ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Κυρτά Σώματα και το Θεώρημα Dvoretzky

Γαστεράτος Ιωάννης

Επιβλέπων Καθηγητής: Βασίλειος Παπανικολάου

Αθήνα, Μάρτιος 2017

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της Διπλωματικής Εργασίας είναι η μελέτη των κυρτών σωμάτων και του θεωρήματος Dvoretzky. Η ασυμπτωτική ανάλυση των κυρτών σωμάτων βρίσκεται στην τομή της Κυρτής Γεωμετρίας, της Συναρτησιακής Ανάλυσης και της θεωρίας Πιθανοτήτων και στοχεύει στην περιγραφή των ιδιοτήτων των κυρτών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ για μεγάλες τιμές της διάστασης n. Η περιγραφή αυτή συνδέεται άμεσα με την «τοπική» θεωρία των χώρων Banach που αφορά τη μελέτη των χώρων με νόρμα πεπερασμένης διάστασης.

Στο Κεφάλαιο 1, αναπτύσσονται τα βασικά εργαλεία που αφορούν τα κυρτά σύνολα και περιγράφεται η αναλογία μεταξύ Γεωμετρίας και Συναρτησιακής Ανάλυσης. Η αναλογία αυτή, έχει ως εναρκτήριο σημείο την παρατήρηση ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα ενός n-διάστατου χώρου με νόρμα είναι ένα κυρτό συμμετρικό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.

Το Κεφάλαιο 2 έχει ως κύριο θέμα μια από τις βασικότερες ανισότητες της κλασικής κυρτής ανάλυσης, την ανισότητα Brunn-Minkowski. Πέραν της απόδειξης, επιχειρείται η διερεύνηση των συνθηκών που εξασφαλίζουν την ισότητα. Το εγχείρημα αυτό διέρχεται από την έννοια των μικτών όγκων που παίζουν κυρίαρχο ρόλο στη θεωρία κυρτών σωμάτων που θεμελίωσε ο Minkowski. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια από τις πολυάριθμες εφαρμογές αυτής της ανισότητας, η οποία σχετίζεται με την επίλυση του ισοπεριμετρικού προβλήματος στον $\mathbb{R}^n$. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι η ευκλείδεια μπάλα έχει τη μικρότερη επιφάνεια ανάμεσα σε όλα τα συμπαγή υποσύνολα ίσου όγκου στον $\mathbb{R}^n$.

Στο Κεφάλαιο 3, ορίζεται μια έννοια απόστασης μεταξύ κυρτών σωμάτων και η ανάλογη έννοια της απόστασης μεταξύ χώρων με νόρμα πεπερασμένης διάστασης. Στο επίκεντρο βρίσκεται το θεμελιώδες θεώρημα του F. John, σχετικά με την ύπαρξη ενός ελλειψοειδούς μεγίστου όγκου E που περιέχεται σε ένα αυθαίρετο κυρτό, συμμετρικό σώμα K. Η ανάλυση John του ταυτοτικού τελεστή ως κυρτό συνδυασμό προβολών στα σημεία επαφής του K με το E, οδηγεί στην απόδειξη ενός αποτελέσματος των Dvoretzky-Rogers που παίζει κυρίαρχο ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος Dvoretzky.

Το Κεφάλαιο 4 καταπιάνεται με το φαινόμενο της Συγκέντρωσης του Μέτρου.

Ως κίνητρο για την ανάπτυξη της θεωρίας, μελετάται ασυμπτωτικά η κατανομή του όγκου της n-διάστατης ευκλείδειας μπάλας του $\mathbb{R}^n$. Εδώ γίνεται για πρώτη φορά εμφανές ότι η γεωμετρική αντίληψη που εγκλωβίζεται στις τρεις διαστάσεις δεν είναι αρκετή ώστε να προβλέψει την «αξιοσημείωτη» συμπεριφορά που παρουσιάζουν τα κυρτά σώματα σε μεγάλες διαστάσεις. Στη συνέχεια ορίζεται αυστηρά η συγκέντρωση του μέτρου ως ένα φαινόμενο ασυμπτωτικής σημασίας που υποδηλώνει μια «ασυμφωνία» μεταξύ μέτρου και μετρικής σε χώρους μεγάλων διαστάσεων.

Τέλος, το Κεφάλαιο 5 έχει ως θέμα το θεώρημα Dvoretzky, το οποίο αποτελεί και αφετηρία της σύγχρονης θεωρίας των κυρτών σωμάτων. Σύμφωνα με αυτό, κάθε συμμετρικό, κυρτό σώμα έχει κεντρικές τομές αρκετά μεγάλης διάστασης οι οποίες είναι «σχεδόν» ελλειψοειδείς. Ισοδύναμα, κάθε n-διάστατος χώρος Banach έχει ένα σχεδόν ευκλείδειο υπόχωρο αρκετά μεγάλης διάστασης. Ακολουθώντας την απόδειξη του Milman και χρησιμοποιώντας αποτελεσματα και έννοιες των προηγούμενων κεφαλαίων, η παρούσα εργασία κλείνει με τον υπολογισμό της διάστασης των σχεδόν ευκλείδειων υποχώρων του ℓ_∞^n.

Κεφάλαιο 1

1.1 Βασικές Έννοιες

Παρακάτω παρατίθενται κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσματα που είναι θεμελιώδη για τη γεωμετρική και ασυμπτωτική ανάλυση των κυρτών σωμάτων.

Ορισμός 1.1. *Ένα συνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται* ***κυρτό*** *αν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο σημεία του A περιέχεται στο A. Συγκεκριμένα, το A είναι κυρτό αν και μόνο αν $(1-t)A + tA = A$ για κάθε $t \in [0, 1]$.*

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.2. *(i) Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Τότε η τομή $\bigcap_{i\in I} A_i$ είναι κυρτό σύνολο.*
(ii) Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αύξουσα, αριθμήσιμη οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Τότε η ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι κυρτό σύνολο.

Ορισμός 1.3. *(i) Έστω $S = \{x_1, x_2, \ldots x_m\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^n$. Ένα άθροισμα της μορφής $\sum_{k=1}^{m} t_k x_k$ όπου $t_k \geq 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, m$ και $\sum_{k=1}^{m} t_k = 1$ λέγεται* ***κυρτός συνδυασμός*** *των στοιχείων του S.*
(ii) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \varnothing$. Η ***κυρτή θήκη*** *του A συμβολίζεται με $conv(A)$ ορίζεται ως το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το A δηλαδή: $conv(A) = \bigcap\{C \supset A : C \text{ κυρτό } \}$*

Πρόταση 1.4. *(Εσωτερική περιγραφή της κυρτής θήκης) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \varnothing$. Η κυρτή θήκη $conv(A)$ ταυτίζεται με το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών από στοιχεία του A.*

Ορισμός 1.5. *Έστω A, B μη-κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.*
Το σύνολο $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\} \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται ***άθροισμα Minkowski*** *των A, B. Παρατηρούμε ότι, $A + \varnothing = \varnothing$, για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$*

Θεώρημα 1.6. *(Καραθεοδωρή) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $x \in conv(A)$. Τότε υπάρχει ένα σύνολο $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$ $(n+1)$-το πλήθος σημείων του A ώστε $x \in conv(S)$.*

Θεώρημα 1.7. *(Radon) Έστω $\{x_i\}_{i\in S} \subset \mathbb{R}^n$, όπου S ένα πεπερασμένο σύνολο με $|S| \geq n+2$. Τότε υπάρχει μια διαμέριση του S σε δύο ξένα υποσύνολα I, J ώστε*

$$conv\{x_i\}_{i\in I} \cap conv\{x_j\}_{j\in J} \neq \varnothing$$

Θεώρημα 1.8. *(Helly) Έστω $(A_i)_{i\in S}$ μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και $|S| = m \geq n+1$. Αν ισχύει $A_1 \cap \ldots \cap A_{i_{n+1}} \neq \varnothing$ για κάθε $\{i_1, \ldots, i_{n+1}\} \subset S$ τότε :*

$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \neq \varnothing$$

Η παρακάτω πρόταση είναι μια άμεση συνέπεια του θεωρήματος Καραθεοδωρή.

Πρόταση 1.9. *Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε το $conv(S)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. *Έστω $x \in conv(S)$. Τότε από το θεώρημα Καραθεοδωρή το x γράφεται ως κυρτός συνδυασμός $n+1$ σημείων του S, δηλαδή $x = \sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k$ όπου $\{x_k\}_{k=1}^{n+1} \subset S$, $t_k \geq 0$ και $\sum_{k=1}^{n+1} t_k = 1$. Θεωρούμε την απεικόνιση:*

$$S \times \ldots \times S \times \Delta \ni (x_1, \ldots, x_{n+1}, t_1, \ldots, t_{n+1}) \longmapsto f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k \in conv(S)$$

όπου παίρνουμε το S $(n+1)$ φορές και

$$\Delta = \left\{ t \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n+1} t_k = 1 \right\}$$

το κανονικό (μοναδιαίο) n-simplex που ταυτίζεται με την κυρτή θήκη των διανυσμάτων της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^{n+1}$. Το Δ είναι συμπαγές και η f είναι συνεχής και επί. Έπεται ότι το $conv(S)$ είναι συμπαγές ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου. □

Ορισμός 1.10. *(i) Έστω $S = \{x_1, x_2, \ldots x_m\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^n$. Ένα άθροισμα της μορφής $\sum_{k=1}^{m} t_k x_k$ όπου $t_k \in \mathbb{R}$ και $\sum_{k=1}^{m} t_k = 1$ λέγεται **αφινικός συνδυασμός** των στοιχείων του S.*
*(ii) Ένα υποσύνολο H του $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει κάθε ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία του H λέγεται **αφινικός υπόχωρος**. Συγκεκριμένα, αν $x_1, x_2 \in H$ και $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $t_1 + t_2 = 1$, τότε $t_1 x_1 + t_2 x_2 \in H$.*

Κατ΄ αναλογία με τις έννοιες της κυρτής και της γραμμικής θήκης ενός συνόλου ορίζεται η αφινική θήκη ενός υποσυνόλου S του $\mathbb{R}^n$, η οποία συμβολίζεται με $\mathrm{aff}(S)$ και είναι ο μικρότερος αφινικός υπόχωρος που περιέχει το σύνολο S. Από τους παραπάνω ορισμούς παρατηρούμε ότι ένας γραμμικός υπόχωρος είναι εξ ορισμού αφινικός υπόχωρος. Από την άλλη ένας αφινικός υπόχωρος δεν είναι εν γένει γραμμικός υπόχωρος καθώς δεν περιέχει κατ΄ ανάγκη το 0. Αποδεικνύεται όμως άμεσα ότι ένας αφινικός υπόχωρος που περιέχει το 0 είναι γραμμικός υπόχωρος.
Η παρακάτω πρόταση αποσαφηνίζει τη σύνδεση μεταξύ γραμμικών και αφινικών υποχώρων και αποκαλύπτει τη γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών αυτών, την οποία θα περιγράψουμε παρακάτω.

Πρόταση 1.11. *Έστω S ένα μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει μοναδικός υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ ώστε $\mathit{aff}(S) = x + F$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$.*

Η προηγούμενη πρόταση μας επιτρέπει να ορίσουμε την **αφινική διάσταση** ενός συνόλου S (ή αφινικού υποχώρου) με $\mathrm{aff}(S) = x + F$ ως τη διάσταση $dimF$ του μοναδικού γραμμικού υποχώρου F.

Πρόταση 1.12. *Ένα μη-κενό υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$ έχει αφινική διάσταση $m \leq n$ αν και μόνο αν για κάθε $k \leq m+1$ υπάρχουν $x_0, x_1, \ldots, x_k \in S$ ώστε τα $x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ λέγονται και* ***αφινικά ανεξάρτητα****.*

Έπεται άμεσα ότι το μέγιστο πλήθος αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που μπορούμε να έχουμε στον $\mathbb{R}^n$ είναι $n+1$.

Παρατήρηση: Έστω K ένα κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η συνθήκη $intK \neq \varnothing$ μας εξασφαλίζει ότι το K έχει αφινική διάσταση n.
Όπως είναι γνωστό από τη Συναρτησιακή Ανάλυση, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των υποχώρων συνδιάστασης-1 ενός γραμμικού χώρου και των υπερεπιπέδων που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Επιπλέον καθε τέτοιος υπόχωρος είναι πυρήνας ενός γραμμικού συναρτησιακού και όταν ο χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης έπεται ότι ο υπόχωρος αυτός είναι κλειστός. Επομένως, από την πρόταση (1.11) προκύπτει ότι οι αφινικοί υπόχωροι συνδιάστασης-1 αντιστοιχούν σε παράλληλες μετατοπίσεις υπερεπιπέδων που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, γενικεύοντας έτσι την έννοια του γραμμικού υποχώρου. Επεται λοιπόν φυσιολογικά ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 1.13. *Ένας αφινικός υπόχωρος $H \subset \mathbb{R}^n$ με $dimH = n-1$ λέγεται* ***υπερεπίπεδο*** *στον $\mathbb{R}^n$.*

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω σχόλια, ένα υπερεπίπεδο H στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$ όπου $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησιακό και $c \in \mathbb{R}^n$. Το H ορίζει τους κλειστούς ημιχώρους

$$H^+ = \{f \geq c\} \quad H^- = \{f \leq c\}$$

Θεωρούμε τώρα τον $\mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ για $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Πρόταση 1.14. *Έστω H ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε το H ταυτίζεται με ένα σύνολο της μορφής*

$$H = H_{x_0,y} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle y, x - x_0\rangle = 0\} = x_0 + y^{\perp}$$

για κάποια $x_0, y \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. *Έστω $H = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$ ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz κάθε γραμμικό συναρτησιακό $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γράφεται ως $f = \langle y, .\rangle$ για κάποιο $y \in \mathbb{R}^n$ και επιπλέον τα γραμμικά συναρτησιακά είναι επί, άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ώστε $f(x_0) = \langle y, x_0\rangle$. Από τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου έπεται το ζητούμενο.* □

Όπως είναι φανερό από την προηγούμενη πρόταση συμβολίζουμε με $H_{x,y}$ το υπερεπίπεδο που διέρχεται από το διάνυσμα x και είναι κάθετο στο διάνυσμα y.

Ορισμός 1.15. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ μη-κενό. Ένα υπερεπίπεδο H λέγεται* ***υπερεπίπεδο στήριξης*** *του A αν το A περιέχεται σε έναν από τους κλειστούς ημιχώρους H^+, H^- και επιπλέον $H \cap A \neq \varnothing$.*

Στο εξής, όπου δε διευκρινίζεται περεταίρω, υϊοθετείται η σύμβαση ότι $A \subset H^-$. Τετριμμένα, ένα υπερεπίπεδο H στον $\mathbb{R}^n$ είναι υπερεπίπεδο στήριξης για κάθε μη-κενό υποσύνολο του H.

Η παρακάτω πρόταση εξασφαλίζει ότι για ένα κυρτό, κλειστό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ και κάθε σημείο εκτός του K, υπάρχει μοναδικό σημείο y του K που «πετυχαίνει» την ελάχιστη (ευκλείδεια) απόσταση. Σημειώνεται ότι η ύπαρξη του y οφείλεται στην κλειστότητα ενώ η μοναδικότητα οφείλεται στην κυρτότητα του K. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύται για κλειστά, κυρτά υποσύνολα ενός χώρου Hilbert.

Πρόταση 1.16. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και $x \notin K$. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in K$ τετοιο ώστε $d(x, K) = \inf\{\|x - z\|_2 : z \in K\} = \|x - y\|_2$. Το y ονομάζεται* ***μετρική προβολή*** *του x στο K και συμβολίζεται με $P_K(x)$.*

Πρόταση 1.17. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό και κυρτό. Τότε για κάθε $x \notin K$, το υπερεπίπεδο που διέρχεται από το $P_K(x)$ και είναι κάθετο στο $x - P_K(x)$ είναι ένα υπερεπίπεδο στήριξης του K.*

Απόδειξη. *Έστω $x \notin K$. Θα δείξουμε ότι το υπερεπίπεδο $H = H_{P_K(x),u}$ όπου $u = x - P_K(x)$ είναι υπερεπίπεδο στήριξης του K. Αρχικά, παρατηρούμε ότι $P_K(x) \in H \cap K$ επομένως αρκεί να αποδειχτεί ότι το K περιέχεται σε εναν από τους δύο ημιχώρους H^+, H^-.*
Το $x \notin H$ (εφόσον $\langle u, u\rangle = \|u\| \neq 0$), επομένως υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο ημίχωρος $H^- = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u\rangle \leq \langle P_K(x), u\rangle\}$ δεν περιέχει το x. Τότε $K \subset H^-$.
Πράγματι, έστω προς εις άτοπον απαγωγή ότι υπάρχει $z \in K \cap (\mathbb{R}^n \setminus H^-)$. Τότε $\langle P_K(x), u\rangle < \langle z, u\rangle$ ή ισοδύναμα, $\langle P_K(x) - z, P_K(x) - x\rangle > 0$. Τότε έπεται ότι για $\epsilon \in (0, 1)$: $\|x - P_K(x) - \epsilon(P_K(x) - z)\|_2^2 =$

$$\|x - P_K(x)\|_2^2 + \epsilon^2\|z - P_K(x)\|_2^2 - 2\epsilon\langle P_K(x) - z, P_K(x) - x\rangle < \|x - P_K(x)\|_2^2$$

το οποίο είναι άτοπο εξ ορισμού της μετρικής προβολής. □

Η μετρική προβολή $P_K : \mathbb{R}^n \setminus K \to \partial K$ είναι επί, άρα για κάθε $y \in \partial K$ υπάρχει $x \notin K$ ώστε $P_K(x) = y$. Από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει ένα υπερεπίπεδο στήριξης H_y το οποίο διέρχεται από το y. Θεωρώντας ένα σημείο $z \in K$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα $\{(1 - t)z + ty : t \in [0, 1]\}$ περιέχεται στο K επομένως το z περιέχεται στον κλειστό ημίχωρο H_y^-. Έχουμε αποδείξει λοιπόν το επόμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 1.17.1. *Έστω $\varnothing \neq K \subsetneq \mathbb{R}^n$ κλειστό και κυρτό. Τότε*

$$K = \bigcap_{x \in \partial K} H_x^- \tag{1.1}$$

Πρόταση 1.18. *Έστω $\varnothing \neq K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές, κυρτό. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει υπερεπίπεδο στήριξης H του K το οποίο είναι κάθετο στο x.*

Απόδειξη. *Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $K \ni y \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής. Από τη συμπάγεια του K έπεται ότι υπάρχει $y_0 \in K$ ώστε*

$$\langle x, y_0\rangle = \max_{y \in K}\langle x, y\rangle$$

Τότε το υπερεπίπεδο $H_{y_0,x} = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \langle x, y_0\rangle\}$ είναι ένα υπερεπίπεδο στήριξης του K που διέρχεται από το y_0 και είναι κάθετο στο x. □

Έστω $K \neq \varnothing$ ένα συμπαγές, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in K$. Θεωρούμε ένα $u \in S^{n-1}$. Από την πρόταση (1.18), υπάρχει υπερεπίπεδο $H_{x_0,u}$ που στηρίζει το K και έχει ως μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το u. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε μια συνάρτηση που απεικονίζει το u στην απόσταση $d = \langle x_0, u\rangle$ του υπερεπιπέδου $H_{x_0,u}$ από την αρχή των αξόνων. Σημειώνεται επίσης ότι το d ισούται και με το μέγιστο μέτρο που μπορεί να έχει η προβολή ενός σημείου του K στη διεύθυνση του u. Η απεικόνιση ορίζεται γενικότερα στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής:

Ορισμός 1.19. *Έστω $K \neq \varnothing$ ένα συμπαγές, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με:*

$$h_K(x) = \max_{y \in K} \langle y, x \rangle \ , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ονομάζεται ***συνάρτηση στήριξης*** *του K.*

Στην επόμενη πρόταση περιγράφονται κάποιες βασικές ιδιότητες της συνάρτησης στήριξης.

Πρόταση 1.20. *Έστω $K \neq \varnothing$ συμπαγές, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση h_K είναι θετικά ομογενής, υπογραμμική, κυρτή και συνεχής.*

Απόδειξη. *Η συνέχεια της h_K είναι άμεση από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου. Επίσης είναι προφανές, από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, ότι για $t \geq 0$*

$$h_K(tx) = \max_{y \in K} \langle y, tx \rangle = \max_{y \in K} t \langle y, x \rangle = t h_K(x)$$

επομένως η h_K είναι θετικά ομογενής.
Έστω τώρα $x, y \in \mathbb{R}^n$. Τότε:

$$h_K(x+y) = \max_{z \in K} \langle z, x+y \rangle = \max_{z \in K} \{ \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle \} \leq h_K(x) + h_K(y)$$

επομένως η h_K είναι υπογραμμική.
Τέλος, από την υπογραμμικότητα και την ομογένεια της h_K έπεται άμεσα η κυρτότητα, καθώς για $t \in [0,1]$:

$$h_K((1-t)x + ty) \leq h_K((1-t)x) + h_K(ty) = (1-t)h_K(x) + t h_K(y)$$

□

Η επόμενη πρόταση επιβεβαιώνει ότι η συνάρτηση στήριξης χαρακτηρίζει πλήρως ένα κυρτό, συμπαγές σύνολο, καθώς σέβεται το άθροισμα Minkowski και τη διάταξη με την έννοια του εγκλεισμού.

Πρόταση 1.21. *Έστω $K, L \neq \varnothing$ συμπαγή, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.*
(i) $K \subset L$ αν και μόνο αν $h_K \leq h_L$.
(ii) $h_{tK+sL} = t h_K + s h_L$ για κάθε $t, s \geq 0$.
(iii) $h_{-K}(u) = h_K(-u)$.

Απόδειξη. *(i) Το ευθύ είναι προφανές (από τον ορισμό της συνάρτησης στήριξης) επομένως αρκεί να δείξουμε το αντίστροφο. Έστω λοιπόν ότι $h_K \leq h_L$ και προς εις άτοπον απαγωγή υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in K \cap (\mathbb{R}^n \setminus L)$. Τότε,* *από την πρόταση (1.17) υπάρχει ένα υπερεπίπεδο H που στηρίζει το L στο $P_L(x)$ και είναι κάθετο σε ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^n$ και διαχωρίζει το x από το L. Συγκεκριμένα:*

$$h_L(y) < \langle x, y \rangle \leq h_K(y)$$

το οποίο είναι άτοπο.
(ii) Από τον ορισμό της συνάρτησης έχουμε

$$\begin{aligned} h_{tK+sL}(x) = \max_{u \in tK+sL} \langle u, x \rangle &= \max_{y \in K, z \in L} \langle ty + sz, x \rangle \\ &= t \max_{y \in K} \langle y, x \rangle + s \max_{z \in L} \langle z, x \rangle \\ &= t h_K(x) + s h_L(x) \end{aligned}$$

(iii) Προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

□

Πόρισμα 1.21.1. *Έστω $K_1, K_2, L \neq \varnothing$ συμπαγή, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.*
(i) $K_1 = K_2$ αν και μόνο αν $h_{K_1} = h_{K_2}$.
(ii) Αν $K_1 + L = K_2 + L$ τότε $K_1 = K_2$.
(iii) $h_L \geq 0$ αν και μόνο αν $0 \in L$.
(iv) Αν το L είναι συμμετρικό τότε $h_L(-x) = h_L(x)$.

Ορισμός 1.22. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό με $0 \in int(K)$. Η απεικόνιση $\rho_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με*

$$\rho_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$$

ονομάζεται ***συναρτησιακό Minkowski*** *του K*

Η συνθήκη $0 \in int(K)$ εξασφαλίζει ότι το συναρτησιακό Minkowski ρ_K είναι καλά ορισμένο. Πράγματι, η απεικόνιση $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) = tx \in \mathbb{R}^n$, για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$, είναι συνεχής, άρα το $f^{-1}(int(K))$ είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το $0_{\mathbb{R}}$ (εφόσον $f(0_{\mathbb{R}}) = 0 \in int(K)$. Έπεται ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα $(-\epsilon, \epsilon) \subset f^{-1}(int(K))$, άρα $\frac{\epsilon}{2}x \in int(K)$. Τελικά, $x \in \frac{2}{\epsilon}K$, δηλαδή το σύνολο $\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$ είναι μη-κενό. Από τον ορισμό έπεται επίσης ότι $\rho_K \geq 0$.

Πρόταση 1.23. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό με $0 \in int(K)$. Τότε η απεικόνιση ρ_K είναι θετική, θετικά ομογενής, υπογραμμική, κυρτή και συνεχής.*

Απόδειξη. *Εξ ορισμού έπεται ότι $\rho_K(x) \geq 0$ για κάθε x. Η ομογένεια της ρ_K προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες του infimum. Αποδεικνύουμε την υπογραμμικότητα. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $s, t > 0$ ώστε $s \geq \rho_K(x), t \geq \rho_K(y)$. Τότε εξ ορισμού προκύπτει ότι $x \in sK, y \in tK$ και εφόσον το K είναι κυρτό έπεται ότι*

$$\frac{s}{s+t} \cdot \frac{x}{s} + \frac{t}{s+t} \cdot \frac{y}{t} = \frac{x+y}{s+t} \in K$$

άρα $\rho_K(x+y) \leq s+t$. *Εφόσον τα* s,t *είναι αυθαίρετα έπεται ότι*

$$\rho_K(x+y) \leq \rho_K(x) + \rho_K(y)$$

Αποδεικνύουμε τώρα τη συνέχεια. Αρχικά θα δειχθεί ότι το ρ_K *είναι συνεχές στο* $0_{\mathbb{R}^n}$. *Έστω* $U \subset \mathbb{R}$ *μια ανοικτή περιοχή του* 0, *επομένως υπάρχει* $\epsilon > 0$ *ώστε* $(-\epsilon, \epsilon) \subset U$. *Από τον ορισμό έπεται ότι* $\rho_K(x) < 1$ *για* $x \in int(K)$, *ενώ από τη θετική ομογένεια του* ρ_K *έχουμε ότι* $\rho_K(\epsilon x) < \epsilon$. *Θέτοντας* $V = \epsilon \cdot int(K)$ *(το οποίο είναι μια ανοικτή περιοχή του* $0_{\mathbb{R}^n}$*) έπεται ότι* $\rho_K(V) \subset (0, \epsilon) \subset U$ *επομένως το* ρ_K *είναι συνεχές στο* $0_{\mathbb{R}^n}$.
Έστω τώρα $x, y \in \mathbb{R}^n$ *και* $\epsilon > 0$. *Από την υπογραμμικότητα του* ρ_K *έπεται ότι* $\rho_K(x) = \rho_K((x-y)+y) \leq \rho_K(x-y) + \rho_K(y)$ *άρα* $\rho_K(x-y) \geq \rho_K(x) - \rho_K(y)$. *Με παρόμοιο τρόπο έχουμε και ότι* $-\rho_K(y-x) \leq \rho_K(x) - \rho_K(y)$. *Επομένως:*

$$|\rho_K(x) - \rho_K(y)| \leq \max\{\rho_K(y-x), \rho_K(x-y)\}$$

Από τη συνέχεια στο $0_{\mathbb{R}^n}$, *έπεται ότι υπάρχει ανοικτή περιοχή* V *του* $0_{\mathbb{R}^n}$ *ώστε* $\rho_K(x-y) < \epsilon$ *επομένως θέτοντας* $A = -V \cap V \subset V$ *(το οποίο είναι μια ανοικτή και συμμετρική περιοχή του* $0_{\mathbb{R}^n}$*) έχουμε ότι για κάθε* $y \in x + A$ *ισχύει* $|\rho_K(x) - \rho_K(y)| < \epsilon$. *Άρα το* ρ_K *είναι συνεχές στο* x *και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.*
Τέλος, σημειώνεται ότι η κυρτότητα του ρ_K *έπεται άμεσα από την υπογραμμικότητα και την ομογένεια.* □

Πρόταση 1.24. *Έστω* $K \subset \mathbb{R}^n$ *κυρτό, κλειστό με* $0 \in int(K)$. *Τότε*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho_K(x) \leq 1\}$$

Κλείνουμε το κομμάτι αυτό με τον ορισμό της έννοιας του κυρτού σώματος.

Ορισμός 1.25. *(i) Ένα κυρτό, συμπαγές υποσύνολο* K *του* $\mathbb{R}^n$ *με μη-κενό εσωτερικό λέγεται* ***κυρτό σώμα***.
(ii) Ένα μη-κενό σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ *λέγεται* ***συμμετρικό*** *ως προς το* $x \in \mathbb{R}^n$ *αν και μόνο αν για κάθε* $y \in K$ *το* $x - y \in K$. *Αν το* K *είναι συμμετρικό ως προς το* 0 *τότε λέγεται* ***κεντρικά συμμετρικό***.

Από τον ορισμό έπεται άμεσα ότι ένα κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα K περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Παρακάτω ορίζονται τρεις θεμελιώδεις κλάσεις κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$ οι οποίες είναι βασικές για τη μελέτη των κυρτών σωμάτων.

Ορισμός 1.26. *(i) Η τομή πεπερασμένων το πλήθος κλειστών ημιχώρων του* $\mathbb{R}^n$ *ονομάζεται* ***πολύεδρο***.
(ii) Η κυρτή θήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων του $\mathbb{R}^n$ *ονομάζεται* ***πολύτοπο***.
(iii) Έστω $r \leq n$. *Η κυρτή θήκη* $r+1$ *αφινικά ανεξάρτητων σημείων του* $\mathbb{R}^n$ *ονομάζεται* ***r-simplex***. *Ένα n-simplex θα αναφέρεται και ως* ***simplex***.

