



Διπλωματική Εργασία
Επανακανονικοποίηση σε Κβαντικές
Θεωρίες Πεδίου

Παναγιώτης Χρηστέας
Α.Μ. : 09111044

Επιβλέπων: Ζουπάνος Γιώργος,
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2017



Diploma Thesis

Renormalization of Quantum Field Theories

Panagiotis Christeas

Supervisor: Zoupanos George
Professor N.T.U.A.

Athens, 2017

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή του ΕΜΠ, κ. Γιώργο Ζουπάνο, για την ανάθεση, την καθοδήγηση και τις συμβουλές του ως προς τη διεκπεραίωση της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας. Τον ευχαριστώ επίσης για τις εμπειρίες και τις εικόνες που εγκάρδια και πρόθυμα μου παρείχε, εντείνοντας τον ενθουσιασμό μου για την Φυσική.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του ΕΜΠ κ. Νικόλαο Τράκα για την υπομονή και τη βοήθεια που μου παρείχε.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή του ΕΜΠ κ. Γιώργο Κουτσούμπα για τις συμβουλές αλλά και τις συζητήσεις μας οι οποίες αποδείχθηκαν πολύτιμες.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αν. Καθηγητή του ΕΜΠ, κ. Κωνσταντίνο Αναγνωστόπουλο για την στήριξη και καθοριστική επιρροή που μου άσκησε στην αντίληψη μου ως φυσικός αποτελώντας ένα πρότυπο φαντασίας και δημιουργικότητας. Τον ευχαριστώ επίσης για το γεγονός ότι ήταν εκείνος που με δίδαξε και με μύησε στο αντικείμενο της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αν. Καθηγητή του ΕΜΠ, κ. Νικόλαο Ήργε για την καθοριστική συμβολή που είχε στην εξοικείωσή μου με το αντικείμενο της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου σε προχωρημένο στάδιο αλλά και για την στήριξη, τις συμβουλές και την αμέριστη βοήθεια του στην επίτευξη συνέχισης των σπουδών μου σε μεταπτυχιακό επίπεδο.

Παράλληλα, ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στους υποψήφιους διδάκτορες Γιώργο Μανωλάκο, Γρηγόρη Πατέλλη, Κώστα Ντρέκη και Φώτη Κουτρούλη για την τεχνική βοήθεια, τις συμβουλές και τις συζητήσεις που αποτέλεσαν ένα πολύτιμο αγαθό καθ'όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, Κατερίνα, Κυριάκο και Στάθη για τη διαρκή, ουσιαστική και υπεράνθρωπη στήριξη τους, καθώς και την Ελένη, που όπως καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου έτσι και στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας παρείχε πολύτιμη βοήθεια και συμπαράσταση καθιστώντας έτσι την όλη διαδικασία πιο εφικτή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για την στήριξη που μου παρείχαν ο κάθε ένας ανεξαιρέτως και με τον τρόπο του.

Περίληψη

Η επανακανονικοποίηση αποτελεί ένα από τα κορυφαία κεφάλαια της Θεωρητικής Φυσικής και κατέπεχταση της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου. Από τις αρχές του 20^{ού} αιώνα είχαν εμφανιστεί προβλήματα στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική Θεωρία του Dirac καθώς εμφανίζονταν απειρισμοί στους υπολογισμούς φυσικών ποσοτήτων. Έτσι, αρχής γενομένης της δεκαετίας του 1920 και μετά έγινε προσπάθεια να αναπτυχθεί μια λογική μέθοδος κατά την οποία αίρονταν οι απειρισμοί με συνεπή τρόπο βγάζοντας φυσικά αποτελέσματα και κάνοντας προβλέψεις. Τέτοια παραδείγματα είναι η μέτρηση της μετατόπισης Lamb αλλά και η μέτρηση του παράγοντα Land/*e* του ηλεκτρονίου. Στην συνέχεια, όλο και περισσότερος κόσμος ασχολούνταν με το αντικείμενο της επανακανονικοποίησης και στα πλαίσια αυτής της συλλογικής προσπάθειας ολοένα και περισσότερες επιτυχίες σημειώνονταν εξαιτίας της επανακανονικοποίησης θεμελιώνοντας έτσι την Κβαντική Θεωρία πεδίου στην πεποίθηση της παγκόσμιας φυσικής κοινότητας. Επακόλουθο, αυτής της αυξημένης ζήτησης είχε η συστηματοποίηση της διαδικασίας της επανακανονικοποίησης κάτι που πραγματοποιήθηκε με την εισαγωγή των counterterms. Φυσικά, η Κβαντική Ηλεκτροδυναμική δεν ήταν η μόνη θεωρία που εφαρμόσθηκε αυτό το εργαλείο, αλλά υπήρξαν μεγάλο πλήθος θεωριών. Τέλος από το 1970 και μετά συνέβη επιστημονική επανάσταση στον κλάδο της επανακανονικοποίησης καθώς εισήχθη μέσω της Ομάδας Επανακανονικοποίησης η έννοια της εξάρτησης από κλίμακα κάτι που μέχρι τότε ήταν ασύλληπτο. Μία τέτοια ριζοσπαστική και πρωτότυπη ιδέα αποτέλεσε προάγγελο πολλών σημαντικών και προχωρημένων ιδεών αλλά και την θεμελίωση της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου σε κλάδους όπως η Στατιστική Φυσική και η Φυσική Συμπυκνωμένης Ύλης.

Αναλόγως παρουσιάζονται τα αντίστοιχα κεφάλαια της επανακανονικοποίησης στην παρούσα εργασία. Πιο συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1 γίνεται ανάλυση και εφαρμογή της επανακανονικοποίησης στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική και το Κεφάλαιο 2 γίνεται αναφορά στην Ομάδα Επανακανονικοποίησης. Στο Κεφάλαιο 3 πραγματοποιείται ανάλυση και εφαρμογή της επανακανονικοποίησης στην μη-Αβελιανή περίπτωση της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής και στο Κεφάλαιο 4 η αντίστοιχη εφαρμογή στο γραμμικό-σ μοντέλο.

Abstract

Renormalization is one of the greatest concepts in Quantum Field Theory and Theoretical Physics. Since the beginning of the 20th century, a lot of problems had appeared in theoretical calculations of observables using Dirac's Quantum Electrodynamics, due to the fact that infinities were present at the calculations. Thus, since 1920 it was expressed the idea that there should be developed a logical and consistent method in which these infinities were going to be cancelled in order to extract observables. Triumphs of such logic was the measurement of Lamb shift and the electron's Landé g -factor. Additionally, more physicists were accepting the idea of renormalization and therefore more scientific prestige was attributed to Renormalization and in extent to Quantum Field Theory. As a result the highly increased interest for renormalization required the development of a more automatic structure, as it called systematics of renormalization using counterterms. Apart from Quantum Electrodynamics renormalization was implemented in a great number of theories. Reaching 1970 unexpectedly a scientific revolution happened in the renormalization concept. More specifically, the Renormalization Group was developed, which includes idea of scale dependent observables. Such radical and innovative idea became the precursor of many interesting and advanced theoretical concepts. It also expanded the range of Quantum Field Theory in Statistical Physics and Condensed Matter.

The present diploma thesis is written according to those milestones of renormalization. During Chapter 1 the basics of Renormalization are explained and implemented in Quantum Electrodynamics. Chapter 2 is referred to the Renormalization Group Equation. Chapter 3 and 4 are referred to Renormalization of Quantum Chromodynamics and Linear Sigma Model respectively.

Περιεχόμενα

1	Επανακανονικοποίηση της QED	1
1.1	Εισαγωγικές Έννοιες της Renormalization	1
1.2	Αποκλίνοντα Διαγράμματα στην QED	2
1.2.1	Διάγραμμα Πόλωσης του κενού	2
1.2.2	Διεξαγωγή Φυσικών Συμπερασμάτων από την πόλωση κενού:	6
1.2.3	Ανώμαλη Μαγνητική ροπή:	10
1.2.4	Επανακανονικοποίηση της μάζας:	15
1.3	Συστηματική μέθοδος της Επανακανονικοποίησης της QED . .	23
1.3.1	Προσδιορισμός των counterterms	25
1.3.2	Συνθήκες Επανακανονικοποίησης της QED	30
1.3.3	Επανακανονικοποιησιμότητα της QED	31
2	Ομάδα Επανακανονικοποίησης	35
2.1	Διασηθητική προσέγγιση των μεγάλων λογαρίθμων - Μεταβλητή σύζευξη	35
2.2	Ομάδα Επανακανονικοποίησης δια μέσω counterterms-Συστηματοποίηση	40
2.2.1	Εξίσωση ομάδας επανακανονικοποίησης για τη σταθερά σύζευξης	40
2.2.2	Εξίσωση ομάδας επανακανονικοποίησης για τελεστές . .	43
2.2.3	Εξίσωση ομάδας επανακανονικοποίησης για τις συναρτήσεις Green	45
2.3	Ροή Ομάδας Επανακανονικοποίησης	46
3	Υπολογισμοί σε 1-loop τάξη-Επανακανονικοποίηση της QCD	50
3.1	Η Lagrangian της QCD-Κανόνες Feynman	50
3.2	Υπολογισμός διαγράμματος της πόλωσης του κενού	53
3.2.1	Fermion bubble	54
3.2.2	Gluon bubble	60
3.2.3	4-point gluon bubble	64
3.2.4	Ghost bubble	65
3.3	Η Επανακανονικοποίηση της QCD	68
3.4	Εξαγωγή της β -συνάρτησης:	78
4	Γραμμικό σ-Μοντέλο	82
4.1	Lagrangian της θεωρίας- Αυθόρμητη παραβίαση συμμετρίας . .	82
4.2	Επανακανονικοποίηση	84
4.2.1	Συνθήκες Επανακανονικοποίησης της θεωρίας	86

4.3	Αποκλίνοντα Διαγράμματα	87
5	Παράθεμα	98
5.1	Παράμετροι Feynman:	98
5.2	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων - Στροφή Wick:	99
5.3	Διαδικασίες Ομαλοποίησης	100
5.3.1	Ομαλοποίηση Pauli-Villars	101
5.3.2	Διαστατική Ομαλοποίηση	102
5.3.2.1	Αναλυτική Επέκταση:	102
5.3.2.2	Επέκταση σε d -διαστάσεις:	103
5.3.2.3	Η συνάρτηση $\Gamma(x)$:	104
5.3.2.4	Συστηματοποίηση υπολογισμού ολοκληρωμάτων σε d -διαστάσεις:	104
5.3.2.5	Εξάρτηση ως προς το μέτρο της ορμής k του βρόγχου- Βαθμωτό ολοκλήρωμα:	104
5.3.2.6	Ολοκληρώματα σε τανυστική μορφή πρώτης και δευτέρας τάξεως ως προς ορμής του βρόγχου:	105
5.4	Ταυτότητες πινάκων γ :	106
5.5	Θεωρία ομάδων	106

1 Επανακανονικοποίηση της QED

1.1 Εισαγωγικές Έννοιες της Renormalization

Η έννοια της Renormalization κρύβει μέσα της την ικανότητα να μπορούμε να προβλέψουμε τη Φυσική που λαμβάνει χώρα σε μεγάλη κλίμακα μελετώντας μικρή κλίμακα. Αναφορικά, κάνοντας αναλυτικούς υπολογισμούς σε μικρή κλίμακα εμφανίζονται άπειρες ποσότητες. Παρόλα αυτά όταν μετράμε κάτι στη Φύση και το ονομάζουμε παρατηρήσιμη, φυσική ποσότητα (μεγάλη κλίμακα), περιμένουμε να είναι πεπερασμένο. Το όλο θέμα της Renormalization έγκειται στο πώς θα προκύψει η πεπερασμένη φυσική ποσότητα από τις άπειρες. Απειρισμοί μπορούν να προέλθουν κατά τη διάρκεια υπολογισμών μη-παρατηρήσιμων ποσοτήτων, όπως τα loop diagrams, οι οποίοι αντιμετωπίζονται με τη μέθοδο της ομαλοποίησης, μίας μη-φυσικής διαδικασίας. Σαφώς, το φυσικό αποτέλεσμα που θα λάβω αφού θα περιμένω να είναι ανεξάρτητο από όποια κατάλοιπα αφήσει η μέθοδος της ομαλοποίησης.

Ένα βασικό κομμάτι της επανακανονικοποίησης είναι ο καθορισμός (του πεπερασμένου μέρους) των counterterms, ο οποίος γίνεται μέσω της επιλογής ενός subtraction scheme. Τα φυσικά παρατηρήσιμα μεγέθη πρέπει να μην εξαρτώνται από τον καθορισμό του scheme. Τα πιο δημοφιλή στους υπολογισμούς είναι το on-shell subtraction scheme και το minimal subtraction scheme (MS). Στο δεύτερο, που χρησιμοποιείται ευρέως οι counterterms δεν έχουν πεπερασμένο κομμάτι. Επίσης πιο διαδεδομένο είναι μία παραλλαγή του MS, το \overline{MS} όπου παράγοντες $\ln(4\pi)$, γ_E απαλείφονται και άρα $\tilde{\mu} \rightarrow \mu$.

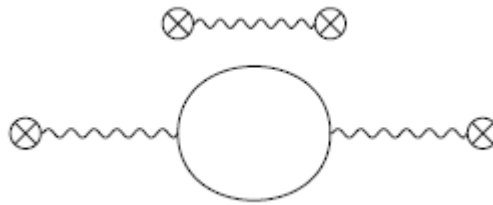
Στην on-shell subtraction scheme η επανακανονικοποιημένη μάζα m_R ταυτίζεται με την παρατηρήσιμη μάζα m_P που ορίζεται ως ο πόλος του S-matrix σε όλες τις τάξεις διαταραχών.

1.2 Αποκλίνοντα Διαγράμματα στην QED

1.2.1 Διάγραμμα Πόλωσης του κενού

Η QED αποτελεί την έκφραση των Ηλεκτρομαγνητικών Αλληλεπιδράσεων σε μικρή κλίμακα. Αντίστοιχα, σε μεγάλη κλίμακα περιγράφεται από τον εμπειρικό νόμο του Coulomb. Ο νόμος αυτός, μπορεί να ερμηνευθεί ως η ανταλλαγή φωτονίου μεταξύ δύο πηγών που αλληλεπιδρούν. Σε πρώτη προσέγγιση, πιθανό είναι να συμβεί το εξής ενδεχόμενο:

“Το φωτόνιο προτού ληφθεί από την δεύτερη πηγή δημιουργεί ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου το οποίο μετά από λίγο εξαϋλώνεται σε φωτόνιο το οποίο λαμβάνεται τελικά από τη δεύτερη πηγή. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται πόλωση του κενού.”



Σχήμα 1.1: Διαγραμματική απεικόνιση του νόμου του Coulomb και της 1^{ης} τάξης διόρθωσής του (πόλωση του κενού).

Έτσι η 1^η τάξη διόρθωση του δυναμικού Coulomb θα είναι ανάλογη του e^4 γιατί έχω 2 vertices στη δομή του 1-loop. Ένα βασικό χαρακτηριστικό του διαγράμματος είναι ότι το πλάτος που θα υπολογισθεί θα είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης όπως αντίστοιχα είναι και το διάγραμμα σε tree-level (photon propagator). Προτού, υπολογίσω τα διαγράμματα αναλυτικά μπορώ να απλοποιήσω τον υπολογισμό με κάποια επιχειρήματα Φυσικής. Πιο συγκεκριμένα, θέλω το πλάτος, ως τανυστής δευτέρας τάξης, να είναι Lorentz invariant, και άρα η πιο γενική μορφή που μπορώ να περιμένω είναι:

$$\mathcal{M}_2^{\mu\nu} = \Delta_1(p^2, m^2)p^2 g^{\mu\nu} + \Delta_2(p^2, m^2)p^\mu p^\nu$$

Η Lorentz Invariance υποδηλώνεται από το γεγονός ότι οι Δ_1, Δ_2 εξαρτώνται από p^2, m^2 . Επίσης σαν έκφραση το $\mathcal{M}_2^{\mu\nu}$ θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από εξωτερικές ορμές p^μ, p^ν και την m . Η γενική μορφή του διαδότη του φωτονίου,

έως 1-loop contribution ($\sim e^2$) θα είναι:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mu\nu} &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} + \frac{(-ig^{\mu\alpha})}{p^2} \mathcal{M}_2^{\alpha\beta} \frac{(-ig^{\beta\nu})}{p^2} = \\
&= \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} + \frac{(-ig^{\mu\alpha})}{p^2} [\Delta_1(p^2, m^2) p^2 g^{\alpha\beta} + \Delta_2(p^2, m^2) p^\alpha p^\beta] \frac{(-ig^{\beta\nu})}{p^2} = \\
&= \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} - \frac{i}{p^2} [\Delta_1 g^{\mu\nu} p^2 + \Delta_2 p^\mu p^\nu] \frac{1}{p^2} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} - \frac{i}{p^2} \left[\Delta_1 g^{\mu\nu} + \Delta_2 \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] = \\
&= -i \frac{(1 + \Delta_1) g^{\mu\nu} + \Delta_2 \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{p^2}
\end{aligned}$$

Η τελική σχέση αντιπροσωπεύει τον **dressed propagator** (διαδότης φωτονίου έως 1-loop). Στην μορφή αυτή, το Δ_2 σχετίζεται με την συνεισφορά της τάξης προσέγγισης στην gauge parameter, η οποία είναι μη-φυσική ποσότητα. Αφού είναι μη-φυσική ποσότητα θα πρέπει τα φυσικά αποτελέσματα να είναι ανεξάρτητα αυτής (gauge independence) και άρα θα περιμένω να απαλείφεται. Οπότε δεν αξίζει να υπολογισθεί στα πλαίσια της συγκεκριμένης ανάλυσης. Άρα οι όροι που θα υπολογισθούν είναι μόνο αυτοί ανάλογοι του $g^{\mu\nu}$. Τέτοιοι όροι μπορούν να δοθούν άμεσα από έναν αντίστοιχο $g^{\mu\nu}$ αλλά και έμμεσα από έναν $k^\mu k^\nu$ μετά την ολοκλήρωση, ενώ οποιοσδήποτε άλλος όρος δίνει μόνο $p^\mu p^\nu$.

Προκειμένου να κάνω την Renormalization θα πρέπει να επιλέξω μέθοδο regularization. Από την πληθώρα επιλογών που υπάρχουν σίγουρα δεν μπορώ να βάλω οποιαδήποτε μέθοδο καθώς πρέπει να σέβεται την gauge invariance, θεμελιώδης συμμετρία της QED ή ισοδύναμα μπορεί να ειπωθεί ότι ικανοποιεί την ταυτότητα του Ward. Τα ίδια κριτήρια πληροί και η ομαλοποίηση Pauli-Villars αλλά εισάγει ψευτο-φερμιόνια τα οποία κάνουν πιο περίπλοκους τους υπολογισμούς και για αυτό αποφεύγεται η εφαρμογή αυτής της μεθόδου.

Ο υπολογισμός του διαγράμματος της πόλωσης του κενού έχει ως εξής:

$$i\mathcal{M}_2^{\mu\nu} = (-1)(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p-k)^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \times Tr[\gamma^\mu(\not{k} - \not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k} + m)]$$

Όπου το (-1) οφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε φερμιονικό βρόγχο. Υπολογίζω την έκφραση που περιέχεται στο ίχνος:

$$Tr[\gamma^\mu(\not{k} - \not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k} + m)] = 4[-p^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu + k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)]$$

όπου στην τελευταία σχέση κατέληξα από τις σχέσεις που προκύπτουν με τους πίνακες γ . Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε πιο πάνω κρατάω μόνο τους όρους $\sim k^\mu k^\nu, g^{\mu\nu}$. Έτσι έχω:

$$i\mathcal{M}_2^{\mu\nu} = -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)}{((p-k)^2 - m^2)(k^2 - m^2)}$$

Απλοποιώ τη μορφή του παρονομαστή εισάγοντας παραμέτρους Feynman:

$$\frac{1}{((p-k)^2 - m^2)(k^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - m^2 + ((p-k)^2 - m^2 + m^2 - k^2)x)^2}$$

Ο παρονομαστής θα γίνει:

$$(k^2 - m^2 + (p^2 - 2pk)x)^2 = ((k - px)^2 + p^2x(1-x) - m^2)^2$$

κάνω shift $k^\mu \rightarrow k^\mu + p^\mu x$. Άρα ο παρονομαστής γίνεται:

$$D = (k^2 + p^2x(1-x) - m^2)^2$$

Ενώ ο αριθμητής θα γίνει:

$$\begin{aligned} N &= 2(k^\mu + xp^\mu)(k^\nu + xp^\nu) + g^{\mu\nu}(-(k+px)^2 + p(k+px) + m^2) = \\ &= 2(k^\mu k^\nu + xk^\mu p^\nu + xk^\nu p^\mu + x^2 p^\mu p^\nu) - g^{\mu\nu}(k^2 + 2kpx + p^2x^2 - pk + p^2x + m^2) \end{aligned}$$

Κρατάω μόνο τους όρους $\sim k^\mu k^\nu, g^{\mu\nu}$ για τους λόγους που αναφέρθηκαν πιο πάνω, ενώ όροι $\sim k$ όταν ολοκληρώνονται δίνουν μηδενική συνεισφορά λόγω ότι είναι περιττή η συνάρτηση ως προς k . Άρα συνολικά έχω:

$$\mathcal{M}_2^{\mu\nu} = 4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}(k^2 - x(1-x)p^2 - m^2))}{(k^2 + p^2x(1-x) - m^2)^2}$$

Το ολοκλήρωμα χωρίζεται σε 2 επιμέρους ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k^2}{(k^2 + p^2x(1-x) - m^2)^2} + \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}(x(1-x)p^2 + m^2)}{(k^2 + p^2x(1-x) - m^2)^2}$$

Και παρατηρώ ότι το πρώτο ολοκλήρωμα φαίνεται απειρίζεται τετραγωνικά ενώ το δεύτερο λογαριθμικά. Οι τετραγωνικές απειρίες είναι χειρότερου βαθμού από τις λογαριθμικές και δεν μπορούν να απαλειφθούν με την ίδια ευκολία. Σε gauge invariant θεωρίες οι τετραγωνικές απειρίες απαλείφονται και οι μόνες που απαντώνται είναι οι λογαριθμικές. Παρακάτω θα δείξω ότι λόγω της gauge invariance η τετραγωνική απειρία, δηλαδή ο πρώτος όρος, μηδενίζεται και κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει αισθητό αν επιλέξω ομαλοποίηση που σέβεται την gauge invariance, όπως η διαστατική ομαλοποίηση.

Σε d-διαστάσεις έχω $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{d}k^2 g^{\mu\nu}$, $\Delta = -p^2x(1-x) + m^2$ θα έχω:

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\frac{2}{d} - 1)k^2 g^{\mu\nu}}{(k^2 - \Delta)^2} + \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}(x(1-x)p^2 + m^2)}{(k^2 - \Delta)^2}$$

Στις $d \rightarrow 4 - \epsilon$ έχω:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta)^2} = \frac{-di}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \Gamma(1 - d/2)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2)$$

Και εν τέλει θα έχω:

$$i \int_0^1 dx \frac{g^{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma(1 - d/2) + \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2) \times (x(1-x)p^2 + m^2) \right]$$

Παρατηρώ ότι έχω πόλους στο $d = 2, 4$ όμως μπορώ να αποφύγω τον πόλο στο $d = 2$ μέσω τη σχέση: $\Gamma(2 - d/2) = (1 - d/2)\Gamma(1 - d/2)$:

$$\int_0^1 dx \frac{g^{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{-\Delta}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2) + \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2) \times (x(1-x)p^2 + m^2) \right] =$$

$$= \int_0^1 dx \frac{g^{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{p^2 x(1-x) - m^2 + x(1-x)p^2 + m^2}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2) \right] =$$

$$= \int_0^1 dx \frac{g^{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{2p^2 x(1-x)}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2) \right]$$

Από διαστατική ανάλυση, κάνω μέσω της σχέσης $e^2 \rightarrow \mu^{4-d} e^2$ το e^2 αδιάστατο στις d -διαστάσεις και άρα:

$$\mathcal{M}_2^{\mu\nu} = 4i^2 e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \frac{g^{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{2p^2 x(1-x)}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2) \right] =$$

$$= -8e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \frac{g^{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{p^2 x(1-x)}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2) \right]$$

Αναφορικά μπορώ να προσθέσω τη συνεισφορά των $p^\mu p^\nu$ που είχε θεωρηθεί αδιάφορη στην αρχή του υπολογισμού για σκοπούς πληρότητας:

$$\mathcal{M}_2^{\mu\nu} = -8e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \frac{p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{x(1-x)}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2) \right] \stackrel{d \rightarrow 4-\epsilon}{=}$$

$$= \frac{-e^2}{2\pi^2} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi e^{-\gamma_E} \mu^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right) \right]$$

Η μορφή που έχει εν τέλει το $\mathcal{M}_2^{\mu\nu} \sim (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$ ικανοποιεί την ταυτότητα Ward κάτι που επιζητούσαμε και ήταν η βασική παραδοχή μας καθώς η επανακανονικοποίηση δεν πρέπει να παραβιάζει αξιωματικές αρχές/ συμμετρίες της θεωρίας μας.

1.2.2 Διεξαγωγή Φυσικών Συμπερασμάτων από την πόλωση κενού:

Το αποτέλεσμα που προέκυψε από τον υπολογισμό του διαγράμματος ήταν:

$$\mathcal{M}_2^{\mu\nu} = e^2 i(p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) \mathcal{M}_2(p^2)$$

όπου,

$$\mathcal{M}_2(p^2) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi e^{-\gamma_E} \mu^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right) \right]$$

Έτσι ο dressed propagator όπως αναφέρθηκες πιο πάνω είναι:

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu} = -i \frac{g^{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-i}{p^2} i \mathcal{M}_2^{\mu\nu} \frac{-i}{p^2} = -i \frac{[1 - e^2 \mathcal{M}_2(p^2)] g^{\mu\nu}}{p^2} + \mathcal{O}(p^\nu p^\mu)$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί το μετασχηματισμό Fourier του δυναμικού Coulomb σε 1^η τάξη διαταραχών. Δηλαδή:

$$\tilde{V}(p) = e^2 \frac{1 - e^2 \mathcal{M}_2(p^2)}{p^2}$$

Το δυναμικό αυτό φέρει την απειρία λόγω του $\frac{2}{\epsilon}$ και άρα είναι άπειρο αλλά μπορεί να δώσει πεπερασμένο, φυσικό αποτέλεσμα μέσω της επανακανονικοποίησης του ηλεκτρικού φορτίου e . Αυτή θα γίνει με την επιβολή της αντίστοιχης συνθήκης επανακανονικοποίησης. Στην προκειμένη περίπτωση αυτή η συνθήκη είναι:

$$V(r_0) = e_R^2 \frac{1}{4\pi r_0}$$

Η οποία μεταφράζεται ως ο ορισμός του επανακανονικοποιημένου ηλεκτρικού φορτίου μέσω την έκφραση του δυναμικού σε μία κλίμακα r_0 . Ενώ ο μετασχηματισμός Fourier του δυναμικού στο χώρο των ορμών είναι ο εξής:

$$\tilde{V}(p_0^2) = \frac{e_R^2}{p_0^2} \rightarrow e_R^2 = p_0^2 \tilde{V}(p_0^2) = e^2 - e^4 \mathcal{M}_2(p_0^2) \rightarrow e^2 = e_R^2 + e^4 \mathcal{M}_2(p_0^2)$$

Επιλέγω μία κάποια άλλη κλίμακα p στην οποία υπολογίζω το $\tilde{V}(p^2)$:

$$p^2 \tilde{V}(p^2) = e^2 - e^4 \mathcal{M}_2(p^2) = e_R^2 - e_R^4 (\mathcal{M}_2(p^2) - \mathcal{M}_2(p_0^2)) + \mathcal{O}(e^6)$$

Επιλέγοντας $p_0 = 0$ η παραπάνω σχέση θα γίνει:

$$\begin{aligned}\tilde{V}(p^2) &= \frac{e_R^2}{p^2} [1 - e_R^2 (\mathcal{M}_2(p^2) - \mathcal{M}_2(0)) + \mathcal{O}(e^4)] = \\ &= \frac{e_R^2}{p^2} \left[1 - \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} x(1-x) \right) + \mathcal{O}(e^4) \right]\end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι ένα διαταρακτικό ανάπτυγμα του νόμου του Coulomb και είναι πεπερασμένο.

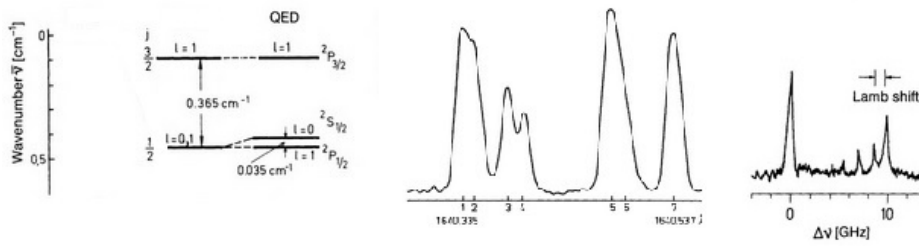
Στα όρια πολύ μεγάλων και πολύ μικρών ορμών εξάγονται πολύ ενδιαφέρονται φυσικά συμπεράσματα. Πιο συγκεκριμένα για μικρές ορμές ($p^2 \ll m^2$):

$$\begin{aligned}\tilde{V}(p^2) &= \frac{e_R^2}{p^2} \left[1 + \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} x(1-x) \right) \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{e_R^2}{p^2} \left[1 + \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left(-\frac{p^2}{m^2} x(1-x) \right) \right] = \frac{e_R^2}{p^2} - \frac{e_R^4}{60\pi^2 m^2}\end{aligned}$$

Και πηγαίνοντας πάλι στο χώρο των θέσεων με μετασχηματισμό Fourier:

$$V(r) = -\frac{e_R^2}{4\pi r} - \frac{e_R^4}{60\pi^2 m^2} \delta(r)$$

Ο τελευταίος όρος είναι γνωστός ως Uehling term. Παρατηρεί κανείς εξαιτίας της συνάρτησης δέλτα Dirac, ότι η συνεισφορά αυτού του όρου είναι μη τετριμμένη για $r = 0$. Στο άτομο του Υδρογόνου για παράδειγμα, κάτι τέτοιο είναι εφικτό για τροχιακό S συνεισφέροντας έτσι στην ενεργειακή του στάθμη. Έτσι, ενώ οι ενεργειακές στάθμες $2P_{1/2}, 2S_{1/2}$ εκ πρώτης όψεως είναι εκφυλισμένες, με την συνεισφορά του όρου του Uehling καθιστά ένα χάσμα μεταξύ αυτών. Η μεταβολή αυτής της ενεργειακής στάθμης ονομάζεται Lamb shift και αποτελεί θρίαμβο-θεωρητική πρόβλεψη της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Αναφορικά, η θεωρητικά προβλεπόμενη τιμή που υπάρχει σήμερα είναι $1054 MHz$ (το οποίο αντιστοιχεί σε $4.37 \mu eV$) ενώ η πειραματική τιμή είναι $1057 \pm 0.1 MHz$.



Σχήμα 1.2: Στο αριστερό διάγραμμα φαίνεται η άρση των εκφυλισμένων γραμμών στο φάσμα του Υδρογόνου. Στο μεσαίο διάγραμμα στις κορυφές 1,2 και 3,4 προκύπτουν ως διακριτές λόγω του Lamb shift για το άτομο του Ηλίου. Στην τελευταία φωτογραφία φαίνεται ένα αντίστοιχο φάσμα για το Υδρογόνο.

Αντίστοιχα για μεγάλες ορμές, ($p^2 \gg m^2$) το δυναμικό θα γίνει:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(p^2) &= \frac{e_R^2}{p^2} \left[1 + \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} x(1-x) \right) \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{e_R^2}{p^2} \left[1 + \frac{e_R^2}{2\pi^2} \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) \int_0^1 dx x(1-x) \right] = \frac{e_R^2}{p^2} \left[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) \right] \end{aligned}$$

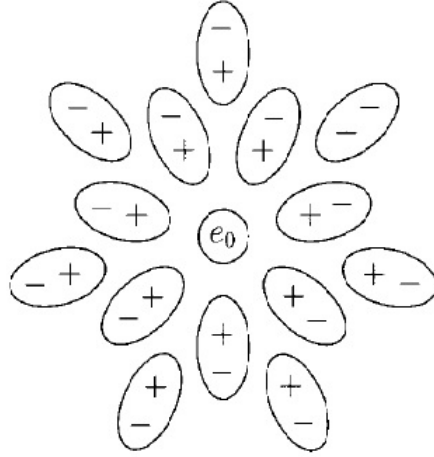
Για $Q^2 = -p^2$ όπου ο λογάριθμος είναι πραγματικός μπορεί να ορισθεί ένα effective ηλεκτρικό φορτίο:

$$e_{eff}^2(Q) = e_R^2 \left(1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{Q^2}{m^2} \right) \right)$$

όπου $e_{eff}(m) = e_R$. Παρατηρεί κανείς ότι για $m = 0$, το δυναμικό $\tilde{V}(p^2)$ τείνει στο άπειρο. Τέτοιου είδους απειρισμός είναι IR divergence. Τέτοια ιδιόμορφη συμπεριφορά ομαλοποιείται εάν προστεθεί μία πλασματική μάζα του φωτονίου και στη συνέχεια ληφθεί το όριο αυτής στο μηδέν.

Το e_{eff} αυξάνεται όσο αυξάνεται η ορμή ή ισοδύναμα μειώνεται η απόσταση. Έτσι για δεδομένη τιμή της ορμής το ηλεκτρικό φορτίο που εμπλέκεται στο νόμο του Coulomb είναι το e_{eff} . Φυσικά για κοντινές τιμές της ορμής το e_{eff} δεν αλλάζει σημαντικά, παρά μόνο για διαφορετικές κλίμακες μεγέθους. Σύμφωνα με τη μορφή του φορτίου αυξάνοντας την απόσταση (μειώνοντας την ορμή) το e_{eff} μειώνεται καθώς υπάρχει περιθώριο να γίνει ηλεκτρική θωράκιση μεσώ των ζευγών ηλεκτρονίου -ποζιτρονίου που δημιουργούνται από δίδυμη γέννηση, πράγμα που δεν είναι εφικτό όταν η απόσταση είναι μικρή, καθώς δεν υπάρχει τόσο μεγάλος χώρος για δίδυμη γέννηση και άρα θωράκιση.

Λαμβάνοντας υπόψη κάποιες αριθμητικές τιμές:

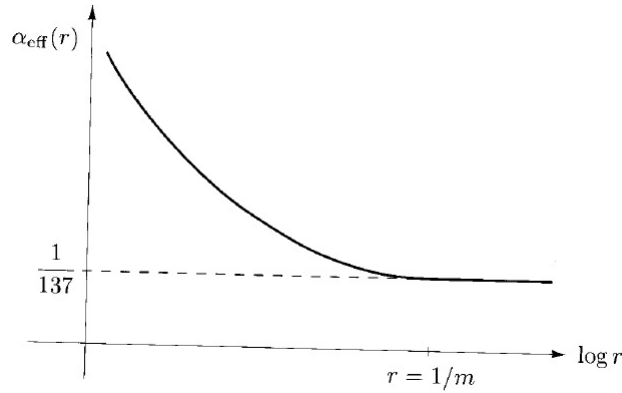


Σχήμα 1.3: Σχηματική αναπαράσταση πόλωσης του κενού και θωράκισης του φορτίου

$$\alpha_R = \frac{e_R^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \rightarrow e_R = 0.303$$

$$\alpha_{eff} = \frac{1}{137} \left(1 + 0.00077 \ln \frac{-p^2}{m^2} \right)$$

Αριθμητικά το $0.00077 \ll 1$ και άρα για να επέλθει η διόρθωση στο α_{eff} πρέπει οι ορμές να είναι αρκετά υψηλές. Το ερώτημα που προκύπτει είναι μέχρι ποιο όριο μπορεί να αυξηθεί η ορμή διατηρώντας τη συνέπεια της μέχρι τώρα προσέγγισης. Αναφορικά για $|p| \sim 10^{286} eV$ η συνεισφορά των loops γίνεται ίση με αυτή του tree-level και πλέον η διαταρακτική εικόνα που έχουμε για την QED παύει να ισχύει. Αυτό το σημείο ονομάζεται Landau pole της θεωρίας. Και αναδεικνύει ένα πρόβλημα της QED, ότι δεν εξασφαλίζεται η δυνατότητα πραγματοποίησης υπολογισμός ακόμα και αν η κλίμακα που μιλάμε βρίσκεται στο υπερ-μέγεθος των $10^{286} eV$.



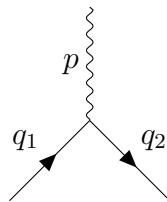
Σχήμα 1.4: Ποιοτική συμπεριφορά της a_{eff} συναρτήσεως του λογαρίθμου της απόστασης

1.2.3 Ανώμαλη Μαγνητική ροπή:

Στη συνέχεια της ανάλυσης ακολουθεί η μελέτη ενός αποκλίνοντος διαγράμματος το οποίο συνδέεται με την ανώμαλη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου και αποτελεί κομβικό σημείο εξαγωγής αποτελεσμάτων και επιτυχιών για την QED και γενικότερα την κβαντική θεωρία πεδίου.

Αναφορικά, όταν ένα ηλεκτρόνιο βρεθεί σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, αναπτύσσεται μία αλληλεπίδραση spin ηλεκτρονίου και μαγνητικού πεδίου $\frac{e}{2m}g\vec{S}\vec{B}$ ορίζοντας έτσι μία ελεύθερη παράμετρο: τον g-factor. Η φυσική σημασία αυτής είναι ότι αντιπροσωπεύει ένα σχετικό μέτρο της μαγνητικής διπολικής ροπής προς την σύζευξη spin-τροχιακού. Σύμφωνα με την εξίσωση του Dirac προκύπτει ότι το $g = 2$ με εκπληκτικά μεγάλη ακρίβεια ως προς τα πειραματικά δεδομένα. Το ερώτημα είναι εάν η παράμετρος αυτή επιδέχεται μεγαλύτερης τάξης κβαντικές διορθώσεις. Όπως θα γίνει σαφές στην ακόλουθη ανάλυση το g δεν είναι ακριβώς ίσο με 2 κάτι που επίσης ταυτίστηκε εκπληκτικά με τα πειραματικά δεδομένα δίνοντας έτσι υπόσταση στην έννοια της ανώμαλης μαγνητικής ροπής του ηλεκτρονίου.

Σε επίπεδο κβαντικής θεωρίας πεδίου η αλληλεπίδραση μαγνητικού πεδίου και spin ηλεκτρονίου μεταφράζεται ως αλληλεπίδραση φωτονίου-spinors.



Το διάγραμμα υπολογίζεται ως εξής:

$$i\mathcal{M}_0^\mu = -ie\bar{u}(q_2)\gamma^\mu u(q_1)$$

όπου ο δείκτης παραμένει αφού δεν έχει γίνει contraction με τον δείκτη της κατάστασης πόλωσης του spinor. Στην μορφή εμπεριέχεται η μαγνητική ροπή και αυτό θα γίνει εμφανές αξιοποιώντας την ταυτότητα Gordon:

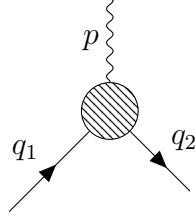
$$\begin{aligned} \bar{u}(q_2)(q_1^\mu + q_2^\mu)u(q_1) &= 2m\bar{u}(q_2)\gamma^\mu u(q_1) + i\bar{u}(q_2)\sigma^{\mu\nu}(q_1^\nu - q_2^\nu)u(q_1) \rightarrow \\ \rightarrow \bar{u}(q_2)\gamma^\mu u(q_1) &= \frac{1}{2m}\bar{u}(q_2)(q_1^\mu + q_2^\mu)u(q_1) - \frac{1}{2m}i\bar{u}(q_2)\sigma^{\mu\nu}(q_1^\nu - q_2^\nu)u(q_1) \end{aligned}$$

και αξιοποιώντας την διατήρηση της 4-ορμής: $p^\mu = q_2^\mu - q_1^\mu$,

$$i\mathcal{M}_0^\mu = -e\frac{(q_1^\mu + q_2^\mu)}{2m}\bar{u}(q_2)u(q_1) - \frac{e}{2m}i\bar{u}(q_2)p_\nu\sigma^{\mu\nu}u(q_1)$$

Ο πρώτος όρος σχετίζεται με τη σύζευξη του φωτονίου με την ορμή του πεδίου του spinor, ενώ ο δεύτερος όρος είναι ειδοποιό στοιχείο του spinor καθώς περιέχει την μαγνητική ροπή του. Έτσι για να υπολογισθούν οι διορθώσεις σε προσέγγιση 1-loop αρκεί να υπολογισθούν οι διορθώσεις του δεύτερου όρου από τα αντίστοιχα διαγράμματα.

