ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία

Διπλωματική Εργασία
του
Νικολάου Λιάτσου

Επιβλέπων: Νικόλαος Ήργες
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2017

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι μία εισαγωγική παρουσίαση του αντικειμένου της υπερσυμμετρίας, η οποία αποτελεί μία συμμετρία που συνδέει μποζονικούς και φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας. Αρχικά, αναφέρουμε ονομαστικά μερικούς από τους λόγους που καθιστούν ενδιαφέρουσες τις υπερσυμμετρικές θεωρίες για τους σύγχρονους θεωρητικούς φυσικούς στοιχειωδών σωματιδίων. Στη συνέχεια, εισάγουμε το φορμαλισμό των σπινόρων Weyl δύο συνιστωσών για τα φερμιονικά πεδία, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα εργασία. Έπειτα, εξάγουμε την άλγεβρα της υπερσυμμετρίας και μελετούμε άμαζες και μαζικές αναπαραστάσεις της. Κατόπιν, παρουσιάζουμε μία απλή υπερσυμμετρική θεωρία πεδίου, το ελεύθερο και άμαζο μοντέλο των Wess και Zumino και αναδεικνύουμε την υλοποίηση της άλγεβρας της υπερσυμμετρίας στα πλαίσια της θεωρίας αυτής. Ύστερα, παράγουμε τη γενική μορφή της Lagrangian για μία επανακανονικοποιήσιμη υπερσυμμετρική θεωρία αλληλεπιδρωσών chiral supermultiplets. Ακολούθως, αναπτύσσουμε τις έννοιες του υπερχώρου και των υπερπεδίων και βασιζόμενοι σε αυτές, ανακατασκευάζουμε την υπερσυμμετρική Lagrangian για ένα σύστημα αλληλεπιδρωσών chiral supermultiplets και κατασκευάζουμε τη Lagrangian για μία γενική υπερσυμμετρική Αβελιανή ($U(1)$) θεωρία βαθμίδας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι συμμετρίες, ή αναλλοιώτητες, παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη Θεωρητική Φυσική, αφού παρέχουν έναν απλό και συνεπή τρόπο κατασκευής Lagrangians από τις οποίες μπορούν να εξαχθούν οι εξισώσεις κίνησης για τα πεδία που μας ενδιαφέρουν. Γνωστά παραδείγματα συμμετριών είναι η αναλλοιώτητα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και μετατοπίσεις στο χωροχρόνο και η αναλλοιώτητα κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Η υπερσυμμετρία διαφέρει από όλες τις προαναφερθείσες συμμετρίες στο ότι συνίσταται στην αναλλοιώτητα κάτω από μετασχηματισμούς που μετατρέπουν μποζονικές καταστάσεις σε φερμιονικές και το αντίστροφο.

Η υπερσυμμετρία συνδυάζει φερμιόνια και μποζόνια σε αναπαραστάσεις, γνωστές ως supermultiplets. Όλα τα σωματίδια που ανήκουν σε μία supermultiplet έχουν την ίδια μάζα και τους ίδιους εσωτερικούς κβαντικούς αριθμούς, όπως το ηλεκτρικό φορτίο και το φορτίο χρώματος, το ισοσπίν, ο λεπτονικός αριθμός κ.ά. Επομένως, εάν η υπερσυμμετρία εκδηλωνόταν στη φύση, τότε για κάθε φερμιόνιο (αντίστοιχα μποζόνιο), θα υπήρχε ένα υπερσυμμετρικός συνοδός (superpartner), δηλαδή ένα μποζόνιο (αντίστοιχα φερμιόνιο) με την ίδια μάζα και τους ίδιους εσωτερικούς κβαντικούς αριθμούς. Ωστόσο, στο γνωστό μέχρι σήμερα σωματιδιακό φάσμα δεν παρατηρείται η ύπαρξη ενός τέτοιου συνοδού για κανένα από τα σωματίδια που έχουν παρατηρηθεί. Επομένως, εάν η υπερσυμμετρία αποτελεί μία εγγενή συμμετρία στη φύση, πρέπει να έχει σπάσει αυθόρμητα, με αποτέλεσμα τη διαφοροποίηση των μαζών των υπερσυμμετρικών συνοδών από τα σωματίδια, στα οποία αντιστοιχούν.

Ωστόσο, υπάρχει έντονο ενδιαφέρον για την υπερσυμμετρία από τους θεωρητικούς φυσικούς στοιχειωδών σωματιδίων. Υπάρχουν αρκετοί λόγοι για τους οποίους συμβαίνει αυτό. Κατ΄ αρχάς, στην υπερσυμμετρία βασίστηκε εν μέρει η διατύπωση της θεωρίας υπερχορδών, η οποία θεωρείται από πολλούς ως ο καλύτερος υποψήφιος για μία «θεωρία των πάντων», η οποία θα ενοποιεί τη βαρύτητα με όλες τις άλλες δυνάμεις στη φύση. Επίσης, η υπερσυμμετρία δύναται να δώσει λύση στο πρόβλημα της ιεραρχίας, δηλαδή στο πρόβλημα του γιατί η ενεργειακή κλίμακα του αυθόρμητου σπασίματος της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας, M_{ew}, που είναι της τάξης των 100 GeV, είναι τόσο πολύ μικρότερη της κλίμακας Planck, M_{Pl}, που είναι της τάξης των 10^{19} GeV. Ακόμη, στα πλαίσια της ελάχιστης υπερσυμμετρικής επέκτασης του Καθιερωμένου Προτύπου, που είναι γνωστή ως Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (MSSM) επιτυγχάνεται η ενοποίηση των τριών σταθερών σύζευξης βαθμίδας σε μία ενεργειακή κλίμακα της τάξεως των 10^{16} GeV, κάτι το οποίο δε συμβαίνει στο Καθιερωμένο Πρότυπο.

Κεφάλαιο 2

Ομάδες Lorentz και Poincaré, Σπίνορες Weyl, Dirac και Majorana

2.1 Η ομάδα Lorentz

Στην ειδική σχετικότητα, οι τρεις χωρικές συντεταγμένες (x, y, z) και ο χρόνος (t) αποτελούν τις τέσσερις συνιστώσες του τετρανύσματος θέσης, το οποίο θα συμβολίζουμε ως x^μ. Θα χρησιμοποιούμε ελληνικούς δείκτες, $\mu, \nu, \lambda, \ldots$, για τις συνιστώσες ενός τετρανύσματος και λατινικούς δείκτες, $i, j, k, \ldots$, για τις χωρικές του συνιστώσες. Στο φυσικό σύστημα μονάδων, όπου $c = \hbar = 1$[1], το οποίο χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία, έχουμε:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \vec{x}) \tag{2.1.1}$$

Η «απόσταση» l^2 μεταξύ δύο σημείων x και y στον επίπεδο χωροχρόνο, ο οποίος είναι γνωστός και ως χώρος Minkowski και συμβολίζεται με M_4, μπορεί να γραφεί συναρτήσει των συντεταγμένων τους ως

$$l^2 = (x^0 - y^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x^i - y^i)^2 \tag{2.1.2}$$

Η l^2 μπορεί να γραφεί σε μία πιο συμπαγή μορφή με τη εισαγωγή του μετρικού τανυστή $\eta_{\mu\nu}$:

$$l^2 = \eta_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu), \tag{2.1.3}$$

όπου οι συνιστώσες του μετρικού τανυστή είναι

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1), \tag{2.1.4}$$

που σημαίνει ότι $\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$ και $\eta_{\mu\nu} = 0$ εάν $\mu \neq \nu$ για κάθε $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Επιπλέον, έχουμε χρησιμοποιήσει τη λεγόμενη σύμβαση άθροισης, σύμφωνα με την οποία υπονοείται άθροιση ως προς οποιοδήποτε δείκτη που εμφανίζεται δύο φορές στον ίδιο όρο. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη μετρική $\eta_{\mu\nu}$ για να κατεβάζουμε τους δείκτες, δηλαδή:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\vec{x}) \tag{2.1.5}$$

Παρομοίως, μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί τον αντίστροφο του πίνακα $\eta_{\mu\nu}$, τον οποίο θα συμβολίζουμε ως $\eta^{\mu\nu}$, για να ανεβάζει τους δείκτες:

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu \tag{2.1.6}$$

όπου

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda \equiv \eta^\mu{}_\lambda \tag{2.1.7}$$

[1] c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό και $\hbar$ η ανηγμένη σταθερά του Planck.

όπου δ^μ_λ είναι το δέλτα του Kronecker, το οποίο ορίζεται ως

$$\delta^\mu_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{αν } \mu = \lambda \\ 0 & \text{αν } \mu \neq \lambda \end{cases} \tag{2.1.8}$$

για κάθε $\mu, \lambda = 0, 1, 2, 3$. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι

$$\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \tag{2.1.9}$$

Ένας μετασχηματισμός Lorentz είναι ένας γραμμικός και ομογενής μετασχηματισμός των συντεταγμένων x^μ:

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.1.10}$$

ο οποίος αφήνει αναλλοίωτη την ποσότητα $x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, που σημαίνει ότι:

$$\begin{aligned} & x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu \Rightarrow \\ \Rightarrow & \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \xRightarrow{(2.1.10)} \\ \Rightarrow & \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \Rightarrow \\ \Rightarrow & \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma = \eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \end{aligned}$$

Επομένως, οι μετασχηματισμοί Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ ικανοποιούν τη σχέση

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \tag{2.1.11}$$

Το σύνολο των μετασχηματισμών Lorentz αποτελεί μία ομάδα Lie, η οποία ονομάζεται ομάδα Lorentz, και την οποία συμβολίζουμε ως $O(1, 3)$.

Από την (2.1.11) έπεται ότι για τους 4×4 πίνακες Λ που αντιστοιχούν σε μετασχηματισμούς Lorentz, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & \eta_{\mu\nu} \left(\Lambda^T\right)_\rho{}^\mu \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left(\Lambda^T\right)_\rho{}^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left(\Lambda^T \eta \Lambda\right)_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \ \forall \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

όπου $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Επομένως

$$\begin{aligned} & \det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det \eta \Rightarrow \\ \Rightarrow & \det(\Lambda^T)(\det \eta)(\det \Lambda) = \det \eta \xRightarrow[\det \eta = -1]{\det \Lambda^T = \det \Lambda} \\ \Rightarrow & (\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \det \Lambda = \pm 1 \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Επίσης, για $\rho = \sigma = 0$, η (2.1.11) δίνει:

$$\begin{aligned} & \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = \eta_{00} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \eta_{00} \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 + \sum_{i=1}^{3} \eta_{ii} \Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow & (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow & (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\Lambda^0{}_0| \geq 1 \Rightarrow \Lambda^0{}_0 \geq 1 \text{ ή } \Lambda^0{}_0 \leq -1 \tag{2.1.14}$$

Από τις (2.1.13) και (2.1.14) έπεται ότι η ομάδα Lorentz αποτελείται από τέσσερις συνιστώσες, τις οποίες ας συμβολίσουμε ως

$$O(1,3)^{\uparrow}_{+}, O(1,3)^{\downarrow}_{+}, O(1,3)^{\uparrow}_{-}, O(1,3)^{\downarrow}_{-}$$

όπου το $\uparrow$ (αντίστοιχα το $\downarrow$) αντιστοιχεί σε $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ (αντίστοιχα $\Lambda^0{}_0 \leq -1$), ενώ το $+$ (αντίστοιχα το $-$) σε $\det\Lambda = +1$ (αντίστοιχα $\det\Lambda = -1$). Οι συνιστώσες αυτές είναι ασύνδετες μεταξύ τους, δηλαδή για οποιουσδήποτε δύο μετασχηματισμούς Lorentz που ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες, δεν υπάρχει καμία συνεχής διαδρομή στον χώρο των μετασχηματισμών Lorentz που να τις συνδέει.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz με $\det\Lambda = +1$, δηλαδή αυτοί που ανήκουν στην $O(1,3)^{\uparrow}_{+}$ ή στην $O(1,3)^{\downarrow}_{+}$, καλούνται γνήσιοι (proper) μετασχηματισμοί Lorentz και αποτελούν μία υποομάδα της $O(1,3)$, την οποία θα συμβολίζουμε ως $SO(1,3)$. Αντίθετα, το σύνολο των μετασχηματισμών Lorentz με $\det\Lambda = -1$ δεν είναι υποομάδα της ομάδας Lorentz, αφού δεν περιέχει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό Lorentz, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$. Αυτοί οι μετασχηματισμοί Lorentz ονομάζονται μη γνήσιοι (improper). Δύο σημαντικά παραδείγματα τέτοιων μετασχηματισμών Lorentz αποτε-λούν οι διακριτοί μετασχηματισμοί της ομοτιμίας (Λ_P) και της αντιστροφής του χρόνου (Λ_T), όπου $(\Lambda_P)^{\mu}{}_{\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$ και $(\Lambda_T)^{\mu}{}_{\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$.

Επίσης, το σύνολο των ορθόχρονων μετασχηματισμών Lorentz, δηλαδή εκείνων για τους οποίους είναι $\Lambda^0{}_0 \geq 1$, είναι και αυτό υποομάδα της $O(1,3)$. Πράγματι, εάν $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ και $\overline{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}$ είναι δύο τέτοιοι μετασχηματισμοί τότε για το γινόμενό τους, $(\overline{\Lambda}\Lambda)^{\mu}{}_{\nu} = \overline{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu}$, έχουμε:

$$(\overline{\Lambda}\Lambda)^0{}_0 = \overline{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 + \overline{\Lambda}^0{}_1\Lambda^1{}_0 + \overline{\Lambda}^0{}_2\Lambda^2{}_0 + \overline{\Lambda}^0{}_3\Lambda^3{}_0$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο του τριανύσματος $\vec{a} = (\Lambda^1{}_0, \Lambda^2{}_0, \Lambda^3{}_0)$ ισούται με $|\vec{a}| = \sqrt{(\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2} = \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}$. Ακόμη, εάν $(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu}$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός του $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$, η (2.1.11) δίνει:

$$\begin{aligned}
&\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\tau}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\tau} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\eta_{\mu\nu}\delta^{\mu}_{\tau}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\sigma\rho}(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\tau} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\eta_{\tau\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = (\Lambda^{-1})_{\sigma\tau} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\Lambda_{\tau\sigma} = (\Lambda^{-1})_{\sigma\tau} \Rightarrow \\
\Rightarrow &(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\tau} = \Lambda_{\tau}{}^{\sigma} = \eta_{\tau\mu}\eta^{\sigma\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Επομένως, για κάθε $i \in \{1,2,3\}$ έχουμε:

$$\overline{\Lambda}^0{}_i = -\overline{\Lambda}_0{}^i = -\left(\overline{\Lambda}^{-1}\right)^i{}_0 \tag{2.1.16}$$

Όμως, είναι:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\overline{\Lambda}^{-1}\right)^0{}_0\right]^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}\left[\left(\overline{\Lambda}^{-1}\right)^i{}_0\right]^2 \xRightarrow{(2.1.15),(2.1.16)} \\
\Rightarrow &\left(\overline{\Lambda}_0{}^0\right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}\left(\overline{\Lambda}^0{}_i\right)^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left(\overline{\Lambda}^0{}_0\right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}\left(\overline{\Lambda}^0{}_i\right)^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left(\overline{\Lambda}^0{}_0\right)^2 - 1 = \sum_{i=1}^{3}\left(\overline{\Lambda}^0{}_i\right)^2
\end{aligned}$$

Συνεπώς, το μέτρο του τριανύσματος $\vec{b} = (\overline{\Lambda}^0{}_1, \overline{\Lambda}^0{}_2, \overline{\Lambda}^0{}_3)$ ισούται με $|\vec{b}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\overline{\Lambda}^0{}_i\right)^2} = \sqrt{\left(\overline{\Lambda}^0{}_0\right)^2 - 1}$.
Από την ανισότητα των Cauchy και Schwarz, έχουμε:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{3}\overline{\Lambda}^0{}_i\Lambda^i{}_0\right| \leq \sqrt{\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - 1}\sqrt{\left(\overline{\Lambda}^0{}_0\right)^2 - 1}$$

Άρα

$$\left(\overline{\Lambda}\Lambda\right)^0{}_0 = \overline{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 + \sum_{i=1}^{3}\overline{\Lambda}^0{}_i\Lambda^i{}_0 \geq \overline{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \left|\sum_{i=1}^{3}\overline{\Lambda}^0{}_i\Lambda^i{}_0\right| \geq \overline{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \sqrt{\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - 1}\sqrt{\left(\overline{\Lambda}^0{}_0\right)^2 - 1} \geq 1$$

Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε στο σύνολο των γνήσιων και ορθόχρονων μετασχηματισμών Lorentz, δηλαδή εκείνων με $\det\Lambda = +1$ και $\Lambda^0{}_0 \geq 1$, οι οποίοι συνδέονται με συνεχή τρόπο με το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας Lorentz. Οι μετασχηματισμοί αυτοί αποτελούν μία υποομάδα της $O(1,3)$, την οποία θα συμβολίζουμε ως $SO(1,3)^{\uparrow}$. Κάθε μετασχηματισμός Lorentz είτε ανήκει στην $SO(1,3)^{\uparrow}$, είτε μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ενός στοιχείου της $SO(1,3)^{\uparrow}$ με έναν από τους διακριτούς μετασχηματισμούς $\Lambda_P, \Lambda_T, \Lambda_P\Lambda_T$. Στο εξής, με τον όρο «ομάδα Lorentz» θα αναφερόμαστε στην $SO(1,3)^{\uparrow}$ και με τον όρο «άλγεβρα Lorentz» θα αναφερόμαστε στην άλγεβρα Lie της $SO(1,3)^{\uparrow}$, την οποία θα συμβολίζουμε ως $so(1,3)$. Ακόμη, όταν λέμε ότι μία θεωρία είναι «Lorentz αναλλοίωτη», εννοούμε εν γένει ότι είναι αναλλοίωτη κάτω από την $SO(1,3)^{\uparrow}$, αλλά μπορεί να μην είναι αναλλοίωτη κάτω από την ομοτιμία ή/και την αντιστροφή του χρόνου.

Για έναν απειροστό μετασχηματισμό $\Lambda \in SO(1,3)^{\uparrow}$, μπορούμε να γράφουμε:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.1.17}$$

όπου τα $\omega^{\mu}{}_{\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, είναι απειροστές παράμετροι, γι' αυτό και στους υπολογισμούς, στους οποίους εμπλέκονται αυτές, θα αγνοούμε τους όρους τάξης ≥ 2 ως προς ω.

Εισάγοντας την (2.1.17) στην (2.1.11) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
&\eta_{\mu\nu}(\delta^{\mu}_{\rho} + \omega^{\mu}{}_{\rho})(\delta^{\nu}_{\sigma} + \omega^{\nu}{}_{\sigma}) = \eta_{\rho\sigma} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\eta_{\mu\nu}\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} + \eta_{\mu\nu}\delta^{\mu}_{\rho}\omega^{\nu}{}_{\sigma} + \eta_{\mu\nu}\omega^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} + \mathcal{O}(\omega^2) = \eta_{\rho\sigma} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\cancel{\eta_{\rho\sigma}} + \eta_{\rho\nu}\omega^{\nu}{}_{\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\omega^{\mu}{}_{\rho} = \cancel{\eta_{\rho\sigma}} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Επομένως, ο $\omega_{\mu\nu}$ είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης στις 4 διαστάσεις, οπότε έχει $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ ανεξάρτητες συνιστώσες, οι οποίες αντιστοιχούν σε 3 ανεξάρτητες χωρικές στροφές και 3 ανεξάρτητες ωθήσεις.

Στην κβαντική θεωρία πεδίου, οι συμμετρίες αναπαρίστανται από γραμμικούς και μοναδιακούς (ή αντιγραμμικούς και αντιμοναδιακούς) τελεστές[2]. Έτσι, σε κάθε γνήσιο και ορθόχρονο μετασχηματισμό Lorentz Λ αντιστοιχίζουμε ένα γραμμικό και μοναδιακό τελεστή $U(\Lambda)$, ο οποίος δρα σε ένα χώρο Hilbert με σωματιδιακές καταστάσεις. Οι τελεστές $U(\Lambda)$ ικανοποιούν τη σχέση

$$U(\Lambda')U(\Lambda) = U(\Lambda'\Lambda) \tag{2.1.19}$$

[2] Περισσότερα γι' αυτό στην ενότητα 2.2 του [3]

$\forall \Lambda, \Lambda' \in SO(1,3)^{\uparrow}$ και το σύνολό τους αποτελεί μία απειροδιάσταση μοναδιακή αναπαράσταση της ομάδας Lorentz. Για ένα απειροστό μετασχηματισμό Lorentz, $\mathbb{1}+\omega$, είναι

$$U(\mathbb{1}+\omega) = I - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \tag{2.1.20}$$

όπου $\mathbb{1}$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας Lorentz ($\mathbb{1}^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$), I είναι ο ταυτοτικός τελεστής και $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ είναι ένα σύνολο 6 ανεξάρτητων Ερμιτιανών τελεστών, οι οποίοι καλούνται γεννήτορες της ομάδας Lorentz. Επισημαίνουμε πως το ότι οι $M^{\mu\nu}$ είναι Ερμιτιανοί τελεστές εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του $U(\mathbb{1}+\omega)$ της (2.1.20). Πράγματι, είναι:

$$\begin{aligned}(U(\mathbb{1}+\omega))^{\dagger}U(\mathbb{1}+\omega) =& \left(I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(M^{\mu\nu})^{\dagger}\right)\left(I - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right) \\ =& I - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega^2) = I\end{aligned}$$

Επίσης, από την (2.1.19) έπεται ότι

$$\begin{aligned}I \overset{(2.1.20)}{=} U(\mathbb{1}) = U(\Lambda^{-1}\Lambda) = U(\Lambda^{-1})U(\Lambda) \Rightarrow \\ \Rightarrow (U(\Lambda))^{-1} = U(\Lambda^{-1})\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

για κάθε $\Lambda \in SO(1,3)^{\uparrow}$.

Εάν Λ είναι ένας τυχαίος γνήσιος και ορθόχρονος μετασχηματισμός Lorentz και $\Lambda' = \mathbb{1}+\omega'$ είναι ένας απειροστός μετασχηματισμός του τύπου αυτού, έχουμε:

$$\begin{aligned}& U(\Lambda^{-1})U(\Lambda')U(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) \Rightarrow \\ \Rightarrow & (U(\Lambda))^{-1}\left(I - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)U(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}(\mathbb{1}+\omega')\Lambda) \Rightarrow \\ \Rightarrow & I - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}\left(U(\Lambda)\right)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) = U(\mathbb{1}+\Lambda^{-1}\omega'\Lambda) \Rightarrow \\ \Rightarrow & I - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}\left(U(\Lambda)\right)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) = I - \frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\omega'\Lambda)_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \omega'_{\mu\nu}\left(U(\Lambda)\right)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1}\right)_{\mu}{}^{\rho}\omega'_{\rho\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}M^{\mu\nu} \xrightarrow{(2.1.15)} \\ \Rightarrow & \omega'_{\mu\nu}\left(U(\Lambda)\right)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^{\rho}{}_{\mu}\omega'_{\rho\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}M^{\mu\nu} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \omega'_{\mu\nu}\left(U(\Lambda)\right)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) = \omega'_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma}\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

για αυθαίρετα $\omega'_{\mu\nu}$ με $\omega'_{\mu\nu} = -\omega'_{\nu\mu}$. Επομένως, επειδή και οι συντελεστές του $\omega'_{\mu\nu}$ στα δύο μέλη της (2.1.22) είναι αντισυμμετρικοί στην εναλλαγή των μ και ν, αφού $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ και $\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\Lambda^{\nu}{}_{\rho}M^{\sigma\rho} = \Lambda^{\nu}{}_{\rho}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\left(-M^{\rho\sigma}\right) = -\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma}$, ισχύει ότι:

$$\left(U(\Lambda)\right)^{-1}M^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma} \tag{2.1.23}$$

που σημαίνει ότι το $M^{\mu\nu}$ μετασχηματίζεται ως τανυστής δεύτερης τάξης κάτω από την ομάδα Lorentz.

Εάν ο μετασχηματισμός Lorentz Λ στη (2.1.23) είναι και αυτός απειροστός, δηλαδή της μορφής (2.1.17), έχουμε:

$$\begin{aligned}(2.1.23) \xrightarrow{(2.1.20)} & \left(I - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right)^{-1}M^{\mu\nu}\left(I - \frac{i}{2}\omega_{\lambda\tau}M^{\lambda\tau}\right) = (\delta^{\mu}_{\rho} + \omega^{\mu}{}_{\rho})(\delta^{\nu}_{\sigma} + \omega^{\nu}{}_{\sigma})M^{\rho\sigma} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left(I - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right)^{\dagger}M^{\mu\nu}\left(I - \frac{i}{2}\omega_{\lambda\tau}M^{\lambda\tau}\right) = (\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} + \delta^{\mu}_{\rho}\omega^{\nu}{}_{\sigma} + \delta^{\nu}_{\sigma}\omega^{\mu}{}_{\rho})M^{\rho\sigma} + \mathcal{O}(\omega^2) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(I + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right)\left(M^{\mu\nu}I - \frac{i}{2}\omega_{\lambda\tau}M^{\mu\nu}M^{\lambda\tau}\right) = M^{\mu\nu} + \omega^{\nu}{}_{\sigma}M^{\mu\sigma} + \omega^{\mu}{}_{\rho}M^{\rho\nu} \Rightarrow \\
&\Rightarrow M^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\omega_{\lambda\tau}M^{\mu\nu}M^{\lambda\tau} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}M^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega^2) = M^{\mu\nu} + \omega^{\nu}{}_{\sigma}M^{\mu\sigma} + \omega^{\mu}{}_{\rho}M^{\rho\nu} \Rightarrow \\
&\Rightarrow -\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\mu\nu}M^{\rho\sigma} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}M^{\mu\nu} = \eta^{\nu\rho}\omega_{\rho\sigma}M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}M^{\rho\nu} \Rightarrow \\
&\Rightarrow -\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(M^{\mu\nu}M^{\rho\sigma} - M^{\rho\sigma}M^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\eta^{\nu\rho}\omega_{\rho\sigma}M^{\mu\sigma} + \frac{1}{2}\eta^{\nu\sigma}\omega_{\sigma\rho}M^{\mu\rho} + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}M^{\rho\nu} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\sigma}M^{\sigma\nu} \Rightarrow \\
&\Rightarrow -\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] = \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma}M^{\rho\nu} + \eta^{\mu\rho}M^{\sigma\nu}\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \omega_{\rho\sigma}\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] = i\omega_{\rho\sigma}\left(\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

για αυθαίρετα $\omega_{\rho\sigma}$ με $\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}$. Άρα

$$
\begin{aligned}
&\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] = i\left(\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}\right) \\
&\text{ή} \\
&\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] = -i\left(\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}\right) \qquad (2.1.24)
\end{aligned}
$$

Οι σχέσεις μετάθεσης (2.1.24) ορίζουν την άλγεβρα Lie της ομάδας Lorentz, $so(1,3)$.

Μπορούμε να ορίσουμε τους γεννήτορες των χωρικών στροφών ως $J_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk}$, όπου $i, j, k = 1, 2, 3$ και ε_{ijk} είναι το ολικά αντισυμμετρικό σύμβολο του Levi-Civita στις 3 διαστάσεις με $\varepsilon_{123} = +1$, και τους γεννήτορες των ωθήσεων Lorentz ως $K_i \equiv M_{0i}$. Τότε, από την (2.1.24) έπεται ότι:

$$
\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \left[\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}M_{kl}, \frac{1}{2}\varepsilon_{jmn}M_{mn}\right] = \ \text{(k,l,m,n=1,2,3)} \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\left[M_{kl}, M_{mn}\right] = \\
&= -\frac{i}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\left(\eta_{km}M_{ln} - \eta_{kn}M_{lm} - \eta_{lm}M_{kn} + \eta_{ln}M_{km}\right) = \\
&= -\frac{i}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\left(-\delta_{km}M_{ln} + \delta_{kn}M_{lm} + \delta_{lm}M_{kn} - \delta_{ln}M_{km}\right) = \\
&= \frac{i}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkn}M_{ln} - \frac{i}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmk}M_{lm} - \frac{i}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jln}M_{kn} + \frac{i}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jml}M_{km} = \\
&= \frac{i}{4}(-\varepsilon_{kil})(-\varepsilon_{kjm})M_{ln} - \frac{i}{4}(-\varepsilon_{kil})\varepsilon_{kjm}M_{lm} - \frac{i}{4}\varepsilon_{lik}(-\varepsilon_{ljn})M_{kn} + \frac{i}{4}\varepsilon_{lik}\varepsilon_{ljm}M_{km} = \\
&= \frac{i}{4}\varepsilon_{kil}\varepsilon_{kjn}M_{ln} + \frac{i}{4}\varepsilon_{kil}\varepsilon_{kjm}M_{lm} + \frac{i}{4}\varepsilon_{lik}\varepsilon_{ljn}M_{kn} + \frac{i}{4}\varepsilon_{lik}\varepsilon_{ljn}M_{km} = \\
&= \frac{i}{4}(\delta_{ij}\delta_{ln} - \delta_{in}\delta_{lj})M_{ln} + \frac{i}{4}(\delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj})M_{lm} + \\
&\quad + \frac{i}{4}(\delta_{ij}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{kj})M_{kn} + \frac{i}{4}(\delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kj})M_{km} = \\
&= \frac{i}{4}\delta_{ij}\underbrace{\delta_{ln}M_{ln}}_{\substack{\parallel \\ 0}} - \frac{i}{4}\delta_{in}\delta_{lj}M_{ln} + \frac{i}{4}\delta_{ij}\underbrace{\delta_{lm}M_{lm}}_{\substack{\parallel \\ 0}} - \frac{i}{4}\delta_{im}\delta_{lj}M_{lm} + \\
&\quad + \frac{i}{4}\delta_{ij}\underbrace{\delta_{kn}M_{kn}}_{\substack{\parallel \\ 0}} - \frac{i}{4}\delta_{in}\delta_{kj}M_{kn} + \frac{i}{4}\delta_{ij}\underbrace{\delta_{km}M_{km}}_{\substack{\parallel \\ 0}} - \frac{i}{4}\delta_{im}\delta_{kj}M_{km} \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow [J_i, J_j] = -iM_{ji} = iM_{ij} \qquad (2.1.25)
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\eta_{ij} = -\delta_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$ για κάθε $i, j = 1, 2, 3$ και $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$.

Ακόμη

$$
\begin{aligned}
J_i &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk} \Rightarrow \\
\Rightarrow \varepsilon_{ilm}J_i &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{ijk}M_{jk} \Rightarrow \\
\Rightarrow \varepsilon_{lmi}J_i &= \frac{1}{2}(\delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj})M_{jk} = \\
&= \frac{1}{2}\delta_{lj}\delta_{mk}M_{jk} - \frac{1}{2}\delta_{lk}\delta_{mj}M_{jk} = \\
&= \frac{1}{2}M_{lm} - \frac{1}{2}M_{ml} = M_{lm}
\end{aligned}
$$

Άρα

$$M_{lm} = \varepsilon_{lmi}J_i \tag{2.1.26}$$

για κάθε $l, m = 1, 2, 3$.

$$(2.1.25) \xRightarrow{(2.1.26)} [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \tag{2.1.27}$$

Επίσης

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow [J_i, K_j] &= \left[\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}M_{kl}, M_{0j}\right] = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\left[M_{kl}, M_{0j}\right] = \\
&= -\frac{i}{2}\varepsilon_{ikl}\left(\overset{0}{\cancel{\eta_{k0}}}M_{lj} - \eta_{kj}M_{l0} - \overset{0}{\cancel{\eta_{l0}}}M_{kj} + \eta_{lj}M_{k0}\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow [J_i, K_j] &= -\frac{i}{2}\varepsilon_{ikl}\left(\delta_{kj}M_{l0} - \delta_{lj}M_{k0}\right) = -\frac{i}{2}\varepsilon_{ijl}M_{l0} + \frac{i}{2}\varepsilon_{ikj}M_{k0} = \\
&= -\frac{i}{2}\varepsilon_{ijl}(-M_{0l}) + \frac{i}{2}(-\varepsilon_{ijk})(-M_{0k}) = \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}M_{0k} \Rightarrow \\
\Rightarrow [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk}K_k
\end{aligned} \tag{2.1.28}
$$

Επιπλέον, είναι:

$$
\begin{aligned}
[K_i, K_j] &= [M_{0i}, M_{0j}] = \\
&= -i\left(\eta_{00}M_{ij} - \overset{0}{\cancel{\eta_{0j}}}M_{i0} - \overset{0}{\cancel{\eta_{i0}}}M_{0j} + \eta_{ij}\overset{0}{\cancel{M_{00}}}\right) = \\
&= -iM_{ij} \overset{(2.1.26)}{=} -i\varepsilon_{ijk}J_k
\end{aligned} \tag{2.1.29}
$$

Έτσι, η άλγεβρα Lorentz γράφεται συναρτήσει των J_i και K_i ως:

$$
\begin{array}{rcll}
[J_i, J_j] &=& i\varepsilon_{ijk}J_k & (2.1.27) \\
[J_i, K_j] &=& i\varepsilon_{ijk}K_k & (2.1.28) \\
[K_i, K_j] &=& -i\varepsilon_{ijk}J_k & (2.1.29)
\end{array}
$$

Οι σχέσεις μετάθεσης (2.1.27) ορίζουν ακριβώς την άλγεβρα $so(3)$, δηλαδή την άλγεβρα Lie της ομάδας των στροφών στον τρισδιάστατο χώρο, $SO(3)$, που αποτελεί υποομάδα της $SO(1,3)^{\uparrow}$, άρα οι J_i είναι πράγματι οι γεννήτορες των χωρικών στροφών. Επίσης, από την (2.1.28) προκύπτει ότι το $\vec{K} = (K_1, K_2, K_3)$ μετασχηματίζεται ως τριδιάνυσμα κάτω από την $SO(3)$.

Κάτω από ένα μετασχηματισμό Lorentz $\Lambda \in SO(1,3)^{\uparrow}$, ένα γενικό πεδίο $\Phi(x)$ με n συνιστώσες, $\Phi_a(x)$, μετασχηματίζεται ως:

$$\Phi_a(x) \to \Phi'_a(x') = M_{ab}(\Lambda)\Phi_b(x), \tag{2.1.30}$$

όπου $a, b = 1, 2, \ldots, n$,

$$x'^{\mu} = (\Lambda x)^{\mu} \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\Lambda^{-1}\right)^{\rho}{}_{\mu} x'^{\mu} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\rho}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = \delta^{\rho}_{\nu} x^{\nu} = x^{\rho} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^{\rho} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\rho}{}_{\mu} x'^{\mu} \equiv \left(\Lambda^{-1} x'\right)^{\rho} \tag{2.1.31}$$

και $M(\Lambda)$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας, ο οποίος εξαρτάται από το μετασχηματισμό Λ. Για ένα πεπερασμένο μετασχηματισμό Lorentz $\Lambda \in SO(1,3)^{\uparrow}$, ο οποίος χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο έξι ανεξάρτητων πεπερασμένων παραμέτρων $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, έχουμε:

$$M(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \tag{2.1.32}$$

όπου $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$ είναι 6 ανεξάρτητοι $n \times n$ πίνακες.

Για έναν απειροστό γνήσιο και ορθόχρονο μετασχηματισμό Lorentz, όπως αυτός στην (2.1.17), αναπτύσσοντας το δεύτερο μέλος της (2.1.32) κατά Taylor και κρατώντας μόνο τους όρους μέχρι και πρώτης τάξης ως προς τα $\omega_{\mu\nu}$, λαμβάνουμε:

$$M(\Lambda) = I_n - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \tag{2.1.33}$$

όπου I_n είναι ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας, και έχουμε:

$$\begin{aligned}
(2.1.30) \xRightarrow{(2.1.31)} \Phi'_a(x') &= M_{ab}(\Lambda)\Phi_b(\Lambda^{-1}x') \Rightarrow \\
\Rightarrow \Phi'_a(x) &= M_{ab}(\Lambda)\Phi_b(\Lambda^{-1}x) \overset{(2.1.33)}{=} \\
&= \left(I_n - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)_{ab} \Phi_b\left((\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\sigma} x^{\sigma}\right) = \\
&= \left[\delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\right] \Phi_b\left(\Lambda_{\sigma}{}^{\rho} x^{\sigma}\right) = \\
&= \left[\delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\right] \Phi_b\left((\delta^{\rho}_{\sigma} + \omega_{\sigma}{}^{\rho})x^{\sigma}\right) = \\
&= \left[\delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\right] \Phi_b(x^{\rho} - \underbrace{\omega^{\rho}{}_{\sigma} x^{\sigma}}_{\substack{\parallel\!\mid \\ (\omega x)^{\rho}}}) \overset{Taylor}{=} \\
&= \left[\delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\right] \left[\Phi_b(x) - (\omega x)^{\rho}\partial_{\rho}\Phi_b(x) + \mathcal{O}(\omega^2)\right] = \\
&= \left[\delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\right] \left(\Phi_b(x) - \omega^{\rho}{}_{\sigma} x^{\sigma}\partial_{\rho}\Phi_b(x) + \mathcal{O}(\omega^2)\right) = \\
&= \Phi_a(x) - \omega^{\rho}{}_{\sigma} x^{\sigma}\partial_{\rho}\Phi_a(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\Phi_b(x) = \\
&= \Phi_a(x) - \omega_{\rho\sigma} x^{\sigma}\partial^{\rho}\Phi_a(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\Phi_b(x) = \\
&= \Phi_a(x) - \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma} x^{\sigma}\partial^{\rho}\Phi_a(x) - \frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho} x^{\rho}\partial^{\sigma}\Phi_a(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\Phi_b(x) \overset{\omega_{\rho\sigma}=-\omega_{\sigma\rho}}{=} \\
&= \Phi_a(x) - \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(x^{\sigma}\partial^{\rho} - x^{\rho}\partial^{\sigma})\Phi_a(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\Phi_b(x) = \\
&= \Phi_a(x) - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\left[i(x^{\rho}\partial^{\sigma} - x^{\sigma}\partial^{\rho})\right]\Phi_a(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\Phi_b(x) \Rightarrow \\
\Rightarrow \Phi'_a(x) &= \Phi_a(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\Phi_a(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\Phi_b(x)
\end{aligned} \tag{2.1.34}$$

όπου $L^{\mu\nu} \equiv i(x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu})$, ενώ και πάλι έχουμε αγνοήσει τους όρους τάξης ≥ 2 ως προς ω. Μπορεί να δειχθεί ότι οι διαφορικοί τελεστές $L^{\mu\nu}$ και οι πίνακες $S^{\mu\nu}$ ικανοποιούν ξεχωριστά τις ίδιες σχέσεις μετάθεσης με τους γεννήτορες $M^{\mu\nu}$ της ομάδας Lorentz[3]. Λέμε ότι οι πίνακες $S^{\mu\nu}$ αποτελούν μία αναπαράσταση της άλγεβρας Lie της $SO(1,3)^{\uparrow}$.

[3]Παραπέμπουμε στα προβλήματα (2.8) και (2.9) στο [2].

Ας δούμε τώρα δύο σημαντικά παραδείγματα. Ένα βαθμωτό (spin-0) πεδίο $\phi(x)$, το οποίο έχει μία μόνο συνιστώσα, μετασχηματίζεται κάτω από ένα μετασχηματισμό $\Lambda \in SO(1,3)^{\uparrow}$ ως

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) \tag{2.1.35}$$

οπότε προφανώς $S^{\mu\nu} = 0$ στην περίπτωση αυτή.

Από την άλλη μεριά, ο αντίστοιχος κανόνας μετασχηματισμού για ένα διανυσματικό (spin-1) πεδίο $A^{\mu}(x)$ (4 συνιστώσες) είναι

$$A^{\mu}(x) \rightarrow A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(x) \tag{2.1.36}$$

και επειδή $x = \Lambda^{-1}x'$, θέτοντας στην (2.1.36) όπου x' το x, λαμβάνουμε:

$$A'^{\mu}(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(\Lambda^{-1}x) \tag{2.1.37}$$

Για έναν απειροστό μετασχηματισμό Lorentz, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$, όπου $\omega^{\mu}{}_{\nu} = -\omega_{\nu}{}^{\mu}$, είναι $(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega_{\nu}{}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \omega^{\mu}{}_{\nu}$, οπότε η (2.1.37) δίνει:

$$\begin{aligned}
A'^{\mu}(x) &= (\delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}) A^{\nu}\left[(\delta^{\rho}_{\sigma} - \omega^{\rho}{}_{\sigma})x^{\sigma}\right] = \\
&= (\delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}) A^{\nu}\left(x^{\rho} - (\omega x)^{\rho}\right) \overset{Taylor}{=} \\
&= (\delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}) \left[A^{\nu}(x) - (\omega x)^{\rho}\partial_{\rho}A^{\nu}(x)\right] = \\
&= (\delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}) \left(A^{\nu}(x) - \omega^{\rho}{}_{\sigma}x^{\sigma}\partial_{\rho}A^{\nu}(x)\right) = \\
&= A^{\mu}(x) - \omega^{\rho}{}_{\sigma}x^{\sigma}\partial_{\rho}A^{\mu}(x) + \omega^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(x) = \\
&= A^{\mu}(x) - \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(x^{\sigma}\partial^{\rho} - x^{\rho}\partial^{\sigma}\right)A^{\mu}(x) + \omega^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(x) = \\
&= A^{\mu}(x) - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\left[i(x^{\rho}\partial^{\sigma} - x^{\sigma}\partial^{\rho})\right]A^{\mu}(x) + \omega^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(x) \Rightarrow \\
\Rightarrow A'^{\mu}(x) &= A^{\mu}(x) - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}L^{\rho\sigma}A^{\mu}(x) + \omega^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(x)
\end{aligned} \tag{2.1.38}$$

Όμως, από τη γενική σχέση (2.1.34) έχουμε:

$$A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}L^{\rho\sigma}A^{\mu}(x) - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(S^{\rho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(x) \tag{2.1.39}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (2.1.38) με την (2.1.39), παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος στο δεύτερο μέλος της δεύτερης πρέπει να ισούται με τον αντίστοιχο όρο στην πρώτη, πράγμα που επιτυχάνεται εάν:

$$\left(S^{\rho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \left(S^{\rho\sigma}_{V}\right)^{\mu}{}_{\nu} \equiv -i\left(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho}{}_{\nu} - \eta^{\rho\mu}\eta^{\sigma}{}_{\nu}\right) \tag{2.1.40}$$

Πράγματι, είναι:

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(S^{\rho\sigma}_{V}\right)^{\mu}{}_{\nu} &= -\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(-i)\left(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho}{}_{\nu} - \eta^{\rho\mu}\eta^{\sigma}{}_{\nu}\right) = -\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(\eta^{\mu\sigma}\delta^{\rho}_{\nu} - \eta^{\rho\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\omega_{\nu\sigma}\eta^{\mu\sigma} + \frac{1}{2}\eta^{\rho\mu}\omega_{\rho\nu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\omega_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu} = -\frac{1}{2}\omega_{\nu}{}^{\mu} + \frac{1}{2}\omega^{\mu}{}_{\nu} = \omega^{\mu}{}_{\nu}
\end{aligned}$$

όπως πρέπει. Επιπλέον, συγκρίνοντας την (2.1.36) με τις γενικές σχέσεις (2.1.30) και (2.1.32), λαμβάνουμε την ακόλουθη γενική έκφραση για τα στοιχεία ενός πίνακα $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ που αντιστοιχεί σε γνήσιο και ορθόχρονο μετασχηματισμό Lorentz:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}_{V}}\right)^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.1.41}$$

όπου τα $\omega_{\rho\sigma}$ είναι πραγματικές παράμετροι με $\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}$. Οι πίνακες της μορφής (2.1.41) αποτελούν τη λεγόμενη (τετρα)διανυσματική αναπαράσταση της ομάδας Lorentz, η οποία είναι η αναπαράσταση ορισμού της ομάδας Lorentz.

Το πρόβλημα τώρα είναι να βρούμε όλα τα δυνατά σύνολα πινάκων πεπερασμένης διάστασης $S^{\mu\nu}(=-S^{\nu\mu})$, που ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης (2.1.24), ή, ισοδύναμα, για τους οποίους οι πίνακες $\tilde{J}_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}S_{jk}$ και $\tilde{K}_i \equiv S_{oi}$ ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης (2.1.27)-(2.1.29), με άλλα λόγια τις πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lie της ομάδας Lorentz. Επίσης, επισημαίνουμε ότι ενώ οι τελεστές $M^{\mu\nu}$ πρέπει να είναι Ερμιτιανοί, δεν ισχύει το ίδιο και για τους πίνακες $S^{\mu\nu}$.

Εάν επικεντρώσουμε την προσοχή μας στις σχέσεις μετάθεσης (2.1.27), γνωρίζουμε (από τη μελέτη της στροφορμής στα πλαίσια της κβαντικής μηχανικής) ότι μπορούμε να βρούμε τρεις $(2j+1)\times(2j+1)$ Ερμιτιανούς πίνακες J_1, J_2, J_3 που ικανοποιούν τις (2.1.27) και οι ιδιοτιμές του J_3 είναι $-j, -j+1, \ldots, j-1, j$, όπου οι δυνατές τιμές του j είναι $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Ξέρουμε επίσης ότι αυτά τα σύνολα πινάκων αποτελούν όλες τις μη ισοδύναμες και μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lie της ομάδας $SO(3)$. Ακόμη, όταν το j είναι ημιακέραιος αριθμός, μία στροφή κατά 2π οδηγεί σε ένα συνολικό πρόσημο μείον. Συνεπώς, αυτές οι αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lie της $SO(3)$ δεν αντιστοιχούν σε αναπαραστάσεις της ίδιας της ομάδας $SO(3)$, αφού μία στροφή κατά 2π πρέπει να ισοδυναμεί με καθόλου στροφή, αντιστοιχούν όμως σε αναπαραστάσεις της ομάδας $SU(2)$, η οποία έχει την ίδια άλγεβρα Lie με την $SO(3)$ και αποτελεί το «καθολικό κάλυμμα» (universal cover ή universal covering group) της $SO(3)$. Παρομοίως, η ομάδα των 2×2 μιγαδικών πινάκων με ορίζουσα ίση με 1, $SL(2,C)$, αποτελεί το «καθολικό κάλυμμα» της $SO(1,3)^{\uparrow}$, όπως θα δούμε στην ενότητα 2.4.

Για να εξάγουμε τα αντίστοιχα συμπεράσματα, που αφορούν και στις τρεις σχέσεις μετάθεσης (2.1.27)-(2.1.29), είναι χρήσιμο να εισάγουμε τους παρακάτω γραμμικούς συνδυασμούς των γεννητόρων J_i και K_i της ομάδας Lorentz:

$$J_i^+ \equiv \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \tag{2.1.42}$$

$$J_i^- \equiv \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \tag{2.1.43}$$

οι οποίοι είναι μη Ερμιτιανοί τελεστές, αφού $(J_i^+)^\dagger = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) = J_i^-$ και $(J_i^-)^\dagger = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) = J_i^+$, (δεδομένου ότι οι J_i και K_i είναι Ερμιτιανοί τελεστές) και δεν έχουν εμφανή φυσική σημασία, αλλά απλοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης της άλγεβρας Lorentz. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left[J_i^+, J_j^+\right] &= \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j + iK_j)\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] + i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + i^2[K_i, K_j]\right) \overset{(2.1.27)-(2.1.29)}{=} \\
&= \frac{1}{4}\left[i\varepsilon_{ijk}J_k + i^2\varepsilon_{ijk}K_k - i[J_j, K_i] - (-i\varepsilon_{ijk}J_k)\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left(i\varepsilon_{ijk}J_k - \varepsilon_{ijk}K_k - i^2\varepsilon_{jik}K_k + i\varepsilon_{ijk}J_k\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(2i\varepsilon_{ijk}J_k - \varepsilon_{ijk}K_k + (-\varepsilon_{ijk})K_k\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(2i\varepsilon_{ijk}J_k - 2\varepsilon_{ijk}K_k\right) = \\
&= \frac{2}{4}i\varepsilon_{ijk}\left(J_k + iK_k\right) = \\
&= \frac{1}{2}i\varepsilon_{ijk}\left(J_k + iK_k\right) = i\varepsilon_{ijk}J_k^+ \\
\left[J_i^-, J_j^-\right] &= \left[\frac{1}{2}(J_i - iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j)\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] + i^2[K_i, K_j]\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(i\varepsilon_{ijk}J_k + 2\varepsilon_{ijk}K_k + i\varepsilon_{ijk}K_k\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{4} i\varepsilon_{ijk}\left(J_k - iK_k\right) = i\varepsilon_{ijk} J_k^- \\
\left[J_i^+, J_j^-\right] &= \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j)\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left[J_i + iK_i, J_j - iK_j\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] - i^2[K_i, K_j]\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] - i[J_j, K_i] + [K_i, K_j]\right) \overset{(2.1.27)-(2.1.29)}{=} \\
&= \frac{1}{4}\left(i\varepsilon_{ijk} J_k + \varepsilon_{ijk} K_k + \varepsilon_{jik} K_k - i\varepsilon_{ijk} J_k\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{ijk} K_k - \varepsilon_{ijk} K_k\right) = 0
\end{aligned}
$$

Έτσι, έχουμε:

$$[J_i^+, J_j^+] = i\varepsilon_{ijk} J_k^+ \tag{2.1.44}$$

$$[J_i^-, J_j^-] = i\varepsilon_{ijk} J_k^- \tag{2.1.45}$$

$$[J_i^+, J_j^-] = 0 \tag{2.1.46}$$

Επομένως, οι τελεστές J_i^+ και J_i^- ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης της άλγεβρας Lie της ομάδας $SU(2)$, την οποία συμβολίζουμε με $su(2)$, όπως προκύπτει από τις (2.1.44) και (2.1.45) αντίστοιχα. Άρα, η άλγεβρα Lie της ομάδας Lorentz, $so(1,3)$, έχει δύο $su(2)$ υποάλγεβρες, οι οποίες μάλιστα μετατίθενται, όπως δείχνει η (2.1.46). Γνωρίζουμε ότι μία πεπερασμένης διάστασης, μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της $su(2)$ χαρακτηρίζεται απο ένα μη αρνητικό ακέραιο ή ημιακέραιο αριθμό j και είναι ένα σύνολο τριών $(2j+1)\times(2j+1)$ πινάκων τ_1, τ_2, τ_3 που ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης $[\tau_i, \tau_j] = i\varepsilon_{ijk}\tau_k$ και δρουν σε ένα διανυσματικό χώρο με $2j+1$ στοιχεία βάσης. Συνεπώς, μία πεπερασμένης διάστασης και μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της $so(1,3)$ χαρακτηρίζεται από ένα ζεύγος αριθμών, j_+ και j_-, καθένας εκ των οποίων είναι μη αρνητικός ακέραιος ή ημιακέραιος και θα τη συμβολίζουμε ως (j_+, j_-). Οι ιδιοτιμές των τελεστών Casimir $\sum_{i=1}^{3}(J_i^+)^2$ και $\sum_{i=1}^{3}(J_i^-)^2$ των $su(2)$ αλγεβρών (2.1.44) και (2.1.45) αντίστοιχα είναι $j_+(j_+ +1)$ και $j_-(j_- +1)$ αντίστοιχα, όπου $j_+, j_- = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Η (j_+, j_-) αναπαράσταση της άλγεβρας Lorentz έχει $(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$ βαθμούς ελευθερίας. Ακόμη, από τις (2.1.42) και (2.1.43) έπεται ότι $J_i = J_i^+ + J_i^-$. Επομένως, για μία δεδομένη αναπαράσταση (j_+, j_-) της άλγεβρας Lorentz, μπορεί να αποδοθεί σε καθέναν από τους βαθμούς ελευθερίας της ένας κβαντικός αριθμός spin, j, του οποίου οι δυνατές τιμές είναι $j = |j_+ - j_-|, |j_+ - j_-| + 1, \ldots, j_+ + j_- - 1, j_+ + j_-$, σύμφωνα με το γενικό κανόνα πρόσθεσης δύο στροφορμών στην κβαντομηχανική.

Επιπλέον, οι δύο $su(2)$ υποάλγεβρες που ορίζονται από τις (2.1.44) και (2.1.45) δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού μπορούν να εναλλαγούν με το μετασχηματισμό της ομοτιμίας. Πράγματι, αποδεικνύεται[4] ότι κάτω από το μετασχηματισμό της ομοτιμίας:

$$J_i \to J_i, K_i \to -K_i$$

άρα σύμφωνα με τις (2.1.42) και (2.1.43), $J_i^+ \leftrightarrow J_i^-$. Το ίδιο αποτέλεσμα έχει και η δράση της Ερμιτιανής συζυγίας, αφού $\left(J_i^{\pm}\right)^{\dagger} = J_i^{\mp}$. Υπό αυτήν την έννοια, ο μετασχηματισμός της ομοτιμίας είναι ισοδύναμος με αυτόν της Ερμιτιανής συζυγίας.

Οι τέσσερις απλούστερες και συχνότερα εμφανιζόμενες αναπαραστάσεις της $so(1,3)$ είναι οι:

$$
\begin{aligned}
\text{βαθμωτή} &\equiv (0,0) \\
\text{αριστερόστροφη σπινοριακή} &\equiv (\tfrac{1}{2},0) \\
\text{δεξιόστροφη σπινοριακή} &\equiv (0,\tfrac{1}{2}) \\
\text{(τέτρα)διανυσματική} &\equiv (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})
\end{aligned}
$$

[4]βλ. ενότητα (2.6) στο [3]

2.2 Η ομάδα Poincaré

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η πλήρης ομάδας Lorentz, $O(1,3)$, αφήνει αναλλοίωτο το «διάστημα» $(x-y)^2$ μεταξύ δύο σημείων x και y στο χώρο Minkowski. Επίσης, και οι μετατοπίσεις στον επίπεδο χωροχρόνο

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$$

όπου a^μ είναι ένα σταθερό τετράνυσμα, αφήνουν αναλλοίωτο το διάστημα αυτό. Αυτό οδηγεί στον ορισμό της ομάδας Poincaré, P, ως το σύνολο των μετασχηματισμών στο χώρο Minkowski της μορφής

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{2.2.1}$$

όπου Λ είναι ένας μετασχηματισμός Lorentz και a^μ ένα σταθερό τετράνυσμα, οι οποίοι αφήνουν αναλλοίωτη την ποσότητα $(x-y)^2 \ \forall x, y \in M_4$.

Έστω ότι κάνουμε ένα μετασχηματισμό Poincaré:

$$x^\mu \to x'^\mu = (\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + a_1^\mu = (\Lambda_1 x)^\mu + a_1^\mu$$

και στη συνέχεια ένα δεύτερο μετασχηματισμό Poincaré, $x'^\mu \to x''^\mu$, όπου:

$$\begin{aligned} x''^\mu &= (\Lambda_2)^\mu{}_\nu x'^\nu + a_2^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu \left[(\Lambda_1)^\nu{}_\rho x^\rho + a_1^\nu\right] + a_2^\mu = \\ &= (\Lambda_2)^\mu{}_\nu (\Lambda_1)^\nu{}_\rho x^\rho + (\Lambda_2)^\mu{}_\nu a_1^\nu + a_2^\mu = \\ &= (\Lambda_2\Lambda_1)^\mu{}_\rho x^\rho + ((\Lambda_2 a_1)^\mu + a_2^\mu) \end{aligned}$$

Άρα, εάν συμβολίσουμε τον τυχόντα μετασχηματισμό Poincaré της (2.2.1) ως (Λ, a), έχουμε τον ακόλουθο κανόνα για τη σύνθεση δύο μετασχηματισμών Poincaré:

$$(\Lambda_2, a_2) \circ (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \tag{2.2.2}$$

Έτσι, λέμε ότι η ομάδα Poincaré, P, είναι το ημιευθύ γινόμενο της ομάδας Lorentz, $O(1,3)$, και της ομάδας των μετατοπίσεων στο χώρο Minkowski, έστω T_4. Όπως και η ομάδα Lorentz, η ομάδα Poincaré αποτελείται από τέσσερις ασύνδετες μεταξύ τους συνιστώσες,

$$P_+^\uparrow, P_+^\downarrow, P_-^\uparrow, P_-^\downarrow$$

όπου

$$\begin{aligned} P_+^\uparrow &\equiv \{(\Lambda, a) \in P | \det\Lambda = +1, \Lambda^0{}_0 \geq 1\} \\ P_+^\downarrow &\equiv \{(\Lambda, a) \in P | \det\Lambda = +1, \Lambda^0{}_0 \leq -1\} \\ P_-^\uparrow &\equiv \{(\Lambda, a) \in P | \det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \geq 1\} \\ P_-^\downarrow &\equiv \{(\Lambda, a) \in P | \det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \leq -1\} \end{aligned}$$

Το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας Poincaré είναι το $(\mathbb{1}, 0)$, όπου $\mathbb{1}$ είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός Lorentz, ενώ ο αντίστροφος του μετασχηματισμού $(\Lambda, a) \in P$ είναι ο $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$. Πράγματι, εφαρμόζοντας τον κανόνα σύνθεσης (2.2.2), παίρνουμε:

$$(\Lambda, a) \circ (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda\Lambda^{-1}, -\Lambda(\Lambda^{-1}a) + a) = (\Lambda\Lambda^{-1}, -(\Lambda\Lambda^{-1})a + a) = (\mathbb{1}, 0)$$

και

$$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \circ (\Lambda, a) = (\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a) = (\mathbb{1}, 0)$$

Ας επικεντρωθούμε τώρα στο σύνολο $P_+^\uparrow$, το οποίο αποτελεί μία υποομάδα της ομάδας Poincaré, και του οποίου τα στοιχεία συνδέονται με συνεχή τρόπο με το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας Poincaré. Στο εξής, με τον όρο «ομάδα Poincaré» θα αναφερόμαστε στην υποομάδα $P_+^\uparrow$ της πλήρους ομάδας Poincaré, P, ενώ με τον όρο «άλγεβρα Poincaré» θα αναφερόμαστε στην άλγεβρα Lie της $P_+^\uparrow$.

Κάθε μετασχηματισμός $(\Lambda, a) \in P_+^\uparrow$ αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό και μοναδιακό τελεστή $U(\Lambda, a)$, ο οποίος δρα σε ένα χώρο Hilbert. Οι τελεστές $U(\Lambda, a)$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$U(\Lambda', a')U(\Lambda, a) = U(\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a') \tag{2.2.3}$$

$$(U(\Lambda, a))^{-1} = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \tag{2.2.4}$$

για κάθε $\Lambda, \Lambda' \in SO(1,3)^\uparrow$ και για δύο οποιαδήποτε τετρανύσματα a^μ και a'^μ. Το σύνολο αυτών των τελεστών U αποτελεί μία απειροδιάσταση μοναδιακή αναπαράσταση της ομάδας Poincaré.

Για έναν απειροστό μετασχηματισμό Poincaré είναι:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu,\ a^\mu = \epsilon^\mu, \tag{2.2.5}$$

όπου $\omega^\mu{}_\nu = -\omega_\nu{}^\mu$ είναι έξι ανεξάρτητες απειροστές παράμετροι που αντιστοιχούν σε έναν απειροστό μετασχηματισμό Lorentz $\Lambda \in SO(1,3)^\uparrow$ και ϵ^μ τέσσερις απειροστές παράμετροι, που αντιστοιχούν σε μία απειροστή μετατόπιση στο χωροχρόνο. Για έναν τέτοιο μετασχηματισμό, ο αντίστοιχος τελεστής μπορεί να γραφεί ως

$$U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) = I - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} + i\epsilon_\mu P^\mu \tag{2.2.6}$$

όπου οι $M^{\rho\sigma} = -M^{\sigma\rho}$ και P^μ είναι Ερμιτιανοί τελεστές, οι οποίοι αποτελούν τους γεννήτορες της ομάδας Lorentz και της ομάδας των μετατοπίσεων στο χώρο Minkowski αντίστοιχα. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πως το γεγονός ότι οι $M^{\rho\sigma}$ και P^μ είναι Ερμιτιανοί τελεστές εξασφαλίζει τη μοναδιακότητα του τελεστή $U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)$.

Εάν Λ, Λ' είναι δύο τυχαίοι γνήσιοι και ορθόχρονοι μετασχηματισμοί Lorentz και a'^μ ένα τυχαίο τετράνυσμα, έχουμε:

$$\begin{aligned}(U(\Lambda,0))^{-1}U(\Lambda',a')U(\Lambda,0) &\overset{(2.2.3)}{=} (U(\Lambda,0))^{-1}U(\Lambda'\Lambda,a') = \\ &\overset{(2.2.4)}{=} U(\Lambda^{-1},0)U(\Lambda'\Lambda,a') = \\ &\overset{(2.2.3)}{=} U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda,\Lambda^{-1}a')\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Για έναν απειροστό μετασχηματισμό $(\Lambda', a') = (\mathbb{1} + \omega', \epsilon') \in P_+^\uparrow$, το αριστερό μέλος της (2.2.7) γίνεται:

$$\begin{aligned}(U(\Lambda,0))^{-1}U(\Lambda',a')U(\Lambda,0) &= (U(\Lambda,0))^{-1}U(\mathbb{1}+\omega',\epsilon')U(\Lambda,0) \overset{(2.2.6)}{=} \\ &= (U(\Lambda,0))^{-1}\left(I - \frac{i}{2}\omega'_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} + i\epsilon'_\mu P^\mu\right)U(\Lambda,0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (U(\Lambda,0))^{-1}U(\Lambda',a')U(\Lambda,0) &= I - \frac{i}{2}\omega'_{\rho\sigma}(U(\Lambda,0))^{-1}M^{\rho\sigma}U(\Lambda,0) + i\epsilon'_\mu(U(\Lambda,0))^{-1}P^\mu U(\Lambda,0)\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Το δεξιό μέλος της (2.2.7) γράφεται:

$$\begin{aligned}U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda,\Lambda^{-1}a') &= U(\Lambda^{-1}(\mathbb{1}+\omega')\Lambda,\Lambda^{-1}\epsilon') = \\ &= U(\mathbb{1}+\Lambda^{-1}\omega'\Lambda,\Lambda^{-1}\epsilon') = \\ &= I - \frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\omega'\Lambda)_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} + i(\Lambda^{-1}\epsilon')_\mu P^\mu =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= I - \frac{i}{2}(\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu \omega'_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma M^{\rho\sigma} + i(\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu \epsilon'_\nu P^\mu = \\
&= I - \frac{i}{2}\Lambda^\mu{}_\rho \omega'_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma M^{\rho\sigma} + i\Lambda^\nu{}_\mu \epsilon'_\nu P^\mu \Rightarrow \\
\Rightarrow U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda, \Lambda^{-1}a') &= I - \frac{i}{2}\omega'_{\rho\sigma}\Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu M^{\mu\nu} + i\epsilon'_\mu \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu
\end{aligned} \tag{2.2.9}
$$

Από τις (2.2.7)-(2.2.9) προκύπτει ότι

$$
(U(\Lambda,0))^{-1}M^{\rho\sigma}U(\Lambda,0) = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu M^{\mu\nu} \tag{2.2.10}
$$

$$
(U(\Lambda,0))^{-1}P^{\mu}U(\Lambda,0) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \tag{2.2.11}
$$

Επομένως, κάτω από την ομάδα $SO(1,3)^\uparrow$ το $M^{\rho\sigma}$ μετασχηματίζεται ως τανυστής δεύτερης τάξης, όπως δείχνει η (2.2.10), και το P^μ μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα, όπως φαίνεται από την (2.2.11).

Θεωρούμε τώρα απειροστό μετασχηματισμό $\Lambda = \mathbb{1} + \omega \in SO(1,3)^\uparrow$. Αντικαθιστώντας το μετασχηματισμό αυτό στη (2.2.10) και αγνοώντας τους όρους τάξης ≥ 2 ως προς ω, λαμβάνουμε τις σχέσεις μετάθεσης της άλγεβρας Lorentz, (2.1.24). Από την άλλη μεριά, η (2.2.11) δίνει:

$$
\begin{aligned}
&(U(\Lambda,0))^{-1}P^\mu U(\Lambda,0) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \Rightarrow \\
\Rightarrow &(U(\mathbb{1}+\omega,0))^{-1}P^\mu U(\mathbb{1}+\omega,0) = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu)P^\nu \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left(I - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right)^{-1} P^\mu \left(I - \frac{i}{2}\omega_{\lambda\tau}M^{\lambda\tau}\right) = P^\mu + \omega^\mu{}_\nu P^\nu \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left(I - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right)^{\dagger} P^\mu \left(I - \frac{i}{2}\omega_{\lambda\tau}M^{\lambda\tau}\right) = P^\mu + \omega^\mu{}_\nu P^\nu \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left(I + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right) P^\mu \left(I - \frac{i}{2}\omega_{\lambda\tau}M^{\lambda\tau}\right) = P^\mu + \omega^\mu{}_\nu P^\nu \Rightarrow \\
\Rightarrow &\cancel{P^\mu} - \frac{i}{2}\omega_{\lambda\tau}P^\mu M^{\lambda\tau} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}P^\mu + \mathcal{O}(\omega^2) = \cancel{P^\mu} + \omega^\mu{}_\nu P^\nu \Rightarrow \\
\Rightarrow &\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(M^{\rho\sigma}P^\mu - P^\mu M^{\rho\sigma}\right) = \omega^\mu{}_\nu P^\nu \Rightarrow \\
\Rightarrow &\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\left[M^{\rho\sigma}, P^\mu\right] = \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\sigma}P^\sigma = \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\eta^{\mu\rho}P^\sigma + \frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}\eta^{\mu\sigma}P^\rho \Rightarrow \\
\Rightarrow &i\omega_{\rho\sigma}\left[M^{\rho\sigma}, P^\mu\right] = \omega_{\rho\sigma}\left(\eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho\right)
\end{aligned}
$$

για αυθαίρετα $\omega_{\rho\sigma}$ με $\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}$, όπου έχουμε κρατήσει μόνο τους όρους μέχρι και πρώτης τάξης ως προς ω. Έτσι, έπεται ότι:

$$
\begin{aligned}
&i\left[M^{\rho\sigma}, P^\mu\right] = \eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left[M^{\rho\sigma}, P^\mu\right] = -i\left(\eta^{\rho\mu}P^\sigma - \eta^{\sigma\mu}P^\rho\right) \\
&\text{ή} \\
&\left[M^{\mu\nu}, P^\rho\right] = -i\left(\eta^{\mu\rho}P^\nu - \eta^{\nu\rho}P^\mu\right)
\end{aligned} \tag{2.2.12}
$$

Τέλος, είναι προφανές ότι η ομάδα των μετατοπίσεων στο χώρο Minkowski είναι Αβελιανή, οπότε οι αντίστοιχοι γεννήτορες ικανοποιούν την τετριμμένη σχέση μετάθεσης:

$$
\left[P^\mu, P^\nu\right] = 0 \tag{2.2.13}
$$

Οι σχέσεις μετάθεσης (2.1.24), (2.2.12) και (2.2.13) δίνουν την άγεβρα Lie της ομάδας Poincaré, ή άλγεβρα Poincaré:

$$
\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] = -i\left(\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}\right) \tag{2.2.14}
$$

$$
\left[M^{\mu\nu}, P^\rho\right] = -i\left(\eta^{\mu\rho}P^\nu - \eta^{\nu\rho}P^\mu\right) \tag{2.2.15}
$$

$$
\left[P^\mu, P^\nu\right] = 0 \tag{2.2.16}
$$

2.3 Σπίνορες Weyl

Θεωρούμε την ειδική γραμμική ομάδα $SL(2,C)$, η οποία αποτελείται από τους 2×2 πίνακες με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς και ορίζουσα ίση με 1. Μία γραμμική αναπαράσταση αυτής της ομάδας είναι μία απεικόνιση από την ομάδα $SL(2,C)$ στην ομάδα των αυτομορφισμών ενός συγκεκριμένου διανυσματικού χώρου F, δηλαδή:

$$M \in SL(2,C) \rightarrow D(M) \tag{2.3.1}$$

Η ομάδα των αυτομορφισμών του F ορίζεται ως το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από το F στο F, που είναι 1-1 και επί, εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων. Απαιτούμε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$D(\mathbb{1}_{SL(2,C)}) = \mathbb{1}_F \tag{2.3.2}$$

$$D(M_1)D(M_2) = D(M_2 \cdot M_2),\ \forall M_1, M_2 \in SL(2,C) \tag{2.3.3}$$

όπου $\mathbb{1}_{SL(2,C)}$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας $SL(2,C)$ (ο ταυτοτικός 2×2 πίνακας, I_2) και $\mathbb{1}_F$ είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός στο διανυσματικό χώρο F.

Έστω ψ ένα τυχαίο στοιχείο του F και $\{\hat{e}_i\}_{i=1,2,\ldots,\dim F}$ η κανονική βάση του F, ενώ με $\dim F$ συμβολίζουμε τη διάσταση του χώρου F. Τότε έχουμε:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\dim F} \psi_n \hat{e}_n \tag{2.3.4}$$

και οι πίνακες αναπαράστασης $D(M)$ δρουν στο ψ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$D(M)\psi = \sum_{n=1}^{\dim F} \psi'_n \hat{e}_n \tag{2.3.5}$$

όπου

$$\psi'_n \equiv \sum_{i=1}^{\dim F} D_n{}^i(M)\psi_i \tag{2.3.6}$$

Το σύνολο $(D_n{}^m(M))$ είναι $\dim F \times \dim F$ πίνακες που καλούνται πίνακες αναπαράστασης, ενώ η διάσταση της αναπαράστασης ισούται με $\dim F$.

Δύο αναπαραστάσεις $D^{(1)}, D^{(2)}$ λέγονται ισοδύναμες, εάν μπορεί να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος $\dim F \times \dim F$ πίνακας U, τέτοιος ώστε:

$$D^{(1)}(M) = UD^{(2)}(M)U^{-1} \tag{2.3.7}$$

Οι βασικές αναπαραστάσεις της $SL(2,C)$ είναι:

- Η θεμελιώδης αναπαράσταση, η οποία ορίζεται ως

  $$D(M) \equiv M,\ \forall M \in SL(2,C) \tag{2.3.8}$$

  Επομένως, η διάσταση της θεμελιώδους αναπαράστασης της $SL(2,C)$ είναι ίση με 2. Ένα τυχαίο στοιχείο του διανυσματικού χώρου, στον οποίο δρα η αναπαράσταση αυτή, έστω F, είναι ένα αντικείμενο δύο μιγαδικών συνιστωσών, ψ_α, το οποίο μετασχηματίζεται κάτω από την $SL(2,C)$ ως [5]

  $$\psi_\alpha \rightarrow \psi'_\alpha = M_\alpha{}^\beta \psi_\beta,\ \alpha, \beta = 1, 2 \tag{2.3.9}$$

  Τα αντικείμενα $\psi_\alpha \in F$, που μετασχηματίζονται σύμφωνα με την (2.3.9) κάτω από την ομάδα $SL(2,C)$, ονομάζονται αριστερόστροφοι σπίνορες Weyl, ενώ η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SL(2,C)$ συμβολίζεται ως $(\frac{1}{2}, 0)$.

[5] Υιοθετούμε τη σύμβαση άθροισης του Einstein και για σπινοριακούς δείκτες $\alpha, \beta, \ldots$.

- Η συζυγής μιγαδική της θεμελιώδους αναπαράστασης ή αντιθεμελιώδης αναπαράσταση, η οποία ορίζεται ως
$$D(M) \equiv M^*, \ \forall M \in SL(2,C) \tag{2.3.10}$$
όπου το $*$ δηλώνει μιγαδική συζυγία. Η διάσταση αυτής της αναπαράστασης ισούται και αυτή με 2. Συμβολίζουμε το διανυσματικό χώρο, στον οποίο δρα η αντιθεμελιώδης αναπαράσταση της $SL(2,C)$, με $\dot{F}$. Ένα τυχαίο στοιχείο του χώρου αυτού συμβολίζεται με $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}$ και είναι ένα αντικείμενο δύο συνιστωσών που μετασχηματίζεται κάτω από την $SL(2,C)$ ως
$$\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \to \overline{\psi}'_{\dot{\alpha}} = (M^*)_{\dot{\alpha}}^{\ \dot{\beta}} \overline{\psi}_{\dot{\beta}}, \ \dot{\alpha}, \dot{\beta} = \dot{1}, \dot{2} \tag{2.3.11}$$
Τα αντικείμενα $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \in \dot{F}$, τα οποία μετασχηματίζονται σύμφωνα με την (2.3.11) κάτω από την ομάδα $SL(2,C)$, ονομάζονται δεξιόστροφοι σπίνορες Weyl, ενώ η αντιθεμελιώδης αναπαράσταση της $SL(2,C)$ συμβολίζεται με $(0, \frac{1}{2})$.

Εάν θεωρήσουμε τη μιγαδική συζυγή της εξίσωσης (2.3.9):
$$(\psi_\alpha)^* \to (M_\alpha^{\ \beta})^* (\psi_\beta)^*$$
και τη συγκρίνουμε με την (2.3.11), βλέπουμε ότι εάν ορίσουμε $(M^*)_{\dot{\alpha}}^{\ \dot{\beta}} \equiv \left(M_\alpha^{\ \beta}\right)^*$ [6], μπορούμε να ταυτοποιήσουμε το $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}$ με το $(\psi_\alpha)^*$, δηλαδή
$$\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = (\psi_\alpha)^*, \ \alpha = 1,2 \tag{2.3.12}$$
Η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SL(2,C)$ και η συζυγής μιγαδική της δεν είναι ισοδύναμες, δηλαδή δεν είναι δυνατό να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας C, τέτοιος ώστε $M = CM^*C^{-1}$.

Ισχύει ότι η αναπαράσταση της ομάδας $SL(2,C)$ με
$$D(M) = \left(M^{-1}\right)^T \tag{2.3.13}$$
είναι ισοδύναμη με τη θεμελιώδη αναπαράσταση της ομάδας αυτής, η οποία δίνεται από την (2.3.8). Για να το αποδείξουμε αυτό, αρκεί να βρούμε ένα 2×2 αντιστρέψιμο πίνακα ϵ τέτοιον ώστε
$$\epsilon M \epsilon^{-1} = \left(M^{-1}\right)^T \tag{2.3.14}$$
$\forall M \in S(2,C)$. Ένας τέτοιος πίνακας είναι ο
$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
του οποίου ο αντίστροφος είναι ο
$$\epsilon^{-1} = \frac{1}{\det \epsilon} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\det \epsilon = 1}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Πράγματι, εάν
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
είναι ένα τυχαίο στοιχεία της $SL(2,C)$, όπου
$$\det M = ad - bc = 1 \tag{2.3.15}$$

[6] Βλ. σχέση (2.34) στο [8]

έχουμε

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\left(M^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{2.3.16}$$

Έτσι, είναι:

$$\begin{aligned} \epsilon M \epsilon^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \overset{(2.3.16)}{=} \left(M^{-1}\right)^T \end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα τους αντισυμμετρικούς τανυστές $\varepsilon^{\alpha\beta}$ και $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ως

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \equiv \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } \varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3.17}$$

δηλαδή $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ και $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = -\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 1$. Από τους ορισμούς αυτούς, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\gamma} = \varepsilon^{\gamma\beta}\varepsilon_{\beta\alpha} = \delta^\gamma_\alpha \tag{2.3.18}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\delta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha\delta^\delta_\beta - \delta^\delta_\alpha\delta^\gamma_\beta, \tag{2.3.19}$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$ και $\delta^\alpha_\beta \equiv \begin{cases} 1 & \text{αν } \alpha = \beta \\ 0 & \text{αν } \alpha \neq \beta \end{cases}$. Με βάση τους ορισμούς (2.3.17), η (2.3.14) μπορεί να γραφεί ως

$$\varepsilon^{\alpha\beta}{M_\beta}^\gamma\varepsilon_{\gamma\delta} = \left[(M^{-1})^T\right]^\alpha_{\ \delta} \tag{2.3.20}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.3.20) επί $\varepsilon_{\zeta\alpha}$ από αριστερά και $\varepsilon^{\delta\eta}$ από δεξιά, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\zeta\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}{M_\beta}^\gamma\varepsilon_{\gamma\delta}\varepsilon^{\delta\eta} = \varepsilon_{\zeta\alpha}\left[(M^{-1})^T\right]^\alpha_{\ \delta}\varepsilon^{\delta\eta} \xRightarrow{(2.3.18)} \\ \Rightarrow &\delta^\beta_\zeta{M_\beta}^\gamma\delta^\eta_\gamma = \varepsilon_{\zeta\alpha}\left[(M^{-1})^T\right]^\alpha_{\ \delta}\varepsilon^{\delta\eta} \Rightarrow \\ \Rightarrow &{M_\zeta}^\eta = \varepsilon_{\zeta\alpha}\left[(M^{-1})^T\right]^\alpha_{\ \delta}\varepsilon^{\delta\eta} \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

Θεωρούμε τώρα έναν αριστερόστροφο σπίνορα Weyl ψ_α. Αυτός μετασχηματίζεται κάτω από την ομάδα $SL(2, C)$ ως

$$\begin{aligned} \psi_\alpha \rightarrow &\psi'_\alpha = {M_\alpha}^\beta\psi_\beta \overset{(2.3.21)}{=} \varepsilon_{\alpha\gamma}\left[(M^{-1})^T\right]^\gamma_{\ \delta}\varepsilon^{\delta\beta}\psi_\beta \Rightarrow \\ \Rightarrow &\varepsilon^{\zeta\alpha}\psi'_\alpha = \varepsilon^{\zeta\alpha}\varepsilon_{\alpha\gamma}\left[(M^{-1})^T\right]^\gamma_{\ \delta}\varepsilon^{\delta\beta}\psi_\beta \Rightarrow \\ \Rightarrow &\varepsilon^{\zeta\alpha}\psi'_\alpha = \delta^\zeta_\gamma\left[(M^{-1})^T\right]^\gamma_{\ \delta}\varepsilon^{\delta\beta}\psi_\beta = \left[(M^{-1})^T\right]^\zeta_{\ \delta}\varepsilon^{\delta\beta}\psi_\beta \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε έναν αριστερόστροφο σπίνορα Weyl με ανταλλοίωτο (άνω) σπινοριακό δείκτη ως

$$\psi^\alpha \equiv \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta \tag{2.3.23}$$

Από τις (2.3.22) και (2.3.23) έπεται ότι ο σπίνορας ψ^α μετασχηματίζεται κάτω από την ομάδα $SL(2, C)$ ως

$$\psi^\alpha \rightarrow \psi'^\alpha = \left[(M^{-1})^T\right]^\alpha_{\ \beta}\psi^\beta \tag{2.3.24}$$

Επιπλέον, εάν πολλαπλασιάσουμε την (2.3.23) επί $\varepsilon_{\gamma\alpha}$ από αριστερά, λαμβάνουμε:

$$\varepsilon_{\gamma\alpha}\psi^\alpha = \varepsilon_{\gamma\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta = \delta^\beta_\gamma\psi_\beta = \psi_\gamma$$

ή

$$\psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta \tag{2.3.25}$$

Συνεπώς, μπορούμε να ανεβάζουμε και να κατεβάζουμε τους δείκτες αριστερόστροφων σπινόρων Weyl, οι οποίοι δε φέρουν τελεία (undotted indices), χρησιμοποιώντας τους τανυστές $\varepsilon^{\alpha\beta}$ και $\varepsilon_{\alpha\beta}$ αντίστοιχα, όπως υποδεικνύουν οι σχέσεις (2.3.23) και (2.3.25) αντίστοιχα.

Ακόμη, η αναπαράσταση της ομάδας $SL(2,C)$ με

$$D(M) = \left[(M^*)^{-1}\right]^T = \left[(M^*)^T\right]^{-1} = \left(M^\dagger\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^\dagger \tag{2.3.26}$$

είναι ισοδύναμη με την αντιθεμελιώδη αναπαράσταση, που δίνεται από την (2.3.10). Πράγματι, εργαζόμενοι με παρόμοιο τρόπο όπως και για την απόδειξη της ισοδυναμίας των αναπαραστάσεων της $SL(2,C)$ που δίνονται από τις (2.3.8) και (2.3.13), μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\overline{\epsilon} M^* \overline{\epsilon}^{-1} = \left(M^{-1}\right)^\dagger \tag{2.3.27}$$

$\forall M \in SL(2,C)$, όπου

$$\overline{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } \overline{\epsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε τους αντισυμμετρικούς τανυστές $\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}$ και $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$, οι οποίοι φέρουν δείκτες με τελεία (dotted indices), ως

$$\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \equiv \overline{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \equiv \overline{\epsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3.28}$$

δηλαδή $\varepsilon^{\dot1\dot1} = \varepsilon^{\dot2\dot2} = \varepsilon_{\dot1\dot1} = \varepsilon_{\dot2\dot2} = 0$ και $\varepsilon^{\dot1\dot2} = -\varepsilon^{\dot2\dot1} = -\varepsilon_{\dot1\dot2} = \varepsilon_{\dot2\dot1} = 1$. Οι τανυστές αυτοί ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma} = \varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\alpha} = \delta^{\dot\gamma}_{\dot\alpha} \tag{2.3.29}$$

$$\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\delta\dot\gamma} = \delta^{\dot\gamma}_{\dot\alpha}\delta^{\dot\delta}_{\dot\beta} - \delta^{\dot\delta}_{\dot\alpha}\delta^{\dot\gamma}_{\dot\beta}, \tag{2.3.30}$$

όπου $\dot\alpha, \dot\beta, \dot\gamma, \dot\delta = \dot1, \dot2$ και $\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha} \equiv \begin{cases} 1 & \text{αν } \dot\alpha = \dot\beta \\ 0 & \text{αν } \dot\alpha \neq \dot\beta \end{cases}$. Με βάση τους ορισμούς (2.3.28), μπορούμε να γράψουμε την (2.3.27) ως:

$$\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\left(M^*\right)_{\dot\beta}^{\ \dot\gamma}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta} = \left[(M^{-1})^\dagger\right]^{\dot\alpha}_{\ \dot\delta} \tag{2.3.31}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.3.31) επί $\varepsilon_{\dot\zeta\dot\alpha}$ από αριστερά και $\varepsilon^{\dot\delta\dot\eta}$ από δεξιά, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\dot\zeta\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\left(M^*\right)_{\dot\beta}^{\ \dot\gamma}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta}\varepsilon^{\dot\delta\dot\eta} = \varepsilon_{\dot\zeta\dot\alpha}\left[(M^{-1})^\dagger\right]^{\dot\alpha}_{\ \dot\delta}\varepsilon^{\dot\delta\dot\eta} \Rightarrow \\ \Rightarrow &\delta^{\dot\beta}_{\dot\zeta}\left(M^*\right)_{\dot\beta}^{\ \dot\gamma}\delta^{\dot\eta}_{\dot\gamma} = \varepsilon_{\dot\zeta\dot\alpha}\left[(M^{-1})^\dagger\right]^{\dot\alpha}_{\ \dot\delta}\varepsilon^{\dot\delta\dot\eta} \Rightarrow \\ \Rightarrow &\left(M^*\right)_{\dot\zeta}^{\ \dot\eta} = \varepsilon_{\dot\zeta\dot\alpha}\left[(M^{-1})^\dagger\right]^{\dot\alpha}_{\ \dot\delta}\varepsilon^{\dot\delta\dot\eta} \end{aligned} \tag{2.3.32}$$

Οι δεξιόστροφοι σπίνορες Weyl, οι οποίοι φέρουν δείκτη με τελεία, μετασχηματίζονται κάτω από την $SL(2,C)$ ως

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_{\dot\alpha} \to &\overline{\psi}'_{\dot\alpha} = \left(M^*\right)_{\dot\alpha}^{\ \dot\beta}\overline{\psi}_{\dot\beta} \overset{(2.3.32)}{=} \varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\left[(M^{-1})^\dagger\right]^{\dot\gamma}_{\ \dot\delta}\varepsilon^{\dot\delta\dot\beta}\overline{\psi}_{\dot\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow &\varepsilon^{\dot\zeta\dot\alpha}\overline{\psi}'_{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\zeta\dot\alpha}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\left[(M^{-1})^\dagger\right]^{\dot\gamma}_{\ \dot\delta}\varepsilon^{\dot\delta\dot\beta}\overline{\psi}_{\dot\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow &\varepsilon^{\dot\zeta\dot\alpha}\overline{\psi}'_{\dot\alpha} = \delta^{\dot\zeta}_{\dot\gamma}\left[(M^{-1})^\dagger\right]^{\dot\gamma}_{\ \dot\delta}\varepsilon^{\dot\delta\dot\beta}\overline{\psi}_{\dot\beta} = \left[(M^{-1})^\dagger\right]^{\dot\zeta}_{\ \dot\delta}\varepsilon^{\dot\delta\dot\beta}\overline{\psi}_{\dot\beta} \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

Ορίζοντας τους δεξιόστροφους σπίνορες Weyl με ανταλλοίωτο (άνω) δείκτη από τη σχέση:

$$\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \equiv \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\psi}_{\dot{\beta}} \tag{2.3.34}$$

συμπεραίνουμε, βασιζόμενοι στην (2.3.33), ότι οι τελευταίοι μετασχηματίζονται κάτω από την ομάδα $SL(2,C)$ ως

$$\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \to \overline{\psi}'^{\dot{\alpha}} = \left[(M^{-1})^{\dagger}\right]^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}}\overline{\psi}^{\dot{\beta}} \tag{2.3.35}$$

Ακόμη, πολλαπλασιάζοντας την (2.3.34) επί $\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}$ από αριστερά, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\psi}_{\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}}\overline{\psi}_{\dot{\beta}} = \overline{\psi}_{\dot{\gamma}}\\
&\text{ή}\\
&\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\psi}^{\dot{\beta}}
\end{aligned} \tag{2.3.36}$$

Συνεπώς, μπορούμε να ανεβάζουμε και να κατεβάζουμε τους δείκτες δεξιόστροφων σπινόρων Weyl, οι οποίοι φέρουν τελεία, χρησιμοποιώντας τους τανυστές $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ και $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ αντίστοιχα, όπως υποδεικνύουν οι (2.3.34) και (2.3.36) αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε: Για οποιονδήποτε $M \in SL(2,C)$, οι πίνακες $M, M^*, \left(M^{-1}\right)^T$ και $\left(M^{-1}\right)^\dagger$ αναπαριστούν όλοι την ομάδα $SL(2,C)$. Έχουμε 4 «κατηγορίες» σπινόρων δύο συνιστωσών: αριστερόστροφους σπίνορες Weyl με συναλλοίωτο (κάτω) δείκτη (ψ_α), αριστερόστροφους σπίνορες Weyl με ανταλλοίωτο δείκτη (ψ^α), δεξιόστροφους σπίνορες Weyl με συναλλοίωτο δείκτη ($\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}$) και δεξιόστροφους σπίνορες Weyl με ανταλλοίωτο δείκτη ($\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}$), οι οποίοι μετασχηματίζονται κάτω από την ομάδα $SL(2,C)$ ως

$$\psi_\alpha \to \psi'_\alpha = M_\alpha^{\ \beta}\psi_\beta \tag{2.3.37α}$$

$$\psi^\alpha \to \psi'^\alpha = \left[(M^{-1})^T\right]^\alpha_{\ \beta}\psi^\beta \tag{2.3.37β}$$

$$\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \to \overline{\psi}'_{\dot{\alpha}} = (M^*)_{\dot{\alpha}}^{\ \dot{\beta}}\overline{\psi}_{\dot{\beta}} \tag{2.3.37γ}$$

$$\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \to \overline{\psi}'^{\dot{\alpha}} = \left[(M^{-1})^{\dagger}\right]^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}}\overline{\psi}^{\dot{\beta}} \tag{2.3.37δ}$$

Επιπλέον, εάν θεωρήσουμε τη μιγαδική συζυγή της (2.3.37β):

$$(\psi^\alpha)^* \to \left\{\left[(M^{-1})^T\right]^\alpha_{\ \beta}\right\}^*\left(\psi^\beta\right)^*$$

και τη συγκρίνουμε με την (2.3.37δ), παρατηρούμε ότι μπορούμε να ταυτοποιήσουμε το $\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}$ με το $(\psi^\alpha)^*$:

$$\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = (\psi^\alpha)^*,\ \alpha = 1,2 \tag{2.3.37}$$

αφού

$$\left[(M^{-1})^{\dagger}\right]^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} = \left\{\left[(M^{-1})^*\right]^T\right\}^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} = \left[(M^{-1})^*\right]_{\dot{\beta}}^{\ \dot{\alpha}} = \left[(M^{-1})_\beta^{\ \alpha}\right]^* = \left\{\left[(M^{-1})^T\right]^\alpha_{\ \beta}\right\}^*$$

Επιπρόσθετα, συγκρίνοντας τη μιγαδική συζυγή της (2.3.25) με την (2.3.36) και τη μιγαδική συζυγή της (2.3.23) με την (2.3.34) και λαμβάνοντας συγχρόνως υπόψη τις (2.3.12) και (2.3.37), οδηγούμαστε στις ταυτοποιήσεις:

$$\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\varepsilon_{\alpha\beta})^*,\ \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\varepsilon^{\alpha\beta})^* \tag{2.3.38}$$

όπου $\alpha, \beta = 1, 2$. Οι (2.3.38) μπορεί να φαίνονται τετριμμένες, αφού οι τανυστές $\varepsilon_{\alpha\beta}$ και $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, όπως και οι $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ και $\varepsilon^{\alpha\beta}$, έχουν πραγματικές συνιστώσες, οι οποίες είναι αριθμητικά ίσες μία προς μία, αλλά αντανακλούν το γεγονός ότι οι σπινοριακοί δείκτες με τελεία σχετίζονται με τη συζυγή μιγαδική της θεμελιώδους αναπαράστασης της $SL(2,C)$ (ή την ισοδύναμή της).

2.4 Η σχέση της ομάδας $SL(2,C)$ με την $SO(1,3)^{\uparrow}$

Σε αυτή την ενότητα μελετούμε τη σύνδεση ανάμεσα στην ομάδα $SL(2,C)$ και την ομάδα των γνήσιων και ορθόχρονων μετασχηματισμών Lorentz, $SO(1,3)^{\uparrow}$. Θα δείξουμε αρχικά ότι η ομάδα $SO(1,3)^{\uparrow}$ είναι ομομορφική με την $SL(2,C)$, δηλαδή ότι για κάθε $M \in SL(2,C)$ υπάρχει ένας πίνακας Lorentz $\Lambda = \Lambda(M) \in SO(1,3)^{\uparrow}$, έτσι ώστε

$$\Lambda(M_1)\Lambda(M_2) = \Lambda(M_1 M_2) \tag{2.4.1}$$

για κάθε $M_1, M_2 \in SL(2,C)$.

Ξεκινάμε εισάγοντας ένα σύνολο τεσσάρων πινάκων

$$\sigma^{\mu} = (\sigma^0, \vec{\sigma}) = (I_2, \vec{\sigma}) \tag{2.4.2}$$

όπου $\sigma^0 = I_2$ είναι ο 2×2 ταυτοτικός πίνακας και $\vec{\sigma} \equiv (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$, όπου σ^i, $i = 1,2,3$, είναι οι πίνακες του Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.4.3}$$

Ορίζουμε επίσης και την αντίστοιχη της (2.4.2) ποσότητα με συναλλοίωτο (κάτω) δείκτη:

$$\sigma_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\sigma^{\nu} = (I_2, -\vec{\sigma}) \tag{2.4.4}$$

Θα δείξουμε παρακάτω ότι οι πίνακες σ^{μ}, $\mu = 0,1,2,3$, έχουν την εξής δομή σπινοριακών δεικτών:

$$(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}, \tag{2.4.5}$$

όπου $\alpha = 1,2$, $\dot{\alpha} = \dot{1},\dot{2}$. Εισάγουμε ακόμη και ένα άλλο σύνολο τεσσάρων πινάκων, $\overline{\sigma}^{\mu}$, με δομή σπινοριακών δεικτών

$$(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}, \tag{2.4.6}$$

οι οποίοι ορίζονται από τη σχέση:

$$(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} \equiv \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\beta}} \tag{2.4.7}$$

Από την (2.4.7) έπεται ότι

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\varepsilon_{\gamma\alpha}\,(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} &= \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\varepsilon_{\gamma\alpha}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\beta}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon_{\gamma\alpha}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\,(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} &= \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}}\delta^{\beta}_{\gamma}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\beta}} = (\sigma^{\mu})_{\gamma\dot{\gamma}} \end{aligned}$$

για κάθε $\gamma = 1,2$, $\dot{\gamma} = \dot{1},\dot{2}$, ή

$$(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta} \tag{2.4.8}$$

Βασιζόμενοι στη σχέση ορισμού των $\overline{\sigma}^{\mu}$, (2.4.7), και στους ορισμούς των τανυστών $\varepsilon^{\alpha\beta}$ και $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\overline{\sigma}^{\mu} = (I_2, -\vec{\sigma}) \tag{2.4.9}$$

οπότε

$$\overline{\sigma}_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\nu} = (I_2, \vec{\sigma}) \tag{2.4.10}$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι

$$\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}) = 2\eta^{\mu\nu} \tag{2.4.11}$$

Επιπλέον, οι πίνακες σ^{μ}, $\mu = 0,1,2,3$, αποτελούν ένα πλήρες σύνολο, με την έννοια ότι κάθε μιγαδικός 2×2 πίνακας μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός τους. Η αντίστοιχη σχέση πληρότητας είναι:

$$(\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\,(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta} = 2\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \tag{2.4.12}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για οποιοδήποτε τετραδιάνυσμα $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in M_4$, ο 2×2 πίνακας

$$X = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x_0 + x^3 \end{pmatrix} \tag{2.4.13}$$

είναι Ερμιτιανός, ενώ η ορίζουσά του ισούται με

$$\begin{aligned}
\det X = & \begin{vmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x_0 + x^3 \end{vmatrix} = \\
& = (x^0 - x^3)(x^0 + x^3) - \left[-(x^1 - ix^2)\right]\left[-(x^1 + ix^2)\right] = \\
& = (x^0)^2 - (x^3)^2 - (x^1 - ix^2)(x^1 + ix^2) = \\
& = (x^0)^2 - (x^3)^2 - \left[(x^1)^2 + (x^2)^2\right] = \\
& = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \\
& = (x_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow \det X = & \det(x^\mu \sigma_\mu) = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Επίσης, για κάθε Ερμιτιανό 2×2 πίνακα X, υπάρχει ένα μοναδικό τετραδιάνυσμα $x^\mu \in M_4$, τέτοιο ώστε

$$X = x^\mu \sigma_\mu \tag{2.4.15}$$

Για να αποδείξουμε την ορθότητα του ισχυρισμού αυτού, θεωρούμε έναν τυχαίο Ερμιτιανό 2×2 πίνακα

$$X = \begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & d \end{pmatrix} \tag{2.4.16}$$

όπου τα a, b, c, d είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Έστω $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ένα τετραδιάνυσμα, για το οποίο ισχύει η (2.4.15). Τότε, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x_0 + x^3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^0 - x^3 = a \\ -x^1 + ix^2 = b - ic \\ -x^1 - ix^2 = b + ic \\ x^0 + x^3 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^0 = \frac{1}{2}(a + d) \\ x^1 = -b \\ x^2 = -c \\ x^3 = -\frac{1}{2}(a - d) \end{cases}$$

Συνεπώς, για τον τυχόντα 2×2 Ερμιτιανό πίνακα (2.4.16), το τετραδιάνυσμα $x^\mu = (\frac{1}{2}(a + d), -b, -c, -\frac{1}{2}(a - d))$ είναι το μοναδικό για το οποίο ισχύει η (2.4.15).

Θεωρούμε τώρα ένα τυχαίο τετραδιάνυσμα $x^\mu \in M_4$ και ένα τυχαίο πίνακα $M \in SL(2, C)$. Ο 2×2 πίνακας

$$X' \equiv MXM^\dagger \equiv Mx^\mu \sigma_\mu M^\dagger$$

είναι Ερμιτιανός, όπως και ο $X = x^\mu \sigma_\mu$, αφού

$$X'^\dagger = \left(MXM^\dagger\right)^\dagger = \left(M^\dagger\right)^\dagger X^\dagger M^\dagger \overset{X^\dagger = X}{=} MXM^\dagger = X'$$

Επομένως, υπάρχει ένα τετραδιάνυσμα, έστω x'^μ, τέτοιο ώστε

$$X' = x'^\mu \sigma_\mu = Mx^\mu \sigma_\mu M^\dagger \tag{2.4.17}$$

Επειδή $M \in SL(2, C)$, είναι $\det M = 1$ και $\det(M^\dagger) = \det\left[(M^*)^T\right] = \det(M^*) = (\det M)^* = 1$, άρα από την (2.4.17) έπεται ότι

$$\det\left(x'^\mu \sigma_\mu\right) = \det\left(Mx^\mu \sigma_\mu M^\dagger\right) = (\det M)(\det(x^\mu \sigma_\mu))(\det(M^\dagger)) =$$

$$= \det(x^\mu \sigma_\mu) \xrightarrow{(2.4.14)}$$
$$\Rightarrow x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu \tag{2.4.18}$$

Συνεπώς, υπάρχει ένας μετασχηματισμός Lorentz Λ, που εξαρτάται από την επιλογή του M, τέτοιος ώστε
$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.4.19}$$

Αντικαθιστώντας την (2.4.19) στη (2.4.17), παίρνουμε:

$$\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu = M x^\mu \sigma_\mu M^\dagger \text{ ή}$$
$$\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu x^\nu = M \sigma_\nu M^\dagger x^\nu$$

για αυθαίρετο $x^\mu \in M_4$. Άρα:
$$\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu = M\sigma_\nu M^\dagger \tag{2.4.20}$$

Για να προσδιορίσουμε το $\Lambda^\mu{}_\nu$, πολλαπλασιάζουμε την (2.4.20) επί $\overline{\sigma}^\rho$ από δεξιά, όπου $\rho = 0, 1, 2, 3$, και παίρνουμε το ίχνος (Tr) της προκύπτουσας ισότητας πινάκων:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(M\sigma_\nu M^\dagger \overline{\sigma}^\rho) &= \mathrm{Tr}(\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\rho) = \Lambda^\mu{}_\nu \, \mathrm{Tr}(\sigma_\mu \overline{\sigma}^\rho) \overset{(2.4.11)}{=} \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu \cdot (2\eta_\mu{}^\rho) = 2\eta^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu = 2\delta^\rho_\mu \Lambda^\mu{}_\nu = 2\Lambda^\rho{}_\nu \Rightarrow \\
\Rightarrow \Lambda^\rho{}_\nu &= \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left[(M\sigma_\nu M^\dagger)\overline{\sigma}^\rho\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\overline{\sigma}^\rho M \sigma_\nu M^\dagger) \\
\text{ή } \Lambda^\mu{}_\nu &= \Lambda^\mu{}_\nu(M) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\overline{\sigma}^\mu M\sigma_\nu M^\dagger)
\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι για κάθε $M \in SL(2, C)$, ο πίνακας Λ που ορίζεται από την (2.4.21) αντιστοιχεί σε γνήσιο και ορθόχρονο μετασχηματισμό Lorentz, δηλαδή

$$\det(\Lambda(M)) = +1 \tag{2.4.22}$$

και
$$\Lambda^0{}_0(M) \geq 1 \tag{2.4.23}$$

για κάθε $M \in SL(2, C)$. Για την απόδειξη της (2.4.22) παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu{}_\nu(I_2) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\overline{\sigma}^\mu \sigma_\nu) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_\nu \overline{\sigma}^\mu) = \\
&= \frac{1}{2}(2\eta_\nu{}^\mu) = \eta^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu = \mathbb{1}^\mu{}_\nu,
\end{aligned}$$

όπου $\mathbb{1}$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας Lorentz $O(1, 3)$ (και προφανώς και της $SO(1, 3)^\uparrow$). Άρα
$$\det(\Lambda(I_2)) = \det(\mathbb{1}) = 1 \tag{2.4.24}$$

Επίσης, είναι:
$$\det(\Lambda(M)) = +1 \text{ ή } \det(\Lambda(M)) = -1 \tag{2.4.25}$$

$\forall\, M \in SL(2, C)$, αφού ο πίνακας $\Lambda(M)$ αντιστοιχεί σε μετασχηματισμό Lorentz. Όμως, η ορίζουσα $\det \Lambda$ είναι μία συνεχής συνάρτηση του Λ, οπότε από τις (2.4.24) και (2.4.25) έπεται ότι η $\det(\Lambda(M))$ πρέπει να ισούται με $+1$, καθώς το M διατρέχει την $SL(2, C)$. Για να αποδείξουμε την (2.4.23), αρχικά παρατηρούμε ότι για $\mu = \nu = 0$ η (2.4.21) δίνει:

$$\Lambda^0{}_0(M) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\overline{\sigma}^0 M\sigma_0 M^\dagger\right) \overset{\overline{\sigma}^0 = \sigma_0 = I_2}{=} \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(MM^\dagger)$$

για οποιονδήποτε $M \in SL(2,C)$. Για τυχόν στοιχείο της ομάδας $SL(2,C)$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

όπου $\det M = ad - bc = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}(MM^\dagger) = \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}\right] = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Lambda^0{}_0(M) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(MM^\dagger) > 0 \end{aligned} \tag{2.4.26}$$

Επίσης, για κάθε $M \in SL(2,C)$, είναι:

$$\Lambda^0{}_0(M) \leq -1 \text{ ή } \Lambda^0{}_0(M) \geq 1, \tag{2.4.27}$$

αφού ο $\Lambda(M)$ αντιστοιχεί σε μετασχηματισμό Lorentz. Από τις (2.4.26) και (2.4.27) έπεται ότι:

$$\Lambda^0{}_0(M) \geq 1, \ \forall\ M \in SL(2,C)$$

Με δεδομένες τις δομές σπινοριακών δεικτών που αποδώσαμε στους πίνακες της ομάδας $SL(2,C)$ M και M^* (βλ. (2.3.9) και (2.3.11) αντίστοιχα), προκύπτει ότι η σωστή δομή σπινοριακών δεικτών για την (2.4.17) είναι

$$x'_\mu(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = M_\alpha{}^\beta x_\mu(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}}(M^*)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$$

όπου έχουμε κάνει χρήση του γεγονότος ότι $(M^\dagger)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \equiv \left[(M^*)^T\right]^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} = (M^*)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η σωστή δομή σπινοριακών δεικτών για τους πίνακες σ^μ είναι πράγματι η (2.4.5).

Ας θεωρήσουμε τώρα την απεικόνιση

$$\phi : SL(2,C) \to SO(1,3)^\uparrow$$

η οποία ορίζεται από τον κανόνα αντιστοίχισης

$$M \to \Lambda^\mu{}_\nu(M) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\overline{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^\dagger\right)$$

Η απεικόνιση αυτή είναι ένας ομομορφισμός από την ομάδα $SL(2,C)$ στην ομάδα $SO(1,3)^\uparrow$, δηλαδή για κάθε $M_1, M_2 \in SL(2,C)$ είναι:

$$\Lambda^\mu{}_\nu(M_1)\Lambda^\nu{}_\rho(M_2) = \Lambda^\mu{}_\rho(M_1 M_2) \tag{2.4.28}$$

Πράγματι, εάν $M_1, M_2 \in SL(2,C)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu(M_1)\Lambda^\nu{}_\rho(M_2) &= \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\overline{\sigma}^\mu M_1 \sigma_\nu M_1^\dagger\right)\right]\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\overline{\sigma}^\nu M_2 \sigma_\rho M_2^\dagger\right)\right] = \\ &= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left(\overline{\sigma}^\mu M_1 \sigma_\nu M_1^\dagger\right)\mathrm{Tr}\left(\overline{\sigma}^\nu M_2 \sigma_\rho M_2^\dagger\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}(M_1)_\alpha{}^\beta(\sigma_\nu)_{\beta\dot{\beta}}(M_1^\dagger)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot{\gamma}\gamma}(M_2)_\gamma{}^\delta(\sigma_\rho)_{\delta\dot{\delta}}(M_2^\dagger)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\gamma}} = \\ &= \frac{1}{4}(\sigma_\nu)_{\beta\dot{\beta}}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot{\gamma}\gamma}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}(M_1)_\alpha{}^\beta(M_1^\dagger)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}(M_2)_\gamma{}^\delta(\sigma_\rho)_{\delta\dot{\delta}}(M_2^\dagger)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\gamma}} = \\ &\overset{(2.4.12)}{=} \frac{1}{4}(2\delta^\gamma_\beta\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}})(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}(M_1)_\alpha{}^\beta(M_1^\dagger)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}(M_2)_\gamma{}^\delta(\sigma_\rho)_{\delta\dot{\delta}}(M_2^\dagger)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\gamma}} = \\ &= \frac{1}{2}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}(M_1)_\alpha{}^\beta(M_1^\dagger)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}(M_2)_\beta{}^\delta(\sigma_\rho)_{\delta\dot{\delta}}(M_2^\dagger)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\beta}} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{2}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\alpha}(M_1)_\alpha{}^\beta(M_2)_\beta{}^\delta(\sigma_\rho)_{\delta\dot\delta}(M_2^\dagger)^{\dot\delta}{}_{\dot\beta}(M_1^\dagger)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} = \\
=&\frac{1}{2}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\alpha}(M_1M_2)_\alpha{}^\delta(\sigma_\rho)_{\delta\dot\delta}(M_2^\dagger M_1^\dagger)^{\dot\delta}{}_{\dot\alpha} = \\
=&\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\overline{\sigma}^\mu M_1M_2\sigma_\rho M_2^\dagger M_1^\dagger\right) = \\
=&\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[\overline{\sigma}^\mu(M_1M_2)\sigma_\rho(M_1M_2)^\dagger\right] = \\
=&\Lambda^\mu{}_\rho(M_1M_2)
\end{aligned}
$$

Το επόμενο βήμα είναι να δούμε πώς μπορούμε, με δεδομένο έναν οποιονδήποτε μετασχηματισμό $\Lambda \in SO(1,3)^\uparrow$, να κατασκευάσουμε έναν πίνακα $M \in SL(2,C)$, τέτοιον ώστε να ικανοποιείται η (2.4.21). Ξεκινάμε από τη σχέση (2.4.20):

$$\Lambda^\mu{}_\nu\sigma_\mu = M\sigma_\nu M^\dagger$$

όπου ο πίνακας $\Lambda^\mu{}_\nu$, που περιγράφει μετασχηματισμό Lorentz, δίνεται από την (2.4.21). Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση επί $\overline{\sigma}^\nu$ από δεξιά και αθροίζοντας ως προς ν, λαμβάνουμε:

$$\Lambda^\mu{}_\nu\sigma_\mu\overline{\sigma}^\nu = M\sigma_\nu M^\dagger\overline{\sigma}^\nu \tag{2.4.29}$$

Για κάθε $M \in SL(2,C)$ είναι:

$$\sigma_\mu M\overline{\sigma}^\mu = 2\operatorname{Tr}(M)I_2 \tag{2.4.30}$$

Πράγματι, εάν θεωρήσουμε ένα τυχαίο στοιχείο της ομάδας $SL(2,C)$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

όπου a, b, c, d μιγαδικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $\det M = ad - bc = 1$, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\sigma_\mu M\overline{\sigma}^\mu =&\sigma_0M\overline{\sigma}^0 + \sigma_1M\overline{\sigma}^1 + \sigma_2M\overline{\sigma}^2 + \sigma_3M\overline{\sigma}^3 \overset{(2.4.4),(2.4.9)}{=} \\
=&I_2MI_2 + (-\sigma^1)M(-\sigma^1) + (-\sigma^2)M(-\sigma^2) + (-\sigma^3)M(-\sigma^3) = \\
=&M + \sigma^1M\sigma^1 + \sigma^2M\sigma^2 + \sigma^3M\sigma^3 = \\
=&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\
&+\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \\
&+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
=&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ic & -id \\ ia & ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \\
&+\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
=&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \\
=&\begin{pmatrix} 2(a+d) & 0 \\ 0 & 2(a+d) \end{pmatrix} = 2(a+d)I_2 = 2\operatorname{Tr}(M)I_2
\end{aligned}
$$

Από τις (2.4.29) και (2.4.30),σε συνδυασμό με το γεγονός ότι εάν $M \in SL(2,C)$, τότε και $M^\dagger \in SL(2,C)$, έπεται ότι

$$\Lambda^\mu{}_\nu\sigma_\mu\overline{\sigma}^\nu = M\left[2\operatorname{Tr}(M^\dagger)\right]I_2 = 2\operatorname{Tr}(M^\dagger)M \tag{2.4.31}$$

άρα

$$M = M(\Lambda) = \frac{1}{2\,\mathrm{Tr}(M^\dagger)} \Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu \tag{2.4.32}$$

Παίρνοντας την ορίζουσα των δύο μελών της (2.4.31), έχουμε:

$$\det\left(\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu\right) = \left[2\,\mathrm{Tr}(M^\dagger)M\right] = \left[2\,\mathrm{Tr}(M^\dagger)\right]^2 \underbrace{\det M}_{\substack{\| \\ 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,\mathrm{Tr}(M^\dagger) = \pm\left[\det\left(\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.4.33}$$

$$(2.4.32) \xrightarrow{(2.4.33)} M(\Lambda) = \pm \frac{1}{\left[\det\left(\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu \tag{2.4.34}$$

Έτσι, για οποιονδήποτε μετασχηματισμό Lorentz $\Lambda \in SO(1,3)^\uparrow$, υπάρχουν δύο στοιχεία της ομάδας $SL(2,C)$, για τα οποία ικανοποιείται η (2.4.21), που δίνονται από την (2.4.34), οπότε ο ομομορφισμός ϕ από την $SL(2,C)$ στην $SO(1,3)^\uparrow$ είναι 2-1 και η εικόνα του ϕ,

$$\mathrm{Im}\,\phi \equiv \left\{\Lambda \in SO(1,3)^\uparrow | \Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^\dagger\right) \text{ για κάποιο } M \in SL(2,C)\right\}$$

είναι ολόκληρη η ομάδα $SO(1,3)^\uparrow$, με άλλα λόγια, η απεικόνιση ϕ είναι επί. Επίσης, μπορούμε να βρούμε τον πυρήνα του ομομορφισμού ϕ,

$$\ker\phi \equiv \{M \in SL(2,C) | \Lambda^\mu{}_\nu(M) = \mathbb{1}^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu\}$$

όπου $\mathbb{1}$ είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός Lorentz. Από τον ορισμό του $\ker\phi$, είναι προφανές ότι τα στοιχεία του είναι οι πίνακες $M \in SL(2,C)$, οι οποίοι προκύπτουν από την (2.4.34), εάν θέσουμε $\Lambda = \mathbb{1}$:

$$\begin{aligned} M(\mathbb{1}) &= \pm \frac{1}{\left[\det\left(\mathbb{1}^\mu{}_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \mathbb{1}^\mu{}_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu = \pm \frac{1}{\left[\det\left(\delta^\mu_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \delta^\mu_\nu \sigma_\mu \overline{\sigma}^\nu = \\ &= \pm \frac{1}{\left[\det\left(\sigma_\mu \overline{\sigma}^\mu\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \sigma_\mu \overline{\sigma}^\mu = \pm \frac{1}{\left[\det(4I_2)\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot (4I_2) = \pm \frac{1}{16^{\frac{1}{2}}} \cdot (4I_2) = \pm I_2 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι:

$$\begin{aligned} \sigma_\mu \overline{\sigma}^\mu &= \sigma_0 \overline{\sigma}^0 + \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \overline{\sigma}^i = I_2 I_2 + \sum_{i=1}^{3} (-\sigma^i)(-\sigma^i) = \\ &= I_2 + \sum_{i=1}^{3} (\sigma^i)^2 = I_2 + \sum_{i=1}^{3} I_2 = 4I_2 \end{aligned}$$

Επομένως, ο πυρήνας του ομομορφισμού ϕ είναι η κυκλική ομάδα 2ης τάξης

$$\mathbb{Z}_2 = \{\pm I_2\}$$

Με δεδομένα ότι η απεικόνιση $\phi : SL(2,C) \to SO(1,3)^\uparrow$ είναι ομομορφισμός, $\ker\phi = \mathbb{Z}_2$ και $\mathrm{Im}\,\phi = SO(1,3)^\uparrow$, από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών[7] για ομάδες έπεται ότι η ομάδα $SO(1,3)^\uparrow$

[7] Έστω G και H δύο ομάδες και $\phi : G \to H$ ένας ομομορφισμός. Τότε:

1. Ο πυρήνας της ϕ είναι κανονική υποομάδα της G.
2. Η εικόνα της ϕ είναι υποομάδα της H.
3. Η εικόνα της ϕ είναι ισομορφική με την ομάδα πηλίκου ${}^{G}\!/_{\ker\phi}$.

