Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή εφαρμοσμένων μαθηματικών και φυσικών επιστημών

Αραιή ανάκτηση και συμπλήρωση πίνακα

Μαθηματικά ζητήματα και αλγόριθμοι

Ιωάννης Χ. Τσακνάκης

Επιβλέπων : Μιχαήλ Λουλάκης
Αναπληρωτής καθηγητής, ΕΜΠ

Μεταπτυχιακή εργασία για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης στις
Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Αθήνα, Ελλάδα
Ιούλιος 2017

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή εφαρμοσμένων μαθηματικών και φυσικών επιστημών

Αραιή ανάκτηση και συμπλήρωση πίνακα

Μαθηματικά ζητήματα και αλγόριθμοι

Ιωάννης Χ. Τσακνάκης

BSc., Σχολή Ηλεκτρολόγων μηχανικών και μηχανικών υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο (2015)

Επιβλέπων : Μιχαήλ Λουλάκης
Αναπληρωτής καθηγητής, ΕΜΠ

(Υπογραφή)	(Υπογραφή)	(Υπογραφή)
.....	.....	.....
Μιχαήλ Λουλάκης	Δημήτρης Φουσκάκης	Φιλία Βόντα
Αναπληρωτής καθηγητής, ΕΜΠ	Αναπληρωτής καθηγητής, ΕΜΠ	Αναπληρώτρια καθηγήτρια, ΕΜΠ

Μεταπτυχιακή εργασία για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης στις
Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Αθήνα, Ελλάδα
7-7-2017

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή Μιχάλη Λουλάκη για τη συνεχή βοήθειά του κατά τους μήνες που δούλεψα πάνω σε αυτή τη μεταπτυχιακή εργασία, καθώς είχαμε συναντήσεις δύο φορές το μήνα για να συζητήσουμε την πρόοδό μου. Επιπλέον, είμαι ευγνώμων για την ελευθερία που μου παρείχε σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο δουλεύω και το θέμα αυτής της εργασίας. Ήταν πρόθυμος να με βοηθήσει αν και το κυρίως θέμα αυτής της εργασίας ήταν εκτός των κύριων ερευνητικών του ενδιαφερόντων.

Επιπλέον, αυτή η εργασία δεν θα ήταν πλήρης χωρίς τη συμβολή της ομάδας του Ινστιτούτου Αστρονομίας, Αστροφυσικής, Διαστημικών Εφαρμογών και Τηλεπισκόπισης (ΙΑΑΔΕΤ) του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών (ΕΑΑ). Συγκεκριμένα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ερευνητές Κωνσταντίνο Κουτρούμπα και Αθανάσιο Ροντογίαννη καθώς και το διδακτορικό φοιτητή Πάρη Γιαμπουρά. Είμαι ευγνώμων σε αυτούς για τις χρήσιμες συζητήσεις που είχαμε καθώς και για το χρόνο που ξόδεψαν μαζί μου στο χώρο του ΙΑΑΔΕΤ στην Πεντέλη βοηθώντας με στην ανάπτυξη του κεφαλαίου 6.

Abstract

The "data deluge" we are facing necessitates us to understand the structure of the data we acquire and process. For that reason we introduce the notion of *low-dimensional models*, i.e subsets of the signal space (the space in which the data/signals reside) with specific properties (structure). We restrict our attention on two signal models : sparse vectors and low-rank matrices. In sparse vector models we focus on the *sparse vector recovery problem*. This problem is about reconstructing/recovering a sparse signal after projecting it in a lower dimensional space. The important result we present and prove is the ability, under certain conditions, of certain classes of random matrices, such as Gaussian and subgaussian random matrices, to project sparse vectors to lower dimensional spaces in a way such that we can obtain successfully the original signal vectors (reconstruction) using suitable algorithms. In low-rank matrices we focus on a special recovery problem called *matrix completion*. In that problem we are given an incomplete matrix and the prior knowledge that this matrix is low-rank and we want to infer the values of the missing entries. In the last part of this thesis we introduce several algorithms for the matrix completion problem and assess them in synthetic and real data.

Keywords

Big Data, low-dimensional models, sparse vectors, low-rank matrices, sparse recovery, matrix completion, l_1 minimization, nuclear norm minimization, random projections, Gordon's lemma, concentration of measure, singular value thresholding

Περίληψη

Ο "*κατακλυσμός δεδομένων*" που αντιμετωπίζουμε μας αναγκάζει να κατανοήσουμε τη δομή των δεδομένων που αποκτούμε και επεξεργαζόμαστε. Για αυτό το λόγο εισάγουμε την έννοια των *μοντέλων χαμηλής διάστασης*, δηλαδή υποσυνόλων του χώρου σημάτων (ο χώρος μέσα στον οποίο κατοικούν τα δεδομένα/σήματα) με συγκεκριμένες ιδιότητες (δομή). Περιορίζουμε την προσοχή μας σε δύο μοντέλα σημάτων : αραιά διανύσματα και πίνακες χαμηλού βαθμού. Στα μοντέλα αραιών διανυσμάτων επικεντρωνόμαστε στο πρόβλημα της *ανάκτησης αραιών διανυσμάτων*. Αυτό το πρόβλημα αφορά την ανακατασκευή/ανάκτηση ενός αραιού σήματος μετά από προβολή σε ένα χώρο χαμηλότερης διάστασης. Το σημαντικό αποτέλεσμα, το οποίο παρουσιάζουμε και αποδεικνύουμε, είναι η ικανότητα, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, συγκεκριμένων κλάσεων τυχαίων πινάκων, όπως Γκαουσιανών και υποκανονικών, να προβάλλουν αραιά διανύσματα σε χώρους χαμηλότερων διαστάσεων με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε να αποκτήσουμε επιτυχημένα το αρχικό διάνυσμα σήματος (ανάκτηση) χρησιμοποιώντας κατάλληλους αλγορίθμους. Στους πίνακες χαμηλού βαθμού επικεντρωνόμαστε σε ένα ειδικό πρόβλημα ανάκτησης που καλείται *συμπλήρωση πίνακα*. Σε αυτό το πρόβλημα δίνεται ένας ημιτελής πίνακας και η πρότερη γνώση ότι αυτός ο πίνακας είναι χαμηλού βαθμού και στόχος είναι να συμπληρώσουμε τις τιμές των στοιχείων που λείπουν. Στο τελευταίο τμήμα της εργασίας εισάγουμε μερικούς αλγορίθμους για το πρόβλημα της συμπλήρωσης πίνακα και τους αξιολογούμε σε συνθετικά και πραγματικά δεδομένα.

Λέξεις κλειδιά

Μεγάλα Δεδομένα, μοντέλα χαμηλής διάστασης, αραιά διανύσματα, πίνακες χαμηλού βαθμού, αραιή ανάκτηση, συμπλήρωση πίνακα, l_1 ελαχιστοποίηση, ελαχιστοποίηση πυρηνικής νόρμας, τυχαίες προβολές, λήμμα του Gordon, συγκέντρωση του μέτρου, κατωφλίωση ιδιαζουσών τιμών

Πρόλογος

Οι τεράστιες ποσότητες δεδομένων που παράγονται σήμερα δημιουργούν μεγάλες προκλήσεις στα μοντέρνα υπολογιστικά συστήματα. Το μεγάλο αντίκτυπο των τεχνολογιών πληροφορίας σε όλες τις πτυχές της ζωής μας καθιστά απαραίτητη την ανακάλυψη καινοτόμων προσεγγίσεων για την επίλυση αυτών των προβλημάτων. Τα τελευταία χρόνια η κατανόηση της δομής των δεδομένων που χειριζόμαστε και η εκμετάλλευση αυτής της γνώσης για να αντιμετωπίσουμε τις αναδυόμενες προκλήσεις έχει αποδειχθεί ότι είναι μία παραγωγική και αποτελεσματική προσέγγιση.

Η βασική ιδέα πίσω από αυτή την εργασία είναι η σημασία της εκμετάλλευσης της δομής των δεδομένων για να επιτελέσουμε εργασίες επεξεργασίας πληροφορίας αποδοτικά και επιτυχημένα. Περιορίζουμε την προσοχή μας σε δύο συγκεκριμένες δομές : αραιά σήματα και πίνακες χαμηλού βαθμού. Συγκεκριμένα θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε δύο σημαντικά προβλήματα αυτών των μοντέλων : την αραιή ανάκτηση και τη συμπλήρωση πίνακα.

Κατά την γνώμη μου μία από τις πιο συναρπαστικές πτυχές της μηχανικής μάθησης είναι ότι αναμιγνύει με ένα ενδιαφέρον και παραγωγικό τρόπο θεωρητικά (καθαρά μαθηματικά) και εφαρμοσμένα (πρακτικά) ζητήματα. Το κυρίως θέμα αυτής της εργασίας (αραιή ανάκτηση και συμπλήρωση πίνακα) βρίσκεται στην τομή της μηχανικής μάθησης, της επεξεργασίας σήματος και των εφαρμοσμένων μαθηματικών και είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός τέτοιου ενδιαφέροντος μίγματος. Για αυτό το λόγο αυτή η εργασία αφορά μαθηματικά και εφαρμοσμένα ζητήματα των παραπάνω προβλημάτων. Αυτό αντικατοπτρίζεται στη δομή της μεταπτυχιακής εργασίας, καθώς το δεύτερο τμήμα μελετάει κάποια προχωρημένα μαθηματικά ζητήματα της αραιής ανάκτησης, ενώ στο τρίτο τμήμα μερικοί αλγόριθμοι συμπλήρωσης πίνακα περιγράφονται και αξιολογούνται σε συνθετικά και πραγματικά δεδομένα.

Συγκεκριμένα, η εργασία αυτή αποτελείται από τα εξής τρία τμήματα.

- Το πρώτο τμήμα είναι ουσιαστικά μία μελέτη των δύο μοντέλων σήματος που μας ενδιαφέρουν, το μοντέλο των αραιών διανυσμάτων και το μοντέλο των πινάκων χαμηλού βαθμού.
  - Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει μία γενική περιγραφή των *μοντέλων χαμηλής διάστασης*, το λόγο για τον οποίο τα μελετάμε και την έννοια της ευσταθούς εμφύτευσης. Αυτό το κεφάλαιο υπογραμμίζει τη σημασία της κατανόησης της δομής των δεδομένων.
  - Το δεύτερο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στα *αραιά διανύσματα*. Ξεκινάμε με τις απαραίτητους ορισμούς και την γενική περιγραφή του προβλήματος της *ανάκτησης αραιών διανυσμάτων* και φτάνουμε σε ζητήματα όπως τα προβλήματα βελτιστοποίησης της αραιής ανάκτησης, η ιδιότητα

περιορισμένης ισομετρίας, αλγόριθμοι για αραιή ανάκτηση και εφαρμογές.

  - Το τρίτο κεφάλαιο αφορά *πίνακες χαμηλού βαθμού*. Εκτός από το να παρέχουμε το απαραίτητο υπόβαθρο, επικεντρωνόμαστε στο πρόβλημα της *συμπλήρωσης πίνακα*

- Το δεύτερο τμήμα περιέχει κάποια πιο προχωρημένα μαθηματικά ζητήματα του προβλήματος της αραιής ανάκτησης. Ουσιαστικά, το θέμα αυτού του κεφαλαίου είναι η ικανότητα ορισμένων κλάσεων τυχαίων πινάκων να προβάλλουν αραιά διανύσματα σε χώρους χαμηλότερων διαστάσεων, με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε να αποκτήσουμε επιτυχημένα το αρχικό διάνυσμα σήματος (ανάκτηση), χρησιμοποιώντας κατάλληλους αλγορίθμους.

  - Το τέταρτο κεφάλαιο περιέχει το απαραίτητο υπόβαθρο στη θεωρία πιθανοτήτων. Ξεκινάει με βασικές έννοιες και ορισμούς και φτάνει σε πιο προχωρημένα ζητήματα, όπως συγκέντρωση του μέτρου, ελάχιστα άνω φράγματα στοχαστικών διαδικασιών, Γκαουσιανό πλάτος, κτλ.

  - Το πέμπτο κεφάλαιο περιέχει δύο βασικά αποτελέσματα μαζί με τις αντίστοιχες αποδείξεις. Και τα δύο αποτελέσματα αναφέρονται στην ικανότητα, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, συγκεκριμένων κλάσεων τυχαίων πινάκων να προβάλλουν αραιά διανύσματα με τέτοιο τρόπο ώστε η επιτυχημένη ανάκτηση να είναι εξασφαλισμένη χρησιμοποιώντας κατάλληλους αλγορίθμους. Το πρώτο αποτέλεσμα αφορά Γκαουσιανούς πίνακες, ενώ στο δεύτερο αποτέλεσμα αναφερόμαστε σε υποκανονικούς πίνακες.

- Το τρίτο τμήμα μελετάει και αξιολογεί πέντε διαφορετικούς αλγορίθμους συμπλήρωσης πίνακα.

  - Το έκτο κεφάλαιο εισάγει πέντε διαφορετικά προβλήματα βελτιστοποίησης για το πρόβλημα της συμπλήρωσης πίνακα καθώς και τους αντίστοιχους αλγορίθμους που τα λύνουν. Έπειτα, συνεχίζει αξιολογώντας τους αλγορίθμους σε συνθετικά και πραγματικά δεδομένα (δεδομένα MovieLens).

Η μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στην Αγγλική γλώσσα. Αυτό το κείμενο αποτελεί μία (πρόχειρη) μετάφραση της πρωτότυπης εργασίας στα Ελληνικά για την ικανοποίηση των επίσημων απαιτήσεων του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Περιεχόμενα

I Αραιά διανύσματα και πίνακες χαμηλού βαθμού **1**

1 Εισαγωγή **3**
1.1 Εισαγωγή . . . 3
1.2 Μοντέλα χαμηλής διάστασης . . . 4
1.2.1 Αντίστροφα προβλήματα . . . 5
1.3 Ευσταθείς εμφυτεύσεις . . . 6

2 Αραιά διανύσματα **9**
2.1 Εισαγωγή . . . 9
2.2 Αραιά και συμπιέσιμα σήματα . . . 9
2.3 Λεξικά σημάτων . . . 11
2.4 Η μεγάλη εικόνα της αραιής ανάκτησης . . . 12
2.5 Υποκαθορισμένα συστήματα γραμμικών εξισώσεων . . . 14
2.6 Τα προβλήματα βελτιστοποίησης της αραιής ανάκτησης . . . 15
2.6.1 l_0 νόρμα . . . 16
2.6.2 l_2 νόρμα . . . 17
2.6.3 l_1 νόρμα . . . 18
2.7 Συμπιεστική δειγματοληψία . . . 19
2.8 Πίνακες μετρήσεων . . . 20
2.8.1 Συνοχή . . . 20
2.8.2 Ιδιότητα περιορισμένης ισομετρίας . . . 21
2.9 Σχήματα ανακατασκευής . . . 23
2.9.1 Άπληστοι αλγόριθμοι . . . 25
2.9.2 Αλγόριθμοι κυρτής βελτιστοποίησης . . . 27
2.9.3 Αλγόριθμοι επαναληπτικής κατωφλίωσης . . . 28
2.10 Εφαρμογές . . . 29

3 Πίνακες χαμηλού βαθμού **31**
3.1 Εισαγωγή . . . 31
3.2 Προκαταρκτικά για πίνακες . . . 31
3.2.1 Αποσύνθεση ιδιαζουσών τιμών . . . 32
3.3 Ανάκτηση πίνακα χαμηλού βαθμού . . . 33
3.4 Συμπλήρωση πίνακα . . . 34
3.4.1 Το πρόβλημα του Netflix . . . 34
3.4.2 Ποιοι πίνακες μπορούν να συμπληρωθούν; . . . 35
3.4.3 Συνοχή . . . 37
3.4.4 Τα προβλήματα βελτιστοποίησης της συμπλήρωσης πίνακα . 38
3.5 Εφαρμογές . . . 39

II Μαθηματικά ζητήματα 41

4 Εργαλεία από την θεωρία πιθανοτήτων 43
4.1 Προκαταρκτικά . . . 43
4.2 Βασικά αποτελέσματα στην θεωρία πιθανοτήτων . . . 46
4.3 Υποκανονικές και υποεκθετικές τυχαίες μεταβλητές . . . 48
4.4 Ανισότητα του Bernstein . . . 51
4.5 Μέση τιμή νορμών Γκαουσιανών διανυσμάτων . . . 54
4.6 Γκαουσιανό πλάτος . . . 57
4.7 Λήμμα του Gordon . . . 57
4.8 Συγκέντρωση του μέτρου . . . 71

5 Ανάκτηση αραιών διανυσμάτων με τυχαίους πίνακες 83
5.1 Εισαγωγή . . . 83
5.2 Ομοιόμορφη ανάκτηση με υποκανονικούς πίνακες . . . 84
5.3 Μη ομοιόμορφη ανάκτηση με Γκαουσιανούς πίνακες . . . 91

III Αλγόριθμοι 105

6 Αλγόριθμοι για συμπλήρωση πίνακα 107
6.1 Αλγόριθμοι . . . 107
6.1.1 Proximal forward-backward splitting . . . 108
6.1.2 Alternating regularized least squares . . . 111
6.1.3 Alternating iteratively reweighted least squares . . . 112
6.1.4 Fast alternating regularized least squares . . . 115
6.1.5 Fast alternating iteratively reweighted least squares . . . 116
6.2 Αξιολόγηση σε συνθετικά δεδομένα . . . 119
6.2.1 Περιγραφή των σεναρίων . . . 119
6.2.2 Μέτρα απόδοσης . . . 120
6.2.3 Παράμετροι αλγορίθμων . . . 120
6.2.4 Αποτελέσματα . . . 120
6.3 Αξιολόγηση στα δεδομένα MovieLens . . . 120
6.3.1 Περιγραφή του σεναρίου . . . 122
6.3.2 Μέτρα επίδοσης . . . 122
6.3.3 Αποτελέσματα . . . 124
6.4 Σχόλια και συμπεράσματα . . . 124

Α΄ Μαθηματικά προαπαιτούμενα 129
Α΄.1 Γραμμική άλγεβρα . . . 129
Α΄.1.1 Διανύσματα . . . 129
Α΄.1.2 Πίνακες . . . 130
Α΄.2 Κυρτή γεωμετρία . . . 131
Α΄.3 Ανάλυση . . . 132
Α΄.3.1 Συναρτήσεις Βήτα και Γάμμα . . . 132
Α΄.4 Αριθμοί κάλυψης . . . 133
Α΄.5 Λοιπά . . . 133

Μέρος I

Αραιά διανύσματα και πίνακες χαμηλού βαθμού

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή

Ζούμε στην εποχή των "*Μεγάλων δεδομένων*" (Big data). Τεράστιες ποσότητες δεδομένων παράγονται κάθε μέρα και αυτές οι ποσότητες αυξάνονται συνεχώς. Με βάση παλαιότερες εκτιμήσεις [Ibm] η ποσότητα αυτή είναι μεγαλύτερη από 2.5 exabytes την ημέρα και αυξάνεται με εκθετικό ρυθμό. Αυτά τα δεδομένα μπορούν να λάβουν μία ποικιλία μορφών, όπως εικόνες, βίντεο, ήχος, κείμενα και μπορούν να βρεθούν πρακτικά παντού (κοινωνικά δίκτυα, ραδιοτηλεσκόπια, DVD, ιατρικά δεδομένα, κ.α). Αυτή η τεράστια ποσότητα δεδομένων επιβαρύνει σημαντικά τα συστήματα, μία κατάσταση που πρόκειται να γίνει ακόμα πιο απαιτητική τα επόμενα χρόνια. Για να αποκτήσουμε μια καλή εικόνα του μεγέθους των δεδομένων στα οποία αναφερόμαστε, η εικόνα 1.1 παρουσιάζει την αναμενόμενη ποσότητα δεδομένων που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν το 2025 κατά την απόκτηση και αποθήκευση των δεδομένων σε τρεις διαφορετικές περιοχές (αστρονομία, γενομική, YouTube), όπως δίνονται στο [Ste+15].

Τα δεδομένα στα οποία αναφερόμαστε, τα "*μεγάλα δεδομένα*", έχουν μερικά χαρακτηριστικά. Ανάμεσα σε αυτά είναι η υψηλή διάσταση του χώρου μέσα στον οποίο κατοικούν και η τεράστια ποσότητά τους. Επιπλέον, αυτά τα δεδομένα είναι συνήθως πολύ αλλοιωμένα εξαιτίας του θορύβου, των αστοχιών των συσκευών συλλογής δεδομένων αλλά και λόγω εσκεμμένης παραποίησης. Η κατάσταση γίνεται ακόμα πιο περίπλοκη αφού μερικά στοιχεία αυτών των δεδομένων συνήθως λείπουν, καθώς ο όγκος τους και η διάστασή τους καθιστούν αδύνατη την ολοκληρωμένη συλλογή τους. Είναι προφανές ότι αυτά τα χαρακτηριστικά των δεδομένων κάνουν την κατάσταση ακόμα πιο απαιτητική.

Αυτή η τεράστια ροή δεδομένων, γνωστή και ως "*κατακλυσμός δεδομένων*" (data deluge), καθώς και η πολυπλοκότητά τους, δημιουργούν αρκετές προκλήσεις

Φάση \Περιοχή	Αστρονομία	Γενομική	YouTube
Απόκτηση	25 ZB/χρόνο	1 zetta-βάσεις/χρόνο	500-900 εκατομμύρια ώρες/χρόνο
Αποθήκευση	1 EB/χρόνο	2-40 EB/χρόνο	1-2 EB/χρόνο

Σχήμα 1.1: Αναμενόμενη ποσότητα δεδομένων που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν το 2025 κατά την απόκτηση και αποθήκευση των δεδομένων σε τρεις διαφορετικές περιοχές. [Ste+15]

στην απόκτηση, αποθήκευση, επεξεργασία, εκμάθηση και μετάδοση των δεδομένων. Η σημασία των δεδομένων σχεδόν σε όλες τις πτυχές της ζωής μας και το γεγονός ότι διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο σε πολλές διαφορετικές περιοχές, όπως η επιστήμη, τα οικονομικά και η ιατρική δημιουργεί την ανάγκη διεύρυνσης των τεχνολογικών μας δυνατοτήτων. Είναι σημαντικό να αναπτύξουμε καινούρια υπολογιστικά εργαλεία, αλγορίθμους, μαθηματικά εργαλεία και τεχνολογίες έτσι ώστε να αντιμετωπίσουμε με αποδοτικό τρόπο όλα τα προβλήματα που προκύπτουν από την "*πλημμύρα δεδομένων*". Μία τέτοια προσέγγιση είναι να προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την δομή των δεδομένων και να την εκμεταλλευτούμε για να πραγματοποιήσουμε όλες τις απαιτούμενες διεργασίες με επιτυχία και με αποδοτικό τρόπο. Αυτή η προσέγγιση αποτελεί την κινητήρια ιδέα αυτής της διπλωματικής εργασίας.

1.2 Μοντέλα χαμηλής διάστασης

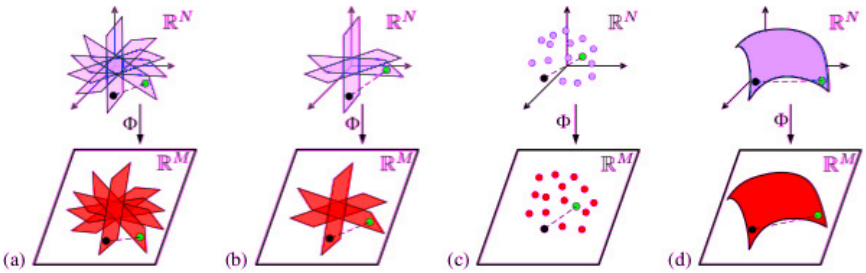
Η θεμελιώδης έννοια με την οποία θα ασχοληθούμε είναι το *σήμα* (signal). Ένα σήμα είναι μία συνάρτηση που περιέχει πληροφορία για τα χαρακτηριστικά ή τη συμπεριφορά ενός συστήματος [Pri90] και μπορεί να αναφέρεται πρακτικά σε οποιαδήποτε χρονικά ή χωρικά μεταβαλλόμενη ποσότητα, όπως μουσική, βίντεο, εικόνες, οικονομικά δεδομένα, επιστημονικά δεδομένα κτλ. Μπορούμε επίσης να αναφερθούμε στα σήματα και ως δεδομένα. Στο πλαίσιο της επεξεργασίας σήματος χρησιμοποιούμε τον όρο σήμα, ενώ στη κοινότητα της μηχανικής μάθησης ο όρος *δεδομένα* (data) είναι προτιμότερος. Παρ' όλα αυτά, αυτοί οι όροι αναφέρονται και οι δύο σε κάποιο κομμάτι πληροφορίας που θέλουμε να επεξεργαστούμε (π.χ συμπίεση, κωδικοποίηση, εκμάθηση, αποθορυβοποίηση, κτλ.). Σε αυτή τη διπλωματική το κύριο θέμα βρίσκεται στην τομή της μηχανικής εκμάθησης και της επεξεργασίας σήματος και έτσι θα αναφερόμαστε στα μοτίβα πληροφορίας, είτε ως σήματα είτε ως δεδομένα, ανάλογα με την περίσταση χωρίς να προκαλούμε σύγχυση.

Τα σήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε ανήκουν σε ένα μαθηματικό χώρο, γνωστός και ως χώρος σήματος (*signal space*). Με άλλα λόγια, ο χώρος σήματος είναι το σύνολο όλων των δυνατών τιμών που μπορεί να λάβει το σήμα που μελετάμε. Μερικές φορές, για λόγους που θα γίνουν προφανείς σε λίγο, είναι απαραίτητο να περιορίσουμε την προσοχή μας σε ένα υποσύνολο του χώρου σήματος. Ένα μοντέλο σήματος (signal model) είναι ένα υποσύνολο του χώρου σήματος το οποίο έχει κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες, οι οποίες συνήθως εκφράζονται με τη μορφή μαθηματικών εκφράσεων. Ένα (χαμηλής διάστασης) μοντέλο σήματος χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό βαθμών ελευθερίας μικρότερο από τον αντίστοιχο αριθμό για το χώρο του σήματος.

Το πρόβλημα το οποίο αντιμετωπίζουμε μπορεί να απαιτεί να προβάλλουμε το σήμα σε ένα χώρο χαμηλής διάστασης, ή με άλλα λόγια να μειώσουμε τη διάσταση του σήματος. Αυτή η διαδικασία, γνωστή και ως μείωση διάστασης (dimensionality reduction) ή μέτρηση (measurement), είναι θεμελιώδους σημασίας για τη περιοχή της μηχανικής μάθησης αλλά και για την περιοχή της επεξεργασίας σήματος. Συνήθως ο όρος *μείωση διάστασης* χρησιμοποιείται στη μηχανική μάθηση, ενώ ο όρος *μέτρηση* εμφανίζεται στη βιβλιογραφία της επεξεργασίας σήματος.

Υπάρχουν πολλά είδη μοντέλων χαμηλής διάστασης. Τα πιο σημαντικά από αυτά είναι τα ακόλουθα. [BCW10]

1. Αραιά διανύσματα (Sparse vectors)



Σχήμα 1.2: Μία συλλογή μοντέλων χαμηλής διάστασης: (α) k-αραιά σήματα, (β) δομημένα k-αραιά σήματα, (γ) ένα σύννεφο σημείων, (δ) μία ομαλή πολλαπλότητα k διαστάσεων. Η εικόνα πάρθηκε από [BCW10].

2. Συμπιέσιμα διανύσματα (Compressible vectors)
3. Πίνακες χαμηλού βαθμού (Low-rank matrices)
4. Πολλαπλότητες (Manifolds)
5. Σύννεφα σημείων (Point clouds)

Συνοπτικά, ένα *αραιό διάνυσμα* είναι ένα διάνυσμα το οποίο έχει το πολύ k μη μηδενικά στοιχεία, όπου k είναι ένας σχετικά μικρός αριθμός συγκριτικά με τη διάσταση του περιβάλλοντος χώρου (ambient space). Αυτό είναι το πιο σημαντικό και καλά μελετημένο μοντέλο και θα παρουσιαστεί λεπτομερώς στο κεφάλαιο 2.

Ένα *συμπιέσιμο διάνυσμα* είναι μία γενίκευση του μοντέλου αραιών διανυσμάτων, όπου έχουμε k σημαντικά στοιχεία (δηλαδή στοιχεία με μεγάλη τιμή), ενώ τα υπόλοιπα είναι πολύ μικρά. Θα παρουσιάσουμε τα βασικά αυτού του μοντέλου στο κεφάλαιο 2.

Ένας *πίνακας χαμηλού βαθμού* είναι ένας πίνακας του οποίου ο βαθμός (rank) είναι μικρός συγκριτικά με τη διάστασή του. Πρόκειται για ένα ενδιαφέρον μοντέλο με πολλές εφαρμογές. Θα αποτελέσει το αντικείμενο του 3ου κεφαλαίου.

Μία *πολλαπλότητα*, από μαθηματικής απόψεως, είναι ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος τοπικά μοιάζει με τον Ευκλείδειο χώρο. Ουσιαστικά, μπορούμε να θεωρήσουμε την πολλαπλότητα ως γενίκευση της έννοιας της επιφάνειας.

Ένα *σύννεφο σημείων* είναι μία συλλογή από πεπερασμένα σημεία στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή διανύσματα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ τα οποία αναπαριστούν σήματα.

Η εικόνα 1.2 περιέχει τέσσερα χαρακτηριστικά μοντέλα σήματος χαμηλής διάστασης, συγκεκριμένα αραιά διανύσματα, δομημένα αραιά διανύσματα [1], σύννεφα σημείων και πολλαπλότητες. [BCW10]

1.2.1 Αντίστροφα προβλήματα

Τα μοντέλα χαμηλής διάστασης έφεραν πρόοδο στην επίλυση γραμμικών αντίστροφων προβλημάτων (linear inverse problems). Τα αντίστροφα προβλήματα [The15] είναι προβλήματα στα οποία δίνεται ένα σύνολο παρατηρήσεων εισόδου-εξόδου (δεδομένα εκπαίδευσης στη μηχανική μάθηση) και ο στόχος είναι η εκτίμηση ή πρόβλεψη των παραμέτρων του μοντέλου που παράγει αυτές τις παρατηρήσεις. Χονδρικά,

[1] Τα δομημένα αραιά διανύσματα (structured sparse vectors) είναι μία ειδική κατηγορία αραιών διανυσμάτων, όπου οι θέσεις των μη μηδενικών στοιχείων δεν είναι τελείως τυχαίες, αλλά ακολουθούν ένα συγκεκριμένο μοτίβο.

στα αντίστροφα προβλήματα θέλουμε να συμπεράνουμε το αίτιο από το αποτέλεσμα. Γενικά, τα αντίστροφα προβλήματα είναι *κακώς ορισμένα* (ill-posed). Αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον μία από τις τρεις επόμενες ιδιότητες παραβιάζεται : ύπαρξη, μοναδικότητα και ευστάθεια λύσης. Η εύρεση της λύσης είναι σε πολλές περιπτώσεις μία δύσκολη, αν όχι αδύνατη, διαδικασία. Ο λόγος είναι ότι το μοντέλο που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τα δεδομένα είναι πολύ περίπλοκο. Συνεπώς, το μοντέλο αυτό περιγράφεται από ένα αριθμό παραμέτρων που είναι πολύ μεγάλος, συνήθως αρκετά μεγαλύτερος από των αριθμών των δεδομένων. Άρα, δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου από τις παρατηρήσεις μας.

Η μελέτη μοντέλων χαμηλής διάστασης δημιούργησε μία επανάσταση στην περιοχή των αντίστροφων προβλημάτων. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι το μοντέλο των δεδομένων μας έχει συγκεκριμένη δομή, δηλαδή ο αριθμός των παραμέτρων που το χαρακτηρίζουν είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο αριθμό για τον περιβάλλοντα χώρο του σήματος, χρειαζόμαστε ένα μικρό αριθμό δεδομένων για να εκτιμήσουμε της παραμέτρους του μοντέλου, το οποίο είναι και ο τελικός στόχος. Είναι σύνηθες σε αντίστροφα προβλήματα να χρησιμοποιούμε σαν πρότερη υπόθεση ότι το μοντέλο μας διαθέτει μία ειδική δομή. Σημειώστε ότι αυτή η υπόθεση βασίζεται στις ιδιότητες του αντίστοιχου φυσικού συστήματος, το οποίο το μοντέλο περιγράφει.

Τα αντίστροφα προβλήματα είναι πολύ κοινά στην επιστήμη και την τεχνολογία. Η πλειοψηφία των προβλημάτων στη μηχανική μάθηση και την επεξεργασία σήματος υπάγονται στην κατηγορία των αντίστροφων προβλημάτων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν προβλήματα όπως παλινδρόμηση (regression), κατηγοριοποίηση (classification), αποθορυβοποίηση σήματος (signal denoising) και πολλά άλλα.

1.3 Ευσταθείς εμφυτεύσεις

Μία από τις σημαντικότερες έννοιες στη μηχανική μάθηση είναι αυτή της *μείωσης διάστασης*. Αυτή αναφέρεται σε αλγορίθμους που προβάλλουν δεδομένα σε ένα χώρο χαμηλότερης (από τον αρχικό) διάστασης, ουσιαστικά μειώνοντας των αριθμό των μεταβλητών που περιγράφουν τα δεδομένα. Η έννοια της προβολής (μείωση διάστασης) βασίζεται στο γεγονός ότι το σήμα που μας ενδιαφέρει μπορεί να περιγραφεί (προσεγγιστικά) από λιγότερες παραμέτρους από τον αριθμό των παραμέτρων που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε ένα τυχαίο σήμα του περιβάλλοντος χώρου. Πρέπει να σημειώσουμε ότι τυπικά, μία *προβολή* (projection) είναι μία γραμμική συνάρτηση [2] $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m < n$. Οι κυριότεροι λόγοι για τους οποίους χρησιμοποιούμε τεχνικές μείωσης διάστασης είναι η επιτάχυνση της επεξεργασίας των δεδομένων και οι μειωμένες απαιτήσεις σε αποθηκευτικό χώρο και μνήμη.

Ουσιαστικά ο στόχος είναι να κατασκευάσουμε μία κατάλληλη προβολή έτσι ώστε το σήμα χαμηλής διάστασης να διατηρήσει ένα σημαντικό κομμάτι (στην ιδανική περίπτωση όλο) από το πληροφοριακό περιεχόμενο του αρχικού σήματος. Γενικά, αυτό είναι αδύνατο, καθώς για τον πίνακα προβολής ισχύει ότι $null(\Phi) \neq 0$ (όταν $m < n$, το οποίο στην περίπτωσή μας ισχύει). Άρα, πολ-

[2] Περιορίζουμε την προσοχή μας στις γραμμικές προβολές, αν και μη-γραμμικές προβολές χρησιμοποιούνται στην μηχανική μάθηση. Ο λόγος είναι η απλότητα, αφού στόχος σε αυτό το κομμάτι είναι η επισήμανση των γενικών εννοιών

λά σήματα μοιράζονται την ίδια προβολή στο χώρο χαμηλής διάστασης, δηλαδή $\Phi \cdot \boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}), \forall \boldsymbol{z} \in null(\Phi)$. Συνεπώς, πρέπει να θεωρήσουμε υποσύνολα του χώρου σήματος, δηλαδή μοντέλα σήματος, ελπίζοντας ότι θα μπορέσουμε να κατασκευάσουμε προβολές οι οποίες διατηρούν την πληροφορία σε αυτά τα μοντέλα. Για να κατασκευάσουμε αυτές τις προβολές είναι σημαντικό να μπορέσουμε να περιγράψουμε την ικανότητα των προβολών να διατηρούν το πληροφοριακό περιεχόμενο των σημάτων. Μία τέτοια έννοια είναι αυτή της *ευσταθούς εμφύτευσης* (stable embedding).

Ορισμός 1.3.1 (Ευσταθής εμφύτευση)**.** *[BCW10] Έστω $U = \mathbb{R}^n$ ένας χώρος σήματος, $\boldsymbol{x} \in U$ ένα τυχαίο σήμα και $S \subseteq U$ ένα μοντέλο σήματος. Μία ευσταθής εμφύτευση στο S είναι μία προβολή $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m < n$ έτσι ώστε να ισχύουν οι επόμενες δύο συνθήκες*

1. $\Phi \cdot \boldsymbol{x}_1 \neq \Phi \cdot \boldsymbol{x}_2, \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S$
2. *Διατηρεί προσεγγιστικά τις αποστάσεις μεταξύ όλων των σημείων του S.*

Ουσιαστικά μία ευσταθής εμφύτευση είναι μία προβολή η οποία προσεγγιστικά διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ όλων των σημείων ενός μοντέλου σήματος [BCW10]. Αυτή η ιδιότητα των ευσταθών εμφυτεύσεων προσφέρει αντοχή στο θόρυβο. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ευσταθείς εμφυτεύσεις για συγκεκριμένες κλάσεις μοντέλων σήματος, καθώς στη γενική περίπτωση αυτό είναι αδύνατο. Μία σημαντική κατεύθυνση για την επίτευξη αυτού του στόχου είναι η χρήση τυχαίων πινάκων, οι οποίοι θα αποτελέσουν ένα σημαντικό μέρος αυτής της διπλωματικής.

Οι κυριότερες ερωτήσεις που ανακύπτουν κατά το σχεδιασμό ευσταθών εμφυτεύσεων για μοντέλα σήματος είναι οι ακόλουθες. [BCW10]

- Ποιά είναι η μικρότερη διάσταση m του χώρου χαμηλότερης διάστασης για την οποία μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι έχουμε ευσταθή εμφύτευση;
- Πως θα κατασκευάσουμε τον κατάλληλο πίνακα προβολής, ο οποίος μας παρέχει μία ευσταθής εμφύτευση;

Θα απαντήσουμε αυτές τις ερωτήσεις για το μοντέλο των αραιών σημάτων στα επόμενα κεφάλαια. Συγκεκριμένα, θα δώσουμε φράγματα για τις τιμές του m συναρτήσει των άλλων παραμέτρων του προβλήματος (π.χ επίπεδο αραιότητας). Επίσης, θα αποδείξουμε ότι κάποιες κλάσεις τυχαίων πινάκων προσφέρουν, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, μία ευσταθή εμφύτευση για αραιά σήματα.

Συμπερασματικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι μία από τις βασικές έννοιες αυτής της διπλωματικής είναι η δύναμη της τυχαιότητας να μας παρέχει εμφυτεύσεις που διατηρούν την πληροφορία σε συγκεκριμένες κλάσεις μοντέλων σήματος. Αυτό επισημαίνει ένα ακόμη σημαντικό σημείο, αυτό της ανακάλυψης και εκμετάλλευσης της δομής των δεδομένων, δηλαδή της εύρεσης του μοντέλου χαμηλής διάστασης που περιγράφει με ικανοποιητικό τρόπο τα δεδομένα. Συνοπτικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι *τυχαίες προβολές* (random projections) και η δομή χαμηλής διάστασης (low-dimensional structure) είναι δύο από τις βασικές λέξεις κλειδιά αυτής της διπλωματικής.

Κεφάλαιο 2

Αραιά διανύσματα

2.1 Εισαγωγή

Πιθανώς τα πιο σημαντικά και διάσημα μοντέλα χαμηλής διάστασης είναι τα *μοντέλα αραιών σημάτων* (sparse signal models). Μερικά από τα βασικά χαρακτηριστικά, αποτελέσματα και εργαλεία τους αναπτύχθηκαν μερικές δεκαετίες πριν, όμως η περιοχή αυτή έζησε μια ερευνητική έκρηξη από το 2004, η οποία συνεχίζεται μέχρι σήμερα. Η προσοχή που έλαβε αυτή η περιοχή πρόσφατα οφείλεται στη συμβολή των Candes, Tao [CT05] και Donoho [Don06], γύρω στα μέσα της προηγούμενης δεκαετίας. Η μελέτη αραιών σημάτων οδήγησε σε μία επανάσταση στην επεξεργασία σήματος και την επιστήμη δεδομένων (data science), από την οποία προέκυψαν νέες τεχνικές, ιδέες και εργαλεία αλλά και λύσεις σε πολλά προβλήματα τα οποία δεν μπορούσαν να αντιμετωπιστούν προηγουμένως.

Η μελέτη των αραιών σημάτων είναι ένα διεπιστημονικό πεδίο έρευνας καθώς ελκύει επιστήμονες από διαφορετικές κοινότητες, όπως αυτή της μηχανικής μάθησης, της επεξεργασίας σήματος, της στατιστικής και των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Επίσης, έχει αποδειχθεί πολύ χρήσιμη στην πράξη, αφού οδήγησε σε πολλές εφαρμογές σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία, τα οποία ανάμεσα σε άλλα περιλαμβάνουν την υπολογιστική βιολογία, την επεξεργασία εικόνας, την μηχανική μάθηση, τις τηλεπικοινωνίες, τα ραντάρ, την ιατρική απεικόνιση, κτλ. Η μελέτη αυτού του πεδίου έρευνας απαιτεί ένα στέρεο θεωρητικό υπόβαθρο στην γραμμική άλγεβρα, την θεωρία πιθανοτήτων, την θεωρία βελτιστοποίησης, την συναρτησιακή ανάλυση και άλλα πεδία ανάλογα με το συγκεκριμένο πρόβλημα.

2.2 Αραιά και συμπιέσιμα σήματα

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό των *αραιών σημάτων*.

Ορισμός 2.2.1 (Αραιό σήμα). *Ένα διάνυσμα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται k-αραιό εάν τα μη μηδενικά στοιχεία του είναι το πολύ k, δηλαδή $card(supp(\boldsymbol{x})) \leq k$.*

Το σύνολο όλων των k-αραιών σημάτων συμβολίζεται με Σ_k. Επίσης, σημειώστε ότι πρόκειται για ένα εξιδανικευμένο μοντέλο με την έννοια ότι στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν αραιά σήματα, αλλά μόνο κατά προσέγγιση αραιά. Θα ορίσουμε παρακάτω μία επέκταση του μοντέλου των αραιών σημάτων, η οποία περιγράφει σήματα τα οποία είναι κατά προσέγγιση αραιά.

Γεωμετρικά, το σύνολο όλων των k-αραιών σημάτων είναι μία ένωση υποχώρων. Το μοντέλο των k-αραιών σημάτων αφορά όλους τους $\binom{n}{k}$ διαφορετικούς τρόπους να επιλέξουμε τα k μη-μηδενικά στοιχεία του τυχαίου k-αραιού διανύσματος. Κάθε διαφορετικός τρόπος ορίζει ένα υπόχωρο, ο οποίος καλύπτεται (spanned) από τα διανύσματα βάσεις που αντιστοιχούν στα επιλεγμένες θέσεις. Σημειώστε ότι κάθε υπόχωρος καλύπτει την περίπτωση όπου το διάνυσμα έχει το πολύ k μη μηδενικά στοιχεία στις αντίστοιχες θέσεις. Συμπερασματικά, συνυπολογίζοντας όλους τους πιθανούς τρόπους καταλήγουμε σε μία ένωση υποχώρων.

Για να περιγράψουμε το μοντέλο των σημάτων που είναι κατά προσέγγιση αραιά εισάγουμε τα *μοντέλα των συμπιέσιμων σημάτων* (compressible signal models). Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό των συμπιέσιμων σημάτων πρέπει να ορίσουμε το l_p σφάλμα της καλύτερης εκτίμησης k-όρων ενός σήματος.

Ορισμός 2.2.2 (l_p σφάλμα της καλύτερης εκτίμησης k-όρων)**.** *[FR13] Το l_p σφάλμα της καλύτερης εκτίμησης k-όρων ενός διανύσματος σήματος $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, με $p > 0$, δίνεται από*

$$\sigma_k(\boldsymbol{x})_p := \inf_{\boldsymbol{z} \in \Sigma_k} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|_p.$$

Αποδεικνύεται ότι η καλύτερη εκτίμηση k-όρων ενός αυθαίρετου διανύσματος $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι απλώς το διάνυσμα που δημιουργείται επιλέγοντας τα k μεγαλύτερα στοιχεία του αρχικού διανύσματος $\boldsymbol{x}$. Υποθέτοντας ότι έχουμε τοποθετήσει τα στοιχεία του διανύσματος $\boldsymbol{x}$ σε φθίνουσα σειρά, για το l_p σφάλμα της καλύτερης εκτίμησης k-όρων του $\boldsymbol{x}$, έχουμε ότι [Boc+15]

$$\sigma_k(\boldsymbol{x})_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=k+1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} & , p \in (0, +\infty) \\ x_{k+1} & , p = +\infty \end{cases}.$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το συμπιέσιμο διάνυσμα σήματος. Χονδρικά, ένα διάνυσμα σήματος $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται *συμπιέσιμο* (compressible) εάν το l_p σφάλμα της καλύτερης εκτίμησης k-όρων, για κάποιο $p > 0$, φθίνει γρήγορα συναρτήσει του k. Επίσημα έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.2.3 (Συμπιέσιμο σήμα)**.** *[BCW10] Ένα σήμα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται συμπιέσιμο, εάν υπάρχει $R > 0$ και $p \leq 1$ έτσι ώστε να ισχύει*

$$|x_i| \leq R i^{-1/p}, \; 1 \leq i \leq n,$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι τα στοιχεία είναι ταξινομημένα σε φθίνουσα σειρά.

Ουσιαστικά το σύνολο όλων των συμπιέσιμων σημάτων είναι το σύνολο όλων των σημάτων που μπορούν να προσεγγιστούν επιτυχημένα από αραιά σήματα. Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα αραιών/συμπιέσιμων σημάτων. Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα δίνεται παρακάτω.

Πολλές πραγματικές εικόνες είναι (κατά προσέγγιση) αραιές σε συγκεκριμένες βάσεις, όπως η βάση του Διακριτού μετασχηματισμού συνημιτόνου (Direct Cosine Transform (DCT)) ή η βάση των κυματιδίων (wavelets). Αυτό το χαρακτηριστικό των σημάτων εκμεταλλεύεται το στάνταρ JPEG-2000. Υποθέτοντας ότι αναπαριστούμε μία εικόνα ως ένα διάνυσμα (τοποθετώντας τις στήλες του πίνακα της εικόνας σειριακά), με κάθε στοιχείο του πίνακα να περιγράφει την ένταση του γκρι

χρώματος, το στάνταρ JPEG-2000 μετασχηματίζει την εικόνα στο πεδίο των κυματιδίων, στο οποίο το σήμα περιέχει ένα μικρό αριθμό από μεγάλους συντελεστές. Η τελική εικόνα αποκτιέται κρατώντας αυτούς τους μεγάλους συντελεστές και βάζοντας τους υπόλοιπους στο μηδέν. Κατα συνέπεια, υπάρχει σημαντικό κέρδος σε χώρο αποθήκευσης με μόνο μία μικρή υποβάθμιση στην ποιότητα της εικόνας.

2.3 Λεξικά σημάτων

Στην παρουσίασή μας ένα σήμα είναι ένα διάνυσμα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ σε ένα διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$. Κατα συνέπεια, ο $\mathbb{R}^n$ δέχεται μία βάση, στην οποία ο $\boldsymbol{x}$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο. Με άλλα λόγια, κάθε διάνυσμα σήματος $\boldsymbol{x}$ μπορεί να γραφτεί ως ο γραμμικός συνδυασμός των ανεξάρτητων στοιχείων μιας βάσης. Υπάρχουν πολλές βάσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν κάποιο διανυσματικό χώρο. Σε αυτή τη διπλωματική τα διανύσματα αναπαριστούν σήματα και για αυτό θα εισάγουμε μερικούς επιπλέον όρους. Στην ορολογία της επεξεργασίας σήματος η γενίκευση μιας βάσης ονομάζεται *λεξικό* (dictionary) και τα στοιχεία της βάσης/λεξικού καλούνται *άτομα* (atoms). [The15]

Ορισμός 2.3.1 (Λεξικό)**.** *Ένα λεξικό είναι ένα σύνολο θεμελιωδών σημάτων $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in I$, όχι υποχρεωτικά ανεξάρτητων, τα οποία καλύπτουν ένα χώρο σήματος. Τα στοιχεία του λεξικού καλούνται άτομα.*

Τα λεξικά μπορούν να χαρακτηριστούν ως *πλήρη* (complete) και *υπερπλήρη* (overcomplete). Οι ορισμοί αυτών των όρων ακολουθούν.

Ορισμός 2.3.2 (Πλήρη και υπερπλήρη λεξικά)**.**

- *Ένα λεξικό λέγεται πλήρες εάν αποτελείται από n (συνήθως ορθοκανονικά) ανεξάρτητα διανύσματα σημάτων $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$. Ένα αυθαίρετο σήμα $\boldsymbol{x}$ μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας τα άτομα ενός πλήρους λεξικού με μοναδικό τρόπο.*

- *Ένα λεξικό καλείται υπερπλήρες εάν αποτελείται από περισσότερα από n διανύσματα σημάτων $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in I$, δηλαδή περισσότερα διανύσματα από την διάσταση του διανυσματικού χώρου. Τα άτομα είναι εξαρτημένα, καθώς ο αριθμός τους είναι μεγαλύτερος από την διάσταση του διανυσματικού χώρου. Υπάρχουν πολύ τρόποι να εκφράσουμε ένα αυθαίρετο σήμα $\boldsymbol{x}$ σε τέτοια λεξικά.*

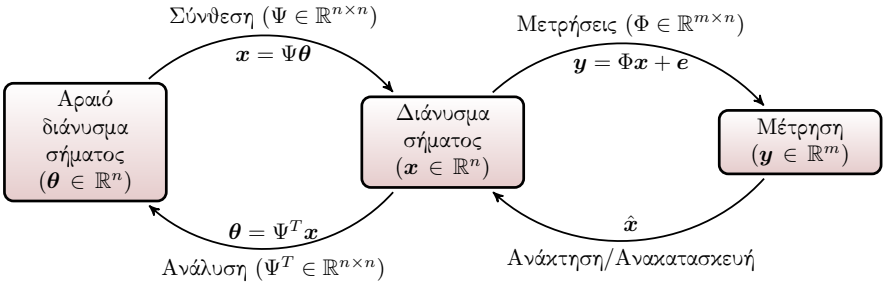
Μπορούμε να εκφράσουμε ένα σήμα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ σε ένα (υπερπλήρες) λεξικό Ψ ως

$$\boldsymbol{x} = \Psi \boldsymbol{\theta}$$

ή

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i \in I} \theta_i \boldsymbol{\psi}_i,$$

όπου $\{\theta_i\}, i \in I$ είναι οι συντελεστές του σήματος στο λεξικό Ψ και $\{\boldsymbol{\psi}_i\}, i \in I$ (οι στήλες του πίνακα Ψ) τα άτομα του λεξικού. Γενικά δεν υπάρχει μοναδικό σύνολο συντελεστών $\{\theta_i\}, i \in I$ όταν χρησιμοποιούμε υπερπλήρη λεξικά. Αν και φαίνεται ότι η χρήση υπερπλήρων λεξικών είναι μαθηματικά προβληματική, καθώς



Σχήμα 2.1: Η μεγάλη εικόνα του προβλήματος της αραιής ανάκτησης.

παραβιάζει τις ιδιότητες της βάσης ενός διανυσματικού χώρου, υπάρχει μία μαθηματική έννοια που περιγράφει αυτού του είδους τα λεξικά. Αυτή η γενίκευση της βάσης καλείται *πλαίσιο* (frame). [KC07]

Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα βάσης είναι η βάση του Διακριτου μετασχηματισμού Φουριερ (DFT). Εαν τοποθετήσουμε τα διανύσματα βάσης του DFT ως στήλες σε ένα πίνακα φτιάχνουμε το πίνακα του DFT Ψ. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Ψ είναι ένας ορθογώνιος πίνακας, καθώς ο DFT είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός, δηλαδή τα διανύσματα της βάσης αυτού είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Δοθέντος ενός συνόλου διανυσμάτων σημάτων, $\{\boldsymbol{x}_i\}_{1\leq i\leq s}$, μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα της εύρεσης ενός (υπερπλήρους) λεξικού, στο οποίο όλα τα διανύσματα του συνόλου δέχονται μία αραιή αναπαράσταση. Η διαδικασία αυτή καλείται *εκμάθηση λεξικού* (dictionary learning) και προσφέρει την δυνατότητα για βελτίωση της απόδοσης σε πολλές εφαρμογές.

2.4 Η μεγάλη εικόνα της αραιής ανάκτησης

Σε αυτό το τμήμα θα δώσουμε μια γενική περιγραφή (την μεγάλη εικόνα) του προβλήματος της αραιής ανάκτησης (sparse recovery) και θα ορίσουμε τα βασικά στοιχεία που το αποτελούν. Αυτή η παρουσίαση έχει ως σκοπό τη συλλογή των βασικών εννοιών και όρων σε ένα μέρος. Η εικόνα 2.4 περιέχει τα βασικά στοιχεία και διαδικασίες του προβλήματος μαζί με την σχετική ορολογία. Μην επιμείνετε στην ακριβή ορολογία ή σημασία αυτών που εικονίζονται καθώς κάποια πράγματα μπορεί να χρησιμοποιηθούν διαφορετικά αργότερα.

Τα σήματα που απεικονίζονται στην εικόνα 2.4 είναι τα ακόλουθα.

- Διάνυσμα σήματος ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$)
  Το άγνωστο διάνυσμα σήματος το οποίο παρατηρούμε μέσω μίας γραμμικής διαδικασίας μέτρησης. Είναι το σήμα που θέλουμε (εμμέσως, μέσω της εκτίμησης του $\boldsymbol{\theta}$) να εκτιμήσουμε με βάση το σύνολο των μετρήσεων $\boldsymbol{y}$ και εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι υπάρχει μία βάση Ψ στην οποία το $\boldsymbol{x}$ είναι αραιό. Ανήκει σε ένα χώρο σημάτων υψηλής διάστασης (συναρτήσει της διάστασης m του χώρου των μετρήσεων) και υποθέτουμε ότι δίνεται στην κανονική βάση, στην οποία το σήμα δεν είναι κατ΄ ανάγκη αραιό.

