



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

**Επίλυση μη-γραμμικών εξισώσεων Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας με
την μέθοδο της διχοτόμησης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Δ. Λιανός

Επιβλέπων: Νικόλαος Γ. Μαράτος
Καθηγητής

Αθήνα, Φεβρουάριος 2017



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

**Επίλυση μη-γραμμικών εξισώσεων Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας με
την μέθοδο της διχοτόμησης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Δ. Λιανός

Επιβλέπων: Νικόλαος Γ. Μαράτος
Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την

.....
Νικόλαος Μαράτος
Καθηγητής

.....
Κωνσταντίνος Βουρνάς
Καθηγητής

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας

Αθήνα, Φεβρουάριος 2017

.....

Νικόλαος Δ. Λιανός

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών ΕΜΠ

Copyright © Νικόλαος Δ. Λιανός, 2017

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η επίλυση μη-γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν από ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας (ΣΗΕ) κατά την ανάλυση ροής φορτίου, με την ιδιαιτερότητα όμως ότι η μέθοδος που αναπτύσσεται στα επόμενα κεφάλαια αφορά ΣΗΕ που δεν έχουν PV ζυγούς. Η μέθοδος αποσκοπεί στην εύρεση *όλων* των λύσεων που υπάρχουν εντός μίας αρχικής περιοχής αναζήτησης και όχι απλά στην εύρεση μίας λύσης. Για την ανάπτυξη της μεθόδου χρειάστηκε να αποδειχθούν κάποιες σημαντικές σχέσεις στο Κεφάλαιο 2 που αφορούν στην εύρεση ολικών ελαχίστων για κάποια ενδιάμεσα προβλήματα. Στη συνέχεια, έχουμε την ανάπτυξη του αλγορίθμου επίλυσης του προβλήματος ροής φορτίου ο οποίος βασίζεται στην ιδέα της επαναληπτικής διχοτόμησης δισδιάστατων χωρίων. Ο αλγόριθμος αυτός υλοποιείται στο διαδραστικό περιβάλλον MATLAB R2015a, επιλύονται παραδείγματα και ελέγχεται η ορθότητα των λύσεων που προκύπτουν σε κάθε περίπτωση. Καταληκτικά, παρουσιάζονται κάποια συμπεράσματα και παρατηρήσεις σχετικά με την λειτουργία και την απόδοση του αλγορίθμου.

Λέξεις κλειδιά

Σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας – καρτεσιανές συντεταγμένες, ροή φορτίου, ολική ελαχιστοποίηση, μέθοδος διχοτόμησης, αναζήτηση πρώτα στο καλύτερο

Abstract

The goal of this thesis is to solve systems of nonlinear equations which are derived from an electric power system (power flow analysis). The power systems that are solvable with his method do not have any PV buses and the purpose of the method is to find all the solutions within an initial search region as opposed to finding only one solution. While exploring the details of the method, some important results were proven as shown on Chapter 2, including the proofs for global minimums of two subproblems important to the overall method. The method relies on the method of bisection and it is implemented using the interactive environment MATLAB R2015a. Examples are used to demonstrate the correctness of the method and the results of these examples are verified. Finally, observations and limitations are reported in regards to the performance and function of the implemented algorithm.

Key words

Electric power system – Rectangular coordinates, power flow, global optimization, method of bisection, best first search

Ευχαριστίες

Με την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας ολοκληρώνεται και η διαδρομή των σπουδών μου ως Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών. Αυτή η διαδρομή σίγουρα ήταν πολύπλευρη. Χαρές και λύπες, επιτυχίες αλλά και απογοητεύσεις. Ανεξάρτητα όμως ήταν μια διαδρομή σημαντική, όμορφη και πάρα πολύ ενδιαφέρουσα. Και καθ' όλη τη διαδρομή αυτή υπήρξαν άτομα που θα ήθελα να ευχαριστήσω τώρα.

Πρώτα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντά μου στη διπλωματική εργασία, κ. Νικόλαο Μαράτο για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστούμε στο ενδιαφέρον αυτό θέμα. Καθ' όλη τη διάρκεια της εξαιρετικής συνεργασίας μας έμαθα πολλά και υπό την καθοδήγηση και βοήθειά του μου δόθηκε η ευκαιρία να συνδυάσω τις γνώσεις που αποκόμισα καθ' όλα τα έτη φοίτησής μου με δημιουργικό τρόπο προς την εκπόνηση της διπλωματικής αυτής εργασίας. Η εμπειρία αυτή σίγουρα ολοκληρώνει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο την πορεία των προπτυχιακών σπουδών μου και γι' αυτό δεν υπάρχουν αρκετά "ευχαριστώ" που να μπορώ να πω.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω και όλους τους υπόλοιπους καθηγητές της σχολής με τους οποίους είχα τη χαρά να συνεργαστώ και να μάθω τόσα πολλά κατά τη διάρκεια των σπουδών μου αφού δίχως εκείνους δεν θα ήμουν πνευματικά τουλάχιστον το άτομο που είμαι σήμερα.

Τέλος, πρέπει να δώσω τις ευχαριστίες μου από βάθη καρδιάς στους γονείς και φίλους μου, εντός και εκτός σχολής, για την στήριξή τους, τις συμβουλές και συμπαράστασή τους. Πάντα βρίσκονταν δίπλα μου, μεταφορικά και κυριολεκτικά, και δίχως αυτούς δε θα μπορούσα να έχω φτάσει ως εδώ.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή

1.1 Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας – Ροή Φορτίου.....	1
1.1.1 Έγχυση Ισχύος.....	2
1.1.2 Μήτρα Αγωγιμοτήτων.....	3
1.1.3 Θεμελίωση του προβλήματος ροών φορτίου.....	3
1.1.4 Τύποι ζυγών ροής φορτίου.....	4
1.2 Προβλήματα βελτιστοποίησης.....	5
1.2.1 Βασικές Έννοιες.....	5
1.2.2 Συνθήκες Βελτίστου.....	6
1.2.2.1 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για (τοπικά) ελάχιστα σε προβλήματα χωρίς περιορισμούς.....	7
1.2.2.2 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για (τοπικά) ελάχιστα σε προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς.....	8
1.2.2.3 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για (τοπικά) ελάχιστα σε προβλήματα με ισοτικούς και ανισωτικούς περιορισμούς.....	9
1.3 Αλγόριθμοι Αναζήτησης Λύσης Τεχνητής Νοημοσύνης (T.N.).....	12
1.3.1 Βασικές Έννοιες Τεχνητής Νοημοσύνης.....	12
1.3.1.1 Περιγραφή Χώρου Καταστάσεων.....	12
1.3.1.2 Περιγραφή με Αναγωγή.....	13
1.3.2 Αλγόριθμοι Αναζήτησης.....	14
1.3.2.1 Αναζήτηση Κατά Πλάτος.....	15
1.3.2.2 Αναζήτηση Κατά Βάθος.....	16
1.3.2.3 Αναζήτηση Πρώτα στο Καλύτερο.....	17

Κεφάλαιο 2 - Διατύπωση του προβλήματος και μέθοδος επίλυσης

2.1 Αναπαράσταση των εξισώσεων ροών φορτίου.....	19
2.1.1 Χρήσιμες Σχέσεις.....	19
2.1.2 Κατασκευή Εξισώσεων.....	20
2.2 Αλγόριθμος Επίλυσης του συστήματος εξισώσεων (E 1).....	23
2.2.1 Εύρεση Γενικού Ελαχίστου για το Πρόβλημα (P1).....	25
2.2.2 Εύρεση Γενικού Ελαχίστου για το Πρόβλημα (P2).....	31
2.3 Ανακεφαλαίωση, τελικά σχόλια και αλγόριθμος.....	42

Κεφάλαιο 3 - Υλοποίηση Αλγορίθμου, Παραδείγματα και Τελικά Συμπεράσματα

3.1 Υλοποίηση αλγορίθμου σε Matlab.....	45
3.2 Παραδείγματα.....	46
3.2.1 Παράδειγμα 1.....	47
3.2.2 Παράδειγμα 2.....	50
3.2.3 Παράδειγμα 3.....	54
3.2.3.i Παράδειγμα 3 (i).....	54
3.2.3.ii Παράδειγμα 3 (ii).....	61
3.2.3.iii Παράδειγμα 3 (iii).....	69
3.2.3.iv Παράδειγμα 3 (iv).....	76
3.2.4 Παράδειγμα 4.....	81
3.2.4.i Παράδειγμα 4 (i).....	81
3.2.4.ii Παράδειγμα 4 (ii).....	95
3.2.4.iii Παράδειγμα 4 (iii).....	109
3.2.5 Παράδειγμα 5.....	118
3.3 Τελικά Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις.....	133

Παράρτημα Α' - Κώδικας Matlab	135
Παράρτημα Β' - Διχοτόμηση ακτίνας, διχοτόμηση γωνίας, αντιπρόσωπος συνόλου περιορισμών	155
Βιβλιογραφία	161

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Αυτή η διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο μελέτης την ανάπτυξη μίας μεθόδου για την εύρεση όλων των λύσεων ενός συστήματος μη-γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν από ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας (ΣΗΕ). Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει η παρουσίαση βασικών λεπτομερειών που αφορούν στα ΣΗΕ και το πρόβλημα της ροής φορτίου αλλά και πληροφοριών σχετικά με την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης και αλγορίθμων αναζήτησης λύσεων από το πεδίο της Τεχνητής Νοημοσύνης που χρειάζονται για την κατανόηση της μεθόδου, όπως αυτή θα παρουσιαστεί στα επόμενα κεφάλαια. Η αρχική ιδέα για την μέθοδο προέκυψε στο τέλος της διπλωματικής του Μάριου Θεοφίλου με τίτλο *Διαφορά κυρτών συναρτήσεων: Επίλυση εξισώσεων συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας* [3] και στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής αυτή η ιδέα επεκτάθηκε και εξερευνήθηκε όπως θα παρουσιαστεί στα Κεφάλαια 2 και 3.

1.1 Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας – Ροή Φορτίου [1][2][3]

Ως *σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας* (ΣΗΕ) ορίζεται ένα δίκτυο που αποτελείται από ηλεκτρικά στοιχεία τα οποία χρησιμοποιούνται για την παραγωγή, μεταφορά και διανομή της ηλεκτρικής ενέργειας. Τα ΣΗΕ δηλαδή αποτελούν το σύνολο των εγκαταστάσεων και μέσων τα οποία χρειάζονται για την παροχή ηλεκτρικής ενέργειας σε περιοχές κατανάλωσης. Ένα οποιοδήποτε τέτοιο σύστημα αποτελείται από τέσσερις συνιστώσες:

1. την *παραγωγή*, η οποία επιτυγχάνεται με χρήση γεννητριών (π.χ. συμβατικές σύγχρονες γεννήτριες, ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, κ.λ.π.),
2. την *μεταφορά* υψηλής (μεγαλύτερης των 60kV) και υπερυψηλής (μεγαλύτερης των 250kV) τάσης μέσω εσωτερικών και εξωτερικών διασυνδέσεων,
3. την *διανομή* μέσης (μεγαλύτερης των 6kV) και χαμηλής τάσης,
4. και την *αξιοποίηση*, που πραγματοποιείται με χρήση κινητήρων (επαγωγής) σε βιομηχανικά δίκτυα και σε οικιακούς – εμπορικούς καταναλωτές.

Στα πλαίσια της διπλωματικής αυτής το ενδιαφέρον θα επικεντρωθεί στην λειτουργία ενός ΣΗΕ υπό συνθήκες μόνιμης κατάστασης (ΜΚ). Η ανάλυση της μόνιμης κατάστασης στο πλαίσιο των ΣΗΕ ονομάζεται μελέτη *ροών φορτίου* και συνίσταται στον υπολογισμό των τάσεων κατά μέτρο και γωνία σε όλους τους ζυγούς αλλά και των ροών ενεργού και αέργου ισχύος σε όλες τις γραμμές μεταφοράς του ΣΗΕ για ένα δεδομένο σημείο λειτουργίας, όπως αυτό καθορίζεται από τις καταναλώσεις των φορτίων, την παραγωγή ενεργού ισχύος και τις τάσεις των γεννητριών.

Υπάρχουν αρκετοί λόγοι για τους οποίους η μελέτη ροών φορτίου θεωρείται πολύ σημαντικό μέρος της μελέτης των ΣΗΕ. Κάποιοι από αυτούς είναι:

- Ο έλεγχος των τάσεων των ζυγών καθώς και των ροών ισχύος ούτως ώστε να παραμένουν εντός προκαθορισμένων σημείων λειτουργίας,
- Η μελέτη των επιπτώσεων από ενδεχόμενες διαταραχές (π.χ. απώλεια γραμμής, γεννήτριας κτλ),
- Η επιλογή της πιο οικονομικής λειτουργίας των γεννητριών που υφίστανται στο σύστημα. Δεδομένου ότι κατά τη διάρκεια της μέρας υπάρχει συνεχής μεταβολή του φορτίου, είναι

απαραίτητο να επαναυπολογισθεί η παραγόμενη ισχύς κάθε γεννήτριας του συστήματος ώστε να επιτυγχάνεται η οικονομικότερη τροφοδότηση των φορτίων.

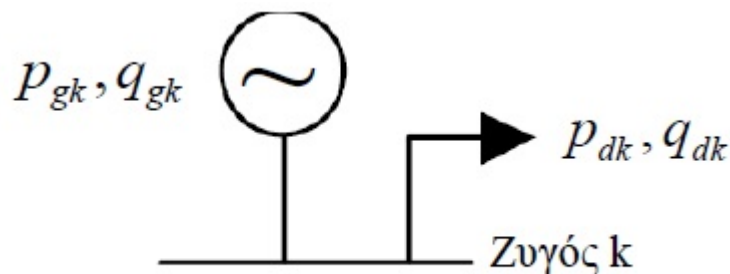
- Οι μελέτες ανάπτυξης και επέκτασης του συστήματος παραγωγής και μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας.

Σήμερα, όλα τα μεγάλα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας περιέχουν τριφασικά κυκλώματα. Για την μελέτη ροών φορτίου στην μόνιμη κατάσταση υπάρχει η δυνατότητα της ανάλυσης του τριφασικού κυκλώματος μέσω της μετατροπής του σε *ανά μονάδα σύστημα*. Η μελέτη ροών φορτίου λοιπόν γίνεται γενικά στα ανά μονάδα ισοδύναμα των υπό μελέτη ΣΗΕ. Η ροή φορτίου σε ένα δίκτυο καθορίζεται από την τάση σε κάθε ζυγό (bus) του δικτύου και τις αγωγιμότητες των γραμμών που συνδέουν τους ζυγούς. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού απαιτείται η εύρεση του συνόλου των τάσεων τόσο σε μέτρο όσο και σε γωνία που μαζί με τις αγωγιμότητες του δικτύου παράγουν τη δεδομένη ροή φορτίου.

1.1.1 Έγχυση Ισχύος

Ένα ΣΗΕ μπορεί αρχικά να θεωρηθεί ως ένα σύνολο από ζυγούς οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με χρήση γραμμών μεταφοράς. Ο κάθε ζυγός μπορεί να συνδεθεί με ηλεκτρικό εξοπλισμό ο οποίος μπορεί να παράγει ή/και να καταναλώνει (ενεργό και άεργο) ισχύ από το σύστημα. Δηλαδή, κάθε ζυγός είναι δυνατόν να έχει και παραγωγή και φορτίο, το οποίο οδηγεί στον ορισμό της έννοιας “έγχυση ισχύος”.

Έγχυση ισχύος είναι η ισχύς, ενεργός ή άεργος, που εγχέεται σε ή από ένα ζυγό όταν συνδέεται σε αυτόν μια γεννήτρια ή ένα φορτίο (φορτίο σταθερής ενεργού και άεργου ισχύος) αντίστοιχα. Κατά σύμβαση θεωρούμε ότι έχουμε θετική έγχυση αν ισχύς ρέει από το στοιχείο προς το ζυγό και αρνητική όταν ρέει από τον ζυγό προς το στοιχείο. Στο Σχήμα 1.1.1 αποτυπώνεται η έγχυση ισχύος για τον ζυγό k.



Σχήμα 1.1.1: Έγχυση ισχύος στον ζυγό k

Όπως αναφέρθηκε, η έγχυση ισχύος αφορά ενεργό και άεργο ισχύ.

Η έγχυση ενεργού ισχύος είναι:

$$P_k = P_{gk} - P_{dk} \quad (1.1)$$

Αντίστοιχα, η έγχυση άεργου ισχύος είναι:

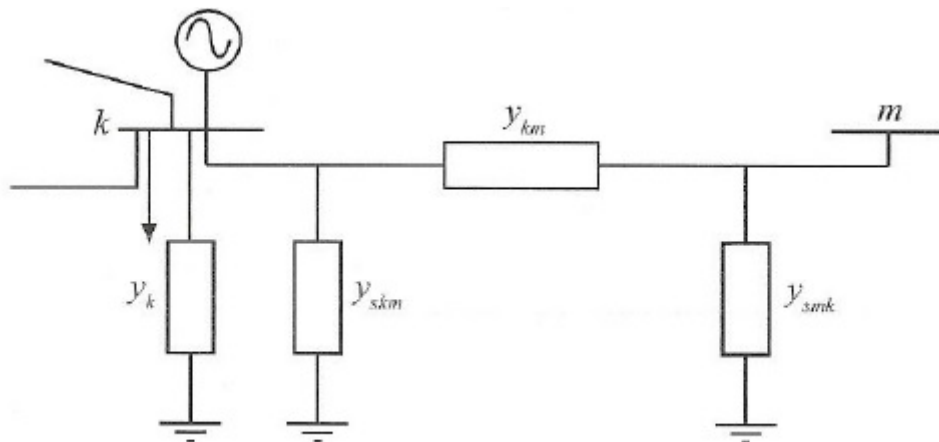
$$Q_k = Q_{gk} - Q_{dk} \quad (1.2)$$

Τέλος, ορίζουμε την μιγαδική έγχυση ισχύος ως εξής

$$S_k = S_{gk} - S_{dk} = P_k + j \cdot Q_k \quad (1.3)$$

1.1.2 Μήτρα Αγωγιμοτήτων

Στο Σχήμα 1.1.2, απεικονίζεται ένας γενικευμένος ζυγός k του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας ο οποίος συνδέεται με τον ζυγό m μέσω μίας γραμμής μεταφοράς.



Σχήμα 1.1.2: Γενικευμένος ζυγός ΣΗΕ

Στην συνέχεια θα ορίσουμε την μήτρα αγωγιμοτήτων ενός ΣΗΕ η οποία είναι πολύ σημαντική για την επίλυση του προβλήματος ροών φορτίου. Σημειώνεται ότι για την αναπαράσταση των γραμμών μεταφοράς γίνεται χρήση του ονομαστικού Π μοντέλου.

Αρχικά ας θεωρηθεί ότι

$$A(k) = \{m : y_{km} \neq 0\} \quad (1.4)$$

δηλαδή το $A(k)$ είναι το σύνολο που περιέχει τους δείκτες των ζυγών m που συνδέονται με τον ζυγό k . Τότε, με βάση το Σχήμα 1.1.2 και την (1.4), μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία της μήτρας αγωγιμοτήτων από τις εξής σχέσεις:

$$Y_{kk} = y_k + \sum_{m \in A(k)} (y_{skm} + y_{km}) \quad (1.5)$$

$$Y_{km} = -y_{km} \quad (1.6)$$

όπου y_k είναι η εγκάρσια αγωγιμότητα του ζυγού k , y_{km} είναι η αγωγιμότητα σειράς της γραμμής μεταφοράς που συνδέει τους ζυγούς k και m και y_{skm} και y_{smk} είναι οι εγκάρσιες αγωγιμότητες της γραμμής μεταφοράς ανάμεσα στους ζυγούς k και m . Στις αγωγιμότητες συμπεριλαμβάνονται τα φορτία με σταθερή αγωγιμότητα, δηλαδή οι εγκάρσιες αγωγιμότητες του ζυγού αλλά όχι τα φορτία σταθερής ενεργού και αέργου ισχύος, αυτά συμπεριλαμβάνονται υπό την μορφή εγχύσεων ισχύος. Σημειώνεται ότι για ένα ΣΗΕ με n το πλήθος ζυγούς η μήτρα αγωγιμοτήτων θα έχει διαστάσεις ($n \times n$) και θα είναι συμμετρική.

1.1.3 Θεμελίωση του προβλήματος ροών φορτίου

Υπενθυμίζεται ότι το πρόβλημα ροών φορτίου αφορά στην επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν από την ανάλυση του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας. Όπως είναι λογικό, για να

υπάρξει λύση θα πρέπει το πλήθος των αγνώστων να ταυτίζεται με το πλήθος των εξισώσεων. Για ένα ΣΗΕ με n ζυγούς γενικά θα υπάρχουν $(n-1)$ μιγαδικές εξισώσεις με $(n-1)$ μιγαδικούς αγνώστους. Οι μιγαδικές αυτές εξισώσεις μετατρέπονται σε πραγματικές, μη γραμμικές εξισώσεις και για την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιούνται επαναληπτικοί αλγόριθμοι (π.χ. Newton-Raphson, Gauss-Seidel, κ.λ.π.).

Οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για την εύρεση μιας λύσης στο πρόβλημα ροής φορτίου αποτυπώνουν και υπολογίζουν τις μιγαδικές τάσεις στην πολική μορφή τους, δηλαδή ως μέτρο και φασική γωνία ($\tilde{V}_k = |V_k| \angle \delta_k$).

Στα πλαίσια της διπλωματικής αυτής για την εύρεση όλων των λύσεων του συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων με την μέθοδο που θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 2 οι μιγαδικές τάσεις θα χρησιμοποιούνται με την καρτεσιανή τους μορφή και όχι την πολική, δηλαδή με την μορφή

$$\tilde{V}_k = a_k + j \cdot f_k \quad (1.7)$$

όπου a_k είναι το πραγματικό και f_k το φανταστικό μέρος της μιγαδικής τάσης.

1.1.4 Τύποι ζυγών ροής φορτίου

Για να γίνει πιο εύκολα αντιληπτή η κατηγοριοποίηση των ζυγών ενός ΣΗΕ πρέπει πρώτα να γίνει αναφορά στις 4 μεταβλητές που αντιστοιχούν σε κάθε ένα ζυγό.

- Το μέτρο της τάσης $|V_k|$ του ζυγού (γενικά σε ανά μονάδα (*per unit*) σύστημα).
- Η φασική γωνία της τάσης δ_k του ζυγού.
(Σημείωση, αυτά τα μεγέθη γιατί συνήθως η τάση δίνεται σε πολική μορφή. Αλλιώς αντίστοιχα πρέπει να γνωρίζουμε τα πραγματικά και φανταστικά μέρη)
- Η έγχυση πραγματικής ισχύος, όπως ορίστηκε στην (1.1).
- Η έγχυση αέργου ισχύος, όπως ορίστηκε στην (1.2).

Ανάλογα με το ποιες μεταβλητές από τις παραπάνω είναι γνωστές σε κάποιον ζυγό είναι δυνατόν να του ταξινομήσουμε σε τρεις κατηγορίες

1. Ζυγός ταλάντωσης ή αναφοράς (*slack bus*) είναι ειδικός ζυγός στον οποίο το μέτρο και η φασική γωνία της τάσης θεωρούνται γνωστά, συγκεκριμένα για την φασική γωνία θεωρούμε ότι ισούται με 0 μοίρες ($\delta = 0^\circ$). Δηλαδή:

$$\tilde{V}_1 = V_0 \angle 0 = V_0 + j \cdot 0 \Rightarrow a_1 = V_0 \text{ και } f_1 = 0$$
 Ακόμη, η πραγματική και αέργος εγχυόμενη ισχύς αφήνονται ελεύθερες. Ο ζυγός ταλάντωσης πρέπει να μπορεί να παράγει ενεργό και άεργο ισχύ.
2. Ζυγός φορτίου ή PQ (*Load bus*) ονομάζεται κάθε ζυγός ο οποίος έχει γνωστή έγχυση ενεργού και αέργου ισχύος, δηλαδή p_k και q_k (από (1.1) και (1.2)) είναι γνωστές ποσότητες.
3. Ζυγός παραγωγής ή PV (*Generator bus/ Voltage -controlled bus*) ονομάζεται κάθε ζυγός για τον οποίο γνωρίζουμε την έγχυση ενεργού ισχύος (P) καθώς και την τιμή του μέτρου της τάσης ($|V|$) μόνο.

Στα πλαίσια της διπλωματικής η μέθοδος επίλυσης που διατυπώνεται αφορά σε δίκτυα με ένα ζυγό ταλάντωσης (από σύμβαση τον ζυγό 1) με όλους τους υπόλοιπους ζυγούς να είναι ζυγοί PQ, δεν επιλύονται δηλαδή δίκτυα που περιέχουν PV ζυγούς.

1.2 Προβλήματα βελτιστοποίησης [4][5][6][7][8]

Στην ενότητα αυτή, γίνεται εισαγωγή σε βασικές έννοιες της βελτιστοποίησης, καθώς επίσης και διατύπωση των αναγκαίων και ικανών συνθηκών ελαχίστου (και μεγίστου) που θα χρειαστούν για την θεμελίωση της μεθόδου που θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 2.

1.2.1 Βασικές Έννοιες

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίζεται σε εύρεση ελαχίστου ή σε εύρεση μεγίστου μιας αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$. Βασικές έννοιες για την διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης αποτελούν:

- Η αντικειμενική συνάρτηση $f(x)$, όπου το x είναι ένα διάνυσμα του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^n . Η αντικειμενική συνάρτηση είναι αυτή της οποίας επιθυμούμε να βρούμε την ελάχιστη ή μέγιστη τιμή καθώς και το αντίστοιχο σημείο ελαχίστου ή μεγίστου. Προφανώς ισχύει ότι $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- Οι περιορισμοί, οι οποίοι χωρίζονται σε ισοτικούς, δηλαδή της μορφής $g_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, και ανισωτικούς, δηλαδή της μορφής $h_j(x) \leq 0$, $j = 1, 2, \dots, l$.

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης στην γενική του μορφή διατυπώνεται ως εξής:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) : g_i(x) = 0, h_j(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, l\} \quad (1.8)$$

Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του επιτρεπτού συνόλου F ως εξής:

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0, h_j(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, l\} \quad (1.9)$$

Σημειώνεται ότι $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Τότε, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$\min \{f(x) : x \in F\} \quad (1.10)$$

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα είναι αυτή που συνδέει το πρόβλημα μεγιστοποίησης και το αντίστοιχο ελαχιστοποίησης. Συγκεκριμένα ισχύει η παρακάτω ταυτότητα:

$$\max_{x \in F} \{f(x)\} = -\min_{x \in F} \{-f(x)\} \quad (1.11)$$

Από την (1.11) είναι ξεκάθαρο ότι τα προβλήματα μεγιστοποίησης μπορούν απλά να αναχθούν σε προβλήματα ελαχιστοποίησης.

Για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν είτε αναλυτικές είτε επαναληπτικές μέθοδοι. Στην εργασία αυτή τα προβλήματα βελτιστοποίησης που παρουσιάζονται έχουν αναλυτικές λύσεις οπότε στην επόμενη υποενότητα θα γίνει παρουσίαση των συνθηκών (ικανών και αναγκαίων) βελτίστου.

1.2.2 Συνθήκες Βελτίστου

Όπως αναφέρθηκε ήδη, ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης μπορεί να αναχθεί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης (ταυτότητα 1.11). Ενώ λοιπόν γίνεται λόγος για συνθήκες βελτίστου, στην ουσία οι συνθήκες αυτές θα παρουσιαστούν αναφορικά με ελάχιστα.

Πριν την διατύπωση των συνθηκών θα πρέπει φυσικά να δοθεί και ο ορισμός του ελαχίστου, τοπικού αλλά και γενικού.

Ορισμός 1

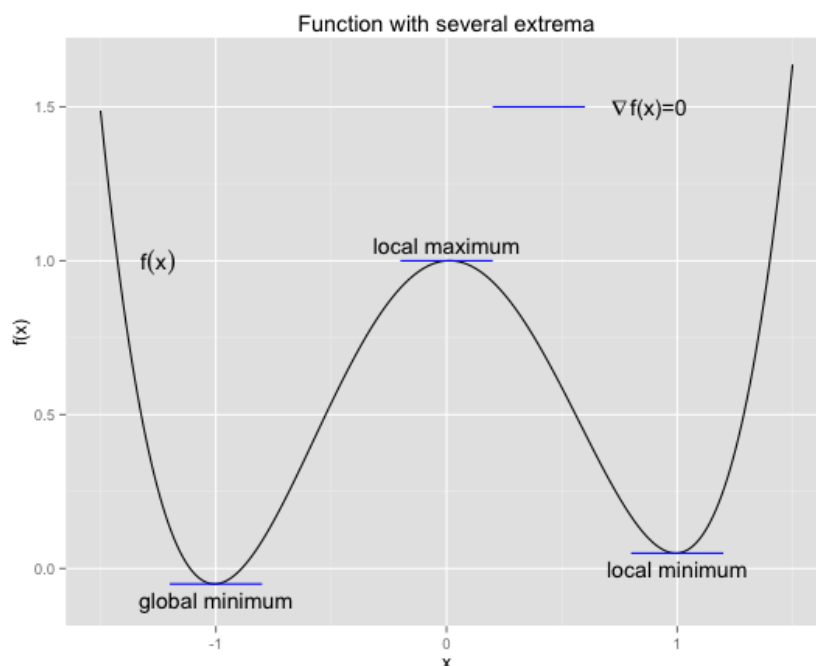
Ένα σημείο $x^* \in F$ λέγεται *σημείο γενικού ελαχίστου* της f πάνω στο επιτρεπτό σύνολο F αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x^*)$, $\forall x \in F$. Η τιμή της f στο x^* λέγεται τότε *γενικό ελάχιστο* (*global minimum*).

Ορισμός 2

Ένα σημείο $x^* \in F$ λέγεται *σημείο τοπικού ελαχίστου* της f πάνω στο επιτρεπτό σύνολο F αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x^*)$, $\forall x \in F$ και $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$. Η τιμή της f στο x^* λέγεται τότε *τοπικό ελάχιστο* (*local minimum*).

Όπως προκύπτει από τους ορισμούς, ένα τοπικό ακρότατο αφορά σε μία *περιοχή* “κοντά” στο σημείο τοπικού ακρότατου και άρα ενδέχεται να μην είναι γενικό ακρότατο.

Στο Σχήμα 1.2.1 φαίνεται και γραφικά η διαφορά ανάμεσα σε ολικά και τοπικά ακρότατα.



Σχήμα 1.2.1 Τοπικά και ολικά ακρότατα συνάρτησης $f(x)$

Θεώρημα Weierstrass

Αν η συνάρτηση $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της D και το D είναι ένα φραγμένο και κλειστό, άρα συμπαγές (*compact*), σύνολο, τότε η f έχει γενικό ελάχιστο (και μέγιστο) στο D .

Στο σημείο αυτό θα αποδειχθεί το εξής χρήσιμο *λήμμα*:

Πρόταση - Λήμμα

Ας είναι $F \subset \tilde{F} \subset \mathbb{R}^n$ και έστω επίσης

- $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x): x \in F\}$ (P)
- $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x): x \in \tilde{F}\}$ (\tilde{P})

Αν το \tilde{x} είναι σημείο γενικού ελαχίστου του (\tilde{P}) και αν $\tilde{x} \in F$, τότε το \tilde{x} είναι σημείο γενικού ελαχίστου του (P).

Απόδειξη

Θα είναι $f(\tilde{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x): x \in \tilde{F}\} \leq \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x): x \in F\}$ αφού έχουμε $F \subset \tilde{F}$. Όμως, $\tilde{x} \in F$ από υπόθεση, άρα $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x): x \in F\} \leq f(\tilde{x})$.

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο ότι $f(\tilde{x}) \leq \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x): x \in F\} \leq f(\tilde{x})$ και άρα θα πρέπει τελικά $f(\tilde{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x): x \in F\}$, δηλαδή το \tilde{x} είναι σημείο γενικού ελαχίστου του (P).

ό.ε.δ

1.2.2.1 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για (τοπικά) ελάχιστα σε προβλήματα χωρίς περιορισμούς

Πρόβλημα χωρίς περιορισμούς (*unconstrained optimization problem*) ονομάζεται κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης όπου το επιτρεπτό σύνολο F ταυτίζεται με το \mathbb{R}^n , δηλαδή δεν υπάρχουν ούτε ανισωτικοί ούτε ισοτικοί περιορισμοί.

Θεώρημα Fermat (αναγκαίες συνθήκες πρώτης τάξης)

Αν η $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και το $x^* \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο (τοπικού) ελαχίστου της f , τότε ισχύει

$$\nabla f(x^*) = \mathbf{0} \quad (1.12)$$

δηλαδή,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) = 0, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0$$

Ορισμός

Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η κλίση της f , δηλαδή τα σημεία όπου ισχύει η (1.12), ονομάζονται *στάσιμα σημεία*.

Το σύνολο $D = \{x \in \mathbb{R}^n: \nabla f(x) = \mathbf{0}\}$ των στάσιμων σημείων της f περιέχει όλα τα σημεία ελαχίστου και μέγιστου της f καθώς επίσης και άλλα σημεία που δεν αποτελούν όμως ακρότατα της f , αφού το θεώρημα Fermat αποτελεί αναγκαία συνθήκη, όχι όμως ικανή.

Θεώρημα (αναγκαίες συνθήκες δεύτερης τάξης)

Αν η $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη και το $x^* \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο (τοπικού) ελαχίστου της f , τότε ισχύει

$$\bullet \quad \nabla f(x^*) = \mathbf{0} \quad (1.12)$$

και

- η μήτρα των δευτέρων παραγώγων της f είναι θετικά ημιορισμένη, δηλαδή

$$y^T \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*) \cdot y \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (1.13)$$

Θεώρημα (ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης)

Αν η $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη και για κάποιο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι:

$$\bullet \quad \nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$$

και

- η μήτρα των δευτέρων παραγώγων της f είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή

$$y^T \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}) \cdot y > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

τότε το \bar{x} είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο της f .

1.2.2.2 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για (τοπικά) ελάχιστα σε προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς

Πρόβλημα με ισοτικούς περιορισμούς (constrained optimization problem) ονομάζεται κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης όπου το επιτρεπτό σύνολο F είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^n και οι περιορισμοί του προβλήματος είναι της μορφής $g_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Όπως και για προβλήματα χωρίς περιορισμούς, έτσι και για προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς θα δοθούν οι αναγκαίες συνθήκες 1^{ης} και 2^{ης} τάξης καθώς και οι ικανές συνθήκες.

Ορισμός

Κανονικό σημείο ονομάζεται ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί $g(\bar{x}) = \mathbf{0}$ και ακόμη τα διανύσματα κλίσεων $\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x}), \dots, \nabla g_m(\bar{x})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα (αναγκαίες συνθήκες πρώτης τάξης)

Αν οι $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες και το $x^* \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο (τοπικού) ελαχίστου της f με περιορισμούς $g(x) = 0$ και ακόμη το x^* είναι κανονικό σημείο των περιορισμών, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε:

$$\bullet \quad \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x^*) = \mathbf{0} \quad (1.14)$$

και

$$\bullet \quad g(x^*) = \mathbf{0} \quad (1.15)$$

Ορισμός

Ως *Λαγκρανζιανή συνάρτηση* ορίζουμε τη συνάρτηση $L: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot g_j(x) \quad .$$

Με χρήση της Λαγκρανζιανής μπορούμε τότε να γράψουμε τις (1.14), (1.15) ισοδύναμα ως εξής:

$$\bullet \quad \nabla_x L(x^*, \lambda) = \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x^*) = \mathbf{0} \quad (1.14 \beta)$$

$$\bullet \quad \nabla_\lambda L(x^*, \lambda) = g(x^*) = \mathbf{0} \quad (1.15 \beta)$$

Θεώρημα (αναγκαίες συνθήκες δεύτερης τάξης)

Αν οι $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες και το $x^* \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο (τοπικού) ελαχίστου της f με περιορισμούς $g(x) = 0$ και ακόμη το x^* είναι κανονικό σημείο των περιορισμών, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε:

$$\bullet \quad \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x^*) = \mathbf{0} \quad (1.14)$$

και

$$\bullet \quad g(x^*) = \mathbf{0} \quad (1.15)$$

και

$$\bullet \quad y^T \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^*, \lambda) \cdot y \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ που ικανοποιεί } \nabla g_j(x^*)^T \cdot y = 0, \quad j=1,2,\dots,m \quad (1.16)$$

όπου $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^*, \lambda) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^2}(x^*)$ η μήτρα δευτέρων παραγώγων της Λαγκρανζιανής συνάρτησης L .

Θεώρημα (ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης)

Έστω τα σημεία $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Αν τα σημεία αυτά ικανοποιούν τις (1.14) (ή (1.14 β)) και (1.15) (ή (1.15 β)) και ακόμη ισχύει:

$$y^T \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \lambda) \cdot y > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ που ικανοποιεί } \nabla g_j(\bar{x})^T \cdot y = 0, \quad j=1,2,\dots,m, \text{ δηλαδή η μήτρα}$$

δευτέρων παραγώγων της Λαγκρανζιανής συνάρτησης L να είναι θετικά ορισμένη στο σύνολο

$T = \{y \in \mathbb{R}^n: \nabla g_j(\bar{x})^T \cdot y = 0, \quad j=1,2,\dots,m\}$, τότε το \bar{x} είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο της f πάνω στους περιορισμούς.

1.2.2.3 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για (τοπικά) ελάχιστα σε προβλήματα με ισοτικούς και ανισωτικούς περιορισμούς

Πρόβλημα με ισοτικούς και ανισωτικούς περιορισμούς (constrained optimization problem)

ονομάζεται κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης όπου το επιτρεπτό σύνολο F είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^n και οι περιορισμοί του προβλήματος είναι της μορφής $g_i(x) = 0$, $i=1,2,\dots,m$ ή της μορφής

$$h_j(x) \leq 0, \quad j=1,2,\dots,l \quad .$$

Σημειώνεται ότι περιορισμοί της μορφής $h_j(x) \geq 0$, $j=1,2,\dots,l$ δεν χρειάζονται ξεχωριστή διερεύνηση αφού κάθε τέτοιος περιορισμός μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί ως $\bar{h}_j(x) = -h_j(x) \leq 0$, $j=1,2,\dots,l$.

Πριν δοθούν τα θεωρήματα αναγκαίων και ικανών συνθηκών θα πρέπει να ορισθεί το σύνολο ενεργών ανισωτικών περιορισμών και να επεκταθεί ο ορισμός του κανονικού σημείου τώρα που υπάρχουν και ανισωτικοί περιορισμοί.

Ορισμός

Για ένα σημείο x του επιτρεπτού συνόλου F (όπως ορίζεται στην (1.9)) ορίζουμε το *σύνολο ενεργών περιορισμών του x* ως $J(x) = \{j: h_j(x) = 0\}$, δηλαδή ένας ανισωτικός περιορισμός θα καλείται ενεργός για κάποιο x όταν είναι ίσος με το μηδέν για το x αυτό. Σε αντίθετη περίπτωση θα λέγεται *μη-ενεργός*.

Ορισμός

Κανονικό σημείο ονομάζεται ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί $g(\bar{x}) = \mathbf{0}$ και $h(\bar{x}) \leq \mathbf{0}$ και ακόμη οι κλίσεις $\nabla g_i(\bar{x})$, $\nabla h_j(\bar{x})$, $i=1,2,\dots,m$, $j \in J(\bar{x})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θεώρημα (αναγκαίες συνθήκες πρώτης τάξης ή Συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker)

Αν οι $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες και το $x^* \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο (τοπικού) ελαχίστου της f με περιορισμούς $g(x) = 0$ και $h(x) \leq 0$ και ακόμη το x^* είναι κανονικό σημείο των περιορισμών, τότε υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}^m$ και $\mu \in \mathbb{R}^l$ τέτοια ώστε:

$$\bullet \quad \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x^*) + \sum_{i=1}^l \mu_i \nabla h_i(x^*) = \mathbf{0} \quad (1.17)$$

και

$$\bullet \quad g_j(x^*) = 0, \quad j=1,2,\dots,m \quad (1.18)$$

και

$$\bullet \quad h_i(x^*) \leq 0, \quad i=1,2,\dots,l \quad (1.19)$$

και

$$\bullet \quad \mu_i h_i(x^*) = 0, \quad i=1,2,\dots,l \quad (1.20)$$

και

$$\bullet \quad \mu_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,l \quad (1.21)$$

Ορισμός

Ως *Λαγκρανζιανή συνάρτηση* ορίζουμε τη συνάρτηση $L: \mathbb{R}^{n+m+l} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot g_j(x) + \sum_{i=1}^l \mu_i \cdot h_i(x) .$$

Με χρήση της Λαγκρανζιανής μπορούμε τότε να γράψουμε τις (1.17), (1.18) και (1.19) ισοδύναμα ως εξής:

$$\bullet \quad \nabla_x L(x^*, \lambda, \mu) = \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x^*) + \sum_{i=1}^l \mu_i \nabla h_i(x^*) = \mathbf{0} \quad (1.17 \beta)$$

$$\bullet \quad \nabla_\lambda L(x^*, \lambda, \mu) = g(x^*) = \mathbf{0} \quad (1.18 \beta)$$

$$\bullet \quad \nabla_\mu L(x^*, \lambda, \mu) = h(x^*) \leq \mathbf{0} \quad (1.19 \beta)$$

Θεώρημα (αναγκαίες συνθήκες δεύτερης τάξης)

Αν οι $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες και το $x^* \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο (τοπικού) ελαχίστου της f με περιορισμούς $g(x) = 0$ και $h(x) \leq 0$ και ακόμη το x^* είναι κανονικό σημείο των περιορισμών, υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}^m$ και $\mu \in \mathbb{R}^l$ τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι αναγκαίες συνθήκες 1ης τάξης (Συνθήκες K-K-T) (1.17)-(1.21) και ακόμη

$$y^T \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^*, \lambda, \mu) \cdot y \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ που ικανοποιεί } \nabla g_j(x^*)^T \cdot y = 0, \quad j=1,2,\dots,m$$

(1.22)

και

$$\nabla h_i(x^*)^T \cdot y = 0, \quad i \in J(x^*)$$

όπου $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^*, \lambda, \mu) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^2}(x^*) + \sum_{i=1}^l \mu_i \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^*)$ η μήτρα δευτέρων παραγώγων της Λανγκραζιανής συνάρτησης L .

Θεώρημα (ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης)

Έστω τα σημεία $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ και $\mu \in \mathbb{R}^l$. Αν τα σημεία αυτά ικανοποιούν τις Συνθήκες K-K-T ((1.17) – (1.21)) και ακόμη ισχύει:

$$y^T \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \lambda, \mu) \cdot y > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ που ικανοποιεί } \nabla g_j(\bar{x})^T \cdot y = 0, \quad j=1,2,\dots,m$$

και

$$\nabla h_i(\bar{x})^T \cdot y = 0, \quad i \in \{i: h_i(\bar{x}) = 0, \mu_i > 0\}$$

δηλαδή η μήτρα δευτέρων παραγώγων της Λανγκραζιανής συνάρτησης L να είναι θετικά ορισμένη στο σύνολο $T = \{y \in \mathbb{R}^n: \nabla g_j(\bar{x})^T \cdot y = 0, \quad j=1,2,\dots,m, \nabla h_i(\bar{x})^T \cdot y = 0, \quad i \in J'(\bar{x})\}$, όπου για το σύνολο $J'(x)$ ισχύει $J'(x) = \{i: h_i(x) = 0, \mu_i > 0\}$, τότε το \bar{x} είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο της f πάνω στους περιορισμούς.

Σημείωση

Στην ειδική περίπτωση της μίας διάστασης, η ικανή συνθήκη 2ης τάξης για (τοπικό) ακρότατο λαμβάνει την εξής μορφή.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 που ανήκει στο εσωτερικό του D . Εφόσον ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$, τότε:

- Αν $f''(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x_0 .
- Αν $f''(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο x_0 .
- Αν $f''(x_0) = 0$ και $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, τότε η f έχει σημείο καμπής στη θέση x_0 .

Επίσης, μπορεί να γίνει χρήση της μονοτονίας της συνάρτησης για την εύρεση ενός ακρότατου.

Πρόταση

Έστω μια συνάρτηση $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D = [\alpha, \beta]$. Εφόσον η f είναι γνησίως μονότονη στο D , θα έχουμε:

- Αν f γνησίως αύξουσα στο D , τότε το α είναι σημείο ελαχίστου ενώ το β είναι σημείο μεγίστου.
- Αν f γνησίως φθίνουσα στο D , τότε το α είναι σημείο μεγίστου ενώ το β είναι σημείο ελαχίστου.

1.3 Αλγόριθμοι Αναζήτησης Λύσης Τεχνητής Νοημοσύνης (T.N.) [9][10][11]

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιαστούν κάποιες βασικές έννοιες από την Τεχνητή Νοημοσύνη καθώς επίσης και τρεις αλγόριθμοι αναζήτησης λύσεων: η κατά πλάτος αναζήτηση (breadth first search, BFS), η κατά βάθος αναζήτηση (depth first search, DFS) και η αναζήτηση πρώτα στο καλύτερο (best first search, BestFS). Ο Best First αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε στην υλοποίηση της μεθόδου που αναπτύχθηκε σε Matlab, όπως αυτή θα παρουσιαστεί συνοπτικά στο κεφάλαιο 3 αλλά και συνολικά σε μορφή κώδικα Matlab στο παράρτημα A (Appendix A).

1.3.1 Βασικές Έννοιες Τεχνητής Νοημοσύνης

Το πρόβλημα ως έννοια χαρακτηρίζεται από τα παρακάτω τρία βασικά συστατικά:

1. Μία δεδομένη αρχική κατάσταση (*initial state*)
2. Μία επιθυμητή τελική κατάσταση (*final state*)
3. Ένα σύνολο από διαθέσιμες ενέργειες που μπορούν να γίνουν για μετάβαση από μία κατάσταση σε επόμενη κατάσταση

Σημειώνεται ότι η τελική κατάσταση μπορεί είτε να έχει γνωστή, πλήρη περιγραφή ή ενδέχεται να μην είναι πλήρως ορισμένη αλλά να είναι γνωστές κάποιες ιδιότητες που θέλουμε να έχει. Παράδειγμα της δεύτερης περίπτωσης είναι οι λύσεις συστήματος εξισώσεων, δεν γνωρίζουμε εξ' αρχής ποιες είναι αυτές αλλά ξέρουμε πώς να τις αναγνωρίσουμε, με επαλήθευση των εξισώσεων.

Τα προβλήματα περιγράφονται με έναν από δύο τρόπους: στο Χώρο Καταστάσεων (*State Space*) ή με Αναγωγή (*Reduction*).

1.3.1.1 Περιγραφή Χώρου Καταστάσεων

Βασικές έννοιες που πρέπει να οριστούν σχετικά με την περιγραφή στο χώρο καταστάσεων αποτελούν ο κόσμος του προβλήματος, η κατάσταση του κόσμου, οι τελεστές μετάβασης, ο χώρος καταστάσεων.

Ορισμός

Ως κόσμος ενός προβλήματος (*problem world*) ορίζεται υποσύνολο του πραγματικού κόσμου το οποίο αποτελείται μόνο από τα αντικείμενα του προβλήματος, τις σχέσεις που τα συνδέουν και τις ιδιότητες που το καθένα έχει.

Ο κόσμος του προβλήματος μπορεί να είναι ανοιχτός ή κλειστός. Κλειστός λέγεται όταν τίποτα δεν εισέρχεται ή εξέρχεται προς ή από τον κόσμο. Αντίθετα, λέγεται ανοιχτός.

Ορισμός

Κατάσταση ενός κόσμου (*world state*) καλείται μία επαρκής αναπαράσταση του κόσμου πάνω σε μία δεδομένη χρονική στιγμή.

Όπως είναι λογικό στην αναπαράσταση αυτή επιλέγονται μόνο οι ιδιότητες και σχέσεις εκείνες των αντικειμένων που είναι σημαντικές για την επίλυση του προβλήματος, δηλαδή για να μεταβούμε από την αρχική στην τελική, επιθυμητή κατάσταση.

Ορισμός

Ως *τελεστή μετάβασης (transition operator)* ή *ενέργεια (action)* ορίζουμε μια σχέση $T: S \rightarrow S$ όπου ως S εννοείται το σύνολο των έγκυρων καταστάσεων.

Κάθε τελεστής έχει συνήθως και κάποιες προϋποθέσεις που πρέπει να τηρούνται προκειμένου να μπορεί να εφαρμοσθεί (π.χ. στη διάσχιση ενός λαβυρίνθου ένας τελεστής κίνησης νότια θα μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο αν δεν υπάρχει έξοδος εκτός των ορίων του λαβυρίνθου).

Ορισμός

Χώρος Καταστάσεων (State Space) ενός προβλήματος ονομάζεται το σύνολο των έγκυρων καταστάσεων.

