



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ  
ΜΕ ΜΗ-ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΕΣ ΖΕΥΞΕΙΣ ΒΑΘΜΩΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Ι. ΝΤΡΕΚΗ

Διπλωματούχου Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών  
και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ :

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΑΣ

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ιούνιος 2017





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ  
ΜΕ ΜΗ-ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΕΣ ΖΕΥΞΕΙΣ ΒΑΘΜΩΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Ι. ΝΤΡΕΚΗ

Διπλωματούχου Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών  
και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

- 1.....Γεώργιος Κουτσούμπας, Καθ. ΕΜΠ  
(Επιβλέπων)
- 2.....Κωνσταντίνος Φαράκος, Καθ. ΕΜΠ
- 3.....Νικόλαος Ήργες, Αν. Καθ. ΕΜΠ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

- 1.....Γεώργιος Κουτσούμπας, Καθ. ΕΜΠ  
(Επιβλέπων)
- 2.....Κωνσταντίνος Φαράκος Καθ. ΕΜΠ
- 3.....Νικόλαος Ήργες, Αν. Καθ. ΕΜΠ
- 4.....Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος,  
Καθ. ΕΜΠ
- 5.....Γεώργιος Ζουπάνος, Καθ. ΕΜΠ
- 6.....Αλέξανδρος Κεχαγιάς, Καθ. ΕΜΠ
- 7.....Κωνσταντίνος Αναγνωστόπουλος,  
Αν. Καθ. ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2017



## Ευχαριστίες

Πρωτίστως θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υπεύθυνο καθηγητή μου κ. Γεώργιο Κουτσούμπα για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε στα πλαίσια της διδακτορικής μου διατριβής. Αν και τα τρία κεφάλαια που ακολουθούν αφορούν από μία εργασία το καθένα, οι συνολικά δημοσιευμένες εργασίες είναι πέντε με το όνομά του πάντα δίπλα στο δικό μου καθώς ήταν συνεχώς εκεί και με καθοδηγούσε. Ευχαριστώ με τη σειρά τους τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής μου: Τον κ. Κωνσταντίνο Φαράκο για τη στήριξή του και τις επισημάνσεις του κατά τη περίοδο που ασχολήθηκα με τη μελέτη της Θεωρίας Πεδίου σε Πλέγμα. Η συνεισφορά του ήταν πολύ σημαντική καθώς με την εμπειρία του τόσο σε θεωρητικό όσο και τεχνικό επίπεδο ξεπεράστηκαν, όσο το δυνατόν πιο άμεσα, τα όποια προβλήματα εμφανίστηκαν κατά τους υπολογισμούς και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Τον κ. Νικόλαο Ήργε, που την πρωτότυπη ιδέα του και την αναλυτική διερεύνησή της, τη συμπλήρωσε με μια μικρή συνεισφορά μου σε υπολογιστική μελέτη, με αποτέλεσμα να δημοσιευτεί η εργασία “Quantum phase transition of high dimensional Yang-Mills theories” η οποία αν και δεν παρουσιάζεται σε αυτή τη διατριβή μπορεί να βρεθεί στο άρθρο Phys.Rev. D92 (2015) no.9, 094506. Τον ευχαριστώ για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και την υπομονή, που όπως γνωρίζει καλά, απαιτούν οι υπολογισμοί αυτοί. Στη συνέχεια με τον υπεύθυνο καθηγητή μου στραφήκαμε στη μελέτη τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας με την πολύτιμη βοήθεια του καθηγητή κ. Ελευθέριου Παπαντωνόπουλου τον οποίο και ευχαριστώ για την καθοδήγησή του και τις άμεσες εναλλακτικές λύσεις κάθε φορά που συναντούσαμε κάποιο θεωρητικό εμπόδιο. Τέλος δεν μπορώ να μην ευχαριστήσω τους τρεις μεταδιδακτορικούς συνεργάτες Γιάννη Νταλιάνη, Μηνά Τσουκαλά και Μάνο Σαριδάκη που με τις πρωτότυπες ιδέες τους, και την εμπειρία τους τόσο στη κατασκευή θεωρητικών μοντέλων όσο και στη σύγκρισή τους με τα παρατηρησιακά δεδομένα, οδήγησαν στα σημαντικά αυτά αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε παρακάτω.



## Εισαγωγή

Η θεωρία της Γενικής Σχετικότητας του Einstein το 1915 έθεσε τα θεμέλια για την μελέτη της κατασκευής του χωρόχρονου (spacetime) και της εξέλιξης του Σύμπαντος με βάση τους φυσικούς νόμους. Το 1922 ο Friedmann ανέδειξε την ύπαρξη λύσεων των εξισώσεων του Einstein που περιγράφουν σενάρια διαστολής/κατάρρευσης του Σύμπαντος. Το 1929 ο Hubble ανακάλυψε την διαστολή του Σύμπαντος με βάση παρατηρησιακά δεδομένα που υπονοούσαν την απομάκρυνση των γαλαξιών, όπως προέβλεπε και η Γενική Σχετικότητα. Το 1946 ο Gamow και οι συνεργάτες του με τη θεωρία της πυρηνοσύνθεσης έδειξαν ότι η εξέλιξη του Σύμπαντος θα πρέπει να ξεκινά από μια πολύ θερμή και πυκνή κατάσταση. Προέβλεψαν επίσης ότι το τωρινό Σύμπαν θα είναι κατεκλυσμένο από μικροκυματικές ακτινοβολίες μέλανος σώματος. Πράγματι το 1965 οι Penzias και Wilson ανακάλυψαν μικροκυματικές ακτινοβολίες υποβάθρου που συνάδουν με τις θεωρητικές προβλέψεις του Gamow. Αυτές οι παρατηρησιακές ενδείξεις οδήγησαν στην πεποίθηση ότι το Σύμπαν ξεκίνησε από μια θερμή και πυκνή κατάσταση η οποία περιγράφεται από το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης (Big-Bang model).

Το σενάριο της Μεγάλης Έκρηξης έχει τρία θεμελιώδη προβλήματα (πρόβλημα επιπεδότητας (flatness problem), πρόβλημα του ορίζοντα (horizon problem) και παραγωγή ανεπιθύμητων σωματιδίων (unwanted relics)) τα οποία λύνονται στα πλαίσια του Πληθωρισμού (Inflation). Η ιδέα του πληθωρισμού (Guth 1981, Albrecht και Steinhardt 1982, Linde 1982, 1983) δεν αντικαθιστά το σενάριο της Μεγάλης Έκρηξης παρά μόνο αντιμετωπίζει τα προβλήματά της διατηρώντας της επιτυχίες της. Πιο συγκεκριμένα ο πληθωρισμός τοποθετείται σε μια περίοδο μετά τη Μεγάλη Έκρηξη και ορίζεται ως μια κατάσταση επιταχυνόμενης διαστολής του Σύμπαντος. Για να είναι εφικτό το σενάριο του πληθωρισμού χρειάζεται μια μορφή ύλης που να επιτρέπεται να αποκτήσει την ασυνήθιστη ιδιότητα της αρνητικής πίεσης. Κάτι τέτοιο είναι δυνατό με τα βαθμωτά πεδία, που περιγράφουν βαθμωτά ( $spin = 0$ ) σωματίδια. Στο σενάριο του πληθωρισμού ως υπεύθυνο βαθμωτό πεδίο θεωρείται το πληθωριστικό πεδίο inflaton, το οποίο δεν μπορεί να παρατηρηθεί πλέον αφού διασπάται με το τέλος του πληθωρισμού είτε διαταρακτικά (reheating) είτε μη διαταρακτικά (preheating).

Η εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου στη θεωρία της βαρύτητας και η απαίτηση οι συνιστώσες του τανυστή ενέργειας-ορμής να ικανοποιούν μια ιδιαίτερη σχέση, αποτέλεσαν τις θεμελιώδεις λίθους για το επιτυχημένο σενάριο του πληθωρισμού. Είναι αρκετά ενδιαφέρον να μελετηθεί αν μια αντίστοιχη διαδικασία θα μπορούσε να οδηγήσει, όχι σε μια ραγδαία διαστολή του Σύμπαντος όπως στον πληθωρισμό, αλλά στην κατάρρευσή του. Στο σενάριο αυτό ο χωρόχρονος καταλήγει σε μια ανωμαλία (singularity) και μένει να μελετηθεί αν η ανωμαλία αυτή μπορεί να παρατηρηθεί ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση η ανωμαλία αυτή καλείται γυμνή (naked) και σύμφωνα με την Υπόθεση Κοσμικής Λογοκρισίας (Cosmic Censorship Conjecture) του Penrose (1969), δεν υπάρχουν στο σύμπαν γυμνές ανωμαλίες εκτός από αυτή της Μεγάλης Έκρηξης. Στη δεύτερη περίπτωση είναι δυνατόν να δημιουργηθεί ένας ορίζοντας γεγονότων (event horizon) ορίζοντας το σύνορο μιας μελανής οπής (black hole) που θα καλύπτει την ανωμαλία στο κέντρο της. Οι μελανές οπές προέρχονται από τη βαρυτική κατάρρευση αστέρων μεγάλης μάζας στους οποίους η εσωτερική πίεση δεν είναι αρκετή ώστε να αντισταθεί στην ίδια τους τη βαρύτητα και χωρίζονται σε stellar black holes ( $\sim 10 M_{Sun}$ ), intermediate black holes ( $\sim 10^3 M_{Sun}$ ) και supermassive black hole ( $\sim 10^5 - 10^{10} M_{Sun}$ ). Το 1971 εισάγεται από τον Hawking η ιδέα ύπαρξης πολύ μικρότερων μελανών οπών ( $\sim 10^{-8} kg$ ) που ονομάστηκαν αρχέγονες μελανές οπές (primordial black holes). Πρόκειται για έναν υποθετικό τύπο μελανών οπών οι οποίες σχηματίζονται στο αρχικό σύμπαν, μετά τη Μεγάλη Έκρηξη, λόγω των τεράστιων πυκνοτήτων ενέργειας που αναπτύσσονται. Η παραπάνω μελέτη της βαρυτικής κατάρρευσης ενός βαθμωτού πεδίου δύναται, εκτός των άλλων, να εξηγήσει τη δημιουργία αυτής της κλάσης μελανών οπών.

Παρά την τεράστια επιτυχία της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΣ), τόσο κατά τη διεξαγωγή πειραμάτων στο Ηλιακό μας σύστημα, όσο και με την πρόσφατη επιβεβαίωση της ύπαρξης βαρυτικών κυμάτων, αυτή εξακολουθεί να είναι μια ατελής θεωρία. Σχετικά πρόσφατα παρατηρησιακά δεδομένα υποδεικνύουν ότι η ΓΣ δεν είναι σε θέση να επεξηγήσει τη συμπεριφορά του σύμπαντος σε μεγάλες αποστάσεις. Το σύμπαν έχει εισέλθει σε μια περίοδο επιταχυνόμενης διαστολής. Στα πλαίσια της ΓΣ η συμπεριφορά αυτή θεωρείται ότι πηγάζει από μια καινούργια συνιστώσα πυκνότητας ενέργειας με αρνητική πίεση που ονομάστηκε Σκοτεινή Ενέργεια (Dark Energy). Η φύση της Σκοτεινής Ενέργειας είναι ακόμα άγνωστη και γίνονται πολλές προσπάθειες εντοπισμού της προέλευσης της καθώς και των ιδιοτήτων της. Μια πιθανή πηγή της Σκοτεινής Ενέργειας μπορεί να θεωρηθεί μια Κοσμολογική Σταθερά ( $\Lambda$ ), τότε όμως αντιμετωπίζουμε προβλήματα τα οποία σχετίζονται με την προέλευση και την τάξη μεγέθους της. Πιο συγκεκριμένα η κοσμολογική σταθερά εισάγεται στη θεωρία “με το χέρι”, ενώ ταυτόχρονα η υπόθεση ότι η πυκνότητα ενέργειας  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} = 6.72 \times 10^{-24} g m^{-3}$  αντιστοιχεί σε μια πυκνότητα ενέργειας του κενού  $\rho_{Planck} = 5.16 \times 10^{99} g m^{-3}$  οδηγεί σε μια διαφορά τάξης μεγέθους  $\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{Planck}} \sim 10^{-123}$  ! Αυτό είναι το

λεγόμενο Fine tuning problem. Επιπλέον, μετά τους πρώτους παρατηρησιακούς περιορισμούς από δεδομένα που αφορούν τον πληθωρισμό (φάσμα βαθμωτών διαταραχών, λόγος τανυστικών προς βαθμωτές διαταραχές) άρχισε η απόρριψη ενός μεγάλου αριθμού πληθωριστικών σεναρίων. Αν η φύση επιδέχεται μια πιο γενικευμένη θεωρία βαρύτητας τότε οφείλουμε να δούμε πως επηρεάζει αυτά τα μοντέλα, αν τα κάνει πάλι αποδεκτά ή τα περιορίζει περισσότερο. Όμοια και η μελέτη των μελανών οπών από βαθμωτά πεδία επιδέχεται πλήθος σεναρίων τα οποία θα μπορούσαν να εισαγάγουν επιπλέον παρατηρησιακά μεγέθη όπως στην περίπτωση του πληθωρισμού. Ας μην ξεχνάμε πως η Γενική Σχετικότητα ήταν η πρώτη τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας η οποία ενσωμάτωσε τα κοσμολογικά φαινόμενα σε ένα πιο γενικό πλαίσιο με όριο τη Νευτώνια βαρύτητα. Όμοια μια τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας οφείλει να έχει επιφέρει ένα γενικότερο πλαίσιο μελέτης που θα έχει ως όριό του τη Γενική Σχετικότητα.

Μία από τις απλούστερες τροποποιήσεις της ΓΣ συνίσταται στην εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου στη δράση, με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας Θεωρίας Βαθμωτού - Τανυστή (ΘΒΤ) (scalar - tensor theory). Η αλληλεπίδραση του βαθμωτού γίνεται σε πρώτο βαθμό εφικτή, μέσω μιας αλληλεπίδρασης ελαχίστου σύζευξης (minimal coupling), ενώ στην πλήρη της μορφή, μέσω μιας αλληλεπίδρασης μη - ελαχίστου ζεύξης (non - minimal coupling) με τη βαρύτητα. Μία κρίσιμη απαίτηση/προϋπόθεση η οποία πρέπει να ικανοποιηθεί κατά την κατασκευή ενός προτύπου θεωρίας βαρύτητας βαθμωτού - τανυστή, είναι ότι οι εξισώσεις κίνησης θα πρέπει να παραμένουν δεύτερης τάξης ως προς τις παραγώγους, έτσι ώστε να αποφευχθούν οι λεγόμενες αστάθειες Ostrogradski. Η πιο γενική Λανγκρανζιανή στις τέσσερις διαστάσεις, η οποία πληροί αυτή την προϋπόθεση ανακαλύφθηκε σχεδόν σαράντα χρόνια πριν από τον G.W.Horndeski.

Η γενικότητα του πλαισίου των θεωριών Horndeski, προβάλλει άμεσα το ερώτημα του, κατα πόσο υπάρχουν συγκεκριμένες υποθεωρίες με εξέχουσες ιδιότητες. Η ιδιαίτερη επιλογή  $G_5(\phi, X) = -\frac{\lambda_5}{2}\phi$  και η επίδρασή της σε σεναρία πληθωρισμού και δημιουργίας μελανών οπών απασχόλησαν το κύριο κομμάτι της συγκεκριμένης διδακτορικής διατριβής. Στο τελευταίο κομμάτι της διατριβής μελετάται μια πιο γενικευμένη θεωρία ή οποία παραμένει υπο κλάση της Horndeski και χρησιμοποιεί τα πεδία Galileon των οποίων οι εξισώσεις κίνησης σέβονται τη συμμετρία μετατόπισης (shift symmetry)  $\phi \rightarrow \phi + b_\mu x^\mu + c$ . Εκεί κατασκευάζεται ένα μοντέλο που περιγράφει την σκοτεινή ύλη και τη σκοτεινή ενέργεια με μια ενοποιημένη μορφή ενώ η εντυπωσιακή συνέπεια με τα παρατηρησιακά δεδομένα το καθιστά συγκρίσιμο με το  $\Lambda$ CDM.



## Abstract

Although General Relativity (GR) is a very successful theory, passing many tests in our solar system and also being supported by the recent detection of gravitational waves, still remains an incomplete theory. The main goal of this research is the investigation of possible extensions and modifications of gravity in order to obtain a consistent and, if possible, problem-free theory. In particular, we aim to study what kinds of modifications are possible in order to acquire a theoretically justified framework, free of instabilities and pathologies. Since we are entering the “gold age” of cosmology, with a huge amount of observational data one should systematically use these data in order to understand how the gravitational interaction works and enlighten issues that until recently were considered as fundamental and purely theoretical. Current observations suggest that the Universe undergoes a phase of accelerated expansion, something that the present theory of GR is not in position to explain. In order to solve problems like the one mentioned, theorists construct models of modified gravity that hope to describe the behavior of the Universe through its history. However, these modern theories have to be put to the test by observations coming from astrophysicists or else they are just pure mathematical models that do not represent realistic scenarios.

A large class of modified gravity theories arise from the consideration of extra degrees of freedom, such as in Brans-Dicke, Galileon, Fab Four and the general Horndeski theories. The Horndeski theory includes scalar fields that are directly and non-minimally coupled to gravity. Constructing such models, implementing them into various cosmological scenarios, testing their validity through observation and constraining their parameter space is the main purpose of this research. The aforementioned objective consists of suitably generalizing and modifying the gravitational action, using non-minimally coupled scalar fields, requiring absence of various instabilities at the zeroth as well as the perturbative level and retrieving GR at a particular limit. By extracting the gravitational field equations one can obtain the corresponding solutions and formulate the various observables as functions of the parameters of the theory. One can then use observational data to examine whether these solutions are in agreement with the current knowledge of numerous cosmological aspects. Such an analysis can concern issues arising at the inflationary paradigm, the formation and properties of black holes and the ongoing state of our universe, the accelerated expansion.

Some of the already published results of this Ph.D. thesis include the formulation of a suppression mechanism for the particle production during the inflation scenario, the breaking of the degeneracy of inflationary models through the measurement of the reheating temperature (during the reheating phase) after inflation, the gravitational collapse of a scalar field to the formation of a black hole and a unification scenario for the Dark Matter-Dark Energy components.



# Εισαγωγή

Η θεωρία της Γενικής Σχετικότητας του Einstein το 1915 έθεσε τα θεμέλια για την μελέτη της κατασκευής του χωρόχρονου (spacetime) και της εξέλιξης του Σύμπαντος με βάση τους φυσικούς νόμους. Το 1922 ο Friedmann ανέδειξε την ύπαρξη λύσεων των εξισώσεων του Einstein που περιγράφουν σενάρια διαστολής/κατάρρευσης του Σύμπαντος. Το 1929 ο Hubble ανακάλυψε την διαστολή του Σύμπαντος με βάση παρατηρησιακά δεδομένα που υπονοούσαν την απομάκρυνση των γαλαξιών, όπως προέβλεπε και η Γενική Σχετικότητα. Το 1946 ο Gamow και οι συνεργάτες του με τη θεωρία της πυρηνοσύνθεσης έδειξαν ότι η εξέλιξη του Σύμπαντος θα πρέπει να ξεκινά από μια πολύ θερμή και πυκνή κατάσταση. Προέβλεψαν επίσης ότι το τωρινό Σύμπαν θα είναι κατεκλυσμένο από μικροκυματικές ακτινοβολίες μέλανος σώματος. Πράγματι το 1965 οι Penzias και Wilson ανακάλυψαν μικροκυματικές ακτινοβολίες υποβάθρου που συνάδουν με τις θεωρητικές προβλέψεις του Gamow. Αυτές οι παρατηρησιακές ενδείξεις οδήγησαν στην πεποίθηση ότι το Σύμπαν ξεκίνησε από μια θερμή και πυκνή κατάσταση η οποία περιγράφεται από το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης (Big-Bang model).

## Ομογένεια και ισοτροπία στο Σύμπαν

Η κύρια υπόθεση της καθιερωμένης κοσμολογίας είναι ότι, τουλάχιστον σε μεγάλη κλίμακα, το Σύμπαν<sup>1</sup> είναι ομογενές και ισότροπο. Η πεποίθηση αυτή γεννάται από πληθώρα παρατηρησιακών δεδομένων, με ποιο εντυπωσιακό αυτό της σχεδόν ίδιας θερμοκρασίας μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου που προέρχεται από διαφορετικά μέρη/κατευθύνσεις του Σύμπαντος. Πέρα από την ομογένεια σε μεγάλη κλίμακα, είναι προφανές ότι το Σύμπαν σε εντοπισμένες περιοχές είναι ανομοιογενές, με την ύλη να έχει τη μορφή αστέρων, γαλαξιών ή γαλαξιακών συμπλεγμάτων (galaxy clusters). Πιστεύεται ότι οι ανομοιογένειες αυτές έχουν δημιουργηθεί στην πάροδο του χρόνου λόγω της βαρυτικής έλξης, αλλά είχαν ξεκινήσει από μια ομοιογενή κατανομή στο παρελθόν.

Η δυναμική περιγραφή του Σύμπαντος μπορεί να διαχωριστεί σε δύο μέρη, τη συμπεριφορά μεγάλης κλίμακας όπου το Σύμπαν θεωρείται ως ένα ομογενές και ισότροπο υπόβαθρο και τις ανομοιογένειες που εμφανίζονται σε μικρή κλίμακα μέσα σε αυτό το υπόβαθρο. Ως προς την εξέλιξη του σύμπαντος οι ανομοιογένειες αυτές μπορούν να θεωρηθούν μικρές διαταραχές και να περιγραφούν στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας διαταραχών (linear perturbation theory). Προς το παρόν μας αφορά μόνο στην εξέλιξη του υποβάθρου, του ισοτροπικού Σύμπαντος, το οποίο ονομάζεται Σύμπαν Robertson-Walker, με τα επιπλέον ονόματα των Friedmann και Lemaitre να αναφέρονται ορισμένες φορές. Η μετρική LFRW έχει τη μορφή

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right],$$

όπου  $a(t)$  ο παράγοντας διαστολής του σύμπαντος και  $t$  ο κοσμικός χρόνος. Η σταθερά  $K$  δηλώνει τη χωρική καμπυλότητα, με τις τιμές  $1, 0, -1$  να αντιστοιχούν σε κλειστό (πεπερασμένο), επίπεδο (Ευκλείδειο) και ανοιχτό (άπειρο) σύμπαν.

## Το διαστελλόμενο Σύμπαν

Σε κάθε χρονική περίοδο ο ρυθμός της διαστολής του Σύμπαντος δίνεται από την παράμετρο Hubble,  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ . Υψηλής σημασίας παράμετροι είναι ο χρόνος Hubble,  $H^{-1}$ , και η απόσταση ή μήκος Hubble

<sup>1</sup>Με τον όρο Σύμπαν, αυστηρά μιλώντας, εννοούμε την περιοχή που μας περιβάλλει και μπορεί να παρατηρηθεί, περιοριζόμενη από την απόσταση που δύναται να διανύσει το φως. Δεν μπορούμε να έχουμε βέβαιη γνώση για το τι συμβαίνει σε πιο μακρινές περιοχές καθώς το φως από αυτές βρίσκεται ακόμα στη διαδρομή προς εμάς και δεν έχει φτάσει. Παρ' όλα αυτά είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι το Σύμπαν είναι ομογενές και ισότροπο και στις άγνωστες περιοχές αν και δεν είναι απαραίτητο, με αντίστοιχα μοντέλα να μελετούν αυτή την περίπτωση.

$cH^{-1}$ . Η τελευταία ονομάζεται και “ορίζοντας” αφού μας παρέχει μια εκτίμηση της απόστασης που μπορεί να διανύσει το φως<sup>2</sup> ενώ το σύμπαν διαστέλλεται. Ως ορίζοντα σωματιδίων (particle horizon) αναφερόμαστε στην απόσταση την οποία θα μπορούσε να ταξιδέψει το φως από την αρχή του σύμπαντος ( $a = 0$ ) ενώ ως ορίζοντα γεγονότων (event horizon) στην απόσταση που θα μπορεί να ταξιδέψει στο μέλλον. Από τα παραπάνω, πιο σημαντικό είναι το μήκος Hubble και γι’ αυτό αναφερόμαστε σε αυτό ως “ορίζοντας”.

Ένα σημείο καλείται ομοκινούμενο (comoving) όταν κινείται μαζί με την διαστολή του σύμπαντος, δηλαδή ορίζεται η τοποθεσία ενός παρατηρητή που μετράει μηδενική πυκνότητα ορμής. Η σχετική ταχύτητα ενός ζεύγους γειτονικών ομοκινούμενων παρατηρητών, οι οποίοι απέχουν απόσταση  $dr \ll H^{-1}$ , είναι  $v = Hdr \ll 1$ . Σε μονάδες  $c = 1$ , είναι ίση με τη μετατόπιση προς το ερυθρό  $\frac{d\lambda}{\lambda}$  ενός φωτονίου που περνά ανάμεσα στους παρατηρητές. Επιπλέον, είναι ίση με την αύξηση  $\frac{da}{a}$  στον παράγοντα διαστολής, και το μήκος κύματος  $\lambda$  ενός φωτονίου φαίνεται να απλώνεται ως προς μια σειρά συνκινούμενων παρατηρητών. Η μετατόπιση προς το ερυθρό (redshift),  $z$ , μιας ακτίνας φωτός που εκπέμπεται από μια κοσμολογική πηγή ορίζεται από τη σχέση

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emit}}},$$

όπου  $\lambda_{\text{obs}}$  το παρατηρούμενο μήκος κύματος και  $\lambda_{\text{emit}}$  το μήκος κύματος τη στιγμή της εκπομπής. Για  $z \ll 1$ , η μετατόπιση προς το ερυθρό δίνεται από το νόμο Hubble  $z = H dr$ , το οποίο μας επιτρέπει να υπολογίσουμε με ακρίβεια τη σημερινή τιμή  $H_0$  αν γνωρίζουμε με ακρίβεια την απόσταση ανάμεσα στους γαλαξίες. Ακόμα και μετά από δεκαετίες παρατηρήσεων αυτό είναι κάτι που δεν είναι ακόμα δυνατόν. Η αβεβαιότητα στο  $H_0$  παραμετρίζεται συχνά από μια ποσότητα  $h$  η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης

$$H_0 = 100h \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \simeq \frac{h}{3000} \text{ Mpc}^{-1},$$

όπου έχουμε θέσει  $c = 1$ . Όπως αναφέρουμε και στο κεφάλαιο 3 η τιμή της παραμέτρου  $h$  βρίσκεται στο διάστημα  $0.6774 \pm 0.0046$  (Planck Mission) έως  $0.719 \pm 0.025$  (Hubble Space Telescope). Οι σημερινές τιμές για το χρόνο και την απόσταση Hubble αντίστοιχα είναι

$$\begin{aligned} H_0^{-1} &= 9.78h^{-1} \text{ Gyr} \\ cH_0^{-1} &= 2998h^{-1} \text{ Mpc} \end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση, είτε το  $z$  είναι μικρό είτε μεγάλο, η μετατόπιση προς το ερυθρό μιας ακτίνας φωτός που εκπέμπεται τη χρονική στιγμή  $t_e$  δίνεται από τη σχέση

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}, \quad a(t_0) = 1$$

## Κοσμολογία του Σύμπαντος FRW

Προκειμένου να μάθουμε ποια είναι η δυναμική εξέλιξη του Σύμπαντος χρειάζεται να λύσουμε τις εξισώσεις της Γενικής Σχετικότητας του Einstein. Οι εξισώσεις αυτές εκφράζονται ως

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu},$$

όπου  $R_{\mu\nu}$ ,  $R$ ,  $T_{\mu\nu}$  και  $G$  είναι ο τανυστής Ricci, το βαθμωτό Ricci, ο τανυστής ενέργειας-ορμής και η σταθερά του Νεύτωνα αντίστοιχα. Με  $\Lambda$  συμβολίζεται η Κοσμολογική Σταθερά όπως εισήχθη αρχικά από τον Einstein. Στην μετρική FRW, που περιγράφει ένα ομογενές και ισότροπο Σύμπαν, αντιστοιχεί ένας τανυστής ενέργειας-ορμής της μορφής  $T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$  που περιγράφει ένα ιδανικό ρευστό με πυκνότητα ενέργειας  $\rho(t)$  και ορμή  $p(t)$ . Ο τανυστής  $T_{\mu\nu}$  υπακούει στην εξίσωση συνέχειας  $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$  που οδηγεί στην εξίσωση

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P).$$

Στην περίπτωση που το σύμπαν θεωρηθεί ως ένα αέριο, τα στοιχεία που το αποτελούν θα έχουν μια μέση ταχύτητα (τετράγωνο)  $v^2$  και πίεση  $P = \rho v^2/3$  ( $c = 1$ ). Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή σε κάθε συνιστώσα του αερίου θα έχουμε  $v \ll 1 \Rightarrow P \simeq 0$  για μη σχετικιστική ύλη (non-relativistic matter) και  $v \simeq 1 \Rightarrow P = \rho/3$

<sup>2</sup>Ο όρος “φως” υποδηλώνει τον ιδανικό φορέα πληροφορίας, που ταξιδεύει με ταχύτητα  $c = 1$ , χωρίς συγκρούσεις στη διαδρομή του.

για ακτινοβολία (radiation). Για τις δύο αυτές περιπτώσεις η εξίσωση συνέχειας δίνει αντίστοιχα  $\rho_m \sim a^{-3}$  και  $\rho_r \sim a^{-4}$ .

Το χρονικό και χωρικό κομμάτι των εξισώσεων Einstein καταλήγουν στην εξίσωση Friedmann και την εξίσωση επιτάχυνσης αντίστοιχα

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{Pl}^2} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3P}{6M_{Pl}^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

όπου, αντί για τη σταθερά  $G$  χρησιμοποιούμε την ανηγμένη reduced μάζα Planck  $M_{Pl} = (8\pi G)^{-1/2}$ . Αν  $K = \Lambda = 0$ , η εξίσωση Friedmann λύνεται εύκολα για ένα Σύμπαν που κυριαρχεί η ύλη ( $\rho_m \sim a^{-3}$ ) με αποτέλεσμα  $a \sim t^{1/2}$ , ενώ στην περίπτωση που κυριαρχεί η ακτινοβολία ( $\rho_r \sim a^{-4}$ ) έχουμε  $a \sim t^{2/3}$ . Αν θεωρήσουμε ότι η Κοσμολογική Σταθερά αντιπροσωπεύει την ενέργεια του κενού, τότε απουσία επιπλέον ύλης σε επίπεδο σύμπαν ( $\rho = K = 0$ ) η εξίσωση Friedmann έχει τη μορφή  $H^2 = \frac{\Lambda}{3} \equiv \frac{\rho_{vac}}{3M_{Pl}^2}$ , απ' όπου βρίσκουμε  $\rho_{vac} = M_{Pl}^2 \Lambda$  και συνεπώς  $P_{vac} = -\rho_{vac}$ , ενώ για τη λύση της έχουμε  $a \sim e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$ .

