

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

Ανάλυση Αεροελαστικής Ευστάθειας
Ανεμογεννήτριας Οριζοντίου Άξονα, σε
Συνθήκες Δυναμικής ή Αεροδυναμικής
Ανισοτροπίας - Εφαρμογή της Θεωρίας Floquet

Τζαβέλλα Κυριακή
Διπλωματική Εργασία



Επιβλέπων καθηγητής: Ριζιώτης Βασίλειος

Οκτώβριος 2016

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική μου εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Βασίλειο Ριζιώτη, του οποίου τα μαθήματα με ενέπνευσαν να επιλέξω θέμα για τη διπλωματική μου στον τομέα ρευστών, αλλά και για την συνεχή και ουσιαστική του καθοδήγηση καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο καθηγητή Σπυρίδωνα Βουτσινά για το ενδιαφέρον που έδειξε για την εργασία μου, αλλά και γιατί με το μάθημά του με εισήγαγε στην έννοια της αεροελαστικότητας και απέκτησα το γνωστικό υπόβαθρο για να συνεχίσω με την παρούσα εργασία.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα και τον υποψήφιο διδάκτορα Παναγιώτη Σχοινά, στον κώδικα του οποίου βασίστηκα για την πραγματοποίηση της διπλωματικής μου, για το ενδιαφέρον, την καθοδήγηση και την βοήθεια του σε όλα τα στάδια της εργασίας μου.

Τέλος, να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την διαρκή υποστήριξή τους.

Σύνοψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός υπολογιστικού εργαλείου το οποίο θα εξετάζει την ευστάθεια ανεμογεννήτριας οριζοντίου άξονα, με εφαρμογή της θεωρίας Floquet.

Για να γίνει αυτό χρησιμοποιήθηκε ένα αεροελαστικό πρότυπο για την προσομοίωση της συμπεριφοράς της ανεμογεννήτριας, το οποίο βασίζεται στη λογική των συγκεντρωμένων ελαστικών ιδιοτήτων (lumped properties) για την αναπαράσταση των τμημάτων της κατασκευής (πτερύγια, αξονικό σύστημα, πύργος). Η μοντελοποίηση έγινε με ένα σύστημα 16 βαθμών ελευθερίας. Στην κορυφή του πύργου 3 βαθμοί ελευθερίας συνδέονται με την στροφή στον κάθε άξονα (roll, tilt, yaw) και 2 βαθμοί ελευθερίας αναφέρονται στην μπρος πίσω και την πλευρική του μετατόπιση. Άλλοι 2 βαθμοί ελευθερίας συνδέονται με την γωνιακή απόκλιση του άξονα του δρομέα, ένας στην θέση της πλήμνης και ένας στη θέση της γεννήτριας. Τέλος ορίζονται 3 βαθμοί ελευθερίας για κάθε πτερύγιο, για τις γωνιακές αποκλίσεις του πτερυγίου στην κατεύθυνση πτερύγισης (flap) και κατά την κατεύθυνση περιστροφής (edge), αλλά και για τη γωνία κλίσης pitch του κάθε πτερυγίου.

Για τη διατύπωση των εξισώσεων του συστήματος χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Lagrange. Στο σύστημα αυτό εφαρμόζονται οι σχέσεις μετασχηματισμού Coleman. Με αυτόν τον τρόπο μεταφέρεται το πρόβλημα σε μη στρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων. Στη συνέχεια πραγματοποιείται ιδιοδιανυσματική ανάλυση για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοσυχνοτήτων των βαθμών ελευθερίας.

Τέλος εφαρμόζεται υπολογιστικά η θεωρία Floquet και χρησιμοποιείται για την εξέταση της ευστάθειας αυτού του συστήματος. Η παραπάνω θεωρία επιτρέπει τη διαχείριση περιοδικών συστημάτων χωρίς να απαιτείται μετασχηματισμός τους. Η αποτελεσματικότητά της πιστοποιείται μετά από σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα της λύσης Coleman. Στη συνέχεια εφαρμόζεται και σε συστήματα τα οποία διατηρούν στα μητρώα τους κάποια περιοδικότητα.

Πίνακας περιεχομένων

1. Εισαγωγή	7
1.1. Στόχος της διπλωματικής εργασίας	7
1.2. Βιβλιογραφική επισκόπηση	7
2. Ελαστοδυναμική Ανάλυση	10
2.1. Ορισμός βαθμών ελευθερίας.....	10
2.2. Ανάλυση με τη μέθοδο πολλαπλών σωμάτων	10
2.3. Μοντελοποίηση συστήματος 16 βαθμών ελευθερίας	13
2.3.1. Δυναμικές εξισώσεις συστήματος	17
3. Αεροδυναμική ανάλυση και Αεροελαστική σύζευξη	21
3.1. Αεροδυναμική	21
3.1.1. Μοντελοποίηση αεροδυναμικής	21
3.1.2. Γραμμικοποίηση αεροδυναμικής.....	23
3.2. Αεροδυναμική απόσβεση (damping)	24
4. Μετασχηματισμός από το στρεφόμενο στο μη στρεφόμενο σύστημα.....	25
4.1. Μετασχηματισμός των βαθμών ελευθερίας	25
4.2. Μετασχηματισμός των στρεφόμενων εξισώσεων.....	28
5. Ιδιοδιανυσματική ανάλυση.....	32
5.1. Σύστημα σε ελεύθερη ταλάντωση (ομογενές πρόβλημα).....	32
5.2. Σύστημα με εξωτερική διέγερση.....	34
5.3. Σύστημα με αεροδυναμικά φορτία.....	36
6. Θεωρία Floquet	38
6.1. Περιγραφή μεθόδου	38
6.2. Επίλυση της απροσδιοριστίας (frequency identification)	40
7. Εφαρμογή θεωρίας Floquet σε απλουστευμένο μοντέλο	44
7.1. Μοντέλο τριών βαθμών ελευθερίας.....	44
7.2. Μοντέλο πέντε βαθμών ελευθερίας.....	48
8. Παρουσίαση ανεμογεννήτριας NREL 5MW	50
8.1. Τεχνικά χαρακτηριστικά ανεμογεννήτριας	50
8.2. Επιδόσεις ανεμογεννήτριας	51

9. Αποτελέσματα ανάλυσης ευστάθειας στο σύστημα των 16 βαθμών ελευθερίας	54
9.1. Ανάλυση ιδιομορφών.....	54
9.2. Ανάλυση ευστάθειας με αεροδυναμικά φορτία	55
10. Ανάλυση ευστάθειας σε σύστημα με ασυμμετρία μάζας	59
10.1. Επίδραση ασυμμετρίας στις ιδιομορφές	59
10.2. Ιδιοσυχνότητες με την προσθήκη ασυμμετρίας	61
10.3. Απόσβεση με την προσθήκη ασυμμετρίας	63
10.4. Ανάλυση FFT στις περιοδικές αποκρίσεις.....	65
11. Συμπεράσματα και συστάσεις για περεταίρω έρευνα	70
11.1. Συμπεράσματα	70
11.2. Συστάσεις για περεταίρω έρευνα	70
Παράρτημα.....	72
Βιβλιογραφία	73

1. Εισαγωγή

1.1. Στόχος της διπλωματικής εργασίας

Η παρούσα εργασία στοχεύει στην ανάλυση της ευστάθειας ανεμογεννήτριας οριζοντίου άξονα, σε προβλήματα περιοδικών συντελεστών, χρησιμοποιώντας ένα απλουστευμένο μοντέλο 16 βαθμών ελευθερίας. Οι δυναμικές εξισώσεις του συστήματος υπολογίζονται κατά Lagrange. Στο σύστημα εφαρμόζεται μετασχηματισμός Coleman ο οποίος εξαλείφει την περιοδικότητα των μητρώων σε περιπτώσεις ισότροπων συστημάτων, όπου δηλαδή οι ιδιότητες όλων των πτερυγίων είναι πανομοιότυπες, η βαρύτητα δεν υπολογίζεται και το πεδίο ροής του ανέμου είναι ομοιόμορφο και κάθετο στο επίπεδο περιστροφής του ρότορα. Στο σύστημα σταθερών συντελεστών πραγματοποιείται ιδιοδιανυσματική ανάλυση για τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών ευστάθειας, δηλαδή απόσβεσης και ιδιοσυχνότητας των βαθμών ελευθερίας.

Αυτο το οποίο επιδιώκεται στην εργασία είναι η ανάπτυξη μιας μεθόδου η οποία θα μπορεί να διαχειριστεί συστήματα με μητρώα περιοδικών συντελεστών, ώστε να εξετασθούν και περιπτώσεις όπου εισάγονται ανομοιομορφίες, είτε στην ίδια την ανεμογεννήτρια, είτε στη ροή του αέρα, και στις οποίες ο Coleman μετασχηματισμός δεν θα ήταν αρκετός για την επίλυσή τους.

Η θεωρία Floquet ανταποκρίνεται σε αυτή την πρόκληση και επομένως, είναι αυτή η οποία υλοποιείται στην παρούσα εργασία. Σκοπός είναι, να εφαρμοσθεί αρχικά σε ένα ισότροπο σύστημα και τα αποτελέσματα να διασταυρωθούν με τα αντίστοιχα της διαδικασίας Coleman. Κατά αυτόν τον τρόπο θα πιστοποιηθεί η εφαρμογή της μεθόδου, και άρα θα μπορέσει να χρησιμοποιηθεί για την διερεύνηση πιο σύνθετων προβλημάτων, με έντονο περιοδικό χαρακτήρα στα μητρώα του συστήματος.

1.2. Βιβλιογραφική επισκόπηση

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας που στοχεύει στην ανάλυση ευστάθειας ανεμογεννήτριας οριζοντίου άξονα, απαιτείται πρωταρχικά ανάλυση της ανεμογεννήτριας.

Η απαίτηση αυτή συντίθεται από δύο μέρη. Το πρώτο αφορά στην ελαστοδυναμική ανάλυση της μηχανής, δηλαδή την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος της ανεμογεννήτριας και των μηχανικών

ταλαντώσεων των επιμέρους τμημάτων της. Το δεύτερο, σχετίζεται με την αεροδυναμική ανάλυση του δρομέα.

Οι μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται σήμερα σε ευρεία κλίμακα για την αεροελαστική ανάλυση ανεμογεννητριών οριζοντίου άξονα, βασίζονται σε μια μονοδιάστατη θεώρηση της κατασκευής, η οποία στηρίζεται στη θεωρία δοκού για την ανάλυση της ελαστοδυναμικής συμπεριφοράς, και σε παραλλαγές του προτύπου των στοιχείων πετυγώσης για τον υπολογισμό των αεροδυναμικών φορτίων του δρομέα.

Τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί πλήθος κωδίκων για την υλοποίηση αυτής της αεροελαστικής ανάλυσης. Οι διαφορές που παρουσιάζουν μεταξύ τους είναι αρκετά μικρές και εστιάζονται κυρίως στο ελαστοδυναμικό πρότυπο. Μια βασική κατηγορία τέτοιων κωδίκων είναι αυτοί που χρησιμοποιούν την μέθοδο των ιδιομορφών (modal methods). Το βασικό τους πλεονέκτημα είναι το πολύ χαμηλό υπολογιστικό κόστος, ενώ μειονέκτημά τους είναι ότι έχουν τη δυνατότητα να αναπαράγουν περιορισμένο αριθμό ιδιοσυχνοτήτων της κατασκευής και απαιτούν την εκ των προτέρων γνώση των βασικών ιδιομορφών του συστήματος. Μερικοί από τους πιο διαδεδομένους κώδικες που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία και οι οποίοι χρησιμοποιούνται ως επίσημα και πιστοποιημένα εργαλεία ανά την Ευρώπη είναι ο κώδικας BLADED των Garrad-Hassan (Garrad και Hassan (1996)), ο κώδικας FLEX4 του πολυτεχνείου της Δανίας (DTU) (Øye (1994)) και ο κώδικας VIDYN της TG (Ganander και Olsson (1994)). Μια δεύτερη κατηγορία κωδίκων είναι αυτοί οι οποίοι χρησιμοποιούν τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ή πεπερασμένων διαφορών στην διακριτοποίηση των ελαστοδυναμικών εξισώσεων. Σε αυτήν την κατηγορία οι πλέον γνωστοί κώδικες είναι ο κώδικας HAWC του RISØE (Thirstrup Petersen (1990)), ο κώδικας PHATAS του ECNI (Lindenburg και Snel (1993), Lindenburg και Schepers (1996)), ο κώδικας ALCYONE του ΚΑΠΕ (Chaviaropoulos (1996), Riziotis και Chaviaropoulos και Voutsinas (1996)) και ο κώδικας GAST του ΕΜΠ (Riziotis και Voutsinas (1997)).

Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιείται μια απλουστευμένη μέθοδος για την ελαστική ανάλυση της ανεμογεννήτριας. Η συγκεκριμένη μέθοδος βασίζεται σε συγκεντρωμένες ελαστικές ιδιότητες (ελατήρια) τοποθετημένες στη ρίζα κάθε σώματος. Στο σύστημα που προκύπτει από την παραπάνω μέθοδο εφαρμόζεται ιδιοδιανυσματική ανάλυση.

Το πρόβλημα που εμφανίζεται, είναι ότι για να πραγματοποιηθεί ιδιοδιανυσματική ανάλυση πρέπει τα μητρώα των εξισώσεων του συστήματος της ανεμογεννήτριας να είναι σταθερών συντελεστών. Αυτό μπορεί να γίνει με εφαρμογή του Coleman μετασχηματισμού σε περιπτώσεις ισότροπου συστήματος. Όταν όμως το σύστημα δεν είναι ισότροπο, η περιοδικότητα των

συντελεστών διατηρείται και προκύπτει η ανάγκη να επιλυθεί το πρόβλημα διαφορετικά.

Εδώ βρίσκει εφαρμογή η θεωρία Floquet. Δημοσιεύσεις που αναλύουν την υλοποίηση της θεωρίας αυτής έχουν γίνει, μεταξύ άλλων, από τους P.F. Skjoldan και M.H. Hansen (Siemens Wind Power A/S, Technical University of Denmark, 2009), Karl A. Stol , (University of Canterbury, N.Z., 1996 , University of Colorado, 1998).

2. Ελαστοδυναμική Ανάλυση

2.1. Ορισμός βαθμών ελευθερίας

Το σύνολο των μεταβλητών, το οποίο προσδιορίζει την ακριβή θέση των μελών ενός συστήματος ονομάζεται σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων του συστήματος. Συνήθως οι γενικευμένες συντεταγμένες αντιπροσωπεύουν μήκος ή γωνία. Οι συντεταγμένες αυτές συμβολίζονται με q_i ($i=1, \dots, n$, όπου n είναι ο αριθμός των γενικευμένων συντεταγμένων) και για κάθε δυναμικό σύστημα μπορεί να υπάρχουν πολλά διαφορετικά συστήματα γενικευμένων συντεταγμένων.

Σε πολλές περιπτώσεις η κίνηση των μελών ενός δυναμικού συστήματος περιορίζεται από διάφορες κινηματικές συνθήκες ή δεσμούς κίνησης. Έστω ότι η κίνηση ενός δυναμικού συστήματος περιορίζεται από k δεσμούς της μορφής:

$$f_i(q, \dot{q}, t) = 0$$

όπου $q = [q_1 \dots q_n]^T$ είναι το διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων

και $\dot{q} = [\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n]^T$ είναι το διάνυσμα των γενικευμένων ταχυτήτων του συστήματος.

Στην περίπτωση αυτή, ο αριθμός των ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων είναι $n-k$ και είναι ίσος με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του συστήματος.

Είναι λοιπόν προφανές ότι βαθμοί ελευθερίας είναι το πλήθος των ανεξάρτητων τύπων κίνησης που επιτρέπονται σε μία κατασκευή, ή αλλιώς, οι ανεξάρτητες συντεταγμένες που χρειάζονται, για να περιγράψουν πλήρως τη διαμόρφωση μιας κατασκευής οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

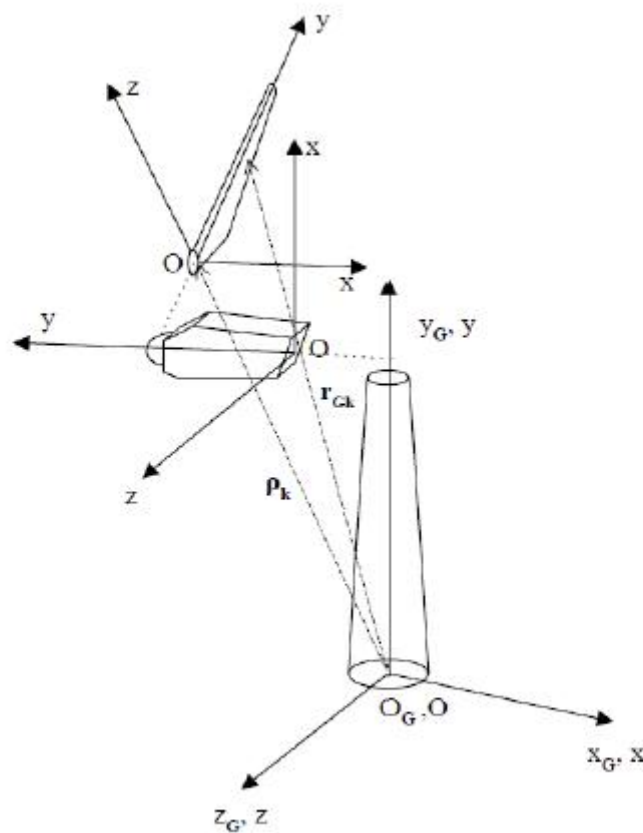
2.2. Ανάλυση με τη μέθοδο πολλαπλών σωμάτων

Μια ανεμογεννήτρια αποτελεί μια σύνθετη κατασκευή η οποία αποτελείται από επιμέρους τμήματα. Το κάθε τμήμα της μάλιστα, όχι μόνο παραμορφώνεται αλλά υποβάλλεται σε κίνηση άκαμπτου σώματος (rigid body motion), όπως για παράδειγμα συμβαίνει με τα πτερύγια, τα οποία περιστρέφονται και αλλάζουν γωνία βήματος. Επιπλέον, καθώς το κάθε σώμα συνδέεται με κάποιο άλλο, ακολουθεί την κίνηση που αυτό επιβάλλει.

Η συμμετοχή των διαφόρων κινήσεων του κάθε τμήματος, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι υπάρχει συγκεκριμένο σημείο σύνδεσης μεταξύ των τμημάτων, όπου "επικοινωνούν" οι μετακινήσεις και τα φορτία από το ένα σώμα στο άλλο, επιβάλλει τη διατύπωση της δυναμικής ενός τέτοιου συστήματος σε

σχέση με το καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Η ανάλυση multi body [1], επιτρέπει τη θεώρηση κάθε σωματός ξεχωριστά από τα άλλα, τα οποία όμως υπόκεινται σε συγκεκριμένες οριακές κινηματικές και δυναμικές συνθήκες σύζευξης ελευθέρου σώματος, κι έτσι επιτρέπεται η προσαρμογή του κάθε σώματος στον πλήρη σχηματισμό.

Ας θεωρήσουμε ένα ολικό σύστημα συντεταγμένων $[O;xyz]_G$ και ένα σώμα (από τα k συνολικά), σε κίνηση για το οποίο όλες οι κατασκευαστικές πληροφορίες είναι γνωστές σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $[O;xyz]$. Οι έννοιες του τοπικού και ολικού συστήματος συντεταγμένων γίνεται πλήρως κατανοητή στα σχήματα (2.1) και (2.2).



Σχήμα 2.1. Ορισμός συστημάτων συντεταγμένων

Τα R, A προσδιορίζουν τη θέση και προσανατολισμό αντίστοιχα, του τοπικού σε σχέση με το γενικό σύστημα.

Έτσι η θέση ενός οποιουδήποτε σημείου P θα δίνεται από τη σχέση:

$$r_G(P;t) = R(t) + A(t)r(P;t) \quad (2.1)$$

όπου τα r_G και r αναφέρονται στη θέση του σημείου P στα δύο συστήματα συντεταγμένων αντίστοιχα.

Γενικά τα R και A θα είναι συναρτήσεις του χρόνου και οι παράγωγοί τους θα ορίζουν την κίνηση του σώματος σαν να ήταν άκαμπτο. Η ακριβής μορφή των μητρώων αυτών εξαρτάται από τις κινηματικές συνθήκες που εισάγονται όταν το σώμα συνδεθεί με το πλήρες μοντέλο, καθώς επίσης και από τον τύπο της ίδιας του της κίνησης. Το μητρώο των κινηματικών βαθμών ελευθερίας ονομάζεται q και μπορεί να περιλαμβάνει μεγάλες στροφές και μετακινήσεις του άκαμπτου σώματος (rigid body rotations and translations), καθώς επίσης και κατασκευαστικές αποκλίσεις (μετακινήσεις και στροφές) των σωμάτων των συνδεδεμένων με το υπό μελέτη σώμα. Από τα παρακάτω συνεπάγεται ότι το μητρώο R ορίζεται ως μια ακολουθία από στοιχειώδεις μετακινήσεις και στροφές, ενώ το μητρώο A ορίζεται μόνο από μια ακολουθία στοιχειωδών στροφών, ως εξής:

Για μια γωνία στροφής q , τα μητρώα στροφής ως προς τους άξονες x, y, z είναι τα A_1, A_2, A_3 αντίστοιχα:

$$A_1^{(q)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q & -\sin q \\ 0 & \sin q & \cos q \end{bmatrix}, A_2^{(q)} = \begin{bmatrix} \cos q & 0 & \sin q \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q & 0 & \cos q \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$A_3^{(q)} = \begin{bmatrix} \cos q & -\sin q & 0 \\ \sin q & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου η γωνία q αντιστοιχεί στον εκάστοτε βαθμό ελευθερίας.

Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχική θέση r_0 για να προσδιορίσουμε το r ως εξής:

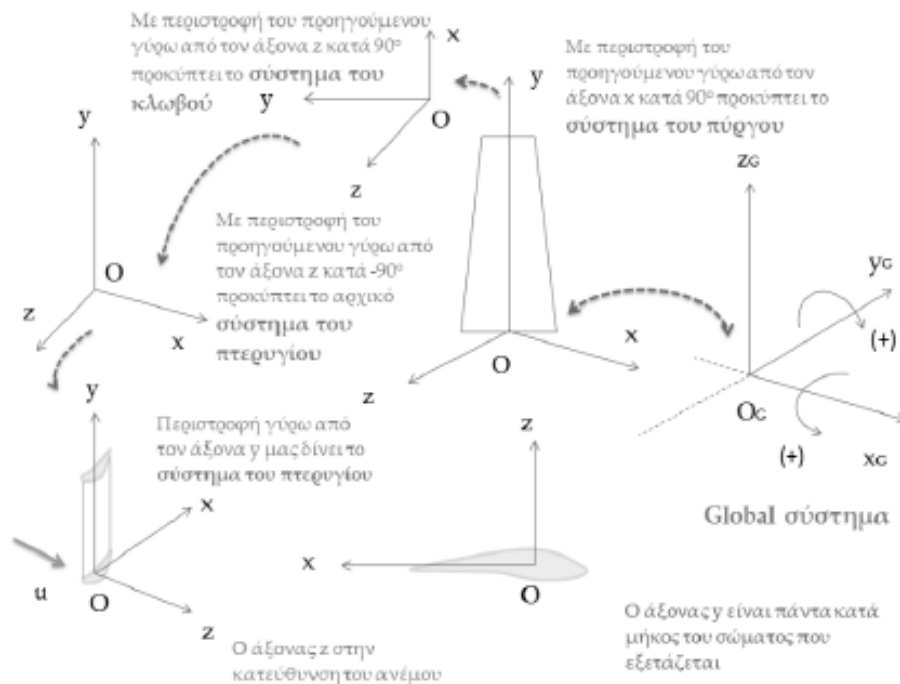
$$r(r_0; t) = r_0 + E(r_0)u(r_0; t) \quad (2.3)$$

ενώ μπορούμε να υπολογίσουμε και την ταχύτητα και την επιτάχυνση από τους τύπους:

$$\dot{r}_G = \dot{R} + \dot{A}(r_0 + Eu) + AE\dot{u} \quad (2.4)$$

$$\ddot{r}_G = \ddot{R} + \ddot{A}(r_0 + Eu) + 2\dot{A}\dot{E}\dot{u} + AE\ddot{u} \quad (2.5)$$

όπου \dot{R} και \ddot{R} αναφέρονται στην γραμμική ταχύτητα και επιτάχυνση αντίστοιχα, ενώ οι παράγωγοι του A εισάγουν την γωνιακή ταχύτητα καθώς και τη φυγοκεντρική και την Coriolis επιτάχυνση.