Ορισμός Προβλήματος

Πρόβλημα ορίζεται ως μια τετράδα $P=(I, G, T, S)$ όπου:

- S είναι ο χώρος καταστάσεων
- I είναι η αρχική κατάσταση ($I \in S$)
- G είναι το σύνολο των τελικών καταστάσεων ($I \subseteq S$)
- T είναι το σύνολο των τελεστών μετάβασης ($T: S \rightarrow S$)

Ορισμός Λύσης Προβλήματος

Λύση ενός προβλήματος $P=(I, G, T, S)$ θα λέγεται μία ακολουθία τελεστών μετάβασης τέτοια ώστε η διαδοχική εφαρμογή των τελεστών με αρχή την αρχική κατάσταση να οδηγεί σε τελική κατάσταση, δηλαδή τυπικά:

Η ακολουθία $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ είναι λύση του P ανν $s = t_n(\dots(t_2(t_1(I))))$, με $s \in G$.

1.3.1.2 Περιγραφή με Αναγωγή

Στον τρόπο περιγραφής με αναγωγή είναι σημαντικό να μπορούμε να αναγάγουμε μια αρχική περιγραφή του προβλήματος μέσα από μια ακολουθία τελεστών σε υποπροβλήματα που είναι άμεσα επιλύσιμα. Τα υποπροβλήματα αυτά καλούνται *αρχέγονα (primitive problems)*.

Στην περιγραφή με αναγωγή δεν γίνεται λόγος για αρχικές και τελικές καταστάσεις αλλά για *αρχικές και τελικές περιγραφές*. Επίσης, στη περιγραφή με αναγωγή διαθέτουμε *τελεστές αναγωγής (reduction operators)* οι οποίοι αναγάγουν το πρόβλημα σε υποπροβλήματα.

Ορισμός Προβλήματος

Πρόβλημα ορίζεται ως μια τετράδα $P=(ID, GD, TR, PP)$ όπου:

- ID είναι η αρχική περιγραφή
- GD είναι το σύνολο των τελικών περιγραφών
- TR είναι το σύνολο των τελεστών αναγωγής
- PP είναι το σύνολο των αρχέγονων προβλημάτων

Στην περιγραφή με αναγωγή μια πολύ χρήσιμη τεχνική για την επίλυση των προβλημάτων είναι αυτή της *αναδρομής (recursion)*.

1.3.2 Αλγόριθμοι Αναζήτησης

Ορισμός

Αλγόριθμος αναζήτησης (search algorithm) καλείται κάθε αλγόριθμος που αναζητά τη λύση σε κάποιο πρόβλημα.

Ορισμός

Χώρος αναζήτησης (search space) ονομάζεται το σύνολο των καταστάσεων που είναι προσβάσιμες από την αρχική κατάσταση, δηλαδή τις καταστάσεις εκείνες για τις οποίες υπάρχει ακολουθία τελεστών μετάβασης τέτοια ώστε από την αρχική κατάσταση να φτάνουμε σε αυτές.

Προφανώς ισχύει ότι ο χώρος αναζήτησης είναι υποσύνολο του χώρου καταστάσεων.

Ο χώρος αναζήτησης μπορεί πάντα να αναπαρασταθεί με χρήση γράφου και είναι πάντοτε εφικτό αυτός ο γράφος με τη σειρά του να μετατραπεί σε δένδρο το οποίο καλείται *δένδρο αναζήτησης (search tree)* και το οποίο ενδέχεται να έχει μονοπάτια απείρου μήκους.

Στην τεχνητή νοημοσύνη υπάρχουν αρκετοί διαφορετικοί αλγόριθμοι αναζήτησης και ανάλογα με το πρόβλημα ενδέχεται η επιλογή ενός αλγορίθμου έναντι κάποιου άλλου να είναι προτιμότερη επειδή ο κάθε αλγόριθμος έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά. Αυτά τα χαρακτηριστικά ενδέχεται να καθιστούν έναν αλγόριθμο λιγότερο ή περισσότερο αποδοτικό σε σχέση με άλλους, ανάλογα με το πρόβλημα.

Ανεξάρτητα από τις διαφορές τους, όμως, όλοι αυτοί οι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν κάποιες κοινές δομές δεδομένων. Συγκεκριμένα έχουμε:

1. Το *μέτωπο αναζήτησης (search frontier)*, δηλαδή την λίστα των καταστάσεων που ο αλγόριθμος έχει ήδη επισκεφτεί αλλά δεν έχουν επεκταθεί.
2. Το κλειστό σύνολο (closed set), δηλαδή την λίστα των καταστάσεων που έχουν ήδη επεκταθεί.

Επέκταση κατάστασης είναι φυσικά η εφαρμογή κάποιου τελεστή μετάβασης στην κατάσταση αυτή που οδηγεί στην δημιουργία νέων καταστάσεων απογόνων της υπό επέκταση κατάστασης. Κάθε επέκταση κατάστασης οδηγεί στην τοποθέτηση της κατάστασης-γονέα στο κλειστό σύνολο ενώ οι καταστάσεις-παιδιά τοποθετούνται στο μέτωπο αναζήτησης.

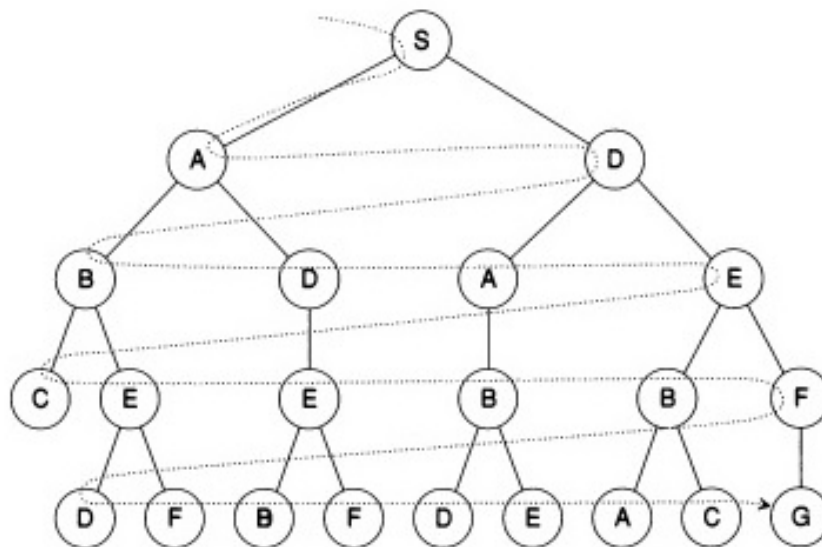
Με βάση τα παραπάνω, τα βήματα ενός γενικού αλγορίθμου αναζήτησης συνοψίζονται πιο κάτω:

1. Τοποθέτησε την αρχική κατάσταση στο μέτωπο της αναζήτησης.
2. Αν το μέτωπο αναζήτησης είναι άδειο, τότε τερμάτισε.
3. Εξέτασε την πρώτη σε σειρά κατάσταση του μετώπου αναζήτησης.
4. Αν η κατάσταση αυτή ανήκει στο κλειστό σύνολο, τότε πήγαινε στο βήμα 2.
5. Αν η κατάσταση αυτή είναι τελική κατάσταση, τότε τύπωσε τη λύση και πήγαινε στο βήμα 2.
6. Εφάρμοσε τους τελεστές μετάβασης για να παραχθούν οι καταστάσεις-παιδιά.
7. Τοποθέτησε τις καταστάσεις-παιδιά στο μέτωπο αναζήτησης.
8. Κλάδεψε τις καταστάσεις που δε χρειάζονται (σύμφωνα με κάποιο κριτήριο), αφαιρώντας τις από το μέτωπο αναζήτησης.
9. Αναδιάταξε το μέτωπο αναζήτησης (σύμφωνα με κάποιο κριτήριο).
10. Τοποθέτησε την κατάσταση-γονέα στο κλειστό σύνολο.
11. Πήγαινε στο βήμα 2.

Ένας σημαντικός διαχωρισμός μεταξύ των αλγορίθμων είναι αυτός που τους διαχωρίζει ανάμεσα σε αλγορίθμους τυφλής αναζήτησης (*blind search algorithms*) και αλγορίθμους ευριστικής αναζήτησης (*heuristic search algorithms*). Οι αλγόριθμοι τυφλής αναζήτησης εφαρμόζονται κυρίως όταν το πρόβλημα προς επίλυση δεν προσφέρει κάποια πληροφορία τέτοια ώστε να είναι εφικτή η αξιολόγηση των καταστάσεων. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι αλγόριθμοι αναζήτησης κατά πλάτος και αναζήτησης κατά βάθος. Οι αλγόριθμοι ευριστικής αναζήτησης από την άλλη χρησιμοποιούνται όταν υπάρχει πληροφορία που να επιτρέπει την αξιολόγηση των καταστάσεων. Η πληροφορία αυτή λέγεται ευριστικός μηχανισμός. Στην κατηγορία αυτή ανήκει ο αλγόριθμος αναζήτησης πρώτα στο καλύτερο.

1.3.2.1 Αναζήτηση Κατά Πλάτος

Η αναζήτηση κατά πλάτος πρώτα ελέγχει όλα τα μονοπάτια ενός συγκεκριμένου μήκους πριν προχωρήσει ένα επίπεδο παρακάτω στο δένδρο αναζήτησης. Ο τρόπος διάσχισης του δένδρου αναζήτησης κατά πλάτος φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 1.3.1 .



Σχήμα 1.3.1 Αναζήτηση Κατά πλάτος

Η εξειδίκευση του γενικού αλγορίθμου αναζήτησης, που παρουσιάστηκε πιο πάνω, έτσι ώστε να έχουμε κατά πλάτος αναζήτηση παρουσιάζεται παρακάτω:

1. Τοποθέτησε την αρχική κατάσταση στο μέτωπο της αναζήτησης.
2. Αν το μέτωπο αναζήτησης είναι άδειο, τότε τερμάτισε.
3. Εξέτασε την πρώτη σε σειρά κατάσταση του μετώπου αναζήτησης.
4. Αν η κατάσταση αυτή ανήκει στο κλειστό σύνολο, τότε πήγαινε στο βήμα 2.
5. Αν η κατάσταση αυτή είναι τελική κατάσταση, τότε τύπωσε τη λύση και πήγαινε στο βήμα 2.
6. Εφάρμοσε τους τελεστές μετάβασης για να παραχθούν οι καταστάσεις-παιδιά.
7. Τοποθέτησε τις καταστάσεις-παιδιά στο τέλος του μετώπου αναζήτησης.
8. Κλάδεψε τις καταστάσεις που δε χρειάζονται (σύμφωνα με κάποιο κριτήριο), αφαιρώντας τες από το μέτωπο αναζήτησης.
9. Τοποθέτησε την κατάσταση-γονέα στο κλειστό σύνολο.

10. Πήγαινε στο βήμα 2.

Το βασικό σημείο είναι ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η τοποθέτηση των νέων καταστάσεων στο μέτωπο της αναζήτησης. Συγκεκριμένα, για διάσχιση σε πλάτος, τα παιδιά τοποθετούνται στο τέλος του μετώπου αναζήτησης. Αυτό σημαίνει ότι το μέτωπο αναζήτησης είναι μια FIFO (first in-first out) δομή δεδομένων, δηλαδή μία ουρά. Σημειώνεται ότι γενικά το βήμα 8 του κλαδέματος καταστάσεων μπορεί και να μην υπάρχει, είναι προαιρετικό αλλά χρήσιμο βήμα εν γένει.

Πλεονεκτήματα της κατά πλάτος αναζήτησης:

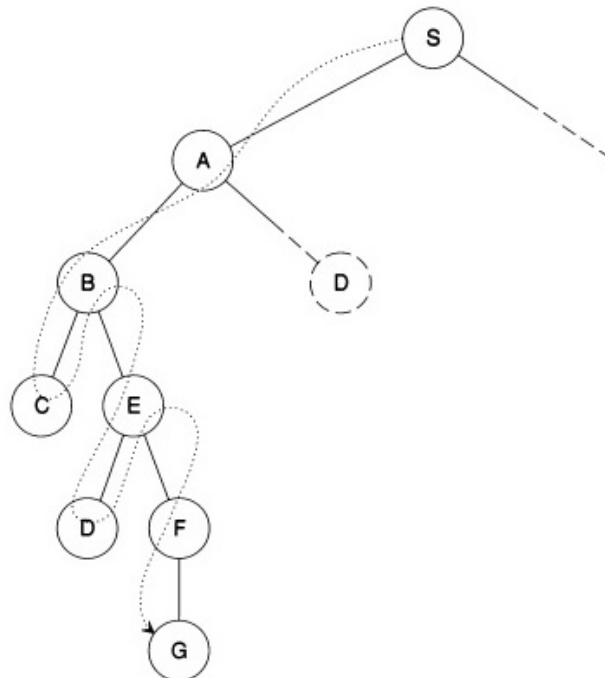
- Βρίσκει πάντα την καλύτερη, δηλαδή αυτή με το μικρότερο μονοπάτι ανάμεσα στην αρχική και τελική κατάσταση. (Σημείωση: αν κάθε ακμή έχει διαφορετικό βάρος από “1”, τότε ίσως να μην είναι η καλύτερη λύση)
- Είναι *πλήρης*, δηλαδή ο αλγόριθμος αναζήτησης θα βρει την λύση εφόσον υπάρχει αν δοθεί αρκετός υπολογιστικός χρόνος και χώρος.

Μειονεκτήματα της κατά πλάτος αναζήτησης:

- Το μέτωπο της αναζήτησης αυξάνεται πάρα πολύ γρήγορα. Το φαινόμενο αυτό γενικότερα είναι γνωστό ως *συνδυαστική έκρηξη* (*combinatorial explosion*) ή *εκθετική έκρηξη* (*exponential explosion*).

1.3.2.2 Αναζήτηση Κατά Βάθος

Η αναζήτηση κατά βάθος ακολουθεί ένα μονοπάτι μέχρι το τέλος του πριν αρχίσει να ακολουθεί κάποιο άλλο. Επιλέγεται δηλαδή προς επέκταση πρώτα η κατάσταση που βρίσκεται πιο βαθιά στο δένδρο. Ο τρόπος διάσχισης του δένδρου αναζήτησης κατά βάθος φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 1.3.2 .



Σχήμα 1.3.2 Αναζήτηση κατά βάθος

Όπως φαίνεται από το σχήμα, διασχίζεται πρώτα ο αριστερότερος κόμβος και μετά η σειρά επέκτασης είναι από αριστερά στα δεξιά. Η εξειδίκευση του γενικού αλγορίθμου αναζήτησης, που παρουσιάστηκε πιο πάνω, έτσι ώστε να έχουμε κατά βάθος αναζήτηση παρουσιάζεται παρακάτω:

1. Τοποθέτησε την αρχική κατάσταση στο μέτωπο της αναζήτησης.
2. Αν το μέτωπο αναζήτησης είναι άδειο, τότε τερμάτισε.
3. Εξέτασε την πρώτη σε σειρά κατάσταση του μετώπου αναζήτησης.
4. Αν η κατάσταση αυτή ανήκει στο κλειστό σύνολο, τότε πήγαινε στο βήμα 2.
5. Αν η κατάσταση αυτή είναι τελική κατάσταση, τότε τύπωσε τη λύση και πήγαινε στο βήμα 2.
6. Εφάρμοσε τους τελεστές μετάβασης για να παραχθούν οι καταστάσεις-παιδιά.
7. Τοποθέτησε τις καταστάσεις-παιδιά στην αρχή του μετώπου αναζήτησης.
8. Κλάδεψε τις καταστάσεις που δε χρειάζονται (σύμφωνα με κάποιο κριτήριο), αφαιρώντας τις από το μέτωπο αναζήτησης.
9. Τοποθέτησε την κατάσταση-γονέα στο κλειστό σύνολο.
10. Πήγαινε στο βήμα 2.

Όπως και για την αναζήτηση κατά πλάτος, το βήμα 8 του κλαδέματος καταστάσεων μπορεί και να μην υπάρχει αλλά είναι γενικά χρήσιμο. Το βασικό σημείο είναι κι εδώ ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η τοποθέτηση των νέων καταστάσεων στο μέτωπο της αναζήτησης. Στη διάσχιση σε βάθος, τα παιδιά τοποθετούνται στην αρχή του μετώπου αναζήτησης. Αυτό σημαίνει ότι το μέτωπο αναζήτησης είναι μια LIFO (last in-first out) δομή δεδομένων, δηλαδή μία στοίβα.

Πλεονεκτήματα της κατά βάθος αναζήτησης:

- Το μέτωπο της αναζήτησης δεν μεγαλώνει πάρα πολύ.

Μειονεκτήματα της κατά βάθος αναζήτησης:

- Δεν είναι δεδομένο ότι η (πρώτη) λύση θα είναι η καλύτερη.
- Είναι γενικά μη-πλήρης αλγόριθμος αφού υπάρχει ο κίνδυνος να βρεθεί σε άπειρο loop. (πχ έχουμε την επέκταση $A \rightarrow D \rightarrow A$)

1.3.2.3 Αναζήτηση Πρώτα στο Καλύτερο

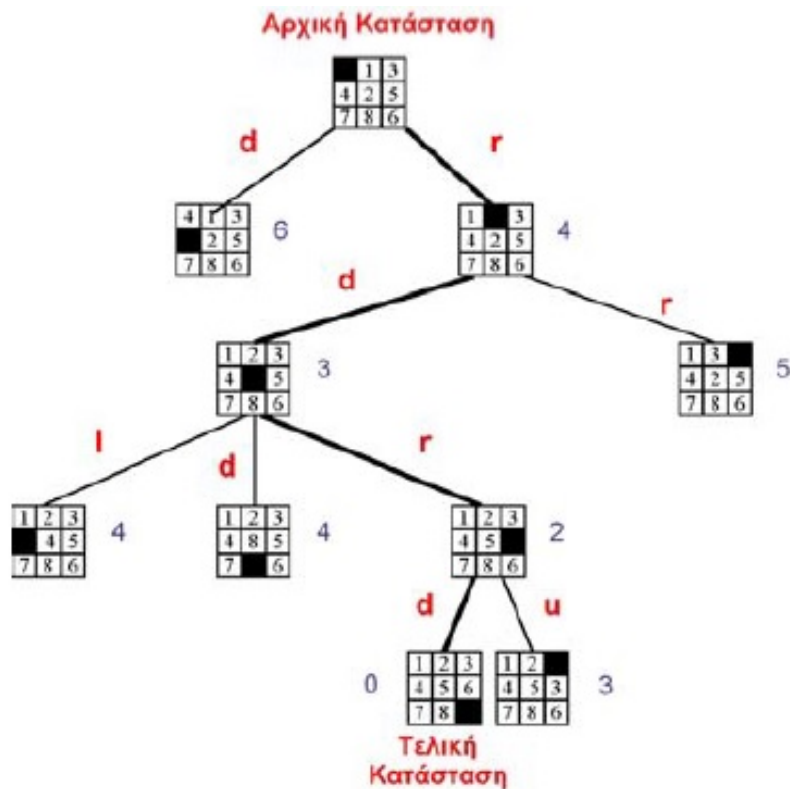
Η αναζήτηση πρώτα στο καλύτερο είναι ένας ευριστικός αλγόριθμος αναζήτησης οπότε χρησιμοποιεί μία ευριστική συνάρτηση προκειμένου να ταξινομηθούν οι διάφορες καταστάσεις. Μετά την ταξινόμηση του μετώπου αναζήτησης με βάση την ευριστική τιμή, επιλέγεται η κατάσταση στην αρχή του μετώπου για επέκταση.

Η εξειδίκευση του γενικού αλγορίθμου αναζήτησης, που παρουσιάστηκε πιο πάνω, έτσι ώστε να έχουμε αναζήτηση πρώτα στο καλύτερο παρουσιάζεται παρακάτω:

1. Τοποθέτησε την αρχική κατάσταση στο μέτωπο της αναζήτησης.
2. Αν το μέτωπο αναζήτησης είναι άδειο, τότε τερμάτισε.
3. Εξέτασε την πρώτη σε σειρά κατάσταση του μετώπου αναζήτησης.
4. Αν η κατάσταση αυτή ανήκει στο κλειστό σύνολο, τότε πήγαινε στο βήμα 2.
5. Αν η κατάσταση αυτή είναι τελική κατάσταση, τότε τύπωσε τη λύση και πήγαινε στο βήμα 2.
6. Εφάρμοσε τους τελεστές μετάβασης για να παραχθούν οι καταστάσεις-παιδιά.
7. Εφάρμοσε της ευριστική συνάρτηση σε καθένα από τα παιδιά του βήματος 6.
8. Τοποθέτησε τις καταστάσεις-παιδιά στο μέτωπο αναζήτησης και αναδιάταξε το μέτωπο ώστε η κατάσταση με την καλύτερη ευριστική τιμή να είναι στην αρχή.

9. Κλάδεψε τις καταστάσεις που δε χρειάζονται (σύμφωνα με κάποιο κριτήριο), αφαιρώντας τις από το μέτωπο αναζήτησης.
10. Τοποθέτησε την κατάσταση-γονέα στο κλειστό σύνολο.
11. Πήγαινε στο βήμα 2.

Στο Σχήμα 1.3.3 φαίνεται ένα παράδειγμα της best first αναζήτησης.



Σχήμα 1.3.3 Αναζήτηση πρώτα στο καλύτερο

Πλεονεκτήματα της Best First αναζήτησης:

- Έχει την πιθανότητα να παράγει μικρότερα μονοπάτια προς κάποια λύση σε σχέση με άλλους αλγορίθμους (συνήθως, όχι πάντα όμως).
- Συνήθως δίνει μια γρήγορη λύση στο πρόβλημα αλλά το πόσο γρήγορα εξαρτάται σημαντικά από την ποιότητα του ευριστικού μηχανισμού που χρησιμοποιείται
- Όπως και η αναζήτηση κατά πλάτος, είναι πλήρης, δηλαδή αν υπάρχει λύση θα την βρει.

Μειονεκτήματα της Best First αναζήτησης:

- Δεν είναι σίγουρο ότι η λύση θα είναι βέλτιστη
- Το μέτωπο αναζήτησης τείνει να μεγαλώνει με υψηλό ρυθμό.

Κεφάλαιο 2

Διατύπωση του προβλήματος και μέθοδος επίλυσης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί και θα θεμελιωθεί η μέθοδος επίλυσης του προβλήματος εύρεσης των λύσεων στο σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων όπως αυτό προκύπτει κατά την ανάλυση ροών φορτίου ενός ΣΗΕ. Η μέθοδος αναπτύχθηκε εξ' ολοκλήρου στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας και βασίζεται στην ιδέα της διχοτόμησης για την σύγκλιση προς τις λύσεις.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται, στα πλαίσια της διπλωματικής, πάνω σε ΣΗΕ που έχουν ένα ζυγό αναφοράς και οι υπόλοιποι ζυγοί είναι ζυγοί φορτίου. Η μέθοδος δεν έχει, στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής, επεκταθεί σε δίκτυα που διαθέτουν και ζυγούς PV.

2.1 Αναπαράσταση των εξισώσεων ροών φορτίου

Στην αρχική αυτή ενότητα θα παρουσιαστεί η μορφή στην οποία μετασχηματίζονται οι εξισώσεις ροών φορτίου έτσι ώστε μετά να αξιοποιηθούν με βάση την μέθοδο όπως αυτή θα αναπτυχθεί στην συνέχεια.

2.1.1 Χρήσιμες Σχέσεις

Αρχικά, θα δοθούν κάποιες βασικές σχέσεις. Θεωρούμε ότι στο δίκτυο ΣΗΕ έχουμε n το πλήθος ζυγούς. Ο ζυγός 1 θα θεωρείται ότι είναι ο ζυγός αναφοράς και οι υπόλοιποι $(n-1)$ ζυγοί θα είναι ζυγοί φορτίου (PQ).

Από τον ορισμό της έγχυσης μιγαδικής ισχύος (1.3) έχουμε ότι $s_k = p_k + j \cdot q_k$ για κάποιον ζυγό k ή σε μορφή μήτρας έχουμε:

$$s = p + j \cdot q \quad (2.1)$$

όπου τα p, q και s είναι διανύσματα διαστάσεων $(n \times 1)$.

Η μήτρα αγωγιμοτήτων Y επίσης παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 1 και για τον προσδιορισμό της χρησιμοποιούνται οι σχέσεις (1.5) και (1.6). Η μήτρα Y θα έχει διαστάσεις $(n \times n)$ και μπορεί να εκφραστεί επίσης ως:

$$Y = G + j \cdot B \quad (2.2)$$

δηλαδή μπορούμε να τη διασπάσουμε σε πραγματικό και φανταστικό μέρος G και B αντίστοιχα. Προφανώς οι G και B έχουν ίδιες διαστάσεις με την Y .

Από την σχέση (1.7) έχουμε την τάση για ένα ζυγό k και έτσι μπορούμε να ορίζουμε το διάνυσμα των τάσεων ως

$$V = a + j \cdot f \quad (2.3)$$

το οποίο θα έχει διαστάσεις (τα a και f αντίστοιχα) $(n \times 1)$.

Αντίστοιχα με το διάνυσμα των τάσεων μπορεί να ορισθεί και το διάνυσμα των ρευμάτων ως:

$$I = c + j \cdot d \quad (2.4)$$

το οποίο θα έχει διαστάσεις (αντίστοιχα τα c και d) $(n \times 1)$.

Τέλος, δύο σημαντικές εξισώσεις προέρχονται από τη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Η πρώτη είναι ο νόμος του Ohm, δηλαδή

$$Y \cdot V = I \quad (2.5)$$

που συνδέει την μήτρα αγωγιμοτήτων, το διάνυσμα τάσεων και το διάνυσμα των ρευμάτων και η δευτέρα εξίσωση αφορά στην μιγαδική ισχύ:

$$s = V \cdot I^* \quad (2.6)$$

όπου με I^* συμβολίζεται ο συζυγής μιγαδικός του ρεύματος.

2.1.2 Κατασκευή Εξισώσεων

Από τις σχέσεις (2.2), (2.3), (2.4) και (2.5) μπορεί να προκύψουν οι εξής δύο σχέσεις:

$$\bullet \quad G \cdot a - B \cdot f = c \quad (2.7)$$

$$\bullet \quad B \cdot a + G \cdot f = d \quad (2.8)$$

Στη συνέχεια, από τις σχέσεις (1.3), (2.3), (2.4) και (2.6) οδηγούμαστε στις εξής $2n$ το πλήθος σχέσεις:

$$\bullet \quad p_k = a_k c_k + f_k d_k, \text{ για } k \text{ από } 1 \text{ έως } n, \quad (2.9)$$

$$\bullet \quad q_k = f_k c_k - a_k d_k, \text{ για } k \text{ από } 1 \text{ έως } n. \quad (2.10)$$

όπου βέβαια το καθένα k αφορά διαφορετικό ζυγό.

Αυτές φυσικά ισχύουν αφού:

$$s_k = v_k i_k^* \Rightarrow p_k + j \cdot q_k = (a_k + j \cdot f_k)(c_k - j \cdot d_k) = (a_k c_k + f_k d_k) + j \cdot (f_k c_k - a_k d_k) .$$

Ακόμη, δεδομένου ότι ο ζυγός 1 θεωρούμε ότι είναι πάντα ο ζυγός αναφοράς του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας, θα ισχύουν τα εξής:

$$\bullet \quad e_1^T \cdot a = V_0 \quad (\text{ή ισοδύναμα } a = \begin{bmatrix} V_0 \\ \bar{a} \end{bmatrix}) \quad (2.11), \text{ με } \bar{a} \text{ ένα } (n-1) \times 1 \text{)}$$

διάνυσμα

$$\bullet \quad e_1^T \cdot f = 0 \quad (\text{ή ισοδύναμα } f = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f} \end{bmatrix}) \quad (2.12), \text{ με } \bar{f} \text{ ένα } (n-1) \times 1 \text{)}$$

διάνυσμα

$$\text{όπου για το } e_i \text{ ισχύει ότι } e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i .$$

Οι εξισώσεις (2.7) – (2.12) είναι αυτές που καλούμαστε να λύσουμε προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα της ροής φορτίου. Οι εξισώσεις αυτές όμως μπορούν να τροποποιηθούν περαιτέρω έτσι ώστε να αποκτήσουν την κατάλληλη μορφή.

Για κάθε k , το αντίστοιχο ζεύγος εξισώσεων από τις σχέσεις (2.9) και (2.10) μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

$$\begin{bmatrix} a_k & f_k \\ f_k & -a_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_k \\ d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k \\ q_k \end{bmatrix}, \text{ και } \det \left\{ \begin{bmatrix} a_k & f_k \\ f_k & -a_k \end{bmatrix} \right\} = -a_k^2 - f_k^2 \quad (2.13)$$

Η παραπάνω ορίζουσα θα είναι διάφορη του μηδενός αν ισχύει $p_k \neq 0$ ή/και $q_k \neq 0$, διότι αν ισχυε $a_k^2 + f_k^2 = 0 \Rightarrow a_k = f_k = 0 \Rightarrow p_k = q_k = 0$ (Άτοπο! από υπόθεση $p_k \neq 0$ ή/και $q_k \neq 0$).

Στο εξής λοιπόν υποθέτουμε ότι ισχύει η **Υπόθεση 1**: $p_k \neq 0$ ή/και $q_k \neq 0$, $\forall k=2, \dots, n$.

Υπό την υπόθεση 1 λοιπόν θα έχουμε ότι η ορίζουσα στην (2.13) θα είναι διάφορη του μηδενός και άρα θα υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας. Οπότε:

$$(2.13) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_k \\ d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k & f_k \\ f_k & -a_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_k \\ q_k \end{bmatrix} = \frac{1}{-a_k^2 - f_k^2} \begin{bmatrix} -a_k & -f_k \\ -f_k & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ q_k \end{bmatrix} = \frac{1}{a_k^2 + f_k^2} \begin{bmatrix} a_k p_k + f_k q_k \\ f_k p_k - a_k q_k \end{bmatrix}, \quad \forall k=2, \dots, n$$

από όπου καταλήγουμε ότι:

$$\bullet \quad c_k = \frac{p_k a_k + q_k f_k}{a_k^2 + f_k^2}, \quad k=2, \dots, n \quad (2.14)$$

$$\bullet \quad d_k = \frac{-q_k a_k + p_k f_k}{a_k^2 + f_k^2}, \quad k=2, \dots, n \quad (2.15)$$

Στη συνέχεια, θέτουμε τα εξής:

$$\bullet \quad G = \begin{bmatrix} g_{1,1} & \tilde{g}^T \\ \tilde{g} & \bar{G} \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } \bar{G}: (n-1) \times (n-1), \quad \tilde{g} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\bullet \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \tilde{b}^T \\ \tilde{b} & \bar{B} \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } \bar{B}: (n-1) \times (n-1), \quad \tilde{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\bullet \quad a = \begin{bmatrix} V_0 \\ \bar{a} \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } \bar{a} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\bullet \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f} \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } \bar{f} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\bullet \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \bar{c} \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } \bar{c} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\bullet \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \bar{d} \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } \bar{d} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\bullet \quad P = \begin{bmatrix} p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix}, \quad \text{ο διαγώνιος πίνακας των ενεργών ισχύων των ζυγών } 2, \dots, n, \text{ με}$$

διαστάσεις $(n-1) \times (n-1)$

$$\bullet \quad Q = \begin{bmatrix} q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & q_n \end{bmatrix}, \quad \text{ο διαγώνιος πίνακας των αέργων ισχύων των ζυγών } 2, \dots, n, \text{ με}$$

διαστάσεις $(n-1) \times (n-1)$

$$\bullet \quad \Delta = \begin{bmatrix} \sqrt{a_2^2+f_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{a_3^2+f_3^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a_n^2+f_n^2} \end{bmatrix}, \text{ με διαστάσεις } (n-1) \times (n-1)$$

Με βάση τις (2.14) και (2.15) καθώς και όσα τέθηκαν πιο πάνω, λαμβάνουμε τις εξής σχέσεις:

$$1. \quad (2.14) \Leftrightarrow \bar{c} = P \Delta^{-2} \bar{a} + Q \Delta^{-2} \bar{f} \quad (2.16)$$

$$2. \quad (2.15) \Leftrightarrow \bar{d} = -Q \Delta^{-2} \bar{a} + P \Delta^{-2} \bar{f} \quad (2.17)$$

Στη συνέχεια, με χρήση των (2.7) και (2.16) μπορούμε να καταλήξουμε στις εξής δύο σχέσεις:

$$1. \quad g_{1,1} V_0 + \tilde{g}^T \bar{a} - \tilde{b}^T \bar{f} = c_1, \text{ για } k=1 \quad (2.18)$$

και

$$2. \quad \tilde{g} V_0 + \bar{G} \bar{a} - \bar{B} \bar{f} = \bar{c} = P \Delta^{-2} \bar{a} + Q \Delta^{-2} \bar{f} \Rightarrow \\ (\bar{G} - P \Delta^{-2}) \bar{a} + (\bar{B} + Q \Delta^{-2})(-\bar{f}) = -\tilde{g} V_0 \quad (2.19)$$

Ακόμη, αν γίνει χρήση των (2.8) και (2.17), τότε καταλήγουμε στις δύο παρακάτω σχέσεις:

$$1. \quad b_{1,1} V_0 + \tilde{b}^T \bar{a} + \tilde{g}^T \bar{f} = d_1, \text{ για } k=1 \quad (2.20)$$

και

$$2. \quad \tilde{g} V_0 + \bar{G} \bar{a} - \bar{B} \bar{f} = \bar{c} = P \Delta^{-2} \bar{a} + Q \Delta^{-2} \bar{f} \Rightarrow \\ (\bar{G} - P \Delta^{-2}) \bar{a} + (\bar{B} + Q \Delta^{-2})(-\bar{f}) = -\tilde{g} V_0 \quad (2.21)$$

Οι σχέσεις (2.19) και (2.21) μπορούν να γραφούν συνολικά ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \bar{G} - P \Delta^{-2} & \bar{B} + Q \Delta^{-2} \\ \bar{B} + Q \Delta^{-2} & -(\bar{G} - P \Delta^{-2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a} \\ -\bar{f} \end{bmatrix} = -V_0 \begin{bmatrix} \tilde{g} \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \quad (\text{E } 1)$$

ενώ οι (2.18) και (2.20) μαζί με τις (2.9) και (2.10) οδηγούν στις εξής εκφράσεις για τη ενεργό ισχύ p_1 και την άεργο ισχύ q_1 του ζυγού αναφοράς 1:

$$\bullet \quad p_1 = V_0 (\tilde{g}^T \bar{a} - \tilde{b}^T \bar{f}) + g_{1,1} V_0^2 \quad (\text{E } 2)$$

$$\bullet \quad q_1 = -V_0 (\tilde{b}^T \bar{a} + \tilde{g}^T \bar{f}) - b_{1,1} V_0^2 \quad (\text{E } 3)$$

Άρα, το αρχικό πρόβλημα που περιγράφεται από τις (2.7) – (2.12) μπορεί ισοδύναμα να περιγραφεί από τις (E 1), (E 2) και (E 3) και άρα αν αυτές επιλυθούν, επιλύεται το πρόβλημα ρών φορτίου. Φυσικά, όπως είναι εμφανές, όλη η προσπάθεια πρέπει να επικεντρωθεί στην επίλυση των (E 1) αφού οι (E 2) και (E 3) εξαρτώνται από τις τιμές των \bar{a} και \bar{f} . Οι $2(n-1)$ το πλήθος εξισώσεις του (E 1) όμως είναι μη-γραμμικές εξ' αιτίας του όρου Δ . Η επίλυση του (E 1) λοιπόν θα πρέπει να γίνει με βάση κάποιον επαναληπτικό αλγόριθμο. Η ανάπτυξη του αλγορίθμου αυτού θα ξεκινήσει στην αμέσως επόμενη ενότητα.

2.2 Αλγόριθμος Επίλυσης του συστήματος εξισώσεων (E 1)

Πρώτα από όλα θα ορίσουμε μία περιοχή έρευνας για κάθε ζεύγος (a_k, f_k) , $k=2, \dots, n$, δηλαδή περιοχή έρευνας για κάθε μιγαδική τάση κάποιου PQ ζυγού.

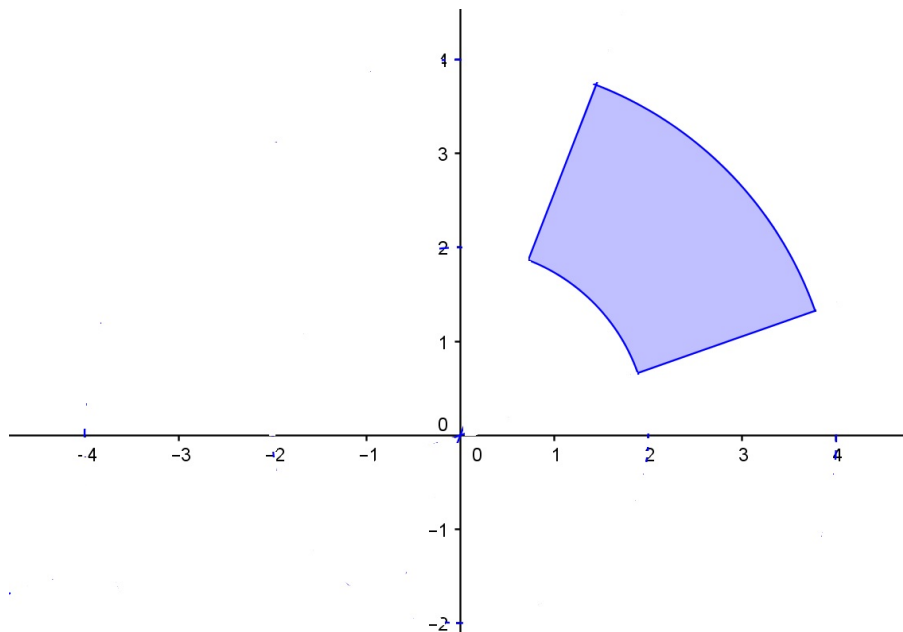
Για διευκόλυνση, θέτουμε $x_i \leftrightarrow a_i$ και $y_i \leftrightarrow f_i$, $i=2, \dots, n$.

Τότε, για κάθε $i=2, \dots, n$ θα ορίσουμε μία περιοχή έρευνας ως εξής:

$$\Gamma_i = \{(x_i, y_i): x_i^2 + y_i^2 \geq \rho \wedge x_i^2 + y_i^2 \leq r \wedge v \cdot x_i + \bar{v} \cdot y_i \leq 0 \wedge w \cdot x_i + \bar{w} \cdot y_i \leq 0\}$$

όπου $\rho, r, v, \bar{v}, w, \bar{w} \in \mathbb{R}$, με $0 < \rho < r$ και $\det \begin{bmatrix} v & \bar{v} \\ w & \bar{w} \end{bmatrix} \neq 0$.

Στο Σχήμα 2.2.1 φαίνεται ένα παράδειγμα μίας τέτοιας περιοχής.



Σχήμα 2.2.1 Παράδειγμα περιοχής έρευνας

Η συνολική περιοχή έρευνας θα προκύπτει από το καρτεσιανό γινόμενο των επιμέρους, δηλαδή θα είναι $\Gamma = \Gamma_2 \times \Gamma_3 \times \dots \times \Gamma_n$, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{2(n-1)}$. Ο λόγος που επιλέχθηκαν “κουτιά” Γ_i αυτής της μορφής θα αναδειχθεί στην συνέχεια.

Όπως ειπώθηκε, ο επαναληπτικός αλγόριθμος για την εύρεση των λύσεων βασίζεται στην ιδέα της διχοτόμησης. Θα επιλέγεται σε κάθε βήμα κάποιο από τα $(n-1)$ “κουτιά” και θα διχοτομείται και στη συνέχεια θα ελέγχεται κάποιο κριτήριο πάνω στα νέα σύνολα κουτιών. Το κριτήριο είναι αναγκαίο για την ύπαρξη λύσης εντός του συνόλου κουτιών άρα αν δεν ισχύει, το σύνολο κουτιών θα πρέπει να απορρίπτεται. Έτσι η διαδικασία οδηγείται σε σύνολα με όλο και μικρότερα κουτιά και άρα στην εύρεση των επιθυμητών λύσεων.

Το αναγκαίο κριτήριο που πρέπει να ικανοποιείται έτσι ώστε ένα σύνολο κουτιών να θεωρείται υποψήφιο για λύση είναι το παρακάτω:

Κριτήριο ελέγχου συνόλου κουτιών

Αν υπάρχει μία λύση των μη γραμμικών εξισώσεων του (E 1) στην περιοχή έρευνας Γ , τότε θα πρέπει $\forall i \in \{1, 2, \dots, (n-1)\}$ να ικανοποιούνται οι εξής ανισότητες:

$$\bullet \min_{\bar{a}, \bar{f}} \{e_i^T \cdot [(\bar{G} - P \Delta^{-2}) \cdot \bar{a} + (\bar{B} + Q \Delta^{-2}) \cdot (-\bar{f}) + V_0 \cdot \tilde{g}]: \text{περιορισμοί}\} \leq 0 \quad (\text{A 1})$$

$$\bullet \max_{\bar{a}, \bar{f}} \{e_i^T \cdot [(\bar{G} - P \Delta^{-2}) \cdot \bar{a} + (\bar{B} + Q \Delta^{-2}) \cdot (-\bar{f}) + V_0 \cdot \tilde{g}]: \text{περιορισμοί}\} \geq 0 \quad (\text{A 2})$$

$$\bullet \min_{\bar{a}, \bar{f}} \{e_i^T \cdot [(\bar{B} + Q \Delta^{-2}) \cdot \bar{a} - (\bar{G} - P \Delta^{-2}) \cdot (-\bar{f}) + V_0 \cdot \tilde{b}]: \text{περιορισμοί}\} \leq 0 \quad (\text{A 3})$$

$$\bullet \max_{\bar{a}, \bar{f}} \{e_i^T \cdot [(\bar{B} + Q \Delta^{-2}) \cdot \bar{a} - (\bar{G} - P \Delta^{-2}) \cdot (-\bar{f}) + V_0 \cdot \tilde{b}]: \text{περιορισμοί}\} \geq 0 \quad (\text{A 4})$$

όπου οι περιορισμοί αφορούν τις περιοχές έρευνας $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$.

Ας θέσουμε τώρα τα παρακάτω:

$$\bullet \bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{g}_1^T \\ \bar{g}_2^T \\ \vdots \\ \bar{g}_{n-1}^T \end{bmatrix}, \bar{g}_i \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, (n-1)\}$$

$$\bullet \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1^T \\ \bar{b}_2^T \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-1}^T \end{bmatrix}, \bar{b}_i \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, (n-1)\}$$

$$\bullet \tilde{g} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_2 \\ \vdots \\ \tilde{g}_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{g}_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, (n-1)\}$$

$$\bullet \tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{b}_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, (n-1)\}$$

Ακόμη, έστω ότι για τις ισχύς έχουμε ότι $\bar{p}_i \equiv p_{i+1}$ και $\bar{q}_i \equiv q_{i+1}$, $\forall i = 1, 2, \dots, (n-1)$.

Τότε οι ανισότητες (A 1), (A 2), (A 3) και (A 4) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\min_{\bar{a}, \bar{f} \in \mathbb{R}^{n-1}} \{ \bar{g}_i^T \bar{a} - \bar{b}_i^T \bar{f} - \frac{\bar{p}_i \cdot \bar{a}_i + \bar{q}_i \cdot \bar{f}_i}{\bar{a}_i^2 + \bar{f}_i^2} + V_0 \cdot \tilde{g}_i: \rho_j \leq \bar{a}_j^2 + \bar{f}_j^2 \leq r_j, v_j \cdot \bar{a}_j + \bar{v}_j \cdot \bar{f}_j \leq 0, w_j \cdot \bar{a}_j + \bar{w}_j \cdot \bar{f}_j \leq 0, j = 1, \dots, (n-1) \} \leq 0$$

$$\max_{\bar{a}, \bar{f} \in \mathbb{R}^{n-1}} \{ \bar{g}_i^T \bar{a} - \bar{b}_i^T \bar{f} - \frac{\bar{p}_i \cdot \bar{a}_i + \bar{q}_i \cdot \bar{f}_i}{\bar{a}_i^2 + \bar{f}_i^2} + V_0 \cdot \tilde{g}_i: \rho_j \leq \bar{a}_j^2 + \bar{f}_j^2 \leq r_j, v_j \cdot \bar{a}_j + \bar{v}_j \cdot \bar{f}_j \leq 0, w_j \cdot \bar{a}_j + \bar{w}_j \cdot \bar{f}_j \leq 0, j = 1, \dots, (n-1) \} \geq 0$$

$$\min_{\bar{a}, \bar{f} \in \mathbb{R}^{n-1}} \{ \bar{b}_i^T \bar{a} + \bar{g}_i^T \bar{f} + \frac{\bar{q}_i \cdot \bar{a}_i - \bar{p}_i \cdot \bar{f}_i}{\bar{a}_i^2 + \bar{f}_i^2} + V_0 \cdot \tilde{b}_i: \rho_j \leq \bar{a}_j^2 + \bar{f}_j^2 \leq r_j, v_j \cdot \bar{a}_j + \bar{v}_j \cdot \bar{f}_j \leq 0, w_j \cdot \bar{a}_j + \bar{w}_j \cdot \bar{f}_j \leq 0, j = 1, \dots, (n-1) \} \leq 0$$

$$\max_{\bar{a}, \bar{f} \in \mathbb{R}^{n-1}} \{ \bar{b}_i^T \bar{a} + \bar{g}_i^T \bar{f} + \frac{\bar{q}_i \cdot \bar{a}_i - \bar{p}_i \cdot \bar{f}_i}{\bar{a}_i^2 + \bar{f}_i^2} + V_0 \cdot \tilde{b}_i: \rho_j \leq \bar{a}_j^2 + \bar{f}_j^2 \leq r_j, v_j \cdot \bar{a}_j + \bar{v}_j \cdot \bar{f}_j \leq 0, w_j \cdot \bar{a}_j + \bar{w}_j \cdot \bar{f}_j \leq 0, j = 1, \dots, (n-1) \} \geq 0$$

Προφανώς το ζήτημα είναι ο υπολογισμός των γενικών ελαχίστων και των μεγίστων στα παραπάνω προβλήματα βελτιστοποίησης με ανισωτικούς περιορισμούς. Παρατηρούμε εύκολα ότι τα προβλήματα έχουν παρόμοια μορφή, συγκεκριμένα είναι της μορφής:

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}^{n-1}} \left\{ a^T x + b^T y + \frac{c \cdot x_i + d \cdot y_i}{x_i^2 + y_i^2} : \rho_j \leq x_j^2 + y_j^2 \leq r_j, \quad v_j \cdot x_j + \bar{v}_j \cdot y_j \leq 0, \quad w_j \cdot x_j + \bar{w}_j \cdot y_j \leq 0, \quad j=1,2,\dots,(n-1) \right\}$$

όπου ο σταθερός όρος έχει αγνοηθεί για απλότητα.

Το γενικό αυτό πρόβλημα ελαχιστοποίησης όμως μπορεί να αποσυντεθεί στα εξής (n-1) το πλήθος υποπροβλήματα:

$$\bullet \quad \min_{x_j, y_j \in \mathbb{R}} \left\{ a_j \cdot x_j + b_j \cdot y_j : \rho_j \leq x_j^2 + y_j^2 \leq r_j, \quad v_j \cdot x_j + \bar{v}_j \cdot y_j \leq 0, \quad w_j \cdot x_j + \bar{w}_j \cdot y_j \leq 0 \right\} \quad (P1)$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, (n-1)\} - \{i\}$$

$$\bullet \quad \min_{x_i, y_i \in \mathbb{R}} \left\{ a_i \cdot x_i + b_i \cdot y_i + \frac{c \cdot x_i + d \cdot y_i}{x_i^2 + y_i^2} : \rho_i \leq x_i^2 + y_i^2 \leq r_i, \quad v_i \cdot x_i + \bar{v}_i \cdot y_i \leq 0, \quad w_i \cdot x_i + \bar{w}_i \cdot y_i \leq 0 \right\} \quad (P2)$$

$$j=i$$

Τα (n-2) στο πλήθος προβλήματα (P1) παρατηρούμε ότι έχουν γραμμικές αντικειμενικές συναρτήσεις ενώ το πρόβλημα (P2) έχει μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση. Για την επίλυση του αρχικού προβλήματος βελτιστοποίησης λοιπόν αρκεί να υπολογισθούν τα επί μέρους ελάχιστα των (n-2) γραμμικών προβλημάτων και το 1 ελάχιστο του μη γραμμικού προβλήματος και να αθροιστούν οι τιμές. Τα προβλήματα (P1) και (P2), όμως, είναι προβλήματα με περιορισμούς, τα οποία γενικά λύνονται με επαναληπτικούς αλγόριθμους. Στην περίπτωση μας, όμως, αυτό δεν είναι απαραίτητο αφού οι λύσεις των προβλημάτων (P1) και (P2) μπορούν να υπολογισθούν με αναλυτικούς τρόπους. Αυτή η ιδιότητα είναι και ο λόγος που επιλέχτηκαν οι συγκεκριμένες περιοχές έρευνας, διότι μπορεί να αποδειχτούν αναλυτικές σχέσεις για τα ελάχιστα σε περιοχές αυτής της μορφής.

