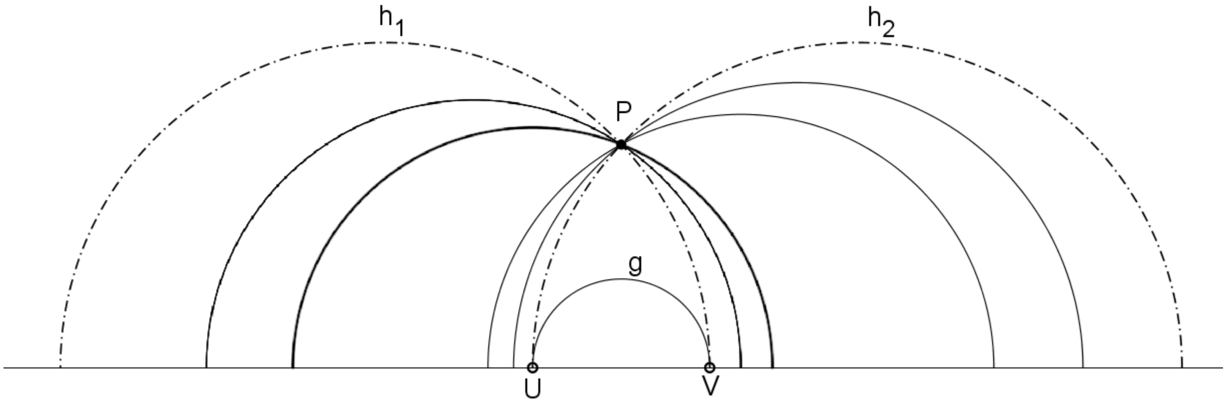
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το Μοντέλο Poincare του Υπερβολικού Επιπέδου



Διπλωματική εργασία

Ειρήνη Χρυσοστομίδου

Επιβλέπων: Κοντοκώστας Δημήτριος
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2017

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το Μοντέλο Poincare του Υπερβολικού Επιπέδου

Διπλωματική εργασία

Ειρήνη Χρυσοστομίδου

Επιβλέπων: Κοντοκώστας Δημήτριος
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 6η Μαρτίου 2017:

Κοντοκώστας Δημήτριος	Σμυρλής Γεώργιος	Φελλούρης Ανάργυρος
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2017

Περίληψη

Η Υπερβολική ή αλλιώς μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει ιδιαίτερη αξία στο χώρο της μελέτης των θεμελίων των μαθηματικών. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να παρουσιάσει κανείς τη Γεωμετρία αυτή. Ένας τρόπος είναι να ακολουθήσουμε την ιστορική εξέλιξη και να δείξουμε πώς οι αποτυχημένες προσπάθειες απόδειξης του αιτήματος των παραλλήλων οδήγησαν στην ιδέα κατασκευής μίας Γεωμετρίας μέσα στην οποία από σημείο εκτός ευθείας άγονται περισσότερες από μία ευθείες παράλληλες ως προς την πρώτη ευθεία.

Θα μπορούσαμε να περιοριστούμε σε αυτό και να παρουσιάσουμε ένα σύνολο αξιωμάτων το οποίο αποτελεί τη Γεωμετρία μας. Θα ακολουθούσαμε έτσι τη δουλειά των Bolyai και Lobachevski, των μαθηματικών που πρωτοκατασκεύασαν την Υπερβολική Γεωμετρία. Μια τέτοια όμως προσέγγιση παρότι ορθή θα δυσκόλευε το σκοπό αυτής της εργασίας καθότι δεν ενδείκνυται για την επαφή του αναγνώστη με το αντικείμενο της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Μία λύση στο πρόβλημα δίνει η παρουσίαση μοντέλων για τη Γεωμετρία μας.

Παρότι αρκετοί έχουν κατασκευάσει μοντέλα για την Υπερβολική Γεωμετρία, επιλέγουμε ένα από τα μοντέλα του Poincare, κυρίως λόγω της ευκολίας που παρέχει στη μέτρηση γωνιών εντός αυτού. Το μοντέλο αυτό συνήθως είναι ένα μιγαδικό ημιεπίπεδο, όμως εμείς θα δουλέψουμε σε ένα ευκλείδειο πραγματικό ημιεπίπεδο. Η μικρή αυτή τροποποίηση αναλογεί στο Meschkowski και δεν αλλάζει κάτι πέραν των τύπων για τον υπολογισμό του μήκους μέσα στο υπερβολικό επίπεδο, προσφέροντας έτσι μία διευκόλυνση στους υπολογισμούς.

Η Γεωμετρία μας επιτρέπει τη διατύπωση θεωρημάτων, τις κατασκευές αντικειμένων, καθώς και την κατασκευή τριγωνομετρίας. Το καθένα από αυτά υλοποιείται σε διαφορετικά κεφάλαια, κεφάλαιο 5^{o}, κεφάλαιο 6^{o}, και κεφάλαιο 7^{o} αντίστοιχα.

Τέλος, κρίνουμε σκόπιμο να παρουσιάσουμε μία ακόμη Γεωμετρία η οποία προέκυψε με παρόμοιο τρόπο από την Ευκλείδεια, όπως και η Υπερβολική. Πρόκειται για την Ελλειπτική Γεωμετρία. Παρουσιάζουμε την Ελλειπτική Γεωμετρία σχετικά συνοπτικά και με τρόπο συγκριτικό ως προς την Υπερβολική Γεωμετρία ώστε να διαπιστωθούν κάποιες διαφορές τους αλλά και κάποιες ομοιότητές τους.

Λέξεις Κλειδιά: «σύστημα αξιωμάτων», «Γεωμετρία», «Υπερβολική Γεωμετρία», «μοντέλο», «μοντέλο Poincare», «θεωρήματα», «κατασκευές», «τριγωνομετρία»

Abstract

Hyperbolic or no-Euclidean Geometry is of great value in the field of the foundations of mathematics. There are many ways to present this Geometry. One of them is to follow the historical evolution. In this way we can show how the counterproductive efforts of proving the parallel axiom led to the idea of the construction of a Geometry with more than one lines parallel to a given one.

We could confine ourselves to this approach and present a set of axioms which constitutes our Geometry. In this way we would follow the lead of Bolyai and Lobachevsky, the mathematicians that first dealt with the construction of Hyperbolic Geometry. But this kind of approach isn't indicated for the reader's familiarization with the objects of Hyperbolic Geometry. Therefor isn't suitable for the purpose of our work. One way to solve this is to present models for the Geometry we are studying.

Even though quite a few mathematicians have constructed models for Hyperbolic Geometry we choose to use one of Poincare's models, mostly because of the convenience that it affords us with, as far as measuring angles is concerned. This model is usually a complex half plane, but we are going to work in a Euclidean half plane of real numbers. This small twist is due to Meschkowski and doesn't change anything apart from the formulas for the measurement of length in the hyperbolic plane, making the calculations easier for us.

Geometry enables us to formulate theorems, construct new geometrical objects inside the plane we are working, and construct the trigonometry of our plane. We do each one of these in different chapters, chapter 5, chapter 6, and chapter 7 correspondingly.

Finally, we present another Geometry called Elliptic. We got this Geometry out of Euclidean Geometry more or less like we got Hyperbolic Geometry out of Euclidean. We present Elliptic Geometry rather shortly and in comparison to Hyperbolic Geometry so that we can indicate some similarities as well as some differences between them.

Key Words: “system of axioms”, “Geometry”, “Hyperbolic Geometry”, “model”, “Poincare’s model”, “theorems”, “constructions”, “Trigonometry”

Πίνακας περιεχομένων

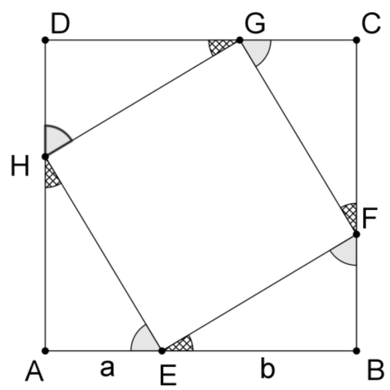
1ο Κεφάλαιο: Τα θεμέλια μιας Γεωμετρίας

Πως μπορούμε να αποδείξουμε την ισχύ ενός οποιουδήποτε γεωμετρικού(ή μη) ισχυρισμού;

Παράδειγμα: θεώρημα του Πυθαγόρα: Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του.

Πως μπορούμε να αποδείξουμε την ισχύ του θεωρήματος; Και επίσης τι θα πει «να αποδείξουμε»; Ας παρακολουθήσουμε την εξής απόδειξη:

1. Έστω a, b οι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου και έστω c η υποτείνουσά του
2. Έστω τετράγωνο ABCD που κατασκευάζεται με πλευρά $a + b$
3. Στις πλευρές του τετραγώνου επιλέγονται 4 σημεία E, F, G, H, τέτοια ώστε $AE = BF = CG = DH = a$, και $EB = FC = GD = HA = b$.(εικόνα 1.1)



Εικόνα 1.1: Πυθαγόρειο θεώρημα

4. Ισχυρισμός 1^{ος}: $EF = FG = GH = HE = c$

   Απόδειξη 1^{ου} ισχυρισμού:

   Όμοια τρίγωνα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες

   Ισχυρισμός 2^{ος}: τα τρίγωνα AEH, BFE, CGF, DHG είναι όμοια

   Απόδειξη 2^{ου} ισχυρισμού: …

Σε ποιο σημείο στην αναδρομική αυτή διαδικασία επίκλησης άλλων ισχυρισμών μπορούμε να σταματήσουμε έχοντας έναν ισχυρισμό που δεν επικαλείται κάποιον άλλον; Θα μπορούσε ο τελευταίος μας ισχυρισμός σε αυτή τη διαδικασία να είναι ένας ισχυρισμός που είναι διαισθητικά προφανής; Αποτελεί απόδειξη δηλαδή το να βασιστούμε σε ισχυρισμούς που φαίνονται διαισθητικά αληθείς; Πολλές περιγραφές επιδέχονται υποκειμενική ερμηνεία. Κάτι που κάποιος μπορεί να θεωρήσει ως αυταπόδεικτο και ξεκάθαρο μπορεί για κάποιον να χρειάζεται απόδειξη. Εν γένει η διαίσθηση μπορεί πολλές φορές να μας οδηγήσει σε λάθος συμπεράσματα. Γι αυτό δε θα πρέπει να αποτελεί η διαίσθηση θεμέλιο της Γεωμετρίας.

Τι θα μπορούσε να αποτελεί μία βάση για τις αποδείξεις των οποιωνδήποτε (διαισθητικά προφανών ή και μη) ισχυρισμών;/Η έννοια του συστήματος αξιωμάτων

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε κάποιες προτάσεις ως βάση και έπειτα όλες οι άλλες προτάσεις να προκύπτουν από αυτές ως επακόλουθα βάση λογικών διεργασιών και συνδέσεων. Αυτού του είδους οι προτάσεις βασικού χαρακτήρα καλούνται «αξιώματα». Τα αξιώματα τα δεχόμαστε δίχως απόδειξη και είναι οι μόνες προτάσεις που μπορεί να επικαλεστεί κάποιος για να αποδείξει τον οποιοδήποτε ισχυρισμό του. Ένα σύνολο αξιωμάτων αποτελεί ένα «σύστημα αξιωμάτων».

Επιλογή των αξιωμάτων που αποτελούν το σύστημα αξιωμάτων

Σαφώς τα αξιώματα αυτά δεν επιλέγονται τυχαία. Αντιθέτως, ένα σύστημα αξιωμάτων πρέπει να χαρακτηρίζεται από «πληρότητα», «ανεξαρτησία» και «συνέπεια». Πλήρες είναι ένα σύστημα όταν είναι επαρκές. Θα πρέπει δηλαδή το πλήθος των αξιωμάτων που το αποτελεί να είναι τέτοιο ώστε να μη βρεθεί γεωμετρικό πρόβλημα το οποίο να μην επιδέχεται λύση με χρήση των αξιωμάτων αυτών. Ανεξάρτητο είναι ένα σύστημα στο οποίο κανένα αξίωμα δεν παράγεται από τα υπόλοιπα. Τέλος, συνεπές είναι ένα σύστημα αξιωμάτων το οποίο δεν περιέχει αντιθέσεις.

Η κατασκευή ενός συστήματος αξιωμάτων

Αυτό που προσφέρει η κατασκευή ενός συστήματος αξιωμάτων είναι σαφήνεια και τάξη στη δομή. Πέραν αυτού, μέσω των διαδικασιών κατασκευής ενός προέκυψαν μαθηματικές και φιλοσοφικές ερωτήσεις.

Ιστορικά, ο πρώτος που επιχείρησε την κατασκευή ενός συστήματος αξιωμάτων ήταν ο Ευκλείδης. Το έργο του ήταν τα «Στοιχεία». Τα Στοιχεία ήταν ένα σύστημα με ορισμούς, θέσεις, διατυπώσεις και αξιώματα. Αυτά τα τρία αποτελούσαν τον πυρήνα της Γεωμετρίας του. Το έργο του κατείχε εξέχουσα θέση για πολλά χρόνια.

Έκτοτε αρκετοί μαθηματικοί έχουν επιχειρήσει να κατασκευάσουν ένα τέτοιο σύστημα στη Γεωμετρία, όπως ο Pasch M. (το 1882) και ο Peano (το 1889), αλλά και στην αριθμητική όπως ο G.Cantor, ο G. Frege και ο B. Russell. Κάποιοι έχουν καταφέρει να κατασκευάσουν κι ένα ολοκληρωμένο τέτοιο σύστημα, όπως ο Dedekind (1888), ο Peano (1891) και ο Hilbert.

Η προσφορά του έργου του Ευκλείδη

Ακριβώς επειδή ο Ευκλείδης ήταν ο πρώτος που επιχείρησε την κατασκευή ενός συστήματος αξιωμάτων πρέπει να αναγνωριστεί η προσφορά του. Μπορεί τα σύγχρονα μαθηματικά να μην χρησιμοποιούν αυτούσια τα στοιχεία του Ευκλείδη όμως διατηρείται η λογική του συστήματος αξιωμάτων που αυτός εισήγαγε.

Κάτι ακόμη πολύ σημαντικό που πρέπει να αναγνωρίσουμε στη δουλειά του Ευκλείδη είναι ότι υποστήριζε ξεκάθαρα πως το αξίωμα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο των υπόλοιπων αιτημάτων και αξιωμάτων του. Η ορθότητα της αντίληψης του πλέον έχει επιβεβαιωθεί και η συνειδητοποίηση αυτής της ορθότητας ήταν αυτή ουσιαστικά που οδήγησε στην ανακάλυψη Γεωμετριών πέραν της Ευκλείδειας.

Η κριτική που δέχτηκε η προσπάθεια του Ευκλείδη

Η κριτική αυτή αφορά κυρίως τους ορισμούς του, οι οποίοι θεωρούνται ασαφείς και μη λειτουργικοί. Τα νέα συστήματα έχουν διαφορετική αντίληψη για τους ορισμούς και ίσως έχουν βελτιωθεί ως προς κάποιες «αδυναμίες» (αδυναμίες με τα σημερινά δεδομένα και τη σύγχρονη μαθηματική ματιά) του συστήματός του Ευκλείδη. Είναι λογικό όμως να υπάρχουν περιθώρια βελτίωσης και εξέλιξης, ειδικά αν κάποιος αναλογιστεί ότι έχουν περάσει πάνω από δύο χιλιάδες χρόνια από την συγγραφή των Στοιχείων από τον Ευκλείδη και ότι πρόκειται για την πρώτη προσπάθεια στον τομέα της θεμελίωσης των μαθηματικών.

Κάποιοι ασκούν κριτική στον Ευκλείδη λέγοντας ότι στους συλλογισμούς υπεισέρχεται το στοιχείο της γεωμετρικής εποπτείας. Δηλαδή ότι η γεωμετρική θεωρία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το φυσικό χώρο και ότι οι βασικές υποθέσεις της θεωρίας κατανοούνται ως ιδιότητες χαρακτηριστικές αυτού του χώρου. Βέβαια αυτό συμβαίνει ως ένα βαθμό και σήμερα. Ο τρόπος που το αντικείμενο της Γεωμετρίας μορφώνεται στο χώρο αποτελεί μία πρώτη επαφή με το αντικείμενο. Σε ένα δεύτερο στάδιο, μετά την εποπτεία, όλες οι σκέψεις επανεξετάζονται και θεμελιώνονται.

Το σύστημα αξιωμάτων που θα υιοθετήσουμε

Όπως είπαμε πολλοί έχουν κατασκευάσει συστήματα αξιωμάτων. Αυτό που εμείς θα ακολουθήσουμε είναι του Meschkowski. Το σύστημα αυτό είναι ουσιαστικά μία τροποποίηση του συστήματος που έφτιαξε ο Hilbert. Το σύστημα του David Hilbert εκδόθηκε στο βιβλίο του ‘‘Βάσεις τις Γεωμετρίας’’ το 1899.

2ο Κεφάλαιο: Το σύστημα αξιωμάτων του Meschkowski

Τα αρχικά μαθηματικά αντικείμενα του συστήματος είναι τριών ειδών: τα «σημεία», οι «ευθείες» και τα «επίπεδα», που συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις του «βρίσκονται», «μεταξύ», «ανήκειν», «παράλληλος», «ίσος», «συνεχής» κτλ. Το σύστημα εξετάζει τις αρχικές αυτές έννοιες και τις σχέσεις τους. Εισάγονται πέντε ομάδες αξιωμάτων οι οποίες συνιστούν έμμεσο ορισμό των αρχικών αντικειμένων και των σχέσεών τους.

Τα αντικείμενα του συστήματος

Επεξήγηση 1: Θεωρούμε τρία διακριτά συστήματα αντικειμένων:
i) Τα αντικείμενα του πρώτου συστήματος θα τα αποκαλούμε «**σημεία**» και θα τα συμβολίζουμε με τα γράμματα A, B, C ….
ii) Τα αντικείμενα του δεύτερου συστήματος θα τα αποκαλούμε «**ευθείες**» και θα τα συμβολίζουμε με τα γράμματα a, b, c,...,
iii) Και τέλος τα αντικείμενα του τρίτου συστήματος θα τα αποκαλούμε «**επίπεδα»** και θα τα συμβολίζουμε με τα ελληνικά γράμματα α, β, γ,...

Σημείωση: Χαρακτηρίζουμε τα σημεία ως «στοιχεία της γραμμικής Γεωμετρίας». Αποκαλούμε τα σημεία και τις ευθείες «στοιχεία της επίπεδης Γεωμετρίας». Και τέλος, τα σημεία, οι ευθείες και τα επίπεδα αποτελούν τα «στοιχεία της Γεωμετρίας του χώρου».

Ο ρόλος των αξιωμάτων μέσα στο σύστημα

Τα αντικείμενα τους συστήματος βρίσκονται σε κάποιες αμοιβαίες σχέσεις τις οποίες δηλώνουμε μέσω φράσεων όπως «βρίσκονται», «μεταξύ», «ανήκειν», «παράλληλος», «ίσος», «συνεχής» κτλ. Η ολοκληρωμένη και πλήρης περιγραφή των παραπάνω σχέσεων που διέπουν τα αντικείμενα γίνεται εφικτή μέσω των αξιωμάτων της Γεωμετρίας.

Επίσης η φύση των αντικειμένων των συνόλων δεν προσδιορίζεται άμεσα με κάποιο τρόπο. Έτσι μπορούμε να δώσουμε πολλές ερμηνείες στα αντικείμενα αυτά. Αυτό που πρέπει να προσέξουμε στις ερμηνείες μας είναι να ικανοποιούνται τα αξιώματα που αναφέρονται σε αυτά τα αντικείμενα, να είναι δηλαδή συνεπείς οι ερμηνείες ως προς τα αξιώματα. Συνεπώς τα αξιώματα επιπλέον περιορίζουν τις πιθανές ερμηνείες των κάπως αόριστων αντικειμένων.

Τα αξιώματα του συστήματος

Το σύστημα αξιωμάτων που θα ακολουθήσουμε χωρίζεται σε πέντε ομάδες αξιωμάτων:

I. Αξιώματα σύνδεσης
II. Αξιώματα διάταξης
III. Αξιώματα ισότητας
IV. Αξιώματα συνέχειας
V. Αξίωμα παραλληλίας

I. Αξιώματα σύνδεσης(3)

I.1. Δύο διακριτά σημεία A και B πάντα ορίζουν μία ευθεία a.

I.2. Οποιαδήποτε δύο διακριτά σημεία μιας ευθείας ορίζουν την ευθεία αυτή μοναδικά.
I.3. Κάθε ευθεία έχει τουλάχιστον 2 σημεία.

Από τα αξιώματα αυτά προκύπτει το εξής θεώρημα:

#Θεώρημα 2.1:

Δύο διακριτές ευθείες σε ένα επίπεδο έχουν είτε ένα είτε κανένα σημεία κοινά.

Απόδειξη:

Έστω ότι δύο ευθείες έχουν δύο κοινά σημεία. Τότε λόγω του αξιώματος I.2 θα πρέπει να συμπίπτουν σε μία ευθεία.

Ποια αντικείμενα ικανοποιούν τα αξιώματα σύνδεσης;

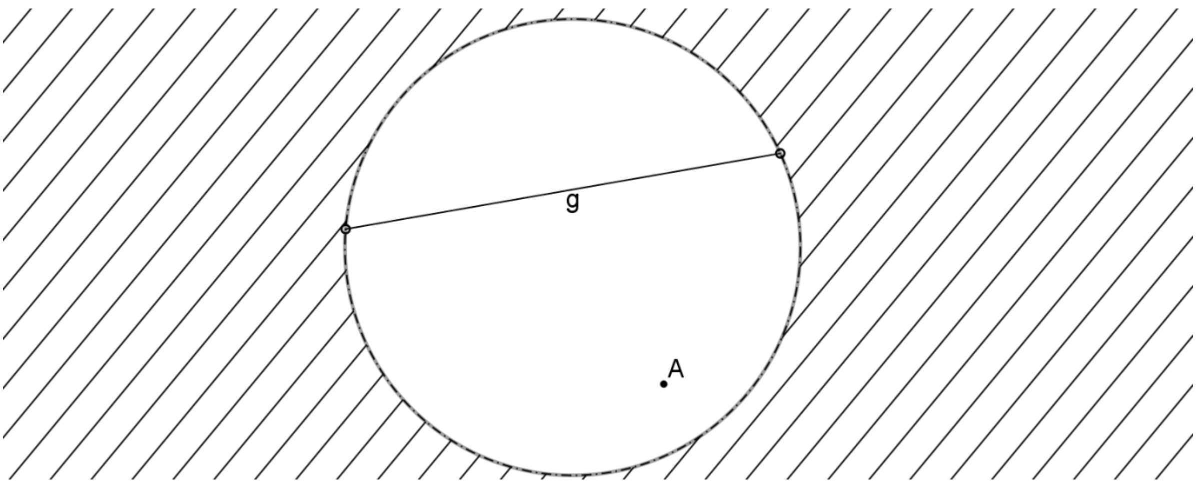
Τα τρία αξιώματα φαίνεται να περιγράφουν ιδιότητες των αντικειμένων «ευθεία» και «σημείο», όπως τα γνωρίζουμε από το ευκλείδειο επίπεδο. Παρόλα αυτά η «συνηθισμένη» ευθεία και σημείο δεν είναι τα μόνα αντικείμενα που μπορούν να ικανοποιούν τα αξιώματα της σύνδεσης. Υπάρχουν και άλλοι τρόποι να αντιληφθεί κάποιος τις έννοιες των αντικειμένων «σημείο», «ευθεία», «επίπεδο».

Παραθέτονται 2 ακόμη ερμηνείες των «σημείο», «ευθεία», «επίπεδο». Οι ερμηνείες αυτές δίνουν σύνολα αντικειμένων από τα οποία το καθένα ικανοποιεί τα αξιώματα σύνδεσης.