είναι ισομορφική με την ομάδα παραγόντων πηλίκου (quotient group ή factor group) ${}^{SL(2,C)}\!\diagup_{\mathbb{Z}_2}$. Για να δηλώσουμε αυτή τη σχέση ισομορφισμού, γράφουμε

$$SO(1,3)^{\uparrow} \cong {}^{SL(2,C)}\!\diagup_{\mathbb{Z}_2} \tag{2.4.35}$$

Ακόμη, η ομάδα $SL(2,C)$, θεωρούμενη ως μία πολλαπλότητα, είναι απλώς συνεκτική. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής: Από το θεώρημα της πολικής παραγοντοποίησης πινάκων, έπεται ότι οποιοσδήποτε μιγαδικός αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας M, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$M = Ue^{H} \tag{2.4.36}$$

όπου U μοναδιακός 2×2 πίνακας και H Ερμιτιανός 2×2 πίνακας:

$$U^{\dagger}U = I_2 \tag{2.4.37}$$

$$H^{\dagger} = H \tag{2.4.38}$$

Από την (2.4.37) έπεται ότι

$$\begin{aligned} 1 &= \det(I_2) = \det(U^{\dagger}U) = (\det U^{\dagger})(\det U) = (\det U)^{*}(\det U) = |\det U|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\det U| = 1 \end{aligned} \tag{2.4.39}$$

Επιπλέον, αν $M \in SL(2,C)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} 1 &= \det M = \det(Ue^{H}) = (\det U)\det(e^{H}) = (\det U)e^{\operatorname{Tr} H} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \det U = e^{-\operatorname{Tr} H} \end{aligned} \tag{2.4.40}$$

Το $e^{-\operatorname{Tr} H}$ είναι θετικός πραγματικός αριθμός (αφού ο πίνακας H, ως Ερμιτιανός, έχει πραγματικά διαγώνια στοιχεία), άρα σύμφωνα με την (2.4.40), το ίδιο ισχύει και για την $\det U$. Επομένως, λόγω και της (2.4.39), έπεται ότι $\det U = 1$, οπότε η (2.4.40) δίνει

$$e^{-\operatorname{Tr} H} = 1 \Rightarrow \operatorname{Tr} H = 0$$

Επίσης, η παραγοντοποίηση (2.4.36) είναι μοναδική, οπότε από τοπολογική άποψη, η $SL(2,C)$ είναι το ευθύ γινόμενο του χώρου όλων των δυνατών U και του χώρου όλων των δυνατών H. Οποιοσδήποτε Ερμιτιανός 2×2 πίνακας H με μηδενικό ίχνος μπορεί να γραφεί ως

$$H = \begin{pmatrix} c & a-ib \\ a+ib & -c \end{pmatrix}$$

όπου τα a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί που δεν υπόκεινται σε κανένα περιορισμό. Άρα, ο χώρος όλων των H είναι τοπολογικά ο ίδιος με τον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, R_3. Από την άλλη μεριά, οποιοσδήποτε μοναδιακός 2×2 πίνακας με ορίζουσα ίση με 1 μπορεί να γραφεί ως

$$U = \begin{pmatrix} d+ie & f+ig \\ -f+ig & d-ie \end{pmatrix}$$

όπου τα d, e, f, g είναι πραγματικοί αριθμοί υποκείμενοι στο μή γραμμικό περιορισμό:

$$d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 1$$

άρα ο χώρος όλων των δυνατών $U, SU(2)$, είναι τοπολογικά ο ίδιος με τη μοναδιαία σφαίρα, S_3, στον τετραδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Συνεπώς, η ομάδα $SL(2,C)$, θεωρούμενη ως μία πολλαπλότητα, είναι τοπολογικά η ίδια με το ευθύ γινόμενο $R_3 \times S_3$. Ισχύει ότι οι χώροι R_3 και S_3 είναι απλά συνεκτικοί, που σημαίνει ότι οποιαδήποτε καμπύλη που συνδέει δύο σημεία του R_3 ή του S_3 μπορεί να παραμορφωθεί με συνεχή τρόπο σε οποιαδήποτε άλλη καμπύλη που συνδέει τα ίδια σημεία.

Επομένως, και το ευθύ γινόμενο $R_3 \times S_3$ είναι απλά συνεκτικός χώρος, οπότε η ομάδα $SL(2,C)$ είναι απλά συνεκτική. Αντιθέτως, η ομάδα $SO(1,3)^\uparrow$, η οποία είναι ισομορφική με την ${SL(2,C)}/{\mathbb{Z}_2}$, δεν είναι απλά συνεκτική. Για την ακρίβεια, μπορεί να δειχθεί ότι είναι διπλά συνεκτική[8].

Το γεγονός ότι η ομάδα $SO(1,3)^\uparrow$ δεν είναι απλά συνεκτική πρέπει να μας ανησυχεί. Οι απλά συνεκτικές ομάδες έχουν την ιδιότητα ότι χαρακτηρίζονται από μία 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της ομάδας και στις αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lie αυτής. Αυτό δε συμβαίνει για τις μη απλά συνεκτικές ομάδες Lie, όπως είναι η ομάδα $SO(1,3)^\uparrow$. Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε τις σπινοριακές αναπαραστάσεις $(\frac{1}{2},0)$ και $(0,\frac{1}{2})$ της άλγεβρας Lie της $SO(1,3)^\uparrow$, ισχύει ότι για τους αντίστοιχους πίνακες αναπαράστασης $S^{\mu\nu}$ (των οποίων τις ρητές εκφράσεις θα δώσουμε στην ενότητα 2.6), οι πίνακες $M(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}$ (σχέση (2.1.32)) δεν αποτελούν αναπαράσταση της $SO(1,3)^\uparrow$, δηλαδή δεν ισχύει $M(\Lambda)M(\Lambda') = M(\Lambda\Lambda')\ \forall\ \Lambda,\Lambda' \in SO(1,3)^\uparrow$.

Ωστόσο, για οποιαδήποτε συνεκτική ομάδα Lie, G, υπάρχει ένα «καθολικό κάλυμμα» («universal covering group») $\tilde{G}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Η $\tilde{G}$ είναι απλά συνεκτική.

2. Υπάρχει ένας ομομορφισμός $\rho : \tilde{G} \to G$ τέτοιος ώστε $G \cong {\tilde{G}}/{\ker\rho}$, όπου ο πυρήνας του ρ, $\ker\rho$, είναι μία διακριτή υποομάδα του κέντρου της $\tilde{G}$[9]

Για την ομάδα $SO(1,3)^\uparrow$, το αντίστοιχο «καθολικό κάλυμμα» είναι η ομάδα $SL(2,C)$, η οποία έχει και τις δύο παραπάνω ιδιότητες (όπου $G = SO(1,3)^\uparrow$ και $\tilde{G} = SL(2,C)$). Πράγματι, προηγουμένως δείξαμε ότι η ομάδα $SL(2,C)$ είναι απλά συνεκτική και βρήκαμε έναν ομομορφισμό $\phi : SL(2,C) \to SO(1,3)^\uparrow$, για τον οποίο ισχύει ότι $SO(1,3)^\uparrow \cong {SL(2,C)}/{\ker\phi}$, όπου ο $\ker\phi = \mathbb{Z}_2 = \{\pm I_2\}$ είναι υποομάδα του κέντρου της $SL(2,C)$, αφού τα στοιχεία του, $\pm I_2$, μετατίθενται με κάθε στοιχείο της $SL(2,C)$.

Επειδή κάτω από γνήσιους και ορθόχρονους μετασχηματισμούς Lorentz, τα διάφορα πεδία μετασχηματίζονται σύμφωνα με αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lie της $SO(1,3)^\uparrow$, $so(1,3)$, πρέπει κανείς να γνωρίζει τις αναπαραστάσεις της άλγεβρας $so(1,3)$ αντί για τις αναπαραστάσεις της ομάδας $SO(1,3)^\uparrow$. Από την παραπάνω συζήτηση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για να κατασκευάσουμε αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lorentz, $so(1,3)$, αρκεί να καθορίσουμε τις αναπαραστάσεις της $SL(2,C)$.

Στην προηγούμενη ενότητα, παρουσιάσαμε τις βασικές μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της ομάδας $SL(2,C)$. Τα αντικείμενα που μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη θεμελιώδη και την αντιθεμελιώδη αναπαράσταση της ομάδας $SL(2,C)$ ή ισοδύναμα, σύμφωνα με την αριστερόστροφη σπινοριακή και δεξιόστροφη σπινοριακή αναπαράσταση της άλγεβρας Lorentz αντίστοιχα, είναι οι αριστερόστροφοι και δεξιόστροφοι σπίνορες Weyl αντίστοιχα.

Έστω τώρα ένας δισπίνορας $V_{\alpha\dot{\alpha}}$, δηλαδή ένα αντικείμενο, το οποίο μετασχηματίζεται κάτω από την ομάδα $SL(2,C)$ σύμφωνα με την $(\frac{1}{2},0)\otimes(0,\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ αναπαράστασή της (όπου με $\otimes$ συμβολίζεται το γινόμενο Kronecker):

$$V_{\alpha\dot{\alpha}} \to V'_{\alpha\dot{\alpha}} = M_\alpha^{\ \beta}(M^*)_{\dot{\alpha}}^{\ \dot{\beta}} V_{\beta\dot{\beta}} \tag{2.4.41}$$

όπου $M \in SL(2,C)$, $\alpha,\beta = 1,2$, $\dot{\alpha},\dot{\beta} = \dot{1},\dot{2}$. Το αντικείμενο

$$V^\mu \equiv \frac{1}{2}\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\,V_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{2.4.42}$$

[8]Παραπέμπουμε στην ενότητα 2.7 στο [3] για τα αντίστοιχα επιχειρήματα

[9]Το κέντρο μίας ομάδας ορίζεται G, $Z(G)$, ορίζεται ως:

$$Z(G) \equiv \{z \in G | zg = gz,\ \forall\ g \in G\}$$

μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα κάτω από την ομάδα Lorentz. Πράγματι, είναι:

$$\begin{aligned}
V^\mu \to V'^\mu = \frac{1}{2}\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\,V'_{\alpha\dot{\alpha}} &= \frac{1}{2}\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\,M_\alpha{}^\beta (M^*)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} V_{\beta\dot{\beta}} = \\
&= \frac{1}{2}\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\,M_\alpha{}^\beta (M^\dagger)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} V_{\beta\dot{\beta}} = \\
&= \frac{1}{2}\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\,M_\alpha{}^\gamma \delta^\beta_\gamma (M^\dagger)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\alpha}} \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\delta}} V_{\beta\dot{\beta}} = \\
&= \frac{1}{2}\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\,\delta^\beta_\gamma \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\delta}} M_\alpha{}^\gamma (M^\dagger)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\alpha}} V_{\beta\dot{\beta}} \stackrel{(2.4.12)}{=} \\
&= \frac{1}{2}\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\,\frac{1}{2} (\sigma_\nu)_{\gamma\dot{\delta}} (\overline{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\beta} M_\alpha{}^\gamma (M^\dagger)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\alpha}} V_{\beta\dot{\beta}} = \\
&= \frac{1}{2}\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\,M_\alpha{}^\gamma (\sigma_\nu)_{\gamma\dot{\delta}} (M^\dagger)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\alpha}} \frac{1}{2} (\overline{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\beta} V_{\beta\dot{\beta}} \stackrel{(2.4.42)}{=} \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\overline{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^\dagger\right) V^\nu = \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu(M) V^\nu
\end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, για οποιοδήποτε τετραδιάνυσμα V^μ υπάρχει ένας δισπίνορας $V_{\alpha\dot{\alpha}}$, τέτοιος ώστε να ικανοποιείται η (2.4.42). Για να τον προσδιορίσουμε, πολλαπλασιάζουμε την (2.4.42) επί $(\sigma_\mu)_{\beta\dot{\beta}}$ και αθροίζουμε ως προς μ:

$$\begin{aligned}
(\sigma_\mu)_{\beta\dot{\beta}}\,V^\mu &= \frac{1}{2}\,(\sigma_\mu)_{\beta\dot{\beta}}\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} V_{\alpha\dot{\alpha}} = \\
&= \frac{1}{2}\left(2\delta^\alpha_\beta \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\right) V_{\alpha\dot{\alpha}} = V_{\beta\dot{\beta}} \\
\text{ή } V_{\alpha\dot{\alpha}} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\,V_\mu
\end{aligned} \tag{2.4.43}$$

Τέλος, επαληθεύουμε ότι για οποιοδήποτε τετραδιάνυσμα V^μ, η ποσότητα (2.4.43) μετασχηματίζεται κάτω από την ομάδα $SL(2,C)$ (ή $SO(1,3)^\uparrow$) σύμφωνα με την $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ αναπαράστασή της:

$$\begin{aligned}
V_{\alpha\dot{\alpha}} \to V'_{\alpha\dot{\alpha}} &= (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\,V'^\mu = \\
&= (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\,\Lambda^\mu{}_\nu V^\nu = (\text{όπου } \Lambda \in SO(1,3)^\uparrow) \\
&= (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\overline{\sigma}^\mu M(\Lambda) \sigma_\nu \left(M(\Lambda)\right)^\dagger\right] V^\nu = \\
&= \frac{1}{2}\,(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\gamma}\,(M(\Lambda))_\gamma{}^\delta\,(\sigma_\nu)_{\delta\dot{\delta}} \left(M(\Lambda)^\dagger\right)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\beta}} V^\nu = \\
&= \frac{1}{2}\left(2\delta^\gamma_\alpha \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\right)(M(\Lambda))_\gamma{}^\delta\,(\sigma_\nu)_{\delta\dot{\delta}} \left(M(\Lambda)^\dagger\right)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\beta}} V^\nu = \\
&= (M(\Lambda))_\alpha{}^\delta\,(\sigma_\nu)_{\delta\dot{\delta}} \left(M(\Lambda)^\dagger\right)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\alpha}} V^\nu = \\
&= (M(\Lambda))_\alpha{}^\delta\,(M(\Lambda)^*)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\delta}}\,(\sigma_\nu)_{\delta\dot{\delta}} V^\nu = \\
&= (M(\Lambda))_\alpha{}^\delta\,(M(\Lambda)^*)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\delta}}\,V_{\delta\dot{\delta}}
\end{aligned}$$

Όπως φαίνεται από τις (2.4.42) και (2.4.43), οι σ-πίνακες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μετατροπή τετραδιανυσματικών δεικτών σε σπινοριακούς δείκτες και το αντίστροφο, σύμφωνα με το γενικό κανόνα ότι ένας τετραδιανυσματικός δείκτης ισοδυναμεί με ένα ζεύγος σπινοριακών δεικτών, ενός με τελεία (dotted) και ενός χωρίς τελεία (undotted).

2.5 Πράξεις με σπίνορες Weyl

Στην ενότητα αυτή, θα δούμε κάποιες πράξεις με σπίνορες Weyl και θα αποδείξουμε αρκετές χρήσιμες ταυτότητες. Σε τέτοιου είδους πράξεις παίζει κεντρικό ρόλο το ακόλουθο αξίωμα:

Αξίωμα
Οι συνιστώσες των σπινόρων Weyl είναι μεταβλητές Grassmann, δηλαδή αντιμετατίθενται μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι για δύο οποιουσδήποτε αριστερόστροφους σπίνορες Weyl ψ και χ, είναι:

$$\{\psi_\alpha, \chi_\beta\} = \{\psi^\alpha, \chi_\beta\} = \{\psi_\alpha, \chi^\beta\} = \{\psi^\alpha, \chi^\beta\} = 0 \tag{2.5.1}$$

Ομοίως, για δύο δεξιόστροφους σπίνορες Weyl $\overline{\psi}$ και $\overline{\chi}$, είναι:

$$\{\overline{\psi}_{\dot\alpha}, \overline{\chi}_{\dot\beta}\} = \{\overline{\psi}^{\dot\alpha}, \overline{\chi}_{\dot\beta}\} = \{\overline{\psi}_{\dot\alpha}, \overline{\chi}^{\dot\beta}\} = \{\overline{\psi}^{\dot\alpha}, \overline{\chi}^{\dot\beta}\} = 0 \tag{2.5.2}$$

Επίσης, κάθε συνιστώσα ενός αριστερόστροφου σπίνορα Weyl αντιμετατίθεται με κάθε συνιστώσα ενός δεξιόστροφου σπίνορα Weyl:

$$\{\psi_\alpha, \overline{\chi}_{\dot\beta}\} = \{\psi_\alpha, \overline{\chi}^{\dot\beta}\} = \{\psi^\alpha, \overline{\chi}_{\dot\beta}\} = \{\psi^\alpha, \overline{\chi}^{\dot\beta}\} = 0 \tag{2.5.3}$$

όπου

$$\{\psi_\alpha, \chi_\beta\} \equiv \psi_\alpha\chi_\beta + \chi_\beta\psi_\alpha \text{ κ.ο.κ.}$$

Για δύο αριστερόστροφους σπίνορες Weyl χ και ψ ορίζουμε τον εξής διγραμμικό συνδυασμό:

$$\psi\chi \equiv \psi^\alpha\chi_\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta\chi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\alpha\chi^\beta \tag{2.5.4}$$

ο οποίος είναι αναλλοίωτος κάτω από την ομάδα $SL(2,C)$ (ή, ισοδύναμα, Lorentz αναλλοίωτος). Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}\psi\chi \to \psi'\chi' = \psi'^\alpha\chi'_\alpha &\overset{(2.3.37\beta),(2.3.37\alpha)}{=} \left[(M^{-1})^T\right]^\alpha{}_\beta \psi^\beta M_\alpha{}^\gamma\chi_\gamma = \\ &= \psi^\beta (M^{-1})_\beta{}^\alpha M_\alpha{}^\gamma\chi_\gamma = \psi^\beta\delta^\gamma_\beta\chi_\gamma = \psi^\beta\chi_\beta = \psi\chi\end{aligned}$$

Επίσης, για δύο δεξιόστροφους σπίνορες Weyl $\overline{\psi}$ και $\overline{\chi}$, ο διγραμμικός συνδυασμός

$$\overline{\psi}\overline{\chi} \equiv \overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\chi}_{\dot\beta} \tag{2.5.5}$$

είναι αναλλοίωτος κάτω από την ομάδα $SL(2,C)$ (ή, ισοδύναμα, Lorentz αναλλοίωτος), αφού:

$$\begin{aligned}\overline{\psi}\overline{\chi} \to \overline{\psi}'\overline{\chi}' = \overline{\psi}'_{\dot\alpha}\overline{\chi}'^{\dot\alpha} &\overset{(2.3.37\delta),(2.3.37\gamma)}{=} (M^*)_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\overline{\psi}_{\dot\beta}\left[(M^{-1})^\dagger\right]^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}\overline{\chi}^{\dot\gamma} = \\ &= \overline{\psi}_{\dot\beta}(M^*)_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\left[(M^{-1})^*\right]_{\dot\gamma}{}^{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\gamma} = \overline{\psi}_{\dot\beta}\left[(M^*)^{-1}\right]_{\dot\gamma}{}^{\dot\alpha}(M^*)_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\gamma} = \\ &= \overline{\psi}_{\dot\beta}\delta^{\dot\beta}_{\dot\gamma}\overline{\chi}^{\dot\gamma} = \overline{\psi}_{\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\beta} = \overline{\psi}\overline{\chi}\end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων αντιμετάθεσης (2.5.1) μπορούμε να δείξουμε ότι ο διγραμμικός συνδυασμός (2.5.4) είναι συμμετρικός στην εναλλαγή των ψ και χ, δηλαδή:

$$\psi\chi = \chi\psi \tag{2.5.6}$$

Πράγματι, είναι:

$$\psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta\chi_\alpha = -\varepsilon^{\alpha\beta}\chi_\alpha\psi_\beta \overset{\varepsilon^{\alpha\beta}=-\varepsilon^{\beta\alpha}}{=} \varepsilon^{\beta\alpha}\chi_\alpha\psi_\beta = \chi^\beta\psi_\beta = \chi\psi$$

Ομοίως, ο διγραμμικός συνδυασμός (2.5.5) είναι συμμετρικός στην εναλλαγή των $\overline{\psi}$ και $\overline{\chi}$, δηλαδή:

$$\overline{\psi}\overline{\chi} = \overline{\chi}\overline{\psi} \tag{2.5.7}$$

το οποίο μπορούμε να αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τις (2.5.2):

$$\overline{\psi}\overline{\chi} = \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\chi}_{\dot{\beta}} = -\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\chi}_{\dot{\beta}}\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \overset{\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}=-\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}}{=} \overline{\chi}_{\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = \overline{\chi}_{\dot{\beta}}\overline{\psi}^{\dot{\beta}} = \overline{\chi}\overline{\psi}$$

Εάν ψ είναι ένας αριστερόστροφος σπίνορας Weyl και $\overline{\chi}$ ένας δεξιόστροφος σπίνορας Weyl, η διγραμμική ποσότητα

$$\psi\sigma^{\mu}\overline{\chi} \equiv \psi^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \tag{2.5.8}$$

μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα κάτω από την ομάδα Lorentz. Για να το δείξουμε αυτό, ξεκινάμε από την ταυτότητα:

$$\psi\sigma^{\mu}\overline{\chi} = -\overline{\chi}\ \overline{\sigma}^{\mu}\psi \equiv -\overline{\chi}_{\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}\psi_{\alpha} \tag{2.5.9}$$

η ισχύς της οποίας μπορεί εύκολα να αποδειχθεί. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\psi\sigma^{\mu}\overline{\chi} &= \psi^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \overset{(2.5.3)}{=} -\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\psi^{\alpha} \overset{(2.4.8)}{=} -\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta}\,\psi^{\alpha} = \\ &= -\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\,(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\psi^{\alpha} = -(-\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}})\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\,(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta}\,(-\varepsilon_{\beta\alpha})\psi^{\alpha} = \\ &= -\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\,(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta}\,\varepsilon_{\beta\alpha}\psi^{\alpha} = -\overline{\chi}_{\dot{\beta}}\,(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\beta}\,\psi_{\beta} = -\overline{\chi}\ \overline{\sigma}^{\mu}\psi\end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η διγραμμική ποσότητα $-\overline{\chi}\ \overline{\sigma}^{\mu}\psi = -(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}\overline{\chi}_{\dot{\alpha}}\psi_{\alpha}$ είναι ειδική περίπτωση της (2.4.42) με $V_{\alpha\dot{\alpha}} = -2\overline{\chi}_{\dot{\alpha}}\psi_{\alpha} = 2\psi_{\alpha}\overline{\chi}_{\dot{\alpha}}$, άρα μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα κάτω από την ομάδα Lorentz, $SO(1,3)^{\uparrow}$, οπότε το ίδιο ισχύει και για την $\psi\sigma^{\mu}\overline{\chi}$.

Ακόμη, για δύο οποιουσδήποτε αριστερόστροφους σπίνορες Weyl ψ και χ, ο διγραμμικός συνδυασμός

$$\psi\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\chi \equiv \psi^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^{\nu})^{\dot{\alpha}\beta}\chi_{\beta} \tag{2.5.10}$$

μετασχηματίζεται ως τανυστής δεύτερης τάξης κάτω από την ομάδα Lorentz. Το ίδιο ισχύει και για τη διγραμμική ποσότητα

$$\overline{\psi}\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\overline{\chi} \equiv \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}(\sigma^{\nu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\chi}^{\dot{\beta}}, \tag{2.5.11}$$

όπου τα $\overline{\psi}$ και $\overline{\chi}$ είναι δεξιόστροφοι σπίνορες Weyl. Ισχύουν οι εξής ταυτότητες:

$$\psi\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\chi = \chi\sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu}\psi \tag{2.5.12}$$

$$\overline{\psi}\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\overline{\chi} = \overline{\chi}\ \overline{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\overline{\psi} \tag{2.5.13}$$

Οι (2.5.12) και (2.5.13) μπορούν να αποδειχθούν με χρήση των (2.4.7) και (2.4.8). Παραθέτουμε ενδεικτικά την απόδειξη της (2.5.12):

$$\begin{aligned}\psi\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\chi &= \psi^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^{\nu})^{\dot{\alpha}\beta}\chi_{\beta} \overset{(2.4.7),(2.4.8)}{=} \\ &= \psi^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\gamma}\gamma}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\varepsilon^{\beta\delta}(\sigma^{\nu})_{\delta\dot{\delta}}\chi_{\beta} = \\ &= (-\varepsilon_{\gamma\alpha})\psi^{\alpha}(-\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}})(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\gamma}\gamma}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\delta}}(\sigma^{\nu})_{\delta\dot{\delta}}(-\varepsilon^{\delta\beta})\chi_{\beta} = \\ &= -\psi_{\gamma}\delta^{\dot{\delta}}_{\dot{\gamma}}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\gamma}\gamma}(\sigma^{\nu})_{\delta\dot{\delta}}\chi^{\delta} = \\ &= -\psi_{\gamma}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\delta}\gamma}(\sigma^{\nu})_{\delta\dot{\delta}}\chi^{\delta} \overset{(2.5.1)}{=} \\ &= \chi^{\delta}(\sigma^{\nu})_{\delta\dot{\delta}}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\delta}\gamma}\psi_{\gamma} = \\ &= \chi\sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu}\psi\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο επισημαίνουμε ότι από τους ορισμούς (2.5.4), (2.5.5), (2.5.8), (2.5.10) και (2.5.11) καθίσταται σαφές ότι έχουμε υιοθετήσει μία σύμβαση, σύμφωνα με την οποία επαναλαμβανόμενοι σπινοριακοί δείκτες χωρίς τελεία, οι οποίοι εμφανίζονται ως ${}^{\alpha}{}_{\alpha}$, ή επαναλαμβανόμενοι σπινοριακοί δείκτες με τελεία, οι οποίοι εμφανίζονται ως ${}_{\dot\alpha}{}^{\dot\alpha}$, μπορούν να παραλείπονται. Έτσι, για παράδειγμα:

$$\psi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\sigma^\rho\overline{\chi} = \psi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\alpha\beta}(\sigma^\rho)_{\beta\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\beta}$$

κ.ο.κ. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι διγραμμικές ποσότητες (2.5.4), (2.5.5), (2.5.8), (2.5.10) και (2.5.11) μπορούν να ερμηνευθούν ως γινόμενα πινάκων και διανυσμάτων, εάν θεωρήσουμε τα ψ_α και $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$ (ομοίως και τα χ_α και $\overline{\chi}^{\dot\alpha}$) ως διανύσματα στήλης, δηλαδή $\psi_\alpha = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ και $\overline{\psi}^{\dot\alpha} = \begin{pmatrix}\overline{\psi}^{\dot1}\\ \overline{\psi}^{\dot2}\end{pmatrix}$ και τα ψ^α και $\overline{\psi}_{\dot\alpha}$ (ομοίως και τα χ^α και $\overline{\chi}_{\dot\alpha}$) ως διανύσματα γραμμής, δηλαδή $\psi^\alpha = (\psi^1\ \psi^2)$ και $\overline{\psi}_{\dot\alpha} = (\overline{\psi}_{\dot1}\ \overline{\psi}_{\dot2})$, κάτι το οποίο θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στην επόμενη ενότητα, όπου θα πραγματευτούμε τη σύνδεση των σπινόρων Weyl με τους σπίνορες Dirac και Majorana.

Ακόμη, ορίζουμε τη μιγαδική συζυγία, έτσι ώστε όταν λαμβάνουμε το μιγαδικό συζυγές του γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών Grassmann, έστω θ και η, ($\{\theta,\eta\} = \theta\eta + \eta\theta = 0$) να αντιστρέφουμε τη σειρά τους, όπως ακριβώς κάνουμε όταν παίρνουμε το Ερμιτιανό συζυγές του γινομένου δύο τελεστών, δηλαδή:

$$(\theta\eta)^* \equiv \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^* \tag{2.5.14}$$

Έτσι, έχουμε:

$$(\psi\chi)^* = (\psi^\alpha\chi_\alpha)^* = (\chi_\alpha)^*(\psi^\alpha)^* = \overline{\chi}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha} = \overline{\chi}\overline{\psi} = \overline{\psi}\overline{\chi} \tag{2.5.15}$$

$$(\psi\sigma^\mu\overline{\chi})^* = (\psi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\beta})^* = (\overline{\chi}^{\dot\beta})^*((\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta})^*(\psi^\alpha)^* = \chi^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha} = \chi\sigma^\mu\overline{\psi} \tag{2.5.16}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι

$$((\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta})^* \equiv {}^{10}(\sigma^{\mu*})_{\dot\alpha\beta} = \left[(\sigma^{\mu\dagger})^T\right]_{\dot\alpha\beta} \overset{(\sigma^\mu)^\dagger=\sigma^\mu}{=} ((\sigma^\mu)^T)_{\dot\alpha\beta} = (\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha} \tag{2.5.17}$$

Επίσης:

$$(\overline{\chi}\ \overline{\sigma}^\mu\psi)^* = -(\psi\sigma^\mu\overline{\chi})^* = -\chi\sigma^\mu\overline{\psi} = \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\chi \tag{2.5.18}$$

Επιπλέον, εάν λάβουμε υπόψη το ότι

$$\left((\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\right)^* \equiv (\overline{\sigma}^{\mu*})^{\alpha\dot\beta} = \left[\left((\overline{\sigma}^\mu)^\dagger\right)^T\right]^{\alpha\dot\beta} \overset{(\overline{\sigma}^\mu)^\dagger=\overline{\sigma}^\mu}{=} \left((\overline{\sigma}^\mu)^T\right)^{\alpha\dot\beta} = (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha} \tag{2.5.19}$$

μπορούμε να δείξουμε ότι

$$(\psi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\chi)^* = \overline{\chi}\ \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\psi} \tag{2.5.20}$$

Η απόδειξη έχει ως εξής:

$$\begin{aligned}(\psi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\chi)^* &= \left(\psi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\gamma}\chi_\gamma\right)^* = (\chi_\gamma)^*\left((\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\right)^*\left((\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\gamma}\right)^*(\psi^\alpha)^* = \\ &= \overline{\chi}_{\dot\gamma}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\gamma\beta}\overline{\psi}^{\dot\alpha} = \overline{\chi}_{\dot\gamma}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\gamma\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha} = \overline{\chi}\ \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\psi}\end{aligned}$$

Ακόμη, είναι:

$$(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\chi})^* \overset{(2.5.13)}{=} (\overline{\chi}\ \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\psi})^* \overset{(2.5.20)}{=} \psi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\chi \overset{(2.5.12)}{=} \chi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi \tag{2.5.21}$$

Συνεχίζουμε παραθέτοντας χωρίς απόδειξη τις παρακάτω χρήσιμες ταυτότητες για τους πίνακες σ και $\overline{\sigma}$:

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\beta\beta} = 2\delta_\alpha^\beta\delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta} \tag{2.5.22}$$

$$(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta \equiv (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\alpha\beta} + (\sigma^\nu)_{\alpha\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} = 2\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta \tag{2.5.23}$$

$$(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \equiv (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\alpha}(\sigma^\nu)_{\alpha\dot\beta} + (\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\alpha\alpha}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} = 2\eta^{\mu\nu}\delta_{\dot\beta}^{\dot\alpha} \tag{2.5.24}$$

[10] Βλ. σχέση (2.33) στο [8] ή (B.12) στο [14]

$$\sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu \sigma^\rho = \eta^{\mu\nu}\sigma^\rho - \eta^{\mu\rho}\sigma^\nu + \eta^{\nu\rho}\sigma^\mu + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\sigma_\lambda \tag{2.5.25}$$

$$\overline{\sigma}^\mu \sigma^\nu \overline{\sigma}^\rho = \eta^{\mu\nu}\overline{\sigma}^\rho - \eta^{\mu\rho}\overline{\sigma}^\nu + \eta^{\nu\rho}\overline{\sigma}^\mu - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\overline{\sigma}_\lambda \tag{2.5.26}$$

όπου $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ είναι ολικά αντισυμμετρικός τανυστής με $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = +1$.

Τέλος, ισχύουν οι ακόλουθες ταυτότητες για σπίνορες Weyl, γνωστές ως ταυτότητες του Fierz:

$$\theta^\alpha \theta^\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\theta\theta) \tag{2.5.27}$$

$$\theta_\alpha \theta_\beta = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}(\theta\theta) \tag{2.5.28}$$

$$\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\overline{\theta}\,\overline{\theta}) \tag{2.5.29}$$

$$\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\theta}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\overline{\theta}\,\overline{\theta}) \tag{2.5.30}$$

$$\theta_\alpha \overline{\theta}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\theta\sigma_\mu\overline{\theta}) \tag{2.5.31}$$

$$(\theta\psi)(\theta\chi) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\psi\chi) \tag{2.5.32}$$

$$(\overline{\theta}\,\overline{\psi})(\overline{\theta}\overline{\chi}) = -\frac{1}{2}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})(\overline{\psi}\overline{\chi}) \tag{2.5.33}$$

$$(\theta\psi)(\overline{\theta}\overline{\chi}) = -\frac{1}{2}(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta)(\psi\sigma_\mu\overline{\chi}) = \frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\overline{\theta})(\psi\sigma_\mu\overline{\chi}) = -\frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\overline{\theta})(\overline{\chi}\,\overline{\sigma}_\mu\psi) \tag{2.5.34}$$

$$(\theta\sigma^\mu\overline{\theta})(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta}) \tag{2.5.35}$$

$$\theta\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta = \eta^{\mu\nu}(\theta\theta) \tag{2.5.36}$$

$$\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\theta} = \eta^{\mu\nu}(\overline{\theta}\,\overline{\theta}) \tag{2.5.37}$$

$$\psi_\alpha(\chi\xi) = -\chi_\alpha(\xi\psi) - \xi_\alpha(\psi\chi) \tag{2.5.38}$$

Για την απόδειξη της (2.5.27), ξακινάμε από το δεξί μέλος και έχουμε:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\theta\theta) &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta^\gamma\theta_\gamma = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}\theta^\gamma\theta^\delta \overset{(2.3.19)}{=} -\frac{1}{2}(\delta^\alpha_\delta\delta^\beta_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\delta)\theta^\gamma\theta^\delta = \\ &= -\frac{1}{2}\theta^\beta\theta^\alpha + \frac{1}{2}\theta^\alpha\theta^\beta = \frac{1}{2}\theta^\alpha\theta^\beta + \frac{1}{2}\theta^\alpha\theta^\beta = \theta^\alpha\theta^\beta \end{aligned}$$

Με δεδομένη την (2.5.27), το αριστερό μέλος της (2.5.28) γράφεται:

$$\begin{aligned} \theta_\alpha\theta_\beta &= \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}\theta^\gamma\theta^\delta = \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}\left[-\frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\delta}(\theta\theta)\right] = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon^{\gamma\delta}\varepsilon_{\beta\delta}(\theta\theta) = \\ &= -\frac{1}{2}\delta^\delta_\alpha\varepsilon_{\beta\delta}(\theta\theta) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\alpha}(\theta\theta) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}(\theta\theta) \end{aligned}$$

άρα η (2.5.28) όντως ισχύει.

Παρόμοια, για την απόδειξη των (2.5.29) και (2.5.30) έχουμε αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\overline{\theta}\,\overline{\theta}) &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\theta}_{\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\overline{\theta}^{\dot{\delta}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \overset{(2.3.30)}{=} \frac{1}{2}\left(\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\delta}}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} - \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\gamma}}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\delta}}\right)\overline{\theta}^{\dot{\delta}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}} = \\ &= \frac{1}{2}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}} - \frac{1}{2}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}} + \frac{1}{2}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}} = \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}} \end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta} &= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}\bar\theta^{\dot\gamma}\bar\theta^{\dot\delta} \overset{(2.5.29)}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\delta}(\bar\theta\,\bar\theta) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\delta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}(\bar\theta\,\bar\theta) = \\
&= \frac{1}{2}\delta^{\dot\delta}_{\dot\alpha}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}(\bar\theta\,\bar\theta) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\beta\dot\alpha}(\bar\theta\,\bar\theta) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(\bar\theta\,\bar\theta)
\end{aligned}
$$

Για τις αποδείξεις των (2.5.31)-(2.5.37), έχουμε αντίστοιχα:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\theta\sigma_\mu\bar\theta) &\overset{(2.5.9)}{=} -\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\bar\theta\bar\sigma_\mu\theta) = -\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\bar\theta_{\dot\gamma}(\bar\sigma_\mu)^{\dot\gamma\delta}\theta_\delta = \\
&= -\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\bar\sigma_\mu)^{\dot\gamma\delta}\bar\theta_{\dot\gamma}\theta_\delta = -\frac{1}{2}\left(2\delta^\delta_\alpha\delta^{\dot\gamma}_{\dot\beta}\right)\bar\theta_{\dot\gamma}\theta_\delta = -\bar\theta_{\dot\beta}\theta_\alpha = \theta_\alpha\bar\theta_{\dot\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\theta\psi)(\theta\chi) &= \theta^\alpha\psi_\alpha\theta^\beta\chi_\beta = -\theta^\alpha\theta^\beta\psi_\alpha\chi_\beta \overset{(2.5.27)}{=} \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\theta\theta)\psi_\alpha\chi_\beta = \\
&= -\frac{1}{2}(\theta\theta)\varepsilon^{\beta\alpha}\psi_\alpha\chi_\beta = -\frac{1}{2}(\theta\theta)\psi^\beta\chi_\beta = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\psi\chi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar\theta\,\bar\psi)(\bar\theta\bar\chi) &= \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta}\bar\chi^{\dot\beta} = -\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta}\bar\psi^{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\beta} \overset{(2.5.30)}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(\bar\theta\,\bar\theta)\bar\psi^{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\beta} = \\
&= -\frac{1}{2}(\bar\theta\,\bar\theta)\varepsilon_{\dot\beta\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\beta} = -\frac{1}{2}(\bar\theta\,\bar\theta)\bar\psi_{\dot\beta}\bar\chi^{\dot\beta} = -\frac{1}{2}(\bar\theta\,\bar\theta)(\bar\psi\bar\chi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left(\bar\theta\bar\sigma^\mu\theta\right)(\psi\sigma_\mu\bar\chi) &= -\frac{1}{2}\bar\theta_{\dot\alpha}\left(\bar\sigma^\mu\right)^{\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\psi^\beta(\sigma_\mu)_{\beta\dot\beta}\bar\chi^{\dot\beta} = -\frac{1}{2}\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha\psi^\beta\bar\chi^{\dot\beta}\left(\bar\sigma^\mu\right)^{\dot\alpha\alpha}(\sigma_\mu)_{\beta\dot\beta} = \\
&= -\frac{1}{\cancel{2}}\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha\psi^\beta\bar\chi^{\dot\beta}\left(\cancel{2}\delta^\alpha_\beta\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\right) = -\bar\theta_{\dot\beta}\theta_\beta\psi^\beta\bar\chi^{\dot\beta} = \theta_\beta\bar\theta_{\dot\beta}\psi^\beta\bar\chi^{\dot\beta} = \\
&= -\theta_\beta\psi^\beta\bar\theta_{\dot\beta}\bar\chi^{\dot\beta} = \psi^\beta\theta_\beta\bar\theta_{\dot\beta}\bar\chi^{\dot\beta} = (\psi\theta)(\bar\theta\bar\chi) = (\theta\psi)(\bar\theta\bar\chi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\theta\sigma^\mu\bar\theta)(\theta\sigma^\nu\bar\theta) &= \theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\theta^\beta(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta} = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\theta^\alpha\bar\theta^{\dot\alpha}\theta^\beta\bar\theta^{\dot\beta} = \\
&= -(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\theta^\alpha\theta^\beta\bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} \overset{(2.5.27),(2.5.29)}{=} \\
&= -(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}\left[-\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\theta\theta)\right]\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\bar\theta\,\bar\theta) = \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}(\theta\theta)(\bar\theta\,\bar\theta) = \\
&= \frac{1}{8}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}(\theta\theta)(\bar\theta\,\bar\theta) + \frac{1}{8}(-\varepsilon^{\beta\alpha})(-\varepsilon^{\dot\beta\dot\alpha})(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}(\theta\theta)(\bar\theta\,\bar\theta) = \\
&= \frac{1}{8}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\bar\sigma^\nu)^{\dot\alpha\alpha}(\theta\theta)(\bar\theta\,\bar\theta) + \frac{1}{8}(\bar\sigma^\mu)^{\dot\beta\beta}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\beta}(\theta\theta)(\bar\theta\,\bar\theta) = \\
&= \frac{1}{8}\left[\mathrm{Tr}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu) + \mathrm{Tr}(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu)\right](\theta\theta)(\bar\theta\,\bar\theta) = \\
&= \frac{1}{8}\left[\mathrm{Tr}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu) + \mathrm{Tr}(\sigma^\nu\bar\sigma^\mu)\right](\theta\theta)(\bar\theta\,\bar\theta) = \\
&= \frac{1}{8}\left(2\eta^{\mu\nu} + 2\eta^{\nu\mu}\right)(\theta\theta)(\bar\theta\,\bar\theta) = \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)(\bar\theta\,\bar\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta \overset{(2.5.12)}{=} & \frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta + \frac{1}{2}\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\theta = \frac{1}{2}\theta^\alpha\left[(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot{\alpha}\beta} + (\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\right]\theta_\beta \overset{(2.5.23)}{=} \\
= & \frac{1}{\cancel{2}}\theta^\alpha\left(\cancel{2}\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta\right)\theta_\beta = \eta^{\mu\nu}\theta^\alpha\theta_\alpha = \eta^{\mu\nu}(\theta\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\theta} \overset{(2.5.13)}{=} & \frac{1}{2}\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\theta} + \frac{1}{2}\overline{\theta}\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\theta} = \frac{1}{2}\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left[(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}(\sigma^\nu)_{\beta\dot{\beta}} + (\overline{\sigma}^\nu)^{\dot{\alpha}\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}}\right]\overline{\theta}^{\dot{\beta}} \overset{(2.5.24)}{=} \\
= & \frac{1}{2}\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left(2\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\right)\overline{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\overline{\theta}\ \overline{\theta})
\end{aligned}
$$

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με την απόδειξη της (2.5.38). Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& \psi_1(\chi\xi) + \chi_1(\xi\psi) + \xi_1(\psi\chi) = \\
= & \psi_1(\varepsilon^{\alpha\beta}\chi_\beta\xi_\alpha) + \chi_1(\varepsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta\psi_\alpha) + \xi_1(\varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta\chi_\alpha) = \\
= & \psi_1(\varepsilon^{12}\chi_2\xi_1 + \varepsilon^{21}\chi_1\xi_2) + \chi_1(\varepsilon^{12}\xi_2\psi_1 + \varepsilon^{21}\xi_1\psi_2) + \\
& + \xi_1(\varepsilon^{12}\psi_2\chi_1 + \varepsilon^{21}\psi_1\chi_2) = \\
= & \psi_1(\chi_2\xi_1 - \chi_1\xi_2) + \chi_1(\xi_2\psi_1 - \xi_1\psi_2) + \xi_1(\psi_2\chi_1 - \psi_1\chi_2) = \\
= & \psi_1\chi_2\xi_1 - \psi_1\chi_1\xi_2 + \chi_1\xi_2\psi_1 - \chi_1\xi_1\psi_2 + \xi_1\psi_2\chi_1 - \xi_1\psi_1\chi_2 = \\
= & -\psi_1\xi_1\chi_2 + \chi_1\psi_1\xi_2 - \chi_1\psi_1\xi_2 + \xi_1\chi_1\psi_2 - \xi_1\chi_1\psi_2 + \psi_1\xi_1\chi_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \psi_2(\chi\xi) + \chi_2(\xi\psi) + \xi_2(\psi\chi) = \\
= & \psi_2(\chi_2\xi_1 - \chi_1\xi_2) + \chi_2(\xi_2\psi_1 - \xi_1\psi_2) + \xi_2(\psi_2\chi_1 - \psi_1\chi_2) = \\
= & \psi_2\chi_2\xi_1 - \psi_2\chi_1\xi_2 + \chi_2\xi_2\psi_1 - \chi_2\xi_1\psi_2 + \xi_2\psi_2\chi_1 - \xi_2\psi_1\chi_2 = \\
= & -\chi_2\psi_2\xi_1 + \psi_2\xi_2\chi_1 - \xi_2\chi_2\psi_1 + \chi_2\psi_2\xi_1 - \psi_2\xi_2\chi_1 + \xi_2\chi_2\psi_1 = 0
\end{aligned}
$$

Έτσι, είναι:

$$
\begin{aligned}
& \psi_\alpha(\chi\xi) + \chi_\alpha(\xi\psi) + \xi_\alpha(\psi\chi) = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \psi_\alpha(\chi\xi) = -\chi_\alpha(\xi\psi) - \xi_\alpha(\psi\chi), \ \alpha = 1, 2
\end{aligned}
$$

2.6 Σπίνορες Dirac και Majorana

Για να δούμε τη σύνδεση των σπινόρων Weyl, που έχουν δύο συνιστώσες, με τους σπίνορες Dirac, που έχουν τέσσερις συνιστώσες, θεωρούμε τους πίνακες:

$$
\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6.1}
$$

όπου $\mu = 0, 1, 2, 3$, $\alpha, \beta = 1, 2$, $\dot{\alpha}, \dot{\beta} = \dot{1}, \dot{2}$, που είναι οι πίνακες γ του Dirac στην αναπαράσταση Weyl. Σε οποιαδήποτε αναπαράσταση, οι πίνακες γ του Dirac ικανοποιούν την άλγεβρα Clifford:

$$
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}I_4 \tag{2.6.2}
$$

όπου ο I_4 είναι ο ταυτοτικός 4×4 πίνακας.

Στην αναπαράσταση Weyl για τους πίνακες γ, ο πίνακας $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, που αποτελεί τον τελεστή της chirality, είναι διαγώνιος και ισούται με:

$$
\gamma^5 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \tag{2.6.3}
$$

Ένας σπίνορας Dirac, Ψ_D, ορίζεται ως το ευθύ άθροισμα ενός αριστερόστροφου σπίνορα Weyl και ενός δεξιόστροφου σπίνορα Weyl, δηλαδή

$$\Psi_D \equiv \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{2.6.4}$$

όπου θεωρούμε τους σπίνορες Weyl ψ_α και $\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}$ ως διανύσματα στήλης, δηλαδή $\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ και $\overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} \overline{\chi}^{\dot{1}} \\ \overline{\chi}^{\dot{2}} \end{pmatrix}$. Κάτω από έναν πεπερασμένο μετασχηματισμό Lorentz $\Lambda \in SO(1,3)^{\uparrow}$ που χαρακτηρίζεται από 6 ανεξάρτητες πεπερασμένες παραμέτρους $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, ένας σπίνορας Dirac μετασχηματίζεται σύμφωνα με την αναγωγίσιμη $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ αναπαράσταση της άλγεβρας Lie της ομάδας Lorentz, $so(1,3)$. Ο αντίστοιχος κανόνας μετασχηματισμού είναι

$$\Psi_D(x) \to \Psi'_D(x') = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}\Psi_D(x) \tag{2.6.5}$$

όπου $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ και

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] &= \frac{i}{4}\gamma^\mu\gamma^\nu - (\mu \leftrightarrow \nu) = \\ &= \frac{i}{4}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \overline{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} - (\mu \leftrightarrow \nu) = \\ &= \frac{i}{4}\begin{pmatrix} \sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu \end{pmatrix} - (\mu \leftrightarrow \nu) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Sigma^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \overline{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

όπου

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\right) \tag{2.6.7}$$

$$\overline{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}\left(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\right) \tag{2.6.8}$$

$\mu,\nu = 0,1,2,3$. Με δεδομένες τις δομές σπινοριακών δεικτών που έχουμε αποδώσει στους πίνακες σ και $\overline{\sigma}$ (βλ. (2.4.5) και (2.4.6) αντίστοιχα), τα στοιχεία των $\sigma^{\mu\nu}$ και $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ συμβολίζονται αντίστοιχα ως

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta &\equiv \frac{i}{4}\left[(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot{\alpha}\beta} - (\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\right] \\ (\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &\equiv \frac{i}{4}\left[(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}(\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\beta}} - (\overline{\sigma}^\nu)^{\dot{\alpha}\alpha}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\right] \end{aligned}$$

όπου $\alpha,\beta = 1,2$, $\dot{\alpha},\dot{\beta} = \dot{1},\dot{2}$. Οι πίνακες $\Sigma^{\mu\nu}$ ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης της άλγεβρας Lorentz, (2.1.24), όπως και οι $\sigma^{\mu\nu}$ και $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$. Συνδυάζοντας τις (2.6.4), (2.6.5) και (2.6.6), μπορούμε να βρούμε πώς μετασχηματίζονται ένας αριστερόστροφος σπίνορας Weyl ψ_α και ένας δεξιόστροφος σπίνορας Weyl $\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}$ κάτω από έναν πεπερασμένο γνήσιο και ορθόχρονο μετασχηματισμό Lorentz με παραμέτρους $\omega_{\mu\nu}$. Από τις σχέσεις αυτές, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \psi_\alpha(x) \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}}(x) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \psi'_\alpha(x') \\ \overline{\chi}'^{\dot{\alpha}}(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\right)_\alpha{}^\beta & 0 \\ 0 & \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\mu\nu}}\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_\beta(x) \\ \overline{\chi}^{\dot{\beta}}(x) \end{pmatrix}$$

άρα

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x') = \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\right)_\alpha{}^\beta \psi_\beta(x) \tag{2.6.9}$$

$$\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}(x) \to \overline{\chi}'^{\dot{\alpha}}(x') = \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\mu\nu}}\right)^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} \overline{\chi}^{\dot{\beta}}(x) \tag{2.6.10}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι πίνακες $e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}$ και $e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\mu\nu}}$ είναι ακριβώς οι πίνακες M και $(M^{-1})^\dagger$ των σχέσεων (2.3.37α) και (2.3.37δ) αντίστοιχα, αφού ο πίνακας $e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}$ είναι στοιχείο της ομάδα $SL(2,C)$, για οποιοδήποτε σύνολο παραμέτρων $\omega_{\mu\nu}$, καθώς

$$\det\left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\right) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\operatorname{Tr}(\sigma^{\mu\nu})} \overset{\operatorname{Tr}(\sigma^{\mu\nu})=0}{=} e^0 = 1$$

και επιπλέον

$$\left[\left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\right)^{-1}\right]^\dagger = \left(e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\right)^\dagger = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})^\dagger} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\mu\nu}}$$

αφού

$$\begin{aligned}(\sigma^{\mu\nu})^\dagger &= \left[\frac{i}{4}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)\right]^\dagger = \frac{i^*}{4}\left[(\overline{\sigma}^\nu)^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger - (\overline{\sigma}^\mu)^\dagger(\sigma^\nu)^\dagger\right] = \\ &= -\frac{i}{4}\left(\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu - \overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\right) = \frac{i}{4}\left(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\right) = \overline{\sigma}^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Έτσι, οι πίνακες $\sigma^{\mu\nu}$ και $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3$, ταυτοποιούνται ως οι γεννήτορες της ομάδας $SL(2,C)$, που είναι το «καθολικό κάλυμμα» της $SO(1,3)^\uparrow$, στις σπινοριακές αναπαραστάσεις $(\frac{1}{2},0)$ και $(0,\frac{1}{2})$ αντίστοιχα. Επίσης, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις αυτοδυικότητας (self-duality) και αντιαυτοδυικότητας (anti-self-duality) για τους πίνακες $\sigma^{\mu\nu}$ και $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ αντίστοιχα:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\sigma_{\rho\lambda} \tag{2.6.11}$$

$$\overline{\sigma}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\overline{\sigma}_{\rho\lambda} \tag{2.6.12}$$

Με δεδομένο ένα σπίνορα Dirac Ψ_D, όπως στην (2.6.4), οι σπίνορες Dirac $\begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ 0\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix}0 \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της chirality, γ^5, (στην αναπαράσταση Weyl) που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του -1 και $+1$ αντίστοιχα. Πράγματι, είναι:

$$\gamma^5\begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-I_2 & 0 \\ 0 & I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ 0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ 0\end{pmatrix}$$

και

$$\gamma^5\begin{pmatrix}0 \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-I_2 & 0 \\ 0 & I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}$$

γεγονός που δικαιολογεί το χαρακτηρισμό των σπινόρων Weyl ψ_α και $\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}$ ως αριστερόστροφο και δεξιόστροφο αντίστοιχα. Μπορούμε να ορίσουμε τους παρακάτω προβολικούς τελεστές

$$P_L \equiv \frac{1}{2}\left(I_4 - \gamma^5\right),\ P_R \equiv \frac{1}{2}\left(I_4 + \gamma^5\right) \tag{2.6.13}$$

η δράση των οποίων πάνω σε ένα σπίνορα Dirac Ψ_D δίνει τις παραπάνω καταστάσεις με καθορισμένη chirality (-1 ή +1), δηλαδή:

$$\Psi_{D,L} \equiv P_L\Psi_D = \frac{1}{2}\left(I_4 - \gamma^5\right)\Psi_D = \begin{pmatrix}I_2 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Psi_{D,R} \equiv P_R\Psi_D = \frac{1}{2}\left(I_4 + \gamma^5\right)\Psi_D = \begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}$$

Για ένα σπίνορα Dirac, Ψ_D, ορίζεται ο Dirac συζυγής του (Dirac adjoint), $\overline{\Psi}_D$, ως

$$\overline{\Psi}_D \equiv \Psi_D^\dagger A \tag{2.6.14}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \\ \delta^{\beta}_{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6.15}$$

Έτσι, εάν $\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \overline{\chi}^{\dot{1}} \\ \overline{\chi}^{\dot{2}} \end{pmatrix}$, είναι:

$$\Psi_D^\dagger = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ (\overline{\chi}^{\dot{1}})^* \ (\overline{\chi}^{\dot{2}})^*) = (\overline{\psi}_{\dot{1}} \ \overline{\psi}_{\dot{2}} \ \chi^1 \ \chi^2) = (\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \ \chi^\alpha) \tag{2.6.16}$$

όπου θεωρούμε τα $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}$ και χ^α ως διανύσματα γραμμής, δηλαδή $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = (\overline{\psi}_{\dot{1}} \ \overline{\psi}_{\dot{2}})$ και $\chi^\alpha = (\chi^1 \ \chi^2)$. Επομένως

$$\overline{\Psi}_D = \Psi_D^\dagger A = (\overline{\psi}_{\dot{\beta}} \ \chi^\beta) \begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \\ \delta^{\alpha}_{\beta} & 0 \end{pmatrix} = (\chi^\alpha \ \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}) \tag{2.6.17}$$

Ας δούμε τώρα πώς για ένα σπίνορα Dirac Ψ_D ορίζεται ο συζυγής φορτίου του (charge conjugate), $(\Psi_D)^c$. Η έννοια της συζυγίας φορτίου εμφανίζεται στη θεωρία Dirac με τον ακόλουθο τρόπο. Γνωρίζουμε ότι η θεωρία Dirac προβλέπει την ύπαρξη ηλεκτρονίων και ποζιτρονίων (ή, γενικότερα, σωματιδίων και αντισωματιδίων), τα οποία έχουν την ίδια μάζα, αλλά αντίθετα φορτία και ικανοποιούν την ίδια εξίσωση (εξίσωση Dirac). Επομένως, η εξίσωση Dirac πρέπει να διέπεται από μία συμμετρία που αντιστοιχεί στην εναλλαγή σωματιδίων και αντισωματιδίων. Έτσι, αναζητούμε ένα μετασχηματισμό

$$\Psi_D \to (\Psi_D)^c$$

τέτοιον ώστε δεδομένης της εξίσωσης Dirac για ένα σωματίδιο (π.χ. ηλεκτρόνιο) με μάζα m και φορτίο q μέσα σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με τετραδιανυσματικό δυναμικό A_μ, το οποίο περιγράφεται από το σπίνορα Dirac Ψ_D:

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\,\Psi_D = 0 \tag{2.6.18}$$

ο σπίνορας Dirac $(\Psi_D)^c$, που αντιστοιχεί στο αντισωματίδιο του προηγούμενου σωματιδίου, το οποίο έχει μάζα m και φορτίο $-q$, μέσα στο ίδιο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, να ικανοποιεί την εξίσωση Dirac

$$\begin{aligned} &[\gamma^\mu(i\partial_\mu - (-q)A_\mu) - m]\,(\Psi_D)^c = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow\, &[\gamma^\mu(i\partial_\mu + qA_\mu) - m]\,(\Psi_D)^c = 0 \end{aligned} \tag{2.6.19}$$

όπου οι πίνακες γ του Dirac δίνονται από την (2.6.1) (αναπαράσταση Weyl), όπως και σε οποιοδήποτε επόμενο σημείο της παρούσας εργασίας, όπου εμφανίζονται οι εν λόγω πίνακες.

Για να βρούμε πώς το $(\Psi_D)^c$ σχετίζεται με το Ψ_D, ώστε η (2.6.19) να προκύπτει από την (2.6.18), αρχικά θεωρούμε την Ερμιτιανή συζυγή της (2.6.18):

$$\begin{aligned} &(i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_D - qA_\mu\gamma^\mu\Psi_D - m\Psi_D)^\dagger = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow &-i(\partial_\mu\Psi_D)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - qA_\mu\Psi_D^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - m\Psi_D^\dagger = 0 \end{aligned} \tag{2.6.20}$$

Όμως, είναι:

$$A\gamma^\mu A = (\gamma^\mu)^\dagger \tag{2.6.21}$$

για κάθε $\mu = 0, 1, 2, 3$, όπου ο πίνακας A δίνεται από την (2.6.15). Πράγματι, είναι:

$$A\gamma^\mu A = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^\mu & 0 \\ 0 & \overline{\sigma}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \overset{(\overline{\sigma}^\mu)^\dagger = \overline{\sigma}^\mu, (\sigma^\mu)^\dagger = \sigma^\mu}{=}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & (\overline{\sigma}^\mu)^\dagger \\ (\sigma^\mu)^\dagger & 0 \end{pmatrix} = (\gamma^\mu)^\dagger$$

Αντικαθιστώντας την (2.6.21) στην (2.6.20), παίρνουμε:

$$-i(\partial_\mu \Psi_D^\dagger) A \gamma^\mu A - q A_\mu \Psi_D^\dagger A \gamma^\mu A - m \Psi_D^\dagger = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία εξίσωση επί A από δεξιά, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
& - i\partial_\mu(\Psi_D^\dagger A)\gamma^\mu A^2 - qA_\mu(\Psi_D^\dagger A)\gamma^\mu A^2 - m(\Psi_D^\dagger A) = 0 \xRightarrow[A^2 = I_4]{(2.6.14)} \\
& \Rightarrow - i(\partial_\mu \overline{\Psi}_D)\gamma^\mu - qA_\mu \overline{\Psi}_D \gamma^\mu - m\overline{\Psi}_D = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left[-i(\partial_\mu \overline{\Psi}_D)\gamma^\mu - qA_\mu \overline{\Psi}_D \gamma^\mu - m\overline{\Psi}_D\right]^T = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow - i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu \overline{\Psi}_D^T - qA_\mu (\gamma^\mu)^T \overline{\Psi}_D^T - m\overline{\Psi}_D^T = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left[-(\gamma^\mu)^T (i\partial_\mu + qA_\mu) - m\right] \overline{\Psi}_D^T = 0 \qquad (2.6.22)
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε την (2.6.22) επί έναν αντιστρέψιμο 4×4 πίνακα C από αριστερά και εισάγουμε έναν παράγοντα $C^{-1}C(= I_4)$ μπροστά από το $\overline{\Psi}_D^T$, οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
& C\left[-(\gamma^\mu)^T (i\partial_\mu + qA_\mu) - m\right] C^{-1} C \overline{\Psi}_D^T = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left[-C(\gamma^\mu)^T C^{-1} (i\partial_\mu + qA_\mu) - mCC^{-1}\right] C\overline{\Psi}_D^T = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left[-C(\gamma^\mu)^T C^{-1} (i\partial_\mu + qA_\mu) - m\right] C\overline{\Psi}_D^T = 0 \qquad (2.6.23)
\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να ταυτοποιηθεί με την (2.6.19), εάν θέσουμε

$$(\Psi_D)^c \equiv C\overline{\Psi}_D^T \qquad (2.6.24)$$

και επιπλέον απαιτήσουμε να ισχύει

$$\begin{aligned}
& - C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = \gamma^\mu \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow - (C^{-1}C)(\gamma^\mu)^T (C^{-1}C) = C^{-1}\gamma^\mu C \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow - (\gamma^\mu)^T = C^{-1}\gamma^\mu C \Leftrightarrow (\gamma^\mu)^T = -C^{-1}\gamma^\mu C \qquad (2.6.25)
\end{aligned}$$

Ο πίνακας C καλείται πίνακας συζυγίας φορτίου. Ο πίνακας αυτός υπόκειται κα σε έναν επιπλέον περιορισμό, ο οποίος απορρέει από την απαίτηση:

$$((\Psi_D)^c)^c = \Psi_D \qquad (2.6.26)$$

με την προφανή φυσική σημασία ότι το αντισωματίδιο του αντισωματιδίου ενός δεδομένου σωματιδίου δεν είναι παρά το αρχικό σωματίδιο. Με βάση την (2.6.24) έχουμε:

$$\begin{aligned}
((\Psi_D)^c)^c &= C\overline{(\Psi_D)^c}^T = C\left[((\Psi_D)^c)^\dagger A\right]^T = C\left[\left(C\overline{\Psi}_D^T\right)^\dagger A\right]^T = \\
&= C\left[\left(\overline{\Psi}_D^T\right)^\dagger C^\dagger A\right]^T = C\left[\overline{\Psi}_D^* C^\dagger A\right]^T = C\left[\left(\Psi_D^\dagger A\right)^* C^\dagger A\right]^T = \\
&= C\left(\Psi_D^T A^* C^\dagger A\right)^T = CA^T C^* A^\dagger \Psi_D
\end{aligned}$$

Επομένως, για να ισχύει η (2.6.26) για οποιονδήποτε σπίνορα Dirac Ψ_D, πρέπει ο πίνακας C να ικανοποιεί τη σχέση:

$$CA^T C^* A^\dagger = I_4 \tag{2.6.27}$$

Μία κατάλληλη επιλογή για τον πίνακα C, ώστε να ικανοποιούνται οι (2.6.25) και (2.6.27) (στην αναπαράσταση Weyl για τους πίνακες γ), είναι η εξής:

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix} \tag{2.6.28}$$

οπότε:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix}^{11} \tag{2.6.29}$$

Πράγματι, εάν ο C δίνεται από την (2.6.28), έχουμε:

$$\begin{aligned} C^{-1}\gamma^\mu C &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma} \\ (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\gamma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\gamma\delta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot\gamma\dot\delta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\delta} \\ (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\delta} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\delta} \\ \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\delta} & 0 \end{pmatrix} \overset{(2.4.7),(2.4.8)}{=} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\delta\alpha} \\ -(\sigma^\mu)_{\delta\dot\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\left(\overline{\sigma}^{\mu T}\right)^{\alpha\dot\delta} \\ -\left(\sigma^{\mu T}\right)_{\dot\alpha\delta} & 0 \end{pmatrix} = -(\gamma^\mu)^T \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} CA^T C^* A^\dagger &= CA^T C^* (A^T)^* \overset{(2.6.15),(2.6.28)}{=} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \delta^\beta_\gamma \\ \delta^{\dot\gamma}_{\dot\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\gamma\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot\delta}_{\dot\zeta} \\ \delta^\zeta_\delta & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{\alpha\beta}\delta^\beta_\gamma \\ \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\delta^{\dot\gamma}_{\dot\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta}\delta^{\dot\delta}_{\dot\zeta} \\ \varepsilon^{\gamma\delta}\delta^\zeta_\delta & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{\alpha\gamma} \\ \varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{\dot\gamma\dot\zeta} \\ \varepsilon^{\gamma\zeta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon^{\gamma\zeta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\zeta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \delta^\zeta_\alpha & 0 \\ 0 & \delta^{\dot\alpha}_{\dot\zeta} \end{pmatrix} = I_4 \end{aligned}$$

όπως πρέπει.

Έτσι, εάν $\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}$ είναι ένας σπίνορας Dirac, ο συζυγής φορτίου του είναι

$$(\Psi_D)^c = C\overline{\Psi}_D^T \overset{(2.6.17)}{=} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^\beta \\ \overline{\psi}_{\dot\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta \\ \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}_{\dot\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \tag{2.6.30}$$

[11] Παρατηρείστε ότι

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^{\beta\gamma} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\dot\beta\dot\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\gamma} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^\gamma_\alpha & 0 \\ 0 & \delta^{\dot\alpha}_{\dot\gamma} \end{pmatrix} = I_4,$$

όπως πρέπει.

όπου θεωρούμε τα χ^β και $\overline{\psi}_{\dot\beta}$ ως διανύσματα στήλης $\left(\chi^\beta = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix},\ \overline{\psi}_{\dot\beta} = \ = \begin{pmatrix} \overline{\psi}_{\dot 1} \\ \overline{\psi}_{\dot 2} \end{pmatrix}\right)$, όπως και τα χ_α και $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$ $\left(\chi_\alpha = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix},\ \overline{\psi}^{\dot\alpha} = \begin{pmatrix} \overline{\psi}^{\dot 1} \\ \overline{\psi}^{\dot 2} \end{pmatrix}\right)$. Συγκρίνοντας την (2.6.30) με την (2.6.4), βλέπουμε ότι η συζυγία φορτίου εναλλάσσει τους ρόλους των χ και ψ.

Ένας σπίνορας Majorana, Ψ_M, είναι ένας σπίνορας Dirac, ο οποίος ισούται με το συζυγή φορτίου του, δηλαδή ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση, γνωστή και ως συνθήκη Majorana:

$$\Psi_M = (\Psi_M)^c \tag{2.6.31}$$

Αν γράψουμε $\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}$, όπως για ένα τυχαίο σπίνορα Dirac, τότε, με δεδομένη την (2.6.30), η απαίτηση (2.6.31) επιβάλλει:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \psi_\alpha &= \chi_\alpha \end{aligned} \tag{2.6.32}$$

για κάθε $\alpha = 1, 2$. Η (2.6.32) εξασφαλίζει και ότι $\overline{\psi}^{\dot\alpha} = \overline{\chi}^{\dot\alpha}$, για κάθε $\dot\alpha = \dot 1, \dot 2$, αφού:

$$\overline{\psi}^{\dot\alpha} = (\psi^\alpha)^* = (\varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta)^* \tag{2.6.33}$$

ομοίως και για το χ. Μπορούμε επομένως να εκφράσουμε ένα σπίνορα Majorana Ψ_M συναρτήσει ενός αριστερόστροφου σπίνορα Weyl ψ_α:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{2.6.34}$$

με τις συνιστώσες του αντίστοιχου δεξιόστροφου σπίνορα Weyl, $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$, να δίνονται από την (2.6.33). Συνεπώς, ένας σπίνορας Majorana έχει μόνο δύο ανεξάρτητες μιγαδικές συνιστώσες, σε αντίθεση με έναν τυχαίο σπίνορα Dirac, ο οποίος έχει 4 ανεξάρτητες μιγαδικές συνιστώσες, δύο για καθέναν από τους σπίνορες Weyl που τον αποτελούν. Επίσης, με δεδομένο ένα σπίνορα Weyl ψ_α, μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε ένα σπίνορα Majorana σύμφωνα με την (2.6.34). Ακόμη, ένας γενικός σπίνορας Dirac Ψ_D μπορεί πάντα να γραφεί συναρτήσει δύο σπινόρων Majorana:

$$\Psi_D = \Psi_{M_1} + i\Psi_{M_2}, \tag{2.6.35}$$

όπου

$$\Psi_{M_1} = \frac{1}{2}\left(\Psi_D + (\Psi_D)^c\right) \tag{2.6.36}$$

$$\Psi_{M_2} = \frac{1}{2i}\left(\Psi_D - (\Psi_D)^c\right) \tag{2.6.37}$$

Οι Ψ_{M_1} και Ψ_{M_2} είναι πράγματι σπίνορες Majorana, αφού αν λάβουμε υπόψη τον ορισμό του συζυγούς φορτίου ενός τυχαίου σπίνορα Dirac, (2.6.24), μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

$$(\Psi_{M_1})^c = \frac{1}{2}\left[(\Psi_D)^c + ((\Psi_D)^c)^c\right] = \frac{1}{2}\left[(\Psi_D)^c + \Psi_D\right] = \Psi_{M_1}$$

και

$$(\Psi_{M_2})^c = \frac{1}{2i^*}\left[(\Psi_D)^c - ((\Psi_D)^c)^c\right] = -\frac{1}{2i}\left[(\Psi_D)^c - \Psi_D\right] = \frac{1}{2i}\left[\Psi_D - (\Psi_D)^c\right] = \Psi_{M_2}$$

Επίσης, είναι ενδιαφέρον να δούμε πώς οι συνήθεις διαγραμμικές ποσότητες με σπίνορες Dirac, που έχουν καθορισμένες ιδιότητες μετασχηματισμού κάτω από την ομάδα Lorentz, εκφράζονται συναρτήσει των σπινόρων Weyl που εμφανίζονται στους σπίνορες Dirac. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε δύο σπίνορες Dirac:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \overline{\eta}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{2.6.38}$$

Έχουμε:

$$\overline{\Psi}\Phi \overset{(2.6.17)}{=} (\chi^\alpha \; \overline{\psi}_{\dot\alpha}) \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \overline{\eta}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} = \chi^\alpha \phi_\alpha + \overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\eta}^{\dot\alpha} = \chi\phi + \overline{\psi}\overline{\eta}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}\gamma^5\Phi \overset{(2.6.3)}{=} & (\chi^\alpha \; \overline{\psi}_{\dot\alpha}) \begin{pmatrix} -\delta_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\beta \\ \overline{\eta}^{\dot\beta} \end{pmatrix} = \\
= & (\chi^\alpha \; \overline{\psi}_{\dot\alpha}) \begin{pmatrix} -\phi_\alpha \\ \overline{\eta}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} = -\chi^\alpha\phi_\alpha + \overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\eta}^{\dot\alpha} = -\chi\phi + \overline{\psi}\overline{\eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}\gamma^\mu\Phi \overset{(2.6.1)}{=} & (\chi^\alpha \; \overline{\psi}_{\dot\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} \\ (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\beta \\ \overline{\eta}^{\dot\beta} \end{pmatrix} = \\
= & (\chi^\alpha \; \overline{\psi}_{\dot\alpha}) \begin{pmatrix} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\beta} \\ (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\phi_\beta \end{pmatrix} = \\
= & \chi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\beta} + \overline{\psi}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\phi_\beta = \chi\sigma^\mu\overline{\eta} + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Phi = & (\chi^\alpha \; \overline{\psi}_{\dot\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} \\ (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta_\beta^\gamma & 0 \\ 0 & \delta^{\dot\beta}_{\dot\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\gamma \\ \overline{\eta}^{\dot\gamma} \end{pmatrix} = \\
= & \left(\overline{\psi}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} \; \chi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\right) \begin{pmatrix} -\delta_\beta^\gamma\phi_\gamma \\ \delta^{\dot\beta}_{\dot\gamma}\overline{\eta}^{\dot\gamma} \end{pmatrix} = \\
= & \left(\overline{\psi}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} \; \chi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\right) \begin{pmatrix} -\phi_\beta \\ \overline{\eta}^{\dot\beta} \end{pmatrix} = \\
= & -\overline{\psi}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\phi_\beta + \chi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\beta} = \\
= & -\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\phi + \chi\sigma^\mu\overline{\eta} = \chi\sigma^\mu\overline{\eta} - \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\Phi = & (\chi^\alpha \; \overline{\psi}_{\dot\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} \\ (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma} \\ (\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\gamma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\gamma \\ \overline{\eta}^{\dot\gamma} \end{pmatrix} = \\
= & \left(\overline{\psi}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} \; \chi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\right) \begin{pmatrix} (\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\overline{\eta}^{\dot\gamma} \\ (\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\gamma}\phi_\gamma \end{pmatrix} = \\
= & \chi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\gamma}\phi_\gamma + \overline{\psi}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\overline{\eta}^{\dot\gamma} = \\
= & \chi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\phi + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\eta}
\end{aligned}$$

Καταγράφουμε συγκεντρωτικά τα παραπάνω αποτελέσματα:

$$\overline{\Psi}\Phi = \chi\phi + \overline{\psi}\overline{\eta} \tag{2.6.39}$$

$$\overline{\Psi}\gamma^5\Phi = -\chi\phi + \overline{\psi}\overline{\eta} \tag{2.6.40}$$

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\Phi = \chi\sigma^\mu\overline{\eta} + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\phi \tag{2.6.41}$$

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Phi = \chi\sigma^\mu\overline{\eta} - \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\phi \tag{2.6.42}$$

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\Phi = \chi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\phi + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\eta} \tag{2.6.43}$$

Οι αντίστοιχες διγραμμικές ποσότητες για δύο σπίνορες Majorana

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \; \Phi_M = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \overline{\phi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{2.6.44}$$

εκφρασμένες συναρτήσει των σπινόρων Weyl ψ και ϕ, από τους οποίους κατασκευάζονται οι Ψ_M και Φ_M αντίστοιχα, προκύπτουν άμεσα από τις (2.6.39)-(2.6.43), εάν θέσουμε $\chi = \psi$ και $\eta = \phi$:

$$\overline{\Psi}_M\Phi_M = \psi\phi + \overline{\psi}\,\overline{\phi} \tag{2.6.45}$$

$$\overline{\Psi}_M\gamma^5\Phi_M = -\psi\phi + \overline{\psi}\,\overline{\phi} \tag{2.6.46}$$

$$\overline{\Psi}_M\gamma^\mu\Phi_M = \psi\sigma^\mu\overline{\phi} + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\phi \tag{2.6.47}$$

$$\overline{\Psi}_M\gamma^\mu\gamma^5\Phi_M = \psi\sigma^\mu\overline{\phi} - \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\phi \tag{2.6.48}$$

$$\overline{\Psi}_M\gamma^\mu\gamma^\nu\Phi_M = \psi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\phi + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\phi} \tag{2.6.49}$$

Τέλος, ας θεωρήσουμε τη γνωστή Lagrangian πυκνότητα για ένα ελεύθερο φερμιόνιο Dirac με μάζα M, που περιγράφεται από ένα σπίνορα 4 συνιστωσών Ψ_D όπως στην (2.6.4):

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\overline{\Psi}_D\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_D - M\overline{\Psi}_D\Psi_D \tag{2.6.50}$$

Εφαρμόζοντας την (2.6.39) για $\Psi = \Phi = \Psi_D$ και την (2.6.41) για $\Psi = \Psi_D$ και $\Phi = \partial_\mu\Psi_D \equiv \frac{\partial\Psi_D}{\partial x^\mu}$, μπορούμε άμεσα να γράψουμε την παραπάνω Lagrangian συναρτήσει των σπινόρων Weyl ψ και $\overline{\chi}$ που αποτελούν το σπίνορα Dirac Ψ_D:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Dirac}} =& i\left(\chi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi} + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) - M(\chi\psi + \overline{\psi}\overline{\chi}) = \\
=& i\left(\partial_\mu(\chi\sigma^\mu\overline{\chi}) - (\partial_\mu\chi)\sigma^\mu\overline{\chi} + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) - M(\chi\psi + \overline{\psi}\overline{\chi}) \xrightarrow{(2.5.9)} \\
\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{Dirac}} =& i\left(\overline{\chi}\;\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) - M(\chi\psi + \overline{\psi}\overline{\chi})
\end{aligned} \tag{2.6.51}$$

όπου έχουμε παραλείψει τον όρο ολικής παραγώγου, $i\partial_\mu(\chi\sigma^\mu\overline{\chi})$, διότι αυτός έχει μηδενική συνεισφορά στη δράση $S_{\text{Dirac}} = \int d^4x\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

Η Lagrangian πυκνότητα για ένα ελεύθερο φερμιόνιο Majorana με μάζα M, το οποία περιγράφεται από ένα σπίνορα 4 συνιστωσών Ψ_M, όπως στην (2.6.34), είναι

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = \frac{i}{2}\overline{\Psi}_M\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_M - \frac{1}{2}M\overline{\Psi}_M\Psi_M \tag{2.6.52}$$

Εφαρμόζοντας την (2.6.45) για $\Phi_M = \Psi_M$ και την (2.6.47) για $\Phi_M = \partial_\mu\Psi_M$, μπορούμε να γράψουμε την (2.6.52) συναρτήσει του σπίνορα Weyl ψ από τον οποίο κατασκευάζεται ο σπίνορας Majorana Ψ_M:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Majorana}} =& \frac{i}{2}\left(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) - \frac{1}{2}M(\psi\psi + \overline{\psi}\,\overline{\psi}) = \\
=& \frac{i}{2}\left(\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\overline{\psi}) - (\partial_\mu\psi)\sigma^\mu\overline{\psi} + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) - \frac{1}{2}M(\psi\psi + \overline{\psi}\,\overline{\psi}) = \\
=& \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) - \frac{1}{2}M(\psi\psi + \overline{\psi}\,\overline{\psi}) \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{Majorana}} =& i\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) - \frac{1}{2}M(\psi\psi + \overline{\psi}\,\overline{\psi})
\end{aligned} \tag{2.6.53}$$

Κεφάλαιο 3

Η άλγεβρα της υπερσυμμετρίας και οι αναπαραστάσεις της

3.1 Η άλγεβρα της υπερσυμμετρίας

Το 1967, οι Coleman και Mandula απέδειξαν ότι κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, οι οποίες αναφέρονται στο [28], οποιαδήποτε συνεχής ομάδα συμμετρίας του πίνακα σκέδασης στην κβαντική θεωρία πεδίου, γνωστού και ως πίνακα S, είναι το ευθύ γινόμενο της ομάδας Poincaré και μίας ομάδας εσωτερικής συμμετρίας, η οποία σχετίζεται συνήθως με κάποιον διατηρούμενο κβαντικό αριθμό, όπως για παράδειγμα το ηλεκτρικό φορτίο ή το ισοσπίν. Έτσι, οι γεννήτορες μίας συνεχούς ομάδας συμμετρίας G του πίνακα S είναι οι γεννήτορες των χωροχρονικών μετατοπίσεων, P_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, οι οποίοι αποτελούν τον τελεστή της τετραορμής (ενέργειας-ορμής), οι γεννήτορες της ομάδας Lorentz, $M_{\mu\nu}$, και ένας πεπερασμένος αριθμός Ερμιτιανών τελεστών, T_l, οι οποίοι αποτελούν τους γεννήτορες μίας ομάδας εσωτερικής συμμετρίας. Η άλγεβρα Lie της ομάδας G είναι αυτή της ομάδας Poincaré

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{3.1.1}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \tag{3.1.2}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i\left(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right) \tag{3.1.3}$$

μαζί με αυτήν της ομάδας εσωτερικής συμμετρίας

$$[T_l, T_m] = ic_{lmn}T_n, \tag{3.1.4}$$

όπου τα c_{lmn} είναι κάποιες σταθερές δομής, ενώ υποννοείται άθροιση ως προς n. Επίσης, ισχύουν οι σχέσεις μετάθεσης:

$$[T_l, P_\mu] = 0 \tag{3.1.5}$$

$$[T_l, M_{\mu\nu}] = 0 \tag{3.1.6}$$

οι οποίες ανταναγκλούν ακριβώς το γεγονός ότι η ομάδα G είναι ένα ευθύ γινόμενο Poincaré×εσωτερική συμμετρία και σημαίνουν ότι οι τελεστές T_l είναι αναλλοίωτοι κάτω από χωροχρονικές μετατοπίσεις και Lorentz αναλλοίωτοι (Lorentz scalars) αντίστοιχα. Ακόμη, η άλγεβρα Lie της ομάδας εσωτερικής συμμετρίας, η οποία ορίζεται από σχέσεις μετάθεσης της μορφής (3.1.4), είναι το ευθύ άθροισμα μίας συμπαγούς ημιαπλής άλγεβρας Lie και ενός αριθμού $U(1)$ Lie αλγεβρών. Για μία απόδειξη του θεωρήματος των Coleman και Mandula, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [24].

Οι περιορισμοί του θεωρήματος των Coleman και Mandula μπορούν να αποφευχθούν με την εξασθένιση μίας (ή περισσότερων) από τις υποθέσεις του. Συγκεκριμένα, το εν λόγω θεώρημα υποθέτει ότι η άλγεβρα μίας συμμετρίας του πίνακα S περιλαμβάνει μόνο σχέσεις μετάθεσης, με όλους τους γεννήτορες να είναι μποζονικοί. Οι Haag, Lopuszański και Sohnius [29] γενίκευσαν την έννοια της άλγεβρας Lie, ώστε να συμπεριληφθούν σε αυτήν αλγεβρικά συστήματα, των οποίων οι σχέσεις ορισμού περιλαμβάνουν εκτός από σχέσεις μετάθεσης και σχέσεις αντιμετάθεσης. Τέτοιου είδους άλγεβρες ονομάζονται υπεράλγεβρες ή graded Lie άλγεβρες. Η εξασθένιση της προαναφερθείσας υπόθεσης του θεωρήματος των Coleman και Mandula με την εισαγωγή κατάλληλων «φερμιονικών» γεννητόρων, οι οποίοι ικανοποιούν σχέσεις αντιμετάθεσης, οδηγεί στις υπερσυμμετρικές άλγεβρες που είναι οι μόνες graded Lie άλγεβρες που γεννούν συμμετρίες του πίνακα S συνεπείς με τη σχετικιστική κβαντική θεωρία πεδίου [29].

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό μίας graded Lie άλγεβρας. Αρχικά, υπενθυμίζουμε τον ορισμό της άλγεβρας Lie.

Ορισμός (άλγεβρα Lie)
Μία άλγεβρα Lie είναι ένας διανυσματικός χώρος L πάνω σε ένα σώμα K (το σύνολο των πραγματικών αριθμών, R, ή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, C) με ένα κανόνα σύνθεσης (γινόμενο)

$$\circ : L \times L \to L$$

τέτοιον ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) $v_1 \circ v_2 \in L$ (κλειστότητα),

ii) $v_1 \circ (v_2 + v_3) = v_1 \circ v_2 + v_1 \circ v_3$ (γραμμικότητα),

iii) $v_1 \circ v_2 = -v_2 \circ v_1$ (αντισυμμετρία),

iv) $v_1 \circ (v_2 \circ v_3) + v_2 \circ (v_3 \circ v_1) + v_3 \circ (v_1 \circ v_2) = 0$ (ταυτότητα Jacobi),

για κάθε $v_1, v_2, v_3 \in L$.

Στην απλούστερη περίπτωση, μία graded άλγεβρα Lie είναι ένας διανυσματικός χώρος L, ο οποίος είναι το ευθύ άθροισμα δύο διανυσματικών χώρων L_0 και L_1:

$$L = L_0 \oplus L_1$$

και είναι εφοδιασμένος με ένα κανόνα σύνθεσης

$$\circ : L \times L \to L$$

τέτοιον ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) Για κάθε $x_i \in L_i$, $x_j \in L_j$, όπου $i, j \in \{0, 1\}$,

$$x_i \circ x_j \in L_{(i+j) \mod 2} \tag{3.1.7}$$

ii) Υπερσυμμετρικοποίηση: Για κάθε $x_i \in L_i,\ x_j \in L_j,\ i, j \in \{0, 1\}$,

$$x_i \circ x_j = -(-1)^{ij} x_j \circ x_i \tag{3.1.8}$$

iii) Γενικευμένες ταυτότητες Jacobi: Για κάθε $x_k \in L_k,\ x_l \in L_l,\ x_m \in L_m$, όπου $k, l, m \in \{0, 1\}$, έχουμε:

$$x_k \circ (x_l \circ x_m)(-1)^{km} + x_l \circ (x_m \circ x_k)(-1)^{lk} + x_m \circ (x_k \circ x_l)(-1)^{ml} = 0 \tag{3.1.9}$$

Ο διανυσματικός χώρος L εφοδιασμένος με το «γινόμενο» $\circ$ αποτελεί μία $\mathbb{Z}_2$-graded Lie άλγεβρα. Από τον παραπάνω ορισμό μίας $\mathbb{Z}_2$-graded Lie άλγεβρας, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο υπόχωρος L_0 του χώρου L, εφοδιασμένος με το «γινόμενο» $\circ$, αποτελεί μία συνήθη άλγεβρα Lie, αφού ικανοποιεί τον αντίστοιχα ορισμό. Όμως, δεν ισχύει το ίδιο και για τον υπόχωρο L_1, διότι, σύμφωνα με την (3.1.7), ο L_1 δεν είναι κλειστός κάτω από τον κανόνα σύνθεσης $\circ$. Πράγματι, εάν $x, y \in L_1$, τότε:

$$x \circ y \in L_{(1+1) \mod 2} = L_0$$

Εάν L είναι μία $\mathbb{Z}_2$-graded Lie άλγεβρα όπως στον προηγούμενο ορισμό, αποδίδουμε σε κάθε στοιχείο $X \in L$ έναν αριθμό $g(X) \in \{0, 1\}$, όπου:

$$g(X) = 0 \Leftrightarrow X \in L_0 \tag{3.1.10}$$

$$g(X) = 1 \Leftrightarrow X \in L_1 \tag{3.1.11}$$

Λέμε ότι το στοιχείο $X \in L$ είναι άρτιο, εάν $g(X) = 0$, ενώ είναι περιττό, εάν $g(X) = 1$. Ο υπόχωρος L_0 της graded άλγεβρας Lie L, που περιέχει τα άρτια στοιχεία, ονομάζεται μποζονικός τομέας, ενώ ο υπόχωρος L_1 καλείται φερμιονικός τομέας. Το «γινόμενο» $\circ : L \times L \to L$ ορίζεται από τη σχέση:

$$X \circ Y = XY - (-1)^{g(X)g(Y)} YX \tag{3.1.12}$$

$\forall\ X, Y \in L$, όπου καθένα εκ των X και Y είναι στοιχείο ενός από τους υποχώρους L_0 και L_1.

Αν $X_1, X_2 \in L_0$, τότε $g(X_1) = g(X_2) = 0$ και

$$\begin{aligned} X_1 \circ X_2 &\overset{(3.1.12)}{=} X_1X_2 - (-1)^{0\cdot 0} X_2X_1 = X_1X_2 - X_2X_1 \equiv \\ &\equiv [X_1, X_2] \overset{(3.1.7)}{\in} L_0 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Αν $X \in L_0$, $Y \in L_1$, τότε $g(X) = 0$ και $g(Y) = 1$, οπότε

$$\begin{aligned} X \circ Y &\overset{(3.1.12)}{=} XY - (-1)^{0\cdot 1} YX = XY - YX \equiv \\ &\equiv [X, Y] \overset{(3.1.7)}{\in} L_1 \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Αν $Y_1, Y_2 \in L_1$, τότε $g(Y_1) = g(Y_2) = 1$, επομένως:

$$\begin{aligned} Y_1 \circ Y_2 &\overset{(3.1.12)}{=} Y_1Y_2 - (-1)^{1\cdot 1} Y_2Y_1 = Y_1Y_2 + Y_2Y_1 \equiv \\ &\equiv \{Y_1, Y_2\} \overset{(3.1.7)}{\in} L_0 \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Επίσης, μπορεί να δειχθεί ότι το «γινόμενο» $\circ : L \times L \to L$, που ορίζεται από την (3.1.12), ικανοποιεί τις ιδιότητες ii) και iii) στον ορισμό μία $\mathbb{Z}_2$-graded άλγεβρας Lie.

Μία υπερσυμμετρική άλγεβρα είναι μία $\mathbb{Z}_2$-graded Lie άλγεβρα

$$L = L_0 \oplus L_1 \tag{3.1.16}$$

όπου ο μποζονικός τομέας L_0 είναι η άλγεβρα Lie μίας επιτρεπόμενης συνεχούς ομάδας συμμετρίας του πίνακα S κατά το θεώρημα των Coleman και Mandula, δηλαδή είναι το ευθύ άθροισμα της άλγεβρας Poincaré, η οποία παράγεται (ως διανυσματικός χώρος) από τους γεννήτορες των χωροχρονικών μετατοπίσεων, P_μ, και τους γεννήτορες της ομάδας Lorentz, $M_{\mu\nu}$, και της άλγεβρας Lie μίας εσωτερικής συμμετρίας, η οποία παράγεται από ένα πεπερασμένο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων Ερμιτιανών γεννητόρων T_l. Οι μποζονικοί γεννήτορες P_μ, $M_{\mu\nu}$ και T_l ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης (3.1.1)-(3.1.6). Ο φερμιονικός τομέας L_1 παράγεται από τελεστές Q^I_α και $\overline{Q}^I_{\dot\alpha} = (Q^I_\alpha)^\dagger$, όπου $I = 1, 2, \ldots, N$ (N θετικός ακέραιος), $\alpha = 1, 2$, που ανήκουν στις $(\frac{1}{2}, 0)$ και $(0, \frac{1}{2})$ σπινοριακές αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lie της ομάδας Lorentz αντίστοιχα. Οι Haag, Lopuszański, Sohnius [29] απέδειξαν ότι οι φερμιονικοί γεννήτορες μίας υπερσυμμετρίας του πίνακα S μπορούν να είναι μόνο τέτοιοι τελεστές. Για παράδειγμα, δεν μπορούν να υπάρχουν φερμιονικοί γεννήτορες υπερσυμμετριών που είναι στην $(\frac{1}{2}, 1)$ ή στην $(1, \frac{1}{2})$ αναπαράσταση της άλγεβρας Lorentz. Οι τελεστές Q^I_α και $\overline{Q}^I_{\dot\alpha}$ δρουν σε ένα χώρο Hilbert με θετικά ορισμένη νόρμα, $\|\ \|$, και μετατρέπουν μποζονικές καταστάσεις σε φερμιονικές και το αντίστροφο. Ακόμη, εάν $N = 1$, λέμε ότι έχουμε απλή υπερσυμμετρία, ενώ αν $N > 1$, έχουμε εκτεταμένη υπερσυμμετρία.

Με βάση τις σχέσεις (3.1.9) και (3.1.13)-(3.1.15), που ισχύουν για μία γενική $\mathbb{Z}_2$-graded άλγεβρα Lie, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες γενικευμένες ταυτότητες Jacobi για τους μποζονικούς και τους φερμιονικούς γεννήτορες μίας υπερσυμμετρίας του πίνακα S:

$$[B_1,[B_2,B_3]] + [B_2,[B_3,B_1]] + [B_3,[B_1,B_2]] = 0 \tag{3.1.17}$$

$$[F_1,[B_2,B_3]] + [B_2,[B_3,F_1]] + [B_3,[F_1,B_2]] = 0 \tag{3.1.18}$$

$$[B_1,\{F_2,F_3\}] + \{F_2,[F_3,B_1]\} - \{F_3,[B_1,F_2]\} = 0 \tag{3.1.19}$$

$$[F_1,\{F_2,F_3\}] + [F_2,\{F_3,F_1\}] + [F_3,\{F_1,F_2\}] = 0 \tag{3.1.20}$$

όπου $B_i \in \{P_\mu, M_{\rho\sigma}, T_l|\ \mu,\rho,\sigma = 0,1,2,3,\ l = 0,1,\ldots,n \in \mathbb{Z}^+\}$ και $F_i \in \{Q^I_\alpha,\ \overline{Q}^J_{\dot\beta}|\ I,J = 1,2,\ldots,N,\ \alpha = 1,2, \dot\beta = \dot 1,\dot 2\}$, για κάθε $i = 1,2,3$.

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την εξαγωγή των σχέσεων μετάθεσης και αντιμετάθεσης που χαρακτηρίζουν μία γενική υπερσυμμετρική άλγεβρα, βασιζόμενοι ως επί το πλείστον στις αντίστοιχες αναλύσεις στις πηγές [29], [23], [15] και [26]. Φυσικά, γνωρίζουμε ήδη τις σχέσεις μετάθεσης που ικανοποιούν οι μποζονικοί γεννήτορες $P_\mu, M_{\mu\nu}, T_l$ (σχέσεις (3.1.1)-(3.1.6)).

Ας ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό του μεταθέτη $\left[Q^I_\alpha, M_{\mu\nu}\right]$ για κάθε $\alpha = 1,2,\ I = 1,2,\ldots,N$ και $\mu,\nu = 0,1,2,3$. Κάτω από ένα μετασχηματισμό Lorentz $\Lambda \in SO(1,3)^\uparrow$, ο οποίος χαρακτηρίζεται από έξι ανεξάρτητες πεπερασμένες παραμέτρους $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, ο Q^I_α, όντας ένα αντικείμενο που ανήκει στην $(\frac{1}{2},0)$ αναπαράσταση της άλγεβρας Lorentz (αριστερόστροφος σπίνορας Weyl), μετασχηματίζεται ως

$$Q^I_\alpha \to Q^{I'}_\alpha = \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\right)_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta \tag{3.1.21}$$

Από την (3.1.21) έπεται ότι κάτω από έναν απειροστό γνήσιο και ορθόχρονο μετασχηματισμό Lorentz $\Lambda' = \mathbb{1} + \omega'$, έχουμε:

$$\begin{aligned} Q^I_\alpha \to Q^{I'}_\alpha &\overset{\text{Taylor}}{=} \left(I_2 - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega'^2)\right)_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta = \\ &= \left[\delta^\beta_\alpha - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\right] Q^I_\beta = \\ &= Q^I_\alpha - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

όπου έχουμε κρατήσει μόνο τους όρους τάξης ≤ 1 ως προς τις απειροστές παραμέτρους $\omega'_{\mu\nu}$. Όμως, ο Q^I_α είναι συγχρόνως και ένας τελεστής που δρα σε ένα χώρο Hilbert. Με την ιδιότητα αυτή, ο Q^I_α μετασχηματίζεται κάτω από τον απειροστό μετασχηματισμό Lorentz Λ' ως

$$Q^I_\alpha \to Q^{I'}_\alpha = \left(U(\mathbb{1}+\omega')\right)^{-1} Q^I_\alpha U(\mathbb{1}+\omega') \tag{3.1.23}$$

όπου ο τελεστής $U(\mathbb{1}+\omega')$ δίνεται από την (2.1.20), την οποία αντικαθιστούμε στην (3.1.23) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} Q^{I'}_\alpha &= \left(I + \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) Q^I_\alpha \left(I - \frac{i}{2}\omega'_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right) = \\ &= Q^I_\alpha - \frac{i}{2}\omega'_{\rho\sigma}Q^I_\alpha M^{\rho\sigma} + \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}M^{\mu\nu}Q^I_\alpha + \mathcal{O}(\omega^2) = \\ &= Q^I_\alpha - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}\left(Q^I_\alpha M^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}Q^I_\alpha\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow Q^{I'}_\alpha &= Q^I_\alpha - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}\left[Q^I_\alpha, M^{\mu\nu}\right] \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

όπου πάλι έχουμε αγνοήσει τους όρους τάξης ≥ 2 ως προς ω'. Προφανώς, τα δεξιά μέλη των (3.1.22) και (3.1.24) είναι ίσα μεταξύ τους, άρα

$$\begin{aligned} Q^I_\alpha - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}\left[Q^I_\alpha, M^{\mu\nu}\right] &= Q^I_\alpha - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}\left[Q^I_\alpha, M^{\mu\nu}\right] &= \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta \end{aligned}$$

για αυθαίρετες απειροστές παραμέτρους $\omega'_{\mu\nu}$ με $\omega'_{\mu\nu} = -\omega'_{\nu\mu}$. Άρα

$$\left[Q^I_\alpha, M^{\mu\nu}\right] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta$$

ή

$$\left[Q^I_\alpha, M_{\mu\nu}\right] = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta \tag{3.1.25}$$

Παίρνουμε το Ερμιτιανό συζυγές των δύο μελών της (3.1.25), οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &\left[Q^I_\alpha, M_{\mu\nu}\right]^\dagger = \left((\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\right)^* (Q^I_\beta)^\dagger \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[M^\dagger_{\mu\nu}, (Q^I_\alpha)^\dagger\right] = \left[\frac{i}{4}\left((\sigma_\mu)_{\alpha\dot\gamma}(\overline{\sigma}_\nu)^{\dot\gamma\beta} - (\sigma_\nu)_{\alpha\dot\gamma}(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\gamma\beta}\right)\right]^* \overline{Q}^I_{\dot\beta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[M_{\mu\nu}, \overline{Q}^I_{\dot\alpha}\right] = -\frac{i}{4}\left[((\sigma_\mu)_{\alpha\dot\gamma})^*((\overline{\sigma}_\nu)^{\dot\gamma\beta})^* - ((\sigma_\nu)_{\alpha\dot\gamma})^*((\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\gamma\beta})^*\right] \overline{Q}^I_{\dot\beta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}\right] = \frac{i}{4}\left[(\sigma_\mu)_{\gamma\dot\alpha}(\overline{\sigma}_\nu)^{\dot\beta\gamma} - (\sigma_\nu)_{\gamma\dot\alpha}(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\beta\gamma}\right] \overline{Q}^I_{\dot\beta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}\right] = -\frac{i}{4}\left[(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\beta\gamma}(\sigma_\nu)_{\gamma\dot\alpha} - (\overline{\sigma}_\nu)^{\dot\beta\gamma}(\sigma_\mu)_{\gamma\dot\alpha}\right] \overline{Q}^I_{\dot\beta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}\right] = -(\overline{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha} \overline{Q}^I_{\dot\beta} \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

για κάθε $\dot\alpha = \dot1, \dot2$.