2.2.1 Εύρεση Γενικού Ελαχίστου για το Πρόβλημα (P1)

Το πρόβλημα (P1) είναι όπως φαίνεται και πιο πάνω της μορφής:

$$\min_{x_j, y_j \in \mathbb{R}} \left\{ a_j \cdot x_j + b_j \cdot y_j : \rho_j \leq x_j^2 + y_j^2 \leq r_j, \quad v_j \cdot x_j + \bar{v}_j \cdot y_j \leq 0, \quad w_j \cdot x_j + \bar{w}_j \cdot y_j \leq 0 \right\}$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, (n-1)\} - \{i\}$$

Για λόγους ευκολίας στους συμβολισμούς στα πλαίσια αυτής της υποενότητας θα θέσουμε:

- $x_j \leftrightarrow x, \quad y_j \leftrightarrow y$
- $a_j \leftrightarrow a, \quad b_j \leftrightarrow b$
- $\rho_j \leftrightarrow \rho, \quad r_j \leftrightarrow r$
- $v_j \leftrightarrow v, \quad \bar{v}_j \leftrightarrow \bar{v}$
- $w_j \leftrightarrow w, \quad \bar{w}_j \leftrightarrow \bar{w}$

Άρα το πρόβλημα (P1) θα έχει τη μορφή:

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} \left\{ a \cdot x + b \cdot y : \rho \leq x^2 + y^2 \leq r, \quad v \cdot x + \bar{v} \cdot y \leq 0, \quad w \cdot x + \bar{w} \cdot y \leq 0 \right\} \quad (P1)$$

όπου $a^2 + b^2 > 0, \quad 0 < \rho < r$ και $\det \begin{bmatrix} v & \bar{v} \\ w & \bar{w} \end{bmatrix} = v \bar{w} - \bar{v} w \neq 0$.

Για ευκολία μπορούμε να ορίσουμε τα κανονικοποιημένα διανύσματα των $\begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} w \\ \bar{w} \end{bmatrix}$ κατά τα γνωστά, δηλαδή $\begin{bmatrix} v_n \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + \bar{v}^2}} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} w_n \\ \bar{w}_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{w^2 + \bar{w}^2}} \begin{bmatrix} w \\ \bar{w} \end{bmatrix}$.

Με χρήση των κανονικοποιημένων διανυσμάτων, το πρόβλημα (P1) λαμβάνει τη μορφή:

$$\min_{x, y \in \mathbb{R}} \{a \cdot x + b \cdot y : \rho \leq x^2 + y^2 \leq r, v_n \cdot x + \bar{v}_n \cdot y \leq 0, w_n \cdot x + \bar{w}_n \cdot y \leq 0\} \quad (\text{P1})$$

Το επιτρεπτό σύνολο του (P1), με βάση όσα αναφέρθηκαν και στο κεφάλαιο 1 (σχέση (1.9)), θα είναι το $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho \leq x^2 + y^2 \leq r, v_n \cdot x + \bar{v}_n \cdot y \leq 0, w_n \cdot x + \bar{w}_n \cdot y \leq 0\}$.

Το (P1) μπορεί να γραφεί με ισοδύναμο τρόπο ως εξής:

$\min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}} \{a \cdot x + b \cdot y : x^2 + y^2 = P, v_n \cdot x + \bar{v}_n \cdot y \leq 0, w_n \cdot x + \bar{w}_n \cdot y \leq 0, \rho \leq P \leq r\}$ το οποίο μπορεί επίσης να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\min_{P \in \mathbb{R}} \{ \min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \{a \cdot x + b \cdot y : x^2 + y^2 = P, v_n \cdot x + \bar{v}_n \cdot y \leq 0, w_n \cdot x + \bar{w}_n \cdot y \leq 0\} : \rho \leq P \leq r \} \quad (\bar{\text{P1}})$$

Το εσωτερικό πρόβλημα του ($\bar{\text{P1}}$) είναι το:

$$\min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \{a \cdot x + b \cdot y : x^2 + y^2 = P, v_n \cdot x + \bar{v}_n \cdot y \leq 0, w_n \cdot x + \bar{w}_n \cdot y \leq 0\} \quad (\bar{\text{P1.P}})$$

με επιτρεπτό σύνολο

$$F_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = P, v_n \cdot x + \bar{v}_n \cdot y \leq 0, w_n \cdot x + \bar{w}_n \cdot y \leq 0\} \quad (2.22)$$

$$\text{Ας είναι } \sigma = \text{sgn}(v \bar{w} - \bar{v} w) = \text{sgn}(v_n \bar{w}_n - \bar{v}_n w_n). \quad (2.23)$$

Τότε τα διανύσματα $-\sigma q \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix}$ και $\sigma q \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix}$, όπου $q > 0$, βρίσκονται επάνω στα επιτρεπτά μέρη των ευθειών $(\epsilon_1): v_n x + \bar{v}_n y = 0$ και $(\epsilon_2): w_n x + \bar{w}_n y = 0$ αντίστοιχα. Πράγματι, ισχύουν τα εξής:

$$1. \quad \begin{aligned} -\sigma q \begin{bmatrix} v_n & \bar{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix} &= -\sigma q (-v_n \bar{v}_n + \bar{v}_n v_n) = 0 \\ -\sigma q \begin{bmatrix} w_n & \bar{w}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix} &= -\sigma q (-\bar{v}_n w_n + v_n \bar{w}_n) = -q |-\bar{v}_n w_n + v_n \bar{w}_n| < 0, \quad \forall q > 0 \end{aligned}$$

και

$$2. \quad \begin{aligned} \sigma q \begin{bmatrix} w_n & \bar{w}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix} &= -\sigma q (-w_n \bar{w}_n + \bar{w}_n w_n) = 0 \\ \sigma q \begin{bmatrix} v_n & \bar{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix} &= \sigma q (-\bar{w}_n v_n + w_n \bar{v}_n) = -q |-\bar{v}_n w_n + v_n \bar{w}_n| < 0, \quad \forall q > 0 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια επιλύουμε το εσωτερικό πρόβλημα ($\bar{\text{P1.P}}$). Ας είναι (\tilde{x}, \tilde{y}) ένα οποιοδήποτε σημείο ελαχίστου του ($\bar{\text{P1.P}}$). Τότε στο (\tilde{x}, \tilde{y}) με κατάλληλους πολλαπλασιαστές Lagrange $\tilde{\lambda}, \xi, \pi$ θα ικανοποιούνται οι συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker:

- $a + 2\tilde{\lambda}\tilde{x} + \xi v_n + \pi w_n = 0$ (KKT 1)
- $b + 2\tilde{\lambda}\tilde{y} + \xi \bar{v}_n + \pi \bar{w}_n = 0$ (KKT 2)
- $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = P$ (KKT 3)
- $v_n \tilde{x} + \bar{v}_n \tilde{y} \leq 0$ (KKT 4)

- $w_n \tilde{x} + \bar{w}_n \tilde{y} \leq 0$ (KKT 5)
- $\xi(v_n \tilde{x} + \bar{v}_n \tilde{y}) = 0$ (KKT 6)
- $\pi(w_n \tilde{x} + \bar{w}_n \tilde{y}) = 0$ (KKT 7)
- $\xi \geq 0, \pi \geq 0$ (KKT 8)

Περίπτωση (α) Έστω ότι είναι $\{-v_n a - \bar{v}_n b \leq 0$ και $-w_n a - \bar{w}_n b \leq 0\}$

Τότε αντί του (P1.P) θα θεωρήσουμε το εξής πρόβλημα:

$$\min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \{ax + by : x^2 + y^2 = P\} \quad (\hat{P1}.P)$$

που έχει επιτρεπτό σύνολο $\hat{F}_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = P\}$ και ισχύει ότι: $F_P \subset \hat{F}_P$ (2.24)

Ας είναι $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ γενικό ελάχιστο του $(\hat{P1}.P)$, τότε θα ικανοποιούνται στο σημείο αυτό, με κατάλληλο πολλαπλασιαστική Lagrange $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ οι αναγκαίες συνθήκες πρώτης τάξης:

- $a + 2\hat{\lambda}\hat{x} = 0$ (Σ 1)
- $b + 2\hat{\lambda}\hat{y} = 0$ (Σ 2)
- $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = P$ (Σ 3)

Αν $\hat{\lambda} = 0$, τότε από τις (Σ 1) και (Σ 2) θα έχουμε ότι $a = b = 0$, άτοπο αφού έχουμε θεωρήσει $a^2 + b^2 > 0$, άρα αναγκαστικά θα είναι $\hat{\lambda} \neq 0$. Τότε από (Σ 1) και (Σ 2) έχουμε

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\hat{\lambda}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ και προκειμένου να ικανοποιείται και η (Σ 3) θα πρέπει}$$

$$\frac{1}{4\hat{\lambda}^2}(a^2 + b^2) = P \Leftrightarrow \hat{\lambda} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{P}}. \text{ Επομένως, όλα τα σημεία που ικανοποιούν}$$

αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου πρώτης τάξης για το $(\hat{P1}.P)$ είναι:

- $\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{P}{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \text{ με } \hat{\lambda}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{P}}$

και

- $\begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{P}{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \text{ με } \hat{\lambda}_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{P}}$

Οι αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου 2^{ης} τάξης στο σημείο $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$, με $\hat{\lambda}$ είναι:

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\lambda})}{\partial (x, y)^2} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \cdot 2\hat{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2\hat{\lambda}(h_1^2 + h_2^2) \geq 0, \forall \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ τ.ω. } ah_1 + bh_2 = 0$$

Οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται αν και μόνο αν $\hat{\lambda} \geq 0$ οπότε θα ικανοποιούνται στο σημείο

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix}, \text{ με } \hat{\lambda}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{P}} \text{ αλλά όχι στο σημείο } \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix}, \text{ με } \hat{\lambda}_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{P}}, \text{ στο οποίο}$$

όμως θα ικανοποιούνται οι αναγκαίες συνθήκες μεγίστου 2^{ης} τάξης για το $(\hat{P1}.P)$.

Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής συμπέρασμα· αφού τα σημεία $\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix}$ είναι τα μοναδικά

σημεία που ικανοποιούν τις συνθήκες (Σ 1), (Σ 2) και (Σ 3), τα σημεία αυτά είναι γενικά ακρότατα.

Συγκεκριμένα, το $\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix}$ είναι θέση γενικού ελαχίστου για το $(\hat{P1}.P)$ ενώ το $\begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix}$ είναι

θέση γενικού μεγίστου.

Επιπλέον, λόγω της τρέχουσας υπόθεσης (Περίπτωση (α)), ισχύουν:

$$\bullet \quad v_n \hat{x}_1 + \bar{v}_n \hat{y}_1 = -\sqrt{\frac{P}{a^2+b^2}}(v_n a + \bar{v}_n b) \leq 0$$

και

$$\bullet \quad w_n \hat{x}_1 + \bar{w}_n \hat{y}_1 = -\sqrt{\frac{P}{a^2+b^2}}(w_n a + \bar{w}_n b) \leq 0$$

επομένως $(\hat{x}, \hat{y}) \in F_p$.

Όμως από λήμμα έχουμε ότι $\min_{x,y} \{ax+by : (x,y) \in \hat{F}_p\} \leq \min_{x,y} \{ax+by : (x,y) \in F_p\}$

διότι είναι $F_p \subset \hat{F}_p$. Ακόμη ισχύει $(\hat{x}, \hat{y}) \in F_p$, επομένως το σημείο

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{P}{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

είναι σημείο γενικού ελαχίστου του $(\bar{P}1.P)$ με ελάχιστη τιμή

$$a\tilde{x} + b\tilde{y} = -\sqrt{P(a^2+b^2)} \quad (2.26)$$

Περίπτωση (β) Έστω ότι είναι $\{-v_n a - \bar{v}_n b > 0$ ή/και $-w_n a - \bar{w}_n b > 0\}$

$$\text{Ας είναι } F_p^i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=P, v_n x + \bar{v}_n y < 0, w_n x + \bar{w}_n y < 0\} \quad (2.27)$$

$$= \{(x,y) \in F_p : v_n x + \bar{v}_n y < 0, w_n x + \bar{w}_n y < 0\}$$

$$\text{και ακόμη } F_p^o = F_p - F_p^i = \{(x,y) \in F_p : v_n x + \bar{v}_n y = 0 \text{ ή } w_n x + \bar{w}_n y = 0\} \quad (2.28)$$

$$= \{(x,y) \in F_p : v_n x + \bar{v}_n y = 0\} \cup \{(x,y) \in F_p : w_n x + \bar{w}_n y = 0\}$$

$$\text{Προφανώς } F_p = F_p^i \cup F_p^o \quad (2.29)$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι οποιοδήποτε ελάχιστο (\tilde{x}, \tilde{y}) του $(\bar{P}1.P)$ ικανοποιεί

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \notin F_p^i \quad (2.30)$$

Η απόδειξη θα γίνει με εις άτοπο απαγωγή οπότε υποθέτουμε ότι $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in F_p^i$.

Τότε από τις (ΚΚΤ 6) και (ΚΚΤ 7) προκύπτει ότι $\xi = \pi = 0$, οπότε οι (ΚΚΤ 1), (ΚΚΤ 2) και (ΚΚΤ 3) είναι όμοιες με τις (Σ 1), (Σ 2) και (Σ 3), επομένως όλα τα σημεία $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in F_p^i$ που ικανοποιούν τις συνθήκες Κ-Κ-Τ (ΚΚΤ 1) – (ΚΚΤ 8) για το $(\bar{P}1.P)$ είναι τα:

$$\bullet \quad \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{P}{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \text{ με } \tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{P}}$$

και

$$\bullet \quad \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{P}{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \text{ με } \tilde{\lambda}_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{P}}$$

Οι αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου 2^{ης} τάξης για το $(\bar{P}1.P)$ είναι:

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\lambda}, 0, 0)}{\partial (x,y)^2} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \cdot 2\tilde{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2\tilde{\lambda}(h_1^2+h_2^2) \geq 0, \forall \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ τ.ω. } ah_1 + bh_2 = 0$$

Οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται αν και μόνο αν $\tilde{\lambda} \geq 0$ οπότε μόνο για το σημείο $\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix}$. Άρα

το μόνο σημείο ελαχίστου, γενικού και τοπικού, του $(\bar{P}1.P)$ είναι το $\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{P}{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

το οποίο σημείο θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) \in F_P^i$, δηλαδή θα πρέπει να ισχύουν:

- $v_n \tilde{x}_1 + \bar{v}_n \tilde{y}_1 < 0 \Leftrightarrow -v_n a - \bar{v}_n b < 0$

και

- $w_n \tilde{x}_1 + \bar{w}_n \tilde{y}_1 < 0 \Leftrightarrow -w_n a - \bar{w}_n b < 0$

Αυτά τα αποτελέσματα όμως αντιφάσκουν με την υπόθεση της Περίπτωσης (β). Φτάσαμε λοιπόν σε άτοπο και άρα η υπόθεση ότι $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in F_P^i$ δεν μπορεί να ισχύει. Άρα, θα είναι $(\tilde{x}, \tilde{y}) \notin F_P^i$.

Με αυτό το αποτέλεσμα όμως φτάνουμε και στο επόμενο· με βάση τις $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in F_P$, (2.29) και (2.30) καταλήγουμε ότι:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \in F_P^o \quad (2.31)$$

Αν το $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ικανοποιεί $v_n x + \bar{v}_n y = 0$ και $w_n x + \bar{w}_n y \leq 0$, τότε

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\sigma q \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix}, \text{ όπου } q \geq 0, \text{ οπότε:}$$

$$\{(x, y) \in F_P: v_n x + \bar{v}_n y = 0\} = \{-\sigma \sqrt{P} \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix}\} \quad (2.32)$$

Αν το $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ικανοποιεί $v_n x + \bar{v}_n y \leq 0$ και $w_n x + \bar{w}_n y = 0$, τότε

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sigma q \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix}, \text{ όπου } q \geq 0, \text{ οπότε:}$$

$$\{(x, y) \in F_P: w_n x + \bar{w}_n y = 0\} = \{\sigma \sqrt{P} \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix}\} \quad (2.33)$$

Τότε καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα, με βάση τις σχέσεις (2.28), (2.32) και (2.33):

$$F_P^o = \{-\sigma \sqrt{P} \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix}, \sigma \sqrt{P} \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix}\} \quad (2.34)$$

Επομένως, στην περίπτωση που εξετάζουμε εδώ, από τις (2.31) και (2.34) λαμβάνουμε το αποτέλεσμα:

$$a \tilde{x} + b \tilde{y} = \min_{x, y} \{a x + b y: (x, y) \in F_P\} = \min \{-\sigma \sqrt{P}(-\bar{v}_n a + v_n b), \sigma \sqrt{P}(-\bar{w}_n a + w_n b)\}$$

Τελικά για την περίπτωση (β) λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

1. αν $\sigma[-(\bar{v}_n + \bar{w}_n)a + (v_n + w_n)b] \geq 0$, τότε το σημείο ελαχίστου είναι $\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = -\sigma \sqrt{P} \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix}$
με ελάχιστο $a \tilde{x} + b \tilde{y} = -\sigma \sqrt{P}(-\bar{v}_n a + v_n b)$.
2. αν $\sigma[-(\bar{v}_n + \bar{w}_n)a + (v_n + w_n)b] \leq 0$, τότε το σημείο ελαχίστου είναι $\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \sigma \sqrt{P} \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix}$
με ελάχιστο $a \tilde{x} + b \tilde{y} = \sigma \sqrt{P}(-\bar{w}_n a + w_n b)$.

Μπορούμε να θέσουμε $K = (v_n \bar{w}_n - \bar{v}_n w_n)[-(\bar{v}_n + \bar{w}_n)a + (v_n + w_n)b]$, το οποίο σημαίνει ότι η συνθήκη (1) ισχύει όταν $K \geq 0$ ενώ η συνθήκη (2) όταν $K \leq 0$. Το K όμως μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{aligned}
K &= (v_n \bar{w}_n - \bar{v}_n w_n) [-(\bar{v}_n + \bar{w}_n)a + (v_n + w_n)b] \\
&= -(v_n \bar{v}_n \bar{w}_n - \bar{v}_n^2 w_n + v_n \bar{w}_n^2 - \bar{v}_n w_n \bar{w}_n)a + (v_n^2 \bar{w}_n - v_n \bar{v}_n w_n + v_n w_n \bar{w}_n - \bar{v}_n w_n^2)b \\
&= -(v_n \bar{v}_n \bar{w}_n - (1 - v_n^2)w_n + v_n(1 - w_n^2) - \bar{v}_n w_n \bar{w}_n)a + ((1 - \bar{v}_n^2)\bar{w}_n - v_n \bar{v}_n w_n + v_n w_n \bar{w}_n - \bar{v}_n(1 - \bar{w}_n^2))b \\
&= (-v_n + w_n + \bar{v}_n \bar{w}_n(-v_n + w_n) + v_n w_n(-v_n + w_n))a + (-\bar{v}_n + \bar{w}_n + \bar{v}_n \bar{w}_n(-\bar{v}_n + \bar{w}_n) + v_n w_n(-\bar{v}_n + \bar{w}_n))b \\
&= (1 + v_n w_n + \bar{v}_n \bar{w}_n) [(-v_n + w_n)a + (-\bar{v}_n + \bar{w}_n)b]
\end{aligned}$$

Όμως, ισχύει ακόμη ότι:

$$|v_n w_n + \bar{v}_n \bar{w}_n| = \left| \begin{bmatrix} v_n & \bar{v}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_n \\ \bar{w}_n \end{bmatrix} \right| \leq \left\| \begin{bmatrix} v_n \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} \right\|_2 \cdot \left\| \begin{bmatrix} w_n \\ \bar{w}_n \end{bmatrix} \right\|_2 = 1, \text{ άρα } 1 + v_n w_n + \bar{v}_n \bar{w}_n \geq 0$$

Άρα, καταλήγουμε ότι για την περίπτωση (β) ισχύουν οι εξής υποπεριπτώσεις:

$$1. \text{ αν } -v_n a - \bar{v}_n b \geq -w_n a - \bar{w}_n b, \text{ τότε το σημείο ελαχίστου είναι } \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = -\sigma \sqrt{P} \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

με ελάχιστο $a \tilde{x} + b \tilde{y} = -\sigma \sqrt{P} (-\bar{v}_n a + v_n b)$ (2.35).

$$2. \text{ αν } -v_n a - \bar{v}_n b \leq -w_n a - \bar{w}_n b, \text{ τότε το σημείο ελαχίστου είναι } \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \sigma \sqrt{P} \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix}$$

με ελάχιστο $a \tilde{x} + b \tilde{y} = \sigma \sqrt{P} (-\bar{w}_n a + w_n b)$ (2.36).

Οι (2.25), (2.26) και (2.35), (2.36) δίνουν το σημείο γενικού ελαχίστου και το γενικό ελάχιστο του $(\bar{P}1.P)$ σε κάθε περίπτωση.

Έχοντας λύσει το εσωτερικό πρόβλημα $(\bar{P}1.P)$, μπορούμε πλέον να επανέλθουμε στο αρχικό πρόβλημα $(\bar{P}1)$, το οποίο τώρα μπορεί να γραφεί με τον εξής ισοδύναμο τρόπο:

$$\min_{P \in \mathbb{R}} \{a \tilde{x} + b \tilde{y} : \rho \leq P \leq r\} \quad (\bar{P}1)$$

όπου η τιμή $a \tilde{x} + b \tilde{y}$ προκύπτει από την επίλυση του $(\bar{P}1.P)$. Η τιμή αυτή σε κάθε περίπτωση έχει μια ιδιαίτερη μορφή, συγκεκριμένα:

$a \tilde{x} + b \tilde{y} = \varphi(P) = \sqrt{P} \tilde{\psi}$, όπου $\tilde{\psi}$ είναι μία σταθερά. Για την σταθερά αυτή έχουμε:

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} -\sqrt{a^2 + b^2}, & \text{στην περίπτωση } (\alpha) \\ -\sigma(-\bar{v}_n a + v_n b), & \text{στην περίπτωση } (\beta)_1 \\ \sigma(-\bar{w}_n a + w_n b), & \text{στην περίπτωση } (\beta)_2 \end{cases} . \text{ Δεδομένου ότι η συνάρτηση } \sqrt{P} \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα συνάρτηση συνεπάγεται ότι η $\varphi(P)$ θα είναι αυστηρά μονότονη και η μονοτονία της θα εξαρτάται από το πρόσημο του $\tilde{\psi}$. Άρα, το σημείο ελαχίστου της $\varphi(P)$ θα βρίσκεται σε κάποιο από τα άκρα του διαστήματος $[\rho, r]$. Συγκεκριμένα, για το σημείο ελαχίστου \tilde{P} του $(\bar{P}1)$ έχουμε:

$$\tilde{P} = \begin{cases} r, & \text{αν } \tilde{\psi} < 0 \\ \rho, & \text{αν } \tilde{\psi} > 0 \\ [\rho, r], & \text{αν } \tilde{\psi} = 0 \end{cases}$$

Έχοντας λύσει το εσωτερικό και στη συνέχεια το εξωτερικό πρόβλημα του $(\bar{P}1)$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αρχικό πρόβλημα $(P1)$ επιλύθηκε. Τα αποτελέσματα σχετικά με την επίλυση του προβλήματος $(P1)$ συνοψίζονται παρακάτω.

Έστω ότι το (x^*, y^*) είναι σημείο γενικού ελαχίστου του προβλήματος $(P1)$. Τότε:

a) Αν $\{-v_n a - \bar{v}_n b \leq 0$ και $-w_n a - \bar{w}_n b \leq 0\}$, τότε:

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{r}{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ και } ax^* + by^* = -\sqrt{r(a^2+b^2)} \text{ , διότι } P^* = r \text{ .}$$

b) αλλιώς, δηλαδή αν $\{-v_n a - \bar{v}_n b > 0$ ή/και $-w_n a - \bar{w}_n b > 0\}$, τότε:

1) αν $-v_n a - \bar{v}_n b \geq -w_n a - \bar{w}_n b$, τότε:

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = -\sigma \sqrt{P^*} \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix} \text{ και } ax^* + by^* = -\sigma \sqrt{P^*} (-\bar{v}_n a + v_n b) \text{ , όπου}$$

$$P^* = \begin{cases} r, & \text{αν } \sigma(-\bar{v}_n a + v_n b) > 0 \\ \rho, & \text{αν } \sigma(-\bar{v}_n a + v_n b) < 0 \\ [\rho, r], & \text{αν } (-\bar{v}_n a + v_n b) = 0 \end{cases} \text{ .}$$

2) αν $-v_n a - \bar{v}_n b \leq -w_n a - \bar{w}_n b$, τότε:

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \sigma \sqrt{P^*} \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix} \text{ και } ax^* + by^* = \sigma \sqrt{P^*} (-\bar{w}_n a + w_n b) \text{ , όπου}$$

$$P^* = \begin{cases} r, & \text{αν } \sigma(-\bar{w}_n a + w_n b) < 0 \\ \rho, & \text{αν } \sigma(-\bar{w}_n a + w_n b) > 0 \\ [\rho, r], & \text{αν } (-\bar{w}_n a + w_n b) = 0 \end{cases} \text{ .}$$

Έτσι, ολοκληρώνεται η μελέτη του προβλήματος (P1). Για το πρόβλημα μεγιστοποίησης που είναι αντίστοιχης μορφής με του (P1) δεν χρειάζεται ξεχωριστή ανάλυση αφού, όπως ειπώθηκε και στην εισαγωγή, ισχύει το παρακάτω:

$$\max_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \{ax + by : (x, y) \in F\} = - \min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \{-ax - by : (x, y) \in F\}$$

2.2.2 Εύρεση Γενικού Ελαχίστου για το Πρόβλημα (P2)

Το πρόβλημα (P2) είναι, όπως προαναφέρθηκε, της μορφής:

$$\min_{x_i, y_i \in \mathbb{R}} \left\{ a_i x_i + b_i y_i + \frac{c \cdot x_i + d \cdot y_i}{x_i^2 + y_i^2} : \rho_i \leq x_i^2 + y_i^2 \leq r_i, v_i x_i + \bar{v}_i y_i \leq 0, w_i x_i + \bar{w}_i y_i \leq 0 \right\}$$

$$j=i$$

Για λόγους ευκολίας στους συμβολισμούς στα πλαίσια αυτής της υποενότητας θα θέσουμε:

- $x_i \leftrightarrow x, y_i \leftrightarrow y$
- $a_i \leftrightarrow \alpha, b_i \leftrightarrow \beta$
- $\rho_i \leftrightarrow \rho, r_i \leftrightarrow r$
- $v_i \leftrightarrow v, \bar{v}_i \leftrightarrow \bar{v}$
- $w_i \leftrightarrow w, \bar{w}_i \leftrightarrow \bar{w}$

Άρα το πρόβλημα (P2) θα έχει τη μορφή:

$$\min_{x, y \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha x + \beta y + \frac{c \cdot x + d \cdot y}{x^2 + y^2} : \rho \leq x^2 + y^2 \leq r, v \cdot x + \bar{v} \cdot y \leq 0, w \cdot x + \bar{w} \cdot y \leq 0 \right\} \quad (P2)$$

όπου $0 < \rho < r$ και $\det \left\{ \begin{bmatrix} v & \bar{v} \\ w & \bar{w} \end{bmatrix} \right\} = v\bar{w} - \bar{v}w \neq 0$ και η συνάρτηση κόστους δεν είναι εκ ταυτότητος ίση με μηδέν.

Για ευκολία μπορούμε και πάλι να ορίσουμε τα κανονικοποιημένα διανύσματα των $\begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} w \\ \bar{w} \end{bmatrix}$ κατά τα γνωστά, δηλαδή $\begin{bmatrix} v_n \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + \bar{v}^2}} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} w_n \\ \bar{w}_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{w^2 + \bar{w}^2}} \begin{bmatrix} w \\ \bar{w} \end{bmatrix}$.

Το επιτρεπτό σύνολο του (P2) θα είναι το

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho \leq x^2 + y^2 \leq r, v_n \cdot x + \bar{v}_n \cdot y \leq 0, w_n \cdot x + \bar{w}_n \cdot y \leq 0\}.$$

Όπως και πριν, ορίζουμε το $\sigma = \text{sgn}(v\bar{w} - \bar{v}w) = \text{sgn}(v_n\bar{w}_n - \bar{v}_nw_n)$ και ακόμη τα διανύσματα $-\sigma q \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix}$ και $\sigma q \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix}$, όπου $q > 0$, που βρίσκονται για τους ίδιους λόγους επάνω στα επιτρεπτά μέρη των ευθειών $(\epsilon_1): v_n x + \bar{v}_n y = 0$ και $(\epsilon_2): w_n x + \bar{w}_n y = 0$ αντίστοιχα.

Με χρήση των κανονικοποιημένων διανυσμάτων, το πρόβλημα (P2) λαμβάνει τη μορφή:

$$\min_{x, y \in \mathbb{R}} \left\{ \gamma \cdot x + \delta \cdot y + \frac{c \cdot x + d \cdot y}{x^2 + y^2} : \rho \leq x^2 + y^2 \leq r, v_n \cdot x + \bar{v}_n \cdot y \leq 0, w_n \cdot x + \bar{w}_n \cdot y \leq 0 \right\} \quad (\text{P2})$$

Ισοδύναμα, το (P2) μπορεί να γραφεί όπως παρακάτω:

$$\min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}} \left\{ \gamma \cdot x + \delta \cdot y + \frac{c \cdot x + d \cdot y}{P} : x^2 + y^2 = P, v_n \cdot x + \bar{v}_n \cdot y \leq 0, w_n \cdot x + \bar{w}_n \cdot y \leq 0, \rho \leq P \leq r \right\} \quad (\text{P2})$$

Πριν μπορέσουμε να λύσουμε το (P2) πρέπει να λύσουμε μια σειρά από βοηθητικά προβλήματα:

Βοηθητικό Πρόβλημα 1 (BΠ1)

$$\min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \left\{ \gamma \cdot x + \delta \cdot y + \frac{c \cdot x + d \cdot y}{P} : x^2 + y^2 = P \right\} \quad (\text{BΠ1})$$

στο οποίο η παράμετρος P είναι μία θετική, συγκεκριμένη τιμή, άρα δεν ελαχιστοποιούμε ως προς P . Το (BΠ1) είναι της μορφής (P1.P) που εξετάσαμε στην επίλυση του προβλήματος (P1) αν

θέσουμε $\gamma + \frac{c}{P} \leftrightarrow a$ και $\delta + \frac{d}{P} \leftrightarrow b$. Το πρόβλημα αυτό όμως έχει ήδη λυθεί και άρα προκύπτει ότι το πρόβλημα (BΠ1) θα έχει:

- Σημείο ελαχίστου

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{P}{\left(\gamma + \frac{c}{P}\right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P}\right)^2}} \begin{bmatrix} \gamma + \frac{c}{P} \\ \delta + \frac{d}{P} \end{bmatrix}, \text{ με } \hat{\lambda}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(\gamma + \frac{c}{P}\right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P}\right)^2}{P}} \text{ με ελάχιστη}$$

$$\text{τιμή } \gamma \hat{x}_1 + \delta \hat{y}_1 + \frac{c \hat{x}_1 + d \hat{y}_1}{P} = -\sqrt{P \left(\left(\gamma + \frac{c}{P}\right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P}\right)^2 \right)}.$$

και

- Σημείο μεγίστου

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{P}{\left(\gamma + \frac{c}{P}\right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P}\right)^2}} \begin{bmatrix} \gamma + \frac{c}{P} \\ \delta + \frac{d}{P} \end{bmatrix}, \text{ με } \hat{\lambda}_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(\gamma + \frac{c}{P}\right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P}\right)^2}{P}} \text{ με μέγιστη τιμή}$$

$$\gamma \hat{x}_2 + \delta \hat{y}_2 + \frac{c \hat{x}_2 + d \hat{y}_2}{P} = \sqrt{P \left(\left(\gamma + \frac{c}{P} \right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P} \right)^2 \right)} .$$

Προφανώς μόνο το σημείο ελαχίστου και η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή είναι τα αποτελέσματα που πραγματικά μας ενδιαφέρουν.

Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα δεύτερο βοηθητικό πρόβλημα:

Βοηθητικό Πρόβλημα 2 (ΒΠ2)

$$\min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}} \left\{ \gamma \cdot x + \delta \cdot y + \frac{c \cdot x + d \cdot y}{P} : x^2 + y^2 = P, \rho \leq P \leq r \right\} \quad (\text{ΒΠ2})$$

ή ισοδύναμα: $\min_{P \in \mathbb{R}} \left\{ \min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \left\{ \gamma \cdot x + \delta \cdot y + \frac{c \cdot x + d \cdot y}{P} : x^2 + y^2 = P \right\} : \rho \leq P \leq r \right\} \quad (\text{ΒΠ2})$

Από την ισοδύναμη έκφραση παρατηρούμε ότι το εσωτερικό πρόβλημα είναι ίδιο με το (ΒΠ1), άρα το ελάχιστό του είναι γνωστό. Οπότε το (ΒΠ2) γίνεται:

$$\min_{P \in \mathbb{R}} \left\{ -\sqrt{P \left(\left(\gamma + \frac{c}{P} \right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P} \right)^2 \right)} : \rho \leq P \leq r \right\} \quad (\text{ΒΠ2})$$

Αντί για το πρόβλημα (ΒΠ2) όπως προκύπτει στην τελευταία σχέση, μπορούμε να λύσουμε το

πρόβλημα: $\max_{P \in \mathbb{R}} \left\{ \sqrt{P \left(\left(\gamma + \frac{c}{P} \right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P} \right)^2 \right)} : \rho \leq P \leq r \right\} \quad (\text{ΒΠ2}')$,

αφού $\max_{x \in F} \{f(x)\} = -\min_{x \in F} \{-f(x)\}$.

Για περαιτέρω απλοποίηση, μπορούμε να παρατηρήσουμε το εξής:

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο επιτρεπτό σύνολο και αν ακόμη x^* είναι σημείο γενικού μεγίστου του $\max_x \{ \sqrt{f(x)} : x \in F \}$, τότε λόγω της μονοτονίας της ρίζας θα είναι $f(x^*) \geq f(x)$, $\forall x \in F$,

δηλαδή το σημείο x^* είναι σημείο γενικού μεγίστου και για το πρόβλημα $\max_x \{f(x) : x \in F\}$.

Αντίστροφα, αν \bar{x} είναι σημείο γενικού μεγίστου του $\max_x \{f(x) : x \in F\}$ και

$f(x) \geq 0$, $\forall x \in F$, τότε πάλι από μονοτονία της ρίζας θα είναι $\sqrt{f(\bar{x})} \geq \sqrt{f(x)}$, $\forall x \in F$, δηλαδή το \bar{x} θα είναι σημείο γενικού μεγίστου του $\max_x \{ \sqrt{f(x)} : x \in F \}$.

Με βάση αυτά, μπορούμε να λύσουμε το απλούστερο πρόβλημα:

$$\max_{P \in \mathbb{R}} \left\{ P \left(\left(\gamma + \frac{c}{P} \right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P} \right)^2 \right) : \rho \leq P \leq r \right\} \quad (\text{ΒΠ2}'')$$

Θέτουμε λοιπόν $f(P) = P \left(\left(\gamma + \frac{c}{P} \right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P} \right)^2 \right)$, μια συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής

$P \in \mathbb{R}$ και θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την f . Τότε:

- $\frac{df}{dP}(P) = \gamma^2 + \delta^2 - \frac{c^2 + d^2}{P^2}$
- $\frac{d^2f}{dP^2}(P) = 2 \frac{c^2 + d^2}{P^3}$

Χωρίς να ληφθούν υπόψη οι περιορισμοί, βρίσκουμε πρώτα τα στάσιμα σημεία \hat{P} της f . Προς αυτό λύνουμε:

$$\frac{df}{dP}(\hat{P})=0 \Leftrightarrow \gamma^2 + \delta^2 = \frac{c^2 + d^2}{\hat{P}^2} \Rightarrow \hat{P} = \pm \sqrt{\frac{c^2 + d^2}{\gamma^2 + \delta^2}}$$

Εξετάζοντας τη δεύτερη παράγωγο της f στα δύο αυτά σημεία καταλήγουμε στα εξής:

- $\hat{P}_{max} = -\sqrt{\frac{c^2 + d^2}{\gamma^2 + \delta^2}}$ θα είναι σημείο γενικού μεγίστου της $f(P)$ αφού $\frac{d^2f}{dP^2}(\hat{P}_{max}) < 0$.
- $\hat{P}_{min} = \sqrt{\frac{c^2 + d^2}{\gamma^2 + \delta^2}}$ θα είναι σημείο γενικού ελαχίστου της $f(P)$ αφού $\frac{d^2f}{dP^2}(\hat{P}_{min}) > 0$.

Όμως, από τα δύο αυτά σημεία μόνο το \hat{P}_{min} μπορεί ίσως να ανήκει στο διάστημα $[\rho, r]$, αφού $\rho > 0$.

Με αυτή τη γνώση επιστρέφουμε στην ανάλυση του προβλήματος (ΒΠ2''). Για το πρόβλημα αυτό οι αναγκαίες συνθήκες 1ης τάξης (K-K-T) σε ένα (τοπικό) μέγιστο \tilde{P} είναι:

- $-\gamma^2 - \delta^2 + \frac{c^2 + d^2}{\tilde{P}^2} + v_1 - v_2 = 0$ (KKT 1)
- $\rho \leq \tilde{P} \leq r$ (KKT 2)
- $v_1(\tilde{P} - r) = 0$ (KKT 3)
- $v_2(-\tilde{P} + \rho) = 0$ (KKT 4)
- $v_1 \geq 0, v_2 \geq 0$ (KKT 5)

Δεδομένου ότι $\rho < r$, θα πρέπει $v_1 = 0$ ή/και $v_2 = 0$ αφού αν ήταν $v_1 > 0$ και $v_2 > 0$ τότε από (KKT 3) και (KKT 4) θα συνεπαγόταν ότι $\tilde{P} = r = \rho$, Άτοπο (!). Η περίπτωση όπου $v_1 = 0$ και $v_2 = 0$ αποκλείεται γιατί αν ίσχυε, τότε από την (KKT 1) θα καταλήγαμε ότι

$$\tilde{P} = \pm \sqrt{\frac{c^2 + d^2}{\gamma^2 + \delta^2}}, \text{ ίδιο αποτέλεσμα δηλαδή όπως και πριν όταν δεν λάβαμε τον περιορισμό}$$

υπόψη, δηλαδή θα είχαμε $\tilde{P} = \hat{P}_{min}$ ή $\tilde{P} = \hat{P}_{max}$. Το πρώτο ενδεχόμενο αφορά ελάχιστο, άρα απορρίπτεται, το δεύτερο όμως είναι εκτός ορίων, άρα απορρίπτεται.

Άρα καταλήγουμε ότι πρέπει $\{v_1 = 0 \text{ και } v_2 > 0\}$ ή $\{v_1 > 0 \text{ και } v_2 = 0\}$.

Αν $\{v_1 = 0 \text{ και } v_2 > 0\}$, τότε από (KKT 4) έχουμε $\tilde{P} = \rho$. (2.37)

Αν $\{v_1 > 0 \text{ και } v_2 = 0\}$, τότε από (KKT 3) έχουμε $\tilde{P} = r$. (2.38)

Είναι ξεκάθαρο λοιπόν ότι το σημείο μεγίστου θα βρίσκεται σε κάποιο από τα δύο άκρα του $[\rho, r]$.

Όπως ειπώθηκε, το \hat{P}_{min} μπορεί να ανήκει αλλά ενδέχεται και να μην ανήκει στο $[\rho, r]$.

Ως προς αυτό, λαμβάνονται οι πιο κάτω περιπτώσεις:

i. Έστω ότι $\hat{P}_{min} \leq \rho$. Τότε είναι $\sqrt{\frac{c^2+d^2}{\gamma^2+\delta^2}} \leq \rho \Rightarrow \gamma^2+\delta^2 \geq \frac{c^2+d^2}{\rho^2}$. Ακόμη έχουμε ότι $\tilde{P} \geq \rho > 0 \Rightarrow \tilde{P}^2 \geq \rho^2 \Rightarrow \frac{1}{\rho^2} \geq \frac{1}{\tilde{P}^2} \Rightarrow \frac{c^2+d^2}{\rho^2} \geq \frac{c^2+d^2}{\tilde{P}^2}$. Επομένως, είναι $\gamma^2+\delta^2 \geq \frac{c^2+d^2}{\tilde{P}^2} \Rightarrow \gamma^2+\delta^2 - \frac{c^2+d^2}{\tilde{P}^2} \geq 0 \stackrel{\text{KKT}_1}{\Rightarrow} v_1 - v_2 \geq 0$. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι σε αυτή την περίπτωση είναι $\{v_1 > 0 \text{ και } v_2 = 0\}$ και άρα $\tilde{P} = r$.

ii. Έστω ότι $\hat{P}_{min} \geq r$. Τότε είναι $\sqrt{\frac{c^2+d^2}{\gamma^2+\delta^2}} \geq r \Rightarrow \gamma^2+\delta^2 \leq \frac{c^2+d^2}{r^2}$. Ακόμη έχουμε ότι $0 < \tilde{P} \leq r \Rightarrow \tilde{P}^2 \leq r^2 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \leq \frac{1}{\tilde{P}^2} \Rightarrow \frac{c^2+d^2}{r^2} \leq \frac{c^2+d^2}{\tilde{P}^2}$. Επομένως, είναι $\gamma^2+\delta^2 \leq \frac{c^2+d^2}{\tilde{P}^2} \Rightarrow \gamma^2+\delta^2 - \frac{c^2+d^2}{\tilde{P}^2} \leq 0 \stackrel{\text{KKT}_1}{\Rightarrow} v_1 - v_2 \leq 0$. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι σε αυτή την περίπτωση είναι $\{v_1 = 0 \text{ και } v_2 > 0\}$ και άρα $\tilde{P} = \rho$.

iii. Έστω ότι $\rho < \hat{P}_{min} < r$. Τότε το πρόβλημα (BΠ2'') γράφεται
$$\max_P \{f(P) : \rho \leq P \leq r\} = \max_P \{\max_P \{f(P) : \rho \leq P \leq r'\}, \max_P \{f(P) : \rho' \leq P \leq r\}\}$$

$$\stackrel{\text{i,ii}}{=} \max\{f(\rho), f(r)\}$$

Όμως, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f(\rho) - f(r) &= (\rho - r)(\gamma^2 + \delta^2) + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)(c^2 + d^2) \\ &= \frac{\rho - r}{\rho r}(\gamma^2 + \delta^2) \left[\rho r - \frac{c^2 + d^2}{\gamma^2 + \delta^2} \right] \\ &= \frac{\rho - r}{\rho r}(\gamma^2 + \delta^2) [\rho r - \hat{P}_{min}^2] \end{aligned}$$

Άρα, καταλήγουμε ότι:
$$\tilde{P} = \begin{cases} \rho, & \text{αν } \rho r - \hat{P}_{min}^2 \leq 0 \\ r, & \text{αν } \rho r - \hat{P}_{min}^2 \geq 0 \end{cases}, \text{αφού } \rho - r < 0.$$

Συνοψίζοντας, λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$\tilde{P} = \begin{cases} \rho, & \text{αν } \hat{P}_{min} \leq \rho \\ r, & \text{αν } \hat{P}_{min} \geq r \\ \rho, & \text{αν } \rho < \hat{P}_{min} < r \text{ και } \rho r - \hat{P}_{min}^2 \leq 0 \\ r, & \text{αν } \rho < \hat{P}_{min} < r \text{ και } \rho r - \hat{P}_{min}^2 \geq 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι είναι δυνατή η ενοποίηση των περιπτώσεων 1 και 3 και των περιπτώσεων 2 και 4 έτσι ώστε τελικά να έχουμε:

$$\tilde{P} = \begin{cases} \rho, & \text{αν } \rho r \leq \frac{c^2+d^2}{\gamma^2+\delta^2} \\ r, & \text{αν } \rho r \geq \frac{c^2+d^2}{\gamma^2+\delta^2} \end{cases} \quad (2.39)$$

Το σημείο, λοιπόν, ελαχίστου του προβλήματος (BΠ2) θα είναι το:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = -\sqrt{\frac{\tilde{P}}{(\gamma + \frac{c}{\tilde{P}})^2 + (\delta + \frac{d}{\tilde{P}})^2}} \begin{bmatrix} \gamma + \frac{c}{\tilde{P}} \\ \delta + \frac{d}{\tilde{P}} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

όπου το \tilde{P} προέρχεται από την (2.39). Αντίστοιχα, η ελάχιστη τιμή του (ΒΠ2) προβλήματος είναι:

$$\gamma \tilde{x} + \delta \tilde{y} + \frac{c \tilde{x} + d \tilde{y}}{\tilde{P}} = -\sqrt{\tilde{P} \left(\left(\gamma + \frac{c}{\tilde{P}} \right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{\tilde{P}} \right)^2 \right)} \quad (2.41)$$

Με δεδομένα πλέον αυτά τα βοηθητικά προβλήματα, επανερχόμαστε στο αρχικό μας πρόβλημα (P2). Διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

- (a) Έστω ότι $v_n(\gamma + \frac{c}{\tilde{P}}) + \bar{v}_n(\delta + \frac{d}{\tilde{P}}) \geq 0$ και $w_n(\gamma + \frac{c}{\tilde{P}}) + \bar{w}_n(\delta + \frac{d}{\tilde{P}}) \geq 0$, όπου \tilde{P} βρίσκεται από την (2.39).

Τότε το σημείο $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P})$ όπως προκύπτει από τις (2.39) και (2.40) είναι επιτρεπτό σημείο του (P2) και σημείο γενικού ελαχίστου του (ΒΠ2), άρα είναι και σημείο γενικού ελαχίστου του (P2) διότι το επιτρεπτό σύνολο του (P2) είναι υποσύνολο του επιτρεπτού συνόλου του (ΒΠ2). Άρα, σε αυτή την περίπτωση, το ελάχιστο είναι

$$\gamma x^* + \delta y^* + \frac{c x^* + d y^*}{P^*} = -\sqrt{P^* \left(\left(\gamma + \frac{c}{P^*} \right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P^*} \right)^2 \right)}, \text{ όπου } (x^*, y^*, P^*) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}) \text{ με τα } (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}) \text{ όπως προκύπτουν από τις (2.39) και (2.40).}$$

- (b) Έστω ότι $v_n(\gamma + \frac{c}{\tilde{P}}) + \bar{v}_n(\delta + \frac{d}{\tilde{P}}) < 0$ ή/και $w_n(\gamma + \frac{c}{\tilde{P}}) + \bar{w}_n(\delta + \frac{d}{\tilde{P}}) < 0$, όπου \tilde{P} βρίσκεται από την (2.39).

Θα αποδειχθεί πρώτα ότι αν το (x^*, y^*, P^*) είναι σημείο ελαχίστου του (P2), τότε πρέπει:

$$v_n x^* + \bar{v}_n y^* = 0 \text{ ή } w_n x^* + \bar{w}_n y^* = 0 \quad (2.42)$$

Προς αυτό, θα υποθέσουμε το αντίθετο· έστω λοιπόν ότι ισχύει:

$$v_n x^* + \bar{v}_n y^* < 0 \text{ και } w_n x^* + \bar{w}_n y^* < 0 \quad (2.43)$$

Λόγω συνέχειας θα υπάρχει ϵ_1 θετικό τέτοιο ώστε

$$v_n x + \bar{v}_n y < 0 \text{ και } w_n x + \bar{w}_n y < 0, \quad \forall (x, y) \text{ τ.ω } \left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} \right\| \leq \epsilon_1. \text{ Ακόμη, αφού το}$$

(x^*, y^*, P^*) είναι σημείο ελαχίστου, θα ισχύει ότι υπάρχει ϵ_2 θετικό τέτοιο ώστε να

$$\text{έχουμε } f(x^*, y^*, P^*) \leq f(x, y, P), \quad \forall (x, y, P) \text{ τ.ω } \left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ P - P^* \end{bmatrix} \right\| \leq \epsilon_2, \quad (x, y) \in F.$$

όπου βέβαια $f(x, y, P) = \gamma x + \delta y + \frac{c x + d y}{P}$.

Έστω ότι $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Τότε με βάση τα παραπάνω θα έχουμε ότι:

$$f(x^*, y^*, P^*) \leq f(x, y, P), \quad \forall (x, y, P) \text{ τ.ω } \left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ P - P^* \end{bmatrix} \right\| \leq \epsilon, \quad x^2 + y^2 = P, \quad \rho \leq P \leq r \quad (2.44)$$

το οποίο σημαίνει ότι το (x^*, y^*, P^*) είναι σημείο τοπικού ελαχίστου για το πρόβλημα (BΠ2). Όμως, για το (BΠ2) γνωρίζουμε ότι το μοναδικό τοπικό (και γενικό) ελάχιστο βρίσκεται στο σημείο $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P})$ όπως αυτό προκύπτει από τις (2.39) και (2.40). Όμως, για το σημείο $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P})$ έχουμε ότι

$$v_n(\gamma + \frac{c}{P}) + \bar{v}_n(\delta + \frac{d}{P}) > 0 \quad \text{και} \quad w_n(\gamma + \frac{c}{P}) + \bar{w}_n(\delta + \frac{d}{P}) > 0, \quad \text{το οποίο αποδεικνύεται εύκολα}$$

αν λάβουμε υπόψη την (2.40) και την υπόθεση (2.43). Το αποτέλεσμα αυτό, όμως, αντιτίθεται στην αρχική μας υπόθεση για το (b). Άρα, φτάσαμε σε άτοπο. Η υπόθεση (2.43) δεν είναι σωστή και άρα ισχύει το (2.42), δηλαδή $v_n x^* + \bar{v}_n y^* = 0$ ή $w_n x^* + \bar{w}_n y^* = 0$, αν το (x^*, y^*, P^*) είναι σημείο ελαχίστου.