- Παρατηρήσεις/Μετρήσεις/Δείγματα ($\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$)
  Το διάνυσμα παρατηρήσεων $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ που προκύπτει μέσω της μέτρησης του

$\boldsymbol{x}$ με ένα πίνακα μετρήσεων Φ. Είναι ένα διάνυσμα που ¨κατοικεί' σε ένα χώρο χαμηλής διάστασης (συναρτήσει της διάστασης n του διανύσματος του σήματος).

- Αραιό διάνυσμα σήματος ($\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$)
  Το διάνυσμα σήματος $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ εκφρασμένο σε μία βάση όπου είναι αραιό. Είναι το σήμα που θέλουμε να εκτιμήσουμε δοθέντων των παρατηρήσεων $\boldsymbol{y}$ και της γνώσης ότι το $\boldsymbol{x}$ δέχεται μία αραιή βάση, στην οποία μπορεί να αναπαρασταθεί ως $\boldsymbol{\theta}$.

Οι βασικές διαδικασίες που παρουσιάζουμε είναι οι ακόλουθες.

- Αλλαγή βάσης/Μετασχηματισμός (Ψ, Ψ^T)
  Αυτοί οι πίνακες αναπαριστούν τους πίνακες αλλαγής βάσης για τα διανύσματα σημάτων $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{\theta}$. Για απλότητα υποθέτουμε ότι το λεξικό που χρησιμοποιούμε είναι πλήρες και ορθογώνιο και κατά συνέπεια οι μετασχηματισμοί αναπαρίστανται από ορθογώνιους πίνακες. Άρα, ισχύει ότι $\Psi^{-1} = \Psi^T$ και κατά συνέπεια έχουμε ότι $\boldsymbol{x} = \Psi\boldsymbol{\theta}$ (Σύνθεση)(Synthesis) και $\boldsymbol{\theta} = \Psi^T\boldsymbol{x}$ (Ανάλυση)(Analysis).

- Μέτρηση/Δειγματοληψία/Μείωση διάστασης (Φ)
  Ο πίνακας μέτρησης Φ που χρησιμοποιείται για να επιτελέσει την γραμμική διαδικασία μέτρησης [1]. Η διαδικασία της μέτρησης είναι $\boldsymbol{y} = \Phi\boldsymbol{x}$ στην περίπτωση χωρίς θόρυβο και $\boldsymbol{y} = \Phi\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}$ στην περίπτωση με θόρυβο, όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^m$ αναπαριστά το θόρυβο.

- Ανάκτηση/Ανακατασκευή
  Η ανάκτηση συνιστά την αντίστροφη διαδικασία της μέτρησης. Αυτή η διαδικασία έχει ως στόχο την επιτυχή εκτίμηση του αρχικού διανύσματος σήματος, δοθέντων των παρατηρήσεων $\boldsymbol{y}$ και της πρότερης γνώσης ότι το διάνυσμα σήματος είναι αραιό σε κάποια βάση.

Τώρα που έχουμε περιγράψει τα βασικά συστατικά του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε θα διατυπώσουμε το αντίστοιχο μαθηματικό πρόβλημα. Στην περίπτωση χωρίς θόρυβο οι ακόλουθες εξισώσεις ισχύουν

$$\boldsymbol{x} = \Psi\boldsymbol{\theta}, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{y} = \Phi\boldsymbol{x}. \tag{2.2}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.1), (2.2) τελικά παίρνουμε

$$\boldsymbol{y} = \Phi\boldsymbol{x} = \Phi\Psi\boldsymbol{\theta} \Rightarrow \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta},$$

όπου $A = \Phi\Psi$.

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι το πρόβλημα της ανάκτησης αραιών διανυσμάτων (sparse vector recovery problem) και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Δίνεται ένα διάνυσμα σήματος $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, το οποίο είναι k-αραιό σε κάποια βάση

[1] Ουσιαστικά κάθε παρατήρηση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του άγνωστου διανύσματος σήματος εκφρασμένος ως το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος σήματος με κάποια γραμμή του πίνακα μέτρησης, δηλαδή $y_i = \boldsymbol{\phi}_i^T\boldsymbol{\theta}$, $i = 1, \ldots, m$. Αυτός είναι ο λόγος που αναφερόμαστε στην μέτρηση ως μία γραμμική διαδικασία μέτρησης.

$\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και μπορεί να αναπαρασταθεί ως $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Sigma_k$ σε αυτή, και ένα πίνακας μέτρησης $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Πραγματοποιούμε μία μέτρηση που περιγράφεται, ανάλογα με την ύπαρξη θορύβου ή όχι, ως εξής:

- $\boldsymbol{y} = \Phi\Psi\boldsymbol{\theta}_0 = A\boldsymbol{\theta}_0$ (περίπτωση χωρίς θόρυβο)
- $\boldsymbol{y} = \Phi\Psi\boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{e} = A\boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{e}$, $\|\boldsymbol{e}\|_2 \leq \epsilon$ (περίπτωση με θόρυβο)

Το πρόβλημα είναι, δοθέντων των A και $\boldsymbol{y}$, να ανακατασκευάσουμε επιτυχώς το αραιό διάνυσμα σήματος $\boldsymbol{\theta}_0$ και κατά συνέπεια το $\boldsymbol{x}_0$. Η ακριβής ερμήνεια της επιτυχίας εξαρτάται από το σενάριο που αντιμετωπίζουμε. Κατα συνέπεια, έχουμε τις ακόλουθες έννοιες ανάκτησης, όπου συμβολίζουμε το ανακατασκευασμένο διάνυσμα ως $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

- *Ακριβής ανάκτηση (Exact recovery)*, εάν $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_0$, στην περίπτωση χωρίς θόρυβο
- *Ανθεκτική ανάκτηση (Robust recovery)*, εάν $\|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\|$ είναι μικρό (για κάποια νόρμα), στην περίπτωση με θόρυβο. Χονδρικά, θέλουμε το σφάλμα να κλιμακώνει ήπια συναρτήσει του επιπέδου θορύβου ϵ.

Επίσης, μία άλλη επέκταση και των δύο σεναρίων που πρόκειται να λάβουμε υπόψιν αφορά στην πιθανότητα το διάνυσμα σήματος $\boldsymbol{x}_0$ που μετράμε και θέλουμε να ανακατασκευάσουμε να είναι μόνο κατά προσέγγιση αραιό (συμπιέσιμο). Σε αυτήν την περίπτωση νοιαζόμαστε για την *ευστάθεια* (stability) της λύσης $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, δηλαδή το σφάλμα εκτίμησης $\|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\|$ να κλιμακώνει αργά συναρτήσει το σφάλματος προσέγγισης $\sigma_k(\boldsymbol{\theta})_p$ του συμπιέσιμου σήματος από ένα αραιό. Για να αποφύγουμε την σύγχυση θα μεταθέσουμε την ανάλυση της περίπτωσης με θόρυβο και την συζήτηση ζητημάτων σχετικών με την ευστάθεια.

Συνεπώς, στην περίπτωση χωρίς θόρυβο καταλήγουμε στο επόμενο υποκαθορισμένο (underdetermined) σύστημα γραμμικών εξισώσεων, του οποίου και τις λύσεις αναζητούμε.

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta},\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n,\ m < n.$$

Αυτό το σύστημα είναι υποκαθορισμένο και κατά συνέπεια επιδέχεται έναν άπειρο αριθμό λύσεων. Το γεγονός που μας επιτρέπει να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο είναι η πρότερη γνώση ότι το $\boldsymbol{x}$ είναι αραιό σε κάποια βάση. Είναι πιθανό ότι το σύστημα, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, επιδέχεται μοναδική αραιή λύση, την αρχική λύση $\boldsymbol{\theta}$. Θα μελετήσουμε αυτήν την πιθανότητα και τις συγκεκριμένες συνθήκες στις επόμενες ενότητες.

2.5 Υποκαθορισμένα συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως το μαθηματικό πρόβλημα που βρίσκεται πίσω από το πρόβλημα της ανάκτησης αραιών σημάτων είναι η επίλυση ενός *υποκαθορισμένου συστήματος γραμμικών εξισώσεων* (underdetermined system of linear equations), δοθέντων των περιορισμών ότι η λύση που αναζητούμε είναι αραιή. Αρχικά, θα μελετήσουμε την γενική λύση του προβλήματος χωρίς περιορισμούς. Έτσι έχουμε [The15]

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta},\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n,\ m < n. \tag{2.3}$$

Χωρις βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι πλήρους βαθμού γραμμής και έτσι περιγράφει m ανεξάρτητες γραμμικές εξισώσεις n μεταβλητών. Προφανώς το σύνολο των λύσεων είναι άπειρο. Συγκεκριμένα, κάθε εξίσωση ορίζει ένα υπερεπίπεδο στο χώρο των n διαστάσεων. Παρατηρήστε ότι τα υπερεπίπεδα δεν είναι παράλληλα, ως αποτέλεσμα της γραμμικής ανεξαρτησίας των αντίστοιχων εξισώσεων. Έτσι το σύνολο των λύσεων δημιουργείται από την τομή των m υπερεπιπέδων στο n-διάστατο χώρο. Συνεπώς, η τομή είναι ένα $(n-m)$-διάστατο υπερεπίπεδο. Συμβολίζουμε το σύνολο των λύσεων ως

$$\Theta = \left\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n :\ y_i = \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{\theta},\ i = 1, \ldots, m\right\},$$

όπου τα $\boldsymbol{a}_i^T$ συμβολίζουν τις γραμμές του A.
Ισοδύναμα αυτό το σύνολο μπορεί να γραφτεί ως

$$\Theta = \boldsymbol{\theta}_0 + null(A),$$

όπου $\boldsymbol{\theta}_0$ είναι μία λύση του (2.3). Μπορούμε εύκολα να το δούμε αυτό αν θεωρήσουμε μία συγκεκριμένη λύση $\boldsymbol{\theta}_0$ και μία αυθαίρετη λύση $\boldsymbol{\theta}$ του συστήματος (2.3). Άρα έχουμε ότι

$$A\left(\boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta}\right) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta} \in Null(A) \Rightarrow \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + Null(A).$$

Για να βρούμε τις λύσεις του συστήματος γραμμικών εξισώσεων με περιορισμούς θα χρησιμοποιήσουμε την διαίσθησή μας για να βρούμε τη σωστή στρατηγική λύσης. Πιθανώς η πρώτη ιδέα που μας έρχεται στο μυαλό είναι να ψάξουμε στο σύνολο όλων των δυνατών λύσεων του συστήματος χωρίς περιορισμούς και να επιλέξουμε τις λύσεις με το μικρότερο αριθμό μη-μηδενικών στοιχείων Στην επόμενη υποενότητα θα διατυπώσουμε αυτήν την ιδέα ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης.

2.6 Τα προβλήματα βελτιστοποίησης της αραιής ανάκτησης

Θα ανάγουμε το πρόβλημα της αραιής ανάκτησης (χωρίς θόρυβο) στην επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης της ακόλουθης μορφής

$$\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & \|\boldsymbol{\theta}\|_p \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta}. \end{array},$$

όπου $\|\cdot\|_p$ είναι κάποια l_p νόρμα. Για την ακρίβεια θα αξιολογήσουμε 3 διαφορετικά προβλήματα βελτιστοποίησης, τα οποία αντιστοιχούν σε $p = 0, 1, 2$.

Το σκηνικό μέσα στο οποίο θα μελετήσουμε τα προβλήματα βελτιστοποίησης είναι το ακόλουθο: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διάνυσμα σήματος $\boldsymbol{x}_0$, το οποίο δέχεται μία αραιή αναπαράσταση $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Sigma_k$. Μετράμε το $\boldsymbol{x}_0$ και κατά συνέπεια λαμβάνουμε τις παρατηρήσεις $\boldsymbol{y} = \Phi\boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{\theta}_0$, όπου $A = \Psi\Phi$. Σε πολλά σημεία θα θεωρήσουμε τα προβλήματα βελτιστοποίησης ως αλγορίθμους που δέχονται σαν είσοδο το πίνακα A και τις παρατηρήσεις $\boldsymbol{y}$ και παράγουν σαν έξοδο μία εκτίμηση $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ του διανύσματος $\boldsymbol{\theta}_0$. Έπειτα μπορούμε να αποκτήσουμε μία εκτίμηση του αρχικού διανύσματος σήματος, ως $\hat{\boldsymbol{x}} = \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Επίσης σημειώστε ότι θα αντιμετωπίσουμε το

πίνακα A ως πίνακα μετρήσεων, ο οποίος μετράει το αραιό διάνυσμα σήματος $\boldsymbol{\theta}_0$, αν και το περιγράψαμε διαφορετικά στις προηγούμενες ενότητες.

2.6.1 l_0 νόρμα

Η ανάλυση σε αυτό το τμήμα βασίζεται στην έννοια της l_0 νόρμας. Η l_0 νόρμα ορίζεται ως $\|\boldsymbol{\theta}\|_0 = card(supp(\boldsymbol{\theta}))$. Ωστόσο, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι τεχνικά η l_0 νόρμα δεν είναι έγκυρη, καθώς δεν ικανοποιεί όλες τις απαραίτητες συνθήκες έτσι ώστε να συνιστά νόρμα. Παρ΄ όλα αυτά, θα χρησιμοποιούμε τον όρο "l_0 νόρμα" έχοντας όμως στο νου μας αυτή την παρατήρηση.

Μία πρώτη ιδέα προς την κατεύθυνση της επίλυσης του προβλήματος περιγράφεται από το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Ορισμός 2.6.1 (l_0 ελαχιστοποίηση (l_0 minimization task))**.**

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n}{minimize} \quad & \|\boldsymbol{\theta}\|_0 \\ subject\ to \quad & \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta}. \end{aligned}$$

Ουσιαστικά, αυτό που κάνει το l_0 πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι από το σύνολο όλων των πιθανών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta}$ να επιστρέφει τις λύσεις με την μικρότερη l_0 νόρμα, δηλαδή τις αραιότερες λύσεις. Είναι ξεκάθαρο ότι ελπίζουμε να υπάρχει μόνο μία λύση που έχει την μικρότερη l_0 νόρμα, αυτή που μετρήθηκε ($\boldsymbol{\theta}_0$) και η αντίστοιχη μετρήση $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta}_0$ δόθηκε ως είσοδος μαζί με τον πίνακα A.

Αυτό το πρόβλημα είναι NP-hard στην γενική περίπτωση, όπου θεωρούμε ως πιθανές εισόδους όλους τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και τα διανύσματα παρατηρήσεων $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$. Το σημαντικό θέμα εδώ είναι εάν η έξοδος του l_0 προβλήματος βελτιστοποίησης επιστρέφει μοναδική και σωστή αραιή λύση σε όλες τις περιπτώσεις. Η απάντηση είναι όχι, καθώς προβλήματα μπορούν να προκύψουν εάν, για παράδειγμα, επιλέξουμε το πίνακα μετρήσεων A με τέτοιο τρόπο ώστε να προβάλλει (τουλάχιστον) δύο αραιά σήματα (όπου το ένα από αυτά είναι το πραγματικό σήμα, αυτό που μετρήθηκε και θέλουμε να ανακατασκευάσουμε) στο ίδιο διάνυσμα στον χώρο χαμηλής διάστασης.

Πιο επίσημα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα που χαρακτηρίζει την επάρκεια του l_0 προβλήματος βελτιστοποίησης αναφορικά με την ανάκτηση αραιών διανυσμάτων από γραμμικές μετρήσεις [FR13].

Θεώρημα 2.6.1. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας πίνακας. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

1. *Για κάθε $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Sigma_k$, ισχύει ότι το $\boldsymbol{\theta}_0$ είναι η μοναδική k-αραιή λύση του γραμμικού συστήματος $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta}$, όπου $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta}_0$ και $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Για κάθε $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Sigma_k$, ισχύει ότι $\boldsymbol{\theta}_0$ είναι η μοναδική λύση του l_0 προβλήματος ελαχιστοποίησης.*

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n}{minimize} \quad & \|\boldsymbol{\theta}\|_0 \\ subject\ to \quad & \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta} \end{aligned},$$

   όπου $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta}_0$.

3. *Για τον πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ισχύει ότι*

$$KerA \cap \Sigma_{2k} = \{0\}.$$

Ουσιαστικά, η προηγούμενη πρόταση προσφέρει μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για τον πίνακα μετρήσεων A που εξασφαλίζει ότι κάθε k-αραιό διάνυσμα μπορεί να ανακτηθεί επιτυχώς χρησιμοποιώντας το (2.6.1), μετά από μέτρηση από τον A. Επίσης, λέει ότι εάν ένα σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική k-αραιή λύση τότε το l_0 πρόβλημα ελαχιστοποίησης θα την βρει. Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι για τον αριθμό των μετρήσεων m που απαιτούνται έτσι ώστε να ανακτήσουμε κάθε k-αραιό διάνυσμα, χρησιμοποιώντας τον ίδιο πίνακα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι (τουλάχιστον θεωρητικά) $m \geq 2k$ παρατηρήσεις αρκούν.

Συμπερασματικά, σχετικά με την ικανότητά του να παρέχει μοναδική και σωστή αραιή λύση παρατηρούμε ότι αυτό το πρόβλημα αιχμαλωτίζει την έννοια της εύρεσης της αραιότερης λύσης, αλλά αποτυγχάνει να επιστρέψει την σωστή λύση σε όλες τις περιπτώσεις. Δουλεύει μόνο κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, οι οποίες εξαρτώνται από την επιλογή του πίνακα μετρήσεων A. Παρόλα αυτά, ακόμα και στην περίπτωση όπου οι συνθήκες αποδειχθούν αρκετά χαλαρές ώστε να ισχυριστούμε ότι η λύση αποκτείται σε όλες τις πρακτικές περιπτώσεις, η υπολογιστική δυσεπιλυσιμότητα καθιστά αυτό το πρόβλημα άχρηστο. Κατα συνέπεια πρέπει να καταφύγουμε σε μία άλλη προσέγγιση.

2.6.2 l_2 νόρμα

Μία ιδέα ώστε να μετριάσουμε την δυσεπιλυσιμότητα του προηγούμενου προβλήματος βελτιστοποίησης είναι να χαλαρώσουμε τους στόχους μας, αποκλίνοντας λίγο από το πρόβλημα που βρίσκει αραιές λύσεις, ελπίζοντας ότι σε πολλές (πρακτικές) περιπτώσεις το νέο πρόβλημα θα μας παρέχει την σωστή λύση. Μία τέτοια χαλάρωση περιέχεται στο επόμενο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Ορισμός 2.6.2 (l_2 πρόβλημα ελαχιστοποίησης (l_2 minimization task))**.**

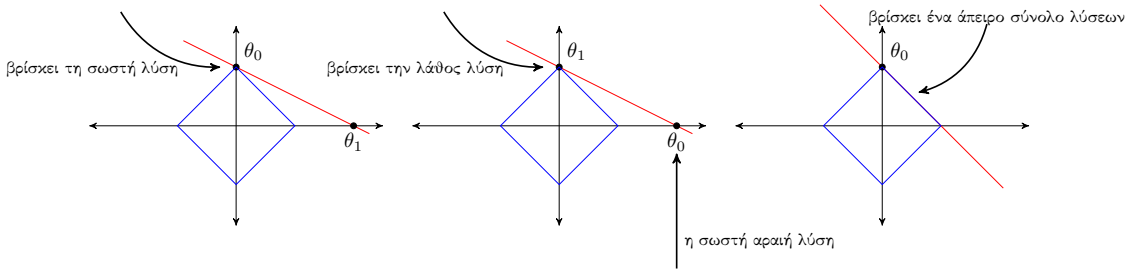
$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n}{\textit{minimize}} \quad & \|\boldsymbol{\theta}\|_2 \\ \textit{subject to} \quad & \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta}. \end{aligned}$$

Η λύση αυτού του προβλήματος είναι μοναδική και δίνεται από τη ακόλουθη, κλειστής μορφής, έκφραση [The15]

$$\boldsymbol{\theta} = A^T(AA^T)^{-1}\boldsymbol{y}.$$

Είναι προφανές ότι το πρόβλημα αυτό είναι υπολογιστικά ευεπίλυτο καθώς ο υπολογισμός της λύσης του απαιτεί μόνο πολλαπλασιασμούς και αντιστροφές πινάκων, για τα οποία διαθέτουμε αποδοτικούς αλγορίθμους. Ξανά η σημαντική ερώτηση είναι εάν το l_2 πρόβλημα ελαχιστοποίησης δίνει μοναδική και σωστή αραιή λύση. Αν και η μοναδική λύση είναι εξασφαλισμένη, η λύση αυτή δεν είναι απαραίτητα η σωστή, αυτή η οποία μετρήθηκε. Για την ακρίβεια σε πολλές περιπτώσεις το l_2 πρόβλημα ελαχιστοποίησης δεν επιστρέφει καν αραιές λύσεις. Για αυτό, το l_2 πρόβλημα ελαχιστοποίησης δεν έχει πρακτική αξία για το πρόβλημά μας και έτσι θα παραλείψουμε μία πιο εξονυχιστική ανάλυση.

Συμπερασματικά, αυτό το πρόβλημα, αν και υπολογιστικά ευεπίλυτο, δεν παρέχει πάντα αραιές λύσεις. Για αυτό θα πρέπει να θεωρήσουμε κάποια άλλη χαλάρωση.



Σχήμα 2.2: Τα τρία διαφορετικά σενάρια που μπορούν να ανακύψουν σε ένα πρόβλημα αραιής ανάκτησης χρησιμοποιώντας το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Ας υποθέσουμε ότι $n = 2$, $m = 1$, $\boldsymbol{\theta}_0$ είναι το 1-αραιό διάνυσμα που μετρήσαμε και $\boldsymbol{\theta}_1$ κάποιο άλλο 1-αραιό διάνυσμα. (a) Το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης βρίσκει την σωστή αραιή λύση. (b) Το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης βρίσκει μία 1-αραιή λύση αλλά όχι την σωστή ($\boldsymbol{\theta}_0$). (c) Το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης επιστρέφει έναν άπειρο αριθμό λύσεων, στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η σωστή. Είναι προφανές ότι μόνο η περίπτωση (a) θεωρείται επιτυχημένη. Η εικόνα βασίζεται στο [The15].

2.6.3 l_1 νόρμα

Η μέση λύση μεταξύ των δύο προηγούμενων προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι το l_1 *πρόβλημα ελαχιστοποίησης* (l_1 minimization task).

Ορισμός 2.6.3 (l_1 ελαχιστοποίηση (l_1 minimization task))**.**

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n}{\textit{minimize}} \quad & \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \\ \textit{subject to} \quad & \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta}. \end{aligned}$$

Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας P. Συνεπώς, υπάρχουν αρκετοί αποδοτικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρούμε τις λύσεις αυτού του προβλήματος (π.χ μέθοδοι εσωτερικών σημείων, μέθοδος simplex).

Η κεντρική ερώτηση εδώ είναι εάν το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να μας δώσει τη σωστή αραιή λύση. Η απάντηση είναι : κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, οι οποίες εξαρτώνται από την επιλογή του πίνακα μετρήσεων A. Τα διαφορετικά αποτελέσματα του l_1 προβλήματος ελαχιστοποίησης είναι τα ακόλουθα

- Ένα άπειρο σύνολο λύσεων
- Μία μοναδική αραιή λύση, αλλά όχι η σωστή
- Η σωστή αραιή λύση (μοναδική λύση).

Τα διαφορετικά αποτελέσματα υπογραμμίζουν την σημασία της επιλογής του κατάλληλου πίνακα μετρήσεων. Η εικόνα 2.6.3 απεικονίζει αυτές τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για το πίνακα A, έτσι ώστε το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης να επιστρέφει τη σωστή αραιή λύση για κάθε πιθανό k-αραιό διάνυσμα $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ ως είσοδο. Η συνθήκη που θα συζητήσουμε λέγεται *ιδιότητα του μηδενόχωρου* (null-space property).

Ορισμός 2.6.4 (Ιδιότητα του μηδενόχωρου τάξης k). *[FR13] Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας πίνακας. Λέμε ότι ο A ικανοποιεί την ιδιότητα του μηδενόχωρου τάξης k εάν ισχύει ότι*

$$\|\boldsymbol{x}_S\|_1 < \|\boldsymbol{x}_{[n]\setminus S}\|_1, \forall \boldsymbol{x} \in KerA \setminus \{0\} \text{ και } \forall\, S \subseteq [n] \text{ με } card(S) \leq k, \tag{2.4}$$

όπου $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα που συνδέει την ιδιότητα του μηδενόχωρου με την ακριβή ανάκτηση αραιών διανυσμάτων χρησιμοποιώντας το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Θεώρημα 2.6.2 (Ιδιότητα του μηδενόχωρου και ακριβής ανάκτηση). *[Cha+12a] Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας πίνακας. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες*

1. *Για κάθε $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Sigma_k$, ισχύει ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}_0$ είναι η μοναδική λύση του l_1 προβλήματος ελαχιστοποίησης, με $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta}_0$.*

2. *Η ιδιότητα του μηδενόχωρου τάξης k ισχύει για τον πίνακα A.*

2.7 Συμπιεστική δειγματοληψία

Ένας πιθανός τρόπος για να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι ένα σήμα είναι αραιό σε μία βάση είναι στα σχήματα συμπίεσης. Για να το δείξουμε αυτό θα θεωρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σήμα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, το οποίο είναι (προσεγγιστικά) αραιό σε κάποια βάση, όπου εκφράζεται ως $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$. Ουσιαστικά αυτό σημαίνει ότι έχουμε εφαρμόσει μία διαδικασία δειγματοληψίας, η οποία οδήγησε σε n παρατηρήσεις (τα n στοιχεία του διανύσματος $\boldsymbol{x}$). Θέλουμε να εκμεταλλευτούμε την αραιότητα του σήματος με στόχο να το συμπιέσουμε. Εκτελούμε τα επόμενα βήματα για να το επιτύχουμε. [The15]

1. Μετασχηματίζουμε το σήμα σε μία βάση στην οποία δέχεται προσεγγιστικά μία k-αραιή αναπαράσταση. Αυτό γίνεται ως $\boldsymbol{\theta} = \Phi\boldsymbol{x}$.

2. Κρατάμε τις k μεγαλύτερες τιμές του $\boldsymbol{\theta}$ και κωδικοποιούμε τις θέσεις τους και τις τιμές τους. Μπορούμε να αποθηκεύσουμε μία συμπιεσμένη εκδοχή του αρχικού σήματος χρησιμοποιώντας την προηγούμενη κωδικοποίηση.

3. Δημιουργούμε το διάνυσμα σήματος $\boldsymbol{\theta}_0$, όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}_0$ είναι ίσο με το $\boldsymbol{\theta}$ στις θέσεις που αντιστοιχούν στα k μεγαλύτερα στοιχεία του $\boldsymbol{\theta}$ και είναι 0 στα υπόλοιπα. Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\boldsymbol{x}_0 = \Phi^T\boldsymbol{\theta}_0$ μπορούμε να αποκτήσουμε μία προσεγγιστική εκδοχή $\boldsymbol{x}_0$ του αρχικού σήματος $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, όταν αυτή χρειαστεί.

Η προηγούμενη διαδικασία φαίνεται αποτελεσματική για συμπίεση (προσεγγιστικά αραιών) σημάτων, αλλά υπάρχει ένα πράγμα που χρειάζεται επιπλέον σκέψη. Μετράμε/δειγματοληπτούμε n στοιχεία του διανύσματος $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, αλλά στο τέλος κρατάμε μόνο k συντελεστές, όπου συνήθως $k << n$. Αυτό μας κάνει να αναρωτιόμαστε αν μπορούμε να τα καταφέρουμε καλύτερα. Τι αν μπορούσαμε να δειγματοληπτήσουμε λιγότερα από n στοιχεία ενός n-διάστατου σήματος $\boldsymbol{x}$, αρκετά έτσι ώστε να μας παρέχουν τους k συντελεστές που περιγράφουν επαρκώς το σήμα στην αραιή βάση; Αυτή είναι η κινητήρια ιδέα, η οποία οδήγησε στην

γέννηση του πεδίου της *συμπιεστικής δειγματοληψίας* (Compressive sampling). Ιδανικά θα θέλαμε να αποκτήσουμε ένα αριθμό δειγμάτων m κοντά στο $k << n$ (προφανώς πρέπει να ισχύει ότι $k < m$). Με άλλα λόγια, αποκτούμε απευθείας ένα μειωμένο αριθμό δειγμάτων, συγχωνεύοντας με αυτό τον τρόπο τα βήματα της συμπίεσης και της δειγματοληψίας, ο οποίος είναι ο χαμηλότερος δυνατός έτσι ώστε το πληροφοριακό περιεχόμενο του σήματος (το οποίο συμπεριλαμβάνεται στους k μεγαλύτερους συντελεστές) να διατηρείται.

Η συμπιεστική δειγματοληψία είναι ουσιαστικά μία τεχνική στην επεξεργασία σήματος. Αφήνοντας για λίγο στην άκρη την ακριβή διατύπωση του προβλήματος της αραιής ανάκτησης που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα και θεωρώντας το σε ένα γενικότερο πλαίσιο έχουμε το ακόλουθο παράδειγμά που δεν πρέπει να παραλείψουμε. Γνωρίζουμε από το θεώρημα δειγματοληψίας του Nyquist ότι για να ανακατασκευάσουμε τέλεια ένα ζωνοπερατό (συνεχούς-χρόνου) σήμα πρέπει να το δειγματοληπτήσουμε με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s \geq 2f$, όπου f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας και f η υψηλότερη συχνότητα του σήματος. Καλούμε τη μικρότερη δυνατή συχνότητα δειγματοληψίας , δηλαδή τη $f_N = 2f$, *συχνότητα Nyquist*. Το πεδίο της συμπιεστικής δειγματοληψίας ουσιαστικά ισχυρίζεται ότι εάν ένα σήμα είναι αραιό σε κάποια (συνεχή) βάση (π.χ στη βάση Fourier) μπορούμε να το δειγματοληπτήσουμε με συχνότητα χαμηλότερη από τη συχνότητα Nyquist και ταυτόχρονα να είμαστε σε θέση να το ανακατασκευάσουμε τέλεια. Αυτή η ικανότητα είναι σημαντική σε περιπτώσεις όπου τα σήματα που μελετάμε είναι ευρέος φάσματος.

2.8 Πίνακες μετρήσεων

Μία από τις πιο σημαντικές πτυχές του πεδίου της αραιής ανάκτησης είναι ο σχεδιασμός του κατάλληλου πίνακα *μετρήσεων* (measurement matrix). Είναι σημαντικό να σχεδιάσουμε τον κατάλληλο πίνακα μετρήσεων καθώς είναι ο κύριος παράγοντας που καθορίζει εάν μπορούμε να ανακτήσουμε τη σωστή αραιή λύση. Ουσιαστικά, χρειαζόμαστε ένα πίνακα μετρήσεων που μας παρέχει μία ευσταθή προβολή του συνόλου των k-αραιών διανυσμάτων. Για να αξιολογήσουμε την ικανότητα κάποιου αυθαίρετου πίνακα μετρήσεων να επιτελεί ευσταθή προβολή, εισάγουμε 2 κατάλληλα μέτρα. Τα 2 μέτρα δίνονται παρακάτω.

1. Συνοχή (Coherence)

2. Ιδιότητα περιορισμένης ισομετρίας (Restricted isometry property)

2.8.1 Συνοχή

Ένα μέτρο που χαρακτηρίζει την ικανότητα ενός πίνακα να παρέχει μία ευσταθή προβολή για την κλάση των k-αραιών διανυσμάτων είναι η *αμοιβαία συνοχή* (mutual coherence). Ο ορισμός δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 2.8.1 (Αμοιβαία συνοχή)**.** *[Τη∈15] Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας $m \times n$ πίνακας και $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leq i \leq n$ οι στήλες του A. Η αμοιβαία συνοχή του A ορίζεται ως*

$$\mu(A) = \max_{1\leq i<j\leq n} \frac{\left|\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_j\right|}{\|\boldsymbol{a}_i\|_2 \|\boldsymbol{a}_j\|_2}$$

Χονδρικά, η αμοιβαία συνοχή είναι ένα μέτρο της ορθογωνιότητας των στηλών του πίνακα A. Με άλλα λόγια, η αμοιβαία συνοχή μετράει τη "συσχέτιση" ή την "ανεξαρτησία" μεταξύ των στηλών του πίνακα. Σε έναν ορθογώνιο πίνακα A, όπου οι στήλες είναι ορθογώνιες, η αμοιβαία συνοχή είναι $\mu(A) = 0$. Σε μη τετραγωνικούς πίνακες με $(n > m)$, όπου η πλήρης ορθογωνιότητα είναι αδύνατη, η αμοιβαία συνοχή δείχνει πόσο κοντά είναι ένας πίνακας σε ένα ορθογώνιο. Συγκεκριμένα για την αμοιβαία συνοχή ενός αυθαίρετου πίνακα A ισχύει ότι $0 \leq \mu(A) \leq 1$. Εάν $n > m$ τότε μπορούμε να αποκτήσουμε ένα βελτιωμένο αποτέλεσμα, γνωστό και ως όριο Welch,

$$\sqrt{\frac{n-m}{m(n-1)}} \leq \mu(A) \leq 1.$$

Στο πλαίσιο της αραιής ανάκτησης, όσο μικρότερη είναι η αμοιβαία συνοχή του πίνακα A τόσο το καλύτερο, με την έννοια ότι ο πίνακας A μπορεί να διαχειριστεί μεγαλύτερα επίπεδα αραιότητας καθώς και ότι η ανάκτηση γίνεται ευκολότερη. Διαισθητικά, θέλουμε οι στήλες του πίνακα μετρήσεων να είναι όσο πιο "ανεξάρτητες/ασυσχέτιστες" γίνεται (μικρή αμοιβαία συνοχή). Τότε στην διατύπωση του διανύσματος παρατηρήσεων [2], κάθε συνιστώσα του αραιού διανύσματος σήματος παρέχεται από μία στήλη, η οποία είναι "ασυσχέτιστη" ("ανεξάρτητη") με τις άλλες στήλες, κάνοντας έτσι τη διαδικασία διαχωρισμού αυτών των συνιστωσών και της ανάδειξης της πληροφορίας που περιέχουν ευκολότερη. Κατά συνέπεια, σημαντική ποσότητα του πληροφοριακού περιεχομένου του αρχικού σήματος διατηρείται και η ανάκτηση γίνεται ευκολότερη.

2.8.2 Ιδιότητα περιορισμένης ισομετρίας

Η *Ιδιότητα Περιορισμένης Ισομετρίας (Ι.Π.Ι)* (Restricted Isometry Property (R.I.P)) είναι πιθανώς το πιο σημαντικό μέτρο.

Ορισμός 2.8.2 (Συνθήκη Ιδιότητας Περιορισμένης Ισομετρίας (Ι.Π.Ι) [The15]). *Έστω δ_k, $1 \leq k \leq n$ η k τάξης σταθερά περιορισμένης ισομετρίας του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ορίζεται ως η μικρότερη σταθερά έτσι ώστε η ακόλουθη συνθήκη να ισχύει*

$$(1-\delta_k)\|\boldsymbol{\theta}\|_2^2 \leq \|A\boldsymbol{\theta}\|_2^2 \leq (1+\delta_k)\|\boldsymbol{\theta}\|_2^2, \forall \boldsymbol{\theta} \in \Sigma_k. \tag{2.6}$$

Χονδρικά, λέμε ότι η ιδιότητα περιορισμένης ισομετρίας τάξης k ισχύει εάν η εξίσωση 2.6 ισχύει και το δ_k είναι αρκετά μικρότερο από 1. Ουσιαστικά, εάν ένας πίνακας μετρήσεων ικανοποιεί την Ι.Π.Ι αυτό σημαίνει ότι η l_2 νόρμα της προβολής κάθε k-αραιού διανύσματος παραμένει κατά προσέγγιση αναλλοίωτη. Επίσης, παρατηρήστε ότι θέλουμε ο πίνακας μετρήσεων A να ικανοποιεί την Ι.Π.Ι με όσο δυνατόν μεγαλύτερο k, καθώς αυτό σημαίνει ότι είναι ικανός να παρέχει προβολές που διατηρούν πληροφορία για μεγαλύτερο εύρος επιπέδων αραιότητας.

Είναι εύκολο να δούμε ότι εάν ο πίνακας μετρήσεων A καταφέρνει να παρέχει προβολές με συγκεκριμένη ακρίβεια για κάποιο επίπεδο αραιότητας k, τότε μπορεί επίσης να παρέχει τουλάχιστον την ίδια ακρίβεια σε διανύσματα με μικρότερα επίπεδα αραιότητας. Συνεπώς για τις σταθερές της Ι.Π.Ι ισχύει ότι

[2] Παρατηρήστε ότι η πράξη $A\boldsymbol{\theta}$ μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \boldsymbol{a}_i, \tag{2.5}$$

όπου $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leq i \leq n$ είναι οι στήλες του A.

$$\delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_k \leq \delta_{k+1} \leq \cdots \leq \delta_n. \tag{2.7}$$

Επιπλέον, θεωρούμε μία άλλη μορφή της Ι.Π.Ι. Έστω $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2 \in \Sigma_k$ δύο k-αραιά διανύσματα. Τότε, το $\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2$ είναι ένα $2k$-αραιό διάνυσμα και η συνθήκη της Ι.Π.Ι λαμβάνει την ακόλουθη μορφή.

$$(1 - \delta_{2k})\|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2\|_2^2 \leq \|A(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2)\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2k})\|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2\|_2^2. \tag{2.8}$$

Εάν ο πίνακας μετρήσεων ικανοποιεί την Ι.Π.Ι τάξης $2k$, δηλαδή η έκφραση (2.6) ισχύει με δ_{2k} αρκετά μικρό, τότε η έκφραση (2.8) υπαγορεύει ότι οι l_2 αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους k-αραιών διανυσμάτων παραμένουν κατά προσέγγιση αναλλοίωτες μετά από προβολή στο χώρο χαμηλότερης διάστασης. Συνεπώς, μπορούμε να δούμε ότι όταν η Ι.Π.Ι ισχύει, η προβολή που παρέχεται από τον A είναι μία ευσταθής εμφύτευση για την κλάση των k-αραιών διανυσμάτων.

Πίνακες που ικανοποιούν την Ι.Π.Ι

Η απόδειξη της Ι.Π.Ι για ένα γενικό πίνακα είναι ένα δύσκολο πρόβλημα. Συνεπώς, πρέπει να βρούμε κλάσεις πινάκων για τις οποίες η Ι.Π.Ι μπορεί να αποτιμηθεί με αποδοτικό τρόπο. Πιθανών η πιο σημαντική κλάση πινάκων που ικανοποιεί, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες την Ι.Π.Ι είναι συγκεκριμένες κλάσεις τυχαίων πινάκων.

Μερικές χαρακτηριστικές κλάσεις τυχαίων πινάκων για τις οποίες, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, η Ι.Π.Ι ισχύει με υψηλή πιθανότητα είναι οι ακόλουθες. [FR13] [CW08]

- Γκαουσιανοί τυχαίοι πίνακες
  Ένας (κανονικοποιημένος) Γκαουσιανός τυχαίος πίνακας είναι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, του οποίου τα στοιχεία είναι i.i.d Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $\mu = 0$ και διασπορά $\sigma^2 = \frac{1}{m}$, δηλαδή $A_{i,j} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{m})$.

- Τυχαίοι πίνακες Bernoulli
  Ένας (κανονικοποιημένος) τυχαίος πίνακας Bernoulli είναι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, του οποίου τα στοιχεία είναι i.i.d Bernoulli τυχαίες μεταβλητές. Οι Bernoulli τυχαίες μεταβλητές σε αυτήν την περίπτωση μπορούν να πάρουν τις ακόλουθες τιμές

$$A_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m}} & \text{με πιθανότητα} \quad 1/2 \\ -\frac{1}{\sqrt{m}} & \text{με πιθανότητα} \quad 1/2 \end{cases}.$$

- Υποκανονικοί τυχαίοι πίνακες
  Ένας (κανονικοποιημένος) υποκανονικός τυχαίος πίνακας είναι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, του οποίου τα στοιχεία είναι i.i.d υποκανονικές τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή $\mathbb{P}\left[|A_{i,j}| > t\right] \leq e^{-t^2/2}, \forall t > 0$. Παρατηρήστε ότι οι προηγούμενες δύο κλάσεις είναι ειδικές περιπτώσεις υποκανονικών τυχαίων πινάκων.

Κάποιος μπορεί να παρατήρησε ότι στο σενάριο που περιγράψαμε προηγουμένως μπορούμε να επιλέξουμε ελεύθερα τον πίνακα μετρήσεων, αλλά προφανώς δεν έχουμε επιλογή για τον πίνακα μετασχηματισμού, καθώς δεν μπορούμε να επιλέξουμε την βάση στην οποία το σήμα είναι αραιό. Κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να καθορίσουμε τελείως τον πίνακα $A = \Phi\Psi$. Αρχικά, αυτό φαίνεται να είναι πρόβλημα καθώς χρειάζεται να καθορίσουμε τον πίνακα Φ συναρτήσει του Ψ, έτσι ώστε η Ι.Π.Ι να ισχύει για τον πίνακα $A = \Phi\Psi$. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις, αυτό δεν είναι πρόβλημα. Για παράδειγμα, οι κλάσεις των τυχαίων πινάκων που αναφέραμε πριν αποτελούν μία καθολική επιλογή πινάκων που λειτουργούν για οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση, δηλαδή ο πίνακας $A = \Phi\Psi$ ικανοποιεί την Ι.Π.Ι, όταν ο Φ είναι ένας κατάλληλος τυχαίος πίνακας και ο Ψ είναι κάποιο ορθογώνιο λεξικό. Συνεπώς, μπορούμε να επιλέξουμε τον πίνακα Φ ανεξάρτητα από τον πίνακα της ορθογώνιας βάσης Ψ.

Οι τυχαίοι πίνακες προσφέρουν ένα πρακτικό τρόπο κατασκευής πινάκων που αποδεδειγμένα ικανοποιούν την Ι.Π.Ι με υψηλή πιθανότητα. Εξασφαλίζοντας ότι κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες η Ι.Π.Ι ισχύει για Γκαουσιανούς και υποκανονικούς πίνακες θα αποτελέσει ένα από τα βασικά θέματα του δεύτερου τμήματος αυτής της εργασίας, για αυτό αναβάλλουμε τη λεπτομερή συζήτηση αυτού το θέματος για τα επόμενα κεφάλαια.

2.9 Σχήματα ανακατασκευής

Υπάρχουν αρκετοί τύποι σχημάτων ανακατασκευής/αλγορίθμων για αραιή ανάκτηση. Τα πιο σημαντικά είναι τα ακόλουθα. [The15]

1. Άπληστοι αλγόριθμοι
2. Αλγόριθμοι κυρτής βελτιστοποίησης
3. Αλγόριθμοι επαναληπτικής συρρίκνωσης

Θα αξιολογήσουμε τις ακόλουθες πτυχές των αλγορίθμων αραιής ανάκτησης [FR13]

1. <u>Υπολογιστική πολυπλοκότητα</u>
   Μία πολύ σημαντική πτυχή των αλγορίθμων είναι η *υπολογιστική πολυπλοκότητα*, η οποία δείχνει την ποσότητα των υπολογιστικών πόρων που απαιτεί ο αλγόριθμος για να δώσει έξοδο, συναρτήσει του μεγέθους εισόδου και άλλων παραμέτρων. Συγκεκριμένα νοιαζόμαστε για την χρονική πολυπλοκότητα, δηλαδή χονδρικά τον αριθμό των βημάτων που απαιτούνται για τον υπολογισμό της λύσης, συναρτήσει του μεγέθους εισόδου.

2. <u>Ευστάθεια</u>

   Η *ευστάθεια* (stability) αφορά την ικανότητα των σχημάτων ανακατασκευής να παρέχουν ικανοποιητικές λύσεις σε περιπτώσεις όπου το διάνυσμα σήματος δεν είναι ακριβώς αραιό, αλλά είναι συμπιέσιμο. Είναι λογικό να θέλουμε από έναν αλγόριθμο να λειτουργεί επιτυχημένα σε πιο ρεαλιστικά σενάρια (θυμηθείτε ότι στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν αραιά σήματα), με την έννοια ότι εισάγει ένα σφάλμα εκτίμησης, το οποίο ελέγχεται από το σφάλμα προσέγγισης του συμπιέσιμου διανύσματος σήματος από ένα αραιό.

3. Ανθεκτικότητα

Η *ανθεκτικότητα* (robustness) αναφέρεται στην ικανότητα ενός αλγορίθμου να ανέχεται σφάλματα στην διαδικασία της μέτρησης, τα οποία οφείλονται είτε σε θόρυβο είτε στην αδυναμία μέτρησης μίας ποσότητας με άπειρη ακρίβεια. Περιμένουμε ότι η εκτίμηση που παράγεται από έναν ανθεκτικό αλγόριθμο να αποκλίνει από τη σωστή τιμή κατά ένα ποσό που ελέγχεται από το σφάλμα μέτρησης.

Είναι σημαντικό για τους αλγορίθμους ανακατασκευής να διαθέτουν τα δύο τελευταία χαρακτηριστικά και ταυτόχρονα να δουλεύουν γρήγορα για να έχουν πρακτική σημασία. Στην αντίθετη περίπτωση ο αλγόριθμος δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε πρακτικές περιπτώσεις και έχει καθαρά θεωρητική σημασία. Λαμβάνοντας υπόψιν πιο ρεαλιστικά σενάρια αλλάζουμε τη διατύπωση του προβλήματος αραιής ανάκτησης ώστε να λαμβάνει υπόψιν θόρυβο, ανακριβείς μετρήσεις και συμπιέσιμα διανύσματα.

Για την περίπτωση με θόρυβο γνωρίζουμε από την ενότητα 2.4 ότι $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e}$, $\|\boldsymbol{e}\|_2 \leq \epsilon$ και κατά συνέπεια έχουμε ότι

$$\|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{\theta}\|_2 \leq \epsilon \tag{2.9}$$

Συνεπώς, αναπτύσσουμε μία επέκταση του l_1 προβλήματος ελαχιστοποίησης (2.6.3), το οποίο καλούμε *θορυβώδες ή ανθεκτικό l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης* (noisy or robust l_1 minimization task). [The15]

Ορισμός 2.9.1 (Θορυβώδες l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης)**.**

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n}{\textit{minimize}} \quad & \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \\ \textit{subject to} \quad & \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{\theta}\|_2 \leq \epsilon. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση δεν έχει νόημα η εύρεση μοναδικής λύσης. Αντιθέτως, τα κύρια ζητήματα εδώ είναι η ανθεκτικότητα και η ευστάθεια (η τελευταία πτυχή ήταν ζήτημα και στην περίπτωση χωρίς θόρυβο). Με άλλα λόγια, περιμένουμε από τους αλγορίθμους που λύνουν το προηγούμενο πρόβλημα να είναι σε θέση να αντέξουν θόρυβο και αποκλίσεις από το μοντέλο των αραιών σημάτων, με την έννοια ότι το σφάλμα της εκτίμησης που παράγουν να ελέγχεται χονδρικά από το επίπεδο θορύβου ϵ και το l_p σφάλμα της καλύτερης εκτίμησης k-όρων $\sigma_k(\boldsymbol{\theta}_0)_p$ του αρχικού σήματος $\boldsymbol{\theta}_0$ (το σήμα που μετρήθηκε).

Θα μελετήσουμε ένα τυπικό παράδειγμα για κάθε τύπο σχήματος ανακατασκευής. Για κάθε σχήμα ανακατασκευής θα δώσουμε ένα θεώρημα που αφορά το σφάλμα εκτίμησης του αντίστοιχου αλγορίθμου για αυθαίρετη είσοδο, όταν δίνεται κάποια εγγύηση για τη σταθερά της Ι.Π.Ι του πίνακα μετρήσεων. Η γενική διατύπωση αυτού του θεωρήματος δίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 2.9.1 (Αναγκαία συνθήκη για ευσταθή και ανθεκτική ανάκτηση)**.** *[FR13] Υποθέστε ότι η Ι.Π.Ι τάξης rk ισχύει για ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, με σταθερά $\delta_{rk} < \delta < 1$. Τότε για κάθε $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ μία έξοδος $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ του αλγορίθμου Alg, με είσοδο A, $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e}$ και ϵ ικανοποιεί τα ακόλουθα φράγματα για το σφάλμα*

$$\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|_1 \leq C_0\sigma_k(\boldsymbol{\theta})_1 + C_1\sqrt{k}\epsilon \tag{2.11}$$

και

$$\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|_2 \leq C_0 \frac{\sigma_k(\boldsymbol{\theta})_1}{\sqrt{k}} + C_1 \epsilon, \tag{2.12}$$

όπου C_0, C_1 είναι σταθερές που εξαρτώνται μόνο από το δ_{rk}.

Για κάθε σχήμα ανακατασκευής Alg που θεωρούμε δίνουμε το σφάλμα εκτίμησης στη μορφή που παρέχεται στο παραπάνω θεώρημα (με διαφορετικές σταθερές C_0, C_1 για κάθε σχήμα), για συγκεκριμένες επιλογές της σταθεράς Ι.Π.Ι (r και δ, διαφορετικά για κάθε αλγόριθμο). Είναι άμεσο να δούμε ότι ο αλγόριθμος Alg, κάτω από τη συνθήκη ότι το θεώρημα 2.9.1 ισχύει για μία λογική σταθερά Ι.Π.Ι ($\delta < 1$), είναι ευσταθές και ανθεκτικό, καθώς το σφάλμα εκτίμησης κλιμακώνει ήπια συναρτήσει του σφάλματος προσέγγισης $\sigma_k(\boldsymbol{\theta})_1$, του επιπέδου θορύβου ϵ, καθώς και του επιπέδου αραιότητας k. Συνεπώς, οι αλγόριθμοι που ικανοποιούν το θεώρημα 2.9.1 για μία λογική σταθερά Ι.Π.Ι θεωρούνται επιτυχημένοι.

2.9.1 Άπληστοι αλγόριθμοι

Γενικά, ένας άπληστος αλγόριθμος είναι ένας αλγόριθμος που σε κάθε βήμα κάνει μία τοπικά βέλτιστη επιλογή, η οποία όμως δεν θα οδηγήσει απαραίτητα στη συνολικά βέλτιστη λύση, αν και αυτός είναι ο τελικός στόχος. Ένας άπληστος αλγόριθμος για αραιή ανάκτηση [TW10] βελτιώνει επαναληπτικά την τρέχουσα εκτίμηση του $\boldsymbol{\theta}$, χρησιμοποιώντας τοπικά βέλτιστες ανανεώσεις των συντελεστών σε κάθε επανάληψη, με στόχο τη μείωση του σφάλματος εκτίμησης. Υπάρχουν αρκετοί άπληστοι αλγόριθμοι για αραιή ανάκτηση. Κάποιοι από αυτούς δίνονται παρακάτω.

- (Orthogonal matching pursuit (OMP))
- (Least angle regression (LARS))
- (Compressed sensing matching pursuit (CSMP))
  - (CoSaMP)
  - (Subspace pursuit)

Ο αλγόριθμος που θα μελετήσουμε σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια είναι ο *Orthogonal Matching Pursuit (OMP)*.

Orthogonal Matching Pursuit (OMP)

Ο Orthogonal Matching Pursuit είναι ένας από τους παλαιότερους αλγορίθμους για αραιή ανάκτηση. Μία λεπτομερής περιγραφή δίνεται στη συνέχεια. [The15]

Orthogonal Matching Pursuit (OMP)

Είσοδος : Πίνακας μετρήσεων $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, παρατηρήσεις $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$.

Έξοδος : Μια k-αραιή εκτίμηση $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^n$.

Παράμετροι :

- $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}$: η i-αραιή εκτίμηση στην επανάληψη i
- $\boldsymbol{e}^{(i)}$: το σφάλμα στην επανάληψη i, δηλαδή $\boldsymbol{e}^{(i)} = \boldsymbol{y} - A\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}$.
- $S^{(i)}$: το σύνολο φορέας στην επανάληψη i

- $A^{(i)}$: ο πίνακας που σχηματίζεται θεωρώντας τις στήλες του A που αντιστοιχούν στους δείκτες που περιέχει το σύνολο $S^{(i)}$, δηλαδή οι ενεργές στήλες

- ϵ : η ανοχή τερματισμού

Αλγόριθμος:

1. **Αρχικοποίηση**

   $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{e}^{(0)} = \boldsymbol{y}$, $S^{(0)} = \emptyset$, $i = 1$.

2. **Αναγνώριση της στήλης που έχει τη μέγιστη συσχέτιση με το διάνυσμα σφάλματος**

   Επιλέγουμε τη στήλη a_{j_i} του A που εμφανίζει τη μέγιστη συσχέτιση με το διάνυσμα σφάλματος ($\boldsymbol{e}^{(i)} = \boldsymbol{y} - A\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}$) στην προηγούμενη επανάληψη. Συγκεκριμένα, επιλέγουμε τη στήλη

   $$j_i = arg \max_{j=1,\ldots,n} \frac{\left|\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{e}^{(i-1)}\right|}{\|\boldsymbol{a}_j\|_2}. \tag{2.13}$$

3. **Ανανέωση του συνόλου του φορέα**

   Το σύνολο φορέας στην επανάληψη i είναι

   $$S^{(i)} = S^{(i-1)} \cup \{j_i\}.$$

4. **Ανανέωση της εκτίμησης του αραιού διανύσματος**

   Μπορούμε να αποκτήσουμε τη νέα εκτίμηση λύνοντας το ακόλουθο πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων.

   $$\overline{\boldsymbol{\theta}} = arg \min_{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^i} \|\boldsymbol{y} - A^{(i)}\boldsymbol{z}\|_2^2.$$

   Τότε μπορούμε να αποκτήσουμε το $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}$ παίρνοντας τα στοιχεία του $\overline{\boldsymbol{\theta}}$ και εισάγοντάς τα στις θέσεις που καθορίζονται από το σύνολο του φορέα $S^{(i)}$, ενώ βάζουμε 0 στις υπόλοιπες.

