώματος τότε η συμπεριφορά των μετατοπίσεων και των τάσεων προσεγγίζει αυτήν της αμφιέριστης δοκού. Στην περίπτωση της σκληρής επίστρωσης επίσης παρατηρείται η εμφάνιση εφελκυστικών ορθών τάσεων μέσα στην επίστρωση η οποία μπορεί να δημιουργήσει ρωγμές αν η αντοχή της επίστρωσης σε εφελκυσμό ξεπεραστεί.

5.2 Ζητήματα για μελλοντική έρευνα

Οι λύσεις που δόθηκαν για το πρόβλημα επίδρασης συγκεντρωμένου φορτίου σε σύστημα επίστρωσης-υποστρώματος στα πλαίσια της κλασικής ελαστικότητας αποτελούν συναρτήσεις Green, δηλαδή τον δομικό λίθο για την κατάστρωση και επίλυση σύνθετων προβλημάτων επαφών σε δύο διαστάσεις. Έτσι η μελέτη τέτοιων συστημάτων μπορεί να επεκταθεί σε περιπτώσεις άσκησης κατανεμημένων φορτίσεων στην επιφάνεια της επίστρωσης. Επίσης το σύστημα μπορεί να αποτελείται από τρία ή περισσότερα στρώματα αντί για δύο.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει η μελέτη αυτών των συστημάτων πέρα των ορίων της κλασικής ελαστικότητας. Έτσι ο μελλοντικός ερευνητής μπορεί να χρησιμοποιήσει γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου όπως η θεωρία τάσεων ζεύγους σε περίπτωση που διαθέτει πληροφορίες για την μικροδομή των υλικών για να μελετήσει τα φαινόμενα κλίμακας που τυχόν δημιουργούνται.

6 Παράρτημα: αναλυτικές εκφράσεις σταθερών

Στο 4ο κεφάλαιο, στην παράγραφο 4.3 δόθηκαν ορισμένες εκφράσεις σε συνεπτυγμένη μορφή με την βοήθεια έξτρα σταθερών. Οι εκφράσεις για τις σταθερές αυτές δίνονται εδώ.

$$a_1 = e^{2h\sqrt{\xi^2}} \mu_2^2 (-3 + 4\nu_1) + e^{2(2h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2) - 2e^{(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 (5 - 6\nu_2 + \nu_1 (-6 + 8\nu_2)) +$$

$$e^{2(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2) (-1 - 2h^2 \xi^2 + 2h\sqrt{\xi^2}) + \mu_2^2 (-5 + 12\nu_1 - 8\nu_1^2 - 2h^2 \xi^2 + 2h\sqrt{\xi^2}) -$$

$$2e^{(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 \left(\begin{array}{l} -1 + 6h^2 \xi^2 - 4hy\xi^2 - 4h\sqrt{\xi^2} + 2y\sqrt{\xi^2} + \nu_2 (2 - 4h^2 \xi^2 + 4h\sqrt{\xi^2}) + \\ \nu_1 (2 - 4\nu_2 - 4h^2 \xi^2 + 4hy\xi^2 + 2h\sqrt{\xi^2} - 2y\sqrt{\xi^2}) \end{array} \right)$$

$$a_2 = -e^{2h\sqrt{\xi^2}} \mu_2^2 (-3 + 4\nu_1) - e^{2(2h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2) + 2e^{(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 (5 - 6\nu_2 + \nu_1 (-6 + 8\nu_2)) +$$

$$\mu_2^2 (5 - 12\nu_1 + 8\nu_1^2 + 2h^2 \xi^2 - 2h\sqrt{\xi^2}) - e^{2(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2) (-1 - 2h^2 \xi^2 + 2h\sqrt{\xi^2}) +$$

$$2e^{(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 \left(\begin{array}{l} -1 + 6h^2 \xi^2 - 4hy\xi^2 - 4h\sqrt{\xi^2} + 2y\sqrt{\xi^2} + \nu_2 (2 - 4h^2 \xi^2 + 4h\sqrt{\xi^2}) + \\ \nu_1 (2 - 4\nu_2 - 4h^2 \xi^2 + 4hy\xi^2 + 2h\sqrt{\xi^2} - 2y\sqrt{\xi^2}) \end{array} \right)$$

$$b = \mu_2^2 (3 - 4\nu_1) - e^{4h\sqrt{\xi^2}} \mu_2^2 (-3 + 4\nu_1) + 2e^{(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 (-3 + 2\nu_1 + 2\nu_2) - e^{2(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2)$$