Σχήμα 2.2. Συστήματα συντεταγμένων

2.3. Μοντελοποίηση συστήματος 16 βαθμών ελευθερίας

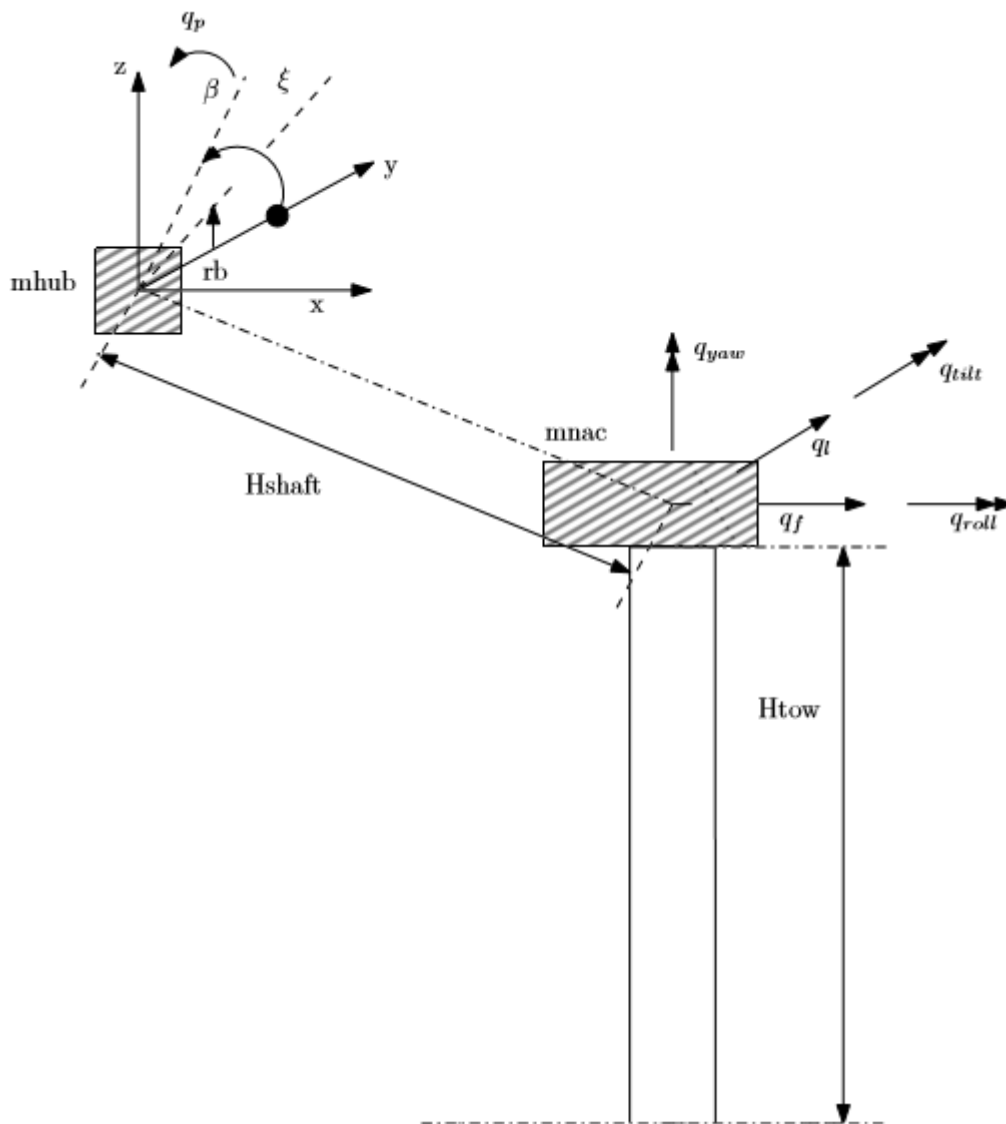
Η παρούσα εργασία βασίζεται σε ένα απλουστευμένο μοντέλο ανεμογεννήτριας με 16 βαθμούς ελευθερίας (οι οποίοι παρουσιάζονται στο σχήμα 2.3), που αντιστοιχούν σε γωνιακές και γραμμικές μετατοπίσεις, όπως αυτοί αναλύονται πιο αναλυτικά στον πίνακα 2.1.

Η μειωμένης τάξης μοντελοποίηση είναι σημαντική για το σχεδιασμό και διαστασιολόγηση πολύπλοκων συστημάτων. Συνήθης μέθοδος για την μείωση της τάξης ενός συστήματος είναι η ελαστική του ανάλυση με την θεώρηση συγκεντρωμένων αδρανειακών ιδιοτήτων.

Με αυτήν την μέθοδο διαμορφώνεται και το μοντέλο της ανεμογεννήτριας που θα εξετασθεί στην παρούσα εργασία.

Συμβολισμός βαθμού ελευθερίας	Περιγραφή
β_1	Γωνιακή απόκλιση κατά την κατεύθυνση πτερύγισης (flap) του πρώτου πτερυγίου
ξ_1	Γωνιακή απόκλιση κατά την κατεύθυνση edge του πρώτου πτερυγίου
q_{p1}	Κλίση γωνίας βήματος (pitch) του πρώτου πτερυγίου
β_2	Γωνιακή απόκλιση κατά την κατεύθυνση πτερύγισης (flap) του δευτέρου πτερυγίου
ξ_2	Γωνιακή απόκλιση κατά την κατεύθυνση edge του δευτέρου πτερυγίου
q_{p2}	Κλίση γωνίας βήματος (pitch) του δευτέρου πτερυγίου
β_3	Γωνιακή απόκλιση κατά την κατεύθυνση πτερύγισης (flap) του τρίτου πτερυγίου
ξ_3	Γωνιακή απόκλιση κατά την κατεύθυνση edge του τρίτου πτερυγίου
q_{p3}	Κλίση γωνίας βήματος (pitch) του τρίτου πτερυγίου
$\Delta\Psi$	Στρέψη του άξονα του δρομέα κατά την κατεύθυνση edge
Ψ_G	Γωνία στροφής του άξονα του δρομέα κατά την κατεύθυνση edge στη θέση της γεννήτριας ($\Psi_G = \omega$ [rad/sec])
q_{roll}	Πλευρική γωνιακή απόκλιση του πύργου ως προς το κατακόρυφο επίπεδο (πλάγια)
q_{yaw}	Γωνιακή απόκλιση yaw του πύργου
q_{tilt}	Γωνιακή απόκλιση του πύργου ως προς το κατακόρυφο επίπεδο (μπρος πίσω)
q_f	Γραμμική μετατόπιση πύργου και κελύφους στο διαμήκες επίπεδο
q_l	Πλευρική μετατόπιση πύργου και κελύφους

Πίνακας 2.1. Παρουσίαση 16 βαθμών ελευθερίας.

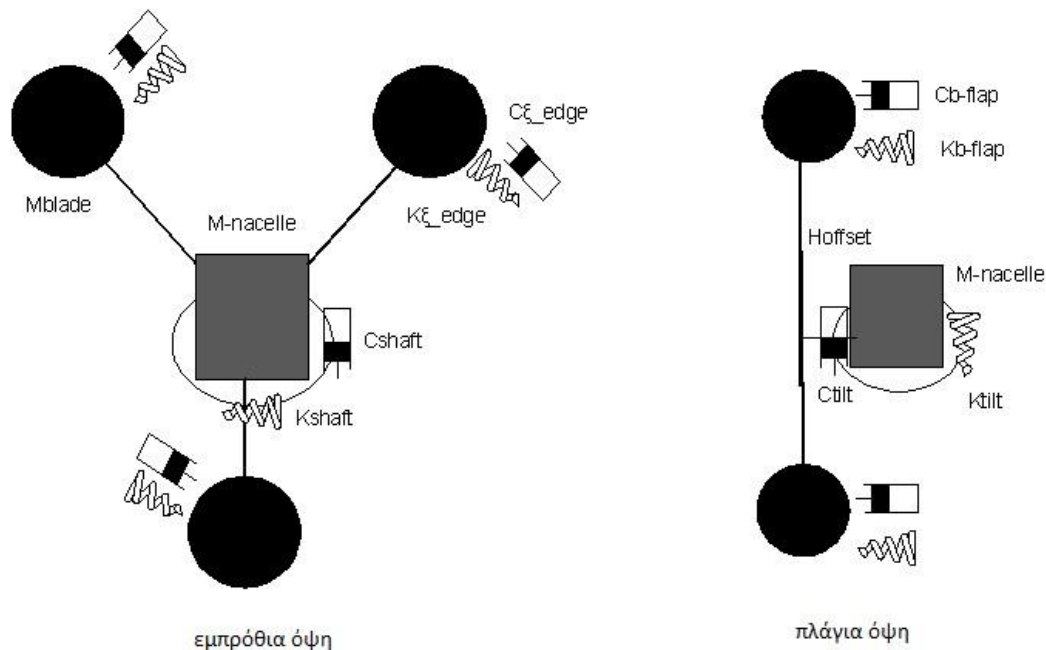


Σχήμα 2.3. Παρουσίαση 16 βαθμών ελευθερίας.

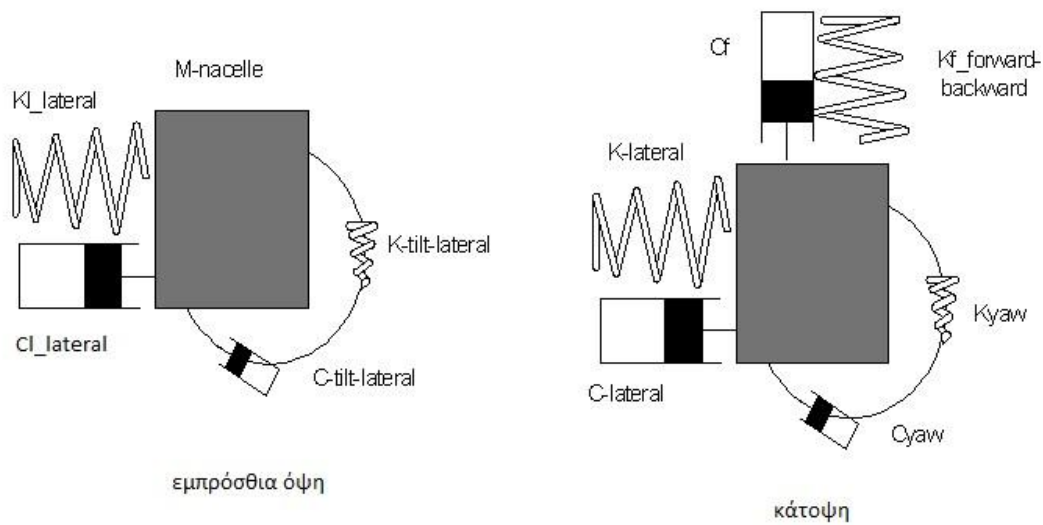
Έχουμε λοιπόν συνολικά τρεις βαθμούς ελευθερίας για το κάθε πτερύγιο (flap, edge και pitch) και επτά βαθμούς ελευθερίας που αφορούν στον πύργο και στο κέλυφος (αξονικό σύστημα). Πιο συγκεκριμένα, πύργος και κέλυφος έχουν τη δυνατότητα να ταλαντώνονται και να στρέφονται στο διαμήκες και στο εγκάρσιο επίπεδο, ενώ το αξονικό σύστημα έχει την επιπλέον δυνατότητα να στρίψει κατά yaw και να αποκλίνει κατά edge και από τα δύο του άκρα, στη θέση του δρομέα και στη θέση της γεννήτριας ($\Delta\Psi$, Ψ_G). Σημειώνεται ότι ο βαθμός ελευθερίας της γωνίας μετακίνησης του άξονα του δρομέα στη θέση της γεννήτριας προστέθηκε για να μπορέσει να θεωρηθεί ως είσοδος στο σύστημα ελέγχου που δημιουργήθηκε η ροπή της γεννήτριας. επιπλέον, η γωνία βήματος του κάθε πτερυγίου θεωρήθηκε ως βαθμός ελευθερίας λόγω της προσθήκης των ελεγκτών που δρουν στη γωνία βήματος.

Για την απλοποίηση του προβλήματος, όπως αναφέρθηκε, χρησιμοποιούνται συγκεντρωμένες αδρανειακές ιδιότητες. Έτσι ο κλωβός μοντελοποιείται ως μια συγκεντρωμένη μάζα στην κορυφή του πύργου ενώ η πλήμνη μοντελοποιείται ως μια συγκεντρωμένη μάζα σε συγκεκριμένη απόσταση από τον άξονα του πύργου. Επιπλέον, προστίθεται το ύψος του πύργου (συγκεντρωμένη σημειακή ιδιότητα) με τον κλωβό και τον πύργο να αποτελούν διαφορετικές συγκεντρωμένες μάζες. Ο κλωβός είναι πλήρως πακτωμένος στον πύργο και εξαρτάται μόνο από την κίνηση αυτού, αλλά διαθέτει δική του δυσκαμψία η οποία επηρεάζει τις ιδιοσυχνότητες, ιδιαίτερα των πτερυγίων. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο προστέθηκαν οι δύο γραμμικές μετατοπίσεις του κλωβού ως βαθμοί ελευθερίας ώστε να προσομοιώνεται πιο σωστά η ευελιξία του.

Συγκεντρωμένα ελατήρια και αποσβεστήρες χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση των κινήσεων που επιτρέπονται στο κέλυφος και τον πύργο από τους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος. Οι κινήσεις αυτές αφορούν τους βαθμούς ελευθερίας 10-16, όπως αυτοί παρουσιάστηκαν παραπάνω. Το κάθε πτερύγιο μοντελοποιείται ως μια ράβδος με κατανεμημένη μάζα και συγκεντρωμένες ελαστικές ιδιότητες στη ρίζα. Οι ελαστικές ιδιότητες στη ρίζα του κάθε πτερυγίου επιτρέπουν την κίνησή του κατά την κατεύθυνση πτερύγισης ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$), την πλάγια κατεύθυνση (ξ_1, ξ_2, ξ_3) καθώς και τη στροφή γύρω από τον άξονά τους (q_{p1}, q_{p2}, q_{p3}). Τα φορτία είναι και αυτά συγκεντρωμένα και ασκούνται πάνω στις συγκεντρωμένες μάζες. Το μοντέλο είναι καθαρά δυναμικό όπως παρουσιάζεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 2.4. Δυναμικό μοντέλο ανεμογεννήτριας (1)



Σχήμα 2.5. Δυναμικό μοντέλο ανεμογεννήτριας (2)

2.3.1. Δυναμικές εξισώσεις συστήματος

Για ένα σώμα σε ισορροπία τα εξωτερικά φορτία πρέπει να εξισορροπούνται με τις αντίστοιχες αντιδράσεις του σώματος. Για την έκφραση αυτής της ισορροπίας χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Lagrange οι οποίες και αποτελούν τις χαρακτηριστικές εξισώσεις του υπό μελέτη συστήματος. Σύμφωνα με τις εξισώσεις αυτές είναι:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = Q_j = \sum_i f_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (2.6)$$

$$L = T - U \quad (2.7)$$

όπου

T: η κινητική ενέργεια του μοντέλου:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^R m(r) dr * \dot{r}^T * \dot{r} \quad (2.8)$$

U: η δυναμική ενέργεια του μοντέλου:

$$U = \frac{1}{2} K_{(q)} * q_j^2 \quad (2.9)$$

q_j οι ανεξάρτητοι βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος

Q_j τα εξωτερικά φορτία:

$$Q_j = \frac{\delta W}{\delta q_j}, \quad \delta W = \sum_j f_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} * \delta q_j \quad (2.10)$$

όπου δW , το έργο των εξωτερικών δυνάμεων.

Κάθε μία από τις παραπάνω εξισώσεις αντιπροσωπεύει τη συνθήκη ισορροπίας για τον κάθε βαθμό ελευθερίας. Εάν ο βαθμός ελευθερίας είναι μετακίνηση τότε η εξίσωση θα εκφράζει ισορροπία δυνάμεων, ενώ αν πρόκειται για στροφή θα εκφράζει ισορροπία ροπών.

Έτσι, και σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε, για το σύστημα των 16 βαθμών ελευθερίας, το διάνυσμα θέσης r ενός τυχαίου σημείου πάνω σε ένα πτερύγιο της ανεμογεννήτριας, ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων θα δίνεται από τη σχέση:

$$r_G = \begin{Bmatrix} q_f(t) \\ q_l(t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{tow} \end{Bmatrix} + A_2^{(q_{tilt})} * A_1^{(q_{roll})} * A_3^{(q_{yaw})} * A_1^{(\Psi_G)} * \left(\begin{Bmatrix} -H_{sh} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + A_1^{(\Delta\Psi)} * A_1^{(\Psi_G)} * A_2^{(q_p)} * A_1^{(\xi)} * A_3^{(\beta)} * \begin{Bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (2.11)$$

Αντίστοιχα, η θέση ενός σημείου πάνω στην πλήμνη θα είναι:

$$r_{hub} = \begin{Bmatrix} q_f(t) \\ q_l(t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{tow} \end{Bmatrix} + A_2^{(q_{tilt})} * A_1^{(q_{roll})} * A_3^{(q_{yaw})} * A_1^{(\Psi_G)} * \left(\begin{Bmatrix} -H_{sh} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + A_1^{(\Delta\Psi)} * \begin{Bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (2.12)$$

Πάνω στην νασέλλα:

$$r_{nac} = \begin{Bmatrix} q_f(t) \\ q_l(t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{tow} \end{Bmatrix} + A_2^{(q_{tilt})} * A_1^{(q_{roll})} * A_3^{(q_{yaw})} \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Πάνω στον πύργο:

$$r_{tow} = \begin{Bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Με τη βοήθεια του Wolfram Mathematica, αφού οριστεί το διάνυσμα r υπολογίζονται οι εξισώσεις ισορροπίας του κάθε βαθμού ελευθερίας. Η απλοποίηση που γίνεται, καθώς το μέγεθος των μετακινήσεων και των στροφών που εκφράζουν οι βαθμοί ελευθερίας είναι μικρό, είναι η εξής:

$$\cos q = 1, \sin q = q \quad (2.15)$$

Γραμμικοποίηση γίνεται για τους βαθμούς ελευθερίας q_{pi} ($i=3,6,9$), Ψ_G ($i=11$) καθώς το μέγεθός τους δεν μπορεί να θεωρηθεί μικρό. Επιπρόσθετα πρέπει να σημειωθεί ότι η παράγωγος $\dot{\Psi}_G$ αποτελεί τη γωνιακή ταχύτητα του δρομέα. Η τυπική διαδικασία είναι η εισαγωγή της επέκτασης Taylor. Η εξίσωση ισορροπίας γράφεται σε σχέση με την απόκλιση, η οποία θεωρείται πολύ μικρή έτσι ώστε να μηδενίζονται οι όροι δεύτερης τάξης. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι οι παραπάνω βαθμοί ελευθερίας γράφονται:

$$q_p = q_{p0} + \delta q_p, \dot{q}_p = \dot{q}_{p0} + \delta \dot{q}_p, \ddot{q}_p = \ddot{q}_{p0} + \delta \ddot{q}_p \quad (2.16)$$

$$\Psi_G = \Psi_{G0} + \delta \Psi_G, \dot{\Psi}_G = \dot{\Psi}_{G0} + \delta \dot{\Psi}_G, \ddot{\Psi}_G = \ddot{\Psi}_{G0} + \delta \ddot{\Psi}_G \quad (2.17)$$

Οι δυναμικές εξισώσεις του συστήματος μετά από μια απλή ανακατάταξη των όρων τους, μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q \quad (2.18)$$

όπου M , C , K είναι τα δυναμικά μητρώα μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας αντίστοιχα

q το διάνυσμα των 16 βαθμών ελευθερίας

\dot{q} , \ddot{q} η πρώτη και δεύτερη παράγωγος του διανύσματος των βαθμών ελευθερίας ως προς το χρόνο, οι οποίες αναμένεται να δώσουν τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις των παραμορφώσεων αντιστοίχως

Q το εξωτερικό φορτίο που δέχεται η κατασκευή, το οποίο για το δυναμικό μέρος του προβλήματος είναι σταθερό.

3. Αεροδυναμική ανάλυση και Αεροελαστική σύζευξη

3.1. Αεροδυναμική

Το δυναμικό πρόβλημα μετασχηματίζεται όταν σε αυτό προστίθεται η ροή αέρα. Λόγω των αλληλεπιδράσεων του στερεού με το ρευστό δημιουργείται η λεγόμενη αεροελαστική σύζευξη και το πρόβλημα ονομάζεται συζευγμένο.[2]

3.1.1. Μοντελοποίηση αεροδυναμικής

Έστω δP τα εξωτερικά αεροδυναμικά φορτία ανά μονάδα μήκους του πτερυγίου. Πρόκειται για τμηματικά φορτία τα οποία μπορούν να δοθούν υπό τη μορφή τμηματικών αδιάστατων αεροδυναμικών ιδιοτήτων, δηλαδή των συντελεστών άνωσης C_L , οπισθέλκουσας C_D και ορμής C_M . Αν θεωρήσουμε το τμήμα του πτερυγίου του σχήματος (3.1) τα τοπικά αεροδυναμικά φορτία του συγκεκριμένου σχήματος θα δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}\delta P_x &= -\delta L \sin(\varphi + \theta_y) + \delta D \cos(\varphi + \theta_y) \\ &= (-C_L \sin(\varphi + \theta_y) + C_D \cos(\varphi + \theta_y)) \cdot \frac{\rho}{2} W_{eff}^2 c\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\delta P_z &= -\delta L \cos(\varphi + \theta_y) + \delta D \sin(\varphi + \theta_y) \\ &= (C_L \cos(\varphi + \theta_y) + C_D \sin(\varphi + \theta_y)) \cdot \frac{\rho}{2} W_{eff}^2 c\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$\delta M_y = \delta M_p = C_M \frac{\rho}{2} W_{eff}^2 c \quad (3.3)$$

όπου δL , δD είναι οι τοπικές δυνάμεις άνωσης και οπισθέλκουσας, δM_y είναι η ροπή του pitch, φ είναι η τοπική γωνία ροής ως προς το επίπεδο του δρομέα, θ_y είναι η τοπική γωνία βήματος του πτερυγίου (δηλαδή χωρίς να περιλαμβάνει την παραμόρφωση στρέψης), W_{eff} είναι η τοπική ταχύτητα προσβολής και c η τοπική χορδή του πτερυγίου. Πρέπει να σημειωθεί εδώ πως η θ_y , πέρα από την τοπικά ελεγχόμενη ή σταθερή γωνία βήματος, περιλαμβάνει και την περιστροφή του πτερυγίου περί τον άξονά του y , που απορρέει από την καθολική κίνηση του δρομέα, λόγω της ευκαμψίας της στήριξης της κατασκευής (άτρακτος, νασέλα, πύργος). Για παράδειγμα η κλίση του πύργου επιφέρει μια στροφή του πτερυγίου περί του τοπικού y άξονα όταν το πτερύγιο είναι οριζόντιο. Θεωρώντας πως οι ταχύτητες λόγω του ομόρρου της ροής είναι γνωστές, τα τοπικά χαρακτηριστικά της ροής (γωνία και ταχύτητα) προέρχονται από τις σχέσεις:

$$\tan\varphi = \frac{(U_{\omega z} - \dot{W}_B \cos\theta_y + \dot{U}_B \sin\theta_y)(1 - a)}{(U_{\omega x} - \dot{W}_B \sin\theta_y + \dot{U}_B \cos\theta_y)(1 + a')} = \frac{U_{eff z}}{U_{eff x}} \quad (3.4)$$

$$W_{eff} = \sqrt{U_{eff x}^2 + U_{eff z}^2} \quad (3.5)$$

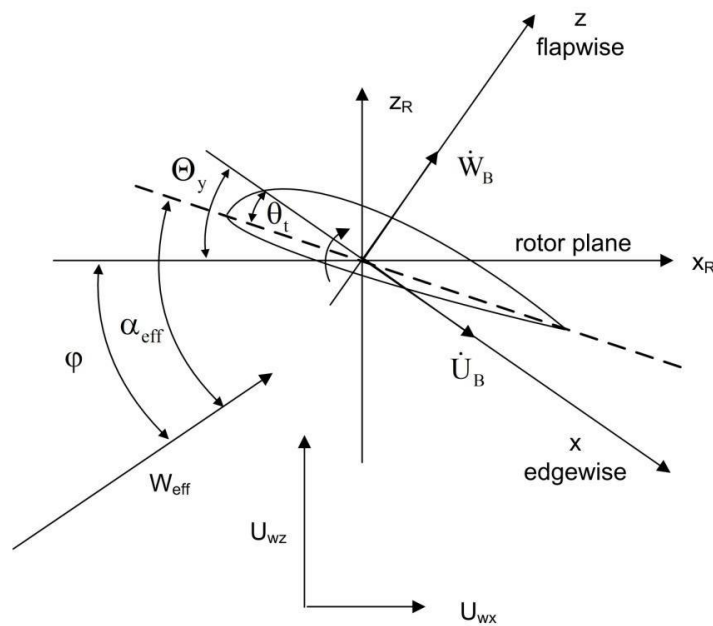
$$\alpha_{eff} = \varphi + \theta_t + \theta_y + \theta_y \quad (3.6)$$

όπου η α_{eff} είναι η τοπική γωνία πρόσπτωσης, θ_y η τοπική στρέψη (θετική κατά την ωρολογιακή περιστροφή- αντίθετα δηλαδή με τη συνηθισμένη σύμβαση), $U_{\omega x}$ και $U_{\omega z}$ είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας του ανέμου, a και a' είναι οι συντελεστές αξονικής και περιφερειακής επαγωγής του ομόρρου της ροής αντίστοιχα και το \dot{U}_B καθώς και το \dot{W}_B είναι οι τοπικές ταχύτητες του πτερυγίου κατά την κατεύθυνση πτερύγισης και περιστροφής αντίστοιχα (συμπεριλαμβανομένης της κίνησης του άκαμπτου σώματος και της ελαστικής παραμόρφωσης). Σημειώνεται πως τα \dot{U}_B και \dot{W}_B μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\dot{U}_B = u_B^G + \dot{u} \quad (3.7)$$

$$\dot{W}_B = \omega_B^G + \dot{\omega} \quad (3.8)$$

όπου τα \dot{u} και $\dot{\omega}$ είναι οι τοπικές μετακινήσεις του πτερυγίου, ενώ τα u_B^G και ω_B^G είναι οι ταχύτητες που απορρέουν από την καθολική κίνηση του δρομέα λόγω της ευκαμψίας της στήριξης της κατασκευής. Για παράδειγμα, κίνηση μπροσπίσω του πύργου θα προσδώσει μια εξύψωση στην κίνηση του πτερυγίου κατά την κατεύθυνση πτερύγισης.



Σχήμα 3.1. Βασικά αεροδυναμικά μεγέθη στην αεροτομή

Για τον χειρισμό της ροής του αέρα χρησιμοποιείται η προσέγγιση "frozen wake". Εάν η ροή θεωρηθεί "παγωμένη", τότε κάθε διαταραχή που προκαλεί η αντίδραση του δρομέα δεν αλλάζει τα επαγωγικά χαρακτηριστικά της ροής.

3.1.2. Γραμμικοποίηση αεροδυναμικής

Υποθέτοντας αεροδυναμικά μόνιμη κατάσταση, τότε οι τοπικοί συντελεστές άνωσης C_L , αντίστασης C_D και ροπής C_M θα είναι συναρτήσεις μόνο της φαινόμενης γωνίας ροής α_{eff} . Στην περίπτωση αυτή η γραμμικοποίηση των εξωτερικών αεροδυναμικών φορτίων είναι απλή. Έτσι, για τα αεροδυναμικά φορτία που παρουσιάστηκαν προηγουμένως, η γραμμικοποιημένη τους μορφή θα είναι:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta P_x \\ \delta P_y \\ \delta P_z \\ \delta M_y \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \delta P_x^0 \\ 0 \\ \delta P_z^0 \\ \delta M_y^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial(\delta P_x)}{\partial \theta_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial(\delta P_z)}{\partial \theta_y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial(\delta M_y)}{\partial \theta_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta u_B^G \\ \delta v_B^G \\ \delta w_B^G \\ \delta \theta_y \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \frac{\partial(\delta P_x)}{\partial \dot{u}_B^G} & 0 & \frac{\partial(\delta P_x)}{\partial \dot{w}_B^G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial(\delta P_z)}{\partial \dot{u}_B^G} & 0 & \frac{\partial(\delta P_z)}{\partial \dot{w}_B^G} & 0 \\ \frac{\partial(\delta M_y)}{\partial \dot{u}_B^G} & 0 & \frac{\partial(\delta M_y)}{\partial \dot{w}_B^G} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta \dot{u}_B^G \\ \delta \dot{v}_B^G \\ \delta \dot{w}_B^G \\ \delta \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial(\delta P_x)}{\partial \theta_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial(\delta P_z)}{\partial \theta_y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial(\delta M_y)}{\partial \theta_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.9) \\ & + \begin{bmatrix} \frac{\partial(\delta P_x)}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial(\delta P_x)}{\partial \dot{w}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial(\delta P_z)}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial(\delta P_z)}{\partial \dot{w}} & 0 \\ \frac{\partial(\delta M_y)}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial(\delta M_y)}{\partial \dot{w}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta \dot{u} \\ \delta \dot{v} \\ \delta \dot{w} \\ \delta \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Στις παραπάνω η δP_y είναι ίση με μηδέν, λόγω του δισδιάστατου χαρακτήρα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων του πτερυγίου.