Στην περίπτωση (b), λοιπόν, το πρόβλημα (P3) ισοδυναμεί με το πρόβλημα

$$\min \{f(\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{P}_v), f(\bar{x}_w, \bar{y}_w, \bar{P}_w)\}, \quad (2.45)$$

όπου το $(\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{P}_v)$ είναι σημείο γενικού ελαχίστου για το πρόβλημα

$$\min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}} \left\{ \gamma x + \delta y + \frac{c x + d y}{P} : x^2 + y^2 = P, v_n x + \bar{v}_n y = 0, w_n x + \bar{w}_n y \leq 0, \rho \leq P \leq r \right\} \quad (P2.v)$$

και $(\bar{x}_w, \bar{y}_w, \bar{P}_w)$ είναι σημείο γενικού ελαχίστου για το πρόβλημα

$$\min_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}} \left\{ \gamma x + \delta y + \frac{c x + d y}{P} : x^2 + y^2 = P, v_n x + \bar{v}_n y \leq 0, w_n x + \bar{w}_n y = 0, \rho \leq P \leq r \right\} \quad (P2.w)$$

Για το (P2.v) παρατηρούμε ότι είναι $v_n x + \bar{v}_n y = 0$ και $w_n x + \bar{w}_n y \leq 0$ το οποίο σημαίνει ότι όλα τα ζεύγη (x, y) που ικανοποιούν τη συνθήκη αυτή θα είναι παράλληλα στο διάνυσμα

$$-\sigma \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \text{άρα θα είναι} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = q \sigma \begin{bmatrix} \bar{v}_n \\ -v_n \end{bmatrix}, \quad q \geq 0. \quad \text{Οι υπόλοιποι περιορισμοί λοιπόν}$$

μπορούν να γραφούν ισοδύναμα ως

$$\bullet \quad P = x^2 + y^2 = q^2 (v_n^2 + \bar{v}_n^2) = q^2 \quad (2.46)$$

$$\bullet \quad \rho \leq P \leq r \Leftrightarrow \rho \leq q^2 \leq r \Leftrightarrow_{q \geq 0} \sqrt{\rho} \leq q \leq \sqrt{r} \quad (2.47)$$

Ακόμη, η συνάρτηση κόστους είναι δυνατόν να γραφεί ως:

$$f(x, y, P) = \gamma x + \delta y + \frac{c x + d y}{P} \stackrel{(2.46)}{=} \sigma q (\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) + \frac{\sigma (c \bar{v}_n - d v_n)}{q} = \varphi(q) \quad (2.48)$$

Το (P2.v) ισοδυναμεί λοιπόν με:

$$\min_{q \in \mathbb{R}} \left\{ \sigma \left[q (\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) + \frac{c \bar{v}_n - d v_n}{q} \right] : \sqrt{\rho} \leq q \leq \sqrt{r} \right\} \quad (P2.v')$$

Όμοια για το (P2.w) παρατηρούμε ότι είναι $v_n x + \bar{v}_n y \leq 0$ και $w_n x + \bar{w}_n y = 0$ το οποίο σημαίνει ότι όλα τα ζεύγη (x, y) που ικανοποιούν τη συνθήκη αυτή θα είναι παράλληλα στο

διάνυσμα $\sigma \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix}$, άρα θα είναι $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = q \sigma \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix}$, $q \geq 0$. Οι περιορισμοί (2.46) και

(2.47) ισχύουν και πάλι και η συνάρτηση κόστους θα γίνει:

$$f(x, y, P) = \gamma x + \delta y + \frac{c x + d y}{P} \stackrel{(2.46)}{=} \sigma q (-\gamma \bar{w}_n + \delta w_n) + \frac{\sigma (-c \bar{w}_n + d w_n)}{q} = \varphi_w(q)$$

Το (P2.w) ισοδυναμεί λοιπόν με:

$$\min_{q \in \mathbb{R}} \left\{ \sigma \left[q (-\gamma \bar{w}_n + \delta w_n) + \frac{-c \bar{w}_n + d w_n}{q} \right] : \sqrt{\rho} \leq q \leq \sqrt{r} \right\} \quad (P2.w')$$

Τα δύο αυτά προβλήματα, $(P2.v')$ και $(P2.w')$, είναι παρόμοια οπότε αρκεί να επιλυθεί αναλυτικά το ένα και η επίλυση του άλλου θα είναι παρόμοια. Επιλέγεται προς αναλυτική επίλυση το $(P2.v')$ και το $(P2.w')$ θα λυθεί όμοια.

Η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μίας πραγματικής μεταβλητής οπότε η εύρεση του ελαχίστου δεν είναι πολύ δύσκολη. Θα χρειαστούν όμως η πρώτη και δεύτερη παράγωγός της.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d\varphi}{dq}(q) &= \sigma \left[\gamma \bar{v}_n - \delta v_n - \frac{c \bar{v}_n - d v_n}{q^2} \right] \\ \bullet \quad \frac{d^2\varphi}{dq^2}(q) &= 2\sigma \frac{c \bar{v}_n - d v_n}{q^3} \end{aligned}$$

Εξετάζουμε την πρώτη παράγωγο για να βρούμε που μηδενίζεται, αν μηδενίζεται.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. αν $\gamma \bar{v}_n - \delta v_n = 0$, τότε πρέπει $c \bar{v}_n - d v_n \neq 0$ και ακόμη η πρώτη παράγωγος δεν μηδενίζεται ποτέ. Οπότε θα είναι:

$$q^* = \begin{cases} \sqrt{\rho}, & \text{αν } \sigma(c \bar{v}_n - d v_n) < 0 \\ \sqrt{r}, & \text{αν } \sigma(c \bar{v}_n - d v_n) > 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

Ο λόγος είναι ότι στην πρώτη περίπτωση η πρώτη παράγωγος θα είναι πάντα θετική και άρα η συνάρτηση φ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{\rho}, \sqrt{r}]$. Στη δεύτερη περίπτωση, η πρώτη παράγωγος είναι πάντα αρνητική και άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{\rho}, \sqrt{r}]$.

2. αν $c \bar{v}_n - d v_n = 0$, τότε πρέπει $\gamma \bar{v}_n - \delta v_n \neq 0$ και ακόμη η πρώτη παράγωγος δεν μηδενίζεται ποτέ. Οπότε θα είναι:

$$q^* = \begin{cases} \sqrt{\rho}, & \text{αν } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0 \\ \sqrt{r}, & \text{αν } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Ο λόγος είναι ότι στην πρώτη περίπτωση η πρώτη παράγωγος θα είναι πάντα θετική και άρα η συνάρτηση φ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{\rho}, \sqrt{r}]$. Στη δεύτερη περίπτωση, η πρώτη παράγωγος είναι πάντα αρνητική και άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{\rho}, \sqrt{r}]$.

3. αν $\text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = -\text{sgn}(c \bar{v}_n - d v_n)$, τότε $\nexists \hat{q} \in \mathbb{R}^+$ τ.ω. $\frac{d\varphi}{dq}(\hat{q}) = 0$ και άρα η συνάρτηση φ θα είναι γνησίως μονότονη. Ακόμη, έχουμε ότι

$$\frac{d\varphi}{dq}(q) = \sigma \cdot \text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) \cdot \left[|\gamma \bar{v}_n - \delta v_n| + \frac{|c \bar{v}_n - d v_n|}{q^2} \right], \text{ οπότε:}$$

$$q^* = \begin{cases} \sqrt{\rho}, & \text{αν } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0 \\ \sqrt{r}, & \text{αν } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

4. αν $\text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = \text{sgn}(c \bar{v}_n - d v_n)$, τότε $\frac{d\varphi}{dq}(\hat{q}) = 0 \Rightarrow \hat{q} = \sqrt{\frac{c \bar{v}_n - d v_n}{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n}}$. Η

πρώτη παράγωγος τότε μπορεί να γραφεί και με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dq}(q) &= \sigma \cdot (\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) \cdot \left[1 - \frac{c \bar{v}_n - d v_n}{q^2 (\gamma \bar{v}_n - \delta v_n)} \right] \\ &= \frac{\sigma \cdot (\gamma \bar{v}_n - \delta v_n)}{q^2} \cdot (q^2 - \hat{q}^2) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Σε αυτό το σημείο, διακρίνονται οι εξής υποπεριπτώσεις:

- ♦ αν $\hat{q} < \sqrt{\rho}$, τότε στο διάστημα $[\sqrt{\rho}, \sqrt{r}]$ η πρώτη παράγωγος δεν μηδενίζεται και άρα η φ θα είναι γνησίως μονότονη. Ακόμη, έχουμε ότι $q^2 - \hat{q}^2 > 0, \forall q \in [\sqrt{\rho}, \sqrt{r}]$ οπότε:

$$q^* = \begin{cases} \sqrt{\rho}, & \text{αν } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0 \\ \sqrt{r}, & \text{αν } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

- ♦ αν $\hat{q} > \sqrt{r}$, τότε στο διάστημα $[\sqrt{\rho}, \sqrt{r}]$ η πρώτη παράγωγος δεν μηδενίζεται και άρα η φ θα είναι γνησίως μονότονη. Ακόμη, έχουμε ότι $q^2 - \hat{q}^2 < 0, \forall q \in [\sqrt{\rho}, \sqrt{r}]$ οπότε:

$$q^* = \begin{cases} \sqrt{\rho}, & \text{αν } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0 \\ \sqrt{r}, & \text{αν } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

- ♦ αν $\hat{q} \in [\sqrt{\rho}, \sqrt{r}]$, τότε το στάσιμο σημείο \hat{q} θα είναι ελάχιστο εφόσον ικανοποιεί το κατάλληλο κριτήριο της δευτέρας παραγώγου, δηλαδή εφόσον ισχύει $\frac{d^2\varphi}{dq^2}(\hat{q}) > 0 \Rightarrow \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0$. Άρα, είναι:

$$q^* = \hat{q} = \sqrt{\frac{c \bar{v}_n - d v_n}{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n}}, \text{ αν } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0 \quad (2.55)$$

Αν αυτό δεν ισχύει, τότε το στάσιμο σημείο θα είναι μέγιστο της φ και το ελάχιστο θα είναι κάποιο από τα άκρα του διαστήματος $[\sqrt{\rho}, \sqrt{r}]$.

$$\text{Είναι } \varphi(q) = \sigma q (\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) + \frac{\sigma (c \bar{v}_n - d v_n)}{q} = \sigma (\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) \cdot \left[q + \frac{\hat{q}^2}{q} \right],$$

$$\text{οπότε θα έχουμε ότι } \varphi(\sqrt{\rho}) - \varphi(\sqrt{r}) = \sigma (\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) \cdot \frac{\sqrt{r} - \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho r}} \cdot (\hat{q}^2 - \sqrt{\rho r}).$$

Τελικά, είναι:

$$q^* = \begin{cases} \sqrt{\rho}, & \text{αν } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0 \text{ και } \frac{c \bar{v}_n - d v_n}{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n} \geq \sqrt{\rho r} \\ \sqrt{r}, & \text{αν } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0 \text{ και } \frac{c \bar{v}_n - d v_n}{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n} \leq \sqrt{\rho r} \end{cases} \quad (2.56)$$

Έχοντας εξετάσει όλες τις περιπτώσεις, συνοψίζουμε τα αποτελέσματα που αφορούν στην επίλυση του προβλήματος (P2.v') πιο κάτω:

- αν $\{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n = 0 \text{ και } \sigma(c \bar{v}_n - d v_n) < 0\}$ ή (a)
- αν $\{c \bar{v}_n - d v_n = 0 \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0\}$ ή (b)
- $q^* = \sqrt{\rho}$ αν $\{\text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = -\text{sgn}(c \bar{v}_n - d v_n) \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0\}$ ή (c)
- (ή $P^* = \rho$) αν $\{\text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = \text{sgn}(c \bar{v}_n - d v_n), \hat{q} < \sqrt{\rho} \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0\}$ ή (d)
- αν $\{\text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = \text{sgn}(c \bar{v}_n - d v_n), \hat{q} > \sqrt{r} \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0\}$ ή (e)
- αν $\{\text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = \text{sgn}(c \bar{v}_n - d v_n), \sqrt{\rho} \leq \hat{q} \leq \sqrt{r}, \hat{q}^2 \geq \sqrt{\rho r} \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0\}$ (f)

$$\begin{aligned}
& \text{αν } \{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n = 0 \text{ και } \sigma(c \bar{v}_n - d v_n) > 0\} \text{ ή} & (a) \\
& \text{αν } \{c \bar{v}_n - d v_n = 0 \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0\} \text{ ή} & (b) \\
q^* = \sqrt{r} & \text{αν } \{\text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = -\text{sgn}(c \bar{v}_n - d v_n) \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0\} \text{ ή} & (c) \\
(\text{ή } P^* = r) & \text{αν } \{\text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = \text{sgn}(c \bar{v}_n - d v_n), \hat{q} < \sqrt{\rho} \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0\} \text{ ή} & (d) \\
& \text{αν } \{\text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = \text{sgn}(c \bar{v}_n - d v_n), \hat{q} > \sqrt{r} \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0\} \text{ ή} & (e) \\
& \text{αν } \{\text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = \text{sgn}(c \bar{v}_n - d v_n), \sqrt{\rho} \leq \hat{q} \leq \sqrt{r}, \hat{q}^2 \leq \rho r \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0\} & (f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q^* &= \sqrt{\frac{c \bar{v}_n - d v_n}{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n}}, \text{ αν } \{\text{sgn}(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = \text{sgn}(c \bar{v}_n - d v_n), \sqrt{\rho} \leq \hat{q} \leq \sqrt{r} \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0\} \\
(\text{ή } P^* &= \frac{c \bar{v}_n - d v_n}{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n})
\end{aligned}$$

Οι πιο πάνω συνθήκες μπορούν όμως να απλοποιηθούν περαιτέρω. Ας είναι

$$\psi = \frac{c \bar{v}_n - d v_n}{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n} = \frac{\sigma(c \bar{v}_n - d v_n)}{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n)}, \text{ όπου βέβαια θα έχουμε ότι αν } \psi \geq 0, \text{ τότε}$$

$\hat{q} = \sqrt{\psi}$. Τότε οι συνθήκες (a) – (f) για την πρώτη περίπτωση όπου $q^* = \sqrt{\rho}$ μπορούν να γραφούν ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{aligned}
& \{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = 0 \text{ και } \sigma(c \bar{v}_n - d v_n) < 0\} \text{ ή} & (a') \\
& \{\psi = 0 \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0\} \text{ ή} & (b') \\
& \{\psi < 0 \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0\} \text{ ή} & (c') \\
& \{0 < \psi < \rho \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0\} \text{ ή} & (d') \\
& \{\psi > r \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0\} \text{ ή} & (e') \\
& \{\rho \leq \psi \leq r, \psi \geq \sqrt{\rho r} \text{ και } \sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0\} & (f')
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, μπορούν να γίνουν οι εξής περαιτέρω απλοποιήσεις:

$$\begin{aligned}
& \bullet (b') \text{ ή } (c') \Leftrightarrow \{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0 \text{ και } \psi \leq 0\} & (b'') \\
& \bullet (b'') \text{ ή } (d') \Leftrightarrow \{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0 \text{ και } \psi < \rho\} & (b''') \\
& \bullet (e') \text{ ή } (f') \underset{\rho \leq \sqrt{\rho r} \leq r}{\Leftrightarrow} \{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0 \text{ και } \psi \geq \sqrt{\rho r}\} & (c'')
\end{aligned}$$

Όμοια πραγματοποιείται η απλοποίηση και για $q^* = \sqrt{r}$ και $q^* = \sqrt{\frac{c \bar{v}_n - d v_n}{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n}}$. Τελικά,

για τις λύσεις του προβλήματος (P2.v') έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \bullet \begin{aligned} & q^* = \sqrt{\rho} \text{ αν } \{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = 0 \text{ και } \sigma(c \bar{v}_n - d v_n) < 0\} \text{ ή} & (a) \\ & (\text{ή } P^* = \rho), \text{ αν } \{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0 \text{ και } \psi < \rho\} \text{ ή} & (b) \\ & \text{αν } \{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0 \text{ και } \psi \geq \sqrt{\rho r}\} & (c) \end{aligned} & (2.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \begin{aligned} & q^* = \sqrt{r} \text{ αν } \{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) = 0 \text{ και } \sigma(c \bar{v}_n - d v_n) > 0\} \text{ ή} & (a) \\ & (\text{ή } P^* = r), \text{ αν } \{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0 \text{ και } \psi > r\} \text{ ή} & (b) \\ & \text{αν } \{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) < 0 \text{ και } \psi \leq \sqrt{\rho r}\} & (c) \end{aligned} & (2.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \begin{aligned} & q^* = \sqrt{\frac{c \bar{v}_n - d v_n}{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n}}, \text{ αν } \{\sigma(\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) > 0 \text{ και } \rho \leq \psi \leq r\} & (2.59) \\ & (\text{ή } P^* = \frac{c \bar{v}_n - d v_n}{\gamma \bar{v}_n - \delta v_n}) \end{aligned}
\end{aligned}$$

Το πρόβλημα (P2.v') επιλύθηκε και άρα με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα (P2.w'). Όπως ειπώθηκε, το πρόβλημα (P2.w') είναι τη μορφής:

$$\min_{q \in \mathbb{R}} \left\{ \sigma \left[q(-\gamma \bar{w}_n + \delta w_n) + \frac{-c \bar{w}_n + d w_n}{q} \right] : \sqrt{\rho} \leq q \leq \sqrt{r} \right\}$$

ή

$$\min_{q \in \mathbb{R}} \left\{ -\sigma \left[q(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) + \frac{c \bar{w}_n - d w_n}{q} \right] : \sqrt{\rho} \leq q \leq \sqrt{r} \right\}$$

και αν θέσουμε $\sigma' = -\sigma$, τότε

$$\min_{q \in \mathbb{R}} \left\{ \sigma' \left[q(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) + \frac{c \bar{w}_n - d w_n}{q} \right] : \sqrt{\rho} \leq q \leq \sqrt{r} \right\}$$

δηλαδή ένα πρόβλημα της μορφής του (P2.v'). Άρα, για την επίλυση του (P2.w') θα χρησιμοποιήσουμε τις (2.57) – (2.59), όπου βέβαια θα ισχύουν κάποιες αλλαγές, για

παράδειγμα θα έχουμε τώρα $\psi = \frac{c \bar{w}_n - d w_n}{\gamma \bar{w}_n - \delta w_n} = \frac{\sigma'(c \bar{w}_n - d w_n)}{\sigma'(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n)}$ Θα είναι λοιπόν:

- $q^* = \sqrt{\rho}$ αν $\{\sigma'(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) = 0 \text{ και } \sigma'(c \bar{w}_n - d w_n) < 0\}$ ή (a)
- (ή $P^* = \rho$) αν $\{\sigma'(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) > 0 \text{ και } \psi < \rho\}$ ή (b)
- αν $\{\sigma'(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) < 0 \text{ και } \psi \geq \sqrt{\rho r}\}$ (c)

- $q^* = \sqrt{r}$ αν $\{\sigma'(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) = 0 \text{ και } \sigma'(c \bar{w}_n - d w_n) > 0\}$ ή (a)
- (ή $P^* = r$) αν $\{\sigma'(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) > 0 \text{ και } \psi > r\}$ ή (b)
- αν $\{\sigma'(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) < 0 \text{ και } \psi \leq \sqrt{\rho r}\}$ (c)

- $q^* = \sqrt{\frac{c \bar{w}_n - d w_n}{\gamma \bar{w}_n - \delta w_n}}$, αν $\{\sigma'(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) > 0 \text{ και } \rho \leq \psi \leq r\}$
- (ή $P^* = \frac{c \bar{w}_n - d w_n}{\gamma \bar{w}_n - \delta w_n}$)

Αν ακόμη κάνουμε την αντικατάσταση $\sigma' = -\sigma$, λαμβάνουμε τελικά τις εξής σχέσεις:

- $q^* = \sqrt{\rho}$ αν $\{\sigma(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) = 0 \text{ και } \sigma(c \bar{w}_n - d w_n) > 0\}$ ή (a)
- (ή $P^* = \rho$) αν $\{\sigma(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) < 0 \text{ και } \psi < \rho\}$ ή (b) (2.60)
- αν $\{\sigma(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) > 0 \text{ και } \psi \geq \sqrt{\rho r}\}$ (c)

- $q^* = \sqrt{r}$ αν $\{\sigma(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) = 0 \text{ και } \sigma(c \bar{w}_n - d w_n) < 0\}$ ή (a)
- (ή $P^* = r$) αν $\{\sigma(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) < 0 \text{ και } \psi > r\}$ ή (b) (2.61)
- αν $\{\sigma(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) > 0 \text{ και } \psi \leq \sqrt{\rho r}\}$ (c)

- $q^* = \sqrt{\frac{c \bar{w}_n - d w_n}{\gamma \bar{w}_n - \delta w_n}}$, αν $\{\sigma(\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) < 0 \text{ και } \rho \leq \psi \leq r\}$ (2.62)
- (ή $P^* = \frac{c \bar{w}_n - d w_n}{\gamma \bar{w}_n - \delta w_n}$)

Με την επίλυση των προβλημάτων (P2.v) και (P2.w) μπορούμε πλέον να βρούμε τα σημεία ελαχίστου τους, δηλαδή τα σημεία $(\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{P}_v)$ και $(\bar{x}_w, \bar{y}_w, \bar{P}_w)$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε:

- $\begin{bmatrix} \bar{x}_v \\ \bar{y}_v \end{bmatrix} = \sqrt{\bar{P}_v} \sigma \begin{bmatrix} \bar{v}_n \\ -v_n \end{bmatrix}$ και \bar{P}_v να προκύπτει από τους τύπους (2.57), (2.58) και (2.59). Η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή θα είναι τότε:

$$f(\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{P}_v) = \sigma \left(\sqrt{\bar{P}_v} (\gamma \bar{v}_n - \delta v_n) + \frac{c \bar{v}_n - d v_n}{\sqrt{\bar{P}_v}} \right) \quad (2.63)$$

- $\begin{bmatrix} \bar{x}_w \\ \bar{y}_w \end{bmatrix} = \sqrt{\bar{P}_w} \sigma \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix}$ και \bar{P}_w να προκύπτει από τους τύπους (2.60), (2.61) και (2.62). Η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή θα είναι τότε:

$$f(\bar{x}_w, \bar{y}_w, \bar{P}_w) = -\sigma \left(\sqrt{\bar{P}_w} (\gamma \bar{w}_n - \delta w_n) + \frac{c \bar{w}_n - d w_n}{\sqrt{\bar{P}_w}} \right) \quad (2.64)$$

Η ανάλυση της περίπτωσης (b) λοιπόν ολοκληρώνεται και η ελάχιστη τιμή του (P2) θα είναι τότε το $\min \{f(\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{P}_v), f(\bar{x}_w, \bar{y}_w, \bar{P}_w)\}$, με βάση τις (2.63) και (2.64).

Το πρόβλημα (P2) λοιπόν έχει επιλυθεί πλήρως και αναλυτικά. Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε ότι:

- a) Έστω ότι $v_n(\gamma + \frac{c}{P}) + \bar{v}_n(\delta + \frac{d}{P}) \geq 0$ και $w_n(\gamma + \frac{c}{P}) + \bar{w}_n(\delta + \frac{d}{P}) \geq 0$, όπου \tilde{P} βρίσκεται από την (2.39).

Τότε το ελάχιστο είναι

$$\gamma x^* + \delta y^* + \frac{c x^* + d y^*}{P^*} = -\sqrt{P^* \left(\left(\gamma + \frac{c}{P^*} \right)^2 + \left(\delta + \frac{d}{P^*} \right)^2 \right)}, \text{ όπου } (x^*, y^*, P^*) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}) \text{ με το σημείο } (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}) \text{ όπως προκύπτει από τις (2.39) και (2.40).}$$

- b) Έστω ότι $v_n(\gamma + \frac{c}{P}) + \bar{v}_n(\delta + \frac{d}{P}) < 0$ ή/και $w_n(\gamma + \frac{c}{P}) + \bar{w}_n(\delta + \frac{d}{P}) < 0$, όπου \tilde{P} βρίσκεται από την (2.39).

Τότε το ελάχιστο είναι $\gamma x^* + \delta y^* + \frac{c x^* + d y^*}{P^*} = \min \{f(\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{P}_v), f(\bar{x}_w, \bar{y}_w, \bar{P}_w)\}$ με τις τιμές $f(\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{P}_v)$ και $f(\bar{x}_w, \bar{y}_w, \bar{P}_w)$ να προκύπτουν από τις (2.63) και (2.64) αντίστοιχα.

2.3 Ανακεφαλαίωση, τελικά σχόλια και αλγόριθμος

Αποδείχτηκε λοιπόν ότι πράγματι τα προβλήματα (P1) και (P2) λύνονται αναλυτικά και άρα ο υπολογισμός των γενικών ελαχίστων και μεγίστων για τον έλεγχο των συνθηκών (A1), (A2), (A3) και (A4) είναι διαδικασία που μπορεί να γίνει γρήγορα, δίχως την ανάγκη επαναληπτικού αλγορίθμου. Μάλιστα, σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια δεν χρειάζεται να υπολογίζονται όλα τα $4(n-1)^2$ υποπροβλήματα αλλά μόνο $4(n-1)$ που αντιστοιχούν στο “κουτί” το οποίο διχοτομείται, οι υπόλοιπες τιμές μένουν ίδιες.

Για να αναδειχθεί αυτό ας εξετάσουμε το (A1):

$$\min_{\bar{a}, \bar{f}} \{e_i^T \cdot [(\bar{G} - P \Delta^{-2}) \cdot \bar{a} + (\bar{B} + Q \Delta^{-2}) \cdot (-\bar{f}) + V_0 \cdot \bar{g}]\} : \text{περιορισμοί} \leq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, (n-1)\}$$

Το (A1) απαρτίζεται από (n-1) υποπροβλήματα, ένα για κάθε i από το 1 έως (n-1). Και κάθε ένα τέτοιο πρόβλημα όπως είπαμε αναλύεται σε (n-1) προβλήματα, είτε της μορφής (P1) είτε της (P2). Ο παρακάτω πίνακας Π1 δείχνει αυτό ακριβώς:

$j \in \{1, \dots, (n-1)\} \setminus$	$i \in \{1, \dots, (n-1)\}$	1	2	...	i	...	(n-1)
(V ₂)	1	(P2)	(P1)	...	(P1)	...	(P1)
(V ₃)	2	(P1)	(P2)	...	(P1)	...	(P1)
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
(V _{j+1})	j				Av i=j, τότε (P2) Av i≠j, τότε (P1)		
⋮	⋮						
(V _n)	(n-1)	(P1)	(P1)	(P2)

Πίνακας Π1 Αναπαράσταση Προβλημάτων (A1)

Οι στήλες αφορούν κάθε πρόβλημα (A1).i ενώ οι γραμμές αφορούν κάθε “κουτί” περιορισμών για κάποια από τις μιγαδικές τάσεις. Είναι σαφές ότι αν κάποιο κουτί διχοτομηθεί τότε μόνο τα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής θα πρέπει να επαναυπολογισθούν έτσι ώστε μετά να μπορέσουμε να ελέγξουμε τη συνθήκη (A1) αν παραβιάζεται σε κάποια στήλη, δηλαδή για κάποιο i. Τα ίδια ισχύουν με όμοιο τρόπο και για τις υπόλοιπες συνθήκες (A2), (A3) και (A4).

Είναι δυνατόν τώρα να δοθούν τα βήματα του αλγορίθμου επίλυσης:

1. Αρχικοποίηση των δεδομένων. Εισαγωγή των πληροφοριών του δικτύου (τάση ζυγού αναφοράς, ισχύες ζυγών φορτίου, αγωγιμότητες γραμμών μεταφοράς). Αρχικοποίηση του $\epsilon > 0$ (ϵ αρκετά μικρό) για τον τερματισμό της επαναληπτικής διαδικασίας. Αρχικοποίηση των περιοχών αναζήτησης για κάθε μιγαδική τάση των ζυγών PQ και δημιουργία του πρώτου συνόλου (set) περιορισμών και εισαγωγή του στην λίστα αναζήτησης.
2. Επιλογή ενός συνόλου περιορισμών (σύμφωνα με κάποιο κριτήριο) και αφαίρεσή του από την λίστα αναζήτησης. Αν η λίστα αναζήτησης είναι κενή και άρα η επιλογή ενός συνόλου αδύνατη, τερματισμός του αλγορίθμου.
3. Έλεγχος για το αν το set αυτό ικανοποιεί τον περιορισμό του ϵ . Αν ναι, τότε εκτύπωσε το ως λύση των εξισώσεων και επέστρεψε στο βήμα 2.
4. Επιλογή κάποιου κουτιού του set για διχοτόμηση (σύμφωνα με κάποιο κριτήριο) και δημιουργία δύο νέων set περιορισμών.
5. Υπολογισμός των αναγκαίων υποπροβλημάτων (P1) και (P2) για τα δύο νέα set περιορισμών.
6. Έλεγχος των δύο νέων set ως προς την ισχύ των συνθηκών (A1) – (A4). Για κάθε set που περνάει τον έλεγχο, αποθήκευσε το στην λίστα αναζήτησης για έλεγχο σε επόμενη επανάληψη, αλλιώς αγνόησε το.
7. Επιστροφή στο βήμα 2.

Διευκρινίσεις για τον αλγόριθμο

- Είναι εμφανές ότι ο αλγόριθμος δεν τερματίζει μόλις βρεθεί μια λύση αλλά όταν η λίστα αναζήτησης είναι άδεια, δηλαδή όταν δεν μπορούν να βρεθούν άλλες λύσεις, ισοδύναμα όταν έχουν βρεθεί όλες οι λύσεις.
- Στο βήμα 2 γίνεται λόγος για την επιλογή ενός set περιορισμών από την λίστα αναζήτησης και μετά εξαγωγή του από την λίστα έτσι ώστε να διχοτομηθεί και να ελεγχθεί. Το κριτήριο όμως επιλογής δεν γίνεται σαφές. Πιθανοί τρόποι επιλογής θα ήταν η DFS διάσχιση, άρα η λίστα αναζήτησης θα ήταν μια δομή δεδομένων τύπου LIFO (στοίβα) ή ακόμη η BFS διάσχιση, οπότε η λίστα αναζήτησης θα ήταν δομή δεδομένων τύπου FIFO (ουρά).
- Στο βήμα 3 αναφέρεται ο περιορισμός του ε . Η πιο προφανής επιλογή είναι να υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη η μέση τιμή των εξισώσεων (E 1) για το set των περιορισμών και αν αυτή είναι μικρότερη του ε , δηλαδή είναι λύση με ικανοποιητική ακρίβεια, τότε το set αποτελεί λύση. Αυτό φυσικά προϋποθέτει τον προσδιορισμό τιμών για τις τάσεις δηλαδή αντιπροσωπευτικών σημείων για κάθε “κουτί” στο set. Η εύκολη επιλογή είναι να βρεθεί το σημείο τομής της ενδιάμεσης ακτίνας μεταξύ των ακτίνων $\sqrt{\rho}$ και \sqrt{r} και της διχοτόμου των δύο ευθειών $v_n x + \bar{v}_n = 0$ και $w_n x + \bar{w}_n = 0$.
- Στο βήμα 4 γίνεται λόγος για κάποιο κριτήριο για την επιλογή του κουτιού που θα διχοτομηθεί μεταξύ των διαφόρων κουτιών εντός ενός set. Μια σχετικά απλή επιλογή είναι να επιλέγεται το κουτί με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Κεφάλαιο 3

Υλοποίηση Αλγορίθμου, Παραδείγματα και Τελικά Συμπεράσματα

3.1 Υλοποίηση αλγορίθμου σε Matlab

Τα βήματα ενός γενικού αλγορίθμου δόθηκαν στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου εδώ όμως θα παρουσιαστούν σύντομα κάποιες λεπτομέρειες της συγκεκριμένης υλοποίησης του αλγορίθμου σε Matlab. Ολόκληρος ο κώδικας μπορεί να βρεθεί στο Παράρτημα Α.

Επαναλαμβάνεται κι εδώ ο αλγόριθμος του κεφαλαίου 2.

1. Αρχικοποίηση των δεδομένων. Εισαγωγή των πληροφοριών του δικτύου (τάση ζυγού αναφοράς, ισχύες ζυγών φορτίου, αγωγιμότητες γραμμών μεταφοράς). Αρχικοποίηση του $\epsilon > 0$ (ϵ αρκετά μικρό) για τον τερματισμό της επαναληπτικής διαδικασίας. Αρχικοποίηση των περιοχών αναζήτησης για κάθε μιγαδική τάση των ζυγών PQ και δημιουργία του πρώτου συνόλου (set) περιορισμών και εισαγωγή του στην λίστα αναζήτησης.
2. Επιλογή ενός συνόλου περιορισμών (σύμφωνα με κάποιο κριτήριο) και αφαίρεσή του από την λίστα αναζήτησης. Αν η λίστα αναζήτησης είναι κενή και άρα η επιλογή ενός συνόλου αδύνατη, τερματισμός του αλγορίθμου.
3. Έλεγχος για το αν το set αυτό ικανοποιεί τον περιορισμό του ϵ . Αν ναι, τότε εκτύπωσε το ως λύση των εξισώσεων και επέστρεψε στο βήμα 2.
4. Επιλογή κάποιου κουτιού του set για διχοτόμηση (σύμφωνα με κάποιο κριτήριο) και δημιουργία δύο νέων set περιορισμών.
5. Υπολογισμός των αναγκαίων υποπροβλημάτων (P1) και (P2) για τα δύο νέα set περιορισμών.
6. Έλεγχος των δύο νέων set ως προς την ισχύ των συνθηκών (A1) – (A4). Για κάθε set που περνάει τον έλεγχο, αποθήκευσε το στην λίστα αναζήτησης για έλεγχο σε επόμενη επανάληψη, αλλιώς αγνόησε το.
7. Επιστροφή στο βήμα 2.

Στην τελική υλοποίηση για το βήμα 2 χρησιμοποιείται Best First ευριστικός αλγόριθμος και το ευριστικό κριτήριο αφορά στο μέσο σφάλμα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις (E 1)

$$\begin{bmatrix} \bar{G} - P\Delta^{-2} & \bar{B} + Q\Delta^{-2} \\ \bar{B} + Q\Delta^{-2} & -(\bar{G} - P\Delta^{-2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a} \\ -\bar{f} \end{bmatrix} = -V_0 \cdot \begin{bmatrix} \tilde{g} \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Προφανώς θα επιλέγεται το set περιορισμών το οποίο παράγει το μικρότερο σφάλμα. Αν το σφάλμα μάλιστα είναι μικρότερο από το ϵ που έχουμε ορίσει, τότε θεωρούμε ότι βρήκαμε μια λύση για τις μη γραμμικές εξισώσεις (3.1). Σημειώνεται ότι κατά το πειραματικό στάδιο της ανάπτυξης της υλοποίησης χρησιμοποιήθηκαν και παραλλαγές όπου γινόταν χρήση αναζήτησης κατά πλάτος και αναζήτησης κατά βάθος. Και οι δύο αυτές όμως αποδείχθηκαν κατώτερες αφού ο αριθμός επαναλήψεων του βρόχου επανάληψης ήταν γενικά μεγαλύτερος από ότι όταν γινόταν χρήση της αναζήτησης πρώτα στο καλύτερο. Ως αντιπροσωπευτικό σημείο ενός περιορισμού χρησιμοποιείται το σημείο τομής μεταξύ του κύκλου με ακτίνα την μέση τιμή των ακτίνων των δύο κύκλων του περιορισμού και της διχοτόμου της κυρτής γωνίας των δύο ευθειών του περιορισμού. Αναλυτικά το σημείο μπορεί να βρεθεί όπως δείχνεται στο Παράρτημα Β της εργασίας.

Στο βήμα 4 γίνεται λόγος για την επιλογή ενός κουτιού έτσι ώστε να διχοτομηθεί σε 2 νέα κουτιά. Στην τελική υλοποίηση του αλγορίθμου ο τρόπος επιλογής βασιζόταν στην προσπάθεια να παραχθούν όσο το δυνατόν λιγότερα νέα set περιορισμών. Για αυτό επιλέγεται αρχικά το κουτί με το μεγαλύτερο εμβαδόν (το εμβαδόν υπολογίζεται εύκολα και αναλυτικά με τύπους της γεωμετρίας) και το κουτί αυτό διχοτομείται ως προς ακτίνα ή/και γωνία (αναλυτικά οι τρόποι διχοτόμησης γωνίας και ακτίνας παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β). Παράγονται έτσι δύο νέα set κουτιών/περιορισμών. Στη συνέχεια, ελέγχονται οι συνθήκες (A 1) – (A 4) έτσι ώστε να εξακριβωθεί το πλήθος των set που τις ικανοποιούν. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται και στα υπόλοιπα κουτιά κατά φθίνουσα σειρά ως προς το εμβαδόν και τελικός σκοπός είναι να επιλεγεί ως κουτί προς διχοτόμηση αυτό με το μεγαλύτερο εμβαδόν που οδηγεί στη δημιουργία των λιγότερων “παιδιών”.

Ένα φαινόμενο που παρατηρήθηκε κατά την εκτέλεση των παραδειγμάτων ήταν η εμφάνιση “διπλών” λύσεων, δηλαδή εμφάνιση πολλαπλών τρόπων για την προσέγγιση κάποιας λύσης. Δηλαδή ήταν δυνατόν να οδηγηθούμε στην ίδια λύση (ασυμπτωτικά) ακολουθώντας διαφορετικά μονοπάτια του δένδρου αναζήτησης. Τα “διπλά” αυτά ήταν αποτέλεσμα της διαδικασίας διχοτόμησης και αναζήτησης και δεν ήταν ταυτοτικά ίσα. Για την αντιμετώπιση του φαινομένου των “διπλών” λύσεων αλλά και για την αύξηση της ακρίβειας των λύσεων έγινε χρήση και μιας διαδικασίας ελαχίστων τετραγώνων του Matlab (lsqnonlin) μετά την εύρεση των λύσεων μέσα από την επαναληπτική διαδικασία διχοτόμησης. Για την lsqnonlin έγινε χρήση των (3.1) με αρχικά σημεία που ορίζονταν από την κάθε μία λύση που είχε ήδη βρεθεί.

3.2 Παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζονται 5 παραδείγματα ΣΗΕ. Για κάθε παράδειγμα έγινε προσομοίωση στο λογισμικό *PowerWorld Simulator 19* για την επιβεβαίωση της ορθότητας των αποτελεσμάτων όπως αυτά προκύπτουν από την εκτέλεση του αλγορίθμου που περιγράφηκε. Σε αντίθεση με το *PowerWorld Simulator 19* το οποίο βρίσκει μία μόνο λύση, ο αλγόριθμος της διπλωματικής εργασίας αυτής βρίσκει όλες τις λύσεις που υπάρχουν εντός του χώρου αναζήτησης που επιλέγεται.

Οι τιμές βάσεις σε όλα τα παραδείγματα ορίστηκαν ως $S_B=100\text{ MVA}$ και $V_B=230\text{ kV}$.

Επίσης, οι τιμές ισχύος, πραγματικής και αέργου, για τον ζυγό αναφοράς υπολογίζονται με βάση τις εξισώσεις (E 2) και (E 3) του κεφαλαίου 2, δηλαδή:

$$\bullet \quad p_1 = V_0(\tilde{g}^T \bar{a} - \tilde{b}^T \bar{f}) + g_{1,1} V_0^2 \quad (3.2)$$

$$\bullet \quad q_1 = -V_0(\tilde{b}^T \bar{a} + \tilde{g}^T \bar{f}) - b_{1,1} V_0^2 \quad (3.3)$$

3.2.1 Παράδειγμα 1

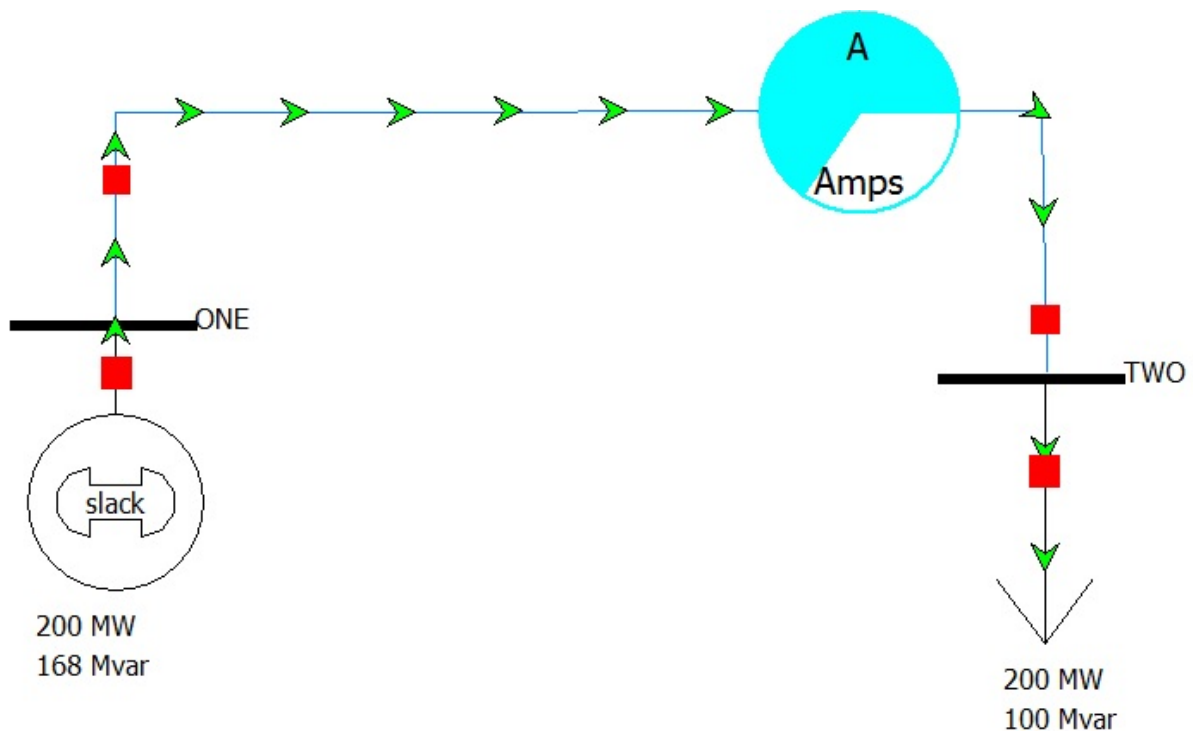
Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	Τιμή τάσης V(αμ)	p_g (αμ)	p_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1$	0	2	0	1

Δεδομένα γραμμών:

Από ζυγό	Προς ζυγό	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0	0.1

Το ΣΗΕ 2 ζυγών με τα παραπάνω δεδομένα παρουσιάζεται και σχηματικά στο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1 Παράδειγμα 1

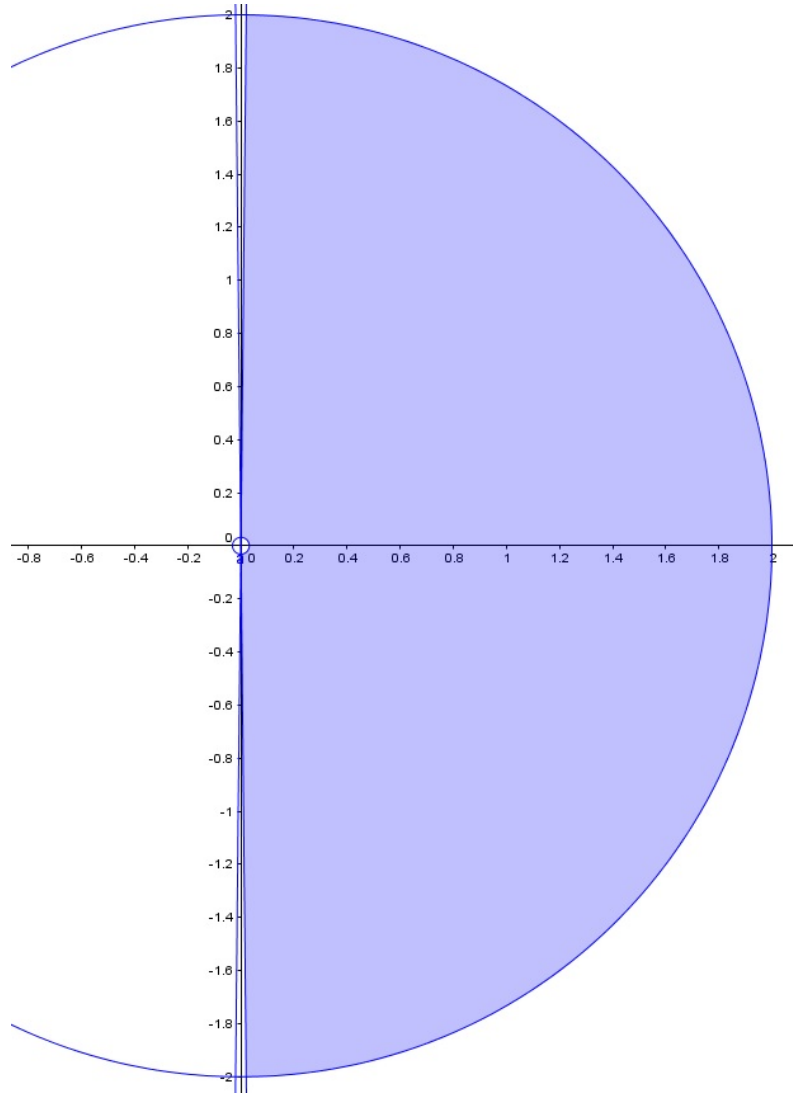
Το πρόγραμμα PowerWorld Simulator δίνει για το παραπάνω παράδειγμα ως λύση την εξής:

- $V_2 = 0.8554 \angle -13.522 = 0.83168 - j0.2$, για την τάση του ζυγού 2
- και
- $p_1 = 200 MW$ και $q_1 = 168.338 Mvar$ ή $p_1 = 2 \alpha\mu$ και $q_1 = 1.68 \alpha\mu$

Για την εκτέλεση του αλγορίθμου επίλυσης ορίζουμε για τον ζυγό 2 την εξής αρχική περιοχή αναζήτησης:

$Con = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$
η οποία σχηματικά αναπαρίσταται στο Σχήμα 3.2.

Η περιοχή αναζήτησης καλύπτει, όπως γίνεται ορατό, ένα σημαντικό κομμάτι του 1ου και 4ου τεταρτημορίου στο καρτεσιανό επίπεδο.



Σχήμα 3.2 Περιοχή αναζήτησης

Ο αλγόριθμος επίλυσης δίνει τότε τα εξής αποτελέσματα:

SolMatrix =

0.8317 - 0.2000i
0.1683 - 0.2000i

Λύση Νο1

ans =

$$\frac{V2}{0.8317-0.2i}$$

ans =

$$\frac{V2}{0.8317-0.2i}$$

pu 0.8554
angle -13.522

p1 =

2.0000

q1 =

1.6834

Mean =

8.4737e-12

Λύση Νο2

ans =

$$\frac{V2}{0.1683-0.2i}$$

ans =

$$\frac{V2}{0.1683-0.2i}$$

pu 0.2614
angle -49.913

p1 =

2.0000

q1 =

8.3166

Mean =

9.7111e-10

loop_counter =

69

Η τιμή loop_counter δείχνει πόσες φορές εκτελέστηκε ο επαναληπτικός βρόχος. Χρηιάστηκαν λοιπόν 69 επαναλήψεις, με χρόνο 0.329 δευτερόλεπτα, και βρέθηκαν οι εξής δύο λύσεις:

1. $V_{2a} = 0.8317 - 0.2i = 0.8554 \angle -13.522^\circ$ με $p_{1a} = 2.0000$ και $q_{1a} = 1.6834$ (αμ)
2. $V_{2b} = 0.1683 - 0.2i = 0.2614 \angle -49.913^\circ$ με $p_{1b} = 2.0000$ και $q_{1b} = 8.3166$ (αμ)

Η πρώτη λύση συμφωνεί απόλυτα με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του PowerWorld Simulator ενώ η δεύτερη λύση είναι καινούρια. Η μεταβλητή Mean δίνει σε κάθε περίπτωση την μέση τιμή των αποτελεσμάτων από τις εξισώσεις (3.1) και άρα είναι ένα μέτρο της ακρίβειας των λύσεών μας. Όπως είναι εμφανές τα αποτελέσματα είναι αρκετά κοντά στο μηδέν και άρα είναι έγκυρες λύσεις.