Ένα τέτοιο διάγραμμα που μελετάμε στην πιο γενική μορφή δίνει το εξής αναλλοίωτο πλάτος:



$$i\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(q_2)(f_1\gamma^\mu + f_2p^\mu + f_3q_1^\mu + f_4q_2^\mu)u(q_1)$$

Η βασική λογική της θεώρησης αυτής της γενικής μορφής είναι ότι έχει θεωρηθεί ο γραμμικός συνδυασμός 4-διανυσμάτων με βαθμωτούς συντελεστές που εν γένει εξαρτώνται από γινόμενα ορμών ($p \cdot q_i, p^2, q_i^2$) και contractions δεικτών (\not{p}, \not{q}_i). Αφού $p^\mu = q_2^\mu - q_1^\mu$ αντικαθιστώντας μπορεί να τεθεί το $f_2 = 0$. Η εξάρτηση από \not{q}_i απαλείφεται με τη βοήθεια της εξίσωσης Dirac, $\not{q}_1 u(q_1) = mu(q_1)$ και $\bar{u}(q_2)\not{q}_2 = m\bar{u}(q_2)$. Έτσι η μοναδική εξάρτηση που υφίσταται είναι η $q_1 \cdot q_2, m$, ενώ τα $q_i^2 = m^2$. Αντί αυτού μπορώ να θεωρήσω την εξάρτηση από p^2, m^2 και

προκειμένου να έχω συνάρτηση αδιάστατης μεταβλητής να έχω $f_i \left(\frac{p^2}{m^2} \right)$. Απλοποιείται περαιτέρω το παραπάνω αποτέλεσμα αξιοποιώντας την ταυτότητα του Ward: $p_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$ και άρα θα ισχύει:

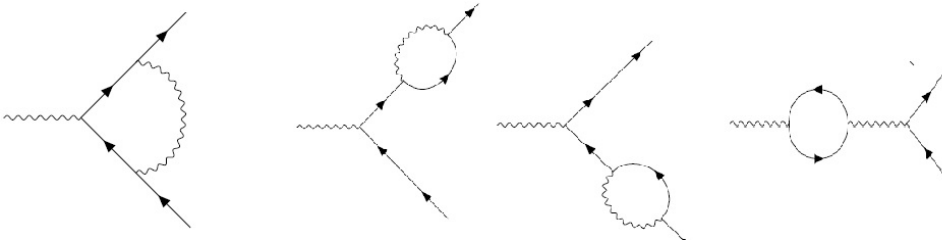
$$\begin{aligned} 0 &= p_\mu \bar{u}(q_2) (f_1 \gamma^\mu + f_3 q_1^\mu + f_4 q_2^\mu) u(q_1) = \\ &= -f_1 \bar{u}(q_2) \not{q}_1 u(q_1) + f_1 \bar{u}(q_2) \not{q}_2 u(q_1) + (p q_1) f_3 \bar{u}(q_2) u(q_1) + (p q_2) f_4 \bar{u}(q_2) u(q_1) = \\ &= p q_1 f_3 \bar{u}(q_2) u(q_1) + p q_2 f_4 \bar{u}(q_2) u(q_1) \end{aligned}$$

Τέλος ισχύει, $p q_1 = q_2 q_1 - q_1^2 = q_2 q_1 - m^2 = q_2 q_1 - q_2 q_2 = -q_2 p$. Άρα για να ισχύει η παραπάνω ισότητα $f_3 = f_4$. Συνεπώς υπάρχουν δύο ανεξάρτητα f_i και έτσι το αναλλοίωτο πλάτος κατά αναλογία με την μορφή σε tree-level θα είναι:

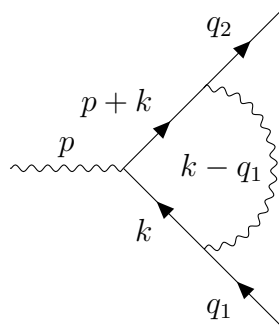
$$i\mathcal{M}^\mu = (-ie) \bar{u}(q_2) \left(F_1 \left(\frac{p^2}{m^2} \right) \gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu} p_\nu F_2 \left(\frac{p^2}{m^2} \right)}{2m} \right) u(q_1)$$

Σε tree-level ισχύει ότι $F_1 = 1, F_2 = 0$. Από τους δύο όρους ο F_2 δίνει συνεισφορά στη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου και για να υπολογισθεί η συνεισφορά του στο g θα πρέπει να υπολογισθεί στο μη σχετικιστικό όριο δηλαδή να υπολογισθεί το $g = 2 + 2F_2(0)$.

Τα διαγράμματα 1-loop είναι τα εξής:



Από αυτά μόνο το πρώτο συνεισφέρει στην ανώμαλη μαγνητική ροπή και έτσι εξετάζεται το εξής διάγραμμα:



Το αναλλοίωτο πλάτος $i\mathcal{M}_2^\mu$, σύμφωνα με τους αντίστοιχους κανόνες Feynman θα είναι το εξής:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_2^\mu &= (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\nu\alpha}}{(k-q_1)^2 + i\epsilon} \bar{u}(q_2) \gamma^\nu \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha u(q_1) = \\ &= -e^3 \bar{u}(q_2) \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\alpha}{[(k-q_1)^2 + i\epsilon][(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon]} \right] u(q_1) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια απλοποιούνται οι παρονομαστές με την εισαγωγή παραμέτρων Feynman ως εξής:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{[k^2 - m^2 + i\epsilon][(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon][(k-q_1)^2 + i\epsilon]} = \\ &= 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{([k^2 - m^2 + i\epsilon]x + y[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon] + z[(k-q_1)^2 + i\epsilon])^3} \end{aligned}$$

Απλοποιώντας την παράσταση του παρονομαστή μέσα στην κυβική δύναμη:

$$\begin{aligned} &[k^2 - m^2 + i\epsilon]x + y[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon] + z[(k-q_1)^2 + i\epsilon] = \\ &= k^2(x+y+z) + 2k(y p - z q_1) + y p^2 + z q_1^2 - (x+y)m^2 + i\epsilon(x+y+z) = \quad \{x+y+z=1\} \\ &= (k + (y p - z q_1))^2 + y p^2 + z q_1^2 - (y p - z q_1)^2 - (x+y)m^2 + i\epsilon \end{aligned}$$

όπου κάνοντας λίγες ακόμα πράξεις:

$$\begin{aligned} y p^2 + z q_1^2 - (y p - z q_1)^2 - (x+y)m^2 &= y p^2 - y^2 p^2 + 2y z p q_1 - z^2 q_1^2 + z q_1^2 - (x+y)m^2 = \\ &= y p^2 - y^2 p^2 + 2y(1-x-y)p q_1 - z^2 m^2 + z m^2 - (1-z)m^2 = y x p^2 - (1-z)^2 m^2 \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε διατήρηση 4-ορμής/αναλλοίωτο τετράγωνο της 4-ορμής $(p+q_1)^2 = q_2^2 \rightarrow 2p q_1 = \underbrace{q_2^2 - q_1^2 - p^2}_0$, $q_i^2 = m^2$ αφού

μιλάμε για on-shell ηλεκτρόνια. Άρα ο παρονομαστής λαμβάνει τη μορφή:

$$D = [(k + (y p - z q_1))^2 - \Delta + i\epsilon]^3$$

όπου $\Delta = -y x p^2 + (1-z)^2 m^2$.

Στη συνέχεια γίνεται shift $k^\mu \rightarrow k^\mu - y p^\mu + z q_1^\mu$:

$$D \rightarrow D' = [k^2 - \Delta + i\epsilon]^3$$

Ενώ αντίστοιχα ο αριθμητής θα γίνει:

$$\begin{aligned} N^\mu &= \bar{u}(q_2) \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\alpha u(q_1) = \\ &= -2\bar{u}(q_2) (\not{k} \gamma^\mu \not{p} + \not{k} \gamma^\mu \not{k} + m^2 \gamma^\mu - 2m(2k^\mu + p^\mu)) u(q_1) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι ταυτότητες των πινάκων γ του παραθέματος. Στην συνέχεια εάν γίνει το shift η παραπάνω έκφραση θα γίνει:

$$N^\mu = -2\bar{u}(q_2)[(\not{k} - y\not{p} + z\not{q}_1)\gamma^\mu\not{p} + (\not{k} - y\not{p} + z\not{q}_1)\gamma^\mu(\not{k} - y\not{p} + z\not{q}_1) + m^2\gamma^\mu - 2m(2k^\mu - 2yp^\mu + 2zq_1^\mu + p^\mu)]u(q_1)$$

Με λίγες παραπάνω πράξεις η παραπάνω έκφραση απλοποιείται ακολούθως:

$$-\frac{1}{2}N^\mu = [-\frac{1}{2}k^2 + (1-x)(1-y)p^2 + (1-4z+z^2)m^2]\bar{u}(q_2)\gamma^\mu u(q_1) + imz(1-z)p^\nu\bar{u}(q_2)\sigma^{\mu\nu}u(q_1) + m(z-2)(x-y)p^\mu\bar{u}(q_2)u(q_1)$$

Ο τελευταίος όρος μέσα στο ολοκλήρωμα είναι αντισυμμετρική συνάρτηση ως προς $x \leftrightarrow y$ και ισούται ταυτοτικά με το μηδέν. Έτσι το αναλλοίωτο πλάτος γράφεται ως εξής:

$$i\mathcal{M}_2^\mu = 4e^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \left[\frac{-\frac{1}{2}k^2 + (1-x)(1-y)p^2 + (1-4z+z^2)m^2}{[k^2 - \Delta + i\epsilon]^3} \bar{u}(q_2)\gamma^\mu u(q_1) + \frac{imz(1-z)p^\nu}{[k^2 - \Delta + i\epsilon]^3} \bar{u}(q_2)\sigma^{\mu\nu}u(q_1) \right]$$

Συνεισφορά στην μαγνητική ροπή έχει μόνο ο δεύτερος όρος σύμφωνα με τα προηγούμενα και άρα:

$$F_2(p^2) = \frac{2m}{e} (4ie^3 m) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{z(1-z)}{[k^2 - \Delta + i\epsilon]^3} + \mathcal{O}(e^4)$$

όπου χρησιμοποιώντας τις σχέσεις από τους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \Delta + i\epsilon]^3} = \frac{-i}{32\pi^2\Delta}$$

Έτσι θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} F_2(p^2) &= \frac{\alpha}{\pi} m^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)}{(1-z)^2 m^2 - xyp^2} \xrightarrow{p^2=0} \\ &\rightarrow F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx \delta(x+y+z-1) \frac{z}{(1-z)} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{(1-z)} = \frac{\alpha}{2\pi} \end{aligned}$$

Άρα ο Landé g-factor θα ισούται, συμπεριλαμβανομένων των διορθώσεων πρώτης τάξης, με:

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} = 2.00232$$

Μέχρι σήμερα, ο παράγοντας αυτός έχει υπολογισθεί με πολύ μεγάλη ακρίβεια, πιο συγκεκριμένα είναι η ποσότητα που ξέρουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια στη φύση, ως $g = 2.00231930436182 \pm 0.00000000000052$.

1.2.4 Επανακανονικοποίηση της μάζας:

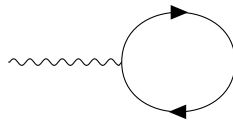
Μέχρι τώρα έχει γίνει αναφορά στην επανακανονικοποίηση κάποιων παρατηρήσιμων μεγεθών όπως το ηλεκτρικό φορτίο. Για την επανακανονικοποίηση μιας πλήρους σε έκταση θεωρίας όπως η QED, που περιλαμβάνει κάποια διαγράμματα τα οποία δεν φέρουν τόσο απλή ερμηνεία όπως το vacuum polarization πρέπει να ευρεθούν και κάποιες φαινομενικά μη παρατηρήσιμες ποσότητες όπως οι συναρτήσεις Green, $G(x, \dots, z) = \langle \Omega | T \{ \phi(x) \dots \phi(z) \} | \Omega \rangle$ που περιγράφουν τον συσχετισμό των πεδίων. Οι συναρτήσεις αυτές μέσα από ένα συνεπή φορμαλισμό μπορούν να γίνουν πεπερασμένες για κάθε θεωρία πεδίου και αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς αυτές είναι οι δομικοί λίθοι του S-matrix τον οποίο υπολογίζουμε και άρα είναι πεπερασμένος.

Υπάρχει φυσικά αιτία που επιλέγουμε να επανακανονικοποιήσουμε το συγκεκριμένο μέγεθος. Στην ειδική περίπτωση της QED παρόλο που υπάρχουν άπειρα διαγράμματα που συνεισφέρουν στον υπολογισμό των στοιχείων του S-matrix αποδεικνύεται ότι αρκούν μόνο τα one-particle irreducible(1-PI) διαγράμματα. Επίσης, 1-PI διαγράμματα αποτελούν την ελάχιστη βάση των συναρτήσεων Green που κατασκευάζουν τον S-matrix.

Η πιο απλή μορφή των συναρτήσεων Green είναι η 1-point function. Στην QED αυτές είναι οι: $\langle \phi(x) \rangle$, $\langle \psi(x) \rangle$, $\langle A_\mu(x) \rangle$, όπου ακολουθείται τη σύμβαση: $\langle \Omega | \{ \dots \} | \Omega \rangle = \langle \dots \rangle$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές ως vacuum expectation values καθώς δίνουν τις αναμενόμενες τιμές του πεδίου στο κενό.

Σε tree-level οι συναρτήσεις αυτές αντιπροσωπεύουν την κατάσταση ελάχιστης ενέργειας του πεδίου. Επίσης ισχύει ότι $\langle \phi(x) \rangle = \langle \psi(x) \rangle = \langle A_\mu(x) \rangle = 0$.

Σε προσέγγιση 1-loop το $\langle A_\mu \rangle$ απεικονίζεται ως εξής:



Το οποίο ονομάζεται tadpole diagram. Τέτοια διαγράμματα καθώς και υψηλότερης τάξης είναι ταυτοτικά ίσα με το μηδέν καθώς περιέχουν περιττό αριθμό ηλεκτρονίων και άρα θα υπάρχει στην μαθηματική έκφραση σε 1-loop ένα

$Tr[\gamma^\mu \dots \gamma^\nu] \dots$ το οποίο είναι ταυτοτικά μηδέν. Όσο αναφορά τα $\langle \psi \rangle$ είναι μηδέν για την QED καθώς δεν μπορεί να υπάρξει διάγραμμα υψηλότερης τάξης που να υποδεικνύει η Lagrangian της QED. Επίσης, δεν θα συμπεριληφθεί και κάποιο βαθμωτό πεδίο συνεπώς δεν θα ληφθεί τυχόν tadpole diagram. Συνεπώς, στην μέχρι τώρα ανάλυση είμαστε απαλλαγμένοι από την Renormalization των 1-point functions.

Στην συνέχεια, άξιες αναφοράς είναι οι two-point functions. Για παράδειγμα, τέτοιες είναι οι $\langle A_\mu A_\nu \rangle$, $\langle \psi \bar{\psi} \rangle$, $\langle \psi A_\mu \rangle$ και ένα διάγραμμα 1ης τάξης προσέγγιση της $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ είναι το διάγραμμα της vacuum polarization που έχει ήδη υπολογισθεί. Το διάγραμμα $\langle \psi A_\mu \rangle$ δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί σύμφωνα με τη Lagrangian της QED και άρα για να γίνει η Renormalization των 2-point functions πρέπει να γίνει η ανάλυση σχετικά με τις συναρτήσεις $\langle \psi \bar{\psi} \rangle$.

Ο διαδότης του φερμιονίου είναι:

$$\text{---}\xrightarrow{p}\text{---} = iG_0(\not{p}) \equiv \frac{i}{\not{p} - m}$$

ενώ σε 1-loop προσέγγιση έχουμε :

$$\text{---}\xrightarrow{p}\text{---}\text{---}\xrightarrow{k}\text{---}\xrightarrow{p}\text{---} = iG_0(\not{p}) \equiv \frac{i}{\not{p} - m} i\mathcal{M}_2(\not{p}) \frac{i}{\not{p} - m} = iG_0(\not{p}) [i\mathcal{M}_2(\not{p})] iG_0(\not{p})$$

όπου:

$$i\mathcal{M}_2(\not{p}) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{-i}{(p - k)^2}$$

Έτσι πλέον έχω όπως στην περίπτωση του φωτονίου, έναν electron propagator:

$$iG(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} [i\mathcal{M}_2(\not{p})] \frac{i}{\not{p} - m} + \mathcal{O}(e^4)$$

Από τη παραπάνω σχέση για τον electron propagator γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχει πόλος για $\not{p} = m$ από τον πρώτο όρο ενώ διπλό πόλο $\not{p} = m$ από τον δεύτερο όρο κ.ο.κ. Αυτό μου δημιουργεί πρόβλημα στον υπολογισμό του S-matrix εμφανίζονται singularities πράγμα μη αποδεκτό καθώς αντιπροσωπεύουν πιθανότητα σκέδασης. Κάτι τέτοιο δεν είχα στην αντίστοιχη περίπτωση του φωτονίου καθώς οι όλοι πόλοι είναι απλής μορφής. Αυτή η ιδιαιτερότητα στο ανάπτυγμα αυτό συμβάλλει στο να ορισθεί η φυσική μάζα του ηλεκτρονίου ως η μάζα-πόλος, κάτι που δεν ορίζεται στο φωτόνιο.

Αυτό που χρειάζεται τώρα είναι να υπολογισθεί το $i\mathcal{M}_2(p)$:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_2(p) &= (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{-i}{(k-p)^2} = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-2\gamma^\nu k^\nu + 4m}{(k^2 - m^2)(k-p)^2} = \\ &= e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2\not{k} - 4m]}{(k^2 - m^2)(k-p)^2} \end{aligned}$$

Απλοποιώ τον παρονομαστή μέσω εισαγωγής παραμέτρους Feynman:

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k-p)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - m^2 + ((k-p)^2 - k^2 + m^2)x]^2}$$

Έτσι ο παρονομαστής γίνεται:

$$\begin{aligned} k^2 - m^2 + ((k-p)^2 - k^2 + m^2)x &= k^2 - m^2 + (k^2 - 2kp + p^2 - k^2 + m^2)x = \\ &= k^2 - 2kpx + p^2x + m^2(x-1) = (k-px)^2 + (1-x)(p^2x - m^2) \end{aligned}$$

Άρα έχω:

$$i\mathcal{M}_2(p) = e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2\not{k} - 4m}{[(k-px)^2 + (1-x)(p^2x - m^2)]^2}$$

Στη συνέχεια ακολουθώντας την γνωστή διαδικασία αν γίνει shift στην εσωτερική ορμή: $k^\mu \rightarrow k^\mu + p^\mu x$ και θέτοντας $\Delta = (1-x)(m^2 - p^2x)$,

$$i\mathcal{M}_2(p) = e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2x\not{p} + 2\not{k} - 4m}{[k^2 - \Delta]^2} = e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2x\not{p} - 4m}{[k^2 - \Delta]^2}$$

όπου στην τελευταία σχέση καταλήξαμε αφού ο γραμμικός όρος ως προς k είναι περιττή συνάρτηση και κάτω από την ολοκλήρωση δίνει ταυτοτικά μηδέν. Το ολοκλήρωμα που μένει φέρει λογαριθμική απειρία που μπορεί να αντιμετωπισθεί και συνεπώς μπορεί να προχωρήσει ο υπολογισμός με επιλογή μεθόδου ομαλοποίησης. Επιλέγοντας διαστατική ομαλοποίηση και προσαρμόζοντας τη

τελευταία σχέση στις $d = 4 - \epsilon$ διαστάσεις:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2(\not{p}) &= -i\mu^{4-d}2e^2 \int_0^1 dx(x\not{p} - 2m) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} = \\
&= -i\mu^{4-d}2e^2 \int_0^1 dx(x\not{p} - 2m) \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{\Delta^{2-d/2}} = \\
&= 2e^2\mu^\epsilon \int_0^1 dx(x\not{p} - 2m) \frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}} \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{\Delta^{\epsilon/2}} = \\
&= \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx[x\not{p} - 2m] \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2 e^{-\gamma_E}}{\Delta} \right) \right] = \\
&= \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx[x\not{p} - 2m] \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{(1-x)(m^2 - p^2x)} \right) \right] = \\
&= \underbrace{\frac{2e^2}{(4\pi)^2} \frac{[\not{p} - 4m]}{\epsilon}}_{\text{divergent part}} + \underbrace{\frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx[x\not{p} - 2m] \cdot \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{(1-x)(m^2 - p^2x)} \right)}_{\text{finite part}}
\end{aligned}$$

Επίσης μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα από την τελευταία σχέση ότι $\mathcal{M}_2(\not{p}) \neq 0$ και άρα δεν αποφεύγεται το πρόβλημα της ύπαρξης διπλού πόλου στον electron propagator. Καθ' όλη τη διάρκεια της ανάλυσης, το βασικό κομμάτι που με ενδιαφέρει είναι το άπειρο και όχι πεπερασμένο, συνεπώς το δεύτερο δεν θα αναλυθεί περαιτέρω.

Προκειμένου να αντιμετωπισθούν τα αποκλίνοντα διαγράμματα που συναντώνται στους υπολογισμούς πρέπει να επανακανονικοποιήσουμε κάποιες ποσότητες όπως πχ έγινε με την περίπτωση του ηλεκτρικού φορτίου για το διάγραμμα του vacuum polarization ενώ για την περίπτωση του άπειρου διαγράμματος $\langle \psi\bar{\psi} \rangle$ θα πρέπει να επανακανονικοποιήσουμε άλλη φυσική ποσότητα και πιο συγκεκριμένα την μάζα του ηλεκτρονίου. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι ο απειρισμός μπορεί να απορροφηθεί από την παράμετρο της bare mass m_0 που περιέχεται στην Lagrangian. Για την ακρίβεια η επανακανονικοποίηση της μάζας αίρει μόνο ένα μέρος της απειρίας ενώ το υπόλοιπο μένει να αφηθεί από την επανακανονικοποίηση μίας άλλης παραμέτρου και αυτή θα είναι η κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης του ηλεκτρονίου ψ_0 . Τα παραπάνω εκφράζονται ως εξής:

$$m_0 = Z_m m_R \quad (\text{Επανακανονικοποίηση μάζας})$$

$$\psi_0(x) = \sqrt{Z_2} \psi_R(x) \quad (\text{Επανακανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης})$$

όπου $Z_2 = 1 + \delta_2$, έτσι ώστε σε tree-level ($\delta_2 = 0$) το $Z_2 = 1$ και $Z_m = 1 + \delta_m$ και $\delta_2, \delta_m \sim \mathcal{O}(e^2)$ και τα δ_i είναι οι counterterms.

Μπορεί να προκύψει επίσης αντίστοιχη σχέση για $G_{bare}(\not{p})$, $G^R(\not{p})$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\langle \psi_0 \bar{\psi}_0 \rangle &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} G^{bare}(\not{p}) \\ \langle \psi_R \bar{\psi}_R \rangle &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} G^R(\not{p})\end{aligned}$$

και αφού $\psi_0(x) = \sqrt{Z_2} \psi_R(x)$ θα ισχύει:

$$G^R(\not{p}) = \frac{1}{Z_2} G^{bare}(\not{p})$$

όπου $G^{bare}(\not{p}) = G(\not{p})|_{m=m_0}$. Έτσι,

$$\begin{aligned}iG^R(\not{p}) &= \frac{1}{Z_2} \frac{i}{\not{p} - m_0} + \underbrace{\dots}_{\text{loop order terms}} = \\ &= \left(\frac{1}{1 + \delta_2} \right) \left(\frac{i}{\not{p} - m_R - \delta_m m_R} \right) + \dots = \\ &= \left(\frac{1}{1 + \delta_2} \right) \left(\frac{i}{\not{p} - m_R} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\delta_m m_R}{\not{p} - m_R}} \right) + \dots = \\ &= (1 - \delta_2) \left(\frac{i}{\not{p} - m_R} \cdot \left(1 - \frac{\delta_m m_R}{\not{p} - m_R} \right) \right) + \dots = \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_R} - \frac{\delta_2 (\not{p} - m_R)}{\not{p} - m_R} \frac{i}{\not{p} - m_R} - \frac{\delta_m m_R}{\not{p} - m_R} \frac{-i}{\not{p} - m_R} + \dots = \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_R} + \frac{i}{\not{p} - m_R} [i(\delta_2 \not{p} - (\delta_2 + \delta_m) m_R)] \frac{i}{\not{p} - m_R} + \dots\end{aligned}$$

όπου για να φτάσω στην τελική σχέση χρησιμοποιήθηκε το ανάπτυγμα Taylor κρατώντας εν συνεχεία μόνο όρους $\mathcal{O}(\delta_i)$. Εν τέλει συμπεριλαμβανομένου και του διαγράμματος 1-loop διόρθωσης της $\langle \psi \bar{\psi} \rangle$, $\mathcal{M}_2(\not{p})$, θα ισχύει:

$$iG^R(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m_R} + \frac{i}{\not{p} - m_R} [i(\delta_2 \not{p} - (\delta_2 + \delta_m) m_R + \mathcal{M}_2(\not{p}))] \frac{i}{\not{p} - m_R} + \dots$$

Και απαιτώντας¹ τα δ_2, δ_m να απορροφούν την απειρία του διαγράμματος $\mathcal{M}_2(\not{p})$, προκύπτει ότι:

$$\delta_2 = -\frac{2e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \quad \delta_m = -\frac{6e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}$$

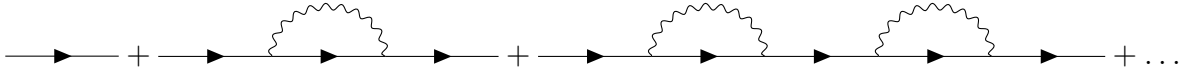
¹Ακολουθώντας το \overline{MS}

Και έτσι η two-point function $\langle \psi \bar{\psi} \rangle$ έχει γίνει πεπερασμένη, τουλάχιστον σε 1^η τάξη.

Στη συνέχεια μπορεί να γενικευθεί η μέχρι τώρα ανάλυση συμπεριλαμβανομένων όλων των όρων προσέγγισης και όχι μόνο $\sim (e_R^2)$. Αυτή η ανάλυση είναι πολύ σημαντική καθώς αναδύεται ο όρος της φυσικής μάζας (πόλος του propagator) του ηλεκτρονίου και πώς αυτός συνδέεται με την επανακανονικοποίηση. Εξετάζοντας την πιο γενική περίπτωση, ο bare propagator δέχεται συνεισφορά από άπειρα διαγράμματα:

$$iG^{bare}(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} (i\mathcal{M}(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} (i\mathcal{M}(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m_0} (i\mathcal{M}(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m_0} + \dots$$

Στην περίπτωσή μας το $iG_{bare}(\not{p})$ μπορεί να γραφεί ως γεωμετρική σειρά των εξής (1-PI) διαγραμμάτων:



Γενικεύοντας αυτό το επιχείρημα η συνολική συνάρτηση Green μπορεί να γραφεί ως γεωμετρική σειρά 1-PI διαγραμμάτων. Το άθροισμα τέτοιων διαγραμμάτων συμβολίζεται με $i\mathcal{M}(\not{p})$. (Χρησιμοποιώντας την σχέση που υπολογίζω άθροισμα γεωμετρικής προόδου και για γενική περίπτωση δηλαδή είτε $(G(\not{p}) = G^R(\not{p}), m = m_R)$ είτε $(G(\not{p}) = G^{bare}(\not{p}), m = m_0)$):

$$\begin{aligned} & \text{---} \rightarrow \text{---} + \text{---} \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots = \\ & = iG(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m} \left[1 + \frac{-\mathcal{M}(\not{p})}{\not{p} - m} + \left(\frac{-\mathcal{M}(\not{p})}{\not{p} - m} \right)^2 + \dots \right] = \frac{i}{\not{p} - m} \frac{1}{\left(1 + \frac{\mathcal{M}(\not{p})}{\not{p} - m} \right)} = \frac{i}{\not{p} - m + \mathcal{M}(\not{p})} \end{aligned}$$

Για την $G^{bare}(\not{p})$ υπάρχει μόνο ένα διάγραμμα 1-PI, $\mathcal{M}_2(\not{p})$ σε e^2 τάξης προσέγγιση και άρα έχω $\mathcal{M}(\not{p}) = \mathcal{M}_2(\not{p}) + \mathcal{O}(e^4)$ και συνεπώς:

$$iG^{bare}(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m + \mathcal{M}(\not{p}) + \dots}$$

Ενώ για το $G^R(\not{p})$ θα ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned} iG^R(\not{p}) &= \frac{1}{Z_2} iG^{bare}(\not{p}) = \frac{1}{1 + \delta_2} \cdot \frac{i}{\not{p} - m_0 + \mathcal{M}_2(\not{p}) + \dots} = \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_0 + \delta_2 \not{p} - m_0 \delta_2 + \mathcal{M}_2(\not{p}) + \dots} \end{aligned}$$

όπου $\mathcal{M}_2 \sim e^2$ και $\delta_2 \sim e^2$ και $(\dots) \sim e^4$. Επίσης εάν ληφθεί υπόψη ότι $m_0 = m_R + \delta_m m_R$:

$$iG^R(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m_R + \delta_2 \not{p} - (\delta_2 + \delta_m)m_R + \mathcal{M}_2(\not{p}) + \dots}$$

και θέτοντας $\mathcal{M}^R(\not{p}) = \delta_2 \not{p} - (\delta_2 + \delta_m)m_R + \mathcal{M}_2(\not{p}) + \dots$:

$$iG^R(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m_R + \mathcal{M}^R(\not{p})}$$

Έχοντας προσθέσει όλα τα 1-PI διαγράμματα στον renormalized propagator $G^R(\not{p})$, μπορώ να ορίσω την φυσική μάζα του σωματιδίου m_P ως τον πόλο του $G^R(\not{p})$. Έτσι ο απλός πόλος του renormalized propagator βρίσκεται στο $\not{p} = m_P$ με υπόλοιπο(residue) i και λόγω του ότι είναι φυσικό μέγεθος πρέπει να είναι ανεξάρτητο από το renormalization scheme. Επιλέγοντας on-shell subtraction scheme τα finite κομμάτια των counterterms καθορίζονται από τη σχέση $m_R = m_P$. Φυσικά, επιλέγοντας το minimal subtraction scheme θα είχα $m_R \neq m_P$ όμως, ο πόλος στο $\not{p} = m_P$ συνεχίζει να υπάρχει. Για να υπάρχει αυτός ο πόλος θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\mathcal{M}_R(\not{p}) = m_R - m_P$$

Και δεδομένου ότι το υπόλοιπο ισούται με i και αφού έχω απλό πόλο θα έχω²

$$i = \lim_{\not{p} \rightarrow m_P} (\not{p} - m_P) \frac{i}{\not{p} - m_R + \mathcal{M}_R(\not{p})} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} i \lim_{\not{p} \rightarrow m_P} \frac{1}{1 + \frac{d\mathcal{M}_R(\not{p})}{d\not{p}}}$$

Και για να ισχύει η παραπάνω σχέση θα πρέπει:

$$\left(\frac{d\mathcal{M}_R(\not{p})}{d\not{p}} \right)_{\not{p}=m_P} = 0$$

Έτσι ορίζεται η m_P μέσω της παραπάνω σχέσης που καταλήξαμε ανεξαρτήτως renormalization scheme.

Για το Minimal Subtraction Scheme οι counterterms δεν καθορίζονται από τη θέση του πόλου m_P και η βασική απαίτηση είναι ότι δεν έχουν finite part. Έτσι όπως είχε ειπωθεί νωρίτερα:

$$\delta_2 = -\frac{2e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \quad \delta_m = -\frac{6e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}$$

² $Res(f, c) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c)f(z)$

Ενώ το πεπερασμένο διάγραμμα που προκύπτει από την διαστατική ομαλοποίηση είναι:

$$\mathcal{M}_R(\not{p}) = \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx [x\not{p} - 2m_R] \cdot \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{(1-x)(m_R^2 - p^2x)} \right)$$

όπου το μ είχε εισηχθεί αθώα αρχικά για να γίνει αδιάστατο το e^2 , τώρα αποκτά σημασία για το renormalization scheme καθώς αποτελεί παράμετρο η οποία ορίζει μία μονοπαραμετρική οικογένεια από subtraction schemes και αντιπροσωπεύει μία ενεργειακή κλίμακα όχι άπειρη αλλά σχετικά μεγάλη. Επίσης τα φυσικά αποτελέσματα θα πρέπει να είναι ανεξάρτητα αυτής της παραμέτρου. Ενώ αν εφαρμοσθεί το \overline{MS} θα απαλείψω οι counterterms:

$$\delta_2 = -\frac{2e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln(4\pi e^{-\gamma_E}) \right), \quad \delta_m = -\frac{6e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln(4\pi e^{-\gamma_E}) \right)$$

και έτσι:

$$\mathcal{M}_R(\not{p}) = \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx [x\not{p} - 2m_R] \cdot \ln \left(\frac{\mu^2}{(1-x)(m_R^2 - p^2x)} \right)$$

Το m_R είναι πεπερασμένη μάζα και ονομάζεται στα πλαίσια του \overline{MS} , μάζα \overline{MS} . Και δεδομένης της σχέσης, $\mathcal{M}_R(\not{p}) = m_R - m_P$, κρατώντας $\mathcal{O}(e^2)$:

$$m_R = m_P + \mathcal{M}_R(\not{p}) = m_P \left[1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(5 + 3 \ln \left(\frac{\mu^2}{m_P^2} \right) \right) + \mathcal{O}(e^4) \right]$$

Η παραπάνω σχέση δίνει την μάζα \overline{MS} , m_R , συναρτήσει της φυσικής μάζας m_P . Παρατηρούμε επίσης ότι η m_R εξαρτάται από την παράμετρο-κλίμακα μ . Δηλαδή το αποτέλεσμα που λαμβάνω μετά από επανακανονικοποίηση για τη δεν είναι η μία παγκόσμια σταθερή ποσότητα αλλά εξαρτάται από την ενεργειακή κλίμακα στην οποία μελετάμε την ίδια τη Φυσική. Όμως γνωρίζοντας ότι τα φυσικά και παρατηρήσιμα μεγέθη δεν εξαρτώνται από την κλίμακα, άρα πρέπει να έχω $\frac{d}{d\mu} \mathcal{O}$, όπου \mathcal{O} ένα φυσικό και παρατηρήσιμο μέγεθος. Έτσι οδηγούμαστε στις Renormalization Group Equation.

1.3 Συστηματική μέθοδος της Επανακανονικοποίησης της QED

Στην μέχρι τώρα ανάλυση, έχουν μελετηθεί τα αποκλίνοντα διαγράμματα που συναντώνται στην QED και έχει γίνει μία προσπάθεια διαισθητικής προσέγγισης προς την έννοια της επανακανονικοποίησης. Αυτό που μένει να γίνει είναι να παρουσιασθεί μια πιο φορμαλιστικά αυστηρή μέθοδος για την επανακανονικοποίηση των κβαντικό θεωριών πεδίου, κάτι που θα γίνει στο κεφάλαιο αυτό για την QED. Το επιθυμητό σενάριο είναι κάθε απειρισμός που προκύπτει από αντίστοιχα διαγράμματα να μπορεί να εξισωθεί με συγκεκριμένες παραμέτρους οι οποίες περιέχονται στην Lagrangian. Για παράδειγμα στην QED με Lagrangian:

$$L = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0)^2 + \bar{\psi}^0 (i\cancel{\partial} - e_0 \cancel{A}^0 - m_0) \psi$$

όπου όλες οι ποσότητες δεν είναι επανακανονικοποιημένες, είναι δηλαδή bare. Έτσι, από τη μορφή της Lagrangian ταυτίζοντας τις ποσότητες που περιέχονται σε αυτή, με τις παραμέτρους που τίθενται σε επανακανονικοποίηση θα έχουμε 4 ποσότητες που θα υποστούν επανακανονικοποίηση: A_μ, ψ, e, m . Οι επανακανονικοποιημένες με τις bare ποσότητες σχετίζονται με τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned}\psi^0 &= \sqrt{Z_2} \psi^R \\ A_\mu^0 &= \sqrt{Z_3} A_\mu^R \\ m_0 &= Z_m m_R \\ e_0 &= Z_e e_R\end{aligned}$$

Έτσι η Lagrangian θα γίνει:

$$L = -\frac{1}{4} Z_3 (\partial_\mu A_\nu^R - \partial_\nu A_\mu^R)^2 + i Z_2 \bar{\psi}^R \cancel{\partial} \psi^R - Z_2 Z_m m_R \bar{\psi}^R \psi^R - e_R Z_e Z_2 \sqrt{Z_3} \bar{\psi}^R \cancel{A}^R \psi^R$$

Επίσης ορίζω, $Z_1 \equiv Z_e Z_2 \sqrt{Z_3}$ Τα Z_i πρέπει να περιέχουν την φιλοσοφία της τάξης διαταραχών και έτσι αναπτυχθούν γύρω από μία μη-διαταραχτική τιμή (tree-level) και πιο συγκεκριμένα αυτές είναι $Z_2 = Z_3 = 1$ ενώ για να διατηρείται $Z_1 e_R \bar{\psi}^R \cancel{A}^R \psi^R = e_0 \bar{\psi}^0 \cancel{A}^0 \psi^0$ σε tree-level, το οποίο ισοδυναμεί με το $e_0 = e_R$ πρέπει να ισχύει ότι σε μη-διαταραχτικό επίπεδο ότι $Z_1 = 1$. Όσο αναφορά το Z_m θα πρέπει σε tree-level το m_0 να ισούται με μία πεπερασμένη μάζα που έχει οριστεί (m_P, m_R) και αν συμβατικά επιλεγεί η δεύτερη τιμή σε tree-level ισχύει ότι $Z_m = 1$.