5. **Ανανέωση του διανύσματος του σφάλματος**

   Το σφάλμα στην επανάληψη i είναι

   $$\boldsymbol{e}^{(i)} = \boldsymbol{y} - A\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}.$$

6. **Έλεγχος συνθήκης**

   Ο χρήστης επιλέγει μία σταθερά ϵ στην αρχή ως ανοχή τερματισμού. Εάν $\boldsymbol{e}^{(i)} < \epsilon$ τότε ο αλγόριθμος τερματίζει, αλλιώς ο αλγόριθμος επιστρέφει στο βήμα 2.

Ουσιαστικά, ο OMP βασίζεται στην ιδέα ότι στην επανάληψη i η στήλη η οποία εμφανίζει τη μέγιστη συσχέτιση (εξίσωση [2.13]) με το διάνυσμα του σφάλματος $\boldsymbol{e}^{(i-1)}$ είναι αυτή που οδηγεί στη μέγιστη μείωση της l_2 νόρμας του σφάλματος, όταν λάβουμε υπόψιν όλες τις ενεργές στήλες στο σχηματισμό του νέου διανύσματος του σφάλματος. Επιπλέον, παρατηρήστε ότι το διάνυσμα του σφάλματος είναι ορθογώνιο στο διανυσματικό χώρο που δημιουργείται από τις ενεργές στήλες, δηλαδή $\boldsymbol{e}^{(i)} \perp \{\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_i}\}$, αφού $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}$ είναι η βέλτιστη λύση με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Αυτή η ιδιότητα εξασφαλίζει ότι στην επόμενη επανάληψη ο αλγόριθμος δεν θα επιλέξει μία στήλη που έχει ήδη επιλεγεί, δηλαδή μία ενεργή στήλη. [The15]

Επίσης, παρατηρήστε ότι ο αλγόριθμος μετά από k επαναλήψεις επιστρέφει μία k-αραιή λύση. Ωστόσο, δεν υπάρχει εγγύηση ότι η τελική λύση είναι μία επιτυχημένη εκτίμηση της σωστής. Το μόνο πράγμα που γνωρίζουμε είναι ότι το σφάλμα (με την έννοια της l_2 νόρμας) μειώνεται σε κάθε επανάληψη. Το θεώρημα (2.9.2) αυτής της ενότητας ουσιαστικά παρέχει τις συνθήκες για τον πίνακα A κάτω από τις οποίες ο OMP επιστρέφει λύσεις με συγκεκριμένες εγγυήσεις. Τέλος, η υπολογιστική πολυπλοκότητα του OMP είναι $\mathcal{O}(rnm)$, όπου r είναι το επίπεδο αραιότητας της τελικής λύσης. [The15]

Παρέχουμε ένα θεώρημα που περιέχει μία αναγκαία συνθήκη για ανθεκτική και ευσταθή ανάκτηση με τον OMP, καθώς και κάποια φράγματα επίδοσης. [FR13]

Θεώρημα 2.9.2 (Αναγκαία συνθήκη για ανθεκτική και ευσταθή ανάκτηση με τον OMP)**.** *Θεωρείστε το σενάριο που περιγράφεται στο θεώρημα (2.9.1) και υποθέστε ότι η Ι.Π.Ι τάξης $13k$ ισχύει για ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με σταθερά $\delta_{13k} < 0.1666$ ($r = 13$, $\delta = 0.1666$). Τότε για τον Orthogonal Matching Pursuit (OMP) το θεώρημα 2.9.1 ικανοποιείται.*

2.9.2 Αλγόριθμοι κυρτής βελτιστοποίησης

Οι αλγόριθμοι κυρτής βελτιστοποίησης προσφέρουν μία ελκυστική προσέγγιση για αραιή ανάκτηση. Αυτοί οι αλγόριθμοι λύνουν προβλήματα κυρτής βελτιστοποίησης και συνεπώς υπάρχουν αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου που μπορούν να χρησιμοποιηθούν (π.χ μέθοδοι εσωτερικού σημείου). Ο αλγόριθμος που θα συζητήσουμε είναι ο αλγόριθμος *ανθεκτικής l_1 ελαχιστοποίησης*.

Ανθεκτική l_1 ελαχιστοποίηση

Η ανθεκτική l_1 ελαχιστοποίησης είναι ο αλγόριθμος ο οποίος λύνει το ανθεκτικό l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Ορισμός 2.9.2 (Ανθεκτική l_1 ελαχιστοποίηση)**.** *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας πίνακας μετρήσεων και ϵ το επίπεδο θορύβου. Ο αλγόριθμος ανθεκτικής l_1 ελαχιστοποίησης λύνει το εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης*

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n}{\textit{minimize}} \quad & \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \\ \textit{subject to} \quad & \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{\theta}\|_2 \leq \epsilon. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Το επόμενο θεώρημα περιέχει μία αναγκαία συνθήκη για ανθεκτική και ευσταθή ανάκτηση με τον αλγόριθμο ανθεκτικής l_1 ελαχιστοποίησης. [FR13]

Θεώρημα 2.9.3 (Αναγκαία συνθήκη για ανθεκτική και ευσταθή ανάκτηση με τον αλγόριθμο ανθεκτικής l_1 ελαχιστοποίησης)**.** *Θεωρείστε το σενάριο που περιγράφεται στο θεώρημα (2.9.1) και υποθέστε ότι η Ι.Π.Ι τάξης $2k$ ισχύει για ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με σταθερά $\delta_{2k} < \frac{4}{\sqrt{41}} \approx 0.6246$ ($r = 2$, $\delta = 0.6246$). Τότε ο αλγόριθμος αλγόριθμος ανθεκτικής l_1 ελαχιστοποίησης ικανοποιεί το θεώρημα 2.9.1.*

2.9.3 Αλγόριθμοι επαναληπτικής κατωφλίωσης

Αυτή η κλάση αλγορίθμων μπορεί να θεωρηθεί επέκταση των κλασσικών επαναληπτικών σχημάτων για τη λύση γραμμικών συστημάτων εξισώσεων, όπως οι αλγόριθμοι Gauss-Seidel και Jacobi, σε υποκαθορισμένα συστήματα γραμμικών εξισώσεων. Η γενική σχέση των επαναληπτικών σχημάτων είναι η ακόλουθη [The15]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i+1)} = F_i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)} + Z(\boldsymbol{y} - A\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)})\right), \tag{2.15}$$

για κάποιο πίνακα Z. Η συνάρτηση F_i είναι ένας μη γραμμικός τελεστής κατωφλίωσης, ο οποίος εφαρμόζεται κατά στοιχείο. Οι δύο πιο σημαντικές επιλογές για τον F_i είναι ο *τελεστής σκληρής κατωφλίωσης* (*hard thresholding operator*) και ο *τελεστής μαλακής κατωφλίωσης* (*soft-thresholding operator*). Ο τελεστής σκληρής κατωφλίωσης H_k δρα πάνω σε ένα διάνυσμα και κρατάει τα k μεγαλύτερα στοιχεία αναλλοίωτα, ενώ θέτει στο 0 τα υπόλοιπα στοιχεία. Ο τελεστής μαλακής κατωφλίωσης S_a θέτει στο 0 όλα τα στοιχεία του διανύσματος των οποίων οι τιμές είναι κάτω από ένα κατώφλι a και μειώνει το μέτρο των υπολοίπων κατά a. Μερικοί βασικοί αλγόριθμοι επαναληπτικής κατωφλίωσης είναι οι ακόλουθοι [FR13].

- Βασική κατωφλίωση (Basic threasholding)
- Επαναληπτική σκληρή κατωφλίωση (Iterative Hard Thresholding (IHT))
- Hard Thresholding Pursuit (HTP)

Επαναληπτική σκληρή κατωφλίωση

Ο αλγόριθμος επαναληπτικής σκληρής κατωφλίωσης ακολουθεί την σχέση (2.15) που περιγράψαμε προηγουμένως με $F_i = H_k$ και $Z = \delta A^T$, για κάποια παράμετρο δ, η οποία μπορεί να εξαρτάται από τον αριθμό της επανάληψης. Χονδρικά, η επιλογή $Z = A^T$ έχει νόημα καθώς σε ένα σενάριο αραιής ανάκτησης θέλουμε ο πίνακας μετρήσεων A να είναι όσο το δυνατόν πιο ορθογώνιος γίνεται (χαμηλή συνοχή) και συνεπώς να ισχύει ότι

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{\theta} \Rightarrow A^T\boldsymbol{y} = A^TA\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\theta}.$$

Μία λεπτομερής περιγραφή του IHT δίνεται παρακάτω

Είσοδος : Πίνακας μετρήσεων $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, παρατηρήσεις $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$, επίπεδο αραιότητας k

Έξοδος : Μία k-αραιή εκτίμηση $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^n$

Παράμετροι :

- $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}$: η εκτίμηση στην επανάληψη i

- ϵ : η ανοχή τερματισμού

1. **Αρχικοποίηση**

   $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = \mathbf{0}$.

2. **Ανανέωση της εκτίμησης**

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i+1)} = H_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)} + A^T(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{\theta}^{(i)})),$$

   όπου H_k είναι ο τελεστής σκληρής κατωφλίωσης

3. **Έλεγχος συνθήκης**

   Εάν ισχύει ότι $\boldsymbol{y} - A\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)} < \epsilon$ τότε ο αλγόριθμος τερματίζει, διαφορετικά ο αλγόριθμος επιστρέφει στο βήμα 2.

Το επόμενο θεώρημα περιέχει μία αναγκαία συνθήκη για ανθεκτική και ευσταθή ανάκτηση και μία αξιολόγηση του σφάλματος εκτίμησης του IHT. [FR13]

Θεώρημα 2.9.4 (Αναγκαία συνθήκη για ανθεκτική και ευσταθή ανάκτηση με τον IHT)**.** *Θεωρείστε το σενάριο που περιγράφεται στο θεώρημα (2.9.1) και υποθέστε ότι η Ι.Π.Ι τάξης $3k$ ισχύει για ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με σταθερά $\delta_{3k} < \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5774$ ($r = 3$, $\delta = 0.5774$). Τότε ο αλγόριθμος επαναληπτικής σκληρής κατωφλίωσης ικανοποιεί το θεώρημα 2.9.1.*

2.10 Εφαρμογές

Η ανάπτυξη των θεωρητικών πτυχών των μοντέλων αραιών σημάτων οδήγησε σε πολλές πρακτικές εφαρμογές. Στην τελική πολλά από τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται σε αυτό στο πεδίο ανακαλύφθηκαν πολλά χρόνια πριν και η δημιουργία τους υποκινήθηκε από πρακτικές εφαρμογές. Η λίστα των εφαρμογών περιλαμβάνει την γεωφυσική, τη δειγματοληψία, τη μηχανική μάθηση, τα ραντάρ, την ιατρική απεικόνιση, την επεξεργασία εικόνας, την νευροεπιστήμη, την όραση υπολογιστών και πολλές άλλες περιοχές

Η μελέτη της αραιότητας οδήγησε σε σημαντικές εξελίξεις στη λύση γραμμικών αντίστροφων προβλημάτων. Θα δώσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα για το πως η γνώση της αραιότητας μας επιτρέπει να λύσουμε ένα αντίστροφο πρόβλημα το οποίο θεωρούνταν προηγουμένως κακώς ορισμένο. [The15] Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σήμα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, το οποίο δέχεται μία αραιή αναπαράσταση $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ σε μία βάση Ψ. Το σήμα $\boldsymbol{x}$ παθαίνει κάποιου είδους παραμόρφωση (π.χ θόλωμα κάποιας εικόνας), μία διαδικασία που περιγράφεται από τον γραμμικό τελεστή D. Επίσης, θεωρούμε κάποιο θόρυβο $\boldsymbol{e}$ και συνεπώς το τελικό σήμα μπορεί να γραφτεί ως

$$\boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} = D\Psi\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e}. \tag{2.16}$$

Η επίλυση του αντίστοιχου αντίστροφου προβλήματος περιλαμβάνει την απόκτηση μίας καλής εκτίμησης $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ του $\boldsymbol{\theta}$, δοθέντων των D, Ψ και $\boldsymbol{y}$. Τότε, μπορούμε να εκτιμήσουμε το αρχικό σήμα $\boldsymbol{x}$, ως $\hat{\boldsymbol{x}} = \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι το αρχικό σήμα είναι αραιό σε κάποια βάση μπορούμε να διατυπώσουμε τη λύση

του αντίστροφου προβλήματος ως ένα θορυβώδες πρόβλημα l_1 ελαχιστοποίησης, δηλαδή

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \quad & \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \\ \text{subject to} \quad & \|\boldsymbol{y} - D\Psi\boldsymbol{\theta}\|_2 \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Το προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να περιγράψει ένα μεγάλο εύρος καταστάσεων, όπως η αποκατάσταση σημάτων, η αποθορυβοποίηση σημάτων, κτλ.

Μία από τις πιο σημαντικές εφαρμογές της αραιότητας αφορά την απεικόνιση μαγνητικού συντονισμού (Magnetic Resonance Imaging (MRI)). Πρόκειται για μία τεχνολογία ιατρικής απεικόνισης, η οποία χρησιμοποιείται σε εργασίες όπως απεικόνιση εγκεφάλου και αγγειογραφία. Η τεχνολογία αυτή μπορεί να παράγει εικόνες της ανατομίας και των διαδικασιών του ανθρώπινου σώματος χρησιμοποιώντας ραδιοκύματα και μαγνητικά πεδία. Κατά συνέπεια, δεν εκθέτει τους ασθενείς σε βλαβερή ιονίζουσα ακτινοβολία. Ωστόσο ο χρόνος που απαιτείται για την απόκτηση μίας εικόνας υψηλής ανάλυσης (με άλλα λόγια η πραγματοποίηση ενός συνόλου μετρήσεων) είναι γενικά μεγάλος (διαρκεί από μερικά λεπτά έως μερικές ώρες). Η τεχνολογία της συμπιεστικής δειγματοληψίας επιστρατεύεται για να την αντιμετώπιση αυτής της κατάστασης, καθώς με τη χρήση αυτής απαιτούνται λιγότερα δείγματα και συνεπώς λιγότερος χρόνος για την ολοκλήρωση μίας απεικόνισης.

Κεφάλαιο 3

Πίνακες χαμηλού βαθμού

3.1 Εισαγωγή

Το μοντέλα σημάτων πινάκων χαμηλού βαθμού είναι μία άλλη σημαντική κλάση μοντέλων χαμηλής διάστασης, τα οποία αιχμαλώτισαν το ενδιαφέρον της κοινότητας της μηχανικής μάθησης τα τελευταία χρόνια και είναι αυτή τη στιγμή ένα πολύ ενεργό θέμα έρευνας. Εδώ το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει είναι η ανάκτηση πινάκων χαμηλού βαθμού και ιδιαίτερα μία ειδική περίπτωση αυτού του προβλήματος που καλείται *συμπλήρωση πίνακα*. Σε ένα πρόβλημα συμπλήρωσης πίνακα μας δίνεται ένας πίνακας με ελλειπή στοιχεία και ο στόχος είναι είναι η συμπλήρωση αυτών των στοιχείων χρησιμοποιώντας την πρότερη γνώση ότι ο πίνακας είναι χαμηλού βαθμού. Υπάρχουν πολλές εφαρμογές της ανάκτησης πινάκων χαμηλού βαθμού, οι οποίες περιλαμβάνουν την κβαντομηχανική, τα συστήματα προτάσεων, τα δίκτυα αισθητήρων και ανάμεσα σε άλλα και το περίφημο πρόβλημα του Netflix.

3.2 Προκαταρκτικά για πίνακες

Τα αντικείμενα ενδιαφέροντος σε αυτό το κεφάλαιο είναι οι πίνακες χαμηλού βαθμού. Συνεπώς, χρειαζόμαστε μερικούς βασικούς ορισμούς και αποτελέσματα για πίνακες. Μία θεμελιώδης ποσότητα στη γραμμική άλγεβρα που χαρακτηρίζει ένα πίνακα είναι ο *βαθμός* (rank).

Ορισμός 3.2.1 (Βαθμός πίνακα). *Έστω $M \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ένας πίνακας.*

- *Ο βαθμός γραμμής του M είναι ο μεγαλύτερος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του M. Ισοδύναμα, είναι η διάσταση του χώρου των γραμμών, δηλαδή του διανυσματικού χώρου που εκτείνεται από τις γραμμές του M.*

- *Ο βαθμός στήλης του A είναι ο μεγαλύτερος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A. Ισοδύναμα, είναι η διάσταση του χώρου των στηλών, δηλαδή του διανυσματικού χώρου που εκτείνεται από τις στήλες του M.*

- *Ο βαθμός γραμμής και ο βαθμός στήλης του M είναι πάντα ίσοι. Αυτή η ποσότητα επίσης καλείται βαθμός και συμβολίζεται ως $rank(M)$.*

3.2.1 Αποσύνθεση ιδιαζουσών τιμών

Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στη γραμμική άλγεβρα είναι η *αποσύνθεση ιδιαζουσών τιμών* (Singular Value Decomposition (SVD)), η οποία παρέχει μία παραγοντοποίηση του πίνακα M σε τρεις ειδικούς πίνακες. Έχει πολλές εφαρμογές, ειδικά στην περιοχή της μηχανικής μάθησης. Ο αυστηρός ορισμός δίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 3.2.1 (Αποσύνθεση ιδιαζουσών τιμών)**.** *Έστω $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$ ένας πίνακας με $rank(M) = r \leq min(k, n)$. Η αποσύνθεση ιδιαζουσών τιμών του M είναι*

$$M = U\Sigma V^T$$

όπου

- *$U \in \mathbb{R}^{k\times k}$ είναι ένας ορθογώνιος πίνακας, του οποίου οι στήλες είναι τα (κανονικοποιημένα) ιδιοδιανύσματα του MM^T (αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα).*
- *$V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ένας ορθογώνιος πίνακας, του οποίου οι στήλες είναι τα (κανονικοποιημένα) ιδιοδιανύσματα του M^TM (δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα).*
- *$\Sigma \in \mathbb{R}^{k\times n}$ είναι ένας (ορθογώνιος) διαγώνιος πίνακας, του οποίου τα πρώτα r διαγώνια στοιχεία είναι οι ιδιάζουσες τιμές του M, δηλαδή $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq r$ (λ_i είναι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του MM^T), σε φθίνουσα σειρά ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$).*

Επίσης, μπορούμε να γράψουμε τον SVD του πίνακα M ως

$$M = U_r\Sigma_r V_r^T,$$

όπου ο $U_r \in \mathbb{R}^{k\times r}$ περιέχει τις πρώτες r στήλες του U, ο $V_r \in \mathbb{R}^{n\times r}$ περιέχει τις πρώτες r στήλες του V και ο $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας που σχηματίζεται εισάγοντας μόνο τις r μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές στη διαγώνιο, σε φθίνουσα σειρά. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μορφή μπορούμε να δούμε ότι ο SVD μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα με τον ακόλουθο τρόπο.

$$M = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{v}_k^T, \tag{3.1}$$

όπου $\boldsymbol{u}_i$, $1 \leq i \leq r$ και $\boldsymbol{v}_i$, $1 \leq i \leq r$ είναι τα πρώτα r αριστερά και δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα αντίστοιχα.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον SVD του M για να αποκτήσουμε την καλύτερη εκτίμηση l βαθμού (με $l \leq r$) του M, με την έννοια της νόρμας Frobenius $\|\cdot\|_F$ και της φασματικής νόρμας $\|\cdot\|_2$. Αυτό μπορεί να βρεθεί απλώς κρατώντας τα πρώτα l στοιχεία του αναπτύγματος του SVD (3.1), λαμβάνοντας με αυτόν τον τρόπο το εξής

$$\hat{M} = \sum_{i=1}^{l} \sigma_i \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{v}_k^T.$$

Το θεώρημα το οποίο εξασφαλίζει αυτή την ιδιότητα του SVD είναι το *θεώρημα Eckart-Young*.

Η χρονική πολυπλοκότητα για να αποκτήσουμε τον ακριβή SVD ενός $k \times n$ πίνακα είναι $\mathcal{O}(min\left\{kn^2, k^2n\right\})$. Συνεπώς, ο υπολογισμός του SVD είναι ένα

ευεπίλυτο πρόβλημα για μικρού και μεσαίου μεγέθους πίνακες. Ωστόσο, για μεγάλα δεδομένα ή προβλήματα όπου η online επεξεργασία απαιτείται, ο υπολογισμός του SVD είναι ένα δύσκολο πρόβλημα.

Η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών μπορεί να αποκαλύψει μερικές σημαντικές πτυχές των πινάκων χαμηλού βαθμού, όπως η γεωμετρία τους και ο αριθμός των παραμέτρων που χρειάζεται για να τους περιγράψουμε [DR16]. Από γεωμετρική σκοπιά το σύνολο των $k \times n$ πινάκων με $rank(M) = r$, σχηματίζει μία υπεραριθμήσιμη ένωση υπόχωρων στο $\mathbb{R}^{k\times n}$. Αρχικά, παρατηρήστε ότι κάθε εξωτερικό γινόμενο ιδιαζόντων διανυσμάτων σχηματίζει ένα $k \times n$ πίνακα, δηλαδή $\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i^T \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Χρησιμοποιώντας την έκφραση (3.1) μπορούμε να δούμε ότι το M είναι ένα διάνυσμα στο διανυσματικό χώρο πινάκων που εκτείνεται από τα $\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i^T$, $1 \leq i \leq r \leq kn$, ενώ $\sigma_i, 1 \leq i \leq r$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές του αναπτύγματος. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι το σύνολο όλων των $k \times n$ πινάκων με $rank(M) = r$ αφορά όλες τις διαφορετικές τιμές που μπορούν να λάβουν τα $2r$ αριστερά και δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα (σε ένα συνεχές πεδίο) και το γεγονός ότι κάθε διαφορετική διαμόρφωση των ιδιαζόντων διανυσμάτων δημιουργεί ένα r-διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^{k\times n}$, συμπεραίνουμε ότι η συλλογή όλων των $k \times n$ πινάκων, με $rank(M) = r$, είναι μία ένωση ενός υπεραριθμήσιμου αριθμού r-διάστατων υπόχωρων.

Η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών αποκαλύπτει και κάποιο άλλο ενδιαφέρον ζήτημα. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο $\sigma_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i^T$ καθορίζεται πλήρως από $k + n + 1$ παραμέτρους. Κατά συνέπεια, ο αριθμός των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν πλήρως ένα $k \times n$ πίνακα, με $rank(M) = r$, είναι $r(k + n + 1)$. Εάν το r είναι σχετικά μικρό έχουμε $r(k + n + 1) << kn$, συνεπώς ο αριθμός των παραμέτρων αυτού του πίνακα είναι αρκετά μικρότερος από τον αριθμό των στοιχείων του. Αυτή η συνοπτική περιγραφή ενός πίνακα χαμηλού βαθμού είναι το στοιχείο που καθιστά δυνατή την ανάκτησή του από ένα σχετικά μικρό αριθμό μετρήσεων.

3.3 Ανάκτηση πίνακα χαμηλού βαθμού

Έστω $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$ ένας $k \times n$ πίνακας. Μία γραμμική διαδικασία μέτρησης στο M μοντελοποιείται ως [DR16]

$$\boldsymbol{y} = \mathcal{A}(M) + \boldsymbol{e}, \tag{3.2}$$

όπου $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ είναι το διάνυσμα των μετρήσεων/παρατηρήσεων, $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^m$ είναι το διάνυσμα του θορύβου και $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{k\times n} \to \mathbb{R}^m$ είναι ένας γραμμικός τελεστής μέτρησης, ο οποίος δρα ως εξής:

$$y_i = \left\langle M, A^{(i)} \right\rangle + e_i = tr\left(A^{(i)^T} M\right) + e_i = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n} M_{jl}A_{jl}^{(i)} + e_i,\ 1 \leq i \leq m, \tag{3.3}$$

όπου τα $A^{(i)}, 1 \leq i \leq m$ είναι ένα σύνολο από προκαθορισμένους πίνακες και e_i είναι τα αντίστοιχα στοιχεία του διανύσματος θορύβου.

Σε αντίθεση με το πρόβλημα της ανάκτησης αραιών διανυσμάτων, θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε ένα ειδικό είδος μετρήσεων και συνεπώς σε ένα ειδικό είδος προβλημάτων ανάκτησης. Οι πιο σημαντικές περιπτώσεις είναι οι ακόλουθες : [DR16]

1. **Συμπλήρωση πίνακα**

   Στο σενάριο της συμπλήρωσης πίνακα οι πίνακες $(A^{(i)})_{1\leq i\leq m}$ ορίζονται ως

$$A_{jl}^{(i)} = \begin{cases} 1 & ,(j,l) = (s,t) \\ 0 & ,(j,l) \neq (s,t) \end{cases}, 1 \leq i \leq m \tag{3.4}$$

για $(s_i, t_i) \in \{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, n\}$. Ουσιαστικά, έχουμε ένα πίνακα M και παρατηρούμε μόνο ένα υποσύνολο των στοιχείων του. Ο στόχος είναι η ανάκτηση του πίνακα M, δοθέντος του γεγονότος ότι ο M έχει χαμηλό βαθμό. Με άλλα λόγια ο στόχος είναι η συμπλήρωση των στοιχείων του πίνακα που λείπουν.

2. **Ανάκτηση πίνακα χαμηλού βαθμού από τυχαίες παρατηρήσεις**

   Σε αυτό το σενάριο κάθε $A^{(i)}$ είναι ένας τυχαίος πίνακας. Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι αυτή των Γκαουσιανών τυχαίων πινάκων, όπου τα στοιχεία του κάθε πίνακα είναι i.i.d Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και διασπορά $\frac{1}{m}$.

3. **Ανάκτηση πίνακα χαμηλού βαθμού από μετρήσεις βαθμού 1**

   Σε αυτήν την περίπτωση οι πίνακες $A^{(i)}$ έχουν βαθμό 1. Χαρακτηριστικά παραδείγματα προβλημάτων που ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία είναι η *ανάκτηση φάσης* (phase retrieval) και η *τυφλή αποσυνέλιξη* (blind deconvolution)

Το πιο σημαντικό σενάριο είναι αυτό της συμπλήρωσης πίνακα. Συνεπώς, θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε αυτήν την περίπτωση μόνο.

3.4 Συμπλήρωση πίνακα

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, σε ένα πρόβλημα *συμπλήρωσης πίνακα* (matrix completion) μας δίνεται ένα υποσύνολο των στοιχείων του πίνακα $M \in \mathbb{R}^{k \times n}$ και η γνώση ότι ο M είναι χαμηλού βαθμού. Ο στόχος είναι να συμπληρώσουμε επιτυχώς τα στοιχεία του M που λείπουν. Υπάρχουν αρκετοί λόγοι για τους οποίους μπορούν να λείπουν στοιχεία από ένα πίνακα. Αρχικά, το μέγεθος του πίνακα μπορεί να είναι αρκετά μεγάλο και κατά συνέπεια η παρατήρηση ολόκληρου του πίνακα μπορεί να είναι ακριβή. Επίσης, είναι πιθανό η έλλειψη στοιχείων να είναι ένα εγγενές χαρακτηριστικό του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε, όπως στην περίπτωση των συστημάτων προτάσεων, όπου είναι πρακτικά αδύνατο για κάθε χρήστη να βαθμολογεί κάθε δυνατό αντικείμενο.

Γενικά, δεν είναι πάντα δυνατό να συμπληρώσουμε ένα πίνακα χαμηλού βαθμού και θα μελετήσουμε τις συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι ο πίνακας μπορεί να συμπληρωθεί με μεγάλη πιθανότητα. Πριν το κάνουμε αυτό θα παρουσιάσουμε μία χαρακτηριστική εφαρμογή της συμπλήρωσης πίνακα έτσι ώστε να δώσουμε κίνητρο για την ανάπτυξη του θέματος.

3.4.1 Το πρόβλημα του Netflix

Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα που συνοδεύει μία παρουσίαση σχετική με συμπλήρωση πίνακα είναι το πρόβλημα του συστήματος προτάσεων του Netflix. Θα δώσουμε μία συνοπτική περιγραφή αυτού του προβλήματος, καθώς θα αποδειχθεί χρήσιμο να έχουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για να αξιολογούμε την ορθότητα

των επιχειρημάτων μας. Σε αυτό το πρόβλημα θεωρούμε ένα σύνολο από χρήστες, όπου κάθε χρήστης μπορεί να βαθμολογήσει οποιαδήποτε ταινία. Μοντελοποιούμε αυτό το σύστημα προτάσεων χρησιμοποιώντας ένα πίνακα, όπου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό χρήστη και κάθε στήλη σε μία διαφορετική ταινία. Κάθε στοιχείο A_{ij} του προηγούμενου πίνακα αντιστοιχεί στη βαθμολογία που δίνει ο χρήστης i στην ταινία j. Προφανώς, ο πίνακας βαθμολογιών έχει χαμένα στοιχεία, καθώς σε ένα ρεαλιστικό σενάριο μιλάμε για χιλιάδες ταινίες και χρήστες και κατά συνέπεια δεν είναι πρακτικό για κάθε χρήστη να βαθμολογεί κάθε πιθανή ταινία.

Το πρόβλημα που ανακύπτει είναι η εύρεση ενός τρόπου για την συμπλήρωση των χαμένων στοιχείων του πίνακα, συνάγοντας με αυτόν τον τρόπο την προτίμηση των χρηστών για ταινίες που δεν έχουν βαθμολογήσει (από τις οποίες ένα μεγάλο τμήμα αντιστοιχεί σε ταινίες που δεν έχουν δει ακόμα). Γενικά αυτό το πρόβλημα είναι αδύνατο να λυθεί. Η προϋπόθεση που καθιστά τη λύση αυτού του προβλήματος εφικτή είναι ο χαμηλός βαθμός του πίνακα βαθμολογιών. Ο χαμηλός βαθμός του πίνακα αυτού αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι πολλοί χρήστες συνήθως έχουν τις ίδιες προτιμήσεις, καθώς και ότι ταινίες που ανήκουν στην ίδια κατηγορία μπορεί να βαθμολογηθούν με τον ίδιο τρόπο από διαφορετικούς χρήστες. Ο χαμηλός βαθμός του πίνακα βαθμολογιών είναι η μαθηματική έννοια η οποία αιχμαλωτίζει αυτή την εμπειρική παρατήρηση.

3.4.2 Ποιοι πίνακες μπορούν να συμπληρωθούν;

Ένα από τα πρώτα πράγματα που πρέπει να εξετάσουμε είναι τι είδη πινάκων μπορούν να συμπληρωθούν. Θεωρητικά, προβλήματα ανακύπτουν στις επόμενες περιπτώσεις.

- Αραιοί πίνακες

  Οι αραιοί πίνακες δημιουργούν ένα πρόβλημα, καθώς χρειάζεται να παρατηρήσουμε την πλειονότητα των στοιχείων τους για να μπορέσουμε να τους συμπληρώσουμε. Κατά συνέπεια, δεν είναι πρακτική η συμπλήρωση αραιών πινάκων. Για παράδειγμα, θεωρείστε τον ακόλουθο πίνακα (το $*$ συμβολίζει το μη-μηδενικό στοιχείο).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Είναι προφανές ότι αν δεν παρατηρήσουμε το μη-μηδενικό στοιχείο δεν μπορούμε να το συμπληρώσουμε σωστά, καθώς δεν υπάρχει τρόπος να γνωρίζουμε ότι αυτό το στοιχείο είναι μη-μηδενικό.

- Πίνακες με αραιά ιδιάζοντα διανύσματα

  Οι πίνακες που έχουν τουλάχιστον ένα αραιό ιδιάζων διάνυσμα είναι προβληματικοί. Θεωρείστε το ακόλουθο παράδειγμα (το οποίο έχει παρθεί από το [ΦΓ16]) ενός πίνακα βαθμού 2.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T =$$

$$= 8 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι τα στοιχεία των ιδιαζόντων διανυσμάτων $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1$ συμβάλλουν στο σχηματισμό σχεδόν όλων των γραμμών (γραμμές 1-4), ενώ τα στοιχεία των ιδιαζόντων διανυσμάτων $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2$ συμβάλλουν μόνο στο σχηματισμό της 5ης γραμμής. Με άλλα λόγια μόνο η 5η γραμμή του πίνακα περιέχει πληροφορία σχετική με τα ιδιάζοντα διανύσματα $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2$. Ουσιαστικά, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να παρατηρήσουμε τουλάχιστον όλα τα στοιχεία της 5ης γραμμής έτσι ώστε να μπορούμε να συμπληρώσουμε επιτυχημένα τον πίνακα, καθώς η σημαντική πληροφορία του πίνακα χαμηλού βαθμού περιέχεται στα ιδιάζοντα διανύσματα και τις ιδιάζουσες τιμές.

Συμπερασματικά, θέλουμε η πληροφορία που παρέχουν τα ιδιάζοντα διανύσματα να απλώνεται σε πολλά στοιχεία του πίνακα. Κατά συνέπεια, θέλουμε απλωμένα (ή με άλλα λόγια όχι αραιά) ιδιάζοντα διανύσματα. Το μέτρο που προσδιορίζει το πόσο καλά ένα πίνακας M, η πιο ακριβώς ο χώρος στηλών και ο χώρος γραμμών αυτού του πίνακα (τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα εκτείνουν το χώρο των στηλών και τα δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα εκτείνουν το χώρο των γραμμών), ακολουθεί αυτές τις προδιαγραφές είναι η *συνοχή* (coherence).

Επιπλέον πρέπει να εξετάσουμε ποια σύνολα μετρήσεων δίνουν συμπληρώσιμους πίνακες. Κυρίως, έχουμε μόνο μία προβληματική περίπτωση.

- <u>Πίνακες από τους οποίους λείπει τουλάχιστον μία στήλη ή μία γραμμή</u>

  Είναι αδύνατο να συμπληρώσουμε ένα πίνακα αν αποτύχουμε να παρατηρήσουμε τουλάχιστον μία γραμμή ή μία στήλη του. Το επόμενο παράδειγμα περιέχει ένα πίνακα με βαθμό 1 από τον οποίο λείπει μία γραμμή (το * συμβολίζει τα γνωστά στοιχεία και το ? τα άγνωστα).

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ ? & ? & ? & ? \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} = \sigma_1 \begin{bmatrix} * \\ ? \\ * \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Είναι προφανές ότι δεν υπάρχει τρόπος να συνάγουμε την τιμή που λείπει από το αριστερό ιδιάζων διάνυσμα, καθώς αυτή η τιμή συμβάλλει μόνο στο σχηματισμό της 2ης γραμμής, της οποίας τα στοιχεία είναι άγνωστα σε εμάς. Κατά συνέπεια, χρειάζεται να παρατηρήσουμε τουλάχιστον ένα στοιχείο από κάθε στήλη και κάθε γραμμή.

Μπορούμε να εξασφαλίσουμε με υψηλή πιθανότητα ότι θα αποκτήσουμε τουλάχιστον ένα στοιχείο σε κάθε γραμμή και στήλη εάν εφαρμόσουμε το μοντέλο

της ομοιόμορφης δειγματοληψίας στα στοιχεία του M και ο αριθμός των γνωστών στοιχείων ικανοποιεί κάποιο κάτω φράγμα. Λάβετε υπόψιν ότι στο μοντέλο ομοιόμορφης δειγματοληψίας κάθε δυνατό υποσύνολο του συνόλου των $k \cdot n$ στοιχείων του M επιλέγεται με ίση πιθανότητα. Από το γνωστό πρόβλημα συλλογής κουπονιών (coupon collector's problem) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον $klogk$ (υποθέτοντας ότι $k \geq n$, αλλιώς χρειαζόμαστε $nlogn$) γνωστά στοιχεία για να εξασφαλίσουμε ότι με μεγάλη πιθανότητα έχουμε τουλάχιστον ένα στοιχείο σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη.

3.4.3 Συνοχή

Ένα μέτρο που προσδιορίζει το "άπλωμα" των στοιχείων των ιδιαζόντων διανυσμάτων ενός πίνακα $M \in \mathbb{R}^{k \times n}$ είναι η *συνοχή* (coherence).

Ορισμός 3.4.1 (Συνοχή). *[CR09] Έστω U ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ με $dimU = r$. Επίσης, έστω P_U η ορθογώνια προβολή στο U. Τότε, ορίζουμε την συνοχή του U, ως προς την κανονική βάση $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1}^n$ ως*

$$\mu(U) = \frac{n}{r} \max_{1 \leq i \leq n} \|P_U \boldsymbol{e}_i\|_2^2. \tag{3.5}$$

Παρατηρήστε ότι $P_U = UU^T$, όπου ο U είναι ο πίνακας που σχηματίζεται εισάγοντας τα κανονικά διανύσματα του U ως στήλες. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \|P_U \boldsymbol{e}_i\|_2 &= (P_U \boldsymbol{e}_i)^T (P_U \boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i^T P_U^T P_U \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i^T UU^T UU^T \boldsymbol{e}_i = \quad (\Upsilon \text{ ορθογώνιος}) \\ &= \boldsymbol{e}_i^T UU^T \boldsymbol{e}_i = (U^T \boldsymbol{e}_i)^T (U^T \boldsymbol{e}_i) = \|U^T \boldsymbol{e}_i\|_2^2 \end{aligned}$$

Άρα, μπορούμε να ξαναγράψουμε τη συνοχή ως

$$\mu(U) = \frac{n}{r} \max_{1 \leq i \leq n} \|U^T \boldsymbol{e}_i\|^2, \tag{3.6}$$

όπου το U που είναι στο δεξί μέλος συμβολίζει τον πίνακα του υποχώρου, δηλαδή τον πίνακα του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα βάσεις του προαναφερόμενου υποχώρου.

Για τις τιμές του $\mu(U)$ ισχύει

$$1 \leq \mu(U) \leq \frac{n}{r}.$$

Η μικρότερη τιμή αποκτιέται σε περιπτώσεις όπου όλα τα διανύσματα που εκτείνουν τον U έχουν στοιχεία με μέτρο $\frac{1}{\sqrt{n}}$, δηλαδή $u_i = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq r$. Η μεγαλύτερη τιμή του $\mu(U)$ επιτυγχάνεται όταν υπάρχει κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$, έτσι ώστε το $\boldsymbol{e}_i$ να βρίσκεται στο χώρο που εκτείνει ο U.

Στο πλαίσιο της συμπλήρωσης πίνακα ενδιαφερόμαστε για το $\mu(U)$ και το $\mu(V)$, όπου U και V είναι ο χώρος των στηλών και των γραμμών του M αντίστοιχα ή ισοδύναμα οι πίνακες $U \in \mathbb{R}^{k \times r}$ και $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$ των αριστερών και δεξιών ιδιαζόντων διανυσμάτων αντίστοιχα, όπως παρέχονται από τον SVD. Θέλουμε η τιμή της συνοχής να είναι όσο πιο μικρή γίνεται. Αυτό συνεπάγεται ότι η συσχέτιση των ιδιαζόντων διανυσμάτων με την κανονική βάση είναι μικρή και κατά συνέπεια τα ιδιάζοντα διανύσματα είναι πυκνά και όχι αραιά. Μόνο ένα αραιό ιδιάζων διάνυσμα είναι αρκετό για να αναγκάσει τη συνοχή να λάβει τη μέγιστη τιμή της.

3.4.4 Τα προβλήματα βελτιστοποίησης της συμπλήρωσης πίνακα

Προχωράμε στη διατύπωση του προβλήματος της συμπλήρωσης πίνακα και της λύσης του. Το γενικό πλαίσιο του προβλήματος συμπλήρωσης πίνακα είναι το ακόλουθο : Έστω $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$ ένας $k\times n$ πίνακας με $rank(M) = r$ (προσεγγιστικά) μικρό. Παρατηρούμε ότι τα γνωστά στοιχεία του πίνακα M επιλέγονται τυχαία με ομοιόμορφο τρόπο, ενώ τα υπόλοιπα παραμένουν άγνωστα. Συμβολίζουμε τις θέσεις των γνωστών στοιχείων με Ω.

Η ανάκτηση του M επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας προβλήματα βελτιστοποίησης, όπως στην περίπτωση του προβλήματος της αραιής ανάκτησης. Θα δώσουμε δύο διαφορετικά προβλήματα βελτιστοποίησης και θα αξιολογήσουμε την ικανότητά τους να επιτυγχάνουν τον στόχο μας, δηλαδή την επιτυχημένη ανάκτηση πίνακα.

Ελαχιστοποίηση βαθμού

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που αιχμαλωτίζει την έννοια της εύρεσης του πίνακα με το χαμηλότερο βαθμό είναι η *ελαχιστοποίηση βαθμού* (rank minimization).

Ορισμός 3.4.2 (Ελαχιστοποίηση βαθμού)**.**

$$\begin{aligned} \underset{X\in\mathbb{R}^{k\times n}}{minimize} \quad & rank(X) \\ subject\ to \quad & X_{ij} = M_{ij},\ (i,j) \subseteq \Omega. \end{aligned}$$

Ουσιαστικά, αυτό το πρόβλημα ψάχνει στο χώρο όλων των δυνατών $k \times n$ πινάκων που έχουν τις ίδιες τιμές με τον M στις επιλεγμένες θέσεις και επιλέγει τη λύση με το χαμηλότερο βαθμό. Η ελαχιστοποίηση βαθμού είναι ένα NP-Hard πρόβλημα στη γενική περίπτωση, όπου θεωρούμε όλους τους δυνατούς πίνακες $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$ και όλα τα δυνατά σύνολα μετρήσεων $\Omega \subseteq \{1,\dots,k\} \times \{1,\dots,n\}$ ως εισόδους.

Παρατηρήστε ότι αυτό το πρόβλημα αντιστοιχεί στο l_0 πρόβλημα ελαχιστοποίησης που χρησιμοποιήσαμε στο πρόβλημα της ανάκτησης αραιών διανυσμάτων. Μπορούμε εύκολα να το δούμε αυτό εάν δούμε ότι ισχύει ότι $rank(X) = \|\sigma(X)\|_0$, όπου $\sigma(X)$ είναι το διάνυσμα των ιδιαζουσών τιμών του πίνακα X. Και τα δύο προβλήματα είναι δυσεπίλυτα και αν και αιχμαλωτίζουν την ουσία αυτών που ψάχνουμε, τα απορρίπτουμε και ψάχνουμε για ευεπίλυτα εναλλακτικά προβλήματα.

Ελαχιστοποίηση πυρηνικής νόρμας

Η αναζήτηση για μία ευεπίλυτη εναλλακτική επιλογή οδηγεί σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που καλείται *ελαχιστοποίηση πυρηνικής νόρμας* (nuclear norm minimization).

Ορισμός 3.4.3 (Ελαχιστοποίηση πυρηνικής νόρμας)**.**

$$\begin{aligned} \underset{X\in\mathbb{R}^{k\times n}}{minimize} \quad & \|X\|_* \\ subject\ to \quad & X_{ij} = M_{ij},\ (i,j) \subseteq \Omega. \end{aligned}$$

Αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να αναχθεί σε ένα ημιορισμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης (semidefinite programming), άρα μπορούμε να βρούμε αποδοτικούς, πολυωνυμικού χρόνου, αλγορίθμους που μπορούν να το λύσουν.

Παρατηρήστε ότι αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης αντιστοιχεί στο l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, καθώς για την πυρηνική νόρμα γνωρίζουμε ότι $\|X\|_* = \sum_{i=1}^{r} |\sigma_i|$ (θυμηθείτε ότι τα σ_i είναι οι ιδιάζουσες τιμές του X).

Η πρώτη αποδεδειγμένη εγγύηση ανάκτησης χρησιμοποιώντας ελαχιστοποίηση πυρηνικής νόρμας για συμπλήρωση πίνακα δόθηκε στο [CR09]. Θα παρέχουμε ένα νεότερο αποτέλεσμα που οφείλεται στον Recht [Rec11], το οποίο βελτιώνει το προηγούμενο αποτέλεσμα δίνοντας ένα καλύτερο φράγμα για τον αριθμό των μετρήσεων.

Θεώρημα 3.4.1 (Εγγύηση ανάκτησης με ελαχιστοποίηση πυρηνικής νόρμας)**.** *[Rec11] Έστω $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$ ένας πίνακας βαθμού r με SVD $M = U\Sigma V^T$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, επιβάλλουμε τις συμβάσεις $m < n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times r}$. Επίσης, κάνουμε τις ακόλουθες παραδοχές*

- *Οι χώροι των γραμμών και των στηλών έχουν συνοχή που είναι φραγμένη από πάνω από κάποιο θετικό αριθμό μ_0, δηλαδή $\mu_0 = \max\{\mu(U), \mu(V)\}$.*
- *Ο πίνακας UV^T έχει ένα μέγιστο στοιχείο που είναι φραγμένο κατ΄ απόλυτη τιμή από το $\mu_1\sqrt{\frac{r}{mn}}$, όπου $\mu_1 > 0$.*

  Υποθέστε ότι δειγματοληπτούμε m στοιχεία του M τυχαία με ομοιόμορφο τρόπο. Εάν
  $$m \geq 32 \max\left\{\mu_1^2, \mu_0\right\} r(k+n)\beta \log^2(2n),$$
  για κάποιο $\beta > 1$, η λύση του προβλήματος (3.4.3) είναι ίση με M με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - 6log(n)(k+n)6^{2-2\beta} - n^{2-2\beta^{1/2}}$.

Υπάρχουν αρκετοί αλγόριθμοι που λύνουν το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της πυρηνικής νόρμας, καθώς και αλγόριθμοι που λύνουν το πρόβλημα συμπλήρωσης πίνακα χρησιμοποιώντας διαφορετικές προσεγγίσεις. Το θέμα του 6ου κεφαλαίου είναι αλγόριθμοι για συμπλήρωση πίνακα, συνεπώς θα αναβάλλουμε την ανάλυση κάποιων αλγορίθμων και την αναγκαία συζήτηση για αυτό το κομμάτι της εργασίας.

3.5 Εφαρμογές

Η ανάκτηση πίνακα χαμηλού βαθμού έχει πολλές εφαρμογές σε ένα μεγάλο εύρος πεδίων της επιστήμης και της μηχανικής. Για παράδειγμα, στη βιβλιογραφία συναντάμε τα ακόλουθα παραδείγματα. [DR16]

- **Τομογραφία κβαντικής κατάστασης (Quantum state tomography)**: Στην κβαντομηχανική περιγράφουμε την κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος χρησιμοποιώντας ένα πίνακα που καλείται πίνακας πυκνότητας. Υποθέστε ότι έχουμε ένα σωματίδιο που περιγράφεται από ένα διάνυσμα καταστάσεων 2 διαστάσεων, δηλαδή ένα qubit. Τότε η διάσταση του χώρου καταστάσεων ενός συστήματος που αποτελείται από n qubits είναι 2^n και κατά συνέπεια οι διαστάσεις του πίνακα πυκνότητας είναι $2^n \cdot 2^n = 4^n$. Παρατηρούμε ότι οι διαστάσεις του πίνακα πυκνότητας κλιμακώνουν εκθετικά, καθιστώντας με αυτό τον τρόπο το πρόβλημα της εύρεσης όλων των

στοιχείων του πίνακα πυκνότητας και κατά συνέπεια της κατάστασης του συστήματος ένα δύσκολο πρόβλημα. Είναι δυνατόν όταν ο πίνακας πυκνότητας είναι χαμηλού βαθμού, δηλαδή το σύστημα αποτελείται από μία μικρή συλλογή από καθαρές καταστάσεις, να συμπληρώσουμε τα χαμένα στοιχεία του πίνακα χρησιμοποιώντας αλγορίθμους συμπλήρωσης πίνακα. [Gro11]

- **Συστήματα προτάσεων**:

  Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, τα συστήματα προτάσεων αποτελούν ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα στο πεδίο της συμπλήρωσης πινάκων. Οργανώνοντας τις βαθμολογίες των ατόμων για ένα σύνολο αντικειμένων σε ένα πίνακα, καταλήγουμε με ένα πίνακα με κενά, καθώς είναι πολύ δύσκολο να αναγκάσουμε κάθε άτομο να αξιολογήσει κάθε δυνατό προϊόν. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι διαφορετικά άτομα μπορεί να μοιράζονται τις ίδιες προτιμήσεις, το οποίο μεταφράζεται στο χαμηλό βαθμό του αντίστοιχου πίνακα, εφαρμόζουμε αλγορίθμους συμπλήρωσης πίνακα για να γεμίσουμε τα κενά του πίνακα βαθμολογιών.

- **Πίνακες αποστάσεων**:

  Σε πολλά προβλήματα είναι χρήσιμο να έχουμε ένα πίνακα με τις αποστάσεις ανά ζεύγη των στοιχείων του συστήματος που μελετάμε. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ένα ασύρματο δίκτυο αισθητήρων, το οποίο αποτελείται από ένα σύνολο αισθητήρων διασκορπισμένων σε μία περιοχή. Ο αντίστοιχος πίνακας αποστάσεων είναι χαμηλού βαθμού και μπορεί να έχει κενά, καθιστώντας την χρήση αλγορίθμων συμπλήρωσης πίνακα αναγκαία.

Υπάρχουν πολλά άλλα προβλήματα και πεδία της μηχανικής μάθησης και της επεξεργασίας σήματος που περιέχουν πίνακες χαμηλού βαθμού με κενά, όπως η ανάλυση πρωτευόντων συνιστωσών (PCA), η επεξεργασία φυσικής γλώσσας, η εκμάθηση πολλαπλών διαδικασιών (multitask learning), κτλ.

Μέρος **II**

Μαθηματικά ζητήματα

Κεφάλαιο 4

Εργαλεία από την θεωρία πιθανοτήτων

4.1 Προκαταρκτικά

Ο στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να παράσχει όλα τα εργαλεία της θεωρίας πιθανοτήτων που είναι απαραίτητα για το επόμενο κεφάλαιο. Τα εργαλεία που αναπτύσσουμε καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος. Ξεκινάμε από βασικούς ορισμούς και προτάσεις που είναι τμήμα ενός τυπικού προπτυχιακού μαθήματος πιθανοτήτων και φτάνουμε σε πιο προηγμένα θέματα τα οποία συνήθως παρουσιάζονται στα πλαίσια της θεωρίας πιθανοτήτων στις υψηλές διαστάσεις. Σε αυτήν την ενότητα θα δώσουμε τους πιο βασικούς ορισμούς που είναι απαραίτητοι για την ανάπτυξη αυτής της διπλωματικής. Το κεφάλαιο αυτό βασίζεται στο [FR13], και αποτελεί ουσιαστικά μία μερική παρουσίαση των κεφαλαίων 7 και 8.

Το σκηνικό μέσα στο οποίο η θεωρία πιθανοτήτων λαμβάνει μέρος είναι ένας χώρος πιθανοτήτων $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, όπου Ω είναι ο δειγματικός χώρος (το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος, Σ είναι μία σ-άλγεβρα στο δειγματικό χώρο Ω (το σύνολο όλων των πιθανών συμβάντων) και $\mathbb{P}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο (Ω, Σ) (μία συνάρτηση η οποία απεικονίζει κάθε συμβάν σε ένα πραγματικό αριθμό).

Δοθέντος ένος χώρου πιθανοτήτων $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ και ενός $1 \leq p < \infty$, ορίζουμε τον $L_p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$-χώρο τυχαίων μεταβλητών ως το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών στο $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ με πεπερασμένη L_p νόρμα, δηλαδή

$$L_p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P}) = \left\{ X : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ \|X\|_p = \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Λάβετε υπόψιν ότι για $1 \leq p < \infty$ ο L_p χώρος είναι χώρος Banach. Στην ειδική περίπτωση όπου $p = 2$ ο L_2 χώρος είναι χώρος Hilbert, με το εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται ως $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}\left[XY\right]$.

Από το ορισμό της νόρμας μπορεί άμεσα να προκύψει η τριγωνική ανισότητα για L_p τυχαίες μεταβλητές.

Πρόταση 4.1.1 (Τριγωνική ανισότητα)**.** *Για κάθε $X, Y \in L_p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ ισχύει ότι*

$$\left(\mathbb{E}\left[|X+Y|^p\right]\right)^{1/p} \leq \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{1/p} + \left(\mathbb{E}\left[|Y|^p\right]\right)^{1/p}$$

για κάποιο $1 \leq p < \infty$.

Μία πολύ χρήσιμη ανισότητα είναι η ανισότητα του Holder.

