

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

## ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ ΜΑΡΙΑ ΠΡΟΥΝΤΖΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΒΑΣΙΛΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

*ΑΘΗΝΑ*

*ΦΛΕΒΛΑΡΗΣ 2017*



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....	4
Γενικά.....	5
Προβλήματα Συνοριακών Τιμών.....	8
Προβλημα Dirichlet για ένα δίσκο.....	16
Πρόβλημα Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο.....	23
Προβλήματα Neumann.....	28
Συνάρτηση Green του προβλήματος Dirichlet.....	29
Εφαρμογές.....	31
Μετάδοση Θερμότητας.....	31
Ηλεκτροστατικό πεδίο.....	34
Ροή Ρευστών.....	38
Ροή γύρω από εμπόδιο.....	45
Δύναμη από ροή σε ένα σώμα.....	51
Βιβλιογραφία.....	53

**Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές Δημήτρη Κραββαρίτη και Βασίλη Παπανικολάου για την ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας.**

## Γενικά

Οι μιγαδικές συναρτήσεις αποτελούν ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την επίλυση πολλών μαθηματικών προβλημάτων που εμφανίζονται σε διάφορους κλάδους των φυσικών επιστημών. Για παράδειγμα, οι σύμμορφες απεικονίσεις σε πολλές περιπτώσεις δίνουν απλές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών που αφορούν στην εξίσωση Laplace, στα οποία ανάγονται διάφορα προβλήματα της υδροδυναμικής και αεροδυναμικής, της θεωρίας ελαστικότητας, της ηλεκτροστατικής κ.τ.λ. Αυτό οφείλεται στη στενή σχέση που υπάρχει μεταξύ ολόμορφων και αρμονικών συναρτήσεων. Ως γνωστόν η συνάρτηση  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$  είναι ολόμορφη σε ένα πεδίο  $D$  αν και μόνο αν οι συναρτήσεις  $u(x,y)$  και  $v(x,y)$  είναι αρμονικές και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann στο  $D$ . Οι επόμενες δύο προτάσεις είναι σημαντικές για την μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη βοήθεια σύμμορφων απεικονίσεων.

**Πρόταση:** Έστω  $\varphi$  αρμονική σε ένα πεδίο  $D$  του  $\mathbb{C}$ . Τότε η  $\varphi$  παραμένει αρμονική κάτω από κάθε σύμμορφο μετασχηματισμό.

**Σημείωση.** Θα δώσουμε μια απόδειξη στην περίπτωση που το  $D$  είναι απλά συνεκτικό. Γενικά, είναι πιο εύκολο να αποδειχτεί εφαρμόζοντας τον αλυσιδωτό κανόνα στην εξίσωση Laplace.

### Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι το  $D$  είναι απλά συνεκτικό. Έστω  $F$  ένας σύμμορφος μετασχηματισμός με  $w = u + iv = F(z) = F(x + iy)$

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $D$  τέτοια ώστε  $f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ . Έστω  $g(w) = f(z) = f(F^{-1}(w))$ . Επειδή η  $f$  είναι σύμμορφη, η  $g$  είναι ολόμορφη στο  $F(D)$ . Έστω  $g(w) = \varphi(u,v) + i\psi(u,v)$ . Τότε από τη σχέση  $g(w) = f(z)$ , προκύπτει  $\varphi(u,v) = \varphi(x(u,v), y(u,v))$  και επειδή  $\varphi = \text{Re } g$ , η  $\varphi$  θα είναι αρμονική στο  $F(D)$ . Δύο από τα βασικά προβλήματα συνοριακών τιμών είναι τα ακόλουθα.

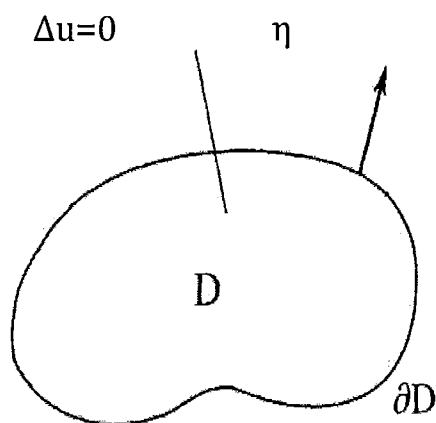
**Πρόβλημα Dirichlet:** Έστω  $D$  ένα πεδίο του  $\mathbb{R}^2$  με σύνορο  $\partial D$  και  $g$  μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο  $\partial D$ . Το πρόβλημα Dirichlet συνίσταται στην εύρεση μιας συναρτήσεως  $\varphi$  που είναι αρμονική στο  $D$ , συνεχής στο  $\bar{D} = D \cup \partial D$  και ταυτίζεται με την  $g$  πάνω στο  $\partial D$ , δηλαδή

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ στο } D \\ u = g \text{ στο } \partial D \end{cases}$$

Αν το πρόβλημα (1) έχει λύση, τότε από την αρχή μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις προκύπτει ότι η λύση είναι μοναδική.

**Πρόβλημα Neumann:** Έστω  $D$  ένα πεδίο με σύνορο  $\partial D$  και  $g$  μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο  $\partial D$ . Το πρόβλημα Neumann συνίσταται στην εύρεση μιας συνάρτησεως  $u$  που είναι αρμονική στο  $D$ , συνεχής στο  $\bar{D} = D \cup \partial D$  και της οποίας η παράγωγος ως προς την κατεύθυνση της καθέτου σε κάθε σημείο του συνόρου να ταυτίζεται με την  $g$ , δηλαδή

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ στο } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ στο } \partial D \end{cases}$$



Σχ. 2

Με  $n$  συμβολίζεται το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο  $D$ .

Σε ένα πρόβλημα Neumann πρέπει να υποθέσουμε ότι το σύνορο  $\partial D$  είναι αρκετά λείο, ώστε να υπάρχει το κάθετο προς το σύνορο διάνυσμα  $n$ .

Για να υπάρχει λύση του προβλήματος Neumann θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη συμβιβαστότητας

$$\iint_{\partial D} g ds = 0$$

Η συνθήκη αυτή προκύπτει άμεσα από την (2) και τη σχέση

$$\iint_D \Delta u dx dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

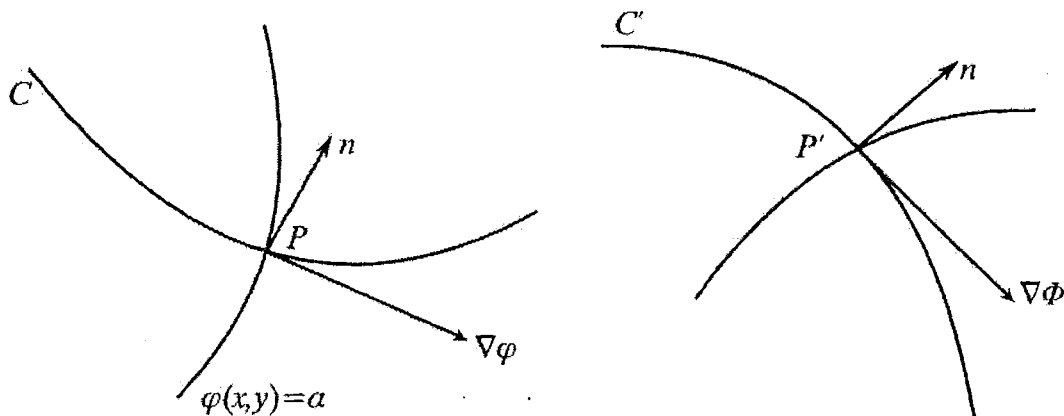
Η συνθήκη συμβιβαστότητας έχει την ακόλουθη φυσική ερμηνεία. Υποθέτουμε ότι  $u(x,y)$  είναι η λύση της στάσιμης κατανομής θερμοκρασίας εντός του  $D$ . Η συνάρτηση  $\frac{\partial u}{\partial n}$  στο σύνορο της  $\partial D$  παριστάνει ροή θερμότητας κατά μήκος του συνόρου. Για να υπάρχει στάσιμη θερμοκρασία θα πρέπει η συνολική ροή θερμότητας κατά μήκος του συνόρου να είναι μηδενική. Η λύση του προβλήματος Neumann είναι μοναδική εκτός μιας προσθετικής σταθεράς.

Γενικά, οι συνοριακές συνθήκες σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών μεταβάλλονται μέσω ενός σύμμορφου μετασχηματισμού. Υπάρχουν όμως δύο περιπτώσεις στις οποίες οι συνοριακές συνθήκες παραμένουν αμετάβλητες. Οι περιπτώσεις αυτές αφορούν σε ειδικά προβλήματα Dirichlet και Neumann.

**Πρόταση:** Έστω  $w = F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$  μία σύμμορφη απεικόνιση ορισμένη στο πεδίο  $D$ ,  $C$  μία λεία καμπύλη στο  $D$  και  $C' = F(C)$ . Αν η συνάρτηση  $\varphi(x,y) = k$ ,  $k$  σταθερά ή  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  κατά μήκος της  $C$  τότε, η συνάρτηση  $\Phi(u,v) = \varphi(x(u,v), y(u,v))$  ικανοποιεί τις συνθήκες  $\Phi(u,v) = k$  και  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  κατά μήκος της  $C'$ .

**Απόδειξη:** Αν  $\varphi = k$  πάνω στη  $C$ , τότε  $\varphi = k$  πάνω στη  $C'$ . Υποθέτουμε

τώρα ότι  $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \nabla \varphi \cdot \eta = 0$  πάνω στη  $C$ , όπου  $\nabla \varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$  και  $\eta$  είναι ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη  $C$  στο σημείο  $P(x, y)$ . Τότε  $\nabla \varphi = 0$ . Εφόσον ισχύει αυτό έπεται ότι  $\nabla \varphi = (\Phi_u, \Phi_v) = 0$ , οπότε  $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0$ . Έστω  $\nabla \varphi \neq 0$ , οπότε  $\nabla \varphi$  ορθογώνιο στο  $\eta$ . Αν  $\nabla \varphi = 0$  τότε  $\nabla \varphi = (\Phi_u, \Phi_v) = 0$ , άρα  $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0$ . Έστω  $\nabla \varphi \neq 0$ , οπότε  $\nabla \varphi$  ορθογώνιο στο  $\eta$  άρα και εφαπτόμενο της  $C$  στο σημείο  $P$ .



Το  $\nabla \varphi$  είναι ορθογώνιο στην καμπύλη  $\varphi(x, y) = a$  που περνάει από το  $P$ . Η εικόνα της καμπύλης  $\varphi(x, y) = a$  μέσω της  $F$  είναι η καμπύλη  $\Phi(u, v) = a$  στο  $w$ -επίπεδο. Επειδή η  $F$  είναι σύμμορφη, οι γωνίες μεταξύ καμπυλών διατηρούνται, άρα η  $C'$  είναι ορθογώνια της καμπύλης  $\Phi(u, v) = a$  στο  $P'$ . Επομένως το  $\nabla \varphi = (\Phi_u, \Phi_v)$  είναι εφαπτόμενο της  $C'$  στο  $P$  και άρα ορθογώνιο στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της  $C'$  στο  $P'$ , οπότε  $\nabla \varphi \cdot \eta = 0$ , άρα  $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0$  πάνω στη  $C$ .