$$- e^{2(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2) + 2e^{(5h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 (5 - 6\nu_2 + \nu_1 (-6 + 8\nu_2)) +$$

$$2e^{2(2h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2) (1 + 2h^2 \xi^2) + 2e^{2h\sqrt{\xi^2}} \mu_2^2 (5 - 12\nu_1 + 8\nu_1^2 + 2h^2 \xi^2) -$$

$$4e^{(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 (1 - 6h^2 \xi^2 + 4hy\xi^2 + \nu_2 (-2 + 4h^2 \xi^2) + \nu_1 (-2 + 4\nu_2 + 4h^2 \xi^2 - 4hy\xi^2))$$

$$c = \mu_2^2 (-3 + 4\nu_1) + e^{4h\sqrt{\xi^2}} \mu_2^2 (-3 + 4\nu_1) - 2e^{(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 (-3 + 2\nu_1 + 2\nu_2) + e^{2(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2) +$$

$$e^{2(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2) - 2e^{(5h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 (5 - 6\nu_2 + \nu_1 (-6 + 8\nu_2)) -$$

$$2e^{2(2h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2) (1 + 2h^2 \xi^2) - 2e^{2h\sqrt{\xi^2}} \mu_2^2 (5 - 12\nu_1 + 8\nu_1^2 + 2h^2 \xi^2) +$$

$$4e^{(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 (1 - 6h^2 \xi^2 + 4hy\xi^2 + \nu_2 (-2 + 4h^2 \xi^2) + \nu_1 (-2 + 4\nu_2 + 4h^2 \xi^2 - 4hy\xi^2))$$

$$d = \mu_2^2(3 - 4\nu_1) + 2e^{(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 (-3 + 2\nu_1 + 2\nu_2) - e^{2(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2) +$$

$$e^{2(2h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 (-3 + 4\nu_2) (1 + 2h^2 \xi^2 + 2h\sqrt{\xi^2}) + e^{2h\sqrt{\xi^2}} \mu_2^2 (5 - 12\nu_1 + 8\nu_1^2 + 2h^2 \xi^2 + 2h\sqrt{\xi^2}) -$$

$$2e^{(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 \left(\begin{aligned} &1 - 6h^2 \xi^2 + 4hy\xi^2 - 4h\sqrt{\xi^2} + 2y\sqrt{\xi^2} + \nu_2 (-2 + 4h^2 \xi^2 + 4h\sqrt{\xi^2}) \\ &+ 2\nu_1 (-1 + 2\nu_2 + 2h^2 \xi^2 - 2hy\xi^2 + h\sqrt{\xi^2} - y\sqrt{\xi^2}) \end{aligned} \right)$$

$$e_2 = e^{4h\sqrt{\xi^2}} \mu_2^2 (-3 + 4\nu_1) (h\xi^2 + (-1 + 2\nu_1)\sqrt{\xi^2}) + 2e^{2h\sqrt{\xi^2}} \mu_2^2 \left(\begin{aligned} &h(-3 + 4\nu_1)\xi^2 - \\ &(1 - 2\nu_1)^2 \sqrt{\xi^2} + h^2 (\xi^2)^{3/2} \end{aligned} \right) +$$

$$\mu_2^2 \left(h(1 - 4\nu_1)\xi^2 + (-1 + 2\nu_1)\sqrt{\xi^2} + 2h^2 (\xi^2)^{3/2} \right) +$$

$$2e^{2(2h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 \left(2h^3 \xi^4 + (1 - 2\nu_2)\sqrt{\xi^2} + h^2 (-3 + 4\nu_2) (\xi^2)^{3/2} + y(\xi^2 - 2h^2 \xi^4) \right) +$$

$$e^{2(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 \left(-y\xi^2 + (-1 + 2\nu_2)\sqrt{\xi^2} + 2h^2 (\xi^2)^{3/2} + h \left((-2 + 4\nu_2)\xi^2 - 2y(\xi^2)^{3/2} \right) \right) +$$

$$e^{2(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1^2 \left(-y\xi^2 + (-1 + 2\nu_2)\sqrt{\xi^2} + 2h \left((1 - 2\nu_2)\xi^2 + y(\xi^2)^{3/2} \right) \right) -$$

$$e^{(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 \left(\begin{aligned} &-y\xi^2 + 2(-1 + \nu_1 + \nu_2)\sqrt{\xi^2} + 2h^2 (\xi^2)^{3/2} \\ &+ h \left((3 - 4\nu_1 - 4\nu_2)\xi^2 + 2y(\xi^2)^{3/2} \right) \end{aligned} \right) -$$