Πρόταση 4.1.2 (Ανισότητα του Holder). *Για κάθε $X \in L_p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ και $Y \in L_q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ με $p, q \geq 1$ έτσι ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ισχύει ότι*

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p} \cdot (\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}.$$

Μία ειδική περίπτωση της ανισότητας του Holder, η οποία προκύπτει εύκολα θέτοντας $p = q = 2$, είναι η διάσημη ανισότητα *Cauchy-Schwarz.*

Πρόταση 4.1.3 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Για κάθε $X, Y \in L_2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ ισχύει ότι*

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \left(\mathbb{E}\left[X^2\right] \cdot \mathbb{E}\left[Y^2\right]\right)^{1/2}.$$

Άλλη μία σημαντική ανισότητα είναι η *ανισότητα του Jensen.*

Πρόταση 4.1.4 (Ανισότητα Jensen). *Έστω $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ ένα τυχαίο διάνυσμα και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση. Τότε,*

$$f(\mathbb{E}[\boldsymbol{X}]) \leq \mathbb{E}[f(\boldsymbol{X})].$$

Μία χρήσιμη συνάρτηση που θα χρησιμοποιήσουμε έτσι ώστε να διευκολύνουμε τις αποδείξεις είναι η *χαρακτηριστική συνάρτηση* (characteristic function) μίας τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 4.1.1 (Χαρακτηριστική συνάρτηση). *Η χαρακτηριστική συνάρτηση μίας τυχαίας μεταβλητής X σε ένα συμβάν A ορίζεται ως*

$$\mathbb{I}_{\{X \in A\}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}.$$

Δύο πολύ χρήσιμες συναρτήσεις στην θεωρία πιθανοτήτων είναι η *ροπογεννήτρια συνάρτηση* (moment-generating function) και η *γεννήτρια συνάρτηση αθροιστικών* (cummulant-generating function). Ουσιαστικά, η ροπογεννήτρια συνάρτηση προσφέρει μία εναλλακτική αναπαράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μίας τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 4.1.2 (Ροπογεννήτρια συνάρτηση). *Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μίας (πραγματικής) τυχαίας μεταβλητής X είναι μία συνάρτηση M_X έτσι ώστε*

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right], \, t \in \mathbb{R},$$

όταν αυτή η μέση τιμή υπάρχει.

Ορισμός 4.1.3 (Γεννήτρια συνάρτηση αθροιστικών). *Η γεννήτρια συνάρτηση αθροιστικών μίας τυχαίας μεταβλητής X είναι μία συνάρτηση C_X έτσι ώστε*

$$C_X(t) = \ln\left(\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]\right), \, t \in \mathbb{R}.$$

Το *θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης του Lebesgue*(Lebesgue's dominated convergence theorem) δίνεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.1.1 (Θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης του Lebesgue). *Έστω* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, έτσι ώστε* $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, *για σχεδόν όλα τα* $\omega \in \Omega$. *Επίσης, έστω* Y *μία τυχαία μεταβλητή με* $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. *Εάν* $|X_n| \leq |Y|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *σχεδόν σίγουρα, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

Μία γενίκευση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής είναι αυτή του *τυχαίου διανύσματος* (random vector), το οποίο είναι μία πεπερασμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 4.1.4 (Τυχαίο διάνυσμα). *Μία συλλογή* n *τυχαίων μεταβλητών,* $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_n] \in \mathbb{R}^n$, *ορισμένη σε κοινό χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *καλείται τυχαίο διάνυσμα.*

Η κλάση των τυχαίων διανυσμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε περισσότερο είναι τα *τυποποιημένα Γκαουσιανά τυχαία διανύσματα* (standard Gaussian random vector).

Ορισμός 4.1.5 (Τυποποιημένο Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα). *Ένα τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{g} = [g_1, g_2, \cdots, g_n] \in \mathbb{R}^n$, *του οποίου τα στοιχεία* g_i, $1 \leq i \leq n$ *είναι ανεξάρτητες τυποποιημένες Γκαουσιανές μεταβλητές, δηλαδή* $g_i \backsim \mathcal{N}(0,1)$, *καλείται τυποποιημένο Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα.*

Γενικότερα, για τα *Γκαουσιανά τυχαία διανύσματα* (Gaussian random vectors) έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1.6 (Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα). *Έστω* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ *ένα τυχαίο διάνυσμα που ορίζεται ως* $\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\mu}$, *όπου* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *ένας πίνακας,* $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^m$ *ένα τυποποιημένο Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα και* $\boldsymbol{\mu}$ *η μέση τιμή του* $\boldsymbol{X}$. *Τότε, το* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ *καλείται Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα.*

Η έννοια της *ισοτροπικότητας* (isotropicity) είναι χονδρικά μία γενίκευση στις υψηλές διαστάσεις της έννοιας της μοναδιαίας διασποράς των τυχαίων μεταβλητών. Μία χαρακτηριστική ιδιότητα των ισοτροπικών τυχαίων διανυσμάτων δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 4.1.7 (Ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα). *Ένα τυχαίο διάνυσμα* $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^n$ *λέγεται ισοτροπικό εάν*

$$\mathbb{E}\left[|\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}\rangle|^2\right] = \|\boldsymbol{x}\|_2^2, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Μία περαιτέρω γενίκευση του τυχαίου διανύσματος είναι αυτή του *τυχαίου πίνακα* (random matrix)

Ορισμός 4.1.8 (Γκαουσιανός τυχαίος πίνακας). *Ένας Γκαουσιανός τυχαίος πίνακας είναι ένας πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *του οποίου τα στοιχεία είναι ανεξάρτητες τυποποιημένες Γκαουσιανές μεταβλητές, δηλαδή* $A_{ij} \backsim \mathcal{N}(0,1)$.

Τέλος, δίνουμε τον ορισμό μίας *στοχαστικής ανέλιξης* (stochastic process)

Ορισμός 4.1.9 (Στοχαστική ανέλιξη). *Μία στοχαστική ανέλιξη είναι μία συλλογή τυχαίων μεταβλητών, στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, *με δείκτες πάνω σε κάποιο σύνολο* T, *δηλαδή* $\{X_t\}_{t\in T}$.

4.2 Βασικά αποτελέσματα στην θεωρία πιθανοτήτων

Σε αυτήν την ενότητα μερικά θεμελιώδη αποτελέσματα της θεωρίας πιθανοτήτων θα παρουσιαστούν. Θα δώσουμε τα περισσότερα αποτελέσματα χωρίς αποδείξεις. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [FR13] για περισσότερες λεπτομέρειες.

Για την μέση τιμή των απόλυτων ροπών μίας τυχαίας μεταβλητής έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.2.1 (Μέση τιμή των απόλυτων ροπών)**.** *Έστω X μία τυχαία μεταβλητή. Για $p > 0$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}\left[|X|^p\right] = p \int_0^\infty \mathbb{P}\left(|X| \geq t\right) t^{p-1} dt.$$

Μία από τις πιο διάσημες ανισότητες στην θεωρία πιθανοτήτων είναι η *ανισότητα Markov* (Markov's inequality)

Θεώρημα 4.2.1 (Ανισότητα Markov)**.** *Έστω X μία τυχαία μεταβλητή. Τότε η ακόλουθη ανισότητα ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq t\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X|\right]}{t}, \forall t > 0.$$

Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα στην θεωρία πιθανοτήτων είναι το *κεντρικό οριακό θεώρημα* (central limit theorem), το οποίο τονίζει την σημασία την Γκαουσιανής κατανομής.

Θεώρημα 4.2.2 (Κεντρικό οριακό θέωρημα)**.** *Έστω $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$ και $Var(X_i) = \sigma^2$. Επίσης, θεωρείστε την επόμενη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών*

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Τότε, η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μία τυποποιημένη Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή για όλες τις συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f(Z_n)\right] = \mathbb{E}\left[f(g)\right],$$

όπου g είναι μία τυποποιημένη Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή.

Είναι χρήσιμο να έχουμε στη διάθεσή μας τον ακόλουθο τύπο για μία τυποποιημένη Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή.

Λήμμα 4.2.1. *Έστω g μία τυποποιημένη Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή. Τότε, για $t \in \mathbb{R}$ και $c < \frac{1}{2}$ έχουμε ότι*

$$\mathbb{E}\left[exp(cg^2 + tg)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-2c}} exp\left(\frac{t^2}{2(1-2c)}\right). \tag{4.1}$$

Η επόμενη πρόταση δείχνει μία σύνδεση μεταξύ των ροπών και των ουρών μίας τυχαίας μεταβλητής.

Πρόταση 4.2.2 (Ροπές και ουρές μίας τυχαίας μεταβλητής.). *Έστω X μία τυχαία μεταβλητή η οποία ικανοποιεί την επόμενη σχέση*

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq e^{1/\gamma}\alpha u\right) \leq \beta e^{-u^{\gamma}/\gamma},\ \forall u > 0,\ \textit{για κάποιο}\ \gamma > 0. \tag{4.2}$$

Τότε για $p > 0$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left[|X|^p\right] \leq \beta a^p (e\gamma)^{p/\gamma}\Gamma\left(\frac{p}{\gamma}+1\right). \tag{4.3}$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left[|X|^p\right]^{1/p} \leq C_1 \alpha C_{2,\gamma}^{1/p}\beta^{1/p}p^{1/\gamma},\ \forall\, p \geq 1, \tag{4.4}$$

όπου $C_1 = e^{1/(2e)}$ και $C_{2,\gamma} = \sqrt{\dfrac{2\pi}{\gamma}}e^{\gamma/12}$.

Ένα σημαντικό θεώρημα στην θεωρία πιθανοτήτων είναι το *θεώρημα του Cramer* (Cramer's theorem).

Θεώρημα 4.2.3 (Θεώρημα του Cramer). *Έστω $X_1, \ldots, X_n$ μία πεπερασμένη συλλογή ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Τότε, έχουμε ότι*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq t\right) \leq \exp\left(\inf_{\theta>0}\left\{-\theta t + \sum_{i=1}^n C_{X_i}(\theta)\right\}\right),\ \forall t > 0.$$

Απόδειξη. Για $\theta > 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq t\right) &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\theta\sum_{i=1}^n X_i\right) \geq \exp(\theta t)\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\sum_{i=1}^n X_i\right)\right]}{\exp(\theta t)} = && \text{(ανισότητα Markov)}\\
&= \frac{\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \exp(\theta X_i)\right]}{\exp(\theta t)} = \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\exp(\theta X_i)\right]}{\exp(\theta t)} = && \text{(ανεξαρτησία των } X_i\text{)}\\
&= \frac{\prod_{i=1}^n \exp\left(\ln\left(\mathbb{E}\left[\exp(\theta X_i)\right]\right)\right)}{\exp(\theta t)} = \frac{\prod_{i=1}^n \exp\left(C_{X_i}(\theta)\right)}{\exp(\theta t)} =\\
&= \exp\left(-\theta t + \sum_{i=1}^n C_{X_i}(\theta)\right).
\end{aligned}$$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα ισχύει για ένα τυχαίο $\theta > 0$, έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq t\right) \leq \inf_{\theta>0}\left\{\exp\left(-\theta t + \sum_{i=1}^n C_{X_i}(\theta)\right)\right\} = \exp\left(\inf_{\theta>0}\left\{-\theta t + \sum_{i=1}^n C_{X_i}(\theta)\right\}\right).$$

□

4.3 Υποκανονικές και υποεκθετικές τυχαίες μεταβλητές

Μία *υποκανονική κατανομή* είναι μία κλάση κατανομών πιθανότητας, της οποίας οι ουρές φθίνουν τουλάχιστον τόσο γρήγορα όσο οι ουρές της Γκαουσιανής κατανομής.

Ορισμός 4.3.1 (Υποκανονική τυχαία μεταβλητή). *Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται υποκανονική εάν $\exists\, k, r > 0$ έτσι ώστε*

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq t\right) \leq ke^{-rt^2},\ \forall\, t > 0. \tag{4.5}$$

Πρέπει να αναφέρουμε ότι οι Bernoulli, οι κανονικές και οι φραγμένες κατανομές είναι όλες ειδικές περιπτώσεις υποκανονικών κατανομών. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι να περιγράψουμε υποκανονικές τυχαίες μεταβλητές. Ένας από αυτούς τους τρόπους περιέχεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.3.1 (Ιδιότητα των υποκανονικών τυχαίων μεταβλητών). *Έστω X μία υποκανονική τυχαία μεταβλητή. Τότε υπάρχουν $c_1 > 0, c_2 \geq 1$ έτσι ώστε*

$$\mathbb{E}\left[e^{c_1 X^2}\right] \leq c_2.$$

Απόδειξη. Πρώτα, παρατηρούμε από τον ορισμό 4.3.1 ότι η εξίσωση (4.2) της πρότασης 4.2.2 ικανοποιείται για υποκανονικές τυχαίες μεταβλητές με $\alpha = (2er)^{-1/2}$, $\gamma = 2$, $\beta = k$ και $u = (2r)^{1/2}t$. Κατά συνέπεια, μπορούμε εύκολα να αποκτήσουμε την ακόλουθη εκτίμηση για $p = 2n$, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (A′.3) των συναρτήσεων Γάμμα.

$$\mathbb{E}\left[X^{2n}\right] \leq k(2er)^{-n}(2e)^n\Gamma\left(n+1\right) = kr^{-n}n!.$$

Η χρήση του αναπτύγματος Taylor για την εκθετική συνάρτηση δίνει

$$\mathbb{E}\left[e^{c_1 X^2}\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_1^n \mathbb{E}\left[X^{2n}\right]}{n!} \leq 1 + k\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_1^n r^{-n} n!}{n!} = 1 + \frac{kc_1 r^{-1}}{1 - c_1 r^{-1}},$$

εάν επιλέξουμε c_1 έτσι ώστε $\dfrac{c_1}{r} < 1$. Προσέξτε ότι $c_2 = 1 + \dfrac{kc_1 r}{1 - c_1 r^{-1}} \geq 1$, αφού $\dfrac{c_1}{r} < 1$ και $k > 0$. □

Επιπλέον, η ακόλουθη εκτίμηση για τις ροπές μίας υποκανονικής τυχαίας μεταβλητής θα αποδειχθεί πολύ χρήσιμη.

Λήμμα 4.3.1 (Εκτίμηση για τις ροπές μίας υποκανονικής τυχαίας μεταβλητής). *Έστω X μία υποκανονική τυχαία μεταβλητή. Τότε,*

$$\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{1/p} \leq Cr^{-1/2}k^{1/p}p^{1/2},\ \forall\, p \geq 1,$$

για $C = exp\left(\dfrac{1}{2e} + \dfrac{1}{6}\right)\sqrt{\dfrac{\pi}{2e}}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της υποκανονικής τυχαίας μεταβλητής και την πρόταση 4.2.2 παρατηρούμε ότι $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2er}}$, $\gamma = 2$ και $\beta = k$ (α, γ και β είναι οι παράμετροι που εισήχθησαν στην πρόταση 4.2.2). Συνεπώς, αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην εξίσωση (4.4) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X|^p\right]^{1/p} &\leq C_1(2er)^{-1/2}C_{2,2}^{1/p}k^{1/p}p^{1/2} = \\
&= e^{1/(2e)}(2e)^{-1/2}r^{-1/2}(\sqrt{\pi}e^{1/6})^{1/p}k^{1/p}p^{1/2} \leq \\
&\leq e^{1/(2e)}(2e)^{-1/2}\sqrt{\pi}e^{1/6}r^{-1/2}k^{1/p}p^{1/2} && (\sqrt{\pi}e^{1/6} > 1,\, p \geq 1) \\
&= Cr^{-1/2}k^{1/p}p^{1/2},
\end{aligned}$$

όπου $C = exp\left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{6}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2e}}$. □

Χρειαζόμαστε μία εκτίμηση της ροπογεννήτριας συνάρτησης μίας υποκανονικής τυχαίας μεταβλητής.

Πρόταση 4.3.2 (Ροπογεννήτρια συνάρτηση μίας υποκανονικής τυχαίας μεταβλητής)**.** *Έστω X μία υποκανονική τυχαία μεταβλητή, με $\mathbb{E}[X] = 0$. Τότε, έχουμε ότι*

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] \leq e^{ct^2},\, \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

όπου c μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από k και r.

Απόδειξη. Έστω $t \geq 0$. Χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης και το γεγονός ότι $\mathbb{E}[X] = 0$ για να αποκτήσουμε

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = 1 + t\mathbb{E}[X] + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n\mathbb{E}[X^n]}{n!} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n\mathbb{E}[|X|^n]}{n!}.$$

Αρχικά, θεωρούμε την περίπτωση όπου $0 \leq t \leq t_0$, για κάποιο $t_0 \geq 0$. Έτσι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] &\leq 1 + k\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C^n t^n r^{-n/2}n^{n/2}}{n!} \leq 1 + \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C^n t^n r^{-n/2}n^{n/2}}{n^n e^{-n}} = && (\text{λήμμα } 4.3.1),(\text{A}'.5.2) \\
&= 1 + \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\left(Cet_0r^{-1/2}\right)^{m+2}(m+2)^{-(m+2)/2} \leq && (m = n-2), (t \leq t_0) \\
&\leq 1 + \frac{C^2t^2e^2k}{\sqrt{2\pi}r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(Cet_0r^{-1/2}\right)^n = \\
&= 1 + \frac{C^2t^2e^2k}{\sqrt{2\pi}r}\frac{1}{1 - Cet_0r^{-1/2}} = && (\text{δοθέντος } Cet_0r^{-1/2} < 1) \\
&= 1 + ct^2 \leq e^{ct^2}. && (c = Cet_0r^{-1/2})
\end{aligned}$$

Έπειτα, θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου $t > t_0$. Παρατηρήστε ότι

$$tX - c't^2 = -\left(\sqrt{c'}t - \frac{X}{2\sqrt{c'}}\right)^2 + \frac{X^2}{4c'} \leq \frac{X^2}{4c'}.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[e^{tX-c't^2}\right] \leq \mathbb{E}\left[exp\left(\frac{X^2}{4c'}\right)\right].$$

Θέτουμε $c' = \dfrac{1}{4c_1}$, όπου $c_1 > 0$ είναι η σταθερά της πρότασης 4.3.1. Τότε, χρησιμοποιώντας την ίδια πρόταση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[e^{tX-c't^2}\right] \leq \mathbb{E}\left[e^{c_1X^2}\right] \leq c_2.$$

Ας ορίσουμε το θ ως $\theta = ln(c_2)t_0^{-2}$, τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] &\leq c_2e^{c't^2} = c_2e^{-\theta t^2}e^{(c'+\theta)t^2} \leq \\ &\leq c_2e^{-\theta t_0^2}e^{(c'+\theta)t^2} = e^{(c'+\theta)t^2}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $c_0 = max\left\{c, c'+\theta\right\}$ έχουμε εξασφαλίσει ότι

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] \leq e^{ct^2}, \forall\, t \geq 0$$

Τελικά, εάν ανταλλάξουμε το X με το $-X$ μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η προηγούμενη ανισότητα ισχύει και για $t < 0$. □

Παρατηρήστε ότι κάθε σταθερά c που ικανοποιεί την εξίσωση (4.6) καλείται *υποκανονική παράμετρος* της υποκανονικής τυχαίας μεταβλητής X, ωστόσο προτιμούμε να χρησιμοποιούμε ως c την μικρότερη δυνατή τιμή. Από εδώ και πέρα, όταν θα αναφερόμαστε σε μία υποκανονική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο c, θα εννοούμε την παράμετρο c που υπεισέρχεται στην εξίσωση (4.6).

Το επόμενο θεώρημα ουσιαστικά δηλώνει ότι η κατανομή ενός αθροίσματος ανεξάρτητων υποκανονικών τυχαίων μεταβλητών παραμένει υποκανονική τυχαία μεταβλητή.

Πρόταση 4.3.3 (Άθροισμα υποκανονικών τυχαίων μεταβλητών)**.** *Έστω $X_1, \ldots, X_n$ μία ακολουθία υποκανονικών τυχαίων μεταβλητών, με $\mathbb{E}\left[X_i\right] = 0$, $1 \leq i \leq n$ και υποκανονική παράμετρο c. Για $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι η τυχαία μεταβλητή*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i$$

είναι υποκανονική με παράμετρο $c\|\boldsymbol{a}\|_2^2$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $X_1, \ldots, X_n$ είναι υποκανονικές τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}\left[X_i\right] = 0$, $1 \leq i \leq n$ και υποκανονική παράμετρο c. Έτσι χρησιμοποιώντας την πρόταση 4.3.2 μπορούμε να λάβουμε

$$\mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right] \leq e^{ct^2}, \forall t \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n. \tag{4.7}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{tY}\right] &= \mathbb{E}\left[exp\left(t\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{ta_iX_i}\right] = \\ &= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{ta_iX_i}\right] \leq \prod_{i=1}^{n} e^{ca_i^2t^2} = \qquad \text{(ανεξαρτησία)}, \quad (4.7) \\ &= e^{c\|\boldsymbol{a}\|_2^2t^2}.\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, η τυχαία μεταβλητή Y είναι υποκανονική, με παράμετρο $c\|\boldsymbol{a}\|_2^2$. $\square$

Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό ενός *υποκανονικού τυχαίου διανύσματος* (subgaussian random vector). Ουσιαστικά, ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ ακολουθεί υποκανονική κατανομή εάν όλες οι μονοδιάστατες περιθώριες κατανομές $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{x} \rangle$ ακολουθούν και αυτές υποκανονική κατανομή.

Ορισμός 4.3.2 (Υποκανονικό τυχαίο διάνυσμα)**.** *Ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ καλείται υποκανονικό τυχαίο διάνυσμα εάν, για όλα τα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$, η τυχαία μεταβλητή $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{x} \rangle$ είναι υποκανονική, με υποκανονική παράμετρο c (ανεξάρτητη από το $\boldsymbol{x}$).*

Ξανά εδώ, όταν αναφερόμαστε σε ένα υποκανονικό τυχαίο διάνυσμα με παράμετρο c, εννοούμε την παράμετρο c που περιέχεται στον ορισμό 4.3.2

Ένα μεγάλο τμήμα της παρουσίασης που θα ακολουθήσει χρησιμοποιεί υποκανονικούς τυχαίους πίνακες. Για αυτό παρέχουμε τον αυστηρό ορισμό του υποκανονικού τυχαίου πίνακα.

Ορισμός 4.3.3 (Υποκανονικός τυχαίος πίνακας)**.** *Ένας υποκανονικός τυχαίος πίνακας είναι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, του οποίου τα στοιχεία $A_{i,j}$ είναι ανεξάρτητες υποκανονικές τυχαίες μεταβλητές, με $\mathbb{E}[A_{i,j}] = 0$, $Var[A_{i,j}] = 1$ και τις ίδιες υποκανονικές παραμέτρους k, r.*

Παρατηρήστε ότι τα στοιχεία ενός υποκανονικού τυχαίου διανύσματος, καθώς και τα στοιχεία ενός υποκανονικού τυχαίου πίνακα δεν είναι κατ΄ ανάγκη ομοιόμορφα κατανεμημένα.

Μία *υποεκθετική κατανομή* (subexponential distribution) είναι μία κλάση κατανομών πιθανότητας, των οποίων οι ουρές φθίνουν πιο γρήγορα από κάθε εκθετική ουρά. Είναι μία ευρεία κλάση κατανομών που εμπεριέχει τις υποκανονικές κατανομές και κάποιες άλλες κατανομές των οποίων οι ουρές είναι βαρύτερες από τις Γκαουσιανές.

Ορισμός 4.3.4 (Υποεκθετική τυχαία μεταβλητή)**.** *Μία τυχαία μεταβλητή X λέγεται υποεκθετική εάν $\exists\, k, r > 0$ έτσι ώστε*

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq ke^{-rt},\ \forall\, t > 0.$$

4.4 Ανισότητα του Bernstein

Ένα σημαντικό θέμα στην θεωρία πιθανοτήτων είναι οι ανισότητες συγκέντρωσης (concentration inequalities). Χονδρικά μία *ανισότητα συγκέντρωσης* είναι μία ανισότητα η οποία προσδιορίζει την απόκλιση μίας τυχαίας μεταβλητής X γύρω από τη μέση τιμή της $\mathbb{E}[X]$ (ή γενικότερα γύρω από κάποια άλλη μεταβλητή), δηλαδή $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq f(t)$, για κάποια συνάρτηση f του t. Ένα σημαντικό εργαλείο που χρειαζόμαστε για το επόμενο κεφάλαιο και το οποίο υπάγεται στην κατηγορία των ανισοτήτων συγκέντρωσης είναι η *ανισότητα του Bernstein.*

Θεώρημα 4.4.1 (Ανισότητα του Bernstein)**.** *Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με $\mathbb{E}[X_i] = 0, 1 \leq i \leq n$ και*

$$\mathbb{E}[|X_i|^m] \leq m! c^{m-2} \sigma_i^2/2,\ 1 \leq i \leq n,\ m \geq 2, \tag{4.8}$$

όπου $c > 0$ και $\sigma_i > 0$, $1 \leq i \leq n$ είναι σταθερές. Τότε

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2(\sigma^2 + ct)}\right), \forall\, t > 0\,,$$

όπου $\sigma^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor για την εκθετική συνάρτηση και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\mathbb{E}\left[\theta X_i\right] = 0$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta X_i\right)\right] = 1 + \theta\mathbb{E}[X_i] + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\theta^m \mathbb{E}[X_i^m]}{m!} = 1 + \frac{\theta^2\sigma_i^2}{2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2\theta^{m-2}\mathbb{E}[X_i^m]}{m!\sigma_i^2},\ 1 \leq i \leq n. \tag{4.9}$$

Για να είναι πιο ξεκάθαρη η παρουσίαση αντικαθιστούμε την άθροιση με την ακόλουθη έκφραση

$$S_i(\theta) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2\theta^{m-2}\mathbb{E}[X_i^m]}{m!\sigma_i^2},\ 1 \leq i \leq n.$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ανισότητα $1 + x \leq e^x$ και την εξίσωση (4.9) μπορούμε να λάβουμε

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta X_i\right)\right] = 1 + \frac{\theta^2\sigma_i^2}{2} S_i(\theta) \leq \exp\left(\frac{\theta^2\sigma_i^2}{2} S_i(\theta)\right) \leq \exp\left(\frac{\theta^2\sigma_i^2}{2} S(\theta)\right),\ 1 \leq i \leq n, \tag{4.10}$$

όπου $S(\theta) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} S_i(\theta)$.

Για την γεννήτρια συνάρτηση αθροιστικών του X_i έχουμε ότι

$$C_{X_i}(\theta) = \ln\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta X_i\right)\right]\right) \leq \frac{\theta^2\sigma_i^2 S(\theta)}{2},\ 1 \leq i \leq n, \tag{4.11}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα (4.10).

Έτσι από το θεώρημα του Cramer [(4.2.3)] και την έκφραση (4.11) έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq t\right) &\leq \exp\left(\inf_{\theta>0}\left\{-\theta t + \sum_{i=1}^{n} C_{X_i}(\theta)\right\}\right) \leq \inf_{\theta>0}\left\{\exp\left(-\theta t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta^2\sigma_i^2 S(\theta)}{2}\right)\right\} = \\
&= \inf_{\theta>0}\left\{\exp\left(-\theta t + \frac{\theta^2 S(\theta)}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)\right\} = \inf_{\theta>0}\left\{\exp\left(-\theta t + \frac{\theta^2\sigma^2 S(\theta)}{2}\right)\right\} \leq\ , \\
&\leq \inf_{0<c\theta<1}\left\{\exp\left(-\theta t + \frac{\theta^2\sigma^2 S(\theta)}{2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

όπου c είναι η σταθερά που ορίζεται στην (4.8).

Για $0 < c\theta < 1$ ισχύει ότι

$$S_i(\theta) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2\theta^{m-2}\mathbb{E}[X_i^m]}{m!\sigma_i^2} \leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2\theta^{m-2}\mathbb{E}[|X_i|^m]}{m!\sigma_i^2} \leq \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{c\theta}\right)^{m-2} = \frac{1}{1-c\theta},\ 1 \leq i \leq n,$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το φράγμα για τις ροπές (4.8).
Κατά συνέπεια,

$$S(\theta) \leq \frac{1}{1-c\theta},\ 0 < c\theta < 1.$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα με την έκφραση (4.12) οδηγούμαστε στο

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq t\right) \leq \inf_{0<c\theta<1} \left\{\exp\left(-\theta t + \frac{\theta^2\sigma^2}{2\,(1-c\theta)}\right)\right\}.$$

Τέλος, θεωρώντας ότι $\theta = \dfrac{t}{\sigma^2 + ct}$, το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $c\theta < 1$ έχουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t}{\sigma^2+ct}\cdot t + \frac{\left(\dfrac{t}{\sigma^2+ct}\right)^2 \sigma^2}{2\left(1 - c\cdot\dfrac{t}{\sigma^2+ct}\right)}\right) =$$
$$= \exp\left(\frac{t^2}{2(\sigma^2+ct)}\right).$$

Ανταλλάσοντας το X_i με το $-X_i$ στην τελική έκφραση λαμβάνουμε

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq -t\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2(\sigma^2+ct)}\right).$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τον φράγμα ένωσης παίρνουμε

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2(\sigma^2+ct)}\right),\forall\, t > 0.$$

□

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Bernstein για υποκανονικές τυχαίες μεταβλητές για να αποδείξουμε ότι η ίδια ανισότητα ισχύει και για υποεκθετικές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0.

Συνέπεια 4.4.1 (Ανισότητα του Bernstein για υποεκθετικές τυχαίες μεταβλητές)**.** *Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες υποεκθετικές τυχαίες μεταβλητές, με $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $1 \leq i \leq n$. Τότε, για κάθε $t > 0$*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{r^2t^2}{4kn+2rt}\right).$$

Απόδειξη. Για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[|X_i|^n\right] = n\int_0^\infty \mathbb{P}(|X_i| \geq t)t^{n-1}dt \leq kn\int_0^\infty e^{-rt}t^{n-1}dt = \quad (\text{προ. } 4.2.1), (\text{ορ. } 4.3.4)$$

$$= knr^{-n}\int_0^\infty e^{-u}u^{n-1}du = knr^{-n}\Gamma(n-1) = \quad (u = rt \Rightarrow du = rdt)$$

$$= knr^{-n}(n-1)! = kn!r^{-n} = n!r^{-(n-2)}\frac{2kr^2}{2} \quad (\text{ορ.} A.3.1)$$

Έτσι η παραπάνω έκφραση ικανοποιεί την συνθήκη (4.8) με $c = r^{-1}$ και $\sigma_i^2 = 2kr^{-2}$. Κατά συνέπεια, η ανισότητα του Bernstein (θεώρημα 4.4.1) ισχύει για τις υποεκθετικές τυχαίες μεταβλητές που ορίσαμε στην αρχή. □

4.5 Μέση τιμή νορμών Γκαουσιανών διανυσμάτων

Σε αυτήν την ενότητα θα αποδείξουμε μερικά αποτελέσματα που αφορούν την μέση τιμή της l_2 νόρμας ενός Γκαουσιανού τυχαίου διανύσματος. Για να το επιτύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μερικά ενδιάμεσα αποτελέσματα.

Λήμμα 4.5.1 (Σ.π.π αθροίσματος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών)**.** *Η σ.π.π του αθροίσματος $X + Y$ δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X και Y με σ.π.π p_X και p_Y αντίστοιχα δίνεται από*

$$p_{X+Y}(z) = (p_X * p_Y)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(u)p_Y(z-u)du.$$

Δύο απαραίτητα εργαλεία για να εκτιμήσουμε την μέση τιμή της νόρμας ενός Γκαουσιανού τυχαίου διανύσματος είναι οι συναρτήσεις Βήτα και Γάμμα. Για τους αντίστοιχους ορισμούς, καθώς και για χρήσιμες ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων που πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε, ανατρέξτε στην υποενότητα Α΄.3.1 του παραρτήματος.

Πρόταση 4.5.1. *Έστω $\boldsymbol{g} = [g_1, g_2, \cdots, g_n] \in \mathbb{R}^n$ ένα τυποποιημένο Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα. Η τυχαία μεταβλητή*

$$Y = \|\boldsymbol{g}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n g_i^2$$

ακολουθεί $\chi^2(n)$ κατανομή. Η σ.π.π της τελευταίας είναι

$$p_{\chi^2(n)}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}u^{(n/2)-1}e^{-u/2} & , u > 0 \\ 0 & , u \leq 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον αριθμό n των στοιχείων του $\boldsymbol{g}$. Για $n = 1$ έχουμε

$$\mathbb{P}(g^2 \le u) = \begin{cases} \mathbb{P}(-\sqrt{u} \le g \le \sqrt{u}) & , u \ge 0 \\ 0 & , u < 0 \end{cases} = \begin{cases} F_{\mathcal{N}(0,1)}(\sqrt{u}) - F_{\mathcal{N}(0,1)}(-\sqrt{u}) & u \ge 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}.$$

όπου $F_{\mathcal{N}(0,1)}$ είναι η σ.κ.π της τυποποιημένης Γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής.
Η σ.π.π της τυχαίας μεταβλητής g^2 είναι

$$\begin{aligned} p_1(u) &= \frac{d}{du}\left(F_{\mathcal{N}(0,1)}(\sqrt{u}) - F_{\mathcal{N}(0,1)}(-\sqrt{u})\right) = \frac{1}{2\sqrt{u}} p_{\mathcal{N}(0,1)}(\sqrt{u}) + \frac{1}{2\sqrt{u}} p_{\mathcal{N}(0,1)}(-\sqrt{u}) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u/2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{u}} u^{-1/2} e^{-u/2}, \end{aligned}$$

για $u \ge 0$ $p_1 = 0$, για $u < 0$.

Παρατηρήστε ότι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (εξ. A′.4) και για αυτό η έκφραση (4.13) ισχύει για $n = 1$.

Υποθέστε ότι η έκφραση (4.13) ισχύει για κάποιο $n > 1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n + 1$. Προφανώς, για $u \le 0$ μπορούμε να συνάγουμε ότι $p_{n+1}(u) = 0$. Για $u > 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 4.5.1 για να λάβουμε το

$$\begin{aligned} p_{n+1}(u) = (p_n * p_1)(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_n(t) p_1(u-t) dt = && (t > 0 \text{ και } u - t > 0) \\ &= \frac{1}{2^{n/2} 2^{1/2} \Gamma(n/2)\Gamma(1/2)} \int_0^u t^{(n/2)-1} e^{-t/2} (u-t)^{-1/2} e^{-(u-t)/2} dt = \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)} e^{-u/2} \int_0^u t^{(n/2)-1}(u-t)^{-1/2} dt = && (\text{Θέτουμε } x = \frac{t}{u}) \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)} e^{-u/2} u^{(n/2)-(1/2)} \int_0^1 x^{(n/2)-1}(1-x)^{-1/2} dx = && (0 < x < 1) \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)} e^{-u/2} u^{(n+1)/2-1} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = && (\text{ορ. A'.3.2}) \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)} e^{-u/2} u^{(n+1)/2-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)} u^{(n+1)/2-1} e^{-u/2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σχέση (4.13) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Το επόμενο θεώρημα περιέχει κάποια φράγματα για τη μέση τιμή της l_2 νόρμας ενός Γκαουσιανού τυχαίου διανύσματος.

Θεώρημα 4.5.1. *Έστω* $\boldsymbol{g} = [g_1, g_2, \cdots, g_n] \in \mathbb{R}^n$ *ένα τυποποιημένο Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα. Τότε,*

$$\frac{n}{\sqrt{n+1}} \leq \mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{g}\|_2\right] = \sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \leq \sqrt{n}$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από την πρόταση (4.5.1) ότι η τυχαία μεταβλητή $\|\boldsymbol{g}\|_2^2$ ακολουθεί την $\chi^2(n)$ κατανομή, με σ.π.π $p_{\chi^2(n)}(u)$, η οποία δίνεται στην εξίσωση (4.13). Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{g}\|_2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\|\boldsymbol{g}\|_2^2\right)^{1/2}\right] = \int_0^\infty u^{1/2} p_{\chi^2(n)}(u)du = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty u^{1/2}u^{n/2-1}e^{-u/2}du = \quad (t = \frac{u}{2})$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty (2t)^{1/2}(2t)^{n/2-1}e^{-t}2dt = \frac{2^{n/2+1/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty t^{n/2-1/2}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{2^{1/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^\infty t^{((n+1)/2)-1}e^{-t}dt = \sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Αφού ισχύει ότι $g_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, $1 \leq i \leq n$, προκύπτει άμεσα ότι

$$\mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{g}\|_2^2\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[g_i^2\right] = n.$$

Η ανισότητα του Jensen (ορισμός 4.1.4) μας παρέχει το άνω φράγμα

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{g}\|_2\right])^2 \leq \mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{g}\|_2^2\right] &\Rightarrow \mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{g}\|_2\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{g}\|_2^2\right]} \\ &\Rightarrow \mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{g}\|_2\right] \leq \sqrt{n}.\end{aligned}$$

Έστω E_n η μέση τιμή της l_2 νόρμας ενός Γκαουσιανού τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή

$$E_n = \mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{g}\|_2\right].$$

Τότε, η χρήση της εξίσωσης (A′.2) δίνει

$$E_{n+1}E_n = \sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 2\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 2\frac{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = n.$$

Τελικά, συνδυάζοντας την προηγούμενη έκφραση με την ανίσωση $E_{n+1} \leq \sqrt{n+1}$ λαμβάνουμε το ακόλουθο κάτω φράγμα

$$E_n = \frac{n}{E_{n+1}} \geq \frac{n}{\sqrt{n+1}}.$$

□

4.6 Γκαουσιανό πλάτος

Μία σημαντική γεωμετρική ποσότητα στην γεωμετρία υψηλών διαστάσεων, η οποία χαρακτηρίζει ένα υποσύνολο $T \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι το *Γκαουσιανό πλάτος* (Gaussian width). Ο ορισμός του Γκαουσιανού πλάτους ακολουθεί.

Ορισμός 4.6.1 (Γκαουσιανό πλάτος)**.** *Έστω $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n$ ένα τυποποιημένο Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα. Τότε, το Γκαουσιανό πλάτος του συνόλου T ορίζεται ως*

$$w(T) = \mathbb{E}\left[\sup_{\boldsymbol{x} \in T} \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{x} \rangle\right].$$

Χονδρικά, το Γκαουσιανό πλάτος παρέχει ένα μέτρο του πλάτους του συνόλου $T \subseteq \mathbb{R}^n$ μεσοσταθμισμένο πάνω σε όλο το σύνολο των κατευθύνσεων που ορίζονται από ένα τυποποιημένο Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του Γκαουσιανού πλάτους. [Cha+12b]

Πρόταση 4.6.1 (Ιδιότητες του Γκαουσιανού πλάτους)**.** *Έστω $T \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε για το Γκαουσιανό πλάτος $w(T)$ του συνόλου T οι ακόλουθες ιδιότητες ισχύουν*

(α΄) *$w(T)$ είναι πεπερασμένο $\iff$ T είναι φραγμένο*

(β΄) *Αναλλοίωτο στις μεταφορές*

(γ΄) *Αναλλοίωτο στους μοναδιαίους μετασχηματισμούς.*

(δ΄) *Ομογένεια, δηλαδή $w(cT) = cw(T)$, $\forall\, c > 0$*

(ε΄) *Μονοτονία, δηλαδή εάν $T_1 \subseteq T_2$ τότε $w(T_1) \leq w(T_2)$*

(ς΄) *Το Γκαουσιανό πλάτος ενός συνόλου είναι ίσο με το Γκαουσιανό πλάτος του κυρτού του περιβλήματος, δηλαδή $w(T) = w(conv(T))$*

4.7 Λήμμα του Gordon

Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι η απόδειξή του *λήμματος του Gordon* (Gordon's lemma). Αυτό το λήμμα μπορεί να κατηγοριοποιηθεί στο τμήμα της θεωρίας πιθανοτήτων υψηλών διαστάσεων το οποίο έχει ως στόχο την εύρεση φραγμάτων για τη μέση τιμή του ελαχίστου άνω φράγματος μίας στοχαστικής ανέλιξης, δηλαδή $\mathbb{E}\left[\sup_{\boldsymbol{x} \in T} X_t\right]$. Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιούμε την έννοια του lattice supremum, δηλαδή

$$\mathbb{E}\left[\sup_{\boldsymbol{x} \in T} X_t\right] = \sup_{\substack{T' \subseteq T \\ T' \text{ πεπερασ.}}} \left\{\mathbb{E}\left[\sup_{\boldsymbol{x} \in T'} X_t\right]\right\}.$$

Χρησιμοποιώντας το lattice supremum βοηθάει στην αποφυγή ζητημάτων μετρησιμότητας που ανακύπτουν κατά τον υπολογισμό του sup ενός υπεραριθμήσιμου συνόλου τυχαίων μεταβλητών.

Η έννοια που βρίσκεται πίσω από το λήμμα του Gordon είναι ότι η σχέση μεταξύ των μέσων τιμών συναρτήσεων δύο οικογενειών τυχαίων μεταβλητών καθορίζεται

από τη σχέση των αντίστοιχων συνδιακυμάνσεων, καθώς οι τελευταίες καθορίζουν πλήρως την κατανομή ενός Γκαουσιανού τυχαίου διανύσματος με μέση τιμή μηδέν. Για να αποδείξουμε το λήμμα του Gordon θα χρειαστούμε αρκετά ενδιάμεσα αποτελέσματα και προτάσεις. Αρχικά, θα δώσουμε τον ορισμό μίας *συνάρτησης με ήπια εξέλιξη* (function of moderate growth).

Ορισμός 4.7.1 (Συνάρτηση με ήπια εξέλιξη)**.** *Έστω $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Λέμε ότι F είναι συνάρτηση με ήπια εξέλιξη εάν για κάθε $c > 0$, ισχύει ότι*

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|_2 \to \infty} F(\boldsymbol{x}) e^{-c\|\boldsymbol{x}\|_2^2} = 0.$$

Το πρώτο αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το *λήμμα του Stein* (Stein's lemma), γνωστό και ως *σχέση Γκαουσιανής ολοκλήρωσης κατά μέρη* (Gaussian integration by parts formula).

Πρόταση 4.7.1 (Λήμμα του Stein)**.** *Έστω $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επιπλέον, υποθέστε ότι η F και οι πρώτης της τάξης μερικές παράγωγοι είναι ήπιας εξέλιξης. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις ισχύουν*

1. *Έστω g μία Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή, με $\mathbb{E}[g] = 0$, και $n = 1$. Ισχύει ότι*
$$\mathbb{E}[gF(g)] = \mathbb{E}\left[g^2\right] \mathbb{E}\left[F'(g)\right].$$
2. *Έστω $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ ένα Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα με μέση τιμή 0 και g_0 μία Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή μέσης τιμής 0 (όχι απαραίτητα ανεξάρτητη από το $\boldsymbol{g}$). Τότε ισχύει ότι*
$$\mathbb{E}[g_0 F(\boldsymbol{g})] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[g_0 g_i] \, \mathbb{E}\left[\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{g})\right].$$

Απόδειξη. 1. Για την τυχαία μεταβλητή g γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}[g] = 0$, έτσι $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[g^2\right]$. Έπειτα χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη μπορούμε να βρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[gF(g)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \cdot uF(u)du = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\sigma^2 exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)\right)' F(u)du = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sigma^2 \left[exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) F(u)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) F'(u)du \right] = \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) F'(u)du = \mathbb{E}\left[g^2\right] \mathbb{E}\left[F'(g)\right].
\end{aligned}$$

Το γεγονός ότι η F είναι ήπιας εξέλιξης (με $c = \dfrac{1}{2\sigma^2}$) είναι αυτό που εξασφαλίζει ότι

$$exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)F(u)\Big|_{-\infty}^{\infty}=0.$$

2. Έστω $g_i' = g_i - g_0\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_i\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}$, $1 \le i \le n$, n τυχαίες μεταβλητές.

   Επίσης, θεωρείστε την συνάρτηση $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$G(t) = F\left(g_1' + t\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_1\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}, \ldots, g_n' + t\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_n\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}\right).$$

   Τότε, εάν δεσμεύσουμε ως προς $\boldsymbol{g}'$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g_0 F(\boldsymbol{g})\right] &= \mathbb{E}\left[g_0 F(g_1,\ldots,g_n)\right] = \mathbb{E}\left[g_0 F\left(g_1' + g_0\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_1\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}, \ldots, g_n' + g_0\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_n\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}\right)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[g_0 G(g_0)\right] = \mathbb{E}\left[g_0^2\right]\mathbb{E}\left[G'(g_0)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[g_0^2\right]\mathbb{E}\left[\frac{dF}{dt}\left(g_1' + t\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_1\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}, \ldots, g_n' + t\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_n\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}\right)\Big|_{t=g_0}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[g_0^2\right]\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}\left(g_1' + t\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_1\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}, \ldots, g_n' + t\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_n\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}\right)\frac{dx_i}{dt}\Big|_{t=g_0}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[g_0^2\right]\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}\left(g_1' + g_0\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_1\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}, \ldots, g_n' + g_0\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_n\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}\right)\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_i\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[g_0^2\right]\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(g_1,\ldots,g_n)\frac{\mathbb{E}\left[g_0 g_i\right]}{\mathbb{E}\left[g_0^2\right]}\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[g_0 g_i\right]\mathbb{E}\left[\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{g})\right].
\end{aligned}$$

□

Ένα χαρακτηριστικό αποτέλεσμα στην θεωρία ολοκλήρωσης που θα χρησιμοποιήσουμε δίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.7.2. *Έστω $J \subseteq \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που ορίζεται πάνω σε αυτό. Επίσης, έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μία τυχαία μεταβλητή, έτσι ώστε η απεικόνιση $t \mapsto f(t, X)$ να είναι σχεδόν σίγουρα συνεχώς διαφορίσιμη στο J. Εάν για κάθε συμπαγές υποδιάστημα $I \subset J$ ισχύει ότι,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}|f'(t,X)|\right] < \infty \tag{4.14}$$

τότε η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $g(t) = \mathbb{E}\left[f(t,X)\right]$, είναι συνεχώς διαφορίσιμη και

$$g'(t) = \mathbb{E}\left[f'(t,X)\right].$$

Απόδειξη. Έστω $t \in intJ$ και $I \subset J$ ένα συμπαγές υποδιάστημα το οποίο περιέχει το t στο εσωτερικό του. Για κάποιο $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ θεωρούμε το σύνολο $[t, t+h]$ (ή

$[t-h,t]$ στην περίπτωση που $h<0$), έτσι ώστε $[t,t+h]\subseteq I$. Τότε, το θεώρημα της μέσης τιμής εξασφαλίζει ότι υπάρχει $\zeta\in[t,t+h]$, έτσι ώστε

$$f'(\zeta,X)=\frac{f(t+h,X)-f(t,X)}{h}=f_h(t,X).$$

Είναι προφανές ότι

$$|f'(\zeta,X)|\leq\sup_{t\in I}|f'(t,X)|\Rightarrow|f_h(t,X)|\leq\sup_{t\in I}|f'(t,X)|\,.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}|f'(t,X)|\right]<\infty$.

Κατά συνέπεια από το θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης του Lebesgue (Θεώρημα [4.1.1]) λαμβάνουμε ότι

$$\lim_{h\to0}\mathbb{E}\left[f_h(t,X)\right]=\mathbb{E}\left[\lim_{h\to0}f_h(t,X)\right]=\mathbb{E}\left[f'(t,X)\right].$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $g(t)$ μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned}g'(t)&=\lim_{h\to0}g_h(t)=\lim_{h\to0}\frac{g(t+h)-fg(t)}{h}=\\&=\lim_{h\to0}\frac{\mathbb{E}\left[f(t+h,X)\right]-\mathbb{E}\left[f(t,X)\right]}{h}=\lim_{h\to0}\mathbb{E}\left[f_h(t,X)\right].\end{aligned}$$

Ο συνδυασμός των προηγούμενων δύο εκφράσεων δίνει

$$g'(t)=\mathbb{E}\left[f'(t,X)\right].$$

□

Η επόμενη πρόταση περιέχει ένα σημαντικό εργαλείο για την απόδειξη του λήμματος του Gordon.

Πρόταση 4.7.3. *Έστω $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, με την F και όλες τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης να είναι ήπιας εξέλιξης. Επίσης, έστω $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ και $\boldsymbol{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)$ δύο ανεξάρτητα Γκαουσιανά τυχαία διανύσματα με μέση τιμή 0. Ορίζουμε το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{U}(t)=(U_1(t),\ldots,U_n(t))$, $t\in[0,1]$, με*

$$U_i(t)=\sqrt{t}X_i+\sqrt{1-t}Y_i,\ 1\leq i\leq n.$$

Τότε η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(t)=\mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{U}(t))\right]$$

είναι

$$f'(t)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[U_i'(t)\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right].$$

Επιπλέον, εάν η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με όλες τις μερικές παραγώγους 2ης τάξης να είναι ήπιας εξέλιξης τότε

$$f'(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left[X_iX_j\right]-\mathbb{E}\left[Y_iY_j\right]\right)\mathbb{E}\left[\frac{\vartheta^2F}{\vartheta x_i\vartheta x_j}(\boldsymbol{U}(t))\right].$$

Απόδειξη. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 4.7.2 για να βρούμε την παράγωγο της f. Το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να εξασφαλίσουμε ότι ισχύει η συνθήκη (4.14) για την F. Έτσι, έστω $I = [a, b] \subset [0, 1]$ ένα αυθαίρετο συμπαγές υποδιάστημα. Τότε

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}(F'(\boldsymbol{U}(t)))\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left(\frac{d}{dt}F(\boldsymbol{U}(t))\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\vartheta F(\boldsymbol{U}(t))}{\vartheta x_i}\frac{dx_i}{dt}\right)\right] \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left(U_i'(t)\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right)\right].$$

Επίσης, είναι άμεσο ότι

$$U_i'(t) = \frac{dU_i}{dt}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}X_i - \frac{1}{2\sqrt{1-t}}Y_i,\ 1 \leq i \leq n.$$

Κατά συνέπεια, αρκεί να φράξουμε την μέση τιμή ενός τυχαίου όρου του παραπάνω αθροίσματος

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left|U_i'(t)\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}|U_i'(t)|\sup_{t\in I}\left|\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right|\right] \leq$$
$$\leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in I}|U_i'(t)|\right)^2\right]}\cdot\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in I}\left|\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right|\right)^2\right]} = \quad (\text{προ. } (4.1.3))$$
$$= \sqrt{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}|U_i'(t)|^2\right]}\cdot\sqrt{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left|\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right|^2\right]}.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η προηγούμενη έκφραση είναι φραγμένη. Δουλεύουμε με κάθε όρο ξεχωριστά. Για τον πρώτο όρο έχουμε

$$\sqrt{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}|U_i'(t)|^2\right]} = \sqrt{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left(\frac{1}{4t}X_i^2 - \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}X_iY_i + \frac{1}{4(1-t)}Y_i^2\right)\right]} \leq$$
$$\leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left(\frac{1}{4t}X_i^2\right) + \sup_{t\in I}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}X_iY_i\right) + \sup_{t\in I}\left(\frac{1}{4(1-t)}Y_i^2\right)\right]} =$$
$$= \sqrt{\mathbb{E}\left[\frac{1}{4a}X_i^2\right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{4(1-b)}Y_i^2\right]} \leq \qquad (X_i, Y_i \text{ μέση τιμή } 0, \text{ ανεξάρτητες})$$
$$= \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}X_i\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{1-b}}Y_i\right)^2\right]} \leq$$
$$\leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}X_i + \frac{1}{2\sqrt{1-b}}Y_i\right)^2\right]} \leq \quad (\text{Τριγωνική ανισ., } (4.1.1»)$$
$$\leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\frac{1}{4a}X_i^2\right]} + \sqrt{\mathbb{E}\left[\frac{1}{4(1-b)}Y_i^2\right]} \leq \infty$$

Τώρα περνάμε στο δεύτερο όρο. Γνωρίζουμε ότι οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της F είναι ήπιας εξέλιξης. Συνεπώς, για κάθε $c > 0$, υπάρχει $A > 0$ έτσι ώστε

$$\left|\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{x})\right| \leq Ae^{c\|\boldsymbol{x}\|_2^2}, \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leq i \leq n \tag{4.15}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{U}(t)\|_2 &= \|\Big(\sqrt{t}X_1 + \sqrt{1-t}Y_1, \ldots, \sqrt{t}X_n + \sqrt{1-t}Y_n\Big)\|_2 = \\
&= \|\sqrt{t}\,(X_1, \ldots, X_n) + \sqrt{1-t}\,(Y_1, \ldots, Y_n)\|_2 \leq \\
&\leq \sqrt{t}\|\boldsymbol{X}\|_2 + \sqrt{1-t}\|\boldsymbol{Y}\|_2 \leq \\
&\leq 2max\left\{\|\boldsymbol{X}\|_2, \|\boldsymbol{Y}\|_2\right\},\ \forall t \in I
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (4.15), (4.16) δίνει

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left|\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right|^2\right]} &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left(Ae^{c\|\boldsymbol{U}(t)\|_2^2}\right)^2\right]} = \\
&= \sqrt{\mathbb{E}\left[A^2\sup_{t\in I}\left(e^{2c\|\boldsymbol{U}(t)\|_2^2}\right)\right]} \leq \\
&\leq A\sqrt{\mathbb{E}\left[e^{8c\,(max\{\|\boldsymbol{X}\|_2, \|\boldsymbol{Y}\|_2\})^2}\right]} = \qquad (\text{εξ.}4.16) \\
&= A\sqrt{\mathbb{E}\left[max\left\{e^{8c\|\boldsymbol{X}\|_2^2}, e^{8c\|\boldsymbol{Y}\|_2^2}\right\}\right]} \leq \\
&\leq A\sqrt{\mathbb{E}\left[e^{8c\|\boldsymbol{X}\|_2^2} + e^{8c\|\boldsymbol{Y}\|_2^2}\right]}.
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι τα $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$ είναι Γκαουσιανά διανύσματα με μέση τιμή 0. Άρα, μπορούμε να τα γράψουμε ως $\boldsymbol{X} = D\boldsymbol{g}_1$ και $\boldsymbol{Y} = D'\boldsymbol{g}_2$, όπου τα D, D' είναι $n \times n$ πίνακες και τα $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2 \in \mathbb{R}^n$ είναι ανεξάρτητα τυποποιημένα Γκαουσιανά τυχαία διανύσματα. Τότε,

$$\sqrt{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left|\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right|^2\right]} \leq A\sqrt{\mathbb{E}\left[e^{8c\|D\|_{2\to2}^2\|\boldsymbol{g}_1\|_2^2+8c\|D'\|_{2\to2}^2\|\boldsymbol{g}_2\|_2^2}\right]} = \quad (\|\boldsymbol{X}\|_2^2 \leq \|D\|_{2\to2}^2\|\boldsymbol{g}_1\|_2^2)$$

$$= A\sqrt{\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{8c\|D\|_{2\to2}^2(g_1)_i^2}\cdot\prod_{i=1}^n e^{8c\|D'\|_{2\to2}^2(g_2)_i^2}\right]} =$$

$$= A\sqrt{\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{8c\|D\|_{2\to2}^2(g_1)_i^2}\right]\cdot\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{8c\|D'\|_{2\to2}^2(g_2)_i^2}\right]} = \quad (\text{Ανεξαρτησία})$$

$$= A\sqrt{\prod_{i=1}^n\mathbb{E}\left[e^{8c\|D\|_{2\to2}^2(g_1)_i^2}\right]\cdot\prod_{i=1}^n\mathbb{E}\left[e^{8c\|D'\|_{2\to2}^2(g_2)_i^2}\right]} = (\text{Λήμμα } 4.2.1)$$

$$= A\sqrt{\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-16c\|D\|_{2\to2}^2}}e^0\right)\cdot\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-16c\|D'\|_{2\to2}^2}}e^0\right)} =$$

$$= A\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-16c\|D\|_{2\to2}^2}}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-16c\|D'\|_{2\to2}^2}}\right)^n}.$$

Η χρήση του λήμματος 4.2.1 επιτρέπεται, καθώς μπορούμε να επιλέξουμε c έτσι ώστε $c = min\left\{\frac{1}{16\|D\|_{2\to2}^2}, \frac{1}{16\|D\|_{2\to2}^2}\right\}$.