Θεωρούμε τώρα τον αντιμεταθέτη $\left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\}$ για κάθε $I, J = 1, 2, \ldots, N$, $\alpha = 1, 2$, $\dot\beta = \dot1, \dot2$. Τα Q^I_α και $\overline{Q}^J_{\dot\beta}$ είναι στις $(\frac{1}{2}, 0)$ και $(0, \frac{1}{2})$ αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lorentz αντίστοιχα, οπότε ο αντιμεταθέτης τους μετασχηματίζεται κάτω από την ομάδα Lorentz ως $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Επειδή το μόνο αντικείμενο στη βάση του μποζονικού τομέα μίας υπερσυμμετρικής άλγεβρας με αυτή την ιδιότητα μετασχηματισμού κάτω από την ομάδα Lorentz είναι ο τελεστής της ενέργειας-ορμής P_μ, θα πρέπει να ισχύει:

$$\left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\} = 2C^{IJ}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \tag{3.1.27}$$

όπου C^{IJ}, $I, J = 1, 2, \ldots, N$, είναι τα στοιχεία ενός $N \times N$ πίνακα C, ενώ η ύπαρξη του παράγοντα 2 είναι απλώς μία σύμβαση. Παίρνοντας το Ερμιτιανό συζυγές των δύο μελών της (3.1.27), βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\left(\left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\}\right)^\dagger = 2\left(C^{IJ}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu\right)^\dagger \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{\left(\overline{Q}^J_{\dot\beta}\right)^\dagger, (Q^I_\alpha)^\dagger\right\} = 2\left(C^{IJ}\right)^* \left((\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\right)^* (P_\mu)^\dagger \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{Q^J_\beta, \overline{Q}^I_{\dot\alpha}\right\} = 2\left(C^*\right)^{IJ} (\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha} P_\mu \end{aligned}$$

ή

$$\left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\} = 2\left(C^*\right)^{JI} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \tag{3.1.28}$$

Συγκρίνοντας την (3.1.28) με την (3.1.27), συμπεραίνουμε ότι

$$C^{IJ} = \left(C^*\right)^{JI} = \left(C^\dagger\right)^{IJ}, \ \forall\, I, J = 1, 2, \ldots, N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = C^\dagger$$

δηλαδή ο πίνακας C είναι Ερμιτιανός, οπότε υπάρχει ένας μοναδιακός $N \times N$ πίνακας U ($U^\dagger U = I_N$, όπου I_N είναι ο ταυτοτικός $N \times N$ πίνακας), ο οποίος διαγωνοποιεί τον C:

$$C = U^{-1} D U, \tag{3.1.29}$$

όπου $D = \mathrm{diag}(c^1, c^2, \ldots, c^N)$, όπου $c^I,\ I = 1, 2, \ldots, N$, είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα C, οι οποίες είναι πραγματικοί αριθμοί, αφού ο C είναι Ερμιτιανός. Αντικαθιστώντας την (3.1.29) στην (3.1.27), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &\left\{ Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta} \right\} = 2 \left(U^{-1} D U \right)^{IJ} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \Rightarrow \\ \Rightarrow &\left\{ Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta} \right\} = 2 \left(U^{-1} \right)^{IK} D^{KL} U^{LJ} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Ορίζουμε τώρα νέους φερμιονικούς γεννήτορες:

$$Q^{I'}_\alpha \equiv U^{IJ} Q^J_\alpha \tag{3.1.31}$$

$$\text{και } \overline{Q}^{I'}_{\dot\alpha} = \left(Q^{I'}_\alpha \right)^\dagger = \left(U^{IJ} \right)^* \left(Q^J_\alpha \right)^\dagger = \left(U^\dagger \right)^{JI} \overline{Q}^J_{\dot\alpha} = \left(U^{-1} \right)^{JI} \overline{Q}^J_{\dot\alpha}$$

Από την (3.1.30) έπεται ότι

$$\begin{aligned} &\left\{ U^{MI} Q^I_\alpha, \left(U^{-1} \right)^{JP} \overline{Q}^J_{\dot\beta} \right\} = 2 U^{MI} \left(U^{-1} \right)^{IK} D^{KL} U^{LJ} \left(U^{-1} \right)^{JP} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \Rightarrow \\ \Rightarrow &\left\{ Q^{M'}_\alpha, \overline{Q}^{P'}_{\dot\beta} \right\} = 2 \delta^{MK} D^{KL} \delta^{LP} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \Rightarrow \\ \Rightarrow &\left\{ Q^{M'}_\alpha, \overline{Q}^{P'}_{\dot\beta} \right\} = 2 D^{MP} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \text{ ή} \\ &\left\{ Q^{I'}_\alpha, \overline{Q}^{J'}_{\dot\beta} \right\} = 2 D^{IJ} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu = 2 c^I \delta^{IJ} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \end{aligned} \tag{3.1.32}$$

όπου στην τελευταία σχέση δεν έχουμε άθροιση ως προς το δείκτη I. Από την τελευταία σχέση, έπεται ότι για κάθε $I = 1, 2, \ldots, N$ είναι

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left\{ Q^{I'}_1, \overline{Q}^{I'}_{\dot 1} \right\} + \left\{ Q^{I'}_2, \overline{Q}^{I'}_{\dot 2} \right\}}_{\text{(όχι άθροιση ως προς } I)} = 2 c^I \delta^{II} \left[(\sigma^\mu)_{1\dot 1} P_\mu + (\sigma^\mu)_{2\dot 2} P_\mu \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow &\left\{ Q^{I'}_1, \overline{Q}^{I'}_{\dot 1} \right\} + \left\{ Q^{I'}_2, \overline{Q}^{I'}_{\dot 2} \right\} = 2 c^I \left[(\sigma^0)_{1\dot 1} P_0 + (\sigma^3)_{1\dot 1} P_3 + (\sigma^0)_{2\dot 2} P_0 + (\sigma^3)_{2\dot 2} P_3 \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow &\left\{ Q^{I'}_1, \overline{Q}^{I'}_{\dot 1} \right\} + \left\{ Q^{I'}_2, \overline{Q}^{I'}_{\dot 2} \right\} = 2 c^I \left(P_0 + P_3 + P_0 - P_3 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow &\left\{ Q^{I'}_1, \overline{Q}^{I'}_{\dot 1} \right\} + \left\{ Q^{I'}_2, \overline{Q}^{I'}_{\dot 2} \right\} = 4 c^I P_0 \end{aligned} \tag{3.1.33}$$

Ισχύει ότι ο $P_0 = P^0$ είναι ο τελεστής της ενέργειας. Αν $|\Phi\rangle$ είναι μία τυχαία κατάσταση του χώρου Hilbert στον ποίο δρουν οι φερμιονικοί γεννήτορες Q και $\overline{Q}$ (ή ισοδύναμα, οι Q' και $\overline{Q}'$), απαιτούμε η ενέργειά της, $\langle\Phi| P_0 |\Phi\rangle$, να είναι μη αρνητική:

$$\langle\Phi| P_0 |\Phi\rangle \geq 0 \tag{3.1.34}$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε $I = 1, 2, \ldots, N$, είναι:

$$\begin{aligned} &\langle\Phi| \left(\left\{ Q^{I'}_1, \overline{Q}^{I'}_{\dot 1} \right\} + \left\{ Q^{I'}_2, \overline{Q}^{I'}_{\dot 2} \right\} \right) |\Phi\rangle = \\ = &\langle\Phi| \left(Q^{I'}_1 \overline{Q}^{I'}_{\dot 1} + \overline{Q}^{I'}_{\dot 1} Q^{I'}_1 + Q^{I'}_2 \overline{Q}^{I'}_{\dot 2} + \overline{Q}^{I'}_{\dot 2} Q^{I'}_2 \right) |\Phi\rangle = \end{aligned}$$

$$= \langle\Phi| Q_1^{I'} \left(Q_1^{I'}\right)^\dagger |\Phi\rangle + \langle\Phi| \left(Q_1^{I'}\right)^\dagger Q_1^{I'} |\Phi\rangle + \langle\Phi| Q_2^{I'} \left(Q_2^{I'}\right)^\dagger |\Phi\rangle + \langle\Phi| \left(Q_2^{I'}\right)^\dagger Q_2^{I'} |\Phi\rangle =$$

$$= \left\| \left(Q_1^{I'}\right)^\dagger |\Phi\rangle \right\|^2 + \left\| Q_1^{I'} |\Phi\rangle \right\|^2 + \left\| \left(Q_2^{I'}\right)^\dagger |\Phi\rangle \right\|^2 + \left\| Q_2^{I'} |\Phi\rangle \right\|^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle\Phi| \left(\left\{ Q_1^{I'}, \overline{Q}_{\dot{1}}^{I'} \right\} + \left\{ Q_2^{I'}, \overline{Q}_{\dot{2}}^{I'} \right\} \right) |\Phi\rangle \geq 0 \tag{3.1.35}$$

Από τις (3.1.33)-(3.1.35), έπεται ότι $c^I > 0$, $\forall\ I = 1, 2, \ldots, N$, δηλαδή η απαίτηση η ενέργεια οποιασδήποτε κατάστασης στο χώρο Hilbert, στον οποίο δρουν οι φερμιονικοί γεννήτορες μίας υπερσυμμετρίας του πίνακα S, να είναι μη αρνητική επιβάλλει ο Ερμιτιανός πίνακας C στην (3.1.27) να είναι θετικά ορισμένος. Έτσι, μπορούμε να επανορίσουμε ξανά τους φερμιονικούς γεννήτορες ως

$$Q_\alpha^{I''} = \frac{1}{\sqrt{c^I}} Q_\alpha^{I'} \tag{3.1.36}$$

και

$$\overline{Q}_{\dot{\alpha}}^{I''} = \left(Q_\alpha^{I''}\right)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{c^I}} \left(Q_\alpha^{I'}\right)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{c^I}} \overline{Q}_{\dot{\alpha}}^{I'} \tag{3.1.37}$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left\{ Q_\alpha^{I''}, \overline{Q}_{\dot{\beta}}^{J''} \right\} &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{c^I}} Q_\alpha^{I'}, \frac{1}{\sqrt{c^J}} \overline{Q}_{\dot{\beta}}^{J'} \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{c^I}\sqrt{c^J}} \left\{ Q_\alpha^{I'}, \overline{Q}_{\dot{\beta}}^{J'} \right\} \overset{(3.1.32)}{=} \\
&= \frac{1}{\sqrt{c^I}\sqrt{c^J}} 2 c^I \delta^{IJ} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu = \\
&= \frac{1}{\cancel{\sqrt{c^I}}\cancel{\sqrt{c^J}}} 2 \cancel{\sqrt{c^I}}\cancel{\sqrt{c^J}} \delta^{IJ} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \Rightarrow \\
\Rightarrow \left\{ Q_\alpha^{I''}, \overline{Q}_{\dot{\beta}}^{J''} \right\} &= 2\delta^{IJ} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu
\end{aligned}$$

Από εδώ και στο εξής, θα θεωρούμε ότι για οποιαδήποτε υπερσυμμετρική άλγεβρα, οι φερμιονικοί γεννήτορες Q και $\overline{Q}$ ορίζονται έτσι ώστε να ικανοποιούν την τελευταία σχέση, δηλαδή

$$\left\{ Q_\alpha^I, \overline{Q}_{\dot{\beta}}^J \right\} = 2\delta^{IJ} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \tag{3.1.38}$$

Επίσης, οι φερμιονικοί γεννήτορες Q_α^I και $\overline{Q}_{\dot{\alpha}}^I$ μετατίθενται με τους γεννήτορες των χωροχρονικών μετατοπίσεων, P_μ:

$$\left[P_\mu, Q_\alpha^I\right] = \left[P_\mu, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}^I\right] = 0 \tag{3.1.39}$$

Αυτό δεν είναι καθόλου προφανές. Για να το αποδείξουμε, παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε μεταθέτης $\left[P_\mu, Q_\alpha^I\right]$ ανήκει στην

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

αναπαράσταση της άλγεβρας Lie της ομάδας Lorentz. Ωστόσο, όπως ήδη αναφέραμε, δεν υπάρχουν φερμιονικοί γεννήτορες που μετασχηματίζονται κάτω από την ομάδα Lorentz σύμφωνα με την $(1, \frac{1}{2})$ αναπαράσταση της άλγεβρας Lorentz. Επομένως, η γενικότερη δυνατή μορφή για κάθε τέτοιο μεταθέτη είναι η

$$\left[P_\mu, Q_\alpha^I\right] = X^{IJ} (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \left(\overline{Q}^J\right)^{\dot{\beta}} \tag{3.1.40}$$

(όπου $\left(\overline{Q}^J\right)^{\dot{\beta}} = \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \overline{Q}_{\dot{\gamma}}^J$) για κάποιον $N \times N$ πίνακα X. Από την (3.1.40) έπεται ότι

$$\left[P_\mu, Q_\alpha^I\right]^\dagger = \left(X^{IJ}\right)^* \left((\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\right)^* \left(\left(\overline{Q}^J\right)^{\dot{\beta}}\right)^\dagger \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \left[\left(Q^I_\alpha\right)^\dagger, P^\dagger_\mu\right] = \left(X^*\right)^{IJ} (\sigma_\mu)_{\beta\dot\alpha} \left(Q^J\right)^\beta \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left[\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, P_\mu\right] = \left(X^*\right)^{IJ} (\sigma_\mu)_{\beta\dot\alpha} \left(Q^J\right)^\beta \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left[\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, P_\mu\right] = \left(X^*\right)^{IJ} \varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\varepsilon_{\beta\gamma}(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\gamma\gamma} \left(Q^J\right)^\beta \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left[P_\mu, \overline{Q}^I_{\dot\alpha}\right] = -\left(X^*\right)^{IJ} \varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\varepsilon_{\beta\gamma}(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\gamma\gamma}\varepsilon^{\beta\delta} Q^J_\delta \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left[P_\mu, \overline{Q}^I_{\dot\alpha}\right] = -\left(X^*\right)^{IJ} \varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}(-\varepsilon^{\delta\beta})\varepsilon_{\beta\gamma}(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\gamma\gamma} Q^J_\delta \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left[P_\mu, \varepsilon^{\dot\delta\dot\alpha}\overline{Q}^I_{\dot\alpha}\right] = \left(X^*\right)^{IJ} \varepsilon^{\dot\delta\dot\alpha}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\delta^\delta_\gamma(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\gamma\gamma} Q^J_\delta \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left[P_\mu, \left(\overline{Q}^I\right)^{\dot\delta}\right] = \left(X^*\right)^{IJ} \delta^{\dot\delta}_{\dot\gamma}\delta^\delta_\gamma(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\gamma\gamma} Q^J_\delta = \left(X^*\right)^{IJ} (\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\delta\gamma} Q^J_\gamma \text{ ή} \\
&\quad \left[P_\mu, \left(\overline{Q}^I\right)^{\dot\alpha}\right] = \left(X^*\right)^{IJ} (\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\alpha\beta} Q^J_\beta
\end{aligned} \tag{3.1.41}
$$

για κάθε $\dot\alpha = \dot1, \dot2$. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα Jacobi (3.1.18) για $F_1 = Q^I_\alpha$, $B_2 = P_\mu$, $B_3 = P_\nu$:

$$
\begin{aligned}
&[Q^I_\alpha, \underbrace{[P_\mu, P_\nu]}_{\substack{\parallel \\ 0}}] + [P_\mu, [P_\nu, Q^I_\alpha]] + [P_\nu, [Q^I_\alpha, P_\mu]] = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left[P_\mu, X^{IJ}(\sigma_\nu)_{\alpha\dot\beta}\left(\overline{Q}^J\right)^{\dot\beta}\right] + \left[P_\nu, -X^{IJ}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\left(\overline{Q}^J\right)^{\dot\beta}\right] = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow X^{IJ}(\sigma_\nu)_{\alpha\dot\beta}\left[P_\mu, \left(\overline{Q}^J\right)^{\dot\beta}\right] - X^{IJ}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\left[P_\nu, \left(\overline{Q}^J\right)^{\dot\beta}\right] = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow X^{IJ}(\sigma_\nu)_{\alpha\dot\beta}\left(X^*\right)^{JK}(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\beta\gamma}Q^K_\gamma - X^{IJ}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\left(X^*\right)^{JK}(\overline{\sigma}_\nu)^{\dot\beta\gamma}Q^K_\gamma = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow -X^{IJ}\left(X^*\right)^{JK}\left[(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}_\nu)^{\dot\beta\gamma} - (\sigma_\nu)_{\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\beta\gamma}\right]Q^K_\gamma = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow -\left(XX^*\right)^{IK}\frac{4}{i}\left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \gamma} Q^K_\gamma = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 4i\left(XX^*\right)^{IK}\left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \gamma} Q^K_\gamma = 0
\end{aligned}
$$

που συνεπάγεται ότι

$$XX^* = 0 \tag{3.1.42}$$

Η τελευταία σχέση δεν είναι αρκετή για να συμπεράνουμε ότι $X = 0$ και άρα σύμφωνα με τις (3.1.40) και (3.1.41), ισχύουν οι σχέσεις μετάθεσης (3.1.39). Πρέπει επιπλέον να δείξουμε ότι ο πίνακας X είναι συμμετρικός, οπότε θα είναι $X^* = (X^T)^* = X^\dagger$ και σύμφωνα με την (3.1.42), θα έχουμε

$$XX^\dagger = 0 \tag{3.1.43}$$

άρα για κάθε $I = 1, 2, \ldots, N$ θα είναι

$$0 = (XX^\dagger)^{II} \text{ (όχι άθροιση ως προς } I\text{)}$$

και συνεπώς

$$0 = \sum_{K=1}^N X^{IK}\left(X^\dagger\right)^{KI} = \sum_{K=1}^N X^{IK}\left(X^*\right)^{IK} = \sum_{K=1}^N X^{IK}\left(X^{IK}\right)^* = \sum_{K=1}^N \left|X^{IK}\right|^2 \tag{3.1.44}$$

Όμως, για δεδομένο $I \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $\left|X^{IK}\right|^2 \geq 0$, $\forall K = 1, 2, \ldots, N$. Επομένως, εάν ισχύει η (3.1.43), άρα και η (3.1.44), είναι $\left|X^{IK}\right| = 0 \Rightarrow X^{IK} = 0$ για κάθε $I, K = 1, 2, \ldots, N$, άρα $X = 0$.

Προκειμένου να δείξουμε ότι ο πίνακας X είναι συμμετρικός και άρα, σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, μηδενικός, θεωρούμε τους αντιμεταθέτες της μορφής $\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}$, όπου $I,J = 1,2,\ldots,N$, $\alpha,\beta = 1,2$. Όλοι αυτοί οι αντιμεταθέτες μετασχηματίζονται ως $(\frac{1}{2},0)\oplus(\frac{1}{2},0) = (1,0)\oplus(0,0)$ κάτω από την ομάδα Lorentz, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\} = \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ} + \varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \gamma} M_{\mu\nu} Y^{IJ} \tag{3.1.45}$$

όπου τα Z^{IJ} και Y^{IJ} είναι κβαντικοί τελεστές που είναι Lorentz αναλλοίωτοι, δηλαδή

$$\left[Z^{IJ}, M_{\mu\nu}\right] = 0,\ \left[Y^{IJ}, M_{\mu\nu}\right] = 0 \tag{3.1.46}$$

και αναλλοίωτοι κάτω από χωροχρονικές μετατοπίσεις:

$$\left[Z^{IJ}, P_\mu\right] = 0,\ \left[Y^{IJ}, P_\mu\right] = 0 \tag{3.1.47}$$

Ισχύει ότι

$$\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma}\left(\sigma^{\mu\nu}\right)_\beta^{\ \gamma} \tag{3.1.48}$$

Πράγματι, είναι:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\gamma}\left(\sigma^{\mu\nu}\right)_\beta^{\ \gamma} =& \frac{i}{4}\varepsilon_{\alpha\gamma}\left[\left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot\beta}\left(\overline{\sigma}^\nu\right)^{\dot\beta\gamma} - \left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot\beta}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\beta\gamma}\right] = \\
=& \frac{i}{4}\varepsilon_{\alpha\gamma}\left[\varepsilon_{\beta\delta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\delta\delta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\zeta}\varepsilon^{\gamma\zeta}\left(\sigma^\nu\right)_{\zeta\dot\zeta} - \varepsilon_{\beta\delta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}\left(\overline{\sigma}^\nu\right)^{\dot\delta\delta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\zeta}\varepsilon^{\gamma\zeta}\left(\sigma^\mu\right)_{\zeta\dot\zeta}\right] = \\
=& \frac{i}{4}\left[\varepsilon_{\beta\delta}(-\varepsilon_{\dot\delta\dot\beta})\varepsilon^{\dot\beta\dot\zeta}\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon^{\gamma\zeta}\left(\sigma^\nu\right)_{\zeta\dot\zeta}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\delta\delta} - \varepsilon_{\beta\delta}(-\varepsilon_{\dot\delta\dot\beta})\varepsilon^{\dot\beta\dot\zeta}\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon^{\gamma\zeta}\left(\overline{\sigma}^\nu\right)^{\dot\delta\delta}\left(\sigma^\mu\right)_{\zeta\dot\zeta}\right] = \\
=& \frac{i}{4}\left[-\varepsilon_{\beta\delta}\delta^{\dot\zeta}_{\dot\delta}\delta^\zeta_\alpha\left(\sigma^\nu\right)_{\zeta\dot\zeta}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\delta\delta} + \varepsilon_{\beta\delta}\delta^{\dot\zeta}_{\dot\delta}\delta^\zeta_\alpha\left(\overline{\sigma}^\nu\right)^{\dot\delta\delta}\left(\sigma^\mu\right)_{\zeta\dot\zeta}\right] = \\
=& \frac{i}{4}\left[-\varepsilon_{\beta\delta}\left(\sigma^\nu\right)_{\alpha\dot\delta}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\delta\delta} + \varepsilon_{\beta\delta}\left(\overline{\sigma}^\nu\right)^{\dot\zeta\delta}\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\zeta}\right] = \\
=& \frac{i}{4}\varepsilon_{\beta\delta}\left[\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\right)_\alpha^{\ \delta} - \left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\right)_\alpha^{\ \delta}\right] = \\
=& \varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \gamma}
\end{aligned}$$

Με τις εναλλαγές $\alpha\leftrightarrow\beta$ και $I\leftrightarrow J$, η (3.1.45) δίνει:

$$\begin{aligned}
&\left\{Q^J_\beta, Q^I_\alpha\right\} = \varepsilon_{\beta\alpha} Z^{JI} + \varepsilon_{\alpha\gamma}\left(\sigma^{\mu\nu}\right)_\beta^{\ \gamma} M_{\mu\nu} Y^{JI} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left\{Q^J_\beta, Q^I_\alpha\right\} = -\varepsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ} + \varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \gamma} M_{\mu\nu} Y^{JI}
\end{aligned} \tag{3.1.49}$$

Τα αριστερά μέλη των (3.1.45) και (3.1.49) είναι προφανώς ίσα μεταξύ τους, οπότε το ίδιο ισχύει και για τα δεξιά μέλη, άρα

$$Z^{IJ} = -Z^{JI} \text{ και } Y^{IJ} = Y^{JI} \tag{3.1.50}$$

για κάθε $I,J = 1,2,\ldots,N$. Επίσης, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\alpha\beta}\left[P_\mu, \left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}\right] \overset{(3.1.45)}{=} \\
=&\varepsilon^{\alpha\beta}\left[P_\mu, \varepsilon_{\alpha\beta}Z^{IJ} + \varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^{\nu\rho}\right)_\alpha^{\ \gamma} M_{\nu\rho}Y^{IJ}\right] = \\
=&\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\left[P_\mu, Z^{IJ}\right] + \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^{\nu\rho}\right)_\alpha^{\ \gamma}\left[P_\mu, M_{\nu\rho}Y^{IJ}\right] = \\
=&0 + \delta^\alpha_\gamma\left(\sigma^{\nu\rho}\right)_\alpha^{\ \gamma}\left[P_\mu, M_{\nu\rho}Y^{IJ}\right] = \\
=&\left(\sigma^{\nu\rho}\right)_\alpha^{\ \alpha}\left[P_\mu, M_{\nu\rho}Y^{IJ}\right] = \\
=&\underbrace{\mathrm{Tr}\left(\sigma^{\nu\rho}\right)}_{\substack{\| \\ 0}}\left[P_\mu, M_{\nu\rho}Y^{IJ}\right] = 0
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη γενικευμένη ταυτότητα Jacobi (3.1.19) για $B_1 = P_\mu$, $F_2 = Q^I_\alpha$ και $F_3 = Q^J_\beta$:

$$\begin{aligned} &\left[P_\mu, \left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}\right] + \left\{Q^I_\alpha, \left[Q^J_\beta, P_\mu\right]\right\} - \left\{Q^J_\beta, \left[P_\mu, Q^I_\alpha\right]\right\} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow &\left[P_\mu, \left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}\right] = -\left\{Q^I_\alpha, \left[Q^J_\beta, P_\mu\right]\right\} + \left\{Q^J_\beta, \left[P_\mu, Q^I_\alpha\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.1.51}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} 0 =&\varepsilon^{\alpha\beta}\left[P_\mu, \left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}\right] \overset{(3.1.51)}{=} \\ =&-\varepsilon^{\alpha\beta}\left\{Q^I_\alpha, \left[Q^J_\beta, P_\mu\right]\right\} + \varepsilon^{\alpha\beta}\left\{Q^J_\beta, \left[P_\mu, Q^I_\alpha\right]\right\} \overset{(3.1.40)}{=} \\ =&-\varepsilon^{\alpha\beta}\left\{Q^I_\alpha, -X^{JK}\left(\sigma_\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\left(\overline{Q}^K\right)^{\dot{\gamma}}\right\} + \varepsilon^{\alpha\beta}\left\{Q^J_\beta, X^{IK}\left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\left(\overline{Q}^K\right)^{\dot{\gamma}}\right\} = \\ =&\varepsilon^{\alpha\beta}X^{JK}\left(\sigma_\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\left\{Q^I_\alpha, \varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\overline{Q}^K_{\dot{\delta}}\right\} + \varepsilon^{\alpha\beta}X^{IK}\left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\left\{Q^J_\beta, \varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\overline{Q}^K_{\dot{\delta}}\right\} = \\ =&2\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\left(\sigma_\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}}X^{JK}\delta^{IK}\left(\sigma_\nu\right)_{\alpha\dot{\delta}}P^\nu + 2\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\gamma}}X^{IK}\delta^{JK}\left(\sigma_\nu\right)_{\beta\dot{\delta}}P^\nu = \\ =&2(-\varepsilon^{\beta\alpha})\varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\left(\sigma_\nu\right)_{\alpha\dot{\delta}}\left(\sigma_\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}}P^\nu X^{JI} + 2\left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\left(\sigma_\nu\right)_{\beta\dot{\delta}}P^\nu X^{IJ} = \\ =&-2\left(\overline{\sigma}_\nu\right)^{\dot{\gamma}\beta}\left(\sigma_\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}}P^\nu X^{JI} + 2\left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\left(\overline{\sigma}_\nu\right)^{\dot{\gamma}\alpha}P^\nu X^{IJ} = \\ =&-2\left(\sigma_\mu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\left(\overline{\sigma}_\nu\right)^{\dot{\gamma}\beta}P^\nu X^{JI} + 2\left(\sigma_\mu\overline{\sigma}_\nu\right)_\alpha^{\ \alpha}P^\nu X^{IJ} = \\ =&2\,\mathrm{Tr}\left(\sigma_\mu\overline{\sigma}_\nu\right)P^\nu\left(X^{IJ} - X^{JI}\right) = \\ =&2\left(2\eta_{\mu\nu}\right)P^\nu\left(X^{IJ} - X^{JI}\right) = \\ =&4\eta_{\mu\nu}P^\nu\left(X^{IJ} - X^{JI}\right) = 4P_\mu\left(X^{IJ} - X^{JI}\right) \end{aligned}$$

Άρα, $X^{IJ} = X^{JI}\ \forall\ I, J = 1, 2 = \ldots, N$, που σημαίνει ότι ο πίνακας X είναι συμμετρικός και επομένως, ισχύουν οι σχέσεις μετάθεσης (3.1.39) .

Ακόμη, με δεδομένες τις (3.1.39) και (3.1.45), η (3.1.51) δίνει:

$$\begin{aligned} &\left[P_\mu, \varepsilon_{\alpha\beta}Z^{IJ} + \varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^{\nu\rho}\right)_\alpha^{\ \gamma}M_{\nu\rho}Y^{IJ}\right] = -\{Q^I_\alpha, \underbrace{\left[Q^J_\beta, P_\mu\right]}_{\overset{\|}{0}}\} + \{Q^J_\beta, \underbrace{\left[P_\mu, Q^I_\alpha\right]}_{\overset{\|}{0}}\} \Rightarrow \\ \Rightarrow&\varepsilon_{\alpha\beta}\underbrace{\left[P_\mu, Z^{IJ}\right]}_{\overset{\|}{0}} + \varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^{\nu\rho}\right)_\alpha^{\ \gamma}\left[P_\mu, M_{\nu\rho}Y^{IJ}\right] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow&\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^{\nu\rho}\right)_\alpha^{\ \gamma}\left(\left[P_\mu, M_{\nu\rho}\right]Y^{IJ} + M_{\nu\rho}\underbrace{\left[P_\mu, Y^{IJ}\right]}_{\overset{\|}{0}}\right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow&-\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^{\nu\rho}\right)_\alpha^{\ \gamma}\left[M_{\nu\rho}, P_\mu\right]Y^{IJ} = 0 \xRightarrow{(3.1.2)} \\ \Rightarrow&i\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^{\nu\rho}\right)_\alpha^{\ \gamma}\left(\eta_{\mu\nu}P_\rho - \eta_{\rho\mu}P_\nu\right)Y^{IJ} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow&i\varepsilon_{\beta\gamma}\eta_{\mu\nu}\left(\sigma^{\nu\rho}\right)_\alpha^{\ \gamma}P_\rho Y^{IJ} - i\varepsilon_{\beta\gamma}\eta_{\rho\mu}\left(\sigma^{\nu\rho}\right)_\alpha^{\ \gamma}P_\nu Y^{IJ} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow&i\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma_\mu^{\ \rho}\right)_\alpha^{\ \gamma}P_\rho Y^{IJ} - i\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma^\nu_{\ \mu}\right)_\alpha^{\ \gamma}P_\nu Y^{IJ} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow&i\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma_{\mu\rho}\right)_\alpha^{\ \gamma}P^\rho Y^{IJ} - i\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma_{\nu\mu}\right)_\alpha^{\ \gamma}P^\nu Y^{IJ} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow&2i\varepsilon_{\beta\gamma}\left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \gamma}P^\nu Y^{IJ} = 0 \Rightarrow Y^{IJ} = 0\ \forall\ I, J = 1, 2, \ldots, N \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\} = \varepsilon_{\alpha\beta}Z^{IJ} \tag{3.1.52}$$

όπου $I, J = 1, 2, \ldots, N$, $\alpha, \beta = 1, 2$ και:

$$\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}^\dagger = \left(\varepsilon_{\alpha\beta}Z^{IJ}\right)^\dagger \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \left\{ \left(Q^J_\beta\right)^\dagger, \left(Q^I_\alpha\right)^\dagger \right\} = \left(\varepsilon_{\alpha\beta}\right)^* \left(Z^{IJ}\right)^\dagger \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left\{ \overline{Q}^J_{\dot\beta}, \overline{Q}^I_{\dot\alpha} \right\} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \left(Z^{IJ}\right)^\dagger \text{ ή} \\
&\quad \left\{ \overline{Q}^I_{\dot\alpha}, \overline{Q}^J_{\dot\beta} \right\} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \left(Z^{IJ}\right)^\dagger
\end{aligned}
\tag{3.1.53}
$$

$\dot\alpha, \dot\beta = \dot1, \dot2$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι τελεστές Z^{IJ} είναι Lorentz αναλλοίωτοι και μετατίθενται με τους γεννήτορες των χωροχρονικών μετατοπίσεων, P_μ, ενώ είναι στοιχεία του μποζονικού τομέα μίας υπερσυμμετρικής άλγεβρας, όπως και οι αντιμεταθέτες $\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}$. Επομένως, δεδομένου ότι ισχύουν οι (3.1.5) και (3.1.6), οι Z^{IJ} δεν μπορούν παρά να είναι γραμμικοί συνδυασμοί των Ερμιτιανών γεννητόρων της εσωτερικής συμμετρίας, T_l:

$$
Z^{IJ} = \sum_l \alpha^{l,IJ} T_l \tag{3.1.54}
$$

όπου τα $\alpha^{l,IJ}$ είναι κάποιοι αριθμητικοί συντελεστές για τους οποίους ισχύει $\alpha^{l,IJ} = -\alpha^{l,JI}$, αφού $Z^{IJ} = -Z^{JI}$.

Θα εξετάσουμε τώρα τις σχέσεις μετάθεσης των φερμιονικών γεννητόρων Q^I_α και $\overline{Q}^I_{\dot\alpha}$ με τους γεννήτορες της ομάδας εσωτερικής συμμετρίας, T_l. Ισχύει ότι οι μεταθέτες $\left[Q^I_\alpha, T_l\right]$ ανήκουν στο φερμιονικό τομέα μίας υπερσυμμετρικής άλγεβρας και είναι στην $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$ αναπαράσταση της άλγεβρας Lorentz, οπότε γενικά έχουμε:

$$
\left[Q^I_\alpha, T_l\right] = \left(t_l\right)^{IJ} Q^J_\alpha \tag{3.1.55}
$$

για κάποιους $N \times N$ πίνακες t_l. Οι πίνακες αυτοί αποτελούν μία αναπαράσταση διάστασης N της άλγεβρας Lie της ομάδας εσωτερικής συμμετρίας, η οποία χαρακτηρίζεται από σχέσεις μετάθεσης της μορφής:

$$
\left[T_l, T_m\right] = i c_{lmk} T_k \tag{3.1.56}
$$

όπου τα c_{lmk} είναι κάποιες σταθερές δομής και υπονοείται άθροιση ως προς k. Για να αποδείξουμε τον τελευταίο ισχυρισμό, αρκεί να δείξουμε ότι οι πίνακες t_l ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης (3.1.56), δηλαδή

$$
\left[t_l, t_m\right] = i c_{lmk} t_k \tag{3.1.57}
$$

Για το σκοπό αυτό, κάνουμε χρήση της ταυτότητας Jacobi (3.1.18) για $F_1 = Q^I_\alpha$, $B_2 = T_l$, $B_3 = T_m$:

$$
\left[Q^I_\alpha, \left[T_l, T_m\right]\right] + \left[T_l, \left[T_m, Q^I_\alpha\right]\right] + \left[T_m, \left[Q^I_\alpha, T_l\right]\right] = 0 \tag{3.1.58}
$$

$$
\begin{aligned}
(3.1.58) \xrightarrow[(3.1.56)]{(3.1.55)} &\left[Q^I_\alpha, i c_{lmk} T_k\right] + \left[T_l, -\left(t_m\right)^{IJ} Q^J_\alpha\right] + \left[T_m, \left(t_l\right)^{IJ} Q^J_\alpha\right] = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &i c_{lmk} \left[Q^I_\alpha, T_k\right] - \left(t_m\right)^{IJ} \left[T_l, Q^J_\alpha\right] + \left(t_l\right)^{IJ} \left[T_m, Q^J_\alpha\right] = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &i c_{lmk} \left(t_k\right)^{IK} Q^K_\alpha - \left(t_m\right)^{IJ} \left[-\left(t_l\right)^{JK} Q^K_\alpha\right] + \left(t_l\right)^{IJ} \left[-\left(t_m\right)^{JK} Q^K_\alpha\right] = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &-\left(t_l\right)^{IJ} \left(t_m\right)^{JK} Q^K_\alpha + \left(t_m\right)^{IJ} \left(t_l\right)^{JK} Q^K_\alpha = -i c_{lmk} \left(t_k\right)^{IK} Q^K_\alpha \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left(t_l\right)^{IJ} \left(t_m\right)^{JK} - \left(t_m\right)^{IJ} \left(t_l\right)^{JK} = i c_{lmk} \left(t_k\right)^{IK} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left(t_l t_m - t_m t_l\right)^{IK} = i c_{lmk} \left(t_k\right)^{IK} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left[t_l, t_m\right] = i c_{lmk} t_k \text{ (ο.έ.δ.)}
\end{aligned}
$$

Επίσης, από την (3.1.55) έπεται ότι:

$$
\left[Q^I_\alpha, T_l\right]^\dagger = \left[\left(t_l\right)^{IJ} Q^J_\alpha\right]^\dagger \Rightarrow
$$

$$\Rightarrow \left[T_l^\dagger, (Q_\alpha^I)^\dagger\right] = \left((t_l)^{IJ}\right)^* \overline{Q}_{\dot\alpha}^J \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[T_l, \overline{Q}_{\dot\alpha}^I\right] = (t_l^*)^{IJ} \overline{Q}_{\dot\alpha}^J \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\overline{Q}_{\dot\alpha}^I, T_l\right] = -\overline{Q}_{\dot\alpha}^J \left(t_l^\dagger\right)^{JI} \tag{3.1.59}$$

Για $B_1 = T_l,\ F_2 = Q_\alpha^I$ και $F_3 = \overline{Q}_{\dot\beta}^J$ η γενικευμένη ταυτότητα Jacobi (3.1.19) δίνει:

$$\left[T_l, \left\{Q_\alpha^I, \overline{Q}_{\dot\beta}^J\right\}\right] + \left\{Q_\alpha^I, \left[\overline{Q}_{\dot\beta}^J, T_l\right]\right\} - \left\{\overline{Q}_{\dot\beta}^J, \left[T_l, Q_\alpha^I\right]\right\} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[T_l, 2\delta^{IJ}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}P_\mu\right] + \left\{Q_\alpha^I, -\overline{Q}_{\dot\beta}^K \left(t_l^\dagger\right)^{KJ}\right\} - \left\{\overline{Q}_{\dot\beta}^J, -(t_l)^{IK} Q_\alpha^K\right\} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\delta^{IJ}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\underbrace{[T_l, P_\mu]}_{\overset{\|}{0}} - \left(t_l^\dagger\right)^{KJ} \left\{Q_\alpha^I, \overline{Q}_{\dot\beta}^K\right\} + (t_l)^{IK} \left\{\overline{Q}_{\dot\beta}^J, Q_\alpha^K\right\} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2\left(t_l^\dagger\right)^{KJ} \delta^{IK}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}P_\mu + 2\,(t_l)^{IK}\,\delta^{KJ}\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,P_\mu = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2\left(t_l^\dagger\right)^{IJ} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}P_\mu + 2\,(t_l)^{IJ}\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,P_\mu = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\left[(t_l)^{IJ} - \left(t_l^\dagger\right)^{IJ}\right](\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,P_\mu = 0$$

Συνεπώς

$$(t_l)^{IJ} = \left(t_l^\dagger\right)^{IJ},\ \text{για κάθε } I, J = 1, 2, \ldots, N$$

που σημαίνει ότι οι πίνακες t_l είναι Ερμιτιανοί. Έτσι, η (3.1.59) γράφεται:

$$\left[\overline{Q}_{\dot\alpha}^I, T_l\right] = -\overline{Q}_{\dot\alpha}^J\,(t_l)^{JI} \tag{3.1.60}$$

Αν $Z^{IJ} = 0\ \forall\ I, J = 1, 2, \ldots, N$, οι σχέσεις (3.1.25), (3.1.26), (3.1.38), (3.1.39), (3.1.52) και (3.1.53) είναι αναλλοίωτες κάτω από τον $U(N)$ μετασχηματισμό:

$$Q_\alpha^I \to U^{IJ}Q_\alpha^J,\ \overline{Q}_{\dot\alpha}^I \to \overline{Q}_{\dot\alpha}^J\left(U^\dagger\right)^{JI} = \overline{Q}_{\dot\alpha}^J\left(U^{-1}\right)^{JI}, \tag{3.1.61}$$

όπου U είναι ένα τυχαίος $N \times N$ μοναδιακός πίνακας. Επομένως, για μηδενικά Z^{IJ}, η μεγαλύτερη δυνατή ομάδα εσωτερικής συμμετρίας που μπορεί να δράσει κατά μη τετριμμένο τρόπο στα Q (μη μηδενικοί Ερμιτιανοί πίνακες t_l στι (3.1.55) και (3.1.60)) είναι η $U(N)$. Αυτή η ομάδα είναι γνωστή ως ομάδα της R-συμμετρίας.

Στην περίπτωση της απλής υπερσυμμετρίας, όπου $N = 1$, έχουμε μόνο 2 σπινοριακούς γεννήτορες, Q_α και $\overline{Q}_{\dot\alpha}$, που μετασχηματίζονται κάτω από την ομάδα Lorentz σύμφωνα με τις $(\frac{1}{2}, 0)$ και $(0, \frac{1}{2})$ αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lorentz αντιστοίχως, όπου $(Q_\alpha)^\dagger = \overline{Q}_{\dot\alpha}$ για κάθε $\alpha = 1, 2$. Για την $N = 1$ υπερσυμμετρική άλγεβρα, το $Z \equiv Z^{11}$ μηδενίζεται, αφού σύμφωνα με την (3.1.50), $Z^{11} = -Z^{11}$, ενώ οι προαναφερθείσες σχέσεις μετάθεσης/αντιμετάθεσης γράφονται αντίστοιχα ως

$$[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\, Q_\beta \tag{3.1.62}$$

$$\left[\overline{Q}_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}\right] = -\left(\overline{\sigma}_{\mu\nu}\right)^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha}\,\overline{Q}_{\dot\beta} \tag{3.1.63}$$

$$\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\right\} = 2\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,P_\mu \tag{3.1.64}$$

$$[P_\mu, Q_\alpha] = \left[P_\mu, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] = 0 \tag{3.1.65}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 \tag{3.1.66}$$

$$\left\{\overline{Q}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\right\} = 0 \tag{3.1.67}$$

και είναι αναλλοίωτες κάτω από το μετασχηματισμό φάσης ($U(1)$ μετασχηματισμό):

$$Q_\alpha \to e^{i\lambda} Q_\alpha,\ \overline{Q}_{\dot\alpha} \to e^{-i\lambda}\overline{Q}_{\dot\alpha}$$

για κάθε πραγματικό αριθμό λ. Από την άλλη μεριά, για $N = 1$, οι (3.1.55) και (3.1.60) γίνονται αντίστοιχα

$$[Q_\alpha, T_l] = t_l Q_\alpha \tag{3.1.68}$$

$$\left[\overline{Q}_{\dot\alpha}, T_l\right] = -t_l \overline{Q}_{\dot\alpha} \tag{3.1.69}$$

όπου τα t_l είναι πραγματικοί αριθμοί, ενώ η άλγεβρα της εσωτερικής συμμετρίας είναι Αβελιανή, αφού αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα Jacobi (3.1.18) για $F_1 = Q_\alpha,\ B_2 = T_l,\ B_3 = T_m$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
&[Q_\alpha, [T_l, T_m]] + [T_l, [T_m, Q_\alpha]] + [T_m, [Q_\alpha, T_l]] = 0 \xRightarrow{(3.1.68)} \\
\Rightarrow& [Q_\alpha, ic_{lmn} T_n] + [T_l, -t_m Q_\alpha] + [T_m, t_l Q_\alpha] = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow& ic_{lmn}[Q_\alpha, T_n] - t_m [T_l, Q_\alpha] + t_l [T_m, Q_\alpha] = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow& ic_{lmn} t_n Q_\alpha - t_m(-t_l Q_\alpha) + t_l(-t_m Q_\alpha) = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow& ic_{lmn} t_n Q_\alpha + t_m t_l Q_\alpha - t_l t_m Q_\alpha = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow& ic_{lmn} t_n Q_\alpha = 0 \Rightarrow c_{lmn} = 0
\end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι μπορούμε να επανορίσουμε τους Αβελιανούς γεννήτορες T_l, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$[Q_\alpha, T_l] = Q_\alpha \tag{3.1.70}$$

$$\left[\overline{Q}_{\dot\alpha}, T_l\right] = -\overline{Q}_{\dot\alpha} \tag{3.1.71}$$

Υπάρχει μόνο ένας ανεξάρτητος συνδυασμός των (επανορισμένων) γεννητόρων T_l, τον οποίο ας συμβολίσουμε με R, ο οποίος δρα με μη τετριμμένο τρόπο στους φερμιονικούς γεννήτορες Q_α και $\overline{Q}_{\dot\alpha}$:

$$[Q_\alpha, R] = Q_\alpha \tag{3.1.72}$$

$$\left[\overline{Q}_{\dot\alpha}, R\right] = -\overline{Q}_{\dot\alpha} \tag{3.1.73}$$

Έτσι, η $N = 1$ υπερσυμμετρία έχει εν γένει μία εσωτερική ολική $U(1)$ συμμετρία, η οποία αποτελεί μία $R-$συμμετρία, με τους γεννήτορες Q_α και $\overline{Q}_{\dot\alpha}$ να έχουν $R-$φορτίο +1 και -1 αντίστοιχα.

Ακολούθως, θα δείξουμε ότι οι κβαντικοί τελεστές Z^{IJ}, $I, J = 1, 2, \ldots, N$, μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες μίας υπερσυμμετρικής άλγεβρας, γι΄ αυτό και χαρακτηρίζονται ως «κεντρικά φορτία» (central charges). Έχουμε ήδη απαιτήσει να είναι $\left[Z^{IJ}, M_{\mu\nu}\right] = 0$ και $\left[Z^{IJ}, P_\mu\right] = 0$, από όπου συμπεράναμε ότι τα Z^{IJ} έχουν τη μορφή (3.1.54). Έτσι, πρέπει ακόμη να αποδείξουμε ότι:

$$\left[Z^{IJ}, Q^K_\alpha\right] = \left[Z^{IJ}, \overline{Q}^K_{\dot\alpha}\right] = 0 \tag{3.1.74}$$

$$\left[Z^{IJ}, T_l\right] = 0 \tag{3.1.75}$$

για κάθε $I, J = 1, 2, \ldots, N$, $\alpha = 1, 2$.

Αρχικά, θεωρούμε τη γενικευμένη ταυτότητα Jacobi (3.1.19) με $B_1 = T_l,\ F_2 = Q^I_\alpha,\ F_3 = Q^J_\beta$:

$$\begin{aligned}
&\left[T_l, \left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}\right] + \left\{Q^I_\alpha, \left[Q^J_\beta, T_l\right]\right\} - \left\{Q^J_\beta, \left[T_l, Q^I_\alpha\right]\right\} = 0 \xRightarrow[(3.1.55)]{(3.1.52)} \\
\Rightarrow& \left[T_l, \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ}\right] + \left\{Q^I_\alpha, (t_l)^{JK} Q^K_\beta\right\} - \left\{Q^J_\beta, -(t_l)^{IK} Q^K_\alpha\right\} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow& \varepsilon_{\alpha\beta}\left[T_l, Z^{IJ}\right] + (t_l)^{JK}\left\{Q^I_\alpha, Q^K_\beta\right\} + (t_l)^{IK}\left\{Q^J_\beta, Q^K_\alpha\right\} = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \varepsilon_{\alpha\beta}\left[T_l, Z^{IJ}\right] + (t_l)^{JK}\varepsilon_{\alpha\beta}Z^{IK} + (t_l)^{IK}\varepsilon_{\beta\alpha}Z^{JK} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow -\varepsilon_{\alpha\beta}\left[Z^{IJ}, T_l\right] + \varepsilon_{\alpha\beta}(t_l)^{JK}Z^{IK} + (-\varepsilon_{\alpha\beta})(t_l)^{IK}(-Z^{KJ}) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow -\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\left[Z^{IJ}, T_l\right] - (t_l)^{JK}Z^{IK} - (t_l)^{IK}Z^{KJ}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\left[Z^{IJ}, T_l\right] = (t_l)^{IK}Z^{KJ} + (t_l)^{JK}Z^{IK} \tag{3.1.76}
$$

Συνδυάζοντας τις (3.1.54) και (3.1.76) λαμβάνουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
&\left[Z^{IJ}, Z^{KL}\right] = \left[Z^{IJ}, \sum_l \alpha^{l,KL}T_l\right] = \sum_l \alpha^{l,KL}\left[Z^{IJ}, T_l\right] \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left[Z^{IJ}, Z^{KL}\right] = \sum_l \alpha^{l,KL}\left[(t_l)^{IM}Z^{MJ} + (t_l)^{JM}Z^{IM}\right]
\end{aligned} \tag{3.1.77}
$$

Από τις (3.1.76) και (3.1.77) συμπεραίνουμε ότι οι τελεστές Z^{IJ} παράγουν μία αναλλοίωτη υποάλγεβρα της άλγεβρας Lie της εσωτερικής συμμετρίας. Χρησιμοποιούμε τώρα τη γενικευμένη ταυτότητα Jacobi (3.1.20) με $F_1 = Q^I_\alpha,\ F_2 = Q^J_\beta,\ F_3 = \overline{Q}^K_{\dot\gamma}$:

$$
\begin{aligned}
&\left[Q^I_\alpha, \left\{Q^J_\beta, \overline{Q}^K_{\dot\gamma}\right\}\right] + \left[Q^J_\beta, \left\{\overline{Q}^K_{\dot\gamma}, Q^I_\alpha\right\}\right] + \left[\overline{Q}^K_{\dot\gamma}, \left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\}\right] = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left[Q^I_\alpha, 2\delta^{JK}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}P_\mu\right] + \left[Q^J_\beta, 2\delta^{IK}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}P_\mu\right] + \left[\overline{Q}^K_{\dot\gamma}, \varepsilon_{\alpha\beta}Z^{IJ}\right] = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &2\delta^{JK}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}\underbrace{\left[Q^I_\alpha, P_\mu\right]}_{=0} + 2\delta^{IK}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\underbrace{\left[Q^J_\beta, P_\mu\right]}_{=0} + \varepsilon_{\alpha\beta}\left[\overline{Q}^K_{\dot\gamma}, Z^{IJ}\right] = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &-\varepsilon_{\alpha\beta}\left[Z^{IJ}, \overline{Q}^K_{\dot\gamma}\right] = 0
\end{aligned}
$$

Επομένως, είναι:

$$
\left[Z^{IJ}, \overline{Q}^K_{\dot\gamma}\right] = 0 \tag{3.1.78}
$$

για κάθε $I, J, K = 1, 2, \ldots, N$ και $\dot\gamma = \dot 1, \dot 2$. Εάν αντικαταστήσουμε την (3.1.54) στην (3.1.78), λαμβάνουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_l \alpha^{l,IJ}T_l, \overline{Q}^K_{\dot\gamma}\right] = 0 \Rightarrow \sum_l \alpha^{l,IJ}\left[T_l, \overline{Q}^K_{\dot\gamma}\right] = 0 \xRightarrow{(3.1.60)} \\
\Rightarrow &\sum_l \alpha^{l,IJ}\overline{Q}^L_{\dot\gamma}(t_l)^{LK} = \left[\sum_l \alpha^{l,IJ}(t_l)^{LK}\right]\overline{Q}^L_{\dot\gamma} = 0
\end{aligned}
$$

Συνεπώς

$$
\sum_l \alpha^{l,IJ}(t_l)^{LK} = 0 \tag{3.1.79}
$$

για κάθε $I, J, K, L = 1, 2, \ldots, N$. Έτσι, για κάθε $I, J, K = 1, 2, \ldots, N$, $\alpha = 1, 2$, είναι:

$$
\begin{aligned}
\left[Z^{IJ}, Q^K_\alpha\right] &\overset{(3.1.54)}{=} \left[\sum_l \alpha^{l,IJ}T_l, Q^K_\alpha\right] = \sum_l \alpha^{l,IJ}\left[T_l, Q^K_\alpha\right] \overset{(3.1.55)}{=} \\
&= -\sum_l \alpha^{l,IJ}(t_l)^{KL}Q^L_\alpha = -\left[\sum_l \alpha^{l,IJ}(t_l)^{KL}\right]Q^L_\alpha \xRightarrow{(3.1.79)} \\
&\Rightarrow \left[Z^{IJ}, Q^K_\alpha\right] = 0
\end{aligned} \tag{3.1.80}
$$

Επίσης, για κάθε $I, J, K, L = 1, 2, \ldots, N$, έχουμε:

$$\left[Z^{IJ}, Z^{KL}\right] \overset{(3.1.77)}{=} \left[\sum_l \alpha^{l,KL} \left(t_l\right)^{IM}\right] Z^{MJ} + \left[\sum_l \alpha^{l,KL} \left(t_l\right)^{JM}\right] Z^{IM} \overset{(3.1.79)}{=} 0$$

που σημαίνει ότι η αναλλοίωτη υποάλγεβρα της άλγεβρας Lie της ομάδας εσωτερικής συμμετρίας που παράγεται από τα Z^{IJ} είναι Αβελιανή. Υπενθυμίζουμε ότι η άλγεβρα Lie της εσωτερικής συμμετρίας είναι το ευθύ άθροισμα μίας συμπαγούς ημιαπλής άλγεβρας Lie και ενός αριθμού $U(1)$ Lie αλγεβρών. Εξ ορισμού, μία ημιαπλή άλγεβρα Lie δεν έχει Αβελιανές αναλλοίωτες υποάλγεβρες, άρα οποιαδήποτε Αβελιανή αναλλοίωτη υποάλγεβρα της άλγεβρας Lie της ομάδας εσωτερικής συμμετρίας παράγεται από $U(1)$ γεννήτορες. Επομένως, τα Z^{IJ} πρέπει να είναι $U(1)$ γεννήτορες, άρα μετατίθενται με τους γεννήτορες T_l:

$$\left[Z^{IJ}, T_l\right] = 0 \tag{3.1.81}$$

οπότε ολοκληρώθηκε η απόδειξη του ότι οι τελεστές Z^{IJ} μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες μίας υπερσυμμετρικής άλγεβρας, εξού και ο χαρακτηρισμός τους ως κεντρικά φορτία.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή παραθέτοντας τον ακόλουθο κατάλογο, που περιλαμβάνει το σύνολο των σχέσεων μετάθεσης και αντιμετάθεσης που χαρακτηρίζουν τη γενικότερη δυνατή υπερσυμμετρική άλγεβρα ή ισοδύναμα, την πιο γενική graded Lie άλγεβρα συμμετριών του πίνακα S που είναι συνεπείς με τη σχετικιστική κβαντική θεωρία πεδίου.

$$\begin{aligned}
\left[P_\mu, P_\nu\right] =& 0 \\
\left[M_{\mu\nu}, P_\rho\right] =& -i\left(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu\right) \\
\left[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\right] =& -i\left(\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}\right) \\
\left[T_l, T_m\right] =& i c_{lmn} T_n \\
\left[T_l, P_\mu\right] =& 0 \\
\left[T_l, M_{\mu\nu}\right] =& 0 \\
\left[P_\mu, Q^I_\alpha\right] =& \left[P_\mu, \overline{Q}^I_{\dot\alpha}\right] = 0 \\
\left[Q^I_\alpha, M_{\mu\nu}\right] =& \left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \beta} Q^I_\beta \\
\left[\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}\right] =& -\left(\overline{\sigma}_{\mu\nu}\right)^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha} \overline{Q}^I_{\dot\beta} \\
\left[Q^I_\alpha, T_l\right] =& \left(t_l\right)^{IJ} Q^J_\alpha \\
\left[\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, T_l\right] =& -\overline{Q}^J_{\dot\alpha} \left(t_l\right)^{JI} \\
\left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\} =& 2\delta^{IJ} \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \\
\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\} =& \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ} \text{ με } Z^{IJ} = \textstyle\sum_l \alpha^{l,IJ} T_l \\
\left\{\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\} =& \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \left(Z^{IJ}\right)^\dagger \\
\left[Z^{IJ}, Q^K_\alpha\right] =& \left[Z^{IJ}, \overline{Q}^K_{\dot\alpha}\right] = 0 \\
\left[Z^{IJ}, P_\mu\right] =& \left[Z^{IJ}, M_{\mu\nu}\right] = \left[Z^{IJ}, T_l\right] = 0 \\
\left[Z^{IJ}, Z^{KL}\right] =& 0
\end{aligned}$$

3.2 Αναπαραστάσεις της άλγεβρας της υπερσυμμετρίας

Σε αυτήν την ενότητα θα συζητήσουμε για αναπαραστάσεις της άλγεβρας της υπερσυμμετρίας πάνω σε ασυμπτωτικές on-shell μονοσωματιδιακές καταστάσεις. Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι η άλγεβρα Poincaré έχει δύο τελεστές Casimir (δηλαδή τελεστές που μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες της ομάδας Poincaré, $M_{\mu\nu}$ και P_ρ), τους

$$P^2 = P_\mu P^\mu \text{ και } W^2 = W_\mu W^\mu \tag{3.2.1}$$

όπου $W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma}$ είναι το διάνυσμα των Pauli-Lubanski. Οι τελεστές Casimir είναι χρήσιμοι για την ταξινόμηση των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων μίας ομάδας. Στην περίπτωση της ομάδας Poincaré, οι αναπαραστάσεις αυτές, που δεν είναι τίποτα άλλο από αυτά που αποκαλούμε «σωματίδια», μπορούν να χαρακτηριστούν από τις ιδιοτιμές των P^2 και W^2 όταν δρουν πάνω στις φυσικές καταστάσεις. Η ιδιοτιμή του P^2 είναι m^2, όπου m είναι η μάζα. Για να δούμε τη φυσική ερμηνεία του W^2, ας υπολογίσουμε την ιδιοτιμή του W^2 θεωρώντας πρώτα την περίπτωση όπου $m \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να υπολογίσουμε το W^2 στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου, όπου $P_\mu = (m, 0, 0, 0)$ (αφού το W^2 είναι Lorentz αναλλοίωτο). Στο εν λόγω σύστημα, έχουμε:

$$\begin{aligned}
W^0 &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon^{00\rho\sigma}}_{\substack{\| \\ 0}}P_0 M_{\rho\sigma} = 0 \\
W^i &= \frac{1}{2}\varepsilon^{i\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{i0\rho\sigma}P_0 M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{i0jk}mM_{jk} = \\
&= -\frac{1}{2}m\varepsilon^{0ijk}M_{jk} = -\frac{1}{2}m\varepsilon_{ijk}M_{jk} = -mJ_i
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

για κάθε $i = 1, 2, 3$, όπου $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk}$. Άρα

$$W^2 = W_\mu W^\mu = \left(W^0\right)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(W^i\right)^2 = -m^2\sum_{i=1}^{3}(J_i)^2 \equiv -m^2\vec{J}^2 \tag{3.2.3}$$

το οποίο έχει ιδιοτιμές $-m^2 j(j+1)$, όπου $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$. Συμπεραίνουμε επομένως ότι οι μαζικές μονοσωματιδιακές καταστάσεις χαρακτηρίζονται από ένα ζεύγος (m, j), όπου m είναι η μάζα και j είναι το σπιν της κατάστασης.

Για άμαζες μονοσωματιδιακές καταστάσεις ($m = 0$), η προηγούμενη ανάλυση δεν ισχύει, αφού δεν υπάρχει σύστημα ηρεμίας, όπου μπορούμε να υπολογίσουμε το W^2. Ωστόσο, εάν θεωρήσουμε το όριο $m \to 0$, από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι είτε $W^2 = 0$ είτε οι αντίστοιχες καταστάσεις έχουν άπειρο σπιν. Απορρίπτουμε τη δεύτερη δυνατότητα (που δε φαίνεται να υλοποιείται στη φύση), οπότε συμπεραίνουμε ότι $W^2 = 0$. Επίσης, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
W_\mu P^\mu =& \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}P^\mu = \\
=& \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu\left(P^\mu M^{\rho\sigma} + [M^{\rho\sigma}, P^\mu]\right) \stackrel{(3.1.2)}{=} \\
=& \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu\left(P^\mu M^{\rho\sigma} - i\left(\eta^{\rho\mu}P^\sigma - \eta^{\sigma\mu}P^\rho\right)\right) = \\
=& \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu P^\mu M^{\rho\sigma} - \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\rho\mu}P^\nu P^\sigma + \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\sigma\mu}P^\nu P^\rho = \\
=& \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma}P^\mu P^\nu M^{\rho\sigma} - \frac{i}{2}\varepsilon_{\rho\nu\mu\sigma}\eta^{\mu\rho}P^\nu P^\sigma + \frac{i}{2}\varepsilon_{\sigma\nu\rho\mu}\eta^{\mu\sigma}P^\nu P^\rho \stackrel{(3.1.1)}{=} \\
=& \frac{1}{2}\left(-\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\right)P^\nu P^\mu M^{\rho\sigma} - \frac{i}{2}\left(-\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\right)\eta^{\rho\mu}P^\nu P^\sigma + \frac{i}{2}\left(-\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\right)\eta^{\sigma\mu}P^\nu P^\rho = \\
=& -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu P^\mu M^{\rho\sigma} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\rho\mu}P^\nu P^\sigma - \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\sigma\mu}P^\nu P^\rho = \\
=& -W_\mu P^\mu \Rightarrow W_\mu P^\mu = 0
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Επομένως, καλούμαστε να λύσουμε τις εξισώσεις $W^2 = P^2 = W_\mu P^\mu = 0$. Είναι ιδιαίτερα βολικό να επιλέξουμε ένα σύστημα αναφοράς, στο οποίο $P_\mu = (E, 0, 0, E)$, όπου $E > 0$. Σε αυτό το σύστημα, μπορούμε να δείξουμε ότι $W_\mu = W_0(1,0,0,1)$, οπότε σε κάθε σύστημα Lorentz είναι:

$$W_\mu = \lambda P_\mu \tag{3.2.5}$$

όπου ο συντελεστής αναλογίας λ είναι η ελικότητα. Έτσι, κάθε άμαζη μονοσωματιδιακή κατάσταση χαρακτηρίζεται από την ενέργειά της, E, και την ελικότητά της, λ.

Χρησιμοποιώντας τη γενική μορφή μίας υπερσυμμετρικής άλγεβρας, την οποία καταγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, είναι εύκολο να δείξουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες των υπερσυμμετρικών θεωριών. Αφού μία υπερσυμμετρική άλγεβρα περιέχει την άλγεβρα Poincaré ως υποάλγεβρά της, κάθε αναπαράσταση της πρώτης δίνει μία αναπαράσταση της δεύτερης, η οποία εν γένει είναι αναγωγίσιμη. Επειδή κάθε μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της άλγεβρας Poincaré αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο, μία μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μίας υπερσυμμετρικής άλγεβρας αντιστοιχεί εν γένει σε περισσότερα από ένα σωματίδια. Οι αντίστοιχες καταστάσεις σχετίζονται μεταξύ τους από τη δράση των φερμιονικών γεννητόρων Q^I_α και $\overline{Q}^J_{\dot\beta}$ και έχουν ανά δύο σπιν που διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{1}{2}$. Λέμε ότι αποτελούν μία supermultiplet και με τον όρο αυτό θα αναφερόμαστε σε μία μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μίας υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Για κάθε υπερσυμμετρική άλγεβρα ο τελεστής P^2 είναι τελεστής Casimir, διότι μετατίθεται όχι μόνο με τους γεννήτορες της ομάδας Poincaré ($M_{\mu\nu}$ και P_ρ) αλλά και με τους φερμιονικούς γεννήτορες Q^I_α και $\overline{Q}^I_{\dot\alpha}$, όπως μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει με βάση τις σχέσεις (3.1.39). Κατά συνέπεια, όλα τα σωματίδια που ανήκουν σε μία supermultiplet έχουν την ίδια μάζα. Αντιθέτως, ο W^2 δεν είναι τελεστής Casimir για καμία υπερσυμμετρική άλγεβρα, διότι δε μετατίθεται με τα Q και $\overline{Q}$, αφού οι μεταθέτες $\left[Q^I_\alpha, M_{\mu\nu}\right]$ και $\left[\overline{Q}^I_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}\right]$ είναι μη μηδενικοί (βλ. σχέσεις (3.1.25) και (3.1.26) αντίστοιχα). Συνεπώς, μία supermultiplet περιέχει σωματίδια με διαφορετικά σπιν. Με βάση τα παραπάνω, οι υπερσυμμετρικές θεωρίες προβλέπουν εκφυλισμούς μάζας μεταξύ φερμιονίων και μποζονίων, τους οποίους όμως δεν παρατηρούμε στα γνωστά σωματιδιακά φάσματα, που σημαίνει ότι η υπερσυμμετρία, εάν πράγματι υφίσταται, πρέπει να είναι σπασμένη στη φύση.

2. Σε μία υπερσυμμετρική θεωρία, η ενέργεια οποιασδήποτε κατάστασης είναι πάντοτε μη αρνητική. Για να το αποδείξουμε αυτό, ας θεωρήσουμε μία αυθαίρετη κατάσταση $|\Phi\rangle$. Από την (3.1.38), έπεται ότι για κάθε $I \in \{1,2,\ldots,N\}$ είναι:

$$\begin{aligned}
&\langle\Phi|\left(\left\{Q^I_1,\overline{Q}^I_{\dot 1}\right\}+\left\{Q^I_2,\overline{Q}^I_{\dot 2}\right\}\right)|\Phi\rangle = \langle\Phi|\left(2\delta^{II}\left(\sigma^\mu\right)_{1\dot 1}P_\mu + 2\delta^{II}\left(\sigma^\mu\right)_{2\dot 2}P_\mu\right)|\Phi\rangle \Rightarrow\\
&\Rightarrow \langle\Phi|Q^I_1\overline{Q}^I_{\dot 1}|\Phi\rangle + \langle\Phi|\overline{Q}^I_{\dot 1}Q^I_1|\Phi\rangle + \langle\Phi|Q^I_2\overline{Q}^I_{\dot 2}|\Phi\rangle + \langle\Phi|\overline{Q}^I_{\dot 2}Q^I_2|\Phi\rangle =\\
&\quad = 2\langle\Phi|\left(\left(\sigma^0\right)_{1\dot 1}P_0 + \left(\sigma^3\right)_{1\dot 1}P_3 + \left(\sigma^0\right)_{2\dot 2}P_0 + \left(\sigma^3\right)_{2\dot 2}P_3\right)|\Phi\rangle \Rightarrow\\
&\Rightarrow \langle\Phi|Q^I_1\left(Q^I_1\right)^\dagger|\Phi\rangle + \langle\Phi|\left(Q^I_1\right)^\dagger Q^I_1|\Phi\rangle + \langle\Phi|Q^I_2\left(Q^I_2\right)^\dagger|\Phi\rangle + \langle\Phi|\left(Q^I_2\right)^\dagger Q^I_2|\Phi\rangle =\\
&\quad = 2\langle\Phi|\left(P_0+P_3+P_0-P_3\right)|\Phi\rangle \Rightarrow\\
&\Rightarrow \underbrace{\left\|\left(Q^I_1\right)^\dagger|\Phi\rangle\right\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left\|Q^I_1|\Phi\rangle\right\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left\|\left(Q^I_2\right)^\dagger|\Phi\rangle\right\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left\|Q^I_2|\Phi\rangle\right\|^2}_{\geq 0} = 4\langle\Phi|P_0|\Phi\rangle\\
&\Rightarrow \langle\Phi|P_0|\Phi\rangle \geq 0
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

που είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε να δείξουμε, δεδομένου ότι ο $P_0 = P^0$ είναι ο τελεστής της ενέργειας.

3. Μία supermultiplet περιέχει ίσο αριθμό μποζονικών και φερμιονικών βαθμών ελευθερίας,

$$n_B = n_F \tag{3.2.7}$$

όπου n_B και n_F είναι οι αριθμοί των μποζονικών και φερμιονικών βαθμών ελευθερίας αντίστοιχα. Αναφερόμενοι σε βαθμούς ελευθερίας εννοούμε φυσικές καταστάσεις (με θετική νόρμα).

Για παράδειγμα, ένα φωτόνιο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, που αντιστοιχούν στις ελικότητες +1 και -1 (δύο πολώσεις). Για να αποδείξουμε την (3.2.7), εισάγουμε έναν τελεστή αριθμού φερμιονίων, N_F, τέτοιον ώστε ο $(-1)^{N_F}$ να έχει ιδιοτιμή +1 όταν δρα σε μία μποζονική κατάσταση και ιδιοτιμή -1 όταν δρα σε μία φερμιονική κατάσταση. Ισχύει ότι οι φερμιονικοί γεννήτορες Q^I_α μετατρέπουν φερμιονικές καταστάσεις σε μποζονικές και το αντίστροφο, οπότε εάν $|F\rangle$ είναι μία τυχαία φερμιονική κατάσταση, είναι:

$$(-1)^{N_F} Q^I_\alpha |F\rangle = (-1)^{N_F} |B\rangle = |B\rangle = Q^I_\alpha |F\rangle = -Q^I_\alpha (-1)^{N_F} |F\rangle \tag{3.2.8}$$

για κάθε $|F\rangle$, $I = 1, 2, \ldots, N$, $\alpha = 1, 2$, όπου $|B\rangle$ είναι μία μποζονική κατάσταση. Επομένως

$$(-1)^{N_F} Q^I_\alpha = -Q^I_\alpha (-1)^{N_F} \tag{3.2.9}$$

Για μία τυχαία αναπαράσταση μίας υπερσυμμετρικής άλγεβρας με πεπερασμένη διάσταση (ώστε το ίχνος να είναι καλά ορισμένο), έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F}\left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\}\right] &= \mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F}\left(Q^I_\alpha \overline{Q}^J_{\dot\beta} + \overline{Q}^J_{\dot\beta} Q^I_\alpha\right)\right] \overset{(3.2.9)}{=} \\
&= \mathrm{Tr}\left[-Q^I_\alpha (-1)^{N_F} \overline{Q}^J_{\dot\beta} + (-1)^{N_F} \overline{Q}^J_{\dot\beta} Q^I_\alpha\right] = \\
&= -\mathrm{Tr}\left[Q^I_\alpha (-1)^{N_F} \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right] + \mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F} \overline{Q}^J_{\dot\beta} Q^I_\alpha\right] = \\
&= -\mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F} \overline{Q}^J_{\dot\beta} Q^I_\alpha\right] + \mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F} \overline{Q}^J_{\dot\beta} Q^I_\alpha\right] \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathrm{Tr}&\left[(-1)^{N_F}\left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\}\right] = 0
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

όπου στο τέλος κάναμε χρήση της κυκλικής ιδιότητας του ίχνους. Αντικαθιστώντας την (3.1.38) στην (3.2.10). λαμβάνουμε ότι:

$$2\delta^{IJ} \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta} \mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F} P_\mu\right] = 0 \tag{3.2.11}$$

Με την επιλογή οποιασδήποτε μη μηδενικής τετραορμής P_μ, η (3.2.11) δίνει:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F}\right] = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &\sum_{|B\rangle} \langle B| (-1)^{N_F} |B\rangle + \sum_{|F\rangle} \langle F| (-1)^{N_F} |F\rangle = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &\sum_{|B\rangle} \langle B \mid B\rangle - \sum_{|F\rangle} \langle F \mid F\rangle = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &n_B - n_F = 0 \Rightarrow n_B = n_F
\end{aligned}$$

3.2.1 Άμαζες supermultiplets

Για τη μελέτη των άμαζων supermultiplets, για τις οποίες $P^2 = 0$, είναι βολικό να εργαστούμε σε ένα σύστημα αναφοράς, όπου:

$$P_\mu = (E, 0, 0, E) \tag{3.2.12}$$

όπου $E > 0$. Σε αυτό το σύστημα, είναι:

$$\sigma^\mu P_\mu = \sigma^0 P_0 + \sigma^3 P_3 = (\sigma^0 + \sigma^3)E = \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.13}$$

οπότε οι σχέσεις αντιμετάθεσης μεταξύ των φερμιονικών γεννητόρων Q^I_α και $\overline{Q}^J_{\dot\beta}$, (3.1.38), γίνονται:

$$\left\{Q^I_\alpha, \overline{Q}^J_{\dot\beta}\right\} = 2\delta^{IJ} \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta} P_\mu = 2\delta^{IJ} \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\dot\beta} = \begin{pmatrix} 4E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\dot\beta} \delta^{IJ} \tag{3.2.14}$$

Επομένως

$$\left\{Q^I_1, \overline{Q}^J_{\dot 1}\right\} = 4E\delta^{IJ} \tag{3.2.15}$$

$$\left\{Q^I_2, \overline{Q}^J_{\dot 2}\right\} = 0 \tag{3.2.16}$$

$\forall\ I, J = 1, 2, \ldots, N$. Αν $|\Phi\rangle$ είναι μία τυχαία κατάσταση του χώρου Hilbert στον οποίο δρουν οι Q και $\overline{Q}$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μία θετικά ορισμένη νόρμα, $\|\ \|$, για κάθε $I = 1, 2, \ldots, N$ είναι:

$$\begin{aligned} 0 = \langle\Phi|\left\{Q^I_2, \overline{Q}^I_{\dot 2}\right\}|\Phi\rangle &= \langle\Phi| Q^I_2\overline{Q}^I_{\dot 2}|\Phi\rangle + \langle\Phi|\overline{Q}^I_{\dot 2}Q^I_2|\Phi\rangle = \\ &= \langle\Phi| Q^I_2\left(Q^I_2\right)^\dagger|\Phi\rangle + \langle\Phi|\left(Q^I_2\right)^\dagger Q^I_2|\Phi\rangle = \\ &= \left\|\left(Q^I_2\right)^\dagger|\Phi\rangle\right\|^2 + \left\|Q^I_2|\Phi\rangle\right\|^2 = \\ &= \left\|\overline{Q}^I_{\dot 2}|\Phi\rangle\right\|^2 + \left\|Q^I_2|\Phi\rangle\right\|^2 \end{aligned}$$

Επειδή όμως $\left\|\overline{Q}^I_{\dot 2}|\Phi\rangle\right\| \geq 0$ και $\left\|Q^I_2|\Phi\rangle\right\| \geq 0$, έχουμε υποχρεωτικά:

$$\begin{aligned} \left\|\overline{Q}^I_{\dot 2}|\Phi\rangle\right\| = 0 \Rightarrow \overline{Q}^I_{\dot 2}|\Phi\rangle = 0 \\ \left\|Q^I_2|\Phi\rangle\right\| = 0 \Rightarrow Q^I_2|\Phi\rangle = 0 \end{aligned}$$

$\forall\ I = 1, 2, \ldots, N$ και $|\Phi\rangle$. Επομένως $Q^I_2 = \overline{Q}^I_{\dot 2} = 0$, $\forall\ I = 1, 2, \ldots, N$, και μένουμε μόνο με τους φερμιονικούς γεννήτορες Q^I_1 και $\overline{Q}^I_{\dot 1}$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\right\} = \varepsilon_{\alpha\beta}Z^{IJ} \tag{3.2.17}$$

για κάποια «κεντρικά φορτία» Z^{IJ}. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, η τελευταία σχέση δίνει:

$$\begin{aligned} &\left\{Q^I_1, Q^J_2\right\} = \varepsilon_{12}Z^{IJ} = -Z^{IJ} \xrightarrow{Q^J_2=0} \\ &\Rightarrow Z^{IJ} = 0 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

για κάθε $I, J = 1, 2, \ldots, N$. Με δεδομένη την (3.2.18), από την (3.2.17) έπεται ότι

$$\left\{Q^I_1, Q^J_1\right\} = 0 \tag{3.2.19}$$

Παίρνοντας το Ερμιτιανό συζυγές της (3.2.19), βρίσκουμε ότι:

$$\left\{\overline{Q}^I_{\dot 1}, \overline{Q}^J_{\dot 1}\right\} = 0 \tag{3.2.20}$$

$\forall\ I, J = 1, 2, \ldots, N$. Αν ορίσουμε:

$$\alpha_I \equiv \frac{1}{\sqrt{4E}}Q^I_1,\ \alpha^\dagger_I \equiv \frac{1}{\sqrt{4E}}\overline{Q}^I_{\dot 1} \tag{3.2.21}$$

από τις (3.2.15), (3.2.19) και (3.2.20) έπεται ότι

$$\left\{\alpha_I, \alpha^\dagger_J\right\} = \delta_{IJ},\ \left\{\alpha_I, \alpha_J\right\} = \left\{\alpha^\dagger_I, \alpha^\dagger_J\right\} = 0 \tag{3.2.22}$$

άρα οι τελεστές α_I και $\alpha^\dagger_I$ αποτελούν ένα σύνολο N φερμιονικών τελεστών καταστροφής και N φερμιονικών τελεστών δημιουργίας αντίστοιχα.

Θα δείξουμε τώρα ότι καθένας εκ των τελεστών Q_1^I (άρα και των α_I), όταν δρα πάνω σε μία άμαζη μονοσωματιδιακή κατάσταση, κατεβάζει την ελικότητά της κατά $\frac{1}{2}$. Έστω μία άμαζη κατάσταση $|E, \lambda\rangle$, δηλαδή με ενέργεια E και ελικότητα λ. Για κάθε $I = 1, 2, \ldots, N$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left[W_0, Q_1^I\right] |E, \lambda\rangle &= \left[\frac{1}{2}\varepsilon_{0\mu\nu\rho} P^\mu M^{\nu\rho}, Q_1^I\right] |E, \lambda\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{0\mu\nu\rho}(\underbrace{\left[P^\mu, Q_1^I\right]}_{\substack{\parallel \\ 0}} M^{\nu\rho} + P^\mu \left[M^{\nu\rho}, Q_1^I\right]) |E, \lambda\rangle = \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{0\mu\nu\rho} P^\mu \left[Q_1^I, M^{\nu\rho}\right] |E, \lambda\rangle \stackrel{(3.1.25)}{=} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{0\mu\nu\rho} P^\mu \left(\sigma^{\nu\rho}\right)_1{}^\beta Q_\beta^I |E, \lambda\rangle \stackrel{(3.1.39)}{=} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{0\mu\nu\rho} \left(\sigma^{\nu\rho}\right)_1{}^\beta Q_\beta^I P^\mu |E, \lambda\rangle \stackrel{(3.2.12)}{=} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{03\nu\rho} \left(\sigma^{\nu\rho}\right)_1{}^\beta Q_\beta^I P^3 |E, \lambda\rangle = \\
&= -\varepsilon_{0312} \left(\sigma^{12}\right)_1{}^\beta Q_\beta^I \left(-P_3\right) |E, \lambda\rangle \stackrel{(3.2.12)}{=} \\
&= \varepsilon_{0312} \left(\sigma^{12}\right)_1{}^\beta Q_\beta^I P_0 |E, \lambda\rangle \Rightarrow \\
\Rightarrow \left[W_0, Q_1^I\right] |E, \lambda\rangle &= -\left(\sigma^{12}\right)_1{}^\beta P_0 Q_\beta^I |E, \lambda\rangle
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Είναι:

$$\begin{aligned}
\sigma^{12} =& \frac{i}{4}\left(\sigma^1\overline{\sigma}^2 - \sigma^2\overline{\sigma}^1\right) \stackrel{(2.4.9)}{=} \frac{i}{4}\left(\sigma^1\left(-\sigma^2\right) - \sigma^2\left(-\sigma^1\right)\right) = \frac{i}{4}\left(-\sigma^1\sigma^2 + \sigma^2\sigma^1\right) = \\
=& -\frac{i}{2}\sigma^1\sigma^2 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Άρα:

$$(3.2.23) \Rightarrow \left[W_0, Q_1^I\right] |E, \lambda\rangle = -\left(\sigma^{12}\right)_1{}^1 P_0 Q_1^I |E, \lambda\rangle = -\frac{1}{2} P_0 Q_1^I |E, \lambda\rangle$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
W_0\left(Q_1^I |E, \lambda\rangle\right) &= \left(Q_1^I W_0 + \left[W_0, Q_1^I\right]\right) |E, \lambda\rangle \stackrel{(3.2.5)}{=} \\
&= Q_1^I \left(\lambda P_0\right) |E, \lambda\rangle - \frac{1}{2} P_0 Q_1^I |E, \lambda\rangle = \\
&= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) P_0 \left(Q_1^I |E, \lambda\rangle\right)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, εάν λάβουμε υπόψη και την (3.2.5), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι (άμαζες) καταστάσεις $Q_1^I |E, \lambda\rangle$, $I = 1, 2, \ldots, N$, έχουν ελικότητα $\lambda - \frac{1}{2}$.

Επίσης, οι τελεστές $\overline{Q}_{\dot{1}}^I$ (άρα και οι $\alpha_I^\dagger$) ανεβάζουν την ελικότητα κατά $\frac{1}{2}$. Πράγματι, για τυχαία άμαζη μονοσωματιδιακή κατάσταση $|E, \lambda\rangle$, είναι:

$$\begin{aligned}
\left[W_0, \overline{Q}_{\dot{1}}^I\right] |E, \lambda\rangle &= \left[\frac{1}{2}\varepsilon_{0\mu\nu\rho} P^\mu M^{\nu\rho}, \overline{Q}_{\dot{1}}^I\right] |E, \lambda\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{0\mu\nu\rho}(\underbrace{\left[P^\mu, \overline{Q}_{\dot{1}}^I\right]}_{\substack{\parallel \\ 0}} M^{\nu\rho} + P^\mu \left[M^{\nu\rho}, \overline{Q}_{\dot{1}}^I\right]) |E, \lambda\rangle =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{0\mu\nu\rho}P^{\mu}\left[\overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}, M^{\nu\rho}\right]|E,\lambda\rangle \overset{(3.1.26)}{=} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{0\mu\nu\rho}P^{\mu}\left(\overline{\sigma}^{\nu\rho}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\mathrm{1}}}\,\overline{Q}^{I}_{\dot{\beta}}|E,\lambda\rangle \overset{(3.1.39)}{=} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{0\mu\nu\rho}\left(\overline{\sigma}^{\nu\rho}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\mathrm{1}}}\,\overline{Q}^{I}_{\dot{\beta}}P^{\mu}|E,\lambda\rangle \overset{(3.2.12)}{=} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{03\nu\rho}\left(\overline{\sigma}^{\nu\rho}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\mathrm{1}}}\,\overline{Q}^{I}_{\dot{\beta}}P^{3}|E,\lambda\rangle = \\
&= \varepsilon_{0312}\left(\overline{\sigma}^{12}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\mathrm{1}}}\,\overline{Q}^{I}_{\dot{\beta}}\left(-P_3\right)|E,\lambda\rangle \overset{(3.2.12)}{=} \\
&= -\varepsilon_{0312}\left(\overline{\sigma}^{12}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\mathrm{1}}}\,\overline{Q}^{I}_{\dot{\beta}}P_0|E,\lambda\rangle \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \left[W_0, \overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}\right]|E,\lambda\rangle = \left(\overline{\sigma}^{12}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\mathrm{1}}}\,P_0\overline{Q}^{I}_{\dot{\beta}}|E,\lambda\rangle \tag{3.2.24}
$$

Είναι:

$$
\overline{\sigma}^{12} = \left(\sigma^{12}\right)^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

Επομένως

$$
(3.2.24) \Rightarrow \left[W_0, \overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}\right]|E,\lambda\rangle = \left(\overline{\sigma}^{12}\right)^{\dot{\mathrm{1}}}{}_{\dot{\mathrm{1}}}\,P_0\overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}|E,\lambda\rangle = \frac{1}{2}P_0\overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}|E,\lambda\rangle
$$

και

$$
\begin{aligned}
W_0\left(\overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}|E,\lambda\rangle\right) &= \left(\overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}W_0 + \left[W_0, \overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}\right]\right)|E,\lambda\rangle = \\
&= \overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}\left(\lambda P_0\right)|E,\lambda\rangle + \frac{1}{2}P_0\overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}|E,\lambda\rangle = \\
&= \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)P_0\left(\overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}|E,\lambda\rangle\right)
\end{aligned}
$$

που σημαίνει ότι οι (άμαζες) καταστάσεις $\overline{Q}^{I}_{\dot{\mathrm{1}}}|E,\lambda\rangle$, $I = 1, 2, \ldots, N$, έχουν ελικότητα $\lambda + \frac{1}{2}$.

Για να κατασκευάσουμε μία άμαζη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μίας υπερσυμμετρικής άλγεβρας, ξεκινάμε επιλέγοντας μία άμαζη μονοσωματιδιακή κατάσταση, η οποία «καταστρέφεται» από όλους τους τελεστές α_I και ονομάζεται κενό Clifford. Μία τέτοια κατάσταση θα κουβαλάει κάποια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της άλγεβρας Poincaré, δηλαδή εκτός του ότι έχει μηδενική μάζα, χαρακτηρίζεται από μία ελικότητα λ_0. Συμβολίζουμε αυτήν την κατάσταση ως $|E,\lambda_0\rangle$, όπου E η ενέργειά της, και ισχύει:

$$
\alpha_I|E,\lambda_0\rangle = 0 \tag{3.2.25}
$$

για κάθε $I = 1, 2, \ldots, N$. Οι υπόλοιπες καταστάσεις της άμαζης supermultiplet προκύπτουν με διαδοχικές εφαρμογές των N τελεστών δημιουργίας $\alpha_I^{\dagger}$ στο κενό Clifford $|E,\lambda_0\rangle$:

$$
\begin{aligned}
\alpha_I^{\dagger}|E,\lambda_0\rangle &= \left|E,\lambda_0 + \frac{1}{2}\right\rangle_I \\
\alpha_I^{\dagger}\alpha_J^{\dagger}|E,\lambda_0\rangle &= |E,\lambda_0 + 1\rangle_{IJ}
\end{aligned} \tag{3.2.26}
$$

κ.ο.κ., μέχρι να φτάσουμε στην κατάσταση μέγιστης ελικότητας:

$$
\alpha_1^{\dagger}\alpha_2^{\dagger}\ldots\alpha_N^{\dagger}|E,\lambda_0\rangle = \left|E,\lambda_0 + \frac{N}{2}\right\rangle_{12\ldots N} \tag{3.2.27}
$$

στην οποία η εφαρμογή ενός εκ των τελεστών δημιουργίας $\alpha_I^{\dagger}$, $I = 1, 2, \ldots, N$, δίνει μηδέν. Έτσι, εάν ξεκινήσουμε από ένα κενό Clifford με ελικότητα λ_0, η κατάσταση με τη μεγαλύτερη ελικότητα στην άμαζη supermultiplet που προκύπτει έχει ελικότητα $\lambda_{\max} = \lambda_0 + \frac{N}{2}$. Επειδή $\left\{\alpha_I^\dagger, \alpha_J^\dagger\right\} = 0 \Rightarrow \alpha_I^\dagger \alpha_J^\dagger = -\alpha_J^\dagger \alpha_I^\dagger$, ισχύει ότι κάθε κατάσταση $\alpha_{I_1}^\dagger \alpha_{I_2}^\dagger \ldots \alpha_{I_k}^\dagger \left|E, \lambda_0\right\rangle = \left|E, \lambda_0 + \frac{k}{2}\right\rangle_{I_1 I_2 \ldots I_k}$, όπου k ακέραιος με $1 \leq k \leq N$ και $I_i \in \{1, 2, \ldots, N\}\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, k$, είναι αντισυμμετρική στην εναλλαγή $I_i \leftrightarrow I_j$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, k$ με $i \neq j$. Επομένως, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, N$, ο αριθμός των ανεξάρτητων καταστάσεων με ελικότητα $\lambda_0 + \frac{k}{2}$ είναι $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$. Συνεπώς, μία άμαζη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μίας υπερσυμμετρικής άλγεβρας έχει συνολικά $\sum\limits_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$ καταστάσεις, από τις οποίες οι μισές είναι μποζονικές, δηλαδή έχουν ακέραια ελικότητα, ενώ οι άλλες μισές είναι φερμιονικές, δηλαδή έχουν ημιακέραια ελικότητα.

Γενικά, σε μία τέτοια supermultiplet οι ελικότητες δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες γύρω από το 0, εκτός αν $\lambda_0 = -\frac{N}{4}$ (οπότε $\lambda_{\max} = \lambda_0 + \frac{N}{2} = \frac{N}{4}$ και για κάθε κατάσταση με ελικότητα λ υπάρχει μία κατάσταση με ελικότητα $-\lambda$). Μία supermultiplet που δεν ικανοποιεί τη συνθήκη αυτή δεν είναι CPT αναλλοίωτη, διότι η CPT αλλάζει το πρόσημο της ελικότητας, οπότε πρέπει κανείς να τη «διπλασιάσει» προσθέτοντάς της τη συζυγή της ως προς την CPT, που έχει καταστάσεις με αντίθετες ελικότητες, ώστε να έχει μία CPT αναλλοίωτη θεωρία.

Επίσης, από αλγεβρική άποψη, δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στο N. Ωστόσο, για να είναι μία υπερσυμμετρική θεωρία επανακανονικοποιήσιμη, πρέπει οι ελικότητες $\lambda_0, \lambda_0 + \frac{1}{2}, \ldots, \lambda_0 + \frac{N}{2}$ των καταστάσεων σε μία άμαζη supermultiplet να είναι όλες μικρότερες ή ίσες του 1 κατά απόλυτη τιμή. Επομένως, για επανακανονικοποιήσιμες υπερσυμμετρικές θεωρίες, έχουμε:

$$|\lambda_0| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda_0 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\lambda_0 \leq 1$$

και

$$\left|\lambda_0 + \frac{N}{2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda_0 + \frac{N}{2} \leq 1$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω διπλές ανισότητες, βρίσκουμε ότι για επανακανονικοποιήσιμες υπερσυμμετρικές θεωρίες είναι $\frac{N}{2} \leq 2 \Rightarrow N \leq 4$. Από την άλλη μεριά, για συνεπείς υπερσυμμετρικές θεωρίες με βαρύτητα (θεωρίες υπερβαρύτητας), είναι $|\lambda| \leq 2$ για κάθε ελικότητα λ που εμφανίζεται σε μία άμαζη supermultiplet και από αυτό έπεται ότι $N \leq 8$.

Θα παρουσιάσουμε τώρα μερικά ενδιαφέροντα παραδείγματα άμαζων supermultiplets. Ξεκινάμε με την περίπτωση της μη εκτεταμένης (απλής) υπερσυμμετρίας, όπου $N = 1$. Κάθε άμαζη αναπαράσταση της $N = 1$ υπερσυμμετρίας περιέχει μόνο δύο καταστάσεις, $|E, \lambda_0\rangle$ και $\left|E, \lambda_0 + \frac{1}{2}\right\rangle$. Μία τέτοια supermultiplet, την οποία θα συμβολίζουμε ως $\left(\lambda_0, \lambda_0 + \frac{1}{2}\right)$, δεν μπορεί ποτέ να είναι αυτοσυζυγής ως προς τη CPT (CPT self-conjugate), δηλαδή να συμπίπτει με τη συζυγή της ως προς τη CPT, οπότε πρέπει κανείς να της προσθέσει τη συζυγή της ως προς τη CPT, $\left(-\lambda_0 - \frac{1}{2}, -\lambda_0\right)$. Οι κλασσικές άμαζες αναπαραστάσεις της απλής υπερσυμμετρίας είναι:

- Η chiral supermultiplet, η οποία αποτελείται από την άμαζη $N = 1$ supermultiplet $(0, \frac{1}{2})$ και τη συζυγή της ως προς τη CPT, $(-\frac{1}{2}, 0)$, και αντιστοιχεί σε ένα φερμιόνιο Weyl (σπιν $-\frac{1}{2}$) και ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο (σπιν-0). Σε μία $N = 1$ υπερσυμμετρική θεωρία τα πεδία ύλης ανήκουν σε chiral supermultiplets, οι οποίες, ως εκ τούτου, ονομάζονται και supermultiplets ύλης.

- Η διανυσματική supermultiplet (ή supermultiplet βαθμίδας), η οποία αποτελείται από την $(\frac{1}{2}, 1)$ και την συζυγή της ως προς τη CPT, $(-1, -\frac{1}{2})$, και αντιστοιχεί σε ένα άμαζο διανυσματικό (σπιν-1) σωματίδιο (μποζόνιο βαθμίδας) και ένα φερμιόνιο Weyl. Σε μία $N = 1$ υπερσυμμετρική θεωρία βαθμίδας, τα μποζόνια βαθμίδας ανήκουν σε διανυσματικές supermultiplets. Ισχύει ότι τα μποζόνια βαθμίδας πρέπει να μετασχηματίζονται κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας σύμφωνα με την adjoint αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας, οπότε το ίδιο πρέπει να ισχύει και για τα φερμιόνια Weyl, που ανήκουν στις ίδιες supermultiplets με τα μποζόνια βαθμίδας, αφού οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας Q και $\overline{Q}$ μετατίθενται με τους γεννήτορες των μετασχηματισμών βαθμίδας. Επομένως, τα συνήθη πεδία ύλης του

Καθιερωμένου Προτύπου (quarks και λεπτόνια) δεν μπορούν να ανήκουν σε διανυσματικές supermultiplets.

- Η supermultiplet της βαρύτητας, η οποία αποτελείται από τις $(\frac{3}{2}, 2)$ και $(-2, -\frac{3}{2})$ και αντιστοιχεί σε ένα graviton (σπιν-2) και ένα gravitino (σπιν-$\frac{3}{2}$).

Για $N = 2$, μία άμαζη supermultiplet έχει $\binom{N}{0} = \binom{2}{0} = 1$ κατάσταση με ελικότητα λ_0, που είναι το κενό Clifford, $\binom{N}{1} = \binom{2}{1} = 2$ καταστάσεις με ελικότητα $\lambda_0 + \frac{1}{2}$ και $\binom{N}{2} = \binom{2}{2} = 1$ κατάσταση με ελικότητα $\lambda_0 + \frac{2}{2} = \lambda_0 + 1$ και θα τη συμβολίζουμε ως $(\lambda_0, \lambda_0 + \frac{1}{2}, \lambda_0 + \frac{1}{2}, \lambda_0 + 1)$. Θα περιοριστούμε στις άμαζες supermultiplets, στις οποίες η ελικότητα δεν υπερβαίνει το 1 (κατ΄ απόλυτη τιμή). Ο περιορισμός αυτός καθορίζει τις επιτρεπόμενες τιμές για το λ_0, αφού απαιτούμε:

$$|\lambda_0| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda_0 \leq 1$$

$$\left|\lambda_0 + \frac{N}{2}\right| = |\lambda_0 + 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda_0 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda_0 \leq 0$$

Επομένως, οι δυνατές τιμές του λ_0 είναι οι $\lambda_0 = -1, -\frac{1}{2}, 0$ (δεδομένου ότι η ελικότητα μπορεί να πάρει μόνο ακέραιες και ημιακέραιες τιμές).

Για $\lambda_0 = 0$, προκύπτει η supermultiplet $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, η οποία, σε συνδυασμό με τη συζυγή της ως προς τη CPT, $(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, αποτελεί τη $N = 2$ διανυσματική supermultiplet, της οποίας το σωματιδιακό περιεχόμενο είναι ένα άμαζο διανυσματικό σωματίδιο (μποζόνιο βαθμίδας), δύο φερμιόνια Weyl και ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο, όλα εκ των οποίων είναι στην adjoint αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας.

Για $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$, παίρνουμε τη supermultiplet $(-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$, η οποία είναι γνωστή ως hypermultiplet και αντιστοιχεί σε ένα φερμιόνιο Weyl και ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο. Η hypermultiplet είναι αυτοσυζυγής ως προς τη CPT, εάν είναι σε μία πραγματική αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας. Ωστόσο, συνήθως ενδιαφερόμαστε για θεωρίες, στις οποίες τα πεδία ύλης μετασχηματίζονται σύμφωνα με μία μιγαδική αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας, οπότε πρέπει κανείς να προσθέσει στην hypermultiplet τη συζυγή της ως προς τη CPT με αποτέλεσμα το προκύπτον σωματιδιακό φάσμα να αποτελείται από δύο φερμιόνια Weyl και δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία.

Τέλος, για $\lambda_0 = -1$, λαμβάνουμε την άμαζη $N = 2$ supermultiplet $(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, της οποίας η συζυγής ως προς τη CPT είναι η $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο supermultiplets, λαμβάνουμε την $N = 2$ διανυσματική supermultiplet, όπως ήδη έχουμε αναφέρει.

Για τη $N = 4$ υπερσυμμετρία, μία άμαζη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση έχει συνολικά $2^N = 2^4 = 16$ καταστάσεις, $\binom{N}{0} = \binom{4}{0} = 1$ με ελικότητα λ_0 (κενό Clifford), $\binom{N}{1} = \binom{4}{1} = 4$ με ελικότητα $\lambda_0 + \frac{1}{2}$, $\binom{N}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{\cancel{(2!)}\cdot 3 \cdot 4}{\cancel{(2!)}2!} = 6$ με ελικότητα $\lambda_0 + \frac{2}{2} = \lambda_0 + 1$, $\binom{N}{3} = \binom{4}{3} = 4$ με ελικότητα $\lambda_0 + \frac{3}{2}$ και $\binom{N}{4} = \binom{4}{4} = 1$ με ελικότητα $\lambda_0 + 2$. Ας συμβολίσουμε μία τέτοια supermultiplet ως $\big(\lambda_0, 4 \times (\lambda_0 + \frac{1}{2}), 6 \times (\lambda_0 + 1), 4 \times (\lambda_0 + \frac{3}{2}), \lambda_0 + 2\big)$. Απαιτούμε και πάλι οι ελικότητες να μην υπερβαίνουν το 1 κατ΄ απόλυτη τιμή, το οποίο επιτυγχάνεται εάν

$$|\lambda_0| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda_0 \leq 1$$

$$|\lambda_0 + 2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda_0 + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq \lambda_0 \leq -1$$

Επομένως, είναι σαφές ότι πρέπει να θεωρήσουμε κενό Clifford με ελικότητα $\lambda_0 = -1$, από το οποίο κατασκευάζεται η $N = 4$ διανυσματική supermultiplet, $\big(-1, 4 \times (-\frac{1}{2}), 6 \times 0, 4 \times \frac{1}{2}, 1\big)$, η οποία είναι πάντα αυτοσυζυγής ως προς τη CPT και το σωματιδιακό της περιεχόμενο είναι ένα άμαζο διανυσματικό σωματίδιο (μποζόνιο βαθμίδας), 4 φερμιόνια Weyl και 3 μιγαδικά βαθμωτά πεδία, που μετασχηματίζονται όλα σύμφωνα με την adjoint αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας.

Κλείνοντας αυτήν την ενότητα, είναι σκόπιμο να επισημάνουμε ότι όλοι οι βαθμοί ελευθερίας στις άμαζες supermultiplets που εξετάσαμε, όπως και στις μαζικές που θα παρουσιάσουμε στην επόμενη ενότητα είναι on-shell βαθμοί ελευθερίας.

3.2.2 Μαζικές supermultiplets

Ως γνωστόν, σε μία σχετικιστική θεωρία, οι μαζικές μονοσωματιδιακές καταστάσεις χαρακτηρίζονται από τη μάζα, m, το σπιν, j, και την προβολή του σπιν κατά μήκος του άξονα z, j_3. Μπορούμε επομένως να συμβολίσουμε μία τέτοια κατάσταση με ένα ket $|m, j, j_3\rangle$. Στην ενότητα αυτή, θα πραγματευτούμε την κατασκευή των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της υπερσυμμετρίας που αντιστοιχούν σε μονοσωματιδιακές καταστάσεις μη μηδενικής μάζας περιοριζόμενοι στην περίπτωση της απλής ($N = 1$) υπερσυμμετρίας. Για το σκοπό αυτό, μπορούμε να εργαστούμε στο σύστημα ηρεμίας, όπου:

$$P_\mu = (m, 0, 0, 0) \tag{3.2.28}$$

όπου m είναι η κοινή μάζα των καταστάσεων σε μία μαζική $N = 1$ supermultiplet. Σε αυτό το σύστημα, οι σχέσεις αντιμετάθεσης μεταξύ των φερμιονικών γεννητόρων της απλής υπερσυμμετρίας Q_α και $\overline{Q}_{\dot\beta}$ γράφονται:

$$\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\right\} = 2\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta} P_\mu = 2\left(\sigma^0\right)_{\alpha\dot\beta} P_0 = 2m\left(\sigma^0\right)_{\alpha\dot\beta} \tag{3.2.29}$$

Επίσης, είναι:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \left\{\overline{Q}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\right\} = 0 \tag{3.2.30}$$

για κάθε $\alpha, \beta = 1, 2$. Αν ορίσουμε:

$$\alpha_\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_\alpha,\ \alpha_\alpha^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} \overline{Q}_{\dot\alpha} \tag{3.2.31}$$

για κάθε $\alpha = 1, 2$, από τις (3.2.29) και (3.2.30) έπεται ότι:

$$\left\{\alpha_\alpha, \alpha_\beta^\dagger\right\} = \left(\sigma^0\right)_{\alpha\dot\beta},\ \{\alpha_\alpha, \alpha_\beta\} = \left\{\alpha_\alpha^\dagger, \alpha_\beta^\dagger\right\} = 0, \tag{3.2.32}$$

άρα οι τελεστές α_α και $\alpha_\alpha^\dagger$ αποτελούν ένα σύνολο 2 φερμιονικών τελεστών καταστροφής και 2 φερμιονικών τελεστών δημιουργίας αντίστοιχα.

Θα εξάγουμε τώρα ορισμένα χρήσιμα αποτελέσματα για τη μελέτη των μαζικών μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της $N = 1$ υπερσυμμετρίας. Ξεκινάμε με τον υπολογισμό των μεταθετών $[J_i, Q_\alpha]$ και $\left[J_i, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right]$, όπου $i = 1, 2, 3$, $\alpha = 1, 2$ και $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} M_{jk}$, με τους J_1, J_2 και J_3 να είναι οι τελεστές των συνιστωσών του σπιν κατά τις διευθύνσεις x, y και z αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
[J_i, Q_\alpha] = \left[\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} M_{jk}, Q_\alpha\right] &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left[Q_\alpha, M_{jk}\right] \overset{(3.1.62)}{=} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\sigma_{jk}\right)_\alpha^{\ \beta} Q_\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\sigma^{jk}\right)_\alpha^{\ \beta} Q_\beta = \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left[\frac{i}{4}\left(\sigma^j\overline{\sigma}^k - \sigma^k\overline{\sigma}^j\right)\right]_\alpha^{\ \beta} Q_\beta \Rightarrow \\
\Rightarrow [J_i, Q_\alpha] &= -\frac{i}{8}\varepsilon_{ijk}\left(\sigma^j\overline{\sigma}^k - \sigma^k\overline{\sigma}^j\right)_\alpha^{\ \beta} Q_\beta
\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\left[\sigma^j, \sigma^k\right] = \sigma^j\sigma^k - \sigma^k\sigma^j &= 2i\varepsilon_{jkl}\sigma^l \Rightarrow \\
\Rightarrow \sigma^j\left(-\overline{\sigma}^k\right) - \sigma^k\left(-\overline{\sigma}^j\right) &= 2i\varepsilon_{jkl}\sigma^l\overline{\sigma}^0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \sigma^j\overline{\sigma}^k - \sigma^k\overline{\sigma}^j &= -2i\varepsilon_{jkl}\sigma^l\overline{\sigma}^0
\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

για κάθε $j,k=1,2,3$, ενώ στο δεύτερο μέλος υπονοείται άθροιση ως προς l από 1 έως 3. Αντικαθιστώντας την (3.2.34) στην (3.2.33), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
[J_i, Q_\alpha] &= -\frac{i}{8}\varepsilon_{ijk}(-2i)\varepsilon_{jkl}\left(\sigma^l\overline{\sigma}^0\right)_\alpha^{\ \beta} Q_\beta = \\
&= \frac{i^2}{4}\varepsilon_{jki}\varepsilon_{jkl}\left(\sigma^l\overline{\sigma}^0\right)_\alpha^{\ \beta} Q_\beta = \\
&= -\frac{1}{4}\left(2\delta_{il}\right)\left(\sigma^l\overline{\sigma}^0\right)_\alpha^{\ \beta} Q_\beta \Rightarrow \\
\Rightarrow [J_i, Q_\alpha] &= -\frac{1}{2}\left(\sigma^i\overline{\sigma}^0\right)_\alpha^{\ \beta} Q_\beta
\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Επίσης, είναι:

$$\begin{aligned}
\left[J_i, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] &= \left[\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk}, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left[\overline{Q}_{\dot\alpha}, M_{jk}\right] \overset{(3.1.63)}{=} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\overline{\sigma}_{jk}\right)^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\overline{\sigma}^{jk}\right)^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\beta} = \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left[\frac{i}{4}\left(\overline{\sigma}^j\sigma^k - \overline{\sigma}^k\sigma^j\right)\right]^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\beta} \Rightarrow \\
\Rightarrow \left[J_i, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] &= \frac{i}{8}\varepsilon_{ijk}\left(\overline{\sigma}^j\sigma^k - \overline{\sigma}^k\sigma^j\right)^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\beta}
\end{aligned} \tag{3.2.36}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\left[\sigma^j, \sigma^k\right] = \sigma^j\sigma^k - \sigma^k\sigma^j = 2i\varepsilon_{jkl}\sigma^l \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \left(-\overline{\sigma}^j\right)\sigma^k - \left(-\overline{\sigma}^k\right)\sigma^j = 2i\varepsilon_{jkl}\left(-\overline{\sigma}^l\right)\sigma^0 \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow -\overline{\sigma}^j\sigma^k + \overline{\sigma}^k\sigma^j = -2i\varepsilon_{jkl}\overline{\sigma}^l\sigma^0 \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \overline{\sigma}^j\sigma^k - \overline{\sigma}^k\sigma^j = 2i\varepsilon_{jkl}\overline{\sigma}^l\sigma^0
\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

$$\begin{aligned}
(3.2.36) \xRightarrow{(3.2.37)} \left[J_i, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] &= \frac{i}{8}\varepsilon_{ijk}\left(2i\right)\varepsilon_{jkl}\left(\overline{\sigma}^l\sigma^0\right)^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\beta} = -\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl}\left(\overline{\sigma}^l\sigma^0\right)^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\beta} = \\
&= -\frac{1}{4}\varepsilon_{jki}\varepsilon_{jkl}\left(\overline{\sigma}^l\sigma^0\right)^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\beta} = -\frac{1}{4}\left(2\delta_{il}\right)\left(\overline{\sigma}^l\sigma^0\right)^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\beta} \Rightarrow \\
\Rightarrow \left[J_i, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] &= -\frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^i\sigma^0\right)^{\dot\beta}_{\ \dot\alpha}\overline{Q}_{\dot\beta}
\end{aligned} \tag{3.2.38}$$

Από την (3.2.35) έπεται ότι

$$[J_3, Q_1] = -\frac{1}{2}\left(\sigma^3\overline{\sigma}^0\right)_1^{\ \beta} Q_\beta = -\frac{1}{2}[\left(\sigma^3\overline{\sigma}^0\right)_1^{\ 1} Q_1 + \underbrace{\left(\sigma^3\overline{\sigma}^0\right)_1^{\ 2}}_{\substack{\parallel \\ 0}} Q_2] = -\frac{1}{2}Q_1 \xRightarrow{(3.2.31)}$$

$$\Rightarrow [J_3, \alpha_1] = -\frac{1}{2}\alpha_1 \tag{3.2.39}$$

και

$$[J_3, Q_2] = -\frac{1}{2}\left(\sigma^3\overline{\sigma}^0\right)_2^{\ \beta} Q_\beta = -\frac{1}{2}[\underbrace{\left(\sigma^3\overline{\sigma}^0\right)_2^{\ 1}}_{\substack{\parallel \\ 0}} Q_1 + \left(\sigma^3\overline{\sigma}^0\right)_2^{\ 2} Q_2] = -\frac{1}{2}(-1)Q_2 = \frac{1}{2}Q_2 \xRightarrow{(3.2.31)}$$

$$\Rightarrow [J_3, \alpha_2] = \frac{1}{2}\alpha_2 \tag{3.2.40}$$

Από τις (3.2.39) και (3.2.40) συμπεραίνουμε ότι ο τελεστής α_1 κατεβάζει τη $z-$συνιστώσα του σπιν κατά $\frac{1}{2}$, ενώ ο α_2 ανεβάζει τη $z-$συνιστώσα του σπιν κατά $\frac{1}{2}$. Δηλαδή, αν $|m, j_3\rangle$ είναι μία κατάσταση με μάζα m και τρίτη προβολή του σπιν j_3 (και όχι απαραίτητα καθορισμένο σπιν j), οι καταστάσεις $\alpha_1 |m, j_3\rangle$ και $\alpha_2 |m, j_3\rangle$ έχουν τρίτες προβολές του σπιν $j_3 - \frac{1}{2}$ και $j_3 + \frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Πράγματι, με δεδομένο ότι $J_3 |m, j_3\rangle = j_3 |m, j_3\rangle$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
J_3 \left(\alpha_1 |m, j_3\rangle\right) =& \left(\alpha_1 J_3 + [J_3, \alpha_1]\right) |m, j_3\rangle \overset{(3.2.39)}{=} \\
=&\alpha_1 \left(J_3 |m, j_3\rangle\right) - \frac{1}{2}\alpha_1 |m, j_3\rangle = \\
=&\alpha_1 \left(j_3 |m, j_3\rangle\right) - \frac{1}{2}\alpha_1 |m, j_3\rangle = \\
=&\left(j_3 - \frac{1}{2}\right) \alpha_1 |m, j_3\rangle \\
J_3 \left(\alpha_2 |m, j_3\rangle\right) =& \left(\alpha_2 J_3 + [J_3, \alpha_2]\right) |m, j_3\rangle \overset{(3.2.39)}{=} \\
=&\alpha_2 \left(J_3 |m, j_3\rangle\right) + \frac{1}{2}\alpha_2 |m, j_3\rangle = \\
=&\alpha_2 \left(j_3 |m, j_3\rangle\right) + \frac{1}{2}\alpha_2 |m, j_3\rangle = \\
=&\left(j_3 + \frac{1}{2}\right) \alpha_2 |m, j_3\rangle
\end{aligned}$$

Ακόμη, με βάση την (3.2.38) έχουμε:

$$\begin{aligned}
[J_3, \overline{Q}_{\dot{1}}] &= -\frac{1}{2} \left(\overline{\sigma}^3 \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{1}} \overline{Q}_{\dot{\beta}} \\
&= -\frac{1}{2} \left[\left(\overline{\sigma}^3 \sigma^0\right)^{\dot{1}}{}_{\dot{1}} \overline{Q}_{\dot{1}} + \left(\overline{\sigma}^3 \sigma^0\right)^{\dot{2}}{}_{\dot{1}} \overline{Q}_{\dot{2}}\right] \overset{\overline{\sigma}^3 = -\sigma^3}{=} \\
&= -\frac{1}{2} \left(-\overline{Q}_{\dot{1}} + 0 \cdot \overline{Q}_{\dot{2}}\right) = \frac{1}{2}\overline{Q}_{\dot{1}} \xRightarrow{(3.2.31)} \\
\Rightarrow \left[J_3, \alpha_1^\dagger\right] &= \frac{1}{2}\alpha_1^\dagger
\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

$$\begin{aligned}
[J_3, \overline{Q}_{\dot{2}}] &= -\frac{1}{2} \left(\overline{\sigma}^3 \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{2}} \overline{Q}_{\dot{\beta}} \\
&= -\frac{1}{2} \left[\left(\overline{\sigma}^3 \sigma^0\right)^{\dot{1}}{}_{\dot{2}} \overline{Q}_{\dot{1}} + \left(\overline{\sigma}^3 \sigma^0\right)^{\dot{2}}{}_{\dot{2}} \overline{Q}_{\dot{2}}\right] \overset{\overline{\sigma}^3 = -\sigma^3}{=} \\
&= -\frac{1}{2} \left(0 \cdot \overline{Q}_{\dot{1}} + \overline{Q}_{\dot{2}}\right) = -\frac{1}{2}\overline{Q}_{\dot{2}} \xRightarrow{(3.2.31)} \\
\Rightarrow \left[J_3, \alpha_2^\dagger\right] &= -\frac{1}{2}\alpha_2^\dagger
\end{aligned} \tag{3.2.42}$$

Άρα, ο τελεστής $\alpha_1^\dagger$ ανεβάζει τη $z-$συνιστώσα του σπιν κατά $\frac{1}{2}$, ενώ ο τελεστής $\alpha_2^\dagger$ κατεβάζει τη $z-$συνιστώσα του σπιν κατά $\frac{1}{2}$.