3.2. Αεροδυναμική απόσβεση (damping)

Στην ανάλυση που προηγήθηκε το εξωτερικό φορτίο ήταν δεδομένο και ανεξάρτητο των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος. Στην αεροελαστικότητα όμως, η αεροδυναμική φόρτιση εξαρτάται από την παραμόρφωση και τις παραγώγους της ως προς το χρόνο. Είναι δηλαδή $Q=Q(q, \dot{q}, \ddot{q})$. Για χρόνο ίσο με t_n η σχέση (2.25) θα είναι:

$$M\ddot{q}^{(n)} + C\dot{q}^{(n)} + Kq^{(n)} = Q(q^{(n)}, \dot{q}^{(n)}) \quad (3.10)$$

Επεκτείνοντας το δεύτερο μέλος της εξίσωσης προκύπτει:

$$\begin{aligned} & M\ddot{q}^{(n)} + \left(C - \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q}^{(n)} + \left(K - \frac{\partial Q}{\partial q} \right) q^{(n)} \\ & = Q(q^{(n-1)}, \dot{q}^{(n-1)}) - \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}} \dot{q}^{(n-1)} - \frac{\partial Q}{\partial q} q^{(n-1)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Οι επιπλέον όροι στο αριστερό μέλος της εξίσωσης αντιπροσωπεύουν τις τροποποιήσεις στα μητρώα απόσβεσης και δυσκαμψίας λόγω της αεροελαστικής σύζευξης. Το σημαντικότερο από τα δύο είναι η απόσβεση καθώς επηρεάζει σημαντικά την ευστάθεια του συστήματος. Μετά την γραμμικοποίησή τους οι εξισώσεις γράφονται στη μορφή:

$$M(t)\ddot{q}^{(n)} + C(t)\dot{q}^{(n)} + K(t)q^{(n)} = Q \quad (3.12)$$

όπως δηλαδή και στο δυναμικό σύστημα, με τη διαφορά ότι τώρα τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας δεν είναι σταθερά αλλά εξαρτώνται πλέον από το χρόνο.

Η εξίσωση αυτή λύνεται με τη διαδικασία της ιδιοδιανυσματικής ανάλυσης η οποία θα αναλυθεί στην αντίστοιχη παραγράφο.

4. Μετασχηματισμός από το στρεφόμενο στο μη στρεφόμενο σύστημα

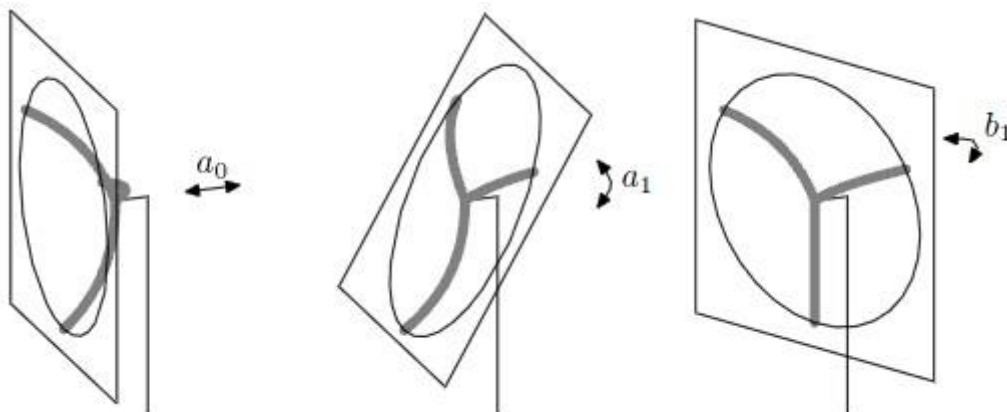
Στο σύστημα της ανεμογεννήτριας που εξετάζουμε, τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας δεν είναι σταθερά αλλά μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Η εξάλειψη του χρόνου από τους συντελεστές πραγματοποιείται με κατάλληλο μετασχηματισμό των βαθμών ελευθερίας και των εξισώσεων του συστήματος. Για την περιγραφή των στρεφόμενων βαθμών ελευθερίας στο αδρανειακό ή μη στρεφόμενο σύστημα, εισάγεται ο μετασχηματισμός Coleman. Στην συνέχεια εφαρμόζεται μετασχηματισμός στις εξισώσεις. [3], [4]

4.1. Μετασχηματισμός των βαθμών ελευθερίας

Ο μετασχηματισμός Coleman χρησιμοποιεί multi-blade συντεταγμένες, οι οποίες για τον τρίπτερο δρομέα είναι:

$$\alpha_0 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 u_j, \quad \alpha_1 = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \cos(\psi_j) u_j, \quad b_1 = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \sin(\psi_j) u_j \quad (4.1)$$

όπου $\psi_j = \psi_1 + \frac{2\pi(j-1)}{3}$, ($\psi_1 = \Omega \cdot t$) η γωνία αζιμουθίου για το πτερύγιο υπ' αριθμόν j και u_j ένα σετ μεταβλητών κατάστασης οι οποίες είναι πανομοιότυπες στο τοπικό σύστημα του πτερυγίου. Εάν το u_j αναπαριστά κίνηση κατά την κατεύθυνση πτερυγίσης (flap) και $j=0$, όταν το πτερύγιο j είναι προς τα κάτω, τότε το σχήμα (4.1) δείχνει ότι το α_0 είναι η συμμετρική flap κίνηση, το α_1 είναι η tilt κίνηση του δρομέα και το b_1 είναι η yaw κίνηση του δρομέα. Εάν το u_j αναπαριστά κίνηση κατά την edge κατεύθυνση, τότε το α_0 είναι η συμμετρική edge κίνηση συζευγμένη με τον άξονα (drive-train), το α_1 είναι η οριζόντια κίνηση του δρομέα και το b_1 είναι η κατακόρυφη κίνηση του δρομέα.



Σχήμα 4.1. Multi-blade συντεταγμένες κατά την κατεύθυνση πτερυγίσης (flap)

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$u = B_u(t)z \quad (4.2)$$

όπου $u = \{u_1 \ u_2 \ u_3\}^T$, $z = \{\alpha_0 \ a_1 \ b_1\}^T$ και

$$B_u(t) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\psi_1(t)) & \sin(\psi_1(t)) \\ 1 & \cos(\psi_2(t)) & \sin(\psi_2(t)) \\ 1 & \cos(\psi_3(t)) & \sin(\psi_3(t)) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

όπου ο πίνακας B_u έχει τις ευνοϊκές ιδιότητες:

$$B_u^{-1}(t) = \mu B_u^T(t) \text{ και } B_u(t) = B_u(t)\bar{\omega}$$

όπου μ και $\bar{\omega}$ σταθεροί γνωστοί πίνακες.

Ο πίνακας μετασχηματισμού $B_u(t)$ μπορεί να επεκταθεί σε έναν πίνακα $B(t)$ ο οποίος να περιλαμβάνει μετασχηματισμούς για όλες τις μεταβλητές κατάστασης που αντιστοιχούν στα πτερύγια, καθώς επίσης και απλούς περιστροφικούς μετασχηματισμούς για μεταβλητές κατάστασης στρεφόμενων τμημάτων εκτός των πτερυγίων, όπως είναι ο άξονας, και τέλος, τον μετασχηματισμό ταυτότητα για τα μη στρεφόμενα μέρη. Έτσι ο πίνακας $B(t)$ μετασχηματίζει τις αρχικές μεταβλητές κατάστασης στο αδρανειακό σύστημα, κι έτσι τελικά το αρχικό και ισότροπο σύστημα μετατρέπεται σε ένα σύστημα χρονικά αμετάβλητο.

Κάνοντας τον μετασχηματισμό που αναφέρθηκε, όπως αποτυπώνεται και στα σχήματα (4.2), (4.3), (4.4) κάθε ποσότητα του στρεφόμενου συστήματος μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή, ως προς τη γωνία αζιμουθίου:

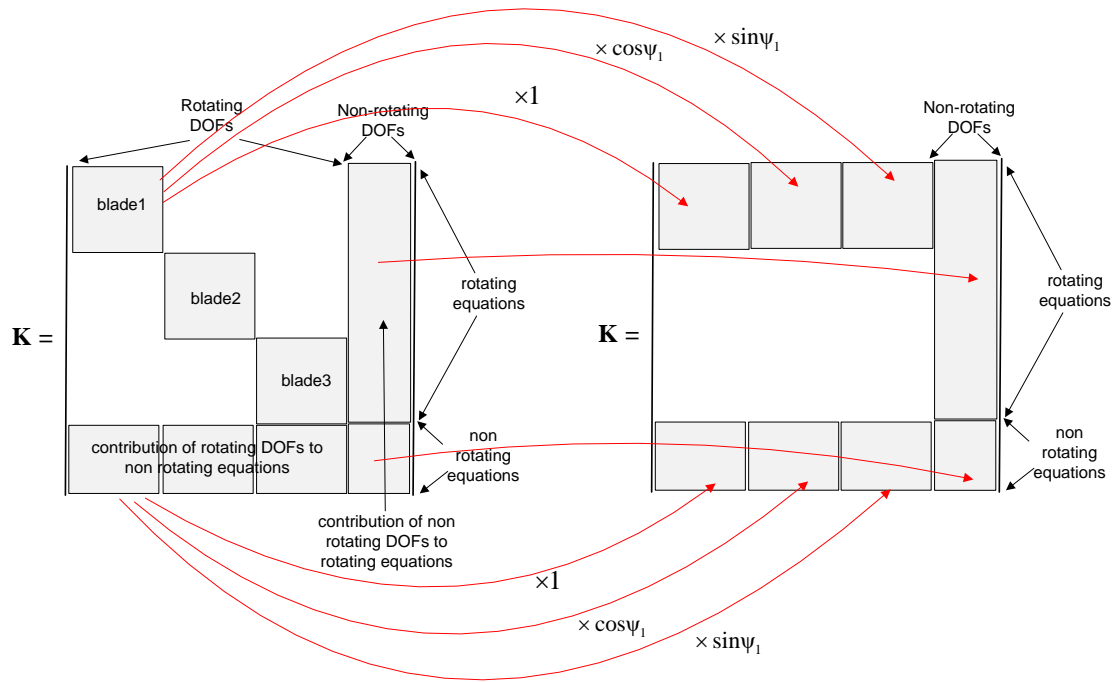
$$u_j = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\psi_j(t)) + b_1 \sin(\psi_j(t)) \quad (4.4)$$

Η έκφραση για τα διαφορετικά πτερύγια θα είναι η ίδια, λόγω της αξονικής συμμετρίας, με μόνη διαφορά μια μετατόπιση στη φάση.

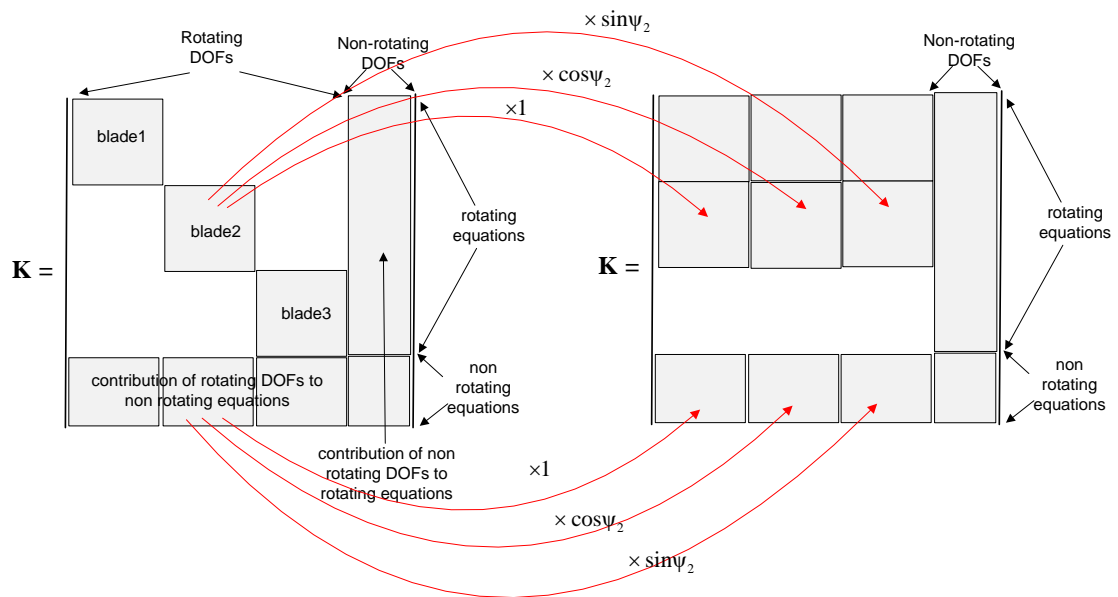
Η πρώτη και δεύτερη παράγωγος αντίστοιχα θα είναι:

$$\dot{u}_j = \dot{\alpha}_0 + (\dot{\alpha}_1 + b_1 \cdot \Omega) \cos(\psi_j(t)) + (\dot{b}_1 - \alpha_1 \cdot \Omega) \sin(\psi_j(t)) \quad (4.5)$$

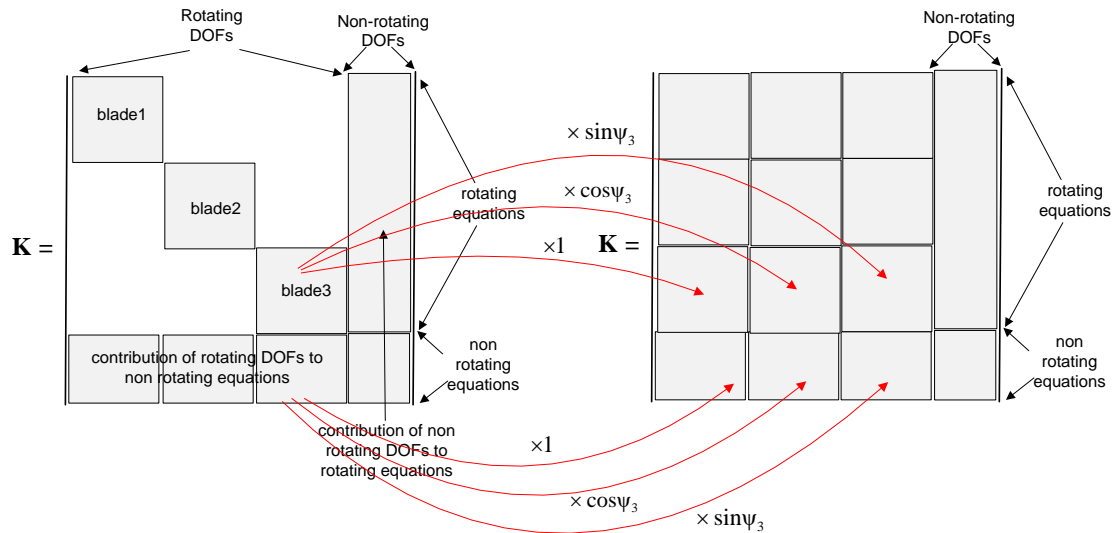
$$\begin{aligned} \ddot{u}_j = & \ddot{\alpha}_0 + (\ddot{\alpha}_1 + 2 \cdot \dot{b}_1 \cdot \Omega - \alpha_1 \cdot \Omega^2) \cos(\psi_j(t)) \\ & + (\ddot{b}_1 - 2 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \Omega - b_1 \cdot \Omega^2) \sin(\psi_j(t)) \end{aligned} \quad (4.6)$$



Σχήμα 4.2. Μετασχηματισμός βαθμών ελευθερίας πρώτου πτερυγίου (και όσων επηρεάζονται από αυτό) μητρώου δυσκαμψίας.



Σχήμα 4.3. Μετασχηματισμός βαθμών ελευθερίας δεύτερου πτερυγίου (και όσων επηρεάζονται από αυτό) μητρώου δυσκαμψίας.



Σχήμα 4.4. Μετασχηματισμός βαθμών ελευθερίας τρίτου πτερυγίου (και όσων επηρεάζονται από αυτό) μητρώου δυσκαμψίας.

4.2. Μετασχηματισμός των στρεφόμενων εξισώσεων

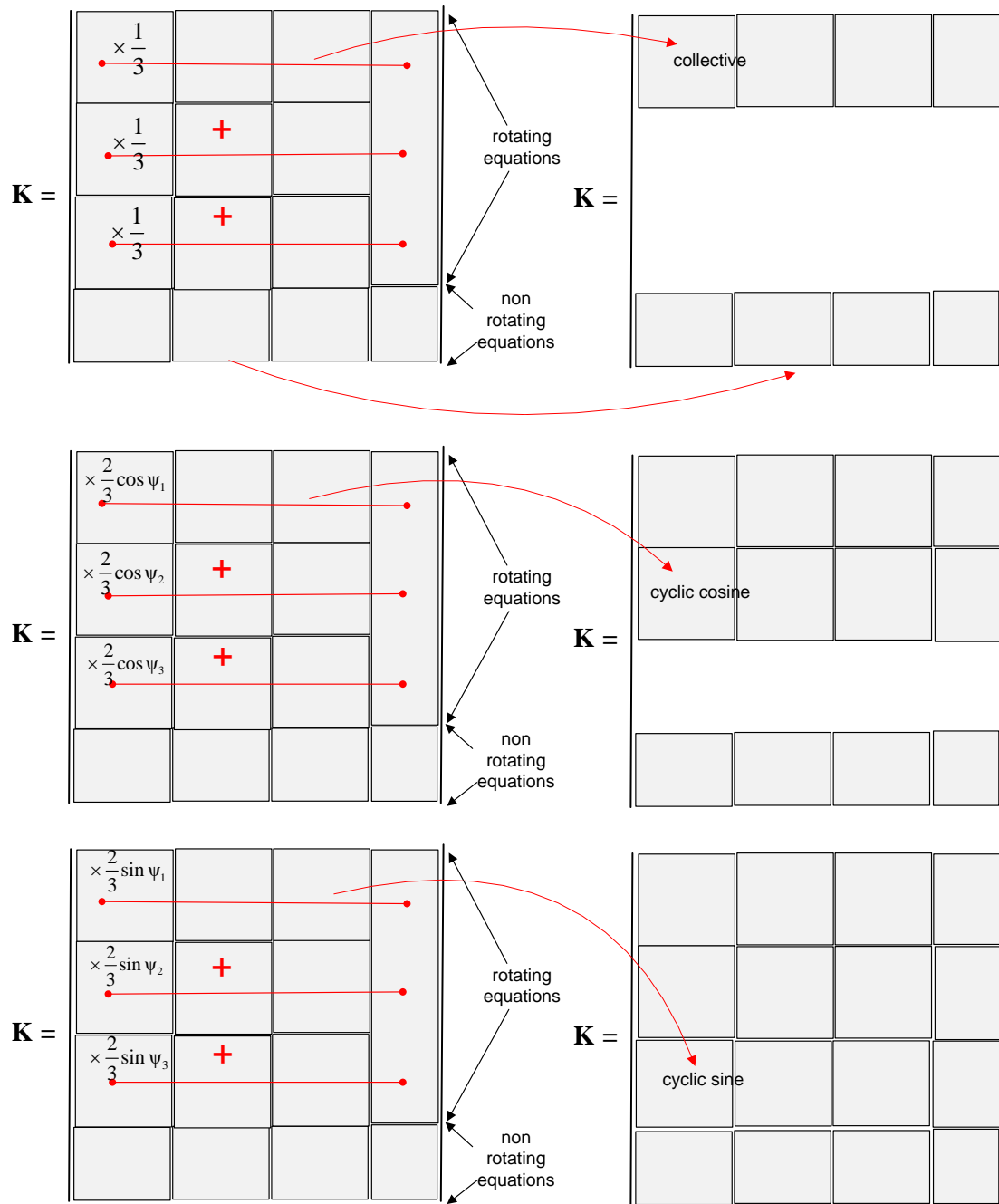
Οι στρεφόμενες εξισώσεις οι οποίες εκφράζουν τη δυναμική των πτερυγίων στο στρεφόμενο σύστημα, μετασχηματίζονται και αυτές στο μη στρεφόμενο σύστημα όπως περιγράφεται ακολουθώς:

$$(\text{μη στρεφόμενη εξίσωση})_1 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 (\text{στρεφόμενη εξίσωση})_j$$

$$(\text{μη στρεφόμενη εξίσωση})_2 = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 (\text{στρεφόμενη εξίσωση})_j \cdot \cos \psi_j$$

$$(\text{μη στρεφόμενη εξίσωση})_3 = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 (\text{στρεφόμενη εξίσωση})_j \cdot \sin \psi_j$$

Στο σχήμα (4.5) που ακολουθεί φαίνεται ο μετασχηματισμός των εξισώσεων πάνω στο ήδη μετασχηματισμένο ως προς τους βαθμούς ελευθερίας, μητρώο δυσκαμψίας.



Σχήμα 4.5. Μετασχηματισμός των εξισώσεων στο μη στρεφόμενο σύστημα.

Με αντίστοιχο τρόπο μετασχηματίζονται και τα μητρώα μάζας και απόσβεσης με τη μόνη διαφορά ότι το μητρώο απόσβεσης συνεισφέρει (προσθέτει δηλαδή όρους) στο μητρώο δυσκαμψίας ενώ το μητρώο μάζας συνεισφέρει και στο μητρώο απόσβεσης και στο μητρώο δυσκαμψίας.

Μετά την ιδιοδιανυσματική ανάλυση, γνωρίζοντας πλέον τις ιδιοτιμές (και άρα την κάθε απόσβεση και ιδιοσυχνότητα) αλλά και τις ιδιομορφές (mode

shapes) μπορούμε να μεταφερθούμε εκ νέου στους αρχικούς βαθμούς ελευθερίας με τη διαδικασία του αντιστρόφου μετασχηματισμού.

Για να βρούμε την απόκριση των τριών πτερυγίων θα πρέπει να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned} \beta_i = & \sum_{n=1}^3 A_{n,k}^0 \cdot e^{\sigma_k \cdot t} \cdot \cos(\omega_k \cdot t + \Phi_{n,k}^0) + \\ & \sum_{n=1}^3 \frac{1}{2} A_{n,k}^{BW} \cdot e^{\sigma_k \cdot t} \cdot \cos\left((\omega_k + \Omega) \cdot t + \frac{2}{3}\pi(i-1) + \Phi_{n,k}^{BW}\right) + \\ & \sum_{n=1}^3 \frac{1}{2} A_{n,k}^{FW} \cdot e^{\sigma_k \cdot t} \cdot \cos\left((\omega_k - \Omega) \cdot t + \frac{2}{3}\pi(i-1) + \Phi_{n,k}^{FW}\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

όπου τα πλάτη που προσδίδει κάθε ιδιομορφή δίνονται από τις σχέσεις:

$$A_{n,k}^0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\operatorname{Re}^2(\beta_{0,n,k}) + \operatorname{Im}^2(\beta_{0,n,k})} \quad (4.8)$$

$$A_{n,k}^{BW} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\operatorname{Re}(\beta_{s,n,k}) - \operatorname{Im}(\beta_{c,n,k}))^2 + (\operatorname{Im}(\beta_{s,n,k}) + \operatorname{Re}(\beta_{c,n,k}))^2} \quad (4.9)$$

$$A_{n,k}^{FW} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\operatorname{Re}(\beta_{s,n,k}) + \operatorname{Im}(\beta_{c,n,k}))^2 + (\operatorname{Re}(\beta_{c,n,k}) - \operatorname{Im}(\beta_{s,n,k}))^2} \quad (4.10)$$

ενώ οι φάσεις τους υπολογίζονται ως εξής:

$$\Phi_{n,k}^0 = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}(\beta_{0,n,k})}{\operatorname{Re}(\beta_{0,n,k})}\right) \quad (4.11)$$

$$\Phi_{n,k}^{BW} = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im}(\beta_{c,n,k}) - \operatorname{Re}(\beta_{s,n,k})}{\operatorname{Im}(\beta_{s,n,k}) + \operatorname{Re}(\beta_{c,n,k})}\right) \quad (4.12)$$

$$\Phi_{n,k}^{FW} = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Re}(\beta_{s,n,k}) + \operatorname{Im}(\beta_{c,n,k})}{\operatorname{Re}(\beta_{c,n,k}) - \operatorname{Im}(\beta_{s,n,k})} \right) \quad (4.13)$$

με τους δείκτες $0, BW$, και FW να αντιστοιχούν στα collective, backward και forward modes, ενώ με $\operatorname{Re}(\beta_{i,n,k})$ και $\operatorname{Im}(\beta_{i,n,k})$ (με $i=0, c$ ή s) συμβολίζεται το πραγματικό και φανταστικό μέρος της κάθε ιδιομορφής. Ο δείκτης k αναφέρεται στο mode ενώ ο n στον βαθμό ελευθερίας.

5. Ιδιοδιανυσματική ανάλυση

Η ιδιοδιανυσματική ανάλυση παρέχει τις ιδιότητες ενός συστήματος λύνοντας τη χαρακτηριστική του εξίσωση, η οποία αποτελείται από τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας (ελαστικότητας). Οι δυναμικές ιδιότητες ενός συστήματος είναι οι ιδιομορφές του, δηλαδή οι φυσικές ιδιομορφές (natural mode shapes) και οι φυσικές ιδιοσυχνότητες (natural frequencies). Για αεροελαστικά συστήματα, όπως αυτό που μελετάται εδώ, πρέπει να ληφθεί υπόψιν και η αεροδυναμική. Σε αυτή την περίπτωση η φασματική ανάλυση θα δώσει, εκτός από τα mode shapes και την απόσβεση (logarithmic decrement). [5]

Οι ιδιοσυχνότητες θα είναι μιγαδικοί αριθμοί και η λύση λ του συστήματος ανάλογη με το $e^{\lambda t}$. Έτσι, αν το πραγματικό μέρος του λ είναι μεγαλύτερο του μηδενός, ($\text{Re}(\lambda) > 0$), το σύστημα είναι ασταθές και η απόκριση αυξάνεται εκθετικά. Αντίθετα, ένα σύστημα είναι ευσταθές εάν μπορεί να αποσβέσει κάθε ταλάντωση που το διεγείρει. Η απόκριση ενός συστήματος σχετίζεται με τα mode shapes του εάν αυτό είναι γραμμικό ή σχεδόν γραμμικό. Τα περισσότερα συστήματα, όπως και το σύστημα της ανεμογεννήτριας που μελετάται εδώ, είναι μη γραμμικά και απαιτείται η γραμμικοποίησή τους.