Συνεπώς,

$$\sqrt{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left|\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right|^2\right]} = A\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-16c\|D\|_{2\to2}^2}}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-16c\|D'\|_{2\to2}^2}}\right)^n} < \infty$$

και τελικά

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I}\left|U_i'(t)\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right|\right] \leq \infty$$

Τότε από την πρόταση (4.7.2) έχουμε ότι

$$f'(t) = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt}F(\boldsymbol{U}(t))\right] = \sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left[U_i'(t)\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right].$$

Επιπλέον, εάν η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με όλες τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους να είναι ήπιας εξέλιξης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 4.7.1, δηλαδή το λήμμα του Stein και να λάβουμε

$$f'(t) = \sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left[U_i'(t)\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{U}(t))\right] = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mathbb{E}\left[U_i'(t)U_j(t)\right]\mathbb{E}\left[\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i\vartheta x_j}(\boldsymbol{U}(t))\right].$$

Δουλεύοντας με την πρώτη έκφραση μέσα στο άθροισμα λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[U_i'(t)U_j(t)\right] &= \mathbb{E}\left[\sqrt{t}\frac{1}{2\sqrt{t}}X_jX_i - \sqrt{t}\frac{1}{2\sqrt{1-t}}X_jY_i + \frac{1}{2\sqrt{t}}\sqrt{1-t}Y_jX_i - \frac{1}{2\sqrt{1-t}}\sqrt{1-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}Y_jY_i\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[X_iX_j\right] - \mathbb{E}\left[Y_iY_j\right]\right).\end{aligned}$$

.

Αυτό οδηγεί στην τελική μορφή της παραγώγου της f,

$$f'(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left[X_iX_j\right] - \mathbb{E}\left[Y_iY_j\right]\right)\mathbb{E}\left[\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{U}(t))\right].$$

□

Λήμμα 4.7.1. *Έστω $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία Lipschitz συνάρτηση για κάποια σταθερά $L > 0$. Επίσης, έστω $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ και $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ δύο Γκαουσιανά τυχαία διανύσματα, με μέση τιμή 0. Υποθέστε ότι ισχύουν, υπό την έννοια των κατανομών, τα ακόλουθα,*

$$\left(\mathbb{E}\left[|X_i - X_j|^2\right] - \mathbb{E}\left[|Y_i - Y_j|^2\right]\right)\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i \vartheta x_j} \geq 0,\ 1 \leq i, j \leq n \tag{4.17}$$

και

$$F(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}) = F(\boldsymbol{x}) + ct,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{4.18}$$

όπου c είναι μία σταθερά $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$, με $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1)$. Τότε

$$\mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{X})\right] \leq \mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{Y})\right] \tag{4.19}$$

Απόδειξη. Η F είναι μία Lipschitz συνάρτηση και έτσι ισχύει ότι

$$\begin{aligned}|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{0})| \leq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{0}\|_2 \Rightarrow &\left||F(\boldsymbol{x})| - |F(\boldsymbol{0})|\right| \leq L\|\boldsymbol{x}\|_2 \Rightarrow \\ &|F(\boldsymbol{x})| - |F(\boldsymbol{0})| \leq L\|\boldsymbol{x}\|_2 \Rightarrow \\ &|F(\boldsymbol{x})| \leq L\|\boldsymbol{x}\|_2 + |F(\boldsymbol{0})|, \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η F είναι ήπιας εξέλιξης. Υποθέστε ότι $b > 0$, τότε

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|_2 \to +\infty} F(\boldsymbol{x})e^{-b\|\boldsymbol{x}\|_2^2} \leq \lim_{\|\boldsymbol{x}\|_2 \to +\infty}\left(L\|\boldsymbol{x}\|_2 + |F(\boldsymbol{0})|\right)e^{-b\|\boldsymbol{x}\|_2^2} = 0.$$

Αρχικά, θα αποδείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση όπου F είναι μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, της οποίας οι πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι είναι ήπιας εξέλιξης.

Επίσης, παρατηρήστε ότι η συνθήκη (4.18) είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη έκφραση

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\vartheta F}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x}) = 0, \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leq i \leq n.$$

Τότε,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\vartheta F}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x}) + \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i^2}(\boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i^2}(\boldsymbol{x}) = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leq i \leq n. \quad (4.20)$$

Θεωρείστε την συνάρτηση

$$f(t) = \mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{U}(t))\right],\ t \in [0,1],$$

η οποία ορίζεται όπως και η αντίστοιχη συνάρτηση στην πρόταση 4.7.3. Όπως είπαμε και πιο πριν αντιμετωπίζουμε την περίπτωση όπου η F είναι μία δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, της οποίας οι μερικές παράγωγοι μέχρι δεύτερης τάξης είναι ήπιας εξέλιξης. Κατά συνέπεια από την πρόταση (4.7.3) η παράγωγος της f είναι

$$f'(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left[X_i X_j\right] - \mathbb{E}\left[Y_i Y_j\right]\right)\mathbb{E}\left[\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{U}(t))\right],\ t \in [0,1].$$

Δουλεύοντας με το δεξί μέλος της προηγούμενης έκφρασης για κάποιο αυθαίρετο $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left[X_i X_j\right] - \mathbb{E}\left[Y_i Y_j\right]\right)\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\mathbb{E}\left[X_i^2\right] - \mathbb{E}\left[Y_i^2\right]\right)\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i^2}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1, i\neq j}^{n}\left(\mathbb{E}\left[X_i X_j\right] - \mathbb{E}\left[Y_i Y_j\right]\right)\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i x_j}(\boldsymbol{x})\right] = \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\mathbb{E}\left[X_i^2\right] - \mathbb{E}\left[Y_i^2\right]\right)\sum_{j=1, i\neq j}^{n}\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i x_j}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1, i\neq j}^{n}\left(\mathbb{E}\left[X_i X_j\right] - \mathbb{E}\left[Y_i Y_j\right]\right)\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i x_j}(\boldsymbol{x})\right] = \text{(εξ. (4.20))} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, i\neq j}^{n}\left[\left(\mathbb{E}\left[X_i^2\right] - \mathbb{E}\left[Y_i^2\right] + \mathbb{E}\left[X_j^2\right] - \mathbb{E}\left[Y_j^2\right] - 2\left(\mathbb{E}\left[X_i X_j\right] - \mathbb{E}\left[Y_i Y_j\right]\right)\right)\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i x_j}(\boldsymbol{x})\right] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mathbb{E}\left[|X_i - X_j|^2\right] - \mathbb{E}\left[|Y_i - Y_j|^2\right]\right)\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x})\right].
\end{aligned}$$

Η σχέση (4.17) εξασφαλίζει ότι

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mathbb{E}\left[|X_i - X_j|^2\right] - \mathbb{E}\left[|Y_i - Y_j|^2\right]\right)\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x})\right] \leq 0$$

και συνεπώς

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left[X_i X_j\right] - \mathbb{E}\left[Y_i Y_j\right]\right)\frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i \vartheta x_j} \leq 0,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$f'(t) \leq 0,\ t \in [0,1].$$

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι μία φθίνουσα συνάρτηση στο $[0,1]$ και συνεπώς,

$$f(1) \leq f(0) \Rightarrow \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{X})\right] \leq \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{Y})\right].$$

Πηγαίνοντας τώρα στην γενική περίπτωση, όπου δεν υπάρχει εγγύηση ότι η F είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, ψάχνουμε να βρούμε μία δύο φορές παραγωγίσιμη προσέγγιση της F.

Έστω $\psi(\boldsymbol{x})$ μία δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, μη αρνητική συνάρτηση, με φορέα στο $\mathcal{B}(\mathbf{0},1)$, έτσι ώστε

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 1.$$

Επίσης, ορίζουμε την ακόλουθη συνάρτηση

$$\psi_h = h^{-n}\psi(\frac{\boldsymbol{x}}{h}),\ h > 0,$$

για την οποία ισχύει ότι

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_h(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h^{-n}\psi(\frac{\boldsymbol{x}}{h})d\boldsymbol{x} = h^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\boldsymbol{y})h^n d\boldsymbol{y} = 1.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$supp(\psi) \subseteq \mathcal{B}(0,1) \Rightarrow supp(\psi_h) \subseteq \mathcal{B}(0,h).$$

Ορίζουμε την εξής ακολουθία συναρτήσεων

$$F_h(\boldsymbol{x}) = (F * \psi_h)(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{y})\psi_h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\psi_h(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}. \quad (4.21)$$

Επιπλέον, μπορούμε να δούμε ότι το θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης του Lebesgue (θεώρημα A′.3.1) μας επιτρέπει να ανταλλάξουμε την παράγωγο με το ολοκλήρωμα. Συνεπώς, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η F_h είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Πράγματι,

$$\frac{\vartheta F_h}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\vartheta}{\vartheta x_i}\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{y})\psi_h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{y})\frac{\vartheta \psi_h}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = F * \frac{\vartheta \psi_h}{\vartheta x_i}.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε επίσης να αποκτήσουμε το

$$\frac{\vartheta^2 F_h}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x}) = F * \frac{\vartheta^2 \psi_h}{\vartheta x_i \vartheta x_j}.$$

Επιπλέον, είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι οι πρώτες και δεύτερες μερικές παράγωγοι της F_h είναι ήπιας εξέλιξης, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέλιξης

και το γεγονός ότι η ψ_h έχει συμπαγή φορέα και ότι είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

Γνωρίζουμε ότι, υπό την έννοια των κατανομών, ισχύει ότι

$\dfrac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_i \vartheta x_j} \geq 0,$

εάν για όλες τις μη αρνητικές συναρτήσεις g, δύο φορές παραγωγίσιμες, με συμπαγή φορέα έχουμε ότι

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{x}) \frac{\vartheta^2 g}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \geq 0.$$

Έτσι, έστω g μη αρνητική, δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$, με συμπαγή φορέα. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} F_h(\boldsymbol{x}) \frac{\vartheta^2 g}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{y}) \psi_h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \right) \frac{\vartheta^2 g}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = && \text{(θεωρ. Fubini's)} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{y}) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_h(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \frac{\vartheta^2 g}{\vartheta x_i \vartheta x_j}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \right) d\boldsymbol{y} = && \text{(θεωρ. Lebesgue's A}'.3.1) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{y}) \frac{\vartheta^2}{\vartheta x_i \vartheta x_j} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_h(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \right) d\boldsymbol{y} = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{y}) \frac{\vartheta^2}{\vartheta x_i \vartheta x_j} (\psi_h * g)(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}.
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, η συνθήκη (4.17) ισχύει για F_h.

Προχωρώντας στην απόδειξη της συνθήκης (4.18) για την F_h, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\begin{aligned}
F_h(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}) &= (F * \psi_h)(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}) = \psi_h(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}) * F = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}-\boldsymbol{y}) \psi_h(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + ct) \psi_h(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \psi_h(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} ct \psi_h(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \\
&= F_h(\boldsymbol{x}) + ct \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_h(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \\
&= F_h(\boldsymbol{x}) + ct.
\end{aligned}$$

Συμπερασματικά, η συνάρτηση F_h ικανοποιεί όλες τις συνθήκες αυτού του θεωρήματος και επιπλέον τις συνθήκες που επιβάλαμε στο πρώτο μισό αυτής της

απόδειξης. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που λάβαμε στο πρώτο μισό της απόδειξης μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[F_h(\boldsymbol{X})\right] \leq \mathbb{E}\left[F_h(\boldsymbol{Y})\right], \forall h > 0.$$

Επιπλέον, θέλουμε να δείξουμε ότι η F_h συγκλίνει ομοιόμορφα στο F. Προτού το κάνουμε αυτό παρατηρούμε ότι

$$\boldsymbol{y} \in \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, h) \Rightarrow \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \leq h \Rightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathcal{B}(\boldsymbol{0}, h) \supseteq supp(\psi_h).$$

Για να αποδείξουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της F_h στο F θεωρούμε το ακόλουθο άθροισμα.

$$\begin{aligned}
|F_h(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x})| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (F(\boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x}))\psi_h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \right| \leq \\
&\leq \int\limits_{\mathcal{B}(\boldsymbol{x},h)} |F(\boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x})| \, \psi_h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \leq \quad (F \text{ Lipschitz}), \quad (\psi_h \text{ μη αρνητική}) \\
&\leq \int\limits_{\mathcal{B}(\boldsymbol{x},h)} L\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|_2 \psi_h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \leq \\
&\leq \int\limits_{\mathcal{B}(\boldsymbol{x},h)} Lh\psi_h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \leq \\
&\leq Lh, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε εξασφαλίσει ότι για $h \to 0$, η F_h συγκλίνει ομοιόμορφα στο F. Έτσι, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της F_h για να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{X})\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{h \to 0} F_h(\boldsymbol{X})\right] &= \lim_{h \to 0} \mathbb{E}\left[F_h(\boldsymbol{X})\right] \leq \\
&\leq \lim_{h \to 0} \mathbb{E}\left[F_h(\boldsymbol{Y})\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{h \to 0} F_h(\boldsymbol{Y})\right] = \mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{Y})\right].
\end{aligned}$$

□

Σε αυτό το σημείο έχουμε όλα τα απαιτούμενα εργαλεία στη διάθεσή μας για να αποδείξουμε το λήμμα του Gordon.

Θεώρημα 4.7.1 (Λήμμα του Gordon). *Έστω $X_{i,j}$, $Y_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ δύο πεπερασμένες οικογένειες Γκαουσιανών τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή 0. Εάν*

$$\mathbb{E}\left[|X_{i,j} - X_{k,l}|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[|Y_{i,j} - Y_{k,l}|^2\right], \forall i \neq k, j, l$$

$$\mathbb{E}\left[|X_{i,j} - X_{i,l}|^2\right] \geq \mathbb{E}\left[|Y_{i,j} - Y_{i,l}|^2\right], \forall i, j, l,$$

τότε ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left[\min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} X_{i,j}\right] \geq \mathbb{E}\left[\min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} Y_{i,j}\right].$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την ακόλουθη συνάρτηση

$$F(\boldsymbol{x}) = \min_{1\le i\le n} \max_{1\le j\le m} x_{ij} \tag{4.22}$$

όπου $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{nm}$ είναι ένα διάνυσμα με δύο δείκτες $\boldsymbol{x} = (x_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 4.7.1. Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι η F είναι Lipschitz, με σταθερά 1. Πράγματι,

$$|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| = \left| \min_{1\le i\le n} \max_{1\le j\le m} x_{ij} - \min_{1\le i\le n} \max_{1\le j\le m} y_{ij} \right| = |x_{i_1 j_1} - y_{i_2 j_2}| \le$$
$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |x_{ij} - y_{ij}|^2} = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2$$

Στη συνέχεια θέλουμε να δείξουμε ότι η σχέση (4.17) ισχύει. Παρατηρούμε ότι μόνο δύο μεταβλητές χρησιμοποιούνται κάθε φορά, έτσι μπορούμε να επιλέξουμε δύο από τις μεταβλητές και να κρατήσουμε σταθερές τις υπόλοιπες. Έστω $t = x_{ij}$ και $s = x_{kl}$. Τότε, μπορούμε να εκφράσουμε την F ως

$$F(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} A(t,s) & , i = k \\ B(t,s) & , i \ne k \end{cases} = \begin{cases} max\{f(t), g(s)\} & , i = k \\ min\{f(t), g(s)\} & , i \ne k \end{cases}.$$

Οι συναρτήσεις f, g είναι της μορφής

$$l(t) = \begin{cases} a & , t < a \\ t & , a \le t \le b \\ b & , t > b \end{cases}, \tag{4.23}$$

όπου $a \le b$. Παρατηρήστε ότι είναι πιθανό να ισχύει ότι $a = -\infty, b = +\infty$.
Η ασθενής παράγωγος της l είναι

$$l'(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ 1 & , a \le t \le b \\ 0 & , t > b \end{cases} \tag{4.24}$$

Η συνάρτηση $A(t,s)$ μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως

$$A(t,s) = max\{f(t), g(s)\} = \frac{1}{2}\left(f(t) + g(s) + |f(t) - g(s)|\right).$$

Υπολογίζουμε την μερική ασθενή παράγωγο του A συναρτήσει του t.

$$h(t,s) = \frac{\vartheta}{\vartheta t} A(t,s) = \frac{1}{2}\left(f'(t) + f'(t) sgn(f(t) - g(s))\right) =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + sgn(t - g(s))\right) & , a \le t \le b \\ 0 & , a < t, t > b \end{cases}.$$

Η συνάρτηση $h(t,s)$, υπό την προϋπόθεση ότι κρατάμε σταθερό το t, είναι μη αύξουσα, συνεπώς ισχύει ότι $\frac{\vartheta^2}{\vartheta s \vartheta t} A(t,s) \le 0$, υπό την έννοια των κατανομών.

Πηγαίνοντας στην άλλη περίπτωση έχουμε

$$B(t,s) = min\left\{f(t), g(s)\right\} = \frac{1}{2}\left(f(t) + g(s) - |f(t) - g(s)|\right).$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική με την προηγούμενη περίπτωση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει ότι $\frac{\vartheta^2}{\vartheta s \vartheta t} B(t,s) \geq 0$, υπό την έννοια των κατανομών.

Συνεπώς, υπό την έννοια των παραγώγων κατά κατανομή, ισχύει ότι

$$\begin{cases} \dfrac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_{ij} \vartheta x_{kl}} \leq 0 & , i = k \\ \dfrac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_{ij} \vartheta x_{kl}} \geq 0 & , i \neq k \end{cases}.$$

Επιπλέον, η επόμενη συνθήκη παρέχεται από τον ορισμό.

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[|X_{i,j} - X_{k,l}|^2\right] - \mathbb{E}\left[|Y_{i,j} - Y_{k,l}|^2\right] \geq 0 & , i = k \\ \mathbb{E}\left[|X_{i,j} - X_{k,l}|^2\right] - \mathbb{E}\left[|Y_{i,j} - Y_{k,l}|^2\right] \leq 0 & , i \neq k \end{cases}. \tag{4.25}$$

Άρα,

$$\begin{cases} \dfrac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_{ij} \vartheta x_{kl}} \leq 0 & , i = k \\ \dfrac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_{ij} \vartheta x_{kl}} \geq 0 & , i \neq k \end{cases} \cdot \begin{cases} \mathbb{E}\left[|X_{i,j} - X_{k,l}|^2\right] - \mathbb{E}\left[|Y_{i,j} - Y_{k,l}|^2\right] \geq 0 & , i = k \\ \mathbb{E}\left[|X_{i,j} - X_{k,l}|^2\right] - \mathbb{E}\left[|Y_{i,j} - Y_{k,l}|^2\right] \leq 0 & , i \neq k \end{cases} =$$

$$= \left(\mathbb{E}\left[|X_{i,j} - X_{k,l}|^2\right] - \mathbb{E}\left[|Y_{i,j} - Y_{k,l}|^2\right]\right) \cdot \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta x_{ij} \vartheta x_{kl}} \leq 0, \forall\, i,j,k,l.$$

Επιπλέον, για $r \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$F(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{e}) = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} (x_{ij} + r) = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} (x_{ij}) + r = F(\boldsymbol{x}) + r.$$

Τότε, οι συνθήκες του λήμματος (4.7.1) ικανοποιούνται για $-F$ και κατά συνέπεια ισχύει ότι,

$$\mathbb{E}\left[-F(\boldsymbol{X})\right] \leq \mathbb{E}\left[-F(\boldsymbol{Y})\right] \Rightarrow \mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{X})\right] \geq \mathbb{E}\left[F(\boldsymbol{Y})\right]. \tag{4.26}$$

□

Μία σημαντική παρατήρηση είναι το γεγονός ότι το λήμμα του Gordon ισχύει επίσης για Γκαουσιανές ανελίξεις. Αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί συνδυασμό δύο πραγμάτων. Πρώτα, γνωρίζουμε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο της Γκαουσιανής ανέλιξης είναι ένα Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα, δηλαδή αν $(X_i)_{i \in T}$ είναι μία Γκαουσιανή στοχαστική ανέλιξη, τότε το διάνυσμα $(X_i)_{i \in S}$, $S \subseteq T$ με $card(S) < \infty$, είναι ένα Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα. Επίσης, τα sup που θεωρούμε είναι lattice suprema, το οποίο χονδρικά σημαίνει ότι το sup υπολογίζεται σε πεπερασμένα υποσύνολα της στοχαστικής ανέλιξης.

Μία άμεση συνέπεια του λήμματος του Gordon είναι το λήμμα του Slepian.

Συνέπεια 4.7.1 (Λήμμα του Slepian). *Έστω $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^n$ δύο Γκαουσιανά τυχαία διανύσματα με μέση τιμή 0. Εάν*

$$\mathbb{E}\left[|X_i - X_j|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[|Y_i - Y_j|^2\right], \, 1 \leq i, j \leq n, \tag{4.27}$$

τότε ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i\right] \leq \mathbb{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} Y_i\right]. \tag{4.28}$$

4.8 Συγκέντρωση του μέτρου

Σε αυτήν την ενότητα θέλουμε να αποδείξουμε ένα αποτέλεσμα συγκέντρωσης μέτρου. Θα ακολουθήσουμε την μέθοδο της εντροπίας. Όπως με κάθε σύνθετο αποτέλεσμα η απόδειξη απαιτεί αρκετές ενδιάμεσες προτάσεις, ορισμούς και λήμματα.

Πρώτα, πρέπει να ορίσουμε την *εντροπία* (entropy) μίας τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 4.8.1 (Εντροπία). *Έστω X μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Επίσης, ορίζουμε την κυρτή συνάρτηση $\phi(x) = xln(x)$, $x > 0$, την οποία επεκτείνουμε συνεχώς στο $x = 0$, θέτοντας $\phi(x) = 0$. Η εντροπία της X ορίζεται ως*

$$\mathcal{E}(X) = \mathbb{E}\left[\phi(X)\right] - \phi(\mathbb{E}\left[X\right]) = \mathbb{E}\left[Xln(X)\right] - \mathbb{E}\left[X\right] ln(\mathbb{E}\left[X\right]).$$

Εάν $\mathbb{E}\left[Xln(X)\right] = \infty$, θέτουμε $\mathcal{E}(X) = \infty$.

Μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι η εντροπία είναι μία μη αρνητική ποσότητα, δηλαδή $\mathcal{E}(X) \geq 0$ και ότι είναι ομογενής, δηλαδή $\mathcal{E}(tX) = t\mathcal{E}(X)$, $\forall\, t > 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την εντροπία για να αναπτύξουμε μία ανισότητα συγκέντρωσης μέτρου για την τυχαία μεταβλητή X. Αυτή η προσέγγιση καλείται *μέθοδος της εντροπίας* (entropy method). Συγκεκριμένα, θέλουμε να αποκτήσουμε ένα φράγμα της μορφής

$$\mathcal{E}\left(e^{tX}\right) \leq g(t)\mathbb{E}\left[e^{tX}\right],$$

για $t > 0$ και για κάποια κατάλληλη συνάρτηση $g(t)$. Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη διαδικασία για να αποκτήσουμε μία ανισότητα συγκέντρωσης μέτρου για το X.

Αρχικά, παρατηρήστε ότι $M'_X(t) = \mathbb{E}\left[Xe^{tX}\right]$. Κατά συνέπεια, μπορούμε να ξαναγράψουμε την εντροπία του e^{tX} ως

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(e^{tX}) &= tM'_X(t) - M_X(t)ln\left(M_X(t)\right) \leq g(t)M_X(t) \\ &\Rightarrow \frac{M'_X(t)}{tM_X(t)} - \frac{ln(M_X(t))}{t^2} \leq \frac{g(t)}{t^2} \end{aligned}$$

Τότε θέτοντας $F(t) = \dfrac{ln(M_X(t))}{t}$ μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$F'(t) \leq \frac{g(t)}{t^2} \Rightarrow F(t) - F(0) \leq \int_0^t \frac{g(z)}{z^2} dz \Rightarrow \qquad \left(F(0) = \lim_{t \to 0} \frac{ln(M_X(t))}{t} = \mathbb{E}[X]\right)$$

$$F(t) - \mathbb{E}[X] \leq \int_0^t \frac{g(z)}{z^2} dz \Rightarrow \frac{ln(M_X(t))}{t} - \mathbb{E}[X] \leq \int_0^t \frac{g(z)}{z^2} dz \Rightarrow$$

$$e^{ln(M_X(t)) - t\mathbb{E}[X]} \leq exp\left(t \int_0^t \frac{g(z)}{z^2} dz\right) \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\left[e^{t(X - \mathbb{E}[X])}\right] \leq exp\left(t \int_0^t \frac{g(z)}{z^2} dz\right).$$

Συνδυάζοντας το θεώρημα του Markov και το προηγούμενο αποτέλεσμα λαμβάνουμε το ακόλουθο φράγμα ουράς

$$\mathbb{P}[X - \mathbb{E}[X] \geq s] \leq \frac{exp\left(t \int_0^t \frac{g(z)}{z^2} dz\right)}{e^{ts}}, \; s > 0$$

Η προσέγγιση αυτή καλείται το *επιχείρημα Herbst*. Το επόμενο λήμμα περιέχει μερικά βασικά αποτελέσματα για την εντροπία.

Λήμμα 4.8.1 (Αποτελέσματα για την εντροπία)**.** *Έστω X μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε $\mathbb{E}[X] < \infty$. Τότε, ισχύει ότι*

(α′)

$$\mathcal{E}(X) = sup\left\{\mathbb{E}[XY] : \mathbb{E}\left[e^Y\right] \leq 1\right\}, \tag{4.29}$$

(β′)

$$\mathcal{E}(X) = \sup_{Z>0} \left\{\mathbb{E}[Xln(Z)] - \mathbb{E}[X]\, ln(\mathbb{E}[Z])\right\}.$$

(γ′) Η εντροπία είναι υποαθροιστική συνάρτηση

$$\mathcal{E}(X + Z) \leq \mathcal{E}(X) + \mathcal{E}(Z),$$

όπου Z είναι επίσης μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή.

Απόδειξη. (α′) Αρχικά, υποθέτουμε ότι το X είναι μία αυστηρά θετική τυχαία μεταβλητή. Παρατηρήστε ότι η ομογένεια της εντροπίας μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι $\mathbb{E}[X] = 1$. Επίσης, έστω Y μία τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε $\mathbb{E}\left[e^Y\right] \leq 1$. Χρησιμοποιώντας της ανισότητα του Fenchel (A′.5.3) και το γεγονός ότι $\mathbb{E}\left[e^Y\right] \leq 1$ μπορούμε να λάβουμε την ακόλουθη έκφραση.

$$\mathbb{E}[XY] \leq \mathbb{E}\left[e^Y\right] + \mathbb{E}[Xln(X)] - exX \leq \mathbb{E}[Xln(X)] = \mathcal{E}(X).$$

Συνεπώς,

$$sup\left\{\mathbb{E}[XY] : \mathbb{E}\left[e^Y\right] \leq 1\right\} \leq \mathcal{E}(X).$$

Για να δείξουμε την αντίθετη ανισότητα, επιλέγουμε $Y = ln(X) - ln(\mathbb{E}[X])$. Για αυτό για το Y μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[e^Y\right] = \mathbb{E}\left[e^{ln(X)-ln(\mathbb{E}[X])}\right] = \mathbb{E}\left[X\frac{1}{\mathbb{E}[X]}\right] = 1.$$

Τότε,

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Xln(X) - Xln(\mathbb{E}[X])] = \mathcal{E}(X).$$

Συνεπώς,

$$\mathcal{E}(X) \leq sup\left\{\mathbb{E}[XY] : \mathbb{E}\left[e^Y\right] \leq 1\right\},$$

και η απόδειξη για μία αυστηρά θετική τυχαία μεταβλητή είναι πλήρης. Είναι τώρα εύκολο να δείξουμε ότι το βασικό αποτέλεσμα ισχύει για μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή χρησιμοποιώντας τη συνέχεια του ϕ (η συνάρτηση που εισάγαμε στον ορισμό της εντροπίας) στο 0 και ένα θεμελιώδες επιχείρημα προσέγγισης.

(β′) Το αποτέλεσμα αυτό λαμβάνεται θέτοντας στην σχέση (4.29) $Y = ln\left(\frac{Z}{\mathbb{E}[Z]}\right)$, όπου Z είναι μία θετική τυχαία μεταβλητή. Παρατηρήστε ότι η σχέση $\mathbb{E}\left[e^Y\right] \leq 1$ ικανοποιείται για κάθε $Z > 0$.

(γ′) Είναι άμεσο να δούμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X+Z) &= sup\left\{\mathbb{E}[(X+Z)Y] : \mathbb{E}\left[e^Y\right] \leq 1\right\} \leq \\ &\leq sup\left\{\mathbb{E}[XY] : \mathbb{E}\left[e^Y\right] \leq 1\right\} + sup\left\{\mathbb{E}[ZY] : \mathbb{E}\left[e^Y\right] \leq 1\right\} = \\ &= \mathcal{E}(X) + \mathcal{E}(Z).\end{aligned}$$

□

Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη πρόταση πρέπει να δώσουμε τρεις επιπλέον ορισμούς. Έστω $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ένα τυχαίο διάνυσμα και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{X}^{(i)}$ το ακόλουθο διάνυσμα

$$\boldsymbol{X}^{(i)} = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i, \ldots, X_n).$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τις ακόλουθες ποσότητες

- <u>Δεσμευμένη μέση τιμή</u>

$$\mathbb{E}_{X_i}[f(\boldsymbol{X})] = \mathbb{E}_{X_i}[f(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)] = \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{X}^{(i)}\right].$$

Η μέση τιμή υπό συνθήκη είναι μία συνάρτηση των $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ και είναι σταθερή συναρτήσει του X_i.

- Δεσμευμένη εντροπία

$$\mathcal{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})\right] = \mathcal{E}\left(f(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{X}^{(i)}\right) = \mathbb{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})ln(f(\boldsymbol{X}))\right] - \mathbb{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})\right] ln\left(\mathbb{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right)$$

Η εντροπία υπό συνθήκη είναι μία τυχαία μεταβλητή που εξαρτάται από το $\boldsymbol{X}^{(i)}$.

- Τελεστής δεσμευμένης μέσης τιμής

$$\mathbb{E}^i\left[f(\boldsymbol{X})\right] = \mathbb{E}_{X_1,\ldots,X_{i-1}}\left[f(\boldsymbol{X})\right] = \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{X})|X_i,\ldots,X_n\right]$$

Παρατηρήστε ότι $\mathbb{E}^1\left[f(\boldsymbol{X})\right] = f(\boldsymbol{X})$ και $\mathbb{E}^{n+1}\left[f(\boldsymbol{X})\right] = \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{X})\right]$.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε την *ανισότητα tensorization* για την εντροπία.

Πρόταση 4.8.1 (Ανισότητα tensorization)**.** *Έστω $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ ένα τυχαίο διάνυσμα, όπου X_i, $1 \le i \le n$, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και f μία μη αρνητική συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $\mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{X})\right] < \infty$. Τότε*

$$\mathcal{E}(f(\boldsymbol{X})) \le \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right].$$

Απόδειξη. Αρχικά, υποθέτουμε ότι η f είναι αυστηρά θετική. Χρησιμοποιώντας το λήμμα 4.8.1(β) με $Z = \mathbb{E}^i\left[f(\boldsymbol{X})\right] > 0$ οδηγούμαστε στο

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})ln\left(\mathbb{E}^i\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right)\right] - \mathbb{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})\right] ln\left(\mathbb{E}_{X_i}\left[\mathbb{E}^i\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right]\right) \le \mathcal{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\\ &\Rightarrow \mathbb{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})ln\left(\mathbb{E}^i\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right) - f(\boldsymbol{X})ln\left(\mathbb{E}_{X_i}\left[\mathbb{E}^i\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right]\right)\right] \le \mathcal{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})\right].\end{aligned} \tag{4.30}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι X_i, $1 \le i \le n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και το θεώρημα του Fubini μπορούμε να λάβουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\mathbb{E}_{X_i}\left[\mathbb{E}^i\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right] = \mathbb{E}_{X_i}\left[\mathbb{E}_{X_1,\ldots,X_{i-1}}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right] = \mathbb{E}^{i+1}\left[f(\boldsymbol{X})\right]. \tag{4.31}$$

Επίσης, δημιουργούμε το ακόλουθο τηλεσκοπικό άθροισμα

$$ln\left(f(\boldsymbol{X})\right) - ln\left(\mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(ln\left(\mathbb{E}^i\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right) - ln\left(\mathbb{E}^{i+1}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right)\right),$$

χρησιμοποιώντας τον τελεστή της δεσμευμένης μέσης τιμής. Τότε, χρησιμοποιώντας την παραπάνω έκφραση μπορούμε να αποκτήσουμε το εξής

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(f(\boldsymbol{X})) &= \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{X})ln(f(\boldsymbol{X})) - f(\boldsymbol{X})ln\left(\mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{X})\sum_{i=1}^{n}\left(ln\left(\mathbb{E}^{i}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right) - ln\left(\mathbb{E}^{i+1}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right)\right)\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{X})ln\left(\mathbb{E}^{i}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right) - f(\boldsymbol{X})ln\left(\mathbb{E}_{X_i}\left[\mathbb{E}^{i}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right]\right)\right] = && (\text{εξ.}(4.31)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})ln\left(\mathbb{E}^{i}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right) - f(\boldsymbol{X})ln\left(\mathbb{E}_{X_i}\left[\mathbb{E}^{i}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right]\right)\right]\right] \leq && (\text{εξ.}(4.30)) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}_{X_i}\left[f(\boldsymbol{X})\right]\right].
\end{aligned}
$$

Παρατηρήστε ότι το κεντρικό αποτέλεσμα επεκτείνεται σε μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της ϕ (η συνάρτηση που εισάγαμε στον ορισμό της εντροπίας) στο 0 και ένα θεμελιώδες επιχείρημα προσέγγισης.

□

Για να αποδείξουμε το επιχείρημα συγκέντρωσης μέτρου θα χρειαστούμε την λογαριθμική ανισότητα Sobolev για διανύσματα Rademacher.

Θεώρημα 4.8.1 (Ανισότητα Log-Sobolev για διανύσματα Rademacher)**.** *Έστω $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $\boldsymbol{\epsilon}$ ένα n-διάστατο Rademacher διάνυσμα* [1]*. Τότε*

$$
\mathcal{E}(f^2(\boldsymbol{\epsilon})) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(f(\boldsymbol{\epsilon}) - f(\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)})\right)^2\right],
$$

όπου $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, -\epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_n)$.

Απόδειξη. Αρχικά, θα δείξουμε ότι

$$
\mathcal{E}_{\epsilon_i}\left[f^2(\boldsymbol{\epsilon})\right] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\epsilon_i}\left[\left(f(\boldsymbol{\epsilon}) - f(\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)})\right)^2\right], \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.32}
$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία αυθαίρετη πραγματοποίηση του διανύσματος $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_n)$. Επειδή ϵ_i είναι μία Rademacher τυχαία μεταβλητή, το διάνυσμα $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_n)$ και κατά συνέπεια η συνάρτηση $f(\boldsymbol{\epsilon})$ μπορούν να λάβουν δύο δυνατές τιμές, τις οποίες συμβολίζουμε ως $a, b \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι η $f(\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)})$ μπορεί να λάβει δύο δυνατές τιμές.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δεσμευμένης εντροπίας μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\epsilon_i}\left[f^2(\boldsymbol{\epsilon})\right] &= \mathbb{E}_{\epsilon_i}\left[f^2(\boldsymbol{\epsilon})ln(f^2(\boldsymbol{\epsilon}))\right] - \mathbb{E}_{\epsilon_i}\left[f^2(\boldsymbol{\epsilon})\right]ln\left(\mathbb{E}_{\epsilon_i}\left[f^2(\boldsymbol{\epsilon})\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2ln(a^2) + b^2ln(b^2)\right) - \frac{a^2+b^2}{2}ln\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

[1] Μία Rademacher τυχαία μεταβλητή ϵ_i λαμβάνει τις τιμές +1,-1, με πιθανότητα 1/2 για κάθε ενδεχόμενο. Ένα τυχαίο διάνυσμα Rademacher $\boldsymbol{\epsilon}$ είναι ένα διάνυσμα ανεξάρτητων Rademacher μεταβλητών.

Επίσης,

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}_{\epsilon_i}\left[\left(f(\boldsymbol{\epsilon})-f(\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)})\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-a)^2\right)=\frac{1}{2}(a-b)^2.$$

Συνεπώς, θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2}\left(a^2ln(a^2)+b^2ln(b^2)\right)-\frac{a^2+b^2}{2}ln\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)\leq\frac{1}{2}(a-b)^2.$$

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(x^2ln(a^2)+b^2ln(b^2)\right)-\frac{x^2+b^2}{2}ln\left(\frac{x^2+b^2}{2}\right)-\frac{1}{2}(x-b)^2.$$

Υπολογίζουμε την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο του $g(a)$

$$g'(x)=xln\left(\frac{2x^2}{x^2+b^2}\right)-(x-b),$$

$$g''(x)=1+ln\left(\frac{2x^2}{x^2+b^2}\right)-\frac{2x^2}{x^2+b^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $g(b)=g'(b)=0$ και $g''(x)\leq 0,\forall\, x\in\mathbb{R}$. Η τελευταία έκφραση αποκτήθηκε από την ανισότητα $ln(x)\leq x-1$. Έτσι έχουμε εξασφαλίσει ότι το $g(b)=0$ είναι ένα ολικό μέγιστο και κατά συνέπεια $g(x)\leq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα, η εξίσωση (4.32) είναι έγκυρη για όλα τα $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Από την πρόταση 4.8.1 μπορούμε να αποκτήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\mathcal{E}(f^2(\boldsymbol{\epsilon}))\leq\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}_{\epsilon_i}\left[f^2(\boldsymbol{\epsilon})\right]\right]. \tag{4.33}$$

Συνδυάζοντας την πρόταση 4.8.1 και την εξίσωση (4.33) λαμβάνουμε το αποτέλεσμα που δίνουμε στον ορισμό.

□

Θεώρημα 4.8.2 (Γκαουσιανή λογαριθμική Sobolev ανισότητα)**.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση έτσι ώστε $\mathbb{E}\left[\phi(f^2(\boldsymbol{g}))\right]\leq\infty$, όπου $\boldsymbol{g}\in\mathbb{R}^n$ είναι ένα τυποποιημένο Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα. Τότε ισχύει ότι*

$$\mathcal{E}(f^2(\boldsymbol{g}))\leq 2\mathbb{E}\left[\|\nabla f(\boldsymbol{g})\|_2^2\right].$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας το παραπάνω αποτέλεσμα για $n=1$ και $\boldsymbol{g}=g$, όπου g είναι μία τυποποιημένη Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή. Ας υποθέσουμε ότι η f έχει συμπαγή φορέα. Για το modulus of continuity $\omega(f',\delta)=\sup\limits_{|t-u|\leq\delta}|f'(t)-f'(u)|$ έχουμε ότι $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f',\delta)=0$, διότι η f' είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ας ορίσουμε το

$$S_m=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m}\epsilon_i,$$

όπου το $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)$ είναι ένα διάνυσμα Rademacher. Επίσης, θεωρούμε την συνάρτηση $f_1(\boldsymbol{\epsilon}) = f(S_m)$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 4.8.1 μπορούμε να λάβουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f^2(S_m)) &\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(f_1(\boldsymbol{\epsilon}) - f_1(\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)})\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(f(S_m) - f\left(S_m - \frac{2\epsilon_i}{\sqrt{m}}\right)\right)^2\right],\end{aligned}$$

όπου $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, -\epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_m)$.

Απομονώνοντας και δουλεύοντας με ένα αυθαίρετο όρο του παραπάνω αθροίσματος λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\left|f(S_m) - f\left(S_m - \frac{2\epsilon_i}{\sqrt{m}}\right)\right| &= \left|\frac{2\epsilon_i}{\sqrt{m}}f'(S_m) + \int\limits_{S_m - 2\epsilon_i/\sqrt{m}}^{S_m}(f'(t) - f'(S_m))\,dt\right| \leq \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{m}}\left|f'(S_m)\right| + \frac{2}{\sqrt{m}}\omega(f', \frac{2}{\sqrt{m}}).\end{aligned}$$

Τετραγωνίζοντας και τα 2 μέλη της προηγούμενης έκφρασης οδηγούμαστε σε

$$\left(f(S_m) - f\left(S_m - \frac{2\epsilon_i}{\sqrt{m}}\right)\right)^2 \leq \frac{4}{m}f'(S_m)^2 + \frac{8}{m}\left|f'(S_m)\right|\omega(f', \frac{2}{\sqrt{m}}) + \frac{4}{m}\omega(f', \frac{2}{\sqrt{m}})^2.$$

Κατά συνέπεια, έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m}\left(f(S_m) - f\left(S_m - \frac{2\epsilon_i}{\sqrt{m}}\right)\right)^2 \leq 4f'(S_m)^2 + 8\left|f'(S_m)\right|\omega(f', \frac{2}{\sqrt{m}}) + 4\omega(f', \frac{2}{\sqrt{m}})^2.$$

Χρησιμοποιώντας το κεντρικό οριακό θεώρημα 4.2.2 και λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι f και f' είναι φραγμένες συναρτήσεις μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\left[f'(S_m)^2\right] = \mathbb{E}\left[f'(g)^2\right]$$

και

$$\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}(f^2(S_m)) = \mathcal{E}(f^2(g)),$$

όπου η g είναι τυποποιημένη Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή.

Άρα,

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}(f^2(S_m)) \leq \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[4f'(S_m)^2 + 8\left|f'(S_m)\right|\omega(f', \frac{2}{\sqrt{m}}) + 4\omega(f', \frac{2}{\sqrt{m}})^2\right] \\ &\Rightarrow \mathcal{E}(f^2(g)) \leq 2\mathbb{E}\left[f'(g)^2\right].\end{aligned}$$

Πηγαίνοντας στην γενική περίπτωση, υποθέτουμε ότι η f δεν έχει απαραίτητα συμπαγή φορέα. Η έκφραση $\mathbb{E}\left[\phi(f^2(g))\right] \leq \infty$ συνεπάγεται ότι για δοθέν $\epsilon > 0$ υπάρχει $T > 0$, έτσι ώστε για κάθε υποσύνολο $I \subseteq \mathbb{R} \setminus [-T, T]$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_I \left|\phi(f(t)^2)\right| e^{-t^2/2} dt \leq \epsilon \tag{4.34}$$

και

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_I e^{-t^2/2} dt \leq \epsilon. \tag{4.35}$$

Επιπλέον, έστω h μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, έτσι ώστε $0 \leq h(t) \leq 1$ και

$$h(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [-T, T] \\ 0 & , t \notin [-T, T] \end{cases}.$$

Έπειτα, ορίζουμε την συνάρτηση $\hat{f} = fh$. Παρατηρήστε ότι η $\hat{f}$ είναι μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Συμπερασματικά, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που αποδείξαμε στο πρώτο μέρος αυτής της απόδειξης,

$$\mathcal{E}(\hat{f}(g)^2) \leq 2\mathbb{E}\left[\hat{f}'(g)^2\right].$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η εντροπία είναι μία υποαθροιστική συνάρτηση [λήμμα 4.8.1(γ)] μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f(g)^2) &= \mathcal{E}\left(\hat{f}(g)^2 + f(g)^2\left(1 - h(g)^2\right)\right) \leq \\ &\leq \mathcal{E}\left(\hat{f}(g)^2\right) + \mathcal{E}\left(f(g)^2\left(1 - h(g)^2\right)\right). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Για να αποκτήσουμε ένα φράγμα για το δεύτερο όρο της παραπάνω έκφρασης θεωρούμε τα σύνολα $I_1 = \left\{t \in \mathbb{R} \setminus [-T, T] : f(t)^2 < e\right\}$ και $I_2 = \left\{t \in \mathbb{R} \setminus [-T, T] : f(t)^2 \geq e\right\}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[f(g)^2(1 - h(g)^2)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-T,T]} f(g)^2(1 - h(g)^2)e^{-t^2/2} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_1} f(g)^2 e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_2} f(g)^2 e^{-t^2/2} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_1} e \cdot e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_2} \left|\phi(f(g)^2)\right| e^{-t^2/2} dt \leq \quad (\text{εξ.}(4.34), (4.35)) \\ &\leq (e+1)\epsilon. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Κατά συνέπεια

$$\left|\phi\left(\mathbb{E}\left[f(g)^2(1 - h(g)^2)\right]\right)\right| \leq \phi\left((e+1)\epsilon\right),$$

για επαρκώς μικρό ϵ.

Επιπλέον, εισάγουμε τα σύνολα $I_3 = \left\{t \in \mathbb{R} \setminus [-T,T] : f(t)^2(1-h(g)^2) < e\right\}$, $I_4 = \left\{t \in \mathbb{R} \setminus [-T,T] : f(t)^2(1-h(g)^2) \geq e\right\}$ και την τιμή $\phi_0 = \max\limits_{0 \leq t \leq e} |\phi(t)| = e^{-1}$.

Τότε,

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[\phi\left(f(g)^2(1-h(g)^2)\right)\right]\right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-T,T]} \phi(f(g)^2(1-h(g)^2))e^{-t^2/2}dt \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{I_3} \phi_0 \cdot e^{-t^2/2}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{I_4} \phi(f(g)^2)e^{-t^2/2}dt \leq \\
&\leq \phi_0\epsilon + \int\limits_{I_4} \phi(f(g)^2)e^{-t^2/2}dt \leq \qquad \text{(εξ.(4.34), (4.35))} \\
&\leq (\phi_0+1)\epsilon.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εντροπίας (ορισμός 4.8.1) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(f(g)^2\left(1-h(g)^2\right)\right) &\leq \left|\mathbb{E}\left[\phi\left(f(g)^2(1-h(g)^2)\right)\right]\right| + \left|\phi\left(\mathbb{E}\left[f(g)^2(1-h(g)^2)\right]\right)\right| \leq \\
&\leq |\phi((e+1)\epsilon)| + (\phi_0+1)\epsilon.
\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε αποκτήσει ένα φράγμα στο 2ο όρο της σχέσης (4.36). Έπειτα θα βελτιώσουμε το φράγμα στο 1ο όρο της έκφρασης (4.36). Έχουμε ήδη δείξει ότι

$$\mathcal{E}(\hat{f}(g)^2) \leq 2\mathbb{E}\left[\hat{f}'(g)^2\right].$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τριγωνική ανισότητα για να δείξουμε ότι

$$\sqrt{\mathbb{E}\left[\hat{f}'(g)^2\right]} = \sqrt{\mathbb{E}\left[(f'h+fh')(g)^2\right]} \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[(f'h)(g)^2\right]} + \sqrt{\mathbb{E}\left[(fh')(g)^2\right]}.$$

Για τον πρώτο όρο της παραπάνω έκφρασης μπορούμε εύκολα να δούμε

$$\mathbb{E}\left[(f'h)(g)^2\right] = \mathbb{E}\left[f'(g)^2h(g)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[f'(g)^2\right].$$

Πηγαίνοντας στο δεύτερο όρο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(fh')(g)^2\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2h'(t)^2e^{-t^2/2}dt \leq \frac{\|h'\|_\infty^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{I_1\cup I_2} f(t)^2e^{-t^2/2}dt \leq \\
&\leq \|h'\|_\infty^2(e+1)\epsilon.
\end{aligned}$$

Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ίδια λογική όπως στην έκφραση (4.37). Άρα, μπορούμε να αποκτήσουμε το ακόλουθο φράγμα

$$\mathcal{E}(\hat{f}(g)^2) \leq 2\mathbb{E}\left[\hat{f}'(g)^2\right] = 2\sqrt{\mathbb{E}\left[\hat{f}'(g)^2\right]}^2 \leq$$
$$\leq 2\left(\sqrt{\mathbb{E}\left[f'(g)^2\right]} + \|h'\|_\infty \sqrt{(e+1)\epsilon}\right)^2.$$

Για την εντροπία της f^2 μπορούμε να λάβουμε το ακόλουθο φράγμα συνδυάζοντας αρκετά από τα προηγούμενα αποτελέσματα.

$$\mathcal{E}(f(g)^2) \leq 2\left(\sqrt{\mathbb{E}\left[f'(g)^2\right]} + \|h'\|_\infty \sqrt{(e+1)\epsilon}\right)^2 + |\phi((e+1)\epsilon)| + (\phi_0 + 1)\epsilon.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για όλα τα $\epsilon > 0$. Συνδυάζοντας αυτό με το γεγονός ότι $\lim_{t\to 0} \phi(t) = \phi(0) = 0$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\mathcal{E}(f(g)^2) \leq 2\mathbb{E}\left[f'(g)^2\right].$$

Τελικά, μπορούμε να γενικεύσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα tensorization (πρόταση 4.8.1),

$$\mathcal{E}(f^2(\boldsymbol{g})) \leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_{g_i}\left[f(\boldsymbol{g})\right]\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x_i}(\boldsymbol{g})\right)^2\right] =$$
$$= 2\mathbb{E}\left[\|\nabla f(\boldsymbol{g})\|_2^2\right].$$

□

Τελικά, είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το επιχείρημα συγκέντρωσης μέτρου.