#Πρώτο εναλλακτικό σύνολο αντικειμένων (το εσωτερικό κύκλου) (εικόνα 2.1)

Έστω τυχαίος κύκλος,

- σημείο είναι ένα σημείο στο εσωτερικό του κύκλου
- ευθεία είναι μία χορδή του κύκλου δίχως τα άκρα της χορδής
- επίπεδο είναι το εσωτερικό του κύκλου



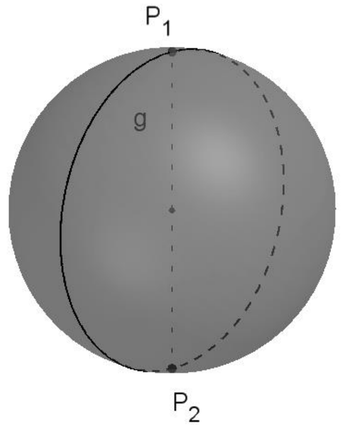
Εικόνα 2.1: Πρώτο εναλλακτικό σύνολο αντικειμένων

#Δεύτερο εναλλακτικό σύνολο αντικειμένων (η επιφάνεια σφαίρας) (εικόνα 2.2)

Θεωρούμε τυχαία σφαίρα,

- επίπεδο είναι η επιφάνεια της συγκεκριμένης σφαίρας
- σημείο είναι το ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων επί της σφαίρας

- ευθεία είναι κάθε μέγιστος κύκλος



Εικόνα 2.2: Δεύτερο εναλλακτικό σύνολο αντικειμένων

II. Αξιώματα διάταξης(4)

Επεξήγηση 2: Τα σημεία μίας ευθείας βρίσκονται σε μία σχέση μεταξύ τους που περιγράφουμε μέσω της λέξης «μεταξύ». Τα σχετικά αξιώματα είναι τα εξής:

II.1 Αν A, B, C είναι τρία σημεία ευθείας και το B βρίσκεται μεταξύ του A και του C, τότε το B βρίσκεται επίσης μεταξύ του C και του A. Με χρήση συμβόλων ABC ή CBA.

II.2 Αν A και C είναι δύο σημεία μίας ευθείας, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο B που βρίσκεται μεταξύ A και C και τουλάχιστον ένα σημείο D έτσι τοποθετημένο ώστε το C να βρίσκεται μεταξύ του A και του D.

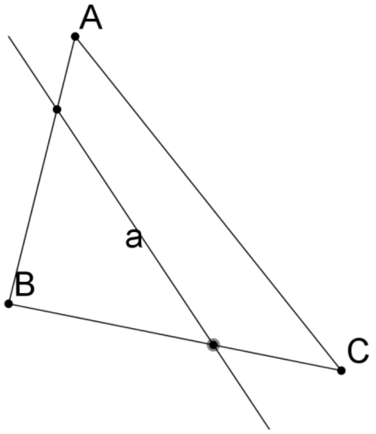
II.3 Από οποιαδήποτε τρία σημεία που βρίσκονται σε ευθεία, υπάρχει πάντα ένα και μόνο ένα σημείο που βρίσκεται μεταξύ των 2 άλλων σημείων.

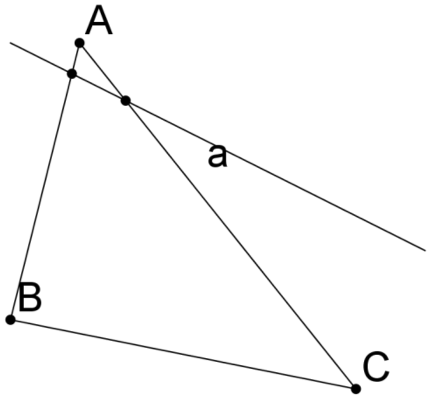
Η σχέση του «μεταξύ» για σημεία σε μια ευθεία κάνει δυνατό τον ορισμό της έννοιας του ευθύγραμμου τμήματος.

#Ορισμός 2.1: ευθύγραμμο τμήμα

Θα αποκαλούμε «ευθύγραμμο τμήμα» το σύστημα δύο σημείων A και B, τα οποία βρίσκονται σε ευθεία, και θα το συμβολίζουμε με AB ή BA. Τα σημεία τα οποία βρίσκονται μεταξύ A και B λέγονται «σημεία του τμήματος AB» ή «τα σημεία που βρίσκονται εντός του τμήματος AB». Όλα τα άλλα σημεία της ευθείας αναφέρονται ως «σημεία εκτός του τμήματος AB». Τα σημεία A και B καλούνται «άκρα» του τμήματος AB.

II.4 Έστω A, B, C τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία και έστω α μία ευθεία που βρίσκεται στο επίπεδο ABC και δεν περνάει από κανένα από τα σημεία A, B, C (εικόνα 2.3). Αν η ευθεία περνάει από κάποιο σημείο του τμήματος AB, τότε θα περνάει επίσης και από σημείο του τμήματος BC ή από σημείο του τμήματος AC.





Εικόνα 2.3: Αξίωμα ΙΙ.4

Τα αξιώματα διάταξης και κυρίως το ΙΙ.4 μπορούν να θεωρηθούν ως βάση και με αυτά να αποδείξουμε πολλά θεωρήματα τα οποία είναι διαισθητικά προφανή.

Στο σημείο αυτό θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί αν τα τρία σύνολα αντικειμένων (ευκλείδειο επίπεδο, εσωτερικό κύκλου, επιφάνεια σφαίρας) που προέκυψαν από τις διαφορετικές ερμηνείες των αντικειμένων ικανοποιούν και τα αξιώματα διάταξης. Τα δύο πρώτα (ευκλείδειο επίπεδο, εσωτερικό κύκλου) τα ικανοποιούν. Το τρίτο όμως (επιφάνεια σφαίρας) δεν ικανοποιεί τα αξιώματα διάταξης. Ήδη λοιπόν γίνεται φανερό με ποιο τρόπο τα αξιώματα περιορίζουν τις ερμηνείες των αρχικών αντικειμένων του συστήματος.

Ορισμοί: ημιευθεία, ημιεπίπεδο, γωνία

Έχοντας τα αξιώματα της διάταξης είμαστε σε θέση να ορίσουμε τις έννοιες του ημιεπίπεδου, της ημιευθείας και της γωνίας.

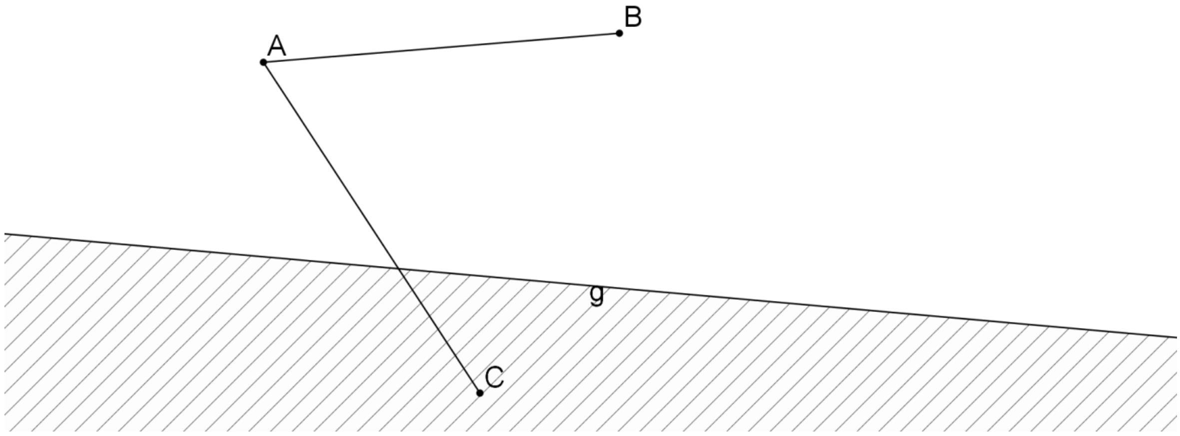
#Ορισμός 2.2: Ημιευθεία

Έστω τρία σημεία Ο, Α, Β πάνω σε μία ευθεία. Τότε είτε ΑΟΒ είτε όχι ΑΟΒ. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι το Α και το Β βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές του Ο. Στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι το Α και το Β βρίσκονται στην ίδια πλευρά του Ο. Τα σημεία στην ίδια πλευρά του Ο αναφέρονται ως «ημιευθεία» η οποία ξεκινά από το Ο.
Σημείωση: Κάποιες φορές παρακάτω θα αναφερθούμε στο Ο ως «άκρο» ή «αρχή» της ημιευθείας.

Παρατήρηση: Ισχύει και μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα σημείο διαιρεί μία ευθεία σε δύο ημιευθείες.

#Ορισμός 2.3: Ημιεπίπεδο

Έστω ευθεία g και σημείο Α εκτός της g. Το σύνολο των σημείων Β τέτοιων ώστε το τμήμα ΑΒ να μην περιέχει κανένα σημείο της g, μαζί με το σημείο Α λέμε ότι σχηματίζουν ένα «ημιεπίπεδο» το οποίο ορίζεται από τη ευθεία g (εικόνα 2.4).

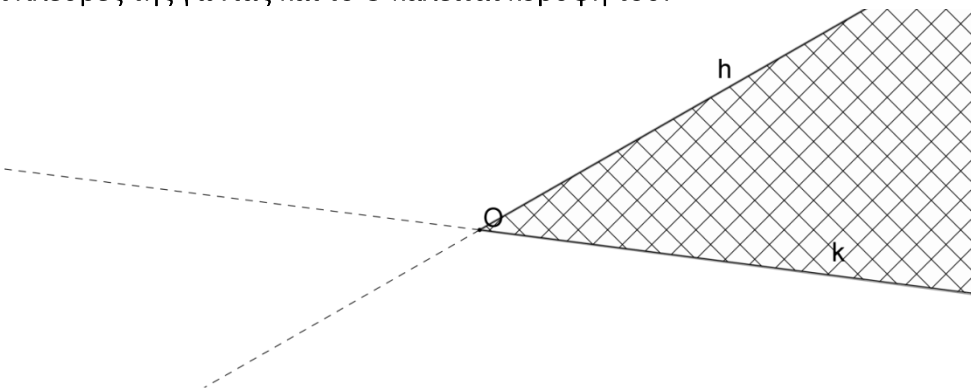


Εικόνα 2.4: Ημιεπίπεδο

Παρατήρηση: Ισχύει και μπορεί να αποδειχτεί χρησιμοποιώντας το ΙΙ.4 ότι μία ευθεία χωρίζει ένα επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα.

#Ορισμός 2.4: Γωνία

Ένα ζευγάρι ημιευθείων h, k οι οποίες ξεκινούν από το ίδιο σημείο Ο (αλλά δεν συνιστούν μία ευθεία) (εικόνα 2.5). Λέμε ότι οι h, k χωρίς να μας νοιάζει η σειρά των ημιευθείων, αποτελούν «γωνία». Θα συμβολίζουμε τη γωνία με $\angle(h,k)$ ή $\angle(k,h)$. Οι h και k καλούνται πλευρές της γωνίας και το Ο καλείται κορυφή του.



Εικόνα 2.5: Γωνία

Σημείωση: Κάποιες φορές θα συμβολίζουμε τη γωνία με τρία γράμματα όπως π.χ. ABC, υποδηλώνοντας ότι η ευθεία σχηματίζεται από της ημιευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, με κορυφή το B. Άλλες φορές θα συμβολίζουμε τη γωνία με ένα πεζό ελληνικό γράμμα.

ΙΙΙ Αξιώματα Ισότητας

Επεξήγηση 3: Υπάρχει μία σχέση που συνδέει τα τμήματα μεταξύ τους καθώς και τις γωνίες μεταξύ τους και τη χαρακτηρίζουμε ως «ισότητα». Τα σχετικά αξιώματα είναι:

ΙΙΙ.1 Έστω τμήμα AB και σημείο A' στο επίπεδο. Σε κάθε ευθεία που περνάει από το σημείο A' μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον δύο σημεία B'_1 και B'_2 τέτοια ώστε το A' να είναι μεταξύ του B'_1 και B'_2 και τέτοια ώστε το τμήμα AB να είναι ίσο με κάθε ένα από τα τμήματα $A'B'_1$ και $A'B'_2$. Με σύμβολα, $AB \equiv A'B'_1$, $AB \equiv A'B'_2$

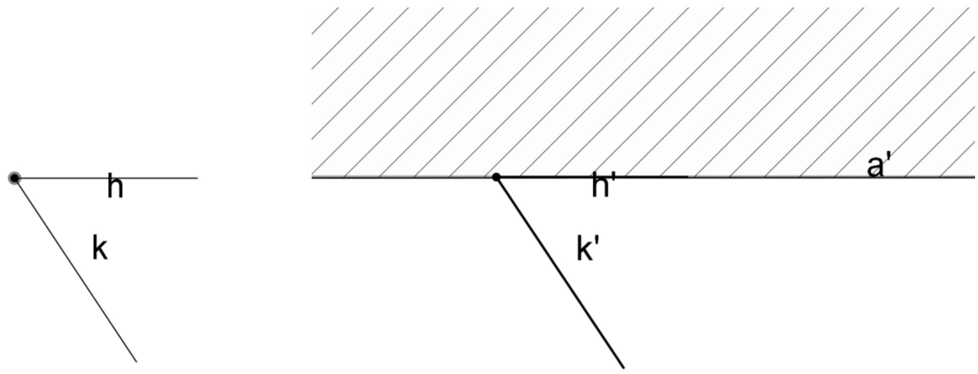
Σημείωση: Η έκφραση «τουλάχιστον δυο σημεία» έναντι της «ακριβώς δύο σημεία» χρησιμοποιείται για να αποφύγουμε την αξιωματικοποίηση προτάσεων οι οποίες είναι αποδείξιμες. Το αξίωμα ΙΙΙ.1 σε συνδυασμό με άλλα αξιώματα ισοδυναμίας συνεπάγονται ότι υπάρχουν «ακριβώς δύο σημεία».

ΙΙΙ.2 Αν $A'B' \equiv AB$ και $A''B'' \equiv AB$ έπεται ότι $A'B' \equiv A''B''$.

Αυτά τα αξιώματα συνεπάγονται ότι AB≡AB, δηλαδή η σχέση ‘’≡” εφαρμόζεται σε κάθε τμήμα και άρα κάθε τμήμα είναι ίσο με τον εαυτό του.

ΙΙΙ.3 Αν B είναι ένα σημείο ενός τμήματος AC, B΄ είναι ένα σημείο του τμήματος A'C', $AB \equiv A'B'$, και $BC \equiv B'C'$, τότε $AC \equiv A'C'$.

ΙΙΙ.4 Έστω γωνία $\angle(h,k)$ και α' ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζονται από την ευθεία a' (εικόνα 2.6). Έστω h' τμήμα επί της a'. Τότε υπάρχει ακριβώς μία ημιευθεία k' τέτοιο ώστε $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ και ώστε τυχαίο σημείο του k' να βρίσκεται στο ημιεπίπεδο α’.



Εικόνα 2.6: Αξίωμα ΙΙΙ.4

ΙΙΙ.5 $\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$. Κάθε γωνία είναι ίση με τον εαυτό της.

ΙΙΙ.6 Έστω ABC και A'B'C' δύο τρίγωνα τέτοια ώστε

$AB \equiv A'B'$,

$AC \equiv A'C'$,

$\angle(BAC) \equiv \angle(B'A'C)$

Τότε $\angle(ABC) \equiv \angle(A'B'C')$ και $\angle(ACB) \equiv \angle(A'C'B')$

Σημείωση: Η έννοια της ισότητας έχει εισαχθεί τυπικά. Δεν είναι ξεκάθαρο πότε δύο τμήματα είναι ίσα. Διαισθητικά και μόνο μπορούμε να αντιληφθούμε ως ίσα δύο σχήματα που μπορούν να ταυτιστούν.

#Θεώρημα 2.1 (1° Θεώρημα Ισότητας)

Όταν ισχύουν οι υποθέσεις του ΙΙΙ.6 αξιώματος για δύο τρίγωνα τότε αυτά είναι ίσα. Δηλαδή αν δύο πλευρές τρίγωνου και η περιεχόμενη σε αυτές τις πλευρές γωνία είναι ίσες, μία προς μία, με δύο πλευρές και την περιεχόμενη σε αυτές γωνία άλλου τριγώνου, τότε τα εν λόγω τρίγωνα είναι ίσα.

Για τα παρακάτω θεωρήματα είναι αναγκαίος ο ορισμός της έννοιας της ορθής γωνίας. Εφόσον δεν έχουμε μιλήσει για μέτρηση και μέτρο, θα ορίσουμε την έννοια της ορθής γωνίας μέσω της έννοιας της ισότητας.

#Ορισμός 2.5: ορθή γωνία
Μία γωνία ίση με τη συμπληρωματική της καλείται «ορθή» γωνία.
Σημείωση: Χρησιμοποιούμε την έννοια της συμπληρωματικότητας όπως έχουμε μάθει από το λύκειο.

#Θεώρημα 2.2
Οι ορθές γωνίες υπάρχουν.

#Θεώρημα 2.3
Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.

#Θεώρημα 2.4
Από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε ακριβώς μία ευθεία κάθετη στη δοσμένη ευθεία.
Σημείωση: Αντιμετωπίζουμε την έννοια της καθετότητας με τον ευκλείδειο τρόπο.

#Θεώρημα 2.5
Ένα τμήμα έχει ακριβώς ένα μέσο τμήματος. Μία γωνία έχει ακριβώς μία διχοτόμο ευθεία.

#Θεώρημα 2.6
Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
Σημείωση: Χρησιμοποιούμε την έννοια των κατακορυφήν όπως έχουμε μάθει από το λύκειο.

#Θεώρημα 2.7
Έστω ευθεία που τέμνει δύο άλλες. Αν οι εντός εναλλάξ γωνίες οι οποίες σχηματίζονται είναι ίσες, τότε οι δύο τελευταίες ευθείες δεν έχουν κανένα σημείο κοινό.

Απόδειξη 2.7:

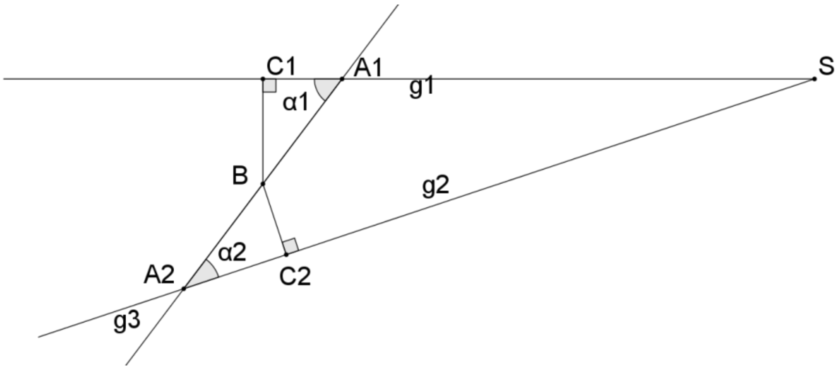
1. Έστω ευθείες g_1 και g_2.
2. Έστω g_3 η ευθεία που σχηματίζει ίσες εντός εναλλάξ γωνίες με τις g_1 και g_2. Οι γωνίες αυτές συμβολίζονται με $α_1$ και $α_2$ και οι κορυφές τους με A_1και A_2 (εικόνα 2.7).
3. Έστω B το μέσο του τμήματος A_1A_2
4. Έστω οι κάθετες από το σημείο B στις g1 και g2 και C_1 και C_2 τα άκρα τους επί των g_1 και g_2.
5. Λόγω θεωρημάτων ισότητας τριγώνων A_1BC_1και A_2BC_2 είναι ίσα, και άρα $\angle(C_1BA_1) \equiv \angle(C_2BA_2)$.
6. Ισχυρισμός 1:Τα σημεία C_1, B, C_2 είναι συνευθειακά

    6α. Επεκτείνοντας το C_1B πέραν του σημείου B, η επεκταμένη ημιευθεία και η ευθεία g_3 δημιουργούν μία κατακορυφήν γωνία με την $\angle(C_1BA_1)$. Το θεώρημα 2.6 δηλώνει ότι οι γωνίες είναι ίσες.

    6β.Αφού $\angle(C_1BA_1) \equiv \angle(C_2BA_2)$, πρέπει το τμήμα BC2 να ανήκει στην επέκταση του BC_1 πέραν του B. Αυτό λόγω του III.4

7.Η ευθεία που ορίζεται από τα C_1, B, C_2 είναι κάθετη στην g_1 και στην g_2. Αν οι g_1 και g_2 τέμνονταν σε σημείο S, τότε οι g_1 και g_2 θα ήταν δύο κάθετες από το σημείο S στη ευθεία

C_1C_2. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα 2.4. Οπότε οι ευθείες g_1 και g_2 δεν τέμνονται.



Εικόνα 2.7: Θεώρημα 2.7

#Ορισμός 2.6: Παράλληλες ευθείες

Έστω δύο ευθείες σε ένα επίπεδο οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Θα αποκαλούμε τις ευθείες αυτές «παράλληλες».

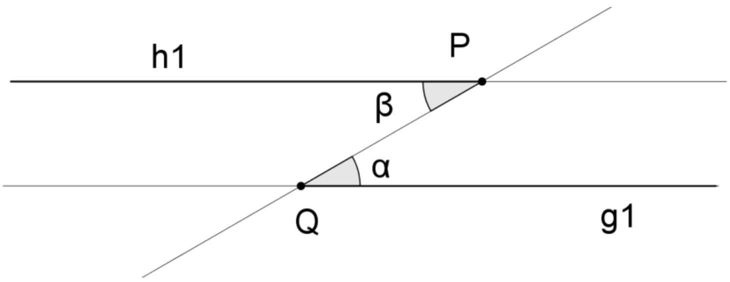
Βάση του παραπάνω ορισμού, μπορούμε να έχουμε το εξής θεώρημα:

#Θεώρημα 2.8

Από δοσμένο σημείο εκτός δοσμένης ευθείας μπορούμε να φέρουμε πάντα μία ευθεία παράλληλη ως προς την πρώτη ευθεία.

Απόδειξη 2.8:

1. Έστω σημείο P και ευθεία g της οποίας το P δεν είναι σημείο. Έστω τυχαίο σημείο Q επί της g
2. Το P ενώνεται με το Q μέσω μίας ευθείας. Έτσι προκύπτει μία γωνία α με κορυφή το Q. Έστω g_1 η πλευρά της α πάνω στην g.
3. Στο ημιεπίπεδο που ορίζει το PQ και δεν περιέχει την g_1, υπάρχει μόνο μία ημιευθεία h_1 που ξεκινά από το P και σχηματίζει με το PQ γωνία β ίση με την α (από αξίωμα ΙΙΙ.4).



Εικόνα 2.8: Θεώρημα 2.8

Παρατήρηση: Τα αξιώματα ισότητας μας επιτρέπουν να συγκρίνουμε τμήματα καθώς και γωνίες χωρίς να χρησιμοποιήσουμε αριθμούς.

#Ορισμός 2.6: **μικρότερος από**

Αποκαλούμε το τμήμα AB «μικρότερο από» το τμήμα CD αν υπάρχει ένα εσωτερικό σημείο E του τμήματος CD τέτοιο ώστε $AB \equiv CE$

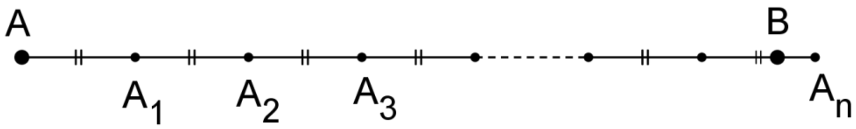
Η γωνία $\angle(g,h)$ αποκαλείται «μικρότερη από» μία γωνία $\angle(k,l)$ αν υπάρχει μία ημιευθεία m η οποία ξεκινά από την κορυφή της γωνίας $\angle(k,l)$ και βρίσκεται στο εσωτερικό της έτσι ώστε $\angle(g,h) \equiv \angle(k,m)$.

Παρατήρηση: Αποδείξαμε τα παραπάνω θεωρήματα χρησιμοποιώντας μόνο τα αξιώματα και τα τρία σύνολα αντικειμένων. Τα αξιώματα που έχουμε ορίσει μέχρι στιγμής μας αρκούν για να αποδείξουμε θεωρήματα τα οποία καλύπτουν ένα αξιοσημείωτο κομμάτι της επίπεδης Γεωμετρίας, όχι όμως ολόκληρη την επίπεδη Γεωμετρία. Λείπουν θεωρήματα που αφορούν για παράδειγμα τη σύνδεση.

