



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
ΕΔΑΦΟΥΣ-ΘΕΜΕΛΙΟΥ**

ΕΛΕΝΗ Γ. ΠΡΟΞΕΝΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΒΗΣΣΑΡΙΩΝ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2017

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την εκπλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω κάποιους ανθρώπους που με στήριξαν και συνέβαλαν ουσιαστικά στην προσπάθειά μου να φέρω εις πέρας την παρούσα εργασία.

Κατ' αρχήν, θα ήθελα να εκφράσω την αμέριστη ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέποντα της παρούσας εργασίας κ. Παπαδόπουλο Βησσαρίωνα, Αναπληρωτή Καθηγητή της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Θέλω να τον ευχαριστήσω θερμά για την πρόθυμη και πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε, την ηθική υποστήριξη και την επιστημονική καθοδήγησή του, καθώς επίσης και για την απaráμιλλη διάθεσή που επέδειξε και τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσε για τη διεκπεραίωση αυτής της εργασίας. Πρόκειται για ένα ξεχωριστό άνθρωπο και επιστήμονα που θα αποτελέσει για μένα πρότυπο στη μετέπειτα ζωή μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Καλογερή Ιωάννη καθώς και τον διδάκτορα κ. Μανιταρά Θεόφιλο-Ιωάννη για τις πολύτιμες συμβουλές και το χρόνο που μου αφιέρωσαν κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Τέλος, ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στους γονείς μου, την αδερφή μου και όλους τους ανθρώπους που μου συμπαραστάθηκαν με κάθε δυνατό τρόπο στη μέχρι τώρα πορεία μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται η μελέτη του φαινομένου της δυναμικής αλληλεπίδρασης εδαφικού ημιχώρου και θεμελίου με στοχαστική ανάλυση του εδάφους χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξέλιξης πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Evolution Method-PDEM) για συστήματα στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων και συγκρίνοντας τα αποτελέσματά της με τη μέθοδο Monte Carlo (Monte Carlo Simulation-MCS), η οποία θεωρείται ως μέθοδος αναφοράς. Το αριθμητικό προσομοίωμα που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε με τη βοήθεια του λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS και της γλώσσας προγραμματισμού Matlab.

Επειδή η Ελλάδα, όπως είναι γνωστό, ανήκει σε μια ευρύτερη περιοχή ιδιαίτερα υψηλής σεισμικής επικινδυνότητας είναι κίνητρο να μελετήσουμε το πώς και πόσο επηρεάζουν τα χαρακτηριστικά του εδάφους την απόκριση ενός θεμελίου ή μιας κατασκευής γενικότερα που υπόκειται σε μια σεισμική διέγερση. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό σαν αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής (Soil-Structure interaction-SSI) και αποτελεί ένα θέμα που έχει απασχολήσει ιδιαίτερα τη διεθνή και ελληνική επιστημονική κοινότητα. Ο συνδυασμός του δε με την εισαγωγή αβεβαιοτήτων στο πρόβλημα (στοχαστική ανάλυση) αποτελεί καινοτομία στον τομέα του Πολιτικού Μηχανικού διότι περιγράφει το πραγματικό φαινόμενο με πιο επαρκή τρόπο και δίνει τη δυνατότητα πληρέστερης και ρεαλιστικότερης μελέτης της συμπεριφοράς των κατασκευών. Είναι λοιπόν αδήριτη η ανάγκη έρευνας του φαινομένου SSI με στοχαστικά μοντέλα για την ενσωμάτωση των αποτελεσμάτων του στους σύγχρονους Κανονισμούς.

Στόχος της εργασίας είναι η εις βάθος περιγραφή, μελέτη και κατανόηση του προβλήματος αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής μέσω μίας ενδελεχούς έρευνας στο θέμα αυτό καθώς και η ανάπτυξη ενός μοντέλου άρτιου, γρήγορου (μικρό υπολογιστικό κόστος) και ακριβούς που θα αποτελέσει βάση για τη στοχαστική ανάλυση του SSI σε πρακτικό επίπεδο.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια γενική περιγραφή για την αναγκαιότητα των στοχαστικών αναλύσεων και της μελέτης του φαινομένου αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής και παρατίθεται ακόμη μια εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση του υπό μελέτη προβλήματος προκειμένου όποιος επιθυμεί μελλοντικά να ασχοληθεί με το

φαινόμενο αυτό να έχει εύκολα πρόσβαση στο απαραίτητο επιστημονικό υλικό. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό και μαθηματικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για τη μελέτη του προβλήματος που εξετάζουμε από στοχαστικής σκοπιάς καθώς και η περιγραφή των βασικών εννοιών της θεωρίας των πιθανοτήτων, των μεθόδων προσομοίωσης στοχαστικών πεδίων και των μεθόδων στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων. Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στο πρόβλημα SSI και πιο συγκεκριμένα περιλαμβάνει την περιγραφή των ειδών των σεισμικών κυμάτων, των απορροφητικών συνόρων καθώς και του αριθμητικού προσομοιώματος. Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο καταγράφονται συγκεντρωτικά τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε στην παρούσα εργασία από τη μελέτη των αποτελεσμάτων και προτροπή για μελλοντική έρευνα.

ABSTRACT

In this work the dynamic interaction between a foundation and the half space is studied. This is achieved through stochastic analysis for the soil using the Probability Density Evolution Method (PDEM), for finite element stochastic systems. Results are compared with Monte Carlo Simulation (MCS) which is considered to be the reference method. The numerical model used in this work has been developed through the ABAQUS Finite Element code and by using the Matlab programming language.

Greece resides in a region of significant seismic hazard. This has motivated the study of how and to what extent soil properties influence the response of a foundation, or a structure in general, under seismic loads. This phenomenon is known as Soil Structure Interaction (SSI) and is an area of active contemporary research. Combining SSI with uncertainties (stochastic analysis) consists a novel approach in Civil Engineering because it represents the actual phenomenon in the best possible way. It is thus imperative to research SSI stochastically, so as to accommodate the results in modern structural codes.

The scope of this work is to study and understand the problem of soil structure interaction in depth, through a systematic research and to develop a fast and exact model, which will be the basis for the stochastic analysis of SSI problems in practice.

In the first chapter, a general description of the necessity of stochastic processes is presented. In addition, the phenomenon of soil structure interaction is analysed and an extensive bibliography review takes place, so as to facilitate the reader who wants to come in contact with this research area. In the second chapter the theoretical and mathematical background, necessary for stating the problem in a stochastic framework, is presented. Basic concepts of probability theory, methods to simulate stochastic fields and stochastic finite element method are analysed. The third chapter states the SSI problem and provides the description of the seismic waves, the viscous boundaries and the numerical model. Finally, in the fourth chapter results are presented and the concluding remarks are documented as well as suggestions for future research.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	9
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ	10
1.2 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΕΔΑΦΟΥΣ-ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ	15
2. ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ	21
2.1 ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ.....	22
2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	22
2.3 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΔΙΑ	25
2.4 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ.....	28
2.5 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΟΝΤΕ CARLO (ΜΟΝΤΕ CARLO SIMULATION - MCS)	34
2.6 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (PROBABILITY DENSITY EVOLUTION METHOD - PDEM).....	37
3. ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΕΔΑΦΟΥΣ-ΘΕΜΕΛΙΟΥ	47
3.1 ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ	48
3.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ	49
3.3 ΤΟ ΑΝΑΛΟΓΟ ΤΟΥ ΙΞΩΔΟΥΣ ΑΠΟΣΒΕΣΤΗΡΑ.....	50
3.4 ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΑ ΣΥΝΟΡΑ.....	52
3.5 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ.	53
3.6 ΙΞΩΔΗ ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΑ ΣΥΝΟΡΑ LYSMER ΚΑΙ KUHLEMEYER.....	56
3.7 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ	60
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	71
4.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	72
4.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	90
4.3 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ	91

1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η στοχαστική διερεύνηση της απόκρισης ενός μεμονωμένου θεμελίου, εδραζόμενο σε εδαφικό ημίχωρο, εξαιτίας σεισμικών κυμάτων. Οι αριθμητικές αναλύσεις της απόκρισης του θεμελίου και της συμπεριφοράς του ημιχώρου γίνονται με τη βοήθεια του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS [1]. Προγραμματίστηκε επίσης σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab [2], η διαδικασία για τη συνεχή αυτόματη εκτέλεση μεγάλου πλήθους αναλύσεων τόσο για τη μέθοδο PDEM όσο και για τη μέθοδο Monte Carlo. Στο επόμενο εδάφιο θα παρουσιαστούν τα γενικά θεωρητικά στοιχεία για τις στοχαστικές και πιθανοτικές μεθόδους και θα τεκμηριωθεί η αναγκαιότητά τους έναντι των αιτιοκρατικών αναλύσεων.

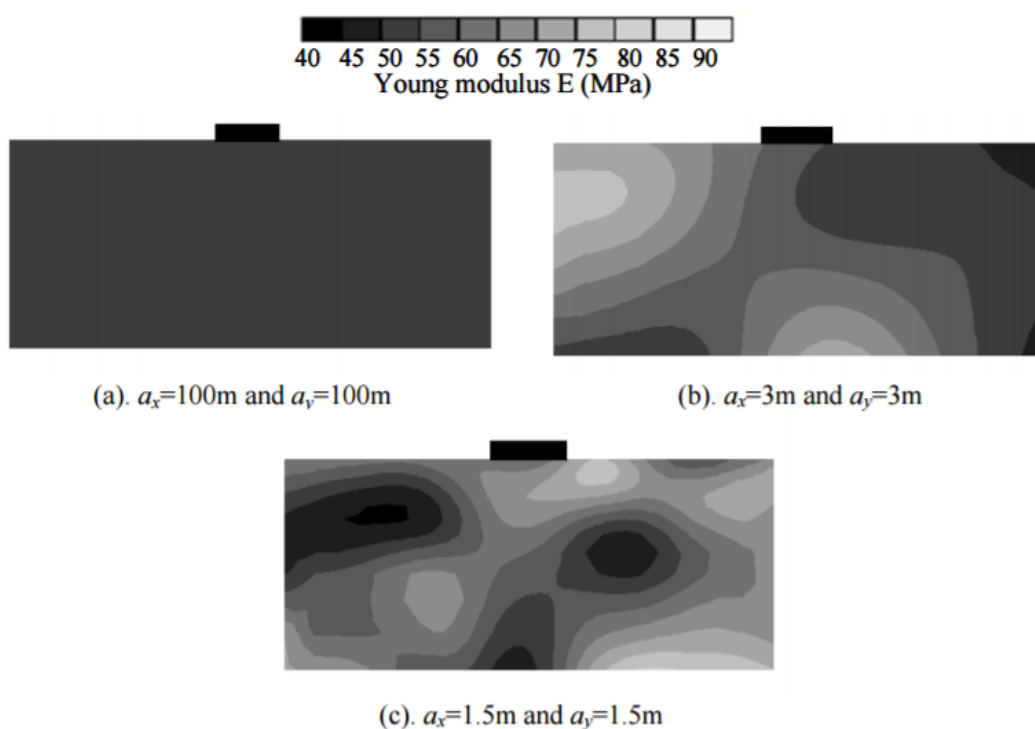
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ

ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Ένα σημαντικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων συνεχούς μέσου είναι οι αριθμητικές μέθοδοι (numerical methods). Πρωτεύουσα θέση στις αριθμητικές μεθόδους έχει η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Analysis) εξαιτίας της ικανότητάς της να αναπαράγει με ακρίβεια τα φυσικά φαινόμενα καθώς και της ευρείας διάδοσής της. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, το συνεχές πρόβλημα, που συνήθως περιγράφεται από μερικές διαφορικές εξισώσεις και συνοριακές συνθήκες, προσεγγίζεται από προσεγγιστικές τιμές που αποτελούν τη λύση αλγεβρικών εξισώσεων. Για την εύρεση της λύσης το πρόβλημα υποδιαιρείται σε μικρότερα, απλούστερα μέρη τα οποία ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία και η λύση παρέχεται σε διακριτά σημεία (τους κόμβους των πεπερασμένων στοιχείων).

Η σύγχρονη τάση στην ανάλυση προβλημάτων της επιστήμης του μηχανικού έγκειται συνήθως στην αύξηση της ακρίβειας του αριθμητικού προσομοιώματος. Επικρατεί δηλαδή η άποψη ότι, όσο πιο λεπτομερές είναι το προσομοίωμα, με πυκνότερο δίκτυο διακριτοποίησης ή με πεπερασμένα στοιχεία ανώτερης τάξης, τόσο περισσότερο ανταποκρίνεται στην πραγματική συμπεριφορά του φυσικού προβλήματος. Για αυτό το λόγο είναι συνήθης πρακτική κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού, να γίνονται αναλύσεις με συνεχώς μεγαλύτερη διακριτοποίηση, μέχρι την επίτευξη σύγκλισης.

Τα αποτελέσματα όμως των αναλύσεων κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού δεν ανταποκρίνονται πάντα με ακρίβεια στις μεταγενέστερες πειραματικές μετρήσεις. Όσο λεπτομερής και αν είναι η προσομοίωση και η ανάλυση, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων βασίζεται σε παραδοχές που ενδέχεται να είναι ελλιπείς ή εσφαλμένες. Για παράδειγμα μπορεί η ανάλυση να γίνεται με βάση την παραδοχή μικρών παραμορφώσεων ενώ στα πειραματικά αποτελέσματα να εμφανίζονται μεγάλες παραμορφώσεις. Επίσης στις συνήθεις αναλύσεις το μέτρο ελαστικότητας για παράδειγμα, λαμβάνει μια σταθερή τιμή. Όμως στην πραγματικότητα η τιμή αυτή μπορεί να διαφέρει από τη θεωρητικά υπολογισμένη καθώς και να αυξομειώνεται στον όγκο του υλικού (Εικόνα 1).



Εικόνα 1: Μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας σε εδαφικό ημίχωρο για διάφορες τιμές του μήκους συσχέτισης [3].

Φυσικά όσο πιο λεπτομερές είναι το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων τόσο ελαττώνεται το σφάλμα διακριτοποίησης και ο αλγόριθμος συγκλίνει. Όμως η ύπαρξη και άλλων παραμέτρων που ενδέχεται να οδηγούν σε ασυμφωνίες μεταξύ των προβλέψεων και των μετρήσεων (πείραμα) δεν λαμβάνεται συνήθως υπόψη. Αυτό συμβαίνει για τους εξής λόγους:

1. Το εξιδανικευμένο αριθμητικό προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων δεν απεικονίζει με ακρίβεια την πραγματική συμπεριφορά του φορέα (μη γραμμικά φαινόμενα αλληλεπίδρασης, ευκαμπσίες κόμβων, συνοριακές συνθήκες).
2. Οι πειραματικές μετρήσεις υπόκεινται σε ανεξέλεγκτα τυχαία φαινόμενα και θόρυβο των μετρητικών οργάνων τα οποία εμποδίζουν την αναπαραγωγή και επιβεβαίωση όλων των μετρήσεων.
3. Οι παράμετροι που χαρακτηρίζουν την κατασκευή είναι συνήθως αβέβαιες και δεν μπορούν να αναπαρασταθούν από μία σταθερή τιμή για όλο τον όγκο της κατασκευής (μέτρο ελαστικότητας, γεωμετρικές ατέλειες, στατικά και δυναμικά φορτία).

Άρα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ακόμη και ένα λεπτομερέστατο προσομοίωμα πεπερασμένων στοιχείων δεν μπορεί να εγγυηθεί την αύξηση της αξιοπιστίας της ανάλυσης. Αντίθετα, για την αύξηση της αξιοπιστίας και την ανάλυση της πραγματικής συμπεριφοράς των κατασκευών, είναι ιδιαίτερα σημαντική η προσομοίωση των τυχαίων φαινομένων που επηρεάζουν την απόκριση τους και των τυχαίων τιμών που έχουν οι ιδιότητες του υλικού. Φυσικά ένα αξιόπιστο αριθμητικό προσομοίωμα είναι απαραίτητο ανεξάρτητα από τη μέθοδο που θα επιλεγεί για την ανάλυση της τυχαιότητας. Και αυτό γιατί σε κάθε περίπτωση, είτε στοχαστικά είτε αιτιοκρατικά, το προσομοίωμα πρέπει να λύνει με ικανοποιητική ακρίβεια το φυσικό πρόβλημα (verification), καθώς και να λύνει το σωστό πρόβλημα (validation). Η στοχαστική ανάλυση, στην ευρεία έννοια, αφορά στον άμεσο χειρισμό αβέβαιων παραμέτρων, η αβεβαιότητα των οποίων δεν λαμβάνεται υπόψη στις συμβατικές νομοτελειακά καθορισμένες προσδιοριστικές (deterministic) θεωρήσεις.

ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Το αντίκτυπο των αβεβαιοτήτων στη διαδικασία σχεδιασμού των κατασκευών στο αντικείμενο του Πολιτικού Μηχανικού είναι ένας σημαντικός τομέας με συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον προς τη μελέτη του. Οι περισσότεροι κώδικες σύγχρονου σχεδιασμού βασίζονται σε συντελεστές ασφαλείας. Ουσιαστικά δηλώνουν πόσες φορές μεγαλύτερη πρέπει να είναι η αντοχή μιας κατασκευής ή ενός δομικού μέλους, από αυτή που χρειάζεται να είναι, για τα συνηθισμένα φορτία. Οι συντελεστές αυτοί, προσπαθούν να συμπεριλάβουν τις αβεβαιότητες με έναν ευθύ τρόπο αυξάνοντας ουσιαστικά τις αντοχές των κατασκευών. Αν και αυτός είναι ένας τρόπος

αντιμετώπισης της τυχαιότητας, δεν μπορεί να συμπεριλάβει επαρκώς, με τη χρήση ενός μόνο αριθμού, το πλήθος των ενδεχόμενων υπερβάσεων, έκτακτων καταστάσεων ή και αλλοιώσεων (degradation and deterioration) που ενδέχεται να αντιμετωπίσει μία κατασκευή κατά τη διάρκεια ζωής της. Επίσης, παρά το γεγονός ότι σε ορισμένες συνθήκες περιπτώσεις υπάρχουν τα δεδομένα για την κατάλληλη πρόβλεψη των φορτίων μιας κατασκευής (πχ φορτία πλακών σε κατοικίες) αυτό δεν είναι εφικτό σε σύνθετα ή ασυνήθη έργα (πχ πρόβλεψη φορτίων ανέμου σε υπεράκτιες ανεμογεννήτριες). Η εισαγωγή της στοχαστικής προσομοίωσης των αβεβαιοτήτων:

- στη φόρτιση
- τη γεωμετρία
- και τις ιδιότητες του υλικού

γίνεται όλο και πιο ελκυστική γιατί οδηγεί σε περισσότερο ορθολογικούς υπολογισμούς με στόχο την ασφάλεια, την αξιοπιστία και την οικονομία των κατασκευών.

Τέτοια έργα είναι δυνατόν να μελετηθούν καλύτερα από στοχαστικά μοντέλα, τα οποία μπορούν να προβλέψουν πιθανολογικά τα διάφορα δυνατά αποτελέσματα και αποκρίσεις της κατασκευής. Με άλλα λόγια τα στοχαστικά μοντέλα προβλέπουν με κάποια αβεβαιότητα την έκβαση του φαινομένου. Η αβεβαιότητα αυτή μπορεί να μετρηθεί μεθοδολογικά από τη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Η αβεβαιότητα αναφέρεται στην έκβαση ενός φαινομένου υπό εξέλιξη. Εάν ένα φαινόμενο που εξελίσσεται μπορεί να οδηγήσει σε δύο ή περισσότερα αποτελέσματα, το φαινόμενο είναι στοχαστικό και τα αποτελέσματα λέγεται ότι είναι αβέβαια. Έτσι, σε ένα πείραμα τύχης, όπως για παράδειγμα ρίχνοντας ένα ζάρι ή νόμισμα, το αποτέλεσμα είναι ίσως αδύνατο να προβλεφθεί από πριν, αλλά η πιθανότητα να έρθει κάποιο αποτέλεσμα μπορεί να προβλεφθεί με σχετικά μεγάλη ακρίβεια.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, όταν αναφερόμαστε σε πείραμα τύχης μπορεί να εννοούμε και ένα πείραμα σε συνθήκες εργαστηρίου (πχ μέτρηση αντοχής δοκιμίου σκυροδέματος) το οποίο μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Για ένα πείραμα τύχης, το μόνο που χρειάζεται είναι να προσδιορισθούν ακριβώς όλα τα πιθανά αποτελέσματα.

Αρκετές πιθανοτικές μέθοδοι έχουν προταθεί στο παρελθόν, με την απλούστερη όλων να είναι εκείνη στην οποία οι αβεβαιότητες περιγράφονται από ένα σύνολο συσχετισμένων τυχαιών μεταβλητών, όπου κάθε τυχαία μεταβλητή

αναπαριστά ιδιότητα υλικού, συντελεστή φόρτισης ή γεωμετρική παράμετρο. Σε αρκετές όμως εφαρμογές, η περιγραφή αυτή κρίνεται ανεπαρκής λόγω του γεγονότος ότι αρκετές φυσικές ποσότητες που συσχετίζονται με το πρόβλημα ενδέχεται να μεταβάλλονται τυχαία είτε στο χρόνο είτε στο χώρο. Η πιθανοτική περιγραφή τέτοιων ποσοτήτων απαιτεί τη χρησιμοποίηση της θεωρίας των στοχαστικών πεδίων. Αυτή η προσέγγιση είναι γνωστή ως στοχαστική ανάλυση των κατασκευών.

Η ανάλυση των συστημάτων με αβέβαιες παραμέτρους που προσομοιώνονται με τη χρήση στοχαστικών πεδίων έχει γίνει το αντικείμενο εκτενούς μελέτης τις τελευταίες δύο δεκαετίες. Το ερευνητικό ενδιαφέρον επικεντρώθηκε στην ανάπτυξη ποικίλων μεθοδολογιών στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων για την αριθμητική επίλυση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (stochastic differential equations-sde's) που συμπεριλαμβάνονται σε αυτά τα προβλήματα. Οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι είναι οι μη διεισδυτικές μέθοδοι Monte Carlo (non-intrusive Monte Carlo methods) [4,5,6] και οι διεισδυτικές φασματικές μέθοδοι στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων τύπου Galerkin (intrusive Galerkin-based spectral stochastic finite element methods-SSFEM) [7,8]. Οι μη διεισδυτικές μέθοδοι δειγματίζουν (sample) τις sde's σε ένα σύνολο σημείων στον τυχαίο χώρο οδηγώντας σε ένα αντίστοιχο σύνολο ανεξάρτητων ντετερμινιστικών προβλημάτων. Από την άλλη, στις μεθόδους τύπου Galerkin, η απόκριση του συστήματος καλύπτεται από ένα σύνολο πολυωνύμων των βασικών τυχαίων μεταβλητών.

Η προσομοίωση Monte Carlo (Monte Carlo Simulation-MCS) είναι η πιο ευέλικτη μέθοδος στοχαστικών αναλύσεων γιατί μπορεί να εφαρμοστεί σε όλους τους τύπους προβλημάτων. Είναι πολύ συνήθης η χρήση της για την επαλήθευση άλλων μεθόδων, χρησιμοποιείται δηλαδή σαν μέθοδος αναφοράς και ακόμη λόγω της ακρίβειας που παρέχει μπορεί να αντικαταστήσει την αναλυτική λύση του εκάστοτε προβλήματος. Έχει το μειονέκτημα, όμως, ότι προκειμένου να επιτύχει υψηλά ποσοστά ακρίβειας απαιτείται μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Προκειμένου να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος της MCS έχουν προταθεί προσαρμοσμένες μεθοδολογίες λύσεων προκειμένου να επιλυθούν επαναλαμβανόμενα τα γειτονικά συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων που απαιτούνται [9,10,4,11].

Οι SSFEM απαιτούν την επίλυση ενός αυξημένου συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων σε σχέση με την αντίστοιχη ντετερμινιστική, η οποία μπορεί να γίνει πολύ χρονοβόρα λόγω της αυξημένης μνήμης και των υπολογιστικών πόρων που απαιτεί. Αυτή η αύξηση των διαστάσεων των μητρώων, το οποίο πρέπει να αντιστραφεί οδηγεί

σε δυσανάλογη αύξηση του υπολογιστικού κόστους σε περιπτώσεις μεγάλων διακυμάνσεων και μη Γκαουσιανών πεδίων και ιδίως σε πραγματικά προβλήματα με πολύ μεγάλο αριθμό βαθμών ελευθερίας.

Οι Li and Chen [12] εισήγαγαν μια νέα μέθοδο σαν εναλλακτική στις παραπάνω, στην προσπάθεια να άρουν τα μειονεκτήματά τους, γνωστή με την ονομασία μέθοδος εξέλιξης πυκνότητας πιθανότητας (probability density evolution method-PDEM). Η PDEM μπορεί να εφαρμοσθεί επιτυχώς σε γραμμικά και μη-γραμμικά, στατικά και δυναμικά στοχαστικά προβλήματα. Είναι βασισμένη στην αρχή διατήρησης της πιθανότητας και κατά μία έννοια εισάγει μια καινοτομία στην επίλυση στοχαστικών εξισώσεων με τη διατήρηση ροής της πιθανότητας στο υπό μελέτη πρόβλημα.

Στην PDEM η στοχαστική διαφορική εξίσωση προέρχεται από την οπτική τυχαίων γεγονότων (random event perspective) [13]. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται μια γενικευμένη εξίσωση εξέλιξης πιθανότητας (generalized density evolution equation-GDEE), η οποία μειώνεται σε μια μονοδιάστατη μερική διαφορική εξίσωση που είναι αριθμητικά επιλύσιμη. Ένα μεγάλο πλεονέκτημα της PDEM είναι ότι μπορεί να κατορθώσει υψηλά επίπεδα ακρίβειας ανεξάρτητα από το υπό μελέτη πρόβλημα και τις τυχαίες παραμέτρους που συμπεριλαμβάνονται σε αυτό με την απαίτηση σχετικά μικρού αριθμού επανάληψης των ντετερμινιστικών αναλύσεων συγκριτικά με τη μέθοδο Monte Carlo.

Οι Papadopoulos and Kalogiris [14] ασχολήθηκαν μεταγενέστερα με τη μέθοδο αυτή διατυπώνοντάς τη για γενικά στοχαστικά συστήματα πεπερασμένων στοιχείων και εξετάζοντας εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης βασισμένες σε μεθόδους Galerkin. Τέλος, οι Manitaras, Papadopoulos and Papadrakakis [15] μελέτησαν τη διάδοση κυμάτων σε εδάφη με τη χρήση συναρτήσεων διακύμανσης απόκρισης (variability response functions-VRF).

1.2 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΕΔΑΦΟΥΣ – ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Η δυναμική ανάλυση του εδάφους αποτελεί τμήμα της Γεωτεχνικής Μηχανικής, η οποία αποτελεί έναν από τους ποικίλους κλάδους του Πολιτικού Μηχανικού. Έχει ως αντικείμενό της τη συμπεριφορά των εδαφικών υλικών και μαζών

υπό την επίδραση δυναμικών φορτίων. Τα δυναμικά φορτία είναι τα φορτία που μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου και ο ρυθμός μεταβολής τους είναι τόσο γρήγορος που αναπτύσσονται αδρανειακές δυνάμεις που δε μπορούν να αγνοηθούν. Η δυναμική των κατασκευών έχει ως αντικείμενο τον προσδιορισμό της απόκρισης και των εντατικών μεγεθών μιας κατασκευής, στην οποία επιβάλλονται δυναμικά φορτία. Η ανάλυση της δυναμικής αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής συνδέει αυτούς τους δύο σημαντικούς κλάδους της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού.

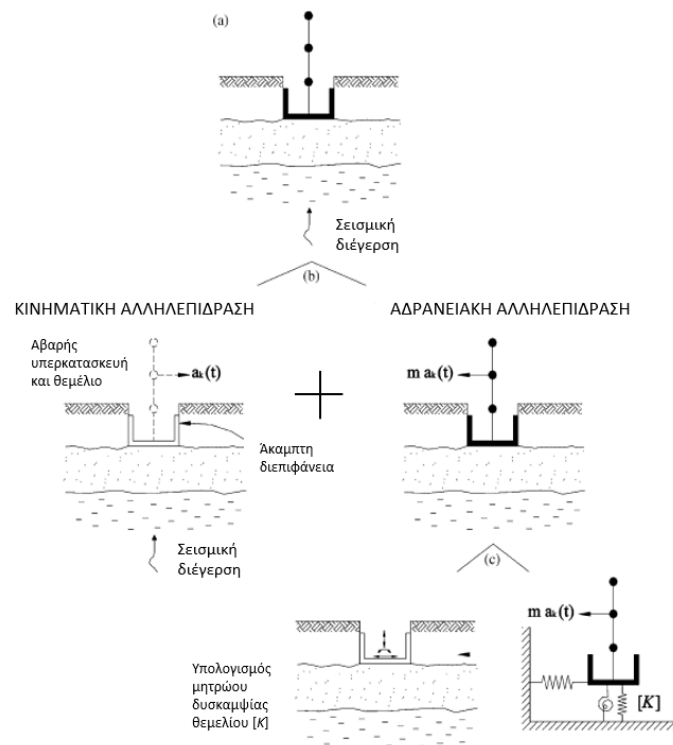
Τα περισσότερα έργα στο αντικείμενο του Πολιτικού Μηχανικού περιλαμβάνουν κάποιο είδος κατασκευής, το οποίο έχει άμεση επαφή με το έδαφος. Όταν ενεργούν σε αυτά τα συστήματα εξωτερικές φορτίσεις, όπως ο σεισμός ή δυναμικά φορτία γενικότερα, οι μετατοπίσεις της κατασκευής και του εδάφους δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το φαινόμενο στο οποίο η απόκριση του εδάφους επηρεάζει την κίνηση της κατασκευής και η κίνηση της κατασκευής επηρεάζει την απόκριση του εδάφους ονομάζεται αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής (Soil - Structure Interaction, SSI). Μια εναλλακτική περιγραφή του φαινομένου είναι η ακόλουθη. Όταν τα σεισμικά κύματα προσκρούουν σε ένα εκτεταμένο θεμέλιο που έχει δυσκαμψία πολύ υψηλότερη από του περιβάλλοντος εδάφους, το θεμέλιο δε μπορεί να «φιλοξενήσει» τη χωρική μεταβολή της κίνησης και ως εκ τούτου η κίνηση του ελεύθερου πεδίου (free-field) διαστρεβλώνεται από την επίδραση των κυμάτων που διασκορπίζονται από το θεμέλιο καθώς και εκείνων που δημιουργούνται από τη διέγερση του. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής. Η αλληλεπίδραση αυτή του εδάφους, της θεμελίωσης και της ανωδομής μπορεί να έχει μεγαλύτερο ή μικρότερο ρόλο στη συνολική απόκριση του συστήματος ανάλογα με τη σχετική δυσκαμψία και μάζα του εδάφους, της θεμελίωσης και της κατασκευής.

Το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής/θεμελίου έχει αποκτήσει μεγάλο ενδιαφέρον στην έρευνα του Πολιτικού Μηχανικού με πολλές μεθόδους και τρόπους προσέγγισης να έχουν διατυπωθεί τις τελευταίες δεκαετίες. Η υπόθεση ότι ο ημιχώρος είναι ένα βαθύ ομοιογενές μέσο, που συναντιέται στο μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας, είναι μία εξιδανίκευση του πραγματικού εδαφικού προφίλ. Τα χαρακτηριστικά του εδαφικού μέσου ποικίλλουν. Μπορεί να είναι ελαστικό ή ιξωδοελαστικό, ομοιογενές ή ανομοιογενές, ενιαίο ή στρωματομένο, να εκτείνεται στο άπειρο ή να περιορίζεται από βραχώδες υπόστρωμα. Είναι αναμενόμενο ότι ακόμη και σε μικρά βάθη μπορεί να υπάρχει βραχώμαζα ή έδαφος με διαφορετικές ιδιότητες από αυτές της επιφάνειας. Σε πολλές περιπτώσεις η δυναμική

απόκριση της κατασκευής επηρεάζεται σημαντικά από το έδαφος στο οποίο αυτή εδράζεται. Ένα ομοιογενές έδαφος για παράδειγμα προκαλεί φαινόμενα απόσβεσης εξαιτίας της ακτινοβολίας των κυμάτων στο άπειρο (wave radiation), ενώ στην αντίθετη περίπτωση το ανομοιογενές έδαφος κοντά στη θεμελίωση οδηγεί σε κυματικές ανακλάσεις (wave reflections), οι οποίες ενδέχεται να μεταβάλλουν σημαντικά τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Ακόμη, οι μορφές ταλάντωσης επηρεάζονται διαφορετικά από την ύπαρξη εδαφικού στρώματος με άλλες ιδιότητες σε μικρό βάθος. Πιο συγκεκριμένα, οι οριζόντιες και κατακόρυφες μορφές ταλάντωσης επηρεάζονται σημαντικά από τη διαστρωμάτωση του εδάφους ενώ οι λικνιστικές και στρεπτικές επηρεάζονται λιγότερο.