Θεώρημα 4.8.3 (Επιχείρημα συγκέντρωσης μέτρου)**.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία Lipschitz συνάρτηση (με σταθερά L) και $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n$ ένα τυποποιημένο Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα. Τότε,*

$$\mathbb{P}(f(\boldsymbol{g}) - \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{g})\right] \geq t) \leq exp\left(-\frac{t^2}{2L^2}\right), \forall t > 0$$

και

$$\mathbb{P}(|f(\boldsymbol{g}) - \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{g})\right]| \geq t) \leq 2\,exp\left(-\frac{t^2}{2L^2}\right), \forall t > 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη και έστω $t > 0$. Τότε, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι μια Lipschitz συνάρτηση μπορούμε να δούμε ότι $\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|_2 \leq L$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Επίσης, ορίζουμε την συνάρτηση $h(\boldsymbol{x}) = e^{tf(\boldsymbol{x})/2}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας το ίδιο γεγονός μπορούμε εύκολα να συνάγουμε ότι $e^{tf(\boldsymbol{x})} \leq e^{t|f(\boldsymbol{0})|}e^{Lt\|\boldsymbol{x}\|_2}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ και συνεπώς η $h(\boldsymbol{x})$ ικανοποιεί την συνθήκη $\mathbb{E}\left[\phi(h^2(\boldsymbol{g}))\right] = \mathbb{E}\left[\phi(e^{tf(\boldsymbol{g})})\right] < \infty$. Κατά συνέπεια, η h ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος 4.8.2. Άρα, χρησιμοποιώντας την λογαριθμική Sobolev ανισότητα (θεώρημα 4.8.2) στην συνάρτηση $h(\boldsymbol{g})$ λαμβάνουμε

$$\mathcal{E}(e^{tf(\boldsymbol{g})}) \leq 2\mathbb{E}\left[\|\nabla e^{tf(\boldsymbol{g})/2}\|_2^2\right] = 2\mathbb{E}\left[\|\frac{t}{2}e^{tf(\boldsymbol{g})/2}\nabla f(\boldsymbol{g})\|_2^2\right] =$$
$$= \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\left[e^{tf(\boldsymbol{g})}\|\nabla f(\boldsymbol{g})\|_2^2\right] \leq \frac{t^2L^2}{2}\mathbb{E}\left[e^{tf(\boldsymbol{g})}\right].$$

Έτσι, έχουμε βρει μία ανισότητα της μορφής

$$\mathcal{E}\left(e^{tX}\right) \leq g(t)\mathbb{E}\left[e^{tX}\right],$$

με $g(t) = \dfrac{L^2t^2}{2}$ και $X = f(\boldsymbol{g})$. Κατά συνέπεια, μπορούμε να αποκτήσουμε το ακόλουθο φράγμα για $t > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[f(\boldsymbol{g}) - \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{g})\right] \geq t\right] \leq \frac{exp\left(s\int\limits_0^s z^{-2}g(z)dz\right)}{e^{st}} \\
&\Rightarrow \mathbb{P}\left[f(\boldsymbol{g}) - \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{g})\right] \geq t\right] \leq e^{s^2L^2/2-st} \\
&\Rightarrow \mathbb{P}\left[f(\boldsymbol{g}) - \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{g})\right] \geq t\right] \leq \inf_{s>0}\left\{e^{s^2L^2/2-st}\right\} \\
&\Rightarrow \mathbb{P}\left[f(\boldsymbol{g}) - \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{g})\right] \geq t\right] \leq exp\left(-\frac{t^2}{2L^2}\right). \qquad (s = \frac{t}{L^2} \text{ ολικό ελάχιστο})
\end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε την f με την $-f$ μπορούμε να αποκτήσουμε το ακόλουθο φράγμα

$$\mathbb{P}\left[\mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{g})\right] - f(\boldsymbol{g}) \geq t\right] \leq exp\left(-\frac{t^2}{2L^2}\right).$$

Συνεπώς, το φράγμα ένωσης εξασφαλίζει ότι

$$\mathbb{P}(|f(\boldsymbol{g}) - \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{g})\right]| \geq t) \leq 2exp\left(-\frac{t^2}{2L^2}\right), \forall t > 0.$$

Τώρα πηγαίνοντας στην περίπτωση όπου η f είναι μη παραγωγίσιμη, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $h(\boldsymbol{x})$, η οποία είναι Lipschitz με την ίδια σταθερά L όπως η f, έτσι ώστε

$$|f(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x})| \leq \epsilon, \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{P}\left[f(\boldsymbol{g}) - \mathbb{E}\left[f(\boldsymbol{g})\right] \geq t\right] \leq \mathbb{P}\left[h(\boldsymbol{g}) - \mathbb{E}\left[h(\boldsymbol{g})\right] \geq t - 2\epsilon\right] \leq exp\left(-\frac{(t-2\epsilon)^2}{2L^2}\right)$$

Η προηγούμενη έκφραση ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, άρα μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το βασικό αποτέλεσμα είναι έγκυρο για όλες τις μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις. □

Κεφάλαιο 5

Ανάκτηση αραιών διανυσμάτων με τυχαίους πίνακες

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο 2 εισάγαμε το πρόβλημα της αραιής ανάκτησης καθώς και την επέκτασή του σε σενάρια με θόρυβο. Στα δύο αυτά σενάρια υπογραμμίσαμε την σημασία την σωστής επιλογής του πίνακα μετρήσεων για να εξασφαλίσουμε ότι ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε ανακτά επιτυχημένα όλα τα k-αραιά διανύσματα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε με ένα μαθηματικά αυστηρό τρόπο κάποια αποτελέσματα που αναφέρονται στην ικανότητα συγκεκριμένων κλάσεων τυχαίων πινάκων να εξασφαλίζουν την επιτυχημένη ανάκτηση αραιών διανυσμάτων, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, χρησιμοποιώντας το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Αυτή η ενότητα βασίζεται κυρίως στο [FR13], ουσιαστικά παρέχοντας μία μερική παρουσίαση του κεφαλαίου 9.

Υπάρχουν δύο είδη αποτελεσμάτων ανάκτησης, ομοιόμορφες και μη ομοιόμορφες εγγυήσεις ανάκτησης. Στις *ομοιόμορφες εγγυήσεις ανάκτησης* (uniform recovery guarantees) ο αλγόριθμος μπορεί να ανακτήσει επιτυχώς όλα τα k-αραιά διανύσματα (μετά από προβολή χρησιμοποιώντας ένα τυχαία επιλεγμένο πίνακα μετρήσεων A), χρησιμοποιώντας τον ίδιο πίνακα A, με υψηλή πιθανότητα ως προς την επιλογή του πίνακα A. Μία ομοιόμορφη εγγύηση ανάκτησης χονδρικά περιέχει μία έκφραση της μορφής [FR13],

$$\mathbb{P}\left(\forall\, \boldsymbol{x} \in \Sigma_k\,,\ \text{ανάκτηση } \boldsymbol{x} \text{ επιτυχημένη με χρήση πίνακα } A\right) \geq 1 - \epsilon.$$

Από την άλλη, στις *μη ομοιόμορφες εγγυήσεις ανάκτησης* (non-uniform recovery guarantees) ο αλγόριθμος μπορεί να ανακτήσει επιτυχημένα ένα σταθερό k-αραιό διάνυσμα (μετά από προβολή χρησιμοποιώντας ένα τυχαία επιλεγμένο πίνακα μετρήσεων A), με υψηλή πιθανότητα ως προς την επιλογή του πίνακα A. Μία μη ομοιόμορφη εγγύηση ανάκτησης χονδρικά περιέχει μία έκφραση της μορφής [FR13],

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_k \ : \ \mathbb{P}\,(\text{ ανάκτηση } \boldsymbol{x} \text{ επιτυχημένη με χρήση πίνακα } A) \geq 1-\epsilon.$$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα

- Ένα ομοιόμορφο αποτέλεσμα ανάκτησης για υποκανονικούς πίνακες χρησιμοποιώντας το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης (ενότητα 5.2).
- Ένα μη ομοιόμορφο αποτέλεσμα ανάκτησης για Γκαουσιανούς πίνακες χρησιμοποιώντας το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης (ενότητα 5.3).

5.2 Ομοιόμορφη ανάκτηση με υποκανονικούς πίνακες

Σε αυτήν την ενότητα θα αποδείξουμε ένα ομοιόμορφο αποτέλεσμα ανάκτησης για υποκανονικούς πίνακες χρησιμοποιώντας το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Αρχικά, θα δείξουμε ότι εάν ένας τυχαίος πίνακας A ικανοποιεί την ανισότητα συγκέντρωσης μέτρου (5.1) τότε για αυτό τον πίνακα η σχέση (5.2) ισχύει, το οποίο αποτελεί ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα έτσι ώστε να αποδείξουμε την Ι.Π.Ι για τον πίνακα A.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας τυχαίος πίνακας για τον οποίο η ακόλουθη ανισότητα συγκέντρωσης μέτρου ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\left|\|A\boldsymbol{x}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}\|_2^2\right| \geq t\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right) \leq 2e^{-c_0 m t^2},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,1). \tag{5.1}$$

Δίνονται $\delta, \epsilon \in (0,1)$ και $S \subseteq \{1,\dots,n\}$ με $card(S) = k$, εάν

$$m \geq \frac{14k + 4\ln(2\epsilon^{-1})}{3c_0\delta^2}$$

τότε

$$\|A_S^T A_S - I\|_{2\to 2} < \delta, \tag{5.2}$$

[1] *με πιθανότητα τουλάχιστον $1-\epsilon$.*

Απόδειξη. Πραγματοποιούμε μία διακριτοποίηση της μοναδιαίας μπάλας των διανυσμάτων με το πολύ k μη μηδενικά στοιχεία στις θέσεις που καθορίζονται από το σύνολο δεικτών S. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}_S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq 1 \wedge supp(\boldsymbol{x}) \subseteq S\}$. Από το θεώρημα (Α΄.4.1) για αριθμούς κάλυψης γνωρίζουμε ότι, δοθείσης μίας ακτίνας $\rho \in (0, 1/2)$, μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο $U \subseteq \mathcal{B}_S$, έτσι ώστε οι ακόλουθες εκφράσεις να ισχύουν

$$card(U) \leq \left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^k \tag{5.3}$$

και

$$\min_{\boldsymbol{u}\in U} \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{u}\|_2 \leq \rho,\ \forall\, \boldsymbol{z} \in \mathcal{B}_S.$$

[1] Ο A_S συμβολίζει τον πίνακα που δημιουργείται κρατώντας τις στήλες του πίνακα A που καθορίζονται από το σύνολο δεικτών S και αφαιρώντας τις υπόλοιπες.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα συγκέντρωσης μέτρου (5.1) είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\|A\boldsymbol{u}\|_2^2 - \|\boldsymbol{u}\|_2^2\right| \geq t\|\boldsymbol{u}\|_2^2 \text{ για κάποιο } u \in U\right) &\leq \sum_{\boldsymbol{u}\in U} \mathbb{P}\left(\left|\|A\boldsymbol{u}\|_2^2 - \|\boldsymbol{u}\|_2^2\right| \geq t\|\boldsymbol{u}\|_2^2\right) \\ &\leq 2\,card(U)e^{-c_0 m t^2} \\ &\leq 2\left(1+\frac{2}{\rho}\right)^k e^{-c_0 m t^2}. \qquad (ex.\,(5.3))\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι για ένα τυχαία επιλεγμένο τυχαίο πίνακα A, από την κατανομή πιθανότητας για την οποία η ανισότητα (5.1) ισχύει, έχουμε ότι

$$\left|\|A\boldsymbol{u}\|_2^2 - \|\boldsymbol{u}\|_2^2\right| < t\|\boldsymbol{u}\|_2^2, \forall \boldsymbol{u} \in U.$$

Επίσης, θέτουμε $B = A_S^T A_S - I$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε την προηγούμενη έκφραση ως

$$|\langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle| < t, \forall \boldsymbol{u} \in U. \tag{5.4}$$

Η προηγούμενη έκφραση ισχύει με πιθανότητα

$$\mathbb{P}\left(\left|\|A\boldsymbol{u}\|_2^2 - \|\boldsymbol{u}\|_2^2\right| < t\|\boldsymbol{u}\|_2^2, \forall \boldsymbol{u} \in U\right) \geq 1 - 2\left(1+\frac{2}{\rho}\right)^k e^{-c_0 m t^2}. \tag{5.5}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι για κατάλληλη επιλογή των ρ και t η έκφραση (5.4) δίνει

$$\left|\|A\boldsymbol{x}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}\|_2^2\right| < \delta\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \leq \delta,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_S$$

το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται ότι

$$|\langle B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle| < \delta, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_S$$

και

$$\|B\|_{2\to 2} < \delta.$$

Έτσι, έστω $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_S$ και $\boldsymbol{u} \in U$, έτσι ώστε $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\|_2 \leq \rho < 1/2$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|\langle B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle| &= |\langle B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle - \langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, B\boldsymbol{u}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, B\boldsymbol{u}\rangle| = \\ &= |\langle B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle - \langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle| = \quad (B \text{ συμμετρικός}),(\text{αντιμεταθετικότ.}) \\ &= |\langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\rangle| \leq \\ &\leq |\langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle| + |\langle B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\rangle| \leq \\ &\leq t + \|B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})\|_2\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\|_2 < \qquad (\text{Cauchy-Schwarz ανισ.}),(\text{εξ. } 5.4) \\ &< t + \|B\|_{2\to 2}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}\|_2\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\|_2 \leq \\ &\leq t + \|B\|_{2\to 2}(\|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{u}\|_2)\rho \leq \\ &\leq t + 2\rho\|B\|_{2\to 2}.\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να αποκτήσουμε τη νόρμα του B ως εξής.

$$\|B\|_{2\to 2} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}_S} \langle B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle .$$

Συνεπώς, από την προηγούμενη ανισότητα μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$\|B\|_{2\to 2} < t + 2\|B\|_{2\to 2}\rho \Rightarrow \|B\|_{2\to 2} < \frac{t}{1-2\rho}, t \in (0,1), \rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Επιλέγουμε $t = (1-2\rho)\delta$ και συνεπώς εξασφαλίζουμε ότι $\|B\|_{2\to 2} < \delta$. Για την πιθανότητα αυτό το γεγονός να πραγματοποιείται μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (5.5) για να συνάγουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\|B\|_{2\to 2} < \delta\right) \geq 1 - 2\left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^k e^{-c_0 m(1-2\rho)^2\delta^2}.$$

Είναι άμεσο να δούμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\|B\|_{2\to 2} \geq \delta\right) \leq 2\left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^k e^{-c_0 m(1-2\rho)^2\delta^2}. \tag{5.6}$$

Έτσι αν θέσουμε $\epsilon = \mathbb{P}\left(\|B\|_{2\to 2} \geq \delta\right)$ έχουμε ότι το ενδεχόμενο

$$\|B\|_{2\to 2} \leq \delta$$

συμβαίνει με πιθανότητα τουλάχιστον $1-\epsilon$ αν ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&\epsilon \leq 2\left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^k e^{-c_0 m(1-2\rho)^2\delta^2} \Rightarrow \\
&m \geq \frac{1}{c_0(1-2\rho)^2\delta^2}\left(ln\left(1 + \frac{2}{\rho}\right)k + ln\left(2\epsilon^{-1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Μπορούμε να αποκτήσουμε το φράγμα που δίνουμε στην εκφώνηση εάν θεωρήσουμε $\rho = \dfrac{2}{e^{7/2}-1}$, το οποίο οδηγεί στο

$$m \geq \frac{14k + 4\ln(2\epsilon^{-1})}{3c_0\delta^2}.$$

□

Στο ακόλουθο σχόλιο μια εναλλακτική περιγραφή της Ι.Π.Ι δίνεται, η οποία είναι απαραίτητη για το επόμενο θεώρημα

Σχόλιο 5.2.1 (Εναλλακτική περιγραφη του Ι.Π.Ι). *Ξεκινώντας από τον ορισμό της Ι.Π.Ι που δίνεται στη σχέση (2.6) μπορούμε να αποκτήσουμε την ακόλουθη*

εναλλακτική περιγραφή

$$
\begin{aligned}
&(1-\delta)\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \le \|A\boldsymbol{x}\|_2^2 \le (1+\delta)\|\boldsymbol{x}\|_2^2,\ \forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_k \\
&\Rightarrow \left|\|A_S\boldsymbol{x}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}\|_2^2\right| \le \delta\|\boldsymbol{x}\|_2^2,\ \forall\, S \subseteq \{1,2,\dots,n\}\,,\ card(S) \le k,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^S \\
&\Rightarrow \frac{\langle A_S\boldsymbol{x}, A_S\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2} \le \delta,\ \forall\, S \subseteq \{1,2,\dots,n\}\,,\ card(S) \le k,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^S \setminus \{\boldsymbol{0}\} \\
&\Rightarrow \frac{\left\langle (A_S^TA_S - I)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\right\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2} \le \delta,\ \forall\, S \subseteq \{1,2,\dots,n\}\,,\ card(S) \le k,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^S \setminus \{\boldsymbol{0}\} \\
&\Rightarrow \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^S\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\left\langle (A_S^TA_S - I)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\right\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2} \le \delta,\ \forall\, S \subseteq \{1,2,\dots,n\}\,,\ card(S) \le k \qquad (A_S^TA_S - I\ \textit{Συμμ.}) \\
&\Rightarrow \|A_S^TA_S - I\|_{2\to 2} \le \delta,\ \forall\, S \subseteq \{1,2,\dots,n\}\,,\ card(S) \le k \\
&\Rightarrow \max_{S\subseteq\{1,2,\dots,n\},\, card(S)\le k} \|A_S^TA_S - I\|_{2\to 2} \le \delta.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, η σταθερά της Ι.Π.Ι τάξης k είναι

$$\delta_k = \max_{S\subseteq\{1,2,\dots,k\},\, card(S)\le k} \|A_S^TA_S - I\|_{2\to 2}.$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα για να εξασφαλίσουμε ότι η συνθήκη της Ι.Π.Ι ισχύει για ένα τυχαίο πίνακα που ικανοποιεί την ανισότητα συγκέντρωσης μέτρου (5.1).

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας τυχαίος πίνακας για τον οποίο ισχύει η ακόλουθη ανισότητα συγκέντρωσης μέτρου*

$$\mathbb{P}\left(\left|\|A\boldsymbol{x}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}\|_2^2\right| \ge t\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right) \le 2e^{-c_0mt^2},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,1) \tag{5.7}$$

Δοθέντων των $\delta, \epsilon \in (0,1)$, εάν

$$m \ge \frac{2k\left(9 + 2ln\left(\frac{n}{k}\right)\right) + 4\ln(2\epsilon^{-1})}{3c_0\delta^2},$$

τότε η σταθερά περιορισμένης ισομετρίας του A ικανοποιεί τη σχέση $\delta_k < \delta$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1-\epsilon$.

Απόδειξη. Λαμβάνοντας υπόψιν το σχόλιο 5.2.1 μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\delta_k = \sup_{S\subseteq[n],card(S)=k} \|A_S^TA_S - I\|_{2\to 2} = \sup_{S\subseteq[n],card(S)=k} \|B\|_{2\to 2}$$

Συνεπώς, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\delta_k \ge \delta) &\le \sum_{S\subseteq[n],card(S)=k} \mathbb{P}(\|B\|_{2\to 2} \ge \delta) \le && \text{(φράγμα ένωσης)} \\
&\le 2\binom{n}{k}\left(1+\frac{2}{\rho}\right)^k e^{-c_0\delta^2(1-2\rho)^2m} \le && \text{(εξ. [5.6])} \\
&\le 2\left(\frac{en}{k}\right)^k\left(1+\frac{2}{\rho}\right)^k e^{-c_0\delta^2(1-2\rho)^2m}. && \text{(λήμμα [A′.5.1])}
\end{aligned}
$$

Ας θέσουμε $\epsilon = \mathbb{P}(\|B\|_{2\to 2} \geq \delta)$ και ας επιλέξουμε $\rho = \dfrac{2}{e^{7/2}-1}$. Τότε μπορούμε να δούμε ότι η σχέση $\delta_k < \delta$ πραγματοποιείται με πιθανότητα $1-\epsilon$ εάν

$$\epsilon \leq 2\left(\frac{en}{k}\right)^k \left(1+\frac{2}{\rho}\right)^k e^{-c_0\delta^2(1-2\rho)^2 m} \Rightarrow \qquad \text{(λήμμα [A'.5.1])}$$

$$m \geq \frac{2k\left(9+2ln\left(\frac{n}{k}\right)\right)+4\ln(2\epsilon^{-1})}{3c_0\delta^2}.$$

□

Έπειτα, έχουμε σκοπό να δείξουμε ότι ένας πίνακας με ανεξάρτητες, υποκανονικές, ισοτροπικές γραμμές ικανοποιεί την ανισότητα συγκέντρωσης μέτρου (5.7).

Πρόταση 5.2.1. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας τυχαίος πίνακας με ανεξάρτητες, ισοτροπικές και υποκανονικές γραμμές (όλες οι γραμμές έχουν την ίδια υποκανονική παράμετρο c). Τότε η ακόλουθη ανισότητα συγκέντρωσης μέτρου ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{m}\|A\boldsymbol{x}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}\|_2^2\right| \geq t\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right) \leq 2e^{-c_0 m t^2},\ \forall\, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0,1),$$

για μία σταθερά c_0 η οποία εξαρτάται μόνο από το c.

Απόδειξη. Ο πίνακας A είναι της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1^T \\ \boldsymbol{Y}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{Y}_m^T \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

όπου Y_i, $1 \leq i \leq m$ είναι ανεξάρτητα, ισοτροπικά, υποκανονικά τυχαία διανύσματα. Ορίζουμε την επόμενη πεπερασμένη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών

$$Z_i = |\langle \boldsymbol{Y}_i, \boldsymbol{x}\rangle|^2 - \|\boldsymbol{x}\|_2^2,\ 1\leq i\leq m,$$

όπου $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ με $\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = 1$ (μπορούμε να το υποθέσουμε αυτό χωρίς βλάβη της γενικότητας)

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα $\boldsymbol{Y}_i$ είναι ισοτροπικά διανύσματα (θεώρημα 4.1.7) μπορούμε να δούμε ότι

$$\mathbb{E}[Z_i] = \mathbb{E}\left[|\langle \boldsymbol{Y}_i, \boldsymbol{x}\rangle|^2\right] - \mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right] = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}\|_2^2 = 0,$$

για κάθε $1 \leq i \leq m$.

Παρατηρήστε ότι η τυχαία μεταβλητή $\langle \boldsymbol{Y}_i, \boldsymbol{x}\rangle$ είναι υποκανονική, καθώς το Y_i είναι ένα υποκανονικό τυχαίο διάνυσμα. Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή Z_i είναι επίσης μία υποεκθετική τυχαία μεταβλητή.

Επίσης, έχουμε ότι

$$\frac{1}{m}\|A\boldsymbol{x}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \left(|\langle \boldsymbol{Y}_i, \boldsymbol{x}\rangle|^2 - \|\boldsymbol{x}\|_2^2\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Z_i.$$

Τα τυχαία διανύσματα $\boldsymbol{Y}_i$ είναι ανεξάρτητα και κατά συνέπεια οι τυχαίες μεταβλητές Z_i είναι επίσης ανεξάρτητες. Έχουμε εξασφαλίσει ότι το Z_i ικανοποιεί όλες τις συνθήκες της ανισότητας του Bernstein για υποεκθετικές τυχαίες μεταβλητές (θεώρημα 4.4.1). Συνεπώς, μπορούμε να αποκτήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Z_i\right| \geq t\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{m} Z_i\right| \geq mt\right) \leq 2exp\left(-\frac{\kappa^2 m^2 t^2/2}{2\beta m + \kappa m t}\right) =$$
$$= 2exp\left(-\frac{r^2}{4k+2rt}mt^2\right) \leq 2exp\left(-\frac{r^2}{4k+2r}mt^2\right). \quad (t \in [0,1])$$

Τέλος, επιλέγουμε $c_0 = \dfrac{\kappa^2}{4\beta + 2\kappa t}$. Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{m}\|A\boldsymbol{x}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \geq t\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right) \leq 2e^{-c_0 m t^2}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,1).$$

□

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να διατυπώσουμε επίσημα την συνθήκη της Ι.Π.Ι για πίνακες με ισοτροπικές και ανεξάρτητες υποκανονικές γραμμές

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας τυχαίος πίνακας με ανεξάρτητες, ισοτροπικές, υποκανονικές γραμμές (όλες οι γραμμές έχουν την ίδια υποκανονική παράμετρο c). Εάν*

$$m \geq \frac{C\left(k\ln\left(\frac{en}{k}\right) + \ln\left(2\epsilon^{-1}\right)\right)}{\delta^2},$$

τότε ο πίνακας $\frac{1}{\sqrt{m}}A$ ικανοποιεί την συνθήκη της Ι.Π.Ι με σταθερά $\delta_s \leq \delta$ και με πιθανότητα τουλάχιστον $1-\epsilon$.

Απόδειξη. Συνδυάζοντας την πρόταση 5.2.1 με το θεώρημα 5.2.2 και πιθανώς αλλάζοντας μερικές σταθερές αποδεικνύουμε το παραπάνω αποτέλεσμα.

□

Σε αυτό το σημείο έχουμε εξασφαλίσει ότι ένας (κανονικοποιημένος) πίνακας με ισοτροπικές, υποκανονικές γραμμές κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες ικανοποιεί την Ι.Π.Ι. Αυτό που χρειαζόμαστε τώρα είναι να δείξουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα ισχύει επίσης για υποκανονικούς πίνακες. Θα το δείξουμε αυτό χρησιμοποιώντας το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.2.1. *Υποθέτουμε ότι το $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα από ανεξάρτητα υποκανονικά στοιχεία, με $\mathbb{E}[Y_i] = 0$, $Var[Y_i] = 1$, $1 \leq i \leq n$ και την ίδια υποκανονική παράμετρο c. Τότε το $\boldsymbol{Y}$ είναι ένα ισοτροπικό, υποκανονικό τυχαίο διάνυσμα με παράμετρο c.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι οι Y_i είναι ανεξάρτητες υποκανονικές τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ και $Var[Y_i] = 1$. Προφανώς

$$\mathbb{E}[Y_i Y_j] = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}.$$

Τότε, για $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[|\langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{x}\rangle|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^n x_i Y_i\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j Y_i Y_j\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \mathbb{E}\left[Y_i Y_j\right] = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|\boldsymbol{x}\|_2^2.$$

Κατά συνέπεια, από τον ορισμό (4.1.7) μπορούμε να συνάγουμε ότι το $\boldsymbol{Y}$ είναι ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα.

Επίσης, θεωρώντας ένα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$, η πρόταση (4.3.3) εξασφαλίζει ότι η τυχαία μεταβλητή

$$\langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{x}\rangle = \sum_{i=1}^n x_i Y_i \tag{5.9}$$

είναι υποκανονική με παράμετρο $c\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = c$ (ανεξάρτητη από το $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$). Τότε, από τον ορισμό (4.3.2) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το $\boldsymbol{Y}$ είναι ένα υποκανονικό τυχαίο διάνυσμα με παράμετρο c. □

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο λήμμα για να εξασφαλίσουμε την Ι.Π.Ι για υποκανονικούς πίνακες.

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας υποκανονικός πίνακας. Τότε υπάρχει $C > 0$ (το οποίο εξαρτάται μόνο από τις υποκανονικές παραμέτρους k και r) έτσι ώστε εάν*

$$m \geq \frac{C\left(k \ln\left(\frac{en}{k}\right) + \ln\left(2\epsilon^{-1}\right)\right)}{\delta^2},$$

τότε ο πίνακας $\frac{1}{\sqrt{m}}A$ ικανοποιεί την συνθήκη της Ι.Π.Ι με σταθερά $\delta_s \leq \delta$ και με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \epsilon$.

Απόδειξη. Αυτό το θεώρημα προκύπτει άμεσα από το θεώρημα 5.2.3 και το λήμμα 5.2.1. □

Τελικά, μπορούμε να παρουσιάσουμε μία ομοιόμορφη εγγύηση ανάκτησης για υποκανονικούς πίνακες χρησιμοποιώντας το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης, στο σενάριο με θόρυβο.

Θεώρημα 5.2.5 (Ομοιόμορφη εγγύηση ανάκτησης για υποκανονικούς πίνακες-περίπτωση με θόρυβο)**.** *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας υποκανονικός τυχαίος πίνακας και $\epsilon \in (0, 1)$. Υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ (τα οποία εξαρτώνται μόνο από τις υποκανονικές παραμέτρους k, r) και $d_1, d_2 > 0$ (παγκόσμιες σταθερές) έτσι ώστε εάν*

$$m \geq c_1 k \ln\left(\frac{en}{k}\right) + c_2 \ln\left(2\epsilon^{-1}\right),$$

τότε για όλα τα $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ μία λύση του ανθεκτικού l_1 προβλήματος ελαχιστοποίησης (2.9.2), με $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}$ και $\|\boldsymbol{e}\|_2 \leq \sqrt{m}\eta$ (για κάποιο $\eta > 0$), ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες

$$\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|_1 \leq d_1 \sigma_k(\boldsymbol{x})_1 + d_2\sqrt{k}\eta$$

και

$$\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|_2 \leq d_1 \frac{\sigma_k(\boldsymbol{x})_1}{\sqrt{k}} + d_2\eta.$$

Απόδειξη. Το ανθεκτικό l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης (2.9.2), με $\|\boldsymbol{e}\|_2 \leq \sqrt{m}\eta$, είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & \|\boldsymbol{x}\|_1 \\ \text{subject to} & \|\frac{1}{\sqrt{m}}\boldsymbol{y} - \frac{1}{\sqrt{m}}A\boldsymbol{x}\|_2 \leq \eta. \end{array}.$$

Κατά συνέπεια, συνδυάζοντας τα θεωρήματα 5.2.4 και 2.9.3 λαμβάνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. □

Στην περίπτωση χωρίς θόρυβο έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.6 (Ομοιόμορφη εγγύηση ανάκτησης για υποκανονικούς πίνακες-περίπτωση χωρίς θόρυβο)**.** *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας υποκανονικός τυχαίος πίνακας και $\epsilon \in (0,1)$. Υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ (τα οποία εξαρτώνται μόνο από τα k, r) έτσι ώστε εάν*

$$m \geq c_1 s \ln\left(\frac{en}{k}\right) + c_2 \ln\left(2\epsilon^{-1}\right) \tag{5.10}$$

τότε το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης (2.6.3), με $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, ανακτά το $\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \Sigma_k$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1-\epsilon$

Απόδειξη. Συνδυάζοντας τα θεωρήματα 5.2.4 (στην ειδική περίπτωση όπου $\sigma_k(\boldsymbol{x})_p = 0$ και $\epsilon = 0$), 2.9.3 και λαμβάνοντας υπόψιν ότι η ακριβής ανάκτηση δεν επηρεάζεται από την κανονικοποίηση του πίνακα λαμβάνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

□

5.3 Μη ομοιόμορφη ανάκτηση με Γκαουσιανούς πίνακες

Για να αναπτύξουμε πλήρως τα θεωρητικά αποτελέσματα αυτής της ενότητας χρειάζεται να ορίσουμε τον εφαπτόμενο κώνο (tangent cone) της l_1 νόρμας.

Ορισμός 5.3.1 (Εφαπτόμενος κώνος της l_1 νόρμας)**.** *Ο εφαπτόμενος κώνος της l_1 νόρμας στο $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι*

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = cone\left\{\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x} : \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \; and \; \|\boldsymbol{z}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1\right\},$$

όπου το cone συμβολίζει το κωνικό περίβλημα ενός συνόλου.

Ουσιαστικά, ο εφαπτόμενος κώνος της l_1 νόρμας είναι το σύνολο όλων των διευθύνσεων καθόδου από το $\boldsymbol{x}$, δηλαδή το σύνολο όλων των κατευθύνσεων από το $\boldsymbol{x}$ έτσι ώστε η l_1 νόρμα να μειώνεται. Μπορούμε να διατυπώσουμε μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για την επιτυχημένη ανάκτηση ενός k-αραιού διανύσματος με το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης, χρησιμοποιώντας τον εφαπτόμενο κώνο της l_1 νόρμας.

Θεώρημα 5.3.1 (Αναγκαία και ικανή συνθήκη για την επιτυχημένη ανάκτηση--περίπτωση χωρίς θόρυβο)**.** *Έστω $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε το πρόβλημα βελτιστοποίησης (2.6.3), με $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, επιστρέφει $\boldsymbol{x}$ ως μοναδική λύση, εάν και μόνο εάν*

$$Ker(A) \cap \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \{\mathbf{0}\}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $Ker(A) \cap \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \{\mathbf{0}\}$ ισχύει. Επίσης, έστω ότι το $\hat{\boldsymbol{x}}$ συμβολίζει μία λύση του (2.6.3) με $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$. Τότε, έχουμε ότι $\|\hat{\boldsymbol{x}}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$ και $\boldsymbol{y} = A\hat{\boldsymbol{x}}$. Έστω, $\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$. Από τον ορισμό (5.3.1) μπορούμε να δούμε ότι, $\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x})$. Επιπλέον, $A\boldsymbol{x} = A\hat{\boldsymbol{x}} \Rightarrow A(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{z} \in Ker(A)$. Συνεπώς, $Ker(A) \cap \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.

Τώρα, υποθέτουμε ότι το $\boldsymbol{x}$ είναι η μοναδική λύση του (2.6.3) με $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$. Έστω $\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x})\backslash\{\mathbf{0}\}$. Μπορούμε να γράψουμε αυτό το διάνυσμα ως $\boldsymbol{z} = \sum_i c_i(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{x})$, όπου $c_i \geq 0$ και $\|\boldsymbol{u}_i\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$. Παρατηρήστε ότι $\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \sum_i c_i > 0$. Υποθέστε τώρα ότι $\boldsymbol{z} \in KerA$. Τότε,

$$A\left(\sum_i c_i(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{x})\right) = \mathbf{0} \Rightarrow A\left(\sum_i \frac{c_i}{\sum_j c_j}(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{x})\right) = \mathbf{0} \Rightarrow A\left(\sum_i c_i'\boldsymbol{u}_i\right) = A\boldsymbol{x},$$

όπου $c_i' = \dfrac{c_i}{\sum_j c_j}$. Επίσης, $\|\sum_i c_i'\boldsymbol{u}_i\|_1 \leq \sum_i c_i'\|\boldsymbol{u}_i\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$. Ωστόσο, έχουμε κάνει την υπόθεση ότι το $\boldsymbol{x}$ είναι η μοναδική λύση του (2.6.3) και συνεπώς

$$\sum_i c_i'\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{z} = 0.$$

Άρα, καταλήξαμε σε άτοπο. Συνεπώς,

$$\boldsymbol{z} \notin KerA \Rightarrow KerA \cap (\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \setminus \{\mathbf{0}\}) = \emptyset \Rightarrow KerA \cap \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \{\mathbf{0}\}.$$

□

Για να γίνει πιο ξεκάθαρο το περιεχόμενο του προηγούμενου θεωρήματος παραθέτουμε τις εικόνες (5.1) και (5.2). Έτσι, έστω $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Έχουμε επιτυχημένη ανάκτηση αν και μόνο αν ο αφινικός χώρος

$$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \text{ ωιτη } \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}_0\} = \boldsymbol{x}_0 + Ker(A)$$

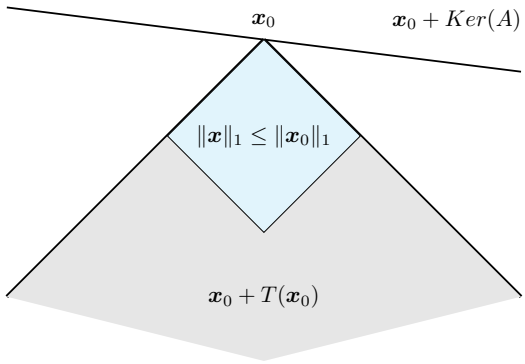
τέμνει τον (μετατοπισμένο) εφαπτόμενο κώνο $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0$ μόνο στο $\{\boldsymbol{x}_0\}$. Ισοδύναμα, έχουμε επιτυχημένη ανάκτηση εάν και μόνο εάν

$$Ker(A) \cap \mathcal{T}(\boldsymbol{x}_0) = \{\mathbf{0}\}.$$

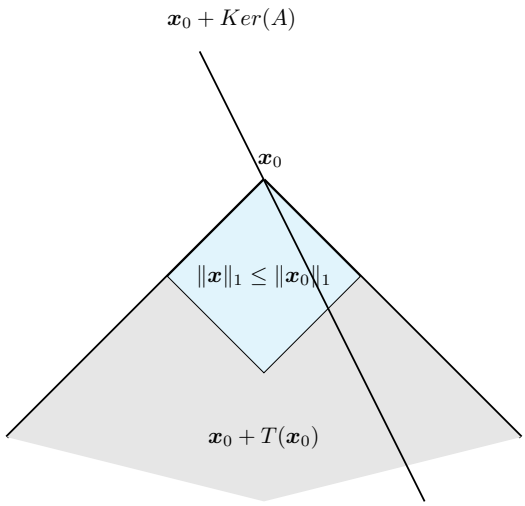
Στην θεωρητική ανάλυση που θα ακολουθήσει, θα δουλέψουμε με μία εναλλακτική συνθήκη, ισοδύναμη με την αρχική.

Πρόταση 5.3.1 (Εναλλακτική αναγκαία και ικανή συνθήκη για επιτυχημένη ανάκτηση-περίπτωση χωρίς θόρυβο)**.** *Έστω $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (2.6.3), με $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, επιστρέφει το $\boldsymbol{x}$ ως μοναδική λύση, εάν και μόνο εάν*

$$\inf_{\boldsymbol{z}\in T(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1}} \|A\boldsymbol{z}\|_2 > 0.$$



Σχήμα 5.1: Έχουμε ένα αραιό διάνυσμα $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, τον αφινικό χώρο που παράγεται από τις λύσεις της εξίσωσης $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, με $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}_0$, την μπάλα της l_1 νόρμας (με ακτίνα $\|\boldsymbol{x}_0\|_1$) και τον εφαπτόμενο κώνο της l_1 νόρμας στο $\boldsymbol{x}_0$. Παρατηρήστε ότι έχουμε επιτυχημένη ανάκτηση εάν και μόνο εάν ο αφινικός χώρος τέμνει τον μετατοπισμένο εφαπτόμενο κώνο μόνο στο $\boldsymbol{x}_0$. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να ανακτήσουμε επιτυχημένα το $\boldsymbol{x}_0$. Η εικόνα βασίζεται στο [Ame+14].



Σχήμα 5.2: Σε αυτήν την εικόνα έχουμε το ίδιο σενάριο με την εικόνα (5.1). Ωστόσο, απεικονίζουμε την περίπτωση όπου το l_1 πρόβλημα ελαχιστοποίησης αποτυγχάνει να ανακτήσει το $\boldsymbol{x}_0$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι

$$Ker(A) \cap \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \inf_{\boldsymbol{z} \in T(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}} \|A\boldsymbol{z}\|_2 > 0.$$

Ας υποθέσουμε ότι το $Ker(A) \cap \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \{\mathbf{0}\}$ ισχύει. Τότε, εάν $\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}$ είναι προφανές ότι $\boldsymbol{z} \notin Ker(A)$ και συνεπώς $\|A\boldsymbol{z}\|_2 > 0$. Κατά συνέπεια,

$$\inf_{\boldsymbol{z} \in T(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}} \|A\boldsymbol{z}\|_2 > 0.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $\inf_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}} \|A\boldsymbol{z}\|_2 > 0$. Θυμηθείτε ότι ο $T(\boldsymbol{x})$ είναι ένας κώνος, συνεπώς εάν $\boldsymbol{y} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ τότε υπάρχει $\lambda > 0$ και $\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}$ έτσι ώστε $\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{z}$. Έστω $\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}$. Τότε, για όλα τα $\lambda > 0$ έχουμε ότι $\|A(\lambda \boldsymbol{z})\|_2 > 0$. Αυτό σημαίνει ότι $(\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \setminus \{\mathbf{0}\}) \cap Ker(A) = \emptyset$ και συνεπώς $Ker(A) \cap \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \{\mathbf{0}\}$. □

Το επόμενο θεώρημα περιέχει μία αναγκαία συνθήκη για την περίπτωση με θόρυβο.

Θεώρημα 5.3.2 (Αναγκαία συνθήκη για επιτυχημένη ανάκτηση-περίπτωση με θόρυβο)**.** *Έστω $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε για μία λύση $\hat{\boldsymbol{x}}$ του προβλήματος βελτιστοποίησης 2.9.2, με $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}$, $\|\boldsymbol{e}\|_2 \leq \epsilon$, ισχύει ότι*

$$\|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_2 \leq \frac{2\epsilon}{\tau},$$

για κάποιο $\tau > 0$, εάν

$$\inf_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}} \|A\boldsymbol{z}\|_2 \geq \tau.$$

Απόδειξη. Έστω $\hat{\boldsymbol{x}}$ μία λύση του (2.9.2) με $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}$, τότε ισχύει ότι $\|\hat{\boldsymbol{x}}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$. Από τον ορισμό του εφαπτόμενου κώνου ακολουθεί ότι $(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}) \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ και συνεπώς

$$\boldsymbol{z} = \frac{\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}}{\|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_2} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x}),$$

υποθέτοντας ότι $\hat{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{x}$.

Ισχύει ότι $\|\boldsymbol{z}\|_2 = 1$, συνεπώς

$$\|A\boldsymbol{z}\|_2 > \tau \Rightarrow \|A(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x})\|_2 \geq \tau \|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_2.$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\begin{aligned}
\tau \|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_2 &\leq \|A(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_2 \leq \\
&\leq \|A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}\|_2 + \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\|_2 \leq \\
&\leq \boldsymbol{e} + \boldsymbol{e} \leq 2\epsilon \Rightarrow \\
&\Rightarrow \|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_2 \leq \frac{2\epsilon}{\tau}.
\end{aligned}$$

□

Στους προηγούμενους ορισμούς αναφερθήκαμε σε κάποιο αυθαίρετο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Η έμφαση σε αυτό το κεφάλαιο είναι στους τυχαίους πίνακες, συνεπώς πρέπει να είναι προφανές μέχρι τώρα ότι θέλουμε μία εκτίμηση της ακόλουθης ποσότητας.

$$\mathbb{P}\left(\inf_{\boldsymbol{z}\in T(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1}} \|A\boldsymbol{z}\|_2 < t\right),\ t > 0.$$

Χονδρικά, θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα ο πυρήνας του πίνακα μετρήσεων A να μην πέφτει πάνω στον εφαπτόμενο κώνο του σημείου $\boldsymbol{x}$. Αν το θέσουμε σε ένα πιο γενικό πλαίσιο, θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα ένας τυχαίος υπόχωρος (ο οποίος ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή) να μην πέφτει πάνω σε ένα σύνολο. Το αποτέλεσμα που αναζητούμε λέγεται *θεώρημα απόδρασης από το πλέγμα του Gordon* (Gordon's escape through the mesh theorem). [Gor88]

Θεώρημα 5.3.3. *(Θεώρημα απόδρασης από το πλέγμα του Gordon) Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Γκαουσιανός τυχαίος πίνακας και $T \subseteq S^{n-1}$ ένα σύνολο. Τότε,*

$$\mathbb{P}\left(\inf_{\boldsymbol{z}\in T}\|A\boldsymbol{z}\|_2 \le \boldsymbol{g}_m - w(T) - t\right) \le e^{-t^2/2},\ t > 0,$$

όπου $\boldsymbol{g}_m = \mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{g}\|_2\right]$ και $w(T)$ είναι το Γκαουσιανό πλάτος του συνόλου T.

Απόδειξη. Ορίζουμε τις ακόλουθες Γκαουσιανές ανελίξεις

$$X_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j y_i$$

και

$$Y_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{y}\rangle,$$

όπου $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n$ και $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^m$ είναι ανεξάρτητα τυποποιημένα Γκαουσιανά τυχαία διανύσματα.

Έστω $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in S^{n-1}$ και $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in S^{m-1}$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - X_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x_j y_i - x'_j y'_i)\right|^2\right] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_j y_i - x'_j y'_i)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^2 y_i^2 - 2x_j y_i x'_j y'_i + (x'_j)^2(y'_i)^2\right) = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m} y_i^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{m} y_i y'_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j x'_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n}(x'_j)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m}(y'_i)^2\right) = \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_2^2\|\boldsymbol{y}\|_2^2 - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'\rangle + \|\boldsymbol{x}'\|_2^2\|\boldsymbol{y}'\|_2^2 \\
&= 2 - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'\rangle.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο A είναι ένας Γκαουσιανός τυχαίος πίνακας και κατά συνέπεια για τα στοιχεία του μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[A_{ij}A_{kl}\right] = \begin{cases} 0 & , if\, ij \neq kl \\ 1 & , if\, ij = kl \end{cases}.$$

Επίσης, για την ανέλιξη $Y_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Y_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - Y_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] &= \mathbb{E}\left[|\langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{x}'\rangle - \langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{y}'\rangle|^2\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[|\langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\rangle + \langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'\rangle|^2\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[|\langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\rangle|^2\right] + \mathbb{E}\left[|\langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'\rangle|^2\right] = \qquad \text{(ανεξαρτησία των } g,h) \\
&= \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|_2^2 + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'\|_2^2 \qquad \text{(ισοτροπικότητα),(λήμμα 5.2.1)} \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_2^2 - 2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle + \|\boldsymbol{x}'\|_2^2 + \|\boldsymbol{y}\|_2^2 - 2\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\rangle + \|\boldsymbol{y}'\|_2^2 = \\
&= 4 - 2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle - 2\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\rangle .
\end{aligned}$$

Δουλεύοντας τη διαφορά μεταξύ των προηγούμενων δύο εκφράσεων έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Y_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - Y_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] - \mathbb{E}\left[|X_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - X_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] &= 2\left(1 - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle - \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\rangle + \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\rangle\right) = \\
&= 2(1 - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle)(1 - \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\rangle).
\end{aligned}$$

Η ανισότητα Cauchy-Schwarz και το γεγονός ότι $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}' \in S^{n-1}$, $\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}' \in S^{m-1}$ δίνουν

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle \leq \|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{x}'\|_2 = 1$$

και

$$\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\rangle \leq \|\boldsymbol{y}\|_2\|\boldsymbol{y}'\|_2 = 1.$$

Άρα,

$$\mathbb{E}\left[|Y_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - Y_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] - \mathbb{E}\left[|X_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - X_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] \geq 0.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\mathbb{E}\left[|Y_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - Y_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] - \mathbb{E}\left[|X_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - X_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] = 0 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle = 1 \text{ ή } \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\rangle = 1.$$

Έτσι, έχουμε εξασφαλίσει ότι

$$\begin{cases}
\mathbb{E}\left[|X_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - X_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[|Y_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - Y_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] & , if\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}' \\
\mathbb{E}\left[|X_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - X_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] = \mathbb{E}\left[|Y_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} - Y_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'}|^2\right] & , if\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'
\end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Gordon (θεώρημα 4.7.1) και την παρατήρηση

που διατυπώνει την γενίκευσή του σε Γκαουσιανές ανελίξεις λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\inf_{\boldsymbol{x}\in T}\max_{\boldsymbol{y}\in S^{m-1}} X_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\right] &\geq \mathbb{E}\left[\inf_{\boldsymbol{x}\in T}\max_{\boldsymbol{y}\in S^{m-1}} Y_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\inf_{\boldsymbol{x}\in T}\max_{\boldsymbol{y}\in S^{m-1}} \{\langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{y}\rangle\}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\inf_{\boldsymbol{x}\in T}\left\{\langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{x}\rangle + \max_{\boldsymbol{y}\in S^{m-1}} \langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{y}\rangle\right\}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{x}\rangle + \|\boldsymbol{h}\|_2\}\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{h}\|_2\right] + \mathbb{E}\left[\inf_{\boldsymbol{x}\in T}\langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{x}\rangle\right] = && \text{(συμμετρία του τυπ. Γκαουσιανού διαν.)} \\
&= \mathbb{E}\left[\|\boldsymbol{h}\|_2\right] - \mathbb{E}\left[\sup_{\boldsymbol{x}\in T}\langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{x}\rangle\right] = \\
&= \boldsymbol{h}_m - w(T).
\end{aligned}
$$

Παρατηρήστε ότι

$$
\mathbb{E}\left[\inf_{\boldsymbol{x}\in T}\|A\boldsymbol{x}\|_2\right] = \mathbb{E}\left[\inf_{\boldsymbol{x}\in T}\max_{\boldsymbol{y}\in S^{m-1}} X_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\right].
$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο εκφράσεις λαμβάνουμε

$$
\mathbb{E}\left[\inf_{\boldsymbol{x}\in T}\|A\boldsymbol{x}\|_2\right] \geq \boldsymbol{h}_m - w(T). \tag{5.11}
$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως *θεώρημα σύγκρισης του Gordon* (Gordon's Comparison theorem)

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$
F(A) = \inf_{\boldsymbol{x}\in T}\|A\boldsymbol{x}\|_2.
$$

Η συνάρτηση F είναι μία συνάρτηση Lipschitz ως προς τη Frobenius νόρμα με σταθερά 1. Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
\inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\|A\boldsymbol{x}\|_2\} &= \inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\|(A-B)\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}\|_2\} \leq \inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\|(A-B)\boldsymbol{x}\|_2 + \|B\boldsymbol{x}\|_2\} \leq \\
&\leq \inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\|A-B\|_{2\to 2}\|\boldsymbol{x}\|_2\} + \inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\|B\boldsymbol{x}\|_2\} \leq && (T \subseteq S^{n-1}) \\
&\leq \|(A-B)\|_{2\to 2} + \inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\|B\boldsymbol{x}\|_2\} \leq \\
&\leq \|(A-B)\|_F + \inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\|B\boldsymbol{x}\|_2\} && \text{(λήμμα A.1.1)} \\
&\Rightarrow \inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\|A\boldsymbol{x}\|_2\} - \inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\|B\boldsymbol{x}\|_2\} \leq \|(A-B)\|_F.
\end{aligned}
$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$
\inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\|B\boldsymbol{x}\|_2\} - \inf_{\boldsymbol{x}\in T}\{\|A\boldsymbol{x}\|_2\} \leq \|(A-B)\|_F.
$$

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$|F(A) - F(B)| \leq \|(A - B)\|_F.$$

Παρατηρήστε ότι η F είναι μία συνάρτηση Lipschitz ως προς τη Frobenius νόρμα (η οποία είναι η l_2 νόρμα αν αντιμετωπίσουμε τον πίνακα ως διάνυσμα) με σταθερά 1 και το A είναι ένα τυποποιημένο Γκαουσιανό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ εάν αντιμετωπίσουμε τον πίνακα A ως διάνυσμα. Συνεπώς, η συνάρτηση F ικανοποιεί όλες τις συνθήκες του θεωρήματος 4.8.3 και άρα

$$\mathbb{P}\left[\inf_{\boldsymbol{x} \in T} \|A\boldsymbol{x}\|_2 \leq \mathbb{E}\left[\inf_{\boldsymbol{x} \in T} \|A\boldsymbol{x}\|_2\right] - t\right] \leq e^{-t^2/2}.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα σύγκρισης του Gordon (5.11) οδηγούμαστε στο τελικό αποτέλεσμα,

$$\mathbb{P}\left[\inf_{\boldsymbol{x} \in T} \|A\boldsymbol{x}\|_2 \leq \boldsymbol{h}_m - w(T) - t\right] \leq \mathbb{P}\left[\inf_{\boldsymbol{x} \in T} \|A\boldsymbol{x}\|_2 \leq \mathbb{E}\left[\inf_{\boldsymbol{x} \in T} \|A\boldsymbol{x}\|_2\right] - t\right] \leq e^{-t^2/2}.$$

□

Σε αυτό το σημείο έχουμε στη διάθεσή μας ένα φράγμα για την πιθανότητα ένας τυχαίος (ομοιόμορφα κατανεμημένος) υπόχωρος να μην πέφτει πάνω σε ένα υποσύνολο της $(n-1)$-διάστατης σφαίρας. Για να προσαρμόσουμε αυτό το αποτέλεσμα στην συγκεκριμένη κατάσταση που αντιμετωπίζουμε πρέπει να καθορίσουμε τις δύο παραμέτρους που χρησιμοποιεί, την μέση τιμή της l_2 νόρμας ενός τυποποιημένου Γκαουσιανού τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{g}_m$ και το Γκαουσιανό πλάτος ενός συνόλου $T \cap S^{n-1}$. Έχουμε ήδη υπολογίσει μία εκτίμηση για το $\boldsymbol{g}_m$ (ενότητα 4.5, θεώρημα 4.5.1), η οποία είναι επαρκής. Συνεπώς, θέλουμε μία εκτίμηση για το Γκαουσιανό πλάτος του συνόλου των μοναδιαίας νόρμας διανυσμάτων του εφαπτόμενου κώνου σε ένα αραιό διάνυσμα $\boldsymbol{x} \in \Sigma_k$. Πριν συνεχίσουμε, πρέπει να ορίσουμε τον *κάθετο κώνο της l_1 νόρμας* (normal cone of the l_1 norm).

Ορισμός 5.3.2 (Κάθετος κώνος της l_1 νόρμας)**.**

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : \forall \boldsymbol{w}\ s.t\ \|\boldsymbol{w}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \ \textit{ισχύει ότι}\ \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{x} \rangle \leq 0\}. \tag{5.12}$$

Άρα μπορούμε να διατυπώσουμε τώρα την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.3.2. *Έστω $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n$ ένα τυποποιημένο Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα. Τότε έχουμε ότι*

$$w\left(\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}\right) \leq \mathbb{E}\left[\min_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{x})} \|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{z}\|_2\right].$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} w\left(\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}\right) &= \mathbb{E}\left[\max_{\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}} \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{z} \rangle\right] \leq \mathbb{E}\left[\max_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x}), \|\boldsymbol{z}\|_2 \leq 1} \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{z} \rangle\right] \leq \quad (\text{λήμμα A}'.2.1) \\ &\leq \mathbb{E}\left[\min_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}^\circ(\boldsymbol{x})} \|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{z}\|_2\right] = \mathbb{E}\left[\min_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{x})} \|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{z}\|_2\right]. \end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο πολικός κώνος του εφαπτόμενου κώνου είναι ο κάθετος κώνος (normal cone), δηλαδή $\mathcal{T}^\circ(\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x})$. (ορ. Α΄.2.2)

□

Είναι προφανές ότι για να αποκτήσουμε ένα φράγμα για το Γκαουσιανό πλάτος πρέπει να υπολογίσουμε τον κάθετο κώνο της l_1 νόρμας σε ένα αραιό διάνυσμα. Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει αυτό το αποτέλεσμα.

Λήμμα 5.3.1. *Έστω $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $S = supp(\boldsymbol{x}) \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Τότε ο κάθετος κώνος του $\boldsymbol{x}$ μπορεί να γραφτεί ως*

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}) = \bigcup_{t \geq 0} \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} z_i = t sgn(x_i) & , for\, i \in S \\ |z_i| < t & , for\, i \in \overline{S} \end{cases} \right\} \tag{5.13}$$

Απόδειξη. Αρχικά, θα δείξουμε ότι το δεξί μέλος της (5.13) είναι υποσύνολο του δεξιού μέλους της (5.12). Έστω $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ ένα στοιχείο του δεξιού μέλους της (5.13). Επιπλέον, θεωρούμε ένα αυθαίρετο $\boldsymbol{y}$ έτσι ώστε $\|\boldsymbol{y}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$. Τότε

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle \leq \|\boldsymbol{z}\|_\infty \|\boldsymbol{y}\|_1 - \|\boldsymbol{z}\|_\infty \|\boldsymbol{x}\|_1 = \\ = \|\boldsymbol{z}\|_\infty (\|\boldsymbol{y}\|_1 - \|\boldsymbol{x}\|_1) \leq 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\boldsymbol{z} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{x})$.