1.2 Υπερεπίπεδα και Όγκος

Έστω δύο μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τα οποία περιέχονται σε μία λωρίδα μεταξύ δύο παράλληλων υπερεπιπέδων. Αν κάθε παραλληλεπίπεδο, παράλληλο προς τα δύο, τέμνει τα σύνολα σε τομές ίσης «επιφάνειας», τότε τα σύνολα έχουν ίσο «όγκο». Αυτό το διαισθητικά αντιληπτό αποτέλεσμα είναι γνωστό ως Αρχή του Cavalieri και θεμελιώνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.27. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και $H(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = t\}, t \in \mathbb{R}$ και $k \in \{1, \ldots, n\}$. Τότε:*

$$\lambda_n(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(A \cap H(t))\, dt \tag{1.2}$$

Απόδειξη. *Η πρόταση είναι μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος Fubini. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το A είναι φραγμένο και περιέχεται στη λωρίδα $\{a \leq x_n \leq b\} \subset \mathbb{R}^n$. Η απόδειξη στην περίπτωση που το A δεν είναι φραγμένο είναι παρόμοια. Θεωρούμε για $t \in \mathbb{R}$ το υπερεπίπεδο $H(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}$, το οποίο είναι παράλληλο στον άξονα Ox_n. Η τομή $S_t = A \cap H(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,t) \in A\}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (συγκεκριμένα $\lambda_n(S_t) = 0$) επομένως η χαρακτηριστική $\chi_{S_t} : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τώρα τον $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ ως χώρο γινόμενο με το μέτρο γινόμενο $d\lambda_n = d\lambda_{n-1} \times dt$, όπου dt το μετρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$ και τη σ-αλγεβρα $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.*
Τότε η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ με $f(x,t) = \chi_{S_t}(x)$ είναι μη-αρνητική και

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = 0$$

Από το Θεώρημα Fubini-Tonelli έπεται ότι:

$$\begin{aligned}
\lambda_n(A) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{S_t}(y) \chi_{[a,b]}(t) dt\, d\lambda_{n-1}(y) = \\
&= \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A \cap H(t)}(y) d\lambda_{n-1}(y) dt = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(A \cap H(t)) dt
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 1.27.1. *(Αρχή του Cavalieri) Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένα, μετρήσιμα σύνολα και $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Έστω ακόμη ότι τα A, B περιέχονται στη λωρίδα $\{a \leq x_k \leq b\}$ και $H(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = t\}$ για $t \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Αν $\lambda_{n-1}(A \cap H(t)) = \lambda_{n-1}(B \cap H(t))$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda_n(A) = \lambda_n(B)$.*

Πόρισμα 1.27.2. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο σύνολο και $u \in S^{n-1}$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε με A_t την τομή του A με το υπερεπίπεδο*

$$H(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = t\}$$

Τότε

$$\lambda_n(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(A_t) dt$$

Απόδειξη. *Έστω $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ η συνήθης, ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ώστε $T(u) = e_n$. Ο T απεικονίζει τη βάση B στην ορθοκανονική βάση $T[B]$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση και τις ιδιότητες του μέτρου Lebesgue έπεται ότι*

$$\begin{aligned}
\lambda_n(A) = |det(T)|\lambda_n(A) &= \lambda_n(T[A]) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}\big(T[A] \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}\big) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(T[A_t]) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(A_t) dt
\end{aligned}$$

□

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας επιτρέπουν να βρούμε τύπους για τον όγκο ενός μεγάλου εύρους κυρτών συνόλων. Ως εφαρμογή αυτών, θα υπολογίσουμε τον όγκο ενός κυρτού πολυτόπου.

Ορισμός 1.28. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ένα κυρτό, φραγμένο σύνολο το οποίο περιέχεται σε ένα υπερεπίπεδο $H \subset \mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n \setminus H$. Τότε το σύνολο $C = conv\{x, A\} \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται* ***κώνος*** *με βάση το A και κορυφή το x.*

Θεωρούμε ένα κώνο C στον $\mathbb{R}^n$ με βάση $A \neq \varnothing$ και κορυφή $p \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το A περιέχεται στο υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = c\}$, όπου $u \in S^{n-1}$ και $c \in \mathbb{R}$. Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση: $c < \langle p, u \rangle$ (για την άλλη περίπτωση θεωρούμε τον κώνο με κορυφή $-p$).
Από τον ορισμό του C έχουμε

$$C = \big\{\lambda p + (1 - \lambda)x : x \in A, \lambda \in [0, 1]\big\}$$

και για $c \leq t \leq \langle p, u \rangle$ το υπερεπίπεδο $H(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = t\}$ τέμνει τον C στο σύνολο $\lambda p + (1 - \lambda)A$ με

$$\lambda = \frac{t - c}{\langle p, u \rangle - c}$$

Από το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue στις μεταφορές έπεται επίσης ότι

$$\lambda_{n-1}\big(\lambda p+(1-\lambda)A\big)=\lambda_{n-1}\big((1-\lambda)A\big)=(1-\lambda)^{n-1}\lambda_{n-1}(A)$$

Επομένως από το Πόρισμα (1.28.2) έχουμε ότι

$$\lambda_n(C)=\int_{\mathbb{R}}\lambda_{n-1}(C_t)dt=\int_c^{\langle p,u\rangle}\left(\frac{\langle p,u\rangle-t}{\langle p,u\rangle-c}\right)^{n-1}\lambda_{n-1}(A)\,dt$$

$$=\frac{1}{\big(\langle p,u\rangle-c\big)^{n-1}}\,\lambda_{n-1}(A)\,\frac{1}{n}\big(\langle p,u\rangle-c\big)^n$$

$$=\frac{1}{n}\big(\langle p,u\rangle-c\big)\lambda_{n-1}(A)$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις $c<\langle p,u\rangle$ και $c>\langle p,u\rangle$ καταλήγουμε ότι

$$\lambda_n(C)=\frac{1}{n}\big|\langle p,u\rangle-c\big|\lambda_{n-1}(A)$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι $c=\langle x_0,u\rangle$ για κάποιο $x_0\in H\cap A$. Έτσι, αν ο κύλινδρος C έχει για κορυφή το σημείο $p=0$ έχουμε

$$\lambda_n(C)=\frac{1}{n}\big|\langle p,u\rangle-c\big|\lambda_{n-1}(A)=\frac{1}{n}\langle x_0,u\rangle\lambda_{n-1}(A)=\frac{1}{n}h_C(u)\lambda_{n-1}(A)\quad(1.3)$$

το οποίο είναι μια γενίκευση του γνωστού τύπου $V=\frac{1}{3}\times$(εμβαδόν βάσης)$\times$(ύψος) για τον όγκο ενός κώνου στον $\mathbb{R}^3$.

Πρόταση 1.29. *Έστω $P\subset\mathbb{R}^n$ ένα πολύτοπο με μη-κενό εσωτερικό και $F_0,F_1,\dots,F_m$ οι $(n-1)$-διάστατες έδρες του P. Αν $u_0,u_1,\dots,u_m\in S^{n-1}$ τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα των $F_0,F_1,\dots,F_m$ τότε,*

$$\lambda_n(P)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^m h_P(u_i)\lambda_{n-1}(F_i)$$

Απόδειξη. *Υποθέτουμε αρχικά ότι το 0 ανήκει στο εσωτερικό του P. Για $i=1,\dots,m$ θεωρούμε τους κώνους $C_i=conv\{0,F_i\}$. Τότε,*

$$P=\bigcup_{i=0}^m C_i$$

και για $i \neq j$, η τομή $C_i \cap C_j = conv\{0, F_i \cap F_j\}$ έχει αφινική διάσταση το πολύ $n-1$ επομένως $\lambda_n(C_i \cap C_j) = 0$. Από την (1.3) έπεται ότι

$$\lambda_n(P) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_n(C_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{m} h_{C_i}(u_i)\lambda_{n-1}(F_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{m} h_P(u_i)\lambda_{n-1}(F_i)$$

Το μόνο που μένει είναι να δειχθεί οτι ο παραπάνω τύπος για τον όγκο είναι πράγματι αναλλοίωτος στι μετατοπίσεις. Θέτουμε λοιπόν $v = \sum_{i=0}^{m} \lambda_{n-1}(F_i)u_i = 0$ και θεωρούμε μια κατάλληλη μετατόπιση του P τέτοια ώστε το 0 να εξακολουθεί να ανήκει στο εσωτερικό του. Συγκεκριμένα θεωρούμε $\epsilon > 0$ ώστε το 0 να ανήκει στο εσωτερικό του $P + \epsilon v$. Τότε, από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\begin{aligned} n\lambda_n(P) &= n\lambda_n(P + \epsilon v) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \big(h_P(u_i) + \epsilon\langle v, u_i\rangle\big)\lambda_{n-1}(F_i + \epsilon v) \\ &= n\lambda_n(P) + \epsilon\|v\|_2^2 \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι $v = 0$. Το διάνυσμα v είναι αναλλοίωτο στις μετατοπίσεις του P και όπως είδαμε, είναι μηδενικό αν $0 \in int(P + y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Επομένως αν υποθέσουμε ότι $0 \notin int(P)$ και θεωρήσουμε $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $0 \in int(P + y)$ συμπεραίνουμε τελικά ότι $\lambda_n(P + y) = \lambda_n(P)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

1.3 Δυϊσμός και Πολικό Σώμα

Η Αρχή του Δυϊσμού στη Γεωμετρία αποτελεί ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό των προβολικών επιπέδων το οποίο παρατηρήθηκε για πρώτη φορά από τον Joseph Diaz Gergonne και μελετήθηκε εκτενώς από τους Jean-Victor Poncelet και Julius Plücker, μεταξύ άλλων. Στον τελευταίο δε, αποδίδεται η επέκταση των εννοιών του δυϊσμού και της πολικότητας σε προβολικούς χώρους τριών και περισσότερων διαστάσεων. Η Αρχή του Δυϊσμού στο επίπεδο σχετίζεται με τη συμμετρία που παρατηρείται μεταξύ των εννοιών του σημείου και της ευθείας σε ορισμούς και προτάσεις της προβολικής γεωμετρίας.
Συγκεκριμένα, μια αληθής πρόταση P που αφορά σημεία και ευθείες του προβολικού επιπέδου παραμένει αληθής αν αντικαταστήσουμε τις λέξεις «σημείο» και «ευθεία» με τις λέξεις «ευθεία» και «σημείο» αντίστοιχα. Η πρόταση που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο καλείται δυϊκή πρόταση και συμβολίζεται με P^*. Για παράδειγμα, θεωρούμε την πρόταση P : «Δύο ευθείες οι οποίες δεν ταυτίζονται, τέμνονται σε μοναδικό σημείο» και τη δυϊκή της πρόταση P^* : « Δύο σημεία τα οποία δεν ταυτίζονται, ανήκουν σε μοναδική ευθεία».
Επεκτείνοντας την Αρχή του Δυϊσμού στο χώρο, η δυϊκή μιας πρότασης P προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις λέξεις «σημείο», «ευθεία» και «επίπεδο» με τις λέξεις «επίπεδο», «ευθεία» και «σημείο» αντίστοιχα. Γενικά, σε έναν προβολικό χώρο διάστασης n, ένας δυϊσμός π εκφράζει μια αντιμετάθεση μεταξύ γνήσιων υποχώρων διάστασης d με υπόχωρους συνδιάστασης $d+1$ του αντίστοιχου διανυσματικού χώρου, η οποία αντιστρέφει τον εγκλεισμό (δηλαδή, αν X, Y υπόχωροι με $X \subset Y$ έπεται ότι $\pi(Y) \subset \pi(X)$). Έτσι τα σημεία αντιστοιχίζονται σε υπερεπίπεδα, οι ευθείες σε τομές υπερεπιπέδων και ούτω καθ' εξής.

Θεωρούμε τώρα ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από ένα σώμα K, με $\dim V = n$. Ο προβολικός χώρος του V, ο οποίος συμβολίζεται με $PV(n, K)$ ορίζεται με έναν από τους παρακάτω ισοδύναμους ορισμούς:

- Ως το σύνολο όλων των ευθειών ℓ του $\mathbb{R}^{n+1}$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Συγκεκριμένα, ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στον $\mathbb{R}^{n+1}$ ώστε $x \sim y$ αν και μόνο αν $y = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, ο προβολικός χώρος $PV(n, K)$ ορίζεται ως το σύνολο $\mathbb{R}^{n+1}_{/\sim}$ των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$

- Ταυτίζοντας τα αντιδιαμετρικά σημεία της μοναδιαίας σφαίρας S^n. Συγκεκριμένα, ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στην S^n ώστε $u_1 \sim u_2$ αν και μόνο αν $u_1 = -u_2$. Τότε, ο προβολικός χώρος $PV(n, K)$ ορίζεται ως το σύνολο $S^n_{/\sim}$ των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$.

Οι παραπάνω ισοδύναμες κατασκευές του προβολικού χώρου μας επιτρέπουν να μιλήσουμε για το δυϊσμό μεταξύ σημείων και γραμμικών υποχώρων διάστασης

$n-1$ και το δυϊσμό μεταξύ σημείων και αφινικών υποχώρων διάστασης $n-1$ αντίστοιχα. Ο δυϊσμός στον $PV(n,K)$ επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής:
Αντιστοιχίζουμε μια ευθεία $\ell=[x]_\sim \in PV(n,K)$, που διέρχεται από το 0, στο μοναδικό υπερεπίπεδο το οποίο είναι κάθετο στην ℓ μέσω της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης:

$$PV(n,K) \ni \ell \longmapsto \pi\big(\ell\big) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x,u\rangle = 0,\ \forall u \in \ell\} = \ell^{\perp} \subset PV(n,K)$$

Η απεικόνιση αυτή εκφράζει το δυϊσμό μεταξύ σημείων και γραμμικών υποχώρων διάστασης $n-1$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης είναι κλειστοί παρατηρούμε ότι $\pi(\pi(\ell)) = \ell^{\perp\perp} = \ell$ για κάθε $\ell \in PV(n,K)$. Μια τέτοια απεικόνιση λέγεται **ενέλιξη**.
Έστω τώρα ένα σημείο $u \in S^n$. Αντιστοιχίζουμε το u στο (μοναδικό) εφαπτόμενο υπερεπίπεδο της S^n στο u. Ταυτίζοντας το u με το αντιδιαμετρικό του σημείο $-u$ θεωρούμε την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση:

$$PV(n,K) \ni x = [u]_\sim \longmapsto x^\circ = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle y,x\rangle = 1\} \subset PV(n,K)$$

Επεκτείνοντας την απεικόνιση, αντιστοιχίζουμε κάθε σημείο $0 \neq z \notin S^n$ στο υπερεπίπεδο z° που είναι κάθετο στο z και διέρχεται από το διάνυσμα $z/\|z\|_2^2$. Η αντιστοίχιση αυτή εκφράζει το δυϊσμό μεταξύ σημείων και αφινικών υποχώρων διάστασης $n-1$.
Ο δυϊσμός αυτός λέγεται **πολικότητα** ως προς τη μοναδιαία σφαίρα, το υπερεπίπεδο z° λέγεται **πολικό υπερεπίπεδο** του z, ενώ το z λέγεται **πόλος** του z°. Παρατηρούμε ότι αν $\|z\|_2 < 1$ τότε το πολικό υπερεπίπεδο z° δεν τέμνει την S^n ενώ αν $\|z\|_2 > 1$, το z° τέμνει την S^n σε δύο ξένα σύνολα.

Είναι πλέον εμφανές ότι η σχέση (1.1) δίνει μια εξωτερική περιγραφή του συνόλου που αντικατοπτρίζει την Αρχή του Δυϊσμού και συνοψίζεται τελικά στις εξής προτάσεις:
1) Ένα κυρτό, κλειστό σύνολο εκφράζεται ως *ένωση* των *σημείων* που το αποτελούν
2) Ένα κυρτό, κλειστό σύνολο εκφράζεται ως *τομή* των ημιχώρων που ορίζονται απο τα *υπερεπίπεδα* που το στηρίζουν. Έχοντας υπόψιν τη σχέση (1.1) προκύπτει πλέον φυσιολογικά ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 1.30. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σώμα. Η τομή των ημιχώρων που οριζονται από τα πολικά υπερεπίπεδα των σημείων του ∂K ορίζει ένα σύνολο K° το οποίο ονομάζεται **πολικό** του K. Ισοδύναμα:*

$$K^\circ = \bigcap_{x \in \partial K} (x^\circ)^-$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης στήριξης του K έπεται άμεσα ότι:

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : h_K(x) \leq 1\}$$

Πρόταση 1.31. *Έστω $K, L \subset \mathbb{R}^n$ κυρτά σώματα. Τότε:*
(i) Το K° είναι κυρτό σώμα
(ii) $(K^\circ)^\circ = K$
(iii) $K \subset L$ αν και μόνο αν $L^\circ \subset K^\circ$

Απόδειξη. *(i) Από τον ορισμό της h_K έπεται άμεσα ότι το K° είναι κυρτό. Έστω $(x_m)_m \subset K^\circ$ και $x \in \mathbb{R}^n$ με $x_m \to x$. Τότε $h_K(x_m) \leq 1$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και από τη συνέχεια της h_K έπεται ότι $h_K(x) \leq 1$, επομένως $x \in K^\circ$. Άρα το K° είναι κλειστό.*
Εφόσον $0 \in int(K)$, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $B_2(0, \epsilon) \subset K$. Αν $y \in K^\circ \setminus \{0\}$, έχουμε ότι $\epsilon y / \|y\|_2 \in B_2(0, \epsilon) \subset K$. Άρα:

$$\left\langle y, \frac{\epsilon y}{\|y\|_2} \right\rangle \leq 1$$

από όπου έπεται ότι $\|y\|_2 \leq 1/\epsilon$ για κάθε $y \in K^\circ$, επομένως το K° είναι φραγμένο.
Μένει να δειχτεί ότι $0 \in int(K^\circ)$. Εξ ορισμού $0 \in K^\circ$. Το K είναι φραγμένο, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $K \subset B_2(0, M)$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι για $x \in K$ και $y \in K^\circ$ με $\|y\|_2 \leq 1/M$,

$$\langle y, x \rangle \leq \|y\|_2 \|x\|_2 \leq \frac{1}{M} M = 1$$

άρα $B_2(0, 1/M) \subset K^\circ$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.
(ii) Έστω $x \in K$. Τότε, $\langle x, y \rangle \leq 1$ για κάθε $y \in K^\circ$ επομένως $x \in (K^\circ)^\circ$. Από την άλλη, υποθέτουμε προς εις άτοπον απαγωγή ότι υπάρχει $x \in (K^\circ)^\circ$ ώστε $x \notin K$. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο H το οποίο διαχωρίζει το K από το x, επομένως υπάρχει $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ώστε $\langle y, z \rangle \leq 1 < \langle z, x \rangle$ για κάθε $y \in K$. Από την αριστερή ανισότητα έπεται ότι $z \in K^\circ$ επομένως από την δεξιά ανισότητα έχουμε ότι $x \notin (K^\circ)^\circ$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
(iii) Έστω $K \subset L$. Τότε για $y \in L^\circ$ έπεται ότι

$$1 \geq \max_{x \in L} \langle x, y \rangle \geq \max_{x \in K} \langle x, y \rangle = h_K(y)$$

άρα $y \in K^\circ$. Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι $L^\circ \subset K^\circ$. Έστω προς εις άτοπον απαγωγή ότι υπάρχει $x \in K \setminus L$. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο το οποίο διαχωρίζει το L από το x επομένως υπάρχει $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ώστε $h_L(z) \leq 1 < \langle x, z \rangle$. Καταλήξαμε ότι $z \in L^\circ$ και $z \notin K^\circ$ το οποίο εξ υποθέσεως είναι άτοπο.

□

Η επόμενη πρόταση φανερώνει το δυϊσμό μεταξύ των τομών και των προβολών ενός κυρτού σώματος.

Πρόταση 1.32. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σώμα και Y ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Αν συμβολίσουμε με $P_Y : \mathbb{R}^n \to Y$ την ορθογώνια προβολή στον Y τότε:*
(i) $(K \cap U)^\circ = P_Y(K^\circ)$
(ii) $(P_Y(K))^\circ = (K \cap U^\circ)$

Απόδειξη. *Έστω $x \in K^\circ$ και $y \in K \cap Y$. Τότε $\langle P_Y(x), y\rangle = \langle x, P_Y(y)\rangle \leq 1$, εφόσον $P_Y(Y) = Y$ και $P_Y^2 = P_Y$. Άρα $P_Y(K^\circ) \subset (K \cap Y)^\circ$. Για να αποδείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό, αρκεί από την πρόταση (1.31) (iii) να δείξουμε ότι $P_Y(K^\circ)^\circ \subset K \cap Y$. Έστω λοιπόν $x \in P_Y(K^\circ)^\circ$. Τότε $\langle P_Y(y), x\rangle \leq 1$, για κάθε $y \in K^\circ$. Εφόσον $x \in Y$ έπεται ότι $1 \geq \langle P_Y(y), x\rangle \geq \langle P_Y(x), y\rangle = \langle y, x\rangle$, άρα $y \in K^{\circ\circ} = K$ και η απόδειξη για το (i) ολοκληρώθηκε. Για το (ii) αρκεί να αντικαταστήσουμε το K με K° στην (i) και να χρησιμοποιήσουμε το (ii) της πρότασης (1.31).* □

1.4 Κυρτά Σώματα και Χώροι Banach Πεπερασμένης Διάστασης

Τα συμμετρικά κυρτά σώματα είναι μια από τις πιό σημαντικές κλάσεις κυρτών συνόλων καθώς συνδέονται άμεσα με χώρους Banach πεπερασμένης διάστασης. Για τη συνέχεια θεωρούμε ένα χώρο Banach X διάστασης n και συμβολίζουμε με B_X την κλειστή μοναδιαία μπάλα του X. Όπως είναι γνωστό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\ \|_X)$. Η προαναφερθείσα σύνδεση έχει ως αφετηρία την εξής πρόταση:

Πρόταση 1.33. *Η B_X είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον, αν $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα, τότε το K είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα ενός χώρου Banach πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη. *Αποδεικνύουμε το δεύτερο σκέλος της πρότασης. Θεωρούμε το συναρτησιακό Minkowski ρ_K. Ο ισχυρισμός είναι ότι το ρ_K ορίζει μια νόρμα $\|\ \|_K$ ώστε το K να είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $X = (\mathbb{R}^n, \|\ \|_K)$. Από την πρόταση (1.23) έπεται ότι $\|x\|_K \geq 0$ και $\|x + y\|_K \leq \|x\|_K + \|y\|_K$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον, $\|0\|_K = \rho_K(0) = 0$. Ακόμη, αν για $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\|x\|_K = 0$ τότε υπάρχει ακολουθία $(a_m)_m \subset (0, \infty)$ με $a_m \to 0$ και $x \in a_m K$ για κάθε m. Όμως το K είναι φραγμένο επομένως για $M > 0$ έχουμε*

$$\|x\|_2 \leq M|a_m| \to 0$$

άρα $x = 0$. *Τέλος, για* $t \geq 0$, *η θετική ομογένεια της* ρ_K *εξασφαλίζει ότι* $\|tx\|_K = t\|x\|_K = |t|\|x\|_K$. *Για* $t < 0$ *έπεται ότι*

$$\|tx\|_K = \rho_K(tx) = \inf\left\{s > 0 : x \in \frac{s}{t}K\right\}$$

όμως το K *είναι συμμετρικό οπότε* $(s/t)K = -(s/t)K$ *για κάθε* s. *Εφόσον* $-t > 0$ *έχουμε*

$$\|tx\|_K = \inf\{s > 0 : -tx \in sK\} = -t\|x\|_K = |t|\|x\|_K$$

και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. Από την πρόταση (1.24) *προκύπτει τελικά ότι* $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_K \leq 1\} = B_X$ *και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.*

□

Η αναλογία μεταξύ χώρων με νόρμα πεπερασμένης διάστασης και συμμετρικών κυρτών σωμάτων επεκτείνεται και στην έννοια του δυϊκού χώρου. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, είναι ίσως αναμενόμενο ότι σε αυτή την περίπτωση η ανάλογη γεωμετρική έννοια του δυϊκού χώρου έχει να κάνει με το πολικό σώμα.

Θεωρούμε λοιπόν το χώρο $(X^*, \| \ \|_{X^*})$ των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών $f : X \to \mathbb{R}$ με τη νόρμα $\|f\|_{X^*} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έπεται ότι για κάθε $f \in X^*$ υπάρχει $y \in X$ ώστε $f = f_y = \langle y, . \rangle$. Αν επιπλέον συμβολίσουμε $K = B_X$ έπεται ότι για $f \in X^*$

$$\|f\|_{X^*} = \|f_y\|_{X^*} = \sup_{x \in K} |\langle y, x\rangle| = \max_{x \in K} |\langle y, x\rangle| = h_K(y)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ότι το K είναι συμπαγές και περιέχει το 0 σε συνδυασμό με το (iii) του πορίσματος (1.21.1). Επομένως

$$B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R}^n : h_K(y) \leq 1\} = K^\circ = (B_X)^\circ$$

Εφόσον ο X^* είναι και αυτός πεπερασμένης διάστασης έπεται ότι η B_{X^*} είναι κυρτό σώμα. Επικαλούμενοι ξανά την πρόταση (1.24) έχουμε ότι

$$B_{X^*} = K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho_{K^\circ}(x) \leq 1\}$$

από όπου έπεται άμεσα το εξής πόρισμα που συνδέει το συναρτησιακό Minkowski με τη συνάρτηση στήριξης.

Πόρισμα 1.33.1. *Έστω* K *ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$. *Τότε*

$$h_K = \rho_{K^\circ}$$

Έστω Y ένας γραμμικός υπόχωρος του X (συμβ. $Y \hookrightarrow X$). Είναι άμεσο να δειχθεί ότι η B_Y είναι ίση με την τομή $B_X \cap Y$. Από την άλλη, αν θεωρήσουμε την τομή ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K με ένα υπόχωρο Y (ο Y διέρχεται από το 0 που είναι και το κέντρο του K) έπεται ότι $B_Y = \{\rho_{K\cap Y} \leq 1\}$. Επομένως, οι υπόχωροι ενός χώρου με νόρμα X πεπερασμένης διάστασης αντιστοιχούν σε **κεντρικές τομές** του συμμετρικού κυρτού σώματος $K = B_X$. Τέλος, θεωρούμε ένα χώρο Banach X διάστασης n και ένα κλειστό υπόχωρο Y του X. Τότε ο χώρος πηλίκο $X/Y = \{x + Y : x \in X\}$ εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|x+Y\| = \|x\| = d(x, Y)$ είναι χώρος Banach. Σύμφωνα με ένα γνωστό αποτέλεσμα της συναρτησιακής ανάλυσης, ο X/Y είναι ισομετρικά ισόμορφος με το χώρο $Y^{\perp}$, εφόσον η προβολή $P_{Y^{\perp}}$ είναι ισομετρία. Έπεται ότι η μπάλα του X/Y αντιστοιχεί στην εικόνα $P_{Y^{\perp}}[B_X]$, άρα οι χώροι πηλίκα ενός χώρου Banach αντιστοιχούν σε **ορθογώνιες προβολές** ενός κυρτού σώματος.
Τα παραπάνω σκιαγραφούν μια αντιστοιχία μεταξύ της Γεωμετρίας των κυρτών σωμάτων και της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Αυτό επιτρέπει τη διατύπωση ορισμών και ισοδύναμων προτάσεων σε γεωμετρική ή αναλυτική μορφή. Για παράδειγμα, για να αποδειχθεί μια πρόταση που αφορά ένα χώρο με νόρμα πεπερασμένης διάστασης αρκεί να αποδειχθεί μια ισοδύναμη πρόταση σε γεωμετρική μορφή για την κλειστή μοναδιαία μπάλα του X. Οι αντιστοιχίες που μόλις περιγράψαμε συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Χώροι Banach Πεπερασμένης Διάστασης	Συμμετρικά Κυρτά Σώματα
• X	• $K = B_X$
• X^*	• $K^\circ = B_{X^*}$
• $Y \hookrightarrow X$	• $K \cap Y$
• X/Y	• $P_{Y^{\perp}}[K]$

Κεφάλαιο 2

2.1 Η Ανισότητα Brunn-Minkowski

Ορισμός 2.1. *Έστω* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.
Ένα σύνολο $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ *λέγεται* ***ορθογώνιο παραλληλόγραμμο*** *(n-cell) με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες. Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα* R_1, R_2 *με* $int(R_1) \cap int(R_2) = \varnothing$ *λέγονται* ***σχεδόν ξένα****.*

Θεώρημα 2.2. *(Brunn-Minkowski) Έστω* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *μη-κενά, Borel μετρήσιμα σύνολα. Τότε:*

$$\lambda_n^{1/n}(A+B) \geq \lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B) \tag{2.1}$$

όπου λ_n *το μέτρο Lebesgue στον* $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. *Το θεώρημα αποδεικνύεται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:*

<u>*Βήμα 1:*</u> *Έστω* $R, S \subset \mathbb{R}^n$ *ορθογώνια παραλληλόγραμμα με τις ακμές τους παράλληλες προς τους άξονες.*

Για $i = 1, \dots, n$ *συμβολίζουμε με* r_i, s_i *τα μήκη των πλευρών των* R, S *αντίστοιχα (θεωρούμε* $r_i, s_i > 0$ *για κάθε* i*). Λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό (1.5) προκύπτει ότι το* $A+B$ *είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών* $r_i + s_i$ *άρα:*

$$\lambda_n(R+S) = \prod_{i=1}^{n}(r_i + s_i)\ , \quad \lambda_n(R) = \prod_{i=1}^{n} r_i\ , \quad \lambda_n(S) = \prod_{i=1}^{n} s_i$$

Από την ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου έχουμε :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{r_i}{r_i + s_i}\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{s_i}{r_i + s_i}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{r_i + s_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{r_i + s_i} = 1$$

επομένως: $\lambda_n^{1/n}(R+S) \geq \lambda_n^{1/n}(R) + \lambda_n^{1/n}(S)$.