Η μέχρι τώρα ανάλυση περί διαταραχών ισοδυναμεί με τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} Z_1 &\equiv 1 + \delta_1 \\ Z_2 &\equiv 1 + \delta_2 \\ Z_3 &\equiv 1 + \delta_3 \\ Z_m &\equiv 1 + \delta_m \end{aligned}$$

όπου $\delta_i \sim \mathcal{O}(e^2)$. Πιο πάνω έγινε η σχετική ανάλυση με το Z_1 . Εναλλακτικά θα μπορούσε να γίνει μέσω του Z_e με τα ίδια ακριβώς επιχειρήματα τέτοια ώστε: $Z_e \equiv 1 + \delta_e$. Η σχετική επιλογή ανάμεσα σε Z_1, Z_e είναι τετριμμένη και αυτή που δεν θα επιλεγθεί θα εκφραστεί συναρτήσει των άλλων 4:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_e Z_2 \sqrt{Z_3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + \delta_1 &= (1 + \delta_e)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3)^{1/2} \stackrel{\mathcal{O}(e^2)}{\equiv} 1 + \delta_e + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta_e &= \delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_3 \end{aligned}$$

Με τα παραπάνω η Lagrangian θα γραφεί διαταρακτικά ως εξής:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m_R\bar{\psi}\psi - e_R\bar{\psi}A\psi - \frac{1}{4}\delta_3 F_{\mu\nu}^2 + i\delta_2\bar{\psi}\not{\partial}\psi - (\delta_m + \delta_2)m_R\bar{\psi}\psi - \delta_1 e_R\bar{\psi}A\psi$$

Και έτσι οι counterterms εισάγονται ως αλληλεπιδράσεις σε διαταρακτικό επίπεδο.

$$\begin{aligned} i(\delta_2\not{p} - (\delta_m + \delta_2)m_R) &= \text{---}\blacktriangleright\text{---}\otimes\text{---}\blacktriangleright\text{---} \\ -i\delta_3(p^2 g^{\mu\nu} - p^{\mu\nu}) &= \text{~~~~}\otimes\text{~~~~} \\ -i\delta_1 e_R \gamma^\mu &= \text{~~~~}\otimes\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \end{aligned}$$

1.3.1 Προσδιορισμός των counterterms

Στην υποενότητα αυτή θα γίνει αναλυτικός υπολογισμός των counterterms σε on-shell renormalization scheme:

- Εύρεση δ_m, δ_2 :

Η βασική αρχή που σέβεται το σε on-shell renormalization scheme είναι ότι $m_p = m_R$. Ανατρέχοντας στην ανάλυση που έγινε για τις two-point functions των ηλεκτρονίων έχουμε ότι:

$$\delta_2 = -\frac{d}{d\phi} \mathcal{M}_2(\phi)|_{\phi=m_p}, \quad \delta_m m_p = \mathcal{M}_2(\phi)|_{\phi=m_p}$$

$$\mathcal{M}_2(\phi) = \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (x\phi - 2m_p) \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{(1-x)(m_p^2 - p^2x) + m_\gamma^2 x} \right) \right)$$

Στην τελευταία σχέση έχει προστεθεί ένας επιπλέον όρος $m_\gamma^2 x$ με τον οποίο αποφεύγονται τυχόν IR απειρισμοί. Συνεπώς:

$$\delta_2 = -\frac{d}{d\phi} \mathcal{M}_2(m_p) = -\frac{2e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_p^2} + \frac{5}{2} + \ln \frac{m_\gamma^2}{m_p^2} \right)$$

$$\delta_m = \frac{1}{m_p} \mathcal{M}_2(m_p) = -\frac{2e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{3}{\epsilon} + \frac{3}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_p^2} - \frac{5}{2} \right)$$

- Εύρεση δ_3 : Αυτό που θα υπολογισθεί στη συνέχεια είναι το δ_3 μέσω του διαγράμματος ιδιοενέργειας φωτονίου. Το διάγραμμα, όπως ειπώθηκε και σε προηγούμενη ενότητα, ισούται με :

$$-i(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) e_R^2 \mathcal{M}_2(p^2)$$

όπου,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(p^2) &= \frac{8}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \mu^{4-d} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{1}{m_R^2 - p^2 x(1-x)}\right)^{2-\frac{d}{2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m_R^2 - p^2 x(1-x)}\right) + \mathcal{O}(\epsilon)\right] \end{aligned}$$

Αυτό το διάγραμμα συμπεριλαμβανομένου και του αποκλίνοντος διαγράμματος που προκύπτει από τον αντίστοιχο counterterm δίνει την πλήρη εικόνα των 1-PI διαγραμμάτων σε τάξη e_R^2 . Προκειμένου οι πράξεις να γίνουν πιο εύκολες θα επιλεχθεί η Lorenz gauge ($\xi = 0$) και έτσι ο διαδότης θα γίνει:

$$iG^{\mu\nu}(p) = -i \frac{g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{p^2 + i\epsilon}$$

και παρατηρώντας ότι:

$$\left(g^{\mu\alpha} - \frac{p^\mu p^\alpha}{p^2}\right) \left(g^{\alpha\nu} - \frac{p^\alpha p^\nu}{p^2}\right) = g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} + \frac{p^\mu p^\nu p^2}{p^4} = g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}$$

και κατ' αναλογία:

$$G^{\mu\alpha}(p) G^{\alpha\nu}(p) = -\frac{1}{p^2} G^{\mu\nu}(p)$$

Και έτσι η συνεισφορά των διαγραμμάτων σε τάξη e_R^2 είναι:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{\mu\nu}(p) &= iG^{\mu\nu} + iG^{\mu\alpha}(p) \left[-ip^2 \left(g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2}\right) (e_R^2 \mathcal{M}_2(p^2) + \delta_3)\right] iG^{\beta\nu}(p) + \mathcal{O}(e_R^4) = \\ &= iG^{\mu\nu}(p) - ip^4 (e_R^2 \mathcal{M}_2(p^2) + \delta_3) G^{\mu\alpha}(p) G^{\alpha\beta}(p) G^{\beta\nu}(p) + \mathcal{O}(e_R^4) = \\ &= iG^{\mu\nu}(p) [1 - (e_R^2 \Pi_2(p^2) + \delta_3)] + \mathcal{O}(e_R^4) = \\ &= -i \frac{g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{p^2} (1 - e_R^2 \Pi_2(p^2) - \delta_3) + \mathcal{O}(e_R^4) \end{aligned}$$

και αυτή η μορφή είναι βολική καθώς έχει ξεκάθαρη τανυστική μορφή. Αν αθροίσω όλα τα 1-PI διαγράμματα τάξης e_R^2 κατά σειρά, θα έχω το εξής αποτέλεσμα ως άθροισμα γεωμετρικής προόδου:

$$iG^{\mu\nu} = \frac{-i}{p^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \frac{1}{1 + e_R^2 \Pi_2(p^2) + \delta_3 + \dots}$$

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει από τη παραπάνω μορφή ότι για $p^2 = 0$ υπάρχει ένας απλός πόλος στο $Pi(p^2)$. Όπως και στην περίπτωση του ηλεκτρονίου από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων. Και έτσι εξάγεται την on-shell renormalization condition:

$$\Pi(0) = 0$$

και έτσι από την σχέση που έχει εξαχθεί μέσω διαστατική ομαλοποίησης ισχύει ότι:

$$\delta_3 = -e_R^2 \Pi(0) = -\frac{e_R^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_R^2}$$

και άρα με την παραπάνω μορφή του δ_3 το $\Pi(p^2)$ γίνεται πεπερασμένο ως εξής:

$$\Pi(p^2) = \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m_R^2}{m_R^2 - p^2 x(1-x)} \right) + \dots$$

Και παρατηρούνται δύο καίρια στοιχεία. Αρχικά ότι το $\Pi(p^2)$ είναι πεπερασμένο καθώς δεν έχει εξάρτηση από ϵ . Επίσης, δεν έχει εξάρτηση από το μ και συνεπώς ανεξάρτητο του renormalization subtraction point.

- Εύρεση δ_m, δ_2 : Τέλος μένει να υπολογισθεί ο δ_1 . Όσο αναφορά τις 3-point functions το μοναδικό διάγραμμα που συνεισφέρει δίνει ένα $-ie_R\Gamma^\mu$ όπου,

$$\Gamma^\mu(p) = F_1(p^2)\gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m_e}p_\nu F_2(p^2)$$

και σε μηδενική τάξη πρέπει να ισχύει $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ δηλαδή, $F_1(p^2) = 1, F_2(p^2) = 0$. Στην επόμενη τάξης προσέγγισης, δηλαδή στην e_R^2 τα διαγράμματα που συνεισφέρουν στο $-ie_R\Gamma^\mu$ είναι το διάγραμμα ανώμαλης μαγνητικής ροπής του ηλεκτρονίου και ο αντίστοιχος counterterm με συνεισφορά $\delta_1\gamma^\mu$. Σε προσέγγιση 1-loop το $F_2(p^2)$ θα είναι το εξής:

$$F_2(p^2) = \frac{e_R^2}{4\pi^2} \int_0^1 d^3x \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)m_R^2}{(1-z)^2 m_R^2 - xyp^2} + \mathcal{O}(e_R^4)$$

Από τη μορφή του $F_2(p^2)$ εξάγεται το συμπέρασμα ότι είναι πεπερασμένο και άρα δεν χρειάζεται counterterm.

Όσο αναφορά το $F_1(p^2)$ όπως έχει υπολογισθεί και προηγουμένως ισχύει:

$$F_1(p^2) = 1 + f(p^2) + \delta_1 + \mathcal{O}(e_R^4)$$

όπου,

$$f(p^2) = -2ie_R^2 \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \\ \times \frac{k^2 - 2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m_R^2}{(k^2 - (m_R^2(1-z)^2 - xyp^2))^3}$$

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι ο $F_1(p^2)$ αποτελεί το συντελεστή σύζευξης $e_R\bar{\psi}A\psi$. Απαιτώντας $F_1(0)$ σημαίνει ότι για μεγάλες αποστάσεις ($p^2 \ll 0$) όπου ισχύει ο νόμος του Coulomb το φορτίο θέλουμε να είναι το renormalized charge e_R . Ισοδύναμα, το renormalized ηλεκτρικό φορτίο μετράται ασυμπτωτικά σε μεγάλες αποστάσεις από τον νόμο του Coulomb και βάσει ορισμού να μην επιδέχεται διορθώσεις. Αυτές οι απαιτήσεις θέτουν $\delta_1 = -f(0)$ σε τάξη e_R^2 . Από αυτό το φυσικό συλλογισμό εξάγεται η εξής συνθήκη:

$$\Gamma^\mu(0) = \gamma^\mu$$

η οποία είναι η 4^η και τελευταία renormalization condition της QED. Στη συνέχεια θα υπολογισθεί το $f(p^2)$ το οποίο τυγχάνει να είναι και IR και UV divergence. Για την αντιμετώπιση της IR divergence αρκεί να

προστεθεί μία πλασματική μάζα φωτονίου m_γ .

Έτσι θα ισχύουν τα εξής (όπως εξήχθησαν και στην ενότητα με την ανώμαλη μαγνητική ροπή):

$$f(p^2) = -2ie_R^2 \mu^{4-d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \\ \times \frac{\left(2 - \frac{4}{d}\right)k^2 - 2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m_R^2}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^3}$$

όπου $\Delta = (1-z)^2 m_R^2 - xyp^2 + zm_\gamma^2$. Το ολοκλήρωμα αυτό αποτελείται από δύο επιμέρους είδη ολοκληρωμάτων. Το πρώτο είναι ανάλογο του k^2 και άρα UV-divergent ενώ το υπόλοιπο είναι μόνο IR-divergent. Τα ολοκληρώματα αυτά αναλύονται ως εξής (αρχικά το UV-divergent):

$$\mu^{4-d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\left(2 - \frac{4}{d}\right)k^2}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^3} = \mu^{4-d} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\left(2 - \frac{4}{d}\right) \frac{d}{4} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} = \\ = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta} - 1\right)$$

Το IR-divergent είναι πεπερασμένο στις $d = 4$ και άρα αντικαθιστώ:

$$\frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m_R^2}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^3} = i \frac{p^2(1-x)(1-y) + m_R^2(1-4z+z^2)}{16\pi^2 \Delta}$$

και κάνοντας την επέκταση $d = 4 - \epsilon$:

$$f(p^2) = \frac{e_R^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} + \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{p^2(1-x)(1-y) + m_R^2(1-4z+z^2)}{\Delta} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta} \right] \right)$$

Και για να υπολογισθεί το δ_1 πρέπει να υπολογισθεί το $f(0)$ ως εξής:

$$f(0) = \frac{e_R^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} + \int_0^1 dz(1-z) \left[\frac{m_R^2(1-4z+z^2)}{(1-z)^2 m_R^2 + zm_\gamma^2} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{(1-z)^2 m_R^2 + zm_\gamma^2} \right] \right) = \\ = \frac{e_R^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_R^2} \frac{5}{2} + \ln \frac{m_\gamma^2}{m_R^2}\right)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $F_1(0) = 1f(0) + \delta_1 + \dots$ και απαιτώντας ότι $F_1(0) = 1$ σε τάξη e_R^2 το δ_1 ισούται τελικά με:

$$\delta_1 = -f(0) = \frac{e_R^2}{8\pi^2} \left(-\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_R^2} - \frac{5}{2} - \ln \frac{m_\gamma^2}{m_R^2}\right)$$

1.3.2 Συνθήκες Επανακανονικοποίησης της QED

Έχοντας φτάσει σε ένα ικανοποιητικό επίπεδο, έχω προσδιορίσει τους 4 counterterms με τη βοήθεια των Renormalization Conditions οι οποίες είναι εκφρασμένες σε ένα Scheme. Επιλέγοντας το On-Shell Renormalization Scheme οι 4 συνθήκες είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(m_p) &= 0 \\ \mathcal{M}'(m_p) &= 0 \\ \Gamma^\mu(0) &= \gamma^\mu \\ \Pi(0) &= 0\end{aligned}$$

Οι πρώτες δύο συνθήκες αναδιαμορφώνουν και ομαλοποιούν τον διαδότη του ηλεκτρονίου, η τρίτη τακτοποιεί το ηλεκτρικό φορτίο ενώ η τέταρτη τον διαδότη του φωτονίου. Από αυτές τις 4 συνθήκες, οι οποίες δεν είναι μοναδικές καθώς η αναλυτική τους μορφή εξαρτάται από το αντίστοιχο Scheme, διαμορφώνουν τη διαταρακτική εικόνα στην Επανακανονικοποίηση και θεμελιώνει τη συστηματοποίηση της μεθόδου.

Κάπου εδώ τελειώνει η ανάλυση για αυτή τη θεματολογία και μένει να γίνει περαιτέρω ανάλυση ως προς την Επανακανονικοποιησιμότητα της QED αλλά και να γίνει μία εκτενής αναφορά για ένα πολύ βασικό κομμάτι της θεωρίας αυτής των Renormalization Group Equations.

1.3.3 Επανακανονικοποιησιμότητα της QED

Μέχρι τώρα έχω κάνει την απαραίτητη ανάλυση αντιμετωπίζοντας αποκλίνοντα 1-loop διαγράμματα, επαναορίζοντας φυσικές ποσότητες της Lagrangian, εξάγοντας 4 counterterms. Σκοπός της παραπάνω ανάλυσης είναι το αν αρκεί η παραπάνω διεργασία για εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η συνολική θεωρία της QED είναι επανακανονικοποιήσιμη σε όλες τις τάξεις προσέγγισης (loop order).

Αρχικά, αξίζει να προσδιορισθεί τι ακριβώς σημαίνει επανακανονικοποιήσιμη θεωρία. Πιο συγκεκριμένα, η ειδοποιός διαφορά μίας επανακανονικοποιήσιμης θεωρίας είναι ότι όλες οι UV-divergencies μπορούν να αρθούν από έναν πεπερασμένο αριθμό counterterms. Η επεξήγηση της παραπάνω πρότασης βασίζεται θεμελιωδώς στην έννοια των 1-PI διαγραμμάτων που μέχρι τώρα έχει χρησιμοποιηθεί διαισθητικά. Η σημασία των 1-PI έγκειται το γεγονός ότι, όπως εκφράστηκε και στο κεφάλαιο με τη mass renormalization, κάθε σύνθετο διάγραμμα μπορεί να γραφεί ως γεωμετρική σειρά των 1-PI διαγραμμάτων, τα οποία μετά από την επανακανονικοποίηση έχουν γίνει πεπερασμένα.

Τέλος, για την μελέτη ως προς την επανακανονικοποίηση της QED θα διερευνηθούν τυχόν νέα διαγράμματα ως προς την αποκλίνουσα συμπεριφορά τους για την πιθανή εμφάνιση νέων counterterms. Για τον εύκολο χαρακτηρισμό της αποκλίνουσας συμπεριφοράς ορίζεται ο επιφανειακός βαθμός απόκλισης ως εξής:

$$D = (\text{δυνάμεις του } k_i) + (\text{δυνάμεις του } d^4 k_i) = 4 - \frac{3}{2}f - b - s$$

όπου χαρακτηρίζει το βαθμό απειρίας του ολοκληρώματος. Παρόλα αυτά το D δεν έχει απόλυτη ισχύ αλλά διαισθητική, δηλαδή δεν αποτελεί απόλυτο κριτήριο χαρακτηρισμού απόκλισης όπως θα δούμε. Στην τελευταία ισότητα, γράφεται μία ισοδύναμη έκφραση του D που δείχνει ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα, ότι το D εξαρτάται από τα εξωτερικά σωματίδια (s : *bajmw*, f : *ferminia*, b : *troznia*). Για παράδειγμα:

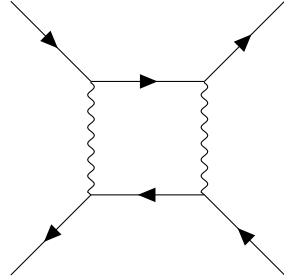
$$\int d^4 k \frac{1}{k^2} \rightarrow D = 4 - 2 = 2 \quad (\text{Τετραγωνική απειρία})$$

$$\int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \frac{1}{k_1^4} \frac{1}{k_2^4} \rightarrow D = 8 - 8 = 0 \quad (\text{Λογαριθμική απειρία})$$

Στην συνέχεια θα μελετηθούν οι point-functions από 4^{ης} και πάνω:

- 4-point functions:

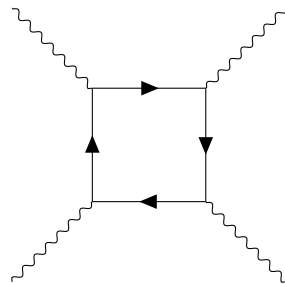
1. $\langle \bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi \rangle$



$$= \langle \bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi \rangle \sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} \frac{1}{\not{k}} \frac{1}{\not{k}}$$

Ο επιφανειακός βαθμός απόκλισης είναι $D = 4 - 4 - 2 = -2$ και έτσι είναι πεπερασμένο διάγραμμα. Άρα δεν χρειάζεται να προσθέσω counterterm.

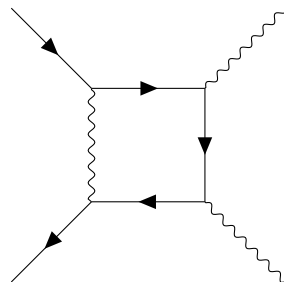
2. $\langle \bar{\psi}\psi AA \rangle$



$$= \langle \bar{\psi}\psi AA \rangle \sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{\not{k}} \frac{1}{\not{k}} \frac{1}{k^2}$$

Ο επιφανειακός βαθμός απόκλισης είναι $D = 4 - 3 - 2 = -1$ και έτσι είναι πεπερασμένο διάγραμμα. Άρα δεν χρειάζεται να προσθέσω counterterm.

3. $\langle AAAA \rangle$



$$= \langle AAAA \rangle \sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k}} \frac{1}{\not{k}} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2}$$

Ο επιφανειακός βαθμός απόκλισης είναι $D = 4 - 4 = 0$ και έτσι είναι το διάγραμμα εμφανίζει λογαριθμική απειρία. Παρόλα αυτά τα φαινόμενα απατούν, καθώς όπως αναφέρθηκε πιο πάνω ο D δεν είναι απόλυτο κριτήριο απόκλισης, και θα διαπιστωθεί ότι εξαιτίας της ταυτότητας Ward είναι UV-finite. Πράγματι, το διάγραμμα εξαιτίας

συμμετρίας ανταλλαγής φωτονίων, Lorenz Invariance και του γεγονότος ότι το πλάτος του διαγράμματος είναι αδιάστατο έχουμε τα εξής:

$$M_{\mu\nu\rho\sigma} = c \ln(\underbrace{\Lambda^2}_{cutoff}) (g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} + g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} + g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}) + (\text{finite part})$$

Γνωρίζοντας ότι ισχύει η ταυτότητα του Ward για on-shell photons που υπάρχουν στο διάγραμμα θα ισχύει το εξής:

$$0 = q^\mu M_{\mu\nu\rho\sigma} = c \ln(\Lambda^2) (q^\nu g_{\sigma\rho} + q^\rho g_{\sigma\nu} + q^\sigma g_{\rho\nu}) + q^\mu (\text{finite part})$$

και απαιτώντας να ισχύει $\forall q^\mu$ πρέπει $c = 0$. Έτσι το διάγραμμα είναι UV-finite.

- higher order point functions:

Εδώ δεν χρειάζεται να εξετασθεί κάποιο διάγραμμα συγκεκριμένα, καθώς ο ελάχιστος αριθμός εσωτερικών διαδοτών είναι 5. Άρα ο ελάχιστος παράγοντας που μπορεί να συνεισφέρει στον επιφανειακό βαθμό απόκλισης είναι -5, στην περίπτωση που έχω βρόγχο μόνο από φερμιόνια. Άρα συνολικά θα έχω $D = 4 - 5 = -1$ και άρα ο μέγιστος βαθμός απόκλισης για ένα διάγραμμα από 5^{th} και πάνω είναι -1 δηλαδή τέτοια διαγράμματα ανώτερης τάξης είναι πεπερασμένα.

Συμπερασματικά έχω το εξής:

Η QED είναι επανακανονικοποιήσιμη σε 1-loop level αφού οι μόνοι counterterms που χρειάζονται είναι 4, δηλαδή πεπερασμένοι.

Το θέμα είναι αν μπορεί το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί και για όλες τις loop orders προκειμένου να αποδείξω την επανακανονικοποιησιμότητα της θεωρίας.

Μία υποτυπώδης, διαισθητική απόδειξη της επανακανονικοποιησιμότητας της QED βασίζεται στη μαθηματική επαγωγή ως εξής:

- Ξέρω ότι η θεωρία είναι επανακανονικοποιήσιμη σε 1-loop
- Έστω ότι είναι επανακανονικοποιήσιμη n-loop.
- Θα δείξω ότι είναι επανακανονικοποιήσιμη για n+1-loop. Πράγματι, όπως έχει ορισθεί ο επιφανειακός βαθμός απόκλισης $D = 4 - \frac{3}{2}f - b - s$ εξαρτάται μόνο από τις εξωτερικές γραμμές ανεξαρτήτως τι υπάρχει μέσα στο βρόγχο (ή βρόγχους). Άρα ο επιφανειακός βαθμός απόκλισης δεν

αλλάζει ανά loop order του ίδιου διαγράμματος. Συνεπώς, το $D_n = D_{n+1}$. Το συμπέρασμα αυτό σε συνδυασμό με το BPHZ³ θεώρημα που λέει ότι:

‘Όλες οι αποκλίσεις μπορούν να αφθούν από counterterms που αντιστοιχούν σε 1-PI διαγράμματα που φέρουν $D \geq 0$.’

Αφού για 1-loop order έχω 4 counterterms ακυρώνοντας πεπερασμένο αριθμό αποκλιόντων 1-PI διαγραμμάτων και αυξάνοντας την loop order δεν αλλάζει ο βαθμός επιφανειακής απόκλισης και άρα τα αποκλίνοντα 1-PI διαγράμματα. Αυτό θα ισχύει και για $n \rightarrow n+1$ και έτσι για $n+1$ loop order από το θεώρημα BPHZ συμπεραίνει κανείς ότι οι counterterms είναι πεπερασμένοι στην $n+1$ loop order και άρα είναι επανακανονικοποιήσιμη θεωρία σε αυτή την τάξη.

Άρα η QED είναι επανακανονικοποιήσιμη θεωρία εν τω συνόλω της.

Έτσι καταλήγοντας σε αυτό το συμπέρασμα, έχουν συμπεριληφθεί 2 φυσικές ποσότητες m_P, e_R που δέχονται πεπερασμένες, διαταρακτικές διορθώσεις που αρκούν για να θεμελιώσουν πλήρως τη θεωρία της QED, ικανή να κάνει προβλέψεις σε ποικίλες τάξεις προσέγγισης.

³Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann

2 Ομάδα Επανακανονικοποίησης

Η ομάδα επανακανονικοποίησης είναι μία πολύ σημαντική θεματική ενότητα αναδεικνύοντας τις πτυχές της φυσικής των Κβαντικών θεωριών πεδίου αλλά και της έννοιας της επανακανονικοποίησης. Η προσέγγιση που ακολουθείται είναι η εξής:⁴

Η βασική απαίτηση είναι ότι οι bare ποσότητες πρέπει να είναι ανεξάρτητες της εκάστοτε κλίμακας p_0 ⁵ που επανακανονικοποιούνται. Αυτή η ανεξαρτησία διατηρείται κατά την επανακανονικοποίηση της θεωρίας.

Οι προαναφερθέντες ποσότητες μπορεί να είναι είτε σταθερές σύζευξης, είτε τελεστές (όπως το ρεύμα), είτε συναρτήσεις Green. Και η άμεση ανεξαρτησία αυτών από την κλίμακα εκφράζεται πολύ απλά ως:

$$\frac{\partial}{\partial p_0} \mathcal{O} = 0$$

όπου \mathcal{O} η αντίστοιχη ποσότητα. Και λύνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση, εξάγεται μία ‘τροχιά’ στο χώρο των θεωριών, όπου διεξάγονται έμμεσες εξαρτήσεις από την κλίμακα των επανακανονικοποιημένων ποσοτήτων, μετά την επανακανονικοποίηση. Με λίγα λόγια διαπιστώνεται, η συμπεριφορά της ποσότητας μετά την επανακανονικοποίηση συναρτήσει της κλίμακας που εισάγεται κατά την επανακανονικοποίηση. Μέσω αυτής της συμπεριφοράς διαμορφώνεται η συμπεριφορά ολόκληρης της θεωρίας.

Στην επόμενη προσέγγιση, μελετάται η έννοια της ομάδας επανακανονικοποίησης, αρχικά διαισθητικά και στη συνέχεια αναπτύσσεται μία θεμελίωση αυτής μέσω των counterterms. Στο τελευταίο κομμάτι, μελετώνται οι ομάδες επανακανονικοποίησης που προέρχονται από συγκεκριμένες ποσότητες εξάγοντας και αντίστοιχα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της θεωρίας.

2.1 Διαισθητική προσέγγιση των μεγάλων λογαρίθμων - Μεταβλητή σύζευξη

Στο υποκεφάλαιο αυτό, θα γίνει μελέτη της εξάρτησης τη σύζευξης από την κλίμακα. Αρχικά θα διερευνηθεί αυτή η συμπεριφορά με τα μέχρι τώρα επιχειρήματα αξιοποιώντας κυρίως τα 1-PI διαγράμματα.

Πιο συγκεκριμένα, το διάγραμμα πόλωσης κενού συνεισφέρει στο δυναμικό Coulomb σε 1^{ης} τάξης προσέγγιση, εάν γραφεί στην μετασχηματισμένη κατά

⁴Γνωστή και ως continuum renormalization group.

⁵Αν έχω Dimensional Regularization και \overline{MS} το $p_0 \rightarrow \mu$.

Fourier μορφή ως εξής:

$$\tilde{V}(p^2) = \frac{e_R^2}{p^2} \left[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{p^2}{p_0^2} \right) \right]$$

Εκ πρώτης όψεως δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα, αλλά αν διερευνήσει κανείς αριθμητικά το αποτέλεσμα ισχύουν τα εξής: $\frac{e_R^2}{12\pi^2} \sim 10^{-3}$ και για $p^2 \gg p_0^2$: $\ln \left(\frac{p^2}{p_0^2} \right) \geq 10^3$ η διόρθωση γίνεται συγκρίσιμη του tree-level όρου στο δυναμικό. Παρόλα αυτά δεν είναι αυτό που ανησυχεί ιδιαίτερα αλλά το γεγονός ότι ο δεύτερος όρος προσέγγισης θα είναι τότε $\left(\frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{p^2}{p_0^2} \right) \right)^2$ και έτσι θα είναι της ίδιας τάξης με τις προηγούμενες. Άρα σε κάποια κλίμακα η θεωρία διαταραχών καταρρέει. Για να εξακριβωθεί όντως αυτό πρέπει να μελετηθεί η συνεισφορά μεγαλύτερης τάξης. Αν συμπεριλάβω τη συνεισφορά όλων των 1-PI διαγραμμάτων στον υπολογισμό του $\tilde{V}(p^2)$:

$$\tilde{V}(p^2) = \frac{e_R^2}{p^2} \left[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{p^2}{p_0^2} \right) + \left(\frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{p^2}{p_0^2} \right) \right)^2 + \dots \right] = \frac{e_R^2}{p^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{p^2}{p_0^2}} \right)$$

και άρα ορίζω e_{eff} :

$$e_{eff}^2(p^2) = \frac{e_R^2}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{p^2}{p_0^2}}$$

Για να επιλυθεί το πρόβλημα κατάρρευσης της διαταραχής, γνωστό και ως πρόβλημα μεγάλων λογαρίθμων, πρέπει να διαπιστωθεί ότι οι όροι μεγαλύτερης τάξης δεν έχουν την ανάλογη μη επιθυμητή συμπεριφορά και άρα επιλύεται το πρόβλημα. Στην ουσία, αντί για συμπεριφορά $e_R^2 \left(\frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{p^2}{p_0^2} \right) \right)^n$ θα πρέπει να έχω $e_R^4 \left(\frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{p^2}{p_0^2} \right) \right)^n$. Είναι δηλαδή μίας επιπλέον τάξης προσέγγισης διαφορά, και άρα διατηρείται η διαταρακτική φύση. Κάτι τέτοιο δεν είναι ορατό, καθώς η μέχρι τώρα ανάλυση πρέπει να γίνει για υψηλότερης τάξης προσέγγιση. Προκειμένου να αποφευχθεί κάτι τέτοιο, είναι πιο εύκολο να αναπτυχθεί μεθοδολογία της ομάδας επανακανονικοποίησης όπως θα γίνει στη συνέχεια, αναδεικνύοντας έτσι τη σημασία της.

Έστω p_0^2 η κλίμακα που ορίζεται η επανακανονικοποιημένη σταθερά σύζευξης e_R^2 . Απαιτώντας την ανεξαρτησία του $\tilde{V}(p^2)$ από την κλίμακα p_0^2 έχω τα εξής:

$$p_0^2 \frac{d}{d(p_0^2)} \tilde{V}(p^2) = 0$$

Σκοπό είναι να γραφεί το $\tilde{V}(p^2)$ ως εξάρτηση από το p_0^2 . Η βασική σχέση που χρειάζεται είναι ότι $e_R^2 = e_{eff}^2(p_0^2)$ και άρα :

$$\tilde{V}(p^2) = \frac{e_R^2}{p^2} \left[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{p^2}{p_0^2} \right] = \frac{e_{eff}^2(p_0^2)}{p^2} \left[1 - \frac{e_{eff}^2(p_0^2)}{12\pi^2} \ln \frac{p_0^2}{p^2} \right]$$

Άρα:

$$\begin{aligned} p_0^2 \frac{d}{d(p_0^2)} \tilde{V}(p^2) &= \frac{p_0^2}{p^2} \left[2 \frac{de_{eff}}{dp_0^2} e_{eff} - \frac{de_{eff}}{dp_0^2} \frac{e_{eff}^3}{12\pi^2} 4 \ln \frac{p_0^2}{p^2} - \frac{e_{eff}^4}{12\pi^2} \frac{p^2}{p_0^2} \frac{1}{p^2} \right] = \\ &= \frac{1}{p^2} \left[2p_0^2 \frac{de_{eff}}{dp_0^2} e_{eff} - p_0^2 \frac{de_{eff}}{dp_0^2} \frac{e_{eff}^3}{3\pi^2} \ln \frac{p_0^2}{p^2} - \frac{e_{eff}^4}{12\pi^2} \right] \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση για να μπορεί να επιλυθεί διαταραχτικά ως προς e_{eff}^2 θα πρέπει να ισχύει ότι: $\frac{de_{eff}}{dp_0^2} \sim e_{eff}^3$. Έτσι επιλύεται το πρόβλημα των λογαρίθμων και εξάγεται εξής αποτέλεσμα, κρατώντας όρους έως $\mathcal{O}(e_{eff}^4)$:

$$\begin{aligned} 2p_0^2 \frac{de_{eff}}{dp_0^2} e_{eff} &= \frac{e_{eff}^4}{12\pi^2} \rightarrow \\ \rightarrow e_{eff}^2(p^2) &= \frac{e_R^2}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{p^2}{p_0^2}} \end{aligned}$$

όπου απλά επιλύθηκε η διαφορική εξίσωση και λήφθηκε υπόψη ότι $e_{eff}^2(p_0^2) = e_R^2$.

Καταλήγει κανείς στην ίδια σχέση με τη χρήση των 1-PI διαγραμμάτων μόνο που αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα των λογαρίθμων λαμβάνοντας υπόψη διαγράμματα μόνο 1^{ης} τάξης. Εδώ φαίνεται ένα πολύ σπουδαίο χαρακτηριστικό της ομάδας επανακανονικοποίησης, ότι περιλαμβάνει πληροφορία υψηλότερης τάξης προσέγγισης χωρίς να γίνει ρητή αναφορά σε αυτά, αλλά σε χαμηλότερης τάξης διαγράμματα.

Ανακεφαλαιώνοντας, άρχισε να αναδεικνύεται η σημασία της ομάδας επανακανονικοποίησης σε σχέση με τα μέχρι τώρα εργαλεία της θεωρίας, μέσω της επίλυσης του προβλήματος των λογαρίθμων. Το βήμα που μένει και ακολουθεί

είναι να συνδεθεί το πώς ακριβώς συνδέεται η λογαριθμική αυτή συμπεριφορά που προκύπτει διαταρακτικά, με μια συστηματική θεμελίωση της ομάδας επανακανονικοποίησης. Δηλαδή ακολουθεί η μετάβαση από μια διαισθητική προσέγγιση σε πιο αυστηρό φορμαλισμό.

Το πρόβλημα των λογαρίθμων ισχύει όταν $\frac{p^2}{p_0^2} \gg 1$. Τα p^2, p_0^2 αντιπροσωπεύουν κάποιες κλίμακες. Συνεπώς η παραπάνω έκφραση μεταφράζεται στο γεγονός ότι κάποια μία κλίμακα είναι πολύ μεγαλύτερη ή μικρότερη από τις υπόλοιπες⁶. Για το διάγραμμα πόλωσης του κενού στην QED, ισχύει ότι $p^2 \gg m^2$, όπου m : μάζα ηλεκτρονίου και μπορώ κατά 1^η προσέγγιση να θεωρήσω το $m \rightarrow 0$. Άρα θα έχω:

$$\mathcal{M}(p^2) = e_R^2 \mathcal{M}_2(p^2) + \delta_3 = \frac{e_R^2}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{-p^2} + c \right) + \delta_3$$

όπου c : όρος ανεξάρτητος του p . Ο λογαριθμικός όρος είναι χαρακτηριστικό κβαντικής φύσεως των loops. Οι ομάδα επανακανονικοποίησης εστιάζει σε αυτής την κβαντική συμπεριφορά αναδεικνύοντας πτυχές κβαντικών φαινομένων σε αρκετά μεγάλο βαθμό έτσι ώστε να γίνουν εύκολα αντιληπτά.

Γνωρίζοντας ότι $\delta_3 = -\frac{e_R^2}{12\pi^2} \frac{2}{\epsilon}$ και $p^2 \rightarrow -p^2$ ισχύει το εξής:

$$\mathcal{M}(p^2) = \frac{e_R^2}{12\pi^2} \left(\ln \frac{\mu^2}{p^2} + c \right)$$

Δηλαδή η συνεισφορά του λογαρίθμου της φυσικής κλίμακας p^2 αντισταθμίζεται από την αντίστοιχη του λογαρίθμου της μη-φυσικής κλίμακας μ^2 .

Ορισμένα ενδιαφέροντα συμπεράσματα εξάγονται εάν αναλογιστεί κανείς τους ρόλους των ϵ, μ . Το ϵ συνδέεται με την εμφάνιση πόλων μέσω του $\frac{1}{\epsilon}$ και υποδηλώνει τις UV-divergencies. Από την άλλη, το μ^7 αντιμετωπίζεται πλέον ως ψευδο-φυσική κλίμακα δηλαδή ενώ είναι μη-φυσική κλίμακα, αντιμετωπίζεται ως φυσική κλίμακα στην οποία υφίσταται η επανακανονικοποίηση της θεωρίας, γνωστή και ως κλίμακα επανακανονικοποίησης. Παρόλο που επιλέγεται, το μ ώστε να είναι μία φυσική κλίμακα πρέπει να μην υφίσταται εξάρτηση των αποτελεσμάτων από το μ . Κάτι που βασίζεται στο γεγονός ότι εξ αρχής ορίστηκε ως μία αυθαίρετη μη-φυσική κλίμακα κατά την Διαστατική ομαλοποίηση.

Θα γίνει εμφανές και στη συνέχεια ότι η ανεξαρτησία από το μ για τα φυσικά πλάτη των διαγραμμμάτων, στη γενική περίπτωση των διαγραμμμάτων πόλωσης, όταν δηλαδή εξάγω την ομάδα επανακανονικοποίησης για την σταθερά σύζευξης, προκύπτει από την ακύρωση της εξάρτησης της συνεισφοράς των loops από

⁶εν γένει υπάρχουν πολλές

⁷Γενικά έχει μικρή τιμή

το μ με τη εξάρτηση της σταθεράς σύζευξης από το μ .

Τέλος, έστω στην περίπτωση του διαγράμματος πόλωσης κενού, το μη επανακανονικοποιημένο πλάτος προκύπτει ως εξής από τη διαστατική ομαλοποίηση :

$$\mathcal{M} \sim \mu^\epsilon \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln p^2 + \dots \right) = (1 + \epsilon(\ln \mu)) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln p^2 \right) + \dots = \frac{2}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{p^2} + \dots$$

Έτσι προκύπτει ότι το $\ln \mu^2$ οφείλει την ύπαρξη του στο $\frac{2}{\epsilon}$. Στο μη επανακανονικοποιημένο πλάτος του διαγράμματος τα ϵ και μ δεν είναι διαχωρίσιμα. Αυτό το συμπέρασμα είναι πολύ πιο σπουδαίο από όσο φαίνεται με την πρώτη ματιά καθώς είναι το κλειδί για τη συστηματοποίηση της ομάδας επανακανονικοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, η σύνδεση της λογαριθμικής συμπεριφοράς με τις UV-divergencies συνεπάγεται την εξαγωγή της πρώτης από τους counterterms καθώς αποτελούν έκφραση ως προς το ϵ . Έτσι δίνεται η τεράστια δυνατότητα να επιτευχθεί η μ -ανεξαρτησία από τους counterterms και μόνο και αυτό όπως θα γίνει κατανοητό στη συνέχεια είναι πολύ σημαντικό.

2.2 Ομάδα Επανακανονικοποίησης δια μέσω counterterms-Συστηματοποίηση

Η επιθυμητή θεμελίωση της συστηματοποίησης της ομάδας επανακανονικοποίησης όπως σημειώθηκε παραπάνω, θα επέλθει μέσω των counterterms της θεωρίας.

2.2.1 Εξίσωση ομάδας επανακανονικοποίησης για τη σταθερά σύζευξης

Αρχικά, λαμβάνει χώρα από τη μελέτη της Lagrangian, η οποία είναι εκφρασμένη ως προς τις bare φυσικές ποσότητες $\psi^0, e^0, A_\mu^0, m^0$. Έτσι η μορφή της είναι:

$$L_{bare} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}^0 (i\not{\partial} - e^0\gamma^\mu A_\mu^0 - m^0) \psi^0$$

Και από διαστατική ανάλυση, στις $d = 4 - \epsilon$ διαστάσεις τα παραπάνω μεγέθη έχουν τις εξής διαστάσεις:

$$[\partial_\mu] = [m^0] = 1$$

$$[L_{bare}] = d$$

$$2[\psi^0] + 1 = d \rightarrow [\psi^0] = \frac{d-1}{2}$$

$$[F_{\mu\nu}^0] = [\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0] = 2[A_\mu^0] + 2 = d \rightarrow [A_\mu^0] = \frac{d-2}{2}$$

$$[e^0] + 2[\psi^0] + [A_\mu^0] = [e^0] + d - 1 + \frac{d-2}{2} = d \rightarrow [e^0] = \frac{4-d}{2}$$

Παρατηρώντας ότι e^0 στις 4 διαστάσεις είναι αδιάστατο, και με την απαίτηση ότι θέλω αυτό να διατηρείται και μετά την επανακανονικοποίηση, οι bare ποσότητες επανακανονικοποιούνται ως εξής:

$$A_\mu^R = \frac{1}{\sqrt{Z_3}}A_\mu^0, \quad \psi^R = \frac{1}{\sqrt{Z_2}}\psi^0, \quad m_R = \frac{1}{Z_m}m^0, \quad e_R = \frac{1}{Z_e}\mu^{\frac{4-d}{2}}e^0$$

Έτσι η επανακανονικοποιημένη Lagrangian, θέτοντας $A_\mu, \psi \rightarrow A_\mu^R, \psi^R$:

$$L_{ren} = -\frac{1}{4}Z_3F_{\mu\nu}^2 + iZ_2\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m_RZ_2Z_m\bar{\psi}\psi - \mu^{\frac{4-d}{2}}e_RZ_eZ_2\sqrt{Z_3}\bar{\psi}A\psi$$

Τα e_R, Z_i είναι αδιάστατα. Το e_R είναι αδιάστατο στις d διαστάσεις εξαιτίας του παράγοντα $\mu^{\frac{4-d}{2}}$. Έτσι, έχει εισαχθεί με έμμεσο τρόπο κατά τη διαδικασία της επανακανονικοποίησης το μ στην L_{ren} ενώ στην L_{bare} κάτι τέτοιο δεν υφίσταται.