Από την εξίσωση Friedmann είναι εμφανές ότι για μια δεδομένη τιμή της παραμέτρου Hubble υπάρχει μια συγκεκριμένη πυκνότητα, γνωστή ως κρίσιμη πυκνότητα  $\rho_c$  (critical density), για την οποία απουσία Κοσμολογικής Σταθεράς ( $\Lambda = 0$ ) το Σύμπαν είναι επίπεδο ( $K = 0$ ). Η πυκνότητα αυτή είναι η

$$\rho_c = 3M_{Pl}^2 H^2$$

και η τωρινή της τιμή είναι  $\rho_{c,0} = 2.775h^{-1} \times 10^{-29} \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . Ορίζοντας την παράμετρο πυκνότητας  $\Omega = \rho/\rho_c$  και την αντίστοιχη για την κοσμολογική σταθερά  $\Omega_\Lambda = \rho_{vac}/\rho_c = \Lambda/3H^2$  μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση Friedmann στη μορφή

$$\underbrace{\Omega + \Omega_\Lambda}_{\Omega_{total}} - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}.$$

Η παράμετρος  $\Omega_{total}$  είναι εν γένει χρονοεξαρτώμενη αλλά μόλις αποκτήσει την τιμή 1, που αντιστοιχεί στο επίπεδο Σύμπαν, μένει σταθερή σε αυτή τη τιμή.

## Τα πρόβλημα της καθιερωμένης κοσμολογίας της Μεγάλης Έκρηξης

- **Το πρόβλημα της επιπεδότητας (Flatness Problem):** Όπως δείξαμε παραπάνω, αμελώντας την Κοσμολογική Σταθερά (ή ενσωματώνοντας την στο  $\Omega_{total}$ ), η εξίσωση Friedmann παίρνει τη μορφή

$$\Omega_{total} - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}$$

Αν το Σύμπαν είναι επίπεδο ( $\Omega_{total} = 1$ ), τότε παραμένει σε αυτή τη κατάσταση για κάθε χρονική στιγμή. Σε διαφορετική περίπτωση εξελίσσεται με το χρόνο. Το πρόβλημα της επιπεδότητας απορρέει από το γεγονός ότι ο συνδυασμός  $a H$  είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου. Για παράδειγμα ένα σχεδόν επίπεδο σύμπαν, όπου κυριαρχεί η ύλη, έχουμε  $|\Omega_{total} - 1| \sim t^{2/3}$  ενώ, στο σενάριο που κυριαρχεί η ακτινοβολία, έχουμε  $|\Omega_{total} - 1| \sim t$ . Τα παρατηρησιακά δεδομένα υποδεικνύουν ότι η σημερινή τιμή,  $\Omega_{total,0}$ , είναι πολύ κοντά στη μονάδα κάτι που σημαίνει ότι στο παρελθόν το  $\Omega_{total}$  πρέπει να πλησίαζε ακόμα περισσότερο την τιμή 1. Πιο συγκεκριμένα, για να καταλήξουμε στο Σύμπαν που παρατηρούμε σήμερα θα έπρεπε κατά την περίοδο της πυρηνοσύνθεσης να έχουμε  $|\Omega(t_{nuc}) - 1| \lesssim 10^{-16}$  ενώ κοντά στη Μεγάλη Έκρηξη φτάνει να είναι  $|\Omega(t_{Pl}) - 1| \lesssim 10^{-64}$ . Το πρόβλημα της επιπεδότητας δηλώνει πως είναι σχεδόν αδύνατο να υφίσταντο τόσο καλά επιλεγμένες αρχικές συνθήκες κατά τη δημιουργία του Σύμπαντος. Αν οι αρχικές συνθήκες δεν επιλεγούν με τόσο ακριβή τρόπο, τότε το Σύμπαν καταρρέει ή διαστέλλεται ραγδαία και φτάνει σε θερμοκρασία μικρότερη των 3 K, μετά το πρώτο δευτερόλεπτο της δημιουργίας του, πριν γίνει δυνατή η εμφάνιση οποιασδήποτε δομής. Για το λόγο αυτό το πρόβλημα της επιπεδότητας αναφράζεται πολλές φορές ως-“Γιατί το Σύμπαν έχει τόσο μεγάλη ηλικία;”

- **Το πρόβλημα του ορίζοντα (Horizon Problem):** Θεωρούμε ένα ομοκινούμενο μήκος κύματος,  $\lambda$ , και ένα φυσικό μήκος κύματος,  $a\lambda$ , το οποίο βρίσκεται μέσα από την ακτίνα (ορίζοντα) Hubble,  $H^{-1}$  (δηλ.  $a\lambda \lesssim H^{-1}$ ). Η καθιερωμένη κοσμολογία, που απορρέει από τη Μεγάλη Έκρηξη, χαρακτηρίζεται από

μια κοσμική εξέλιξη της μορφής  $a \sim t^p$  με  $0 < p < 1$ . Σε αυτή την περίπτωση το φυσικό μήκος κύματος αυξάνεται σαν  $a\lambda \sim t^p$ , ενώ ο ορίζοντας Hubble εξελίσσεται σαν  $H^{-1} \sim t$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, με το πέρασμα του χρόνου, το φυσικό μήκος κύματος να γίνεται πιο μικρό από τον ορίζοντα Hubble. Τότε η ισχύς της αιτιότητας περιορίζεται μόνο σε μια περιοχή μικρότερη από τον ορίζοντα.

Πιο αναλυτικά, θεωρούμε τον ορίζοντα των σωματιδίων  $D_H(t)$  όπου ταξιδεύει το φως από την αρχή του σύμπαντος,  $t = t_*$ ,

$$D_H(t) = a(t)d_H(t), \quad \text{με} \quad d_H(t) = \int_{t_*}^t \frac{dt'}{a(t')}$$

Το  $d_H(t)$  αντιστοιχεί στην ομοκινούμενη απόσταση. Θέτοντας  $t_* = 0$  βρίσκουμε  $d_H(t) = 3t^{1/3}$  στην περίοδο κυριαρχίας της ύλης. Στο Κοσμικό Μικροκυματικό Υπόβαθρο (CMB) ανιχνεύουμε φωτόνια που έχουν εκπεμφθεί τη χρονική στιγμή της αποσύζευξης (decoupling). Ο ορίζοντας σωματιδίων κατά την αποσύζευξη,  $D_H(t_{dec}) = a(t_{dec})d_H(t_{dec})$ , αντιστοιχεί στην περιοχή όπου τα φωτόνια θα μπορούσαν να φτάσουν σύμφωνα με την αρχή της αιτιότητας. Ο λόγος του  $d_H(t_{dec})$  ως προς τον ορίζοντα σωματιδίων σήμερα,  $d_H(t_0)$  υπολογίζεται προσεγγιστικά

$$\frac{d_H(t_{dec})}{d_H(t_0)} \approx \left(\frac{t_{dec}}{t_0}\right)^{1/3} \approx \left(\frac{10^5}{10^{10}}\right)^{1/3} \approx 10^{-2}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει ότι οι αιτιοκρατικές περιοχές των φωτονίων περιορίζονται να είναι πολύ μικρές, τα φωτόνια που εκπέμφθηκαν κατά την αποσύζευξη δεν θα μπορούσαν να παρατηρηθούν σήμερα. Παρ' όλα αυτά, τα φωτόνια που παρατηρούμε από το CMB έχουν αποκτήσει την ίδια θερμοκρασία σε κάθε μέρος του Σύμπαντος. Κάτι τέτοιο δεν μπορεί να εξηγηθεί από το σενάριο της Μεγάλης Έκρηξης. Η ομοιογένεια αυτή που παρατηρείται πρέπει αναγκαστικά να είναι κομμάτι των αρχικών συνθηκών. Αυτό είναι το πρόβλημα του ορίζοντα.

- **Ανεπιθύμητα σωματίδια (Unwanted Relics):** Αν το αρχικό Σύμπαν υπακούει στη συμμετρία μιας Μεγάλης Ενοποιημένης Θεωρίας (Grand Unified Theory) τότε κατά το αυθόρμητο σπάσιμό της προς μια  $U(1)$  θεωρία παράγονται μαγνητικά μονόπολα (magnetic monopoles). Στην περίπτωση θεωριών υπερχορδών (superstring theory) εμφανίζονται βαθμωτά (spin-0) πεδία που καλούνται moduli και παραμετρίζουν το κενό πριν το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας (supersymmetry breaking). Τέλος θεωρίες υπεβαρύτητας (supergravity) προβλέπουν το υπερσυμμετρικό σωματίδιο του βαρυτονίου (gravitino), το gravitino (spin-3/2). Όλα αυτά τα σωματίδια τα οποία αναζητούνται σε όλο και υψηλότερες ενεργειακές κλίμακες των πειραμάτων του Large Hadron Collider θα έπρεπε να είχαν παραχθεί και μετά τη Μεγάλη Έκρηξη. Σύμφωνα όμως με τα παραπάνω οι πυκνότητα ενέργειας των σωματιδίων μειώνεται ως  $\rho_m \sim a^{-3}$ . Η πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας όμως μειώνεται ως  $\rho_r \sim a^{-4}$  στην περίοδο κυριαρχίας της ακτινοβολίας, συνεπώς τα σωματίδια αυτά θα έπρεπε να είχαν κατακλύσει το σύμπαν. Κάτι τέτοιο δε συνάδει με τα παρατηρησιακά δεδομένα αφού τέτοια σωματίδια δεν έχουν παρατηρηθεί. Αυτό είναι το πρόβλημα των ανεπιθύμητων σωματιδίων.

## Το σενάριο του πληθωρισμού (inflation)

Θυμίζουμε ότι απουσία Κοσμολογικής Σταθεράς ( $\Lambda = 0$ ) η εξίσωση επιτάχυνσης που προκύπτει από την μετρική FRW έχει τη μορφή

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3P}{6M_{Pl}^2}$$

Το γεγονός ότι τα δύο κύρια συστατικά του Σύμπαντος έχουν  $\rho_m > 0, P_m = 0$  (ύλη) και  $\rho_r > 0, P_r = \rho_r/3$  (ακτινοβολία) ενισχύει τη γενική πεποίθηση ότι το άθροισμα  $\rho + P$  δεν είναι ποτέ αρνητικό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το σύμπαν να παρουσιάζει πάντα μια επιβραδυνόμενη διαστολή  $\ddot{a} > 0$ , με όλα τα παραπάνω προβλήματα της Μεγάλης Έκρηξης να απορρέουν από τη σχέση αυτή. Η ιδέα του πληθωρισμού (Guth 1981, Albrecht και Steinhardt 1982, Linde 1982, 1983) δεν αντικαθιστά το σενάριο της Μεγάλης Έκρηξης παρά μόνο αντιμετωπίζει τα προβλήματά της διατηρώντας της επιτυχίες της. Πιο συγκεκριμένα ο πληθωρισμός τοποθετείται σε μια περίοδο μετά τη Μεγάλη Έκρηξη και ορίζεται ως μια κατάσταση επιταχυνόμενης διαστολής του Σύμπαντος

$$\text{INFLATION} \Leftrightarrow \ddot{a} > 0$$

Μια εναλλακτική και ισοδύναμη έκφραση για τον πληθωρισμό είναι

$$\text{INFLATION} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{aH} \right) < 0$$

Η συνθήκη αυτή υποδηλώνει ότι ο ομοκινούμενος ορίζοντας Hubble,  $(aH^{-1})$  μειώνεται κατά την περίοδο του πληθωρισμού. Η ιδιότητα αυτή είναι κομβικής σημασίας για την επίλυση των προβλημάτων της Μεγάλης Έκρηξης. Συγκεκριμένα:

- Όσον αφορά το πρόβλημα της επιπεδότητας, το γεγονός ότι η ποσότητα  $a^2 H^2$  αυξάνεται σημαίνει ότι το  $\Omega$  τείνει ραγδαία προς τη μονάδα που είναι (σχεδόν) και η παρατηρήσιμη τιμή σήμερα. Μετά το τέλος του πληθωρισμού η ποσότητα  $|\Omega - 1|$  θα μπορούσε να αυξάνεται πάλι επαναφέροντας το πρόβλημα της επιπεδότητας. Αν όμως ο πληθωρισμός έχει τόση διάρκεια ώστε να φτάσει το  $\Omega$  πολύ κοντά στη μονάδα τότε θα μείνει σε αυτή τη τιμή μέχρι τη σημερινή εποχή.
- Το πρόβλημα του ορίζοντα αντιμετωπίζεται με τον παράγοντα διαστολής να εξελίσσεται ως  $a \sim t^p$  με  $p > 1$  κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού (αφού  $\rho + 3P < 0$ ). Τότε ένα φυσικό μήκος κύματος,  $a\lambda$ , μεγαλώνει πιο γρήγορα από τον ορίζοντα Hubble,  $H^{-1}$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το φυσικό μήκος κύματος να “σπρώχνεται” έξω από τον ορίζοντα κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Με τον τρόπο αυτό η περιοχή στην οποία ισχύει η αιτιότητα απλώνεται σε κλίμακες πολύ μεγαλύτερες από τον ορίζοντα Hubble, λύνοντας έτσι το πρόβλημα του ορίζοντα.

Φυσικά με το τέλος του πληθωρισμού ο ορίζοντας Hubble αρχίζει και πάλι να μεγαλώνει πιο γρήγορα από το φυσικό μήκος κύματος. Προκειμένου να μην επανέλθει το πρόβλημα απαιτούμε ο ομοκινούμενος ορίζοντας σωματιδίων να ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_{t_*}^{t_{dec}} \frac{dt}{a(t)} \gg \int_{t_{dec}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Αυτό υπονοεί ότι η ομοκινούμενη απόσταση που μπορούν να διανύσουν τα φωτόνια πριν την αποσύζευξη πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη μετά την αποσύζευξη. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται αν το σύμπαν διασταλλεί περίπου  $e^{70}$  φορές κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού.

- Κατά τη περίοδο του πληθωρισμού η πυκνότητα ενέργειας του Σύμπαντος μειώνεται πολύ αργά. Για παράδειγμα για εξέλιξη της μορφής  $a \sim t^p$  με  $p > 1$ , έχουμε  $H \sim t^{-1} \sim a^{-1/p}$  και  $\rho \sim a^{-2/p}$ . Παράλληλα η πυκνότητα ενέργειας σωματιδίων με μάζα μειώνεται πολύ πιο γρήγορα ( $\sim a^{-3}$ ), το αντίστοιχο μήκος κύματός τους μετατοπίζεται προς το ερυθρό με αποτέλεσμα να μην είναι παρατηρήσιμα σήμερα, λύνοντας έτσι το πρόβλημα των ανεπιθύμητων σωματιδίων.

Φυσικά συνεχίζει να υφίσταται η πιθανότητα τα σωματίδια αυτά να παράχθηκαν *μετά* τον πληθωρισμό. Στη διαδικασία αυτή, που καλείται αναθέρμανση (reheating) και απασχολεί το πρώτο μέρος της διδακτορικής διατριβής, η ενέργεια του σύμπαντος μπορεί μεταφερθεί σε ακτινοβολία ή στην παραγωγή σωματιδίων. Σε αυτό το στάδιο πρέπει να αποφευχθεί η παραγωγή μεγάλου (τουλάχιστον) αριθμού τέτοιων σωματιδίων. Στο παράρτημα Δ' παρουσιάζουμε μια μελέτη, που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος ειδίκευσης “Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές” του Τομέα Φυσικής ΕΜΠ και δημοσιεύτηκε στο επιστημονικό περιοδικό *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* (JCAP 1308 (2013) 027). Στην εργασία αυτή, αναπτύξαμε μια τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας, στο πλαίσιο του πληθωρισμού και της κβαντικής θεωρίας πεδίου σε καμπύλους χωρόχρονους, που οδηγεί σε έναν τέτοιο μηχανισμό μείωσης των παραγόμενων σωματιδίων.

### **Δυναμική του πληθωρισμού-Το βαθμωτό πεδίο (inflaton) που καθοδηγεί τον πληθωρισμό**

Όπως δείξαμε και παραπάνω για να είναι εφικτό το σενάριο του πληθωρισμού ( $\rho + 3P < 0$ ) χρειαζόμαστε μια μορφή ύλης που να επιτρέπεται να αποκτήσει την ασυνήθιστη ιδιότητα της αρνητικής πίεσης. Κάτι τέτοιο είναι δυνατό με τα βαθμωτά πεδία, που περιγράφουν βαθμωτά (*spin* = 0) σωματίδια. Ίσως το πιο σημαντικό (και το μοναδικό που έχει ανακαλυφθεί μέχρι σήμερα) βαθμωτό πεδίο είναι το Higgs. Στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου (Standard Model) τα στοιχειώδη σωματίδια αποκτούν μάζα μέσω του πεδίου Higgs. Στο σενάριο του πληθωρισμού ως υπεύθυνο βαθμωτό πεδίο θεωρείται το πληθωριστικό πεδίο inflaton, το οποίο δεν μπορεί να παρατηρηθεί πλέον αφού διασπάται με το τέλος του πληθωρισμού είτε διαταρακτικά (reheating) είτε μη διαταρακτικά (preheating).

Ο καθιερωμένος τρόπος να περιγραφεί μια θεωρία πεδίου είναι μέσω της Λαγκρανζιανής του, από την οποία προέρχονται οι εξισώσεις κίνησής του. Για τον λόγο αυτό στη δράση Einstein-Hilbert (με  $\Lambda = 0$ )

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g} d^4x \frac{M_{Pl}^2}{2} R$$

προσθέτουμε τη δράση του βαθμωτού πεδίου η οποία στην πιο τετριμμένη της μορφή περιλαμβάνει έναν κινητικό και έναν δυναμικό όρο

$$S_m = \int \sqrt{-g} d^4x \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - V(\phi) \right]$$

Μεταβολή της συνολικής δράσης ως προς η μετρική  $g_{\mu\nu}$  οδηγεί στις εξισώσεις Einstein  $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}/M_{Pl}^2$  με  $T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\kappa \phi \nabla^\kappa \phi - g_{\mu\nu} V(\phi)$ , ενώ μεταβολή ως προς το πεδίο  $\phi$  στην εξίσωση Klein-Gordon  $\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0$ . Για τη γεωμετρία FRW (με  $K = 0$ ) το βαθμωτό πεδίο  $\phi$  θα είναι συνάρτηση μόνο του  $t$  (ομοιογενές) με αποτέλεσμα οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή ενέργειας-ορμής να είναι οι

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

Το χρονικό κομμάτι της εξίσωσης Einstein μας δίνει την εξίσωση Friedmann

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]$$

ενώ η εξίσωση Klein-Gordon καταλήγει στην

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV(\phi)}{d\phi}$$

Κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού,  $\rho + 3P < 0$ , θα έχουμε  $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ , κάτι που υποδηλώνει ότι η δυναμική ενέργεια του πληθωριστικού πεδίου κυριαρχεί της κινητικής. Για το λόγο αυτό απαιτούμε μια μορφή “επίπεδου δυναμικού” ή αλλιώς το πληθωριστικό πεδίο να “κυλάει αργά” στο δυναμικό του. Αυτή είναι η προσέγγιση slow-roll.

### ***H προσέγγιση slow-roll***

Η προσέγγιση slow-roll επιβάλλει τις σχέσεις  $\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$  και  $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$  κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού με αποτέλεσμα η εξισώσεις Friedmann και Klein-Gordon να παίρνουν τη μορφή

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_{Pl}^2}$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -\frac{dV(\phi)}{d\phi}$$

Για να ισχύει η προσέγγιση slow-roll είναι απαραίτητο να ισχύουν δύο συνθήκες (Liddle και Lyth 1992) :

$$\epsilon(\phi) \ll 1, \quad |\eta(\phi)| \ll 1,$$

όπου οι παράμετροι slow-roll  $\epsilon$  και  $\eta$  ορίζονται ως:

$$\epsilon(\phi) \equiv \frac{M_{Pl}^2}{2} \left( \frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} \right)^2,$$

$$\eta(\phi) \equiv M_{Pl}^2 \frac{1}{V} \frac{d^2V}{d\phi^2}.$$

Η φάση του πληθωρισμού ολοκληρώνεται όταν οι παράμετροι  $\epsilon$  και  $|\eta|$  είναι της τάξης της μονάδας. Μια χρήσιμη ποσότητα που περιγράφει το μέγεθος/διάρκεια του πληθωρισμού είναι ο αριθμός των e-foldings (efolds), ο οποίος ορίζεται ως

$$N = \ln \frac{a_{end}}{a_i} = \int_{t_i}^{t_{end}} H dt \simeq \frac{1}{M_{Pl}^2} \int_{\phi_{end}}^{\phi_i} \frac{V}{\frac{dV}{d\phi}} d\phi$$



όπου με  $i$  και  $end$  δηλώνουμε την αρχή και το τέλος του πληθωρισμού αντίστοιχα. Το  $\phi_{end}$  προκύπτει από τη λύση της παραβίασης του slow-roll,  $\epsilon(\phi_{end}) \simeq 1$ .

Για την παράμετρο πυκνότητας  $\Omega$  απαιτείται να ισχύει  $|\Omega_{end} - 1| \lesssim 10^{-60}$  αμέσως μετά το τέλος του πληθωρισμού, προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα της επιπεδότητας. Ο λόγος των  $|\Omega - 1|$  ανάμεσα στην αρχική και τελική φάση του πληθωρισμού δίνεται από τη σχέση

$$\frac{|\Omega_{end} - 1|}{|\Omega_i - 1|} \simeq \left( \frac{a_i}{a_{end}} \right)^2 = e^{-2N}$$

Υποθέτοντας ότι η ποσότητα  $|\Omega_i - 1|$  είναι της τάξης της μονάδας στην αρχή του πληθωρισμού, ο αριθμός των e-foldings που απαιτείται για να λυθεί το πρόβλημα της επιπεδότητας είναι  $N \gtrsim 70$ . Περίπου ίδιος αριθμός χρειάζεται και για να λυθεί το πρόβλημα του οριζοντα.

### **Εξέλιξη των παραμέτρων κλίμακας (scales)**

Θυμίζουμε ότι, εξ ορισμού, κατά τον πληθωρισμό ο ομοκινούμενος οριζοντα Hubble μειώνεται ενώ αρχίζει να αυξάνεται μετά το τέλος του πληθωρισμού. Ένα δεδομένο ομοκινούμενο μήκος κλίμακας  $k^{-1}$  (που αντιστοιχεί σε μήκος κύματος  $\lambda$ ) μπορεί να ξεκινήσει την εξέλιξή του μικρότερο από  $H^{-1}/a$  αλλά μέχρι το τέλος του πληθωρισμού να είναι πολύ μεγαλύτερο. Για κάθε κλίμακα που διασχίζει τον οριζοντα κατά τον πληθωρισμό, μας ενδιαφέρει η χρονική στιγμή κατά την οποία ισούται με τον οριζοντα,  $k = aH$ . Η στιγμή αυτή μπορεί να σχετιστεί με τον αριθμό των e-foldings του πληθωρισμού μετά από αυτήν.

Για να ταυτοποιήσουμε πλήρως τις κλίμακες χρειαζόμαστε ένα μοντέλο που να περιγράφει πλήρως την εξέλιξη του Σύμπαντος μέχρι τη σημερινή εποχή. Η πιο απλή μορφή κοσμολογικής εξέλιξης μπορεί να διαχωριστεί στις εξής φάσεις:

- Από τη χρονική στιγμή που η κλίμακα  $k^{-1}$  ισούται (βγαίνει) με τον οριζοντα μέχρι το τέλος του πληθωρισμού.
- Από το τέλος του πληθωρισμού μέχρι να αποκατασταθεί το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης, όπως αναφέραμε, μέσω της διαδικασίας αναθέρμανσης (και προθέρμανσης) κατά την οποία θεωρούμε ότι στο σύμπαν κυριαρχεί η ύλη.
- Από την περίοδο κυριαρχίας της ακτινοβολίας που επακολουθεί της αναθέρμανσης έως την περίοδο ισοδυναμίας (equality) ύλης-ακτινοβολίας  $t_{eq}$ .
- Από την περίοδο ισοδυναμίας ύλης-ακτινοβολίας έως σήμερα.

Υποθέτουμε ότι οι μεταβάσεις ανάμεσα στις παραπάνω περιόδους πραγματοποιούνται στιγμιαία. Χρησιμοποιούμε τον δείκτη  $k$  για τις τιμές των ποσοτήτων τη χρονική στιγμή όπου  $k = aH$  κατά τον πληθωρισμό και  $end, reh$  για το τέλος του πληθωρισμού και της αναθέρμανσης αντίστοιχα. Μετρώντας όλες τις ποσότητες ως προς την σημερινή τιμή του συνκινούμενου οριζοντα  $H_0^{-1}/a$  βρίσκουμε τη σχέση

$$\frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a_k H_k}{a_0 H_0} = \frac{a_k}{a_{end}} \frac{a_{end}}{a_{reh}} \frac{a_{reh}}{a_{eq}} \frac{a_{eq}}{a_0} \frac{H_k}{H_0}$$

που είναι και η εισαγωγική σχέση του Κεφαλαίου 1.

### **Βαρυτική κατάρρευση ενός ομοιογενούς βαθμωτού πεδίου**

Όπως είδαμε στα προηγούμενα η εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου στη θεωρία της βαρύτητας και η απαίτηση οι συνιστώσες του ταυσιτή ενέργειας-ορμής να ικανοποιούν μια ιδιαίτερη σχέση,  $\rho + 3P < 0 \Rightarrow \ddot{a} > 0$  αποτέλεσαν τις θεμελιώδεις λίθους για το επιτυχημένο σενάριο του πληθωρισμού. Είναι αρκετά ενδιαφέρον να μελετήσουμε αν μια αντίστοιχη διαδικασία θα μπορούσε να οδηγήσει, όχι σε μια ραγδαία διαστολή του Σύμπαντος όπως στον πληθωρισμό, αλλά στην κατάρρευσή του. Στο σενάριο αυτό ο χωρόχρονος καταλήγει σε μια ανωμαλία (singularity) και μένει να μελετηθεί αν η ανωμαλία αυτή μπορεί να παρατηρηθεί ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση η ανωμαλία αυτή καλείται γυμνή (naked) και σύμφωνα με την Υπόθεση Κοσμικής Λογοκρισίας (Cosmic Censorship Conjecture) του Penrose (1969), δεν υπάρχουν στο σύμπαν γυμνές ανωμαλίες εκτός από αυτή της Μεγάλης Έκρηξης. Στη δεύτερη περίπτωση είναι δυνατόν να δημιουργηθεί ένας

ορίζοντας γεγονότων (event horizon) ορίζοντας το σύνορο μιας μελανής οπής (black hole) που θα καλύπτει την ανωμαλία στο κέντρο της.

Οι μελανές οπές είναι λύσεις των εξισώσεων του Einstein και από φυσικής απόψεως καθορίζουν μια περιοχή του χωρόχρονου με τόσο ισχυρές βαρυτικές έλξεις που ούτε το φως δεν μπορεί να διαφύγει. Οι μελανές οπές στο σύμπαν δεν παρατηρούνται άμεσα αλλά η ύπαρξή τους υπονοείται από την συμπεριφορά άλλων αστροφυσικών σωμάτων γύρω τους. Η πιο ξεκάθαρη απόδειξη ύπαρξης μελανών οπών ήρθε τον Σεπτέμβριο του 2015 όταν παρατηρήθηκαν για πρώτη φορά βαρυτικά κύματα που προβλέπει η Γενική Σχετικότητα του Einstein. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των δύο παρατηρησιακών σταθμών LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) στις ΗΠΑ, το σήμα από το βαρυτικό κύμα που ανιχνεύτηκε προέρχεται από τη σύγκρουση δύο μελανών οπών μάζας 36 και 29 ηλιακών μαζών και την σύμπτυξή τους σε μια.

Οι μελανές οπές προέρχονται από τη βαρυτική κατάρρευση αστέρων μεγάλης μάζας στους οποίους η εσωτερική πίεση δεν είναι αρκετή ώστε να αντισταθεί στην ίδια τους τη βαρύτητα και χωρίζονται σε stellar black holes ( $\sim 10M_{Sun}$ ), intermediate black holes ( $\sim 10^3M_{Sun}$ ) και supermassive black hole ( $\sim 10^5 - 10^{10}M_{Sun}$ ). Το 1971 εισάγεται από τον Hawking η ιδέα ύπαρξης πολύ μικρότερων μελανών οπών που ονομάστηκαν αρχέγονες μελανές οπές (primordial black holes). Πρόκειται για έναν υποθετικό τύπο μελανών οπών οι οποίες σχηματίζονται στο αρχικό σύμπαν, μετά τη Μεγάλη Έκρηξη, λόγω των τεράστιων πυκνοτήτων ενέργειας που αναπτύσσονται. Το ερώτημα που απασχολεί το Κεφάλαιο 2 αφορά την τελική κατάσταση ενός βαθμωτού πεδίου που ζει σε ένα χωρόχρονο FRW και περιγράφεται από μια πυκνότητα ενέργειας που οδηγεί στην κατάρρευση του.

## Δημιουργία της ανωμαλίας (singularity)

Ακολουθώντας την καθιερωμένη μελέτη ενός τέτοιου σεναρίου στη βιβλιογραφία, θεωρούμε κάποια χρονική στιγμή  $t = 0$  τις αρχικές συνθήκες

$$a(0) = a_0, \quad \phi(0) = \phi_0, \quad \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0.$$

Υποθέτουμε ότι το πεδίο καταρρέει μέχρι να καταλήξει σε μια ανωμαλία όταν  $a = 0$ . Για το λόγο αυτό απαιτούμε ο παράγοντας  $a(t)$  να είναι μια μονότονα φθίνουσα συνάρτηση του  $t$ . Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση Friedmann,  $\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\rho}{3M_{Pl}^2}$ , μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\rho \sim \left( \frac{\psi(a)}{a} \right)^2.$$

Δεν κάνουμε κάποια υπόθεση για το  $\psi(a)$  στο όριο  $a \rightarrow 0$  κατ' αρχήν, αλλά προκειμένου να μελετήσουμε μια φυσική ανωμαλία θεωρούμε ότι

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\psi(a)}{a} = +\infty$$

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια ορισμένα θεωρήματα και προτάσεις ενώ παραπέμπουμε για την απόδειξή τους στο R. Giambo "Gravitational Collapse of homogeneous scalar fields"

**Θεώρημα 1.** *Ο χωρόχρονος κατατμήγει σε μια ανωμαλία σε πεπερασμένο χρόνο αν και μόνο αν η συνάρτηση  $1/\psi(a)$  είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα  $(0, a_0)$ . Ο χρόνος της κατάρρευσης τότε δίνεται από τη σχέση*

$$t_s = \int_0^{a_0} \frac{1}{\psi(a)} da$$

Στα επόμενα θα θεωρούμε δεδομένη την ισχύ του θεωρήματος και προκειμένου να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της ανωμαλίας το  $t_s$  δίνεται από την παραπάνω σχέση ενώ ένας φαινόμενος ορίζοντας (apparent horizon) ορίζεται από τη σχέση

$$R(r, t_h) = 2m(r, t_h)$$

και αντιστοιχεί στο σύνορο μιας παγιδευμένης περιοχής (trapped region)

$$\mathcal{T} = \{(r, t) : R(r, t) \leq 2m(r, t)\}$$

Η συνάρτηση  $R$  αντιστοιχεί στην ακτίνα επιφάνειας (area radius) της υπο κατάρρευση μετρικής ενώ  $m$  είναι η συνάρτηση μάζας Misner-Sharp που ορίζεται ως  $m \equiv \frac{R}{2}(1 - \nabla_\mu R \nabla^\mu R)$ .

**Πρόταση 1.** Αν το  $\psi(a)$  είναι πεπερασμένο στο διάστημα  $(0, a_0)$ , τότε υπάρχει  $r_b > 0$  τέτοιο ώστε, για κάθε “κέλυφος” ύψους  $r \leq r_b$  να μη σχηματίζεται φαινόμενος ορίζοντας κατά την εξέλιξή του.