Βήμα 2: Έστω σύνολα A, B που είναι πεπερασμένες ενώσεις σχεδόν ξένων ορθογωνίων παραλληλογράμμων με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες.

Έστω k το πλήθος των παραλληλογράμμων που αποτελούν το ζεύγος (A, B). Για $k = 2$, η απόδειξη δίνεται στο Βήμα 1. Επαγωγικά, υποθέτουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $k = m - 1$.
Για $k = m$, τουλάχιστον ένα εκ των A, B αποτελείται από δύο παραλληλόγραμμα R_1, R_2 με $int(R_1) \cap int(R_2) = \varnothing$ (εφόσον $m \geq 3$). Τα R_1, R_2 είναι κυρτά με μη-κενό εσωτερικό και διαχωρίζονται από υπερεπίπεδο το οποίο μπορεί να θεωρηθεί παράλληλο ως προς κάποιο άξονα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το υπερεπίπεδο :

$$H_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = r\}$$

και τα σύνολα $A_1 = A \cap H_1^+$, $A_2 = A \cap H_1^-$, όπου H_1^+, H_1^- οι ημίχωροι που ορίζονται από το υπερεπίπεδο H_1. Τότε έχουμε $\lambda_n(A_1)$, $\lambda_n(A_2) < \lambda_n(A)$ και θέτοντας

$$t = \frac{\lambda_n(A_1)}{\lambda_n(A)} \in (0, 1)$$

βρίσκουμε ένα υπερεπίπεδο $H_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = s\}$ τέτοιο ώστε :

$$\frac{\lambda_n(B_1)}{\lambda_n(B)} = t$$

όπου $B_1 = B \cap H_2^+$. Σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα ορίζουμε $B_2 = B \cap H_2^-$. Τότε :

$$A + B = (A_1 + B_1) \cup (A_2 + B_2) \cup (A_1 + B_2) \cup (A_2 + B_1)$$

και παρατηρούμε ότι τα $A_1 + B_1$, $A_2 + B_2$ έχουν ξένα εσωτερικά.
Εφόσον τα ζεύγη (A_i, B_i) για $i = 1, 2$ σχηματίζονται από λιγότερα το πλήθος ορθογώνια από ότι το αρχικό ζεύγος (A, B), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική υπόθεση :

$$\begin{aligned}
\lambda_n(A+B) &\geq \lambda_n(A_1 + B_1) + \lambda_n(A_2 + B_2) \\
&\geq \big(\lambda_n^{1/n}(A_1) + \lambda_n^{1/n}(B_1)\big)^n + \big(\lambda_n^{1/n}(A_2) + \lambda_n^{1/n}(B_2)\big)^n \\
&= t\big(\lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B)\big)^n + (1-t)\big(\lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B)\big)^n \\
&= \big(\lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B)\big)^n
\end{aligned}$$

άρα ισχύει η (2.1)

<u>Βήμα 3</u>: Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά σύνολα. Τότε:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \ , \ B = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$$

όπου $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ οικογένειες σχεδόν ξένων ορθογωνίων παραλληλογράμμων με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες. Τότε για $M, N \in \mathbb{N}$

$$\lambda_n(A+B) \geq \lambda_n\bigg(\bigcup_{k=1}^{N} R_k + B\bigg) \geq \lambda_n\bigg(\bigcup_{k=1}^{N} A_k + \bigcup_{k=1}^{M} S_k\bigg)$$

και χρησιμοποιώντας το Βήμα 2 :

$$\lambda_n^{1/n}(A+B) \geq \lambda_n^{1/n}\bigg(\bigcup_{k=1}^{N} R_k\bigg) + \lambda_n^{1/n}\bigg(\bigcup_{k=1}^{M} S_k\bigg)$$

Παίρνοντας τα όρια για $N, M \to \infty$ και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της $x^{1/n}$ καταλήγουμε και πάλι στο ζητούμενο.

<u>Βήμα 4</u>: Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγή σύνολα.

Τα A^c, B^c είναι ανοικτά, επομένως γράφονται ως ενώσεις σχεδόν ξένων ορθογωνίων παραλληλογράμμων $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ αντίστοιχα. Έπεται ότι:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k^c \ , \ B = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k^c$$

όπου εξ ορισμού τα R_k^c, S_k^c είναι ανοικτά σύνολα για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θεωρώντας $M, N \in \mathbb{N}$ και χρησιμοποιώντας το Βήμα 3 έπεται ότι :

$$\lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B) \leq \lambda_n^{1/n}\bigg(\bigcap_{k=1}^{N} R_k^c\bigg) + \lambda_n^{1/n}\bigg(\bigcap_{k=1}^{M} S_k^c\bigg) \leq \lambda_n^{1/n}\bigg(\bigcap_{k=1}^{N} R_k^c + \bigcap_{k=1}^{M} S_k^c\bigg)$$

Παίρνοντας τα όρια για $N, M \to \infty$ και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της $x^{1/n}$ καταλήγουμε στο ζητούμενο.

<u>Βήμα 5</u>: Θεωρούμε $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Borel μετρήσιμα σύνολα.

Από την εσωτερική κανονικότητα (tightness) του μέτρου Lebesgue ισχύει ότι:

$$\lambda_n(S) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subset S, \ \text{συμπαγές}\}$$

για κάθε Borel μετρήσιμο σύνολο S. Επομένως, υπάρχουν ακολουθίες $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}, (B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ συμπαγών υποσυνόλων των A, B αντίστοιχα τέτοιες ώστε:
$\lim_{m\to\infty}\lambda_n(A_m) = \lambda_n(A)$, $\lim_{m\to\infty}\lambda_n(B_m) = \lambda_n(B)$. *Τότε για $k, m \in \mathbb{N}$:*

$$\lambda_n^{1/n}(A+B) \geq \lambda_n^{1/n}(A_k+B_m) \geq \lambda_n^{1/n}(A_k) + \lambda_n^{1/n}(B_m)$$

και έπεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.2.1. *Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ όπως στο Θεώρημα (2.2) και $s, t > 0$, $c \in (0,1)$. Τότε:*

$$\lambda_n^{1/n}(sA+tB) \geq s\lambda_n^{1/n}(A) + t\lambda_n^{1/n}(B) \tag{2.2}$$

και

$$\lambda_n^{1/n}(cA+(1-c)B) \geq \min\{\lambda_n(A), \lambda_n(B)\} \tag{2.3}$$

Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου (για σταθμισμένους μέσους) στην (2.2) έπεται η παρακάτω χρήσιμη μορφή της Ανισότητας Brunn-Minkowski η οποία είναι ανεξάρτητη της διάστασης n και δεν απαιτεί τα A, B να είναι μη-κενά.

Πόρισμα 2.2.2. *Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ όπως στο Θεώρημα (2.2) και $t \in (0,1)$. Τότε:*

$$\lambda_n(tA+(1-t)B) \geq \lambda_n^t(A)\lambda_n^{1-t}(B) \tag{2.4}$$

Ένα ακόμη πόρισμα που έπεται από τα παραπάνω είναι το εξής :

Πόρισμα 2.2.3. *Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ όπως στο Θεώρημα (2.2). Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \lambda_n^{1/n}(tA+(1-t)B)$ είναι κοίλη.*

Το επόμενο παράδειγμα καθιστά σαφές ότι το άθροισμα Minkowski δύο αυθαίρετων μετρήσιμων υποσυνόλων A, B του $\mathbb{R}^n$ δεν αλληλεπιδρά φυσιολογικά με το μέτρο Lebesgue , ή αλλιώς δε σέβεται τον «όγκο». Εύλογα λοιπόν προκύπτει στη συνέχεια το ερώτημα για τη μετρησιμότητα του $A+B$.
Παράδειγμα. Έστω C το τριαδικό σύνολο Cantor στο $\mathbb{R}$. Είναι γνωστό ότι κάθε αριθμός στο διάστημα $[0,1]$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δύο στοιχείων του C (αριθμοί Cantor). Έπεται ότι C+C= $[0,2]$ και αν πάρουμε τη συμμετρική εκδοχή της προηγούμενης ισότητας ισχύει ότι C+(-C)= $[-1,1]$

Παρατήρηση. (Το ζήτημα της μετρησιμότητας του συνόλου $A+B$)
Αν θεωρήσουμε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα A, B τότε το άθροισμα $A+B$ δεν είναι κατ' ανάγκη Lebesgue μετρήσιμο. Αυτό μπορεί να γίνει διαισθητικά αντιληπτό αν λάβει κανείς υπόψιν ότι στο παραπάνω παράδειγμα, το άθροισμα δύο συνόλων μέτρου μηδέν έχει θετικό μέτρο. Πράγματι, ο W. Sierpinski απέδειξε

το 1920 ότι υπάρχουν σύνολα A, B μέτρου μηδέν, τέτοια ώστε το $A + B$ να είναι μη-μετρήσιμο [20].
Το πρόβλημα της μετρησιμότητας του $A + B$ επιλύεται αν περιοριστούμε σε Borel μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε, το $A+B$ είναι συνεχής εικόνα ενός συνόλου Borel, είναι δηλαδή ένα *αναλυτικό σύνολο* και τα σύνολα αυτά είναι Lebesgue μετρήσιμα σύμφωνα με τα γνωστά αποτελέσματα των N. Lusin και M. Suslin [22].

Θα μελετήσουμε τώρα τις συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν την ισότητα στην (1.1). Παρατηρούμε κατ΄ αρχάς ότι αν τουλάχιστον ένα εκ των A, B είναι μονοσύνολο, τότε το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue στις μεταφορές εξασφαλίζει τετριμμένα την ισότητα. Επιπλέον, στην περίπτωση που τουλάχιστον ένα εκ των A, B είναι μη-φραγμένο τότε και το $A + B$ είναι μη-φραγμένο και η (2.1) ισχύει και πάλι ως ισότητα.
Θεωρούμε λοιπόν $A, B \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγή, με μη-κενό εσωτερικό.
(Σημείωση: στη θέση της τελευταίας συνθήκης, θα μπορούσε κανείς να είχε υποθέσει ασθενέστερα ότι τα A, B έχουν θετικό μέτρο). Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ότι η ισότητα επιτυγχάνεται μόνο αν τα A, B είναι κυρτά.

Λήμμα 2.3. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ μη-κυρτό, συμπαγές, με μη-κενό εσωτερικό. Τότε υπάρχει ένας μη-φραγμένος κύλινδρος $Q \subset \mathbb{R}^n$ ο οποίος τέμνεται από δύο υπερεπίπεδα κάθετα στον άξονά του σε τρία υποσύνολα Q_1, Q_2, Q_3 ξένα ανά δύο και τέτοια ώστε:*
(i) $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$
(ii) Τα Q_1, Q_2 είναι μη-φραγμένα
(iii) $A \cap Q_2 = \varnothing$
(iv) $\lambda_n(Q_1 \cap A) > 0$

Απόδειξη. *Έστω $x \in intA$. Τότε υπάρχει ένα $y \in A$, ώστε το ευθύγραμμο τμήμα ℓ_{xy}, με άκρα τα x και y να περιέχει ένα σημείο $p \notin A$ (διαφορετικά θα ίσχυε ότι $conv\{x, A\} = conv(A) \subset A$, που είναι άτοπο εφόσον το A είναι μη-κυρτό). Το συμπλήρωμα του A είναι ανοικτό, επομένως υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η ανοικτή μπάλα $B(p, \delta)$ να μην τέμνει το A. Θεωρούμε τώρα την ευθεία ℓ που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ℓ_{xy} και παίρνουμε τον κύλινδρο Q που έχει ως άξονα την ℓ και ακτίνα δ, δηλαδή το σύνολο $Q = \{z \in \mathbb{R}^n : d(z, \ell) < \delta\}$ Μπορεί κανείς να διαπιστώσει οτι το Q είναι το ζητούμενο σύνολο.*
Πράγματι, τέμνουμε το Q με δύο παράλληλα υπερεπίπεδα H_1, H_2 τα οποία είναι κάθετα στην ℓ ώστε:
1) η $B(p, \delta)$ να περιέχεται στη λωρίδα $H_1^+ \cap H_2^-$ μεταξύ των δύο υπερεπιπέδων και

2) για $\delta' > 0$ ώστε $B(x,\delta') \subset A$ να ισχύει $Q \cap B(x,\delta') \subset H_1^-$.

Θέτοντας $Q_1 = H_1^- \cap Q$, $Q_2 = H_2^+ \cap Q$, $Q_3 = H_1^+ \cap H_2^- \cap Q$ προκύπτουν άμεσα τα (i)-(iii) του Λήμματος. Για το (iv) έχουμε: το $Q \cap B(x,\delta')$ είναι ανοικτό και περιέχεται στο Q_1. Επομένως, υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε $B(x,\delta'') \subset Q_1 \cap A$ επομένως $\lambda_n(Q_1 \cap A) \geq \lambda_n(B(x,\delta'')) > 0$. □

Θεώρημα 2.4. *Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγή, με μη-κενό εσωτερικό και το A είναι μη-κυρτό. Τότε:*

$$\lambda_n^{1/n}(A+B) > \lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B) \tag{2.5}$$

Απόδειξη. *Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους και $0 \in intA$. Θεωρούμε επιπλέον ότι ο προσανατολισμός του A είναι τέτοιος ώστε ο άξονας ℓ του κύλινδρου Q (βλ. προηγούμενο λήμμα) να ταυτίζεται με τον άξονα x_1. Παίρνουμε τώρα ένα μη-φραγμένο ορθογώνιο πρίσμα που περιέχεται στο Q και είναι της μορφής*

$$S = \mathbb{R} \times \left[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right] \times \cdots \times \left[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right] \subset \mathbb{R}^n$$

με $\epsilon < \delta/2$ (οι τομές του S με υπερεπίπεδα κάθετα στον άξονα ℓ του κυλίνδρου είναι $(n-1)$-διάστατοι κύβοι πλευράς ϵ). Το S αποτελείται από $2(n-1)$ έδρες τις οποίες συμβολίζουμε με $F_1, \ldots, F_{2n-2}$.
Διαχωρίζουμε το A σε δύο σύνολα A_1, A_1' με ένα υπερεπίπεδο H_1 το οποίο περιέχει την έδρα F_1 του S. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το S βρίσκεται στον ίδιο ημίχωρο με το A_1 (άρα $A_1' \cap S = \varnothing$). Ακολουθώντας τη συλλογιστική της απόδειξης του Θεωρήματος (2.2), ονομάζουμε t_1 το λόγο των όγκων του A_1 προς το A και βρίσκουμε ένα υπερεπίπεδο H_2 παράλληλο προς το H_1 το οποίο διαχωρίζει το σύνολο B σε B_1, B_1' με την ίδια αναλογία όγκων (προφανώς $0 < t_1 < 1$). Επομένως έχουμε :

$$t_1 = \frac{\lambda_n(A_1')}{\lambda_n(A)} = \frac{\lambda_n(B_1')}{\lambda_n(B)}$$

Στη συνέχεια, διαχωρίζουμε το σύνολο A_1 σε δύο μέρη A_2, A_2' με ένα υπερεπίπεδο H_3 το οποίο περιέχει την έδρα F_2 του S. Υποθέτουμε ότι το S βρίσκεται στον ίδιο ημίχωρο με το A_2 (άρα $A_2' \cap S = \varnothing$). Παρόμοια με πριν, προσδιορίζουμε ένα υπερεπίπεδο H_4 παράλληλο προς το H_3 το οποίο διαχωρίζει το B_1 σε B_2, B_2' ώστε να ισχύει:

$$t_2 = \frac{\lambda_n(A_2')}{\lambda_n(A)} = \frac{\lambda_n(B_2')}{\lambda_n(B)}$$

Τα $A_i + B_i$, $A_i' + B_i'$ *έχουν ξένα εσωτερικά για* $i = 1, 2$ *και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα* (2.2) *έχουμε :*

$$\begin{aligned}
\lambda_n(A+B) &\geq \lambda_n(A_1+B_1) + \lambda_n(A_1'+B_1') \\
&\geq \lambda_n(A_1+B_1) + t_1\big(\lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B)\big)^n \\
&\geq \lambda_n(A_2+B_2) + \lambda_n(A_2'+B_2') + t_1\big(\lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B)\big)^n \\
&\geq \lambda(A_2+B_2) + (t_1+t_2)\big(\lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B)\big)^n
\end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία για κάθε έδρα F_i *του πρίσματος* S *καταλήγουμε τελικά ότι:*

$$\lambda_n(A+B) \geq \lambda_n(S_A+S_B) + (1-t)\big(\lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B)\big)^n \tag{2.6}$$

όπου $S_A = A \cap S \subset A \cap Q$ *και* $\lambda_n(S_A) = t\lambda_n(A)$, $\lambda_n(S_B) = t\lambda_n(B)$.

Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι το S_A *αποτελείται από δύο μη-κενά σύνολα* $S_A^1 = A \cap Q_1$ *και* $S_A^2 = A \cap Q_3$ *με* $\lambda_n(S_A^1) > 0$. *Θεωρούμε επίσης ότι το* Q_2 *είναι αρκετά μεγάλο ώστε τα* $S_A^1 \cap \partial Q_2$ *και* $S_A^2 \cap \partial Q_2$ *να είναι μη-κενά.*

Τέλος, μετατοπίζουμε παράλληλα το S_B *ώστε να διαχωρίζεται από το υπερεπίπεδο* $\{x_1 = 0\}$ *και το* ∂Q_2 *σε δύο σύνολα* S_B^1, S_B^2 *ώστε τα* S_B^1 *και* S_B^2 *έχουν αναλογία όγκων ίση με την αναλογία των* S_A^1 *και* S_A^2. *Επιπλέον, εφόσον το* B *είναι κυρτό με μη-κενό εσωτερικό έπεται ότι υπάρχει ένα υποσύνολο* Σ, *έστω του* S_B^2, *με* $\lambda_n(\Sigma) > 0$. *Επομένως :*

$$\frac{\lambda_n(S_A^1)}{\lambda_n(S_A)} = \frac{\lambda_n(S_B^1)}{\lambda_n(S_B)} = s \in (0, 1]$$

και για $p \in S_A^1 \cap \partial Q_2$ *έχουμε* $S_A + S_B \supset \big(S_A^1 + S_B^1\big) \cup \big(S_A^2 + S_B^2\big) \cup \big(p + \Sigma\big)$
Εφόσον τα $S_A^1 + S_B^1$ *και* $S_A^2 + S_B^2$ *είναι ξένα έπεται ότι:*

$$\lambda_n(S_A+S_B) \geq \lambda_n(S_A^1+S_B^1) + \lambda_n(S_A^2+S_B^2) + \lambda_n(p+\Sigma) \tag{2.7}$$

Τελικά από τις (2.6) *και* (2.7) *έχουμε:*

$$\lambda_n(A+B) \geq \lambda_n(\Sigma) + \big(\lambda_n^{1/n}(A) + \lambda_n^{1/n}(B)\big)^n$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

2.2 Μικτοί όγκοι και ανισότητα *Minkowski*

Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει το άθροισμα Minkowski από τη σκοπιά της μετρησιμότητας, ενώ η ανισότητα Brunn-Minkowski (2.2) δίνει ένα χρήσιμο κάτω φράγμα για το μέτρο ενός θετικού γραμμικού συνδυασμού $t_1A_1 + t_2A_2$, υπό την έννοια του αθροίσματος Minkowski . Πώς σχετίζεται όμως το μέτρο ενός τέτοιου γραμμικού συνδυασμού με τους μη-αρνητικούς συντελεστές t_1, t_2 και τα μέτρα των συνόλων A, B;
Η θεωρία των μικτών όγκων έχει ως αφετηρία το παρακάτω θεμελιώδες αποτέλεσμα του Minkowski το οποίο δίνει και την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα για την περίπτωση των μη-κενών, κυρτών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Το θεώρημα αυτό αποκαλύπτει ότι το μέτρο ενός γραμμικού συνδυασμού τέτοιων συνόλων μπορεί να γραφεί ως ένα πολυώνυμο των συντελεστών του γραμμικού συνδυασμού, βαθμού n. Για μία πληρέστερη και εκτενή παρουσίαση των αποτελεσμάτων που ακολουθούν ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [23],[19].

Θεώρημα 2.5. *(Minkowski) Έστω $1 \leq n \leq m$, $K_1, \ldots, K_m \subset \mathbb{R}^n$ μη-κενά, κυρτά, συμπαγή και $t_1, \ldots, t_m \geq 0$. Τότε υπάρχουν συντελεστές $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$, οι οποίοι είναι συμμετρικοί ως προς κάθε αναδιάταξη του συνόλου $\{i_1, \ldots, i_n\}$ και τέτοιοι ώστε:*

$$\lambda_n(t_1K_1 + \ldots + t_mK_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}) t_{i_1} \ldots t_{i_n} \tag{2.8}$$

*Ο συντελεστής $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$ του $t_{i_1} \ldots t_{i_n}$ στην παραπάνω αναπαράσταση λέγεται **μικτός όγκος των** $K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}$ και εξαρτάται μόνο από αυτά τα n σύνολα. Επίσης, συμβολίζουμε με $V(K_{i_1}, r_1; \ldots; K_{i_k}, r_k)$ το μικτό όγκο $V(\underbrace{K_{i_1}, \ldots, K_{i_1}}_{r_1}, \ldots, \underbrace{K_{i_k}, \ldots, K_{i_k}}_{r_k})$ όπου $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$ με $r_1 + \ldots + r_k = n$.*

Αν ομαδοποιήσουμε τους όμοιους όρους χρησιμοποιώντας τον πολυωνυμικό συντελεστή η (2.8) γράφεται:

$$\lambda_n(t_1K_1 + \ldots + t_mK_m) = \sum_{r_1+\ldots+r_k=n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m} \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!} a_{i_1,r_1;\ldots;i_k,r_k} t_{i_1}^{r_1} \ldots t_{i_k}^{r_k}$$

όπου: $a_{i_1,r_1;\ldots;i_k,r_k} = V(K_{i_1}, r_1; \ldots; K_{i_k}, r_k)$
Η επόμενη πρόταση περιγράφει μερικές βασικές ιδιότητες των μικτών όγκων.

Πρόταση 2.6. *Έστω $K, L, K_1, \ldots, K_n$ μη-κενά, κυρτά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και P ένα πολύτοπο με m έδρες. Ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $V(K,\dots,K) = \lambda_n(K)$
(ii) $V(K_1,\dots,K_n) = V(K_{\sigma(1)},\dots,K_{\sigma(n)})$, *για κάθε* $\sigma \in S_n$ *(συμμετρικότητα)*
(iii) $V(sK+tL,K_2,\dots,K_n) = sV(K,K_2,\dots,K_n)+tV(L,K_2,\dots,K_n)$, *για κάθε* $s,t>0$ *(πολυγραμμικότητα)*
(iv) $V(K_1,\dots,K_n) = V(K_1+x_1,\dots,K_n+x_n)$, *για κάθε* $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ *(αναλλοίωτο στις μεταφορές)*
(v) $V(K_1,\dots,K_n) = V(U[K_1],\dots,U[K_n])$, *για κάθε* $U \in SL(n)$ *(αναλλοίωτο στις περιστροφές)*
(vi) $V(K_1,\dots,K_n) \geq 0$
(vii) Αν $u_1,\dots,u_m$ *τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα που αντιστοιχούν στις έδρες* $F_1,\dots,F_m$ *του* P *τότε*

$$V(K,P,\dots,P) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} h_K(u_i)\lambda_{n-1}(F_i) \tag{2.9}$$

Θεώρημα 2.7. *(Ανισότητα Minkowski για μικτούς όγκους) Έστω* $K,L \subset \mathbb{R}^n$ *μη-κενά, κυρτά, συμπαγή σύνολα. Τότε :*

$$V(K,L,\dots,L) \geq \lambda_n^{1/n}(K)\lambda_n^{(n-1)/n}(L) \tag{2.10}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν

$$\lambda_n^{1/n}(K+L) = \lambda_n^{1/n}(K)+\lambda_n^{1/n}(L)$$

.

Απόδειξη. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *με*

$$f(t) = \lambda_n^{1/n}(tK+(1-t)L)$$

Από το θεώρημα του Minkowski ισχύει ότι:

$$f^n(t) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V(K;j,L;n-j)t^j(1-t)^{n-j}$$

Έπεται ότι $f \in C^2[0,1]$ *και* $f'(0) = (f^n)'(0)/nf^{n-1}(0)$ *επομένως:*

$$f'(0) = \frac{V(K,L,\dots,L)-\lambda_n(L)}{\lambda_n^{(n-1)/n}(L)}$$

Από το πόρισμα (2.2.3) η f *είναι κοίλη επομένως η* f' *είναι φθίνουσα στο* $[0,1]$ *ενώ από το θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει* $\xi\in(0,1)$ *τέτοιο ώστε:*

$$f'(\xi) = f(1)-f(0) = \lambda_n^{1/n}(L)-\lambda_n^{1/n}(K) \leq f'(0)$$

και η ζητούμενη ανισότητα είναι άμεση.
Παρατηρούμε τώρα ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $f'(0) = f(1) - f(0)$ *και ισχυριζόμαστε ότι* $f'(0) = f(1) - f(0)$ *αν και μόνο αν* $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(f(1) + f(0))$. *Πράγματι, έστω* $f'(0) = f(1) - f(0)$. *Η* f *είναι κοίλη επομένως για* $a \in [0,1]$ *η συνάρτηση* $g_a : [0,1] \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *με*

$$g_a(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

είναι φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Για $a = 0$ *έχουμε ότι:* $g_0(t) \geq g_0'(1) = f(1) - f(0)$ *για κάθε* $t \in (0,1]$. *Επιπλέον για* $t \in (0,1]$ *υπάρχει (από το θεώρημα Μέσης Τιμής)* $\xi_t \in (0,t)$ *ώστε* $g_0(t) = f'(\xi_t)$ *και εφόσον η* f' *είναι φθίνουσα* $g_0(t) \leq f'(0) = f(1) - f(0)$. *Τελικά* $g_0(t) = f(1) - f(0)$ *για κάθε* $t \in (0,1]$ *και για* $t = 1/2$ *έχουμε* $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(f(1) + f(0))$.

Από την άλλη, έστω ότι ισχύει $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(f(1) + f(0))$. *Τότε η συνάρτηση:*

$$g(t) = \begin{cases} g_{1/2}(t) & , t \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\} \\ f'(\frac{1}{2}) & , t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

είναι συνεχής και φθίνουσα στο [0,1] και επιπλέον:

$$g(0) = \frac{f(0) - f(\frac{1}{2})}{0 - \frac{1}{2}} = f(1) - f(0) = \frac{f(1) - f(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = g(1)$$

άρα η g *πρέπει να είναι σταθερή και ίση με* $f(1) - f(0)$. *Χρησιμοποιώντας ότι* $g'(0) = 0$ *καταλήγουμε άμεσα ότι* $f'(0) = f(1) - f(0)$ *και ο ισχυρισμός αποδείχτηκε.*
Τέλος, είναι προφανές ότι $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(f(1) + f(0))$ *αν και μόνο αν* $\lambda_n^{1/n}(K + L) = \lambda_n^{1/n}(K) + \lambda_n^{1/n}(L)$. $\square$

Λήμμα 2.8. *(i) Έστω* S *ένα n-simplex και* K *ένα κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$. *Αν* $\lambda_n(S) = \lambda_n(K)$ *και* $V(K, S, \ldots, S) = \lambda_n^{1/n}(K)\lambda_n^{(n-1)/n}(S)$ *τότε το* K *είναι μια μεταφορά του* S, *δηλαδή υπάρχει* $x \in \mathbb{R}^n$ *ώστε* $K = S + x$.
(ii) Έστω K, L *κυρτά και συμπαγή υποσύνολα του* $\mathbb{R}^n$ *ώστε να ισχύει το εξής: για κάθε κυρτό πολύτοπο* P *που περιέχεται στο ένα και έχει το πολύ* $n + 1$ *κορυφές, υπάρχει μια μεταφορά του* P *που περιέχεται στο άλλο. Τότε το* L *περιέχει μια μεταφορά του* K. *Αν επιπλέον τα* K, L *έχουν μη-κενό εσωτερικό τότε το* L *ταυτίζεται με μια μεταφορά του* K.

Απόδειξη. *(i) Έστω* $u_0, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ *τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα που αντιστοιχούν στις* $(n-1)$*-διάστατες έδρες* $F_0, \ldots, F_n$ *του* S *(facets). Θεωρούμε* *τώρα μια ομοιοθεσία $S' = tS + x$ του S ώστε το simplex S' να είναι περιγεγραμμένο στο K, δηλαδή $K \subset S'$ και $K \cap F_i' \neq \varnothing$ για κάθε $i = 0, \ldots, n$, όπου F_i' facet του S' . Τότε από την (2.9) έπεται*

$$\lambda_n^{1/n}(K)\lambda_n^{(n-1)/n}(S) = V(K, S, \ldots, S) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} h_K(u_i)\lambda_{n-1}(F_i)$$

όπου h_K η συνάρτηση στήριξης του K και

$$\lambda_n(S') = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} h_{S'}(u_i')\lambda_{n-1}(F_i') = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} t^{n-1}h_K(u_i)\lambda_{n-1}(F_i)$$

επομένως $\lambda_n(S') = t^n\lambda_n(S) = t^{n-1}\lambda_n^{1/n}(K)\lambda_n^{(n-1)/n}(S)$ και τελικά $\lambda_n(K) = t^n\lambda_n(S) = \lambda_n(S')$. Έπεται ότι $t = 1$, εφόσον $\lambda_n(K) = \lambda_n(S)$ και $K = S' = S + x$ εφόσον $K \subset S'$.

