

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Προσεγγιστικές Μέθοδοι Ολοκληρωτικών
Εξισώσεων 1ου είδους και Εφαρμογές σε
Θεωρία Δυναμικού



Διπλωματική εργασία Γιόγιακα Σωτήριου

Επιβλέπων Καθηγητής:
Γκιντίδης Δρόσος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2017

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ. Δρόσο Γκιντίδη, για την καθοδήγηση και την πολύτιμη συμβολή του σε κάθε φάση της δημιουργίας της. Θα πρέπει παράλληλα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής την καθηγήτρια κα. Κυριακή Κυριάκη, και τον καθηγητή κ. Αντώνιο Χαραλαμπίδου, για τις υποδείξεις και παρατηρήσεις τους στην εκπόνηση της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που στάθηκαν δίπλα μου σε όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Τέλος θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένεια μου, που όλα αυτά τα χρόνια μου συμπαραστέκονται ηθικά και οικονομικά και διαμορφώνουν το κατάλληλο περιβάλλον μέσα στο οποίο μπορώ να εργαστώ και να επεκτείνω τις γνώσεις μου.

Περιεχόμενα

1	Θεωρία Δυναμικού	7
1.1	Εισαγωγή	7
1.2	Δυναμικό Επιφάνειας	12
2	Προσέγγιση Ολοκληρωτικών Τελεστών	16
2.1	Προσέγγιση μέσω νόρμας	16
2.2	Προσέγγιση μέσω σημειακής σύγκλισης	18
3	Μέθοδοι Επίλυσης Γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων	22
3.1	Εκφυλισμένοι Τελεστές	22
3.2	Μέθοδος Παρεμβολής	23
3.3	Παρεμβολή σε Εκφυλισμένους Πυρήνες	27
3.4	Μέθοδοι Αριθμητικής Ολοκλήρωσης	31
3.4.1	Μέθοδος <i>Nyström</i>	35
3.4.2	Εφαρμογές	36
3.5	Τριγωνομετρική Παρεμβολή	39
4	Ολοκληρωτικές Εξισώσεις 1ου είδους	43
4.1	Προβλήματα	43
4.2	Ομαλοποίηση Ασθενών Προβλημάτων	45
4.3	Συμπαγείς Αυτοσυζυγείς Τελεστές	47
4.4	Ομαλοποίηση Tikhonov	52

5	Μη καλά τοποθετημένα προβλήματα στη Θεωρία Δυναμικού	61
5.1	Χρήση Ομαλοποίησης Tikhonov σε μη καλά Τοποθετημένα Προβλήματα πρώτου είδους	61
5.2	Εφαρμογή	66
6	Υπολογιστικές Εφαρμογές για Αστεροειδή Χωρία	70
6.1	Πρόβλημα 1	70
6.2	Πρόβλημα 2	72
6.3	Διπλά Συνεκτικά Χωρία	74
6.4	Τυχαίο Εσωτερικό Χωρίο	78

Περίληψη

Στόχος αυτής της εργασίας είναι η προσέγγιση των ολοκληρωτικών τελεστών 1^{ου} είδους με διάφορες μεθόδους όπως της μεθόδου ομαλοποίησης Tikhonov και η υπολογιστική επίλυση προβλημάτων της Θεωρίας Δυναμικού.

Στο πρώτο κεφάλαιο, μελετάμε τα προβλήματα Dirichlet και Neumann για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Στη συνέχεια αναπτύσσουμε τη Θεωρία Δυναμικού για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} είδους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, επικεντρωνόμαστε στις ολοκληρωτικές εξισώσεις της μορφής $A\varphi = f$. Μελετάμε τη σύγκλιση των τελεστών αυτών μέσω κάποιων θεωρημάτων όπως της Αρχής Ομοιόμορφου Φράγματος. Στο τέλος του κεφαλαίου εξετάζουμε με τη σύγκλιση συμπαγών τελεστών.

Στο τρίτο κεφάλαιο, μελετάμε τα είδη των μεθόδων παρεμβολής για εκφυλισμένους τελεστές. Στη συνέχεια μελετάμε την προσέγγιση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο *Nystrom*.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, αρχικά ορίζουμε τους συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές. Επίσης, ορίζουμε τη μέθοδο Tikhonov και ομαλοποιούμε ασθενή προβλήματα χρησιμοποιώντας την μέθοδο αυτή.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, διατυπώνουμε την λύση του προβλήματος Dirichlet με τη μέθοδο αναπαράστασης της λύσης με δυναμικό διπλού στρώματος. Επίσης προσεγγίζουμε τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης 1^{ου} είδους χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Tikhonov για να παρατηρήσουμε την τάξη του σφάλματος.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο μελετάμε αριθμητικά, προβλήματα Dirichlet για αστεροειδή χωρία χρησιμοποιώντας την μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov και την μέθοδο *Nystrom*.

Abstract

The aim of this work is to approximate first kind integral operators by various methods such as the Tikhonov regularization method and the computational solution problems of the Potential Theory.

In the first chapter, we study the Dirichlet and Neumann problems for integral equations. We also develop the Potential Theory which we will use to study the integral equations first and second kind.

In the second chapter, we focus on the integral equations of $A\varphi = f$. We study the convergence of these operators through some theorems such as the Uniform Boundedness Theory. In the end of this chapter, we examine the convergence of compact operators.

In the third chapter, we study the types of interpolation methods for degenerate operators. Then we examine approximation using *Nijstrom* method.

In the fourth chapter, we present compact, self-adjoint operators. Also, we define the Tikhonov method and we regularize ill-posed problems using this method.

In chapter five, we formulate the solution of the Dirichlet problem with the method of representing the solution as a double layer potential. We also approximate the solution of the corresponding first kind integral equation, using Tikhonov method and investigate the order of the error.

Finally, in the sixth chapter, we investigate numerically examples of Dirichlet problems for specific star-shaped domains using the Tikhonov regularization and the *Nijstrom* method.

Κεφάλαιο 1

Θεωρία Δυναμικού

1.1 Εισαγωγή

Ορισμός 1.1 Μια δυο φορές συνεχής και διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση u , ορισμένη στο πεδίο ορισμού $D \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$ ονομάζεται *αρμονική* αν ικανοποιεί την εξίσωση *Laplace*

$$\Delta u = 0 \text{ στον } D$$

όπου

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Θεώρημα 1.2 Η συνάρτηση

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, & m = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}, & m = 3 \end{cases}$$

ονομάζεται *θεμελιώδη λύση* της εξίσωσης *Laplace*. Για φικαρισμένο $y \in \mathbb{R}^m$ είναι αρμονική στον $\mathbb{R}^m \setminus \{y\}$. Για $n \in \mathbb{N}$, με $C^n(D)$ ορίζουμε τον γραμμικό χώρο των πραγματικών συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται στον χώρο D , που είναι n φορές συνεχώς διαφορίσιμος.

Με $C^n(\bar{D})$ ορίζουμε τον υπόχωρο των συναρτήσεων του $C^n(D)$ όπου οι παράγωγοι μέχρι βαθμού n μπορούν να επεκταθούν συνεχώς από τον D στον \bar{D} .

Ένα από τα βασικά εργαλεία που μελετούνται στις αρμονικές συναρτήσεις είναι τα ολοκληρωτικά θεωρήματα του *Green*.

Θεώρημα 1.3 (Θεώρημα Green)

Έστω D ένα φραγμένο χωρίο κλάσης C^1 και με ν ορίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο ∂D το οποίο κατευθύνεται εξωτερικά του D . Τότε, για $u \in C^1(\bar{D})$ και $v \in C^2(\bar{D})$ έχουμε το πρώτο θεώρημα του *Green*

$$\int_D \{u\Delta v + \operatorname{grad}u \cdot \operatorname{grad}v\}dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds \quad (1.1.1)$$

και για $u, v \in C^2(\bar{D})$ έχουμε το δεύτερο θεώρημα *Green*

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial D} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu})ds \quad (1.1.2)$$

Απόδειξη Εφαρμόζουμε τον παρακάτω τύπο

$$\int_D \operatorname{div}A dx = \int_{\partial D} \nu \cdot A ds$$

στο διανυσματικό πεδίο $A \in C^1(\bar{D})$ ορισμένο από $A := u \operatorname{grad}v$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\operatorname{div}(u \cdot \operatorname{grad}v) = \operatorname{grad}u \cdot \operatorname{grad}v + u \operatorname{div} \operatorname{grad}v$$

για να αποδείξουμε την (1.1.1). Για να δείξω την σχέση (1.1.2) αντικαθιστώ όπου u με v .

Πόρισμα 1.4 Έστω $u \in C^2(\bar{D})$ αρμονική στον D . Τότε

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad (1.1.3)$$

Απόδειξη

Βάζω στη σχέση (1.1.1), $u = 1$ και προκύπτει το παραπάνω πόρισμα.

Θεώρημα 1.5 (Τύπος Green)

Έστω D ένα σύνολο όπως ορίζεται στο θεώρημα (1.3) και υποθέτουμε ότι $u \in C^2(\bar{D})$ είναι αρμονική στον D . Τότε

$$u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in D \quad (1.1.4)$$

Απόδειξη

Για $x \in D$ επιλέγουμε μια σφαίρα $\Omega(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$ ακτίνας r τέτοια ώστε $\Omega(x, r) \subset D$. Με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα που κατευθύνεται εξωτερικά της σφαίρας. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα *Green* (1.1.2) για τις αρμονικές συναρτήσεις u και $\Phi(x, \cdot)$ στο χωρίο $\{y \in D : |y - x| > r\}$ και έχω

$$\int_{\partial D \cup \Omega(x, r)} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) \right\} ds(y) = 0$$

Άρα στον $\Omega(x, r)$ έχουμε

$$\text{grad}_y \Phi(x, y) = \frac{\nu(y)}{\omega_m \cdot r^{m-1}} \quad (1.1.5)$$

όπου $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 3\pi$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής και την σχέση (1.1.3) προκύπτει ότι

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Omega(x,r)} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu(y)} \Phi(x,y) \right\} \partial s(y) = u(x)$$

Άρα προκύπτει η (1.1.4).

Θεώρημα 1.6 Οι αρμονικές συναρτήσεις είναι αναλυτικές.

Απόδειξη Αφού η u είναι αρμονική από το θεώρημα (1.5) η u γράφεται στη μορφή

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} \Phi(x,y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right\} \partial s(y), \quad x \in D$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση μιγαδικών μεταβλητών (δηλαδή μια συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη *Cauchy – Riemann* με βάση κάθε μιγαδική μεταβλητή είναι αναλυτική). Συνεπώς έχει μια τοπική δυναμοσειρά. Παρατηρούμε ότι η $\Phi(x,y)$ είναι αναλυτική συνάρτηση καρτεσιανών συντεταγμένων $x_i, i = 1, \dots, m$ και ότι τα στοιχεία μέσα στο ολοκλήρωμα της (1.1.4) και τα παράγωγα ως προς το x είναι συνεχή ως προς το y αν το x περιέχεται σε ένα συμπαγές υποσύνολο του D . Επομένως οι *Cauchy – Riemann* εξισώσεις για το u μπορούν να επαληθευτούν παραγωγίζοντας ως προς x .

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Έστω u μια αρμονική συνάρτηση σε μια ανοιχτή μπάλα $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < r\}$ με σύνορο $\Omega(x,r)$ και συνεχής στο κλειστό $B[x,r]$. Τότε

$$u(x) = \frac{m}{\omega_m r^m} \int_{B[x,r]} u(y) \partial y = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int_{\Omega(x,r)} u(y) \partial s(y) \quad (1.1.6)$$

δηλαδή η τιμή του u στο κέντρο της μπάλας ισούται με την ολοκληρωσίμη μέση τιμή στη μπάλα και στη φραγμένη του επιφάνεια ($\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$).

Απόδειξη Για κάθε $0 < \rho < r$ έχουμε $u \in C^2(B[x, \rho])$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.1.3) και (1.1.4) έχουμε :

$$u(x) = \frac{1}{\omega_m \rho^{m-1}} \int_{|y-x|=\rho} u(y) \partial s(y) \quad (1.1.7)$$

όπου το δεύτερο σκέλος της (1.1.6) προκύπτει βάζοντας στην σχέση (1.1.7) όριο με $\rho \rightarrow r$. Πολλαπλασιάζοντας την (1.1.7) με ρ^{m-1} και ολοκληρώνοντας ως προς ρ με όρια 0 και r προκύπτει το πρώτο σκέλος της (1.1.6).

Θεώρημα 1.7 (Αρχή μεγίστου-ελαχίστου) Μια αρμονική συνάρτηση σε ένα πεδίο ορισμού δε μπορεί να φτάσει το ελάχιστο ή το μέγιστο εκτός αν είναι σταθερή.

Απόδειξη Θα αποδείξουμε την περίπτωση του μεγίστου. Έστω u μια αρμονική συνάρτηση με πεδίο ορισμού D και θεωρούμε ότι το μέγιστο της u βρίσκεται στο D , δηλαδή $D_M = \{x \in D : u(x) = M\}$, όπου $M := \sup_{x \in D} u(x)$. Άρα το σύνολο αυτό δεν είναι κενό. Αφού η u είναι συνεχής, το D_M είναι κλειστό σε σχέση με το D . Έστω x ένα τυχαίο σημείο του D_M και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στην αρμονική συνάρτηση $M - u$ στην μπάλα $B(x, r)$ με $B[x, r] \subset D$ έχουμε

$$0 = M - u(x) = \frac{m}{\omega_m \cdot r^m} \int_{B[x, r]} M - u(y) dy \quad (1.1.8)$$

Συνεπώς $u = M$ στον $B(x, r)$. Συνεπώς D_M είναι ανοιχτή σε σχέση με τον D . Επομένως $D = D_M$, άρα η u είναι σταθερή.

Ορισμός Ένα σύνολο $G \subset \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **Jordan μετρήσιμο** αν η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_G η οποία ορίζεται, $\chi_G = 1$

αν $x \in G$ και $\chi_G(x) = 0$ αν $x \notin G$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Βασικό Θεώρημα Έστω $G \subset \mathbb{R}^m$ είναι ένας μη κενός συμπαγής και Jordan μετρήσιμο σύνολο το οποίο συμπίπτει με την κλειστότητα του εσωτερικού του. Έστω $K : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Τότε ο γραμμικός τελεστής $A : C(G) \rightarrow C(G)$ ορίζεται από τον τύπο

$$(A\varphi)(x) := \int_G K(x, y)\varphi(y)dy, \quad x \in G$$

Ο τελεστής αυτός ονομάζεται **ολοκληρωτικός τελεστής** με συνεχή πυρήνα K .

Το φράγμα του τελεστή γράφεται ως εξής:

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in G} \int_G |K(x, y)|dy$$

1.2 Δυναμικό Επιφάνειας

Ορισμός 1.8 Θεωρώντας τη συνάρτηση $\varphi \in C(\partial D)$, οι συναρτήσεις

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial D \quad (1.2.1)$$

και

$$v(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial D \quad (1.2.2)$$

ονομάζονται, αντίστοιχα **απλό η διπλό δυναμικό** με συνάρτηση βάρους φ .

Για φιξαρισμένο $y \in \mathbb{R}^m$ η θεμελιώδης λύση $u = \Phi(\cdot, y)$ υποδηλώνει το δυναμικό σε ένα σημειακό μοναδιαίο σημείο που βρίσκεται στο σημείο y δηλαδή, $grad_x \Phi(x, y)$ δίνει το δυναμικό πεδίο σε αυτό

το σημείο δρώντας στο σημείο x .

Για $h > 0$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$\Phi(x, y + h\nu(y)) - \Phi(x, y - h\nu(y)) = 2h\nu(y) \cdot \text{grad}\Phi(x, y + \theta h\nu(y))$$

για $\theta = \theta(y) \in [-1, 1]$

Θεώρημα 1.9 Έστω ∂D τάξης C^2 και $\varphi \in C(\partial D)$ τότε το απλό δυναμικό με συνάρτηση βάρους φ είναι συνεχής στον \mathbb{R}^m . Στο σύνορο έχουμε

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad x \in \partial D \quad (1.2.3)$$

Λήμμα 1.10 Έστω ∂D είναι τάξης C^2 . Τότε υπάρχει μια θετική σταθερά L τέτοια ώστε

$$|\nu(x) \cdot \{x - y\}| \leq L|x - y|^2 \quad (1.2.4)$$

και

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leq L|x - y| \quad (1.2.5)$$

για κάθε $x, y \in \partial D$

Θεώρημα 1.11 Για ∂D τάξης C^2 το διπλό δυναμικό v με συνεχής συνάρτηση βάρους φ επεκτείνεται συνεχώς από το σύνολο D στο \bar{D} και από τον $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ στον $\mathbb{R}^m \setminus D$ με όρια

$$v_{\pm} = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \pm \frac{1}{2}\varphi(x), \quad x \in \partial D \quad (1.2.6)$$

όπου

$$v_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} v(x \pm h\nu(x))$$

και το ολοκλήρωμα αυτό είναι γενικευμένο.