5.1. Σύστημα σε ελεύθερη ταλάντωση (ομογενές πρόβλημα)

Αρχικά περιγράφεται ο τρόπος λύσης του προβλήματος χωρίς εξωτερική διέγερση, και άρα, χωρίς να λαμβάνεται υπ' όψη η αεροδυναμική. Η εξίσωση του κάθε βαθμού ελευθερίας παράγεται από την εξίσωση Lagrange και φέρεται στη μορφή της εξίσωσης (2.16)

Θέτουμε $x_1 = \dot{q}$ και $x_2 = q$, όπου q το διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας.

Έτσι το σύστημα μετασχηματίζεται στη μορφή:

$$M \cdot \dot{x}_1 + C \cdot x_1 + K \cdot x_2 = 0 \quad (5.1)$$

καθώς $\dot{x}_2 = x_1$

Γράφοντας τις παραπάνω εξισώσεις σε μορφή πινάκων, προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη επί τον αντίστροφο της μάζας, λύνοντας δηλαδή την εξίσωση ως προς τις παραγώγους των x_1 και x_2 , έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -C & -K \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

και κάνοντας τις πράξεις τελικά προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Η παραπάνω εξίσωση, θέτοντας $A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ γράφεται :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = A \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Το σύστημα αυτό, με την προϋπόθεση ότι έχει σταθερούς συντελεστές, έχει λύση της μορφής:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{Bmatrix} = [\Phi_1 \quad \Phi_2] \cdot \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \Phi \cdot q(t) \quad (5.6)$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη λύση στην εξίσωσή μας παίρνουμε:

$$\Phi_i \cdot \lambda_i \cdot e^{\lambda_i t} = A \cdot \Phi_i \cdot e^{\lambda_i t} \quad (5.7)$$

για κάθε i .

Τελικά προκύπτει:

$$(A - \lambda_i I) \Phi_i = 0 \quad \text{και} \quad \det(A - \lambda_i I) = 0 \quad (5.8)$$

και εφόσον είναι $A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, η ορίζουσα θα γίνει $\det \begin{bmatrix} -M^{-1}C - \lambda & -M^{-1}K \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που προκύπτει είναι το εξής:

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega\lambda + \omega^2 = 0 \quad (5.9)$$

όπου:

ω είναι η κυκλική ιδιοσυχνότητα του συστήματος με μονάδες rad/sec και ορίζεται ως: $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$. Η ίδια πληροφορία εκφράζεται και μέσω της ποσότητας f , η οποία καλείται ιδιοσυχνότητα, έχει μονάδα Hz και ορίζεται ως: $f = \frac{\omega}{2\pi}$

ζ καλείται ο λόγος απόσβεσης, είναι αδιάστατο μέγεθος και ορίζεται ως: $\zeta = \frac{C}{2\omega M}$.

Όσο ψηλότερη είναι η τιμή του λόγου απόσβεσης, τόσο μεγαλύτερη είναι και η μείωση πλάτους και ενέργειας των ταλαντώσεων.

Οι λύσεις του πολυωνύμου είναι είτε πραγματικοί, είτε συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί λ_1 και λ_2 , οι οποίοι καθορίζουν τη μορφή της απόκρισης και δίνονται από τη σχέση:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega \pm i\omega\sqrt{1-\zeta^2} \quad (5.10)$$

Η εξίσωση αυτή, βάσει της τιμής του λόγου απόσβεσης, διαθέτει για μη αρνητική απόσβεση δύο βασικές λύσεις. Εδώ μας ενδιαφέρει η κρίσιμη απόσβεση ($0 < \zeta < 1$) για την οποία η λύση είναι της μορφής:

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (5.11)$$

όπου ω_n είναι η ιδιοσυχνότητα της αποσβενόμενης ταλάντωσης.

Επιπλέον υπολογίζεται και η λογαριθμική μείωση ως εξής: $d = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

5.2. Σύστημα με εξωτερική διέγερση

Προσθέτοντας δεδομένη εξωτερική φόρτιση, το σύστημα που καλούμαστε να λύσουμε έχει μη μηδενικό το δεύτερο μέλος. Η αεροδυναμική φόρτιση αγνοείται και εδώ κι έτσι τα μητρώα M , C , K είναι και σε αυτή την περίπτωση σταθερά και ανεξάρτητα του χρόνου. Έτσι, η εξίσωση είναι :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q \quad (5.12)$$

και σε μορφή πινάκων θα γίνει:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & K \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

Θέτοντας $x = (\dot{q}^T \quad q^T)^T$, έχουμε τελικά :

$$\tilde{M}\dot{x} + \tilde{K}x = \tilde{Q} \quad (5.14)$$

Λύνοντας στη συνέχεια ως προς \dot{x} , προκύπτει:

$$\dot{x} = \tilde{M}^{-1}(-\tilde{K}x + \tilde{Q}) \quad (5.15)$$

ή

$$\dot{x} = Ax + B \quad (5.16)$$

Το σύστημα χαρακτηρίζεται από τις φυσικές ιδιομορφές φ_i και τις ιδιοτιμές λ_i του πίνακα A, όπου $i=1, \dots, n$ και δηλώνει τη διάσταση του συστήματος:

$$(A - \lambda I)\varphi_i = 0 \quad \text{και} \quad |A - \lambda_i I| = 0 \quad (5.17)$$

Όταν η εξωτερική διέγερση που επιβάλλεται είναι αρμονική διέγερση της μορφής: $Q(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που προκύπτει θα έχει τη μορφή:

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega\lambda + \omega^2 = F_0 \cos(\Omega t) \quad (5.17)$$

Μια εξίσωση αυτής της μορφής αποτελεί μια μη ομογενή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές και η λύση της θα είναι:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (5.18)$$

όπου $x_h(t)$ είναι η ομογενής λύση και $x_p(t)$ η μερική λύση.

Η ομογενής λύση είναι ίδια με τη λύση του συστήματος ελευθέρης ταλάντωσης, ενώ η μερική λύση (που είναι και μόνιμη λύση του συστήματος) έχει τη μορφή: $x_p(t) = X \cos(\Omega t - \theta)$, όπου θ η διαφορά φάσης μεταξύ της διέγερσης και της απόκρισης της μερικής λύσης.

Λόγω της συνύπαρξης αυτών των δύο λύσεων, το δυναμικό σύστημα θα κινηθεί όπως υπαγορεύει η σύνθεση των προαναφερθέντων κινήσεων, δηλαδή όπως υποδεικνύει η παραπάνω εξίσωση. Σε σύστημα με απόσβεση, βασικό χαρακτηριστικό της ομογενούς λύσης είναι ότι εξαφανίζεται (μηδενίζεται) μετά από κάποιο χρόνο. Αντιθέτως, η κίνηση λόγω της επιβολής της εξωτερικής διέγερσης δεν υφίσταται κάποια εξασθένηση, συνεπώς η συγκεκριμένη κίνηση θα παραμείνει ακόμα κι όταν η κίνηση λόγω επιβολής αρχικών συνθηκών μηδενισθεί. Καθίσταται λοιπόν φανερό, ότι μετά την παρέλευση ικανοποιητικού χρονικού διαστήματος, θα παραμείνει μόνο η κίνηση λόγω του διεγέρτη. Αυτή η κατάσταση κίνησης ονομάζεται "μόνιμη κατάσταση" (steady state), διότι δεν πρόκειται να μεταβληθεί περαιτέρω. Επειδή δε, περιγράφεται από τη μερική λύση $x_p(t)$, έπεται ότι η φυσική ερμηνεία της μερικής λύσης είναι η περιγραφή της μόνιμης κατάστασης του δυναμικού συστήματος. Αντιθέτως, η κατάσταση

κίνησης λόγω της ομογενούς λύσης στα συστήματα με απόσβεση εξαφανίζεται και γι' αυτό καλείται και "μεταβατική κατάσταση" (transient state).

Με άλλα λόγια, όταν απουσιάζει ο διεγέρτης, το σύστημα ταλαντώνεται με συχνότητα, η οποία καθορίζεται αποκλειστικά από τις αρχικές συνθήκες και τα χαρακτηριστικά του συστήματος (μάζα, σταθερά απόσβεσης, σταθερά ελατηρίου). Όταν όμως επιβάλλεται εξωτερική αρμονική διέγερση, τότε το σύστημα, από το ένα σημείο και έπειτα, θα "ξεχάσει" την ταλάντωσή του λόγω των αρχικών συνθηκών και θα συνεχίσει να ταλαντώνεται επ' άπειρον με τη συχνότητα του διεγέρτη. Έτσι, στην περίπτωση αυτή τα χαρακτηριστικά του συστήματος δεν καθορίζουν τη συχνότητα της ταλάντωσης αλλά παίζουν καθοριστικό ρόλο στο πλάτος της ταλάντωσης.

5.3. Σύστημα με αεροδυναμικά φορτία

Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για την περίπτωση που προστεθεί αεροδυναμικό φορτίο. Τα μητρώα M , C , K όμως εξαρτώνται πλέον από τον χρόνο. Η εξίσωση του συστήματος έχει τη μορφή :

$$M(t)\ddot{q} + C(t)\dot{q} + K(t)q = Q \quad (5.19)$$

Για τη λύση του συστήματος αυτού ακολουθείται η εξής διαδικασία:

Θεωρούμε όλο το σετ των μη γραμμικών αεροελαστικών εξισώσεων. Το πρώτο βήμα είναι να δημιουργήσουμε μια περιοδική λύση. Αυτό είναι απαραίτητο έτσι ώστε να γραμμικοποιηθούν οι εξισώσεις γύρω από μια περιοδική λύση. Για την εύρεση της λύσης, οι μη γραμμικές εξισώσεις παραγωγίζονται στο χρόνο μέχρι να βρεθεί μια περιοδική, σε σχέση με τη γωνιακή ταχύτητα του δρομέα, απόκριση. Σε περίπτωση ασταθών συνθηκών οι υπολογισμοί δίνουν μια απόκριση που περιέχει συνιστώσες στις ιδιοσυχνότητες που αποκτούν αρνητική τιμή. Στην περίπτωση αυτή, μέσω του μετασχηματισμού Fourier, διατηρούνται μόνο τα μέρη που σχετίζονται με την περιστροφική συχνότητα ($1P$) και τα βασικά πολλαπλάσιά της ($N P$, όπου N ο αριθμός των τερυγίων). Σύμφωνα με αυτή τη λύση, το βασικό σύστημα μετασχηματίζεται σε μορφή διαταραχής.

Στο σύστημα αυτό εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός στρεφόμενου συστήματος και στους βαθμούς ελευθερίας και στις εξισώσεις, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Παράγονται έτσι δυναμικές εξισώσεις κίνησης με σταθερούς συντελεστές και έτσι η ανάλυση ιδιοσυχνοτήτων παρέχει απευθείας τις δυναμικές ιδιότητες του συστήματος.

Οι νέες εξισώσεις του συστήματος είναι γενικές και εφαρμόζονται και για γραμμικά και για μη γραμμικά προβλήματα. Η απόκριση του μη γραμμικού προβλήματος δίνεται αν λυθούν επαναληπτικά οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις μέχρι να εξαλειφθούν οι διαταραχές.

Ειδικά για τον δέκατο βαθμό ελευθερίας που προστέθηκε (Ψ_g) ήταν απαραίτητη μια αλλαγή στο μετασχηματισμό. Η Fourier κάνει ανάλυση σε σχεδόν όλες τις περιοδικές συναρτήσεις. Η σχέση όμως της γωνιακής απόκλισης του δρομέα με τον χρόνο είναι σχεδόν γραμμική. Άρα για τη συγκεκριμένη συνάρτηση θεωρείται ως μετασχηματισμένη μορφή η τελευταία περίοδος της γωνιακής ταχύτητας σε σχέση με τον χρόνο.

6. Θεωρία Floquet

Μέχρι τώρα εξετάσαμε τον μετασχηματισμό Coleman, ο οποίος μετατρέπει τις συντεταγμένες των πτερυγίων σε νέες multi-blade συντεταγμένες, εξαλείφοντας τον περιοδικό χαρακτήρα των μητρώων του συστήματος και έτσι μπορεί να πραγματοποιηθεί ιδιοδιανυσματική ανάλυση.

Το ερώτημα είναι με ποιον τρόπο μπορεί να μελετηθεί ένα σύστημα στο οποίο διατηρούνται οι περιοδικοί συντελεστές. Το πρόβλημα αυτό λύνει η θεωρία Floquet, η οποία αποδεικνύει ότι η λύση ενός γραμμικού περιοδικού συστήματος μπορεί να γραφεί ως ένα σύνολο εκθετικών συναρτήσεων που περιλαμβάνουν τους χαρακτηριστικούς εκθέτες (καθένας από τους οποίους αντιπροσωπεύει τη συχνότητα και την απόσβεση) πολλαπλασιασμένο με το αντίστοιχο σύνολο περιοδικών συναρτήσεων που αποτελούνται από αρμονικές, με ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας του. Κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί από μια σειρά Fourier ώστε να προκύψουν οι χαρακτηριστικοί εκθέτες.

6.1. Περιγραφή μεθόδου

Στην περίπτωση της ανεμογεννήτρια που εξετάζουμε, το σύστημα των εξισώσεων με εξωτερική διέγερση όπως αναλύθηκε παραπάνω γράφεται στη μορφή:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \quad (6.1)$$

Όπου A και B είναι περιοδικοί συντελεστές.

Η θεωρία Floquet [6],[7],[8], όπως αναφέρθηκε, επιτρέπει την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος χωρίς να απαιτεί την εξάλειψη των περιοδικών συντελεστών. Κάθε μεταβατική λύση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t μπορεί να διαμορφωθεί από ένα σύστημα N γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων του συστήματος μέσα σε μια περίοδο ($t \in [0, T]$). Αυτές οι λύσεις $\varphi_k(t)$ γράφονται ως στήλες ενός $N \times N$ πίνακα που αποτελεί τον βασικό πίνακα του συστήματος:

$$\varphi(t) = [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \dots \quad \varphi_N(t)]^T, \quad \dot{\varphi}(t) = A(t) \cdot \varphi(t) \quad (6.2)$$

Για $t=2\pi$ προκύπτει ο $\Phi(2\pi)$ που αποτελεί το Floquet transition matrix (FTM) και πραγματοποιώντας ιδιοδιανυσματική ανάλυση σε αυτόν προκύπτουν τα χαρακτηριστικά ευστάθειας του συστήματος. Η δυσκολία έγκειται στην "κατασκευή" του FTM. Για ένα σύστημα με μεγάλο πλήθος βαθμών ελευθερίας, για κάθε έναν από αυτούς οι δυναμικές εξισώσεις του συστήματος

ολοκληρώνονται, σε χρόνο μιας περιόδου (για t από 0 έως 2π) και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται n φορές (όπου n το μέγεθος του διανύσματος Φ), ορίζοντας κάθε φορά ως αρχική συνθήκη $\Phi_i^i(0)=1$ (με $i=1, \dots, n$) και τα υπόλοιπα $\Phi_k^i(0)=0$. Έτσι, ανάλογα πάντα με το μέγεθος του συστήματος αλλά και με την ακρίβεια της μεθόδου ολοκλήρωσης (δεδομένου ότι απαιτούνται μικρά χρονικά βήματα), η διαδικασία απαιτεί αρκετό υπολογιστικό χρόνο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο πίνακας FTM υπολόγίζεται κατά αυτόν τον τρόπο:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Phi}_1^1 \\ \dot{\Phi}_2^1 \\ \dot{\Phi}_3^1 \\ \vdots \\ \dot{\Phi}_n^1 \end{Bmatrix} = A \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_1^1 \\ \Phi_2^1 \\ \Phi_3^1 \\ \vdots \\ \Phi_n^1 \end{Bmatrix}, \text{ με } \begin{Bmatrix} \Phi_1^1(0) \\ \Phi_2^1(0) \\ \Phi_3^1(0) \\ \vdots \\ \Phi_n^1(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{και ολοκληρώνοντας παίρνουμε } \begin{Bmatrix} \Phi_1^1(2\pi) \\ \Phi_2^1(2\pi) \\ \Phi_3^1(2\pi) \\ \vdots \\ \Phi_n^1(2\pi) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Phi}_1^2 \\ \dot{\Phi}_2^2 \\ \dot{\Phi}_3^2 \\ \vdots \\ \dot{\Phi}_n^2 \end{Bmatrix} = A \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_1^2 \\ \Phi_2^2 \\ \Phi_3^2 \\ \vdots \\ \Phi_n^2 \end{Bmatrix}, \text{ με } \begin{Bmatrix} \Phi_1^2(0) \\ \Phi_2^2(0) \\ \Phi_3^2(0) \\ \vdots \\ \Phi_n^2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{και ολοκληρώνοντας παίρνουμε } \begin{Bmatrix} \Phi_1^2(2\pi) \\ \Phi_2^2(2\pi) \\ \Phi_3^2(2\pi) \\ \vdots \\ \Phi_n^2(2\pi) \end{Bmatrix}$$

⋮
⋮
⋮

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Phi}_1^n \\ \dot{\Phi}_2^n \\ \dot{\Phi}_3^n \\ \vdots \\ \dot{\Phi}_n^n \end{Bmatrix} = A \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_1^n \\ \Phi_2^n \\ \Phi_3^n \\ \vdots \\ \Phi_n^n \end{Bmatrix}, \text{ με } \begin{Bmatrix} \Phi_1^n(0) \\ \Phi_2^n(0) \\ \Phi_3^n(0) \\ \vdots \\ \Phi_n^n(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{και ολοκληρώνοντας παίρνουμε } \begin{Bmatrix} \Phi_1^n(2\pi) \\ \Phi_2^n(2\pi) \\ \Phi_3^n(2\pi) \\ \vdots \\ \Phi_n^n(2\pi) \end{Bmatrix}$$

Με τα διανύσματα των λύσεων για $t=2\pi$ διαμορφώνεται το μητρώο Floquet Transition Matrix (FTM):

$$\text{FTM} = \begin{bmatrix} \Phi_1^1(2\pi) & \Phi_1^2(2\pi) & \dots & \Phi_1^n(2\pi) \\ \Phi_2^1(2\pi) & \Phi_2^2(2\pi) & \dots & \Phi_2^n(2\pi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_n^1(2\pi) & \Phi_n^2(2\pi) & \dots & \Phi_n^n(2\pi) \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Η ιδιοδιανυσματική ανάλυση αυτού του πίνακα δίνει τελικά τις κυρίαρχούσες ιδιοτιμές λ_{pk} :

$$\lambda_{pk} = \sigma_k + i \cdot \omega_{pk} = \frac{1}{T} \ln|\rho_k| + i \cdot \frac{1}{T} \cdot (\arg(\rho_k)) \quad (6.4)$$

όπου $\sigma_k = \frac{1}{T} \ln(|\rho_k|)$ είναι το structural damping

$\omega_{pk} = \frac{1}{T} \arg(\rho_k) \in [-\frac{1}{2}\Omega, \frac{1}{2}\Omega]$ είναι η κυρίαρχη ιδιοσυχνότητα

και k είναι ο βαθμός ελευθερίας.

Ενώ οι ιδιοτιμές λ_k δίνονται από το σύνθετο λογάριθμο:

$$\lambda_{pk} = \sigma_k + i \cdot \omega_{pk} = \frac{1}{T} \ln|\rho_k| + i \cdot \frac{1}{T} \cdot (\arg(\rho_k) + j_k \cdot 2\pi) \quad (6.5)$$

Όπου $\arg(\rho_k) \in [-\pi, \pi]$ ο σύνθετος λογάριθμος δείχνει ότι η ιδιοσυχνότητα ω_k είναι απροσδιόριστη μέσα σε ένα ακέραιο πολλαπλάσιο της γωνιακής ταχύτητας του δρομέα. Συνεπώς η πραγματική ιδιοσυχνότητα του κάθε βαθμού ελευθερίας υπολογίζεται ως $\omega_k = \omega_{pk} + j_k \cdot \Omega$, (όπου Ω είναι η ταχύτητα περιστροφής του δρομέα). Μια φυσική εξήγηση αυτής της απροσδιοριστίας είναι ότι οι ιδιοσυχνότητες εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή. Η απροσδιοριστία των συχνοτήτων λύνεται, προσδιορίζοντας τις ιδιοσυχνότητες ως αυτές που μετριοούνται στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi} \ln|\lambda_k|$$

$$\omega_{pk} = \frac{1}{2\pi} \cdot (\arg(\lambda_k))$$

6.2. Επίλυση της απροσδιοριστίας (frequency identification)

Ο προσδιορισμός του j_k και τελικά της ιδιοσυχνότητας ω_k απαιτεί την ακόλουθη διαδικασία [8]:

Η μεταβατική απόκριση σε μια διέγερση του mode k θα είναι:

$$x_k(t) = u_k(t) \cdot e^{(\lambda_{pk} + i \cdot j_k \cdot \Omega) \cdot t} \quad (6.6)$$

Όπου u_k είναι η περιοδική ιδιομορφή (mode shape) και δίνεται από την εξίσωση:

$$u_k(t) = \Phi(t) \cdot V_k \cdot e^{-(\lambda_{pk} + i \cdot j_k \cdot \Omega)t} = u_{pk}(t) \cdot e^{-i \cdot j_k \cdot \Omega \cdot t} \quad (6.7)$$

και δηλαδή η κυρίαρχη περιοδική μορφή του mode shape θα είναι

$$u_{pk}(t) = \Phi(t) \cdot V_k \cdot e^{-\lambda_{pk} t} \quad (6.8)$$

$$u_k(t) = \mathbf{u}_k(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}_{pkj} \cdot e^{j\Omega t} \cdot e^{-j_k \Omega t} \cdot e^{-j_k \Omega t}$$

όπου $V_k = V_{kR} + i V_{kI}$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα του της ιδιομορφής

$\Phi(t)$ είναι ο πίνακας που προκύπτει ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την οποία υπολογίζεται και το Floquet Transition Matrix, αυτή τη φορά όμως, όχι μόνο για $t=2\pi$, αλλά για κάθε χρονική στιγμή. Τελικά θα έχει την εξής μορφή:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1^1(t) & \Phi_1^2(t) & \dots & \Phi_1^n(t) \\ \Phi_2^1(t) & \Phi_2^2(t) & \dots & \Phi_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_n^1(t) & \Phi_n^2(t) & \dots & \Phi_n^n(t) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Τόσο η περιοδική ιδιομορφή u_k όσο και το εκθετικό μέρος στην μεταβατική απόκριση x_k εξαρτώνται από την επιλογή του j_k , του οποίου η επίδραση ακυρώνεται καθώς έχει αντίθετο πρόσημο στους δυο όρους και έτσι η ίδια απόκριση λαμβάνεται ανεξαρτήτως της τιμής του j_k . Συνεπώς η ιδιοσυχνότητα του mode k μπορεί να ορισθεί ελεύθερα μέσα σε ακέραια πολλαπλάσια του Ω , επιλογή που επίσης καθορίζει το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή. Ο παρατηρητής των ιδιοσυχνοτήτων τοποθετείται στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, κάτι που κάνει τις συχνότητες των ιδιομορφών που λαμβάνονται να έχουν τιμές αντίστοιχες με αυτές που παίρνουμε από την επίλυση μέσω του μετασχηματισμού Coleman.

Η προηγούμενη εξίσωση γράφεται αναλυτικά:

$$u_{pk}(t) = \Phi(t) \cdot e^{-\sigma_k t} \cdot \{ [V_{kR} \cdot \cos(\omega_{pk} \cdot t) + V_{kI} \cdot \sin(\omega_{pk} \cdot t)] + i \cdot [V_{kI} \cdot \cos(\omega_{pk} \cdot t) - \dots] \} \quad (6.10)$$

$$V_{kR} \cdot \sin(\omega_{pk} \cdot t)]\}}}$$

και άρα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα θα είναι:

$$u_{pkReal}(t) = \Phi(t) \cdot e^{-\sigma_k t} \cdot [V_{kR} \cdot \cos(\omega_{pk} \cdot t) + V_{kI} \cdot \sin(\omega_{pk} \cdot t)] \quad (6.11)$$

και

$$u_{pkImaginary}(t) = \Phi(t) \cdot e^{-\sigma_k t} \cdot [V_{kI} \cdot \cos(\omega_{pk} \cdot t) - V_{kR} \cdot \sin(\omega_{pk} \cdot t)] \quad (6.12)$$

Κάνοντας Fourier και στα δύο μέρη προκύπτει:

$$u_{pkReal}(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{Prkj} \cdot [\cos(j \cdot \Omega \cdot t) + i \cdot \sin(j \cdot \Omega \cdot t)] \quad (6.13)$$

$$u_{pkImaginary}(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{Pikj} \cdot [\cos(j \cdot \Omega \cdot t) + i \cdot \sin(j \cdot \Omega \cdot t)] \quad (6.14)$$

και κρατάμε τους όρους για $j = -10, \dots, 10$

Τελικά λοιπόν η εξίσωση (7.10) γράφεται:

$$\begin{aligned} u_{pk}(t) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (A_{Prkj} + i \cdot A_{Pikj}) \cdot [\cos(j \cdot \Omega \cdot t) + i \cdot \sin(j \cdot \Omega \cdot t)] = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (A_{Prkj} + i \cdot A_{Pikj}) \cdot e^{i \cdot j \cdot \Omega \cdot t} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Το ανάπτυγμα Fourier της κυρίαρχης περιοδικής mode ιδιομορφής $u_{pk}(t)$ περιλαμβάνει μόνο αρμονικές ακεραίων πολλαπλασίων του Ω καθώς είναι περιοδικό με περίοδο T . Από το σύνολο αυτών των αρμονικών ταλαντώσεων, αυτή με το μέγιστο πλάτος αντιστοιχεί στο σωστό j και όταν πλέον αυτο είναι γνωστό υπολογίζεται και η πραγματική ιδιοσυχνότητα του εκάστοτε (k) βαθμού ελευθερίας.