**Πρόταση 2.** Αν  $\lim_{a \rightarrow 0} \psi(a) = +\infty$ , για κάθε  $r > 0$  έξω από την παγιδευμένη περιοχή  $\mathcal{T}$ , το κέλυφος ακτίνας  $r$  παγιδεύεται πριν καταλήξει στην ανωμαλία, και έτσι σχηματίζεται μια μελανή οπή.

Κύριος στόχος είναι να ενώσουμε την μετρική FRW του βαθμωτού πεδίου με μια σφαιρικά συμμετρική λύση στο σύνορο  $r = r_b$ . Η ένωση αυτή πραγματοποιείται σε μια υπερεπιφάνεια  $\Sigma$  χρησιμοποιώντας τις συνθήκες σύνδεσης Israel-Darmois σύμφωνα με τις οποίες

- Προκειμένου να συνδεθούν δύο ξεχωριστές μετρικές μέσω μιας υπερεπιφάνειας  $\Sigma$  θα πρέπει η πρώτη θεμελιώδης μορφή

$$I_\Sigma = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dy^a} \frac{dx^\beta}{dy^b} dy^a dy^b$$

και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή

$$II_\Sigma = -n_\alpha \left( \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^a \partial y^b} + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial y^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^b} \right),$$

των μετρικών αυτών να είναι συνεχείς πάνω στην υπερεπιφάνεια  $\Sigma$ .

**Θεώρημα 2.** Αν το  $\psi(a)$  είναι πεπερασμένο και υπάρχει  $r_b$  τέτοιο ώστε το  $1 - \psi^2(a)r^2$  να μη μηδενίζεται τότε το σύνορο  $\Sigma = \{r = r_b\}$  του βαθμωτού πεδίου καταρρέει σε μια γυμνή ανωμαλία.

Οι παραπάνω είναι μερικοί από τους ελέγχους που πραγματοποιούμε κατά τη μελέτη της κατάρρευσης ενός βαθμωτού πεδίου στο κεφάλαιο 2.

## Σκοτεινή ύλη και σκοτεινή ενέργεια στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας

Πρόσφατα παρατηρησιακά δεδομένα (1998) έχουν αναδείξει ότι το σύμπαν έχει εισέλθει σε μια περίοδο επιταχυνόμενης διαστολής. Στο πλαίσιο της Γενικής Σχετικότητας η συμπεριφορά αυτή μπορεί να καθοδηγηθεί με την εισαγωγή μιας νέας πυκνότητας ενέργειας με αρνητική πίεση, η οποία ονομάζεται Σκοτεινή Ενέργεια (Dark Energy) και η προέλευσή της είναι άγνωστη. Η πιο αποδεκτή μορφή τέτοιας ενέργειας είναι η Κοσμολογική Σταθερά. Επιπλέον η ελλείπουσα μάζα μεμονωμένων γαλαξιών καθώς και οι κατανομές αστροφυσικών αντικειμένων μεγάλης κλίμακας σε όλο το σύμπαν, αποδίδονται σε μια νέα μορφή μάζας, η οποία καλείται Ψυχρή Σκοτεινή Ύλη (Cold Dark Matter) και θεωρείται ότι έχει αμελητέα πίεση. Οι νέες αυτές συνιστώσες μαζί με το καθιερωμένο πρότυπο των στοιχειωδών σωματιδίων αποτελούν το καθιερωμένο πρότυπο της κοσμολογίας, το σενάριο  $\Lambda$ CDM.

Ένας από τους πιο άμεσους και αξιόπιστους τρόπους να καθοριστεί παρατηρησιακά η συμπεριφορά της πρόσφατης εξέλιξης της παραμέτρου Hubble,  $H(z)$ , είναι να μετρήσουμε τη σχετική φωτεινότητα από μακρινούς κοσμολογικούς σηματοδότες (standard candles) των οποίων η απόλυτη φωτεινότητα είναι γνωστή. Μπορούμε τότε να υπολογίσουμε την απόσταση φωτεινότητας ως προς τη μετατόπιση προς το ερυθρό,  $z$ , κάτι που οδηγεί στον υπολογισμό της παραμέτρου Hubble. Παρακάτω αναφέρουμε σύντομα τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για να κατασκευαστεί το  $H(z)$  χρησιμοποιώντας τα παρατηρησιακά δεδομένα από υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia.

Ας θεωρήσουμε ένα κοσμολογικό αντικείμενο το οποίο εκπέμπει ακτινοβολία με απόλυτη φωτεινότητα,  $L$ , σε ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος. Αν το σύμπαν ήταν στατικό τότε η ακτινοβολία θα έπρεπε να κατανεμηθεί σε μια σφαιρική επιφάνεια και για το λόγο αυτό η φαινόμενη φωτεινότητα,  $l$ , η οποία ανιχνεύεται από έναν παρατηρητή σε απόσταση  $d_L$  είναι  $l = \frac{L}{4\pi d_L^2}$ . Η ποσότητα  $d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}$  καλείται απόσταση φωτεινότητας. Στην πραγματικότητα όμως η ενέργεια της ακτινοβολίας που ανιχνεύεται από έναν παρατηρητή έχει επιπλέον μειωθεί επειδή τα φωτόνια μετατοπίζονται προς το ερυθρό, ενώ ο ρυθμός ανίχνευσής τους έχει μειωθεί ως προς τον ρυθμό εκπομπής, λόγω της διαστολής του Σύμπαντος. Και οι δύο αυτές επιδράσεις της κοσμολογικής διαστολής έχουν ως αποτέλεσμα τη μείωση της ανιχνεύσιμης ενέργειας κατά έναν παράγοντα  $\frac{a(t_0)}{a(t)} = (1+z)$ . Έτσι η ανιχνεύσιμη φαινόμενη φωτεινότητα σε ένα διαστελλόμενο Σύμπαν μπορεί να γραφτεί ως  $l = \frac{L}{4\pi a^2(t_0) x^2(z) (1+z)^2}$ , όπου  $x(z)$  η ομοκινούμενη απόσταση του φωτεινού αντικειμένου. Αυτό υποδηλώνει ότι η αντίστοιχη απόσταση φωτεινότητας  $d_L(z)$  σχετίζεται με το  $x(z)$  με μια σχέση της μορφής

$d_L(z) = x(z)(1+z)$ . Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι φωτεινότητες γεωδαιτικές σε ένα επίπεδο διαστελλόμενο υπόβαθρο υπακούουν τη σχέση  $cdt = a(z)dx(z)$  μπορούμε να εκφράσουμε το ρυθμό διαστολής του Σύμπαντος,  $H(z)$  ως προς την παρατηρούμενη απόσταση φωτεινότητας

$$\left. \begin{aligned} d_L(z) &= x(z)(1+z) \\ c dt &= a(z)dx(z) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{H(z) \equiv \frac{\dot{a}}{a}(z)} H(z) = c \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{d_L(z)}{1+z} \right) \right]^{-1}$$

Αν δωθεί ένα θεωρητικά προβλεπόμενο  $H(z)$ , τότε το αντίστοιχο  $d_L(z)$  είναι

$$d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (1)$$

Το προβλεπόμενο αυτό  $d_L(z)$  μπορεί να συγκριθεί με το παρατηρήσιμο ώστε να ελεγχθεί η συνέπεια του θεωρητικού μοντέλου με τις παρατηρήσεις. Στην πράξη οι αστρονόμοι δεν χρησιμοποιούν την φαινόμενη και απόλυτη φωτεινότητα αλλά τη διαφορά του απόλυτου,  $M$ , από το φαινόμενο,  $m$ , μέγεθος το οποίο σχετίζεται με τα προηγούμενα μέσω της σχέσης  $m - M = 2.5 \log_{10} \left( \frac{L}{L_\odot} \right)$ . Ειδικότερα για τους υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου  $Ia$  το φαινόμενο μέγεθος  $m(z)$  σχετίζεται με την αντίστοιχη απόσταση φωτεινότητας  $d_L$  ως

$$m(z) = M + 5 \log_{10} \left( \frac{d_L(z)}{Mpc} \right) + 25 \quad (2)$$

Στα ακόλουθα θα χρησιμοποιήσουμε τις δύο αυτές σχέσεις προκειμένου να υπολογίσουμε τη θεωρητική διαφορά  $m(z) - M$  και να τη συγκρίνουμε με αυτήν από τα παρατηρησιακά δεδομένα.

### Το μοντέλο $\Lambda$ CDM

Υπενθυμίζουμε την εξίσωση επιτάχυνσης όπως προκύπτει από την εξίσωση Einstein για ένα ιδανικό ρευστό σε ένα επίπεδο Σύμπαν FRW

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

Η επιταχυνόμενη διαστολή στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας μπορεί να περιγραφεί θεωρώντας την ύπαρξη μιας επιπλέον συνιστώσας  $\rho_{DE}, p_{DE} = w_{DE}\rho_{DE}$ , που καλείται σκοτεινή ενέργεια, και δύναται να αλλάξει το πρόσημο στο δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης. Γράφοντάς την ως προς την παράμετρο καταστατικής εξίσωσης  $w_{DE}$  της σκοτεινής ενέργειας έχουμε

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + (\rho_{DE} + 3p_{DE})) \Rightarrow \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + \rho_{DE}(1 + 3w_{DE}))$$

Αν η παράμετρος  $w_{DE}$  είναι χρονοανεξάρτητη βρίσκουμε την εξάρτηση της πυκνότητας ενέργειας από το  $z$  κάνοντας χρήση της εξίσωσης συνέχειας ( $\rho_{DE}a^3 = -p_{DE}d(a^3)$ ) και του ορισμού  $p_{DE} = w_{DE}\rho_{DE}$  ως

$$\rho_{DE} \sim a^{-3(1+w_{DE})} = (1+z)^{3(1+w_{DE})}$$

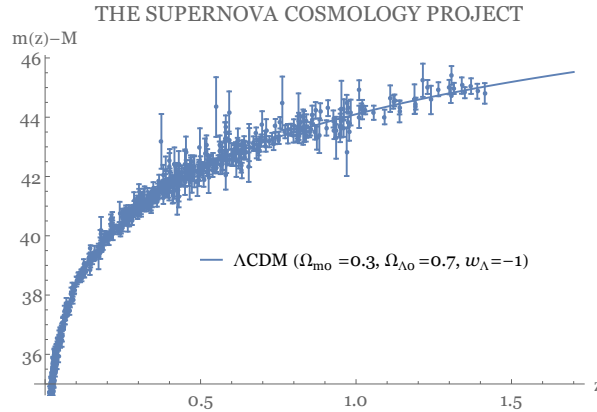
Η παράμετρος εξέλιξης  $H(z)$  δίνεται τότε από την εξίσωση Friedmann

$$\begin{aligned} H^2(z) &= \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_{DE}) = \frac{8\pi G}{3} \left( \rho_{m0} \left( \frac{a_0}{a(1+w_m)} \right)^3 + \rho_{DE0} \left( \frac{a_0}{a(1+w_{DE})} \right)^3 \right) \\ &= H_0^2 \left( \Omega_{m0}(1+z)^{3(1+w_m)} + \Omega_{DE0}(1+z)^{3(1+w_{DE})} \right) \\ &\stackrel{w_m=0}{=} H_0^2 \left( \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{DE0}(1+z)^{3(1+w_{DE})} \right) \end{aligned}$$

Η πιο απλή μορφή σκοτεινής ενέργειας αντιστοιχεί σε μια ανεξάρτητη από το χρόνο πυκνότητα ενέργειας με  $w_{DE} = -1$ . Όπως έχουμε ήδη δείξει μια απλή γενίκευση των εξισώσεων Einstein συμπεριλαμβάνει έναν όρο ανάλογο στη μετρική  $g_{\mu\nu}$ , με αποτέλεσμα  $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ , όπου  $\Lambda$  η Κοσμολογική Σταθερά. Σύμφωνα με την εξίσωση Friedmann η προβλεπόμενη παράμετρος Hubble σε επίπεδο Σύμπαν παρουσία ύλης και της Κοσμολογικής Σταθεράς είναι

$$H^2(z) = \frac{8\pi G}{3}\rho_{m0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow H^2(z) = H_0^2 (\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}) \quad (3)$$

όπου  $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda$ ,  $\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda/\rho_{c0}$  και  $\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0} = 1$ . Αυτό είναι το σενάριο  $\Lambda$ CDM ( $\Lambda$ +Cold Dark Matter) το οποίο αποτελεί το καθιερωμένο μοντέλο της κοσμολογίας. Η παράμετρος πυκνότητας  $\Omega_{m0} \equiv \frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}}$  περιορίζεται από παρατηρήσεις μεγάλης κλίμακας να είναι  $\Omega_{m0} \simeq 0.3$  και συνεπώς η εναπομένουσα παράμετρος πυκνότητας της σκοτεινής ενέργειας παίρνει τιμή  $\Omega_{\Lambda0} \simeq 0.7$ . Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για το  $H(z)$  στη σχέση για την απόσταση φωτεινότητας βρίσκουμε τη θεωρητική διαφορά  $m(z) - M$  την οποία συγκρίνουμε με τα παρατηρησιακά δεδομένα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1: Προβλεπόμενη διαφορά φαινομένου μείον απόλυτου μεγέθους στα πλαίσια του  $\Lambda$ CDM και σύγκρισή του με τα αποτελέσματα από δεδομένα 580 υπερκαινοφανών αστέρων (Suzuki et al. “The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V.)

## Τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας

Παρά την τεράστια επιτυχία της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ), τόσο κατά τη διεξαγωγή πειραμάτων στο Ηλιακό μας σύστημα, όσο και με την πρόσφατη επιβεβαίωση της ύπαρξης βαρυτικών κυμάτων, αυτή εξακολουθεί να είναι μια ατελής θεωρία. Σχετικά πρόσφατα παρατηρησιακά δεδομένα υποδεικνύουν ότι η ΓΘΣ δεν είναι σε θέση να επεξηγήσει τη συμπεριφορά του σύμπαντος σε μεγάλες αποστάσεις. Το σύμπαν έχει εισέλθει σε μια περίοδο επιταχυνόμενης διαστολής. Στα πλαίσια της ΓΘΣ η συμπεριφορά αυτή θεωρείται ότι πηγάζει από μια καινούργια συνιστώσα πυκνότητας ενέργειας με αρνητική πίεση που ονομάστηκε Σκοτεινή Ενέργεια (Dark Energy). Η φύση της Σκοτεινής Ενέργειας είναι ακόμα άγνωστη και γίνονται πολλές προσπάθειες εντοπισμού της προέλευσης της καθώς και των ιδιοτήτων της. Μια πιθανή πηγή της Σκοτεινής Ενέργειας μπορεί να θεωρηθεί μια Κοσμολογική Σταθερά ( $\Lambda$ ), τότε όμως αντιμετωπίζουμε προβλήματα τα οποία σχετίζονται με την προέλευση και την τάξη μεγέθους της. Πιο συγκεκριμένα η κοσμολογική σταθερά εισάγεται στη θεωρία “με το χέρι”, ενώ ταυτόχρονα η υπόθεση ότι η πυκνότητα ενέργειας  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} = 6.72 \times 10^{-24} g m^{-3}$  αντιστοιχεί σε μια πυκνότητα ενέργειας του κενού  $\rho_{Planck} = 5.16 \times 10^{99} g m^{-3}$  οδηγεί σε μια διαφορά τάξης μεγέθους  $\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{Planck}} \sim 10^{-123}$  ! Αυτό είναι το λεγόμενο Fine tuning problem. Επιπλέον, μετά τους πρώτους παρατηρησιακούς περιορισμούς από δεδομένα που αφορούν τον πληθωρισμό (φάσμα βαθμωτών διαταραχών, λόγος τανυστικών προς βαθμωτές διαταραχές) άρχισε η απόρριψη ενός μεγάλου αριθμού πληθωριστικών σεναρίων. Αν η φύση επιδέχεται μια πιο γενικευμένη θεωρία βαρύτητας τότε οφείλουμε να δούμε πως επηρεάζει αυτά τα μοντέλα, αν τα κάνει πάλι αποδεκτά ή τα περιορίζει περισσότερο. Όμοια και η μελέτη των μελανών οπών από βαθμωτά πεδία επιδέχεται πλήθος σεναρίων τα οποία θα μπορούσαν να εισαγάγουν επιπλέον παρατηρησιακά μεγέθη όπως στην περίπτωση του πληθωρισμού. Ας μην ξεχνάμε πως η Γενική Σχετικότητα ήταν η πρώτη τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας η οποία ενσωμάτωσε τα κοσμολογικά φαινόμενα σε ένα πιο γενικό πλαίσιο με όριο τη Νευτώνια βαρύτητα. Όμοια μια τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας οφείλει να έχει επιφέρει ένα γενικότερο πλαίσιο μελέτης που θα έχει ως όριο του τη Γενική Σχετικότητα.

Μία από τις απλούστερες τροποποιήσεις της ΓΘΣ συνίσταται στην εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου στη δράση, με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας Θεωρίας Βαθμωτού - Τανυστή (ΘΒΤ) (scalar- tensor theory). Η αλληλεπίδραση του βαθμωτού γίνεται σε πρώτο βαθμό εφικτή, μέσω μιας αλληλεπίδρασης ελαχίστου σύζευξης (minimal coupling), ενώ στην πλήρη της μορφή, μέσω μιας αλληλεπίδρασης μη - ελαχίστου ζεύξης (non-minimal coupling) με τη βαρύτητα. Μία κρίσιμη απαίτηση/προϋπόθεση η οποία πρέπει να ικανο-

ποιηθεί κατά την κατασκευή ενός προτύπου θεωρίας βαρύτητας βαθμωτού - τανυστή, είναι ότι οι εξισώσεις κίνησης θα πρέπει να παραμένουν δεύτερης τάξης ως προς τις παραγώγους, έτσι ώστε να αποφευχθούν οι λεγόμενες αστάθειες Ostrogradski. Η πιο γενική Λανγκρανζιανή στις τέσσερις διαστάσεις, η οποία πληροί αυτή την προϋπόθεση ανακαλύφθηκε σχεδόν σαράντα χρόνια πριν από τον G.W.Horndeski και έχει τη μορφή

$$\mathcal{L} = \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i, \quad (4)$$

με

$$\mathcal{L}_2 = K(\phi, X), \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X)\square\phi, \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4,X}[(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi)], \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) - \frac{1}{6}G_{5,X}[(\square\phi)^3 - 3(\square\phi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) + 2(\nabla^\alpha\nabla_\alpha\phi)(\nabla^\beta\nabla_\beta\phi)(\nabla^\gamma\nabla_\gamma\phi)], \quad (8)$$

όπου για απλότητα έχουμε θέσει τη σταθερά του Νεύτωνα  $\kappa \equiv 8\pi G = 1$ . Οι συναρτήσεις  $K$  και  $G_i$  ( $i = 3, 4, 5$ ) εξαρτώνται από το βαθμωτό πεδίο  $\phi$  και την κινητική του ενέργεια  $X = -\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi/2$ , ενώ  $R$  είναι το βαθμωτό Ricci και  $G_{\mu\nu}$  ο τανυστής Einstein. Τα  $G_{i,X}$  και  $G_{i,\phi}$  ( $i = 3, 4, 5$ ) αντιπροσωπεύουν μερικές παραγώγους ως προς τα  $X$  και  $\phi$  αντίστοιχα, δηλαδή  $G_{i,X} \equiv \partial G_i/\partial X$  και  $G_{i,\phi} \equiv \partial G_i/\partial\phi$ .

Η γενικότητα του πλαισίου των θεωριών Horndeski, προβάλλει άμεσα το ερώτημα του, κατά πόσο υπάρχουν συγκεκριμένες υποθεωρίες με εξέχουσες και ιδιαίτερες ιδιότητες. Η ιδιαίτερη επιλογή  $G_5(\phi, X) = -\frac{\lambda_5}{2}\phi$  και η επίδρασή της σε σενάρια πληθωρισμού και δημιουργίας μελανών οπών θα απασχολήσουν τα πρώτα δύο κεφάλαια της διδακτορικής αυτής διατριβής. Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο μελετάμε μια πιο γενικευμένη θεωρία ή οποία παραμένει υπο-κλάση της Horndeski και χρησιμοποιεί τα πεδία Galileon των οποίων οι εξισώσεις κίνησης σέβονται τη συμμετρία μετατόπισης (shift symmetry)  $\phi \rightarrow \phi + b_\mu x^\mu + c$ . Εκεί κατασκευάζουμε ένα μοντέλο που περιγράφει την σκοτεινή ύλη και τη σκοτεινή ενέργεια με μια ενοποιημένη μορφή ενώ η εντυπωσιακή συνέπεια με τα παρατηρησιακά δεδομένα το καθιστά συγκρίσιμο με το  $\Lambda$ CDM.

Ωστόσο η κατανόηση των Θεωριών Βαθμωτού Τανυστή δεν είναι πλήρης. Παρά το μεγάλο ενδιαφέρον για την πιο γενική θεωρία Βαθμωτού - Τανυστή, υπάρχουν πολλά θέματα τα οποία ακόμη δεν έχουν επιλυθεί. Κάποιος μπορεί να διερευνήσει άλλες υποκατηγορίες, αλλά και πιθανές επεκτάσεις της θεωρίας του Horndeski. Να αναλύσει, αλλά και να εξετάσει πρότυπα, τα οποία είτε ανήκουν στο ευρύτερο πλαίσιο των πιο γενικών  $\Theta$ BT, είτε προχωρούν και πέρα από αυτό, εστιάζοντας τόσο σε λύσεις μελανών οπών, καθώς επίσης και σε κοσμολογικά θέματα, όπως ζητήματα σκοτεινής ύλης/ενέργειας ή ζητήματα του πληθωρισμού.

## Τα περιεχόμενα της διδακτορικής διατριβής

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετάμε τις προβλέψεις του πληθωρισμού στο απλουστευμένο κομμάτι της θεωρίας Horndeski όπου το βαθμωτό πληθωριστικό πεδίο (inflaton) έχει μια μη-τετριμμένη σύζευξη (Non Minimal Derivative Coupling) στον τανυστή Einstein. Το NMDC χρησιμοποιείται εκτενώς στην κατασκευή επιτυχημένων μοντέλων πληθωρισμού, παρ' όλα αυτά, τα παρατηρησιακά δεδομένα δεν μπορούν να διαχωρίσουν τις προβλέψεις τους. Στο κεφάλαιο αυτό δείχνουμε ότι είναι δυνατόν να αναδειξουμε την επίδραση του NMDC στα δεδομένα του υποβάθρου κοσμικής ακτινοβολίας (Cosmic Microwave Background) λαμβάνοντας υπόψη τη δυναμική της φάσης slow-roll του πληθωρισμού αλλά και της επακόλουθης διαδικασίας αναθέρμανσης. Παρουσιάζουμε μια συγκριτική μελέτη ανάμεσα σε αντιπροσωπευτικά πληθωριστικά μοντέλα με τετριμμένες συζεύξεις και σε μοντέλα με NMDC. Βρίσκουμε ότι τα πληθωριστικά μοντέλα στα οποία κυριαρχεί το NMDC προβλέπουν εν γένει μια υψηλότερη θερμοκρασία reheating, ένα διαφορετικό διάστημα στο οποίο ανήκει ο φασματικός δείκτης (spectral index) των βαθμωτών διαταραχών  $n_s$  και ο λόγος τανυστή-βαθμωτού (tensor-to-scalar ratio)  $r$ , κάτι που μπορεί να ελεγχθεί από τα τωρινά αλλά και μελλοντικά δεδομένα του CMB.

Ξεφεύγοντας από τη μελέτη του πληθωρισμού, στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε το ενδιαφέρον σενάριο της βαρυτικής κατάρρευσης ενός ομογενούς χρονοεξαρτώμενου βαθμωτού πεδίου το οποίο και εδώ είναι κινηματικά συζευγμένο με τη βαρύτητα μέσω του τανυστή Einstein. Όπως έχουμε αναφέρει η σύζευξη αυτή είναι κομμάτι της γενικότερης θεωρίας Horndeski και μελετάμε την επίδρασή της στην διαδικασία της κατάρρευσης. Βρίσκουμε ότι ο χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση της διαδικασίας αυτής εξαρτάται από την τιμή της σύζευξης καθώς και ότι η ανωμαλία (singularity) της γεωμετρίας προστατεύεται από έναν

ορίζοντα. Ενώνοντας την εσωτερική FRW γεωμετρία με μια γεωμετρία  $AdS_4$  Schwarzschild δείχνουμε ότι δημιουργείται μια μελανή οπή.

Σκοπός των προηγούμενων ήταν να αναδείξουμε ορισμένες ιδιότητες που επιφέρει ένα μοντέλο τροποποιημένης βαρύτητας σε διάφορα κοσμολογικά σενάρια. Τα μοντέλα κατασκευάζονταν χρησιμοποιώντας λογικά επιχειρήματα και μαθηματικά θεωρήματα ενώ κύριος στόχος ήταν η ανάδειξη των επιπτώσεων στον πληθωρισμό και στην δημιουργία μελανών οπών. Τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε αναλυτικά, αν και δεν φαίνεται να υπάρχει προφανής λόγος να απορριφθούν, παραμένουν σε θεωρητικό επίπεδο αναμένοντας νέα και ακριβέστερα παρατηρησιακά δεδομένα που θα τα κάνουν αποδεκτά. Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο παρ' όλα αυτά επιτυγχάνεται η κατασκευή ενός θεωρητικού μοντέλου ενοποίησης της Σκοτεινής Ύλης (DM) με την Σκοτεινή Ενέργεια (DE) το οποίο φαίνεται να ενσωματώνει όλους τους παρατηρησιακούς περιορισμούς και να προσομοιάζει τα μέχρι τώρα δεδομένα.

Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζουμε μια ενοποιημένη περιγραφή της σκοτεινής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας στο πλαίσιο θεωριών με πεδία Galileon οι οποίες υπακούουν στη συμμετρία μετατόπισης. Θεωρώντας ένα συγκεκριμένο συνδυασμό των όρων της Λαγκρανζιανής Horndeski, όπου δεν έχουμε εισαγάγει κοσμολογική σταθερά ή επιπλέον όρους ύλης, καταλήγουμε σε ένα ενοποιημένο κοσμικό ρευστό του οποίου η παράμετρος καταστατικής εξίσωσης  $w_U$  είναι μηδενική κατά την περίοδο κυριαρχίας της ύλης ( $z \sim 3000$  έως  $z \sim 2 - 3$ ). Στη συνέχεια η παράμετρος αυτή μειώνεται, διασχίζοντας το σύνορο  $w_U = -1/3$ , σηματοδοτώντας την έναρξη της περιόδου επιτάχυνσης στο  $z \sim 0.5$ . Στη σημερινή εποχή αποκτά την τιμή  $w_U = -0.7$  ενώ τείνει στο  $w_U = -1$  στο μακρινό μέλλον. Η συμπεριφορά αυτή είναι σε άριστη συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Επιπλέον η θεωρητική καμπύλη που προβλέπεται από το παραπάνω μοντέλο προς σύγκριση με τα δεδομένα από υπερκαινοφανείς αστέρες (supernovae) τύπου Ia είναι απόλυτα σύμφωνη και στα όρια των παρατηρησιακών σφαλμάτων. Εξετάζοντας τέλος το σενάριο αυτό σε διαταρακτικό επίπεδο, δείχνουμε ότι απουσιάζουν παθογένειες.





# Περιεχόμενα

<b>1 Προβλέψεις στη Διαδικασία της Αναθέρμανσης (Reheating) σε Βαρυτικές Θεωρίες με Κινηματικές Συζεύξεις</b>	<b>21</b>
1.1 Εισαγωγή	21
1.2 Ο αριθμός των e-folds και άλλες παρατηρησιακές παράμετροι	23
1.3 Η αντιστοιχία ανάμεσα σε μοντέλα με NMDC και σε τετριμμένα μοντέλα ΓΣ κατά τον πληθωρισμό	24
1.4 Παρατηρήσιμα μεγέθη ενός πληθωριστικού μοντέλου με κανονικούς κινητικούς όρους	26
1.4.1 Κανονικοποίηση των παραμέτρων από το CMB	27
1.4.2 Η περίοδος αναθέρμανσης	27
1.4.3 Οι παράμετροι $N_{\text{reh}}$ και $T_{\text{reh}}$ σε τετριμμένα μοντέλα της ΓΣ	28
1.5 Πληθωρισμός με μη τετριμμένη σύζευξη του πεδίου	28
1.6 Παρατηρήσιμα μεγέθη ενός πληθωριστικού μοντέλου με NMDC	29
1.6.1 Κανονικοποίηση των παραμέτρων από το CMB	31
1.6.2 Η περίοδος αναθέρμανσης	33
1.6.3 Οι παράμετροι $N_{\text{reh}}$ και $T_{\text{reh}}$ σε μοντέλα με NMDC	33
1.7 Επιλογή μοντέλου	34
1.8 Συμπεράσματα	37
<b>2 Βαρυτική Κατάρρευση σε Θεωρίες με Γενικευμένους Κινητικούς Όρους Βαθμωτού Πεδίου</b>	<b>39</b>
2.1 Εισαγωγή	39
2.2 Γενικός φορμαλισμός μη τετριμμένης σύζευξης σε χωρόχρονο FRW	41
2.3 Βαρυτική κατάρρευση απουσία δυναμικού	42
2.3.1 Δημιουργία του εν δυνάμει ορίζοντα (apparent horizon)	43
2.3.2 Σχηματισμός της συνοριακής επιφάνειας	45
2.3.3 Συμπεριφορά του “κελύφους” του βαθμωτού πεδίου	47
2.4 Βαρυτική κατάρρευση παρουσία δυναμικού	49
2.5 Συμπεράσματα	52
<b>3 Ενοποίηση Σκοτεινής Ύλης - Σκοτεινής Ενέργειας σε Θεωρίες με Γενικευμένα Πεδία Galileon</b>	<b>55</b>
3.1 Εισαγωγή	55
3.2 Κοσμολογία με γενικευμένα πεδία Galileon	56
3.3 Ενοποίηση Σκοτεινής Ύλης - Σκοτεινής Ενέργειας	57
3.4 Ένα συγκεκριμένο μοντέλο	58
3.5 Συμπεράσματα	63
<b>A' Κλασική Θεωρία Πεδίου &amp; Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Χωρόχρονο Minkowski</b>	<b>66</b>
A'.1 Αρχή της ελάχιστης δράσης	66
A'.2 Το θεώρημα Noether	69
A'.3 Τανυστής ενέργειας - ορμής και ορμή πεδίου	70
A'.4 Λύση της κλασικής θεωρίας	71
A'.5 Χώροι Hilbert και σημειογραφία Dirac	73
A'.6 Κβάντωση του βαθμωτού πεδίου	76
A'.7 Ενέργεια του κενού	80

<b>Β' Γενική Θεωρία της Σχετικότητας</b>	<b>83</b>
Β'.1 Καμπυλότητα του χωροχρόνου - τανυστής Riemann . . . . .	88
Β'.2 Τανυστές Riemann και Einstein στο 4-διάστατο σύμπαν FRW . . . . .	90
Β'.3 Εξισώσεις βαθμωτού πεδίου του Einstein από την αρχή ελάχιστης δράσης . . . . .	92
Β'.4 Εξισώσεις του Einstein από τη δράση βαθμωτού πεδίου με μη-τετριμμένους κινητικούς όρους . . . . .	94
<b>Γ' Κοσμολογική δημιουργία σωματιδίων</b>	<b>98</b>
Γ'.1 Ένα απλό παράδειγμα . . . . .	99
Γ'.2 Υπολογισμός των συντελεστών Bogolyubov για το δισδιάστατο σύμπαν Robertson - Walker . . . . .	102
<b>Δ' Παραγωγή Σωματιδίων σε Βαρυτικές Θεωρίες με Γενικευμένους Κινητικούς Όρους</b>	<b>107</b>
Δ'.1 Εισαγωγή . . . . .	107
Δ'.2 Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Καμπύλους Χωρόχρονους . . . . .	108
Δ'.2.1 Κβάντωση του βαθμωτού πεδίου σε καμπύλο χωρόχρονο . . . . .	108
Δ'.2.2 Συντελεστές Bogolyubov . . . . .	109
Δ'.2.3 Ασυμπτωτικές περιοχές Minkowski σε ένα 4-διάστατο σύμπαν FRW . . . . .	111
Δ'.2.4 Παραγωγή σωματιδίων σε 4-διάστατο σύμπαν FRW με ασυμπτωτικές περιοχές Minkowski 14 . . . . .	114
Δ'.2.5 Μη-τετριμμένοι κινητικοί όροι βαθμωτού πεδίου στο σύμπαν FRW . . . . .	116
Δ'.3 Πληθωρισμός . . . . .	119
Δ'.3.1 Το βαθμωτό πεδίο $\phi$ (inflaton) που καθοδηγεί τον πληθωρισμό . . . . .	119
Δ'.3.2 Γενικευμένοι κινητικοί όροι του inflaton . . . . .	122
Δ'.4 Παραγωγή Σωματιδίων μετά τον Πληθωρισμό . . . . .	126
Δ'.4.1 Παραγωγή σωματιδίων με κανονικό κινητικό όρο . . . . .	126
Δ'.4.2 Παραγωγή σωματιδίων με γενικευμένους κινητικούς όρους . . . . .	129
Δ'.5 Συμπεράσματα . . . . .	130
<b>Ε' Προσεγγιστικές λύσεις βαθμωτού πεδίου υπό κατάρρευση</b>	<b>132</b>
Ε'.1 Προσέγγιση της λύσης παρουσία δυναμικού στο όριο $t \rightarrow t_s$ . . . . .	133



# Κεφάλαιο 1

## Προβλέψεις στη Διαδικασία της Αναθέρμανσης (Reheating) σε Βαρυτικές Θεωρίες με Κινηματικές Συζεύξεις

### 1.1 Εισαγωγή

Οι θεωρίες βαθμωτού-τανυστή (scalar-tensor theories) είναι μη τετριμμένες γενικεύσεις της θεωρίας βαρύτητας του Einstein η οποία δίνει ενδιαφέρουσες τροποποιήσεις σε μικρή και σε μεγάλη κλίμακα. Ανάμεσά τους βρίσκεται και μια θεωρία βαρύτητας η οποία περιλαμβάνει τη σύζευξη της παραγώγου του βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή Einstein. Ο όρος αυτός ανήκει σε μια γενικότερη κλάση θεωριών βαθμωτού-τανυστή που προκύπτουν από τη Λαγκρανζιανή Horndeski [1]. Αυτή είναι η γενικότερη θεωρία βαρύτητας η οποία καταλήγει σε εξισώσεις δεύτερης τάξης ως προς τα πεδία της και έχει ως υποσύνολο μια θεωρία η οποία διατηρεί την συμμετρία μετατόπισης (shift symmetry ή Galilean symmetry)  $\phi \rightarrow \phi + b_\mu x^\mu + c$  [3, 71, 145, 146]. Έτσι μια απλουστευμένη μορφή της δράσης αυτής είναι η σύζευξη της παραγώγου του πεδίου με τον τανυστή Einstein. Η Λαγκρανζιανή έχει τη μορφή

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} M_{\text{Pl}}^2 R - \frac{1}{2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{G^{\mu\nu}}{\tilde{M}^2} \right) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (1.1)$$

Όπως μπορούμε να δούμε η σύζευξη αυτή εισαγάγει μια καινούργια κλίμακα  $\tilde{M}$  στη θεωρία, η οποία έχει ενδιαφέρουσες επιπτώσεις σε μικρές αποστάσεις στη φυσική των μελανών οπών [5-8] και σε μεγάλες αποστάσεις στο σενάριο του πληθωρισμού [9].