Στη συνέχεια ορίζουμε δύο ολοκληρωτικούς τελεστές:

$K, K' : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ που έχουν την παρακάτω μορφή:

$$(K\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \partial D \quad (1.2.7)$$

και

$$(K'\psi)(x) := 2 \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\Phi(x, y)}{\nu(y)} ds(y) \quad x \in \partial D \quad (1.2.8)$$

Εσωτερικό Πρόβλημα Dirichlet

Βρίσκουμε μια αρμονική συνάρτηση u στο D η οποία είναι συνεχής στο \bar{D} και ικανοποιεί τη συνθήκη

$$u = f \text{ στο } \partial D,$$

όπου f μια συνεχής συνάρτηση.

Εσωτερικό Πρόβλημα Neumann

Βρίσκω μια συνάρτηση u η οποία είναι αρμονική στο D και συνεχής στο \bar{D} και ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ στο } \partial D$$

δηλαδή

$$\lim_{h \rightarrow +0} v(x) \cdot \operatorname{grad} u(x - h\nu(x)) = g(x), \quad x \in \partial D$$

όπου g είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Εξωτερικό Πρόβλημα Dirichlet

Βρίσκω μια συνάρτηση u η οποία είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ και συνεχής στο $\mathbb{R}^m \setminus D$ και ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη:

$$u = f \text{ στο } \partial D,$$

όπου f μια συνεχής συνάρτηση. Αν $|x| \rightarrow \infty$ τότε πρέπει

$$u(x) = O(1), \quad m = 2 \quad u(x) = o(1), \quad m = 2$$

Εξωτερικό Πρόβλημα Neumann

Βρίσκω μια συνάρτηση u η οποία είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ και συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus D$ και ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ στο } \partial D$$

με την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης στο ∂D , με g μια συνεχής συνάρτηση. Αν $|x| \rightarrow \infty$ τότε πρέπει $u(x) = o(1)$ ομοιόμορφα για όλες τις κατευθύνσεις.

Κεφάλαιο 2

Προσέγγιση Ολοκληρωτικών Τελεστών

2.1 Προσέγγιση μέσω νόρμας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της μορφής:

$$A\varphi = f$$

Θεώρημα 2.1 Αν ο A έχει φραγμένο αντίστροφο A^{-1} με $A^{-1} : Y \rightarrow X$, όπου X, Y χώροι *Banach* τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|A^{-1}(A_n - A)\| \leq 1, \forall n \geq n_0$. Επίσης θεωρούμε ότι η ακολουθία $A_n : X \rightarrow Y$ φραγμένων, γραμμικών τελεστών συγκλίνει ως προς τη νόρμα, δηλαδή $\|A_n - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Τότε:

α) Οι $A_n^{-1} : Y \rightarrow X$ υπάρχουν $\forall n \geq n_0$ και είναι φραγμένοι ομοιόμορφα:

$$\|A_n^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|} \|A^{-1}\| \quad (2.1.1)$$

β)

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \{\|(A_n - A)\varphi\| + \|f_n - f\|\}}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|} \quad (2.1.2)$$

Απόδειξη Αν $\|A^{-1}(A_n - A)\| < 1$ τότε από τη σειρά *Neumann* υπάρχει αντίστροφος $[I - A^{-1}(A - A_n)]^{-1}$ του $I - A^{-1}(A - A_n) = A^{-1}A_n$ και φράσσεται από:

$$\|(I - A^{-1}(A - A_n))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} A_n[(I - A^{-1}(A - A_n))^{-1}A^{-1}] &= A_n[A(I - A^{-1}(A - A_n))]^{-1} \\ &= A_n[A - AA^{-1}(A - A_n)]^{-1} = A_n(A + A_n - A)^{-1} = I. \end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει η ανισότητα του ερωτήματος α) και έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση.

β) Έστω $A\varphi = f$ και $A_n\varphi_n = f_n$. Τότε:

$$A_n(\varphi_n - \varphi) = (A_n\varphi_n - A\varphi) + (A\varphi - A_n\varphi) \Rightarrow$$

$$\varphi_n - \varphi = A_n^{-1}[(A_n\varphi_n - A\varphi) + (A\varphi - A_n\varphi)] \Rightarrow$$

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \|A_n^{-1}\|(\|f_n - f\| + \|(A - A_n)\varphi\|)$$

και χρησιμοποιώντας το ερώτημα α) έχουμε

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|} \{\|(A_n - A)\varphi\| + \|f_n - f\|\}$$

Θεώρημα 2.2

Έστω ότι υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ο αντίστροφος τελεστής $A_n^{-1} : Y \rightarrow X$ υπάρχει και είναι ομοιόμορφα φραγμένος. Τότε ο $A^{-1} : X \rightarrow Y$ υπάρχει και είναι φραγμένος από:

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A_n^{-1}(A_n - A)\|} \cdot \|A_n^{-1}\| \quad (2.1.3)$$

2.2 Προσέγγιση μέσω σημειακής σύγκλισης

Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος Έστω $A_n : X \rightarrow Y$, X χώρος *Banach* Y χώρος με νόρμα και A_n ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών. Επίσης η A_n είναι σημειακά φραγμένη δηλαδή για κάθε $\varphi \in X$, $\exists C_\varphi \geq 0 : \|A_n \varphi\| \leq C_\varphi, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε η $(A_n)_n$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη δηλαδή $\exists c > 0 : \|A_n\| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$.

Πόρισμα 2.3 Έστω X χώρος *Banach*, Y χώρος με νόρμα και $A_n : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής με $A_n \varphi \rightarrow A\varphi, \forall \varphi \in X, A : X \rightarrow Y$. Τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη $\forall U \subset X, U$ συμπαγές δηλαδή

$$\sup_{\varphi \in U} \|A_n \varphi - A\varphi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Απόδειξη Για $\varepsilon > 0$ θεωρούμε την ανοιχτή σφαίρα $B(\varphi, r) = \{\psi \in X : \|\psi - \varphi\| < r\}$ με κέντρο φ και ακτίνα $r = \varepsilon/3C$, όπου C το άνω φράγμα της ακολουθίας τελεστή A_n . Αφού το σύνολο U είναι συμπαγές και $U \subset \cup_{\varphi \in U} B(\varphi, r)$, το U έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Άρα ισχύει:

$$U \subset \cup_{j=1}^m B(\varphi_j, r)$$

Λόγω σημειακής σύγκλισης της (A_n) υπάρχει $n_0(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε για $n \geq n_0$ και για $j = 1, \dots, m$ προκύπτει ότι

$$\|A_n \varphi_j - A\varphi_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Στη συνέχεια παίρνουμε τυχαίο φ το οποίο περιέχεται στη σφαίρα $B(\varphi_j, r)$. Τότε για $n \geq n_0(\varepsilon)$ έχουμε

$$\|A_n \varphi - A\varphi\| \leq \|A_n \varphi - A_n \varphi_j\| + \|A_n \varphi_j - A\varphi_j\| + \|A\varphi_j - A\varphi\|$$

$$\leq \|A_n\| \cdot \|\varphi - \varphi_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|A\| \cdot \|\varphi_j - \varphi\| \leq 2Cr + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Επομένως η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Ορισμός 2.4 Ένα σύνολο τελεστών $\mathcal{A} = \{A : X \rightarrow Y\}$, όπου A γραμμικός τελεστής και X, Y χώροι με νόρμα, ονομάζεται **συλλογικά συμπαγής** (*collective compact*) όταν $\forall U \subset X, U$ φραγμένο, ισχύει $\mathcal{A}(U) = \{A\varphi : \varphi \in U, A \in \mathcal{A}\}$ είναι σχετικά συμπαγές (το σύνολο των οριακών σημείων του συνόλου αυτού είναι συμπαγές).

Θεώρημα 2.5 Έστω X, Z χώροι με νόρμα και Y χώρος *Banach*. Επίσης $\mathcal{A} = \{A : X \rightarrow Y\}$ είναι συλλογικά συμπαγές και με $L_n : Y \rightarrow Z$ συμβολίζουμε μια σημειακά συγκλίνουσα ακολουθία με όριο $L : Y \rightarrow Z$. Τότε

$$\|(L_n - L)A\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Απόδειξη Θέτω $U = \{A\varphi : \|\varphi\| \leq 1, A \in \mathcal{A}\}$ είναι σχετικά συμπαγές. Αφού η L_n συγκλίνει σημειακά τότε ικανοποιεί τις υποθέσεις του Πορίσματος (2.3) και άρα έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση, δηλαδή $L_n\psi \rightarrow L\psi, \forall \psi \in U$.

Τότε $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) > 0$

$$\|(L_n - L)A\varphi\| < \varepsilon$$

για κάθε $n \geq N(\varepsilon)$ και $\varphi \in X$ με $\|\varphi\| \leq 1$ και $A \in \mathcal{A}$.

Επομένως

$$\|(L_n - L)A\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon), \quad A \in \mathcal{A}$$

Πόρισμα 2.6 Έστω (A_n) μια ακολουθία τελεστών με $A_n : X \rightarrow X, X$ χώρος *Banach*, (A_n) συλλογικά συμπαγής και A_n γραμμικοί

και φραγμένοι. Αν η ακολουθία (A_n) συγκλίνει σημειακά δηλαδή $A_n\varphi \rightarrow A\varphi \forall \varphi \in X$, τότε

$$\|(A_n - A)A\| \rightarrow 0, \quad \|(A_n - A)A_n\| \rightarrow 0$$

Θεώρημα 2.7 (Neumann) Έστω X χώρος *Banach* και A γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Αν $\|A\| < 1$ τότε ο τελεστής $I - A$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

α)

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n, \quad (A^0 = I)$$

β)

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Θεώρημα 2.8 Έστω $I - A$ αντιστρέψιμος τελεστής και (A_n) συλλογικά συμπαγής ακολουθία. Τότε $\forall n$ με $\|(I - A)^{-1}(A_n - A)A_n\| < 1$, οι $(I - A_n)$ αντιστρέφονται και είναι ομοιόμορφα φραγμένοι έτσι ώστε:

α)

$$\|(I - A_n)^{-1}\| \leq \frac{1 + \|(I - A)^{-1}(A_n)\|}{1 - \|(I - A)^{-1}(A_n - A)A_n\|}$$

$$\beta) \|\varphi_n - \varphi\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \frac{1}{1 - \|(I - A)^{-1}(A_n - A)A_n\|} \cdot$$

$$\{\|(A_n - A)\varphi\| + \|(A_n - A)A_n\varphi\|\}$$

Απόδειξη

α) Αφού $(I - A)^{-1} \cdot (I - A) = I$ συνεπάγεται ότι: $(I - A)^{-1} =$

$$I + (I - A)^{-1} \cdot A.$$

$$\text{Θέτω } B_n := I + (I - A)^{-1} \cdot A_n$$

Τότε προκύπτει ότι: $B_n(I - A_n) = I - (I - A)^{-1}(A_n - A)A_n$

Θέτω $S_n = (I - A)^{-1}(A_n - A)A_n$ Τότε $\|S_n\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \cdot \|(A_n - A)A_n\| \rightarrow 0$ (από Πρόρισμα 2.6).

Συνεπώς από το θεώρημα *Neumann*, $\exists(I - S_n)^{-1}$ για το οποίο προκύπτει ότι:

$$\|(I - S_n)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|S_n\|}, \quad \forall n \geq n_0$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\|(I - A_n)^{-1}\| \leq \|(I - S_n)^{-1}\| \cdot \|B_n\|$ και κάνοντας αντικατάσταση έχουμε

$$\|(I - A_n)^{-1}\| \leq \frac{1 + \|(I - A)^{-1}(A_n)\|}{1 - \|(I - A)^{-1}(A_n - A)A_n\|}$$

β) Έχουμε ότι:

$$(I - A)\varphi = f \Leftrightarrow \varphi = (I - A)^{-1}f$$

$$(I - A_n)\varphi_n = f_n \Leftrightarrow \varphi_n = (I - A_n)^{-1}f_n$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση:

$$(I - A_n)(\varphi_n - \varphi) = f_n - f + (A_n - A)\varphi$$

και το ερώτημα α) αποδεικνύεται ότι:

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \frac{1}{1 - \|(I - A)^{-1}(A_n - A)A_n\|} \cdot$$

$$\{\|(A_n - A)\varphi\| + \|(A_n - A)A_n\varphi\|\}$$

Κεφάλαιο 3

Μέθοδοι Επίλυσης Γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

3.1 Εκφυλισμένοι Τελεστές

Έστω $\langle X, X \rangle$ ένα δυικό σύστημα και έστω $A_n : X \rightarrow X$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής της μορφής:

$$A_n \varphi = \sum_{j=1}^n \langle \varphi, b_j \rangle a_j \quad (3.1.1)$$

όπου a_1, \dots, a_n και b_1, \dots, b_n είναι στοιχεία του X , έτσι ώστε τα a_1, \dots, a_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου ο δείκτης n του τελεστή A_n συμπίπτει με τον αριθμό με τον αριθμό των στοιχείων a_1, \dots, a_n και b_1, \dots, b_n . Η λύση της εξίσωσης δεύτερου είδους με εκφυλισμένο πυρήνα μειώνει την επιλυσιμότητα του γραμμικού συστήματος πεπερασμένης διάστασης το οποίο διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1 Κάθε λύση της εξίσωσης

$$\varphi_n - \sum_{j=1}^n \langle \varphi_n, b_j \rangle a_j = f \quad (3.1.2)$$

έχει τη μορφή

$$\varphi_n = f + \sum_{i=1}^n \gamma_i a_i \quad (3.1.3)$$

με τους συντελεστές $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ να ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα

$$\gamma_j - \sum_{i=1}^n \langle a_i, b_j \rangle \gamma_i = \langle f, b_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1.4)$$

Επίσης, για κάθε λύση $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ του γραμμικού συστήματος (3.1.4) υπάρχει η αντίστοιχη λύση φ_n της σχέσης (3.1.1) που ορίζεται από την (3.1.2).

Απόδειξη Θέτουμε $\gamma_k := \langle \varphi_n, b_k \rangle$ για $k = 1, \dots, n$ και φ_n είναι η λύση της σχέσης (3.1.2). Ξεκινώντας από τη σχέση (3.1.2) και την επιλύουμε χρησιμοποιώντας την (3.1.3). Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \varphi_n - \sum_{j=1}^n \langle \varphi_n, b_j \rangle a_j &= f + \sum_{j=1}^n \gamma_j a_j - \sum_{j=1}^n \langle f + \sum_{k=1}^n \gamma_k a_k, b_j \rangle a_j \\ &= f + \sum_{j=1}^n \left\{ \gamma_j - \sum_{k=1}^n \langle a_k, b_j \rangle \gamma_k - \langle f, b_j \rangle \right\} a_j = f \end{aligned}$$

Συνεπώς προκύπτει το ζητούμενο.

3.2 Μέθοδος Παρεμβολής

Μια σημαντική μέθοδος για να μπορέσουμε να βρούμε προσεγγιστική λύση είναι η μέθοδος παρεμβολής. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα σημαντικό θεώρημα το οποίο είναι βασικό για τη χρήση της μεθόδου.

Θεώρημα 3.2 Έστω $U_n \subset C(G)$ είναι ένας n -διάστατος υπόχωρος και έστω x_1, \dots, x_n είναι n σημεία του G στα οποία κάθε συνάρτηση από τον U_n που μηδενίζεται στα $x_i, i = 1, \dots, n$ μηδενίζεται

ταυτοτικά. Τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $u \in U_n$ με την ιδιότητα παρεμβολής:

$$u(x_i) = g_i, \quad i = 1, \dots, n$$

με $g_i = g(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ είναι μια συνάρτηση που ανήκει στον χώρο $C(G)$ και δίνονται οι τιμές της συνάρτησης αυτής στα x_i , $i = 1, \dots, n$. Η απεικόνιση $g \rightarrow u$ ορίζει έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή $P_n : C(G) \rightarrow U_n$ ο οποίος ονομάζεται **παρεμβολικός τελεστής**.

Απόδειξη Έστω $U_n = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$. Τότε η λύση του προβλήματος παρεμβολής δίνεται από τη σχέση

$$u = \sum_{i=1}^n \gamma_i u_i$$

με τους συντελεστές $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ δίνονται από το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k u_k(x_j) = g_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Έστω με L_1, \dots, L_n ορίζουμε τη βάση *Lagrange* για τον χώρο U_n το οποίο συνεπάγεται ότι έχουμε την ιδιότητα παρεμβολής

$$L_k(x_j) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n$$

με $\delta_{jk} = 1$ αν $j = k$ και $\delta_{jk} = 0$ αν $j \neq k$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$P_n g = \sum_{k=1}^n g(x_k) L_k \tag{3.2.1}$$

όπου ο τελεστής P_n είναι γραμμικός και φραγμένος.