Μία μαζική αναπαράσταση της $N = 1$ υπερσυμμετρίας χαρακτηρίζεται από μία σπιν-j multiplet κενών Clifford $|m, j, j_3\rangle$, όπου $j_3 = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$, που «καταστρέφονται» από τους τελεστές α_α, δηλαδή

$$\alpha_\alpha |m, j, j_3\rangle = 0 \tag{3.2.43}$$

για κάθε $\alpha = 1, 2$, $j_3 = -j, \ldots, +j$. Οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι οι $\alpha_1^\dagger |m, j, j_3\rangle$, με τρίτη προβολή του σπιν $j_3 + \frac{1}{2}$, οι $\alpha_2^\dagger |m, j, j_3\rangle$, με τρίτη προβολή του σπιν $j_3 - \frac{1}{2}$ και $\alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger |m, j, j_3\rangle = -\alpha_2^\dagger \alpha_1^\dagger |m, j, j_3\rangle$, με τρίτη προβολή του σπιν j_3. Επομένως, ο συνολικός αριθμός καταστάσεων σε μία μαζική $N = 1$ supermultiplet, για την οποία τα κενά Clifford έχουν κβαντικό αριθμό σπιν ίσο με j, είναι ίσος με $4(2j+1)$ (αφού το j_3 μπορεί να πάρει $2j+1$ διαφορετικές τιμές). Επισημαίνουμε ότι εάν τα κενά Clifford $|m,j,j_3\rangle$ είναι κανονικοποιημένα, δηλαδή

$$\langle m,j,j_3 \mid m,j,j_3\rangle = 1 \tag{3.2.44}$$

για κάθε $j_3=-j,-j+1,\ldots,j-1,j$, το ίδιο ισχύει και για τις καταστάσεις $\alpha_1^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$, $\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$ και $\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$. Αυτό μπορούμε εύκολα να το δείξουε κάνοντας χρήση των σχέσεων αντιμετάθεσης (3.2.32) και των (3.2.43) και (3.2.44). Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\langle m,j,j_3|\,\alpha_1\alpha_1^\dagger\,|m,j,j_3\rangle = \langle m,j,j_3|\left(\left\{\alpha_1,\alpha_1^\dagger\right\}-\alpha_1^\dagger\alpha_1\right)|m,j,j_3\rangle =\\
&=\langle m,j,j_3|\left\{\alpha_1,\alpha_1^\dagger\right\}|m,j,j_3\rangle - \langle m,j,j_3|\,\alpha_1^\dagger\,\underbrace{\alpha_1\,|m,j,j_3\rangle}_{\substack{\parallel\\0}} =\\
&=\langle m,j,j_3|\left(\sigma^0\right)_{1\dot{1}}|m,j,j_3\rangle \overset{\left(\sigma^0\right)_{1\dot{1}}=1}{=} \langle m,j,j_3 \mid m,j,j_3\rangle = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle m,j,j_3|\,\alpha_2\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle = \langle m,j,j_3|\left(\left\{\alpha_2,\alpha_2^\dagger\right\}-\alpha_2^\dagger\alpha_2\right)|m,j,j_3\rangle =\\
&=\langle m,j,j_3|\left\{\alpha_2,\alpha_2^\dagger\right\}|m,j,j_3\rangle - \langle m,j,j_3|\,\alpha_2^\dagger\,\underbrace{\alpha_2\,|m,j,j_3\rangle}_{\substack{\parallel\\0}} =\\
&=\langle m,j,j_3|\left(\sigma^0\right)_{2\dot{2}}|m,j,j_3\rangle \overset{\left(\sigma^0\right)_{2\dot{2}}=1}{=} \langle m,j,j_3 \mid m,j,j_3\rangle = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle m,j,j_3|\left(\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\right)^\dagger\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle = \langle m,j,j_3|\,\alpha_2\alpha_1\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle =\\
&=\langle m,j,j_3|\,\alpha_2(\underbrace{\left\{\alpha_1,\alpha_1^\dagger\right\}}_{\substack{\parallel\\1}}-\alpha_1^\dagger\alpha_1)\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle =\\
&=\langle m,j,j_3|\,\alpha_2\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle - \langle m,j,j_3|\,\alpha_2\alpha_1^\dagger\alpha_1\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle =\\
&=\langle m,j,j_3|\,(\underbrace{\left\{\alpha_2,\alpha_2^\dagger\right\}}_{\substack{\parallel\\1}}-\alpha_2^\dagger\alpha_2)\,|m,j,j_3\rangle - \langle m,j,j_3|\,\alpha_2\alpha_1^\dagger(\left\{\alpha_1,\alpha_2^\dagger\right\}-\alpha_2^\dagger\alpha_1)\,|m,j,j_3\rangle =\\
&=\langle m,j,j_3 \mid m,j,j_3\rangle - \langle m,j,j_3|\,\alpha_2^\dagger\,\underbrace{\alpha_2\,|m,j,j_3\rangle}_{\substack{\parallel\\0}} -\\
&-\underbrace{\left(\sigma^0\right)_{1\dot{2}}}_{\substack{\parallel\\0}}\langle m,j,j_3|\,\alpha_2\alpha_1^\dagger\,|m,j,j_3\rangle + \langle m,j,j_3|\,\alpha_2\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\,\underbrace{\alpha_1\,|m,j,j_3\rangle}_{\substack{\parallel\\0}} = 1
\end{aligned}$$

Οι $2j+1$ καταστάσεις $\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$ έχουν κβαντικό αριθμό σπιν ίσο με j, οπότε αποτελούν μία σπιν-j multiplet, όπως και τα κενά Clifford $|m,j,j_3\rangle$. Για να αποδείξουμε την ορθότητα του ισχυρισμού αυτού, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\vec{J}^2\left(\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle\right) = j(j+1)\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle \tag{3.2.45}$$

για κάθε $j_3=-j,-j+1,\ldots,j-1,j$, όπου $\vec{J}^2 \equiv \sum\limits_{i=1}^{3} J_iJ_i$ είναι ο τελεστής του τετραγώνου του σπιν. Για να αποδείξουμε την (3.2.45), θα υπολογίσουμε πρώτα τους μεταθέτες $\left[\vec{J}^2,\overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right]$, $\alpha=1,2,$

βασιζόμενοι στη σχέση (3.2.38):

$$\begin{aligned}
\left[\vec{J}^2, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right] &= \sum_{i=1}^{3} \left[J_i J_i, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left(J_i \left[J_i, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right] + \left[J_i, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right] J_i\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{3} J_i \left[J_i, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right] + \sum_{i=1}^{3} \left[J_i, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right] J_i \overset{(3.2.38)}{=} \\
&= \sum_{i=1}^{3} J_i \left[-\frac{1}{2} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \overline{Q}_{\dot{\beta}}\right] + \sum_{i=1}^{3} \left[-\frac{1}{2} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \overline{Q}_{\dot{\beta}}\right] J_i = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \left(J_i \overline{Q}_{\dot{\beta}} + \overline{Q}_{\dot{\beta}} J_i\right) = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \left(\overline{Q}_{\dot{\beta}} J_i + \left[J_i, \overline{Q}_{\dot{\beta}}\right] + \overline{Q}_{\dot{\beta}} J_i\right) = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \left[J_i, \overline{Q}_{\dot{\beta}}\right] - \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \overline{Q}_{\dot{\beta}} J_i = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}} \overline{Q}_{\dot{\gamma}} - \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \overline{Q}_{\dot{\beta}} J_i = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}} \overline{Q}_{\dot{\gamma}} - \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \overline{Q}_{\dot{\beta}} J_i \Rightarrow \\
\Rightarrow \left[\vec{J}^2, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right] &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0 \overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\alpha}} \overline{Q}_{\dot{\gamma}} - \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \overline{Q}_{\dot{\beta}} J_i
\end{aligned} \tag{3.2.46}$$

Επίσης, είναι:

$$\sum_{i=1}^{3} \overline{\sigma}^i \sigma^0 \overline{\sigma}^i \sigma^0 \overset{\sigma^0 = I_2}{=} \sum_{i=1}^{3} \overline{\sigma}^i \overline{\sigma}^i = \sum_{i=1}^{3} (-\sigma^i)(-\sigma^i) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sigma^i\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} I_2 = 3I_2$$

όπου I_2 είναι ο ταυτοτικός 2×2 πίνακας. Άρα

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0 \overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\alpha}} = 3\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}}$$

και αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (3.2.46), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
\left[\vec{J}^2, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right] &= \frac{1}{4} \left(3\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}}\right) \overline{Q}_{\dot{\gamma}} - \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \overline{Q}_{\dot{\beta}} J_i \Rightarrow \\
\Rightarrow \left[\vec{J}^2, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right] &= \frac{3}{4} \overline{Q}_{\dot{\alpha}} - \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \overline{Q}_{\dot{\beta}} J_i
\end{aligned} \tag{3.2.47}$$

Επομένως

$$\left[\vec{J}^2, \alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger\right] \overset{(3.2.31)}{=} \frac{1}{2m} \left[\vec{J}^2, \overline{Q}_{\dot{1}} \overline{Q}_{\dot{2}}\right] = \frac{1}{2m} \left(\left[\vec{J}^2, \overline{Q}_{\dot{1}}\right] \overline{Q}_{\dot{2}} + \overline{Q}_{\dot{1}} \left[\vec{J}^2, \overline{Q}_{\dot{2}}\right]\right) \overset{(3.2.47)}{=}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2m}\left[\frac{3}{4}\overline{Q}_{\dot{1}}-\sum_{i=1}^{3}\left(\overline{\sigma}^{i}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{1}}\,\overline{Q}_{\dot{\beta}}J_{i}\right]\overline{Q}_{\dot{2}}+\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{1}}\left[\frac{3}{4}\overline{Q}_{\dot{2}}-\sum_{i=1}^{3}\left(\overline{\sigma}^{i}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{\beta}}J_{i}\right]=\\
&=\frac{3}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}-\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\left(\overline{\sigma}^{i}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{1}}\,\overline{Q}_{\dot{\beta}}J_{i}\overline{Q}_{\dot{2}}-\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\left(\overline{\sigma}^{i}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{\beta}}J_{i}=\\
&=\frac{3}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}-\frac{1}{2m}\left[\left(\overline{\sigma}^{1}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{1}}\,\overline{Q}_{\dot{\beta}}J_{1}\overline{Q}_{\dot{2}}+\left(\overline{\sigma}^{2}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{1}}\,\overline{Q}_{\dot{\beta}}J_{2}\overline{Q}_{\dot{2}}+\right.\\
&\quad\left.+\left(\overline{\sigma}^{3}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{1}}\,\overline{Q}_{\dot{\beta}}J_{3}\overline{Q}_{\dot{2}}\right]-\frac{1}{2m}\left[\left(\overline{\sigma}^{1}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{\beta}}J_{1}+\right.\\
&\quad\left.+\left(\overline{\sigma}^{2}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{\beta}}J_{2}+\left(\overline{\sigma}^{3}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{\beta}}J_{3}\right]=\\
&=\frac{3}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}-\frac{1}{2m}\left[\left(\overline{\sigma}^{1}\sigma^{0}\right)^{\dot{2}}{}_{\dot{1}}\,\overline{Q}_{\dot{2}}J_{1}+\left(\overline{\sigma}^{2}\sigma^{0}\right)^{\dot{2}}{}_{\dot{1}}\,\overline{Q}_{\dot{2}}J_{2}+\right.\\
&\quad\left.+\left(\overline{\sigma}^{3}\sigma^{0}\right)^{\dot{1}}{}_{\dot{1}}\,\overline{Q}_{\dot{1}}J_{3}\right]\overline{Q}_{\dot{2}}-\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{1}}\left[\left(\overline{\sigma}^{1}\sigma^{0}\right)^{\dot{1}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{1}}J_{1}+\right.\\
&\quad\left.+\left(\overline{\sigma}^{2}\sigma^{0}\right)^{\dot{1}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{1}}J_{2}+\left(\overline{\sigma}^{3}\sigma^{0}\right)^{\dot{2}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{2}}J_{3}\right]=\\
&=\frac{3}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}-\frac{1}{2m}\left(-\overline{Q}_{\dot{2}}J_{1}-i\overline{Q}_{\dot{2}}J_{2}-\overline{Q}_{\dot{1}}J_{3}\right)\overline{Q}_{\dot{2}}-\\
&\quad-\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{1}}\left(-\overline{Q}_{\dot{1}}J_{1}+i\overline{Q}_{\dot{1}}J_{2}+\overline{Q}_{\dot{2}}J_{3}\right)=
\end{aligned}
$$
[1]

$$
\begin{aligned}
&=\frac{3}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}+\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{2}}J_{1}\overline{Q}_{\dot{2}}+\frac{i}{2m}\overline{Q}_{\dot{2}}J_{2}\overline{Q}_{\dot{2}}+\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{1}}J_{3}\overline{Q}_{\dot{2}}+\\
&\quad+\frac{1}{2m}\underbrace{\overline{Q}_{\dot{1}}^{2}}_{\substack{\parallel\\0}}J_{1}-\frac{i}{2m}\underbrace{\overline{Q}_{\dot{1}}^{2}}_{\substack{\parallel\\0}}J_{2}-\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}J_{3}=\\
&=\frac{3}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}+\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{2}}\left(\overline{Q}_{\dot{2}}J_{1}+\left[J_{1},\overline{Q}_{\dot{2}}\right]\right)+\frac{i}{2m}\overline{Q}_{\dot{2}}\left(\overline{Q}_{\dot{2}}J_{2}+\left[J_{2},\overline{Q}_{\dot{2}}\right]\right)+\\
&\quad+\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{1}}\left[J_{3},\overline{Q}_{\dot{2}}\right]\overset{\left(\overline{Q}_{\dot{2}}\right)^{2}=0}{=}\\
&=\frac{3}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}+\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{2}}\left[J_{1},\overline{Q}_{\dot{2}}\right]+\frac{i}{2m}\overline{Q}_{\dot{2}}\left[J_{2},\overline{Q}_{\dot{2}}\right]+\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{1}}\left[J_{3},\overline{Q}_{\dot{2}}\right]\overset{(3.2.38)}{=}\\
&=\frac{3}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}+\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{2}}\left[-\frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^{1}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{\beta}}\right]+\frac{i}{2m}\overline{Q}_{\dot{2}}\left[-\frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^{2}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{\beta}}\right]+\\
&\quad+\frac{1}{2m}\overline{Q}_{\dot{1}}\left[-\frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^{3}\sigma^{0}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{\beta}}\right]=\\
&=\frac{3}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}-\frac{1}{4m}\left(\overline{\sigma}^{1}\sigma^{0}\right)^{\dot{1}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{2}}\overline{Q}_{\dot{1}}-\frac{i}{4m}\left(\overline{\sigma}^{2}\sigma^{0}\right)^{\dot{1}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{2}}\overline{Q}_{\dot{1}}-\\
&\quad-\frac{1}{4m}\left(\overline{\sigma}^{3}\sigma^{0}\right)^{\dot{2}}{}_{\dot{2}}\,\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}=\\
&=\frac{3}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}-\frac{1}{4m}(-1)\overline{Q}_{\dot{2}}\overline{Q}_{\dot{1}}-\frac{i}{4m}(i)\overline{Q}_{\dot{2}}\overline{Q}_{\dot{1}}-\frac{1}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}=\\
&=\frac{3}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}+\frac{1}{4m}\overline{Q}_{\dot{2}}\overline{Q}_{\dot{1}}+\frac{1}{4m}\overline{Q}_{\dot{2}}\overline{Q}_{\dot{1}}-\frac{1}{4m}\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}=\\
&=\frac{2}{4m}\left(\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{2}}+\overline{Q}_{\dot{2}}\overline{Q}_{\dot{1}}\right)=\frac{1}{2m}\left\{\overline{Q}_{\dot{1}},\overline{Q}_{\dot{2}}\right\}\xRightarrow{(3.2.30)}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\left[\vec{J}^{2},\alpha_{1}^{\dagger}\alpha_{2}^{\dagger}\right]=0 \tag{3.2.48}
$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\vec{J}^2\left(\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle\right) =& (\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\vec{J}^2 + \underbrace{\left[\vec{J}^2,\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\right]}_{\substack{\parallel\\ 0}})\,|m,j,j_3\rangle = \\
=& \alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\left(\vec{J}^2\,|m,j,j_3\rangle\right) = \\
=& \alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\left(j(j+1)\,|m,j,j_3\rangle\right) = \\
=& j(j+1)\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle
\end{aligned}$$

οπότε ολοκληρώθηκε η απόδειξη της (3.2.45), και μπορούμε να υιοθετήσουμε το συμβολισμό:

$$|m,j,j_3\rangle' \equiv \alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle \tag{3.2.49}$$

για κάθε $j_3 = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$, όπου ο τόνος υποδεικνύει ότι κάθε κατάσταση $\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$ είναι διαφορετική από το αντίστοιχο κενό Clifford, $|m,j,j_3\rangle$, παρόλο που έχει τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς σπιν και τρίτης προβολής του σπιν με αυτό.

Από την άλλη μεριά, οι καταστάσεις $\alpha_1^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$ και $\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$ δεν αντιστοιχούν εν γένει σε συγκεκριμένο κβαντικό αριθμό σπιν, δηλαδή δεν είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή $\vec{J}^2$. (Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση, όπου $j=0$, οπότε και $j_3=0$, στην οποία οι καταστάσεις $\alpha_1^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$ και $\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$ αποτελούν μία σπιν$-\frac{1}{2}$ διπλέτα, όπως θα δούμε παρακάτω). Ισχύει ότι η δυάδα $\begin{pmatrix}\alpha_1^\dagger\\ \alpha_2^\dagger\end{pmatrix}$ μετασχηματίζεται ως διπλέτα κάτω από την ομάδα $SU(2)$ (με τους τελεστές $\alpha_1^\dagger$ και $\alpha_2^\dagger$ να έχουν «τρίτη προβολή σπιν» $\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2}$ αντίστοιχα, σύμφωνα με τις σχέσεις μετάθεσης (3.2.41) και (3.2.42) αντίστοιχα). Επομένως, η δράση της $SU(2)$ διπλέτας $\begin{pmatrix}\alpha_1^\dagger\\ \alpha_2^\dagger\end{pmatrix}$ στα κενά Clifford $|m,j,j_3\rangle$, όπου $j>0$, πρέπει να αντιμετωπιστεί ως κβαντομηχανική πρόσθεση δύο σπιν, $\frac{1}{2}$ και j, όπου οι δυνατές τιμές του κβαντικού αριθμού του ολικού σπιν είναι οι $j-\frac{1}{2}$ και $j+\frac{1}{2}$. Έτσι, από τις $2(2j+1)$ καταστάσεις $\alpha_1^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$ και $\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μία σπιν$-(j+\frac{1}{2})$ multiplet με $2(j+\frac{1}{2})+1 = 2j+2$ καταστάσεις και μία σπιν$-(j-\frac{1}{2})$ multiplet με $2(j-\frac{1}{2})+1 = 2j$ καταστάσεις. Αυτές οι καταστάσεις καθορισμένου ολικού σπιν ($j+\frac{1}{2}$ ή $j-\frac{1}{2}$) και καθορισμένης $z-$συνιστώσας του σπιν είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\alpha_1^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$ και $\alpha_2^\dagger\,|m,j,j_3\rangle$ με συντελεστές κατάλληλους συντελεστές Clebsch-Gordan:

$$\begin{aligned}
\left|m,j+\frac{1}{2},j_3'\right\rangle =& C_{\frac{1}{2}j}\left(j+\frac{1}{2},j_3';\frac{1}{2},j_3'-\frac{1}{2}\right)\alpha_1^\dagger\left|m,j,j_3'-\frac{1}{2}\right\rangle + \\
&+C_{\frac{1}{2}j}\left(j+\frac{1}{2},j_3';-\frac{1}{2},j_3'+\frac{1}{2}\right)\alpha_2^\dagger\left|m,j,j_3'+\frac{1}{2}\right\rangle
\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

$$\begin{aligned}
\left|m,j-\frac{1}{2},j_3''\right\rangle =& C_{\frac{1}{2}j}\left(j-\frac{1}{2},j_3'';\frac{1}{2},j_3''-\frac{1}{2}\right)\alpha_1^\dagger\left|m,j,j_3''-\frac{1}{2}\right\rangle + \\
&+C_{\frac{1}{2}j}\left(j-\frac{1}{2},j_3'';-\frac{1}{2},j_3''+\frac{1}{2}\right)\alpha_2^\dagger\left|m,j,j_3''+\frac{1}{2}\right\rangle
\end{aligned} \tag{3.2.51}$$

[1]Από τις (3.2.30) έπεται ότι:

$$\{\overline{Q}_{\dot{1}},\overline{Q}_{\dot{1}}\} = 0 \Rightarrow 2\overline{Q}_{\dot{1}}\overline{Q}_{\dot{1}} = 0 \Rightarrow \left(\overline{Q}_{\dot{1}}\right)^2 = 0$$

$$\{\overline{Q}_{\dot{2}},\overline{Q}_{\dot{2}}\} = 0 \Rightarrow 2\overline{Q}_{\dot{2}}\overline{Q}_{\dot{2}} = 0 \Rightarrow \left(\overline{Q}_{\dot{2}}\right)^2 = 0$$

όπου $j_3' = -(j+\frac{1}{2}), -(j+\frac{1}{2})+1, \ldots, (j+\frac{1}{2})-1, j+\frac{1}{2}$, $j_3'' = -(j-\frac{1}{2}), -(j-\frac{1}{2})+1, \ldots, (j-\frac{1}{2})-1, j-\frac{1}{2}$, και $C_{j_1 j_2}(J, M; m_1, m_2)$ είναι ο συντελεστής Clebsch-Gordan που αντιστοιχεί στη σύζευξη δύο σπιν j_1 και j_2 με $z-$συνιστώσες m_1 και m_2 αντίστοιχα για να προκύψει ολικό σπιν J με $z-$συνιστώσα M.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να επαληθεύσουμε την ισότητα του αριθμού των μποζονικών βαθμών ελευθερίας (καταστάσεων), n_B, με τον αριθμό των φερμιονικών βαθμών ελευθερίας, n_F, για μία γενική μαζική $N=1$ supermultiplet, που κατασκευάζεται από μία σπιν-j multiplet κενών Clifford $|m, j, j_3\rangle$, όπου $j>0$ και $j_3 = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$. Αν το j είναι ακέραιος (αντιστοίχως ημιακέραιος), οι $2j+1$ καταστάσεις $|m, j, j_3\rangle$ και οι $2j+1$ κααταστάσεις $|m, j, j_3\rangle' \equiv \alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger |m, j, j_3\rangle$ είναι μποζονικές (αντιστοίχως φερμιονικές), οπότε έχουμε $n_B = 2(2j+1)$ (αντίστοιχα $n_F = 2(2j+1)$). Επίσης, οι αριθμοί $j-\frac{1}{2}$ και $j+\frac{1}{2}$ είναι ημιακέραιοι (αντιστοίχως ακέραιοι), οπότε οι $2j$ καταστάσεις με σπιν $j-\frac{1}{2}$ και οι $2j+2$ καταστάσεις με σπιν $j+\frac{1}{2}$ είναι φερμιονικές (αντιστοίχως μποζονικές), επομένως $n_F = 2j+(2j+2) = 4j+2 = 2(2j+1)$ (αντιστοίχως $n_B = 2j+(2j+2) = 4j+2 = 2(2j+1)$). Άρα, σε κάθε περίπτωση είναι:

$$n_B = n_F = 2(2j+1) \tag{3.2.52}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει και για $j=0$, όπως θα δούμε παρακάτω.

Θα παρουσιάσουμε τώρα δύο ενδιαφέροντα παραδείγματα μαζικών μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της $N=1$ υπερσυμμετρίας. Το πρώτο από αυτά είναι η μαζική chiral supermultiplet, την οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε ξεκινώντας από ένα κανονικοποιημένο κενό Clifford με σπιν $j=0$, και άρα $z-$συνιστώσα του σπιν ίση με $j_3=0$, το οποίο θα συμβολίζουμε ως $|m,0,0\rangle$. Οι άλλες καταστάσεις της εν λόγω supermultiplet είναι η $\alpha_1^\dagger |m,0,0\rangle$, με τρίτη προβολή του σπιν $0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, η $\alpha_2^\dagger |m,0,0\rangle$, με τρίτη προβολή του σπιν $0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, και η $\alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger |m,0,0\rangle = |m,0,0\rangle'$, για την οποία αμφότεροι οι κβαντικοί αριθμοί του σπιν και της $z-$συνιστώσας του σπιν είναι ίσοι με 0. Οι καταστάσεις $\alpha_1^\dagger |m,0,0\rangle$ και $\alpha_2^\dagger |m,0,0\rangle$ αποτελούν μία σπιν$-\frac{1}{2}$ διπλέτα, η οποία αντιστοιχεί σε ένα μαζικό φερμιόνιο Majorana[2], οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha_1^\dagger |m,0,0\rangle = \left| m. \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \tag{3.2.52α}$$

$$\alpha_2^\dagger |m,0,0\rangle = \left| m. \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \tag{3.2.52β}$$

Θα επαληθεύσουμε τώρα ότι οι καταστάσεις $\alpha_1^\dagger |m,0,0\rangle$ και $\alpha_2^\dagger |m,0,0\rangle$ έχουν κβαντικό αριθμό σπιν ίσο με $\frac{1}{2}$, δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$\vec{J}^2 \left(\alpha_{1,2}^\dagger |m,0,0\rangle \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \alpha_{1,2}^\dagger |m,0,0\rangle = \frac{3}{4} \alpha_{1,2}^\dagger |m,0,0\rangle \tag{3.2.53}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\vec{J}^2 \left(\alpha_1^\dagger |m,0,0\rangle \right) &= \left(\alpha_1^\dagger \vec{J}^2 + \left[\vec{J}^2, \alpha_1^\dagger \right] \right) |m,0,0\rangle = \\
&= \alpha_1^\dagger \left(\vec{J}^2 |m,0,0\rangle \right) + \left[\vec{J}^2, \alpha_1^\dagger \right] |m,0,0\rangle = \\
&= \alpha_1^\dagger \left(0(0+1) |m,0,0\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[\vec{J}^2, \overline{Q}_{\dot{1}} \right] |m,0,0\rangle \overset{(3.2.47)}{=} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[\frac{3}{4} \overline{Q}_{\dot{1}} - \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{\sigma}^i \sigma^0 \right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{1}} \overline{Q}_{\dot{\beta}} J_i \right] |m,0,0\rangle =
\end{aligned}$$

[2]Λέμε ένα φερμιόνιο Majorana διότι έχουμε ένα φερμιόνιο με δύο ανεξάρτητες συνιστώσες που έχουμε υποθέσει ότι έχει μη μηδενική μάζα, ενώ τα φερμιόνια Weyl είναι πάντοτε άμαζα

$$
\begin{aligned}
&=\frac{3}{4}\alpha_1^\dagger\left|m,0,0\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{2m}}\left[\left(\overline{\sigma}^1\sigma^0\right)^{\dot\beta}{}_{\dot 1}\overline{Q}_{\dot\beta}J_1+\left(\overline{\sigma}^2\sigma^0\right)^{\dot\beta}{}_{\dot 1}\overline{Q}_{\dot\beta}J_2+\left(\overline{\sigma}^3\sigma^0\right)^{\dot\beta}{}_{\dot 1}\overline{Q}_{\dot\beta}J_3\right]\left|m,0,0\right\rangle=\\
&=\frac{3}{4}\alpha_1^\dagger\left|m,0,0\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{2m}}\left[\left(\overline{\sigma}^1\sigma^0\right)^{\dot 2}{}_{\dot 1}\overline{Q}_{\dot 2}J_1+\left(\overline{\sigma}^2\sigma^0\right)^{\dot 2}{}_{\dot 1}\overline{Q}_{\dot 2}J_2+\left(\overline{\sigma}^3\sigma^0\right)^{\dot 1}{}_{\dot 1}\overline{Q}_{\dot 1}J_3\right]\left|m,0,0\right\rangle=\\
&=\frac{3}{4}\alpha_1^\dagger\left|m,0,0\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{2m}}\left(-\overline{Q}_{\dot 2}J_1-i\overline{Q}_{\dot 2}J_2-\overline{Q}_{\dot 1}J_3\right)\left|m,0,0\right\rangle=\\
&=\frac{3}{4}\alpha_1^\dagger\left|m,0,0\right\rangle+\alpha_2^\dagger J_1\left|m,0,0\right\rangle+i\alpha_2^\dagger J_2\left|m,0,0\right\rangle+\alpha_1^\dagger J_3\left|m,0,0\right\rangle=\\
&=\frac{3}{4}\alpha_1^\dagger\left|m,0,0\right\rangle+\alpha_2^\dagger\left[\left(J_1+iJ_2\right)\left|m,0,0\right\rangle\right]+\alpha_1^\dagger\left(0\left|m,0,0\right\rangle\right)=\\
&=\frac{3}{4}\alpha_1^\dagger\left|m,0,0\right\rangle+\alpha_2^\dagger\underbrace{\left(J_+\left|m,0,0\right\rangle\right)}_{\substack{\parallel\\0}}=\frac{3}{4}\alpha_1^\dagger\left|m,0,0\right\rangle
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^2\left(\alpha_2^\dagger\left|m,0,0\right\rangle\right)&=\left(\alpha_2^\dagger\vec{J}^2+\left[\vec{J}^2,\alpha_2^\dagger\right]\right)\left|m,0,0\right\rangle=\\
&=\alpha_2^\dagger\left(\vec{J}^2\left|m,0,0\right\rangle\right)+\left[\vec{J}^2,\alpha_2^\dagger\right]\left|m,0,0\right\rangle=\\
&=\alpha_2^\dagger\left(0(0+1)\left|m,0,0\right\rangle\right)+\frac{1}{\sqrt{2m}}\left[\vec{J}^2,\overline{Q}_{\dot 2}\right]\left|m,0,0\right\rangle\overset{(3.2.47)}{=}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2m}}\left[\frac{3}{4}\overline{Q}_{\dot 2}-\sum_{i=1}^{3}\left(\overline{\sigma}^i\sigma^0\right)^{\dot\beta}{}_{\dot 2}\overline{Q}_{\dot\beta}J_i\right]\left|m,0,0\right\rangle=\\
&=\frac{3}{4}\alpha_2^\dagger\left|m,0,0\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{2m}}\left[\left(\overline{\sigma}^1\sigma^0\right)^{\dot\beta}{}_{\dot 2}\overline{Q}_{\dot\beta}J_1+\left(\overline{\sigma}^2\sigma^0\right)^{\dot\beta}{}_{\dot 2}\overline{Q}_{\dot\beta}J_2+\left(\overline{\sigma}^3\sigma^0\right)^{\dot\beta}{}_{\dot 2}\overline{Q}_{\dot\beta}J_3\right]\left|m,0,0\right\rangle=\\
&=\frac{3}{4}\alpha_2^\dagger\left|m,0,0\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{2m}}\left[\left(\overline{\sigma}^1\sigma^0\right)^{\dot 1}{}_{\dot 2}\overline{Q}_{\dot 1}J_1+\left(\overline{\sigma}^2\sigma^0\right)^{\dot 1}{}_{\dot 2}\overline{Q}_{\dot 1}J_2+\left(\overline{\sigma}^3\sigma^0\right)^{\dot 2}{}_{\dot 2}\overline{Q}_{\dot 2}J_3\right]\left|m,0,0\right\rangle=\\
&=\frac{3}{4}\alpha_2^\dagger\left|m,0,0\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{2m}}\left(-\overline{Q}_{\dot 1}J_1+i\overline{Q}_{\dot 1}J_2+\overline{Q}_{\dot 2}J_3\right)\left|m,0,0\right\rangle=\\
&=\frac{3}{4}\alpha_2^\dagger\left|m,0,0\right\rangle+\alpha_1^\dagger J_1\left|m,0,0\right\rangle-i\alpha_1^\dagger J_2\left|m,0,0\right\rangle-\alpha_2^\dagger J_3\left|m,0,0\right\rangle=\\
&=\frac{3}{4}\alpha_2^\dagger\left|m,0,0\right\rangle+\alpha_1^\dagger\left[\left(J_1-iJ_2\right)\left|m,0,0\right\rangle\right]-\alpha_2^\dagger\left(0\left|m,0,0\right\rangle\right)=\\
&=\frac{3}{4}\alpha_2^\dagger\left|m,0,0\right\rangle+\alpha_1^\dagger\underbrace{\left(J_-\left|m,0,0\right\rangle\right)}_{\substack{\parallel\\0}}=\frac{3}{4}\alpha_2^\dagger\left|m,0,0\right\rangle
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι

$$J_+\left|m,j,j_3\right\rangle=\sqrt{j(j+1)-j_3(j_3+1)}\left|m,j,j_3+1\right\rangle$$

εκτός αν $j_3=j$, οπότε το δεξιό μέλος ισούται με 0, και:

$$J_-\left|m,j,j_3\right\rangle=\sqrt{j(j+1)-j_3(j_3-1)}\left|m,j,j_3-1\right\rangle$$

εκτός αν $j_3=-j$, οπότε το δεξιό μέλος ισούται με 0, με $J_\pm\equiv J_1\pm iJ_2$. Έτσι, η μαζική chiral supermultiplet έχει δύο καταστάσεις με σπιν 0 και μία σπιν-$\frac{1}{2}$ διπλέτα, οπότε γι' αυτήν την αναπαράσταση της απλής υπερσυμμετρίας είναι

$$n_B=n_F=2$$

που σημαίνει ότι η (3.2.52) ισχύει και για $j=0$. Για τις δύο καταστάσεις με σπιν 0, $\left|m,0,0\right\rangle$ και $\left|m,0,0\right\rangle'=\alpha_1^\dagger\alpha_2^\dagger\left|m,0,0\right\rangle$, έχουμε $\alpha_\alpha\left|m,0,0\right\rangle=0$ και $\alpha_\alpha^\dagger\left|m,0,0\right\rangle'=0$[3] για κάθε $\alpha=$

[3] Αυτό μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί με χρήση των σχέσεων αντιμετάθεσης: $\left\{\alpha_\alpha^\dagger,\alpha_\beta^\dagger\right\}=0$, για κάθε $\alpha,\beta=1,2$.

1, 2. Από τη συζήτηση στο τέλος της ενότητας 2.1 συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός της ομοτιμίας εναλλάσσει τις αναπαραστάσεις $(\frac{1}{2},0)$ και $(0,\frac{1}{2})$ της άλγεβρας Lorentz, οπότε κάτω από το μετασχηματισμό αυτό έχουμε $Q_\alpha \leftrightarrow \overline{Q}_{\dot{\alpha}}$, άρα $\alpha_\alpha \leftrightarrow \alpha^\dagger_\alpha$ και επομένως $|m,0,0\rangle \leftrightarrow |m,0,0\rangle'$. Έτσι, εάν θεωρήσουμε τους κανονικοποιημένους γραμμικούς συνδυασμούς

$$|\pm\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|m,0,0\rangle \pm |m,0,0\rangle') \tag{3.2.54}$$

κάτω από το μετασχηματισμό της ομοτιμίας έχουμε:

$$\begin{aligned}|+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m,0,0\rangle + |m,0,0\rangle'\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m,0,0\rangle' + |m,0,0\rangle\right) = |+\rangle \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m,0,0\rangle - |m,0,0\rangle'\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m,0,0\rangle' - |m,0,0\rangle\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m,0,0\rangle - |m,0,0\rangle'\right) = -|-\rangle\end{aligned}$$

οπότε η κατάσταση $|+\rangle$ αντιστοιχεί σε ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο, ενώ η κατάσταση $|-\rangle$ αντιστοιχεί σε ένα πραγματικό ψευδοβαθμωτό πεδίο. Έτσι, το σωματιδιακό περιεχόμενο μία μαζικής chiral supermultiplet είναι ένα φερμιόνιο Majorana, ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο και ένα πραγματικό ψευδοβαθμωτό πεδίο, που έχουν όλα την ίδια μάζα.

Η δεύτερη μαζική $N=1$ supermultiplet, στην οποία θα αναφερθούμε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, είναι η μαζική διανυσματική supermultiplet, την οποία κατασκευάζουμε ξεκινώντας από μία σπιν-$\frac{1}{2}$ διπλέτα κενών Clifford, $\left|m,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ και $\left|m,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τις καταστάσεις $\alpha^\dagger_1\left|m,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$, $\alpha^\dagger_2\left|m,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$, $\alpha^\dagger_1\left|m,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ και $\alpha^\dagger_2\left|m,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$, με τρίτη προβολή του σπιν 1,0,0 και -1 αντίστοιχα, από τις οποίες μπορούμε να κατασκευάσουμε μία σπιν-1 τριπλέτα με $2\cdot 1+1=3$ καταστάσεις, $|m,1,1\rangle$, $|m,1,0\rangle$ και $|m,1,-1\rangle$, καθώς και μία απλή κατάσταση (singlet) με σπιν 0, $|m,0,0\rangle$. Για να το κάνουμε αυτό, βασιζόμαστε στις γενικές σχέσεις (3.2.50) και (3.2.51) και ανατρέχουμε σε έναν πίνακα με τους συντελεστές Clebsch-Gordan για την πρόσθεση δύο σπιν $\frac{1}{2}$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}|m,1,1\rangle =& C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\left(1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\alpha^\dagger_1\left|m,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \alpha^\dagger_1\left|m,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \\ |m,1,0\rangle =& C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\left(1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\alpha^\dagger_1\left|m,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \\ &+ C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\left(1,0;-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\alpha^\dagger_2\left|m,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \\ =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha^\dagger_1\left|m,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \alpha^\dagger_2\left|m,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right) \\ |m,1,-1\rangle =& C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\left(1,-1;-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\alpha^\dagger_2\left|m,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \alpha^\dagger_2\left|m,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ |m,0,0\rangle =& C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\left(0,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\alpha^\dagger_1\left|m,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \\ &+ C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\left(0,0;-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\alpha^\dagger_2\left|m,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \\ =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha^\dagger_1\left|m,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \alpha^\dagger_2\left|m,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)\end{aligned}$$

Τέλος, έχουμε και τις καταστάσεις $\left|m,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle' = \alpha^\dagger_1\alpha^\dagger_2\left|m,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ και $\left|m,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle' = \alpha^\dagger_1\alpha^\dagger_2\left|m,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$, οι οποίες αποτελούν μία σπιν-$\frac{1}{2}$ διπλέτα. Έτσι, το σωματιδιακό περιεχόμενο μίας μαζικής διανυσματικής supermultiplet είναι δύο μαζικά φερμιόνια Majorana, τα οποία αντιστοιχούν στις δύο σπιν-$\frac{1}{2}$ διπλέτες, ένα μαζικό διανυσματικό μποζόνιο, το οποίο αντιστοιχεί στη σπιν-1 τριπλέτα, και ένα μαζικό πραγματικό βαθμωτό πεδίο, το οποίο αντιστοιχεί στην κατάσταση με σπιν 0, $|m,0,0\rangle$.

Κεφάλαιο 4

Το μοντέλο των Wess-Zumino

4.1 Το απλούστερο υπερσυμμετρικό μοντέλο: μία ελεύθερη άμαζη chiral supermultiplet

Η σημαντικότερη υλοποίηση της $N = 1$ υπερσυμμετρίας είναι στη θεωρία πεδίου. Για τη μελέτη της (απλής) υπερσυμμετρίας σε αυτό το πλαίσιο, είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε πώς μετασχηματίζεται ένας τελεστής πεδίου $\hat{\phi}(x)$ κάτω από μία μετατόπιση στον επίπεδο χωροχρόνο:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \alpha^\mu \tag{4.1.1}$$

όπου α^μ είναι ένα σταθερό τετραδιάνυσμα. Κάτω από τη μετατόπιση (4.1.1) έχουμε:

$$\hat{\phi}(x) \to \hat{\phi}'(x) \equiv \hat{\phi}(x+\alpha) = U(\alpha)\hat{\phi}(x)\,(U(\alpha))^{-1} \tag{4.1.2}$$

όπου

$$U(\alpha) = e^{i\alpha^\mu P_\mu} \tag{4.1.3}$$

όπου P_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, είναι οι γεννήτορες των μετατοπίσεων στο χώρο Minkowski. Αντικαθιστώντας την (4.1.3) στην (4.1.2), παίρνουμε:

$$\hat{\phi}'(x) = \hat{\phi}(x+\alpha) = e^{i\alpha^\mu P_\mu}\hat{\phi}(x)e^{-i\alpha^\nu P_\nu} \tag{4.1.4}$$

Αν η μετατόπιση στην (4.1.1) είναι απειροστή, δηλαδή οι συνιστώσες του τετραδιανύσματος α_μ είναι απειροστές, μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor τα $U(\alpha)$ και $(U(\alpha))^{-1}$ γύρω από το $\alpha = 0$ και να αγνοήσουμε τους όρους τάξης ≥ 2 ως προς α:

$$U(\alpha) = e^{i\alpha^\mu P_\mu} = I + i\alpha^\mu P_\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) = I + i\alpha^\mu P_\mu \tag{4.1.5α}$$

$$(U(\alpha))^{-1} = e^{-i\alpha^\mu P_\mu} = I - i\alpha^\mu P_\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) = I - i\alpha^\mu P_\mu \tag{4.1.5β}$$

όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Με αντικατάσταση των (4.1.5α) και (4.1.5β) στην (4.1.2) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}'(x) &= (I + i\alpha^\mu P_\mu)\,\hat{\phi}(x)\,(I - i\alpha^\nu P_\nu) = \\
&= (I + i\alpha^\mu P_\mu)\left(\hat{\phi}(x) - i\alpha^\nu\hat{\phi}(x)P_\nu\right) = \\
&= \hat{\phi}(x) - i\alpha^\mu\hat{\phi}(x)P_\mu + i\alpha^\mu P_\mu\hat{\phi}(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) = \\
&= \hat{\phi}(x) + i\alpha^\mu\left(P_\mu\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(x)P_\mu\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \hat{\phi}'(x) &= \hat{\phi}(x) + i\alpha^\mu\left[P_\mu, \hat{\phi}(x)\right]
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

όπου πάλι έχουμε κρατήσει μόνο τους όρους τάξης ≤ 1 ως προς α. Η μεταβολή του $\hat{\phi}(x)$ κάτω από έναν απειροστό μετασχηματισμό της μορφής (4.1.1) είναι:

$$\delta_T\hat{\phi}(x) \equiv \hat{\phi}'(x) - \hat{\phi}(x) \overset{(4.1.6)}{=} i\alpha^\mu \left[P_\mu, \hat{\phi}(x)\right] \tag{4.1.7}$$

Επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε το $\delta_T\hat{\phi}(x)$ αναπτύσσοντας κατά Taylor το $\hat{\phi}'(x) = \hat{\phi}(x+\alpha)$ γύρω από το x και αγνοώντας τους όρους τάξης ≥ 2 ως προς α:

$$\begin{aligned}\delta_T\hat{\phi}(x) =&\hat{\phi}'(x) - \hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(x+\alpha) - \hat{\phi}(x) = \\ =&\left[\hat{\phi}(x) + \alpha^\mu\partial_\mu\hat{\phi}(x) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right] - \hat{\phi}(x) = \\ =&\hat{\phi}(x) + \alpha^\mu\partial_\mu\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta_T\hat{\phi}(x) =&\alpha^\mu\partial_\mu\hat{\phi}(x)\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Από τις (4.1.7) και (4.1.8) έπεται ότι

$$i\alpha^\mu \left[P_\mu, \hat{\phi}(x)\right] = \alpha^\mu\partial_\mu\hat{\phi}(x) \Rightarrow \alpha^\mu \left[P_\mu, \hat{\phi}(x)\right] = -i\alpha^\mu\partial_\mu\hat{\phi}(x)$$

για αυθαίρετο απειροστό τετραδιάνυσμα α^μ. Επομένως

$$\left[P_\mu, \hat{\phi}(x)\right] = -i\partial_\mu\hat{\phi}(x) \tag{4.1.9}$$

Ένας απειροστός υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός χαρακτηρίζεται από σταθερές (ανεξάρτητες του x) απειροστές αντιμετατιθέμενες παραμέτρους Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$, όπου $\alpha = 1, 2$, $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$, ($\overline{\xi}_{\dot{\alpha}} = (\xi_\alpha)^*$, όπου $\xi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta$, και $(\xi^\alpha)^* = \overline{\xi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\xi}_{\dot{\beta}}$) και αντιστοιχίζουμε σε αυτόν ένα μοναδιακό τελεστή

$$U(\xi) = I + i\left(\xi^\alpha Q_\alpha + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\overline{Q}^{\dot{\alpha}}\right) = I + i\left(\xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}\right) \tag{4.1.10}$$

όπου $\xi Q \equiv \xi^\alpha Q_\alpha$ και $\overline{\xi}\ \overline{Q} \equiv \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\overline{Q}^{\dot{\alpha}}$. Οι παράμετροι Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\left\{\xi^\alpha, \xi^\beta\right\} = \left\{\xi^\alpha, \overline{\xi}_{\dot{\beta}}\right\} = 0 \tag{4.1.11}$$

$$\{\xi^\alpha, Q_\beta\} = \left\{\xi^\alpha, \overline{Q}^{\dot{\beta}}\right\} = 0 \tag{4.1.12}$$

$$\{\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \left\{\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}, \overline{Q}^{\dot{\beta}}\right\} = 0 \tag{4.1.13}$$

$$[\xi^\alpha, P_\mu] = [\xi^\alpha, M_{\mu\nu}] = 0 \tag{4.1.14}$$

$$\left[\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}, P_\mu\right] = \left[\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}\right] = 0 \tag{4.1.15}$$

και η εισαγωγή τέτοιων παραμέτρων μας επιτρέπει να εκφράσουμε την άλγεβρα της ($N = 1$) υπερσυμμετρίας, η οποία περιγράφεται από τις σχέσεις μετάθεσης και αντιμετάθεσης (3.1.62)-(3.1.67), εξ' ολοκλήρου συναρτήσει μεταθετών:

$$[P_\mu, \xi Q] = 0 = \left[P_\mu, \overline{\xi}\ \overline{Q}\right] \tag{4.1.16}$$

$$[M_{\mu\nu}, \xi Q] = -\xi\sigma_{\mu\nu}Q \tag{4.1.17}$$

$$\left[M_{\mu\nu}, \overline{\xi}\ \overline{Q}\right] = -\overline{\xi}\overline{\sigma}_{\mu\nu}\overline{Q} \tag{4.1.18}$$

$$[\xi Q, \eta Q] = 0 = \left[\overline{\xi}\ \overline{Q}, \overline{\eta}\overline{Q}\right] \tag{4.1.19}$$

$$\left[\xi Q, \overline{\eta}\overline{Q}\right] = 2\left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)P_\mu \tag{4.1.20}$$

όπου έχουμε εισάγει ένα δεύτερο σύνολο παραμέτρων Grassmann, η^α και $\overline{\eta}_{\dot\alpha}$, $\alpha = 1,2$, $\dot\alpha = \dot 1, \dot 2$, ενώ υπενθυμίζουμε ότι $\xi\sigma_{\mu\nu}Q \equiv \xi^\alpha \left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \beta} Q_\beta$, $\overline{\xi}\overline{\sigma}_{\mu\nu}\overline{Q} \equiv \overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}_{\mu\nu}\right)^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}$ και $\xi\sigma^\mu\overline{\eta} \equiv \xi^\alpha\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\beta}$ (με $\overline{\eta}^{\dot\beta} = \varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\overline{\eta}_{\dot\gamma}$). Οι (4.1.16)-(4.1.20) μπορούν εύκολα να δειχθούν με χρήση των (3.1.62)-(3.1.67) σε συνδυασμό με τις (4.1.11)-(4.1.15). Είναι:

$$
\begin{aligned}
\left[P_\mu, \xi Q\right] &= \left[P_\mu, \xi^\alpha Q_\alpha\right] = \underbrace{\left[P_\mu, \xi^\alpha\right]}_{\overset{\|}{0}} Q_\alpha + \xi^\alpha \underbrace{\left[P_\mu, Q_\alpha\right]}_{\overset{\|}{0}} = 0 \\
\left[P_\mu, \overline{\xi}\,\overline{Q}\right] &= \left[P_\mu, \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\right] = \underbrace{\left[P_\mu, \overline{\xi}_{\dot\alpha}\right]}_{\overset{\|}{0}}\overline{Q}^{\dot\alpha} + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\underbrace{\left[P_\mu, \overline{Q}^{\dot\alpha}\right]}_{\overset{\|}{0}} = 0 \\
\left[M_{\mu\nu}, \xi Q\right] &= \left[M_{\mu\nu}, \xi^\alpha Q_\alpha\right] = \underbrace{\left[M_{\mu\nu}, \xi^\alpha\right]}_{\overset{\|}{0}} Q_\alpha + \xi^\alpha\left[M_{\mu\nu}, Q_\alpha\right] = \\
&= -\,\xi^\alpha\left[Q_\alpha, M_{\mu\nu}\right] \overset{(3.1.62)}{=} -\xi^\alpha\left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \beta} Q_\beta = -\xi\sigma_{\mu\nu}Q \\
\left[M_{\mu\nu}, \overline{\xi}\,\overline{Q}\right] &= \left[M_{\mu\nu}, \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\right] = \underbrace{\left[M_{\mu\nu}, \overline{\xi}_{\dot\alpha}\right]}_{\overset{\|}{0}}\overline{Q}^{\dot\alpha} + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[M_{\mu\nu}, \overline{Q}^{\dot\alpha}\right] = \\
&= \overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[M_{\mu\nu}, \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{Q}_{\dot\beta}\right] = -\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[\overline{Q}_{\dot\beta}, M_{\mu\nu}\right] \overset{(3.1.63)}{=} \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}_{\mu\nu}\right)^{\dot\gamma}_{\ \dot\beta}\overline{Q}_{\dot\gamma} = \\
&= \frac{i}{4}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[\left(\overline{\sigma}_\mu\right)^{\dot\gamma\delta}\left(\sigma_\nu\right)_{\delta\dot\beta} - \left(\overline{\sigma}_\nu\right)^{\dot\gamma\delta}\left(\sigma_\mu\right)_{\delta\dot\beta}\right]\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta}\overline{Q}^{\dot\delta} \overset{(2.3.30)}{=} \\
&= \frac{i}{4}\left(\delta^{\dot\alpha}_{\dot\delta}\delta^{\dot\beta}_{\dot\gamma} - \delta^{\dot\alpha}_{\dot\gamma}\delta^{\dot\beta}_{\dot\delta}\right)\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[\left(\overline{\sigma}_\mu\right)^{\dot\gamma\delta}\left(\sigma_\nu\right)_{\delta\dot\beta} - \left(\overline{\sigma}_\nu\right)^{\dot\gamma\delta}\left(\sigma_\mu\right)_{\delta\dot\beta}\right]\overline{Q}^{\dot\delta} = \\
&= \frac{i}{4}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[\left(\overline{\sigma}_\mu\right)^{\dot\beta\delta}\left(\sigma_\nu\right)_{\delta\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\alpha} - \left(\overline{\sigma}_\nu\right)^{\dot\beta\delta}\left(\sigma_\mu\right)_{\delta\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\alpha} - \left(\overline{\sigma}_\mu\right)^{\dot\alpha\delta}\left(\sigma_\nu\right)_{\delta\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta} + \left(\overline{\sigma}_\nu\right)^{\dot\alpha\delta}\left(\sigma_\mu\right)_{\delta\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\right] = \\
&= \frac{i}{4}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[\mathrm{Tr}\left(\overline{\sigma}_\mu\sigma_\nu\right)\overline{Q}^{\dot\alpha} - \mathrm{Tr}\left(\overline{\sigma}_\nu\sigma_\mu\right)\overline{Q}^{\dot\alpha} - \left(\overline{\sigma}_\mu\sigma_\nu\right)^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta} + \left(\overline{\sigma}_\nu\sigma_\mu\right)^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\right] = \\
&= \frac{i}{4}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[\mathrm{Tr}\left(\sigma_\nu\overline{\sigma}_\mu\right)\overline{Q}^{\dot\alpha} - \mathrm{Tr}\left(\sigma_\mu\overline{\sigma}_\nu\right)\overline{Q}^{\dot\alpha} - \left(\overline{\sigma}_\mu\sigma_\nu\right)^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta} + \left(\overline{\sigma}_\nu\sigma_\mu\right)^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\right] = \\
&= \frac{i}{4}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[\cancel{2\eta_{\nu\mu}\overline{Q}^{\dot\alpha}} - \cancel{2\eta_{\mu\nu}\overline{Q}^{\dot\alpha}} - \left(\overline{\sigma}_\mu\sigma_\nu\right)^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta} + \left(\overline{\sigma}_\nu\sigma_\mu\right)^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\right] = \\
&= -\,\frac{i}{4}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \overline{\sigma}_\nu\sigma_\mu\right)^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}\overline{Q}_{\dot\beta} = -\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}_{\mu\nu}\right)^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta} = \\
&= -\,\overline{\xi}\overline{\sigma}_{\mu\nu}\overline{Q} \\
\left[\xi Q, \eta Q\right] &= \left[\xi^\alpha Q_\alpha, \eta^\beta Q_\beta\right] = \xi^\alpha Q_\alpha\eta^\beta Q_\beta - \eta^\beta Q_\beta\xi^\alpha Q_\alpha = -\xi^\alpha\eta^\beta Q_\alpha Q_\beta - \eta^\beta Q_\beta\xi^\alpha Q_\alpha \overset{(3.1.66)}{=} \\
&= \xi^\alpha\eta^\beta Q_\beta Q_\alpha - \eta^\beta Q_\beta\xi^\alpha Q_\alpha = -\eta^\beta\xi^\alpha Q_\beta Q_\alpha - \eta^\beta Q_\beta\xi^\alpha Q_\alpha \overset{(4.1.12)}{=} \eta^\beta Q_\beta\xi^\alpha Q_\alpha - \eta^\beta Q_\beta\xi^\alpha Q_\alpha = 0 \\
\left[\overline{\xi}\,\overline{Q}, \overline{\eta}\overline{Q}\right] &= \left[\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}, \overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\right] = \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta} - \overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha} = -\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\beta} - \overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha} \overset{(3.1.67)}{=} \\
&= \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\alpha} - \overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha} = -\overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\alpha} - \overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha} \overset{(4.1.13)}{=} \overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha} - \overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha} = 0 \\
\left[\xi Q, \overline{\eta}\overline{Q}\right] &= \left[\xi^\alpha Q_\alpha, \overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\right] = \xi^\alpha Q_\alpha\overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta} - \overline{\eta}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}\xi^\alpha Q_\alpha \overset{(4.1.12)}{=} \\
&= -\,\xi^\alpha\overline{\eta}_{\dot\beta}Q_\alpha\overline{Q}^{\dot\beta} + \overline{\eta}_{\dot\beta}\xi^\alpha\overline{Q}^{\dot\beta}Q_\alpha = -\xi^\alpha\overline{\eta}_{\dot\beta}Q_\alpha\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\overline{Q}_{\dot\gamma} - \xi^\alpha\overline{\eta}_{\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\overline{Q}_{\dot\gamma}Q_\alpha = \\
&= -\,\xi^\alpha\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\overline{\eta}_{\dot\beta}\left(Q_\alpha\overline{Q}_{\dot\gamma} + \overline{Q}_{\dot\gamma}Q_\alpha\right) = \xi^\alpha\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\overline{\eta}_{\dot\beta}\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\gamma}\right\} \overset{(3.1.64)}{=}
\end{aligned}
$$

$$=\xi^\alpha \overline{\eta}^{\dot{\gamma}} \left[2 \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\gamma}} P_\mu\right] = 2\xi^\alpha \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\gamma}} \overline{\eta}^{\dot{\gamma}} P_\mu = 2 \left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right) P_\mu$$

Κάτω από έναν υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό χαρακτηριζόμενο από απειροστές παραμέτρους Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$, ένα κβαντικό πεδίο $\hat{\phi}(x)$ μετασχηματίζεται ως:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(x) \to \hat{\phi}'(x) =& U(\xi)\hat{\phi}(x) \left(U(\xi)\right)^{-1} = U(\xi)\hat{\phi}(x) \left(U(\xi)\right)^\dagger = \\
=& \left[I + i \left(\xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}\right)\right] \hat{\phi}(x) \left[I + i \left(\xi Q + \overline{\xi Q}\right)\right]^\dagger = \\
=& \left[I + i \left(\xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}\right)\right] \hat{\phi}(x) \left[I - i \left(\overline{\xi}\ \overline{Q} + \xi Q\right)\right] = \\
=& \left[I + i \left(\xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}\right)\right] \left[\hat{\phi}(x) - i\hat{\phi}(x) \left(\xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}\right)\right] = \\
=& \hat{\phi}(x) + i \left(\xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}\right) \hat{\phi}(x) - i\hat{\phi}(x) \left(\xi Q + \overline{\xi Q}\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \hat{\phi}'(x) =& \hat{\phi}(x) + i \left[\xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}, \hat{\phi}(x)\right]
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $(\xi Q)^\dagger = (\xi^\alpha Q_\alpha)^\dagger = (Q_\alpha)^\dagger (\xi^\alpha)^* = \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\overline{\xi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{Q}^{\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\overline{\xi}_{\dot{\gamma}} = -\varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{Q}^{\dot{\beta}}\overline{\xi}_{\dot{\gamma}} = -\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}}\overline{Q}^{\dot{\beta}}\overline{\xi}_{\dot{\gamma}} = -\overline{Q}^{\dot{\beta}}\overline{\xi}_{\dot{\beta}} \overset{(4.1.13)}{=} \overline{\xi}_{\dot{\beta}}\overline{Q}^{\dot{\beta}} = \overline{\xi Q}$, άρα $\left(\overline{\xi}\ \overline{Q}\right)^\dagger = \xi Q$. Η μεταβολή του πεδίου $\hat{\phi}(x)$ κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό είναι:

$$\delta_\xi\hat{\phi}(x) \equiv \hat{\phi}'(x) - \hat{\phi}(x) = i \left[\xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}, \hat{\phi}(x)\right] \tag{4.1.22}$$

Για να προσδιορίσουμε έναν (απειροστό) υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό σε μία (υπερσυμμετρική) θεωρία πεδίου, πρέπει να καθορίσουμε την ποσότητα (4.1.22) για κάθε εμπλεκόμενο πεδίο $\hat{\phi}(x)$ κατά έναν τρόπο συνεπή με την υπερσυμμετρική άλγεβρα (4.1.16)-(4.1.20). Οι τρεις πρώτες από αυτές τις σχέσεις μετάθεσης καθορίζουν τις ιδιότητες μετασχηματισμού του $\delta_\xi\hat{\phi}(x)$ κάτω από την ομάδα Poincaré. Οι υπόλοιπες δύο επιβάλλουν περιορισμούς στις δυνατές μορφές για τα $\delta_\xi\hat{\phi}(x)$ υποδεικνύοντας πώς δύο διαδοχικοί υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί πρέπει να κλείνουν την άλγεβρα. Στην ενότητα 3.2.1 είδαμε ότι μία αναπαράσταση της μη εκτεταμένης υπερσυμμετρίας είναι η άμαζη chiral supermultiplet, η οποία αντιστοιχεί σε ένα άμαζο μιγαδικό βαθμωτό πεδίο και ένα φερμιόνιο Weyl, καθένα από τα οποία καλείται υπερσυμμετρικός συνοδός (superpartner) του άλλου. Επομένως, μπορούμε να αναμένουμε την υλοποίηση της $N = 1$ υπερσυμμετρίας σε μία θεωρία πεδίου, η οποία περιλαμβάνει μόνο ένα άμαζο μιγαδικό βαθμωτό πεδίο και ένα φερμιόνιο Weyl.

Η απλούστερη δυνατή υπερσυμμετρική θεωρία στις 4 διαστάσεις που περιλαμβάνει ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο ϕ και ένα αριστερόστροφο φερμιόνιο Weyl δύο συνιστωσών ψ περιγράφεται από τη Lagrangian (πυκνότητα)

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\partial^\mu\phi\right) + i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \tag{4.1.23}$$

όπου ο πρώτος όρος είναι κινητικός όρος για το πεδίο ϕ και ο δεύτερος όρος είναι κινητικός όρος για το ψ. Το σύστημα που περιγράφεται από τη Lagrangian (4.1.23) είναι γνωστό ως άμαζο και ελεύθερο (χωρίς αλληλεπιδράσεις) μοντέλο των Wess και Zumino [30], και αντιστοιχεί σε μία ελεύθερη και άμαζη chiral supermiltiplet.

Στο σημείο αυτό, είναι χρήσιμο να διευκρινίσουμε τις διαστάσεις των εμπλεκόμενων πεδίων στην υπό μελέτη υπερσυμμετρική θεωρία. Ισχύει ότι η δράση, S, που είναι το ολοκλήρωμα της Lagrangian $\mathcal{L}$ σε όλο τον 4-διάστατο χωροχρόνο ($S = \int d^4x\mathcal{L}$), είναι αδιάστατη στο φυσικό σύστημα μονάδων, όπου $c = \hbar = 1$. Σε αυτό το σύστημα, υπάρχει μόνο μία ανεξάρτητη διάσταση, την οποία παίρνουμε να είναι αυτή της μάζας (ή της ενέργειας), M. Το μήκος έχει την ίδια διάσταση με το χρόνο (διότι $c = 1$), δηλαδή M^{-1}, καθώς $\hbar = 1$[1]. Επομένως, για να είναι αδιάστατη η δράση, η $\mathcal{L}$ έχει διάσταση $[\mathcal{L}] = M^4$. Έτσι, βασιζόμενοι στο ότι $[\partial_\mu] = \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right] = M$, αφού $[x^\mu] = M^{-1}$, μπορούμε εύκολα να βρούμε τις διαστάσεις των πεδίων ϕ και ψ:

$$[\phi] = M,\ [\psi] = M^{\frac{3}{2}} = \left[\overline{\psi}\right] \tag{4.1.24}$$

[1]Το ότι $\hbar = 1$ συνεπάγεται ότι ο χρόνος έχει διάσταση M^{-1} προκύπτει από την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg, $(\Delta E)(\Delta t) \geq \frac{\hbar}{2}$

όπου λάβαμε υπόψη ότι η διάσταση των συνιστωσών του δεξιόστροφου σπίνορα Weyl $\overline{\psi}$ είναι η ίδια με αυτήν του αντίστοιχου αριστερόστροφου σπίνορα Weyl ψ, αφού $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = (\psi_\alpha)^*$, για κάθε $\alpha = 1,2$. Ακόμη, επειδή ισχύει $\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 2\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu$ και $[P_\mu] = M$, η διάσταση των φερμιονικών γεννητόρων Q_α και $\overline{Q}_{\dot{\alpha}} = (Q_\alpha)^\dagger$ της απλής υπερσυμμετρίας είναι

$$[Q] = M^{\frac{1}{2}} = \left[\overline{Q}\right] \tag{4.1.25}$$

Η μεταβολή του βαθμωτού πεδίου ϕ κάτω από έναν υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που χαρακτηρίζεται από σταθερές απειροστές παραμέτρους Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$, $\delta_\xi \phi$, πρέπει να περιέχει το φερμιονικό πεδίο Weyl ψ και να είναι μία Lorentz αναλλοίωτη ποσότητα, όπως είναι και το πεδίο ϕ. Έτσι, δεδομένου ότι τα ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$ μετασχηματίζονται κάτω από την ομάδα $SL(2,C)$ (ή, ισοδύναμα, την $SO(1,3)^\uparrow$) ως αριστερόστροφος και δεξιόστροφος σπίνορας Weyl αντίστοιχα (που είναι ανεξάρτητοι του x), η απλούστερη δυνατότητα για το $\delta_\xi\phi$ είναι:

$$\delta_\xi \phi(x) = a\xi^\alpha \psi_\alpha(x) + b\overline{\xi}_{\dot{\alpha}} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}}(x) = a\xi\psi(x) + b\overline{\xi}\ \overline{\psi}(x) \tag{4.1.26}$$

όπου τα a και b είναι προσδιοριστέες (αδιάστατες) σταθερές. Επειδή πρέπει να είναι $[\delta_\xi\phi] = M$, αφού $[\phi] = M$, και ισχύει ότι $[\psi] = \left[\overline{\psi}\right] = M^{\frac{3}{2}}$, με βάση την (4.1.26), συμπεραίνουμε ότι πρέπει να αποδώσουμε στις παραμέτρους Grassmannn ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$ διάσταση

$$[\xi] = M^{-\frac{1}{2}} = \left[\overline{\xi}\right] \tag{4.1.27}$$

Από την (4.1.26) έπεται ότι

$$\delta_\xi \phi^*(x) = (\delta_\xi \phi(x))^* = a^* \left(\xi\psi(x)\right)^* + b^* \left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}(x)\right)^* = a^* \overline{\xi}\ \overline{\psi}(x) + b^* \xi\psi(x) \tag{4.1.28}$$

όπου κάναμε χρήση της (2.5.15).

Η αντίστοιχη μεταβολή για το σπινοριακό πεδίο Weyl ψ, $\delta_\xi\psi$, θα πρέπει να περιέχει κάποιο γινόμενο $\xi\phi$, το οποίο έχει διάσταση $M^{-\frac{1}{2}+1} = M^{\frac{1}{2}}$. Βέβαια, το $\delta_\xi\psi$ πρέπει να έχει διάσταση $[\delta_\xi\psi] = M^{\frac{3}{2}}$, το οποίο μπορεί να επιτευχθεί με την εισαγωγή μίας χωροχρονικής παραγώγου (που έχει διάσταση M). Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\delta_\xi \psi_\alpha(x) = c\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\xi}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \phi(x) = c\left(\sigma^\mu \overline{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu\phi(x) \tag{4.1.29}$$

$\forall\ \alpha = 1,2$, για κάποια σταθερά c. Από την (4.1.29) έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}(x) =& \delta_\xi \left(\psi_\alpha(x)\right)^* = \left(\delta_\xi\psi_\alpha(x)\right)^* = \left[c\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\xi}^{\dot{\beta}} \partial_\mu\phi(x)\right]^* = \\
=& c^* \left(\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\right)^* \left(\overline{\xi}^{\dot{\beta}}\right)^* \partial_\mu\phi^*(x) = c^* \left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\alpha}} \xi^\beta \partial_\mu\phi^*(x) = \\
=& c^* \xi^\beta \left(\sigma^\mu\right)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu\phi^*(x) \\
& \text{ή} \\
\delta_\xi \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}(x) =& c^* \left(\xi\sigma^\mu\right)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu\phi^*(x)
\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \overline{\psi}^{\dot{\alpha}}(x) =& \delta_\xi \left(\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \overline{\psi}_{\dot{\beta}}(x)\right) = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \delta_\xi \overline{\psi}_{\dot{\beta}}(x) = \\
=& \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} c^* \left(\xi\sigma^\mu\right)_{\dot{\beta}} \partial_\mu\phi^*(x) = c^* \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi^\gamma \left(\sigma^\mu\right)_{\gamma\dot{\beta}} \partial_\mu\phi^*(x) = \\
=& c^* \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon^{\gamma\delta} \xi_\delta \left(\sigma^\mu\right)_{\gamma\dot{\beta}} \partial_\mu\phi^*(x) = -c^* \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon^{\delta\gamma} \left(\sigma^\mu\right)_{\gamma\dot{\beta}} \xi_\delta \partial_\mu\phi^*(x) \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_\xi \overline{\psi}^{\dot{\alpha}}(x) =& -c^* \left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\delta} \xi_\delta \partial_\mu\phi^*(x) = -c^* \left(\overline{\sigma}^\mu \xi\right)^{\dot{\alpha}} \partial_\mu\phi^*(x)
\end{aligned} \tag{4.1.31}$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα δύο διαδοχικούς υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς (όπου ο πρώτος παραμετροποιείται από μεταβλητές Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$, ενώ ο δεύτερος παραμετροποιείται από μεταβλητές Grassmann η^α και $\overline{\eta}_{\dot\alpha}$) στο βαθμωτό πεδίο ϕ. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta_\eta\delta_\xi\phi =&\delta_\eta\left(\delta_\xi\phi\right) = \delta_\eta\left(a\xi\psi + b\overline{\xi}\;\overline{\psi}\right) = \\
=&a\xi^\alpha\left(\delta_\eta\psi_\alpha\right) + b\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\delta_\eta\overline{\psi}^{\dot\alpha}\right) \overset{(4.1.29),(4.1.31)}{=} \\
=&a\xi^\alpha\left[c\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\beta}\partial_\mu\phi\right] + b\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[-c^*\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\eta_\beta\partial_\mu\phi^*\right] = \\
=&ac\xi^\alpha\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\beta}\partial_\mu\phi - bc^*\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\eta_\beta\partial_\mu\phi^* \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_\eta\delta_\xi\phi =&ac\left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu\phi - bc^*\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\eta\right)\partial_\mu\phi^*
\end{aligned} \tag{4.1.32}$$

Υπολογίζουμε τη δράση του μεταθέτη $[\delta_\eta,\delta_\xi]$ των δύο προαναφερθέντων υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών πάνω στο βαθμωτό πεδίο ϕ:

$$\begin{aligned}
\left[\delta_\eta,\delta_\xi\right]\phi \equiv \left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\phi \overset{(4.1.32)}{=}& \left[ac\left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu\phi - bc^*\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\eta\right)\partial_\mu\phi^*\right] - \left(\xi\leftrightarrow\eta\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\phi =&ac\left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta} - \eta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\phi - bc^*\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\eta - \overline{\eta}\;\overline{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu\phi^*
\end{aligned} \tag{4.1.33}$$

Από την άλλη μεριά, είναι:

$$\begin{aligned}
\delta_\eta\delta_\xi\phi \overset{(4.1.22)}{\equiv}& i\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q}, \delta_\xi\phi\right] \xRightarrow{(4.1.22)} \\
\Rightarrow\delta_\eta\delta_\xi\phi =& i\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q}, i\left[\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q},\phi\right]\right] = -\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q},\left[\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q},\phi\right]\right]
\end{aligned} \tag{4.1.34}$$

από όπου έπεται ότι

$$\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\phi = -\left(\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q},\left[\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q},\phi\right]\right] - \left(\xi\leftrightarrow\eta\right)\right) \tag{4.1.35}$$

Από την ταυτότητα του Jacobi έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q},\left[\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q},\phi\right]\right] + \left[\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q},\left[\phi,\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q}\right]\right] + \left[\phi,\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q},\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q}\right]\right] = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q},\left[\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q},\phi\right]\right] - \left[\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q},\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q},\phi\right]\right] = -\left[\phi,\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q},\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q}\right]\right] \Rightarrow \\
\Rightarrow &-\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q},\left[\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q},\phi\right]\right] + \left(\xi\leftrightarrow\eta\right) = \left[\phi,\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q},\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q}\right]\right] \xRightarrow{(4.1.35)} \\
\Rightarrow &\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\phi = -\left[\left[\eta Q + \overline{\eta}\overline{Q},\xi Q + \overline{\xi}\;\overline{Q}\right],\phi\right] = \\
&= -\left[\left[\eta Q,\xi Q\right] + \left[\eta Q,\overline{\xi Q}\right] + \left[\overline{\eta}\overline{Q},\xi Q\right] + \left[\overline{\eta}\overline{Q},\overline{\xi Q}\right],\phi\right] \overset{(4.1.19)}{=} \\
&= -\left[0 + \left[\eta Q,\overline{\xi}\;\overline{Q}\right] - \left[\xi Q,\overline{\eta}\overline{Q}\right] + 0,\phi\right] \overset{(4.1.20)}{=} \\
&= -\left[2\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)P_\mu - 2\left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)P_\mu,\phi\right] = \\
&= -2\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\left[P_\mu,\phi\right] + 2\left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\left[P_\mu,\phi\right] = \\
&= -2\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi} - \xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\left[P_\mu,\phi\right] \xRightarrow{(4.1.9)} \\
\Rightarrow &\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\phi = 2i\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi} - \xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu\phi
\end{aligned} \tag{4.1.36}$$

Συγκρίνοντας την (4.1.36) με την (4.1.33), παίρνουμε:

$$ac = -2i \tag{4.1.37}$$

$$bc^* = 0 \Rightarrow b = 0 \tag{4.1.38}$$

αφού $c \neq 0$ (άρα και $c^* \neq 0$) λόγω της (4.1.37), οπότε οι (4.1.26) και (4.1.28) γίνονται αντίστοιχα:

$$\delta_\xi\phi(x) = a\xi\psi(x),\;\; \delta_\xi\phi^*(x) = a^*\overline{\xi}\;\overline{\psi}(x) \tag{4.1.39}$$

Επίσης, είναι:

$$\begin{aligned}
\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha =&\delta_\eta\left(\delta_\xi\psi_\alpha\right) \overset{(4.1.29)}{=} \delta_\eta\left[c\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}\partial_\mu\phi\right] = \\
=&c\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}\partial_\mu\left(\delta_\eta\phi\right) \overset{(4.1.39)}{=} ac\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}\partial_\mu\left(\eta^\gamma\psi_\gamma\right) = \\
=&ac\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\eta^\gamma\partial_\mu\psi_\gamma = ac\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\left(\eta\partial_\mu\psi\right) \xRightarrow{(4.1.37)} \\
\Rightarrow \delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha =& -2i\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\left(\eta\partial_\mu\psi\right)
\end{aligned} \tag{4.1.40}$$

Με εφαρμογή της ταυτότητας (2.5.38):

$$\psi_\alpha\left(\xi\chi\right) = -\chi_\alpha\left(\xi\psi\right) - \xi_\alpha\left(\chi\psi\right)$$

για $\psi = \sigma^\mu\overline{\xi}$, $\xi = \eta$ και $\chi = \partial_\mu\psi$, η (4.1.40) δίνει:

$$\begin{aligned}
\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha &= -2i\left\{-\left(\partial_\mu\psi_\alpha\right)\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}\right) - \eta_\alpha\left[\left(\partial_\mu\psi\right)\sigma^\mu\overline{\xi}\right]\right\} \overset{(2.5.9)}{=} \\
&= -2i\left[-\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\psi_\alpha + \eta_\alpha\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)\right] \Rightarrow \\
\delta_\eta\delta_\xi\psi_\alpha &= 2i\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\psi_\alpha - 2i\eta_\alpha\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)
\end{aligned} \tag{4.1.41}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\psi_\alpha =& 2i\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\psi_\alpha - 2i\eta_\alpha\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) - \left[2i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu\psi_\alpha - 2i\xi_\alpha\left(\overline{\eta}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)\right] \Rightarrow \\
\Rightarrow \left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\psi_\alpha =& 2i\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi} - \xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu\psi_\alpha - 2i\eta_\alpha\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) + 2i\xi_\alpha\left(\overline{\eta}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)
\end{aligned} \tag{4.1.42}$$

Οι δύο τελευταίοι όροι στο δεύτερο μέλος της (4.1.42) μηδενίζονται on-shell, δηλαδή εάν ικανοποιείται η εξίσωση κίνησης για το φερμιόνιο Weyl ψ:

$$\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi = 0 \tag{4.1.43}$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η εξίσωση κίνησης για το ψ στη θεωρία που περιγράφεται από τη Lagrangian (4.1.23) είναι πράγματι η (4.1.43) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange για τα $\overline{\psi}_{\dot\alpha}$, $\dot\alpha = \dot 1, \dot 2$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}_{\dot\alpha}} = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\overline{\psi}_{\dot\alpha}\right)}\right] \Rightarrow \\
\Rightarrow &\frac{\partial}{\partial\overline{\psi}_{\dot\alpha}}\left[\left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\partial^\mu\phi\right) + i\overline{\psi}_{\dot\beta}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\beta\gamma}\partial_\mu\psi_\gamma\right] = \partial_\mu\left\{\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu\overline{\psi}_{\dot\alpha}\right)}\left[\left(\partial_\nu\phi^*\right)\left(\partial^\nu\phi\right) + i\overline{\psi}_{\dot\beta}\left(\overline{\sigma}^\nu\right)^{\dot\beta\gamma}\partial_\nu\psi_\gamma\right]\right\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow i\frac{\partial\overline{\psi}_{\dot\beta}}{\partial\overline{\psi}_{\dot\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\beta\gamma}\partial_\mu\psi_\gamma = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow i\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\beta\gamma}\partial_\mu\psi_\gamma = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\gamma}\partial_\mu\psi_\gamma = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)^{\dot\alpha} = 0
\end{aligned}$$

Εάν ισχύει η (4.1.43), τότε από την (4.1.42) έπεται ότι

$$\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right)\psi_\alpha = 2i\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi} - \xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu\psi_\alpha$$

που είναι ακριβώς η σχέση στην οποία καταλήγουμε, εάν απαιτήσουμε να ισχύει η (4.1.22) για $\hat\phi(x) = \psi_\alpha(x)$ και χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του Jacobi και τις σχέσεις μετάθεσης (4.1.19) και (4.1.20) καθώς και την (4.1.9), όπως πράξαμε και για το βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$. Έτσι, έχουμε μία on-shell υλοποίηση της άλγεβρας της $N = 1$ υπερσυμμετρίας στη θεωρία πεδίου που περιγράφεται από τη Lagrangian (4.1.23) με τους κανόνες μετασχηματισμού των πεδίων ϕ και ψ κάτω από έναν υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό να δίνονται από τις (4.1.39) και (4.1.29) αντίστοιχα, όπου $ac = -2i$.

Οι τιμές των a και c θα προσδιοριστούν από την απαίτηση η Lagrangian (4.1.23) να μεταβάλλεται κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς κατά μία ολική παράγωγο, ώστε η αντίστοιχη δράση $S = \int d^4x\mathcal{L}$ να είναι αναλλοίωτη. Η μεταβολή της εν λόγω Lagrangian κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που χαρακτηρίζεται από σταθερές παραμέτρους Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$ είναι:

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi\mathcal{L} &= \delta_\xi\left[\left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\partial^\mu\phi\right)\right] + i\delta_\xi\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) = \\
&= \left[\delta_\xi\left(\partial_\mu\phi^*\right)\right]\left(\partial^\mu\phi\right) + \left(\partial_\mu\phi^*\right)\delta_\xi\left(\partial^\mu\phi\right) + i\delta_\xi\left[\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\psi_\beta\right] = \\
&= \partial_\mu\left(\delta_\xi\phi^*\right)\partial^\mu\phi + \left(\partial_\mu\phi^*\right)\partial^\mu\left(\delta_\xi\phi\right) + \\
&\quad + i\left[\left(\delta_\xi\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\right)\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\psi_\beta + \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\left(\delta_\xi\psi_\beta\right)\right] \overset{(4.1.29),(4.1.30),(4.1.39)}{=} \\
&= a^*\partial_\mu\left(\overline{\xi}\,\overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + a\left(\partial_\mu\phi^*\right)\partial^\mu\left(\xi\psi\right) + \\
&\quad + ic^*\xi^\gamma\left(\sigma^\nu\right)_{\gamma\dot{\alpha}}\left(\partial_\nu\phi^*\right)\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\psi_\beta + i\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\left[c\left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\xi}^{\dot{\gamma}}\partial_\nu\phi\right] = \\
&= a^*\left(\overline{\xi}\partial_\mu\overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + a\left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\xi\partial^\mu\psi\right) + \\
&\quad + ic^*\xi^\gamma\left(\sigma^\nu\right)_{\gamma\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta}\left(\partial_\mu\psi_\beta\right)\partial_\nu\phi^* + ic\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta}\left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\xi}^{\dot{\gamma}}\partial_\mu\partial_\nu\phi = \\
&= a^*\left(\overline{\xi}\partial_\mu\overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + a\left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\xi\partial^\mu\psi\right) + \\
&\quad + ic^*\left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)\partial_\nu\phi^* + ic\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi = \\
&= a^*\left(\overline{\xi}\partial_\mu\overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + a\left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\xi\partial^\mu\psi\right) + \\
&\quad + ic^*\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\left[\partial_\mu\left(\psi\partial_\nu\phi^*\right) - \psi\partial_\mu\partial_\nu\phi^*\right] + ic\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_\xi\mathcal{L} &= a^*\left(\overline{\xi}\partial_\mu\overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + a\left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\xi\partial^\mu\psi\right) + \\
&\quad + ic^*\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\left(\psi\partial_\nu\phi^*\right) - ic^*\left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi^* + ic\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi
\end{aligned}
\tag{4.1.44}
$$

Επίσης, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi^* =& \frac{1}{2}\left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi^* + \frac{1}{2}\left(\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi\right)\partial_\nu\partial_\mu\phi^* = \\
=& \frac{1}{2}\xi\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu + \sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\right)\psi\partial_\mu\partial_\nu\phi^* = \\
=& \frac{1}{2}\xi^\alpha\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu + \sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\right)_\alpha^{\ \beta}\psi_\beta\partial_\mu\partial_\nu\phi^* \overset{(2.5.23)}{=} \\
=& \frac{1}{2}\xi^\alpha\left(2\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta\right)\psi_\beta\partial_\mu\partial_\nu\phi^* = \xi^\alpha\psi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu\phi^* \Rightarrow \\
\Rightarrow \left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi^* =& \left(\xi\psi\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi^*
\end{aligned}
\tag{4.1.45}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi =& \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\partial_\nu\partial_\mu\phi = \\
=& \frac{1}{2}\overline{\psi}\left(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\right)\overline{\xi}\partial_\mu\partial_\nu\phi = \\
=& \frac{1}{2}\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\right)^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}}\overline{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_\mu\partial_\nu\phi \overset{(2.5.24)}{=} \\
=& \frac{1}{2}\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\left(2\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\right)\overline{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_\mu\partial_\nu\phi = \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\partial^\mu\phi \Rightarrow \\
\Rightarrow \left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi =& \left(\overline{\psi}\,\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi = (\overline{\xi}\,\overline{\psi})\partial_\mu\partial^\mu\phi
\end{aligned}
\tag{4.1.46}
$$

Συνδυάζοντας την (4.1.44) με τις (4.1.45) και (4.1.46), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\delta_\xi \mathcal{L} &= a^* \left(\overline{\xi}\partial_\mu \overline{\psi}\right) \partial^\mu \phi + a \left(\partial_\mu \phi^*\right) \left(\xi \partial^\mu \psi\right) + \\ &+ ic^* \xi \sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \left(\psi \partial_\nu \phi^*\right) - ic^* \left(\xi\psi\right) \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + ic \left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right) \partial_\mu \partial^\mu \phi = \\ &= a^* \left(\overline{\xi}\partial_\mu \overline{\psi}\right) \partial^\mu \phi + a \left(\partial_\mu \phi^*\right) \left(\xi \partial^\mu \psi\right) + ic^* \partial_\mu \left[\left(\xi \sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu \psi\right) \partial_\nu \phi^*\right] - \\ &- ic^* \left\{\partial_\mu \left[\left(\xi\psi\right) \partial^\mu \phi^*\right] - \partial_\mu \left(\xi\psi\right) \partial^\mu \phi^*\right\} + \\ &+ ic^* \left\{\partial_\mu \left[\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right) \partial^\mu \phi\right] - \partial_\mu \left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right) \partial^\mu \phi\right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta_\xi \mathcal{L} &= \left(a^* - ic\right) \left(\overline{\xi}\partial_\mu \overline{\psi}\right) \partial^\mu \phi + \left(a + ic^*\right) \left(\partial_\mu \phi^*\right) \left(\xi \partial^\mu \psi\right) + \\ &+ \partial_\mu \left[ic \left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right) \partial^\mu \phi - ic^* \left(\xi\psi\right) \partial^\mu \phi^* + ic^* \left(\xi \sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu \psi\right) \partial_\nu \phi^*\right] \end{aligned} \tag{4.1.47}$$

Επομένως, για να είναι η μεταβολή $\delta_\xi \mathcal{L}$ μία ολική παράγωγος, πρέπει να ισχύει:

$$a + ic^* = 0 \Rightarrow a = -ic^* \tag{4.1.48}$$

οπότε και $a^* = (-ic^*)^* = ic \Rightarrow a^* - ic = 0$, ώστε να μηδενίζονται οι δύο πρώτοι όροι στο δεύτερο μέλος της (4.1.47). Αντικαθιστώντας την (4.1.48) στην (4.1.37), παίρνουμε:

$$\left(-ic^*\right) c = -2i \Rightarrow |c|^2 = 2$$

Επιλέγουμε $c = -i\sqrt{2}$, οπότε $a = -ic^* = -i\left(i\sqrt{2}\right) = -i^2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Έτσι, με δεδομένες τις σχέσεις (4.1.39), (4.1.29) και (4.1.30), προκύπτει η ακόλουθη μορφή για έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που αφήνει αναλλοίωτη τη δράση $S = \int d^4x \left[\left(\partial_\mu \phi^*\right)\left(\partial^\mu \phi\right) + i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi\right]$ που αντιστοιχεί στη Lagrangian (4.1.23):

$$\delta_\xi \phi = \sqrt{2}\xi\psi,\ \delta_\xi \phi^* = \sqrt{2}\overline{\xi}\ \overline{\psi} \tag{4.1.49}$$

$$\delta_\xi \psi_\alpha = -i\sqrt{2}\left(\sigma^\mu \overline{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu \phi,\ \delta_\xi \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = i\sqrt{2}\left(\xi\sigma^\mu\right)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^* \tag{4.1.50}$$

Κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό, η Lagrangian της (4.1.23) μεταβάλλεται ως

$$\begin{aligned}\delta_\xi \mathcal{L} &\overset{(4.1.47)}{=} \partial_\mu \left[-i^2\sqrt{2}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu \phi - i^2\sqrt{2}\left(\xi\psi\right)\partial^\mu\phi^* + i^2\sqrt{2}\left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi\right)\partial_\nu\phi^*\right] \\ &= \partial_\mu \left[\sqrt{2}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu \phi + \sqrt{2}\left(\xi\psi\right)\partial^\mu\phi^* - \sqrt{2}\left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi\right)\partial_\nu\phi^*\right]\end{aligned} \tag{4.1.51}$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι

$$\begin{aligned}\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi &= \xi^\alpha \left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\right)_\alpha^{\ \beta}\psi_\beta \overset{(2.5.23)}{=} \xi^\alpha\left[2\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta - \left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\right)_\alpha^{\ \beta}\right]\psi_\beta = \\ &= 2\eta^{\mu\nu}\xi^\alpha\psi_\alpha - \xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi \Rightarrow \\ \Rightarrow \xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi &= 2\eta^{\mu\nu}(\xi\psi) - \xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi\end{aligned} \tag{4.1.52}$$

μπορούμε να γράψουμε την (4.1.51) και ως

$$\begin{aligned}\delta_\xi \mathcal{L} &= \sqrt{2}\partial_\mu\left\{\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + \left(\xi\psi\right)\partial^\mu\phi^* - \left[2\eta^{\mu\nu}\left(\xi\psi\right) - \xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi\right]\partial_\nu\phi^*\right\} = \\ &= \sqrt{2}\partial_\mu\left[\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + \left(\xi\psi\right)\partial^\mu\phi^* - 2\left(\xi\psi\right)\partial^\mu\phi^* + \left(\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi\right)\partial_\nu\phi^*\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta_\xi \mathcal{L} &= \sqrt{2}\partial_\mu\left[\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi - \left(\xi\psi\right)\partial^\mu\phi^* + \left(\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi\right)\partial_\nu\phi^*\right]\end{aligned} \tag{4.1.53}$$

Μέχρι στιγμής, έχουμε παρουσιάσει μία απλή υπερσυμμετρική θεωρία που αντιστοιχεί σε μία ελεύθερη και άμαζη chiral supermultiplet και περιγράφεται από τη Lagrangian (4.1.23). Έχουμε προσδιορίσει τη μορφή των υπερσυμμετρικών ματσχηματισμών (σχέσεις (4.1.49) και (4.1.50)) που αφήνουν την αντίστοιχη δράση αναλλοίωτη. Για οποιουσδήποτε δύο τέτοιους μετασχηματισμούς (όπου ο ένας παραμετροποιείται από μεταβλητές Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$ και ο άλλος από μεταβλητές Grassmann η^α και $\overline{\eta}_{\dot{\alpha}}$) ισχύει ότι

$$[\delta_\eta, \delta_\xi] X = (\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) X = 2i \left(\eta \sigma^\mu \overline{\xi} - \xi \sigma^\mu \overline{\eta}\right) \partial_\mu X \tag{4.1.54}$$

για κάθε $X \in \{\phi, \psi_\alpha | \alpha = 1, 2\}$, υπό την προϋπόθεση ότι ικανοποιείται η εξίσωση κίνησης $\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi = 0$. Έτσι, λέμε ότι για την εν λόγω θεωρία, η άλγεβρα της $N = 1$ υπερσυμμετρίας κλείνει μόνο on-shell (όταν ικανοποιούνται οι κλασσικές εξισώσεις κίνησης). Αυτό όμως δεν είναι αρκετό, καθώς θέλουμε μία συμμετρία να ισχύει τόσο για τις on-shell εξωτερικές γραμμές όσο και για τις εσωτερικές (off-shell) γραμμές των διαγραμμάτων Feynman (στα πλαίσια μίας κβαντικής θεωρίας πεδίου). Το κλείσιμο της ($N = 1$) υπερσυμμετρικής άλγεβρας off-shell (όταν, δηλαδή, δεν ικανοποιούνται οι κλασσικές εξισώσεις κίνησης) είναι αδύνατο να επιτευχθεί στα πλαίσια της θεωρίας που περιγράφεται από τη Lagrangian (4.1.23), η οποία περιλαμβάνει μόνο ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο ϕ και ένα σπινοριακό πεδίο Weyl ψ, διότι off-shell, το δεύτερο, όντας ένα αντικείμενο δύο μιγαδικών συνιστωσών, έχει τέσσερις βαθμούς ελευθερίας, ενώ το πρώτο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Κατά συνέπεια, οι φερμιονικοί βαθμοί ελευθερίας δεν είναι ισάριθμοι με τους μποζονικούς, αφού οι πρώτοι είναι τέσσερις και οι δεύτεροι είναι δύο. On-shell, η εξίσωση κίνησης για το φερμιόνιο Weyl ψ, $\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi = 0$, μειώνει τον αριθμό των φερμιονικών βαθμών ελευθερίας από 4 σε 2, οπότε αυτοί γίνονται ίσοι με τους μποζονικούς. Η off-shell υλοποίηση της άλγεβρας της $N = 1$ υπερσυμμετρίας στο ελεύθερο και άμαζο μοντέλο των Wess και Zumino μπορεί να επιτευχθεί με την εισαγωγή ενός νέου μιγαδικού βαθμωτού πεδίου F, το οποίο δεν έχει κινητικό όρο. Τέτοια πεδία είναι γνωστά ως βοηθητικά (auxiliary) πεδία. Η Lagrangian πυκνότητα για το F και το μιγαδικό συζυγές του είναι απλώς

$$\mathcal{L}_{\text{auxiliary}} = F^* F \tag{4.1.55}$$

την οποία και θα προσθέσουμε στην $\mathcal{L}$ της σχέσης (4.1.23). Το πεδίο F έχει διάσταση $[F] = M^2$ (ώστε να είναι $[\mathcal{L}_{\text{auxiliary}}] = M^4$), σε αντίθεση με ένα σύνηθες βαθμωτό πεδίο, το οποίο έχει διάσταση M. Με την εισαγωγή του F, έχουμε off-shell τέσσερις μποζονικούς βαθμούς ελευθερίας (δύο για το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο ϕ και δύο για το F), που είναι ισάριθμοι με τους φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν (off-shell) στο σπινοριακό πεδίο Weyl ψ. Η (4.1.55) συνεπάγεται τις όχι και τόσο ενδιαφέρουσες εξισώσεις κίνησης:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{auxiliary}}}{\partial F} = \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{auxiliary}}}{\partial (\partial_\mu F)}\right]}_{\overset{\|}{0}} \Rightarrow F^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{auxiliary}}}{\partial F^*} = \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{auxiliary}}}{\partial (\partial_\mu F^*)}\right]}_{\overset{\|}{0}} \Rightarrow F = 0$$

Άρα, on-shell, το πεδίο F μηδενίζεται, άρα προφανώς δεν έχει κανένα βαθμό ελευθερίας. Αυτό σημαίνει ότι η εισαγωγή του F δε χαλάει την on-shell ισότητα του αριθμού των μποζονικών βαθμών ελευθερίας με αυτόν των φερμιονικών βαθμών ελευθερίας, αφού και πάλι έχουμε on-shell δύο μποζονικούς βαθμούς ελευθερίας (που αντιστοιχούν στο ϕ) και δύο φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας (που αντιστοιχούν στο ψ).

Προχωρούμε τώρα σε μία τροποποίηση της αρχικής μας θεωρίας προσθέτοντας στη Lagrangian (4.1.23) την $\mathcal{L}_{\text{auxiliary}}$ της (4.1.55), με αποτέλεσμα να προκύπτει η Lagrangian:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{auxiliary}} = (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) + i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + F^* F \tag{4.1.56}$$

Καλούμαστε να προσδιορίσουμε τη μορφή των απειροστών υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών που αφήνουν τη δράση $S' = \int d^4x \mathcal{L}'$ αναλλοίωτη, ή ισοδύναμα, μεταβάλλουν την $\mathcal{L}'$ κατά μία ολική παράγωγο, δηλαδή να καθορίσουμε τις μεταβολές $\delta_\xi \phi, \delta_\xi \psi$ και $\delta_\xi F$ των πεδίων ϕ, ψ και F αντίστοιχα κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό που χαρακτηρίζεται από σταθερές παραμέτρους Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$. Επίσης, θέλουμε για οποιουσδήποτε δύο τέτοιους μετασχηματισμούς, όπου ο ένας παραμετροποιείται από μεταβλητές Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$ και ο άλλος από μεταβλητές Grassmann η^α και $\overline{\eta}_{\dot{\alpha}}$, να ισχύουν τα εξής:

$$\left(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta\right) \phi = 2i \left(\eta \sigma^\mu \overline{\xi} - \xi \sigma^\mu \overline{\eta}\right) \partial_\mu \phi \tag{4.1.57α}$$

$$\left(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta\right) \psi_\alpha = 2i \left(\eta \sigma^\mu \overline{\xi} - \xi \sigma^\mu \overline{\eta}\right) \partial_\mu \psi_\alpha \tag{4.1.57β}$$

$$\left(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta\right) F = 2i \left(\eta \sigma^\mu \overline{\xi} - \xi \sigma^\mu \overline{\eta}\right) \partial_\mu F, \tag{4.1.57γ}$$

όπου $\alpha = 1, 2$, χωρίς την απαίτηση να ικανοποιείται κάποια από τις εξισώσεις κίνησης, με άλλα λόγια, να κλείνει off-shell η άλγεβρα της $N = 1$ υπερσυμμετρίας και για τα τρία πεδία ϕ, ψ και F.

Επιλέγουμε τα $\delta_\xi \phi$ και $\delta_\xi \phi^*$ να δίνονται από την (4.1.49), όπως και προ της εισαγωγής του βοηθητικού πεδίου F, αλλά θα τροποποιήσουμε το $\delta_\xi \psi_\alpha$ της σχέσης (4.1.50) με την προσθήκη ενός όρου, ο οποίος περιέχει το πεδίο F. Ένας τέτοιος όρος πρέπει να φέρει έναν κάτω σπινοριακό δείκτη χωρίς τελεία και να έχει διάσταση $M^{\frac{3}{2}}$ (αφού πρέπει να είναι $[\delta_\xi \psi_\alpha] = M^{\frac{3}{2}}$ λόγω του ότι $[\psi] = M^{\frac{3}{2}}$), οπότε δεν μπορεί παρά να είναι ανάλογος του $\xi_\alpha F$ με συντελεστή αναλογίας μία αδιάστατη σταθερά. Έτσι, γράφουμε:

$$\delta_\xi \psi_\alpha = -i\sqrt{2} \left(\sigma^\mu \overline{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu \phi + d \xi_\alpha F \tag{4.1.58}$$

όπου d μία προσδιοριστέα (αδιάστατη) σταθερά. Από την (4.1.58) έπεται

$$\delta_\xi \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = i\sqrt{2} \left(\xi \sigma^\mu\right)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^* + d^* \overline{\xi}_{\dot{\alpha}} F^* \tag{4.1.59}$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι κανόνες μετασχηματισμού (4.1.49) και (4.1.58) για τα πεδία ϕ και ψ αντίστοιχα εξασφαλίζουν την ισχύ της (4.1.57α) για οποιαδήποτε τιμή της σταθεράς d. Πράγματι, από τις (4.1.49) και (4.1.58) έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\left(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta\right) \phi =& \delta_\eta \left(\delta_\xi \phi\right) - \delta_\xi \left(\delta_\eta \phi\right) \overset{(4.1.49)}{=} \\
=& \delta_\eta \left(\sqrt{2} \xi \psi\right) - \delta_\xi \left(\sqrt{2} \eta \psi\right) = \\
=& \sqrt{2} \xi^\alpha \delta_\eta \psi_\alpha - \sqrt{2} \eta^\alpha \delta_\xi \psi_\alpha \overset{(4.1.58)}{=} \\
=& \sqrt{2} \xi^\alpha \left[-i\sqrt{2} \left(\sigma^\mu \overline{\eta}\right)_\alpha \partial_\mu \phi + d \eta_\alpha F\right] - \sqrt{2} \eta^\alpha \left[-i\sqrt{2} \left(\sigma^\mu \overline{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu \phi + d \xi_\alpha F\right] = \\
=& -2i \xi^\alpha \left(\sigma^\mu \overline{\eta}\right)_\alpha \partial_\mu \phi + \sqrt{2} d \xi^\alpha \eta_\alpha F + 2i \eta^\alpha \left(\sigma^\mu \overline{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu \phi - \sqrt{2} d \eta^\alpha \xi_\alpha F = \\
=& -2i \left(\xi \sigma^\mu \overline{\eta}\right) \partial_\mu \phi + \sqrt{2} d \left(\xi \eta\right) F + 2i \left(\eta \sigma^\mu \overline{\xi}\right) \partial_\mu \phi - \sqrt{2} d \left(\eta \xi\right) F \overset{\xi\eta = \eta\xi}{=} \\
=& 2i \left(\eta \sigma^\mu \overline{\xi} - \xi \sigma^\mu \overline{\eta}\right) \partial_\mu \phi
\end{aligned}$$

όπου δεν κάναμε χρήση καμίας εξίσωσης κίνησης. Επίσης, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\left(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta\right) \psi_\alpha = \delta_\eta \left(\delta_\xi \psi_\alpha\right) - \delta_\xi \left(\delta_\eta \psi_\alpha\right) \overset{(4.1.58)}{=} \\
=& \delta_\eta \left[-i\sqrt{2} \left(\sigma^\mu \overline{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu \phi + d \xi_\alpha F\right] - \delta_\xi \left[-i\sqrt{2} \left(\sigma^\mu \overline{\eta}\right)_\alpha \partial_\mu \phi + d \eta_\alpha F\right] = \\
=& -i\sqrt{2} \left(\sigma^\mu \overline{\xi}\right)_\alpha \delta_\eta \left(\partial_\mu \phi\right) + d \xi_\alpha \delta_\eta F + i\sqrt{2} \left(\sigma^\mu \overline{\eta}\right)_\alpha \delta_\xi \left(\partial_\mu \phi\right) - d \eta_\alpha \delta_\xi F = \\
=& -i\sqrt{2} \left(\sigma^\mu \overline{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu \left(\delta_\eta \phi\right) + d \xi_\alpha \delta_\eta F + i\sqrt{2} \left(\sigma^\mu \overline{\eta}\right)_\alpha \partial_\mu \left(\delta_\xi \phi\right) - d \eta_\alpha \delta_\xi F \overset{(4.1.49)}{=} \\
=& -i\sqrt{2} \left(\sigma^\mu \overline{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu \left(\sqrt{2} \eta \psi\right) + d \xi_\alpha \delta_\eta F + i\sqrt{2} \left(\sigma^\mu \overline{\eta}\right)_\alpha \partial_\mu \left(\sqrt{2} \xi \psi\right) - d \eta_\alpha \delta_\xi F = \\
=& -2i \left(\sigma^\mu \overline{\xi}\right)_\alpha \left(\eta \partial_\mu \psi\right) + d \xi_\alpha \delta_\eta F + 2i \left(\sigma^\mu \overline{\eta}\right)_\alpha \left(\xi \partial_\mu \psi\right) - d \eta_\alpha \delta_\xi F \overset{(2.5.38)}{=} \\
=& -2i \left\{-\left(\partial_\mu \psi_\alpha\right) \left(\eta \sigma^\mu \overline{\xi}\right) - \eta_\alpha \left[\left(\partial_\mu \psi\right) \sigma^\mu \overline{\xi}\right]\right\} + d \xi_\alpha \delta_\eta F +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2i\left\{-\left(\partial_\mu\psi_\alpha\right)\left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)-\xi_\alpha\left[\left(\partial_\mu\psi\right)\sigma^\mu\overline{\eta}\right]\right\}-d\eta_\alpha\delta_\xi F=\\
=&2i\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\psi_\alpha+2i\eta_\alpha\left[\left(\partial_\mu\psi\right)\sigma^\mu\overline{\xi}\right]+d\xi_\alpha\delta_\eta F-\\
&-2i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu\psi_\alpha-2i\xi_\alpha\left[\left(\partial_\mu\psi\right)\sigma^\mu\overline{\eta}\right]-d\eta_\alpha\delta_\xi F\Rightarrow\\
\Rightarrow&\left(\delta_\eta\delta_\xi-\delta_\xi\delta_\eta\right)\psi_\alpha=2i\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}-\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu\psi_\alpha+\\
&+\xi_\alpha\left(d\delta_\eta F+2i\overline{\eta}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)-\eta_\alpha\left(d\delta_\xi F+2i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)
\end{aligned}
\tag{4.1.60}
$$

Από την τελευταία σχέση καθίσταται σαφές ότι μπορούμε να επιτύχουμε το κλείσιμο της άλγεβρας της απλής υπερσυμμετρίας για το φερμιονικό πεδίο Weyl ψ, δηλαδή την ισχύ της (4.1.57β), χωρίς να καταφύγουμε στη χρήση κάποιας εξίσωσης κίνησης, εάν απαιτήσουμε:

$$
d\delta_\xi F+2i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi=0\Rightarrow d\delta_\xi F=-2i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \tag{4.1.61}
$$

για αυθαίρετες (σταθερές) παραμέτρους Grassmann ξ^α, $\alpha=1,2$, ώστε να μηδενίζονται οι ανεπιθύμητοι όροι στο δεύτερο μέλος της (4.1.60). Από την (4.1.61) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$
\delta_\xi F=e\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \tag{4.1.62}
$$

για κάποια σταθερά e. Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (4.1.62) επί d και συγκρίνοντας την προκύπτουσα σχέση με την (4.1.61), βρίσκουμε ότι

$$
de=-2i \tag{4.1.63}
$$

Με βάση τις σχέσεις (4.1.58), (4.1.62) και (4.1.63), έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\left(\delta_\eta\delta_\xi-\delta_\xi\delta_\eta\right)F=&\delta_\eta\left(\delta_\xi F\right)-\delta_\xi\left(\delta_\eta F\right)\overset{(4.1.62)}{=}\\
=&\delta_\eta\left[e\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\psi_\beta\right]-\delta_\xi\left[e\overline{\eta}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\psi_\beta\right]=\\
=&e\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\left(\delta_\eta\psi_\beta\right)-e\overline{\eta}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\left(\delta_\xi\psi_\beta\right)\overset{(4.1.58)}{=}\\
=&e\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\left[-i\sqrt{2}\left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot\gamma}\overline{\eta}^{\dot\gamma}\partial_\nu\phi+d\eta_\beta F\right]-\\
&-e\overline{\eta}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\left[-i\sqrt{2}\left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot\gamma}\overline{\xi}^{\dot\gamma}\partial_\nu\phi+d\xi_\beta F\right]=\\
=&-i\sqrt{2}e\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot\gamma}\overline{\eta}^{\dot\gamma}\partial_\mu\partial_\nu\phi+de\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\eta_\beta\partial_\mu F+\\
&+i\sqrt{2}e\overline{\eta}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot\gamma}\overline{\xi}^{\dot\gamma}\partial_\mu\partial_\nu\phi-de\overline{\eta}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\xi_\beta\partial_\mu F=\\
=&-i\sqrt{2}e\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\eta}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi+de\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\eta\right)\partial_\mu F+\\
&+i\sqrt{2}e\left(\overline{\eta}\,\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi-de\left(\overline{\eta}\,\overline{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu F\overset{(2.5.13)}{=}\\
=&-i\sqrt{2}e\left(\overline{\eta}\,\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi-de\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\partial_\mu F+\\
&+i\sqrt{2}e\left(\overline{\eta}\,\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi+de\left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu F=\\
=&-i\sqrt{2}e\left(\overline{\eta}\,\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\nu\partial_\mu\phi-de\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\partial_\mu F+\\
&+i\sqrt{2}e\left(\overline{\eta}\,\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi+de\left(\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu F\overset{\partial_\mu\partial_\nu=\partial_\nu\partial_\mu}{=}\\
=&-de\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}-\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu F\xRightarrow{(4.1.63)}\\
\Rightarrow\left(\delta_\eta\delta_\xi-\delta_\xi\delta_\eta\right)F=&2i\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}-\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu F
\end{aligned}
$$

Άρα, οι κανόνες μετασχηματισμού (4.1.58) και (4.1.62) για τα πεδία ψ και F αντίστοιχα, σε συνδυασμό με τη σχέση (4.1.63) μεταξύ των σταθερών d και e, εξασφαλίζουν την ισχύ της (4.1.57γ) χωρίς να χρειάζεται να επιβληθεί κάποιος επιπλέον περιορισμός στις σταθερές d και e.

Για να προσδιορίσουμε τις τιμές των σταθερών d και e, χρειαζόμαστε και μία άλλη σχέση μεταξύ τους πέραν της (4.1.63), η οποία θα προκύψει από την απαίτηση η μεταβολή $\delta_\xi\mathcal{L}'$ της Lagrangian $\mathcal{L}'$

της σχέσης (4.1.56) κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που ορίζεται από τις (4.1.49), (4.1.58) και (4.1.62) να είναι μία ολική παράγωγος, ώστε για την αντίστοιχη δράση $S' = \int d^4x\mathcal{L}'$ να είναι

$$\delta_\xi S' = \delta_\xi \left(\int d^4x\mathcal{L}' \right) = \int d^4x\delta_\xi\mathcal{L}' = 0$$

δηλαδή η S' να είναι αναλλοίωτη κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό. Χρησιμοποιώντας τις (4.1.56), (4.1.49), (4.1.58), (4.1.59) και (4.1.62), έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi\mathcal{L}' =& \delta_\xi\left[(\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi)\right] + i\delta_\xi\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) + \delta_\xi\left(F^*F\right) = \\
=& \left[\delta_\xi\left(\partial_\mu\phi^*\right)\right](\partial^\mu\phi) + (\partial_\mu\phi^*)\,\delta_\xi\left(\partial^\mu\phi\right) + i\delta_\xi\left[\overline{\psi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\psi_\beta\right] + \\
&+ \left(\delta_\xi F^*\right)F + F^*\delta\xi F = \\
=& \partial_\mu\left(\delta_\xi\phi^*\right)\partial^\mu\phi + (\partial_\mu\phi^*)\,\partial^\mu\left(\delta_\xi\phi\right) + i\left[\left(\delta_\xi\overline{\psi}_{\dot\alpha}\right)\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\psi_\beta + \right.\\
&\left. + \overline{\psi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\left(\delta_\xi\psi_\beta\right)\right] + \left(\delta_\xi F^*\right)F + F^*\delta\xi F = \\
=& \partial_\mu\left(\sqrt{2}\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + (\partial_\mu\phi^*)\,\partial^\mu\left(\sqrt{2}\xi\psi\right) + \\
&+ i\left[i\sqrt{2}\left(\xi\sigma^\nu\right)_{\dot\alpha}\partial_\nu\phi^* + d^*\overline{\xi}_{\dot\alpha}F^*\right]\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\psi_\beta + \\
&+ i\overline{\psi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\left[-i\sqrt{2}\left(\sigma^\nu\overline{\xi}\right)_\beta\partial_\nu\phi + d\xi_\beta F\right] + \\
&+ e^*\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)^* F + eF^*\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) = \\
=& \sqrt{2}\partial_\mu\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + \sqrt{2}\left(\partial_\mu\phi^*\right)\partial^\mu\left(\xi\psi\right) - \\
&- \sqrt{2}\left(\xi\sigma^\nu\right)_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\left(\partial_\mu\psi_\beta\right)\partial_\nu\phi^* + id^*\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\left(\partial_\mu\psi_\beta\right)F^* + \\
&+ \sqrt{2}\overline{\psi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\left(\sigma^\nu\overline{\xi}\right)_\beta\partial_\mu\partial_\nu\phi + id\overline{\psi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\xi_\beta\partial_\mu F + \\
&+ e^*\left[\left(\partial_\mu\overline{\psi}\right)\overline{\sigma}^\mu\xi\right]F + e\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)F^* = \\
=& \sqrt{2}\partial_\mu\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + \sqrt{2}\left(\partial_\mu\phi^*\right)\partial^\mu\left(\xi\psi\right) - \\
&- \sqrt{2}\left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)\partial_\nu\phi^* + \sqrt{2}\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi + \\
&+ id^*\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)F^* + id\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu F + \\
&+ e^*\partial_\mu\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)F + e\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)F^* = \\
=& \sqrt{2}\partial_\mu\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + \sqrt{2}\left(\partial_\mu\phi^*\right)\partial^\mu\left(\xi\psi\right) - \\
&- \sqrt{2}\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\left[\partial_\mu(\psi\partial_\nu\phi^*) - \psi\partial_\mu\partial_\nu\phi^*\right] + \sqrt{2}\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi + \\
&+ id^*\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)F^* + id\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu F + \\
&+ e^*\left\{\partial_\mu\left[(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi)F\right] - \left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu F\right\} + e\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)F^* = \\
=& \sqrt{2}\partial_\mu\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + \sqrt{2}\left(\partial_\mu\phi^*\right)\partial^\mu\left(\xi\psi\right) - \sqrt{2}\partial_\mu\left[\left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi\right)\partial_\nu\phi^*\right] + \\
&+ \sqrt{2}\left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi^* + \sqrt{2}\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi + \\
&+ (id^* + e)\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)F^* + (id - e^*)\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu F + \\
&+ e^*\partial_\mu\left[\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)F\right] \overset{(4.1.45),(4.1.46)}{=} \\
=& \sqrt{2}\partial_\mu\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + \sqrt{2}\left(\partial_\mu\phi^*\right)\partial^\mu\left(\xi\psi\right) - \sqrt{2}\partial_\mu\left[\left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi\right)\partial_\nu\phi^*\right] + \\
&+ \sqrt{2}\left(\xi\psi\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi^* + \sqrt{2}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi + e^*\partial_\mu\left[\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)F\right] + \\
&+ (id^* + e)\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right)F^* + (id - e^*)\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu F = \\
=& \sqrt{2}\left[\partial_\mu\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial^\mu\phi + \left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi\right] + \sqrt{2}\left[\partial_\mu\left(\xi\psi\right)\partial^\mu\phi^* + \right.\\
&\left. + \left(\xi\psi\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi^*\right] - \sqrt{2}\partial_\mu\left[\left(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi\right)\partial_\nu\phi^*\right] + e^*\partial_\mu\left[\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)F\right] +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (id^* + e) \left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi\right) F^* + (id - e^*) \left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \xi\right) \partial_\mu F = \\
=&\sqrt{2}\partial_\mu \left[\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right) \partial^\mu \phi\right] + \sqrt{2}\partial_\mu \left[(\xi\psi) \partial^\mu \phi^*\right] - \\
&- \sqrt{2}\partial_\mu \left[(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi) \partial_\nu \phi^*\right] + e^*\partial_\mu \left[\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right) F\right] + \\
&+ (id^* + e) \left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi\right) F^* + (id - e^*) \left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \xi\right) \partial_\mu F \overset{(4.1.52)}{=} \\
=&\sqrt{2}\partial_\mu \left[\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right) \partial^\mu \phi\right] + \sqrt{2}\partial_\mu \left[(\xi\psi) \partial^\mu \phi^*\right] - \\
&- \sqrt{2}\partial_\mu \left\{\left[2\eta^{\mu\nu} (\xi\psi) - \xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi\right] \partial_\nu \phi^*\right\} + e^*\partial_\mu \left[\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right) F\right] + \\
&+ (id^* + e) \left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi\right) F^* + (id - e^*) \left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \xi\right) \partial_\mu F = \\
=&\sqrt{2}\partial_\mu \left[\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right) \partial^\mu \phi\right] + \sqrt{2}\partial_\mu \left[(\xi\psi) \partial^\mu \phi^*\right] - 2\sqrt{2}\partial_\mu \left[(\xi\psi) \partial^\mu \phi^*\right] + \\
&+ \sqrt{2}\partial_\mu \left[(\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi) \partial_\nu \phi^*\right] + e^*\partial_\mu \left[\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right) F\right] + \\
&+ (id^* + e) \left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi\right) F^* + (id - e^*) \left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \xi\right) \partial_\mu F \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_\xi \mathcal{L}' =&\partial_\mu \left[\sqrt{2}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right) \partial^\mu \phi - \sqrt{2}(\xi\psi) \partial^\mu \phi^* + \sqrt{2}(\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi) \partial_\nu \phi^* + e^*\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right) F\right] + \\
&+ (id^* + e) \left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi\right) F^* + (id - e^*) \left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \xi\right) \partial_\mu F \qquad (4.1.64)
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, για να είναι η μεταβολή $\delta_\xi \mathcal{L}'$ μία ολική παράγωγος, πρέπει:

$$id^* + e = 0 \Rightarrow e = -id^* \qquad (4.1.65)$$

οπότε και $e^* = (-id^*)^* = id \Rightarrow id - e^* = 0$, ώστε να μηδενίζονται οι δύο τελευταίοι όροι στο δεύτερο μέλος της (4.1.64). Αντικαθιστώντας την (4.1.65) στην (4.1.63), παίρνουμε:

$$d\,(-id^*) = -2i \Rightarrow |d|^2 = 2$$

Επιλέγουμε $d = \sqrt{2}$, οπότε $e = -id^* = -i\sqrt{2}$. Έτσι, με δεδομένες τις σχέσεις (4.1.49), (4.1.58), (4.1.59) και (4.1.62), προκύπτει η ακόλουθη μορφή για έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που αφήνει αναλλοίωτη τη δράση $S' = \int d^4x \mathcal{L}' = \int d^4x \left[(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) + i\overline{\psi}\overline{\sigma}\partial_\mu \psi + F^*F\right]$:

$$\delta_\xi \phi = \sqrt{2}\xi\psi,\ \ \delta_\xi \phi^* = \sqrt{2}\overline{\xi}\ \overline{\psi} \qquad (4.1.66)$$

$$\delta_\xi \psi_\alpha = -i\sqrt{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu \phi + \sqrt{2}\xi_\alpha F,\ \ \delta_\xi \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = i\sqrt{2}\left(\xi\sigma^\mu\right)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^* + \sqrt{2}\overline{\xi}_{\dot{\alpha}} F^* \qquad (4.1.67)$$

$$\delta_\xi F = -i\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi,\ \ \delta_\xi F^* = i\sqrt{2}\left(\partial_\mu \overline{\psi}\right)\overline{\sigma}^\mu \xi \qquad (4.1.68)$$

Κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό, η Lagrangian $\mathcal{L}'$ της σχέσης (4.1.56) μετασχηματίζεται ως

$$\delta_\xi \mathcal{L}' \overset{(4.1.64)}{=} \partial_\mu \left[\sqrt{2}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}\right) \partial^\mu \phi - \sqrt{2}(\xi\psi) \partial^\mu \phi^* + \sqrt{2}(\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi) \partial_\nu \phi^* + i\sqrt{2}\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\xi\right) F\right] \qquad (4.1.69)$$

Με τους κανόνες μετασχηματισμού (4.1.66)-(4.1.68) υλοποιείται off-shell η άλγεβρα της $N = 1$ υπερσυμμετρίας στη θεωρία πεδίου που περιγράφεται από τη Lagrangian (4.1.56), δηλαδή ικανοποιούνται οι σχέσεις (4.1.57α)-(4.1.57γ) χωρίς την απαίτηση να ισχύει κάποια εξίσωση κίνησης.