Το πλάτος της ταλάντωσης για ένα j είναι:

$$|A_{Pkj}| = \sqrt{A_{Prkj}^2 + A_{Pikj}^2} \quad (6.16)$$

Οι όροι A_{Prkj} και A_{Pikj} υπολογίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

Για το πραγματικό μέρος:

$$A_{Prkj} = \frac{1}{2} (A_{Prkoskj} - i \cdot A_{Prsinkj}) \text{ για } j=1, \dots, 10 \quad (6.17)$$

$$\text{και } A_{Prkj} = \frac{1}{2} (A_{Prkoskj} + i \cdot A_{Prsinkj}) \text{ για } j=-10, \dots, -1 \quad (6.18)$$

$$\text{και επιπλέον } A_{Prkoskj} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_{PkReal} \cdot (t) \cdot \cos(j \cdot \psi) d\psi \quad (6.19)$$

$$\text{και } A_{Prsinkj} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_{PkReal} \cdot (t) \cdot \sin(j \cdot \psi) d\psi \quad (6.20)$$

όμοια υπολογίζεται ο όρος A_{Pikj} που αντιστοιχεί στο φανταστικό μέρος:

$$A_{Pikj} = \frac{1}{2} (A_{Picoskj} - i \cdot A_{Pisinkj}) \text{ για } j=1, \dots, 10 \quad (6.21)$$

$$\text{και } A_{Pikj} = \frac{1}{2} (A_{Picoskj} + i \cdot A_{Pisinkj}) \text{ για } j=-10, \dots, -1 \quad (6.22)$$

$$\text{με } A_{Picoskj} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_{PkImaginary} \cdot (t) \cdot \cos(j \cdot \psi) d\psi \quad (6.23)$$

$$\text{και } A_{Pisinkj} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_{PkImaginary} \cdot (t) \cdot \sin(j \cdot \psi) d\psi \quad (6.24)$$

7. Εφαρμογή θεωρίας Floquet σε απλουστευμένο μοντέλο

7.1. Μοντέλο τριών βαθμών ελευθερίας

Για την καλύτερη κατανόηση εξετάζεται αρχικά η περίπτωση ενός απλουστευμένου μοντέλου της ανεμογεννήτριας, με μόνο τρεις βαθμούς ελευθερίας, που αντιστοιχούν στις κινήσεις των πτερυγίων, στην κατεύθυνση πτερύγισης (flap).

Δηλαδή το διάνυσμα x των βαθμών ελευθερίας θα είναι:

$$x = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix}$$

Ενώ τα μητρώα M , C και K δίνονται ως:

$$M = \begin{bmatrix} J_b & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & J_b \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & 0 \\ 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & c_\beta \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_\beta + J_b \cdot \Omega^2 - S_b \cdot g \cdot \sin\psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_\beta + J_b \cdot \Omega^2 - S_b \cdot g \cdot \sin\psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_\beta + J_b \cdot \Omega^2 - S_b \cdot g \cdot \sin\psi_3 \end{bmatrix}$$

Η γραμμικοποίηση των εξισώσεων δίνει στο σύστημα τη μορφή:

$$(M + M_{aer})\ddot{x} + (C + C_{aer})\dot{x} + (K + K_{aer})x = Q \quad (8.1)$$

Όπου όπως έχει αναφερθεί και στην ανάλυση που προηγήθηκε ο ποιο σημαντικός όρος, ο οποίος επηρεάζει και περισσότερο την ευστάθεια του συστήματος είναι ο C_{aer} .

Για τη συγκεκριμένη εφαρμογή αμελούμε την επίδραση της βαρύτητας ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές των μητρώων μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας λαμβάνουν τις τιμές που αναγράφονται στον ακόλουθο πίνακα:

Μέγεθος	Τιμή
M_b	6053 kg
S_b	72606 kg·m
J_b	1453069 kg·m ²
k_b	7.9875·10 ⁷ N·m/rad

Πίνακας 7.1. Χαρακτηριστικά Α/Γ για εφαρμογή τριών βαθμών ελευθερίας
Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Coleman παίρνουμε τελικά τα καινούργια
μητρώα M, C και K τα οποία αντιστοιχούν στις τρεις νέες κοινές συντεταγμένες
για τα τρία πτερύγια (multi-blade co-ordinates):

$$x = \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_c \\ \beta_s \end{Bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} J_b & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & J_b \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_\beta + c_{aer} & 0 & 0 \\ 0 & c_\beta + c_{aer} & 0 \\ 0 & 0 & c_\beta + c_{aer} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_\beta + J_b \cdot \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_\beta & 0 \\ 0 & 0 & k_\beta \end{bmatrix}$$

Στο μετασχηματισμένο πλέον σύστημα πραγματοποιείται ιδιοδιανυσματική
ανάλυση και από τις ιδιοτιμές που προκύπτουν παίρνουμε τις ακόλουθες τιμές
για κάθε απόσβεση και ιδιοσυχνότητα.

Eigen-value στο σύστημα Coleman

d.o.f.	Structural Damping (σ)	Eigen-frequency (ω)-Hz
β_c	-0.03556	0.9034
β_0	-0.03556	1.2217

β _s	-0.03556	1.5400
----------------	----------	--------

Πίνακας 7.2. Αποτελέσματα ιδιοδιανυσματικής ανάλυσης για 3 βαθμούς ελευθερίας.

Μπορούμε τώρα να περάσουμε στην εξίσωση $\dot{\Phi} = A \cdot \Phi$ όπου:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_c \\ \beta_s \\ \dot{\beta}_0 \\ \dot{\beta}_c \\ \dot{\beta}_s \end{pmatrix}$$

και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Floquet, όπου μετά την ιδιοδιανυσματική ανάλυση του πίνακα FTM παίρνουμε τελικά:

Floquet στο Coleman σύστημα

Structural Damping (σ)	Principal eigen-frequency (ω _p)-Hz
-0.03554	0.05191
-0.03554	-0.05191
-0.03555	0.05175
-0.03555	-0.05175
-0.03554	0.05213
-0.03554	-0.05213

Πίνακας 7.3. Αποτελέσματα θεωρίας Floquet στο σύστημα των τριών βαθμών ελευθερίας.

Όπως εξηγήθηκε στην περιγραφή της μεθόδου οι παραπάνω είναι οι κυρίαρχες ιδιοσυχνότητες και οι πραγματικές τελικά δίνονται από τον τύπο: $\omega_k = \omega_{pk} + j_k \cdot \Omega$.

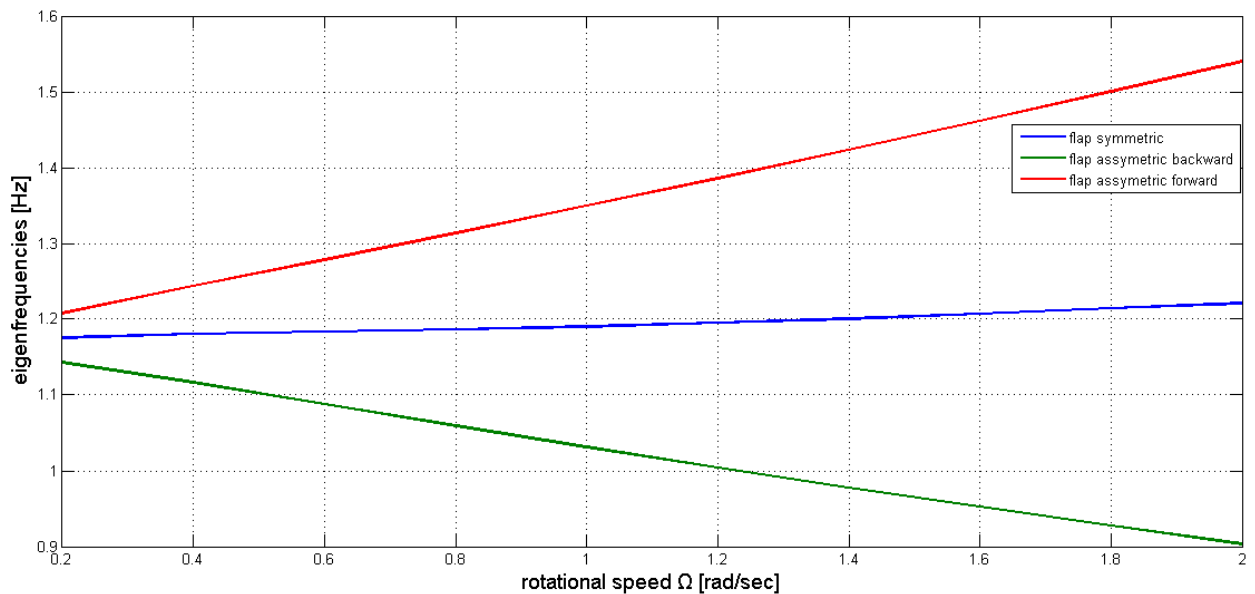
Ακολουθώντας τη μέθοδο που αναλύθηκε, υπολογίζονται τα j_k για κάθε ιδιοσυχνότητα, τα οποία είναι τελικά $j_1 = 4$, $j_2 = 3$, και $j_3 = 5$. Μπορούν πλέον να υπολογισθούν τα ω_k (για $k=1, \dots, 3$) και να συγκριθούν με τα αντίστοιχα

αποτελέσματα που πήραμε προηγούμενως από την ιδιοδιανυσματική ανάλυση στον πίνακα $A = \begin{bmatrix} -c/m & -k/m \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ του μετασχηματισμένου συστήματος Coleman.

Coleman		Floquet	
σ_k	ω_k -Hz	σ_k	ω_k -Hz
-0.03556	0.9034	-0.03554	0.90302
-0.03556	1.2217	-0.03555	1.22133
-0.03556	1.5400	-0.03554	1.53963

Πίνακας 7.4. Σύγκριση αποτελεσμάτων με λύση Coleman και Floquet.

Για το ίδιο σύστημα των τριών βαθμών ελευθερίας εξετάζουμε τη "συμπεριφορά" του για ταχύτητες περιστροφής $\Omega = 0,2-2$ rad/sec και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο διάγραμμα Campbell που ακολουθεί.



Σχήμα 7.1. Διάγραμμα συχνοτήτων συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας στο σύστημα τριών βαθμών ελευθερίας.

7.2. Μοντέλο πέντε βαθμών ελευθερίας

Σε αυτό το σημείο έχει ενδιαφέρον να εξετασθεί και ένα απλουστευμένο μοντέλο αντίστοιχο με το προηγούμενο, αυτή τη φορά με πέντε βαθμούς ελευθερίας, προσθέτοντας δηλαδή και δύο βαθμούς ελευθερίας για τον πύργο, έναν που αντιστοιχεί στην κάμψη και ένα στην μπρος-πίσω μετατόπισή του. Κατά αυτόν τον τρόπο, η σύζευξη μεταξύ τους θα επηρεάσει τις ιδιομορφές και κατ'επέκταση τις ιδιοσυχνότητες που εμφανίζονται. Τα νέα Coleman ,μητρώα μαζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας αντίστοιχα θα είναι:

$$M = \begin{bmatrix} J_b & 0 & 0 & S_b & 0 \\ 0 & J_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_b & 0 & J_b \\ 3S_b & 0 & 0 & 3M_b + m_N & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}J_b & 0 & \frac{3}{2}J_b + I_N \end{bmatrix}$$

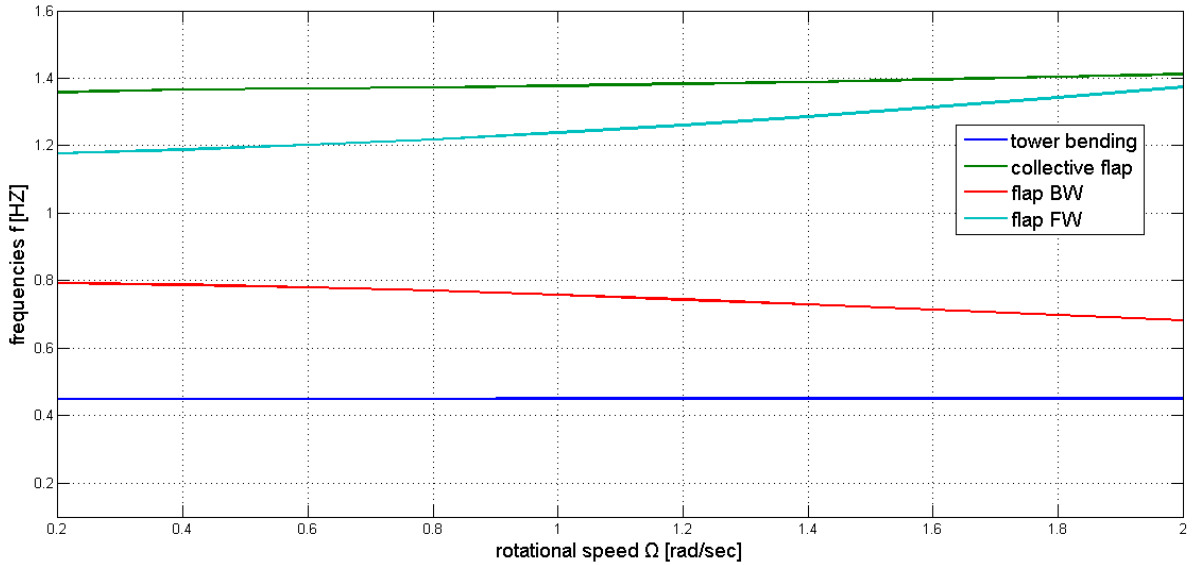
$$C = \begin{bmatrix} c_\beta + c_{aer} & 0 & 0 & S_b & 0 \\ 0 & c_\beta + c_{aer} & 2J_b\Omega & 0 & 2J_b\Omega \\ 0 & -2J_b\Omega & c_\beta + c_{aer} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_f & 0 \\ 0 & -32J_b\Omega & 0 & 0 & c_t \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_\beta + J_b\Omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_\beta & c_\beta\Omega & 0 & 0 \\ 0 & -c_\beta\Omega & k_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_t \end{bmatrix}$$

ενώ το διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας θα είναι :

$$x = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_c \\ \beta_s \\ q_f \\ q_t \end{bmatrix}$$

Ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση εφαρμόζεται και πάλι η θεωρία Floquet και εν συνεχεία εντοπίζονται οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται στο διάγραμμα Campbell που ακολουθεί, και πάλι για ταχύτητες περιστροφής $\Omega=0,2-2$ rad/sec.



Σχήμα 7.2. Διάγραμμα Campbell για μοντέλο πέντε βαθμών ελευθερίας.

Στο παραπάνω διάγραμμα γίνεται εμφανής η επίδραση της σύζευξης μεταξύ των μελών, ειδικά αν το μελετήσουμε συγκριτικά με το προηγούμενο που αφορούσε μόνο στις τρεις κινήσεις των πτερυγίων στην κατεύθυνση πτερύγισης. Η ύπαρξη του πύργου επιδρά στις ιδιομορφές, καθώς βλέπουμε την συμμετρική συχνότητα πτεύγισης (flap collective) να μετατοπίζεται προς το πάνω, ενώ οι δυο ασύμμετρες προκύπτουν και πάλι προσθέτοντας $\pm \Omega$, ανάλογα με το αν πρόκειται για την Forward ή Backward ιδιοσυχνότητα αντίστοιχα. Μάλιστα η αρχική διαφορά μεταξύ των δύο ασύμμετρων συχνοτήτων στην κατεύθυνση πτερύγισης (flap asymmetric), καθορίζεται από την δυσκαμψία (tilt stiffness) του πύργου, η οποία καθώς αυξάνεται (και κατά συνέπεια για πολύ μεγάλες τιμές θεωρείται πρακτικά άκαμπτος) έχει την τάση να κάνει την Backward ιδιοσυχνότητα να μετατοπιστεί προς τα πάνω.

8. Παρουσίαση ανεμογεννήτριας NREL 5MW

8.1. Τεχνικά χαρακτηριστικά ανεμογεννήτριας

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά της ανεμογεννήτριας των 5 MW (ανεμογεννήτρια αναφοράς NREL 5MW) που χρησιμοποιείται για τις αναλύσεις που πραγματοποιούνται. Περιγράφονται αναλυτικά στον που ακολουθεί:

Ιδιότητα	Τιμή
Ονομαστική Ισχύς	5MW
Τύπος ανεμογεννήτριας	Ανάντι, τρίπτερη
Σύστημα ελέγχου	Μεταβλητών στροφών, μεταβλητής γωνίας βήματος
Σύστημα μετάδοσης κίνησης	Αύξησης στροφών, κιβώτιο ταχυτήτων πολλαπλών βαθμίδων
Διάμετρος δρομέα/πλήμνης	126 m /3 m
Ύψος πλήμνης	90 m
Ταχύτητα έναρξης λειτουργίας	3 m/s
Ονομαστική ταχύτητα	11.4 m/s
Ταχύτητα αποκοπής	25 m/s
Έναρξη ρύθμισης στροφών	6.9 rpm
Ονομαστική ταχύτητα περιστροφής	12.1 rpm
Μέγιστη ταχύτητα ακροπτερυγίου	80 m/s
Κλίση άξονα/ γωνία κώνου	0° / 0°
Μάζα δρομέα	110000 kg
Μάζα κλωβού	240000 kg
Μάζα πύργου	347460 kg

Πίνακας 8.1. Βασικά χαρακτηριστικά της ανεμογεννήτριας NREL - 5MW

Όσον αφορά στο πτερύγιο και στον πύργο, στους ακόλουθους πίνακες παρουσιάζονται επιπρόσθετα κάποια χαρακτηριστικά τους:

Ιδιότητα	Τιμή
Μήκος	61.5 m
Συνολική (ολοκληρωμένη) μάζα	17740 kg
Ποσοστό κατασκευαστικής απόσβεσης	0.477465 %

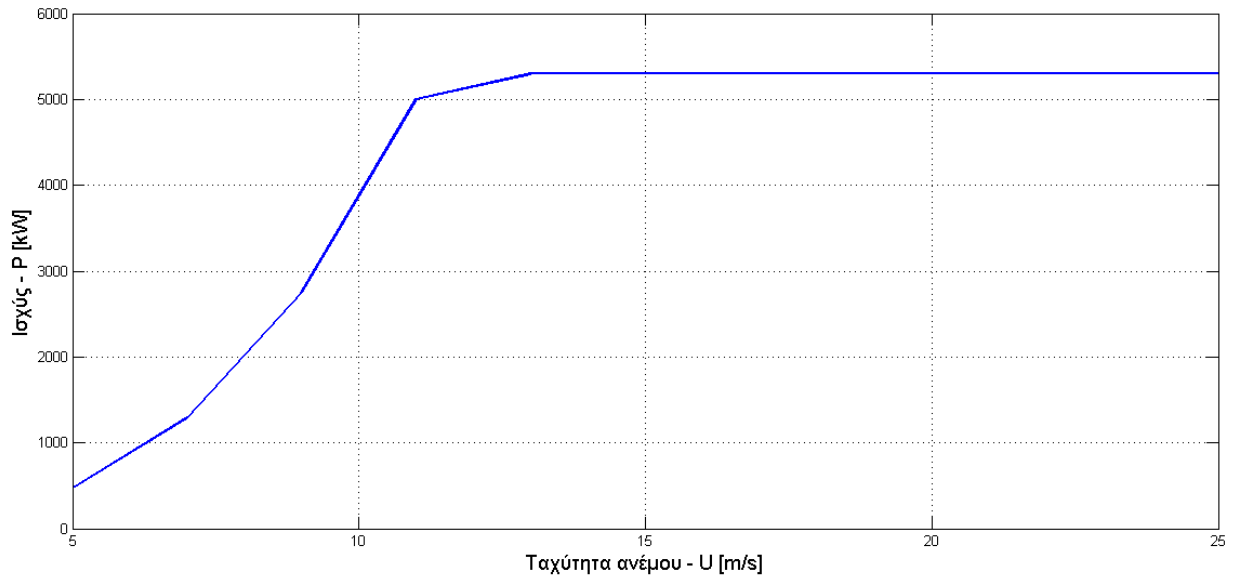
Πίνακας 8.2. Βασικά χαρακτηριστικά του πτερυγίου

Ιδιότητα	Τιμή
Μήκος	87.6 m
Συνολική (ολοκληρωμένη) μάζα	347460 kg
Ποσοστό κατασκευαστικής απόσβεσης	1 %

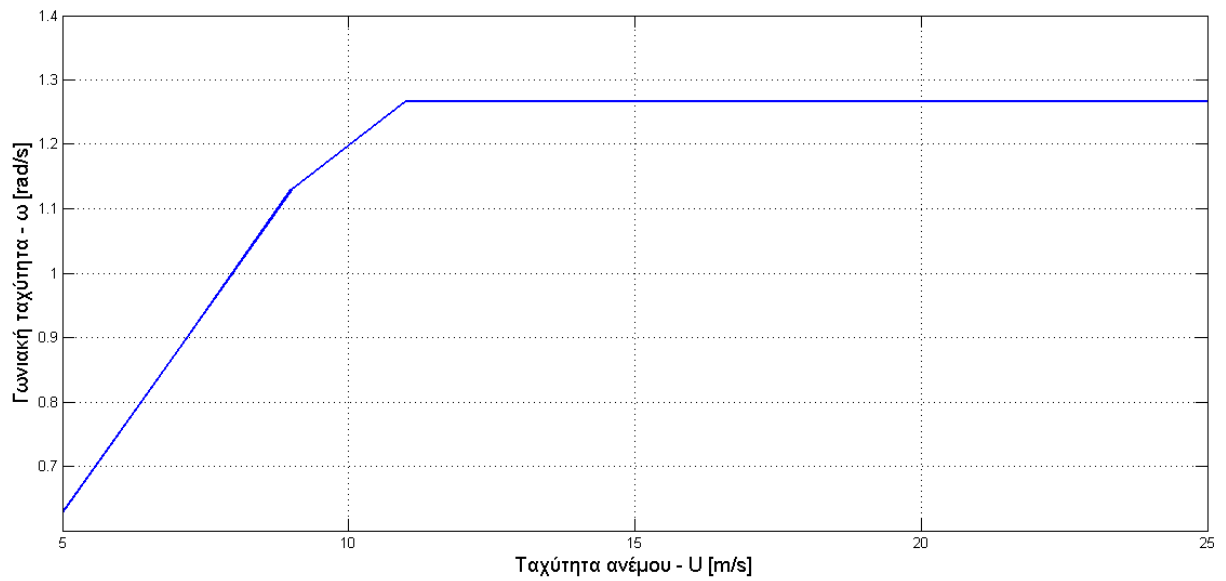
Πίνακας 8.3. Βασικά χαρακτηριστικά του πύργου

8.2. Επιδόσεις ανεμογεννήτριας

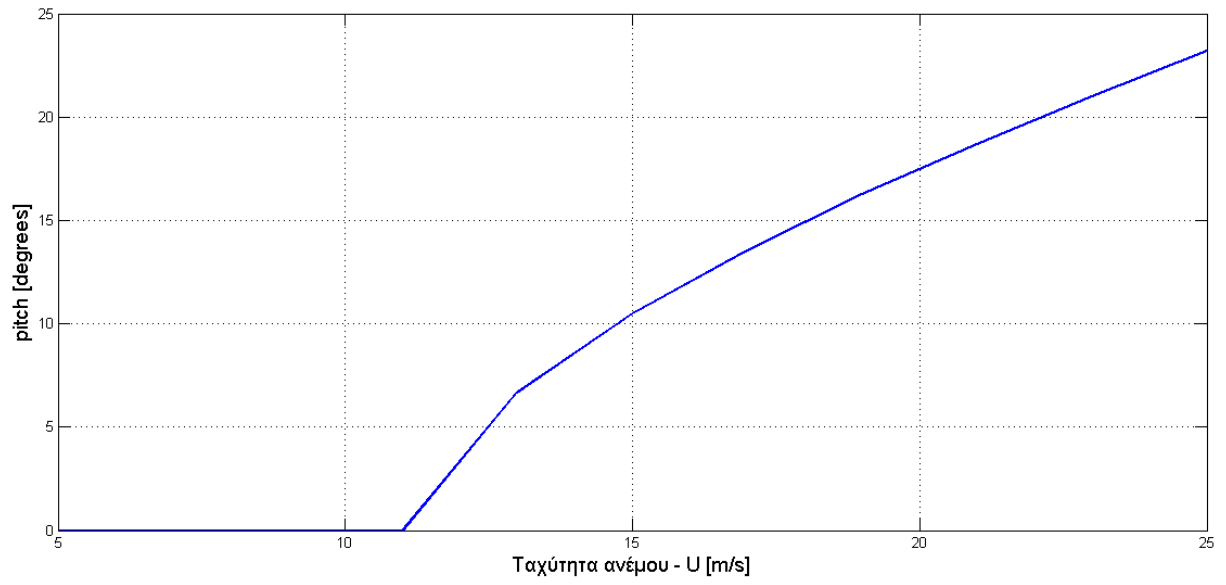
Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζονται οι επιδόσεις τις ανεμογεννήτριας για τις διάφορες ταχύτητες ανέμου, δηλαδή η ισχύς που αποδίδει, η γωνιακή ταχύτητα αλλά και η μεταβολή του βήματος του πτερυγίου για ταχύτητες ανέμου από 11 m/s και μεγαλύτερες.