Τώρα θα δείξουμε την αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή το δεξί μέλος της εξίσωσης (5.12) είναι υποσύνολο του δεξιού μέλους της (5.13). Έστω $\boldsymbol{z} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{x})$, δηλαδή για όλα τα $\boldsymbol{y}$ έτσι ώστε $\|\boldsymbol{y}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$ έχουμε ότι $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \rangle \leq 0$. Τότε επιλέγουμε ένα διάνυσμα $\boldsymbol{y}$ έτσι ώστε $\|\boldsymbol{y}\|_1 = \|\boldsymbol{x}\|_1$ και

$$\boldsymbol{y} = \begin{cases} y_i & , \text{για}\, i\, \text{ε.ω}\ |z_i| = \|\boldsymbol{z}\|_\infty \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

με $sgn(y_i) = sgn(z_i)$. Έτσι έχουμε ότι

$$\|\boldsymbol{z}\|_\infty \|\boldsymbol{y}\|_1 = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle \leq \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle \leq \|\boldsymbol{z}\|_\infty \|\boldsymbol{x}\|_1 = \|\boldsymbol{z}\|_\infty \|\boldsymbol{y}\|_1.$$

Η προηγούμενη έκφραση συνεπάγεται ότι

$$\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{z}\|_\infty \|\boldsymbol{x}\|_1,$$

το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται ότι $z_i = sgn(x_i)\|\boldsymbol{z}\|_\infty, \forall i \in S$. Επίσης, παρατηρήστε ότι $|z_i| \leq \|\boldsymbol{z}\|_\infty$, $\forall i \in \overline{S}$. Συνεπώς, εάν επιλέξουμε $t = \|\boldsymbol{z}\|_\infty$ μπορούμε να δούμε ότι το $\boldsymbol{z}$ ανήκει στο δεξί μέλος της (5.13).

□

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δώσουμε ένα φράγμα για το Γκαουσιανό πλάτος του συνόλου των μοναδιαίας νόρμας διανυσμάτων του εφαπτόμενου κώνου σε ένα αραιό διάνυσμα.

Πρόταση 5.3.3. *Έστω $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ένα k-αραιό διάνυσμα. Τότε, έχουμε ότι*

$$\left(w\left(\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}\right)\right)^2 \leq 2k\, ln\left(\frac{en}{k}\right).$$

Απόδειξη. Πρώτα, παρατηρήστε ότι μπορούμε να αποκτήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}\left(w\left(\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1}\right)\right)^2 &\leq \left(\mathbb{E}\left[\min_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{N}(\boldsymbol{x})}\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{z}\|_2\right]\right)^2 \leq && \text{(πρόταση 5.3.2)}\\ &\leq \mathbb{E}\left[\min_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{N}(\boldsymbol{x})}\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{z}\|_2^2\right]. && \text{(ανισότητα Holder)}\end{aligned}$$

Έστω $S = supp(\boldsymbol{x})$ ο φορέας του $\boldsymbol{x}$. Απομονώνουμε την έκφραση μέσα στη μέση τιμή και έχουμε

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{N}(\boldsymbol{x})}\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{z}\|_2^2 &= \min_{\substack{t\geq 0\\ |z_i|\leq t, i\in\overline{S}}}\left\{\sum_{i\in S}\left(g_i - tsgn(x_i)\right)^2 + \sum_{i\in\overline{S}}\left(g_i - z_i\right)^2\right\} = && \text{(λήμμα 5.3.1)}\\ &= \min_{t\geq 0}\left\{\sum_{i\in S}\left(g_i - tsgn(x_i)\right)^2 + \min_{|z_i|\leq t, i\in\overline{S}}\left\{\sum_{i\in\overline{S}}\left(g_i - z_i\right)^2\right\}\right\}.\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι

$$\min_{|z_i|\leq t}\left(g_i - z_i\right)^2 = S_t^2(g_i),$$

όπου ο S_t είναι ο τελεστής μαλακής κατωφλίωσης

$$S_t(u) = \begin{cases} x+t & , x\leq -t\\ 0 & , -t\leq u\leq t\\ x-t & , x\geq t\end{cases}.$$

Τότε,

$$\min_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{N}(\boldsymbol{x})}\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{z}\|_2^2 = \min_{t\geq 0}\left\{\sum_{i\in S}\left(g_i - tsgn(x_i)\right)^2 + \sum_{i\in\overline{S}} S_t^2(g_i)\right\}.$$

Συνεπώς, για κάποιο σταθερό $t > 0$, ανεξάρτητο από το $\boldsymbol{g}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\min_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{N}(\boldsymbol{x})}\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{z}\|_2^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i\in S}\left(g_i - tsgn(x_i)\right)^2 + \sum_{i\in\overline{S}} S_t^2(g_i)\right] =\\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i\in S}\left(g_i - tsgn(x_i)\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{i\in\overline{S}} S_t^2(g_i)\right] \leq\\ &\leq k\mathbb{E}\left[(g+t)^2\right] + \sum_{i\in\overline{S}}\mathbb{E}\left[S_t^2(g_i)\right] = && (g \text{ τυπ. Γκαουσιανή τ.μ})\\ &= k(1+t^2) + (n-k)\mathbb{E}\left[S_t^2(g_i)\right].\end{aligned}$$

Για τη μέση τιμή του τετραγώνου του τελεστή μαλακής κατωφλίωσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t^2\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{-t} S_t^2(u)e^{-u^2/2}du + \int_{t}^{+\infty} S_t^2(u)e^{-u^2/2}du\right) = && \text{(Συμμετρία των } \boldsymbol{g} \text{ και } S_t\text{)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{t}^{+\infty}(u-t)^2e^{-u^2/2}du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} r^2e^{-(r+t)^2/2}dr = && (r = u-t) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\int_{0}^{+\infty} r^2e^{-r^2/2}e^{-rt}dr \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\int_{0}^{+\infty} r^2e^{-r^2/2}dr = \\
&= e^{-t^2/2}\mathbb{E}\left[g^2\right] = e^{-t^2/2} && (\boldsymbol{g} \text{ τυπ. Γκαουσιανή τ.μ})
\end{aligned}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες δύο εκφράσεις λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\left(w\left(\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1}\right)\right)^2 &\leq \min_{t\geq 0}\left\{k(1+t^2)+(n-k)e^{-t^2/2}\right\} \leq \\
&\leq \min_{t\geq 0}\left\{k(1+t^2)+ne^{-t^2/2}\right\}.
\end{aligned}$$

Τελικά, εάν επιλέξουμε $t = \sqrt{2ln\left(\frac{n}{k}\right)}$ μπορούμε να λάβουμε

$$\begin{aligned}
\left(w\left(\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1}\right)\right)^2 &\leq \min_{t\geq 0}\left\{k(1+t^2)+ne^{-t^2/2}\right\} \leq \\
&\leq k(1+2ln\left(\frac{n}{k}\right)) + k = \\
&= 2kln\left(\frac{en}{k}\right).
\end{aligned}$$

□

Τώρα έχουμε όλα τα εργαλεία στη διάθεσή μας που είναι απαραίτητα για να διατυπώσουμε τα δύο βασικά θεωρήματα που αφορούν μη ομοιόμορφη ανάκτηση με Γκαουσιανούς πίνακες.

Θεώρημα 5.3.4 (Μη ομοιόμορφη ανάκτηση με Γκαουσιανούς πίνακες-περίπτωση χωρίς θόρυβο)**.** *Έστω $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ένα k-αραιό διάνυσμα, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας Γκαουσιανός τυχαίος πίνακας και*

$$\frac{m^2}{m+1} \geq 2k\left(\sqrt{ln\left(\frac{en}{k}\right)} + \sqrt{\frac{ln(\epsilon^{-1})}{k}}\right)^2, \tag{5.14}$$

για κάποιο $\epsilon \in (0,1)$. Τότε, με πιθανότητα τουλάχιστον $1-\epsilon$, το $\boldsymbol{x}$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης (2.6.3), με $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1}}\|A\boldsymbol{z}\|_2>0\right)\geq$$
$$\geq\mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1}}\|A\boldsymbol{z}\|_2>\boldsymbol{g}_m-w(\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1})-t\right)=$$
$$=1-\mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1}}\|A\boldsymbol{z}\|_2\leq\boldsymbol{g}_m-w(\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1})-t\right)$$

εάν

$$\boldsymbol{g}_m-w(\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1})-t\geq 0.$$

Παρατηρήστε ότι από το θεώρημα 4.5.1 γνωρίζουμε ότι

$$\boldsymbol{g}_m\geq\frac{m}{\sqrt{m+1}}$$

και από την πρόταση 5.3.3 μπορούμε να αποκτήσουμε το ακόλουθο φράγμα

$$w\left(\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1}\right)\leq\sqrt{2k\,ln\left(\frac{en}{k}\right)}.$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $t=\sqrt{2ln(2\epsilon^{-1})}$ έχουμε ότι

$$\boldsymbol{g}_m-w(\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1})-t\geq 0\Rightarrow$$
$$\frac{m^2}{m+1}\geq 2k\left(\sqrt{ln\left(\frac{en}{k}\right)}+\sqrt{\frac{ln(\epsilon^{-1})}{k}}\right)^2$$

και

$$\mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{T}(\boldsymbol{x})\cap S^{n-1}}\|A\boldsymbol{z}\|_2>0\right)\geq$$
$$\geq 1-e^{-t^2/2}=1-\epsilon.$$

Συμπεραίνουμε ότι εάν η έκφραση (5.14) ισχύει, τότε η πρόταση 5.3.1 εξασφαλίζει ότι έχουμε επιτυχημένη ανάκτηση με πιθανότητα τουλάχιστον $1-\epsilon$.

□

Στην περίπτωση με θόρυβο έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Θεώρημα 5.3.5 (Μη ομοιόμορφη ανάκτηση με Γκαουσιανούς πίνακες-περίπτωση με θόρυβο)**.** *Έστω $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ ένα k-αραιό διάνυσμα, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ένας Γκαουσιανός τυχαίος πίνακας και*

$$\frac{m^2}{m+1}\geq 2k\left(\sqrt{ln\left(\frac{en}{k}\right)}+\sqrt{\frac{ln(\epsilon^{-1})}{k}}+\frac{\tau}{\sqrt{k}}\right)^2$$

για κάποιο $\epsilon\in(0,1)$ και $\tau>0$. Τότε για κάθε λύση $\hat{\boldsymbol{x}}$ του προβλήματος βελτιστοποίησης (2.9.1), με $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}$, $\|\boldsymbol{e}\|_2<\eta$, ισχύει ότι

$$\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|_2\leq\frac{2\eta}{\tau},$$

με πιθανότητα τουλάχιστον $1-\epsilon$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική με την προηγούμενη απόδειξη, παρατηρούμε ότι εάν θέσουμε $t = \sqrt{2ln(2\epsilon^{-1})}$ μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_m - w(\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}) - \tau - t \geq 0 \Rightarrow \\
&\frac{m^2}{m+1} \geq 2k \left(\sqrt{ln\left(\frac{en}{k}\right)} + \sqrt{\frac{ln(\epsilon^{-1}}{k}} + \frac{\tau}{\sqrt{k}} \right)^2 .
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα (5.3.2) και την παρακάτω έκφραση ολοκληρώνουμε την απόδειξη

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}} \|A\boldsymbol{z}\|_2 > \tau \right) \geq \\
&\geq \mathbb{P}\left(\min_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}} \|A\boldsymbol{z}\|_2 > \boldsymbol{g}_m - w(\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \cap S^{n-1}) - \tau - t \right) \geq \\
&\geq 1 - e^{-t^2/2} = 1 - \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Μέρος III

Αλγόριθμοι

Κεφάλαιο 6

Αλγόριθμοι για συμπλήρωση πίνακα

Ο στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να εισάγει 5 διαφορετικές προσεγγίσεις για το πρόβλημα της συμπλήρωσης πίνακα καθώς και να αξιολογήσει τις επιδόσεις των αντίστοιχων αλγορίθμων σε συνθετικά και πραγματικά δεδομένα (δεδομένα MovieLens). Τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν στο MATLAB.

6.1 Αλγόριθμοι

Σε αυτήν την ενότητα θα περιγράψουμε τους 5 αλγορίθμους που θα αξιολογήσουμε στην επόμενη ενότητα. Πριν το κάνουμε αυτό θα κάνουμε μερικές γενικές παρατηρήσεις και σχόλια σχετικά με τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε.

Συμβολίζουμε τους πίνακες με κεφαλαία γράμματα, όπως X, την i στήλη του πίνακα X ως $X_{(\cdot,i)}$ και την i γραμμή ως $X_{(i,\cdot)}$. Θεωρούμε ότι το $X_{(\cdot,i)}$ είναι διάνυσμα-στήλη και το $X_{(i,\cdot)}$ διάνυσμα-γραμμή. Σημειώστε ότι θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τον συμβολισμό $\boldsymbol{x}_i$ για την i γραμμή του X και το $\boldsymbol{x}_{c,i}$ για την i στήλη του X, αλλά αυτά θα αναφέρονται ξεκάθαρα. Τέλος, η έκφραση $C = diag(X_{(i,\cdot)})$ συμβολίζει ένα διαγώνιο πίνακα, του οποίου τα στοιχεία είναι τα στοιχεία του διανύσματος-γραμμής $X_{(i,\cdot)}$.

Εισάγουμε τον τελεστή P_Ω για ένα σύνολο δειγματοληψίας $\Omega \subseteq \{1,\ldots,k\} \times \{1,\ldots,n\}$ (οι θέσεις των γνωστών στοιχείων) και ένα πίνακα $X \in \mathbb{R}^{k\times n}$, ο οποίος ορίζεται ως εξής.

$$P_\Omega(X) = \begin{cases} x_{ij} & ,(i,j) \in \Omega \\ 0 & ,(i,j) \notin \Omega \end{cases}$$

Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, θεωρούμε ότι ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου δειγματοληψίας, δηλαδή του $card(\Omega)$, είναι m.

Θεωρείστε ένα ημιτελή πίνακα $X \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Συμβολίζουμε με $P \in \mathbb{R}^{k\times n}$ τον πίνακα με 1 στις θέσεις (i,j) των γνωστών στοιχείων και 0 διαφορετικά, δηλαδή

$$P = \begin{cases} 1 & ,(i,j) \in \Omega \\ 0 & ,(i,j) \notin \Omega \end{cases},$$

όπου Ω είναι το σύνολο του δειγματοληψίας του X.

6.1.1 Proximal forward-backward splitting

Στο κεφάλαιο 3 εισάγαμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης πυρηνικής νόρμας (ορισμός [3.4.3]). Μπορούμε να χαλαρώσουμε λίγο τους περιορισμούς αυτού του προβλήματος και να εκφράσουμε την συνάρτηση κόστους σε διαφορετική μορφή. Η νέα συνάρτηση κόστους είναι

$$\boxed{f_1(X) = \frac{1}{2}\|P_\Omega(M) - P_\Omega(X)\|_F^2 + \lambda\|X\|_*}, \tag{6.1}$$

για κάποιο $\lambda > 0$.

Το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 6.1.1 (Ελαχιστοποίηση πυρηνικής νόρμας)**.** *Έστω $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης πυρηνικής νόρμας είναι το*

$$\min_{X\in\mathbb{R}^{k\times n}} \frac{1}{2}\|P_\Omega(M) - P_\Omega(X)\|_F^2 + \lambda\|X\|_*.$$

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε το προηγούμενο πρόβλημα ελαχιστοποίησης ως το πρόβλημα που προσπαθεί να μειώσει τον πρώτο όρο του (6.1) (ο όρος του σφάλματος) και ταυτόχρονα να τιμωρήσει μεγάλες (με την έννοια της πυρηνικής νόρμας) τιμές του X. Ουσιαστικά, ο δεύτερος όρος αντικατοπτρίζει την πρότερη γνώση ότι η λύση που αναζητούμε είναι χαμηλού βαθμού και αναγκάζει το πρόβλημα βελτιστοποίησης 6.1.1 να το λάβει αυτό υπόψιν. Αυτή η τεχνική στη θεωρία βελτιστοποίησης ονομάζεται *ομαλοποίηση* (regularization) και εμφανίζεται σε πολλά διαφορετικά σενάρια. [BV04]. Παρατηρήστε ότι η παράμετρος λ καθορίζει το συμβιβασμό μεταξύ του όρου του σφάλματος και του όρου ομαλοποίησης (του όρου της πυρηνικής νόρμας) στο παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης. Όσο υψηλότερη είναι η τιμή του λ, τόσο χαμηλότερος ο βαθμός της λύσης, αλλά με το κόστος της αύξησης του σφάλματος.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f(X) = \frac{1}{2}\|P_\Omega(M) - P_\Omega(X)\|_F^2$ και $g(X) = \lambda\|X\|_*$. Παρατηρήστε ότι η $f(X)$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, ενώ η $g(X)$ δεν είναι. Ωστόσο, αυτό το πρόβλημα είναι κυρτό, καθώς είναι ένα άθροισμα κυρτών συναρτήσεων. Μία πιθανή προσέγγιση για τη λύση προβλημάτων αυτής της δομής είναι η χρήση της μεθόδου *proximal gradient* ή *proximal forward-backward splitting* [CP09] [The15]. Για να περιγράψουμε την μέθοδο *proximal gradient* θα χρειαστεί να ορίσουμε την έννοια του *τελεστή εγγύτητας* (proximal operator).

Ορισμός 6.1.2 (Τελεστής εγγύτητας)**.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ο τελεστής εγγύτητας με δείκτη δ είναι ένας τελεστής*

$$prox_{\delta f} \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

έτσι ώστε

$$prox_{\delta f}(\boldsymbol{x}) = arg \min_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2\delta}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \right\}.$$

Παρατηρήστε ότι ο τελεστής εγγύτητας είναι ένα σημείο στον $\mathbb{R}^n$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το προηγούμενο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι αυστηρά κυρτό (ως άθροισμα μίας κυρτής και μίας αυστηρά κυρτής συνάρτησης) και συνεπώς δέχεται

μοναδικό ελάχιστο. Επίσης, ο τελεστής εγγύτητας λειτουργεί ως γενίκευση του τελεστή προβολής, δηλαδή

$$P_C(\boldsymbol{x}) = arg \min_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} \left\{ i_C(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2 \right\},$$

όπου το $C \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα μη-κενό κλειστό κυρτό σύνολο και η i_C είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου C (επιστρέφει 1 εάν $x \in C$ και $+\infty$ διαφορετικά). Τώρα είμαστε έτοιμοι να εισάγουμε την μέθοδο forward-backward splitting.

Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δύο κυρτές συναρτήσεις που ορίζονται στο $\mathbb{R}^n$. Επίσης, υποθέστε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, ενώ η g δεν είναι. Υποθέστε ότι έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \{f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\}. \tag{6.2}$$

Οι λύσεις του παραπάνω προβλήματος βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη εξίσωση σταθερού σημείου

$$\boldsymbol{x} = prox_{\delta g}(\boldsymbol{x} - \delta\nabla f(\boldsymbol{x})), \forall\delta > 0.$$

Άρα, η μέθοδος proximal gradient εφαρμόζει το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα στο προηγούμενο πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = prox_{\delta_k g}(\boldsymbol{x}^{(k)} - \delta_k\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})), \tag{6.3}$$

για κάποια κατάλληλα επιλεγμένη ακολουθία $\{\delta_k\}$.

Ουσιαστικά, η μέθοδος proximal gradient είναι ένας συνδυασμός της μεθόδου εγγύτητας (proximal method) [CP09] και της μεθόδου καθόδου κλίσης (gradient descent) [The15]. Χονδρικά, μπορεί να δειχθεί ότι το επαναληπτικό σχήμα (6.3) συγκλίνει σε ένα ελάχιστο του προβλήματος βελτιστοποίησης (6.2), δηλαδή

$$\boldsymbol{x}^{(k)} \to arg \min_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} \{f(\boldsymbol{y}) + g(\boldsymbol{y})\},$$

κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Συγκεκριμένα η παραγωγίσιμη συνάρτηση f πρέπει να έχει συνεχή Lipschitz κλίση, δηλαδή

$$\|\nabla f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{y})\|_2 \le L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2, \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n,$$

για κάποιο $L > 0$ και η ακολουθία $\{\delta_k\}$ πρέπει να επιλεγεί κατάλληλα.

Το πρώτο βήμα για την προσαρμογή της γενικής μεθόδου proximal gradient στο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης πυρηνικής νόρμας είναι να υπολογίσουμε το τελεστή εγγύτητας της πυρηνικής νόρμας.

Πρόταση 6.1.1 (Τελεστής εγγύτητας της πυρηνικής νόρμας)**.** *Έστω $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$ με SVD $M = U\Sigma V^T$. Ο τελεστής εγγύτητας της πυρηνικής νόρμας είναι*

$$prox_{\delta\|\cdot\|_*}(X) = arg \min_{Y\in\mathbb{R}^{k\times n}} \left\{ f(Y) + \frac{1}{2\delta}\|X-Y\|_2 \right\} = D_\delta(X),$$

όπου $D_\delta(X) = US_\delta(\Sigma)V^T$ και $S_\delta(\Sigma)$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τα

$$(S_\delta(\Sigma))_{ii} = \begin{cases} \Sigma_{ii} - \delta & \Sigma_{ii} \ge \delta \\ 0 & \Sigma_{ii} < \delta \end{cases}.$$

Ο τελεστής $D_\delta(X)$ είναι ο τελεστής μαλακής κατωφλίωσης για τις ιδιάζουσες τιμές του X και συνεπώς μπορούμε να αναφερόμαστε σε αυτόν ως *τελεστή συρρίκνωσης ιδιαζουσών τιμών* (singular value shrinkage operator).

Επίσης,

$$\nabla f(X) = \nabla \left(\frac{1}{2} \|P_\Omega(M) - P_\Omega(X)\|_F^2 \right) =$$
$$= P_\Omega(M) - P_\Omega(X).$$

Συνεπώς, οι λύσεις του προβλήματος της ελαχιστοποίησης πυρηνικής νόρμας χαρακτηρίζονται από την ακόλουθη εξίσωση σταθερού σημείου.

$$X = D_{\lambda\delta} \left(X - \delta \left[P_\Omega(M) - P_\Omega(X) \right] \right), \forall \delta > 0.$$

Συνεπώς για το πρόβλημά μας η μέθοδος proximal gradient μας παρέχει το ακόλουθη επαναληπτικό σχήμα

$$X^{(k+1)} = D_{\lambda\delta_k} \left(X^{(k)} - \delta_k \left[P_\Omega(M) - P_\Omega(X^{(k)}) \right] \right).$$

Για να απλοποιήσουμε την περιγραφή του αλγορίθμου χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για το επαναληπτικό σχήμα στην επανάληψη $i+1$.

$$\begin{cases} Y^{(i+1)} \leftarrow X^{(i)} - \delta_i \left[P_\Omega(M) - P_\Omega(X^{(i)}) \right] \\ X^{(i+1)} \leftarrow D_{\lambda\delta_i}(Y^{(i+1)}) = US_{\lambda\delta_i}(\Sigma)V^T \end{cases},$$

όπου U, Σ, V είναι το SVD του Y.

Καλούμε αυτό τον αλγόριθμο Matrix Completion with Proximal Forward-Backward Splitting (MC-PFBS) και ο ψευδοκώδικάς του δίνεται στον Αλγόριθμο 1. Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιούμε σταθερό βήμα δ.

Η πολυπλοκότητα ανά επανάληψη του παραπάνω αλγορίθμου είναι $\mathcal{O}(min(k,n)^2 max(k,n))$. Παρατηρήστε ότι ο κύριος φόρτος σε κάθε επανάληψη είναι ο υπολογισμός του SVD του πίνακα Y, το οποίο είναι ένα ευεπίλυτο πρόβλημα, ωστόσο για μεγάλες διαστάσεις γίνεται αρκετά βαρύ.

Algorithm 1 Matrix Completion with Proximal Forward-Backward Splitting (MC-PFBS)

Input: $P_\Omega(M) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, δ, λ
Output: X
  $X^{(0)}$ with $x_{ij}^{(0)} \sim \mathcal{N}(0,1)$
  while $i < maxiter$ **do**
    $Y^{(i+1)} \leftarrow X^{(i)} - \delta_i \left[P_\Omega(M) - P_\Omega(X^{(i)}) \right]$
    $[U, \Sigma, V] \leftarrow SVD(Y^{(i+1)})$
    $X^{(i+1)} \leftarrow US_{\lambda\delta_i}(\Sigma)V^T$
    if $\dfrac{\|X^{(i+1)} - X^{(i)}\|_F}{\|X^{(i)}\|_F} < toler$ **then** break
    end if
  end while

6.1.2 Alternating regularized least squares

Μία προσέγγιση για να μειώσουμε το μέγεθος του προβλήματος είναι να παραγοντοποιήσουμε τον πίνακα $X \in \mathbb{R}^{k\times n}$, με $rank(X) = r$, σε δύο πίνακες $U \in \mathbb{R}^{k\times r}$ και $V \in \mathbb{R}^{n\times r}$, έτσι ώστε $X = UV^T$. Ένα άμεσο πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι η μειώση του αριθμού των μεταβλητών από $k \cdot n$ σε $(k + n) \cdot r$, το οποίο είναι μία σημαντική διαφορά για μεγάλα προβλήματα. Μπορεί να αποδειχθεί ότι για την πυρηνική νόρμα το ακόλουθο αποτέλεσμα ισχύει.

Πρόταση 6.1.2. *[DR16] Έστω $X \in \mathbb{R}^{k\times n}$, τότε για την πυρηνική νόρμα του X ισχύει ότι*

$$\|X\|_* = \min_{U,V} \frac{1}{2}\left(\|U\|_F^2 + \|V\|_F^2\right) \ \textit{subject to } X = UV^T.$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τον πίνακα X σε δύο παράγοντες U και V και να αντικαταστήσουμε την πυρηνική νόρμα στην συνάρτηση κόστους (6.1) με την έκφραση $\frac{1}{2}\left(\|U\|_F^2 + \|V\|_F^2\right)$. Αυτή η τεχνική είναι γνωστή ως ευριστική Burer-Monteiro, από τα ονόματα των συγγραφέων που πρότειναν αυτή την προσέγγιση για γενικά ημιορισμένα προγράμματα [BM05] [BM03]. Άρα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (6.1) με την ακόλουθη συνάρτηση κόστους

$$\boxed{f_2(U,V) = \frac{1}{2}\|P_\Omega(M) - P_\Omega(UV^T)\|_F^2 + \frac{\lambda}{2}(\|U\|_F^2 + \|V\|_F^2)}, \tag{6.4}$$

όπου $U \in \mathbb{R}^{k\times L}$ και $V \in \mathbb{R}^{n\times L}$, για κάποιο $r \leq L \leq min(k, n)$.

Το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι

Ορισμός 6.1.3 (Συμπλήρωση πίνακα με την ευριστική Burer-Monteiro)**.** *Έστω $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$, με $rank(M) = r$. Επιλέγουμε $r \leq L \leq min(k, n)$. Τότε, διατυπώνουμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης για συμπλήρωση πίνακα,*

$$\min_{\substack{U\in\mathbb{R}^{n\times L}, V\in\mathbb{R}^{k\times L} \\ s.t\ X=UV^T}} \frac{1}{2}\|P_\Omega(M) - P_\Omega(UV^T)\|_F^2 + \frac{\lambda}{2}(\|U\|_F^2 + \|V\|_F^2).$$

Σημειώστε ότι η επιλογή του L βασίζεται στην πρότερη γνώση που έχουμε για την φύση του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε. Συγκεκριμένα, η επιλογή του L πρέπει να είναι μία ασφαλής εκτίμηση του πραγματικού βαθμού του πίνακα. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα του Netflix η επιλογή του L αντικατοπτρίζει την πεποίθησή μας για τον αριθμό των ουσιαστικών παραγόντων που καθορίζουν την προτίμηση των χρηστών για τις διαφορετικές ταινίες.

Μπορούμε να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας την τεχνική που είναι γνωστή ως *εναλλασσόμενη ελαχιστοποίηση* (alternating minimization). Αυτό σημαίνει ότι κρατάμε σταθερό ένα από τους δύο παράγοντες και ελαχιστοποιούμε την συνάρτηση κόστους συναρτήσει του άλλου παράγοντα. Τότε σε κάθε επανάληψη το πρόβλημα βελτιστοποίησης που προκύπτει ανάγεται σε ένα ομαλοποιημένο πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, συγκεκριμένα σε ένα πρόβλημα ridge regression. Συνεπώς, καλούμε αυτό τον αλγόριθμο Matrix Completion with Alternating Regularized Least Squares (MC-ARLS).

Κρατάμε σταθερό το V και ελαχιστοποιούμε την συνάρτηση κόστους (6.4) συναρτήσει του U. Για να το κάνουμε αυτό υπολογίζουμε την παράγωγο του f_2 συναρτήσει του U. Αφού πραγματοποιήσουμε όλες τις απαραίτητες αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση κλειστής μορφής για τη j γραμμή του U,

$$\boldsymbol{u}_j = \left(V^T C V + \lambda I\right)^{-1} V^T C Y_{(j,\cdot)}^T, \tag{6.5}$$

όπου $C = diag(P_{(j,\cdot)})$ και $Y = P_\Omega(M)$.

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική, για την j γραμμή του V έχουμε

$$\boldsymbol{v}_j = \left(U^T C U + \lambda I\right)^{-1} U^T C Y_{(\cdot,j)}, \tag{6.6}$$

όπου $C = diag(P_{(\cdot,j)})$ και $Y = P_\Omega(M)$.

Ο ψευδοκώδικας αυτού του αλγορίθμου δίνεται στον Αλγόριθμο 2. Η πολυπλοκότητα ανά επανάληψη του παραπάνω αλγορίθμου είναι $\mathcal{O}(mL^2 + max(k,n)L^3)$.

Algorithm 2 Matrix Completion with Alternating Regularized Least Squares (MC-ARLS)

Input: $Y = P_\Omega(M) \in \mathbb{R}^{k\times n}$, P, λ, L
Output: $X = UV^T$
  $U^{(0)} \in \mathbb{R}^{k\times L}$ with $u_{ij}^{(0)} \sim \mathcal{N}(0,1)$
  $V^{(0)} \in \mathbb{R}^{n\times L}$ with $v_{ij}^{(0)} \sim \mathcal{N}(0,1)$
  while $i < maxiter$ **do**
    for $j = 1 : k$ **do**
      $C = diag(P_{(j,\cdot)})$
      $\boldsymbol{u}_j^{(i+1)} \leftarrow \left(V^{(i)T} C V^{(i)} + \lambda I\right)^{-1} V^{(i)T} C Y_{(j,\cdot)}^T$
    end for
    for $j = 1 : n$ **do**
      $C = diag(P_{(\cdot,j)})$
      $\boldsymbol{v}_j^{(i+1)} \leftarrow \left(U^{(i+1)T} C U^{(i+1)} + \lambda I\right)^{-1} U^{(i+1)T} C Y_{(\cdot,j)}$
    end for
    $X^{(i+1)} \leftarrow U^{(i+1)} V^{(i+1)T}$
    if $\dfrac{\|X^{(i+1)} - X^{(i)}\|_F}{\|X^{(i)}\|_F} < toler$ **then** break
    end if
  end while

6.1.3 Alternating iteratively reweighted least squares

Στο [GRK16] η l_1/l_2 νόρμα του πίνακα $X \in \mathbb{R}^{k\times n}$ παρουσιάστηκε, δηλαδή

$$\|X\|_{1,2} = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{x}_{c,i}\|_2,$$

όπου $\boldsymbol{x}_{c,i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι οι στήλες του X. Σε αυτή τη δημοσίευση η l_1/l_2 νόρμα επιστρατεύτηκε στο σχεδιασμό ενός σχήματος εκμάθησης υπόχωρου χαμηλού βαθμού. Στη συνέχεια, αυτή η νόρμα χρησιμοποιήθηκε στο πρόβλημα

βελτιστοποίησης ενός προβλήματος παραγοντοποίησης πινάκων [GRK17a] και σε ένα πρόβλημα παραγοντοποίησης μη-αρνητικών πινάκων [GRK17b]. Εδώ χρησιμοποιούμε αυτή τη νόρμα στη διατύπωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης για ένα πρόβλημα συμπλήρωσης πίνακα. Αυτή η προσέγγιση περιέχεται στην ακόλουθη συνάρτηση κόστους,

$$\boxed{f_3(U,V) = \frac{1}{2}\|P_\Omega(M) - P_\Omega(UV^T)\|_F^2 + \delta \sum_{i=1}^{L} \sqrt{\|\boldsymbol{u}_{c,i}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}_{c,i}\|_2^2}}, \tag{6.7}$$

όπου τα $\boldsymbol{u}_{c,i}$,$\boldsymbol{v}_{c,i}$ συμβολίζουν τις στήλες των πινάκων $U \in \mathbb{R}^{k\times L}$ και $V \in \mathbb{R}^{n\times L}$ αντίστοιχα.

Το αντίστοιχο πρόβλημα βελτιστοποίησης δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 6.1.4 (Συμπλήρωση πίνακα με l_1/l_2 νόρμα)**.** *Έστω $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$, με $rank(M) = r$. Επιλέγουμε $r \leq L \leq min(k,n)$. Τότε, διατυπώνουμε το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης,*

$$\min_{\substack{U\in\mathbb{R}^{n\times L}, V\in\mathbb{R}^{k\times L} \\ s.t\ X=UV^T}} \frac{1}{2}\|P_\Omega(M) - P_\Omega(UV^T)\|_F^2 + \delta \sum_{i=1}^{L} \sqrt{\|\boldsymbol{u}_{c,i}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}_{c,i}\|_2^2}. \tag{6.8}$$

Για να αναδείξουμε την διαισθητική εξήγηση της χρήσης της l_1/l_2 νόρμας σε ένα πρόβλημα συμπλήρωσης πίνακα, ξαναγράφουμε την παραπάνω συνάρτηση κόστους με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{aligned} f_3(U,V) &= \frac{1}{2}\|P_\Omega(M) - P_\Omega(UV^T)\|_F^2 + \delta\|Z\|_{1,2} = \\ &= \frac{1}{2}\|P_\Omega(M) - P_\Omega(UV^T)\|_F^2 + \delta \sum_{i=1}^{L} \|\boldsymbol{z}_{c,i}\|_2, \end{aligned}$$

όπου

$$Z = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \boldsymbol{u}_{c,1} & \boldsymbol{u}_{c,2} & \dots & \boldsymbol{u}_{c,L} \\ | & | & \dots & | \\ | & | & \dots & | \\ \boldsymbol{v}_{c,1} & \boldsymbol{v}_{c,2} & \dots & \boldsymbol{v}_{c,L} \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

και $\boldsymbol{z}_{c,i}$ οι στήλες του Z.

Ο νέος όρος ομαλοποίησης τιμωρεί την l_1/l_2 νόρμα του πίνακα Z. Συνεπώς, αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης προωθεί λύσεις έτσι ώστε οι στήλες του Z να έχουν στοιχεία με μικρό μέτρο. Χονδρικά, το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης προσπαθεί να συρρικνώσει όσες περισσότερες στήλες του Z γίνεται, μικραίνοντας με αυτόν τον τρόπο τον βαθμό της ανακτημένης λύσης. Κατά συνέπεια, αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης προωθεί λύσεις χαμηλού βαθμού.

Θα εφαρμόσουμε εδώ την ίδια μεθοδολογία όπως στην προηγούμενη περίπτωση, δηλαδή εναλλασσόμενη ελαχιστοποίηση. Άρα, για την j γραμμή του πίνακα U έχουμε την ακόλουθη έκφραση κλειστής μορφής,

$$\boldsymbol{u}_j = \left(V^T C V + D\right)^{-1} V^T C Y_{(j,\cdot)}^T, \tag{6.9}$$

όπου $C = diag(P_{(j,\cdot)})$, $Y = P_\Omega(M)$ και [1]

$$D = \text{diag}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\|\boldsymbol{u}_{c,1}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}_{c,1}\|_2^2 + \eta^2}}, \ldots, \frac{\delta}{\sqrt{\|\boldsymbol{u}_{c,L}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}_{c,L}\|_2^2 + \eta^2}}\right).$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική, για την j γραμμή του V έχουμε

$$\boldsymbol{v}_j = \left(U^T C U + D\right)^{-1} U^T C Y_{(\cdot,j)}, \tag{6.10}$$

όπου $C = diag(P_{(\cdot,j)})$ και το Y και το D ορίζονται όπως προηγουμένως.

Παρατηρήστε ότι σε αυτόν τον αλγόριθμο εισάγαμε τον όρο D, ο οποίος λαμβάνει υπόψιν τις τιμές των στηλών των πινάκων U και V στην προηγούμενη επανάληψη. Αυτός ο όρος αλλάζει σε κάθε επανάληψη και ουσιαστικά λειτουργεί ως παράγοντας στάθμισης στο σχηματισμό της νέας εκτίμησης. Συνεπώς, καλούμε αυτόν τον αλγόριθμο Matrix Completion with Alternating Iteratively Reweighted Least Squares (MC-AIRWLS) και η περιγραφή του δίνεται στον αλγόριθμο 3. Τελικά, η πολυπλοκότητα ανά επανάληψη του MC-AIRWLS είναι $\mathcal{O}(mL^2 + max(k,n)L^3)$.

Algorithm 3 Matrix Completion with Alternating Iteratively Reweighted Least Squares (MC-AIRWLS)

Input: $Y = P_\Omega(M) \in \mathbb{R}^{k\times n}$, P, δ, L
Output: $X = UV^T$
  $U^{(0)} \in \mathbb{R}^{k\times L}$ with $u_{ij}^{(0)} \sim \mathcal{N}(0,1)$
  $V^{(0)} \in \mathbb{R}^{n\times L}$ with $v_{ij}^{(0)} \sim \mathcal{N}(0,1)$
  $D^{(0)} \in \mathbb{R}^{L\times L}$ with $d_{ii}^{(0)} \sim \mathcal{N}(0,1)$
  while $i < maxiter$ **do**
    for $j = 1 : k$ **do**
      $C = diag(P_{(j,\cdot)})$
      $\boldsymbol{u}_j^{(i+1)} \leftarrow \left(V^{(i)T} C V^{(i)} + D^{(i)}\right)^{-1} V^{(i)T} C Y_{(j,\cdot)}^T$
    end for
    for $j = 1 : n$ **do**
      $C = diag(P_{(\cdot,j)})$
      $\boldsymbol{v}_j^{(i+1)} \leftarrow \left(U^{(i+1)T} C U^{(i+1)} + D^{(i)}\right)^{-1} U^{(i+1)T} C Y_{(\cdot,j)}$
    end for
    $D^{(i+1)} \leftarrow \text{diag}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\|\boldsymbol{u}_{c,1}^{(i+1)}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}_{c,1}^{(i+1)}\|_2^2 + \eta^2}}, \ldots, \frac{\delta}{\sqrt{\|\boldsymbol{u}_{c,L}^{(i+1)}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}_{c,L}^{(i+1)}\|_2^2 + \eta^2}}\right)$
    $X^{(i+1)} \leftarrow U^{(i+1)} V^{(i+1)T}$
    if $\frac{\|X^{(i+1)} - X^{(i)}\|_F}{\|X^{(i)}\|_F} < toler$ **then** break
    end if
  end while

[1] Χρησιμοποιούμε μία μικρή σταθερά η για να εξασφαλίσουμε ομαλότητα.

6.1.4 Fast alternating regularized least squares

Αυτός ο αλγόριθμος εφαρμόζει τη μεθοδολογία της εναλλασσόμενης ελαχιστοποίησης στην συνάρτηση κόστους (6.4), δηλαδή στην $f_2(U, V)$. Ωστόσο, σε κάθε επανάληψη υπολογίζει το ελάχιστο ενός άνω φράγματος μίας προσέγγισης του $f_2(U, V)$, αφού σταθεροποιήσουμε μία από τις δύο μεταβλητές. Συγκεκριμένα, σταθεροποιούμε μία από τις δύο μεταβλητές του $f_2(U, V)$ και υπολογίζουμε ένα άνω φράγμα για το ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης της αντίστοιχης συνάρτησης κόστους, χρησιμοποιώντας μία προσέγγιση για τον Hessian. Τελικά, ελαχιστοποιούμε τη συνάρτηση κόστους που έχει σχηματιστεί συναρτήσει της άλλης μεταβλητής. Σημειώστε ότι η τεχνική που χρησιμοποιούμε εισήχθηκε στο [GRK17c] για την συνάρτηση κόστους (6.7).

Υποθέστε ότι θέλουμε να βρούμε την νέα εκτίμηση του U στην επανάληψη $i+1$, δηλαδή $U^{(i+1)}$. Σε αυτή τη φάση έχουμε στη διάθεσή μας τις εκτιμήσεις $U^{(i)}$ και $V^{(i)}$. Συνεπώς, σταθεροποιούμε την μεταβλητή V και υπολογίζουμε ένα άνω φράγμα για το 2ης τάξης ανάπτυγμα Taylor της $f_2(U, V^{(i)})$ στο $U^{(i)}$, το οποίο είναι

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_2(U|U^{(i)}, V^{(i)}) = f_2(U^{(i)}, V^{(i)}) &+ \operatorname{tr}\left\{\left(U - U^{(i)}\right)^T \nabla_U f_2(U^{(i)}, V^{(i)})\right\} \\ &+ \operatorname{tr}\left\{\left(U - U^{(i)}\right) \widetilde{H}(U^{(i)}, V^{(i)}) \left(U - U^{(i)}\right)^T\right\},\end{aligned}$$

όπου

$$\widetilde{H}(U, V) = V^T V + \lambda I.$$

Χονδρικά, η επιλογή του $\widetilde{H}$ δικαιολογείται από το γεγονός ότι ο πίνακας $\widetilde{H} - H$ είναι θετικά ημιορισμένος (αν διατάξουμε τα στοιχεία αυτών των πινάκων με κατάλληλο τρόπο), όπου ο H είναι ο Hessian της $f_2(U, V^{(i)})$. Για περισσότερες λεπτομέρειες ανατρέξετε στο [GRK17c].

Συνεπώς, χρειάζεται να βρούμε την ελάχιστη τιμή του ακόλουθου προβλήματος βελτιστοποίησης

$$\min_{U \in \mathbb{R}^{k \times L}} \widetilde{f}_2(U|U^{(i)}, V^{(i)}).$$

Αν υπολογίσουμε την παράγωγο του $\widetilde{f}_2(U|U^{(i)}, V^{(i)})$ συναρτήσει του U, εξισώσουμε το αποτέλεσμα με 0 και λύσουμε την αντίστοιχη εξίσωση συναρτήσει του U λαμβάνουμε

$$U^{(i+1)} = U^{(i)} + \left\{\left[P_\Omega(M) - P_\Omega(U^{(i)} V^{(i)T})\right] V^{(i)} - \lambda U^{(i)}\right\} \left[V^{(i)T} V^{(i)} + \lambda I\right]^{-1}.$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική, σταθεροποιούμε το U και διατυπώνουμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\min_{V \in \mathbb{R}^{k \times L}} \widetilde{f}_2(V|U^{(i+1)}, V^{(i)}),$$

όπου η συνάρτηση κόστους $\widetilde{f}_2(V|U^{(i+1)}, V^{(i)})$ είναι ένα άνω φράγμα για το ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης της $f_2(U^{(i+1)}, V)$ στο $V^{(i)}$ και ορίζεται ως

$$\widetilde{f}_2(V|U^{(i+1)}, V^{(i)}) = f_2(U^{(i+1)}, V^{(i)}) + \operatorname{tr}\left\{\left(V - V^{(i)}\right)^T \nabla_V f_2(U^{(i+1)}, V^{(i)})\right\} + \operatorname{tr}\left\{\left(V - V^{(i)}\right) \widetilde{J}(U^{(i+1)}, V^{(i)}) \left(V - V^{(i)T}\right)\right\},$$

όπου

$$\widetilde{J}(U, V) = U^T U + \lambda I.$$

Αν υπολογίσουμε την παράγωγο του $\widetilde{f}_2(V|U^{(i+1)}, V^{(i)})$ συναρτήσει του V, εξισώσουμε το αποτέλεσμα με 0 και λύσουμε την αντίστοιχη εξίσωση συναρτήσει του V λαμβάνουμε

$$V^{(i+1)} = V^{(i)} + \left\{\left[P_\Omega(M) - P_\Omega(U^{(i+1)}V^{(i)T})\right]^T U^{(i+1)} - \lambda V^{(i)}\right\}\left[U^{(i+1)T}U^{(i+1)} + \lambda I\right]^{-1}.$$

Καλούμε αυτόν τον αλγόριθμο Matrix Completion with Fast Alternating Regularized Least Squares (MC-FARLS) και παρέχουμε τον ψευδοκώδικά του στον αλγόριθμο 4. Η πολυπλοκότητα ανά επανάληψη του MC-FARLS είναι $\mathcal{O}(mL + max(k, n)L^2)$.

Algorithm 4 Matrix Completion with Fast Alternating Regularized Least Squares (MC-FARLS)

Input: $P_\Omega(M) \in \mathbb{R}^{k\times n}$, λ, L
Output: $X = UV^T$

```
U^(0) ∈ ℝ^{k×L} with u_ij^(0) ~ N(0,1)
V^(0) ∈ ℝ^{n×L} with v_ij^(0) ~ N(0,1)
while i < maxiter do
    U^(i+1) ← U^(i) + {[P_Ω(M) − P_Ω(U^(i) V^(i)T)] V^(i) − λU^(i)} [V^(i)T V^(i) + λI]^{−1}
    V^(i+1) ← V^(i) + {[P_Ω(M) − P_Ω(U^(i+1) V^(i)T)]^T U^(i+1) − λV^(i)} [U^(i+1)T U^(i+1) + λI]^{−1}
    X^(i+1) ← U^(i+1) V^(i+1)T
    if ||X^(i+1) − X^(i)||_F / ||X^(i)||_F < toler then break
    end if
end while
```

6.1.5 Fast alternating iteratively reweighted least squares

Ο αλγόριθμος αυτός εφαρμόζει την διαδικασία που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα στην συνάρτηση κόστους (6.7), δηλαδή στην $f_3(U, V)$. Αυτή η προσέγγιση περιέχεται στο [GRK17c]. Συνεπώς, εάν σταθεροποιήσουμε την μεταβλητή V θα λάβουμε το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min_{U \in \mathbb{R}^{k \times L}} \widetilde{f}_3(U|U^{(i)}, V^{(i)}).$$

Η συνάρτηση κόστους $\widetilde{f}_3(U|U^{(i)}, V^{(i)})$ είναι ένα άνω φράγμα για το 2ης τάξης ανάπτυγμα Taylor της $f_3(U, V^{(i)})$ στο $U^{(i)}$, το οποίο είναι

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_3(U|U^{(i)}, V^{(i)}) = f_3(U^{(i)}, V^{(i)}) + \operatorname{tr}\left\{\left(U - U^{(i)}\right)^T \nabla_U f_3(U^{(i)}, V^{(i)})\right\} \\ + \operatorname{tr}\left\{\left(U - U^{(i)}\right) \widetilde{H}(U^{(i)}, V^{(i)}) \left(U - U^{(i)T}\right)^T\right\},\end{aligned}$$

όπου

$$\widetilde{H}(U, V) = V^T V + D$$

και

$$D^{(i)} = \operatorname{diag}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\|\boldsymbol{u}_1^{(i)}\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}_1^{(i)}\|_2^2 + \eta^2}}, \ldots, \frac{\delta}{\sqrt{\|\boldsymbol{u}_L^{(i)}\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}_L^{(i)}\|_2^2 + \eta^2}}\right).$$

Αν υπολογίσουμε την παράγωγο του $\widetilde{f}_3(U|U^{(i)}, V^{(i)})$ συναρτήσει του U, εξισώσουμε το αποτέλεσμα με 0 και λύσουμε την αντίστοιχη εξίσωση συναρτήσει του U λαμβάνουμε

$$U^{(i+1)} = U^{(i)} + \left\{\left[P_\Omega(M) - P_\Omega(U^{(i)}V^{(i)T})\right] V^{(i)} - U^{(i)} D^{(i)}\right\} \left[V^{(i)T} V^{(i)} + D^{(i)}\right]^{-1}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, εάν σταθεροποιήσουμε το U διατυπώνουμε το ακόλουθο πρόβλημα

$$\min_{V \in \mathbb{R}^{k \times L}} \widetilde{f}_3(V|U^{(i+1)}, V^{(i)}).$$

Η συνάρτηση κόστους $\widetilde{f}_3(V|U^{(i+1)}, V^{(i)})$ είναι ένα άνω φράγμα για την 2ης τάξης προσέγγιση κατά Taylor της $f_3(U^{(i+1)}, V)$ στο $V^{(i)}$, δηλαδή

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_3(V|U^{(i+1)}, V^{(i)}) = f_3(U^{(i+1)}, V^{(i)}) + \operatorname{tr}\left\{\left(V - V^{(i)}\right)^T \nabla_V f_3(U^{(i+1)}, V^{(i)})\right\} \\ + \operatorname{tr}\left\{\left(V - V^{(i)}\right) \widetilde{J}(U^{(i+1)}, V^{(i)}) \left(V - V^{(i)T}\right)\right\},\end{aligned}$$

όπου έχουμε ότι

$$\widetilde{J}(U, V) = U^T U + D.$$

αλγόριθμος	**Πολυπλοκότητα ανά επανάληψη**
MC-PFBS	$\mathcal{O}(min(k,n)^2 max(k,n))$
MC-ARLS	$\mathcal{O}(mL^2 + max(k,n)L^3)$
MC-AIRWLS	$\mathcal{O}(mL^2 + max(k,n)L^3)$
MC-FARLS	$\mathcal{O}(mL + max(k,n)L^2)$
MC-FAIRWLS	$\mathcal{O}(mL + max(k,n)L^2)$

Σχήμα 6.1: Η πολυπλοκότητα ανά επανάληψη των 5 αλγορίθμων που χρησιμοποιούμε.

Αν υπολογίσουμε την παράγωγο του $\widetilde{f}_3(V|U^{(i+1)}, V^{(i)})$ συναρτήσει του V, εξισώσουμε το αποτέλεσμα με 0 και λύσουμε την αντίστοιχη εξίσωση συναρτήσει του V λαμβάνουμε

$$V = V^{(i)} + \left\{ \left[P_\Omega(M) - P_\Omega(U^{(i+1)} V^{(i)T}) \right]^T U^{(i+1)} - V^{(i)} D^{(i)} \right\} \left[U^{(i+1)T} U^{(i+1)} + D^{(i)} \right]^{-1}.$$

Καλούμε αυτόν τον αλγόριθμο Matrix Completion with Fast Alternating Iteratively Reweighted Least Squares (MC-AIRWLS) και παρέχουμε τον ψευδοκώδικά του στον Αλγόριθμο 5. Η πολυπλοκότητα ανά επανάληψη του MC-FAIRWLS είναι $\mathcal{O}(mL + max(k,n)L^2)$.

Algorithm 5 Matrix Completion with Fast Alternating Iteratively Reweighted Least Squares (MC-AIRWLS)

Input: $P_\Omega(M) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, δ, L
Output: $X = UV^T$
  $U^{(0)} \in \mathbb{R}^{k \times L}$ with $u_{ij}^{(0)} \sim \mathcal{N}(0,1)$
  $V^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times L}$ with $v_{ij}^{(0)} \sim \mathcal{N}(0,1)$
  $D^{(0)} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ with $d_{ii}^{(0)} \sim \mathcal{N}(0,1)$
  while $i < maxiter$ **do**
    $U^{(i+1)} \leftarrow U^{(i)} + \left\{ \left[P_\Omega(M) - P_\Omega(U^{(i)} V^{(i)T}) \right] V^{(i)} - U^{(i)} D^{(i)} \right\} \left[V^{(i)T} V^{(i)} + D^{(i)} \right]^{-1}$
    $V^{(i+1)} \leftarrow V^{(i)} + \left\{ \left[P_\Omega(M) - P_\Omega(U^{(i+1)} V^{(i)T}) \right]^T U^{(i+1)} - V^{(i)} D^{(i)} \right\} \left[U^{(i+1)T} U^{(i+1)} + D^{(i)} \right]^{-1}$
    $D^{(i+1)} \leftarrow \operatorname{diag}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\|\boldsymbol{u}_1^{(i+1)}\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}_1^{(i+1)}\|_2^2 + \eta^2}}, \ldots, \frac{\delta}{\sqrt{\|\boldsymbol{u}_L^{(i+1)}\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}_L^{(i+1)}\|_2^2 + \eta^2}} \right)$
    $X^{(i+1)} \leftarrow U^{(i+1)} V^{(i+1)T}$
    if $\frac{\|X^{(i+1)} - X^{(i)}\|_F}{\|X^{(i)}\|_F} < toler$ **then** break
    end if
  end while

Η εικόνα 6.1 περιέχει την πολυπλοκότητα ανά επανάληψη (complexity per iteration) των αλγορίθμων που χρησιμοποιούμε.

	S1	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**
$\boldsymbol{k,n}$	$150, 300$	$150, 300$	$150, 300$	$150, 300$	$150, 300$	$150, 300$	$150, 300$	$150, 300$
p	50	50	50	50	75	75	75	75
$\boldsymbol{\sigma}$	10^{-1}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-2}
r	10	20	10	20	10	20	10	20

Σχήμα 6.2: Οι παράμετροι των 8 σεναρίων.

6.2 Αξιολόγηση σε συνθετικά δεδομένα

Σε αυτήν την ενότητα θα αξιολογήσουμε τους 5 αλγορίθμους που περιγράψαμε προηγουμένως σε συνθετικά δεδομένα.

6.2.1 Περιγραφή των σεναρίων

Παράγουμε $k \times n$ πίνακες (πραγματικού) βαθμού r ως γινόμενο 2 Γκαουσιανών τυχαίων πινάκων διαστάσεων $k \times r$ και $r \times n$ αντίστοιχα. Σε αυτόν τον πίνακα δειγματοληπτούμε με ομοιόμορφα τυχαίο τρόπο m στοιχεία και θέτουμε τα υπόλοιπα στο 0. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιος θόρυβος μέτρησης τυπικής απόκλισης σ. Για να αξιολογήσουμε την απόδοση των 5 αλγορίθμων αναπτύσσουμε 8 σενάρια αλλάζοντας τις παραμέτρους των πινάκων και το επίπεδο θορύβου. Οι παράμετροι που θεωρούμε είναι οι ακόλουθοι :

- $\boldsymbol{k,n}$: οι διαστάσεις του πίνακα
- $\boldsymbol{r}$: ο πραγματικός βαθμός του πίνακα
- $\boldsymbol{\sigma}$: η τυπική απόκλιση του Γκαουσιανού θορύβου (μέσης τιμής 0) που επιβαρύνει τα παρατηρούμενα στοιχεία του συνθετικού πίνακα.
- $\boldsymbol{p}$: το ποσοστό των στοιχείων που λείπουν, δηλαδή $p = 1 - \dfrac{m}{k \cdot n}$

Τα 8 σενάρια περιέχονται στην εικόνα 6.2.1.