4.2 Αλληλεπιδράσεις ανάμεσα σε chiral supermultiplets

Σε μία ρεαλιστική ($N = 1$) υπερσυμμετρική θεωρία, υπάρχουν πολλές chiral supermultiplets, με gauge αλληλεπιδράσεις (αλληλεπιδράσεις βαθμίδας) και non-gauge αλληλεπιδράσεις. Σε αυτήν την ενότητα, σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε τη γενικότερη δυνατή θεωρία μαζών και non-gauge αλληλεπιδράσεων για σωματίδια που ανήκουν σε chiral supermultiplets. Όπως θα δούμε, η απαίτηση η δράση να είναι αναλλοίωτη κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς επιβάλλει σημαντικούς περιορισμούς στη δυνατή μορφή των non-gauge συζεύξεων, συμπεριλαμβανομένων και των όρων μάζας.

Το σημείο εκκίνησής μας είναι η Lagrangian πυκνότητα για ένα σύνολο ελεύθερων και άμαζων chiral supermultiplets που χαρακτηρίζονται από ένα δείκτη i, ο οποίος τρέχει σε όλους τους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας (π.χ. γεύση και βαθμίδα). Επειδή θέλουμε να κατασκευάσουμε μία θεωρία με αλληλεπιδράσεις, στην οποία η άλγεβρα της $N = 1$ υπερσυμμετρίας κλείνει off-shell, κάθε supermultiplet περιέχει ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο ϕ_i και ένα αριστερόστροφο φερμιόνιο Weyl ψ_i ως φυσικούς βαθμούς ελευθερίας, καθώς και ένα βοηθητικό μιγαδικό βαθμωτό πεδίο F_i, το οποίο είναι μη διαδιδόμενο, αφού δεν έχει κινητικό όρο. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, το ελεύθερο κομμάτι της Lagrangian είναι

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = (\partial_\mu \phi_i^*)(\partial^\mu \phi_i) + i\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F_i^* F_i \tag{4.2.1}$$

όπου αθροίζουμε ως προς επαναλαμβανόμενους δείκτες i, οι οποίοι ασφαλώς δεν πρέπει να συγχέονται με τους παραλειπόμενους σπινοριακούς δείκτες. Η δράση που αντιστοιχεί στη Lagrangian (4.2.1), $S_{\text{free}} \equiv \int d^4x \mathcal{L}_{\text{free}}$, είναι αναλλοίωτη κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό

$$\delta_\xi \phi_i = \sqrt{2}\xi\psi_i,\ \delta_\xi \phi_i^* = \sqrt{2}\overline{\xi}\ \overline{\psi}_i \tag{4.2.2}$$

$$\delta_\xi (\psi_i)_\alpha = -i\sqrt{2}\left(\sigma^\mu \overline{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu \phi_i + \sqrt{2}\xi_\alpha F_i,\ \delta_\xi \left(\overline{\psi}_i\right)_{\dot{\alpha}} = i\sqrt{2}\left(\xi\sigma^\mu\right)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi_i^* + \sqrt{2}\overline{\xi}_{\dot{\alpha}} F_i^* \tag{4.2.3}$$

$$\delta_\xi F_i = -i\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i,\ \delta_\xi F_i^* = i\sqrt{2}\left(\partial_\mu \overline{\psi}_i\right)\overline{\sigma}^\mu \xi \tag{4.2.4}$$

για αυθαίρετες σταθερές (ανεξάρτητες του x) παραμέτρους Grassmann ξ^α, όπου $\alpha = 1, 2$.

Το επόμενο βήμα είναι η εισαγωγή όρων αλληλεπίδρασης, τέτοιων ώστε να διατηρείται η αναλλοιώτητα της δράσης κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (4.2.2)-(4.2.4). Αυτό έγινε για πρώτη φορά (στις 4 διαστάσεις) από τους Wess και Zumino [31].

Θα επιβάλουμε οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα πεδία ϕ_i, ψ_i και F_i να είναι επανακανονικοποιήσιμες. Η απαίτηση αυτή συνεπάγεται ότι κάθε όρος αλληλεπίδρασης πρέπει να έχει πεδιακό περιεχόμενο με συνολική διάσταση μάζας ≤ 4 ή, ισοδύναμα, οι σταθερές σύζευξης στους όρους αλληλεπίδρασης πρέπει να είναι αδιάστατες ή να έχουν θετική διάσταση μάζας. Έτσι, οι μόνοι υποψήφιοι όροι αλληλεπιδράσεων μεταξύ των πεδίων ϕ_i, ψ_i και F_i είναι:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \left(-\frac{1}{2}W_{ij}\psi_i\psi_j + W_i F_i + x_{ij} F_i F_j\right) + c.c. - U \tag{4.2.5}$$

όπου τα W_{ij}, W_i, x_{ij} και U είναι πολυώνυμα των βαθμωτών πεδίων ϕ_i, ϕ_i^* βαθμού 1,2,0 και 4 αντίστοιχα. Επίσης, στο δεύτερο μέλος της (4.2.5) υπονοείται άθροιση ως προς i και ως προς j, ενώ «*c.c.*» σημαίνει μιγαδικό συζυγές (complex conjugate).

Πρέπει τώρα να απαιτήσουμε η $\mathcal{L}_{\text{int}}$ να είναι αναλλοίωτη ή τουλάχιστον να μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (4.2.2)-(4.2.4), αφού η $\mathcal{L}_{\text{free}}$ από μόνη της μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από τον εν λόγω μετασχηματισμό. Η απαίτηση αυτή συνεπάγεται ότι ο υποψήφιος όρος $U(\phi_i, \phi_i^*)$ πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν. Αν υπήρχε ένας τέτοιος όρος, η μεταβολή του ($\delta_\xi U$) κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (4.2.2)-(4.2.4) θα ήταν:

$$\delta_\xi U = \frac{\partial U}{\partial \phi_i}\delta_\xi \phi_i + \frac{\partial U}{\partial \phi_i^*}\delta_\xi \phi_i^* \overset{(4.2.2)}{=} \sqrt{2}\frac{\partial U}{\partial \phi_i}(\xi\psi_i) + \sqrt{2}\frac{\partial U}{\partial \phi_i^*}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_i\right) \tag{4.2.6}$$

όπου τα $\dfrac{\partial U}{\partial \phi_i}$ και $\dfrac{\partial U}{\partial \phi_i^*}$ θα ήταν συναρτήσεις μόνο των βαθμωτών πεδίων ϕ_j και ϕ_j^*, οπότε το $\delta_\xi U$ δε θα περιλάμβανε χωροχρονικές παραγώγους και δε θα περιείχε κανένα από τα πεδία F_i, F_i^*, και με βάση τις εξισώσεις (4.2.2)-(4.2.5) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δε θα μπορούμε να ακυρωθεί από τη μεταβολή οποιουδήποτε άλλου όρου στην $\mathcal{L}_{\text{int}}$. Παρομοίως, οι αδιάστατες σταθερές σύζευξης x_{ij} πρέπει να είναι μηδενικές, διαφορετικά η μεταβολή του όρου $x_{ij}F_iF_j$ κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (4.2.2)−(4.2.4) δεν είναι δυνατό να ακυρωθεί από τη μεταβολή οποιουδήποτε άλλου όρου της $\mathcal{L}_{int}$. Επομένως, οι μόνοι δυνατοί όροι αλληλεπιδράσεων μεταξύ των ϕ_i, ψ_i και F_i είναι:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \left(-\frac{1}{2}W_{ij}\psi_i\psi_j + W_iF_i\right) + c.c. \tag{4.2.7}$$

Σε αυτό το σημείο, δεν υποθέτουμε ότι τα W_{ij} και W_i σχετίζονται κάπως μεταξύ τους. Ωστόσο, σύντομα θα δούμε ότι σχετίζονται και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο έχουμε επιλέξει να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο γράμμα γι' αυτά. Ακόμη, έχουμε:

$$W_{ij}\psi_i\psi_j \overset{(i\leftrightarrow j)}{=} W_{ji}\psi_j\psi_i = W_{ji}\psi_i\psi_j \tag{4.2.8}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\psi_i\psi_j = \psi_j\psi_i$ για κάθε i, j (όπου $\psi_i\psi_j \equiv (\psi_i)^\alpha (\psi_j)_\alpha$). Από την (4.2.8), έπεται ότι

$$W_{ij} = W_{ji} \tag{4.2.9}$$

για κάθε i, j.

Επειδή η δράση που αντιστοιχεί στην ελεύθερη Lagrangian (4.2.1) είναι αναλλοίωτη κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (4.2.2)-(4.2.4), μπορούμε τώρα να ασχοληθούμε μόνο με τη μεταβολή της $\mathcal{L}_{\text{int}}$ κάτω από το μετασχηματισμό αυτό, $\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}$. Χρησιμοποιώντας την (4.2.7) και τους κανόνες μετασχηματισμού (4.2.2)-(4.2.4), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}} &= \left(-\frac{1}{2}\delta_\xi\left(W_{ij}\psi_i\psi_j\right) + \delta_\xi\left(W_iF_i\right)\right) + c.c. = \\
&= -\frac{1}{2}\left[(\delta_\xi W_{ij})\psi_i\psi_j + W_{ij}\left(\delta_\xi\psi_i\right)\psi_j + W_{ij}\psi_i\delta_\xi\psi_j\right] + \\
&\quad + \left(\delta_\xi W_i\right)F_i + W_i\delta_\xi F_i + c.c. \overset{(2.5.6),(4.2.9)}{=} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k}\left(\delta_\xi\phi_k\right) + \frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k^*}\left(\delta_\xi\phi_k^*\right)\right]\psi_i\psi_j + W_{ji}\psi_j\delta_\xi\psi_i + W_{ij}\psi_i\delta_\xi\psi_j\right\} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial W_i}{\partial\phi_j}\delta_\xi\phi_j + \frac{\partial W_i}{\partial\phi_j^*}\delta_\xi\phi_j^*\right)F_i + W_i\delta_\xi F_i + c.c. = \\
&= -\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k}\left(\xi\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) + \sqrt{2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k^*}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) + \right. \\
&\quad \left. +2W_{ij}\left(\psi_i\right)^\alpha\delta_\xi(\psi_j)_\alpha\right] + \sqrt{2}\frac{\partial W_i}{\partial\phi_j}\left(\xi\psi_j\right)F_i + \\
&\quad + \sqrt{2}\frac{\partial W_i}{\partial\phi_j^*}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_j\right)F_i + W_i\left(-i\sqrt{2}\right)\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i\right) + c.c. = \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k}\left(\xi\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k^*}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) - \\
&\quad - W_{ij}\left(\psi_i\right)^\alpha\left[-i\sqrt{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\phi_j + \sqrt{2}\xi_\alpha F_j\right] + \\
&\quad + \sqrt{2}\frac{\partial W_i}{\partial\phi_j}\left(\xi\psi_j\right)F_i + \sqrt{2}\frac{\partial W_i}{\partial\phi_j^*}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_j\right)F_i - i\sqrt{2}W_i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i\right) + c.c. = \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k}\left(\xi\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k^*}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) + \\
&\quad + i\sqrt{2}W_{ij}\left(\partial_\mu\phi_j\right)\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\xi}\right) - \sqrt{2}W_{ij}\left(\psi_i\xi\right)F_j + \\
&\quad + \sqrt{2}\frac{\partial W_i}{\partial\phi_j}\left(\xi\psi_j\right)F_i + \sqrt{2}\frac{\partial W_i}{\partial\phi_j^*}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_j\right)F_i + i\sqrt{2}W_i\left[\left(\partial_\mu\psi_i\right)\sigma^\mu\overline{\xi}\right] + c.c. \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k}\left(\xi\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k^*}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) +
\end{aligned}$$

$$+ i\sqrt{2}W_{ij}\left(\partial_\mu\phi_j\right)\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\xi}\right) + i\sqrt{2}W_i\partial_\mu\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\xi}\right) -$$
$$- \sqrt{2}W_{ij}\left(\xi\psi_i\right)F_j + \sqrt{2}\frac{\partial W_i}{\partial\phi_j}\left(\xi\psi_j\right)F_i + \sqrt{2}\frac{\partial W_i}{\partial\phi_j^*}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_j\right)F_i + c.c. \tag{4.2.10}$$

Επικεντρωνόμαστε πρώτα στο κομμάτι της $\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}$ που περιέχει τέσσερις σπίνορες Weyl:

$$\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}|_{\text{4-spinor}} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k}\left(\xi\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) + \frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k^*}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right)\right]\right\} + c.c. \tag{4.2.11}$$

Ο όρος του $\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}|_{\text{4-spinor}}$ που είναι ανάλογος του $\left(\xi\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right)$ δεν μπορεί να ακυρωθεί από τη μεταβολή οποιουδήποτε άλλου όρου της $\mathcal{L}_{\text{int}}$ κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (4.2.2)-(4.2.4). Ωστόσο, ο εν λόγω όρος μηδενίζεται ταυτοτικά, εάν το $\dfrac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k}$ είναι συμμετρικό στην εναλλαγή οποιωνδήποτε δύο από τους δείκτες i, j, k, δηλαδή

$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k} = \frac{\partial W_{ji}}{\partial\phi_k} = \frac{\partial W_{kj}}{\partial\phi_i} = \frac{\partial W_{ik}}{\partial\phi_j} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial\phi_j} = \frac{\partial W_{jk}}{\partial\phi_i} \tag{4.2.12}$$

για κάθε i, j, k. Για να αποδείξουμε την ορθότητα του ισχυρισμού αυτού, αρχικά εφαρμόζουμε την ταυτότητα (2.5.38) για $\psi = \psi_i$, $\chi = \psi_j$ και $\xi = \psi_k$:

$$\left(\psi_i\right)_\alpha\left(\psi_j\psi_k\right) + \left(\psi_j\right)_\alpha\left(\psi_k\psi_i\right) + \left(\psi_k\right)_\alpha\left(\psi_i\psi_j\right) = 0, \tag{4.2.13}$$

όπου $\alpha = 1, 2$. Πολλαπλασιάζουμε την (4.2.13) επί ξ^α από αριστερά και αθροίζουμε ως προς α, οπότε λαμβάνουμε:

$$\xi^\alpha\left(\psi_i\right)_\alpha\left(\psi_j\psi_k\right) + \xi^\alpha\left(\psi_j\right)_\alpha\left(\psi_k\psi_i\right) + \xi^\alpha\left(\psi_k\right)_\alpha\left(\psi_i\psi_j\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\xi\psi_i\right)\left(\psi_j\psi_k\right) + \left(\xi\psi_j\right)\left(\psi_k\psi_i\right) + \left(\xi\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) = 0 \tag{4.2.14}$$

Έτσι, εάν ισχύει η (4.2.12), έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k}\left(\xi\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) =& \frac{1}{3}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k}\left(\xi\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial W_{ki}}{\partial\phi_j}\left(\xi\psi_j\right)\left(\psi_k\psi_i\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial W_{jk}}{\partial\phi_i}\left(\xi\psi_i\right)\left(\psi_j\psi_k\right) \overset{(4.2.12)}{=} \\ =& \frac{1}{3}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k}\left[\left(\xi\psi_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right) + \left(\xi\psi_j\right)\left(\psi_k\psi_i\right) + \left(\xi\psi_i\right)\left(\psi_j\psi_k\right)\right] \overset{(4.2.14)}{=} 0,\end{aligned}$$

άρα ο πρώτος όρος στο δεύτερο μέλος της (4.2.11) μηδενίζεται ταυτοτικά. Από την άλλη μεριά, ο όρος του $\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}|_{\text{4-spinor}}$ που είναι ανάλογος του $\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_k\right)\left(\psi_i\psi_j\right)$ δεν μπορεί να ακυρωθεί από τη μεταβολή οποιουδήποτε άλλου όρου στην $\mathcal{L}_{\text{int}}$, ενώ δεν υπάρχει κάποια ταυτότητα αντίστοιχη της (4.2.14) για γινόμενα της μορφής $\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_i\right)\left(\psi_j\psi_k\right)$. Έτσι, ο μόνος τρόπος να απαλλαγούμε από τον όρο αυτό, ώστε να είναι δυνατό η $\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}$ να είναι ίση με μηδέν ή με μία ολική παράγωγο, είναι να απαιτήσουμε καθένα από τα W_{ij} να μην εξαρτάται από κανένα από τα βαθμωτά πεδία ϕ_k^*, αλλά να είναι συνάρτηση μόνο των ϕ_k, οπότε θα ισχύει

$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k^*} = 0 \tag{4.2.15}$$

για κάθε i, j, k. Συνδυάζοντας όσα έχουμε μάθει μέχρι στιγμής, μπορούμε να γράψουμε:

$$W_{ij} = M_{ij} + y_{ijk}\phi_k, \tag{4.2.16}$$

όπου M_{ij} είναι ένας συμμετρικός πίνακας μάζας για τα φερμιονικά πεδία και y_{ijk} είναι μία σύζευξη Yukawa ενός βαθμωτού πεδίου ϕ_k και δύο φερμιονίων ψ_i, ψ_j, που πρέπει να είναι συμμετρική στην εναλλαγή οποιωνδήποτε δύο από τους δείκτες i, j, k (αφού από την (4.2.16) έπεται ότι $y_{ijk} = \frac{\partial W_{ij}}{\partial \phi_k}$). Είναι βολικό να γράψουμε τη σχέση (4.2.16) ως

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j}, \tag{4.2.17}$$

όπου έχουμε εισάγει ένα χρήσιμο αντικείμενο[2]:

$$W = \frac{1}{2} M_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \tag{4.2.18}$$

το οποίο καλείται υπερδυναμικό (superpotential). Το υπερδυναμικό δεν είναι ένα σύνηθες βαθμωτό δυναμικό, αφού εν γένει δεν είναι καν πραγματικό. Αντ΄ αυτού, είναι μία ολόμορφη συνάρτηση των βαθμωτών πεδίων ϕ_i, εάν αυτά θεωρηθούν μιγαδικές μεταβλητές. Θα επαληθεύσουμε τώρα ότι εάν το υπερδυναμικό W δίνεται από την (4.2.18), η (4.2.17) είναι συνεπής με την (4.2.16) αποδεικνύοντας την ισότητα του δεύτερου μέλους της (4.2.17) με το δεύτερο μέλος της (4.2.16). Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \phi_j} =& \frac{\partial}{\partial \phi_j} \left(\frac{1}{2} M_{ik} \phi_i \phi_k + \frac{1}{6} y_{ikl} \phi_i \phi_k \phi_l \right) = \\
=& \frac{1}{2} M_{ik} \frac{\partial}{\partial \phi_j} (\phi_i \phi_k) + \frac{1}{6} y_{ikl} \frac{\partial}{\partial \phi_j} (\phi_i \phi_k \phi_l) = \\
=& \frac{1}{2} M_{ik} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \phi_j} \phi_k + \phi_i \frac{\partial \phi_k}{\partial \phi_j} \right) + \frac{1}{6} y_{ikl} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \phi_j} \phi_k \phi_l + \phi_i \frac{\partial \phi_k}{\partial \phi_j} \phi_l + \phi_i \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial \phi_j} \right) = \\
=& \frac{1}{2} M_{ik} (\delta_{ij} \phi_k + \phi_i \delta_{kj}) + \frac{1}{6} y_{ikl} (\delta_{ij} \phi_k \phi_l + \phi_i \delta_{kj} \phi_l + \phi_i \phi_k \delta_{lj}) = \\
=& \frac{1}{2} M_{jk} \phi_k + \frac{1}{2} M_{ij} \phi_i + \frac{1}{6} y_{jkl} \phi_k \phi_l + \frac{1}{6} y_{ijl} \phi_i \phi_l + \frac{1}{6} y_{ikj} \phi_i \phi_k \overset{M_{ij}=M_{ji}, y_{ijl}=y_{jil}, y_{ikj}=y_{ijk}}{=} \\
=& \frac{1}{2} M_{jk} \phi_k + \frac{1}{2} M_{ji} \phi_i + \frac{1}{6} y_{jkl} \phi_k \phi_l + \frac{1}{6} y_{jil} \phi_i \phi_l + \frac{1}{6} y_{ijk} \phi_i \phi_k \overset{y_{ijk}=y_{jik}}{=} \\
=& 2 \cdot \left(\frac{1}{2} M_{jk} \phi_k \right) + \frac{1}{6} y_{jkl} \phi_k \phi_l + \frac{1}{6} y_{jil} \phi_i \phi_l + \frac{1}{6} y_{jik} \phi_i \phi_k = \\
=& M_{jk} \phi_k + 3 \cdot \left(\frac{1}{6} y_{jkl} \phi_k \phi_l \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial \phi_j} =& M_{jk} \phi_k + \frac{1}{2} y_{jkl} \phi_k \phi_l
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} =& \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_j} \right) \overset{(4.2.19)}{=} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(M_{jk} \phi_k + \frac{1}{2} y_{jkl} \phi_k \phi_l \right) = \\
=& M_{jk} \frac{\partial \phi_k}{\partial \phi_i} + \frac{1}{2} y_{jkl} \frac{\partial}{\partial \phi_i} (\phi_k \phi_l) = \\
=& M_{jk} \delta_{ki} + \frac{1}{2} y_{jkl} \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial \phi_i} \phi_l + \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial \phi_i} \right) = \\
=& M_{ji} + \frac{1}{2} y_{jkl} (\delta_{ki} \phi_l + \phi_k \delta_{li}) = \\
=& M_{ij} + \frac{1}{2} y_{jil} \phi_l + \frac{1}{2} y_{jki} \phi_k = \\
=& M_{ij} + \frac{1}{2} y_{ijl} \phi_l + \frac{1}{2} y_{jik} \phi_k =
\end{aligned}$$

[2]Ένας γραμμικός όρος της μορφής $L_i \phi_i$ θα μπορούσε να προστεθεί στο δεύτερο μέλος της (4.2.18), σε συνέπεια με τις (4.2.17) και (4.2.16). Ένας τέτοιος όρος απαντάται σε ένα μοντέλο σπασίματος της υπερσυμμετρίας.

$$=M_{ij}+\frac{1}{2}y_{ijl}\phi_l+\frac{1}{2}y_{ijk}\phi_k=M_{ij}+y_{ijk}\phi_k \text{ (ό.έ.δ.)}$$

Συνεχίζουμε θεωρώντας τους όρους της $\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}$ που περιέχουν μία χωροχρονική παράγωγο:

$$\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}|_\partial=i\sqrt{2}W_{ij}\left(\partial_\mu\phi_j\right)\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\xi}\right)+i\sqrt{2}W_i\partial_\mu\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\xi}\right)+c.c. \tag{4.2.20}$$

Ισχύει ότι

$$W_{ij}\partial_\mu\phi_j\overset{(4.2.17)}{=}\frac{\partial^2W}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\partial_\mu\phi_j=\frac{\partial^2W}{\partial\phi_j\partial\phi_i}\partial_\mu\phi_j=\frac{\partial}{\partial\phi_j}\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right)\frac{\partial\phi_j}{\partial x^\mu}$$

Έτσι, αν λάβουμε υπόψη και τον κανόνα της αλυσίδας, παίρνουμε:

$$W_{ij}\partial_\mu\phi_j=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right)=\partial_\mu\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right) \tag{4.2.21}$$

Αντικαθιστώντας την (4.2.21) στην (4.2.20), λαμβάνουμε:

$$\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}|_\partial=i\sqrt{2}\partial_\mu\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right)\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\xi}\right)+i\sqrt{2}W_i\partial_\mu\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\xi}\right)+c.c. \tag{4.2.22}$$

Επομένως, η $\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}|_\partial$ θα είναι μία ολική παράγωγος, αν

$$W_i=\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\overset{(4.2.19)}{=}M_{ij}\phi_j+\frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k \tag{4.2.23}$$

Πράγματι, αν ισχύει η (4.2.23), τότε από την (4.2.22) έπεται ότι

$$\begin{aligned}\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}|_\partial=&i\sqrt{2}\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right)\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\xi}\right)+\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\partial_\mu\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\right]+c.c.=\\=&i\sqrt{2}\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right)\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\right]+c.c.\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

Με δεδομένα τα αποτελέσματα που έχουμε βρει για τα W_i και W_{ij} (σχέσεις (4.2.23) και (4.2.17) αντίστοιχα), ώστε η $\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}|_\partial$ να ισούται με μία ολική παράγωγο, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι οι υπόλοιποι όροι της $\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}$ πέραν αυτών που περιλαμβάνονται στις $\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}|_{\text{4-spinor}}$ και $\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}|_\partial$ ακυρώνονται μεταξύ τους. Πράγματι, από την (4.2.10) προκύπτει ότι οι εν λόγω όροι είναι οι:

$$\begin{aligned}\delta_\xi\mathcal{L}_{\text{int}}|_{\text{remaining}}=&\left[-\sqrt{2}W_{ij}\left(\xi\psi_i\right)F_j+\sqrt{2}\frac{\partial W_i}{\partial\phi_j}\left(\xi\psi_j\right)F_i+\sqrt{2}\frac{\partial W_i}{\partial\phi_j^*}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_j\right)F_i\right]+c.c.\overset{(4.2.17),(4.2.23)}{=}\\=&\left[-\sqrt{2}\frac{\partial^2W}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\left(\xi\psi_i\right)F_j+\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\phi_j}\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right)\left(\xi\psi_j\right)F_i+\sqrt{2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\phi_j^*}\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right)}_{\overset{\|}{0}}\left(\overline{\xi}\ \overline{\psi}_j\right)F_i\right]+c.c.=\\=&\left[-\sqrt{2}\frac{\partial^2W}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\left(\xi\psi_i\right)F_j+\sqrt{2}\frac{\partial^2W}{\partial\phi_j\partial\phi_i}\left(\xi\psi_j\right)F_i\right]+c.c.=0\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, έχουμε βρει τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα W_i και W_{ij} (εξισώσεις (4.2.23) και (4.2.17) αντίστοιχα, όπου W είναι μία συνάρτηση των βαθμωτών πεδίων ϕ_i της μορφής (4.2.18)), ώστε η $\mathcal{L}_{\text{int}}$ της σχέσης (4.2.7), που περιέχει επανακανονικοποιήσιμους όρους non-gauge αλληλεπιδράσεων για ένα σύνολο από chiral supermultiplets, να δίνει μία δράση που είναι αναλλοίωτη κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (4.2.2)-(4.2.4). Συγκεκριμένα, με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε στην παρούσα ενότητα, εάν ισχύουν οι συνθήκες αυτές, η μεταβολή της $\mathcal{L}_{\text{int}}$ της (4.2.7) κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (4.2.2)-(4.2.4) είναι:

$$\begin{aligned}\delta_\xi \mathcal{L}_{\text{int}} =& \underbrace{\delta_\xi \mathcal{L}_{\text{int}}|_{\text{4-spinor}}}_{\substack{\| \\ 0}} + \delta_\xi \mathcal{L}_{\text{int}}|_\partial + \underbrace{\delta_\xi \mathcal{L}_{\text{int}}|_{\text{remaining}}}_{\substack{\| \\ 0}} \overset{(4.2.24)}{=} \\ =& i\sqrt{2}\partial_\mu \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right) \left(\psi_i \sigma^\mu \overline{\xi} \right) \right] + c.c.,\end{aligned}$$

οπότε η αντίστοιχη μεταβολή της δράσης $S_{\text{int}} \equiv \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}$ είναι:

$$\delta_\xi S_{\text{int}} = \int d^4x \delta_\xi \mathcal{L}_{\text{int}} = \int d^4x \left\{ i\sqrt{2}\partial_\mu \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right) \left(\psi_i \sigma^\mu \overline{\xi} \right) \right] + c.c. \right\} = 0$$

Έτσι, η πλήρης Lagrangian για μία υπερσυμμετρική θεωρία αλληλεπιδρωσών chiral supermultiplets (ϕ_i, ψ_i, F_i) είναι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}} =& \left(\partial_\mu \phi_i^*\right) \left(\partial^\mu \phi_i\right) + i\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F_i^* F_i + \\ &+ \left[\left(-\frac{1}{2} W_{ij} \psi_i \psi_j + W_i F_i \right) + c.c. \right]\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

όπου τα W_i και W_{ij} δίνονται από τις (4.2.23) και (4.2.17) αντίστοιχα για κάποιο υπερδυναμικό W, δηλαδή κάποια συνάρτηση των βαθμωτών πεδίων ϕ_i της μορφής (4.2.18), ώστε η δράση που αντιστοιχεί στην $\mathcal{L}$ της (4.2.25) να είναι αναλλοίωτη κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (4.2.2)-(4.2.4). Μπορούμε να διώξουμε τα βοηθητικά πεδία F_i, F_i^* χρησιμοποιώντας τις κλασσικές εξισώσεις κίνησης (εξισώσεις Euler-Lagrange) που αντιστοιχούν στα πεδία αυτά. Το κομμάτι της Lagrangian (4.2.25) που περιέχει τα βοηθητικά πεδία είναι:

$$\mathcal{L}_{\text{F}} = F_i^* F_i + \left(W_i F_i + c.c.\right) = F_i^* F_i + W_i F_i + W_i^* F_i^* \tag{4.2.26}$$

και οι εξισώσεις Euler-Lagrange για τα F_i και F_i^* είναι αντίστοιχα οι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{F}}}{\partial F_i} = \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{F}}}{\partial \left(\partial_\mu F_i\right)} \right]}_{\substack{\| \\ 0}} \xrightarrow{(4.2.26)} F_i^* + W_i = 0 \Rightarrow F_i^* = -W_i = -\frac{\partial W}{\partial \phi_i} \tag{4.2.27}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{F}}}{\partial F_i^*} = \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{F}}}{\partial \left(\partial_\mu F_i^*\right)} \right]}_{\substack{\| \\ 0}} \xrightarrow{(4.2.26)} F_i + W_i^* = 0 \Rightarrow F_i = -W_i^* = -\left(\frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right)^* \tag{4.2.28}$$

Επομένως, τα βοηθητικά πεδία μπορούν να εκφραστούν αλγεβρικά (χωρίς παραγώγους) συναρτήσει των βαθμωτών πεδίων. Αν αντικαταστήσουμε τις (4.2.27) και (4.2.28) στη Lagrangian της (4.2.25), η τελευταία γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \left(\partial_\mu \phi_i^*\right) \left(\partial^\mu \phi_i\right) + i\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + \left(-W_i\right) \left(-W_i^*\right) + \\ &+ \left\{ \left[-\frac{1}{2} W_{ij} \psi_i \psi_j + W_i \left(-W_i^*\right) \right] + c.c. \right\} = \\ =& \left(\partial_\mu \phi_i^*\right) \left(\partial^\mu \phi_i\right) + i\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + W_i W_i^* + \\ &+ \left[-\frac{1}{2} W_{ij} \psi_i \psi_j - W_i W_i^* - \frac{1}{2} W_{ij}^* \left(\psi_i \psi_j\right)^* - W_i^* W_i \right] \xrightarrow{(2.5.15)} \\ \Rightarrow \mathcal{L} =& \left(\partial_\mu \phi_i^*\right) \left(\partial^\mu \phi_i\right) + i\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} \left(W_{ij} \psi_i \psi_j + W_{ij}^* \overline{\psi}_i \overline{\psi}_j \right) - W_i^* W_i\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

Τώρα που έχουμε διώξει τα μη διαδιδόμενα πεδία F_i, F_i^*, είναι σαφές από την (4.2.29) ότι το βαθμωτό δυναμικό για τη θεωρία που περιγράφεται από τη Lagrangian (4.2.25) είναι[3]:

$$\begin{aligned}
V(\phi,\phi^*) =&W_i^* W_i \overset{(4.2.23)}{=} \left(M_{ij}^*\phi_j^* + \frac{1}{2}y_{ijk}^*\phi_j^*\phi_k^*\right)\left(M_{il}\phi_l + \frac{1}{2}y_{iln}\phi_l\phi_n\right) = \\
=&M_{ij}^* M_{il}\phi_j^*\phi_l + \frac{1}{2}M_{ij}^* y_{iln}\phi_j^*\phi_l\phi_n + \frac{1}{2}M_{il}y_{ijk}^*\phi_l\phi_j^*\phi_k^* + \frac{1}{4}y_{ijk}^* y_{iln}\phi_l\phi_n\phi_j^*\phi_k^* \overset{y_{ijk}=y_{jik}=y_{jki}}{=} \\
=&M_{ki}^* M_{kj}\phi_i^*\phi_j + \frac{1}{2}M_{nj}^* y_{nkl}\phi_j^*\phi_k\phi_l + \frac{1}{2}M_{nl}y_{njk}^*\phi_l\phi_j^*\phi_k^* + \frac{1}{4}y_{jki}^* y_{lni}\phi_l\phi_n\phi_j^*\phi_k^* \overset{M_{ki}=M_{ik}}{=} \\
=&M_{ik}^* M_{kj}\phi_i^*\phi_j + \frac{1}{2}M_{ni}^* y_{njk}\phi_i^*\phi_j\phi_k + \frac{1}{2}M_{ni}y_{njk}^*\phi_i\phi_j^*\phi_k^* + \frac{1}{4}y_{ijn}y_{kln}^*\phi_i\phi_j\phi_k^*\phi_l^* \xRightarrow[y_{njk}=y_{jnk}=y_{jkn}]{M_{ni}=M_{in}} \\
\Rightarrow V(\phi,\phi^*) =&M_{ik}^* M_{kj}\phi_i^*\phi_j + \frac{1}{2}M_{in}y_{jkn}^*\phi_i\phi_j^*\phi_k^* + \frac{1}{2}M_{in}^* y_{jkn}\phi_i^*\phi_j\phi_k + \frac{1}{4}y_{ijn}y_{kln}^*\phi_i\phi_j\phi_k^*\phi_l^*
\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

Αυτό το βαθμωτό δυναμικό είναι πάντοτε μη αρνητικό, αφού είναι το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων των W_i ($W_i^* W_i = \sum_i |W_i|^2$). Εάν αντικαταστήσουμε την έκφραση (4.2.16) για τα W_{ij} στην (4.2.29), λαμβάνουμε την ακόλουθη έκφραση για την πλήρη Lagrangian μίας υπερσυμμετρικής θεωρίας με αλληλεπιδρώσες chiral supermultiplets (όπου έχουμε διώξει τα βοηθητικά πεδία F_i και F_i^* χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} =& \left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_i\right) + i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{2}\left(M_{ij} + y_{ijk}\phi_k\right)\psi_i\psi_j - \\
&- \frac{1}{2}\left(M_{ij}^* + y_{ijk}^*\phi_k^*\right)\overline{\psi}_i\overline{\psi}_j - V(\phi,\phi^*) \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathcal{L} =& \left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_i\right) + i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{2}M_{ij}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2}M_{ij}^*\overline{\psi}_i\overline{\psi}_j - \\
&- V(\phi,\phi^*) - \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_k\left(\psi_i\psi_j\right) - \frac{1}{2}y_{ijk}^*\phi_k^*\left(\overline{\psi}_i\overline{\psi}_j\right)
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Έχει τώρα ενδιαφέρον να εξετάσουμε τους όρους μάζας της Lagrangian (4.2.31). Οι φερμιονικοί όροι μάζας είναι εκείνοι που περιέχουν δύο σπίνορες Weyl χωρίς να περιλαμβάνουν κανένα άλλο πεδίο:

$$\mathcal{L}_{\text{fermion masses}} = -\frac{1}{2}M_{ij}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2}M_{ij}^*\overline{\psi}_i\overline{\psi}_j = \left(-\frac{1}{2}M_{ij}\psi_i\psi_j\right) + c.c. \tag{4.2.32}$$

Οι μποζονικοί όροι μάζας είναι οι όροι που περιέχονται στο $-V(\phi,\phi^*)$ και είναι τετραγωνικοί ως προς τα βαθμωτά πεδία ϕ_i, ϕ_i^*, δηλαδή συνολικής τάξης 2 ως τα πεδία αυτά. Από τις (4.2.30) και (4.2.31) προκύπτει εύκολα ότι οι εν λόγω όροι είναι:

$$\mathcal{L}_{\text{boson masses}} = -M_{ik}^* M_{kj}\phi_i^*\phi_j \tag{4.2.33}$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι μιγαδικές σταθερές M_{ij} είναι στοιχεία ενός συμμετρικού $n\times n$ πίνακα M, όπου n είναι το πλήθος των chiral supermultiplets της θεωρίας. Υπάρχει ένας μοναδιακός $n\times n$ πίνακας Ω και ένας διαγώνιος $n\times n$ πίνακας M_D με στοιχεία πραγματικούς μη αρνητικούς αριθμούς, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\Omega^T M \Omega = M_D \tag{4.2.34}$$

Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος της παραγοντοποίησης Takagi, σύμφωνα με το οποίο για κάθε μιγαδικό συμμετρικό $N\times N$ πίνακα (όπου N θετικός ακέραιος) G, υπάρχει ένας μοναδιακός $N\times N$ πίνακας U, τέτοιος ώστε ο πίνακας $U^T G U$ να είναι διαγώνιος με πραγματικά μη αρνητικά στοιχεία. Ας συμβολίσουμε τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα M_D της (4.2.34) ως m_i, όπου $i = 1, 2, \ldots, n$, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$M_D = \operatorname{diag}\left(m_1, m_2, \ldots, m_n\right), \tag{4.2.35}$$

[3]Θυμηθείτε ότι η $\mathcal{L}$ περιέχει το $-V$

ενώ $m_i \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Από την (4.2.34) έπεται ότι

$$\begin{aligned}\left(\Omega^T M \Omega\right)^\dagger &= M_D^\dagger \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega^\dagger M^\dagger \Omega^* &= M_D^\dagger = M_D\end{aligned} \tag{4.2.36}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (4.2.34) και (4.2.36), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}\left(\Omega^T M \Omega\right)\left(\Omega^\dagger M^\dagger \Omega^*\right) &= \Omega^T M \left(\Omega\Omega^\dagger\right) M^\dagger \Omega^* = M_D^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega^T M M^\dagger \Omega^* &= M_D^2 = \operatorname{diag}\left(m_1^2, m_2^2 \ldots, m_n^2\right),\end{aligned} \tag{4.2.37}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι $\Omega\Omega^\dagger = I_n$, όπου I_n είναι ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας. Βασιζόμενοι στην (4.2.37), μπορούμε να δείξουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα M_D^2 είναι οι ιδιοτιμές του Ερμιτιανού πίνακα $MM^\dagger$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$\Omega^T \Omega^* = \left(\Omega^\dagger \Omega\right)^* = I_n^* = I_n \tag{4.2.38}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Ερμιτιανού πίνακα $MM^\dagger$ είναι:

$$\begin{aligned}\chi_{MM^\dagger}(\lambda) \equiv& \det\left(MM^\dagger - \lambda I_n\right) = \det\left(MM^\dagger - \lambda I_n\right)\underbrace{\det\left(I_n\right)}_{\substack{\| \\ 1}} \overset{(4.2.38)}{=} \\ =& \det\left(MM^\dagger - \lambda I_n\right)\det\left(\Omega^T\Omega^*\right) = \det\left(MM^\dagger - \lambda I_n\right)\det\left(\Omega^T\right)\det\left(\Omega^*\right) = \\ =& \det\left(\Omega^T\right)\det\left(MM^\dagger - \lambda I_n\right)\det\left(\Omega^*\right) = \det\left[\Omega^T\left(MM^\dagger - \lambda I_n\right)\Omega^*\right] = \\ =& \det\left(\Omega^T MM^\dagger\Omega^* - \lambda\Omega^T\Omega^*\right) \xRightarrow[(4.2.38)]{(4.2.37)} \\ \Rightarrow \chi_{MM^\dagger}(\lambda) =& \det\left(M_D^2 - \lambda I_n\right) = \det\left[\operatorname{diag}\left(m_1^2 - \lambda, m_2^2 - \lambda, \ldots, m_n^2 - \lambda\right)\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \chi_{MM^\dagger}(\lambda) =& \left(m_1^2 - \lambda\right)\left(m_2^2 - \lambda\right)\ldots\left(m_n^2 - \lambda\right)\end{aligned} \tag{4.2.39}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα $MM^\dagger$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου, $\chi_{MM^\dagger}(\lambda)$. Έτσι, από την (4.2.39) είναι προφανές ότι οι ιδιοτιμές του $MM^\dagger$ είναι οι $m_1^2, m_2^2, \ldots, m_n^2$, δηλαδή τα διαγώνια στοιχεία του M_D^2. Επομένως, τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα M_D είναι οι μη αρνητικές τετραγωνικές ρίζες των αντίστοιχων ιδιοτιμών του $MM^\dagger$.

Εισάγουμε τώρα τα μιγαδικά βαθμωτά πεδία $\tilde{\phi}_i$ και τα αριστερόστροφα φερμιόνια Weyl $\tilde{\psi}_i$, τα οποία ορίζονται από τις σχέσεις

$$\phi_i = \Omega_{ij}\tilde{\phi}_j \tag{4.2.40}$$

$$\left(\psi_i\right)_\alpha = \Omega_{ij}\left(\tilde{\psi}_j\right)_\alpha, \tag{4.2.41}$$

όπου $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha = 1, 2$, ενώ στα δεύτερα μέλη των (4.2.40) και (4.2.41) υπονοείται ασφαλώς άθροιση ως προς j από 1 έως n. Πολλαπλασιάζοντας την (4.2.40) επί $\left(\Omega^\dagger\right)_{ki}$ από αριστερά, όπου $i, k = 1, 2, \ldots, n$, και αθροίζοντας ως προς i, παίρνουμε:

$$\left(\Omega^\dagger\right)_{ki}\phi_i = \left(\Omega^\dagger\right)_{ki}\Omega_{ij}\tilde{\phi}_j = \left(\Omega^\dagger\Omega\right)_{kj}\tilde{\phi}_j = \delta_{kj}\tilde{\phi}_j = \tilde{\phi}_k$$

ή

$$\tilde{\phi}_i = \left(\Omega^\dagger\right)_{ij}\phi_j \tag{4.2.42}$$

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι από την (4.2.41) έπεται ότι

$$\left(\tilde{\psi}_i\right)_\alpha = \left(\Omega^\dagger\right)_{ij}\left(\psi_j\right)_\alpha \tag{4.2.43}$$

Έτσι, έχουμε εκφράσει τα πεδία $\tilde{\phi}_i, \tilde{\psi}_i$ συναρτήσει των αρχικών πεδίων ϕ_i, ψ_i. Αν αντικαταστήσουμε τις (4.2.40) στην (4.2.33), η τελευταία γίνεται:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{boson masses}} =& - M^*_{ik}M_{kj}\phi^*_i\phi_j = -M^*_{ik}M_{kj}\left(\Omega_{il}\tilde{\phi}_l\right)^*\Omega_{jn}\tilde{\phi}_n = \\
=& - \Omega^*_{il}M^*_{ik}M_{kj}\Omega_{jn}\tilde{\phi}^*_l\tilde{\phi}_n = -\left(\Omega^\dagger\right)_{li}(M^*)_{ik}M_{kj}\Omega_{jn}\tilde{\phi}^*_l\tilde{\phi}_n = \\
=& - \left(\Omega^\dagger M^* M\Omega\right)_{ln}\tilde{\phi}^*_l\tilde{\phi}_n = -\left[\left(\Omega^\dagger M^* M\Omega\right)^T\right]_{nl}\tilde{\phi}^*_l\tilde{\phi}_n = \\
=& - \left(\Omega^T M^T M^\dagger\Omega^*\right)_{nl}\tilde{\phi}^*_l\tilde{\phi}_n \overset{M=M^T}{=} -\left(\Omega^T M M^\dagger\Omega^*\right)_{nl}\tilde{\phi}^*_l\tilde{\phi}_n \overset{(4.2.37)}{=} \\
=& - \left(M^2_D\right)_{nl}\tilde{\phi}^*_l\tilde{\phi}_n = -\sum_{n,l} m^2_n\delta_{nl}\tilde{\phi}^*_l\tilde{\phi}_n \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{boson masses}} =& - \sum_n m^2_n\tilde{\phi}^*_n\tilde{\phi}_n = -\sum_i m^2_i\tilde{\phi}^*_i\tilde{\phi}_i
\end{aligned} \tag{4.2.44}$$

Επομένως, για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο $\tilde{\phi}_i$ έχει μάζα m_i. Επίσης, με αντικατάσταση των (4.2.41) στην (4.2.32), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{fermion masses}} =& \left[-\frac{1}{2}M_{ij}\Omega_{ik}\left(\tilde{\psi}_k\right)^\alpha\Omega_{jl}\left(\tilde{\psi}_l\right)_\alpha\right] + c.c. = \\
=& \left[-\frac{1}{2}\left(\Omega^T\right)_{ki}M_{ij}\Omega_{jl}\left(\tilde{\psi}_k\right)^\alpha\left(\tilde{\psi}_l\right)_\alpha\right] + c.c. = \\
=& \left[-\frac{1}{2}\left(\Omega^T M\Omega\right)_{kl}\tilde{\psi}_k\tilde{\psi}_l\right] + c.c. \overset{(4.2.34)}{=} \\
=& \left[-\frac{1}{2}\left(M_D\right)_{kl}\tilde{\psi}_k\tilde{\psi}_l\right] + c.c. = \left(-\frac{1}{2}\sum_{k,l} m_k\delta_{kl}\tilde{\psi}_k\tilde{\psi}_l\right) + c.c. \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{fermian masses}} =& -\frac{1}{2}\sum_k m_k\left(\tilde{\psi}_k\tilde{\psi}_k + \overline{\tilde{\psi}}_k\overline{\tilde{\psi}}_k\right) \overset{(2.6.45)}{=} -\frac{1}{2}\sum_k m_k\overline{\tilde{\Psi}}_k\tilde{\Psi}_k,
\end{aligned} \tag{4.2.45}$$

όπου έχουμε εισάγει τα φερμιόνια Majorana $\tilde{\Psi}_k = \begin{pmatrix} \left(\tilde{\psi}_k\right)_\alpha \\ \left(\overline{\tilde{\psi}}_k\right)^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$, όπου $k = 1, 2, \ldots, n$. Από την (4.2.45) έπεται ότι για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, το φερμιόνιο Majorana $\tilde{\Psi}_i$ έχει μάζα ίση προς m_i. Έτσι, με την εισαγωγή των ιδιοκαταστάσεων μάζας $\tilde{\phi}_i$, $\tilde{\psi}_i$ λαμβάνουμε ένα σύνολο από μαζικές chiral supermultiplets, καθεμία από τις οποίες περιλαμβάνει ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο $\tilde{\phi}_i$, όπου $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, και το ίσης μάζας με αυτό φερμιόνιο Majorana $\tilde{\Psi}_i = \begin{pmatrix} \left(\tilde{\psi}_i\right)_\alpha \\ \left(\overline{\tilde{\psi}}_i\right)^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$.

Κεφάλαιο 5

Υπερχώρος και υπερπεδία

5.1 Υπερχώρος

Για να κατασκευάσει κανείς υπερσυμμετρικά μοντέλα, επιθυμεί να έχει στη διάθεσή του ένα φορμαλισμό, ο οποίος επιτρέπει να είναι έκδηλη η αναλλοιώτητα μίας δράσης κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, όπως η Lorentz αναλλοιώτητα είναι έκδηλη στην ηλεκτροδυναμική. Ένας τέτοιος φορμαλισμός είναι αυτός των υπερπεδίων, που εισήχθη από τους A. Salam και J. Strathdee[1]. Θεωρήστε για παράδειγμα μία θεωρία διατυπωμένη στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Εν γένει, δεν μπορεί κανείς να αναμένει μία τέτοια θεωρία να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ή Poincaré. Για να λάβει κανείς μία τέτοια σχετικιστικά αναλλοίωτη θεωρία, πρέπει να επεκτείνει τον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο σε έναν επίπεδο ψευδο-Ριμάνειο τετραδιάστατο χώρο, το χώρο Minkowski. Με την εισαγωγή του χρόνου ως πρόσθετη συντεταγμένη, είναι δυνατό να διατυπωθεί η θεωρία με μία σχετικιστικά αναλλοίωτη μορφή. Παρομοίως, δεν είναι δυνατό να έχει κανείς μία έκδηλα υπερσυμμετρική θεωρία στο χώρο Minkowski. Για να λάβουμε ένα φορμαλισμό που επιτρέπει την κατασκευή έκδηλα $N = 1$ υπερσυμμετρικών θεωριών, πρέπει να επεκτείνουμε το χώρο Miknowski στον ($N = 1$) υπερχώρο. Ο υπερχώρος είναι μία πολλαπλότητα, την οποία λαμβάνουμε προσθέτοντας στις συνήθεις μετατιθέμενες μποζονικές χωροχρονικές συντεταγμένες x^μ, όπου $\mu = 0, 1, 2, 3$, τέσσερις φερμιονικές συντεταγμένες θ_α και $\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$, όπου $\alpha = 1, 2$ και $(\theta_\alpha)^* = \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Αυτές οι φερμιονικές συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες του x μεταβλητές Grassmann, που σημαίνει ότι αντιμετατίθενται μεταξύ τους:

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \left\{\theta_\alpha, \overline{\theta}_{\dot{\beta}}\right\} = \left\{\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}, \overline{\theta}_{\dot{\beta}}\right\} = 0, \tag{5.1.1}$$

για κάθε $\alpha, \beta = 1, 2$, $\dot{\alpha}, \dot{\beta} = \dot{1}, \dot{2}$, ενώ μετατίθενται με τις συνήθεις χωροχρονικές συντεταγμένες. Τα θ_α και $\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$, θεωρούμενα ως αντικείμενα δύο συνιστωσών (θ_1, θ_2 και $\overline{\theta}_{\dot{1}}, \overline{\theta}_{\dot{2}}$ αντίστοιχα), μετασχηματίζονται κάτω από την ομάδα $SL(2, C)$ (ή, ισοδύναμα, την $SO(1,3)^\uparrow$) ως αριστερόστροφος και δεξιόστροφος σπίνορας Weyl αντίστοιχα. Κατά τα γνωστά, οι αντίστοιχοι σταθεροί (ανεξάρτητοι του x) σπίνορες Weyl με άνω σπινοριακούς δείκτες δίνονται από τις σχέσεις:

$$\theta^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta, \ \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\theta}_{\dot{\beta}} \tag{5.1.2}$$

Οι φερμιονικές συντεταγμένες θ_α και $\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$ έχουν διάσταση μάζας $-\frac{1}{2}$, ενώ επισημαίνουμε ότι οι $\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$, όπου $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$, θεωρούνται ανεξάρτητες των θ_α, όπου $\alpha = 1, 2$, και το αντίστροφο. Εν τέλει, οι συντεταγμένες στον υπερχώρο, γνωστές και ως υπερσυντεταγμένες, είναι $\left(x^\mu, \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\right) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3, \theta_1, \theta_2, \overline{\theta}_{\dot{1}}, \overline{\theta}_{\dot{2}}\right)$.

Ο φορμαλισμός του υπερχώρου μας παρέχει μία εναλλακτική μέθοδο εύρεσης μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της άλγεβρας της $N = 1$ υπερσυμμετρίας και είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στην πραγματοποίηση υπολογισμών. Επιδιώκουμε να κατασκευάσουμε μία αναπαράσταση της άλγεβρας της

[1]Παραπέμπουμε στους A. Salam και J. Strathdee [32] και S. Ferrara, J. Wess και B. Zumino [33].

απλής υπερσυμμετρίας αποτελούμενη από διαφορικούς τελεστές που δρουν σε συναρτήσεις στον υπερχώρο, οι οποίες είναι γνωστές ως υπερπεδία. Για να το πετύχουμε αυτό, πρέπει να έχουμε στη διάθεσή μας ένα λογισμό παραγώγισης ως προς μεταβλητές Grassmann, τον οποίο και εισάγουμε στην επόμενη ενότητα.

5.2 Παραγώγιση ως προς μεταβλητές Grassmann

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο N μεταβλητών Grassmann $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$. Ισχύει:

$$\{a_i, a_j\} = 0, \ \forall \ i, j = 1, 2, \dots, N$$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διαφορικό λογισμό για αυτές τις μεταβλητές Grassmann. Ορίζουμε την παράγωγο της μεταβλητής a_i ως προς την a_j ως

$$\frac{\partial a_i}{\partial a_j} = \delta_{ij} \tag{5.2.1}$$

για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Για να λάβουμε ένα κανόνα γινομένου, πρέπει να λάβουμε υπόψη τον αντιμεταθετικό χαρακτήρα των μεταβλητών a_i. Ο κανόνας γινομένου στο διαφορικό λογισμό για το σύνολο των μεταβλητών Grassmann που θεωρήσαμε δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_p}\left(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r}\right) =& \frac{\partial a_{i_1}}{\partial a_p} a_{i_2} \dots a_{i_r} - a_{i_1} \frac{\partial a_{i_2}}{\partial a_p} a_{i_3} \dots a_{i_r} + \dots \\
&+ (-1)^{r-1} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{r-1}} \frac{\partial a_{i_r}}{\partial a_p} \xRightarrow{(5.2.1)} \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a_p}\left(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r}\right) =& \delta_{p i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r} - \delta_{p i_2} a_{i_1} a_{i_3} \dots a_{i_r} + \dots \\
&+ (-1)^{r-1} \delta_{p i_r} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{r-1}}
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

για κάθε $p = 1, 2, \dots, N$, όπου r ακέραιος με $1 \leq r \leq N$ και $i_k \in \{1, 2, \dots, N\}$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, r$. Ισχύει επίσης ότι

$$\left\{\frac{\partial}{\partial a_p}, a_r\right\} = \delta_{pr} \tag{5.2.3}$$

για κάθε $p, r = 1, 2, \dots, N$. Για να αποδείξουμε την (5.2.3), θεωρούμε μία τυχαία συνάρτηση f των μεταβλητών Grassmann a_i. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{\partial}{\partial a_p}, a_r\right\} f =& \frac{\partial}{\partial a_p}\left(a_r f\right) + a_r \frac{\partial f}{\partial a_p} \overset{(5.2.2)}{=} \\
=& \frac{\partial a_r}{\partial a_p} f - a_r \frac{\partial f}{\partial a_p} + a_r \frac{\partial f}{\partial a_p} \overset{(5.2.1)}{=} \\
=& \delta_{rp} f
\end{aligned}$$

για αυθαίρετη συνάρτηση $f(a_1, a_2, \dots, a_N)$. Συνεπώς, αληθεύει η (5.2.3). Ακόμη, για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(a_1, a_2, \dots, a_N)$ είναι:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a_i} \frac{\partial}{\partial a_j} f\left(a_1, a_2, \dots, a_N\right) = -\frac{\partial}{\partial a_j} \frac{\partial}{\partial a_i} f\left(a_1, a_2, \dots, a_N\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial a_i}, \frac{\partial}{\partial a_j}\right\} f\left(a_1, a_2, \dots, a_N\right) = 0
\end{aligned}$$

για κάθε $i,j=1,2,\dots,N$, οπότε ισχύει η ισότητα τελεστών

$$\left\{\frac{\partial}{\partial a_i},\frac{\partial}{\partial a_j}\right\}=0 \tag{5.2.4}$$

για κάθε $i,j=1,2,\dots,N$.

Με δεδομένη τη γενική σχέση (5.2.1), οι παράγωγοι ως προς τις αντιμετατιθέμενες φερμιονικές συντεταγμένες του $N=1$ υπερχώρου ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}(\theta_\beta)=\delta^\alpha_\beta,\ \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\theta^\beta\right)=\delta^\beta_\alpha,\ \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}(\theta_\beta)=0,\ \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\left(\theta^\beta\right)=0 \tag{5.2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}\left(\overline{\theta}_{\dot\beta}\right)=\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta},\ \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\left(\overline{\theta}^{\dot\beta}\right)=\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha},\ \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\left(\overline{\theta}_{\dot\beta}\right)=0,\ \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\overline{\theta}^{\dot\beta}\right)=0 \tag{5.2.6}$$

για κάθε $\alpha,\beta=1,2,\ \dot\alpha,\dot\beta=\dot1,\dot2$, όπου ουσιαστικά έχουμε εφαρμόσει τις (5.2.1) για τα σύνολα μεταβλητών Grassmann $\left\{\theta_1,\theta_2,\overline{\theta}_{\dot1},\overline{\theta}_{\dot2}\right\}$ και $\left\{\theta^1,\theta^2,\overline{\theta}^{\dot1},\overline{\theta}^{\dot2}\right\}$, ενώ υπενθυμίζουμε ότι οι $\overline{\theta}_{\dot1},\overline{\theta}_{\dot2}$ (αντίστοιχα οι $\overline{\theta}^{\dot1},\overline{\theta}^{\dot2}$) θεωρούνται ανεξάρτητες των θ_1,θ_2 (αντίστοιχα θ^1,θ^2). Από τις (5.2.5) και (5.2.6) έπονται τα ακόλουθα:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\left(\theta^\beta\right)=\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\left(\varepsilon^{\beta\gamma}\theta_\gamma\right)=\varepsilon^{\beta\gamma}\frac{\partial\theta_\gamma}{\partial\theta_\alpha}\overset{(5.2.5)}{=}\varepsilon^{\beta\gamma}\delta^\alpha_\gamma=\varepsilon^{\beta\alpha}=-\varepsilon^{\alpha\beta} \tag{5.2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta_\beta)=\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\varepsilon_{\beta\gamma}\theta^\gamma\right)=\varepsilon_{\beta\gamma}\frac{\partial\theta^\gamma}{\partial\theta^\alpha}\overset{(5.2.5)}{=}\varepsilon_{\beta\gamma}\delta^\gamma_\alpha=\varepsilon_{\beta\alpha}=-\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{5.2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}\left(\overline{\theta}^{\dot\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}\left(\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\overline{\theta}_{\dot\gamma}\right)=\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\frac{\partial\overline{\theta}_{\dot\gamma}}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}\overset{(5.2.6)}{=}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\gamma}=\varepsilon^{\dot\beta\dot\alpha}=-\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \tag{5.2.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\left(\overline{\theta}_{\dot\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\left(\varepsilon_{\dot\beta\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma}\right)=\varepsilon_{\dot\beta\dot\gamma}\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot\gamma}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\overset{(5.2.6)}{=}\varepsilon_{\dot\beta\dot\gamma}\delta^{\dot\gamma}_{\dot\alpha}=\varepsilon_{\dot\beta\dot\alpha}=-\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \tag{5.2.10}$$

ενώ

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}\left(\theta^\beta\right)=\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}(\theta_\beta)=\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\left(\overline{\theta}^{\dot\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\overline{\theta}_{\dot\beta}\right)=0 \tag{5.2.11}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα και τον κανόνα γινομένου (5.2.2), μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους των Lorentz αναλλοίωτων διγραμμικών συνδυασμών $\theta\theta\equiv\theta^\alpha\theta_\alpha$ και $\overline{\theta}\,\overline{\theta}\equiv\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}$ ως προς τις μεταβλητές Grassmann $\theta_\alpha,\theta^\alpha,\overline{\theta}_{\dot\alpha}$ και $\overline{\theta}^{\dot\alpha}$, όπου $\alpha=1,2,\ \dot\alpha=\dot1,\dot2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}(\theta\theta)=&\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\left(\theta^\beta\theta_\beta\right)\overset{(5.2.2)}{=}\frac{\partial\theta^\beta}{\partial\theta_\alpha}\theta_\beta-\theta^\beta\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\theta_\alpha}\overset{(5.2.5),(5.2.7)}{=}\\ =&-\varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta-\theta^\beta\delta^\alpha_\beta\Rightarrow\\ \Rightarrow\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}(\theta\theta)=&-\theta^\alpha-\theta^\alpha=-2\theta^\alpha\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta\theta)=&\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\theta^\beta\theta_\beta\right)\overset{(5.2.2)}{=}\frac{\partial\theta^\beta}{\partial\theta^\alpha}\theta_\beta-\theta^\beta\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\theta^\alpha}\overset{(5.2.5),(5.2.8)}{=}\\ =&\delta^\beta_\alpha\theta_\beta-\theta^\beta\left(-\varepsilon_{\alpha\beta}\right)=\delta^\beta_\alpha\theta_\beta+\varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\beta\Rightarrow\\ \Rightarrow\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta\theta)=&\theta_\alpha+\theta_\alpha=2\theta_\alpha\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

Επίσης, είναι προφανές ότι

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}(\theta\theta)=\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}(\theta\theta)=0 \tag{5.2.14}$$

Ακόμα, είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right) =&\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}_{\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\right) \overset{(5.2.2)}{=} \frac{\partial\overline{\theta}_{\dot{\beta}}}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}} - \overline{\theta}_{\dot{\beta}}\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} \overset{(5.2.6),(5.2.9)}{=}\\ =&\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}} - \overline{\theta}_{\dot{\beta}}\left(-\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\right) \Rightarrow\\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right) =&\overline{\theta}^{\dot{\alpha}} + \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\theta}_{\dot{\beta}} = 2\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right) =&\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}_{\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\right) \overset{(5.2.2)}{=} \frac{\partial\overline{\theta}_{\dot{\beta}}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}} - \overline{\theta}_{\dot{\beta}}\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} \overset{(5.2.6),(5.2.10)}{=}\\ =&-\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}} - \overline{\theta}_{\dot{\beta}}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \Rightarrow\\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right) =&-\overline{\theta}_{\dot{\alpha}} - \overline{\theta}_{\dot{\alpha}} = -2\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right) = 0 \tag{5.2.17}$$

Αν ψ είναι ένας αριστερόστροφος σπίνορας Weyl εξαρτώμενος εν γένει από τις χωροχρονικές συντεταγμένες x^{μ}, έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}\left(\theta\psi\right) =&\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}\left(\theta^{\beta}\psi_{\beta}\right) = \frac{\partial\theta^{\beta}}{\partial\theta_{\alpha}}\psi_{\beta} - \theta^{\beta}\underbrace{\frac{\partial\psi_{\beta}}{\partial\theta_{\alpha}}}_{=0} \overset{(5.2.7)}{=} -\varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta} \Rightarrow\\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}\left(\theta\psi\right) =&-\psi^{\alpha}\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\theta\psi\right) =&\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\theta^{\beta}\psi_{\beta}\right) = \frac{\partial\theta^{\beta}}{\partial\theta^{\alpha}}\psi_{\beta} - \theta^{\beta}\underbrace{\frac{\partial\psi_{\beta}}{\partial\theta^{\alpha}}}_{=0} \overset{(5.2.5)}{=} \delta^{\beta}_{\alpha}\psi_{\beta} \Rightarrow\\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\theta\psi\right) =&\psi_{\alpha}\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

ενώ

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\left(\theta\psi\right) = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(\theta\psi\right) = 0 \tag{5.2.20}$$

Από την άλλη μεριά, για έναν τυχαίο δεξιόστροφο σπίνορα Weyl $\overline{\chi}$ εξαρτώμενο από τις συνήθεις χωροχρονικές συντεταγμένες, είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}\overline{\chi}\right) =&\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}_{\dot{\beta}}\overline{\chi}^{\dot{\beta}}\right) = \frac{\partial\overline{\theta}_{\dot{\beta}}}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\overline{\chi}^{\dot{\beta}} - \overline{\theta}_{\dot{\beta}}\underbrace{\frac{\partial\overline{\chi}^{\dot{\beta}}}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}}_{=0} \overset{(5.2.6)}{=} \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\overline{\chi}^{\dot{\beta}} \Rightarrow\\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}\overline{\chi}\right) =&\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}\overline{\chi}\right) =\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}_{\dot{\beta}}\overline{\chi}^{\dot{\beta}}\right) = \frac{\partial\overline{\theta}_{\dot{\beta}}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\overline{\chi}^{\dot{\beta}} - \overline{\theta}_{\dot{\beta}}\underbrace{\frac{\partial\overline{\chi}^{\dot{\beta}}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}}_{=0} \overset{(5.2.10)}{=} -\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\chi}^{\dot{\beta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}\overline{\chi}\right) = -\,\overline{\chi}_{\dot{\alpha}} \tag{5.2.22}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}\left(\overline{\theta}\overline{\chi}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\overline{\theta}\overline{\chi}\right) = 0 \tag{5.2.23}$$

Επιπλέον, μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} = -\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_{\beta}} \tag{5.2.24}$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} = \frac{\partial\theta_{\gamma}}{\partial\theta^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\theta_{\gamma}} \overset{(5.2.8)}{=} -\varepsilon_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta_{\gamma}} = -\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_{\beta}}$$

Με πολλαπλασιασμό της (5.2.24) επί $\varepsilon^{\gamma\alpha}$ από αριστερά προκύπτει ότι

$$\varepsilon^{\gamma\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} = -\varepsilon^{\gamma\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_{\beta}} = -\delta^{\gamma}_{\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_{\beta}} = -\frac{\partial}{\partial\theta_{\gamma}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}} = -\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}} \tag{5.2.25}$$

Εργαζόμενοι με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} = -\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\beta}}},\ \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} = -\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}} \tag{5.2.26}$$

Τέλος, εάν εφαρμόσουμε την (5.2.4) για το σύνολο μεταβλητών Grassmann $\left\{\theta_1, \theta_2, \overline{\theta}_{\dot{1}}, \overline{\theta}_{\dot{2}}\right\}$ και λάβουμε υπόψη και τις σχέσεις (5.2.24) και (5.2.26), λαμβάνουμε τα ακόλουθα:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial\theta_{\beta}}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}\right\} = 0 \tag{5.2.27}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\beta}}}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\beta}}}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right\} = 0 \tag{5.2.28}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\beta}}}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\beta}}}\right\} = 0 \tag{5.2.29}$$

για κάθε $\alpha, \beta = 1, 2,\ \dot{\alpha}, \dot{\beta} = \dot{1}, \dot{2}$.

5.3 Υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί

5.3.1 Πεπερασμένοι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί

Στην ενότητα 4.1 συζητήσαμε για απειροστές μεταβολές (δ_{ξ}) των πεδίων που εμφανίζονται στο άμαζο και ελεύθερο μοντέλο των Wess και Zumino. Τέτοιες μεταβολές αντιστοιχούν σε απειροστούς υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Με τη χρήση του φορμαλισμού του υπερχώρου και των υπερπεδίων μπορούμε να ορίσουμε πεπερασμένους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς ως μετατοπίσεις στον υπερχώρο. Για το σκοπό αυτό, αρχικά θεωρούμε το κομμάτι της άλγεβρας της $N = 1$ υπερσυμμετρίας που δεν περιλαμβάνει τους γεννήτορες $M_{\mu\nu}$ της ομάδας Lorentz, δηλαδή τις σχέσεις μετάθεσης και αντιμετάθεσης μεταξύ των φερμιονικών γεννητόρων $Q_{\alpha}, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}$ και των γεννητόρων των μετατοπίσεων στο χώρο Minkowski, P_{μ}:

$$[P_{\mu}, Q_{\alpha}] = \left[P_{\mu}\overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = [P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \tag{5.3.1}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \left\{\overline{Q}_{\dot{\alpha}}, \overline{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 0 \tag{5.3.2}$$

$$\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 2\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \tag{5.3.3}$$

και ορίζουμε ένα στοιχείο της αντίστοιχης ομάδας ως

$$G\left(x, \theta, \overline{\theta}\right) = e^{i\left(x^\mu P_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha + \overline{\theta}_{\dot{\alpha}} \overline{Q}^{\dot{\alpha}}\right)} = e^{i\left(x^\mu P_\mu + \theta Q + \overline{\theta}\ \overline{Q}\right)} \tag{5.3.4}$$

όπου οι συντελεστές x^μ, θ^α και $\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$ των γεννητόρων P_μ, Q_α και $\overline{Q}^{\dot{\alpha}}$ αντίστοιχα στο εκθετικό στο δεύτερο μέλος της (5.3.4) είναι οι (υπερ)συντεταγμένες ενός σημείου στον $N = 1$ υπερχώρο. Τα στοιχεία $G\left(x, \theta, \overline{\theta}\right)$ είναι μοναδιακοί τελεστές (αφού $P_\mu^\dagger = P_\mu$ και $(\theta Q)^\dagger = \overline{\theta}\ \overline{Q}$) που δρουν σε ένα χώρο Hilbert με κβαντικές σωματιδιακές καταστάσεις.

Είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε το γινόμενο $G\left(a, \xi, \overline{\xi}\right) G\left(x, \theta, \overline{\theta}\right)$ για οποιαδήποτε δύο σημεία $\left(a^\mu, \xi_\alpha, \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\right)$ και $\left(x^\mu, \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\right)$ του υπερχώρου. Με βάση την (5.3.4) έχουμε:

$$G\left(a, \xi, \overline{\xi}\right) G\left(x, \theta, \overline{\theta}\right) = e^{i\left(a^\mu P_\mu + \xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}\right)} e^{i\left(x^\mu P_\mu + \theta Q + \overline{\theta}\ \overline{Q}\right)} \tag{5.3.5}$$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου μέλους της (5.3.5), θέτουμε

$$A = i\left(a^\mu P_\mu + \xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}\right) \tag{5.3.6}$$

$$B = i\left(x^\mu P_\mu + \theta Q + \overline{\theta}\ \overline{Q}\right) \tag{5.3.7}$$

και εφαρμόζουμε τον τύπο των Baker, Campbell και Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{12}[B,[B,A]] + \ldots} \tag{5.3.8}$$

Είναι:

$$\begin{aligned}
[A, B] =& \left[i\left(a^\mu P_\mu + \xi Q + \overline{\xi Q}\right), i\left(x^\nu P_\nu + \theta Q + \overline{\theta Q}\right)\right] = \\
=& i^2 \Big(a^\mu x^\nu \cancelto{0}{[P_\mu, P_\nu]} + a^\mu \cancelto{0}{[P_\mu, \theta Q]} + a^\mu \cancelto{0}{\left[P_\mu, \overline{\theta}\ \overline{Q}\right]} + x^\nu \cancelto{0}{[\xi Q, P_\nu]} + \\
& + \cancelto{0}{[\xi Q, \theta Q]} + \left[\xi Q, \overline{\theta Q}\right] + x^\nu \cancelto{0}{\left[\overline{\xi Q}, P_\nu\right]} + \left[\overline{\xi Q}, \theta Q\right] + \cancelto{0}{\left[\overline{\xi Q}, \overline{\theta Q}\right]} \Big)^0 = \\
=& -\left(\left[\xi Q, \overline{\theta}\ \overline{Q}\right] - \left[\theta Q, \overline{\xi}\ \overline{Q}\right]\right) = -2\left(\xi \sigma^\mu \overline{\theta}\right) P_\mu + 2\left(\theta \sigma^\mu \overline{\xi}\right) P_\mu \Rightarrow \\
\Rightarrow [A, B] =& -2\left(\xi \sigma^\mu \overline{\theta}\right) P_\mu - 2\left(\overline{\xi} \overline{\sigma}^\mu \theta\right) P_\mu
\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

όπου κάναμε χρήση των (4.1.16), (4.1.19) και (4.1.20). Επίσης, έχουμε:

$$\begin{aligned}
[A, [A, B]] \overset{(5.3.9)}{=}& \left[i\left(a^\mu P_\mu + \xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}\right), -2\left(\xi \sigma^\nu \overline{\theta} + \overline{\xi} \overline{\sigma}^\nu \theta\right) P_\nu\right] = \\
=& -2i\left(\xi \sigma^\nu \overline{\theta} + \overline{\xi} \overline{\sigma}^\nu \theta\right) \Big(a^\mu \cancelto{0}{[P_\mu, P_\nu]} + \cancelto{0}{[\xi Q, P_\nu]} + \cancelto{0}{\left[\overline{\xi Q}, P_\nu\right]} \Big)^0 \Rightarrow \\
\Rightarrow [A, [A, B]] =& 0
\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

$$\begin{aligned}
[B, [B, A]] =& -[B, [A, B]] \overset{(5.3.9)}{=} \\
=& -\left[i\left(x^\mu P_\mu + \theta Q + \overline{\theta}\ \overline{Q}\right), -2\left(\xi \sigma^\nu \overline{\theta} + \overline{\xi} \overline{\sigma}^\nu \theta\right) P_\nu\right] = \\
=& 2i\left(\xi \sigma^\nu \overline{\theta} + \overline{\xi} \overline{\sigma}^\nu \theta\right) \Big(x^\mu \cancelto{0}{[P_\mu, P_\nu]} + \cancelto{0}{[\theta Q, P_\nu]} + \cancelto{0}{\left[\overline{\theta}\ \overline{Q}, P_\nu\right]} \Big)^0 \Rightarrow \\
\Rightarrow [B, [B, A]] =& 0
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Συνεπώς, όλοι οι μεταθέτες, στους οποίους αντιστοιχούν τα αποσιωπητικά στο εκθετικό του δεύτερου μέλος της (5.3.8), είναι επίσης μηδενικοί. Έτσι, συνδυάζοντας τις (5.3.5)-(5.3.11), παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
G\left(a,\xi,\overline{\xi}\right)G\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) =& e^{i\left(a^\mu P_\mu+\xi Q+\overline{\xi}\ \overline{Q}\right)+i\left(x^\mu P_\mu+\theta Q+\overline{\theta}\ \overline{Q}\right)+\frac{1}{2}(-2)(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}+\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta)P_\mu} = \\
=& e^{\left(ix^\mu+ia^\mu-\xi\sigma^\mu\overline{\theta}-\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)P_\mu+i(\theta+\xi)Q+i\left(\overline{\theta}+\overline{\xi}\right)\overline{Q}} = \\
=& e^{i\left[\left(x^\mu+a^\mu+i\xi\sigma^\mu\overline{\theta}+i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)P_\mu+(\theta+\xi)Q+\left(\overline{\theta}+\overline{\xi}\right)\overline{Q}\right]} \xRightarrow{(5.3.4)} \\
\Rightarrow G\left(a,\xi,\overline{\xi}\right)G\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) =& G\left(x+a+i\xi\sigma\overline{\theta}+i\overline{\xi}\overline{\sigma}\theta,\theta+\xi,\overline{\theta}+\overline{\xi}\right)
\end{aligned} \tag{5.3.12}
$$

Εισάγουμε τώρα την έννοια του υπερπεδίου. Ένα υπερπεδίο είναι μία συνάρτηση ορισμένη στον υπερχώρο που μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά δυνάμεων των φερμιονικών συντεταγμένων θ_α, $\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$, οι συντελεστές της οποίας είναι συναρτήσεις των χωροχρονικών συντεταγμένων x^μ. Επειδή οι φερμιονικές συντεταγμένες είναι αντιμετατιθέμενες μεταβλητές Grassmann, (βλ. σχέσεις (5.1.1)), η σειρά αυτή έχει πάντα πεπερασμένο αριθμό όρων, καθένας από τους οποίους περιέχει το πολύ δύο θ και το πολύ δύο $\overline{\theta}$. Έτσι, ένα Lorentz αναλλοίωτο υπερπεδίο $S\left(x,\theta,\overline{\theta}\right)$ έχει τη μορφή:

$$
\begin{aligned}
S\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) =& f(x)+\theta^\alpha\phi_\alpha(x)+\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}(x)+(\theta\theta)\,m(x)+\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)n(x)+ \\
&+\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)V_\mu(x)+(\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\rho}^{\dot{\alpha}}(x)+\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)d(x) = \\
=& f(x)+\theta\phi(x)+\overline{\theta}\overline{\chi}(x)+(\theta\theta)\,m(x)+\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)n(x)+ \\
&+\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)V_\mu(x)+(\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\rho}(x)+\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)\theta\psi(x)+(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)d(x)
\end{aligned} \tag{5.3.13}
$$

όπου τα $f(x), m(x), n(x)$ και $d(x)$ είναι μιγαδικά βαθμωτά πεδία, $V_\mu(x)$ είναι ένα μιγαδικό διανυσματικό πεδίο, τα $\phi(x)$ και $\psi(x)$ είναι αριστερόστροφα σπινοριακά πεδία Weyl, ενώ τα $\overline{\chi}(x)$ και $\overline{\rho}(x)$ είναι δεξιόστροφα σπινοριακά πεδία Weyl. Όλα αυτά τα πεδία καλούνται πεδία-συνιστώσες (component fields) του υπερπεδίου S. Η σχέση (5.3.13) μας δίνει τη γενικότερη δυνατή μορφή για ένα Lorentz αναλλοίωτο υπερπεδίο. Πράγματι, εάν λάβουμε υπόψη τις ταυτότητες (2.5.27)-(2.5.37) και τη σχέση $\theta\sigma^\mu\overline{\theta}=-\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta$, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι κάθε Lorentz αναλλοίωτος όρος με το πολύ δύο θ και το πολύ δύο $\overline{\theta}$ που μπορεί να κατασκευαστεί είναι δυνατόν να απορροφηθεί σε έναν από τους όρους του αναπτύγματος ως προς $\theta,\overline{\theta}$ στη σχέση (5.3.13). Στο παρόν κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε μόνο με Lorentz αναλλοίωτα υπερπεδία, τα οποία είναι της μορφής (5.3.13). Φυσικά, μπορεί κανείς να έχει τετραδιανυσματικά ή/και σπινοριακά υπερπεδία (τα οποία φέρουν τετραδιανυσματικό και σπινοριακό δείκτη αντίστοιχα). Στο επόμενο κεφάλαιο, θα εισάγουμε σπινοριακά υπερπεδία με αντιμετατιθέμενες συνιστώσες για την κατασκευή Lagrangians για υπερσυμμετρικές θεωρίες βαθμίδας.

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό ενός πεπερασμένου υπερσυμμετρικού μετασχηματισμού, ο οποίος αποτελεί ουσιαστικά μία μετατόπιση στον υπερχώρο, υπενθυμίζουμε ότι κάτω από μία μετατόπιση $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ στο χώρο Minkowski, ένα κβαντικό πεδίο $\hat{\phi}(x)$ μετασχηματίζεται ως

$$
\hat{\phi}(x) \to \hat{\phi}(x+a) = e^{ia^\mu P_\mu}\hat{\phi}(x)e^{-ia^\nu P_\nu} \tag{5.3.14}
$$

Από την (5.3.14) έπεται ότι $\hat{\phi}(a) = e^{ia^\mu P_\mu}\hat{\phi}(0)e^{-ia^\nu P_\nu}$ για κάθε $a^\mu \in M_4$ (όπου με M_4 συμβολίζουμε το χώρο Minkowski), οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$
\hat{\phi}(x) = e^{ix^\mu P_\mu}\hat{\phi}(0)e^{-ix^\nu P_\nu} \tag{5.3.15}
$$

για κάθε $x^\mu \in M_4$. Απαιτούμε να ισχύει μία ανάλογη με την (5.3.15) σχέση για ένα υπερπεδίο $S(x,\theta,\overline{\theta})$:

$$
S(x,\theta,\overline{\theta}) = G(x,\theta,\overline{\theta})S(0,0,0)\left(G(x,\theta,\overline{\theta})\right)^{-1}, \tag{5.3.16}
$$

όπου το $G(x,\theta,\overline{\theta})$ δίνεται από την (5.3.4), ενώ το (0,0,0) είναι ένα σημείο αναφοράς στον υπερχώρο.

Κάτω από έναν πεπερασμένο υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που χαρακτηρίζεται από ανεξάρτητες των χωροχρονικών συντεταγμένων x^μ παραμέτρους Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dot\alpha = \dot 1, \dot 2$), τον οποίο θα συμβολίζουμε με T_ξ, ένα υπερεπίπεδο S μετασχηματίζεται ως

$$S(x,\theta,\overline{\theta}) \to T_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) = G(0,\xi,\overline{\xi}) S(x,\theta,\overline{\theta}) \left(G(0,\xi,\overline{\xi})\right)^{-1} \tag{5.3.17}$$

Αντικαθιστώντας την (5.3.16) στην (5.3.17) και εφαρμόζοντας στη συνέχεια την (5.3.12) (για $a = 0$). λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} T_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) =& G(0,\xi,\overline{\xi}) S(x,\theta,\overline{\theta}) \left(G(0,\xi,\overline{\xi})\right)^{-1} \overset{(5.3.16)}{=} \\ =& G(0,\xi,\overline{\xi}) G(x,\theta,\overline{\theta}) S(0,0,0) \left(G(x,\theta,\overline{\theta})\right)^{-1} \left(G(0,\xi,\overline{\xi})\right)^{-1} = \\ =& G(0,\xi,\overline{\xi}) G(x,\theta,\overline{\theta}) S(0,0,0) \left(G(0,\xi,\overline{\xi}) G(x,\theta,\overline{\theta})\right)^{-1} \overset{(5.3.12)}{=} \\ =& G\left(x + i\xi\sigma\overline{\theta} + i\overline{\xi}\overline{\sigma}\theta, \theta+\xi, \overline{\theta}+\overline{\xi}\right) S(0,0,0) \times \\ & \times \left(G\left(x + i\xi\sigma\overline{\theta} + i\overline{\xi}\overline{\sigma}\theta, \theta+\xi, \overline{\theta}+\overline{\xi}\right)\right)^{-1} \xRightarrow{(5.3.16)} \\ \Rightarrow T_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) =& S\left(x + i\xi\sigma\overline{\theta} + i\overline{\xi}\overline{\sigma}\theta, \theta+\xi, \overline{\theta}+\overline{\xi}\right) \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Από την τελευταία σχέση καθίσταται σαφές ότι μπορούμε να δούμε έναν υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό T_ξ ως μία μετατόπιση στον υπερχώρο με:

$$\theta_\alpha \to \theta_\alpha + \xi_\alpha \tag{5.3.19}$$

$$\overline{\theta}_{\dot\alpha} \to \overline{\theta}_{\dot\alpha} + \overline{\xi}_{\dot\alpha} \tag{5.3.20}$$

$$x^\mu \to x^\mu + i\xi\sigma^\mu\overline{\theta} + i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta \tag{5.3.21}$$

5.3.2 Απειροστοί υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί

Ας θεωρήσουμε έναν υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό T_ξ, η δράση του οποίου πάνω σε ένα υπερπεδίο S δίνεται από την (5.3.18), και ο οποίος είναι απειροστός, δηλαδή παραμετροποιείται από απειροστές μεταβλητές Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$. Η μεταβολή ενός υπερπεδίου $S(x,\theta,\overline{\theta})$ κάτω από τον εν λόγω μετασχηματισμό είναι:

$$\begin{aligned} \delta_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) =& T_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) - S(x,\theta,\overline{\theta}) \xRightarrow{(5.3.18)} \\ \Rightarrow \delta_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) =& S\left(x + i\xi\sigma\overline{\theta} + i\overline{\xi}\overline{\sigma}\theta, \theta+\xi, \overline{\theta}+\overline{\xi}\right) - S(x,\theta,\overline{\theta}) \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

Αναπτύσσουμε κατά Taylor τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της (5.3.22) γύρω από το $(x,\theta,\overline{\theta})$:

$$\begin{aligned} S\left(x + i\xi\sigma\overline{\theta} + i\overline{\xi}\overline{\sigma}\theta, \theta+\xi, \overline{\theta}+\overline{\xi}\right) =& S(x,\theta,\overline{\theta}) + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta} + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu S + \\ & + \xi^\alpha \frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha} + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} + \ldots, \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

όπου τα αποσιωπητικά αντιστοιχούν σε όρους συνολικής τάξης ≥ 2 ως προς $\xi, \overline{\xi}$, τους οποίους θα αγνοήσουμε, αφού έχουμε θεωρήσει απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό. Αντικαθιστώντας την (5.3.23) στην (5.3.22) (και αγνοώντας τους όρους των αποσιωπητικών), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \delta_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) =& i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta} + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu S + \xi^\alpha\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha} + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} = \\ =& \xi^\alpha\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha} + i\xi^\alpha\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu S + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} + i\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\theta_\beta\partial_\mu S \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) =& \left\{\xi^\alpha\left[\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu\right] + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} + i\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\theta_\beta\partial_\mu\right]\right\} S = \end{aligned}$$

$$= - i\left\{\xi^\alpha\left[i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu\right] + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[i\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} - (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\theta_\beta\partial_\mu\right]\right\}S \qquad (5.3.24)$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την (5.3.17), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) =& T_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) - S(x,\theta,\overline{\theta}) \overset{(5.3.17)}{=} \\
=& G(0,\xi,\overline{\xi})S(x,\theta,\overline{\theta})\left(G(0,\xi,\overline{\xi})\right)^{-1} - S(x,\theta,\overline{\theta}) \overset{(5.3.4)}{=} \\
=& e^{i\left(\xi Q+\overline{\xi}\ \overline{Q}\right)}S(x,\theta,\overline{\theta})e^{-i\left(\xi Q+\overline{\xi}\ \overline{Q}\right)} - S(x,\theta,\overline{\theta}) \overset{\text{Taylor}}{=} \\
=& \left[I + i\left(\xi Q + \overline{\xi Q}\right) + \dots\right]S(x,\theta,\overline{\theta})\left[I - i\left(\xi Q + \overline{\xi Q}\right) + \dots\right] - S(x,\theta,\overline{\theta}) = \\
=& \cancel{S(x,\theta,\overline{\theta})} + i\left(\xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}\right)S(x,\theta,\overline{\theta}) - iS(x,\theta,\overline{\theta})\left(\xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}\right) + \dots - \cancel{S(x,\theta,\overline{\theta})} = \\
=& i\left[\xi Q + \overline{\xi}\ \overline{Q}, S(x,\theta,\overline{\theta})\right] + \dots \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) =& i\left[\xi^\alpha Q_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}, S(x,\theta,\overline{\theta})\right], \qquad (5.3.25)
\end{aligned}$$

όπου έχουμε αγνοήσει τους όρους των αποσιωπητικών, διότι είναι συνολικής τάξης ≥ 2 ως προς $\xi, \overline{\xi}$. Συνδυάζοντας τις (5.3.24) και (5.3.25) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi S(x,\theta,\overline{\theta}) =& i\left[\xi^\alpha Q_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}, S(x,\theta,\overline{\theta})\right] = \\
=& - i\left\{\xi^\alpha\left[i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu\right] + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[i\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} - (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\theta_\beta\partial_\mu\right]\right\}S = \\
=& - i\left(\xi^\alpha\hat{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}\right)S \qquad (5.3.26)
\end{aligned}$$

όπου

$$\hat{Q}_\alpha = i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu \qquad (5.3.27)$$

$$\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha} = i\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} - (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\theta_\beta\partial_\mu, \qquad (5.3.28)$$

$\alpha = 1,2, \dot\alpha = \dot 1, \dot 2$. Οι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές $\hat{Q}_\alpha$ και $\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}$ δρουν πάνω σε υπερπεδία και αποτελούν αναπαραστάσεις των φερμιονικών γεννητόρων Q_α και $\overline{Q}^{\dot\alpha}$ της $N = 1$ υπερσυμμετρίας αντίστοιχα, οι οποίοι είναι τελεστές που δρουν σε ένα χώρο Hilbert. Επίσης, οι δρώντες σε υπερπεδία διαφορικοί τελεστές $\hat{Q}^\alpha$ και $\overline{\hat{Q}}_{\dot\alpha}$, που φέρουν άνω σπινοριακό δείκτη χωρίς τελεία και κάτω σπινοριακό δείκτη με τελεία αντίστοιχα και αναπαριστούν τους $Q^\alpha (= \varepsilon^{\alpha\beta}Q_\beta)$ και $\overline{Q}_{\dot\alpha} (= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta})$ αντίστοιχα δίνονται, κατά τα γνωστά, από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\hat{Q}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\hat{Q}_\beta \overset{(5.3.27)}{=} & i\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} - \varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\mu \overset{(5.2.25)}{=} \\
=& - i\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} - \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\delta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\zeta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\zeta\delta}\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\mu = \\
=& - i\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} - \delta^\alpha_\delta(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\zeta\delta}\left(-\varepsilon_{\dot\zeta\dot\gamma}\right)\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\mu = \\
=& - i\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\zeta\alpha}\overline{\theta}_{\dot\zeta}\partial_\mu \Rightarrow \\
\Rightarrow \hat{Q}^\alpha =& - i\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + \overline{\theta}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha}\partial_\mu \qquad (5.3.29)
\end{aligned}$$

$$\overline{\hat{Q}}_{\dot\alpha} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\hat{Q}}^{\dot\beta} \overset{(5.3.28)}{=} i\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\beta}} - \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\gamma}\theta_\gamma\partial_\mu \overset{(5.2.26)}{=}$$

$$
\begin{aligned}
&= - i\frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} - \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\delta}}\varepsilon^{\gamma\zeta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\zeta\dot{\delta}}\theta_{\gamma}\partial_{\mu} = \\
&= - i\frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} - \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\delta}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\zeta\dot{\delta}}\left(-\varepsilon^{\zeta\gamma}\right)\theta_{\gamma}\partial_{\mu} = \\
&= - i\frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} + \left(\sigma^{\mu}\right)_{\zeta\dot{\alpha}}\theta^{\zeta}\partial_{\mu} \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \hat{\overline{Q}}_{\dot{\alpha}} = - i\frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} + \theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu} \tag{5.3.30}
$$

Θα βρούμε τώρα μία αναπαράσταση των γεννητόρων P_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, των μετατοπίσεων στο χώρο Minkowski από διαφορικούς τελεστές που δρουν σε συναρτήσεις ορισμένες στο χώρο αυτό, δηλαδή συνήθη πεδία, και, κατ΄ επέκταση, και σε συναρτήσεις ορισμένες στον υπερχώρο (υπερπεδία). Στην ενότητα 4.1 είδαμε ότι η μεταβολή ενός κβαντικού πεδίου $\hat{\phi}(x)$ κάτω από μία απειροστή μετατόπιση $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ στον επίπεδο χωροχρόνο είναι:

$$
\delta_T\hat{\phi}(x) = ia^\mu\left[P_\mu, \hat{\phi}(x)\right] = a^\mu\partial_\mu\hat{\phi}(x) \tag{5.3.31}
$$

Αν $\hat{P}_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, είναι οι ζητούμενοι διαφορικοί τελεστές, έχουμε:

$$
\delta_T\hat{\phi}(x) = -ia^\mu\hat{P}_\mu\hat{\phi}(x) \tag{5.3.32}
$$

Από σύγκριση της (5.3.32) με την (5.3.31) προκύπτει ότι

$$
- i\hat{P}_\mu = \partial_\mu \Rightarrow \hat{P}_\mu = i\partial_\mu \tag{5.3.33}
$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι οι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές, $\hat{Q}_\alpha$, $\hat{\overline{Q}}_{\dot{\alpha}}$, $\hat{P}_\mu$, που δίνονται από τις σχέσεις (5.3.27), (5.3.30) και (5.3.33) αντίστοιχα και δρουν πάνω σε υπερπεδία, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$
\left[\hat{P}_\mu, \hat{Q}_\alpha\right] = \left[\hat{P}_\mu, \hat{\overline{Q}}_{\dot{\alpha}}\right] = \left[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu\right] = 0 \tag{5.3.34}
$$

$$
\left\{\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\beta\right\} = \left\{\hat{\overline{Q}}_{\dot{\alpha}}, \hat{\overline{Q}}_{\dot{\beta}}\right\} = 0 \tag{5.3.35}
$$

$$
\left\{\hat{Q}_\alpha, \hat{\overline{Q}}_{\dot{\beta}}\right\} = 2\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\hat{P}_\mu = 2i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu \tag{5.3.36}
$$

οι οποίες έχουν την ίδια μορφή με αυτές της άλγεβρας της $N = 1$ υπερσυμμετρίας, (5.3.1)-(5.3.3), οπότε οι διαφορικοί τελεστές $\hat{Q}_\alpha$, $\hat{\overline{Q}}_{\dot{\alpha}}$ και $\hat{P}_\mu$, όπου $\alpha = 1, 2,\ \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2},\ \mu = 0, 1, 2, 3$, αποτελούν μία αναπαράσταση της άλγεβρας της $N = 1$ υπερσυμμετρίας.

Η ισχύς των (5.3.34) είναι προφανής, διότι οι παράγωγοι ως προς τις συνήθεις χωροχρονικές συντεταγμένες x^μ μετατίθενται τόσο μεταξύ τους όσο και με τις παραγώγους ως προς τις μεταβλητές Grassmann θ^α και $\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}$.

Για την απόδειξη των (5.3.35) θεωρούμε ένα τυχαίο υπερπεδίο S. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\left\{\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\beta\right\}S = &\left\{i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu, i\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} - \left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_\nu\right\}S = \\
=&i^2\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right\}S - i\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_\nu\right\}S - \\
&- i\left\{\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right\}S + \left\{\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu, \left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_\nu\right\}S \overset{(5.2.27)}{=} \\
=&0 - i\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left[\left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_\nu S\right] + \left(\sigma^\nu\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_\nu\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha}\right)\right\} - \\
&- i\left\{\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\left[\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu S\right]\right\} +
\end{aligned}
$$

$$+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\left[\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\nu}S\right]+\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\nu}\left[\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}S\right]=$$

$$=-i\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\left[\cancelto{0}{\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}}{\partial\theta^{\alpha}}}\partial_{\nu}S-\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}}\right)\right]-i\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^{\alpha}}\right)-$$

$$-i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^{\beta}}\right)-i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\left[\cancelto{0}{\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}{\partial\theta^{\beta}}}\partial_{\mu}S-\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\right)\right]+$$

$$+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_{\nu}\partial_{\mu}S\overset{\partial_{\mu}\partial_{\nu}=\partial_{\nu}\partial_{\mu}}{=}$$

$$=\cancel{i(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial^{2}S}{\partial\theta^{\alpha}\partial x^{\nu}}}-\cancel{i(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial^{2}S}{\partial x^{\nu}\partial\theta^{\alpha}}}-\cancel{i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\frac{\partial^{2}S}{\partial x^{\mu}\partial\theta^{\beta}}}+$$

$$+\cancel{i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\frac{\partial^{2}S}{\partial\theta^{\beta}\partial x^{\mu}}}+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\underbrace{\left\{\overline{\theta}^{\dot{\beta}},\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\right\}}_{\overset{\|}{0}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S=0$$

Άρα, $\left\{\hat{Q}_{\alpha},\hat{Q}_{\beta}\right\}S=0$ για κάθε υπερπεδίο S, συνεπώς $\left\{\hat{Q}_{\alpha},\hat{Q}_{\beta}\right\}=0$. Επίσης, είναι:

$$\left\{\overline{\hat{Q}}_{\dot{\alpha}},\overline{\hat{Q}}_{\dot{\beta}}\right\}S=\left\{-i\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}+\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu},-i\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}+\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S=$$

$$=i^{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}},\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right\}S-i\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}},\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S-$$

$$-i\left\{\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu},\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right\}S+\left\{\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu},\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S\overset{(5.2.29)}{=}$$

$$=0-i\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left[\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}S\right]+\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right)\right\}-$$

$$-i\left\{\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right)+\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\left[\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu}S\right]\right\}+$$

$$+\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\left[\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}S\right]+\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\left[\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu}S\right]=$$

$$=-i\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\left[\cancelto{0}{\frac{\partial\theta^{\gamma}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}}\partial_{\nu}S-\theta^{\gamma}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}}\right)\right]-i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right)-$$

$$-i\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right)-i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left[\cancelto{0}{\frac{\partial\theta^{\beta}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}}\partial_{\mu}S-\theta^{\beta}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\right)\right]+$$

$$+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\theta^{\beta}\theta^{\gamma}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\theta^{\gamma}\theta^{\beta}\partial_{\nu}\partial_{\mu}S\overset{\partial_{\mu}\partial_{\nu}=\partial_{\nu}\partial_{\mu}}{=}$$

$$=\cancel{i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial^{2}S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial x^{\nu}}}-\cancel{i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial^{2}S}{\partial x^{\nu}\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}}-\cancel{i\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\alpha}\frac{\partial^{2}S}{\partial x^{\mu}\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}}+$$

$$+\cancel{i\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\alpha}\frac{\partial^{2}S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial x^{\mu}}}+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\underbrace{\left\{\theta^{\beta},\theta^{\gamma}\right\}}_{\overset{\|}{0}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S=0$$

Επομένως, $\left\{\overline{\hat{Q}}_{\dot{\alpha}}, \overline{\hat{Q}}_{\dot{\beta}}\right\} S = 0$ για κάθε υπερπεδίο S, που συνεπάγεται ότι $\left\{\overline{\hat{Q}}_{\dot{\alpha}}, \overline{\hat{Q}}_{\dot{\beta}}\right\} = 0$. Παρόμοια διαδικασία ακολουθούμε και για την απόδειξη της (5.3.36). Θεωρούμε και πάλι ένα αυθαίρετο υπερπεδίο S, οπότε έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\left\{\hat{Q}_{\alpha}, \overline{\hat{Q}}_{\dot{\beta}}\right\} S = & \left\{ i\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}, -i\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}} + \theta^{\gamma}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu} \right\} S = \\
= & - i^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}} \right\} S + i\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}, \theta^{\gamma}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu} \right\} S + \\
& + i\left\{ (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}} \right\} S - \left\{ (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}, \theta^{\gamma}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu} \right\} S \overset{(5.2.28)}{=} \\
= & 0 + i\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left[\theta^{\gamma}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}S\right] + \theta^{\gamma}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^{\alpha}}\right) \right\} + \\
& + i\left\{ (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right) + \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\left[(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}S\right] \right\} - \\
& - (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}\left[\theta^{\gamma}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}S\right] - \theta^{\gamma}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\left[(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}S\right] = \\
= & i(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\left[\frac{\partial\theta^{\gamma}}{\partial\theta^{\alpha}}\partial_{\nu}S - \theta^{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}}\right)\right] + i\theta^{\gamma}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^{\alpha}}\right) + \\
& + i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right) + i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\left[\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\partial_{\mu}S - \overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\right)\right] - \\
& - (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\theta^{\gamma}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S - (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\theta^{\gamma}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\nu}\partial_{\mu}S \overset{\partial_{\mu}\partial_{\nu}=\partial_{\nu}\partial_{\mu}}{=} \\
\overset{(5.2.5),(5.2.6)}{=} & i(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\delta^{\gamma}_{\alpha}\partial_{\nu}S - \cancel{i\theta^{\gamma}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^{\alpha}\partial x^{\nu}}} + \cancel{i\theta^{\gamma}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^{\nu}\partial\theta^{\alpha}}} + \\
& + \cancel{i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^{\mu}\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}} + i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}}\partial_{\mu}S - \cancel{i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial^2 S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial x^{\mu}}} - \\
& - (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot{\beta}}\underbrace{\left\{\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}, \theta^{\gamma}\right\}}_{\substack{\parallel \\ 0}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S = \\
= & i(\sigma^{\nu})_{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\nu}S + i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\mu}S \Rightarrow \\
\Rightarrow & \left\{\hat{Q}_{\alpha}, \overline{\hat{Q}}_{\dot{\beta}}\right\} S = 2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\mu}S
\end{aligned}
$$

για οποιοδήποτε υπερπεδίο S, οπότε ισχύει η (5.3.36).