(ii) Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n \in K$. Το πολύτοπο $P = conv\{x_0, x_1 \ldots, x_n\} \subset K$ έχει το πολύ $n+1$ κορυφές και από την υπόθεση υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $P + x \subset L$. Έπεται ότι $x_i + x \subset L$ για κάθε $i = 0, \ldots, n$ ή ισοδύναμα

$$x \in \bigcap_{i=0}^{n}(L - x_i)$$

Η $\mathcal{F} = \{L - x : x \in K\}$ είναι μια οικογένεια κυρτών και συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και από το Θεώρημα (1.8) του Helly έπεται ότι η $\mathcal{F}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Επομένως λόγω συμπάγειας :

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing$$

άρα υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $y + K \subset L$.
Αν επιπλέον τα K, L έχουν μη-κενό εσωτερικό τότε μπορούμε στη θέση του πολυτόπου P να θεωρήσουμε ένα n-simplex S ώστε να ισχύει $S + x \subset L$. Λόγω συμπάγειας έπεται άμεσα ότι $diam(P) = diam(K) = diam(L)$.
Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το y που προσδιορίσαμε προηγουμένως ταυτίζεται με το x. Πράγματι αν $y \neq x$ τότε θα είχαμε $(P + x) \cup (P + y) \subset L$ και

$$diam(P) < diam\big((P + x) \cup (P + y)\big) \leq diam(L)$$

το οποίο είναι άτοπο.
Με ένα συμμετρικό επιχείρημα καταλήγουμε ότι $K - x \subset L$ επομένως $L = K + x$. $\square$

Όπως είδαμε παραπάνω (Θεώρημα (2.7)), η ισότητα στην (2.1) (για δύο $K, L \subset \mathbb{R}^n$ μη-κενά, κυρτά, συμπαγή $K, L \subset \mathbb{R}^n$) επιτυγχάνεται αν και μόνο αν έχουμε ισότητα στην (2.10). Στη συνέχεια θα αποδειχτεί ότι η ισότητα στην (2.1) επιτυγχάνεται αν και μόνο αν τα K, L είναι ομοιοθετικά κυρτά σώματα.
Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι η μία κατεύθυνση προκύπτει άμεσα. Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο κυρτά σώματα K, L με $L = tK + x$, για κάποιο $t \geq 0$ και $x \in \mathbb{R}^n$, έπεται λόγω κυρτότητας ότι το $K + L$ είναι κυρτό σώμα και $K + tK = (1+t)K$. Χρησιμοποιώντας την ομοιογένεια και το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue στις μεταφορές έχουμε: $\lambda_n(K + L) = \lambda_n(K + tK + x) = \lambda_n((1 + t)K) = (1 + t)^n \lambda_n(K)$. Από την άλλη: $\lambda_n^{1/n}(K) + \lambda_n^{1/n}(tK + x) = \lambda_n^{1/n}(K) + (t^n)^{1/n}\lambda_n^{1/n}(K) = (1 + t)^n \lambda_n^{1/n}(K)$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Θεώρημα 2.9. *Έστω κυρτά σώματα $K, L \subset \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε:*

$$\lambda_n^{1/n}(K + L) = \lambda_n^{1/n}(K) + \lambda_n^{1/n}(L)$$

Τότε τα K, L είναι ομοιοθετικά.

Απόδειξη. *Έστω $t > 0$ ώστε $\lambda_n(tK) = \lambda_n(L)$. Από το θεώρημα (2.7) η ανισότητα Minkowski για μικτούς όγκους ισχύει για τα K, L ως ισότητα, επομένως:*

$$V(tK, L, \ldots, L) = tV(K, L, \ldots, L) = t\lambda_n^{1/n}(K)\lambda_n^{(n-1)/n}(L) = \lambda_n^{1/n}(tK)\lambda_n^{(n-1)/n}(L)$$

Θέτοντας $K_1 = tK$ και χρησιμοποιώντας ξανά το θεώρημα (2.7) έπεται ότι:

$$\lambda_n^{1/n}(K_1 + L) = \lambda_n^{1/n}(K_1) + \lambda_n^{1/n}(L) \tag{2.11}$$

Το L έχει μη-κενό εσωτερικό, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ένα n-simplex S το οποίο περιέχεται στο L. Το S γράφεται ως τομή $n+1$ κλειστών ημιχώρων. Έστω λοιπόν ότι $S = S_0 \cap S_1 \ldots \cap S_n$. Εφαρμόζοντας μια κατάλληλη μεταφορά στον ημίχωρο S_0 θεωρούμε έναν ημίχωρο S_0' τέτοιο ώστε $\lambda_n(K_1 \cap S_0') = \lambda_n(L \cap S_0)$. Τότε, όπως θα δείξουμε, τα σύνολα $K_1^- = K_1 \cap S_0'$ και $L^- = L \cap S_0$ δίνουν ισότητα στην ανισότητα Brunn-Minkowski.
Πράγματι, έστω προς εις άτοπον απαγωγή ότι ισχύει:

$$\lambda_n^{1/n}(K_1^- + L^-) > \lambda_n^{1/n}(K_1^-) + \lambda_n^{1/n}(L^-)$$

Θέτοντας $K_1^+ = K_1 \setminus K_1^-$ και $L^+ = L \setminus L^-$ έχουμε ότι τα $K_1^+ + L^+$ και $K_1^- + L^-$ είναι ξένα και περιέχονται στο $K_1 + L$ άρα:

$$\begin{aligned}\lambda_n(K_1 + L) &\geq \lambda_n(K_1^+ + L^+) + \lambda_n(K_1^- + L^-) \\ &> \left(\lambda_n^{1/n}(K_1) + \lambda_n^{1/n}(L)\right)^n\end{aligned}$$

Από την (2.11) καταλήγουμε σε άτοπο.
Εφαρμόζοντας το παραπάνω επιχείρημα n φορές διαδοχικά έπεται ότι υπάρχουν κλειστοί ημίχωροι $S_0', \ldots, S_n'$ που προκύπτουν από κατάλληλες μεταφορές των $S_0, \ldots, S_n$ αντίστοιχα, ώστε τα κυρτά σώματα $S = tK \cap S_0 \cap S_1 \ldots \cap S_n$ και $S' = L \cap S' = L \cap S_0' \cap S_1' \ldots \cap S_n'$ να έχουν ίσα μέτρα και να δίνουν ισότητα στην ανισότητα Brunn-Minkowski. Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι το S' είναι μια μεταφορά του S και λόγω συμμετρίας ισχύει ότι για κάθε n-simplex που περιέχεται στο L υπάρχει μία μεταφορά του που περιέχεται στο tK. Τότε από το δεύτερο κομμάτι του προηγούμενου λήμματος το L είναι μια μεταφορά του tK δηλαδή υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $L = tK + x$ άρα τα K, L είναι τελικά ομοθετικά και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

2.3 Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στον $\mathbb{R}^n$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski εφαρμοζεται στην επίλυση του ισοπεριμετρικού προβλήματος στον $\mathbb{R}^n$. Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα αποτελεί ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης και διατυπώνεται ως εξής:

«Ανάμεσα σε όλα τα μη-κενά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ δεδομένου όγκου r, να προσδιοριστεί το σύνολο με την ελάχιστη επιφάνεια»

Αρχικά, θα πρέπει να οριστεί κατάλληλα η έννοια της επιφάνειας ενός μη-κενού συμπαγούς συνόλου.

Ορισμός 2.10. *Έστω $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές σύνολο. Η* ***επιφάνεια*** *$\partial(A)$ του A ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του συνόλου $A + \epsilon B_2^n$ καθώς το $\epsilon > 0$ τείνει στο 0. Συγκεκριμένα,*

$$\partial(A) = \liminf_{\epsilon \to 0^+} \frac{\lambda_n(A + \epsilon B_2^n) - \lambda_n(A)}{\epsilon}$$

Αν το A είναι κυρτό σώμα, τότε το παραπάνω όριο υπάρχει, επομένως το $\liminf$ του ορισμού αντικαθίσταται από $\lim$. Αυτό διαπιστώνεται άμεσα, αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Minkowski για μικτούς όγκους (σχεση (2.8)) στην ποσότητα $\lambda_n(A + \epsilon B_2^n)$.
Αποδεικνύεται τώρα ότι ανάμεσα σε όλα τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ ίσου όγκου, η ευκλείδεια μπάλα έχει την ελάχιστη επιφάνεια ή ισοδύναμα η ευκλείδεια μπάλα αποτελεί λύση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.11. *(Ισοπεριμετρική ανισότητα στον $\mathbb{R}^n$) Έστω $r > 0$ και $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές σύνολο, τέτοιο ώστε $\lambda_n(A) = \lambda_n(rB_2^n)$. Τότε*

$$\partial(A) \geq \partial(rB_2^n)$$

Απόδειξη. *Από την ανισότητα Brunn-Minkowski έχουμε:*

$$\frac{\lambda_n(A+\epsilon B_2^n)-\lambda_n(A)}{\epsilon} \geq \frac{\left(\lambda_n^{1/n}(A)+\lambda_n^{1/n}(\epsilon B_2^n)\right)^n-\lambda_n(A)}{\epsilon}$$

$$= \frac{\left(\lambda_n^{1/n}(A)+\epsilon\lambda_n^{1/n}(B_2^n)\right)^n-\lambda_n(A)}{\epsilon}$$

$$= \frac{\lambda_n(A)+\epsilon n\lambda_n^{1/n}(B_2^n)\lambda_n^{(n-1)/n}(A)+O(\epsilon^2)-\lambda_n(A)}{\epsilon}$$

$$= n\lambda_n^{1/n}(B_2^n)\lambda_n^{(n-1)/n}(A)+O(\epsilon)$$

Παίρνοντας το όριο για $\epsilon \to 0^+$ και λαμβάνοντας υπόψιν την υπόθεση έπεται ότι

$$\partial(A) \geq n\lambda_n^{1/n}(B_2^n)\lambda_n^{(n-1)/n}(A) = nr^{n-1}\lambda_n(B_2^n) \tag{2.12}$$

Από την άλλη, $\lambda_n(rB_2^n+\epsilon B_2^n) = \lambda_n\big((r+\epsilon)B_2^n\big) = (r+\epsilon)^n\lambda_n(B_2^n)$ άρα

$$\frac{\lambda_n(rB_2^n+\epsilon B_2^n)-\lambda_n(rB_2^n)}{\epsilon} = \frac{\big((r+\epsilon)^n-r^n\big)\lambda_n(B_2^n)}{\epsilon} = nr^{n-1}\lambda_n(B_2^n)+O(\epsilon)$$

Παίρνοντας και πάλι το όριο για $\epsilon \to 0^+$ και συγκρίνοντας με την (2.12) προκύπτει τελικά ότι $\partial(A) \geq \partial(rB_2^n)$ □

Παρατήρηση: Θέτοντας $r = 1$ προκύπτει ότι $\partial(B_2^n) = n\lambda_n(B_2^n)$.

Κεφάλαιο 3

3.1 Απόσταση Banach-Mazur

Έστω $(X, \| \|_X), (Y, \| \|_Y)$ χώροι Banach με $\dim(X) = \dim(Y) = n$. Οι X, Y είναι ισόμορφοι, εφόσον $X \simeq Y \simeq \mathbb{R}^n$ αλλά, όπως είναι αναμενόμενο, δεν είναι απαραίτητα ισομετρικοί. Η απόσταση Banach-Mazur ποσοτικοποιεί το πόσο α-πέχουν οι X, Y από το να είναι ισομετρικοί.
Στη συνέχεια, συμβολίζουμε με $GL(n)$ την ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμι-κών μετασχηματισμών $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Αν θεωρήσουμε την αναπαράσταση του T από ένα $n \times n$ πίνακα τότε $GL(n) = \{T \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det(T) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$. Για δύο διανυσματικούς χώρους X, Y συμβολίζουμε με $L(X, Y)$ το σύνολο των γραμμικών τελεστών από τον X στον Y και με $GL(X, Y)$ το συνολο των αντι-στρέψιμων γραμμικών τελεστών. Οι παραπάνω χώροι εφοδιάζονται με τη νόρμα τελεστή $\| \|$ που ορίζεται ως

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$$

για κάθε $T \in L(X, Y)$.

Ορισμός 3.1. *Έστω X, Y χώροι Banach. Η **απόσταση Banach-Mazur** d_{BM} των X, Y ορίζεται ως ο θετικός αριθμός*

$$d_{BM}(X, Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| : T \in GL(X, Y)\}$$

Ορίζουμε επίσης $d_{BM}(X, Y) = +\infty$ αν και μόνο αν οι X, Y δεν είναι γραμμικά ισόμορφοι.

Παρατηρούμε ότι για χώρους πεπερασμένης διάστασης n, η απόσταση Banach-Mazur είναι καλά ορισμένη εφόσον υπάρχει πάντα ένας γραμμικός ισομορφισμός $T : X \to Y$, και το σύνολο $\{\|T\|\|T^{-1}\| : T \in GL(X, Y)\}$ είναι μη-κενό. Από τον ορισμό επίσης προκύπτει ότι

$$d_{BM}(X, Y) \geq \|T \circ T^{-1}\| = \|Id\| = 1$$

οπου $Id : X \to Y$ ο ταυτοτικός τελεστής. Επιπλέον, έχουμε $d_{BM}(X, X) = 1$ εφόσον ο ταυτοτικός τελεστής είναι ισομετρία και άρα

$$d_{BM}(X, X) \leq \|Id\|\|Id^{-1}\| = 1$$

Έπεται ότι η d_{BM} παίρνει τιμές στο διάστημα $[1, +\infty]$.
Σύμφωνα με την αναλογία που περιγράφηκε στο τέλος του Κεφαλαίου 1, μπορούμε να ορίσουμε μια ισοδύναμη γεωμετρική μορφή της απόστασης Banach-Mazur για δύο συμμετρικά κυρτά σώματα.

Ορισμός 3.2. *Έστω $K, L \subset \mathbb{R}^n$ συμμετρικά κυρτά σώματα. Τότε ορίζουμε τη* ***γεωμετρική*** *απόσταση Banach-Mazur των K, L ως:*

$$d^G_{BM}(K, L) = \inf\{\delta > 0 : \exists T \in GL(n) \text{ , } L \subset T[K] \subset \delta L\}$$

Ο χώρος $GL(n)$ εφοδιασμένος με τη σύνθεση, το άθροισμα τελεστών και οποιαδήποτε νόρμα τελεστή αποτελεί άλγεβρα Banach με ταυτοτικό στοιχείο Id. Για την απόδειξη του επόμενου λήμματος παραπέμπουμε στο [6].

Λήμμα 3.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach με ταυτοτικό στοιχείο Id. Αν για $x \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι $\|x - Id\| < 1$ τότε το x είναι αντιστρέψιμο.*

Σύμφωνα με την επόμενη πρόταση, αν οι X, Y έχουν πεπερασμένη διάσταση n, τότε υπάρχει ένας γραμμικός αντιστρέψιμος τελεστής ο οποίος «πετυχαίνει» την απόσταση Banach-Mazur.

Πρόταση 3.4. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, με $\dim(X) = \dim(Y) = n$ και $\delta \geq 1$. Αν $d_{BM}(X, Y) = \delta$, τότε υπάρχει $S \in GL(X, Y)$ τέτοιος ώστε*

$$\delta = \min\{\|T\|\|T^{-1}\| : T \in GL(X, Y)\} = \|S\|\|S^{-1}\|$$

Απόδειξη. *Έστω $(T_m)_m \subset GL(X, Y)$ ώστε $\|T_m\|\|T_m^{-1}\| \to \delta$. Θέτοντας $S_m = \|T_m\|T_m^{-1}$ έχουμε ότι $\|S_m\| \to \delta$ και $S_m^{-1} = T_m/\|T_m\|$. Έπεται ότι $(S_m)_m \subset GL(X, Y)$ και επιπλέον το $(S_m^{-1})_m$ είναι υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας του $L(Y, X)$. Όμως η σφαίρα του $L(Y, X)$ είναι συμπαγής, επομένως υπάρχει υπακολουθία $S_{k_m}^{-1}$ η οποία συγκλίνει με τη νόρμα τελεστή σε ένα στοιχείο $S^{-1} \in L(Y, X)$ με $\|S^{-1}\| = 1$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι ο S^{-1} είναι αντιστρέψιμος. Από τις ιδιότητες της νόρμας στον $L(Y, X)$ έχουμε ότι*

$$\|S_{k_m} \circ S^{-1} - Id\| = \|S_{k_m}(S^{-1} - S_{k_m}^{-1})\| \leq \|S_{k_m}\|\|S^{-1} - S_{k_m}^{-1}\|$$

Από τη norm σύγκλιση της S_{k_m} στο δ και τη σύγκλιση της $S_{k_m}^{-1}$ στον S^{-1} έπεται ότι υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|S_{k_m}\| \leq 2\delta$ και $\|S^{-1} - S_{k_m}^{-1}\| \leq \frac{1}{4\delta}$ για κάθε $m \geq m_0$. Επομένως,

$$\|S_{k_m} \circ S^{-1} - Id\| < 1$$

και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι ο $S_{k_m} \circ S^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος για καθε $m \geq m_0$, επομένως και ο S^{-1} είναι αντιστρέψιμος. Από τη συνέχεια της απεικόνισης $GL(Y,X) \ni A^{-1} \mapsto A \in GL(X,Y)$ έπεται ότι $S_{k_m} \to S = (S^{-1})^{-1} \in GL(X,Y)$. Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της νόρμας $\| \, \|$ και τη μοναδικότητα του ορίου έχουμε:

$$\|S_{k_m}\| = \|S_{k_m}\|\|S_{k_m}^{-1}\| \longrightarrow \|S\|\|S^{-1}\| = \delta$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Πρόταση 3.5. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, με $\dim(X) = \dim(Y) = n$. Τότε:*

$$d_{BM}(X,Y) = d^G_{BM}(B_X, B_Y)$$

Απόδειξη. *Έστω $\delta \geq 1$ ώστε $d_{BM}(X,Y) = \delta$. Έστω επίσης $\delta' > 0$ και $T \in GL(n)$ ώστε*

$$B_Y \subset T[B_X] \subset \delta' B_Y$$

Ο δεξιός εγκλεισμός δίνει $\|T\| \leq \delta'$ ενώ αν δράσουμε με τον T^{-1} στον αριστερό εγκλεισμό έπεται ότι $\|T^{-1}\| \leq 1$. Άρα $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \delta'$ και εξ ορισμού $\delta \leq \delta'$. Επομένως αποδείξαμε ότι

$$d_{BM}(X,Y) \leq d^G_{BM}(B_X, B_Y)$$

Παρατηρώντας ότι για $T \in GL(n)$

$$B_Y \subset \|T^{-1}\|T[B_X] \subset \|T\|\|T^{-1}\|B_Y$$

και εφόσον $\|T^{-1}\|T \in GL(n)$ έπεται άμεσα και η αντίστροφη ανισότητα. $\square$

Πρόταση 3.6. *Έστω X, Y, Z χώροι με νόρμα, με $\dim(X) = \dim(Y) = \dim(Z) = n$. Ισχύουν τα εξής:*
(i) $d_{BM}(X,Y) = d_{BM}(Y,X)$
(ii) $d_{BM}(X,Y) \leq d_{BM}(X,Z)d_{BM}(Z,Y)$
(iii) $d_{BM}(X,Y) = 1$ αν και μόνο αν οι X, Y είναι ισομετρικοί.
(iv) $d_{BM}(X,Y) = d_{BM}(X^*, Y^*)$.

Απόδειξη. *Το (i) είναι προφανές εξ ορισμού.*
Για το (ii) θεωρούμε $T \in GL(X,Z)$ και $S \in GL(Z,Y)$. Τότε

$$d_{BM}(X,Y) \leq \|T \circ S\|\|S^{-1} \circ T^{-1}\| \leq (\|T\|\|T^{-1}\|)(\|S\|\|S^{-1}\|) \leq d_{BM}(X,Z)d_{BM}(Z,Y)$$

Για το (iii) υποθέτουμε ότι $d_{BM}(X,Y) = 1$. Από την πρόταση (3.4) έπεται ότι υπάρχει $T \in GL(X,Y)$ ώστε $\|T\|\|T^{-1}\| = 1$ άρα για $x \in X$

$$\|x\|_X = \|T^{-1}(T(x))\|_X \leq \|T^{-1}\|\|T(x)\|_Y = \|T\|^{-1}\|T(x)\|_Y \leq \|x\|_X$$

επομένως ο $T/\|T\| : X \to Y$ *είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Από την άλλη, αν οι* X, Y *είναι ισομετρικά ισόμορφοι και* $S : X \to Y$ *ισομετρικός ισομορφισμός τότε* $1 \leq d_{BM}(X,Y) \leq \|S\|\|S^{-1}\| = 1$.
Τέλος, για το (iv) θεωρούμε έναν $T \in GL(X,Y)$ *και το συζυγή τελεστή* $T^* : Y^* \to X^*$ *ο οποίος ορίζεται ως* $T^*(y^*) = y^* \circ T$. *Ο* T^* *είναι αντιστρέψιμος με* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ *και από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι* $\|T^*\| = \|T\|$ *και* $\|(T^*)^{-1}\| = \|T^{-1}\|$. *Επομένως:*

$$d_{BM}(X^*, Y^*) \leq \|T^*\|\|(T^*)^{-1}\| = \|T\|\|T^{-1}\| \leq d_{BM}(X,Y)$$

Εφόσον οι X, Y *είναι πεπερασμένης διάστασης είναι αυτοπαθείς, δηλαδή οι* X, X^{**} *και οι* Y, Y^{**} *είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Επομένως από το (iii) έχουμε ότι* $d_{BM}(X, X^{**}) = d_{BM}(Y, Y^{**}) = 1$. *Εφαρμόζοντας την ανισότητα που μόλις αποδείχθηκε για τα δυϊκά ζεύγη* (X^*, X^{**}) *και* (Y^*, Y^{**}) *προκύπτει*

$$d_{BM}(X^{**}, Y^{**}) \leq d_{BM}(X^*, Y^*) \tag{3.1}$$

Χρησιμοποιώντας το (ii) και την (3.1) έχουμε:

$$d_{BM}(X,Y) \leq d_{BM}(X, X^{**}) d_{BM}(X^{**}, Y^{**}) d_{BM}(Y^{**}, Y) \leq d_{BM}(X^*, Y^*)$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Θεωρώντας το σύνολο $\mathcal{S}_n$ των χώρων Banach διάστασης n, ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας ως εξής:

$$X \sim Y \text{ αν και μόνο αν ο } X \text{ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον } Y.$$

Από την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η απεικόνιση $d : \mathcal{S}_{n/\sim} \times \mathcal{S}_{n/\sim} \to [0, \infty)$ με $d(X,Y) = \log d_{BM}(X,Y)$ ορίζει μια μετρική. Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{S}_{n/\sim}, d)$ λέγεται **Banach-Mazur compactum**.

3.2 Το Θεώρημα του John

Ορισμός 3.7. *Έστω* $K \subset \mathbb{R}^n$ *ένα συμμετρικό κυρτό σώμα. Το σύνολο*

$$\{T[K] : T \in GL(n)\}$$

λέγεται ***σύνολο των θέσεων*** *του* K.

Ορισμός 3.8. *Ένα σύνολο* $E \subset \mathbb{R}^n$ *το οποίο ανήκει στο σύνολο των θέσεων της ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας* B_2^n *λέγεται* ***ελλειψοειδές*** *στον* $\mathbb{R}^n$. *Συγκεκριμένα το* $E \subset \mathbb{R}^n$ *είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν* $E = T[B_2^n]$, *για κάποιο* $T \in GL(n)$.

Κάνοντας χρήση της πολικής παραγοντοποίησης ενός πίνακα $T \in GL(n)$, μπορούμε να γράψουμε $T = PU$, όπου ο P ένας $n \times n$ θετικά ορισμένος πίνακας και U ένας $n \times n$ ορθογώνιος πίνακας και οι P, U είναι μονοσήμαντα προσδιορισμένοι. Οι ορθογώνιοι πίνακες αντιστοιχούν σε γραμμικές ισομετρίες από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ επομένως απεικονίζουν την B_2^n στην B_2^n. Ένα ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα θετικά ορισμένο πίνακα P εφόσον

$$E = T[B_2^n] = PU[B_2^n] = P[B_2^n] \tag{3.2}$$

O F. John (1948)[12] απέδειξε ότι για τυχόν συμμετρικό κυρτό σώμα K, υπάρχει ένα μοναδικό ελλειψοειδές μεγίστου όγκου το οποίο περιέχεται στο K. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το αποτέλεσμα αυτό δίνει ένα χρήσιμο άνω φράγμα για την απόσταση ενός n-διάστατου χώρου Banach X, από τον Ευκλείδειο χώρο $\ell_2^n = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$.
Αρχικά, αποδεικνύεται η ύπαρξη ενός ελλειψοειδούς μέγιστου όγκου το οποίο περιέχεται σε ένα κυρτό συμμετρικό σώμα.

Πρόταση 3.9. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα. Τότε υπάρχει $T_K \in GL(n)$ ώστε το ελλειψοειδές $E = T_K[B_2^n] \subset K$ να έχει μέγιστο όγκο.*

Απόδειξη. *Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{E} = \{T \in GL(n) : T[B_2^n] \subset K\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$.
Το K έχει μη-κενό εσωτερικό , επομένως υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $\epsilon B_2^n \subset K$, άρα το $\mathcal{E}$ είναι μη-κενό. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{E}$ είναι συμπαγές. Πράγματι έστω $(T_m)_m \subset \mathcal{E}$ και $T \in GL(n)$ ώστε $T_m \to T$. Τότε, $T_m(x) \in K$ για κάθε $x \in B_2^n$ και $m \in \mathbb{N}$ και το K είναι κλειστό. Έπεται ότι $T_m(x) \to T(x) \in K$ άρα το $\mathcal{E}$ είναι κλειστό. Εφόσον το K είναι φραγμένο έχουμε $K \subset MB_2^n$, για κάποιο $M > 0$, άρα για κάθε $T \in \mathcal{E}$ ισχύει $\|T\| \leq M$. Καταλήξαμε ότι το $\mathcal{E}$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$ άρα είναι συμπαγές.
Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $GL(n) \ni T \mapsto \phi(T) = |\det T| \in \mathbb{R}$. Η ϕ είναι συνεχής, εφόσον η ορίζουσα περιέχει μόνο γινόμενα και το αθροίσματα στοιχείων του T. Όπως είδαμε το $\mathcal{E}$ είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $T_K \in \mathcal{E}$ που μεγιστοποιεί τη ϕ. Θέτουμε $E = T_K[B_2^n]$ και μένει να δείξουμε ότι το E έχει μέγιστο όγκο. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $E' = T[B_2^n] \subset K$ με $\lambda_n(E') > \lambda_n(E')$, τότε από τις ιδιότητες του μέτρου Lebesgue έπεται ότι*

$$|\det T|\lambda_n(B_2^n) > |\det T_K|\lambda_n(B_2^n)$$

το οποίο προφανώς είναι άτοπο εφόσον το T_K μεγιστοποιεί τη ϕ. $\square$

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου ενός κυρτού σώματος K είναι μοναδικό. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 3.10. *Έστω $A \in GL(n)$ ένας θετικά ορισμένος πίνακας. Τότε :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle} d\lambda_n(x) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det(A)^{1/2}} \tag{3.3}$$

Απόδειξη. *Θα χρειαστούμε το γεγονός ότι ένας θετικά ορισμένος πίνακας έχει θετικές ιδιοτιμές και διαγωνοποιείται από ένα ορθογώνιο πίνακα P. Επομένως, έχουμε ότι $A = PDP^T$ όπου $D = diag\{a_1, \dots, a_n\}$ και $a_i > 0$ οι ιδιοτιμές του A. Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και του ορθογώνιου πίνακα P έχουμε*

$$\langle Ax, x\rangle = \langle PDP^T x, x\rangle = \langle DP^T x, P^T x\rangle = \langle DP^{-1}x, P^{-1}x\rangle$$

για $x \in \mathbb{R}^n$. Κάνοντας την αντικατάσταση $x = Py$ στο αριστερό μέλος της σχέσης (3.3) έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle DP^{-1}x,P^{-1}x\rangle} d\lambda_n(x) = |det(P)| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Dy,y\rangle} d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Dy,y\rangle} d\lambda_n(y)$$

εφόσον $|det(P)| = 1$. Επιπλέον για $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Dy, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i^2$$

άρα με την αντικατάσταση $y = D^{-\frac{1}{2}}z$, όπου $D^{-\frac{1}{2}} = diag\{\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\}$, έπεται

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Dy,y\rangle} d\lambda_n(y) = \frac{1}{\det(D)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n z_i^2} d\lambda_n(z)$$

$$= \frac{1}{\det(A)^{1/2}} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\Big)^n$$

$$= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det(A)^{1/2}}$$

□

Πρόταση 3.11. *Έστω $A, B \in GL(n)$ θετικά ορισμένοι πίνακες και $t \in [0,1]$. Τότε*

$$\det(tA + (1-t)B) \geq \det(A)^t \det(B)^{1-t} \tag{3.4}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $A = B$.