Πραγματοποιούμε πειράματα για κάθε σενάριο με τον ακόλουθο τρόπο. Σταθεροποιούμε τις παραμέτρους του αλγορίθμου και τρέχουμε το ίδιο πείραμα 50 φορές, επιλέγοντας με τυχαίο τρόπο σε κάθε τρέξιμο ένα διαφορετικό πίνακα M. Τα αποτελέσματα που παράγουμε στο τέλος μεσοσταθμίζονται πάνω στα 50 τρεξίματα.

Άλλο σημαντικό θέμα είναι το κριτήριο τερματισμού που χρησιμοποιούμε για να τερματίσουμε τον αλγόριθμο. Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συνθήκη

$$\frac{\|X^{(i+1)} - X^{(i)}\|_F}{\|X^{(i)}\|_F} < toler,$$

όπου το $toler$ είναι η παράμετρος που καθορίζει πόσο μικρή πρέπει να γίνει η σχετική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών εκτιμήσεων έτσι ώστε ο αλγόριθμος να τερματίσει, δηλαδή η ανοχή τερματισμού. Θέτουμε σε όλα τα πειράματα και αλγορίθμους την τιμή $toler = 10^{-4}$.

6.2.2 Μέτρα απόδοσης

Θα αξιολογήσουμε τους αλγορίθμους με βάση τα ακόλουθα μέτρα απόδοσης.

1. Σχετικό σφάλμα υπό την έννοια της Frobenius νόρμας

   Το σχετικό σφάλμα υπό την έννοια της Frobenius νόρμας είναι

   $$\text{relative error} = \frac{\|M - X\|_F}{\|M\|_F},$$

   όπου X είναι η τελική εκτίμηση που παράγεται από τον αντίστοιχο αλγόριθμο.

2. Βαθμός

   Ο βαθμός της τελικής εκτίμησης, δηλαδή ο βαθμός της ανακτημένης λύσης.

3. Χρόνος

   Ο χρόνος που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να τερματίσει και να παράγει την έξοδό του (την τελική εκτίμηση).

Παρατηρήστε ότι για κάθε αλγόριθμο επιστρέφουμε μία τιμή για κάθε μέτρο απόδοσης σε κάθε σενάριο, το οποίο είναι η μέση τιμή των αντίστοιχων τιμών αυτού του μέτρου στα 50 τρεξίματα του πειράματος.

6.2.3 Παράμετροι αλγορίθμων

Όλοι οι αλγόριθμοι που μελετάμε και αξιολογούμε έχουν παραμέτρους που καθορίζουν την συμπεριφορά τους και των οποίων οι τιμές πρέπει να επιλεγούν κατάλληλα. Για να βρούμε τις κατάλληλες τιμές των παραμέτρων, ελέγξαμε για κάθε σενάριο αρκετές διαφορετικές τιμές παραμέτρων και επιλέξαμε τις βέλτιστες. Η βελτιστότητα βρίσκεται, στις περισσότερες περιπτώσεις, στην επιλογή των τιμών των παραμέτρων που κάνουν τον αλγόριθμο να επιστρέψει την λύση με το μικρότερο σχετικό σφάλμα, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα ότι ο ανακτημένος βαθμός είναι περίπου ίσος με τον πραγματικό. Ωστόσο, είναι επίσης πιθανό ότι οι τιμές των παραμέτρων που προσφέρουν λύσεις με βαθμό ίσο με το πραγματικό να υποφέρουν από υψηλά σχετικά σφάλματα. Σε αυτές τις περιπτώσεις επιλέγουμε τις τιμές των παραμέτρων που παρέχουν το μικρότερο δυνατό σχετικό σφάλμα. Στην εικόνα 6.3 δίνουμε ένα πίνακα που περιέχει τις τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήσαμε στα πειράματά για όλους τους 5 αλγορίθμους στα 8 σενάρια.

6.2.4 Αποτελέσματα

Οι εικόνες 6.4 και 6.5 περιέχουν τα αποτελέσματα των πειραμάτων που τρέξαμε, δηλαδή το σχετικό σφάλμα και τον ανακτημένο βαθμό. Επίσης, στην εικόνα 6.6 παρέχεται ο χρόνος εκτέλεσης των 5 αλγορίθμων στα 8 σενάρια. Τέλος, στην εικόνα 6.7 δίνεται το σχετικό σφάλμα στο σενάριο 3, των 5 αλγορίθμων, συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων.

6.3 Αξιολόγηση στα δεδομένα MovieLens

Σε αυτήν την ενότητα θα αξιολογήσουμε 3 αλγορίθμους σε πραγματικά δεδομένα, συγκεκριμένα στα δεδομένα του MovieLens. [Mov]

algorithm	parameters	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**
MC-PFBS	δ	0.4	0.17	2	0.53	0.1	0.21	0.1	0.53
	λ	2.5	6	0.5	1.9	10	4.7	10	1.9
MC-ARLS	λ	3.5	0.1	0.6	0.1	0.3	0.3	0.1	0.3
	L	15	25	15	25	15	25	15	25
MC-AIRWLS	δ	6	6.2	2.5	3.3	2	6.3	1.1	6.1
	L	15	25	15	25	15	25	15	25
MC-FARLS	λ	4.6	0.1	4.1	0.6	0.1	1.1	0.6	1.1
	L	15	25	15	25	15	25	15	25
MC-FAIRWLS	δ	9.1	9.1	4.6	7	5	20.6	5.6	20.6
	L	15	25	15	25	15	25	15	25

Σχήμα 6.3: Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήσαμε στα πειράματα για τους 5 αλγορίθμους στα 8 διαφορετικά σενάρια.

p	50			
σ	10^{-1}		10^{-2}	
r	10	20	10	20
scenario	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**
MC-PFBS	$3.74 \cdot 10^{-2}(10.02)$	$9.05 \cdot 10^{-2}(20.2)$	$6.36 \cdot 10^{-3}(10)$	$2.97 \cdot 10^{-2}(20.66)$
MC-ARLS	$4.72 \cdot 10^{-2}(10.08)$	$2.07 \cdot 10^{-2}(25)$	$1.05 \cdot 10^{-2}(10.08)$	$7.00 \cdot 10^{-3}(25)$
MC-AIRWLS	$2.42 \cdot 10^{-2}(10)$	$1.95 \cdot 10^{-2}(20.14)$	$5.40 \cdot 10^{-3}(10.22)$	$6.10 \cdot 10^{-3}(20.24)$
MC-FARLS	$5.89 \cdot 10^{-2}(10.42)$	$2.11 \cdot 10^{-2}(25)$	$4.89 \cdot 10^{-2}(10.06)$	$1.08 \cdot 10^{-2}(24.96)$
MC-FAIRWLS	$2.37 \cdot 10^{-2}(10.08)$	$1.94 \cdot 10^{-2}(20.3)$	$4.69 \cdot 10^{-3}(10.08)$	$6.29 \cdot 10^{-3}(20.04)$

Σχήμα 6.4: Το σχετικό σφάλμα και ο ανακτημένος βαθμός των 5 αλγορίθμων στα σενάρια S1-S4.

p	75			
σ	10^{-1}		10^{-2}	
r	10	20	10	20
scenario	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**
MC-PFBS	$2.97 \cdot 10^{-1}(10.74)$	$4.66 \cdot 10^{-1}(56.54)$	$2.96 \cdot 10^{-2}(10.62)$	$4.5 \cdot 10^{-1}(64)$
MC-ARLS	$4.06 \cdot 10^{-2}(15)$	$2.71 \cdot 10^{-12}(25)$	$1.44 \cdot 10^{-2}(15)$	$1.96 \cdot 10^{-1}(25)$
MC-AIRWLS	$2.68 \cdot 10^{-2}(10.12)$	$1.21 \cdot 10^{-1}(20.66)$	$7.30 \cdot 10^{-3}(10.14)$	$1.39 \cdot 10^{-1}(20.84)$
MC-FARLS	$4.38 \cdot 10^{-2}(15)$	$2.16 \cdot 10^{-1}(25)$	$3.38 \cdot 10^{-2}(15)$	$2.11 \cdot 10^{-1}(25)$
MC-FAIRWLS	$2.88 \cdot 10^{-2}(10.14)$	$1.31 \cdot 10^{-1}(20.06)$	$1.31 \cdot 10^{-2}(10.2)$	$1.28 \cdot 10^{-1}(20.04)$

Σχήμα 6.5: Το σχετικό σφάλμα και ο ανακτημένος βαθμός των 5 αλγορίθμων στα σενάρια S5-S8.

p	50				75			
σ	10^{-1}		10^{-2}		10^{-1}		10^{-2}	
r	10	20	10	20	10	20	10	20
scenario	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**
MC-PFBS	2.78	5.43	4.87	5.53	8.06	14.67	8.32	15.05
MC-ARLS	3.18	16.45	6.83	14.54	20.54	133.53	20.16	134.65
MC-AIRWLS	5.20	9.13	4.73	10.55	11.18	94.04	9.28	104.61
MC-FARLS	0.08	0.80	0.10	0.34	1.67	2.96	0.66	3.03
MC-FAIRWLS	0.24	0.43	0.39	0.54	1.06	2.90	0.95	2.93

Σχήμα 6.6: Ο χρόνος εκτέλεσης των 5 αλγορίθμων στα 8 σενάρια.

6.3.1 Περιγραφή του σεναρίου

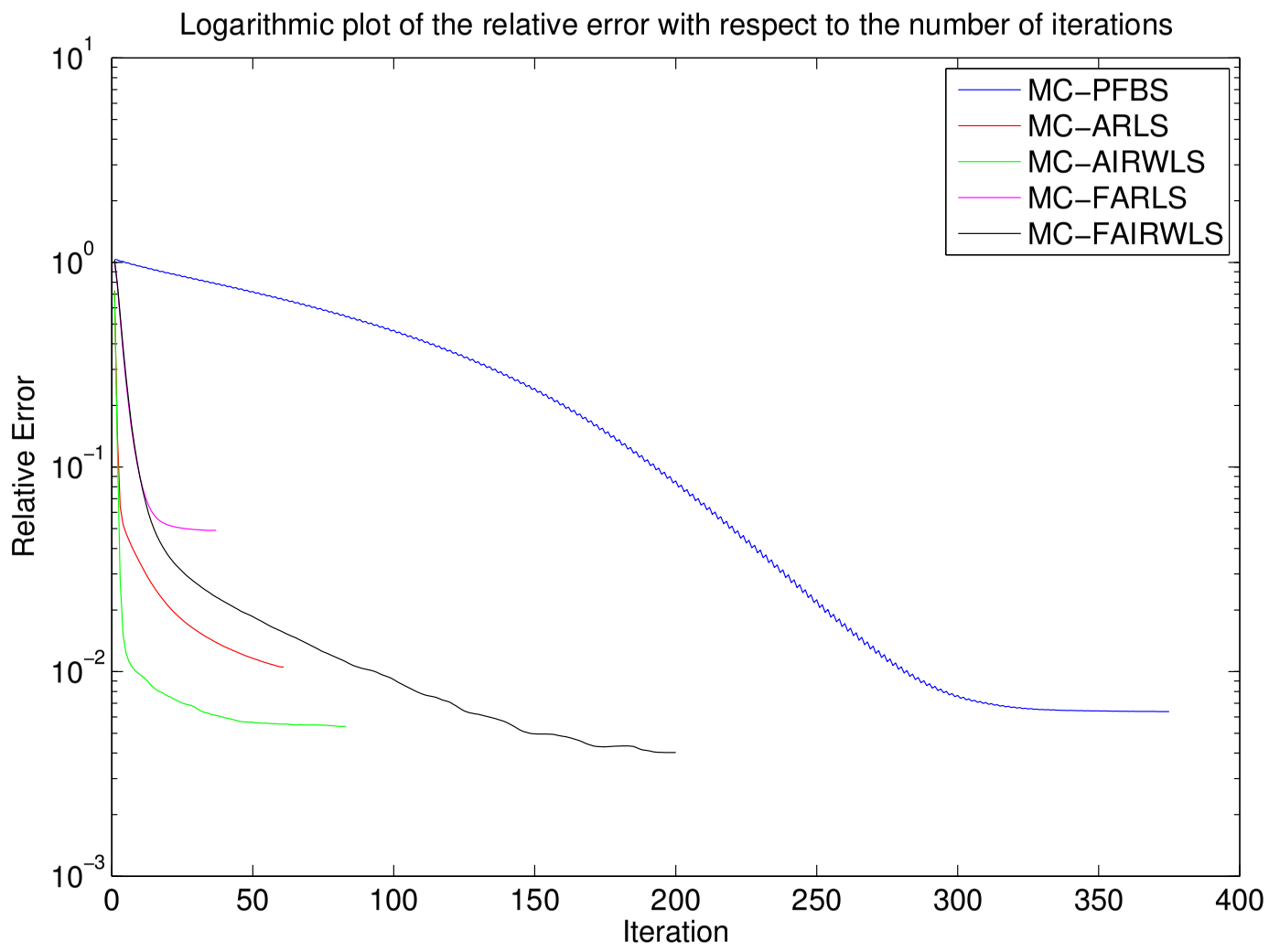
Σε αυτήν την ενότητα χρησιμοποιούμε τα δεδομένα MovieLens 100K. Αυτά τα δεδομένα περιέχουν 100000 αξιολογήσεις από 943 χρήστες για 1682 ταινίες. Οι αξιολογήσεις είναι ακέραιοι αριθμοί στο διάστημα 1-5 και γνωρίζουμε ότι κάθε χρήστης έχει βαθμολογήσει τουλάχιστον 20 ταινίες. Σε τέτοιου είδους δεδομένα χρειάζεται να χωρίσουμε τα δεδομένα σε δεδομένα εκπαίδευσης και δεδομένα ελέγχου. Αντί να το κάνουμε αυτό μόνοι μας, χρησιμοποιούμε τους έτοιμους διαχωρισμούς που δίνονται στα αρχεία των δεδομένων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε το "ub.base" ως σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης και το "ub.test" ως σύνολο δεδομένων ελέγχου. Το σύνολο δεδομένων ελέγχου δημιουργείται κρατώντας ακριβώς 10 αξιολογήσεις ανά χρήστη.

Σχηματίζουμε τον πίνακα αξιολογήσεων του συνόλου δεδομένων εκπαίδευσης αναθέτοντας σε κάθε χρήστη μία γραμμή του πίνακα και σε κάθε ταινία μία στήλη. Τότε, η αξιολόγηση του χρήστη i για την ταινία j δίνεται στο στοιχείο (i, j) του πίνακα. Ο πίνακας που σχηματίζεται (διαστάσεις 943×1675) είναι ημιτελής και τα γνωστά στοιχεία του αποτελούν το 5.7% των συνολικών του στοιχείων. Αυτός είναι ο πίνακας που θέλουμε να συμπληρώσουμε. Αξιολογούμε τα αποτελέσματα στις βαθμολογίες που περιέχονται στο σύνολο δεδομένων ελέγχου, τα οποία αποτελούν περίπου το 0.6% των συνολικών στοιχείων.

Αξιολογούμε 3 αλγορίθμους σε αυτό το σύνολο δεδομένων, MC-PFBS, MC-FARLS, MC-FAIRWLS. Επιλέγουμε τις βέλτιστες παραμέτρους ελέγχοντας ένα μεγάλο εύρος τιμών στα δοθέντα δεδομένα και επιλέγοντας τις τιμές που κάνουν τους αλγορίθμους να επιστρέψουν την λύση με το μικρότερο σφάλμα (παρατηρήστε ότι η έννοια του σφάλματος σε αυτό το σενάριο είναι διαφορετική). Συγκεκριμένα, για τον MC-PFBS επιλέγουμε τις παραμέτρους $\lambda = 3$, $\delta = 1/3$, για τον MC-FARLS τις παραμέτρους $\lambda = 7$, $L = 30$ και για τον MC-FAIRWLS τις παραμέτρους $\delta = 105$, $L = 30$. Τέλος, το κριτήριο τερματισμού που χρησιμοποιούμε για να τερματίσουμε τους αλγορίθμους είναι το ίδιο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στα συνθετικά δεδομένα.

6.3.2 Μέτρα επίδοσης

Υποθέστε ότι συμβολίζουμε με T τις θέσεις των γνωστών στοιχείων του ημιτελή πίνακα M, τα οποία χρησιμοποιούμε για να αξιολογήσουμε τους 3 αλγορίθμους, δηλαδή το σύνολο δεδομένων ελέγχου. Επίσης, έστω $card(T) = c$. Θα αξιολογήσουμε τους αλγορίθμους βάσει των ακόλουθων μέτρων επίδοσης



Σχήμα 6.7: Το σχετικό σφάλμα (σε λογαριθμική κλίμακα) συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων (μεσοσταθμισμένο πάνω σε 50 τρεξίματα).

αλγόριθμος / μέτρο επίδοσης	**NMAE**	**RMSE**	**Βαθμός**	**Χρόνος**
MC-PFBS	0.2165	1.1006	180	6988
MC-FARLS	0.2112	1.0704	30.00	260
MC-FAIRWLS	0.1867	0.9529	8	638

Σχήμα 6.8: Το NMAE, το RMSE, ο ανακτημένος βαθμός και ο χρόνος εκτέλεσης των αλγορίθμων MC-PFBS, MC-FARLS και MC-FAIRWLS.

1. Μέσο τετραγωνικό σφάλμα (Root mean square error)(RMSE)

   Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (RMSE) στο T ορίζεται ως

$$\text{RMSE} = \frac{\|P_T(M) - P_T(X)\|_F}{\sqrt{c}}.$$

2. Κανονικοποιημένο μέσο σφάλμα (Normalized mean average error)(NMAE)

   Το κανονικοποιημένο μέσο σφάλμα (NMAE) στο T ορίζεται ως

$$\text{NMAE} = \frac{\sum\limits_{(i,j)\in T} |M_{ij} - X_{ij}|}{4c}.$$

3. Βαθμός

   Ο βαθμός της τελικής εκτίμησης, δηλαδή ο βαθμός της ανακτημένης λύσης.

4. Χρόνος

   Ο χρόνος που χρειάζεται ο αλγόριθμος για να τερματίσει και να παράγει την έξοδό του.

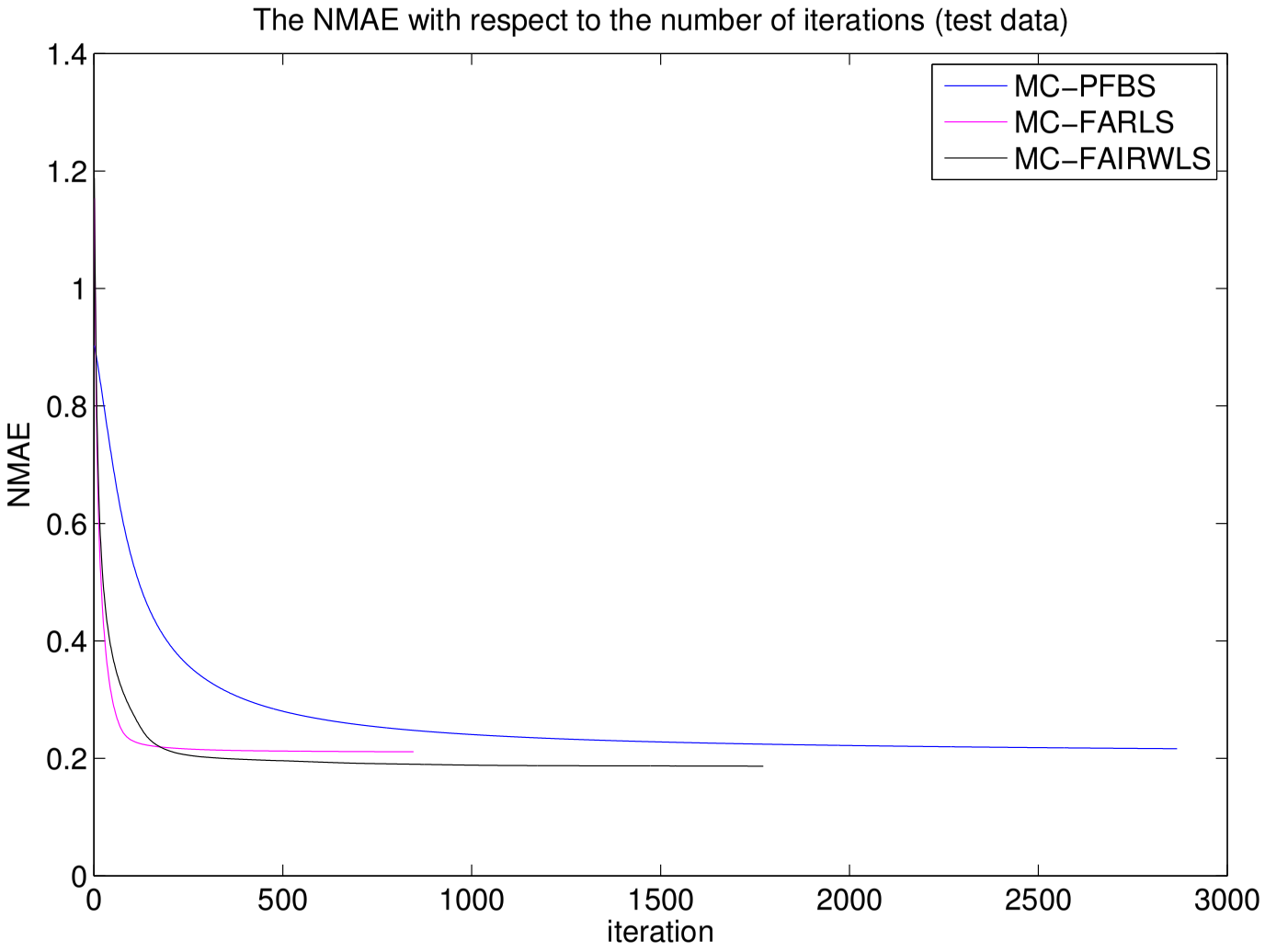
6.3.3 Αποτελέσματα

Στην εικόνα 6.8 παρέχουμε τα αποτελέσματα του πειράματος, συγκεκριμένα το RMSE, το NMAE, τον ανακτημένο βαθμό και τον χρόνο εκτέλεσης των 3 αλγορίθμων. Επίσης, στις εικόνες 6.9 και 6.10 απεικονίζουμε το NMAE και το RMSE αντίστοιχα, συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων.

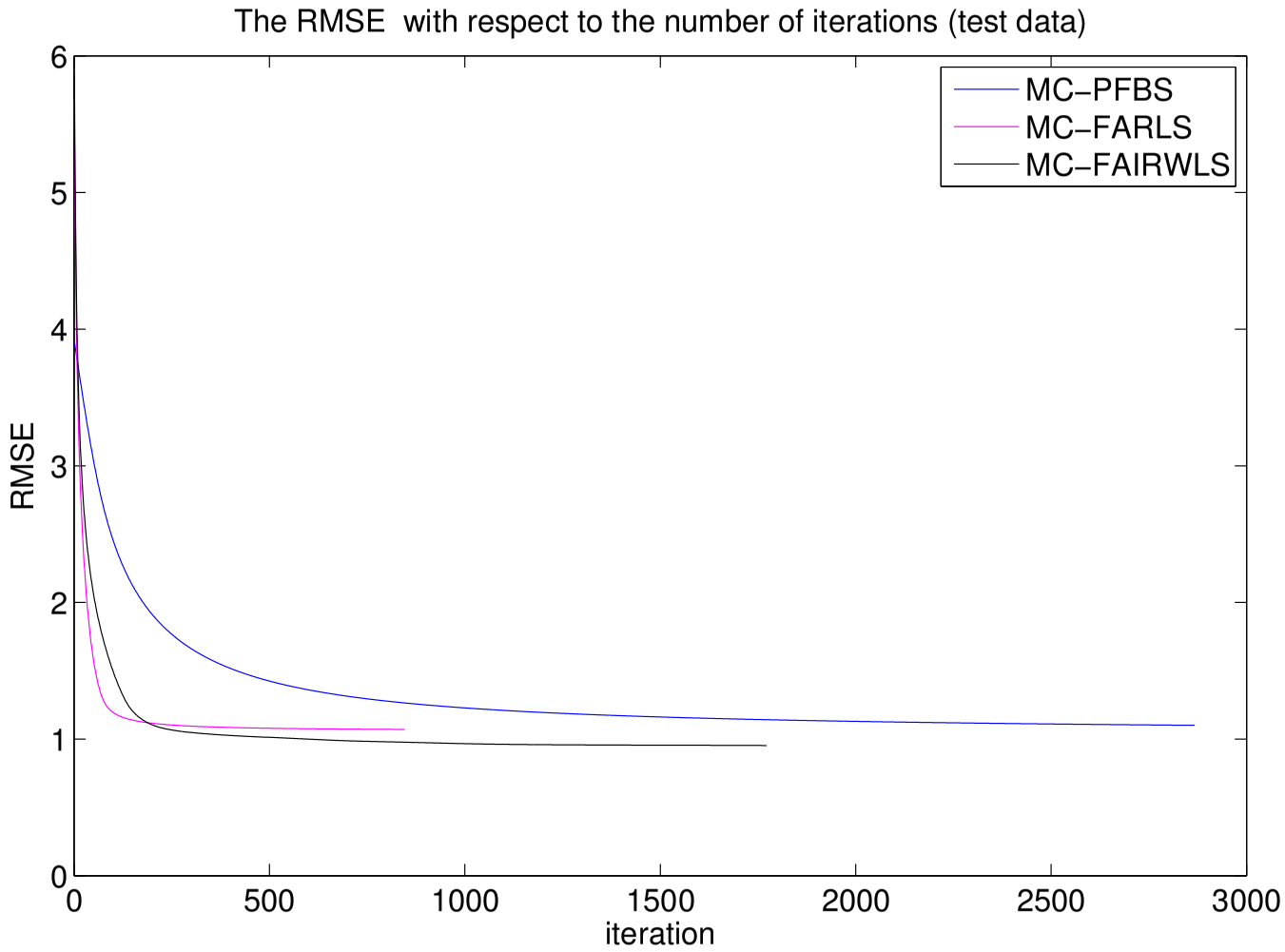
6.4 Σχόλια και συμπεράσματα

Τα ακόλουθα σχόλια προκύπτουν από τη διαδικασία επιλογής παραμέτρων και τα πειράματα που πραγματοποιήσαμε σε συνθετικά δεδομένα.

- Οι αλγόριθμοι MC-ARLS και MC-FARLS στα περισσότερα σενάρια (εκτός από τα σενάρια 1 και 3) αποτυγχάνουν να παράσχουν μία λύση με βαθμό ίσο με τον πραγματικό. Ωστόσο, κατά τη διαδικασία επιλογής παραμέτρων παρατηρήσαμε ότι είναι δυνατό να αναγκάσουμε τους 2 αλγορίθμους να επιστρέψουν λύσεις με βαθμό ίσο με τον πραγματικό για κατάλληλες επιλογές της παραμέτρου λ, αλλά με σημαντική υποβάθμιση (σε σχέση με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται) των σχετικών σφαλμάτων των ανακτημένων πινάκων. Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι πρακτικά οι δύο αλγόριθμοι, δηλαδή ο MC-ARLS και ο MC-FARLS, δεν μπορούν να ανακτήσουν το σωστό βαθμό.



Σχήμα 6.9: Το NMAE των αλγορίθμων MC-PFBS, MC-FARLS και MC-FAIRWLS συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων.



Σχήμα 6.10: Το RMSE των αλγορίθμων MC-PFBS, MC-FARLS και MC-FAIRWLS συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων.

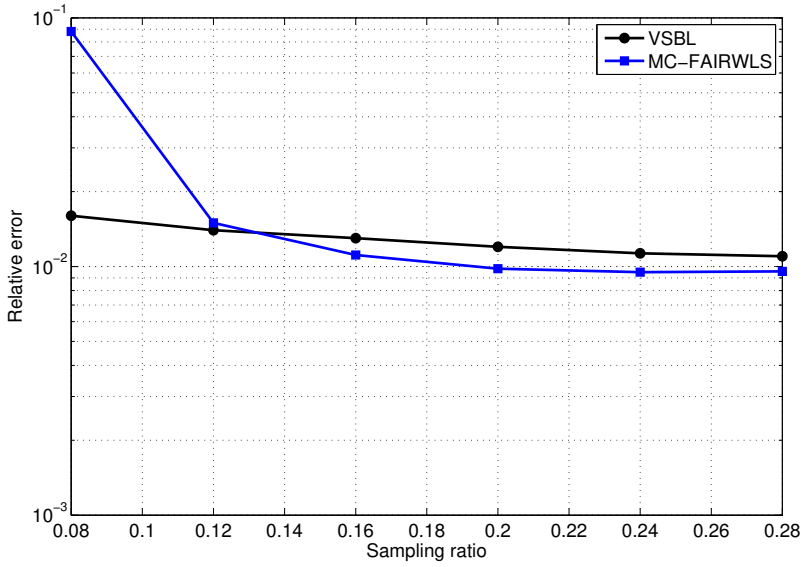
- Οι αλγόριθμοι MC-AIRWLS και MC-FAIRWLS σε όλα τα σενάρια καταφέρνουν να ανακτήσουν (κατά προσέγγιση) το πραγματικό βαθμό. Επίσης, παρέχουν το χαμηλότερο σφάλμα ανάμεσα στους 5 αλγορίθμους σε όλα τα σενάρια. Μάλιστα, παρέχουν την καλύτερη επίδοση κάτω από το περιορισμό (που επιβάλλαμε κατά την διαδικασία επιλογής παραμέτρων) ότι η ανακτημένη λύση έχει βαθμό περίπου ίσο με το πραγματικό. Αντιθέτως, δεν επιβάλλουμε τέτοιους περιορισμούς στους αλγορίθμους MC-ARLS και MC-FARLS (εκτός από δύο σενάρια στα οποία ανακτούμε τον σωστό βαθμό με αποδεκτό κόστος ως προς την υποβάθμιση του σχετικού σφάλματος). Αυτή η παρατήρηση τονίζει τη ανώτερη επίδοση των αλγορίθμων MC-AIRWLS και MC-FAIRWLS.

- Αναφορικά με τον χρόνο που απαιτείται από τους αλγορίθμους για να παράσχουν την εκτίμησή τους, παρατηρούμε ότι οι αλγόριθμοι MC-FARLS και MC-FAIRWLS είναι αρκετά γρηγορότεροι από τους υπόλοιπους τρεις αλγορίθμους. Ειδικά στα δύσκολα σενάρια η διαφορά είναι αρκετά μεγάλη. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς η προσέγγιση που χρησιμοποιήσαμε σε αυτούς τους δύο αλγορίθμους μας επέτρεψε να υπολογίσουμε τύπους κλειστής μορφής για την άμεση ανανέωση των πινάκων U και V, ενώ στους αλγορίθμους MC-ARLS και MC-FARLS οι αντίστοιχοι τύποι δίνονται συναρτήσει των γραμμών των U και V.

- Οι αλγόριθμοι MC-AIRWLS και MC-FAIRWLS σταδιακά μειώνουν τον βαθμό της εκτίμησης κατά τη διαδικασία εκπαίδευσης. Αυτό είναι σημαντικό, καθώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε αυτό το γεγονός στην υλοποίησή μας για να επιταχύνουμε τους υπολογισμούς. Αντιθέτως, γενικά δεν παρατηρούμε (υπάρχουν κάποιες εξαιρέσεις) τέτοια συμπεριφορά στους αλγορίθμους MC-ARLS και MC-FARLS.

Πραγματοποιούμε μία πρόχειρη σύγκριση με ένα Μπευζιανό αλγόριθμο για συμπλήρωση πίνακα, τον αλγόριθμο VSBL. [Bab+12] Ενδεικτικά, πραγματοποιούμε το πείραμα που απεικονίζεται στην εικόνα 2 (της αντίστοιχης δημοσίευσης) και χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα δεδομένα συγκρίνουμε τον VSBL με τον MC-FAIRWLS. Στην εικόνα 6.11 απεικονίζεται το σχετικό σφάλμα των δύο αλγορίθμων, συναρτήσει του λόγου δειγματοληψίας. Αναφορικά με τα αποτελέσματα του πειράματος, παρατηρούμε ότι ο ανακτημένος βαθμός και των δύο αλγορίθμων είναι ίσος με τον πραγματικό (σε όλα τα σενάρια), ωστόσο ο χρόνος εκτέλεσης του VSBL είναι υψηλότερος από τον αντίστοιχο χρόνο του MC-FAIRWLS (ο οποίος κυμαίνεται από 20s έως 40s) σε όλα τα σενάρια. Επίσης, από την εικόνα 6.11 μπορούμε να δούμε ότι το σχετικό σφάλμα είναι ελαφρώς μικρότερο από το αντίστοιχο σφάλμα του VSBL, για λόγους δειγματοληψίας 0.16, 0.2, 0.24, 0.28. Ωστόσο, για αρκετά ημιτελείς πίνακες (δηλαδή για λόγους δειγματοληψίας 0.08 και 0.12) ο VSBL επιτυγχάνει καλύτερη συμπεριφορά από τον MC-FAIRWLS και ειδικά για λόγο δειγματοληψίας $p = 0.08$ η διαφορά είναι σημαντική.

Τα πειράματα στα δεδομένα του MovieLens ενισχύουν μερικές βασικές παρατηρήσεις που κάναμε στα συνθετικά δεδομένα. Επιπλέον, από τις εικόνες παρατηρούμε ότι ο αριθμός των επαναλήψεων που χρειάζεται ο MC-FAIRWLS για να συγκλίνει είναι περισσότερο από δύο φορές μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο αριθμό για τον αλγόριθμο MC-FARLS. Αυτό αντικατοπτρίζεται στο χρόνο εκτέλεσης των δύο αλγορίθμων, όπου ο MC-FARLS απαιτεί λιγότερο από τον μισό χρόνο



Σχήμα 6.11: Το σχετικό σφάλμα του MC-FAIRWLS και του VSBL συναρτήσει του λόγου δειγματοληψίας.

από αυτόν που χρειάζεται ο MC-FAIRWLS. Ωστόσο, και οι δύο αλγόριθμοι δουλεύουν αρκετά γρηγορότερα από τον MC-PFBS και συνεπώς μπορούμε να τους χαρακτηρίσουμε ως αποδοτικούς ως προς το χρόνο. Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν μπορούμε πραγματικά να αξιολογήσουμε σε αυτό το σενάριο τον ανακτημένο βαθμό, καθώς δεν γνωρίζουμε την πραγματική του τιμή, ωστόσο μπορούμε άμεσα να αναγνωρίσουμε την αναμενόμενη συμπεριφορά, όπως σημειώνεται στα προηγούμενα σχόλια.

Στο [YDC15] οι βασικοί αλγόριθμοι αξιολογούνται πάνω στο ίδιο σύνολο δεδομένων, ενώ χρησιμοποιείται και ο ίδιος διαχωρισμός. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο MC-FAIRWLS επιστρέφει μικρότερο RMSE και ταυτόχρονα επιτυγχάνει σύγκλιση χρησιμοποιώντας μικρότερο αριθμό επαναλήψεων από τους αντίστοιχους αλγορίθμους.

Συμπεραίνουμε ότι οι αλγόριθμοι που λύνουν το πρόβλημα ελαχιστοποίησης 6.1.4, δηλαδή ο MC-AIRWLS και ο MC-FAIRWLS, προσφέρουν την βέλτιστη συμπεριφορά αναφορικά με το σχετικό σφάλμα και τον ανακτημένο βαθμό. Εάν επιπλέον λάβουμε υπόψιν το χρόνο που χρειάζεται για να υπολογίσουμε την έξοδο, ο MC-FAIRWLS προσφέρει την καλύτερη επίδοση, καθώς επιτυγχάνει λύσεις με χαμηλό σχετικό σφάλμα (στα μισά σενάρια επιστρέφει το χαμηλότερο σχετικό σφάλμα και στα υπόλοιπα σφάλμα κοντά στο χαμηλότερο), καταφέρνει να ανακτήσει προσεγγιστικά το πραγματικό βαθμό και δουλεύει αρκετά γρήγορα. Ο άλλος αλγόριθμος που έχει συγκρίσιμο χρόνο εκτέλεσης, ο MC-FARLS, αποτυγχάνει να παράσχει συγκρίσιμη συμπεριφορά ως προς το σχετικό σφάλμα και τον ανακτημένο βαθμό.

Παράρτημα Α΄

Μαθηματικά προαπαιτούμενα

Ο στόχος αυτού του παραρτήματος είναι να συλλέξει αρκετά λήμματα, θεωρήματα και ορισμούς τα οποία δεν ταιριάζουν στον βασικό τμήμα της διπλωματικής.

Α΄.1 Γραμμική άλγεβρα

Θα ξεκινήσουμε με την θεμελιώδη έννοια της *νόρμας*

Ορισμός Α΄.1.1 (Νόρμα)**.** *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Μία νόρμα είναι μία συνάρτηση $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.*

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \forall \boldsymbol{x} \in V$
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
3. $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \, \|\boldsymbol{x}\|, \forall \boldsymbol{x} \in V$
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Α΄.1.1 Διανύσματα

Ορισμός Α΄.1.2 (Φορέας)**.** *Ο φορέας ενός διανύσματος $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο των δεικτών των μη μηδενικών του στοιχείων, δηλαδή*

$$supp(\boldsymbol{x}) = \{i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \neq 0\}.$$

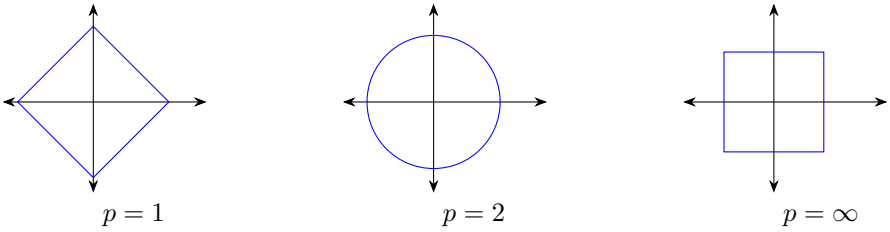
Νόρμες διανυσμάτων

Θα εστιάσουμε την προσοχή μας στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{R}^n$.

Ορισμός Α΄.1.3 (l_p νόρμες)**.** *Η l_p νόρμα του $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Οι πιο σημαντικές l_p νόρμες είναι οι ακόλουθες.



Σχήμα Α΄.1: Οι μοναδιαίες l_p μπάλες για $p = 1, 2, \infty$.

Ορισμός Α΄.1.4 (l_1 νόρμα)**.** *Η l_1 νόρμα του $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως*

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,.$$

Ορισμός Α΄.1.5 (l_2 νόρμα)**.** *Η l_2 νόρμα του $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως*

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} .$$

Ορισμός Α΄.1.6 (l_∞ νόρμα)**.** *Η l_∞ νόρμα του $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως*

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \,.$$

Η εικόνα Α΄.1.1 απεικονίζει τις μπάλες μοναδιαίας νόρμας για τις l_p νόρμες με $p = 1, 2, \infty$.

Α΄.1.2 Πίνακες

Νόρμες πινάκων

Τώρα θα παρουσιάσουμε μερικές νόρμες για πίνακες. Θα ορίσουμε δύο είδη νορμών πινάκων, τις *Schatten νόρμες* και τις *νόρμες τελεστών* (operator norms). Ο ορισμός των τελευταίων ακολουθεί.

Ορισμός Α΄.1.7 (Schatten νόρμες)**.** *Η Schatten p νόρμα του $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ορίζεται ως*

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{r} |\sigma_i|^p \right)^{1/p} ,$$

όπου σ_i είναι οι ιδιάζουσες τιμές και r ο βαθμός του πίνακα A.

Δύο σημαντικές περιπτώσεις Schatten νορμών είναι η *πυρηνική νόρμα* (nuclear norm) και η *νόρμα Frobenius* (Frobenius norm).

Ορισμός Α΄.1.8 (Πυρηνική νόρμα)**.** *Η πυρηνική νόρμα του $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ορίζεται ως*

$$\|A\|_* = \sum_{i=1}^{r} |\sigma_i| \,.$$

Ορισμός Α΄.1.9 (Νόρμα Frobenius). *Η νόρμα Frobenius του $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ ορίζεται ως*

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{r} |\sigma_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Στη συνέχεια, δίνουμε τον ορισμό των τελεστικών νορμών για πίνακες.

Ορισμός Α΄.1.10 (Τελεστικές νόρμες για πίνακες). *Η τελεστική νόρμα του $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ από το l_p στο l_q ορίζεται ως*

$$\|A\|_{p\to q} = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_p \le 1} \|A\boldsymbol{x}\|_q.$$

Ένα αποτέλεσμα που θα αποδειχθεί χρήσιμο περιέχεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα Α΄.1.1. *[FR13] Για την νόρμα Frobenius και την $2 \to 2$ νόρμα η ακόλουθη ανισότητα ισχύει*

$$\|A - B\|_{2\to 2} \le \|A - B\|_F.$$

Α΄.2 Κυρτή γεωμετρία

Μία θεμελιώδης έννοια στην κυρτή γεωμετρία είναι ο *κυρτός κώνος* (convex cone).

Ορισμός Α΄.2.1 (Κώνος και κυρτός κώνος). *[FR13] Το σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται κώνος εάν*

$$t\boldsymbol{x} \in C,\ \forall \boldsymbol{x} \in C,\ \forall t \ge 0.$$

Επιπλέον, το σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται κυρτός κώνος εάν

$$t\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{y} \in C,\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C,\ \forall t, s \ge 0.$$

Ουσιαστικά ένας κυρτός κώνος είναι ένα κυρτό σύνολο C που είναι ταυτόχρονα και κώνος. Δοθέντος ενός κώνου C, ο *πολικός κώνος* (polar cone) του C ορίζεται ως εξής.

Ορισμός Α΄.2.2 (Πολικός κώνος). *[FR13] Ο πολικός κώνος ενός κώνου C είναι*

$$C^\circ = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle \le 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in C\}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα στο κεφάλαιο 5.

Λήμμα Α΄.2.1. *[FR13] [Cha+12b] Έστω C ένας κυρτός κώνος, C° ο πολικός του κώνος και $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα. Τότε*

$$\max_{\boldsymbol{z}\in C, \|\boldsymbol{z}\|_2 \le 1} \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{z}\rangle \le \min_{\boldsymbol{z}\in C^\circ} \|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{z}\|_2.$$

Α΄.3 Ανάλυση

Το *θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης του Lebesgue*(Lebesgue's dominated convergence theorem) είναι ένα κλασικό αποτέλεσμα στη θεωρία μέτρου.

Θεώρημα Α΄.3.1. *[Θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης του Lebesgue] [Bre10] Έστω $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία συναρτήσεων έτσι ώστε οι ακόλουθες συνθήκες να ισχύουν*

1. $f_n \in L_1 = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, \int\limits_{\Omega} |f(x)|\, dx < +\infty \right\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ *σχεδόν παντού στο* Ω,

3. *Υπάρχει μία συνάρτηση* $g \in L_1$ *έτσι ώστε να ισχύει* $|f_n(x)| \leq g(x)$, *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$, *σχεδόν παντού στο* Ω.

   Τότε, $f \in L_1$ *και*
$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} f_n(x)dx = \int\limits_{\Omega} f(x)dx.$$

Α΄.3.1 Συναρτήσεις Βήτα και Γάμμα

Οι συναρτήσεις Βήτα και Γάμμα θα παίξουν σημαντικό ρόλο σε αυτή την εργασία.

Συνάρτηση Γάμμα

Η *συνάρτηση Γάμμα* (Gamma function) αποτελεί ένα συνεχές ανάλογο της συνάρτησης του παραγοντικού. [FR13]

Ορισμός Α΄.3.1 (Συνάρτηση Γάμμα)**.** *Για* $x > 0$ *η συνάρτηση Γάμμα είναι η*

$$\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{Α΄.1}$$

Λήμμα Α΄.3.1 (Ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα)**.** *Η συνάρτηση Γάμμα ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες*

1. $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ x > 0 \tag{Α΄.2}$$

2. $$\Gamma(n+1) = n!, \tag{Α΄.3}$$

   για όλους τους θετικούς ακεραίους n.

3. $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{Α΄.4}$$

Συνάρτηση Βήτα

Ο ορισμός της *συνάρτησης Βήτα* (Beta function) δίνεται παρακάτω.[FR13]

Ορισμός Α΄.3.2 (Συνάρτηση Βήτα)**.** *Για $x, y > 0$ η συνάρτηση Βήτα ορίζεται ως*

$$B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du.$$

Πρόταση Α΄.3.1 (Ιδιότητες συνάρτησης Βήτα)**.** *Για όλα τα $x, y > 0$ ισχύει ότι*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Α΄.4 Αριθμοί κάλυψης

Οι αριθμοί κάλυψης συχνά ανακύπτουν στο πλαίσιο της θεωρίας πιθανοτήτων υψηλών διαστάσεων. Πρακτικά, ο αριθμός κάλυψης ενός συνόλου T, κάποιου μετρικού χώρου (X, d), είναι ο μικρότερος αριθμός μπαλών δοθείσης ακτίνας ρ που καλύπτουν ολόκληρο το σύνολο. Ο επίσημος ορισμός ακολουθεί.

Ορισμός Α΄.4.1 (Αριθμός κάλυψης)**.** *[FR13] Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $T \subseteq X$ και $\rho > 0$. Ο αριθμός κάλυψης $\mathcal{N}(T, d, \rho)$ είναι ο μικρότερος αριθμός έτσι ώστε*

$$T \subseteq \bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{B}(\boldsymbol{x}_i, \rho),$$

όπου $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}_i, \rho) = \{\boldsymbol{x} \in X : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i) \leq \rho\}$ για $\boldsymbol{x}_i \in T$, $i \in \{1, \ldots, \mathcal{N}\}$.

Στη συνέχεια θα αποκτήσουμε ένα φράγμα για τον αριθμό κάλυψης ενός υποσυνόλου της μοναδιαίας μπάλας στο $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα Α΄.4.1 (Φράγμα για τον αριθμό κάλυψης της μοναδιαίας μπάλας στο $\mathbb{R}^n$)**.** *[FR13] Θεωρείστε τον χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και το σύνολο $T \subseteq \mathcal{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq 1\}$. Τότε έχουμε ότι*

$$\mathcal{N}(T, \|\cdot\|, \rho) \leq \left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^n. \tag{A΄.5}$$

Α΄.5 Λοιπά

Σε αυτήν την ενότητα δίνουμε κάποια αποτελέσματα, χωρίς αποδείξεις, τα οποία δεν ταιριάζουν στις προηγούμενες ενότητες.

Λήμμα Α΄.5.1 (Άνω φράγμα για τον συνδυαστικό τύπο)**.** *Έστω $n \geq k > 0$ κάποιοι ακέραιοι. Τότε,*

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

Ο τύπος του Strirling (Stirling's formula) είναι ένα κλασσικό αποτέλεσμα το οποίο παρέχει μία προσέγγιση της συνάρτησης του παραγοντικού. Μία συνέπεια του τύπου του Strirling περιέχεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα Α΄.5.2 (Τύπος του Strirling)**.** *Για όλους τους θετικούς ακεραίους n έχουμε ότι*

$$n! \geq \sqrt{2\pi} n^n e^{-n}.$$

Τέλος, χρειαζόμαστε και την ακόλουθη ανισότητα στο κεφάλαιο 4. Για περισσότερες λεπτομέρειες για το πως μπορούμε να αποκτήσουμε αυτήν την ανισότητα ανατρέξτε στο [FR13].

Λήμμα Α΄.5.3 (Ανισότητα Fenchel)**.**

$$xy \leq e^x + yln(y) - y, \forall x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Bibliography

[Ame+14] Dennis Amelunxen et al. "Living on the edge: Phase transitions in convex programs with random data". In: *Information and Inference* (2014), iau005.

[Bab+12] S Derin Babacan et al. "Sparse Bayesian methods for low-rank matrix estimation". In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 60.8 (2012), pp. 3964–3977.

[BCW10] Richard G Baraniuk, Volkan Cevher, and Michael B Wakin. "Low-dimensional models for dimensionality reduction and signal recovery: A geometric perspective". In: *Proceedings of the IEEE* 98.6 (2010), pp. 959–971.

[BM03] Samuel Burer and Renato DC Monteiro. "A nonlinear programming algorithm for solving semidefinite programs via low-rank factorization". In: *Mathematical Programming* 95.2 (2003), pp. 329–357.

[BM05] Samuel Burer and Renato DC Monteiro. "Local minima and convergence in low-rank semidefinite programming". In: *Mathematical Programming* 103.3 (2005), pp. 427–444.

[Boc+15] Holger Boche et al. "A Survey of Compressed Sensing". In: *Compressed Sensing and its Applications: MATHEON Workshop 2013*. Ed. by Holger Boche et al. Springer International Publishing, 2015, pp. 1–39.

[Bre10] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[BV04] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.

[Cha+12a] Djalil Chafaï et al. *Interactions between compressed sensing random matrices and high dimensional geometry*. Société Mathématique de France, 2012.

[Cha+12b] Venkat Chandrasekaran et al. "The convex geometry of linear inverse problems". In: *Foundations of Computational mathematics* 12.6 (2012), pp. 805–849.

[CP09] Patrick L Combettes and Jean-Christophe Pesquet. "Proximal splitting methods in signal processing". In: *arXiv preprint arXiv:0912.3522* (2009).

[CR09] Emmanuel J Candès and Benjamin Recht. "Exact Matrix Completion via Convex Optimization". In: *Foundations of computational mathematics* 9.6 (2009), pp. 717–772.

[CT05] Emmanuel J Candes and Terence Tao. "Decoding by linear programming". In: *IEEE transactions on information theory* 51.12 (2005), pp. 4203–4215.

[CW08] Emmanuel J Candès and Michael B Wakin. "An introduction to compressive sampling". In: *IEEE signal processing magazine* 25.2 (2008), pp. 21–30.

[Don06] David L Donoho. "Compressed sensing". In: *IEEE Transactions on information theory* 52.4 (2006), pp. 1289–1306.

[DR16] Mark A Davenport and Justin Romberg. "An overview of low-rank matrix recovery from incomplete observations". In: *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* 10.4 (2016), pp. 608–622.

[FG16] Carlos Fernandez-Granda. *Low-rank models*. Optimization-based Data Analysis, NYU. 2016.

[FR13] Simon Foucart and Holger Rauhut. *A mathematical introduction to compressive sensing*. Vol. 1. 3. Springer, 2013.

[Gor88] Y Gordon. "On Milman's inequality and random subspaces which escape through a mesh in Rn". In: *Lecture Notes in Mathematics* (1988), p. 84.

[GRK16] Paris V Giampouras, Athanasios A Rontogiannis, and Konstantinos D Koutroumbas. "Online low-rank subspace learning from incomplete data using rank revealing l2/l1 regularization". In: *Statistical Signal Processing Workshop (SSP), 2016 IEEE*. IEEE. 2016, pp. 1–5.

[GRK17a] Paris V Giampouras, Athanasios A Rontogiannis, and Konstantinos D Koutroumbas. "l1/l2 regularized non-convex low-rank matrix factorization". In: *Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations (SPARS) , Lisbon, June 2017* (2017).

[GRK17b] Paris V Giampouras, Athanasios A Rontogiannis, and Konstantinos D Koutroumbas. "Low-rank and Sparse NMF for Joint Endmembers' Number Estimation and Blind Unmixing of Hyperspectral Images". In: *arXiv preprint arXiv:1703.05785* (2017).

[GRK17c] Paris V Giampouras, Athanasios A Rontogiannis, and Konstantinos D Koutroumbas. "Low-rank matrix factorization via l1/l2 norm minimization". In: *(in preparation)* (2017).

[Gro11] D. Gross. "Recovering Low-Rank Matrices From Few Coefficients in Any Basis". In: *IEEE Transactions on Information Theory* 57.3 (2011), pp. 1548–1566.

[Ibm] *What is big data?* `https://www-01.ibm.com/software/data/bigdata/what-is-big-data.html`. [Online; accessed 18-February-2017].

[KC07] Jelena Kovacevic and Amina Chebira. "Life beyond bases: The advent of frames (Part I)". In: *IEEE Signal Processing Magazine* 24.4 (2007), pp. 86–104.

[Mov] *MovieLens dataset*. `https://grouplens.org/datasets/movielens/`. Accessed: 2017-05-01.

[Pri90] Roland Priemer. *Introductory signal processing*. World Scientific Publishing Co Inc, 1990.

[Rec11] Benjamin Recht. "A simpler approach to matrix completion". In: *Journal of Machine Learning Research* 12.Dec (2011), pp. 3413–3430.

[Ste+15] Zachary D Stephens et al. "Big data: astronomical or genomical?" In: *PLoS Biol* 13.7 (2015), e1002195.

[The15] Sergios Theodoridis. *Machine learning: a Bayesian and optimization perspective*. Academic Press, 2015.

[TW10] Joel A Tropp and Stephen J Wright. "Computational methods for sparse solution of linear inverse problems". In: *Proceedings of the IEEE* 98.6 (2010), pp. 948–958.

[YDC15] Alp Yurtsever, Quoc Tran Dinh, and Volkan Cevher. "A universal primal-dual convex optimization framework". In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2015, pp. 3150–3158.