Δηλαδή το L_{ren} έχει ρητή εξάρτηση από το μ ενώ το L_{bare} όχι. Συγκεκριμένα η εξάρτηση αυτή προκύπτει από την επανακανονικοποίηση του e^0 ενώ εξ αρχής δεν υπήρχε. Αυτό, μαθηματικά εκφράζεται ως εξής:

$$0 = \frac{d}{d\mu} e^0 = \frac{d}{d\mu} (\mu^{\frac{\epsilon}{2}} e_R Z_e) = \mu^{\frac{\epsilon}{2}} e_R Z_e \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{\mu}{e_R} \frac{d}{d\mu} e_R + \frac{\mu}{Z_e} \frac{d}{d\mu} Z_e \right]$$

- Σε μηδενικής τάξης διαταραχών ($Z_e = 1$):

$$\frac{d}{d\mu} Z_e = 0 \rightarrow \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\mu}{e_R} \frac{d}{d\mu} e_R \right) = 0 \rightarrow \mu \frac{d}{d\mu} e_R = -\frac{\epsilon}{2} e_R$$

- Σε 1^{ης} τάξης διαταραχών ($Z_e = 1 + \delta_e = 1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$):

$$\mu \frac{d}{d\mu} Z_e = \mu \frac{d}{d\mu} \left(1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right) = 2\mu \frac{1}{\epsilon} \frac{e_R^2}{12\pi^2} \frac{d}{d\mu} e_R = \frac{e_R}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \mu \frac{d}{d\mu} e_R = \frac{e_R}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{\epsilon}{2} \right) e_R = -\frac{e_R^2}{12\pi^2}$$

Άρα έως 1^{ης} τάξης προσέγγιση η αρχική εξίσωση θα γίνει:

$$\frac{\epsilon}{2} + \frac{\mu}{e_R} \frac{d}{d\mu} e_R + \frac{\mu}{Z_e} \frac{d}{d\mu} Z_e = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu \frac{d}{d\mu} e_R = -\frac{\epsilon}{2} e_R - \frac{\mu}{Z_e} e_R \frac{d}{d\mu} Z_e = -\frac{\epsilon}{2} e_R + \frac{e_R^3}{12\pi^2} \left(\underbrace{1 - \delta_e}_{Z_e^{-1}} \right) \stackrel{\mathcal{O}(e_R^3)}{=} -\frac{\epsilon}{2} e_R + \frac{e_R^3}{12\pi^2}$$

Και ορίζεται η λεγόμενη συνάρτηση- β σε 1-loop: $\beta(e_R^2) = \mu \frac{d}{d\mu} e_R = -\frac{\epsilon}{2} e_R + \frac{e_R^3}{12\pi^2}$. Για $\epsilon \rightarrow 0$ η παραπάνω εξίσωση καταλήγει στο αποτέλεσμα που εξήχθη με την προηγούμενη προσέγγιση που ακολουθήθηκε. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ σπουδαίο, καθώς μόνο από τους counterterms εξήχθη η εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης.

Ένα άλλο λεπτό σημείο, στην εύρεση του ίδιου αποτελέσματος αποτελεί το ότι προηγουμένως χρησιμοποιήθηκε το διάγραμμα πόλωσης του κενού ενώ τώρα η επανακανονικοποίηση της σταθεράς σύζευξης (e_R). Εν γένει δεν θα κατέληγα στο ίδιο αποτέλεσμα από τις δύο μεθόδους. Κάτι τέτοιο οφείλεται στην ιδιομορφία της QED όπου $Z_1 = Z_2$ και άρα $Z_e = \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} = \frac{1}{\sqrt{Z_3}}$ και έτσι μπορεί ισοδύναμα να εξαχθεί το ίδιο αποτέλεσμα και από το Z_3 (διάγραμμα πόλωσης κενού) αλλά και από το Z_e . Κάτι αντίστοιχο δεν ισχύει για την QCD

όπου $Z_1 \neq Z_2$.

Αν ορίσω $\alpha = \frac{e_R^2}{4\pi}$ και $\frac{de_R}{d\mu} = \frac{de_R^2}{\mu} \frac{de_R}{de_R^2} = \frac{4\pi}{2e_R} \mu \frac{d\alpha}{d\mu}$:

$$\beta(\alpha) \equiv \mu \frac{d\alpha}{d\mu} \stackrel{\text{ansatz}}{=} -2\alpha \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\alpha}{4\pi} \beta_0 + \left(\frac{\alpha}{4\pi} \right)^2 \beta_1 + \dots \right)$$

Από τον προηγούμενο υπολογισμό η συνάρτηση-β είναι:

$$\beta = \frac{2e_R}{4\pi} \left(-\frac{\epsilon}{2} e_R + \frac{e_R^3}{12\pi^2} + \dots \right) = 2\alpha \left(-\frac{\epsilon}{2} + \frac{e_R^2}{(4\pi)(3\pi)} + \dots \right) = 2\alpha \left(-\frac{\epsilon}{2} + \alpha \frac{4}{3} \frac{1}{4\pi} + \dots \right)$$

Άρα κατά αντιστοιχία $\beta_0 = -\frac{4}{3}$. Επιστρέφοντας στις 4-διαστάσεις ($\epsilon \rightarrow 0$):

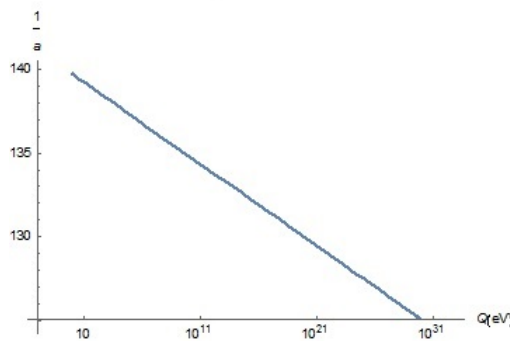
$$\beta(\alpha) = -\frac{2\alpha^2}{4\pi} \beta_0 \rightarrow \frac{d\alpha}{\alpha^2} = -\frac{\beta_0}{2\pi} \frac{d\mu}{\mu} \rightarrow -\frac{1}{\alpha} = -\frac{\beta_0}{2\pi} \ln \mu + \ln c \rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{\beta_0}{2\pi} \ln \frac{\mu}{c} \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln \frac{\mu}{c}}$$

όπου c σταθερά ολοκλήρωσης και μένει να υπολογισθεί:

$$\alpha \Big|_{\mu=m_e=511\text{KeV}} = \frac{1}{137} = \frac{-6\pi}{4} \frac{1}{\ln \frac{511 \cdot 10^3}{c}} \rightarrow \frac{-6\pi \cdot 137}{4} = \ln(511 \cdot 10^3) - \ln c \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln c = \frac{6\pi 137}{4} + \ln(511 \cdot 10^3) = \ln c \rightarrow c = \Lambda_{QED} = 10^{286}$$

όπου Λ_{QED} ο επονομαζόμενος Landau pole της QED.



Σχήμα 2.1: Γράφημα του $\frac{1}{\alpha}$ ως προς το $\log(Q)$, όπου το Q σε eV.

Η τελευταία μορφή κρύβει το γεγονός ότι ενώ πριν χρειαζόταν να μετρηθεί το $\alpha(\mu)$ και συγκεκριμένη κλίμακα Λ_{QED} για να προσδιορισθεί η θεωρία, τώρα αρκεί η μόνο το Λ_{QED} καθώς το α φέρει εξάρτηση από το Λ_{QED} . Πιο

συγκεκριμένα, η θεωρία δεν προσδιορίζεται από την σταθερά σύζευξης αλλά προσδιορίζεται πλήρως από τον λόγο $\frac{\mu}{\Lambda_{QED}}$ ο οποίος είναι ο λόγος δύο κλιμάκων της θεωρίας.

Από το γράφημα της σταθεράς σύζευξης της QED ως προς την κλίμακα, παρατηρεί κανείς λοιπόν ότι για $\mu \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ ή ισοδύναμα η σταθερά σύζευξης μηδενίζεται για μεγάλες αποστάσεις. Αυτή η συμπεριφορά ονομάζεται Υπέροθη ελευθερία (infrared freedom).

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα διερευνηθεί η εξαγωγή των εξισώσεων ομάδων επανακανονικοποίησης για άλλα μεγέθη όπως η μάζα του ηλεκτρονίου. Η bare μάζα m^0 πρέπει να είναι ανεξάρτητη του μ :

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} m^0 = \mu \frac{d}{d\mu} (Z_m m_R) = Z_m m_R \left(\frac{\mu}{m_R} \frac{d}{d\mu} m_R + \frac{\mu}{Z_m} \frac{d}{d\mu} Z_m \right)$$

Ορίζοντας την ανώμαλη διάσταση ως $\gamma_m \equiv \frac{\mu}{m_R} \frac{d}{d\mu} m_R$ και άρα:

$$\begin{aligned} \gamma_m &= -\frac{\mu}{Z_m} \frac{d}{d\mu} Z_m = -\frac{1}{Z_m} \mu \frac{d}{de_R} Z_m \underbrace{\frac{d}{d\mu} e_R}_{\beta_{e_R}} = -\frac{1}{1 + \delta_m} \left(\frac{d}{de_R} \left[1 - \frac{e_R^2}{16\pi^2} \frac{6}{\epsilon} \right] \right) \beta(e_R) = \\ &= (1 - \delta_m) \left(\frac{2}{e_R} \frac{6e_R^2}{16\pi^2 \epsilon} \right) \left(-\frac{\epsilon}{2} e_R + \frac{e_R^3}{12\pi^2} \right) \stackrel{\mathcal{O}(e_R^2)}{=} \epsilon \delta_m = \frac{-3e_R^2}{8\pi^2} \end{aligned}$$

2.2.2 Εξίσωση ομάδας επανακανονικοποίησης για τελεστές

Στη συνέχεια θα μελετηθεί η εξάρτηση τελεστών που δεν περιέχονται στη Lagrangian όπως το ρεύμα J_μ , από τη κλίμακα και μπορούν να εξαχθούν διάφορα χρήσιμα συμπεράσματα για τη θεωρία. Για την περίπτωση του ρεύματος, το οποίο εμφανίζεται στις συναρτήσεις Green ισχύει το εξής:

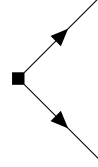
$$J_\mu(x) = Z_J \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

Το πρώτο βήμα στην όλη ανάλυση είναι η εύρεση του Z_J . Η εύρεση αυτή απαιτεί τη μελέτη της 3-point function που περιλαμβάνει $J_\mu, \psi, \bar{\psi}$:

$$\langle J_\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} e^{-ipx} e^{-iq_1 x_1} e^{iq_2 x_2} i \mathcal{M}^\mu(p, q_1, q_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q_1 - q_2)$$

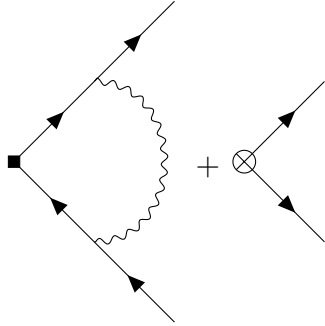
Πρέπει να υπολογισθεί το $\mathcal{M}^\mu(p, q_1, q_2)$ έως πρώτης τάξης:

- Tree-level:



$$= iM_{tree}^\mu(p, q_1, q_2) = \frac{i}{\not{q}_1 - m} \gamma^\mu \frac{i}{\not{q}_2 - m}$$

- 1-loop level: (Η έκφραση σε Feynman Gauge σε d-διαστάσεις:)



$$= iM_{1-loop}^\mu =$$

$$= \frac{i(-ie_R)^2 \mu^{4-d}}{\not{q}_1 - m} \left[\underbrace{\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i\gamma^\nu (\not{q}_1 - \not{k} + m)}{(q_1 - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{i(\not{q}_2 - \not{k} + m)}{(q_2 - k)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{-i}{k^2}}_{\text{divergent graph}} + \underbrace{\gamma^\mu \delta_J}_{\text{counterterm}} \right] \frac{i}{\not{q}_2 - m}$$

Αρκεί το δ_J και κατά συνέπεια το αποκλίνον κομμάτι του διαγράμματος από το οποίο θα υπολογισθεί το δ_J σε \overline{MS} . Κρατώντας $k \gg q_i$ ο πρώτος όρος M_{div}^μ μετατρέπεται ως εξής:

$$M_{div}^\mu = \frac{i}{\not{q}_1 - m} \left[(-ie_R^2) \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \not{k} \gamma_\nu}{k^6} \right] \frac{i}{\not{q}_2 - m}$$

Με λίγες πράξεις, βασιζόμενες στις ταυτότητες για τους πίνακες γ στις d -διαστάσεις.

$$\begin{aligned} \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \not{k} \gamma_\nu &= \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\nu k^\rho k^\sigma = \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\nu g^{\rho\sigma} \frac{k^2}{d} = \\ &= \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu \frac{k^2}{d} = (-2 + \epsilon) \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \frac{k^2}{d} = (-2 + \epsilon)^2 \gamma^\mu \frac{k^2}{d} = \frac{(2-d)^2}{d} \gamma^\mu k^2 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} M_{div}^\mu &= \frac{i}{\not{q}_1 - m} \gamma^\mu \frac{i}{\not{q}_2 - m} \left[(-ie_R^2) \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{(2-d)^2}{d} \frac{1}{k^4} \right) \right] \stackrel{2-d \rightarrow 1, d \rightarrow 4}{=} \\ &= \frac{i}{\not{q}_1 - m} \gamma^\mu \frac{i}{\not{q}_2 - m} (-ie_R^2) \mu^{4-d} \frac{2}{\epsilon} \frac{i}{16\pi^2} \end{aligned}$$

Άρα:

$$iM_{1-loop}^\mu = iM_{tree}^\mu \left(\frac{2}{\epsilon} \frac{e_R^2}{16\pi^2} + \delta_J + finite \right)$$

Άρα $\delta_J = \delta_1 = \delta_2 = -\frac{2}{\epsilon} \frac{e_R^2}{16\pi^2}$ και $Z_J = Z_2$. Επιστρέφοντας στην εξίσωση ομάδας επανακανονικοποίησης:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} J_{bare}^\mu = \mu \frac{d}{d\mu} \left(\frac{Z_2}{Z_J} J^\mu \right) = \mu \frac{d}{d\mu} J^\mu \rightarrow \frac{d}{d\mu} J^\mu = 0$$

Δηλαδή το ρεύμα δεν εξαρτάται από την κλίμακα και μετά την επανακανονικοποίηση. Αυτό το συμπέρασμα είναι πολύ σημαντικό καθώς υποδηλώνει ότι ο αριθμός σωματιδίων και ο αριθμός αντισωματιδίων της θεωρίας δεν αλλάζει με την κλίμακα.

2.2.3 Εξίσωση ομάδας επανακανονικοποίησης για τις συναρτήσεις Green

Στη συνέχεια θα αναλυθεί η εξάρτηση των συναρτήσεων Green από την κλίμακα. Έστω η bare συνάρτηση Green n-φωτονίων και m- φερμιονίων στα πλαίσια της QED:

$$G_{n,m}^0 = \langle A_\mu^0, 1 \dots A_\mu^0, n \psi_1^0 \dots \psi_m^0 \rangle$$

Ενώ η επανακανονικοποιημένη εκδοχή της είναι :

$$G_{n,m} = G_{n,m}^0 \frac{1}{Z_3^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{Z_2^{\frac{m}{2}}}$$

Το $G_{n,m} = G_{n,m}(p, e_R(\mu), e_R(\mu), \mu)$ και άρα η εξίσωση ομάδας επανακανονικοποίησης θα γίνει:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} G_{n,m}^0 = Z_2^{\frac{m}{2}} Z_3^{\frac{n}{2}} \left(\mu \frac{d}{d\mu} + \underbrace{\frac{n}{2} \frac{\mu}{Z_3} \frac{d}{d\mu} Z_3}_{\gamma_3} + \underbrace{\frac{m}{2} \frac{\mu}{Z_2} \frac{d}{d\mu} Z_2}_{\gamma_2} + \mu \frac{e_R}{d\mu} \frac{d}{de_R} + \mu \frac{dm_R}{d\mu} \frac{d}{dm_R} \right) G_{n,m} \rightarrow$$

$$\left(\mu \frac{d}{d\mu} + \frac{n}{2} \gamma_3 + \frac{m}{2} \gamma_2 + \beta \frac{d}{de_R} + m_R \gamma_m \frac{d}{dm_R} \right) G_{n,m} = 0$$

όπου αναλόγως το scheme που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των δ_i και άρα των Z_i η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται Callan -Symanzik, Gell-Mann - Low, 'tHooft -Weinberg, Georgi -Politzer. Στην περίπτωση που υπήρχε και

έναν τελεστής \mathcal{O} η εξίσωση θα γινόταν:

$$\left(\mu \frac{d}{d\mu} + \frac{n}{2} \gamma_3 + \frac{m}{2} \gamma_2 + \beta \frac{d}{de_R} + m_R \gamma_m \frac{d}{dm_R} + \sum_i \gamma_{\mathcal{O}_i} \right) G_{n,m} = 0$$

Για να ολοκληρωθεί η μέχρι τώρα ανάλυση περί της θεωρίας των εξισώσεων ομάδας επανακανονικοποίησης αξίζει να δοθεί μία πιο αναλυτική φυσική αιτιολόγηση περί τίνος πρόκειται η ανώμαλη διάσταση.

Αρχικά, ορίζεται ο μετασχηματισμός διαστολής \mathcal{D} ο οποίος εφαρμόζεται σε σταθερά σύζευξης, πεδίο, μάζα ή τελεστή, έτσι ώστε η δράση να μένει αναλλοίωτη:

$$\mathcal{D} : \mathcal{X} \rightarrow \lambda^{d_0} \mathcal{X}$$

όπου \mathcal{X} = σταθερά σύζευξης, πεδίο, μάζα ή τελεστής. Το d_0 ονομάζεται διάσταση κανονική κλίμακας του εκάστοτε

λατβαρε μεγέθους. Ο μετασχηματισμός αυτός υποδηλώνει το πώς πρέπει να μετασχηματισθεί ένα μέγεθος/παράμετρος της Lagrangian όταν αλλάξει η κλίμακα με την απαίτηση να διατηρηθεί αναλλοίωτη η Lagrangian.

Μελετώντας την κλασική θεωρία (πριν την επανακανονικοποίηση) η συνάρτηση Green $G(m, g)$ έχει διάσταση κανονικής κλίμακας, έστω n . Για την κβαντική θεωρία, στη συνάρτηση Green υπεισέρχεται και η κλίμακα επανακανονικοποίησης μ δηλαδή $G(m, g, \mu)$. Υποθέτοντας ότι η εξάρτηση του G από το μ είναι της μορφής μ^γ τότε μετά το μετασχηματισμό διαστολής, ο οποίος δεν εφαρμόζεται στο μ^γ , ο αντίστοιχος αριθμός της διάστασης της κανονικής κλίμακας δεν είναι n αλλά $n - \gamma$. Δηλαδή οι συμπεριφορές ως προς την κλίμακα μεταξύ κβαντικής και κλασικής θεωρίας είναι διαφορετικές, που αναδεικνύεται από το γ . Επίσης από πράξεις ισχύει ότι:

$$\mu \frac{d}{d\mu} G = \gamma G$$

Δηλαδή το γ είναι η ανώμαλη διάσταση. Άρα η ανώμαλη διάσταση φανερώνει τυχόν αποκλίσεις από την κλασική συμπεριφορά της κλίμακας.

Για την μετάβαση στο τελευταίο υποκεφάλαιο αυτού του κεφαλαίου θα αναφερθεί απλά ότι η ανώμαλη διάσταση γ σχετίζεται με την ανάπτυξη θεωρίας περί κρίσιμων εκθετών και καθολικών συμπεριφορών διαφορετικών φυσικών συστημάτων, αναδεικνύοντας έτσι την ομορφιά της κβαντικής φυσικής αλλά και την εκπληκτική συμφωνία των προβλέψεων της με το πείραμα.

2.3 Ροή Ομάδας Επανακανονικοποίησης

Ένα αξιοσημείωτο γεγονός που παρατηρείται στη φύση είναι ότι διαφορετικής φύσεως συστήματα εμφανίζουν πανομοιότυπη συμπεριφορά της κλίμακας κοντά

στην μετάβαση 2^{ης} τάξης. Ισοδύναμα, μπορεί κανείς να πει ότι για διαφορετικά μικροσκοπικά συστήματα μπορώ να έχω την ίδια effective θεωρία η οποία συμβαίνει να είναι και αναλλοίωτη της κλίμακας (scale invariant). Μέχρι τώρα έχοντας καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η σταθερά σύζευξης της QED εξαρτάται από την κλίμακα εξάγεται το συμπέρασμα ότι δεν είναι scale invariant . Παρόλα αυτά θα εξετασθεί στη συνέχεια η έννοια της scale invariance και της καθολικής φύσης της συμπεριφοράς της κλίμακας.

Όλες οι παραπάνω έννοιες επεξηγούνται καλύτερα με ένα παράδειγμα. Έστω, ένα υλικό του οποίου η μετάβαση από την υγρή στην αέρια κατάσταση χαρακτηρίζεται από ένα κρίσιμο σημείο στο οποίο είναι 2^{ης} τάξης. Επιπλέον ορίζεται ένα χαρακτηριστικό μήκος κλίμακας, το μήκος συσχέτισης ξ το οποίο εμφανίζει συμπεριφορά $\xi \sim (T - T_c)^{-\nu}$ όπου το $\nu = 0.63$ για την προκειμένη περίπτωση. Το ν αποτελεί παράδειγμα ενός κρίσιμου εκθέτη. Υπάρχει μεγάλο πλήθος και άλλων παραδειγμάτων που εμφανίζουν τέτοια συμπεριφορά κλίμακας, προσδιορισμένη από το συγκεκριμένο κρίσιμο εκθέτη, η οποία σηματοδοτεί μία κλάση καθολικότητας τη λεγόμενη κλάση καθολικότητας του 3D Ising μοντέλου. Για το παραπάνω μοντέλο για την effective θεωρία στο σημείο μετάβασης αρκεί ένα scalar πεδίο $\phi(x)$ και κοντά στο οριακό σημείο σύμφωνα με το μοντέλο Ginzburg-Landau η Lagrangian θα είναι:

$$L_{G-L} = L_{Kin} - \underbrace{\frac{1}{2}(T - T_c)\phi^2}_{\text{όρος μάζας}} - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 + \dots$$

όπου ορίζεται αφηρημένα η μάζα ως $m = (T - T_c)^{1/2}$.

- Για $T \geq T_c \rightarrow m^2 \geq 0$ το ξ είναι πεπερασμένο
- Για $T \leq T_c \rightarrow m^2 \leq 0$ παρατηρείται αυθόρμητη παραβίαση συμμετρίας και το σύστημα εισέρχεται σε διαφορετική φάση.

Έτσι απλά γίνεται η μελέτη μίας βαθμωτής θεωρίας πεδίου με Lagrangian

$$L = -\frac{1}{2}\phi\Box\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4$$

και αρχίζει η επανακανονικοποίηση ως ακολούθως:

$$L = -\frac{1}{2}Z_\phi\phi\Box\phi - \frac{1}{2}Z_m Z_\phi m_R^2 \phi^2 - \frac{1}{4!}\mu^{4-d} Z_\lambda Z_\phi^2 \lambda_R \phi^4$$

Η εξίσωση ομάδας επανακανονικοποίησης για το m_R^2 είναι:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} m_R^2 = \mu \frac{d}{d\mu} (m_R^2 Z_m) = m_R^2 Z_m \left(\frac{\mu}{m_R^2} \frac{d}{d\mu} m_R^2 + \frac{\mu}{Z_m} \frac{d}{d\mu} \delta_m \right)$$

Αρκεί να ευρεθεί η μορφή του δ_m . Τα γραφήματα που δίνουν διόρθωση στον όρο μάζα σε 1^η τάξη είναι το αποκλίνον διάγραμμα και το διάγραμμα του counterterm. Το αποκλίνον διάγραμμα δίνει συνεισφορά:

$$-i \frac{\lambda_R}{2} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m_R^2} = \frac{\lambda_R m_R^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + (\text{finite})$$

ενώ ο counterterm δίνει:

$$i\delta_\phi(p^2 - m_R^2) - i\delta_m m_R^2$$

Σαν σχόλιο, αξίζει να επισημανθεί ότι το αποκλίνον διάγραμμα έχει τετραγωνική απειρία η οποία είναι κρυμμένη καθώς το $\frac{1}{\epsilon}$ αναδεικνύει απλά την απειρία χωρίς να την κατηγοριοποιεί. Παρόλα αυτά δεν είναι υπάρχει πρόβλημα στην εξαγωγή της εξίσωσης ομάδας επανακανονικοποίησης καθώς συνεισφέρουν μόνο οι λογαριθμική συμπεριφορά και έτσι όποια και αν είναι αυτή περιλαμβάνεται στη συνεισφορά.

Στη συνέχεια, οι counterterms υπολογίζονται ως εξής:

$$\delta_\phi = 0, \delta_m = \frac{\lambda_R}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$$

Άρα η εξίσωση ομάδας επανακανονικοποίησης για την μάζα γίνεται:

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_R^2 = \frac{\lambda_R}{16\pi^2} m_R^2$$

Η εξίσωση ομάδας επανακανονικοποίησης για την σταθερά σύζευξης λ είναι η εξής:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_0 = \mu \frac{d}{d\mu} (\mu^{4-d} \lambda_R Z_\lambda) = \mu^\epsilon \lambda_R Z_\lambda \left(\epsilon + \frac{\mu}{\lambda_R} \frac{d}{d\mu} \lambda_R + \frac{\mu}{Z_\lambda} \frac{d}{d\mu} \delta_\lambda \right) \rightarrow \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R = -\epsilon \lambda + \frac{3\lambda_R^2}{16\pi^2}$$

Η βασική ιδέα τώρα είναι ότι το σύστημα εξαρτάται από τις ποσότητες m_R^2, λ_R οι οποίες εξαρτώνται από το μ έτσι, η συμπεριφορά του συστήματος από την κλίμακα εκφράζεται μέσω της τροχιάς $(m_R^2(\mu), \lambda_R(\mu))$. Η τροχιά αυτή ονομάζεται ροή ομάδας επανακανονικοποίησης.

Το αξιοσημείωτο είναι ότι για κάποιες τιμές του m_R^2, λ_R το δεξί μέλος των εξισώσεων ομάδας επανακανονικοποίησης μηδενίζεται, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχουν σημεία⁸ που είναι ανεξάρτητα της κλίμακας και άρα απαντώνται σε όλα τα συστήματα. Αυτό υποδηλώνει το χαρακτήρα καθολικότητας. Για την εύρεση

⁸Τα λεγόμενα fixed points

του εκθέτη καθολικότητας αρκεί ένα τέτοιο εξέχον σημείο. Για την παραπάνω περίπτωση μπορεί να ευρεθεί ότι $\nu = \frac{1}{2 - \gamma_m}$ και άρα πρέπει να υπολογισθεί το γ_m στην εκάστοτε περίπτωση.

Επιστρέφοντας στην περίπτωση του $3D-Ising$ μοντέλου, που έχουμε 3 διαστάσεις ($d = 3$) αναρωτιέται κανείς ποια είναι η συμπεριφορά της τροχιάς ανάλογα την θέση ως προς fixed point. Κοντά στο fixed point ισχύει σε πρώτη τάξη ότι $\frac{d \ln \lambda_R}{d \mu} = -\epsilon$. Άρα για $\epsilon > 0$ ($d < 4$) η τροχιά πλησιάζει προς το fixed point, αλλιώς απομακρύνεται από αυτό.

Αντί για $d = 3$, εξετάζεται η $d = 4 - \epsilon$ και για $0 < \epsilon \ll 1$ τα fixed points είναι:

$$\lambda = \frac{16\pi^2\epsilon}{3}, m = 0$$

και ονομάζονται Wilson fixed points. Αυτά τα μεγέθη εξαρτώνται από το scheme αφού φέρουν εξάρτηση από το ϵ , αλλά ο κρίσιμος εκθέτης είναι ένα φυσικό μέγεθος το οποίο μετράται και πειραματικά. Εν τέλει, $\gamma_m = \frac{\lambda_R}{16\pi^2} \stackrel{\lambda_R = \frac{16\pi^2\epsilon}{3}}{=} \frac{\epsilon}{3}$. Άρα:

$$\nu = \frac{3}{6 - \epsilon}$$

Και για $d = 3$ ($\epsilon = 1$) το $\nu = 0.6 \approx 0.63$ όπου καλύτερη προσέγγιση γίνεται σε υψηλότερη τάξη βρόγχων. Ενδεικτικά, υπάρχουν και άλλες μέθοδοι πιο ακριβείς.

Τέλος, τα fixed points είναι πολύ σημαντικά καθώς εκεί οι θεωρίες είναι scale invariant, πράγμα πολύ σπάνιο για κβαντικές θεωρίες πεδίου, γνωστές και ως conformal field theories με σπάνιες και ξεχωριστές ιδιότητες.

3 Υπολογισμοί σε 1-loop τάξη-Επανακανονικοποίηση της QCD

Μέχρι τώρα έγινε η μελέτη της QED η οποία αποτελεί μία θεωρία που περιγράφεται από μια αβελιανή ομάδα. Από αυτή έγιναν υπολογισμοί σε επίπεδο 1-loop, στη συνέχεια η επανακανονικοποίηση της θεωρίας και ακολούθως η εξαγωγή της β -συνάρτησης με τον αντίστοιχο σχολιασμό.

Από δω και στο εξής θα γίνει η μελέτη της QCD, που περιγράφεται από μια μη-αβελιανή ομάδα και μοντελοποιεί την ισχυρή αλληλεπίδραση. Είναι ένα εξέχον παράδειγμα θεωρίας καθώς εμφανίζουν ιδιάζουσα συμπεριφορά (εισαγωγή ghosts) και αποτελούν καλό παράδειγμα θεωρίας που εμφανίζει διαφορετική συμπεριφορά κλίμακας από ότι η QED. Έτσι, στο τέλος αξίζει να υπολογισθεί η β -συνάρτηση της σταθερά σύζευξης και να γίνει συγκριτική μελέτη με την αντίστοιχη της QED.

Αναφορικά, η μη αβελιανή της $SU(3)$ μοντελοποιεί τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις που σε αντίθεση με τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις αναγνωρίζει 3 φορτία (χρώματα) εισάγοντας ως vector bosons (φορείς αλληλεπίδρασης) τα 8 γλόυονια (τα οποία είναι άμαζα).

Αντίστοιχη μοντελοποίηση θα ίσχυε για την $SU(2)$ που μοντελοποιεί τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις αλλά δεν θα είναι το αντικείμενο αυτής της ανάλυσης.

3.1 Η Lagrangian της QCD-Κανόνες Feynman

Για να γίνει η επιθυμητή μελέτη και οι υπολογισμοί της QCD, θα πρέπει αρχικά να διατυπωθεί μέσω της θεμελίωσης της Lagrangian, αναλύοντας κάθε όρο τη, προκειμένου να εξαχθούν οι κανόνες Feynman της θεωρίας.

Προτού αρχίσει η μαθηματική διεργασία, της θεωρίας αξίζει να γίνει αναφορά σε κάποια κείρια σημεία. Μέχρι τώρα, στην QED, εμπλέχονταν φερμιόνια ($spin = 1/2$) και 1 διανυσματικό μποζόνιο (φωτόνιο, $spin = 1$). Για τη μαθηματική περιγραφή τέτοιας θεωρίας χρησιμοποιείται η αβελιανή ομάδα $U(1)$ ενώ για τη μη-αβελιανή περίπτωση της $SU(3)$ στην προκειμένη περίπτωση διαφοροποιείται όλο το τοπίο, πράγμα που βασίζεται ξεκάθαρα στην μη-αβελιανότητα. Η διαμόρφωση της Lagrangian επιτυγχάνεται μέσω των path integrals (κάτι που εδώ παραλείπεται) και προκύπτουν όροι νέων πεδίων, των Faddeev-Popov ghosts. Αυτά υπακούουν σε φερμιονική στατιστική έχοντας spin μηδέν, κάτι που αιτιολογεί την ονομασία ghost. Δεν είναι φυσικά σωματίδια, από την άποψη ότι δεν μπορούν να γίνουν αντιληπτά σε παρατηρήσιμες εξωτερικές καταστάσεις, αλλά είναι απαραίτητα για την επίτευξη της gauge invariance σε μία θεωρία με άμαζο. Έτσι βρίσκει κανείς στη δυσχερή θέση να πέσει στην ανάγκη των ghosts τα οποία δεν είναι διαχειρίσιμα.

Επιπροσθέτως ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό στο οποίο δεν έχει γίνει μέχρι τώρα αναφορά και προκύπτει ομοίως από path integrals, είναι ότι η Lagrangian περιέχει έναν όρο $\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu^a)^2$ ο οποίος παραβιάζει την συμμετρία βαθμίδας. Έχοντας τέτοιο όρο στην Lagrangian της QED δεν αποτελεί πρόβλημα. Αυτό ισχύει καθώς είναι κινητικός όρος ως προς τα πεδία βαθμίδας και μπορεί να ρυθμιστεί κατάλληλα έτσι ώστε να εξομαλυνθεί, γνωρίζοντας ότι το συσχετισμένο ρεύμα διατηρείται. Για την μη-αβελιανή περίπτωση κάτι τέτοιο δεν υφίσταται καθώς εξαιτίας της εμφάνισης των ghosts, κάτι που περιπλέκει τα πράγματα. Παρόλα αυτά με αντίστοιχη διεργασία, καταλήγουμε στη διατήρηση μίας πιο γενικής μορφής της gauge invariance, της BRST invariance η οποία αποτελεί invariance κάτω από την BRST global symmetry, η οποία παραμετροποιείται από τους αριθμούς Grassmann. Η BRST invariance είναι πολύ κρίσιμη για την επανακανονικοποίηση της θεωρίας, καθώς αφού είναι καθολική συμμετρία της Lagrangian πρέπει να διατηρείται και στους βρόγχους και αφού αυτή σχετίζεται με τα ghosts ορίζει και πώς ακριβώς αυτά συμμετέχουν στους βρόγχους και κατέπεχταση τη συμπεριφορά σε υψηλότερης τάξης προσέγγιση. Κάτι τέτοιο μου υποδεικνύει ότι απαιτείται πεπερασμένος αριθμός counterterms και άρα η θεωρία μου είναι πεπερασμένη.

Επεξηγώντας λίγο παραπάνω τους όρους της Lagrangian, παρατηρεί κανείς ότι τα πεδία και οι παράμετροι που περιέχονται σε αυτήν είναι τα εξής:

βαθμωτά πεδία	→	Φ
διανυσματικά πεδία	→	A
φερμιονικά πεδία	→	ψ
ghosts	→	c
παράμετρος βαθμίδας	→	ξ
σταθερά σύζευξης	→	g
φερμιονική μάζα	→	m
μάζα βαθμωτού πεδίου	→	M

Παρατηρήσεις-Συμβάσεις:

- Εν γένει δεν υπάρχουν βαθμωτά πεδία με τον βαθμό ελευθερίας του χρώματος.
- Στην όλη ανάλυση παρόλο που το αντικείμενο ενδιαφέροντος είναι η QCD($SU(3)$), ο ρητός υπολογισμός για εφαρμογή σε αυτή τη θεωρία θα γίνει στο τέλος και μέχρι αυτό το σημείο θα αντιμετωπισθεί η γενική περίπτωση για $SU(N)$.
- Οι λατινικοί δείκτες αναφέρονται στα χρώματα ενώ οι ελληνικοί είναι οι συνήθεις χωροχρονικοί δείκτες.

$$L = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^2)^2 + (\partial_\mu \bar{c}^a)(\delta^{ac}\partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^b)c^c + \bar{\psi}_i(\delta_{ij}(i\cancel{\partial}) + g A^a T_{ij}^a - m\delta_{ij})\psi_j +$$

$$+ [(\delta_{ki}\partial_\mu - ig A_\mu^a T_{ki}^a)\Phi_i]^* [(\delta_{kj}\partial_\mu - ig A_\mu^b T_{kj}^b)\Phi_j] - M^2\Phi_i\Phi_i^*$$

όπου,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Υπολογίζω κάθε όρο ξεχωριστά:

$$\begin{aligned} [F_{\mu\nu}^a]^2 &= [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c][\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{ade} A_\mu^d A_\nu^e] = \\ &= [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a][\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a] + g f^{ade}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\mu^d A_\nu^e - g f^{ade}[\partial_\nu A_\mu^a]A_\mu^d A_\nu^e + \\ &+ g f^{abc}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\mu^b A_\nu^c - g f^{abc}[\partial_\nu A_\mu^a]A_\mu^b A_\nu^c + g^2[f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c][f^{ade}A_\mu^d A_\nu^e] \end{aligned}$$

Ο πρώτος(και ο δεύτερος όρος) απλοποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned} g f^{ade}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\mu^d A_\nu^e - g f^{ade}[\partial_\nu A_\mu^a]A_\mu^d A_\nu^e &= g f^{ade}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\mu^d A_\nu^e - g f^{ade}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\nu^d A_\mu^e = \\ &= g f^{ade}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\mu^d A_\nu^e - g f^{aed}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\nu^e A_\mu^d = g f^{ade}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\mu^d A_\nu^e - g[-f^{ade}][\partial_\mu A_\nu^a]A_\nu^e A_\mu^d = \\ &= 2g f^{ade}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\mu^d A_\nu^e = 2g f^{abc}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} g f^{ade}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\mu^d A_\nu^e - g f^{ade}[\partial_\nu A_\mu^a]A_\mu^d A_\nu^e + g f^{abc}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\mu^b A_\nu^c - g f^{abc}[\partial_\nu A_\mu^a]A_\mu^b A_\nu^c = \\ = 4g f^{abc}[\partial_\mu A_\nu^a]A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned}$$

Προσθέτω τον εναπομείναντα όρο:

$$g^2[f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c][f^{ade}A_\mu^d A_\nu^e]$$

Άρα η Lagrangian θα γίνει:

- $-\frac{1}{4}[F_{\mu\nu}^a]^2 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - g f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A_\mu^b A_\nu^c - \frac{1}{4}g^2[f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c][f^{ade}A_\mu^d A_\nu^e]$
- $(\partial_\mu \bar{c}^a)(\delta^{ac}\partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^b)c^c = [\partial_\mu \bar{c}^a]\partial_\mu c^a + g f^{abc}(\partial_\mu \bar{c}^a)A_\mu^b c^c =$
 $= -\bar{c}^a \square c^a + g f^{abc}(\partial_\mu \bar{c}^a)A_\mu^b c^c + \partial_\mu(\bar{c}^a \partial_\mu c^a)$
- $\bar{\psi}_i \delta_{ij}(i\cancel{\partial})\psi_j + g \bar{\psi}_i A^a T_{ij}^a \psi_j - m \bar{\psi}_i \delta_{ij} \psi_j = i \bar{\psi}_i (\cancel{\partial} \psi_i) - m \bar{\psi}_i \psi_i + g A_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma_\mu T_{ij}^a \psi_j$
- $[(\delta_{ki}\partial_\mu - ig A_\mu^a T_{ki}^a)\phi_i]^* [(\delta_{kj}\partial_\mu - ig A_\mu^b T_{kj}^b)\phi_j] =$
 $= [(\delta_{ki}(\partial_\mu \phi_i))^* + ig A_\mu^a (T_{ki}^a)^* \phi_i^*][(\delta_{kj}\partial_\mu \phi_j - ig A_\mu^b T_{kj}^b)\phi_j] \stackrel{(T_{ij}^a)^* = T_{ji}^a}{=}$
 $= [\partial_\mu \phi_k^* + ig A_\mu^a (T_{ki}^a)\phi_i^*][(\partial_\mu \phi_k - ig A_\mu^b T_{kj}^b)\phi_j] =$
 $= \phi_k^* \square \phi_k + ig A_\mu^a T_{ik}^a \phi_i^* [\partial_\mu \phi_k] - ig A_\mu^b T_{kj}^b \phi_j [\partial_\mu \phi_k]^* + g^2 A_\mu^a (T_{ik}^a) A_\mu^b (T_{kj}^b) \phi_i^* \phi_j =$
 $= \phi_k^* \square \phi_k + ig A_\mu^a T_{ik}^a \phi_i^* [\partial_\mu \phi_k] - ig A_\mu^b T_{ik}^b \phi_k [\partial_\mu \phi_i]^* + g^2 A_\mu^a (T_{ik}^a) A_\mu^b (T_{kj}^b) \phi_i^* \phi_j =$
 $= \phi_k^* \square \phi_k + ig A_\mu^a T_{ik}^a [\phi_i^* [\partial_\mu \phi_k] - \phi_k [\partial_\mu \phi_i]^*] + g^2 A_\mu^a (T_{ik}^a) (T_{kj}^b) A_\mu^b \phi_i^* \phi_j$

Ο όρος μάζας για scalar: $M^2 \phi_i \phi_i^*$ παραμένει ίδιος.

$$\begin{aligned}
\text{-----} &= -ig^{\mu\nu}\delta^{ab}\frac{1}{p^2+i\epsilon} \\
\text{---}\blacktriangleright\text{---} &= \delta^{ij}\frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} \\
\text{.....} &= \delta^{ab}\frac{i}{p^2+i\epsilon} \\
\text{-----} &= gf^{abc}[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\rho\nu}(p-q)^\mu + g^{\mu\rho}(q-k)^\nu] \\
&= -ig^2[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] \\
&= ig\gamma^\mu T_{ij}^a \\
&= -gf^{abc}p^\mu
\end{aligned}$$

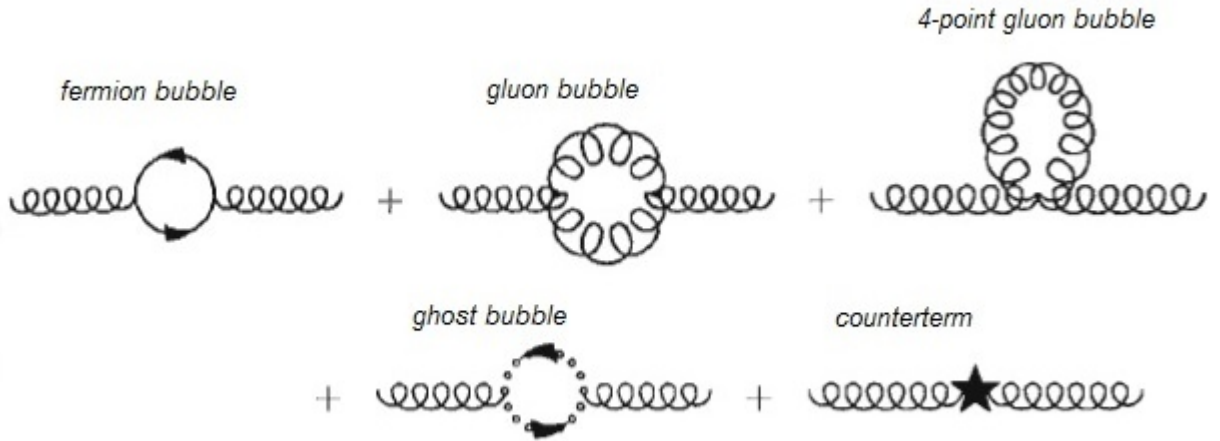
3.2 Υπολογισμός διαγράμματος της πόλωσης του κενού

Η πρώτη φάση για να εξαχθεί η β -συνάρτηση είναι να υπολογισθεί η πόλωση του κενού, όπως ακριβώς και στην QED. Στην QCD η συνεισφορά διαγραμμάτων ενός βρόγχου (**1-loop**) είναι η εξής:

$$M^{ab\mu\nu} = \underbrace{M_F^{ab\mu\nu}}_{\substack{\text{Φερμιονικός βρόγχος} \\ \text{fermion loop (bubble)}}} + \underbrace{M_3^{ab\mu\nu}}_{\text{gluon loop}} + \underbrace{M_4^{ab\mu\nu}}_{\text{4-point gluon bubble}} + \underbrace{M_{gh}^{ab\mu\nu}}_{\text{ghost bubble}} + \underbrace{M_{ct}^{ab\mu\nu}}_{\text{counterterm}}$$

Το οποίο εκφράζεται διαγραμματικά ως εξής:

Έτσι υπολογίζεται κάθε διάγραμμα ξεχωριστά, όπου ο υπολογισμός γίνεται με Διαστατική Ομαλοποίηση. Επίσης όλοι οι υπολογισμοί θα γίνουν σε Feynman gauge, δηλαδή ($\xi = 1$), με τον διαδότη των gauge bosons να αποκτά την



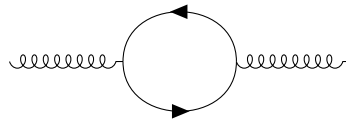
Σχήμα 3.1: Το σύνολο των διαγραμμάτων που συνεισφέρουν στη πόλωση του κενού.