Σχήμα 8.1. Ισχύς της ανεμογεννήτριας συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου



Σχήμα 8.2. Ταχύτητα περιστροφής συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου

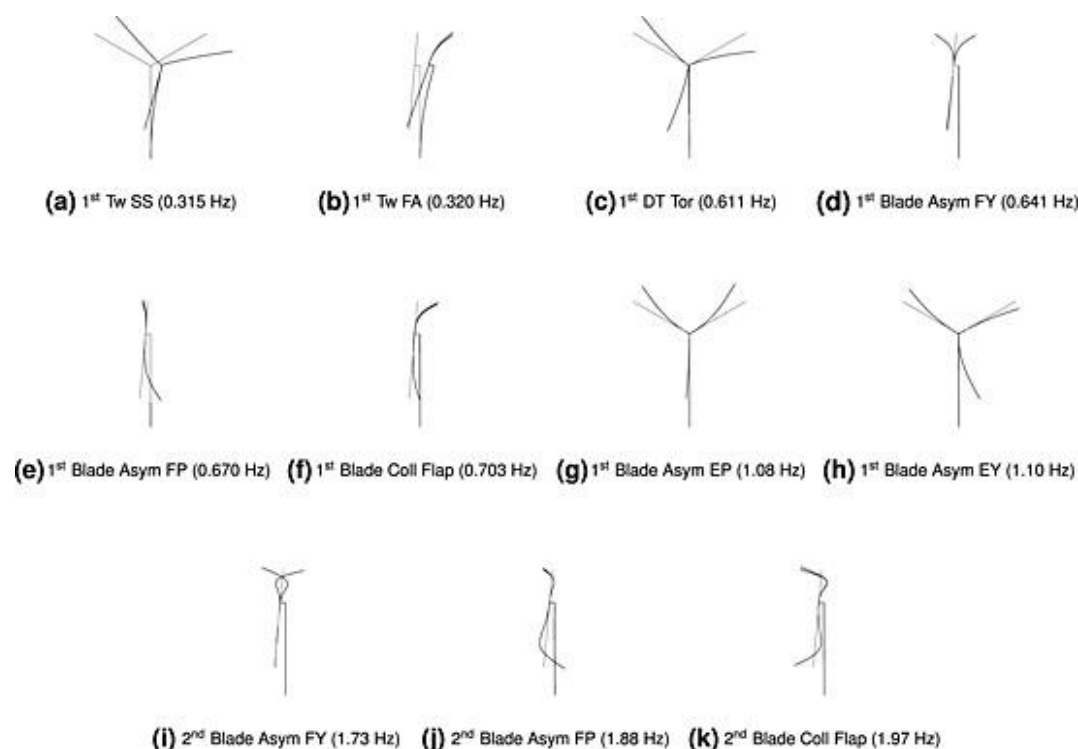


Σχήμα 8.3. Γωνία βήματος του πτερυγίου συναρτήσει της ταχύτητας του ανέμου

9. Αποτελέσματα ανάλυσης ευστάθειας στο σύστημα των 16 βαθμών ελευθερίας

9.1. Ανάλυση ιδιομορφών

Στην παρούσα ανάλυση η ανεμογεννήτρια έχει θεωρηθεί ισότροπη, δηλαδή όλα τα πτερυγία είναι πανομοιότυπα, δεν παρουσιάζουν ασυμμετρία στη μάζα, χαρακτηρίζονται από την ίδια απόσβεση και δυσκαμψία και είναι τοποθετημένα στο ρότορα ανά 120°. Επιπλέον η λειτουργία της γίνεται σε ισότροπες εξωτερικές συνθήκες δηλαδή αμελείται το πεδίο βαρύτητας ενώ το πεδίο ροής του ανέμου είναι μόνιμο, ομοιόμορφο και κάθετο στην επιφάνεια του δρομέα. Έτσι, για την ανεμογεννήτρια που εξετάζεται οι ιδιομορφές που παρουσιάζονται θα είναι της παρακάτω μορφής [9]:



Σχήμα 9.1. Ιδιομορφές της NREL - 5 MW

Οι ιδιομορφές που εμφανίζονται αντιστοιχούν σε διαφορετικούς συνδυασμούς κάμψης των διαφόρων συνιστωσών. Αυτές με τη χαμηλότερη συχνότητα, είναι οι ιδιομορφές του πύργου οι οποίες χαρακτηρίζονται από μια απόκλιση του πύργου και των πτερυγίων. Συγκεκριμένα πρόκειται για δύο, μία πλευρική (1T SS, tower side-side) με κύρια κίνηση του πύργου παράλληλα με το επίπεδο του δρομέα και μία μπρος-πίσω (1T FA, tower fore-aft), με κύρια κίνηση του πύργου κάθετα στο επίπεδο του δρομέα.

Οι ιδιομορφές του δρομέα τρίπτερης ανεμογεννήτριας εμφανίζονται σε τριάδες και αφορούν στην απόκλιση των πτερυγίων κατά την κατεύθυνση

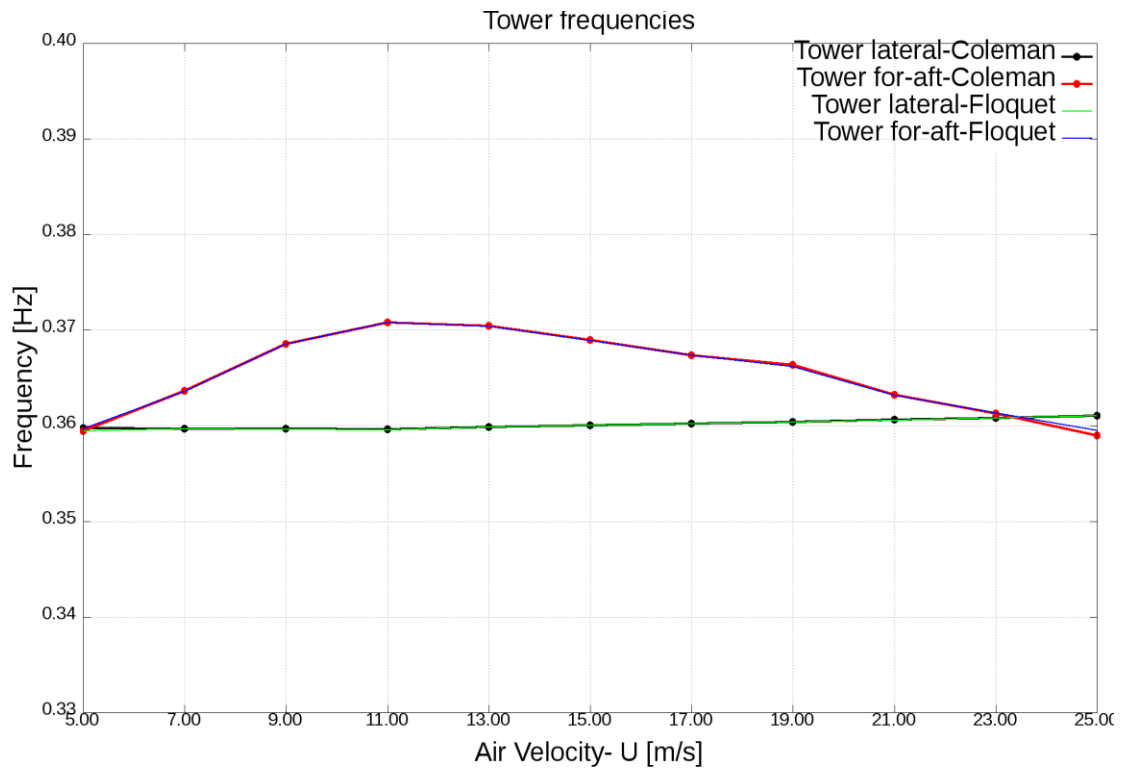
πτερύγισης (flap) και την περιφερειακή παραμόρφωση των πτερυγίων (edge). Κάθε τριάδα περιλαμβάνει μια συμμετρική ιδιομορφή, στην οποία τα πτερύγια παραμορφώνονται στην ίδια κατεύθυνση, και δυο ασύμμετρες. Έτσι στην κατεύθυνση πτερύγισης η συμμετρική είναι αυτή που και τα τρία πτερύγια αποκλίνουν από το επίπεδο του ρότορα (1st blade collective flap), ενώ στην περιφερειακή κατεύθυνση η ιδιομορφή όπου και τα τρία πτερύγια παραμορφώνονται στην ίδια κατεύθυνση είναι συζευγμένη με την ελαστικότητα του άξονα (drive-train) (1st drive-train torsion). Οι ασύμμετρες ιδιομορφές τόσο στη κατεύθυνση flap όσο και στην edge, είναι συζευγμένες με tilt και yaw.

Στην παραπάνω σχηματική απεικόνιση η συχνότητα της ιδιομορφής drive train είναι αρκετά χαμηλή, γιατί αντιστοιχεί στο πρόβλημα πριν σε αυτό προστεθεί ο βαθμός ελευθερίας του άξονα (free-fixed), δηλαδή οι στροφές είναι σταθερές.

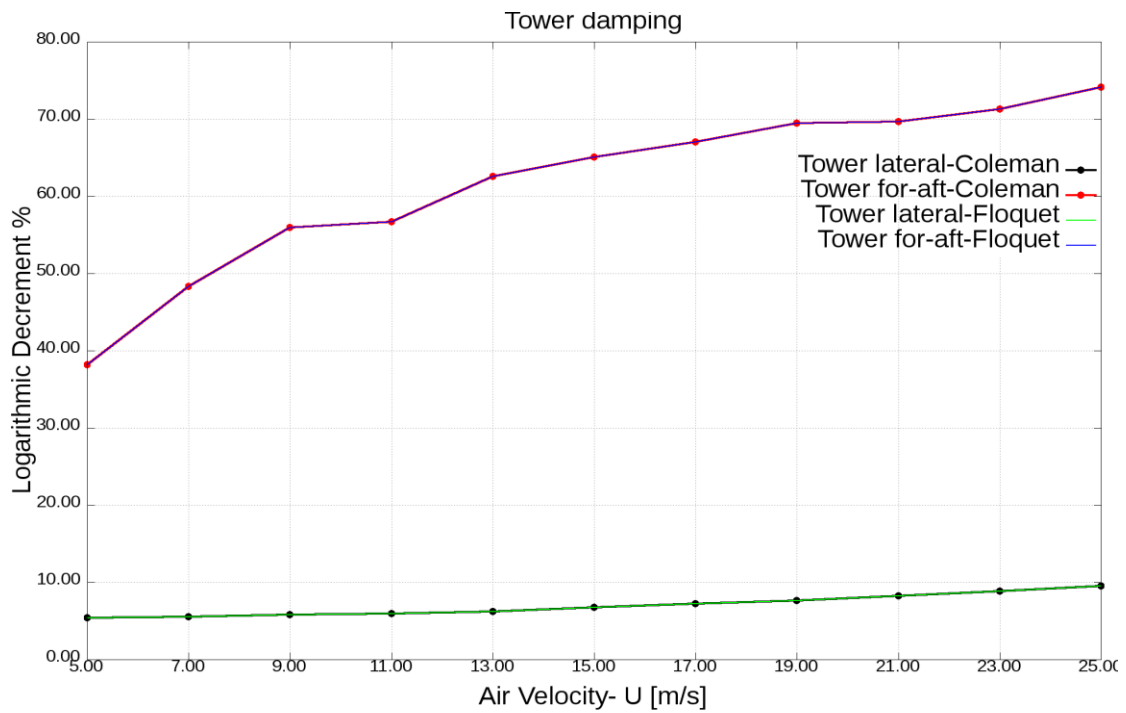
9.2. Ανάλυση ευστάθειας με αεροδυναμικά φορτία

Η μεταφορά από το στρεφόμενο στο μη στρεφόμενο σύστημα επιδρά στις ιδιομορφές. Στο κινούμενο σύστημα η αδράνεια της ταλάντωσης του πτερυγίου μεταφέρεται σε άλλη γωνία αζιμουθίου, προκαλώντας σύζευξη μεταξύ των συντεταγμένων a_1 και b_1 , δηλαδή των ασύμμετρων ιδιομορφών στις κατευθύνσεις flap και edge. Έτσι, στο μη στρεφόμενο σύστημα, οι ιδιομορφές θα είναι όπως αυτές στο στρεφόμενο προσθέτοντας ή αφαιρώντας τη γωνιακή ταχύτητα. Οι ιδιομορφές που μετακινούνται προς μεγαλύτερη συχνότητα ονομάζονται Forward Whirling (FW - προοδευτικές), ενώ όσες μετακινούνται προς χαμηλότερη συχνότητα ονομάζονται Backward Whirling (BW-οπισθοδρομικές). Στις περιπτώσεις που εξετάζονται πιο σύνθετα προβλήματα, όπως μια πλήρης ανεμογεννήτρια, γίνεται σύζευξη των FW και BW ιδιομορφών με τα μη στρεφόμενα μέρη του συστήματος και τότε η αναγνώρισή τους γίνεται πιο δύσκολη.

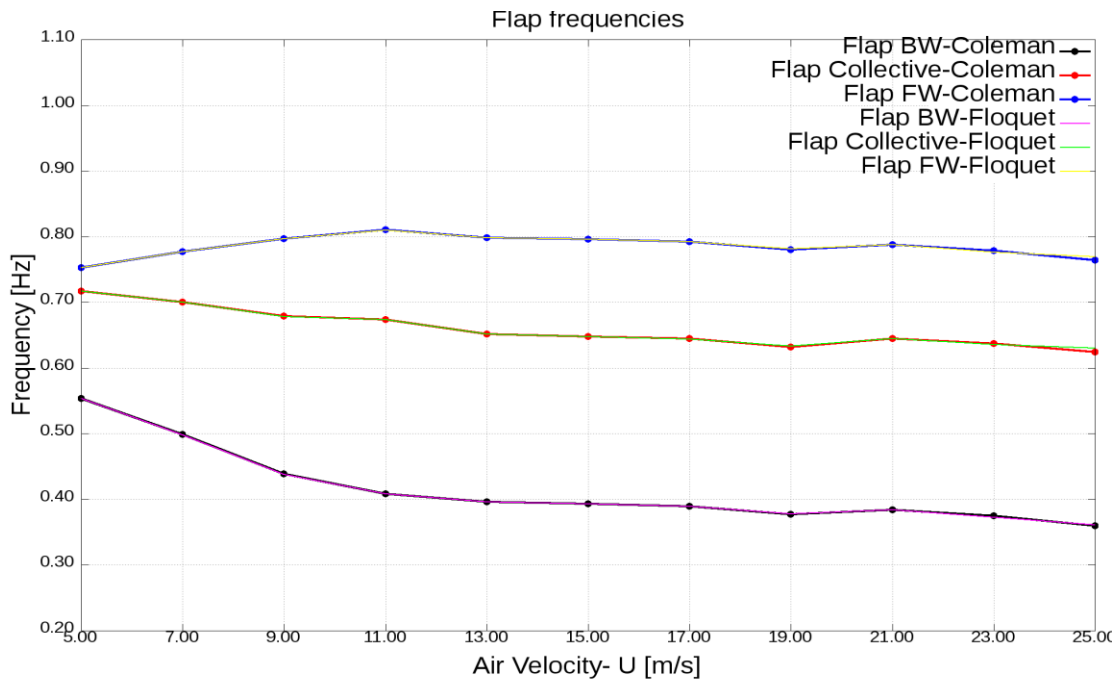
Ακολουθούν τα διαγράμματα Campbell στα οποία παρουσιάζονται οι συχνότητες των 8 ιδιομορφών χαμηλότερων συχνοτήτων του μοντέλου της ανεμογεννήτριας των 16 βαθμών ελευθερίας, όπως αυτό περιγράφηκε στην αντίστοιχη ενότητα, και έχοντας πλέον ελευθερώσει τον βαθμό ελευθερίας του άξονα. Αποτυπώνονται συγκριτικά τα αποτελέσματα της ιδιοδιανυσματικής ανάλυσης των μετασχηματισμένων μητρώων Coleman, με τα αντίστοιχα αφού εφαρμοσθεί και η θεωρία Floquet. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι οι λύσεις ταυτίζονται, κάτι που επιβεβαιώνει την αποτελεσματικότητα της θεωρίας.



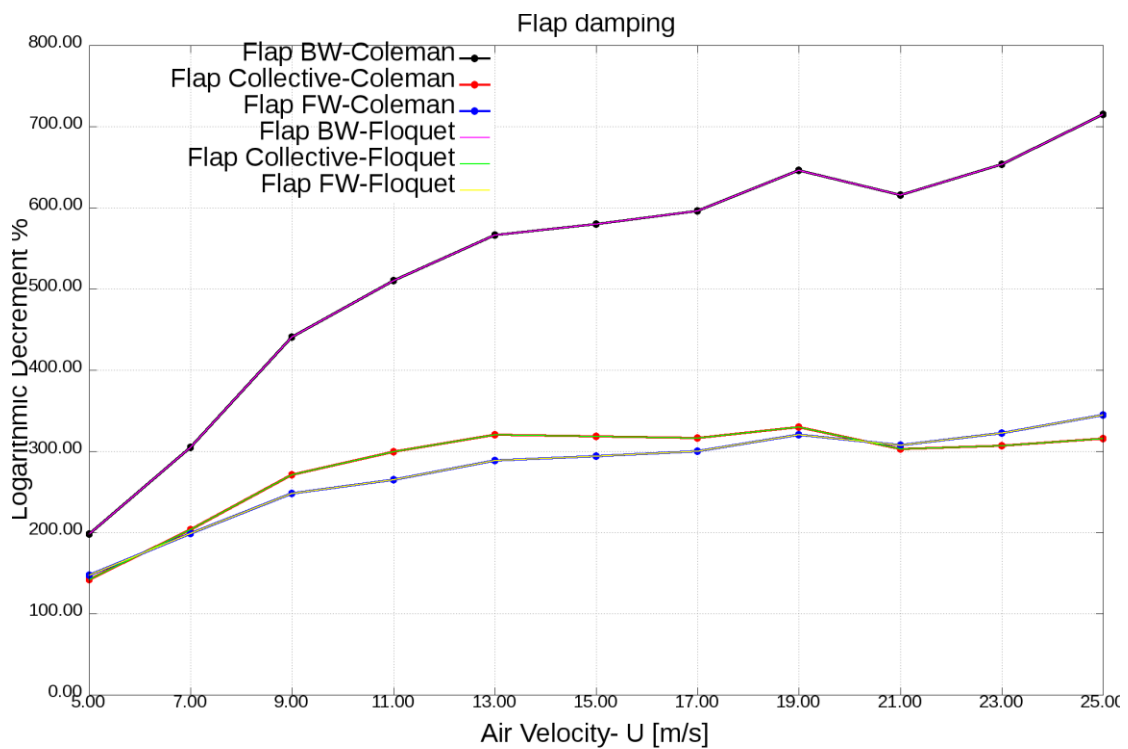
Σχήμα 9.2. Διάγραμμα Campbell συχνοτήτων του πύργου.



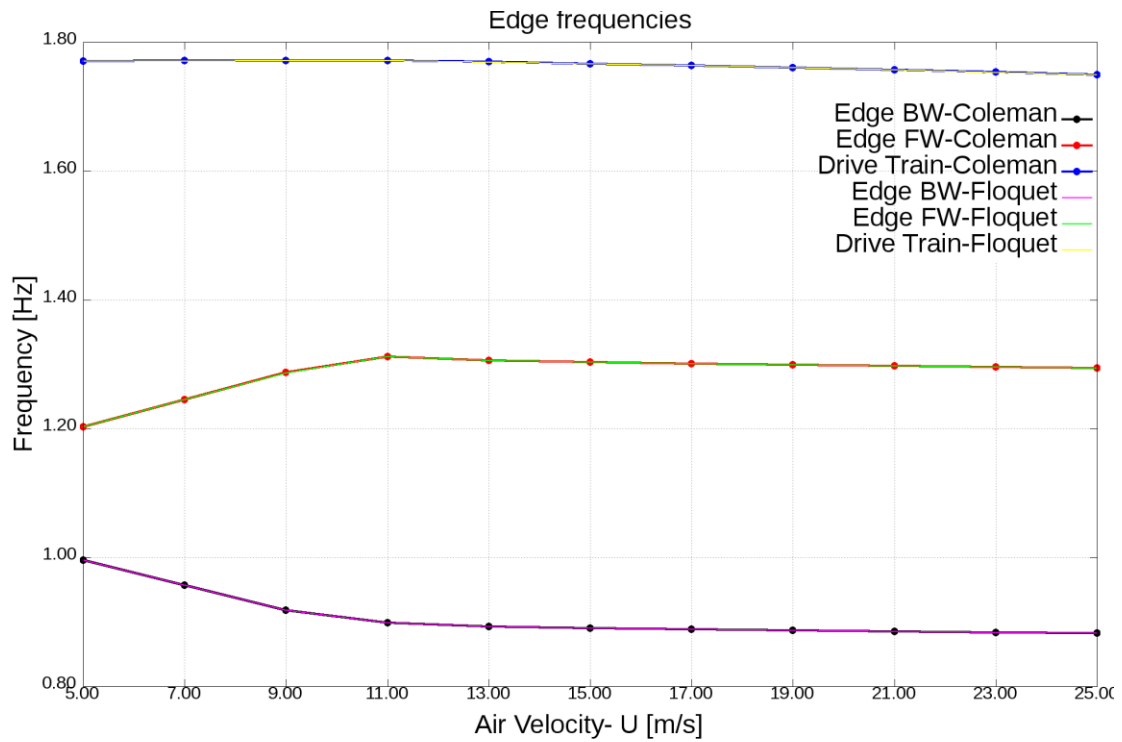
Σχήμα 9.3. Απόσβεση των συχνοτήτων του πύργου.



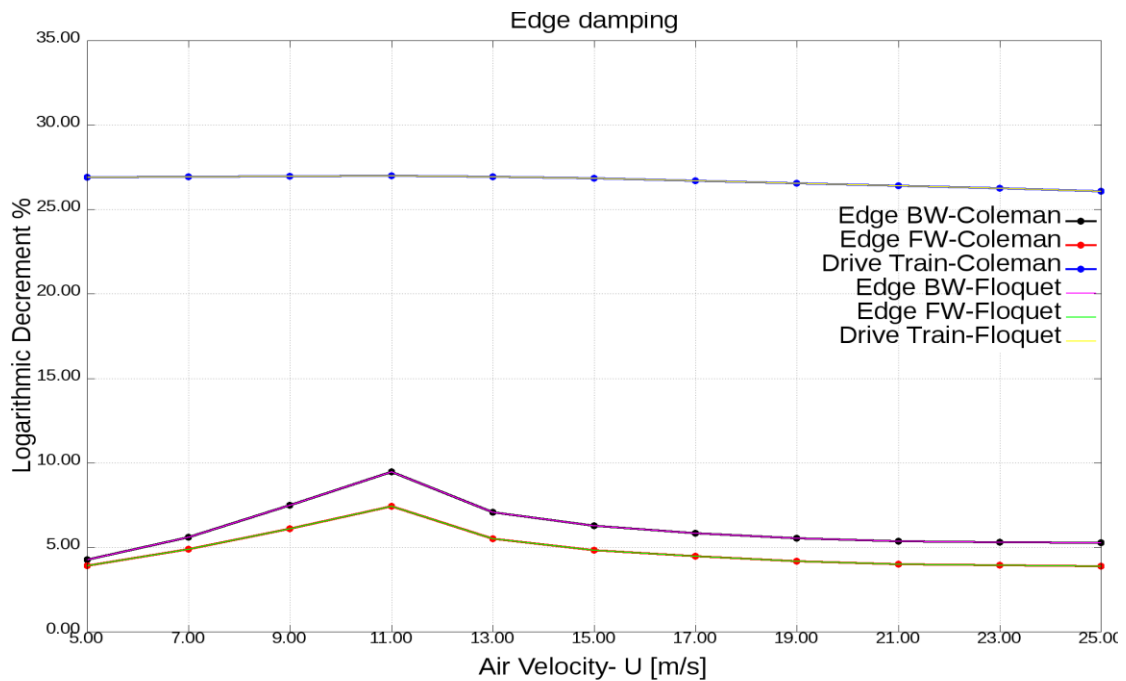
Σχήμα 9.4. Διάγραμμα Campbell των συχνοτήτων στην κατεύθυνση περύγισης (flap).



Σχήμα 9.5. Απόσβεση των συχνοτήτων στην κατεύθυνση περύγισης (flap).



Σχήμα 9.6. Διάγραμμα Campbell των μη συμμετρικών συχνοτήτων στην κατεύθυνση περιστροφής (edge) .



Σχήμα 9.7. Απόσβεση των μη συμμετρικών συχνοτήτων στην κατεύθυνση περιστροφής (edge).

10. Ανάλυση ευστάθειας σε σύστημα με ασυμμετρία μάζας

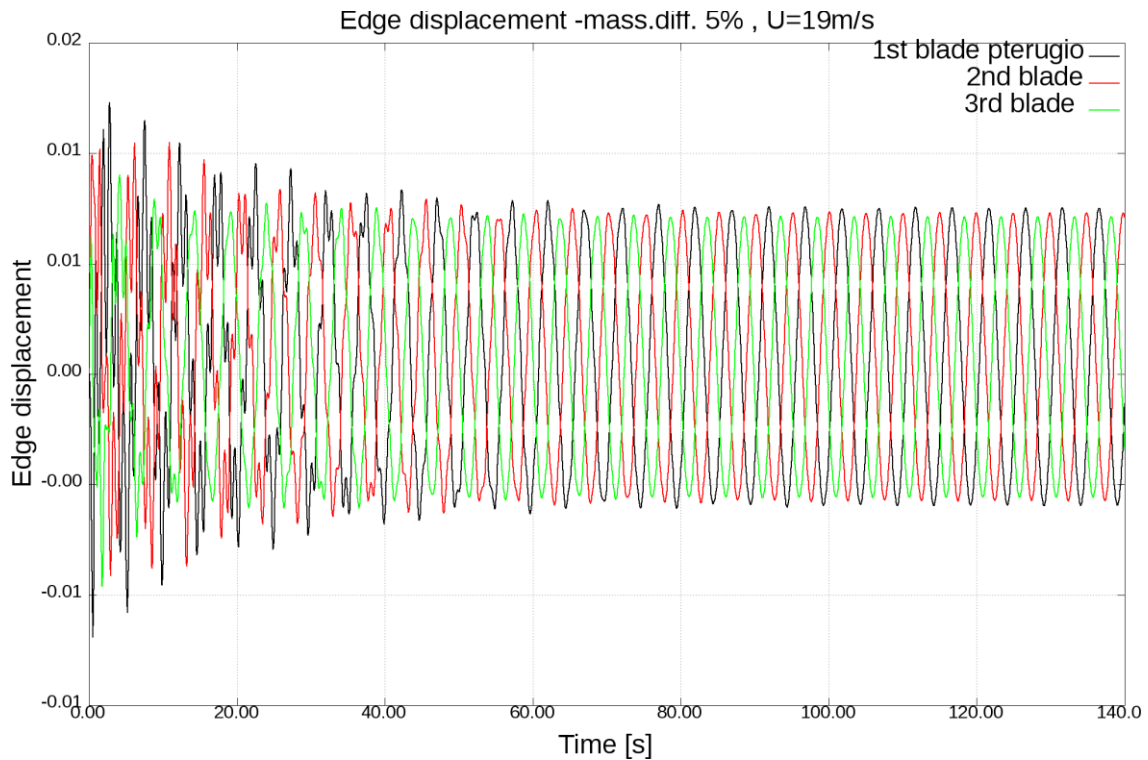
Μέχρι τώρα έχει εξεταστεί η περίπτωση ισότροπου συστήματος ανεμογεννήτριας. Αυτό σημαίνει ότι η ροή του αέρα είναι ομοιόμορφη και κάθετη στο επίπεδο περιστροφής του ρότορα, ενώ τα πτερύγια είναι πανομοιότυπα, χωρίς να παρουσιάζουν ασυμμετρία στη μάζα, την απόσβεση και τη δυσκαμψία τους.