## Προβλήματα συνοριακών τιμών

Στη συνέχεια παρατίθενται κάποια κλασικά προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη λύση τους.



**Παράδειγμα (Πρόβλημα Dirichlet σε άπειρη κατακόρυφη λωρίδα):**

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & a < x < b \\ \varphi(a, y) = \kappa_1 \\ \varphi(b, y) = \kappa_2 \end{cases}$$

**Λύση.** Επειδή οι συνοριακές τιμές δεν εξαρτώνται από το  $y$ , είναι εύλογο να αναζητήσουμε ως λύση μια αρμονική συνάρτηση που δεν εξαρτάται από το  $y$ , δηλαδή της μορφής  $\varphi(x, y) = f(x)$   $a < x < b$ .

Η  $\Delta\varphi = 0$  γράφεται  $f''(x) = 0$ , οπότε  $f(x) = \lambda x + \mu$  όπου  $\lambda, \mu$  σταθερές. Λόγω των συνοριακών συνθηκών εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ζητούμενη λύση είναι:

$$\varphi(x, y) = \kappa_1 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{b - a} (x - a)$$

**Πρόβλημα Dirichlet σε γωνιακό πεδίο**

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, & 0 < \text{Arg}z < a & (a \leq \pi) \\ \varphi(x, 0) &= \kappa_1 & x > 0 \\ \varphi(x, y) &= \kappa_2, & r > 0 \theta = a \end{aligned}$$

Η λύση του παραπάνω προβλήματος έχει ως εξής: Η συνάρτηση  $\text{Arg}z$  είναι αρμονική, αφού είναι το φανταστικό μέρος του  $\text{Log}z$  και είναι σταθερή πάνω σε ημιευθείες με αρχή το 0. Αναζητούμε μια λύση της μορφής  $\varphi(x, y) = b\text{Arg}z + c$  όπου  $b, c$  σταθεροί αριθμοί. Λόγω των συνοριακών συνθηκών, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η λύση είναι:

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{\kappa_2}{a} - \frac{\kappa_1}{a}\right) \text{Arg}z + \kappa_1.$$

**Πρόβλημα Dirichlet σε δακτύλιο :**

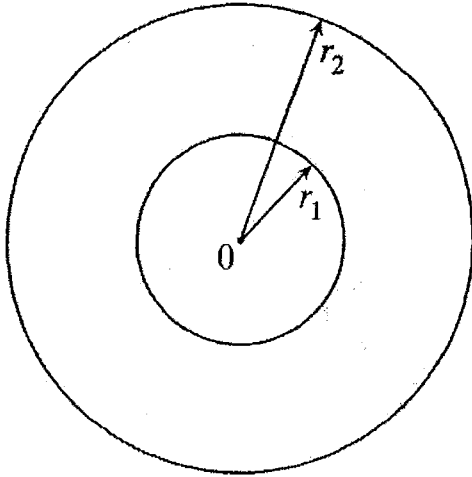
$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, & r_1 < |z| < r_2 \\ \varphi(x, y) &= \kappa_1, & |z| = r_1 \\ \varphi(x, y) &= \kappa_2, & |z| = r_2 \end{aligned}$$

Επειδή οι συνοριακές συνθήκες είναι ανεξάρτητες του  $\theta$ , αναζητούμε μια αρμονική συνάρτηση ανεξάρτητη του  $\theta$  της μορφής

$$\varphi(x, y) = a + b \ln|z|, a, b \text{ σταθεροί}$$

Λόγω των συνοριακών συνθηκών, εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\varphi(x, y) = k_1 + (k_2 - k_1) \frac{\ln(|z|/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$



### Πρόβλημα Dirichlet στο άνω ημιεπίπεδο:

$$\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0$$

$$\varphi(x, 0) = \begin{cases} a_0, & -\infty < x < x_1 \\ a_1, & x_1 < x < \infty \end{cases}, a_0, a_1 \text{ σταθεροί}$$

Η συνάρτηση  $\varphi(x, y) = A + B \operatorname{Arg}(z - x_1)$ , είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο. Λόγω των συνοριακών συνθηκών θα πρέπει  $A = a_1$  και  $A + B \cdot \pi = a_0$ .

Επομένως η συνάρτηση

$$\Phi(x, y) = a_1 + 1/\pi (a_0 - a_1) \operatorname{Arg}(z - x_1) \text{ είναι λύση του προβλήματος.}$$

Στο αμέσως επόμενο παράδειγμα έχουμε το εξής πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, |z| < 1 \\ \varphi(x, y), z &= e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi \\ \varphi(x, y) &= 1, z = e^{i\theta}, \pi < \theta < 2\pi \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε από τη θεωρία των σύμμορφων απεικονίσεων ότι η συνάρτηση,

$$w = u + iv = \frac{i(1-z)}{1+z} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2 + y^2}$$

είναι μια σύμμορφη απεικόνιση, που απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο  $|z| < 1$  επί του άνω ημιεπιπέδου.

Εύκολα διαπιστώνεται ότι τα σημεία  $z = x + yi$  που βρίσκονται στο άνω ημικύκλιο:  $1 - x^2 - y^2 = 0, y > 0$  απεικονίζονται στο θετικό ημιάξονα, ενώ τα σημεία του κάτω ημικυκλίου στον αρνητικό ημιάξονα.

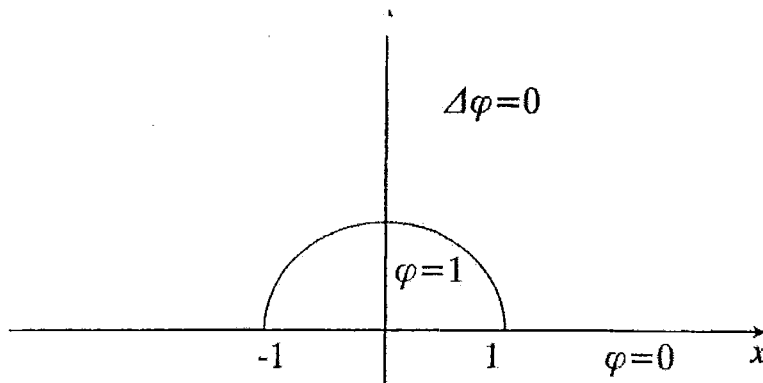
Η προαναφερθείσα απεικόνιση δημιουργεί ένα νέο πρόβλημα Dirichlet στο  $w$ -επίπεδο.

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0, & -\infty < u < \infty, & v > 0 \\ \Phi(u, 0) = 0, & u > 0 \\ \Phi(u, 0) = 1, & u < 0 \end{cases}$$

Σύμφωνα με το πρόβλημα που λύθηκε προηγουμένως, η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος, είναι η εξής:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \text{Arc tan} \frac{u(x, y)}{v(x, y)} = \frac{1}{\pi} \text{Arc tan} \frac{1 - x^2 - y^2}{2y}$$

Το πρόβλημα που ακολουθεί περιγράφεται από το επόμενο σχήμα.



**Λύση.** Η απεικόνιση Joukowski  $w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  μετασχηματίζει το δοσμένο πρόβλημα στο ακόλουθο πρόβλημα Dirichlet του άνω ημιεπιπέδου.

Η λύση του προβλήματος αυτού είναι

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{\pi} \text{Arc tan} \left( \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \right)$$

Από τη σχέση  $w = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  προκύπτει

$$u(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)}$$

$$v(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}$$

Άρα η λύση του προβλήματος είναι

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \text{Arc tan}\left(\frac{4y(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 4)}\right)$$

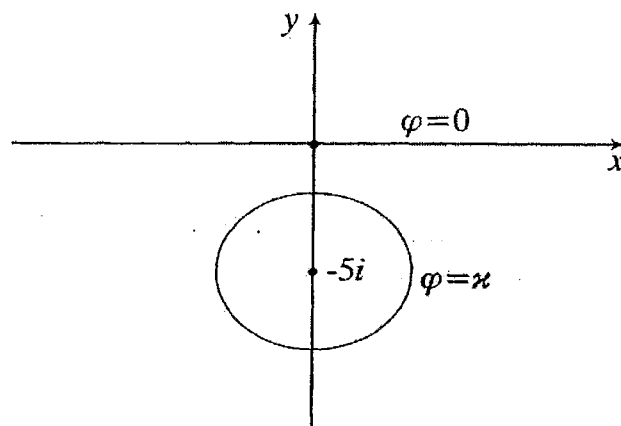
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ένα ακόμη πρόβλημα **Dirichlet**.

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \text{ στο } D \\ \varphi(x, 0) = 0 \\ \varphi(x, y) = \kappa, |z + 5i| = 3 \end{cases}$$

Όπου  $D = \{z: \text{Im}z < 0, |z + 5i| > 3\}$

Για τη λύση αυτού του προβλήματος χρησιμοποιείται ο παρακάτω μετασχηματισμός, ο οποίος απεικονίζει το  $D$  στον δακτύλιο  $1/3 < |w| < 1$

$$w = \frac{z + 4i}{z - 4i}$$

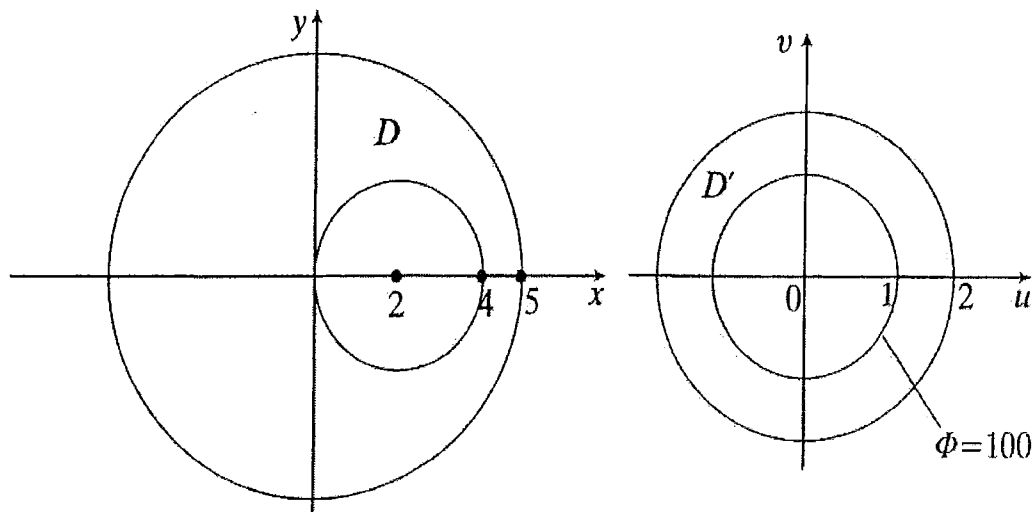


Η λύση του προβλήματος Dirichlet στο δακτύλιο είναι

$$\Phi(u, v) = -\kappa \frac{\ln|w|}{\ln 3}$$

Επομένως η λύση του προβλήματος Dirichlet στο πεδίο D είναι

$$\varphi(x, y) = -\frac{k}{2\ln 3} \ln \left( \frac{x^2 + (y+4)^2}{x^2 + (y-4)^2} \right)$$



$\Phi=200$

Το τελευταίο πρόβλημα που θα μας απασχολήσει θα έχει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &=, \text{ στο } D \\ \varphi(x, y) &= 100, |z| = 5 \\ \varphi(x, y) &= 200, |z - 2| = 2\end{aligned}$$

Λύση. Θα βρούμε ένα διγραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει το  $D$  σε ένα δακτύλιο. Από προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι δύο σημεία  $x_1, x_2$  που είναι συμμετρικά ως προς τους κύκλους  $|z| = 5$  και  $|z - 2| = 2$  ικανοποιούν την εξίσωση  $2x^2 - 25x + 50 = 0$  οπότε  $x_1 = \frac{5}{2}$  και  $x_2 = 10$ .