3.2.2 Παράδειγμα 2

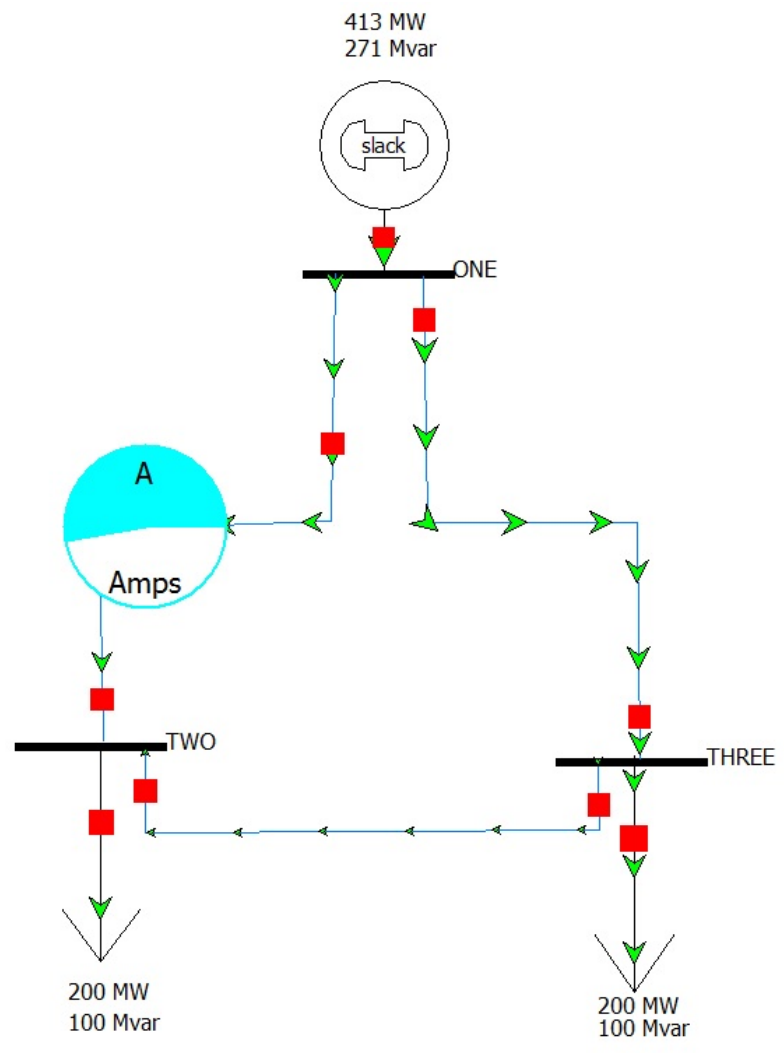
Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	Τιμή τάσης V(αμ)	p_g (αμ)	p_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1$	0	2	0	1
3	Ζυγός PQ	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2$	0	2	0	1

Δεδομένα γραμμών:

Από ζυγό	Προς ζυγό	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0.01	0.07
1	3	0.01	0.05
2	3	0.01	0.01

Το ΣΗΕ αυτό φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 3.3



Σχήμα 3.3 Παράδειγμα 2

Η προσομοίωση δίνει ως λύση την εξής:

- $V_2 = 0.9033 \angle -6.856 = 0.8968 - j0.1078$, για την τάση του ζυγού 2
 - $V_3 = 0.9078 \angle -6.684 = 0.9016 - j0.1056$, για την τάση του ζυγού 3
- και
- $p_1 = 413 MW$ και $q_1 = 271 Mvar$ ή $p_1 = 4.13 αμ$ και $q_1 = 2.71 αμ$

Για τον αλγόριθμο επίλυσης θα οριστεί ως αρχική περιοχή έρευνας για το ζυγό 2 το σύνολο:

$$Con_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

και για το ζυγό 3 το σύνολο:

$Con_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$, δηλαδή και για τους δύο ζυγούς αναζητούνται λύσεις στο 1ο και 4ο τεταρτημόριο.

Με την εκτέλεση του αλγορίθμου λαμβάνονται τα εξής αποτελέσματα:

SolMatrix =

$$\begin{array}{cc} 0.0787 - 0.0909i & 0.1465 - 0.1292i \\ 0.8968 - 0.1078i & 0.9017 - 0.1057i \end{array}$$

Λύση Νο1

ans =

V2	V3
0.0787-0.0909i	0.1465-0.1292i

ans =

	V2	V3
pu	0.1202	0.1953
angle	-49.139	-41.42

p1 =

$$8.8835$$

q1 =

$$28.6340$$

Mean =

$$5.3211e-10$$

Λύση Νο2

ans =

V2	V3
0.8968-0.1078i	0.9017-0.1057i

ans =

	V2	V3
pu	0.9033	0.9078
angle	-6.8556	-6.6838

p1 =

4.1261

q1 =

2.7139

Mean =

6.2981e-11

loop_counter =

20663

Ο αλγόριθμος χρειάστηκε 31.001 δευτερόλεπτα, ο βρόχος επανάληψης επαναλήφθηκε 20663 φορές και τελικά βρέθηκαν δύο λύσεις:

1.

- $V_{2a} = 0.0787 - 0.0909i = 0.1202 \angle -49.139^\circ$
- $V_{3a} = 0.1465 - 0.1292i = 0.1953 \angle -41.42^\circ$
- $p_{1a} = 8.8835$ και $q_{1a} = 28.6340$ (αμ)

2.

- $V_{2b} = 0.8968 - 0.1078i = 0.9033 \angle -6.8556^\circ$
- $V_{3b} = 0.9017 - 0.1057i = 0.9078 \angle -6.6838^\circ$
- $p_{1b} = 4.1261$ και $q_{1b} = 2.7139$ (αμ)

Η λύση 2 που βρέθηκε από τον αλγόριθμο συμφωνεί με την λύση του PowerWorld Simulator ενώ βρέθηκε και μία ακόμα λύση των εξισώσεων.

3.2.3.i Παράδειγμα 3 (i)

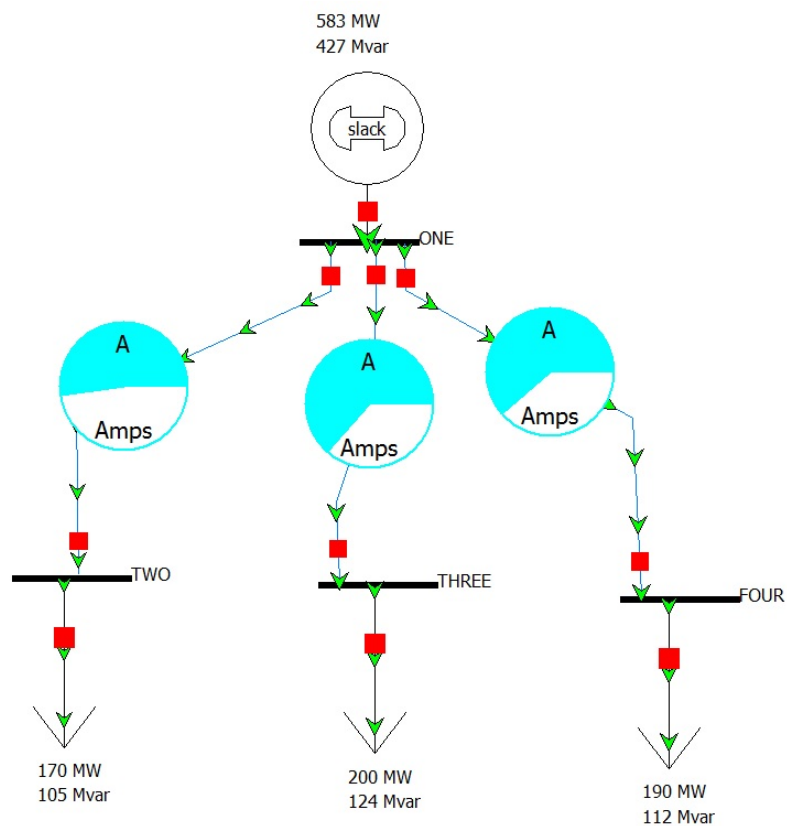
Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	Τιμή τάσης V(αμ)	p_g (αμ)	p_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1.02 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1$	0	1.7	0	1.05
3	Ζυγός PQ	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2$	0	2	0	1.24
4	Ζυγός PQ	$\bar{a}_3 + j\bar{f}_3$	0	1.9	0	1.12

Δεδομένα γραμμών:

Από ζυγό	Προς ζυγό	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0.01	0.04
1	3	0.01	0.05
1	4	0.02	0.06

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το παραπάνω ΣΗΕ.



Σχήμα 3.4 Παράδειγμα 3.i

Η προσομοίωση δίνει τότε την εξής λύση:

- $V_2 = 0.9565 \angle -3.379 = 0.9548 - j0.0563$, για την τάση του ζυγού 2
 - $V_3 = 0.9272 \angle -5.315 = 0.9232 - j0.0858$, για την τάση του ζυγού 3
 - $V_4 = 0.8977 \angle -5.741 = 0.8931 - j0.0897$, για την τάση του ζυγού 4
- και
- $p_1 = 583 MW$ και $q_1 = 427 Mvar$ ή $p_1 = 5.83 \mu$ και $q_1 = 4.27 \mu$

Για τον αλγόριθμο επίλυσης θα οριστεί ως αρχική περιοχή έρευνας για το ζυγό 2 το σύνολο:

$$Con_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$$

για το ζυγό 3 το σύνολο:

$$Con_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$$

και για το ζυγό 4 το σύνολο:

$Con_3 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$, δηλαδή και για τους τρεις ζυγούς αναζητούνται λύσεις στο 1ο και 4ο τεταρτημόριο.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου οδηγεί στα εξής αποτελέσματα:

SolMatrix =

```

0.9549 - 0.0564i  0.9232 - 0.0859i  0.8932 - 0.0898i
0.9549 - 0.0564i  0.9232 - 0.0859i  0.1268 - 0.0898i
0.9549 - 0.0564i  0.0968 - 0.0859i  0.8932 - 0.0898i
0.9549 - 0.0564i  0.0968 - 0.0859i  0.1268 - 0.0898i
0.0651 - 0.0564i  0.9232 - 0.0859i  0.8932 - 0.0898i
0.0651 - 0.0564i  0.9232 - 0.0859i  0.1268 - 0.0898i
0.0651 - 0.0564i  0.0968 - 0.0859i  0.8932 - 0.0898i
0.0651 - 0.0564i  0.0968 - 0.0859i  0.1268 - 0.0898i

```

Λύση No1

ans =

V2	V3	V4
0.9549-0.0564i	0.9232-0.0859i	0.8932-0.0898i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.9565	0.9272	0.8977
angle	-3.3786	-5.3148	-5.7414

p1 =

5.8288

q1 =

4.2688

Mean =

1.3699e-10

Λύση No2

ans =

V2	V3	V4
0.9549-0.0564i	0.9232-0.0859i	0.1268-0.0898i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.9565	0.9272	0.1554
angle	-3.3786	-5.3148	-35.305

p1 =

9.7373

q1 =

15.9944

Mean =

9.6327e-10

Λύση No3

ans =

V2	V3	V4
0.9549-0.0564i	0.0968-0.0859i	0.8932-0.0898i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.9565	0.1294	0.8977
angle	-3.3786	-41.576	-5.7414

p1 =

9.0707

q1 =

20.4785

Mean =

1.1518e-09

Λύση No4

ans =

	V2	V3	V4
	0.9549-0.0564i	0.0968-0.0859i	0.1268-0.0898i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.9565	0.1294	0.1554
angle	-3.3786	-41.576	-35.305

p1 =

12.9793

q1 =

32.2041

Mean =

6.9995e-10

Λύση No5

ans =

	V2	V3	V4
	$0.0651-0.0564i$	$0.9232-0.0859i$	$0.8932-0.0898i$

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.0861	0.9272	0.8977
angle	-40.884	-5.3148	-5.7414

p1 =

11.1674

q1 =

25.6233

Mean =

1.1131e-09

Λύση Νο6

ans =

	V2	V3	V4
	$0.0651-0.0564i$	$0.9232-0.0859i$	$0.1268-0.0898i$

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.0861	0.9272	0.1554
angle	-40.884	-5.3148	-35.305

p1 =

15.0759

q1 =

37.3489

Mean =

1.1222e-09

Λύση No7

ans =

V2	V3	V4
0.0651-0.0564i	0.0968-0.0859i	0.8932-0.0898i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.0861	0.1294	0.8977
angle	-40.884	-41.576	-5.7414

p1 =

14.4093

q1 =

41.8329

Mean =

1.2151e-09

Λύση No8

ans =

V2	V3	V4
0.0651-0.0564i	0.0968-0.0859i	0.1268-0.0898i

ans =

	V2	V3	V4
ρ	0.0861	0.1294	0.1554
angle	-40.884	-41.576	-35.305

$\rho_1 =$

18.3179

$q_1 =$

53.5586

Mean =

1.0826e-09

loop_counter =

955

Ο αλγόριθμος χρειάστηκε 2.945 δευτερόλεπτα και ο βρόχος επανάληψης πραγματοποιήθηκε 955 φορές και τελικά βρέθηκαν 8 λύσεις.

1.

- $V_{2a} = 0.9549 - 0.0564i = 0.9565 \angle -3.3786^\circ$
- $V_{3a} = 0.9232 - 0.0859i = 0.9272 \angle -5.3148^\circ$
- $V_{4a} = 0.8932 - 0.0898i = 0.8977 \angle -5.7414^\circ$
- $p_{1a} = 5.8288$ και $q_{1a} = 4.2688$ (αμ)

2.

- $V_{2b} = 0.9549 - 0.0564i = 0.9565 \angle -3.3786^\circ$
- $V_{3b} = 0.9232 - 0.0859i = 0.9272 \angle -5.3148^\circ$
- $V_{4b} = 0.1268 - 0.0898i = 0.1554 \angle -35.305^\circ$
- $p_{1b} = 9.7373$ και $q_{1b} = 15.9944$ (αμ)

3.

- $V_{2c} = 0.9549 - 0.0564i = 0.9565 \angle -3.3786^\circ$
- $V_{3c} = 0.0968 - 0.0859i = 0.1294 \angle -41.576^\circ$
- $V_{4c} = 0.8932 - 0.0898i = 0.8977 \angle -5.7414^\circ$
- $p_{1c} = 9.0707$ και $q_{1c} = 20.4785$ (αμ)

4.

- $V_{2d} = 0.9549 - 0.0564i = 0.9565 \angle -3.3786^\circ$
- $V_{3d} = 0.0968 - 0.0859i = 0.1294 \angle -41.576^\circ$
- $V_{4d} = 0.1268 - 0.0898i = 0.1554 \angle -35.305^\circ$

- $p_{1d}=12.9793$ και $q_{1d}=32.2041$ (αμ)
- 5.
- $V_{2e} = 0.0651-0.0564i = 0.0861 \angle -40.884^\circ$
 - $V_{3e} = 0.9232-0.0859i = 0.9272 \angle -5.3148^\circ$
 - $V_{4e} = 0.8932-0.0898i = 0.8977 \angle -5.7414^\circ$
 - $p_{1e}=11.1674$ και $q_{1e}=25.6233$ (αμ)
- 6.
- $V_{2f} = 0.0651-0.0564i = 0.0861 \angle -40.884^\circ$
 - $V_{3f} = 0.9232-0.0859i = 0.9272 \angle -5.3148^\circ$
 - $V_{4f} = 0.1268-0.0898i = 0.1554 \angle -35.305^\circ$
 - $p_{1f}=15.0759$ και $q_{1f}=37.3489$ (αμ)
- 7.
- $V_{2g} = 0.0651-0.0564i = 0.0861 \angle -40.884^\circ$
 - $V_{3g} = 0.0968-0.0859i = 0.1294 \angle -41.576^\circ$
 - $V_{4g} = 0.8932-0.0898i = 0.8977 \angle -5.7414^\circ$
 - $p_{1g}=14.4093$ και $q_{1g}=41.8329$ (αμ)
- 8.
- $V_{2h} = 0.0651-0.0564i = 0.0861 \angle -40.884^\circ$
 - $V_{3h} = 0.0968-0.0859i = 0.1294 \angle -41.576^\circ$
 - $V_{4h} = 0.1268-0.0898i = 0.1554 \angle -35.305^\circ$
 - $p_{1h}=18.3179$ και $q_{1h}=53.5586$ (αμ)

Από τις 8 αυτές λύσεις η πρώτη λύση συμφωνεί με εκείνη που βρέθηκε από την προσομοίωση του PowerWorld Simulator.

3.2.3.ii Παράδειγμα 3 (ii)

Δεδομένα ζυγών:

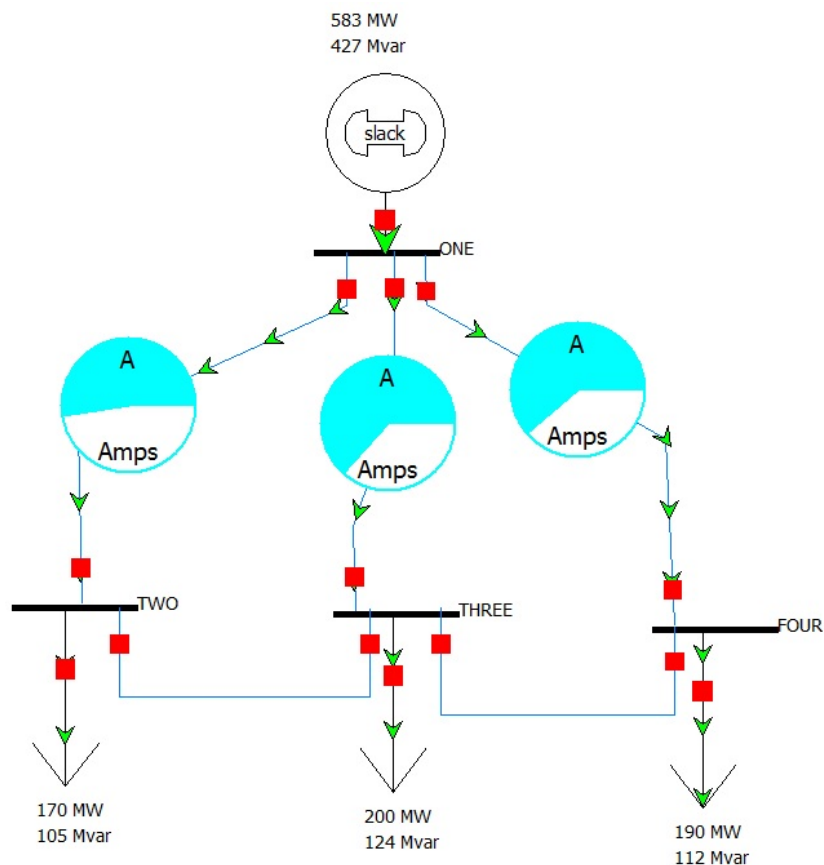
Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	Τιμή τάσης V(αμ)	p_g (αμ)	p_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1.02 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1$	0	1.7	0	1.05
3	Ζυγός PQ	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2$	0	2	0	1.24
4	Ζυγός PQ	$\bar{a}_3 + j\bar{f}_3$	0	1.9	0	1.12

Δεδομένα γραμμών:

Από ζυγό	Προς ζυγό	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0.01	0.04
1	3	0.01	0.05
1	4	0.02	0.06
2	3	1	4
3	4	1	4

Το παράδειγμα αυτό είναι παρόμοιο με το 3.i με τη διαφορά ότι έχουμε γραμμές μεταφοράς μεταξύ των ζυγών 2 και 3 και μεταξύ των 3 και 4, οι οποίες βέβαια έχουν σημαντικά μικρότερη αγωγιμότητα σε σχέση με τις υπόλοιπες οπότε αναμένουμε οι λύσεις του παραδείγματος αυτού να είναι παρόμοιες με του 3.i.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το παραπάνω ΣΗΕ.



Σχήμα 3.5 Παράδειγμα 3.ii

Η προσομοίωση δίνει ως λύση:

- $V_2 = 0.9562 \angle -3.397 = 0.9545 - j0.0567$, για την τάση του ζυγού 2
 - $V_3 = 0.9272 \angle -5.297 = 0.9232 - j0.0856$, για την τάση του ζυγού 3
 - $V_4 = 0.8982 \angle -5.734 = 0.8937 - j0.0897$, για την τάση του ζυγού 4
- και
- $p_1 = 583 MW$ και $q_1 = 427 Mvar$ ή $p_1 = 5.83 \mu$ και $q_1 = 4.27 \mu$

Για τον αλγόριθμο επίλυσης θα οριστεί ως αρχική περιοχή έρευνας για το ζυγό 2 το σύνολο:

$$Con_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$$

για το ζυγό 3 το σύνολο:

$$Con_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$$

και για το ζυγό 4 το σύνολο:

$Con_3 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$, δηλαδή και για τους τρεις ζυγούς αναζητούνται λύσεις στο 1ο και 4ο τεταρτημόριο.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου οδηγεί στα εξής αποτελέσματα:

SolMatrix =

```

0.9545 - 0.0567i  0.9232 - 0.0856i  0.8937 - 0.0897i
0.9544 - 0.0567i  0.9127 - 0.0868i  0.1245 - 0.0889i
0.9457 - 0.0571i  0.0943 - 0.0841i  0.8790 - 0.0900i
0.9457 - 0.0571i  0.0954 - 0.0849i  0.1269 - 0.0898i
0.0644 - 0.0559i  0.9110 - 0.0869i  0.8935 - 0.0898i
0.0644 - 0.0559i  0.9004 - 0.0881i  0.1246 - 0.0889i
0.0651 - 0.0564i  0.0956 - 0.0850i  0.8790 - 0.0900i
0.0651 - 0.0564i  0.0968 - 0.0859i  0.1269 - 0.0898i

```

Λύση No1

ans =

	V2	V3	V4
	0.9545-0.0567i	0.9232-0.0856i	0.8937-0.0897i

ans =

	V2	V3	V4
	0.9562	0.9272	0.8982
	-3.3971	-5.2975	-5.7338

p1 =

5.8284

q1 =

4.2680

Mean =

1.6403e-10

Λύση No2

ans =

V2	V3	V4
0.9544-0.0567i	0.9127-0.0868i	0.1245-0.0889i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.9561	0.9168	0.153
angle	-3.3985	-5.4297	-35.51

p1 =

9.8029

q1 =

16.2461

Mean =

2.1096e-10

Λύση No3

ans =

V2	V3	V4
0.9457-0.0571i	0.0943-0.0841i	0.879-0.09i

ans =

	<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>
pu	0.9474	0.1263	0.8836
angle	-3.4553	-41.737	-5.8453

p1 =

9.1937

q1 =

20.9682

Mean =

4.8761e-12

Λύση Νο4

ans =

	<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>
	0.9457-0.0571i	0.0954-0.0849i	0.1269-0.0898i

ans =

	<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>
pu	0.9474	0.1277	0.1555
angle	-3.4557	-41.657	-35.293

p1 =

13.0382

q1 =

32.4499

Mean =

1.3734e-10

Λύση Νο5

ans =

<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>
0.0644-0.0559i	0.911-0.0869i	0.8935-0.0898i

ans =

	<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>
pu	0.0853	0.9152	0.898
angle	-40.96	-5.4511	-5.7365

p1 =

11.2269

q1 =

25.8723

Mean =

4.1472e-10

Λύση Νο6

ans =

<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>
0.0644-0.0559i	0.9004-0.0881i	0.1246-0.0889i

ans =

	<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>
pu	0.0853	0.9047	0.153
angle	-40.96	-5.588	-35.508

p1 =

15.1995

q1 =

37.8444

Mean =

2.0489e-09

Λύση Νο7

ans =

	V2	V3	V4
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	0.0651-0.0564i	0.0956-0.085i	0.879-0.09i

ans =

	V2	V3	V4
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
pu	0.0861	0.128	0.8836
angle	-40.902	-41.642	-5.846

p1 =

14.4729

q1 =

42.0758

Mean =

1.1835e-09

Λύση Νο8

ans =

	V2	V3	V4
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	0.0651-0.0564i	0.0968-0.0859i	0.1269-0.0898i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.0861	0.1294	0.1555
angle	-40.903	-41.558	-35.294

p1 =

18.3175

q1 =

53.5575

Mean =

8.9332e-10

loop_counter =

1000

Σε αυτό το παράδειγμα ο αλγόριθμος χρειάστηκε 3.070 δευτερόλεπτα, πραγματοποιήθηκαν 1000 επαναλήψεις του βρόχου και τελικά βρέθηκαν συνολικά 8 λύσεις.

1.

- $V_{2a} = 0.9545 - 0.0567i = 0.9562 \angle -3.3971^\circ$
- $V_{3a} = 0.9232 - 0.0856i = 0.9272 \angle -5.2975^\circ$
- $V_{4a} = 0.8937 - 0.0897i = 0.8982 \angle -5.7338^\circ$
- $p_{1a} = 5.8284$ και $q_{1a} = 4.2680$ (αμ)

2.

- $V_{2b} = 0.9544 - 0.0567i = 0.9561 \angle -3.3985^\circ$
- $V_{3b} = 0.9127 - 0.0868i = 0.9168 \angle -5.4297^\circ$
- $V_{4b} = 0.1245 - 0.0889i = 0.153 \angle -35.51^\circ$
- $p_{1b} = 9.8029$ και $q_{1b} = 16.2461$ (αμ)

3.

- $V_{2c} = 0.9457 - 0.0571i = 0.9474 \angle -3.4553^\circ$
- $V_{3c} = 0.0943 - 0.0841i = 0.1263 \angle -41.737^\circ$
- $V_{4c} = 0.879 - 0.09i = 0.8836 \angle -5.8453^\circ$
- $p_{1c} = 9.1937$ και $q_{1c} = 20.9682$ (αμ)

4.

- $V_{2d} = 0.9457 - 0.0571i = 0.9474 \angle -3.4557^\circ$
- $V_{3d} = 0.0954 - 0.0849i = 0.1277 \angle -41.657^\circ$

- $V_{4d} = 0.1269 - 0.0898i = 0.1555 \angle -35.293^\circ$
 - $p_{1d} = 13.0382$ και $q_{1d} = 32.4499$ (αμ)
- 5.
- $V_{2e} = 0.0644 - 0.0559i = 0.0853 \angle -40.96^\circ$
 - $V_{3e} = 0.911 - 0.0869i = 0.9152 \angle -5.4511^\circ$
 - $V_{4e} = 0.8935 - 0.0898i = 0.898 \angle -5.7365^\circ$
 - $p_{1e} = 11.2269$ και $q_{1e} = 25.8723$ (αμ)
- 6.
- $V_{2f} = 0.0644 - 0.0559i = 0.0853 \angle -40.96^\circ$
 - $V_{3f} = 0.9004 - 0.0881i = 0.9047 \angle -5.588^\circ$
 - $V_{4f} = 0.1246 - 0.0889i = 0.153 \angle -35.508^\circ$
 - $p_{1f} = 15.1995$ και $q_{1f} = 37.8444$ (αμ)
- 7.
- $V_{2g} = 0.0651 - 0.0564i = 0.0861 \angle -40.902^\circ$
 - $V_{3g} = 0.0956 - 0.085i = 0.128 \angle -41.642^\circ$
 - $V_{4g} = 0.879 - 0.09i = 0.8836 \angle -5.846^\circ$
 - $p_{1g} = 14.4729$ και $q_{1g} = 42.0758$ (αμ)
- 8.
- $V_{2h} = 0.0651 - 0.0564i = 0.0861 \angle -40.903^\circ$
 - $V_{3h} = 0.0968 - 0.0859i = 0.1294 \angle -41.558^\circ$
 - $V_{4h} = 0.1269 - 0.0898i = 0.1555 \angle -35.294^\circ$
 - $p_{1h} = 18.3175$ και $q_{1h} = 53.5575$ (αμ)

Από τις 8 αυτές λύσεις η πρώτη λύση συμφωνεί με εκείνη που βρέθηκε από την προσομοίωση του PowerWorld Simulator.

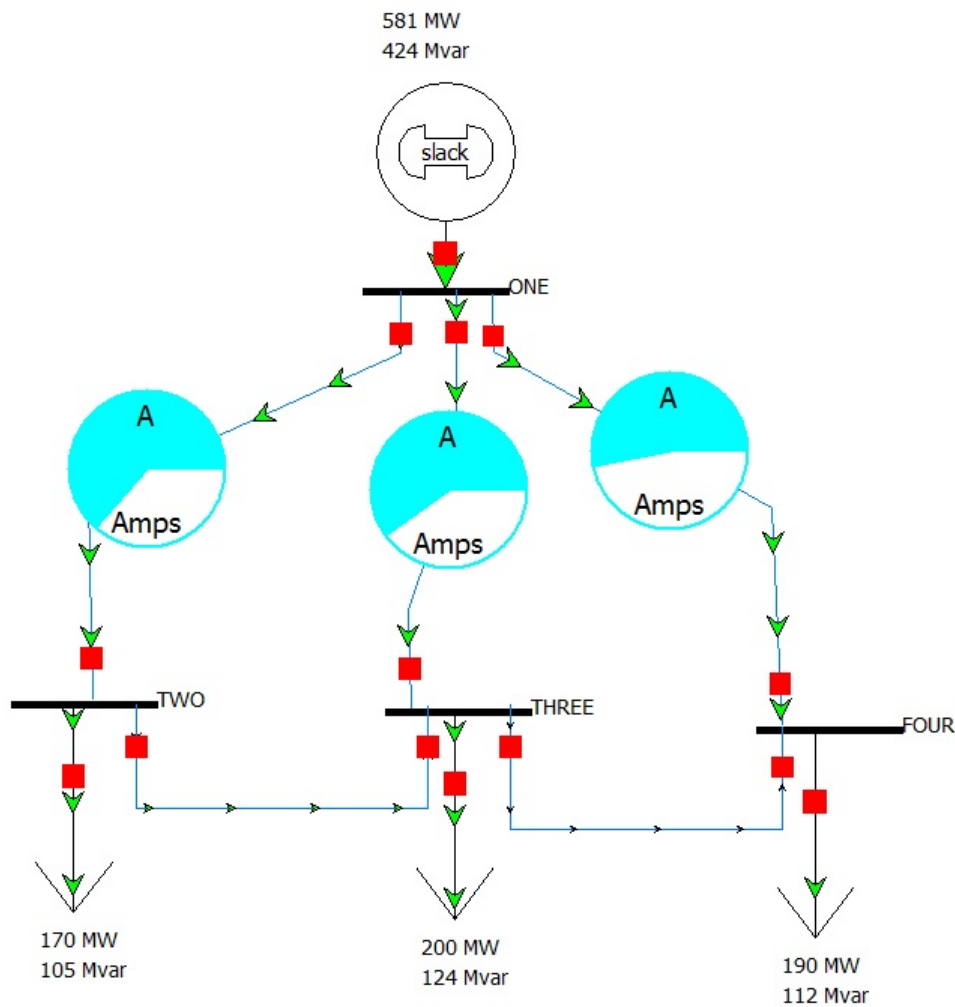
3.2.3.iii Παράδειγμα 3 (iii)

Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	Τιμή τάσης V(αμ)	p_g (αμ)	p_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1.02 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1$	0	1.7	0	1.05
3	Ζυγός PQ	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2$	0	2	0	1.24
4	Ζυγός PQ	$\bar{a}_3 + j\bar{f}_3$	0	1.9	0	1.12

Δεδομένα γραμμών:

Από ζυγό	Προς ζυγό	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0.01	0.04
1	3	0.01	0.05
1	4	0.02	0.06
2	3	0.01	0.04
3	4	0.01	0.04



Σχήμα 3.6 Παράδειγμα 3.iii

Η προσομοίωση δίνει ως λύση:

- $V_2 = 0.9422 \angle -4.104 = 0.9397 - j0.0674$, για την τάση του ζυγού 2
 - $V_3 = 0.9296 \angle -4.842 = 0.9263 - j0.0785$, για την τάση του ζυγού 3
 - $V_4 = 0.9187 \angle -5.192 = 0.9149 - j0.0831$, για την τάση του ζυγού 4
- και
- $p_1 = 581 MW$ και $q_1 = 424 Mvar$ ή $p_1 = 5.81 \alpha\mu$ και $q_1 = 4.24 \alpha\mu$

Για τον αλγόριθμο επίλυσης θα οριστεί ως αρχική περιοχή έρευνας για το ζυγό 2 το σύνολο:

$$Con_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

για το ζυγό 3 το σύνολο:

$$Con_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

και για το ζυγό 4 το σύνολο:

$Con_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$, δηλαδή και για τους τρεις ζυγούς αναζητούνται λύσεις στο 1ο και 4ο τεταρτημόριο.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου οδηγεί στα εξής αποτελέσματα:

SolMatrix =

```

0.0526 - 0.0513i  0.2066 - 0.1035i  0.1000 - 0.0815i
0.0609 - 0.0560i  0.0967 - 0.0828i  0.1440 - 0.0933i
0.0636 - 0.0567i  0.0733 - 0.0705i  0.2695 - 0.1008i
0.9397 - 0.0674i  0.9263 - 0.0785i  0.9149 - 0.0831i
0.7261 - 0.0809i  0.5212 - 0.0926i  0.0617 - 0.0572i
0.0417 - 0.0414i  0.4649 - 0.0966i  0.6084 - 0.0989i

```

Λύση Νο1

ans =

V2	V3	V4
0.0526-0.0513i	0.2066-0.1035i	0.1-0.0815i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.0735	0.2311	0.129
angle	-44.309	-26.614	-39.176

p1 =

18.1969

q1 =

52.1186

Mean =

3.9569e-10

Λύση Νο2

ans =

V2	V3	V4
0.0609-0.056i	0.0967-0.0828i	0.144-0.0933i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.0828	0.1274	0.1715
angle	-42.582	-40.569	-32.933

p1 =

18.2399

q1 =

53.3937

Mean =

8.0193e-10

Λύση Νο3

ans =

V2	V3	V4
0.0636-0.0567i	0.0733-0.0705i	0.2695-0.1008i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.0852	0.1017	0.2877
angle	-41.723	-43.914	-20.506

p1 =

17.5668

q1 =

51.8765

Mean =

3.0771e-09

Λύση Νο4

ans =

	V2	V3	V4
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	0.9397-0.0674i	0.9263-0.0785i	0.9149-0.0831i

ans =

	V2	V3	V4
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
pu	0.9422	0.9296	0.9187
angle	-4.1041	-4.8419	-5.1921

p1 =

5.8145

q1 =

4.2358

Mean =

4.4690e-11

Λύση Νο5

ans =

	V2	V3	V4
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	0.7261-0.0809i	0.5212-0.0926i	0.0617-0.0572i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.7306	0.5294	0.0841
angle	-6.3604	-10.075	-42.812

p1 =

13.2412

q1 =

30.3569

Mean =

5.5849e-10

Λύση Νο6

ans =

V2	V3	V4
0.0417-0.0414i	0.4649-0.0966i	0.6084-0.0989i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.0588	0.4748	0.6164
angle	-44.824	-11.741	-9.2333

p1 =

14.5497

q1 =

39.5340

Mean =

2.3209e-10

loop_counter =

11032

Το πρόγραμμα τερμάτισε μετά από χρόνο 28.407 δευτερολέπτων, ο βρόχος επανάληψης έγινε 11032 φορές και οι λύσεις που βρέθηκαν ήταν στο παράδειγμα αυτό 6.

1.

- $V_{2a} = 0.0526 - 0.0513i = 0.0735 \angle -44.309^\circ$
- $V_{3a} = 0.2066 - 0.1035i = 0.2311 \angle -26.614^\circ$
- $V_{4a} = 0.1 - 0.0815i = 0.129 \angle -39.176^\circ$
- $p_{1a} = 18.1969$ και $q_{1a} = 52.1186$ (αμ)

2.

- $V_{2b} = 0.0609 - 0.056i = 0.0828 \angle -42.582^\circ$
- $V_{3b} = 0.0967 - 0.0828i = 0.1274 \angle -40.569^\circ$
- $V_{4b} = 0.144 - 0.0933i = 0.1715 \angle -32.933^\circ$
- $p_{1b} = 18.2399$ και $q_{1b} = 53.3937$ (αμ)

3.

- $V_{2c} = 0.0636 - 0.0567i = 0.0852 \angle -41.723^\circ$
- $V_{3c} = 0.0733 - 0.0705i = 0.1017 \angle -43.914^\circ$
- $V_{4c} = 0.2695 - 0.1008i = 0.2877 \angle -20.506^\circ$
- $p_{1c} = 17.5668$ και $q_{1c} = 51.8765$ (αμ)

4.

- $V_{2d} = 0.9397 - 0.0674i = 0.9422 \angle -4.1041^\circ$
- $V_{3d} = 0.9263 - 0.0785i = 0.9296 \angle -4.8419^\circ$
- $V_{4d} = 0.9149 - 0.0831i = 0.9187 \angle -5.1921^\circ$
- $p_{1d} = 5.8145$ και $q_{1d} = 4.2358$ (αμ)

5.

- $V_{2e} = 0.7261 - 0.0809i = 0.7306 \angle -6.3604^\circ$
- $V_{3e} = 0.5212 - 0.0926i = 0.5294 \angle -10.075^\circ$
- $V_{4e} = 0.0617 - 0.0572i = 0.0841 \angle -42.812^\circ$
- $p_{1e} = 13.2412$ και $q_{1e} = 30.3569$ (αμ)

6.

- $V_{2f} = 0.0417 - 0.0414i = 0.0588 \angle -44.824^\circ$
- $V_{3f} = 0.4649 - 0.0966i = 0.4748 \angle -11.741^\circ$
- $V_{4f} = 0.6084 - 0.0989i = 0.6164 \angle -9.2333^\circ$
- $p_{1f} = 14.5497$ και $q_{1f} = 39.5340$ (αμ)

Από τις 6 αυτές λύσεις, η τέταρτη λύση συμφωνεί με εκείνη που βρέθηκε από την προσομοίωση του PowerWorld Simulator.

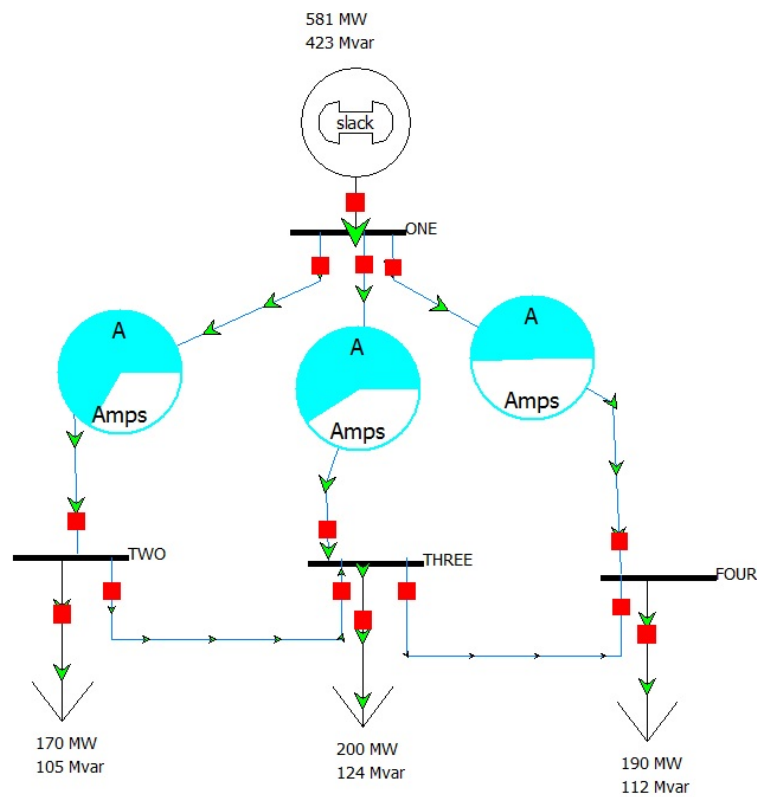
3.2.3.iv Παράδειγμα 3 (iv)

Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	Τιμή τάσης V(αμ)	p_g (αμ)	p_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1.02 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1$	0	1.7	0	1.05
3	Ζυγός PQ	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2$	0	2	0	1.24
4	Ζυγός PQ	$\bar{a}_3 + j\bar{f}_3$	0	1.9	0	1.12

Δεδομένα γραμμών:

Από ζυγό	Προς ζυγό	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0.01	0.04
1	3	0.01	0.05
1	4	0.02	0.06
2	3	0.005	0.02
3	4	0.005	0.02



Σχήμα 3.7 Παράδειγμα 3.iv

Η προσομοίωση δίνει ως λύση:

- $V_2 = 0.9385 \angle -4.296 = 0.9358 - j0.07$, για την τάση του ζυγού 2
 - $V_3 = 0.9306 \angle -4.761 = 0.9274 - j0.077$, για την τάση του ζυγού 3
 - $V_4 = 0.9238 \angle -5.192 = 0.9203 - j0.0805$, για την τάση του ζυγού 4
- και
- $p_1 = 581 MW$ και $q_1 = 423 Mvar$ ή $p_1 = 5.81 \mu$ και $q_1 = 4.23 \mu$

Για τον αλγόριθμο επίλυσης θα οριστεί ως αρχική περιοχή έρευνας για το ζυγό 2 το σύνολο:

$$Con_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$$

για το ζυγό 3 το σύνολο:

$$Con_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$$

και για το ζυγό 4 το σύνολο:

$Con_3 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$, δηλαδή και για τους τρεις ζυγούς αναζητούνται λύσεις στο 1ο και 4ο τεταρτημόριο.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου οδηγεί στα εξής αποτελέσματα:

SolMatrix =

$$\begin{matrix} 0.9358 - 0.0703i & 0.9274 - 0.0772i & 0.9203 - 0.0805i \\ 0.0528 - 0.0529i & 0.1201 - 0.0873i & 0.1457 - 0.0933i \\ 0.0375 - 0.0400i & 0.2966 - 0.0939i & 0.4012 - 0.1021i \\ 0.5516 - 0.0879i & 0.3776 - 0.0893i & 0.0498 - 0.0504i \end{matrix}$$

Λύση No1

ans =

V2	V3	V4
0.9358-0.0703i	0.9274-0.0772i	0.9203-0.0805i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.9385	0.9306	0.9238
angle	-4.2955	-4.7613	-4.9998

p1 =

$$5.8109$$

q1 =

$$4.2276$$

Mean =

4.4987e-11

Λύση Νο2

ans =

V2	V3	V4
0.0528-0.0529i	0.1201-0.0873i	0.1457-0.0933i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.0748	0.1485	0.1731
angle	-45.085	-36.016	-32.641

p1 =

18.2040

q1 =

53.1046

Mean =

6.0426e-10

Λύση Νο3

ans =

V2	V3	V4
0.0375-0.04i	0.2966-0.0939i	0.4012-0.1021i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.0548	0.3111	0.414
angle	-46.852	-17.576	-14.282

p1 =

16.2546

q1 =

46.1082

Mean =

4.0677e-10

Λύση Νο4

ans =

V2	V3	V4
0.5516-0.0879i	0.3776-0.0893i	0.0498-0.0504i

ans =

	V2	V3	V4
pu	0.5585	0.388	0.0708
angle	-9.0547	-13.309	-45.299

p1 =

14.9108

q1 =

37.5522

Mean =

5.9299e-10

loop_counter =

26987

Το πρόγραμμα τελείωσε σε αυτή την περίπτωση την εκτέλεσή του μετά από 68.657 δευτερόλεπτα, ο βρόχος επανάληψης εκτελέστηκε 26987 φορές και βρέθηκαν 4 λύσεις.

1.

- $V_{2a} = 0.9358 - 0.0703i = 0.9385 \angle -4.2955^\circ$
- $V_{3a} = 0.9274 - 0.0772i = 0.9306 \angle -4.7613^\circ$
- $V_{4a} = 0.9203 - 0.0805i = 0.9238 \angle -4.9998^\circ$
- $p_{1a} = 5.8109$ και $q_{1a} = 4.2276$ (αμ)

2.

- $V_{2b} = 0.0528 - 0.0529i = 0.0748 \angle -45.085^\circ$
- $V_{3b} = 0.1201 - 0.0873i = 0.1485 \angle -36.016^\circ$
- $V_{4b} = 0.1457 - 0.0933i = 0.1731 \angle -32.641^\circ$
- $p_{1b} = 18.2040$ και $q_{1b} = 53.1046$ (αμ)

3.

- $V_{2c} = 0.0375 - 0.04i = 0.0548 \angle -46.852^\circ$
- $V_{3c} = 0.2966 - 0.0939i = 0.3111 \angle -17.576^\circ$
- $V_{4c} = 0.4012 - 0.1021i = 0.414 \angle -14.282^\circ$
- $p_{1c} = 16.2546$ και $q_{1c} = 46.1082$ (αμ)

4.

- $V_{2d} = 0.5516 - 0.0879i = 0.5585 \angle -9.0547^\circ$
- $V_{3d} = 0.3776 - 0.0893i = 0.388 \angle -13.309^\circ$
- $V_{4d} = 0.0498 - 0.0504i = 0.0708 \angle -45.299^\circ$
- $p_{1d} = 14.9108$ και $q_{1d} = 37.5522$ (αμ)

Από τις 6 αυτές λύσεις, η πρώτη λύση συμφωνεί με εκείνη που βρέθηκε από την προσομοίωση του PowerWorld Simulator.

Πριν το επόμενο παράδειγμα αξίζει να παρατηρηθεί ότι ανάμεσα στα παραδείγματα 3(i) – 3(iv) έχουμε αύξηση του αριθμού επαναλήψεων της επαναληπτικής διαδικασίας καθώς και αύξηση του χρόνου που χρειάζεται το πρόγραμμα για να τερματίσει. Αυτό φαίνεται να συνδέεται με την εισαγωγή γραμμών μεταφοράς μεταξύ των διαφόρων ζυγών PQ. Επίσης, το πλήθος των λύσεων μειώνεται καθώς οι αγωγιμότητες αυτών των γραμμών αυξάνονται.