$$e^{(5h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 \left(\begin{aligned} &y(3 - 4\nu_1)\xi^2 + 2(1 - \nu_1 - 3\nu_2 + 4\nu_1\nu_2)\sqrt{\xi^2} + 2h^2 (-3 + 4\nu_1) (\xi^2)^{3/2} \\ &+ h \left((7 - 8\nu_1 - 12\nu_2 + 16\nu_1\nu_2)\xi^2 + 2y(3 - 4\nu_1) (\xi^2)^{3/2} \right) \end{aligned} \right) -$$

$$2e^{(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \mu_2 \left(\begin{aligned} &h(-1 + 2\nu_1)\xi^2 + 2h^3 \xi^4 + (-1 + 2\nu_1) (y\xi^2 - 2\nu_2\sqrt{\xi^2}) + \\ &h^2 \left(-2y\xi^4 + 2(-1 + 2\nu_2) (\xi^2)^{3/2} \right) \end{aligned} \right)$$

$$f = \mu_2 (-1 + 2\nu_1 - h\sqrt{\xi^2}) - e^{2h\sqrt{\xi^2}} \mu_2 (-1 + 2\nu_1 + h\sqrt{\xi^2}) + e^{(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 (1 - 2\nu_2 + y\sqrt{\xi^2}) +$$

$$e^{(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 (-1 + 2h^2 \xi^2 - y\sqrt{\xi^2} - 2h(y\xi^2 + \sqrt{\xi^2}) + \nu_2 (2 + 4h\sqrt{\xi^2}))$$

$$g = \mu_2 (h\xi^2 + 2(-1 + \nu_1)\sqrt{\xi^2}) -$$

$$e^{(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \left(y\xi^2 - 2(-1 + \nu_2)\sqrt{\xi^2} + 2h^2 (\xi^2)^{3/2} + h \left(4(-1 + \nu_2)\xi^2 - 2y(\xi^2)^{3/2} \right) \right)$$

$$j_1 = -e^{2h\sqrt{\xi^2}} \mu_2 \sqrt{\xi^2} + \mu_2 \left(-2h\xi^2 + (-3 + 4\nu_1) \sqrt{\xi^2} \right) + e^{(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \left(2y\xi^2 + (3 - 4\nu_2) \sqrt{\xi^2} \right) + e^{(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \left(2h\xi^2 - 2y\xi^2 + (-3 + 4\nu_2) \sqrt{\xi^2} \right)$$

$$j_2 = -e^{(h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \sqrt{\xi^2} + \mu_2 \sqrt{\xi^2} - e^{2h\sqrt{\xi^2}} \mu_2 \left(h\xi^2 + (-1 + 2\nu_1) \sqrt{\xi^2} \right) + e^{(3h-y)\sqrt{\xi^2}} \mu_1 \left(-y\xi^2 + (-1 + 2\nu_2) \sqrt{\xi^2} + 2h^2 (\xi^2)^{3/2} + h \left((-2 + 4\nu_2) \xi^2 - 2y (\xi^2)^{3/2} \right) \right)$$

Αφέθηκε σκόπιμα λευκή

7 Βιβλιογραφία

- Γεωργιάδης Χ., «Προχωρημένη μηχανική των υλικών», Συμμετρία, Αθήνα, 2003.
- Παπαδόπουλος Γ. Α., «Πειραματική μηχανική των θραύσεων», Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2007.
- Παπαδόπουλος Γ. Α., «Μηχανική των θραύσεων», Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2015.
- Amba-Rao C. L., "Fourier transform methods in elasticity problems and an application", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 287, pp. 231-249, 1969.
- Barber J.R., "Elasticity", 3rd ed., Springer, New York, 2010.
- Barovich, D., Kingsley, S. C. and Ku, T. C., "Stresses on a thin strip or slab with different elastic properties from that of the substrate due to elliptically distributed load", *International Journal of Engineering Sciences*, vol. 2, pp. 253, 1964.
- Burmister D. M., "The general theory of stresses and displacements in layered systems", *Journal of Applied Physics*, vol. 16, pp. 89-94, 1945.
- Cao X.Q., Vassen R., Stoever D., "Ceramic materials for thermal barrier coatings", *Journal of the European Ceramic Society*, Vol. 24, Issue 1, pp. 1-10, 2004.
- Chen W. T., "Computation of stresses and displacements in a layered elastic medium", *International Journal of Engineering Sciences*, vol. 9, Issue 9, pp. 775-800, 1971.
- Clarke R. D. and Simon R. P., "Thermal barrier coating materials", *Materials today*, Vol. 8, Issue 6, pp. 22-29, 2005.
- Debnath L., Bhatta D., "Integral transforms and their applications" 2nd ed., Taylor & Francis Group, New York, 2007.
- Dhaliwal R. S., "Punch problem for an elastic layer overlying an elastic foundation", *International Journal of Engineering Science*, vol. 8, Issue 4, pp. 273-288, 1970.
- Dhaliwal R. S. and Rua I. S. "The axisymmetric Boussinesq problem for a thick elastic layer under a punch of arbitrary profile", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 8, Issue 10, pp. 843-856, 1970.
- Fung Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall, New Jersey 1965.
- Gupta, P. K. and Walowit, J. A., "Contact stresses between an elastic cylinder and a layered elastic solid", *Journal of Lubrication Technology*, ASME Trans, vol. 96F, No. 2, pp. 250, 1974.
- Gupta, P. K., Walowit, J. A. and Finkin, E. F., "Stress Distributions in Plane Strain Layered Elastic Solids Subjected to Arbitrary Boundary Loading", *Journal of Lubrication Technology*, ASME Trans, vol. 95F, pp 427, 1973.