ακόλουθη μορφή:

$$i\Pi^{\mu\nu} = \frac{\delta^{ab} (-ig^{\mu\nu})}{p^2 + i\epsilon}$$

3.2.1 Fermion bubble

Το διάγραμμα που πρέπει να υπολογισθεί είναι το εξής:



Με τους κανόνες Feynman τους οποίους ορίζει η Lagrangian:

$$iM_F^{ab\mu\nu} = -(ig)^2 Tr[T^a T^b] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(i)^2 Tr[\gamma^\mu (\not{k} - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} + m)]}{[(p-k)^2 - m^2][k^2 - m^2]}$$

Στην παραπάνω σχέση ο όρος $i\epsilon$ στον παρονομαστή εννοείται και με τα $Tr[T^a T^b]$, $Tr[\gamma^\mu (\not{k} - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} + m)]$ αθροίζονται στα χρώματα και στις πολώσεις των spins.

Όμως ισχύει ότι $Tr[T^a T^b] = T(R)\delta^{ab}$ και αν R είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση (fundamental representation) θα ισχύει ότι $Tr[T^a T^b] = T_F \delta^{ab}$.

Άρα

$$\begin{aligned} M_F^{ab\mu\nu} &= -i \cdot [-(i)^4] \cdot T_F \delta^{ab} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{k} - \not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k} + m)]}{[(p-k)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \\ &= iT_F \delta^{ab} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{k} - \not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k} + m)]}{[(p-k)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \end{aligned}$$

Και κάνοντας πράξεις με τα ίχνη, απλοποιώντας τον αριθμητή:

$$\begin{aligned} &Tr[\gamma^\mu(\not{k} - \not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k} + m)] = \\ &= Tr[\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k} - \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{k} + m\gamma^\mu \gamma^\nu \not{k} + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu m - \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu m + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu] = \\ &= Tr[\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k}] - Tr[\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{k}] + Tr[m\gamma^\mu \gamma^\nu \not{k}] + Tr[\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu m] - Tr[\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu m] + Tr[m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu] = \\ &= k^\sigma k^\rho Tr[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho] - p^\sigma k^\rho Tr[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho] + mk^\rho Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] + \\ &+ mk^\sigma Tr[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu] - mp^\sigma Tr[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu] + m^2 Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες πινάκων Dirac:

- $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$
- $Tr[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu] = 0$
- $Tr[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu] = 4[g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}]$

Και απλοποιώντας περαιτέρω τον αριθμητή:

$$\begin{aligned} &4k^\sigma k^\rho [g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho}] - 4p^\rho k^\sigma [g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho}] + 4m^2 g^{\mu\nu} = \\ &= 4[k^\mu k^\nu + k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2] - 4[p^\nu k^\mu + p^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} p \cdot k] + 4m^2 g^{\mu\nu} = \\ &= 4[2k^\mu k^\nu - p^\nu k^\mu - p^\mu k^\nu + g^{\mu\nu} (-k^2 + p \cdot k + m^2)] \end{aligned}$$

και άρα,

$$M_F^{ab\mu\nu} = iT_F \delta^{ab} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4[2k^\mu k^\nu - p^\nu k^\mu - p^\mu k^\nu + g^{\mu\nu} (-k^2 + p \cdot k + m^2)]}{[(p-k)^2 - m^2][k^2 - m^2]}$$

Απλοποιώντας το παραπάνω ολοκλήρωμα και γνωρίζοντας ότι η γενική μορφή που μπορεί να έχει μία Lorentz invariant ποσότητα σαν την $M_F^{ab\mu\nu}$ είναι η εξής:

$$M_F^{ab\mu\nu} = A^{ab} \{ B_1(p^2, m^2) p^2 g^{\mu\nu} + B_2(p^2, m^2) p^\mu p^\nu \}$$

όπου το A^{ab} περιέχει τις σταθερές και τους παράγοντες χρώματος, όπως οι όροι προηγούνται του ολοκληρώματος στην παραπάνω σχέση. Όπως παρατηρεί κανείς η γενική Lorentz invariant έκφραση αποτελείται από γραμμικό συνδυασμό του γινομένου των p^μ, p^ν με παράγοντες, συναρτήσεις που είναι επίσης Lorentz

invariant (οι B_1, B_2 εξαρτώνται από p^2, m^2). Οι B_1, B_2 δεν πρέπει να εξαρτώνται από τα k^μ, k^ν καθώς είναι μεταβλητές ολοκλήρωσης. Το B_2 αλλάζει την βαθμίδα η οποία δεν πρέπει να επηρεάζει το αποτέλεσμα μας (gauge invariant) άρα η B_2 δεν πρέπει να επηρεάσει τη μορφή του $M_F^{ab\mu\nu}$. Ανακεφαλαιώνοντας, πρέπει να μείνουν οι σταθεροί όροι (να μην υπάρχει εξάρτηση από p^μ, p^ν) καθώς και όροι $g^{\mu\nu}$. Άρα:

$$\begin{aligned} M_F^{ab\mu\nu} &= iT_F \delta^{ab} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4[2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)]}{[(p-k)^2 - m^2][k^2 - m^2]} = \\ &= 4iT_F \delta^{ab} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)}{[(p-k)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση θα απλοποιηθεί περαιτέρω, και ο παρονομαστής, εισάγοντας τις παραμέτρους Feynman θα γίνει:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[A + (B-A)x]^2}$$

όπου στην προκειμένη περίπτωση: $A = (p-k)^2 - m^2$, $B = k^2 - m^2$. Άρα:

$$\begin{aligned} A + (B-A)x &= (p-k)^2 - m^2 + [k^2 - m^2 - (p-k)^2 + m^2]x = \\ &= p^2 - 2p \cdot k + k^2 - m^2 + (k^2 - p^2 - k^2 + 2p \cdot k)x = \\ &= p^2(1-x) - 2pk(1-x) + k^2 - m^2 = \\ &= [k - p(1-x)]^2 + p^2x(1-x) - m^2 \end{aligned}$$

Και άρα η $M_F^{ab\mu\nu}$ θα μετατραπεί σε:

$$M_F^{ab\mu\nu} = iT_F \delta^{ab} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{4[2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)]}{[[k - p(1-x)]^2 + p^2x(1-x) - m^2]^2} dx$$

Τώρα, θα γίνει (shift) της k^μ : $k^\mu \rightarrow k^\mu + p^\mu(1-x)$ όπου θα αφήσει αναλλοίωτο το $\int d^4 k$ και στη συνέχεια θα γίνουν οι πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή. Ο αριθμητής θα γίνει:

$$\begin{aligned} &2[k^\mu + p^\mu(1-x)][k^\nu + p^\nu(1-x)] + \\ &+ g^{\mu\nu}[-k^2 - p^2(1-x)^2 - 2p \cdot k(1-x) + p \cdot kp^2(1-x) + m^2] = \\ &= 2k^\mu k^\nu + 2p^\mu k^\nu(1-x) + k^\mu p^\nu(1-x) + p^\mu p^\nu(1-x)^2 + \\ &+ g^{\mu\nu}[-k^2 - p^2 + 2p^2x - x^2p^2 - 2p \cdot k + 2p \cdot kx + p \cdot k + p^2 - xp^2 + m^2] \end{aligned}$$

Απαλείφοντας τους όρους $\sim p^\mu, p^\nu, p^\mu p^\nu$ για τους λόγους που αναφέρθηκαν στην αρχή. Έτσι:

$$\begin{aligned} &2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}[-k^2 + p^2x - p^2x^2 - p \cdot k + m^2 + 2p \cdot kx] = \\ &= 2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}[-k^2 + p^2x(1-x) + m^2p \cdot k(1-2x)] \end{aligned}$$

Ο παρονομαστής θα γίνει:

$$\{[k + p(1 - x) - p(1 - x)]^2 + p^2 x(1 - x) - m^2\}^2 = [k^2 + p^2 x(1 - x) - m^2]^2$$

Άρα:

$$M_F^{ab\mu\nu} = 4iT_F \delta^{ab} g^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k^\nu k^\mu + g^{\mu\nu}[-k^2 + p^2 x(1 - x) + m^2]}{[k^2 + p^2 x(1 - x) - m^2]^2} +$$

$$+ 4iT_F \delta^{ab} g^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu} p \cdot k(1 - 2x)}{[k^2 + p^2 x(1 - x) - m^2]^2}$$

Με το μετασχηματισμό $k \rightarrow -k$ το πρώτο ολοκλήρωμα παραμένει αναλλοίωτο ενώ το δεύτερο αποκτά αντίθετο πρόσημο και άρα μηδενίζεται. Συνεπώς το $M_F^{ab\mu\nu}$ παίρνει την εξής τελική μορφή:

$$M_F^{ab\mu\nu} = 4iT_F \delta^{ab} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{2k^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}[k^2 - p^2 x(1 - x) - m^2]}{[k^2 + p^2 x(1 - x) - m^2]^2}$$

Παρατηρώντας ότι το ολοκλήρωμα έχει τετραγωνική απειρία $\int \frac{d^4 k}{k^2}$ και εφαρμόζοντας τις σχέσεις της (Dimensional Regularization), ($k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{d} k^2 g^{\mu\nu}$):

$$M_F^{ab\mu\nu} = 4iT_F \delta^{ab} g^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\frac{2}{d} k^2 g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}[k^2 - x(1 - x)p^2 - m^2]}{[k^2 + p^2 x(1 - x) - m^2]^2} =$$

$$= 4iT_F \delta^{ab} g^2 \mu^{4-d} g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\left(\frac{2}{d} - 1\right) k^2 + x(1 - x)p^2 + m^2}{[k^2 + p^2 x(1 - x) - m^2]^2}$$

Και χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες σχέσεις της Dimensional Regularization:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^2} = -\frac{d}{2} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \Gamma\left(\frac{2-d}{2}\right)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)$$

όπου στην προκειμένη περίπτωση $\Delta = m^2 - p^2x(1-x)$ και κάνοντας αντικατάσταση από τις παραπάνω σχέσεις θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
M_F^{ab\mu\nu} &= 4iT_F\delta^{ab}g^2\mu^{4-d}g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \left[\left(\frac{2}{d} - 1\right) \left(\frac{-d}{2}\right) \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \Gamma\left(\frac{2-d}{2}\right) + \right. \\
&\quad \left. + (x(1-x)p^2 + m^2) \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \right] = \\
&= 4iT_F\delta^{ab}g^2\mu^{4-d}g^{\mu\nu} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[\left(\frac{d}{2} - 1\right) \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) + \right. \\
&\quad \left. + (x(1-x)p^2 + m^2) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right] = \\
&= 4i^2T_F\delta^{ab}g^2\mu^{4-d}g^{\mu\nu} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[-\left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) + \right. \\
&\quad \left. + (x(1-x)p^2 + m^2) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

Αξιοποιώντας την ταυτότητα για τη συνάρτηση $\Gamma(x)$: $\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = (1 - d/2) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
M_F^{ab\mu\nu} &= 4T_F\delta^{ab}g^2\mu^{4-d}g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} (\Delta - x(1-x)p^2 - m^2) \right] = \\
&= 4T_F\delta^{ab}g^2\mu^{4-d}g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} (m^2 - p^2(1-x)x - x(1-x)p^2 - m^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_F^{ab\mu\nu} &= 4T_F \delta^{ab} g^2 \mu^{4-d} g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left[\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} (-2p^2(1-x)x) \right] = \\
&= -8T_F \delta^{ab} g^2 \mu^{4-d} g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) p^2 \int_0^1 dx (1-x)x \left(\frac{1}{m^2 - p^2(1-x)x} \right)^{2-d/2}
\end{aligned}$$

και με αναλυτική επέκταση ως προς $d = 4$: $d = 4 - \epsilon \mid_{\epsilon \rightarrow 0}$

$$\begin{aligned}
M_F^{ab\mu\nu} &= -8T_F \delta^{ab} g^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\mu^\epsilon \frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}} g^{\mu\nu} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) p^2 \int_0^1 dx (1-x)x \left(\frac{1}{m^2 - p^2(1-x)x} \right)^{2-2+\epsilon/2} \right] = \\
&\stackrel{\text{το όριο εννοείται}}{=} -T_F \delta^{ab} g^2 \frac{p^2}{2\pi^2} g^{\mu\nu} \int_0^1 dx (1-x)x \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - p^2 x(1-x)}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]
\end{aligned}$$

Στην γενική Lorentz invariant μορφή το $M_F^{ab\mu\nu}$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$M_F^{ab\mu\nu} = -T_F \delta^{ab} g^2 \frac{(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)}{2\pi^2} \int_0^1 dx (1-x)x \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - p^2 x(1-x)}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

Και μένει να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

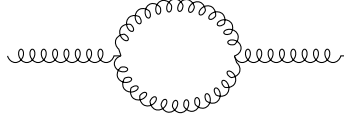
$$\begin{aligned}
\frac{2}{\epsilon} \int_0^1 dx (x - x^2) &= \frac{2}{\epsilon} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{6} = \frac{1}{3\epsilon} \\
\int_0^1 dx (1-x)x \ln\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - p^2 x(1-x)}\right) &\stackrel{Q^2 \equiv -p^2 \gg m^2}{=} \frac{1}{18} \left[5 + 3 \ln\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{Q^2}\right) \right]
\end{aligned}$$

Και τέλος η έκφραση για το $M_F^{ab\mu\nu}$ θα δίνεται από:

$$\begin{aligned}
M_F^{ab\mu\nu} &= T_F \delta^{ab} g^2 \frac{(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)}{16\pi^2} \left[\frac{-8}{3\epsilon} - \frac{40}{18} - \frac{24}{18} \ln\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{Q^2}\right) \right] = \\
&= T_F \delta^{ab} g^2 \frac{(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)}{16\pi^2} \left[\frac{-8}{3\epsilon} - \frac{20}{9} - \frac{4}{3} \ln\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{Q^2}\right) \right]
\end{aligned}$$

3.2.2 Gluon bubble

Το διάγραμμα που πρέπει να υπολογισθεί στην προκειμένη περίπτωση είναι το εξής:



$$iM_3^{ab\mu\nu} = \frac{g^2}{2} (-i^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)^2 \delta^{cf} \delta^{ed}}{k^2 (k-p)^2} f^{ace} f^{bdf} N^{\mu\nu}$$

όπου ο αρχικός παράγοντας $1/2$ οφείλεται στη συμμετρία και το $N^{\mu\nu}$ είναι:

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} &= \overbrace{g^{\mu\alpha}(p - (-k))^\rho + g^{\mu\rho}(k - p - p)^\alpha + g^{\rho\alpha}(-k - k + p)^\mu}^{1\eta \text{ κορυφή}} \times g^{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} \times \\ &\times \overbrace{g^{\nu\beta}(k - (-p))^\sigma + g^{\sigma\beta}(-(k-p) - k)^\nu + g^{\sigma\nu}(-p - (-k + p))^\beta}^{2\eta \text{ κορυφή}} = \\ &= g^{\mu\alpha}(p + k)^\rho + g^{\mu\rho}(k - 2p)^\alpha + g^{\rho\alpha}(-2k + p)^\mu \times g^{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} \times \\ &\times g^{\nu\beta}(k + p)^\sigma - g^{\sigma\beta}(2k - p)^\nu - g^{\sigma\nu}(2p - k)^\beta \end{aligned}$$

Μετά από τις πράξεις στον αριθμητή ήρθε η ώρα της απλοποίησης του παρονομαστή μέσω της εισαγωγής των παραμέτρων Feynman:

$$\frac{1}{k^2} \frac{1}{(p-k)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 + ((p-k)^2 - k^2)x]^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(1-x)k^2 + x(p-k)^2]^2}$$

και κάνοντας το shift: $k \rightarrow k + xp$ όπου το $\int d^4k$ παραμένει αναλλοίωτο.

$$\begin{aligned} (1-x)(k+xp)^2 + x(p-k-xp)^2 &= \\ &= (1-x)(k^2 + 2kxp + (xp)^2) + xp^2 + xk^2 + x(xp)^2 + 2x^2kp - 2xpk - 2x^2p^2 = \\ &= k^2 + 2kxp + (xp)^2 - xk^2 - 2x^2p^2 - x(xp)^2 + xp^2 + xk^2 + x(xp)^2 + 2x^2kp - 2xpk - 2x^2p^2 = \\ &= k^2 - x^2p^2 + xp^2 = k^2 - (x-1)xp^2 \end{aligned}$$

Ορίζοντας $\Delta \equiv x(x-1)p^2$ και άρα:

$$iM_3^{ab\mu\nu} = \frac{g^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(i)^2}{(k^2 - \Delta)^2} \underbrace{f^{ace} f^{bdf} \delta^{cf} \delta^{ed}}_{f^{acd} f^{bcd} = -f^{acd} f^{bcd}} N^{\mu\nu}$$

και άρα:

$$iM_3^{ab\mu\nu} = \frac{g^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} f^{acd} f^{bcd} N^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

Τώρα λαμβάνει χώρα ο υπολογισμός το $N^{\mu\nu}$. Αρχικά ο παράγοντας του $N^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} & [g^{\mu\alpha}(p+k)^\rho + g^{\mu\rho}(k-2p)^\alpha + g^{\rho\alpha}(-2k+p)^\mu] \times g^{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} = \\ & = g^{\mu\beta}(p+k)^\sigma + g^{\sigma\mu}(k-2p)^\beta + g^{\beta\sigma}(-2k+p)^\mu \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} & [g^{\mu\beta}(p+k)^\sigma + g^{\sigma\mu}(k-2p)^\beta + g^{\beta\sigma}(-2k+p)^\mu] \cdot [g^{\nu\beta}(k+p)^\sigma - g^{\sigma\beta}(2k-p)^\nu - g^{\sigma\nu}(2p-k)^\beta] = \\ & = g^{\mu\nu}(p+k)^2 - (p+k)^\mu(2k-p)^\nu - (p+k)^\nu(2p-k)^\mu + (p-2k)^\mu(p+k)^\nu - \\ & - g^{\sigma\sigma}(2k-p)^\nu(p-2k)^\mu - (2p-k)^\nu(p-2k)^\mu + (k-2p)^\nu(p+k)^\mu - \\ & - (k-2p)^\mu(2k-p)^\nu + g^{\mu\nu}(k-2p)^2 \end{aligned}$$

και έτσι γίνονται πράξεις ανά δύο⁹:

$$g^{\mu\nu}[p^2 + 2pk + k^2 + k^2 + 4p^2 - 4pk] = g^{\mu\nu}[2k^2 + 5p^2 - 2pk]$$

$$\left. \begin{aligned} (p+k)^\mu(2k-p)^\nu &= 2p^\mu k^\nu - p^\mu p^\nu + 2k^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu \\ (p+k)^\nu(2p-k)^\mu &= 2p^\mu p^\nu - k^\mu p^\nu + 2p^\mu k^\nu - k^\mu k^\nu \end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{=} k^\mu k^\nu - 2k^\mu p^\nu + p^\nu p^\mu + 4p^\mu k^\nu$$

$$\left. \begin{aligned} (p-2k)^\mu(p+k)^\nu &= p^\mu p^\nu + p^\mu k^\nu - 2k^\mu p^\nu - 2k^\mu k^\nu \\ (k-2p)^\nu(p+k)^\mu &= p^\mu k^\nu - 2p^\mu p^\nu - 2p^\nu k^\mu + k^\mu k^\nu \end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{=} -p^\mu p^\nu + 2p^\mu k^\nu - 4p^\nu k^\mu - k^\mu k^\nu$$

$$\left. \begin{aligned} (2p-k)^\nu(p-2k)^\mu &= 2p^\mu p^\nu - 4p^\nu k^\mu - k^\nu p^\mu + 2k^\mu k^\nu \\ (k-2p)^\mu(2k-p)^\nu &= 2k^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu - 4p^\mu k^\nu + 2p^\mu p^\nu \end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{=} 4p^\mu p^\nu - 5p^\nu k^\mu - 5p^\mu k^\nu + 4k^\mu k^\nu$$

$$\begin{aligned} g^{\sigma\sigma}(2k-p)^\nu(p-2k)^\mu &= g^{\sigma\sigma}[2k^\nu p^\mu - 4k^\mu k^\nu - p^\nu p^\mu + 2p^\nu k^\mu] \stackrel{d \text{ διαστάσεις}}{=} g^{\sigma\sigma} = d \\ &= d[2k^\nu p^\mu - 4k^\nu k^\mu - p^\nu p^\mu + 2p^\nu k^\mu] \end{aligned}$$

Συγκεντρωμένα όλα μαζί:

$$\begin{aligned} & g^{\mu\nu}[2k^2 + 5p^2 - 2pk] - k^\mu k^\nu + 2k^\mu p^\nu - p^\nu p^\mu - 4p^\mu k^\nu - p^\mu p^\nu + 2p^\mu k^\nu - 4p^\nu k^\mu - k^\mu k^\nu - \\ & - 4p^\mu p^\nu + 5p^\nu k^\mu + 5p^\mu k^\nu - 4k^\mu k^\nu - d[2k^\nu p^\mu - 4k^\nu k^\mu - p^\nu p^\mu + 2p^\nu k^\mu] \end{aligned}$$

⁹ανά χρώμα ομαδοποίησης

Και κάνοντας το shift: $k \rightarrow k + xp$ ο κάθε όρος¹⁰ της τελευταίας σχέσης θα γίνει:

- $g^{\mu\nu}[2(k + xp)^2 + 5p^2 - 2p(k + xp)] = g^{\mu\nu}[2(k^2 + 2xpk + (xp)^2) + 5p^2 - 2pk - 2p^2x]$
- $-k^\mu k^\nu + 2k^\mu p^\nu - p^\nu p^\mu - 4p^\mu k^\nu - p^\mu p^\nu + 2p^\mu k^\nu - 4p^\nu k^\mu - k^\mu k^\nu \rightarrow$
 $\rightarrow -2(k^\mu + xp^\mu)(k^\nu + xp^\nu) + 2(k^\mu + xp^\mu)p^\nu - 2p^\mu p^\nu -$
 $-4(k^\nu + xp^\nu)p^\mu + 2p^\mu(k^\nu + p^\nu x) - 4(k^\mu + p^\mu x)p^\nu =$
 $= -2[k^\mu k^\nu + xk^\mu p^\nu + xp^\mu k^\nu + x^2 p^\mu p^\nu] + 2[k^\mu p^\nu + xp^\mu p^\nu] - 2p^\mu - 4(k^\nu p^\mu + xp^\mu p^\nu) +$
 $+ 2(p^\mu k^\nu + p^\mu p^\nu x) - 4(k^\mu p^\nu + p^\mu p^\nu x) =$
 $= -2k^\mu k^\nu + k^\mu p^\nu(-2x + 2 - 4) + k^\nu p^\mu[-2x - 2] + p^\mu p^\nu[-2x^2 - 4x - 2]$
- $-4p^\mu p^\nu + 5p^\nu k^\mu + 5p^\mu k^\nu - 4k^\mu k^\nu \rightarrow$
 $\rightarrow -4p^\mu p^\nu + 5p^\nu(k^\mu + xp^\mu) + 5p^\mu(k^\nu + xp^\nu) - 4(k^\nu + xp^\nu)(k^\mu + xp^\mu) =$
 $= -4p^\mu p^\nu + 5p^\nu k^\mu + 5xp^\nu p^\mu + 5p^\mu k^\nu + 5xp^\mu p^\nu - 4[k^\nu k^\mu + xk^\nu p^\mu + xp^\nu k^\mu + x^2 p^\mu p^\nu] =$
 $= k^\nu k^\mu(-4) + p^\nu p^\mu(5 - 4x) + p^\mu k^\nu(5x + 5 - 4x) + p^\mu p^\nu(-4 + 5x + 5x - 4x^2)$
- $d[2k^\nu p^\mu - 4k^\nu k^\mu - p^\nu p^\mu + 2p^\nu k^\mu] \rightarrow$
 $\rightarrow d[2(k^\nu + p^\nu)p^\mu - 4(k^\nu + p^\nu x)(k^\mu + p^\mu x) - p^\nu p^\mu + 2p^\nu(k^\mu + p^\mu x)] =$
 $= d[2k^\nu p^\mu + 2xp^\nu p^\mu - 4k^\nu k^\mu - 4xk^\nu p^\mu - 4xp^\nu k^\mu - 4p^\nu p^\mu x^2 - p^\nu p^\mu + 2p^\nu k^\mu + 2xp^\mu p^\nu] =$
 $= d[k^\nu k^\mu(-4) + k^\nu p^\mu(2 - 4x) + p^\nu k^\mu(-4x + 2) + p^\nu p^\mu(4x - 1 - 4x^2)]$

Ομαδοποιώντας σε όρους $k^\mu k^\nu, p^\nu p^\mu, p^\mu k^\nu, k^\mu p^\nu, k^2, p^2, kp$:

- $k^2 : 2k^2 g^{\mu\nu}$
- $k^\nu k^\mu : (4d - 6)k^\nu k^\mu$
- $kp : (4x - 2)kp g^{\mu\nu}$
- $p^2 : (5 - 2x + 2x^2)p^2 g^{\mu\nu}$
- $p^\nu p^\mu : (-2x^2 - 4x - 2 - 4 + 10x - 4x^2 + d(4x - 1 - 4x^2))p^\nu p^\mu =$
 $= [(-6x^2 + 6x - 6) + d(4x - 1 - 4x^2)]p^\nu p^\mu = -6(x^2 - x + 1) - d(1 - 2x)^2 p^\mu p^\nu$
- $p^\nu k^\mu : [(-2x + 5 - 2 - 4x) + (2 - 4x)d]p^\nu k^\mu = (2d - 3)(2x - 1)k^\mu p^\nu$
- $p^\nu k^\mu : [(-6x - 2 + 5) - (2 - 4x)d]k^\nu p^\mu =$
 $= [(-2x + 1)3 - 2d(1 - 2x)]k^\nu p^\mu = (2d - 3)(2x - 1)k^\nu p^\mu$

¹⁰ανά χρώμα

και άρα:

$$N^{\mu\nu} = 2k^2 g^{\mu\nu} - (6 - 4d)k^\mu k^\nu - [6(x^2 - x + 1) - d(1 - 2x)^2]p^\mu p^\nu + (2x^2 - 2x + 5)p^2 g^{\mu\nu} - (2 - 4x)g^{\mu\nu}kp + (2d - 3)(2x - 1)(k^\nu p^\mu + k^\mu p^\nu)$$

όπου τα ολοκληρώματα που περιέχουν όρους $p^\nu k^\mu$, $p^\mu k^\nu$, kp και από το μετασχηματισμό $k \rightarrow -k$ παρατηρεί κανείς μηδενίζονται. Ορίζοντας $k^\nu k^\mu \rightarrow \frac{1}{d}k^2 g^{\mu\nu}$ το $M_3^{ab\mu\nu}$ γράφεται, σύμφωνα με την Dimensional Regularization, ως εξής:

$$M_3^{ab\mu\nu} = -i \frac{g^2}{2} f^{acd} f^{bcd} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} \times [2k^2 g^{\mu\nu} - (6 - 4d)k^\mu k^\nu - \{6(x^2 - x + 1) - d(1 - 2x)^2\}p^\mu p^\nu + (2x^2 - 2x + 5)p^2 g^{\mu\nu}]$$

Τώρα αντικαθιστώντας $k^\nu k^\mu \rightarrow \frac{1}{d}k^2 g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} M_3^{ab\mu\nu} &= -i \frac{g^2}{2} f^{acd} f^{bcd} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \left\{ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2(2 - 6/d + 4)g^{\mu\nu}}{(k^2 - \Delta)^2} - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{p^\nu p^\mu (6(x^2 - x + 1) - d(1 - 2x)^2) + p^2 g^{\mu\nu} (-2x^2 + 2x - 5)}{(k^2 - \Delta)^2} \right\} = \\ &= -i \frac{g^2}{2} f^{acd} f^{bcd} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \left[-\frac{d}{2} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} (6 - \frac{6}{d}) g^{\mu\nu} \Gamma(1 - d/2) + \frac{-i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} (6(x^2 - x + 1) - d(1 - 2x)^2) p^\mu p^\nu \Gamma(2 - d/2) + \frac{-i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} (-2x^2 + 2x - 5) g^{\mu\nu} p^2 \Gamma(2 - d/2) \right] = \\ &= \frac{(-i)^2 g^2}{2} f^{acd} f^{bcd} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \times \{ (3d - 3) \Gamma(1 - d/2) \Delta g^{\mu\nu} + [6(x^2 - x + 1) - d(1 - 2x)^2] \Gamma(2 - d/2) p^\mu p^\nu + (-2x^2 + 2x - 5) \Gamma(2 - d/2) g^{\mu\nu} p^2 \} \end{aligned}$$

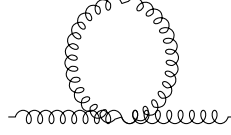
Από θεωρία ομάδων ισχύει ότι: $f^{acd} f^{bcd} = C_A \delta^{ab}$. Άρα:

$$M_3^{ab\mu\nu} = -\frac{g^2}{2} C_A \delta^{ab} \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-d/2} [3(d - 1) \Gamma(1 - d/2) \Delta g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu (6(x^2 - x + 1) - d(1 - 2x)^2) \Gamma(2 - d/2) + g^{\mu\nu} p^2 (-2x^2 + 2x - 5) \Gamma(2 - d/2)]$$

Και αυτή είναι η τελική του μορφή καθώς θα απλοποιηθεί στη συνέχεια αθροίζοντάς το με τις υπόλοιπες συνεισφορές.

3.2.3 4-point gluon bubble

Το διάγραμμα που θα υπολογισθεί θα είναι το εξής:



$$iM_4^{ab\mu\nu} = \frac{(-i)^2 i g^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-i) g^{\rho\sigma} \delta^{cd}}{k^2 + i\epsilon} [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$$

Το 1/2 οφείλεται σε συμμετρία. Υπολογίζεται ο αριθμητής:

- $g^{\rho\sigma} \delta^{cd} (f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})) = g^{\rho\sigma} (f^{abe} f^{dde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})) = 0$
- $f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) g^{\rho\sigma} \delta^{cd} = f^{ace} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\rho}) = f^{ace} f^{bce} (g^{\mu\nu} d - g^{\mu\nu}) = C_A \delta^{ab} g^{\mu\nu} (d - 1)$
- $f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) g^{\rho\sigma} \delta^{cd} = f^{ace} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\rho} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\sigma}) = f^{ace} f^{bce} (g^{\mu\nu} d - g^{\mu\nu}) = C_A \delta^{ab} g^{\mu\nu} (d - 1)$

όπου $f^{ace} f^{bce} = C_A \delta^{ab}$ και για d διαστάσεις: $g^{\mu\mu} = d$. Άρα:

$$iM_4^{ab\mu\nu} = \frac{(-i)^2 g^2}{2} 2C_A \delta^{ab} g^{\mu\nu} (d - 1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} = -g^2 C_A (d - 1) \delta^{ab} g^{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}$$

Σε d διαστάσεις:

$$iM_4^{ab\mu\nu} = -g^2 C_A (d - 1) \delta^{ab} g^{\mu\nu} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}$$

Και τώρα για την εξακρίβωση της θέσης των πόλων πολλαπλασιάζονται αριθμητής και παρονομαστής με $(p - k)^2$:

$$iM_4^{ab\mu\nu} = -g^2 C_A (d - 1) \delta^{ab} g^{\mu\nu} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p - k)^2}{(k^2 + i\epsilon)(p - k)^2}$$

Εισάγοντας παραμέτρους Feynman και παραλείποντας το ϵ , $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p - k)^2 k^2} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 + x((p - k)^2 - k^2)]^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 + x(p^2 - 2kp)]^2} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2(1 - x) + x(p - k)^2]^2} \end{aligned}$$

και με το shift: $k \rightarrow k + xp$ οπότε ο παρονομαστής θα γίνει:
 $[k(1-x) + x(p-k)^2]^2 = k^2 - (x-1)xp^2$ (όπως στο gluon bubble)
 Ενώ ο αριθμητής:

$$(p-k)^2 \rightarrow (p-k-xp)^2 = (1-x)^2 p^2 - 2(1-x)kp + k^2$$

και άρα :

$$iM_4^{ab\mu\nu} = -g^2 C_A (d-1) \delta^{ab} g^{\mu\nu} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \times \\
 \times \left\{ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1-x)^2 p^2}{k^2 - (x-1)xp^2} + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{k^2 - (x-1)xp^2} + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2(x-1)kp}{k^2 - (x-1)xp^2} \right\}$$

Το τρίτο ολοκλήρωμα μηδενίζεται κάτω από $k \rightarrow -k$. Άρα κρατώντας τους δύο πρώτους όρους και ξαναγράφοντας τους:

$$iM_4^{ab\mu\nu} = -g^2 C_A (d-1) \delta^{ab} g^{\mu\nu} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \left\{ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1-x)^2 p^2}{k^2 - (x-1)xp^2} + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{k^2 - (x-1)xp^2} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις της Dimensional Regularization με $\Delta = (x-1)xp^2$:

$$iM_4^{ab\mu\nu} = -g^2 C_A (d-1) \delta^{ab} g^{\mu\nu} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \left\{ \frac{(1-x)^2 p^2 i\Gamma(2-d/2)}{\Delta^{2-d/2} (4\pi)^{d/2}} + \frac{(-\frac{d}{2}) i\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2} (4\pi)^{d/2}} \right\} = \\
 = \frac{-g^2 i C_A (d-1) \delta^{ab} g^{\mu\nu} \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-d/2} \left[(1-x)^2 p^2 \Gamma(2-d/2) - \frac{d}{2} \Gamma(1-d/2) \Delta \right]$$

Άρα:

$$M_4^{ab\mu\nu} = \frac{-g^2 C_A (d-1) \delta^{ab} g^{\mu\nu} \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-d/2} \left[(1-x)^2 p^2 \Gamma(2-d/2) - \frac{d}{2} \Gamma(1-d/2) \Delta \right]$$

3.2.4 Ghost bubble

Το διάγραμμα που πρέπει να υπολογισθεί είναι:



$$\begin{aligned}
iM_{gh}^{ab\mu\nu} &= (-i)^2(-g)^2(-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(i\delta^{cf})(i\delta^{de})f^{cad}f^{ebf}}{(k-p)^2k^2} [-(k-p)^\nu k^\mu] = \\
&= (-1)(-g)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(i^2)f^{cad}f^{dbc}}{(k-p)^2k^2} [(k-p)^\nu k^\mu] = \\
&= (g)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f^{cad}f^{dbc}}{(k-p)^2k^2} [(k-p)^\nu k^\mu]
\end{aligned}$$

Εισάγοντας παραμέτρους Feynman: (ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα με τα προηγούμενα)

$$\frac{1}{(k-p)^2k^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2(1-x) + x(p-k)^2]^2}$$

Κάνοντας το shift:

$$(k^2(1-x) + x(p-k)^2)^2 \rightarrow (k^2 - (x-1)xp^2)^2$$

ενώ:

$$\begin{aligned}
k^\mu(k-p)^\nu &= (k^\mu + xp^\mu)(k^\nu + xp^\nu - p^\nu) = \\
&= k^\mu k^\nu + (x-1)k^\mu p^\nu + xp^\mu k^\nu + x(x-1)p^\nu p^\mu
\end{aligned}$$

Άρα:

$$iM_{gh}^{ab\mu\nu} = g^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f^{cad}f^{dbc}}{[k^2 - (x-1)xp^2]^2} [k^\mu k^\nu + (x-1)k^\mu p^\nu + xp^\mu k^\nu + x(x-1)p^\nu p^\mu]$$