Πόρισμα 3.3

Η νόρμα του παραπάνω τελεστή ορίζεται από τη σχέση

$$\|P_n\| = \max_{x \in G} \sum_{k=1}^n |L_k(x)| \quad (3.2.2)$$

Απόδειξη Από τη σχέση (3.2.1) έχουμε

$$\|P_n\|_\infty \leq \max_{x \in G} \sum_{k=1}^n |L_k(x)|$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε $z \in G$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{i=1}^n |L_i(z)| = \max_{x \in G} \sum_{i=1}^n |L_i(x)|$$

και μια συνάρτηση $f \in C(G)$ με $\|f\|_\infty = 1$ και

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) L_k(z) = \sum_{k=1}^n |L_k(z)|$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\|P_n\|_\infty \geq \|P_n f\|_\infty \geq |(P_n f)(z)| = \max_{x \in G} \sum_{k=1}^n |L_k(x)|$$

Επομένως έχουμε την νόρμα:

$$\|P_n\| = \max_{x \in G} \sum_{k=1}^n |L_k(x)|$$

Παράδειγμα Έστω ένα διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$ με $a < b$. Στη συνέχεια θεωρούμε γραμμικά *splines* δηλαδή τμηματικά γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις και μια διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$ που έχει τη μορφή $x_j = a + jh$, $j = 0, \dots, n$ με βήμα $h = (b - a)/n$. Με

U_n συμβολίζουμε τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[\alpha, b]$ με τον περιορισμό οι συναρτήσεις αυτές να είναι γραμμικές στα υποδιαστήματα $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$ να είναι γραμμικές. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα στα γραμμικά *splines* είναι προφανής. Η βάση *Lagrange* έχει την εξής μορφή:

$$L_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j], j \geq 1 \\ \frac{1}{h}(x_{j+1} - x), & x \in [x_j, x_{j+1}], j \leq n - 1 \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Από την παραπάνω μορφή παρατηρούμε ότι τα L_j είναι μη αρνητικά και $\sum_{j=0}^n |L_j(x)| = \sum_{j=0}^n L_j(x) = 1$.

Τέλος συμπεραίνουμε ότι $\|P_n\|_\infty = 1$ για τμηματικά γραμμική παρεμβολή. Στην περίπτωση της παρεμβολής για δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις g έχουμε το ακόλουθο σφάλμα:

Θεώρημα 3.4 Έστω $g \in C^2[a, b]$. Τότε το σφάλμα στην τμηματικά γραμμική παρεμβολή έχει την μορφή:

$$\|P_n g - g\|_\infty \leq \frac{1}{8} h^2 \|g\|_\infty'' \quad (3.2.3)$$

Απόδειξη Παρατηρώ ότι η διαφορά $|P_n g - g|$ στο διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ μεγιστοποιείται σε ένα εσωτερικό σημείο ξ με $g'(\xi) = (P_n g)'(\xi) = \{g(x_{j+1}) - g(x_j)\}/h$. Στη συνέχεια θέτουμε $\xi - x_j \leq h/2$ και χρησιμοποιώντας τη σειρά *Taylor* προκύπτει:

$$\begin{aligned} (P_n)(\xi) - g(\xi) &= g(x_j) + (P_n g)'(\xi)(\xi - x_j) - g(\xi) \\ &= g(x_j) - g(\xi) - (x_j - \xi)g'(\xi) \\ &= 1/2(x_j - \xi)^2 g''(\eta), \text{ με } \eta \in (x_j, \xi). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(P_n g)(x) - g(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \|g''\|_\infty$$

Επομένως προκύπτει η σχέση που θέλουμε.

3.3 Παρεμβολή σε Εκφυλισμένους Πυρήνες

Χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική εξίσωση δεύτερου είδους:

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

και το θεώρημα παρεμβολής (3.2), προσεγγίζουμε έναν συνεχή τελεστή K με τον K_n παρεμβάλλοντας τον K ως προς x δηλαδή $K_n(\cdot, y) \in U_n$ και

$$K_n(x_j, y) = K(x_j, y), \quad j = 1, \dots, n$$

για κάθε $y \in [a, b]$. Ο τελεστής K_n γράφεται στη μορφή:

$$K_n(x, y) = \sum_{j=1}^n L_j(x)K(x_j, y).$$

Επομένως, ο K_n είναι εκφυλισμένος τελεστής με $a_j = L_j$ και $b_j = K(x_j, \cdot)$. Άρα το σύστημα (3.1.4) γράφεται στη μορφή:

$$\gamma_j - \sum_{k=1}^n \gamma_k \int_a^b K(x_j, y)L_k(y)dy = \int_a^b K(x_j, y)f(y)dy \quad (3.3.1)$$

με $j = 1, \dots, n$ και η λύση της εξίσωσης (3.1.4) γράφεται

$$\varphi_n = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k L_k$$

Το σφάλμα που προκύπτει μέσω *spline* γραμμικής παρεμβολής είναι:

$$\|A_n - A\|_\infty \leq \frac{1}{8}h^2(b-a) \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \right\|_\infty \quad (3.3.2)$$

Στη συνέχεια θα αντικαταστήσουμε τον $K(x_j, \cdot)$ με την γραμμική *spline* παρεμβολή, δηλαδή

$$\int_a^b K(x_j, y)L_k(y)dy = \sum_{m=0}^n K(x_j, x_m) \int_a^b L_m(y)L_k(y)dy \quad (3.3.3)$$

για $j, k = 0, \dots, n$. Με υπολογισμούς προκύπτει ο τριδιαγώνιος πίνακας:

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

με βάρη $w_{mk} = \int_a^b L_m(y)L_k(y)dy$. Στην σχέση (3.3.1) αντικαθιστούμε το f και $K(x_j, \cdot)$ με τις *spline* παρεμβολές. Άρα προκύπτουν οι προσεγγίσεις:

$$\int_a^b K(x_j, y)f(y)dy \approx \sum_{k,m=0}^n K(x_j, x_m)f(x_k) \int_a^b w_{mk}dy \quad (3.3.4)$$

για $j = 0, \dots, n$. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την επιρροή αυτών των προσεγγίσεων στα σφάλματα. Θα μελετήσουμε τη λύση του συστήματος (3.3.1) με προσεγγιστικές τιμές για τους συντελεστές και φ_n η προσεγγιστική λύση της εξίσωσης $\tilde{\varphi}_n - \tilde{A}_n\tilde{\varphi}_n = \tilde{f}_n$ η οποία γράφεται στη μορφή:

$$\tilde{\varphi}_n(x) - \int_a^b \tilde{K}_n(x, y)\tilde{\varphi}_n(y)dy = \tilde{f}_n(x), \quad a \leq x \leq b$$

όπου $\tilde{K}_n(x, y) := \sum_{j,m=0}^n K(x_j, x_m)L_j(x)L_m(y)$ και

$$f_n \tilde{(x)} := \sum_{m=0}^n f(x_m)L_m(x)$$

Γνωρίζοντας ότι ο πυρήνας K είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμος, έχουμε:

$$\begin{aligned} K(x, y) - \tilde{K}_n(x, y) &= K(x, y) - [P_n(K(\cdot, y))](x) \\ &\quad + [P_n[K(\cdot, y) - P_n K(\cdot, \cdot)](y)](x) \end{aligned}$$

Από το θεώρημα (3.4) και τη σχέση $\|P_n\|_\infty = 1$ έχουμε

$$|K(x, y) - \tilde{K}_n(x, y)| \leq \frac{1}{8}h^2 \left\{ \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} \right\|_\infty \right\}$$

για κάθε $a \leq x, y \leq b$. Επομένως για τον ολοκληρωτικό τελεστή \tilde{A}_n με πυρήνα \tilde{K}_n προκύπτει ότι $\|\tilde{A}_n - A\|_\infty = O(h^2)$.

Επίσης όταν η f είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη τότε $\|f_n \tilde{f} - f\|_\infty = O(h^2)$. Τέλος από το Θεώρημα (2.1) προκύπτει ότι $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty = O(h^2)$.

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει το επόμενο βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 3.5 Η προσέγγιση του εκφυλισμένου πυρήνα με ισάπεχουσα διαμέριση γραμμικής παρεμβολής με είσοδο πίνακα και αντικαθιστώντας το δεξί μέρος του γραμμικού συστήματος (3.3.1) με τις σχέσεις (3.3.3) και (3.3.4) προσεγγίζει την λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με βαθμό $O(h^2)$ αν ο πυρήνας K και το δεξί μέρος f είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη.

Παράδειγμα Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 (x+1)e^{-xy}\varphi(y)dy = e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-(x+1)} \quad (3.3.5)$$

με $0 \leq x \leq 1$.

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης $\varphi(x) = e^{-x}$ και για τον πυρήνα ισχύει:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K(x, y)| dy = \sup_{0 < x \leq 1} \frac{x+1}{2x} (1 - e^{-x}) < 1$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την παραπάνω σχέση δηλαδή το μέγιστο του πυρήνα είναι μικρότερο του ένα, ισχύει ότι η λύση της ολοκληρωτικής είναι μοναδική.

Στη συνέχεια θα γράψουμε έναν κωδικά σε Matlab ο οποίος μας δίνει το σφάλμα ανάμεσα στην πραγματική και προσεγγιστική λύση με την μέθοδο προβολών.

Παρατήρηση

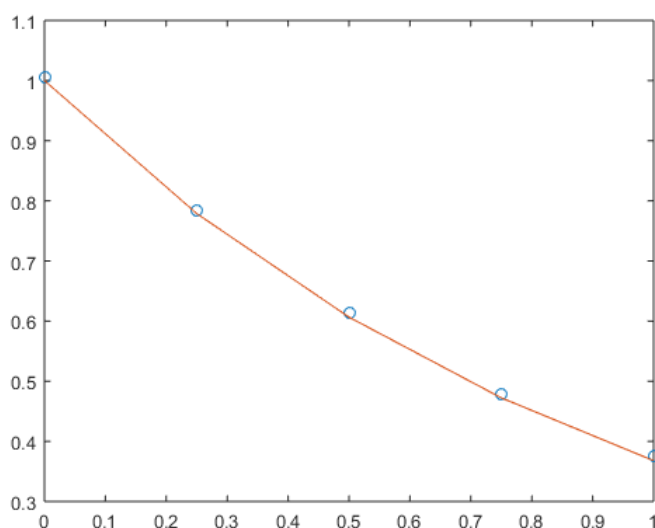
Στον αλγόριθμο χωρίζουμε το σύνολο σε 5 σημεία και ελέγχουμε το σφάλμα που δημιουργείται σε αυτά τα πέντε σημεία. Ο αλγόριθμος αυτός θα τρέξει για 4, 8, 16 και 32 σημεία αλλά ο έλεγχος του σφάλματος θα γίνει στα σημεία $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ για να δούμε πως συμπεριφέρεται η προσεγγιστική μας λύση αν αλλάζουμε συνεχώς το n .

Αυτό φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

n	$x = 0$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1$
4	0.004808	0.005430	0.006178	0.007128	0.008331
8	0.001199	0.001354	0.001541	0.001778	0.002078
16	0.000300	0.000338	0.000385	0.000444	0.000519
32	0.000075	0.000085	0.000096	0.000111	0.000130

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τρέξει τον κώδικα για $n = 4$ σημεία και βλέπουμε γραφικά την διαφορά μεταξύ της πραγματικής και

προσεγγιστικής λύσης:



Σχήμα 3.1: Διαφορά μεταξύ πραγματικής και προσεγγιστικής λύσης

Στην παραπάνω γραφική παράσταση η συνεχής καμπύλη είναι η ακριβής λύση και τα σημεία με κύκλο είναι της προσεγγιστικής λύσης.

3.4 Μέθοδοι Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Σε αυτή τη παράγραφο θα αναλύσουμε διάφορες μεθόδους τετραγωνισμού οι οποίες διαφέρουν ως προς το σφάλμα τους. Στην αρχή όμως θα ορίσουμε τους κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης. Ένας τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης γενικά είναι αριθμητική μέθοδος προσεγγίζοντας ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$Q(g) := \int_G w(x)g(x)dx$$

με w μια συνάρτηση βάρους. Το σύνολο $G \subset \mathbb{R}^m$ θα είναι συμπαγές και *Jordan* μετρήσιμο. Επίσης οι κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης ισχύουν για τον τύπο:

$$Q_n(g) := \sum_{j=1}^n a_j^{(n)} g(x_j^{(n)})$$

με σημεία $x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ τα οποία περιέχονται στον G και πραγματικά βάρη $a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου ο βαθμός n του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης θα συμπίπτει με τον αριθμό των σημείων. Στη συνέχεια αντί για $x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ και $a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ θα γράψουμε x_1, \dots, x_n και a_1, \dots, a_n αντίστοιχα. Η βασική αριθμητική ολοκλήρωση είναι παρεμβολή αριθμητικής ολοκλήρωσης. Αυτό μπορεί να γίνει παρεμβάλλοντας την g ως προς τα σημεία x_1, \dots, x_n , συνήθως μέσω ενός πολυωνύμου ή spline και ολοκληρώνουμε την συνάρτηση παρεμβολής αναλυτικά. Για λόγους σύγκλισης θα χρησιμοποιήσουμε σύνθετους κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης δηλαδή υποδιαιρώντας το διάστημα της ολοκλήρωσης και εφαρμόζουμε παρεμβολή χαμηλής τάξης σε κάθε ολοκλήρωμα. Οι πιο συχνοί κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι του Simpson και του τραπεζοειδή. Έστω $x_j = a + jh, j = 0, \dots, n$ είναι μια ισαπέχουσα διαμέριση με βήμα $h = (b - a)/n$. Το σφάλμα της μεθόδου αυτής διατυπώνεται με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.6 Έστω $G \in C^2[a, b]$. Τότε το υπόλοιπο

$$R_T(g) := \int_a^b g(x)dx - h\left[\frac{1}{2}g(x_0) + g(x_1) + \dots + g(x_{n-1}) + \frac{1}{2}g(x_n)\right]$$

για τον σύνθετο τραπεζοειδή κανόνα υπολογίζεται με τον τύπο

$$|R_T(g)| \leq \frac{1}{12}h^2(b - a)\|g''\|_\infty$$

Απόδειξη Ορίζοντας τον πυρήνα Peano για τον τραπεζοειδή κανόνα έχουμε

$$K_T(x) := \frac{1}{2}(x - x_{j-1})(x_j - x), \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j$$

για $j = 1, \dots, n$. Στη συνέχεια ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\int_a^b K_T(x)g''(x)dx = -R_T(g)$$

Στη συνέχεια από την εκτίμηση έχουμε

$$\int_a^b K_t(x)dx = \frac{h^2}{12}(b - a)$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει από το γεγονός ότι ο πυρήνας K_T είναι μη αρνητικός στο $[a, b]$.

Θεώρημα 3.7 Έστω $g \in C^4[a, b]$ και έστω n άρτιος αριθμός. Τότε το υπόλοιπο που προκύπτει έχει τη μορφή:

$$R_s(g) := \int_a^b g(x)dx - \frac{h}{3}[g(x_0) + 4g(x_1) + 2g(x_2) + 4g(x_3) + 2g(x_4) + \dots + 2g(x_{n-2}) + 4g(x_{n-1}) + g(x_n)]$$

και για τον σύνθετο κανόνα του Simpson υπολογίζεται

$$|R_S(g)| \leq \frac{1}{180}h^4(b - a)\|g^{(4)}\|_\infty$$

Απόδειξη Ο πυρήνας Peano για τον κανόνα Simpson δίνεται

$$K_S(x) = \begin{cases} \frac{h}{18}(x - x_{2j-2})^3 - \frac{1}{24}(x - x_{2j-2})^4 & x_{2j-2} \leq x \leq x_{2j-1} \\ \frac{h}{18}(x_{2j} - x)^3 - \frac{1}{24}(x_{2j} - x)^4, & x_{2j-1} \leq x \leq x_{2j} \end{cases}$$

για $j = 1, \dots, n/2$ με

$$\int_a^b K_S(x)g^{(4)}(x) = -R_S(g)$$

Στη συνέχεια η απόδειξη είναι ανάλογη με τη του Θεωρήματος (3.6).

Ορισμός 3.8 Μια ακολουθία (Q_n) του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης λέγεται **συγκλίνουσα** αν $Q_n(g) \rightarrow Q(g)$, για όλα τα $g \in C(G)$.

Θεώρημα 3.9 (Szegő) Ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (Q_n) συγκλίνει αν και μόνο αν $Q_n(g) \rightarrow Q(g)$, $n \rightarrow \infty$ για όλα τα g στο πυκνό υποσύνολο $U \subset C(G)$ και

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^n |a_j^{(n)}| < \infty$$

Πόρισμα 3.10 (Steklov) Έστω ότι $Q_n(1) \rightarrow Q(1)$, $n \rightarrow \infty$ και τα βάρη αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι μη αρνητικά. Τότε ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης (Q_n) συγκλίνει αν και μόνο αν $Q_n(g) \rightarrow Q(g)$, $n \rightarrow \infty$ για όλα τα g σε ένα πυκνό υποσύνολο $U \subset C(G)$.