Μια εντυπωσιακή ιδιότητα που εμφανίζεται κατά την κατασκευή πληθωριστικών μοντέλων είναι ότι η παραπάνω μη τετριμμένη σύζευξη δρα ως μηχανισμός τριβής επεκτείνοντας τη φάση slow-roll ακόμα κι όταν το δυναμικό έχει απότομη κλίση [9, 147, 148]. Δυναμικά τα οποία αποτυγχάνουν να εξηγήσουν την πληθωριστική φάση του σύμπαντος γίνονται αποδεκτά αν εισαγάγουμε το NMDC. Κάποια ενδιαφέροντα παραδείγματα τέτοιων δυναμικών στη Γενική Σχετικότητα είναι το δυναμικό Higgs του Καθιερωμένου Προτύπου  $V \propto \lambda \phi^4$  το οποίο περιλαμβάνει μια σύζευξη  $\lambda \sim 0.1$  [148], το δυναμικό ψευδο-Nambu-Goldstone  $V \propto (1 - \cos(\phi/f))$  με μια παράμετρο  $f$  με τιμή κάτω από τη μάζα Planck,  $M_{\text{Pl}}$  [149], καθώς και το εκθετικό δυναμικό  $V \propto e^{-\lambda_e \phi/M_{\text{Pl}}}$  με  $\lambda_e \gg 1$  [151, 153].

Επιπλέον τα αρχικά πληθωριστικά μοντέλα, όπως το τετραγωνικό και τα γενικότερα δυναμικά τέταρτης τάξης ως προς  $\phi$ , τα οποία πλέον απορρίπτονται από τα παρατηρησιακά δεδομένα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μια επιτυχημένη περιγραφή του πληθωρισμού χάρη στο NMDC που συμβάλλει στη μείωση της αναμενόμενης τιμής του λόγου τανυστή-βαθμωτού  $r$ . Οι περιορισμοί στις τιμές των παραμέτρων για πληθωριστικά μοντέλα με σύζευξη στον τανυστή Einstein μπορούν να βρεθούν στα [151, 152].

Η επίδραση του NMDC μειώνεται με την αύξηση της παραμέτρου  $\tilde{M}$  ενώ γίνεται πιο ισχυρή όταν η παράμετρος Hubble,  $H$ , είναι μεγάλη. Πιο συγκεκριμένα όταν  $H \gg \tilde{M}$  το NMDC κυριαρχεί στη εξέλιξη του βαθμωτού πεδίου και τροποποιεί τη δυναμική του πληθωρισμού ενώ στην αντίθετη περίπτωση,  $H \ll \tilde{M}$ , έχει προσεγγιστικά την ίδια συμπεριφορά με τον κανονικό κινητικό όρο.

Αν και το NMDC φαίνεται όπως είπαμε να βελτιώνει τα θεωρητικά αποτελέσματα των μοντέλων, δεν υπάρχει ξεκάθαρη απόδειξη για την ύπαρξή του και την επίδρασή του στη δυναμική του αρχικού σύμπαντος. Η κατασκευή ενός μοντέλου που ταιριάζει στα παρατηρησιακά δεδομένα δεν συνεπάγεται ότι αυτό είναι το σωστό μοντέλο εξέλιξης. Υπάρχουν μοντέλα Γενικής Σχετικότητας με κανονικούς κινητικούς όρους που χαρακτηρίζονται από παρόμοια δυναμική και προβλέψεις του πληθωρισμού με αντίστοιχα μοντέλα με NMDC. Αυτό σημαίνει ότι, τουλάχιστον με μια πρώτη ματιά, κοσμολογικά μοντέλα με NMDC δεν μπορούν να διαχωριστούν από συγκεκριμένα μοντέλα με κανονικούς όρους κατά την περίοδο του πληθωρισμού. Παρ' όλα αυτά μια πιο ξεκάθαρη διαφοροποίηση λαμβάνει χώρα στο τέλος του πληθωρισμού.

Στο τέλος του πληθωρισμού η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πληθωριστικό πεδίο, που ταλαντώνεται γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού του, μετατρέπεται σε ένα πλάσμα από σχετικιστικά σωματίδια και αυτή η ενδιάμεση περίοδος ονομάζεται αναθέρμανση [17]. Η παρουσία του NMDC μπορεί να τροποποιήσει την εικόνα της φάσης αναθέρμανσης. Όσο το NMDC είναι ισχυρό, το πληθωριστικό πεδίο ταλαντώνεται ραγδαία [18–25]. Η παράμετρος Hubble ταλαντώνεται επίσης και ο εκθετικός νόμος που την περιγράφει είναι διαφορετικός από την τετριμμένη περίπτωση με τον κανονικό κινητικό όρο [18, 19, 22, 23]. Οι επιπτώσεις των ταλαντώσεων αυτών όταν το NMDC υπερισχύει του κανονικού όρου είναι σημαντικές στην εξέλιξη των διαταραχών καθώς η ταχύτητα διάδοσής τους (sound speed) φαίνεται να ταλαντώνεται ανάμεσα σε θετικές και αρνητικές τιμές [23].

Από την παραπάνω συζήτηση φαίνεται ότι η περίοδος του reheating μπορεί να διαχωρίσει τις προβλέψεις των κοσμολογικών μοντέλων με NMDC και αυτών με κανονικές συζεύξεις. Παρατηρησιακά δεν υπάρχουν κοσμολογικά δεδομένα που να συνδέονται άμεσα με την φάση αναθέρμανσης. Υπάρχει παρ' όλα αυτά η δυνατότητα να ανιχνεύσουμε έμμεσα την κοσμολογική εξέλιξη μιας παραμέτρου του CMB από τη στιγμή που αυτή βγήκε από τον ορίζοντα Hubble μέχρι σήμερα και να εντοπίσουμε με αυτό το τρόπο την περίοδο της αναθέρμανσης. Για ένα συγκεκριμένο μοντέλο, η χρονική διάρκεια και η τελική θερμοκρασία της φάσης reheating καθώς και η καταστατική εξίσωση (Equation of State) του ρευστού που την περιγράφει μπορούν να συνδεθούν με παρατηρησιακά δεδομένα του πληθωρισμού [27–33, 155–157].

Στο κεφάλαιο αυτό δείχνουμε ότι εν γένει είναι δυνατό να αναδείξουμε την επίδραση του NMDC στο σενάριο του πληθωρισμού λαμβάνοντας υπόψιν την πληθωριστική ημι-de-Sitter φάση αλλά και την επακόλουθη αναθέρμανση. Αμελώντας την περίοδο αναθέρμανσης τα μοντέλα με  $(\phi, V(\phi))$  με κυρίαρχο NMDC δίνουν παρόμοιες προβλέψεις για τον πληθωρισμό με τα μοντέλα  $(\varphi, V_{GR}(\varphi))$  όπου  $\varphi$  είναι ένα βαθμωτό πεδίο στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας. Η αντιστοιχία φαίνεται στον πίνακα 1.1.

Πληθωριστικό πεδίο με NMDC	Κανονικό πληθωριστικό πεδίο
$\frac{1}{2}M_{\text{Pl}}^2 R - \frac{1}{2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{G^{\mu\nu}}{M^2} \right) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m_\phi^2 \phi^2 / 2$	$\frac{1}{2}M_{\text{Pl}}^2 R - \frac{1}{2} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi - \mu_\varphi^3 \varphi$
$\frac{1}{2}M_{\text{Pl}}^2 R - \frac{1}{2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{G^{\mu\nu}}{M^2} \right) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \lambda_\phi \phi^4$	$\frac{1}{2}M_{\text{Pl}}^2 R - \frac{1}{2} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi - \xi_\varphi^{8/3} \varphi^{4/3}$
$\frac{1}{2}M_{\text{Pl}}^2 R - \frac{1}{2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{G^{\mu\nu}}{M^2} \right) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V_0 e^{-\lambda_e \phi / M_{\text{Pl}}}$	$\frac{1}{2}M_{\text{Pl}}^2 R - \frac{1}{2} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi - m_\varphi^2 \varphi^2 / 2$

Πίνακας 1.1: Η αντιστοιχία ανάμεσα στο μοντέλα στην slow-roll φάση του πληθωρισμού. Η σχέση ανάμεσα στις παραμέτρους μάζας των θεωριών παρουσιάζονται στην ενότητα 1.3.

Ο εκφυλισμός αυτός καθιστά αδύνατη την προτίμηση κάποιου πληθωριστικού μοντέλου, κάτι που όμως δύναται να αλλάξει αν συμπεριλάβουμε στη μελέτη μας και τη φάση της αναθέρμανσης. Βρίσκουμε ότι η παράξενη ενεργός καταστατική εξίσωση των μοντέλων με NMDC οδηγεί σε έναν διαφορετικό αριθμό από e-folds καθώς και σε μια διαφορετική θερμοκρασία αναθέρμανσης, παρέχοντας έτσι μια σημαντική ένδειξη για την επιλογή του κατάλληλου μοντέλου. Σημειώνουμε ότι ο δείκτης του φάσματος των βαθμωτών διαταραχών  $n_s$  και ο λόγος τανυστή-βαθμωτού πλάτους διαταραχών  $r$  διαφοροποιείται όταν το NMDC κυριαρχεί έναντι του τετριμμένου όρου. Για μια δεδομένη θερμοκρασία τα αποτελέσματά μας αναδεικνύουν έναν απλό έλεγχο που μπορεί να υποστηρίξει, απορρίψει ή αφήσει ανοιχτό το ενδεχόμενο ύπαρξης του NMDC, αν ενσωματώσουμε τα δεδομένα του CMB ακόμα και για ένα απλό μοντέλο κοσμολογικής εξέλιξης στο αρχικό σύμπαν. Ένας ξεκάθαρα συμπερασματικός έλεγχος φαίνεται αδύνατος με τις τωρινές μετρήσεις [34, 35] του *Planck*. Επερχόμενες μετρήσεις του  $n_s$  και του  $r$  από μελλοντικά πειράματα όπως τα EUCLID [36], PRISM [37] και LiteBIRD [38] θα είναι ικανές να ελαχιστοποιήσουν τις αβεβαιότητες στα παρατηρησιακά δεδομένα και να διαχωρίσουν τις προβλέψεις των πληθωριστικών μοντέλων με NMDC. Τέλος, εξαιρετικής σημασίας θα είναι περιορισμοί στις τιμές της θερμοκρασίας reheating όπως προτείνονται από μετρήσεις του πειράματος DECIGO [39].

Στις ενότητες που ακολουθούν το σύμβολο  $\varphi$  δηλώνει το πληθωριστικό πεδίο με κανονικούς κινητικούς

όρους που υπακούει στη Γενική Σχετικότητα ενώ το  $\phi$  δηλώνει ένα πληθωριστικό πεδίο με NMDC.

## 1.2 Ο αριθμός των e-folds και άλλες παρατηρησιακές παράμετροι

Κατά τη περίοδο του πληθωρισμού μια παρατηρήσιμη κλίμακα (scale) στο Κοσμικό Μικροκυματικό Υπόβαθρο (CMB) βρισκόταν εντός της ακτίνας Hubble,  $r_H = 1/H(t)$ . Κάποια χρονική στιγμή  $t_*$  η κλίμακα αυτή βγαίνει από τον πληθωριστικό ορίζοντα  $1/H(t_*)$  και επανέρχεται τη χρονική στιγμή  $t_{\text{cmb}}$ . Για να εκτιμήσουμε τη τιμή του χρόνου  $t_*$  πρέπει να γνωρίζουμε επακριβώς πόσο επεκτάθηκε η κλίμακα αυτή κατά την κοσμολογική εξέλιξη μετά τον πληθωρισμό. Αυτό αποτυπώνεται σε μια παράμετρο που ονομάζεται e-folds και συμβολίζεται  $N$  [40].

Η κύρια άγνοια όσον αφορά την κοσμολογική εξέλιξη έρχεται από τη φάση ανάμεσα στον πληθωρισμό και την περίοδο κυριαρχίας της ακτινοβολίας. Το μέγεθος μιας κλίμακας  $k^{-1}$  η οποία βγήκε έξω από την ακτίνα Hubble  $H_k^{-1}$  κατά τον πληθωρισμό μπορεί να συσχετιστεί με την τωρινή ακτίνα Hubble  $H_0^{-1}$  μέσω της σχέσης

$$\frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a_k}{a_{\text{end}}} \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{reh}}} \frac{a_{\text{reh}}}{a_{\text{eq}}} \frac{a_{\text{eq}} H_{\text{eq}}}{a_0 H_0} \frac{H_k}{H_{\text{eq}}}, \quad (1.2)$$

όπου οι δείκτες αναφέρονται στο πέρασμα από την ακτίνα ( $k$ ), στο τέλος του πληθωρισμού ( $end$ ), στο τέλος την φάσης αναθέρμανσης ( $reh$ ), στην εποχή θερμικής ισοροπίας μάζας-ακτινοβολίας ( $eq$ ) και στην παρούσα φάση (0). Καλούμε  $N_k$  τον αριθμό των e-foldings από τη στιγμή  $H_k^{-1}$  μέχρι το τέλος του πληθωρισμού και  $N_{\text{reh}}$  τον αριθμό αυτόν από το τέλος του πληθωρισμού μέχρι το τέλος της αναθέρμανσης,

$$N_k \equiv \ln \left( \frac{a_{\text{end}}}{a_k} \right), \quad N_{\text{reh}} \equiv \ln \left( \frac{a_{\text{reh}}}{a_{\text{end}}} \right) \equiv \frac{1}{3(1 + \bar{w}_{\text{reh}})} \ln \frac{\rho_{\text{end}}}{\rho_{\text{reh}}}. \quad (1.3)$$

Το σύμβολο  $\bar{w}_{\text{reh}}$  αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη τιμή της παραμέτρου που διέπει την καταστατική εξίσωση ( $EoS$ ) κατά την φάση ταλάντωσης του πληθωριστικού πεδίου μετά το τέλος του πληθωρισμού. Τα  $N_k$  και  $N_{\text{reh}}$  μπορούν να εκφραστούν ως προς τις μετρούμενες παρατηρησιακά τιμές. Υιοθετώντας τη κλίμακα  $k = k_* = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$ , της συνεργασίας *Planck*, βρίσκουμε  $H_k = H_* = \pi M_{\text{Pl}}(r A_s)^{1/2}/\sqrt{2}$  όπου  $\ln(10^{10} A_s) = 3.089$  από το *Planck* [34, 35], και  $T_{\text{reh}} = T_0(43/11g_s)^{1/3} a_0/a_{\text{reh}}$  η οποία αντιστοιχεί στην μέγιστη θερμοκρασία της περιόδου κυριαρχίας της ακτινοβολίας,  $\rho_{\text{reh}} = (\pi^2/30)g_{\text{reh}}T_{\text{reh}}^4$ . Πιο συγκεκριμένα βρίσκουμε

$$\frac{1 - 3\bar{w}_{\text{reh}}}{4} N_{\text{reh}} = -N_* + \ln \frac{H_*}{\rho_{\text{end}}^{1/4}} + C_* \quad (1.4)$$

όπου,  $N_* \equiv N_k$  και

$$C_* = -\ln \frac{k_*}{a_0 T_0} - \frac{1}{4} \ln \frac{30}{g_* \pi^2} - \frac{11g_s}{43}. \quad (1.5)$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση slow-roll καταλήγουμε σε μια εξίσωση Friedmann  $H_* \simeq V_*/(3M_{\text{Pl}}^2)$ , στη σχέση  $r_* = 16\epsilon_*$  και αφού αντικαταστήσουμε τις κατάλληλες τιμές για το  $A_s$  και  $C_*$  βρίσκουμε

$$\frac{1 - 3\bar{w}_{\text{reh}}}{4} N_{\text{reh}} \simeq 57.4 - N_* + \frac{1}{4} \ln \epsilon_* + \frac{1}{4} \ln \frac{V_*}{\rho_{\text{end}}}. \quad (1.6)$$

Για δεδομένο μοντέλο μπορούμε να βρούμε το λόγο  $V_*/\rho_{\text{end}}$  και την παράμετρο του slow-roll,  $\epsilon$ , ως προς το  $N_*$  και στη συνέχεια το ίδιο το  $N_*$  ως προς τον δείκτη των βαθμωτών διαταραχών  $n_s$ ,  $N_* = N_*(n_s)$ . Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε τον αριθμό των e-folds για τη φάση της αναθέρμανσης ως προς το  $n_s$ ,  $N_{\text{reh}} = N_{\text{reh}}(n_s)$  με μια αβεβαιότητα στη τιμή  $\bar{w}_{\text{reh}}$ . Σημειώνουμε για  $\bar{w}_{\text{reh}} = 1/3$  το  $N_*$  δεν εξαρτάται από τη διάρκεια της περιόδου αναθέρμανσης. Σε αυτή τη περίπτωση η αναθέρμανση είτε πραγματοποιείται στιγμιαία ή μμείται τη συμπεριφορά της περιόδου κυριαρχίας της ακτινοβολίας. Για  $\bar{w}_{\text{reh}} = 1/3$  το  $N_*$  παίρνει τη μέγιστη τιμή του εκτός κι αν υποθέσουμε τιμές  $\bar{w}_{\text{reh}} > 1/3$ .

Επιπλέον μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση για την τιμή της θερμοκρασίας αναθέρμανσης,

$$T_{\text{reh}}(n_s, \bar{w}_{\text{reh}}) = \rho_{\text{end}}^{1/4} \left( \frac{30}{\pi^2 g_*} \right)^{1/4} e^{-\frac{3}{4}(1 + \bar{w}_{\text{reh}})N_{\text{reh}}(n_s)}. \quad (1.7)$$

Το  $\rho_{\text{end}}$  είναι μια ποσότητα ανεξάρτητη του  $N_*$  και μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση  $\epsilon = 1$ . Μπορούμε να ορίσουμε  $V_{\text{end}} = \gamma \rho_{\text{end}}$  όπου  $\gamma \simeq 2/3$ . Αν το πληθωριστικό πεδίο δεν παραβιάσει τη φωτεινή συνθήκη

ενέργειας,  $w_{\text{reh}} \geq -1$ , η έκφραση μπροστά από το εκθετικό στη σχέση (1.7) αντιστοιχεί στη μέγιστη δυνατή θερμοκρασία,  $T_{\text{max}}$ , της περιόδου κυριαρχίας της ακτινοβολίας,

$$T_{\text{reh}}(n_s, \bar{w}_{\text{reh}}) = T_{\text{max}} e^{-\frac{3}{4}(1+\bar{w}_{\text{reh}})N_{\text{reh}}(n_s)}. \quad (1.8)$$

Η ποσότητα  $T_{\text{max}}$  αντιστοιχεί στη θερμοκρασία αναθέρμανσης στο σενάριο που το πληθωριστικό πεδίο αποδιεγείρεται ακαριαία ( $N_{\text{reh}} = 0$ ) μετά το τέλος την πληθωριστικής περιόδου.

Για δεδομένο πληθωριστικό μοντέλο και μια δοθείσα  $\bar{w}_{\text{reh}}$  η μέτρηση του δείκτη  $n_s$  μπορεί να καθορίσει τη διάρκεια της περιόδου αναθέρμανσης καθώς και τη θερμοκρασία της. Οι πιο πρόσφατες ακριβείς μετρήσεις από το *Planck* δίνουν τη τιμή  $n_s$  με ένα σφάλμα τάξεως  $10^{-2}$ . Μελλοντικά πειράματα όπως το *EUCLID* [36], *PRISM* [37] έχουν σχεδιαστεί για μετρήσεις με ακρίβεια της τάξεως του  $10^{-3}$ , κάνοντας πιο πιθανή την επιλογή ενός καταληκτικού πληθωριστικού μοντέλου.

### 1.3 Η αντιστοιχία ανάμεσα σε μοντέλα με NMDC και σε τετριμμένα μοντέλα ΓΣ κατά τον πληθωρισμό

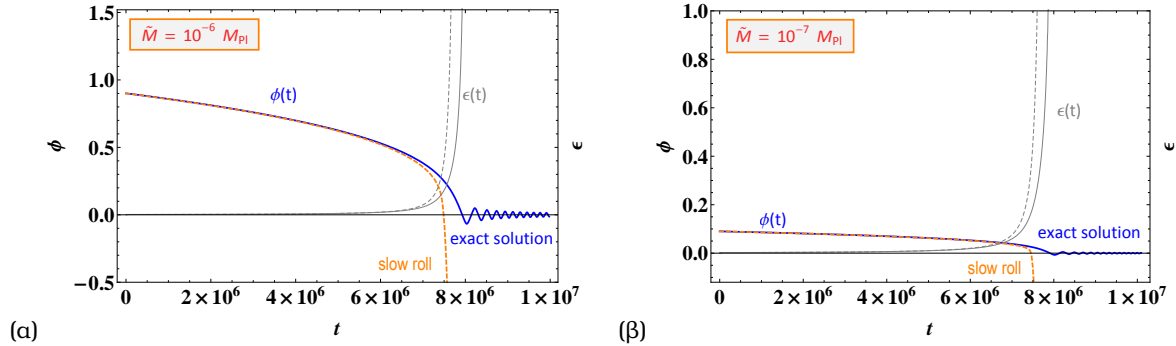
Κατά τη φάση του slow-roll και στο όριο ισχυρής τριβής (high friction limit),  $H^2 \gg \tilde{M}^2$ , η εξίσωση κίνησης για ένα πληθωριστικό πεδίο  $\phi$  με σύζευξη της παραγώγου του με τον ταυστή Einstein παίρνουν την προσεγγιστική μορφή

$$3H\dot{\phi} \left(1 + 3\frac{H^2}{\tilde{M}^2}\right) + V'(\phi) \approx 0 \quad (1.9)$$

Κάνοντας χρήση και της εξίσωσης Friedman, η δυναμική του πεδίου περιγράφεται στο Σχ. 1.1 από το σύστημα των εξισώσεων

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_{\text{Pl}}^2}, \quad 3H\dot{\phi} \simeq -\frac{\epsilon}{\epsilon_V} V'(\phi). \quad (1.10)$$

Μπορούμε να κάνουμε ένα μετασχηματισμό της μορφής



Σχήμα 1.1: Η ακριβής λύση του πεδίου  $\phi(t)$  (συνεχής μπλε καμπύλη) και η προσεγγιστική λύση slow-roll (πορτοκαλί διακεκομμένη καμπύλη) για ένα πληθωριστικό πεδίο με NMDC και τετραγωνικό δυναμικό. Το τέλος του πληθωρισμού και η παύση της προσέγγισης slow-roll αντικατοπτρίζεται στην παράμετρο του slow-roll  $\epsilon = -\dot{H}/H^2$  (συνεχής γκρι καμπύλη). Η προσεγγιστική τιμή της παραμέτρου  $\epsilon = \epsilon_V/(3H^2\tilde{M}^{-2})$  φαίνεται με γκρι διακεκομμένη καμπύλη. Το αριστερό γράφημα αντιστοιχεί σε  $\tilde{M} = 10^{-6} M_{\text{Pl}}$  ενώ το δεξί σε  $\tilde{M} = 10^{-7} M_{\text{Pl}}$ . Τα γραφήματα αυτά αναδεικνύουν το γεγονός ότι η προσέγγιση slow-roll (1.10) περιγράφουν αρκετά καλά την πραγματική εξέλιξη του πληθωριστικού πεδίου κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Χρησιμοποιούνται μονάδες μάζας Planck και χρόνου Planck.

$$\varphi = g(\phi), \quad V_{\text{GR}}(\varphi) = V[g^{-1}(\varphi)] \quad (1.11)$$

έτσι ώστε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων (1.10) να ξαναγραφεί ως

$$H^2 \simeq \frac{V_{\text{GR}}(\varphi)}{3M_{\text{Pl}}^2}, \quad 3H\dot{\varphi} \simeq -V'_{\text{GR}}(\varphi), \quad (1.12)$$

όπου  $V_{\text{GR}}(\varphi)$  το δυναμικό για ένα πεδίο  $\varphi$  με τετριμμένη σύζευξη. Η εξίσωση κίνησης (1.12) γράφεται τότε συναρτήσει του  $\phi$  ως

$$3H\dot{\phi} \simeq -\frac{V'(\phi)}{[g'(\phi)]^2}, \quad (1.13)$$

όπου με τόνο δηλώνεται η παράγωγος ως προς το πεδίο  $\phi$ . Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την εξίσωση κίνησης του συστήματος (1.10) αν  $[g'(\phi)]^2 = \epsilon_V/\epsilon$  ή

$$g'(\phi) = \frac{V^{1/2}}{M_{\text{Pl}}\tilde{M}}. \quad (1.14)$$

Σε αυτή τη περίπτωση το πεδίο  $\varphi$  συναρτήσει του  $\phi$  γράφεται

$$\varphi = \int \frac{V^{1/2}}{M_{\text{Pl}}\tilde{M}} d\phi. \quad (1.15)$$

Για ένα εκθετικό δυναμικό  $V = V_0 e^{-\lambda_e \phi/M_{\text{Pl}}}$  έχουμε ως αποτέλεσμα  $\varphi = -2V_0^{1/2}/(\lambda_e \tilde{M}) \times e^{-\lambda_e \phi/(2M_{\text{Pl}})}$ , με αντίστροφη συνάρτηση την  $g^{-1}(\varphi) = \phi = -(2M_{\text{Pl}}/\lambda_e) \times \ln(-\lambda_e \tilde{M} \varphi/2V_0^{1/2})$ . Ως επακόλουθο, το δυναμικό  $V_{\text{GR}}$  για το τετριμμένο πεδίο  $\varphi$  θα είναι

$$V_{\text{GR}}(\varphi) = V[g^{-1}(\varphi)] = \frac{1}{2} \frac{\lambda_e^2 \tilde{M}^2}{2} \varphi^2 \equiv \frac{1}{2} m_\varphi^2 \varphi^2. \quad (1.16)$$

Θεωρώντας δυναμικά της μορφής

$$V(\phi) = \lambda_p M_{\text{Pl}}^{4-p} \phi^p. \quad (1.17)$$

και κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού (1.15),  $\varphi = \int g'(\phi) d\phi$ , το πεδίο  $\varphi$  θα είναι

$$\varphi = \frac{2}{p+2} \frac{\phi^{p/2+1}}{\lambda_p^{-1/2} M_{\text{Pl}}^{p/2-1} \tilde{M}}, \quad (1.18)$$

ως ελάχιστο συζευγμένο στη βαρύτητα κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Η εξέλιξη του καθορίζεται από το δυναμικό  $V_{\text{GR}}(\varphi) = V[g^{-1}(\varphi)]$  όπου

$$V_{\text{GR}}(\varphi) = \lambda_p M_{\text{Pl}}^{4-p} \left( \frac{p+2}{2} \lambda_p^{-1/2} M_{\text{Pl}}^{p/2-1} \tilde{M} \varphi \right)^{2p/(p+2)}. \quad (1.19)$$

Καθιστάται έτσι εμφανές ότι υπάρχει μια άμεση αντιστοιχία ανάμεσα στο δυναμικό  $V(\phi)$  για το σενάριο NMDC και στο  $V_{\text{GR}}(\varphi)$  για την τετριμμένη περίπτωση της ΓΣ

$$V \propto \phi^p \quad \longleftrightarrow \quad V_{\text{GR}} \propto \varphi^{\frac{2p}{p+2}}. \quad (1.20)$$

Ας δούμε κάποια παραδείγματα ξεκινώντας από ένα δυναμικό ανάλογο του Higgs. Βρίσκουμε

$$V(\phi) = \lambda_4 \phi^4 \quad \longleftrightarrow \quad V_{\text{GR}}(\varphi) = \underbrace{\lambda_4^{1/3} (3M_{\text{Pl}}\tilde{M})^{4/3}}_{\xi^{8/3}} \varphi^{4/3}, \quad (1.21)$$

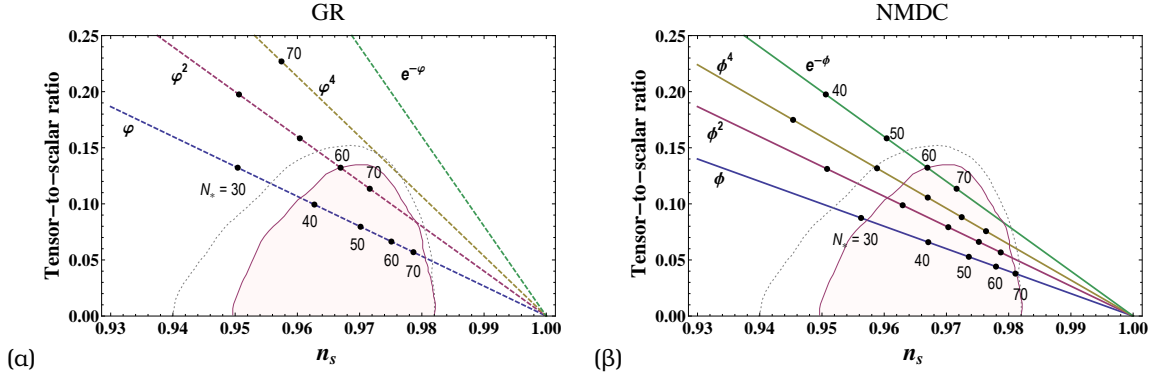
Δηλαδή το δυναμικό Higgs ενός πληθωριστικού πεδίου με NMDC, ισοδυναμεί με ένα δυναμικό της μορφής  $\varphi^{4/3}$  ενός πεδίου με τετριμμένη σύζευξη. Επιπλέον το τετραγωνικό δυναμικό  $V \propto \phi^2$  με NMDC προκύπτει ισοδύναμο με το δυναμικό

$$V(\phi) = \lambda_2 M_{\text{Pl}}^2 \phi^2 \equiv \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 \quad \longleftrightarrow \quad V_{\text{GR}}(\varphi) = \lambda_2 M_{\text{Pl}}^2 \left( 2\lambda_2^{-1/2} \tilde{M} \right) \varphi \equiv \mu_\varphi^3 \varphi \quad (1.22)$$

όπου, το τετράγωνο της μάζας  $m_\phi^2 \equiv 2\lambda_2 M_{\text{Pl}}^2$  αντιστοιχεί στο  $\mu_\varphi^3 = \sqrt{2} m_\phi \tilde{M} M_{\text{Pl}}$ . Όμοια το γραμμικό δυναμικό  $V(\phi) = \mu_\phi^3 \phi$  με NMDC ισοδυναμεί με το  $V_{\text{GR}}(\varphi) = (3/2)^{2/3} \mu_\phi^2 (\tilde{M} M_{\text{Pl}})^{2/3} \varphi^{2/3}$ . Σημειώνουμε ότι για το σενάριο  $n = -2$  δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η έκφραση (1.19). Το αντίστροφο τετραγωνικό δυναμικό  $V(\phi) = m^6 \phi^{-2}$  ισοδυναμεί με το εκθετικό δυναμικό,  $V(\phi) \propto \phi^{-2} \longleftrightarrow V_{\text{GR}}(\varphi) \propto e^{-2\frac{M_{\text{Pl}}\tilde{M}}{m^3}\varphi}$  για  $\phi, \varphi > 0$ .