Οι όροι ανάλογοι $k^\mu p^\nu, p^\mu k^\nu$ απορρίπτονται και παραλείπονται. Άρα:

$$iM_{gh}^{ab\mu\nu} = g^2 f^{cad}f^{dbc} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[k^\mu k^\nu + x(x-1)p^\mu p^\nu]}{[k^2 - (x-1)xp^2]^2}$$

Στις d διαστάσεις και $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{d}k^2 g^{\mu\nu}$ και $g^2 \rightarrow g^2 \mu^{4-d}$, λόγω διαστατικής ανάλυσης:

$$iM_{gh}^{ab\mu\nu} = g^2 f^{cad}f^{dbc} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \left[\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2 g^{\mu\nu}}{d[k^2 - (x-1)xp^2]^2} + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu (x-1)x}{[k^2 - (x-1)xp^2]^2} \right]$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις της Dimensional Regularization, όπου $\Delta = (x-1)xp^2$ ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}
iM_{gh}^{ab\mu\nu} &= g^2 f^{cad}f^{dbc} \mu^{4-d} \times \\
&\times \left[\int_0^1 dx \left[-\frac{1}{2}i \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Delta^{1-d/2}} \right] g^{\mu\nu} + \int_0^1 dx \left[-\frac{i\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \frac{p^\mu p^\nu (x-1)x}{\Delta^{2-d/2}} \right] \right] = \\
&= g^2 \frac{f^{cad}f^{dbc} \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} (-i) \left[\int_0^1 dx \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-d/2} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Gamma(1-d/2) \Delta + p^\mu p^\nu (1-x)x \Gamma(2-d/2) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$f^{cad} f^{dbc} = -f^{cad} f^{cdb} = f^{cad} f^{bcd} = -f^{acd} f^{bcd} = C_A \delta^{ab}$$

Άρα:

$$M_{gh}^{ab\mu\nu} = \frac{g^2 C_A \delta^{ab} \mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \left[\int_0^1 dx \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Gamma(1-d/2) \Delta + p^\mu p^\nu (1-x)x \Gamma(2-d/2) \right] \right]$$

Έχοντας υπολογίσει τα 4 βασικά διαγράμματα συνεισφοράς πρέπει να συγκεντρωθούν όλα μαζί και να αθροιστούν:

Αθροίζοντας τα 3 τελευταία (gluon bubble, 4 point gluon bubble, ghost bubble):

$$\begin{aligned} M_{glue}^{ab\mu\nu} &= M_3^{ab\mu\nu} + M_4^{ab\mu\nu} + M_{gh}^{ab\mu\nu} = g^2 C_A \delta^{ab} \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \times \\ &\times \left[\frac{(3d-3)}{2} \Delta g^{\mu\nu} \Gamma(1-d/2) + p^\mu p^\nu \left(-3(x^2-x+1) + \frac{d}{2}(1-2x)^2 \right) \Gamma(2-d/2) + \right. \\ &g^{\mu\nu} p^2 (2x^2-2x+5) \frac{1}{2} \Gamma(2-d/2) + \frac{d}{2} (d-1) \Gamma(1-d/2) \Delta - (d-1)(1-x)^2 p^2 \Gamma(2-d/2) \\ &\left. + g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \Gamma(1-d/2) \Delta + p^\mu p^\nu (1-x)x \Gamma(2-d/2) \right) \right] = \\ &= g^2 C_A \delta^{ab} \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \left[g^{\mu\nu} \Delta \left(\frac{(3d-3)}{d} + (d-1) + \frac{1}{d} \right) \frac{d}{2} \Gamma(1-d/2) + \right. \\ &+ p^\mu p^\nu \left[-3(x^2-x+1) + \frac{d}{2}(1-2x)^2 + x(1-x) \right] \Gamma(2-d/2) + \\ &\left. + g^{\mu\nu} p^2 \left[-(d-1)(1-x)^2 + 2x^2 - 2x + 5/2 \right] \Gamma(2-d/2) \right] \end{aligned}$$

Υπάρχουν δύο πόλοι, ένας για $d = 2$ και ένας για $d = 4$. Στον πόλο $d = 2$ αναφέρεται ο όρος $\Gamma(1-d/2)$:

$$\frac{(3d-3)}{d} + (d-1) + \frac{1}{d} = \frac{2}{d} - 3 + (d-1) = \frac{3}{d} + (d-4) = \frac{4+d^2-4d}{d} = \frac{(d-2)^2}{d}$$

Παρατηρεί κανείς ότι στο $d = 2$, ο όρος $\frac{(d-2)^2}{d} \Gamma(1-d/2)$ μηδενίζεται και άρα ο πόλος στο $d = 2$ δεν επηρεάζει. (Όλα αυτά προϋποθέτουν τα couplings των τριών διαγραμμάτων να είναι ίσα)

$$\begin{aligned} \Delta \frac{(d-2)^2}{d} \frac{d}{2} \Gamma(1-d/2) &= \frac{x(x-1)p^2(d-2)}{2} (d-2) \Gamma(1-d/2) = \\ &= \frac{x(x-1)}{2} p^2 (d-2) [-2\Gamma(2-d/2)] = x(1-x)p^2 (d-2) \Gamma(2-d/2) \end{aligned}$$

Πλέον ο όρος στην παρένθεση θα γίνει:

$$g^{\mu\nu} p^2 [(x - x^2)(d - 2) + x^2 - x + 5/2 - (1 + x^2 - 2x)(d - 1)] \Gamma(2 - d/2) + p^\mu p^\nu [-3(x^2 - x + 1) + \frac{d}{2}(1 - 2x)^2 + x(1 - x)] \Gamma(2 - d/2)$$

Ο πρώτος όρος (ανάλογος του $g^{\mu\nu} p^2$) είναι:

$$g^{\mu\nu} p^2 [xd - 2x - x^2 d + 2x^2 + x^2 - x + 5/2 - (d - 1 + x^2 d - x^2 - 2xd + 2x)] \Gamma(2 - d/2) = \\ = g^{\mu\nu} p^2 [d(3x - 2x^2 - 1) + 4x^2 - 5x + 7/2] \Gamma(2 - d/2) = \\ = g^{\mu\nu} p^2 [d(3x - 2x^2 - 1) + x(4x - 5) + 7/2] \Gamma(2 - d/2)$$

Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$M_{glue}^{ab\mu\nu} = g^2 C_A \delta^{ab} \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \times \\ \times \left[g^{\mu\nu} p^2 (d(3x - 2x^2 - 1) + x(4x - 5) + 7/2) + p^\mu p^\nu \left(\frac{d}{2}(1 - 2x)^2 - 4x^2 + 4x - 3\right) \right]$$

Με αναλυτική επέκταση $d = 4 - \epsilon$, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$M_{glue}^{ab\mu\nu} = C_A \delta^{ab} \frac{g^2}{16\pi^2} (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \left[\frac{10}{3\epsilon} + \frac{31}{9} + \frac{5}{3} \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{-p^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

και άρα η συνολική συνεισφορά θα είναι:

$$M^{ab\mu\nu} = \delta^{ab} \frac{g^2}{16\pi^2} (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) C_A \left[\frac{10}{3\epsilon} + \frac{5}{3} \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{-p^2} \right) - n_f T_F \left(\frac{81}{3\epsilon} + \frac{4}{3} \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{-p^2} \right) \right) \right]$$

3.3 Η Επανακανονικοποίηση της QCD

Επόμενο βήμα μετά τον υπολογισμό των αποκλιόντων διαγραμμάτων είναι η επανακανονικοποίηση της θεωρίας. Όπως και στην QED, έτσι και στην QCD είναι να εξαχθούν οι αντίστοιχοι counterterms προκειμένου να αρθούν οι απειρίες.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η ανεπτυγμένη μορφή της Lagnangian:

$$L = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c - \frac{1}{4} g^2 [f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c] [f^{ade} A_\mu^d A_\nu^e] - \\ - \bar{c}^a \square c^a + g f^{abc} (\partial_\mu \bar{c}^a) A_\mu^b c^c + i \bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i - m \bar{\psi}_i \psi_i + g A_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j - \\ - \Phi_k^* \square \Phi_k + i g A_\mu^a T_{ik}^a [\Phi_i^* (\partial_\mu \Phi_k) - \Phi_k (\partial_\mu \Phi_i)^*] + g^2 A_\mu^a (T_{ik}^a) (T_{kj}^b) A_\mu^b \Phi_i^* \Phi_j - \\ - M^2 \Phi_i^* \Phi_i - \frac{1}{\xi} (\partial_\mu A_\nu^a)^2$$

όπου Φ, Φ^* : βαθμωτό scalar πεδίο, A_μ : το διανυσματικό πεδίο, $\psi, \bar{\psi}$: spinors, c, \bar{c} : ghosts και f : gauge parameter.

Κατά την εξαγωγή της β -συνάρτησης, οι όροι που έχουν βαθμωτά πεδία και εξάρτηση από ξ παραλείπονται καθώς:

- Δεν υπάρχουν βαθμωτά πεδία στην QCD
- Η επανακανονικοποίηση δεν επηρεάζεται από το ξ

Άρα η Lagrangian μετά από τα παραπάνω θα είναι η εξής:

$$L_{ren} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - gf^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A_\mu^b A_\nu^c - \frac{1}{4}g^2[f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c][f^{ade}A_\mu^d A_\nu^e] - \bar{c}^a \square c^a + gf^{abc}(\partial_\mu \bar{c}^a)A_\mu^b c^c + \bar{\psi}_i(i\cancel{\partial} - m)\psi_i + gA_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j$$

Και τώρα στην L_{ren} επαναορίζονται οι απαιτούμενες ποσότητες έτσι ώστε να γίνει η επανακανονικοποίηση. Παρακάτω εισάγονται οι επανακανονικοποιημένες ποσότητες τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= \sqrt{Z_3} A_{\mu,R}^a \\ \psi_i &= \sqrt{Z_2} \psi_{i,R} \\ m &= Z_m m_R \end{aligned}$$

ενώ για κάθε όρο αλληλεπίδρασης, της Lagrangian, επανακανονικοποιείται ξεχωριστά με συντελεστές που εξαρτώνται από τα Z_i σε μορφή γινομένου.

- $g = g_R Z_{A^3}$ για τον όρο $f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A_\mu^b A_\nu^c$
- $g^2 = g_R^2 Z_{A^4}$ για τον όρο $-\frac{1}{4}[f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c][f^{ade}A_\mu^d A_\nu^e]$
- $g = Z_1 g_R$ για τον όρο $A_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j$
- $g = Z_{1c} g_R$ για τον όρο $f^{abc}(\partial_\mu \bar{c}^a)A_\mu^b c^c$

Άρα οι όροι στην επανακανονικοποιημένη Lagrangian γίνονται (ο δείκτης R θα εννοηθεί):

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4}Z_3(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + Z_2 \bar{\psi}_i(i\cancel{\partial} - Z_m m)\psi_i - Z_{3c} \bar{c}^a \square c^a - gZ_{A^3} f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A_\mu^b A_\nu^c - \\ & -\frac{1}{4}g^2 Z_{A^4} (f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)(f^{ecd} A_\mu^c A_\nu^d) + gZ_1 A_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j + gZ_{1c} f^{abc}(\partial_\mu \bar{c}^a)A_\mu^b c^c \end{aligned}$$

όπου ορίζονται οι counterterms ως εξής:

$$\begin{aligned} Z_3 &= 1 + \delta_3, Z_2 = 1 + \delta_2, Z_1 = 1 + \delta_1, \\ Z_{3c} &= 1 + \delta_{3c}, Z_{A^3} = 1 + \delta_{A^3}, \\ Z_{A^4} &= 1 + \delta_{A^4}, Z_{1c} = 1 + \delta_{1c}, \delta_m + 1 = Z_m \end{aligned}$$

Εν συνεχεία, θα υπολογισθούν τα δ_3 , δ_2 και δ_m . Αν γίνει αντικατάσταση των Z_i στην *Lagrangian* τότε αυτή θα γίνει:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha)^2 + \bar{\psi}_i(i\cancel{\partial} - m)\psi_i - \bar{c}^a \square c^a - g f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A_\mu^b A_\nu^c - \\ &- \frac{1}{4}g^2(f^{ab}A_\mu^a A_\nu^b)(f^{cd}A_\mu^c A_\nu^d) + gA_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j + g f^{abc}(\partial_\mu \bar{c}^a)A_\mu^b c^c + \\ &+ \left(-\frac{\delta_3}{4}\right)(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + i\delta_2 \bar{\psi}_i \cancel{\partial} \psi_i - (\delta_m + \delta_2)m\bar{\psi}_i \psi_i - \delta_{3c}\bar{c}^a \square c^a + \\ &+ g\delta_{A^3} f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A_\mu^b A_\nu^c - \frac{1}{4}g^2\delta_{A^4}(f^{ab}A_\mu^a A_\nu^b)(f^{cd}A_\mu^c A_\nu^d) + \\ &+ g\delta_1 A_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j + g\delta_{1c} f^{abc}(\partial_\mu \bar{c}^a)A_\mu^b c^c \end{aligned}$$

Οι 4 πρώτοι counterterms που έχουν προκύψει από κινητικούς όρους υπολογίζονται από 2-point functions: Ο πρώτος όρος δίνει:

$$M^{ab\mu\nu} = \delta^{ab}(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu) \left\{ \frac{g^2}{16\pi^2} \left[c_A \left(\frac{10}{3\varepsilon} \right) - n_f T_f \left(\frac{8}{3\varepsilon} \right) \right] - \delta_3 \right\} + finite$$

Άρα για να γίνει πεπερασμένο πρέπει να ισχύει το εξής:

$$\delta_3 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{10}{3} c_A - \frac{8}{3} n_f T_f \right)$$

Για τα δ_2 , δ_m υπολογίζεται το διάγραμμα ιδιοενέργειας των quarks

$$\begin{aligned} \text{---} \rightarrow \text{---} \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} \rightarrow \text{---} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ig) \gamma^\mu T_{ik}^a \frac{i(\not{k} + m)\delta^{lk}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{(-ig^{\mu\nu})\delta^{ab}}{(p-k)^2 + i\varepsilon} (ig) \gamma^\nu T_{lj}^b = \\ &= (ig)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu i(\not{k} + m)\gamma^\mu}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{(-i)}{(p-k)^2 + i\varepsilon} (T_{ik}^a T_{lj}^b \delta^{ab} \delta^{lk}) \end{aligned}$$

Αξιοποιώντας τη σχέση:

$$T_{ik}^a T_{lj}^b \delta^{ab} \delta^{lk} = T_{il}^a T_{lj}^a = (T^a T^a)_{ij} = c_F \delta_{ij}$$

Άρα

$$i\Sigma^{ij}(p) = (ig)^2 c_F \delta_{ij} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu i(\not{k} + m)\gamma^\mu}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{(-i)}{(p-k)^2 + i\varepsilon}$$

Τώρα υπολογίζεται το ολοκλήρωμα:

$$\Pi_2(\not{p}) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + m)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{\gamma^\mu}{(p - k)^2 + i\varepsilon} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-2\not{k} + 4m)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k)^2 + i\varepsilon]}$$

Εισάγοντας παραμέτρους Feynman ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p - k)^2 - (k^2 - m^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - m^2 + [(p - k)^2 - k^2 + m^2]x]^2} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - m^2 + [p^2 - 2kp + k^2 - k^2 + m^2]x]^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - m^2 + p^2x - 2kpx + m^2x]^2} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[(k^2 - m^2)(1 - x) + (p - k)^2x]^2} \end{aligned}$$

Τώρα με shift $k \rightarrow k + px$ και άρα το $\Pi_2(\not{p})$ θα γίνει:

$$\Pi_2(\not{p}) = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-2\not{k} - 2\not{p}x + 4m)}{[(k + px)^2 - m^2](1 - x) + (p - k - px)^2x]^2}$$

Ο όρος με το \not{k} θα μηδενιστεί στο $k \rightarrow -k$ και πλέον ο παρονομαστής θα γίνει:

$$\begin{aligned} [(k + px)^2 - m^2](1 - x) + (p - k - px)^2x &= \\ &= [k^2 + (px)^2 + 2kpx - m^2](1 - x) + [p(1 - x) - k]^2x = \\ &= k^2(1 - x) + (px)^2(1 - x) + 2kpx(1 - x) - m^2(1 - x) + p^2(1 - x)^2x - 2pk(1 - x)x + k^2x = \\ &= k^2 + (px)^2(1 - x) - m^2(1 - x) - p^2(1 - x)x^2 + p^2(1 - x)x = \\ &= k^2 - m^2(1 - x) + px^2(1 - x) = \\ &= k^2 + (p^2x - m^2)(1 - x) \end{aligned}$$

Άρα αν ορισθεί ως $\Delta \equiv (1 - x)(m^2 - p^2x)$ το ολοκλήρωμα θα γίνει:

$$\Pi_2(\not{p}) = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-2\not{p}x + 4m}{(k^2 - \Delta)^2}$$

Και τώρα σύμφωνα με την dimensional regularization:

$$\Sigma_2 = -i2g^2 c_F \delta^{ij} \mu^{4-d} \int_0^1 dx (x\not{p} - 2m) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^2}$$

όπου χρησιμοποιώντας σχέσεις της $D.R.$ και υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα:

$$\Sigma_2 = -\frac{g^2}{8\pi^2} c_F \delta^{ij} \int_0^1 dx (2m - \not{p}x) \left[\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{(1 - x)(m^2 - p^2x)} \right]$$

Οι counterterms που προκύπτουν από την renormalized Lagrangian είναι:

$$C = +\delta_2 \not{p} - (\delta_m + \delta_2)m$$

Και τώρα αθροίζοντας τους όλους μαζί με την απαίτηση οι δ_2, δ_m να μηδενίζουν το άπειρο κομμάτι, δηλαδή το $\int_0^1 dx \frac{4m - 2\not{p}x}{\varepsilon}$ και να αφήνουν τον όρο, πεπερασμένο. Συνολικά, κάνοντας το ολοκλήρωμα $\int_0^1 dx \frac{[4m - 2\not{p}x]}{\varepsilon}$:

$$\Sigma_2^{ij}(\not{p}) = -\delta^{ij} \left(\frac{g^2}{16\pi^2} c_F \left(\frac{2\not{p} - 8m}{\varepsilon} \right) + finite + \delta_2 \not{p} - (\delta_m + \delta_2)m \right)$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= +\frac{1}{\varepsilon} \frac{g^2}{16\pi^2} [-2c_F] \\ \delta_m &= +\frac{1}{\varepsilon} \frac{g^2}{16\pi^2} [-6c_F] \end{aligned}$$

Για το δ_{3c} συμβάλλει το εξής διάγραμμα:

$$\begin{aligned} iM_2 &= + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-g f^{lea} k^\mu) \left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{(p-k)^2} \delta^{ed} \right) (-g f^{kdb} p^\nu) \left(\frac{i\delta^{lk}}{k^2} \right) = \\ &= g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [f^{lea} f^{leb}] \left[\frac{kp}{k^2(p-k)^2} \right] \\ &\quad (f^{lea} f^{leb} = f^{ale} f^{ble} = c_A \delta^{ab}) \\ iM_2 &= c_A \delta^{ab} g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{kp}{k^2(p-k)^2} \end{aligned}$$

Εισάγοντας παραμέτρους Feynman και κάνοντας υπολογισμούς (όπως πριν):

$$iM_2 = g^2 c_A \delta^{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{kp}{[k^2(1-x) + x(p-k)^2]^2}$$

και με shift $k \rightarrow k + px$

$$iM_2 = g^2 c_A \delta^{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{[kp + p^2x]}{[k^2 - (x-1)xp^2]^2}$$

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται εξαιτίας του ότι $k \rightarrow -k$:

$$iM_2 = g^2 c_A \delta^{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{p^2x}{[k^2 - (x-1)xp^2]^2}$$

Ορίζοντας $\Delta \equiv (x-1)xp^2$ και σε d διαστάσεις:

$$iM_2 = g^2 c_A \delta^{ab} \mu^{4-d} \int_0^1 dx p^2 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2}$$

Παίρνοντας τους τύπους της Dimensional Regularization το ολοκλήρωμα θα γίνει:

$$iM_2 = g^2 c_A \delta^{ab} \frac{\mu^{4-d} i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-d/2) p^2 \int_0^1 dx \frac{x}{\Delta^{2-d/2}}$$

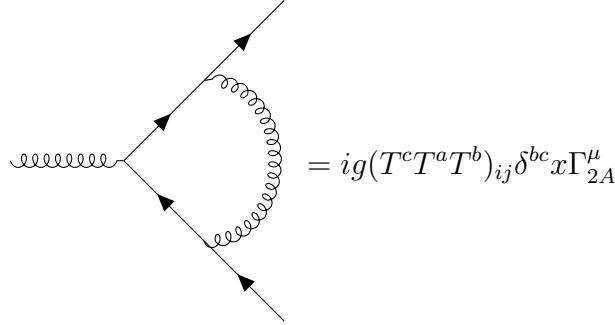
κάνοντας επέκταση $d = 4 - \varepsilon$ και $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$M_2 = \frac{g^2 c_A \delta^{ab}}{16\pi^2} p^2 \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right) \right] x$$

Άρα συνυπολογιζομένου και του counterterm:

$$\begin{aligned} \frac{g^2 c_A \delta^{ab}}{16\pi^2} p^2 \int_0^1 dx \left(\frac{2x}{\varepsilon} \right) + \text{finite terms} - \delta_{3c} p^2 \delta^{ab} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \delta_{3c} &= \frac{g^2 c_A}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Καταφεύγοντας στον υπολογισμό του δ_1 μέσω 3-point function. Το πρώτο γράφημα θα είναι το εξής:



$$= ig(T^c T^a T^b)_{ij} \delta^{bc} x \Gamma_{2A}^\mu$$

όπου το Γ_{2A}^μ είναι το ολοκλήρωμα του vertex.

$$\begin{aligned} T^b T^a T^b &= T^b T^b T^a + T^b T^a T^b - T^b T^b T^a = T^b T^b T^a + T^b [T^a, T^b] = \\ c_F T^a + i f^{abc} T^b T^c &= c_F T^a + \frac{i}{2} [f^{abc} T^b T^c + f^{abc} T^b T^c] = c_F T^a + \frac{i}{2} [f^{abc} T^b T^c - f^{acb} T^b T^c] = \\ c_F T^a + \frac{i}{2} [f^{abc} T^b T^c - f^{abc} T^c T^b] &= c_F T^a + \frac{i}{2} f^{abc} [T^b, T^c] = c_F T^a + \frac{i}{2} f^{abc} (i f^{bcd} T^d) = \\ = c_F T^a - \frac{1}{2} f^{abc} f^{dbc} T^d &= c_F T^a - \frac{1}{2} c_A \delta^{ad} T^d = c_F T^a - \frac{1}{2} c_A T^a = (c_F - \frac{1}{2} c_A) T^a \end{aligned}$$

Το Γ_{2A} θα γίνει ως εξής:

$$\begin{aligned}\Gamma_{2A}^\mu &= -(ig)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\nu\alpha}}{(k-q_1)^2} \gamma^\nu \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)\gamma^\alpha}{k^2 - m^2} = \\ &= ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu}{(k-q_1)^2 [(p+k)^2 - m^2] [k^2 - m^2]}\end{aligned}$$

Τώρα κάνοντας πράξεις στον παρονομαστή, με την εισαγωγή παραμέτρων Feynman:

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{[xA + yB + zC]^3}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(k-q_1)^2 [(p+k)^2 - m^2] [k^2 - m^2]} = \\ &= 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{[x(k-q_1)^2 + y[(p+k)^2 - m^2] + z[k^2 - m^2]]^3}\end{aligned}$$

Ο παρονομαστής γίνεται:

$$x(k-q_1)^2 + y[(p+k)^2 - m^2] + z[k^2 - m^2] = (k+yp - zq_1)^2 - \Delta,$$

όπου $\Delta = -xyp^2 + (1-z)^2m$. Ο αριθμητής θα γίνει:

$$\begin{aligned}\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu &= \gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + m \gamma^\nu \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + m \gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \gamma^\nu + \\ &+ m \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \gamma^\nu + m^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu p^\rho k^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu k^\rho k^\sigma + m \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu k^\rho + \\ &+ m \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu p^\rho + m \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu k^\rho + m^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \\ &= -2\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma p^\rho k^\sigma - 2\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma k^\rho k^\sigma + 4mg^{\mu\rho} k^\rho + 4mg^{\mu\rho} p^\rho + 4mg^{\mu\rho} k^\rho - 2m^2 \gamma^\mu = \\ &= -2\not{p} \gamma^\mu \not{k} - 2\not{k} \gamma^\mu \not{k} + 4mk^\mu + 4mp^\mu + 4mk^\mu - 2m^2 \gamma^\mu = \\ &= -2[\not{k} \gamma^\mu \not{p} + \not{k} \gamma^\mu \not{k} + m^2 \gamma^\mu - 2m(2k^\mu + p^\mu)]\end{aligned}$$

Άρα:

$$\Gamma_{2A}^\mu = -2ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{[\not{k} \gamma^\mu \not{p} + \not{k} \gamma^\mu \not{k} + m^2 \gamma^\mu - 2m(2k^\mu + p^\mu)]}{[(k+yp - zq_1)^2 - \Delta]^3}$$

Κάνοντας shift στον αριθμητή: $k^\mu \rightarrow k^\mu - y^\mu + zq_1^\mu$

$$(\not{k} - y\not{p} + zq_1)\gamma^\mu \not{p} + (\not{k} - y\not{p} + zq_1)\gamma^\mu (\not{k} - y\not{p} + zq_1) - 2m(2k^2 - 2yp^\mu - 2zq_1^\mu + p^\mu)$$

Χρησιμοποιώντας $k^\mu k^\nu = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}k^2$, την Gordon identity και το $(x+y+z=1)$.

Η ποσότητα του αριθμητή θα γίνει:

$$\begin{aligned} & [-\frac{1}{2}k^2 + (1-x)(1-y)p^2 + (1-4z+z^2)m^2]\gamma^\mu + \\ & + imz(1-z)p_\nu\sigma^{\mu\nu} + \\ & + m(z-2)(x-y)p^\mu \Rightarrow \text{στο ολοκλήρωμα μηδενίζεται για } x \leftrightarrow y \end{aligned}$$

Το Γ_{2A}^μ πρέπει να έχει τη μορφή:

$$\Gamma_{2A}^\mu = F_1^{2A} \left(\frac{p^2}{m^2} \right) \gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} p_\nu F_2^{2A} \left(\frac{p^2}{m^2} \right)$$

Άρα

$$F_2^{2A}(p^2) = 2m^2 g^2 (4i) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{z(1-z)}{(k^2 - \Delta)^3}$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^3} = \frac{-i}{32\pi^2 \Delta}$$

$$F_2^{2A}(p^2) = m^2 \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)}{(1-z)^2 m^2 - xyp^2}$$

το οποίο είναι πεπερασμένο και έχει δεν ενδιαφέρον για τον υπολογισμό καθώς δεν συνεισφέρει στον counterterm.

Ενώ το F_1^{2A} :

$$F_1^{2A}(p^2) = 1 + f(p^2),$$

όπου

$$\begin{aligned} f(p^2) = & -2ig^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \\ & \times \frac{k^2 - 2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m^2}{[k^2 - (m^2(1-z)^2 - xyp^2)]^3} \end{aligned}$$

Κάνοντας λίγες πράξεις:

$$k^2 = k^2 - k^2 + k^2 = (2k^2 - 4k^\mu k^\nu g^{\mu\nu}) \xrightarrow{\text{σε } d \text{ διαστάσεις}} 2k^2 - \frac{4}{d}k^2 = (2 - \frac{4}{d})k^2$$

Επίσης στον παρονομαστή προσθέτω έναν όρο xm_γ^2 (μάζα φωτονίου) για να ομαλοποιήσω την IR divergence.

Άρα σε d διαστάσεις:

$$f(p^2) = -2ig^2\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \\ \times \frac{(2-4/d)k^2 - 2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m^2}{[k^2 - (m^2(1-z)^2 - xyp^2 + m^2z)]^3}$$

Τώρα υπάρχουν δύο είδη αποκλίσεων, μία IR και μία UV.

Για το UV:

$$\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^4} \frac{(2-4/d)k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} = \mu^{4-d} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{(2-4/d)d/4\Gamma(4-d/2)}{\Delta^{2-d/4}}$$

και κάνοντας επέκταση από το $d = 4 - \varepsilon$, $\varepsilon = 0$ ισούται με:

$$\frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta} \right)$$

Την IR απόκλιση:

$$\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^4} \frac{(-2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m^2)}{(k^2 - \Delta)^3} \stackrel{d=4}{=} \\ \stackrel{d=4}{=} \frac{d^d k}{(2\pi)^4} \frac{[-2(1-x)(1-y)p^2 + (1-4z+z^2)m^2]}{(k^2 - \Delta)^3} = \\ = \frac{i(1-x)(1-y)p^2 + (1-4z+z^2)m^2}{16\pi^2\Delta}$$

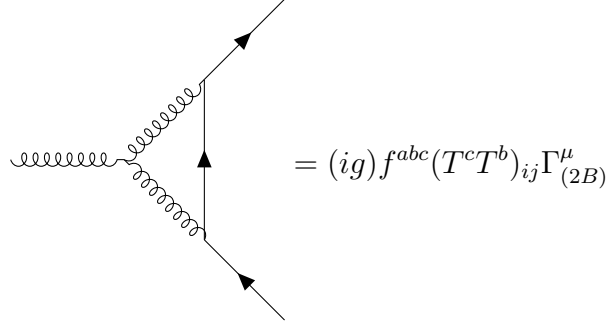
Κάνοντας αναλυτική επέκταση $d = 4 - \varepsilon|_{\varepsilon=0}$:

$$f(p^2) = \frac{g^2}{8\pi^2} \times \\ \times \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} + \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left(\frac{p^2(1-x)(1-y) + m^2(1-4z+z^2)}{\Delta} \right) + \ln \left(\frac{\tilde{\mu}}{\Delta} \right) \right]$$

όπου για $p^2 \gg m^2$ το συνολικό διάγραμμα είναι:

$$ig \left[c_F - \frac{1}{2}c_A \right] T_{ij}^a \gamma^\mu \left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right) \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{-p^2} \right) + finite \right)$$

Υπάρχει και ένα ακόμα διάγραμμα:



$$= (ig) f^{abc} (T^c T^b)_{ij} \Gamma_{(2B)}^\mu$$

Η παραπάνω έκφραση απλοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} T^c T^b f^{abc} &= \frac{1}{2} [T^c T^b + T^c T^b] f^{abc} = \frac{1}{2} [T^c T^b f^{abc} - T^c T^b f^{abc}] \stackrel{b \leftrightarrow c}{=} \frac{1}{2} [T^c T^b f^{abc} - T^b T^c f^{abc}] = \\ &= \frac{1}{2} f^{abc} [T^c, T^b] = \frac{i}{2} f^{abc} f^{dcb} T^d = \frac{-i}{2} f^{abc} f^{dbc} T^d = \frac{-i}{2} c_A T^d \delta^{ad} = \frac{-i}{2} c_A T^a \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα από το γράφημα είναι:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2B}^\mu &= (ig)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [g^{\mu\rho} (-q_2 + k - q_1 - q_2)^\nu + g^{\mu\nu} (q_1 + q_2 + q_1 + k)^\rho + \\ &+ g^{\nu\rho} (-q_1 - k + q_2 - k)^\mu] \frac{\gamma^\rho i \not{k} \gamma^\nu}{k^2} \frac{-i}{[(q_1 + k)^2 + i\varepsilon]} \frac{-i}{[(q_2 - k)^2 + i\varepsilon]} \end{aligned}$$

Ενδιαφέρον έχει μόνο η UV divergence και για αυτό το λόγο ισχύει η προσέγγιση $q_1 = q_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2B}^\mu &= (ig)^2 i^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[g^{\mu\rho} k^\nu + g^{\mu\nu} k^\rho - 2k^\mu g^{\nu\rho}] \gamma^\rho \not{k} \gamma^\nu}{k^6} = \\ &= g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{\gamma^\mu \not{k} \not{k} + \not{k} \not{k} \gamma^\mu - 2k^\mu \gamma^\rho \not{k} \gamma^\rho}{k^6} \right] \stackrel{k^2 = k^2}{=} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^6} [2k^2 \gamma^\mu - 2\gamma^\rho \not{k} \gamma^\rho k^\mu] \end{aligned}$$

Σε d διαστάσεις: $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{k^2}{d} g^{\mu\nu}$, $\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\rho = (2-d) \gamma^\nu$

$$\Gamma_{2B}^\mu = \left(4 - \frac{4}{d}\right) \gamma^\mu g^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^4}$$

και κάνοντας επέκτασης $d = 4 - \varepsilon$

$$\Gamma_{2B}^\mu = i \gamma^\mu \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{3}{\varepsilon} + \frac{3}{2} \ln \tilde{\mu}^2 + \text{finite} \right)$$

Άρα το γράφημα δίνει:

$$igc_A T_{ij}^\alpha \gamma^\mu \left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right) \left(\frac{3}{\varepsilon} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{-p^2} \right) + finite \right)$$

Τέλος το αντίστοιχο διάγραμμα counterterm δίνει:

$$igT_{ij}^\alpha \gamma^\mu \delta_1$$

Αθροίζοντας όλους τους όρους αυτούς μαζί:

$$igT_{ij}^\alpha \gamma^\mu \left[\delta_1 + (c_F - \frac{1}{2}c_A) \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{2}{\varepsilon} + \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{3}{\varepsilon} c_A \right]$$

Άρα:

$$\delta_1 = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} [-2c_F - 2c_A]$$

Για τον υπολογισμό των δ_{A^3} , δ_{A^4} , δ_{1c} εκφράζονται συναρτήσει των δ_1 , δ_m , δ_2 , δ_3 , δ_{3c} :

- $Z_{A^3} = Z_3 \frac{Z_1}{Z_2} \rightarrow \delta_{A^3} = (\delta_1 + \delta_3 - \delta_2) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{4}{3}c_A - \frac{8}{3}n_f T_F \right]$
- $Z_{A^4} = \frac{Z_{A^3}^2}{Z_3} \rightarrow (2\delta_{A^3} - \delta_3) = \delta_{A^4} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{-2}{3}c_A - \frac{8}{3}n_f T_F \right]$
- $Z_{1c} = \frac{Z_{3c} - Z_{A^3}}{Z_3} \rightarrow (\delta_{3c} + \delta_{A^3} - \delta_3) = \delta_{1c} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{g^2}{16\pi^2} (-c_A)$

3.4 Εξαγωγή της β-συνάρτησης:

Μετά από τον υπολογισμό των counterterms, σαν εφαρμογή μπορεί να γίνει η εξαγωγή της β-συνάρτησης για τη σταθερά σύζευξης g . Παίρνοντας τον όρο αλληλεπίδρασης fermion-gauge boson:

$$L_{int} = \mu^{4-d/2} g_0 Z_1 A_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j = \mu^{(4-d)/2} g_R \frac{Z_1}{\sqrt{Z_3 Z_2}} A_\mu^{a,0} \bar{\psi}_i^0 \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j^0$$

όπου ο δείκτης 0 \rightarrow bare fields

Άρα το $g_0 = \mu^{(4-d)}/2y_\alpha \frac{Z_1}{\sqrt{Z_3 Z_2}}$ και πρέπει να είναι ανεξάρτητο του μ αφού δεν

υπάρχει μ στην αρχική μου bare Lagrangian:

$$\begin{aligned}
0 &= \mu \frac{d}{d\mu} g^0 = \mu \frac{d}{d\mu} \left(g_R \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} \mu^{(4-d)/2} \right) \stackrel{\text{Taylor } \sigma \epsilon \mathcal{O}(g_R^2)}{=} \mu \frac{d}{d\mu} \left(g_R (\delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{2} \delta_3) \mu^{(4-d)/2} \right) = \\
&= \mu \frac{d}{d\mu} \left[\left(\delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{2} \delta_3 \right) g_R \right] + g_R \frac{\epsilon}{2} + \frac{d}{d\mu} g_R + \mathcal{O}(g_R^4) \rightarrow \\
&\rightarrow \beta(g_R) = \frac{d}{d\mu} g_R = g_R \left[-\frac{\epsilon}{2} - \frac{d}{d\mu} \left(\delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{2} \delta_3 \right) \right] + \mathcal{O}(g_R^4)
\end{aligned}$$

Με λίγες πράξεις στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης:

$$\frac{d}{d\mu} \delta_i(g_R(\mu)) = \frac{\partial \delta_i}{\partial g_R} \frac{\partial g_R}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \mu} \delta_i = \frac{\partial \delta_i}{\partial g_R} \frac{\partial g_R}{\partial \mu} = -\frac{\epsilon}{2} g_R \frac{\partial}{\partial g_R} \delta_i$$

Και έτσι για τον κάθε counterterm που εμφανίζεται στο δεξί μέλος θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial g_R} \delta_1 &= g_R \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{16\pi^2} [-2c_F - 2c_A] \\
\frac{\partial}{\partial g_R} \delta_2 &= g_R \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{16\pi^2} [-2c_F] \\
\frac{\partial}{\partial g_R} \delta_3 &= g_R \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{10}{3} c_A - \frac{8}{3} n_f T_F \right]
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\beta(g_R) = -\frac{\epsilon}{2} g_R - \frac{g_R^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} c_A - \frac{4}{3} n_f T_F \right)$$

Όπως στην περίπτωση της QED μπορεί να γίνει αντίστοιχη ανάλυση και να εξαχθεί η σχέση εξάρτησης της σύζευξης των ισχυρών αλληλεπιδράσεων από την κλίμακα $\alpha_s(\mu) = \frac{g_R^2}{4\pi}$ σε προσέγγιση 1-loop. Πιο συγκεκριμένα, κάνοντας το ansatz για τη μορφή της $\beta(\alpha_s)$:

$$\beta(\alpha_s) = -\epsilon \alpha_s - 2\alpha_s \left[\left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) \beta_0 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \beta_1 + \dots \right]$$

όπου οι συντελεστές β_i εξαρτάται από τον υπολογισμό στην ανάλογη τάξη βρόγχου, καθώς η παραπάνω μορφή ταυτίζεται με αυτήν που έχει εξαχθεί μέσω των counterterms. Στην προκειμένη περίπτωση για 1-loop το β_0 έχει την εξής μορφή:

$$\beta_0 = \frac{11}{3} C_A - \frac{4}{3} n_f T_f$$

όπου, ως γνωστόν, για $SU(3)$, $C_A = 3$ και $T_f = \frac{1}{2}$. Συνεπώς η συνάρτηση-β λαμβάνει την εξής μορφή σε 1-loop (για $\epsilon \rightarrow 0$):

$$\beta(\alpha_s) = -2(\alpha_s)^2 \frac{\left(11 - \frac{2}{3}n_f\right)}{4\pi}$$

Το n_f ισούται με τις γενιές φερμιονίων, που ως γνωστόν απαντώνται στη φύση 6. Άρα $\beta_0 = 7$ και άρα:

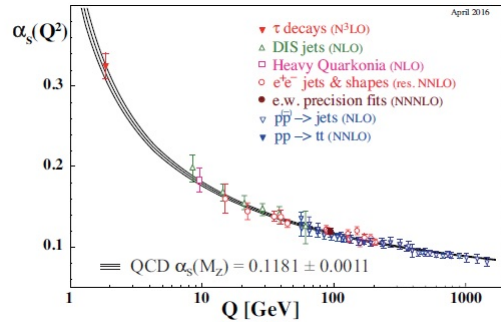
$$\beta(\alpha_s) = \mu \frac{d}{d\mu} \alpha_s = -(\alpha_s)^2 \frac{7}{2\pi}$$

Λύνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση καταλήγει κανείς στο εξής συμπέρασμα:

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{7} \frac{1}{\ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{QCD}}\right)}$$

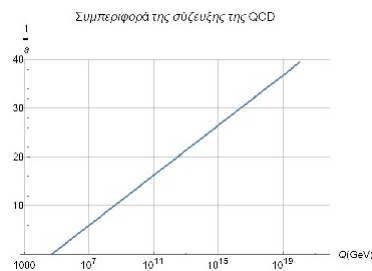
όπου το Λ_{QCD} προκύπτει από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης ως σταθερά ολοκλήρωσης. Στην QED η αντίστοιχη ποσότητα αντιπροσώπευε το σημείο κατάρρευσης της διαταρακτικής φύσης της θεωρίας καθιστώντας άπειρη την τιμή της σύζευξης, επονομαζόμενο ως Landau pole. Στην προκειμένη περίπτωση, δεν παρατηρείται αυτή η συμπεριφορά, φανερώνοντας έτσι μία πολύ σημαντική και θεμελιώδη διαφορά μεταξύ των δύο θεωριών. Στην QCD λοιπόν, το σημείο αυτό δεν αποτελεί εκδήλωση κάποιας αντίστοιχης ιδιόμορφης συμπεριφοράς, αλλά ένα απλό σημείο αναφοράς της θεωρίας. Για τον καλύτερο δυνατό προσδιορισμό αυτού του σημείου απαιτείται αριθμητική προσέγγιση και οι συνεισφορές από υψηλότερες τάξεις βρόγχων είναι πολύ σημαντικές. Αναφορικά για 1-loop συνεισφορά, δεδομένου ότι πείραμα υποδεικνύει $\alpha(91.1876 GeV) = 0.11875$ το $\Lambda_{QCD} = 46.81 MeV$. Για συνεισφορά μέχρι 4-loop που έχουμε μέχρι σήμερα η τιμή του $\Lambda_{QCD} \approx 213 MeV$. Φαίνεται λοιπόν από τις δύο τιμές πόσο σημαντικές είναι οι συνεισφορές των υπολογισμών ανώτερης τάξης βρόγχων.