Ιστορικά, για πρώτη φορά ο Lamb [16] μελέτησε το πρόβλημα της απόκρισης του εδαφικού ημιχώρου υπό αρμονική φόρτιση μέσω ενός παλλόμενου φορτίου που επιβάλλεται σε μια άκαμπτη κυκλική πλάκα. Ο Reissner [17] καθιέρωσε τη θεωρητική βάση για μελέτη της απόκρισης ενός θεμελίου που εδράζεται σε έναν ελαστικό ημιχώρο, κάνοντας την παραδοχή ότι η κατανομή των τάσεων στη διεπιφάνεια εδάφους-θεμελίου είναι ίδια για δυναμική και στατική φόρτιση ανεξάρτητα της συχνότητας διέγερσης. Πιο πρόσφατα, οι Mylonakis, Nikolaou and Gazetas [18] ανέλυσαν το φαινόμενο SSI με την αποσύνθεσή (decomposition) του σε κινηματική και αδρανειακή αλληλεπίδραση. Κατά τη διάρκεια της σεισμικής διέγερσης το έδαφος παραμορφώνεται λόγω προσπιπτόντων σεισμικών κυμάτων και μεταφέρει στο θεμέλιο και την κατασκευή την κίνηση αυτή. Η κίνηση που προκαλείται στην κατασκευή «γεννά» αδρανειακές δυνάμεις που οδηγούν στην ανάπτυξη τάσεων στο θεμέλιο που μεταδίδονται μέσα στο έδαφος θεμελίωσης. Έτσι, αναπτύσσονται στο έδαφος παραμορφώσεις που προκαλούνται από την υπερκείμενη κατασκευή, ενώ επιπρόσθετα κύματα προέρχονται από τη διεπιφάνεια του εδάφους. Σε απάντηση, το θεμέλιο και η κατασκευή υφίστανται περαιτέρω δυναμικές μετακινήσεις, οι οποίες δημιουργούν περαιτέρω δυνάμεις αδράνειας και ούτω καθεξής. Τα φαινόμενα αυτά συμβαίνουν ταυτόχρονα και είναι γνωστά ως κινηματική αλληλεπίδραση (kinematic interaction - KI) και αδρανειακή αλληλεπίδραση (inertial interaction - II). Η απόκριση του συστήματος εδάφους-θεμελίου-κατασκευής λαμβάνεται σαν υπέρθεση των αποτελεσμάτων αυτών των δύο. Η κινηματική αλληλεπίδραση αναφέρεται στην επιρροή των προσπιπτόντων σεισμικών κυμάτων στο σύστημα της Εικόνας 2 (b), το οποίο αποτελείται ουσιαστικά από το θεμέλιο, το εδαφικό μέσο και την βαρή κατασκευή. Το κύριο αποτέλεσμα της KI είναι ότι εισάγεται μια κίνηση στο θεμέλιο,

η οποία είναι διαφορετική από την κίνηση του ελεύθερου πεδίου του εδάφους. Η αδρανειακή αλληλεπίδραση αναφέρεται στην απόκριση του πλήρους συστήματος εδάφους-θεμελίου-κατασκευής λόγω της διέγερσης που προκαλείται από τις δυνάμεις D' Alembert, οι οποίες σχετίζονται με την επιτάχυνση της κατασκευής λόγω της ΚΙ. Η Π μπορεί να αναλυθεί σε δύο στάδια, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2 (c), με υπολογισμό του μητρώου δυναμικής δυσκαμψίας του θεμελίου και στη συνέχεια της απόκρισης του συνολικού συστήματος.



Εικόνα 2: (a) Γεωμετρία του προβλήματος αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής, (b) Χωρισμός σε κινηματική και αδρανειακή αλληλεπίδραση, (c) Ανάλυση της αδρανειακής αλληλεπίδρασης σε 2 βήματα – διακριτό προσομοίωμα. [18]

Ο Lysmer [19] εισήγαγε ένα μονοβάθμιο ταλαντωτή με μάζα-ελατήριο-αποσβεστήρα με συχνότητα εξαρτώμενη από τους συντελεστές δυσκαμψίας και απόσβεσης. Για την απόκριση σε χαμηλές και μεσαίες συχνότητες πρότεινε τη χρήση συντελεστών ανεξάρτητων της συχνότητας. Οι Richart και Whitman [20] επέκτειναν την προσέγγιση του Lysmer λέγοντας ότι όλοι οι τρόποι ταλάντωσης μπορούν να μελετηθούν μέσω συστημάτων μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα έχοντας επιλέξει παραμέτρους ανεξάρτητους της συχνότητας. Οι Richart etc. [21] παρουσίασαν

εκφράσεις για τις προαναφερθείσες παραμέτρους για όλες τις μορφές της διέγερσης, κατακόρυφη, οριζόντια, λικνιστική και στρεπτική. Οι Wong και Lucio [22], ολοκληρώνοντας τη λύση του Lamb [16], εισήγαγαν μια προσεγγιστική αριθμητική μέθοδο, βάσει της οποίας υπολόγισαν την απόκριση υπό την επίδραση αρμονικής φόρτισης της επιφάνειας ενός άκαμπτου και αβαρούς θεμελίου αυθαίρετου σχήματος πάνω στον ελαστικό ημιχώρο διακριτοποιώντας τη διεπιφάνεια εδάφους-θεμελίου σε ορθογωνικά στοιχεία. Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση της οριζόντιας, κατακόρυφης και λικνιστικής δυναμικής ευκαμψίας ενός άκαμπτου ορθογωνικού θεμελίου και την κατακόρυφη ευκαμψία ενός άκαμπτου τετραγωνικού θεμελίου με εσωτερική τρύπα.

Μια άλλη μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη προβλημάτων αλληλεπίδρασης είναι η Μέθοδος Συνοριακών Συνθηκών (ΜΣΣ). Η ΜΣΣ εφαρμόστηκε στη διάθλαση σεισμικών κυμάτων από θεμέλια από τον Dominguez [23], ο οποίος μελέτησε την απόκριση τρισδιάστατων επιφανειακών και εγκιβωτισμένων θεμελίων λαμβάνοντας υπόψιν προσπίπτοντα κύματα SH, SV και P σε ομογενές ιξωδοελαστικό έδαφος. Οι Karabalis etc. [24] μελέτησαν την απόκριση θεμελίων σε κύματα διάδοσης χρησιμοποιώντας την ΜΣΣ στο πεδίο του χρόνου και θεωρώντας ομοιογενές ελαστικό έδαφος. Ακόμη, οι Dominguez and Abascal [25] μελέτησαν τη σεισμική απόκριση θεμελίων σε ανομοιογενή ιξωδοελαστικά εδάφη.

Η πιο διαδεδομένη μέθοδος, όμως, για τη μελέτη του φαινομένου αλληλεπίδρασης εδάφους-θεμελίου είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ). Είναι ικανή για το χειρισμό προβλημάτων περίπλοκης γεωμετρίας. Στη ΜΠΣ η επέκταση του εδάφους στο άπειρο κατά την οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση αναπαρίσταται από πεπερασμένα όρια. Όμως, ένα τέτοιο πεπερασμένο μοντέλο παγιδεύει την ενέργεια των κυμάτων που δημιουργείται από την κίνηση του θεμελίου εντός των συνόρων. Αυτές οι ανακλάσεις κυμάτων από τα όρια διαστρεβλώνουν τα δυναμικά χαρακτηριστικά του μοντέλου και έτσι αλλοιώνεται το πραγματικό σύστημα. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή απορροφητικών συνόρων προκειμένου να ληφθεί υπόψιν η ακτινοβολία της ενέργειας. Οι Lysmer and Kuhlemeyer [26] εισήγαγαν τα ιξώδη σύνορα, τα οποία πρέπει να τοποθετούνται σε κάποια απόσταση από το θεμέλιο και μελέτησαν στο άρθρο τους τη δυναμική απόκριση ενός αβαρούς, άκαμπτου, κυκλικού θεμελίου που εδράζεται σε ένα ομοιογενή ελαστικό ημιεπίπεδο, θεωρώντας απόκριση μόνο για την κατακόρυφη αρμονική διέγερση. Επιπρόσθετα, οι Lysmer and Waas [27], Kausel [28], και Tassoulas etc. [29] ανέπτυξαν

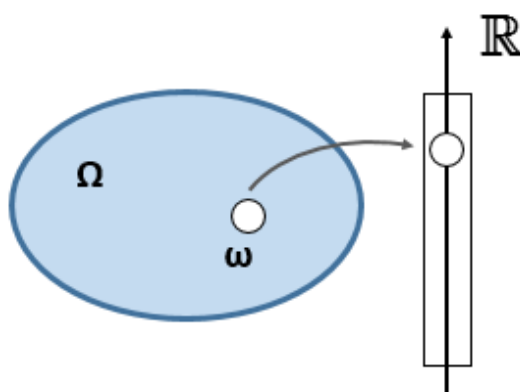
τα συμβατά σύνορα (ή σύνορα οριζοντίου κύματος) για την απορρόφηση κυρίως επιφανειακών κυμάτων Rayleigh και Love. Τα σύνορα αυτά κατασκευάζονται με τη βοήθεια ενός συνοριακού μητρώου δυναμικής δυσκαμψίας, το οποίο είναι συνάρτηση της συχνότητας και προκύπτει από τη λύση ενός προβλήματος διάδοσης κυμάτων σε ένα ελαστικό στρωσιγενές εδαφικό χωρίο. Τα συμβατά σύνορα είναι αποτελεσματικά ακόμα και όταν τοποθετούνται κοντά στα δύο άκρα της θεμελίωσης σε αντίθεση με υπόλοιπα μοντέλα απορροφητικών συνόρων που χρειάζεται να τοποθετούνται σε απόσταση από το θεμέλιο. Ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης των ανεπιθύμητων κυματικών ανακλάσεων είναι η χρήση των στοιχείων απείρου που κατασκευάζονται βάσει συναρτήσεων σχήματος (Chow and Smith [30], Zhao and Valliappan [31]). Τα στοιχεία απείρου μπορούν να αντιμετωπίσουν την ύπαρξη πολλών τύπων κύματος.

2

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ

2.1 ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Μια τυχαία μεταβλητή (random variable) $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα δειγματοχώρο Ω , δηλαδή το χώρο όλων των πιθανών εξαγόμενων ω ενός τυχαίου πειράματος, έτσι ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x να μπορεί να οριστεί η πιθανότητα $P[\omega : X(\omega) \leq x]$ (Εικόνα 3). Με πιο απλά λόγια, μια τυχαία μεταβλητή είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια αριθμητική τιμή κάθε πιθανό αποτέλεσμα ενός πιθανοτικού πειράματος. Οι τυχαίες μεταβλητές μπορεί να είναι διακριτές ή συνεχείς. Διακριτές είναι οι μεταβλητές που το σύνολο των δυνατών τιμών τους είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο και συνεχείς αυτές που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε αριθμητική τιμή σε ένα ορισμένο διάστημα.



Εικόνα 3: Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

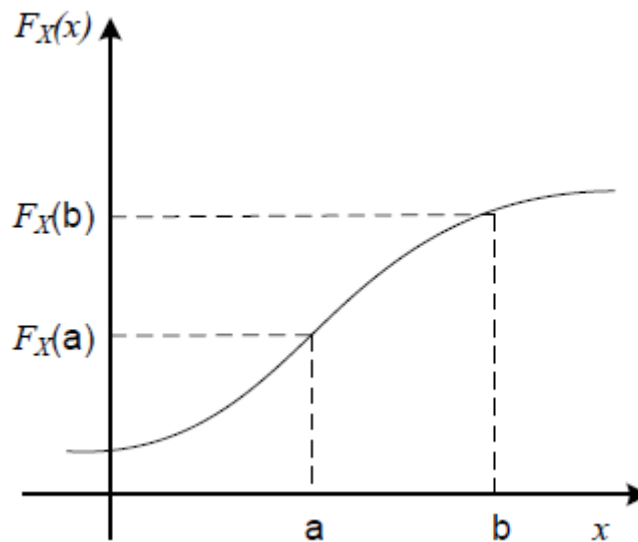
ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION - CDF)

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ περιγράφει την πιθανότητα μια τυχαία μεταβλητή X να πάρει μια τιμή μικρότερη ή ίση από έναν αριθμό x .

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega, -\infty \leq X(\omega) \leq x\}) \quad (1)$$

Μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Εικόνα 4) έχει τις εξής ιδιότητες :

- Είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- Εάν $a \leq b$ τότε $F_X(a) \leq F_X(b)$
- Για κάθε $\varepsilon > 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_X(a + \varepsilon) = \lim_{a \rightarrow \infty} F_X(a^+)$
- $P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$



Εικόνα 4: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής (cdf)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (PROBABILITY DENSITY FUNCTION-PDF)

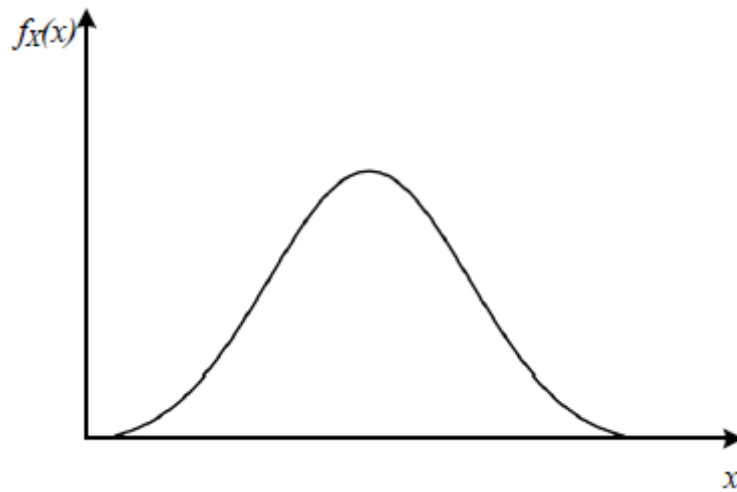
Αν η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής είναι συνεχώς διαφορίσιμη, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται ως η παράγωγος της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \Rightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2)$$

Μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Εικόνα 5) έχει τις εξής ιδιότητες :

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

- $\int_{-\infty}^x f_X(x) dx = F_X(x)$

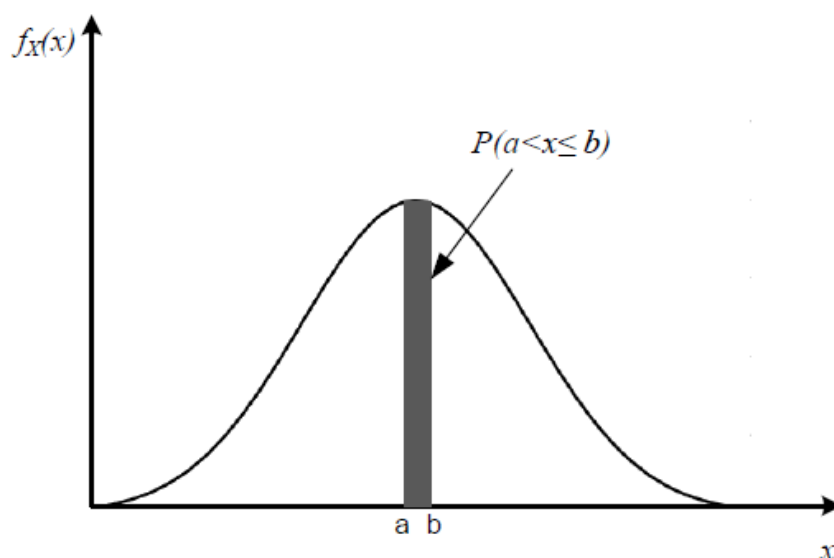


Εικόνα 5: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf)

Αντιστρόφως, αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις τρεις παραπάνω σχέσεις, τότε ορίζει ένα μέτρο πιθανότητας σύμφωνα με :

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (3)$$

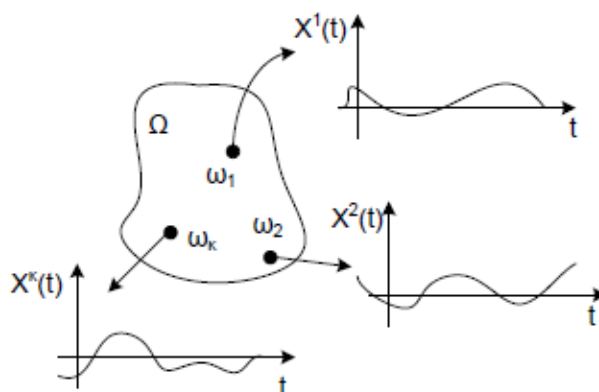
Η πιθανότητα είναι ισοδύναμη με την περιοχή κάτω από τη συνάρτηση πιθανότητας αλλά πάνω από τον οριζόντιο άξονα και μεταξύ της χαμηλότερης και της υψηλότερης τιμής της περιοχής (Εικόνα 6).



Εικόνα 6: Η πιθανότητα $P(a < x \leq b)$ υπολογίζεται από τη γραμμοσκιασμένη περιοχή της PDF μεταξύ των a και b

2.3 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΔΙΑ

Αρχικά θα ορίσουμε τη στοχαστική διαδικασία (Εικόνα 7). Κάθε συνάρτηση, μιας ή περισσότερων μεταβλητών, της οποίας οι τιμές είναι τυχαίες μεταβλητές, ονομάζεται στοχαστική διαδικασία. Η διαφορά των στοχαστικών διαδικασιών από τις γνωστές από τα μαθηματικά συναρτήσεις έγκειται στο ότι οι πρώτες αποτελούνται από ένα σύνολο δειγματοσυναρτήσεων και δεν παριστάνουν μονοσήμαντες απεικονίσεις. Παραδείγματα τυπικών στοχαστικών διαδικασιών είναι η διατομή ενός δομικού στοιχείου, η φόρτιση μιας κατασκευής, οι τοπικές και καθολικές ατέλειες ενός μέλους κ.α. Οι στοχαστικές διαδικασίες, όπως και οι μεμονωμένες τυχαίες μεταβλητές, διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς. Η στοχαστική διαδικασία (stochastic/random process) αναφέρεται στη χρονική μεταβολή (t) και το στοχαστικό πεδίο (stochastic/random field) στη χωρική ή μεταβολή θέσης (x).



Εικόνα 7: Ορισμός στοχαστικής διαδικασίας

Η στοχαστική διαδικασία περιγράφεται από τη μέση τιμή και από τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισής της (autocorrelation function).

Η μέση τιμή μιας στοχαστικής διαδικασίας $X(t)$ ορίζεται από τη γνωστή σχέση:

$$\mu_x(t) = E[X(t)] \quad (4)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας στοχαστικής διαδικασίας $X(t)$ ορίζεται ως:

$$R_x(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (5)$$

Περιγράφει, δηλαδή, τη συσχέτιση μεταξύ τιμών της στοχαστικής διαδικασίας σε διαφορετικές χρονικές στιγμές σαν συνάρτηση των δύο αυτών τιμών ή της χρονικής υστέρησης.

Για $t_1 = t_2 = t$, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης γράφεται:

$$R_X(t, t) = E[X^2(t)] \quad (6)$$

που είναι η μέση τετραγωνική τιμή της στοχαστικής διαδικασίας στη θέση t .

Οι στοχαστικές διαδικασίες που ακολουθούν την κανονική κατανομή (διαδικασίες Gauss) περιγράφονται πλήρως από τη μέση τιμή και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισής τους. Έχουν επίσης τη χρήσιμη ιδιότητα ότι μπορούν να αναλυθούν σε άθροισμα μιας διαδικασίας με μηδενική μέση τιμή (zero mean) και της συνάρτησης μέσης τιμής της. Η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης (autocovariance function) μιας στοχαστικής διαδικασίας $X(t)$ ορίζεται ως:

$$C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} \quad (7)$$

Για $t_1 = t_2 = t$, η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης $C_X(t, t)$ ισούται με τη διακύμανση της $X(t)$, $Var(X(t))$ τη χρονική στιγμή t :

$$Var[X(t)] = C_X(t, t) = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\} \quad (8)$$

Η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης σχετίζεται με τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης με τον ακόλουθο τύπο:

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \quad (9)$$

Έτσι, για μια στοχαστική διαδικασία μηδενικής μέσης τιμής η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης και αυτοσυσχέτισης είναι ίσες. Δηλαδή:

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) \quad (10)$$

Ο συντελεστής συσχέτισης (autocorrelation coefficient) δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)}\sqrt{C_X(t_2, t_2)}} \quad \text{με } |\rho_X(t_1, t_2)| \leq 1 \quad (11)$$

ΣΤΑΣΙΜΕΣ (STATIONARY) ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ Η ΟΜΟΓΕΝΗ (HOMOGENEOUS) ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Η σπουδαιότερη κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών είναι οι στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες. Ως στάσιμες, ορίζονται οι στοχαστικές διαδικασίες για τις οποίες η αθροιστική συνάρτηση κατανομής που τις περιγράφει δεν αλλάζει με τον χρόνο t και αντίστοιχα τα ομογενή στοχαστικά πεδία δεν αλλάζουν με τη θέση x . Επομένως, τόσο η μέση τιμή όσο και η τυπική απόκλισή τους είναι σταθερές και ανεξάρτητες από την μεταβλητή χρόνου ή θέσης:

$$E[X(t)] = \mu_X(t) = \mu_X \quad (12)$$

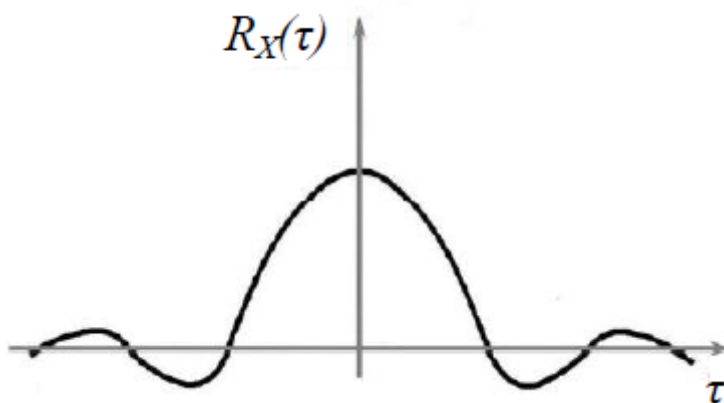
$$\text{Var}[X(t)] = \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2 \quad (13)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας (Εικόνα 8) εξαρτάται, όπως είναι αναμενόμενο, μόνο από τη σχετική απόσταση (διαφορά) των δύο χρονικών στιγμών στον άξονα των τ ($\tau = t_2 - t_1$) και όχι από τις μεμονωμένες χρονικές στιγμές t_1, t_2 . Επομένως:

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau) \quad (14)$$

Σε αυτή την περίπτωση ο συντελεστής συσχέτισης των τιμών $X(t)$ και $X(t + \tau)$ της στοχαστικής διαδικασίας δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{R_X(\tau) - \mu_X^2}{\sigma_X^2} \quad (15)$$



Εικόνα 8: Τυπική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας

2.4 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

Η προσομοίωση των στοχαστικών πεδίων μπορεί να διακριθεί σε τρεις κύριες μεθόδους, της σημειακής διακριτοποίησης (point discretization methods), της διακριτοποίησης μέσου όρου (average discretization methods), και του αναπτύγματος σε σειρά (series expansion methods). Στη μέθοδο σημειακής διακριτοποίησης οι τυχαίες μεταβλητές $\{f_i\}$ επιλέγονται σαν τιμές του στοχαστικού πεδίου $H(x)$ σε κάποια συγκεκριμένα σημεία x_i , ενώ στη μέθοδο διακριτοποίησης μέσου όρου τα $\{f_i\}$ είναι σταθμικά υπόλοιπα του $H(x)$ σε ένα πεδίο Ω_e . Στη μέθοδο αναπτύγματος σε σειρά το πεδίο αναπαρίσταται ως μια σειρά που περιλαμβάνει τυχαίες μεταβλητές και ντετερμινιστικές χωρικές συναρτήσεις. Η προσέγγιση λαμβάνεται σαν αποκοπή (truncation) της σειράς. Οι πιο γνωστές μέθοδοι αναπτύγματος σε σειρά είναι η Karhunen-Loeve και η μέθοδος φασματικής απεικόνισης (Spectral Representation Method).

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ (MIDPOINT METHOD-MP)

Στη μέθοδο σημειακής διακριτοποίησης περιλαμβάνεται η μέθοδος κεντρικού σημείου. Η μέθοδος αυτή προσεγγίζει το στοχαστικό πεδίο $H(x)$ σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο Ω_e από μια μοναδική τυχαία μεταβλητή, ορισμένη σαν την τιμή του πεδίου στο κέντρο x_c του στοιχείου :

$$H(x) = \hat{H}(x_c), x_c \in \Omega_e \quad (16)$$

Η μέση τιμή μ και το μητρώο συνδιακύμανσης K_H του $\hat{H}(\cdot)$ λαμβάνονται από τη μέση τιμή, τη διακύμανση και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του $H(\cdot)$ υπολογισμένες στα κέντρα των στοιχείων. Η μέθοδος του κεντρικού σημείου τείνει να υπερεκτιμά τη διακύμανση του στοχαστικού πεδίου εντός κάθε στοιχείου.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ KARHUNEN-LOEVE (KARHUNEN-LOEVE EXPANSION METHOD-KL)

Το ανάπτυγμα Karhunen-Loeve [32,33] είναι ένα στοχαστικό πεδίο $H(x, \theta)$ μηδενικής μέσης τιμής βασισμένο στη φασματική αποσύνδεση (spectral decomposition) της συνάρτησης αυτοδιακύμανσης (autocovariance function). Θεωρούμε το στοχαστικό πεδίο $H(x, \theta)$ ορισμένο στο φραγμένο χωρίο Ω και υποθέτουμε ότι έχει μέση τιμή $\mu(x)$ και πεπερασμένη διακύμανση $E[f(x) - \mu(x)]^2$. Το στοχαστικό πεδίο μπορεί να αναπτυχθεί υπό τη μορφή σειράς τύπου Fourier ως εξής:

$$H(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(x) \xi_i(\theta) \quad (17)$$

όπου η παράμετρος θ συμβολίζει ένα στοιχείο από τον χώρο των τυχαίων γεγονότων και $\xi_i(\theta)$ είναι ένα σύνολο ορθοκανονικών ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν κανονική κατανομή $N(0,1)$ (δηλ. μεταβλητών με μέση τιμή $\mu=0$ και τυπική απόκλιση $\sigma=1$). Επιπλέον, λ_i είναι οι ιδιοτιμές και $\varphi_i(x)$ οι ιδιοσυναρτήσεις της συνάρτησης αυτοδιακύμανσης $C_H(x, x')$ του πεδίου, οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν με τη λύση της ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm 2^{ου} βαθμού [34,35]:

$$\int_{\Omega} C_H(x, x') \varphi_i(x') dx' = \lambda_i \varphi_i(x) \quad (18)$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά μόνο σε πολύ συγκεκριμένες περιπτώσεις. Τις περισσότερες φορές, η αναλυτική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης δεν είναι εφικτή με αποτέλεσμα την εφαρμογή μιας αριθμητικής λύσης. Η συνήθης διαδικασία αριθμητικής επίλυσης της εξίσωσης (18) είναι τύπου Galerkin. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ιδιοτιμές λ_i αντιπροσωπεύουν τη συμβολή της κάθε ιδιοσυνάρτησης στη συνολική τυχαία διακύμανση του πεδίου.

Εξ' ορισμού η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης $C_H(x, x')$ είναι οριοθετημένη, συμμετρική, θετικά ορισμένη και έχει την ακόλουθη φασματική ή ιδιοσυστατική αποσύνδεση (eigen-decomposition) [36]:

$$C_H(x, x') = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(x') \quad (19)$$

Η εξίσωση (18) προκύπτει από το γεγονός ότι οι ιδιοσυναρτήσεις της αποτελούν ένα πλήρες ορθογωνικό σύνολο που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (20)$$

όπου δ_{ij} είναι η συνάρτηση Kronecker-delta.

Αποδεικνύεται ότι οι ορθοκανονικές και ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές $\xi_i(\theta)$ μπορούν να εκφραστούν από τη σχέση:

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{\Omega} [\hat{H}(x, \theta) - \mu(x)] \varphi_i(x) dx \quad (21)$$

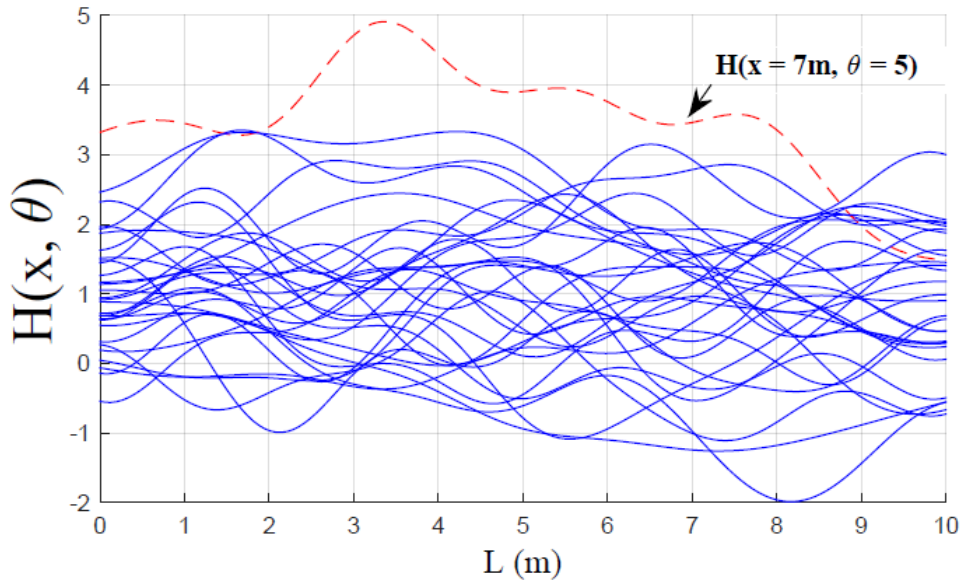
και έχουν μέση τιμή και συνδιακύμανση $E[\xi_i(\theta)] = 0$ και $E[\xi_i(\theta) \cdot \xi_j(\theta)] = \delta_{ij}$ αντίστοιχα. Το ανάπτυγμα σε σειρά της Εξ. (17), είναι γνωστό ως ανάπτυγμα Karhunen-Loeve (KL expansion) και παρέχει τη δυνατότητα προσομοίωσης ενός στοχαστικού πεδίου με χρήση ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών και ντετερμινιστικών ορθογωνικών συναρτήσεων. Αποδεικνύεται ότι η σειρά συγκλίνει κατά τη μέση τετραγωνική έννοια για οποιαδήποτε κατανομή του πεδίου $H(x, \theta)$ [36]. Για πρακτικές εφαρμογές, χρησιμοποιείται μια προσέγγιση της σειράς που αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό όρων M :

$$\hat{H}(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(x) \xi_i(\theta) \quad (22)$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση αυτοδιακύμανσης είναι:

$$\hat{C}_H(x, x') = \sum_{i=1}^M \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(x') \quad (23)$$

Οι Ghanem and Spanos [7] έχουν αποδείξει ότι αυτή η αποκοπή της σειράς είναι η βέλτιστη, που σημαίνει ότι το σφάλμα της μέσης τετραγωνικής προσέγγισης ελαχιστοποιείται. Παρουσιάζονται στην παρακάτω Εικόνα 9 διάφορες πραγματοποιήσεις (realizations) ενός στοχαστικού πεδίου μήκους $x = 10m$.



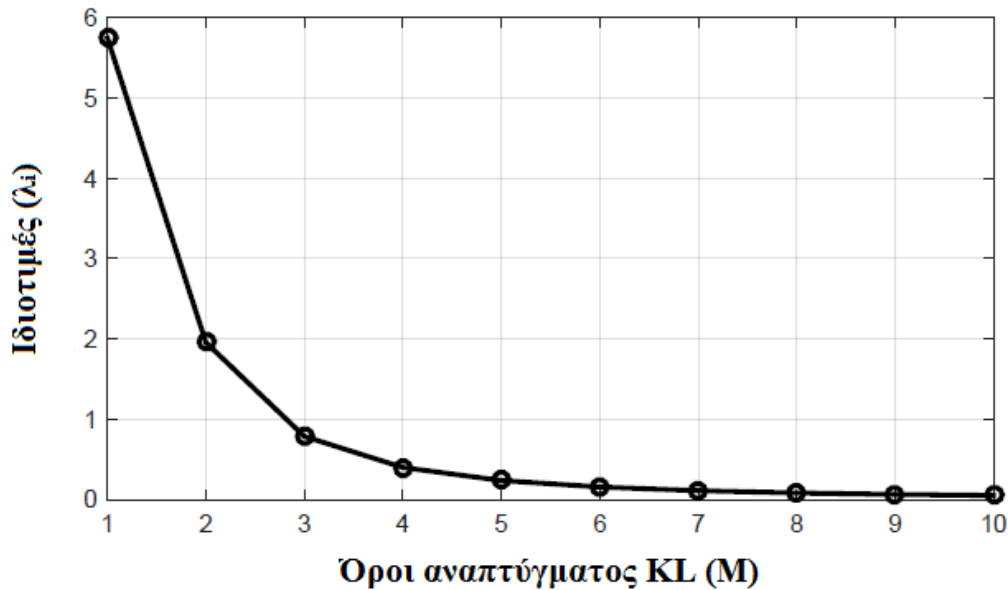
Εικόνα 9: Πραγματοποιήσεις στοχαστικού πεδίου που προκύπτουν από ανάπτυγμα KL

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΡΗΥΝΕΝ-LOEVE

- Λόγω της μη συσσώρευσης των ιδιοτιμών λ_i γύρω από μια μη μηδενική τιμή μπορούν να περιγραφούν βάσει μιας φθίνουσας σειράς που συγκλίνει στο μηδέν. Στην Εικόνα 10 φαίνεται η φθίνουσα μορφή των 10 ιδιοτιμών λ_i για $M = 10$ όρους του αναπτύγματος KL.
- Η βάση των ιδιοσυναρτήσεων $\varphi_i(x)$ της συνάρτησης αυτοδιακύμανσης $C_H(x, x')$ είναι βέλτιστη με την έννοια ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα που προέρχεται από την αποκοπή μετά τον M -οστό όρο μέχρι το ∞ ελαχιστοποιείται.
- Όταν η $H(x, \theta)$ είναι ένα Γκαουσιανό στοχαστικό πεδίο, κάθε τυχαία μεταβλητή $\xi_i(\theta)$ θα ακολουθεί την κατανομή Gauss. Επομένως στην περίπτωση αυτή οι $\xi_i(\theta)$ σχηματίζουν ένα διάνυσμα ασυσχέτιστων Γκαουσιανών τυχαίων μεταβλητών μηδενικής μέσης τιμής.
- Η διακύμανση του σφάλματος e_{var} που λαμβάνεται με την αποκοπή του αναπτύγματος μετά τους M όρους αποδεικνύεται από βασική άλγεβρα ότι είναι:

$$e_{\text{var}} = \text{Var} \left[H(x, \theta) - \hat{H}(x, \theta) \right] = \sigma(x)^2 - \sum_{i=1}^M \lambda_i \varphi_i(x)^2 \quad (24)$$

Το δεξί μέρος της Εξ. (24) είναι πάντα θετικό επειδή είναι η διακύμανση κάποιας ποσότητας. Αυτό σημαίνει ότι το ανάπτυγμα KL υποεκτιμάται πάντα σε σχέση με την πραγματική διακύμανση του πεδίου.