Ένας διγραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το  $D$  επί του  $D'$  είναι

$$w = \lambda \frac{z - 10}{2z - 5}$$

Αν το  $z=5$  απεικονίζεται στο  $w=-1$ , τότε θα πρέπει  $\lambda=-1$ , οπότε μετασχηματισμός

$$w = \frac{z - 10}{2z - 5}$$

απεικονίζει το  $D$  επί του  $D'$ , σύμφωνα με το 3ο παράδειγμα που παρατέθηκε, είναι

$$\Phi(u, v) = 100 + 100 \frac{\ln|w|}{\ln 2}$$

Αν  $w = u + iv$ , τότε

$$u(x, y) = \frac{2x^2 + 2y^2 - 25x + 50}{(2x - 5)^2 + 4y^2}$$

$$v(x, y) = \frac{15y}{(2x - 5)^2 + 4y^2}$$

Οπότε η λύση του προβλήματος είναι

$$\varphi(x, y) = 100 + 100 \frac{\ln|w(x, y)|}{\ln 2}$$

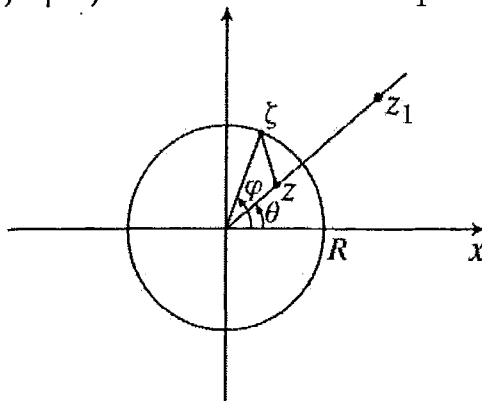
### Το πρόβλημα Dirichlet για ένα δίσκο

Έστω  $D = \{z: |z| < R\}$  και  $f(z)$  μια συνάρτηση που είναι ολόμορφη στο

$D$  και συνεχής στο  $\bar{D}$ . Αν  $z \in D$ , με  $z \neq 0$  τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

όπου  $C$  ο κύκλος  $|z|=R$  θετικά προσανατολισμένος. Έστω  $z_1$ , το συμμετρικό του  $z$  ως προς τον κύκλο  $C$ . Τότε  $z_1 = R^2/z$



Επειδή το  $z_1$  βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου  $C$ , από το θεώρημα **Cauchy - Goursat**, συμπεραίνουμε ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta$$

Επομένως:  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_1}$ . Θεωρούμε τώρα την ποσότητα



$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - z_1} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - \frac{\zeta\bar{z}}{z}} = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

Για  $\zeta = Re^{i\varphi}$  και  $z = re^{i\theta}$  έχουμε

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2}$$

αφού η πόσότητα  $|\zeta - z|$  παριστάνει την απόσταση μεταξύ του  $\zeta$  και του  $z$ ,  
οπότε από τον νόμο των συνημιτόνων είναι

$$|\zeta - z|^2 = R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2 > 0$$

Επειδή  $d\zeta = iRe^{i\varphi}d\varphi = i\zeta d\varphi$ , η αρχική σχέση μετασχηματίζεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} f(Re^{i\varphi}) d\varphi$$

Αν  $u$  είναι το πραγματικό μέρος της ολόμορφης συνάρτησης  $f$ , τότε από την αρχική μας σχέση έχουμε:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R, \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi, r < R$$

Ο τύπος αυτός ονομάζεται **ολοκληρωτικός τύπος Poisson** για την αρμονική συνάρτηση  $u$  στο δίσκο  $|z| < R$ .

Η συνάρτηση

$$P(R, r, \varphi - \theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos \cos(\varphi - \theta) + r^2}$$

ονομάζεται πυρήνας Poisson, του οποίου και αναλύουμε κάποιες ιδιότητες.

**α)** Από προηγούμενη σχέση ισχύει

$$P(R, r, \varphi - \theta) = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta} + \bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right)$$

Η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{\zeta + z}{\zeta - z}$$

είναι ολόμορφη εντός του δίσκου  $|z| < R$ . Επομένως το πραγματικό μέρος της θα είναι αρμονική συνάρτηση εντός του δίσκου.

**β)** Η συνάρτηση  $u(r, \theta) = 1$  είναι αρμονική, οπότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Poisson προκύπτει

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) d\varphi = 1$$

**γ)** Για  $R, r, \theta$  σταθερά, η μέγιστη τιμή της  $P(R, r, \varphi - \theta)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  λαμβάνεται για  $\varphi = \theta$  και είναι

$$\max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) = \frac{R + r}{R - r}$$

η οποία τείνει στο  $\infty$  για  $r \rightarrow R$ .

Η ελάχιστη τιμή της λαμβάνεται είτε για  $\varphi = \theta + \pi$  ή για  $\varphi = \theta - \pi$  και είναι

$$\min P(R, r, \varphi - \theta) = \frac{R - r}{R + r} \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

Ισχύει το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα:

**Θεώρημα** (η λύση του προβλήματος Dirichlet για ένα δίσκο):  
 Έστω  $g(\theta), 0 < \theta < 2\pi$  μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση πάνω στον κύκλο  $C: |z|=R$  περίοδο  $2\pi$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{cases} u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) g(\varphi) d\varphi, & 0 \leq r \leq R \\ u(R, \theta) = g(\theta) \end{cases}$$

Τότε η  $u$  είναι αρμονική στο εσωτερικό του κύκλου  $|z|=R$  και συνεχής στο  $|z| \leq R$ .

**Απόδειξη.** Η συνάρτηση  $u$  είναι αρμονική ως προς  $r, \theta$  στο εσωτερικό του κύκλου  $C$  (ιδιότητα α), άρα και η συνάρτηση  $u(r, \theta)$  είναι αρμονική στο εσωτερικό του κύκλου  $C$ . Απομένει να δείξουμε τη συνέχεια της  $u$  στον κλειστό δίσκο  $|z| \leq R$ . Έστω  $Re^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ένα σταθερό σημείο πάνω στη  $C$ . Θα δείξουμε ότι  $u(r, \theta) \rightarrow g(\alpha)$  όταν  $r \rightarrow R$  και  $\theta \rightarrow \alpha$ . Λόγω της ιδιότητας β) του πυρήνα Poisson, έχουμε

$$u(r, \theta) - g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) (g(\varphi) - g(\alpha)) d\varphi,$$

Έστω  $\varepsilon > 0$ . Επειδή η  $g$  είναι συνεχής πάνω στη  $C$ , υπάρχει  $\beta > 0$  τέτοιο, ώστε  $|g(\varphi) - g(\alpha)| < \varepsilon/2$  για κάθε  $\varphi$  με  $|\varphi - \alpha| < \beta$  δηλαδή για κάθε  $\varphi$  τέτοιο, ώστε το  $Re^{i\varphi}$  να βρίσκεται στο τόξο  $C_1$  όπως φαίνεται στο σχήμα. Είναι φανερό ότι

$$u(r, \theta) - g(\alpha) = I_1 + I_2$$

$$\text{με } 2\pi I_1 = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} P(R, r, \varphi - \theta) (g(\varphi) - g(\alpha)) d\varphi$$

$$\text{και } 2\pi I_2 = \int_{\alpha+\beta}^{\alpha-\beta+2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) (g(\varphi) - g(\alpha)) d\varphi$$

Επειδή  $P(R, r, \varphi - \theta) \geq 0$  και  $r \leq 1$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} P(R, r, \varphi - \theta) |g(\varphi) - g(\alpha)| d\varphi \\
&< \frac{e}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) d\varphi = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Έστω  $C_2 = C/C_1$ . Είναι φανερό ότι υπάρχει  $m > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $z$  εντός γραμμοσκιασμένου τμήματος όπου  $|\theta - \alpha| < \beta/2$  και  $\zeta \in C_2 \geq m$ . Επομένως

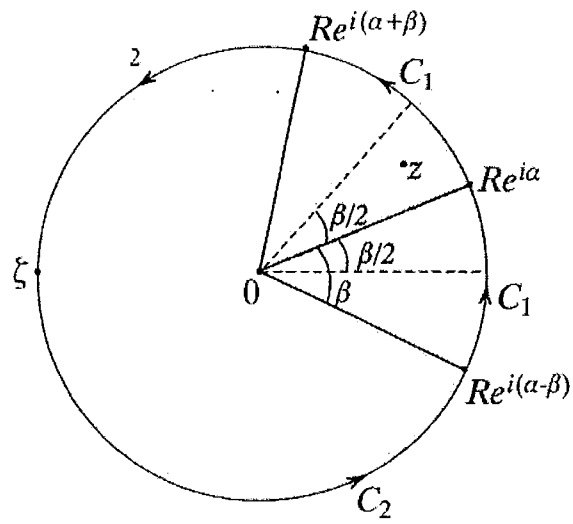
$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha+\beta}^{\alpha-\beta+2\pi} \frac{(R^2 - r^2)}{|\zeta - z|^2} |g(\varphi) - g(\alpha)| d\varphi < \frac{2M(R - r)}{2\pi m}$$

Όπου  $M = \max_{\varphi \in C_2} |g(\varphi) - g(\alpha)|$ . Επειδή  $R + r < 2R$ , θα έχουμε

$$|I_2| < \frac{2M(R - r)}{m} < \frac{2M\delta}{m} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Αν  $|r - R| < \delta$ , όπου  $\delta = \frac{m\varepsilon}{4M}$ .

Επομένως,  $|u(r, \theta) - g(\alpha)| \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon$  για κάθε  $r$  με  $|r - R| < \delta$  και  $|\theta - \alpha| < \beta/2$ .



Έχουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα:

$$\Delta u = 0, 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi$$
$$u(1, \theta) = \frac{\sin \theta}{5 + 4 \cos \theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε  $\zeta = e^{i\theta}$ , οπότε

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \cos \theta = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

Οπότε

$$u(\zeta) = \frac{\zeta^2 - 1}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)} d\zeta$$

Σύμφωνα με τον τύπο του πυρήνα Poisson, για να βρούμε τη λύση του προβλήματος αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)(\zeta - z)} d\zeta$$

Με βάση τώρα το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων βρίσκουμε

$$I = \frac{z}{2i(z + 2)}$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι

$$u(r, \theta) = \frac{r \cos \theta}{r^2 + 4r \cos \theta + 4}$$

Στη συνέχεια θα μας απασχολήσει ένα άλλο παράδειγμα-πρόβλημα με τις εξής συνοριακές συνθήκες:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi$$

$$u(R, \theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \kappa, & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Η λύση του προβλήματος θα είναι

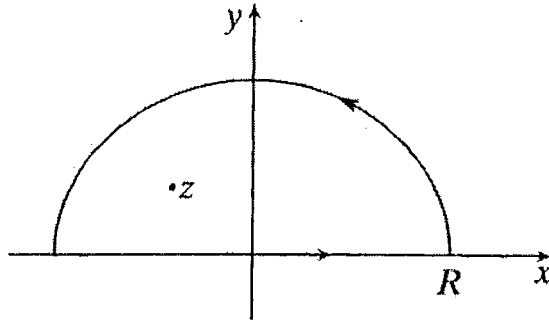
$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \kappa \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα θέτουμε  $t = \tan \frac{\varphi - \theta}{2}$ , οπότε  $d\varphi = \frac{2}{1+t^2} dt$ . Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{\kappa}{2\pi} \int_{\tan(\frac{\pi - \theta}{2})}^{\tan(\frac{\pi - \theta}{2})} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\kappa}{\pi} \text{Arc tan} \left[ \frac{R+r}{R-r} \tan \left( \frac{\varphi - \theta}{2} \right) \right], t \in [\pi, 2\pi] \\ &= \frac{\kappa}{\pi} \text{Arc tan} \left( \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \theta} \right) \end{aligned}$$

### Το πρόβλημα Dirichlet για το άνω ημιπίεδο

Έστω  $f(z)$  ολόμορφη στο  $\text{Im}z > 0$  και συνεχής στο  $\text{Im}z > 0$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχουν θετικές σταθερές  $\kappa$  και  $M$  τέτοιες, ώστε  $|zKf(z)| < M$ ,  $\text{Im}z > 0$ . Έστω  $C = CR \cup [-R, R]$  η καμπύλη του σχήματος θετικά προσανατολισμένη



Αν  $z$  ένα σημείο εντός της  $C$ , τότε, σύμφωνα, με τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt, \text{Im}z > 0$$

Επειδή  $|f(\zeta)| < M/RK$ , πρώτο ολοκλήρωμα τείνει στο 0 όταν  $R \rightarrow \infty$   
Επομένως

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt, \text{Im}z > 0$$

(1)

Η αναπαράσταση (1) είναι ένας **ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για το άνω ημιεπίπεδο**  $\text{Im}z > 0$ .

Επειδή το  $\bar{z}$  είναι στο εξωτερικό της  $C$ , έχουμε  $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-\bar{z}} dt = 0$

Επομένως ο τύπος (1) γράφεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right) f(t) dt$$

δηλαδή

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t,0)}{(t-x^2)+y^2} dt, y > 0$$

Αν  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , τότε έχουμε

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t,0)}{(t-x^2)+y^2} dt, y > 0$$



Ο τύπος αυτός ονομάζεται ολοκληρωτικός τύπος **Poisson** για το άνω ημιεπίπεδο ή ολοκληρωτικός τύπος **Schwarz**.

Η συνάρτηση

$$S(t - x, y) = \frac{y}{(t - x)^2 + y^2}$$

ονομάζεται **πυρήνας Schwarz**. Θέτοντας στον τύπο Schwarz  $u(x, y) = 1$  και  $u(t, 0) = 1$  έχουμε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t - x, y) dt = 1, y > 0$$

Η μέγιστη τιμή της  $S(t - x, y)$  σαν συνάρτηση του  $t$  λαμβάνεται για  $t=x$  και ισχύει  $\max_{t \in \mathbb{R}} S(t - x, y) = S(0, y) = \frac{1}{y} \rightarrow \infty$ , όταν  $y \rightarrow 0$

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει τη λύση του προβλήματος Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο.

**Θεώρημα.** (Η λύση του προβλήματος Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο).

Έστω μία συνάρτηση  $f(x)$  συνεχής και φραγμένη στον πραγματικό άξονα  $\text{Im}z=0$ . Η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t - x)^2 + y^2} dt, -\infty < x < \infty, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), -\infty < x < \infty \end{cases}$$

είναι αρμονική στο  $\text{Im}z > 0$  και συνεχής στο  $\text{Im}z \geq 0$ .

Για παράδειγμα, έχουμε να επιλύσουμε το εξής **πρόβλημα Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} \kappa, a < x < b \\ 0, \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Για να επιλύσουμε αυτό το πρόβλημα, χρησιμοποιούμε το θεώρημα που μόλις αναπτύξαμε, σύμφωνα με το οποίο η λύση θα είναι

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

είναι φανερό ότι

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \cdot \frac{\kappa}{y^2} \int_a^b \frac{1}{\left(\frac{t-x}{y}\right)^2 + 1} dt =$$

$$= \frac{\kappa}{\pi} \int_{\frac{a-x}{y}}^{\frac{b-x}{y}} \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{\kappa}{\pi} \left[ \text{Arc tan} \frac{b-x}{y} + \text{Arc tan} \frac{x-a}{y} \right]$$

Η λύση αυτή θα έχει την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία. Αν  $\theta_1 = \text{Arc tan} \frac{b-x}{y}$  και  $\theta_2 = \text{Arc tan} \frac{x-a}{y}$ , τότε

$$u(x, y) = \frac{\kappa}{\pi} (\theta_1 + \theta_2) = \frac{\kappa}{\pi} \theta(x, y)$$

όπου  $\theta$  η γωνία του σχήματος



Στο δευτερο παραδειγμα το πρόβλημα που καλουμαστε να επιλύσουμε έχει την εξής μορφή:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < y < \pi \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \\ u(x, \pi) = 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση  $\zeta = e^z$  ( $\zeta = \xi + i\eta$ ) απεικονίζει τη λωρίδα  $0 < y < \pi$  σύμμορφα του άνω ημιεπιπέδου. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος γίνονται οι εξής:

$$\tilde{u}(\xi, 0) = \begin{cases} 1, \xi > 1 \\ 0, \xi < 1 \end{cases}$$

Άρα από τον τύπο της απόδειξης έχουμε

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\eta dt}{(\xi - t)^2 + \eta^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arc tan} \frac{1 - \xi}{\eta}$$

Επειδή  $\xi = e^x \cos y$  και  $\eta = e^x \sin y$ , η λύση του προβλήματος είναι

$$u(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arc tan} \frac{e^{-x} - \cos y}{\sin y}$$

## Προβλήματα Neumann

### α) Πρόβλημα Neumann για ένα δίσκο

Έστω  $C$  ο κύκλος  $|z| = R$  και  $g(\theta)$  μία δοσμένη συνάρτηση, ορισμένη στον κύκλο  $C$  με την ιδιότητα  $\int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0$ . Θεωρούμε το εξής πρόβλημα Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ για } |z| < R \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{|z|=R} = g(\theta) \end{cases}$$

Έστω  $\zeta = Re^{i\varphi}$  και  $z = re^{i\theta}$ , όπου  $r < R$ . Για σταθερό  $\zeta$  η συνάρτηση  $Q(R, r, \varphi - \theta) = -2R \operatorname{Log}|\zeta - z| = -R \ln(R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2)$  είναι αρμονική στο εσωτερικό του κύκλου  $C$ , αφού είναι πραγματικό μέρος της συνάρτησης. Για  $r \neq 0$  έχουμε

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{R}{r} \frac{2r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} = \frac{R}{r} [P(R, r, \varphi - \theta) - 1] \quad (1)$$

Όπου  $P$  είναι ο πυρήνας Poisson. Η συνάρτηση

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(R, r, \varphi - \theta) g(\varphi) d\varphi + K, K \text{ σταθερά}$$

είναι αρμονική, αφού η  $Q$  είναι αρμονική ως προς  $r, \theta$ . Επειδή

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0$$

οπότε λόγω της (1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R}{r} [P(R, r, \varphi - \theta) - 1] g(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{R}{r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \varphi - \theta) g(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Άρα για  $|z| = R$ , ισχύει  $u_r(r, \theta) = g(\theta)$ .

Επομένως η συνάρτηση

$$u(r, \vartheta) = -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2) g(\varphi) d\varphi + K$$

είναι η λύση του προβλήματος Neumann για τον κύκλο  $|z| = R$ .

### β) Πρόβλημα Neumann για το άνω ημιεπίπεδο

Έστω  $g(x)$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  που ικανοποιεί τη συνθήκη  $|x^\alpha g(x)| < M, x \in \mathbb{R}$ , όπου  $\alpha > 1$ . Για σταθερό  $t$  πραγματικό, η συνάρτηση  $\text{Log}(z - t)$  είναι αρμονική στο ημιεπίπεδο  $\text{Im } z > 0$ . Άρα η συνάρτηση

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Log}|z - t| g(t) dt + K \text{ ή}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[(t - x)^2 + y^2] g(t) dt + K, K \text{ σταθερά (2)}$$

είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο. Από τον τύπο της (2) βρίσκουμε

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y g(t)}{(t - x)^2 + y^2} dt$$

$$u_y(x, 0) = g(x) \quad y > 0$$

Επομένως ο τύπος (2) είναι η λύση του προβλήματος στο άνω ημιεπίπεδο.

### Η συνάρτηση Green του προβλήματος Dirichlet

Με τη βοήθεια της θεωρίας των σύμμορφων απεικονίσεων είναι δυνατή

η κατασκευή μιας συναρτήσεως Green για ένα πεδίο  $D$  υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  το οποίο μπορεί να απεικονιστεί στο μοναδιαίο δίσκο  $|w| < 1$  του  $w$  — επιπέδου μέσω μιας σύμμορφης απεικόνισης. Έστω  $D$  ένα απλά συνεκτικό πεδίο με σύνορο τη λεία καμπύλη  $\Gamma$ . Η συνάρτηση  $G(z, z_0)$  ονομάζεται συνάρτηση Green για το πεδίο  $D$  αν ισχύουν:

1) Η συνάρτηση  $G(z, z_0)$  είναι αρμονική ως προς  $z$  για αυθαίρετο  $z_0 \in D$  με  $z \neq z_0$

2) Η  $G(z, z_0)$  έχει την ακόλουθη αναπαράσταση

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - z_0| + g(z, z_0)$$

όπου η  $g(z, z_0)$  είναι αρμονική και για  $z = z_0$  3)  $G(z, z_0) = 0$  για  $z \in \Gamma$  και οποιοδήποτε  $z_0 \in D$ . Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα:** Αν η συνάρτηση  $w = f(z, z_0)$  ορίζει μια σύμμορφη απεικόνιση του πεδίου  $D$  του  $z$  — επιπέδου επί του δίσκου  $|w| < 1$  έτσι, ώστε το  $z_0 \in D$  να απεικονίζεται στο κέντρο του κύκλου, τότε η συνάρτηση

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z, z_0)|}$$

είναι συνάρτηση Green για το πεδίο  $D$ .