IV Αξιώματα συνέχειας

IV.1 (Αρχιμήδειο αξίωμα)

Έστω A, B, A_1 τρία συνευθειακά σημεία με το A_1 να βρίσκεται μεταξύ του A και του B. Κατασκευάζουμε τα σημεία A_2, A_3, A_4, ... έτσι ώστε το A_1 να είναι μεταξύ του A και του A_2, το A_2 να είναι μεταξύ του A_1 και του A_3, το A_3 να είναι μεταξύ του A_2 και του A_4, κοκ, και έτσι ώστε τα τμήματα AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... να είναι ίσα (εικόνα 2.9). Τότε η ακολουθία των σημείων A_2, A_3, A_4, ... περιέχει ένα σημείο A_n τέτοιο ώστε το B να βρίσκεται μεταξύ A και A_n.



Εικόνα 2.9: Αξίωμα IV.1

Το 1ο αξίωμα συνέχειας αποτελεί βάση της μέτρησης

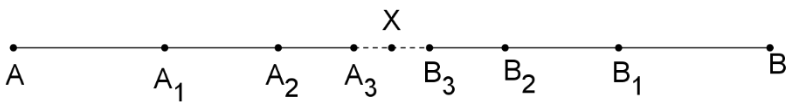
Έστω τμήμα AB. Έστω ένα αυθαίρετο τμήμα AA_1 το οποίο τοποθετούμε επανειλημμένα επί του AB. Είναι βέβαιο ότι με ικανοποιητικό αριθμό επαναλήψεων της διαδικασίας αυτής το άκρο του αυθαίρετου τμήματος θα υπερβεί το άκρο B και θα βρεθεί εκτός του τμήματος AB. Αν τα δύο άκρα ταυτίζονταν τότε θα μπορούσαμε να συσχετίσουμε και έναν αριθμό με το τμήμα AB, ο οποίος θα αποτελούσε μήκος του. Εφόσον δεν ταυτίζονται πάντα είναι αναγκαίο να εισαχθεί και ένα επιπλέον αξίωμα συνέχειας το οποίο θα εξυπηρετεί αυτό ακριβώς.

IV.2 Έστω AB τμήμα και έστω An και Bn δύο ακολουθίες από εσωτερικά σημεία του AB με τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) το τμήμα A_nB_n βρίσκεται στο εσωτερικό του τμήματος $A_{n-1}B_{n-1}$.

β) δεν υπάρχει τμήμα του οποίου τα άκρα να ανήκουν σε όλα τα τμήματα A_nB_n.

Τότε υπάρχει ένα μοναδικό σημείο X κοινό για όλα τα τμήματα A_nB_n (εικόνα 2.10).



Εικόνα 2.10: Αξίωμα IV.2

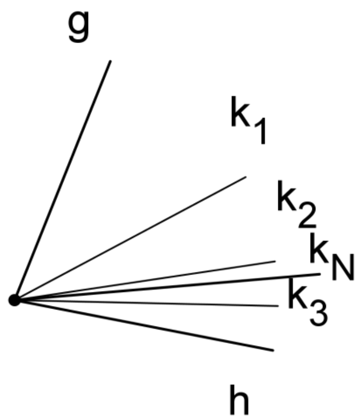
Σημείωση: Λόγω του παραπάνω αξιώματος είναι εφικτή η συσχέτιση κάθε τμήματος με έναν πραγματικό αριθμό ο οποίος αποτελεί μέτρο του μήκους του. Έτσι το αξίωμα IV.2 παρέχει και τη βάση για την αναλυτική Γεωμετρία.

Μέτρηση γωνιών

Ανάλογα και η μέτρηση γωνιών είναι εφικτή λόγω των αξιωμάτων συνέχειας. Τα αξιώματα συνέχειας κάνουν με ανάλογο τρόπο εφικτή και τη μέτρηση γωνιών. Το σχετικό θεώρημα είναι το εξής:

#Θεώρημα 2.9:

Έστω γωνία $\angle(g,h)$ δοσμένη και έστω k ημιευθεία που ξεκινά από την κορυφή της $\angle(g,h)$ και βρίσκεται στο εσωτερικό της. Έστω k_1 η διχοτόμος της $\angle(g,h)$, k_2 η διχοτόμος της $\angle(k_1,h)$, …, k_n η διχοτόμος της $\angle(k_{n-1},h)$. Τότε υπάρχει μία ημιευθεία k_N η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό της $\angle(k,h)$ (εικόνα 2.11).



Εικόνα 2.11: Θεώρημα 2.9

V Αξίωμα Παραλληλίας

Έστω α μία ευθεία και Α ένα σημείο εκτός της α. Τότε υπάρχει μία ακριβώς ευθεία (στο επίπεδο που ορίζει η ευθεία α και το σημείο Α) η οποία περνάει από το Α και δεν τέμνει την α. Αυτή η ευθεία καλείται «παράλληλη» ευθεία στην α διαμέσου του Α.

Τι επιπλέον μπορεί να αποδειχθεί με την προσθήκη του αξιώματος παραλληλίας στο σύστημα μας;

Το τελευταίο αξίωμα μας επιτρέπει να εμπλουτίσουμε την επίπεδη Γεωμετρία που έχουμε ήδη αναπτύξει με επιπλέον θεωρήματα τα οποία, πλέον, είναι αποδείξιμα. Ένα από αυτά είναι το θεώρημα σύμφωνα με το οποίο «το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές». Ακόμη, το θεώρημα σύμφωνα με το οποίο «οι εντός εναλλάξ γωνίες παράλληλων γραμμών είναι ίσες», είναι αποδείξιμο μέσω του αξιώματος των παραλλήλων. Το τελευταίο μάλιστα θεώρημα είναι και το αντίστροφο του θεωρήματος 2.7.

3ο Κεφάλαιο: Το αίτημα των παραλλήλων και η μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία

Το 5ο Αίτημα του Ευκλείδη
Αν μία ευθεία τέμνοντας δύο άλλες ευθείες δημιουργεί εσωτερικές γωνίες στην ίδια πλευρά οι οποίες μαζί είναι μικρότερες από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες, αν προεκταθούν άπειρα προς τις δύο κατευθύνσεις, συναντιούνται σε εκείνη την πλευρά όπου οι γωνίες είναι μαζί μικρότερες των δύο ορθών.
Η λέξη «παράλληλος» ορίζεται από τον Ευκλείδη με τον εξής τρόπο:

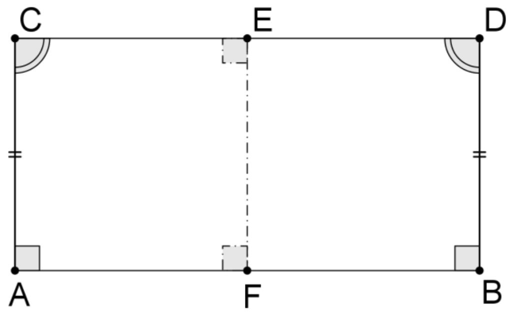
#Ορισμός 3.1
Παράλληλες ευθείες είναι οι ευθείες οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και αν τις προεκτείνουμε επ' άπειρον, και προς τις δύο κατευθύνσεις, δε θα συναντήσουν η μία την άλλη σε καμία κατεύθυνση.

Αποτυχημένες προσπάθειες απόδειξης αιτήματος παραλλήλων
Για αιώνες οι μαθηματικοί ήταν πεπεισμένοι πως το 5ο αίτημα του Ευκλείδη επάγεται από τα άλλα αιτήματα. Αν αυτό ήταν αληθές δε θα έπρεπε να συμπεριλαμβάνεται ανάμεσα στα υπόλοιπα αιτήματα. Για πάνω από 2000 προσπαθούσαν να αποδείξουν ότι το αξίωμα των παραλλήλων είναι επακόλουθο των άλλων αξιωμάτων, αλλά απέτυχαν.
Αναρωτιέται κανείς γιατί δεν τα κατάφεραν παρότι προσπαθούσαν επί τόσους αιώνες; Κάποιοι στις αποδείξεις τους χρησιμοποιούσαν ισχυρισμούς που αντιλαμβάνονταν μεν διαισθητικά, ήταν όμως ανάλογοι του αιτήματος των παραλλήλων. Κάποιοι χρησιμοποίησαν ισχυρισμούς που δεν ήταν άμεσοι, και αν επιχειρούσε κάποιους να τους αποδείξει θα κατέληγε με τον ένα ή τον άλλο τρόπο σε μία κατάσταση όπου το αίτημα των παραλλήλων είναι αναγκαίο για την απόδειξή τους.
Το 1763 ο Kluegel συγκέντρωσε όλες αυτές τις προσπάθειες απόδειξης του αιτήματος των παραλλήλων. Κάποιες από αυτές παρότι απέτυχαν ως προς το σκοπό τους άνοιξαν το δρόμο για καινούριες ιδέες. Κάπως έτσι προέκυψε και η μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία από την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και η σύνδεσή του με το αίτημα των παραλλήλων
Οι Sacccheri και Legendre ασχολήθηκαν πολύ με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Αυτό δεν ήταν τυχαίο καθώς το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου συνδέεται πράγματι με το αξίωμα των παραλλήλων. Αυτό ακριβώς υποδεικνύει το παρακάτω θεώρημα:

#Θεώρημα 3.1
Αν το άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές τότε το αξίωμα των παραλλήλων ισχύει.

Το άθροισμα γωνιών τριγώνου στη δουλειά του Saccheri και το τετράπλευρο Saccheri
Ο Saccheri μελέτησε ένα τετράπλευρο ABCD στο οποίο οι πλευρές AC, BD είναι ίσες και οι γωνίες στο A και στο B είναι ορθές (εικόνα 3.1).



Εικόνα 3.1: Το τετράπλευρο Saccheri

Το τετράπλευρο αυτό και οι ιδιότητες του θα φανούν ιδιαίτερα σημαντικές αργότερα.
ιδιότητα 1: $\angle ACD \equiv \angle BDC$
ιδιότητα 2: Έστω τα μέσα F, E των πλευρών AB, και CD. Τότε η ευθεία που ενώνει τα E,F τέμνει κάθετα τις πλευρές AB και CD.

Σημείωση: Στο τετράπλευρο ABDC παρότι οι γωνίες ACD και BDC είναι ίσες δε γνωρίζουμε αν είναι οξείες, ορθές ή αμβλείες. Στην εικόνα 3.1 επιλέξαμε τυχαία να τις σχεδιάσουμε ορθές.
Μελετώντας ακριβώς αυτόν τον προβληματισμό ο Saccheri οδηγείται σε μία τριάδα εκδοχών:

- το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές
- το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές
- το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.

Ο Saccheri προσπάθησε να δείξει ότι οι δύο πρώτες εκδοχές οδηγούν σε αντιφάσεις και άρα το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δε μπορεί παρά να είναι ίσο με δύο ορθές. Αυτό θα σήμαινε αυτόματα ότι το αίτημα των παραλλήλων ισχύει διότι:

i) Ισχύει το θεώρημα 3.1 σύμφωνα με το οποίο «αν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές τότε ισχύει το αξίωμα των παραλλήλων». Και,

ii) Για την απόδειξη της ισότητας του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου με δύο ορθές ο Saccheri δε χρησιμοποίησε το αξίωμα των παραλλήλων.

Ο Saccheri κατάφερε να αποκλείσει μόνο την πρώτη εκδοχή. Έτσι έδειξε ότι, ανεξαρτήτως της ισχύος του αξιώματος των παραλλήλων, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου στη δουλειά του Legendre

Και ο Legendre προσπάθησε να υπολογίσει το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Επίσης και αυτός κατέληξε στο ίδιο αποτέλεσμα με τον Saccheri για την τιμή του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου.

#Θεώρημα 3.2

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι το πολύ ίσο με δύο ορθές γωνίες.
Σημείωση: Για την απόδειξη του θεωρήματος 3.2 ο Legendre δεν χρησιμοποίησε το αξίωμα των παραλλήλων.

Στις αποδείξεις του ο Legendre εισάγει την έννοια του ελλείμματος ενός τριγώνου. Η έννοια αυτή θα αποδειχθεί πολύ χρήσιμη στα παρακάτω κεφάλαια.

#Ορισμός 3.3: έλλειμμα τριγώνου
Αν σε ένα τρίγωνο γωνιών α, β, γ ισχύει $\alpha + \beta + \gamma < 2R$, τότε υπάρχει μία γωνία δ τέτοια ώστε $\alpha + \beta + \gamma = 2R - \delta$. Το δ καλείται «έλλειμμα» του τριγώνου.

Η ιδιότητα της προσθετικότητας για το έλλειμμα
Αν χωριστεί το τρίγωνο ABC από ευθεία τέμνουσα που περνάει από την κορυφή C του τριγώνου, προκύπτουν δύο τρίγωνα ACD και BCD. Οι γωνίες ακολουθούν την ονοματολογία της εικόνας 3.2.
Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

ABC: $\alpha + \beta + \gamma = 2R - \delta_{ABC}$, $\alpha + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) = 2R - \delta_{ABC}$, (1)

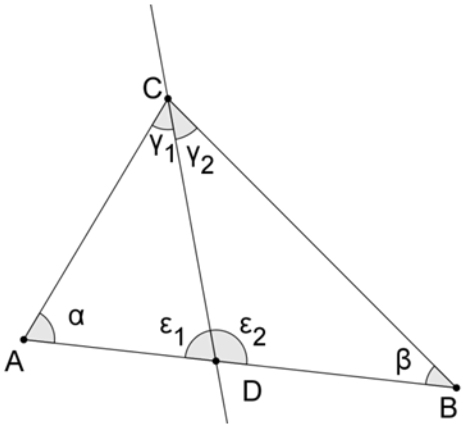
ACD: $\alpha + \varepsilon_1 + \gamma_1 = 2R - \delta_{ACD}$(2)

BCD: $\beta + (2R - \varepsilon_1) + \gamma_2 = 2R - \delta_{BCD}$(3),$\varepsilon_2 = 2R - \varepsilon_1$

Πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) δίνει:

$\alpha + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) = 2R - \delta_{ACD} - \delta_{BCD}$(4)

Σύγκριση των (1) και (4) δίνει ότι $\delta_{ABC} = \delta_{BCD} + \delta_{ACD}$



Εικόνα 3.2: Έλλειμμα τριγώνου

Σημείωση: Το αποτέλεσμα ισχύει και αν το αρχικό τρίγωνο χωριστεί σε περισσότερα τρίγωνα. Ισχύει δηλαδή η ιδιότητα της προσθετικότητας για το έλλειμμα.

Το 1823 ο Legendre προσπάθησε να αποδείξει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου όχι μόνο είναι «το πολύ ίσο με δύο ορθές», αλλά είναι «ακριβώς ίσο με δύο ορθές». Στην απόδειξή του όμως χρησιμοποίησε μία διαισθητικά προφανή πρόταση η οποία δε μπορεί να παραχθεί από τα αξιώματα δίχως να συμπεριληφθεί σε αυτά το αξίωμα των παραλλήλων. Ουσιαστικά λοιπόν χρησιμοποιείται ένας ισχυρισμός ανάλογος του αιτήματος των παραλλήλων, και άρα προκύπτει ένας φαύλος κύκλος.

Τι γεννήθηκε από την αδυναμία να αποδειχθεί το αίτημα της παραλληλίας από τα υπόλοιπα αιτήματα
Για πάνω από 2000 χρόνια οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να αποδείξουν ότι το αίτημα

των παραλλήλων μπορεί να αποδειχθεί από τα υπόλοιπα αξιώματα άρα δεν είναι ανεξάρτητο από αυτά. Το γεγονός ότι δε μπορούσε να αποδειχθεί θεωρήθηκε ως ελάττωμα της Γεωμετρίας. Όταν κάποιοι μπόρεσαν να το δουν ως κάτι άλλο και όχι ως ελάττωμα μπόρεσαν να καταλήξουν σε γόνιμο έδαφος.

Η λογική που πολλοί ακολούθησαν προσπαθώντας να αποδείξουν την εξάρτηση του αξιώματος των παραλλήλων από τα υπόλοιπα ήταν η λογική της έμμεσης απόδειξης. Υποθέτανε ότι το αξίωμα των παραλλήλων δεν ισχύει, και κατά συνέπεια ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές. Περίμεναν αυτό να καταλήξει σε αντίφαση όμως αυτό δε συνέβη ποτέ. Η άρνηση του αξιώματος των παραλλήλων λοιπόν δε δημιουργούσε αντιφάσεις στο σύστημα. Αυτό οδήγησε κάποια στιγμή στη σκέψη να ενσωματωθεί ως αξίωμα στο σύστημα αξιωμάτων η άρνηση του αξιώματος έναντι της παραδοχής του. Έτσι φτιάχτηκαν καινούριες Γεωμετρίες.

Η Υπερβολική ή αλλιώς μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία γεννήθηκε με αυτόν τον τρόπο. Προέκυψε δηλαδή από την Ευκλείδεια αλλάζοντας ουσιαστικά ένα μόνο αξίωμα. Το αξίωμα των παραλλήλων αντικαθίσταται από την άρνηση του. Πέραν του αξιώματος της παραλληλίας η Υπερβολική Γεωμετρία και η Ευκλείδεια μοιράζονται τα ίδια αξιώματα. Κατά συνέπεια μοιράζονται και θεωρήματα που προκύπτουν από τα κοινά αυτά αξιώματα.

Ο Gauss ήταν από αυτούς ακολούθησε αυτή την ιδέα. Και ίσως ήταν ο πρώτος που είχε ξεκάθαρα στο μυαλό του την αντίληψη μιας μη-Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Μίας Γεωμετρίας η οποία ήταν και συνεπής.

Οι πρώτοι που εξέδωσαν δουλειές σχετικές με τέτοιες Γεωμετρίες ήταν ο Ούγγρος Johann Bolyai και ο Ρώσος Lobachevsky. Οι σύγχρονοι των Bolyai, Gauss και Lobachevsky δεν έδωσαν στις ιδέες τους σημασία ανάλογη της αξίας τους, και αυτό γιατί η νέα αυτή Γεωμετρία στερούνταν διαισθητικής μορφής. Όταν κατασκευάστηκαν μοντέλα για τη Γεωμετρία αυτή από τον Felix Klein και τον Poincare τότε οι Γεωμετρία αυτή απέκτησε διαισθητική μορφή και αυτό βοήθησε στην αποδοχή της.

4ο Κεφάλαιο: Το μοντέλο του Poincare για την Υπερβολική Γεωμετρία

Τι είναι το μοντέλο μιας Γεωμετρίας και πώς σχετίζεται με αυτήν

Σε κάθε Γεωμετρία υπάρχουν αντικείμενα τα οποία δεν ορίζονται με κάποιο ιδιαίτερο τρόπο, παρά μόνο ως έννοιες οι οποίες επιδέχονται πολλές ερμηνείες όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 2. Υπάρχει επίσης και ένα σύστημα αξιωμάτων που ισχύουν για αυτά τα αντικείμενα. Έτσι τα αντικείμενα υπακούουν κανόνες χωρίς όμως τα ίδια να έχουν δηλαδή κάποια συγκεκριμένη φυσική σημασία. Επιλέγοντας ένα σύνολο αξιωμάτων φτιάχνουμε μία Γεωμετρία, η οποία οπτικοποιείται μέσω διάφορων μοντέλων. Τα μοντέλα λοιπόν δίνουν φυσική και οπτική υπόσταση στα αντικείμενα που δίχως τα μοντέλα θα στερούνταν φυσικής σημασίας.

Αντικείμενα και αξιώματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας

Τα αντικείμενα της υπερβολικής Γεωμετρίας είναι, όπως και στην Ευκλείδεια, τα εξής:

i) τα σημεία
ii) οι ευθείες
iii) τα επίπεδα

Τα αξιώματα που αποτελούν την Υπερβολική Γεωμετρία είναι

i) τα αξιώματα σύνδεσης
ii) τα αξιώματα διάταξης
iii) τα αξιώματα ισότητας
iv) τα αξιώματα συνέχειας
v) η άρνηση του αξιώματος της παραλληλίας

Σημείωση: Εφόσον τα αντικείμενα ακολουθούν το σύστημα αξιωμάτων της Υπερβολικής Γεωμετρίας θα αποκαλούνται «υπερβολικό σημείο», «υπερβολική ευθεία» και «υπερβολικό επίπεδο». Εν γένει όλα τα αντικείμενα θα έχουν το πρόθεμα «υπερβολικό».

Μοντέλα της Υπερβολική Γεωμετρίας

Το οποιοδήποτε μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας θα πρέπει να αντιστοιχίζει τα αντικείμενα που ορίστηκαν λίγο πιο πάνω σε συγκεκριμένες μαθηματικές οντότητες, να δίνει φυσική σημασία στα αντικείμενα δηλαδή. Οι οντότητες αυτές οφείλουν να πληρούν τις πέντε ομάδες αξιωμάτων της Γεωμετρίας. Τα σύνολα αντικειμένων που πληρούν τα παραπάνω θα αποτελούν ένα αποδεκτό μοντέλο για την Υπερβολική Γεωμετρία.

Το 1ο εναλλακτικό σύστημα αντικειμένων (εσωτερικό κύκλου) του 2^{ου} κεφαλαίου, οφείλεται στον Felix Klein και αποτελεί ένα μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Το μοντέλο αυτό βέβαια δεν είναι το μόνο που υπάρχει. Ο Poincare κατασκεύασε μοντέλα για το υπερβολικό επίπεδο και μάλιστα όχι μόνο ένα. Το μοντέλο που θα υιοθετήσουμε είναι του Poincare και είναι σχετικά απλό.

Παρατήρηση: Προκειμένου να ορίσουμε τα αντικείμενα της Υπερβολικής Γεωμετρίας μέσα στο μοντέλο του Klein αξιοποιήσαμε αντικείμενα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αυτό είναι θεμιτό και παρατηρείται και σε άλλα μοντέλα.

Το μοντέλο του Poincare για την Υπερβολική Γεωμετρία

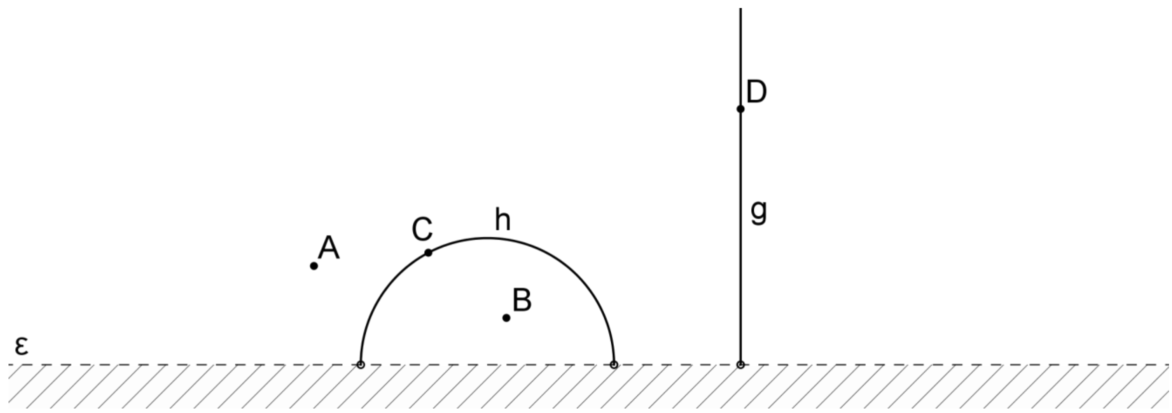
Αρχικά ορίζουμε μία ευθεία του ευκλείδειου επιπέδου να είναι η «**οριακή ευθεία**». Η οριακή ευθεία χωρίζει το ευκλείδειο επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα.

- **υπερβολικό επίπεδο** είναι το ένα εκ των δύο ευκλείδειων ημιεπιπέδων που ορίζονται από την οριακή ευθεία. Θεωρούμε ότι η οριακή ευθεία δεν ανήκει στο υπερβολικό επίπεδο.
- **υπερβολικά σημεία** είναι τα σημεία του ενός από τα δύο Ευκλείδεια ημιεπίπεδα που ορίζει η οριακή ευθεία. Τα σημεία της οριακής ευθείας δεν είναι υπερβολικά σημεία.
- Οι **υπερβολικές ευθείες** είναι:

  1) τα Ευκλείδεια ημικύκλια που είναι κάθετα (με τον ευκλείδειο τρόπο) στην οριακή ευθεία και ανήκουν στο υπερβολικό επίπεδο. Θεωρούμε ότι τα άκρα των ημικυκλίων που βρίσκονται επί της οριακής ευθείας δεν ανήκουν στο υπερβολικό επίπεδο

  2) οι ευκλείδειες ημιευθείες που είναι κάθετες (με τον ευκλείδειο τρόπο) στην οριακή ευθεία, με το άκρο τους να ανήκει στην οριακή ευθεία και ανήκουν στο υπερβολικό επίπεδο. Θεωρούμε ότι το άκρο της Ευκλείδειας ημιευθείας δεν ανήκει στην υπερβολική ευθεία.