Αναφορικά το πειραματικό διάγραμμα είναι το εξής:



Σχήμα 3.2: Η συμπεριφορά της σύζευξης της QCD όπως εξήχθη από πειραματικά δεδομένα.

Για την τιμή του Λ_{QCD} κάνοντας την γραφική παράσταση του $\alpha_s(\mu)$ αναδεικνύεται μία αξιοσημείωτη συμπεριφορά της θεωρίας:



Σχήμα 3.3: Συμπεριφορά της σύζευξης της QCD ως προς την κλίμακα. Πιο συγκεκριμένα, απεικονίζεται η εξάρτιση του $\frac{1}{\alpha_s}$ ως προς $\mu \equiv Q$ σε λογαριθμική κλίμακα.

Όπως φαίνεται από το γράφημα μπορεί να παρατηρηθεί ότι η σύζευξη μειώνεται, μειώνοντας την απόσταση και έτσι η θεωρία είναι ασυμπτωτικά ελεύθερη. Αντίστοιχα για αυξάνοντας την απόσταση αυξάνεται και η σύζευξη πράγμα που δικαιολογεί το γεγονός ότι δεν απαντώνται απομονωμένα quarks γνωστό και ως φαινόμενο του confinement.

4 Γραμμικό σ -Μοντέλο

4.1 Lagrangian της θεωρίας- Αυθόρμητη παραβίαση συμμετρίας

classical field theory $\rightarrow \phi^4$ Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

αν πάρω $m^2 \rightarrow -\mu^2 \Rightarrow L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$

Αυτή η Lagrangian έχει discrete symmetry: $\phi \rightarrow -\phi$

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]$$

$$H = \pi \dot{\phi}_{(\phi, \pi)} - L(\phi, \dot{\phi}_{(\phi, \pi)}) = \pi \dot{\phi}_{(\phi, \pi)} - \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]$$

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right] = \dot{\phi}$$

$$\Rightarrow H = (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 = \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \xrightarrow{\min} \frac{2V}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow -\mu^2 \phi + \frac{\lambda}{6} \phi^3 = 0$$

$$\Rightarrow \phi \left(\frac{\lambda}{6} \phi^2 - \mu^2 \right) = 0$$

$$\phi = 0 \text{ ή } \phi^2 = \frac{6\mu^2}{\lambda} \Rightarrow \phi = \pm v = \pm \sqrt{6/\lambda} \mu$$

όπου $v = \text{vacuum expectation value}$ του ϕ .

Έστω ότι βρίσκομαι στο $\phi = v$:

Ορίζω $\phi(x) = v_\sigma(x)$ και γράφω τη Lagrangian σε όρους $\sigma(x)$:

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 = \frac{1}{2} [\partial_\mu (v + \sigma(x))]^2 + \frac{1}{2} \mu^2 (v + \sigma(x))^2 - \frac{\lambda}{4!} (v + \sigma(x))^4$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} (2\mu^2) \sigma^2 = \sqrt{\frac{\lambda}{6}} \mu \sigma^3 - \frac{\lambda}{4!} \sigma^4$$

Δεν έχει όρο ανάλογο του σ . Λογικό γιατί έχω minimum στο $f(x + \delta x) = f_0 + f'(x) \delta x + f''(x) \delta x^2 + \dots$. Αυτή η Lagrangian περιγράφει scalar field μάζας 2μ με σ^3, σ^4 interactions. Η συμμετρία της $\phi \rightarrow -\phi$ δεν είναι εμφανής αλλά διατηρείται στη σχέση των σταθερών συντελεστών, μ, λ .

Linear sigma model

(broken symmetry είναι continuous)

Έστω Lagrangian με N πραγματικά βαθμωτά πεδία:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}((\phi^i)^2)^2$$

Η Lagrangian είναι invariant κάτω από $\phi^i \rightarrow R^{ij}\phi^j$,
όπου $R : N \times \text{Northogonalmatrix} \Rightarrow O(N)\text{Group}$

minimum: $(\phi_0^i)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$.

Το επιλέγω τέτοιο ώστε: $\phi_0^i = (0, 0, \dots, v)$, όπου $v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$.

Ορίζω το shift και γράφω τη Lagrangian σε $\sigma(x), \pi(x)$:

$$\phi^i(x) = (\pi^\kappa(x), v + \sigma(x)), \quad \kappa = 1, \dots, N - 1$$

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^\kappa(x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 \\ - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}\mu(\pi^\kappa(x))^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}(\pi^\kappa(x))^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}((\pi^\kappa(x))^2)^2$$

Άρα έχω 1 massive σ field και $N-1$ massless fields, έχω μόνο $O(N-1)$ συμμετρία που περιστρέφει τα $\Pi(N-1)$ πεδία.

$\sigma \rightarrow$ radial configuration \rightarrow 1 διεύθυνση

$\pi \rightarrow$ tagential configuration (εφαπτομενικός χώρος, τα πεδία είναι τα ίδια)

4.2 Επανακανονικοποίηση

Θα μελετήσω την κβαντική θεωρία του linear sigma model:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^\kappa(x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}\mu(\pi^\kappa(x))^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}(\pi^\kappa(x))^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}((\pi^\kappa(x))^2)^2$$

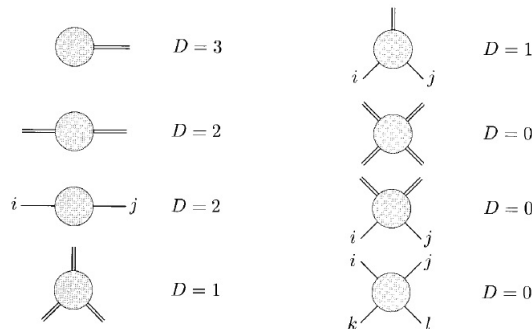
Οι όροι αυτοί μου δίνουν τους εξής κανόνες Feynman:

$$\begin{aligned} \sigma \xrightarrow{p} &= \frac{i}{p^2 - 2\mu^2} & \pi^i \xrightarrow{p} \pi^j &= \frac{i\delta^{ij}}{p^2} \\ \text{Y} &= -6i\lambda v & \text{Y} &= -2i\delta^{ij}\lambda v \\ \text{X} &= -6i\lambda & \text{X} &= -2i\lambda\delta^{ij} \\ \text{X} &= -2i\lambda[\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}] \end{aligned}$$

Σχήμα 4.1: Κανόνες Feynman για το γραμμικό σ-μοντέλο.

Με αυτούς τους κανόνες Feynman υπολογίζω tree-level amplitudes. Τι γίνεται αν πάω να υπολογίσω loops που αποκλίνουν; Για τα εξωτερικά πόδια έχω βαθμό απειρίας $D = 4 - Na$

Τα πιθανά διαγράμματα που φέρουν 1-loop divergence είναι 8:



Σχήμα 4.2: Πιθανά αποκλίνοντα διαγράμματα Feynman για το γραμμικό σ-μοντέλο.

Τώρα θα πρέπει να βρω counterterms, οι οποίοι θα μου απορροφήσουν τα άπειρα. Άρα θα γράψω την αρχική μου Lagrangian (πριν το σπάσιμο):

Ορίζω μόνο 3 παραμέτρους φυσικές που θα κάνω ανακανονικοποίηση:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2 + \frac{1}{2}\delta_z(\partial_\mu \phi^i)^2 - \frac{1}{2}\delta_\mu(\phi^i)^2 - \frac{\delta_\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2$$

όπου $\mu_0 = \mu + \delta_\mu$ και $\lambda_0 = \lambda + \delta_\lambda$. Αν το κάνω shift και το γράψω σε fields π, σ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\delta_z(\partial_\mu \phi^i)^2 - \frac{1}{2}\delta_\lambda(\phi^i)^2 - \frac{\delta_\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2 \stackrel{\phi^i(x)=[\pi^k(x), v+\sigma(x)]}{=} \frac{1}{2}\delta_z((\partial_\mu \pi^k)^2 + (\partial_\mu \sigma(x))^2) + \\ & + [-\frac{1}{2}\delta_\mu(\pi_k^2 + (v + \sigma(x))^2) - \frac{\delta_\lambda}{4}(\pi_k^2 + (v + \sigma(x))^2)^2] \end{aligned}$$

όπου οι 2 τελευταίοι όροι γίνονται:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\delta_\mu(\pi_k^2 + (v + \sigma(x))^2) = -\frac{1}{2}\delta_\mu(\pi_k^2 + v^2 + 2v\sigma(x) + \sigma(x)^2) \\ & -\frac{1}{4}\delta_\lambda(\pi_k^2 + (v + \sigma(x))^2)^2 = -\frac{1}{4}\delta_\lambda(\pi_k^4 + 2\pi_k^2(v + \sigma(x))^2 + (v + \sigma(x))^4) = \\ & = -\frac{1}{4}\delta_\lambda((\pi^k)^4 + 2(\pi^k)^2(v^2 + 2v\sigma(x) + \sigma^2(x)) + (v^4 + 4v^3\sigma + 6v^2\sigma^2 + 4v\sigma^3 + \sigma^4)) = \\ & = -\frac{1}{4}\delta_\lambda((\pi^k)^4 + 2(\pi^k)^2v^2 + 2v(\pi^k)^2\sigma + 2(\pi^k)^2\sigma^2 + v^4 + 4v^3\sigma + 6v^2\sigma^2 + 4v\sigma^3 + \sigma^4) = \\ & \text{απαλείφονται οι σταθεροί όροι} \quad -\frac{1}{4}\delta_\lambda((\pi^k)^4 + 2(\pi^k)^2v^2 + 2v(\pi^k)^2\sigma + 2(\pi^k)^2\sigma^2 + \\ & + 4v^3\sigma + 6v^2\sigma^2 + 4v\sigma^3 + \sigma^4) \end{aligned}$$

Άρα οι όροι της Lagrangian που περιέχουν counterterms λαμβάνουν την τελική μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\delta_z(\partial_\mu \pi^k)^2 + \frac{1}{2}\delta_z(\partial_\mu \sigma)^2 + (\pi^k)^2(-\frac{\delta_\mu}{2} - \frac{\delta_\lambda}{2}v^2) + \sigma^2(-\frac{\delta_\mu}{2} - \frac{3\delta_\lambda}{2}v^2) + \\ & + \sigma(\delta_\mu v - \delta_\lambda v^3) - \sigma(\pi^k)^2\delta_\lambda v - \frac{\delta_\lambda}{2}\sigma^2(\pi^k)^2 + \sigma^3(-v\delta_\lambda) - \frac{\delta_\lambda}{4}(\pi^k)^4 - \frac{\delta_\lambda}{4}\sigma^4 \end{aligned}$$

Από τους παραπάνω όρους δημιουργούνται και τα εξής διαγράμματα:

$$\begin{aligned}
\sigma \xrightarrow{p} &= \frac{i}{p^2 - 2\mu^2} & \pi^i \xrightarrow{p} \pi^j &= \frac{i\delta^{ij}}{p^2} \\
\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} &= -6i\lambda v & \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} &= -2i\delta^{ij}\lambda v \\
\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} &= -6i\lambda & \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} &= -2i\lambda\delta^{ij} \\
\begin{array}{c} k \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \\ i \quad j \end{array} &= -2i\lambda[\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}]
\end{aligned}$$

Σχήμα 4.3: Διαγράμματα counterterms για το γραμμικό σ-μοντέλο.

Έτσι έχουν εισαχθεί 3 counterterms και σκοπός της περαιτέρω ανάλυσης είναι να αποδειχθεί ότι είναι ικανοί να αναιρέσουν όλες τις απειρίες έτσι ώστε η θεωρία να είναι επανακανονικοποιήσιμη.

4.2.1 Συνθήκες Επανακανονικοποίησης της θεωρίας

Προτού μελετηθούν τα αποκλίνοντα διαγράμματα της θεωρίας σε προσέγγιση 1-loop, ζωτικής σημασίας για την επανακανονικοποίηση είναι οι renormalization conditions. Αυτές όπως έχουν αναφερθεί και νωρίτερα καθορίζουν την μορφή των counterterms. Ως γνωστόν, ο αριθμός των συνθηκών είναι ίσος με τον αριθμό των counterterms, συνεπώς οι συνθήκες επανακανονικοποίησης θα είναι τρεις.

Για την κατανόηση των συνθηκών επανακανονικοποίησης μπορεί να οριστεί μία αναλογία μεταξύ των συνθηκών επανακανονικοποίησης τη QED :

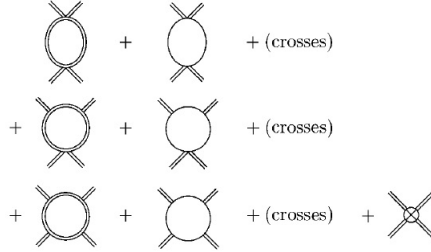
$$\begin{array}{l} \text{QED} \\ \mathcal{M}(m_P) = 0 \\ \mathcal{M}'(m_P) = 0 \\ \Gamma^\mu(0) = \gamma^\mu \\ \Pi(0) = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{linear sigma model} \\ \mathcal{M}_1(p^2) = 0 \\ \frac{d}{dp^2} \mathcal{M}_2(p^2)|_{p^2=m^2} = 0 \\ \Sigma_4 = -6i\lambda \end{array}$$

Αναφορικά, και για τις 2 θεωρίες το πρώτο ζεύγος συνθηκών επανακανονικοποίησης αντιστοιχεί στον προσδιορισμό της φυσικής μάζας (πόλου) και στην ομαλοποίηση του διαδότη. Στην περίπτωση όμως του linear sigma model θα επιλεγεί άλλη συνθήκη επανακανονικοποίησης. Αυτή θα είναι η απαίτηση ότι των 1-point functions, $\mathcal{M}_1(p^2)$ σε 1-loop θα έχουν μηδενική συνεισφορά. Αυτό δεν ήταν απαραίτητο στην QED γιατί κάτι τέτοιο όπως έγινε φανερό από την προηγούμενη ανάλυση συμβαίνει ούτως ή αλλιώς. Επίσης η παραπάνω συνθήκη

μέσω της σχέσης $\phi = v + \sigma$ δίνει ότι $\langle \phi \rangle = v + \langle \sigma \rangle = v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ σε όλες τις τάξεις προσέγγισης. Έτσι προκύπτει ότι $m^2 = 2\mu^2 = 2\lambda v^2$. Η τρίτη και τελευταία συνθήκη επανακανονικοποίησης απαιτεί ότι η σκέδαση $4 - \sigma$ σε 1-loop δίνει την παραπάνω τιμή εάν υπολογισθεί σε *on-shell* και πιο συγκεκριμένα για όταν οι τιμές Mandelstam είναι $s = 4m^2, t = u = 0$.

4.3 Αποκλίνοντα Διαγράμματα

Για τον προσδιορισμό των counterterms πρέπει να υπολογισθεί το άπειρο κομμάτι της συνεισφοράς των αποκλινόντων διαγραμμάτων. Σε 1-loop τα $4 - \sigma$ διαγράμματα είναι τα εξής:



Σχήμα 4.4: Αποκλίνοντα 4σ διαγράμματα για γραμμικό σ-μοντέλο.

Παρατηρεί κανείς ότι τα διαγράμματα που περιέχουν 3 ή παραπάνω εσωτερικούς διαδότες η συνεισφορά είναι (το πολύ) $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^6}$ και άρα είναι UV-finite άρα δεν αποτελεί ενδιαφέρον για τον υπόλοιπο υπολογισμό. Τα υπόλοιπα διαγράμματα φέρουν λογαριθμική απειρία αφού $D = 0$. Τα εναπομείναντα διαγράμματα είναι δύο καθώς οι loops μπορεί να είναι από σ, π . Το άπειρο κομμάτι κάθε ενός από είναι ανεξάρτητο του καναλιού οπότε το κάθε αποτέλεσμα από τα 2 πολλαπλασιάζεται επί 3 για κάθε κανάλι s, t, u . Άρα συνολικά υπάρχουν 6 αποτελέσματα. Επίσης, αυτά τα διαγράμματα έχουν παράγοντα συμμετρίας $\frac{1}{2}$. Για το διάγραμμα με σ στο βρόγχο:

$$\frac{1}{2}(-6i\lambda)^2 \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους Feynman:

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2 - ((k+p)^2 - k^2)x]^2}$$

Ο παρονομαστής θα γίνει:

$$\begin{aligned} (k+p)^2 - m^2 - ((k+p)^2 - k^2)x &= k^2 + p^2 + 2kp - m^2 - (k^2 + 2kp + p^2 - k^2)x = \\ &= k^2 + p^2 + 2kp - m^2 - (2kp + p^2)x = k^2 + 2kp(1-x) + p^2(1-x) - m^2 = \\ &= (k+p(1-x))^2 + p^2x(1-x) - m^2 \end{aligned}$$

Κάνοντας shift $k \rightarrow k - p(1-x)$ το διάγραμμα θα γίνει:

$$18\lambda^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2}$$

όπου $\Delta = m^2 - p^2x(1-x)$. Πηγαίνοντας σε δ-διαστάσεις επανακανονικοποιώντας $\lambda^2 \rightarrow \mu^{4-d}\lambda^2$ προκειμένου να αποφύγω διαστάσεις μάζα μέσα σε λογάριθμο στη συνέχεια. Άρα:

$$\begin{aligned} 18\lambda^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} &= 18\lambda^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \frac{i}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2-d/2) = \\ &= 18\lambda^2 \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} + finite \end{aligned}$$

Όσο αναφορά το διάγραμμα με π^k στο βρόγχο είναι ακριβώς το ίδιο μόνο που αλλάζουν οι κανόνες Feynman. Πιο συγκεκριμένα, αντί για $-6i\lambda$ θα υπάρχει $-2i\delta^{ij}\lambda$ όπου $\delta^{ij}\delta^{ij} = N-1$ γιατί $i, j = 1, \dots, N-1$. Άρα το άπειρο κομμάτι του διαγράμματος θα είναι (υπολογίζεται το ίδιο ολοκλήρωμα μόνο που προστίθεται μία πλασματική μάζα που στη συνέχεια τείνει στο 0 και επηρεάζει μόνο στο finite κομμάτι):

$$\frac{1}{2}(-2i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \frac{i}{(k+p)^2} = 2\lambda^2(N-1) \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} + finite$$

Άρα η συνολική συνεισφορά (πολλαπλασιάζοντας επί 3 για τα κανάλια) θα είναι:

$$3 [18\lambda^2 + 2\lambda^2(N-1)] \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} = (54\lambda^2 + 6\lambda^2N - 6\lambda^2) \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} = (N+8)6\lambda^2 \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon}$$

Από την 3^η συνθήκη επανακανονικοποίησης, εξισώνεται ο counterterm με το συνολικό άπειρο πλάτος των διαγραμμάτων ισχύει ότι:

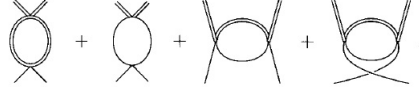
$$-6i\delta_\lambda + (N+8)6\lambda^2 \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} = 0 \rightarrow \delta_\lambda = \lambda^2(N+8) \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon}$$

Άρα η τιμή του δ_λ προσδιορίστηκε με τον υπολογισμό των απείρων κομματιών των 4-σ αποκλιόντων διαγραμμάτων.

Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι ο προσδιορισμός αυτού του counterterm επαρκεί για την επανακανονικοποίηση και των υπολοίπων 4-point, 3-point functions $\sigma\pi\pi, \pi\pi\pi\pi, \sigma\sigma\sigma$.

- Υπολογισμός των σσππ:

Στην προκειμένη περίπτωση συνεισφέρουν 4 διαγράμματα για όλες τις πιθανές περιπτώσεις εσωτερικών διαδοτών στο βρόγχο. Έτσι τα διαγράμματα προκύπτουν ως εξής:



Σχήμα 4.5: Αποκλίνοντα σσππ διαγράμματα για γραμμικό σ-μοντέλο.

Τα ολοκληρώματα αυτά το ίδιο άπειρο κομμάτι που έχει προκύψει από τον υπολογισμό που ήδη έχει γίνει, απλά αλλάζει ο αριθμητικός συντελεστής. Άρα υπολογίζοντας τα διαγράμματα ένα προς ένα έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-6i\lambda)(-2i\lambda\delta^{ij}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} = \\ & = 6\lambda^2\delta^{ij} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2} = \frac{6i\delta^{ij}}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} + finite \end{aligned}$$

Εάν ο βρόγχος έχει π τότε ισούται με:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-2i\lambda\delta^{kl})(-2i\lambda)(\delta^{ij}\delta^{ab} + \delta^{ia}\delta^{jb} + \delta^{ib}\delta^{ja}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta^{ka}}{k^2} \frac{i\delta^{lb}}{(p+k)^2} = \\ & = (2\lambda^2\delta^{ab})(\delta^{ij}\delta^{ab} + \delta^{ia}\delta^{jb} + \delta^{ib}\delta^{ja}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(p+k)^2} = \\ & = (2\lambda^2)(\delta^{ij}(N-1) + \delta^{ij} + \delta^{ij}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(p+k)^2} = \\ & = 2\lambda^2\delta^{ij}(N+1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(p+k)^2} = 2\lambda^2\delta^{ij}(N+1) \frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} + finite \end{aligned}$$

Εάν ο βρόγχος περιέχει και σ και π τότε λαμβάνονται υπόψη 2 διαγράμματα, όπου το ένα προκύπτει από το άλλο εάν αλλάξουν μεταξύ τους τα προκύπτοντα π ($i \leftrightarrow j$):

$$(-2i\lambda)\delta^{ia}(-2i\lambda)\delta^{bj} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(p+k)^2} \delta^{ab} = 4\lambda^2\delta^{ij} \frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} + finite$$

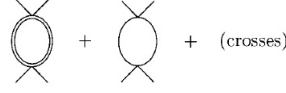
Ενώ το δεύτερο διάγραμμα που προκύπτει από την ανταλλαγή $i \leftrightarrow j$ είναι το ίδιο με το παραπάνω. Έτσι η συνολική συνεισφορά θα είναι:

$$\delta^{ij}\lambda^2 \frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} (4 + 4 + 6 + 2N + 2) = \delta^{ij}2\lambda^2 \frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} (N + 8) = -2\delta_\lambda\delta^{ij}$$

Το παραπάνω κομμάτι ισούται ακριβώς με τη συνεισφορά των counter-terms για το αντίστοιχο διάγραμμα όπως έχει υπολογιστεί μόνο και μόνο από το $\delta\lambda$. Έτσι η συνεισφορά των $\sigma\sigma\pi\pi$ έχει γίνει πεπερασμένη σε 1-loop και για αυτό αρκεί μόνο το $\delta\lambda$ όπως υπολογίστηκε μόνο από τα 4σ διαγράμματα.

- Υπολογισμός των $\pi\pi\pi\pi$:

Σε αυτή την κατηγορία διαγραμμάτων συνεισφέρουν 6 διαγράμματα) τα οποία βασίζονται σε δύο τύπους διαγραμμάτων ως προς το από τι αποτελείται ο βρόγχος και ο κάθε τύπος έχει 3 κανάλια.



Σχήμα 4.6: Αποκλίνοντα 4π διαγράμματα για γραμμικό σ -μοντέλο.

Παρόλα αυτά επειδή τα εξωτερικά σωματίδια π αντιστοιχούν σε κάποιο δείκτη η εναλλαγή καναλιών σχετίζεται με την εναλλαγή δεικτών οπότε για να εξαχθεί το τελικό αποτέλεσμα θα γίνει και σχετική μεταχείριση ως προς τους δείκτες. Αρχικά για σ -βρόγχο:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-2i\lambda\delta^{ij})(-2i\lambda\delta^{kl}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 m^2} \frac{i}{(p+k)^2 - m^2} = \\ & = 2\lambda^2 \delta^{ij} \delta^{kl} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2} = 2\lambda^2 \delta^{ij} \delta^{kl} \frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} + \text{finite} \end{aligned}$$

Ενώ για π -βρόγχο:

$$\frac{1}{2} [-2\lambda i(\delta^{ij} \delta^{mn} + \delta^{im} \delta^{jn} + \delta^{in} \delta^{mj})] [-2\lambda i(\delta^{kl} \delta^{mn} + \delta^{km} \delta^{ln} + \delta^{kn} \delta^{ml})] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \frac{i}{(p+k)^2}$$

Με λίγες πράξεις η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} & (\delta^{ij} \delta^{mn} + \delta^{im} \delta^{jn} + \delta^{in} \delta^{mj})(\delta^{kl} \delta^{mn} + \delta^{km} \delta^{ln} + \delta^{kn} \delta^{ml}) = \\ & = \delta^{ij} \delta^{mn} (\delta^{kl} \delta^{mn} + \delta^{km} \delta^{ln} + \delta^{kn} \delta^{ml}) + \delta^{im} \delta^{jn} (\delta^{kl} \delta^{mn} + \delta^{km} \delta^{ln} + \delta^{kn} \delta^{ml}) + \\ & + \delta^{in} \delta^{mj} (\delta^{kl} \delta^{mn} + \delta^{km} \delta^{ln} + \delta^{kn} \delta^{ml}) = (\delta^{ij} \delta^{kl} (N-1) + \delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{ij} \delta^{kl}) + \\ & + (\delta^{kl} \delta^{ij} + \delta^{ki} \delta^{lj} + \delta^{li} \delta^{kj}) + (\delta^{kl} \delta^{ij} + \delta^{kj} \delta^{li} + \delta^{ki} \delta^{lj}) = (N+3) \delta^{ij} \delta^{kl} + 2\delta^{ki} \delta^{lj} + 2\delta^{il} \delta^{kj} \end{aligned}$$

Άρα το διάγραμμα θα ισούται με:

$$2\lambda^2 [(N+3) \delta^{ij} \delta^{kl} + 2\delta^{ki} \delta^{lj} + 2\delta^{il} \delta^{kj}] \frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} + \text{finite}$$

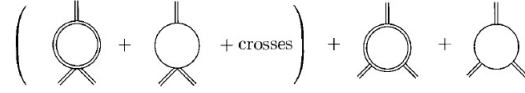
Έτσι αθροίζοντας όλα τα διαγράμματα ως εξής:

$$2\lambda^2 [(N+4)\delta^{ij}\delta^{kl} + 2\delta^{ki}\delta^{lj} + 2\delta^{il}\delta^{kj}] \frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} + \left[\begin{array}{c} i \leftrightarrow k \\ j \leftrightarrow l \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} i \leftrightarrow l \\ j \leftrightarrow k \end{array} \right] =$$

$$= 2\lambda^2(N+8) [\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ki}\delta^{lj} + \delta^{il}\delta^{kj}] \frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} = -2i [\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ki}\delta^{lj} + \delta^{il}\delta^{kj}] \delta_\lambda$$

Άρα και πάλι όπως στην προηγούμενη περίπτωση η συνεισφορά των διαγραμμάτων αυτών είναι πεπερασμένη.

- Υπολογισμός των $\sigma\sigma$:



Σχήμα 4.7: Αποκλίνοντα 3σ διαγράμματα για γραμμικό σ-μοντέλο.

Όπως και στην περίπτωση των 4σ τα διαγράμματα που έχουν 3 και πάνω εσωτερικούς διαδότες είναι πεπερασμένα ενώ πάλι οι δύο τύποι των διαγραμμάτων είναι ένα με σ στο βρόγχο και ένα με π ενώ στον κάθε τύπο αντιστοιχούν 3 διαγράμματα που συμπεριλαμβάνονται οι πιθανοί συνδυασμοί διάταξης του διαγράμματος. Υπολογίζοντας αρχικά για σ -loop:

$$\frac{1}{2}(-i\delta\nu\lambda)(-i\delta\lambda) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} = 18\lambda^2 i\nu \frac{1}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} + finite$$

Ενώ για π -loop:

$$\frac{1}{2}(-2i\lambda\nu\delta^{ij})(-2i\lambda\delta^{ij}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \frac{i}{(k+p)^2} = 2\lambda^2\nu i(N-1) \frac{1}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon}$$

Έτσι αθροίζοντας τα δύο αυτά διαγράμματα προκύπτει το εξής:

$$(18 - 2 + 2N)\lambda^2\nu \frac{1}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} = (8 + N)2\lambda^2\nu i \frac{1}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon}$$

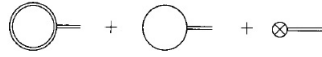
Το διάγραμμα του counterterm δίνει την εξής συνεισφορά:

$$-6i\nu\delta_\lambda = -6(8 + N)2\lambda^2\nu i \frac{1}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon}$$

Και άρα τέτοια η συνεισφορά τέτοιων διαγραμμάτων σε επίπεδο 1-loop είναι πεπερασμένη.

Μέχρι τώρα έχει εξαχθεί ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα για την απόδειξη της επανακανονικοποιήσιμότητας σε 1-loop. Η εύρεση της τιμής του δ_λ αρκεί για την απόδειξη της επανακανονικοποίησης των 3,4-point functions διαγραμμάτων άρα το επόμενο βήμα για την απόδειξη είναι η ενασχόληση με τα διαγράμματα 1,2-point functions καθώς και με τους counterterms δ_Z, δ_m . Η κατάληξη όλης αυτής της ανάλυσης θα είναι η απόδειξη της επανακανονικοποιήσιμότητας της θεωρίας σε 1-loop κάτι που όπως θα γίνει εμφανές στη συνέχεια δεν απαιτεί την εύρεση των δ_m, δ_Z . Έχοντας εξάγει το συμπέρασμα για τα πεπερασμένα διαγράμματα των 4-point,3-point functions, εξετάζονται τα εναπομείναντα διαγράμματα, αυτά των 1-point,2-point functions.

- Υπολογισμός των σ διαγραμμάτων:
Τα διαγράμματα που περιλαμβάνονται στην 1-loop διόρθωση του σ είναι δύο: ένα με loop από σ και ένα από π .



Σχήμα 4.8: Αποκλίνοντα σ διαγράμματα για γραμμικό σ -μοντέλο.

Ξεκινώντας από το διάγραμμα με σ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-6i\lambda\nu) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \xrightarrow{d\text{-διαστάσεις}} \frac{1}{2}(-6i\lambda\mu^{4-d}\nu) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2} = \\ & = \frac{(-3i\nu\mu^{4-d}\lambda) \Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2} (m^2)^{1-d/2}} \end{aligned}$$

Ενώ για loop από π ¹¹:

$$\frac{1}{2}(-2i\lambda\nu\delta^{ij}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta^{ij}}{k^2 - \zeta^2} = \frac{(-i\nu\mu^{4-d}\lambda)(N-1) \Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2} (\zeta^2)^{1-d/2}}$$

Στην τελική σχέση αυτών των διαγραμμάτων φαίνεται η τετραγωνική απειρία του διαγράμματος. Έτσι η συνολική συνεισφορά των διαγραμμάτων αυτών θα είναι η εξής:

$$-\frac{\lambda\nu i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2) \left[\frac{3}{(m^2)^{1-d/2}} + \frac{N-1}{(\zeta^2)^{1-d/2}} \right]$$

¹¹Στην προκειμένη περίπτωση ο υπολογισμός γίνεται μέσω εισαγωγής πλασματικής μάζας που εν τέλει τείνει στο 0. Αυτή η μάζα επηρεάζει μόνο το πεπερασμένο κομμάτι το οποίο δεν είναι αντικείμενο ενδιαφέροντος για την παρούσα ανάλυση.

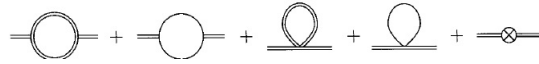
Το μ^{4-d} προέρχεται από τη μετάβαση του λ στις 4-διαστάσεις και επειδή δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα θα αγνοείται από δω και στο εξής. Το οποίο πρέπει να ισούται με το αντίστοιχο διάγραμμα του counterterm προκειμένου να υπάρχει πεπερασμένη συνεισφορά. Έτσι θα ισχύει:

$$\delta_\mu + \delta_\lambda v^2 = \frac{\lambda}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2) \left[\frac{3}{(m^2)^{1-d/2}} + \frac{N-1}{(\zeta^2)^{1-d/2}} \right]$$

Εδώ φαίνεται το μεγαλείο στην επιλογή της πρώτης συνθήκης επανακανονικοποίησης, καθώς για τέτοιου είδους διαγράμματα έχει επιλεγεί το αποκλίνον κομμάτι να ισούται με το counterterm και άρα μπορεί κανείς με σιγουριά να πει ότι η συνεισφορά των 1-point functions είναι πεπερασμένη χωρίς καν να υπολογισθεί επιπλέον counterterm δ_μ , παρά μόνο με την έξυπνη επιλογή της συγκεκριμένης συνθήκης επανακανονικοποίησης.

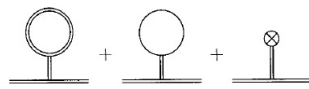
- Υπολογισμός των $\sigma\sigma$ διαγραμμάτων:

Στην συνέχεια θα εξετασθούν τα αποκλίνοντα διαγράμματα που συμβάλουν στον διαδότη του σ σε επίπεδο 1-loop. Τα διαγράμματα που πρέπει να υπολογισθούν αναλυτικά είναι 4, στα οποία συμπεριλαμβάνονται 2 είδη διαγραμμάτων με π ή σ βρόγχο κατά τα γνωστά. Επίσης είναι και το διάγραμμα του counterterm.



Σχήμα 4.9: Αποκλίνοντα $\sigma\sigma$ διαγράμματα για γραμμικό σ -μοντέλο.

Μία βασική ομάδα των $\sigma\sigma$ διαγραμμάτων είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει εάν συνδυαστεί με 1-point function κατά τον ακόλουθο τρόπο:



Σχήμα 4.10: Αποκλίνοντα $\sigma\sigma$ διαγράμματα για γραμμικό σ -μοντέλο.

Όμως σύμφωνα με τα προηγούμενα η συνολική συνεισφορά αυτών των 1-point function είναι πεπερασμένη άρα δεν αφορά την περαιτέρω ανάλυση. Μπορεί κανείς έχοντας υπολογίσει τα $4 - \sigma, \sigma$ διαγράμματα να γλιτώσει χρονοβόρους υπολογισμούς ως εξής: Τα πρώτα 2 διαγράμματα των $\sigma\sigma$ μπορούν να θεωρηθούν ως το αντίστοιχο $4 - \sigma$ μόνο που 2 από τα εξωτερικά πεδία σ έχει αντικατασταθεί από τη μέση τιμή του v . Επίσης τα επόμενα 2 διαγράμματα μπορούν να θεωρηθούν ως ένα 1-point function

διάγραμμα του οποίου αντί για μέση τιμή v στο ένα εξωτερικό πόδι υπάρχει το ίδιο το πεδίο σ . Έτσι απλά στην πρώτη περίπτωση πολλαπλασιάζεται το εκάστοτε αποτέλεσμα που είχε εξαχθεί πριν με v^2 ενώ στην δεύτερη διαιρείται με v . Άρα η συνολική συνεισφορά όλων των διαγραμμάτων είναι:

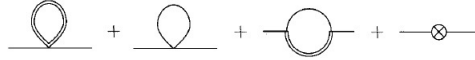
$$\frac{i2v^2(N+8)\lambda^2}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} + \frac{\lambda v(-i)}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1-d/2) \left[\frac{3}{(m^2)^{1-d/2}} - \frac{N-1}{(\zeta^2)^{1-d/2}} \right]$$

Οι counterterms δίνουν την συνεισφορά:

$$-i\delta_Z p^2 - i(\delta_\mu + v\delta_\lambda) - i(2v^2\delta_\lambda)$$

Όπου γράφτηκε κατά αυτό τον τρόπο για να γίνει η αντιστοίχιση των όρων της παραπάνω έκφρασης με τους αντίστοιχους που προκύπτουν από τα αποκλίνοντα διαγράμματα. Μετά από την αντιστοίχιση προκύπτει ότι εν τέλει ο counterterm δ_Z είναι πεπερασμένος σε loop καθώς δεν υπάρχει και διάγραμμα $\sim p^2$. Έτσι, οι συνεισφορές των $\sigma\sigma$ είναι πεπερασμένη, πράγμα που αποδείχθηκε πάλι χωρίς υπολογισμό επιπλέον counterterm.

- Υπολογισμός των $\pi\pi$ διαγραμμάτων: Τέλος πρέπει να υπολογισθεί η two point function που περιλαμβάνει π και τα διαγράμματα που πρέπει να υπολογισθούν είναι 3 και το διάγραμμα του counterterm.



Σχήμα 4.11: Αποκλίνοντα $\pi\pi$ διαγράμματα για γραμμικό σ -μοντέλο.

Υπολογίζοντας κατά σειρά τα διαγράμματα, το πρώτο θα είναι:

$$\frac{1}{2}(-2i\lambda\delta^{ij}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \xrightarrow{d-\text{διαστάσεις}} -i \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\lambda\delta^{ij}}{(m^2)^{1-d/2}} \Gamma(1-d/2)$$

Αντίστοιχα το δεύτερο διάγραμμα¹² θα είναι:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-2i\lambda) [\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta^{kl}}{k^2 - \zeta^2} = \\ & = \lambda (\delta^{ij}(N-1) + \delta^{ij} + \delta^{ij}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \zeta^2} = \lambda(N+1)\delta^{ij} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \zeta^2} \xrightarrow{d-\text{διαστάσεις}} \\ & \rightarrow \lambda(N+1)\delta^{ij} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - \zeta^2} = -i\lambda(N+1)\delta^{ij} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{(\zeta^2)^{1-d/2}} \end{aligned}$$

¹²Πάλι εισάγεται ο IR-regulator ζ .