Εικόνα 10: Φθίνουσα μορφή ιδιοτιμών από τη λύση του ολοκληρώματος Fredholm 2^{ου} βαθμού

ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ KL

Στην παράγραφο αυτή εξετάζεται η επιρροή διαφόρων παραμέτρων όπως το μήκος συσχέτισης b , ο αριθμός των όρων του αναπτύγματος M καθώς και η αναλυτική συγκριτικά με την αριθμητική λύση του προβλήματος ιδιοτιμών.

Να επισημάνουμε στο σημείο αυτό, ότι το μήκος συσχέτισης b (correlation length) καθορίζει το βαθμό διακύμανσης του στοχαστικού πεδίου. Αποτελεί δε ένα μέτρο του αριθμού των ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών που απαιτούνται για να περιγράψει το πεδίο με ικανοποιητική ποιότητα. Η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών τυχαίων μεταβλητών πρέπει να είναι αρκετά μικρή ώστε να μπορεί να αποδώσει τα ουσιώδη χαρακτηριστικά του στοχαστικού πεδίου. Όταν το μήκος συσχέτισης τείνει στο άπειρο ($b \rightarrow \infty$), το πεδίο θεωρείται πλήρως συσχετισμένο, όλες οι τυχαίες μεταβλητές του είναι γραμμικώς εξαρτημένες μεταξύ τους και επομένως εκφυλίζεται

σε μία τυχαία μεταβλητή. Από την άλλη, όταν το μήκος συσχέτισης τείνει στο μηδέν ($b \rightarrow 0$), το πεδίο τείνει στο λευκό θόρυβο (white noise) και οι τυχαίες μεταβλητές του είναι πλήρως ασυσχέτιστες.

Θεωρώντας ένα ομογενές στοχαστικό πεδίο Markov μηδενικής μέσης τιμής ορισμένο στο πεδίο $\Omega = [-a, a]$ και με συνάρτηση αυτοδιακύμανσης:

$$C_H(x, x') = \sigma^2 \exp\left[\frac{x - x'}{b}\right] \quad (25)$$

προκύπτουν σε γενικές γραμμές τα ακόλουθα συμπεράσματα σχετικά με τις επιδόσεις του αναπτύγματος Karhunen-Loeve στην προσομοίωσή του βάσει [37]:

- Για μικρές τιμές του λόγου a/b που αντιστοιχούν σε πεδία υψηλής συσχέτισης (ή περιορισμένου φασματικού εύρους) απαιτείται μικρότερος αριθμός τυχαίων μεταβλητών για την προσομοίωση του στοχαστικού πεδίου και αντίστοιχα μικρότερος αριθμός όρων στο ανάπτυγμα Karhunen-Loeve. Για μια συγκεκριμένη τιμή του M , η ακρίβεια μειώνεται με την αύξηση του λόγου a/b . Με άλλα λόγια, ο αριθμός των όρων M πρέπει να αυξηθεί όταν το μήκος συσχέτισης b μειώνεται για σταθερή τιμή του a .
- Όσο πιο γρήγορα τείνει στο μηδέν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης τόσο μεγαλύτερο είναι το φασματικό εύρος της συνάρτησης πυκνότητας φασματικής ισχύος και τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των όρων του αναπτύγματος που απαιτείται για την ακριβή προσομοίωση του πεδίου.
- Η σύγκλιση στις τιμές της διασποράς του πεδίου που παράγεται από το ανάπτυγμα είναι ταχύτερη όταν η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης είναι ομαλή (smooth).
- Για μια συγκεκριμένη τιμή του M , η αναλυτική λύση της KL δίνει σημαντικά καλύτερα αποτελέσματα από την αντίστοιχη αριθμητική. Η αριθμητική λύση με τις συμβατικές μεθόδους Galerkin (που αποτελεί και τη συνηθέστερη περίπτωση) επιβαρύνει σημαντικά τόσο την ακρίβεια όσο και το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου. Έτσι, χρησιμοποιώντας την αριθμητική επίλυση μειώνεται η αποδοτικότητα του αναπτύγματος. Για τον λόγο αυτό, η χρήση του αναπτύγματος Karhunen-Loeve για την προσομοίωση στοχαστικών πεδίων σε

ρεαλιστικές κατασκευές μεγάλου αριθμού βαθμών ελευθερίας είναι σχετικά περιορισμένη.

2.5 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO (MONTE CARLO SIMULATION - MCS)

Γενικά, οι μέθοδοι προσομοίωσης χρησιμοποιούνται σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών που επεκτείνονται από την προσομοίωση μιας πτήσης μέχρι τη συμπεριφορά μιας κατασκευής υπό την επιβολή στατικών ή δυναμικών φορτίων. Η προσομοίωση είναι μια αριθμητική τεχνική, η οποία χρησιμοποιείται προκειμένου να διεξάγει πειράματα σε έναν υπολογιστή υπό τη συνθήκη ότι η συμπεριφορά του συστήματος για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο μπορεί να περιγραφεί με λογικά ή μαθηματικά μοντέλα [38].

Η μέθοδος "γεννήθηκε" το 1949, σε ένα άρθρο των Von Neumann and S. Ulam [39] με τίτλο "Η μέθοδος Monte Carlo" στο Journal of the American Statistics Association που τη χρησιμοποίησαν στην εργασία τους πάνω στη διάχυση νετρονίων για την κατασκευή της ατομικής βόμβας κατά τη διάρκεια του δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου. Παρόλα αυτά η θεωρητική βάση της μεθόδου ήταν γνωστή πριν από το 1949, αφού αρκετά προβλήματα στατιστικής λύνονταν μέσω τυχαίας δειγματοληψίας, που είναι στην ουσία η μέθοδος Monte Carlo. Λόγω του γεγονότος ότι η προσομοίωση τυχαίων μεταβλητών είναι μία δύσκολη διαδικασία για να γίνει χειρωνακτικά, η γενική αριθμητική χρήση της μεθόδου έγινε πρακτική μόνο με την εμφάνιση και εξέλιξη των υπολογιστών. Η μέθοδος δανείστηκε το όνομα της πόλης του Πριγκηπάτου του Monaco, που είναι γνωστό για τα καζίνο του, γιατί μια από τις απλούστερες συσκευές παραγωγής τυχαίων αριθμών είναι η ρουλέτα. Έκτοτε, η MCS έχει χρησιμοποιηθεί για την επίλυση πολυδιάστατων ολοκληρωμάτων σε αόριστα πεδία, ολοκληρωτικές εξισώσεις και διαφορεικά συστήματα όταν οι αναλυτικές μέθοδοι αδυνατούν να δώσουν λύση.

Η έκφραση «μέθοδος Monte Carlo» είναι πολύ γενική. Περιλαμβάνει κυρίως στοχαστικές διαδικασίες, εκείνες δηλαδή που βασίζονται στην χρήση των τυχαίων αριθμών και της στατιστικής για τη λύση προβλημάτων. Γενικά, η μέθοδος Monte Carlo είναι μια αριθμητική μέθοδος για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων μέσω προσομοίωσης τυχαίων αριθμών. Χρησιμοποιείται δε στην προσομοίωση και στην

ολοκλήρωση [40]. Με άλλα λόγια, η μέθοδος MCS είναι μια στοχαστική διαδικασία όπου με χρήση τυχαίων αριθμών και τη στατιστική προσπαθούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα. Σε ένα πείραμα Monte Carlo χρησιμοποιείται προσομοίωση με μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών [41]. Μέθοδοι Monte Carlo εφαρμόζονται σε πάρα πολλούς επιστημονικούς τομείς, από την οικονομία έως την πυρηνική φυσική και τη χημεία και ακόμη ως τη ρύθμιση της κυκλοφορίας. Το απλούστερο είδος Monte Carlo είναι η ολοκλήρωση με την Επιτυχία ή Αστοχία (Hit or Miss).

Η χρήση των μεθόδων Monte Carlo στη μοντελοποίηση φυσικών προβλημάτων μας επιτρέπει να εξετάσουμε πολύπλοκα συστήματα που αλλιώς θα ήταν από δύσκολο έως και αδύνατο. Η επίλυση εξισώσεων που περιγράφουν την αλληλεπίδραση δύο ατόμων είναι σχετικά εύκολη. Η λύση όμως των ίδιων εξισώσεων για εκατοντάδες ή χιλιάδες άτομα είναι αδύνατη. Με τη μέθοδο Monte Carlo, ένα μεγάλο σύστημα μπορεί να δειγματιστεί σε έναν αριθμό τυχαίων ρυθμίσεων, και αυτά τα δεδομένα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουμε το σύστημα σαν σύνολο. Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι η μέθοδος αυτή είναι ικανή να χειριστεί στοχαστικά προβλήματα στα οποία εμπλέκονται μη γραμμικότητες, δυναμικές φορτίσεις, προβλήματα αστάθειας, παραμετρικές διεγέρσεις κ.ά. Γι' αυτό και χρησιμοποιείται ως μέθοδος αναφοράς (χρησιμοποιείται δηλαδή, για τον έλεγχο της ποιότητας των αποτελεσμάτων όλων των άλλων μεθόδων) και αντικαθιστά την αναλυτική λύση σε προβλήματα που αυτή είναι αδύνατο ή εξαιρετικά δύσκολο να εφαρμοστεί.

ΤΑ ΚΥΡΙΟΤΕΡΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ MONTE CARLO

- Η Monte Carlo είναι πολύ απλή. Ένα στοιχείο που τη χαρακτηρίζει είναι η απλή δομή του υπολογιστικού αλγορίθμου. Σαν κανόνας, το πρόγραμμα πρέπει να διεκπεραιώσει μια τυχαία δοκιμή. Αυτή η δοκιμή επαναλαμβάνεται N φορές, με κάθε δοκιμή ανεξάρτητη από τις προηγούμενες, και μετά τα αποτελέσματα των δοκιμών λαμβάνονται κατά μέσο όρο.
- Η μέθοδος μπορεί να είναι εξαιρετικά αργή. Για παράδειγμα στην ολοκλήρωση, το λάθος των υπολογισμών είναι ανάλογο με $\sqrt{(D/N)}$, όπου D είναι κάποια σταθερά και N ο αριθμός των δοκιμών. Γίνεται προφανές έτσι ότι για να μειώσει κανείς το λάθος κατά ένα παράγοντα 10 (δηλαδή να αποκτήσει ακόμη

ένα δεκαδικό ψηφίο) απαιτείται να αυξήσει το N κατά 100 και άρα και την ποσότητα εργασίας αντίστοιχα.

- Η μέθοδος είναι πολύ δυνατή στα πολυδιάστατα προβλήματα, όπου και χρησιμοποιείται κυρίως, γιατί γενικά η ακρίβειά της εξαρτάται μόνο από την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Στην ολοκλήρωση, συγκλίνει με ρυθμό ανεξάρτητο των διαστάσεων του ολοκληρώματος. Για το λόγο αυτό, η MCS είναι η μόνη βιώσιμη μέθοδος σε ένα μεγάλο πεδίο προβλημάτων πολλών διαστάσεων σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους.

Με λίγα λόγια, αν και η MCS είναι μια πολύ ευέλικτη μέθοδος στοχαστικής ανάλυσης, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε τύπο προβλήματος έχει το μειονέκτημα ότι προκειμένου να επιτύχει υψηλά επίπεδα ακρίβειας απαιτείται τεράστιο υπολογιστικό κόστος. Ο κύριος τρόπος για να βελτιώσουμε την ταχύτητα των υπολογισμών της Monte Carlo είναι η μείωση της διασποράς (Variance Reduction). Οι μέθοδοι μείωσης της διασποράς της Monte Carlo αποσκοπούν στο να επιταχύνουν το ρυθμό σύγκλισης χρησιμοποιώντας ψευδοτυχαίες (pseudo-random) ακολουθίες αριθμών. Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι να αλλάξουμε ακολουθίες από ψευδοτυχαίους αριθμούς σε quasi-τυχαίους αριθμούς (quasi-random). Το χαρακτηριστικό αυτών είναι πως δεν προσπαθούν να μιμηθούν τη συμπεριφορά των τυχαίων ακολουθιών, αλλά τα στοιχεία τους είναι συσχετισμένα ώστε να γίνουν επί σκοπού πιο ομοιόμορφα από τις «καθαρά» τυχαίες ακολουθίες. Άλλες μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί για την αντιμετώπιση του μεγάλου υπολογιστικού κόστους που χρειάζεται η MCS με μείωση του αριθμού των προσομοιώσεων είναι η μέθοδος προσομοίωσης των υποσυνόλων (subset simulation), η μέθοδος δειγματοληψίας σημασίας (importance sampling) καθώς και η μέθοδος προσαρμοστικής δειγματοληψίας (adaptive sampling).

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗΝ MCS - ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (THE LAW OF LARGE NUMBERS)

Η επιτυχία της MCS βασίζεται στο νόμο των μεγάλων αριθμών που σχετίζεται με τη συμπεριφορά του αθροίσματος ενός μεγάλου αριθμού τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν οποιαδήποτε συνάρτηση κατανομής. Αν n είναι ο αριθμός των τυχαίων μεταβλητών r_i με ομοιόμορφη συνάρτηση κατανομής στην περιοχή $[a, b]$, τότε :

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(r_i) \Rightarrow \bar{F} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(r) dr \text{ για } n \rightarrow \infty \quad (26)$$

Για μεγάλους αριθμούς του n ο εκτιμητής F συγκλίνει στο σωστό αποτέλεσμα του ολοκληρώματος.

Στην παρούσα εργασία η προσομοίωση Monte Carlo χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής και της διακύμανσης της καθίζησης ενός θεμελίου με την πάροδο της χρονικής διάρκειας μιας σεισμικής διέγερσης. Το θεμέλιο αυτό εδράζεται σε ελαστικό ημιχώρο, ο οποίος περιγράφεται με στοχαστικό πεδίο στην κατακόρυφη διεύθυνση για το μέτρο ελαστικότητας E . Η MCS χρησιμοποιείται ως μέθοδος αναφοράς στο υπό μελέτη πρόβλημα. Συγκρίνουμε δηλαδή τα αποτελέσματα που θα πάρουμε από τη μέθοδο εξέλιξης πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Evolution Method-PDEM), η οποία περιγράφεται εκτενώς στο επόμενο εδάφιο και καταλήγουμε σε ανάλογα συμπεράσματα για την καταλληλότητα της μεθόδου.

2.6 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (PROBABILITY DENSITY EVOLUTION METHOD - PDEM)

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ PDEM

Στη γενική περίπτωση κάθε στοχαστικό πρόβλημα εκφράζεται μέσω μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (stochastic differential equation-sde). Αν και υπάρχουν μαθηματικά εργαλεία για την επίλυση των sde's (π.χ. Euler-Maruyama method), δεν είναι εύχρηστα στην εφαρμογή τους. Ωστόσο, οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις μπορούν να μετατραπούν σε ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες είναι γνωστές ως Fokker-Planck και εκφράζουν την εξέλιξη της από κοινού πυκνότητας πιθανότητας (pdf) στο χρόνο. Και οι εξισώσεις Fokker-Planck όμως, είναι πολύ δύσκολο να λυθούν αριθμητικά και αναλυτικά αδύνατο πλην συγκεκριμένων περιπτώσεων γιατί το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται δυσανάλογα σε σχέση με τον αριθμό των διαστάσεων (βαθμών ελευθερίας) του προβλήματος ("curse" of dimensionality). Η PDEM κατ' ουσίαν είναι ένα υπολογιστικό εργαλείο για την επίλυση των εξισώσεων Fokker-Planck, αφού επιτυγχάνει την αποσύζευξη

(decomposition) των βαθμών ελευθερίας καθιστώντας τες με αυτό τον τρόπο αριθμητικά επιλύσιμες.

Η αρχή διατήρησης της πιθανότητας (κατ' αντιστοιχία με την αρχή διατήρησης της μάζας σε ένα ντετερμινιστικό πρόβλημα) αναφέρει ότι οι εισροές, οι εκροές και η μεταβολή της πιθανότητας αποθήκευσης στον όγκο ελέγχου πρέπει να είναι σε ισορροπία. Αυτή η περιγραφή εκφράζει μαθηματικά την εξίσωση εξέλιξης πυκνότητας πιθανότητας και ονομάζεται εξίσωση Fokker-Planck.

Τα τελευταία χρόνια αναπτύχθηκε νέα προοπτική στην περιγραφή του τυχαίου γεγονότος και η παραπάνω εξίσωση οδήγησε σε μια οικογένεια γενικευμένων εξισώσεων εξέλιξης πυκνότητας πιθανότητας (general density evolution equations-GDEE's). Προκειμένου να απεικονίσουμε την ιδέα αυτή θεωρούμε ένα n -διάστατο στοχαστικό δυναμικό σύστημα, του οποίου η εξίσωση κίνησης προκύπτει:

$$M(\theta)\ddot{u} + C(\theta)\dot{u} + f(\theta, u) = F(\theta, t) \quad (27)$$

όπου M, C, f, F είναι τα μητρώα μάζας και απόσβεσης, το διάνυσμα ανάκτησης δύναμης (δυσκαμψίας) και το διάνυσμα διέγερσης αντίστοιχα και \ddot{u}, \dot{u}, u είναι τα διανύσματα επιτάχυνσης, ταχύτητας και μετατόπισης της κατασκευής, $\theta = (\eta, \zeta)$ είναι το διάνυσμα όλων των τυχαίων παραμέτρων με η το διάνυσμα των τυχαίων παραμέτρων που αφορούν τις φυσικές ιδιότητες του συστήματος και ζ το διάνυσμα των τυχαίων παραμέτρων που αφορούν τη διέγερση.

Διερευνώντας καλύτερα την Εξίσωση (27), παρατηρείται ότι εκτός από τα αρχικά στοχαστικά δεδομένα του συστήματος που σχετίζονται άρρηκτα με την παράμετρο θ , καμία άλλη πηγή τυχειότητας δεν εισέρχεται ή εξέρχεται από το σύστημα καθώς εξελίσσεται με το χρόνο. Αυτό αποτελεί την αρχή διατήρησης της πιθανότητας και η αντίστοιχη σχέση που την περιγράφει είναι η εξής:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t \times \Omega_\theta} p_{u\theta}(u, \theta, t) du d\theta = 0 \quad (28)$$

όπου D/Dt δηλώνει την παράγωγο του υλικού (total or material derivative), $\Omega_t \times \Omega_\theta$ είναι οποιοδήποτε τυχαίο πεδίο στον χώρο για χρόνο t , Ω_θ είναι το εύρος κατανομής του τυχαίου διανύσματος θ και $p_{u\theta}$ η προσαρμοσμένη pdf του $(u(t), \theta)$.

Μετά από μια σειρά μαθηματικών υπολογισμών η Εξίσωση (28) μπορεί να αποσυζευκτεί για κάθε βαθμό ελευθερίας ως εξής:

$$\int_{\Omega_0 \times \Omega_\theta} \left(\frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \dot{u}_j(\theta, t) \frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial u_j} \right) du d\theta = 0 \quad (29)$$

όπου m είναι ο τελικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας. Αφού η Εξίσωση (29) εφαρμόζεται για οποιοδήποτε τυχαίο πεδίο $\Omega_0 \times \Omega_\theta \in \Omega \times \Omega_\theta$, τότε για κάθε $\Omega_\theta \in \Omega_\theta$ ισχύει:

$$\int_{\Omega_\theta} \left(\frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \dot{u}_j(\theta, t) \frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial u_j} \right) d\theta = 0 \quad (30)$$

η οποία οδηγεί στην ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \dot{u}_j(\theta, t) \frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial u_j} = 0 \quad (31)$$

ή στην περίπτωση που $m = 1$, η Εξίσωση (31) μειώνεται σε:

$$\frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial t} + \dot{u}(\theta, t) \frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial u} = 0 \quad (32)$$

Οι Εξισώσεις (31) και (32) αποτελούν τις GDEE's και έχουν κάποια σημαντικά πλεονεκτήματα συγκριτικά με τις κλασσικές εξισώσεις εξελίξεως πυκνότητας πιθανότητας (Liouville, FP κτλ). Πιο συγκεκριμένα αυτές μειώνουν την πολυδιάστατη στοχαστική διαφορική εξίσωση, η οποία μπορεί να είναι ανέφικτο να λυθεί αριθμητικά για προβλήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας σε μια σειρά μονοδιάστατων ντετερμινιστικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (deterministic partial differential equations-pde's). Προκειμένου να επιλυθούν οι τελευταίες χρειαζόμαστε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, οι οποίες στις περισσότερες περιπτώσεις είναι της μορφής:

$$p_{u\theta}(u, \theta, t)|_{t=t_0} = \delta(u - u_0) p_\theta(\theta) \quad (33)$$

Η Εξίσωση (32) μέσω της (33) παίρνει την εξής μορφή της περιθώριας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (marginal pdf) του $u(t)$:

$$p_u(u, t) = \int_{\Omega_\theta} p_{u\theta}(u, \theta, t) d\theta \quad (34)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η Εξίσωση (30) ισχύει για κάθε $\Omega_q \in \Omega_\theta$, τότε εάν χωρίσουμε το Ω_θ σε υποπεδία Ω_q με $q=1,2,\dots,n_{pt}$, τέτοια ώστε $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ και $\cup_{q=1}^{n_{pt}} \Omega_q = \Omega_\theta$, η Εξίσωση (32) γίνεται (για $m=1$):

$$\int_{\Omega_q} \left(\frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial t} + \dot{u}(\theta, t) \frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial u} \right) d\theta = 0, \quad q=1,2,\dots,n_{pt} \quad (35)$$

Η πιθανότητα που αφορά τα υποπεδία Ω_q εκφράζεται τότε ως εξής:

$$P_q = \int_{\Omega_q} p_\theta(\theta) d\theta \quad \text{με } q=1,2,\dots,n_{pt} \quad (36)$$

Εάν ορίσουμε :

$$p_q(u, t) = \int_{\Omega_q} p_{u\theta}(u, \theta, t) d\theta \quad \text{με } q=1,2,\dots,n_{pt} \quad (37)$$

τότε:

$$p(u, t) = \sum_{q=1}^{n_{pt}} p_q(u, t) \quad (38)$$

Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω είναι γνωστή ως μέθοδος εξέλιξης πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Evolution Method-PDEM) και είναι φανερό ότι η ακρίβεια της μεθόδου εξαρτάται αποκλειστικά από δύο παραμέτρους: α) τη συμμετοχή του πεδίου πιθανοτήτων και β) την ακριβή λύση των αντίστοιχων μερικών διαφορικών εξισώσεων (pde's). Πρέπει να αναφερθεί, τέλος, ότι η επίλυση αυτών των pde's δεν είναι ασήμαντη γιατί είναι εξισώσεις της μορφής καθαρής μεταφοράς (pure advection) με ασυνεχείς αρχικές συνθήκες (shock type) στις περισσότερες περιπτώσεις. Ως εκ του τούτου, είναι απαραίτητη η εισαγωγή της τεχνητής διάχυσης (artificial dissipation) ιξώδους για να εξασφαλιστεί η αριθμητική σταθερότητα της λύσης. Στην περίπτωση όμως που προσθέσουμε πολύ μεγάλη διάχυση θα έχουμε ως αποτέλεσμα μεγάλη «λείανση» (smearing) της λύσης.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ GDEE

Τα βασικά βήματα που χρειάζονται για την επίλυση της GDEE της Εξίσωσης (32), όπως προτάθηκε από τους Li και Chen [12] υπογραμμίζονται εδώ. Τα βήματα

αυτά τροποποιούνται ελαφρώς για να ταιριάξουν στην περίπτωση του προβλήματος που μελετάμε και είναι τα ακόλουθα:

Βήμα 1: Διακριτοποιείται ο χώρος που ορίζεται η πιθανότητα και επιλέγονται αντιπροσωπευτικά σύνολα σημείων (τυχαία γεγονότα) $\theta_q = (\theta_{q,1}, \theta_{q,2}, \dots, \theta_{q,s})$ με $q = 1, 2, \dots, n_{pt}$ όπου n_{pt} είναι ο βασικός αριθμός του συνόλου σημείων. Για κάθε σύνολο σημείων καθορίζονται οι ορισμένες πιθανότητες P_q 's μέσω της Εξίσωσης (36).

Βήμα 2: Διακριτοποιείται ο φυσικός χώρος σε m τμήματα. Για την περιγραφή $\theta = \theta_q$ επιλύεται η διακριτοποιημένη ντετερμινιστική εξίσωση ισοροπίας (Εξίσωση (27)) με έναν πρότυπο επιλύτη πεπερασμένων στοιχείων για τον υπολογισμό της $\frac{du(\theta_q, t_m)}{dt}$, όπου $t_m = m * \Delta t (m = 1, 2, \dots)$, Δt είναι το βήμα της χρονικής διάρκειας του σεισμού με τον οποίο διεγείρεται το μοντέλο που εξετάζουμε και ισχύει $0 \leq t_m \leq 31.18 \text{sec}$. Πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι εάν ο διαμερισμός στα m τμήματα δε συμπίπτει με τη διακριτοποίηση των πεπερασμένων στοιχείων απαιτείται μια γραμμική παρεμβολή από τα αντίστοιχα σημεία Gauss.

Βήμα 3: Εισάγοντας τον όρο $\frac{du(u_{0,q}, \theta_q, t_m)}{dt}$ στις GDEE's και λαμβάνοντας υπόψιν τη διακριτοποιημένη εκδοχή της Εξίσωσης (33), δηλαδή $p_q(u, t)|_{t=t_0} = \delta(u - u_0) P_q$, και λύνοντας την Εξίσωση (32) με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών (finite difference method-FDM) ή τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (finite element method-FEM) λαμβάνεται η αριθμητική λύση της $p_q(u, t)$.

Βήμα 4: Πρέπει να επαναληφθούν τα βήματα 2,3 για $q = 1, 2, \dots, n_{pt}$ και να πάρουμε την αριθμητική ολοκλήρωση της Εξίσωσης (34) για τον υπολογισμό της αριθμητικής λύσης της $p_u(u, t)$.

Πρέπει να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι η διαδικασία επιλογής των αντιπροσωπευτικών συνόλων σημείων στο βήμα 1 είναι υψίστης σημασίας για την αποτελεσματικότητα της μεθόδου. Εκτός από τη μέθοδο διαμερισμού του κανάβου του πεδίου πιθανοτήτων, πολλές άλλες μέθοδοι έχουν εφαρμοσθεί επιτυχώς, οι οποίες εξαρτώνται από τη φύση του προβλήματος που μειώνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου. Κάποιες από αυτές είναι η Αριθμητική Θεωρητική Μέθοδος (Number Theoretical Method) [42,43], η Μέθοδος Εφαπτομενικής Σφαίρας (Tangent

Sphere Method) [44], η Q-SPM [45] , η RQ-SPM [46] κ.α.. Στο προσομοίωμα που εξετάζουμε χρησιμοποιήθηκε η RQ-SPM για την επιλογή των αντιπροσωπευτικών συνόλων σημείων στο πεδίο των πιθανοτήτων.

Ακόμη η ακριβής και αποτελεσματική επίλυση της ντετερμινιστικής μερικής διαφορικής εξίσωσης (Εξίσωση (32)) στο βήμα 3 είναι πολύ σημαντική για τη συνολική διαδικασία. Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία μεθόδων που μπορούν να εφαρμοσθούν για την επίλυση της pde συμπεριλαμβανομένου μεθόδων πεπερασμένων διαφορών (finite difference methods-FDM), πεπερασμένου όγκου (finite volume method-FEM) και πεπερασμένων στοιχείων (finite element method-FVM). Όμως η επιλογή της βέλτιστης μεθόδου δεν είναι πάντα εύκολο θέμα. Εξαρτάται από το είδος του προβλήματος (π.χ. ύπαρξη απότομων βαθμίδων) καθώς και από το αν η μέθοδος που επιλέξαμε τείνει να έχει μεγαλύτερη διασπορά (dispersion) ή διάχυση (dissipation). Από τις τρεις κατηγορίες μεθόδων που αναφέρθηκαν η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών είναι η ευκολότερη προς εφαρμογή αλλά έχει ορισμένα μειονεκτήματα. Οι μέθοδοι κεντρικών πεπερασμένων διαφορών (central finite difference methods) οδηγούν συχνά σε ασταθείς λύσεις, ενώ οι upwind μέθοδοι υποφέρουν από υπερδιάχυση (overdissipation). Στις μεθόδους FDM ανήκει και η Lax-Wendroff με σχήματα TVD. Η μέθοδος αυτή εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη συνθήκη Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [47], η οποία αφενός θέτει έναν περιορισμό στο αυξανόμενο βήμα της μεθόδου με αποτέλεσμα την αύξηση του υπολογιστικού κόστους για τη λύση του προβλήματος και αφετέρου δύναται να δημιουργήσει προβλήματα στη σύγκλιση. Μια εναλλακτική μέθοδος για την επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι η DG-FEM (time-marching discontinuous Galerkin scheme), η οποία όμως είναι πολύ χρονοβόρα. Λόγω των μειονεκτημάτων των μεθόδων που προαναφέρθηκαν επιλέχθηκε τελικά στην παρούσα εργασία για την επίλυση της GDEE της Εξίσωσης (32) η μέθοδος Streamline Upwind Petrov/Galerkin-SUPG. Η SUPG είναι αφενός πολύ γρήγορη (έχει το μικρότερο υπολογιστικό κόστος) και αφετέρου δεν υπόκειται στη συνθήκη CFL και αποτελεί έτσι μια πολύ αποτελεσματική μέθοδο για το σκοπό αυτό [14].