Παραδείγματα υπερβολικών αντικειμένων



Εικόνα 4.1: Παραδείγματα υπερβολικών αντικειμένων

Σημείωση:

Η ε είναι η οριακή ευθεία, η οποία δεν είναι στοιχείο του υπερβολικού επιπέδου

Οι g, h αποτελούν ευθείες στο υπερβολικού επιπέδου

Τα A, B, C, D αποτελούν σημεία του υπερβολικού επιπέδου.

Γιατί το μοντέλο αυτό είναι μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Το μοντέλο που περιγράψαμε είναι μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας γιατί ικανοποιεί τις πέντε ομάδες αξιωμάτων της. Είναι εφικτό να αποδείξουμε για όλα τα αξιώματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας ότι ισχύουν εντός του μοντέλου Poincare. Εμείς θα περιοριστούμε στην απόδειξη κάποιων από αυτά.

Απόδειξη της ισχύς του αξιώματος Ι.1 εντός του μοντέλου
Έστω δύο σημεία C και D και η Ευκλείδεια ευθεία που τα ενώνει. Η ευθεία αυτή είναι είτε:

- κάθετη στην οριακή ευθεία,

οπότε η ημιευθεία της στο υπερβολικό επίπεδο είναι η ζητούμενη υπερβολική ευθεία που ορίζεται από τα σημεία C και D, είτε

- όχι κάθετη στην οριακή ευθεία,

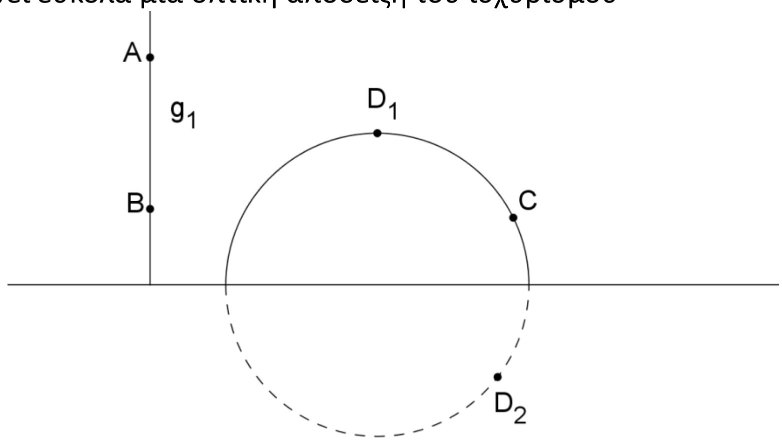
οπότε η Ευκλείδεια διάμεσος του CD τέμνει την οριακή ευθεία έστω στο σημείο M. Με κέντρο το M μπορεί να βρεθεί ένα μονάχα ευκλείδειο ημικύκλιο κάθετο στην οριακή ευθεία που περνάει από τα σημεία C και D. Αυτό το ημικύκλιο είναι η υπερβολική ευθεία που ορίζουν μοναδικά τα C και D.

Για να αποδείξουμε ότι τα αντικείμενα του μοντέλου ικανοποιούν τα αξιώματα ισότητας πρέπει πρώτα να ορίσουμε κάποιες έννοιες.

Αναγκαιότητα νέου ορισμού της έννοιας του μήκους
Μοιάζει λογικό να θεωρηθούμε ίσα τα τμήματα τα οποία έχουν το ίδιο μήκος. Χρειάζεται λοιπόν να ορίσουμε την έννοια του μήκους στο μοντέλο.

Ισχυρισμός: Αν δανειστούμε τον ορισμό του μήκους από την Ευκλείδεια Γεωμετρία τότε δεν ισχύει το αξίωμα ΙΙΙ.1.

Απόδειξη ισχυρισμού:
Η εικόνα 4.2 δίνει εύκολα μία οπτική απόδειξη του ισχυρισμού



Εικόνα 4.2: Ευκλείδειο μήκος υπερβολικών τμημάτων

1. Έστω το υπερβολικό τμήμα AB και g_1 η υπερβολική ευθεία στην οποία ανήκει.
2. Έστω το σημείο C εκτός της g_1 και g_2 η υπερβολική ευθεία στην οποία ανήκει.
3. Πάνω στην ευθεία g_2 θα έπρεπε βάση του αξιώματος ΙΙΙ.1 να μπορούμε να βρούμε δύο σημεία D_1 και D_2 τέτοια ώστε το C να είναι μεταξύ του D_1 και D_2 και τέτοια ώστε $AB \equiv CD_1, AB \equiv CD_2$.
4. Ας υποθέσουμε ότι το τμήμα CD_1 είναι αυτό του σχήματος. Τότε το τμήμα CD_2 δε θα ανήκει εξ΄ ολοκλήρου στο υπερβολικό επίπεδο και άρα το D_2 δεν θα είναι σημείο του υπερβολικού επιπέδου. Άρα δεν υπάρχει υπερβολικό σημείο D_2 τέτοιο ώστε $AB \equiv CD_2$

#Ορισμός 4.1: Υπερβολικό μήκος
Έστω ένα υπερβολικό τμήμα AB. Τότε αυτό θα βρίσκεται πάνω σε υπερβολική ευθεία η

οποία θα βρίσκεται είτε:

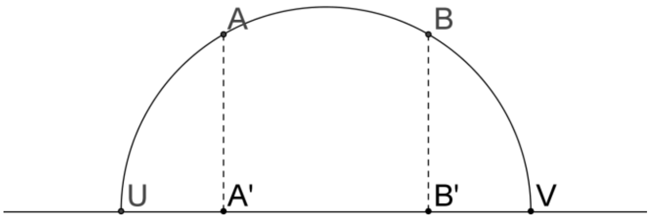
α) πάνω σε ένα ευκλείδειο ημικύκλιο που τέμνει την οριακή ευθεία στα σημεία U και V (εικόνα 4.3), είτε:

β) πάνω σε ευκλείδεια ευθεία που τέμνει την οριακή ευθεία στο U (εικόνα 4.4).

Για τις δύο περιπτώσεις ορίζουμε αντίστοιχα το υπερβολικό μήκος του τμήματος AB να είναι:

α) $L_{AB} = \left|\frac{1}{2}\log(A'B'UV)\right|$,

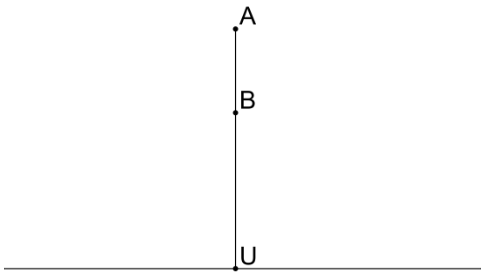
όπου A', B' είναι οι προβολές των A,B στην οριακή ευθεία, και $(A'B'UV)$ ο διπλός λόγος των σημείων A', B', U, V.



Εικόνα 4.3: Υπερβολικό μήκος ευθείας που είναι ευκλείδειο ημικύκλιο

β) $L_{AB} = \left|\log\left(\frac{AU}{BU}\right)\right|$,

όπου U είναι η προβολή των A, B στην οριακή ευθεία



Εικόνα 4.4: Υπερβολικό μήκος ευθείας που είναι ευκλείδεια ημιευθεία

Στον ορισμό χρησιμοποιείται η έννοια του διπλού λόγου. Για τέσσερα συνευθειακά ευκλείδεια σημεία A, B, C, D, ο διπλός λόγος τους (ABCD) ορίζεται να είναι:

$$(ABCD) = (ABC):(ABD) = \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right):\left(\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\right)$$

,όπου $\overline{AC}, \overline{CB}, \overline{AD}, \overline{DB}$ προσημασμένα μήκη ευθυγράμμων τμημάτων. Θεωρούμε ότι τα τμήματα έχουν διατεταγμένα τα άκρα τους ως «πρώτο» και «δεύτερο». Επιλέγοντας αυθαίρετα τη θετική φορά της ευθείας στην οποία ανήκουν, με τις παύλες υποδηλώνουμε τα προσημασμένα μήκη τους. Το προσημασμένο μήκος είναι θετικό ή αρνητικό αναλόγως αν το τμήμα έχει το δεύτερο άκρο του στην ημιευθεία του πρώτου που δείχνει προς τη θετική φορά ή στην αντικείμενή της αντίστοιχα.

Κάποιες σκέψεις πάνω στις τιμές του μήκους του τμήματος AB

Έστω

$$\varepsilon = (A'B'UV) = (A'B'U):(A'B'V) = \left(\frac{\overline{A'U}}{\overline{UB'}}\right):\left(\frac{\overline{A'V}}{\overline{VB'}}\right) = \frac{\overline{A'U}\cdot\overline{VB'}}{\overline{UB'}\cdot\overline{A'V}}$$

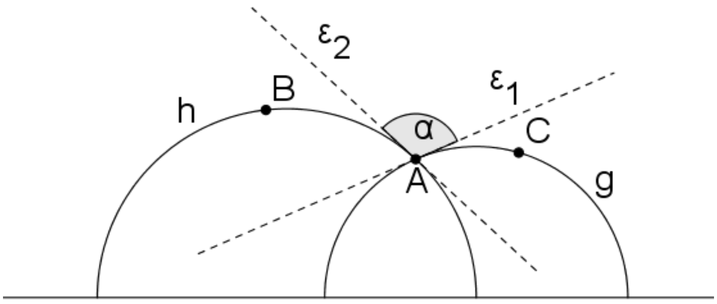
- Αν το B βρίσκεται μεταξύ του U και του A, τότε καθώς το A κινείται επί της υπερβολικής ευθείας προς το V, το ε και ο $log(\varepsilon)$ αυξάνονται επ' αόριστον. Άρα το σημείο V είναι άπειρα μακριά.
- Αν το A και το B συμπίπτουν τότε ε=1 και το υπερβολικό μήκος του AB είναι μηδενικό, όπως είναι αναμενόμενο.
- Αν το A βρίσκεται ανάμεσα στο U και το B τότε καθώς το A κινείται επί της υπερβολικής ευθείας προς το U, το ε μειώνεται απεριόριστα, με: $\lim_{A\to U}(A'B'UV) = 0$, και $\lim_{A\to U} L_{BA} = +\infty$.

#Ορισμός 4.2: Ίσα τμήματα

Ορίζουμε δύο υπερβολικά τμήματα να είναι «ίσα» όταν το υπερβολικό τους μήκος είναι ίδιο.

Μέτρηση γωνιών

Η μέτρηση γωνιών γίνεται κατά τον ευκλείδειο τρόπο. Δηλαδή, έστω μία γωνία η οποία σχηματίζεται από δύο υπερβολικά τμήματα AB, AC τα οποία βρίσκονται πάνω σε ευθείες h, g και τέμνονται στο σημείο A (εικόνα 4.5). Το μέτρο της γωνίας που σχηματίζεται από τις εφαπτόμενές τους στο A (ε_1, ε_2), μετρημένο σε rad, είναι το μέτρο της γωνίας που σχηματίζουν τα AB, AC.

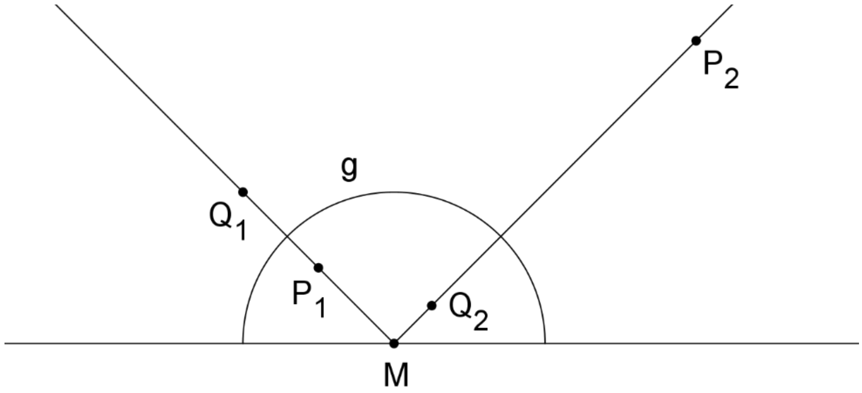


Εικόνα 4.5: Μέτρηση γωνιών στο υπερβολικό επίπεδο

Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της ανάκλασης

Θεωρούμε ένα ευκλείδειο ημικύκλιο g στο υπερβολικό επίπεδο με το κέντρο του M στην οριακή ευθεία. Θεωρούμε ένα σημείο του υπερβολικού επιπέδου, διάφορο του M, το οποίο ονομάζουμε P και σχεδιάζουμε την Ευκλείδεια ημιευθεία του υπερβολικού επιπέδου που ξεκινά από το M και περνά από το σημείο P (εικόνα 4.6). Πάνω στην ημιευθεία αυτή υπάρχει σημείο Q τέτοιο ώστε να ισχύει: $r^2 = MQ \cdot MP$. Ονομάζουμε το σημείο Q ανάκλαση του σημείου P στην υπερβολική ευθεία g και το σημείο P ανάκλαση του σημείου Q στην υπερβολική ευθεία g.

Σημείωση: Η ανάκλαση δίνει Q, P τέτοια ώστε αν το ένα από τα δύο βρίσκεται στο εσωτερικό του ημικυκλίου, το άλλο να βρίσκεται στο εξωτερικό .



Εικόνα 4.6: Ανάκλαση σε ευκλείδειο ημικύκλιο

Σημείωση: Γενικότερα ανάκλαση μπορούμε να κάνουμε όχι μόνο σε ευκλείδειο ημικύκλιο του υπερβολικού επιπέδου αλλά και σε ευκλείδειο κύκλο.

Συμπεριφορά υπερβολικού μήκους στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς

#Θεώρημα 4.1:

Το υπερβολικό μήκος ενός υπερβολικού τμήματος μένει αμετάβλητο:

- από παράλληλη (με την οριακή ευθεία) μεταφορά
- από μετασχηματισμό ομοιότητας (με κέντρο στην οριακή ευθεία)
- υπό ανάκλαση σε μία υπερβολική ευθεία.

Επιβεβαίωση της ύπαρξης μεσοκάθετης ευθείας τμήματος

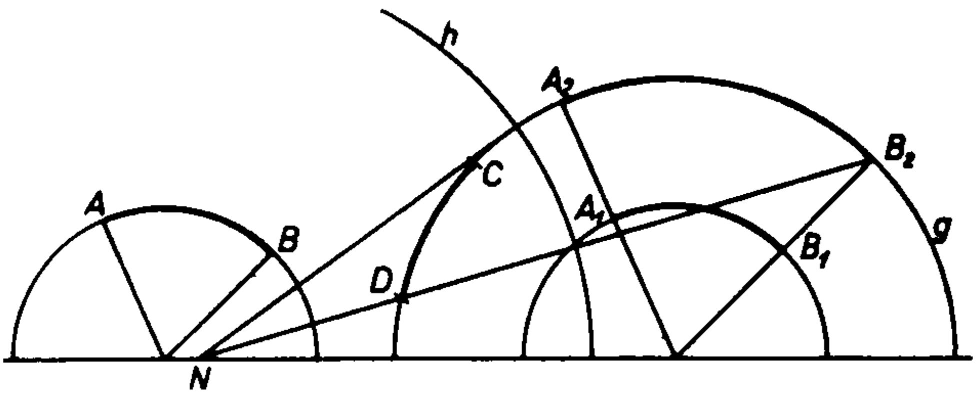
Για κάθε τμήμα του μοντέλου μπορεί να βρεθεί μία ευθεία που το τέμνει κάθετα στο μέσον του. Η πιστοποίηση της ύπαρξης αποτελεί ουσιαστικά απόδειξη δυνατότητας κατασκευής της και για αυτό το λόγο περιγράφεται στο κεφάλαιο των κατασκευών (6ο κεφάλαιο).

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε ότι το μοντέλο ικανοποιεί τα αξιώματα ισότητας.

Απόδειξη της ισχύος του αξιώματος ΙΙΙ.1 εντός του μοντέλου

1. Έστω AB δοσμένο υπερβολικό τμήμα και έστω C σημείο σε δοσμένη υπερβολική ευθεία g.
2. Με κατάλληλη μεταφορά και μετασχηματισμό ομοιότητας μπορεί να βρεθεί A_2B_2 πρέπει να είναι ίσα με το AB και να περνάνε από το C (εικόνα 4.7).
3. Έστω h η μεσοκάθετος του A_2C. Το A_2B_2 με ανάκλαση στην h, δίνει το τμήμα CD, το οποίο λόγω θεωρήματος 4.1 θα είναι ίσο με το AB.
4. Έστω k η μεσοκάθετος της g στο C. Τότε ανάκλαση του CD στην k δίνει το τμήμα CE το οποίο είναι και αυτό ίσο με το AB.

Έτσι έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή υπάρχουν C, D, E τέτοια ώστε $AB \equiv CD$ και $AB \equiv CE$.



Εικόνα 4.7: Απόδειξη ισχύος του αξιώματος ΙΙΙ.1 εντός του μοντέλου

Απόδειξη της ισχύος του αξιώματος ΙΙΙ.2 εντός του μοντέλου

Προκύπτει από τον ορισμό 4.2.

Απόδειξη της ισχύος του αξιώματος ΙΙΙ.3 εντός του μοντέλου

1. Έστω τμήμα AC και B ένα εσωτερικό σημείο του τμήματος. Για τις προβολές τους στην οριακή ευθεία θα ισχύει επίσης ότι το B' βρίσκεται στο εσωτερικό του A'C'.
2. Για τους διπλούς λόγους ισχύουν τα εξής:

$$\varepsilon_{AC} = (AC'UV) = (AC'U):(AC'V) = \left(\frac{\overline{AU}}{\overline{UB}}\right):\left(\frac{\overline{AV}}{\overline{VB}}\right)$$

$$\varepsilon_{AB} = (AB'UV) = (AB'U):(AB'V) = \left(\frac{\overline{AU}}{\overline{UB'}}\right):\left(\frac{\overline{AV}}{\overline{VB'}}\right)$$

$$\varepsilon_{BC} = (B'C'UV) = (B'C'U):(B'C'V) = \left(\frac{\overline{B'U}}{\overline{UC'}}\right):\left(\frac{\overline{B'V}}{\overline{VC'}}\right)$$

Άρα $\varepsilon_{AC} = \varepsilon_{AB} \cdot \varepsilon_{BC}$

3. Όμως $L_{AC} = \frac{1}{2}\log(\varepsilon_{\boldsymbol{AC}})$

Άρα: $L_{AC} = L_{AB} + L_{BC}$

Απόδειξη της ισχύος του αξιώματος ΙΙΙ.5 εντός του μοντέλου

Προκύπτει από τον ορισμό 4.1

Απόδειξη της της ισχύος του αξιώματος IV.1 της συνέχειας

1. Έστω ε το υπερβολικό μήκος του τμήματος AA_1 του αξιώματος IV.1 και λ το υπερβολικό μήκος του AB. Έστω $\lambda = n \cdot \varepsilon + \theta \cdot \varepsilon$, ($\theta < 1$, n ακέραιος)
2. Αν το τμήμα AA_1 τοποθετηθεί στην υπερβολική ευθεία του AB (n+1) φορές ξεκινώντας από το A, τότε λόγω της σχέσης 4.3 συνεπάγεται ότι

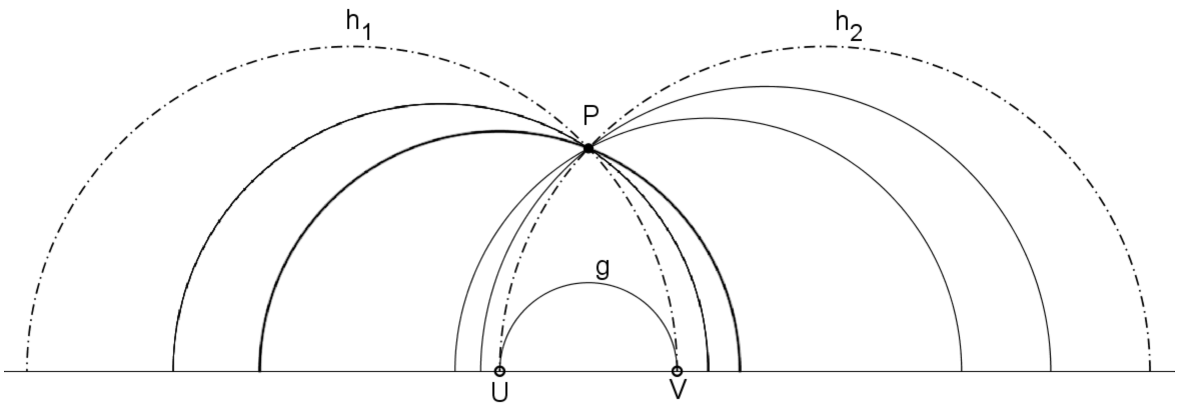
$$L_{AA_{n+1}} = (n+1) \cdot \varepsilon = n \cdot \varepsilon + \varepsilon > n \cdot \varepsilon + \theta \cdot \varepsilon$$

3. Άρα το B θα βρίσκεται ανάμεσα στο A_n και A_{n+1}.

Παρατήρηση: Εφόσον στο μοντέλο ισχύουν οι τέσσερις ομάδες αξιωμάτων, θα ισχύουν και τα θεωρήματα τα οποία επάγονται από τα αξιώματα αυτών των ομάδων και τα οποία αναπτύξαμε στο 2^o κεφάλαιο.

Απόδειξη της ισχύος της άρνησης του αξιώματος των παραλλήλων

Έστω g υπερβολική ευθεία και P υπερβολικό σημείο εκτός της g. Οι παράλληλες στην g υπερβολικές ευθείες που διέρχονται από το P θα είναι ευκλείδεια ημικύκλια με κέντρα στον οριακή ευθεία που θα περνούν από το P και δε θα τέμνουν την g (εικόνα 4.8). Οι παράλληλες στην g είναι προφανώς περισσότερες της μίας όπως φαίνεται στο σχήμα



Εικόνα 4.8: Υπερβολικές παράλληλες

Σημείωση: Βάση του ορισμού του Ευκλείδη περί παραλληλίας ακόμη και οι ευθείες h_1 και h_2 δεν είναι παράλληλες στην g. Αυτό συμβαίνει γιατί τα μόνα σημεία τομής των h_1, h_2 με την g είναι τα σημεία του οριακή ευθεία,U και V, τα οποία δεν ανήκουν στο υπερβολικό επίπεδο.

#Ορισμός 4.3: οριακές παράλληλες ευθείες

Ονομάζουμε «οριακές παράλληλες» ευθείες της g στο P τις υπερβολικές ευθείες h_1 και h_2 (εικόνα 4.8).

#Ορισμός 4.4: υπερβολικές παράλληλες ευθείες της g στο P

Όλες οι παράλληλες της g στο P πλην των οριακών παράλληλων καλούνται «υπερβολικές παράλληλες της g στο P» (εικόνα 4.8), και είναι άπειρες στο πλήθος.

Η δικαίωση του Ευκλείδη

Όπως ο Ευκλείδης είχε υποστηρίξει όταν έγραφε τα Στοιχεία του, «το αξίωμα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο των υπολοίπων αξιωμάτων». Το παραπάνω μοντέλο παρέχει με ευκολία μία απόδειξη της ανεξαρτησίας του αξιώματος της παραλληλίας από τα άλλα αξιώματα:

Απόδειξη:

Έστω ότι το αξίωμα των παραλλήλων δεν είναι ανεξάρτητο από τα αξιώματα σύνδεσης, διάταξης, ισότητας και συνέχειας. Άρα είναι ισχυρισμός ο οποίος επάγεται από αυτά. Εφόσον τα αξιώματα σύνδεσης, διάταξης, ισότητας και συνέχειας ισχύουν στο μοντέλο θα πρέπει να ισχύει και το αξίωμα των παραλλήλων που επάγεται από αυτά. Στο μοντέλο όμως όχι μία αλλά άπειρες ευθείες περνάνε από σημείο εκτός ευθείας και είναι παράλληλες ως προς αυτήν.