Θεώρημα 3.11 Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αναλυτική και 2π -περιοδική. Τότε το σφάλμα δίνεται από τον τύπο:

$$R_T(g) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)dt - \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} g\left(\frac{j\pi}{n}\right)$$

Για τον τραπεζοειδή κανόνα το σφάλμα ικανοποιεί τη σχέση

$$|R_T(g)| \leq M(\coth(ns) - 1)$$

3.4.1 Μέθοδος *Nijstrom*

Σε αυτή τη παράγραφο θα προσεγγίσουμε τον ολοκληρωτικό τελεστή

$$(A\varphi)(x) := \int_G K(x, y)\varphi(y)dy, \quad x \in G \quad (3.4.1)$$

επιλέγοντας μια συγκλίνουσα ακολουθία (Q_n) για το ολοκλήρωμα $Q(g) = \int_G g(x)dx$.

Ο πυρήνας K είναι συνεχής και η προσέγγιση του παραπάνω τελεστή δίνεται από τον τύπο

$$(A_n\varphi)(x) := \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} K(x, x_k^{(n)})\varphi(x_k^{(n)}), \quad x \in G \quad (3.4.2)$$

Συνεπώς η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης δεύτερου είδους

$$\varphi - A\varphi = f$$

προσεγγίζεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\varphi_n - A_n\varphi_n = f$$

Στην ουσία επιλύουμε ένα πεπερασμένης διάστασης γραμμικό πρόβλημα.

Θεώρημα 3.12 Έστω φ_n μια της λύση της εξίσωσης

$$\varphi_n(x) - \sum_{k=1}^n a_k K(x, x_k)\varphi_n(x_k) = f(x), \quad x \in G \quad (3.4.3)$$

Συνεπώς η τιμή $\varphi_j^{(n)} = \varphi_n(x_j)$, $j = 1, \dots, n$ στα σημεία αριθμητικής ολοκλήρωσης ικανοποιεί το γραμμικό σύστημα

$$\varphi_j^{(n)} - \sum_{k=1}^n a_k K(x_j, x_k)\varphi_k^{(n)} = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4.4)$$

Αντιστρόφως, έστω $\varphi_j^{(n)}$, είναι μια λύση του παραπάνω συστήματος. Τότε η φ_n ορίζεται

$$\varphi_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k K(x, x_k) \varphi_n(x_k) + f(x), \quad x \in G \quad (3.4.5)$$

η οποία επιλύει την (3.4.3).

Θεώρημα 3.13 Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (Q_n) που συγκλίνει. Τότε η ακολουθία (A_n) είναι συλλογικά συμπαγής και συγκλίνει σημειακά.

3.4.2 Εφαρμογές

Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 (x+1)e^{-xy} \varphi(y) dy = e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-(x+1)}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Η εξίσωση αυτή είναι δεύτερου είδους και μέσω του Matlab θα βρούμε την προσεγγιστική λύση πρώτα για τη μέθοδο του τραπεζοειδή κανόνα και μετά για τη μέθοδο Simpson.

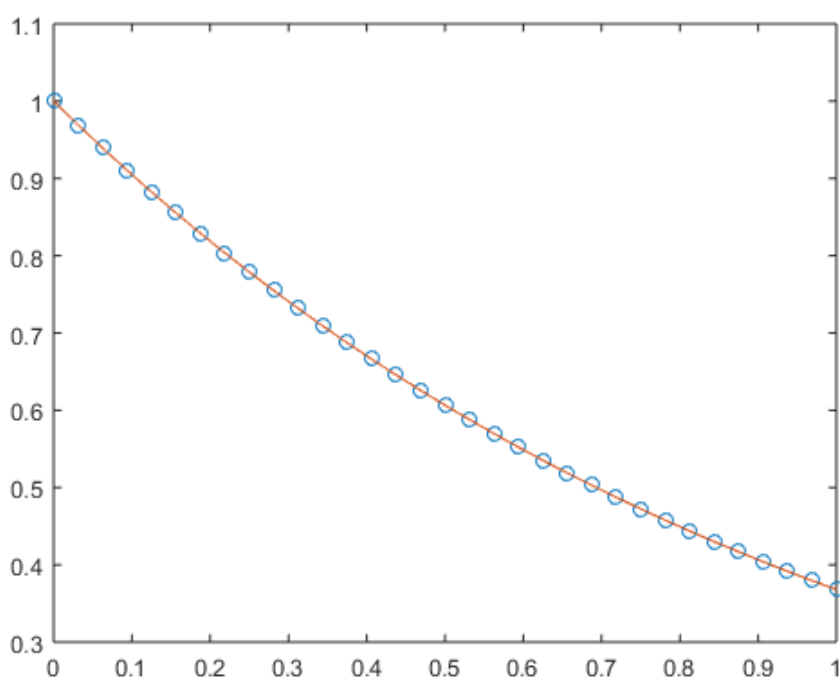
Τα σφάλματα της μεθόδου του τραπεζοειδή κανόνα γράφονται στον παρακάτω πίνακα:

n	$x = 0$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1$
4	0.007146	0.008878	0.010816	0.007128	0.013007
8	0.001788	0.002224	0.002711	0.003261	0.003882
16	0.000447	0.000556	0.000678	0.000816	0.000971
32	0.000112	0.000139	0.000170	0.000204	0.000243

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνουμε τον αριθμό των σημείων η μέθοδος συγκλίνει καλύτερα και στα συγκεκριμένα σημεία η μέθοδος συγκλίνει πολύ καλά. Αυτό μπορούμε να το παρατηρήσουμε και

μέσω της παρακάτω γραφικής παράστασης όπου ο αριθμός των σημείων είναι 32.

Επίσης ο τρόπος εύρεσης του σφάλματος με αυτή τη μέθοδο θα γίνει με χρήση του Θεωρήματος (3.6). Δηλαδή θα χρησιμοποιήσουμε τους συντελεστές που δίνονται στην προγραμματιστική διαδικασία.



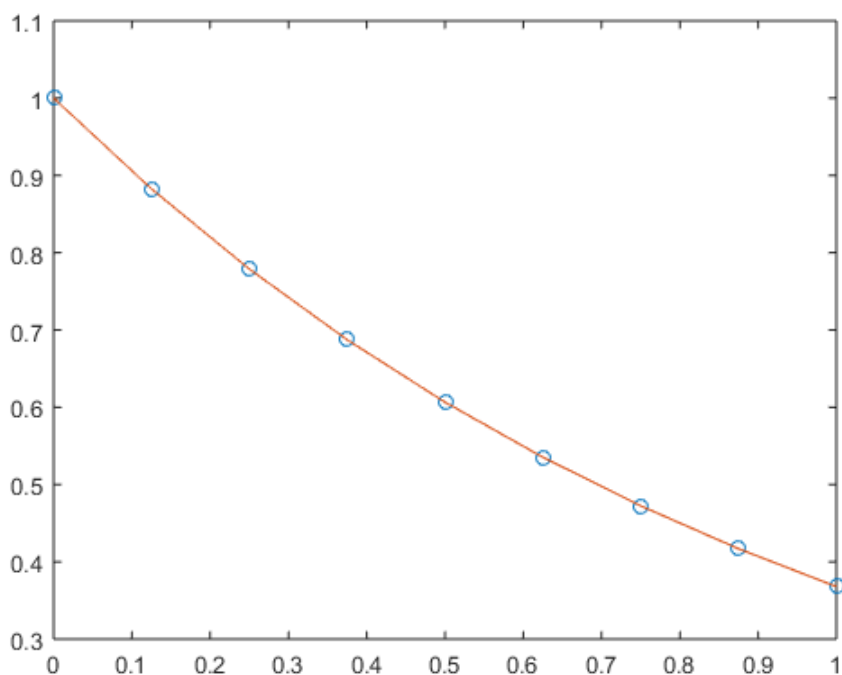
Σχήμα 3.2: Σφάλματα με τη μέθοδο του τραπεζοειδή κανόνα

Στην παραπάνω γραφική παράσταση η συνεχής καμπύλη είναι η ακριβής λύση του προβλήματος και τα σημεία με τις τελείες είναι η προσεγγιστική λύση η οποία είναι για 32 σημεία. Τέλος κάτι αντίστοιχο θα γίνει και με τη μέθοδο Simpson χρησιμοποιώντας βέβαια τους συντελεστές του Θεωρήματος (3.7).

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simpson σφάλματα που

προκύπτουν από την μέθοδο αυτή, βρίσκονται στον παρακάτω πίνακα:

n	$x = 0$	$x = 0.25$	$x = 0.5$	$x = 0.75$	$x = 1$
4	0.00006652	0.00008311	0.00010905	0.00015046	0.00021416
8	0.00000422	0.00000527	0.00000692	0.00000956	0.00001366
16	0.00000026	0.00000033	0.00000043	0.00000060	0.00000086



Σχήμα 3.3: Σφάλματα με τη μέθοδο Simpson

Η συνεχής καμπύλη είναι η ακριβής λύση και οι τελείες η προσεγγιστική μας λύση. Παρατηρώ ότι η μέθοδος αυτή συγκλίνει καλύτερα από τη μέθοδο του τραπεζοειδή κανόνα και αυτό φαίνεται από τα σφάλματα με τα ίδια σημεία διαμέρισης.

3.5 Τριγωνομετρική Παρεμβολή

Επίσης ένα άλλο είδος παρεμβολής που αξίζει να ασχοληθούμε είναι η τριγωνομετρική παρεμβολή. Έστω ότι $t_j = j\pi/n, j = 0, 1, \dots, 2n-1$ είναι μια ισαπέχουσα υποδιαίρεση του διαστήματος $[0, 2\pi]$ με μονό αριθμό σημείων του πλέγματος. Αν g_0, \dots, g_{2n-1} είναι δοσμένες τιμές, τότε υπάρχει ένα μοναδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο το οποίο έχει μορφή:

$$u(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} [\alpha_k \cdot \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)] + \frac{\alpha_n}{2} \cos(nt) \quad (3.5.1)$$

με την ιδιότητα παρεμβολής $u(t_j) = g_j, j = 0, \dots, 2n-1$.

Οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους:

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} g_j \cos kt_j, \quad k = 0, \dots, n$$

και

$$\beta_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} g_j \sin kt_j, \quad k = 1, \dots, n-1$$

Επομένως η βάση Lagrange για την τριγωνομετρική παρεμβολή γράφεται στη μορφή:

$$L_j(t) = \frac{1}{2n} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(t - t_j) + \cos n(t - t_j) \right\} \quad (3.5.2)$$

με $t \in [0, 2\pi]$ και $j = 0, \dots, 2n-1$.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε κάποια θεωρήματα τα οποία αφορούν τους τελεστές τριγωνομετρικής παρεμβολής.

Θεώρημα 3.14 Για $n \geq 2$, ο τριγωνομετρικός τελεστής παρεμβολής με $2n$ ισαπέχοντα σημεία παρεμβολής έχει τη μορφή

$$\|P_n\|_\infty \leq 3 + \frac{2}{\pi} \ln(2n) \quad (3.5.3)$$

Απόδειξη Η συνάρτηση $\lambda : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται

$$\lambda(t) := \sum_{j=0}^{2n-1} |L_j(t)|$$

και έχει περίοδο π/n . Αφου $\|P_n\|_\infty = \max_{x \in G} \sum_{k=1}^n |L_k(x)|$ τότε συμπεραίνουμε ότι

$$\|P_n\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq \pi/2n} \lambda(t)$$

Για $0 \leq t \leq \pi/2n$ χρησιμοποιώντας την σχέση (3.5.2) προκύπτει ότι

$$\lambda(t) \leq 3 + \frac{1}{2n} \sum_{j=2}^{2n-2} \left| \cot \frac{t - t_j}{2} \right|$$

Αφού η συνάρτηση $\cot : s \rightarrow \cot(s/2)$ είναι θετική και μονότονα φθίνουσα στο διάστημα $(0, \pi]$ για $0 \leq t \leq \pi/2n$ και $t_1 - t \geq \pi/2n$ υπολογίζουμε ότι

$$\frac{1}{2n} \sum_{j=2}^n \left| \cot \frac{t - t_j}{2} \right| < \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_n} \cot \frac{s - t}{2} ds < -\frac{1}{\pi} \ln \sin \frac{\pi}{4n}$$

Παρομοίως, έχουμε

$$\frac{1}{2n} \sum_{j=n+1}^{2n-2} \left| \cot \frac{t - t_j}{2} \right| < \frac{1}{2\pi} \int_{t_{n+1}}^{t_{2n-1}} \cot \frac{t - s}{2} ds < -\frac{1}{\pi} \ln \sin \frac{\pi}{4n}$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin \frac{\pi}{4n} > \frac{1}{2n}$ προκύπτει το ζητούμενο.

Λήμμα 3.15 Ο τριγωνομετρικός τελεστής παρεμβολής ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\|P_n g\|_2 \leq \sqrt{3\pi} \|g\|_\infty \quad (3.5.4)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και για όλες τις 2π -περιοδικές και συνεχείς συναρτήσεις g .

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.5.2) προκύπτει το εξής:

$$\int_0^{2\pi} L_j(t) L_k(t) dt = \frac{\pi}{n} \delta_{jk} - (-1)^{j-k} \frac{\pi}{4n^2} \quad (3.5.5)$$

για $j, k = 0, \dots, 2n-1$. Επομένως χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\|P_n g\|_2^2 \leq \|g\|_\infty^2 \sum_{j,k=0}^{2n-1} |L_j(t) L_k(t) dt| \leq 3\pi \|g\|_\infty^2$$

Συνεπώς η ανισότητα (3.5.4) έχει αποδειχθεί.

Στη συνέχεια το ακόλουθο θεώρημα υπολογίζεται το ομοιόμορφο φράγμα το οποίο συνεπάγεται ομοιόμορφη σύγκλιση, τριγωνομετρικών παρεμβολών, των *Hölder* συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.16 Έστω $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $0 < \alpha \leq 1$. Τότε για την τριγωνομετρική παρεμβολή έχουμε

$$\|P_n g - g\|_\infty \leq C \frac{\ln n}{n^{m+\alpha}} \|g\|_{m,\alpha} \quad (3.5.6)$$

για $g \in C_{2\pi}^{m,\alpha}$ και για τυχαία σταθερά C η οποία εξαρτάται από το m και το α .

Θεώρημα 3.17 Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αναλύτικη και 2π -περιοδική. Τότε υπάρχει μια λωρίδα $D = \mathbb{R} \times (-s, s) \subset \mathbb{C}$ με $s > 0$ όπου η g μπορεί να επεκταθεί σε μια ολόμορφη και 2π -περιοδική φραγμένη συνάρτηση $g : D \rightarrow \mathbb{C}$. Το σφάλμα της τριγωνομετρικής παρεμβολής υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\|P_n g - g\|_\infty \leq M \frac{\coth \frac{s}{2}}{\sinh ns} \quad (3.5.7)$$

με M να υποδηλώνει το φράγμα για μια ολόμορφη συνάρτηση g στο χωρίο D .

Κεφάλαιο 4

Ολοκληρωτικές Εξισώσεις 1ου είδους

4.1 Προβλήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με καλά τοποθετημένα προβλήματα ολοκληρωτικών εξισώσεων πρώτου είδους, όμως αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό.

Ορισμός 4.1 Ένα πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων με αρχική ή συνοριακή συνθήκη λέγεται **καλά τοποθετημένο** αν ικανοποιεί τρεις ακόλουθες συνθήκες:

- (1) Ύπαρξη λύσης
- (2) Μοναδικότητα
- (3) Συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα του προβλήματος

Από την τελευταία συνθήκη καταλαβαίνουμε ότι το μικρό σφάλμα στα δεδομένα μας δίνει μικρό σφάλμα στη λύση του προβλήματος που μελετάμε.

Ορισμός 4.2 Έστω $A : U \rightarrow V$ είναι ένας τελεστής με πεδίο ορισμού το $U \subset X$ και $V \subset Y$ όπου X, Y χώροι με νόρμα.

Τότε η εξίσωση

$$A\varphi = f \quad (4.1.1)$$

είναι καλά τοποθετημένη αν ο τελεστής A "1-1", επί και ο τελεστής $A^{-1} : V \rightarrow U$ είναι συνεχής. Σε κάθε άλλη περίπτωση η παραπάνω εξίσωση είναι μη καλά τοποθετημένη.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που ο αντίστροφος τελεστής είναι μη συνεχής συνεπάγεται ότι η λύση φ δεν εξαρτάται συνεχώς από την δοσμένη συνάρτηση f . Παραδείγματος χάριν, αν $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας φραγμένος, γραμμικός τελεστής απεικονίζοντας "1-1" και επί έναν χώρο Banach X σε έναν χώρο Banach Y τότε από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης ο τελεστής A^{-1} είναι φραγμένος και συνεπώς συνεχής.