**Απόδειξη.** Η συνάρτηση  $f(z, z_0)$  είναι ολόμορφη και ισχύει  $f(z, z_0) \neq 0$  για  $z \neq z_0$ . Επομένως και η συνάρτησης  $\text{Log}(f(z, z_0)) = \ln|f(z, z_0)| + i \text{Arg}f(z, z_0)$  είναι ολόμορφη στο  $D$  εκτός του σημείου  $z_0$ . Επειδή το πραγματικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης είναι μια αρμονική συνάρτηση, η συνθήκη 1) ικανοποιείται. Επειδή  $f(z, z_0) \neq 0$  για  $z \in D$  και  $f(z_0, z_0) = 0$  το  $z_0$  είναι απλή ρίζα της συνάρτησης. Επομένως, σε μια περιοχή του σημείου αυτού, ισχύει

$$f(z, z_0) = (z - z_0)\varphi(z, z_0)$$

όπου  $\varphi(z, z_0)$  είναι ολόμορφη στην περιοχή του  $z_0$  και  $\varphi(z, z_0) \neq 0$ , και άρα ισχύει η 2). Τέλος, επειδή  $|f(z, z_0)| = 1$  η συνάρτηση  $G(z, z_0)$  ικανοποιεί τη συνθήκη 3) και το θεώρημα αποδείχτηκε. Η σπουδαιότητα της συναρτήσεως Green φαίνεται στο θεώρημα που

ακολουθεί.

**Θεώρημα.** Αν υπάρχει συνάρτηση Green για το πεδίο  $D$  τότε το πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ στο } D, u = g \text{ στο } \partial D$$

έχει λύση για κάθε συνεχή συνάρτηση  $g(t)$  ορισμένη στο  $\partial D$ , η οποία δίνεται από τον τύπο

$$u(z) = \int_{\Gamma} f(t) \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_t} ds$$

όπου  $\eta_t$  είναι η κάθετη παράγωγος στο σημείο  $t \in \Gamma$ .

## Εφαρμογές

### A. Μετάδοση θερμότητας

Το ποσό της θερμότητας που διαρρέει μια επιφάνεια, η οποία βρίσκεται μέσα σ'ένα στερεό σώμα, ανά μονάδα εμβαδού και ανά μονάδα χρόνου ονομάζεται **ροή θερμότητας ή θερμική ροή** και συμβολίζεται με το διάνυσμα  $Q$ . Σε πολλές εφαρμογές η ροή θερμότητας δίνεται από τον τύπο  $Q = -k \text{grad}T$ , όπου  $T$  είναι η θερμοκρασία του στερεού και  $k$  είναι μια θετική σταθερά, ο **συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας**.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε δισδιάστατα και στατικά πεδία θερμικής ροής. Η ισοσταθμική γραμμή  $T(x, y) = \text{σταθ.}$  ονομάζεται **ισόθερμη γραμμή** και, όπως είναι γνωστό, το διάνυσμα της κλίσεως  $\text{grad}T$  είναι κάθετο στην ισοσταθμική και κατευθύνεται προς ισόθερμες μεγαλύτερης θερμοκρασίας (μεγαλύτερης στάθμης). Έτσι το διάνυσμα  $Q$  της θερμικής ροής κατευθύνεται προς ψυχρότερα σημεία του σώματος. Ένεκα της αρχής της διατηρήσεως της ενέργειας δεν υπάρχουν σημεία συσσώρευσης θερμότητας στο εσωτερικό μιας απλής κλειστής γραμμής  $C$ , π.χ.  $f(s) = x(s) + iy(s)$ , όπου  $s$  είναι το μήκος τόξου. Επομένως

$$\int_C Qn ds = 0 \quad (1)$$

Όπου  $\eta$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της  $C$  που κατευθύνεται προς το εξωτερικό της. Επειδή  $\eta = \frac{1}{i} f'(s) = \frac{dy}{ds} - i \frac{dx}{ds}$ , από την (1) βρίσκουμε

$$\int_C \left( -k \frac{\partial T}{\partial x}, -k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) ds$$

δηλαδή

$$\int_C \frac{\partial T}{\partial x} dx - \frac{\partial T}{\partial y} dy = 0$$

Η τελευταία ισότητα με χρήση του τύπου του Green δίνει

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

δηλαδή η  $T$  ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση Laplace. Αν  $\Psi(x,y)$  είναι η συζυγής αρμονική της  $T(x,y)$ , τότε η συνάρτηση

$$G(z) = T(x,y) + i\Psi(x,y)$$

είναι ολόμορφη και ονομάζεται **μυγαδική θερμοκρασία** και η μονοπαραμετρική οικογένεια γραμμών  $\Psi(x,y) = \mu$  ονομάζεται οικογένει γραμμών ροής.

Σε κάθε σημείο μιας γραμμής το διάνυσμα της θερμικής ροής  $Q$  είναι εφαπτόμενο της γραμμής και κατευθύνεται προς ψυχρότερα σημεία του στερεού. Τέλος, μια ισόθερμη γραμμή και μια γραμμή ροής τέμνονται ορθογώνια.

Στο επόμενο παράδειγμα θα προσπαθήσουμε να βρούμε τη θερμοκρασία  $T(x,y)$  σε κάθε σημείο στο ήμισυ του δίσκου:  $\text{Im}z > 0, |z| < 1$  αν η θερμοκρασία στα σημεία του συνόρου είναι



$$T(x, y) = 80, \text{ για } z = e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi$$

$$T(x, 0) = 40, \text{ για } -1 < x < 1$$

Γνωρίζουμε ότι ο σύμμορφος μετασχηματισμός

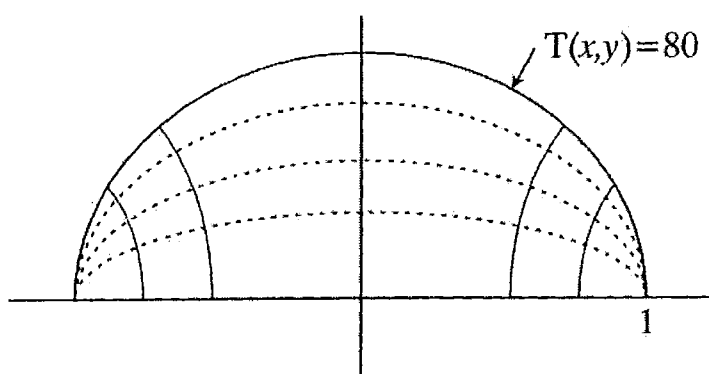
$$w = u + iv = i \frac{1-z}{1+z} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2 + y^2}$$

απεικονίζει το άνω ήμισυ του δίσκου στο πρώτο τεταρτημόριο. Για το νέο πρόβλημα έχουμε

$$T^*(u, v) = 80 \text{ για } u > 0 \text{ και } T^*(0, v) = 40 \text{ για } v > 0$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα που έχει ήδη αναλυθεί για το πρόβλημα Dirichlet σε γωνιακό πεδίο, η αρμονική συνάρτηση  $T^*(u, v)$  που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$T^*(u, v) = 80 + \frac{40 - 80}{\pi/2} \text{Arg} w = 80 - \frac{80}{\pi} \text{Arc tan } \frac{v}{u}$$



$$-1$$

$$T(x, 0) = 40$$

Οι ισόθερμες καμπύλες είναι κύκλοι που διέρχονται από τα σημεία  $\pm 1$ .

## B. Ηλεκτροστατικό πεδίο

Μια κατανομή ηλεκτρικών φορτίων δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο. Αν σε ένα σημείο A του πεδίου τεθεί φορτίο  $q = +1$ , τότε η δύναμη Coulomb  $E$  που ασκεί το ηλεκτρικό πεδίο στο φορτίο αυτό ονομάζεται **ένταση του ηλεκτρικού πεδίου** στο σημείο A. Ένα στατικό ηλεκτρικό πεδίο ονομάζεται **ηλεκτροστατικό πεδίο**. Εδώ θα ασχοληθούμε με δισδιάστατα ηλεκτροστατικά πεδία. Ένα δισδιάστατο ηλεκτρικό πεδίο παράγεται από ένα σύστημα φορτισμένων συρμάτων, πλακών και κυλινδρικών αγωγών που είναι κάθετα στο  $z$  — επίπεδο.

Για την ένταση  $E(x, y) = (E_1(x, y), E_2(x, y))$  υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση  $\Phi(x, y)$ , το **ηλεκτροστατικό δυναμικό**, τέτοια, ώστε

$$E(x, y) = -\text{grad}\Phi(x, y) \quad (1)$$

που σημαίνει

$$E_1(x, y) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \text{ και } E_2(x, y) = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad (2)$$

Εξάλλου η ροή της έντασης  $E$  διά μέσου μιας απλής κλειστής καμπύλης του  $z \sim$  επιπέδου, που δεν περικλείει ηλεκτρικό φορτίο, είναι μηδέν, δηλαδή

$$T^*(u, v) = 80 + \frac{40 - 80}{\pi/2} \text{Arg} w = 80 - \frac{80}{\pi} \text{Arc tan } \frac{v}{u} \quad (3)$$

Η (3) είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος Gauss  $\int_C E \cdot n ds = 4\pi q$ , όπου  $q$  το φορτίο που βρίσκεται στο εσωτερικό της  $C$ . Από την (3) με χρήση του τύπου του Green βρίσκουμε ότι σ' ένα πεδίο  $D$  που δεν περιέχει ηλεκτρικό φορτίο, ισχύει

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Από τις (2) και (4) βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

που σημαίνει ότι η  $\Phi$  είναι αρμονική στο .

Αν  $\Psi(x, y)$  είναι συζυγής αρμονική της  $\Phi(x, y)$ , τότε η συνάρτηση  $G(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$  (5) είναι αναλυτική στο  $D$  και ονομάζεται **μιγαδικό ηλεκτροστατικό δυναμικό** ή, απλά, **μιγαδικό δυναμικό**. Ακόμη έχουμε

$$E = E_1 + iE_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{dG}{dz} = -\overline{G'(z)} \quad (6)$$

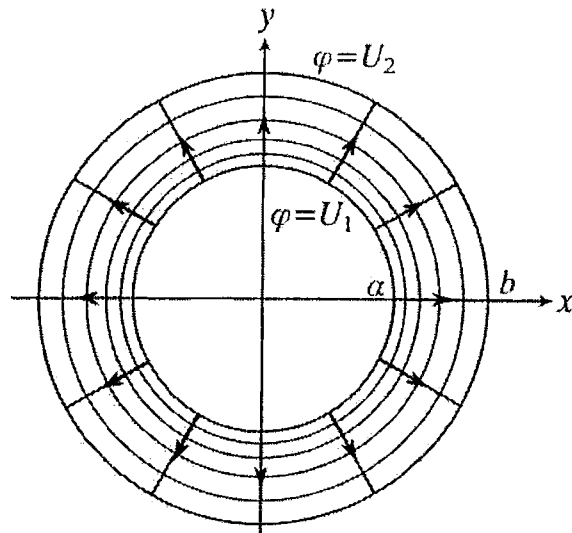
Οι μονοπαραμετρικές οικογένειες γραμμών  $\Phi(x, y) = \lambda$  και  $\Psi(x, y) = \mu$  ονομάζονται οικογένεια ισοδυναμικών γραμμών και οικογένεια γραμμών ροής αντίστοιχα. Οι γραμμές των οικογενειών αυτών τέμνονται ορθογώνια.

Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι η εύρεση το ηλεκτροστατικού δυναμικού  $\Phi(x, y)$  στο πεδίο μεταξύ δύο άπειρων ομοαξονικών κυλίνδρων  $r=a$  και  $r=b$ , που έχουν σταθερά δυναμικά  $U_1$  και  $U_2$ , αντίστοιχα.

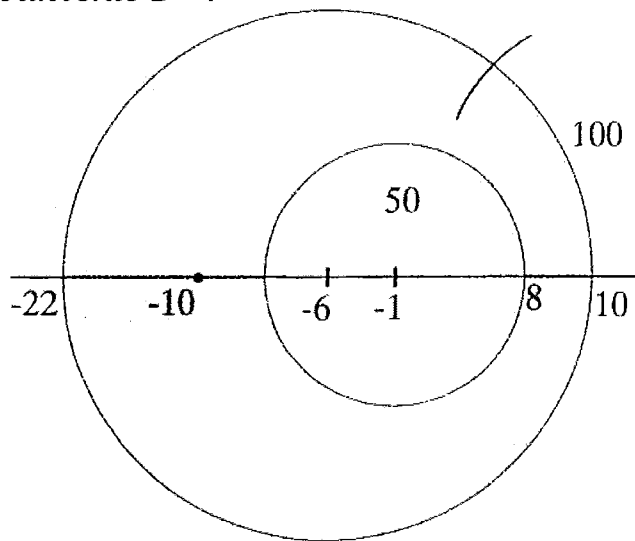
Από προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι η λύση είναι

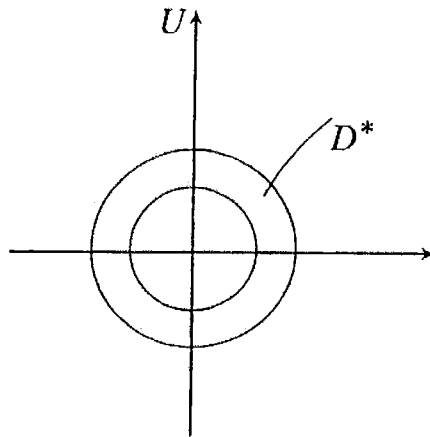
$$\Phi(x, y) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{\ln b - \ln a} (\ln|z| - \ln a)$$

Οι ισοδυναμικές γραμμές  $\Phi(x, y) = c$  είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το 0 και οι γραμμές ροής είναι τα τμήματα ημιευθειών με αρχή το 0. Αν  $U_2 < U_1$ , τότε η γεωμετρική παράσταση του πεδίου φαίνεται στο σχήμα



Στο επόμενο παράδειγμα ψάχνουμε το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi(x,y)$  εντός ενός πυκνωτή που αποτελείται από δύο άπειρους κυλινδρικούς αγωγούς, που ορίζονται από τις σχέσεις  $|z + 1| > 9$  και  $|z + 6| < 16$ . Θα βρούμε καταρχήν ένα διγραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει το πεδίο  $D$  σε ένα δακτύλιο  $D^*$ .





Έστω  $a$  και  $b$  δύο σημεία συμμετρικά ως προς τους δύο κύκλους. Τα σημεία αυτά ικανοποιούν τις σχέσεις  $(a + 1)(b + 1) = 81$  και  $(a + 6)(b + 6) = 256$ ,  
 οπότε  $a=2$  και  $b= 26$  . Ο μετασχηματισμός

$$w = \frac{z - 2}{z - 26}$$

απεικονίζει το  $D$  σύμμορφα στον δακτύλιο  $1/3 < |w| < 1/2$ . Η λύση του προβλήματος στο πεδίο  $D^*$  είναι

$$\begin{aligned} \phi^* &= 50 + 50 \frac{\ln|w| - \ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)} = \\ &= 50 + 50 \frac{\ln|w| + \ln 3}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= 50 + 50 \frac{\ln\left(\frac{|z-2|}{|z-6|}\right) + \ln 3}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = \\ &= 50 + \left[1 + \frac{\ln\left(\frac{|x+iy-2|}{|x+iy-26|}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}\right] \end{aligned}$$

## Γ. Ροή ρευστών

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε εφαρμογές της Μιγαδικής Ανάλυσης σε ροή ρευστού, που είναι διδιάστατη, στατική, ασυμπίεστη και αστρόβιλη. Η ροή ρευστού ονομάζεται:

**Διδιάστατη**, όταν οι ταχύτητες των σωματιδίων του ρευστού είναι παράλληλες προς ένα επίπεδο, το οποίο μπορεί να ταυτιστεί με το μιγαδικό επίπεδο.

**Στατική**, όταν η ταχύτητα του ρευστού σ' ένα οποιοδήποτε σημείο  $P(x, y)$ , εξαρτάται από τις συντεταγμένες  $x, y$  και όχι από το χρόνο.

**Ασυμπίεστη**, όταν η πυκνότητα  $\rho$  του ρευστού είναι σταθερή.

Δίνεται η ταχύτητα  $V(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$  του ρευστού, η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε ένα απλά συνεκτικό πεδίο  $D$ . Η γνωστή από τη μηχανική ρευστών **εξίσωση συνέχειας** σε διδιάστατη μορφή δίνεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

η οποία εκφράζει την αρχή **διατήρησης της μάζας του ρευστού**. Επειδή η ροή είναι ασυμπίεστη και η πυκνότητα  $\rho$  σταθερή, η τελευταία εξίσωση στην περίπτωσή μας παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Επειδή η ροή είναι αστρόβιλη ισχύει  $rot F = 0$ , δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

Η εξίσωση αυτή, με την προϋπόθεση ότι το πεδίο είναι απλά συνεκτικό, είναι ικανή και αναγκαία για την ύπαρξη συνάρτησης με

$$grad \Phi = V \text{ στο } D \quad (2)$$

Η  $\Phi$  ονομάζεται **δυναμικό ταχύτητας** της ροής. Από τις (1) και (2) εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

δηλαδή το δυναμικό ταχύτητας ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Επειδή η  $\Phi(x, y)$  είναι αρμονική, υπάρχει συζυγής αρμονική  $\Psi(x, y)$  τέτοια ώστε η μιγαδική συνάρτηση

$$G(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

να είναι ολόμορφη στο  $D$ . Η συνάρτηση  $G(z)$  ονομάζεται **μιγαδικό δυναμικό της ροής**. Αν παραγωγίσουμε την  $G(z)$  και λάβουμε υπόψη μας τις συνθήκες Cauchy-Riemann, παίρνουμε

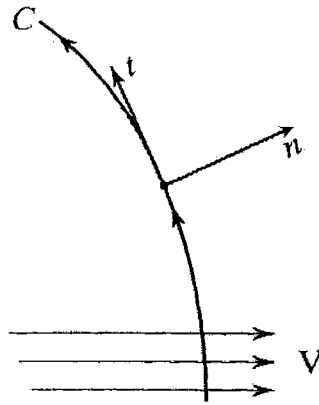
$$G'(z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y} = u - iv$$

Αν γράψουμε την ταχύτητα ροής σε μιγαδική μορφή  $V(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , τότε έχουμε,  $V(z) = G'(z)$

Στην Υδροδυναμική σημαντικό ρόλο παίζουν οι έννοιες της **κυκλοφορίας** και της **ροής**. Θα εκφράσουμε τις ποσότητες αυτές με τη βοήθεια του μιγαδικού δυναμικού.

Έστω  $C$  μια λεία καμπύλη στο επίπεδο. Αν η  $C$  έχει μια παραμετρική έκφραση με παράμετρο το μήκος τόξου, τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα  $\mathbf{t}$  και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  της καμπύλης είναι

$$\mathbf{t} = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right), \mathbf{n} = \left( \frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$$



Ορίζουμε ως **ροή** του διανυσματικού πεδίου  $V$  διά της καμπύλης  $C$  το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$N = \int_C V \cdot n ds$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ορίζει την ποσότητα ρευστού που διέρχεται από την  $C$  ανά μονάδα χρόνου. Είναι φανερό ότι

$$N = \int_C u dy - v dx = \int_C \Phi_x dy - \Phi_y dx = \int_C \Psi_x dx + \Phi_y dy$$

Η **κυκλοφορία** κατά μήκος της  $C$  είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\Gamma = \int_C V \cdot t ds$$

Το ολοκλήρωμα παριστάνει την ποσότητα ρευστού που κινείται ανά μονάδα χρόνου κατά μήκος της  $C$ . Είναι φανερό ότι

$$\Gamma = \int_C V \cdot t ds = \int_C u dx + v dy = \int_C \Phi_x dx + \Phi_y dy = \int_C \Phi_x dx - \Psi_x dy \quad (4)$$

Ισχύει



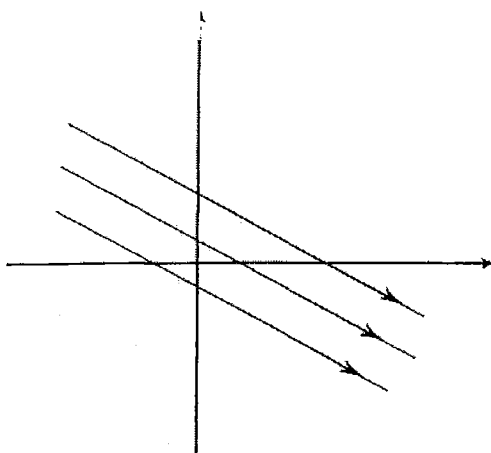
$$\int_C G'(z) dz = \int_C \Phi_x dx - \Psi_x dy + i \int_C \Psi_x dx + \Phi_y dy$$

οπότε από τις (3),(4) προκύπτει

$$\boxed{\int_C G'(z) dz = \Gamma + iN}$$

Ο τύπος αυτός, που εκφράζει την κυκλοφορία και τη ροή μέσω του μιγαδικού δυναμικού βρίσκει πολλές εφαρμογές στην Υδροδυναμική.

**Παράδειγμα :** Έστω ότι το μιγαδικό δυναμικό μιας ροής έχει τη μορφή  $G(z) = az$ , όπου  $a = k + i\lambda$  ένας δοσμένος μιγαδικός αριθμός. Τότε το δυναμικό ταχύτητας είναι  $\Phi(x,y) = kx - \lambda y$  και η συνάρτηση ροής  $\Psi(x,y) = \lambda x + iky$ . Οι γραμμές ροής  $\Psi(x,y) = C$  είναι ευθείες παράλληλες η κλίση των οποίων ως προς τον x-άξονα δίνεται από τη σχέση  $\tan \alpha = -\lambda/k$ .