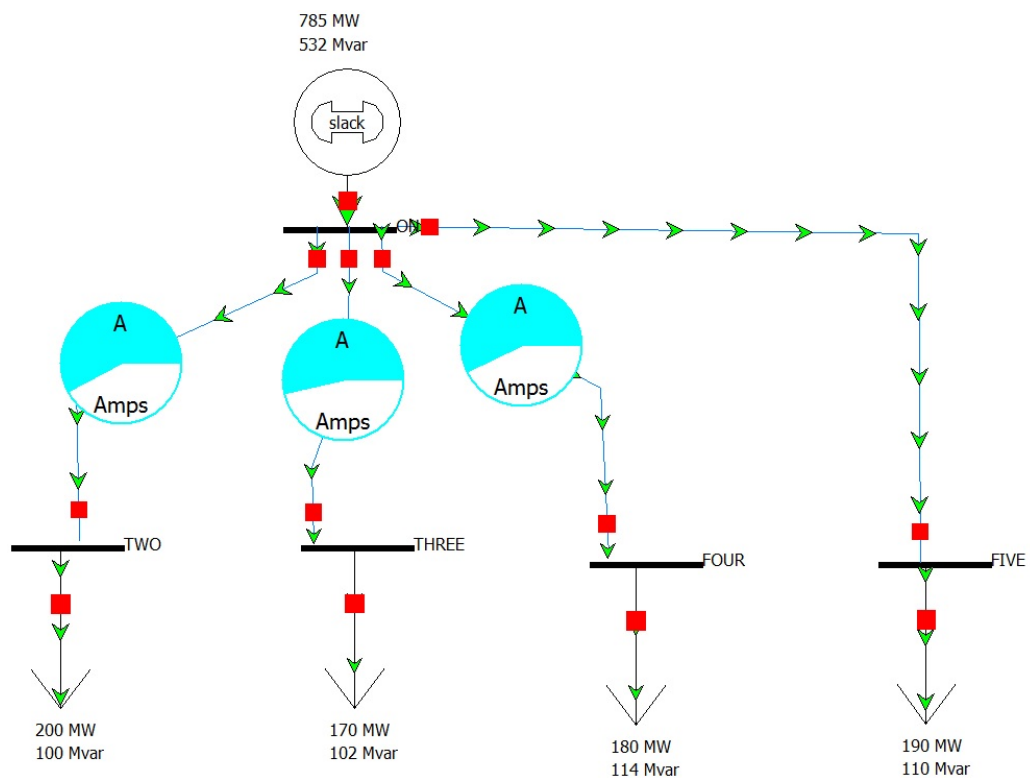
3.2.4.i Παράδειγμα 4 (i)

Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	Τιμή τάσης V(αμ)	p_g (αμ)	p_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1.02 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1$	0	2	0	1
3	Ζυγός PQ	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2$	0	1.7	0	1.02
4	Ζυγός PQ	$\bar{a}_3 + j\bar{f}_3$	0	1.8	0	1.14
5	Ζυγός PQ	$\bar{a}_4 + j\bar{f}_4$	0	1.9	0	1.1

Δεδομένα γραμμών:

Από ζυγό	Προς ζυγό	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0.01	0.03
1	3	0.02	0.05
1	4	0.02	0.04
1	5	0.03	0.07



Σχήμα 3.8 Παράδειγμα 4.i

Η προσομοίωση δίνει ως λύση:

- $V_2 = 0.9670 \angle -2.906 = 0.9657 - j0.049$, για την τάση του ζυγού 2
 - $V_3 = 0.9258 \angle -3.923 = 0.9236 - j0.063$, για την τάση του ζυγού 3
 - $V_4 = 0.9310 \angle -2.97 = 0.9297 - j0.048$, για την τάση του ζυγού 4
 - $V_5 = 0.8569 \angle -6.569 = 0.8513 - j0.098$, για την τάση του ζυγού 5
- και
- $p_1 = 785 MW$ και $q_1 = 532 Mvar$ ή $p_1 = 7.85 \mu$ και $q_1 = 5.32 \mu$

Για τον αλγόριθμο επίλυσης θα οριστεί ως αρχική περιοχή έρευνας για το ζυγό 2 το σύνολο:

$$Con_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

για το ζυγό 3 το σύνολο:

$$Con_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

για το ζυγό 4 το σύνολο:

$$Con_3 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

και για το ζυγό 5 το σύνολο:

$Con_4 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$, δηλαδή και για τους τέσσερις ζυγούς αναζητούνται λύσεις στο 1ο και 4ο τεταρτημόριο.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου οδηγεί στα εξής αποτελέσματα:

SolMatrix =

0.9657 - 0.0490i	0.0964 - 0.0633i	0.9297 - 0.0482i	0.1687 - 0.0980i
0.9657 - 0.0490i	0.0964 - 0.0633i	0.9297 - 0.0482i	0.8513 - 0.0980i
0.9657 - 0.0490i	0.0964 - 0.0633i	0.0903 - 0.0482i	0.1687 - 0.0980i
0.9657 - 0.0490i	0.0964 - 0.0633i	0.0903 - 0.0482i	0.8513 - 0.0980i
0.9657 - 0.0490i	0.9236 - 0.0633i	0.9297 - 0.0482i	0.8513 - 0.0980i
0.9657 - 0.0490i	0.9236 - 0.0633i	0.9297 - 0.0482i	0.1687 - 0.0980i
0.9657 - 0.0490i	0.9236 - 0.0633i	0.0903 - 0.0482i	0.1687 - 0.0980i
0.9657 - 0.0490i	0.9236 - 0.0633i	0.0903 - 0.0482i	0.8513 - 0.0980i
0.0543 - 0.0490i	0.0964 - 0.0633i	0.9297 - 0.0482i	0.8513 - 0.0980i
0.0543 - 0.0490i	0.0964 - 0.0633i	0.9297 - 0.0482i	0.1687 - 0.0980i
0.0543 - 0.0490i	0.0964 - 0.0633i	0.0903 - 0.0482i	0.1687 - 0.0980i
0.0543 - 0.0490i	0.0964 - 0.0633i	0.0903 - 0.0482i	0.8513 - 0.0980i
0.0543 - 0.0490i	0.9236 - 0.0633i	0.9297 - 0.0482i	0.8513 - 0.0980i
0.0543 - 0.0490i	0.9236 - 0.0633i	0.9297 - 0.0482i	0.1687 - 0.0980i
0.0543 - 0.0490i	0.9236 - 0.0633i	0.0903 - 0.0482i	0.8513 - 0.0980i
0.0543 - 0.0490i	0.9236 - 0.0633i	0.0903 - 0.0482i	0.1687 - 0.0980i

Λύση Νο1

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9657-0.049i	0.0964-0.0633i	0.9297-0.0482i	0.1687-0.098i

ans =

	<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>	<u>V5</u>
pu	0.967	0.1153	0.931	0.1951
angle	-2.9058	-33.312	-2.9699	-30.163

p1 =

17.2675

q1 =

28.2701

Mean =

1.1729e-09

Λύση Νο2

ans =

<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>	<u>V5</u>
0.9657-0.049i	0.0964-0.0633i	0.9297-0.0482i	0.8513-0.098i

ans =

	<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>	<u>V5</u>
pu	0.967	0.1153	0.931	0.8569
angle	-2.9058	-33.312	-2.9699	-6.5694

p1 =

13.6662

q1 =

19.8670

Mean =

2.5895e-09

Λύση Νο3

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9657-0.049i	0.0964-0.0633i	0.0903-0.0482i	0.1687-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.967	0.1153	0.1023	0.1951
angle	-2.9058	-33.312	-28.118	-30.163

p1 =

25.8300

q1 =

45.3951

Mean =

4.8838e-10

Λύση Νο4

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9657-0.049i	0.0964-0.0633i	0.0903-0.0482i	0.8513-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.967	0.1153	0.1023	0.8569
angle	-2.9058	-33.312	-28.118	-6.5694

p1 =

22.2287

q1 =

36.9920

Mean =

4.3080e-10

Λύση Νο5

ans =

V2	V3	V4	V5
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
0.9657-0.049i	0.9236-0.0633i	0.9297-0.0482i	0.8513-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
pu	0.967	0.9258	0.931	0.8569
angle	-2.9058	-3.9226	-2.9699	-6.5694

p1 =

7.8469

q1 =

5.3187

Mean =

5.6188e-11

Λύση Νο6

ans =

V2	V3	V4	V5
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
0.9657-0.049i	0.9236-0.0633i	0.9297-0.0482i	0.1687-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.967	0.9258	0.931	0.1951
angle	-2.9058	-3.9226	-2.9699	-30.163

p1 =

11.4482

q1 =

13.7218

Mean =

9.8357e-10

Λύση Νο7

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9657-0.049i	0.9236-0.0633i	0.0903-0.0482i	0.1687-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.967	0.9258	0.1023	0.1951
angle	-2.9058	-3.9226	-28.118	-30.163

p1 =

20.0107

q1 =

30.8468

Mean =

2.2571e-09

Λύση Νο8

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9657-0.049i	0.9236-0.0633i	0.0903-0.0482i	0.8513-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.967	0.9258	0.1023	0.8569
angle	-2.9058	-3.9226	-28.118	-6.5694

p1 =

16.4093

q1 =

22.4437

Mean =

1.5207e-09

Λύση Νο9

ans =

V2	V3	V4	V5
0.0543-0.049i	0.0964-0.0633i	0.9297-0.0482i	0.8513-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0731	0.1153	0.931	0.8569
angle	-42.094	-33.312	-2.9699	-6.5694

p1 =

22.9632

q1 =

47.7582

Mean =

2.5924e-09

Λύση Νο10

ans =

V2	V3	V4	V5
$0.0543-0.049i$	$0.0964-0.0633i$	$0.9297-0.0482i$	$0.1687-0.098i$

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0731	0.1153	0.931	0.1951
angle	-42.094	-33.312	-2.9699	-30.163

p1 =

26.5646

q1 =

56.1613

Mean =

1.1759e-09

Λύση Νο11

ans =

V2	V3	V4	V5
$0.0543-0.049i$	$0.0964-0.0633i$	$0.0903-0.0482i$	$0.1687-0.098i$

ans =

	<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>	<u>V5</u>
pu	0.0731	0.1153	0.1023	0.1951
angle	-42.094	-33.312	-28.118	-30.163

p1 =

35.1271

q1 =

73.2863

Mean =

4.9702e-10

Λύση No12

ans =

<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>	<u>V5</u>
0.0543-0.049i	0.0964-0.0633i	0.0903-0.0482i	0.8513-0.098i

ans =

	<u>V2</u>	<u>V3</u>	<u>V4</u>	<u>V5</u>
pu	0.0731	0.1153	0.1023	0.8569
angle	-42.094	-33.312	-28.118	-6.5694

p1 =

31.5257

q1 =

64.8832

Mean =

4.9046e-10

Λύση Νο13

ans =

V2	V3	V4	V5
0.0543-0.049i	0.9236-0.0633i	0.9297-0.0482i	0.8513-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0731	0.9258	0.931	0.8569
angle	-42.094	-3.9226	-2.9699	-6.5694

p1 =

17.1439

q1 =

33.2098

Mean =

2.8664e-10

Λύση Νο14

ans =

V2	V3	V4	V5
0.0543-0.049i	0.9236-0.0633i	0.9297-0.0482i	0.1687-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0731	0.9258	0.931	0.1951
angle	-42.094	-3.9226	-2.9699	-30.163

p1 =

20.7453

q1 =

41.6130

Mean =

9.8650e-10

Λύση No15

ans =

V2	V3	V4	V5
$0.0543-0.049i$	$0.9236-0.0633i$	$0.0903-0.0482i$	$0.8513-0.098i$

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0731	0.9258	0.1023	0.8569
angle	-42.094	-3.9226	-28.118	-6.5694

p1 =

25.7064

q1 =

50.3348

Mean =

1.5236e-09

Λύση No16

ans =

V2	V3	V4	V5
$0.0543-0.049i$	$0.9236-0.0633i$	$0.0903-0.0482i$	$0.1687-0.098i$

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0731	0.9258	0.1023	0.1951
angle	-42.094	-3.9226	-28.118	-30.163

p1 =

29.3077

q1 =

58.7380

Mean =

1.5812e-09

loop_counter =

3846

Το πρόγραμμα τελείωσε σε αυτή την περίπτωση την εκτέλεσή του μετά από 14.770 δευτερόλεπτα, ο βρόχος επανάληψης εκτελέστηκε 3846 φορές και βρέθηκαν 16 λύσεις.

1.

- $V_{2a} = 0.9657 - 0.049i = 0.967 \angle -2.9058^\circ$
- $V_{3a} = 0.0964 - 0.0633i = 0.1153 \angle -33.312^\circ$
- $V_{4a} = 0.9297 - 0.0482i = 0.931 \angle -2.9699^\circ$
- $V_{5a} = 0.1687 - 0.098i = 0.1951 \angle -30.163^\circ$
- $p_{1a} = 17.2675$ και $q_{1a} = 28.2701$ (αμ)

2.

- $V_{2b} = 0.9657 - 0.049i = 0.967 \angle -2.9058^\circ$
- $V_{3b} = 0.0964 - 0.0633i = 0.1153 \angle -33.312^\circ$
- $V_{4b} = 0.9297 - 0.0482i = 0.931 \angle -2.9699^\circ$
- $V_{5b} = 0.8513 - 0.098i = 0.8569 \angle -6.5694^\circ$
- $p_{1b} = 13.6662$ και $q_{1b} = 19.8670$ (αμ)

3.

- $V_{2c} = 0.9657 - 0.049i = 0.967 \angle -2.9058^\circ$
- $V_{3c} = 0.0964 - 0.0633i = 0.1153 \angle -33.312^\circ$

- $V_{4c} = 0.0903 - 0.0482i = 0.1023 \angle -28.118^\circ$
 - $V_{5c} = 0.1687 - 0.098i = 0.1951 \angle -30.163^\circ$
 - $p_{1c} = 25.8300$ και $q_{1c} = 45.3951$ (αμ)
- 4.
- $V_{2d} = 0.9657 - 0.049i = 0.967 \angle -2.9058^\circ$
 - $V_{3d} = 0.0964 - 0.0633i = 0.1153 \angle -33.312^\circ$
 - $V_{4d} = 0.0903 - 0.0482i = 0.1023 \angle -28.118^\circ$
 - $V_{5d} = 0.8513 - 0.098i = 0.8569 \angle -6.5694^\circ$
 - $p_{1d} = 22.2287$ και $q_{1d} = 36.9920$ (αμ)
- 5.
- $V_{2e} = 0.9657 - 0.049i = 0.967 \angle -2.9058^\circ$
 - $V_{3e} = 0.9236 - 0.0633i = 0.9258 \angle -3.9226^\circ$
 - $V_{4e} = 0.9297 - 0.0482i = 0.931 \angle -2.9699^\circ$
 - $V_{5e} = 0.8513 - 0.098i = 0.8569 \angle -6.5694^\circ$
 - $p_{1e} = 7.8469$ και $q_{1e} = 5.3187$ (αμ)
- 6.
- $V_{2f} = 0.9657 - 0.049i = 0.967 \angle -2.9058^\circ$
 - $V_{3f} = 0.9236 - 0.0633i = 0.9258 \angle -3.9226^\circ$
 - $V_{4f} = 0.9297 - 0.0482i = 0.931 \angle -2.9699^\circ$
 - $V_{5f} = 0.1687 - 0.098i = 0.1951 \angle -30.163^\circ$
 - $p_{1f} = 11.4482$ και $q_{1f} = 13.7218$ (αμ)
- 7.
- $V_{2g} = 0.9657 - 0.049i = 0.967 \angle -2.9058^\circ$
 - $V_{3g} = 0.9236 - 0.0633i = 0.9258 \angle -3.9226^\circ$
 - $V_{4g} = 0.0903 - 0.0482i = 0.1023 \angle -28.118^\circ$
 - $V_{5g} = 0.1687 - 0.098i = 0.1951 \angle -30.163^\circ$
 - $p_{1g} = 20.0107$ και $q_{1g} = 30.8468$ (αμ)
- 8.
- $V_{2h} = 0.9657 - 0.049i = 0.967 \angle -2.9058^\circ$
 - $V_{3h} = 0.9236 - 0.0633i = 0.9258 \angle -3.9226^\circ$
 - $V_{4h} = 0.0903 - 0.0482i = 0.1023 \angle -28.118^\circ$
 - $V_{5h} = 0.8513 - 0.098i = 0.8569 \angle -6.5694^\circ$
 - $p_{1h} = 16.4093$ και $q_{1h} = 22.4437$ (αμ)
- 9.
- $V_{2i} = 0.0543 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.094^\circ$
 - $V_{3i} = 0.0964 - 0.0633i = 0.1153 \angle -33.312^\circ$
 - $V_{4i} = 0.9297 - 0.0482i = 0.931 \angle -2.9699^\circ$
 - $V_{5i} = 0.8513 - 0.098i = 0.8569 \angle -6.5694^\circ$
 - $p_{1i} = 22.9632$ και $q_{1i} = 47.7582$ (αμ)
- 10.
- $V_{2j} = 0.0543 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.094^\circ$
 - $V_{3j} = 0.0964 - 0.0633i = 0.1153 \angle -33.312^\circ$
 - $V_{4j} = 0.9297 - 0.0482i = 0.931 \angle -2.9699^\circ$

- $V_{5j} = 0.1687 - 0.098i = 0.1951 \angle -30.163^\circ$
 - $p_{1j} = 26.5646$ και $q_{1j} = 56.1613$ (αμ)
- 11.
- $V_{2k} = 0.0543 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.094^\circ$
 - $V_{3k} = 0.0964 - 0.0633i = 0.1153 \angle -33.312^\circ$
 - $V_{4k} = 0.0903 - 0.0482i = 0.1023 \angle -28.118^\circ$
 - $V_{5k} = 0.1687 - 0.098i = 0.1951 \angle -30.163^\circ$
 - $p_{1k} = 35.1271$ και $q_{1k} = 73.2863$ (αμ)
- 12.
- $V_{2l} = 0.0543 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.094^\circ$
 - $V_{3l} = 0.0964 - 0.0633i = 0.1153 \angle -33.312^\circ$
 - $V_{4l} = 0.0903 - 0.0482i = 0.1023 \angle -28.118^\circ$
 - $V_{5l} = 0.8513 - 0.098i = 0.8569 \angle -6.5694^\circ$
 - $p_{1l} = 31.5257$ και $q_{1l} = 64.8832$ (αμ)
- 13.
- $V_{2m} = 0.0543 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.094^\circ$
 - $V_{3m} = 0.9236 - 0.0633i = 0.9258 \angle -3.9226^\circ$
 - $V_{4m} = 0.9297 - 0.0482i = 0.931 \angle -2.9699^\circ$
 - $V_{5m} = 0.8513 - 0.098i = 0.8569 \angle -6.5694^\circ$
 - $p_{1m} = 17.1439$ και $q_{1m} = 33.2098$ (αμ)
- 14.
- $V_{2n} = 0.0543 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.094^\circ$
 - $V_{3n} = 0.9236 - 0.0633i = 0.9258 \angle -3.9226^\circ$
 - $V_{4n} = 0.9297 - 0.0482i = 0.931 \angle -2.9699^\circ$
 - $V_{5n} = 0.1687 - 0.098i = 0.1951 \angle -30.163^\circ$
 - $p_{1n} = 20.7453$ και $q_{1n} = 41.6130$ (αμ)
- 15.
- $V_{2o} = 0.0543 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.094^\circ$
 - $V_{3o} = 0.9236 - 0.0633i = 0.9258 \angle -3.9226^\circ$
 - $V_{4o} = 0.0903 - 0.0482i = 0.1023 \angle -28.118^\circ$
 - $V_{5o} = 0.8513 - 0.098i = 0.8569 \angle -6.5694^\circ$
 - $p_{1o} = 25.7064$ και $q_{1o} = 50.3348$ (αμ)
- 16.
- $V_{2p} = 0.0543 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.094^\circ$
 - $V_{3p} = 0.9236 - 0.0633i = 0.9258 \angle -3.9226^\circ$
 - $V_{4p} = 0.0903 - 0.0482i = 0.1023 \angle -28.118^\circ$
 - $V_{5p} = 0.1687 - 0.098i = 0.1951 \angle -30.163^\circ$
 - $p_{1p} = 29.3077$ και $q_{1p} = 58.7380$ (αμ)

Από τις 16 αυτές λύσεις, η πέμπτη λύση συμφωνεί με εκείνη που βρέθηκε από την προσομοίωση του PowerWorld Simulator.

3.2.4.ii Παράδειγμα 4 (ii)

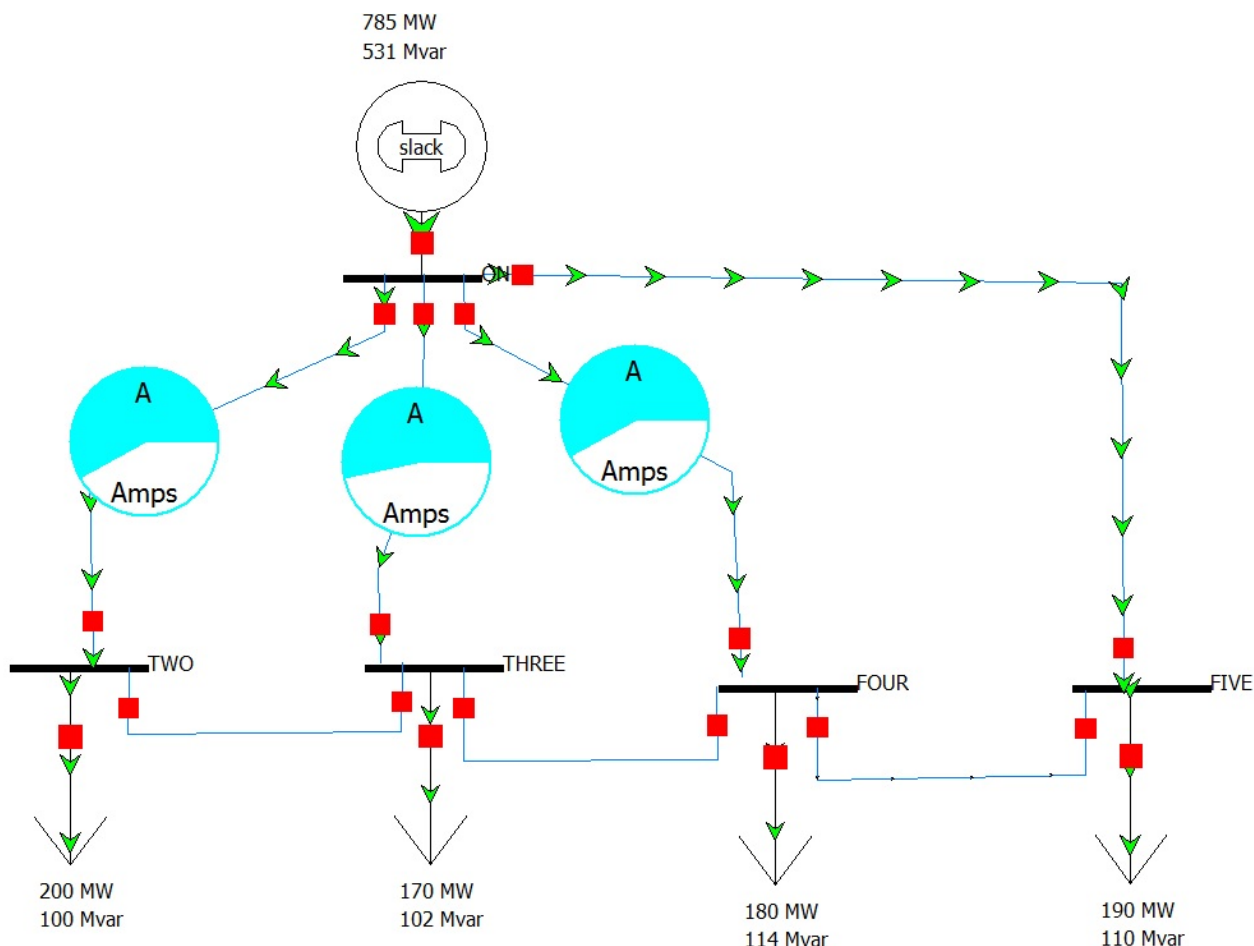
Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	Τιμή τάσης V(αμ)	p_g (αμ)	p_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1.02 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1$	0	2	0	1
3	Ζυγός PQ	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2$	0	1.7	0	1.02
4	Ζυγός PQ	$\bar{a}_3 + j\bar{f}_3$	0	1.8	0	1.14
5	Ζυγός PQ	$\bar{a}_4 + j\bar{f}_4$	0	1.9	0	1.1

Δεδομένα γραμμών:

Από ζυγό	Προς ζυγό	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0.01	0.03
1	3	0.02	0.05
1	4	0.02	0.04
1	5	0.03	0.07
2	3	3	5
3	4	1	4
4	5	1	4

Το παράδειγμα αυτό είναι παρόμοιο με το 4.i αλλά μεταξύ των ζυγών PQ υπάρχουν πλέον γραμμές μεταφοράς αν και η αγωγιμότητά τους είναι αρκετά μικρή. Σχηματικά το ΣΗΕ αποτυπώνεται παρακάτω:



Σχήμα 3.9 Παράδειγμα 4.ii

Η προσομοίωση δίνει ως λύση:

- $V_2 = 0.9668 \angle -2.914 = 0.9655 - j0.0491$, για την τάση του ζυγού 2
- $V_3 = 0.9263 \angle -3.898 = 0.9241 - j0.063$, για την τάση του ζυγού 3
- $V_4 = 0.9299 \angle -3.003 = 0.9286 - j0.049$, για την τάση του ζυγού 4
- $V_5 = 0.8588 \angle -6.508 = 0.8532 - j0.097$, για την τάση του ζυγού 5

και

- $p_1 = 785 \text{ MW}$ και $q_1 = 531 \text{ Mvar}$ ή $p_1 = 7.85 \text{ αμ}$ και $q_1 = 5.31 \text{ αμ}$

Για τον αλγόριθμο επίλυσης θα οριστεί ως αρχική περιοχή έρευνας για το ζυγό 2 το σύνολο:

$$\text{Con}_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

για το ζυγό 3 το σύνολο:

$$\text{Con}_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

για το ζυγό 4 το σύνολο:

$$\text{Con}_3 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

και για το ζυγό 5 το σύνολο:

$\text{Con}_4 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$, δηλαδή και για τους τέσσερις ζυγούς αναζητούνται λύσεις στο 1ο και 4ο τεταρτημόριο.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου οδηγεί στα εξής αποτελέσματα:

SolMatrix =

0.9608 - 0.0503i	0.0941 - 0.0622i	0.9112 - 0.0463i	0.1649 - 0.0969i
0.9608 - 0.0503i	0.0941 - 0.0622i	0.9191 - 0.0474i	0.8531 - 0.0973i
0.9608 - 0.0503i	0.0955 - 0.0627i	0.0901 - 0.0483i	0.1692 - 0.0980i
0.9608 - 0.0503i	0.0955 - 0.0627i	0.0893 - 0.0481i	0.8344 - 0.0968i
0.9655 - 0.0491i	0.9240 - 0.0630i	0.9207 - 0.0476i	0.1648 - 0.0969i
0.9655 - 0.0491i	0.9241 - 0.0630i	0.9286 - 0.0487i	0.8533 - 0.0973i
0.9654 - 0.0492i	0.9123 - 0.0623i	0.0891 - 0.0480i	0.1692 - 0.0980i
0.9654 - 0.0492i	0.9123 - 0.0623i	0.0882 - 0.0478i	0.8343 - 0.0968i
0.0542 - 0.0490i	0.0950 - 0.0628i	0.9191 - 0.0474i	0.8531 - 0.0973i
0.0542 - 0.0490i	0.0950 - 0.0628i	0.9112 - 0.0463i	0.1649 - 0.0969i
0.0542 - 0.0490i	0.0964 - 0.0633i	0.0901 - 0.0483i	0.1692 - 0.0980i
0.0542 - 0.0490i	0.0964 - 0.0633i	0.0893 - 0.0481i	0.8344 - 0.0968i
0.0540 - 0.0488i	0.9149 - 0.0647i	0.9285 - 0.0487i	0.8533 - 0.0973i
0.0540 - 0.0488i	0.9148 - 0.0646i	0.9206 - 0.0476i	0.1648 - 0.0969i
0.0540 - 0.0488i	0.9030 - 0.0640i	0.0883 - 0.0478i	0.8343 - 0.0968i
0.0540 - 0.0488i	0.9030 - 0.0640i	0.0891 - 0.0480i	0.1692 - 0.0980i

Λύση Νο1

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9608-0.0503i	0.0941-0.0622i	0.9112-0.0463i	0.1649-0.0969i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.9621	0.1128	0.9124	0.1913
angle	-2.9947	-33.458	-2.911	-30.45

p1 =

17.5081

q1 =

28.9052

Mean =

2.7769e-09

Λύση Νο2

ans =

	V2	V3	V4	V5
	0.9608-0.0503i	0.0941-0.0622i	0.9191-0.0474i	0.8531-0.0973i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.9621	0.1128	0.9203	0.8586
angle	-2.9947	-33.461	-2.9528	-6.5076

p1 =

13.8234

q1 =

20.2598

Mean =

5.5869e-10

Λύση Νο3

ans =

	V2	V3	V4	V5
	0.9608-0.0503i	0.0955-0.0627i	0.0901-0.0483i	0.1692-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.9621	0.1142	0.1023	0.1955
angle	-2.9947	-33.29	-28.172	-30.078

p1 =

25.9123

q1 =

45.5495

Mean =

1.4097e-09

Λύση No4

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9608-0.0503i	0.0955-0.0627i	0.0893-0.0481i	0.8344-0.0968i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.9621	0.1142	0.1014	0.84
angle	-2.9947	-33.29	-28.303	-6.6173

p1 =

22.3930

q1 =

37.3863

Mean =

6.5993e-10

Λύση No5

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9655-0.0491i	0.924-0.063i	0.9207-0.0476i	0.1648-0.0969i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.9668	0.9262	0.922	0.1912
angle	-2.9138	-3.8977	-2.9615	-30.455

p1 =

11.5309

q1 =

13.9656

Mean =

2.4698e-10

Λύση Νο6

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9655-0.0491i	0.9241-0.063i	0.9286-0.0487i	0.8533-0.0973i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.9668	0.9263	0.9299	0.8588
angle	-2.9138	-3.8984	-3.0032	-6.5078

p1 =

7.8452

q1 =

5.3148

Mean =

3.8982e-11

Λύση Νο7

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9654-0.0492i	0.9123-0.0623i	0.0891-0.048i	0.1692-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.9667	0.9144	0.1012	0.1955
angle	-2.9148	-3.9075	-28.334	-30.078

p1 =

20.0844

q1 =

31.0816

Mean =

2.1177e-09

Λύση Νο8

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9654-0.0492i	0.9123-0.0623i	0.0882-0.0478i	0.8343-0.0968i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.9667	0.9144	0.1004	0.8399
angle	-2.9148	-3.9073	-28.462	-6.6172

p1 =

16.5651

q1 =

22.9186

Mean =

5.7264e-10

Λύση No9

ans =

V2	V3	V4	V5
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
0.0542-0.049i	0.095-0.0628i	0.9191-0.0474i	0.8531-0.0973i

ans =

	V2	V3	V4	V5
	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
pu	0.0731	0.1139	0.9203	0.8586
angle	-42.097	-33.465	-2.9532	-6.5076

p1 =

23.0365

q1 =

47.9928

Mean =

2.1554e-09

Λύση No10

ans =

V2	V3	V4	V5
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
0.0542-0.049i	0.095-0.0628i	0.9112-0.0463i	0.1649-0.0969i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0731	0.1139	0.9124	0.1913
angle	-42.097	-33.463	-2.9114	-30.45

p1 =

26.7212

q1 =

56.6381

Mean =

7.2466e-10

Λύση No11

ans =

V2	V3	V4	V5
0.0542-0.049i	0.0964-0.0633i	0.0901-0.0483i	0.1692-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0731	0.1154	0.1023	0.1955
angle	-42.097	-33.293	-28.172	-30.078

p1 =

35.1254

q1 =

73.2823

Mean =

1.4878e-09

Λύση No12

ans =

V2	V3	V4	V5
0.0542-0.049i	0.0964-0.0633i	0.0893-0.0481i	0.8344-0.0968i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0731	0.1154	0.1014	0.84
angle	-42.097	-33.292	-28.304	-6.6173

p1 =

31.6061

q1 =

65.1192

Mean =

7.8338e-10

Λύση Νο13

ans =

V2	V3	V4	V5
0.054-0.0488i	0.9149-0.0647i	0.9285-0.0487i	0.8533-0.0973i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0728	0.9172	0.9298	0.8588
angle	-42.07	-4.0426	-3.0037	-6.5078

p1 =

17.2262

q1 =

33.3635

Mean =

6.8964e-10

Λύση No14

ans =

V2	V3	V4	V5
$0.054-0.0488i$	$0.9148-0.0646i$	$0.9206-0.0476i$	$0.1648-0.0969i$

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0728	0.9171	0.9219	0.1912
angle	-42.07	-4.0419	-2.962	-30.455

p1 =

20.9119

q1 =

42.0143

Mean =

7.9851e-10

Λύση No15

ans =

V2	V3	V4	V5
$0.054-0.0488i$	$0.903-0.064i$	$0.0883-0.0478i$	$0.8343-0.0968i$

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0728	0.9053	0.1004	0.8399
angle	-42.07	-4.0543	-28.462	-6.6172

p1 =

25.9443

q1 =

50.9631

Mean =

3.9708e-10

Λύση Νο16

ans =

V2	V3	V4	V5
0.054-0.0488i	0.903-0.064i	0.0891-0.048i	0.1692-0.098i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0728	0.9053	0.1012	0.1955
angle	-42.07	-4.0544	-28.333	-30.078

p1 =

29.4636

q1 =

59.1261

Mean =

1.7991e-09

loop_counter =

3645

Το πρόγραμμα τελείωσε σε αυτή την περίπτωση την εκτέλεσή του μετά από 14.608 δευτερόλεπτα, ο βρόχος επανάληψης εκτελέστηκε 3645 φορές και βρέθηκαν 16 λύσεις.

1.

- $V_{2a} = 0.9608 - 0.0503i = 0.9621 \angle -2.9947^\circ$
- $V_{3a} = 0.0941 - 0.0622i = 0.1128 \angle -33.458^\circ$
- $V_{4a} = 0.9112 - 0.0463i = 0.9124 \angle -2.911^\circ$
- $V_{5a} = 0.1649 - 0.0969i = 0.1913 \angle -30.45^\circ$
- $p_{1a} = 17.5081$ και $q_{1a} = 28.9052$ (αμ)

2.

- $V_{2b} = 0.9608 - 0.0503i = 0.9621 \angle -2.9947^\circ$
- $V_{3b} = 0.0941 - 0.0622i = 0.1128 \angle -33.461^\circ$
- $V_{4b} = 0.9191 - 0.0474i = 0.9203 \angle -2.9528^\circ$
- $V_{5b} = 0.8531 - 0.0973i = 0.8586 \angle -6.5076^\circ$
- $p_{1b} = 13.8234$ και $q_{1b} = 20.2598$ (αμ)

3.

- $V_{2c} = 0.9608 - 0.0503i = 0.9621 \angle -2.9947^\circ$
- $V_{3c} = 0.0955 - 0.0627i = 0.1142 \angle -33.29^\circ$
- $V_{4c} = 0.0901 - 0.0483i = 0.1023 \angle -28.172^\circ$
- $V_{5c} = 0.1692 - 0.098i = 0.1955 \angle -30.078^\circ$
- $p_{1c} = 25.9123$ και $q_{1c} = 45.5495$ (αμ)

4.

- $V_{2d} = 0.9608 - 0.0503i = 0.9621 \angle -2.9947^\circ$
- $V_{3d} = 0.0955 - 0.0627i = 0.1142 \angle -33.29^\circ$
- $V_{4d} = 0.0893 - 0.0481i = 0.1014 \angle -28.303^\circ$
- $V_{5d} = 0.8344 - 0.0968i = 0.84 \angle -6.6173^\circ$
- $p_{1d} = 22.3930$ και $q_{1d} = 37.3863$ (αμ)

5.

- $V_{2e} = 0.9655 - 0.0491i = 0.9668 \angle -2.9138^\circ$
- $V_{3e} = 0.924 - 0.063i = 0.9262 \angle -3.8977^\circ$
- $V_{4e} = 0.9207 - 0.0476i = 0.922 \angle -2.9615^\circ$
- $V_{5e} = 0.1648 - 0.0969i = 0.1912 \angle -30.455^\circ$
- $p_{1e} = 11.5309$ και $q_{1e} = 13.9656$ (αμ)

6.

- $V_{2f} = 0.9655 - 0.0491i = 0.9668 \angle -2.9138^\circ$
- $V_{3f} = 0.9241 - 0.063i = 0.9263 \angle -3.8984^\circ$
- $V_{4f} = 0.9286 - 0.0487i = 0.9299 \angle -3.0032^\circ$
- $V_{5f} = 0.8533 - 0.0973i = 0.8588 \angle -6.5078^\circ$
- $p_{1f} = 7.8452$ και $q_{1f} = 5.3148$ (αμ)

7.

- $V_{2g} = 0.9654 - 0.0492i = 0.9667 \angle -2.9148^\circ$
- $V_{3g} = 0.9123 - 0.0623i = 0.9144 \angle -3.9075^\circ$
- $V_{4g} = 0.0891 - 0.048i = 0.1012 \angle -28.334^\circ$
- $V_{5g} = 0.1692 - 0.098i = 0.1955 \angle -30.078^\circ$
- $p_{1g} = 20.0844$ και $q_{1g} = 31.0816$ (αμ)

8.

- $V_{2h} = 0.9654 - 0.0492i = 0.9667 \angle -2.9148^\circ$
- $V_{3h} = 0.9123 - 0.0623i = 0.9144 \angle -3.9073^\circ$
- $V_{4h} = 0.0882 - 0.0478i = 0.1004 \angle -28.462^\circ$
- $V_{5h} = 0.8343 - 0.0968i = 0.8399 \angle -6.6172^\circ$
- $p_{1h} = 16.5651$ και $q_{1h} = 22.9186$ (αμ)

9.

- $V_{2i} = 0.0542 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.097^\circ$
- $V_{3i} = 0.095 - 0.0628i = 0.1139 \angle -33.465^\circ$
- $V_{4i} = 0.9191 - 0.0474i = 0.9203 \angle -2.9532^\circ$
- $V_{5i} = 0.8531 - 0.0973i = 0.8586 \angle -6.5076^\circ$
- $p_{1i} = 23.0365$ και $q_{1i} = 47.9928$ (αμ)

10.

- $V_{2j} = 0.0542 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.097^\circ$
- $V_{3j} = 0.095 - 0.0628i = 0.1139 \angle -33.463^\circ$
- $V_{4j} = 0.9112 - 0.0463i = 0.9124 \angle -2.9114^\circ$
- $V_{5j} = 0.1649 - 0.0969i = 0.1913 \angle -30.45^\circ$
- $p_{1j} = 26.7212$ και $q_{1j} = 56.6381$ (αμ)

11.

- $V_{2k} = 0.0542 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.097^\circ$
- $V_{3k} = 0.0964 - 0.0633i = 0.1154 \angle -33.293^\circ$
- $V_{4k} = 0.0901 - 0.0483i = 0.1023 \angle -28.172^\circ$
- $V_{5k} = 0.1692 - 0.098i = 0.1955 \angle -30.078^\circ$
- $p_{1k} = 35.1254$ και $q_{1k} = 73.2823$ (αμ)

12.

- $V_{2l} = 0.0542 - 0.049i = 0.0731 \angle -42.097^\circ$
- $V_{3l} = 0.0964 - 0.0633i = 0.1154 \angle -33.292^\circ$
- $V_{4l} = 0.0893 - 0.0481i = 0.1014 \angle -28.304^\circ$
- $V_{5l} = 0.8344 - 0.0968i = 0.84 \angle -6.6173^\circ$
- $p_{1l} = 31.6061$ και $q_{1l} = 65.1192$ (αμ)

13.

- $V_{2m} = 0.054 - 0.0488i = 0.0728 \angle -42.07^\circ$
- $V_{3m} = 0.9149 - 0.0647i = 0.9172 \angle -4.0426^\circ$
- $V_{4m} = 0.9285 - 0.0487i = 0.9298 \angle -3.0037^\circ$
- $V_{5m} = 0.8533 - 0.0973i = 0.8588 \angle -6.5078^\circ$
- $p_{1m} = 17.2262$ και $q_{1m} = 33.3635$ (αμ)

14.

- $V_{2n} = 0.054 - 0.0488i = 0.0728 \angle -42.07^\circ$
- $V_{3n} = 0.9148 - 0.0646i = 0.9171 \angle -4.0419^\circ$
- $V_{4n} = 0.9206 - 0.0476i = 0.9219 \angle -2.962^\circ$
- $V_{5n} = 0.1648 - 0.0969i = 0.1912 \angle -30.455^\circ$
- $p_{1n} = 20.9119$ και $q_{1n} = 42.0143$ (αμ)

15.

- $V_{2o} = 0.054 - 0.0488i = 0.0728 \angle -42.07^\circ$
- $V_{3o} = 0.903 - 0.064i = 0.9053 \angle -4.0543^\circ$
- $V_{4o} = 0.0883 - 0.0478i = 0.1004 \angle -28.462^\circ$
- $V_{5o} = 0.8343 - 0.0968i = 0.8399 \angle -6.6172^\circ$
- $p_{1o} = 25.9443$ και $q_{1o} = 50.9631$ (αμ)

16.

- $V_{2p} = 0.054 - 0.0488i = 0.0728 \angle -42.07^\circ$
- $V_{3p} = 0.903 - 0.064i = 0.9053 \angle -4.0544^\circ$
- $V_{4p} = 0.0891 - 0.048i = 0.1012 \angle -28.333^\circ$
- $V_{5p} = 0.1692 - 0.098i = 0.1955 \angle -30.078^\circ$
- $p_{1p} = 29.4636$ και $q_{1p} = 59.1261$ (αμ)

Από τις 16 αυτές λύσεις, η έκτη λύση συμφωνεί με εκείνη που βρέθηκε από την προσομοίωση του PowerWorld Simulator.

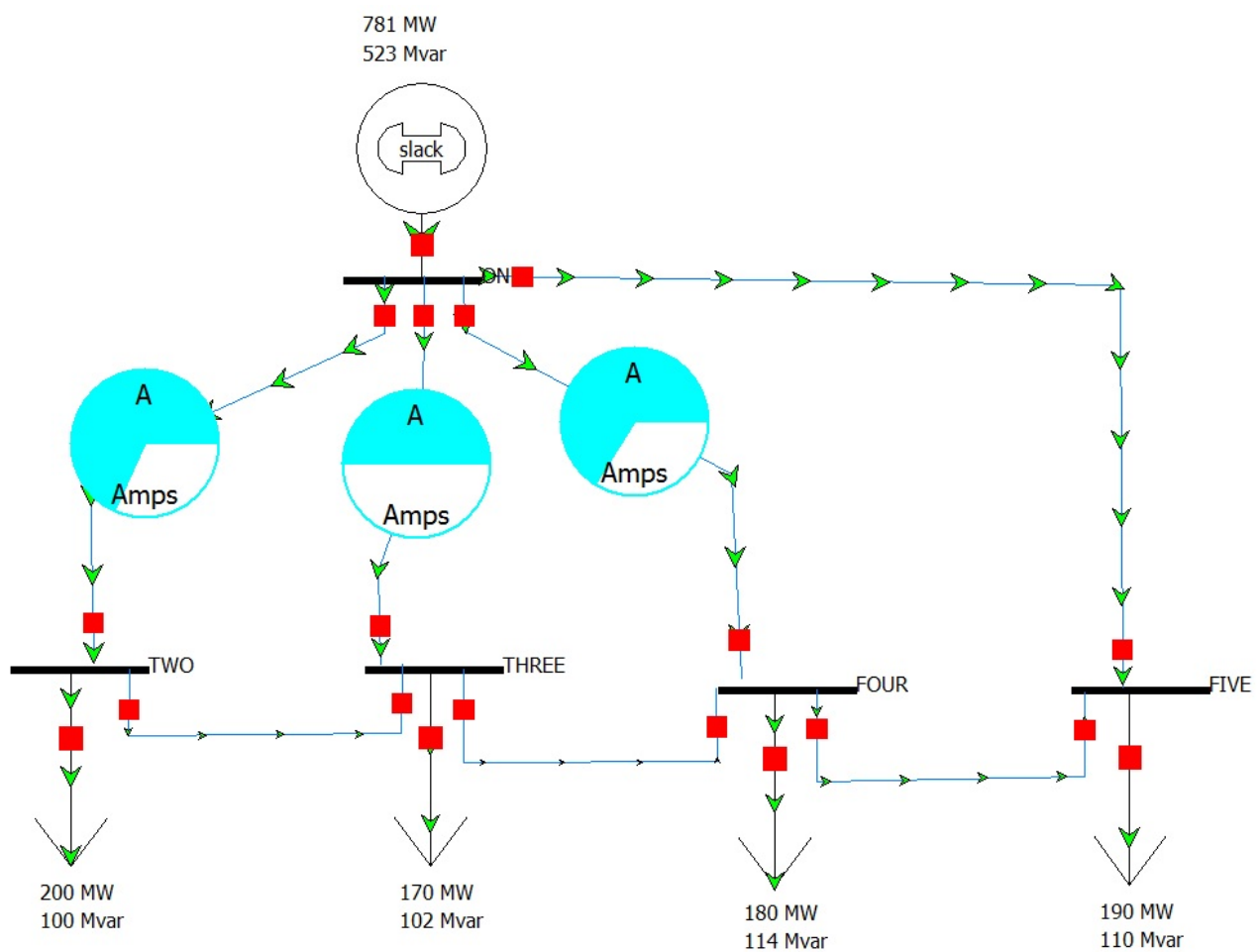
3.2.4.iii Παράδειγμα 4 (iii)

Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	Τιμή τάσης V(αμ)	p_g (αμ)	p_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1.02 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1$	0	2	0	1
3	Ζυγός PQ	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2$	0	1.7	0	1.02
4	Ζυγός PQ	$\bar{a}_3 + j\bar{f}_3$	0	1.8	0	1.14
5	Ζυγός PQ	$\bar{a}_4 + j\bar{f}_4$	0	1.9	0	1.1

Δεδομένα γραμμών:

Από ζυγό	Προς ζυγό	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0.01	0.03
1	3	0.02	0.05
1	4	0.02	0.04
1	5	0.03	0.07
2	3	0.03	0.05
3	4	0.01	0.04
4	5	0.01	0.04



Σχήμα 3.10 Παράδειγμα 4.iii

Η προσομοίωση δίνει ως λύση:

- $V_2 = 0.9544 \angle -3.244 = 0.9529 - j0.054$, για την τάση του ζυγού 2
- $V_3 = 0.9316 \angle -3.550 = 0.9298 - j0.058$, για την τάση του ζυγού 3
- $V_4 = 0.9202 \angle -3.734 = 0.9182 - j0.06$, για την τάση του ζυγού 4
- $V_5 = 0.9034 \angle -4.779 = 0.9 - j0.075$, για την τάση του ζυγού 5

- και
- $p_1 = 781 MW$ και $q_1 = 523 Mvar$ ή $p_1 = 7.81 \mu\mu$ και $q_1 = 5.23 \mu\mu$

Για τον αλγόριθμο επίλυσης θα οριστεί ως αρχική περιοχή έρευνας για το ζυγό 2 το σύνολο:

$$Con_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

για το ζυγό 3 το σύνολο:

$$Con_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

για το ζυγό 4 το σύνολο:

$$Con_3 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$$

και για το ζυγό 5 το σύνολο:

$Con_4 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$, δηλαδή και για τους τέσσερις ζυγούς αναζητούνται λύσεις στο 1ο και 4ο τεταρτημόριο.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου οδηγεί στα εξής αποτελέσματα:

SolMatrix =

```

0.9529 - 0.0540i  0.9298 - 0.0577i  0.9182 - 0.0599i  0.9002 - 0.0753i
0.0441 - 0.0396i  0.4414 - 0.0834i  0.4392 - 0.0519i  0.0836 - 0.0639i
0.0537 - 0.0486i  0.0704 - 0.0521i  0.2906 - 0.0505i  0.1120 - 0.0746i
0.0544 - 0.0489i  0.0546 - 0.0434i  0.4900 - 0.0396i  0.5951 - 0.0648i
0.6186 - 0.0995i  0.0472 - 0.0357i  0.2813 - 0.0468i  0.1149 - 0.0749i
0.8905 - 0.0573i  0.7626 - 0.0382i  0.5602 - 0.0355i  0.0710 - 0.0561i
0.0413 - 0.0371i  0.5821 - 0.0981i  0.7512 - 0.0675i  0.7831 - 0.0790i
0.6156 - 0.0986i  0.0403 - 0.0315i  0.4834 - 0.0351i  0.5906 - 0.0624i

```

Λύση No1

ans =

V2	V3	V4	V5
0.9529-0.054i	0.9298-0.0577i	0.9182-0.0599i	0.9002-0.0753i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.9544	0.9316	0.9202	0.9034
angle	-3.2437	-3.5498	-3.7345	-4.7795

p1 =

7.8052

q1 =

5.2253

Mean =

2.0026e-11

Λύση No2

ans =

V2	V3	V4	V5
0.0441-0.0396i	0.4414-0.0834i	0.4392-0.0519i	0.0836-0.0639i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0593	0.4492	0.4423	0.1053
angle	-41.964	-10.703	-6.7349	-37.406

p1 =

29.4138

q1 =

61.5564

Mean =

5.9350e-10

Λύση No3

ans =

V2	V3	V4	V5
0.0537-0.0486i	0.0704-0.0521i	0.2906-0.0505i	0.112-0.0746i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0724	0.0876	0.2949	0.1346
angle	-42.143	-36.482	-9.8528	-33.682

p1 =

33.1173

q1 =

70.5575

Mean =

7.6013e-10

Λύση Νο4

ans =

V2	V3	V4	V5
0.0544-0.0489i	0.0546-0.0434i	0.49-0.0396i	0.5951-0.0648i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0732	0.0698	0.4916	0.5986
angle	-41.927	-38.487	-4.615	-6.2166

p1 =

28.1522

q1 =

61.0177

Mean =

7.6506e-10

Λύση Νο5

ans =

	V2	V3	V4	V5
	0.6186-0.0995i	0.0472-0.0357i	0.2813-0.0468i	0.1149-0.0749i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.6265	0.0592	0.2852	0.1371
angle	-9.1403	-37.054	-9.4505	-33.107

p1 =

28.7973

q1 =

53.4645

Mean =

8.8482e-10

Λύση Νο6

ans =

	V2	V3	V4	V5
	0.8905-0.0573i	0.7626-0.0382i	0.5602-0.0355i	0.071-0.0561i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.8924	0.7636	0.5613	0.0905
angle	-3.6804	-2.8697	-3.6248	-38.292

p1 =

16.6672

q1 =

28.0397

Mean =

4.6441e-10

Λύση Νο7

ans =

V2	V3	V4	V5
0.0413-0.0371i	0.5821-0.0981i	0.7512-0.0675i	0.7831-0.079i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.0555	0.5903	0.7542	0.7871
angle	-41.923	-9.5685	-5.1371	-5.7615

p1 =

22.2659

q1 =

43.8763

Mean =

1.5317e-10

Λύση Νο8

ans =

V2	V3	V4	V5
0.6156-0.0986i	0.0403-0.0315i	0.4834-0.0351i	0.5906-0.0624i

ans =

	V2	V3	V4	V5
pu	0.6235	0.0512	0.4847	0.5939
angle	-9.1025	-38.003	-4.1529	-6.0333

p1 =

23.8114

q1 =

43.9201

Mean =

1.6119e-10

loop_counter =

54309

Το πρόγραμμα τελείωσε σε αυτή την περίπτωση την εκτέλεσή του μετά από 203.363 δευτερόλεπτα, ο βρόχος επανάληψης εκτελέστηκε 54309 φορές και βρέθηκαν 8 λύσεις.

1.

- $V_{2a} = 0.9529 - 0.054i = 0.9544 \angle -3.2437^\circ$
- $V_{3a} = 0.9298 - 0.0577i = 0.9316 \angle -3.5498^\circ$
- $V_{4a} = 0.9182 - 0.0599i = 0.9202 \angle -3.7345^\circ$
- $V_{5a} = 0.9002 - 0.0753i = 0.9034 \angle -4.7795^\circ$
- $p_{1a} = 7.8052$ και $q_{1a} = 5.2253$ (αμ)

2.

- $V_{2b} = 0.0441 - 0.0396i = 0.0593 \angle -41.964^\circ$
- $V_{3b} = 0.4414 - 0.0834i = 0.4492 \angle -10.703^\circ$
- $V_{4b} = 0.4392 - 0.0519i = 0.4423 \angle -6.7349^\circ$
- $V_{5b} = 0.0836 - 0.0639i = 0.1053 \angle -37.406^\circ$
- $p_{1b} = 29.4138$ και $q_{1b} = 61.5564$ (αμ)

3.