Η καλή τοποθέτηση του προβλήματος είναι μια ιδιότητα του τελεστή A μαζί με τη λύση στον χώρο με νόρμα X και τα δεδομένα στον χώρο με νόρμα Y . Επομένως αν η εξίσωση είναι μη καλά τοποθετημένη, τότε μπορεί να γίνει αλλαγή στους χώρους X και Y μαζί με τις νόρμες τους. Για να γίνει όμως αυτό πρέπει ο χώρος Y μαζί με τη νόρμα του να είναι κατάλληλος για την περιγραφή των δεδομένων που μας δίνονται αλλά και των σφαλμάτων που θα μας προκύψουν.

Παράδειγμα 4.3 Ένα κλασσικό παράδειγμα ενός μη καλά προβλήματος, είναι το πρόβλημα αρχικών τιμών της εξίσωσης Laplace:

Εύρεση μιας αρμονικής συνάρτησης u στον χώρο $\mathbb{R} \times [0, \infty]$ ικανοποιώντας τις αρχικές συνθήκες:

$$u(\cdot, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} u(\cdot, 0) = f.$$

όπου f μια συνεχής συνάρτηση. Αν επιλέξουμε

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}$$

για $n \in \mathbb{N}$ τότε η λύση που θα προκύψει είναι

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$$

Παρατηρώ ότι η ακολουθία f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδέν, αλλά η λύση u_n δεν συγκλίνει ως προς καμία νόρμα. Επομένως η λύση για το πρόβλημα αρχικών τιμών αρμονικών συναρτήσεων είναι ασθενής.

Θεώρημα 4.4 Έστω X, Y είναι χώροι με νόρμα και έστω $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής. Τότε η εξίσωση πρώτου είδους $A\varphi = f$ είναι μη καλά τοποθετημένη αν ο χώρος X είναι άπειρης διάστασης.

4.2 Ομαλοποίηση Ασθενών Προβλημάτων

Σε αυτή τη παράγραφο, θεωρούμε ότι ο γραμμικός τελεστής είναι "1-1". Χωρίς βλάβη της γενικότητας, η μοναδικότητα μιας γραμμικής εξίσωσης μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλες αλλαγές στον χώρο λύσης X . Στη συνέχεια θα προσεγγίσουμε τη λύση φ της εξίσωσης $A\varphi = f$ έχοντας ως δεδομένο την διαταραγμένη δεξιά πλευρά της παραπάνω εξίσωσης f^δ με σφάλμα

$$\|f^\delta - f\| \leq \delta \tag{4.2.1}$$

Η συνάρτηση f ανήκει στο σύνολο $A(X)$, όπου υπάρχει μια μοναδική λύση φ της εξίσωσης $A\varphi = f$. Για το διαταραγμένο δεξί μέλος δε ξέρουμε αν $f^\delta \in A(X)$. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση f^δ θέλουμε να βρούμε μια προσέγγιση φ^δ της ακριβής λύσης φ της εξίσωσης $A\varphi = f$. Η προσεγγιστική λύση πρέπει φ^δ πρέπει να εξαρτάται συνεχώς από τη δεδομένη προσεγγιστική συνάρτηση f^δ . Επομένως, απαιτείται να βρούμε μια προσέγγιση του μη φραγμένου αντίστροφου τελεστή $A^{-1} : A(X) \rightarrow X$ με έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή $R : Y \rightarrow X$.

Ορισμός 4.5 Έστω X και Y χώροι με νόρμα και έστω $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας "1-1" φραγμένος, γραμμικός τελεστής. Τότε η οικογένεια των φραγμένων γραμμικών τελεστών $R_\alpha : Y \rightarrow Y, \alpha > 0$ με την ιδιότητα της σημειακής σύγκλισης

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} R_\alpha A \varphi = \varphi, \quad \varphi \in X \quad (4.2.2)$$

ονομάζεται **ομαλοποιημένο σχήμα** για τον τελεστή A . Η παράμετρος α ονομάζεται **παράμετρος ομαλοποίησης**.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα θεώρημα το οποίο περιέχει ιδιότητες που δεν πληρούνται από το ομαλοποιημένο σχήμα για τους συμπαγείς τελεστές.

Θεώρημα 4.6 Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής και $\dim X = \infty$. Τότε από το ομαλοποιημένο σχήμα οι τελεστές R_α δεν φράζονται ομοιόμορφα ως προς το α , και ο τελεστής $R_\alpha A$ δεν συγκλίνει κατά νόρμα με $\alpha \rightarrow 0$.

Απόδειξη Αρχικά θεωρούμε ότι $\|R_\alpha\| \leq C$ με $\alpha > 0$ και κάποια σταθερά C . Τότε αφού $R_\alpha f \rightarrow A^{-1}f$, $\alpha \rightarrow 0$ για όλα τα $f \in A(X)$ και συμπεραίνουμε ότι $\|A^{-1}f\| \leq C\|f\|$. Δηλαδή ο τελεστής $A^{-1} : A(X) \rightarrow X$ είναι φραγμένος.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα (4.4) αυτό είναι αντίθετο με τη σχέση $\dim X = \infty$. Για να αποδείξουμε το δεύτερο κομμάτι του θεωρήματος, θεωρούμε ότι έχουμε σύγκλιση κατά νόρμα. Τότε υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $\|R_\alpha A - I\| < \frac{1}{2}$.

Στη συνέχεια, για κάθε $f \in A(X)$ έχουμε:

$$\|A^{-1}f\| \leq \|A^{-1}f - R_\alpha A A^{-1}f\| + \|R_\alpha f\| \leq \frac{1}{2}\|A^{-1}f\| + \|R_\alpha\| \cdot \|f\|$$

Συνεπώς $\|A^{-1}f\| \leq 2\|R_a\| \cdot \|f\|$. Τέλος συμπεραίνουμε ότι $A^{-1} : A(X) \rightarrow X$ είναι φραγμένος το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει σύγκλιση κατά νόρμα.

Για να μπορέσουμε να βρούμε την λύση της εξίσωσης $A\varphi = f$ με το σχήμα ομαλοποίησης θα χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική της λύση

$$\varphi_a^\delta := R_a f^\delta \quad (4.2.3)$$

Το σφάλμα που προκύπτει ανάμεσα στη πραγματική και προσεγγιστική λύση είναι:

$$\varphi_a^\delta - \varphi = R_a f^\delta - R_a f + R_a A\varphi - \varphi$$

και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα προκύπτει

$$\|\varphi_a^\delta - \varphi\| \leq \delta\|R_a\| + \|R_a A\varphi - \varphi\| \quad (4.2.4)$$

Ορισμός 4.7 τρόπος επιλογής της παραμέτρου $\alpha = \alpha(\delta)$ του ομαλοποιημένου σχήματος R_a , $a > 0$ που εξαρτάται από το δ και πιθανόν από το f^δ ονομάζεται **κανονικό** αν για όλα τα $f \in A(X)$ και όλα τα $f^\delta \in Y$ με $\|f^\delta - f\| \leq \delta$ προκύπτει

$$R_{\alpha(\delta)} f^\delta \rightarrow A^{-1}f, \quad \delta \rightarrow 0$$

4.3 Συμπαγείς Αυτοσυζυγείς Τελεστές

Σε αυτή τη παράγραφο θεωρούμε ότι οι χώροι X, Y είναι χώροι Hilbert. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τον ορισμό του συζυγούς τελεστή A^* του A , $A^* : Y \rightarrow X$

Ορισμός 4.8 Ένας τελεστής $A : X \rightarrow Y$ ονομάζεται **συζυγής** αν για τον τελεστή $A^* : Y \rightarrow X$ ισχύει

$$(Ax, y) = (y, A^*x)$$

για όλα τα $x \in X$ και $y \in Y$. Επίσης για την νόρμα των δύο τελεστών ισχύει ότι $\|A\| = \|A^*\|$.

Θεώρημα 4.9 Για έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή ισχύει

$$A(X)^\perp = N(A^*) \text{ και } N(A^\perp) = \overline{A(X)}$$

Απόδειξη Έστω $g \in A(X)^\perp$ το οποίο σημαίνει ότι $(A\varphi, g) = 0$ για κάθε $\varphi \in X$. Αυτό σημαίνει ότι $(\varphi, A^*g) = 0$ για κάθε $\varphi \in X$ το οποίο συνεπάγεται ότι $A^*g = 0 \Rightarrow g \in N(A^*)$. Συνεπώς αφού $N(A^*) \subset A(X)^\perp$ τότε $A(X)^\perp = N(A^*)$.

Στη συνέχεια, θέτουμε $U = A(X)$ και έχουμε ότι $\overline{U} \subset (U^\perp)^\perp$. Με $P : Y \rightarrow \overline{U}$ συμβολίζουμε την ορθογώνιο τελεστή. Για τυχαίο $\varphi \in (U^\perp)^\perp$ προκύπτει η ορθογωνιότητα $P\varphi - \varphi \perp U$ το οποίο συνεπάγεται ότι $P\varphi - \varphi \perp U^\perp$ το οποίο προκύπτει από το γεγονός ότι $\overline{U} \subset (U^\perp)^\perp$. Τέλος προκύπτει ότι $\varphi = P\varphi \in \overline{U}$ άρα $\overline{U} = (U^\perp)^\perp$ συνεπώς προκύπτει το ζητούμενο.

Ορισμός 4.10 Ένας τελεστής $A : X \rightarrow X$ όπου X χώρος Hilbert ονομάζεται **αυτοσυζυγής** αν $A = A^*$ το οποίο είναι ισοδύναμο με την παρακάτω σχέση

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$$

για κάθε $\varphi, \psi \in X$.

Θεώρημα 4.11 Για έναν φραγμένο αυτοσυζυγή τελεστή έχουμε

$$\|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |(A\varphi, \varphi)| \quad (4.3.1)$$

Θεώρημα 4.12 Όλες οι ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγή τελεστή είναι πραγματικές και τα ιδιοδιανύσματα διαφορετικών ιδιοτιμών είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Απόδειξη Έστω $A\varphi = \lambda\varphi$ και $\varphi \neq 0$ τότε $\lambda(\varphi, \varphi) = (A\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $A\varphi = \lambda\varphi$ και $A\psi = \mu\psi$ με $\lambda \neq \mu$. Στη συνέχεια προκύπτει

$$(\lambda - \mu)(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi) - (\varphi, A\psi) = 0$$

το οποίο σημαίνει ότι $(\varphi, \psi) = 0$

Θεώρημα 4.13 Η φασματική ακτίνα ενός φραγμένου αυτοσυζυγή τελεστή A ικανοποιεί την συνθήκη

$$r(A) = \|A\| \quad (4.3.2)$$

Αν ο A είναι συμπαγής τότε υπάρχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή με $|\lambda| = \|A\|$.

Θεώρημα 4.14 Έστω X ένας χώρος Hilbert και έστω $A : X \rightarrow X$ είναι ένας αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής. Τότε όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές. Ο τελεστής A έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή διαφορετική του μηδενός και το πολύ ένα αριθμήσιμο σύνολο ιδιοτιμών οι οποίες βρίσκονται γύρω από το μηδέν. Οι ιδιόχωροι $N(\lambda I - A)$ για μη μηδενικές ιδιοτιμές λ έχουν πεπερασμένη διάσταση και οι ιδιόχωροι διαφορετικών ιδιοτιμών είναι ορθογώνιοι. Θεωρώντας την ακολουθία των μη μηδενικών ιδιοτιμών (λ_n) οι οποίες έχουν αύξουσα σειρά δηλαδή

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

και με P_n συμβολίζουμε τον τελεστή ορθογώνιας προβολής $P_n : X \rightarrow N(\lambda_n I - A)$ με ιδιοτιμές λ_n . Τότε

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \quad (4.3.3)$$

όπου η σειρά αυτή συγκλίνει ως προς τη νόρμα. Στη συνέχεια έστω $Q : X \rightarrow N(A)$ είναι ο ορθογώνιος προβολικός τελεστής στον

πυρήνα του A , $N(A)$. Τότε

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \varphi + Q\varphi \quad (4.3.4)$$

για όλα τα $\varphi \in X$.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις ιδιότητες των ιδιοτιμών σε συμπαγείς αυτοσυζηγείς τελεστές οι οποίοι είναι μη αρνητικοί. Αυτό σημαίνει ότι για έναν αυτοσυζυγή τελεστή $A : x \rightarrow X$ ισχύει

$$(A\varphi, \varphi) \geq 0 \quad \varphi \in X$$

Πρέπει επίσης να τονίσουμε ότι οι μη αρνητικοί τελεστές έχουν μόνο μη αρνητικές ιδιοτιμές.

Παρατήρηση Έστω U ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του Q και έστω $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ είναι μια ορθοκανονική βάση. Τότε ο ορθογώνιος προβολικός τελεστής $P : X \rightarrow U$ έχει τη μορφή

$$P\varphi = \sum_{n=1}^m (\varphi, \varphi_n) \varphi_n$$

Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να ξαναγράψουμε τις σχέσεις (4.3.3) και (4.3.4) με πιο συγκεκριμένη μορφή. Συμβολίζουμε με (φ_n) την ακολουθία των ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων με αντίστοιχες ιδιοτιμές λαμβάνοντας υπόψιν και την πολλαπλότητα τους με αντίστοιχο ιδιόχωρο $N(\lambda_n I - A)$. Επομένως για κάθε $\varphi \in X$ έχουμε

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\varphi, \varphi_n) \varphi_n \quad (4.3.5)$$

και

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n) \varphi_n + Q\varphi \quad (4.3.6)$$

Θεώρημα 4.15 (Courant) Έστω X ένας χώρος Hilbert, $A : X \rightarrow X$ είναι ένας μη αρνητικός αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής, και λ_n είναι μια μη αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών ιδιοτιμών με πολλαπλότητα. Τότε

$$\lambda_1 = \|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} (A\varphi, \varphi) \quad (4.3.7)$$

και

$$\lambda_{n+1} = \inf_{\psi_1, \dots, \psi_n \in X} \sup_{\varphi \perp \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n} (A\varphi, \varphi), \quad \|\varphi\| = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.8)$$

Απόδειξη Αρκεί να αποδείξουμε μόνο τη σχέση (4.3.8). Ονομάζουμε το δεξί μέρος του (4.3.8) με μ_{n+1} . Θέτουμε $\psi_1 = \varphi_1, \dots, \psi_n = \varphi_n$, τότε για όλα τα $\varphi \perp \psi_1, \dots, \psi_n$ λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (4.3.5) και (4.3.6) προκύπτει ότι

$$(A\varphi, \varphi) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k |(\varphi, \varphi_k)|^2 \leq \lambda_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_k)|^2 \leq \lambda_{n+1} \|\varphi\|^2$$

όπου η ισότητα ισχύει για $\varphi = \varphi_{n+1}$. Στη συνέχεια επιλέγουμε $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \in X$ όπου $\varphi \in \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ με $\|\varphi\| = 1$ και $\varphi \perp \psi_1, \dots, \psi_n$.

Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί γράφοντας $\varphi = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k \varphi_k$ και λύνοντας το γραμμικό σύστημα n εξισώσεων

$$\sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k (\varphi_k, \psi_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

με $n + 1$ αγνώστους $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$. Στο σύστημα αυτό πάντα υπάρχει μια λύση η οποία μπορεί να ομαλοποιηθεί τέτοια ώστε $\|\varphi\|^2 =$

$\sum_{k=1}^{n+1} |\gamma_k|^2 = 1$. Τότε από τις σχέσεις (4.3.5) και (4.3.6) προκύπτει το εξής

$$(A\varphi, \varphi) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k |(\varphi, \varphi_k)|^2 \geq \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} |(\varphi, \varphi_k)|^2 = \lambda_{n+1} \|\varphi\|^2 = \lambda_{n+1}$$

Άρα $\mu_{n+1} \geq \lambda_{n+1}$. Συνεπώς προκύπτει το ζητούμενο.

4.4 Ομαλοποίηση Tikhonov

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με την ομαλοποίηση Tikhonov, όμως πρώτα θα διατυπώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς για την ανάλυση της ομαλοποίησης αυτής.

Ορισμός 4.16 Έστω X, Y χώροι Hilbert, $A : X \rightarrow Y$ ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής και A^* ο συζυγής του με $A^* : X \rightarrow Y$. Τότε οι μη αρνητικές ρίζες των ιδιοτιμών ενός αυτοσυζυγή συμπαγή μη αρνητικό τελεστή $A^*A : X \rightarrow X$ ονομάζονται **ιδιάζουσες τιμές** του A .