STREAMLINE UPWIND PETROV/GALERKIN-SUPG

Η έννοια της SUPG παρουσιάστηκε αρχικά από τους Hughes και Brooks [48,49] και η βασική ιδέα πίσω από αυτή τη μέθοδο είναι η προσθήκη αριθμητικής διάχυσης (diffusion) κατά μήκος των ροϊκών γραμμών (streamlines). Στις

προαναφερθείσες αναφορές αποδεικνύεται η εφαρμογή της στη γραμμική βαθμιδωτή εξίσωση μεταγωγής. Αφού η Εξίσωση (32) έχει τη μορφή της εξίσωσης μεταφοράς (advection) μπορούμε να την ξαναγράψουμε με τον ακόλουθο τρόπο:

$$w \cdot \nabla p = 0 \quad (39)$$

όπου

$w = (1, \alpha(t))$ είναι το πεδίο ταχύτητας,

$\alpha(t)$ είναι η ροή $\frac{du(t)}{dt}$ και

$$\nabla p = (\partial p / \partial t, \partial p / \partial u)$$

Το $\{\Omega^e\}$ για $e = 1, 2, \dots, N_{el}$ δηλώνει μια διακριτοποίηση πεπερασμένων στοιχείων του πεδίου προς υπολογισμό $\Omega = \Omega_u \times \Omega_t \subset \mathbb{R}^2$. Αφού το πεδίο είναι διδιάστατο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τετραγωνικά στοιχεία για να διακριτοποιήσουμε το Ω . Η Εικόνα 11 απεικονίζει τη διακριτοποίηση του φυσικού πεδίου όπου κάθε βαθμός ελευθερίας αντιστοιχεί στην πιθανότητα αυτής της χρονικής στιγμής. Οι συνοριακές συνθήκες είναι Dirichlet σε όλο το σύνορο $\partial\Omega$ που σημαίνει ότι $p = g$. Σύμφωνα με την αναφορά [50] μπορούμε να ορίσουμε το χώρο των δοκιμαστικών λύσεων σαν:

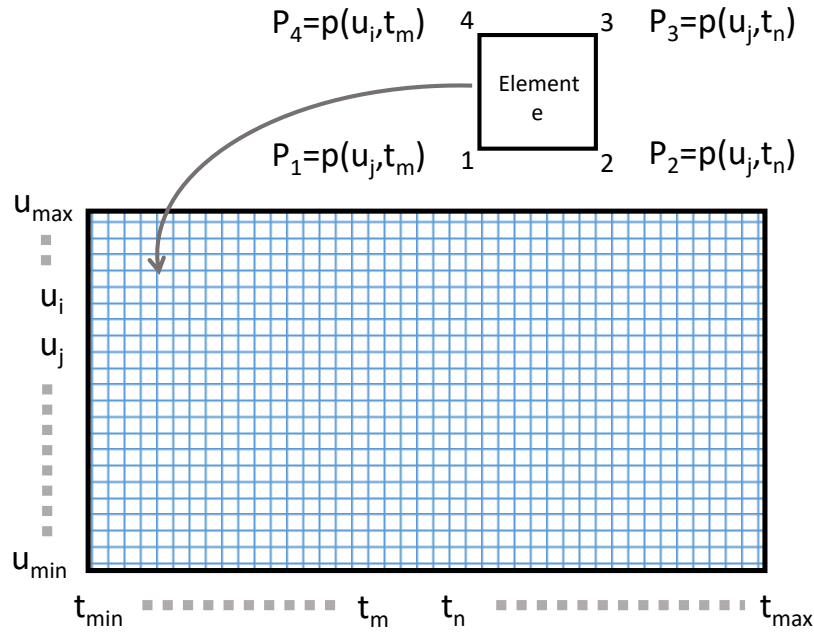
$$V = \{p \mid p \in H^1(\Omega), p = g \in \partial\Omega\} \quad (40)$$

όπου:

$$H^1 = \left\{ p : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid p, \frac{\partial p}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial u} \in L_2(\Omega) \right\} \quad (41)$$

είναι ο χώρος Sobolev και ορίζουμε επίσης το χώρο:

$$V_0 = \{\psi \mid \psi \in H^1(\Omega), \psi = 0 \in \partial\Omega\} \quad (42)$$



Εικόνα 11: Διακριτοποίηση του φυσικού πεδίου

Η βασική ιδέα της προσέγγισης Petrov-Galerkin είναι να προσδιορίσει μια «αδύναμη» μορφή (weak form) στην οποία ο χώρος των σταθμικών εξισώσεων που εξετάζουμε λαμβάνεται διαφορετικός από το χώρο των δοκιμαστικών λύσεων. Πιο συγκεκριμένα, ο δειγματικός χώρος είναι ο χώρος που καλύπτεται από τις εξισώσεις της μορφής:

$$\tilde{\psi} = \psi + \tau w \nabla \psi \quad (43)$$

Όπου $\psi \in V_0$ είναι η σταθμική εξίσωση τύπου Galerkin και τ είναι ένας συντελεστής, ο οποίος για κάθε στοιχείο e δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\tau_e = \frac{a \lambda_e}{2 |w_e|} \quad (44)$$

όπου λ_e είναι το χαρακτηριστικό μήκος του στοιχείου e και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\lambda_e = \min \left(\frac{\lambda_t}{\cos \theta}, \frac{\lambda_u}{\sin \theta} \right) \quad (45)$$

με λ_t και λ_u να είναι τα μήκη των τετραγώνων στην t και τη u διεύθυνση αντίστοιχα και $\theta = \arctan(|w_u / w_t|)$. Στις ακόλουθες εξισώσεις θα χρησιμοποιήσουμε το δείκτη

h για να αναφερθούμε στο διακριτό πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων. Η «αδύναμη» μορφή (weak form) της Εξίσωσης (39) γίνεται:

$$\int_{\Omega} \psi^h w \nabla p^h d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau w \nabla \psi^h w \nabla p^h d\Omega_e = 0 \quad (46)$$

Στην Εξίσωση (44) το a είναι η upwind συνάρτηση, η οποία εξαρτάται από τον αριθμό Peclet Pe ($Pe = \infty$ για καθαρή μεταφορά-pure advection). Οπότε στην περίπτωση μας από τη σχέση $a = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε $a = 1$.

Προκειμένου να βελτιωθεί περισσότερο η ακρίβεια της μεθόδου προσθέτουμε στην Εξίσωση (46) έναν όρο που λαμβάνει υπόψιν ασυνέχειες βάσει της μεθοδολογίας που παρουσιάστηκε στο άρθρο των Hughes, Mallet etc [49]. Έτσι, η Εξίσωση (46) ξαναγράφεται όπως παρακάτω:

$$\int_{\Omega} \psi^h w \nabla p^h d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_1 w \nabla \psi^h w \nabla p^h d\Omega_e + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_2 w \nabla \psi^h w_{\parallel} \nabla p^h d\Omega_e = 0 \quad (47)$$

όπου το w_{\parallel} δηλώνει την προβολή του w στο ∇p^h και υπολογίζεται από:

$$w_{\parallel} = \begin{cases} \frac{w \nabla p^h}{|\nabla p^h|_2}, \nabla p^h \neq 0 \\ 0, \nabla p^h = 0 \end{cases} \quad (48)$$

και $\tau_1 = \tau$ και $\tau_2 = \max(0, -\tau)$ με το τ_{\parallel} να υπολογίζεται από την Εξίσωση (44) χρησιμοποιώντας το w_{\parallel} αντί του w . Η Εξίσωση (47) σε μορφή μητρώου προκύπτει:

$$Kp = 0 \quad (49)$$

όπου:

$$K = A + S \quad (50)$$

$$K_{ij} = A_{ij} + S_{ij} \quad (51)$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} (w \nabla \varphi_j) \varphi_i \quad (52)$$

$$S_{ij} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_1 w \nabla \varphi_j w \nabla \varphi_i + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_2 w \nabla \varphi_j w_{\parallel} \nabla \varphi_i \quad (53)$$

και $\{\varphi\}$ είναι η βάση που καλύπτει τις συναρτήσεις χώρου.

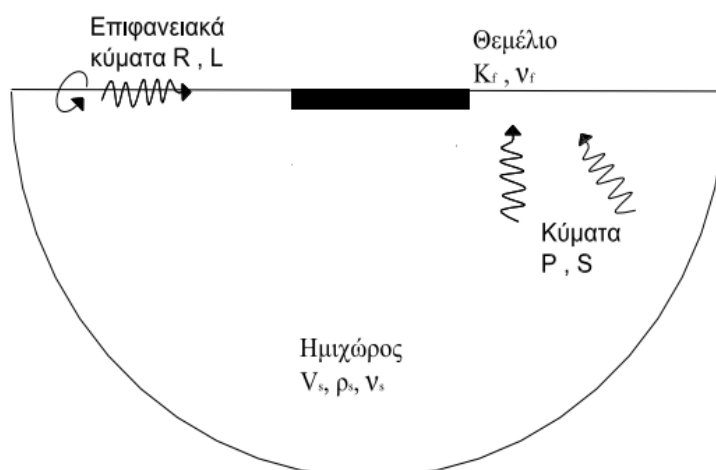
3

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ
ΕΔΑΦΟΥΣ-ΘΕΜΕΛΙΟΥ

3.1 ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το φαινόμενο αλληλεπίδρασης εδάφους-θεμελίου (Εικόνα 12) μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

Εάν η απόκριση οποιουδήποτε σημείου που βρίσκεται στη διεπιφάνεια εδάφους-θεμελίου και υπόκειται σε εξωτερικές φορτίσεις, όπως ο σεισμός ή δυναμικά φορτία γενικότερα, διαφέρει από την απόκριση του ίδιου σημείου όταν δεν υπάρχει το θεμέλιο, τότε υπάρχει δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ του θεμελίου και του εδαφικού μέσου. Το φαινόμενο SFI μπορεί να μελετηθεί με ποικίλλες μεθόδους όπως αναλυτικές, ημιαναλυτικές, αριθμητικές καθώς και με διακριτά προσομοιώματα. Εξ' αυτών, πολύ αποτελεσματικές είναι οι αριθμητικές μέθοδοι, στις οποίες ανήκουν η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method-FEM) και η μέθοδος στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων (Stochastic Finite Element Method-SFEM) και οι οποίες περιγράφονται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα. Οι FEM και SFEM έχουν το μειονέκτημα όμως της χρήσης πολύπλοκων απορροφητικών συνόρων (absorbing boundaries) για τα όρια του εδάφους. Στην παρούσα εργασία η μελέτη του φαινομένου αλληλεπίδρασης εδάφους-θεμελίου γίνεται με τη μέθοδο στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων.



Εικόνα 12: Το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης εδάφους-θεμελίου (SFI)

3.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ-ΜΠΣ (FINITE ELEMENT METHOD-FEM)

Η ΜΠΣ είναι μία αριθμητική μέθοδος για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Χρησιμοποιείται ευρέως σε όλα τα φάσματα της επιστήμης του Μηχανικού. Αποτελεί μία προσεγγιστική μέθοδο και ουσιαστικά διαχωρίζει το συνεχές μέσο σε διακριτά πεπερασμένα στοιχεία. Είναι μία εξέλιξη των μητρικών μεθόδων αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων και αποτελεί την πιο διαδεδομένη μέθοδο για τον υπολογισμό των δυσκαμψιών των θεμελίων. Στη ΜΠΣ η επέκταση του εδάφους στο άπειρο κατά την οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση αναπαρίσταται από πεπερασμένα όρια. Όμως, ένα τέτοιο πεπερασμένο μοντέλο παγιδεύει την ενέργεια των κυμάτων που δημιουργήθηκαν από την κίνηση του θεμελίου εντός των συνόρων, μέσω των ανακλάσεων των κυμάτων στα σύνορα. Αυτές οι ανακλάσεις από τα όρια διαστρεβλώνουν τα δυναμικά χαρακτηριστικά του μοντέλου και έτσι αλλοιώνεται το πραγματικό σύστημα. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή απορροφητικών συνόρων προκειμένου να ληφθεί υπόψη η ακτινοβολία της ενέργειας. Οι δύο κύριες κατηγορίες απορροφητικών συνόρων είναι τα ιξώδη (viscous) σύνορα, τα οποία τοποθετούνται σε κάποια απόσταση από το θεμέλιο και τα συμβατά (consistent) σύνορα, τα οποία τοποθετούνται ακριβώς στην άκρη του θεμελίου.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ-ΜΣΠΣ (STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD-SFEM)

Η μέθοδος των στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μία σχετικώς πρόσφατη εκδοχή της ευρύτατα διαδεδομένης μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση και τον σχεδιασμό κατασκευών. [7, 51, 52, 53, 54, 55, 56]. Ως γνωστόν η κλασσική μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι σήμερα η μόνη αριθμητική μέθοδος που μπορεί να δώσει αξιόπιστη λύση σε οποιοδήποτε πρόβλημα του μηχανικού λόγω της ραγδαίας εξέλιξης των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η στοχαστική ανάλυση λαμβάνει επιπλέον υπόψη την ενδογενή αβεβαιότητα που συναντάται σε όλους τους τύπους κατασκευών, δηλαδή την αβεβαιότητα στις τιμές των διαφόρων

παραμέτρων (μηχανικών, γεωμετρικών και φορτιστικών) που υπεισέρχονται στη στατική ή/και δυναμική ανάλυσή τους. Ο συνδυασμός των δύο θεωρήσεων στοχεύει σε μία πληρέστερη και ρεαλιστικότερη μελέτη της συμπεριφοράς των κατασκευών. Τα βασικά σημεία της μεθόδου των στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων μπορούν να συνοψιστούν στα εξής: α) Ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας στις τιμές των παραμέτρων με χρήση π.χ. της μαθηματικής θεωρίας των στοχαστικών συναρτήσεων (διαδικασιών/πεδίων), β) Διακριτοποίηση του στοχαστικού πεδίου, γ) Μόρφωση του στοχαστικού μητρώου στιβαρότητας των πεπερασμένων στοιχείων, δ) Προσδιορισμός της διακύμανσης της απόκρισης μίας κατασκευής με στατιστική επεξεργασία (response statistics) [57]. Συνοπτικά, οι κυριότερες μέθοδοι SFEM είναι: η Στοχαστική αρχή των δυνατών έργων (Stochastic principle of virtual work), Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor του στοχαστικού μητρώου στιβαρότητας ή Μέθοδος διαταραχής (Taylor series expansion of the stochastic stiffness matrix or Perturbation method), Ανάπτυγμα σε σειρά Neumann (Neumann series expansion of the stochastic stiffness matrix), Μέθοδος των σταθμικών υπολοίπων (The weighted integral method), Μέθοδος του κεντρικού σημείου (The midpoint method-MP), Μέθοδος της συνάρτησης σχήματος (The shape function method-SF), Μέθοδος του σημείου ολοκλήρωσης (The integration point method), Μέθοδος της βέλτιστης γραμμικής εκτίμησης (The optimal linear estimation method-OLE), Μέθοδος του χωρικού μέσου όρου (Spatial average method-SA), Μέθοδος των φασματικών στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων (Spectral stochastic finite element method-SSFEM). Στις παραπάνω μεθόδους στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων προστίθεται και η προσομοίωση Monte Carlo, όπου η διακύμανση της απόκρισης προσδιορίζεται από γνωστές σχέσεις της στατιστικής. Η MCS αποτελεί μέθοδο αναφοράς υπό την έννοια ότι συχνά η ακρίβεια των υπολοίπων μεθόδων ελέγχεται με βάση τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτή. Στη βιβλιογραφία συναντάται επίσης και ο συνδυασμός της MCS με κάποιες από τις προαναφερθείσες μεθόδους.

3.3 ΤΟ ΑΝΑΛΟΓΟ ΤΟΥ ΙΞΩΛΟΥΣ ΑΠΟΣΒΕΣΤΗΡΑ

Θεωρούμε ένα κύμα με μετακίνηση $u = u_0 * e^{i\omega(t-x/V)}$ που διαδίδεται κατά μήκος μιας απειρομήκου ράβδου (Εικόνα 13) [58]. Η συνολική δύναμη που αναπτύσσεται στην τυχούσα διατομή 1-1, κατά τη διέλευση του κύματος θα είναι ίση με:

$$F_{1-1} = A \cdot \sigma_{1-1} = A \cdot \frac{E\dot{u}}{V} = A \cdot \frac{\rho V^2 \dot{u}}{V} \Rightarrow$$

$$F_{1-1} = (\rho VA) \dot{u}$$
(54)

Η δύναμη που υπολογίζεται από την Εξίσωση (54) είναι ίση με τη δύναμη που θα ασκείτο από έναν ιξωδοαποσβεστήρα με συντελεστή απόσβεσης C :

$$F_{1-1} = C \cdot \dot{u}$$
(55)

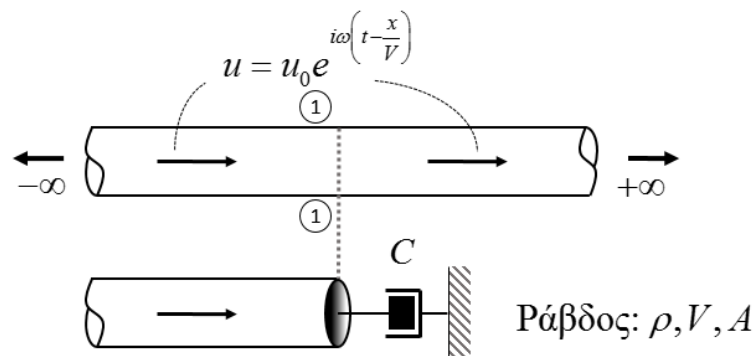
Επομένως, εάν το τμήμα της ράβδου δεξιά της διατομής 1-1 αποκοπεί και αντικατασταθεί με έναν ιξώδη αποσβεστήρα με σταθερά:

$$C = \rho VA$$
(56)

η κίνηση στα αριστερά της διατομής 1-1 δεν θα επηρεασθεί γιατί ο αποσβεστήρας επιβάλλει την ίδια δύναμη στη διατομή 1-1. Πιο συγκεκριμένα:

$$F_{1-1} = C \cdot \dot{u} = \rho VA \cdot \dot{u}$$
(57)

Δηλαδή, ο αποσβεστήρας αυτός απορροφά πλήρως την ενέργεια του προσπίπτοντος κύματος και δεν επέρχεται ανάκλαση. Η αναλογία αυτή του ιξωδοαποσβεστήρα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη αφενός για την προσομοίωση της απόσβεσης ακτινοβολίας (radiation damping) ταλαντούμενων θεμελιώσεων και αφετέρου όταν μελετάται η διάδοση κυμάτων σε σώματα απείρων διαστάσεων (όπως π.χ. ο ελαστικός ημιχώρος) με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Διότι στην περίπτωση του ελαστικού ημιχώρου με την τοποθέτηση ιξωδοαποσβεστήρων στα όρια του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων αποφεύγονται οι ανεπιθύμητες ανακλάσεις που τροποποιούν την υπολογιζόμενη δυναμική απόκριση του εδάφους. Η δεύτερη περίπτωση είναι και η περίπτωση που θα ασχοληθούμε στο παρόν πρόβλημα που μελετάμε.



Εικόνα 13: Το ανάλογο του ιξώδους αποσβεστήρα

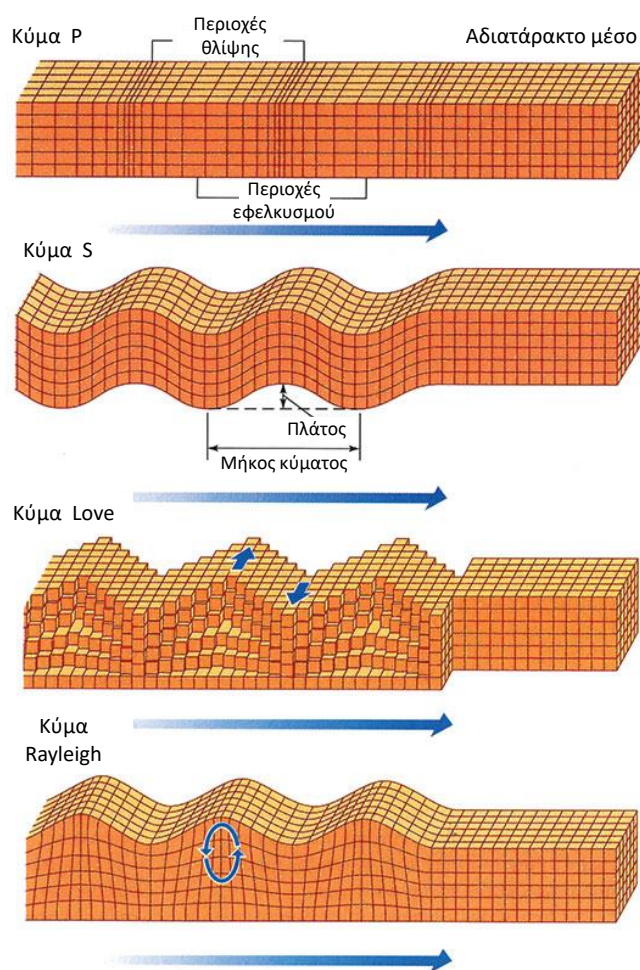
3.4 ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΑ ΣΥΝΟΡΑ

Ο εδαφικός ημιχώρος δεν έχει πεπερασμένες διαστάσεις, αλλά άπειρες (infinite). Στην προσπάθειά μας όμως να προσομοιώσουμε το εδαφικό μέσο προκειμένου να μελετήσουμε το φαινόμενο αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής/θεμελίου με τη μέθοδο των πεπερασμένων ή στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων, επειδή δε μπορούμε να το θεωρήσουμε άπειρο, ορίζουμε πεπερασμένες διαστάσεις. Με την παραδοχή αυτή όμως, τα κύματα που προέρχονται από τις διεγέρσεις που ασκούνται στο μοντέλο «εγκλωβίζονται» στις πεπερασμένες διαστάσεις του χωρίου (η ενέργεια του συστήματος «παγιδεύεται» εντός των ορίων αυτών) δημιουργώντας έτσι φαινόμενα διάθλασης και ανάκλασης. Η εμφάνιση των φαινομένων αυτών έχει ως αποτέλεσμα την αλλοίωση των δυναμικών χαρακτηριστικών του ημιχώρου και τη λήψη λανθασμένων αποτελεσμάτων. Για την αντιμετώπιση των ανεπιθύμητων αυτών φαινομένων εισάγουμε στο μοντέλο απορροφητικά σύνορα (absorbing boundaries) στα άκρα του χωρίου. Με τη χρήση απορροφητικών συνόρων, όλη η ενέργεια που φτάνει στα σύνορα απορροφάται. Δεν έχουμε έτσι φαινόμενα ανάκλασης ή διάθλασης. Μια εναλλακτική περιγραφή του φαινομένου είναι η ακόλουθη. Στην αριθμητική προσομοίωση της διάδοσης κυμάτων με διακριτές μεθόδους στο χώρο υπάρχει πάντοτε η ανάγκη εξάλειψης «παρασιτικών» φαινομένων που δημιουργούνται από τα όρια του αριθμητικού κανάβου. Τα φαινόμενα αυτά εμφανίζονται διότι η διακριτοποίηση του πλέγματος καλύπτει μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου. Οι επιδράσεις των συνόρων μπορεί να εμφανιστούν με τη μορφή ανακλάσεων στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ή με τη μορφή περιστροφών στη μέθοδο Fourier. Αυτές οι μορφές δεν υπάρχουν στα πραγματικά φυσικά προβλήματα και για το λόγο αυτό η εξάλειψή τους είναι απαραίτητη. Για να αποφευχθεί αυτό το γεγονός απαιτείται η χρήση συνόρων που είναι γνωστά ως απορροφητικά ή μη-επιτρεπόντων την ανάκλαση κυμάτων ή μακρινού πεδίου (“open” or “radiation” or “absorbing” or “non-reflecting” or “far-field” boundaries). Όταν το κύμα προσπίπτει κάθετα στο υπό μελέτη σύνορο (γωνία πρόσπτωσης 90°) η απορρόφηση είναι τέλεια. Στην περίπτωση όμως που η γωνία πρόσπτωσης παίρνει πολύ μικρές τιμές ($\theta < 30^\circ$) εμφανίζονται κάποια φαινόμενα διάθλασης.

3.5 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Αν σε ένα σημείο ενός συνεχούς μέσου διαταραχτεί η ισορροπία (με την εφαρμογή μιας δύναμης ή μετακίνησης) η διαταραχή αυτή μεταδίδεται και σε όλα τα υπόλοιπα σημεία. Ο όρος «κύμα» χρησιμοποιείται για να περιγράψει αυτή τη διάδοση της διαταραχής.

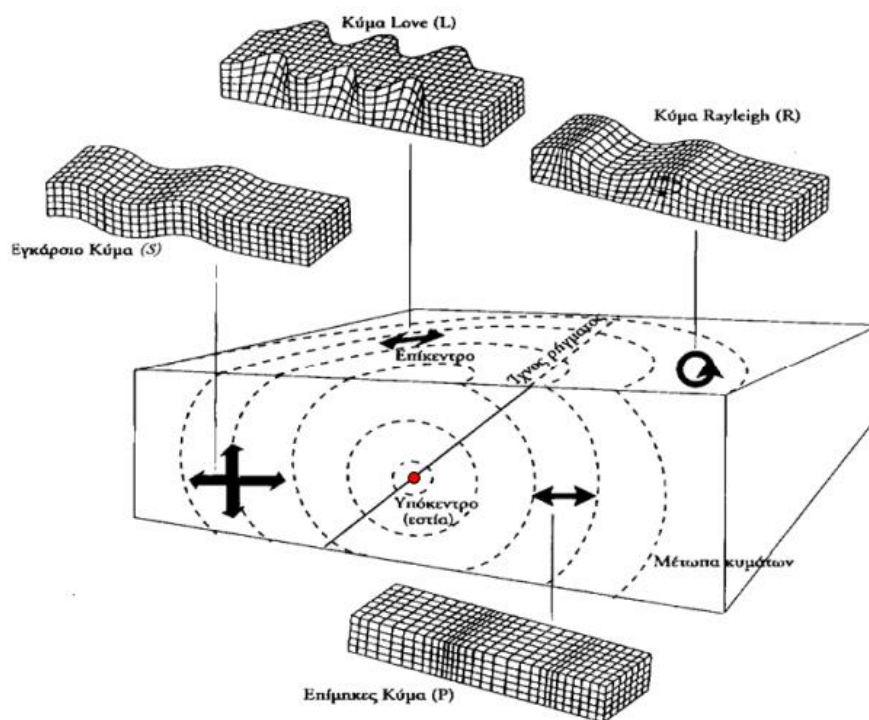
Υπάρχουν πολλά διαφορετικά είδη σεισμικών κυμάτων, και όλα κινούνται με διαφορετικούς τρόπους. Οι δύο κύριοι τύποι κυμάτων είναι τα κύματα χώρου (body waves) και τα επιφανειακά κύματα (surface waves). Τα κύματα χώρου διαδίδονται προς όλες τις κατευθύνσεις στο εσωτερικό της Γης, ενώ τα επιφανειακά κύματα διαδίδονται μόνο κατά μήκος των επιφανειακών στρωμάτων της Γης. Οι σεισμοί ακτινοβολούν τη σεισμική ενέργεια σαν κύματα χώρου, τα οποία περιλαμβάνουν τα διαμήκη και εγκάρσια (διατμητικά) καθώς και σαν επιφανειακά κύματα, τα οποία χωρίζονται σε Rayleigh και Love (Εικόνα 14).



Εικόνα 14: Κατηγορίες σεισμικών κυμάτων

ΧΩΡΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Τα κύματα χώρου, διακινούμενα μέσω του εσωτερικού της γης, φθάνουν σε ένα σεισμολογικό σταθμό πριν από τα επιφανειακά κύματα που εκπέμπονται από το σημείο της εστίας ενός σεισμού (Εικόνα 15). Επίσης αυτά τα κύματα είναι υψηλότερης συχνότητας από τα επιφανειακά. Όταν ένας σεισμός χτυπά, ο πρώτος παλμός της ενέργειας που έρχεται από το σημείο της εστίας περιλαμβάνει τα διαμήκη ή πρώτα ή ηχητικά κύματα (P-waves). Είναι κύματα που διατρέχουν όλη τη γη και είναι τα γρηγορότερα είδη σεισμικών κυμάτων και συνεπώς τα πρώτα που αναγράφονται από τα σεισμόμετρα. Τα διαμήκη κύματα μπορούν να κινηθούν μέσω των συμπαγών πετρών της γης αλλά και των υγρών, όπως τα υγρά στρώματα της γης ή το νερό. Ωθούν και τραβούν τα πετρώματα μέσα στα οποία κινούνται ακριβώς όπως τα ηχητικά κύματα ωθούν και τραβούν τον αέρα. Τα διαμήκη κύματα (P-waves) είναι επίσης γνωστά ως κύματα συμπίεσης (push waves), λόγω της ώθησης και του τραβήγματος που δημιουργούνε. Τα σωματίδια κινούνται προς την ίδια διεύθυνση που κινείται το κύμα κατά την οποία κινείται και η ενέργεια και για το λόγο αυτό καλείται μερικές φορές και σαν «διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων».



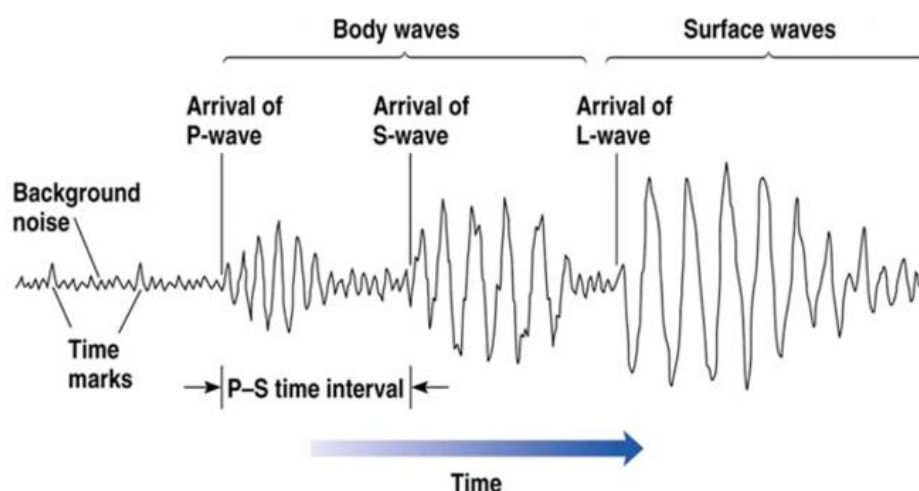
Εικόνα 15: Δημιουργία και εστίες σεισμικών κυμάτων

Τα επόμενα κύματα που αισθανόμαστε σε ένα σεισμό είναι τα εγκάρσια ή διατμητικά ή δευτερεύοντα κύματα (S-waves). Είναι πιο αργά αλλά πιο ισχυρά και καταστρεπτικά από τα διαμήκη κύματα και τα ακολουθούν στο σειсмоγράφημα. Όπως και τα διαμήκη κύματα (P-waves), χαρακτηρίζονται ως κύματα χώρου και διαδίδονται προς κάθε κατεύθυνση τόσο στα επιφανειακά στρώματα όσο και στον πυρήνα. Κατά τη διάδοση των εγκαρσίων κυμάτων τα υλικά σημεία του πετρώματος ταλαντώνονται κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος προκαλώντας μεταβολή στο σχήμα του πετρώματος. Μπορούν να κινηθούν μόνο μέσω στερεού πετρώματος και όχι σε υγρό μέσο. Είναι αυτή η ιδιότητα των κυμάτων S που οδήγησαν τους σεισμολόγους να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι ο εξωτερικός πυρήνας της Γης είναι υγρός. Τα δευτερεύοντα κύματα ταξιδεύουν περίπου δύο φορές αργότερα από τα διαμήκη και λόγω του μεγάλου τους πλάτους είναι αυτά που επιφέρουν την ισχυρή μετακίνηση του εδάφους που είναι χαρακτηριστική των μεγάλων σεισμών.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Διακινούμενα μόνο μέσω του φλοιού της γης, τα επιφανειακά κύματα είναι χαμηλότερης συχνότητας από τα κύματα χώρου, και κατά συνέπεια διακρίνονται εύκολα στο σειсмоγράφημα. Αν και φθάνουν μετά από τα χωρικά κύματα, είναι σχεδόν εξ ολοκλήρου υπεύθυνα για τις ζημιές και τις καταστροφές που συνδέονται με τους σεισμούς. Αυτή η ζημιά και η δύναμη των επιφανειακών κυμάτων μειώνεται στους βαθύτερους σεισμούς. Το πρώτο είδος επιφανειακών κυμάτων ονομάζεται Love (L-wave). Αν και είναι αρκετά πιο αργά από τα κύματα χώρου είναι τα γρηγορότερα από τα επιφανειακά κύματα και κινούν το έδαφος οριζόντια. Δημιουργούν δηλαδή μετακινήσεις πλευρικές της επιφάνειας του εδάφους. Περιορισμένα στην επιφάνεια του φλοιού της γης, τα κύματα Love παράγουν εξ ολοκλήρου την οριζόντια κίνηση. Αν και ταξιδεύουν αργά από τη σεισμική πηγή, είναι πολύ καταστρεπτικά. Είναι αυτά τα κύματα που είναι συχνότερα υπεύθυνα για την κατάρρευση κτιρίων κατά τη διάρκεια ενός σεισμού. Το άλλο είδος επιφανειακών κυμάτων είναι τα κύματα Rayleigh, τα οποία είναι τα πιο αργά όλων των τύπων των σεισμικών κυμάτων και ίσως τα πιο περίπλοκα στη μελέτη (Εικόνα 16). Τα κύματα Rayleigh μετακινούν το έδαφος με τον ίδιο τρόπο όπως ένα θαλάσσιο κύμα μετακινεί τα επιφανειακά νερά. Επειδή κυλά, κινεί το έδαφος πάνω-κάτω, δεξιά-αριστερά στην ίδια κατεύθυνση που κινείται το κύμα. Το μεγαλύτερο μέρος της δόνησης που γίνεται αισθητό από έναν σεισμό οφείλεται στα

κύματα Rayleigh, τα οποία μπορούν να είναι πολύ μεγαλύτερα από τους άλλους τύπους σεισμικών κυμάτων.



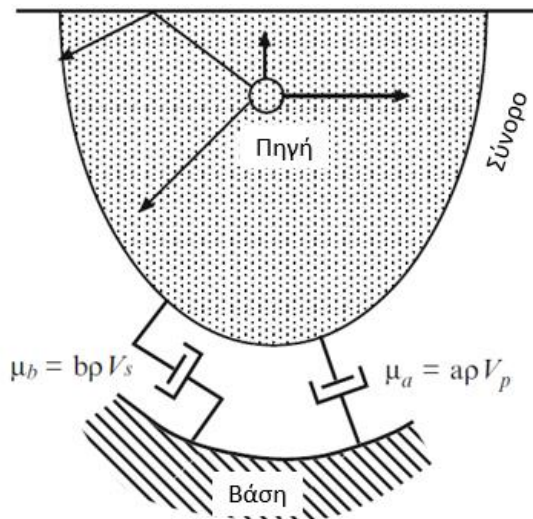
Εικόνα 16: Σειρά άφιξης σεισμικών κυμάτων

Υπάρχουν και άλλα είδη σεισμικών κυμάτων που αποτελούν συνδυασμό των προηγούμενων. Για παράδειγμα τα διαυλικά κύματα που διαδίδονται μέσα σε στρώμα μικρής ταχύτητας και τα στάσιμα κύματα που παράγονται από τη συμβολή των Love και Rayleigh και προκαλούν την ελεύθερη ταλάντωση της Γης.