Ισχύει  $V(x,y) = \overline{G'(z)} = \bar{a} = k - i\lambda$ , άρα το διάνυσμα ταχύτητας είναι παράλληλο με τις γραμμές  $\Psi(x,y) = C$ .

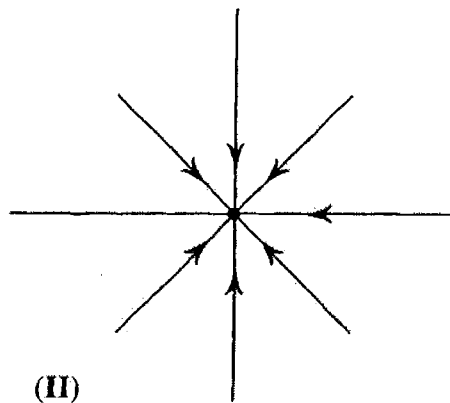
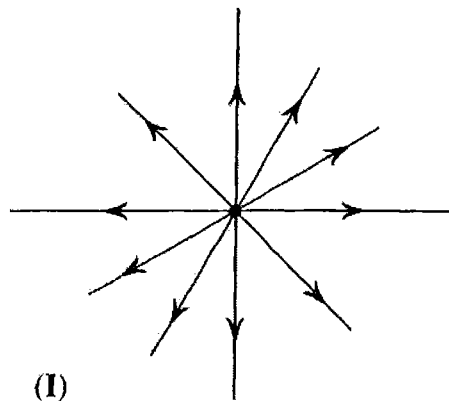
**Παράδειγμα** Έστω ότι το μιγαδικό δυναμικό μιας ροής έχει τη μορφή  $G(z) = \alpha \text{Log} z$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Αν  $z = re^{i\varphi}$ , τότε το δυναμικό ταχύτητας και η συνάρτηση ροής σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\Phi(r, \varphi) = \alpha \ln r \text{ και } \Psi(r, \varphi) = \alpha \varphi$$

Οι γραμμές ροής είναι ημιευθείες με αρχή το 0 και οι ισοδυναμικές γραμμές κύκλοι με κέντρο το 0. Το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$|G'(z)| = \frac{|a|}{|z|} = \frac{|a|}{r} \quad (5)$$

Από την (5) προκύπτει ότι στην αρχή η ταχύτητα είναι άπειρη. Το σημείο  $z=0$  είναι ανώμαλο σημείο της  $G$  και είναι η πηγή της ροής. Αν  $\alpha > 0$  τότε έχουμε θετική πηγή και το διάνυσμα ταχύτητας έχει κατεύθυνση απομάκρυνσης από τη πηγή (βλ. σχήμα, I), αν  $\alpha < 0$ , τότε έχουμε αρνητική πηγή ή καταβόθρα και το διάνυσμα ταχύτητας κατευθύνεται προς την πηγή (βλ. σχήμα, II)

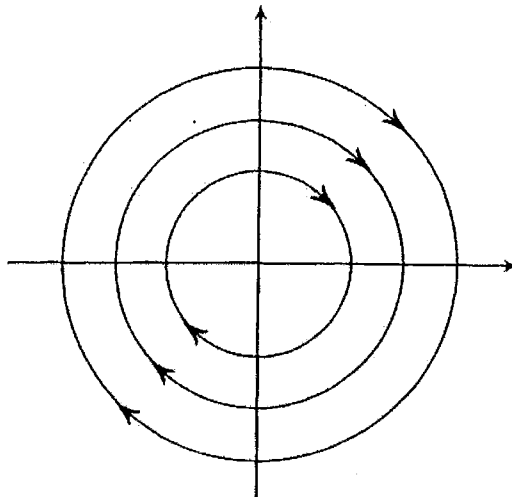


Αν  $C$  είναι μια οποιαδήποτε κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη που περιέχει το  $0$ , τότε από τον τύπο (A) έχουμε

$$\int_C G'(z) dz = \int_C \frac{a}{z} dz = 2\pi i a = \Gamma + iN$$

οπότε  $N = 2\pi a$ . Επομένως η ροή ρευστού κατά μήκος κάθε κλειστής καμπύλης που περιέχει την πηγή είναι σταθερή και ίση με  $2\pi a$ . Η ποσότητα αυτή ονομάζεται ένταση της πηγής.

**Παράδειγμα** Θεωρούμε μια ροή με μιγαδικό δυναμικό  $G(z) = ia \operatorname{Log} z$  όπου  $a \in \mathbb{R}$ . Στην περίπτωση αυτή οι γραμμές ροής είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την αρχή. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση παίρνουμε  $N = 0$  και  $\Gamma = -2\pi a$ . Το σημείο  $0$  ονομάζεται **σημείο στροβιλισμού** της ροής.



**Παράδειγμα (Πηγή και καταβόθρα ίσης έντασης).** Έστω μια πηγή και μια καταβόθρα μοναδιαίας έντασης που βρίσκονται στα σημεία  $+1$  και  $-1$ , αντίστοιχα. Το μιγαδικό δυναμικό της ροής είναι

$$\Gamma(z) = \operatorname{Log}(z - 1) - \operatorname{Log}(z + 1) = \operatorname{Log}\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)$$

Η συνάρτηση ροής είναι

$$\Psi(x, y) = \operatorname{Arg}\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)$$

Οπότε οι γραμμές ροής είναι

$$\operatorname{rg} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) = \operatorname{Arg} \left( \frac{x^2 + y^2 - 1 + 2iy}{(x+1)^2 + y^2} \right) = \operatorname{Arc} \tan \left( \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right) = c$$

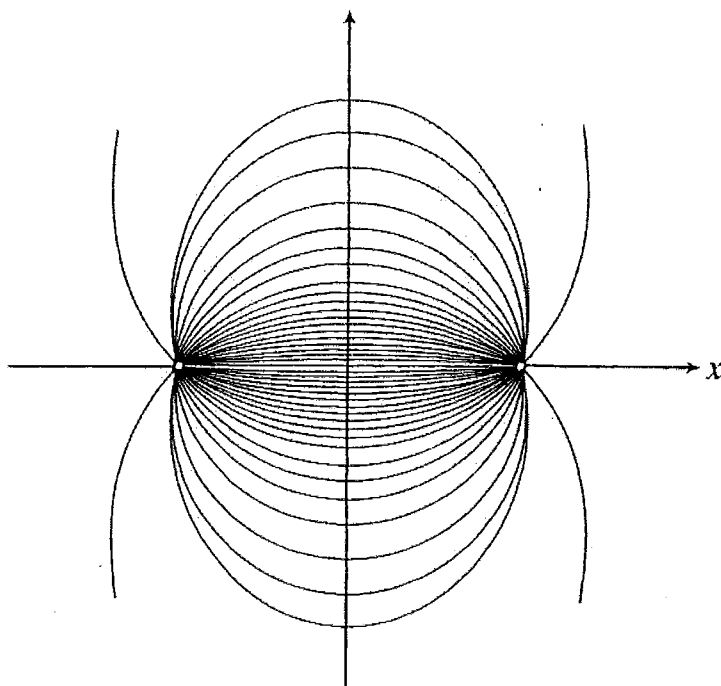
δηλαδή

$$(\tan c) \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 2y$$

Η τελευταία σχέση γράφεται στη μορφή

$$x^2 + (y - \cot c)^2 = 1 + \cot^2 c$$

Επομένως οι γραμμές ροής είναι κύκλοι με κέντρα τα σημεία  $(0, \cot c)$  που διέρχονται από τα σημεία  $(\mp 1)$ , όπως στο σχήμα.



Στα παραδείγματα που αναφέραμε μέχρι τώρα, καθορίσαμε τα χαρακτηριστικά της ροής με τη βοήθεια ενός δοσμένου μιγαδικού αριθμού. Θα μελετήσουμε τώρα το αντίστροφο πρόβλημα. Δηλαδή την εύρεση του μιγαδικού δυναμικού γνωρίζοντας τα υδροδυναμικά χαρακτηριστικά της. Σηειώνουμε ότι η ταχύτητα ροής εκφράζεται μέσω της παραγώγου του μιγαδικού δυναμικού και άρα το μιγαδικό δυναμικό δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο για μια δοσμένη ροή.

## Ροή γύρω από ένα εμπόδιο

Θεωρούμε μια ροή που είναι σταθερή στο άπειρο, δηλαδή  
 $V(z) \rightarrow V_\infty = \text{σταθερή όταν } z \rightarrow \infty$

Τοποθετούμε στο πεδίο ροής ένα εμπόδιο, του οποίου το σύνορο είναι μια λεία καμπύλη  $C$  και ζητάμε να βρούμε το μιγαδικό δυναμικό  $G(z)$  της ροής. Η  $G'(z)$  αναπτύσσεται σε μια σειρά Laurent της μορφής.

$$G'(z) = \bar{V}_\infty + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

αφού  $G'(z) \rightarrow \bar{V}_\infty$  όταν  $z \rightarrow \infty$ .

Επομένως

$$G(z) = \bar{V}_\infty z + a + a_{-1} \text{Log} z - \frac{a_{-2}}{z} - \dots$$

οπου  $a$  αυθαίρετη σταθερά. Για να γίνει κατανοητή η σημασία της σταθεράς  $a_{-1}$  χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\int_{C'} f'(z) dz = \Gamma + iN$$

οπου  $C'$  είναι μία οποιαδήποτε κλειστή, λεία και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη που περιέχει στο εσωτερικό της τη  $C$ . Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{C'} f'(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

Οπότε

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} (\Gamma + iN)$$

Επειδή η ροή  $N$  πάνω στη  $C$  είναι μηδέν, έχουμε

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \Gamma$$

Επομένως ισχύει

$$G(z) = \bar{V}_\infty \cdot z + a + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log}z - \frac{a_{-2}}{z} - \dots$$

Επειδή η καμπύλη  $C$  του εμποδίου είναι μία γραμμή ροής θα πρέπει να ισχύει

$$\Psi(x, y) = \text{σταθερή πάνω στη } C \quad (6)$$

**Αποδεικνύεται ότι αν δοθεί η  $V_\infty$  και η κυκλοφορία  $\Gamma$  της ροής, τότε το μιγαδικό δυναμικό  $G(z)$  της ροής είναι μονοσήμαντα ορισμένο μέχρι μιας προσθετικής σταθεράς.**

Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν  $\Gamma = 0$ . Από τον τύπο (6) προκύπτει

$$G(z) = \bar{V}_\infty \cdot z + a - \frac{a_{-2}}{z} - \dots$$

Έστω  $G(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ . Λόγω της (6) η εικόνα της  $C$  μέσω της  $G(z)$  θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα  $C^*$  παράλληλο προς τον  $u$ -αξονα. Η  $G$  απεικονίζει το εσωτερικό της  $C$  σύμμορφη απεικόνιση επί του εξωτερικού της  $C^*$ .