Θεώρημα 4.17 Έστω μ_n μια ακολουθία μη μηδενικών ιδιάζουσών ιδιοτιμών ενός συμπαγή γραμμικού τελεστή A όπου η διάσταση είναι ίδια με τον μηδενόχωρο $N(\mu_n^2 - A^*A)$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία (φ_n) στον χώρο X και g_n στον χώρο Y έτσι ώστε

$$A\varphi_n = \mu_n g_n, \quad A^*g_n = \mu_n \varphi_n \quad (4.4.1)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επίσης για κάθε $\varphi \in X$ έχουμε την παρακάτω ανάλυση

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n) \varphi_n + Q\varphi \quad (4.4.2)$$

όπου Q είναι ορθογώνιος προβολικός τελεστής $Q : X \rightarrow N(A)$ και

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\varphi, \varphi_n)g_n \quad (4.4.3)$$

Στη συνέχεια κάθε σύστημα (μ_n, φ_n, g_n) , $n \in \mathbb{N}$ με αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται **ιδιάζων σύστημα** του A . Στην περίπτωση που υπάρχουν μόνο πεπερασμένες ιδιάζουσες τιμές, οι σειρές (4.4.2) και (4.4.3) εκφυλίζονται σε πεπερασμένα αθροίσματα.

Παρατήρηση Για έναν τελεστή A ο οποίος είναι "1-1", το ορθοκανονικό σύστημα $\varphi_n : n \in \mathbb{N}$ το οποίο βρίσκεται στο ιδιάζων σύστημα είναι πλήρες στο Q .

Απόδειξη Έστω (φ_n) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή A^*A , δηλαδή $A^*A\varphi_n = \mu_n^2\varphi_n$ και στη συνέχεια ορίζουμε μια δεύτερη ορθοκανονική ακολουθία

$$g_n := \frac{1}{\mu_n}A\varphi_n$$

Κάνοντας τις πράξεις παρατηρούμε ότι το σύστημα ικανοποιεί την σχέση (4.4.1). Επίσης εφαρμόζοντας την σχέση (4.3.6) σε έναν συτοσυζυγή συμπαγή τελεστή A^*A προκύπτει

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n + Q\varphi, \quad \varphi \in X$$

όπου Q είναι ένας ορθογώνιος προβολικός τελεστής από τον Q στον χώρο $N(A^*A)$. Αν $\psi \in N(A^*A)$ τότε $(A\psi, A\psi) = (\psi, A^*A\psi) = 0$ το οποίο σημαίνει ότι $N(A^*A) = N(A)$. Επομένως αποδεικνύεται η (4.4.2) και από τη σχέση αυτή προκύπτει και η (4.4.3).

Παρατήρηση Αναλύοντας τις σχέσεις (4.4.2) και (4.4.3) για όλα τα $\varphi \in X$ έχουμε:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 + \|Q\varphi\|^2 \quad (4.4.4)$$

και

$$\|A\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 |(\varphi, \varphi_n)|^2 \quad (4.4.5)$$

Θεώρημα 4.18 Έστω $A, B : X \rightarrow Y$ είναι συμπαγείς γραμμικοί τελεστές. Τότε για την ακολουθία των ιδιζουσών τιμών έχουμε

$$\mu_1(A) = \|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|A\varphi\| \quad (4.4.6)$$

και

$$\mu_{n+1}(A) = \inf_{\psi_1, \dots, \psi_n \in X} \sup_{\varphi \perp \psi_1, \dots, \psi_n} \|A\varphi\|, \quad \|\varphi\| = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4.7)$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\mu_{n+m+1}(A + B) \leq \mu_{n+1}(A) + \mu_{m+1}(B), \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4.8)$$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα πολύ βασικό θεώρημα το οποίο αφορά την επιλυσιμότητα μιας εξίσωσης πρώτου είδους υπό κάποιες προϋποθέσεις το οποίο λέγεται θεώρημα του Picard.

Θεώρημα 4.19 (Picard) Έστω $A : X \rightarrow Y$ ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής με ιδιάζων σχήμα (μ_n, φ_n, g_n) . Η συνάρτηση πρώτου είδους

$$A\varphi = f \quad (4.4.9)$$

είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η f ανήκει στο σύνολο $N(A^*)^\perp$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(f, g_n)|^2 \varphi_n < \infty \quad (4.4.10)$$

Σε αυτή τη περίπτωση η λύση είναι της μορφής

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f, g_n) \varphi_n \quad (4.4.11)$$

Απόδειξη Από προηγούμενο θεώρημα γνωρίζουμε ότι για έναν συμπαγή γραμμικό τελεστή A ισχύει $N(A^*)^\perp = \overline{A(X)}$. Αφού η $f \in \overline{A(X)}$ τότε $f \in N(A^*)^\perp$. Αν η φ είναι λύση της εξίσωσης πρώτου είδους τότε έχουμε

$$\mu_n(\varphi, \varphi_n) = (\varphi, A^* g_n) = (A\varphi, g_n) = (f, g_n)$$

Από τη σχέση (4.4.4) προκύπτει η σχέση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(f, g_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 \leq \|\varphi\|^2$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση (4.4.10). Αντιστρόφως, έστω ότι $f \perp N(A^*)$ και ικανοποιείται η σχέση (4.4.10). Από την τελευταία σχέση προκύπτει από προηγούμενα θεωρήματα ότι η σύγκλιση της σειράς (4.4.10) στο \mathbb{R} υποδηλώνει τη σύγκλιση της σχέσης (4.4.11) στον χώρο Hilbert X . Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον τελεστή A στην σχέση (4.4.11) χρησιμοποιώντας την (4.4.2) με ιδιάζων σύστημα (μ_n, g_n, φ_n) του τελεστή A^* και λαμβάνοντας υπόψιν

$$\text{ότι } f \in N(A^*)^\perp \text{ προκύπτει ότι } A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (f, g_n) g_n = f$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι το θεώρημα Picard η ασθενής τοποθέτηση μιας εξίσωσης πρώτου είδους με έναν συμπαγή τελεστή προκύπτει από το γεγονός ότι $\mu_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Αυτό σημαίνει

ότι πρέπει να ομαλοποιήσουμε την εξίσωση μειώνοντας την επιρροή του κλάσματος $\frac{1}{\mu_n}$ στην λύση της εξίσωσης.

Θεώρημα 4.20 Έστω $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας συμπαγής, "1-1", γραμμικός τελεστής με ιδιάζων σύστημα (μ_n, φ_n, g_n) , $n \in \mathbb{N}$ και έστω $q : (0, \infty) \times (0, \|A\|] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει μια θετική σταθερά $c(\alpha)$ με

$$|q(\alpha, \mu)| \leq c(\alpha)\mu, \quad 0 < \mu \leq \|A\| \quad (4.4.12)$$

και

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} q(\alpha, \mu) = 1, \quad 0 < \mu \leq \|A\| \quad (4.4.13)$$

Τότε οι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές $R_\alpha : Y \rightarrow X$, $\alpha > 0$, ορίζεται από τη σχέση

$$R_\alpha f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} q(\alpha, \mu_n) (f, g_n) \varphi_n, \quad f \in Y \quad (4.4.14)$$

και περιγράφει ένα σχήμα ομαλοποίησης το οποίο φράζεται

$$\|R_\alpha\| \leq c(\alpha) \quad (4.4.15)$$

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε κάποιες κλασσικά σχήματα ομαλοποίησης επιλέγοντας κατάλληλα την συνάρτηση q .

Θεώρημα 4.21 Έστω $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής. Τότε για κάθε $\alpha > 0$ ο τελεστής $\alpha I + A^*A : X \rightarrow X$ έχει φραγμένο αντίστροφο. Επίσης, αν ο τελεστής A είναι "1-1" τότε

$$R_\alpha := (\alpha I + A^*A)^{-1} A^*$$

περιγράφει ένα σχήμα ομαλοποίησης με $\|R_\alpha\| \leq 1/2\sqrt{\alpha}$

Το παραπάνω θεώρημα που περιγράφει ομαλοποίηση λέγεται **ομαλοποίηση Tikhonov**.

Θεώρημα 4.22 Έστω $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας ένα προς ένα, συμπαγής γραμμικός τελεστής με ιδιάζων σύστημα (μ_n, φ_n, g_n) , $n \in \mathbb{N}$. Τότε το φάσμα δίνεται από τη σχέση:

$$R_m f := \sum_{\mu_n \geq \mu_m} \frac{1}{\mu_n} (f, g_n) \varphi_n \quad (4.4.16)$$

το οποίο περιγράφει ένα σχήμα ομαλοποίησης με $\|R_m\| = \frac{1}{\mu_m}$. Με m συμβολίζουμε των όρων του αθροίσματος. Η ακρίβεια της προσέγγισης απαιτεί ο αριθμός αυτός να είναι μεγάλος και η σταθερότητα απαιτεί ο αριθμός να είναι μικρός.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με μια άλλη ομαλοποίηση την ομαλοποίηση **Tikhonov**.

Θεώρημα 4.23 Έστω $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής και έστω $\alpha > 0$. Τότε για κάθε $f \in Y$ υπάρχει μια μοναδική $\varphi_\alpha \in X$ τέτοιο ώστε

$$\|A\varphi_\alpha - f\|^2 + \alpha\|\varphi_\alpha\|^2 = \inf_{\varphi \in X} \{\|A\varphi - f\|^2 + \alpha\|\varphi\|^2\} \quad (4.4.17)$$

Η ελάχιστη τιμή φ_α δίνεται από τη μοναδική τιμή της εξίσωσης

$$\alpha\varphi_\alpha + A^*A\varphi_\alpha = A^*f \quad (4.4.18)$$

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας την εξίσωση

$$\|A\varphi - f\|^2 + \alpha\|\varphi\|^2 = \|A\varphi_\alpha - f\|^2 + \alpha\|\varphi_\alpha\|^2$$

$$+ 2\operatorname{Re}(\varphi - \varphi_\alpha, \alpha\varphi_\alpha + A^*(A\varphi_\alpha - f)) + \|A(\varphi - \varphi_\alpha)\|^2 + \alpha\|\varphi - \varphi_\alpha\|^2$$

η οποία ισχύει για κάθε $\varphi \in X$, τότε συμπεραίνουμε ότι η σχέση (4.4.18) είναι απαραίτητη για την φ_α να ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό Tikhonov το οποίο ορίζεται από τη σχέση (4.4.17). Στη συνέχεια θεωρούμε έναν τελεστή $T : X \rightarrow X$ ο οποίος ορίζεται στη μορφή $T := \alpha I + A^*A$. Αφού

$$\alpha\|\varphi\|^2 \leq \alpha\|\varphi\|^2 + \|A\varphi\|^2 = \operatorname{Re}(T\varphi, \varphi), \quad \varphi \in X \quad (4.4.19)$$

ο τελεστής αυτός είναι συνεκτικός και από το θεώρημα Lax-Milgram έχει φραγμένο αντίστροφο.

Ορισμός 4.24 Μια ακολουθία (φ_n) η οποία ανήκει σε έναν χώρο Hilbert X ονομάζεται **ασθενώς συγκλίνουσα** σε ένα στοιχείο $\varphi \in X$ να ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\psi, \varphi_n) = (\psi, \varphi)$$

για όλα τα $\psi \in X$.

Παρατήρηση Σημειώνουμε ότι η norm-σύγκλιση πάντα υποδηλώνει ασθενής σύγκλιση, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει.

Θεώρημα 4.25 Μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert είναι φραγμένη.

Απόδειξη Έστω (φ_n) είναι μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία. Στη συνέχεια ορίζουμε μια ακολουθία φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών $F_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ η οποία ορίζεται από τον τύπο $F_n(\psi) := (\psi, \varphi_n)$. Επομένως από την αρχή του ομοιόμορφου φράγματος, η F_n είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Άρα ισχύει $\|\varphi_n\|^2 = F_n(\varphi_n) \leq \|F_n\| \cdot \|\varphi_n\| \leq C\|\varphi_n\|$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\|\varphi_n\| \leq C$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 4.26 Κάθε φραγμένη ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert περιέχει μια ασθενής συγκλίνουσα υπακολουθία.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε αντί να λύσουμε την εξίσωση $A\varphi = f$, να ελαχιστοποιήσουμε το υπόλοιπο.

Ορισμός 4.27 Έστω $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας φραγμένος, ένα προς ένα, γραμμικός τελεστής και $\rho > 0$. Για δοσμένη $f \in Y$, ένα στοιχείο $\varphi_0 \in X$ ονομάζεται **quasi-λύση** της εξίσωσης $A\varphi = f$ με περιορισμό ρ αν $\|\varphi_0\| \leq \rho$ και

$$\|A\varphi_0 - f\| = \inf_{\|\varphi\| \leq \rho} \|A\varphi - f\|$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι φ_0 είναι **quasi-λύση** της εξίσωσης $A\varphi = f$ αν και μόνο αν $A\varphi_0$ είναι η καλύτερη προσέγγιση της f ως προς το σύνολο $V := A(B[0, \rho])$. Η ιδιότητα του ένα προς ένα στον τελεστή A είναι απαραίτητο για την μοναδικότητα της *quasi-λύσης* το οποίο διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.28 Έστω $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας φραγμένος, ένα προς ένα γραμμικός τελεστής με πυκνό σύνολο και έστω $\rho > 0$. Τότε για κάθε $f \in Y$ υπάρχει μια μοναδική *quasi-λύση* της $A\varphi = f$ με περιορισμό ρ .

Στη συνέχεια ένας τρόπος εύρεσης λύσης είναι να ελαχιστοποιήσουμε το υπόλοιπο $\|A\varphi - f\|$ σε σχέση με το σφάλμα στην f . Δηλαδή ψάχνουμε για στοιχεία φ που ικανοποιούν την συνθήκη $\|A\varphi - f\| \leq \delta$ και σταθεροποιείται κάνοντας τη νόρμα $\|\varphi\|$ μικρή.

Ορισμός 4.29 Έστω $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας φραγμένος, γραμμικός τελεστής και έστω $\delta > 0$. Για μια δοσμένη συνάρτηση $f \in Y$ ένα στοιχείο $\varphi_0 \in X$ ονομάζεται **ελάχιστη ως προς τη νόρμα** λύση της εξίσωσης $A\varphi = f$ με απόκλιση δ αν $\|A\varphi_0 - f\| \leq \delta$ και

$$\|\varphi_0\| = \inf_{\|A\varphi - f\| \leq \delta} \|\varphi\|$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι η φ_0 είναι ελάχιστη λύση ως προς τη νόρμα της $A\varphi = f$ με απόκλιση δ αν και μόνο αν η φ_0 είναι η βέλτιστη προσέγγιση στο μηδενικό στοιχείο του χώρου X ως προς το σύνολο $U_f := \{\varphi \in X : \|A\varphi - f\| \leq \delta\}$. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε το επόμενο θεώρημα μόνο στην περίπτωση των πυκνών συνόλων.

Θεώρημα 4.30 Έστω $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής με πυκνό σύνολο και $\delta > 0$. Τότε για κάθε $f \in Y$ υπάρχει μοναδική ελάχιστη λύση ως προς τη νόρμα της εξίσωσης $A\varphi = f$ με απόκλιση δ .

Κεφάλαιο 5

Μη καλά τοποθετημένα προβλήματα στη Θεωρία Δυναμικού

5.1 Χρήση Ομαλοποίησης Tikhonov σε μη καλά Τοποθετημένα Προβλήματα πρώτου είδους

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε την χρήση των μη-καλά τοποθετημένων εξισώσεων πρώτου είδους στην επίλυση φραγμένων προβλημάτων με δυναμικό. Αρχικά θεωρούμε ένα φραγμένο σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$ με συνεκτικό φράγμα τάξης C^2 .

Αρχικά θεωρούμε το πρόβλημα Dirichlet με λύση $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ της εξίσωσης Laplace

$$\Delta u = 0 \quad D \quad (5.1.1)$$

με συνοριακή συνθήκη

$$u = f \quad \text{στον χώρο } \partial D \quad (5.1.2)$$

με f μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση. Επιλέγουμε μια κλειστή καμπύλη D τάξης C^2 , η οποία περιέχεται στο εσωτερικό της Γ και

ν το διάνυσμα που βρίσκεται στην καμπύλη D και έχει φορά προς τα έξω. Η λύση του προβλήματος Dirichlet που ψάχνουμε έχει τη μορφή διπλού δυναμικού και γράφεται

$$u(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x, y)} ds(y), \quad x \in \bar{D} \quad (5.1.3)$$

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace γράφεται στη μορφή

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad x \neq y$$

η οποία βρίσκεται στον \mathbb{R}^2 και $\varphi \in L^2(\Gamma)$ είναι μια άγνωστη ποσότητα. Η αρμονική συνάρτηση u επιλύει το πρόβλημα Dirichlet και φ είναι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης πρώτου είδους:

$$\int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = f(x), \quad x \in \partial D. \quad (5.1.4)$$

Στη συνέχεια εισάγουμε τον τελεστή $A : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ στη μορφή

$$A\varphi(x) := \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \partial D \quad (5.1.5)$$

Άρα μπορούμε να ξαναγράψουμε τη τελευταία σχέση στη μορφή $A\varphi = f$. Αφού ο τελεστής A έχει συνεχή πυρήνα και είναι συμπαγής, τότε η εξίσωση $A\varphi = f$ είναι μη καλά τοποθετημένη.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε κάποια θεωρήματα που αφορούν τελεστές της μορφής (5.1.5).