Στην παρακάτω ενότητα κάνουμε μια σύντομη ανασκόπηση των αποτελεσμάτων του πληθωρισμού ώστε να τα συγκρίνουμε με αυτά των μοντέλων με NMDC.





Σχήμα 1.2: Οι αποδεκτές περιοχές για την παράμετρο βαθμωτών διαταραχών,  $n_s$  και το λόγο του τανυστικού προ βαθμωτό φάσμα διαταραχών  $r$  από το *Planck* 2013 (κουκίδες) και από το *Planck* TT\_lowP 2015 (συμπαγής περιοχή). Το αριστερό γράφημα δείχνει τις θεωρητικές προβλέψεις ενός τετριμμένου βαθμωτού πληθωριστικού πεδίου στη βαρύτητα Einstein παρουσία δυναμικού  $V(\varphi) \propto \varphi, \varphi^2, \varphi^4, e^{-\varphi}$ . Στο δεξί γράφημα παρουσιάζονται οι θεωρητικές προβλέψεις  $r = r(n_s)$  για ένα πληθωριστικό πεδίο με NMDC παρουσία δυναμικού  $V(\phi) \propto \phi, \phi^2, \phi^4, e^{-\phi}$ . Οι μαύρες κουκίδες αντιστοιχούν στον αριθμό των e-folds  $N_*$  στο διάστημα 30 έως 70. Είναι εμφανές ότι τα μοντέλα με NMDC προσεγγίζουν καλύτερα τα παρατηρησιακά δεδομένα.

## 1.4 Παρατηρήσιμα μεγέθη ενός πληθωριστικού μοντέλου με κανονικούς κινητικούς όρους

Μια απλή και γενική κλάση από πληθωριστικά μοντέλα χαρακτηρίζονται από ένα βαθμωτό πεδίο παρουσία δυναμικού της μορφής

$$V(\varphi) = \lambda_q M_{\text{Pl}}^4 \left( \frac{\varphi}{M_{\text{Pl}}} \right)^q. \quad (1.23)$$

Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει το αρχικά προτεινόμενο μοντέλο,  $\varphi^2$ , το γραμμικό μοντέλο  $\varphi$ , καθώς και κλασματικά δυναμικά όπως τα  $\varphi^{4/3}$  και  $\varphi^{2/3}$ . Όπως αναφέραμε υπάρχει μια αξιοσημείωτη αντιστοιχία με τα πληθωριστικά μοντέλα  $\phi^p$  με NMDC όπου  $p$  ένας ακέραιος εκθέτης στο δυναμικό. Η έκφραση (1.23) μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ο κυρίαρχος όρος κατά τη φάση slow-roll ενώ για μικρότερες τιμές του πεδίου επέρχονται διορθώσεις. Υποθέτουμε ότι μετά το τέλος του πληθωρισμού που περιγράφεται από ένα δυναμικό της μορφής  $V(\varphi) \propto \varphi^q$  με  $q = 1, 2/3, 4/3$ , το πληθωριστικό πεδίο ταλαντώνεται γύρω από το ελάχιστο που μπορεί προσεγγιστικά να θεωρηθεί τετραγωνικό,  $V(\varphi) \propto \varphi^2$ .

Ο πληθωρισμός λαμβάνει χώρα όσο οι δυο παράμετροι της φάσης slow-roll

$$\epsilon_V \equiv \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta_V \equiv M_{\text{Pl}}^2 \frac{V''}{V}, \quad (1.24)$$

έχουν τιμή μικρότερη της μονάδας. Από τον ορισμό του αριθμού των e-folds έχουμε επίσης

$$N_* \equiv \int_{t_*}^{t_{\text{end}}} H dt, \quad \text{slow-roll} \Rightarrow N_* \simeq \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \int_{\varphi_{\text{end}}}^{\varphi_*} \frac{V}{V'} d\varphi = \frac{1}{2q M_{\text{Pl}}^2} (\varphi_*^2 - \varphi_{\text{end}}^2). \quad (1.25)$$

Το τέλος του πληθωρισμού έρχεται προσεγγιστικά όταν η πρώτη συνθήκη slow-roll παραβιαστεί,  $\epsilon_V = 1$ , και βρίσκουμε ότι τότε  $\varphi_{\text{end}} = q M_{\text{Pl}} / \sqrt{2}$ . Η τιμή του πληθωριστικού πεδίου τη στιγμή που η κλίμακα  $k_*^{-1}$  βγαίνει από τον ορίζοντα κατά τον πληθωρισμό είναι  $\varphi_* = q M_{\text{Pl}} / \sqrt{2\epsilon_{V*}}$ . Έτσι βρίσκουμε τη σχέση για το  $N_* = N_*(\epsilon_V)$

$$N_* = \frac{q}{4} \left( \frac{1}{\epsilon_{V*}} - 1 \right), \quad (1.26)$$

και οι προβλέψεις του πληθωρισμού, στη χαμηλότερη τάξη ως προς τις παραμέτρους slow-roll, συναρτήσε του αριθμού των e-folds είναι

$$1 - n_s \simeq \frac{2q + 4}{4N_* + q}, \quad r \simeq \frac{16q}{4N_* + q}. \quad (1.27)$$

### 1.4.1 Κανονικοποίηση των παραμέτρων από το CMB

Το παρατηρήσιμο πλάτος των ανισοτροπιών του CMB κανονικοποιεί την παράμετρο  $\lambda_q M_{\text{Pl}}^{4-q}$  του δυναμικού (1.23). Το φάσμα των βαθμωτών διαταραχών, ως προς την αναλλοίωτη κάτω από τη βαθμίδα διαταραχή καμπυλότητας  $\zeta$ , είναι [150]

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{H_*^2}{8\pi^2 \epsilon_{V_*} M_{\text{Pl}}^2}. \quad (1.28)$$

Το  $\mathcal{P}_\zeta$  είναι ένα παρατηρήσιμο μέγεθος και η τιμή του μετράται, στην κλίμακα του CMB  $k_*^{-1}$  από το δορυφόρο *Planck*, με αποτέλεσμα  $\mathcal{P}_\zeta = 2 \times 10^{-9}$ . Χρησιμοποιώντας την προέγγιση slow-roll η (1.28) ξαναγράφεται ως

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{\lambda_q}{12\pi^2} \frac{\varphi_*^{q+2}}{q^2 M_{\text{Pl}}^{q+2}} = \frac{\lambda_q}{12\pi^2 q^2} \left[ \frac{q}{2} (4N_* + q) \right]^{q/2+1}, \quad (1.29)$$

βρίσκοντας έτσι τη σχέση για το  $\lambda_q$  συναρτήσει του αριθμού των e-folds

$$\lambda_q(N_*) = 12\pi^2 q^2 \left[ \frac{q}{2} (4N_* + q) \right]^{-q/2-1} \mathcal{P}_\zeta. \quad (1.30)$$

Σε επόμενη ενότητα θα δείξουμε ότι ξεφεύγοντας από το τριτοκλιμακίο σενάριο της ΓΣ και πηγαίνοντας στο NMDC η κανονικοποίηση του CMB για το δυναμικό τροποποιείται λόγω της επιπρόσθετης πληροφορίας από την επιπλέον σύζευξη. Παρακάτω κάνουμε μια εκτίμηση για τις κανονικοποιημένες παραμέτρους του CMB για διάφορα πληθωριστικά μοντέλα της ΓΣ ώστε να τα συγκρίνουμε με αυτά με NMDC.

### Παραδείγματα παραμέτρων πληθωριστικών μοντέλων της ΓΣ

Στο σενάριο του γραμμικού δυναμικού,  $V(\varphi) = \mu_\varphi^3 \varphi$ , οι μετρήσεις του CMB δίνουν στη μάζα  $\mu_\varphi$ , τιμή

$$\mu_\varphi^3 \sim 2.4 \times 10^{-10} M_{\text{Pl}}^3 \left( \frac{50}{N_*} \right)^2 \left( \frac{\mathcal{P}_\zeta}{2 \times 10^{-9}} \right) \quad (1.31)$$

η οποία προσεγγιστικά είναι  $\mu_\varphi \sim \mathcal{P}_\zeta^{1/3} M_{\text{Pl}}$ . Το δυναμικό  $V(\varphi) = \mu_\varphi^3 \varphi$  μπορεί να έχει επιπλέον όρους όπως  $V(\varphi) = \mu_\varphi^3 \varphi + \Lambda \cos f(\varphi)$  ή  $V(\varphi) = \mu_\varphi^3 (\varphi^2 + \varphi_c^2)^{1/2}$ . Για τη δεύτερη περίπτωση η ενεργός μάζα του πληθωριστικού πεδίου σε χαμηλές ενέργειες,  $\varphi \ll \varphi_c$ , είναι  $m_\varphi^2 = \mu_\varphi^3 / \varphi_c$ , αποτέλεσμα περίπου ίδιας τάξης μεγέθους με τη μάζα του τετραγωνικού δυναμικού για  $\varphi_c \sim M_{\text{Pl}}$ . Για το τετραγωνικό δυναμικό,  $V(\varphi) = m_\varphi^2 \varphi^2 / 2$ , το CMB καταλήγει στην έκφραση για τη μάζα  $m_\varphi, m_\varphi(N_*) = \pi \sqrt{6} \mathcal{P}_\zeta^{1/2} M_{\text{Pl}} / N_*$  ή αλλιώς

$$m_\varphi(N_*) \simeq 6.9 \times 10^{-6} \left( \frac{50}{N_*} \right) M_{\text{Pl}}. \quad (1.32)$$

Το γεγονός ότι  $m_\varphi \sim 6 \times 10^{-6} M_{\text{Pl}}$  υπονοεί ότι δεν μπορούν να παραχθούν, κινηματικά, σωματίδια με μάζα μεγαλύτερη από  $m_\varphi = 6 \times 10^{-6} M_{\text{Pl}}$  από τη διαταρακτική αποδιέγερση του πληθωριστικού πεδίου. Στα επόμενα θα δείξουμε ότι αυτός ο περιορισμός αίρεται στην περίπτωση που κυριαρχεί το NMDC κατά τη περίοδο του πληθωρισμού. Τέλος για το δυναμικό τέταρτης τάξης,  $V(\varphi) = \lambda_\varphi \varphi^4$ , θα είναι  $\lambda_\varphi \equiv \lambda_4$  και βρίσκουμε

$$\lambda_\varphi \simeq 6 \times 10^{-14} \left( \frac{\mathcal{P}_\zeta}{2 \times 10^{-9}} \right) \left( \frac{50}{N_*} \right)^3, \quad (1.33)$$

δηλαδή  $\lambda_\varphi \sim \mathcal{P}_\zeta / N_*^3 \ll 1$ , μια τιμή που αποκλείει το δυναμικό αυτό ως υποψήφιο σενάριο πληθωρισμού. Παρ' όλα αυτά παρουσία του NMDC το σενάριο αυτό είναι και πάλι πιθανό ικανοποιώντας τους παρατηρησιακούς περιορισμούς [148].

### 1.4.2 Η περίοδος αναθέρμανσης

Η φάση του πληθωρισμού έχει ως αποτέλεσμα ο χώρος να έχει διασταλλεί εκθετικά και το σύμπαν να έχει καταλήξει σε μια κατάσταση χαμηλής εντροπίας και θερμοκρασίας. Μετά το τέλος της επιταχυνόμενης διαστολής που έχει επιφέρει ο πληθωρισμός, το πληθωριστικό πεδίο αναμένεται να ταλαντώνεται γύρω από

το ελάχιστο του δυναμικού του. Η αναμενόμενη παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης του ρευστού που το περιγράφει δίνεται από τη σχέση [42]

$$\bar{w}_{\text{reh(GR)}} \equiv \frac{\langle p \rangle}{\langle \rho \rangle} = \frac{q-2}{q+2}, \quad (1.34)$$

όπου  $q$  ο εκθέτης του πεδίου στο υπό μελέτη δυναμικό. Η περίοδος της αναθέρμανσης, όπως είναι εμφανές και από το ονομά της, διεγείρει την κινητική κατάσταση των παραγόμενων σωματιδίων αυξάνοντας τη θερμοκρασία του σύμπαντος πιθανώς μέσω ξεχωριστών μηχανισμών όπως η προ-θέρμανση (preheating). Η αναθέρμανση διαρκεί χρόνο  $\Gamma_\varphi^{-1}$  όπου  $\Gamma_\varphi^{-1}$  είναι ο ρυθμός διάσπασης του πληθωριστικού πεδίου. Η πλήρης αποδιέγερση του πεδίου σηματοδοτεί το τέλος της περιόδου αναθέρμανσης και την έναρξη της περιόδου κυριαρχίας της ακτινοβολίας με  $T_{\text{reh}} \sim (\Gamma_\varphi M_{\text{Pl}})^{1/2}$ . Στην πραγματικότητα η ακριβής διαδικασία με την οποία το σύμπαν αναθερμίνεται δεν είναι εντελώς ξεκάθαρη ενώ δεν υπάρχουν πλήρεις παρατηρησιακοί περιορισμοί. Η παράμετρος (1.34) της καταστατικής εξίσωσης ποικίλει στο διάστημα  $-1/3 \leq \bar{w}_{\text{reh(GR)}} \leq 1$  ανάλογα το μοντέλο που θεωρείται σε κάθε μελέτη. Όπως έχουμε αναφέρει υποθέτουμε ότι η μορφή του δυναμικού (1.34) σε χαμηλές ενέργειες μπορεί να προσεγγιστεί ως  $\varphi^2$  ή  $\varphi^4$  και ως εκ τούτου θα θεωρούμε τις αντίστοιχες τιμές  $\bar{w}_{\text{reh(GR)}} = 0$  και  $1/3$ . Επιπλέον θα χρησιμοποιήσουμε και την τιμή  $\bar{w}_{\text{reh(GR)}} = 1/5$  που υποδεικνύεται σε αριθμητικές μελέτες σεναρίων αναθέρμανσης [44].

### 1.4.3 Οι παράμετροι $N_{\text{reh}}$ και $T_{\text{reh}}$ σε τετριμμένα μοντέλα της $\Gamma\Sigma$

Η σχέση (1.25) δίνει για τη χρονική στιγμή που η κλίμακα βγαίνει από τον ορίζοντα  $V_* \equiv V(\varphi_*) = V(\varphi_{\text{end}}) \times \epsilon_{V_*}^{-q/2}$ . Η πυκνότητα ενέργειας στο τέλος του πληθωρισμού μπορεί να γραφτεί ως  $\rho_{\text{end}} \simeq \gamma^{-1} V(\varphi_{\text{end}}) \equiv \gamma^{-1} V_{\text{end}}$ , όπου το  $\gamma$  αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά του  $V_{\text{end}}$  στη συνολική ενέργεια  $\rho_{\text{end}}$ . Επιπλέον από τη σχέση (1.26) παρατηρούμε ότι  $N_* \simeq q/(4\epsilon_{V_*})$ , συνεπώς η σχέση (1.6) για τον αριθμό των e-folds,  $N_{\text{reh}}$ , κατά τη διάρκεια της αναθέρμανσης μπορεί να γραφτεί ως

$$N_{\text{reh}}(n_s, q, \bar{w}_{\text{reh}}) \simeq \frac{4}{1-3\bar{w}_{\text{reh}}} \left[ 57.4 - N_*(n_s) + \frac{1}{4} \ln \gamma + \frac{1-q/2}{4} \ln \frac{q}{4N_*(n_s)} \right], \quad (1.35)$$

όπου

$$N_*(n_s) = \frac{q(1+n_s)+4}{4(1-n_s)} \quad (1.36)$$

ενώ θεωρούμε μια σταθερή τιμή για την παράμετρο  $\bar{w}_{\text{reh}}$ , της καταστατικής εξίσωσης. Όμοια, η θερμοκρασία αναθέρμανσης (1.7) γράφεται ως προς τις παραμέτρους του μοντέλου  $q$ ,  $\bar{w}_{\text{reh}}$  και την παρατηρήσιμη ποσότητα  $n_s$ , ως

$$T_{\text{reh}}(n_s, q, \bar{w}_{\text{reh}}) = \left( \frac{1}{\gamma} \right)^{1/4} \lambda_q^{1/4} \left( \frac{q}{\sqrt{2}} \right)^{q/4} \left( \frac{30}{\pi^2 g_*} \right)^{1/4} M_{\text{Pl}} e^{-\frac{3}{4}(1+\bar{w}_{\text{reh}})N_{\text{reh}}(n_s)}. \quad (1.37)$$

Υποθέτοντας ότι η φωτοειδής συνθήκη ενέργειας (null energy condition),  $\rho + p \geq 0$ , δεν παραβιάζεται, η ποσότητα μπροστά από το εκθετικό αντιστοιχεί στη μέγιστη θερμοκρασία αναθέρμανσης,  $T_{\text{max}} = T_{\text{max}}(q, \lambda_q)$ . Για  $N_{\text{reh}} > 0$  η θερμοκρασία αυτή μειώνεται εκθετικά.

## 1.5 Πληθωρισμός με μη τετριμμένη σύζευξη του πεδίου

Έστω μια θεωρία με ένα βαθμωτό πεδίο  $\phi$ , το οποίο το ταυτοποιούμε με το πληθωριστικό, με μη τετριμμένη σύζευξη της παραγώγου του στη βαρύτητα (NMDC). Όπως περιγράψαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο η δυναμική του βαθμωτού πεδίου  $\phi$  περιγράφεται από την Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} M_P^2 R - \frac{1}{2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{G^{\mu\nu}}{\tilde{M}^2} \right) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (1.38)$$

Σε ένα ομογενές περιβάλλον FRW όπου κυριαρχεί το πληθωριστικό πεδίο  $\phi$  η πυκνότητα ενέργειας και η πίεση είναι αντίστοιχα

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} \left( 1 + 9 \frac{H^2}{\tilde{M}^2} \right) + V(\phi) \quad (1.39)$$

και

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} \left( 1 - 3 \frac{H^2}{\tilde{M}^2} \right) - V(\phi) - \frac{1}{\tilde{M}^2} \frac{d(H\dot{\phi}^2)}{dt}. \quad (1.40)$$

Η εξίσωση Friesmann προκύπτει

$$H^2 = \frac{\rho_\phi}{3M_{\text{Pl}}^2}, \quad (1.41)$$

ενώ η εξίσωση κίνησης για το πεδίο  $\phi$  με NMDC

$$\ddot{\phi} \left(1 + 3\frac{H^2}{\tilde{M}^2}\right) + 3H\dot{\phi} \left(1 + 3\frac{H^2}{\tilde{M}^2} + \frac{2\dot{H}}{\tilde{M}^2}\right) + V'(\phi) = 0. \quad (1.42)$$

Η παραπάνω αυτές εξισώσεις οδηγούν στις τροποποιημένες εκφράσεις για τις παραμέτρους του slow-roll

$$\epsilon = \frac{\epsilon_V}{1 + 3H^2\tilde{M}^{-2}}, \quad \eta = \frac{\eta_V}{1 + 3H^2\tilde{M}^{-2}}, \quad (1.43)$$

όπου  $\epsilon_V = (M_{\text{Pl}}^2/2)(V'/V)^2$  και  $\eta_V = M_{\text{Pl}}^2(V''/V)$ .

Το φάσμα των βαθμωτών διαταραχών μπορεί να γραφτεί ως προς τις τροποποιημένες παραμέτρους του slow-roll [151],

$$1 - n_s \equiv \left. \frac{d \ln \mathcal{P}_\zeta}{d \ln k} \right|_{c_s k = aH} \simeq \frac{1}{1 + 3H^2\tilde{M}^{-2}} \left[ 2\epsilon_V \left( 4 - \frac{1}{1 + 3H^2\tilde{M}^{-2}} \right) - 2\eta_V \right]. \quad (1.44)$$

όταν η νέα παράμετρος  $\tilde{M}$  είναι πολύ μικρότερη από τη παράμετρο Hubble, δηλαδή  $H\tilde{M}^{-1} \gg 1$ , βρισκόμαστε στο όριο υψηλής τριβής (high friction limit). Στο όριο αυτό η παράμετρος  $n_s$  υπακούει στην απλοποιημένη μορφή

$$1 - n_s \simeq 8\epsilon - 2\eta, \quad (1.45)$$

ενώ το πλάτος  $\mathcal{P}_\zeta$  και η σχέση  $r = 16\epsilon$  σε πρώτη τάξη μένουν αμετάβλητα. Για μοντέλα όπου η παράμετρος ενέργειας του πληθωρισμού είναι  $H_{\text{inf}} \sim 10^{-5} M_{\text{Pl}}$  μπορούμε να ξεχωρίσουμε τρεις περιοχές που διαμορφώνονται από την τιμή του  $\tilde{M}$  στο Σχ. 1.3.

Μια σημαντική παρατήρηση στη μέχρι τώρα ανάλυση είναι ότι στο όριο υψηλής τριβής,  $\tilde{M} \ll H_{\text{inf}}$ , κατά τη διάρκεια του slow-roll η εξέλιξη ενός βαθμωτού πεδίου  $\phi$  με δυναμικό  $V(\phi)$  είναι παρόμοια με αυτή ενός τετριμμένου πεδίου  $\varphi$  με δυναμικό  $V_{\text{GR}}(\varphi)$ . Πιο συγκεκριμένα για δυναμικά της μορφής

$$V(\phi) = \lambda_p M_{\text{Pl}}^4 \left( \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}} \right)^p \quad (1.46)$$

υπάρχει μια αντιστοιχία όπως είχαμε παρουσιάσει και στον Πίνακα 1.1

$$p|_{\text{NMDC}} \longleftrightarrow \left. \frac{2p}{p+2} \right|_{\text{GR}} \equiv q, \quad (1.47)$$

Οι εκφράσεις για τις παραμέτρους  $n_s(N_*)$  και  $r(N_*)$  των μοντέλων με NMDC [151] μπορούν να υπολογιστούν απευθείας από τις γνωστές σχέσεις της ΓΣ (1.27) κάνοντας χρήση της (1.47), με αποτέλεσμα

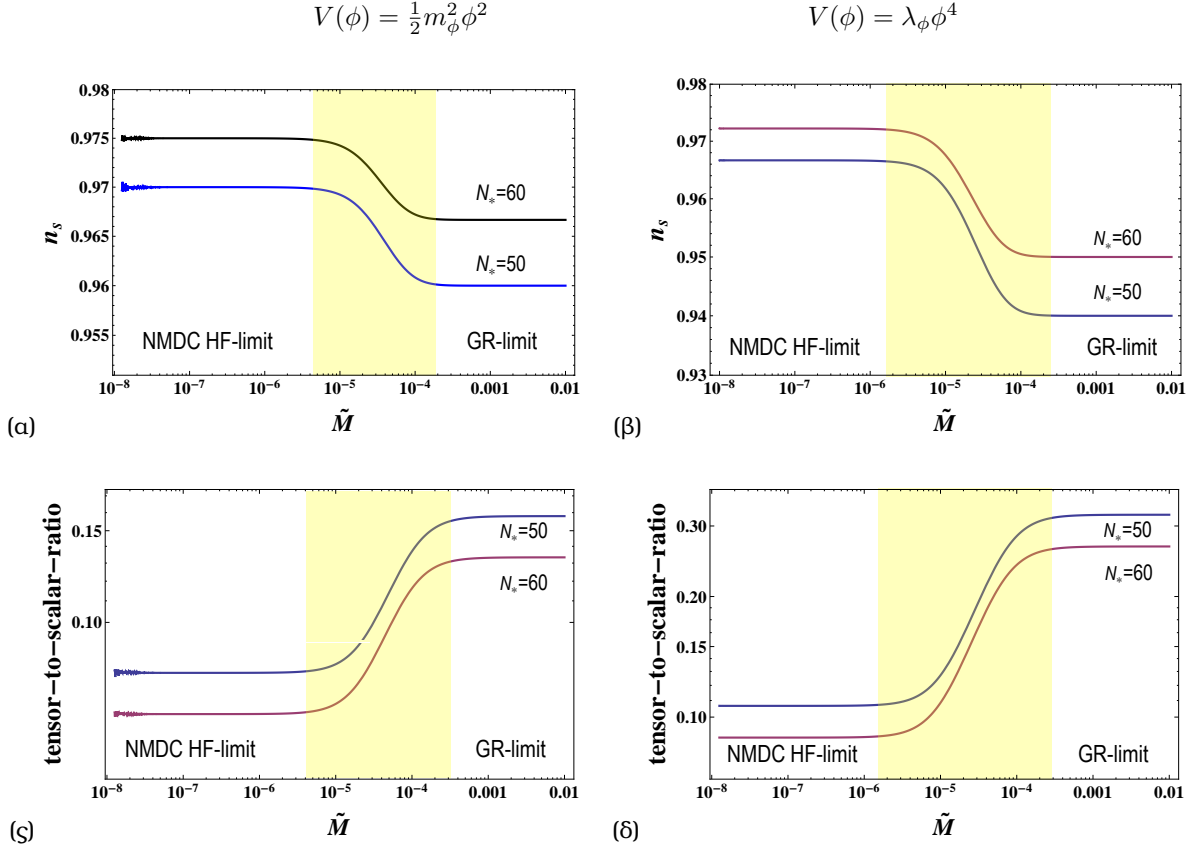
$$1 - n_s \simeq \frac{4(p+1)}{2(p+2)N_* + p}, \quad r \simeq \frac{16p}{2(p+2)N_* + p}. \quad (1.48)$$

Καθιερωμένα πληθωριστικά μοντέλα μπορούν να ομαδοποιηθούν σε ζεύγη  $(\phi^4, \varphi^{4/3})$ ,  $(\phi^2, \varphi)$ ,  $(\phi, \varphi^{2/3})$ , καθώς και τα  $(e^\phi, \varphi^2)$ , τα οποία δίνουν τις ίδιες προβλέψεις  $r = r(n_s)$ . Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο εκφυλισμός αυτός αίρεται αν στην κοσμολογική εξέλιξη συμπεριληφθεί και η μελέτη της περιόδου αναθέρμανσης.

## 1.6 Παρατηρήσιμα μεγέθη ενός πληθωριστικού μοντέλου με NMDC

Είναι αρκετά ενδιαφέρον όπως αναφέραμε και σε προηγούμενες ενότητες το γεγονός ότι πληθωριστικά μοντέλα με δυναμικά  $\phi^4$  και  $\phi^2$ , ή το εκθετικό  $e^{-\lambda\phi}$  μπορούν να ταιριάζουν επιτυχώς στα παρατηρησιακά δεδομένα αν ληφθεί υπόψη η συνεισφορά του NMDC. Θα μελετήσουμε τις παραμέτρους για τα πληθωριστικά μοντέλα

$$V(\phi) = \lambda_p M_{\text{Pl}}^4 \left( \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}} \right)^p, \quad V(\phi) = V_0 e^{-\lambda_e \phi / M_{\text{Pl}}}. \quad (1.49)$$



Σχήμα 1.3: Η αλλαγή στις παρατηρησιακές τιμές του CMB  $n_s$  και  $r$  ως προς τη σύζευξη  $\tilde{M}$  για δύο προτεινόμενα δυναμικά  $V = m_\phi^2 \phi^2/2$  (αριστερά γραφήματα) και  $V = \lambda_\phi \phi^4$  (δεξιά γραφήματα) ενός πληθωριστικού πεδίου με NMDC. Οι γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν τρεις ξεχωριστές περιοχές όπου το NMDC κυριαρχεί (NMDC HF-limit), είναι ασθενές (GR-limit) αλλά και μια ενδιάμεση περιοχή (intermediate region). Οι τιμές της μάζας είναι σε μονάδες μάζας Planck.