- $V_{2c} = 0.0537 - 0.0486i = 0.0724 \angle -42.143^\circ$
- $V_{3c} = 0.0704 - 0.0521i = 0.0876 \angle -36.482^\circ$
- $V_{4c} = 0.2906 - 0.0505i = 0.2949 \angle -9.8528^\circ$
- $V_{5c} = 0.112 - 0.0746i = 0.1346 \angle -33.682^\circ$
- $p_{1c} = 33.1173$ και $q_{1c} = 70.5575$ (αμ)

- 4.
- $V_{2d} = 0.0544 - 0.0489i = 0.0732 \angle -41.927^\circ$
 - $V_{3d} = 0.0546 - 0.0434i = 0.0698 \angle -38.487^\circ$
 - $V_{4d} = 0.49 - 0.0396i = 0.4916 \angle -4.615^\circ$
 - $V_{5d} = 0.5951 - 0.0648i = 0.5986 \angle -6.2166^\circ$
 - $p_{1d} = 28.1522$ και $q_{1d} = 61.0177$ (αμ)
- 5.
- $V_{2e} = 0.6186 - 0.0995i = 0.6265 \angle -9.1403^\circ$
 - $V_{3e} = 0.0472 - 0.0357i = 0.0592 \angle -37.054^\circ$
 - $V_{4e} = 0.2813 - 0.0468i = 0.2852 \angle -9.4505^\circ$
 - $V_{5e} = 0.1149 - 0.0749i = 0.1371 \angle -33.107^\circ$
 - $p_{1e} = 28.7973$ και $q_{1e} = 53.4645$ (αμ)
- 6.
- $V_{2f} = 0.8905 - 0.0573i = 0.8924 \angle -3.6804^\circ$
 - $V_{3f} = 0.7626 - 0.0382i = 0.7636 \angle -2.8697^\circ$
 - $V_{4f} = 0.5602 - 0.0355i = 0.5613 \angle -3.6248^\circ$
 - $V_{5f} = 0.071 - 0.0561i = 0.0905 \angle -38.292^\circ$
 - $p_{1f} = 16.6672$ και $q_{1f} = 28.0397$ (αμ)
- 7.
- $V_{2g} = 0.0413 - 0.0371i = 0.0555 \angle -41.923^\circ$
 - $V_{3g} = 0.5821 - 0.0981i = 0.5903 \angle -9.5685^\circ$
 - $V_{4g} = 0.7512 - 0.0675i = 0.7542 \angle -5.1371^\circ$
 - $V_{5g} = 0.7831 - 0.079i = 0.7871 \angle -5.7615^\circ$
 - $p_{1g} = 22.2659$ και $q_{1g} = 43.8763$ (αμ)
- 8.
- $V_{2h} = 0.6156 - 0.0986i = 0.6235 \angle -9.1025^\circ$
 - $V_{3h} = 0.0403 - 0.0315i = 0.0512 \angle -38.003^\circ$
 - $V_{4h} = 0.4834 - 0.0351i = 0.4847 \angle -4.1529^\circ$
 - $V_{5h} = 0.5906 - 0.0624i = 0.5939 \angle -6.0333^\circ$
 - $p_{1h} = 23.8114$ και $q_{1h} = 43.9201$ (αμ)

Από τις 8 αυτές λύσεις, η πρώτη λύση συμφωνεί με εκείνη που βρέθηκε από την προσομοίωση του PowerWorld Simulator.

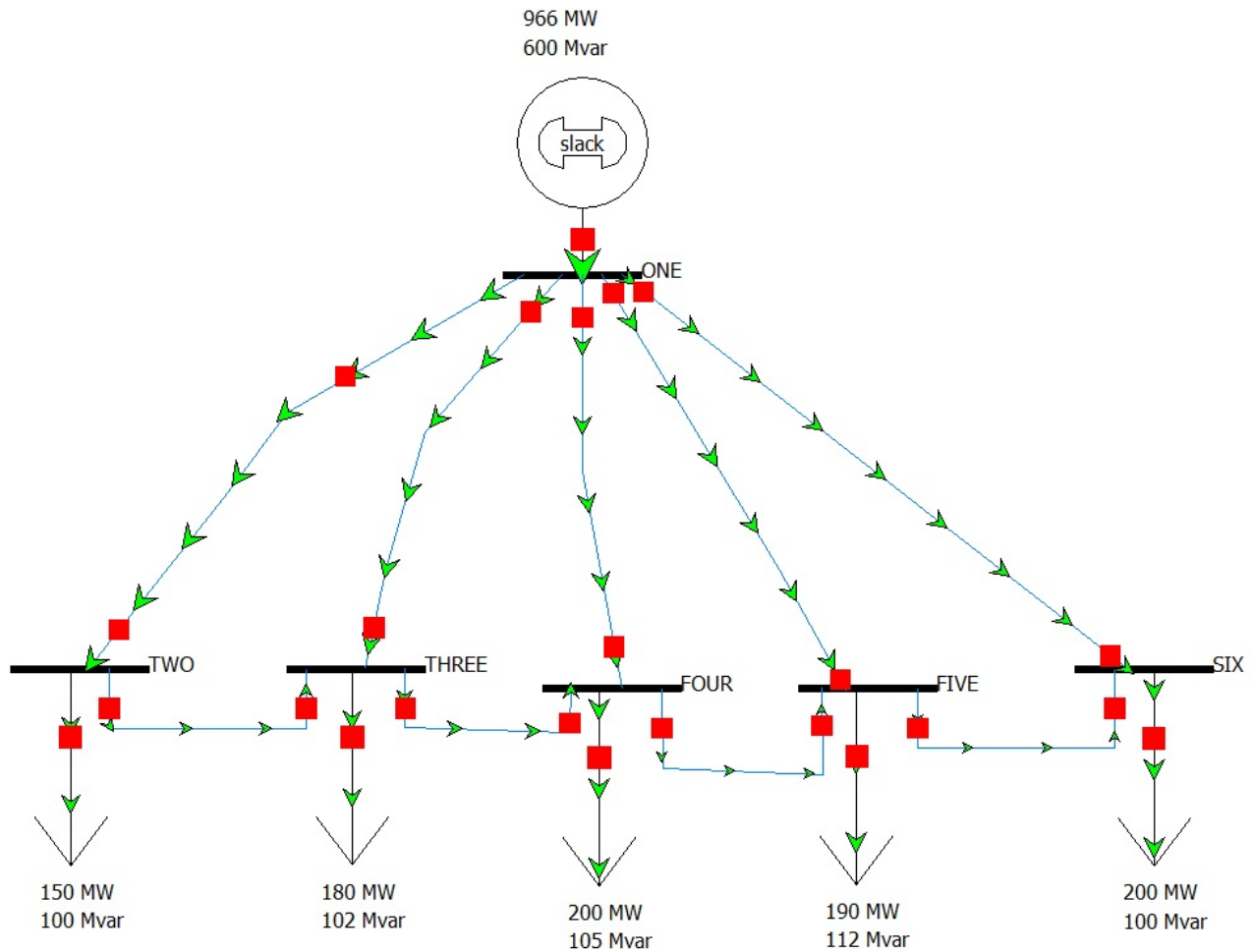
3.2.5 Παράδειγμα 5

Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	Τιμή τάσης V(αμ)	p_g (αμ)	p_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1$	0	1.5	0	1
3	Ζυγός PQ	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2$	0	1.8	0	1.02
4	Ζυγός PQ	$\bar{a}_3 + j\bar{f}_3$	0	2	0	1.05
5	Ζυγός PQ	$\bar{a}_4 + j\bar{f}_4$	0	1.9	0	1.12
6	Ζυγός PQ	$\bar{a}_5 + j\bar{f}_5$	0	2	0	1

Δεδομένα γραμμών:

Από ζυγό	Προς ζυγό	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0.01	0.01
1	3	0.01	0.02
1	4	0.02	0.04
1	5	0.03	0.04
1	6	0.02	0.05
2	3	0.01	0.02
3	4	0.01	0.02
4	5	0.01	0.02
5	6	0.01	0.02



Σχήμα 3.11 Παράδειγμα 5

Η προσομοίωση δίνει ως λύση:

- $V_2 = 0.9627 \angle -0.671 = 0.9626 - j0.011$, για την τάση του ζυγού 2
- $V_3 = 0.9492 \angle -1.602 = 0.9488 - j0.0265$, για την τάση του ζυγού 3
- $V_4 = 0.9259 \angle -2.619 = 0.9249 - j0.042$, για την τάση του ζυγού 4
- $V_5 = 0.9106 \angle -3.111 = 0.9092 - j0.049$, για την τάση του ζυγού 5
- $V_6 = 0.9065 \angle -3.708 = 0.9046 - j0.058$, για την τάση του ζυγού 6

και

- $p_1 = 966 \text{ MW}$ και $q_1 = 600 \text{ Mvar}$ ή $p_1 = 9.66 \text{ αμ}$ και $q_1 = 6.00 \text{ αμ}$

Για τον αλγόριθμο επίλυσης θα οριστεί ως αρχική περιοχή έρευνας για το ζυγό 2 το σύνολο:

$$\text{Con}_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0.0001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$$

για το ζυγό 3 το σύνολο:

$$\text{Con}_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0.0001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$$

για το ζυγό 4 το σύνολο:

$$\text{Con}_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0.0001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$$

για το ζυγό 5 το σύνολο:

$$\text{Con}_4 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0.0001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01 y \leq 0, -x + 0.01 y \leq 0\}$$

και για το ζυγό 6 το σύνολο:

$Con_5 = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 0.0001, x^2 + y^2 \leq 4, -x - 0.01y \leq 0, -x + 0.01y \leq 0\}$, δηλαδή και για τους πέντε ζυγούς αναζητούνται λύσεις στο 1ο και 4ο τεταρτημόριο.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου οδηγεί στα εξής αποτελέσματα:

SolMatrix =

0.9626 - 0.0113i	0.9488 - 0.0265i	0.9249 - 0.0423i	0.9092 - 0.0494i	0.9046 - 0.0586i
0.9283 - 0.0038i	0.8603 - 0.0239i	0.6982 - 0.0392i	0.4461 - 0.0353i	0.0499 - 0.0388i
0.0214 - 0.0057i	0.3151 - 0.0366i	0.0535 - 0.0373i	0.0930 - 0.0454i	0.2102 - 0.0888i
0.0255 - 0.0053i	0.0371 - 0.0244i	0.1269 - 0.0584i	0.1351 - 0.0524i	0.1002 - 0.0696i
0.0256 - 0.0053i	0.0340 - 0.0228i	0.2075 - 0.0613i	0.2052 - 0.0533i	0.0782 - 0.0590i
0.0195 - 0.0056i	0.4782 - 0.0349i	0.4988 - 0.0512i	0.3561 - 0.0428i	0.0571 - 0.0445i
0.0255 - 0.0054i	0.0409 - 0.0255i	0.0563 - 0.0384i	0.3405 - 0.0523i	0.4694 - 0.0834i
0.0215 - 0.0057i	0.3097 - 0.0344i	0.0392 - 0.0288i	0.3268 - 0.0486i	0.4579 - 0.0818i
0.5990 + 0.0589i	0.0227 - 0.0144i	0.1910 - 0.0591i	0.1943 - 0.0530i	0.0807 - 0.0604i
0.5993 + 0.0587i	0.0234 - 0.0148i	0.1384 - 0.0577i	0.1507 - 0.0529i	0.0937 - 0.0668i
0.5998 + 0.0585i	0.0249 - 0.0153i	0.0584 - 0.0386i	0.3423 - 0.0523i	0.4708 - 0.0833i
0.8267 + 0.0180i	0.5996 - 0.0166i	0.0373 - 0.0266i	0.0974 - 0.0448i	0.2192 - 0.0889i
0.8258 + 0.0188i	0.5970 - 0.0150i	0.0305 - 0.0221i	0.3198 - 0.0460i	0.4520 - 0.0806i
0.0188 - 0.0056i	0.5510 - 0.0323i	0.7065 - 0.0486i	0.7758 - 0.0517i	0.8060 - 0.0647i
0.0257 - 0.0052i	0.0286 - 0.0193i	0.4006 - 0.0530i	0.5831 - 0.0542i	0.6611 - 0.0736i
0.5982 + 0.0597i	0.0202 - 0.0128i	0.3955 - 0.0505i	0.5799 - 0.0529i	0.6587 - 0.0729i

Λύση Νο1

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
0.9626-0.0113i	0.9488-0.0265i	0.9249-0.0423i	0.9092-0.0494i	0.9046-0.0586i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.9627	0.9492	0.9259	0.9106	0.9065
angle	-0.6714	-1.6025	-2.619	-3.1114	-3.7082

p1 =

9.6646

q1 =

6.0007

Mean =

3.5344e-11

Λύση No2

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
0.9283-0.0038i	0.8603-0.0239i	0.6982-0.0392i	0.4461-0.0353i	0.0499-0.0388i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.9283	0.8607	0.6993	0.4474	0.0632
angle	-0.2327	-1.5913	-3.2139	-4.5225	-37.827

p1 =

25.7591

q1 =

38.7029

Mean =

1.2303e-10

Λύση No3

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
0.0214-0.0057i	0.3151-0.0366i	0.0535-0.0373i	0.093-0.0454i	0.2102-0.0888i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.0222	0.3172	0.0652	0.1035	0.2282
angle	-14.877	-6.6271	-34.9	-26.023	-22.898

p1 =

93.1760

q1 =

120.8386

Mean =

3.4074e-10

Λύση Νο4

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
0.0255-0.0053i	0.0371-0.0244i	0.1269-0.0584i	0.1351-0.0524i	0.1002-0.0696i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.0261	0.0444	0.1397	0.1449	0.122
angle	-11.805	-33.368	-24.714	-21.209	-34.779

p1 =

97.7482

q1 =

131.6064

Mean =

3.1883e-09

Λύση Νο5

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
0.0256-0.0053i	0.034-0.0228i	0.2075-0.0613i	0.2052-0.0533i	0.0782-0.059i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.0261	0.0409	0.2164	0.212	0.0979
angle	-11.712	-33.81	-16.444	-14.554	-37.052

p1 =

96.1316

q1 =

129.4427

Mean =

7.5819e-10

Λύση Νο6

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
0.0195-0.0056i	0.4782-0.0349i	0.4988-0.0512i	0.3561-0.0428i	0.0571-0.0445i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.0203	0.4794	0.5014	0.3587	0.0724
angle	-16.051	-4.1713	-5.856	-6.8582	-37.905

p1 =

82.8521

q1 =

104.1686

Mean =

6.3466e-10

Λύση Νο7

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
0.0255-0.0054i	0.0409-0.0255i	0.0563-0.0384i	0.3405-0.0523i	0.4694-0.0834i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.026	0.0482	0.0682	0.3445	0.4767
angle	-11.884	-31.942	-34.324	-8.7389	-10.077

p1 =

93.2516

q1 =

123.2993

Mean =

2.5660e-10

Λύση Νο8

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
0.0215-0.0057i	0.3097-0.0344i	0.0392-0.0288i	0.3268-0.0486i	0.4579-0.0818i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.0222	0.3116	0.0486	0.3304	0.4652
angle	-14.767	-6.3372	-36.339	-8.4588	-10.129

p1 =

88.5813

q1 =

113.4673

Mean =

1.3060e-10

Λύση No9

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
0.599+0.0589i	0.0227-0.0144i	0.191-0.0591i	0.1943-0.053i	0.0807-0.0604i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
pu	0.6019	0.0269	0.1999	0.2014	0.1008
angle	5.6185	-32.463	-17.197	-15.256	-36.794

p1 =

64.3963

q1 =

105.0800

Mean =

3.4089e-09

Λύση No10

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
0.5993+0.0587i	0.0234-0.0148i	0.1384-0.0577i	0.1507-0.0529i	0.0937-0.0668i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.6021	0.0277	0.1499	0.1597	0.1151
angle	5.5964	-32.331	-22.623	-19.344	-35.503

p1 =

65.4356

q1 =

106.5139

Mean =

6.7696e-10

Λύση No11

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
0.5998+0.0585i	0.0249-0.0153i	0.0584-0.0386i	0.3423-0.0523i	0.4708-0.0833i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.6027	0.0292	0.07	0.3462	0.4781
angle	5.5674	-31.521	-33.446	-8.6948	-10.036

p1 =

61.2029

q1 =

98.5241

Mean =

3.1356e-10

Λύση Νο12

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
$0.8267+0.018i$	$0.5996-0.0166i$	$0.0373-0.0266i$	$0.0974-0.0448i$	$0.2192-0.0889i$

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.8269	0.5998	0.0458	0.1072	0.2366
angle	1.2456	-1.5859	-35.474	-24.67	-22.069

p1 =

45.0597

q1 =

70.9882

Mean =

2.1339e-10

Λύση Νο13

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
$0.8258+0.0188i$	$0.597-0.015i$	$0.0305-0.0221i$	$0.3198-0.046i$	$0.452-0.0806i$

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.826	0.5972	0.0377	0.323	0.4592
angle	1.3025	-1.4373	-35.975	-8.1805	-10.105

p1 =

40.6335

q1 =

63.8616

Mean =

3.6353e-10

Λύση Νο14

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
0.0188-0.0056i	0.551-0.0323i	0.7065-0.0486i	0.7758-0.0517i	0.806-0.0647i

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.0196	0.552	0.7082	0.7775	0.8086
angle	-16.468	-3.3506	-3.9377	-3.8149	-4.588

p1 =

69.4865

q1 =

77.3445

Mean =

1.5742e-10

Λύση Νο15

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
$0.0257-0.0052i$	$0.0286-0.0193i$	$0.4006-0.053i$	$0.5831-0.0542i$	$0.6611-0.0736i$

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.0262	0.0345	0.4041	0.5856	0.6652
angle	-11.532	-33.916	-7.5377	-5.3122	-6.3533

p1 =

85.7062

q1 =

109.7355

Mean =

$2.6939e-10$

Λύση Νο16

ans =

V2	V3	V4	V5	V6
$0.5982+0.0597i$	$0.0202-0.0128i$	$0.3955-0.0505i$	$0.5799-0.0529i$	$0.6587-0.0729i$

ans =

	V2	V3	V4	V5	V6
pu	0.6011	0.0239	0.3987	0.5823	0.6627
angle	5.6973	-32.481	-7.2708	-5.2134	-6.314

p1 =

53.7716

q1 =

85.0669

Mean =

1.1640e-10

loop_counter =

1250309

Το πρόγραμμα τελείωσε σε αυτή την περίπτωση την εκτέλεσή του μετά από 6753.407 δευτερόλεπτα, ο βρόχος επανάληψης εκτελέστηκε 1250309 φορές και βρέθηκαν 16 λύσεις.

1.

- $V_{2a} = 0.9626 - 0.0113i = 0.9627 \angle -0.6714^\circ$
- $V_{3a} = 0.9488 - 0.0265i = 0.9492 \angle -1.6025^\circ$
- $V_{4a} = 0.9249 - 0.0423i = 0.9259 \angle -2.619^\circ$
- $V_{5a} = 0.9092 - 0.0494i = 0.9106 \angle -3.1114^\circ$
- $V_{6a} = 0.9046 - 0.0586i = 0.9065 \angle -3.7082^\circ$
- $p_{1a} = 9.6646$ και $q_{1a} = 6.0007$ (αμ)

2.

- $V_{2b} = 0.9283 - 0.0038i = 0.9283 \angle -0.2327^\circ$
- $V_{3b} = 0.8603 - 0.0239i = 0.8607 \angle -1.5913^\circ$
- $V_{4b} = 0.6982 - 0.0392i = 0.6993 \angle -3.2139^\circ$
- $V_{5b} = 0.4461 - 0.0353i = 0.4474 \angle -4.5225^\circ$
- $V_{6b} = 0.0499 - 0.0388i = 0.0632 \angle -37.827^\circ$
- $p_{1b} = 25.7591$ και $q_{1b} = 38.7029$ (αμ)

3.

- $V_{2c} = 0.0214 - 0.0057i = 0.0222 \angle -14.877^\circ$
- $V_{3c} = 0.3151 - 0.0366i = 0.3172 \angle -6.6271^\circ$
- $V_{4c} = 0.0535 - 0.0373i = 0.0652 \angle -34.9^\circ$
- $V_{5c} = 0.093 - 0.0454i = 0.1035 \angle -26.023^\circ$
- $V_{6c} = 0.2102 - 0.0888i = 0.2282 \angle -22.898^\circ$
- $p_{1c} = 93.1760$ και $q_{1c} = 120.8386$ (αμ)

4.

- $V_{2d} = 0.0255 - 0.0053i = 0.0261 \angle -11.805^\circ$
- $V_{3d} = 0.0371 - 0.0244i = 0.0444 \angle -33.368^\circ$
- $V_{4d} = 0.1269 - 0.0584i = 0.1397 \angle -24.714^\circ$
- $V_{5d} = 0.1351 - 0.0524i = 0.1449 \angle -21.209^\circ$
- $V_{6d} = 0.1002 - 0.0696i = 0.122 \angle -34.779^\circ$
- $p_{1d} = 97.7482$ και $q_{1d} = 131.6064$ (αμ)

5.

- $V_{2e} = 0.0256 - 0.0053i = 0.0261 \angle -11.712^\circ$
- $V_{3e} = 0.034 - 0.0228i = 0.0409 \angle -33.81^\circ$
- $V_{4e} = 0.2075 - 0.0613i = 0.2164 \angle -16.444^\circ$
- $V_{5e} = 0.2052 - 0.0533i = 0.212 \angle -14.554^\circ$
- $V_{6e} = 0.0782 - 0.059i = 0.0979 \angle -37.052^\circ$
- $p_{1e} = 96.1316$ και $q_{1e} = 129.4427$ (αμ)

6.

- $V_{2f} = 0.0195 - 0.0056i = 0.0203 \angle -16.051^\circ$
- $V_{3f} = 0.4782 - 0.0349i = 0.4794 \angle -4.1713^\circ$
- $V_{4f} = 0.4988 - 0.0512i = 0.5014 \angle -5.856^\circ$
- $V_{5f} = 0.3561 - 0.0428i = 0.3587 \angle -6.8582^\circ$
- $V_{6f} = 0.0571 - 0.0445i = 0.0724 \angle -37.905^\circ$
- $p_{1f} = 82.8521$ και $q_{1f} = 104.1686$ (αμ)

7.

- $V_{2g} = 0.0255 - 0.0054i = 0.026 \angle -11.884^\circ$
- $V_{3g} = 0.0409 - 0.0255i = 0.0482 \angle -31.942^\circ$
- $V_{4g} = 0.0563 - 0.0384i = 0.0682 \angle -34.324^\circ$
- $V_{5g} = 0.3405 - 0.0523i = 0.3445 \angle -8.7389^\circ$
- $V_{6g} = 0.4694 - 0.0834i = 0.4767 \angle -10.077^\circ$
- $p_{1g} = 93.2516$ και $q_{1g} = 123.2993$ (αμ)

8.

- $V_{2h} = 0.0215 - 0.0057i = 0.0222 \angle -14.767^\circ$
- $V_{3h} = 0.3097 - 0.0344i = 0.3116 \angle -6.3372^\circ$
- $V_{4h} = 0.0392 - 0.0288i = 0.0486 \angle -36.339^\circ$
- $V_{5h} = 0.3268 - 0.0486i = 0.3304 \angle -8.4588^\circ$
- $V_{6h} = 0.4579 - 0.0818i = 0.4652 \angle -10.129^\circ$
- $p_{1h} = 88.5813$ και $q_{1h} = 113.4673$ (αμ)

9.

- $V_{2i} = 0.599 + 0.0589i = 0.6019 \angle 5.6185^\circ$
- $V_{3i} = 0.0227 - 0.0144i = 0.0269 \angle -32.463^\circ$
- $V_{4i} = 0.191 - 0.0591i = 0.1999 \angle -17.197^\circ$
- $V_{5i} = 0.1943 - 0.053i = 0.2014 \angle -15.256^\circ$
- $V_{6i} = 0.0807 - 0.0604i = 0.1008 \angle -36.794^\circ$
- $p_{1i} = 64.3963$ και $q_{1i} = 105.0800$ (αμ)

10.

- $V_{2j} = 0.5993 + 0.0587i = 0.6021 \angle 5.5964^\circ$
- $V_{3j} = 0.0234 - 0.0148i = 0.0277 \angle -32.331^\circ$
- $V_{4j} = 0.1384 - 0.0577i = 0.1499 \angle -22.623^\circ$
- $V_{5j} = 0.1507 - 0.0529i = 0.1597 \angle -19.344^\circ$
- $V_{6j} = 0.0937 - 0.0668i = 0.1151 \angle -35.503^\circ$
- $p_{1j} = 65.4356$ και $q_{1j} = 106.5139$ (αμ)

11.

- $V_{2k} = 0.5998 + 0.0585i = 0.6027 \angle 5.5674^\circ$

- $V_{3k} = 0.0249 - 0.0153i = 0.0292 \angle -31.521^\circ$
 - $V_{4k} = 0.0584 - 0.0386i = 0.07 \angle -33.446^\circ$
 - $V_{5k} = 0.3423 - 0.0523i = 0.3462 \angle -8.6948^\circ$
 - $V_{5k} = 0.4708 - 0.0833i = 0.4781 \angle -10.036^\circ$
 - $p_{1k} = 61.2029$ και $q_{1k} = 98.5241$ (αμ)
- 12.
- $V_{2l} = 0.8267 + 0.018i = 0.8269 \angle 1.2456^\circ$
 - $V_{3l} = 0.5996 - 0.0166i = 0.5998 \angle -1.5859^\circ$
 - $V_{4l} = 0.0373 - 0.0266i = 0.0458 \angle -35.474^\circ$
 - $V_{5l} = 0.0974 - 0.0448i = 0.1072 \angle -24.67^\circ$
 - $V_{6l} = 0.2192 - 0.0889i = 0.2366 \angle -22.069^\circ$
 - $p_{1l} = 45.0597$ και $q_{1l} = 70.9882$ (αμ)
- 13.
- $V_{2m} = 0.8258 + 0.0188i = 0.826 \angle 1.3025^\circ$
 - $V_{3m} = 0.597 - 0.015i = 0.5972 \angle -1.4373^\circ$
 - $V_{4m} = 0.0305 - 0.0221i = 0.0377 \angle -35.975^\circ$
 - $V_{5m} = 0.3198 - 0.046i = 0.323 \angle -8.1805^\circ$
 - $V_{6m} = 0.452 - 0.0806i = 0.4592 \angle -10.105^\circ$
 - $p_{1m} = 40.6335$ και $q_{1m} = 63.8616$ (αμ)
- 14.
- $V_{2n} = 0.0188 - 0.0056i = 0.0196 \angle -16.468^\circ$
 - $V_{3n} = 0.551 - 0.0323i = 0.552 \angle -3.3506^\circ$
 - $V_{4n} = 0.7065 - 0.0486i = 0.7082 \angle -3.9377^\circ$
 - $V_{5n} = 0.7758 - 0.0517i = 0.7775 \angle -3.8149^\circ$
 - $V_{6n} = 0.806 - 0.0647i = 0.8086 \angle -4.588^\circ$
 - $p_{1n} = 69.4865$ και $q_{1n} = 77.3445$ (αμ)
- 15.
- $V_{2o} = 0.0257 - 0.0052i = 0.0262 \angle -11.532^\circ$
 - $V_{3o} = 0.0286 - 0.0193i = 0.0345 \angle -33.916^\circ$
 - $V_{4o} = 0.4006 - 0.053i = 0.4041 \angle -7.5377^\circ$
 - $V_{5o} = 0.5831 - 0.0542i = 0.5856 \angle -5.3122^\circ$
 - $V_{6o} = 0.6611 - 0.0736i = 0.6652 \angle -6.3533^\circ$
 - $p_{1o} = 85.7062$ και $q_{1o} = 109.7355$ (αμ)
- 16.
- $V_{2p} = 0.5982 + 0.0597i = 0.6011 \angle 5.6973^\circ$
 - $V_{3p} = 0.0202 - 0.0128i = 0.0239 \angle -32.481^\circ$
 - $V_{4p} = 0.3955 - 0.0505i = 0.3987 \angle -7.2708^\circ$
 - $V_{5p} = 0.5799 - 0.0529i = 0.5823 \angle -5.2134^\circ$
 - $V_{6p} = 0.6587 - 0.0729i = 0.6627 \angle -6.314^\circ$
 - $p_{1p} = 53.7716$ και $q_{1p} = 85.0669$ (αμ)

Από τις 16 αυτές λύσεις, η πρώτη λύση συμφωνεί με εκείνη που βρέθηκε από την προσομοίωση του PowerWorld Simulator.

3.3 Τελικά Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις

Στα παραδείγματα που παρατέθηκαν γίνεται εμφανές ότι ο αλγόριθμος πράγματι συγκλίνει προς όλες τις λύσεις που μπορούν να βρεθούν εντός του αρχικού πεδίου αναζήτησης. Αυτό μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί στην περίπτωση των παραδειγμάτων 1, 3(i) και 4(i) όπου τα δίκτυα αυτά δεν έχουν γραμμές μεταφοράς ανάμεσα σε PQ ζυγούς. Αυτά τα δίκτυα θα έχουν συνολικά 2^{n-1} λύσεις, άρα 2, 8 και 16 αντίστοιχα. Πράγματι βρίσκουμε 2, 8 και 16 λύσεις στις περιπτώσεις αυτές. Και στα υπόλοιπα παραδείγματα όμως βρίσκουμε πάντοτε περισσότερες από μία λύσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε κάποια παραδείγματα έγινε και προσπάθεια εύρεσης λύσεων όταν αρχικό σύνολο αναζήτησης για κάθε τάση είναι το

$$Con = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 0.0001, x^2 + y^2 \leq 4, 1 \cdot x + 0 \cdot y \leq 0, 1 \cdot x + 0.01 \cdot y \leq 0\},$$

δηλαδή έλεγχος στο 2ο και 3ο τεταρτημόριο. Στα παραδείγματα που έγινε ο έλεγχος αυτός όμως δεν βρέθηκαν λύσεις και ο αλγόριθμος τερμάτισε σύντομα, δίνοντας ακριβώς αυτό το αποτέλεσμα.

Μια ακόμη σημαντική παρατήρηση έχει να κάνει με την εμφάνιση πολλαπλών τρόπων για την προσέγγιση κάποιας λύσης, δηλαδή το φαινόμενο των “διπλών” που αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου 3. Η εμφάνιση των “διπλών” αντιμετωπίστηκε με το να ελέγχεται το κατά πόσο κάποια πιθανή λύση ταυτίζεται (σε κάποιο πλήθος σημαντικών ψηφίων) με κάποια λύση η οποία έχει ήδη βρεθεί. Φυσικά αυτή η ιδέα δεν αντιμετωπίζει το γεγονός ότι τα “μονοπάτια” που οδηγούν σε αυτά τα “διπλά” αναπτύσσονται κανονικά και άρα καταναλώνονται υπολογιστικοί πόροι πάνω τους δίχως λόγο. Θα άξιζε λοιπόν στο μέλλον να αφιερωθεί χρόνος προς την εύρεση κάποιας εναλλακτικής λύσης στο πρόβλημα των “διπλών”, λύση η οποία θα αντιμετωπίζει την εμφάνισή τους πιο γρήγορα και θα προλαμβάνει τις αρνητικές επιπτώσεις τους από άποψη υπολογιστικού κόστους.

Τα παραδείγματα επίσης δείχνουν ότι καθώς αυξάνεται το πλήθος των ζυγών, αυξάνεται και ο αριθμός των επαναλήψεων του βρόχου, δηλαδή χρειάζεται περισσότερος χρόνος για την εύρεση των λύσεων. Αυτό όμως ήταν και θεωρητικά αναμενόμενο. Αυτό που δεν αναμέναμε ήταν ότι η αύξηση της πολυπλοκότητας του δικτύου με την εισαγωγή γραμμών μεταφοράς ανάμεσα σε PQ ζυγούς θα οδηγούσε σε αύξηση των επαναλήψεων και μάλιστα πάρα πολύ απότομα, όπως φαίνεται από τα παραδείγματα 3(iv), 4(iii) και 5. Στο παράδειγμα 3(iv) ο χρόνος είναι 68.657 δευτερόλεπτα, λίγο περισσότερο από 1 λεπτό, και χρειάστηκαν 26987 επαναλήψεις του βρόχου. Στο παράδειγμα 4(iii) ο χρόνος είναι 203.363 δευτερόλεπτα, λίγο περισσότερο από 3 λεπτά, και χρειάστηκαν 54309 επαναλήψεις του βρόχου. Και τελικά στο παράδειγμα 5 ο χρόνος είναι 6753.407 δευτερόλεπτα, σχεδόν 2 ώρες, και χρειάστηκαν 1250309 επαναλήψεις του βρόχου. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε παράδειγμα παρόμοιας πολυπλοκότητας με το παράδειγμα 5 αλλά με 7 ζυγούς το πρόγραμμα αφέθηκε να τρέξει για περισσότερες από 12 ώρες και ακόμη και τότε δεν τερμάτισε. Με άλλα λόγια αυτή τη στιγμή φαίνεται ότι ο αλγόριθμος μπορεί να επιλύσει δίκτυα μέχρι 6 ζυγών, εντός αποδεκτών χρονικών ορίων. Πολύπλοκα ΣΗΕ με περισσότερους από 7 ζυγούς δεν μπορούν να λυθούν σε αποδεκτούς χρόνους. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό φαίνεται να σχετίζεται με το κριτήριο που χρησιμοποιείται για την απόρριψη set από κουτιά περιορισμών. Καθώς το ΣΗΕ γίνεται πιο πολύπλοκο, περισσότερα set κουτιών τα οποία δε θα οδηγήσουν τελικά σε λύσεις περνούν το κριτήριο και παράγουν “παιδιά” με αποτέλεσμα η διαδικασία να γίνεται πιο χρονοβόρα. Πιθανός τρόπος λύσης αυτού του προβλήματος θα ήταν η χρήση κάποιου νέου, πιο ισχυρού κριτηρίου. Ένα τέτοιο κριτήριο θα πρέπει βέβαια να εκμεταλλεύεται τους αναλυτικούς τρόπους εύρεσης των γενικών ελαχίστων που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2.

Τέλος, αναφορικά με τους αλγορίθμους τεχνητής νοημοσύνης που χρησιμοποιήθηκαν, από τα πειράματα που έγιναν κατά την ανάπτυξη του προγράμματος φάνηκε ότι η Best First προσέγγιση είναι αρκετά καλύτερη από ότι η αναζήτηση κατά πλάτος. Η κατά βάθος αναζήτηση ήταν και αυτή αρκετά καλύτερη από την κατά πλάτος αλλά όχι τόσο καλή όσο η αναζήτηση Best First. Πιθανή

βελτίωση στη λειτουργία του αλγορίθμου θα μπορούσε να επιτευχθεί, ενδεχομένως, από τη χρήση διαφορετικού, καλύτερου, ευριστικού κριτηρίου για τη Best First αναζήτηση. Η Best First αναζήτηση, άλλωστε, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το πόσο καλή είναι η ευριστική συνάρτηση. Η ευριστική συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε στην υλοποίηση της διπλωματικής ήταν φυσικά “προφανής” ως προς την επιλογή αλλά δεν αποκλείεται να υπάρχουν δυνατότητες βελτίωσής της.

Παράρτημα Α'

Κώδικας Matlab

data_input.m

```
%Διαδικασία για την εισαγωγή δεδομένων από το χρήστη. Η διαδικασία%
%δημιουργεί ένα αρχείο variables.mat το οποίο χρησιμοποιείται από τη%
%διαδικασία final.m για την επίλυση του προβλήματος%

clear all;
clc;

disp('-----Δεδομένα Δικτύου-----');
n = input('Δώστε το πλήθος ζυγών του δικτύου: ');
nbranches = input('Δώστε το πλήθος γραμμών του δικτύου: ');
Vo = input('Δώστε το μέτρο τάσης του ζυγού αναφοράς (slack bus) (αμ): ');

P = zeros(n-1,1);           %[p2;p3;...;pn] Πίνακας ενεργών ισχύων (n-1)x1%
Q = zeros(n-1,1);           %[q2;q3;...;qn] Πίνακας αέργων ισχύων (n-1)x1%

for i = 1:(n-1)
    fprintf('\n');
    P(i,1) = input(['Δώστε την τιμή έγχυσης ενεργού ισχύος για το ζυγό
',num2str(i+1),' (αμ): ']);
    Q(i,1) = input(['Δώστε την τιμή έγχυσης αέργου ισχύος για το ζυγό
',num2str(i+1),' (αμ): ']);
end

fprintf('\n');
[G,B] = admittance_matrix(n,nbranches);
fprintf('\n');
disp('-----Δεδομένα Μεθόδου-----');
fprintf('\n');
epsilon = input('Δώστε το ε>0 για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων (προτεινόμενη
τιμή 10^(-4)): ');
Constraints = ConstraintSetup(n);    %Πίνακας περιορισμών/"κουτιών"
(ρ,r,vn,vnbar,wn,wnbar,area,Bis_Guard), (8x(n-1))%
clear i;
clear nbranches;
save variables.mat
```

admittance_matrix.m

%Συνάρτηση που διαβάζει από το χρήστη τιμές αντιστάσεων και αντιδράσεων%
%γραμμών μεταφοράς και υπολογίζει τελικά την μήτρα αγωγιμοτήτων%

```
function [G,B] = admittance_matrix(n,nbranches)

    disp('Δεδομένα Γραμμών Μεταφοράς');

    for i = 1:nbranches
        from_bus = input('Δώστε αρχικό ζυγό γραμμής: ');
        to_bus = input('Δώστε τελικό ζυγό γραμμής: ');
        R = input('Δώστε την τιμή αντίστασης γραμμής (resistance) R (αμ): ');
        X = input('Δώστε την τιμή αντίδρασης γραμμής (reactance) X (αμ): ');
        b = input('Δώστε την τιμή χωρητικής αγωγιμότητας (line charging
admittance) (b/2): ');
        Z = R + 1i * X;
        y = 1./Z;
        Line_data(i,:) = [from_bus to_bus b y];
    end

    from_bus = Line_data(:,1);
    to_bus = Line_data(:,2);
    b = Line_data(:,3);
    y = Line_data(:,4);
    b = 1i*b;
    Y = zeros(n,n);

    %Μη διαγώνια στοιχεία μήτρας αγωγιμότητας%
    for k = 1:nbranches
        Y(from_bus(k),to_bus(k)) = - y(k);
        Y(to_bus(k),from_bus(k)) = Y(from_bus(k),to_bus(k));
    end

    %Διαγώνια στοιχεία μήτρας αγωγιμότητας%
    for k = 1:n
        for i = 1:nbranches
            if ((from_bus(i) == k) || (to_bus(i) == k))
                Y(k,k) = Y(k,k) + y(i) + b(i);
            end
        end
    end

    G = real(Y);
    B = imag(Y);

end
```

ConstraintSetup.m

```
%Συνάρτηση για την εισαγωγή των περιοχών αναζήτησης των τάσεων των ζυγών PQ%
%Το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας 8x(n-1) όπου: %
%1η γραμμή είναι η κάτω "ακτίνα" ρ, 2η γραμμή είναι η άνω "ακτίνα" r, 3η%
%και 4η γραμμή είναι vn και vnbar, 5η και 6η γραμμή είναι wn και wnbar, %
%7η γραμμή είναι το εμβαδόν του κάθε "κουτιού" και η 8η γραμμή έχει ένα
%bit ελέγχου σχετικά με το τρόπο διχοτόμησης που χρησιμοποιήθηκε τελευταία%
%στο συγκεκριμένο κουτί%
```

```
function Con = ConstraintSetup(n)
```

```
Temp = zeros(8,n-1);
for i=1:(n-1)
    disp(['Επιλογή περιοχής αναζήτησης για τάση του ζυγού ',num2str(i+1)]);
    flag = input('Πατήστε 1 για 1ο τεταρτημόριο ή \nΠατήστε 2 για 2ο
τεταρτημόριο ή \nΠατήστε 3 για 3ο τεταρτημόριο ή \nΠατήστε 4 για 4ο τεταρτημόριο
ή \nΠατήστε 5 για περισσότερες επιλογές: ');
    switch(flag)
        case 1
            Temp(1:6,i) = [0.0001;4;0;-1;-1;0];
        case 2
            Temp(1:6,i) = [0.0001;4;0;-1;1;0];
        case 3
            Temp(1:6,i) = [0.0001;4;0;1;1;0];
        case 4
            Temp(1:6,i) = [0.0001;4;0;1;-1;0];
        case 5
            flag2 = input('\nΠατήστε 1 για 1ο και 2ο τεταρτημόριο ή
\nΠατήστε 2 για 2ο και 3ο τεταρτημόριο ή \nΠατήστε 3 για 3ο και 4ο τεταρτημόριο
ή \nΠατήστε 4 για 1ο και 4ο τεταρτημόριο ή \nΠατήστε 5 για ειδική επιλογή: ');
            switch(flag2)
                case 1
                    Temp(1:6,i) = [0.0001;4;-0.01;-1;0.01;-1];
                case 2
                    Temp(1:6,i) = [0.0001;4;1;0;1;0.01];
                case 3
                    Temp(1:6,i) = [0.0001;4;0;1;0.01;1];
                case 4
                    Temp(1:6,i) = [0.0001;4;-1;-0.01;-1;0.01];
                case 5
                    Temp(1,i) = input('\nΔώστε κάτω όριο για την ακτίνα')^2;
                    Temp(2,i) = input('Δώστε άνω όριο για την ακτίνα ')^2;
                    t1 = input('Δώστε τον όρο v για τον περιορισμό v*x +
vbar*y <= 0 : ');
                    t2 = input('Δώστε τον όρο vnbar για τον περιορισμό v*x +
vbar*y <= 0 : ');
                    Temp(3,i) = t1/sqrt(t1^2 + t2^2);
                    Temp(4,i) = t2/sqrt(t1^2 + t2^2);
                    t1 = input('Δώστε τον όρο w για τον περιορισμό w*x +
wbar*y <= 0 : ');
                    t2 = input('Δώστε τον όρο wbar για τον περιορισμό w*x +
wbar*y <= 0 : ');
                    Temp(5,i) = t1/sqrt(t1^2 + t2^2);
                    Temp(6,i) = t2/sqrt(t1^2 + t2^2);
            end
        end
        Temp(7,i) = box_area(Temp(1:6,i));
        fprintf('\n')
```

```

end
Con = Temp;

```

```

end

```

final.m

```

%Η κύρια διαδικασία που εκτελεί τα βασικά βήματα του αλγορίθμου για την επίλυση%
%των μη γραμμικών εξισώσεων. Διαβάζει τα δεδομένα που χρειάζεται από το%
%variables.mat αρχείο και στη συνέχεια βρίσκει τις λύσεις, αν υπάρχουν.%

```

```

clear all;
load variables.mat;
[P1,P2,P3,P4] = min_max_calc(n,Vo,G,B,P,Q,Constraints(:,:,1),-1);

Solutions = [];           %Πίνακας λύσεων%

TreeSolution = barycenter(Constraints(1:6,:),-1);           %Πίνακας σημείων
αντιπροσώπων%
ErrorMatrix = [MeanError(n,G,B,Vo,P,Q,real(TreeSolution)',imag(TreeSolution)')];
%Πίνακας σφαλμάτων%

loop_counter = 0;

while (~isempty(Constraints))
    [Error,Index] = min(ErrorMatrix);           %Επιλογή του set περιορισμών με το
    μικρότερο σφάλμα%
    if (Error <= epsilon)                       %Αν το σφάλμα είναι μικρότερο από το
    όριο ε, βρέθηκε λύση%
        Solutions = cat(1,Solutions,TreeSolution(Index,:));
        Constraints(:,:,Index) = [];
        TreeSolution(Index,:) = [];
        ErrorMatrix(Index,:) = [];
        P1(:,: ,Index) = [];
        P2(:,: ,Index) = [];
        P3(:,: ,Index) = [];
        P4(:,: ,Index) = [];
    else
        [~,Inx] = max(Constraints(7,: ,Index));
        [NB,NP1,NP2,NP3,NP4,control2] =
box_check(n,Vo,G,B,P,Q,Constraints(:,: ,Index),P1(:,: ,Index),P2(:,: ,Index),P3(:,:
,Index),P4(:,: ,Index),Inx,0);
        temp = [];
        if control2 == 1                           %1ο κόψιμο παράγει 2 "παιδιά"%
            control0 = 0;
            control1 = 0;
            k = 1;
            T = Constraints(7,: ,Index);
            Inx2 = Inx;
            while ( control0 == 0 && k<=n-2)           %Συνέχιση ελέγχου για εύρεση
            κοψίματος που δίνει λιγότερα "παιδιά"%
                T(Inx2) = -Inf;
                [~,Inx2] = max(T);
                [TB,TP1,TP2,TP3,TP4,control2] =
box_check(n,Vo,G,B,P,Q,Constraints(:,: ,Index),P1(:,: ,Index),P2(:,: ,Index),P3(:,:
,Index),P4(:,: ,Index),Inx2,0);
                if control2 == 0

```



```

    if isempty(TB)
        control0 = 1;
    else
        if controll1 == 0
            controll1 = 1;
            Inx = Inx2;
            NB = TB;
            NP1 = TP1;
            NP2 = TP2;
            NP3 = TP3;
            NP4 = TP4;
        end
    end
end
end
k = k+1;
end
Constraints(:, :, Index) = [];
P1(:, :, Index) = [];
P2(:, :, Index) = [];
P3(:, :, Index) = [];
P4(:, :, Index) = [];
ErrorMatrix(Index, :) = [];
if control0 == 1 %0 "παλιδιά"%
    TreeSolution(Index, :) = [];
elseif controll1 == 1 %1 "παλιδί"%
    temp = TreeSolution(Index, :);
    TreeSolution(Index, :) = [];
    temp(1, Inx) = barycenter(NB(1:6, :, 1), Inx);
    if (~member(round(temp(1, :), 4), round(Solutions, 4))) %Ελεγχος αν
ο αντιπρόσωπος του νέου set είναι "διπλό" κάποιας λύσης%
        Constraints = cat(3, NB, Constraints);
        P1 = cat(3, NP1, P1);
        P2 = cat(3, NP2, P2);
        P3 = cat(3, NP3, P3);
        P4 = cat(3, NP4, P4);
        TreeSolution = cat(1, temp, TreeSolution);
        ErrorMatrix =
cat(1, MeanError(n, G, B, Vo, P, Q, real(temp(1, :)), imag(temp(1, :))), ErrorMatrix);
    end
else %2 "παλιδιά"%
    temp = cat(1, TreeSolution(Index, :), TreeSolution(Index, :));
    TreeSolution(Index, :) = [];
    temp(1, Inx) = barycenter(NB(1:6, :, 1), Inx);
    temp(2, Inx) = barycenter(NB(1:6, :, 2), Inx);
    if (~member(round(temp(2, :), 4), round(Solutions, 4))) %Ελεγχος αν
ο αντιπρόσωπος του νέου set είναι "διπλό" κάποιας λύσης%
        Constraints = cat(3, NB(:, :, 2), Constraints);
        P1 = cat(3, NP1(:, :, 2), P1);
        P2 = cat(3, NP2(:, :, 2), P2);
        P3 = cat(3, NP3(:, :, 2), P3);
        P4 = cat(3, NP4(:, :, 2), P4);
        TreeSolution = cat(1, temp(2, :), TreeSolution);
        ErrorMatrix =
cat(1, MeanError(n, G, B, Vo, P, Q, real(temp(2, :)), imag(temp(2, :))), ErrorMatrix);
    end
    if (~member(round(temp(1, :), 4), round(Solutions, 4))) %Ελεγχος αν
ο αντιπρόσωπος του νέου set είναι "διπλό" κάποιας λύσης%
        Constraints = cat(3, NB(:, :, 1), Constraints);
        P1 = cat(3, NP1(:, :, 1), P1);
        P2 = cat(3, NP2(:, :, 1), P2);
        P3 = cat(3, NP3(:, :, 1), P3);

```

```

        P4 = cat(3, NP4(:, :, 1), P4);
        TreeSolution = cat(1, temp(1, :), TreeSolution);
        ErrorMatrix =
cat(1, MeanError(n, G, B, Vo, P, Q, real(temp(1, :)), imag(temp(1, :))), ErrorMatrix);
    end
end
else
    %1ο κόψιμο παράγει 0 ή 1 "παιδί"%
    %1 "παιδί" στο 1ο κόψιμο%
    if (~isempty(NB))
        control1 = 1;
        control0 = 0;
        k = 1;
        T = Constraints(7, :, Index);
        while (control0 == 0 && k <= n-2) %Ελεγχος για εύρεση κοψίματος
με 0 "παιδιά"%
            T(Inx) = -Inf;
            [~, Inx] = max(T);
            [TB, TP1, TP2, TP3, TP4, control2] =
box_check(n, Vo, G, B, P, Q, Constraints(:, :, Index), P1(:, :, Index), P2(:, :, Index), P3(:, :,
Index), P4(:, :, Index), Inx, 0);
            if (control2 == 0 && isempty(TB))
                control0 = 1;
            end
            k = k + 1;
        end
        Constraints(:, :, Index) = [];
        P1(:, :, Index) = [];
        P2(:, :, Index) = [];
        P3(:, :, Index) = [];
        P4(:, :, Index) = [];
        ErrorMatrix(Index, :) = [];
        if (control0 == 0) %1 "παιδί"%
            temp = TreeSolution(Index, :);
            TreeSolution(Index, :) = [];
            temp(1, Inx) = barycenter(NB(1:6, :, 1), Inx);
            if (~member(round(temp(1, :), 4), round(Solutions, 4))) %Ελεγχος
αν ο αντιπρόσωπος του νέου set είναι "διπλό" κάποιας λύσης%
                Constraints = cat(3, NB, Constraints);
                P1 = cat(3, NP1, P1);
                P2 = cat(3, NP2, P2);
                P3 = cat(3, NP3, P3);
                P4 = cat(3, NP4, P4);
                TreeSolution = cat(1, temp, TreeSolution);
                ErrorMatrix =
cat(1, MeanError(n, G, B, Vo, P, Q, real(temp(1, :)), imag(temp(1, :))), ErrorMatrix);
            end
        else %0 "παιδιά"%
            TreeSolution(Index, :) = [];
        end
    else %0 "παιδιά" στο 1ο κόψιμο%
        Constraints(:, :, Index) = [];
        P1(:, :, Index) = [];
        P2(:, :, Index) = [];
        P3(:, :, Index) = [];
        P4(:, :, Index) = [];
        TreeSolution(Index, :) = [];
        ErrorMatrix(Index, :) = [];
    end
end
end
loop_counter = loop_counter+1;
end