Απόδειξη. *Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι*

$$\frac{(\pi)^{n/2}}{\det(tA+(1-t)B)^{1/2}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle (tA+(1-t)B)x,x\rangle} d\lambda_n(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-\langle Ax,x\rangle}\right)^t \left(e^{-\langle Bx,x\rangle}\right)^{1-t} d\lambda_n(x)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder στο τελευταίο ολοκλήρωμα έπεται ότι

$$\frac{(\pi)^{n/2}}{\det(tA+(1-t)B)^{1/2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} d\lambda_n(x)\right)^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Bx,x\rangle} d\lambda_n(x)\right)^{1-t}$$

$$= \frac{(\pi)^{n/2}}{\det(A)^{t/2}\det(B)^{(1-t)/2}}$$

από όπου έπεται άμεσα η ζητούμενη ανισότητα. Παρατηρούμε τώρα ότι η (3.4) *ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν η ανισότητα Hölder ισχύει ως ισότητα. Για* $p = 1/t, q = 1/(1-t), f(x) = e^{-t\langle Ax,x\rangle}$ *και* $g(x) = e^{-(1-t)\langle Bx,x\rangle}$ *έχουμε*

$$\left(\frac{f}{\|f\|_p}\right)^p = \left(\frac{g}{\|g\|_q}\right)^q$$

Άρα $\det(A)e^{-\langle Ax,x\rangle} = \det(B)\ e^{-\langle Bx,x\rangle}$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$. *Ισοδύναμα* $\langle (A - cB)x, x\rangle = 0$ *από όπου έπεται ότι έχουμε ισότητα αν και μόνο αν* $A = cB$. *Αντικαθιστώντας στην αρχική σχεση έπεται ότι* $c = 1$. □

Πρόταση 3.12. *Έστω* $K \subset \mathbb{R}^n$ *ένα συμμετρικό κυρτό σώμα. Το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του* K *είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. *Υποθέτουμε προς εις άτοπον απαγωγή ότι υπάρχουν δύο ελλειψοειδή* $E_1 \neq E_2$ *τα οποία περιέχονται στο* K *και έχουν μέγιστο όγκο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι* $E_1 = B_2^n$ *και* $E_2 = T[B_2^n]$, *για* $T \in GL(n)$. *Το* K *είναι κυρτό επομένως*

$$\frac{(Id+T)}{2}[B_2^n] \subset K$$

και $\lambda_n(E) = \det(\frac{Id+T}{2})\lambda_n(B_2^n) \leq \lambda_n(B_2^n)$. *Από την άλλη, εφόσον τα* E_1, E_2 *έχουν ίσους όγκους, θα πρέπει* $\det(T) = 1$ *ενώ χρησιμοποιώντας την* (3.4) *έπεται ότι*

$$1 = \det(T) \geq \det\left(\frac{Id+T}{2}\right) \geq 1$$

άρα τελικά η (3.4) ισχύει ως ισότητα. Από την προηγούμενη πρόταση $T = Id$, δηλαδή $E_1 = E_2$ επομένως καταλήξαμε σε άτοπο και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Από τα παραπάνω έπεται ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E = T[B_2^n]$ που περιέχεται στο K και έχει μέγιστο όγκο. Επομένως υπάρχει μοναδικη θέση K' του K ώστε η B_2^n να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K' (αρκεί να θεωρήσουμε $K' = T^{-1}[K]$). Η θέση αυτή του K ονομάζεται **θέση John**.

Έχοντας αποδείξει την ύπαρξη και μοναδικότητα ενός ελλειψοειδούς μέγιστου όγκου το οποίο είναι «εγγεγραμμένο» σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το δυϊσμό που εκφράζεται μέσω του πολικού σώματος για να αποδείξουμε της ύπαρξη και μοναδικότητα ενός ελλειψοειδούς ελάχιστου όγκου το οποίο είναι «περιγεγραμμένο» στο K.

Λήμμα 3.13. *Έστω $E = A[B_2^n]$ ένα ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$. Τότε*

$$E^\circ = (A[B_2^n])^\circ = (A^T)^{-1}[B_2^n] \tag{3.5}$$

και άρα

$$\lambda_n(E)\lambda_n(E^\circ) = |\det(A)||\det(A^T)^{-1}|\lambda_n(B_2^n)^2 = \lambda_n(B_2^n)^2 \tag{3.6}$$

Απόδειξη. *Πράγματι, αν $x \in E^\circ$ τότε $\langle Ay, x\rangle = \langle y, A^T x\rangle \leq 1$ για κάθε $y \in B_2^n$. Θέτοντας $y = A^T x/\|A^T x\|_2$ έπεται ότι $A^T x \in B_2^n$. Από την άλλη, αν $x \in (A^T)^{-1}[B_2^n]$ τότε $A^T x \in B_2^n$ και για $y \in B_2^n$ έπεται ότι $\langle Ay, x\rangle = \langle y, A^T x\rangle \leq \|y\|_2\|A^T x\|_2 = 1$, άρα $x \in E^\circ$.* □

Πρόταση 3.14. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα. Τότε υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου το οποίο περιέχει το K.*

Απόδειξη. *Σύμφωνα με τα προηγούμενα, το πολικό σώμα K° περιέχει ένα ελλειψοειδές $E \subset \mathbb{R}^n$ μεγίστου όγκου. Από το (iii) της πρότασης (1.31) έπεται ότι $K = K^{\circ\circ} \subset E^\circ$ και ισχυριζόμαστε ότι το E° είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου ογκου του K. Πράγματι, θεωρούμε ένα ελλειψοειδές $E_1^\circ \neq E^\circ$ με $K \subset E_1^\circ$. Τότε, $E_1 \subset K^\circ$ επομένως $\lambda_n(E_1) \leq \lambda_n(E)$. Από το λήμμα (3.5) έχουμε ότι*

$$\lambda_n(E_1^\circ) = \frac{\lambda_n(B_2^n)^2}{\lambda_n(E_1)} \geq \frac{\lambda_n(B_2^n)^2}{\lambda_n(E)} = \lambda_n(E^\circ)$$

άρα $\lambda_n(E^\circ) \leq \lambda_n(E_1^\circ)$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. □

Θεώρημα 3.15. *(John) Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα και $E = T[B_2^n]$ το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Τότε :*

$$E \subset K \subset \sqrt{n}E$$

Το θεώρημα του John προκύπτει ως πόρισμα ενός ισχυρότερου αποτελέσματος το οποίο σχετίζεται με την κατανομή των σημείων επαφής ενός συμμετρικού κυρτού σώματος σε θέση John και της μοναδιαίας μπάλας B_2^n. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα 3.16. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα σε θεση John. Τότε υπάρχουν $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1} \cap \partial K$ σημεία επαφής και $c_1, \dots, c_m > 0$ ώστε*

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j, x \rangle u_j \tag{3.7}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον $n \leq m \leq \frac{1}{2}n(n+1)$.

Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμένες παρατηρήσεις οι οποίες είναι χρήσιμες για την αποσαφήνιση και την απόδειξη του θεωρήματος.

1) Έστω $u \in S^{n-1} \cap \partial K$ ένα σημείο επαφής του K με την B_2^n. Τότε το K και η B_2^n έχουν ένα κοινό υπερεπίπεδο στήριξης στο u και συγκεκριμένα, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο της B_2^n στο u. Έπεται ότι $h_K(u) = h_{B_2^n}(u) = 1$ άρα για το u ισχύει

$$\|u\|_K = \|u\|_{K^\circ} = \|u\|_2 = 1 \tag{3.8}$$

2) Για $u, v \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο $u \otimes v = uv^T \in \mathbb{R}^{n^2}$. Επιπλέον για $A, B \in M_{n \times n}$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle A, B \rangle = tr(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}$$

Από τους παραπάνω ορισμούς διαπιστώνουμε άμεσα ότι ο γραμμικός τελεστής $(u \otimes u)(x) = \langle u, x \rangle u$ είναι η προβολή του $x \in \mathbb{R}^n$ στη διεύθυνση του u και είναι τάξης 1. Τέλος, ισχύει η παρακάτω σχέση που συνδέει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ με το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε:

$$\langle Au, v \rangle = \langle A, u \otimes v \rangle \tag{3.9}$$

για κάθε $u, v \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_{n \times n}$.

3) Αν αντικαταστήσουμε στην (3.7) τα διανύσματα $e_i, i = 1, \dots, n$ της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$ έπεται ότι

$$n = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j, e_i \rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{i=1}^{n} \langle u_j, e_i \rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \|u_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j$$

Επομένως, το θεώρημα (3.16) συνεπάγεται ότι ο ταυτοτικός τελεστής στον $\mathbb{R}^n$ γράφεται ως θετικός γραμμικός (ή αλλιώς κωνικός) συνδυασμός των προβολών στα σημεία επαφής της B_2^n και του K, δηλαδή

$$Id = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \otimes u_j$$

ενώ ο Id/n γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των παραπάνω προβολών. Η αναπαράσταση αυτή συναντάται συχνά στη βιβλιογραφία ως **ανάλυση John** του ταυτοτικού τελεστή.

Απόδειξη. *Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο Id γράφεται ως κωνικός συνδυασμός των προβολών $u_j \otimes u_j$ όπου $(u_j)_{j=1}^m \subset S^{n-1} \cap \partial K$. Τετριμμένα αποδεικνύεται ότι το σύνολο $S^{n-1} \cap \partial K$ των σημείων επαφής είναι μη κενό, διότι σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε $r > 1$ ώστε $rB_2^n \subset K$ το οποίο είναι άτοπο, εφόσον η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.*
Συμβολίζοντας με $\mathcal{P}$ το σύνολο των θετικά ορισμένων $n \times n$ πινάκων και λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (3.2) θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P} : \det(A) \geq 1\}$$

το οποίο αντιστοιχεί στο σύνολο των ελλειψοειδών που έχουν όγκο μεγαλύτερο ή ίσο από την B_2^n. Το $\mathcal{P}$ αποτελεί ένα $\binom{n+1}{2}$-διάστατο υπόχωρο του $GL(n)$ άρα μπορούμε να θεωρήσουμε το $\mathcal{D}$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$.
Ισχυρισμός : Το $\mathcal{D}$ είναι κλειστό, κυρτό και το $\partial\mathcal{D}$ είναι λείο.
Η κλειστότητα έπεται άμεσα από τον ορισμό, ενώ χρησιμοποιώντας την πρόταση (3.11) προκύπτει ότι το $\mathcal{D}$ είναι κυρτό (στην πραγματικότητα είναι αυστηρά κυρτό). Τέλος, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{P} \ni A \mapsto f(A) = \det(A) - 1 \in \mathbb{R}$$

είναι C^∞ και $\partial\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P} : f(A) = 0\}$. Άρα το $\partial\mathcal{D}$ είναι λείο και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Θεωρούμε τώρα τα ελλειψοειδή που περιέχονται στο K. Από το (i) της πρότασης (1.21), ένα ελλειψοειδές E στον $\mathbb{R}^n$ περιέχεται στο K αν και μόνο αν $h_E(x) \leq h_K(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Εφόσον η συνάρτηση στήριξης είναι θετικά ομογενής, το τελευταίο είναι ισοδύναμο με $h_E(u) \leq h_K(u)$ για κάθε $u \in S^{n-1}$. Επομένως, το σύνολο

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{P} : \langle Au, v\rangle \leq h_K(v),\ \forall\, u, v \in S^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

αντιστοιχεί στο σύνολο των ελλειψοειδών που περιέχονται στο K.
Ισχυρισμός : Το $\mathcal{E}$ είναι κλειστό, κυρτό και $\mathcal{E} \cap \mathcal{D} = \{Id\}$.
Πράγματι, το $\mathcal{E}$ είναι ίσο με την τομή των κλειστών, κυρτών ημιχώρων

$$H_{u,v} = \{A \in \mathcal{P} : \langle A, u \otimes v\rangle \leq h_K(v)\}$$

για $u, v \in S^{n-1}$, άρα είναι κλειστό και κυρτό. Επίσης, για κάθε $A \in \mathcal{E}$, με $A \neq Id$, έχουμε εξ υποθέσεως ότι η B_2^n έχει μεγαλύτερο όγκο από το ελλειψοειδές $A[B_2^n]$, δηλαδή $\det(A) < 1$. Έπεται ότι $\mathcal{E} \setminus \{Id\} \subset \mathcal{D}^c$ και ο ισχυρισμός

αποδείχθηκε.
Εξ ορισμού, ο κώνος στήριξης $\mathcal{K}$ *του* $\mathcal{E}$ *στο* Id *προκύπτει από τις τομές των ημιχώρων* $H_{u,v}$ *που περιέχουν το* Id *στο σύνορό τους. Ισοδύναμα,* $\mathcal{K} = \bigcap H_{u,v}$ *για όλα τα* $u, v \in S^{n-1}$ *που ικανοποιούν* $\langle Id, u \otimes v\rangle = \langle u, v\rangle = h_K(v)$*. Όμως* $\langle u, v\rangle \leq \|u\|_2\|v\|_2 = 1 = h_{S^{n-1}}(v) \leq h_K(v)$ *επομένως* $u = v$ *και*

$$\mathcal{K} = \bigcap_{u \in S^{n-1} \cap \partial K} \{A \in \mathcal{P} : \langle A, u \otimes u\rangle \leq 1\}$$

Από τους ισχυρισμούς και το γεγονός ότι το $\partial\mathcal{D} = \{f = 0\}$ *είναι λείο, έπεται ότι το μοναδικό εφαπτόμενο υπερεπίπεδο* H *του* $\mathcal{D}$ *στο* Id *διαχωρίζει τα* $\mathcal{D}, \mathcal{E}$*. Υπολογίζοντας το* ∇f *στο* Id *έπεται ότι το* Id *είναι εσωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα του* $\mathcal{D}$ *στο* Id *επομένως είναι κάθετο και στο* H*. Προφανώς, το* H *στηρίζει το* $\mathcal{E}$ *στο* Id*, επομένως το* Id *ανήκει στον κάθετο κώνο του* $\mathcal{E}$ *που ορίζεται ως*

$$\mathcal{N} = \mathcal{K}^{\circ} = cone\{(u \otimes u) : u \in S^{n-1} \cap \partial K\}$$

Από το θεώρημα του Καραθεοδωρή για κυρτούς κώνους έπεται ότι υπάρχουν $m \leq \frac{1}{2}n(n+1)$*,* $c_1, \dots, c_m > 0$ *και* $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1} \cap \partial K$ *ώστε*

$$Id = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \otimes u_j$$

Τέλος, μένει να αποδειχθεί ότι $m \geq n$*. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι* $span\{u_i\}_{i=1}^m = \mathbb{R}^n$*. Έστω προς εις άτοπον απαγωγή ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε υπάρχει* $u \neq 0$ *το οποίο είναι κάθετο στα* $u_1, \dots, u_m$ *άρα*

$$0 \neq \|u\|_2^2 = \langle Id(u), u\rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j, u\rangle^2 = 0$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, επομένως η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Όπως προαναφέρθηκε, το θεώρημα (3.15) προκύπτει ως συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος. Πράγματι, αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα σε θέση John, τότε από την ανάλυση John του ταυτοτικού τελεστή έπεται ότι για κάθε $x \in K$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j, x\rangle^2 \leq \sum_{j=1}^{m} c_j \|u_j\|_{K^{\circ}} \|x\|_K \leq \sum_{j=1}^{m} c_j = n$$

άρα

$$B_2^n \subset K \subset \sqrt{n} B_2^n$$

Θεώρημα 3.17. *Έστω X ένας χωρος Banach διάστασης n. Τότε*

$$d_{BM}(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n} \tag{3.10}$$

Απόδειξη. *Έστω $K = B_X$. Από την πρόταση (3.5) έχουμε ότι $d_{BM}(X, \ell_2^n) = d_{BM}^G(B_X, B_{\ell_2^n}) = d_{BM}^G(K, B_2^n)$. Αν $E = T[B_2^n]$ είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε από το θεώρημα (3.15) του John έχουμε ότι*

$$B_2^n \subset T^{-1}[K] \subset \sqrt{n} B_2^n$$

εφόσον το $T^{-1}[K]$ είναι σε θέση John. Από τον ορισμό (3.2) προκύπτει άμεσα το ζητούμενο □

Αποδεικνύεται τώρα ότι το άνω φράγμα $\sqrt{n}$ είναι το βέλτιστο δυνατό καθώς επιτυγχάνεται για τον $X = \ell_\infty^n = (\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι ο κύβος $[-1, 1]^n = B_\infty^n$ απέχει από τη μοναδιαία μπάλα B_2^n απόσταση $\sqrt{n}$ Πράγματι, μπορούμε άμεσα να διαπιστώσουμε ότι η μπάλα $\sqrt{n} B_2^n$ είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει τον κύβο B_∞^n . Επομένως, για $T \in GL(n)$ και $\delta > 0$ ώστε $B_2^n \subset T[B_\infty^n] \subset \delta B_2^n$ έχουμε ότι $B_\infty^n \subset \delta E = \delta T^{-1}[B_2^n]$. Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει

$$\lambda_n(\delta E) = \delta^n \lambda_n(E) \geq (\sqrt{n})^n \lambda_n(B_2^n) = \lambda_n(\sqrt{n} B_2^n)$$

Άρα το δ είναι μεγαλύτερο από $\sqrt{n}$ και κατ' επέκταση $d_{BM}^G(B_\infty^n, B_2^n) \geq \sqrt{n}$. Σε συνδυασμό με την (3.10) καταλήγουμε ότι

$$d_{BM}(\ell_\infty^n, \ell_2^n) = \sqrt{n} \tag{3.11}$$

Πόρισμα 3.17.1. *Έστω X, Y χώροι Banach διάστασης n. Τότε*

$$d_{BM}(X, Y) \leq n$$

Απόδειξη. *Χρησιμοποιώντας το (ii) της πρότασης (3.6) και την (3.10) έχουμε*

$$d_{BM}(X, Y) \leq d_{BM}(X, \ell_2^n)\, d_{BM}(\ell_2^n, Y) \leq \sqrt{n}\sqrt{n} = n$$

□

Λήμμα 3.18. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό συμμετρικό σώμα σε θέση John. Τότε για κάθε $T \in M_{n \times n}$ υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$, σημείο επαφής του K με τη B_2^n ώστε*

$$\langle y, T(y) \rangle \geq \frac{tr(T)}{n} \tag{3.12}$$

Απόδειξη. *Χρησιμοποιώντας την ανάλυση John του ταυτοτικού τελεστή έχουμε*

$$tr(T) = \langle T, Id \rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle T, u_j \otimes u_j \rangle$$

όπου u_j τα σημεία επαφής του K με τη B_2^n. Έστω προς εις άτοπον απαγωγή ότι $\langle u_j, T(u_j) \rangle < tr(T)/n$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Τότε από τη σχέση (3.9) έπεται ότι :

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j, T(u_j) \rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle T, u_j \otimes u_j \rangle < \frac{tr(T)}{n} \sum_{j=1}^{m} c_j = tr(T)$$

το οποίο είναι άτοπο και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι γνωστό ως λήμμα των Dvoretzky και Rogers είναι κρίσιμο για την απόδειξη του θεωρήματος Dvoretzky για τους σχεδόν ευκλείδειους υποχώρους ενός χώρου με νόρμα πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 3.19. *(Dvoretzky-Rogers) Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό συμμετρικό σώμα σε θέση John . Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^n$ ώστε*

$$\left(\frac{n-i+1}{n} \right)^{1/2} \leq \|z_i\|_K \leq 1 \tag{3.13}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη. *Ορίζουμε τα z_i επαγωγικά. Για $i = 1$ επιλέγουμε ένα σημείο επαφής z_1 του K με τη B_2^n και υποθέτουμε ότι τα $z_1, \ldots, z_k$ έχουν οριστεί για $k < n$. Θέτουμε F_k τον υπόχωρο $span\{z_1, \ldots, z_k\}$ και συμβολίζουμε με $P_{F_k^\perp}$ την προβολή στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του F_k. Τότε $tr(P_{F_k^\perp}) = n - k$ και από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι υπάρχει y_{k+1} σημείο επαφής του K με τη B_2^n ώστε*

$$\|P_{F_k^\perp}(y_{k+1})\|_2^2 = \langle y_{k+1}, P_{F_k^\perp}(y_{k+1}) \rangle \geq \frac{tr(P_{F_k^\perp})}{n} = \frac{n-k}{n}$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $P^2 = P$ που ισχύει για μια προβολή σε διανυσματικό υπόχωρο). Κανονικοποιώντας, θέτουμε

$$z_{k+1} = \frac{P_{F_k^\perp}(y_{k+1})}{\|P_{F_k^\perp}(y_{k+1})\|_2}$$

Εφόσον η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K και $z_{k+1} \in S^{n-1}$ έπεται ότι

$$1 = \|z_{k+1}\|_2 \geq \|z_{k+1}\|_K \geq \langle z_{k+1}, y_{k+1} \rangle = \|P_{F_k^\perp}(y_{k+1})\|_2 \geq \left(\frac{n-k}{n} \right)^{1/2}$$

και το επαγωγικό βήμα ολοκληρώθηκε. □

Πόρισμα 3.19.1. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό συμμετρικό σώμα σε θέση John και $k = [\frac{n}{2}]+1$. Τότε υπάρχουν ορθοκανονικά διανύσματα $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{R}^n$ ώστε*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \|z_i\|_K \leq 1 \tag{3.14}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, k$.

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο επισημαίνεται ότι ένα ανάλογο του θεωρήματος (3.16) ισχύει και για μη-συμμετρικά κυρτά σώματα. Οι ορισμοί των ελλειψοειδών και της απόστασης Banach-Mazur γενικεύονται άμεσα για μη-συμμετρικά σώματα, αρκεί να αντικαταστήσουμε τους γραμμικούς μετασχηματισμούς με αφινικούς μετασχηματισμούς (δηλαδή γραμμικούς μετασχηματισμούς συνοδευόμενους από μια μετατόπιση).
Συγκεκριμένα, θεωρώντας ένα τέτοιο σώμα K αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές μέγιστου όγκου $E = T[B_2^n] + x \subset K$, όπου $T \in GL(n), x \in \mathbb{R}^n$ και επιπλέον:

Θεώρημα 3.20. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σώμα σε θεση John. Τότε υπάρχουν $u_1, \ldots, u_m \in S^{n-1} \cap \partial K$ σημεία επαφής και $c_1, \ldots, c_m > 0$ ώστε*

$$(i)\ \sum_{j=1}^{m} c_j = 0$$

$$(ii)\ x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j, x\rangle u_j$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Η πρώτη ιδιότητα εξασφαλίζει ότι τα σημεία επαφής δεν βρίσκονται «στην ίδια πλευρά » της S^{n-1} και είναι περιττή για την συμμετρική εκδοχή του θεωρήματος. Πράγματι, για μια ακολουθία σημείων επαφής u_i και συντελεστές με $\sum_i c_i = n$ μπορούμε, στη συμμετρική περίπτωση, να αντικαταστήσουμε τα u_i με το ζεύγος $\pm u_i$ με συντελεστές $c_i/2$.
Κατ΄ αναλογία με τη συμμετρική περίπτωση προκύπτει ότι για ένα κυρτό σώμα K με ελλειψοειδές μέγιστου όγκου E ισχύει

$$E \subset K \subset nE$$

Το n είναι βέλτιστο καθώς επιτυγχάνεται στην περίπτωση που $E = B_2^n$ και K ένα κανονικό n-simplex στον $\mathbb{R}^n$.

Πράγματι, θεωρούμε το κανονικό, μοναδιαίο simplex $\Delta^n = conv\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ το οποίο μπορούμε να αντιληφθούμε ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$ που περιέχεται στο υπερεπίπεδο $H = \{t \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i t_i = 1\}$. Το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που είναι περιγεγραμένο στο Δ^n είναι το σύνολο $B_2^{n+1} \cap H \cong B_2^n$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n+1$, συμβολίζουμε με F_i τη $(n-1)$-διάστατη έδρα του Δ^n που ορίζεται ως η κυρτή θήκη του $\{e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_{n+1}\}$ και είναι ένα κανονικό $(n-1)$-simplex. Τότε, θεωρώντας τα βαρύκεντρα των F_i, δηλαδή τα σημεία

$$u_i = \frac{1}{n} \sum_{k \neq i} e_k$$

έπεται ότι

$$\|u_i - u_j\| = \frac{1}{n} \|e_i - e_j\| \,, i \neq j$$

Άρα το $(n-1)$-simplex $S = conv\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}$ είναι κανονικό και ομοιοθετικό του Δ^n. Συγκεκριμένα, το S προκύπτει από μια περιστροφή του Δ^n και μία συστολή κατά $1/n$, επομένως το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του S ταυτίζεται με το $E = \frac{1}{n} B_2^n$. Όμως εξ ορισμού το E είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που είναι εγγεγραμμένο στο Δ^n και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι το συμμετρικό, κυρτό σώμα που προσεγγίζει «χειρότερα» τη μοναδιαία μπάλα είναι ο μοναδιαίος κύβος ($d_{BM}^G(B_\infty^n, B_2^n) = \sqrt{n}$) ενώ το μη-συμμετρικό σώμα που δίνει τη «χειρότερη» δυνατή προσέγγιση είναι ένα κανονικό n-simplex ($d_{BM}^G(S, B_2^n) = n$).

Κεφάλαιο 4

Η ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα $B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος για τη συνέχεια, καθώς η σφαίρα $S^{n-1} = \partial B_2^n$, κατάλληλα εφοδιασμένο με μια μετρική και ένα μέτρο πιθανότητας αποτελεί το θεμελιώδη μετρικό χώρο πιθανότητας στον οποίο συναντάται το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου.
Αρχικά θα ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} το οποίο θα μας επιτρέψει στη συνέχεια να μιλήσουμε για τις πολικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 4.1. *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου, $(Y, \mathcal{N})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : X \to Y$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε η απεικόνιση $f_{*\mu} : \mathcal{N} \to [0, +\infty)$ με*

$$f_{*\mu}(N) = \mu(f^{-1}(N)) \ , N \in \mathcal{N}$$

*λεγεται **push-forward** του μ στον Y και ορίζει ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(Y, \mathcal{N})$.*

Υπενθυμίζεται ότι η σ-αλγεβρα Borel σε ένα τοπολογικό χώρο (X, τ) συμβολίζεται με $\mathcal{B}(X)$ και ορίζεται ως η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα του X, δηλαδή $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$. Στη συνέχεια, όπου δεν διευκρινίζεται περεταίρω, θεωρούμε την S^{n-1} εφοδιασμένη με τη σ-άλγεβρα Borel $\mathcal{B}(S^{n-1})$, ως προς τη συνήθη τοπολογία που επάγεται στην S^{n-1} από τον $\mathbb{R}^n$. Επίσης, θεωρουμε το $\mathbb{R}^n$ και την ευκλείδεια μπάλα B_2^n εφοδιασμένα με το μέτρο Lebesgue λ_n, στη σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ με $\Phi(x) = x/\|x\|_2$ και συμβολίζουμε με ϕ τον περιορισμό της Φ στην $B_2^n \setminus \{0\}$. Παρατηρούμε ότι η Φ είναι επί της S^{n-1}. Επιπλέον, η συνέχεια της νόρμας και του βαθμωτού γινομένου εγγυάται ότι η Φ είναι συνεχής, άρα είναι Borel μετρήσιμη.

Ορισμός 4.2. *Το* ***επιφανειακό μέτρο*** $\lambda_{S^{n-1}} : \mathcal{B}(S^{n-1}) \to [0, +\infty)$ *ορίζεται ως το push-forward*

$$\lambda_{S^{n-1}} = n\phi_{*\lambda_n} : \mathcal{B}(S^{n-1}) \longrightarrow [0, +\infty)$$

Από τα σχόλια που προηγούνται του ορισμού έπεται ότι το $\lambda_{S^{n-1}}$ είναι ένα πεπερασμένο μέτρο στην S^{n-1}.

Πρόταση 4.3. *Έστω* $A \in \mathcal{B}(S^{n-1})$*. Τότε*

$$\lambda_{S^{n-1}}(A) = n\lambda_n\big(\{tx : x \in A,\ t \in (0,1]\}\big) \tag{4.1}$$

Απόδειξη. *Εξ ορισμού, έχουμε ότι* $\lambda_{S^{n-1}}(A) = n\lambda_n(\phi^{-1}(A))$*. Αρκεί να αποδείξουμε ότι* $\phi^{-1}(A) = \{tx \in \mathbb{R}^n : x \in A, t \in (0,1]\} = B$*. Έστω* $x \in \phi^{-1}(A) \subset B_2^n \setminus \{0\}$*. Τότε* $\phi(x) = x/\|x\|_2 \in A \subset S^{n-1}$ *και* $x = \|x\|_2(x/\|x\|_2) \in B$*.*
Από την άλλη, αν $x \in B$*, τότε* $x = sy$*, για* $y \in A \subset S^{n-1}, t \in (0,1]$*. Άρα* $\phi(x) = sy/\|sy\|_2 = y \in A$*, δηλαδή* $x \in \phi^{-1}(A)$ *και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.*

Παρατηρούμε ότι το $\lambda_{S^{n-1}}(S^{n-1}) = n\lambda_n(B_2^n)$ ταυτίζεται με την επιφάνεια $\partial(B_2^n)$ όπως υπολογίστηκε στην απόδειξη του θεωρήματος (2.11). Κανονικοποιώντας το $\lambda_{S^{n-1}}$ προκύπτει ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 4.4. *Το* ***ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας*** *στην* S^{n-1} *ορίζεται ως μια απεικόνιση* $\sigma_n : \mathcal{B}(S^{n-1}) \to [0,1]$ *με*

$$\sigma_n(A) = \frac{\lambda_n\big(\{tx : x \in A,\ t \in (0,1]\}\big)}{\lambda_n(B_2^n)} \quad , A \in \mathcal{B}(S^{n-1}) \tag{4.2}$$

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $\pi : \mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ με $\pi(r,\theta) = r\theta$. Η π είναι 1-1, επί και συνεχής και η αντίστροφη εικόνα

$$\pi^{-1}(x) = (r,\theta) = (\|x\|_2, \Phi(x))$$

είναι συνεχής. Το ζεύγος (r,θ) καλείται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύεται ο τύπος της ολοκλήρωσης με χρήση πολικών συντεταγμένων, για συνεχείς συναρτήσεις συμπαγούς φορέα στο $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 4.5. *Έστω* $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$*. Τότε ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\lambda_n(x) = \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(r\theta)\, r^{n-1}dr\, d\lambda_{S^{n-1}}(\theta)$$

Απόδειξη. *Έστω $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ και $\epsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο $supp(f)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, για κάθε $x \in supp(f)$ με $\|x - y\|_2 < \delta$. Για $r > 0$ ορίζουμε την απεικόνιση*

$$F(r) = \int_{rB_2^n} f d\lambda_n$$

Τότε για $0 < h \leq \delta$ έχουμε:

$$\int_{(r+h)B_2^n \setminus rB_2^n} \{f(x) - f \circ \pi\big(r, \Phi(x)\big)\} d\lambda_n(x) \leq \epsilon\big((r+h)^n - r^n\big)\lambda_n(B_2^n) \quad (4.3)$$

εφόσον $\|x - \pi\big(r, \Phi(x)\big)\|_2 = \big\|x - \frac{rx}{\|x\|_2}\big\|_2 = \|x\|_2 - r \leq h \leq \delta$.