Θεωρούμε το όριο υψηλής τριβής όπου  $H_* \gg \tilde{M}$  και η εξίσωση (1.43) γίνεται προσεγγιστικά  $\epsilon \simeq \epsilon_V/(3H^2 \tilde{M}^{-2})$ ,  $\eta \simeq \eta_V/(3H^2 \tilde{M}^{-2})$ . Για τα δυναμικά (1.49) παίρνουμε αντίστοιχα την έκφραση για την παράμετρο slow-roll ως προς την τιμή του πληθωριστικού πεδίου,  $\epsilon(\phi) = (p^2/2\lambda_p)(\tilde{M}^2 M_{\text{Pl}}^p/\phi^{p+2})$  και  $\epsilon(\phi) = (\lambda_e^2 \tilde{M}^2/2V_0)e^{\lambda_e \phi/M_P}$ . Το  $\phi_{\text{end}}$  υπολογίζεται προσεγγιστικά θέτοντας την παράμετρο του slow-roll ίση με τη μονάδα,  $\epsilon(\phi_{\text{end}}) = 1$ , με αποτέλεσμα

$$\phi_{\text{end}}^{p+2} = (\gamma p^2/2\lambda_p)\tilde{M}^2 M_{\text{Pl}}^p, \quad (1.50)$$

$$\phi_{\text{end}} = (M_{\text{Pl}}/\lambda_e) \ln[2V_0/(\gamma \lambda_e^2 \tilde{M}^2 M_{\text{Pl}}^2)] \quad (1.51)$$

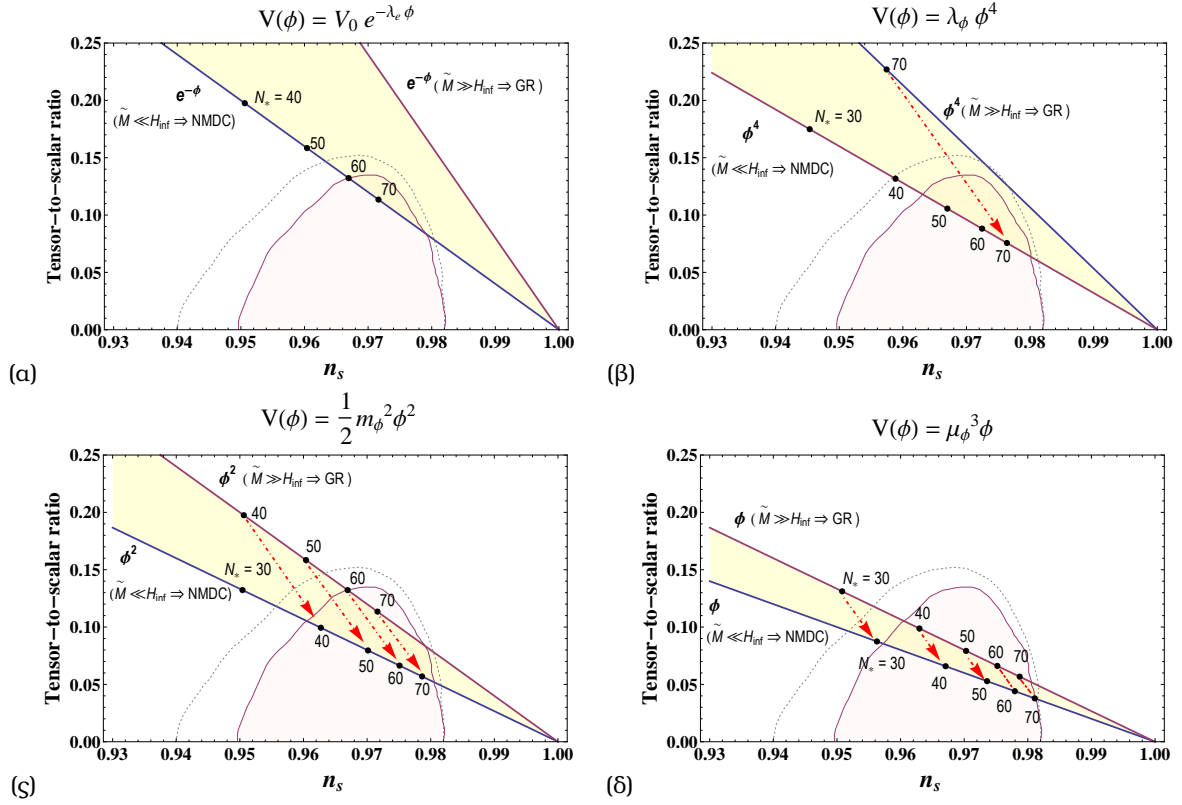
για τις δυο κλάσεις δυναμικών (1.49) αντίστοιχα. Η παράμετρος  $\gamma$  στις τελικές εκφράσεις εισάγεται προκειμένου να ληφθούν υπόψιν οι διορθώσεις λόγω της παύσης του σεναρίου slow-roll στο τέλος του πληθωρισμού όπου  $3H_{\text{end}}^2 M_{\text{Pl}}^2 = \gamma^{-1} V_{\text{end}}$ . Η παράμετρος αυτή παίρνει την τιμή  $\gamma = 1$  στην προσέγγιση slow-roll αλλά στην πραγματικότητα η τιμή της είναι  $\gamma \simeq 2/3$ .

Ο αριθμός των e-folds από τη στιγμή που το  $k_*$  βγήκε από τον οριζοντα εως το τέλος του πληθωρισμού είναι

$$N_* \equiv \int_{t_*}^{t_{\text{end}}} H dt = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_*} (1 + 3H^2 \tilde{M}^{-2}) \frac{V}{V'} d\phi$$

Στο όριο υψηλής τριβής,  $H_* \gg \tilde{M}$ , η τιμή του πληθωριστικού πεδίου σε  $N_e$ -folds πριν το τέλος του πληθωρισμού είναι

$$\phi^{p+2}(N) = \frac{2p(p+2)N + \gamma p^2}{2\lambda_p} \tilde{M}^2 M_{\text{Pl}}^p, \quad \phi(N) = \frac{1}{\lambda_e} \ln \left( \frac{2V_0}{\gamma \lambda_e^2 \tilde{M}^2 N} \right). \quad (1.52)$$



Σχήμα 1.4: Οι παρατηρησιακές τιμές  $n_s$  και  $r$  από το *Planck* 2013 (κουκίδες) και από το *Planck* TT<sub>lowP</sub> 2015. Τα γραφήματα παρουσιάζουν τις θεωρητικές προβλέψεις για το εκθετικό, τέταρτης τάξης, τετραγωνικό και γραμμικό δυναμικό παρουσία NMDC. Η πάνω γραμμή αφορά την πρόβλεψη για το  $r = r(n_s)$  με το NMDC αμελητέο,  $\tilde{M} \gg H_{\text{inf}}$  ενώ η κάτω με το NMDC να κυριαρχεί,  $\tilde{M} \ll H_{\text{inf}}$ . Επιπλέον σημειώνονται οι τιμές των e-folds και πως αυτές αντιστοιχίζονται στις δύο αυτές περιπτώσεις.

για τις δυο κλάσεις δυναμικών (1.49) αντιστοίχως. Οι παράμετροι του slow-roll  $\epsilon$  και  $\eta$  στο όριο αυτό γίνονται

$$\epsilon_* \simeq \frac{\epsilon_{V*}}{3H_*^2 \tilde{M}^{-2}} = \frac{p^2}{2\lambda_p} \frac{\tilde{M}^2 M_{\text{Pl}}^p}{\phi_*^{p+2}} \simeq \frac{p}{2(p+2)N_* + \gamma p}, \quad \eta_* = \frac{2p-2}{p} \epsilon_*. \quad (1.53)$$

ενώ για τις παραμέτρους (1.45) έχουμε

$$1 - n_s \simeq 8\epsilon_* - 2\eta_* = \frac{4(p+1)}{2(p+2)N_* + \gamma p}, \quad r \simeq \frac{16p}{2(p+2)N_* + \gamma p}. \quad (1.54)$$

Η διαφορά με την έκφραση (1.48), που προκύπτει κάνοντας χρήση της προσέγγισης slow-roll, εντοπίζεται στην ύπαρξη του παράγοντα  $\gamma$  λόγω της εξόδου από τη φάση slow-roll.

### 1.6.1 Κανονικοποίηση των παραμέτρων από το CMB

Το φάσμα των διαταραχών, για την κλίμακα  $k_*$  που μετράται από το CMB, στην περίπτωση με NMDC έχει τη μορφή

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{H_*^2}{8\pi^2 \epsilon_* c_s M_{\text{Pl}}^2} \simeq \frac{V(\phi_*)}{24\pi^2 \epsilon_* c_s M_{\text{Pl}}^4}, \quad (1.55)$$

όπου το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει από την προσέγγιση slow-roll. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τα δυναμικά και εισαγάγοντας το αποτέλεσμα (1.52) για το όριο υψηλής τριβής παίρνουμε τις κανονικοποιημένες παραμέτρους  $\lambda_p(N_*, \tilde{M})$  και  $\lambda_e(N_*, \tilde{M})$  για το σενάριο με NMDC

$$\lambda_p(N_*, \tilde{M}) = \frac{24\pi^2 c_s p}{2(p+2)N_* + p} \frac{M_{\text{Pl}}^p}{\left[ \frac{2p(p+2)N_* + p^2}{2\lambda_p} \tilde{M}^2 M_{\text{Pl}}^p \right]^{p/(p+2)}} \mathcal{P}_\zeta, \quad (1.56)$$

$$\lambda_e(N_*, \tilde{M}) = \sqrt{12} \pi \frac{M_{\text{Pl}}}{\tilde{M} N_*} \mathcal{P}_\zeta^{1/2}. \quad (1.57)$$

### Παραδείγματα παραμέτρων πληθωριστικών μοντέλων με NMDC

Για το γραμμικό μοντέλο,  $V(\phi) = \mu_\phi^3 \phi$  με  $\lambda_1 = \mu_\phi^3 / M_{\text{Pl}}^3$  βρίσκουμε από την εξίσωση (1.56) την έκφραση για την παράμετρο  $\mu_\phi^3$

$$\mu_\phi^3(N_*, \tilde{M}) = 0.52 \times 10^{-14} \left( \frac{50}{N_*} \right)^2 \left( \frac{\mathcal{P}_\zeta}{2 \times 10^{-9}} \right)^{3/2} \frac{M_{\text{Pl}}^4}{\tilde{M}}, \quad (1.58)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει  $c_s \sim 1$ .

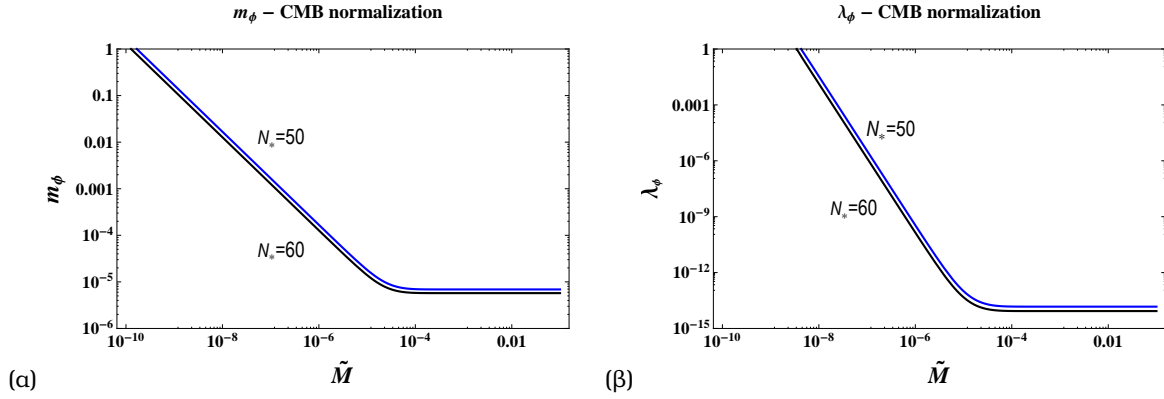
Όμοια για τετραγωνικά δυναμικά,  $V(\phi) = m_\phi^2 \phi^2 / 2$ , με  $\lambda_2 = m_\phi^2 / (2M_{\text{Pl}}^2)$  η σχέση (1.56) δίνει για τη μάζα  $m_\phi$  συναρτήσει του αριθμού των e-folds και της σύζευξης  $\tilde{M}$

$$m_\phi(N_*, \tilde{M}) = 1.7 \times 10^{-10} \left( \frac{50}{N_*} \right)^{3/2} \left( \frac{\mathcal{P}_\zeta}{2 \times 10^{-9}} \right) \frac{M_{\text{Pl}}^2}{\tilde{M}}, \quad (1.59)$$

για  $c_s \sim 1$ . Το όριο υψηλής τριβής  $\tilde{M} \ll H_* \sim 10^{-5} M_{\text{Pl}}$  υποδηλώνει ότι

$$m_\phi \gg 10^{-6} M_{\text{Pl}}, \quad (1.60)$$

όπως φαίνεται και στο Σχ. 1.5. Από τις παραπάνω σχέσεις αλλά και το Σχ. 1.5 είναι εμφανές ότι οι συζεύξεις



Σχήμα 1.5: Οι κανονικοποιημένες από το CMB τιμές για τη μάζα  $m_\phi$  (αριστερό γράφημα) και τη σύζευξη  $\lambda_\phi$  (δεξιό γράφημα), με  $N_* = 50$  και  $N_* = 60$  συναρτήσει της σύζευξης  $\tilde{M}$ , για τα δυναμικά  $V = m_\phi^2 \phi^2 / 2$  και  $\lambda_\phi \phi^4$  αντίστοιχα, για ένα πληθωριστικό πεδίο με NMDC. Οι διαστάσεις είναι σε μονάδες μάζας Planck.

δεν είναι ευαίσθητες στην αλλαγή των e-folds όπως τα  $\epsilon(N)$  και  $\phi(N)$ .

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε χάρη στο NMDC είναι δυνατή η διαταρακτική παραγωγή σωματιδίων μάζας  $m_\phi \gg m_\varphi \sim 6 \times 10^{-6} M_{\text{Pl}}$ , κάτι που κάνει δυνατές και τις υψηλές θερμοκρασίες αναθέρμανσης.

Για τα δυναμικά τετάρτου βαθμού,  $V(\phi) = \lambda_\phi \phi^4$ , με  $\lambda_4 = \lambda_\phi$  και σύζευξη  $\tilde{M}$  έχουμε από την κανονικοποίηση του CMB (1.56)

$$\lambda_\phi(N_*, \tilde{M}) \simeq 2.3 \times 10^{-32} \left( \frac{50}{N_*} \right)^5 \left( \frac{\mathcal{P}_\zeta}{2 \times 10^{-9}} \right) \left( \frac{M_{\text{Pl}}}{\tilde{M}} \right)^4, \quad (1.61)$$

καθιστώντας δυνατές τιμές  $\lambda_\phi \gg 10^{-14}$  όπως φαίνεται στο Σχ. 1.5.

Τέλος για το εκθετικό δυναμικό βρίσκουμε την τιμή της παραμέτρου  $\lambda_e$  ως προς τα  $N_*$  και  $\tilde{M}$

$$\lambda_e(N_*, \tilde{M}) \simeq 10^{-5} \left( \frac{50}{N_*} \right) \left( \frac{\mathcal{P}_\zeta}{2 \times 10^{-9}} \right) \frac{M_{\text{Pl}}}{\tilde{M}}. \quad (1.62)$$

## 1.6.2 Η περίοδος αναθέρμανσης

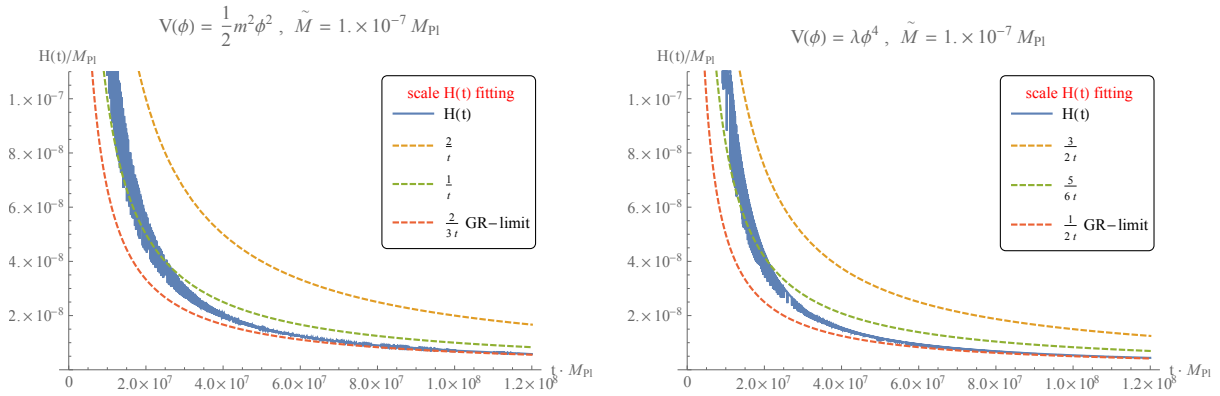
Η εξέλιξη των βαθμωτών πεδίων με NMDC μετά το τέλος του πληθωρισμού είναι διαφορετική από το τετριμμένο σενάριο. Στις θεωρίες αυτές η πυκνότητα ενέργειας και η πίεση δίνεται από τις εκφράσεις (1.39) και (1.40). Το πληθωριστικό πεδίο ταλαντώνεται απότομα γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού του με συχνότητα  $\omega_{\text{eff}} \sim (\tilde{M}/H)(V'/\phi)^{1/2}$  [23]. Ο ρυθμός επέκτασης  $H$  ταλαντώνεται ραγδαία, και στα [22, 23] η σχέση από την οποία προκύπτει η μέση παράμετρος παράμετρος είναι η

$$\langle H \rangle \sim \frac{2p+2}{3p} \frac{1}{t} \quad (1.63)$$

για πληθωριστικά δυναμικά της μορφής  $V(\phi) \propto \phi^p$ . Η σχέση διατήρησης της ενέργειας,  $\dot{\rho}_\phi = -3H(\rho_\phi + p_\phi) = 3H\rho_\phi(1+w)$ , που προκύπτει από την ταυτότητα Bianchi υποδηλώνει ότι  $\rho_\phi \propto a^{-3(1+\bar{w})}$  και η μέση τιμή της παραμέτρου Hubble είναι  $H \propto 2/[3(1+w)t]$ . Παρ' όλα αυτά η σχέση (1.63) οδηγεί σε μια διαφορετική έκφραση για την μέση παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης,  $\bar{w}_{\text{reh}}$ , ως προς τη παράμετρο του δυναμικού

$$\bar{w}_{\text{reh(DC)}} \sim -\frac{1}{p+1}. \quad (1.64)$$

Κατά τη φάση ταλάντωσης του πληθωριστικού πεδίου, το τετραγωνικό δυναμικό,  $p=2$ , δίνει  $\bar{w}_{\text{reh}} = -1/3$  ενώ το δυναμικό τετάρτου βαθμού δίνει  $\bar{w}_{\text{reh}} = -1/5$ . Έχουμε ελέγξει αριθμητικά ότι η σχέση (1.64) περιγράφει σε καλό βαθμό το ρυθμό διαστολής του σύμπαντος. Στο Σχ. 1.6 έχουμε σχεδιάσει την παράμετρο,  $H(t)$ , όπως προκύπτει από την αριθμητική λύση των εξισώσεων καθώς και τρεις θεωρητικές γραμμές που την περικλείουν. Η καμπύλη που περιγράφει καλύτερα τη συμπεριφορά της μέσης τιμής του  $H(t)$  είναι



Σχήμα 1.6: Η εξέλιξη της παραμέτρου Hubble και θεωρητικές καμπύλες για το τετραγωνικό (αριστερά) και τέταρτης τάξης δυναμικό (δεξιά) για τιμή της σύζευξης  $\tilde{M} = 10^{-7} M_{\text{Pl}}$ . Οι θεωρητικές καμπύλες δηλώνουν τις προβλέψεις για την ενεργό παράμετρο  $\bar{w}_{\text{reh}}$ .

αυτή που οδηγεί στο  $\bar{w}_{\text{reh}} = -1/(p+1)$  (πράσινη διακεκομμένη γραμμή), ενώ στη συνέχεια, όταν το NMDC γίνεται αμελητέο ( $\tilde{M} > H(t)$ ), καταλήγουμε στο όριο της ΓΣ (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή). Παρόμοια συμπεριφορά βρίσκουμε και για άλλες τιμές του  $\tilde{M}$ . Αυτή είναι μια σημαντική διαφορά που οδηγεί στο διαχωρισμό από τα μοντέλα της ΓΣ.

Το γεγονός ότι το τετραγωνικό (τετάρτου βαθμού) δυναμικό έχει ως αποτέλεσμα  $\bar{w}_{\text{reh(DC)}} = -1/3$  ( $-1/5$ ) κατά τη περίοδο ταλάντωσης του πεδίου υποδηλώνει ότι η παραγόμενη ακτινοβολία θα είναι μετατοπισμένη προς το ερυθρό, σε μεγαλύτερο βαθμό απ' ότι στην καθιερωμένη ΓΣ όπου το τετραγωνικό (τετάρτου βαθμού) δυναμικό δίνει  $\bar{w}_{\text{reh(GR)}} = 0$  ( $1/3$ ).

## 1.6.3 Οι παράμετροι $N_{\text{reh}}$ και $T_{\text{reh}}$ σε μοντέλα με NMDC

Ο αριθμός των e-folds κατά τη διάρκεια της περιόδου αναθέρμανσης δίνεται από την έκφραση (1.6). Από τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε να υπολογίσουμε το λογάριθμο  $\ln(\epsilon_* V_*/\rho_{\text{end}})$  που εμφανίζεται στην εξίσωση (1.6). Για τα δυναμικά που η τιμή του πεδίου είναι υψωμένη σε κάποια δύναμη  $p$ , η παράμετρος  $\epsilon_*$  δίνεται από την (1.53) και μπορεί να γραφτεί ως προς τα  $\phi_{\text{end}}$  και  $\phi_*$  ως

$$\epsilon_* = \gamma^{-1} \left( \frac{\phi_{\text{end}}}{\phi_*} \right)^{p+2}. \quad (1.65)$$



Επίσης ισχύει  $V_*/\rho_{\text{end}} = V_*/(\gamma^{-1}V_{\text{end}}) = \gamma(\gamma\epsilon_*)^{-p/(p+2)}$ . Συνεπώς για το  $(\epsilon_*V_*/\rho_{\text{end}})$  έχουμε

$$\ln\left(\frac{\epsilon_*V_*}{\rho_{\text{end}}}\right) = \ln(\gamma\epsilon_*)^{\frac{2}{p+2}} = \ln\left(\frac{\phi_{\text{end}}}{\phi_*}\right)^2 = -\frac{2}{(p+2)}\ln\left[1 + \frac{2(p+2)}{\gamma p}N_*\right] \quad (1.66)$$

ενώ η σχέση (1.6) για τα σενάρια με NMDC γράφεται

$$N_{\text{reh}}(n_s, p, \bar{w}_{\text{reh}}) \simeq \frac{4}{1-3\bar{w}_{\text{reh}}}\left[57.4 - N_*(n_s) - \frac{1}{2(p+2)}\ln\left(1 + \frac{2(p+2)}{\gamma p}N_*(n_s)\right)\right], \quad (1.67)$$

όπου

$$N_*(n_s) = \frac{4(p+1) - \gamma p(1-n_s)}{2(p+2)(1-n_s)}. \quad (1.68)$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εξαχθεί και από την αντιστοιχία κατά τη φάση του slow-roll  $q = 2p/(p+2)$  της σχέσης (1.35). Η μικρή διαφοροποίηση προκύπτει από την παύση της προσέγγισης slow-roll που υποδηλώνεται από τον παράγοντα  $\gamma^{-1}$  στην σχέση (1.65).

Για όσο διάστημα το NMDC υπερिσχύει του κανονικού κινητικού όρου η τιμή  $\bar{w}_{\text{reh}}$  στη σχέση (1.67) καθορίζεται από τη δυναμική του NMDC. Στη συνέχεια το  $\bar{w}_{\text{reh}}$  τείνει προς την καθιερωμένη τιμή του, στα πλαίσια της ΓΣ,  $w_{\text{reh(DC)}} \rightarrow w_{\text{reh(GR)}}$  όπως φαίνεται και στο ΣΧ. 1.6. Μπορούμε να διαχωρίσουμε την περίοδο της αναθέρμανσης, στη φάση (DC) όπου υπερिσχύει η επίδραση του NMDC και στη φάση (GR) που υπερिσχύει ο κανονικός κινητικός όρος. Ορίζουμε

$$N_{\text{reh}} = N_{\text{reh(DC)}}\Big|_{\tilde{M} \lesssim H} + N_{\text{reh(GR)}}\Big|_{\tilde{M} > H} \quad (1.69)$$

όπου

$$N_{\text{reh(DC)}} \equiv \frac{1}{3(1+\bar{w}_{\text{reh(DC)}})}\ln\frac{\rho_{\text{end}}}{\rho_{\text{reh(DC)}}}, \quad N_{\text{reh(GR)}} \equiv \frac{1}{3(1+\bar{w}_{\text{reh(GR)}})}\ln\frac{\rho_{\text{reh(DC)}}}{\rho_{\text{reh(GR)}}}. \quad (1.70)$$

Στο όριο υψηλής τριθίης,  $\tilde{M} \ll H_{\text{inf}}$ , περιμένουμε  $N_{\text{reh(GR)}} \rightarrow 0$  εφόσον οι παράμετροι  $\lambda_p$  του πληθωριστικού δυναμικού έχουν πολύ μεγάλες τιμές. Πράγματι, οι κανονικοποιημένες τιμές από το CMB υποδηλώνουν για τη μάζα του πληθωριστικού πεδίου τιμή  $m_\phi \gg 10^{-6}M_{\text{Pl}}$  ενώ για την ιδιο-σύζευξη  $\lambda_\phi \gg 10^{-14}$ . Το πληθωριστικό πεδίο αποδιειγείρεται όταν  $H \sim \tilde{M}$ , για  $\tilde{M} \ll H_{\text{inf}}$ . Συνεπώς η μέση τιμή της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης προσεγγίζεται από το  $w_{\text{reh(DC)}}$ . Η κανονικοποίηση του CMB περιορίζει την παράμετρο του NMDC να είναι  $\tilde{M} \gtrsim 10^{-8-14}M_{\text{Pl}}$  ενώ η εξέλιξη της παραμέτρου Hubble υποδεικνύει ότι  $-2/3 < \bar{w}_{\text{reh}} < 0$ , όπως φαίνεται στο ΣΧ. 1.6, με προσεγγιστική τιμή να δίνεται από την (1.64). Έτσι εκτιμούμε ότι η περίοδος αναθέρμανσης με κυρίαρχο το NMDC περιορίζεται ανάμεσα στις τιμές

$$1 \lesssim N_{\text{reh(DC)}} < 20. \quad (1.71)$$

Η ακριβής τιμή εξαρτάται από τον εκθέτη  $p$  και το  $\tilde{M}$ .

Όσον αφορά τη θερμοκρασία αναθέρμανσης (1.7), μπορεί να γραφτεί ως προς τις παραμέτρους  $p$ ,  $\bar{w}$  και την παρατηρησιακή ποσότητα  $n_s$ ,

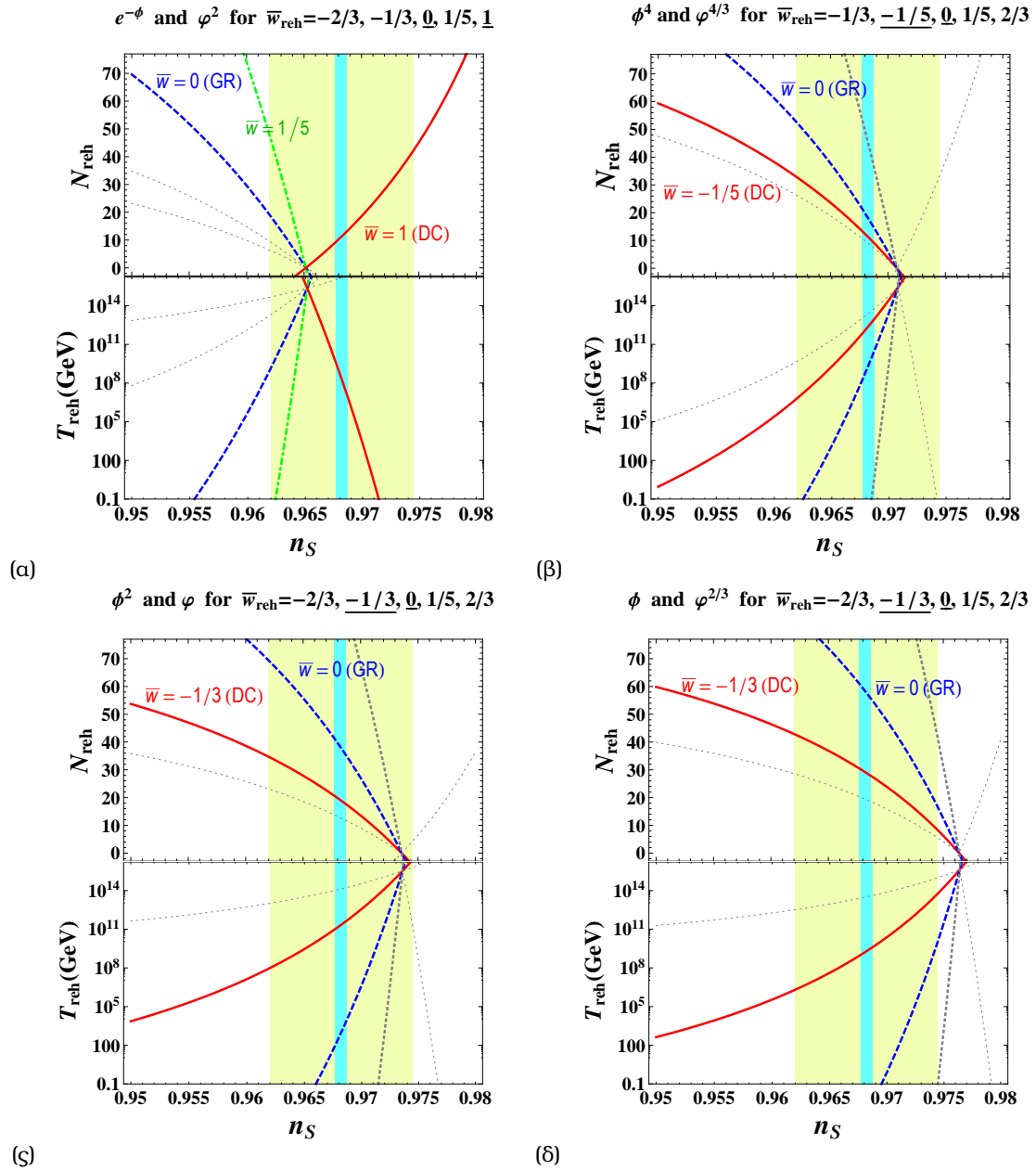
$$T_{\text{reh}}(n_s, p, \bar{w}_{\text{reh}}) = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/4} \lambda_p^{1/4} \left(\frac{p}{\sqrt{3}\lambda_p} \tilde{M}^2 M_{\text{Pl}}^p\right)^{\frac{p}{4p+8}} \left(\frac{30}{\pi^2 g_*}\right)^{1/4} M_{\text{Pl}}^{\frac{4-p}{4}} e^{-\frac{3}{4}(1+\bar{w}_{\text{reh}})N_{\text{reh}}(n_s)}. \quad (1.72)$$

Η μέγιστη θερμοκρασία  $T_{\text{max}} = T_{\text{max}}(p, \lambda_p, \tilde{M})$ , είναι ο συντελεστής μπροστά από το εκθετικό στην (1.72). Για τιμές  $N_{\text{reh}} > 0$  η θερμοκρασία της αναθέρμανσης μειώνεται εκθετικά.

Η παραπάνω συζήτηση υποδηλώνει ότι η άγνωστη τιμή της σύζευξης  $\tilde{M}$  μπορεί να υπολογιστεί από την (έμμεση) μέτρηση της θερμοκρασίας αναθέρμανσης  $T_{\text{reh}}$  και της διάρκειας της,  $N_{\text{reh}}$ . Ο αριθμός  $N_{\text{reh}}$  παρουσιάζεται στο ΣΧ. 1.7 ενώ η θερμοκρασία  $T_{\text{reh}}$  στα ΣΧ. 1.7, 1.8.