Gupta P. K., "Modeling of stresses in coated solids", Final Report for Materials Laboratory, Wright Research And Development Centre, Air Force Systems Command Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 45433-6533, August 1990.

Heywood R.B., "Stress concentration factors", Journal of the American Society for Naval Engineers, Vol. 67, pp. 697-708, 1955.

Hills D. and Nowell D., "Mechanics of fretting fatigue", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

Huber N., Nix W.D. and Gao H., "Identification of elastic-plastic material parameters from pyramidal indentation of thin films", Proceedings of the Royal Society A, Vol. 458, Issue 2023, pp. 1593-1620, 2002.

Johnson K., "Contact mechanics" Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

Lai W. M., Rubin D., Krempl E., "Introduction to continuum mechanics", 4th ed. Elsevier, 2010.

Love A.E.H., "A treatise on the mathematical theory of elasticity", Cambridge University Press, New York, 1952.

Ma Q. and Clarke D.R., "Size dependent hardness of silver single crystals", Journal of Materials Research, Vol. 10 Issue 4, pp. 853-863, 1995.

Miller R.A., "Oxidation-based model for thermal barrier coating life", Journal of the American Ceramic Society, Vol. 67, Issue 8, pp. 517-521, 1984.

Nuismer R. J. and Whitney J. M., "Uniaxial Failure of Composite Laminates Containing Stress Concentrations" Fracture Mechanics of Composites, ASTM ATP 593, pp. 117-142, 1975.

Padture N. P., Gell M., Jordan E. H., "Thermal Barrier Coatings for Gas-Turbine Engine Applications", Science, Vol. 296, Issue 5566, pp. 280-284, 2002.

Pharr G. M., Oliver W. C. and Brotzen F. R., "On the generality of the relationship among contact stiffness, contact area, and elastic modulus during indentation", Journal of Materials Research, Vol. 7, Issue 3, pp. 613-617, 1992.

Poole W.J., Ashby M.F. and Fleck N.A., "Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polycrystals", Scripta Materialia, Vol. 34, Issue 4; pp. 559-564, 1996.

Sadd H. M., "Elasticity theory, applications and numerics", 2nd ed., Academic Press, Burlington 2009.

Sneddon I. N., "Fourier transforms", McGraw-Hill, New York, 1951.

Spitsberg I. T., Mumm D. R., Evans A. G., "On the failure mechanisms of thermal barrier coatings with diffusion aluminide bond coatings", Materials Science and Engineering: A, Vol. 394, Issue 1-2, pp. 176-191, 2005.

Stelmashenko N.A., Walls M.G., Brown L.M., Milman Yu. V., “Microindentations on W and Mo oriented single crystals: an STM study”, *Acta Metallurgica et Materialia*, Volume 41, Issue 10, pp. 2855–2865, 1993.

Timoshenko S. P. and Goodier J. N., “Theory of elasticity”, McGraw-Hill, New York 1970.

William L. K., “Stress concentration around a small circular hole in the HiMAT composite plate”, Edwards, NASA Technical Memorandum 86038, 1985.

Wriggers P., “Computational Contact Mechanics”, John Wiley & Sons Ltd, 2002.

Wright P.K., Evans A.G., “Mechanisms governing the performance of thermal barrier coatings”, *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, Vol. 4, Issue 3, pp. 255–265, 1999.

Zisis T., Gourgiotis P.A., Baxevanakis K.P., Georgiadis H.G., “Some basic contact problems in couple-stress elasticity”, *International Journal of Solid Structures*, Vol.51 Issues 11-12, pp. 2084–2095, 2014.