Από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος και τον ορισμό (4.2) έπεται ότι

$$\int_{rB_2^n \setminus \{0\}} f \circ \Phi(x) d\lambda_n(x) = r^n \int_{B_2^n \setminus \{0\}} f \circ \Phi(x) d\lambda_n(x) = \frac{r^n}{n} \int_{S^{n-1}} f(\theta) d\lambda_{S^{n-1}}(\theta)$$

Άρα

$$F(r+h) - F(r) = \int_{(r+h)B_2^n \setminus rB_2^n} f d\lambda_n =$$

$$= \int_{(r+h)B_2^n \setminus rB_2^n} f \circ \pi\big(r, \Phi(x)\big) d\lambda_n(x) + \int_{(r+h)B_2^n \setminus rB_2^n} \{f(x) - f \circ \pi\big(r, \Phi(x)\big)\} d\lambda_n(x)$$

επομένως καταλήγουμε ότι η F είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^+$ με

$$F'(r) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(r+h) - F(r)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(r+h)^n - r^n}{nh} \int_{S^{n-1}} f \circ \pi(r, \theta) d\lambda_{S^{n-1}}(\theta)$$

$$= r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(r\theta) \, d\lambda_{S^{n-1}}(\theta)$$

Εφόσον $\lim_{r \to 0^+} F(r) = 0$, το θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού σε συνδυασμό με το θεώρημα Fubini δίνουν ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda_n(x) = \lim_{r \to \infty} F(r) = \int_0^\infty F'(r) dr = \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(r\theta) \, r^{n-1} dr \, d\lambda_{S^{n-1}}(\theta)$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πρόταση 4.6. *Έστω (X, d) πλήρης, διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και μ, ν σ-πεπερασμένα μέτρα Borel στον X. Αν για κάθε $f \in C_c(X)$ ισχύει ότι*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\nu$$

Τότε $\mu = \nu$.

Απόδειξη. *Εφόσον ο X είναι πλήρης και διαχωρίσιμος, τα μ, ν είναι tight, δηλαδή οι τιμές τους σε ένα μετρήσιμο σύνολο $C \subset X$ καθορίζονται από τα συμπαγή σύνολα που περιέχονται στο C (βλ. [18]). Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $\mu(K) = \nu(K)$ για κάθε συμπαγές $K \subset X$. Για ένα τέτοιο K ορίζουμε την ακολουθία $f_n : X \to \mathbb{R}^+$ με*

$$f_n(x) = \left(\frac{d(x, K)}{1 + d(x, K)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad , x \in X$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι συνεχής (από τις ιδιότητες της μετρικής) και έχει συμπαγή φορέα (supp$(f) = K$). Επιπλέον, για κάθε $x \in X \setminus K$ έχουμε ότι $0 < f_n(x)^n \leq 1$ και η $(f_n)_n$ είναι γνησίως αύξουσα, επομένως $f_n(x) \nearrow \chi_K(x)$, $n \to \infty$ για κάθε $x \in X$. Άρα $(f_n)_n \subset C_c(X)$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης και την υπόθεση έπεται ότι

$$\mu(G) = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\nu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\nu = \nu(G)$$

□

Συνδυάζοντας τις προτάσεις (4.5) και (4.6) προκύπτει άμεσα το επόμενο πόρισμα που αφορά τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$

Πόρισμα 4.6.1. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda_n(x) = \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(r\theta)\, r^{n-1} dr \; d\lambda_{S^{n-1}}(\theta) \tag{4.4}$$

Απόδειξη. *Ορίζουμε στον $\mathbb{R}^+$ το μέτρο λ_r με $\lambda_r(A) = \int_A r^{n-1} dr$ για κάθε $A \in \mathcal{B}_{[0,\infty)}$. Από τον ορισμό της απεικόνισης π έπεται ότι ο $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \| \, \|_2)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $(S^{n-1} \times \mathbb{R}^+, d)$ όπου $d(\theta, r) = r$, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_n = \pi_{*\lambda_{S^{n-1}} \times \lambda_r}$. Από την (4.5) έχουμε ότι*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{S^{n-1} \times \mathbb{R}^+} f \circ \pi \; \lambda_{S^{n-1}} \times \lambda_r$$

για κάθε $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Εφαρμόζοντας την (4.6) έπεται άμεσα το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας σ_n στην S^{n-1} η (4.4) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\lambda_n(x) = n\lambda_n(B_2^n)\int_{S^{n-1}}\int_0^{\infty} f(r\theta)\, r^{n-1}dr\, d\sigma_n(\theta) \tag{4.5}$$

4.1 Ο όγκος της Ευκλείδειας μπάλας

Στη συνέχεια, υπολογίζεται ο όγκος της Ευκλείδειας μπάλας B_2^n και επισημαίνονται κάποιες αξιοσημείωτες παρατηρήσεις που αφορούν την αλληλεπίδραση μεταξύ όγκου και ακτίνας για μεγάλες τιμές της διάστασης n

Ορισμός 4.7. *Η **συνάρτηση Γάμμα** ορίζεται ως μια απεικόνιση* $\Gamma : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *με τύπο που δίνεται από το ολοκλήρωμα:*

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{t-1}dx \tag{4.6}$$

Πρόταση 4.8.

$$\lambda_n(B_2^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \tag{4.7}$$

Απόδειξη. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *με* $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2)$. *Ολοκληρώνουμε αρχικά την f σε καρτεσιανές συντεταγμένες:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2}x_i^2}\right)d\lambda_n(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{r^2}{2}}dr\right)^n = (\sqrt{2\pi}\,)^n$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες (σχεση (4.5)) έχουμε:

$$n\lambda_n(B_2^n)\int_{S^{n-1}}\int_0^{\infty} f(r\theta)\, r^{n-1}dr\, d\sigma_n(\theta) = n\lambda_n(B_2^n)\int_{S^{n-1}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r^{n-1}dr\, d\sigma_n(\theta)$$

$$= n\lambda_n(B_2^n)\int_0^{\infty} 2^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{r^2}{2}}\,(r^2/2)^{\frac{n-1}{2}}dr = n\lambda_n(B_2^n)\int_0^{\infty} 2^{\frac{n}{2}-1}e^{-t}\, t^{\frac{n}{2}-1}dt$$

$$= 2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\lambda_n(B_2^n) = 2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\lambda_n(B_2^n)$$

Εξισώνοντας τα προηγούμενα έπεται άμεσα η ζητούμενη σχέση. □

Ορισμός 4.9. *Εστω $f, g : A \subset [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ πραγματικές συναρτήσεις. Λέμε ότι η f είναι **ασυμπτωτικά ίση** με τη g (συμβ. $f \sim g$) αν και μόνο αν*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

*Επιπλέον, θα λέμε ότι η f είναι της **τάξης** της g (συμβ. $f \simeq g$) αν και μόνο αν υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 και t_0 ώστε για κάθε $t \geq t_0$ να ισχύει $c_1 g(t) \leq f(t) \leq c_2 g(t)$.*

Ο τύπος του Stirling , που παρατίθεται παρακάτω χωρίς απόδειξη, περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια τη συμπεριφορά της $\Gamma(t)$ καθώς το t τείνει στο άπειρο.

Πρόταση 4.10. *(Τύπος του Stirling) Έστω $t > 0$. Τότε*

$$\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi t}\left(\frac{t}{e}\right)^t \tag{4.8}$$

Χρησιμοποιώντας την ισχυρή προσέγγιση του τύπου του Stirling μπορούμε να εκτιμήσουμε ασυμπτωτικά τον όγκο της ευκλείδειας μπάλας B_2^n καθώς η διάσταση n τείνει στο άπειρο. Πράγματι, εφαρμόζοντας τον τύπο του Stirling στην (4.7) έχουμε ότι

$$\lambda_n(B_2^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \sim \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{n/2} \tag{4.9}$$

Ισοδύναμα, αν θεωρήσουμε για $r_n > 0$, την ευκλείδεια μπάλα $r_n B_2^n$ μοναδιαίου όγκου προκύπτει ότι $\lambda_n(rB_2^n) = r^n \lambda_n(B_2^n) = 1$, επομένως η ακτίνα r_n είναι ασυμπτωτικά ίση με

$$r_n = \left(\frac{1}{\lambda_n(B_2^n)}\right)^{1/n} \sim (\sqrt{\pi n})^{1/n}\sqrt{\frac{n}{2\pi e}} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi e}} \tag{4.10}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι καθώς το n τείνει στο άπειρο, ο όγκος της ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας ακτίνας 1 είναι πολύ μικρός, καθώς «συμπεριφέρεται» σαν το $(2\pi e/n)^{n/2}$. Από την άλλη η ακτίνα r_n της ευκλείδειας μπάλας του $\mathbb{R}^n$ με μοναδιαίο όγκο, είναι αρκετά μεγάλη καθώς το n τείνει στο άπειρο και συγκεκριμένα είναι της τάξης του $\sqrt{n}$. Η αξιοσημείωτη αυτή συμπεριφορά συνοψίζεται στο εξής: «Όσο αυξάνεται ο αριθμός n των διαστάσεων, ο όγκος της n-διάστατης ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας μειώνεται και η ακτίνα της ευκλείδειας μπάλας μοναδιαίου όγκου αυξάνεται» .

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την κατανομή του όγκου μέσα στην ευκλείδεια μπάλα $r_n B_2^n$ μοναδιαίου όγκου. Αρχικά θα πρέπει να αποσαφηνιστεί η έννοια της κατανομής του όγκου. Προς αυτή την κατεύθυνση, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (1.2) και το γεγονός ότι η B_2^n περιέχεται στη λωρίδα $\{-1 \leq x_i \leq 1\}$ για κάθε $i = 1, \dots n$. Επομένως:

$$1 = \lambda_n(r_n B_2^n) = r_n^n \lambda_n(B_2^n) = \int_{-r_n}^{r_n} \lambda_{n-1}(r_n B_2^n \cap H(t))\, dt$$

όπου για κάθε $t \in [-r_n, r_n]$ το $H(t) \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα υπερεπίπεδο που τέμνει την B_2^n και απέχει απόσταση t από την αρχή των αξόνων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα υπερεπίπεδα $H(t)$ είναι κάθετα στον άξονα x_1. Αν λοιπόν θέσουμε $f_n(t) = \lambda_{n-1}(r_n B_2^n \cap H(t))\chi_{[-r_n, r_n]}(t)$ για $t \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι $(f_n)_n \subset L^1(\mathbb{R})$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η μέση τιμή της f_n ισούται με 1. Ο στόχος είναι να προσδιοριστεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της f_n.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι από την (4.10) έχουμε $\chi_{[-r_n, r_n]}(t) \nearrow \chi_{\mathbb{R}}(t) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ακόμη, για κάθε $t \in [-r_n, r_n]$ και $n \in \mathbb{N}$ η τομή $r_n B_2^n \cap H(t)$ είναι μια $(n-1)$-διάστατη μπάλα ακτίνας $\sqrt{r_n^2 - t^2}$ επομένως:

$$\lambda_{n-1}(r_n B_2^n \cap H(t)) = r_n^{n-1} \lambda_{n-1}(B_2^{n-1}) \left(1 - \frac{t^2}{r_n^2}\right)^{(n-1)/2}$$

Όμως από την (4.10) έχουμε ότι $r_n^{n-1} \sim (\sqrt{\pi n})^{\frac{n-1}{n}} (n/2\pi e)^{\frac{n-1}{2}}$ και $r_n^2 \sim n/2\pi e$. Χρησιμοποιώντας και τη σχέση (4.9) για τον όγκο της B_2^{n-1} έπεται:

$$\begin{aligned} f_n(t) &\sim (\sqrt{\pi n})^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{n}{2\pi e}\right)^{(n-1)/2} \lambda_{n-1}(B_2^{n-1}) \left(1 - \frac{2\pi e t^2}{n}\right)^{(n-1)/2} \\ &\sim \frac{(\sqrt{\pi n})^{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt{\pi(n-1)}} \left(\frac{2\pi e}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \left(\frac{n}{2\pi e}\right)^{(n-1)/2} \left(1 - \frac{2\pi e t^2}{n}\right)^{(n-1)/2} \\ &\sim \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \left(1 - \frac{2\pi e t^2}{n}\right)^{(n-1)/2} \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n/2} = \sqrt{e}$$

και για $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2\pi e t^2}{n}\right)^{(n-1)/2} = e^{-\pi e t^2}$$

καταλήγουμε στο παρακάτω πόρισμα

Πόρισμα 4.10.1. *Για* $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \sqrt{e}\, e^{-\pi e t^2} \tag{4.11}$$

Το αξιοσημείωτο στο πόρισμα αυτό, είναι ότι για μεγάλες τιμές του n, η κατανομή του όγκου μέσα στην ευκλείδεια μπάλα $r_n B_2^n$ «μοιάζει» αρκετά με μια κανονική κατανομή με διασπορά $1/2\pi e$, η οποία μάλιστα είναι ανεξάρτητη του n. Αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα ένα σημείο $x \in r_n B_2^n$ να ανήκει σε μια συμμετρική λωρίδα σταθερού πλάτους γύρω από το 0.
Επιλέγοντας, για παράδειγμα, τη λωρίδα $S = \{x \in r_n B_2^n : -\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}\}$ πλάτους 1, τότε για μεγάλες τιμές του n:

$$\mathbb{P}[\{x \in S\}] \sim \sqrt{e} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-\pi e t^2}\, dt = 1 - 2\sqrt{e} \int_{1/2}^{\infty} e^{-\pi e t^2}\, dt \approx 0.961$$

Παρ'όλο λοιπόν που η ακτίνα της ευκλείδειας μπάλας μοναδιαίου όγκου συμπεριφέρεται σαν το $\sqrt{n}$, για μεγάλες τιμές της διάστασης n, περίπου το 96% του όγκου της συγκεντρώνεται στη λωρίδα S. Παρατηρούμε ότι η λωρίδα S επιλέχθηκε αυθαίρετα, επομένως ο όγκος της $r_n B_2^n$ συγκεντρώνεται σε οποιαδήποτε συμμετρική λωρίδα πλάτους 1 γύρω από το 0. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να καθοδηγήσει τη διαίσθηση στην υπόθεση ότι ο όγκος της $r_n B_2^n$ συγκεντρώνεται στην τομή όλων αυτών των λωρίδων, δηλαδή κοντά στο κέντρο της μπάλας. Μια τέτοια υπόθεση όμως μπορεί να διαψευσθεί ως εξής: Για $\epsilon \in (0,1)$, θεωρούμε την ομόκεντρη μπάλα $\epsilon r_n B_2^n$ που έχει λίγο μικρότερη ακτίνα από την αρχική. Τότε:

$$\lambda_n(\epsilon r_n B_2^n) = \epsilon^n \lambda_n(r_n B_2^n) = \epsilon^n \to 0\ , \quad (n \to \infty)$$

άρα, για μεγάλες τιμές του n, ο όγκος της ευκλείδειας μπάλας μοιάζει να συγκεντρώνεται κοντά στο σύνορο.

4.2 Συγκέντρωση του Μέτρου

Το φαινόμενο της Συγκέντρωσης του Μέτρου μελετήθηκε εκτενώς από τον V. Milman στις αρχές του 1970. Επεκτείνοντας μια ιδέα του P. Lévy, ο Milman χρησιμοποίησε τη συγκέντρωση του μέτρου στη μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^n$ για να δώσει μια διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος Dvoretzky για τις σχεδόν σφαιρικές τομές ενός συμμετρικού κυρτού σώματος. Έκτοτε, η συγκέντρωση του μέτρου έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στη Γεωμετρία, τη Θεωρία Πιθανοτήτων και τα Διακριτά Μαθηματικά.
Στο εξής και όπου δεν διευκρινίζεται περεταίρω συμβολίζουμε με (X, d, μ) ένα μετρικό χώρο εφοδιασμένο με ένα μέτρο πιθανότητας μ ορισμένο στη σ-άλγεβρα Borel του X.

Ορισμός 4.11. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$ μη-κενό. Για $\epsilon > 0$, ορίζουμε την **ϵ-επέκταση** του A ως το σύνολο*

$$A_\epsilon = \{x \in X : d(x, A) \leq \epsilon\}$$

Παρατηρούμε ότι για $(X, d) = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ και $A \subset \mathbb{R}^n$, τότε $A_t = A + tB_2^n$. Ο ορισμός αυτός, σε συνδυασμό με την ισοπεριμετρική ανισότητα (2.11) στον $\mathbb{R}^n$ έχουν ως συνέπεια το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα

Πρόταση 4.12. *Έστω $t > 0$ και A ένα μη-κενό, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\lambda_n(A) = \lambda_n(B_2^n)$. Τότε:*

$$\lambda_n\big(A_t\big) \geq \lambda_n\big(\big(B_2^n\big)_t\big)$$

Απόδειξη. *Από την ανισότητα Brunn-Minkowski (2.1) έπεται ότι:*

$$\lambda_n\big(A_t\big)^{1/n} = \lambda_n\big(A + tB_2^n\big)^{1/n} \geq \lambda_n\big(A\big)^{1/n} + \lambda_n\big(tB_2^n\big)^{1/n} =$$

$$= (1+t)\lambda_n\big(B_2^n\big)^{1/n} = \lambda_n\big((1+t)B_2^n\big)^{1/n} = \lambda_n\big(\big(B_2^n\big)_t\big)^{1/n}$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η ευκλείδεια μπάλα B_2^n έχει την ελάχιστη t-επέκταση ανάμεσα σε όλα τα μη-κενά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με ίσο όγκο. Το αποτέλεσμα αυτό βασίζεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ του μέτρου και της μετρικής στον $\mathbb{R}^n$. Το πρόβλημα της ελάχιστης t-επέκτασης μπορεί να διατυπωθεί και γενικότερα για ένα μετρικό χώρο πιθανότητας (X, d, μ). Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$ και σε κάποιους ακόμα χώρους, το πρόβλημα επιλύεται μέσω των ισοπεριμετρικών ανισοτήτων . Παρ΄ όλα αυτά, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στις οποίες δεν μπορούν να προσδιοριστούν ακριβώς τα σύνολα με την ελάχιστη t-επέκταση ανάμεσα σε όλα τα σύνολα ίσου όγκου. Αυτό οφείλεται στο ότι για πολλούς χώρους δεν είναι γνωστή κάποια ισοπεριμετρική ανισότητα, γεγονός που ωθεί στην αναζήτηση «προσεγγιστικών» ισοπεριμετρικών ανισοτήτων.

Ορισμός 4.13. *Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας και $t > 0$. Η απεικόνιση $\alpha_\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ με*

$$\alpha_\mu(t) = \sup\{1 - \mu(A_t) : A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \geq 1/2\} \tag{4.12}$$

*λέγεται **συνάρτηση συγκέντρωσης** του (X, d, μ).*

Όπως φαίνεται από τον ορισμό, η συνάρτηση συγκέντρωσης είναι φθίνουσα και απεικονίζει ενα μη-αρνητικό πραγματικό αριθμό t, στην ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο της t-επέκτασης A_t ανάμεσα σε όλα τα μετρήσιμα σύνολα A «αρκετά μεγάλου» μέτρου. Η σημασία της συνθήκης $\mu(A) \geq 1/2$ γίνεται εμφανής στη συνέχεια.

Πρόταση 4.14. *Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Τότε*

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha_\mu(t) = 0$$

Απόδειξη. *Έστω $\epsilon \in (0, 1/2)$ και $x \in X$. Τότε υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $\mu(B(x, \rho)) > 1 - \epsilon$. Πράγματι, έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπήρχε $\epsilon_n \in (0, 1/2)$ ώστε $\mu(B(x, n)) \leq 1 - \epsilon_n < 1$. Τότε*

$$1 = \mu(X) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B(x, n)) < 1$$

το οποίο είναι άτοπο. Έστω τώρα ένα μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathcal{B}_X$ με $\mu(A) \geq 1/2$. Τότε

$$\mu(A \cap B(x, \rho)) > \mu(A) + \mu(B(x, \rho)) > \frac{1}{2} + 1 - \epsilon > 0$$

άρα το $A \cap B(x, \rho)$ είναι μη-κενό. Τότε, $B(x, \rho) \subset A_{2\rho}$. Θέτοντας $M = 2\rho$ έχουμε ότι για κάθε $t \geq M > 0$

$$1 - \mu(A_t) \leq 1 - \mu(B(x, \rho)) < \epsilon$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Η συγκέντρωση του μέτρου έχει να κάνει με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης συγκέντρωσης καθώς το t τείνει στο άπειρο. Αναφερόμενοι σε ένα χώρο πιθανότητας, λέμε ότι έχουμε συγκέντρωση του μέτρου αν η συνάρτηση συγκέντρωσης φθίνει πολύ γρήγορα για μεγάλες τιμές του t. Συγκεκριμένα:

Ορισμός 4.15. *Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας.*
(i) Λέμε ότι το μ έχει ***κανονική συγκέντρωση*** *στον (X, d) αν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ανεξάρτητες του t ώστε για κάθε $t > 0$*

$$\alpha_\mu(t) \leq c_1 e^{-c_2 t^2} \tag{4.13}$$

(ii) Λέμε ότι το μ έχει ***εκθετική συγκέντρωση*** *στον (X, d) αν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε για κάθε $t > 0$*

$$\alpha_\mu(t) \leq c_1 e^{-c_2 t} \tag{4.14}$$

Θα επικεντρώσουμε τώρα το ενδιαφέρον σε μια κλάση συναρτήσεων με καλή συμπεριφορά, όπως είναι οι συναρτήσεις Lipschitz. Υπενθυμίζεται ότι μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα μετρικό χώρο (X, d) λέγεται b-**Lipschitz** αν υπάρχει $b > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq b\, d(x, y)$. Γενικεύουμε τώρα μια έννοια η οποία συναντάται συχνά στη θεωρία πιθανοτήτων, αυτή της διαμέσου μιας κατανομής.

Ορισμός 4.16. *Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση τότε ο* ***μέσος*** *(η* ***μέσος Lévy*** *) της f ορίζεται ως ένας πραγματικός αριθμός m_f τέτοιος ώστε*

$$\mu(f \geq m_f),\ \mu(f \leq m_f) \geq \frac{1}{2}$$

Για μια πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα μετρικό χώρο πιθανότητας υπάρχει τουλάχιστον ένας μέσος Lévy. Πράγματι, αρκεί να θέσουμε $A = \{x \in X : \mu(f \leq x) < 1/2\}$. Συμβολίζουμε με F τη συνάρτηση κατανομής της f δηλαδή $F(x) = \mu(f \leq x)$. Αν για κάθε $x \in X$ ίσχυε ότι $F(x) \geq 1/2$, τότε από τις ιδιότητες της F καταλήγουμε σε άτοπο εφόσον $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. Άρα το A είναι μη-κενό. Επιπλέον $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ και η F είναι αύξουσα επομένως το A είναι φραγμενο. Μπορούμε τώρα να διαπιστώσουμε ότι ο αριθμός $s = \sup A$ είναι ένας μέσος Lévy της f.

Ορισμός 4.17. *(i) Έστω $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται* ***απολύτως συνεχής*** *στο I αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε πεπερασμένη οικογένεια $(a_i, b_i)_{i=1}^m$ ανοικτών και ξένων ανα δύο υποσυνόλων του I που ικανοποιούν*

$$\sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i) < \delta$$

ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{m} |f(b_i) - f(a_i)| < \delta$$

(ii) Έστω $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty)$ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel και λ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι το μ είναι **απολύτως συνεχές** *ως προς το λ αν και μόνο αν για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει ότι $\mu(A) = 0$ (συμβ. $\mu \ll \lambda$)*

Πρόταση 4.18. *Έστω $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty)$ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$. Αν λ είναι το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$ τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(i) $\mu \ll \lambda$
(ii) Η $F(x) = \mu((-\infty, x])$ είναι απολύτως συνεχής στο $\mathbb{R}$

Πρόταση 4.19. *Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας όπου μ ένα μη-ατομικό μέτρο Borel . Αν η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε ο μέσος Lévy m_f είναι μοναδικός. Αν επιπλέον η $F(x) = \mu_{*f}((-\infty, x])$ είναι απολύτως συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε*

$$\mu(f \geq m_f),\ \mu(f \leq m_f) = \frac{1}{2}$$

Απόδειξη. *Έστω προς εις άτοπον απαγωγή ότι υπάρχει $m' \neq m_f$, μέσος Lévy της f και υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m' < m_f$. Τότε εξ ορισμού*

$$\mu(f \geq m_f) + \mu(f \leq m') = 1$$

άρα $\mu(m' \leq f \leq m_f) = \mu(f^{-1}(m', m_f)) = 0$. Από τη συνέχεια της f και το γεγονός ότι η f παίρνει τιμές μεγαλύτερες του m' και μικρότερες του m_f έπεται ότι το $f^{-1}[(m', m_f)] \subset X$ είναι μη-κενό και ανοικτό. Εφόσον το μ είναι μη-ατομικό, το τελευταίο θα πρέπει να έχει θετικό μέτρο και καταλήγουμε σε άτοπο.
Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η $F(x) = \mu_{*f}((-\infty, x])$ είναι απολυτως συνεχής, τότε από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι $\nu = \mu_{*f} \ll \lambda$. Από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(y) d\lambda(y)$$

Η F είναι συνεχής με $F(m_f) - 1/2 \geq 0$ και επιπλέον

$$\frac{1}{2} \leq \mu(f \geq m_f) = \mu(f > m_f) = 1 - \mu(f \leq m_f) = 1 - F(m_f)$$

άρα $F(m_f) = \mu(f \leq m_f) = 1/2$ και παρόμοια αποδεικνύεται και η δεύτερη ισότητα. $\square$

Η επόμενη θεμελιώδης πρόταση συνδέει το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου με τη συμπεριφορά των συναρτήσεων Lipschitz ενός μετρικού χώρου πιθανότητας.

Πρόταση 4.20. *Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι b-**Lipschitz** τότε για καθε $t > 0$ ισχύει:*

$$\mu\big(\{\ |f - m_f| \geq t\ \}\big) \leq 2\alpha_\mu(t/b) \tag{4.15}$$

όπου m_f, ο μέσος Lévy της f.

Απόδειξη. *Έστω $A = \{f \geq m_f\}$ και $t \geq 0$. Τότε για $x \in X$ και $y \in A$ με $d(x, y) \leq t/b$ έχουμε ότι*

$$|f(x) - f(y)| \leq b\, d(x, y) \leq t$$

Όμως $f(x) = f(y) + \big(f(x) - f(y)\big) \geq m_f - t$ άρα $A_{t/b} \subset \{\ f \geq m_f - t\ \}$. Έστω τώρα $y \in B = \{f \leq m_f\}$. Τότε: $f(x) = f(y) + \big(f(x) - f(y)\big) \leq m_f + t$. Άρα $B_{t/b} \subset \{\ f \leq m_f + t\ \}$. Τελικά

$$\{|f - m_f| \leq t\} \supset B_{t/b} \cap A_{t/b}$$

από όπου λαμβάνουμε ότι

$$\mu(\{|f - m_f| \geq t\}) \leq \big(1 - \mu(A_{t/b})\big) + \big(1 - \mu(B_{t/b})\big) \leq 2\alpha_\mu(t/b)$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Ένα ανάλογο της προηγούμενης πρότασης μπορεί να αποδειχθεί και στην περίπτωση που η f υποτεθεί απλώς συνεχής και όχι Lipschitz. Θα χρειαστούμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4.21. *Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής. Για $t \geq 0$, ορίζουμε το **μέτρο συνέχειας** της f ως τον πραγματικό αριθμό*

$$\omega_f(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| :\ x, y \in X, d(x, y) \leq t\}$$

Από τον ορισμό παρατηρούμε ότι $\omega_f \geq 0$ με $\omega_f(0) = 0$. Επιπλέον η ω_f είναι αύξουσα. Εντελώς ανάλογα με την πρόταση (4.20) αποδεικνύεται το εξής:

Πρόταση 4.22. *Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε για καθε $t > 0$ ισχύει:*

$$\mu\big(\{\ |f - m_f| \geq \omega_f(t)\ \}\big) \leq 2\alpha_\mu(t/b) \tag{4.16}$$

όπου ω_f, το μέτρο συνέχειας της f.