5ο Κεφάλαιο: Θεωρήματα στην Υπερβολική Γεωμετρία

Κοινά θεωρήματα Ευκλείδειας και Υπερβολικής Γεωμετρίας

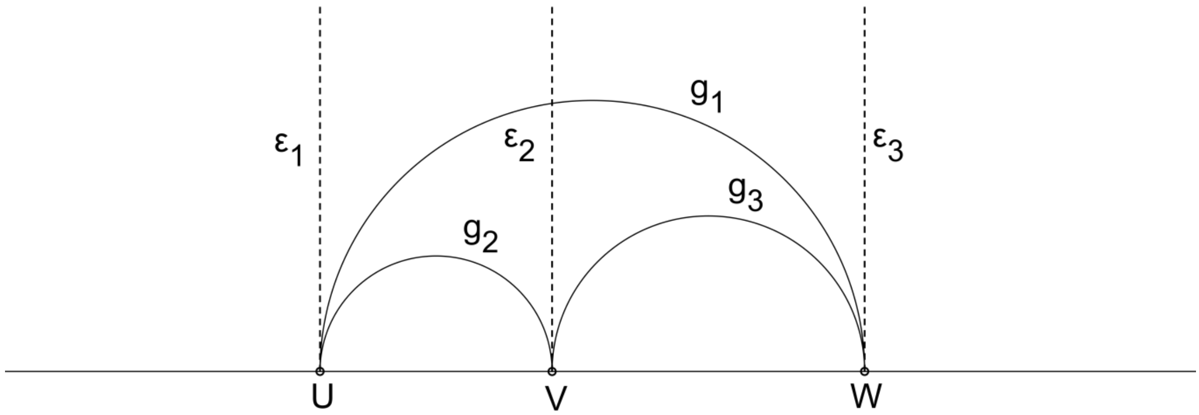
Τα αξιώματα σύνδεσης, διάταξης, ισότητας, και συνέχειας αποτελούν τις τέσσερις πρώτες (βάση της σειράς με την οποία τις παρουσιάσαμε) ομάδες αξιωμάτων ενός συστήματος αξιωμάτων είτε της Ευκλείδειας(κεφάλαιο 2^o) είτε της Υπερβολικής Γεωμετρίας(κεφάλαιο 4^o). Τα αξιώματα των τεσσάρων αυτών ομάδων αποτελούν την Απόλυτη Γεωμετρία. Εφόσον η Υπερβολική Γεωμετρία και η Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουν κοινά τα αξιώματα της Απόλυτης Γεωμετρίας, αυτό συνεπάγεται ότι μοιράζονται και θεωρήματα τα οποία επάγονται από αυτήν. Πολλά από τα γνωστά και βασικά θεωρήματα ανήκουν στην Απόλυτη Γεωμετρία.

Διαφορές Ευκλείδειας και Υπερβολικής Γεωμετρίας (ως προς τα θεωρήματα)

Οι δύο Γεωμετρίες μοιράζονται τα αξιώματα της Απόλυτης Γεωμετρίας όμως διαφοροποιούνται ως προς το αξίωμα των παραλλήλων. Υπάρχουν θεωρήματα που συνδέονται άμεσα με το αξίωμα αυτό και οποιαδήποτε διαφοροποίηση ως προς το αξίωμα επηρεάζει αντίστοιχα και την ισχύ των θεωρημάτων. Ένα παράδειγμα τέτοιου θεωρήματος είναι το θεώρημα περί αθροίσματος γωνιών τριγώνου, το οποίο μάλιστα θεωρείται ανάλογο του αξιώματος των παραλλήλων και απασχόλησε τους μαθηματικούς επί αιώνες. Στην Υπερβολική Γεωμετρία δεν ισχύει το θεώρημα της Ευκλείδειας σύμφωνα με το οποίο το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές. Τουναντίον:

 # Θεώρημα 5.1: Στην Υπερβολική Γεωμετρία, το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές γωνίες.

Παρατήρηση: Στο μοντέλο του Poincare υπάρχουν αυθαίρετα μικρά αθροίσματα γωνιών



Εικόνα 5.1: Οριακό τρίγωνο

Στην εικόνα 5.1 φαίνεται ένα «οριακό» τρίγωνο. Το τρίγωνο σχηματίζεται από τις ευθείες g_1, g_2, g_3 και έχει κορυφές τα σημεία τομής των g_1, g_2, g_3 δηλαδή τα σημεία U, V, W. Οι εφαπτόμενες των g_1 και g_2 ταυτίζονται, και άρα η γωνία που σχηματίζουν (δηλαδή η γωνία των εφαπτομένων τους) είναι μηδενική. Ανάλογα, μηδενική είναι η γωνία των g_2, g_3 καθώς και η γωνία των g_1, g_3. Δηλαδή όλες οι γωνίες είναι μηδενικές στο τρίγωνο που σχηματίζεται από τις g_1, g_2, g_3. Τα σημεία βέβαια U, V και W δεν αποτελούν σημεία του υπερβολικού επιπέδου και άρα το τρίγωνο UVW δεν είναι ένα υπερβολικό τρίγωνο. Υπάρχουν όμως τρίγωνα με κορυφές αρκούντος κοντά στα U,V,W ώστε το άθροισμα των γωνιών τους να είναι αυθαίρετα μικρό. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με επιχειρήματα συνέχειας.

Ιδιότητα του μοντέλου ή Θεώρημα της Γεωμετρίας;

Το μοντέλο μπορεί να μας αναδείξει ιδιότητες όπως η παραπάνω. Για παράδειγμα στο μοντέλο του Poincare δημιουργείται η αίσθηση ότι δύο υπερβολικές παράλληλες (υπερβολικές ευθείες δίχως κοινά σημεία) έχουν μία κοινή κάθετη. Αρχικά αναρωτιόμαστε αν αυτό είναι όντως αληθές στο μοντέλο μας, αν είναι δηλαδή πράγματι μία ιδιότητα του μοντέλου. Έπειτα αναρωτιόμαστε αν αυτή θα μπορούσε να είναι μία ιδιότητα η οποία δεν ισχύει αποκλειστικά μέσα στο μοντέλο όπου αναδείχθηκε, αλλά ισχύει γενικά στη Γεωμετρία μας.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το παραπάνω είναι όντως ιδιότητα του μοντέλου αξιοποιώντας ιδιότητες του, όπως το γεγονός ότι η υπερβολική ευθεία είναι ευκλείδειο ημικύκλιο. Μπορούμε περαιτέρω να αποδείξουμε ότι το παραπάνω είναι ιδιότητα της Γεωμετρίας χρησιμοποιώντας μόνο αξιώματα καθώς και θεωρήματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Ακριβώς επειδή μπορούμε να κάνουμε το τελευταίο, η ιδιότητα που συζητάμε αποτελεί εντέλει θεώρημα της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

#Θεώρημα 5.2:
Δύο υπερβολικές παράλληλες έχουν ακριβώς μία κοινή ευθεία κάθετη και στις δύο.

Το μοντέλο αναδεικνύει ιδιότητες της Γεωμετρίας

Μπορούμε να πούμε λοιπόν ότι το μοντέλο αναδεικνύει ιδιότητες της Γεωμετρίας. Μάλιστα πολλές φορές διαφορετικά μοντέλα κάνουν προφανείς διαφορετικές ιδιότητες της ίδιας Γεωμετρίας. Αν αποδείξουμε την ιδιότητα που αναγνωρίζουμε στο μοντέλο με εργαλείο τα αξιώματα της Γεωμετρίας καθώς και θεωρήματα που προκύπτουν από τα αξιώματα αυτά, τότε έχουμε ένα θεώρημα με γενική ισχύ μέσα στην Γεωμετρία μας.

Παρατήρηση: Τα σημεία που ισαπέχουν από μία υπερβολική ευθεία δεν αποτελούν μία ευθεία.

Πολύ συχνά στην προσπάθεια απόδειξης του αιτήματος των παραλλήλων γινόταν η αυτόματη υπόθεση ότι δύο παράλληλες ευθείες έχουν σταθερή απόσταση. Η υπόθεση αυτή όμως είναι λανθασμένη. Δε χρειάζεται τα σημεία που ισαπέχουν από μία ευθεία να βρίσκονται επί άλλης ευθείας. Για την ακρίβεια αυτό που ισχύει για τον τόπο των σημείων που ισαπέχουν από υπερβολική ευθεία είναι το εξής:

#Θεώρημα 5.3: Έστω g μία υπερβολική ευθεία στο μοντέλο του Poincare με οριακά σημεία τα U, V. Τότε ο τόπος όλων των σημείων που ισαπέχουν από την g είναι ένα ευκλείδειο κυκλικό τόξο που περνά από τα σημεία U και V.

Στην Απόλυτη Γεωμετρία οι παράλληλες ευθείες δεν ισαπέχουν απαραίτητα

Αυτό που προκύπτει ως μία άμεση σκέψη από το θεώρημα 5.3 είναι ότι τα θεωρήματα της Απόλυτης Γεωμετρίας δεν συνεπάγονται ότι οι παράλληλες ευθείες ισαπέχουν. Το θεώρημα 5.3 ισχύει σε αυτό το μοντέλο, όμως το μοντέλο αυτό δεν παύει να είναι μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας και αυτή εμπεριέχει την Απόλυτη Γεωμετρία. Άρα είναι το πέμπτο αξίωμα αυτό που προσθέτει την ιδιότητα και όχι η Απόλυτη Γεωμετρία σε συνδυασμό με τα θεωρήματα που επάγονται από αυτή.

Η έννοια του κύκλου στο μοντέλο του Poincare

Θα διερευνήσουμε την έννοια του κύκλου στο μοντέλο αξιοποιώντας όμως τις ιδιότητες του μοντέλου, δηλαδή δεδομένα που προκύπτουν από τις ιδιότητες του επιπέδου. Άρα θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού του τόπου των σημείων ενός κύκλου ως κατασκευή εντός του μοντέλου και για αυτό το λόγο θα το περιγράψουμε λεπτομερώς στο κεφάλαιο των κατασκευών (κεφάλαιο 6). Παραθέτουμε όμως το σχετικό θεώρημα:

#Θεώρημα 5.4:

Στο μοντέλο του Poincare ο τόπος των σημείων που ισαπέχουν (με τον υπερβολικό ορισμό του μήκους) από ένα σημείο M_h είναι ένας ευκλείδειος κύκλος. Παρόλα αυτά το ευκλείδειο κέντρο M_e και το υπερβολικό κέντρο M_h του κύκλου δεν συμπίπτουν.

Σημείωση: Η έννοια του κύκλου υπάρχει και στα άλλα μοντέλα της Υπερβολικής Γεωμετρίας, για αυτό άλλωστε χαρακτηρίσαμε το παραπάνω ως θεώρημα, όμως τα σημεία ενός κύκλου δεν έχουν τον ίδιο τόπο σε κάθε μοντέλο.

#Θεώρημα 5.5:

Στο μοντέλο του Poincare υπάρχουν τρίγωνα που δεν έχουν περιγεγραμμένο κύκλο.

Ισότητα και ομοιότητα

Υπάρχουν 5 θεωρήματα ισότητας, τα οποία ανήκουν στην Απόλυτη Γεωμετρία. Η Υπερβολική Γεωμετρία έχει ένα επιπλέον θεώρημα ισότητας, το οποίο δεν το συναντάμε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

#Θεώρημα 5.6 (6^o θεώρημα ισότητας):

Στην Υπερβολική Γεωμετρία δύο τρίγωνα με ίσες ανά δύο γωνίες είναι ίσα.

Απόδειξη:

1. Έστω ABC και A'B'C' δύο τρίγωνα με ίσες ανά δύο γωνίες (εικόνα 5.2).

2. Έστω ότι οι πλευρές AC και A'C' δεν είναι ίσες. Άρα υπάρχει σημείο A_1 τέτοιο ώστε $A_1C \equiv A'C'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $A_1C < AC$.

3. Υπάρχει B_1 τέτοιο ώστε $CB_1 \equiv C'B'$. Φυσικά το B_1 και το B δε μπορούν να ταυτίζονται γιατί τότε θα συνέβαινε το εξής: $\varDelta A'B'C' \equiv \varDelta A_1B_1C$ (από 1ο θεώρημα ισότητας, λόγω $B_1C \equiv B'C'$, $A_1C \equiv A'C'$, και $\angle(BC,CA) \equiv \angle(B_1C,CA_1)$) και αφού επιπλέον B_1 ταυτίζεται με B θα ισχύει ότι $\varDelta A'B'C' \equiv \varDelta A_1BC$. Αυτό σημαίνει ότι $\angle(A_1B,BC) \equiv \angle(AB,BC)$. Αυτό όμως παραβιάζει το αξίωμα III.4 διότι και οι δύο γωνίες είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία AB (ή A_1B, αφού έχουν τον ίδιο φορέα)

4.A.1. Ας υποθέσουμε ότι $CB_1 > CB$.

4.A.2. Τότε το τμήμα A_1B_1 πρέπει να τέμνει το τμήμα AB σε ένα σημείο D εσωτερικό του τμήματος AB, από το II.4 (εφαρμογή στο τρίγωνο ABC με τέμνουσα την B_1A_1)

4.A.3. Εφόσον οι ευθείες A_1B και A_1B_1 κόβονται από την τέμνουσα AC και $\angle(BA_1,A_1C) \equiv \angle(B_1A_1,A_1C)$, που είναι οι εσωτερικές εναλλάξ γωνίες, το θεώρημα 2.7

επιβάλει να μην τέμνονται οι A_1B και A_1B_1, κάτι που δεν ισχύει. (Και το θεώρημα 2.7 είναι θεώρημα Απόλυτης Γεωμετρίας).

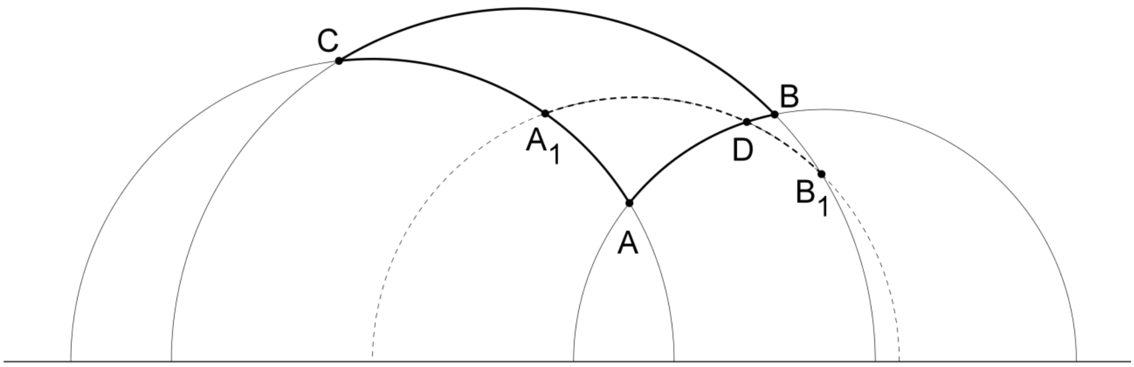
4.B.1. Ας υποθέσουμε ότι $CB_1 < CB$.

4.B.2. Το τρίγωνο ABC μπορεί να χωριστεί στα τρίγωνα ABB_1, A_1B_1A, και A_1B_1C. Λόγω ιδιότητας προσθετικότητας του ελλείμματος :

$\delta(ABC) = \delta(ABB_1) + \delta(A_1B_1A) + \delta(A_1B_1C)$ Από την οποία έπεται ότι

$\delta(ABC) > \delta(A_1B_1C)$ (σχέση 4.B.2)

4.B.3 Από υπόθεση ισχύει ότι $\varDelta A'B'C' \equiv \varDelta A_1B_1C$ και από 4.B.2 συνεπάγεται ότι $\delta(ABC) > \delta(A'B'C)$. Αυτό δίνει ότι οι γωνίες των τριγώνων ABC και A'B'C δεν είναι ίσες το οποίο είναι άτοπο.



Εικόνα 5.2: 6^{ο} θεώρημα ισότητας τριγώνων

Σημείωση: Η απόδειξη είναι γενική αλλά για την οπτικοποίηση χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο του Poincare.

Μία διαφορά Ευκλείδειας με Υπερβολική Γεωμετρία.

Το παραπάνω θεώρημα υπάρχει μόνο στην Υπερβολική και όχι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Αυτό που ουσιαστικά υποδηλώνει αυτό το θεώρημα είναι ότι δεν υπάρχουν όμοια τρίγωνα στην Υπερβολική Γεωμετρία αλλά μόνο ίσα τρίγωνα. Συνεπώς οι έννοιες της ομοιότητας και των αναλογιών δεν έχουν θέση στην Υπερβολική Γεωμετρία.

Εμβαδόν τριγώνου

Υπάρχει στην Ευκλείδεια Γεωμετρία μία συνάρτηση εμβαδού F που εφαρμόζεται στα τρίγωνα και ικανοποιεί δύο ιδιότητες:

1) Ίσα τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν

2) Αν ένα τρίγωνο διαιρεθεί σε πεπερασμένο αριθμό (έστω k) υποτριγώνων $A_vB_vC_v$, χρησιμοποιώντας k τέμνουσες ευθείες, τότε ισχύει:

$$F(ABC) = \sum_{1}^{k} F(A_\nu B_\nu C_\nu)$$

,όπου $1 < k < n, n \in N$ (σχέση 5.1)

Στην Υπερβολική Γεωμετρία υπάρχει συνάρτηση που ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες και είναι το έλλειμμα τριγώνου. Η ιδιότητα της προσθετικότητας του ελλείμματος δικαιολογεί τον παρακάτω ορισμό:

#Ορισμός 5.6: εμβαδόν υπερβολικού τριγώνου

Με τον όρο εμβαδόν ενός τριγώνου ABC γωνιών α, β, γ εννοούμε το έλλειμμα δ του τριγώνου:

$$\delta_{ABC} = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Λόγοι διαφοροποίησης ορισμού εμβαδού στις δυο Γεωμετρίες

α) Πως γίνεται το εμβαδόν μιας επιφάνειας να εξισώνεται με μία γωνία;

Είναι προφανές με ποιο τρόπο τα ευθύγραμμα τμήματα οριοθετούν μια επιφάνεια, συγκεκριμένα εδώ, ενός τριγώνου. Άρα είναι αναμενόμενο ο τύπος για το εμβαδόν της επιφάνειας ενός τριγώνου να περιέχει τα μήκη των πλευρών του. Πως γίνεται όμως το εμβαδόν να εξισώνεται με μία γωνία όπως συμβαίνει στην Υπερβολική Γεωμετρία;

Μία γωνία σχηματίζεται από δύο ημιευθείες με κοινό άκρο. Η γωνία περικλείει μία επιφάνεια στο εσωτερικό της η οποία οριοθετείται από τις δύο αυτές ημιευθείες. Υπό αυτή την οπτική, μία γωνία οριοθετεί μία επιφάνεια και μπορεί να αποτελέσει εργαλείο για τον υπολογισμό του εμβαδού της.

β) Γιατί το εμβαδόν ενός τριγώνου καθορίζεται πλήρως από τις γωνίες του;

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία τρεις γωνίες δεν προσδιορίζουν πλήρως ένα τρίγωνο. Αντιθέτως, τρεις γωνίες προσδιορίζουν πολλά τρίγωνα τα οποία βέβαια είναι μεταξύ τους όμοια. Παρότι όμοια, είναι ελεύθερα να έχουν διαφορετικά μήκη πλευρών (για την ακρίβεια θα πρέπει να είναι ανάλογα) άρα καταλαμβάνουν επιφάνεια διαφορετικής έκτασης, έχουν δηλαδή διαφορετικό εμβαδόν.

Στην Υπερβολική Γεωμετρία όμως δεν υπάρχει η έννοια της ομοιότητας και της αναλογίας. Οποιαδήποτε δύο τρίγωνα με ίσες, ανά ζεύγη, γωνίες είναι ίσα. Άρα ένα τρίγωνο προσδιορίζεται πλήρως από τις τρεις γωνίες του. Έτσι οι τρείς γωνίες προσδιορίζουν πλήρως το εμβαδόν της επιφάνειας που θα καταλαμβάνει ένα υπερβολικό τρίγωνο.

Θεωρήματα σχετικά με το εμβαδόν ενός τριγώνου

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από τον τύπο:

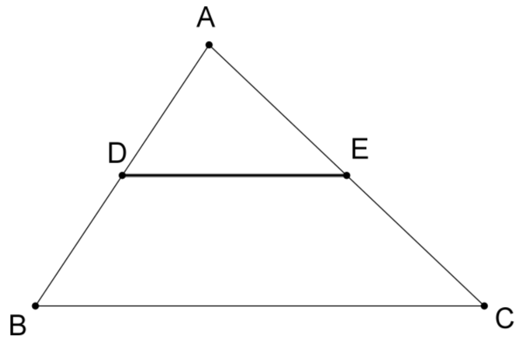
$F\,(ABC) = {}^{1}/_{2} \cdot \beta \cdot \upsilon,$ όπου β=βάση του τριγώνου, υ=ύψος του τριγώνου

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη σχέση συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα με ίδια βάση και ίδιο ύψος έχουν ίδιο εμβαδόν.

Παρότι η σχέση 5.1 και η παρατήρηση η οποία βασίζεται σε αυτήν δεν ισχύει στην Υπερβολική Γεωμετρία, ισχύει μια παρόμοια. Για να την διατυπώσουμε θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε την έννοια της «μεσοευθείας».

#Ορισμός 5.7: **μεσοευθεία**

Έστω ένα τρίγωνο ABC με πλευρές AB, AC, BC. Έστω D, E τα μέσα των πλευρών AB και AC αντίστοιχα (εικόνα 5.3). Θα αποκαλούμε «μεσοευθεία» η οποία αντιστοιχεί στην BC, το ευθύγραμμο τμήμα DE.



Εικόνα 5.3: Μεσοευθεία τριγώνου

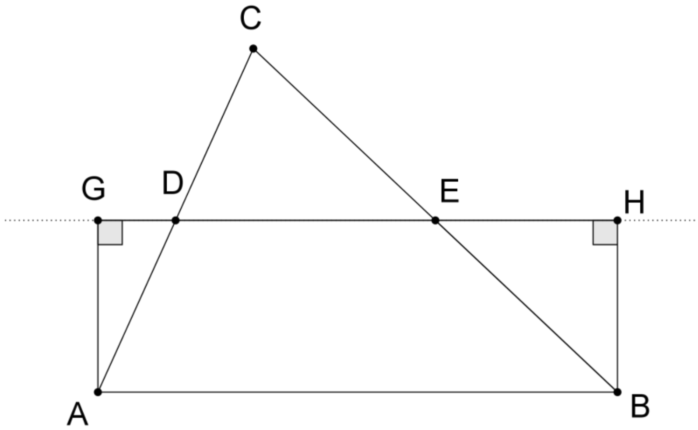
#Θεώρημα 5.7:
Δύο τρίγωνα με ίσες βάσεις και ίσες μεσοευθείες έχουν ίσο εμβαδόν.

Απόδειξη 5.7:

1. Έστω το τετράπλευρο της εικόνας 5.4, το οποίο είναι τετράπλευρο Saccheri με τις γωνίες στο G και στο H ορθές, και τις πλευρές AG και BH ίσες.
2. Οι γωνίες GAB και HBA είναι ίσες, δηλαδή ισχύει $\angle GAB \equiv \angle HBA$. Έστω W/2 η τιμή τους.

3.Επειδή το τετράπλευρο ABHG έχει προκύψει από το τρίγωνο ABC, στο οποίο τα D και E είναι τα μέσα των AC και BC, εύκολα έχουμε πως W είναι το άθροισμα των γωνιών του ABC,

4.συνεπώς όλα τα τρίγωνα με βάση ίσου μήκους και μεσοευθεία ίσου μήκους δίνουν το ίδιο Saccheri τετράπλευρο, με την ίδια GAB γωνία. Οπότε όλα θα έχουν το ίδιο άθροισμα γωνιών και άρα το ίδιο έλλειμμα, οπότε και εμβαδό.