3.6 ΙΞΩΔΗ ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΑ ΣΥΝΟΡΑ LYSMER ΚΑΙ KUHLEMEYER

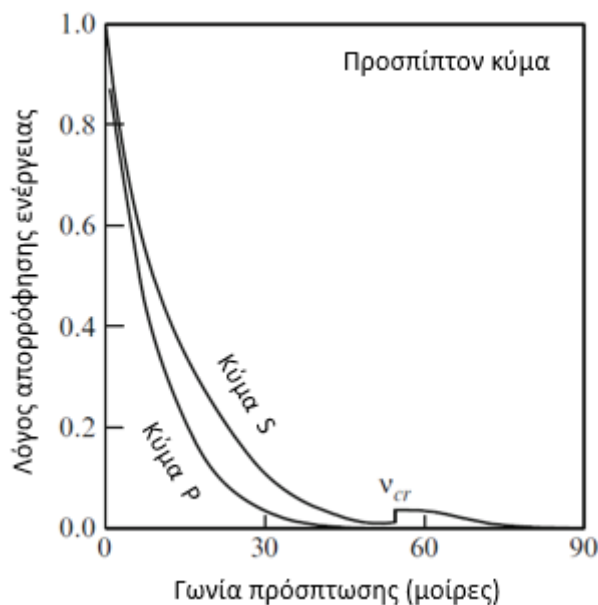
ΔΙΑΜΗΚΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ (P AND S WAVES)

Όταν το κύμα εξέρχεται από την αναλυόμενη περιοχή (Εικόνα 17), η διέγερση εντός των ορίων της περιοχής αυτής εξασθενεί καθώς η κινηματική ενέργεια εξέρχεται από τις πεπερασμένες διαστάσεις του ημιχώρου μέσω του κύματος. Αυτή η εξασθένιση ονομάζεται απόσβεση ακτινοβολίας (radiation damping). Στην περίπτωση του ιξώδους απορροφητικού συνόρου (viscous absorbing boundary) που προτάθηκε από τους Lysmer and Kuhlemeyer [26] λαμβάνεται υπόψιν αυτή η απόσβεση ακτινοβολίας. Τα σύνορα αυτά αποτελούνται από αποσβεστήρες παράλληλους και κάθετους στο σύνορο όπως φαίνεται στην Εικόνα 17. Οι συντελεστές των αποσβεστήρων εξαρτώνται από την πυκνότητα του εδαφικού υλικού, την ταχύτητα διάδοσης του κύματος στην εκάστοτε διεύθυνση καθώς και τους συντελεστές a και b .



Εικόνα 17: Τυπικό άπειρο σύστημα - Τιμές συντελεστών ιξωδοαποσβεστήρων

Για την περίπτωση όπου $a = b = 1$, όταν τα κύματα προσπίπτουν κάθετα στο υπό μελέτη σύνορο (γωνία πρόσπτωσης 90°) απορροφούνται πλήρως και έτσι δεν έχουμε φαινόμενα διάθλασης και ανάκλασης. Στην περίπτωση όμως που η γωνία πρόσπτωσης παίρνει μικρές τιμές ($\theta < 30^\circ$) εμφανίζονται κάποια διαθλώμενα κύματα (Εικόνα 18). Για τιμές του a και b μεγαλύτερες της μονάδας δεν έχουμε τέλεια απορρόφηση των κυμάτων ακόμα και στην περίπτωση που τα κύματα προσπίπτουν κάθετα στο σύνορο. Για το λόγο αυτό στο προσομοίωμα που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε $a = b = 1$.



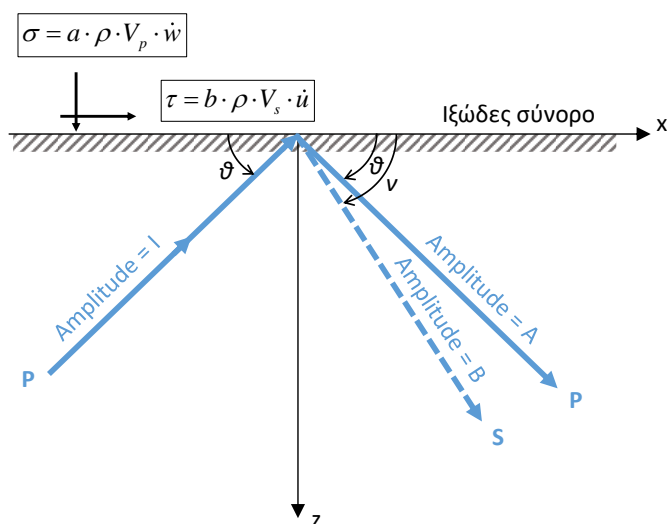
Εικόνα 18: Λόγος απορρόφησης ενέργειας με την γωνία πρόσπτωσης για το ιξώδες σύνορο για την περίπτωση που ισχύει $a = b = 1$

Για την περίπτωση του οριζόντιου συνόρου ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

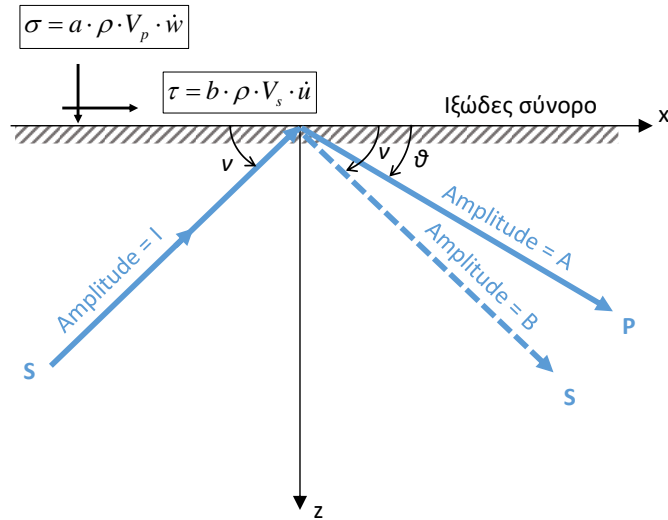
$$\sigma = a \cdot \rho \cdot V_p \cdot \dot{w} \quad (58)$$

$$\tau = b \cdot \rho \cdot V_s \cdot \dot{u} \quad (59)$$

όπου σ και τ είναι οι ορθές και διατμητικές τάσεις αντίστοιχα, \dot{w} και \dot{u} είναι η κατακόρυφη και η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας, ρ είναι η πυκνότητα του υλικού, V_s και V_p είναι οι ταχύτητες διάδοσης διατμητικού και διαμήκους κύματος, a και b είναι αδιάστατες παράμετροι (Εικόνες 19 και 20). Επειδή οι παράμετροι αυτές είναι σταθερές, το σύνορο μπορεί να απορροφήσει αρμονικά αλλά και μη αρμονικά κύματα.



Εικόνα 19: Ορθές και διατμητικές τάσεις για προσπίπτον διαμήκες κύμα P σε οριζόντιο απορροφητικό σύνορο



Εικόνα 20: Ορθές και διατμητικές τάσεις για προσπίπτον διατμητικό κύμα S σε οριζόντιο απορροφητικό σύνορο

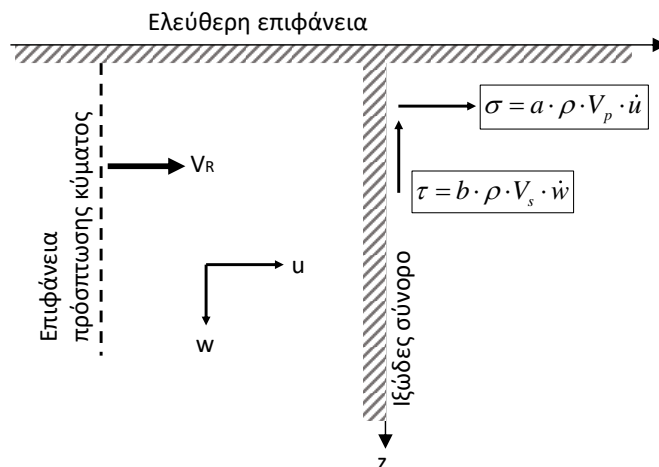
Για την περίπτωση του κατακόρυφου συνόρου οι ταχύτητες αντιστρέφονται στις σχέσεις (58) και (59).

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΚΥΜΑΤΑ (RAYLEIGH AND LOVE WAVES)

Τα ιξώδη απορροφητικά σύνορα μπορούν να χρησιμοποιηθούν, επίσης, στην περίπτωση επιφανειακών κυμάτων, όπου όμως οι συντελεστές a και b δεν είναι σταθεροί αλλά μεταβάλλονται με την απόσταση του συνόρου από την ελεύθερη επιφάνεια και εξαρτώνται από τη συχνότητα. Οι ορθές και διατμητικές τάσεις για την περίπτωση κατακόρυφου συνόρου που φαίνονται στην Εικόνα 21 δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\sigma = a \cdot \rho \cdot V_p \cdot \dot{u} \quad (60)$$

$$\tau = b \cdot \rho \cdot V_s \cdot \dot{w} \quad (61)$$



Εικόνα 21: Ορθές και διατμητικές τάσεις για προσπίπτον κύμα Rayleigh σε κατακόρυφο απορροφητικό σύνορο

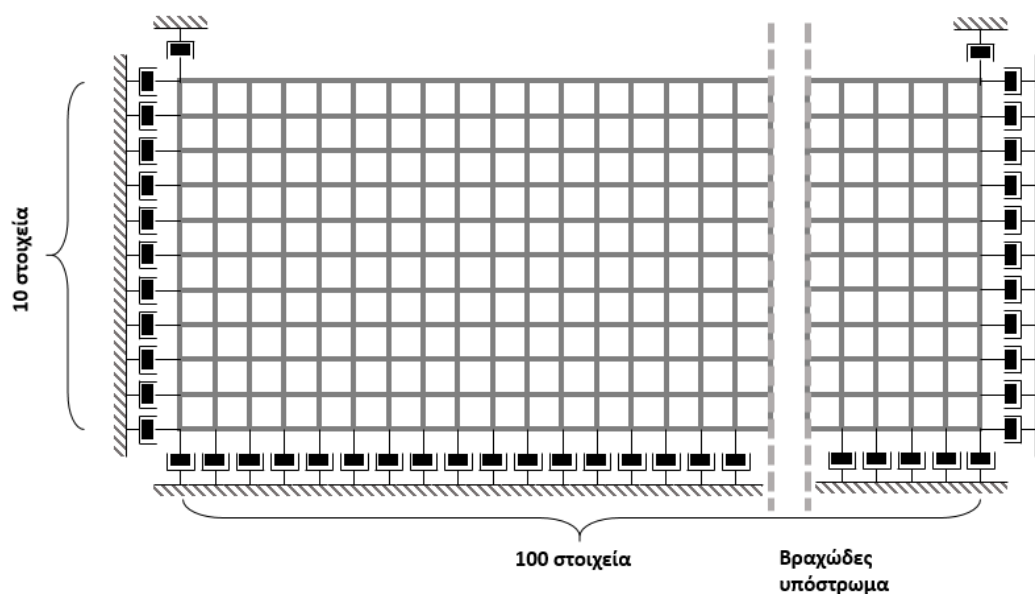
3.7 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ

Στην παρούσα εργασία, η προσομοίωση του εδαφικού ημιχώρου γίνεται με τη βοήθεια του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS [1]. Στην πραγματικότητα ο ημιχώρος είναι άπειρος, όμως επειδή δεν είναι εφικτή η προσομοίωση του απείρου, ορίζουμε πεπερασμένες διαστάσεις στο χωρίο μας προκειμένου να το εισαγάγουμε στο πρόγραμμα και να το μελετήσουμε. Συγκεκριμένα, οι διαστάσεις του εδάφους που ορίζουμε στο μοντέλο μας είναι $100 \times 10m$. Λόγω όμως του περιορισμού των διαστάσεων τα κύματα που δημιουργούνται από το σεισμό ή τις εκάστοτε δυναμικές φορτίσεις δεν είναι ελεύθερα να κινηθούν προς το άπειρο αλλά «εγκλωβίζονται» εντός των συνόρων του μοντέλου με αποτέλεσμα την εμφάνιση φαινομένων ανάκλασης και διάθλασης. Τα φαινόμενα αυτά είναι ανεπιθύμητα γιατί διαστρεβλώνουν το πραγματικό πρόβλημα και ενδεχομένως να αλλοιώνουν την δυναμική συμπεριφορά του εδάφους. Για να αποφευχθεί λοιπόν, αυτό το φαινόμενο, εισάγονται ειδικά απορροφητικά σύνορα, ώστε να ληφθεί υπόψιν η ακτινοβολία ενέργειας πέρα από τα όρια του εδαφικού μέσου. Πιο συγκεκριμένα, τοποθετούμε, όπως φαίνεται στην Εικόνα 22, πλευρικά απορροφητικά σύνορα (lateral absorbing boundaries) στο δεξί και το αριστερό άκρο του ημιχώρου και ένα οριζόντιο απορροφητικό σύνορο (bottom absorbing boundary) στη βάση. Η κατακόρυφη διεύθυνση θεωρούμε στις αναλύσεις μας ότι περιορίζεται από βραχώδες υπόστρωμα. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν τα ιξώδη απορροφητικά σύνορα (viscous

absorbing boundaries) των Lysmer and Kuhlemeyer [26], τα οποία έχουν περιγραφεί εκτενώς στην προηγούμενη ενότητα. Τα ιξώδη αυτά απορροφητικά σύνορα χαρακτηρίζονται από ένα συντελεστή απόσβεσης:

$$C = \rho VA \quad (62)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του εδαφικού υλικού, V (V_s ή V_p) η ταχύτητα διάδοσης του διατμητικού ή διαμήκους κύματος αντίστοιχα και A η επιφάνεια επιρροής του αποσβεστήρα η οποία υπολογίζεται ως το γινόμενο του πλάτους επιρροής του αποσβεστήρα επί το πάχος του στοιχείου. Κάθε κόμβος του συνόρου που προκύπτει από τη διακριτοποίηση του ημιχώρου στηρίζεται σε έναν εφαπτομενικό και έναν κάθετο στο σύνορο ιξωδοαποσβεστήρα.

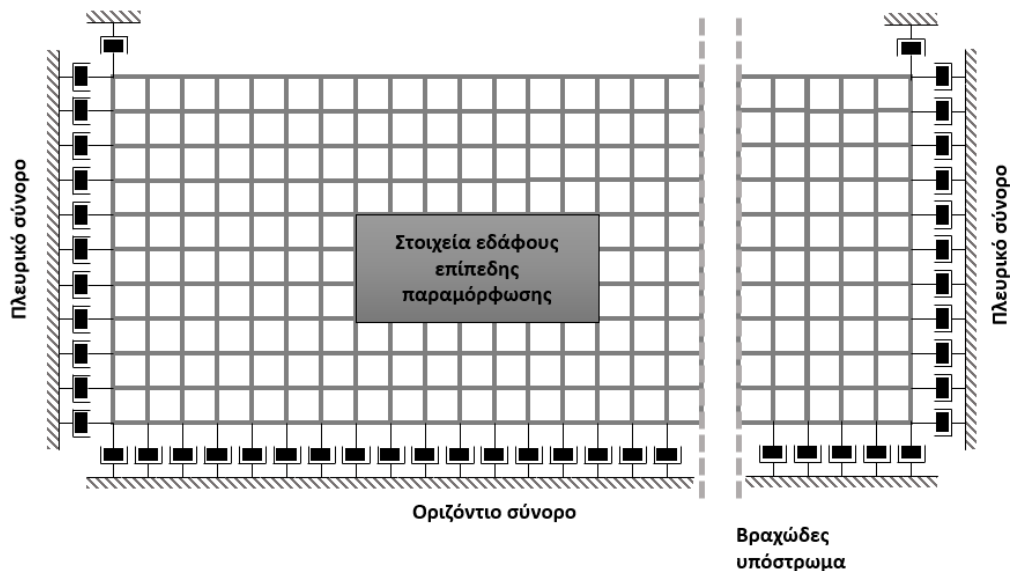


Εικόνα 22: Προσομοίωμα εδαφικού ημιχώρου με πεπερασμένα στοιχεία

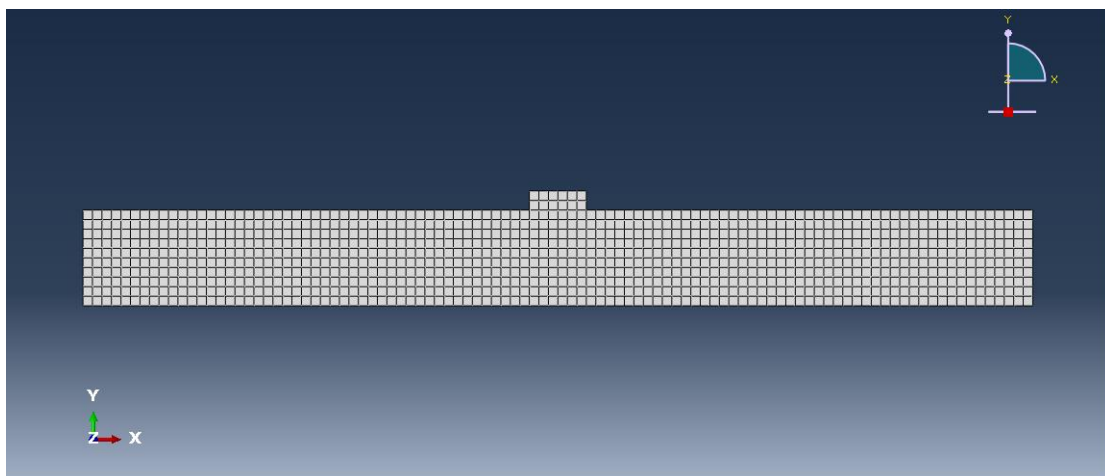
Το μέτρο ελαστικότητας E αποτελεί τη στοχαστική παράμετρο του εδαφικού ημιχώρου, ενώ οι υπόλοιπες ιδιότητές του είναι χωρικά και χρονικά σταθερές. Συγκεκριμένα, το μέτρο ελαστικότητας του εδάφους περιγράφεται στην κατακόρυφη διεύθυνση y από ένα στοχαστικό πεδίο $E(y)$, το οποίο προσομοιώνεται με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε σειρά Karhunen-Loeve.

Όσον αφορά τη διακριτοποίηση του εδαφικού ημιχώρου και του θεμελίου στο προσομοίωμα που μελετάμε, χρησιμοποιούνται τετράκομβα τετραγωνικά πεπερασμένα στοιχεία διαστάσεων $1 \times 1m$ επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain) με μοναδιαίο πάχος, όπως φαίνεται στην Εικόνα 23. Ο ημιχώρος αποτελείται τελικά από

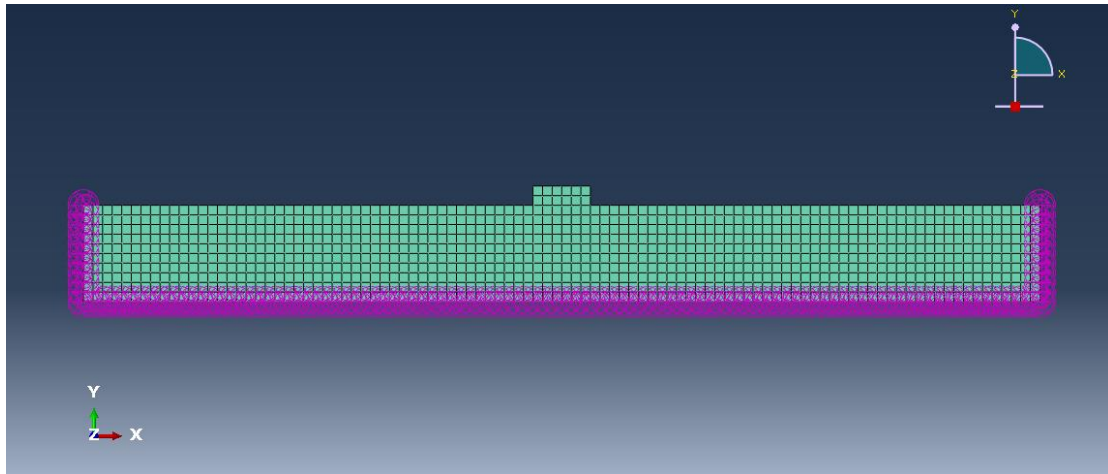
1000 συνολικά τον αριθμό πεπερασμένα στοιχεία και η διακριτοποίησή του με το πρόγραμμα ABAQUS φαίνεται στην Εικόνα 24. Στην Εικόνα 25 παρουσιάζεται επίσης η εφαρμογή των απορροφητικών συνόρων στο μοντέλο. Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό, ότι ικανοποιείται ο περιορισμός, η απόσταση από κόμβο σε κόμβο, να είναι μικρότερη ή ίση της τιμής $\lambda_{min} / 8$, όπου λ_{min} είναι το μήκος κύματος για τη μέγιστη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης f_{max} . Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι δεν θα χαθεί κάποια έξαρση της απόκρισης καθώς υπάρχουν αρκετά σημεία σε κάθε μήκος κύματος. Ισχύει $\lambda_{min} = V_s / f_{max}$ για εύρη συχνοτήτων που στην περίπτωση μας αντιπροσωπεύουν σεισμικές διεγέρσεις με $f_{max} = 5 - 10Hz$.



Εικόνα 23: Διακριτοποίηση εδαφικού ημιχώρου με στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης

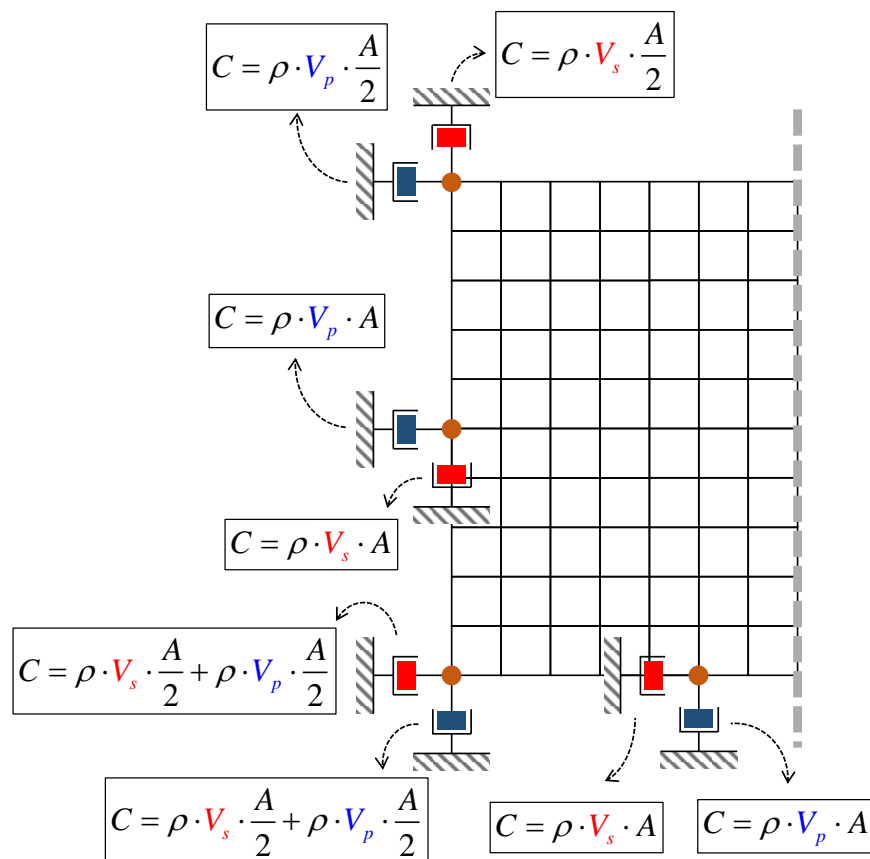


Εικόνα 24: Προσομοίωμα πεπερασμένων στοιχείων στο ABAQUS



Εικόνα 25: Απορροφητικά σύνορα

Ανάλογα με το αν έχουμε πλευρικό ή οριζόντιο σύνορο η γενική Εξίσωση (62) του συντελεστή C τροποποιείται αντίστοιχα για την εκάστοτε περίπτωση (Εικόνα 26). Ακόμη, ο υπολογισμός της ταχύτητας διάδοσης του διατμητικού κύματος V_s ή του διαμήκους κύματος V_p γίνεται σύμφωνα με την επόμενη παράγραφο.



Εικόνα 26: Συντελεστές απόσβεσης απορροφητικών συνόρων

Για την περίπτωση των πλευρικών συνόρων η διαδικασία υπολογισμού των ταχυτήτων διάδοσης των κυμάτων είναι η ακόλουθη:

Η ταχύτητα διάδοσης διατμητικού κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho_s}} \quad (63)$$

όπου G είναι το μέτρο διάτμησης και ρ_s η πυκνότητα του υλικού του εδαφικού ημιχώρου.

Το μέτρο διάτμησης δίνεται από τη σχέση:

$$G = \sqrt{\frac{E}{2 \cdot (1 + \nu_s)}} \quad (64)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας που προκύπτει από τη μέση τιμή του στοχαστικού πεδίου.

Η ταχύτητα διάδοσης διαμήκους κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$V_p = V_s \sqrt{\frac{2(1 - \nu_s)}{1 - 2\nu_s}} \quad (65)$$

όπου V_s είναι η ταχύτητα διάδοσης διατμητικού κύματος και ν_s ο λόγος Poisson.

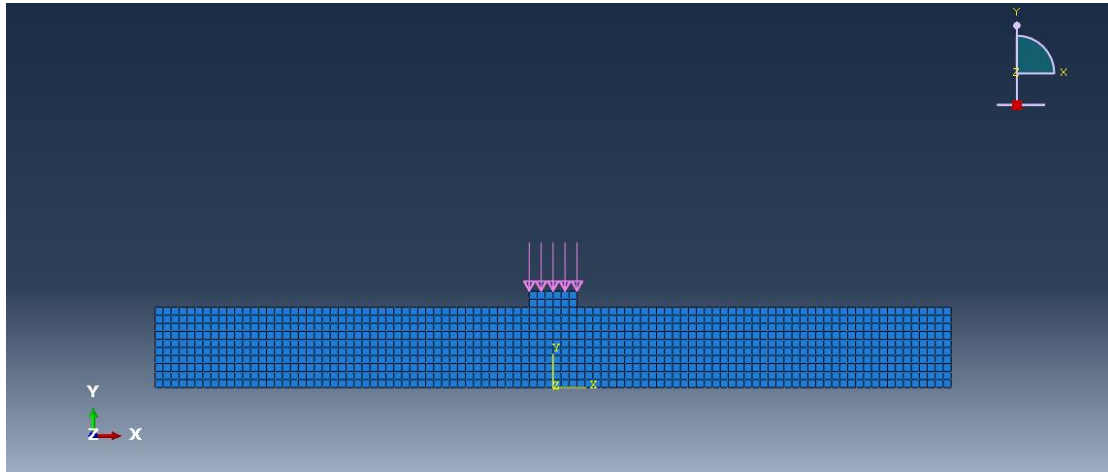
Στην περίπτωση του οριζόντιου συνόρου προκύπτει ότι η ταχύτητα διάδοσης του διατμητικού κύματος είναι $V_s = 800 \text{ m/s}$, οπότε από την Εξίσωση (65) υπολογίζεται ότι η ταχύτητα του διαμήκους κύματος είναι $V_p = 1497 \text{ m/s}$. Αυτό συμβαίνει επειδή στη σχέση των συντελεστών απόσβεσης υπεισέρχεται η ταχύτητα διάδοσης διατμητικού ή διαμήκους κύματος του υποκείμενου εδαφικού στρώματος που στην περίπτωσή μας είναι το βραχώδες υπόστρωμα.

Ο εδαφικός ημιχώρος που προσομοιώνεται στο μοντέλο είναι αργιλώδης με μέτρια προς χαμηλή πλαστιμότητα και έχει τις παρακάτω χαρακτηριστικές τιμές:

- Μέση τιμή μέτρου ελαστικότητας: $\mu_{E_s} = 30 \text{ Mpa}$
- Πυκνότητα: $\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$
- Λόγος Poisson: $\nu_s = 0.3$

Θεωρούμε ότι στην επιφάνεια του εδαφικού μέσου εδράζεται ένα άκαμπτο θεμέλιο διαστάσεων $6 \times 2 \text{ m}$ με ιδιότητες:

- Μέτρο ελαστικότητας: $E_f = 40\text{Gra}$
- Πυκνότητα: $\rho_f = 2500\text{ kg / m}^3$
- Λόγος Poisson: $\nu_f = 0.2$

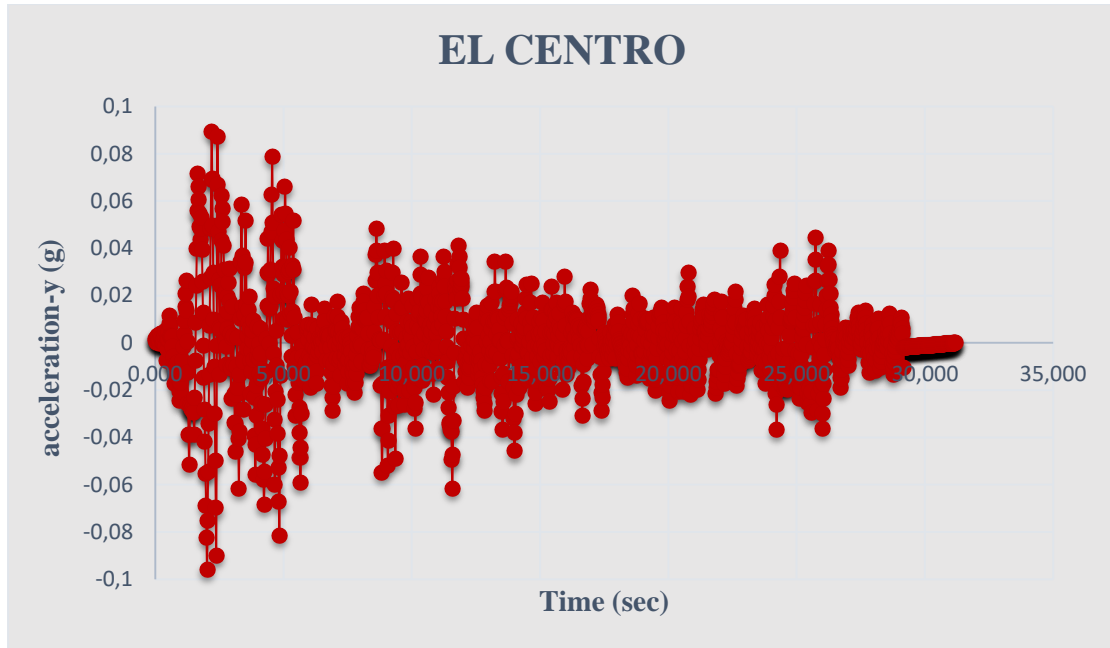


Εικόνα 27: Στατική φόρτιση θεμελίου.

Στο θεμέλιο επιβάλλεται αρχικά στατικά μια ομοιόμορφη τάση 100kPa (ή 100 kN/τρέχον m) που προσομοιώνει το φορτίο της ανωδομής (Εικόνα 27). Στη συνέχεια, με το πέρας της στατικής ανάλυσης, το μοντέλο διεγείρεται με το σεισμό του El Centro στην κατακόρυφη διεύθυνση y (dynamic implicit analysis). Θεωρούμε ότι για την κατακόρυφη συνιστώσα του σεισμού ισχύει $E_y = 0.3 \cdot E_x$ (Εικόνα 28). Η σεισμική αυτή διέγερση εισάγεται στο μοντέλο όχι σαν επιτάχυνση, αλλά σαν ισοδύναμη δύναμη, η οποία δίνεται από τη σχέση:

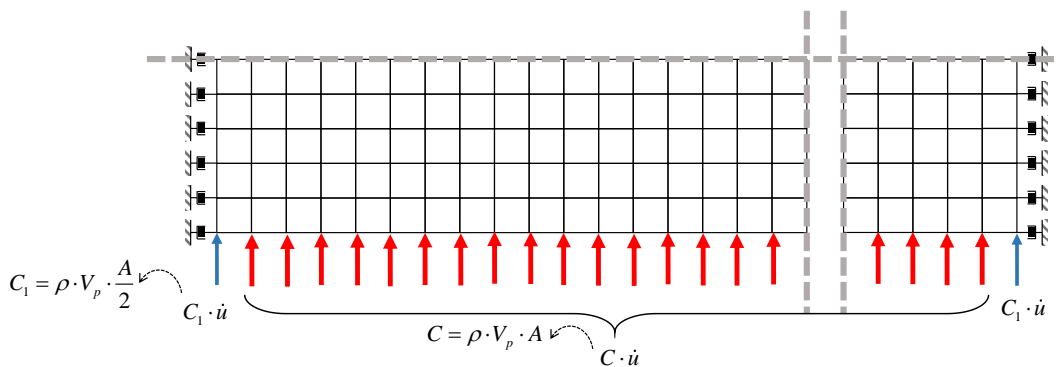
$$F = C \cdot \dot{u} = \rho \cdot V \cdot A \cdot \dot{u} \quad (66)$$

όπου C είναι ο συντελεστής απόσβεσης και \dot{u} η χρονοϊστορία της ταχύτητας, η οποία λαμβάνεται από την ολοκλήρωση της επιτάχυνσης στη χρονική διάρκεια του σεισμού με την τραπεζοειδή μέθοδο και τη βοήθεια του προγράμματος Matlab [2]. Πιο συγκεκριμένα, η χρονοϊστορία φόρτισης επιβάλλεται σαν επικόμβια κατακόρυφη φόρτιση στη βάση του εδαφικού ημιχώρου (οριζόντιο σύνορο) και συγκεκριμένα στους κόμβους που καταλήγουν οι ιξωδοαποσβεστήρες.