Είναι ενδιαφέρον να εξετασθεί η συμπεριφορά της ανεμογεννήτριας όταν το σύστημα πάψει να είναι ισότροπο. Αυτό μπορεί να γίνει με την εισαγωγή μιας ασυμμετρίας μάζας στα τρία πτερύγια. Συγκεκριμένα διατηρούμε τη μάζα του ενός ως έχει, ενώ των άλλων δύο θα παρουσιάζει μια απόκλιση της τάξης του $\pm 2\%$ αντίστοιχα, ενώ σε δεύτερη φάση, θα εξετασθεί και η περίπτωση όπου η απόκλιση γίνεται μεγαλύτερη, αγγίζοντας την τάξη του $\pm 5\%$.

10.1. Επίδραση ασυμμετρίας στις ιδιομορφές

Μια τέτοια αλλαγή στο σύστημα, περιμένουμε να επηρεάσει περισσότερο την κίνηση των πτερυγίων στην κατεύθυνση περιστροφής (edge), η οποία συνδέεται άμεσα με την βαρύτητα. Συνεπώς, σε μια χρονοσειρά όπου απεικονίζεται αυτή η παραμόρφωση, περιμένουμε εκτός από τη διαφορά φάσης μεταξύ των πτερυγίων, που οφείλεται στη διαφορετική γωνία αζιμουθίου, να παρατηρείται και μια διαφορά στο πλάτος της ταλαντώσης κάθε πτερυγίου (αναλογά με το αν η μάζα στο εκάστοτε πτερύγιο είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την ονομαστική).

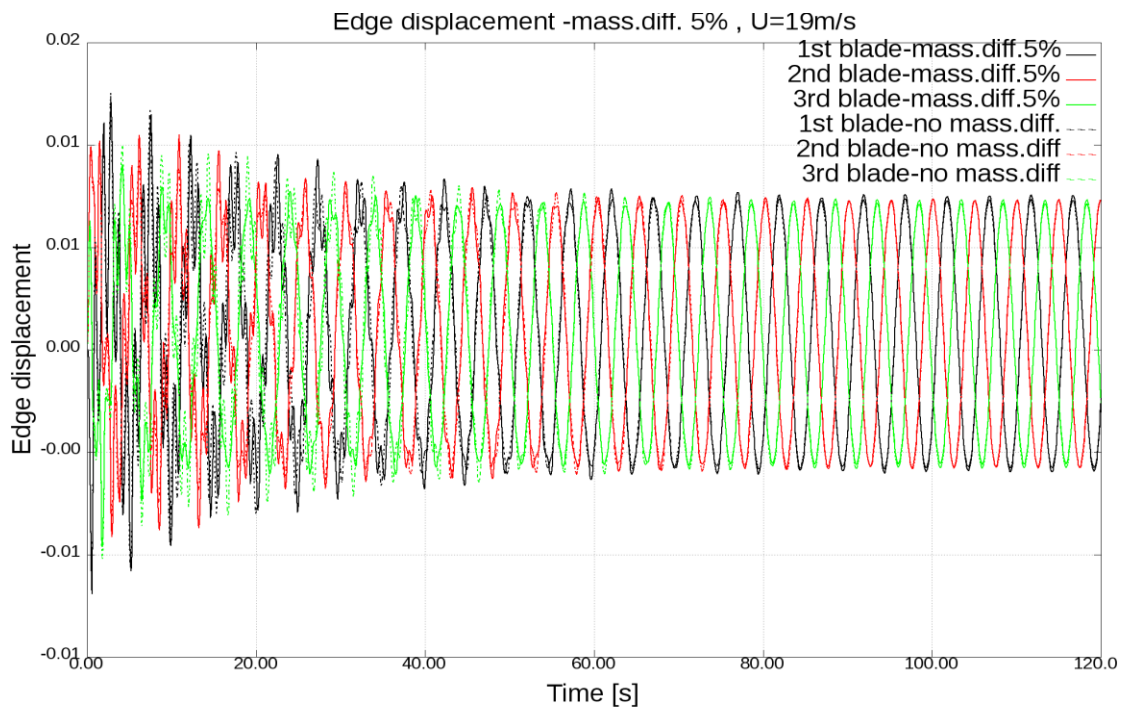
Τα παραπάνω παρουσιάζονται σχηματικά και στο ακόλουθο διάγραμμα, (σχήμα 10.1), όπου απεικονίζονται οι χρονοσειρές των παραμορφώσεων και των τριών πτερυγίων στην κατεύθυνση της περιστροφής. Το διάγραμμα αντιστοιχεί στην περίπτωση της ασυμμετρίας μάζας $\pm 5\%$, επιλογή που οφείλεται στο ότι οι διαφορές στα πλάτη θα είναι πιο ευδιάκριτες, λόγω του μεγαλύτερου βαθμού ανομοιομορφίας. Η ταχύτητα που επιλέγεται είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη και ισούται με $U=19\text{m/s}$.



Σχήμα 10.1. Παραμόρφωση πτερυγίων στην κατεύθυνση περιστροφής (edge) με ασυμμετρία μάζας 5%.

Εξετάζοντας παράλληλα την παραπάνω περίπτωση με αυτή του ισότροπου συστήματος και παρουσιάζοντάς τις σε κοινό διάγραμμα, (σχήμα 10.2), επιβεβαιώνεται και η ύπαρξη διαφοράς πλάτους ταλάντωσης μεταξύ των πτερυγίων, η οποία, παρατηρείται μόνο στα πρώτα δευτερόλεπτα από την έναρξη της περιστροφής στην περίπτωση πανομοιότυπων πτερυγίων (η οποία αντιστοιχεί στις διακεκομμένες γραμμές του διαγράμματος).

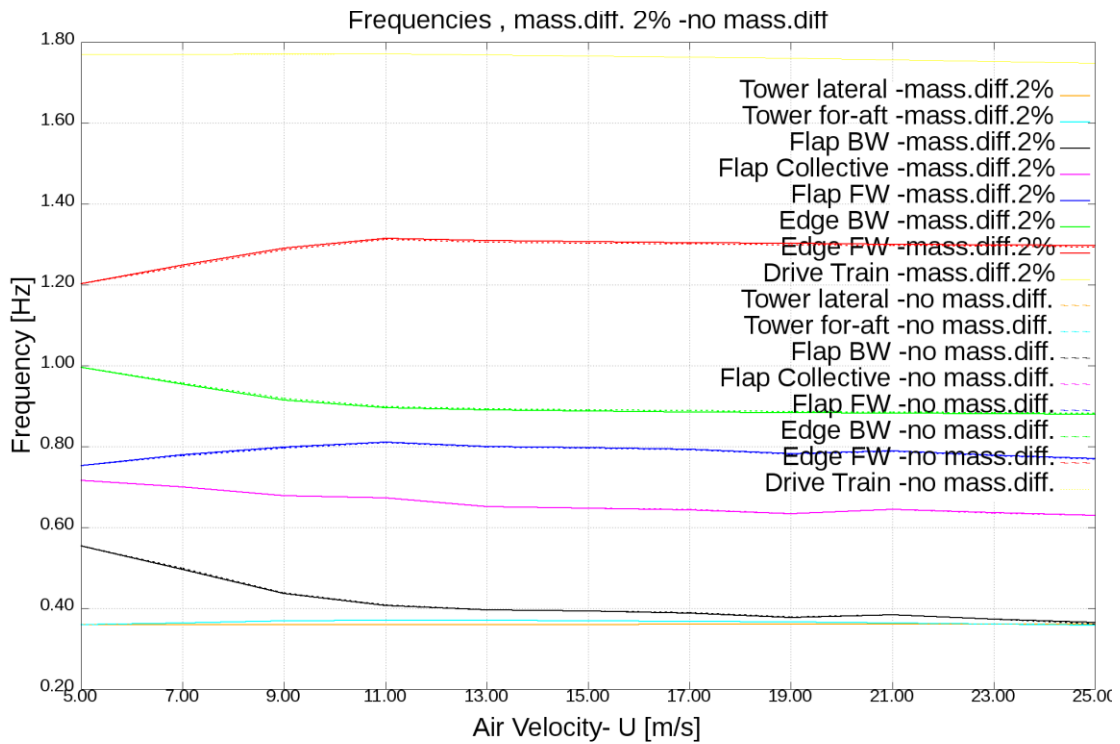
Στο διάγραμμα γίνεται σαφές πως το πρώτο πτερύγιο που αντιστοιχεί στο +5% ταλαντώνεται με μεγαλύτερο πλάτος από το πρώτο στην ομοιόμορφη περίπτωση, ενώ το αντίθετο συμβαίνει με το τρίτο που αντιστοιχεί στο -5%. Όσον αφορά στο δεύτερο πτερύγιο, που είναι αυτό που διατηρεί την ονομαστική μάζα βλέπουμε ότι στα δύο σενάρια οι χρονοσειρές σχεδόν ταυτίζονται.



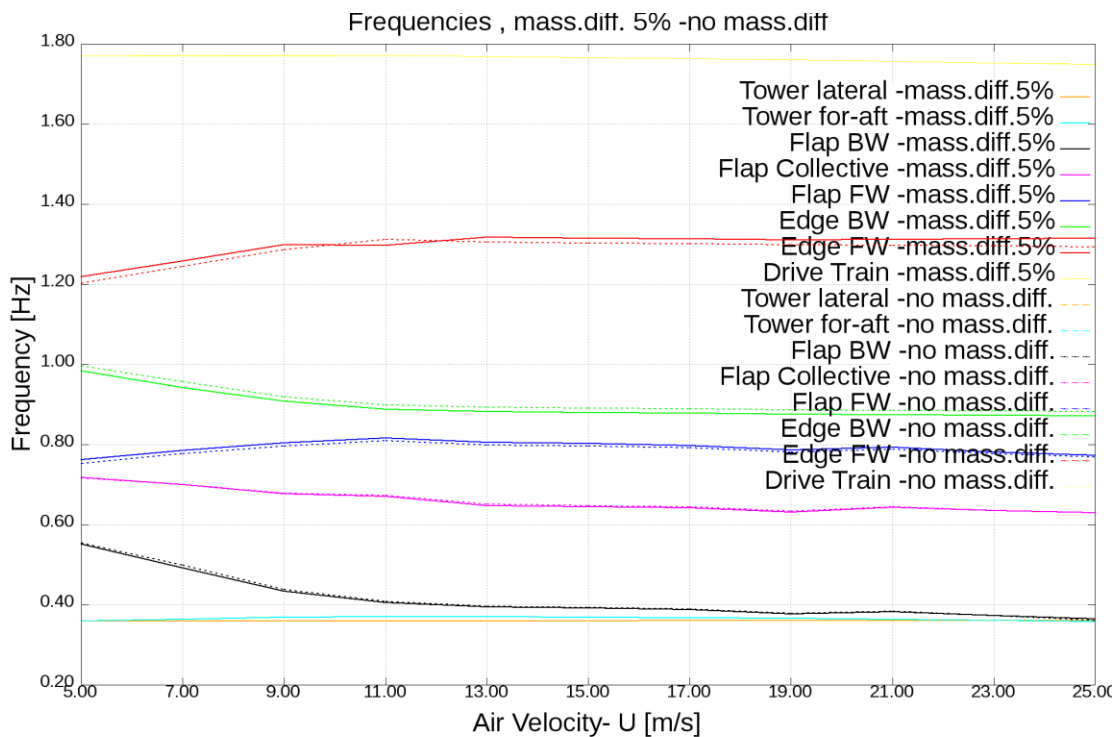
Σχήμα 10.2. Σύγκριση παραμορφώσεων στην κατεύθυνση περιστροφής με ανομοιομορφία μάζας 5% και αντίστοιχων χωρίς, $U_{ανέμου}=19\text{m/s}$

10.2. Ιδιοσυχνότητες με την προσθήκη ασυμμετρίας

Όσον αφορά στις οκτώ χαμηλότερες ιδιοσυχνότητες που εξετάζουμε, η ανομοιομορφία στη μάζα των περυγίων δεν δείχνει να τις επηρεάζει ιδιαίτερα, όπως αποτυπώνεται και στα ακόλουθα διαγράμματα Campbell όπου και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες του ισότροπου συστήματος. Αυτό που παρατηρείται ωστόσο είναι πως καθώς το ποσοστό της ασυμμετρίας αυξάνεται η απόκλιση των νέων συχνοτήτων που λαμβάνονται, από αυτές του ομοιόμορφου συστήματος επίσης αυξάνει.



Σχήμα 10.3. Ιδιοσυχνότητες ανεμογεννήτριας με ασυμμετρία μάζας 2%

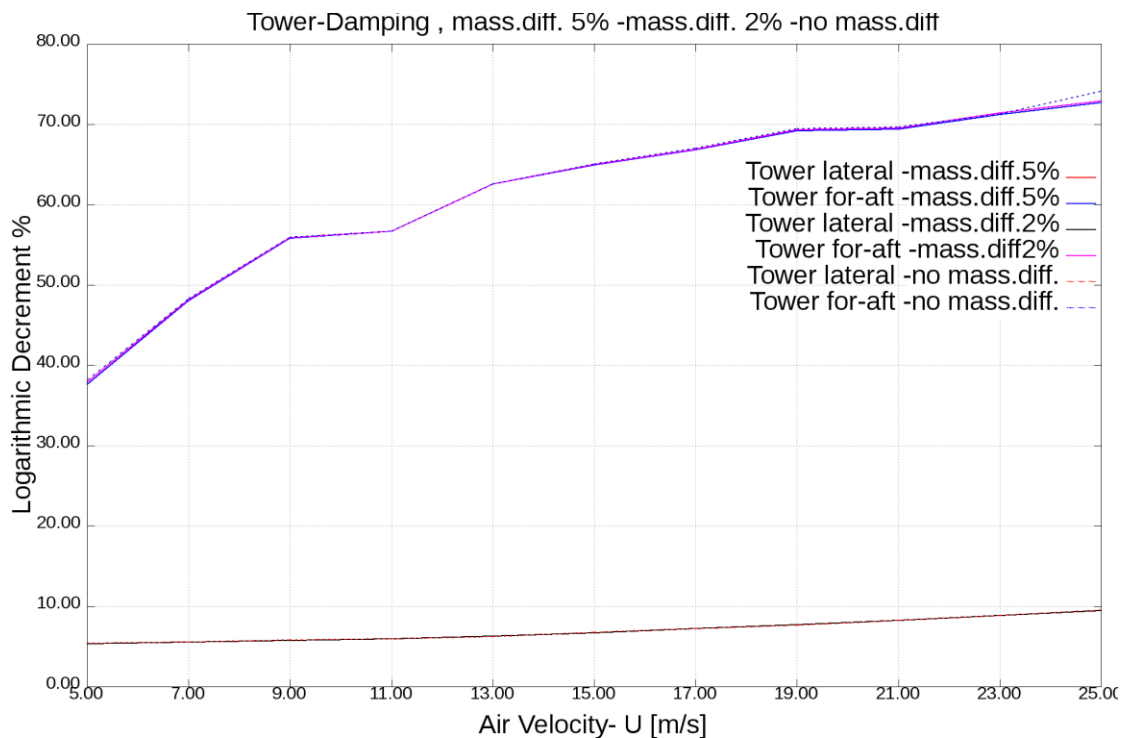


Σχήμα 10.4. Ιδιοσυχνότητες ανεμογεννήτριας με ασυμμετρία μάζας 5%.

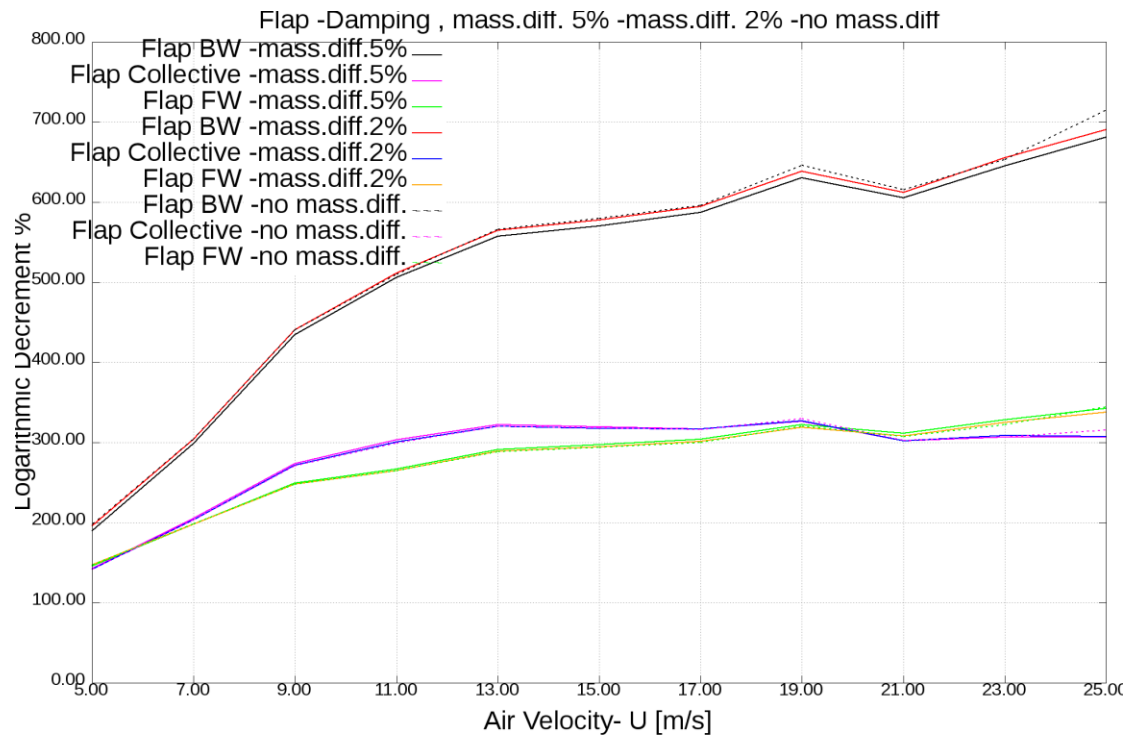
10.3. Απόσβεση με την προσθήκη ασυμμετρίας

Πέραν των συχνότητων, εξετάζουμε και τον τρόπο που η απόσβεση επηρεάζεται από την διατάραξη της ισορροπίας μεταξύ των μαζών των τριών πτερυγίων. Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει το logarithmic decrement, δηλαδή η ποσοστιαία μείωση του πλάτους της υπό εξέταση ταλάντωσης, που μπορεί να υπολογισθεί μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών μεγίστων.

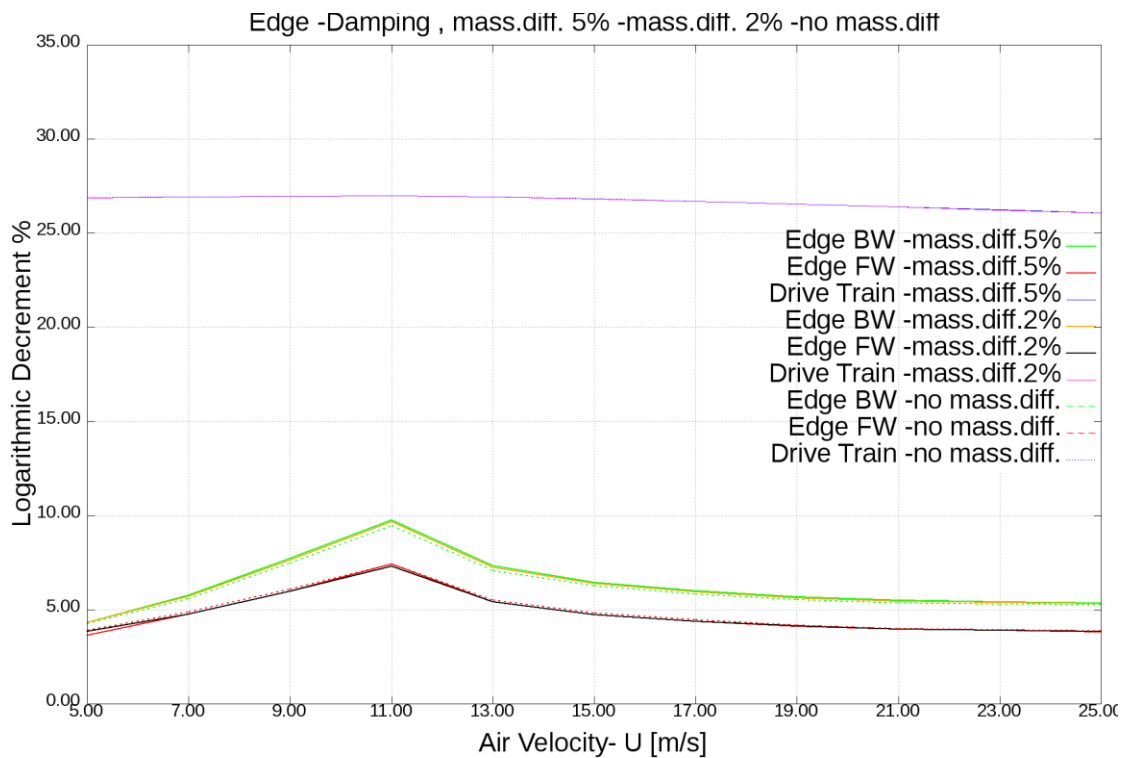
Στα ακόλουθα διαγράμματα, παρατηρούμε ότι όπως συμβαίνει στην περίπτωση των ιδιοσυχνοτήτων, δεν εντοπίζονται σημαντικές διαφορές, ειδικά στην περίπτωση της χαμηλής ασυμμετρίας (+/- 2%). Η μεγαλύτερη διαφορά σε σχέση με το ισότροπο σύστημα εντοπίζεται στην απόσβεση της ασύμμετρης οπισθοδρομικής ιδιομορφής στην κατεύθυνση πτερύγισης (flap BW mode).



Σχήμα 10.5. Απόσβεση των συχνοτήτων του πύργου.



Σχήμα 10.6. Απόσβεση των τριών ιδιοσυχνοτήτων στην κατεύθυνση περύγισης (flap).

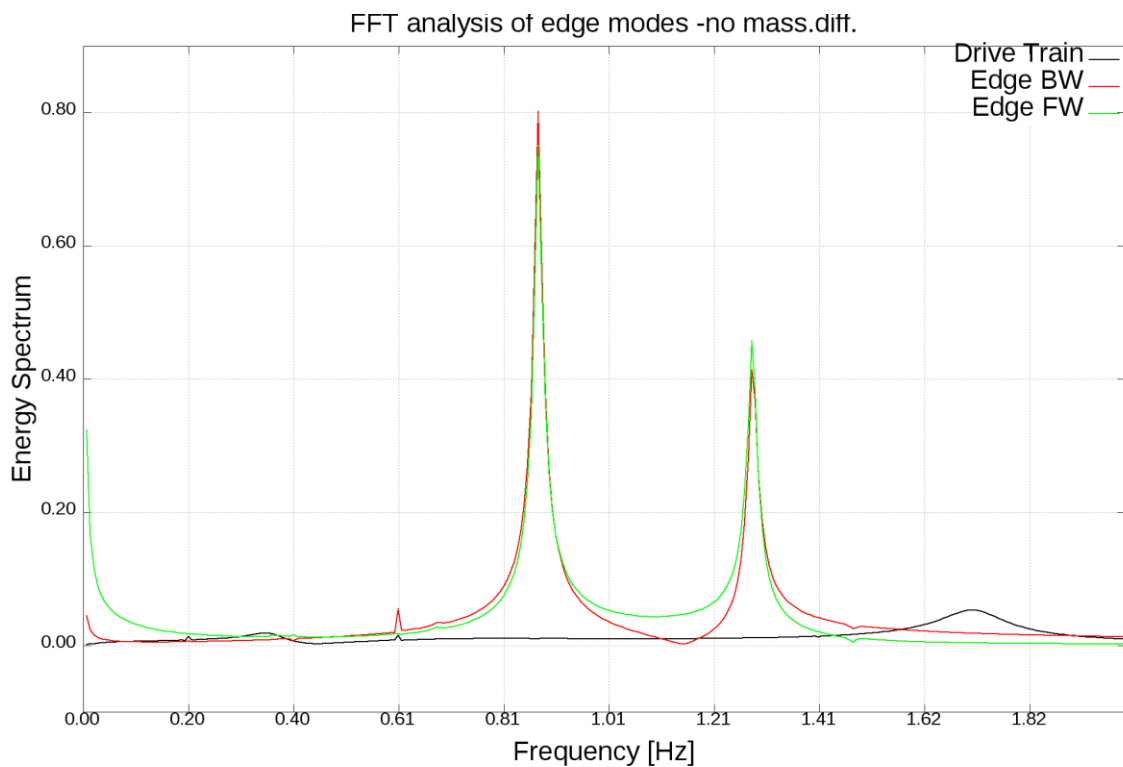


Σχήμα 10.7. Απόσβεση ιδιοσυχνοτήτων στην κατεύθυνση περιστροφής (edge).

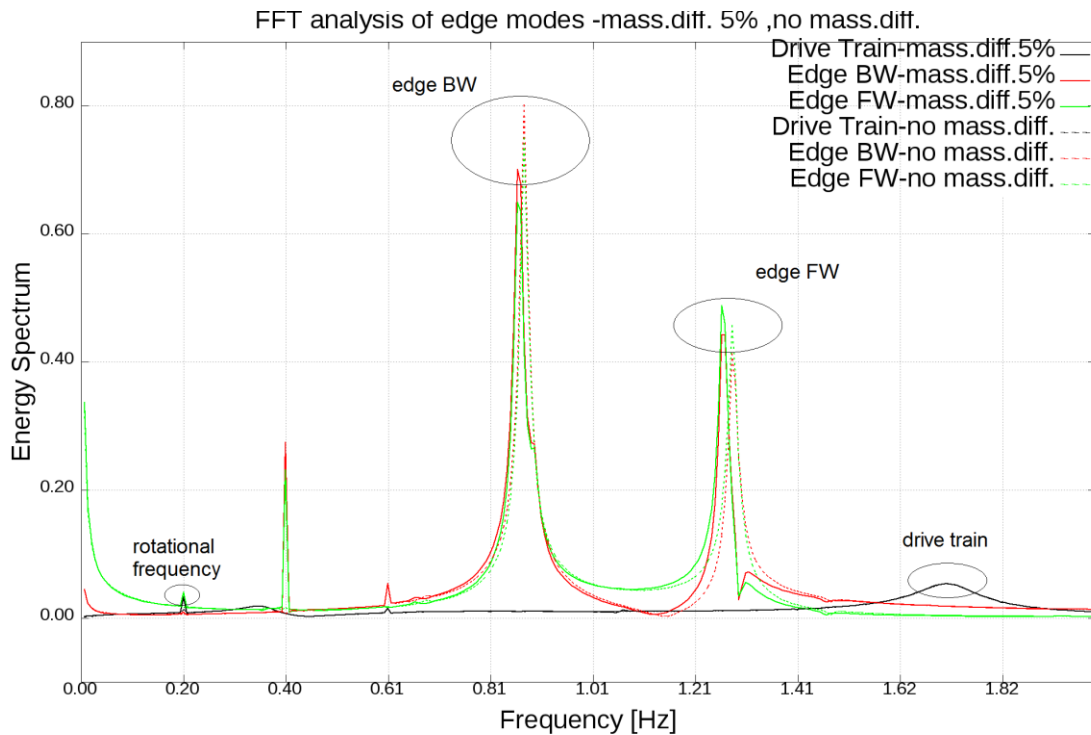
10.4. Ανάλυση FFT στις περιοδικές αποκρίσεις

Με δεδομένες τις χρονοσειρές των βαθμών ελευθερίας πραγματοποιείται ανάλυση FFT (Fast Fourier Transform), η οποία και εντοπίζει όλες τις αρμονικές ταλαντώσεις που διαμορφώνουν την τελική κίνηση. Η ανάλυση αυτή υποδεικνύει όλες τις συχνότητες που έχουν διεγερθεί.