Εικόνα 5.4: Θεώρημα 5.7

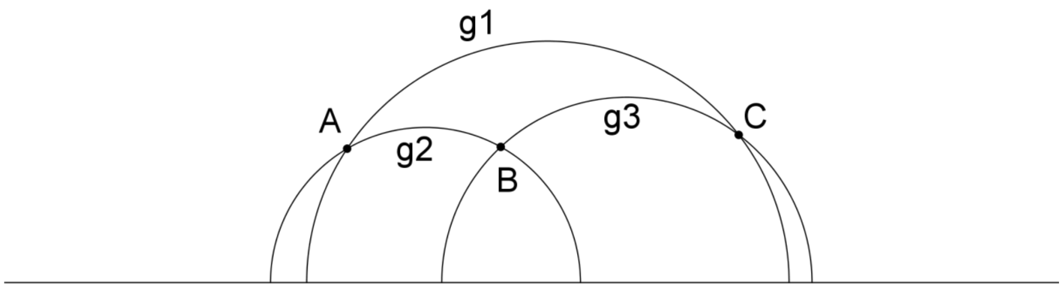
Σημείωση: Το θεώρημα 5.7 ισχύει και στην Ευκλείδεια αλλά και στην Υπερβολική Γεωμετρία. Για αυτό και για την απόδειξη του χρησιμοποιήσαμε μόνο εργαλεία Απόλυτης Γεωμετρίας ώστε να εξασφαλίσουμε την καθολικότητα της ισχύος του. Το τετράπλευρο Saccheri που χρησιμοποιήσαμε δεν περιορίζει κάπως την καθολικότητα της απόδειξης καθώς δεν εκφράζει συγκεκριμένες ιδιότητες εντός κανενός μοντέλου. Απεναντίας είναι ένα τετράπλευρο το οποίο ακόμη και δίχως να το ταυτίσουμε με κάποια εικόνα σε οποιοδήποτε επίπεδο μπορεί να κατασκευαστεί πλήρως θεωρητικά ικανοποιώντας ιδιότητες της Απόλυτης Γεωμετρίας μονάχα.

6ο Κεφάλαιο: Κατασκευές στο μοντέλο του Poincare

Δύο πολύ απλές κατασκευές εντός του μοντέλου:

i) κατασκευή ενός υπερβολικού τριγώνου

Σχεδιάζουμε ένα υπερβολικό τρίγωνο με τρόπο ανάλογο του τρόπου σχεδιασμού ενός ευκλείδειου τριγώνου. Το τρίγωνο σχηματίζεται από τρείς υπερβολικές ευθείες g_1, g_2, g_3 και έχει κορυφές τα σημεία τομής των g_1, g_2, g_3, έστω A, B, C. Τα σημεία A, B και C οφείλουν να αποτελούν σημεία του υπερβολικού επιπέδου ώστε το ABC να αποτελεί ένα υπερβολικό τρίγωνο (εικόνα 6.1).



Εικόνα 6.1: Υπερβολικό τρίγωνο

ii) χάραξη υπερβολικής ευθείας που περνά από δύο δοσμένα υπερβολικά σημεία

1. Έστω δύο δοσμένα σημεία A, B και το ευκλείδειο ευθύγραμμο τμήμα AB που τα ενώνει.
2. Έστω M το ευκλείδειο μέσο του AB
3. Έστω ε η ευκλείδεια μεσοκάθετη ευθεία του ευθύγραμμου τμήματος, και έστω C το σημείο όπου τέμνει η ε την οριακή ευθεία.
4. Με κέντρο το C χαράσουμε ευκλείδειο κύκλο με ακτίνα το CM.

Το ημικύκλιο που ανήκει στο υπερβολικό επίπεδο περιέχει τα A, B και αποτελεί τη ζητούμενη υπερβολική ευθεία.

Κατασκευή μεσοκάθετης ευθείας ενός τμήματος

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναφερθήκαμε στην κατασκευή επιπλέον αντικειμένων (πέραν των βασικών αντικειμένων που ορίσαμε εξ αρχής) εντός του μοντέλου. Μία εξ αυτών ήταν η κατασκευή μεσοκάθετου τμήματος (5ο κεφάλαιο), και την παραθέτουμε παρακάτω:

Κατασκευή (εικόνα 6.2):

1. Έστω υπερβολικό τμήμα AB και g η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το AB. Έστω C το σημείο τομής της ευκλείδειας ευθείας που περνάει από τα A και B, με την οριακή ευθεία.
2. Έστω CD η εφαπτομένη στη g.
3. Έστω h το ευκλείδειο ημικύκλιο με κέντρο το C και ακτίνα το ευκλείδειο τμήμα CD, το οποίο όμως ημικύκλιο βρίσκεται στο υπερβολικό επίπεδο.
4. Ισχυρισμός 1: Η h είναι κάθετη στην AB.

Απόδειξη ισχυρισμού 1:

Α. Στο ευκλείδειο επίπεδο η h είναι ημικύκλιο και το CD ακτίνα της. Άρα η εφαπτομένη στο σημείο D είναι κάθετη στο CD. Από την κατασκευή το CD είναι εφαπτόμενο στο AB.

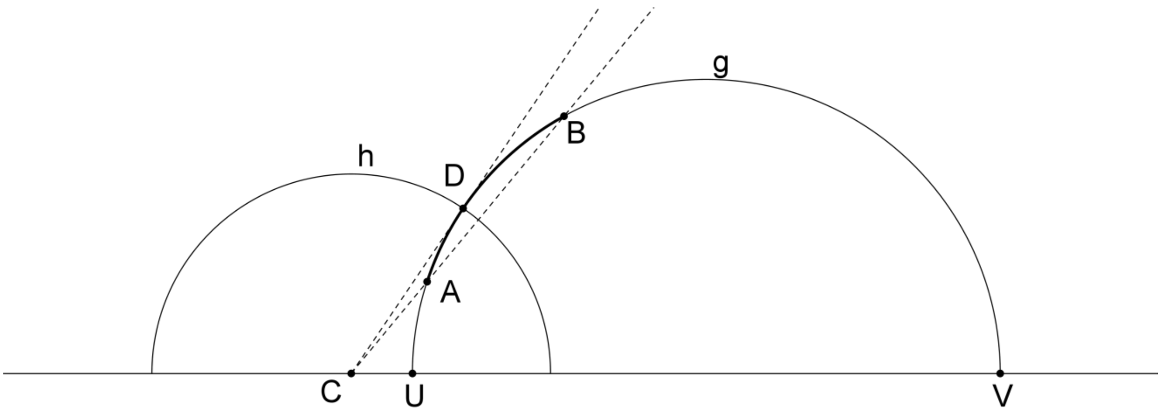
Β. Άρα οι εφαπτόμενες των AB και CD στο σημείο D τέμνονται κάθετα.

Γ. Ισχυρισμός 2: $AD \equiv BD$

Απόδειξη ισχυρισμού 2:

Υπάρχει θεώρημα της Απόλυτης Γεωμετρίας το οποίο δίνει ότι το A είναι η ανάκλαση του B στην h, το B είναι η ανάκλαση του A στην h, και τέλος το D είναι η ανάκλαση του εαυτού του στην h. Σύμφωνα με το 4.1 θεώρημα $L_{AD} = -L_{DB}$ και άρα βάση του ορισμού ισότητας τμημάτων, $AD \equiv BD$.

Άρα η h είναι η διάμεσος του AB που το τέμνει κάθετα. Η h είναι η υπερβολική μεσοκάθετος ευθεία στο υπερβολικό τμήμα AB.



Εικόνα 6.2: μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

Προσδιορισμός μέσου ενός τμήματος

Ο προσδιορισμός του μέσου ενός τμήματος είναι εντελώς άμεσος από το προηγούμενο. Πρόκειται για το σημείο D της προηγούμενης κατασκευής.

Κατασκευή κύκλου στο μοντέλο με δοσμένο κέντρο M_h

Είναι αναγκαίο προτού παρουσιάσουμε την κατασκευή κύκλου στο μοντέλο να ορίσουμε κάποιες έννοιες.

#**Ορισμός 6.1: δύναμη σημείου ως προς κύκλο**

Έστω κύκλος K, P τυχαίο σημείο και Q_1 και Q_2 τα σημεία όπου οι εφαπτόμενες από το P εφάπτονται στον K. Το τετράγωνο του PQ_1(ή του PQ_2) καλείται «δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο K».

#Ορισμός 6.2: ριζικός άξονας

Έστω κύκλοι K_1 και K_2. Ο «ριζικός άξονας» των K_1 και K_2 είναι ο τόπος όλων των σημείων που έχουν την ίδια δύναμη ως προς K_1 και K_2.

#Ορισμός 6.3: Ελλειπτική δέσμη κύκλων

Το σύνολο των κύκλων K_ε που περνούν από δύο σταθερά σημεία A και B καλείται

«ελλειπτική δέσμη κύκλων».
Σημείωση: Η ευθεία ΑΒ είναι ο κοινός ριζικός άξονας($p_ε$) όλων των κύκλων της δέσμης.

#Ορισμός 6.4: Υπερβολική δέσμη κύκλων

Το σύνολο $K_υ$ όλων των κύκλων με κέντρα στο ριζικό άξονα ρε του Κε οι οποίοι είναι κάθετοι στους κύκλους του Κε καλείται «υπερβολική δέσμη κύκλων».
Σημείωση: Ο κοινός ριζικός άξονας των κύκλων του $K_υ$ είναι η μεσοκάθετος ευθεία του τμήματος ΑΒ.

Ο κύκλος στο μοντέλο Poincare

Μία ιδιότητα του κύκλου είναι ότι σχηματίζει ορθές γωνίες με όλες τις ακτίνες του. Αν βρούμε μία καμπύλη στο μοντέλο του Poincare που ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα θα έχουμε βρει τα στοιχεία που αποτελούν τα σημεία του κύκλου σε αυτό το μοντέλο.

Ισχυρισμός 1: Η καμπύλη αυτή υπάρχει και είναι οι ευκλείδειοι κύκλοι της υπερβολικής δέσμης κύκλων (εικόνα 6.3)

Απόδειξη ισχυρισμού 1:

1. Έστω M_h υπερβολικό σημείο.
2. Έστω h οι υπερβολικές ευθείες που περνούν από το Mh.
3. Με ανάκλαση στην οριακή ευθεία προκύπτουν:

   α) το μη-υπερβολικό σημείο M_h'

   β) και ευκλείδειοι κύκλοι που περνούν από τα σημεία M_h και M_h'.

   Άρα προκύπτει στο ευκλείδειο επίπεδο η ελλειπτική δέσμη κύκλων με σταθερά τα σημεία M_h και M_h'.
4. Από την ελλειπτική δέσμη κύκλων μπορεί να προκύψει η υπερβολική δέσμη κύκλων.
5. Έστω Κ κύκλος της υπερβολικής δέσμης. Έστω h_1 ένας κύκλος της ελλειπτικής δέσμης (που στο υπερβολικό επίπεδο είναι ευθεία που περνάει από το M_h). Και έστω τέλος A_1 το σημείο τομής των Κ και h_1.
6. Ισχυρισμός 2: Το M_h είναι το κέντρο του κύκλου Κ.

   Απόδειξη ισχυρισμού 2:

   6.α. Εφόσον το Κ ανήκει στην υπερβολική δέσμη κύκλων και το M_h ανήκει στην h_1, άρα το M_hA_1 και ο Κ τέμνονται κάθετα, άρα η M_hA_1 είναι ακτίνα

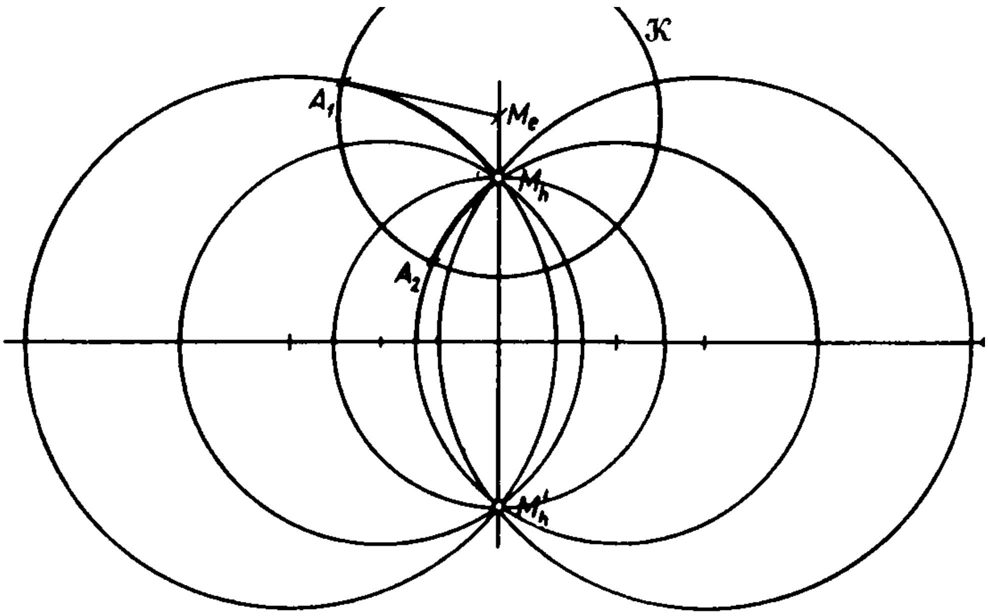
   6.β.1. Έστω A_2 άλλο σημείο του Κ

   6.β.2. Έστω g η υπερβολική διχοτόμος της γωνίας $A_1M_hA_2$

   6.β.3. Με ανάκλαση στη g ο Κ δίνει τον εαυτό του. Το σημείο M_h μένει σταθερό και η υπερβολική ευθεία που περνά από το M_hA_1 δίνει την M_hA_2. Άρα το A_2 αντιστοιχίζεται στο A_1 και έτσι $M_hA_1 \equiv M_hA_2$.

   Τέλος απόδειξης ισχυρισμού 2.
7. Οι ευκλείδειοι κύκλοι της υπερβολικής δέσμης έχουν ως κέντρο το M_h. Οι ακτίνες τους θα είναι κομμάτια των κύκλων της ελλειπτικής δέσμης, άρα κάθε κύκλος στην υπερβολική δέσμη θα σχηματίζει ορθές γωνίες με όλες τις ακτίνες του.

Τέλος απόδειξης ισχυρισμού 1.



Εικόνα 6.3: Η έννοια του κύκλου στο μοντέλο Poincare

Επιλύσιμα προβλήματα κατασκευών

Μία λίστα προβλημάτων που μπορούμε να λύσουμε με ό,τι διαθέτουμε μέχρι τώρα είναι η εξής:

1)Σε σημείο P υπερβολικής ευθείας μπορούμε να σχεδιάσουμε τμήμα ίσο με δοσμένο τμήμα AB

2)Κατασκευή κοινής κάθετης σε υπερβολικές παράλληλες

3)Διπλασιασμός δοσμένου τμήματος

4)Κατασκευή υπερβολικού κύκλου με δοσμένο υπερβολικό κέντρο P, ο οποίος περνάει από δοσμένο σημείο Q

5)Εύρεση κέντρου δοσμένου υπερβολικού κύκλου

6)Ημιδιπλασιασμός δοσμένης γωνίας

7)Κατασκευή ευθείας κάθετης σε υπερβολική ευθεία, η οποία περνάει από σημείο P

Ευκλείδεια εργαλεία στις υπερβολικές κατασκευές

Στις κατασκευές μας έχουμε χρησιμοποιήσει ευκλείδεια σημεία, ευκλείδειο χάρακα και ευκλείδειο διαβήτη. Για την σχεδίαση των υπερβολικών κύκλων και των υπερβολικών ευθειών είναι θεμιτό να χρησιμοποιούμε όσα και όποια ευκλείδεια εργαλεία μας βοηθάνε. Αυτό είναι αναμενόμενο βάση της μορφής των αντικειμένων μας μέσα στο μοντέλο. Για παράδειγμα μία υπερβολική ευθεία που περνάει από δύο υπερβολικά σημεία μπορεί να σχεδιαστεί χρησιμοποιώντας ευκλείδειο διαβήτη και σημείο που δεν ανήκει στο μοντέλο, δηλαδή στοιχείο της οριακής ευθείας.

Η κατασκευή μεσοκάθετης τμήματος είναι εφικτή μόνο στο μοντέλο του Poincare;

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν οι κατασκευές οι οποίες αξιοποιούν τις ιδιότητες του μοντέλου έχουν ισχύ πέραν του μοντέλου, δηλαδή στην Υπερβολική Γεωμετρία συνολικά. Ο προβληματισμός είναι ανάλογος του προβληματισμού που προέκυψε και στο προηγούμενο κεφάλαιο για την ισχύ των θεωρημάτων στην Υπερβολική Γεωμετρία. Μπορούμε να πούμε ότι ισχύουν ανάλογοι περιορισμοί για την κατασκευή αντικειμένων όπως και στην απόδειξη των θεωρημάτων.

Περιορισμοί στις υπερβολικές κατασκευές

Οι κατασκευές μέσα στη Γεωμετρία θεωρούνται προβλήματα. Τα προβλήματα αυτά θεωρούνται λυμένα αν τα αναγκαία για τη λύση του προβλήματος σημεία αποτελούν σημεία τομής υπερβολικών γραμμών και υπερβολικών κύκλων. Αυτό βρίσκεται σε αντιστοιχία με το τι συμβαίνει στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ας ανατρέξουμε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ώστε να αναλογιστούμε ποια ήταν εκεί τα εργαλεία μας για μια τυχαία κατασκευή. Ο ευκλείδειος χάρακας κατασκεύαζε ευκλείδειες ευθείες και ο ευκλείδειος διαβήτης κατασκεύαζε ευκλείδειους κύκλους. Ό,τι κατασκευάζαμε με αυτά τα εργαλεία ξέραμε ότι αποτελεί εφικτή κατασκευή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

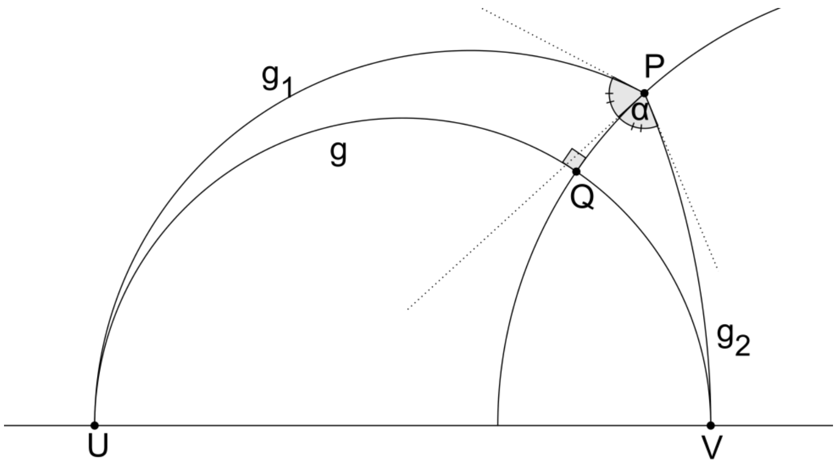
Στην Υπερβολική Γεωμετρία δεν έχουμε έναν υπερβολικό χάρακα και έναν υπερβολικό διαβήτη. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε αυτά τα εργαλεία δίχως να ασχοληθούμε με το πώς τα αποκτήσαμε. Τότε μπορούμε με αυτά να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας κατασκευής όχι απλά μέσα στο μοντέλο αλλά μέσα στην Υπερβολική Γεωμετρία. Ουσιαστικά σε αυτήν τη διαδικασία απόδειξης επικαλούμαστε μόνο γενικές ιδιότητες της Γεωμετρίας και όχι ειδικές του μοντέλου. Οι γενικές ιδιότητες εκφράζονται, όπως έχουμε δει, μέσω των αξιωμάτων και των θεωρημάτων για αυτό όταν αποδεικνύουμε ότι μία κατασκευή είναι εφικτή στη Γεωμετρία μας θα χρησιμοποιούμε πρακτικά το σύστημα αξιωμάτων.

Επιλύσιμα και μη επιλύσιμα προβλήματα βάση του περιορισμού

Όλα τα προβλήματα που ανήκουν στην Απόλυτη Γεωμετρία μπορούν να λυθούν βάση του περιορισμού. Υπάρχουν όμως προβλήματα που ο περιορισμός στα υπερβολικά εργαλεία δυσκολεύει πολύ την επίλυση. Τέτοια είναι:

1) η κατασκευή κοινής κάθετης σε υπερβολικές παράλληλες
2) η κατασκευή τριγώνου με δοσμένες γωνίες
3) η κατασκευή γωνίας παραλληλισμού

#Ορισμός 7.1: γωνία παραλληλισμού



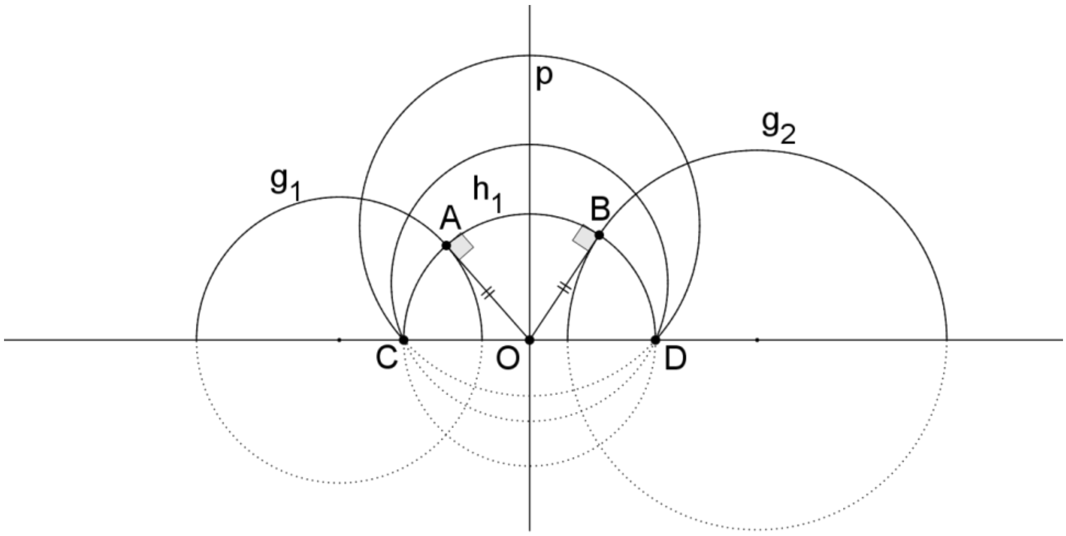
Εικόνα 6.4: Γωνία παραλληλισμού

Έστω P σημείο, g υπερβολική ευθεία, και PQ η κάθετη από το P στην g. Έστω g_1, g_2 οι οριακές υπερβολικές παράλληλες της g που περνάνε από το P (εικόνα 6.4).
Τότε $\angle(g_1, PQ) \equiv \angle(g_2, PQ)$ και η γωνία $\alpha = \angle(g_1, PQ)$ καλείται «γωνία παραλληλισμού».

Οι δύο τρόποι κατασκευής στο παράδειγμα κατασκευής της κοινής κάθετης σε δύο υπερβολικές παράλληλες

α) Κατασκευή με χρήση μοντέλου (εικόνα 6.5):

1. Έστω g_1 και g_2 δύο υπερβολικές παράλληλες. (δηλαδή κομμάτια ευκλείδειων κύκλων K_1, K_2 που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο)
2. Έστω p ο ριζικός άξονας των K_1, K_2 (ο οποίος είναι κάθετος από ένα σημείο με ίδια δύναμη ως προς τους κύκλους K_1, K_2, στην οριακή ευθεία).
3. Έστω O το σημείο τομής του ριζικού άξονα με την οριακή ευθεία.
4. Έστω οι ευκλείδειες εφαπτόμενες από το O στις g_1, g_2 και A, B τα σημεία επαφής. Τα OA και OB έχουν ίδιο μήκος (από τον ορισμό του ριζικού άξονα).
5. Έστω h_1 η υπερβολική ευθεία η οποία περνάει από τα A, B. Η h_1 είναι κάθετη ταυτόχρονα στις g_1 και g_2.



Εικόνα 6.5: Κατασκευή κοινής κάθετης σε δύο υπερβολικές παράλληλες (χρήση μοντέλου)

Σημείωση: Γιατί λέμε ότι η απόδειξη βασίζεται στο μοντέλο; Γιατί αξιοποιούμε ότι οι υπερβολικές ευθείες είναι κομμάτια κύκλων και έτσι μπορούμε να μιλήσουμε για ριζικό άξονα και τις ιδιότητες που κουβαλάει η Ευκλείδεια Γεωμετρία για τους κύκλους.