```

```

SolMatrix = solution(n,G,B,Vo,P,Q,Solutions) %Πίνακας λύσεων μετά την
εκτέλεση της lsqnonlin διαδικασίας του matlab για εύρεση των λύσεων με
μεγαλύτερη ακρίβεια%
clear
('P1','P2','P3','P4','ErrorMatrix','TreeSolution','Constraints','Inx','Index','I
nx2','NB','TB','NP1','NP2','NP3','NP4','TP1','TP2','TP3','TP4','k','temp','T','c
ontrol0','control1','control2','Error')
save results.mat
solution_print(n,Vo,G,B,P,Q,SolMatrix)
loop_counter

```

box_check.m

```

%Συνάρτηση για έλεγχο των συνθηκών μετά τη διχοτόμηση ενός κουτιού που
επιλέγεται από το Index%
%Ελέγχονται και οι δύο τρόποι διχοτόμησης (αν χρειάζεται) και επιλέγεται ο
τρόπος διχοτόμησης%
%που παράγει τα λιγότερα "παιδιά". Αν οι τρόποι είναι ισοδύναμοι ως προς τη
δημιουργία παιδιών%
%επιλέγεται ο τρόπος που αντιστοιχεί σε control = 0%

```

```

function [Box,NP1,NP2,NP3,NP4,con] =
box_check(n,Vo,G,B,P,Q,Con,P1,P2,P3,P4,Index,control)

[T1,T2] = Bisection(Con,Index,control);
Temp1 = P1;
Temp2 = P2;
Temp3 = P3;
Temp4 = P4;
TTemp1 = P1;
TTemp2 = P2;
TTemp3 = P3;
TTemp4 = P4;
[Temp1(Index,:),Temp2(Index,:),Temp3(Index,:),Temp4(Index,:)] =
min_max_calc(n,Vo,G,B,P,Q,T1,Index);
condition1 = any(sum(Temp1,1)>0) || any(sum(Temp2,1)>0) ||
any(sum(Temp3,1)<0) || any(sum(Temp4,1)<0);
[TTemp1(Index,:),TTemp2(Index,:),TTemp3(Index,:),TTemp4(Index,:)] =
min_max_calc(n,Vo,G,B,P,Q,T2,Index);
condition2 = any(sum(TTemp1,1)>0) || any(sum(TTemp2,1)>0) ||
any(sum(TTemp3,1)<0) || any(sum(TTemp4,1)<0);

if ~condition1
    if ~condition2
        if (control == 0)
            [Tbox,TTP1,TTP2,TTP3,TTP4,con2] =
box_check(n,Vo,G,B,P,Q,Con,P1,P2,P3,P4,Index,1); %Διχοτόμηση με το
δεύτερο τρόπο για έλεγχο μήπως τα "παιδιά" είναι λιγότερα%
            if (con2==0) %Ο 2ος τρόπος διχοτόμησης δίνει λιγότερα
"παιδιά" και επιλέγεται%
                Box = Tbox;
                NP1 = TTP1;
                NP2 = TTP2;
                NP3 = TTP3;
                NP4 = TTP4;
                con = 0;
            else %Επιλέγεται ο 1ος τρόπος που δίνει 2 "παιδιά"%

```

```

        Box = cat(3,T1,T2);
        NP1 = cat(3,Temp1,TTemp1);
        NP2 = cat(3,Temp2,TTemp2);
        NP3 = cat(3,Temp3,TTemp3);
        NP4 = cat(3,Temp4,TTemp4);
        con = 1;
    end
else %Όταν ο 2ος τρόπος διχοτόμησης παράγει δύο
"παιδιά", απορρίπτεται%
    Box = [-1];
    NP1 = [];
    NP2 = [];
    NP3 = [];
    NP4 = [];
    con = 1;
end
else %Μόνο ένα "παιδί" παράγεται, το T1%
    if (control == 0)
        [Tbox,TTP1,TTP2,TTP3,TTP4,con2] =
box_check(n,Vo,G,B,P,Q,Con,P1,P2,P3,P4,Index,1);
        if (isempty(Tbox)) %2ος τρόπος διχοτόμησης δίνει
μηδέν "παιδιά"%
            Box = [];
            NP1 = [];
            NP2 = [];
            NP3 = [];
            NP4 = [];
            con = 0;
        else
            Box = T1;
            NP1 = Temp1;
            NP2 = Temp2;
            NP3 = Temp3;
            NP4 = Temp4;
            con = 0;
        end
    end
else
    Box = T1;
    NP1 = Temp1;
    NP2 = Temp2;
    NP3 = Temp3;
    NP4 = Temp4;
    con = 0;
end
end
else
    if ~condition2 %Μόνο ένα "παιδί" παράγεται, το T2%
        if (control ==0)
            [Tbox,TTP1,TTP2,TTP3,TTP4,con2] =
box_check(n,Vo,G,B,P,Q,Con,P1,P2,P3,P4,Index,1);
            if (isempty(Tbox)) %2ος τρόπος διχοτόμησης δίνει
μηδέν "παιδιά"%
                Box = [];
                NP1 = [];
                NP2 = [];
                NP3 = [];
                NP4 = [];
                con = 0;
            else
                Box = T2;
                NP1 = TTemp1;

```

```

        NP2 = TTemp2;
        NP3 = TTemp3;
        NP4 = TTemp4;
        con = 0;
    end
else
    Box = T2;
    NP1 = TTemp1;
    NP2 = TTemp2;
    NP3 = TTemp3;
    NP4 = TTemp4;
    con = 0;
end
else %Κανένα "παιδί" δεν παράγεται%
    Box = [];
    NP1 = [];
    NP2 = [];
    NP3 = [];
    NP4 = [];
    con = 0;
end
end
end
end
end

```

min_max_calc.m

%Συνάρτηση για τον υπολογισμό των πινάκων P1, P2, P3, P4, δηλαδή την επίλυση προβλημάτων ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης%
 %με χρήση των δεδομένων του προβλήματος και τις συναρτήσεις non_linearProb και linearProb που έχουν οριστεί%

```
function [P1,P2,P3,P4] = min_max_calc(n,Vo,G,B,P,Q,Con,k)
```

```

    switch k
    case -1
        %Αρχικοποίηση των πινάκων P1, P2, P3, P4%
        TP1 = cat(1,zeros(n-1),Vo*G(2:n,1)'); %Πίνακες για
        προβλήματα (A1), (A2), (A3), (A4), διαστάσεων nx(n-1) %
        TP2 = cat(1,zeros(n-1),Vo*B(2:n,1)');
        TP3 = cat(1,zeros(n-1),Vo*G(2:n,1)');
        TP4 = cat(1,zeros(n-1),Vo*B(2:n,1)');

        for j=1:(n-1)
            p = Con(1,j);
            r = Con(2,j);
            vn = Con(3,j);
            vnbar = Con(4,j);
            wn = Con(5,j);
            wnbar = Con(6,j);
            for i=1:(n-1)
                if (i==j)
                    TP1(j,i) = non_linearProb(G(i+1,j+1),-
                    B(i+1,j+1),-P(i),-Q(i),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        TP2(j,i) =
non_linearProb(B(i+1,j+1),G(i+1,j+1),Q(i),-P(i),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
        TP3(j,i) = -non_linearProb(-
G(i+1,j+1),B(i+1,j+1),P(i),Q(i),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
        TP4(j,i) = -non_linearProb(-B(i+1,j+1),-
G(i+1,j+1),-Q(i),P(i),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
        else
        TP1(j,i) = linearProb(G(i+1,j+1),-
B(i+1,j+1),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
        TP2(j,i) =
linearProb(B(i+1,j+1),G(i+1,j+1),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
        TP3(j,i) = -linearProb(-
G(i+1,j+1),B(i+1,j+1),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
        TP4(j,i) = -linearProb(-B(i+1,j+1),-
G(i+1,j+1),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
        end
    end
    end
    P1 = TP1;
    P2 = TP2;
    P3 = TP3;
    P4 = TP4;
    otherwise %Υπολογισμός των νέων τιμών ελαχίστου και
μεγίστου μόνο για το κουτί που άλλαξε%
        p = Con(1,k);
        r = Con(2,k);
        vn = Con(3,k);
        vnbar = Con(4,k);
        wn = Con(5,k);
        wnbar = Con(6,k);
        TTP1 = zeros(1,n-1);
        TTP2 = zeros(1,n-1);
        TTP3 = zeros(1,n-1);
        TTP4 = zeros(1,n-1);
        for i=1:(n-1)
            if (i==k)
                TTP1(i) = non_linearProb(G(i+1,k+1),-B(i+1,k+1),-
P(i),-Q(i),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
                TTP2(i) =
non_linearProb(B(i+1,k+1),G(i+1,k+1),Q(i),-P(i),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
                TTP3(i) = -non_linearProb(-
G(i+1,k+1),B(i+1,k+1),P(i),Q(i),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
                TTP4(i) = -non_linearProb(-B(i+1,k+1),-
G(i+1,k+1),-Q(i),P(i),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
            else
                TTP1(i) = linearProb(G(i+1,k+1),-
B(i+1,k+1),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
                TTP2(i) =
linearProb(B(i+1,k+1),G(i+1,k+1),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
                TTP3(i) = -linearProb(-
G(i+1,k+1),B(i+1,k+1),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
                TTP4(i) = -linearProb(-B(i+1,k+1),-
G(i+1,k+1),p,r,vn,vnbar,wn,wnbar);
            end
        end
    end
    P1 = TTP1;
    P2 = TTP2;
    P3 = TTP3;
    P4 = TTP4;
end
end
end

```

linearProb.m

%Συνάρτηση για την επίλυση του γραμμικού προβλήματος ελαχιστοποίησης (P1) %
%Περισσότερα σχετικά με τις συνθήκες, τύπους και περιπτώσεις στο κεφάλαιο 2%

```
function solution = linearProb(a,b,p,r,vn,vnbar,wn,wnbar)
```

```
cond1 = vn*a+vnbar*b;  
cond2 = wn*a+wnbar*b;  
if (cond1>=0) && (cond2>=0)  
    solution = -sqrt(r*(a^2 + b^2));  
else  
    sigma = sign(vn*wnbar - vnbar*wn);  
    if (cond1 <= cond2)  
        aux = vn*b - vnbar*a;  
        if (aux == 0)  
            solution = 0;  
        elseif (aux>0)  
            if (sigma == 1)  
                solution = -sqrt(r)*aux;  
            else  
                solution = sqrt(p)*aux;  
            end  
        else  
            if (sigma == 1)  
                solution = -sqrt(p)*aux;  
            else  
                solution = sqrt(r)*aux;  
            end  
        end  
    else  
        aux = wn*b - wnbar*a;  
        if (aux == 0)  
            solution = 0;  
        elseif (aux>0)  
            if (sigma == 1)  
                solution = sqrt(p)*aux;  
            else  
                solution = -sqrt(r)*aux;  
            end  
        else  
            if (sigma == 1)  
                solution = sqrt(r)*aux;  
            else  
                solution = -sqrt(p)*aux;  
            end  
        end  
    end  
end  
end  
end
```

non_linearProb.m

%Συνάρτηση για την επίλυση του μη-γραμμικού προβλήματος ελαχιστοποίησης (P2) %
%Περισσότερα σχετικά με τις συνθήκες, τύπους και περιπτώσεις στο κεφάλαιο 2%

```
function solution = non_linearProb(a,b,c,d,p,r,vn,vnbar,wn,wnbar)

aux1 = p*r;
if (aux1 <= (c^2+d^2)/(a^2+b^2))
    p_aux = p;
else
    p_aux = r;
end
aux2 = a+c/p_aux;
aux3 = b+d/p_aux;

if (vn*aux2 + vnbar*aux3>=0) && (wn*aux2 + wnbar*aux3>=0)
    solution = -sqrt(p_aux*(aux2^2 + aux3^2));
else
    sigma = sign(vn*wnbar - vnbar*wn);
    cond1 = vnbar*a - vn*b;
    cond2 = vnbar*c - vn*d;
    psi = cond2/cond1;
    if (cond1 == 0)
        if ((sigma == 1) && (cond2>0)) || ((sigma == -1) && (cond2<0))
            min1 = sigma*cond2/sqrt(r);
        else
            min1 = sigma*cond2/sqrt(p);
        end
    elseif (cond1 > 0)
        if (sigma == 1)
            if (psi>r)
                min1 = cond1*(sqrt(r) + psi/sqrt(r));
            elseif (psi<p)
                min1 = cond1*(sqrt(p) + psi/sqrt(p));
            else
                min1 = 2*cond1*sqrt(psi);
            end
        else
            if (psi>=sqrt(aux1))
                min1 = -cond1*(sqrt(p) + psi/sqrt(p));
            else
                min1 = -cond1*(sqrt(r) + psi/sqrt(r));
            end
        end
    end
else
    if (sigma == -1)
        if (psi>r)
            min1 = -cond1*(sqrt(r) + psi/sqrt(r));
        elseif (psi<p)
            min1 = -cond1*(sqrt(p) + psi/sqrt(p));
        else
            min1 = -2*cond1*sqrt(psi);
        end
    else
        if (psi>=sqrt(aux1))
            min1 = cond1*(sqrt(p) + psi/sqrt(p));
        else
            min1 = cond1*(sqrt(r) + psi/sqrt(r));
        end
    end
end
```



```

        end
    end
end

cond1 = -wnbar*a + wn*b;
cond2 = -wnbar*c + wn*d;
psi = cond2/cond1;
if (cond1 == 0)
    if ((sigma == 1) && (cond2>0)) || ((sigma == -1) && (cond2<0))
        min2 = sigma*cond2/sqrt(r);
    else
        min2 = sigma*cond2/sqrt(p);
    end
elseif (cond1 > 0)
    if (sigma ==1)
        if (psi>r)
            min2 = cond1*(sqrt(r) + psi/sqrt(r));
        elseif (psi<p)
            min2 = cond1*(sqrt(p) + psi/sqrt(p));
        else
            min2 = 2*cond1*sqrt(psi);
        end
    else
        if (psi>=sqrt(aux1))
            min2 = -cond1*(sqrt(p) + psi/sqrt(p));
        else
            min2 = -cond1*(sqrt(r) + psi/sqrt(r));
        end
    end
else
    if (sigma == -1)
        if (psi>r)
            min2 = -cond1*(sqrt(r) + psi/sqrt(r));
        elseif (psi<p)
            min2 = -cond1*(sqrt(p) + psi/sqrt(p));
        else
            min2 = -2*cond1*sqrt(psi);
        end
    else
        if (psi>=sqrt(aux1))
            min2 = cond1*(sqrt(p) + psi/sqrt(p));
        else
            min2 = cond1*(sqrt(r) + psi/sqrt(r));
        end
    end
end
end
solution = min(min1,min2);
end
end

```

Bisection.m

%Συνάρτηση που δημιουργεί δύο νέα set κουτιών μετά από διχοτόμηση (γωνίας ή ακτίνας)%

```
function [B1,B2] = Bisection(Con,Inx,control)

    if (Con(8,Inx) == control)      %Bis_Guard = 0 και control =0 ή Bis_Guard=1
    και control=1%
        [X,Y] = radius_Bis(Con(1,Inx),Con(2,Inx));      %Διχοτόμηση το κουτί
        που προσδιορίζεται από το Inx κατά ακτίνα%
        if (control == 0)
            Con(8,Inx) = 1;
        end
        Con(1:2,Inx) = X;
        TB1 = Con(:,:);      %Δημιουργία νέων set περιορισμών, τα υπόλοιπα
        κουτιά του αρχικού set παραμένουν ίδια%
        TB1(7,Inx) = box_area(TB1(1:6,Inx));
        Con(1:2,Inx) = Y;
        TB2 = Con(:,:);      %Δημιουργία νέων set περιορισμών, τα υπόλοιπα
        κουτιά του αρχικού set παραμένουν ίδια%
        TB2(7,Inx) = box_area(TB2(1:6,Inx));
    else      %Bis_Guard = 1 και control=0 ή Bis_Guard = 0 και control=1%
        [X,Y] = angle_Bis(Con(3:4,Inx),Con(5:6,Inx));      %Διχοτόμηση το κουτί
        που προσδιορίζεται από το Inx κατά γωνία%
        if (control == 0)
            Con(8,Inx) = 0;
        end
        Con(3:6,Inx) = X;
        TB1 = Con(:,:);      %Δημιουργία νέων set περιορισμών, τα υπόλοιπα
        κουτιά του αρχικού set παραμένουν ίδια%
        TB1(7,Inx) = box_area(TB1(1:6,Inx));
        Con(3:6,Inx) = Y;
        TB2 = Con(:,:);      %Δημιουργία νέων set περιορισμών, τα υπόλοιπα
        κουτιά του αρχικού set παραμένουν ίδια%
        TB2(7,Inx) = box_area(TB2(1:6,Inx));
    end
    B1 = TB1;
    B2 = TB2;
end
```

radius_Bis.m

%Συνάρτηση για τη διχοτόμηση της ακτίνας %
%Για περισσότερα σχετικά με τους τύπους αναφερθείτε στο Παράρτημα Β%

```
function [A,B] = radius_Bis (p,r)

    aux = (p+r)/4 + sqrt(p*r)/2;
    A = [p;aux];
    B = [aux;r];

end
```

angle_Bis.m

%Συνάρτηση για τη διχοτόμηση της γωνίας %
%Για περισσότερα σχετικά με τους τύπους αναφερθείτε στο Παράρτημα Β%

```
function [A,B] = angle_Bis (V,W)

    sigma = sign(V(1)*W(2) - V(2)*W(1));
    k = sqrt((W(2) - V(2))^2+(W(1)-V(1))^2);
    if sigma == 1
        aux = (W(1)-V(1))/k;
        auxbar = (W(2) - V(2))/k;
        A = [V(1);V(2);aux;auxbar];
        B = [-aux;-auxbar;W(1);W(2)];
    else
        aux = (V(1)-W(1))/k;
        auxbar = (V(2)-W(2))/k;
        A = [V(1);V(2);-aux;-auxbar];
        B = [aux;auxbar;W(1);W(2)];
    end
end
```

barycenter.m

%Συνάρτηση για τον υπολογισμό του σημείου αντιπροσώπου ενός "κουτιού"
περιορισμών%
%Για περισσότερα σχετικά με τους τύπους, αναφερθείτε στο Παράρτημα Β%

```
function V = barycenter(Con,flag)

    a = [];
    f = [];
    n = size(Con,2) ;
    switch flag
        case -1 %Αρχικοποίηση και εύρεση των σημείων αντιπροσώπων για όλα
            τα "κουτιά" σε ένα set%
                for i=1:n
```

```

        p = Con(1,i);
        r = Con(2,i);
        vn = Con(3,i);
        vnbar = Con(4,i);
        wn = Con(5,i);
        wnbar = Con(6,i);
        paux = (sqrt(p) + sqrt(r))/2;
        sigma = sign(vn*wnbar - vnbar*wn);
        k = sqrt((vnbar - vnbar)^2+(wn-vn)^2);
        if sigma == 1
            x = (vnbar-wnbar)/k;
            y = (wn-vn)/k;
        else
            x = (wnbar-vnbar)/k;
            y = (vn-wn)/k;
        end
        a = cat(1,a,paux*x);
        f = cat(1,f,paux*y);
    end
    otherwise %Εύρεση του σημείου αντιπροσώπου για ένα συγκεκριμένο
"κουτί" σε ένα set%
        p = Con(1,flag);
        r = Con(2,flag);
        vn = Con(3,flag);
        vnbar = Con(4,flag);
        wn = Con(5,flag);
        wnbar = Con(6,flag);
        paux = (sqrt(p) + sqrt(r))/2;
        sigma = sign(vn*wnbar - vnbar*wn);
        k = sqrt((vnbar - vnbar)^2+(wn-vn)^2);
        if sigma == 1
            x = (vnbar-wnbar)/k;
            y = (wn-vn)/k;
        else
            x = (wnbar-vnbar)/k;
            y = (vn-wn)/k;
        end
        a = cat(1,a,paux*x);
        f = cat(1,f,paux*y);
    end
    V = a'+1i*f';
end

```

box_area.m

```

%Συνάρτηση για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός "κουτιού" με χρήση%
%του γνωστού τύπου για εμβαδόν κυκλικού τομέα  $E = R^2 * \theta / 2$ , όπου  $\theta$  %
%η γωνία σε ακτίνια%

function area = box_area(Box)

    theta = acos(-Box(3)*Box(5) - Box(4)*Box(6));
    area = (Box(2)-Box(1))*theta/2;

end

```

MeanError.m

%Συνάρτηση για τον υπολογισμό του μέσου σφάλματος των εξισώσεων (E1) του κεφαλαίου 2 για κάποιο σημείο x%

```
function res = MeanError(n,G,B,Vo,P,Q,a,f)

    Pdiag = diag(P);           %Μετατροπή του P σε διαγώνιο πίνακα%
    Qdiag = diag(Q);           %Μετατροπή του Q σε διαγώνιο πίνακα%
    Delta = (diag(a.^2 + f.^2))^( -1);
    T1 = G(2:n,2:n) - Pdiag*Delta;
    T2 = B(2:n,2:n) + Qdiag*Delta;
    Condition1 = [T1,T2;T2,-T1]*[a;-f] ;           %Υπολογισμός αριστερού τμήματος
των εξισώσεων (E1)%
    Condition2 = -Vo*[G(2:n,1);B(2:n,1)];           %Υπολογισμός δεξιού τμήματος των
εξισώσεων (E1)%
    res = mean(abs(Condition1 - Condition2));           %Υπολογισμός της μέσης τιμής των
(απολύτων) σφαλμάτων%

end
```

member.m

%Συνάρτηση που ελέγχει αν κάποιο set αντιπροσώπων υπάρχει ήδη ως λύση του συστήματος %
%Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιείται για την εξάλειψη των "διπλών" λύσεων κατά τη διάρκεια του επαναληπτικού αλγορίθμου%
%αλλά και στη συνέχεια κατά την εκτέλεση του lsqnonlin %

```
function [res,pos] = member(X,Y)
    t = 0;
    tpos = 1;
    while(~isempty(Y) && t<1)
        if (isequal(X,Y(1,:)))
            t = 1;
        else
            Y(1,:) = [];
            tpos = tpos + 1;
        end
    end
    res = t;
    pos = tpos;
end
```

solution.m

```
%Συνάρτηση η οποία παίρνει τον πίνακα Solutions όπως προκύπτει μετά το τέλος της
επαναληπτικής διαδικασίας%
%για την εύρεση των λύσεων των μη-γραμμικών εξισώσεων. Η συνάρτηση κάνει χρήση
της διαδικασίας lsqnonlin %
%του Matlab με αρχικό σημείο κάθε λύση του Solutions έτσι ώστε να βρεθούν οι
λύσεις με μεγαλύτερη ακρίβεια.%
%Τέλος, φροντίζει ώστε να γίνει απαλοιφή των "διπλών" που μπορεί να έχουν
απομείνει.%
```

```
function Sol = solution(n,G,B,Vo,P,Q,S)
```

```
Sol = [];
tSol = [];
errors = [];
while (~isempty(S))
    a = real(S(1,:));
    f = imag(S(1,:));
    x0 = [a,f]; %Ορισμός αρχικού σημείου%
    f = @(Xroot)myfun(Xroot,n,G,B,Vo,P,Q); %Ορισμός ανωνύμου
    συνάρτησης f με βάση τη συνάρτηση myfun%
    [Xroot,error] = lsqnonlin(f,x0); %Κλήση της lsqnonlin για την
    συνάρτηση f με αρχικό σημείο το x0%
    t = round(Xroot,4);
    [flag,pos] = member(t,tSol); %Έλεγχος για το αν η λύση έχει ήδη
    καταγραφεί. Αν ναι, τότε αγνοείται εκτός αν το σφάλμα της είναι μικρότερο%
    if (~flag)
        Sol = cat(1,Sol,Xroot);
        tSol = cat(1,tSol,t);
        errors = cat(1,errors,error);
    else
        if (errors(pos) > error)
            Sol(pos,:) = Xroot;
            tSol(pos,:) = t;
            errors(pos) = error;
        end
    end
    S(1,:) = [];
end
    if (~isempty(Sol))
        Sol = Sol(:,1:n-1) + 1i*Sol(:,n:2*(n-1)); %Αν το Sol είναι μη κενό,
        τότε το μετατρέπουμε σε μιγαδικό πίνακα%
    end
end
```

myfun.m

%Συνάρτηση που χρησιμοποιείται ως ανώνυμη συνάρτηση για την διαδικασία lsqnonlin του Matlab. %

```
function F = myfun(x,n,G,B,Vo,P,Q)

    Pdiag = diag(P);           %Μετατροπή του P σε διαγώνιο πίνακα%
    Qdiag = diag(Q);           %Μετατροπή του Q σε διαγώνιο πίνακα%
    Delta = (diag(x(1:n-1).^2 + x(n:2*(n-1)).^2))^-1);
    T1 = G(2:n,2:n) - Pdiag*Delta;
    T2 = B(2:n,2:n) + Qdiag*Delta;
    F = [T1,-T2;T2,T1]*x' + Vo*[G(2:n,1);B(2:n,1)]; %Αντίστοιχη της εξίσωσης
(E1) του κεφαλαίου 2 με x να είναι το αρχικό σημείο για την lsqnonlin%

end
```

solution_print.m

%Συνάρτηση η οποία εκτυπώνει τις λύσεις που έχουν προκύψει μετά τη χρήση της διαδικασίας solution, δηλαδή μετά τη χρήση της lsqnonlin του Matlab. Η συνάρτηση αυτή τυπώνει κάθε λύση και σε καρτεσιανή και σε πολική μορφή. Υπολογίζει και % τυπώνει επίσης τις τιμές p1 και q1, δηλαδή τη πραγματική και άεργο ισχύ του ζυγού αναφοράς. Τέλος, υπολογίζει και τυπώνει % το μέσο (απόλυτο) σφάλμα από την επίλυση των εξισώσεων (E1) ως επαλήθευση ότι έχει πράγματι βρεθεί λύση.%

```
function solution_print(n,Vo,G,B,P,Q,Sol)

    if (isempty(Sol))
        disp(['Δεν βρέθηκε λύση'])
    else
        count = 1;
        Pdiag = diag(P);           %Μετατροπή του P σε διαγώνιο πίνακα%
        Qdiag = diag(Q);           %Μετατροπή του Q σε διαγώνιο πίνακα%
        Names = {};
        for i = 2:n
            Names = cat(2,Names,['V',num2str(i)]);
        end
        while(~isempty(Sol))
            a = real(Sol(1,:))';
            f = imag(Sol(1,:))';
            Delta = (diag(a.^2 + f.^2))^-1);
            T1 = G(2:n,2:n) - Pdiag*Delta;
            T2 = B(2:n,2:n) + Qdiag*Delta;
            disp(['Λύση No',num2str(count)]);
            array2table(round(Sol(1,:),4),'VariableNames',Names
            %Καρτεσιανή μορφή%

            array2table(cat(1,round(abs(Sol(1,:)),4),round(rad2deg(phase(Sol(1,:))),4)), 'VariableNames',Names,'RowNames',{'pu','angle'}) %Πολική μορφή%
            p1 = Vo*(G(1,2:n)*a-B(1,2:n)*f) + G(1,1)*Vo^2
            %Υπολογισμός του p1, σύμφωνα με την εξίσωση (E2) του κεφαλαίου 2%
```

```

        q1 = -Vo*(B(1,2:n)*a + G(1,2:n)*f) - B(1,1)*Vo^2
%Υπολογισμός του q1, σύμφωνα με την εξίσωση (E3) του κεφαλαίου 2%
        Condition1 = [T1,T2;T2,-T1]*[a;-f] ;
        Condition2 = -Vo*[G(2:n,1);B(2:n,1)];
        Mean = mean(abs(Condition1 - Condition2))
%Υπολογισμός του μέσου, απολύτου σφάλματος για την λύση που έχει βρεθεί%
        count = count + 1;
        Sol(1,:) = [];
    end
end
end
end

```

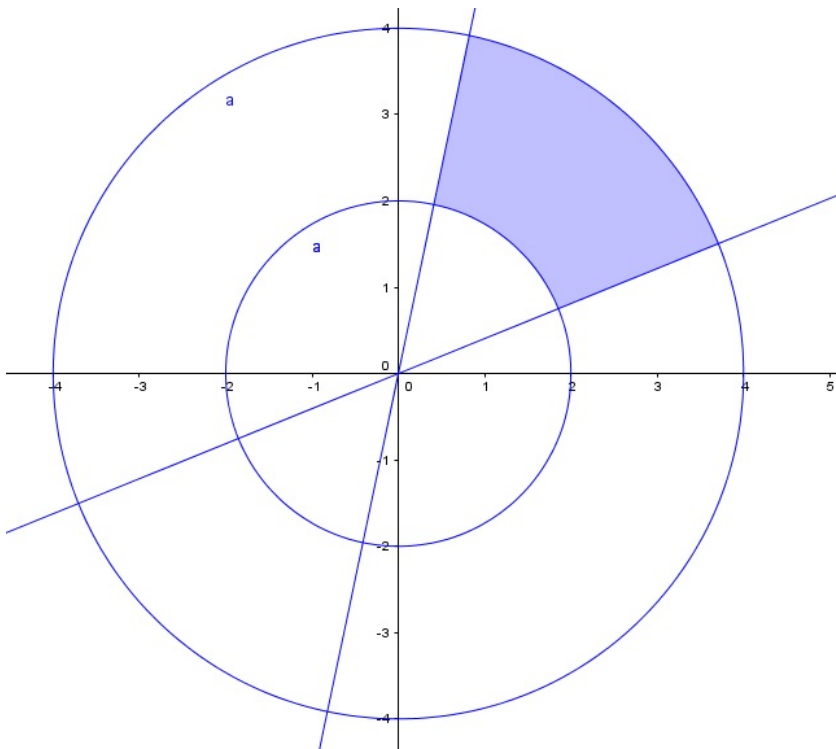

Παράρτημα Β'

Διχοτόμηση ακτίνας, διχοτόμηση γωνίας, αντιπρόσωπος συνόλου περιορισμών

Υπενθυμίζεται ότι για κάθε ζυγό PQ k ορίζουμε μία περιοχή έρευνας για την μιγαδική τάση που έχει την μορφή

$$\Gamma_k = \{(x_k, y_k): x_k^2 + y_k^2 \geq \rho_k \wedge x_k^2 + y_k^2 \leq r_k \wedge v_k \cdot x_k + \bar{v}_k \cdot y_k \leq 0 \wedge w_k \cdot x_k + \bar{w}_k \cdot y_k \leq 0\}, \text{ όπου το } x_k \text{ είναι το πραγματικό μέρος της μιγαδικής τάσης και το } y_k \text{ το φανταστικό.}$$

Στο Σχήμα Β.1 φαίνεται μία πιθανή περιοχή της παραπάνω μορφής.



Σχήμα Β.1 Περιοχή αναζήτησης τιμών τάσης

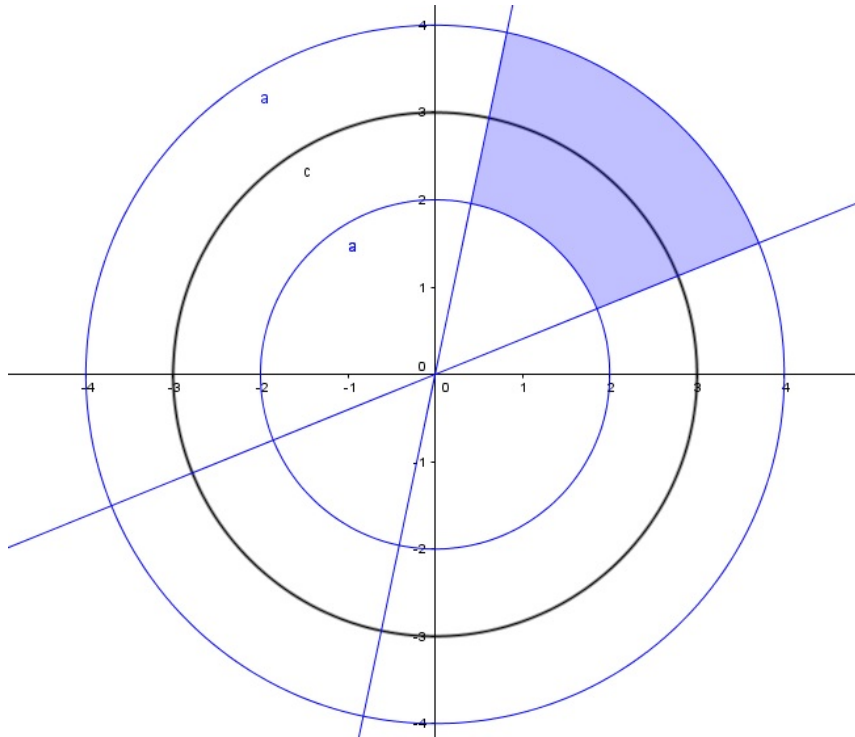
Β.1 Διχοτόμηση Ακτίνας

Η διχοτόμηση ακτίνας αφορά στη διχοτόμηση ενός “κουτιού” Γ σε δύο μικρότερα κουτιά χρησιμοποιώντας ένα νέο κύκλο με ακτίνα την μέση τιμή των ακτίνων των δύο αρχικών κύκλων. Έστω ότι έχουμε τις ακτίνας $\sqrt{\rho_k}$ και $\sqrt{r_k}$. Τότε ο κύκλος που διχοτομεί την περιοχή μας με τον τρόπο που θέλουμε θα έχει ακτίνα $\frac{\sqrt{\rho_k} + \sqrt{r_k}}{2}$. Άρα, θα έχουμε τα εξής δύο νέα σύνολα περιορισμών:

$$\Gamma_k^1 = \{(x_k, y_k): x_k^2 + y_k^2 \geq \rho_k \wedge x_k^2 + y_k^2 \leq \left(\frac{\sqrt{\rho_k} + \sqrt{r_k}}{2}\right)^2 \wedge v_k \cdot x_k + \bar{v}_k \cdot y_k \leq 0 \wedge w_k \cdot x_k + \bar{w}_k \cdot y_k \leq 0\}$$

$$\Gamma_k^2 = \{(x_k, y_k): x_k^2 + y_k^2 \geq \left(\frac{\sqrt{\rho_k} + \sqrt{r_k}}{2}\right)^2 \wedge x_k^2 + y_k^2 \leq r_k \wedge v_k \cdot x_k + \bar{v}_k \cdot y_k \leq 0 \wedge w_k \cdot x_k + \bar{w}_k \cdot y_k \leq 0\}$$

Στο Σχήμα Β.2 φαίνεται και σχηματικά μια περίπτωση διχοτόμησης κατά ακτίνα.



Σχήμα Β.2 Διχοτόμηση ακτίνας

Β.1 Διχοτόμηση Γωνίας

Η διχοτόμηση γωνίας αφορά στη διχοτόμηση ενός “κουτιού” Γ σε δύο μικρότερα κουτιά χρησιμοποιώντας τη διχοτόμο της κυρτής γωνίας μεταξύ των δύο ευθειών του κουτιού. Όπως και στο κεφάλαιο 2 χρησιμοποιούμε τα κανονικοποιημένα διανύσματα $\begin{bmatrix} v_n \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + \bar{v}^2}} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$ και

$$\begin{bmatrix} w_n \\ \bar{w}_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{w^2 + \bar{w}^2}} \begin{bmatrix} w \\ \bar{w} \end{bmatrix} \text{ καθώς και τα γνωστά διανύσματα } \vec{a} = -\sigma \begin{bmatrix} -\bar{v}_n \\ v_n \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\vec{b} = \sigma \begin{bmatrix} -\bar{w}_n \\ w_n \end{bmatrix}, \text{ με } \sigma = \text{sgn}(v\bar{w} - \bar{v}w) = \text{sgn}(v_n\bar{w}_n - \bar{v}_n w_n). \text{ Τα μοναδιαίου μήκους}$$

διανύσματα \vec{a}, \vec{b} βρίσκονται επάνω στα επιτρεπτά μέρη των ευθειών $(\epsilon_1): v_n x + \bar{v}_n y = 0$ και $(\epsilon_2): w_n x + \bar{w}_n y = 0$ αντίστοιχα και θα χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό αναλυτικών σχέσεων για το διάνυσμα της διχοτόμου και την εξαγωγή των περιορισμών για τα νέα κουτιά. Σύμφωνα με την αναλυτική γεωμετρία, το διάνυσμα που διχοτομεί τα \vec{a}, \vec{b} θα υπολογίζεται ως εξής:

$$\vec{\delta} = |\vec{a}|\vec{b} + \vec{a}|\vec{b}| \quad \begin{matrix} \vec{a} + \vec{b} = -\sigma \begin{bmatrix} \bar{w}_n - \bar{v}_n \\ v_n - w_n \end{bmatrix} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \end{matrix}$$

και το αντίστοιχο κανονικοποιημένο διάνυσμα είναι το εξής:

$$\vec{\delta}_n = \begin{bmatrix} -\overline{aux} \\ aux \end{bmatrix} = \frac{-\sigma}{\sqrt{(\bar{w}_n - \bar{v}_n)^2 + (w_n - v_n)^2}} \cdot \begin{bmatrix} \bar{w}_n - \bar{v}_n \\ v_n - w_n \end{bmatrix}$$

Η ευθεία της διχοτόμου είναι λοιπόν η (ϵ_δ) : $aux \cdot x + \overline{aux} \cdot y = 0$.

Το διάνυσμα $\vec{\epsilon}_n = \begin{bmatrix} -aux \\ -\overline{aux} \end{bmatrix}$ είναι κάθετο στο $\vec{\delta}_n$ και ανήκει στο ημιεπίπεδο όπου ισχύει

$aux \cdot x + \overline{aux} \cdot y < 0$. Επίσης, τα διανύσματα $\vec{\delta}_n$, $\vec{\epsilon}_n$, $\vec{\delta}_n \times \vec{\epsilon}_n$ είναι αντιωρολογιακά και κάθετα. Λαμβάνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$\bullet \text{ Αν } \vec{a} \times \vec{\delta}_n \nearrow \nearrow \vec{k} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_i & a_j & 0 \\ -\overline{aux} & aux & 0 \end{vmatrix} \nearrow \nearrow \vec{k} \Leftrightarrow \sigma \bar{v}_n aux > \sigma v_n \overline{aux} \text{ , τότε οι νέες συνθήκες θα}$$

γίνουν:

- $v_n x + \bar{v}_n y \leq 0$, $-aux x - \overline{aux} y \leq 0$
- $aux x + \overline{aux} y \leq 0$, $w_n x + \bar{w}_n y \leq 0$

$$\bullet \text{ Αν } \vec{a} \times \vec{\delta}_n \nearrow \nearrow -\vec{k} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_i & a_j & 0 \\ -\overline{aux} & aux & 0 \end{vmatrix} \nearrow \nearrow -\vec{k} \Leftrightarrow \sigma \bar{v}_n aux < \sigma v_n \overline{aux} \text{ , τότε οι νέες}$$

συνθήκες θα γίνουν:

- $v_n x + \bar{v}_n y \leq 0$, $aux x + \overline{aux} y \leq 0$
- $-aux x - \overline{aux} y \leq 0$, $w_n x + \bar{w}_n y \leq 0$

Οι συνθήκες μπορούν ακόμα να απλοποιηθούν ως εξής:

$$\sigma \bar{v}_n aux > \sigma v_n \overline{aux} \Leftrightarrow \frac{-\sigma^2 (v_n - w_n) \bar{v}_n}{\sqrt{(\bar{w}_n - \bar{v}_n)^2 + (w_n - v_n)^2}} > \frac{\sigma^2 (\bar{w}_n - \bar{v}_n) v_n}{\sqrt{(\bar{w}_n - \bar{v}_n)^2 + (w_n - v_n)^2}} \Leftrightarrow v_n \bar{w}_n - \bar{v}_n w_n < 0 \Leftrightarrow \sigma = -1$$

Όμοια, $\sigma \bar{v}_n aux < \sigma v_n \overline{aux} \Leftrightarrow \sigma = 1$.

Άρα, έχουμε ότι:

1. Αν $\sigma = -1$, τότε τα δύο νέα κουτιά είναι:

$$\Gamma_k^1 = \{(x_k, y_k): x_k^2 + y_k^2 \geq \rho_k \wedge x_k^2 + y_k^2 \leq r_k \wedge v_k \cdot x_k + \bar{v}_k \cdot y_k \leq 0 \wedge -aux \cdot x_k - \overline{aux} \cdot y_k \leq 0\}$$

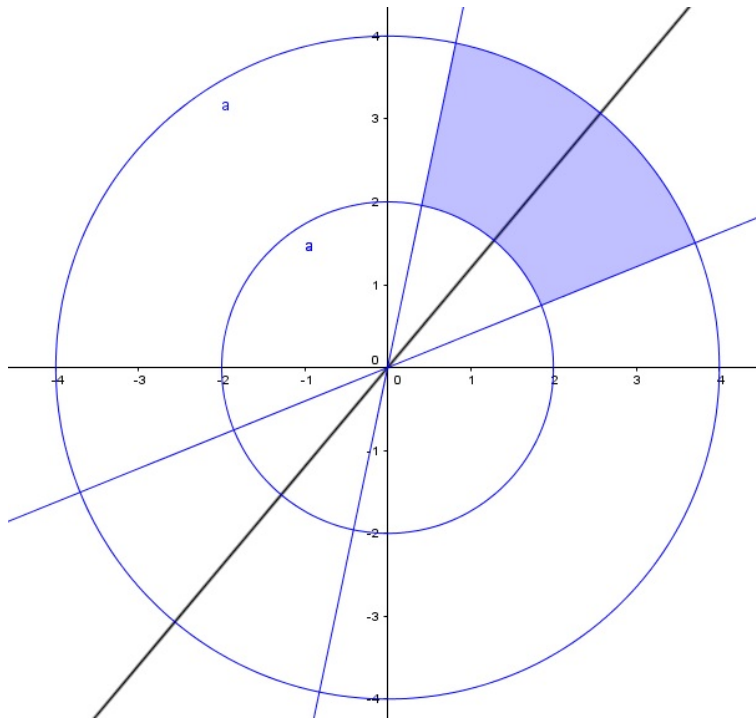
$$\Gamma_k^2 = \{(x_k, y_k): x_k^2 + y_k^2 \geq \rho_k \wedge x_k^2 + y_k^2 \leq r_k \wedge aux \cdot x_k + \overline{aux} \cdot y_k \leq 0 \wedge w_k \cdot x_k + \bar{w}_k \cdot y_k \leq 0\}$$

2. Αν $\sigma = 1$, τότε τα δύο νέα κουτιά είναι:

$$\Gamma_k^1 = \{(x_k, y_k): x_k^2 + y_k^2 \geq \rho_k \wedge x_k^2 + y_k^2 \leq r_k \wedge v_k \cdot x_k + \bar{v}_k \cdot y_k \leq 0 \wedge aux \cdot x_k + \overline{aux} \cdot y_k \leq 0\}$$

$$\Gamma_k^2 = \{(x_k, y_k): x_k^2 + y_k^2 \geq \rho_k \wedge x_k^2 + y_k^2 \leq r_k \wedge -aux \cdot x_k - \overline{aux} \cdot y_k \leq 0 \wedge w_k \cdot x_k + \bar{w}_k \cdot y_k \leq 0\}$$

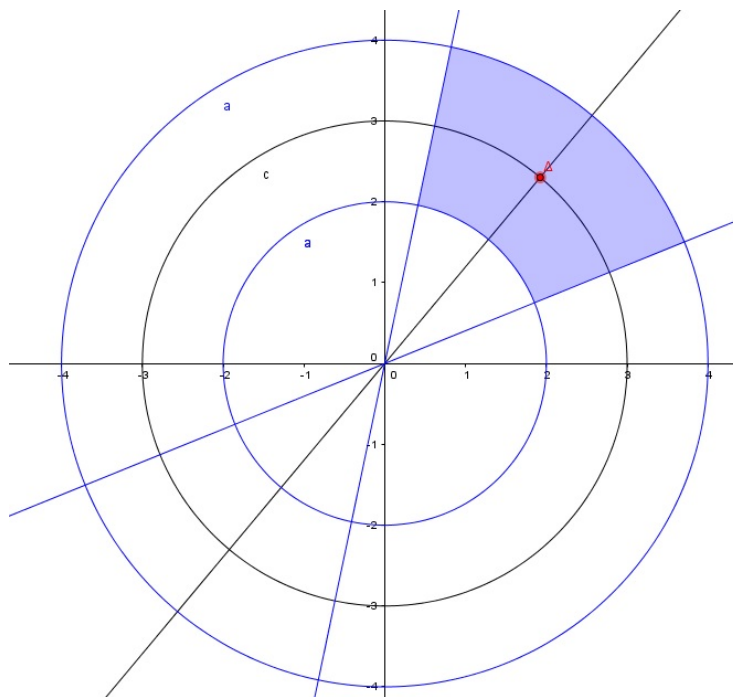
Στο Σχήμα Β.3 φαίνεται και σχηματικά η διχοτόμηση γωνίας.



Σχήμα Β.3 Διχοτόμηση γωνίας

B.1 Αντιπρόσωπος συνόλου περιορισμών

Ο αντιπρόσωπος που θα χρησιμοποιήσουμε θα προκύπτει ως το σημείο τομής του κύκλου με ακτίνα το ημίθροισμα των ακτίνων των δύο κύκλων των περιορισμών με την ευθεία που είναι διχοτόμος της κυρτής γωνίας μεταξύ των δύο ευθειών των περιορισμών. Σχηματικά αυτό φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα Β.4.



Σχήμα Β.4 Αντιπρόσωπος συνόλου περιορισμών

Το σημείο αυτό μπορεί πολύ εύκολα να προκύψει χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τις παραπάνω ενότητες. Συγκεκριμένα, χρειάζονται η νέα ακτίνα $\frac{\sqrt{\rho_k} + \sqrt{r_k}}{2}$ και το μοναδιαίο

διάνυσμα $\vec{\delta}_n = \begin{bmatrix} -\overline{aux} \\ aux \end{bmatrix} = \frac{-\sigma}{\sqrt{(\overline{w}_n - \overline{v}_n)^2 + (w_n - n_n)^2}} \cdot \begin{bmatrix} \overline{w}_n - \overline{v}_n \\ v_n - w_n \end{bmatrix}$. Τότε, το σημείο αντιπρόσωπος του επιτρεπτού συνόλου θα είναι το $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{-\sigma(\sqrt{\rho_k} + \sqrt{r_k})}{2\sqrt{(\overline{w}_n - \overline{v}_n)^2 + (w_n - n_n)^2}} \cdot \begin{bmatrix} \overline{w}_n - \overline{v}_n \\ v_n - w_n \end{bmatrix}$.

Βιβλιογραφία

- ◆ [1] Κ. Βουρνάς, Γ. Κονταξής – Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας, Εκδόσεις Συμμετρία, 2010
- ◆ [2] J. D. McCalley – The Power Flow Problem, Iowa State University, 2012
- ◆ [3] Μ. Θεοφίλου - Διαφορά κυρτών συναρτήσεων: Επίλυση εξισώσεων συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2015
- ◆ [4] Ν. Μαράτος – Τεχνικές Βελτιστοποιήσεως, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 1990
- ◆ [5] R. Fletcher – Practical Methods of Optimization, 2nd Edition, Wiley, 2000
- ◆ [6] D. Luenberger, Y. Ye - Linear and Nonlinear Programming, 4th Edition, Springer, 2008
- ◆ [7] Θ. Ρασσιάς – Μαθηματική Ανάλυση Ι, Τεύχος Α, Εκδόσεις Συμεών, 2010
- ◆ [8] Θ. Ρασσιάς – Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών, Τεύχος Α, Εκδόσεις Συμεών, 2010
- ◆ [9] Ι. Βλαχάβας, Π. Κεφαλάς, Ν. Βασιλειάδης, Φ. Κόκκορας, Η. Σακελλαρίου, Τεχνητή Νοημοσύνη, Γ' Έκδοση, Β. Γκιούρδας Εκδοτική, 2006
- ◆ [10] P. Winston - Artificial Intelligence, 3rd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1992
- ◆ [11] S. Russell, P. Norvig - Artificial Intelligence: A Modern Approach, 3rd Edition, Prentice Hall, 2009