Για την απόδειξη της τελευταίας πρότασης παραπέμπουμε στο [14] Από την πρόταση (4.20) προκύπτει το επόμενο πόρισμα το οποίο παίζει κεντρικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος Dvoretzky .

Πόρισμα 4.22.1. *Έστω ότι το μέτρο μ έχει κανονική συγκέντρωση στο χώρο (X, d). Αν η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι b-**Lipschitz** τότε υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε για κάθε $t \geq 0$ να ισχύει*

$$\mu\big(\{\ |f - m_f| \geq t\ \}\big) \leq c_1 e^{-c_2 t^2/b^2} \tag{4.17}$$

όπου m_f ο μέσος Lévy της φ.

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι η πιθανότητα μια συνάρτηση Lipschitz να αποκλίνει κατά t από τον m_f είναι μικρή ακόμη και για πολύ μικρές τιμές του t. Ισοδύναμα, οι συναρτήσεις Lipschitz «συγκεντρώνονται» γύρω από μια σταθερή τιμή σχεδόν σε όλο το χώρο.

4.3 Η συγκέντρωση του Μέτρου στην S^{n-1}

Εφοδιάζουμε τη μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^n$ με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας σ_n και τη γεωδαισιακή μετρική η οποία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 4.23. *Η **γεωδαισιακή μετρική** ορίζεται ως μια απεικόνιση $\rho : S^{n-1} \times S^{n-1} \to [0, \pi]$ με $\rho(x, y) = \theta$, όπου θ η κυρτή γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της αρχής των αξόνων και των διανυσμάτων x, y.*

Παρατηρούμε ότι για $x, y \in S^{n-1}$ έχουμε ότι $\|x - y\|_2 = 2\sin\left(\frac{\rho(x,y)}{2}\right)$ και εφόσον $\rho(x, y) \in [0, \pi]$ είναι άμεσο να διαπιστωθεί η παρακάτω σύγκριση της γεωδαισιακής μετρικής με την ευκλείδεια νόρμα.

$$\frac{2}{\pi}\rho(x, y) \leq \|x - y\|_2 \leq \rho(x, y) \tag{4.18}$$

Παρ'όλο που οι λύσεις του ισοπεριμετρικού προβλήματος στη σφαίρα είναι γνωστές, αυτό που έχει μεγαλύτερη σημασία για τις εφαρμογές είναι η εξαγωγή μιας προσεγγιστικής ισοπεριμετρικής ανισότητας για τη σφαίρα με την έννοια της συγκέντρωσης του μέτρου.

Λήμμα 4.24. *Έστω $A, B \subset B_2^n$ με $d(A, B) = \inf\{\|a - b\|_2 : a \in A, b \in B\} = r > 0$. Αν θέσουμε με $\mu : \mathcal{B}(B_2^n) \to [0, 1]$ το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στη B_2^n τότε:*

$$\mu(A)\mu(B) \leq e^{-\frac{nr^2}{4}}$$

Απόδειξη. *Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski* (2.1) *και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε*

$$\lambda_n\left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/n} \geq \frac{1}{2}\left(\lambda_n(A)^{1/n} + \lambda_n(B)^{1/n}\right) \geq \left(\lambda_n(A)\lambda_n(B)\right)^{1/2n}$$

Διαιρώντας με $\lambda_n(B_2^n)$ *έπεται ότι*

$$\mu\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \sqrt{\mu(A)\mu(B)} \tag{4.19}$$

Έστω $a, \in A, b \in B$. *Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε*

$$\|a+b\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|b\|_2^2 - \|a-b\|_2^2 \leq 4 - r^2$$

ή

$$\frac{1}{2}\|a+b\|_2 \leq \sqrt{1 - \frac{r^2}{4}} \leq 1 - \frac{r^2}{8}$$

από όπου καταλήγουμε ότι $(A+B)/2 \subset (1 - r^2/8)B_2^n$. *Από τις ιδιότητες του μέτρου* μ *έπεται ότι*

$$\mu\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \left(1 - \frac{r^2}{8}\right)^n \leq \left(1 - \frac{r^2}{8n}\right)^n \leq e^{-\frac{nr^2}{8}}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.19) *έπεται το ζητούμενο.* □

Πρόταση 4.25. *(Συγκέντρωση του μέτρου στην Ευκλείδεια μπάλα) Έστω* $A \in \mathcal{B}(B_2^n)$ *με* $\mu(A) \geq 1/2$ *και* $t > 0$. *Τότε υπάρχουν απόλυτες σταθερές* $c_1, c_2 > 0$ *(ανεξάρτητες του* n*) ώστε*

$$1 - \mu(A_t) \leq c_1 e^{-c_2 n t^2}$$

Απόδειξη. *Θεωρούμε το σύνολο* $B_2^n \backslash A_t$. *Τότε* $d(A, B) \geq t$ *και από το λήμμα* (4.24) *έχουμε ότι*

$$\mu(B_2^n \setminus A_t) \leq \frac{1}{\mu(A)} e^{-\frac{nt^2}{4}} \leq 2e^{-\frac{nt^2}{4}}$$

Επομένως καταλήγουμε στο ζητούμενο και από τον ορισμό της συνάρτησης συγκέντρωσης έχουμε επίσης ότι

$$\alpha_\mu(t) \leq c_1 e^{-c_2 n t^2}$$

όπου $c_1 = 2, c_2 = 1/4$ □

Πρόταση 4.26. *(Συγκέντρωση του μέτρου στη μοναδιαία σφαίρα) Έστω $A \in \mathcal{B}(S^{n-1})$ με $\sigma_n(A) \geq 1/2$ και $t > 0$. Τότε υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ (ανεξάρτητες του n) ώστε*

$$1 - \sigma_n(A_t) \leq c_1 e^{-c_2 n t^2} \tag{4.20}$$

Απόδειξη. *Θεωρούμε τα σύνολα $\tilde{A} = \{sa : a \in A,\ s \in [1/2, 1]\}$ και $\tilde{B} = \{sa : a \in S^{n-1} \setminus A_t,\ s \in [1/2, 1]\}$. Τα $\tilde{A}, \tilde{B}$ είναι υποσύνολα της B_2^n και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.18) έχουμε*

$$d(A, B) = \inf\{2\sin(\rho(x, y)/2) : a \in A, b \in S^{n-1} \setminus A_t\} \geq \frac{t}{\pi} > 0$$

Από το λήμμα (4.24) έπεται ότι

$$\mu(\tilde{A})\mu(\tilde{B}) \leq e^{-\frac{nt^2}{4\pi^2}} \tag{4.21}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό (4.4) έχουμε:

$$\mu(\tilde{A}) = \frac{1}{\lambda_n(B_2^n)}\lambda_n\Big(\{sa : a \in A,\ s \in [0, 1]\} \setminus \frac{1}{2}\{sa : a \in A,\ s \in [0, 1]\}\Big)$$

$$= \Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)\sigma_n(A)$$

και όμοια αποδεικνύεται ότι $\mu(\tilde{B}) = (1 - 1/2^n)\sigma_n(S^{n-1} \setminus A_t)$. Εξ υποθέσεως έπεται ότι $\sigma_n(A_t) \geq 1/2$, άρα $1 - \sigma_n(A_t) \leq 1/2 \leq \sigma_n(A)$ και $\mu(\tilde{B}) \leq \mu(\tilde{A})$. Πολλαπλασιάζοντας με $\mu(\tilde{B})$ και χρησιμοποιώντας την (4.21) καταλήγουμε τελικά ότι

$$\mu(\tilde{B}) = \Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)(1 - \sigma_n(A_t)) \leq e^{-\frac{nt^2}{8\pi^2}}$$

από όπου έπεται το ζητούμενο. □

Η πρόταση αυτή περιγράφει το εξής αξιοσημείωτο φαινόμενο για τη μοναδιαία σφαίρα: για μεγάλες τιμές της διάστασης n (ακόμα και αν το t είναι πολύ μικρό) η πιθανότητα ένα σημείο της S^{n-1} να απέχει απόσταση μεγαλύτερη του t από το σύνολο A είναι πολύ μικρή. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα αυτό για δύο ημισφαίρια της S^{n-1} το φαινόμενο αυτό γίνεται ακόμα πιο εμφανές καθώς συμπεραίνουμε το εξής: Σχεδόν όλη η επιφάνεια της n-διάστατης μοναδιαίας σφαίρας συγκεντρώνεται σε μια λεπτή λωρίδα γύρω από τον ισημερινό, για μεγάλες τιμές του n.

Συνδυάζοντας την πρόταση (4.26) με το πόρισμα (4.22.1) προκύπτει επίσης ότι όλες οι Lipschitz συναρτήσεις από τη μοναδιαία σφαίρα στο $\mathbb{R}$ είναι «σχεδόν σταθερές» και ίσες με το (μοναδικό) μέσο Lévy τους, σχεδόν σε όλη τη μοναδιαία σφαίρα. Στην περίπτωση της μοναδιαίας σφαίρας, ο μέσος Lévy μπορεί να αντικατασταθεί από τη μέση τιμή της συνάρτησης, σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.27. *Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ b-**Lipschitz**. Τότε υπάρχουν απόλυτες σταθερές $C, c > 0$ ώστε για κάθε $t > 0$ να ισχύει*

$$\sigma_n\big(\{\ |f - \mathbb{E}[f]\ | \geq t\ \}\big) \leq Ce^{-cnt^2/b^2} \tag{4.22}$$

όπου $\mathbb{E}[f] = \int_{S^{n-1}} f d\sigma_n$ η μέση τιμή της f.

Απόδειξη. *Θεωρούμε το μέτρο $\sigma_n \times \sigma_n : S^{n-1} \times S^{n-1} \to [0,1]$ και μια ανεξάρτητη εκδοχή της f την οποία συμβολίζουμε με $\tilde{f}$. Χρησιμοποιώντας το πόρισμα (4.22.1) έχουμε για $t > 0$*

$$(\sigma_n \times \sigma_n)\big(\{(x,y) : |f(x) - \tilde{f}(y)| \geq t\}\big) \leq (\sigma_n \times \sigma_n)\big(\{|f - m_f| + |\tilde{f} - m_f| \geq t\}\big)$$

$$\leq \sigma_n\big(\{|f - m_f| \geq t/2\}\big) + \sigma_n\big(\{|\tilde{f} - m_f| \geq t/2\}\big) \leq c_1^2 e^{-c_2nt^2/4b^2} = C_1e^{-C_2nt^2/b^2}$$

Για $s > 0$ θεωρούμε τη μετρήσιμη συνάρτηση $g : S^{n-1} \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με

$$g(x,y) = e^{s^2|f(x) - \tilde{f}(y)|^2}$$

Τότε

$$\mathbb{E}[g] = \int_0^\infty g'(t)\ (\sigma_n \times \sigma_n)\big(\{|f - \tilde{f}| \geq t\}\big)dt = 2s^2 \int_0^\infty te^{s^2t^2}(\sigma_n \times \sigma_n)\big(\{|f - \tilde{f}| \geq t\}\big)dt$$

$$\leq 2C_1s^2 \int_0^\infty te^{s^2t^2 - C_2nt^2/b^2}dt$$

Θέτοντας $s = \sqrt{C_2n}/\sqrt{2}b$ έπεται ότι

$$\mathbb{E}[g] \leq 2C_1\frac{C_2n}{2b^2}\int_0^\infty te^{-C_2nt^2/2b^2}dt = \frac{C_1C_2n}{b^2}\frac{b^2}{C_2n} = C_1$$

Άρα $\mathbb{E}_{\sigma_n \times \sigma_n}\big[\exp(C_2n|f - \tilde{f}|^2/2b^2)\big] \leq C_1$. Η απεικόνιση $t \mapsto \exp(C_2nt^2/2b^2)$ είναι κυρτή και αύξουσα. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\mathbb{E}_{\sigma_n}\left[\exp\left(\frac{C_2 n}{2b^2}\left|\ f-\mathbb{E}[f]\ \right|^2\right)\right]\leq C_1$$

και από τη γενικευμένη ανισότητα Markov καταλήγουμε ότι

$$\sigma_n\big(\{\ \left|f-\mathbb{E}[f]\ \right|\geq t\ \}\big)\leq \mathbb{E}_{\sigma_n}\left[\exp\left(\frac{C_2 n}{2b^2}\left|f-\mathbb{E}[f]\ \right|^2\right)\right]e^{-C_2nt^2/2b^2}\leq Ce^{-cnt^2/b^2}$$

όπου $c=C_2/2$ *και* $C=C_1$. □

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε μια περίπτωση στην οποία μπορούμε να μιλήσουμε για συγκέντρωση χωρίς να γίνεται χρήση κάποιας μετρικής. Συγκεκριμένα, το επόμενο αποτέλεσμα έχει να κάνει με την κατανομή του όγκου σε ένα αυθαίρετο κυρτό σώμα K και αποτελεί μια ακόμα από τις πολυάριθμες εφαρμογές της ανισότητας Brunn-Minkowski.

Λήμμα 4.28. *(C. Borell) Έστω* $K\subset\mathbb{R}^n$ *ένα κυρτό σώμα (όχι απαραίτητα συμμετρικό). Για* $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, *ορίζουμε το ομοιόμορφο μέτρο του* K *ως*

$$\mu_K(A)=\frac{\lambda_n(A\cap K)}{\lambda_n(K)}\tag{4.23}$$

Τότε για $A\subset\mathbb{R}^n$ *κυρτό, συμμετρικό με* $\mu(A)=\delta\geq 1/2$ *και* $t>1$ *ισχύει ότι*

$$1-\mu_K(tA)=\mu_K\big((tA)^c\big)\leq\delta\bigg(\frac{1-\delta}{\delta}\bigg)^{\frac{t+1}{2}}\tag{4.24}$$

Απόδειξη. *Θα προσδιορίσουμε ένα* $s\in(0,1)$ *ώστε ο κυρτός συνδυασμος των* A *και* $(tA)^c$ *να μην τέμνει το* A. *Ισοδύναμα, θέλουμε ένα* $s\in(0,1)$ *ώστε* $sA+(1-s)(tA)^c\subset A^c$ *και ισχυριζόμαστε ότι αυτό συμβαίνει για*

$$s=\frac{t-1}{t+1}$$

Έστω προς εις ατοπον απαγωγή ότι υπάρχει $a\in A$ *ώστε*

$$a=\frac{t-1}{t+1}\,a_1+\left(1-\frac{t-1}{t+1}\right)y=\frac{t-1}{t+1}\,a_1+\frac{2}{t+1}\,y$$

για κάποιο $a_1\in A$ *και* $y\notin tA$. *Όμως το* A *είναι κυρτό και συμμετρικό επομένως:*

$$\frac{y}{t}=\frac{t+1}{2t}\,a+\frac{t-1}{2t}\,(-a_1)\in A$$

επομένως καταλήγουμε σε άτοπο. Εφόσον το K είναι κυρτό έπεται ότι

$$s(A \cap K) + (1-s)\big((tA)^c \cap K\big) \subset A^c \cap K$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Brunn-Minkowski (πόρισμα (2.2.2)) για το μέτρο Lebesgue και διαιρώντας με $\lambda_n(K)$ έχουμε

$$1 - \delta = \mu_K(A^c) \geq \mu_K\big((tA)^c\big)^{\frac{2}{t+1}} \mu_K(A)^{\frac{t-1}{t+1}} = \mu_K\big((tA)^c\big)^{\frac{2}{t+1}} \delta^{\frac{t-1}{t+1}}$$

από όπου έπεται το ζητούμενο. □

Αν θεωρήσουμε ένα συμμετρικό κυρτό σύνολο A με $\mu(A) \geq 2/3$ τότε μπορούμε να φέρουμε την ανισότητα σε μορφή που θυμίζει περισσότερο τον ορισμό της συγκέντρωσης του μέτρου που συζητήθηκε προηγουμένως. Πράγματι, τότε έχουμε

$$\mu_K\big((tA)^c\big) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t+1}{2}} = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{t \log 2}{2}} = c_1 e^{-c_2 t} \tag{4.25}$$

όπου $c_1 = 1/2$ και $c_2 = \log 2/2$. Μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε την τελευταία ανισότητα με τον ορισμό (4.14) της κανονικής συγκέντρωσης του μέτρου σε ένα μετρικό χώρο πιθανότητας.

Το λήμμα του Borell αποκαλύπτει μια μη-τετριμμένη ογκομετρική ιδιότητα των κυρτών σωμάτων: Η «ουρά» της κατανομής του όγκου ενός κυρτού σώματος φθίνει εκθετικά. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K και $A = B_2^n$ ώστε το A να τέμνει το K σε ένα σύνολο αρκετά μεγάλου όγκου. Μπορούμε τώρα να αναδιατυπώσουμε την τελευταία ανισότητα στη γλώσσα της θεωρίας Πιθανοτήτων:

$$\mathbb{P}\Big[\big\{x \in K : \|x\|_2 > t\sqrt{n}\big\}\Big] \leq c_1 e^{-c_2\sqrt{n}t} \tag{4.26}$$

Αυτό σημαίνει ότι για μεγάλες τιμές του t, η πιθανότητα ένα σημείο να βρίσκεται έξω από την τομή $K \cap t\sqrt{n}B_2^n$ είναι πάρα πολύ μικρή.

Κεφάλαιο 5

Το 1950 οι A. Dvoretzky και C. A. Rogers [9] απέδειξαν, μεταξύ άλλων, το ακόλουθο αποτέλεσμα σχετικά με την κατανομή των σημείων επαφής ενός κυρτού σώματος και του ελλειψοειδούς μέγιστου όγκου του: Για κάθε κυρτό συμμετρικό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$ σε θέση John, υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος $Y \subset \mathbb{R}^n$, με $k \simeq \sqrt{n}$, ώστε $B_2^k \subset K \cap Y \subset \sqrt{2}B_\infty^k$. Με άλλα λόγια, μπορούμε πάντα να βρούμε μια τομή του K με διάσταση της τάξης του $\sqrt{n}$, η οποία «χωράει» ανάμεσα στην ευκλείδεια μπάλα και σε ένα πολλαπλάσιο του μοναδιαίου κύβου. Ο A. Grothendieck έθεσε στη συνέχεια το εξής ερώτημα: Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το δεξιό μέλος του παραπάνω εγκλεισμού με ένα πολλαπλάσιο της B_2^k και παράλληλα οι τομές να έχουν διάσταση $k \to \infty$ καθώς το $n \to \infty$; Το ερώτημα του Grothendieck μεταφράζεται στη γλώσσα της συναρτησιακής ανάλυσης ως ένα πρόβλημα εύρεσης υποχώρων αρκετά μεγάλης διάστασης που είναι αρκετά «κοντά» στον ευκλείδειο χώρο ℓ_2^k. Η απάντηση στο ερώτημα είναι καταφατική και ήρθε από τον A. Dvoretzky περίπου το 1960. Συγκεκριμένα ο Dvoretzky [8] απέδειξε το εξής

Θεώρημα 5.1. *(Dvoretzky) Έστω $\epsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $N = N(k, \epsilon)$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε χώρο με νόρμα X πεπερασμένης διάστασης, με $\dim X \geq N$ υπάρχει ενας υπόχωρος Y του X διάστασης k ώστε*

$$d_{BM}(Y, \ell_2^k) \leq 1 + \epsilon \tag{5.1}$$

Εκμεταλλευόμενοι τις αντιστοιχίες μεταξύ κυρτής γεωμετρίας και συναρτησιακής ανάλυσης που περιγράφονται στην εισαγωγή, μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα του Dvoretzky σε γεωμετρική γλώσσα ως εξής: Κάθε κυρτό συμμετρικό σώμα αρκετά μεγάλης διάστασης έχει κεντρικές τομές μεγάλης διάστασης οι οποιες είναι σχεδόν ελλειψοειδείς. Το ενδιαφέρον στράφηκε κατόπιν στην εξάρτηση του N από το k και το ϵ. Το 1971 ο V. Milman [16] έδωσε μια αρκετά διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος Dvoretzky, εκμεταλλευόμενος το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου στη μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^n$. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα 5.2. *(Dvoretzky-Milman) Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και $\epsilon \in (0,1)$. Τότε, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $k \geq c\epsilon^2 \log n$ και k-διάστατος υπόχωρος Y του X ώστε*

$$d_{BM}(Y, \ell_2^k) \leq 1 + \epsilon \tag{5.2}$$

Παρατηρούμε ότι από το θεώρημα Dvoretzky-Milman συνεπάγεται ότι το θεώρημα του Dvoretzky στην αρχική του διατύπωση ισχύει για $N = N(k,\epsilon) = e^{c\epsilon^{-2}k}$. Η αρχική εκτίμηση του Dvoretzky ήταν $N(k,\epsilon) = e^{c\epsilon^{-2}k^2 \log k}$.

5.1 Το Θεώρημα Dvoretzky

Το κομμάτι αυτό είναι αφιερωμένο στην απόδειξη του θεωρήματος Dvoretzky, στα χνάρια της προσέγγισης του Milman. Όπως θα δούμε στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, η λογαριθμική εξάρτηση της διάστασης k των «σχεδόν» ευκλείδειων υποχώρων ως προς το n είναι η βέλτιστη δυνατή. Η βέλτιστη εξάρτηση ως προς ϵ είναι ακόμη απροσδιόριστη.
Η επόμενη πρόταση εμπεριέχει τη βασική ιδέα πίσω από την απόδειξη του θεωρήματος Dvoretzky-Milman: Η νόρμα περιορισμένη στη μοναδιαία σφαίρα είναι συνάρτηση Lipschitz. Η συγκέντρωση του μέτρου μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε ένα «τυχαίο» ορθογώνιο μετασχηματισμό U ώστε τα σημεία ενός πεπερασμένου υποσυνόλου $U[A]$ της σφαίρας να βρίσκονται ϵ-κοντά στη μέση τιμή της νόρμας. Η λέξη «τυχαίος», αναφέρεται στο γεγονός ότι η ύπαρξη του U εξασφαλίζεται με θετική πιθανότητα.

Πρόταση 5.3. *Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και $r : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση $r(x) = \|x\|$. Θεωρούμε τον ελάχιστο θετικό αριθμό b για τον οποίο ισχύει $r(x) \leq b\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και θέτουμε*

$$M = \mathbb{E}[r] = \int_{S^{n-1}} \|x\| d\sigma_n(x) \tag{5.3}$$

Τότε για κάθε $\epsilon > 0$, $m \leq \frac{1}{C}\exp(c\epsilon^2 n/2)$ (όπου $C, c > 0$ οι απόλυτες σταθερές της πρότασης (4.27)) και $(y_i)_{i=1}^m \subset S^{n-1}$, υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε

$$M - b\epsilon \leq \|Uy_i\| \leq M + b\epsilon \tag{5.4}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$.

Απόδειξη. *Έστω $A = \{x \in S^{n-1} : |r(x) - M| \leq b\epsilon\}$. Για $i = 1, \ldots, m$ θεωρούμε επίσης τα σύνολα $S_i = \{U \in O(n) : |r \circ U(y_i) - M| \leq b\epsilon\}$. Από τις ιδιότητες του μέτρου Haar ν στην $O(n)$ έπεται ότι*

$$\nu(S_i) = \sigma_n(A)$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$. *Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι το σύνολο*

$$S = \bigcap_{i=1}^{m} S_i = \{U \in O(n) : |r \circ U(y_i) - M| \leq b\epsilon,\ \forall i = 1, \ldots, m\}$$

έχει θετικό μέτρο Haar . Πράγματι, χρησιμοποιώντας την πρόταση (4.27) για τη συγκέντρωση των συναρτήσεων Lipschitz γύρω από τη μέση τιμή τους έχουμε ότι

$$\nu(S) = 1 - \nu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} S_i^c\Big) \geq 1 - \sum_{i=1}^{m} \nu\big(S_i^c\big) \geq 1 - mCe^{-cn\epsilon^2} \geq 1 - e^{-cn\epsilon^2/2}$$

από όπου προκύπτει ότι $\nu(S) > 0$. *Αυτό σημαίνει ότι το* S *είναι μη-κενό, άρα υπάρχει* $U \in O(n)$ *που ικανοποιεί την επιθυμητή ανισότητα.* □

Το επόμενο βήμα είναι να «διακριτοποιήσουμε» την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας κάνοντας χρήση ενός δ-δικτύου.

Ορισμός 5.4. *Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος,* $\delta > 0$ *και* $\mathcal{N} \subset X$. *Το* $\mathcal{N}$ *λέγεται* δ***-δίκτυο*** *στον* X *αν και μόνο αν για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει* $y \in \mathcal{N}$ *ώστε* $d(x, y) < \delta$.

Όπως είναι γνωστό, κάθε μετρικός χώρος περιέχει ένα μεγιστικό δ-διαχωρισμένο υποσύνολο, για κάθε $\delta > 0$. Στην περίπτωση που ο χώρος είναι συμπαγής, τότε αποδεικνύεται ότι κάθε δ-διαχωρισμένο υποσύνολο του χώρου είναι πεπερασμένο. Το παρακάτω λήμμα μας δίνει ένα χρήσιμο άνω φράγμα για την πληθικότητα ενός δ-δικτύου στην k-διάστατη ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα.

Λήμμα 5.5. *Έστω* $\delta \in (0, 1)$ *και* $k \in \mathbb{N}$. *Τότε υπάρχει πεπερασμένο* δ*-δίκτυο* $\mathcal{N} \subset (S^{k-1}, \|\ \|_2)$ *με πληθικότητα*

$$|\mathcal{N}| \leq \left(1 + \frac{2}{\delta}\right)^k \tag{5.5}$$

Απόδειξη. *Ο* $(S^{k-1}, \|\ \|_2)$ *είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Από τα σχόλια που προηγούνται του θεωρήματος έπεται ότι υπάρχει ένα μεγιστικό,* δ*-διαχωρισμένο υποσύνολο της* S^{k-1} *το οποίο συμβολίζουμε με* $\mathcal{N}$. *Το* $\mathcal{N}$ *είναι ένα* δ*-δίκτυο στην* S^{k-1}. *Πράγματι, έστω προς εις άτοπον απαγωγή ότι υπάρχει* $x_0 \in S^{k-1}$ *ώστε για κάθε* $y \in \mathcal{N}$ *να ισχύει* $\|x_0 - y\|_2 \geq \delta$. *Τότε το σύνολο* $\mathcal{N} \cup \{x_0\}$ *είναι* δ*-διαχωρισμένο και έχει πληθικότητα μεγαλύτερη του* $\mathcal{N}$ *το οποίο είναι, εξ ορισμού του* $\mathcal{N}$, *άτοπο.*

Για το δεύτερο μέρος του λήμματος, συμβολίζουμε με m την πληθικότητα του $\mathcal{N}$ και για $i = 1, \ldots, m$ θεωρούμε τα ξένα σύνολα $x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k$, όπου $x_i \in \mathcal{N}$. Τότε

$$x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k \subset \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)B_2^k$$

επομένως από τις ιδιότητες του μέτρου Lebesgue έχουμε

$$\lambda_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_k\left(x_i + \frac{\delta}{2}B_2^k\right) = m\left(\frac{\delta}{2}\right)^k \lambda_k(B_2^k) \leq \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^k \lambda_k(B_2^k)$$

από όπου καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Λήμμα 5.6. *Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και $\epsilon, \delta \in (0,1)$. Αν $k \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει*

$$\left(1 + \frac{2}{\delta}\right)^k \leq \frac{1}{C}\, e^{c\epsilon^2 n/2} \tag{5.6}$$

τότε υπάρχει ένας k-διάστατος υπόχωρος $Y \subset X$ και δ-δίκτυο $\mathcal{N}_Y$ στη μοναδιαία σφαίρα S_Y του Y ώστε

$$M - b\epsilon \leq \|x\| \leq M + b\epsilon$$

για κάθε $x \in \mathcal{N}_Y$ (όπου c, C, b, M όπως στην προηγούμενη πρόταση).

Απόδειξη. *Θεωρούμε έναν k-διάστατο υπόχωρο Y_0 του X. Από το λήμμα (5.5) υπάρχει δ-δίκτυο $\mathcal{N}_{Y_0} \subset S_Y = S^{n-1} \cap Y_0$ και από τη συνθήκη (5.6) έπεται ότι $|\mathcal{N}| \leq \frac{1}{C}\exp(c\epsilon^2 n/2)$. Η προηγούμενη πρόταση εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $U \in O(n)$ ώστε*

$$M - b\epsilon \leq \|Uy\| \leq M + b\epsilon$$

για κάθε $y \in \mathcal{N}_{Y_0}$ και θέτουμε $Y = U[Y_0]$. Εφόσον ο U είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός (διατηρεί τις αποστάσεις) έπεται ότι το $\mathcal{N}_Y = U[\mathcal{N}_{Y_0}]$ είναι δ-δίκτυο στη σφαίρα του Y από όπου καταλήγουμε τελικά ότι

$$M - b\epsilon \leq \|x\| \leq M + b\epsilon$$

για κάθε $x \in \mathcal{N}_Y \subset S_Y$. □

Κάνοντας χρήση του δ-δικτύου και της μεθόδου της διαδοχικής προσέγγισης, μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε ένα k-διάστατο υπόχωρο Y του X ώστε η νόρμα $\| \ \|$ να είναι άνω και κάτω φραγμένη για όλα τα σημεία στη σφαίρα του Y.