Εικόνα 28: Χρονοιστορία επιτάχυνσης κατακόρυφης συνιστώσας σεισμού El Centro 1940.

Η τιμή της F από την Εξίσωση (66) προκύπτει σαν τη χρονοιστορία ταχύτητας της εδαφικής κίνησης (ground motion) \dot{u} πολλαπλασιασμένη με τον συντελεστή απόσβεσης C . Ο συντελεστής C που ισούται με το γινόμενο της ταχύτητας διάδοσης του κύματος στο υποκείμενο βραχώδες υπόστρωμα, της πυκνότητας του εδαφικού υλικού και της επιφάνειας επιρροής του, υπολογίζεται από τη διαδικασία που περιγράψαμε ήδη παραπάνω για την περίπτωση του οριζόντιου συνόρου και η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στην Εικόνα 29. Η τεχνική αυτή λαμβάνει υπόψιν την πεπερασμένη ακαμψία του υποκείμενου εδαφικού στρώματος επιτρέποντας στην ενέργεια να εισέλθει πίσω στο υποκείμενο υλικό.



Εικόνα 29: Κατακόρυφη σεισμική φόρτιση στο οριζόντιο σύνορο.

Η οριζόντια απόσταση επιλέγεται δεκαπλάσια της κατακόρυφης γιατί στην περίπτωση που ο ημιχώρος υπόκειται σε μια σεισμική διέγερση αν τα πλευρικά σύνορα στα άκρα του τοποθετηθούν σε κοντινή απόσταση θα απορροφήσουν μεγαλύτερο ποσοστό ενέργειας από το πραγματικό.

Όσον αφορά το λογισμικό ABAQUS για την προσομοίωση των πεπερασμένων στοιχείων του εδαφικού μέσου και του θεμελίου χρησιμοποιήθηκαν two-dimensional soild, plane strain elements (CPE4R 4-node bilinear, reduced integration with hourglass control) και στοιχεία αποσβεστήρων μηδενικού μήκους-σημειακά (zero length) και συγκεκριμένα τα dashpot1 element.

Για τη μόρφωση των στοχαστικών μητρώων στιβαρότητας χρησιμοποιείται η μέθοδος του κεντρικού σημείου (midpoint method). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή προσεγγίζεται το στοχαστικό πεδίο $f_E(y)$ σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο από μια μοναδική τυχαία μεταβλητή, ορισμένη σαν την τιμή του πεδίου στο κέντρο y_c του στοιχείου.

Στο πρόβλημα που εξετάζουμε, όπως προαναφέρθηκε, για την προσομοίωση του στοχαστικού πεδίου χρησιμοποιείται το ανάπτυγμα Karhunen-Loeve, το οποίο έχει την ακόλουθη μορφή:

$$E(y) = E_0 \cdot (1 + f_E(y)) \quad (67)$$

$$E(y) = E_0 \left(1 + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(y) \xi_i \right) \quad (68)$$

όπου E_0 είναι η μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας με τιμή $E_0 = 30Mpa$, λ_i και $\varphi_i(y)$ είναι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις της συνάρτησης αυτοδιακύμανσης $C_{f_E}(y, y')$ αντίστοιχα, ξ_i είναι ένα σύνολο ορθοκανονικών ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(0,1)$ και M είναι ένας πεπερασμένος αριθμός όρων.

Η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης (autocovariance function) του στοχαστικού πεδίου $f_E(y)$ ορίζεται ως:

$$C_{f_E}(y, y') = \sigma^2 \exp \left[\frac{y - y'}{b} \right] \quad (69)$$

όπου σ^2 είναι η διακύμανση του στοχαστικού πεδίου, b το μήκος συσχέτισης και y, y' οι εκάστοτε συντεταγμένες στη διεύθυνση y του εδαφικού ημιχώρου στο κέντρο των πεπερασμένων στοιχείων και η μεταξύ τους απόσταση ορίζεται σαν $\tau = y - y'$.

Η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης σχετίζεται με τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{f_E}(y, y')$ με τον ακόλουθο τύπο :

$$C_{f_E}(y, y') = R_{f_E}(y, y') - \mu_{f_E}(y)\mu_{f_E}(y') \quad (70)$$

όπου $\mu_{f_E}(y)$ είναι η συνάρτηση μέσης τιμής του στοχαστικού πεδίου.

Έτσι, για το ανάπτυγμα Karhunen-Loeve που είναι στοχαστικό πεδίο μηδενικής μέσης τιμής (δηλαδή $\mu_{f_E}(y) = 0$), η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης και αυτοσυσχέτισης είναι ίσες. Επομένως:

$$C_{f_E}(y, y') = R_{f_E}(y, y') \quad (71)$$

Και επομένως η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$R_{f_E}(y, y') = \sigma^2 \exp\left[\frac{y - y'}{b}\right] \quad (72)$$

Στην περίπτωση μας ισχύει: $M = 12$, $b = 5m$, $\sigma^2 = 0.04$.

Στην παρούσα εργασία η προσομοίωση Monte Carlo χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής και της διακύμανσης της καθίζησης (κατακόρυφης μετακίνησης) u ενός θεμελίου με την πάροδο της χρονικής διάρκειας t του σεισμού του El Centro. Πιο συγκεκριμένα, πραγματοποιούνται 10000 επαναλήψεις με τη βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού Matlab, στις οποίες βάσει του εκάστοτε στοχαστικού πεδίου $E(y)$ υπολογίζονται οι συντελεστές απόσβεσης C και έτσι «καλείται» σαν batch file το αρχείο με το προσομοίωμα που έχει αναπτυχθεί στο πρόγραμμα ABAQUS. Συγκεντρώνονται οι κατακόρυφες μετακινήσεις u κάθε χρονική στιγμή για τη σεισμική διέγερση του El Centro για κάθε επαναληπτική διαδικασία. Έτσι, μετά το πέρας των επαναλήψεων υπολογίζονται τελικά από τις γνωστές σχέσεις της στατιστικής η μέση τιμή και η διακύμανση της καθίζησης του θεμελίου για κάθε χρονική στιγμή από 0 έως 31.18sec με βήμα $\Delta t = 0.02sec$. Να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι τη χρονική στιγμή $t = 0sec$ η σεισμική διέγερση ξεκινάει με τις καθιζήσεις που προκύπτουν από τη στατική φόρτιση του θεμελίου και όχι από θέση ισορροπίας.

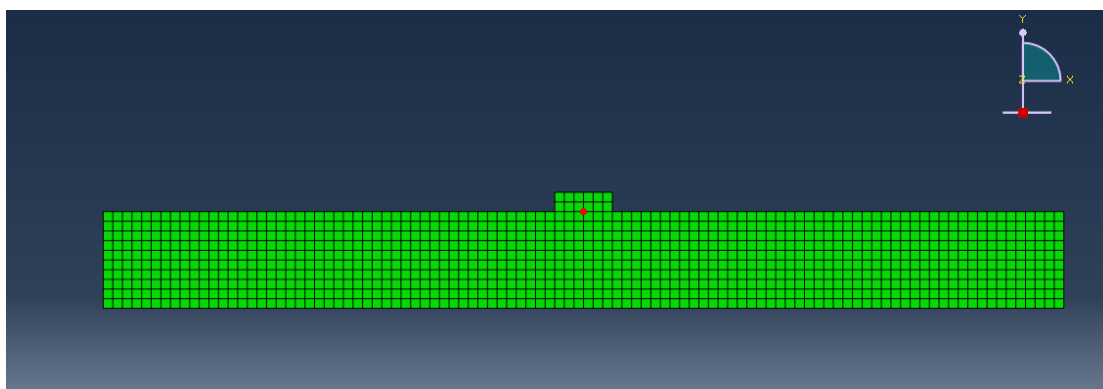
Η μέθοδος εξέλιξης πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Evolution Method-PDEM) εξετάζεται στο μοντέλο που χρησιμοποιούμε ως προς την ακρίβεια και την αποτελεσματικότητά της. Η PDEM περιγράφεται από μια γενικευμένη εξίσωση εξέλιξης πυκνότητας (general density evolution equations-GDEE), η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial t} + \dot{u}(\theta, t) \frac{\partial p_{u\theta}(u, \theta, t)}{\partial u} = 0 \quad (73)$$

Η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση περιγράφει το νόμο διατήρησης της πιθανότητας και αναπαριστά τη μονοδιάστατη (1D) υπερβολική εξίσωση μεταφοράς (advection). Στο προσομοίωμα που εξετάζουμε χρησιμοποιήθηκε η RQ-SPM για την επιλογή των αντιπροσωπευτικών συνόλων σημείων στο πεδίο των πιθανοτήτων και η μέθοδος Streamline Upwind Petrov/Galerkin-SUPG για την επίλυση της ντετερμινιστικής μερικής διαφορικής εξίσωσης (Εξίσωση (73)). Η αναλυτική διαδικασία υπολογισμού έχει περιγραφεί εκτενώς στο κεφάλαιο 2.6.

Συνοπτικά, μελετάμε το δυναμικό πρόβλημα της καθίζησης του κεντρικού κόμβου του θεμελίου, ο οποίος φαίνεται στην Εικόνα 30, με το χρόνο t για το σεισμό του El Centro. Οι Εικόνες των αποτελεσμάτων της στοχαστικής ανάλυσης του επόμενου κεφαλαίου αναφέρονται στον κόμβο αυτό.

Η MCS χρησιμοποιείται ως μέθοδος αναφοράς στο υπό μελέτη πρόβλημα. Συγκρίνουμε δηλαδή τα αποτελέσματα που θα πάρουμε από PDEM και καταλήγουμε σε ανάλογα συμπεράσματα για την καταλληλότητα της μεθόδου.



Εικόνα 30: Υπό μελέτη κόμβος στοχαστικής ανάλυσης.

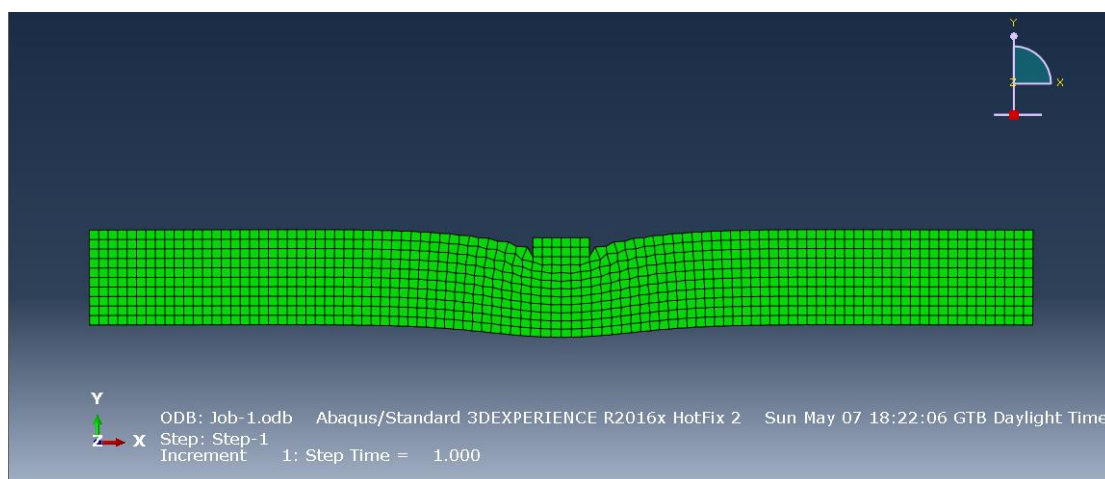
4

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

4.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

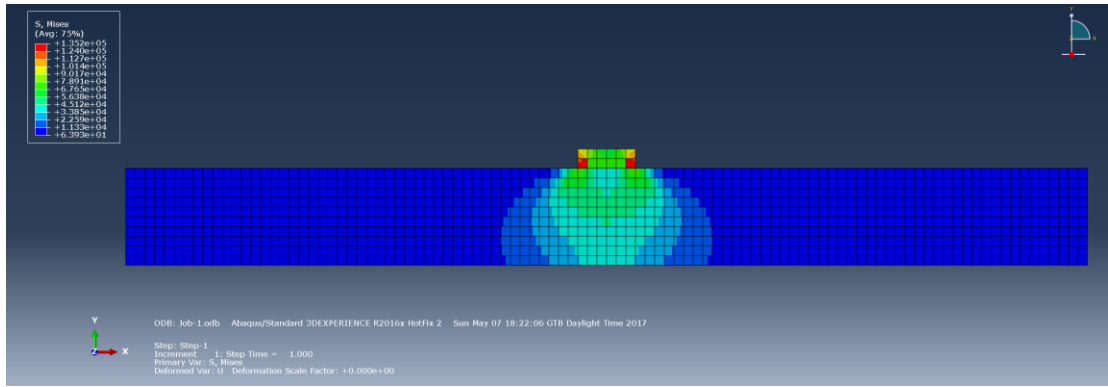
Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των αναλύσεων και τα συμπεράσματα που προκύπτουν. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS για τον εδαφικό ημιχώρο και το θεμέλιο από μία ντετερμινιστική ανάλυση ενδεικτικά, για την κατανόηση της συμπεριφοράς του εδάφους, του θεμελίου και των απορροφητικών συνόρων. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της στοχαστικής ανάλυσης.

Αρχικά παρουσιάζεται στην Εικόνα 31 η παραμορφωμένη κατάσταση του ημιχώρου για το αρχικό στατικό φορτίο.

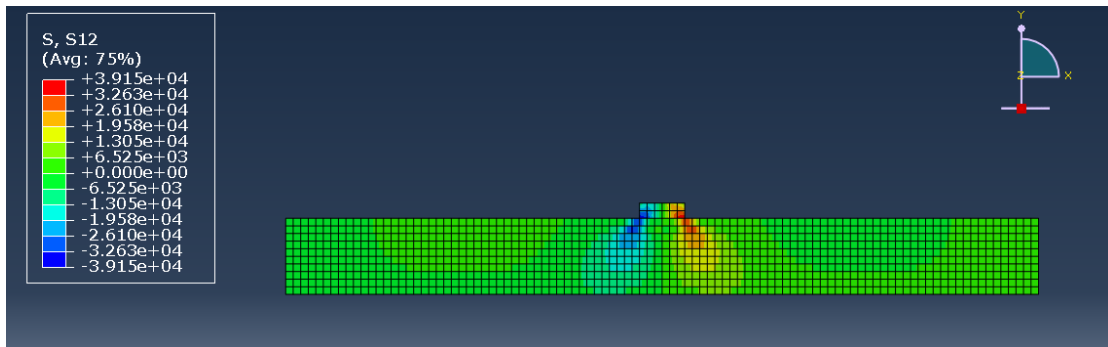


Εικόνα 31: Παραμορφωμένη κατάσταση εδαφικού ημιχώρου (σε μεγέθυνση).

Στην Εικόνα 32 φαίνονται οι τάσεις Von Mises και στην Εικόνα 33 οι διατμητικές τάσεις για τον εδαφικό ημίχωρο και το θεμέλιο στο τέλος του βήματος της στατικής φόρτισης το οποίο αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t=0$ sec για το σεισμό του El Centro.

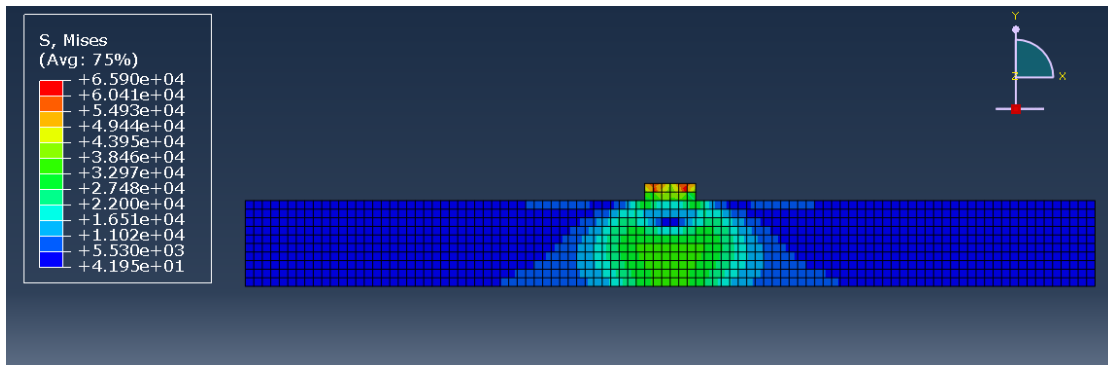


Εικόνα 32: Τάσεις Von Mises στατικής ανάλυσης.

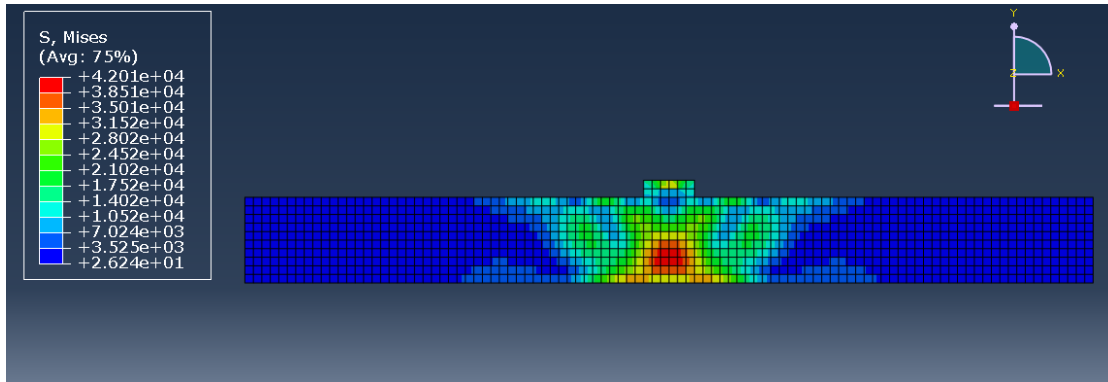


Εικόνα 33: Διατμητικές τάσεις στατικής ανάλυσης.

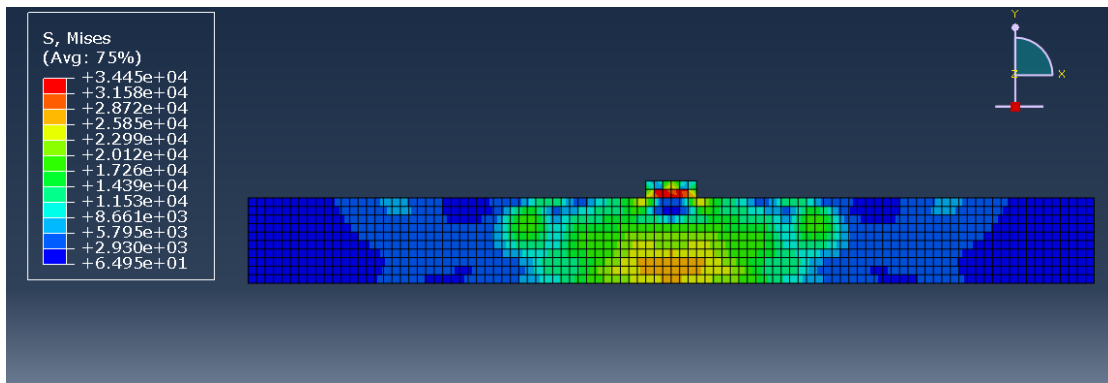
Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι τάσεις για διάφορες χρονικές στιγμές της δυναμικής ανάλυσης για τον εδαφικό ημίχωρο και το θεμέλιο, στις Εικόνες 34 – 39. Φαίνεται η σταδιακή διάδοση του κύματος καθώς και η εξασθένιση της δυναμικής απόκρισης με το πέρασμα του χρόνου. Οι χρονικές στιγμές αντιστοιχούν στη διάρκεια του πρώτου δευτερολέπτου που η ένταση είναι ισχυρή μέχρι τη διάδοσή της στα απορροφητικά σύνορα καθώς επίσης και για την τελευταία χρονική στιγμή.



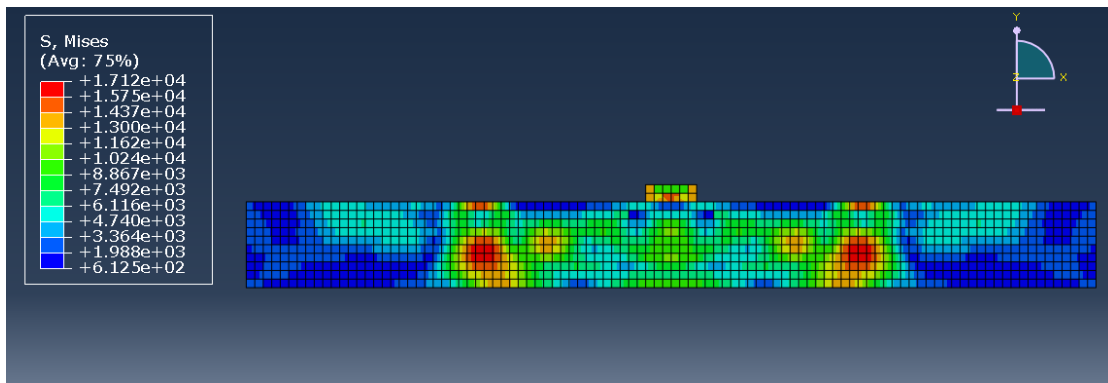
Εικόνα 34: Τάσεις Von Mises t=0.04 sec.



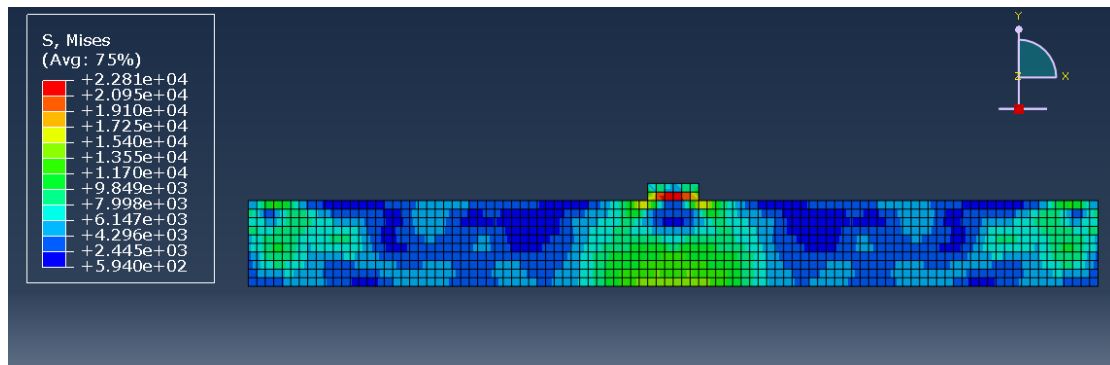
Εικόνα 35: Τάσεις Von Mises t=0.12 sec.



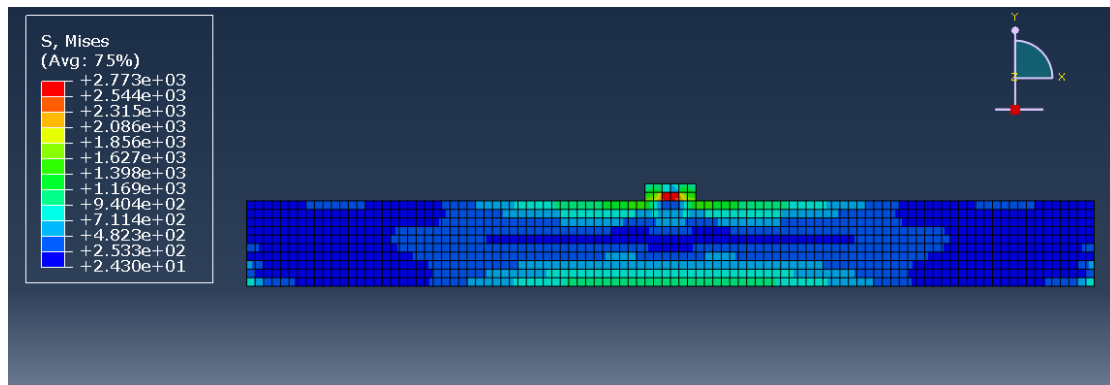
Εικόνα 36: Τάσεις Von Mises t=0.28 sec.



Εικόνα 37: Τάσεις Von Mises t=0.40 sec.

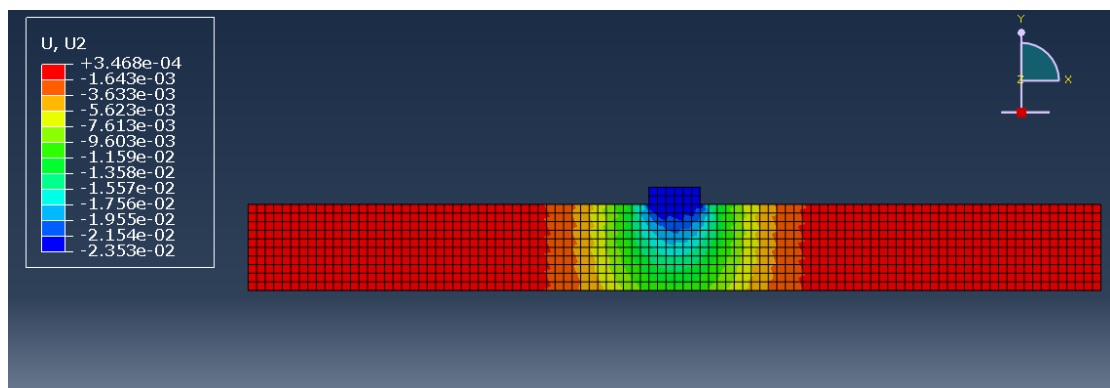


Εικόνα 38: Τάσεις Von Mises $t=0.90$ sec.

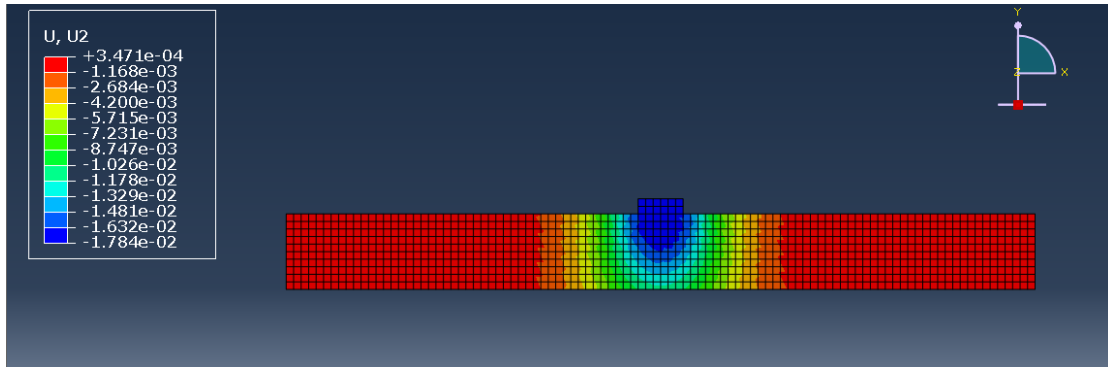


Εικόνα 39: Τάσεις Von Mises $t=31.18$ sec.

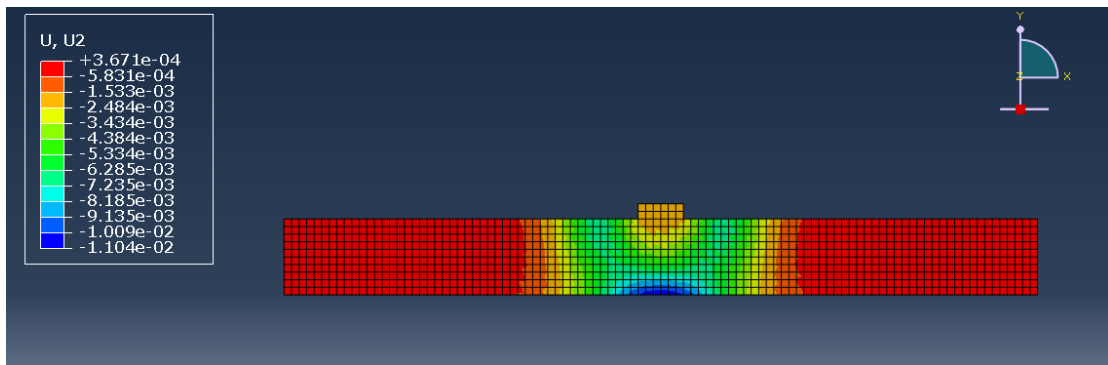
Στη συνέχεια, στις Εικόνες 40-46 παρουσιάζονται αντίστοιχα το πεδίο των μετακινήσεων για τις ίδιες χρονικές στιγμές για το θεμέλιο και τον εδαφικό ημιχώρο.



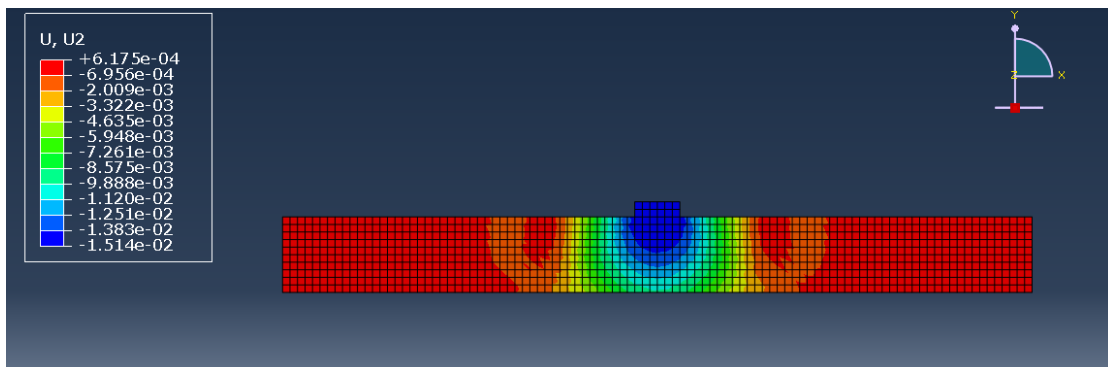
Εικόνα 40: Μετακινήσεις για $t=0$ sec.



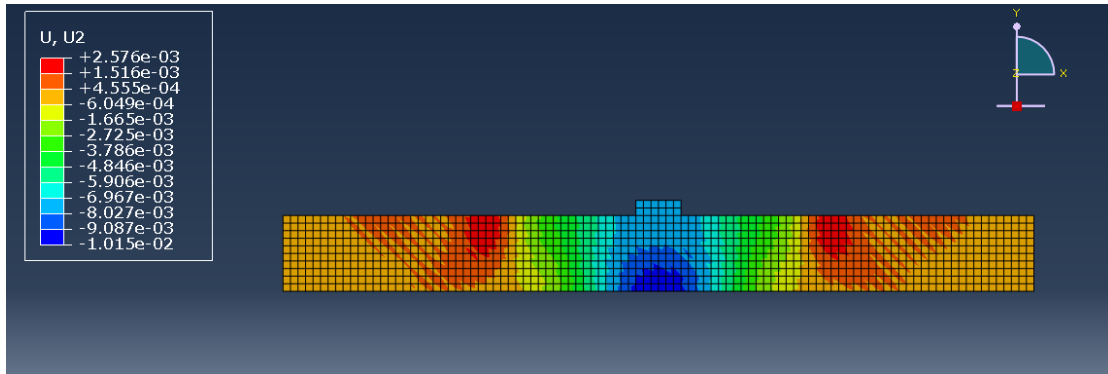
Εικόνα 41: Μετακινήσεις για $t=0.04$ sec.



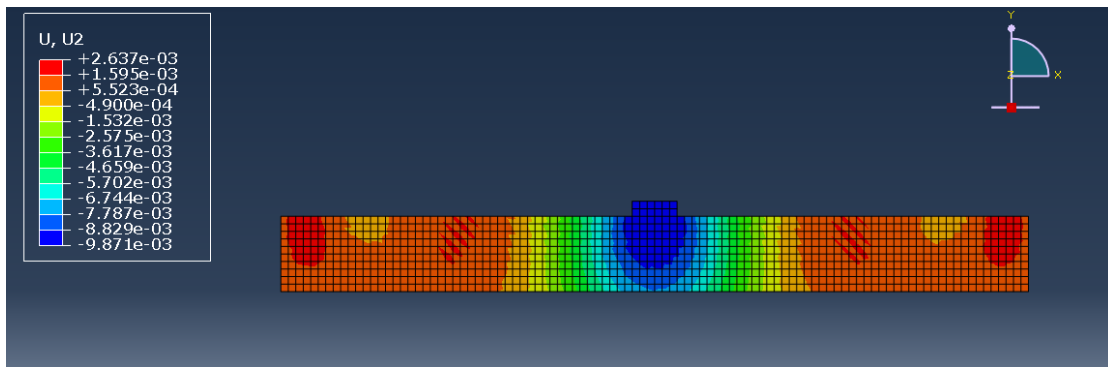
Εικόνα 42: Μετακινήσεις για $t=0.12$ sec.