Θεώρημα 5.1 Ο συμπαγής τελεστής $A : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\partial D)$, ο οποίος έχει τη μορφή του τύπου (5.1.5), είναι ένα προς ένα και έχει πυκνό σύνολο τιμών.

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε την ομαλοποίηση Tikhonov, δηλαδή θα προσεγγίσουμε την (5.1.5) με την σχέση

$$\alpha\varphi_\alpha + A^*A\varphi_\alpha = A^*f \quad (5.1.6)$$

με παράμετρο ομαλοποίησης α . Πρέπει να σημειώσουμε ότι η φ_α που ικανοποιεί τη παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι $\varphi_\alpha \in C(\Gamma)$ επειδή για τον τελεστή A^* ισχύει $A^* : L^2(\partial D) \rightarrow C(\Gamma)$. Στην περίπτωση της ομαλοποίησης Tikhonov έχουμε σύγκλιση της φ_α η οποία είναι λύση της (5.1.6) καθώς $\alpha \rightarrow 0$ μόνο όταν η εξίσωση (5.1.4) έχει λύση.

Παρατήρηση Έστω ότι $\varphi_\alpha \rightarrow \varphi \in L^2(\Gamma)$ για $\alpha \rightarrow 0$. Τότε αφού A και A^* είναι συνεχείς, τότε συνεπάγεται ότι $A^*(A\varphi - f) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $A\varphi = f$ διότι A^* είναι ένα προς ένα. Στην περίπτωση μας, για να βρούμε μια προσεγγιστική λύση στο συνοριακό πρόβλημα με την συνάρτηση

$$u_\alpha(x) := \int_\Gamma \varphi_\alpha(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \bar{D}$$

όπου δεν μας είναι χρήσιμη η σύγκλιση της φ_α . Στην πραγματικότητα χρειαζόμαστε σύγκλιση $A\varphi_\alpha \rightarrow f$ καθώς $\alpha \rightarrow 0$ στο ∂D η οποία ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη προσεγγιστικά. Συνεπώς αφού το πρόβλημα Dirichlet είναι καλά τοποθετημένο, οι διαφορές $u_\alpha - f$ στο σύνορο δίνουν μικρές διαφορές $u_\alpha - u$ στη λύση σε όλο το D .

Πρόταση 5.2 Για κάθε συμπαγές σύνολο $W \subset D$ υπάρχει μια σταθερά $C(D, W)$ τέτοια ώστε

$$\|u\|_{C(W)} \leq \|u\|_{L^2(\partial D)}$$

για όλες τις αρμονικές συναρτήσεις $u \in C(D)$.

Απόδειξη Αρχικά ορίζουμε τον τελεστή με διπλό δυναμικό $V : C(\partial D) \rightarrow C(D)$ με

$$(V\psi)(x) := \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in D$$

Τότε από γνωστό θεώρημα προκύπτει

$$u = -2V(I - K)^{-1}u|_{\partial D}$$

με ολοκληρωτικό τελεστή K για το σύνορο ∂D . Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz υπάρχει μια σταθερά c η οποία εξαρτάται από το D και το W τέτοια ώστε

$$\|V\psi\|_{C(W)} \leq c\|\psi\|_{L^2(\partial D)}$$

για όλα τα $\psi \in C(\partial D)$.

Αφού ο K έχει συνεχή πυρήνα προκύπτει ότι ο $(I - K)^{-1}$ είναι φραγμένος ως προς την L^2 -νόρμα.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την σύγκλιση στο φράγμα για ένα προς ένα συμπαγείς τελεστές με πυκνό σύνολο τιμών.

Θεώρημα 5.3 Για την μοναδική λύση φ_α της σχέσης (5.1.6), έχουμε τη σύγκλιση $\|A\varphi_\alpha - f\| \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$.

Θεώρημα 5.4 Έστω ότι $f \in A(L^2(\Gamma))$. Τότε $\|A\varphi_\alpha - f\| = o(\sqrt{\alpha})$, $\alpha \rightarrow 0$.

Απόδειξη Αρχικά γράφουμε $A\varphi = f$ και από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι $\varphi_\alpha \rightarrow \varphi$, $\alpha \rightarrow 0$. Επομένως έχουμε

$$\|A\varphi_\alpha - f\|^2 = (\varphi_\alpha - \varphi, A^*[A\varphi_\alpha - f]) = \alpha(\varphi - \varphi_\alpha, \varphi_\alpha)$$

το οποίο υποδηλώνει ότι $\|A\varphi_\alpha - f\|^2 = o(\alpha)$.

Θεώρημα 5.5 Η συνθήκη $f \in AA^*(L^2(\partial D))$ είναι απαραίτητη και αναγκαία συνθήκη για την σχέση $\|A\varphi_\alpha - f\| = O(\alpha)$, $\alpha \rightarrow 0$.

Απόδειξη Έστω (μ_n, φ_n, g_n) , $n = 1, 2, \dots$ είναι ένα ιδιάζων σύστημα για τον τελεστή A . Αφού ο τελεστής A^* είναι ένα προς ένα, από προηγούμενο θεώρημα το σύνολο $g_n : n \in \mathbb{N}$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(\partial D)$ δηλαδή μπορούμε να επεκτείνουμε την f , $f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, g_n)g_n$. Με χρήση του Θεωρήματος (4.20) γράφουμε την φ_α στη μορφή

$$\varphi_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\alpha + \mu_n^2} (f, g_n) \varphi_n$$

Χρησιμοποιώντας τις επεκτάσεις των συναρτήσεων f και φ_α προκύπτει ότι

$$\|A\varphi_\alpha - f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\alpha + \mu_n^2)^2} |(f, g_n)|^2 \quad (5.1.7)$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $f = AA^*g$ για κάποιο $g \in L^2(\partial D)$ και έχουμε

$$(f, g_n) = (AA^*g, g_n) = (g, AA^*g_n) = \mu_n^2 (g, g_n)$$

και από την (5.1.7) συνεπάγεται

$$\|A\varphi_\alpha - f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \mu_n^4}{(\alpha + \mu_n^2)^2} |(g, g_n)|^2 \leq \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(g, g_n)|^2 = \alpha^2 \|g\|^2$$

Αντιστρόφως, θεωρούμε ότι $\|A\varphi_\alpha - f\| = O(\alpha)$, $\alpha \rightarrow 0$. Τότε από τη σχέση (5.1.7) παρατηρούμε ότι υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, g_n)|^2}{(\alpha + \mu_n^2)^2} \leq M$$

για όλα τα $\alpha > 0$. Βάζοντας όριο στην παραπάνω σχέση με $\alpha \rightarrow 0$, προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^4} (f, g_n) g_n \leq M$$

Επομένως ορίζουμε τη g στην παρακάτω μορφή

$$g := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} (f, g_n) g_n$$

η οποία είναι καλά ορισμένη και ισχύει $AA^*g = f$.

5.2 Εφαρμογή

Έστω D είναι ένας μοναδιαίος δίσκος και Γ ένας ομόκεντρος κύκλος με ακτίνα $R > 1$. Ορίζουμε ένα $x \in \partial D$ και το παραμετροποιούμε στη μορφή

$$x(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

και $y \in \Gamma$

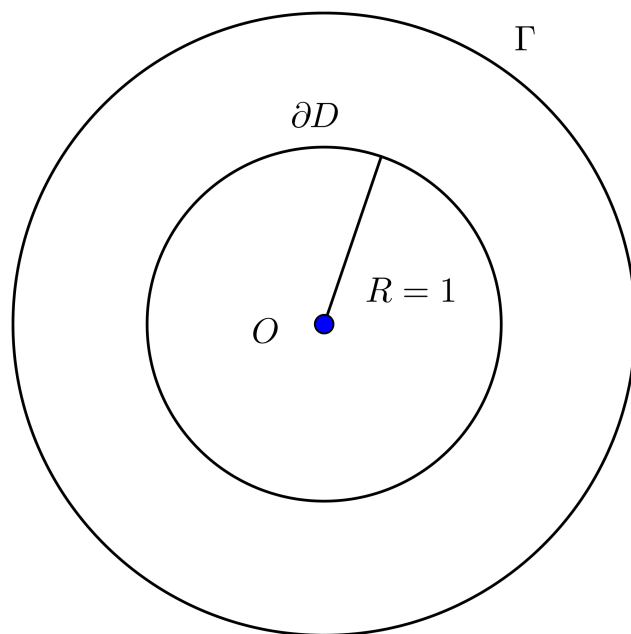
$$y(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Στη συνέχεια ορίζουμε $\psi(t) := \varphi(x(t))$ και $g(t) := f(x(t))$ και γράφουμε την (5.1.4) στη μορφή

$$\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t-\tau) - R}{1 - 2R \cos(t-\tau) + R^2} \psi(\tau) d\tau = g(t) \quad (5.2.1)$$

με $0 \leq t \leq 2\pi$

Οι δίσκοι αυτοί περιγράφονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5.1: Μελέτη του δίσκου D μέσω του δίσκου Γ

Δηλαδή μελετάμε το χωρίο D δημιουργώντας έναν εξωτερικό δίσκο Γ όπου η ακτίνα θα είναι πάντα μεγαλύτερη από τον δίσκο D . Για απεικονίσουμε τα αποτελέσματα μας αριθμητικά θεωρούμε τη συνοριακή συνθήκη

$$f(x) = \ln|x - x_0|, \text{ όπου } x_0 = (q, 0) \text{ με } q > 1$$

Η λύση του φραγμένου συνοριακού προβλήματος επιτρέπει μια αρμονική συνέχεια σε έναν ανοιχτό δίσκο ακτίνας q .

Το σφάλμα $\|A\varphi_\alpha - f\|$ ανάμεσα στην ακριβή λύση και στην ομαλο-

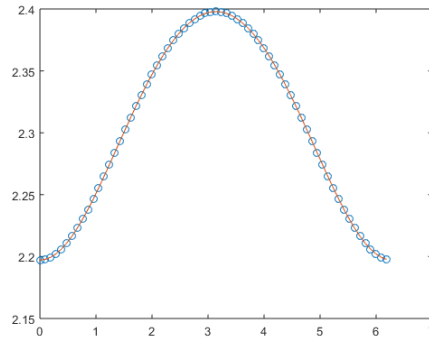
ποίηση Tikhonov, στην οποία χρησιμοποιούμε τραπεζοειδή κανόνα η οποία προσεγγίζεται με τη μέθοδο Nystrom με 32 σημεία.

Επιλέγουμε για ακτίνα του δίσκου Γ να είναι $R = 2$. Η εξάρτηση του σφάλματος από τις παραμέτρους α και q επιβεβαιώνονται από την συμπεριφορά της σύγκλισης η οποία προβλέπεται από τα θεωρητικά μας αποτελέσματα.

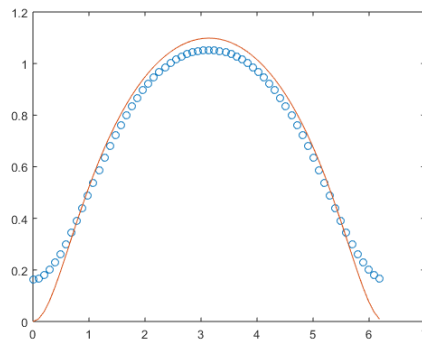
Γράφοντας τον αλγόριθμο προκύπτουν τα σφάλματα για 32 σημεία διαμέρισης τα οποία δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$\log \alpha$	$q = 10$	$q = 4$	$q = 3$	$q = 2$	$q = 1.5$
-5	0.00006	0.00009	0.0001	0.001	0.01
-4	0.00060	0.00091	0.0014	0.006	0.02
-3	0.00642	0.00873	0.01258	0.030	0.08
-2	0.06255	0.07370	0.0955	0.162	0.27

Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις η ακριβή μας λύση είναι η συνεχής αναπαράσταση και τα "κυκλάκια" είναι η προσεγγιστική λύση. Παρατηρούμε η ότι η προσέγγιση μας είναι αρκετά καλή αφού τα "κυκλάκια" που απεικονίζουν την προσέγγιση με την ομαλοποίηση Tikhonov "σχεδόν" ταυτίζονται με τη πραγματική λύση. Παρόμοιες γραφικές προκύπτουν και σε κάθε άλλη περίπτωση λαμβάνοντας υπόψιν και από τον παραπάνω πίνακα ότι η προσέγγιση που απεικονίζουμε είναι η βέλτιστη. Τέλος παρατηρούμε ότι όσο πιο απομακρυσμένο είναι το σημείο που επιλέγουμε για να μελετήσουμε το πρόβλημα τόσο πιο καλή θα βγει η προσέγγιση.



Σχήμα 5.2: Σφάλματα με τη μέθοδο Tikhonov με $q = 10$ και $\alpha = 10^{-5}$



Σχήμα 5.3: Σφάλματα με τη μέθοδο Tikhonov με $q = 2$ και $\alpha = 10^{-2}$

Κεφάλαιο 6

Υπολογιστικές Εφαρμογές για Αστεροειδή Χωρία

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε την ομαλοποίηση Tikhonov για την μελέτη προβλημάτων Dirichlet σε αστεροειδή χωρία.

6.1 Πρόβλημα 1

Αρχικά θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση όπου το D είναι ο μοναδιαίος δίσκος και το χωρίο Γ είναι τυχαίο.

Για το σύνορο του D , ∂D η παραμετροποίηση είναι η εξής:

$$x(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

και για το χωρίο Γ έχουμε:

$$y(t) = (R(t)\cos t, R(t)\sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

με $R(t) = 2 + 0.1\cos t$

Το σχήμα περιγράφει έναν μοναδιαίο κύκλο ακτίνας $r = 1$ ο οποίος περικλείεται από ένα τυχαίο χωρίο, όπου το σύνορο του δεν συμπίπτει με το σύνορο του μοναδιαίου κύκλου. Αυτό που θα κάνουμε είναι ότι θα μελετήσουμε τον μοναδιαίο κύκλο μέσω του τυχαίου

χωρίου χρησιμοποιώντας μια συνοριακή συνθήκη η οποία αλλάζει μέσω του αρχικού σημείου x_0 . Επίσης χρησιμοποιούμε την συνοριακή συνθήκη

$$f(x) = \ln|x - x_0|, \text{ όπου } x_0 = (q, 0) \text{ με } q > 1$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ότι ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1.4) θα έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} = \frac{\hat{n}(y)(x - y)}{2\pi|x - y|^2} =$$

$$\frac{1}{y'(t)} \cdot \frac{(y_2'(\tau), -y_1'(\tau)) \cdot (x_1(t) - y_1(\tau), x_2(t) - y_2(\tau))}{(x_1(t) - y_1(\tau))^2 + (x_2(t) - y_2(\tau))^2}$$

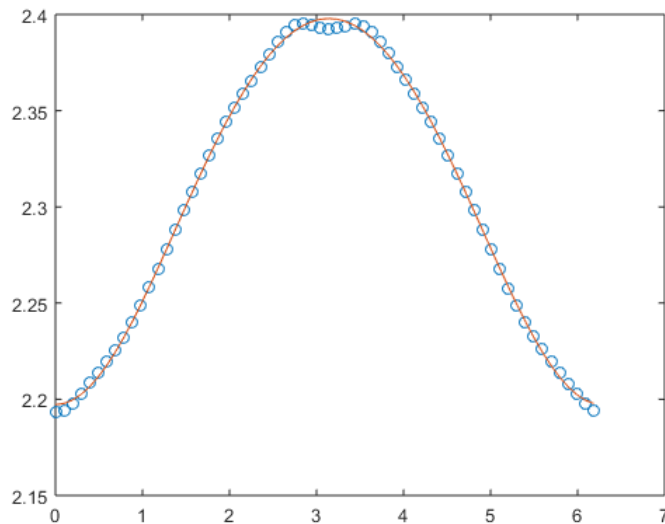
Επίσης $dS_y = |y'(\tau)|d\tau$

Κάνοντας πράξεις και γράφοντας τον αλγόριθμο σε Matlab προκύπτει ο πίνακας σφαλμάτων $\|A\varphi_\alpha - f\|$:

$\log \alpha$	$q = 10$	$q = 4$	$q = 3$
-5	0.0019	0.0024	0.0041
-4	0.0075	0.0079	0.0128
-3	0.0317	0.0283	0.0402
-2	0.1242	0.0897	0.1057

Το q θα είναι πάντα μεγαλύτερο από δύο διότι έχουμε ιδιόμορφια στον μοναδιαίο κύκλο. Στην συνέχεια βλέπουμε μέσω γραφικής παράστασης, όπου η συνεχής γραφική παράσταση είναι η ακριβή λύση

του προβλήματος, τα σφάλματα που προκύπτουν από τη μέθοδο που ακολουθήσαμε.