Για το γενικό Lorentz αναλλοίωτο υπερπεδίο της σχέσης (5.3.13), οι μεταβολές $\delta_{\xi}f(x)$, $\delta_{\xi}\phi_{\alpha}(x)$, $\delta_{\xi}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}(x), \ldots, \delta_{\xi}d(x)$ των πεδίων-συνιστωσών του κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που παραμετροποιείται από μεταβλητές Grassmann ξ^{α} και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$ ορίζονται από τη σχέση:

$$
\begin{aligned}
\delta_{\xi}S(x,\theta,\overline{\theta}) = & \delta_{\xi}f(x) + \theta^{\alpha}\delta_{\xi}\phi_{\alpha}(x) + \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\delta_{\xi}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}(x) + (\theta\theta)\,\delta_{\xi}m(x) + \\
& + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\delta_{\xi}n(x) + \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\delta_{\xi}V_{\mu}(x) + (\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\delta_{\xi}\overline{\rho}^{\dot{\alpha}}(x) + \\
& + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^{\alpha}\delta_{\xi}\psi_{\alpha}(x) + (\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\delta_{\xi}d(x)
\end{aligned} \tag{5.3.37}
$$

Επίσης, σύμφωνα με την (5.3.24), έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\delta_{\xi}S(x,\theta,\overline{\theta}) = & \left\{ \xi^{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_{\mu}\right] + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\left[\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\partial_{\mu}\right] \right\} S(x,\theta,\overline{\theta}) \overset{(5.3.13)}{=} \\
= & \left[\xi^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + i\left(\xi\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\partial_{\mu} + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\theta\right)\partial_{\mu} \right] \times
\end{aligned}
$$

$$\times \left\{ f(x) + \theta\phi(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + (\theta\theta)\, m(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right) n(x) + \right.$$
$$\left. + \left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right) V_\nu(x) + (\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\rho}(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\psi(x) + (\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right) d(x) \right\} \tag{5.3.38}$$

Έχουμε:

$$\left[\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right] f(x) =$$
$$= i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu f(x) + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu f(x) = -i\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu f(x) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\partial_\mu f(x) =$$
$$= -i\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta}\xi_\beta\partial_\mu f(x) - i\theta^\alpha\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\xi}^{\dot{\beta}}\partial_\mu f(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right] f(x) =$$
$$= -i\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu\xi\right)^{\dot{\alpha}}\partial_\mu f(x) - i\theta^\alpha\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu f(x) \tag{5.3.39}$$

$$\left[\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right](\theta\phi(x)) \overset{(5.2.19),(5.2.20)}{=}$$
$$= \xi^\alpha\phi_\alpha(x) + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)(\theta\partial_\mu\phi(x)) + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)(\theta\partial_\mu\phi(x)) =$$
$$= \xi\phi(x) - i\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)(\theta\partial_\mu\phi(x)) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)(\theta\partial_\mu\phi(x)) =$$
$$= \xi\phi(x) - i\left(\theta\partial_\mu\phi(x)\right)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\xi\right) - i\left(\theta\partial_\mu\phi(x)\right)\left(\theta\sigma^\mu\overline{\xi}\right) \overset{(2.5.32),(2.5.34)}{=}$$
$$= \xi\phi(x) - \frac{i}{2}\left(\theta\sigma_\mu\overline{\theta}\right)\left[\left(\partial_\nu\phi(x)\right)\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right] + \frac{i}{2}(\theta\theta)\left[\left(\partial_\mu\phi(x)\right)\sigma^\mu\overline{\xi}\right] \xRightarrow{(2.5.12)}$$
$$\Rightarrow \left[\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right](\theta\phi(x)) =$$
$$= \xi\phi(x) - \frac{i}{2}\left(\theta\sigma_\mu\overline{\theta}\right)\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\partial_\nu\phi(x) - \frac{i}{2}(\theta\theta)\,\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi(x) \tag{5.3.40}$$

$$\left[\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right]\left(\overline{\theta}\overline{\chi}(x)\right) \overset{(5.2.21),(5.2.23)}{=}$$
$$= i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(\overline{\theta}\partial_\mu\overline{\chi}(x)\right) + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}(x) + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\left(\overline{\theta}\partial_\mu\overline{\chi}(x)\right) =$$
$$= -i\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)\left(\overline{\theta}\partial_\mu\overline{\chi}(x)\right) + \overline{\xi}\overline{\chi}(x) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\left(\overline{\theta}\partial_\mu\overline{\chi}(x)\right) =$$
$$= -i\left(\overline{\theta}\partial_\mu\overline{\chi}(x)\right)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\xi\right) + \overline{\xi}\overline{\chi}(x) - i\left(\overline{\theta}\partial_\mu\overline{\chi}(x)\right)\left(\theta\sigma^\mu\overline{\xi}\right) \overset{(2.5.33),(2.5.34)}{=}$$
$$= \frac{i}{2}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[\left(\partial_\mu\overline{\chi}(x)\right)\overline{\sigma}^\mu\xi\right] + \overline{\xi}\overline{\chi}(x) + \frac{i}{2}\left(\theta\sigma_\mu\overline{\theta}\right)\left[\left(\partial_\nu\overline{\chi}(x)\right)\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right] \xRightarrow{(2.5.13)}$$
$$\Rightarrow \left[\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right]\left(\overline{\theta}\overline{\chi}(x)\right) =$$
$$= \overline{\xi}\overline{\chi}(x) - \frac{i}{2}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x) + \frac{i}{2}\left(\theta\sigma_\mu\overline{\theta}\right)\overline{\xi}\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\nu\overline{\chi}(x) \tag{5.3.41}$$

$$\left[\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right]\left((\theta\theta)\, m(x)\right) \overset{(5.2.13),(5.2.14)}{=}$$
$$= \xi^\alpha\left(2\theta_\alpha\right) m(x) + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)(\theta\theta)\,\partial_\mu m(x) + i\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta}\underbrace{\theta_\beta\,(\theta\theta)}_{\substack{\parallel \\ 0}}\partial_\mu m(x) =$$
$$= 2\,(\xi\theta)\, m(x) + i\,(\theta\theta)\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu m(x) = 2\,(\theta\xi)\, m(x) - i\,(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)\partial_\mu m(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right]\left((\theta\theta)\, m(x)\right) =$$

$$= 2\theta^\alpha \xi_\alpha m(x) - i\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu \xi\right)^{\dot{\alpha}}\partial_\mu m(x) \tag{5.3.42}$$

Για την εξαγωγή της τελευταίας σχέσης, χρησιμοποιήσαμε το ότι

$$\theta_\alpha\left(\theta\theta\right) = 0,\ \forall \alpha = 1,2 \tag{5.3.43}$$

το οποίο αποτελεί συνέπεια του ότι οι φερμιονικές συντεταγμένες αποτελούν αντιμετατιθέμενες μεταβλητές Grassmann. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\theta_\alpha\left(\theta\theta\right) =& \theta_\alpha\theta^\beta\theta_\beta = \theta_\alpha\left(\varepsilon^{\beta\gamma}\theta_\gamma\right)\theta_\beta = \varepsilon^{\beta\gamma}\theta_\alpha\theta_\gamma\theta_\beta \Rightarrow \\
\Rightarrow \theta_\alpha\left(\theta\theta\right) =& \theta_\alpha\left(\varepsilon^{12}\theta_2\theta_1 + \varepsilon^{21}\theta_1\theta_2\right) = \theta_\alpha\left(\theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2\right) \overset{(5.1.1)}{=} \\
=& \theta_\alpha\left(-\theta_1\theta_2 - \theta_1\theta_2\right) = -2\theta_\alpha\theta_1\theta_2
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\theta_1\left(\theta\theta\right) = -2\theta_1\theta_1\theta_2 = -2\theta_1^2\theta_2 = 0$$

αφού $\{\theta_1, \theta_1\} = 2\theta_1^2 = 0$, και

$$\theta_2\left(\theta\theta\right) = -2\theta_2\theta_1\theta_2 \overset{(5.1.1)}{=} 2\theta_2\theta_2\theta_1 = 2\theta_2^2\theta_1 = 0$$

αφού $\{\theta_2, \theta_2\} = 2\theta_2^2 = 0$, και έτσι αποδείξαμε την (5.3.43). Στη συνέχεια, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\left[\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right]\left(\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)n(x)\right) \overset{(5.2.15),(5.2.17)}{=} \\
&= i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)\partial_\mu n(x) + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\left(2\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)n(x) + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)\partial_\mu n(x) = \\
&= i\xi^\alpha\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\underbrace{\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)}_{\substack{\parallel \\ 0}}\partial_\mu n(x) + 2\left(\overline{\xi}\ \overline{\theta}\right)n(x) + i\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu n(x) = \\
&= 2\left(\overline{\theta}\ \overline{\xi}\right)n(x) - i\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\partial_\mu n(x) \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left[\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right]\left(\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)n(x)\right) = \\
&= 2\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}n(x) - i\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right)\theta^\alpha\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu n(x)
\end{aligned} \tag{5.3.44}$$

Για την εξαγωγή του τελευταίου αποτελέσματος, κάναμε χρήση του ότι

$$\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\overline{\theta}\ \overline{\theta}\right) = 0\ \forall\ \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2} \tag{5.3.45}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε την (5.3.45) με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που δείξαμε την (5.3.43) λαμβάνοντας υπόψη ότι και τα $\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}$ είναι μεταβλητές Grassmann ($\left\{\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}, \overline{\theta}^{\dot{\beta}}\right\} = 0,\ \forall\ \dot{\alpha}, \dot{\beta} = \dot{1}, \dot{2}$). Ακολούθως, είναι:

$$\begin{aligned}
&\left[\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right]\left(\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)V_\nu(x)\right) = \\
&= \xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)V_\mu(x) + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)\partial_\mu V_\nu(x) - \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)V_\mu(x) + \\
&\quad + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)\partial_\mu V_\nu(x) \overset{(5.2.19),(5.2.21)}{=} \\
&= \xi^\alpha\left(\sigma^\mu\overline{\theta}\right)_\alpha V_\mu(x) - i\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)\partial_\mu V_\nu(x) - \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^\mu\theta\right)^{\dot{\alpha}}V_\mu(x) + \\
&\quad + i\left[-\left(\theta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)\right]\left[-\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\nu\theta\right)\right]\partial_\mu V_\nu(x) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right) V_\mu(x) - i\overline{\theta}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\xi_\beta\theta^\gamma\left(\sigma^\nu\right)_{\gamma\dot\delta}\overline{\theta}^{\dot\delta}\partial_\mu V_\nu(x) - \left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)V_\mu(x) + \\
&\quad + i\theta^\alpha\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\gamma}\left(\overline{\sigma}^\nu\right)^{\dot\gamma\delta}\theta_\delta\partial_\mu V_\nu(x) = \\
&= \left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right) V_\mu(x) + i(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\delta}\overline{\theta}_{\dot\alpha}\xi_\beta\overline{\theta}^{\dot\delta}\theta^\gamma\partial_\mu V_\nu(x) - \left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)V_\mu(x) - \\
&\quad - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\gamma\delta}\theta^\alpha\overline{\xi}^{\dot\beta}\theta_\delta\overline{\theta}_{\dot\gamma}\partial_\mu V_\nu(x) = \\
&= \left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right) V_\mu(x) - i\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\left(\sigma^\nu\right)_{\gamma\dot\delta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\zeta}\overline{\theta}^{\dot\zeta}\overline{\theta}^{\dot\delta}\xi_\beta\theta^\gamma\partial_\mu V_\nu(x) - \left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)V_\mu(x) + \\
&\quad + i\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\left(\overline{\sigma}^\nu\right)^{\dot\gamma\delta}\varepsilon^{\alpha\zeta}\theta_\zeta\theta_\delta\overline{\xi}^{\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\gamma}\partial_\mu V_\nu(x) \overset{(2.5.28),(2.5.29)}{=} \\
&= \left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right) V_\mu(x) - \frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\left(\sigma^\nu\right)_{\gamma\dot\delta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\zeta}\varepsilon^{\dot\zeta\dot\delta}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi_\beta\theta^\gamma\partial_\mu V_\nu(x) - \left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)V_\mu(x) + \\
&\quad + \frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\left(\overline{\sigma}^\nu\right)^{\dot\gamma\delta}\varepsilon^{\alpha\zeta}\varepsilon_{\zeta\delta}\left(\theta\theta\right)\overline{\xi}^{\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\gamma}\partial_\mu V_\nu(x) = \\
&= \left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right) V_\mu(x) - \frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\left(\sigma^\nu\right)_{\gamma\dot\delta}\delta^{\dot\delta}_{\dot\alpha}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi_\beta\theta^\gamma\partial_\mu V_\nu(x) - \left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)V_\mu(x) + \\
&\quad + \frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\left(\overline{\sigma}^\nu\right)^{\dot\gamma\delta}\delta^\alpha_\delta\left(\theta\theta\right)\overline{\xi}^{\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\gamma}\partial_\mu V_\nu(x) = \\
&= -\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\xi\right)V_\mu(x) + \frac{i}{2}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^\gamma\left(\sigma^\nu\right)_{\gamma\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\xi_\beta\partial_\mu V_\nu(x) + \left(\theta\sigma^\mu\overline{\xi}\right)V_\mu(x) - \\
&\quad - \frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}_{\dot\gamma}\left(\overline{\sigma}^\nu\right)^{\dot\gamma\alpha}\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}\partial_\mu V_\nu(x) \Rightarrow \\
\Rightarrow &\left[\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right]\left(\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)V_\nu(x)\right) = \\
&= \theta^\alpha\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha V_\mu(x) - \overline{\theta}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\xi\right)^{\dot\alpha}V_\mu(x) - \frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\xi}\right)^{\dot\alpha}\partial_\mu V_\nu(x) + \\
&\quad + \frac{i}{2}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^\alpha\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi\right)_\alpha\partial_\mu V_\nu(x) \qquad (5.3.46)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right]\left(\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}\overline{\rho}(x)\right) = \\
&= \xi^\alpha\frac{\partial\left(\theta\theta\right)}{\partial\theta^\alpha}\left(\overline{\theta}\overline{\rho}(x)\right) + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\partial_\mu\overline{\rho}(x)\right) + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\theta\theta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}\left(\overline{\theta}\overline{\rho}(x)\right) + \\
&\quad + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\partial_\mu\overline{\rho}(x)\right) \overset{(5.2.13),(5.2.21)}{=} \\
&= \xi^\alpha\left(2\theta^\alpha\right)\left(\overline{\theta}\overline{\rho}(x)\right) - i\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\partial_\mu\overline{\rho}(x)\right)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\xi\right) + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\theta\theta\right)\overline{\rho}^{\dot\alpha}(x) + \\
&\quad + i\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\underbrace{\theta_\beta\left(\theta\theta\right)}_{\substack{\parallel\\0}}\left(\overline{\theta}\partial_\mu\overline{\rho}(x)\right) \overset{(2.5.33)}{=} \\
&= 2\left(\xi\theta\right)\left(\overline{\theta}\overline{\rho}(x)\right) + \frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[\left(\partial_\mu\overline{\rho}(x)\right)\overline{\sigma}^\mu\xi\right] + \left(\theta\theta\right)\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\rho}^{\dot\alpha}(x) = \\
&= 2\left(\theta\xi\right)\left(\overline{\theta}\overline{\rho}(x)\right) - \frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\rho}(x) + \left(\theta\theta\right)\overline{\xi}\overline{\rho}(x) \xRightarrow{(2.5.34)} \\
\Rightarrow &\left[\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right]\left(\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}\overline{\rho}(x)\right) = \\
&= \left(\theta\sigma_\mu\overline{\theta}\right)\xi\sigma^\mu\overline{\rho}(x) + \left(\theta\theta\right)\overline{\xi}\overline{\rho}(x) - \frac{1}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\rho}(x) \qquad (5.3.47)
\end{aligned}
$$

$$
\left[\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\right]\left(\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\psi(x)\right) =
$$

$$= \xi^{\alpha}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\theta\psi(x)\right) + i\xi^{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\underbrace{\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)}_{\substack{\| \\ 0}}\left(\theta\partial_{\mu}\psi(x)\right) +$$

$$+ \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\left(\theta\psi(x)\right) + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\theta\partial_{\mu}\psi(x)\right) \overset{(5.2.15),(5.2.19)}{=}$$

$$= \xi^{\alpha}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\psi_{\alpha}(x) + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\left(2\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)\left(\theta\psi(x)\right) - i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\theta\partial_{\mu}\psi(x)\right)\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right) \overset{(2.5.32)}{=}$$

$$= \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi^{\alpha}\psi_{\alpha}(x) + 2\left(\overline{\xi}\,\overline{\theta}\right)\left(\theta\psi(x)\right) + \frac{i}{2}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\theta\theta\right)\left[\left(\partial_{\mu}\psi(x)\right)\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right] =$$

$$= \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi\psi(x) + 2\left(\theta\psi(x)\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\xi}\right) - \frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) \xRightarrow{(2.5.34)}$$

$$\Rightarrow \left[\xi^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + i\left(\xi\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\partial_{\mu} + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\theta\right)\partial_{\mu}\right]\left(\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\psi(x)\right) =$$

$$= \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi\psi(x) - \left(\theta\sigma_{\mu}\overline{\theta}\right)\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\psi(x) - \frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) \tag{5.3.48}$$

$$\left[\xi^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + i\left(\xi\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\partial_{\mu} + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\theta\right)\partial_{\mu}\right]\left(\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x)\right) =$$

$$= \xi^{\alpha}\frac{\partial\left(\theta\theta\right)}{\partial\theta^{\alpha}}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})d(x) + i\xi^{\alpha}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\underbrace{\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)}_{\substack{\| \\ 0}}\left(\theta\theta\right)\partial_{\mu}d(x) +$$

$$+ \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\left(\theta\theta\right)\frac{\partial(\overline{\theta}\,\overline{\theta})}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}d(x) + i\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\sigma}^{\mu}\right)^{\dot{\alpha}\beta}\underbrace{\theta_{\beta}\left(\theta\theta\right)}_{\substack{\| \\ 0}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_{\mu}d(x) \overset{(5.2.13),(5.2.15)}{=}$$

$$= \xi^{\alpha}\left(2\theta_{\alpha}\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x) + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\left(\theta\theta\right)\left(2\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)d(x) = 2\left(\xi\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x) + 2\left(\theta\theta\right)\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}d(x) =$$

$$= 2\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\theta\xi\right)d(x) + 2\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\xi}\,\overline{\theta}\right)d(x) = 2\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\theta\xi\right)d(x) + 2\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\xi}\right)d(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\xi^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + i\left(\xi\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\partial_{\mu} + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\theta\right)\partial_{\mu}\right]\left(\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x)\right) =$$

$$= 2\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^{\alpha}\xi_{\alpha}d(x) + 2\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}d(x) \tag{5.3.49}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.3.38)-(5.3.42), (5.3.44) και (5.3.46)-(5.3.49), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\delta_{\xi}S(x,\theta,\overline{\theta}) =& \xi\phi(x) + \overline{\xi}\overline{\chi}(x) + \theta^{\alpha}\left[-i\left(\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right)_{\alpha}\partial_{\mu}f(x) + 2\xi_{\alpha}m(x) +\right.\\
&\left. + \left(\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right)_{\alpha}V_{\mu}(x)\right] + \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left[-i\left(\overline{\sigma}^{\mu}\xi\right)^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}f(x) + 2\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}n(x) -\right.\\
&\left. - \left(\overline{\sigma}^{\mu}\xi\right)^{\dot{\alpha}}V_{\mu}(x)\right] + \left(\theta\theta\right)\left[-\frac{i}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\phi(x) + \overline{\xi}\overline{\rho}(x)\right] +\\
& + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[-\frac{i}{2}\xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\chi}(x) + \xi\psi(x)\right] + \left(\theta\sigma_{\mu}\overline{\theta}\right)\left[-\frac{i}{2}\xi\sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\nu}\phi(x) +\right.\\
&\left. + \frac{i}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\partial_{\nu}\overline{\chi}(x) + \xi\sigma^{\mu}\overline{\rho}(x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\psi(x)\right] +\\
& + \left(\theta\theta\right)\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left[-i\left(\overline{\sigma}^{\mu}\xi\right)^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}m(x) - \frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right)^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}V_{\nu}(x) + 2\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}d(x)\right] +\\
& + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^{\alpha}\left[-i\left(\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right)_{\alpha}\partial_{\mu}n(x) + \frac{i}{2}\left(\sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu}\xi\right)_{\alpha}\partial_{\mu}V_{\nu}(x) + 2\xi_{\alpha}d(x)\right] +\\
& + \left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[-\frac{i}{2}\xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\rho}(x) - \frac{i}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)\right]
\end{aligned} \tag{5.3.50}$$

Συγκρίνοντας την (5.3.37) με την (5.3.50), λαμβάνουμε τους κανόνες μετασχηματισμού των πεδίων-συνιστωσών του γενικού Lorentz αναλλοίωτου υπερπεδίου της (5.3.13) κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό:

$$\delta_\xi f(x) = \xi\phi(x) + \overline{\xi}\overline{\chi}(x) \tag{5.3.51}$$

$$\delta_\xi \phi_\alpha(x) = 2\xi_\alpha m(x) + \left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha \left(V_\mu(x) - i\partial_\mu f(x)\right) \tag{5.3.52}$$

$$\delta_\xi \overline{\chi}^{\dot\alpha}(x) = 2\overline{\xi}^{\dot\alpha} n(x) - \left(\overline{\sigma}^\mu\xi\right)^{\dot\alpha} \left(V_\mu(x) + i\partial_\mu f(x)\right) \tag{5.3.53}$$

$$\delta_\xi m(x) = \overline{\xi}\overline{\rho}(x) - \frac{i}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi(x) \tag{5.3.54}$$

$$\delta_\xi n(x) = \xi\psi(x) - \frac{i}{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x) \tag{5.3.55}$$

$$\delta_\xi V^\mu(x) = \xi\sigma^\mu\overline{\rho}(x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\psi(x) - \frac{i}{2}\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\partial_\nu\phi(x) + \frac{i}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\nu\overline{\chi}(x) \tag{5.3.56}$$

$$\delta_\xi \psi_\alpha(x) = 2\xi_\alpha d(x) - i\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha \partial_\mu n(x) + \frac{i}{2}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi\right)_\alpha \partial_\mu V_\nu(x) \tag{5.3.57}$$

$$\delta_\xi \overline{\rho}^{\dot\alpha}(x) = 2\overline{\xi}^{\dot\alpha} d(x) - i\left(\overline{\sigma}^\mu\xi\right)^{\dot\alpha} \partial_\mu m(x) - \frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\xi}\right)^{\dot\alpha} \partial_\mu V_\nu(x) \tag{5.3.58}$$

$$\delta_\xi d(x) = -\frac{i}{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\rho}(x) - \frac{i}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) \tag{5.3.59}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι για δύο οποιουσδήποτε απειροστούς υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, όπου ο ένας παραμετροποιείται από μεταβλητές Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$ και ο άλλος από μεταβλητές Grassmann η^α και $\overline{\eta}_{\dot\alpha}$, ισχύει:

$$\left(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta\right) X = 2i\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi} - \xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu X \tag{5.3.60}$$

για κάθε πεδίο συνιστώσα X του γενικού υπερπεδίου S της (5.3.13) ($X = f, \phi_\alpha, \overline{\chi}^{\dot\alpha}, \ldots, d$).

Επίσης, επειδή οι διαφορικοί τελεστές $\hat{Q}_\alpha$ και $\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}$ είναι γραμμικοί, οι γραμμικοί συνδυασμοί υπερπεδίων και τα γινόμενα υπερπεδίων είναι επίσης υπερπεδία, δηλαδή μετασχηματίζονται σύμφωνα με την (5.3.24) κάτω από απειροστούς υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, θεωρούμε δύο (Lorentz αναλλοίωτα) υπερπεδία S_1 και S_2 και έναν υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό T_ξ παραμετροποιούμενο από απειροστές μεταβλητές Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$, οπότε στους υπολογισμούς που ακολουθούν θα αγνοούμε τους όρους συνολικής τάξης ≥ 2 ως προς $\xi, \overline{\xi}$ (για τους οποίους θα χρησιμοποιούμε αποσιωπητικά). Έστω ο γραμμικός συνδυασμός $aS_1 + bS_2$ των υπερπεδίων S_1 και S_2, όπου a, b είναι δύο τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί. Κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό T_ξ έχουμε:

$$\begin{aligned} S_1 \to & T_\xi S_1 \overset{(5.3.4),(5.3.17)}{=} e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} S_1 e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} \\ S_2 \to & T_\xi S_2 = e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} S_2 e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} aS_1 + bS_2 \to & a e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} S_1 e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} + b e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} S_2 e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} = \\ & = e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} \left(aS_1 + bS_2\right) e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} \end{aligned}$$

οπότε η μεταβολή του γραμμικού συνδυασμού $aS_1 + bS_2$ κάτω από τον θεωρούμενο υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό είναι

$$\delta_\xi\left(aS_1 + bS_2\right) = e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} \left(aS_1 + bS_2\right) e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} - \left(aS_1 + bS_2\right) \overset{\text{Taylor}}{=}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[I + i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right) + \dots\right](aS_1 + bS_2)\left[I - i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right) + \dots\right] - \\
&\quad - (aS_1 + bS_2) = \\
&= \cancel{aS_1 + bS_2} + i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)(aS_1 + bS_2) - i(aS_1 + bS_2)\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right) + \\
&\quad + \dots - \cancel{(aS_1 + bS_2)} = \\
&= i\left[\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}, aS_1 + bS_2\right] = \\
&= ia\left[\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}, S_1\right] + ib\left[\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}, S_2\right] \overset{(5.3.26)}{=} \\
&= -ia\left(\xi^\alpha \hat{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}\right)S_1 - ib\left(\xi^\alpha \hat{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}\right)S_2
\end{aligned}
$$

και επειδή οι $\hat{Q}_\alpha$ και $\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}$ είναι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές, έχουμε

$$
\delta_\xi (aS_1 + bS_2) = -i\left(\xi^\alpha \hat{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}\right)(aS_1 + bS_2) \tag{5.3.61}
$$

που σημαίνει ότι ο γραμμικός συνδυασμός $aS_1 + bS_2$ αποτελεί ένα υπερπεδίο για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς a, b. Από την άλλη μεριά, το γινόμενο $S_1 S_2$ μετασχηματίζεται κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό T_ξ ως

$$
\begin{aligned}
S_1 S_2 \to &\left(e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} S_1 e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)}\right)\left(e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} S_2 e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)}\right) = \\
&= e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} S_1 \underbrace{\left(e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)}\right)}_{\substack{\parallel \\ I}} S_2 e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} = \\
&= e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} (S_1 S_2)\, e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)}
\end{aligned}
$$

και η αντίστοιχη μεταβολή είναι

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi (S_1 S_2) =& e^{i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} (S_1 S_2)\, e^{-i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)} - S_1 S_2 \overset{\text{Taylor}}{=} \\
&= \left[I + i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right) + \dots\right](S_1 S_2)\left[I - i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right) + \dots\right] - S_1 S_2 = \\
&= \cancel{S_1 S_2} + i\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right)(S_1 S_2) - i(S_1 S_2)\left(\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}\right) + \dots - \cancel{S_1 S_2} = \\
&= i\left[\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}, S_1 S_2\right] = iS_1\left[\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}, S_2\right] + i\left[\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}, S_1\right]S_2 \overset{(5.3.26)}{=} \\
&= -iS_1\left(\xi^\alpha \hat{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}\right)S_2 - i\left[\left(\xi^\alpha \hat{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}\right)S_1\right]S_2 = \\
&= -i\xi^\alpha\left[S_1\left(\hat{Q}_\alpha S_2\right) + \left(\hat{Q}_\alpha S_1\right)S_2\right] - i\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[S_1\left(\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha} S_2\right) + \left(\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha} S_1\right)S_2\right] \overset{2}{=} \\
&= -i\xi^\alpha \hat{Q}_\alpha (S_1 S_2) - i\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}(S_1 S_2) = -i\left(\xi^\alpha \hat{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}\right)(S_1 S_2)
\end{aligned}
$$

οπότε το $S_1 S_2$ είναι υπερπεδίο.

Έτσι, τα υπερπεδία αντιστοιχούν σε γραμμικές αναπαραστάσεις της άλγεβρας της $N = 1$ υπερσυμμετρίας. Εν γένει, οι αναπαραστάσεις αυτές είναι αναγωγίσιμες. Ωστόσο, μπορεί κανείς να μειώσει τον αριθμό των ανεξάρτητων πεδίων-συνιστωσών ενός υπερπεδίου, ώστε να λάβει μία μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της άλγεβρας της απλής υπερσυμμετρίας επιβάλλοντάς του κατάλληλους περιορισμούς.

[2] Οι διαφορικοί τελεστές $\hat{Q}_\alpha$ και $\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}$ υπακούουν στο συνήθη κανόνα γινομένου για παραγώγους, όταν δρουν σε γινόμενα Lorentz αναλλοίωτων υπερπεδίων:

$$
\hat{Q}_\alpha (ST) = \left(\hat{Q}_\alpha S\right)T + S\left(\hat{Q}_\alpha T\right),\ \overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha}(ST) = \left(\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha} S\right)T + S\left(\overline{\hat{Q}}^{\dot\alpha} T\right)
$$

για οποιαδήποτε Lorentz αναλλοίωτα υπερπεδία S και T.

5.4 Chiral συναλλοίωτες παράγωγοι

Για την κατασκευή υπερσυμμετρικών Lagrangians από υπερπεδία, την οποία θα εξετάσουμε λεπτομερώς στο επόμενο κεφάλαιο, θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε παραγώγους ως προς τις αντιμετατιθέμενες συντεταγμένες θ_α και $\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τέτοιες παραγώγους για να επιβάλουμε περιορισμούς στο γενικό υπερπεδίο κατά ένα τρόπο συνεπή με τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Ωστόσο, οι παράγωγοι $\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}$, $\alpha = 1, 2$, δεν είναι κατάλληλες για αυτόν τον σκοπό, διότι δε μετατίθενται με τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς:

$$\delta_\xi \left(\frac{\partial S}{\partial \theta^\alpha} \right) \neq \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \left(\delta_\xi S \right) \tag{5.4.1}$$

$$\delta_\xi \left(\frac{\partial S}{\partial \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} \right) \neq \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} \left(\delta_\xi S \right) \tag{5.4.2}$$

όπου S τυχαίο υπερπεδίο και $\delta_\xi = -i \left(\xi^\alpha \hat{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}} \overline{\hat{Q}}^{\dot{\alpha}} \right)$. Αυτό σημαίνει ότι οι παράγωγοι ενός υπερπεδίο ως προς τις μεταβλητές Grassmann θ^α και $\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$ δεν είναι υπερπεδία. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό, εισάγουμε τις chiral συναλλοίωτες παραγώγους:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i \left(\sigma^\mu \right)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \tag{5.4.3}$$

$$\begin{aligned}
D^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} D_\beta &\overset{(5.4.3)}{=} \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} - i\varepsilon^{\alpha\beta} \left(\sigma^\mu \right)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \partial_\mu \overset{(5.2.25)}{=} \\
&= - \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} - i\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\delta} \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\zeta}} \left(\overline{\sigma}^\mu \right)^{\dot{\zeta}\delta} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \partial_\mu = \\
&= - \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} - i\delta^\alpha_\delta \left(\overline{\sigma}^\mu \right)^{\dot{\zeta}\delta} \left(-\varepsilon_{\dot{\zeta}\dot{\gamma}} \right) \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \partial_\mu = \\
&= - \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + i \left(\overline{\sigma}^\mu \right)^{\dot{\zeta}\alpha} \overline{\theta}_{\dot{\zeta}} \partial_\mu \Rightarrow \\
\Rightarrow D^\alpha &= - \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + i\overline{\theta}_{\dot{\beta}} \left(\overline{\sigma}^\mu \right)^{\dot{\beta}\alpha} \partial_\mu
\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Ορίζουμε επίσης τις anti-chiral συναλλοίωτες παραγώγους $\overline{D}_{\dot{\alpha}}$, $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$, κατά τρόπο ώστε να ικανοποιούν τη σχέση

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} S^* = \left(D_\alpha S \right)^* \tag{5.4.5}$$

για κάθε $\alpha = 1, 2$, για οποιοδήποτε Lorentz αναλλοίωτο υπερπεδίο S, που συνεπάγεται ότι

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} = - \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\beta \left(\sigma^\mu \right)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu \tag{5.4.6}$$

$$\begin{aligned}
\overline{D}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \overline{D}_{\dot{\beta}} &\overset{(5.4.6)}{=} - \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot{\beta}}} + i\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \theta^\gamma \left(\sigma^\mu \right)_{\gamma\dot{\beta}} \partial_\mu \overset{(5.2.26)}{=} \\
&= \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon_{\gamma\delta} \varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\zeta}} \left(\overline{\sigma}^\mu \right)^{\dot{\zeta}\delta} \theta^\gamma \partial_\mu = \\
&= \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\zeta}} \left(\overline{\sigma}^\mu \right)^{\dot{\zeta}\delta} \left(-\varepsilon_{\delta\gamma} \right) \theta^\gamma \partial_\mu = \\
&= \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\zeta}} \left(\overline{\sigma}^\mu \right)^{\dot{\zeta}\delta} \theta_\delta \partial_\mu \Rightarrow \\
\Rightarrow \overline{D}^{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i \left(\overline{\sigma}^\mu \right)^{\dot{\alpha}\beta} \theta_\beta \partial_\mu
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

Ισχύουν οι σχέσεις αντιμετάθεσης

$$\left\{\hat{Q}_\alpha, D_\beta\right\} = \left\{\overline{\hat{Q}}_{\dot\alpha}, D_\beta\right\} = \left\{\hat{Q}_\alpha, \overline{D}_{\dot\beta}\right\} = \left\{\overline{\hat{Q}}_{\dot\alpha}, \overline{D}_{\dot\beta}\right\} = 0 \tag{5.4.8}$$

για κάθε $\alpha, \beta = 1, 2,\ \dot\alpha, \dot\beta = \dot 1, \dot 2$. Για να αποδείξουμε τις (5.4.8), θεωρούμε ένα τυχαίο υπερπεδίο S. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left\{\hat{Q}_\alpha, D_\beta\right\} S =& \left\{i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} - i\,(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu\right\} S = \\
=& i\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right\} S - i^2\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, (\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu\right\} S - \\
& - \left\{(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right\} S + i\left\{(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu, (\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu\right\} S \overset{(5.2.27)}{=} \\
=& 0 + \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left[(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu S\right] + (\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha}\right)\right\} - \\
& - \left\{(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\left[(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu S\right]\right\} + \\
& + i\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu\left[(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu S\right] + i\,(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu\left[(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu S\right] = \\
=& (\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\left[\cancelto{0}{\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot\gamma}}{\partial\theta^\alpha}}\partial_\nu S - \overline{\theta}^{\dot\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu}\right)\right] + (\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha}\right) - \\
& - (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\beta}\right) - (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\left[\cancelto{0}{\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot\beta}}{\partial\theta^\beta}}\partial_\mu S - \overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\right)\right] + \\
& + i\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\mu\partial_\nu S + i\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\nu\partial_\mu S \overset{\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu}{=} \\
=& -\cancel{(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^\alpha\partial x^\nu}} + \cancel{(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^\alpha\partial x^\nu}} - \cancel{(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu\partial\theta^\beta}} + \\
& + \cancel{(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu\partial\theta^\beta}} + i\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\underbrace{\left\{\overline{\theta}^{\dot\beta}, \overline{\theta}^{\dot\gamma}\right\}}_{\overset{\|}{0}}\partial_\mu\partial_\nu S = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{\overline{\hat{Q}}_{\dot\alpha}, D_\beta\right\} S =& \left\{-i\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}} + \theta^\gamma\,(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\alpha}\,\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} - i\,(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu\right\} S = \\
=& -i\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right\} S + i^2\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}, (\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu\right\} S + \\
& + \left\{\theta^\gamma\,(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\alpha}\,\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right\} S + i\left\{\theta^\gamma\,(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\alpha}\,\partial_\mu, (\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu\right\} S \overset{(5.2.28)}{=} \\
=& 0 - \left\{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\left[(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu S\right] + (\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\right)\right\} + \\
& + \theta^\gamma\,(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\alpha}\,\partial_\mu\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\left[\theta^\gamma\,(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\alpha}\,\partial_\mu S\right] - \\
& - i\theta^\gamma\,(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\alpha}\,\partial_\mu\left[(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu S\right] - i\,(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\,\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\nu\left[\theta^\gamma\,(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\alpha}\,\partial_\mu S\right] =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\left[\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\partial_{\nu}S-\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}}\right)\right]-\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right)+\\
&\quad+\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\gamma\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^{\beta}}\right)+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\gamma\dot{\alpha}}\left[\frac{\partial\theta^{\gamma}}{\partial\theta^{\beta}}\partial_{\mu}S-\theta^{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\right)\right]-\\
&\quad-i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\gamma\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\theta^{\gamma}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S-i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\gamma\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\theta^{\gamma}\partial_{\nu}\partial_{\mu}S=\\
&= -\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}}\partial_{\nu}S+\cancel{\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial^{2}S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial x^{\nu}}}-\cancel{\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial^{2}S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial x^{\nu}}}+\\
&\quad+\cancel{\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\gamma\dot{\alpha}}\frac{\partial^{2}S}{\partial x^{\mu}\partial\theta^{\beta}}}+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\gamma\dot{\alpha}}\delta^{\gamma}_{\beta}\partial_{\mu}S-\cancel{\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\gamma\dot{\alpha}}\frac{\partial^{2}S}{\partial x^{\mu}\partial\theta^{\beta}}}-\\
&\quad-i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\gamma\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\underbrace{\left\{\theta^{\gamma},\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\right\}}_{\substack{\|\\0}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S=\\
&= -\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\nu}S+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu}S=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{\hat{Q}_{\alpha},\overline{D}_{\dot{\beta}}\right\}S &= \left\{i\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}-\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu},-\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}+i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S=\\
&= -i\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right\}S+i^{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}},\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S+\\
&\quad+\left\{\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu},\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right\}S-i\left\{\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu},\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S\overset{(5.2.28)}{=}\\
&= 0-\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left[\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}S\right]+\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\beta\dot{\gamma}}\partial_{\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^{\alpha}}\right)\right\}+\\
&\quad+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right)+\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\left[\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}S\right]-\\
&\quad-i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}\left[\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}S\right]-i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\left[\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}S\right]=\\
&= -\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\left[\frac{\partial\theta^{\gamma}}{\partial\theta^{\alpha}}\partial_{\nu}S-\theta^{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}}\right)\right]-\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^{\alpha}}\right)+\\
&\quad+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right)+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\left[\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\partial_{\mu}S-\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\right)\right]-\\
&\quad-i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\theta^{\gamma}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S-i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\theta^{\gamma}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\nu}\partial_{\mu}S=\\
&= -\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\delta^{\gamma}_{\alpha}\partial_{\nu}S+\cancel{\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial^{2}S}{\partial\theta^{\alpha}\partial x^{\nu}}}-\cancel{\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial^{2}S}{\partial\theta^{\alpha}\partial x^{\nu}}}+\\
&\quad+\cancel{\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial^{2}S}{\partial x^{\mu}\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}}+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}}\partial_{\mu}S-\cancel{\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial^{2}S}{\partial x^{\mu}\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}}-\\
&\quad-i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\underbrace{\left\{\theta^{\gamma},\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\right\}}_{\substack{\|\\0}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S=\\
&= -\left(\sigma^{\nu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\nu}S+\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\mu}S=0
\end{aligned}
$$

$$
\left\{\hat{\overline{Q}}_{\dot{\alpha}},\overline{D}_{\dot{\beta}}\right\}=\left\{-i\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}+\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu},-\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}+i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S=
$$

$$
\begin{aligned}
&=i\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}},\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right\}S-i^2\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}},\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S-\\
&-\left\{\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu},\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right\}S+i\left\{\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu},\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S\overset{(5.2.29)}{=}\\
&=0+\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left[\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}S\right]+\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right)-\\
&-\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right)-\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\left[\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu}S\right]+\\
&+i\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\left[\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}S\right]+i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\left[\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu}S\right]=\\
&=\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\left[\cancelto{0}{\frac{\partial\theta^{\gamma}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}}\partial_{\nu}S-\theta^{\gamma}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}}\right)\right]+\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right)-\\
&-\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right)-\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left[\cancelto{0}{\frac{\partial\theta^{\beta}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}}\partial_{\mu}S-\theta^{\beta}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right)\right]+\\
&+i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\theta^{\beta}\theta^{\gamma}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S+i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\theta^{\gamma}\theta^{\beta}\partial_{\nu}\partial_{\mu}S=\\
&=-\cancel{\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^{\nu}\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}}+\cancel{\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^{\nu}\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}}-\\
&-\cancel{\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^{\mu}\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}}+\cancel{\theta^{\beta}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial^2 S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial x^{\mu}}}+\\
&+i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\beta\dot{\alpha}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\underbrace{\left\{\theta^{\beta},\theta^{\gamma}\right\}}_{\substack{\parallel\\0}}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S=0
\end{aligned}
$$

Επομένως, έχουμε $\left\{\hat{Q}_{\alpha},D_{\beta}\right\}S=\left\{\overline{\hat{Q}}_{\dot{\alpha}},D_{\beta}\right\}S=\left\{\hat{Q}_{\alpha},\overline{D}_{\dot{\beta}}\right\}S=\left\{\overline{\hat{Q}}_{\dot{\alpha}},\overline{D}_{\dot{\beta}}\right\}S=0$ για οποιοδήποτε υπερπεδίο S, οπότε ισχύουν οι (5.4.8).

Από τις σχέσεις αντιμετάθεσης (5.4.8) έπεται ότι οι διαφορικοί τελεστές D_{α} και $\overline{D}_{\dot{\alpha}}$ μετατίθενται με τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$
\delta_{\xi}\left(D_{\alpha}S\right)=D_{\alpha}\left(\delta_{\xi}S\right),\ \delta_{\xi}\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}S\right)=\overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\delta_{\xi}S\right) \tag{5.4.9}
$$

για κάθε υπερπεδίο S και για οποιονδήποτε υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό χαρακτηριζόμενο από απειροστές σταθερές (ανεξάρτητες του x) παραμέτρους Grassmann ξ^{α} και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$. Η ισχύς των σχέσεων (5.4.9) δικαιολογεί το χαρακτηρισμό των σπινοριακών παραγώγων D_{α} και $\overline{D}_{\dot{\alpha}}$ ως συναλλοίωτες· η δράση τους πάνω σε υπερπεδία δίνει πάλι υπερπεδία. Το γεγονός ότι οι εν λόγω παράγωγοι μετατίθενται με τους υπερσυμμετρικούς μετασχημετισμούς μας δίνει τη δυνατότητα να τις χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε περιορισμούς για υπερπεδία με ένα συναλλοίωτο τρόπο.

Θα αποδείξουμε τώρα τις σχέσεις (5.4.9) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αντιμετάθεσης (5.4.8). Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\delta_{\xi}\left(D_{\alpha}S\right)-D_{\alpha}\left(\delta_{\xi}S\right)=&-i\left(\xi^{\beta}\hat{Q}_{\beta}+\overline{\xi}_{\dot{\beta}}\overline{\hat{Q}}^{\dot{\beta}}\right)\left(D_{\alpha}S\right)-D_{\alpha}\left[-i\left(\xi^{\beta}\hat{Q}_{\beta}+\overline{\xi}_{\dot{\beta}}\overline{\hat{Q}}^{\dot{\beta}}\right)S\right]=\\
=&-i\xi^{\beta}\hat{Q}_{\beta}\left(D_{\alpha}S\right)-i\overline{\xi}_{\dot{\beta}}\overline{\hat{Q}}^{\dot{\beta}}\left(D_{\alpha}S\right)+iD_{\alpha}\left(\xi^{\beta}\hat{Q}_{\beta}S\right)+iD_{\alpha}\left(\overline{\xi}_{\dot{\beta}}\overline{\hat{Q}}^{\dot{\beta}}S\right)=\\
=&-i\xi^{\beta}\hat{Q}_{\beta}\left(D_{\alpha}S\right)-i\overline{\xi}_{\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\overline{\hat{Q}}_{\dot{\gamma}}\left(D_{\alpha}S\right)-i\xi^{\beta}D_{\alpha}\left(\hat{Q}_{\beta}S\right)-i\overline{\xi}_{\dot{\beta}}D_{\alpha}\left(\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\overline{\hat{Q}}_{\dot{\gamma}}S\right)=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= - i\xi^{\beta}\left[\hat{Q}_{\beta}\left(D_{\alpha}S\right) + D_{\alpha}\left(\hat{Q}_{\beta}S\right)\right] + i\varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}}\overline{\xi}_{\dot{\beta}}\left[\overline{\hat{Q}}_{\dot{\gamma}}\left(D_{\alpha}S\right) + D_{\alpha}\left(\overline{\hat{Q}}_{\dot{\gamma}}S\right)\right] = \\
&= - i\xi^{\beta}\left\{\hat{Q}_{\beta}, D_{\alpha}\right\}S + i\overline{\xi}^{\dot{\gamma}}\left\{\overline{\hat{Q}}_{\dot{\gamma}}, D_{\alpha}\right\}S \overset{(5.4.8)}{=} 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

άρα $\delta_{\xi}\left(D_{\alpha}S\right) = D_{\alpha}\left(\delta_{\xi}S\right)$. Επίσης, είναι:

$$
\begin{aligned}
\delta_{\xi}\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}S\right) - \overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\delta_{\xi}S\right) &= - i\left(\xi^{\beta}\hat{Q}_{\beta} + \overline{\xi}_{\dot{\beta}}\overline{\hat{Q}}^{\dot{\beta}}\right)\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}S\right) - \overline{D}_{\dot{\alpha}}\left[-i\left(\xi^{\beta}\hat{Q}_{\beta} + \overline{\xi}_{\dot{\beta}}\overline{\hat{Q}}^{\dot{\beta}}\right)S\right] = \\
&= - i\xi^{\beta}\hat{Q}_{\beta}\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}S\right) - i\overline{\xi}_{\dot{\beta}}\overline{\hat{Q}}^{\dot{\beta}}\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}S\right) + i\overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\xi^{\beta}\hat{Q}_{\beta}S\right) + i\overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\xi}_{\dot{\beta}}\overline{\hat{Q}}^{\dot{\beta}}S\right) = \\
&= - i\xi^{\beta}\hat{Q}_{\beta}\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}S\right) - i\overline{\xi}_{\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\overline{\hat{Q}}_{\dot{\gamma}}\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}S\right) - i\xi^{\beta}\overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\hat{Q}_{\beta}S\right) - i\overline{\xi}_{\dot{\beta}}\overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\overline{\hat{Q}}_{\dot{\gamma}}S\right) = \\
&= - i\xi^{\beta}\left[\hat{Q}_{\beta}\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}S\right) + \overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\hat{Q}_{\beta}S\right)\right] + i\varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}}\overline{\xi}_{\dot{\beta}}\left[\overline{\hat{Q}}_{\dot{\gamma}}\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}S\right) + \overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\overline{\hat{Q}}_{\dot{\gamma}}S\right)\right] = \\
&= - i\xi^{\beta}\left\{\hat{Q}_{\beta}, \overline{D}_{\dot{\alpha}}\right\}S + i\overline{\xi}^{\dot{\gamma}}\left\{\overline{\hat{Q}}_{\dot{\gamma}}, \overline{D}_{\dot{\alpha}}\right\}S \overset{(5.4.8)}{=} 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

άρα $\delta_{\xi}\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}S\right) = \overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\delta_{\xi}S\right)$.

Ακόμη, μπορούμε να δείξουμε ότι οι chiral και οι anti-chiral συναλλοίωτες παράγωγοι ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις αντιμετάθεσης:

$$
\left\{D_{\alpha}, \overline{D}_{\dot{\beta}}\right\} = 2i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\mu} \tag{5.4.10}
$$

$$
\left\{D_{\alpha}, D_{\beta}\right\} = \left\{\overline{D}_{\dot{\alpha}}, \overline{D}_{\dot{\beta}}\right\} = 0 \tag{5.4.11}
$$

Για να αποδείξουμε τις ανωτέρω σχέσεις, θεωρούμε κατά τα γνωστά ένα τυχαίο υπερπεδίο S. Είναι:

$$
\begin{aligned}
\left\{D_{\alpha}, \overline{D}_{\dot{\beta}}\right\}S &= \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}, -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}} + i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S = \\
&= - \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right\}S + i\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}, \theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S + \\
&\quad + i\left\{\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right\}S - i^{2}\left\{\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}, \theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\right\}S \overset{(5.2.28)}{=} \\
&= 0 + i\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left\{\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}S\right\} + i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^{\alpha}}\right) + \\
&\quad + i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right) + i\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\left[\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}S\right] + \\
&\quad + \left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}\left[\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}S\right] + \theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\partial_{\nu}\left[\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}S\right] = \\
&= i\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\left[\frac{\partial\theta^{\gamma}}{\partial\theta^{\alpha}}\partial_{\nu}S - \theta^{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}}\right)\right] + i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^{\alpha}}\right) + \\
&\quad + i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\right) + i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\left[\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\partial_{\mu}S - \overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\right)\right] + \\
&\quad + \left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\theta^{\gamma}\partial_{\mu}\partial_{\nu}S + \left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\theta^{\gamma}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_{\nu}\partial_{\mu}S = \\
&= i\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\delta^{\gamma}_{\alpha}\partial_{\nu}S - \cancel{i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial^{2}S}{\partial\theta^{\alpha}\partial x^{\nu}}} + \cancel{i\theta^{\gamma}\left(\sigma^{\nu}\right)_{\gamma\dot{\beta}}\frac{\partial^{2}S}{\partial\theta^{\alpha}\partial x^{\nu}}} + \\
&\quad + \cancel{i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial^{2}S}{\partial x^{\mu}\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}} + i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}}\partial_{\mu}S - \cancel{i\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\frac{\partial^{2}S}{\partial x^{\mu}\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}} +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\gamma}} (\sigma^\nu)_{\gamma\dot{\beta}} \underbrace{\left\{\theta^\gamma, \overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\right\}}_{\substack{\parallel \\ 0}} S = \\
=&i (\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\nu S + i (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu S = 2i (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu S
\end{aligned}
$$

Άρα $\left\{D_\alpha, \overline{D}_{\dot{\beta}}\right\} S = 2i (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu S$ για κάθε υπερπεδίο S, οπότε ισχύει η (5.4.10). Επιπλέον, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\{D_\alpha, D_\beta\} S =& \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} - i (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \partial_\nu \right\} S = \\
=& \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \right\} S - i \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \partial_\nu \right\} S - \\
&- i \left\{ (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \right\} S + i^2 \left\{ (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu, (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \partial_\nu \right\} S \overset{(5.2.27)}{=} \\
=&0 - i \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \left[(\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \partial_\nu S \right] + (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \partial_\nu \left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha} \right) \right\} - \\
&- i \left\{ (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\beta} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \left[(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu S \right] \right\} - \\
&- (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \left[(\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \partial_\nu S \right] - (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \partial_\nu \left[(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu S \right] = \\
=&- i (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \left[\cancelto{0}{\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}}{\partial\theta^\alpha}} \partial_\nu S - \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} \right) \right] - i (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha} \right) - \\
&- i (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\beta} \right) - i (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \left[\cancelto{0}{\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}}{\partial\theta^\beta}} \partial_\mu S - \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \right) \right] - \\
&- (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \partial_\mu \partial_\nu S - (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\nu \partial_\mu S = \\
=& \cancel{i (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \frac{\partial^2 S}{\partial\theta^\alpha \partial x^\nu}} - \cancel{i (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \frac{\partial^2 S}{\partial\theta^\alpha \partial x^\nu}} - \\
&- \cancel{i (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu \partial\theta^\beta}} + \cancel{i (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} \frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu \partial\theta^\beta}} - \\
&- (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\gamma}} \underbrace{\left\{ \overline{\theta}^{\dot{\beta}}, \overline{\theta}^{\dot{\gamma}} \right\}}_{\substack{\parallel \\ 0}} \partial_\mu \partial_\nu S = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{ \overline{D}_{\dot{\alpha}}, \overline{D}_{\dot{\beta}} \right\} S =& \left\{ -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu, -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}} + i\theta^\gamma (\sigma^\nu)_{\gamma\dot{\beta}} \partial_\nu \right\} S = \\
=& \left\{ \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}} \right\} S - i \left\{ \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}, \theta^\gamma (\sigma^\nu)_{\gamma\dot{\beta}} \partial_\nu \right\} S - \\
&- i \left\{ \theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}} \right\} S + i^2 \left\{ \theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu, \theta^\gamma (\sigma^\nu)_{\gamma\dot{\beta}} \partial_\nu \right\} S \overset{(5.2.29)}{=} \\
=&0 - i \left\{ \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} \left[\theta^\gamma (\sigma^\nu)_{\gamma\dot{\beta}} \partial_\nu S \right] + \theta^\gamma (\sigma^\nu)_{\gamma\dot{\beta}} \partial_\nu \left(\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} \right) \right\} -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- i \left\{ \theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu \left(\frac{\partial S}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\right) + \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}[\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu S]\right\} - \\
&- \theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu\left[\theta^\gamma(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\beta}\partial_\nu S\right] - \theta^\gamma(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\beta}\partial_\nu\left[\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu S\right] = \\
= &- i(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\beta}\left[\cancelto{0}{\frac{\partial\theta^\gamma}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}}\partial_\nu S - \theta^\gamma \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu}\right)\right] - i\theta^\gamma(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\beta}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}\right) - \\
&- i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\right) - i(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\left[\cancelto{0}{\frac{\partial\theta^\beta}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}}\partial_\mu S - \theta^\beta\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\right)\right] - \\
&- (\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\beta}\theta^\beta\theta^\gamma\partial_\mu\partial_\nu S - (\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\beta}\theta^\gamma\theta^\beta\partial_\nu\partial_\mu S = \\
= &\cancel{i\theta^\gamma(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\beta}\frac{\partial^2 S}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}\partial x^\nu}} - \cancel{i\theta^\gamma(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\beta}\frac{\partial^2 S}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}\partial x^\nu}} - \\
&- \cancel{i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu\partial\bar\theta^{\dot\beta}}} + \cancel{i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu\partial\bar\theta^{\dot\beta}}} - \\
&- (\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\beta}\underbrace{\left\{\theta^\beta,\theta^\gamma\right\}}_{\overset{\|}{0}}\partial_\mu\partial_\nu S = 0
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, $\{D_\alpha, D_\beta\} S = \left\{\overline{D}_{\dot\alpha}, \overline{D}_{\dot\beta}\right\} S = 0$ για κάθε υπερπεδίο S, άρα ισχύουν οι σχέσεις (5.4.11).

Τέλος, ένα ακόμη χρήσιμο αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο:

$$D_\alpha D_\beta D_\gamma S = 0 \text{ και } \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}_{\dot\beta}\overline{D}_{\dot\gamma} S = 0 \tag{5.4.12}$$

για κάθε υπερπεδίο S, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$, $\dot\alpha, \dot\beta, \dot\gamma = \dot1, \dot2$. Η ισχύς των τελευταίων σχέσεων είναι απόρροια των σχέσεων αντιμετάθεσης (5.4.11) και του γεγονότος ότι καθένας εκ των σπινοριακών δεικτών $\alpha, \beta, \gamma, \dot\alpha, \dot\beta, \dot\gamma$ μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές.

5.5 Chiral υπερπεδία

Ένα υπερπεδίο $\Phi(x, \theta, \overline{\theta})$, το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi = 0 \tag{5.5.1}$$

καλείται chiral υπερπεδίο. Το μιγαδικό συζυγές ενός chiral υπερπεδίου Φ, Φ^*, ικανοποιεί τη συνθήκη

$$D_\alpha \Phi^* = 0 \tag{5.5.2}$$

όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε παίρνοντας το μιγαδικό συζυγές της (5.5.1) και χρησιμοποιώντας την (5.4.5), και ονομάζεται anti-chiral υπερπεδίο. Οι περιορισμοί (5.5.1) και (5.5.2) είναι αναλλοίωτοι κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, διότι οι σπινοριακές συναλλοίωτες παράγωγοι D_α και $\overline{D}_{\dot\alpha}$ μετατίθενται με τους εν λόγω μετασχηματισμούς. Πράγματι, εάν Φ είναι ένα chiral υπερπεδίο (οπότε το Φ^* είναι ένα anti-chiral υπερπεδίο), για τα υπερπεδία $\Phi' = \Phi + \delta_\xi\Phi$ και $\Phi'^* = \Phi^* + \delta_\xi\Phi^*$ - όπου $\delta_\xi\Phi$ και $\delta_\xi\Phi^*$ είναι οι μεταβολές των Φ και Φ^* αντίστοιχα κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό παραμετροποιούμενο από μεταβλητές Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$ - ισχύει

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi' = &\overline{D}_{\dot\alpha}(\Phi + \delta_\xi\Phi) = \overline{D}_{\dot\alpha}\Phi + \overline{D}_{\dot\alpha}(\delta_\xi\Phi) \overset{(5.4.9)}{=} \\
= &\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi + \delta_\xi\left(\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi\right) \overset{(5.5.1)}{=} \overline{D}_{\dot\alpha}\Phi + \delta_\xi 0 = \overline{D}_{\dot\alpha}\Phi = 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}D_\alpha \Phi'^* =& D_\alpha\left(\Phi^*+\delta_\xi \Phi^*\right)=D_\alpha \Phi^*+D_\alpha\left(\delta_\xi \Phi^*\right) \overset{(5.4.9)}{=}\\ =& D_\alpha \Phi^*+\delta_\xi\left(D_\alpha \Phi^*\right) \overset{(5.5.2)}{=} D_\alpha \Phi^*+\delta_\xi 0=D_\alpha \Phi=0\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι και τα υπερπεδία Φ' και Φ'^* είναι chiral και anti-chiral αντίστοιχα.

Για να βρούμε τη γενική έκφραση για ένα chiral υπερπεδίο με βάση τον περιορισμό (5.5.1), είναι βολικό να εισάγουμε νέες μποζονικές συντεταγμένες y^μ $(\mu=0,1,2,3)$ στο $N=1$ υπερχώρο, που ορίζονται από τη σχέση:

$$y^\mu \equiv x^\mu+i\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta=x^\mu-i\theta\sigma^\mu\overline{\theta} \tag{5.5.3}$$

και να εργαστούμε στις υπερσυντεταγμένες $\left(y^\mu,\theta_\alpha,\overline{\theta}_{\dot\alpha}\right)$. Εάν $S(x,\theta,\overline{\theta})$ είναι ένα τυχαίο (Lorentz αναλλοίωτο) υπερπεδίο, ορίζουμε:

$$S(x,\theta,\overline{\theta}) \overset{(5.5.3)}{=} S\left(y-i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta,\theta,\overline{\theta}\right) \equiv \tilde{S}\left(y,\theta,\overline{\theta}\right) \tag{5.5.4}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}D_\alpha S=&\left[\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu\right]S=\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha}-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}=\\ =&\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}\frac{\partial y^\mu}{\partial\theta^\alpha}+\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta^\alpha}-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\nu}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}\overset{(5.5.3)}{=}\\ =&\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(x^\mu-i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)+\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta^\alpha}-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(x^\nu-i\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)=\\ =&-i\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)+\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta^\alpha}-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}\overset{(5.2.19)}{=}\\ =&-i\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}\left(\sigma^\mu\overline{\theta}\right)_\alpha+\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta^\alpha}-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\nu}\delta^\nu_\mu=\\ =&-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}+\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta^\alpha}-i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow D_\alpha S=\left[\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}-2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right]\tilde S\equiv\tilde D_\alpha\tilde S \tag{5.5.5}$$

$$\begin{aligned}D^\alpha S=&\left[-\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}+i\overline{\theta}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha}\partial_\mu\right]S=-\frac{\partial S}{\partial\theta_\alpha}+i\overline{\theta}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}=\\ =&-\left(\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}\frac{\partial y^\mu}{\partial\theta_\alpha}+\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta_\alpha}\right)+i\overline{\theta}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\nu}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}=\\ =&-\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\left[x^\mu-i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma}\right]-\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta_\alpha}+i\overline{\theta}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\nu}\delta^\nu_\mu\\ =&i\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}\frac{\partial\theta^\beta}{\partial\theta_\alpha}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma}-\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta_\alpha}+i\overline{\theta}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}\overset{(5.2.7)}{=}\\ =&i\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}\left(-\varepsilon^{\alpha\beta}\right)(\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma}-\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta_\alpha}+i\overline{\theta}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}=\\ =&-i\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\delta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\zeta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\zeta\delta}\overline{\theta}^{\dot\gamma}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}-\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta_\alpha}+i\overline{\theta}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}=\\ =&-i\delta^\alpha_\delta\left(-\varepsilon_{\dot\zeta\dot\gamma}\right)\overline{\theta}^{\dot\gamma}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\zeta\delta}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}-\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta_\alpha}+i\overline{\theta}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}=\\ =&i\overline{\theta}_{\dot\zeta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\zeta\alpha}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}-\frac{\partial\tilde S}{\partial\theta_\alpha}+i\overline{\theta}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha}\frac{\partial\tilde S}{\partial y^\mu}\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow D^{\alpha}S=\left[-\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}+2i\overline{\theta}_{\dot{\beta}}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\right]\tilde{S}\equiv\tilde{D}^{\alpha}\tilde{S} \tag{5.5.6}$$

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{\dot{\alpha}}S=&\left[-\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}+i\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right]S=-\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}+i\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}=\\
=&-\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}+\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right)+i\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\nu}}\frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\mu}}=\\
=&-\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(x^{\mu}+i\overline{\theta}_{\dot{\beta}}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\gamma}\theta_{\gamma}\right)-\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}+i\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\nu}}\delta^{\nu}_{\mu}=\\
=&-i\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial\overline{\theta}_{\dot{\beta}}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\gamma}\theta_{\gamma}-\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}+i\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}\overset{(5.2.10)}{=}\\
=&-i\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}\left(-\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\right)\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\delta}}\varepsilon^{\gamma\zeta}(\sigma^{\mu})_{\zeta\dot{\delta}}\theta_{\gamma}-\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}+i\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}=\\
=&i\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}\delta^{\dot{\delta}}_{\dot{\alpha}}\left(-\varepsilon^{\zeta\gamma}\right)\theta_{\gamma}(\sigma^{\mu})_{\zeta\dot{\delta}}-\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}+i\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}=\\
=&\cancel{-i\theta^{\zeta}(\sigma^{\mu})_{\zeta\dot{\alpha}}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}}-\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\cancel{+i\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}}\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\overline{D}_{\dot{\alpha}}S=-\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\equiv\overline{\tilde{D}}_{\dot{\alpha}}\tilde{S} \tag{5.5.7}$$

$$\begin{aligned}
\overline{D}^{\dot{\alpha}}S=&\left[\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}-i(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\partial_{\mu}\right]S=\frac{\partial S}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}-i(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}=\\
=&\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}+\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}-i(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\nu}}\frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\mu}}=\\
=&\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\left(x^{\mu}+i\overline{\theta}\overline{\sigma}^{\mu}\theta\right)+\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}-i(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\nu}}\delta^{\nu}_{\mu}=\\
=&i\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}(\overline{\theta}\overline{\sigma}^{\mu}\theta)+\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}-i(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}\overset{(5.2.21)}{=}\\
=&i\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}\left(\overline{\sigma}^{\mu}\theta\right)^{\dot{\alpha}}+\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}-i(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}=\\
=&\cancel{i(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}}+\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\cancel{-i(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\theta_{\beta}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial y^{\mu}}}\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\overline{D}^{\dot{\alpha}}S=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}\equiv\overline{\tilde{D}}^{\dot{\alpha}}\tilde{S} \tag{5.5.8}$$

Έτσι, στις συντεταγμένες $\left(y^{\mu},\theta_{\alpha},\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\right)$ οι συναλλοίωτες παράγωγοι $D_{\alpha},D^{\alpha},\overline{D}_{\dot{\alpha}},\overline{D}^{\dot{\alpha}}$ αναπαριστώνται από τους διαφορικούς τελεστές $\tilde{D}_{\alpha}=\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}-2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}$, $\tilde{D}^{\alpha}=-\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}+2i\overline{\theta}_{\dot{\beta}}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}$, $\overline{\tilde{D}}_{\dot{\alpha}}=-\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}$, $\overline{\tilde{D}}^{\dot{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}$ αντίστοιχα. Επομένως, ο περιορισμός (5.5.1) συνεπάγεται ότι για ένα chiral υπερπεδίο $\Phi(x,\theta,\overline{\theta})$, η αντίστοιχη συνάρτηση των $(y,\theta,\overline{\theta})$, $\tilde{\Phi}(y,\theta,\overline{\theta})(=\Phi(y-i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta,\theta,\overline{\theta}))$, ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\overline{\tilde{D}}_{\dot{\alpha}}\tilde{\Phi}=-\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}=0, \tag{5.5.9}$$

που σημαίνει ότι το $\tilde{\Phi}$ δεν εξαρτάται ρητά από το $\overline{\theta}$, και άρα είναι συνάρτηση μόνο των y και θ, η οποία μπορεί να αναπτυχθεί σε δυνάμεις του θ και να γραφεί ως:

$$\tilde{\Phi}=\tilde{\Phi}(y,\theta)=\phi(y)+\sqrt{2}\theta^{\alpha}\psi_{\alpha}(y)+(\theta\theta)\,F(y)=$$

$$=\phi(y)+\sqrt{2}\theta\psi(y)+(\theta\theta)\,F(y), \qquad (5.5.10)$$

όπου ϕ και F είναι δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία και ψ είναι ένα αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl, ενώ η ύπαρξη του παράγοντα $\sqrt{2}$ δεν είναι παρά μία σύμβαση. Με δεδομένη την (5.5.10), μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μορφή ενός chiral υπερπεδίου Φ ως συνάρτηση των αρχικών υπερσυντεταγμένων, $\left(x^\mu,\theta_\alpha,\overline{\theta}_{\dot\alpha}\right)$, αναπτύσσοντας κατά Taylor τα πεδία συνιστώσες $\phi(y),\psi(y),F(y)$ (όπου $y^\mu=x^\mu+i\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta$) γύρω από το x και λαμβάνοντας υπόψη ότι όροι με περισσότερα από δύο θ ή/και περισσότερα από δύο $\overline{\theta}$ είναι μηδενικοί λόγω των σχέσεων αντιμετάθεσης (5.1.1). Έχουμε

$$\begin{aligned}
\Phi(x,\theta,\overline{\theta})=\tilde{\Phi}(y,\theta)=\tilde{\Phi}(x+i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta,\theta)=&\phi(x+i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta)+\sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(x+i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta)+(\theta\theta)\,F(x+i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta)=\\
=&\phi(x)+i\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\phi(x)+\frac{1}{2!}i^2\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\nu\theta\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi(x)+\\
&+\sqrt{2}\theta^\alpha\left[\psi_\alpha(x)+i\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\psi_\alpha(x)\right]+(\theta\theta)\,F(x)=\\
=&\phi(x)-i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi(x)-\frac{1}{2}\left(-\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(-\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi(x)+\\
&+\sqrt{2}\theta\psi(x)+i\sqrt{2}\left(\theta\partial_\mu\psi(x)\right)\left(-\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)+(\theta\theta)\,F(x)=\\
=&\phi(x)-i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi(x)-\frac{1}{2}\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi(x)+\\
&+\sqrt{2}\theta\psi(x)-i\sqrt{2}\left(\theta\partial_\mu\psi(x)\right)\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)+(\theta\theta)\,F(x)\overset{(2.5.32),(2.5.35)}{=}\\
=&\phi(x)-i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi(x)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\right]\partial_\mu\partial_\nu\phi(x)+\\
&+\sqrt{2}\theta\psi(x)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\theta\theta\right)\left[\left(\partial_\mu\psi(x)\right)\sigma^\mu\overline{\theta}\right]+(\theta\theta)\,F(x)=\\
=&\phi(x)-i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi(x)-\frac{1}{4}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi(x)+\\
&+\sqrt{2}\theta\psi(x)-\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x)+(\theta\theta)\,F(x)\Rightarrow\\
\Rightarrow\Phi(x,\theta,\overline{\theta})=&\phi(x)+\sqrt{2}\theta\psi(x)+(\theta\theta)\,F(x)-i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi(x)-\\
&-\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x)-\frac{1}{4}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) \qquad (5.5.11)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\Phi^*(x,\theta,\overline{\theta})=&\phi^*(x)+\sqrt{2}\left(\theta\psi(x)\right)^*+(\theta\theta)^*\,F^*(x)+i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)^*\partial_\mu\phi^*(x)+\\
&+\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\theta\theta\right)^*\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x)\right)^*-\frac{1}{4}\left(\theta\theta\right)^*\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)^*\partial_\mu\partial^\mu\phi^*(x)=\\
=&\phi^*(x)+\sqrt{2}\overline{\theta}\;\overline{\psi}(x)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)F^*(x)+i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi^*(x)+\\
&+\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[\left(\partial_\mu\overline{\psi}(x)\right)\overline{\sigma}^\mu\theta\right]-\frac{1}{4}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\theta\theta\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi^*(x)\Rightarrow\\
\Rightarrow\Phi^*(x,\theta,\overline{\theta})=&\phi^*(x)+\sqrt{2}\overline{\theta}\;\overline{\psi}(x)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)F^*(x)+i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi^*(x)-\\
&-\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}(x)-\frac{1}{4}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi^*(x) \qquad (5.5.12)
\end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι ένα chiral υπερπεδίο Φ έχει μόνο τρία ανεξάρτητα πεδία-συνιστώσεις, δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία ϕ και F και ένα αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl ψ. Εάν αποδώσουμε σε ένα τέτοιο υπερπεδίο διάσταση μάζας ίση με 1, τότε από την (5.5.11) (ή την (5.5.10)), σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι φερμιονικές συντεταγμένες θ_α και $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$ έχουν διάσταση μάζας $-\frac{1}{2}$, έπεται ότι το ϕ έχει διάσταση μάζας 1, το ψ έχει διάσταση μάζας $\frac{3}{2}$ και το F έχει διάσταση μάζας 2. Έτσι, τα πεδία-συνιστώσες ϕ,ψ και F αποτελούν μία άμαζη off-shell chiral supermultiplet, με το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο F να αποτελεί ένα βοηθητικό πεδίο.

Για να προσδιορίσουμε τους κανόνες μετασχηματισμού των πεδίων-συνιστωσών ενός chiral υπερπεδίου Φ κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό, δεν έχουμε παρά να χρησιμοποιήσουμε τους αντίστοιχους κανόνες για το γενικό υπερπεδίο S της (5.3.13), δηλαδή τις εξισώσεις (5.3.51)-(5.3.59), όπου πρέπει να θέσουμε:

$$f(x) = \phi(x),\ \phi_\alpha(x) = \sqrt{2}\psi_\alpha(x),\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}}(x) = 0 \tag{5.5.13}$$

$$m(x) = F(x),\ n(x) = 0,\ V_\mu(x) = -i\partial_\mu\phi(x) \tag{5.5.14}$$

$$\overline{\rho}^{\dot{\alpha}}(x) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\psi_\beta(x),\ \psi_\alpha(x) = 0,\ d(x) = -\frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) \tag{5.5.15}$$

όπως προκύπτει από σύγκριση της έκφρασης για ένα γενικό Lorentz αναλλοίωτο υπερπεδίο (σχέση (5.3.13)) με την έκφραση για ένα γενικό Lorentz αναλλοίωτο chiral υπερπεδίο (σχέση (5.5.11)). Αντικαθιστώντας τις (5.5.13)-(5.5.15) στις σχέσεις (5.3.51), (5.3.52) και (5.3.54), λαμβάνουμε αντίστοιχα:

$$\delta_\xi\phi(x) = \xi^\alpha\left(\sqrt{2}\xi\psi_\alpha(x)\right) = \sqrt{2}\xi\psi(x) \tag{5.5.16}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\xi\left(\sqrt{2}\psi_\alpha(x)\right) =& 2\xi_\alpha F(x) + \left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha(-i\partial_\mu\phi(x) - i\partial_\mu\phi(x)) \Rightarrow\\
\Rightarrow \sqrt{2}\delta_\xi\psi_\alpha(x) =& 2\xi_\alpha F(x) - 2i\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\phi(x) \Rightarrow\\
\Rightarrow \delta_\xi\psi_\alpha(x) =& -i\sqrt{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\phi(x) + \sqrt{2}\xi_\alpha F(x)
\end{aligned} \tag{5.5.17}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\xi F(x) =& \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\left[-\frac{i}{\sqrt{2}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\psi_\beta(x)\right] - \frac{i}{2}\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\left(\sqrt{2}\psi_\beta(x)\right) =\\
=& -\frac{i}{\sqrt{2}}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) \Rightarrow\\
\Rightarrow \delta_\xi F(x) =& -i\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x)
\end{aligned} \tag{5.5.18}$$

Οι σχέσεις (5.5.16), (5.5.17), (5.5.18) μας δίνουν τις μεταβολές των πεδίων - συνιστωσών $\phi(x), \psi(x), F(x)$ αντίστοιχα ενός γενικού chiral υπερπεδίου Φ (εξίσωση (5.5.11)) κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που παραμετροποιείται από μεταβλητές Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$, ενώ συμφωνούν με τις (4.1.66), (4.1.67), (4.1.68) αντίστοιχα, τις οποίες εξήγαμε χωρίς τη χρήση του φορμαλισμού του υπερχώρου και των υπερπεδίων.

Ακόμη, αξίζει να επισημάνουμε ότι για οποιοδήποτε υπερπεδίο S, τα υπερπεδία

$$\Phi = \overline{DD}S \equiv \overline{D}_{\dot{\alpha}}\overline{D}^{\dot{\alpha}}S,\ \Phi^* = DDS^* \equiv D^\alpha D_\alpha S^* \tag{5.5.19}$$

είναι chiral και anti-chiral αντίστοιχα. Αυτό είναι άμεση συνέπεια των σχέσεων (5.4.12). Η παρατήρηση αυτή μας παρέχει ουσιαστικά έναν τρόπο κατασκευής chiral υπερπεδίων. Επίσης, ισχύει και το αντίστροφο· για κάθε chiral υπερπεδίο Φ, μπορεί κανείς να βρει ένα υπερπεδίο S, τέτοιο ώστε να ισχύει η (5.5.19).

Επιπλέον, για n chiral υπερπεδία $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ (όπου n θετικός ακέραιος), το άθροισμα τους, $\sum_{i=1}^{n}\Phi_i$, είναι επίσης ένα chiral υπερπεδίο, αφού λόγω της γραμμικότητας των διαφορικών τελεστών $\overline{D}_{\dot{\alpha}}$, ισχύει:

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{n}\Phi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Phi_i = 0$$

για κάθε $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$, δεδομένου ότι $\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Phi_i = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Επίσης, για δύο chiral υπερπεδία Φ_1, Φ_2, το γινόμενό τους, Φ_1, Φ_2, είναι και αυτό ένα chiral υπερπεδίο, καθώς

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}(\Phi_1\Phi_2) = \left[-\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\right](\Phi_1\Phi_2) = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}(\Phi_1\Phi_2) + i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu(\Phi_1\Phi_2) =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\Phi_2 + \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right) + i\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\left[(\partial_\mu \Phi_1)\,\Phi_2 + \Phi_1 \partial_\mu \Phi_2\right] = \\
&= \left[-\frac{\partial \Phi_1}{\partial \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu \Phi_1\right]\Phi_2 + \Phi_1\left[-\frac{\partial \Phi_2}{\partial \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^{\beta}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu \Phi_2\right] = \\
&= \underbrace{\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Phi_1\right)}_{\substack{\| \\ 0}}\Phi_2 + \Phi_1\,\underbrace{\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Phi_2}_{\substack{\| \\ 0}} = 0
\end{aligned}
$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γνωστό κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο συναρτήσεων. Κατ΄ επέκταση, το γινόμενο ενός αυθαίρετου αριθμού chiral υπερπεδίων είναι ένα chiral υπερπεδίο. Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση n chiral υπερπεδίων Φ_i, $W(\Phi_i)$, η οποία δεν εξαρτάται από κανένα από τα anti-chiral υπερπεδία Φ_i^* - με άλλα λόγια, οποιαδήποτε ολόμορφη συνάρτηση n chiral υπερπεδίων Φ_i, τα οποία μεταχειριζόμαστε ως μιγαδικές μεταβλητές - είναι πάλι ένα chiral υπερπεδίο.

5.6 Διανυσματικά υπερπεδία

Ένα διανυσματικό υπερπεδίο $V(x,\theta,\overline{\theta})$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$V = V^*, \tag{5.6.1}$$

Εάν ταυτοποιήσουμε το V με το γενικό υπερπεδίο S της σχέσης (5.3.13), ο περιορισμός (5.6.1), ο οποίος διατηρείται κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. συνεπάγεται ότι:

$$
\begin{aligned}
&f(x) + \theta\phi(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + (\theta\theta)\,m(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)n(x) + \\
&\quad + \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)V_\mu(x) + (\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\rho}(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\psi(x) + (\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x) = \\
=&f^*(x) + (\theta\phi(x))^* + \left(\overline{\theta}\overline{\chi}(x)\right)^* + (\theta\theta)^*\,m^*(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)^* n^*(x) + \\
&\quad + \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)^* V_\mu^*(x) + (\theta\theta)^*\left(\overline{\theta}\overline{\rho}(x)\right)^* + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)^*(\theta\psi(x))^* + (\theta\theta)^*\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)^* d^*(x) = \\
=&f^*(x) + \overline{\theta}\;\overline{\phi}(x) + \theta\chi(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)m^*(x) + (\theta\theta)\,n^*(x) + \\
&\quad + \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)V_\mu^*(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\rho(x) + (\theta\theta)\;\overline{\theta}\;\overline{\psi}(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)(\theta\theta)\,d^*(x)
\end{aligned}
$$

άρα

$$f(x) = f^*(x),\ \phi(x) = \chi(x),\ m(x) = n^*(x), \tag{5.6.2}$$

$$V_\mu(x) = V_\mu^*(x),\ \rho(x) = \psi(x),\ d(x) = d^*(x) \tag{5.6.3}$$

Επομένως, η γενική έκφραση για ένα διανυσματικό υπερπεδίο είναι:

$$
\begin{aligned}
V(x,\theta,\overline{\theta}) =& f(x) + \theta\phi(x) + \overline{\theta}\;\overline{\phi}(x) + (\theta\theta)\,m(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)m^*(x) + \\
&+ \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)V_\mu(x) + (\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\rho}(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\rho(x) + (\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x)
\end{aligned} \tag{5.6.4}
$$

όπου τα $f(x)$ και $d(x)$ είναι πραγματικά βαθμωτά πεδία, $m(x)$ είναι ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο, $V_\mu(x)$ είναι ένα πραγματικό διανυσματικό πεδίο, τα $\phi(x)$ και $\rho(x)$ είναι αριστερόστροφα σπινοριακά πεδία Weyl (ενώ τα $\overline{\phi}(x)$ και $\overline{\rho}(x)$ είναι δεξιόστροφα σπινοριακά πεδία Weyl με $\overline{\phi}_{\dot{\alpha}} = (\phi_\alpha)^*$ και $\overline{\rho}_{\dot{\alpha}} = (\rho_\alpha)^*$).

Είναι βολικό να ξαναγράψουμε το γενικό διανυσματικό υπερπεδίο V της σχέσης (5.6.4) κάνοντας στη σχέση αυτή τις ακόλουθες αντικαταστάσεις:

$$f(x) = C(x),\ \phi_\alpha(x) = i\chi_\alpha(x) \tag{5.6.5}$$

οπότε

$$\overline{\phi}^{\dot{\alpha}}(x) = (\phi^{\alpha}(x))^* = \left(\varepsilon^{\alpha\beta}\phi_\beta(x)\right)^* = \left(i\varepsilon^{\alpha\beta}\chi_\beta(x)\right)^* =$$

$$= -\, i \left(\varepsilon^{\alpha\beta}\right)^* (\chi_\beta(x))^* = -i\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\chi}_{\dot\beta}(x) = -i\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x) \tag{5.6.6}$$

$$m(x) = \frac{i}{2}\left(M(x) + iN(x)\right),\ \rho_\alpha(x) = \lambda_\alpha(x) - \frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\overline{\chi}^{\dot\beta}(x), \tag{5.6.7}$$

άρα

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}^{\dot\alpha}(x) =& \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\rho}_{\dot\beta}(x) = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\left(\rho_\beta(x)\right)^* = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\left[\lambda_\beta(x) - \frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}\partial_\mu\overline{\chi}^{\dot\gamma}(x)\right]^* = \\
=& \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\left[(\lambda_\beta(x))^* - \frac{1}{2}\left((\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}\right)^*\left(\partial_\mu\overline{\chi}^{\dot\gamma}(x)\right)^*\right] = \\
=& \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\lambda}_{\dot\beta}(x) - \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\beta}\partial_\mu\chi^\gamma(x) = \\
=& \overline{\lambda}^{\dot\alpha}(x) - \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}\varepsilon_{\gamma\zeta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\delta\zeta}\partial_\mu\chi^\gamma(x) = \\
=& \overline{\lambda}^{\dot\alpha}(x) - \frac{1}{2}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\delta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\delta\zeta}\partial_\mu\left(-\varepsilon_{\zeta\gamma}\chi^\gamma(x)\right) = \\
=& \overline{\lambda}^{\dot\alpha}(x) + \frac{1}{2}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\zeta}\partial_\mu\chi_\zeta(x) \Rightarrow \\
\Rightarrow \overline{\rho}^{\dot\alpha}(x) =& \overline{\lambda}^{\dot\alpha}(x) + \frac{1}{2}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\chi_\beta(x)
\end{aligned} \tag{5.6.8}$$

και

$$V_\mu(x) = A_\mu(x),\ d(x) = \frac{1}{2}D(x) - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu C(x) \tag{5.6.9}$$

όπου τα $C(x), M(x), N(x)$ και $D(x)$ είναι πραγματικά βαθμωτά πεδία, $A_\mu(x)$ είναι ένα πραγματικό διανυσματικό πεδίο, ενώ τα $\chi(x)$ και $\lambda(x)$ είναι αριστερόστροφα σπινοριακά πεδία Weyl. Αντικαθιστώντας τις (5.6.5)-(5.6.9) στην (5.6.4), λαμβάνουμε την ακόλουθη έκφραση για ένα γενικό διανυσματικό υπερπεδίο:

$$\begin{aligned}
V(x,\theta,\overline{\theta}) =& C(x) + \theta^\alpha\left(i\chi_\alpha(x)\right) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\left(-i\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x)\right) + \frac{i}{2}(\theta\theta)\left(M(x) + iN(x)\right) - \\
&- \frac{i}{2}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(M(x) - iN(x)\right) + \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)A_\mu(x) + (\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot\alpha}\left[\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(x) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\chi_\beta(x)\right] + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^\alpha\left[\lambda_\alpha(x) - \frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\overline{\chi}^\beta(x)\right] + \\
&+ (\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\frac{1}{2}D(x) - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu C(x)\right) = \\
=& C(x) + i\theta\chi(x) - i\overline{\theta}\overline{\chi}(x) + \frac{i}{2}(\theta\theta)\left(M(x) + iN(x)\right) - \\
&- \frac{i}{2}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(M(x) - iN(x)\right) + \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)A_\mu(x) + (\theta\theta)\,\overline{\theta}\left(\overline{\lambda}(x) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)\right) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\left(\lambda(x) - \frac{1}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x)\right) + \\
&+ \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(D(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C(x)\right)
\end{aligned} \tag{5.6.10}$$

Θα προσδιορίσουμε τώρα τους κανόνες μετασχηματισμού των πεδίων-συνιστωσών $C, \chi, M, N, A_\mu, \lambda$ και D του γενικού διανυσματικού υπερπεδίου V της σχέσης (5.6.10) κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που παραμετροποιείται από μεταβλητές Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$. Για να το κάνουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τους αντίστοιχους κανόνες μετασχηματισμού για το γενικό υπερπεδίο S της (5.3.13) (εξισώσεις (5.3.51)-(5.3.59)), όπου θα θέσουμε

$$f(x) \to C(x),\ \phi_\alpha(x) \to i\chi_\alpha(x),\ \overline{\chi}^{\dot\alpha}(x) \to -i\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x) \tag{5.6.11}$$

$$m(x) \to \frac{i}{2}\left(M(x)+iN(x)\right),\ n(x) \to -\frac{i}{2}\left(M(x)-iN(x)\right),\ V_\mu(x) \to A_\mu(x) \tag{5.6.12}$$

$$\overline{\rho}^{\dot\alpha}(x) \to \overline{\lambda}^{\dot\alpha}(x) + \frac{1}{2}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\chi_\beta(x),\ \psi_\alpha(x) \to \lambda_\alpha(x) - \frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\overline{\chi}^{\dot\beta}(x) \tag{5.6.13}$$

$$d(x) \to \frac{1}{2}D(x) - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu C(x) \tag{5.6.14}$$

Κάνοντας τις παραπάνω αντικαταστάσεις στις σχέσεις (5.3.51), (5.3.52), (5.3.54), (5.3.55), (5.3.56), (5.3.57) και (5.3.59), λαμβάνουμε αντίστοιχα:

$$\delta_\xi C(x) = \xi^\alpha\left(i\chi_\alpha(x)\right) + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(-i\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x)\right) = i\left(\xi\chi(x) - \overline{\xi}\overline{\chi}(x)\right) \tag{5.6.15}$$

$$\begin{aligned}\delta_\xi\left(i\chi_\alpha(x)\right) =& i\delta_\xi\chi_\alpha(x) = 2\xi_\alpha\left[\frac{i}{2}\left(M(x)+iN(x)\right)\right] + \left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\left(A_\mu(x) - i\partial_\mu C(x)\right) \Rightarrow\\ \Rightarrow \delta_\xi\chi_\alpha(x) =& \xi_\alpha\left(M(x)+iN(x)\right) - i\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\left(A_\mu(x) - i\partial_\mu C(x)\right)\end{aligned} \tag{5.6.16}$$

$$\begin{aligned}\delta_\xi\left[\frac{i}{2}\left(M(x)+iN(x)\right)\right] =& \overline{\xi}_{\dot\alpha}\left[\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(x) + \frac{1}{2}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\chi_\beta(x)\right] - \frac{i}{2}\overline{\xi}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\left(i\chi_\beta(x)\right) \Rightarrow\\ \Rightarrow \frac{i}{2}\delta_\xi M(x) - \frac{1}{2}\delta_\xi N(x) =& \overline{\xi}\overline{\lambda}(x) + \frac{1}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x) - \frac{i^2}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x) = \overline{\xi}\overline{\lambda}(x) + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x) \qquad (\star)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_\xi\left[-\frac{i}{2}\left(M(x)-iN(x)\right)\right] =& \xi^\alpha\left[\lambda_\alpha(x) - \frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\overline{\chi}^{\dot\beta}(x)\right] - \frac{i}{2}\xi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\left(-i\overline{\chi}^{\dot\beta}(x)\right) \Rightarrow\\ \Rightarrow -\frac{i}{2}\delta_\xi M(x) - \frac{1}{2}\delta_\xi N(x) =& \xi\lambda(x) - \frac{1}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x) + \frac{i^2}{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x) = \xi\lambda(x) - \xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x) \qquad (\star\star)\end{aligned}$$

Αφαιρώντας την $(\star\star)$ από την $(\star)$, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}i\delta_\xi M(x) =& \overline{\xi}\overline{\lambda}(x) + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x) - \xi\lambda(x) + \xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x) =\\ =& -\left(\xi\lambda(x) - \overline{\xi}\overline{\lambda}(x)\right) + \xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x) + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x) \Rightarrow\\ \Rightarrow \delta_\xi M(x) =& i\left(\xi\lambda(x) - \overline{\xi}\overline{\lambda}(x)\right) - i\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x) + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)\right)\end{aligned} \tag{5.6.17}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των $(\star)$ και $(\star\star)$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}-\delta_\xi N(x) =& \overline{\xi}\overline{\lambda}(x) + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x) + \xi\lambda(x) - \xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x) \Rightarrow\\ \Rightarrow \delta_\xi N(x) =& -\left(\xi\lambda(x) + \overline{\xi}\overline{\lambda}(x)\right) + \left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)\right)\end{aligned} \tag{5.6.18}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta_\xi A^\mu(x) =& \xi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\left[\overline{\lambda}^{\dot\beta}(x) + \frac{1}{2}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\gamma}\partial_\nu\chi_\gamma(x)\right] - \overline{\xi}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\left[\lambda_\beta(x) - \frac{1}{2}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\partial_\nu\overline{\chi}^{\dot\gamma}(x)\right] -\\ &- \frac{i}{2}\xi^\alpha(\sigma^\nu)_{\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\gamma}\partial_\nu\left(i\chi_\gamma(x)\right) + \frac{i}{2}\overline{\xi}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}\partial_\nu\left(-i\overline{\chi}^{\dot\gamma}(x)\right) =\\ =& \xi\sigma^\mu\overline{\lambda}(x) + \frac{1}{2}\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\partial_\nu\chi(x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\lambda(x) + \frac{1}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\nu\overline{\chi}(x) + \frac{1}{2}\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\partial_\nu\chi(x) + \frac{1}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\nu\overline{\chi}(x) =\\ =& \xi\sigma^\mu\overline{\lambda}(x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\lambda(x) + \frac{1}{2}\xi^\alpha\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\right)_\alpha{}^\beta\,\partial_\nu\chi_\beta(x) + \frac{1}{2}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,\partial_\nu\overline{\chi}^{\dot\beta}(x) =\\ =& \xi\sigma^\mu\overline{\lambda}(x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\lambda(x) + \frac{1}{2}\xi^\alpha\left(2\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta\right)\partial_\nu\chi_\beta(x) + \frac{1}{2}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(2\eta^{\mu\nu}\delta_{\dot\beta}^{\dot\alpha}\right)\partial_\nu\overline{\chi}^{\dot\beta}(x) =\\ =& \xi\sigma^\mu\overline{\lambda}(x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\lambda(x) + \xi^\alpha\partial^\mu\chi_\alpha(x) + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\partial^\mu\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x) \Rightarrow\\ \Rightarrow \delta_\xi A^\mu(x) =& \xi\sigma^\mu\overline{\lambda}(x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\lambda(x) + \xi\partial^\mu\chi(x) + \overline{\xi}\partial^\mu\overline{\chi}(x)\end{aligned} \tag{5.6.19}$$

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi\left[\lambda_\alpha(x)-\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\overline{\chi}^{\dot\beta}(x)\right]=&2\xi_\alpha\left\{\frac{1}{2}\left[D(x)-\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C(x)\right]\right\}-\\
&-i\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\left[-\frac{i}{2}\left(M(x)-iN(x)\right)\right]+\\
&+\frac{i}{2}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(x)\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\delta_\xi\lambda_\alpha(x)=&\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\left(\delta_\xi\overline{\chi}^{\dot\beta}(x)\right)+\xi_\alpha\left(D(x)-\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C(x)\right)+\\
&+\frac{i^2}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\left(M(x)-iN(x)\right)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(x)=\\
=&\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\partial_\mu\left(\delta_\xi\overline{\chi}_{\dot\gamma}(x)\right)+\xi_\alpha D(x)-\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)-\\
&-\frac{1}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\left(M(x)-iN(x)\right)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(x)=\\
=&\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\left(\delta_\xi\chi_\gamma(x)\right)^*+\xi_\alpha D(x)-\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)-\\
&-\frac{1}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\left(M(x)-iN(x)\right)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(x)\overset{(5.6.16)}{=}\\
=&\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\left\{\left[\xi_\gamma\left(M(x)+iN(x)\right)-i(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\delta}\overline{\xi}^{\dot\delta}\left(A_\nu(x)-i\partial_\nu C(x)\right)\right]^*\right\}+\\
&+\xi_\alpha D(x)-\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)-\frac{1}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\left(M(x)-iN(x)\right)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(x)\overset{(2.5.17)}{=}\\
=&\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\overline{\xi}_{\dot\gamma}\partial_\mu\left(M(x)-iN(x)\right)+\frac{i}{2}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\sigma^\nu)_{\delta\dot\gamma}\xi^\delta\partial_\mu\left(A_\nu(x)+i\partial_\nu C(x)\right)+\\
&+\xi_\alpha D(x)-\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)-\frac{1}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\left(M(x)-iN(x)\right)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(x)=\\
=&\frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}\partial_\mu\left(M(x)-iN(x)\right)+\frac{i}{2}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\delta\beta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\delta\beta}\xi^\delta\partial_\mu\left(A_\nu(x)+i\partial_\nu C(x)\right)+\\
&+\xi_\alpha D(x)-\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)-\frac{1}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\left(M(x)-iN(x)\right)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(x)=\\
=&\cancel{\frac{1}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\left(M(x)-iN(x)\right)}+\frac{i}{2}\delta^{\dot\beta}_{\dot\delta}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\delta\beta}\left(-\varepsilon_{\beta\delta}\right)\xi^\delta\partial_\mu\left(A_\nu(x)+i\partial_\nu C(x)\right)+\\
&+\xi_\alpha D(x)-\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)-\cancel{\frac{1}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\left(M(x)-iN(x)\right)}+\frac{i}{2}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(x)=\\
=&-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\beta}\xi_\beta\left(\partial_\mu A_\nu(x)+i\partial_\mu\partial_\nu C(x)\right)+\xi_\alpha D(x)-\\
&-\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(x)=\\
=&-\frac{i}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi)_\alpha\partial_\mu A_\nu(x)+\frac{1}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu)_\alpha^{\ \beta}\xi_\beta\partial_\mu\partial_\nu C(x)+\xi_\alpha D(x)-\\
&-\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)+\frac{i}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi)_\alpha\partial_\nu A_\mu(x)=\\
=&\xi_\alpha D(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right)_\alpha\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right)+\frac{1}{4}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\right)_\alpha^{\ \beta}\xi_\beta\partial_\mu\partial_\nu C(x)+\\
&+\frac{1}{4}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\right)_\alpha^{\ \beta}\xi_\beta\partial_\nu\partial_\mu C(x)-\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)=\\
=&\xi_\alpha D(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right)_\alpha\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right)+\\
&+\frac{1}{4}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu+\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\right)_\alpha^{\ \beta}\xi_\beta\partial_\mu\partial_\nu C(x)-\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)=\\
=&\xi_\alpha D(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right)_\alpha\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right)+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4}\left(2\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta\right)\xi_\beta\partial_\mu\partial_\nu C(x)-\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)=\\
&=\xi_\alpha D(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right)_\alpha\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right)+\cancel{\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)}-\cancel{\frac{1}{2}\xi_\alpha\partial_\mu\partial^\mu C(x)}\Rightarrow\\
\Rightarrow\ \delta_\xi\lambda_\alpha(x)&=\xi_\alpha D(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right)_\alpha\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right),
\end{aligned}
\tag{5.6.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi\left(\frac{1}{2}D(x)-\frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu C(x)\right)=&-\frac{i}{2}\xi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\left[\overline{\lambda}^{\dot\beta}(x)+\frac{1}{2}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\gamma}\partial_\nu\chi_\gamma(x)\right]-\\
&-\frac{i}{2}\overline{\xi}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\left[\lambda_\beta(x)-\frac{1}{2}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\gamma}\partial_\nu\overline{\chi}^{\dot\gamma}(x)\right]\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\frac{1}{2}\delta_\xi D(x)=&\frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\left(\delta_\xi C(x)\right)-\frac{i}{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(x)-\frac{i}{4}\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\partial_\mu\partial_\nu\chi(x)-\\
&-\frac{i}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(x)+\frac{i}{4}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\mu\partial_\nu\overline{\chi}(x)\xRightarrow{(5.6.15)}\\
\Rightarrow\delta_\xi D(x)=&\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu\left[i\left(\xi\chi(x)-\overline{\xi}\overline{\chi}(x)\right)\right]-i\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(x)-\\
&-\frac{i}{2}\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\partial_\mu\partial_\nu\chi(x)-i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(x)+\frac{i}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\mu\partial_\nu\overline{\chi}(x)=\\
=&-i\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)+\frac{i}{2}\xi\partial_\mu\partial^\mu\chi(x)-\frac{i}{2}\overline{\xi}\partial_\mu\partial^\mu\overline{\chi}(x)-\\
&-\frac{i}{4}\xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\partial_\mu\partial_\nu\chi(x)-\frac{i}{4}\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\partial_\nu\partial_\mu\chi(x)+\\
&+\frac{i}{4}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\mu\partial_\nu\overline{\chi}(x)+\frac{i}{4}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\nu\partial_\mu\overline{\chi}(x)=\\
=&-i\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)+\frac{i}{2}\xi\partial_\mu\partial^\mu\chi(x)-\frac{i}{2}\overline{\xi}\partial_\mu\partial^\mu\overline{\chi}(x)-\\
&-\frac{i}{4}\xi^\alpha\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu+\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\right)_\alpha^{\ \beta}\partial_\mu\partial_\nu\chi_\beta(x)+\frac{i}{4}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu+\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\right)^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}\partial_\mu\partial_\nu\overline{\chi}^{\dot\beta}(x)=\\
=&-i\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)+\frac{i}{2}\xi\partial_\mu\partial^\mu\chi(x)-\frac{i}{2}\overline{\xi}\partial_\mu\partial^\mu\overline{\chi}(x)-\\
&-\frac{i}{4}\xi^\alpha\left(2\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta\right)\partial_\mu\partial_\nu\chi_\beta(x)+\frac{i}{4}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(2\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\right)\partial_\mu\partial_\nu\overline{\chi}^{\dot\beta}(x)=\\
=&-i\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)+\cancel{\frac{i}{2}\xi\partial_\mu\partial^\mu\chi(x)}-\cancel{\frac{i}{2}\overline{\xi}\partial_\mu\partial^\mu\overline{\chi}(x)}-\\
&-\cancel{\frac{i}{2}\xi^\alpha\partial_\mu\partial^\mu\chi_\alpha(x)}+\cancel{\frac{i}{2}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\partial_\mu\partial^\nu\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x)}\Rightarrow\\
\Rightarrow\delta_\xi D(x)=&-i\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)
\end{aligned}
\tag{5.6.21}
$$

Απαιτούμε το A_μ στη σχέση (5.6.10) να είναι ένα σύνηθες διανυσματικό πεδίο με διάσταση μάζας 1. Από την απαίτηση αυτή, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι φερμιονικές συντεταγμένες θ_α και $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$ έχουν διάσταση μάζας $-\frac{1}{2}$, έπεται ότι το γενικό διανυσματικό υπερπεδίο V της σχέσης (5.6.10) είναι αδιάστατο, ενώ τα υπόλοιπα πεδία-συνιστώσες του, $C, \chi, M, N, \lambda, D$ έχουν διαστάσεις μάζας $0, \frac{1}{2}, 1, 1, \frac{3}{2}, 2$ αντίστοιχα. Επίσης, αποσκοπώντας στη χρησιμοποίηση των διανυσματικών υπερπεδίων για την κατασκευή υπερσυμμετρικών θεωριών βαθμίδας, θέλουμε τα πεδία-συνιστώσες ενός διανυσματικού υπερπεδίου να συγκροτούν μία άμαζη off-shell $N=1$ διανυσματική supermultiplet, η οποία αποτελείται από ένα άμαζο μποζόνιο βαθμίδας, στο οποίο αντιστοιχούν τρεις βαθμοί ελευθερίας, ένα φερμιόνιο Weyl, γνωστό ως gaugino, το οποίο έχει τέσσερις βαθμούς ελευθερίας (δύο μιγαδικές συνιστώσες), και ένα βοηθητικό πραγματικό βαθμωτό πεδίο, στο οποίο αντιστοιχεί ένας βαθμός ελευθερίας, που εξασφαλίζει την ισότητα του αριθμού των μποζονικών βαθμών ελευθερίας με αυτό των φερμιονικών off-shell. Ωστόσο, στη γενική έκφραση για ένα διανυσματικό υπερπεδίο V (σχέση (5.6.10)), τα πεδία-συνιστώσες είναι πάρα πολλά για να αντιστοιχούν σε μία άμαζη off-shell διανυσματική supermultiplet. Μπορούμε όμως να απαλλαγούμε από κάποια από αυτά μέσω ενός μετασχηματισμού της μορφής:

$$V(x,\theta,\overline{\theta}) \to V'(x,\theta,\overline{\theta}) = V(x,\theta,\overline{\theta}) + i\left(\Lambda(x,\theta,\overline{\theta}) - \Lambda^*(x,\theta,\overline{\theta})\right), \tag{5.6.22}$$

όπου Λ είναι ένα αδιάστατο chiral υπερπεδίο. Το υπερπεδίο V' είναι ένα διανυσματικό υπερπεδίο, όπως και το V, αφού για το υπερπεδίο $i\left(\Lambda - \Lambda^*\right)$ ισχύει ότι:

$$\left[i\left(\Lambda - \Lambda^*\right)\right]^* = -i\left(\Lambda^* - \Lambda\right) = i\left(\Lambda - \Lambda^*\right)$$

που σημαίνει ότι το $i\left(\Lambda - \Lambda^*\right)$ είναι ένα διανυσματικό υπερπεδίο. Με βάση τις σχέσεις (5.5.11) και (5.5.12), μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\Lambda(x,\theta,\overline{\theta}) =& \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + (\theta\theta)\,F(x) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi(x) - \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}}\,(\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{4}\,(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^*(x,\theta,\overline{\theta}) =& \phi^*(x) + \sqrt{2}\overline{\theta}\,\overline{\psi}(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)F^*(x) + i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi^*(x) - \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}(x) - \frac{1}{4}\,(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi^*(x)\end{aligned}$$

όπου ϕ και F είναι δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία και ψ είναι ένα αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl (οπότε το $\overline{\psi}$ είναι ένα δεξιόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl με συνιστώσες $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = (\psi_\alpha)^*$, $\alpha = 1, 2$). Τα πεδία ϕ, ψ και F στις δύο τελευταίες σχέσεις έχουν διαστάσεις μάζας $0, \frac{1}{2}$ και 1, ώστε το chiral υπερπεδίο Λ και το anti-chiral υπερπεδίο Λ^* να είναι αδιάστατα. Έχουμε:

$$\begin{aligned}i\left(\Lambda(x,\theta,\overline{\theta}) - \Lambda^*(x,\theta,\overline{\theta})\right) =& i\left(\phi(x) - \phi^*(x)\right) + i\sqrt{2}\left(\theta\psi(x) - \overline{\theta}\,\overline{\psi}(x)\right) + \\ & + i\,(\theta\theta)\,F(x) - i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)F^*(x) + i\left[-i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi(x) - \right. \\ & \left. -i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi^*(x)\right] + i\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)(\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) - \\ & - i\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}(x) + i\left[-\frac{1}{4}\,(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\times\right. \\ & \left.\times\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) + \frac{1}{4}\,(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi^*(x)\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow i\left(\Lambda(x,\theta,\overline{\theta}) - \Lambda^*(x,\theta,\overline{\theta})\right) =& i\left(\phi(x) - \phi^*(x)\right) + i\sqrt{2}\left(\theta\psi(x) - \overline{\theta}\,\overline{\psi}(x)\right) + i\,(\theta\theta)\times \\ & \times F(x) - i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)F^*(x) + \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\left(\phi(x) + \phi^*(x)\right) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}(x) - \\ & - \frac{i}{4}\,(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial^\mu\left(\phi(x) - \phi^*(x)\right)\end{aligned} \tag{5.6.23}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.6.10), (5.6.22) και (5.6.23), βρίσκουμε την έκφραση για το μετασχηματισμένο διανυσματικό υπερπεδίο $V'(x,\theta,\overline{\theta})$:

$$\begin{aligned}V'(x,\theta,\overline{\theta}) =& C(x) + i\left(\phi(x) - \phi^*(x)\right) + i\theta\left(\chi(x) + \sqrt{2}\psi(x)\right) - \\ & - i\overline{\theta}\left(\overline{\chi}(x) + \sqrt{2}\overline{\psi}(x)\right) + (\theta\theta)\left[\frac{i}{2}\left(M(x) + iN(x)\right) + iF(x)\right] + \\ & + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[-\frac{i}{2}\left(M(x) - iN(x)\right) - iF^*(x)\right] + \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left[A_\mu(x) + \right. \\ & \left. + \partial_\mu\left(\phi(x) + \phi^*(x)\right)\right] + (\theta\theta)\,\overline{\theta}\left(\overline{\lambda}(x) + \frac{1}{2}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x)\right) +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\left(\lambda(x)-\frac{1}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\chi}(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\psi}(x)\right)+\frac{1}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\times\\
&\times\left[D(x)-\frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial^{\mu}C(x)-\frac{i}{2}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\left(\phi(x)-\phi^{*}(x)\right)\right]=\\
=&C(x)+i\left(\phi(x)-\phi^{*}(x)\right)+i\theta\left(\chi(x)+\sqrt{2}\psi(x)\right)-i\overline{\theta}\left(\overline{\chi}(x)+\sqrt{2}\overline{\psi}(x)\right)+\\
&+\frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\left(M(x)+iN(x)+2F(x)\right)-\frac{i}{2}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(M(x)-iN(x)+2F^{*}(x)\right)+\\
&+\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\left[A_{\mu}(x)+\partial_{\mu}\left(\phi(x)+\phi^{*}(x)\right)\right]+\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}\left[\overline{\lambda}(x)+\frac{1}{2}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\left(\chi(x)+\right.\right.\\
&\left.\left.+\sqrt{2}\psi(x)\right)\right]+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\left[\lambda(x)-\frac{1}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\left(\overline{\chi}(x)+\sqrt{2}\overline{\psi}(x)\right)\right]+\\
&+\frac{1}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left\{D(x)-\frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\left[C(x)+i\left(\phi(x)-\phi^{*}(x)\right)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{5.6.24}
$$

Συγκρίνοντας τις (5.6.10) και (5.6.24), προσδιορίζουμε πώς μετασχηματίζονται τα πεδία-συνιστώσες του γενικού διανυσματικού υπερπεδίου (5.6.10) κάτω από το μετασχηματισμό (5.6.22):

$$C(x)\to C'(x)=C(x)+i\left(\phi(x)-\phi^{*}(x)\right)\tag{5.6.25}$$

$$\chi_{\alpha}(x)\to\chi'_{\alpha}(x)=\chi_{\alpha}(x)+\sqrt{2}\psi_{\alpha}(x)\tag{5.6.26}$$

$$M(x)+iN(x)\to M'(x)+iN'(x)=M(x)+iN(x)+2F(x)\tag{5.6.27}$$

$$A_{\mu}(x)\to A'_{\mu}(x)=A_{\mu}(x)+\partial_{\mu}\left(\phi(x)+\phi^{*}(x)\right)\tag{5.6.28}$$

$$\lambda_{\alpha}(x)\to\lambda'_{\alpha}(x)=\lambda_{\alpha}(x)\tag{5.6.29}$$

$$D(x)\to D'(x)=D(x)\tag{5.6.30}$$

Παρατηρούμε ότι ο κανόνας μετασχηματισμού για το διανυσματικό πεδίο $A_{\mu}(x)$ (σχέση (5.6.28)) αντιστοιχεί σε έναν Αβελιανό μετασχηματισμό βαθμίδας με συνάρτηση βαθμίδας την $a(x)=\phi(x)+\phi^{*}(x)=2\,\mathrm{Re}\left(\phi(x)\right)$ (όπου $\mathrm{Re}\left(\phi(x)\right)$ είναι το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συνάρτηση $\phi(x)$). Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι ο μετασχηματισμός (5.6.22) είναι η υπερσυμμετρική γενίκευση ενός Αβελιανού μετασχηματισμού βαθμίδας και θα τον καλούμε μετασχηματισμό «υπερβαθμίδας» (supergauge transformation).

Από τις εξισώσεις (5.6.25)-(5.6.30), είναι σαφές ότι μπορούμε να επιλέξουμε τα $i\left(\phi(x)-\phi^{*}(x)\right)=-2\,\mathrm{Im}\,\phi(x)$ (όπου $\mathrm{Im}\left(\phi(x)\right)$ είναι το φανταστικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης $\phi(x)$), $\psi_{\alpha}(x)$ και $F(x)$ έτσι ώστε τα πεδία-συνιστώσες $C'(x),\chi'_{\alpha}(x),M'(x)$ και $N'(x)$ του διανυσματικού υπερπεδίου V', στο οποίο μετασχηματίζεται ένα διανυσματικό υπερπεδίο V κάτω από ένα μετασχηματισμό της μορφής (5.6.22), να μηδενίζονται ταυτοτικά. Πράγματι, εάν πάρουμε $\mathrm{Im}\left(\phi(x)\right)=\frac{1}{2}C(x)$, $\psi_{\alpha}(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{\alpha}(x)$ και $F(x)=-\frac{1}{2}\left(M(x)+iN(x)\right)$, από τις σχέσεις (5.6.25), (5.6.26) και (5.6.27) έπεται ότι:

$$
\begin{aligned}
&C'(x)=C(x)+i\left(\phi(x)-\phi^{*}(x)\right)=C(x)-2\,\mathrm{Im}\left(\phi(x)\right)=C(x)-2\left(\frac{1}{2}C(x)\right)=0\\
&\chi'_{\alpha}(x)=\chi_{\alpha}(x)+\sqrt{2}\psi_{\alpha}(x)=\chi_{\alpha}(x)+\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{\alpha}(x)\right)=0\\
&M'(x)+iN'(x)=M(x)+iN(x)+2F(x)=M(x)+iN(x)-2\left[\frac{1}{2}\left(M(x)+iN(x)\right)\right]=0\Rightarrow\\
\Rightarrow&M'(x)=N'(x)=0
\end{aligned}
$$

οπότε η (5.6.24) δίνει:

$$V'(x,\theta,\overline{\theta})=\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\left[A_{\mu}(x)+\partial_{\mu}\left(\phi(x)+\phi^{*}(x)\right)\right]+\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}\overline{\lambda}(x)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\lambda(x)+\frac{1}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)D(x)$$

Λέμε ότι το παραπάνω διανυσματικό υπερπεδίο V' είναι στην (υπερ)βαθμίδα των Wess και Zumino και το συμβολίζουμε ως V_{WZ}, οπότε εχουμε

$$V_{WZ}(x,\theta,\overline{\theta}) = \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right) A_{\mu}(x) + (\theta\theta)\,\overline{\theta\lambda}(x) + \left(\overline{\theta}\;\overline{\theta}\right)\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\;\overline{\theta}\right) D(x) \tag{5.6.31}$$

όπου έχουμε απορροφήσει το $\partial_{\mu}\left(\phi(x)+\phi^{*}(x)\right)$ στον ορισμό του διανυσματικού πεδίου $A_{\mu}(x)$. Έτσι, στη βαθμίδα των Wess και Zumino, τα μη μηδενικά πεδία-συνιστώσες ενός διανυσματικού υπερπεδίου είναι ένα διανυσματικό πεδίο A_{μ}, ένα αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl λ και ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο D, τα οποία αποτελούν μία άμαζη off-shell διανυσματική supermultiplet, με το πεδίο D να είναι ένα βοηθητικό πεδίο. Από την άλλη μεριά, στη βαθμίδα των Wess και Zumino τα πεδία-συνιστώσες C,χ,M,N του γενικού διανυσματικού υπερπεδίου (5.6.10) είναι ταυτοτικά μηδέν, οπότε δεν αντιστοιχούν σε φυσικούς βαθμούς ελευθερίας.