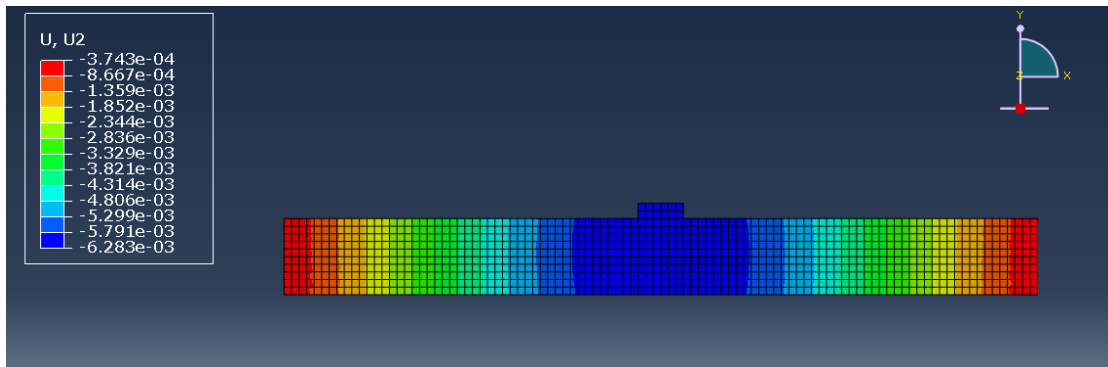
Εικόνα 43: Μετακινήσεις για $t=0.28$ sec.



Εικόνα 44: Μετακινήσεις για t=0.40 sec.

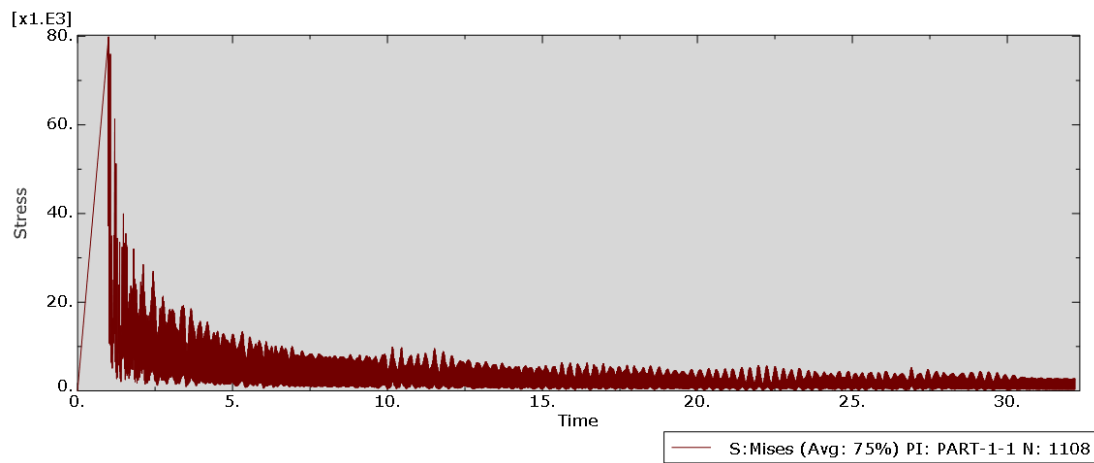
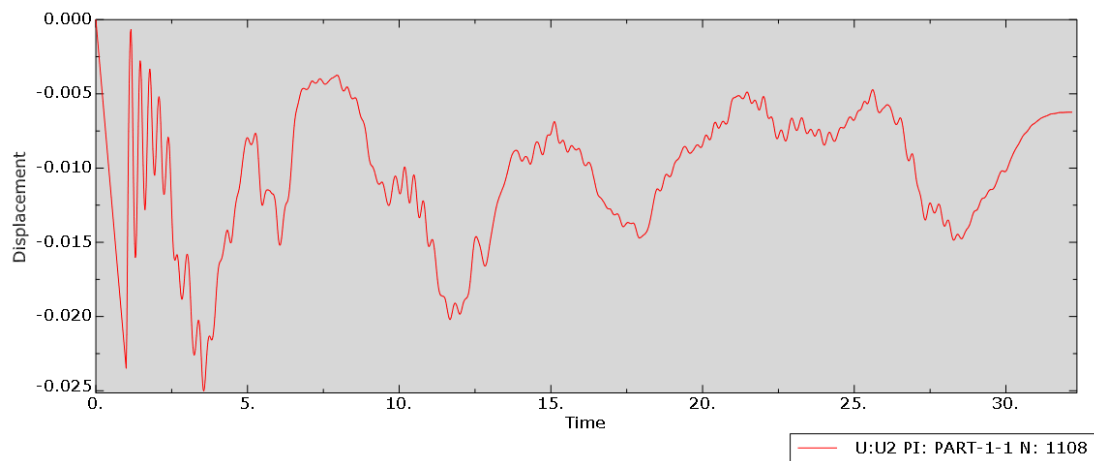
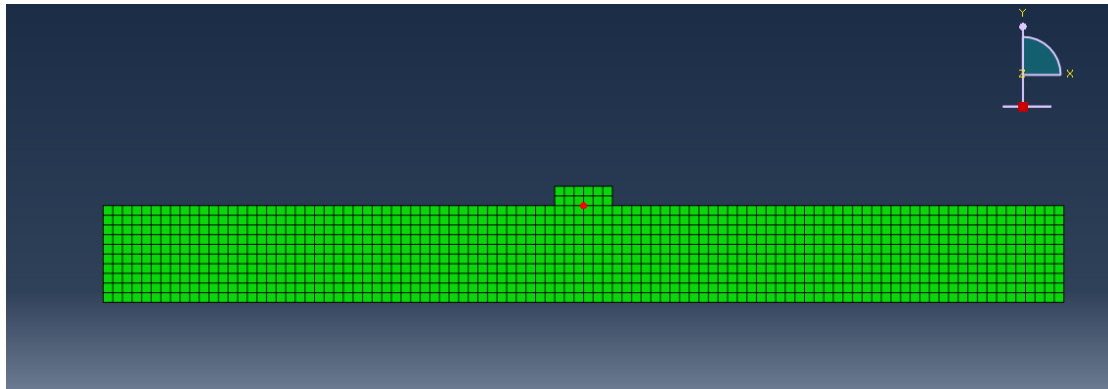


Εικόνα 45: Μετακινήσεις για t=0.90 sec.

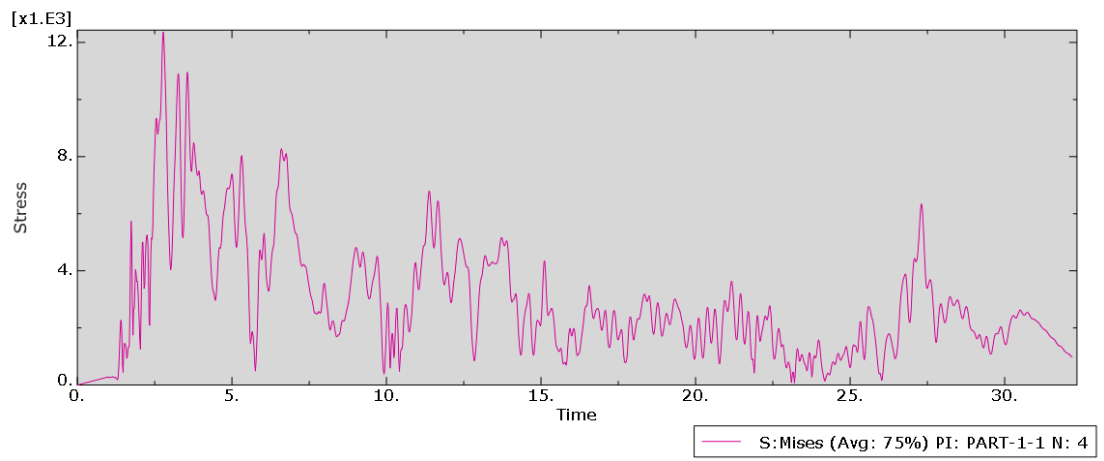
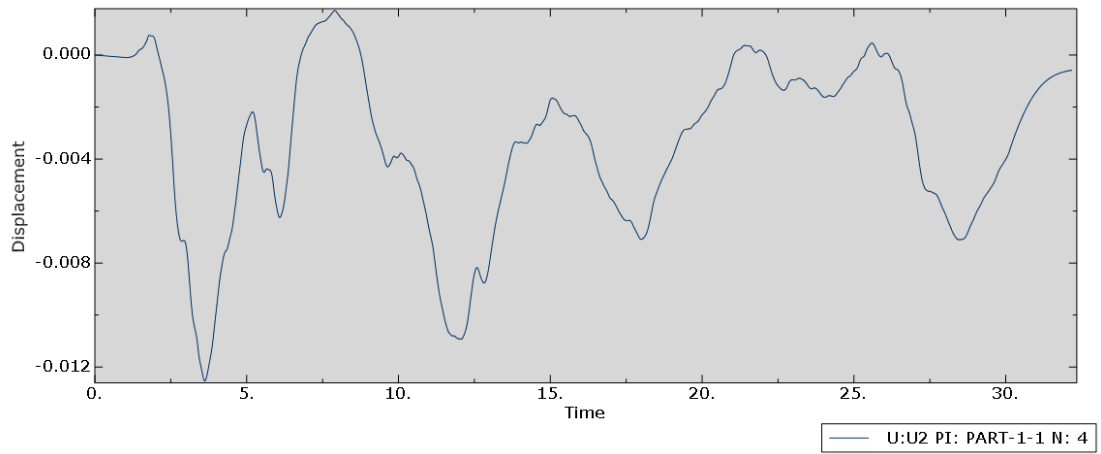
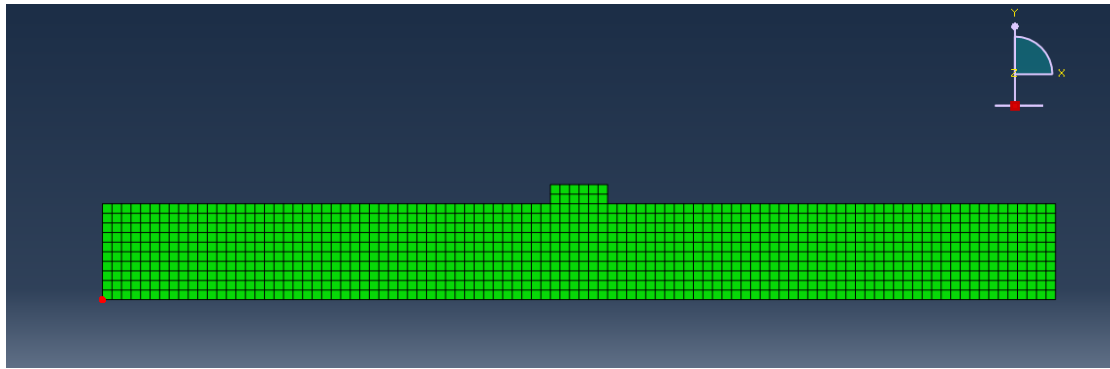


Εικόνα 46: Μετακινήσεις για t=31.18 sec.

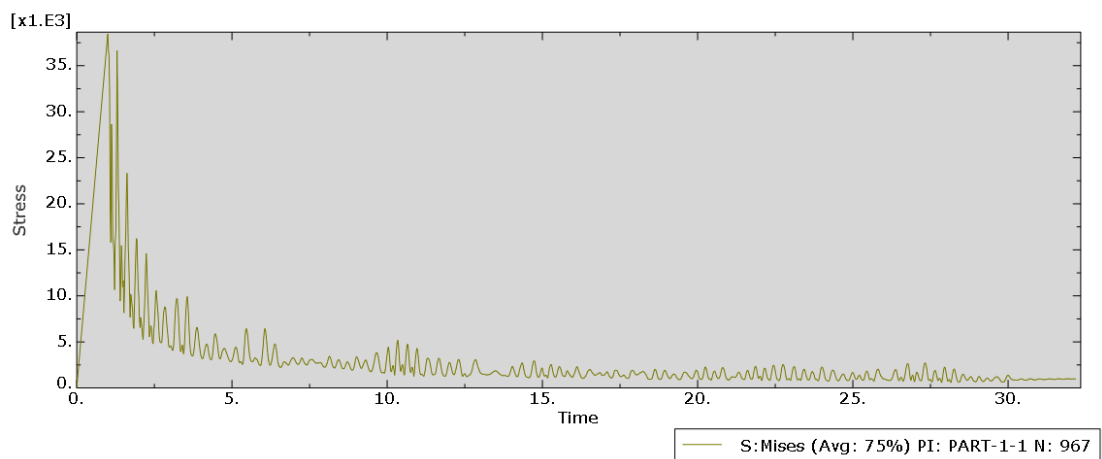
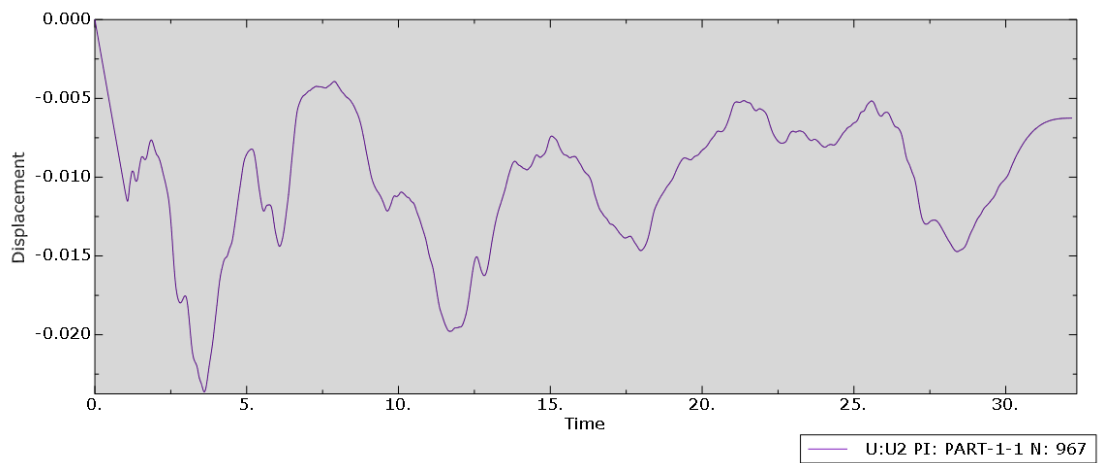
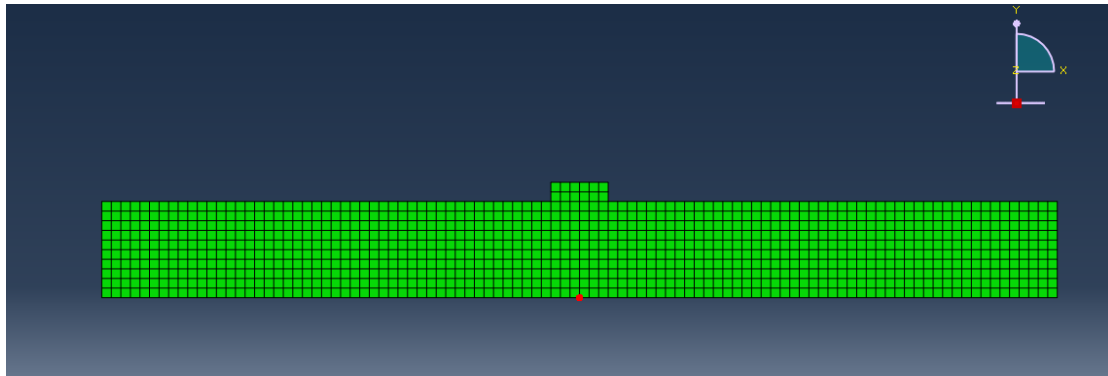
Ακολουθούν οι χρονοιστορίες κατακόρυφων μετακινήσεων και τάσεων Von Mises για διάφορα ενδεικτικά σημεία του μοντέλου (Εικόνες 47-51).



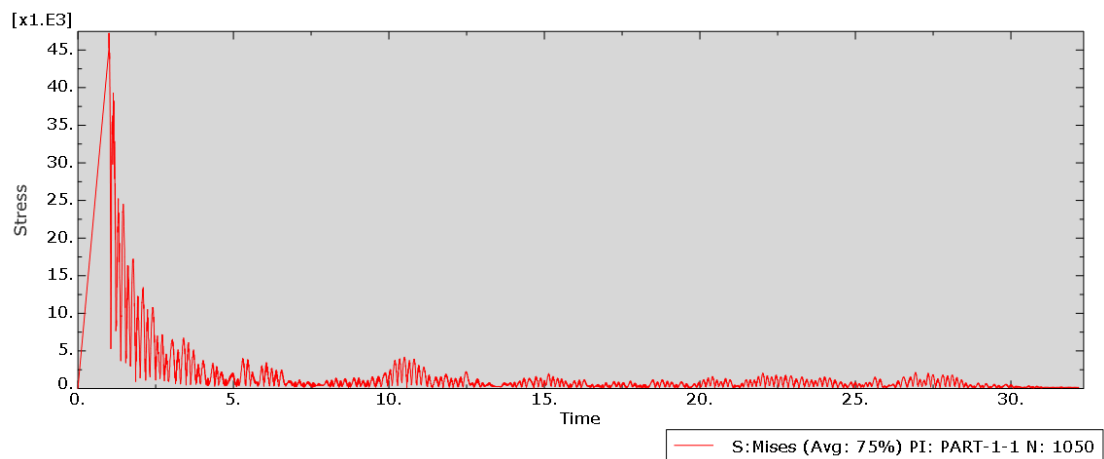
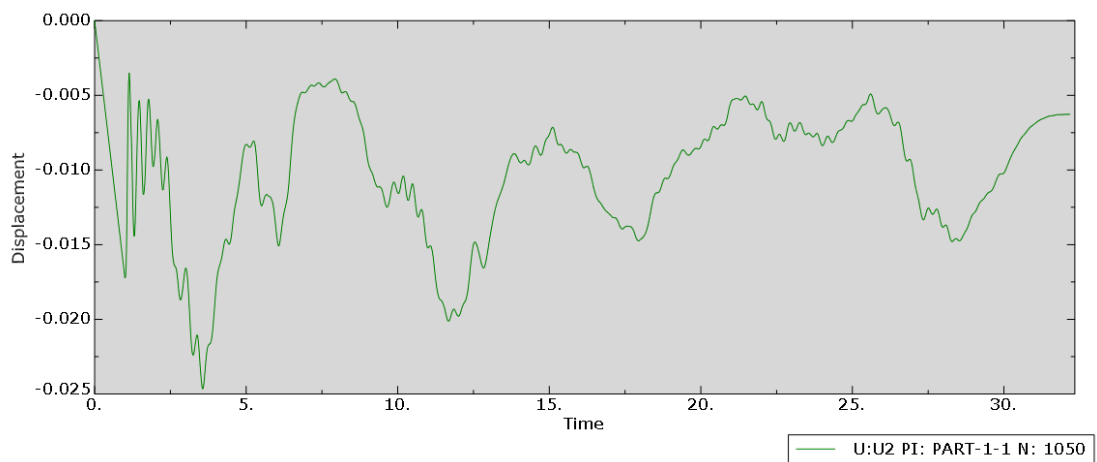
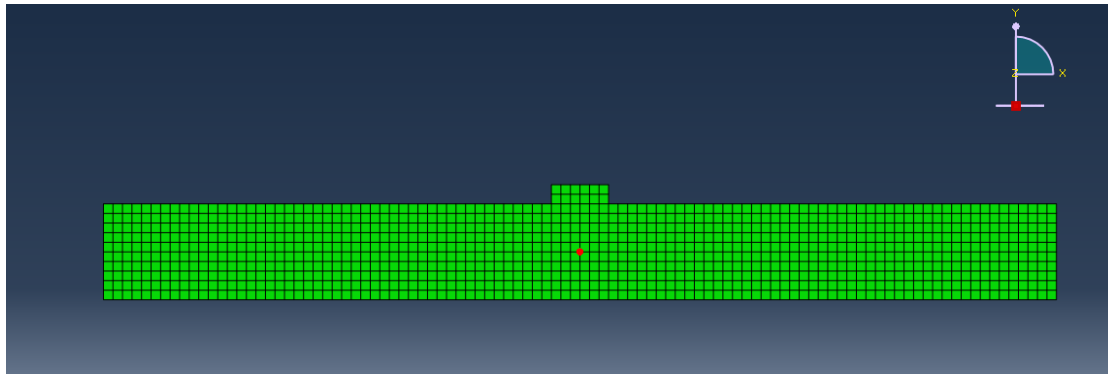
Εικόνα 47: Χρονοιστορίες κατακόρυφης μετακίνησης και τάσης Von Mises για το σημείο στον κεντρικό κόμβο του θεμελίου.



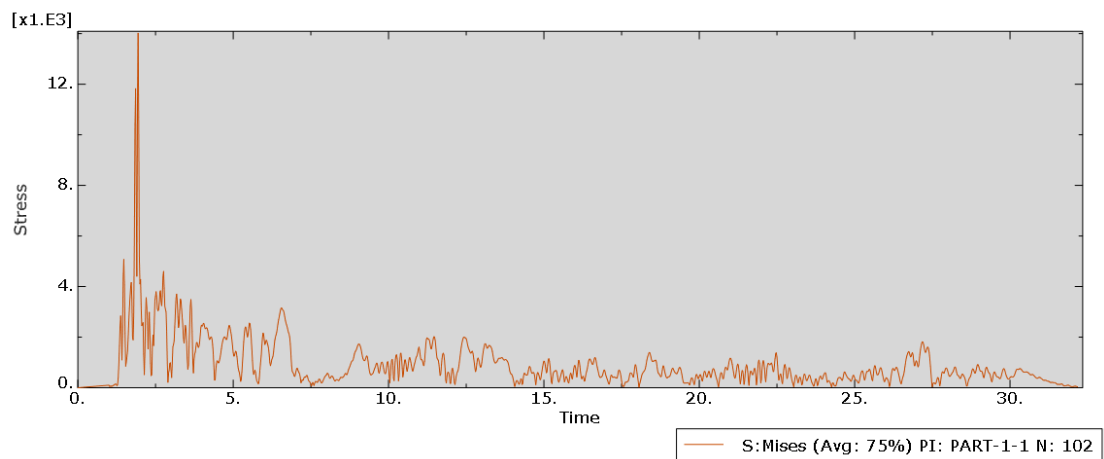
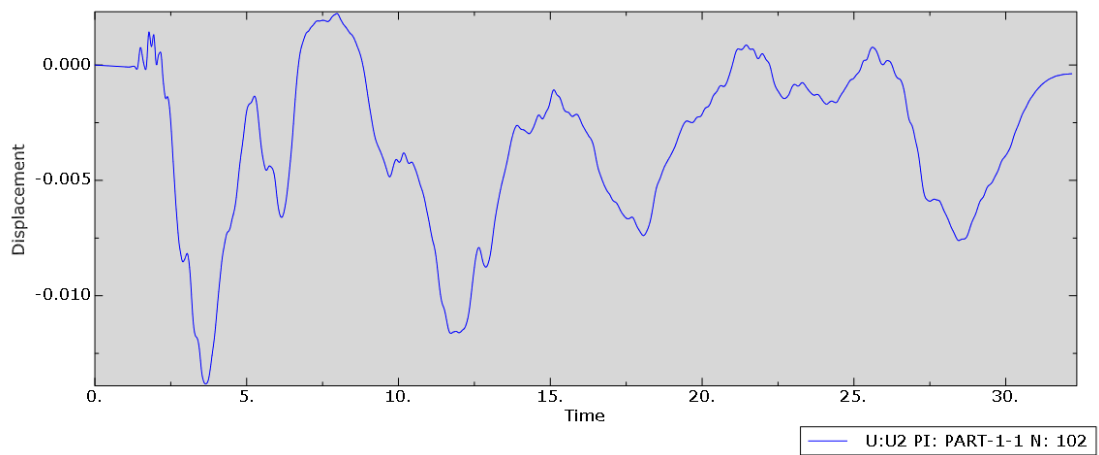
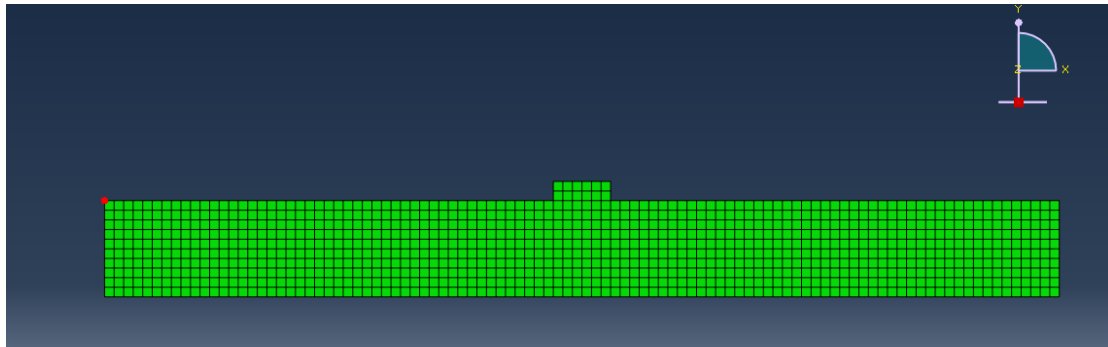
Εικόνα 48: Χρονοιστορίες κατακόρυφης μετακίνησης και τάσης Von Mises για το σημείο στο ακραίο κάτω σύνορο του εδαφικού ημιχώρου.



Εικόνα 49: Χρονοιστορίες κατακόρυφης μετακίνησης και τάσης Von Mises για το κεντρικό σημείο στο κάτω σύνορο του εδαφικού ημιχώρου.



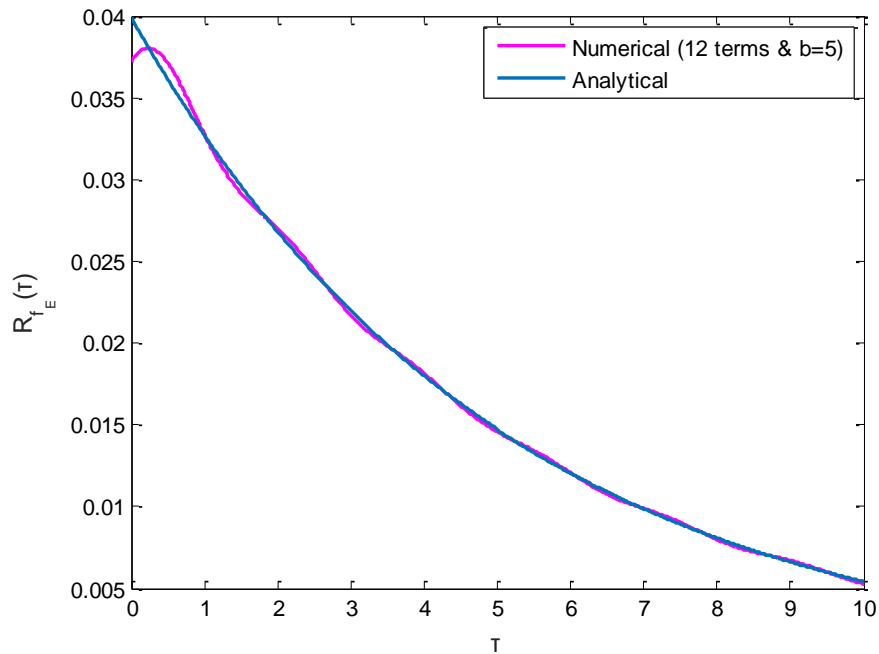
Εικόνα 50: Χρονοιστορίες κατακόρυφης μετακίνησης και τάσης Von Mises για το μεσαίο καθ' ύψος σημείο του εδαφικού ημιχώρου κάτω από το θεμέλιο.



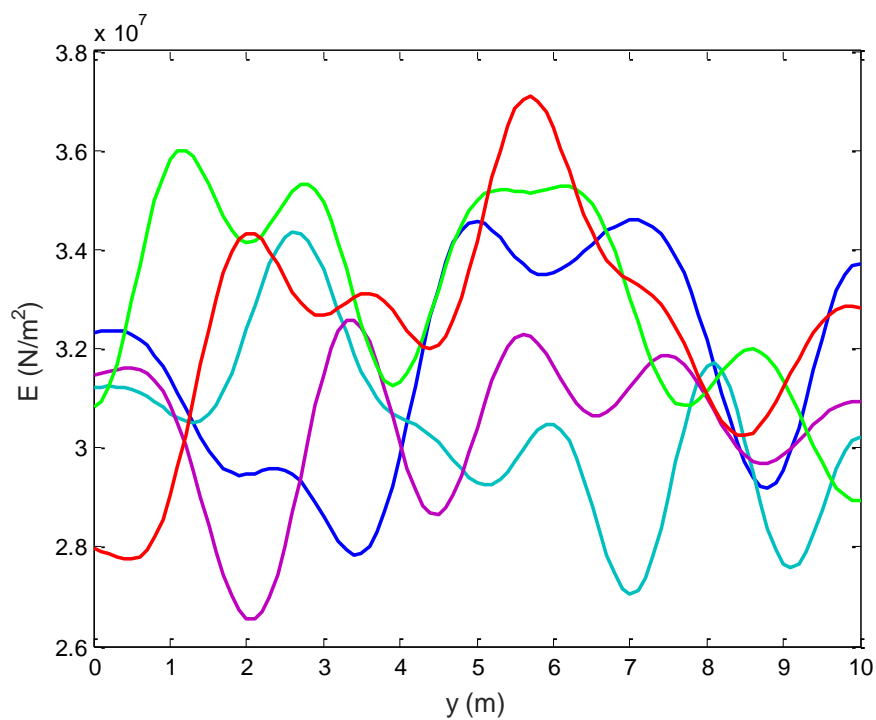
Εικόνα 51: Χρονοιστορίες κατακόρυφης μετακίνησης και τάσης Von Mises για το ακραίο άνω σημείο του εδαφικού ημιχώρου.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της στοχαστικής ανάλυσης. Στην Εικόνα 52 R_{fE} είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και τ είναι η απόσταση μεταξύ των συντεταγμένων των κέντρων των πεπερασμένων στοιχείων στη διεύθυνση y . Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης προκύπτει από το ανάπτυγμα Karhunen-Loeve για 12

όρους αναπτύγματος και μήκος συσχέτισης $b = 5m$. Στην Εικόνα 53 παρουσιάζονται πέντε πραγματοποιήσεις (realizations) του στοχαστικού πεδίου για το μέτρο ελαστικότητας με τις εκάστοτε θέσεις y με μέση τιμή $\mu_{E_s} = 30Mpa$.

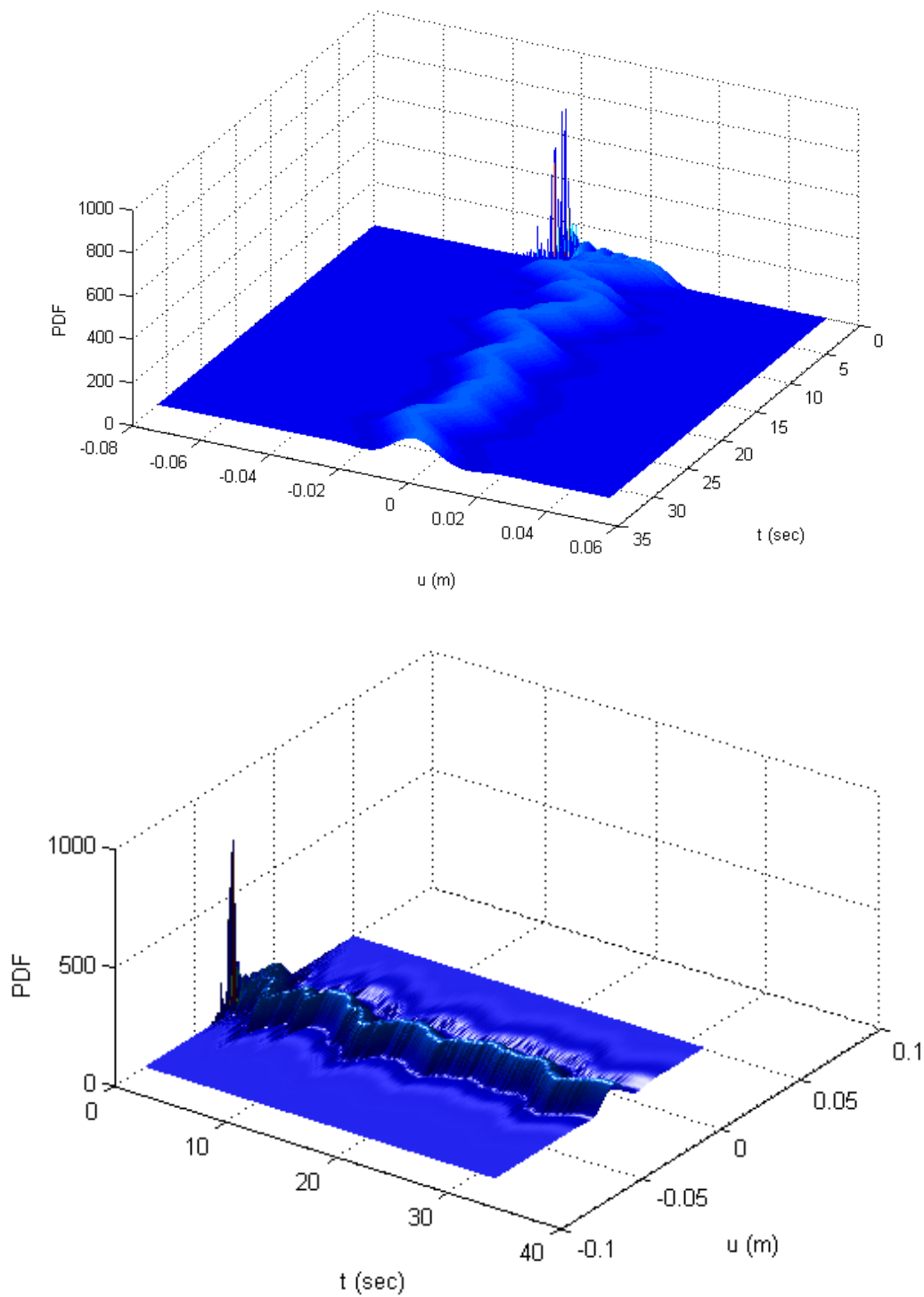


Εικόνα 52: Σύγκριση αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.