β)Κατασκευή με χρήση αξιωμάτων (εικόνα 6.6)

Υπενθύμιση: Σε ένα τετράπλευρο Saccheri ABDC όπου $AC \equiv BD$ και οι γωνίες στις κορυφές A, B είναι ορθές τότε η ευθεία που ενώνει τα μέσα E, F των πλευρών AB, και CD τέμνει κάθετα τις πλευρές AB και CD.
Άρα για να κατασκευαστεί κοινή κάθετη σε υπερβολικές παράλληλες χρειάζεται απλά να κατασκευαστεί τετράπλευρο Saccheri με κορυφές επί των υπερβολικών παραλλήλων.

1. Έστω a και b οι δοσμένες υπερβολικές παράλληλες ευθείες.
2. Έστω A, C δύο σημεία στην a.

3. Έστω B, D τα σημεία στα οποία οι κάθετες (στην b) ευθείες από το A και το C τέμνουν την b.

4.α. Αν $AB \equiv CD$, τότε το ACDB είναι ήδη το ζητούμενο Saccheri τετράπλευρο. Έτσι η ευθεία που ενώνει τα μέσα των πλευρών AC και BD είναι η ζητούμενη κοινή κάθετη.

4.β.1 Σε αντίθετη περίπτωση, έστω $AB > CD$. Τότε υπάρχει σημείο E επί της AB τέτοιο ώστε $EB \equiv CD$.

4.β.2 Έστω α_1 η γωνία που σχηματίζουν το CD τμήμα με την ημιευθεία επί της α η οποία δεν περιέχει το σημείο A.

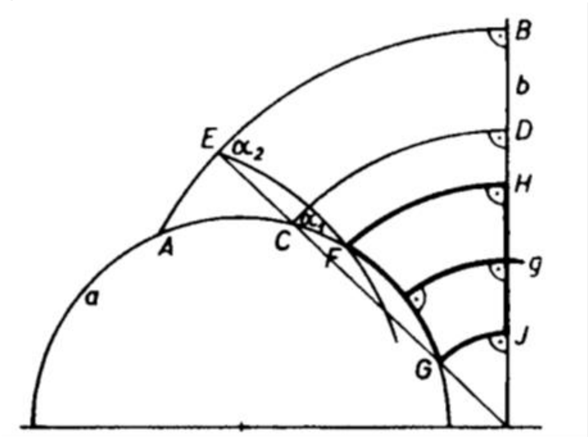
4.β.3. Σχεδιάζουμε γωνία $\alpha_2 \equiv \alpha_1$ με μία πλευρά το τμήμα EB. Έστω F το σημείο όπου η δεύτερη πλευρά της γωνίας α_2 τέμνει την ευθεία α.

4.β.4. Έστω σημείο G τέτοιο ώστε $CG \equiv EF$.

4.β.5. Έστω οι κάθετες στην b από τα σημεία F, G. Και έστω H, J τα σημεία τομής των κάθετων με την b.

4.β.6. Τα τετράπλευρα CDJG και EBHF είναι ίσα (από ισότητες τριγώνων). Άρα $JG \equiv HF$.

4.β.7. Το FGJH είναι Saccheri και η ευθεία που ενώνει τα μέσα των FG,HJ είναι η ζητούμενη κοινή κάθετη g.



Εικόνα 6.6: Κατασκευή κοινής κάθετης σε υπερβολικές παράλληλες (χρήση αξιωμάτων)

Σημείωση: Χρησιμοποιούμε το μοντέλο Poincare στην κατασκευή με το δεύτερο τρόπο καθαρά και μόνο για την οπτικοποίηση, δίχως να αξιοποιούνται οι χωρικές ιδιότητες του μοντέλου. Η απόδειξη δηλαδή θα μπορούσε να υλοποιηθεί δίχως οπτικοποίηση, δεν είναι αναγκαία.

Η απόδειξη με τον πρώτο τρόπο πιστοποιεί τη δυνατότητα κατασκευής εντός του συγκεκριμένου μοντέλου. Δεν είναι όμως αρκετή για τη διεξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τη δυνατότητα κατασκευής στο εκάστοτε μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Αντιθέτως, η απόδειξη με το δεύτερο τρόπο είναι ικανή να διασφαλίσει τη δυνατότητα κατασκευής σε κάθε μοντέλο της Γεωμετρίας αυτής. Το κατά πόσον τα αντικείμενα και οι κατασκευές που επικαλείται η απόδειξη αυτή είναι το ίδιο απλά για κάθε μοντέλο είναι υπό εξέταση. Η δυνατότητα όμως κατασκευής δεν είναι αμφισβητήσιμη.

7ο Κεφάλαιο: Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρία στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είμαστε εξοικειωμένοι με την τριγωνομετρία, δηλαδή με το σύνολο σχέσεων μεταξύ των πλευρών και των γωνιών ενός τριγώνου και με κανόνες πράξεων, γνωστούς ως τριγωνομετρικές ταυτότητες. Βασιζόμενοι στις τριγωνομετρικές σχέσεις και ταυτότητες μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα στοιχεία ενός τριγώνου γνωρίζοντας κάποια μόνο από αυτά.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ένα τρίγωνο ABC του ευκλείδειου επιπέδου, ορθογώνιο στην κορυφή C. Ας συμβολίσουμε με α, β τις γωνίες στις κορυφές A, B αντίστοιχα και με BC, AC, AB τις πλευρές απέναντι από τις κορυφές A, B, C αντίστοιχα. Τότε θα ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC}$$

Επίσης θα ισχύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις όπως οι εξής:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

$$\sin(R - \alpha) = \cos \alpha$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε όλα τα στοιχεία του τριγώνου αν μας δοθούν οι δύο πλευρές του ή αν μας δοθούν μία πλευρά και μία γωνία του.

Τριγωνομετρία στην Υπερβολική Γεωμετρία

Επιθυμούμε να βρούμε σχέσεις ώστε να έχουμε την ίδια ικανότητα και στο υπερβολικό επίπεδο. Για την ακρίβεια, υποθέτοντας κατ' αναλογία ένα υπερβολικό τρίγωνο ABC ορθογώνιο στην κορυφή C, επιθυμούμε να είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε όλα τα στοιχεία του αν μας δοθούν οποιεσδήποτε δύο από τις ποσότητες AB, BC, AC, α, β.

Εργαλεία για την παραγωγή των τριγωνομετρικών σχέσεων

Στην προσπάθεια μας θα αξιοποιήσουμε ως εργαλείο τις λεγόμενες υπερβολικές συναρτήσεις, τις οποίες ορίζουμε ως εξής:

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Πρόκειται για τις συναρτήσεις «υπερβολικό ημίτονο» και «υπερβολικό συνημίτονο» οι οποίες συνδέονται με την παρακάτω σχέση:

$$\cosh t^2 - \sinh t^2 = 1$$

Σημείωση: Η σχέση αυτή έπεται άμεσα από τους δύο ορισμούς.

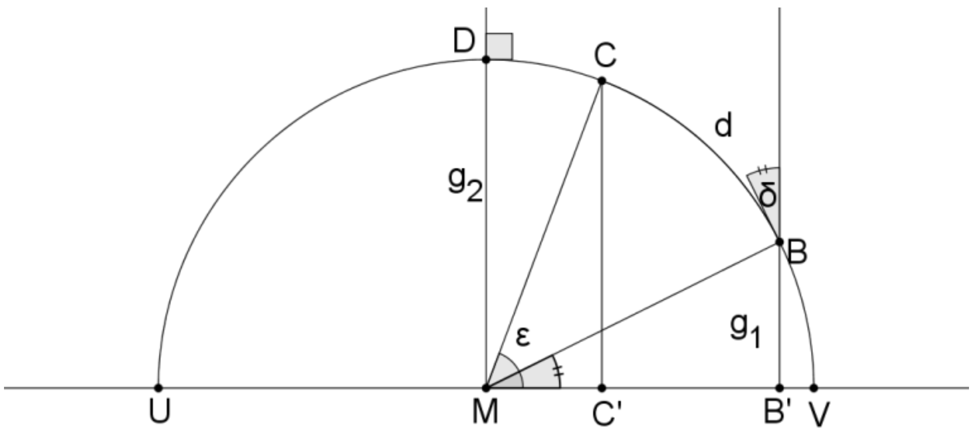
Ορίζουμε επίσης τις συναρτήσεις «υπερβολική εφαπτομένη», και «υπερβολική συνεφαπτομένη»:

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

$$\coth t = \frac{1}{\tanh t}$$

Επέκταση ορισμού υπερβολικού μήκους

Έστω το υπερβολικό τμήμα BC της εικόνας 7.1.



Εικόνα 7.1: Επέκταση του ορισμού του υπερβολικού τμήματος

Αν συμβουλευτούμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία της εικόνας μπορούμε να έχουμε για το υπερβολικό μήκος του τμήματος BC (το οποίο εδώ το θεωρούμε προσημασμένο) την παρακάτω έκφραση:

$$L_{BC} = \frac{1}{2} \cdot \log(B'C'UV) = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{(1 - \cos \varepsilon) \cdot (1 + \cos \delta)}{(1 + \cos \varepsilon) \cdot (1 - \cos \delta)}$$

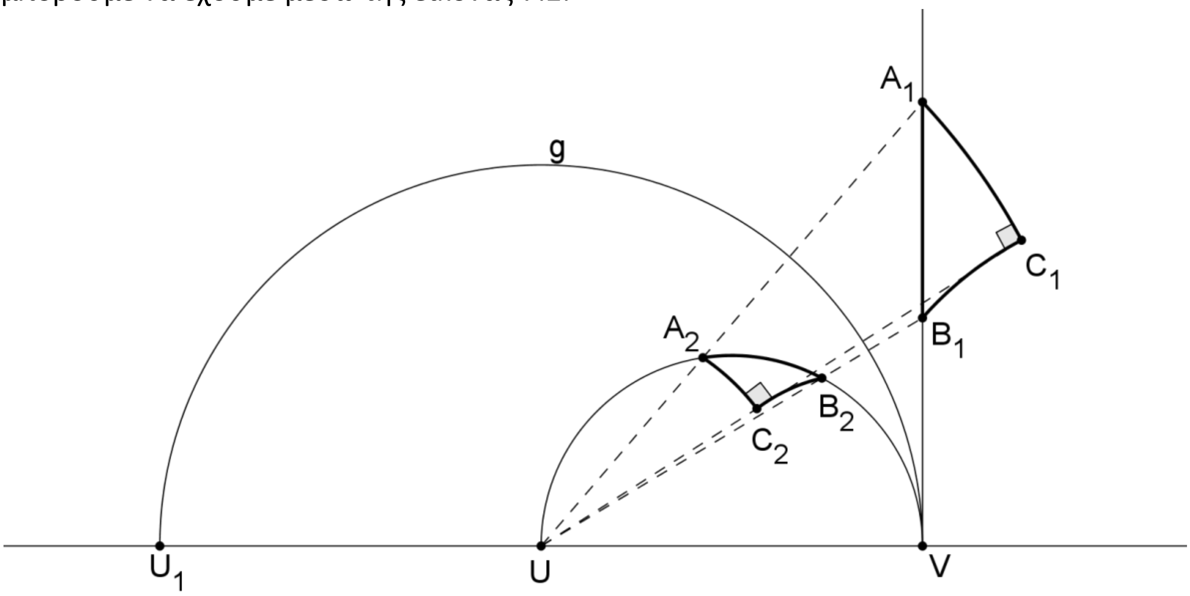
,όπου $\varepsilon = \angle CMV$, και $\delta = \angle BMV$

Μπορούμε να υπολογίσουμε και την υπερβολική εφαπτομένη του μήκους BC (σχέση 7.1):

$$\tanh BC = \frac{e^{2 \cdot BC} - 1}{e^{2 \cdot BC} + 1} = \frac{\cos \delta - \cos \varepsilon}{1 - \cos \delta \cdot \cos \varepsilon}$$

Το τρίγωνο πάνω στο οποίο θα δουλέψουμε

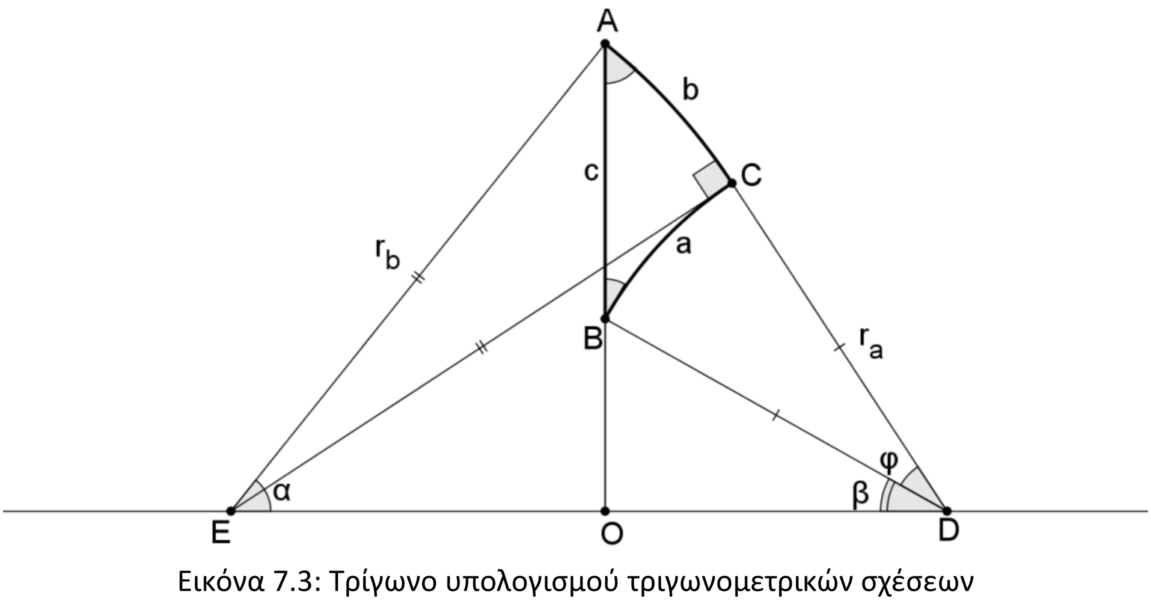
Θα δομήσουμε τις σχέσεις μας δουλεύοντας σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το οποίο έχουμε τοποθετήσει σε βολικό για τους υπολογισμούς μας σημείο του υπερβολικού επιπέδου. Το τρίγωνο αυτό προκύπτει από ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο του υπερβολικού επιπέδου μέσω μετασχηματισμών ανάκλασης που δεν αλλάζουν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και μας δίνουν τρίγωνο ίσο με το αρχικό. Μία εποπτεία της διαδικασίας μπορούμε να έχουμε μέσω της εικόνας 7.2:



Εικόνα 7.2: Μετασχηματισμός τριγώνου υπολογισμού τριγωνομετρικών σχέσεων

Σημείωση: Το τρίγωνο $A_1B_1C_1$ είναι το βολικό για εμάς ορθογώνιο τρίγωνο και προκύπτει από το τυχαίο ορθογώνιο $A_2B_2C_2$. Τα τρίγωνα $A_1B_1C_1$ και $A_2B_2C_2$ είναι ίσα. Οι γωνίες στις κορυφές C_2, C_1 είναι ορθές.

Κάνοντας επιπλέον επιτρεπτούς μετασχηματισμούς ώστε να διατηρηθεί η ισότητα του νέου τριγώνου με το πρωταρχικό και προσθέτοντας σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο μας μπορούμε να έχουμε το τρίγωνο ABC, ίσο με το $A_2B_2C_2$. Η εικόνα για τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν είναι η 7.3:



Εικόνα 7.3: Τρίγωνο υπολογισμού τριγωνομετρικών σχέσεων

Θεωρούμε ευκλείδειο κύκλο που περιέχει την πλευρά BC. Η ευκλείδεια ακτίνα του είναι η r_a και το ευκλείδειο κέντρο του το σημείο D(ζ,0). Θεωρούμε επίσης ευκλείδειο κύκλο που περιέχει την πλευρά AC. Η ευκλείδεια ακτίνα του είναι η r_b και το ευκλείδειο κέντρο του το σημείο E(ξ,0).
Σημείωση: Αρχή των αξόνων θεωρείται το O και για τα μήκη ισχύουν τα εξής: EO=ξ, OB=1, OD=ζ, και OA=η

Οι 3 βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις στο μοντέλο Poincare

- **πρώτη βασική τριγωνομετρική σχέση**

Θα δουλέψουμε στο τρίγωνο ABC και θα αξιοποιήσουμε ιδιότητες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
1. Εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ECD δίνει:
$$r_b{}^2 = ED^2 - r_a{}^2$$
και εφόσον ισχύει ότι $r_b{}^2 = \xi^2 + \eta^2$ αλλά και ότι $r_a{}^2 = \zeta^2 + 1$ έχουμε:
$$\xi^2 + \eta^2 = (\zeta + \xi)^2 - (\zeta^2 + 1)$$
ή αλλιώς
$\eta^2 + 1 = 2\xi\zeta$, **σχέση 7.2**
2. Για το υπερβολικό μήκος της υποτείνουσας AB, βάση του ορισμού 4.1 ισχύει:
$$L_{AB} = AB = \log\frac{\eta}{1} = \log\eta$$
και έτσι για το υπερβολικό συνημίτονο της AB έχουμε:
$$\cosh AB = \frac{\eta^2 + 1}{2\eta}$$
3. Εφόσον από το σχήμα μας για τις γωνίες α, β έχουμε ότι $\alpha = \angle AEO$, και $\beta = \angle BDO$, θα ισχύει ότι:
$\cot\alpha = \frac{\xi}{\eta}$, και $\cot\beta = \frac{\zeta}{1} = \zeta$
Συνδυάζοντας τους τελευταίους σχέσεις με την σχέση 7.2 παίρνουμε την πρώτη βασική τριγωνομετρική σχέση στο μοντέλο του Poincare:

$\cosh AB = \cot\alpha \cdot \cot\beta$, **σχέση 7.3**

- **δεύτερη βασική τριγωνομετρική σχέση**

1. Υπολογίζουμε την υπερβολική εφαπτομένη της AB με τη βοήθεια και πάλι της σχέσης 7.2:
$$\tanh AB = \frac{\xi \cdot \zeta - 1}{\xi \cdot \zeta}$$
2. Ξαναγράφουμε τη σχέση 7.1 για την υπερβολική εφαπτομένη της BC προσαρμόζοντάς την στο τρίγωνο ABC της τελευταίας εικόνας αξιοποιώντας παράλληλα την Ευκλείδεια Γεωμετρία:

$$\tan BC = \frac{\cos(\pi-\varphi)-\cos(\pi-\beta)}{1-\cos(\pi-\varphi)\cdot\cos(\pi-\beta)} = \frac{\cos\beta-\cos\varphi}{1-\cos\beta\cdot\cos\varphi}$$

3. Βάση της Γεωμετρίας της εικόνας έχουμε επίσης:

$$\cos\beta = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}, cos\,\varphi = \frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{\xi+\zeta},$$

Επομένως

$$\tanh BC = \frac{\xi\zeta-1}{\xi\cdot\sqrt{1+\zeta^2}}$$

Ο συνδιασμός όλων των παραπάνω σχέσεων δίνει τη δεύτερη βασική τριγωνομετρική σχέση του μοντέλου Poincare:

$\tanh BC = \tanh AB \cdot \cos\beta$, **σχέση 7.4**

- **Τρίτη βασική τριγωνομετρική σχέση**

Και τέλος αντικαθιστώντας το τμήμα BC με το τμήμα AC, καθώς και τη γωνία β με τη γωνία α έχουμε την τρίτη σχέση του μοντέλου:

$\tanh AC = \tanh AB \cdot \cos\alpha$, **σχέση 7.5**

Οι σχέσεις 7.3, 7.4, 7.5 περιέχουν όλη την τριγωνομετρία του μοντέλου του Poincare για το υπερβολικό επίπεδο. Οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές σχέσεις μπορούν να παραχθούν από τις τρείς αυτές βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις. Γι αυτό το λόγο τις χαρακτηρίσαμε και ως «βασικές».

Επιπλέον τριγωνομετρικές σχέσεις στο μοντέλο

Με αλγεβρική δουλειά πάνω στις βασικές σχέσεις μπορούμε επιπλέον να έχουμε και τις εξής σχέσεις:

$$\sin\alpha = \frac{\sinh BC}{\sinh AB}$$

$$\sin\beta = \frac{\sinh AC}{\sinh AB}$$

$$\cos\alpha = \sin\beta\cdot\cosh BC$$

$$\cos\beta = \sin\alpha\cdot\cosh AC$$

$$\cosh AB = \cosh BC\cdot\cosh AC$$

$$\tan\alpha\cdot\sinh AC = \tanh BC$$

$\tan \beta \cdot \sinh BC = \tanh AC$

Οι σχέσεις αυτές συνδέουν μεταξύ τους τα μεγέθη των πλευρών AB, BC, AC, και τα μεγέθη των γωνιών α, β ενός ορθογώνιου στο C τριγώνου ABC. Έτσι αν δοθούν οποιαδήποτε δύο από αυτά τα μεγέθη, μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα για το τρίγωνο.

Τριγωνομετρικές σχέσεις τυχαίου τριγώνου

Οι τριγωνομετρικές σχέσεις για τυχαίο τρίγωνο προκύπτουν από τις προηγούμενες σχέσεις που εξετάσαμε για το ορθογώνιο τρίγωνο.

Νόμος ημιτόνων:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sinh BC}{\sinh AC}$$

Νόμος συνημιτόνων:

$$\cosh AB = \cosh BC \cdot \cosh AB - \sinh BC \cdot \sinh AB \cdot \cos \beta$$

$$\cosh AC = \cosh BC \cdot \cosh AC - \sinh BC \cdot \sinh AC \cdot \cos \gamma$$

$$\cosh BC = \cosh AC \cdot \cosh AB - \sinh AC \cdot \sinh AB \cdot \cos \alpha$$

Υπάρχει και μία σχέση η οποία μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τις πλευρές ενός τριγώνου δοθέντων των γωνιών του. Πρόκειται για τον νόμο των συνημιτόνων για τις γωνίες ενός τριγώνου.

Νόμος συνημίτονων για τις γωνίες ενός τριγώνου:

$$\cosh AC = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}$$

$$\cosh AB = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\cosh BC = \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}$$

Επιβεβαίωση ιδιοτήτων του υπερβολικού επιπέδου μέσω της τριγωνομετρίας

Κάποιοι από τους σχέσεις τους οποίους παρουσιάσαμε επιβεβαιώνουν ιδιότητες του υπερβολικού επιπέδου των οποίων την ισχύ έχουμε ήδη πιστοποιήσει μέσω των αξιωμάτων στα προηγούμενα κεφάλαια.

- **1$^{\eta}$ Επιβεβαίωση**:

Η σχέση 7.3 επιβεβαιώνει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός υπερβολικού τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές γωνίες.

1. Έχουμε ότι $\cosh BC = \cot \alpha \cdot \cot \beta$
2. Εφόσον $\cosh BC > 1$ παίρνουμε ότι $\cot \alpha \cdot \cot \beta > 1$

   Επομένως $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > \tan \beta$
3. Εφόσον η εφαπτομένη είναι μονοτονική συνάρτηση θα ισχύει ότι

$\frac{\pi}{2} - \alpha > \beta$, δηλαδή:

$$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} < \pi$$

- **2η επιβεβαίωση**:

Οι νόμοι συνημίτονων για τις γωνίες ενός τριγώνου επιβεβαιώνουν ότι δύο τρίγωνα με ίσες γωνίες στην Υπερβολική Γεωμετρία δε μπορούν παρά να είναι ίσα.

Εμβέλεια ισχύος των τριγωνομετρικών σχέσεων

Παρότι η μελέτη των σχέσεων έχει γίνει εντός του μοντέλου του Poincare, μπορούμε να καταλήξουμε στις ίδιες σχέσεις ξεκινώντας από τα αξιώματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Από τη στιγμή που αυτό είναι εφικτό, οι σχέσεις αυτές ισχύουν εν γένει στην Υπερβολική Γεωμετρία και όχι μόνο στο μοντέλο που έχουμε μελετήσει. Τη δύσκολη αυτή δουλειά, την εύρεση των τριγωνομετρικών σχέσεων που διέπουν την Υπερβολική Γεωμετρία, βασιζόμενοι σε σύστημα αξιωμάτων για την Υπερβολική Γεωμετρία υλοποίησαν πρώτοι οι Bolyai και Lobachevski.