## 1.7 Επιλογή μοντέλου

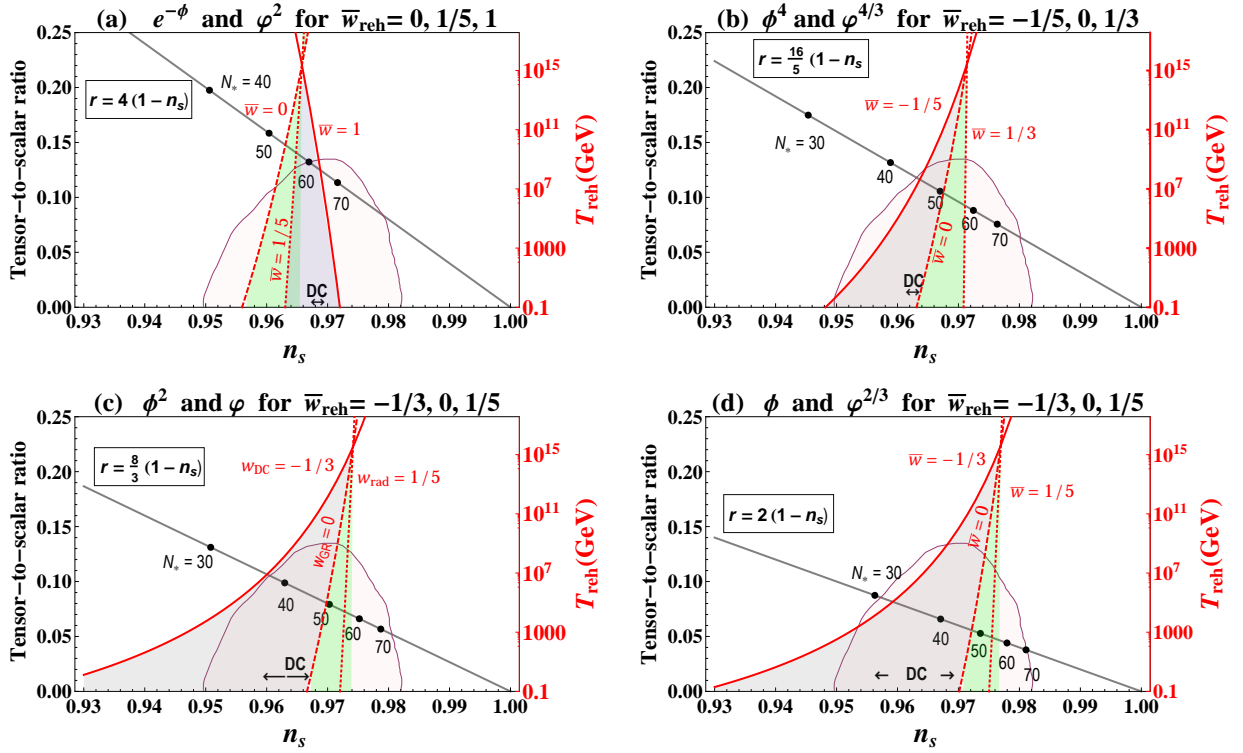
Στο ΣΧ. 1.4 παρουσιάσαμε τις προβλέψεις για τις παραμέτρους  $n_s$  και  $r$  βασικών πληθωριστικών μοντέλων με μη τετριμμένη σύζευξη και χωρίς αυτήν. Όταν η μη τετριμμένη σύζευξη ήταν ασθενής,  $\tilde{M} \gg H_{\text{ivφ}}$ , τα αποτελέσματα ήταν παρόμοια, ενώ μεταβάλλονταν όσο γινόταν πιο ισχυρή. Έτσι για μικρότερες τιμές



Σχήμα 1.7: Οι γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν τις προβλέψεις για τον αριθμό των e-folds,  $N_{\text{reh}}$ , και την θερμοκρασία αναθέρμανσης  $T_{\text{reh}}$ , για μοντέλα  $V(\phi)$ -NMDC και  $V(\varphi)$ -GR. Η πράσινη και η κυανή λωρίδα αντιπροσωπεύουν την αβεβαιότητα και την κεντρική τιμή αντίστοιχα της παραμέτρου  $n_s$  από τον δορυφόρο *Planck*. Οι κόκκινες συνεχείς γραμμές αφορούν μοντέλα με NMDC ενώ οι μπλέ διακεκομμένες τα αντίστοιχά τους με τετριμμένη σύζευξη GR. Στα ίδια σχήματα παρουσιάζονται και τιμές της παραμέτρου  $\bar{w}_{\text{reh}}$  για άλλα σενάρια αναθέρμανσης στη βιβλιογραφία.

της παραμέτρου  $\tilde{M}$  μοντέλα που αποκλείονταν από τα παρατηρησιακά δεδομένα μπορούσαν να ταιριάζουν και πάλι στις προβλεπόμενες τιμές. Στο Σχ. 1.2 παρ' όλα αυτά φαίνεται ότι αν κατά τον πληθωρισμό η σύζευξη είναι ισχυρή,  $\tilde{M} \ll H_{\text{end}}$ , τότε μοντέλα με NMDC είναι ισοδύναμα με αντίστοιχα μοντέλα της ΓΣ με τετριμμένες συζεύξεις, δίνοντας τις ίδιες προβλέψεις  $(n_s, r)$ . Ο εκφυλισμός αυτός εμποδίζει την επιλογή των πληθωριστικών μοντέλων της ΓΣ έναντι αυτών με NMDC. Λύση στο παραπάνω πρόβλημα φαίνεται ότι μπορεί να δώσει η μελέτη της περιόδου αναθέρμανσης καθώς μοντέλα με NMDC προβλέπουν διαφορετική τιμή της παραμέτρου  $\bar{w}_{\text{reh}}$  από αυτά της ΓΣ.

Στο Σχ. 1.7 σχεδιάζουμε τις προβλεπόμενες τιμές των  $N_{\text{reh}}$  και  $T_{\text{reh}}$ . Οι προβλέψεις της ΓΣ δίνονται από τις σχέσεις (1.35) για το  $N_{\text{reh}}$  και (1.37) για το  $T_{\text{reh}}$  ενώ στο σενάριο με NMDC από τις σχέσεις (1.67) και (1.72) αντίστοιχα. Όπως αναφέραμε οι προβλέψεις της ΓΣ και σεναρίων με NMDC ταυτίζονται όταν



Σχήμα 1.8: Στις γραφικές παραστάσεις εμφανίζονται δύο κάθετοι άξονες που παρουσιάζουν την πρόβλεψη της παραμέτρου  $r$  και της θερμοκρασίας  $T_{\text{reh}}$ . Όσον αφορά την περιοχή  $(n_s, r)$  σχεδιάζουμε τα αποτελέσματα από τα δεδομένα του *Planck* TT\_λωΠ 2015. Στο σύστημα αξόνων  $(n_s, T_{\text{reh}})$  σχεδιάζουμε την προβλεπόμενη θερμοκρασία  $T_{\text{reh}}$  με κόκκινη συνεχόμενη γραμμή για μοντέλα με NMDC και με κόκκινη διακεκομμένη για μοντέλα της ΓΣ. Η μωβ περιοχή δηλώνει τα όρια της παραμέτρου  $\bar{w}_{\text{reh}}$  των μοντέλων με NMDC, ενώ η πράσινη περιοχή τα αντίστοιχα αποτελέσματα στην περιοχή  $0 \leq \bar{w}_{\text{reh}} \leq 1/3$  των μοντέλων της ΓΣ.

εφαρμόσουμε την αντιστοιχία (1.47) ανάμεσα στα μοντέλα ενώ μια σημαντική διαφορά εμφανίζεται λόγω της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης  $\bar{w}_{\text{reh}}$  που οδηγεί σε διαφορετικές τιμές για τα  $N_{\text{reh}}$  και  $T_{\text{reh}}$ . Στο Σχ. 1.8 οι προβλέψεις δίνονται από τις εκφράσεις (1.27) για τη ΓΣ και (1.54) για μοντέλα με NMDC.

Παρακάτω πραγματοποιούμε μια σύγκριση των προβλέψεων για τα  $N_{\text{reh}}$  και  $T_{\text{reh}}$  μοντέλων με ΓΣ και NMDC που δίνουν ίδια σχέση για τα  $r = r(n_s)$ . Παίρνουμε τιμές αναφοράς για το  $\bar{w}_{\text{reh}}$  και εισαγάγουμε τον δείκτη GR στα δυναμικά των μοντέλων της ΓΣ.

**(α)**  $r = 4(1 - n_s)$  :  $V(\phi) \propto e^{-\phi}$  και  $V_{\text{GR}}(\varphi) \propto \varphi^2$

Η ανάλυση του *Planck* επιλέγει  $0.967 < n_s < 0.979$  και  $0.082 < r < 0.131$ . Τα μοντέλα  $\varphi^2$  της ΓΣ απορρίπτονται από τα δεδομένα αφού η παραδεκτική τιμή  $N_* > 60$  οδηγεί σε μη προβλεπόμενες τιμές για το  $\bar{w}_{\text{reh}}$ . Το μοντέλο με NMDC μπορεί να κάνει αποδεκτή τη γραμμή  $r = 4(1 - n_s)$  στην περιοχή των  $(r, n_s)$  χάρη στις μεγαλύτερες τιμές που προβλέπει για το  $\bar{w}_{\text{reh}}$ . Το εκθετικό δυναμικό μπορεί να δώσει μια αποδεκτική τιμή για το  $n_s$  μόνο για πολύ μεγάλες τιμές της θερμοκρασίας αναθέρμανσης,  $T_{\text{reh}} > 10^{13}$  GeV.

**(β)**  $r = (16/5)(1 - n_s)$  :  $V(\phi) \propto \phi^4$  και  $V_{\text{GR}}(\varphi) \propto \varphi^{4/3}$

Η ανάλυση του *Planck* επιλέγει  $0.963 < n_s < 0.98$  και  $0.063 < r < 0.117$ . Και τα δύο μοντέλα ταιριάζουν καλά στα δεδομένα. Για μια συγκεκριμένη τιμή  $n_s$  το μοντέλο με NMDC προβλέπει υψηλότερη θερμοκρασία και μικρότερη διάρκεια για την περίοδο αναθέρμανσης. Για την αντίστοιχη τιμή  $\bar{w}_{\text{reh(DC)}}$  και επιλέγοντας  $N_{\text{reh}} \sim 10$  υπολογίζουμε  $n_s \sim 0.968$  και  $T_{\text{reh}} \sim 10^{12}$  GeV, το οποίο είναι τρεις τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από το αντίστοιχο αποτέλεσμα της ΓΣ. Αν μελλοντικές παρατηρήσεις περιορίσουν κι άλλο τις τιμές,  $n_s < 0.964$ , τότε η γραμμή  $r = (16/5)(1 - n_s)$  γίνεται αποδεκτή μόνο για μοντέλα με NMDC.

**(γ)**  $r = (8/3)(1 - n_s)$  :  $V(\phi) \propto \phi^2$  και  $V_{\text{GR}}(\varphi) \propto \varphi$

Η ανάλυση του *Planck* επιλέγει  $0.96 < n_s < 0.98$  και  $0.051 < r < 0.105$ . Και τα δύο μοντέλα ταιριάζουν στις παρατηρήσεις με το NMDC να προβλέπει και πάλι μικρότερη και θερμότερη περίοδο αναθέρμανσης. Το μοντέλο της ΓΣ υποδηλώνει μια παρατεταμένη περίοδο αναθέρμανσης για μικρότερες τιμές του  $n_s$ . Για  $N_{\text{reh}} \sim 10$  και την προβλεπόμενη τιμή  $\bar{w}_{\text{reh(DC)}}$  βρίσκουμε  $n_s \sim 0.97$  και  $T_{\text{reh}} \sim 10^{13}$  GeV, τέσσερις τάξεις μεγαλύτερη από το αντίστοιχο μοντέλο της ΓΣ. Αν τελικά  $n_s < 0.967$  υπερσχύει το μοντέλο με NMDC και το τριτομμένο σενάριο απορρίπτεται.

**(6)**  $r = 2(1 - n_s)$  :  $V(\phi) \propto \phi$  και  $V_{\text{GR}}(\varphi) \propto \varphi^{2/3}$

Η ανάλυση του *Planck* επιλέγει  $0.957 < n_s < 0.981$  και  $0.037 < r < 0.085$ , με όμοια συμπεράσματα με παραπάνω. Για  $N_{\text{reh}} \sim 10$  και  $\bar{w}_{\text{reh(DC)}}$  βρίσκουμε  $n_s \sim 0.974$  και  $T_{\text{reh}} \sim 10^{13}$  GeV, τέσσερις τάξεις μεγαλύτερη από το αντίστοιχο μοντέλο της ΓΣ.

Πέρα από τις διαφορές στη θερμοκρασία και τη διάρκεια της περιόδου αναθέρμανσης ανάμεσα στα δύο σενάρια δείξαμε ότι η κανονικοποίηση του CMB επιτρέπει μεγαλύτερη μάζα στο πληθωριστικό πεδίο με NMDC σε σχέση με την τριτομμένη περίπτωση. Η ελάττωση του ρυθμού διάσπασης του πληθωριστικού πεδίου μπορεί να οδηγήσει σε παραγωγή πολύ βαρέων σωματιδίων,  $m_\phi \gg 10^{13}$  GeV.

Τα επερχόμενα παρατηρησιακά δεδομένα θα αποδώσουν εκ νέου όρια στις προβλέψεις του πληθωρισμού. Μελλοντικές μετρήσεις των  $n_s$ ,  $r$  και της θερμοκρασίας αναθέρμανσης από πειράματα όπως τα EUCLID [36], PRISM [37], LiteBIRD [38] και το DECIGO [39] θα δώσουν πιο συγκεκριμένες πληροφορίες για τη μορφή του πληθωριστικού δυναμικού και την επιλογή του κατάλληλου μοντέλου ανάμεσα στη δεδομένη ΓΣ και τροποποιημένες θεωρίες.

## 1.8 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το σενάριο της αναθέρμανσης για πληθωριστικά δυναμικά που περιγράφονται από μια Λαγκρανζιανή με μη τριτομμένες συζεύξεις της παραγώγου του πεδίου με τον ταυσιτή Einstein. Τα μοντέλα με NMDC ενσωματώνουν νέα χαρακτηριστικά στο σενάριο του πληθωρισμού και επεκτείνουν το χώρο των παραμέτρων που τα διέπουν. Κατά τη διάρκεια του slow-roll η δυναμική των μοντέλων με NMDC είναι πρακτικά ίδια με αντίστοιχά τους με τριτομμένες συζεύξεις. Δείξαμε ότι ο εκφυλισμός αυτός στις προβλέψεις των παραμέτρων  $r = r(n_s)$  αίρεται αν ληφθεί υπόψιν η περίοδος της αναθέρμανσης.

Ο τρόπος με τον οποίο το σύμπαν εξελίσσεται κατά τη φάση της αναθέρμανσης μεταβάλλει τις προβλέψεις αυτές αφού καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο οι κλίμακες του CMB εισαγάγονται ξανά στην πληθωριστική περίοδο. Η άγνοιά μας για την φάση αναθέρμανσης παραμετρίζεται από την καταστατική εξίσωση που την διέπει, τη διάρκειά της  $N_{\text{reh}}$ , και τη θερμοκρασία της  $T_{\text{reh}}$ . Καταλήγουμε σε τροποποιημένες εκφράσεις για τα  $N_{\text{reh}}$  και  $T_{\text{reh}}$  ως προς την παρατηρήσιμη παράμετρο  $n_s$  και την παράμετρο  $\tilde{M}$  των μοντέλων με NMDC.

Χρησιμοποιώντας το λογικό επιχείρημα ότι η καταστατική εξίσωση μετά τον πληθωρισμό καθορίζεται κυρίως από την ταλαντωτική συμπεριφορά του πληθωριστικού πεδίου γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού του κάναμε μια συγκριτική ανάλυση των μοντέλων με μη τριτομμένη σύζευξη έναντι των καθιερωμένων μοντέλων στα πλαίσια της ΓΣ. Για τα μοντέλα της ΓΣ χρησιμοποιήσαμε για την καταστατική εξίσωση μια τιμή αναφοράς 0, θεωρώντας προσεγγιστικά ένα τετραγωνικό δυναμικό για μικρές τιμές του πεδίου, αλλά και 1/5 για σενάρια αναθέρμανσης που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία. Για τα μοντέλα με NMDC οι τιμές της καταστατικής εξίσωσης βρέθηκαν αρνητικές, είτε  $-1/3$  ή  $-1/5$ , λόγω της μη τριτομμένης δυναμικής των μοντέλων αυτών. Έτσι δείξαμε ότι η περίοδος αναθέρμανσης μπορεί να παίζει σημαντικό ρόλο στο διαχωρισμό των εκφυλισμένων μοντέλων.

Τα κύρια αποτελέσματά μας συνοψίζονται στα σχήματα 1.7 και 1.8. Το γενικό συμπέρασμα είναι ότι μοντέλα με NMDC προβλέπουν πολύ υψηλότερες θερμοκρασίες για την περίοδο αναθέρμανσης ενώ παράλληλα επιτρέπουν μεγαλύτερο εύρος στις παρατηρήσιμες παραμέτρους  $(n_s, r)$  απ' ό,τι τα αντίστοιχα μοντέλα της ΓΣ. Μελλοντικές μετρήσεις θα περιορίσουν περαιτέρω το εύρος τιμών του  $n_s$  το οποίο μεταφράζεται στον εύρος των e-folds  $N_*$  και ισοδύναμα στο εύρος της θερμοκρασίας αναθέρμανσης  $T_{\text{reh}}$ . Για ένα δεδομένο μοντέλο οι παρατηρήσεις από το CMB μπορούν να υποδείξουν την ενεργό παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης κατά τη διάρκεια της αναθέρμανσης (ή άμεσα την θερμοκρασία αναθέρμανσης [39]) ελέγχοντας έτσι πιθανώς την παρουσία ή μη του NMDC στη δυναμική του πληθωριστικού πεδίου. Επιπλέον μια τέτοια μελέτη θα δώσει και μια ένδειξη για την τάξη μεγέθους της σύζευξης  $\tilde{M}$  εφόσον αυτή υφίσταται.



## Κεφάλαιο 2

# Βαρυτική Κατάρρευση σε Θεωρίες με Γενικευμένους Κινητικούς Όρους Βαθμωτού Πεδίου

### 2.1 Εισαγωγή

Κατά τη μελέτη της βαρυτικής κατάρρευσης της ύλης προς τη δημιουργία ενός αστέρα νετρονίου, οι Oppenheimer και Volkov [47] και Tolman [48], προχώρησαν πέρα από τη Νευτώνια βαρυτική θεωρία και πρότειναν πως πρέπει να θεωρηθεί ένα γενικότερο πλαίσιο μελέτης λόγω των υψηλών μαζών και πυκνοτήτων. Βασίζοντας την ιδέα τους στη γενικότερη αντιμετώπιση της ισορροπίας (equilibrium) μιας σφαιρικά συμμετρικής κατανομής ύλης τόνισαν ότι η βαρυτική επίδραση της κινητικής ενέργειας της καταρρέουσας μάζας δεν πρέπει να αμεληθεί.

Τις εργασίες αυτές ακολούθησαν εκτενείς μελέτες της βαρυτικής κατάρρευσης ενός σφαιρικού κελύφους με μάζα και της σταθερότητάς του. Η στρατηγική που ακολουθήθηκε ήταν να θεωρηθεί ένα ρευστό με ενσωματωμένη κάποια συμμετρία και στη συνέχεια να λυθούν οι εξισώσεις του Einstein για μια συγκεκριμένη καταστατική εξίσωση (για πρόσφατη μελέτη υπάρχει στο [50]). Οι μελέτες αυτές έχουν το μειονέκτημα ότι δεν μπορούν να διακρίνουν τη δυναμική της καταρρέουσας ύλης. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει παραμετροποιώντας την κατάρρευση της μάζας με ένα βαθμωτό πεδίο. Με τον τρόπο αυτό η δυναμική της μάζας υπό κατάρρευση λαμβάνεται υπόψη μέσω της εξίσωσης Klein-Gordon του βαθμωτού πεδίου. Η βαρυτική κατάρρευση βαθμωτών πεδίων έχει μελετηθεί εκτενώς στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Από τις αρχές της δεκαετίας του '90, μοντέλα με βαθμωτά πεδία που καταλήγουν σε naked singularity έχουν βρεθεί αριθμητικά από τον Choptuik [52] και αναλυτικά από τον Christodoulou [53–55]. Τα μοντέλα αυτά παραβιάζουν την Υπόθεση Κοσμικής Λογοκρισίας (Cosmic Censorship Conjecture) του Penrose [56]. Στις εργασίες αυτές το βαθμωτό πεδίο είναι άμαζο και χωρίς αλληλεπιδράσεις με τον εαυτό του. Μία κλάση δυναμικών βρέθηκε στο [57], όπου ομαλές αρχικές συνθήκες εξελίσσονται προς τη δημιουργία μιας γυμνής ανωμαλίας (naked singularity) και οι ενεργειακές συνθήκες μπορούν να παραβιαστούν. Ο ρόλος των γυμνών ανωμαλιών στη βαρυτική εστίαση (gravitational lensing) μελετήθηκε στο [58].

Έχουν μελετηθεί μοντέλα κατάρρευσης με βαθμωτά πεδία υπό την επίδραση δυναμικών που καθορίζουν τη δημιουργία ανωμαλίας (singularity). Η διαδικασία κατάρρευσης ενός βαθμωτού πεδίου σε ανωμαλία είναι αρκετά διαφορετική από αντίστοιχα μοντέλα με ύλη γύρω από μία κεντρική ανωμαλία. Στην περίπτωση αυτή η ανωμαλία μπορεί να βρίσκεται στο σύνορο της “σφαίρας” του βαθμωτού πεδίου και να είναι naked. Για το λόγο αυτό η λύση του βαθμωτού πεδίου πρέπει να ενωθεί με μια κατάλληλα επιλεγμένη εξωτερική λύση και να μελετηθεί η συμπεριφορά των ακτινικών γεωδαιτικών.

Οι συνθήκες κάτω από τις οποίες η βαρύτητα, συζευγμένη με βαθμωτά πεδία που αλληλεπιδρούν με τον εαυτό τους, οδηγεί στη δημιουργία μιας ανωμαλίας μελετήθηκε στο [59]. Στην εργασία αυτή βρέθηκε ότι η δημιουργία ανωμαλίας από βαθμωτά πεδία παρουσία δυναμικού καθορίζεται πλήρως από τη συνθήκη ολοκληρωσιμότητας μιας συνάρτησης που σχετίζεται με την πυκνότητα ενέργειας του μοντέλου. Αν η συνάρτηση αυτή συγκλίνει δεν είναι δυνατή η δημιουργία ενός φαινομένου ορίζοντα (apparent horizon) που θα καλύψει την ανωμαλία και έτσι δημιουργείται μια γυμνή ανωμαλία. Μια κλάση μοντέλων βαθμωτού πεδίου υπό κατάρρευση με μη μηδενικό δυναμικό έχουν κατασκευαστεί στο [60]. Τα μοντέλα αυτά μπορούσαν να

έχουν ως τελική κατάσταση μια γυμνή ανωμαλία, ενώ οι παράμετροι της θεωρίας ικανοποιούσαν την ασθενή ενεργειακή συνθήκη (weak energy condition). Ειδικότερα βρέθηκε ότι η δημιουργία μια μελανής οπής ή μιας γυμνής ανωμαλίας ως τελική κατάσταση καθορίζεται από το ρυθμό κατάρρευσης. Το αποτέλεσμα αυτό δηλώνει ότι σε αυτή τη περίπτωση η Κοσμική Λογοκρισία (Cosmic Censorship) παραβιάζεται.

Η επίδραση της κοσμολογικής σταθεράς στην τελική κατάσταση ενός σφαιρικού ομογενούς (ή μη) νέφους “σκόνης” έχει μελετηθεί στα [61–64]. Στις εργασίες αυτές βρέθηκε ότι ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες υπό τις οποίες πραγματοποιείται η κατάρρευση, το αποτέλεσμα μπορεί να είναι η δημιουργία είτε μιας μελανής οπής ή μιας naked singularity [61]. Στο [63] αποδεικνύεται ότι ο όρος της κοσμολογικής σταθεράς επιβραδύνει την κατάρρευση της ύλης, περιορίζοντας επιπλέον το μέγεθος της σχηματιζόμενης μελανής οπής. Η δημιουργία μελανών οπών ή των naked singularities μελετάται στο [65], χρησιμοποιώντας ένα ομογενές χρονοεξαρτώμενο βαθμωτό πεδίο, συζευγμένο με τη βαρύτητα με αρνητική κοσμολογική σταθερά, υπό την επίδραση ενός εκθετικού δυναμικού. Στο [66] γίνεται αντίστοιχη μελέτη ενός φορτισμένου βαθμωτού πεδίου σε χωρόχρονο de Sitter.

Ως επέκταση της καθιερωμένης βαρύτητας υπάρχουν πιο γενικές θεωρίες που περιλαμβάνουν βαθμωτά πεδία και ονομάζονται θεωρίες βαθμωτού-τανυστή (scalar-tensor theories). Μια κατηγορία των θεωριών αυτών, η οποία έχει μελετηθεί εκτενώς, είναι η θεωρία Horndeski [1]. Αυτή είναι η γενικότερη θεωρία βαρύτητας η οποία καταλήγει σε εξισώσεις δεύτερης τάξης ως προς τα πεδία της και έχει ως υποσύνολο μια θεωρία η οποία διατηρεί την συμμετρία μετατόπισης (shift symmetry ή Galilean symmetry)  $\phi \rightarrow \phi + b_\mu x^\mu + c$  [3, 71, 145, 146]. Η δράση της θεωρίας Horndeski γράφεται ως

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5), \quad (2.1)$$

όπου

$$\mathcal{L}_2 = G_2(\phi, X), \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X) \square \phi, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X) R + G_{4X}(\phi, X) [(\square \phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi], \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - \frac{1}{6} G_{5X}(\phi, X) [(\square \phi)^3 + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\nu \nabla^\alpha \phi \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi - 3 \square \phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi]. \quad (2.5)$$

Οι συναρτήσεις  $G_i$ , με  $i = 2, 3, 4, 5$ , εξαρτώνται από το βαθμωτό πεδίο  $\phi$  και την κινητική του ενέργεια  $X = -\frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi$  ενώ το  $G_{iX}$  δηλώνει τη μερική παραγωγή του  $G_i$  ως προς το  $X$ ,  $G_{iX} = \frac{\partial G_i}{\partial X}$ .

Ένας κομμάτι της παραπάνω δράσης, που έχει μελετηθεί εκτενώς, είναι η σύζευξη της παραγώγου του βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή Einstein όπως αυτή εμφανίζεται στην δράση Horndeski.

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} - \lambda G^{\mu\nu}) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right], \quad (2.6)$$

το οποίο εμπεριέχει και τον κανονικό κινητικό όρο. Σημειώνουμε εδώ ότι ο όρος  $\lambda G^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$  συζευγνύει τον κινητικό όρο του βαθμωτού πεδίου άμεσα στην βαρύτητα.

Τοπικές λύσεις της παραπάνω δράσης που εμπεριέχει τον μη τετριμμένο κινητικό όρο έχουν μελετηθεί σε διάφορες πρόσφατες εργασίες [6] όπου αποφεύγεται το θεώρημα no-hair στη θεωρία Horndeski [73]. Στις εργασίες αυτές έχουν βρεθεί λύσεις σφαιρικά συμμετρικών μελανών οπών οι οποίες τείνουν ασυμπτωτικά σε χωρόχρονο anti-de Sitter. Στις λύσεις αυτές το βαθμωτό πεδίο απειρίζεται στον οριζοντία της μελανής οπής. Ένας τρόπος να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό, διατηρώντας την συμμετρία μετατόπισης, είναι η εισαγωγή μιας γραμμικής εξάρτησης του βαθμωτού πεδίου από το χρονική συνιστώσα [74, 75] ενώ θέματα σταθερότητας της λύσης αυτής μελετήθηκαν από στα [76, 77]. Πιο πρόσφατα υπάρχει αρκετό ενδιαφέρον ως προς τη μελέτη της δημιουργίας αστέρων νετρονίων και άλλων συμπαγών αντικειμένων στο σύμπαν στη θεωρία Horndeski [79–82]. Το μοντέλο ενός αργά περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων έχει μελετηθεί στο [83].

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η παρουσία της σύζευξης αυτής με τον τανυστή Einstein δρα ως όρος τριτής στην περίοδο του πληθωρισμού επεκτείνοντας τη φάση slow-roll του πληθωριστικού πεδίου [9, 84, 85, 147]. Επιπλέον όπως δείχνουμε και στο Παράρτημα Δ', στο τέλος του πληθωρισμού κατά τη περίοδο της αναθέρμανσης εμφανίζεται μείωση στον αριθμό των παραγόμενων σωματιδίων όσο αυξάνεται η επίδραση της σύζευξης [154]. Στο κεφάλαιο 1 μελετήσαμε πως η σύζευξη αυτή μπορεί να οδηγήσει στον διαχωρισμό των εκφυλισμένων πληθωριστικών μοντέλων κατά τη περίοδο του reheating [86].

Η παραπάνω συζήτηση υποδεικνύει ότι η παρουσία της σύζευξης των παραγώγων του βαθμωτού πεδίου με τη βαρύτητα μέσω του τανυστή Einstein επηρεάζει σημαντικά την κινηματική κατάσταση του βαθμωτού

πεδίου. Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε αν η διαδικασία της βαρυτικής κατάρρευσης ενός βαθμωτού πεδίου μπορεί επίσης να επηρεαστεί από μια τέτοια σύζευξη. Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε επιπλέον την κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$ , υποθέτουμε ότι το βαθμωτό πεδίο είναι ομογενές (εξαρτάται μόνο από τη χρονική συνιστώσα) και ότι η υπό κατάρρευση περιοχή είναι μια μετρική FRW. Θεωρώντας επίσης ότι το βαθμωτό πεδίο δεν αλληλεπιδρά με τον εαυτό του μελετάμε τη βαρυτική κατάρρευση του βαθμωτού πεδίου και βρίσκουμε αριθμητικά, αλλά και με προσεγγιστικές αναλυτικές εκφράσεις, ότι δημιουργείται ένας φαινόμενος ορίζοντας που ορίζει μια παγιδευμένη περιοχή (trapped surface) και καλύπτει την ανωμαλία (singularity). Υπολογίζοντας τις λεγόμενες πρώτες και δεύτερες θεμελιώδεις μορφές (fundamental forms) της μετρικής FRW και μιας μετρικής  $AdS_4$  Schwarzschild, ακολουθώντας τη μελέτη του [59], και ενώνοντας τις δύο αυτές γεωμετρίες δείχνουμε ότι η αρχική FRW καταρρέει σε μια μελάνη οπή  $AdS_4$  Schwarzschild. Τέλος κάνοντας μια κατάλληλη υπόθεση για την πυκνότητα ενέργειας ώστε να οδηγεί τη γεωμετρία σε κατάρρευση κάνουμε ανακατασκευή του αντίστοιχου δυναμικού που λύνει τις εξισώσεις κίνησης.