Η εκλογή της βαθμίδας των Wess και Zumino δε διατηρείται κάτω από υπερσυμετρικούς μετασχηματισμούς. Αυτό σημαίνει ότι για ένα διανυσματικό υπερπεδίο στη βαθμίδα των Wess και Zumino, V_{WZ}, όπως στη σχέση (5.6.31), η μεταβολή του $\delta_{\xi}V_{WZ} = -i\left(\xi^{\alpha}\hat{Q}_{\alpha} + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\overline{\hat{Q}}^{\dot{\alpha}}\right)V_{WZ}$ κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που παραμετροποιείται από μεταβλητές Grassmann ξ^{α} και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$ δεν είναι στη βαθμίδα των Wess και Zumino, και το ίδιο ισχύει και για το διανυσματικό υπερπεδίο $V' = V_{WZ} + \delta_{\xi}V_{WZ}$. Για να το δείξουμε αυτό, πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τους κανόνες μετασχηματισμού των πεδίων-συνιστωσών ενός διανυσματικού υπερπεδίου κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό στη βαθμίδα των Wess και Zumino. Μπορούμε να εξάγουμε τους εν λόγω κανόνες από τις σχέσεις (5.6.15)-(5.6.21), θέτοντας $C(x)=\chi(x)=M(x)=N(x)=0$ στα δεύτερα μέλη τους. Έτσι, έχουμε:

$$\left(\delta_{\xi}C(x)\right)_{WZ} = 0 \tag{5.6.32}$$

$$\left(\delta_{\xi}\chi_{\alpha}(x)\right)_{WZ} = -i\left(\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right)_{\alpha} A_{\mu}(x) \tag{5.6.33}$$

$$\left(\delta_{\xi}M(x)\right)_{WZ} = i\left(\xi\lambda(x) - \overline{\xi\lambda}(x)\right) \tag{5.6.34}$$

$$\left(\delta_{\xi}N(x)\right)_{WZ} = -\left(\xi\lambda(x) + \overline{\xi\lambda}(x)\right) \tag{5.6.35}$$

$$\left(\delta_{\xi}A^{\mu}(x)\right)_{WZ} = \xi\sigma^{\mu}\overline{\lambda}(x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\lambda(x) \tag{5.6.36}$$

$$\left(\delta_{\xi}\lambda_{\alpha}(x)\right)_{WZ} = \xi_{\alpha}D(x) - \frac{i}{2}\left(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\xi\right)_{\alpha}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right) \tag{5.6.37}$$

$$\left(\delta_{\xi}D(x)\right)_{WZ} = -i\left(\xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\lambda}(x) + \overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda(x)\right) \tag{5.6.38}$$

όπου $\left(\delta_{\xi}X\right)_{WZ}$ είναι η μεταβολή του πεδίου-συνιστώσα X κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που χαρακτηρίζεται από σταθερές παραμέτρους Grassmann ξ^{α} και $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$ στη βαθμίδα των Wess και Zumino για κάθε $X \in \{C(x),\chi_{\alpha}(x),M(x),N(x),A^{\mu}(x),\lambda_{\alpha}(x),D(x)\}$. Συνεπώς, με βάση τη γενική έκφραση (5.6.10) για ένα διανυσματικό υπερπεδίο, είναι:

$$\begin{aligned}\delta_{\xi}V_{WZ} = {} & \left(\delta_{\xi}C(x)\right)_{WZ} + i\theta^{\alpha}\left(\delta_{\xi}\chi_{\alpha}(x)\right)_{WZ} - i\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left(\delta_{\xi}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}(x)\right)_{WZ} + \\ & + \frac{i}{2}(\theta\theta)\left[\left(\delta_{\xi}M(x)\right)_{WZ} + i\left(\delta_{\xi}N(x)\right)_{WZ}\right] - \frac{i}{2}\left(\overline{\theta}\;\overline{\theta}\right)\left[\left(\delta_{\xi}M(x)\right)_{WZ} - \right. \\ & \left. - i\left(\delta_{\xi}N(x)\right)_{WZ}\right] + \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\left(\delta_{\xi}A_{\mu}(x)\right)_{WZ} + (\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left[\left(\delta_{\xi}\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x)\right)_{WZ} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^{\mu}\right)^{\dot{\alpha}\beta}\partial_{\mu}\left(\delta_{\xi}\chi_{\beta}(x)\right)_{WZ}\right] + \left(\overline{\theta}\;\overline{\theta}\right)\theta^{\alpha}\left[\left(\delta_{\xi}\lambda_{\alpha}(x)\right)_{WZ} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\left(\sigma^{\mu}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\mu}\left(\delta_{\xi}\overline{\chi}^{\dot{\beta}}(x)\right)_{WZ}\right] + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\;\overline{\theta}\right)\left[\left(\delta_{\xi}D(x)\right)_{WZ} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\left(\delta_{\xi}C(x)\right)_{WZ}\right] =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&i\theta^{\alpha}\left[-i\left(\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right)_{\alpha}A_{\mu}(x)\right]-i\overline{\theta}_{\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\left(\delta_{\xi}\overline{\chi}_{\dot\beta}(x)\right)_{WZ}+\\
&+\frac{i}{2}(\theta\theta)\left[i\left(\xi\lambda(x)-\overline{\xi\lambda}(x)\right)-i\left(\xi\lambda(x)+\overline{\xi\lambda}(x)\right)\right]-\\
&-\frac{i}{2}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[i\left(\xi\lambda(x)-\overline{\xi\lambda}(x)\right)+i\left(\xi\lambda(x)+\overline{\xi\lambda}(x)\right)\right]+\\
&+\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\left(\xi\sigma_{\mu}\overline{\lambda}(x)-\overline{\xi}\overline{\sigma}_{\mu}\lambda(x)\right)+(\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot\alpha}\left\{\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\left(\delta_{\xi}\overline{\lambda}_{\dot\beta}(x)\right)_{WZ}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot\alpha\beta}\partial_{\mu}\left[-i\left(\sigma^{\nu}\overline{\xi}\right)_{\beta}A_{\nu}(x)\right]\right\}+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^{\alpha}\left[\xi_{\alpha}D(x)-\right.\\
&\left.-\frac{i}{2}\left(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\xi\right)_{\alpha}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right)-\frac{1}{2}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\partial_{\mu}\left(\delta_{\xi}\overline{\chi}_{\dot\gamma}(x)\right)_{WZ}\right]-\\
&-\frac{i}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda(x)\right)=\\
=&\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right)A_{\mu}(x)-i\overline{\theta}_{\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\beta}\left(\delta_{\xi}\chi_{\beta}(x)\right)^{*}_{WZ}+\frac{i}{2}(\theta\theta)\left(-2i\overline{\xi\lambda}(x)\right)-\\
&-\frac{i}{2}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(2i\xi\lambda(x)\right)+\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\left(\xi\sigma_{\mu}\overline{\lambda}(x)-\overline{\xi}\overline{\sigma}_{\mu}\lambda(x)\right)+\\
&+(\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot\alpha}\left[\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\left(\delta_{\xi}\lambda_{\beta}(x)\right)^{*}_{WZ}-\frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\overline{\xi}\right)^{\dot\alpha}\partial_{\mu}A_{\nu}(x)\right]+\\
&+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^{\alpha}\left[\xi_{\alpha}D(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\xi\right)_{\alpha}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right)-\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\partial_{\mu}\left(\delta_{\xi}\chi_{\gamma}(x)\right)^{*}_{WZ}\right]-\frac{i}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda(x)\right)=\\
=&\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right)A_{\mu}(x)-i\overline{\theta}_{\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\left[-i(\sigma^{\mu})_{\beta\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma}A_{\mu}(x)\right]^{*}+(\theta\theta)\,\overline{\xi\lambda}(x)+\\
&+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi\lambda(x)+\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\left(\xi\sigma_{\mu}\overline{\lambda}(x)-\overline{\xi}\overline{\sigma}_{\mu}\lambda(x)\right)+(\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot\alpha}\left\{\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\times\right.\\
&\times\left[\xi_{\beta}D(x)-\frac{i}{2}(\sigma^{\mu})_{\beta\dot\gamma}(\overline{\sigma}^{\nu})^{\dot\gamma\delta}\xi_{\delta}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right)\right]^{*}-\\
&\left.-\frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\overline{\xi}\right)^{\dot\alpha}\partial_{\mu}A_{\nu}(x)\right\}+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^{\alpha}\left\{\xi_{\alpha}D(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\xi\right)_{\alpha}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right)-\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\partial_{\mu}\left[-i(\sigma^{\nu})_{\gamma\dot\delta}\overline{\xi}^{\dot\delta}A_{\nu}(x)\right]^{*}\right\}-\frac{i}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda(x)\right)=\\
=&\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right)A_{\mu}(x)-i^{2}\overline{\theta}_{\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\sigma^{\mu})_{\gamma\dot\beta}\xi^{\gamma}A_{\mu}(x)+(\theta\theta)\,\overline{\xi\lambda}(x)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi\lambda(x)+\\
&+\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\left(\xi\sigma_{\mu}\overline{\lambda}(x)-\overline{\xi}\overline{\sigma}_{\mu}\lambda(x)\right)+(\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot\alpha}\left\{\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\left[\overline{\xi}_{\dot\beta}D(x)+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{i}{2}(\sigma^{\mu})_{\gamma\dot\beta}(\overline{\sigma}^{\nu})^{\dot\delta\gamma}\overline{\xi}_{\dot\delta}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right)\right]-\frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\overline{\xi}\right)^{\dot\alpha}\partial_{\mu}A_{\nu}(x)\right\}+\\
&+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^{\alpha}\left[\xi_{\alpha}D(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\xi\right)_{\alpha}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right)-\right.\\
&\left.-\frac{i}{2}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}(\sigma^{\nu})_{\delta\dot\gamma}\xi^{\delta}\partial_{\mu}A_{\nu}(x)\right]-\frac{i}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda(x)\right)=\\
=&\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\xi}\right)A_{\mu}(x)+\overline{\theta}_{\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\zeta}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot\zeta\delta}\xi^{\gamma}A_{\mu}(x)+(\theta\theta)\,\overline{\xi\lambda}(x)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi\lambda(x)+\\
&+\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\left(\xi\sigma_{\mu}\overline{\lambda}(x)-\overline{\xi}\overline{\sigma}_{\mu}\lambda(x)\right)+(\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot\alpha}\left[\overline{\xi}^{\dot\alpha}D(x)+\frac{i}{2}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\gamma}\varepsilon_{\gamma\delta}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot\gamma\delta}\times\right.\\
&\left.\times\varepsilon^{\dot\delta\dot\zeta}\varepsilon^{\gamma\zeta}(\sigma^{\nu})_{\zeta\dot\zeta}\overline{\xi}_{\dot\delta}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right)-\frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\overline{\xi}\right)^{\dot\alpha}\partial_{\mu}A_{\nu}(x)\right]+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\theta^\alpha\left[\xi_\alpha D(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\xi\right)_\alpha\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right)-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)^{\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta}\times\right.\\
&\left.\varepsilon_{\delta\zeta}(\bar\sigma^\nu)^{\dot\delta\zeta}\xi^\delta\partial_\mu A_\nu(x)\right]-\frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda(x)+\bar\xi\bar\sigma^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)=\\
=&\left(\theta\sigma^\mu\bar\xi\right)A_\mu(x)+\bar\theta_{\dot\alpha}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\zeta}(\bar\sigma^\mu)^{\dot\zeta\delta}\left(-\varepsilon_{\delta\gamma}\right)\xi^\gamma A_\mu(x)+\left(\theta\theta\right)\overline{\xi\lambda}(x)+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\xi\lambda(x)+\\
&+\left(\theta\sigma^\mu\bar\theta\right)\left(\xi\sigma_\mu\bar\lambda(x)-\bar\xi\bar\sigma_\mu\lambda(x)\right)+\left(\theta\theta\right)\bar\theta_{\dot\alpha}\left[\bar\xi^{\dot\alpha}D(x)+\frac{i}{2}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\gamma}\left(-\varepsilon^{\zeta\gamma}\right)\varepsilon_{\gamma\delta}\times\right.\\
&\left.\times(\bar\sigma^\mu)^{\dot\gamma\delta}(\sigma^\nu)_{\zeta\dot\zeta}\left(-\varepsilon^{\dot\zeta\dot\delta}\right)\bar\xi_{\dot\delta}\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right)-\frac{i}{2}\left(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu\bar\xi\right)^{\dot\alpha}\partial_\mu A_\nu(x)\right]+\\
&+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\theta^\alpha\left[\xi_\alpha D(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\xi\right)_\alpha\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right)-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\delta^{\dot\beta}_{\dot\delta}\times\right.\\
&\left.\times(\bar\sigma^\nu)^{\dot\delta\zeta}\left(-\varepsilon_{\zeta\delta}\right)\xi^\delta\partial_\mu A_\nu(x)\right]-\frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda(x)+\bar\xi\bar\sigma^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)=\\
=&\left(\theta\sigma^\mu\bar\xi\right)A_\mu(x)-\bar\theta_{\dot\alpha}(\bar\sigma^\mu)^{\dot\alpha\delta}\xi_\delta A_\mu(x)+\left(\theta\theta\right)\overline{\xi\lambda}(x)+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\xi\lambda(x)+\\
&+\left(\theta\sigma^\mu\bar\theta\right)\left(\xi\sigma_\mu\bar\lambda(x)-\bar\xi\bar\sigma_\mu\lambda(x)\right)+\left(\theta\theta\right)\bar\theta_{\dot\alpha}\left[\bar\xi_{\dot\alpha}D(x)+\frac{i}{2}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\gamma}\delta^{\zeta}_{\delta}\times\right.\\
&\left.\times(\bar\sigma^\mu)^{\dot\gamma\delta}(\sigma^\nu)_{\zeta\dot\zeta}\bar\xi^{\dot\zeta}\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right)-\frac{i}{2}\left(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu\bar\xi\right)^{\dot\alpha}\partial_\mu A_\nu(x)\right]+\\
&+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\theta^\alpha\left[\xi_\alpha D(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\xi\right)_\alpha\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right)+\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\times\right.\\
&\left.\times(\bar\sigma^\nu)^{\dot\beta\zeta}\xi_\zeta\partial_\mu A_\nu(x)\right]-\frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda(x)+\bar\xi\bar\sigma^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)=\\
=&\left(\theta\sigma^\mu\bar\xi\right)A_\mu(x)-\left(\bar\theta\bar\sigma^\mu\xi\right)A_\mu(x)+\left(\theta\theta\right)\overline{\xi\lambda}(x)+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\xi\lambda(x)+\\
&+\left(\theta\sigma^\mu\bar\theta\right)\left(\xi\sigma_\mu\bar\lambda(x)-\bar\xi\bar\sigma_\mu\lambda(x)\right)+\left(\theta\theta\right)\bar\theta_{\dot\alpha}\left[\bar\xi_{\dot\alpha}D(x)+\right.\\
&\left.+\frac{i}{2}(\bar\sigma^\mu)^{\dot\alpha\delta}(\sigma^\nu)_{\delta\dot\zeta}\bar\xi^{\dot\zeta}\left(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)\right)-\frac{i}{2}\left(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu\bar\xi\right)^{\dot\alpha}\partial_\mu A_\nu(x)\right]+\\
&+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\theta^\alpha\left[\xi_\alpha D(x)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\xi\right)_\alpha\partial_\nu A_\mu(x)\right]-\\
&-\frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda(x)+\bar\xi\bar\sigma^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)\Rightarrow\\
\Rightarrow\delta_\xi V_{WZ}=&\left(\theta\sigma^\mu\bar\xi\right)A_\mu(x)-\left(\bar\theta\bar\sigma^\mu\xi\right)A_\mu(x)+\left(\theta\theta\right)\overline{\xi\lambda}(x)+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\xi\lambda(x)+\\
&+\left(\theta\sigma^\mu\bar\theta\right)\left(\xi\sigma_\mu\bar\lambda(x)-\bar\xi\bar\sigma_\mu\lambda(x)\right)+\left(\theta\theta\right)\bar\theta\left(\bar\xi D(x)-\right.\\
&\left.-\frac{i}{2}\bar\sigma^\mu\sigma^\nu\bar\xi\partial_\nu A_\mu(x)\right)+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\theta\left(\xi D(x)+\frac{i}{2}\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\xi\partial_\nu A_\mu(x)\right)-\\
&-\frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda(x)+\bar\xi\bar\sigma^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)
\end{aligned}
\tag{5.6.39}
$$

Προφανώς, η μεταβολή $\delta_\xi V_{WZ}$ δεν είναι στη βαθμίδα των Wess και Zumino αφού οι συντελεστές των $\theta^\alpha, \bar\theta_{\dot\alpha}, \theta\theta$ και $\bar\theta\,\bar\theta$ είναι μη μηδενικοί. Το ίδιο ισχύει και για το διανυσματικό υπερπεδίο

$$
\begin{aligned}
V'=V_{WZ}+\delta_\xi V_{WZ}=&\left(\theta\sigma^\mu\bar\theta\right)A_\mu(x)+\left(\theta\theta\right)\overline{\theta\lambda}(x)+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\theta\lambda(x)+\frac{1}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)D(x)+\\
&+\left(\theta\sigma^\mu\bar\xi\right)A_\mu(x)-\left(\bar\theta\bar\sigma^\mu\xi\right)A_\mu(x)+\left(\theta\theta\right)\overline{\xi\lambda}(x)+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\xi\lambda(x)+\\
&+\left(\theta\sigma^\mu\bar\theta\right)\left(\xi\sigma_\mu\bar\lambda(x)-\bar\xi\bar\sigma_\mu\lambda(x)\right)+\left(\theta\theta\right)\bar\theta\left(\bar\xi D(x)-\right.\\
&\left.-\frac{i}{2}\bar\sigma^\mu\sigma^\nu\bar\xi\partial_\nu A_\mu(x)\right)+\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\theta\left(\xi D(x)+\frac{i}{2}\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\xi\partial_\nu A_\mu(x)\right)-\\
&-\frac{i}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\bar\theta\,\bar\theta\right)\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda(x)+\bar\xi\bar\sigma^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\theta\sigma^\mu\overline{\xi}\right) A_\mu(x) - \left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\xi\right) A_\mu(x) + (\theta\theta)\,\overline{\xi}\overline{\lambda}(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\xi\lambda(x) + \\
&+ \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(A_\mu(x) + \xi\sigma_\mu\overline{\lambda}(x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}_\mu\lambda(x)\right) + (\theta\theta)\,\overline{\theta}\,\Big(\overline{\lambda}(x) + \\
&+\overline{\xi}D(x) - \frac{i}{2}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\partial_\nu A_\mu(x)\Big) + \\
&+ \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\left(\lambda(x) + \xi D(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\partial_\nu A_\mu(x)\right) + \\
&+ \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[D(x) - i\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(x) + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)\right] \qquad (5.6.40)
\end{aligned}
$$

Μπορούμε όμως να βρούμε ένα chiral υπερπεδίο Λ_0 που αντιστοιχεί σε ένα μετασχηματισμό υπερβαθμίδας της μορφής (5.6.22), τέτοιο ώστε το διανυσματικό υπερπεδίο

$$
V'' = V' + i\left(\Lambda_0 - \Lambda_0^*\right) = V_{WZ} + \delta_\xi V_{WZ} + i\left(\Lambda_0 - \Lambda_0^*\right) \qquad (5.6.41)
$$

να είναι στη βαθμίδα των Wess και Zumino. Ας γράψουμε:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_0(x,\theta,\overline{\theta}) =& \phi_0(x) + \sqrt{2}\theta\psi_0(x) + (\theta\theta)\,F_0(x) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi_0(x) - \\
&- \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_0(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi_0(x) \qquad (5.6.42)
\end{aligned}
$$

όπου ϕ_0 και F_0 είναι δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία και ψ_0 είναι ένα αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl, τα οποία πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε το V'' της σχέσης (5.6.41) να είναι στη βαθμίδα των Wess και Zumino. Με βάση την (5.6.42) και τη γενική σχέση (5.6.23), είναι:

$$
\begin{aligned}
i\left(\Lambda_0(x,\theta,\overline{\theta}) - \Lambda_0^*(x,\theta,\overline{\theta})\right) =& i\left(\phi_0(x) - \phi_0^*(x)\right) + i\sqrt{2}\theta\psi_0(x) - i\sqrt{2}\overline{\theta}\,\overline{\psi}_0(x) + \\
&+ i\,(\theta\theta)\,F_0(x) - i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)F_0^*(x) + \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu(\phi_0(x) + \\
&+ \phi_0^*(x)) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_0(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\sigma^\mu\times \\
&\times\partial_\mu\overline{\psi}_0(x) - \frac{i}{4}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial^\mu\left(\phi_0(x) - \phi_0^*(x)\right) \qquad (5.6.43)
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας τις (5.6.40) και (5.6.43) στην (5.6.41), λαμβάνουμε:

$$
\begin{aligned}
V'' =& V_{WZ} + \delta_\xi V_{WZ} + i\left(\Lambda_0 - \Lambda_0^*\right) = \\
=& i\left(\phi_0(x) - \phi_0^*(x)\right) + i\theta^\alpha\left[-i\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha A_\mu(x) + \sqrt{2}\left(\psi_0\right)_\alpha(x)\right] - \\
&- i\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left[-i\left(\overline{\sigma}^\mu\xi\right)^{\dot{\alpha}} A_\mu(x) + \sqrt{2}\left(\overline{\psi}_0\right)^{\dot{\alpha}}(x)\right] + i\,(\theta\theta)\left(-i\overline{\xi}\overline{\lambda}(x) + \right. \\
&\left.+F_0(x)\right) - i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(i\xi\lambda(x) + F_0^*(x)\right) + \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\Big[A_\mu(x) + \\
&+\xi\sigma^\mu\overline{(}x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}_\mu\lambda(x) + \partial_\mu\left(\phi_0(x) + \phi_0^*(x)\right)\Big] + (\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\times \\
&\times\left[\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x) + \overline{\xi}^{\dot{\alpha}}D(x) - \frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)^{\dot{\alpha}}\partial_\nu A_\mu(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_0(x)\right)^{\dot{\alpha}}\right] + \\
&+ \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^\alpha\left[\lambda_\alpha(x) + \xi_\alpha D(x) + \frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right)_\alpha\partial_\nu A_\mu(x) - \right. \\
&\left.-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_0(x)\right)_\alpha\right] + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\Big[D(x) - i\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(x) + \right. \\
&\left.+\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right) - \frac{i}{2}\partial_\mu\partial^\mu\left(\phi_0(x) - \phi_0^*(x)\right)\Big] \qquad (5.6.44)
\end{aligned}
$$

Από την τελευταία σχέση είναι προφανές ότι για να είναι το V'' στη βαθμίδα των Wess και Zumino, δηλαδή της μορφής (5.6.31), πρέπει:

$$
\phi_0(x) - \phi_0^*(x)) = 0 \Rightarrow \phi_0(x) = \phi_0^*(x) \qquad (5.6.45)
$$

$$\sqrt{2}\left(\psi_0\right)_\alpha(x)-i\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha A_\mu(x)=0\Rightarrow\left(\psi_0\right)_\alpha(x)=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha A_\mu(x) \tag{5.6.46}$$

$$\sqrt{2}\left(\overline{\psi}_0\right)^{\dot{\alpha}}(x)-i\left(\overline{\sigma}^\mu\xi\right)^{\dot{\alpha}} A_\mu(x)=0\Rightarrow\left(\overline{\psi}_0\right)^{\dot{\alpha}}(x)=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\sigma}^\mu\xi\right)^{\dot{\alpha}} A_\mu(x) \tag{5.6.47}$$

$$F_0(x)-i\overline{\xi\lambda}(x)=0\Rightarrow F_0(x)=i\overline{\xi\lambda}(x) \tag{5.6.48}$$

$$F_0^*(x)+i\xi\lambda(x)=0\Rightarrow F_0^*(x)=-i\xi\lambda(x) \tag{5.6.49}$$

Η εξίσωση (5.6.45) σημαίνει ότι το βαθμωτό πεδίο ϕ_0 πρέπει να είναι πραγματικό, ενώ δεν έχει προκύψει κάποιος άλλος περιορισμός για το εν λόγω πεδίο, οπότε μπορούμε για απλότητα να θέσουμε:

$$\phi_0(x)=0 \tag{5.6.50}$$

Επισημαίνουμε ακόμη ότι η (5.6.47) είναι συνεπής με την (5.6.46), αφού από την τελευταία έπεται ότι

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{\psi}_0\right)_{\dot{\alpha}}(x)=\left(\left(\psi_0\right)_\alpha(x)\right)^*=-\frac{i}{\sqrt{2}}\left[\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\xi}^{\dot{\beta}}\right]^* A_\mu(x)=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\xi^\beta A_\mu(x)\Rightarrow\\
\Rightarrow&\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\left(\overline{\psi}_0\right)_{\dot{\alpha}}(x)=-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\varepsilon_{\beta\delta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\gamma}\delta}\xi^\beta A_\mu(x)=\frac{i}{\sqrt{2}}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\gamma}\delta}\varepsilon_{\delta\beta}\xi^\beta A_\mu(x)\Rightarrow\\
\Rightarrow&\left(\overline{\psi}_0\right)^{\dot{\beta}}(x)=\frac{i}{\sqrt{2}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\delta}\xi_\delta A_\mu(x)=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\sigma}^\mu\xi\right)^{\dot{\beta}} A_\mu(x)
\end{aligned}$$

ή

$$\left(\overline{\psi}_0\right)^{\dot{\alpha}}(x)=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\sigma}^\mu\xi\right)^{\dot{\alpha}} A_\mu(x)$$

που είναι ακριβώς η σχέση (5.6.47). Επίσης, η σχέση (5.6.49) είναι συνεπής με την (5.6.48), αφού η δεύτερη δεν είναι παρά η μιγαδική συζυγής της πρώτης. Έτσι, έχουμε προσδιορίσει τα πεδία-συνιστώσες ϕ_0, ψ_0 και F_0 του chiral υπερπεδίου Λ_0 της σχέσης (5.6.42), που είναι τέτοιο ώστε το διανυσματικό υπερπεδίο $V''=V'_{WZ}+\delta_\xi V_{WZ}+i\left(\Lambda_0-\Lambda_0^*\right)$ να είναι στη βαθμίδα των Wess και Zumino. Αντικαθιστώντας τις (5.6.46)-(5.6.50) στην (5.6.44), βρίσκουμε την ακριβή έκφραση για το εν λόγω υπερπεδίο:

$$\begin{aligned}
V''=&V_{WZ}+\delta_\xi V_{WZ}+i\left(\Lambda_0-\Lambda_0^*\right)=\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(A_\mu(x)+\xi\sigma_\mu\overline{\lambda}(x)-\overline{\xi}\overline{\sigma}_\mu\lambda(x)\right)+\\
&+\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left\{\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x)+\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}D(x)-\frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)^{\dot{\alpha}}\partial_\nu A_\mu(x)+\right.\\
&+\left.\frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\sigma^\nu\overline{\xi}\right)_\beta A_\nu(x)\right]\right\}+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^\alpha\left\{\lambda_\alpha(x)+\right.\\
&+\xi_\alpha D(x)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right)_\alpha\partial_\nu A_\mu(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\times\\
&\times\left.\partial_\mu\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\sigma}^\nu\xi\right)^{\dot{\beta}}A_\nu(x)\right]\right\}+\frac{1}{2}\left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[D(x)-\right.\\
&-i\left.\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(x)\right)\right]=\\
=&\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(A_\mu(x)+\xi\sigma_\mu\overline{\lambda}(x)-\overline{\xi}\overline{\sigma}_\mu\lambda(x)\right)+\\
&+\left(\theta\theta\right)\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left[\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x)+\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}D(x)-\frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)^{\dot{\alpha}}\partial_\nu A_\mu(x)+\right.\\
&+\left.\frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}\right)^{\dot{\alpha}}\partial_\mu A_\nu(x)\right]+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^\alpha\left[\lambda_\alpha(x)+\right.\\
&+\left.\xi_\alpha D(x)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right)_\alpha\partial_\nu A_\mu(x)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(x)\right]+
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[D(x)-i\left(\xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda(x)\right)\right]\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow V'' =& V_{WZ}+\delta_{\xi}V_{WZ}+i\left(\Lambda_0-\Lambda_0^*\right)=\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\left(A_{\mu}(x)+\xi\sigma^{\mu}\overline{\lambda}(x)-\overline{\xi}\overline{\sigma}_{\mu}\lambda(x)\right)+\\ &+(\theta\theta)\,\overline{\theta}\left[\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}D(x)+\frac{i}{2}\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\overline{\xi}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right)\right]+\\ &+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\left[\lambda(x)+\xi D(x)-\frac{i}{2}\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\xi\left(\partial_{\mu}A_{\nu}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right)\right]+\\ &+\frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[D(x)-i\left(\xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\lambda}(x)+\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda(x)\right)\right]\end{aligned}\tag{5.6.51}$$

Συνοψίζοντας, είδαμε ότι για ένα διανυσματικό υπερπεδίο στη βαθμίδα των Wess και Zumino, V_{WZ}, η μεταβολή του κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό, $\delta_{\xi}V_{WZ}$, και, κατ΄ επέκταση, το διανυσματικό υπερπεδίο $V_{WZ}+\delta_{\xi}V_{WZ}$ δεν είναι στη βαθμίδα των Wess και Zumino. Μπορούμε όμως να βρούμε ένα μετασχηματισμό υπερβαθμίδας χαρακτηριζόμενο από ένα αδιάστατο chiral υπερπεδίο Λ_0, τέτοιον ώστε το διανυσματικό υπερπεδίο $V_{WZ}+\delta_{\xi}V_{WZ}+i\left(\Lambda_0-\Lambda_0^*\right)$, το οποίο προκύπτει από τη δράση του πάνω στο $V_{WZ}+\delta_{\xi}V_{WZ}$, να είναι στη βαθμίδα των Wess και Zumino.

Τέλος, επισημαίνουμε ότι αφού επιλέξουμε τη βαθμίδα των Wess και Zumino, διατηρούμε την ελευθερία να κάνουμε συνήθεις μετασχηματισμούς βαθμίδας. Για να το δείξουμε αυτό, θεωρούμε ένα διανυσματικό υπερπεδίο στη βαθμίδα των Wess και Zumino

$$V_{WZ}=\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)A_{\mu}(x)+(\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\lambda}(x)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\lambda(x)+\frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)D(x)\tag{5.6.52}$$

και θα προσδιορίσουμε τη μορφή ενός μετασχηματισμού υπερβαθμίδας, κάτω από τον οποίο το υπερπεδίο αυτό μετασχηματίζεται σε ένα διανυσματικό υπερπεδίο V', το οποίο είναι επίσης στη βαθμίδα των Wess και Zumino. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός χαρακτηρίζεται από ένα αδιάστατο chiral υπερπεδίο

$$\begin{aligned}\Lambda(x,\theta,\overline{\theta}) =& \phi(x)+\sqrt{2}\theta\psi(x)+(\theta\theta)\,F(x)-i\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\partial_{\mu}\phi(x)-\\ &-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)-\frac{1}{4}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi(x)\end{aligned}\tag{5.6.53}$$

και η δράση του πάνω στο υπερπεδίο (5.6.52) δίνει το διανυσματικό υπερπεδίο

$$\begin{aligned}V'=V_{WZ}+i\left(\Lambda-\Lambda^*\right) =& i\left(\phi(x)-\phi^*(x)\right)+i\sqrt{2}\theta\psi(x)-i\sqrt{2}\overline{\theta}\;\overline{\psi}(x)+\\ &+i\,(\theta\theta)\,F(x)-i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)F^*(x)+\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)[A_{\mu}(x)+\\ &+\partial_{\mu}\left(\phi(x)+\phi^*(x)\right)]+(\theta\theta)\overline{\theta}\left(\overline{\lambda}(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)\right)+\\ &+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\left(\lambda(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\psi}(x)\right)+\\ &+\frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[D(x)-\frac{i}{2}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\left(\phi(x)-\phi^*(x)\right)\right]\end{aligned}\tag{5.6.54}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γενική σχέση (5.6.24) με $C(x)=\chi(x)=M(x)=N(x)=0$. Για να είναι το διανυσματικό υπερπεδίο V' της σχέσης (5.6.54) στη βαθμίδα των Wess και Zumino, πρέπει:

$$\phi(x)-\phi^*(x)=0\Rightarrow\phi(x)=\phi^*(x)$$

που σημαίνει ότι το $\phi(x)$ πρέπει να είναι ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο, ενώ πρέπει ακόμη να είναι $\psi_{\alpha}(x)=0,\forall\alpha=1,2$ (οπότε και $\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}(x)=\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\psi}_{\dot{\beta}}(x)=\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(\psi_{\beta}(x)\right)^*=0$) και $F(x)=0$. Επομένως, ένας (Αβελιανός) μετασχηματισμός υπερβαθμίδας, η δράση του οποίου πάνω σε ένα διανυσματικό υπερπεδίο στη βαθμίδα των Wess και Zumino δίνει ένα διανυσματικό υπερπεδίο που είναι πάλι στη βαθμίδα των Wess και Zumino, χαρακτηρίζεται από ένα chiral υπερπεδίο της μορφής[3]:

$$\Lambda(x,\theta,\overline{\theta}) = \frac{1}{2}a(x) - \frac{i}{2}\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\partial_{\mu}a(x) - \frac{1}{8}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_{\mu}\partial^{\mu}a(x) \tag{5.6.55}$$

όπου $a(x)$ είναι μία πραγματική βαθμωτή συνάρτηση. Κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό, το γενικό διανυσματικό υπερπεδίο στη βαθμίδα των Wess και Zumino (5.6.52) μετασχηματίζεται ως:

$$\begin{aligned} V_{WZ} \to V'_{WZ} = V_{WZ} + i\left(\Lambda - \Lambda^{*}\right) = \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\left(A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}a(x)\right) + (\theta\theta)\,\overline{\theta\lambda}(x) + \\ + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)D(x) \end{aligned} \tag{5.6.56}$$

Συγκρίνοντας την (5.6.52) με την (5.6.56), διαπιστώνουμε ότι ένας μετασχηματισμός υπερβαθμίδας που διατηρεί την εκλογή της βαθμίδας των Wess και Zumino, δηλαδή χαρακτηρίζεται από ένα chiral υπερπεδίο της μορφής (5.6.55), ισοδυναμεί ουσιαστικά με ένα συνήθη Αβελιανό μετασχηματισμό βαθμίδας $A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}a(x)$. Γι' αυτό το να υιοθετεί κανείς τη βαθμίδα των Wess και Zumino του αφήνει την ελευθερία να κάνει συνήθεις μετασχηματισμούς βαθμίδας.

[3]Η μορφή αυτή προκύπτει από την (5.6.53) με $\psi(x) = F(x) = 0$ και $\phi(x) = \frac{1}{2}a(x)$, όπου $a(x)$ μία πραγματική βαθμωτή συνάρτηση

Κεφάλαιο 6

Κατασκευή υπερσυμμετρικών Lagrangians από υπερπεδία

6.1 Ολοκλήρωση ως προς μεταβλητές Grassmann

Θεωρούμε μία μεταβλητή Grassmann θ, δηλαδή μία μεταβλητή για την οποία ισχύει

$$\{\theta, \theta\} = 0 \Rightarrow \theta^2 = 0 \tag{6.1.1}$$

Μία γενική συνάρτηση $f(\theta)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά δυνάμεων του θ:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \theta^n = f_0 + f_1 \theta \tag{6.1.2}$$

αφού $\theta^2 = 0$ και κατ΄ επέκταση, $\theta^n = 0$ $\forall n \geq 3$, ενώ τα f_0 και f_1 είναι μιγαδικοί αριθμοί. Η παράγωγος της f ως προς θ ισούται με

$$\frac{df}{d\theta} = f_1 \tag{6.1.3}$$

Για να ορίσουμε την ολοκλήρωση ως προς μία μεταβλητή Grassmann θ, παίρνουμε

$$\int d\theta \equiv 0, \ \int d\theta\theta \equiv 1 \tag{6.1.4}$$

και απαιτούμε η ολοκλήρωση ως προς θ να είναι γραμμική, δηλαδή:

$$\int d\theta \left(af(\theta) + bg(\theta) \right) = a \int d\theta f(\theta) + b \int d\theta g(\theta) \tag{6.1.5}$$

για δύο τυχαίες συναρτήσεις $f(\theta), g(\theta)$ και για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς a, b. Οι σχέσεις (6.1.4) και (6.1.5) ορίζουν το ολοκλήρωμα Berezin για μία μεταβλητή Grassmann θ. Από αυτές έπεται ότι το ολοκλήρωμα ως προς θ μία συνάρτησης $f(\theta) = f_0 + f_1\theta$ ισούται με:

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta \left(f_0 + f_1 \theta \right) = f_0 \underbrace{\int d\theta}_{\substack{\| \\ 0}} + f_1 \underbrace{\int d\theta\theta}_{\substack{\| \\ 1}} = f_1, \tag{6.1.6}$$

οπότε σύμφωνα και με την (6.1.3), είναι ίσο με την παράγωγο της f ως προς θ. Οι ορισμοί (6.1.4) και η ιδιότητα της γραμμικότητας της ολοκλήρωσης ως προς μία μεταβλητή Grassmann (σχέση (6.1.5)) συνεπάγονται ότι

$$\int d\theta f(\theta + \theta') = \int d\theta f(\theta) \tag{6.1.7}$$

για οποιαδήποτε μεταβλητή Grassmann θ' που είναι ανεξάρτητη της θ (δηλαδή $\frac{d\theta'}{d\theta}=0$) και

$$\int d\theta \frac{df}{d\theta} = 0 \tag{6.1.8}$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε την ισχύ των (6.1.7) και (6.1.8). Για την απόδειξη της (6.1.7) έχουμε:

$$\begin{aligned}\int d\theta f(\theta+\theta') &\overset{(6.1.2)}{=} \int d\theta \left[f_0 + f_1(\theta+\theta')\right] = f_0 \int d\theta + f_1 \int d\theta\theta + f_1 \int d\theta\theta' \overset{(6.1.4)}{=} \\ &= f_0 \cdot 0 + f_1 \cdot 1 + f_1 \left(\int d\theta\right) \cdot \theta' \overset{(6.1.4)}{=} f_1 + f_1 \cdot 0 \cdot \theta' = f_1 \overset{(6.1.6)}{=} \\ &= \int d\theta f(\theta)\end{aligned}$$

ενώ για την απόδειξη της (6.1.8) έχουμε:

$$\int d\theta \frac{df}{d\theta} \overset{(6.1.3)}{=} \int d\theta f_1 = f_1 \int d\theta \overset{(6.1.4)}{=} f_1 \cdot 0 = 0$$

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε μία συνάρτηση δέλτα, $\delta(\theta)$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\int d\theta \delta(\theta) f(\theta) = \left. f(\theta)\right|_{\theta=0} = f_0 \tag{6.1.9}$$

για κάθε συνάρτηση $f(\theta) = f_0 + f_1\theta$. Για την εύρεση της έκφρασης για τη $\delta(\theta)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int d\theta\theta f(\theta) = \int d\theta\theta\,(f_0 + f_1\theta) = \int (f_0\theta + f_1 \underbrace{\theta^2}_{\substack{\parallel \\ 0}}) &= \\ = f_0 \int d\theta\theta \overset{(6.1.4)}{=} f_0 &\end{aligned}$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\delta(\theta) = \theta \tag{6.1.10}$$

Θεωρούμε τώρα την άλγεβρα Grassmann[1] G_2 που παράγεται από δύο αντιμετατιθέμενες μεταβλητές Grassmann θ_1 και θ_2. Η άλγεβρα G_2 έχει τέσσερα ανεξάρτητα στοιχεία, τα

$$1, \theta_1, \theta_2, \theta_1\theta_2$$

και ένα τυχαίο στοιχείο της είναι της μορφής

$$g(\theta_1, \theta_2) = g_0 + g_1\theta_1 + g_2\theta_2 + g_3\theta_1\theta_2, \tag{6.1.11}$$

όπου τα g_0, g_1, g_2, g_3 είναι μιγαδικοί αριθμοί. Επιθυμούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\int d\theta_1 \int d\theta_2 g(\theta_1,\theta_2)$ για κάθε στοιχείο $g(\theta_1,\theta_2)$ της άλγεβρας G_2. Αρχικά, απαιτούμε να είναι:

$$\{d\theta_i, d\theta_j\} = \{d\theta_i, \theta_j\} = 0 \tag{6.1.12}$$

για κάθε $i, j = 1, 2$. Από τις εξισώσεις (6.1.4) και τις σχέσεις αντιμετάθεσης (6.1.12) έπεται ότι:

$$\int d\theta_1 \int d\theta_2 1 = \int d\theta_1 \left(\int d\theta_2 1\right) \overset{(6.1.4)}{=} \int d\theta_1 0 = 0 \cdot \left(\int d\theta_1\right) \overset{(6.1.4)}{=} 0 \cdot 0 = 0 \tag{6.1.13}$$

$$\int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_1 \overset{(6.1.12)}{=} -\int d\theta_2 \left(\int d\theta_1 \theta_1\right) \overset{(6.1.4)}{=} -\int d\theta_2 1 \overset{(6.1.4)}{=} 0 \tag{6.1.14}$$

[1] Για τον ορισμό μίας άλγεβρας Grassmann παραπέμπουμε στο κεφάλαιο 3 του [38]

$$\int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_2 = \int d\theta_1 \left(\int d\theta_2 \theta_2 \right) \overset{(6.1.4)}{=} \int d\theta_1 1 \overset{(6.1.4)}{=} 0 \tag{6.1.15}$$

$$\int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = -\int d\theta_1 \left(\int d\theta_2 \theta_2 \right) \theta_1 \overset{(6.1.4)}{=} -\int d\theta_1 \theta_1 \overset{(6.1.4)}{=} -1 \tag{6.1.16}$$

Βασιζόμενοι στις σχέσεις (6.1.13)-(6.1.16), μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int d\theta_1 \int d\theta_2 g(\theta_1, \theta_2)$ για μία αυθαίρετη συνάρτηση $g(\theta_1.\theta_2) \in G_2$, η μορφή της οποίας δίνεται από την (6.1.11), χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα της γραμμικότητας της ολοκλήρωσης ως προς μία μεταβλητή Grasmann:

$$\begin{aligned} \int d\theta_1 \int d\theta_2 g(\theta_1, \theta_2) = \int d\theta_1 \int d\theta_2 \left(g_0 + g_1\theta_1 + g_2\theta_2 + g_3\theta_1\theta_2 \right) \overset{(6.1.5)}{=} \\ = g_0 \int d\theta_1 \int d\theta_2 + g_1 \int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_1 + g_2 \int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_2 + \\ + g_3 \int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_1 \theta_2 \overset{(6.1.13)-(6.1.16)}{=} \\ = g_0 \cdot 0 + g_1 \cdot 0 + g_2 \cdot 0 + g_3 \cdot (-1) = -g_3 \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

Για τις φερμιονικές συντεταγμένες θ^α και $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$ (όπου $\alpha = 1, 2,\ \dot\alpha = \dot1, \dot2$) του $N = 1$ υπερχώρου ορίζουμε τα μέτρα ολοκλήρωσης

$$d^2\theta \equiv -\frac{1}{4} d\theta^\alpha d\theta^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{6.1.18}$$

$$d^2\overline{\theta} \equiv -\frac{1}{4} d\overline{\theta}_{\dot\alpha} d\overline{\theta}_{\dot\beta} \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \tag{6.1.19}$$

με τα $d\theta^\alpha$ και $d\overline{\theta}_{\dot\alpha}$ να ικανοποιούν τις σχέσεις αντιμετάθεσης

$$\left\{ d\theta^\alpha, d\theta^\beta \right\} = \left\{ d\theta^\alpha, d\overline{\theta}_{\dot\beta} \right\} = \left\{ d\overline{\theta}_{\dot\alpha}, d\overline{\theta}_{\dot\beta} \right\} = 0 \tag{6.1.20}$$

για κάθε $\alpha, \beta = 1, 2,\ \dot\alpha, \dot\beta = \dot1, \dot2$. Με τους ορισμούς (6.1.18) και (6.1.19) έχουμε:

$$\int d^2\theta \left(\theta\theta \right) = 1 \tag{6.1.21}$$

$$\int d^2\overline{\theta} \left(\overline{\theta}\, \overline{\theta} \right) = 1 \tag{6.1.22}$$

και

$$\int d^2\theta = \int d^2\overline{\theta} = 0 \tag{6.1.23}$$

$$\int d^2\theta \theta^\alpha = \int d^2\overline{\theta}\, \overline{\theta}_{\dot\alpha} = 0 \tag{6.1.24}$$

Για να αποδείξουμε τις σχέσεις (6.1.21)-(6.1.24), αρχικά υπολογίζουμε τα $d^2\theta$ και $d^2\overline{\theta}$ με βάση τις (6.1.18) και (6.1.19) αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\begin{aligned} d^2\theta = & -\frac{1}{4} d\theta^\alpha d\theta^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} \left(d\theta^1 d\theta^2 \varepsilon_{12} + d\theta^2 d\theta^1 \varepsilon_{21} \right) = \\ = & -\frac{1}{4} \left(-d\theta^1 d\theta^2 + d\theta^2 d\theta^1 \right) \overset{(6.1.20)}{=} -\frac{1}{4} \left(-d\theta^1 d\theta^2 - d\theta^1 d\theta^2 \right) = \\ = & \frac{1}{2} d\theta^1 d\theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2\overline{\theta} = & -\frac{1}{4} d\overline{\theta}_{\dot\alpha} d\overline{\theta}_{\dot\beta} \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} = -\frac{1}{4} \left(d\overline{\theta}_{\dot1} d\overline{\theta}_{\dot2} \varepsilon^{\dot1\dot2} + d\overline{\theta}_{\dot2} d\overline{\theta}_{\dot1} \varepsilon^{\dot2\dot1} \right) = \\ = & -\frac{1}{4} \left(d\overline{\theta}_{\dot1} d\overline{\theta}_{\dot2} - d\overline{\theta}_{\dot2} d\overline{\theta}_{\dot1} \right) \overset{(6.1.20)}{=} -\frac{1}{4} \left(-d\overline{\theta}_{\dot2} d\overline{\theta}_{\dot1} - d\overline{\theta}_{\dot2} d\overline{\theta}_{\dot1} \right) = \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}d\overline{\theta}_{\dot{2}}d\overline{\theta}_{\dot{1}}$$

Έτσι, είναι:

$$\begin{aligned}\int d^2\theta\,(\theta\theta) =&\frac{1}{2}\int d\theta^1\int d\theta^2\theta^\alpha\theta_\alpha = \frac{1}{2}\int d\theta^1\int d\theta^2\varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta = \\ =&\frac{1}{2}\int d\theta^1\int d\theta^2\left(\varepsilon_{12}\theta^1\theta^2+\varepsilon_{21}\theta^2\theta^1\right) = \frac{1}{2}\int d\theta^1\int d\theta^2\left(-\theta^1\theta^2+\theta^2\theta^1\right) = \\ =&\frac{1}{2}\int d\theta^1\int d\theta^2\left(\theta^2\theta^1+\theta^2\theta^1\right) = \frac{1}{2}\int d\theta^1\int d\theta^2\left(2\theta^2\theta^1\right) = \\ =&\int d\theta^1\left(\int d\theta^2\theta^2\right)\theta^1 \overset{(6.1.4)}{=} \int d\theta^1\theta^1 \overset{(6.1.4)}{=} 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int d^2\theta\,(\overline{\theta}\,\overline{\theta}) =&\frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\theta}_{\dot{\beta}} = \\ =&\frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\left(\varepsilon^{\dot{1}\dot{2}}\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{2}}+\varepsilon^{\dot{2}\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{2}}\overline{\theta}_{\dot{1}}\right) = \frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\left(\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{2}}-\overline{\theta}_{\dot{2}}\overline{\theta}_{\dot{1}}\right) = \\ =&\frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\left(\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{2}}+\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{2}}\right) = \frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\left(2\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{2}}\right) = \\ =&\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\left(\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{1}}\right)\overline{\theta}_{\dot{2}} \overset{(6.1.4)}{=} \int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\overline{\theta}_{\dot{2}} \overset{(6.1.4)}{=} 1\end{aligned}$$

$$\int d^2\theta = \frac{1}{2}\int d\theta^1\int d\theta^2 = \frac{1}{2}\left(\int d\theta^1\right)\left(\int d\theta^2\right) \overset{(6.1.4)}{=} \frac{1}{2}\cdot 0\cdot 0 = 0$$

$$\int d^2\overline{\theta} = \frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\int d\overline{\theta}_{\dot{1}} = \frac{1}{2}\left(\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\right)\left(\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\right) \overset{(6.1.4)}{=} \frac{1}{2}\cdot 0\cdot 0 = 0$$

$$\int d^2\theta\theta^1 = \frac{1}{2}\int d\theta^1\int d\theta^2\theta^1 \overset{(6.1.20)}{=} -\frac{1}{2}\int d\theta^2\left(\int d\theta^1\theta^1\right) \overset{(6.1.4)}{=} -\frac{1}{2}\int d\theta^2 1 \overset{(6.1.4)}{=} 0$$

$$\int d^2\theta\theta^2 = \frac{1}{2}\int d\theta^1\int d\theta^2\theta^2 = \frac{1}{2}\int d\theta^1\left(\int d\theta^2\theta^2\right) \overset{(6.1.4)}{=} \frac{1}{2}\int d\theta^1 1 \overset{(6.1.4)}{=} 0$$

άρα $\int d^2\theta\theta^\alpha = 0$ για κάθε $\alpha = 1, 2$.

Ακόμη έχουμε:

$$\int d^2\overline{\theta}\overline{\theta}_{\dot{1}} = \frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{1}} = \frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\left(\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{1}}\right) \overset{(6.1.4)}{=} \frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}1 \overset{(6.1.4)}{=} 0$$

$$\int d^2\overline{\theta}\overline{\theta}_{\dot{2}} = \frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{2}} \overset{(6.1.20)}{=} -\frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\left(\int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\overline{\theta}_{\dot{2}}\right) \overset{(6.1.4)}{=} -\frac{1}{2}\int d\overline{\theta}_{\dot{1}}1 = 0$$

άρα $\int d^2\theta\overline{\theta}_{\dot{\alpha}} = 0$ για κάθε $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$. Με δεδομένες τις (6.1.21)-(6.1.24) και την ανεξαρτησία των μεταβλητών Grassmann $\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$ από τις θ_α, μπορούμε να δείξουμε ότι για το γενικό Lorentz αναλλοίωτο υπερπεδίο S της (5.3.13) ισχύουν οι σχέσεις:

$$\int d^2\theta S(x,\theta,\overline{\theta}) = m(x) + \overline{\theta}\overline{\rho}(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x) \tag{6.1.25}$$

$$\int d^2\overline{\theta} S(x,\theta,\overline{\theta}) = n(x) + \theta\psi(x) + (\theta\theta)\,d(x) \tag{6.1.26}$$

$$\int d^2\theta\int d^2\overline{\theta} S(x,\theta,\overline{\theta}) = d(x) \tag{6.1.27}$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int d^2\theta S(x,\theta,\overline{\theta}) =&\int d^2\theta\left[f(x)+\theta^\alpha\phi_\alpha(x)+\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x)+(\theta\theta)\,m(x)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)n(x)+\right.\\&\left.+\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)V_\mu(x)+(\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\rho}^{\dot\alpha}(x)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x)\right]=\\=&\underbrace{\left(\int d^2\theta\right)}_{\substack{\|\\0}}f(x)+\underbrace{\left(\int d^2\theta\theta^\alpha\right)}_{\substack{\|\\0}}\phi_\alpha(x)+\underbrace{\left(\int d^2\theta\right)}_{\substack{\|\\0}}\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x)+\\&+\underbrace{\left[\int d^2\theta\,(\theta\theta)\right]}_{\substack{\|\\1}}m(x)+\underbrace{\left(\int d^2\theta\right)}_{\substack{\|\\0}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)n(x)+\int d^2\theta\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}V_\mu(x)+\\&+\underbrace{\left[\int d^2\theta\,(\theta\theta)\right]}_{\substack{\|\\1}}\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\rho}^{\dot\alpha}(x)+\int d^2\theta\theta^\alpha\psi_\alpha(x)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)+\underbrace{\left[\int d^2\theta\,(\theta\theta)\right]}_{\substack{\|\\1}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x)=\\=&m(x)+\underbrace{\left(\int d^2\theta\theta^\alpha\right)}_{\substack{\|\\0}}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}V_\mu(x)+\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\rho}^{\dot\alpha}(x)+\underbrace{\left(\int d^2\theta\theta^\alpha\right)}_{\substack{\|\\0}}\psi_\alpha(x)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x)=\\=&m(x)+\overline{\theta}\overline{\rho}(x)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int d^2\overline{\theta} S(x,\theta,\overline{\theta}) =&\int d^2\overline{\theta}\left[f(x)+\theta^\alpha\phi_\alpha(x)+\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x)+(\theta\theta)\,m(x)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)n(x)+\right.\\&\left.+\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)V_\mu(x)+(\theta\theta)\,\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\rho}^{\dot\alpha}(x)+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)d(x)\right]=\\=&\underbrace{\left(\int d^2\overline{\theta}\right)}_{\substack{\|\\0}}f(x)+\underbrace{\left(\int d^2\overline{\theta}\right)}_{\substack{\|\\0}}\theta^\alpha\phi_\alpha(x)+\underbrace{\left(\int d^2\overline{\theta}\overline{\theta}_{\dot\alpha}\right)}_{\substack{\|\\0}}\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x)+\\&+\underbrace{\left(\int d^2\overline{\theta}\right)}_{\substack{\|\\0}}(\theta\theta)\,m(x)+\underbrace{\left[\int d^2\overline{\theta}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\right]}_{\substack{\|\\1}}n(x)-\int d^2\overline{\theta}\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)V_\mu(x)+\\&+\int d^2\overline{\theta}\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\rho}^{\dot\alpha}(x)\,(\theta\theta)+\underbrace{\left[\int d^2\overline{\theta}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\right]}_{\substack{\|\\1}}\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+\int d^2\overline{\theta}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)(\theta\theta)\,d(x)=\\=&n(x)-\int d^2\overline{\theta}\overline{\theta}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\theta_\beta V_\mu(x)+\underbrace{\left(\int d^2\overline{\theta}\overline{\theta}_{\dot\alpha}\right)}_{\substack{\|\\0}}\overline{\rho}^{\dot\alpha}(x)\,(\theta\theta)+\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+\\&+\underbrace{\left[\int d^2\overline{\theta}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\right]}_{\substack{\|\\1}}(\theta\theta)\,d(x)=\\=&n(x)-\underbrace{\left(\int d^2\overline{\theta}\overline{\theta}_{\dot\alpha}\right)}_{\substack{\|\\0}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\theta_\beta V_\mu(x)+\theta\psi(x)+(\theta\theta)\,d(x)=\end{aligned}$$

$$=n(x) + \theta\psi(x) + (\theta\theta)\, d(x)$$

και

$$\begin{aligned}\int d^2\theta \int d^2\overline{\theta} S(x,\theta,\overline{\theta}) &\overset{(6.1.26)}{=} \int d^2\theta\, [n(x) + \theta\psi(x) + (\theta\theta)\, d(x)] = \\ &= \int d^2\theta\, [n(x) + \theta^\alpha\psi_\alpha(x) + (\theta\theta)\, d(x)] = \\ &= \underbrace{\left(\int d^2\theta\right)}_{\substack{\parallel \\ 0}} n(x) + \underbrace{\left(\int d^2\theta\theta^\alpha\right)}_{\substack{\parallel \\ 0}} \psi_\alpha(x) + \underbrace{\left[\int d^2\theta\, (\theta\theta)\right]}_{\substack{\parallel \\ 1}} d(x) = \\ &= d(x)\end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις δέλτα ως προς τα μέτρα ολοκλήρωσης $d^2\theta$ και $d^2\overline{\theta}$ είναι οι:

$$\delta^{(2)}(\theta) = \theta\theta \tag{6.1.28}$$

$$\delta^{(2)}(\overline{\theta}) = \overline{\theta}\,\overline{\theta} \tag{6.1.29}$$

αντίστοιχα, ώστε να είναι:

$$\int d^2\theta\delta^{(2)}(\theta) S(x,\theta,\overline{\theta}) = S(x,0,\overline{\theta}) = f(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})n(x) \tag{6.1.30}$$

$$\int d^2\overline{\theta}\delta^{(2)}(\overline{\theta}) S(x,\theta,\overline{\theta}) = S(x,\theta,0) = f(x) + \theta\phi(x) + (\theta\theta)\, m(x) \tag{6.1.31}$$

όπου $S(x,\theta,\overline{\theta})$ είναι το γενικό Lorentz αναλλοίωτο υπερπεδίο της σχέσης (5.3.13). Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι οι (6.1.30) και (6.1.31) πράγματι ισχύουν, εάν οι $\delta^{(2)}(\theta)$ και $\delta^{(2)}(\overline{\theta})$ δίνονται από τις σχέσεις (6.1.28) και (6.1.29) αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int d^2\theta(\theta\theta) S(x,\theta,\overline{\theta}) =& \int d^2\theta(\theta\theta)\, \big[f(x) + \theta\phi(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + (\theta\theta)m(x) + \big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)n(x) + \\ &+ \big(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\big)\, V_\mu(x) + (\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\rho}(\mathtt{x}) + \big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\theta\psi(\mathtt{x}) + (\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\mathtt{d}(\mathtt{x})\big] = {}^2 \\ =& \int d^2\theta(\theta\theta)[f(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})n(x)] = \\ =& \underbrace{\left[\int d^2\theta(\theta\theta)\right]}_{\substack{\parallel \\ 1}} [f(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})n(x)] = \\ =& f(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})n(x) = S(x,0,\overline{\theta})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int d^2\overline{\theta}(\overline{\theta}\,\overline{\theta}) S(x,\theta,\overline{\theta}) =& \int d^2\overline{\theta}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\, \big[f(x) + \theta\phi(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + (\theta\theta)m(x) + \big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)n(x) + \\ &+ \big(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\big)\, V_\mu(x) + (\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\rho}(\mathtt{x}) + \big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\theta\psi(\mathtt{x}) + (\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\mathtt{d}(\mathtt{x})\big] = \\ =& \int d^2\overline{\theta}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})[f(x) + \theta\phi(x) + (\theta\theta)m(x)] = \\ =& \underbrace{\left[\int d^2\overline{\theta}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\right]}_{\substack{\parallel \\ 1}} [f(x) + \theta\phi(x) + (\theta\theta)m(x)] = \\ =& f(x) + \theta\phi(x) + (\theta\theta)m(x) = S(x,\theta,0)\end{aligned}$$

Τέλος, από το γεγονός ότι $\int d\theta^1\theta^1 = \int d\theta^2\theta^2 = \int d\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{1}} = \int d\overline{\theta}_{\dot{2}}\overline{\theta}_{\dot{2}} = 1$, σε συνδυασμό με το ότι οι φερμιονικές συντεταγμένες θ^α και $\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$ έχουν διάσταση $[\theta^\alpha] = \left[\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\right] = M^{-\frac{1}{2}}$, έπεται ότι τα $d\theta^\alpha$ και $d\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$ έχουν διάσταση $[d\theta^\alpha] = \left[d\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\right] = M^{\frac{1}{2}}$ και, εάν λάβουμε υπόψη τις (6.1.18) και (6.1.19), συμπεραίνουμε ότι τα μέτρα ολοκλήρωσης $d^2\theta$ και $d^2\overline{\theta}$ έχουν διάσταση $\left[d^2\theta\right] = \left[d^2\overline{\theta}\right] = M$.

6.2 Η γενική ιδέα πίσω από την κατασκευή υπερσυμμετρικών Lagrangians από υπερπεδία

Στην ενότητα αυτή, ασχολούμαστε με το πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ($N = 1$) υπερσυμμετρικές δράσεις, δηλαδή δράσεις αναλλοίωτες κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, με τη χρήση υπερπεδίων. Μία πολύ σημαντική παρατήρηση είναι ότι το ολοκλήρωμα οποιουδήποτε υπερπεδίου πάνω σε όλο τον υπερχώρο είναι αναλλοίωτο κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς:

$$\delta_\xi A = 0, \text{ για } A = \int d^4x \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta} S(x, \theta, \overline{\theta}) \tag{6.2.1}$$

για ένα τυχαίο υπερπεδίο $S(x, \theta, \overline{\theta})$ της μορφής (5.3.13). Ο ισχυρισμός αυτός είναι αληθής, διότι για ένα τέτοιο υπερπεδίο, το ολοκλήρωμα $\int d^2\theta \int d^2\overline{\theta} S(x, \theta, \overline{\theta})$ ισούται με το συντελεστή του $(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)$, $d(x)$, (βλ. σχέση (6.1.27)), ο οποίος μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, όπως φαίνεται από τη σχέση (5.3.59), ($\delta_\xi d(x) = -\frac{i}{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\rho}(x) - \frac{i}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) = -\frac{i}{2}\partial_\mu\left(\xi\sigma^\mu\overline{\rho}(x) + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\psi(x)\right)$) με αποτέλεσμα το ολοκλήρωμα $A = \int d^4x \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta}\, S(x, \theta, \overline{\theta}) = \int d^4x d(x)$ να είναι αναλλοίωτο κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς.

Επομένως, στη δράση που διέπει τη δυναμική μίας $N = 1$ υπερσυμμετρικής θεωρίας είναι δυνατό να υπάρχει μία συνεισφορά της μορφής $\int d^4x \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta} S(x, \theta, \overline{\theta})$ με το S να είναι κάποιο πραγματικό (διανυσματικό) υπερπεδίο V, ώστε η δράση να είναι πραγματική. Για να λάβουμε την αντίστοιχη συνεισφορά στη Lagrangian (πυκνότητα) $\mathcal{L}$, ολοκληρώνουμε το V μόνο ως προς τις φερμιονικές συντεταγμένες. Για το ολοκλήρωμα αυτό χρησιμοποιούμε συνήθως το συμβολισμό:

$$[V]_D \equiv \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta} V(x, \theta, \overline{\theta}) = V(x, \theta, \overline{\theta})\big|_{(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)} = \frac{1}{2}D(x) - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu C(x), \tag{6.2.2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (6.1.27) και τη μορφή του V στη σχέση (5.6.10) για την τελευταία ισότητα, ενώ με $V(x, \theta, \overline{\theta})\big|_{(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)}$ συμβολίζουμε το συντελεστή του $(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)$ στην έκφραση για το διανυσματικό υπερπεδίο V, ο οποίος είναι γνωστός ως $D-$όρος του υπερπεδίου αυτό. Φυσικά, ο όρος $-\frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu C(x)$ μπορεί να παραλειφθεί από τη Lagrangian $\mathcal{L}$, διότι είναι μία ολική παράγωγος και άρα έχει μηδενική συνεισφορά στην αντίστοιχη δράση ($\int d^4x\mathcal{L}$).

Ένας άλλος τύπος συνεισφοράς σε μία υπερσυμμετρική δράση μπορεί να προκύψει από το γεγονός ότι ο $F-$όρος ενός chiral υπερπεδίου, δηλαδή ο συντελεστής του $\theta\theta$ στην έκφραση για το υπερπεδίο αυτό, μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από έναν υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό, όπως φαίνεται από τη σχέση (5.5.18) ($\delta_\xi F(x) = -i\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) = -i\sqrt{2}\partial_\mu\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\psi(x)\right)$). Αυτό σημαίνει ότι μπορεί κανείς να έχει μία συνεισφορά στη Lagrangian της μορφής

$$[\Phi]_F \equiv \Phi(x, \theta, \overline{\theta})\big|_{\theta\theta} = \int d^2\theta\, \Phi(x, \theta, \overline{\theta})\big|_{\overline{\theta}=0} \overset{(6.1.31)}{=} \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta}\delta^{(2)}(\overline{\theta})\Phi(x, \theta, \overline{\theta}) = F(x), \tag{6.2.3}$$

όπου Φ είναι ένα chiral υπερπεδίο, δηλαδή ένα υπερπεδίο της μορφής (5.5.11), ενώ με $\Phi(x, \theta, \overline{\theta})\big|_{\theta\theta}$ συμβολίζουμε το συντελεστή του $\theta\theta$ στην έκφραση για το Φ. Η ισχύς της δεύτερης ισότητας στην

[2] Όροι με περισσότερα από δύο θ ή περισσότερα από δύο $\overline{\theta}$ είναι ταυτοτικά μηδέν λόγω των σχέσεων αντιμετάθεσης (5.1.1).

(6.2.3) μπορεί εύκολα να αποδειχθεί, εάν γίνει χρήση της γενικής έκφρασης για ένα chiral υπερπεδίο (σχέση (5.5.11)) και των σχέσεων (6.1.21), (6.1.23) και (6.1.24). Είναι:

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta\ \Phi(x,\theta,\overline{\theta})\big|_{\overline{\theta}=0} \overset{(5.5.11)}{=} & \int d^2\theta \left[\phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + (\theta\theta)F(x)\right] = \\
= & \int d^2\theta \left[\phi(x) + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(x) + (\theta\theta)F(x)\right] = \\
= & \underbrace{\left(\int d^2\theta\right)}_{\substack{\| \\ 0}} \phi(x) + \sqrt{2}\underbrace{\left(\int d^2\theta\theta^\alpha\right)}_{\substack{\| \\ 0}} \psi_\alpha(x) + \underbrace{\left[\int d^2\theta(\theta\theta)\right]}_{\substack{\| \\ 1}} F(x) = \\
= & F(x) = \Phi(x,\theta,\overline{\theta})\big|_{\theta\theta}
\end{aligned}$$

Για τον $F-$όρο ενός chiral υπερπεδίου Φ, $[\Phi]_F$, το χωροχρονικό ολοκλήρωμα $\int d^4x\, [\Phi]_F$ είναι αναλλοίωτο κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, αφού το $[\Phi]_F$ μεταβάλλεται κατά μια ολική παράγωγο κάτω από τους μετασχηματισμούς αυτούς, άρα αποτελεί μία επιτρεπτή συνεισφορά σε μία υπερσυμμετρική δράση (ισοδύναμα, το $[\Phi]_F$ είναι μία επιτρεπτή συνεισφορά σε μία υπερσυμμετρική Lagrangian). Επισημαίνουμε ότι ο $F-$όρος ενός chiral υπερπεδίου είναι εν γένει μιγαδικός, ενώ μία υπερσυμμετρική δράση πρέπει να είναι πραγματική, το οποίο μπορεί να εξασφαλιστεί εάν κάθε τέτοια συνεισφορά στην αντίστοιχη Lagrangian συνοδεύεται από τη μιγαδική συζυγή της:

$$[\Phi]_F + c.c. = \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta}\left(\delta^{(2)}(\overline{\theta})\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) + \delta^{(2)}(\theta)\Phi^*(x,\theta,\overline{\theta})\right) \tag{6.2.4}$$

Από τις εξισώσεις (5.5.10) και (5.5.11) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι εάν η συνάρτηση $\tilde{\Phi}(y,\theta)$, η οποία αναπαριστά ένα chiral υπερπεδίο $\Phi(x,\theta,\overline{\theta})$ στις υπερσυντεταγμένες $(y^\mu,\theta_\alpha,\overline{\theta}_{\dot{\alpha}})$ (όπου $y^\mu = x^\mu + i\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta$) με την έννοια ότι $\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) = \Phi(y - i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta,\theta,\overline{\theta}) \equiv \tilde{\Phi}(y,\theta)$, δίνεται από τη σχέση

$$\tilde{\Phi}(y,\theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y)$$

ο συντελεστής του $\theta\theta$ στην έκφραση για το $\Phi(x,\theta,\overline{\theta})$ είναι $F(x)$. Αυτή είναι μία χρήσιμη παρατήρηση, διότι πολλοί υπολογισμοί, στους οποίους εμπλέκονται chiral υπερπεδία, απλοποιούνται σημαντικά, εάν χρησιμοποιηθούν οι μποζονικές συντεταγμένες y^μ αντί των x^μ.

Μία άλλη συνεισφορά σε μία υπερσυμμετρική Lagrangian (δηλαδή Lagrangian που μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από έναν υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό, ώστε η αντίστοιχη δράση να είναι αναλλοίωτη κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό) θα μπορούσε να είναι και ο $D-$όρος ενός chiral υπερπεδίου Φ, δηλαδή ο συνετελεστής του $(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})$ στην έκφραση για το υπερπεδίο αυτό:

$$[\Phi]_D \equiv \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta}\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) = \Phi(x,\theta,\overline{\theta})\big|_{(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})} = -\frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi(x), \tag{6.2.5}$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από την (5.5.11), με το $\phi(x)$ να είναι ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο. Από την (6.2.5) είναι σαφές ότι ο $D-$όρος ενός chiral υπερπεδίου είναι μία ολική παράγωγος, οπότε η προσθήκη του (μαζί με το μιγαδικό συζυγή του) σε μία υπερσυμμετρική Lagrangian δεν επηρεάζει καθόλου την αντίστοιχη δράση.

Με βάση τα παραπάνω, μία υπερσυμμετρική Lagrangian είναι εν γένει ένα άθροισμα $D-$όρων διανυσματικών υπερπεδίων και $F-$όρων chiral υπερπεδίων, με τους τελευταίους να συνοδεύονται από τους μιγαδικούς συζυγείς τους. Τα υπερπεδία που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή υπερσυμμετρικών Lagrangians κατασκευάζονται συνήθως από άλλα, θεμελιώδη υπερπεδία. Ωστόσο, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι επιτρεπτή η παρουσία του $D-$όρου ενός θεμελιώδους διανυσματικούς υπερπεδίου V σε μία υπερσυμμετρική Lagrangian, εάν το V είναι το διανυσματικό υπερπεδίο για μία Αβελιανή συμμετρία βαθμίδας.

6.3 Lagrangians για chiral supermultiplets

Στην ενότητα 5.5 είδαμε ότι τα πεδία-συνιστώσες ενός chiral υπερπεδίου μετασχηματίζονται κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς όπως τα αντίστοιχα πεδία στο ελεύθερο και άμαζο μοντέλο των Wess και Zumino. Τώρα έχουμε τα απαραίτητα εργαλεία για να ανακατασκευάσουμε τις Lagrangians για το ελεύθερο και άμαζο μοντέλο των Wess και Zumino και για ένα σύνολο από αλληλεπιδρώσες chiral supermultiplets, τις οποίες εξετάσαμε στις ενότητες 4.1 και 4.2 αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας υπερπεδία. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε n chiral υπερπεδία Φ_i:

$$\begin{aligned}\Phi_i(x,\theta,\overline{\theta}) =&\phi_i(x) + \sqrt{2}\theta\psi_i(x) + (\theta\theta)F_i(x) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi_i(x)-\\ &-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\partial_\mu\partial^\mu\phi_i(x),\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

τα οποία έχουν διάσταση μάζας 1, ώστε τα πεδία-συνιστώσες ϕ_i, ψ_i και F_i να έχουν τις συνήθεις διαστάσεις μάζας $1, \frac{3}{2}$ και 2 αντίστοιχα. Για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Phi_i^*\Phi_j =& \Bigg[\phi_i^* + \sqrt{2}\overline{\theta}\overline{\psi}_i + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})F_i^* + i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi_i^* - \frac{i}{\sqrt{2}}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_i-\\
&-\frac{1}{4}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\partial_\mu\partial^\mu\phi_i^*\Bigg]\Bigg[\phi_j + \sqrt{2}\theta\psi_j + (\theta\theta)F_j - i\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)\partial_\nu\phi_j-\\
&-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\sigma}^\nu\partial_\nu\psi_j - \frac{1}{4}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\partial_\nu\partial^\nu\phi_j\Bigg] =\\
=&\phi_i^*\phi_j + \sqrt{2}\phi_i^*\left(\theta\psi_j\right) + (\theta\theta)\phi_i^*F_j - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\phi_i^*\partial_\mu\phi_j - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j\right)\phi_i^*-\\
&-\frac{1}{4}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\phi_i^*\partial_\mu\partial^\mu\phi_j + \sqrt{2}\left(\overline{\theta}\overline{\psi}_i\right)\phi_j + 2\left(\theta\psi_j\right)\left(\overline{\theta}\overline{\psi}_i\right)+\\
&+\sqrt{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\psi}_i\right)F_j - i\sqrt{2}\left(\overline{\theta}\overline{\psi}_i\right)\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi_j - i(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\psi}_i\right)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j\right)+\\
&+(\overline{\theta}\,\overline{\theta})F_i^*\phi_j + \sqrt{2}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(\theta\psi_j\right)F_i^* + (\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)F_i^*F_j + i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\phi_j\partial_\mu\phi_i^*+\\
&+i\sqrt{2}\left(\theta\psi_j\right)\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi_i^* - i^2\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)\left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial_\nu\phi_j\right)-\\
&-\frac{i}{\sqrt{2}}\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\left(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_i\right)\phi_j - i\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\left(\theta\psi_j\right)\left(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_i\right)-\\
&-\frac{1}{4}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\phi_j\partial_\mu\partial^\mu\phi_i^* \overset{(2.5.32)-(2.5.35)}{=}\\
=&\phi_i^*\phi_j + \sqrt{2}\left(\theta\psi_j\right)\phi_i^* + (\theta\theta)\phi_i^*F_j - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\phi_i^*\partial_\mu\phi_j - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j\right)\phi_i^*-\\
&-\frac{1}{4}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\phi_i^*\partial_\mu\partial^\mu\phi_j + \sqrt{2}\left(\overline{\theta}\overline{\psi}_i\right)\phi_j + \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\psi_j\sigma_\mu\overline{\psi}_i + \sqrt{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\psi}_i\right)F_j+\\
&+i\sqrt{2}\left(\overline{\theta}\overline{\psi}_i\right)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\phi_j + \frac{i}{2}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j + \big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\phi_jF_i^*+\\
&+\sqrt{2}\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\left(\theta\psi_j\right)F_i^* + (\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)F_i^*F_j + i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\phi_j\partial_\mu\phi_i^*-\\
&-\frac{i\sqrt{2}}{2}(\theta\theta)\left(\psi_j\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi_i^* + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial_\nu\phi_j\right)-\\
&-\frac{i}{\sqrt{2}}\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\left(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_i\right)\phi_j + \frac{i}{2}\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)(\theta\theta)\psi_j\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_i - \frac{1}{4}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\phi_j\partial_\mu\partial^\mu\phi_i^* =\\
=&\phi_i^*\phi_j + \sqrt{2}\left(\theta\psi_j\right)\phi_i^* + (\theta\theta)\phi_i^*F_j - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\phi_i^*\partial_\mu\phi_j - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j\right)\phi_i^*-\\
&-\frac{1}{4}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\phi_i^*\partial_\mu\partial^\mu\phi_j + \sqrt{2}\left(\overline{\theta}\overline{\psi}_i\right)\phi_j + \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\psi_j\sigma_\mu\overline{\psi}_i + \sqrt{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\psi}_i\right)F_j-\\
&-i\frac{\sqrt{2}}{2}\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\left(\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu\phi_j + \frac{i}{2}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j + \big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\phi_jF_i^*+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sqrt{2}\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\left(\theta\psi_j\right)F_i^* + (\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)F_i^*F_j + i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\phi_j\partial_\mu\phi_i^* + \\
&+\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\psi_j\right)\partial_\mu\phi_i^* + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_j\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i\right)\phi_j + \\
&+\frac{i}{2}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\psi_j\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i - \frac{1}{4}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\phi_j\partial_\mu\partial^\mu\phi_i^* = \\
=&\phi_i^*\phi_j + \sqrt{2}\left(\theta\psi_j\right)\phi_i^* + (\theta\theta)\phi_i^*F_j - i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\phi_i^*\partial_\mu\phi_j - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j\right)\phi_i^* - \\
&-\frac{1}{4}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\phi_i^*\partial_\mu\partial^\mu\phi_j + \sqrt{2}\left(\bar{\theta}\bar{\psi}_i\right)\phi_j + \left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\psi_j\sigma^\mu\bar{\psi}_i + \sqrt{2}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\psi}_i\right)F_j + \\
&+\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\mu\bar{\psi}_i\right)\partial_\mu\phi_j + \frac{i}{2}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j + \left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\phi_jF_i^* + \sqrt{2}\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\left(\theta\psi_j\right)F_i^* + \\
&+(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)F_i^*F_j + i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\phi_j\partial_\mu\phi_i^* + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\psi_j\right)\partial_\mu\phi_i^* + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_j\right) - \\
&-\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i\right)\phi_j + \frac{i}{2}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\psi_j\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i - \frac{1}{4}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\phi_j\partial_\mu\partial^\mu\phi_i^* \Rightarrow \\
\Rightarrow \Phi_i^*\Phi_j =&\phi_i^*\phi_j + \sqrt{2}\left(\theta\psi_j\right)\phi_i^* + \sqrt{2}\left(\bar{\theta}\bar{\psi}_i\right)\phi_j + (\theta\theta)\phi_i^*F_j + \left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\phi_jF_i^* + \\
&+\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\left(-i\phi_i^*\partial_\mu\phi_j + i\phi_j\partial_\mu\phi_i^* + \psi_j\sigma^\mu\bar{\psi}_i\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\left[\psi_j\partial_\mu\phi_i^* - \right. \\
&\left. -\left(\partial_\mu\psi_j\right)\phi_i^*\right] + \sqrt{2}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\psi}_i\right)F_j + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\theta\sigma^\mu\left[\bar{\psi}_i\partial_\mu\phi_j - \left(\partial_\mu\bar{\psi}_i\right)\phi_j\right] + \\
&+\sqrt{2}\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\left(\theta\psi_j\right)F_i^* + (\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\left[F_i^*F_j + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_j\right) - \frac{1}{4}\phi_i^*\partial_\mu\partial^\mu\phi_j - \right. \\
&\left. -\frac{1}{4}\phi_j\partial_\mu\partial^\mu\phi_i^* + \frac{i}{2}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j + \frac{i}{2}\psi_j\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i\right],
\end{aligned}
\tag{6.3.2}
$$

όπου όλα τα εμφανιζόμενα πεδία είναι συναρτήσεις των μποζονικών συντεταγμένων x^μ. Για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, το $\Phi_i^*\Phi_i$ είναι ένα πραγματικό (διανυσματικό) υπερπεδίο, αφού $(\Phi_i^*\Phi_i)^* = \Phi_i\Phi_i^* = \Phi_i^*\Phi_i$. Θεωρούμε τώρα ένα εκ των n chiral υπερπεδίων Φ_i, το οποίο για ευκολία συμβολίζουμε με Φ, και έστω ότι:

$$
\begin{aligned}
\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) =&\phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + (\theta\theta)F(x) - i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\partial_\mu\phi(x) - \\
&-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\,\bar{\theta}\right)\partial_\mu\partial^\mu\phi(x)
\end{aligned}
\tag{6.3.3}
$$

όπου ϕ και F είναι δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία και ψ ένα αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl. Από την (6.3.2) έπεται ότι ο $D-$όρος του διανυσματικού υπερπεδίου $\Phi^*\Phi$ ισούται με:

$$
\begin{aligned}
\left[\Phi^*\Phi\right]_D =&\int d^2\theta \int d^2\bar{\theta}\Phi^*\Phi = F^*F + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\partial^\mu\phi\right) - \frac{1}{4}\phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi - \frac{1}{4}\phi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* + \\
&+\frac{i}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \frac{i}{2}\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} = F^*F + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\partial^\mu\phi\right) - \frac{1}{4}\left[\partial_\mu\left(\phi^*\partial^\mu\phi\right) - \right. \\
&\left. -\left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\partial^\mu\phi\right)\right] - \frac{1}{4}\left[\partial_\mu\left(\phi\partial^\mu\phi^*\right) - \left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial^\mu\phi^*\right)\right] + \frac{i}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - \\
&-\frac{i}{2}\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)\bar{\sigma}^\mu\psi = F^*F + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{4}\partial_\mu\left(\phi^*\partial^\mu\phi\right) + \\
&+\frac{1}{4}\left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\partial^\mu\phi\right) - \frac{1}{4}\partial_\mu\left(\phi\partial^\mu\phi^*\right) + \frac{1}{4}\left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\partial^\mu\phi\right) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - \\
&-\frac{i}{2}\left[\partial_\mu\left(\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\psi\right) - \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right] \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \left[\Phi^*\Phi\right]_D = F^*F + \left(\partial_\mu\phi^*\right)\left(\partial^\mu\phi\right) + i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\left(\frac{1}{4}\phi^*\partial^\mu\phi + \frac{1}{4}\phi\partial^\mu\phi^* + \frac{i}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\psi\right) \tag{6.3.4}
$$

Παρατηρούμε ότι το $[\Phi^*\Phi]_D$ είναι η Lagrangian (4.1.56), η οποία αντιστοιχεί στο ελεύθερο και άμαζο μοντέλο των Wess και Zumino, συν μία ολική παράγωγος, η οποία μπορεί να αγνοηθεί, αφού έχει μηδενική συνεισφορά στην αντίστοιχη δράση, $\int d^4x\,[\Phi^*\Phi]_D$.

Θα εξάγουμε τώρα τους επανακανονικοποιήσιμους όρους αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στις chiral supermultiplets (ϕ_i, ψ_i, F), στους οποίους καταλήξαμε στην ενότητα 4.2, χρησιμοποιώντας τα υπερπεδία Φ_i. Αρχικά, επισημαίνουμε ότι αφού τα γινόμενα chiral υπερπεδίων είναι πάλι chiral υπερπεδία (όπως δείξαμε στην ενότητα 5.5), τα γινόμενα $\Phi_i\Phi_j$ και $\Phi_i\Phi_j\Phi_k$ είναι chiral υπερπεδία για κάθε $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Θα υπολογίσουμε τώρα τις εκφράσεις για τα γινόμενα αυτά στις υπερσυντεταγμένες $(y^\mu, \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}})$, όπου οι μποζονικές συντεταγμένες y^μ δίνονται από την (5.5.3). Σε αυτές τις υπερσυντεταγμένες, τα υπερπεδία Φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, δίνονται από τις συναρτήσεις

$$\tilde{\Phi}_i = \tilde{\Phi}_i(y, \theta) = \phi_i(y) + \sqrt{2}\theta\psi_i(y) + (\theta\theta)F_i(y) \tag{6.3.5}$$

αντίστοιχα. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_i\tilde{\Phi}_j =& \left[\phi_i(y) + \sqrt{2}\theta\psi_i(y) + (\theta\theta)F_i(y)\right]\left[\phi_j(y) + \sqrt{2}\theta\psi_j(y) + (\theta\theta)F_j(y)\right] = \\
=&\phi_i(y)\phi_j(y) + \sqrt{2}\left(\theta\psi_j(y)\right)\phi_i(y) + (\theta\theta)\phi_i(y)F_j(y) + \\
&+ \sqrt{2}\left(\theta\psi_i(y)\right)\phi_j(y) + 2\left(\theta\psi_i(y)\right)\left(\theta\psi_j(y)\right) + (\theta\theta)\phi_j(y)F_i(y) \overset{(2.5.32)}{=} \\
=&\phi_i(y)\phi_j(y) + \sqrt{2}\left(\theta\psi_j(y)\right)\phi_i(y) + (\theta\theta)\phi_i(y)F_j(y) + \\
&+ \sqrt{2}\left(\theta\psi_i(y)\right)\phi_j(y) - (\theta\theta)\psi_i(y)\psi_j(y) + (\theta\theta)\phi_j(y)F_i(y) \Rightarrow \\
\Rightarrow \tilde{\Phi}_i\tilde{\Phi}_j =&\phi_i(y)\phi_j(y) + \sqrt{2}\theta\left(\psi_i(y)\phi_j(y) + \psi_j(y)\phi_i(y)\right) + \\
&+ (\theta\theta)\left(\phi_i(y)F_j(y) + \phi_j(y)F_i(y) - \psi_i(y)\psi_j(y)\right)
\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_i\tilde{\Phi}_j\tilde{\Phi}_k =& \Big[\phi_i(y)\phi_j(y) + \sqrt{2}\left(\theta\psi_i(y)\right)\phi_j(y) + \sqrt{2}\left(\theta\psi_j(y)\right)\phi_i(y) + (\theta\theta)\left(\phi_i(y)F_j(y) + \right. \\
&\left.\phi_j(y)F_i(y) - \psi_i(y)\psi_j(y)\right)\Big]\left[\phi_k(y) + \sqrt{2}\theta\psi_k(y) + (\theta\theta)F_k(y)\right] = \\
=&\phi_i(y)\phi_j(y)\phi_k(y) + \sqrt{2}\left(\theta\psi_k(y)\right)\phi_i(y)\phi_j(y) + (\theta\theta)\phi_i(y)\phi_j(y)F_k(y) + \\
&+ \sqrt{2}\left(\theta\psi_i(y)\right)\phi_j(y)\phi_k(y) + 2\left(\theta\psi_i(y)\right)\left(\theta\psi_k(y)\right)\phi_j(y) + \sqrt{2}\left(\theta\psi_j(y)\right)\phi_i(y)\phi_k(y) + \\
&+ 2\left(\theta\psi_j(y)\right)\left(\theta\psi_k(y)\right)\phi_i(y) + (\theta\theta)\phi_k(y)\left(\phi_i(y)F_j(y) + \phi_j(y)F_i(y) - \psi_i(y)\psi_j(y)\right) \overset{(2.5.32)}{=} \\
=&\phi_i(y)\phi_j(y)\phi_k(y) + \sqrt{2}\left(\theta\psi_k(y)\right)\phi_i(y)\phi_j(y) + (\theta\theta)\phi_i(y)\phi_j(y)F_k(y) + \\
&+ \sqrt{2}\left(\theta\psi_i(y)\right)\phi_j(y)\phi_k(y) - (\theta\theta)\left(\psi_i(y)\psi_k(y)\right)\phi_j(y) + \sqrt{2}\left(\theta\psi_j(y)\right)\phi_i(y)\phi_k(y) - \\
&- (\theta\theta)\left(\psi_j(y)\psi_k(y)\right)\phi_i(y) + (\theta\theta)\phi_k(y)\left(\phi_i(y)F_j(y) + \phi_j(y)F_i(y) - \psi_i(y)\psi_j(y)\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \tilde{\Phi}_i\tilde{\Phi}_j\tilde{\Phi}_k =&\phi_i(y)\phi_j(y)\phi_k(y) + \sqrt{2}\theta\left(\psi_i(y)\phi_j(y)\phi_k(y) + \psi_j(y)\phi_i(y)\phi_k(y) + \psi_k(y)\phi_i(y)\phi_j(y)\right) + \\
&+ (\theta\theta)\left[\phi_i(y)\phi_j(y)F_k(y) + \phi_i(y)\phi_k(y)F_j(y) + \phi_j(y)\phi_k(y)F_i(y) - \right. \\
&\left. - \left(\psi_i(y)\psi_j(y)\right)\phi_k(y) - \left(\psi_i(y)\psi_k(y)\right)\phi_j(y) - \left(\psi_j(y)\psi_k(y)\right)\phi_i(y)\right]
\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Από τις εκφράσεις για τα γινόμενα $\Phi_i\Phi_j$ και $\Phi_i\Phi_j\Phi_k$ στις υπερσυντεταγμένες $(y^\mu, \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}})$, που δίνονται από τις (6.3.6) και (6.3.7) αντίστοιχα, μπορούμε άμεσα να προσδιορίσουμε τους $F-$όρους των chiral υπερπεδίων $\Phi_i\Phi_j$ και $\Phi_i\Phi_j\Phi_k$ για κάθε $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, σύμφωνα με την παρατήρηση που κάναμε στην προηγούμενη ενότητα. Έχουμε:

$$[\Phi_i\Phi_j]_F = \phi_i(x)F_j(x) + \phi_j(x)F_i(x) - \psi_i(x)\psi_j(x) = \phi_iF_j + \phi_jF_i - \psi_i\psi_j \tag{6.3.8}$$

$$\begin{aligned}
[\Phi_i\Phi_j\Phi_k]_F =&\phi_i(x)\phi_j(x)F_k(x) + \phi_i(x)\phi_k(x)F_j(x) + \phi_j(x)\phi_k(x)F_i(x) - \left(\psi_i(x)\psi_j(x)\right)\phi_k(x) - \\
&- \left(\psi_i(x)\psi_k(x)\right)\phi_j(x) - \left(\psi_j(x)\psi_k(x)\right)\phi_i(x) =
\end{aligned}$$

$$=\phi_i\phi_j F_k + \phi_i\phi_k F_j + \phi_j\phi_k F_i - (\psi_i\psi_j)\,\phi_k - (\psi_i\psi_k)\,\phi_j - (\psi_j\psi_k)\,\phi_i \tag{6.3.9}$$

Θεωρούμε τώρα την ολόμορφη συνάρτηση των Φ_i (εάν αυτά θεωρηθούν μιγαδικές μεταβλητές):

$$W(\Phi_i) = \frac{1}{2}M_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{6}y_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \tag{6.3.10}$$

η οποία αποτελεί ένα chiral υπερπεδίο. Στο δεύτερο μέλος της (6.3.10) υπονοείται άθροιση ως προς i, j και k από 1 εώς n, τα M_{ij} είναι σταθερές με διάσταση μάζας 1, για τις οποίες ισχύει ότι $M_{ij} = M_{ji}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$, ενώ τα y_{ijk} είναι αδιάστατες σταθερές, οι οποίες είναι πλήρως συμμετρικές ως προς i, j, k. Παρατηρούμε ότι η μορφή που έχει το $W(\Phi_i)$ της (6.3.10) ως συνάρτηση των chiral υπερπεδίων Φ_i είναι ακριβώς η ίδια με τη μορφή του υπερδυναμικού W στην (4.2.18) ως συνάρτηση των βαθμωτών πεδίων ϕ_i. Με δεδομένες τις (6.3.8) και (6.3.9) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η ποσότητα $[W(\Phi_i)]_F + c.c.$, που μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, είναι ακριβώς η $\mathcal{L}_{\text{int}}$ της σχέσης (4.2.7), όπου τα W_i και W_{ij} δίνονται από τις εξισώσεις (4.2.23) και (4.2.16) αντίστοιχα. Πράγματι, είναι:

$$\begin{aligned}
[W(\Phi_i)]_F + c.c. =& \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta}\delta\left(\overline{\theta}\right) W(\Phi_i) + c.c = \\
=& \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta}\delta(\overline{\theta}) \left(\frac{1}{2}M_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{6}y_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right) + c.c. = \\
=& \frac{1}{2}M_{ij}\int d^2\theta \int d^2\overline{\theta}\delta^{(2)}(\overline{\theta})\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{6}y_{ijk}\int d^2\theta \int d^2\overline{\theta}\delta(\overline{\theta})\Phi_i\Phi_j\Phi_k + c.c. = \\
=& \frac{1}{2}M_{ij}\left[\Phi_i\Phi_j\right]_F + \frac{1}{6}y_{ijk}\left[\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right]_F + c.c. = \\
=& \frac{1}{2}M_{ij}\left(\phi_i F_j + \phi_j F_i - \psi_i\psi_j\right) + \frac{1}{6}y_{ijk}\left[\phi_i\phi_j F_k + \phi_i\phi_k F_j + \right. \\
& \left. + \phi_j\phi_k F_i - (\psi_i\psi_j)\,\phi_k - (\psi_i\psi_k)\,\phi_j - (\psi_j\psi_k)\,\phi_i\right] + c.c. = \\
=& \frac{1}{2}M_{ji}\phi_j F_i + \frac{1}{2}M_{ij}\phi_j F_i - \frac{1}{2}M_{ij}\psi_i\psi_j + \frac{1}{6}y_{jki}\phi_j\phi_k F_i + \frac{1}{6}y_{jik}\phi_j\phi_k F_i + \\
& + \frac{1}{6}y_{ijk}\phi_j\phi_k F_i - \frac{1}{6}y_{ijk}\phi_k\left(\psi_i\psi_j\right) - \frac{1}{6}y_{ikj}\phi_k\left(\psi_i\psi_j\right) - \frac{1}{6}y_{kij}\phi_k\left(\psi_i\psi_j\right) + c.c. = \\
=& \frac{1}{2}M_{ij}\phi_j F_i + \frac{1}{2}M_{ij}\phi_j F_i - \frac{1}{2}M_{ij}\psi_i\psi_j + \frac{1}{6}y_{ijk}\phi_j\phi_k F_i + \frac{1}{6}y_{ijk}\phi_j\phi_k F_i + \\
& + \frac{1}{6}y_{ijk}\phi_j\phi_k F_i - \frac{1}{6}y_{ijk}\phi_k\left(\psi_i\psi_j\right) - \frac{1}{6}y_{ijk}\phi_k\left(\psi_i\psi_j\right) - \frac{1}{6}y_{ijk}\phi_k\left(\psi_i\psi_j\right) + c.c. \Rightarrow \\
\Rightarrow [W(\Phi_i)]_F + c.c. =& \left[M_{ij}\phi_j F_i + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k F_i - \frac{1}{2}M_{ij}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_k\left(\psi_i\psi_j\right)\right] + c.c. = \\
=& \left[\underbrace{\left(M_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k\right)}_{\substack{\parallel \\ W_i}} F_i - \frac{1}{2}\underbrace{\left(M_{ij} + y_{ijk}\phi_k\right)}_{\substack{\parallel \\ W_{ij}}}\psi_i\psi_j\right] + c.c. \overset{(4.2.7)}{=} \mathcal{L}_{\text{int}}
\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

Επομένως, η Lagrangian για μία υπερσυμμετρική επανακανονικοποιήσιμη θεωρία, που αφορά σε ένα σύστημα n αλληλεπιδρωσών chiral supermiltiplets (ϕ_i, ψ_i, F_i) μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathcal{L} = \left[\Phi_i^*\Phi_i\right]_D + \left([W(\Phi_i)]_F + c.c.\right) \tag{6.3.12}$$

όπου τα Φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι chiral υπερπεδία, τα οποία δίνονται από την (6.3.1), και $W(\Phi_i)$ είναι μία συνάρτηση των Φ_i της μορφής (6.3.10), η οποία καλείται υπερδυναμικό (superpotential), όπως και η συνάρτηση που προκύπτει από αυτήν, εάν τα Φ_i αντικατασταθούν από τα βαθμωτά πεδία-συνιστώσες τους, ϕ_i (εξίσωση (4.2.18)). Στον πρώτο όρο του δεύτερου μέλους της (6.3.12), υπονοείται άθροιση ως προς i από 1 έως n. Από την (6.3.4) έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned}\left[\Phi_i^*\Phi_i\right]_D =& F_i^* F_i + \left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_i\right) + i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \partial_\mu\left(\frac{1}{4}\phi_i^*\partial^\mu\phi_i + \right.\\ &\left. + \frac{1}{4}\phi_i\partial^\mu\phi_i^* + \frac{1}{2}\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\psi_i\right)\end{aligned} \tag{6.3.13}$$

Οι τρεις πρώτοι όροι του $\left[\Phi_i^*\Phi_i\right]_D$ είναι ακριβώς το ελεύθερο κομμάτι, $\mathcal{L}_{\text{free}}$, της πλήρους Lagrangian (4.2.25) για αλληλεπιδρώσες chiral supermultiplets, στην οποία καταλήξαμε χωρίς τη χρήση του φορμαλισμού του υπερχώρου και των υπερπεδίων, ενώ η ολική παράγωγος έχει μηδενική συνεισφορά στη δράση που αντιστοιχεί στη Lagrangian (6.3.12), οπότε μπορεί να αγνοηθεί. Έτσι, με δεδομένη και την (6.3.11), η Lagrangian (6.3.12) συμπίπτει με την (4.2.25), όπως πρέπει. Ακόμη, από τις (6.3.11) και (6.3.13) είναι φανερό ότι η Lagrangian (6.3.12) δεν περιέχει κινητικούς όρους για τα μιγαδικά βαθμωτά πεδία F_i, οπότε τα πεδία αυτά είναι βοηθητικά και μπορούμε να απαλλαγούμε από αυτά αντικαθιστώντας τα με τις εκφράσεις που προκύπτουν γι' αυτά από τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης (εξισώσεις Euler-Lagrange). Αυτό το έχουμε ήδη κάνει στην ενότητα 4.2 για τη Lagrangian (4.2.25), η οποία συμπίπτει με την (6.3.12), οπότε δε χρειάζεται να επαναλάβουμε και εδώ αυτή τη διαδικασία.

6.4 Υπερσυμμετρικές Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας

Σε αυτήν την ενότητα, θα προσδιορίσουμε τη μορφή της Lagrangian για μία υπερσυμμετρική Αβελιανή ($U(1)$) θεωρία βαθμίδας.

Το διανυσματικό υπερπεδίο $V(x,\theta,\overline{\theta})$ της σχέσης (5.6.10) περιέχει το διανυσματικό πεδίο βαθμίδας A_μ. Τα αντίστοιχα Αβελιανά υπερπεδία έντασης πεδίου (field strength superfields) ορίζονται ως

$$W_\alpha \equiv -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}(D_\alpha V),\ \overline{W}_{\dot\alpha} \equiv -\frac{1}{4}DD(\overline{D}_{\dot\alpha}V) \tag{6.4.1}$$

όπου $\alpha = 1,2$ και $\overline{W}_{\dot\alpha} = (W_\alpha)^*$. Οι ποσότητες W_α και $\overline{W}_{\dot\alpha}$ είναι παραδείγματα σπινοριακών υπερπεδίων δύο συνιστωσών, οι οποίες είναι μεταβλητές Grassmann. Όπως έχουμε ήδη επισημάνει στην ενότητα 5.6, η απαίτηση το διανυσματικό πεδίο βαθμίδας A_μ να έχει τη συνήθη διάσταση μάζας 1 επιβάλλει το διανυσματικό υπερπεδίο V της (5.6.10) να είναι αδιάστατο. Επομένως, από τις σχέσεις (6.4.1) και το γεγονός ότι οι chiral συναλλοίωτες παράγωγοι $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\partial_\mu$ και $\overline{D}_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}} + i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu$ έχουν διάσταση μάζας $\frac{1}{2}$ (αφού οι φερμιονικές συντεταγμένες θ^α και $\overline{\theta}^{\dot\alpha}$ έχουν διάσταση μάζας $-\frac{1}{2}$) έπεται ότι τα W_α και $\overline{W}_{\dot\alpha}$ έχουν διάσταση μάζας $\frac{3}{2}$. Το σπινοριακό υπερπεδίο W_α είναι ένα chiral υπερπεδίο, ενώ το σπινοριακό υπερπεδίο $\overline{W}_{\dot\alpha}$ είναι ένα anti-chiral υπερπεδίο, αφού:

$$\overline{D}_{\dot\beta}W_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{D}_{\dot\beta}\left[\overline{D}\,\overline{D}(D_\alpha V)\right] = -\frac{1}{4}\overline{D}_{\dot\beta}\overline{D}_{\dot\gamma}\overline{D}^{\dot\gamma}(D_\alpha V) = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\delta}\overline{D}_{\dot\beta}\overline{D}_{\dot\gamma}\overline{D}_{\dot\delta}(D_\alpha V) \overset{(5.4.12)}{=} 0$$

και

$$D_\beta\overline{W}_{\dot\alpha} = -\frac{1}{4}D_\beta\left[DD\left(\overline{D}_{\dot\alpha}V\right)\right] = -\frac{1}{4}D_\beta D^\gamma D_\gamma\left(\overline{D}_{\dot\alpha}V\right) = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\gamma\delta}D_\beta D_\delta D_\gamma\left(\overline{D}_{\dot\alpha}V\right) \overset{(5.4.12)}{=} 0$$

για κάθε $\alpha,\beta = 1,2,\ \dot\alpha,\dot\beta = \dot1,\dot2$. Επίσης, τα W_α και $\overline{W}_{\dot\alpha}$ είναι αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας της μορφής (5.6.22), οι οποίοι αποτελούν την υπερσυμμετρική γενίκευση των Αβελιανών μετασχηματισμών βαθμίδας. Πράγματι, κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό που χαρακτηρίζεται από ένα αδιάστατο chiral υπερπεδίο Λ, τα W_α και $\overline{W}_{\dot\alpha}$ μετασχηματίζονται ως

$$W_\alpha \to -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}D_\alpha\left[V + i\left(\Lambda - \Lambda^*\right)\right] =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}\,(D_\alpha V) - \frac{i}{4}\overline{D}\,\overline{D}\,(D_\alpha \Lambda) + \frac{i}{4}\overline{D}\,\overline{D}\,\underbrace{(D_\alpha \Lambda^*)}_{\substack{\parallel \\ 0}} = \\
&= W_\alpha - \frac{i}{4}\overline{D}_{\dot\beta}\overline{D}^{\dot\beta} D_\alpha \Lambda = W_\alpha - \frac{i}{4}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\overline{D}_{\dot\beta}\overline{D}_{\dot\gamma} D_\alpha \Lambda = \\
&= W_\alpha - \frac{i}{4}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\overline{D}_{\dot\beta}\left(\left\{D_\alpha, \overline{D}_{\dot\gamma}\right\} - D_\alpha \overline{D}_{\dot\gamma}\right)\Lambda \overset{(5.4.10)}{=} \\
&= W_\alpha - \frac{i}{4}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\overline{D}_{\dot\beta}\left[2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\partial_\mu - D_\alpha \overline{D}_{\dot\gamma}\right]\Lambda = \\
&= W_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\partial_\mu \underbrace{\left(\overline{D}_{\dot\beta}\Lambda\right)}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \frac{i}{4}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\overline{D}_{\dot\beta} D_\alpha \underbrace{\left(\overline{D}_{\dot\gamma}\Lambda\right)}_{\substack{\parallel \\ 0}} = W_\alpha
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\overline{W}_{\dot\alpha} \to & -\frac{1}{4}DD\overline{D}_{\dot\alpha}\left[V + i\left(\Lambda - \Lambda^*\right)\right] = \\
&= -\frac{1}{4}DD\left(\overline{D}_{\dot\alpha}V\right) - \frac{i}{4}DD\underbrace{\left(\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda\right)}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \frac{i}{4}DD\left(\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda^*\right) = \\
&= \overline{W}_{\dot\alpha} + \frac{i}{4}D^\beta D_\beta \overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda^* = \overline{W}_{\dot\alpha} + \frac{i}{4}\varepsilon^{\beta\gamma}D_\gamma D_\beta \overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda^* = \\
&= \overline{W}_{\dot\alpha} + \frac{i}{4}\varepsilon^{\beta\gamma}D_\gamma\left(\left\{D_\beta, \overline{D}_{\dot\alpha}\right\} - \overline{D}_{\dot\alpha}D_\beta\right)\Lambda^* \overset{(5.4.10)}{=} \\
&= \overline{W}_{\dot\alpha} + \frac{i}{4}\varepsilon^{\beta\gamma}D_\gamma\left[2i(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu - \overline{D}_{\dot\alpha}D_\beta\right]\Lambda^* = \\
&= \overline{W}_{\dot\alpha} - \frac{1}{2}\varepsilon^{\beta\gamma}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu \underbrace{(D_\gamma\Lambda^*)}_{\substack{\parallel \\ 0}} - \frac{i}{4}\varepsilon^{\beta\gamma}D_\gamma\overline{D}_{\dot\alpha}\underbrace{(D_\beta\Lambda^*)}_{\substack{\parallel \\ 0}} = \overline{W}_{\dot\alpha}
\end{aligned}
$$

αντίστοιχα, όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι $\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda = 0,\ \forall\ \dot\alpha = \dot 1, \dot 2$, αφού το Λ είναι ένα chiral υπερπεδίο, και $D_\alpha\Lambda^* = \left(\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda\right)^* = 0,\ \forall\ \alpha = 1, 2$. Επειδή το W_α είναι αναλλοίωτο κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας, δηλαδή μετασχηματισμούς της μορφής (5.6.22), μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να το υπολογίσουμε στη βαθμίδα των Wess και Zumino, όπου το διανυσματικό υπερπεδίο V που εμφανίζεται στην (6.4.1) έχει τη μορφή:

$$
V_{WZ}(x,\theta,\overline{\theta}) = \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)A_\mu(x) + (\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\lambda}(x) + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)D(x) \tag{6.4.2}
$$

Θα προσδιορίσουμε την έκφραση για το $W_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}\,(D_\alpha V_{WZ})$ στις υπερσυντεταγμένες $\left(y^\mu, \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha}\right)$ (όπου $y^\mu = x^\mu + i\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta$), διότι σε αυτές τις υπερσυντεταγμένες οι chiral συναλλοίωτες παράγωγοι $\overline{D}_{\dot\alpha}$ και $\overline{D}^{\dot\alpha}$ αναπαριστώνται από απλούστερους διαφορικούς τελεστές, τους $\tilde{\overline{D}}_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}$ και $\tilde{\overline{D}}^{\dot\alpha} = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}$ αντίστοιχα, ενώ οι D_α αναπαριστώνται από τους $\tilde{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - 2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}\frac{\partial}{\partial y^\mu}$, όπως δείξαμε στην ενότητα 5.5. Φυσικά, πρέπει πρώτα να βρούμε την έκφραση για το V_{WZ} της (6.4.2) στις υπερσυντεταγμένες $\left(y^\mu, \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha}\right)$. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
V_{WZ}(x,\theta,\overline{\theta}) =& V_{WZ}(y - i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta, \theta, \overline{\theta}) = \\
&= \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)A_\mu(y - i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta) + (\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\lambda}(y - i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta) + \\
&\quad + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\lambda(y - i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta) + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)D(y - i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta) = \\
&= \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left[A_\mu(y) - i\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\nu\theta\right)\frac{\partial A_\mu(y)}{\partial y^\nu}\right] + (\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\lambda}(y) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta\lambda(y) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})D(y) = \\
&= \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right) A_{\mu}(y) + i\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\left(\theta\sigma^{\nu}\overline{\theta}\right) \left.\frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}}\right|_{x=y} + (\theta\theta)\overline{\theta\lambda}(y) + \\
&+ (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta\lambda(y) + \frac{1}{2} + (\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})D(y) \overset{(2.5.35)}{=} \\
&= \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right) A_{\mu}(y) + \frac{i}{2}\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\partial_{\nu}A_{\mu}(y) + (\theta\theta)\overline{\theta\lambda}(y) + \\
&+ (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta\lambda(y) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})D(y) \\
&= \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right) A_{\mu}(y) + \frac{i}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\partial^{\mu}A_{\mu}(y) + (\theta\theta)\overline{\theta\lambda}(y) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta\lambda(y) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})D(y) = \\
&= \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right) A_{\mu}(y) + (\theta\theta)\overline{\theta\lambda}(y) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta\lambda(y) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(D(y) + i\partial_{\mu}A^{\mu}(y)\right) \equiv \\
&\equiv \tilde{V}_{WZ}(y,\theta,\overline{\theta})
\end{aligned}
\tag{6.4.3}
$$

Έτσι, αν ορίσουμε:

$$
W_{\alpha}(x,\theta,\overline{\theta}) = W_{\alpha}(y - i\overline{\theta}\overline{\sigma}\theta,\theta,\overline{\theta}) \equiv \tilde{W}_{\alpha}(y,\theta,\overline{\theta})
\tag{6.4.4}
$$

είναι:

$$
\tilde{W}_{\alpha} = -\frac{1}{4}\overline{\tilde{D}\tilde{D}}\left(\tilde{D}_{\alpha}\tilde{V}_{WZ}\right) = -\frac{1}{4}\overline{\tilde{D}}_{\dot{\beta}}\overline{\tilde{D}}^{\dot{\beta}}\tilde{D}_{\alpha}\tilde{V}_{WZ}
\tag{6.4.5}
$$

Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}_{\alpha}\tilde{V}_{WZ} = &\left(\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - 2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\right)\Big\{\left(\theta\sigma^{\nu}\overline{\theta}\right) A_{\nu}(y) + (\theta\theta)\overline{\theta\lambda}(y) + \\
&+ (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta\lambda(y) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left[D(y) + i\partial_{\nu}A^{\nu}(y)\right]\Big\} = \\
= &\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right) A_{\mu}(y) + \frac{\partial(\theta\theta)}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\overline{\theta\lambda}(y)\right) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}\left(\theta\lambda(y)\right) + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial(\theta\theta)}{\partial\theta^{\alpha}}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(D(y) + i\partial_{\mu}A^{\mu}(y)\right) - 2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\left(\theta\sigma^{\nu}\overline{\theta}\right)\frac{\partial A_{\nu}(y)}{\partial y^{\mu}} - \\
&- 2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}(\theta\theta)\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y)}{\partial y^{\mu}} \underset{(5.2.19)}{\overset{(5.2.13)}{=}} \\
= &\left(\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)_{\alpha} A_{\mu}(y) + 2\theta_{\alpha}\left(\overline{\theta\lambda}(y)\right) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\lambda_{\alpha}(y) + \frac{1}{2}\left(2\theta_{\alpha}\right)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(D(y) + \right. \\
&\left. + i\partial_{\mu}A^{\mu}(y)\right) - 2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\left(\theta\sigma^{\nu}\overline{\theta}\right)\left.\frac{\partial A_{\nu}(x)}{\partial x^{\mu}}\right|_{x=y} - 2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}(\theta\theta)\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\left.\frac{\partial\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x)}{\partial x^{\mu}}\right|_{x=y} = \\
= &\left(\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)_{\alpha} A_{\mu}(y) + 2\left(\overline{\theta\lambda}(y)\right)\theta_{\alpha} + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\lambda_{\alpha}(y) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta_{\alpha}\left(D(y) + i\partial_{\mu}A^{\mu}(y)\right) + \\
&+ 2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^{\nu}\theta\right)\partial_{\mu}A_{\nu}(y) - 2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\partial_{\mu}\overline{\lambda}(y)\right) = \\
= &(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}A_{\mu}(y) + 2\overline{\theta}_{\dot{\gamma}}\overline{\lambda}^{\dot{\gamma}}(y)\theta_{\alpha} + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\lambda_{\alpha}(y) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta_{\alpha}\left(D(y) + \right. \\
&\left. + \partial_{\mu}A^{\mu}(y)\right) + 2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\overline{\theta}_{\dot{\delta}}(\overline{\sigma}^{\nu})^{\dot{\delta}\zeta}\theta_{\zeta}\partial_{\mu}A_{\nu}(y) - 2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\overline{\theta}_{\dot{\gamma}}\partial_{\mu}\overline{\lambda}^{\dot{\gamma}}(y)(\theta\theta)
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
\overline{\tilde{D}}^{\dot{\beta}}\tilde{D}_{\alpha}\tilde{V}_{WZ} = &\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\beta}}}\Big[(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}A_{\mu}(y) + 2\overline{\theta}_{\dot{\gamma}}\overline{\lambda}^{\dot{\gamma}}(y)\theta_{\alpha} + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\lambda_{\alpha}(y) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta_{\alpha}(D(y) + \\
&+ i\partial_{\mu}A^{\mu}(y)) + 2i(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\overline{\theta}_{\dot{\delta}}(\overline{\sigma}^{\nu})^{\dot{\delta}\zeta}\theta_{\zeta}\partial_{\mu}A_{\nu}(y) -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma}\overline{\theta}_{\dot\delta}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\delta}(y)(\theta\theta)\Big] =\\
=&(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot\gamma}}{\partial\overline{\theta}_{\dot\beta}}A_\mu(y)+2\frac{\partial\overline{\theta}_{\dot\gamma}}{\partial\overline{\theta}_{\dot\beta}}\overline{\lambda}^{\dot\gamma}(y)\theta_\alpha+\frac{\partial(\overline{\theta}\,\overline{\theta})}{\partial\overline{\theta}_{\dot\beta}}\lambda_\alpha(y)+\\
&+\frac{\partial(\overline{\theta}\,\overline{\theta})}{\partial\overline{\theta}_{\dot\beta}}\theta_\alpha\left(D(y)+i\partial_\mu A^\mu(y)\right)+2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\left(\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot\gamma}}{\partial\overline{\theta}_{\dot\beta}}\overline{\theta}_{\dot\delta}-\overline{\theta}^{\dot\gamma}\frac{\partial\overline{\theta}_{\dot\delta}}{\partial\overline{\theta}_{\dot\beta}}\right)\times\\
&\times(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\delta\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\left(\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot\gamma}}{\partial\overline{\theta}_{\dot\beta}}\overline{\theta}_{\dot\delta}-\overline{\theta}^{\dot\gamma}\frac{\partial\overline{\theta}_{\dot\delta}}{\partial\overline{\theta}_{\dot\beta}}\right)\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\delta}(y)(\theta\theta)\underset{(5.2.15)}{\overset{(5.2.6),(5.2.9)}{=}}\\
=&(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}A_\mu(y)+2\delta_{\dot\gamma}^{\dot\beta}\overline{\lambda}^{\dot\gamma}(y)\theta_\alpha+2\overline{\theta}^{\dot\beta}\lambda_\alpha(y)+\\
&+2\overline{\theta}^{\dot\beta}\theta_\alpha\left(D(y)+i\partial_\mu A^\mu(y)\right)+2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\left(\varepsilon^{\gamma\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\delta}-\overline{\theta}^{\dot\gamma}\delta_{\dot\delta}^{\dot\beta}\right)\times\\
&\times(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\delta\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\left(\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\delta}-\overline{\theta}^{\dot\gamma}\delta_{\dot\delta}^{\dot\beta}\right)\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\delta}(y)(\theta\theta)=\\
=&(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}A_\mu(y)+2\overline{\lambda}^{\dot\beta}(y)\theta_\alpha+2\overline{\theta}^{\dot\beta}\lambda_\alpha(y)+2\overline{\theta}^{\dot\beta}\theta_\alpha\left(D(y)+i\partial_\mu A^\mu(y)\right)+\\
&+2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\delta}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\delta\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-\\
&-2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\delta}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\delta}(y)(\theta\theta)+2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\beta}(y)(\theta\theta)
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}_\alpha=&-\frac{1}{4}\overline{D}_{\dot\beta}\overline{D}^{\dot\beta}\tilde{D}_\alpha\tilde{V}_{WZ}=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\beta}}\Big[(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}A_\mu(y)+2\overline{\lambda}^{\dot\beta}(y)\theta_\alpha+\\
&+2\overline{\theta}^{\dot\beta}\lambda_\alpha(y)+2\overline{\theta}^{\dot\beta}\theta_\alpha\left(D(y)+i\partial_\mu A^\mu(y)\right)+2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\delta}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\delta\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-\\
&-2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\delta}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\delta}(y)(\theta\theta)+\\
&+2i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\beta}(y)(\theta\theta)\Big]=\\
=&\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot\beta}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\beta}}\lambda_\alpha(y)+\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot\beta}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\beta}}\theta_\alpha\left(D(y)+i\partial_\mu A^\mu(y)\right)+\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\frac{\partial\overline{\theta}_{\dot\delta}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\beta}}\times\\
&\times(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\delta\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot\gamma}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\beta}}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-\\
&-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\frac{\partial\overline{\theta}_{\dot\delta}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\beta}}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\delta}(y)(\theta\theta)+\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\frac{\partial\overline{\theta}^{\dot\gamma}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\beta}}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\beta}(y)(\theta\theta)\underset{(5.2.10)}{\overset{(5.2.6)}{=}}\\
=&\frac{1}{2}\cdot2\cdot\lambda_\alpha(y)+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\theta_\alpha\left(D(y)+i\partial_\mu A^\mu(y)\right)+\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\varepsilon_{\dot\delta\dot\beta}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\delta\zeta}\times\\
&\times\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\delta_{\dot\beta}^{\dot\gamma}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\varepsilon_{\dot\delta\dot\beta}\times\\
&\times\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\delta}(y)(\theta\theta)+\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\delta_{\dot\beta}^{\dot\gamma}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\beta}(y)(\theta\theta)=\\
=&\lambda_\alpha(y)+\theta_\alpha\left(D(y)+i\partial_\mu A^\mu(y)\right)-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon_{\dot\delta\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\delta\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-\\
&-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)+\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\underbrace{\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}}_{\delta_{\dot\delta}^{\dot\gamma}}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\delta}(y)(\theta\theta)+\\
&+\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot\beta}(y)(\theta\theta)=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\lambda_\alpha(y)+\theta_\alpha D(y)+i\delta_\alpha^\beta\theta_\beta\eta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu(y)-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\gamma}}\delta_{\dot{\delta}}^{\dot{\gamma}}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot{\delta}\zeta}\theta_\zeta\times\\
&\quad\times\partial_\mu A_\nu(y)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(y)+i\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y)\right)_\alpha(\theta\theta)\overset{(2.5.23)}{=}\\
&=\lambda_\alpha(y)+\theta_\alpha D(y)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu+\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\right)_\alpha^{\ \beta}\theta_\beta\partial_\mu A_\nu(y)-\\
&\quad-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\gamma}}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot{\gamma}\zeta}\theta_\zeta\partial_\mu A_\nu(y)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(y)+\\
&\quad+i(\theta\theta)\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y)\right)_\alpha=\\
&=\lambda_\alpha(y)+\theta_\alpha D(y)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(y)+\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)_\alpha\partial_\nu A_\mu(y)-\\
&\quad-i\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)_\alpha\partial_\mu A_\nu(y)+i(\theta\theta)\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y)\right)_\alpha=\\
&=\lambda_\alpha(y)+\theta_\alpha D(y)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)_\alpha\left(\partial_\mu A_\nu(y)-\partial_\nu A_\mu(y)\right)+i(\theta\theta)\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y)\right)_\alpha\Rightarrow\\
\Rightarrow\tilde{W}_\alpha(y,\theta,\overline{\theta})&=\lambda_\alpha(y)+\theta_\alpha D(y)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)_\alpha F_{\mu\nu}(y)+i(\theta\theta)\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y)\right)_\alpha
\end{aligned}
\tag{6.4.6}
$$

όπου

$$
F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{6.4.7}
$$

είναι ο αντισυμμετρικός τανυστής έντασης πεδίου (field strength) για το Αβελιανό πεδίο βαθμίδας A_μ, ο οποίος είναι αναλλοίωτος κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας. Πράγματι, κάτω από έναν τέτοιο μεασχηματισμό έχουμε:

$$
A_\mu\rightarrow A_\mu+\partial_\mu(\phi+\phi^*)
$$

για κάποιο αδιάστατο μιγαδικό βαθμωτό πεδίο ϕ (βλ. σχέση (5.6.28)), άρα

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu}\rightarrow&\partial_\mu\left[A_\nu+\partial_\nu\left(\phi+\phi^*\right)\right]-\partial_\nu\left[A_\mu+\partial_\mu\left(\phi+\phi^*\right)\right]=\\
=&\partial_\mu A_\nu+\partial_\mu\partial_\nu\left(\phi+\phi^*\right)-\partial_\nu A_\mu-\partial_\nu\partial_\mu\left(\phi+\phi^*\right)=\\
=&\partial_\mu A_\nu+\partial_\mu\partial_\nu\cancel{\left(\phi+\phi^*\right)}-\partial_\nu A_\mu-\cancel{\partial_\mu\partial_\nu\left(\phi+\phi^*\right)}=F_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

Επίσης, και τα άλλα δύο πεδία που περιέχονται στο $\tilde{W}_\alpha(=W_\alpha)$, δηλαδή το αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl λ_α (gaugino) και το πραγματικό βαθμωτό πεδίο D (το οποίο, όπως θα δούμε στη συνέχεια, αποτελεί ένα βοηθητικό πεδίο), είναι αναλλοίωτα κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας, όπως φαίνεται από τις (5.6.29) και (5.6.30) αντίστοιχα.