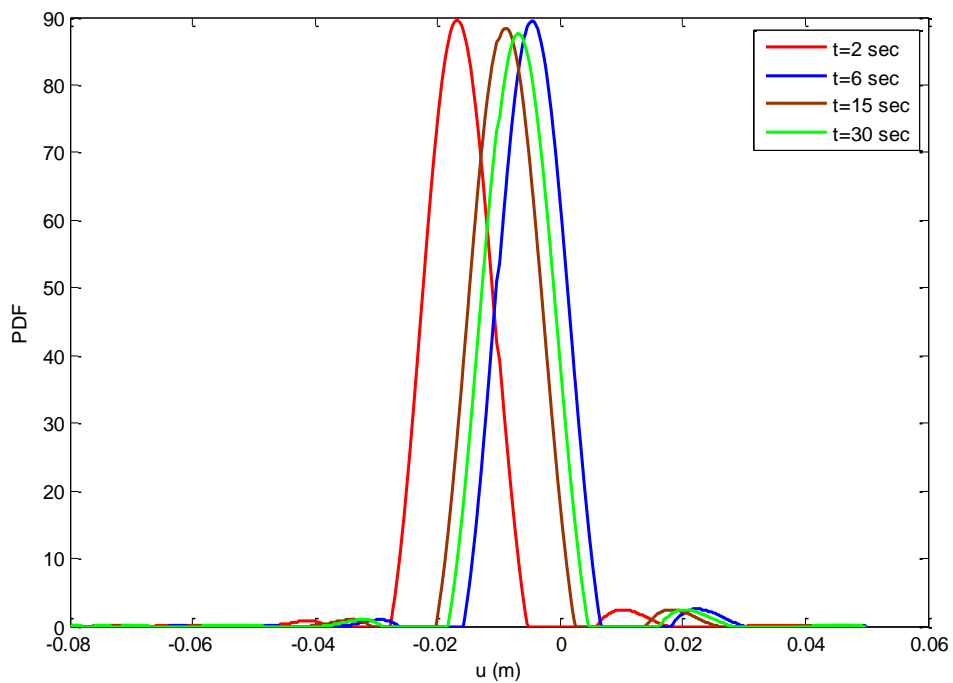
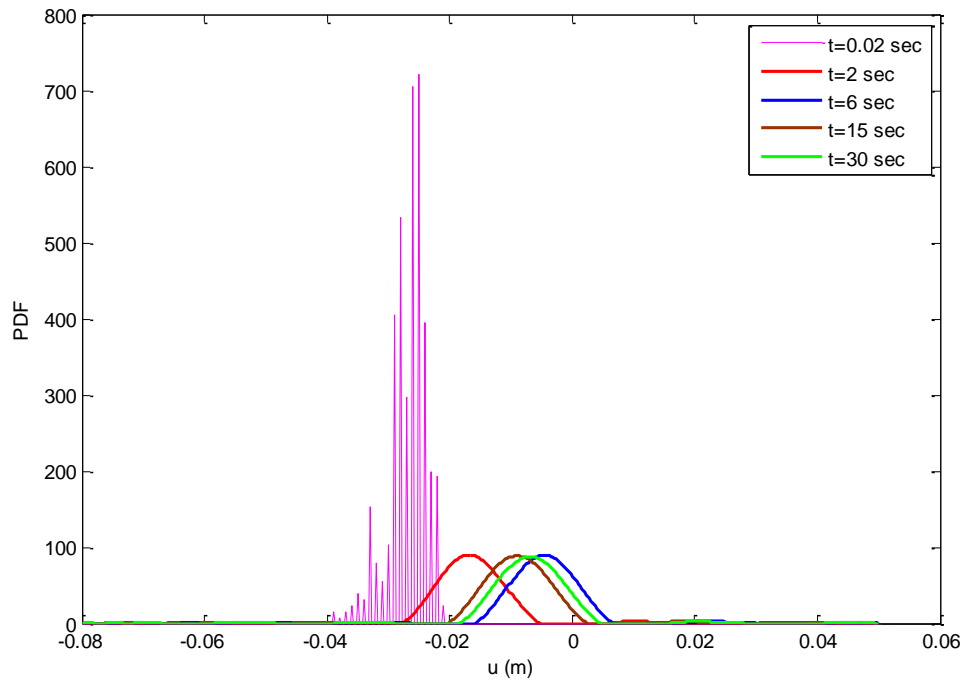
Εικόνα 53: Πραγματοποιήσεις του στοχαστικού πεδίου $E(y)$.

Στην Εικόνα 54 παρουσιάζεται η εξέλιξη της πυκνότητας πιθανότητας της κατακόρυφης μετατόπισης με το χρόνο. Πρέπει να δοθεί μεγάλη προσοχή στην επιλογή των ορίων της u για τη χρονική διάρκεια του σεισμού του El Centro, προκειμένου να μην έχουμε διαφυγή πιθανότητας.



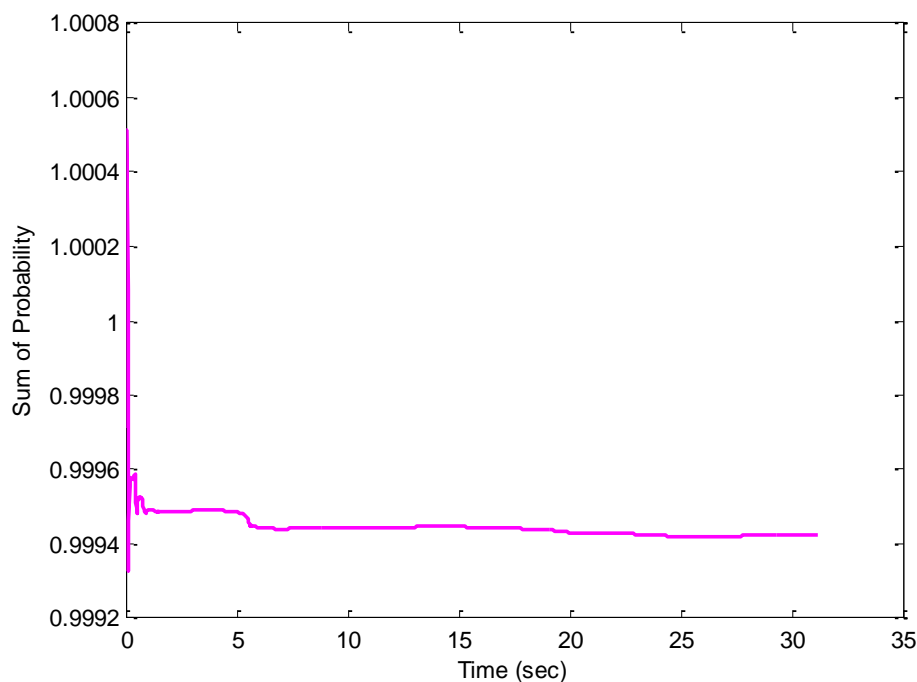
Εικόνα 54: Εξέλιξη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας με το χρόνο.

Η Εικόνα 55 αποτελεί την τομή της Εικόνας 54 για τις χρονικές στιγμές που αναγράφονται.



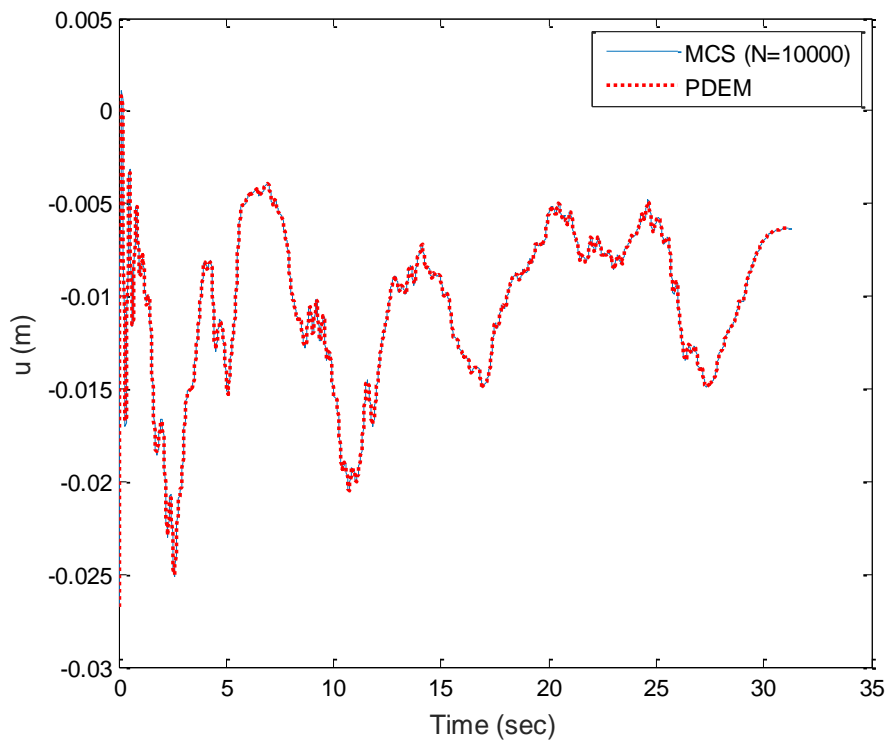
Εικόνα 55: Τοπικές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (PDF) για διάφορες χρονικές στιγμές.

Στην Εικόνα 56 για κάθε χρονική στιγμή λαμβάνουμε το άθροισμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας από την Εικόνα 54 το οποίο πολλαπλασιασμένο με du (διακριτοποίηση στον άξονα των κατακόρυφων μετακινήσεων u) δίνει την πιθανότητα P .

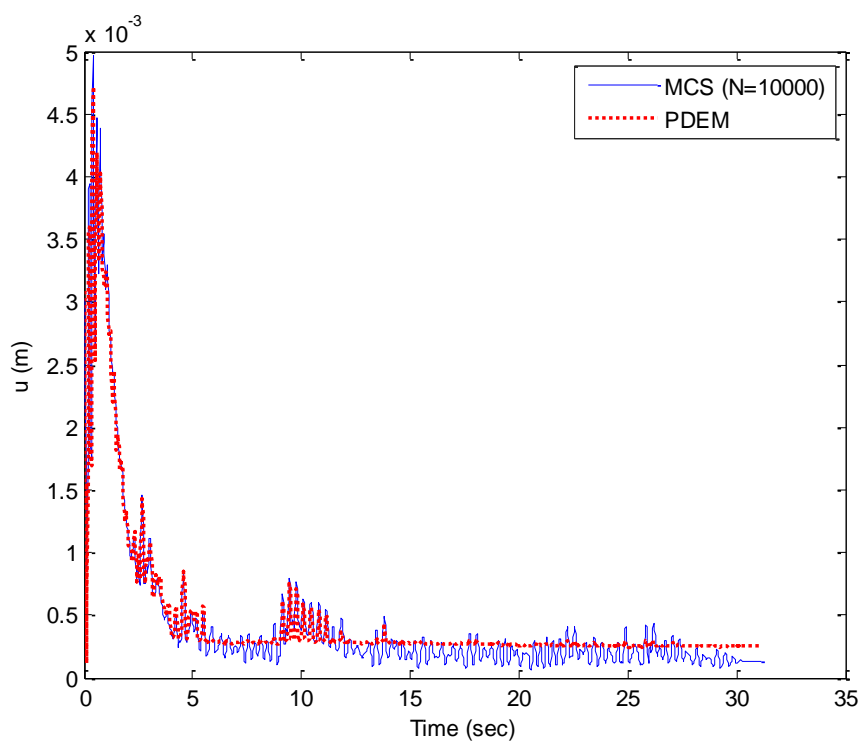


Εικόνα 56: Άθροισμα πιθανότητας συναρτήσει του χρόνου.

Τέλος, στην Εικόνα 57 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τη μέση τιμή της καθίζησης του κεντρικού κόμβου του θεμελίου. Με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή είναι τα αποτελέσματα της PDEM, ενώ με μπλε συνεχή είναι τα αποτελέσματα της Monte Carlo. Όπως φαίνεται τα αποτελέσματα έχουν πλήρη ταύτιση. Στη συνέχεια, στην Εικόνα 58 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την τυπική απόκλιση της καθίζησης. Η σύγκλιση των αποτελεσμάτων είναι ικανοποιητική.

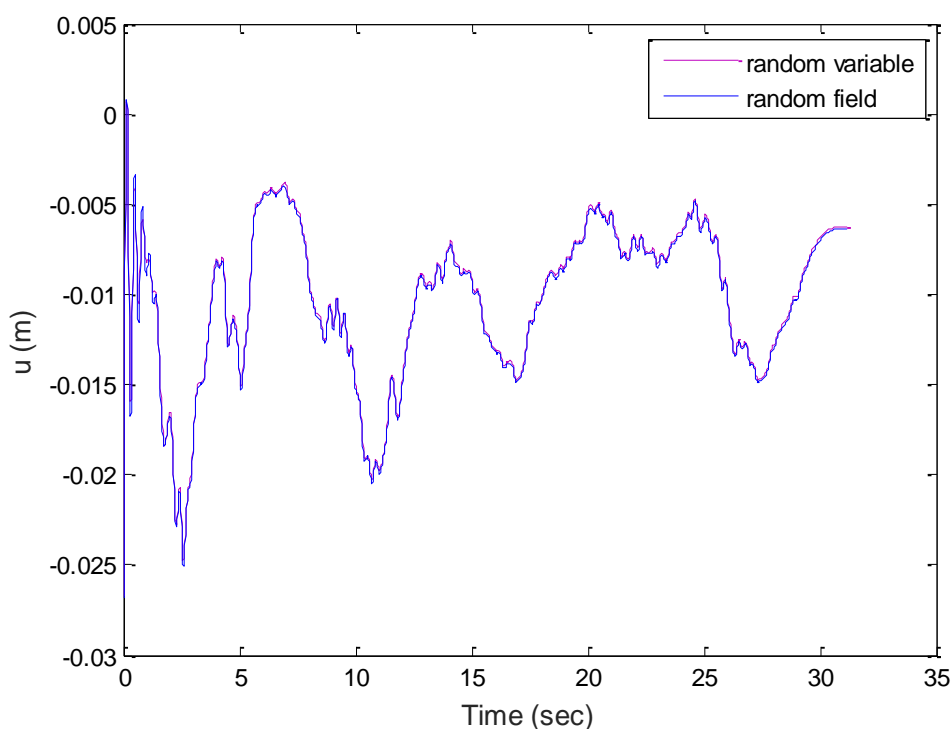


Εικόνα 57: Σύγκριση αποτελεσμάτων MCS-PDEM για τη μέση τιμή της καθίζησης του θεμελίου.

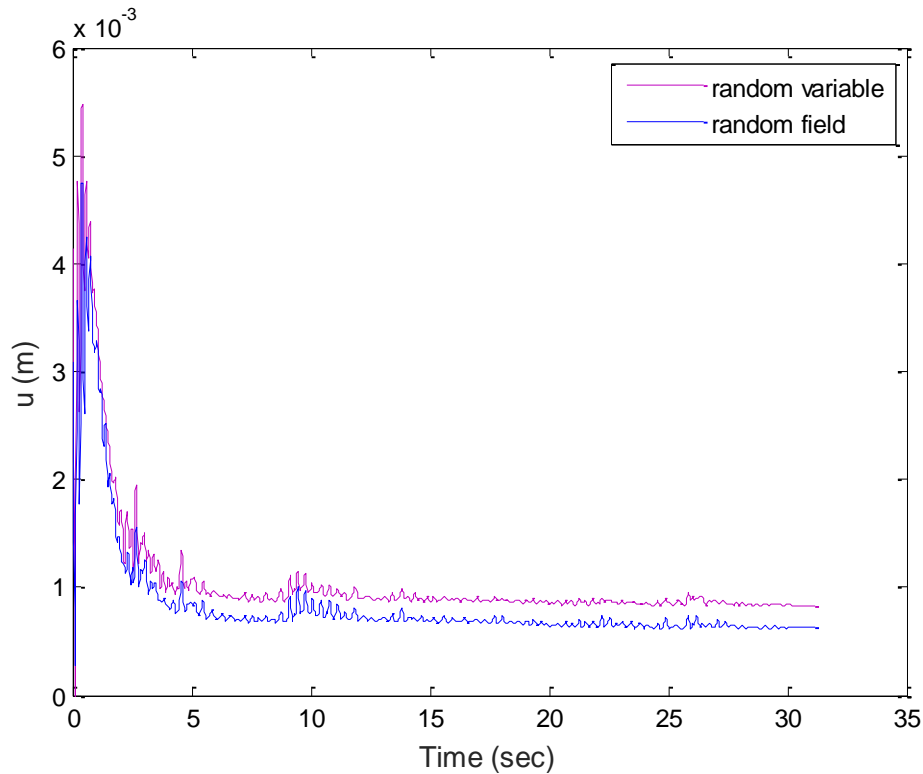


Εικόνα 58: Σύγκριση αποτελεσμάτων MCS-PDEM για την τυπική απόκλιση της καθίζησης του θεμελίου.

Να επισημάνουμε στο σημείο αυτό ότι, όταν το μήκος συσχέτισης τείνει στο άπειρο ($b \rightarrow \infty$), το πεδίο θεωρείται πλήρως συσχετισμένο, όλες οι τυχαίες μεταβλητές του είναι γραμμικώς εξαρτημένες μεταξύ τους και επομένως εκφυλίζεται σε μία τυχαία μεταβλητή. Από την άλλη, όταν το μήκος συσχέτισης τείνει στο μηδέν ($b \rightarrow 0$), το πεδίο τείνει στο λευκό θόρυβο (white noise) και οι τυχαίες μεταβλητές του είναι πλήρως ασυσχέτιστες. Στις Εικόνες 59 και 60 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη σύγκριση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης αντίστοιχα της καθίζησης του θεμελίου για την περίπτωση της τυχαίας μεταβλητής και του στοχαστικού πεδίου. Οι αναλύσεις για τα διαγράμματα που ακολουθούν έγιναν με τη μέθοδο PDEM.

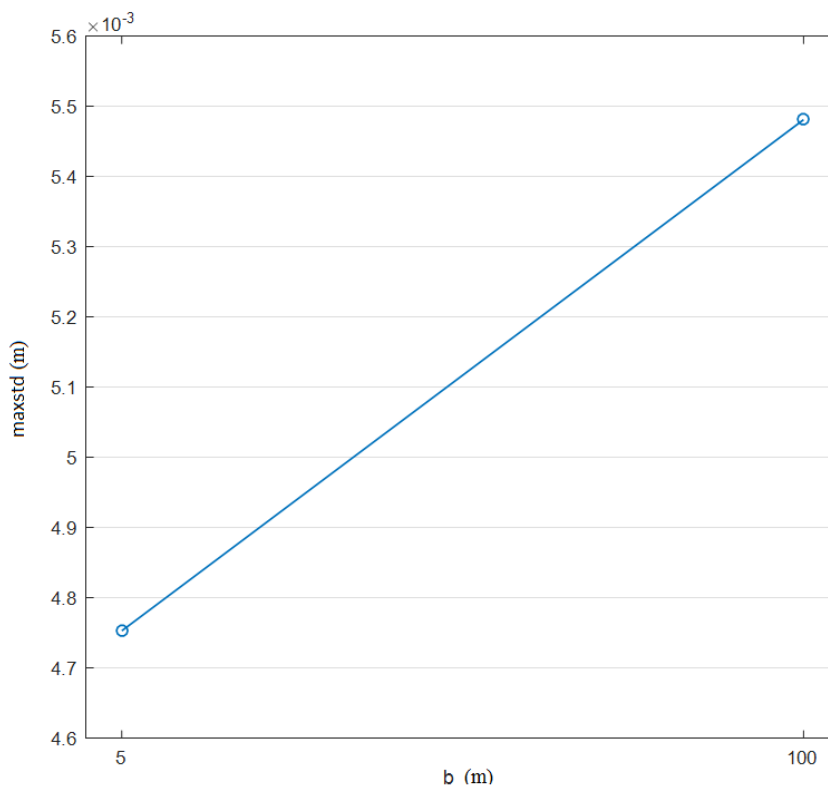


Εικόνα 59: Σύγκριση αποτελεσμάτων τυχαίας μεταβλητής και στοχαστικού πεδίου για τη μέση τιμή της καθίζησης του θεμελίου με την PDEM.



Εικόνα 60: Σύγκριση αποτελεσμάτων τυχαίας μεταβλητής και στοχαστικού πεδίου για την τυπική απόκλιση της καθίζησης του θεμελίου με την PDEM.

Για τη χρονική στιγμή $t=0.42\text{sec}$ προκύπτουν οι μέγιστες τιμές των τυπικών αποκλίσεων για την τυχαία μεταβλητή (random variable) και το στοχαστικό πεδίο (random field). Στην Εικόνα 61 φαίνεται η αύξηση της μέγιστης τυπικής απόκλισης για την περίπτωση της τυχαίας μεταβλητής, στην οποία λαμβάνουμε μήκος συσχέτισης $b=100\text{m}$ έναντι του στοχαστικού πεδίου με $b=5\text{m}$.



Εικόνα 61: Σύγκριση μέγιστης τυπικής απόκλισης της καθίζησης του θεμελίου τυχαίας μεταβλητής και στοχαστικού πεδίου.

4.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την εργασία μελετήθηκε η στοχαστική αλληλεπίδραση εδάφους-θεμελίου. Η στοχαστική ανάλυση πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο PDEM, τα αποτελέσματα της οποίας συγκρίθηκαν με αυτά που προέκυψαν από ένα μεγάλο πλήθος αναλύσεων με τη μέθοδο Monte Carlo. Όπως φαίνεται από τις Εικόνες 57 και 58 η PDEM προσεγγίζει με πολύ καλή ακρίβεια τα αποτελέσματα της MCS, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μέθοδος αναφοράς. Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι το πολύ μικρότερο πλήθος αναλύσεων που χρειάστηκαν για την προσέγγιση της λύσης και συνεπώς το αρκετά μικρότερο υπολογιστικό κόστος, όπως φαίνεται συγκεντρωτικά και στον παρακάτω πίνακα:

	Χρόνος ανάλυσης	Πλήθος αναλύσεων	Συνολικός χρόνος
<i>Monte Carlo</i>	3 min	10000	30000 min
<i>PDEM</i>	3 min	280	840 min

Η κάθε ανάλυση στο πρόγραμμα ABAQUS διαρκεί 3 min και είναι ανεξάρτητη της μεθόδου. Οι συνολικές όμως αναλύσεις που χρειάστηκαν για την PDEM αποτελούν το 2.8% των συνολικών αναλύσεων της Monte Carlo.

Ένα άλλο πλεονέκτημα της μεθόδου PDEM όπως φαίνεται στις παραπάνω Εικόνες είναι ότι παρέχει την πληροφορία για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) χωρίς περαιτέρω στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων, κάτι το οποίο δε συμβαίνει με την προσομοίωση Monte Carlo. Είναι λοιπόν, μια ακριβής, αποτελεσματική και με πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος μέθοδος.

Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι η διακριτοποίηση του κανάβου και η επιλογή των ορίων του άξονα της υπό μελέτη καθίζησης παίζουν σημαντικό ρόλο στην αποτελεσματικότητα της μέθοδο PDEM.

Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν για την περιγραφή του μέτρου ελαστικότητας E μέσω μιας τυχαίας μεταβλητής και ενός στοχαστικού πεδίου (Εικόνες 59-61) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο PDEM παρατηρούμε ότι η μέση τιμή έχει πλήρη ταύτιση στις δύο περιπτώσεις και ότι η τυπική απόκλιση στην περίπτωση της τυχαίας μεταβλητής είναι μεγαλύτερη από αυτή του στοχαστικού πεδίου, όπως αναμέναμε.

Τέλος, να επισημάνουμε ότι η εισαγωγή τυχειότητας στο μέτρο ελαστικότητας E (περίπτωση στοχαστικού πεδίου) δίνει εξάπλωση των αποτελεσμάτων (scatter) και περιγράφει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο το πραγματικό φαινόμενο. Από την άλλη, η περίπτωση της περιγραφής του E μέσω τυχαίας μεταβλητής αντιστοιχεί σε δυσμενέστερα, αλλά όχι ρεαλιστικότερα αποτελέσματα.

4.3 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Ορισμένα σημεία που θα μπορούσαν να διερευνηθούν περαιτέρω με έναυσμα την παρούσα διπλωματική εργασία είναι τα ακόλουθα:

- Η περίπτωση αλληλεπίδρασης ολόκληρης της ανωδομής με τον εδαφικό ημιχώρο.
- Η επιρροή της πίεσης πόρων στη στοχαστική απόκριση του εδάφους.
- Πραγματοποίηση αναλύσεων για ένα σύνολο σεισμικών διεγέρσεων με ποικίλο συχνοτικό περιεχόμενο.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ABAQUS/CAE 2016.HF2
2. Matlab R2014b
3. Bittar A., Soubra A. (2013), “Probabilistic Analysis of Strip Footings resting on Spatially Varying Soils and subjected to Vertical or Inclined Loads”, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE
4. Papadrakakis M., Papadopoulos V., (1996), “Robust and efficient methods for the stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation”, *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering* 134: 325-340
5. Berveiller M., Sudret B., and Lemaire M. (2006), “Stochastic finite element: a non intrusive approach by regression”, *Eur. J. Comput. Mech.*, 15:81–92
6. Pradlwarter H.J. and Shueller G.I. (1997), “On advanced Monte Carlo simulation procedures in stochastic structural dynamics”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32 (4):735–744
7. Ghanem R., Spanos P. D. (1991), “Stochastic finite elements: A spectral approach”, Springer-Verlag, Berlin
8. Spanos P.D. and Ghanem R. (1989), “Stochastic finite element expansion for random media”, *J. Eng. Mech., ASCE*, 115 (5) :1035–1053.
9. Papadrakakis M, Kotsopoulos A (1999), “Parallel solutions methods for stochastic fea using Monte Carlo simulation”, *Comput Methods Appl Mech Eng* 168:305–320
10. Papadrakakis M, Papadopoulos V (1996), “Robust and efficient solution techniques for the stochastic finite element analysis of space frames”, *Comput Methods Appl Mech Eng* 134:627–658
11. Stavroulakis G., Giovanis D.G., Papadrakakis M., Papadopoulos V. (2014), “A new perspective on the solution of uncertainty quantification and reliability analysis of large-scale problems”, *Comput Methods Appl Mech Eng* 276:627–658
12. Li J, Chen JB (2004), “Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters”, *Comput Mech* 34(5):400–409
13. Chen JB, Li J (2009), “A note on the principle of preservation of probability and probability density evolution equation”, *Probab Eng Mech* 24(1):51–59

14. Papadopoulos V., Kalogeris I. (2016), "A Galerkin-based formulation of the probability density evolution method for general stochastic finite element systems", *Comput Mech* 57:701–716
15. Manitaras T.H., Papadopoulos V., Papadrakakis M. (2017), "Dynamic Variability Response Functions for Stochastic Wave propagation in Soils", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 97 : 60-73
16. Lamb H. (1904), "On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A. Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 203, 1-42
17. Reissner E. (1936), "Stationare, axialsymmetrische, durch eine schüt-telnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes", *Ing. Arch.* 7, 381
18. Mylonakis G., Nikolaou S. and Gazetas G. (2006), "Footings under seismic loading: Analysis and design issues with emphasis on bridge foundations", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 26, 824–853
19. Lysmer J. (1965), "Vertical Motion of Rigid Footings", *Thesis Ph. D., University of Michigan*
20. Richart, F.E. and Whitman R.V. (1967), "Comparison of footing vibrations tests with theory", *J. Soil Mech. Found. Div., ACSE*, 93(SM-6): 143-168
21. Richart, F. E., Jr., Hall, J.R. Jr. and Woods, R.D. (1970), "Vibrations of Soils and Foundations", *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey*
22. Wong H. L., Luco J. E. (1976), "Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape", *Earth. Engng. Struct. Dyn.*, 4, 579-587
23. Dominguez J. (1978), "Response of Embedded Foundations to Travelling Waves", *Research Report R78-24, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge*
24. Karabalis D.L., Spyrakos C.C. and Beskos D.E. (1984), "Dynamic Response of Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method", in D. E. Beskos, T. Krauthammer and I. Vardoulakis, Eds., *Dynamic Soil-Structure Interaction (A. A. Balkema): 19-24*
25. Dominguez J. and Abascal R. (1989), "Seismic Response of Strip Footings on Zoned Viscoelastic Soils", *J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 115: 913-934*
26. Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L. (1969), "Finite dynamic model for infinite media", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* 95, 859 – 877

27. Lysmer, J. and Waas, G. (1972), "Shear waves in plane infinite structures", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 98, 85 – 105
28. Kausel, E. (1974), "Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media", Report R 74-11, soils Pub. 336, Struct. Publ. 384, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
29. Tassoulas J. L., Kausel, E. and Roesset M. (1981), "Consistent Boundaries for Semi-infinite Problems", *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division*, AMD 46: 149-166
30. Chow Y. K. and Smith I. M. (1981), "Static and periodic infinite solid elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17 (4): 503-526
31. Zhao, C. and Valliappan, S. (1993), "A dynamic infinite element for three-dimensional infinite domain wave problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 2567 – 2580
32. Karhunen K. (1947), "Ber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeit – srechnung", *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I. Math.-Phys.*, Vol.37, 1-79
33. Loeve M., (1978), "Probability theory" Vol II, Springer-Verlag ISBN 0-387-90262-7
34. Fredholm E.I. (1903), "Sur une classe d'equations fonctionnelles", *Acta Mathematica* Vol.27, 365-390
35. Atkinson K. E. (1976), "A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind", Philadelphia: S.I.A.M.
36. Mercer J. (1909), "Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A 209 (441-458): 415-446
37. Huang S.P., Quek S.T., Phoon K.K. (2001), "Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes", *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 52:1029-1043
38. Rubinstein R.Y. (1981), "Simulation and the Monte Carlo Method", John Wiley & Sons
39. Eckhardt, Roger (1987), "Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo method", *Los Alamos Science, Special Issue (15): 131–137*
40. Καλαμαράς Δημήτρης (2001-2002), "Αριθμητική Ανάλυση"
41. Gentle J. E. (1998), "Random number generation and Monte Carlo methods", Springer, New York

42. Chen JB, Ghanem R, Li J (2009), "Partition of the probability-assigned space in probability density evolution analysis of nonlinear stochastic structures", *Probab Eng Mech* 24(1):27–42
43. Li J, Chen JB (2007), "The number theoretical method in response analysis of nonlinear stochastic structures", *Comput Mech* 39 (6): 693–708
44. Chen JB, Li J (2008), "Strategy for selecting representative points via tangent spheres in the probability density evolution method", *Int J Numer Methods Eng* 74(13):1988–2014
45. Xu J, Chen JB, Li J (2012), "Probability density evolution analysis of engineering structures via cubature points", *Comput Mech* 50 (1): 135–156
46. Chen JB, Zhang S (2013) Improving point selection in cubature by a new discrepancy, *SIAM J Sci Comput* 35(5):A2121–A2149
47. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. (1928), "Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physic", *Math Ann* 100(1):32–74
48. Brooks A.N., Hughes T.J. (1982), "Streamline upwind/Petrov–Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations", *Comput Methods Appl Mech Eng* 32(1–3):199–259
49. Hughes T.J., Mallet M., Akira M. (1986), "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. Beyond SUPG", *Comput Methods Appl Mech Eng* 54(3):341–355
50. Elman H.C., Silvester D.J. (2005), "Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics", Oxford University Press, Oxford
51. Brenner C. E. (1991), "Stochastic finite element methods", *Internal Working Rep. No. 35- 91, Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, Austria*
52. Ghanem R. (1999), "Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 168, 19-34
53. Keese A., (2003), "A review of recent developments in the numerical solution of stochastic partial differential equations (Stochastic Finite Elements)", *Internal Working Rep. 2003-06, Technical University, Braunschweig, Germany*
54. Matthies H.G., Brenner C.E., Bucher C.G., Guedes Soares C. (1997), "Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - Stochastic finite elements", *Structural Safety* 19, 283-336

55. Schuëller G.I. (2001), “Computational stochastic mechanics-recent advances”, *Computers & Structures* 79, 2225-2234
56. Schuëller G. I., Shinozuka M. and Spanos P.D., (1997), “A State-of-the-Art Report on Computational Stochastic Mechanics”, *Special Issue of Probabilistic Engineering Mechanics* 12, 197-321.
57. Στεφάνου Γ. (2005), “Στοχαστική Ανάλυση Κελύφων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων”, *Thesis PhD*
58. Γκαζέτας Γ., Έκδοση ΕΜΠ 2005, Σημειώσεις Εδαφοδυναμικής