Τέλος για το τελευταίο διάγραμμα:

$$(-2i\lambda v)^2 \delta^{ik} \delta^{kj} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \zeta^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2}$$

Αυτό το διάγραμμα θα υπολογισθεί αναλυτικά καθώς είναι ιδιαίτερη περίπτωση λόγω της τετραγωνικής απειρίας και του IR-regulator. Εισάγοντας παραμέτρους Feynman:

$$\frac{1}{k^2 - \zeta^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - \zeta^2 + ((k+p)^2 - m^2 - k^2 + \zeta^2)x]^2}$$

Η έκφραση μέσα στη τετραγωνική δύναμη του παρονομαστή γίνεται:

$$\begin{aligned} k^2 - \zeta^2 + ((k+p)^2 - m^2 - k^2 + \zeta^2)x &= k^2 - \zeta^2 + (p^2 - m^2 + 2pk + \zeta^2)x = \\ &= (k+px)^2 + p^2x(1-x) + \zeta^2(x-1) - m^2x \end{aligned}$$

Ακολουθώντας με το shift: $k \rightarrow k - px$ η παραπάνω έκφραση για το διάγραμμα θα γίνει:

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 v^2 \delta^{ij} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \underbrace{(-p^2x(1-x) + \zeta^2(1-x) + m^2x)}_{\Delta})^2} &\stackrel{d-\text{διαστάσεις}}{=} \\ = 4\lambda^2 v^2 \delta^{ij} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} &= 4\lambda^2 v^2 \delta^{ij} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} = \\ = 4\lambda^2 v^2 \delta^{ij} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) \int_0^1 dx \frac{1}{(-p^2x(1-x) + \zeta^2(1-x) + m^2x)^{2-d/2}} \end{aligned}$$

Το IR-divergent κομμάτι του ολοκληρώματος είναι το ανεξάρτητο της ορμής και έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί ότι $p = 0$. Η συνεισφορά του διαγράμματος των counterterms θα είναι η εξής:

$$-i\delta^{ij} (\delta_\mu + \delta_\lambda v^2) \stackrel{\text{από σ διαγράμματα}}{=} (-i\lambda \delta^{ij}) \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{3}{(m^2)^{1-d/2}} + \frac{N-1}{(\zeta^2)^{1-d/2}} \right]$$

Άρα το συνολικό πλάτος των διαγραμμάτων θα είναι (για $p = 0$):

$$\begin{aligned}
& (-i\lambda\delta^{ij}) \left[\frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{(m^2)^{1-d/2}} + \frac{N+1}{(\zeta^2)^{1-d/2}} \right) - \right. \\
& - 4\lambda v^2 \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-d/2) \int_0^1 dx \frac{1}{(\zeta^2(1-x) + m^2x)^{2-d/2}} - \\
& \left. - \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{3}{(m^2)^{1-d/2}} + \frac{N-1}{(\zeta^2)^{1-d/2}} \right) \right] = \\
& = (-i\lambda\delta^{ij}) \left[\frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{-2}{(m^2)^{1-d/2}} + \frac{2}{(\zeta^2)^{1-d/2}} \right) - \right. \\
& \left. - 4\lambda v^2 \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-d/2) \int_0^1 dx \frac{1}{(\zeta^2(1-x) + m^2x)^{2-d/2}} \right]
\end{aligned}$$

Κάνοντας αριθμητική ανάλυση η παρένθεση του όρου με το $\Gamma(1-d/2)$ για $d \approx 2$ είναι ανάλογο του $1-d/2$ και κάπως έτσι αίρεται ο πόλος για $d = 2$. Εξασφαλίζοντας λοιπόν την παραπάνω ομαλή συμπεριφορά, αξιοποιείται η σχέση για τις συναρτήσεις Γ : $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ και άρα:

$$\begin{aligned}
& (-i\lambda\delta^{ij}) \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{2}{1-d/2} \left(\frac{\zeta^2}{(\zeta^2)^{2-d/2}} - (m^2)^{d/2-1} \right) - \right. \\
& \left. - 2\lambda \frac{m^2}{\lambda} \int_0^1 dx \frac{1}{(\zeta^2(1-x) + m^2x)^{2-d/2}} \right]
\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται ως εξής για $d > 2, \zeta \rightarrow 0$:

$$\int_0^1 dx (\zeta^2(1-x) + m^2x)^{d/2-2} = \frac{1}{d/2-1} \frac{(m^2)^{d/2-1} - (\zeta^2)^{d/2-1}}{m^2 - \zeta^2} = \frac{1}{d/2-1} (m^2)^{d/2-2}$$

Ενώ ο άλλος όρος για $d > 2, \zeta \rightarrow 0$ γίνεται:

$$\frac{1}{d/2-1} (m^2)^{d/2-1}$$

Έτσι η παραπάνω έκφραση για $d > 2, \zeta \rightarrow 0$, πράγμα που ισχύει για $d = 4$:

$$(-2i\lambda\delta^{ij}) \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{1}{d/2-1} (m^2)^{d/2-1} - \frac{1}{d/2-1} (m^2)^{d/2-1} \right] = 0$$

Άρα τα διαγράμματα $\pi\pi$ έχουν πεπερασμένη συνεισφορά για $p = 0$. Αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι καθόλου τετριμμένο, καθώς τα $\pi\pi$ διαγράμματα

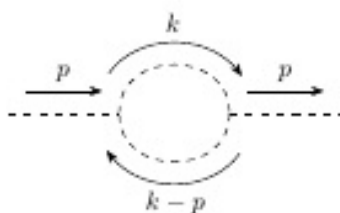
δίνουν συνεισφορά στη μάζα των άμαζων Goldstone bosons. Έτσι αφού η συνεισφορά είναι μηδέν τότε φτάνει κανείς στο πολύ σπουδαίο συμπέρασμα ότι και το θεώρημα Goldstone ισχύει και σε επίπεδο 1-loop. Αναφορικά κάτι τέτοιο μπορεί να αποδειχθεί και για κάθε τάξη διαταραχών στο linear sigma model.

5 Παράθεμα

5.1 Παράμετροι Feynman:

Οι παράμετροι Feynman είναι ένα μαθηματικό, υπολογιστικό εργαλείο, απαραίτητο για κάποιον που θέλει να κάνει υπολογισμό στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου πέρα από tree-level. Με την εισαγωγή τους συμβάλλουν στην απλοποίηση του, ενδεχομένως περίπλοκης μορφής, ολοκληρώματος που προκύπτει από loops και συνιστά ένα απαραίτητο βήμα του υπολογισμού.

Όταν έχω διαγράμματα με loops αναλόγως την πολυπλοκότητα, και τον αριθμό των εσωτερικών γραμμών έχω και αντίστοιχους όρους διαδοτή. Αυτοί, συμβάλλουν στο ολοκλήρωμα κατά ένα παράγοντα $\frac{N}{D}$ όπου εν γένει εξαρτώνται από τις εξωτερικές και εσωτερικές ορμές καθώς και την ενδεχόμενη μάζα των σωματιδίων, αναλόγως την περίπτωση. Για παράδειγμα, έστω διάγραμμα βαθμωτής ϕ^3 θεωρίας με Λαγκρανζιανή $L = \frac{-1}{2}\phi(\square + m^2)^2\phi + \frac{g}{3!}\phi^3$:



Το πλάτος αυτού του διαγράμματος θα είναι ανάλογο με το εξής ολοκλήρωμα, σύμφωνα με τους αντίστοιχους κανόνες Feynman:

$$M \sim \int \frac{d^4k}{2\pi^4} \cdot \frac{1}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Το πρόβλημα εδώ είναι ότι οι παρονομαστές δίνουν μία όχι και τόσο προσιτή μορφή στο ολοκλήρωμα και για αυτό το λόγο κάνω το εξής:

(Εισαγωγή παραμέτρων Feynman x,y)

$$\begin{aligned} \frac{1}{A \cdot B} &= \int_0^1 \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{(Ax+By)^2} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[A+(B-A)x]^2} \quad (\text{Εισαγωγή μίας Παραμέτρου Feynman}) \end{aligned}$$

Η γενική σχέση που εισάγονται οι παράμετροι Feynman είναι η εξής:

$$\frac{1}{A_1^{m_1} \dots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{m_i-1}}{[\sum_{i=1}^n x_i A_i]^{\sum_{i=1}^n m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + \dots + m_n)}{\Gamma(m_1) \dots \Gamma(m_n)}$$

$$\text{όπου η συνάρτηση } \Gamma(x) := \left\{ \begin{array}{ll} (x-1)! & : x \in \mathbb{N}^* \\ \infty & : x \in \mathbb{Z}, x \leq 0 \end{array} \right\}$$

5.2 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων - Στροφή Wick:

Κάνοντας μία ανασκόπηση στον υπολογισμό μέχρι τώρα, διαπιστώνω ότι με το μαθηματικό τρικ των παραμέτρων Feynman έχω εισάγει, στη γενική περίπτωση, ένα πλήθος μεταβλητών ολοκλήρωσης, που απαιτούν τον υπολογισμό ενός περίπλοκου ολοκληρώματος σε 1 διάσταση. Μπορεί να ακούγεται επίπονο καθώς τις περισσότερες φορές κάτι τέτοιο δεν είναι και πολύ απλό, αλλά είναι πολύ πιο προτιμητέο από αυτό που θα ακολουθήσει. Μην ξεχνάμε ότι πρέπει να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα στον χώρο Minkowski, κάτι που δεν είναι εφικτό να γίνει. Παρόλα αυτά με την κατάλληλη μαθηματική διεργασία, στροφή Wick, αρχικά μελετώντας την ολοκληρωτέα συνάρτηση ως προς την συμπεριφορά και τις ιδιομορφίες (πόλους) της και στη συνέχεια μεταφερόμενοι σε μία 4-D σφαίρα με την συνήθη ευκλείδεια μετρική, μπορώ φτάσω σε κάποιο αποτέλεσμα.

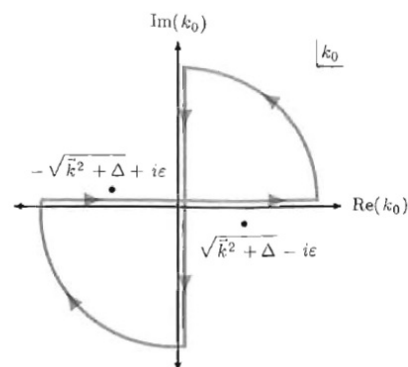
Για να έχω μία πιο σαφή ένδειξη για την συμπεριφορά της συνάρτησης είναι αναγκαίο να ξεχωρίσω όρους με k και p , οι οποίοι είναι μπλεγμένοι. Πρέπει να γίνει σαφές ότι η μεταβλητή είναι το k το οποίο αντιστοιχεί στην εσωτερική (virtual) ορμή των σωματιδίων που λαμβάνουν μέρος στον βρόγχο και όχι το p, m . Μπορώ να κάνω ένα shift του $k \rightarrow k + f(x)p$ όπου $f(x)$ είναι μία συνάρτηση διαφορετική ανά περίπτωση. Αυτό το shift έχω δικαίωμα να το κάνω, καθώς το μέτρο ολοκλήρωσης δεν αλλάζει αφού το p θεωρείται σταθερό για κάθε διάγραμμα και άρα $d^4k \rightarrow d^4k + 0$. Αφού ο παρονομαστής της ολοκληρωτέας συνάρτησης λάβει την μορφή $[k^2 + \Delta(p^2, m^2) + i\epsilon]^n$, για n τυχαίο, μπορεί κανείς εύκολα αναγνωρίσει τους πόλους της ολοκληρωτέας συνάρτησης, οι οποίοι είναι τα σημεία μηδενισμού (τα k) του παρονομαστή. Πιο συγκεκριμένα:

$$k^2 - \Delta + i\epsilon = 0 \rightarrow k^2 = \Delta - i\epsilon \rightarrow k_0^2 = \vec{k}^2 + \Delta - i\epsilon \rightarrow k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + \Delta} \mp i\epsilon$$

όπου $k^\mu = (k_0, \vec{k})$. Στην προσπάθεια μου εύρεσης των πόλων ως προς k^μ καταλήγω σε 2 σχέσεις με k_0, \vec{k} και Δ και εκφράζονται στο μιγαδικό επίπεδο.

Έχοντας μία σχέση για τους πόλους της συνάρτησης, εφαρμόζω το Θεώρημα Υπολοίπου (Cauchy's Residue Theorem) της Μιγαδικής Ανάλυσης¹³. Επιλέγοντας τη διαδρομή που φαίνεται και στο σχήμα έτσι ώστε να μην περιέχονται οι πόλοι. Τότε το $\oint_C f(x) = 0$ και άρα πρέπει

¹³ $\oint_C f(x) = 2\pi i \sum \text{Res}(f, x_i)$, όπου $x_i = \text{πόλοι της συνάρτησης που περιλαμβάνονται στη διαδρομή } C$.



Σχήμα 5.1: Σημειώνονται οι πόλοι της συνάρτησης, καθώς και η διαδρομή ολοκλήρωσης

να έχω ίση συνεισφορά (ούτως ή άλλως είναι αντίθετη αφού η φορά διαγραφής των δύο αξόνων είναι αντίθετη) των $Re(k_0), Im(k_0)$ (το υπόλοιπο κομμάτι αναιρείται αλλά δεν μας ενδιαφέρει αυτό τώρα). Το γεγονός ότι $Im(k_0) = Re(k_0)$ αποτελεί το βασικό έναυσμα έτσι ώστε θεμελιώσω μαθηματικά την στροφή Wick. Έτσι έχω το δικαίωμα σύμφωνα με τα παραπάνω κάνω τον εξής μετασχηματισμό:

$$k_0 \rightarrow ik_0 \Rightarrow k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 \rightarrow (ik_0)^2 - \vec{k}^2 \\ = -k_0^2 - \vec{k}^2 = -k_E^2, \quad \text{όπου } k_E^2 = \vec{k}^2 + k_0^2 \text{ (η ευκλείδεια ορμή)}$$

Άρα $k^2 \rightarrow -k_E^2$ κάτι που πρακτικά σημαίνει ότι φεύγω από τον χώρο Minkowski και πάω στην επιφάνεια μίας 4-d σφαίρας κάτι που δεδομένου της σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος $\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} f(k_E^2)$ και αυτό πλέον ξέρω να το υπολογίσω με σχετική ευκολία. Κατ' αρχήν το $d^4 k = dk_0 d^3 k \rightarrow idk_0 d^3 k$ άρα έχω:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k^2) = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} f(-k_E^2) = \frac{i}{16\pi^4} \underbrace{\int d\Omega_4}_{\text{στερεά γωνία 4-d σφαίρας}} \int_0^\infty k_E^3 dk_E f(-k_E^2) \\ = \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty dk_E k_E^3 g(k_E^2)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, η μορφή που λαμβάνει το ολοκλήρωμα στην γενική περίπτωση είναι :(ενδεικτικά σχέσεις που θα χρησιμοποιηθούν)

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^n} = i \frac{(-1)^n}{(4\pi)^2 (n-1)(n-2)\Delta^{n-2}}, \quad n > 2 \\ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^n} = i \frac{2(-1)^{n-1}}{(4\pi)^2 (n-1)(n-2)(n-3)\Delta^{n-3}}, \quad n > 3$$

5.3 Διαδικασίες Ομαλοποίησης

Έχοντας λύσει το τυπικό κομμάτι του υπολογισμού δεν μένει παρά να αναπτύξω μία μεθοδολογία άρσης των απείρων (αποκλίσεων) έτσι ώστε να είμαι σε θέση να κάνω φυσική πρόβλεψη αλλά και να την προσδιορίσω. Υπάρχει πλήθος τέτοιων διαδικασιών αλλά οι δύο πιο δημοφιλείς είναι η ομαλοποίηση Pauli-Villars και η διαστατική ομαλοποίηση. Από αυτές πιο προτιμητέα είναι η δεύτερη ενώ η πρώτη χρησιμοποιείται κυρίως σε πιο απλοϊκούς υπολογισμούς και έχει βαρύτητα παιδαγωγικής φύσεως. Στους υπολογισμούς της παρούσης εργασίας έχουν χρησιμοποιηθεί και οι δύο. Στη συνέχεια θα γίνει εκτενής αναφορά στην κάθε μία με ελαφρά προτίμηση προς την διαστατική ομαλοποίηση.

5.3.1 Ομαλοποίηση Pauli-Villars

Η βασική αρχή της ομαλοποίησης Pauli-Villars είναι ότι για κάθε φυσικό σωματίδιο με μάζα m εισάγω ένα μη-φυσικό σωματίδιο μάζας Λ το οποίο να υπακούει σε αντίθετη από της φύσης του στατιστική (φερμιονική/μποζονική) ή ο κινητικός του όρος στη Λαγκρανζιανή να έχει αντίθετο πρόσημο από το προβλεπόμενο. Ο βασικός λόγος που επιθυμούμε κάτι τέτοιο πηγάζει από την απλή λογική, εάν σκεφτεί κανείς ότι εισάγοντας ένα σωματίδιο με τα παραπάνω λανθασμένα στοιχεία έχει αντίθετη συνεισφορά σε βρόγχους (από τους οποίους προκύπτουν απειρίες) από αυτούς των πραγματικών σωματιδίων έτσι αναιρούνται οι δύο απειρίες για $k^2 \gg \Lambda^2$, όπου k η ορμή του βρόγχου.

Έστω για παράδειγμα ότι θέλω να εφαρμόσω την ομαλοποίηση Pauli-Villars για την QED. Θα εισάγω ένα φανταστικό (ghost)-φωτόνιο και ένα (ghost)-ηλεκτρόνιο¹⁴ και η νέα Lagrangian θα είναι σύμφωνα με τους κανόνες που ανέφερα πιο πάνω:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} \left(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - e\cancel{A} - m \right) \psi + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}\Lambda^2\tilde{A}^2 + \tilde{\psi} \left(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - e\cancel{A} - \Lambda \right) \tilde{\psi}$$

όπως αναλυτικά φαίνεται από την μορφή της Lagrangian το ghost-photon έχει κινητικό όρο αντίθετο πρόσημο από ότι θα έπρεπε να έχει (όρος $F_{\mu\nu}^2$) ενώ αξίζει να τονισθεί ότι το ghost-photon έχει μάζα Λ . Υποθέτω ρητά ότι το ghost-electron ακολουθεί στατιστική μποζονίων όπως και το ghost-photon. Έτσι αν θέλω πχ. να υπολογίσω το διάγραμμα ιδιο-ενέργειας του ηλεκτρονίου θα έχω σε πρώτη τάξη και tree-level τα εξής διαγράμματα:



και ακριβώς επειδή έχω αρνητικό κινητικό όρο για τα ghost-photons ο διαδότης θα είναι:

$$\Pi_{\mu\nu}^{2g} = \langle 0|T\{\tilde{A}_\mu\tilde{A}_\nu\}|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp[i(x-y)k] \frac{ig^{\mu\nu}}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} \stackrel{k^2 \gg \Lambda^2}{\approx} -\Pi_{\mu\nu}^2$$

Άρα τα διαγράμματα πρώτης τάξης που περιέχουν το ghost-photon και το photon για μεγάλα k_μ αναιρούνται¹⁵.

¹⁴τα πεδία που αντιστοιχούν στο ghost-φωτόνιο και στο ghost-ηλεκτρόνιο συμβολίζονται αντίστοιχα με $\tilde{A}_\mu, \tilde{\psi}$.

¹⁵Επίσης τα ghost-photons δεν μπορούν να δημιουργήσουν ή να καταστρέψουν φυσικά σωματίδια οπότε δεν θα μπορούσα να έχω διαγράμματα σαν αυτό *vaccumpolarization* με εξωτερικά ghost-photons.

Αντίστοιχα τα σωματίδια όπως ηλεκτρόνια δεν έχουν κάποιο κινητικό όρο (και άρα propagator) αντίθετου προσήμου όμως υπακούουν κάποια στατιστική και έχω φερμιονικό ή μποζονικό βρόγχο πολλαπλασιάζοντας το ολοκλήρωμα κατά έναν παράγοντα (-1) ή (+1) αντίστοιχα. Άρα επιλέγοντας αντίθετη στατιστική ghost-physical σωματιδίου καταφέρνω για $k^2 \gg \Lambda^2$ να διώξω τα αποκλίνοντα κομμάτια.

Ανακεφαλαιώνοντας, η ομαλοποίηση Pauli-Villars είναι μία μέθοδος που αναφέρεται σε κλίμακα ορμής $k^2 \gg \Lambda^2$ καθώς αυτή είναι η βασική παραδοχή προκειμένου να αναιρεθούν τα αποκλίνοντα κομμάτια. Είναι πολύ περιγραφική και ταιριάζει περισσότερο με τη φυσική διαίσθηση στο ότι θέτω ένα cut-off scale (Λ) και είμαι σε θέση να αντιστοιχίσω 1-1 τα αποκλίνοντα ολοκληρώματα και να τα αναρέσω, έτσι ώστε να μείνει μία ποσότητα συναρτήσεως του Λ και m . Παρόλα αυτά η μέθοδος αυτή δεν ενδείκνυται λόγω περιπλοκότητας σε προσέγγιση ανώτερης της 1^{ης} τάξης και σε μη-Αβελιανές θεωρίες.

5.3.2 Διαστατική Ομαλοποίηση

Η βασική ιδέα στην οποία βασίζεται η διαστατική ομαλοποίηση είναι ότι τα η σύγκλιση ή η απόκλιση των ολοκληρωμάτων που προκύπτουν από τους βρόγχους εξαρτάται από τις διαστάσεις του χώρου που λαμβάνει χώρα η ολοκλήρωση. Για παράδειγμα εάν υποθέσω στις d-διαστάσεις, το ολοκλήρωμα:

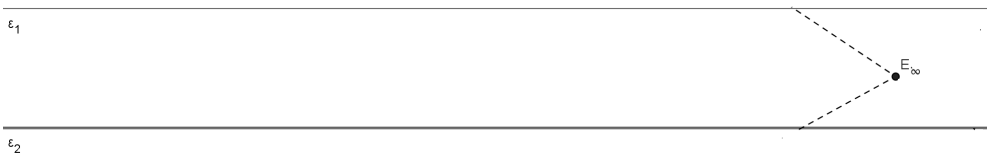
$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - C + i\epsilon)^2}$$

Παρατηρώ ότι αυτό αποκλίνει στο όριο $k \rightarrow \infty$ (*Ultraviolet Divergence*) για $d \geq 4$, ενώ συγκλίνει για $d < 4$. Στην περίπτωση που συγκλίνει τα πράγματα είναι απλά, καθώς γίνεται ο υπολογισμός αρχικά στις d-διαστάσεις και μετά πηγαίνοντας στις διαστάσεις που θέλουμε έχοντας απλά ένα πεπερασμένο αποτέλεσμα. Στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα αποκλίνει η διαδικασία είναι η ίδια απλά θα εμφανιστούν όροι οι οποίοι είναι άπειροι και άλλοι που είναι πεπερασμένοι.

5.3.2.1 Αναλυτική Επέκταση: Για να καταλάβει κανείς το μαθηματικό νόημα της διαστατικής ομαλοποίησης, πρέπει να συνειδητοποιήσει την έννοια της αναλυτικής επέκτασης ενός στοιχείου από έναν χώρο σε άλλον πιο προνομιακό χώρο.

Ένα εποπτικό παράδειγμα που μπορεί να δοθεί από το παράδειγμα ευκλείδειας και προβολικής γεωμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας στο επίπεδο δύο παράλληλες ευθείες δεν τέμνονται. Όταν βρεθώ σε ένα προβολικό επίπεδο (πιο προνομιακό επίπεδο) δύο ευθείες

παράλληλες στο ευκλείδειο επίπεδο θα τμηθούν σε ένα σημείο το οποίο ορίζεται στο άπειρο, και το ονομάζω επ'άπειρο σημείο. Έτσι, μπορώ να συμπεριλάβω μία ιδιομορφία του ευκλείδειου επιπέδου σε ένα σημείο-πόλο του προβολικού επιπέδου, μέσω αναλυτικής επέκτασης, στην προκειμένη περίπτωση, μιας μετάβασης από έναν χώρο στον άλλον.



Σχήμα 5.2: Με διακεκομμένες γραμμές συμβολίζεται η επεκτεταμένη ευθεία του προβολικού επιπέδου ενώ με μαύρη γραμμή αυτή του ευκλείδειου. Βλέπω ότι οι επεκτεταμένες τέμνονται στο επ'άπειρο σημείο E_∞ κάτι που δεν περιλαμβάνεται στο ευκλείδειο επίπεδο.

Κάτι αντίστοιχο που περιγράφηκε πιο πάνω, κάνω στο χώρο μου που τώρα είναι το μιγαδικό επίπεδο των 4-ορμών και άρα να επεκταθώ σε ένα μιγαδικό επίπεδο d -διαστάσεων το οποίο ορίζουν οι ορμές που εμπλέκονται στον βρόγχο. Αυτό που πρέπει κανείς να κρατήσει στο μυαλό του είναι ότι η φυσική σημασία έχουμε για $d = 4$ και άρα τα πεπερασμένα κομμάτια των ολοκληρωμάτων που υπολογίζω πρέπει να μου δίνουν φυσικές παρατηρήσιμες ποσότητες. Οι συναρτήσεις των ολοκληρωμάτων όπου σε 4 διαστάσεις εμφανίζονται απειρίες, επεκτείνονται σε d -διάστατο χώρο και οι απειρίες μετατρέπονται σε ιδιομορφίες-πόλους για $d = 4$.

Από την Renormalization είναι να άρω αυτούς τους πόλους χωρίς να παραβιάσω βασικές αρχές της κβαντικής θεωρίας πεδίου όπως την unitarity, την ταυτότητα Ward και την αρχή της αιτιότητας. Η διαστατική ομαλοποίηση διατηρεί την gauge invariance σεβόμενη την ταυτότητα Ward και αυτό είναι κάτι που την κάνει ιδιαίτερα ξεχωριστή καθώς είναι βασικό προαπαιτούμενο στα αποτελέσματα που θα βγάλουμε.

5.3.2.2 Επέκταση σε d -διαστάσεις: Το θέμα είναι να γίνει σαφές πώς ακριβώς πραγματοποιείται η επέκταση στις d -διαστάσεις. Έτσι στη συνέχεια θα δοθεί αναλυτικά η επέκταση κάθε στοιχείου που εμφανίζεται και πώς αυτό επεκτείνεται από τις 4 στις d διαστάσεις.

- Η μετρική $g^{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1) \rightarrow (-1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{d-1})$
και ισχύει ότι $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = d$.

- Ένα άλλο αντικείμενο που με ενδιαφέρει είναι οι πίνακες γ -Dirac γ^μ , οι οποίοι θα είναι πλέον d στο πλήθος 4-διάστατοι πίνακες. Οι σχέσεις που θέλω να ικανοποιούν ισχύουν για $d \rightarrow 4$. Αρχικά θέλω να διατηρήσω την αλγεβρική δομή τους καθώς σχηματίζουν μια Clifford algebra δηλαδή $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Μία άλλη σχέση που απαιτώ να ικανοποιούν είναι ότι $Tr(I_{\alpha\beta}) = 4$, δηλαδή ο ταυτοτικός πίνακας ο οποίος ορίζεται από τους γ πίνακες να ικανοποιεί αυτή τη σχέση. Αυτή υποδηλώνει εμμέσως ότι θέλω να είναι 4-διάστατοι πίνακες. Ορίζω επίσης και τον πίνακα γ^5 διαφορετικά από τις 4 διαστάσεις μέσα από τη σχέση: $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$

5.3.2.3 Η συνάρτηση $\Gamma(x)$: Η συνάρτηση $\Gamma(x)$ είναι πολύ βασική στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων καθώς τα αποτελέσματα καταλήγουν σε μία αριθμητική παράσταση που θα περιλαμβάνεται. Το ζητούμενο είναι να μπορέσει κανείς να βγάλει αποτέλεσμα από μία τέτοια γενικευμένη συνάρτηση. Η $\Gamma(x)$ συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως εξής, (σύμφωνα με το υποκεφάλαιο 5.1) ως η αναλυτική επέκταση της συνάρτησης του παραγοντικού. Επίσης αν θεωρήσω το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma_E + \mathcal{O}(x)$$

όπου $\gamma_E = 0.577$, η επονομαζόμενη σταθερά Euler-Mascheroni.

5.3.2.4 Συστηματοποίηση υπολογισμού ολοκληρωμάτων σε d -διαστάσεις: Στη συνέχεια θα μελετηθούν ξεχωριστά, για τις πιο συνήθεις μορφές ολοκληρωτέας συνάρτησης ως προς την ορμή του βρόγχου έτσι ώστε να εξαχθούν γενικές σχέσεις για την κάθε μία περίπτωση.

5.3.2.5 Εξάρτηση ως προς το μέτρο της ορμής k του βρόγχου-Βαθμωτό ολοκλήρωμα: Στην προκειμένη περίπτωση η εξάρτηση από την k είναι βαθμωτή δηλαδή υφίσταται εξάρτηση μόνο από το μέτρο του k . Αρχικά μπορώ να διαμορφώσω την ολοκλήρωση πάνω σε μία σφαίρα $d - 1$ διαστάσεων:

$$\int d^d k = \int d\Omega_d \int dk k^{d-1}$$

όπου $d\Omega_d = \sin^{d-2}(\phi_{d-1}) \dots \sin(\phi_2) d\phi_1 \dots d\phi_{d-1}$ όπου $\phi_1 \in [0, 2\pi)$, $\phi_i \in [0, \pi)$. Και το k αναφέρεται στην ευκλείδεια ορμή στην οποία μπορούμε να κάνουμε ολοκλήρωση (σύμφωνα με το υποκεφάλαιο 5.1)

Αν ολοκληρώσω το στοιχείο της στερεάς γωνίας $d\Omega_d$:

$$\begin{aligned}\Omega_d &= \int d\Omega_d = 2\pi \prod_{n=2}^{d-1} \left(\int_0^\pi d\phi_n \sin^{n-1} \phi_n \right) = 2\pi \prod_{n=2}^{d-1} \sqrt{\pi} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right) = \\ &= 2\pi^{d/2} \frac{\Gamma(2/2)}{\Gamma(3/2)} \cdot \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(4/2)} \cdots \frac{\Gamma((d-1)/2)}{\Gamma(d/2)} = 2\pi^{d/2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(d/2)} = 2\pi^{d/2} \frac{1}{\Gamma(d/2)}\end{aligned}$$

Συνθέτοντας τα προλεγόμενα καθώς και αυτά περί στροφής Wick έχουμε τη γενική σχέση:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{2a}}{(k^2 - \Delta)^b} = i(-1)^{a-b} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{b-a-d/2}} \frac{\Gamma(a+d/2)\Gamma(b-a-d/2)}{\Gamma(b)\Gamma(d/2)}$$

5.3.2.6 Ολοκληρώματα σε τανυστική μορφή πρώτης και δευτέρας τάξεως ως προς ορμής του βρόγχου: Έστω το ολοκλήρωμα που είναι ανάλογο $k^\mu k^\nu$ δηλαδή είναι ένας τανυστής δευτέρας τάξης ως μαθηματικό αντικείμενο κάτω από μετασχηματισμό Lorentz. Έστω λοιπόν ένα τέτοιο αντικείμενο γραμμένο κατά τη γενική μορφή:

$$I^{\mu\nu}(\Delta) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \Delta)^n}$$

επειδή ο τανυστής αυτός εξαρτάται από βαθμωτό μέγεθος μόνο και δεν θα αλλάξει κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ο μόνος τανυστής που ικανοποιεί αυτή τη σχέση είναι η μετρική $g_{\mu\nu}$ και άρα το ολοκλήρωμα αυτό είναι ανάλογο της μετρικής. Με διαστατική ανάλυση συμπεραίνω ότι είναι ανάλογο του $k^2 g_{\mu\nu}$. Στις d -διαστάσεις θα έχω το εξής:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta)^n}$$

Στην περίπτωση που έχω ολοκλήρωμα σε μορφή τανυστή πρώτης τάξης:

$$I = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu p_\mu}{(k^2 - p^2)^4}$$

παρατηρώ ότι το ολοκλήρωμα είναι αντισυμμετρικό κάτω $k \rightarrow -k$ και άρα $I = 0$. Αυτό γενικά με βοηθάει στο να απλοποιώ τους υπολογισμούς καθώς κρατάω στους αριθμητές τις άρτιες δυνάμεις του k^μ .

5.4 Ταυτότητες πινάκων γ :

1. $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
2. $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$
3. $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$
4. $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$
5. $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$
6. $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu$
7. $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}$
8. $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu$
9. $\text{Tr}[\gamma_5] = \text{Tr}[\gamma^\mu] = \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu] = \text{Tr}[\text{\#περιττό πλήθος πινάκων } \gamma] = 0$
10. $\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$
11. $\text{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu] = 4(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta})$
12. $\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

Στις $d \rightarrow 4 - \epsilon$ διαστάσεις έχω τις εξής σχέσεις για τους πίνακες γ :

1. $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -(2 - \epsilon)\gamma^\nu$
2. $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} - \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho$
3. $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$

5.5 Θεωρία ομάδων

Απαραίτητο κομμάτι για την ανάλυση θεωριών βαθμίδας είναι η εξοικείωση με την μαθηματική έννοια της ομάδας και συγκεκριμένα της ομάδας Lie.

Οι ομάδες Lie αποτελούνται από άπειρα στοιχεία, και είναι συσχετισμένες με διαφορίσιμες πολλαπλότητες, με την έννοια ότι στις πολλαπλότητες που αντιπροσωπεύουν είναι καλώς ορισμένο το εφαπτόμενο επίπεδο, δηλαδή η παράγωγος. Βασικό χαρακτηριστικό είναι ότι το για κάθε ομάδα ορίζεται το ταυτοτικό στοιχείο I και έτσι κάθε στοιχείο U της ομάδας που συνδέεται με συνεχή τρόπο με το I μπορεί να γραφτεί ως:

$$U = \exp(i\theta^a T^a)I$$

όπου θ είναι παράμετρος για κάθε στοιχείο και το T^a είναι οι γεννήτορες της ομάδας. Η αναλυτική μορφή των γεννητόρων εξάγεται από το ανάπτυγμα του U γύρω από το I .

Οι γεννήτορες μιας ομάδας Lie έχουν την εξέχουσα ιδιότητα ότι συνθέτουν μία άλγεβρα Lie η οποία ορίζεται ως εξής:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

Όπου οι f^{abc} ονομάζονται συντελεστές δομής. Μαθηματικά η αντιμετάθεση των γεννητόρων είναι μία απεικόνιση $G \times G \rightarrow G$ και ονομάζεται Lie bracket απεικόνιση. Αν η ομάδα Lie είναι αβελιανή τότε θα ισχύει ότι f^{abc} και άρα οι γεννήτορες θα μετατίθενται.

Μία τελευταία σχέση που ισχύει για τους γεννήτορες και χρησιμοποιείται προκειμένου να εξαχθούν συμπεράσματα για τους f^{abc} είναι η ταυτότητα Jacobi:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

όπου στην προκειμένη περίπτωση A, B, C είναι γεννήτορες της ομάδας. Εκμεταλλευόμενοι την ταυτότητα Jacobi και τον ορισμό των μεταθετικών σχέσεων των γεννητόρων προκύπτει η εξής σχέση (ισοδύναμη της ταυτότητας Jacobi) ως προς τους συντελεστές δομής:

$$f^{bcd} f^{dae} + f^{cad} f^{dbe} + f^{abd} f^{dce} = 0$$

Ένα πολύ βασικό είδος ομάδων, το οποίο κεντρίζει το ενδιαφέρον στην παρούσα εργασία είναι αυτό των ορθομοναδιαίων (unitary). Πιο συγκεκριμένα, unitary groups $U(N)$ ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} |\vec{x}'\rangle &\rightarrow U |\vec{x}\rangle \\ \langle \vec{\psi}' | \vec{x}'\rangle &= \langle \vec{\psi} | U^\dagger U |\vec{x}\rangle = \langle \vec{\psi} | \vec{x}\rangle, \quad U^\dagger U = I \end{aligned}$$

Δηλαδή διατηρείται το εσωτερικό γινόμενο. Μία πιο ειδική περίπτωση είναι η special unitary ομάδα $SU(N)$ για την οποία ισχύει: $\det(U) = +1$. Τα στοιχεία της $SU(N)$ γράφονται ως $U = \exp(i\theta^a T^a)$ όπου T^a ερμιτιανός πίνακας. Για την $SU(N)$ ισχύει ότι οι γεννήτορες είναι $N^2 - 1$ και έτσι λέγεται ότι η διάσταση της ομάδας είναι $d(G) = N^2 - 1$.

Η εισαγωγή και η χρήση των $SU(N)$ ομάδων στην κβαντική θεωρία πεδίου γίνεται μέσω των αναπαράστασεων. Γενικά, οι αναπαράστασεις μιας άλγεβρας Lie φτιάχνονται από την αντιστοίχιση των γεννητόρων της άλγεβρας με πίνακες. Οι δύο βασικότερες αναπαράστασεις είναι η θεμελιώδης (fundamental) και η συζυγής (adjoint).

1. Θεμελιώδης Αναπαράσταση:

- Είναι η μικρότερη μ-τετριμμένη αναπαράσταση της άλγεβρας. Για την $SU(N)$, η θεμελιώδης αποτελείται $N \times N$ πίνακες οι οποίοι είναι ερμιτιανοί και έχουν ορίζουσα +1. Ένα σύνολο $\{\phi_i\}$, N πεδίων τα οποία μετασχηματίζονται κάτω από τη θεμελιώδη αναπαράσταση κάτω από το απειροστό μετασχηματισμό ως εξής:

$$\begin{aligned}\phi_i &\rightarrow \phi_i + i\alpha^a (T_{fund}^a)_{ij} \phi_j \\ \phi_i^* &\rightarrow \phi_i^* - i\alpha^a (T_{fund}^a)_{ji} \phi_j^*\end{aligned}$$

- Για $SU(2)$ οι γεννήτορες είναι $T^a = \sigma^a/2$ όπου σ^a οι πίνακες Pauli και οι μεταθετικές σχέσεις θα είναι: $[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}T^c$
- Για $SU(3)$ οι γεννήτορες είναι $T^a = \lambda^a/2$ όπου λ^a οι πίνακες Gell-Mann
- Πρέπει επίσης να τηρείται μία σχέση κανονικοποίησης για τους συντελεστές δομής:

$$\sum_{c,d} f^{acd} f^{bcd} = N\delta^{ab}$$

Το οποίο ισοδυναμεί με την κανονικοποίηση των γεννητόρων.

- Μαθηματικά η θεμελιώδης αναπαράσταση είναι η πιο καλά ορισμένη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι γεννήτορες είναι πίνακες, των οποίων το γινόμενο ορίζεται. Δηλαδή, το γινόμενο των γεννητόρων είναι καλά ορισμένο.

2. Συζυγής Αναπαράσταση:

- Η adjoint αναπαράσταση δρα στο χώρο που ορίζουν οι γεννήτορες. Αφού για μια $SU(N)$ υπάρχουν $N^2 - 1$ γεννήτορες, ο χώρος που δημιουργούν έχει διάσταση $N^2 - 1$. Σε μορφή πινάκων η συζυγής αναπαράσταση ορίζεται ως εξής:

$$(T_{adj}^a)^b{}_c = -if^{abc}$$

- Τα gauge πεδία μετασχηματίζονται όπως η adjoint.

Θα ήταν πολύ χρήσιμο να υπήρχαν τρόποι να χαρακτηριστεί η αναπαράσταση, οι οποίοι να μην εξαρτώνται από τη βάση της αναπαράστασης. Κάπως έτσι ορίζεται ο τελεστής Casimir $c_2(R)$ ως εξής:

$$T_R^a T_R^a = c_2(R)I$$

όπου R αναφέρεται σε γενική αναπαράσταση. Ο ορισμός αυτό βασίζεται στο λήμμα του Schur. Και για να υπολογισθεί ο Casimir πρέπει να είναι καλώς ορισμένο το γινόμενο των γεννητόρων.

Επίσης για κάθε αναπαράσταση οι γεννήτορες επιλέγονται ως :

$$\text{tr}\{T_R^a T_R^b\} = T(R)\delta^{ab}$$

όπου $T(R)$ ονομάζεται δείκτης της αναπαράστασης.

$$T(\text{fundamental}) = T_F = \frac{1}{2}$$

$$T(\text{adjoint}) = T_A = N\delta^{ab}$$

Και με λίγες πράξεις μπορεί κανείς να φτάσει σε μία πολύ σημαντική σχέση:

$$\begin{aligned} \delta^{ab} \text{tr}[T_R^a T_R^b] &= T(R)\delta^{ab}\delta^{ab} \rightarrow \text{tr}[T_R^a T_R^a] = d(G)T(R) \rightarrow \text{tr}[c_2(R)I] = d(G)T(R) \rightarrow \\ &\rightarrow c_2(R)\text{tr}[I] = d(G)T(R) \rightarrow c_2(R)d(R) = d(G)T(R) \end{aligned}$$

Και για θεμελιώδη και συζυγή αναπαράσταση της $SU(N)$ ισχύουν τα εξής:

	Θεμελιώδης αναπαράσταση	Συζυγής αναπαράσταση
$d(R)$	N	$N^2 - 1$
$c_2(R)$	$\frac{N^2-1}{2N}$	N

Βιβλιογραφία

- [1] Kerson Huang: *A Critical History of Renormalization*, Int. J. Mod. Phys. A, 28 (2013) 1330050
- [2] M.E. Peskin, D.V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory*
- [3] M.D.Schwartz: *Quantum Field Theory And The Standard Model*, (2013)
- [4] Gerard't Hooft, M.J.G. Veltman: *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl.Phys. B44 (1972) 189-213
- [5] Jorge C. Romão: *Modern Techniques for One-Loop Calculations*, Version 1.0.263, September 20, 2006
- [6] Joshua P. Ellis, TikZ-Feynman: *Feynman diagrams with TikZ*, Computer Physics Communications, Volume 210, January 2017, Pages 103-123