Εναλλακτικός τύπος υπολογισμού εμβαδού ενός υπερβολικού τριγώνου

Το εμβαδόν ενός τριγώνου στο ευκλείδειο επίπεδο υπολογίζεται βάση του τύπου:

$F\ (ABC) = {}^{1}\!/_{2} \cdot \beta \cdot \upsilon$, όπου β= βάση του τριγώνου, υ= ύψος του τριγώνου

Θα θέλαμε να βρούμε έναν ανάλογο τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδόν ενός τριγώνου στο υπερβολικό επίπεδο. Δηλαδή έναν τύπο ο οποίος θα μας δίνει το εμβαδόν ενός υπερβολικού τριγώνου όταν γνωρίζουμε τις πλευρές του. Ξέρουμε ήδη πώς να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός τριγώνου όταν γνωρίζουμε μόνο τις γωνίες του, και αυτό γιατί ένα υπερβολικό τρίγωνο καθορίζεται πλήρως από τις γωνίες του. Εφόσον οι τριγωνομετρικές σχέσεις συνδέουν τις γωνίες ενός υπερβολικού τριγώνου με τις πλευρές του, είμαστε σίγουροι ότι μπορούμε να έχουμε ένα τύπο για το εμβαδόν του τριγώνου που περιέχει μόνο τις πλευρές του.

Ο ζητούμενος τύπος είναι ο εξής:

$$\tan\frac{F}{2} = \tanh AC \cdot \tanh BC$$

,όπου F η συνάρτηση εμβαδού και AC, BC οι κάθετες πλευρές ορθογώνιου στο C τριγώνου του υπερβολικού επιπέδου.

Σημείωση: Για μικρές πλευρές AC, BC ισχύει ότι η συνάρτηση του εμβαδού του τριγώνου είναι ανάλογη του γινομένου των κάθετων πλευρών, δηλαδή

$$F \sim (AC) \cdot (BC)$$

Ενώ η αντίστοιχη ευκλείδεια έκφραση είναι

$$F\ (ABC) = {}^{1}\!/_{2} \cdot (AC) \cdot (BC)$$

Η αναλογία ανάμεσα στους δύο σχέσεις είναι ίσως μεγαλύτερη από την αναμενόμενη.

8ο Κεφάλαιο: Ελλειπτική Γεωμετρία

Η Ελλειπτική Γεωμετρία προέκυψε από την Ευκλείδεια με τρόπο ανάλογο με αυτόν της Υπερβολικής

Κατά την προσπάθεια να αποδειχθεί ότι το αξίωμα των παραλλήλων δεν είναι ανεξάρτητο από τα άλλα αξιώματα, γεννήθηκαν Γεωμετρίες πέραν της Ευκλείδειας. Το αξίωμα παραλληλίας διατυπώνεται ως εξής από το Meschkowski: «Έστω α μία ευθεία και Α ένα σημείο εκτός της α. Τότε υπάρχει μία ακριβώς ευθεία (στο επίπεδο που ορίζει η ευθεία α και το σημείο Α) η οποία περνάει από το Α και δεν τέμνει την α. Αυτή η ευθεία καλείται «παράλληλος» στην α διαμέσου του Α».

Η Υπερβολική Γεωμετρία γεννήθηκε από την άρνηση του αξιώματος των παραλλήλων. Η Υπερβολική Γεωμετρία, πέραν των αξιωμάτων της Απόλυτης Γεωμετρίας, δέχεται ως αξίωμα την πρόταση-ιδιότητα: «από σημείο εκτός ευθείας άγονται τουλάχιστον δύο παράλληλες ως προς την πρώτη ευθείες» (**αξίωμα Va**). Δεν είναι δύσκολο να συνειδητοποιήσει κανείς ότι ακριβώς λόγο της διατύπωσης του 5 αξιώματος η άρνηση του δεν είναι μοναδική. Άρνηση του 5ου αξιώματος αποτελεί επίσης και η ιδιότητα-πρόταση: «από σημείο εκτός ευθείας δε διέρχεται καμία παράλληλη ως προς την πρώτη ευθεία». Αν δεχτούμε ως αξίωμα αυτή, ή ακόμη καλύτερα την εξής πρόταση: «οποιεσδήποτε δύο ευθείες στο επίπεδο τέμνονται» (**αξίωμα Vb**), μπορούμε να φτιάξουμε μία επιπλέον Γεωμετρία, πέραν της Υπερβολικής, διαφορετική από την Ευκλείδεια. Η Γεωμετρία αυτή ονομάζεται «Ελλειπτική».

Το σύστημα αξιωμάτων της Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

Είναι εύλογο, λόγο του ανάλογου τρόπου σύλληψης τους, να δημιουργηθεί μία αναλογία ανάμεσα στην Υπερβολική και την Ελλειπτική Γεωμετρία και ως προς το σύστημα αξιωμάτων που τις αποτελούν. Θα μπορούσε δηλαδή κάποιος να υποθέσει ότι το σύστημα αξιωμάτων της Ελλειπτικής Γεωμετρίας αποτελείται από το σύνολο αξιωμάτων που είναι γνωστό ως Απόλυτη Γεωμετρία και επιπλέον την εναλλακτική διατύπωση της άρνησης του 5ου αξιώματος.

Όμως οι προκαταρκτικές κουβέντες περί πληρότητας, ανεξαρτησίας και συνέπειας σε ένα σύστημα αξιωμάτων ισχύουν για κάθε Γεωμετρία και συνεπώς πρέπει να πληρούνται και εδώ. Η παραπάνω επιλογή αξιωμάτων δημιουργεί ένα σύστημα αξιωμάτων ασυνεπές. Για παράδειγμα σύμφωνα με το θεώρημα 2.8 «Από δοσμένο σημείο εκτός δοσμένης ευθείας μπορούμε πάντα να φέρουμε μία ευθεία παράλληλη ως προς την πρώτη ευθεία». Είναι προφανές ότι το 2.8 και το Vb έρχονται σε άμεση αντίθεση. Το θεώρημα όμως 2.8 είναι θεώρημα της Απόλυτης Γεωμετρίας, προκύπτει δηλαδή από τα αξιώματα που θεωρήθηκαν κομμάτι του συστήματος αξιωμάτων της Ελλειπτικής. Αυτό κάνει το σύστημα που περιγράψαμε ασυνεπές.

Χρειάζεται λοιπόν μία προσοχή στην επιλογή των αξιωμάτων τα οποία αποτελούν το σύστημα της Ελλειπτικής Γεωμετρίας. Για την ακρίβεια χρειάζεται τροποποίηση στα αξιώματα διάταξης ώστε το σύστημα αξιωμάτων να είναι πλήρες, ανεξάρτητο και συνεπές.

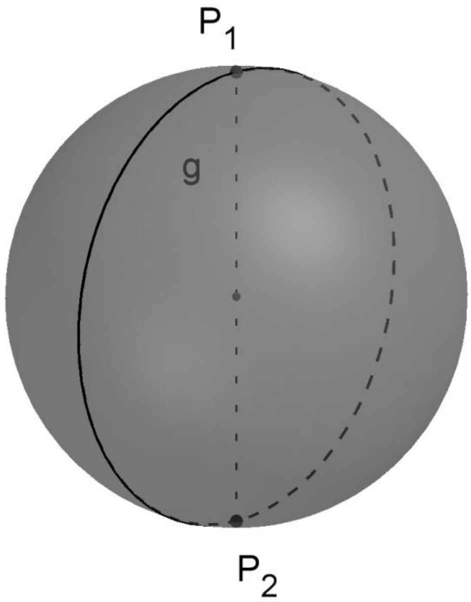
Αναλυτική παρουσίαση του συστήματος αξιωμάτων δεν θα γίνει. Θα δοθεί μεγαλύτερη έμφαση σε ένα μοντέλο της Ελλειπτικής Γεωμετρίας και ιδιότητες που αυτό αναδεικνύει.

Μοντέλο για την Ελλειπτική Γεωμετρία

Ένα μοντέλο της Ελλειπτικής Γεωμετρίας είναι το μοντέλο της επιφάνειας σφαίρας το οποίο αναφέραμε στο $2^{ο}$ κεφάλαιο.

Θεωρούμε μία σφαίρα. Η ακτίνα της σφαίρας δεν παίζει κανένα ρόλο και μπορεί να θεωρηθεί μοναδιαία (εικόνα 8.1). Τα αντικείμενα της Ελλειπτικής Γεωμετρίας εντός του μοντέλου αυτού μορφώνονται ως εξής:

- **ελλειπτικό επίπεδο** θα είναι η επιφάνεια της σφαίρας
- **ελλειπτική ευθεία** θα είναι κάθε μέγιστος κύκλος επί της σφαίρας
- **ελλειπτικό σημείο** θα είναι το ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων επί της σφαίρας. Θα συμβολίζουμε το ζεύγος δύο αντιδιαμετρικών σημείων επί της σφαίρας με ένα γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου. Για παράδειγμα αν τα P_1 και P_2 είναι αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας, θα αποτελούν το ελλειπτικό σημείο P.

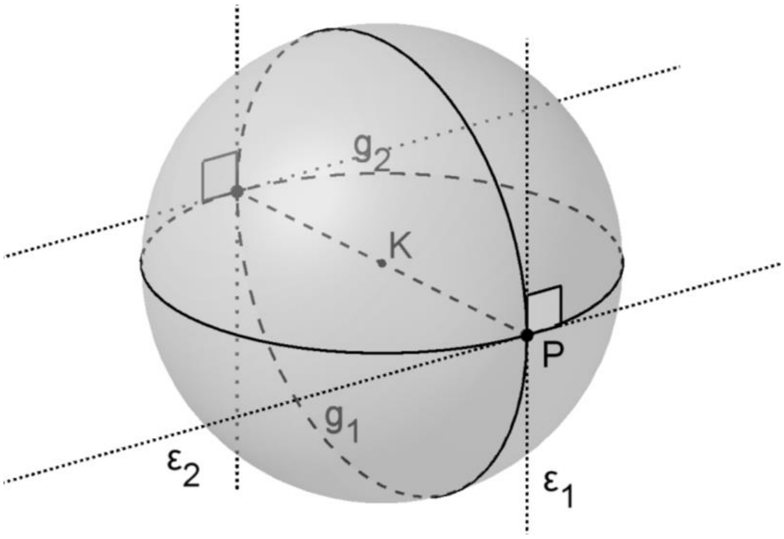


Εικόνα 8.1: Μοντέλο Ελλειπτικής Γεωμετρίας

Παρατήρηση: Από την περιγραφή του μοντέλου είναι άμεσα προφανές πως μπορεί να υπάρξει Γεωμετρία όπου οποιεσδήποτε δύο ευθείες τέμνονται, αφού οι ευθείες του μοντέλου είναι μέγιστοι κύκλοι σφαίρας.

Μέτρηση γωνιών

Μετράμε τις γωνίες στο ελλειπτικό επίπεδο με τον ευκλείδειο τρόπο. Έστω οι ελλειπτικές ευθείες g_1 και g_2. Έστω P το ελλειπτικό σημείο τομής των ευθειών. Έστω οι ευκλείδειες εφαπτόμενες των g_1 και g_2 στο ελλειπτικό σημείο P, δηλαδή οι ευκλείδειες εφαπτόμενες στους μέγιστους κύκλους g_1, g_2 στα ευκλείδεια σημεία της σφαίρας P_1 ή P_2 (εικόνα 8.2). Η γωνία που σχηματίζεται από τις εφαπτόμενες στο P, μετρημένη σε rad, είναι η γωνία των δύο ελλειπτικών ευθειών g_1, g_2 οι οποίες τέμνονται στο ελλειπτικό P.



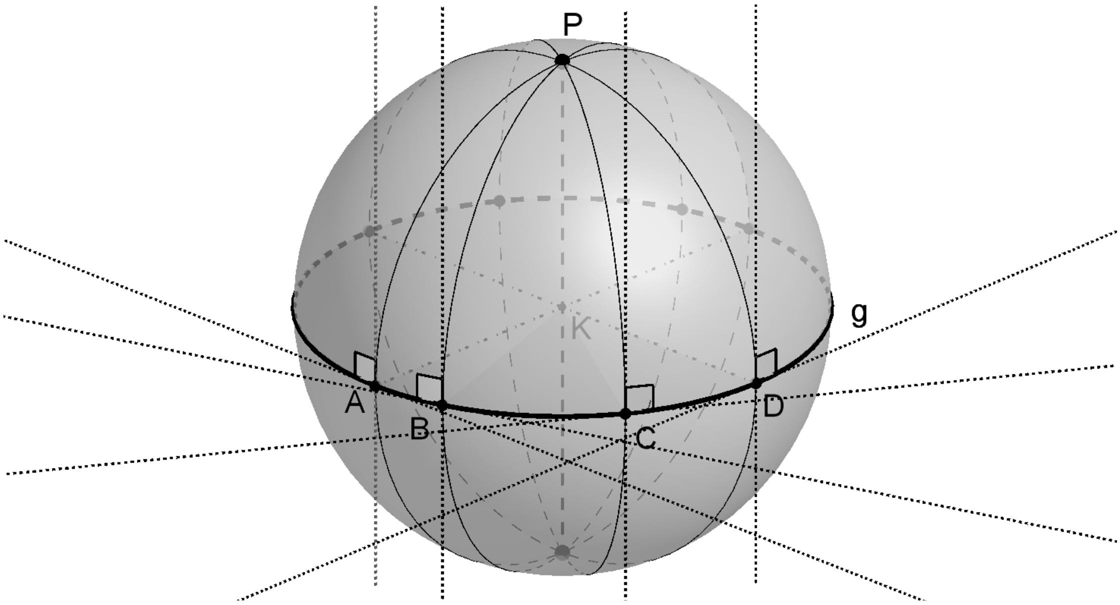
Εικόνα 8.3: μέτρηση γωνιών στο ελλειπτικό επίπεδο

Δύο καινούριες έννοιες: πόλος και πολικός κύκλος

Το θεώρημα της Απόλυτης Γεωμετρία 2.4, «Από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε ακριβώς μία κάθετη στη δοσμένη ευθεία», δεν ισχύει στην Ελλειπτική Γεωμετρία. Απεναντίας ισχύει ότι για δοσμένη ευθεία g υπάρχει ένα σημείο από το οποίο όλες οι ευθείες τέμνουν κάθετα την g.

#Ορισμός 8.1: **πόλος, πολικός κύκλος**

Έστω g ελλειπτική ευθεία, και έστω P ελλειπτικό σημείο τέτοιο ώστε κάθε ελλειπτική ευθεία από το P να τέμνει κάθετα την g. Ονομάζουμε το P «πόλο» της ελλειπτικής ευθείας g και την ελλειπτική ευθεία g την ονομάζουμε «πολικό άξονα» του σημείου P (εικόνα 8.4).
Σημείωση: Το P αποτελεί τομή της σφαίρας με τον κάθετο άξονα του επιπέδου που ορίζει η g και περνάει από το κέντρο της σφαίρα.

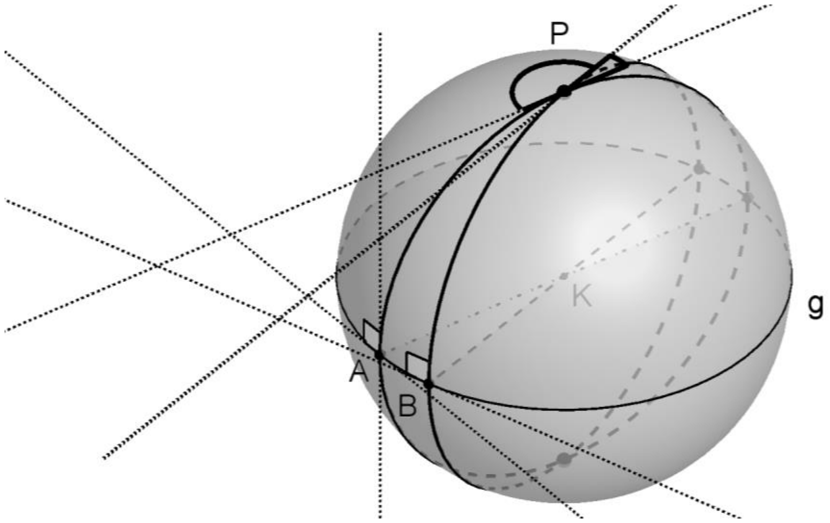


Εικόνα 8.4: πόλος και πολική ευθεία

Μέτρηση αποστάσεων

#Ορισμός 8.2 απόσταση σημείων

Έστω δύο ελλειπτικά σημεία Α, Β. Έστω g η ελλειπτική ευθεία που ορίζουν τα σημεία και έστω P ο πόλος της g. Έστω τέλος οι ελλειπτικές ευθείες που είναι κάθετες στη g στα ελλειπτικά σημεία Α, Β (εικόνα 8.5). Οι κάθετες αυτές δημιουργούν στον πόλο P δύο εφεξής παραπληρωματικές γωνίες. Από αυτές η μία ισούται το πολύ με π/2. Η γωνία αυτή μετρημένη σε rad είναι η απόσταση των σημείων Α, Β.



Εικόνα 8.5: Μέτρηση αποστάσεων στο ελλειπτικό επίπεδο

Άθροισμα γωνιών ελλειπτικού τριγώνου

Από τη Σφαιρική Γεωμετρία είναι γνωστό ότι το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές γωνίες. Άρα το ελλειπτικό τρίγωνο, έχει άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο από δύο ορθές.

Παρατήρηση: Εφόσον ένα ελλειπτικό τρίγωνο έχει άθροισμα γωνιών που υπερβαίνει τις δύο ορθές, δηλαδή ισχύει $\alpha+\beta+\gamma>\pi$, θα μπορούσαμε να ορίσουμε μία συνάρτηση ανάλογη της συνάρτησης «έλλειμμα» της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

#Ορισμός 8.3: **σφαιρικό πλεόνασμα**

Έστω τρίγωνο ABC με γωνίες α, β, γ. Το «σφαιρικό πλεόνασμα» του ABC είναι μία γωνία δ τέτοια ώστε:

$$\delta(ABC)=\alpha+\beta+\gamma-\pi$$

Έχοντας ορίσει το σφαιρικό πλεόνασμα ενός υπερβολικού τριγώνου μπορούμε να ορίσουμε μέσω αυτού και την έννοια του εμβαδού ενός ελλειπτικού τριγώνου.

#Ορισμός 8.4: **εμβαδόν τριγώνου**

Έστω τρίγωνο με γωνίες α, β, γ. Τότε ως εμβαδόν του τριγώνου ορίζουμε το σφαιρικό πλεόνασμα του τριγώνου.

Σημείωση: Παρατηρούμε μία αντιστοιχία με την Υπερβολική Γεωμετρία όπου το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το έλλειμμα του τριγώνου αυτού.

Συγκριτική επισκόπηση Ελλειπτικής-Υπερβολικής Γεωμετρίας

Η Υπερβολική και η Ελλειπτική Γεωμετρία διαφέρουν ως προς το επίπεδο μέσα στο οποίο μορφώνονται. Θα μπορούσαμε να προβάλουμε στερεογραφικά όλα πλην ενός τα σημεία της σφάιρας του μοντέλου μας στο ευκλείδειο επίπεδο παίρνοντας έτσι ένα νέο μοντέλο του ελλειπτικού επιπέδου. Όμως ακόμη και έτσι δε μπορούμε να έχουμε έναν ομοιομορφισμό ανάμεσα στο ευκλείδειο επίπεδο και στο ελλειπτικό επίπεδο. Ανάμεσα στην υπερβολικό και το ευκλείδειο επίπεδο έχουμε έναν ομοιομορφισμό και γι αυτό άλλωστε χαρακτηρίσαμε την Υπερβολική Γεωμετρία ως μη-Ευκλείδεια.

Παρά τη βασική αυτή διαφορά των δύο Γεωμετριών ως προς το επίπεδό τους, εντοπίζουμε και κοινές ιδιότητες. Μία από αυτές είναι η διαφοροποίηση του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου από την τιμή των δύο ορθών. Αυτό είναι κάτι που αναμέναμε αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου συνδέεται με το αξίωμα της παραλληλίας, του οποίου την άρνηση και οι δύο Γεωμετρίες δέχονται ως αξίωμα. Στην Ελλειπτική έχουμε κατασκευές και θεωρήματα αντίστοιχα με αυτά της Υπερβολικής. Επιπλέον οι τριγωνομετρικές σχέσεις στην Ελλειπτική Γεωμετρία μοιάζουν με αυτές της Υπερβολικής. Δεν θα αναλύσουμε τις κατασκευές, τις τριγωνομετρικές σχέσεις και τα θεωρήματα καθώς ξεφεύγουν από τα πλαίσια της απλής παρουσίασης της Ελλειπτικής Γεωμετρίας ως μίας εναλλακτικής Γεωμετρίας που δεν είναι Ευκλείδεια.

Επίλογος

Για πολλούς αιώνες ο πραγματικός κόσμος μας και ο χώρος του ήταν συνδεδεμένοι με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, αυτή άλλωστε ήταν και η μόνη υπαρκτή Γεωμετρία. Η ανακάλυψη των Γεωμετριών που δεν είναι Ευκλείδειες έσπασε αυτόν το ισχυρό δεσμό, και δημιούργησε προσοδοφόρους προβληματισμούς. Ίσως να μπορούμε να περιγράψουμε τον φυσικό χώρο με κάποια Γεωμετρία η οποία δεν είναι Ευκλείδεια.

Γιατί όμως λέμε «ίσως»; Που οφείλεται αυτή η αβεβαιότητά μας; Αυτό που εμείς μπορούμε να αντιληφθούμε είναι ένα μικρό κομμάτι του τρισδιάστατου χώρου μέσα στον οποίο ζούμε, δε γνωρίζουμε τις ιδιότητές του στα άκρα του. Για τη συμπεριφορά του στα άκρα μπορούμε μονάχα να κάνουμε υποθέσεις.

Η Γεωμετρία του σύμπαντος μας χαρακτηρίζεται από ομοιογένεια, και ισοτροπία. Βάση αυτών των ιδιοτήτων του κάθε μία από τις Ευκλείδεια, Υπερβολική, και Ελλειπτική Γεωμετρία είναι ικανές να το περιγράψουν. Επιλέγουμε πολλές φορές να δουλέψουμε με τη Γεωμετρία η οποία είναι πιο βολική και πιο παραγωγική. Από τη μία η Ευκλείδεια προσφέρει το εξής πλεονέκτημα: μπορούμε να αντιληφθούμε διαισθητικά τους μετασχηματισμούς που διατηρούν το μήκος(intuitive concepts of rigid motions). Όμως από την άλλη, η μελέτη της Υπερβολικής και της Ελλειπτικής Γεωμετρίας αποτελούν ένα καλό εργαλείο για την κατανόηση του χώρου μέσα στον οποίο ζούμε.

Η φυσική είναι η επιστήμη η οποία αξιοποιεί τη Γεωμετρία ως εργαλείο και επομένως η ύπαρξη Γεωμετριών που δεν είναι Ευκλείδειες την έχει επηρεάζει άμεσα. Η ανακάλυψη της μη-Ευκλείδειας Γεωμετρίας όμως άλλαξε δεδομένα ή δημιούργησε προβληματισμούς και σε άλλους κλάδους πέραν της φυσικής και πρωτίστως στον ίδιο τον κλάδο των μαθηματικών. Οι προβληματισμοί αυτοί αφορούσαν τη θεμελίωση των μαθηματικών και το μαθηματικό νόημα. Οι προβληματισμοί γύρω από αυτές τις έννοιες οδήγησαν στην κατανόηση και εξέλιξη τους.

Βιβλιογραφία

- Coxeter H.S.M., Non-Euclidean Geometry, University Press, 1942.
- Hartshorne R., Geometry - Euclid and Beyond, Springer-Verlag, 2000.
- Greenberg M.J., Euclidean and non-Euclidean Geometries, Developments and History, Freeman, 1993.
- Meschkowski H., Noneuclidean Geometry, Academic Press, 1964.
- Pogorelov A. Geometry, Mir Publishers, 1987.