Από την (6.4.6) έπεται ότι

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}^\alpha=&\varepsilon^{\alpha\beta}\tilde{W}_\beta=\varepsilon^{\alpha\beta}\left[\lambda_\beta(y)+\theta_\beta D(y)-\frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)_\beta F_{\mu\nu}(y)+i(\theta\theta)\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y)\right)_\beta\right]=\\
=&\lambda^\alpha(y)+\theta^\alpha D(y)-\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\gamma}}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot{\gamma}\delta}\theta_\delta F_{\mu\nu}(y)+i(\theta\theta)\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\gamma}}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot{\gamma}}(y)=\\
=&\lambda^\alpha(y)+\theta^\alpha D(y)-\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\zeta}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\zeta}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\zeta}\zeta}\varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\eta}}\varepsilon^{\delta\eta}(\sigma^\nu)_{\eta\dot{\eta}}\theta_\delta F_{\mu\nu}(y)+\\
&+i(\theta\theta)\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\delta}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\delta}\delta}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot{\gamma}}(y)=\\
=&\lambda^\alpha(y)+\theta^\alpha D(y)-\frac{i}{2}\delta_\zeta^\alpha\left(-\varepsilon_{\dot{\zeta}\dot{\gamma}}\right)\varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\eta}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\zeta}\zeta}(\sigma^\nu)_{\eta\dot{\eta}}\left(-\varepsilon^{\eta\delta}\right)\theta_\delta F_{\mu\nu}(y)+\\
&+i(\theta\theta)\delta_\delta^\alpha(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\delta}\delta}\left(-\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}\right)\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot{\gamma}}(y)=\\
=&\lambda^\alpha(y)+\theta^\alpha D(y)-\frac{i}{2}\delta_\zeta^\alpha\delta_{\dot{\zeta}}^{\dot{\eta}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\zeta}\zeta}(\sigma^\nu)_{\eta\dot{\eta}}\theta^\eta F_{\mu\nu}(y)-i(\theta\theta)(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\delta}\alpha}\partial_\mu\overline{\lambda}_{\dot{\delta}}(y)=\\
=&\lambda^\alpha(y)+\theta^\alpha D(y)-\frac{i}{2}\theta^\eta(\sigma^\nu)_{\eta\dot{\zeta}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\zeta}\alpha}F_{\mu\nu}(y)-i(\theta\theta)\partial_\mu\overline{\lambda}_{\dot{\delta}}(y)(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\delta}\alpha}\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \tilde{W}^\alpha = \lambda^\alpha(y) + \theta^\alpha D(y) - \frac{i}{2}\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\right)^\alpha F_{\mu\nu}(y) - i(\theta\theta)\left(\partial_\mu\overline{\lambda}(y)\overline{\sigma}^\mu\right)^\alpha \tag{6.4.8}$$

Συνδυάζοντας τις (6.4.6) και (6.4.8) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\tilde{W}^\alpha\tilde{W}_\alpha = &\left[\lambda^\alpha(y) + \theta^\alpha D(y) - \frac{i}{2}\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\right)^\alpha F_{\mu\nu}(y) - i(\theta\theta)\left(\partial_\mu\overline{\lambda}(y)\overline{\sigma}^\mu\right)^\alpha\right] \times \\
&\times \left[\lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha D(y) - \frac{i}{2}\left(\sigma^\rho\overline{\sigma}^\lambda\theta\right)_\alpha F_{\rho\lambda}(y) + i(\theta\theta)\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y)\right)_\alpha\right] = \\
=&\lambda(y)\lambda(y) + \left(\lambda(y)\theta\right)D(y) - \frac{i}{2}\left(\lambda(y)\sigma^\rho\overline{\sigma}^\lambda\theta\right)F_{\rho\lambda}(y) + i(\theta\theta)\lambda(y)\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y) + \\
&+ \left(\theta\lambda(y)\right)D(y) + (\theta\theta)D^2(y) - \frac{i}{2}\left(\theta\sigma^\rho\overline{\sigma}^\lambda\theta\right)F_{\rho\lambda}(y)D(y) - \frac{i}{2}\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\lambda(y)\right)F_{\mu\nu}(y) - \\
&- \frac{i}{2}\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\theta\right)F_{\mu\nu}(y)D(y) + \frac{i^2}{4}\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\rho\overline{\sigma}^\lambda\theta\right)F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) - \\
&- i(\theta\theta)\left[\left(\partial_\mu\overline{\lambda}(y)\right)\overline{\sigma}^\mu\lambda(y)\right] \overset{(2.5.6),(2.5.12),(2.5.36)}{\underset{(2.5.26),(2.5.9)}{=}} \\
=&\lambda(y)\lambda(y) + \left(\theta\lambda(y)\right)D(y) - \frac{i}{2}\left(\theta\sigma^\lambda\overline{\sigma}^\rho\lambda(y)\right)F_{\rho\lambda}(y) + i(\theta\theta)\lambda(y)\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y) + \\
&+ \left(\theta\lambda(y)\right)D(y) + (\theta\theta)D^2(y) - \frac{i}{2}\eta^{\rho\lambda}(\theta\theta)F_{\rho\lambda}(y)D(y) - \frac{i}{2}\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\lambda(y)\right)F_{\mu\nu}(y) - \\
&- \frac{i}{2}\eta^{\nu\mu}(\theta\theta)F_{\mu\nu}(y)D(y) - \frac{1}{4}\theta\sigma^\nu\left(\eta^{\mu\rho}\overline{\sigma}^\lambda - \eta^{\mu\lambda}\overline{\sigma}^\rho + \eta^{\rho\lambda}\overline{\sigma}^\mu - i\varepsilon^{\mu\rho\lambda\tau}\overline{\sigma}_\tau\right)\theta F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) + \\
&+ i(\theta\theta)\lambda(y)\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y) = \\
=&\lambda(y)\lambda(y) + 2\left(\theta\lambda(y)\right)D(y) - i\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\lambda(y)\right)F_{\mu\nu}(y) + 2i(\theta\theta)\lambda(y)\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y) + \\
&+ (\theta\theta)D^2(y) - \underbrace{\frac{i}{2}\eta^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}(y)}_{\substack{\parallel \\ 0}}D(y)(\theta\theta) - \frac{i}{2}\underbrace{\eta^{\nu\mu}F_{\mu\nu}(y)}_{\substack{\parallel \\ 0}}D(y)(\theta\theta) - \\
&- \frac{1}{4}\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\lambda\theta\right)\eta^{\mu\rho}F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) + \frac{1}{4}\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho\theta\right)\eta^{\mu\lambda}F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) - \\
&- \frac{1}{4}\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\eta^{\rho\lambda}F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) + \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\rho\lambda\tau}\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}_\tau\theta\right)F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) = \\
=&\lambda(y)\lambda(y) + 2\left(\theta\lambda(y)\right)D(y) - i\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\lambda(y)\right)F_{\mu\nu}(y) + 2i(\theta\theta)\lambda(y)\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y) + \\
&+ (\theta\theta)D^2(y) - \frac{1}{4}(\theta\theta)\eta^{\nu\lambda}\eta^{\mu\rho}F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) + \frac{1}{4}(\theta\theta)\eta^{\nu\rho}\eta^{\mu\lambda}F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) - \\
&- \frac{1}{4}(\theta\theta)\eta^{\nu\mu}\eta^{\rho\lambda}F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) + \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\rho\lambda\tau}\eta^\nu{}_\tau(\theta\theta)F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) = \\
=&\lambda(y)\lambda(y) + 2\left(\theta\lambda(y)\right)D(y) - i\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\lambda(y)\right)F_{\mu\nu}(y) + 2i(\theta\theta)\lambda(y)\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y) + \\
&+ (\theta\theta)D^2(y) - \frac{1}{4}(\theta\theta)F_{\mu\nu}(y)\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}F_{\rho\lambda}(y) + \frac{1}{4}(\theta\theta)F_{\mu\nu}(y)\eta^{\nu\rho}\eta^{\mu\lambda}F_{\rho\lambda}(y) - \\
&- \frac{1}{4}(\theta\theta)\underbrace{\eta^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(y)}_{\substack{\parallel \\ 0}}\underbrace{\eta^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}(y)}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \frac{i}{4}(\theta\theta)\varepsilon^{\mu\rho\lambda\tau}\delta^\nu_\tau F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) = \\
=&\lambda(y)\lambda(y) + 2\left(\theta\lambda(y)\right)D(y) - i\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\lambda(y)\right)F_{\mu\nu}(y) + 2i(\theta\theta)\lambda(y)\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y) + \\
&+ (\theta\theta)D^2(y) - \frac{1}{4}(\theta\theta)F_{\mu\nu}(y)F^{\mu\nu}(y) + \frac{1}{4}(\theta\theta)F_{\mu\nu}(y)F^{\nu\mu}(y) + \frac{i}{4}(\theta\theta)\varepsilon^{\mu\rho\lambda\nu}F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tilde{W}^\alpha\tilde{W}_\alpha = &\lambda(y)\lambda(y) + 2\left(\theta\lambda(y)\right)D(y) - i\left(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\lambda(y)\right)F_{\mu\nu}(y) + (\theta\theta)(D^2(y) + \\
&+ 2i\lambda(y)\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(y) - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(y)F^{\mu\nu}(y) + \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}(y)F_{\rho\lambda}(y))
\end{aligned} \tag{6.4.9}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\eta^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \eta^{\nu\mu}F_{\nu\mu} = \eta^{\mu\nu}(-F_{\mu\nu}) = -\eta^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \Rightarrow \eta^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0$$

Ισχύει ότι το Lorentz αναλλοίωτο υπερπεδίο $W^\alpha W_\alpha$ είναι ένα chiral υπερπεδίο, αφού η αντίστοιχη συνάρτηση των $(y,\theta,\overline{\theta})$, $\tilde{W}^\alpha\tilde{W}_\alpha$ εξαρτάται μόνο από τα y και θ, επομένως

$$\tilde{\overline{D}}_{\dot\beta}\left(\tilde{W}^\alpha\tilde{W}_\alpha\right) = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\beta}}\left(\tilde{W}^\alpha\tilde{W}_\alpha\right) = 0 = \overline{D}_{\dot\beta}(W^\alpha W_\alpha)$$

για κάθε $\dot\beta = \dot 1, \dot 2$. Από την (6.4.9) έπεται ότι ο $F-$όρος του chiral υπερπεδίου $W^\alpha W_\alpha$ ισούται με

$$[W^\alpha W_\alpha]_F = D^2(x) + 2i\lambda(x)\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}(x) - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\lambda}(x) \tag{6.4.10}$$

και, ως γνωστόν, μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, ενώ είναι αναλλοίωτος κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας,αφού τα εμπλεκόμενα σε αυτόν πεδία, $F_{\mu\nu}$, λ και D, είναι αναλλοίωτα κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς. Κατά συνέπεια, η δράση

$$S_{\text{gauge}} = \frac{1}{4}\int d^2x\,([W^\alpha W_\alpha]_F + c.c.) \tag{6.4.11}$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς και Αβελιανούς μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας. Αντικαθιστώντας την (6.4.10) στην (6.4.11), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
S_{\text{gauge}} =& \frac{1}{4}\int d^4x\left[D^2 + 2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \cancel{\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}} + \right.\\
&\left. + D^2 - 2i\left(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\right)^* - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \cancel{\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}}\right] =\\
=& \frac{1}{4}\int d^4x\left[2D^2 + 2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda} - 2i\left(\partial_\mu\lambda\right)\sigma^\mu\overline{\lambda} - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] =\\
=& \int d^4x\left\{\frac{1}{2}D^2 + \frac{i}{2}\left[\partial_\mu\left(\lambda\sigma^\mu\overline{\lambda}\right) - \left(\partial_\mu\lambda\right)\sigma^\mu\overline{\lambda}\right] - \frac{i}{2}\left(\partial_\mu\lambda\right)\sigma^\mu\overline{\lambda} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\} =\\
=& \frac{i}{2}\underbrace{\int d^4x\,\partial_\mu\left(\lambda\sigma^\mu\overline{\lambda}\right)}_{\substack{\|\\ 0}} + \int d^4x\left[\frac{1}{2}D^2 - i\left(\partial_\mu\lambda\right)\sigma^\mu\overline{\lambda} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] \Rightarrow\\
\Rightarrow S_{\text{gauge}} =& \int d^4x\left(\frac{1}{2}D^2 + i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{6.4.12}$$

Στη Lagrangian που αντιστοιχεί στη δράση (6.4.12)

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \frac{1}{2}D^2 + i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{6.4.13}$$

η οποία μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς (αφού διαφέρει κατά μία ολική παράγωγο από το $\frac{1}{4}([W^\alpha W_\alpha]_F + c.c.)$ και προφανώς είναι αναλλοίωτη κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας, ο τρίτος όρος, $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, είναι ο γνώριμος κινητικός όρος για το Αβελιανό διανυσματικό πεδίο βαθμίδας A_μ, ο δεύτερος όρος ($i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda$) είναι κινητικό όρος για το αριστερόστροφο φερμιόνιο Weyl λ (gaugino) ενώ δεν υπάρχει κινητικός όρος για το πραγματικό βαθμωτό πεδίο D, οπότε το πεδίο αυτό είναι ένα βοηθητικό πεδίο. Ο δείκτης gauge στην $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ (αντίστοιχα S_{gauge}) χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι αυτή η Lagrangian (αντίστοιχα δράση) αφορά στην supermultiplet βαθμίδας (gauge supermultiplet) (A_μ, λ, D).

Ας δοκιμάσουμε τώρα να προσθέσουμε στην $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ την (6.4.3) τον όρο $m^2\left[V^2\right]_D$, όπου m είναι μία θετική πραγματική σταθερά με διάσταση μάζας 1, ο οποίος μεταβάλλεται κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς κατά μία ολική παράγωγο, αφού είναι ανάλογος του $D-$όρου του διανυσματικού υπερπεδίου V^2, όπου το V είναι της μορφής (5.6.10). Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}V^2=&\Big[C+i\theta\chi-i\overline{\theta}\overline{\chi}+\frac{i}{2}(\theta\theta)\,(M+iN)-\frac{i}{2}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\,(M-iN)+\\&+\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)A_\mu+(\theta\theta)\overline{\theta}\left(\overline{\lambda}+\frac{1}{2}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right)+(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta\left(\lambda-\frac{1}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}\right)+\\&+\frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(D-\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C\right)\Big]\Big[C+i\theta\chi-i\overline{\theta}\overline{\chi}+\frac{i}{2}(\theta\theta)\,(M+iN)-\\&-\frac{i}{2}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\,(M-iN)+\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)A_\nu+(\theta\theta)\overline{\theta}\left(\overline{\lambda}+\frac{1}{2}\overline{\sigma}^\nu\partial_\nu\chi\right)+\\&+(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta\left(\lambda-\frac{1}{2}\sigma^\nu\partial_\nu\overline{\chi}\right)+\frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(D-\frac{1}{2}\partial_\nu\partial^\nu C\right)\Big]\end{aligned}$$

όπου όλα τα εμφανιζόμενα πεδία είναι συναρτήσεις των μποζονικών συντεταγμένων x^μ. Για να προσδιορίσουμε το $\left[V^2\right]_D$, δηλαδή το συντελεστή του $(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})$ στην έκφραση για το V^2, αρκεί να απομονώσουμε τους όρους του V^2 που περιέχουν δύο θ και δύο $\overline{\theta}$, το άθροισμα των οποίων θα μπορέσουμε στη συνέχεια να γράψουμε ως γινόμενο του $(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})$ επί μία συνάρτηση των x^μ με την εφαρμογή κατάλληλων ταυτοτήτων του Fierz. Σύμφωνα με την τελευταία σχέση, έπεται ότι το κομμάτι του V^2 που περιέχει δύο θ και δύο $\overline{\theta}$ είναι:

$$\begin{aligned}V^2\big|_{2-\theta,2-\overline{\theta}}=&\frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})C\left(D-\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C\right)+i\left(\theta\chi\right)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(\lambda-\frac{1}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}\right)-\\&-i\left(\overline{\theta}\overline{\chi}\right)(\theta\theta)\overline{\theta}\left(\overline{\lambda}+\frac{1}{2}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right)-\frac{i^2}{4}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\,(M+iN)\,(M-iN)-\\&-\frac{i^2}{4}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})(\theta\theta)\,(M-iN)\,(M+iN)+\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)A_\mu A_\nu-\\&-i\left(\overline{\theta}\overline{\chi}\right)(\theta\theta)\overline{\theta}\left(\overline{\lambda}+\frac{1}{2}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right)+i\left(\theta\chi\right)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta\left(\lambda-\frac{1}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}\right)+\\&+\frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(D-\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C\right)C\overset{(2.5.35)}{=}\\=&(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})C\left(D-\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C\right)+2i(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\,(\theta\chi)\,\theta\left(\lambda-\frac{1}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}\right)-\\&-2i(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\chi}\right)\overline{\theta}\left(\overline{\lambda}+\frac{1}{2}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right)+\frac{2}{4}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(M^2+N^2\right)+\\&+\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})A_\mu A_\nu=\\=&(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(CD-\frac{1}{2}C\partial_\mu\partial^\mu C\right)+2i(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left[(\theta\chi)\,(\theta\lambda)-\frac{1}{2}\,(\theta\chi)\,(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi})\right]-\\&-2i(\theta\theta)\left[\left(\overline{\theta}\overline{\chi}\right)\left(\overline{\theta}\overline{\lambda}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\overline{\chi}\right)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right)\right]+\frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(M^2+N^2\right)+\\&+\frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})A_\mu A^\mu=\\=&(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(CD-\frac{1}{2}C\partial_\mu\partial^\mu C\right)+2i(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left[-\frac{1}{2}(\theta\theta)\chi\lambda+\frac{1}{4}(\theta\theta)\chi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}\right]-\\&-2i(\theta\theta)\left[-\frac{1}{2}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\overline{\chi}\overline{\lambda}-\frac{1}{4}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right]+\frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(M^2+N^2+A_\mu A^\mu\right)=\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&(\theta\theta)(\bar\theta\,\bar\theta)\left[\frac{1}{2}A_\mu A^\mu - i\chi\lambda + i\overline{\chi}\overline{\lambda} + \frac{1}{2}\left(M^2+N^2\right) + \frac{i}{2}\chi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi} + \right.\\
&\left. + \frac{i}{2}\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - \frac{1}{2}C\partial_\mu\partial^\mu C + CD\right]
\end{aligned}
$$

άρα

$$
\begin{aligned}
\left[V^2\right]_D =& \frac{1}{2}A_\mu A^\mu - i\chi\lambda + i\overline{\chi}\overline{\lambda} + \frac{1}{2}\left(M^2+N^2\right) + \frac{i}{2}\chi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi} + \\
&+ \frac{i}{2}\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - \frac{1}{2}C\partial_\mu\partial^\mu C + CD
\end{aligned}
\tag{6.4.14}
$$

Από την (6.4.14) έπεται ότι ο $m^2\left[V^2\right]_D$ περιέχει τον όρο $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$, που είναι όρος μάζας για το διανυσματικό μποζόνιο A_μ. Έτσι, η προσθήκη του $m^2\left[V^2\right]_D$ στην $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ της (6.4.13), μεταξύ άλλων, δίνει μάζα m στο διανυσματικό μποζόνιο A_μ. Ωστόσο, ο $\left[V^2\right]_D$ δεν είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας της μορφής (5.6.22), η δράση των οποίων πάνω στα πεδία-συνιστώσες του V δίνεται από τις (5.6.25)-(5.6.30). Κατά συνέπεια, η παρουσία του όρου $m^2\left[V^2\right]_D$ στην Lagrangian για μία υπερσυμμετρική Αβελιανή θεωρία βαθμίδας (τμήμα της οποίας είναι η $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ της (6.4.13)) δεν είναι επιτρεπτή. Αυτό σημαίνει ότι η απαίτηση για αναλλοιώτητα της εν λόγω Lagrangian κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς βαθμίδας επιβάλλει το αντίστοιχο μποζόνιο βαθμίδας A_μ να είναι άμαζο, όπως είναι και το gaugino λ.

Ωστόσο, έχει ενδιαφέρον να δείξουμε ότι η υπερσυμμετρική Lagrangian που προκύπτει, εάν προσθέσουμε το $m^2\left[V^2\right]_D$ στην (6.4.13)

$$
\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + m^2\left[V^2\right]_D
\tag{6.4.15}
$$

περιγράφει μία ελεύθερη μαζική διανυσματική supermultiplet, της οποίας το σωματιδιακό περιεχόμενο έχουμε δώσει στην ενότητα (3.2.2). Για να το διαπιστώσουμε αυτό, αρχικά γράφουμε την Lagrangian της (6.4.15) συναρτήσει των πεδίων $C, \chi, M, N, A_\mu, \lambda$ και D αντικαθιστώντας τις (6.4.13) και (6.4.14) στην (6.4.15)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \equiv& \frac{1}{2}D^2 + i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - im^2\chi\lambda + im^2\overline{\chi}\overline{\lambda} + \frac{1}{2}m^2\left(M^2+N^2\right) + \\
&+ \frac{i}{2}m^2\chi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi} + \frac{i}{2}m^2\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - \frac{1}{2}m^2 C\partial_\mu\partial^\mu C + m^2 CD
\end{aligned}
\tag{6.4.16}
$$

Εισάγουμε τώρα το πραγματικό βαθμωτό πεδίο $\tilde{C} \equiv mC$, το οποίο έχει διάσταση μάζας 1, όπως ένα σύνηθες βαθμωτό πεδίο, αφού το πραγματικό βαθμωτό πεδίο C είναι αδιάστατο, και το αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl $\tilde{\chi}$ με $\tilde{\chi}_\alpha = im\chi_\alpha$ για κάθε $\alpha = 1, 2$ (οπότε $\overline{\tilde{\chi}}_{\dot\alpha} = (\tilde{\chi}_\alpha)^* = -im(\chi_\alpha)^* = -im\overline{\chi}_{\dot\alpha}$), το οποίο έχει διάσταση μάζας $\frac{3}{2}$ που είναι η συνήθης διάσταση για ένα τέτοιο πεδίο, καθώς το αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl χ έχει διάσταση μάζας $\frac{1}{2}$. Έτσι, η $\mathcal{L}$ της (6.4.16) γράφεται

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& \frac{1}{2}D^2 + i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - m\left(im\chi^\alpha\right)\lambda_\alpha - m\left(-im\overline{\chi}_{\dot\alpha}\right)\overline{\lambda}^{\dot\alpha} + \\
&+ \frac{1}{2}m^2\left(M^2+N^2\right) + \frac{i}{2}\left(im\chi^\alpha\right)\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\left(-im\overline{\chi}^{\dot\beta}\right) + \frac{i}{2}\left(-im\overline{\chi}_{\dot\alpha}\right)\left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\left(im\chi_\beta\right) - \\
&- \frac{1}{2}\left(mC\right)\partial_\mu\partial^\mu\left(mC\right) + m\left(mC\right)D = \\
=& \frac{1}{2}D^2 + i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - m\tilde{\chi}^\alpha\lambda_\alpha - m\overline{\tilde{\chi}}_{\dot\alpha}\overline{\lambda}^{\dot\alpha} + \\
&+ \frac{1}{2}m^2\left(M^2+N^2\right) + \frac{i}{2}\tilde{\chi}^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\overline{\tilde{\chi}}^{\dot\beta} + \frac{i}{2}\overline{\tilde{\chi}}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu\tilde{\chi}_\beta - \frac{1}{2}\tilde{C}\partial_\mu\partial^\mu\tilde{C} + m\tilde{C}D = \\
=& -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}\tilde{C}\partial_\mu\partial^\mu\tilde{C} + i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + \frac{i}{2}\tilde{\chi}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\tilde{\chi}} + \frac{i}{2}\overline{\tilde{\chi}}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{\chi} -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- m\left(\tilde{\chi}\lambda + \overline{\tilde{\chi}}\overline{\lambda}\right) + \frac{1}{2}D^2 + M\tilde{C}D + \frac{1}{2}m^2\left(M^2+N^2\right) = \\
=&- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\left(\tilde{C}\partial^\mu\tilde{C}\right) - \left(\partial_\mu\tilde{C}\right)\left(\partial^\mu\tilde{C}\right)\right] + i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + \\
&+ \frac{i}{2}\left[\partial_\mu\left(\tilde{\chi}\sigma^\mu\overline{\tilde{\chi}}\right) - \left(\partial_\mu\tilde{\chi}\right)\sigma^\mu\overline{\tilde{\chi}}\right] + \frac{i}{2}\overline{\tilde{\chi}}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{\chi} - m\left(\tilde{\chi}\lambda + \overline{\tilde{\chi}}\overline{\lambda}\right) + \\
&+ \frac{1}{2}D^2 + m\tilde{C}D + \frac{1}{2}m^2\left(M^2+N^2\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathcal{L} =&- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{C}\right)\left(\partial^\mu\tilde{C}\right) + i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + i\overline{\tilde{\chi}}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{\chi} - \\
&- m\left(\tilde{\chi}\lambda + \overline{\tilde{\chi}}\overline{\lambda}\right) + \frac{1}{2}D^2 + m\tilde{C}D + \frac{1}{2}m^2\left(M^2+N^2\right)
\end{aligned}
\tag{6.4.17}
$$

όπου έχουμε παραλείψει τις ολικές παραγώγους, καθώς έχουν μηδενική συνεισφορά στην αντίστοιχη δράση.

Παρατηρούμε ότι η Lagrangian (6.4.17) δεν περιέχει κινητικούς όρους για τα πραγματικά βαθμωτά πεδία D, M και N, οπότε τα πεδία αυτά είναι βοηθητικά και μπορούμε να τα διώξουμε χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D} = \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu D\right)}\right]}_{\substack{\parallel \\ 0}} \Rightarrow D + m\tilde{C} = 0 \Rightarrow D = -m\tilde{C} \tag{6.4.18}
$$

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial M} = \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu M\right)}\right]}_{\substack{\parallel \\ 0}} \Rightarrow m^2 M = 0 \Rightarrow M = 0 \tag{6.4.19}
$$

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N} = \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu N\right)}\right]}_{\substack{\parallel \\ 0}} \Rightarrow m^2 N = 0 \Rightarrow N = 0 \tag{6.4.20}
$$

Αν αντικαταστήσουμε τις (6.4.18)-(6.4.20) στη Lagrangian της (6.4.17), η τελευταία γίνεται:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =&- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{C}\right)\left(\partial^\mu\tilde{C}\right) + i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + i\overline{\tilde{\chi}}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{\chi} - \\
&- m\left(\tilde{\chi}\lambda + \overline{\tilde{\chi}}\overline{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\left(-m\tilde{C}\right)^2 + m\tilde{C}\left(-m\tilde{C}\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathcal{L} =&- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{C}\right)\left(\partial^\mu\tilde{C}\right) - \frac{1}{2}m^2\tilde{C}^2 + \\
&+ i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + i\overline{\tilde{\chi}}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{\chi} - m\left(\tilde{\chi}\lambda + \overline{\tilde{\chi}}\overline{\lambda}\right)
\end{aligned}
\tag{6.4.21}
$$

Ο τρίτος όρος της Lagrangian (6.4.21), $\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{C}\right)\left(\partial^\mu\tilde{C}\right)$, είναι κινητικός όρος για το πραγματικό βαθμωτό πεδίο $\tilde{C}$, ενώ ο τέταρτος όρος, $-\frac{1}{2}m^2\tilde{C}^2$, είναι όρος μάζας για το πεδίο αυτό, από τον οποίο προκύπτει ότι το $\tilde{C}$ έχει μάζα m, όπως και το διανυσματικό μποζόνιο A_μ (βλ. τον όρο $\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu$). Οι όροι της Lagrangian (6.4.21), στους οποίους εμπλέκονται τα αριστερόστροφα φερμιόνια Weyl λ και $\tilde{\chi}$, είναι:

$$
\mathcal{L}_{\text{fermion}} = i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + i\overline{\tilde{\chi}}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{\chi} - m\left(\tilde{\chi}\lambda + \overline{\tilde{\chi}}\overline{\lambda}\right) \tag{6.4.22}
$$

Ο πρώτος όρος στην $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ της (6.4.22) είναι κινητικός όρος για το φερμιόνιο Weyl λ, ενώ ο δεύτερος όρος της είναι κινητικός όρος για το φερμιόνιο Weyl $\tilde{\chi}$. Οι δύο τελευταίοι όροι, $-m\left(\tilde{\chi}\lambda + \overline{\tilde{\chi}}\overline{\lambda}\right) = \left(-m\tilde{\chi}\lambda + c.c.\right)$, είναι όροι μάζας. Εισάγουμε τώρα τα αριστερόστροφα φερμιόνια Weyl

$$
\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\chi} + \lambda\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(im\chi + \lambda\right) \tag{6.4.23}
$$

$$\lambda_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\chi} - \lambda\right) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(im\chi - \lambda\right) \tag{6.4.24}$$

Από τους ορισμούς (6.4.23) και (6.4.24) έπεται ότι

$$\begin{aligned}\lambda_1 + i\lambda_2 =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\chi} + \lambda\right) + \frac{i^2}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\chi} - \lambda\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\chi} + \lambda\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\chi} - \lambda\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\lambda = \sqrt{2}\lambda \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_1 + i\lambda_2\right)\end{aligned} \tag{6.4.25}$$

και

$$\begin{aligned}\lambda_1 - i\lambda_2 =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\chi} + \lambda\right) - \frac{i^2}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\chi} - \lambda\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\chi} + \lambda\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\chi} - \lambda\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\tilde{\chi} = \sqrt{2}\tilde{\chi} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{\chi} =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_1 - i\lambda_2\right)\end{aligned} \tag{6.4.26}$$

Με αντικατάσταση των (6.4.25) και (6.4.26) στην (6.4.22), η τελευταία γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{fermion}} =& i\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\lambda_\beta + i\overline{\tilde{\chi}}_{\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\tilde{\chi}_\beta - m\left(\tilde{\chi}^\alpha\lambda_\alpha + c.c.\right) = \\ =& i\left(\lambda_\alpha\right)^*(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\lambda_\beta + i\left(\tilde{\chi}_\alpha\right)^*(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\tilde{\chi}_\beta - m\left(\tilde{\chi}^\alpha\lambda_\alpha + c.c.\right) = \\ =& i\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\lambda_1)_\alpha + i\left(\lambda_2\right)_\alpha\right]\right\}^*(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\lambda_1)_\beta + i\left(\lambda_2\right)_\beta\right]\right\} + \\ &+ i\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\lambda_1)_\alpha - i\left(\lambda_2\right)_\alpha\right]\right\}^*(\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\lambda_1)_\beta - i\left(\lambda_2\right)_\beta\right]\right\} - \\ &- m\left\{\frac{1}{2}\left[(\lambda_1)^\alpha - i\left(\lambda_2\right)^\alpha\right]\left[(\lambda_1)_\alpha + i\left(\lambda_2\right)_\alpha\right] + c.c.\right\} = \\ =& \frac{i}{2}\left[\left(\overline{\lambda}_1\right)_{\dot{\alpha}} - i\left(\overline{\lambda}_2\right)_{\dot{\alpha}}\right](\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\left[\partial_\mu\left(\lambda_1\right)_\beta + i\partial_\mu\left(\lambda_2\right)_\beta\right] + \\ &+ \frac{i}{2}\left[\left(\overline{\lambda}_1\right)_{\dot{\alpha}} + i\left(\overline{\lambda}_2\right)_{\dot{\alpha}}\right](\overline{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\left[\partial_\mu\left(\lambda_1\right)_\beta - i\partial_\mu\left(\lambda_2\right)_\beta\right] - \\ &- \frac{1}{2}m\left(\lambda_1\lambda_1 + i\lambda_1\lambda_2 - i\lambda_2\lambda_1 + \lambda_2\lambda_2 + c.c.\right) = \\ =& \frac{i}{2}\left(\overline{\lambda}_1\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_1 + \cancel{i\overline{\lambda}_1\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_2} - \cancel{i\overline{\lambda}_2\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_1} + \cancel{i\overline{\lambda}_2\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_1} + \right. \\ &+ \overline{\lambda}_2\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_2 + \overline{\lambda}_1\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_1 - \cancel{i\overline{\lambda}_1\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_2} + \\ &\left. + \overline{\lambda}_2\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_2\right) - \frac{1}{2}m\left(\lambda_1\lambda_1 + \cancel{i\lambda_1\lambda_2} - \cancel{i\lambda_1\lambda_2} + \lambda_2\lambda_2 + c.c.\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{fermion}} =& i\left(\overline{\lambda}_1\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_1 + \overline{\lambda}_2\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_2\right) - \frac{1}{2}m\left(\lambda_1\lambda_1 + \overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_1\right) - \frac{1}{2}m\left(\lambda_2\lambda_2 + \overline{\lambda}_2\overline{\lambda}_2\right)\end{aligned} \tag{6.4.27}$$

Συνεχίζουμε θεωρώντας τα φερμιόνια Majorana

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} (\lambda_1)_\alpha \\ \left(\overline{\lambda}_1\right)^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_\alpha + \lambda_\alpha \\ \overline{\tilde{\chi}}^{\dot{\alpha}} + \overline{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{6.4.28}$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} (\lambda_2)_\alpha \\ \left(\overline{\lambda}_2\right)^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_\alpha - \lambda_\alpha \\ -\left(\overline{\tilde{\chi}}^{\dot{\alpha}} - \overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}\right) \end{pmatrix} \tag{6.4.29}$$

και γράφοντας την $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ συναρτήσει αυτών των φερμιονίων Majorana[3]:

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \frac{i}{2}\left(\overline{\Lambda}_1\gamma^\mu\partial_\mu\Lambda_1 + \overline{\Lambda}_2\gamma^\mu\partial_\mu\Lambda_2\right) - \frac{1}{2}m\left(\overline{\Lambda}_1\Lambda_1 + \overline{\Lambda}_2\Lambda_2\right) \tag{6.4.30}$$

[3]Θυμηθείτε τη συζήτηση στο τέλος της ενότητας 2.6

Η (6.4.30) συνεπάγεται ότι τα Λ_1 και Λ_2 είναι δύο ελεύθερα φερμιόνια Majorana με μάζα m το καθένα. Συμπερασματικά, η Lagrangian (6.4.21), η οποία προκύπτει από την (6.4.17) μετά την αντικατάσταση των βοηθητικών πεδίων D, M και N από τις εκφράσεις που προκύπτουν γι' αυτά από τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης, περιγράφει ένα διανυσματικό μποζόνιο A_μ, δύο φερμιόνια Majorana Λ_1 και Λ_2, τα οποία δίνονται από τις (6.4.28) και (6.4.29) αντίστοιχα, και ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο $\widetilde{C}$, που έχουν όλα την ίδια μάζα m, ενώ δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Έτσι, η Lagrangian (6.4.21) αντιστοιχεί σε μία ελεύθερη μαζική διανυσματική supermultiplet.

Κλείνουμε τώρα την παραπάνω παρένθεση, η οποία αφορά στην προσθήκη του όρου $m^2\left[V^2\right]_D$ στην $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ της (6.4.13), και συνεχίζουμε με την κατασκευή της Lagrangian για μία γενική υπερσυμμετρική Αβελιανή θεωρία βαθμίδας. Ισχύει ότι το ολοκλήρωμα του $D-$όρου του ίδιου του διανυσματικού υπερπεδίου V της θεωρίας σε όλο το χώρο Minkowski:

$$\int d^4x\,[V]_D = \int d^4x\left(\frac{1}{2}D - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu C\right) = \frac{1}{2}\int d^4xD - \frac{1}{4}\underbrace{\int d^4x\partial_\mu\partial^\mu C}_{\substack{\parallel \\ 0}} = \frac{1}{2}\int d^4xD$$

είναι αναλλοίωτο κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, αφού το πραγματικό βαθμωτό πεδίο D μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από τους μετασχηματισμούς αυτούς, όπως φαίνεται από την (5.6.21) ($\delta_\xi D = -i\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda} + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda\right) = -i\partial_\mu\left(\xi\sigma^\mu\overline{\lambda} + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\lambda\right)$) και είναι αναλλοίωτο κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας (βλ. (5.6.30)). Επομένως, μπορεί κανείς να συμπεριλάβει στη Lagrangian μίας υπερσυμμετρικής Αβελιανής ($U(1)$) θεωρίας βαθμίδας έναν όρο

$$\mathcal{L}_{\text{FI}} = -2\kappa\,[V]_D = -\kappa D \tag{6.4.31}$$

όπου κ είναι μία πραγματική σταθερά, η οποία έχει διάσταση $[\kappa] = M^2$, ώστε να είναι $[\mathcal{L}_{\text{FI}}] = M^4$, δεδομένου ότι το πεδίο D έχει διάσταση $[D] = M^2$, ενώ στο τρίτο μέλος της (6.4.31) έχουμε πάλι παραλείψει μία ολική παράγωγο, την $-2\kappa\left(-\frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu C\right) = \frac{1}{2}\kappa\partial_\mu\partial^\mu C$. Ο όρος της (6.4.31) είναι γνωστός ως όρος των Fayet και Iliopoulos, γι' αυτό και τον συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_{\text{FI}}$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη σύζευξη του διανυσματικού υπερπεδίου V με ένα σύνολο n chiral υπερπεδίων Φ_i, όπως στην (6.3.1), όπου για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, το υπερπεδίο Φ_i φέρει $U(1)$ φορτίο q_i. Κάτω από έναν Αβελιανό μετασχηματισμό υπερβαθμίδας χαρακτηριζόμενο από ένα αδιάστατο chiral υπερπεδίο Λ, τα Φ_i μετασχηματίζονται ως

$$\Phi_i \to \Phi_i' = e^{2igq_i\Lambda}\Phi_i \tag{6.4.32}$$

όπου g είναι μία σταθερά σύζευξης, οπότε

$$\Phi_i^* \to \Phi_i'^* = e^{-2igq_i\Lambda^*}\Phi_i^* \tag{6.4.33}$$

ενώ το V μετασχηματίζεται όπως υποδεικνύει η (5.6.22). Τα υπερπεδία Φ_i' στην (6.4.32) είναι chiral υπερπεδία, όπως και τα Φ_i. Αυτό συμβαίνει, διότι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, το Φ_i είναι το γινόμενο του $e^{2igq_i\Lambda}$, το οποίο είναι ένα chiral υπερπεδίο, αφού $e^{2igq_i\Lambda} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2igq_i)^n\frac{\Lambda^n}{n!}$ και το Λ είναι ένα chiral υπερπεδίο[4], και του chiral υπερπεδίου Φ_i, οπότε το $\Phi_i'^*$ είναι ένα anti-chiral υπερπεδίο.

Θα προσδιορίσουμε τώρα πώς μετασχηματίζονται τα πεδία-συνιστώσες ϕ_i, ψ_i και F_i των chiral υπερπεδίων Φ_i κάτω από έναν απειροστό Αβελιανό μετασχηματισμό υπερβαθμίδας που χαρακτηρίζεται από ένα chiral υπερπεδίο

$$\begin{aligned}\Lambda(x,\theta,\overline{\theta}) =& \tilde{\phi}(x) + \sqrt{2}\theta\tilde{\psi}(x) + (\theta\theta)\tilde{F}(x) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\tilde{\phi}(x) - \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{\psi}(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\partial_\mu\partial^\mu\tilde{\phi}(x)\end{aligned} \tag{6.4.34}$$

[4]Τα αθροίσματα και τα γινόμενα chiral υπερπεδιών είναι chiral υπερπεδία, οπότε και μία σειρά δυνάμεων ενός chiral υπερπεδίου είναι επίσης chiral υπερπεδίο

όπου $\tilde{\phi}$ και $\tilde{F}$ είναι δύο απειροστά μιγαδικά βαθμωτά πεδία με διαστάσεις μάζας 0 και 1 αντίστοιχα και $\tilde{\psi}$ είναι ένα απειροστό αριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl με διάσταση μάζας $\frac{1}{2}$. Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, η μεταβολή του Φ_i κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό ισούται με:

$$\begin{aligned}\delta_{SG}\Phi_i =&\Phi'_i - \Phi_i \overset{(6.4.32)}{=} \left(e^{2igq_i\Lambda} - 1\right)\Phi_i \overset{\text{Taylor}}{=}\\ &= \left(\cancel{1} + 2igq_i\Lambda + \mathcal{O}(\Lambda^2) - \cancel{1}\right)\Phi_i \Rightarrow\\ \Rightarrow \delta_{SG}\Phi_i =&2igq_i\Lambda\Phi_i \end{aligned} \tag{6.4.35}$$

όπου έχουμε αγνοήσει τους όρους τάξης ≥ 2 ως προς το chiral υπερπεδίο Λ της (6.4.34), αφού αυτό είναι απειροστό, ενώ ο δείκτης SG δηλώνει ακριβώς ότι το $\delta_{SG}\Phi_i$ είναι η μεταβολή του Φ_i κάτω από έναν απειροστό μετασχηματισμό υπερβαθμίδας (supergauge transformation). Αντικαθιστώντας τις (6.4.34) και (6.3.1) στην (6.4.35), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\delta_{SG}\Phi_i =&2igq_i\Bigg[\tilde{\phi} + \sqrt{2}\theta\tilde{\psi} + (\theta\theta)\tilde{F} - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\tilde{\phi} - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{\psi} -\\ &-\frac{1}{4}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\partial_\mu\partial^\mu\tilde{\phi}\Bigg]\Bigg[\phi_i + \sqrt{2}\theta\psi_i + (\theta\theta)F_i - i\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)\partial_\nu\phi_i -\\ &-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\sigma}^\nu\partial_\nu\psi_i - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\partial_\nu\partial^\nu\phi_i\Bigg] =\\ =&2igq_i\Big[\tilde{\phi}\phi_i + \sqrt{2}\left(\theta\psi_i\right)\tilde{\phi} + (\theta\theta)\tilde{\phi}F_i - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\tilde{\phi}\partial_\mu\phi_i -\\ &-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i\right)\tilde{\phi} - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\tilde{\phi}\partial_\mu\partial^\mu\phi_i + \sqrt{2}\left(\theta\tilde{\psi}\right)\phi_i +\\ &+2\left(\theta\tilde{\psi}\right)(\theta\psi_i) - i\sqrt{2}\left(\theta\tilde{\psi}\right)\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi_i + (\theta\theta)\tilde{F}\phi_i - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\phi_i\partial_\mu\tilde{\phi} -\\ &-i\sqrt{2}\left(\theta\psi_i\right)\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\tilde{\phi} - \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)\left(\partial_\mu\tilde{\phi}\right)(\partial_\nu\phi_i) -\\ &-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{\psi}\right)\phi_i - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\phi_i\partial_\mu\partial^\mu\tilde{\phi}\Big] \underset{(2.5.35)}{\overset{(2.5.32)}{=}}\\ =&2igq_i\Big[\tilde{\phi}\phi_i + \sqrt{2}\left(\theta\psi_i\right)\tilde{\phi} + (\theta\theta)\tilde{\phi}F_i - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\tilde{\phi}\partial_\mu\phi_i -\\ &-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i\right)\tilde{\phi} - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\tilde{\phi}\partial_\mu\partial^\mu\phi_i + \sqrt{2}\left(\theta\tilde{\psi}\right)\phi_i - (\theta\theta)\tilde{\psi}\psi_i +\\ &+i\frac{\sqrt{2}}{2}(\theta\theta)\left(\tilde{\psi}\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi_i + (\theta\theta)\tilde{F}\phi_i - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\phi_i\partial_\mu\tilde{\phi} + i\frac{\sqrt{2}}{2}(\theta\theta)\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\times\\ &\times\partial_\mu\tilde{\phi} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(\partial_\mu\tilde{\phi}\right)(\partial_\nu\phi_i) - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{\psi}\right)\phi_i - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\phi_i\partial_\mu\partial^\mu\tilde{\phi}\Big] =\\ =&2igq_i\Big\{\tilde{\phi}\phi_i + \sqrt{2}\theta\left(\psi_i\tilde{\phi} + \tilde{\psi}\phi_i\right) + (\theta\theta)\left(\tilde{\phi}F_i + \tilde{F}\phi_i - \tilde{\psi}\psi_i\right) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\Big[\tilde{\phi}\partial_\mu\phi_i +\\ &+\left(\partial_\mu\tilde{\phi}\right)\phi_i\Big] - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i\right)\tilde{\phi} - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\tilde{\psi}\right)\partial_\mu\phi_i - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\psi_i\right)\partial_\mu\tilde{\phi} -\\ &-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{\psi}\right)\phi_i - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\Big[\tilde{\phi}\partial_\mu\partial^\mu\phi_i + \left(\partial_\mu\tilde{\phi}\right)(\partial^\mu\phi_i) +\\ &+\left(\partial_\mu\tilde{\phi}\right)(\partial^\mu\phi_i) + \partial_\mu\left(\partial^\mu\tilde{\phi}\right)\phi_i\Big]\Big\} =\\ =&2igq_i\Big\{\tilde{\phi}\phi_i + \sqrt{2}\theta\left(\psi_i\tilde{\phi} + \tilde{\psi}\phi_i\right) + (\theta\theta)\left(\tilde{\phi}F_i + \tilde{F}\phi_i - \tilde{\psi}\psi_i\right) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\left(\tilde{\phi}\phi_i\right) -\\ &-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\Big[\left(\partial_\mu\psi_i\right)\tilde{\phi} + \psi_i\partial_\mu\tilde{\phi} + \tilde{\psi}\partial_\mu\phi_i + \left(\partial_\mu\tilde{\psi}\right)\phi_i\Big] - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\times\\ &\times\Big[\partial_\mu\left(\tilde{\phi}\partial^\mu\phi_i\right) + \partial_\mu\left(\left(\partial^\mu\tilde{\phi}\right)\phi_i\right)\Big]\Big\} =\\ =&2igq_i\Big\{\tilde{\phi}\phi_i + \sqrt{2}\theta\left(\psi_i\tilde{\phi} + \tilde{\psi}\phi_i\right) + (\theta\theta)\left(\tilde{\phi}F_i + \tilde{F}\phi_i - \tilde{\psi}\psi_i\right) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\left(\tilde{\phi}\phi_i\right) -\end{aligned}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\left[\partial_{\mu}\left(\psi_i\tilde{\phi}\right)+\partial_{\mu}\left(\tilde{\psi}\phi_i\right)\right]-\frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\,\bar{\theta})\partial_{\mu}\left[\tilde{\phi}\partial^{\mu}\phi_i+\left(\partial^{\mu}\tilde{\phi}\right)\phi_i\right]\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_{SG}\Phi_i = 2igq_i\left\{\tilde{\phi}\phi_i+\sqrt{2}\theta\left(\psi_i\tilde{\phi}+\tilde{\psi}\phi_i\right)+(\theta\theta)\left(\tilde{\phi}F_i+\tilde{F}\phi_i-\tilde{\psi}\psi_i\right)-i\left(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\right)\partial_{\mu}\left(\tilde{\phi}\phi_i\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\left(\psi_i\tilde{\phi}+\tilde{\psi}\phi_i\right)-\frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\,\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial^{\mu}\left(\tilde{\phi}\phi_i\right)\right\} \tag{6.4.36}$$

Αν $\delta_{SG}\phi_i, \delta_{SG}\left(\psi_i\right)_{\alpha}$ και $\delta_{SG}F_i$ είναι οι μεταβολές των $\phi_i, \left(\psi_i\right)_{\alpha}$ και F_i κάτω από τον Αβελιανό μετασχηματισμό υπερβαθμίδας που παραμετροποιείται από το απειροστό chiral υπερπεδίο της (6.4.34), τότε με βάση την (6.3.1), έχουμε:

$$\delta_{SG}\Phi_i = \delta_{SG}\phi_i+\sqrt{2}\theta^{\alpha}\delta_{SG}\left(\psi_i\right)_{\alpha}+(\theta\theta)\delta_{SG}F_i-i\left(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\right)\partial_{\mu}\left(\delta_{SG}\phi_i\right)-$$
$$-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\partial_{\mu}\left[\delta_{SG}\left(\psi_i\right)_{\beta}\right]-\frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\,\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial^{\mu}\left(\delta_{SG}\phi_i\right) \tag{6.4.37}$$

Συγκρίνοντας την (6.4.37) με την (6.4.36), λαμβάνουμε:

$$\delta_{SG}\phi_i = 2igq_i\tilde{\phi}\phi_i \tag{6.4.38}$$

$$\delta_{SG}\left(\psi_i\right)_{\alpha} = 2igq_i\left(\tilde{\phi}\left(\psi_i\right)_{\alpha}+\phi_i\tilde{\psi}_{\alpha}\right) \tag{6.4.39}$$

$$\delta_{SG}F_i = 2igq_i\left(\tilde{\phi}F_i+\tilde{F}\phi_i-\tilde{\psi}\psi_i\right) \tag{6.4.40}$$

Για έναν απειροστό Αβελιανό μετασχηματισμό υπερβαθμίδας που διατηρεί την εκλογή της βαθμίδας των Wess και Zumino για το V, ο οποίος, σύμφωνα με τη συζήτηση στο τέλος της ενότητας 5.6, χαρακτηρίζεται από ένα chiral υπερπεδίο της μορφής (6.4.34) με $\tilde{\phi}(x)=\frac{1}{2}a(x)$, όπου $a(x)$ είναι μία αδιάστατη πραγματική βαθμωτή συνάρτηση, $\tilde{\psi}_{\alpha}(x)=0$, για κάθε $\alpha=1,2$ και $\tilde{F}(x)=0$, οι (6.4.38), (6.4.39) και (6.4.40) γίνονται:

$$\delta_{SG}\phi_i = \cancel{2}igq_i\frac{a(x)}{\cancel{2}}\phi_i = igq_ia(x)\phi_i \tag{6.4.41}$$

$$\delta_{SG}\left(\psi_i\right)_{\alpha} = \cancel{2}igq_i\frac{a(x)}{\cancel{2}}\left(\psi_i\right)_{\alpha} = igq_ia(x)\left(\psi_i\right)_{\alpha} \tag{6.4.42}$$

$$\delta_{SG}F_i = \cancel{2}igq_i\frac{a(x)}{\cancel{2}}F_i = igq_ia(x)F_i \tag{6.4.43}$$

Παρατηρούμε ότι τα τελευταία μέλη των (6.4.41), (6.4.42) και (6.4.43) είναι ακριβώς οι μεταβολές των $\phi_i, \left(\psi_i\right)_{\alpha}$ και F_i (που έχουν $U(1)$ φορτίο q_i) κάτω από έναν απειροστό $U(1)$ μετασχηματισμό βαθμίδας που χαρακτηρίζεται από μία αδιάστατη πραγματική βαθμωτή συνάρτηση $a(x)$.

Για κάθε $i=1,2,\ldots,n$, οι κινητικοί όροι των πεδίων ύλης ϕ_i, ψ_i θα μπορούσαν να προκύψουν από τον $D-$όρο του διανυσματικού υπερπεδίου $\Phi_i^*\Phi_i$, $\left[\Phi_i^*\Phi_i\right]_D$, (όπως φαίνεται από την (6.3.13)), ο οποίος, όμως, δεν είναι αναλλοίωτος κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας, αφού σύμφωνα με τις (6.4.32) και (6.4.33), κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό που χαρακτηρίζεται από ένα αδιάστατο chiral υπερπεδίο Λ έχουμε:

$$\Phi_i^*\Phi_i \to \Phi_i'^*\Phi_i' = \left(e^{-2igq_i\Lambda^*}\Phi_i^*\right)\left(e^{2igq_i\Lambda}\Phi_i\right) = e^{2igq_i(\Lambda-\Lambda^*)}\Phi_i^*\Phi_i \neq \Phi_i^*\Phi_i$$

Για να λάβουμε τους κινητικούς όρους των ϕ_i, ψ_i στα πλαίσια μίας υπερσυμμετρικής $U(1)$ θεωρίας βαθμίδας, εισάγουμε τα πραγματικά (διανυσματικά) υπερπεδία

$$\Phi_i^*e^{-2gq_iV}\Phi_i \tag{6.4.44}$$

όπου $i = 1, 2, \ldots, n$, τα οποία είναι αναλλοίωτα κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας, αφού κάτω από έναν τυχαίο τέτοιο μετασχηματισμό που περιγράφεται από τις (5.6.22) και (6.4.32) για κάποιο αδιάστατο chiral υπερπεδίο Λ, έχουμε:

$$\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i \to \Phi_i'^* e^{-2gq_iV'}\Phi_i' = \left(e^{-2igqi\Lambda^*}\Phi_i^*\right) e^{-2gq_i[V+i(\Lambda-\Lambda^*)]}\left(e^{2igq_i\Lambda}\Phi_i\right) =$$
$$=\Phi_i^* e^{-2gq_i\left(\cancel{i\Lambda^*}+V+\cancel{i\Lambda}-\cancel{i\Lambda^*}-\cancel{i\Lambda}\right)}\Phi_i = \Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Επομένως, οι $D-$όροι των διανυσματικών υπερπεδίων (6.4.44), $\left[\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D = \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta}\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i$ είναι και αυτοί αναλλοίωτοι κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας, ενώ καθένας από αυτούς μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Έτσι, η Lagrangian για μία υπερσυμμετρική $U(1)$ θεωρία βαθμίδας θα περιλαμβάνει το άθροισμα $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D$, από το οποίο προκύπτουν οι κινητικοί όροι για τα φορτισμένα πεδία ύλης ϕ_i, ψ_i, αφού για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, η ποσότητα $\left[\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D$ περιέχει την $\left[\Phi_i^*\Phi_i\right]_D$, διότι $\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i = \Phi_i^*\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-2gq_iV)^k}{k!}\right)\Phi_i = \Phi_i^*\left[1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2gq_i)^k\frac{V^k}{k!}\right]\Phi_i$, καθώς και όροι αλληλεπιδράσεων των ϕ_i, ψ_i με το διανυσματικό πεδίο βαθμίδας A_μ και το gaugino λ.

Προχωρούμε τώρα στον υπολογισμό των ποσοτήτων $\left[\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D$, όπου $i = 1, 2, \ldots, n$, στη βαθμίδα των Wess και Zumino, στην οποία το ανάπτυγμα του εκθετικού e^{-2gq_iV} σε σειρά δυνάμεων του V,

$$e^{-2gq_iV} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2gq_i)^k\frac{V^k}{k!} \tag{6.4.45}$$

έχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών όρων. Αυτό συμβαίνει, διότι στη βαθμίδα των Wess και Zumino, το διανυσματικό υπερπεδίο V έχει την απλή μορφή

$$V = \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)A_\mu + (\theta\theta)\overline{\theta\lambda} + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\lambda + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)D \tag{6.4.46}$$

- όπου τα πεδία στο δεύτερο μέλος είναι συναρτήσεις των μποζονικών συντεταγμένων x^μ - άρα

$$\begin{aligned}
V^2 =& \left[\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)A_\mu + (\theta\theta)\overline{\theta\lambda} + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\lambda + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)D\right]\times\\
&\times\left[\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)A_\nu + (\theta\theta)\overline{\theta\lambda} + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\lambda + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)D\right] =\\
=& \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)A_\mu A_\nu \overset{(2.5.35)}{=} \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)A_\mu A_\nu \Rightarrow\\
\Rightarrow V^2 =& \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)A_\mu A^\mu
\end{aligned} \tag{6.4.47}$$

και

$$V^3 = V^2 V \underset{(6.4.47)}{\overset{(6.4.46)}{=}} \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)A_\mu A^\mu\left[\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)A_\nu + (\theta\theta)\overline{\theta\lambda} + \left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\lambda + \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)D\right] = 0 \tag{6.4.48}$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής, διότι καθένας από τους όρους του τρίτου μέλους της περιέχει τουλάχιστον τρία θ και τουλάχιστον τρία $\overline{\theta}$, οπότε είναι ταυτοτικά μηδέν. Επομένως, στη βαθμίδα των Wess και Zumino. έχουμε:

$$V^k = V^3 V^{k-3} = 0 \;\forall\; \text{φυσικό αριθμό } k \geq 3 \tag{6.4.49}$$

και συνδυάζοντας τις (6.4.45), (6.4.46), (6.4.47) και (6.4.49), λαμβάνουμε:

$$e^{-2gq_iV} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2gq_i)^k\frac{V^k}{k!} = 1 - 2gq_iV + \frac{1}{2}(2gq_i)^2V^2 + \cancel{\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k(2gq_i)^k\frac{V^k}{k!}}^{\,0} =$$

$$
\begin{aligned}
&=1-2gq_iV+2g^2q_i^2V^2 \underset{(6.4.47)}{\overset{(6.4.46)}{\Rightarrow}}\\
\Rightarrow e^{-2gq_iV} &=1-2gq_i\left[\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)A_\mu+(\theta\theta)\overline{\theta\lambda}+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\lambda+\frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)D\right]+g^2q_i^2(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)A_\mu A^\mu
\end{aligned}
\tag{6.4.50}
$$

για κάθε $i=1,2,\ldots,n$, οπότε:

$$
\begin{aligned}
\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i =&\Phi_i^*\Phi_i e^{-2gq_iV} \underset{(6.4.50)}{\overset{(6.3.2)}{=}} \Big\{\phi_i^*\phi_i+\sqrt{2}\left(\theta\psi_i\right)\phi_i^*+\sqrt{2}\left(\overline{\theta\psi_i}\right)\phi_i+\\
&+(\theta\theta)\phi_i^*F_i+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\phi_iF_i^*+\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(-i\phi_i^*\partial_\mu\phi_i+i\phi_i\partial_\mu\phi_i^*+\psi_i\sigma_\mu\overline{\psi}_i\right)+\\
&+\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\left[\psi_i\partial_\mu\phi_i^*-\left(\partial_\mu\psi_i\right)\phi_i^*\right]+\sqrt{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta\psi_i}\right)F_i+\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\sigma^\mu\times\\
&\times\left[\overline{\psi}_i\partial_\mu\phi_i-\left(\partial_\mu\overline{\psi}_i\right)\phi_i\right]+\sqrt{2}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\theta\psi_i\right)F_i^*+(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[F_i^*F_i+\right.\\
&+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_i\right)-\frac{1}{4}\phi_i^*\partial_\mu\partial^\mu\phi_i-\frac{1}{4}\phi_i\partial_\mu\partial^\mu\phi_i^*+\frac{i}{2}\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i+\\
&\left.+\frac{i}{2}\psi_i\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_i\right]\Big\}\Big\{1-2gq_i\left[\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)A_\nu+(\theta\theta)\overline{\theta\lambda}+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\theta\lambda+\frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)D\right]+\\
&+g^2q_i^2(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)A_\nu A^\nu\Big\}
\end{aligned}
\tag{6.4.51}
$$

Για να προσδιορίσουμε τα $\left[\Phi_i^*e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D$, $i=1,2,\ldots,n$, στη βαθμίδα των Wess και Zumino, αρκεί να απομονώσουμε τους όρους του τρίτου μέλους της τελευταίας σχέσης που περιέχουν δύο θ και δύο $\overline{\theta}$, των οποίων το άθροισμα θα μπορέσουμε στη συνέχεια να γράψουμε ως γινόμενο του $(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)$ επί μία συνάρτηση των x^μ με τη χρήση κατάλληλων ταυτοτήτων του Fierz. Από την (6.4.51) έπεται ότι στη βαθμίδα των Wess και Zumino, για κάθε $i=1,2,\ldots,n$, το κομμάτι του $\Phi_i^*e^{-2gq_iV}\Phi_i$ που περιέχει δύο θ και δύο $\overline{\theta}$ είναι:

$$
\begin{aligned}
\Phi_i^*e^{-2gq_iV}\Phi_i\big|_{2-\theta,2-\overline{\theta}} =&-gq_i(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\phi_i^*\phi_iD+g^2q_i^2(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\phi_i^*\phi_iA_\mu A^\mu-\\
&-2\sqrt{2}gq_i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\theta\lambda\right)\left(\theta\psi_i\right)\phi_i^*-2\sqrt{2}gq_i(\theta\theta)\left(\overline{\theta\lambda}\right)\left(\overline{\theta\psi_i}\right)\phi_i-\\
&-2gq_i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right)\left(-i\phi_i^*\partial_\mu\phi_i+i\phi_i\partial_\mu\phi_i^*+\psi_i\sigma_\mu\overline{\psi}_i\right)A_\nu+\\
&+(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\Big\{F_i^*F_i+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial_\mu\phi_i\right)-\frac{1}{4}\left[\partial_\mu\left(\phi_i^*\partial^\mu\phi_i\right)-\right.\\
&\left.-\left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_i\right)\right]-\frac{1}{4}\left[\partial_\mu\left(\phi_i\partial^\mu\phi_i^*\right)-\left(\partial_\mu\phi_i\right)\left(\partial^\mu\phi_i^*\right)\right]+\\
&+\frac{i}{2}\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i-\frac{i}{2}\left(\partial_\mu\overline{\psi}_i\right)\overline{\sigma}^\mu\psi_i\Big\} \underset{(2.5.35)}{\overset{(2.5.32)(2.5.33)}{=}}\\
=&-gq_i(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\phi_i^*\phi_iD+g^2q_i^2(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\phi_i^*\phi_iA_\mu A^\mu+\\
&+\sqrt{2}gq_i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)(\theta\theta)\left(\lambda\psi_i\right)\phi_i^*+\sqrt{2}gq_i(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\overline{\lambda}\,\overline{\psi}_i\right)\phi_i-\\
&-gq_i\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(-i\phi_i^*\partial_\mu\phi_i+i\phi_i\partial_\mu\phi_i^*-\overline{\psi}_i\overline{\sigma}_\mu\psi_i\right)A_\nu+\\
&+(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\Big\{F_i^*F_i+\left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_i\right)-\frac{1}{4}\partial_\mu\left(\phi_i^*\partial^\mu\phi_i+\phi_i\partial^\mu\phi_i^*\right)+\\
&+\frac{i}{2}\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i-\frac{i}{2}\left[\partial_\mu\left(\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\psi_i\right)-\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i\right]\Big\}=\\
=&(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\Big[-gq_i\phi_i\phi_i^*D+g^2q_i^2\phi_i^*\phi_iA_\mu A^\mu+\sqrt{2}gq_i\phi_i^*\left(\lambda\psi_i\right)+\\
&+\sqrt{2}gq_i\phi_i\left(\overline{\lambda}\,\overline{\psi}_i\right)+igq_i\phi_i^*A^\mu\partial_\mu\phi_i-igq_i\phi_iA^\mu\partial_\mu\phi_i^*+gq_i\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}_\mu\psi_i\right)A^\mu+\\
&+F_i^*F_i+\left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_i\right)+i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i-\frac{1}{4}\partial_\mu\left(\phi_i^*\partial^\mu\phi_i+\right.\\
&\left.+\phi_i\partial^\mu\phi_i^*+2i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\psi_i\right)\Big]
\end{aligned}
$$

Επομένως, στη βαθμίδα των Wess και Zumino, είναι:

$$\begin{aligned}
\left[\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D =& - gq_i\phi_i^*\phi_i D + g^2q_i^2\phi_i^*\phi_i A_\mu A^\mu + \sqrt{2}gq_i\phi_i^*\left(\lambda\psi_i\right) + \sqrt{2}gq_i\phi_i\left(\overline{\lambda}\,\overline{\psi}_i\right) + \\
&+ igq_iA_\mu\phi_i^*\partial^\mu\phi_i - igq_iA^\mu\phi_i\partial_\mu\phi_i^* + gq_i\left(\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\psi_i\right)A_\mu + \\
&+ F_i^*F_i + \left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_i\right) + i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{4}\partial_\mu\left(\phi_i^*\partial^\mu\phi_i + \phi_i\partial^\mu\phi_i^* + \right.\\
&\left.+2i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\psi_i\right) \overset{5}{=} \\
=& F_i^*F_i + \left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_i\right) - igq_iA^\mu\phi_i\partial_\mu\phi_i^* + igq_iA_\mu\phi_i^*\partial^\mu\phi_i + g^2q_i^2\phi_i^*\phi_iA_\mu A^\mu + \\
&+ i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i + gq_i\left(\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\psi_i\right)A_\mu + \sqrt{2}gq_i\phi_i^*\left(\lambda\psi_i\right) + \sqrt{2}gq_i\phi_i\left(\overline{\lambda}\,\overline{\psi}_i\right) - \\
&- gq_i\phi_i^*\phi_i D = \\
=& F_i^*F_i + \left(\partial_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_i - igq_iA^\mu\phi_i\right) + igq_iA_\mu\phi_i^*\left(\partial^\mu\phi_i - igq_iA^\mu\phi_i\right) + \\
&+ i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\left(\partial_\mu\psi_i - igq_iA_\mu\psi_i\right) + \sqrt{2}gq_i\phi_i^*\left(\lambda\psi_i\right) + \sqrt{2}gq_i\phi_i(\overline{\lambda\psi_i}) - gq_i\phi_i^*\phi_iD = \\
=& F_i^*F_i + \left(\partial_\mu\phi_i^* + igq_iA_\mu\phi_i^*\right)\left(\partial^\mu\phi_i - igq_iA^\mu\phi_i\right) + i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\left(\partial_\mu\psi_i - igq_iA_\mu\psi_i\right) + \\
&+ \sqrt{2}gq_i\phi_i^*\left(\lambda\psi_i\right) + \sqrt{2}gq_i\phi_i\left(\overline{\lambda}\,\overline{\psi}_i\right) - gq_i\phi_i^*\phi_iD \Rightarrow \\
\Rightarrow \left[\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D =& F_i^*F_i + \left(D_\mu\phi_i\right)^*\left(D^\mu\phi_i\right) + i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi_i + \sqrt{2}gq_i\phi_i^*\left(\lambda\psi_i\right) + \sqrt{2}gq_i\phi_i\left(\overline{\lambda}\,\overline{\psi}_i\right) - \\
&- gq_i\phi_i^*\phi_iD \qquad (6.4.52)
\end{aligned}$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου έχουμε εισάγει τις συναλλοίωτες παραγώγους

$$D_\mu\phi_i \equiv \partial_\mu\phi_i - igq_iA_\mu\phi_i,\ D_\mu\psi_i \equiv \partial_\mu\psi_i - igq_iA_\mu\psi_i \qquad (6.4.53)$$

Ισχύει ότι οι υπολογισμένοι στη βαθμίδα των Wess και Zumino $D-$όροι των διανυσματικών υπερπεδίων $\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i$ δεν είναι αναλλοίωτοι κάτω από έναν τυχαίο απειροστό Αβελιανό μετασχηματισμό υπερβαθμίδας, για τον οποίο έχουμε προσδιορίσει τις αντίστοιχες μεταβολές των πεδίων $\phi_i, \psi_i, F_i, A_\mu, \lambda$ και D (βλ. σχέσεις (6.4.38)-(6.4.40) και (5.6.28)-(5.6.30) με $\phi = \tilde{\phi}$), διότι η εκλογή της βαθμίδας των Wess και Zumino εν γένει δε διατηρείται κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό (με την έννοια ότι η δράση ενός τέτοιου μετασχηματισμού πάνω σε ένα διανυσματικό υπερπεδίο στη βαθμίδα των Wess και Zumino δίνει εν γένει ένα διανυσματικό υπερπεδίο που δεν είναι στη βαθμίδα των Wess και Zumino). Ωστόσο, τα $\left[\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D$ της (6.4.52) είναι αναλλοίωτα κάτω από τον απειροστό $U(1)$ μετασχηματισμό βαθμίδας[6]:

$$\delta_G\phi_i = igq_ia(x)\phi_i \qquad (6.4.54)$$

$$\delta_G\left(\psi_i\right)_\alpha = igq_ia(x)\left(\psi_i\right)_\alpha \qquad (6.4.55)$$

$$\delta_GF_i = igq_ia(x)F_i \qquad (6.4.56)$$

$$\delta_GA_\mu = \partial_\mu a(x) \qquad (6.4.57)$$

$$\delta_G\lambda_\alpha = 0 \qquad (6.4.58)$$

$$\delta_GD = 0 \qquad (6.4.59)$$

για οποιαδήποτε αδιάστατη πραγματική βαθμωτή συνάρτηση $a(x)$. Ο παραπάνω μετασχηματισμός ισοδυναμεί με έναν απειροστό Αβελιανό μετασχηματισμό υπερβαθμίδας που διατηρεί τη βαθμίδα των Wess και Zumino. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε την αναλλοιώτητα των $\left[\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D$ της

[5] Αγνοούμε την ολική παράγωγο, διότι έχει μηδενική συνεισφορά στη δράση για μία υπερσυμμετρική $U(1)$ θεωρία βαθμίδας.

[6] Ο δείκτης G στα σύμβολα για τις μεταβολές των πεδίων $\phi_i, \psi_i, F_i.A_\mu, \lambda$ και D προέρχεται από την αγγλική λέξη gauge (βαθμίδα)

(6.4.52) κάτω από το $U(1)$ μετασχηματισμό βαθμίδας (6.4.54)-(6.4.59). Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\delta_G \left[\Phi_i^* e^{-2gq_i V} \Phi_i\right]_D = \left(\delta_G F_i^*\right) F_i + F_i^* \delta_G F_i + \left[\delta_G \left(D_\mu \phi_i\right)^*\right] \left(D^\mu \phi_i\right) + \left(D_\mu \phi_i\right)^* \delta_G \left(D^\mu \phi_i\right) + \\
&+ i \left[\delta_G \left(\overline{\psi}_i\right)_{\dot{\alpha}}\right] \left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta} \left(D_\mu \psi_i\right)_\beta + i \left(\overline{\psi}_i\right)_{\dot{\alpha}} \left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta} \delta_G \left(D_\mu \psi_i\right)_\beta + \sqrt{2} g q_i \times \\
&\times \left[\left(\delta_G \phi_i^*\right) \left(\lambda \psi_i\right) + \phi_i^* \left(\delta_G \lambda^\alpha\right) \left(\psi_i\right)_\alpha + \phi_i^* \lambda^\alpha \delta_G \left(\psi_i\right)_\alpha + \left(\delta_G \phi_i\right) \left(\overline{\lambda}\, \overline{\psi}_i\right) + \right. \\
&\left. + \phi_i \left(\delta_G \overline{\lambda}_{\dot{\alpha}}\right) \left(\overline{\psi}_i\right)^{\dot{\alpha}} + \phi_i \overline{\lambda}_{\dot{\alpha}} \delta_G \left(\overline{\psi}_i\right)^{\dot{\alpha}}\right] - g q_i \left[\left(\delta_G \phi_i^*\right) \phi_i D + \phi_i^* \times \right. \\
&\left. \times \left(\delta_G \phi_i\right) D + \phi_i^* \phi_i \cancel{\delta_G D}\right] = \\
= &\left(\delta_G F_i\right)^* F_i + F_i^* \delta_G F_i + \delta_G \left(\partial_\mu \phi_i^* + i g q_i A_\mu \phi_i^*\right) \left(\partial^\mu \phi_i - i g q_i A^\mu \phi_i\right) + \\
&+ \left(\partial_\mu \phi_i^* + i g q_i A_\mu \phi_i^*\right) \delta_G \left(\partial^\mu \phi_i - i g q_i A^\mu \phi_i\right) + i \left[\delta_G \left(\psi_i\right)_\alpha\right]^* \left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta} \left[\partial_\mu \left(\psi_i\right)_\beta - \right. \\
&\left. - i g q_i A_\mu \left(\psi_i\right)_\beta\right] + i \left(\overline{\psi}_i\right)_{\dot{\alpha}} \left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta} \delta_G \left[\partial_\mu \left(\psi_i\right)_\beta - i g q_i A_\mu \left(\psi_i\right)_\beta\right] + \sqrt{2} g q_i \times \\
&\times \left[\left(\delta_G \phi_i\right)^* \left(\lambda \psi_i\right) + \phi_i^* \varepsilon^{\alpha\beta} \cancelto{0}{\left(\delta_G \lambda_\beta\right)} \left(\psi_i\right)_\alpha + \phi_i^* \lambda^\alpha \delta_G (\psi_i)_\alpha + \left(\delta_G \phi_i\right) \left(\overline{\lambda}\, \overline{\psi}_i\right) + \right. \\
&\left. + \phi_i \cancelto{0}{\left(\delta_G \lambda_\alpha\right)} \left(\overline{\psi}_i\right)^{\dot{\alpha}} + \phi_i \overline{\lambda}_{\dot{\alpha}} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left(\delta_G \left(\psi_i\right)_\beta\right)^*\right] - g q_i \left[\left(\delta_G \phi_i\right)^* \phi_i D + \right. \\
&\left. + \phi_i^* \left(\delta_G \phi_i\right) D\right] = \\
= &- \cancel{i g q_i a F_i^* F_i} + \cancel{i g q_i F_i^* a F_i} + \left\{\partial_\mu \left(\delta_G \phi_i^*\right) + i g q_i \left[\left(\delta_G A_\mu\right) \phi_i^* + \right.\right. \\
&\left.\left. + A_\mu \delta_G \phi_i^*\right]\right\} \left(\partial^\mu \phi_i - i g q_i A^\mu \phi_i\right) + \left(\partial_\mu \phi_i^* + i g q_i A_\mu \phi_i^*\right) \left\{\partial^\mu \left(\delta_G\right) \phi_i - \right. \\
&\left. - i g q_i \left[\left(\delta_G A^\mu\right) \phi_i + A^\mu \delta_G \phi_i\right]\right\} + i(-i) g q_i a \left(\overline{\psi}_i\right)_{\dot{\alpha}} \left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta} \left[\partial_\mu \left(\psi_i\right)_\beta - \right. \\
&\left. - g q_i A_\mu \left(\psi_i\right)_\beta\right] + i \left(\overline{\psi}_i\right)_{\dot{\alpha}} \left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta} \left\{\partial_\mu \left[\delta_G \left(\psi_i\right)_\beta\right] - i g q_i \left[\left(\delta_G A_\mu\right) \left(\psi_i\right)_\beta\right] + A_\mu \delta_G \left(\psi_i\right)_\beta\right\} + \\
&+ \sqrt{2} g q_i \left[- i g q_i a \phi_i^* \left(\lambda \psi_i\right) + i g q_i \phi_i^* a \lambda^\alpha \left(\psi_i\right)_\alpha + i g q_i a \phi_i \left(\overline{\lambda}\, \overline{\psi}_i\right) - \right. \\
&\left. - i g q_i \phi_i a \overline{\lambda}_{da} \varepsilon^{\dot{\alpha}\beta} \left(\overline{\psi}_i\right)_{\dot{\beta}}\right] - g q_i \left(- \cancel{i g q_i a \phi_i^* \phi_i D} + \cancel{i g q_i \phi_i^* a \phi_i D}\right) = \\
= &\left[- i g q_i \partial_\mu \left(a \phi_i^*\right) + i g q_i \left(\partial_\mu a\right) \phi_i^* + i g q_i A_\mu \left(- i g q_i a \phi_i^*\right)\right] \left(\partial^\mu \phi_i - i g q_i A^\mu \phi_i\right) + \\
&+ \left(\partial_\mu \phi_i^* + i g q_i A_\mu \phi_i^*\right) \left[i g q_i \partial^\mu \left(a \phi_i\right) - i g q_i \left(\partial^\mu a\right) \phi_i - i^2 g^2 q_i^2 A^\mu \phi_i\right] + \\
&+ g q_i a \left(\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i\right) - i g^2 q_i^2 a \left(\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \psi_i\right) A_\mu + i \left(\overline{\psi}_i\right)_\alpha \left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta} \left\{i g q_i \partial_\mu \left[a \left(\psi_i\right)_\beta\right] - \right. \\
&\left. - i g q_i \left[\left(\partial_\mu \alpha\right) \left(\psi_i\right)_\beta + i g q_i A_\mu \left(\psi_i\right)_\beta\right]\right\} + \sqrt{2} g q_i \left[- \cancel{i g q_i a \phi_i^* \left(\lambda \psi_i\right)} + i g q_i a \phi_i^* \left(\lambda \psi_i\right) + \right. \\
&\left. + \cancel{i g q_i a \phi_i \left(\overline{\lambda}\, \overline{\psi}_i\right)} - \cancel{i g q_i a \phi_i \overline{\lambda}_{\dot{\alpha}} \left(\overline{\psi}_i\right)^{\dot{\alpha}}}\right] = \\
= &\left[- \cancel{g q_i \left(\partial_\mu a\right) \phi_i^*} - i g q_i a \partial_\mu \phi_i^* + \cancel{i g q_i \left(\partial_\mu a\right) \phi_i^*} + g^2 q_i^2 a A_\mu \phi_i^*\right] \left(\partial^\mu \phi_i - i g q_i A^\mu \phi_i\right) + \\
&+ \left(\partial_\mu \phi_i^* + i g q_i A_\mu \phi_i^*\right) \left[\cancel{i g q_i \left(\partial^\mu a\right) \phi_i} + i g q_i a \partial^\mu \phi_i - \cancel{i g q_i \left(\partial^\mu a\right) \phi_i} + g^2 q_i^2 a A^\mu \phi_i\right] + \\
&+ g q_i a \left(\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i\right) - i g^2 q_i^2 a \left(\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \psi_i\right) A_\mu + i \left(\overline{\psi}_i\right)_{\dot{\alpha}} \left(\overline{\sigma}^\mu\right)^{\dot{\alpha}\beta} \left[\cancel{i g q_i \left(\partial_\mu a\right) \left(\psi_i\right)_\beta} + \right. \\
&\left. + i g q_i a \partial_\mu \left(\psi_i\right)_\beta - \cancel{i g q_i \left(\partial_\mu a\right) \left(\psi_i\right)_\beta} + g^2 q_i^2 a A_\mu \left(\psi_i\right)_\beta\right] \\
= &- \cancel{i g q_i a \left(\partial_\mu \phi_i^*\right) \left(\partial^\mu \phi_i\right)} - \cancel{g^2 q_i^2 a \phi_i A^\mu \partial_\mu \phi_i^*} + \cancel{g^2 q_i^2 a \phi_i^* A_\mu \partial^\mu \phi_i} - \cancel{i g^3 q_i^3 a \phi_i^* \phi_i A_\mu A^\mu} + \\
&+ \cancel{i g q_i a \left(\partial_\mu \phi_i^*\right) \left(\partial^\mu \phi_i\right)} + \cancel{g^2 q_i^2 a \phi_i A^\mu \partial_\mu \phi_i^*} - \cancel{g^2 q_i^2 a \phi_i^* A_\mu \partial^\mu \phi_i} + \cancel{i g^3 q_i^3 a \phi_i^* \phi_i A_\mu A^\mu} + \\
&+ \cancel{g q_i a \left(\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i\right)} - \cancel{i g^2 q_i^2 a \left(\overline{\psi} \overline{\sigma}^\mu \psi_i\right) A_\mu} - \cancel{g q_i a \left(\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i\right)} + \cancel{i g^2 q_i^2 a \left(\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \psi_i\right)} A_\mu = 0
\end{aligned}
$$

Επίσης, το γεγονός ότι έχουμε υιοθετήσει τη βαθμίδα των Wess και Zumino για τον προσδιορισμό των $\left[\Phi_i^* e^{-2gq_i V} \Phi_i\right]_D$ συνεπάγεται ότι τα χωροχρονικά ολοκληρώματα $\int d^4x \left[\Phi_i^* e^{-2gq_i V} \Phi_i\right]_D$, $i = 1, 2, \ldots, n$, (καθένα από τα οποία αποτελεί κομμάτι της δράσης για μία υπερσυμμετρική $U(1)$ θεωρία βαθμίδας), όπου οι ολοκληρωτέες ποσότητες δίνονται από την (6.4.52), δεν είναι αναλλοίωτα κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς - για τους οποίους οι αντίστοιχες μεταβολές των ϕ_i, ψ_i και F_i δίνονται από τις (5.5.16), (5.5.17) και (5.5.18) (με $\phi = \phi_i, \psi = \psi_i$ και $F = F_i$) ενώ οι μεταβολές των A_μ, λ και D δίνονται από τις (5.6.36), (5.6.37) και (5.6.38) αντίστοιχα, αφού έχουμε επιλέξει τη βαθμίδα των Wess και Zumino - διότι οι μετασχηματισμοί αυτοί δε διατηρούν την εκλογή της βαθμίδας των Wess και Zumino. Μπορούμε όμως να ορίσουμε ένα μετασχηματισμό που δρα στα μη μηδενικά πεδία στη βαθμίδα των Wess και Zumino, $\phi_i, \psi_i, F_i, A_\mu, \lambda$ και D, ο οποίος αποτελείται από έναν υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό ακολουθούμενο από έναν Αβελιανό μετασχηματισμό υπερβαθμίδας που μας επαναφέρει στη βαθμίδα των Wess και Zumino. Ο συνδυασμός αυτών των δύο μετασχηματισμών μεταβάλλει καθένα από τα $\left[\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D$ της (6.4.52) κατά μία ολική παράγωγο και είναι γνωστός ως μετασχηματισμός των de Wit-Freedman.

Θα προσδιορίσουμε τώρα τη μορφή ενός τέτοιου μετασχηματισμού. Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι για ένα διανυσματικό υπερπεδίο, V, το οποίο είναι στη βαθμίδα των Wess και Zumino, η μεταβολή του κάτω από έναν υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό που χαρακτηρίζεται από απειροστές παραμέτρους Grassmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$ ($\alpha = 1,2, \dot\alpha = \dot1, \dot2$), $\delta_\xi V$, δεν είναι στη βαθμίδα των Wess και Zumino, και προφανώς το ίδιο ισχύει και για το διανυσματικό υπερπεδίο $V' = V + \delta_\xi V$. Στην ενότητα 5.6 δείξαμε ότι υπάρχει ένα αδιάστατο chiral υπερπεδίο Λ_0, τέτοιο ώστε το διανυσματικό υπερπεδίο $V'' = V + \delta_\xi V + i\left(\Lambda_0 - \Lambda_0^*\right)$ να είναι στη βαθμίδα των Wess και Zumino και βρήκαμε ότι η απλούστερη επιλογή για το Λ_0 είναι:

$$\begin{aligned}\Lambda_0(x,\theta,\overline{\theta}) =&\phi_0(x) + \sqrt{2}\theta\psi_0(x) + (\theta\theta)F_0(x) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu\phi_0(x) - \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_0(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)\big(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\big)\partial_\mu\partial^\mu\phi_0(x)\end{aligned} \tag{6.4.60}$$

όπου

$$\phi_0 = 0,\ (\psi_0)_\alpha = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha A_\mu,\ F_0 = i\overline{\xi}\,\overline{\lambda} \tag{6.4.61}$$

Οι μεταβολές $\delta'_\xi\phi_i, \delta'_\xi\left(\psi_i\right)_\alpha, \delta'_\xi F_i$ των πεδίων-συνιστωσών $\phi_i, \left(\psi_i\right)_\alpha, F_i$ των chiral υπερπεδίων Φ_i αντίστοιχα κάτω από τον Αβελιανό μετασχηματισμό υπερβαθμίδας που χαρακτηρίζεται από το chiral υπερπεδίο Λ_0 της (6.4.60) μπορούν να προσδιοριστούν με εφαρμογή των γενικών σχέσεων (6.4.38)-(6.4.40) για $\tilde\phi = \phi_0$, $\tilde\psi_\alpha = (\psi_0)\,\alpha$ και $\tilde F = F_0$:

$$\delta'_\xi\phi_i = 2igq_i\phi_0\phi_i \overset{(6.4.61)}{=} 0 \tag{6.4.62}$$

$$\delta'_\xi\left(\psi_i\right)_\alpha = 2igq_i\left[\phi_0\left(\psi_i\right)_\alpha + \phi_i\left(\psi_0\right)_\alpha\right] \overset{(6.4.61)}{=} 2igq_i\phi_i\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha A_\mu\right] = -\sqrt{2}gq_i\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha A_\mu\phi_i \tag{6.4.63}$$

$$\begin{aligned}\delta'_\xi F_i =& 2igq_i\left[\phi_0 F_i + F_0\phi_i - (\psi_i)^\alpha(\psi_0)_\alpha\right] \overset{(6.4.61)}{=} 2igq_i\left(i\overline{\xi}\,\overline{\lambda}\right)\phi_i - 2igq_i\left(\psi_i\right)^\alpha\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha A_\mu\right] = \\ =& -2gq_i\phi_i\left(\overline{\xi}\,\overline{\lambda}\right) + \sqrt{2}gq_i\left(\psi_i\sigma^\mu\overline{\xi}\right)A_\mu = -\sqrt{2}gq_i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\psi_i\right)A_\mu - 2gq_i\phi_i\left(\overline{\xi}\,\overline{\lambda}\right)\end{aligned} \tag{6.4.64}$$

ενώ οι αντίστοιχες μεταβολές των μη μηδενικών πεδίων-συνιστωσών A_μ, λ και D του V είναι

$$\delta'_\xi A_\mu = \partial_\mu\left(\phi_0 + \phi_0^*\right) = 0,\ \delta'_\xi\lambda_\alpha = 0,\ \delta'_\xi D = 0 \tag{6.4.65}$$

αντίστοιχα (βλ. (5.6.28)-(5.6.30)).

Από την άλλη μεριά, οι μεταβολές των $\phi_i, \left(\psi_i\right)_\alpha$ και F_i κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό παραμετροποιούμενο από μεταβλητές Grasmmann ξ^α και $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\delta_\xi\phi_i = \sqrt{2}\xi\psi_i,\ \delta_\xi\left(\psi_i\right)_\alpha = \sqrt{2}\xi_\alpha F_i - i\sqrt{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\phi_i,\ \delta_\xi F_i = -i\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i \tag{6.4.66}$$

(βλ. (5.5.16)-(5.5.18)) και οι αντίστοιχες μεταβολές των A_μ, λ_α και D είναι:

$$\delta_\xi A_\mu = \xi\sigma_\mu\overline{\lambda} - \overline{\xi}\overline{\sigma}_\mu\lambda,\ \delta_\xi\lambda_\alpha = \xi_\alpha D - \frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right)_\alpha F_{\mu\nu},\ \delta_\xi D = -i\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda} + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda\right) \quad (6.4.67)$$

(βλ. (5.6.36)-(5.6.38)). Συνεπώς, οι μεταβολές των $\phi_i, (\psi_i)_\alpha, F_i, A_\mu, \lambda_\alpha$ και D κάτω από έναν υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό ακολουθούμενο από τον αντίστοιχο Αβελιανό μετασχηματισμό υπερβαθμίδας που μας επαναφέρει στη βαθμίδα των Wess και Zumino είναι:

$$\tilde{\delta}_\xi\phi_i \equiv \left(\delta_\xi + \delta'_\xi\right)\phi_i = \delta_\xi\phi_i + \delta'_\xi\phi_i = \sqrt{2}\xi\psi_i \quad (6.4.68)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_\xi\left(\psi_i\right)_\alpha &= \left(\delta_\xi + \delta'_\xi\right)\left(\psi_i\right)_\alpha = \sqrt{2}\xi_\alpha F_i - i\sqrt{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\partial_\mu\phi_i - \sqrt{2}gq_i\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_a A_\mu\phi_i = \\ &=\sqrt{2}\xi_\alpha F_i - i\sqrt{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha\left(\partial_\mu\phi_i - igq_iA_\mu\phi_i\right) = \sqrt{2}\xi_\alpha F_i - i\sqrt{2}\left(\sigma^\mu\overline{\xi}\right)_\alpha D_\mu\phi_i \end{aligned} \quad (6.4.69)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_\xi F_i &= \left(\delta_\xi + \delta'_\xi\right)F_i = -i\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \sqrt{2}gq_i\left(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\psi_i\right)A_\mu - 2gq_i\phi_i\left(\overline{\xi}\ \overline{\lambda}\right) = \\ &= -\ i\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\left(\partial_\mu\psi_i - igq_iA_\mu\psi_i\right) - 2gq_i\phi_i\left(\overline{\xi}\ \overline{\lambda}\right) = -i\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi_i - 2gq_i\phi_i\left(\overline{\xi}\ \overline{\lambda}\right)\end{aligned} \quad (6.4.70)$$

$$\tilde{\delta}_\xi A_\mu = \left(\delta_\xi + \delta'_\xi\right)A_\mu = \xi\sigma_\mu\overline{\lambda} - \overline{\xi}\overline{\sigma}_\mu\lambda \quad (6.4.71)$$

$$\tilde{\delta}_\xi\lambda_\alpha = \left(\delta_\xi + \delta'_\xi\right)\lambda_\alpha = \xi_\alpha D - \frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi\right)_\alpha F_{\mu\nu} \quad (6.4.72)$$

$$\tilde{\delta}_\xi D = \left(\delta_\xi + \delta'_\xi\right)D = -i\left(\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda} + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda\right) \quad (6.4.73)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι καθεμία από τις υπολογισμένες στη βαθμίδα των Wess και Zumino ποσότητες $\left[\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D$ μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από το μετασχηματισμό (6.4.68)-(6.4.73).

Επιπλέον, μπορούμε να εισάγουμε και όρους αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στις chiral supermultiplets (ϕ_i, ψ_i, F_i), στις οποίες αντιστοιχούν τα υπερπεδία Φ_i:

$$\left[W\left(\Phi_i\right)\right]_F + c.c. = \left[\frac{1}{2}M_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{6}y_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right]_F + c.c. \quad (6.4.74)$$

όπου τα M_{ij} είναι σταθερές με διάσταση μάζας 1 συμμετρικές ως προς i, j και τα y_{ijk} είναι αδιάστατες σταθερές πλήρως συμμετρικές ως προς i, j, k, ενώ στο δεύτερο μέλος της (6.4.74) υποννοείται άθροιση ως προς i, j και k από 1 έως n. Πρέπει βέβαια να απαιτήσουμε το υπερδυναμικό W στην (6.4.74) να είναι αναλλοίωτο κάτω από Αβελιανούς μετασχηματισμούς υπερβαθμίδας - κάτω από τους οποίους τα Φ_i μετασχηματίζονται όπως υποδεικνύει η (6.4.32) - δηλαδή να ισχύει:

$$\begin{aligned}&W\left(\Phi_i\right) = W\left(\Phi'_i\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow&\frac{1}{2}M_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{6}y_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k = \frac{1}{2}M_{ij}\Phi'_i\Phi'_j + \frac{1}{6}y_{ijk}\Phi'_i\Phi'_j\Phi'_k \overset{(6.4.32)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow&\frac{1}{2}M_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{6}y_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k = \frac{1}{2}M_{ij}e^{2ig(q_i+q_j)\Lambda}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{6}y_{ijk}e^{2ig(q_i+q_j+q_k)\Lambda}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\end{aligned} \quad (6.4.75)$$

για οποιοδήποτε αδιάστατο chiral υπερπεδίο Λ. Για να ικανοποιείται η τελευταία σχέση, πρέπει

$$M_{ij} = 0 \text{ εάν } q_i + q_j \neq 0 \quad (6.4.76)$$

$$y_{ijk} = 0 \text{ εάν } q_i + q_j + q_k \neq 0 \quad (6.4.77)$$

για κάθε $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$

Με βάση όλα τα παραπάνω, η πλήρης Lagrangian για μία υπερσυμμετρική $U(1)$ θεωρία βαθμίδας, η οποία περιλαμβάνει πεδία ύλης συζευγμένα μεταξύ τους και με μία $U(1)$ συμμετρία βαθμίδας και εμπλέκει μία παράμετρο Fayet-Iliopoulos κ, έχει την ακόλουθη μορφή (στη βαθμίδα των Wess και Zumino):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \sum_{i=1}^{n} \left[\Phi_i^* e^{-2gq_iV}\Phi_i\right]_D + \left([W(\Phi_i)]_F + c.c.\right) + \frac{1}{4}\left([W^\alpha W_\alpha]_F + c.c.\right) - 2\kappa\,[V]_D = \\ =& \sum_{i=1}^{n} \Big[F_i^* F_i + (D_\mu\phi_i)^* (D^\mu\phi_i) + i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi_i + \sqrt{2}gq_i\phi_i^*(\lambda\psi_i) + \sqrt{2}gq_i\phi_i\left(\overline{\lambda}\,\overline{\psi}_i\right) - \\ & -gq_i\phi_i^*\phi_i D] + \left\{\left[\left(M_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k\right)F_i - \frac{1}{2}\left(M_{ij} + y_{ijk}\phi_k\right)\psi_i\psi_j\right] + c.c.\right\} + \\ & + \frac{1}{2}D^2 + i\overline{\lambda}\,\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \kappa D \end{aligned} \tag{6.4.78}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (6.4.52), (6.3.11), (6.4.10) και (6.4.31) και έχουμε παραλείψει κάποιες ολικές παραγώγους, ενώ για τις συμμετρικές ως προς i, j σταθερές M_{ij} και τις πλήρως συμμετρικές ως i, j, k σταθερές y_{ijk} ισχύουν οι σχέσεις (6.4.76) και (6.4.77). Η τελευταία Lagrangian είναι αναλλοίωτη κάτω από το $U(1)$ μετασχηματισμό βαθμίδας (6.4.54)-(6.4.59) και μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο κάτω από τον τροποποιημένο υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (6.4.68)-(6.4.73), οπότε η αντίστοιχη δράση, $\int d^4x\mathcal{L}$, είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό.

Θα κλείσουμε την ενότητα αυτή προσδιορίζοντας το βαθμωτό δυναμικό για τη θεωρία που περιγράφεται από τη Lagrangian (6.4.78). Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει πρώτα να διώξουμε τα πεδία F_i και D, τα οποία είναι βοηθητικά, αφού δεν υπάρχουν κινητικοί όροι γι' αυτά, χρησιμοποιώντας τις κλασσικές εξισώσεις κίνησης που αντιστοιχούν στα πεδία αυτά. Οι όροι της Lagrangian (6.4.78) που περιέχουν το πεδίο D είναι

$$\mathcal{L}_{\mathrm{D}} = -g\left(\sum_i q_i\phi_i^*\phi_i\right)D + \frac{1}{2}D^2 - \kappa D \tag{6.4.79}$$

Επομένως, η εξίσωση Euler-Lagrange για το D είναι

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{D}}}{\partial D} = \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{D}}}{\partial(\partial_\mu D)}\right]}_{\substack{\parallel \\ 0}} \overset{(6.4.79)}{\Rightarrow} -g\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i^*\phi_i + D - \kappa = 0 \Rightarrow D = \kappa + g\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i^*\phi_i \tag{6.4.80}$$

Επίσης, το κομμάτι της $\mathcal{L}$ της (6.4.78) που περιέχει τα βοηθητικά πεδία F_i είναι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{F}} =& \sum_{i=1}^{n} F_i^*F_i + \left[\left(M_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k\right)F_i + c.c.\right] = \\ =& F_i^*F_i + \left(M_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k\right)F_i + \left(M_{ij}^*\phi_j^* + \frac{1}{2}y_{ijk}^*\phi_j^*\phi_k^*\right)F_i^* \end{aligned} \tag{6.4.81}$$

και οι εξισώσεις Euler-Lagrange για τα F_i και F_i^* είναι αντίστοιχα οι:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{F}}}{\partial F_i} = \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{F}}}{\partial(\partial_\mu F_i)}\right]}_{\substack{\parallel \\ 0}} \Rightarrow F_i^* + M_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k = 0 \Rightarrow F_i^* = -M_{ij}\phi_j - \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k \tag{6.4.82}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{F}}}{\partial F_i^*} = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{F}}}{\partial(\partial_\mu F_i^*)}\right] \Rightarrow F_i + M_{ij}^*\phi_j^* + \frac{1}{2}y_{ijk}^*\phi_j^*\phi_k^* = 0 \Rightarrow F_i = -M_{ij}^*\phi_j^* - \frac{1}{2}y_{ijk}^*\phi_j^*\phi_k^* \tag{6.4.83}$$

Με αντικατάσταση των (6.4.80), (6.4.82), (6.4.83) στη Lagrangian της (6.4.78), η τελευταία γίνεται:

$$\mathcal{L}' = \left(-M_{ij}\phi_j - \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k\right)\left(-M_{ij}^*\phi_j^* - \frac{1}{2}y_{ijk}^*\phi_j^*\phi_k^*\right) + \sum_{i=1}^{n}\left[(D_\mu\phi_i)^*(D^\mu\phi_i) + \right.$$

$$+i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi_i + \sqrt{2}gq_i\phi_i^*\left(\lambda\psi_i\right) + \sqrt{2}gq_i\phi_i\left(\overline{\lambda}\;\overline{\psi}_i\right)\Big] - g\left(\sum_{i=1}^n q_i\phi_i^*\phi_i\right)\times$$

$$\times\left(\kappa + g\sum_{j=1}^n q_j\phi_j^*\phi_j\right) - \left[\left(M_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k\right)\left(M_{ij}^*\phi_j^* + \frac{1}{2}y_{ijk}^*\phi_j^*\phi_k^*\right) + c.c.\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(M_{ij} + y_{ijk}\phi_k\right)\psi_i\psi_j + c.c.\right] + \frac{1}{2}\left(\kappa + g\sum_{i=1}^n q_i\phi_i^*\phi_i\right)^2 + i\overline{\lambda}\;\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda -$$

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \kappa\left(\kappa + g\sum_{i=1}^n q_i\phi_i^*\phi_i\right) =$$

$$=\sum_{i=1}^n\Big[\left(D_\mu\phi_i\right)^*\left(D^\mu\phi_i\right) + i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi_i + \sqrt{2}gq_i\phi_i^*\left(\lambda\psi_i\right) + \sqrt{2}gq_i\phi_i\left(\overline{\lambda}\;\overline{\psi}_i\right)\Big] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(M_{ij} + y_{ijk}\phi_k\right)\psi_i\psi_j + c.c.\right] + i\overline{\lambda}\;\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \left(M_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k\right)\times$$

$$\times\left(M_{ij}^*\phi_j^* + \frac{1}{2}y_{ijk}^*\phi_j^*\phi_k^*\right) - \frac{1}{2}\left(\kappa + g\sum_{i=1}^n q_i\phi_i^*\phi_i\right)\left(\kappa + g\sum_{j=1}^n q_j\phi_j^*\phi_j\right) =$$

$$=\sum_{i=1}^n\Big[\left(D_\mu\phi_i\right)^*\left(D^\mu\phi_i\right) + i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi_i + \sqrt{2}gq_i\phi_i^*\left(\lambda\psi_i\right) + \sqrt{2}gq_i\phi_i\left(\overline{\lambda}\;\overline{\psi}_i\right)\Big] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(M_{ij} + y_{ijk}\phi_k\right)\psi_i\psi_j + c.c.\right] + i\overline{\lambda}\;\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} -$$

$$-\left[\sum_{i=1}^n\left|M_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\kappa + g\sum_{i=1}^n q_i\phi_i^*\phi_i\right)^2\right]$$

Άρα, το βαθμωτό δυναμικό είναι

$$V = \sum_{i=1}^n\left|M_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\kappa + g\sum_{i=1}^n q_i\phi_i^*\phi_i\right)^2 \geq 0 \qquad (6.4.84)$$

Βιβλιογραφία

[1] A. Lahiri and P. B. Pal, *"A First Book of Quantum Field Theory", Second Edition*, Narosa Publishing House, 2004

[2] M. Srednicki, *"Quantum Field Theory"*, Cambridge University Press, 2007

[3] S. Weinberg, *"The Quantum Theory of Fields. Volume 1: Foundations"*, Cambridge University Press, 1995

[4] K. Huang, *"Quantum Field Theory.From Operators to Path Integrals", Second Edition*, Wiley-VCH, 2010

[5] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *"An Introduction to Quantum Field Theory"*, Perseus Book Publishing, 1995

[6] M. D. Schwartz, *"Quantum Field Theory and the Standerd Model"*, Cambridge University Press, 2014

[7] H. J. Müller-Kirsten and A. Wiedemann, *"Introduction to Supersymmetry, Second Edition"*, World Scientific, 2010

[8] H. K. Deiner, H. E. Haber and S. P. Martin, *"Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry"*, `hep-ph/0812.1594v5` (2010)

[9] H. K. Dreiner, H. E. Haber and S. P. Martin, *"Supersymmetry"*, 2004

[10] I. L. Buchbinder and S. M. Kuzenko, *"Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or A Walk Through Superspace", Revised Edition*, IOP Publishing, 1998

[11] P. Tanedo, *"Fun and supersymmetry... but mostly the latter"*, Institute for High Energy Phenomenology, Newman Laboratory of Elementary Particle Physics, Cornell University, USA, 2010

[12] D. Bailin and A. Love, *"Supersymmetric Gauge Filed Theory and String Theory"*, IOP Publishing, 1994

[13] P. P. Srivastava, *"Supersymmetry, Superfields and Supergravity: An Introduction"*, IOP Publishing, 1986

[14] P. Binétruy, *"Supersymmetry: Theory, Experiment and Cosmology"*, Oxford University Press, 2006

[15] J. Wess and J. Bagger, *"Supersymmetry and Supergravity", Second Edition*, Princeton University Press, 1992

[16] S. P. Martin, *"A Supersymmetry Primer"*, `hep-ph/9709356v7` (2016)

[17] A. Singer, *"ABC of SUSY"*, `hep-ph/0905.4630v1` (2009)

[18] A. Bilal, *"Introduction to Supersymmetry"*, hep-th/0101055v1 (2001)

[19] C. Sämann, *"Introduction to Supersymmetry"*, Notes by Anton Ilderton, 2009

[20] J. Terning, *"Modern Supersymmetry: Dynamics and Duality"*, Oxford University Press, 2006

[21] S. Krippendorf, F. Quevedo and O. Schlotterer, *"Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions"*, hep-th/1011.1491v1 (2010)

[22] S. K. Soni and S. Singh, *"Supersymmetry: Basics and Concepts"*, Narosa Publishing House, 2000

[23] M. F. Sohnius, *"Introducing Supersymmetry"*, Physics Reports 128, 39 (1985)

[24] S. Weinberg, *"The Quantum Theory of Fields. Volume 3: Supersymmetry"*, Cambridge University Press, 2005

[25] I. J. R. Aitchison, *"Supersymmetry and the MSSM: An Elementary Introduction"*, hep-ph/0505105v1 (2005)

[26] J. D. Lykken, *"Introduction to Supersymmetry"*, hep-th/9612114v1 (1996)

[27] M. Bertolini, *"Lectures on Supersymmetry"*, SISSA, 2016

[28] S. Coleman and J. Mandula, *"All Possible Symmetries of the S-Matrix"*, Phys. Rev. 159, 1251 (1967)

[29] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. F. Sohnius, *"All Possible Generators of Supersymmetries of the S-Matrix"*, Nucl. Phys. B88, 257 (1975)

[30] J. Wess and B. Zumino, *"Supergauge Transformations in Four Dimensions"*, Nucl. Phys. B70, 39 (1974)

[31] J. Wess and B. Zumino, *"A Lagrangian Model Invariant under Supergauge Transformations"*, Phys. Lett. 49B, 52 (1974)

[32] A. Salam and J. Strathdee, *"Supergauge Transformations"*, Nucl. Phys. B76, 477 (1974)

[33] S. Ferrara, J. Wess and B. Zumino, *"Supergauge Multiplets and Superfields"*, Phys. Lett. 51B, 239 (1974)

[34] www.wikipedia.org

[35] B. C. Allanach and F. Quevedo, *"Supersymmetry"*, University of Cambridge, 2016

[36] J. Alwall, *"Supersymmetry and Extensions of the Standard Model"*, Master of Science thesis, Uppsala, 2001

[37] Σ. Λ. Τραχανάς, *"Κβαντομηχανική ΙΙ"*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013

[38] F. A. Berezin, *"The Method of Second Quantization"*, Academic Press, 1966