Πρόταση 5.7. *Έστω* $X = (\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ *ένας* n*-διάστατος χώρος με νόρμα και* ϵ, δ, k *ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη* (5.6). *Αν* c, C, b, M *όπως στην πρόταση* (5.3), *τότε υπάρχει ένας* k*-διάστατος υπόχωρος* Y *του* X *ώστε να ισχύει*

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta}\, M - \frac{b\epsilon}{1-\delta} \leq \|y\| \leq \frac{M+b\epsilon}{1-\delta} \tag{5.7}$$

για κάθε y *στη μοναδιαία σφαίρα* S_Y.

Απόδειξη. *Έστω* $y \in S_Y$. *Τότε υπάρχει* $x_0 \in \mathcal{N}_Y$ *ώστε* $\|y - x_0\|_2 = \delta_1 \leq \delta$. *Άρα* $y - x_0 \in \delta_1 S_Y$ *και μπορούμε να βρούμε* $x_1 \in \mathcal{N}_Y$ *ώστε* $\|\frac{y-x_0}{\delta_1} - x_1\|_2 = \delta_2 \leq \delta$. *Έπεται ότι* $\|y - x_0 - \delta_1 x_1\|_2 = \delta_1\delta_2 \leq \delta^2$. *Επαγωγικά, βρίσκουμε* $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{N}_Y$ *και* $0 < \delta_1, \ldots, \delta_n < \delta$ *ώστε*

$$\left\| y - \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i \right\|_2 \leq \delta^{n+1}$$

όπου $\delta_0 = 1$. *Εφόσον* $\delta < 1$ *έπεται ότι*

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i$$

Από τη σύγκλιση της τελευταίας σειράς και τις ιδιότητες της νόρμας $\| \ \|$ *έχουμε*

$$\|y\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \|x_i\| \leq (M + b\epsilon) \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i = \frac{M+b\epsilon}{1-\delta}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει και το αποτέλεσμα του λήμματος (5.6). *Από την άλλη, η αντίστροφη τριγωνική ανισότητα σε συνδυασμό με το προαναφερθέν αποτέλεσμα δίνουν:*

$$\|y\| \geq \|x_0\| - \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i} \delta_j \right) x_i \right\|$$

$$\geq (M - b\epsilon) - (M + b\epsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i$$

$$= (M - b\epsilon) - \frac{\delta(M+b\epsilon)}{1-\delta} = \frac{1-2\delta}{1-\delta}\, M - \frac{b\epsilon}{1-\delta}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Θεώρημα 5.8. *(Milman) Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και b, M όπως στην πρόταση (5.3). Τότε για $\epsilon \in (0,1)$ και $k \in \mathbb{N}$ με $k \leq c(\epsilon)n(M/b)^2$ υπάρχει ένας k-διάστατος υπόχωρος Y του X ώστε για κάθε $x \in S_Y$ να ισχύει*

$$(1+\epsilon)^{-1}M \leq \|x\| \leq M(1+\epsilon) \tag{5.8}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της απόστασης Banach-Mazur, παρατηρούμε ότι η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με $d_{BM}(X, \ell_2^k) \leq (1+\epsilon)^2$

Απόδειξη. *Έστω $\zeta, \delta \in (0,1)$ και $k \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει*

$$\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^k \leq \frac{1}{C}\, e^{c\zeta^2 n/2} \tag{5.9}$$

με $C, c > 0$ όπως στην πρόταση (4.27). Τότε από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος Y του X ώστε για κάθε $y \in S_Y$ να ισχύει

$$\frac{1-2\delta}{1-\delta}\, M - \frac{b\zeta}{1-\delta} \leq \|y\| \leq \frac{M+b\zeta}{1-\delta}$$

Υπολογίζουμε κατάλληλα ζ, δ ώστε

$$(1+\epsilon)^{-1}M \leq \frac{1-2\delta}{1-\delta}\, M - \frac{b\zeta}{1-\delta}\,, \qquad \frac{M+b\zeta}{1-\delta} \leq M(1+\epsilon)$$

Με αντικατάσταση επαληθεύεται ότι οι παραπάνω ανισότητες ικανοποιούνται για $\delta = \frac{\epsilon}{6}$ και $\zeta = \frac{M\delta}{b}$. Απομένει να προσδιοριστεί η τάξη του μέγιστου k για το οποίο επαληθεύεται η (5.9). Ισοδύναμα, αρκεί να προσδιοριστεί η μεγαλύτερη τιμή του k ώστε

$$\left(1+\frac{12}{\epsilon}\right)^k \leq \frac{1}{C}\, \exp\left(\frac{c}{72}\epsilon^2 n \frac{M^2}{b^2}\right)$$

Άρα αρκεί

$$k \log\left(\frac{12}{\epsilon}\right) \leq \frac{c}{72}\epsilon^2 n \frac{M^2}{b^2}$$

και $C > 1$. Θέτοντας $c(\epsilon) = \frac{c}{72}\epsilon^2 \log^{-1}(\frac{12C}{\epsilon}) \sim C'\epsilon^2 \log^{-1}(\frac{1}{\epsilon})$, $(\epsilon \to 0)$, έπεται το ζητούμενο. □

Το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει την πρώτη εκτίμηση για τη διάσταση των σχεδόν ευκλείδειων υποχώρων. Το τελευταίο κομμάτι της απόδειξης έχει να κάνει με την εκτίμηση του λόγου M/b για τη νόρμα ενός αυθαίρετου χώρου με νόρμα πεπερασμένης διάστασης. Στην πραγματικότητα, θα χρειαστεί να εκτιμήσουμε μόνο τη νόρμα του ℓ_∞^n, καθώς το λήμμα Dvoretzky-Rogers (3.19.1), ανάγει τη γενική περίπτωση ενός αυθαίρετου συμμετρικού κυρτού σώματος K, στην περίπτωση του μοναδιαίου κύβου B_∞^n.

Λήμμα 5.9. *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \leq n$. Τότε υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε*

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|_{\infty,m} d\sigma_n(x) = \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq j\leq m} |x_j| d\sigma_n(x) \geq c\sqrt{\frac{\log m}{n}} \tag{5.10}$$

όπου $\| \ \|_{\infty,m}$ η νόρμα του ℓ_∞^m

Απόδειξη. *Συμβολίζουμε με ω_n τον όγκο $\lambda_n(B_2^n)$ της ευκλείδειας μπάλας. Θα χρησιμοποιήσουμε το μέτρο Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$ για να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα. Πράγματι, από τον ορισμό του μέτρου Gauss και την ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες έχουμε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_{\infty,m} \, d\gamma_n(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\max_{1\leq j\leq m} |x_j|\Big) e^{-\|x\|_2^2/2} \, d\lambda_n(x)$$

$$= \frac{n\omega_n}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \Big(\max_{1\leq j\leq m} |r\theta_j|\Big) r^{n-1} e^{-r^2/2} d\sigma_n(\theta) \, dr$$

$$= \frac{n\omega_n}{(\sqrt{2\pi})^n} \left(\int_0^\infty r^n e^{-r^2/2} \, dr\right) \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq j\leq m} |x_j| \, d\sigma_n(x)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $r^2/2 = t$ έπεται ότι $r = \sqrt{2t}$, $rdr = dt$ και

$$\int_0^\infty r^n e^{-r^2/2} \, dr = 2^{(n-1)/2} \int_0^\infty t^{(n-1)/2} e^{-t} \, dt = 2^{(n-1)/2} \, \Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)$$

Από τη σχέση (4.7) για τον όγκο της B_2^n καταλήγουμε τελικά ότι

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq j\leq m} |x_j| \, d\sigma_n(x) = \frac{n\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\sqrt{2}\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1\leq j\leq m} |x_j| d\gamma_n(x)$$

$$= \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1\leq j\leq m} |x_j| d\gamma_n(x)$$

και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling

$$\frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)} \sim \frac{\sqrt{2\pi\Big(\frac{n-2}{2}\Big)}\Big(\frac{n-2}{2e}\Big)^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{4\pi\Big(\frac{n-1}{2}\Big)}\Big(\frac{n-1}{2e}\Big)^{\frac{n-1}{2}}} = \sqrt{2e}\Big(\frac{n-2}{n-1}\Big)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sim \frac{c}{\sqrt{n}}$$

Επομένως δείξαμε ότι για κάθε $m \leq n$ ισχύει

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq j\leq m} |x_j|\, d\sigma_n(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1\leq j\leq m} |x_j| d\gamma_n(x) \tag{5.11}$$

και το μόνο που μένει να αποδειχθεί είναι ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \max_{1\leq j\leq m} |x_j| d\gamma_n(x) \geq c_1 \sqrt{\log m}$$

για κάποια σταθερά $c_1 > 0$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι η μέση τιμή της απεικόνισης $x \mapsto \|x\|_{\infty,m}$. Για να προσεγγίσουμε αυτή τη μέση τιμή θα χρησιμοποιήσουμε το μέσο Lévy της απεικόνισης τον οποίο συμβολίζουμε με s. Ολοκληρώνοντας στον m-διάστατο μοναδιαίο κύβο έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\gamma_m\left(\max_{1\leq j\leq m} |x_j| < s\right) &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m} \int_{sB_\infty^m} e^{-\|x\|_2^2/2}\, d\lambda_m(x) \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m} \left(\int_{-s}^{s} e^{-t^2/2}\, dt\right)^m \\
&= \left(\frac{2s}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-s^2t^2/2}\, dt\right)^m \\
&\leq \left(\frac{2s}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-s^2t/2}\, dt\right)^m = \left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}s}\left(1 - e^{-s^2/2}\right)\right)^m
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για $s = C\sqrt{\log m}$, όπου C θετική σταθερά, έχουμε

$$\gamma_m\left(\left\{\max_{1\leq j\leq m} |x_j| \geq s\right\}\right) \geq 1/2$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq j\leq m} |x_j|\, d\sigma_n(x) &\simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1\leq j\leq m} |x_j| d\gamma_n(x) \\
&\geq \frac{C\sqrt{\log m}}{\sqrt{n}}\, \gamma_m\left(\left\{\max_{1\leq j\leq m} |x_j| \geq C\sqrt{\log m}\right\}\right) \\
&\geq \frac{C}{2}\sqrt{\frac{\log m}{n}}
\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πρόταση 5.10. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα και $X = (\mathbb{R}^n, \| \|_K)$. Αν το K είναι σε θέση John, τότε υπάρχει θετική απόλυτη σταθερά c ώστε*

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|_K \, d\sigma_n(x) \geq c\sqrt{\frac{\log n}{n}} \tag{5.12}$$

Απόδειξη. *Από το λήμμα Dvoretzky-Rogers, (3.19.1) υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathbb{R}^n$ ώστε $\|y_i\|_K \geq 1/\sqrt{2}$ για κάθε $i = 1, \dots, [n/2]+1$. Για $\epsilon = (\epsilon_i)_{i=1}^n \in \{+1, -1\}^n = E_2^n$ ορίζουμε τον τελεστή $T_\epsilon : X \to X$ με*

$$T_\epsilon(y_i) = \epsilon_i y_i \tag{5.13}$$

Για κάθε ϵ και $x \in X$=, ο T_ϵ είναι γραμμικός, συνεχής και $\|T_\epsilon(x)\|_2 = \|x\|_2$, επομένως $T_\epsilon \in O(n)$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f : E_2^n \times X \to \mathbb{R}^+$ με $f(\epsilon, x) = \|T_\epsilon(x)\|_K$ και συμβολίζουμε με $\mathbb{P}_n$ το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στον E_2^n. Από το αναλλοίωτο του μέτρου σ_n στους ορθογώνιους μετασχηματισμούς και το θεώρημα Fubini παρατηρούμε ότι:

$$\int_{S^{n-1}} \int_{E_2^n} f(\epsilon, x) \, d\mathbb{P}_n(\epsilon) \, d\sigma_n(x) = \int_{E_2^n} \int_{S^{n-1}} \|T_\epsilon(x)\|_K \, d\sigma_n(x) \, d\mathbb{P}_n(\epsilon) = M \tag{5.14}$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Για κάθε $i = 1, \dots n$ και $v_1, \dots, v_n \in X$ ισχύει ότι

$$\int_{E_2^n} \Big\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j v_j \Big\|_K \, d\mathbb{P}_n(\epsilon) \geq \|v_i\|_K \tag{5.15}$$

Για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε τώρα ότι οποιαδήποτε $(n-1)$-το πλήθος διανυσματα $z_1, \dots, z_{n-1}$ από τα αρχικά, ικανοποιούν

$$\int_{E_2^{n-1}} \Big\| \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_j z_j \Big\|_K \, d\mathbb{P}_{n-1}(\epsilon) \geq \|z_i\|_K \tag{5.16}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n-1$. Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι για κάθε $(\epsilon_i)_{i=1}^{n-1} \in E_2^{n-1}$

$$2\Big\| \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_j z_j \Big\|_K \leq \Big\| \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_j z_j - z_n \Big\|_K + \Big\| \sum_{j=1}^{k-1} \epsilon_j z_j + z_n \Big\|_K = 2\int_{E_2^1} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j z_j \Big\|_K \, d\mathbb{P}_1(\epsilon_n)$$

Ολοκληρώνοντας έπεται ότι

$$\int_{E_2^{n-1}} \Big\| \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_j z_j \Big\|_K \, d\mathbb{P}_{n-1}(\epsilon) \leq \int_{E_2^n} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j z_j \Big\|_K \, d\mathbb{P}_n(\epsilon)$$

και από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\int_{E_2^n} \Big\| \sum_{j=1}^{k} \epsilon_j z_j \Big\|_K \, d\mathbb{P}_n(\epsilon) \geq \|z_i\|_K$$

για οποιαδήποτε $(k-1)$ *το πλήθος από τα αρχικά διανύσματα, επομένως ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.*
Όπως προαναφέρθηκε, τα $y_1, \ldots, y_n$ *που πήραμε από το λήμμα Dvoretzky-Rogers αποτελούν ορθοκανονική βάση του* X, *άρα κάθε διάνυσμα* $x \in X$ *εκφράζεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός*

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

με $x_j \in \mathbb{R}$ *για κάθε* j. *Θέτοντας* $v_j = x_j y_j \in \mathbb{R}^n$ *στην* (5.15) *έπεται ότι*

$$\mathbb{E}_n[f(\epsilon, x)] = \int_{E_2^n} \Big\| \sum_{j=1}^{k} \epsilon_j x_j y_j \Big\|_K \, d\mathbb{P}_n(\epsilon) \geq \max_{1\leq i\leq n} \|x_i y_i\|_K \tag{5.17}$$

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με την (5.14) *και την* (5.10) *από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε τελικά*

$$M = \int_{S^{n-1}} \mathbb{E}_n[f(\epsilon, x)] d\sigma_n(x) \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq n} \|x_i y_i\|_K \, d\sigma_n(x) \geq$$

$$\geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq [n/2]+1} \|x_i y_i\|_K d\sigma_n(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq [n/2]} |x_i| d\sigma_n(x) \geq$$

$$\geq \frac{C}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\log[\frac{n}{2}]+1}{n}} \geq c\sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Θεώρημα 5.11. *(Dvoretzky-Milman) Έστω* $X = (\mathbb{R}^n, \| \, \|_X)$ *ένας* n*-διάστατος χώρος με νόρμα και* $\epsilon \in (0,1)$. *Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός* $k \geq c(\epsilon) \log n$ *και* k*-διάστατος υπόχωρος* Y *του* X *ώστε*

$$d_{BM}(Y, \ell_2^k) \leq 1 + \epsilon \tag{5.18}$$

Απόδειξη. *Από το θεώρημα του John υπάρχει μοναδικός* $T \in GL(n)$ *ώστε το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του* $T[B_X]$ *να είναι η ευκλείδεια μπάλα* B_2^n. *Ισοδύναμα, το κυρτό συμμετρικό σώμα* $K = T[B_X]$ *είναι σε θέση John επομένως* *ισχύει ότι* $\|x\|_K \leq \|x\|_2$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$. *Επομένως η* $\| \ \|_K$ *περιορισμένη στην* S^{n-1} *είναι Lipschitz με σταθερά* $b = 1$. *Από το θεώρημα* (5.8) *του Milman έπεται ότι για* $k = c(\epsilon)nM^2$ *υπάρχει* k*-διάστατος υπόχωρος* F *ώστε*

$$(1+\epsilon)^{-1}M \leq \|x\|_K \leq M(1+\epsilon) \tag{5.19}$$

για κάθε $x \in S_F$. *Ισοδύναμα*

$$B_2^k = B_2^n \cap F \subset T[B_X] \cap F \subset (1+\epsilon)^2 B_2^n \cap F = B_2^k \tag{5.20}$$

και αντικαθιστώντας το ϵ *με* $\epsilon/4$ *έπεται ότι* $d_{BM}(Y, \ell_2^k) \leq 1+\epsilon$, *όπου* $Y = T^{-1}[F]$. *Τέλος, χρησιμοποιώντας την* (5.12) *για το κάτω φράγμα της διάστασης των σχεδόν ευκλείδειων υποχώρων έχουμε*

$$k = c(\epsilon)nM^2 \geq c'(\epsilon)n\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)^2 = c'(\epsilon)\log n$$

□

Διατυπώνουμε τώρα τη δυϊκή μορφή του θεωρήματος Dvoretzky-Milman, που βασίζεται στο δυϊσμό μεταξύ τομών και προβολών που αποδείχθηκε στην πρόταση (1.32)

Θεώρημα 5.12. *(Dvoretzky-Milman, δυϊκή μορφή) Έστω* $K \subset \mathbb{R}^n$ *ένα συμμετρικό κυρτό σώμα και* $\epsilon \in (0,1)$. *Τότε υπάρχει υπόχωρος* Y *διάστασης* $k \geq c(\epsilon)\log n$ *και* $T \in GL(n)$ *ώστε*

$$T[B_2^k] \subset P_Y[K] \subset (1+\epsilon)T[B_2^k] \tag{5.21}$$

όπου P_Y *η ορθογώνια προβολή στον* Y.

Παρατηρούμε τώρα ότι από τη σχέση (5.20) προκύπτει

$$E = T^{-1}[B_2^k] \subset B_Y = B_X \cap Y \subset (1+\epsilon)E \tag{5.22}$$

που όπως είχε αναφερθεί και στην αρχή του κεφαλαίου σημαίνει ότι το $K = B_X$ έχει σχεδόν ελλειψοειδείς τομές διάστασης k. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ελλειψοειδές E με μία ευκλείδεια μπάλα, αρκεί να ελλατώσουμε τη διάσταση k σε $k/2$. Πράγματι ισχύει η εξής πρόταση:

Πρόταση 5.13. *Έστω* E *ένα ελλειψοειδές στον* $\mathbb{R}^n$. *Γράφοντας το* n *ως* $2s-1$ *ή* $2s$, *υπάρχει ένας υπόχωρος* Y *του* $\mathbb{R}^n$ *με* $\dim Y = s$ *ώστε η τομή* $E \cap Y$ *να είναι μια ευκλείδεια μπάλα* $rB_2^s \subset Y$.

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [15].

5.2 Σχεδόν Ευκλείδειοι Υπόχωροι του ℓ_∞^n

Ορισμός 5.14. *Έστω X ένας n-διαστατος χώρος με νόρμα και $\epsilon \in (0,1)$. Ορίζουμε ως $k_X = k_X(\epsilon)$ το μέγιστο αριθμό $k \in \mathbb{N}$ ώστε να υπάρχει ένας k-διάστατος $(1+\epsilon)$-Ευκλείδειος υπόχωρος Y του X. Ο αριθμός k_X ονομάζεται και* ***κρίσιμη διάσταση*** *του X.*

Ως πόρισμα του θεωρήματος Dvoretzky-Milman προκύπτει το εξής:

$$k_X \geq cn\left(\frac{M}{b}\right)^2$$

Θεώρημα 5.15. *(Milman-Schechtman)*

$$k_X \simeq n\left(\frac{M}{b}\right)^2 \tag{5.23}$$

Απόδειξη. *Αρκεί να δείξουμε ότι υπάχει θετική σταθερά $c>0$ ώστε*

$$k_X \leq cn\left(\frac{M}{b}\right)^2$$

Θεωρούμε $Y_1,\dots,Y_t$ ορθογώνιους υποχώρους του X με $\dim Y_i \leq k_X$ για κάθε $i=1,\dots,t$ και τέτοιους ώστε $X=\bigoplus_{i=1}^t Y_i$. Τότε θα πρέπει

$$t \leq \left[\frac{n}{k_X}\right]+1 \leq \frac{n+k_X}{k_X} \leq \frac{2n}{k_X}$$

Εξ ορισμού οι υπόχωροι Y_i είναι $(1+\epsilon)$-Ευκλείδειοι, επομένως υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε

$$M\|x\|_2 \leq \|x\|_X \leq (1+\epsilon)M\|x\|_2$$

για κάθε $x \in U[Y_i]$. Όμως για κάθε $x \in X$ έχουμε $x=\sum x_i$ με $\langle x_i,x_j\rangle = 0$ για $i \neq j$. Χρησιμοποιώντας και την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι

$$\|x\|_X \leq (1+\epsilon)M\|x\|_2 \leq (1+\epsilon)M\sum_{i=1}^t \|x_i\|_2 \leq (1+\epsilon)M\sqrt{t}\|x\|_2$$

επομένως $b \leq (1+\epsilon)M\sqrt{t} \leq (1+\epsilon)M\sqrt{2n/k_X}$. Τελικά

$$k_X \leq 2(1+\epsilon)^2 n\left(\frac{M}{b}\right)^2 \leq 8n\left(\frac{M}{b}\right)^2$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η διάσταση των σχεδόν ευκλείδειων υποχώρων του ℓ_∞^n είναι της τάξης του $\log n$, που σημαίνει ότι η λογαριθμική εξάρτηση από τη διάσταση n στο θεώρημα Dvoretzky είναι η βέλτιστη δυνατή. Από το θεώρημα (5.11) έχουμε ότι $k_{\ell_\infty^n} = k_\infty \geq c \log n$. Απομένει να δείχθεί η αντίστροφη ανισότητα, η οποία προκύπτει ως πόρισμα από ένα γενικότερο αποτέλεσμα.
Όπως έχει ήδη αναφερθεί από τα σχόλια στο τέλος του Κεφαλαίου 3, ο n-διάστατος μοναδιαίος κύβος αποτελεί τη «χειρότερη» προσέγγιση της μοναδιαίας μπάλας με την έννοια της απόστασης Banach-Mazur, ανάμεσα σε όλα τα συμμετρικά, κυρτά σώματα. Ο κύβος είναι ένα συμμετρικό πολύτοπο με «λίγες» έδρες (για την ακρίβεια $2n$) και μάλιστα εχει τις λιγότερες έδρες ανάμεσα σε όλα τα συμμετρικά πολύτοπα στον $\mathbb{R}^n$. Θα περίμενε κανείς ότι ένα συμμετρικό πολύτοπο με περισσότερες έδρες θα προσέγγιζε καλύτερα τη n-διάστατη ευκλείδεια μπάλα. Πόσες έδρες πρέπει να έχει ένα συμμετρικό πολύτοπο ώστε να προσεγγιζει καλά την B_2^n ; Η απάντηση είναι εκθετικά πολλές, όπως αποδεικνύεται στην επόμενη πρόταση

Πρόταση 5.16. *Έστω $P \subset \mathbb{R}^n$ ένα (συμμετρικό) πολύτοπο με*

$$B_2^n \subset P \subset dB_2^n$$

για κάποιο $d > 1$. Τότε το P έχει τουλάχιστον $e^{n/2d^2}$ έδρες.

Απόδειξη. *Έστω m ο αριθμός των εδρών του P. Τότε*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 1,\ i = 1, \dots, m\}$$

όπου $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$. Από τον πρώτο εγκλεισμό της υπόθεσης έπεται ότι $\|u_i\|_2 \leq 1$ για κάθε i. Από το δεύτερο εγκλεισμό έπεται ότι για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ υπάρχει $j \leq m$ ώστε $\langle \theta, u_j \rangle \geq 1/d$. Θέτοντας $v_j = u_j/\|u_j\|_2$ έπεται από τα παραπάνω ότι

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{j=1}^{m} \{\theta \in S^{n-1} : \langle \theta, v_j \rangle \geq 1/d\} = \bigcup_{j=1}^{m} C(v_j, 1/d) \tag{5.24}$$

όπου με $C(v, r) \subset S^{n-1}$ συμβολίζουμε τις μπάλες της S^{n-1} με κέντρο v που απέχουν απόσταση r από τον ισημερινό. Αρκεί να βρεθεί ένα άνω φράγμα για το μέτρο ενός τέτοιου συνόλου, ώστε να υπολογιστεί η τάξη μεγέθους του m. Παρατηρούμε οτι ο κώνος

$$\{tx : x \in C(u, r), t \in (0, 1]\} \subset B_2^n$$

η προβολή του οποίου πάνω στην S^{n-1} είναι το $C(u, r)$ περιέχεται σε μία ευκλείδεια μπάλα ακτίνας $\sqrt{1 - r^2}$. Άρα :

$$\sigma_n(C(u, r)) \leq (1 - r^2)^{n/2} \leq e^{-r^2 n/2}$$

και επιστρέφοντας στην (5.24) έχουμε ότι

$$1 = \sigma_n(S^{n-1}) \leq m\sigma_n(C(u, 1/d)) \leq me^{-n/2d^2}$$

από όπου έπεται το ζητούμενο. □

Έστω λοιπόν $\epsilon \in (0, 1)$ και ένας k διάστατος $(1+\epsilon)$-Ευκλείδειος υπόχωρος του ℓ_∞^n. Έπεται ότι $d_{BM}(B_\infty^n \cap Y, B_2^k) \leq 1 + \epsilon$. Το πολύτοπο $P = B_\infty^n \cap Y$ έχει $m \leq 2n$ έδρες και υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε

$$E = T[B_2^k] \subset P \subset (1+\epsilon)E \tag{5.25}$$

Θέτοντας $P' = T^{-1}[P]$ έπεται ότι $B_2^k \subset P' \subset (1+\epsilon)B_2^k$. Το P' έχει και αυτό m έδρες και από την πρόταση (5.16) έχουμε ότι $\exp(k/2(1+\epsilon)^2) \leq m \leq 2n$. Επομένως:

$$k \leq 2(1+\epsilon)^2 \log(2n) \tag{5.26}$$

δηλαδή $k_\infty \leq C \log n$, οπότε έχουμε αποδείξει το εξής

Πρόταση 5.17. $k_\infty \simeq \log n$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα (5.15) μπορούμε, μέσω της παραμέτρου M, να υπολογίσουμε την κρίσιμη διάσταση των χώρων ℓ_p^n για $1 \leq p < \infty$. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι η κρίσιμη διάσταση του ℓ_1^n είναι της τάξης του n, δηλαδή.

$$k_1 \simeq n$$

Αυτό σημαίνει ότι ο ℓ_1^n, σε αντίθεση με τον ℓ_∞^n, έχει σχεδόν ευκλείδειους υποχώρους αρκετά μεγάλης διάστασης.

Αναφορές

[1] http://www-personal.umich.edu/~romanv/papers/GFA-book/GFA-book.pdf.

[2] S. Avidan, A. Giannopoulos, and V. Milman. *Asymptotic Geometric Analysis*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[3] J. A. Baker. Integration over spheres and the divergence theorem for balls. *The American Mathematical Monthly*, 104:36–47, 1997.

[4] K. Ball. *An elementary introduction to modern convex geometry. Flavors of geometry*. Cambridge University Press, Cambridge New York, N.Y, 1997.

[5] V. Burago, Y. Zalgaller. *Geometric inequalities*. Springer-Verlag, Berlin New York, 1988.

[6] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis. Second Edition*. Springer-Verlag, New York, 1990.

[7] J. A. de Reyna, K. M. Ball, and R. Villa. Concentration of the distance in finite dimensional normed spaces. *Mathematika*, 45:245–252, 1998.

[8] A. Dvoretzky. Some results on convex bodies and Banach spaces. *Proc. Sympos. Linear Spaces, Jerusalem*, pages 123–161, 1961.

[9] A. Dvoretzky and C. A. Rogers. Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A*, 36:192–197, 1950.

[10] T. Figiel, J. Lindenstrauss, and V. D. Milman. The dimension of almost spherical sections of convex bodies. *Acta Math.*, 139:53–94, 1977.

[11] P. M. Gruber and F. E. Schuster. An arithmetic proof of John's ellipsoid theorem. *Arch. Math. (Basel)*, 85:82–88, 2005.

[12] F. John. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. *Courant Anniversary Volume*, pages 187–204, 1948.

[13] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss. *Handbook of the geometry of Banach spaces.* Elsevier, Amsterdam Boston, 2001.

[14] M. Ledoux. *The concentration of measure phenomenon.* American Mathematical Society, Providence, R.I, 2001.

[15] J. Matoušek. *Lectures on discrete geometry.* Springer, New York, 2002.

[16] V. D. Milman. New proof of the theorem of Dvoretzky on sections of convex bodies. *Funct. Anal. Appl*, 5:28–37, 1971.

[17] V. D. Milman. Dvoretzky's theorem - thirty years later. *Geom. Functional Anal.*, 2:455–479, 1992.

[18] K. R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces.* AMS Chelsea Pub, Providence, R.I, 2005.

[19] R. Schneider. *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory.* Cambridge University Press, New York, 2014.

[20] W. Sierpiński. Sur la question de la measurabilité de la base de M. Hamel. *Fund. Math.*, 1:105–111, 1920.

[21] D. Stroock. *A concise introduction to the theory of integration.* Birkhäuser, Boston, 1994.

[22] M. Suslin. Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 164:88–90, 1917.

[23] R. Webster. *Convexity.* Oxford University Press, Oxford New York, 1994.

[24] A. Weir. *Lebesgue integration and measure.* University Press, Cambridge England, 1973.