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη. Πράγματι, έστω  $w_0$  ένα τυχαίο σημείο του  $w$ —επιπέδου με  $w_0$  να μην ανήκει στο  $C^*$ . Υποθέτουμε ότι το 0 ανήκει στο εσωτερικό της  $C$ . Έστω  $N(w_0)$  το πλήθος των σημείων  $z$  με  $G(z) = w_0$  και  $P$  το πλήθος των πόλων της  $G$  στο εξωτερικό της  $C$ . Αν  $f(z) = G(z) - w_0$ , τότε από την αρχή του ορίσματος, έχουμε

$$N(w_0) - P = N_f(0) - P_f = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G'(z)}{G(z) - w_0} dz = 0$$

Επειδή  $P_f = 1$  (το  $\infty$  είναι ο μοναδικός πόλος τάξεως 1), θα είναι  $N_{w_0} = 1$  δηλαδή υπάρχει μοναδικό  $z$  με  $G(z) = w_0$ .

Για τη μελέτη ροών σημαντική είναι η έννοια του σημείου ανάκαμψης. Ένα σημείο για το οποίο  $G(z) = 0$  ονομάζεται σημείο ανάκαμψης της ροής. Το μέτρο της ταχύτητας  $\gamma$  στα σημεία αυτά είναι μηδέν. Είναι φανερό ότι στα σημεία ανάκαμψης η  $G(z)$  δεν είναι σύμμορφη.

Στο επόμενο παράδειγμα θα μελετήσουμε το πρόβλημα της ροής γύρω από έναν κυκλικό κύλινδρο, ανάγοντας το πρόβλημα αυτό σε επίπεδο, θεωρώντας μια ροή γύρω από έναν κυκλικό δίσκο με σύνορο  $C = \{z \in \mathcal{C} : |z| = R\}$

Στο άπειρο η ταχύτητα είναι σταθερή  $V_\infty = |V_\infty| e^{i\varphi}$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

### α) Κυκλοφορία $\Gamma = 0$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν  $G(z)$  είναι το μιγαδικό δυναμικό της ροής, τότε η  $G(z)$  απεικονίζει το εξωτερικό του κύκλου  $C$  επί του  $\mathcal{C} \setminus C^*$ , όπου  $C^*$  είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο προς τον  $u$ —άξονα. Η απεικόνιση  $Q$  είναι σύμμορφη και αμφιμονοσήμαντη.

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

Η απεικόνιση Joukowski

έχει μια ανάλογη συμπεριφορά: απεικονίζει το μοναδιαίο κύκλο  $\zeta = 1$

επί του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα σημεία  $\pm 1$ .

Τροποποιούμε τώρα τη συνάρτηση  $f(z)$ , ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το μιγαδικό δυναμικό  $G(z)$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(z) = \lambda \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right), \lambda \in \mathbb{R}$$

Έχουμε

$$g'(z) = \lambda \left( \frac{1}{R} - \frac{R}{z^2} \right) \rightarrow \frac{\lambda}{R}, \text{ όταν } z \rightarrow \infty$$

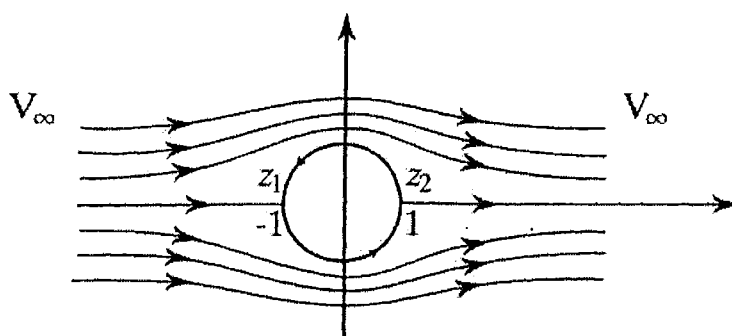
Για το μιγαδικό δυναμικό  $G(z)$  θα πρέπει

$$G'(z) \rightarrow \bar{V}_\infty = |V_\infty| e^{-i\varphi}, \text{ για } z \rightarrow \infty$$

Έτσι επιλέγουμε  $\lambda = |V_\infty| \cdot R$  και αντικαθιστούμε το  $z$  με το  $ze^{-i\varphi}$ . Έτσι το ζητούμενο δυναμικό είναι

$$G(z) = \bar{V}_\infty \cdot z + \frac{R^2 V_\infty}{z}$$

Στο ακόλουθο σχήμα παριστάνεται η ροή για  $\Gamma = 0$ ,  $R = 1$  και



Τα σημεία ανάκαμψης της ροής προκύπτουν από τη σχέση

$$G'(z) = V_\infty - \frac{V_\infty}{z^2}$$

Δηλαδή είναι  $z_1 = 1$  και  $z_2 = -1$ .



## β) Κυκλοφορία $\Gamma \neq 0$

Το μιγαδικό δυναμικό ενός σημειακού στροβίλου που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων είναι  $\Gamma/2\pi i \text{Log}z$

Προσθέτοντας το δυναμικό αυτό με το δυναμικό που βρήκαμε προηγούμενα για  $\Gamma = 0$  βρίσκουμε το μιγαδικό δυναμικό της ροής

$$G(z) = V_{\infty} \cdot z + \frac{R^2 V_{\infty}}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log}z$$

**Σημεία ανάκαμψης της ροής:** Για  $R = 1$  και  $V_{\infty} = \bar{V}_{\infty}$  τα σημεία ανάκαμψης βρίσκονται από τη σχέση.

$$G'(z) = V_{\infty} - \frac{V_{\infty}}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} = 0$$

δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i V_{\infty}} z - 1 = 0$$

Επομένως

$$z_{1,2} = \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \left( \Gamma i \mp \sqrt{16\pi^2 V_{\infty}^2 - \Gamma^2} \right)$$

Αν  $\Gamma \leq 4\pi V_{\infty}$ , τότε

$$|z_{1,2}| = \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \left( \Gamma i \mp \sqrt{16\pi^2 V_{\infty}^2 - \Gamma^2} \right) = 1$$

δηλαδή και τα δύο σημεία ανάκαμψης βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο  $|z|=1$ .

Θέτοντας  $z = e^{i\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , τότε

$$|G'(z)| = \left| V_\infty - \frac{V_\infty}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} \right| = |(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i}|$$

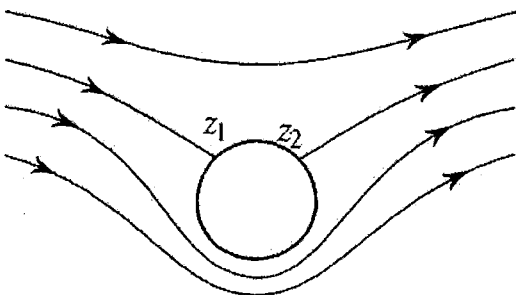
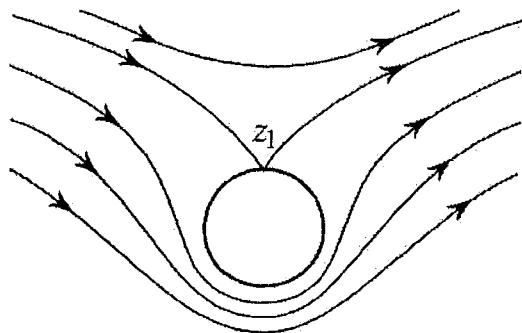
$$= \left| 2V_\infty \sin \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \right| = 0$$

δηλαδή

$$\sin \varphi = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty},$$

οπότε για τα δύο σημεία ανάκαμψης  $z_1 = e^{i\varphi_1}$  και  $z_2 = e^{i\varphi_2}$  έχουμε

$$\varphi_1 = \text{Arc sin} \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}, \varphi_2 = \pi - \text{Arc sin} \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}$$



## Δύναμη που ασκείται από ροή πάνω σε ένα σώμα

Έστω ένα σώμα με σύνορο την τμηματικά λεία καμπύλη  $C$ . Η δύναμη που

ασκεί μια ροή σε ένα στοιχειώδες τόξο  $ds$  της καμπύλης είναι ανάλογη της υδροδυναμικής πίεσης  $\rho$  και έχει τη διεύθυνση της καθέτου πουκατευθύνεται στο εσωτερικό της καμπύλης

$$-n = \left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds}\right)$$

όπου  $A$  σταθερά  $v = |V|$ ,  $V$  είναι η ταχύτητα ροής και  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού και γράφοντας  $F = F_x + iF_y$  βρίσκουμε

$$F = -\frac{\rho}{2} \int_C v^2 (dx - idy) = -\frac{\rho}{2} \int_C v^2 \bar{dz} \quad (8)$$

(το ολοκλήρωμα της σταθεράς  $A$  πάνω στην κλειστή καμπύλη  $C$  είναι μηδέν).

Κατά μήκος της καμπύλης  $C$  η ταχύτητα  $V$  έχει την ίδια διεύθυνση με την εφαπτομένη, επομένως

$$V = ve^{i\varphi}$$

όπου  $\varphi$  η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης με τον  $x$ -άξονα. Γνωρίζουμε ότι  $|V|e^{i\varphi} = f'(z)$ . Επίσης  $\bar{dz} = dse^{-i\varphi}$ . Επομένως  $|V|^2 \bar{dz} = |V|^2 dse^{-i\varphi} = |V|^2 e^{-2i\varphi} = f'^2(z) dz$ , οπότε ο τύπος (8) παίρνει μορφή

$$F = -\frac{\rho}{2} \int_C f'^2(z) dz$$

Αυτός είναι ο τύπος Charlygin ο οποίος δίνει τη δύναμη που ασκείται από μια ροή σε ένα σώμα που βρίσκεται στο πεδίο ροής.

Το μιγαδικό δυναμικό έξω από το σώμα, δίνεται από τον τύπο (4), οπότε

$$f'(z) = \bar{V}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a'_n}{z^n}$$

Και άρα

$$f'^2(z) = \frac{\bar{V}_\infty}{\pi i} \cdot \frac{\Gamma}{z} + \bar{V}_\infty^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

Επομένως

$$\int_C f'^2(z) dz = 2\bar{V}_\infty \Gamma \quad (10)$$

Από τι (9) και (10) προκύπτει ο τύπος Joukowski

$$|F| = \rho |V_\infty| \cdot |\Gamma|$$

Με τη βοήθεια των ολόμορφων συναρτήσεων οι Joukowski, Chaplygin ανέπτυξαν μεθόδους για την επίλυση υδροδυναμικών και αεροδυναμικών προβλημάτων, τα οποία αφορούσαν στην κατασκευή αεροσκαφών.

## Βιβλιογραφία

- 1) Δ.Χ.Κραββαρίτης Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμεών, 2006
- 2) Δ.Χ.Κραββαρίτης, Γ.Ν.Παντελίδης Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων, Εκδόσεις Ζήτη, 2003
- 3) Σ.Τερνέσοφ Αναλυτικές συναρτήσεις και μερικές εφαρμογές τους, Εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα, 1995
- 4) J.M.Howie Complex Analysis, Springer-Verlag, 2003
- 5) J.E.Marsden, M.J.Hoffman Βασική Μιγαδική Ανάλυση, μετάφραση Λ.Χ.Παπαλουκά, Εκδόσεις Συμμετρία, 1994
- 6) A.D.Osborne Complex Variables and their Applications, Addison-Wesley, 1999