Ακολουθούν τα διαγράμματα που προκύπτουν από την FFT ανάλυση των τριών κινήσεων στην κατεύθυνση περιστροφής (edge), για ταχύτητα ανέμου $U=19$ m/s τόσο για την περίπτωση της ασυμμετρίας μάζας 5% αλλά και για το ισότροπο σύστημα της ανεμογεννήτριας.



Σχήμα 10.8. FFT στις αποκρίσεις κατά την κατεύθυνση περιστροφής στο ισότροπο σύστημα, $U=19$ m/s.



Σχήμα 10.9. Σύγκριση FFT στις αποκρίσεις κατά την κατεύθυνση περιστροφής σε ισότροπο και ασύμμετρο (+/-5%) σύστημα, $U=19\text{m/s}$.

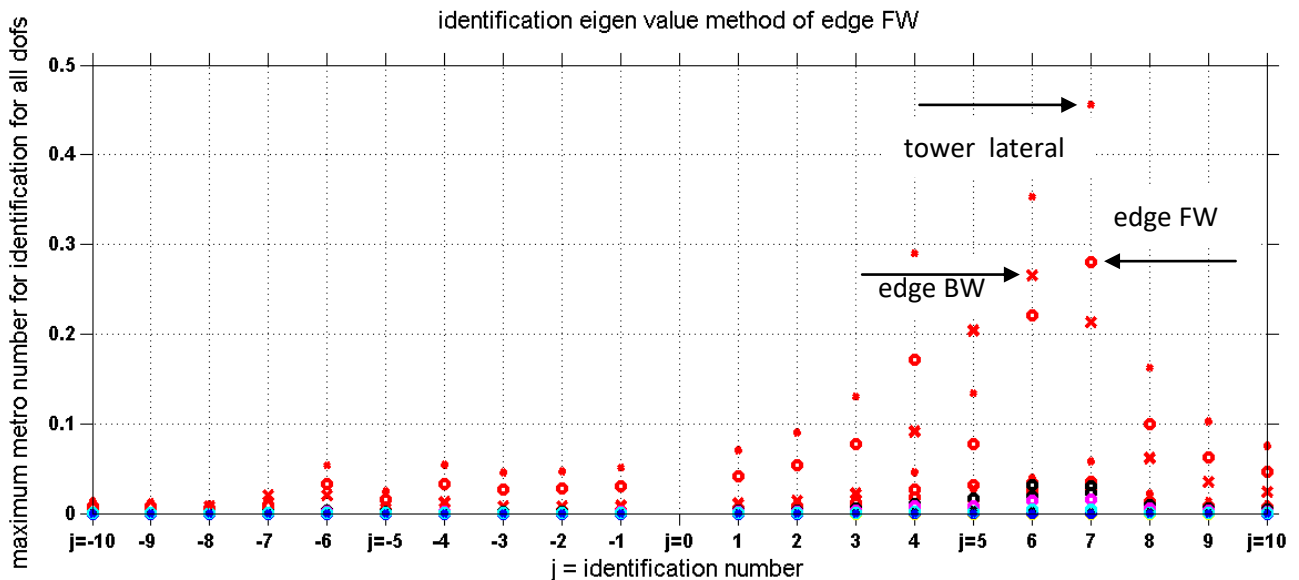
Στα παραπάνω διαγράμματα εντοπίζουμε όλες τις συχνότητες που εμφανίζονται στις κινήσεις των πτερυγίων στην κατεύθυνση περιστροφής, τόσο στην περίπτωση του ισότροπου συστήματος όσο και σε αυτή που έχει εισαχθεί ασυμμετρία μάζας 5%. Και στις δύο περιπτώσεις, βλέπουμε να διεγείρονται οι δύο ασύμμετρες ιδιοσυχνότητες (FW και BW edge), η drive train (η οποία χαρακτηρίζεται από πολύ μεγαλύτερη απόσβεση σε σχέση με τις άλλες δυο και για αυτόν τον λόγο η κορυφή της είναι τόσο ομαλή και καμπυλωτή) και η συχνότητα περιστροφής (για την ταχύτητα $U=19\text{m/s}$ είναι ίση με $\omega=0,202\text{Hz}$), όπως και κάποια πολλαπλάσια της. Αυτό που διαφέρει στις δύο περιπτώσεις, είναι ότι εισάγοντας την ανομοιορφία μάζας στο σύστημα της ανεμογεννήτριας, διεγείρονται και κάποιες επιπλέον συχνότητες οι οποίες στην πρώτη περίπτωση δεν εμφανίζονταν.

Στο σημείο αυτό έχει ενδιαφέρον, να σχολιασθούν παράλληλα και τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τη διαδικασία για την ταυτοποίηση (identification) των ιδιοσυχνοτήτων από τις κυρίαρχες ιδιοσυχνότητες, η οποία περιγράφηκε αναλυτικά στην αντίστοιχη ενότητα.

Ελέγχοντας τα αποτελέσματα (σχήμα 10.10), που έδωσε η συγκεκριμένη διαδικασία για τις ιδιομορφές στην κατεύθυνση περιστροφής, διαπιστώνουμε ότι ο ίδιος ο βαθμός ελευθερίας που σχετίζεται με την συγκεκριμένη ιδιομορφή συνεισφέρει με περισσότερους από έναν όρους στην απόκρισή της, καθώς παρατηρούμε αρκετούς συντελεστές με αρκετά μεγάλο πλάτος. Αυτό σημαίνει

ότι είναι πολλοί οι όροι που μπορούν να εμφανίσουν συχνότητες (οι οποίες βέβαια δεν διεγείρονται κατ' ανάγκη όλες).

Εκτός αυτού όμως, διαπιστώνεται ότι δεν είναι μόνο ένας και ο βαθμός ελευθερίας που συνεισφέρει τελικά στην τελική απόκριση.

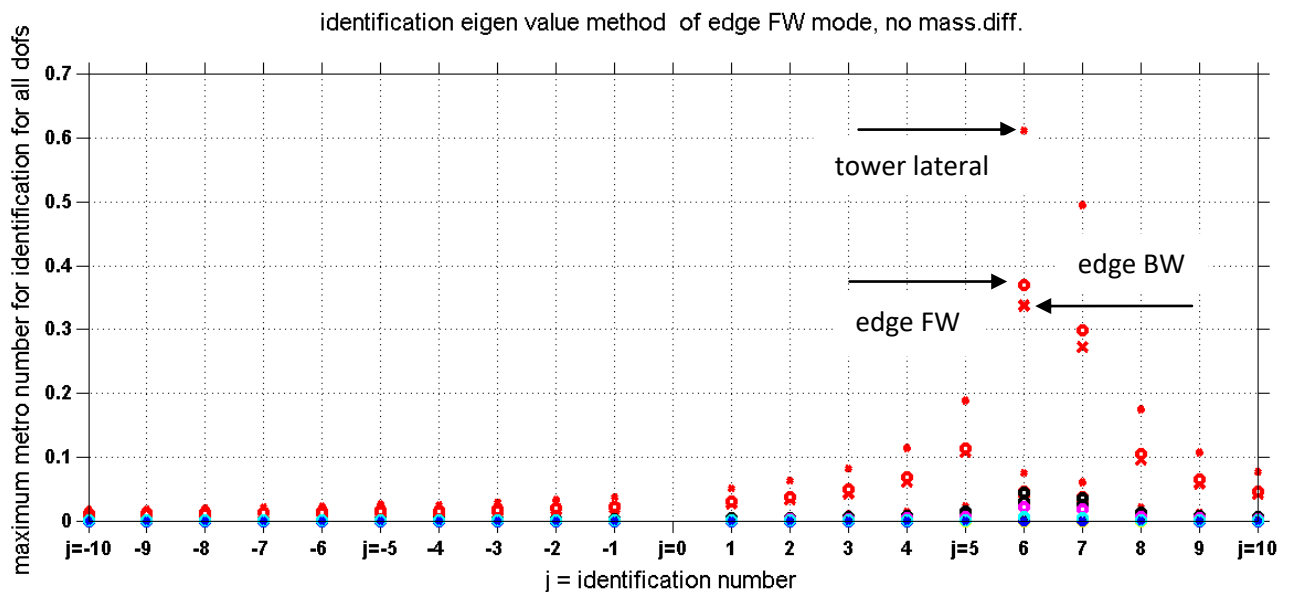


Σχήμα 10.10. Ταυτοποίηση ιδιοσυχνότητας edge FW, με ασυμμετρία μάζας 5%.

Η ύπαρξη λοιπόν όχι μόνο ενός κυρίαρχου συντελεστή, αλλά και άλλων, οι οποίοι δείχνουν να επιδρούν στην ιδιομορφή εξηγεί ακριβώς την εμφάνιση των επιπλέον συχνοτήτων στα διαγράμματα FFT.

Η ασύμμετρη οπισθοδρομική ιδιοσυχνότητα κατά την κατεύθυνση περιστροφής (edge BW) εμφανίζεται στην FFT ανάλυση της ασύμμετρης προοδευτικής (edge FW) και φαίνεται να συμμετέχει σημαντικά στην απόκρισή της. Το παραπάνω διάγραμμα που αντιστοιχεί στην ταυτοποίηση των ιδιοσυχνοτήτων, το επιβεβαιώνει, καθώς βλέπουμε στο σχήμα (10.10), ότι ο βαθμός ελευθερίας της ασύμμετρης οπισθοδρομικής (edge BW) έχει όρους με αρκετά μεγάλο πλάτος και άρα συνεισφέρει σημαντικά στην προοδευτική (edge FW) ιδιομορφή.

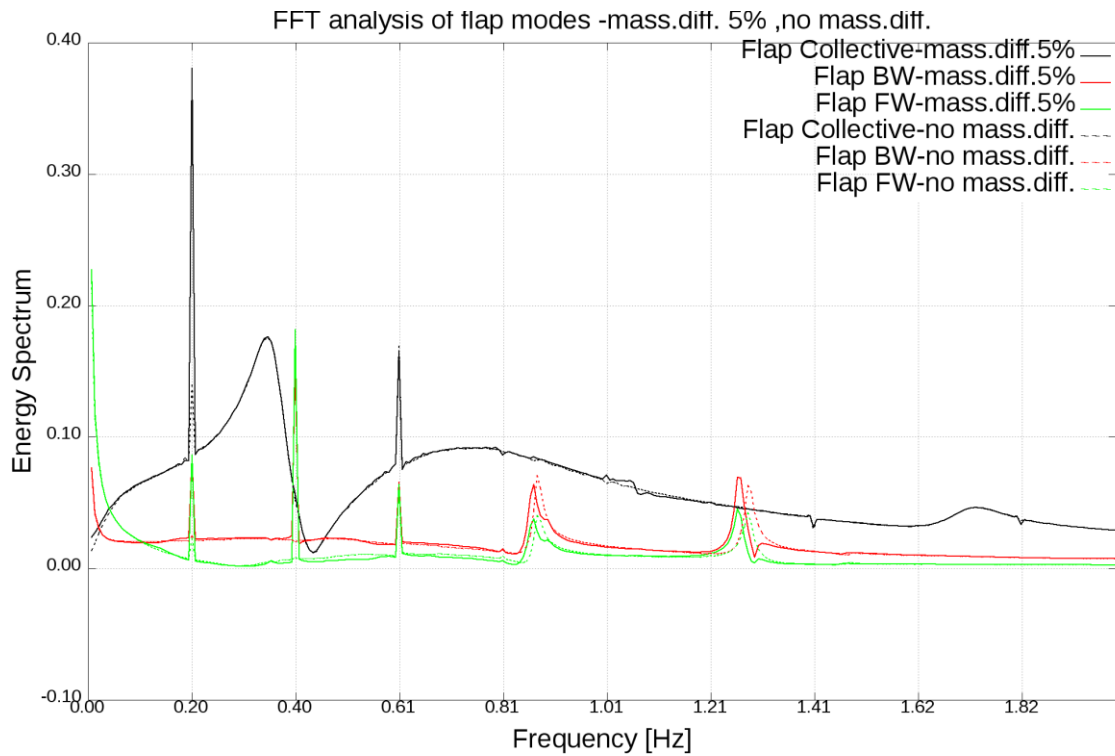
Αντίστοιχα, εξετάζουμε το σχετικό διάγραμμα που ανταποκρίνεται στην περίπτωση που δεν υπάρχει ασυμμετρία μάζας, (σχήμα 10.11).



Σχήμα 10.11. Ταυτοποίηση ιδιοσυχνότητας edge FW, στο ισότροπο σύστημα.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση και πάλι φαίνεται πως και ο βαθμός ελευθερίας της ασύμμετρης οπισθοδρομικής κίνησης στην κατεύθυνση περιστροφής (edge BW) συνεισφέρει σημαντικά στην προοδευτική (edge FW) ιδιομορφή, καθώς περιλαμβάνει όρο με αρκετά μεγάλο πλάτος. Αυτό το οποίο διαφέρει στις δύο περιπτώσεις είναι ότι τώρα είναι πολύ λιγότεροι οι όροι οι οποίοι συνεισφέρουν τελικά με κάποια συχνότητα στην τελική απόκριση της ασύμμετρης προοδευτικής ιδιομορφής (edge FW). Αυτή η διαπίστωση συνάδει απόλυτα με τα αποτελέσματα του σχετικού FFT διαγράμματος, στο οποίο είδαμε να διεγείρονται λιγότερες συχνότητες, συγκριτικά με αυτές στην περίπτωση όπου υπήρχε ασυμμετρία μάζας.

Αντίστοιχα, με την περίπτωση των κινήσεων στην κατεύθυνση περιστροφής (edge), μπορεί να παρουσιασθεί και το διάγραμμα της FFT ανάλυσης που αναλογεί στις κινήσεις των πτερυγίων στην κατεύθυνση πτερύγισης (flap), όπου και πάλι παρουσιάζονται συγκριτικά τα αποτελέσματα για τις περιπτώσεις με και χωρίς ασυμμετρία μάζας, για ταχύτητα ανέμου $U=19\text{m/s}$. Τα παραπάνω αποτυπώνονται στο σχήμα (10.12) που ακολουθεί.



Σχήμα 10.12. FFT στις κινήσεις κατά την κατεύθυνση πτερύγισης (flap).

Αυτό που παρατηρείται είναι ότι διεγείρεται μόνο η συμμετρική (flap collective) συχνότητα (χωρίς να εμφανίζει βέβαια πολύ έντονη κορυφή λόγω του μεγάλου damping που παρουσιάζει). Οι μη συμμετρικές ιδιοσυχνότητες δεν διεγείρονται, διαπίστωση που αιτιολογείται από το γεγονός ότι η ροή του αέρα είναι ομοιόμορφη στο επίπεδο του δρομέα και έχουν επιλεγεί ίδιες γωνίες κλίσης (pitch) για τα τρία πτερύγια.

Όσον αφορά στα διαγράμματα FFT για τις δύο ασύμμετρες ιδιομορφές, εκτός από την συχνότητα της περιστροφής και τα πολλαπλάσιά της που εμφανίζονται, εδώ παρατηρούνται δύο κορυφές (peaks) στις ιδιοσυχνότητες κατά την κατεύθυνση περιστροφής (edge). Αυτό αιτιολογείται από την σύζευξη μεταξύ των βαθμών ελευθερίας, που έχει ως συνέπεια σε μια ιδιομορφή να αποτυπώνονται ως "reflection" και οι συχνότητες που προκύπτουν από τους υπόλοιπους βαθμούς ελευθερίας.

11. Συμπεράσματα και συστάσεις για περαιτέρω έρευνα

11.1. Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία εξετάσθηκε η λειτουργία μιας ανεμογεννήτριας οριζοντίου άξονα (NREL 5 MW) και διερευνήθηκε η ευστάθειά της. Αυτό πραγματοποιήθηκε με εφαρμογή της θεωρίας Floquet η οποία ενδείκνυται για τη διαχείριση περιοδικών συστημάτων, όπως αυτό που προκύπτει λόγω των μητρώων μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας (M, C, K) μιας ανεμογεννήτριας.

Η θεωρία Floquet εφαρμόζεται για τον εντοπισμό της απόσβεσης και της ιδιοσυχνότητας κάθε βαθμού ελευθερίας. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα που προκύπτουν μόνο με χρήση του Coleman μετασχηματισμού, επιβεβαιώνει την θεωρία, και στη συνέχεια αυτή εφαρμόζεται και σε μη ισότροπα συστήματα όπου ο μετασχηματισμός αυτός δεν αρκεί για να γίνει το σύστημα σταθερών συντελεστών.

Αντίστοιχα με πριν, εξετάζεται και η περίπτωση στην οποία έχει εισαχθεί στα πτερύγια ασυμμετρία μάζας, όπου και διαπιστώνεται ότι οι ιδιοτιμές δεν παρουσιάζουν μεγάλη απόκλιση σε σχέση με αυτές του ισότροπου συστήματος. Αυτό το οποίο παρατηρείται να μεταβάλλεται, είναι η συμπεριφορά των ιδιομορφών, καθώς πλέον, με την προσθήκη της ασυμμετρίας διεγείρονται και επιπλέον συχνότητες όπως αποτυπώνεται από τις FFT αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν.

11.2. Συστάσεις για περαιτέρω έρευνα

Έχοντας επιβεβαιώσει την αποτελεσματικότητα της εφαρμογής της θεωρίας Floquet για την ανάλυση της ευστάθειας ανεμογεννήτριας, είναι εφικτό να διερευνηθούν και άλλα πιο σύνθετα προβλήματα.

Θα ήταν ενδιαφέρον να εξετασθεί η λειτουργία της ανεμογεννήτριας κάτω από την επίδραση ανέμου ο οποίος δεν είναι ομοιόμορφος σε όλο το επίπεδο περιστροφής του ρότορα, αλλά του οποίου το προφίλ παρουσιάζει εκθετική μορφή. Μια άλλη περίπτωση θα ήταν η προσθήκη γωνίας yaw στη ροή του ανέμου.

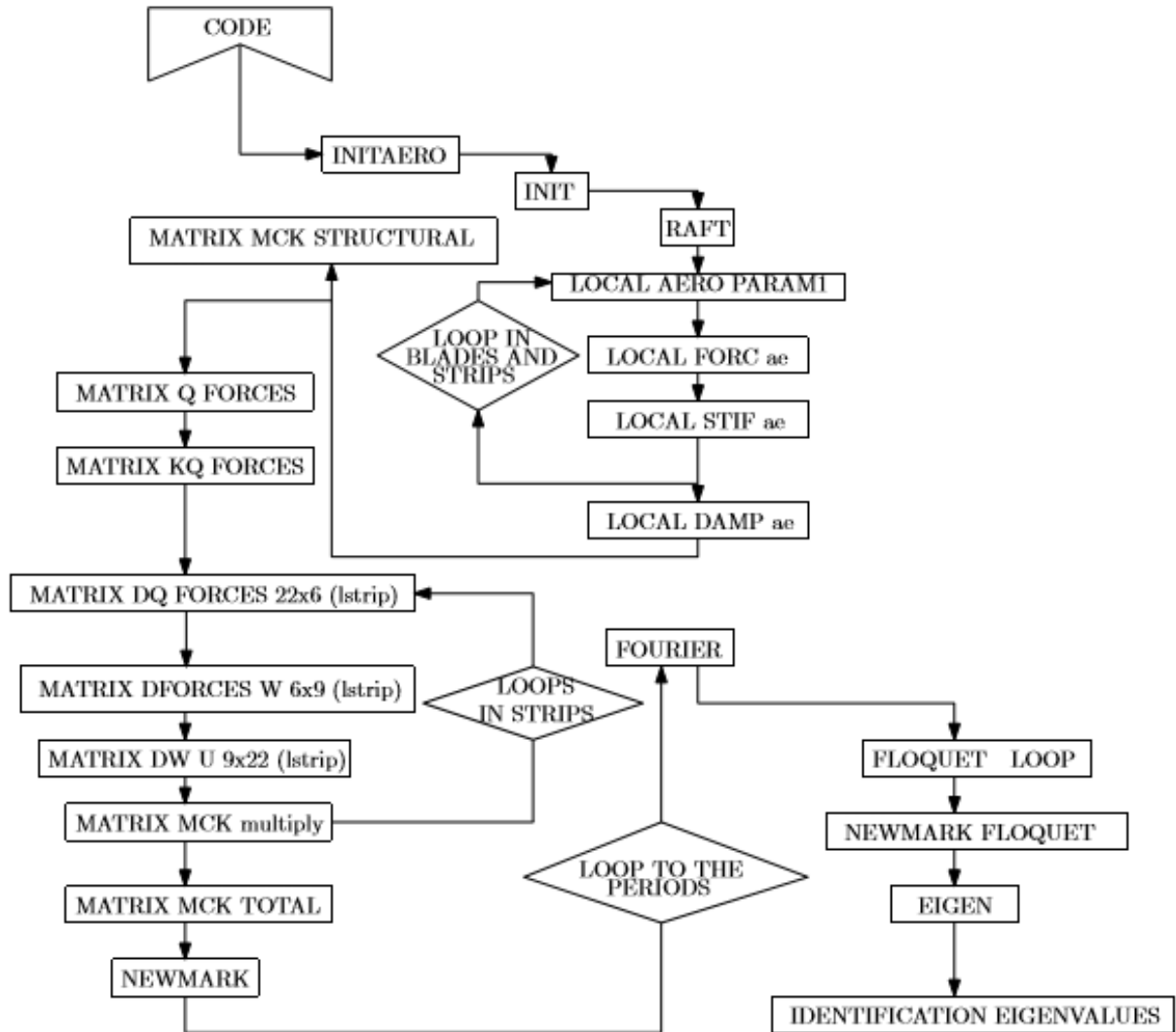
Πέραν αυτού, μπορούν να εισαχθούν και στο ίδιο το σύστημα της ανεμογεννήτριας επιπλέον ασυμμετρίες. Συγκεκριμένα, αξίζει να εξετασθεί η συμπεριφορά της όταν σε κάθε πτέρυγα ορισθεί διαφορετική γωνία κλίσης (pitch). Σε μια τέτοια περίπτωση μάλιστα, εκτός από τις ιδιοσυχνότητες και αποσβέσεις, μπορεί να ελεγχθεί και πόσο επηρεάζονται οι ιδιομορφές καθώς αναμένεται πως κάτι τέτοιο θα διεγείρει και τις ασύμμετρες συχνότητες στη

κατεύθυνση πτερύγισης (flap) κατι το οποίο δεν φάνηκε να συμβαίνει στις περιπτώσεις που εξετάσθηκαν.

Τέλος, όλα τα παραπάνω μπορούν να διερευνηθούν και για την περίπτωση πλωτής ανεμογεννήτριας, όπου η ύπαρξη των επιπλέον βαθμών ελευθερίας του πλωτήρα αναμένεται να επηρεάσει όλες τις ιδιοσυχνότητες.

Παράρτημα

Ακολουθεί το διάγραμμα ροής της μεθοδολογίας που χρησιμοποιήθηκε [10]:



Βιβλιογραφία

- [1]. Σπυρίδων Βουτσινάς, Μη μόνιμη Αεροδυναμική, Αεροελαστικότητα, Αεροακουστική, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών
- [2]. V.A Riziotis and E.S Politis. Methods for linearizing servo-aero-elastic equations of the full wind turbine. Technical report, T10-11 Dynamic and Aeroelastic Developments for WTGandcontroltabledesignsprojectD.L.1.,2010.
- [3]. V.A Riziotis. Detailed description and justification of the methodology and algorithms for the implementation in a stability analysis tool gamesa. part1: Isolated rotor linearized aeroelastic model based on nerea modal formulation. Technical report, Center for Renewable Energy Sources and Saving, National Technical University of Athens, 2010.
- [4]. V.A Riziotis. Detailed description and justification of the methodology and algorithms for the implementation in a stability analysis tool gamesa. part 2: Full wind turbine linearized aeroelastic model based on nerea modal formulation. Technical report, Center for Renewable Energy Sources and Saving, National Technical University of Athens,2010
- [5]. Α.Κανάραχος και Ι.Αντωνιάδης. Δυναμική Μηχανών. Παπασωτηρίου, 1998.
- [6]. P.F. Skjoldan , M.H. Hansen, On the similarity of the Coleman and Lyapunov-Floquet transformations for modal analysis of bladed rotor structures, Journal of Sound and Vibration 327, 2009
- [7]. Karl A. Stol , Dynamics Modeling and Periodic Control of Horizontal-Axis Wind Turbines, B.E. (Hons), University of Canterbury, N.Z., 1996 , M.S., University of Colorado, 1998
- [8]. M. H. Hansen , Improved Modal Dynamics of Wind Turbines to Avoid Stall-induced Vibrations, Wind Energy Department, Riso National Laboratory, Denmark, Wind Energy, 2003
- [9]. Bing Feng Ng, Rafael Palacios, Eric C. Kerrigan, J. Michael R. Graham, Henrik Hesse, Aerodynamic Load Control in HAWT with Combined Aeroelastic Tailoring and Trailing-Edge Flaps, <https://www.researchgate.net/publication/272754451>
- [10]. Σοφία Κούκουρα, Αεροελαστική Ανάλυση Πλωτών Ανεμογεννητριών με Πρότυπα Μειωμένου Αριθμού Βαθμών Ελευθερίας, Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Αεροδυναμικής, 2015

[11]. Μαρία Ε. Γιούλη, ΑΕΡΟΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΑΝΕΜΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ ΣΕ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΑΝΟΙΧΤΟΥ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΙΩΣΗ ΤΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ ΤΟΥ ΠΥΡΓΟΥ, Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Εργαστήριο Αεροδυναμικής, 2012