Σχήμα 6.1: Σφάλματα με τη μέθοδο Tikhonov για 32 σημεία

Παρατηρώ ότι για 32 σημεία το σφάλμα είναι αρκετά καλό και παρατηρούμε ότι όσο πιο μεγάλο είναι το q τόσο πιο καλύτερη είναι η προσέγγιση μας.

6.2 Πρόβλημα 2

Σε αυτό το πρόβλημα μελετάμε ένα τυχαίο χωρίο D μέσω ενός δίσκου ακτίνας $R = 2$. Παραμετροποιούμε το χωρίο D ως εξής:

$$x(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

με $r(t) = 1 + 0.1\sin(t)$

και το χωρίο Γ παραμετροποιείται ως εξής:

$$y(\tau) = (R\cos(\tau), R\sin(\tau)) \quad R = 2$$

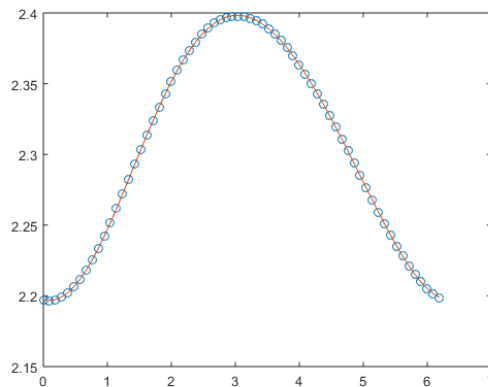
Δουλεύουμε παρομοίως όπως στο προηγούμενο πρόβλημα και προκύπτει ο πυρήνας της ολοκληρωτικής:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{r(t) \cdot R \cos(\tau) \cos(t) - R^2 + R \cdot r(t) \cdot \sin \tau \cdot \sin(t)}{(r(t) \cos(t) - R \cos(\tau))^2 + (r(t) \sin(t) - R \sin \tau)^2}$$

και επιλύοντας τη σχέση (5.1.4) με τη μέθοδο Tikhonov προκύπτουν τα παρακάτω σφάλματα:

$\log \alpha$	$q = 10$	$q = 4$	$q = 3$	$q = 2$	$q = 1.5$
-5	$5.88 \cdot 10^{-5}$	$3.93 \cdot 10^{-4}$	$4.72 \cdot 10^{-4}$	0.0019	0.0111
-4	0.0037	0.0025	0.0028	0.0770	0.0288
-3	0.0218	0.0145	0.0156	0.0319	0.0801
-2	0.1096	0.0738	0.0761	0.1238	0.2299

Στο $q = 1$ απειρίζεται διότι το αρχικό σημείο συμπίπτει ή πέφτει μέσα στο εσωτερικό D .

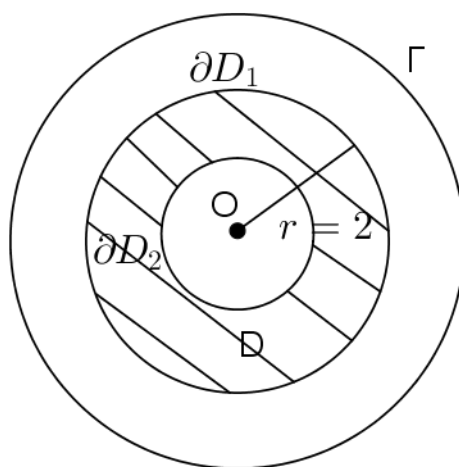


Σχήμα 6.2: Σφάλματα με τη μέθοδο Tikhonov

Με τη συνεχή γραμμή αναπαρίσταται η ακριβής λύση και με τους κύκλους η προσεγγιστική λύση η οποία παρατηρούμε είναι αρκετά κοντά με την ακριβής λύση.

6.3 Διπλά Συνεκτικά Χωρία

Σε αυτή τη παράγραφο θα ασχοληθούμε με την μελέτη ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας $r = 2$ ο οποίος έχει κενό σε τυχαίο σχήμα. Η μελέτη αυτή γίνεται μέσω κυκλικού δίσκου ακτίνας $R = 3$.



Σχήμα 6.3: Μελέτη σκιαγραφημένου κομματιού D με κενό στη μέση

Στη συνέχεια πρέπει να παραμετροποιήσω τα χωρία D_1 και D_2 . Η παραμετροποίηση για το δίσκο D_1 είναι:

$$x_1(t) = (2\cos t, 2\sin t)$$

και για το χωρίο D_2 είναι:

$$x_2(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$$

με $r(t) = 1 + 0.1\sin t$

Για το σύνορο του χωρίου D_1 έχουμε:

$$\partial D_1 : D\varphi(x) = f_1(x)$$

με

$$f_1(x) = \log|x_1 - x_0|$$

Αντίστοιχα για το σύνορο του χωρίου D_2 έχουμε:

$$\partial D_2 : D\varphi(x) = f_2(x)$$

με

$$f_2(x) = \log|x_2 - x_0|$$

Επειδή έχουμε 2 χωρία που μελετάμε θα χωρίσουμε τον πυρήνα σε 2 επιμέρους, έναν για το χωρίο D_1 και έναν για το χωρίο D_2 . Ο πυρήνας του χωρίου D_1 έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial\Phi(x_1, y)}{\partial\nu(y)} = \frac{\hat{n}(y)(x_1 - y)}{2\pi|x_1 - y|^2}$$

με $n(y) = (y'_2(t), -y'_1(t))$ και $y(\tau) = (3\cos\tau, 3\sin\tau)$ Σημειώνουμε ότι με $y(\tau)$ ορίζουμε την παραμετροποίηση της καμπύλης Γ .

Κάνοντας πράξεις ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης για το χωρίο D_1 είναι ο εξής:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{6\cos\tau\cos\tau + 6\sin\tau\sin\tau - 9}{(2\cos\tau - 3\cos\tau)^2 + (2\sin\tau - 3\sin\tau)^2}$$

Για το χωρίο D_2 έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial\Phi(x_2, y)}{\partial\nu(y)} = \frac{\hat{n}(y)(x_2 - y)}{2\pi|x_2 - y|^2}$$

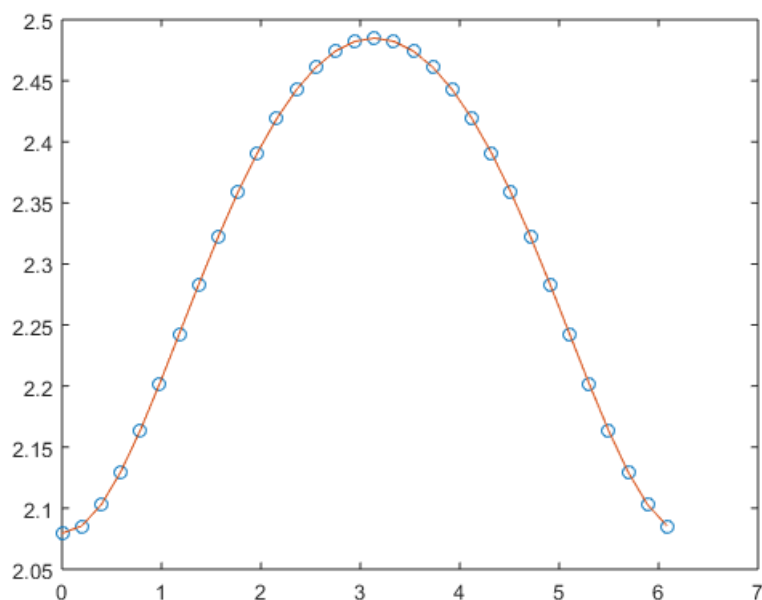
με $x_2(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$, $r(t) = 1 + 0.1\sin t$ και $y(\tau) = (3\cos\tau, 3\sin\tau)$

Κάνοντας πράξεις ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης για το χωρίο D_2 είναι ο εξής:

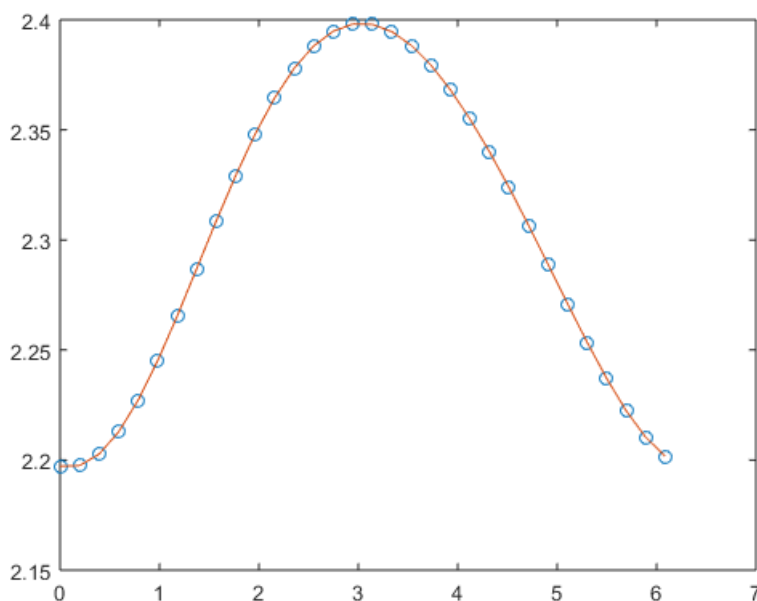
$$\frac{3r(t)\cos\tau\cos t + 3r(t)\sin\tau\sin t - 9}{2\pi\{(r(t)\cos t - 3\cos\tau)^2 + (r(t)\sin t - 3\sin\tau)^2\}}$$

Γράφοντας τον αλγόριθμό σε Matlab προκύπτουν τα σφάλματα που γράφονται στον παρακάτω πίνακα:

$\log\alpha$	$q = 10$	$q = 4$	$q = 3$	$q = 2$	$q = 1.5$
-5	$1.21 \cdot 10^{-4}$	$6.07 \cdot 10^{-4}$	0.0021	-	0.05
-4	0.012	0.0038	0.0092	-	0.0965
-3	0.017	0.0259	0.0456	-	0.2055
-2	0.1041	0.16	0.2397	-	0.5302



Σχήμα 6.4: Σφάλματα με τη μέθοδο Tikhonov για το χωρίο D_1



Σχήμα 6.5: Σφάλματα με τη μέθοδο Tikhonov για το χωρίο D_2

Τα παραπάνω σχήματα περιγράφει τη συμπεριφορά των δύο λύσεων η οποία είναι παρόμοια και στις δύο περιπτώσεις. Η συνεχής γραφική παράσταση είναι η ακριβής λύση ενώ η γραφική παράσταση με τις τελείες είναι η προσεγγιστική. Το σφάλμα παρατηρούμε μέσω των γραφικών παραστάσεων είναι αρκετά μικρό πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η μέθοδος Tikhonov με χρήση *Nijstrom* είναι αρκετά καλή για την μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος.

Σημείωση Για την επίλυση του προβλήματος χρειάστηκε να βρούμε 2 πυρήνες αφού είχαμε δύο χωρία μέσω ενός κυκλικού δίσκου Γ ακτίνας τρία. Ο αριθμός της ακτίνας που χρησιμοποιήσαμε είναι ενδεικτικός, θα μπορούσαμε άλλωστε να πάρουμε ακτίνα πάντα μεγαλύτερη από 2. Επίσης να σημειώσουμε ότι στον παραπάνω πίνακα στη στήλη όπου $q = 2$ έχουμε κενό. Αυτό συμβαίνει διότι το αρχικό σημείο πέφτει πάνω στο σύνορο του χωρίου D_1 .

6.4 Τυχαίο Εσωτερικό Χωρίο

Σε αυτή τη παράγραφο θα ασχοληθούμε με το τυχαίο εσωτερικό χωρίο D το οποίο έχει παραμετροποίηση:

$$x(t) := (\cos t + 0.65\cos 2t - 0.65, 1.5\sin t)$$

Η μελέτη του χωρίου αυτού θα γίνει μέσω του κυκλικού δίσκου Γ το οποίο έχει παραμετροποίηση:

$$y(\tau) := (R\cos\tau, R\sin\tau), \quad R = 2$$

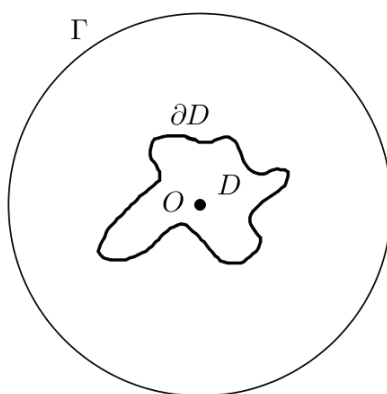
Η ολοκληρωτική εξίσωση έχει τη μορφή:

$$\int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = f(x), \quad x \in D$$

Η συνάρτηση $f(x)$ έχει τη μορφή:

$$f(x) := \log \sqrt{|x - x_0|}, \quad x_0 = (q, 0)$$

Το σχήμα του χωρίου που μελετάμε έχει τη μορφή:



Σχήμα 6.6: Μελέτη τυχαίου χωρίου D

Κάνοντας πράξεις ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} = \frac{n(y)(\hat{x} - y)}{2\pi|x - y|^2}$$

με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα:

$$n(y) = (y_2'(\tau), -y_1'(\tau))$$

με $0 \leq t, \tau \leq 2\pi$

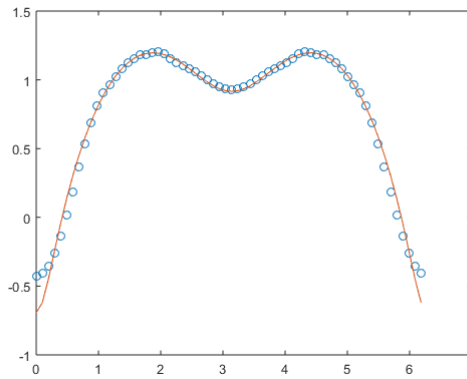
Επιλύοντας τον αλγόριθμό μέσω Matlab προκύπτουν τα σφάλματα:

$\log \alpha$	$q = 10$	$q = 4$	$q = 3$	$q = 2$	$q = 1.5$
-5	0.0019	0.0023	0.0039	0.0118	0.0353
-4	0.0079	0.0043	0.005	0.0175	0.0556
-3	0.021	0.0101	0.0095	0.0330	0.0940
-2	0.043	0.0194	0.0219	0.0707	0.1679

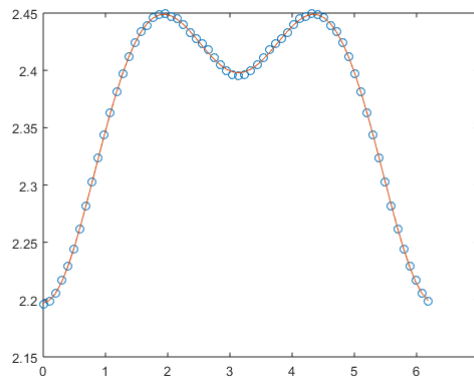
Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι όσο πιο κοντά βρίσκεται το αρχικό σημείο στο χωριο D τόσο πιο πολύ το σφάλμα μεγαλώνει.

Γενικό Συμπέρασμα Το συμπέρασμα αυτό φαίνεται και από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αλλάζοντας το q και την παράμετρο ομαλοποίησης α . Μεγαλώνοντας τις 2 αυτές παραμέτρους το σφάλμα μικραίνει όλο και πιο πολύ. Αυτό συμβαίνει διότι όσο πιο μακριά βρίσκεται το αρχικό σημείο q τόσο μακριά από το μηδέν είναι η συνοριακή συνθήκη f . Συνεπώς η προσέγγιση θα είναι καλύτερη.

Η γραφική παράσταση των σφαλμάτων είναι η εξής:



Σχήμα 6.7: Σφάλματα με τη μέθοδο Tikhonov για τυχαίο χωρίο D με $q = 1.5$ και $\alpha = -2$



Σχήμα 6.8: Σφάλματα με τη μέθοδο Tikhonov για τυχαίο χωρίο D με $q = 10$ και $\alpha = -5$

Βιβλιογραφία

- [1] 'Linear Integral Equation Σύγγραμμα, Rainer Kress Second Edition
- [2] "Numerical Analysis", Rainer Kress, Springer (1998)
- [3] Non-Destructive Techniques Bases on Eddy Current Testing, paper, Javier Garcia-Martin, Jaime Gomez-Gil and Ernesto Vasquez-SAnchez
- [4] "Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών", Σύγγραμμα, William E. Boyce and Richard C.Diprima, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π.
- [5] "Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές' Σύγγραμμα, Σωτήριος Καρανάσιος , 2009