## 2.2 Γενικός φορμαλισμός μη τετριμμένης σύζευξης σε χωρόχρονο FRW

Ένα γενικευμένο μοντέλο της θεωρίας αποτελείται από την κοσμολογική σταθερά, τη κινηματική σύζευξη του πεδίου με τον ταυιστή Einstein και ένα δυναμικό για το βαθμωτό πεδίο. Πιο συγκεκριμένα η δράση παίρνει τη μορφή

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} - \left[ \frac{1}{2}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\lambda G^{\mu\nu} \right] \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\}. \quad (2.7)$$

Μεταβολή της δράσης ως προς τη μετρική  $g^{\mu\nu}$  οδηγεί στις εξισώσεις Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G [T_{\mu\nu} + \lambda \Theta_{\mu\nu}], \quad (2.8)$$

όπου

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.9)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{ab}\partial_a \phi \partial_b \phi - g_{\mu\nu}V(\phi), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - 2\partial_a \phi \partial_{(\mu} \phi R_{\nu)}^a + \frac{1}{2}G_{\mu\nu}(\partial\phi)^2 - \nabla^a \phi \nabla^b \phi R_{\mu a \nu b} - \nabla_\mu \nabla^a \phi \nabla_\nu \nabla_a \phi \\ & + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \square \phi - g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2}\nabla^a \nabla^b \phi \nabla_a \nabla_b \phi + \frac{1}{2}(\square\phi)^2 - \nabla_a \phi \nabla_b \phi R^{ab} \right], \end{aligned}$$

ενώ μεταβολή της ως προς το βαθμωτό πεδίο  $\phi$  οδηγεί στην εξίσωση Klein-Gordon

$$\square\phi - V_\phi = 0, \quad (2.11)$$

όπου  $V_\phi$  δηλώνει τη παραγώγιση του δυναμικού ως προς το πεδίο  $\phi$  και  $\square\phi = (-g)^{-1/2}\partial_\mu [(-g)^{1/2}[g^{\mu\nu} + \lambda G^{\mu\nu}]\partial_\nu \phi]$ .

Για να μελετήσουμε τη βαρυτική κατάρρευση του βαθμωτού πεδίου υποθέτουμε ότι είναι μόνο χρονικά εξαρτώμενο και ότι η υπό κατάρρευση περιοχή είναι μια γεωμετρία FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.12)$$

Για ευκολία ορίζουμε τις αδιάστατες ποσότητες

$$\begin{aligned} t & \equiv M_{pl} \cdot t, \quad \lambda \equiv \lambda \cdot M_{pl}^2, \quad k \equiv \frac{k}{M_{pl}^2}, \quad \Lambda \equiv \frac{\Lambda}{M_{pl}^2}, \\ \phi & \equiv \frac{\phi}{M_{pl}}, \quad V(\phi) = \frac{V(\phi)}{M_{pl}^4}, \quad V_\phi = \frac{V_\phi(\phi)}{M_{pl}^3}. \end{aligned} \quad (2.13)$$



Η εξίσωση Klein-Gordon γίνεται

$$\left(1 + \frac{3\lambda(\dot{a}^2(t) + k)}{a^2(t)}\right) \ddot{\phi}(t) + \left(3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + 3\lambda\left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + 2\frac{\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} + \frac{\dot{a}(t)k}{a^3(t)}\right)\right) \dot{\phi}(t) = -V_\phi. \quad (2.14)$$

ενώ tt-συνιστώσα των εξισώσεων Einstein (εξίσωση Friedmann) παίρνει τη μορφή

$$\frac{3(k + \dot{a}^2(t))}{a^2(t)} - \Lambda = 4\pi \left\{ \left[ 1 + \lambda \left( 6\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + 3\frac{(k + \dot{a}^2(t))}{a^2(t)} \right) \right] \dot{\phi}^2(t) + 2V(\phi) \right\}. \quad (2.15)$$

Στην επόμενη ενότητα μελετάμε λεπτομερώς τις δύο εξισώσεις (2.14) και (2.15).

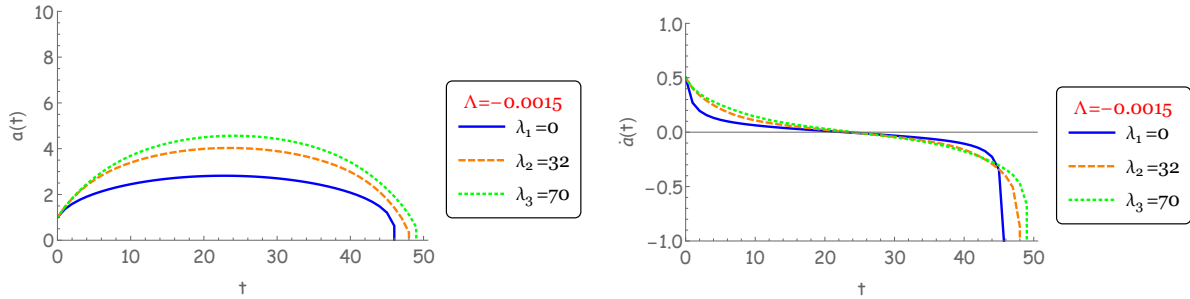
## 2.3 Βαρυτική κατάρρευση απουσία δυναμικού

Υποθέτουμε ότι ο υπο κατάρρευση χώρος είναι επίπεδος,  $k = 0$ , και θεωρούμε αρχικά την περίπτωση όπου το βαθμωτό πεδίο δεν βρίσκεται παρουσία κάποιου δυναμικού,  $V(\phi) = 0$ . Οι εξισώσεις (2.14) και (2.15) παίρνουν τότε τη μορφή

$$\left(1 + \frac{3\lambda\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) \ddot{\phi}(t) + \left(3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + 3\lambda\left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + 2\frac{\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)\right) \dot{\phi}(t) = 0. \quad (2.16)$$

$$\frac{3\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \Lambda = 4\pi \left(1 + 9\lambda\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) \dot{\phi}^2(t). \quad (2.17)$$

Σημειώνουμε ότι εφόσον η δράση (2.7) είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό μετατόπισης (shift symmetry), λόγω της απουσίας δυναμικού, μόνο παράγωγοι του βαθμωτού πεδίου  $\phi$  εμφανίζονται στις εξισώσεις κίνησης. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να λύσουμε την εξίσωση (2.17) ως προς  $\dot{\phi}(t)$  και να το αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2.16). Οδηγούμαστε έτσι σε μια εξίσωση που περιλαμβάνει μόνο το  $a(t)$  και τις παραγώγους του την οποία λύνουμε αριθμητικά. Απεικονίζουμε τη συμπεριφορά του παράγοντα  $a(t)$  στο Σχ. 2.1.



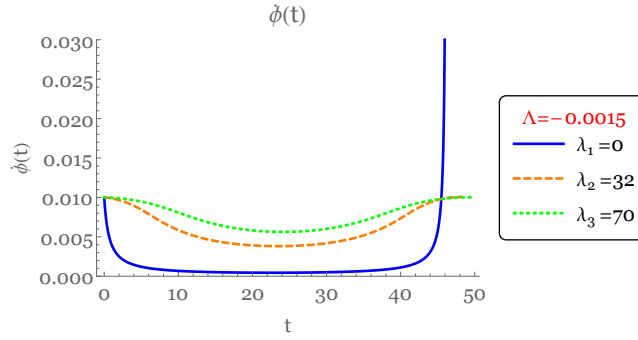
(α) Παράγοντας  $a(t)$  για διάφορες τιμές της σύζευξης  $\lambda$ . Η ανωμαλία δημιουργείται όταν  $a(t) = 0$ .

(β) Παράγωγος  $\dot{a}(t)$ . Η κατάρρευση ξεκινά όταν  $\dot{a}(t) = 0$ .

Σχήμα 2.1: Συμπεριφορά του παράγοντα  $a(t)$  και της παραγώγου του.

Η κατάρρευση ξεκινά όταν  $\dot{a}(t) < 0$  ενώ η ανωμαλία δημιουργείται τη χρονική στιγμή  $t_s$  όπου  $a(t_s) = 0$ . Μια προσεγγιστική αναλυτική λύση στο Παράρτημα επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα αυτό στην ειδική περίπτωση  $\lambda = 0$ ,  $V = 0$ ), αλλά και στην πιο γενικευμένη περίπτωση  $\lambda \neq 0$ ,  $V = \lambda\dot{\phi}^2$ . Η συμπεριφορά (της παραγώγου) του βαθμωτού πεδίου όπως θα δούμε και στη συνέχεια βρίσκεται αντικαθιστώντας την αριθμητική λύση για το  $a(t)$  στην (2.16) και απεικονίζεται στο Σχ. 2.2. Παρατηρούμε ότι καθώς η τιμή της σύζευξης  $\lambda$  αυξάνεται, η διάρκεια της κατάρρευσης αυξάνεται και συνεπώς η χρονική στιγμή της δημιουργίας της ανωμαλίας μετατοπίζεται σε μεταγενέστερες στιγμές. Η συμπεριφορά αυτή του παράγοντα  $a(t)$  μπορεί να γίνει κατανοητή από το γεγονός ότι η σύζευξη  $\lambda$  όπως έχουμε αναφέρει δρα ως όρος τριβής [9, 84, 85, 147, 154] οπότε η διαδικασία της κατάρρευσης επιβραδύνεται.

Ακόμα ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα είναι ότι τη χρονική στιγμή  $t = t_{singularity}$  για  $\lambda = 0$  η παράγωγος του βαθμωτού πεδίου εκτινάσσεται σε απείρωσ υψηλές τιμές ενώ παρουσία της μη τριτοβάθμιας σύζευξης παίρνει πεπερασμένες τιμές. Όπως αναφέραμε και παραπάνω αντικαθιστώντας την αριθμητική λύση για το



Σχήμα 2.2: Αριθμητική λύση της παραγώγου του βαθμωτού πεδίου,  $\dot{\phi}(t)$ , για διάφορα  $\lambda$ .

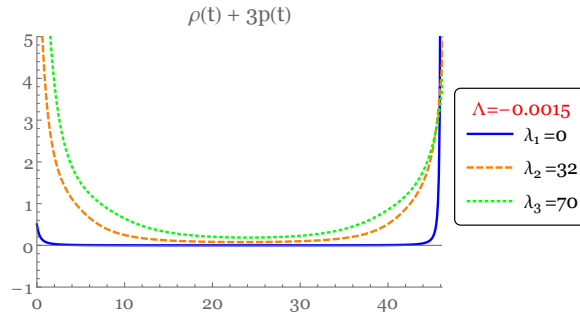
$a(t)$  στην (2.16) βρίσκουμε το αποτέλεσμα που απεικονίζεται στο Σχ. 2.2

Στις αριθμητικές λύσεις έχουμε χρησιμοποιήσει κατάλληλες τιμές των παραμέτρων ώστε να ικανοποιείται η ασθενής συνθήκη ενέργειας (weak energy condition)  $\rho(t) + 3p(t) \geq 0$  που απαιτείται σε σενάρια βαρυτικής κατάρρευσης. Στη συνθήκη αυτή η πυκνότητα ενέργειας και η πίεση δίνονται στο μοντέλο αυτό από τις σχέσεις

$$\rho(t) = T_{00} + \lambda\Theta_{00} = \frac{\dot{\phi}^2(t)}{2} - \frac{9}{2}\lambda\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}, \quad (2.18)$$

$$p(t) = T_{ii} + \lambda\Theta_{ii} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\lambda \left( \dot{a}^2(t)\dot{\phi}^2(t) + 2a(t)\dot{\phi}(t) \left( \dot{\phi}(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}(t)\ddot{\phi}(t) \right) \right)}{2a^2(t)}. \quad (2.19)$$

Στο Σχ. 2.3 απεικονίζουμε την ασθενή συνθήκη ενέργειας για διάφορες τιμές του  $\lambda$  και παρατηρούμε ότι  $\rho(t) + 3p(t) \geq 0$  σε κάθε περίπτωση.



Σχήμα 2.3: Η συνθήκη  $\rho(t) + 3p(t) \geq 0$  ικανοποιείται για κατάλληλες επιλογές του  $\lambda$ .

### 2.3.1 Δημιουργία του εν δυνάμει ορίζοντα (apparent horizon)

Για να μελετήσουμε το σχηματισμό μιας γυμνής (naked) ανωμαλίας ή μιας μελανής οπής πρέπει να διερευνήσουμε τη δυναμική ενός εν δυνάμει ορίζοντα. Αναλύουμε υπο ποιές συνθήκες σχηματίζονται παγιδευμένες επιφάνειες και διερευνούμε το πως επηρεάζονται οι ιδιότητές τους από την ύπαρξη της σύζευξης  $\lambda$ .

Αρχικά μελετάμε την απλουστευμένη περίπτωση με  $\lambda = 0$ . Τότε ο ταυσοτής ενέργειας-ορμής γίνεται

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(-\epsilon, p, p, p),$$

με

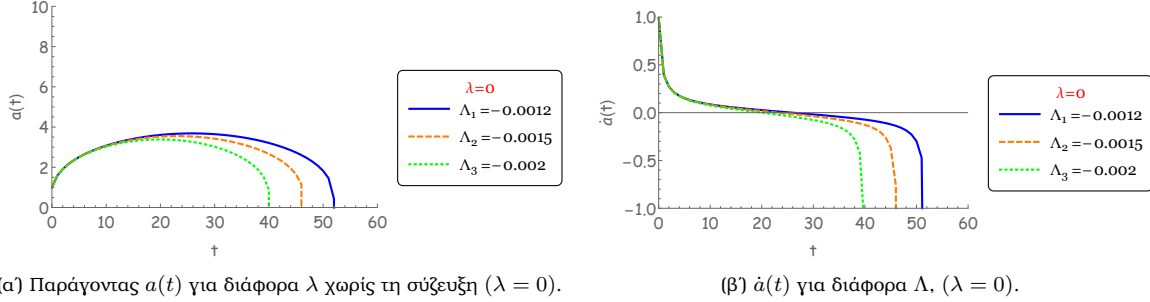
$$\epsilon = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad \text{και} \quad p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.20)$$

Δουλεύοντας με αδιάτατες ποσότητες οι εξισώσεις κίνησης απλουστεύονται στις συνήθεις σχέσεις

$$\text{Friedmann : } \quad \dot{a}^2(\tau) = \frac{8\pi}{3} a^2(t)\epsilon , \quad (2.21)$$

$$\text{Klein-Gordon : } \quad \ddot{\phi}(t) + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \dot{\phi}(t) = -V_\phi(\phi) . \quad (2.22)$$

Για  $V(\phi) = 0$  οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να λυθούν αριθμητικά για διάφορες τιμές του  $\Lambda$  όπως δείχνουμε στο Σχ. 2.4



Σχήμα 2.4: Σχηματισμός της ανωμαλίας παρουσία αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς, χωρίς σύζευξη ( $\lambda = 0$ ).

Στο Παράρτημα βρίσκουμε μια αναλυτική λύση για αυτή τη περίπτωση

$$a(t) = \left( \frac{\cosh(\sqrt{3\Lambda}(t - C_1))}{\cosh(\sqrt{3\Lambda}C_1)} \right)^{1/3} , \quad (2.23)$$

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι για θετική κοσμολογική σταθερά ο παράγοντας  $a(t)$  δεν μηδενίζεται, αντιθέτως αυξάνεται συνεχόμενα, συνεπώς το πεδίο δεν καταλήγει σε ανωμαλία. Για  $\Lambda < 0$  όμως έχουμε

$$a(t) = \left( \frac{\cos(\sqrt{3|\Lambda|}(t - C_1))}{\cos(\sqrt{3|\Lambda|}C_1)} \right)^{1/3} . \quad (2.24)$$

Τότε είναι προφανές ότι

$$a \left( t = C_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3|\Lambda|}} \right) = 0 ,$$

Συνεπώς η ανωμαλία δημιουργείται την χρονική στιγμή  $t_s = C_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3|\Lambda|}}$ . Διαφορίζοντας την (2.24) βρίσκουμε

$$\dot{a} \left( t = C_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3|\Lambda|}} \right) = \frac{\sqrt{|\Lambda|}}{\sqrt{3} \cos(\sqrt{3\Lambda}C_1)} \frac{\sin(\sqrt{3|\Lambda|}(t - C_1))}{\cos^{2/3}(\sqrt{3|\Lambda|}(t - C_1))} \Bigg|_{t=C_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3|\Lambda|}}} = -\infty .$$

Θέλουμε να διερευνήσουμε αν η ανωμαλία αυτή καλύπτεται από έναν εν δυνάμει ορίζοντα. Αν θεωρήσουμε  $t_h(r)$  την καμπύλη του εν δυνάμει ορίζοντα, τότε το όριο της καμπύλης ορίζεται από τη σχέση  $R(r, t_h(r)) = 2m(r, t_h(r))$ , όπου  $m(r, t_h(r))$  είναι η μάζα Misner-Sharp και  $R(r, t) \equiv ra(t)$ . Τότε κάθε επιφάνεια με συντεταγμένες  $(r, t)$  μέσα στην παγιδευμένη περιοχή ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathcal{T} = \{(r, t) : R(r, t) \leq 2m(r, t)\} .$$

Για τη μετρική FRW η ανισότητα αυτή δίνει

$$2m(r, t) = R(1 - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha R \partial_\beta R) = r^3 \dot{a}^2(t) a(t) .$$

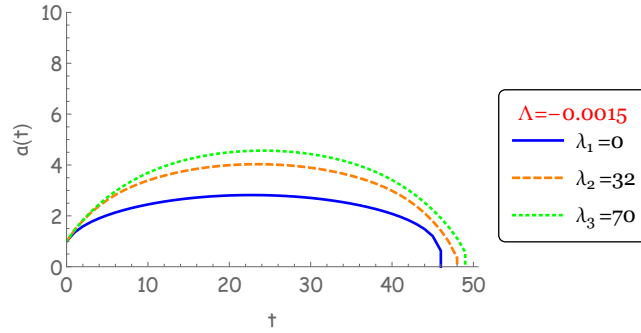
Για το λόγο αυτό για κάθε σημείο που ανήκει στην παγιδευμένη περιοχή πρέπει να ισχύει η συνθήκη  $r^2 \dot{a}^2 \geq 1$ . Έχουμε δείξει ότι  $\dot{a}^2(t_s) = +\infty$ , συνεπώς θα υπάρχει μια χρονική στιγμή  $t_h(r) < t_s$  τέτοια ώστε το  $\dot{a}^2$  παίρνει την ελάχιστη τιμή  $\dot{a}^2(t_h(r)) = \frac{1}{r^2}$ . Τότε ο εν δυνάμει ορίζοντας βρίσκεται πριν την καμπύλη της ανωμαλίας  $t = t_s$  και την καλύπτει για κάθε  $r > 0$ . Για αρνητική κοσμολογική σταθερά λοιπόν, απουσία δυναμικού, έχουμε το σχηματισμό ενός εν δυνάμει ορίζοντα. Σε συμφωνία με τα αποτελέσματα των [59], [65] το “κέλυφος” του βαθμωτού πεδίου παγιδεύεται πριν καταλήξει σε ανωμαλία με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας μελανής οπής. Στην αντίθετη περίπτωση, όπως θα αναφέρουμε και στην ενότητα 2.4, αν το  $\dot{a}(t_s)$  είναι πεπερασμένο είναι δυνατόν να βρούμε κάποιο τέτοιο ώστε να μη σχηματίζεται ορίζοντας.

Γενικεύουμε το μοντέλο για κινηματική σύζευξη του βαθμωτού πεδίου  $\lambda \neq 0$ . Οι εξισώσεις κίνησης τώρα παίρνουν τη μορφή

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \left( 1 - 12\pi\lambda\dot{\phi}^2 \right) - (\Lambda + 8\pi V(\phi) + 4\pi\dot{\phi}^2) = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{3\dot{a}(t)\dot{\phi}(t) + a(t)\ddot{\phi}(t)}{a(t)} + \frac{3\lambda\dot{a} \left( \dot{a}^2(t)\dot{\phi}(t) + 2a(t)\dot{\phi}^2(t)\ddot{a}(t) + a(t)\dot{a}(t)\ddot{\phi}(t) \right)}{a^3(t)} = -V_\phi(\phi). \quad (2.26)$$

Για  $V(\phi) = 0$  οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να λυθούν αριθμητικά. Δίνοντας μια τιμή στην κοσμολογική σταθερά  $\Lambda = -0.0015$  έχουμε ως αποτέλεσμα τη συνάρτηση  $a(t)$  που απεικονίζεται στο Σχ. 2.5.



Σχήμα 2.5: Αριθμητική λύση του  $a(t)$  για  $\lambda > 0$ ,  $\Lambda = -0.0015$

Είναι σημαντικό να δείξουμε ότι η παράγωγος  $\dot{a}(t)$  πράγματι τείνει στο  $\dot{a}(t)$  τη στιγμή  $t = t_s$  και να ελέγξουμε αν η συνθήκη αυτή εξαρτάται από το  $\lambda$ . Στο Παράρτημα λύνουμε τις εξισώσεις κίνησης αναλυτικά σε χρονικές στιγμές κοντά στην δημιουργία ανωμαλίας με αποτέλεσμα

$$a(t) \sim (t_s - t)^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \dot{a}(t) \sim -(t_s - t)^{-\frac{1}{3}} \quad (2.27)$$

Συνεπώς ο παράγοντας  $a(t)$  μηδενίζεται για κάποια κατάλληλη τιμή  $t = t_s$  και η παράγωγός του αποκλίνει στο  $-\infty$ , εφόσον ο εκθετής  $-\frac{1}{3}$  είναι αρνητικός, υποδηλώνοντας έτσι τη δημιουργία ενός εν δυνάμει ορίζοντα και τελικά μιας μελανής οπής. Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα του  $\lambda$  επομένως ο εν δυνάμει ορίζοντας σχηματίζεται για κάθε τιμή της σύζευξης.

Ένα ακόμα ενδιαφέρον αποτέλεσμα που φαίνεται στο Σχ. 2.4 είναι ότι όσο η απόλυτη τιμή της κοσμολογικής σταθεράς αυξάνεται ο χρόνος της κατάρρευσης και συνεπώς ο χρόνος που δημιουργείται η ανωμαλία μειώνονται. Η αρνητική κοσμολογική σταθερά μπορεί να οριστεί ως  $\Lambda = -3/l^2$  σχετιζόμενη έτσι με την ακτίνα  $l$  ενός χώρου  $AdS_4$ , συνεπώς η μείωση αυτή της χρονικής διάρκειας μπορεί να γίνει κατανοητή ως το γεγονός ότι το βαθμωτό πεδίο έχει λιγότερη απόσταση να “διανύσει” στον χώρο  $AdS_4$ . Στην επόμενη ενότητα θα δείξουμε ότι η κατάρρευση του βαθμωτού πεδίου πράγματι καταλήγει στη δημιουργία μιας μελανής οπής Schwarzschild- $AdS_4$ .

### 2.3.2 Σχηματισμός της συνοριακής επιφάνειας

Για να κατασκευάσουμε τον κατάλληλο ορίζοντα γεγονότων που σηματοδοτεί τη δημιουργία μιας μελανής οπής θα μελετήσουμε την ένωση της μετρικής FRW στην οποία υπάρχει το βαθμωτό πεδίο

$$ds_{int}^2 = -dt^2 + a^2(t)dr^2 + r^2 a^2(t)d\Omega, \quad (2.28)$$

με μια μετρική Schwarzschild- $AdS_4$

$$ds_{ext}^2 = -\chi(Y)dT^2 + \chi(Y)^{-1}dY^2 + Y^2d\Omega^2, \quad \chi(Y) = 1 - \frac{2M(Y)}{Y} + \frac{Y^2}{l^2}, \quad (2.29)$$

σε μια υπερεπιφάνεια  $\Sigma$ . Αναφέρουμε το φορμαλισμό που αναπτύσσεται κυρίως στο [59] και στη συνέχεια τον εφαρμόζουμε στην δική μας περίπτωση. παραμετροποιούμε την  $\Sigma$  με συντεταγμένες  $y^a = (\tau, \theta, \phi)$ . Η ενσωμάτωση της  $\Sigma$  στον “εσωτερικό” χώρο με μετρική την (2.28) είναι  $y^a = (\tau, \theta, \phi) \leftrightarrow x^\alpha = (\tau, r_b, \theta, \phi)$ . Η πρώτη θεμελιώδης μορφή (first fundamental form) ορίζεται ως

$$I_\Sigma^{int} = g_{\alpha\beta} \underbrace{\frac{dx^\alpha}{dy^a} \frac{dx^\beta}{dy^b}}_{h_{ab}} dy^a dy^b, \quad (2.30)$$

από την οποία βρίσκουμε

$$I_\Sigma^{int} = -d\tau^2 + r_b^2 a^2(t) d\Omega^2. \quad (2.31)$$

Το ορθογώνιο διάνυσμα στη  $\Sigma$  της (2.28) ικανοποιεί τη σχέση  $g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \xi^\beta = 0$  από την οποία βρίσκουμε  $\xi^\alpha = (0, \xi^1, 0, 0)$  και  $\xi_\alpha = (0, \xi^1 a^2(t), 0, 0)$ . Το κανονικοποιημένο ορθογώνιο διάνυσμα με  $n^\alpha n_\alpha = 1$  (χωροειδές διάνυσμα) είναι

$$n^\alpha = (0, a^{-1}(t), 0, 0).$$

Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή (second fundamental form) ή αλλιώς εξωτερική καμπυλότητα (extrinsic curvature) της υπερεπιφάνειας  $\Sigma$  δίνεται από την

$$K_{ab} = -n_\alpha \left( \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^a \partial y^b} + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial y^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^b} \right), \quad (2.32)$$

η οποία για το διάνυσμα  $n^\alpha$  της (2.28) δίνει

$$II_\Sigma^{int} = 0 \cdot d\tau^2 + r_b a(t) d\Omega^2. \quad (2.33)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την “εξωτερική” μετρική (2.29) η ενσωμάτωση γίνεται με συντεταγμένες  $y^a = (\tau, \theta, \phi) \leftrightarrow x^\alpha = (T(\tau), Y(\tau), \theta, \phi)$ . Τότε από την πρώτη θεμελιώδη μορφή (2.30) βρίσκουμε

$$I_\Sigma^{ext} = \left( -\chi(Y)\dot{T}^2 + \frac{1}{\chi(Y)}\dot{Y}^2 \right) d\tau^2 + Y^2(\tau) d\Omega^2. \quad (2.34)$$

Ταυτίζοντας τις πρώτες θεμελιώδεις μορφές (2.31) και (2.34) βρίσκουμε

$$\left( -\chi(Y)\dot{T}^2 + \frac{\dot{Y}^2}{\chi(Y)} \right) = -1 \quad (2.35)$$

και

$$Y^2(\tau) = r_b^2 a^2(t). \quad (2.36)$$

Βρίσκουμε το ορθογώνιο διάνυσμα της (2.29)

$$\xi^\alpha = \left( \xi^0, -\frac{g_{00}\dot{T}}{g_{11}\dot{Y}}\xi^0, 0, 0 \right),$$

με την κανονικοποιημένη του μορφή να είναι

$$n^\alpha = \left( \frac{1}{\sqrt{-\chi(Y) + \frac{\chi^3(Y)\dot{T}^2}{\dot{Y}^2}}}, \frac{\chi^2(Y)\dot{T}(Y)}{\sqrt{-\chi(Y) + \frac{\chi^3(Y)\dot{T}^2}{\dot{Y}^2}}}, 0, 0 \right)$$

και το χρησιμοποιούμε στην (2.32) για να βρούμε τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή

$$II_\Sigma^{ext} = -\frac{\chi^2(Y)\chi(Y)_{,Y}\dot{T}^3 + 3\chi(Y)_{,Y}\dot{T}\dot{Y}^2 + 2\chi(Y)\left(\dot{Y}\ddot{T} - \dot{T}\ddot{Y}\right)}{2\chi(Y)} d\tau^2 + Y\chi(Y)\dot{T}d\Omega^2. \quad (2.37)$$

Ταυτίζοντας τις δεύτερες θεμελιώδεις μορφές του εσωτερικού (2.33) και εξωτερικού (2.37) χώρου βρίσκουμε

$$-\frac{\chi^2(Y)\chi(Y)_{,Y}\dot{T}^3 + 3\chi(Y)_{,Y}\dot{T}\dot{Y}^2 + 2\chi(Y)\left(\dot{Y}\ddot{T} - \dot{T}\ddot{Y}\right)}{2\chi(Y)} = 0, \quad (2.38)$$

και

$$Y\chi(Y)\dot{T} = r_b a(\tau). \quad (2.39)$$

Οι εξισώσεις (2.35), (2.36), (2.38) και (2.39) καθορίζουν πλήρως τις συνθήκες ένωσης των δύο γεωμετριών στο σύνορο. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η (2.38) ισχύει ταυτοτικά χρησιμοποιώντας τις υπόλοιπες τρεις ((2.35), (2.36) και (2.39)). Επιπλέον η (2.35) υποδηλώνει ότι η μάζα Misner-Sharp είναι συνεχής στην  $\Sigma$ , δηλαδή  $2m(r_b, \tau) = Y_b(\tau)(1 - \chi(Y_b))$ . Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε μια χρονοεξααρτώμενη μάζα

$$r_b^3 \dot{a}^2(\tau) a(\tau) = r_b a(\tau) \left(1 - \left(1 - \frac{2M(\tau)}{r_b a(\tau)} + \frac{r_b^2 a^2(\tau)}{l^2}\right)\right) \Rightarrow M(\tau) = \frac{1}{2} r_b^3 a(\tau) \left(\dot{a}^2(\tau) + \frac{a^2(\tau)}{l^2}\right). \quad (2.40)$$

Από την (2.39) βλέπουμε ότι η χρονική συντεταγμένη πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\chi(Y_b)},$$

έτσι η χρονική στιγμή της δημιουργίας της ανωμαλίας δίνεται από τη σχέση

$$T_s = \int_0^{\tau_s} \frac{d\tau}{\chi(Y_b)} \stackrel{(2.40)}{=} \int_0^{\tau_s} \frac{d\tau}{1 - r_b^2(\dot{a}^2 + \frac{a^2}{l^2}) + \frac{r_b^2 a^2}{l^2}} = \int_0^{\tau_s} \frac{d\tau}{1 - r_b^2 \dot{a}^2}. \quad (2.41)$$

Βλέπουμε ότι επειδή το  $\dot{a}^2(\tau)$  δεν είναι φραγμένο στο διάστημα  $(0, \tau_s)$  δεν μπορούμε να βρούμε ένα  $r_b > 0$  τέτοιο ώστε η ποσότητα  $1 - r_b^2 \dot{a}^2$  να μη μπορεί να μηδενιστεί. Έτσι λοιπόν η συνάρτηση  $\frac{1}{\chi(Y_b)}$  δεν είναι ολοκληρώσιμη στο  $(0, \tau_s)$ . Για τις ακτινικές φωτοειδείς (null) γεωδαισιακές έχουμε  $ds^2 = 0$  στην μετρική  $AdS_4$ -Schwarzschild και βρίσκουμε

$$0 = -\chi(Y)dT^2 + \frac{dY^2}{\chi(Y)} \Rightarrow \frac{dT}{dY} = \frac{1}{\chi(Y)}.$$

Αλλά όπως αναφέραμε η παραπάνω διαφορική εξίσωση δεν έχει λύση, έτσι μια ακτινική φωτοειδής γεωδαισιακή που να ξεκινάει από την ανωμαλία δεν υπάρχει. Το σύνορο  $\Sigma = \{r = r_b\}$  καταρρέει σε μια μελανή οπή.

### 2.3.3 Συμπεριφορά του “κελύφους” του βαθμωτού πεδίου

Προκειμένου να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του κελύφους του βαθμωτού πεδίου θα πρέπει να εκφράσουμε τις μετρικές (2.28), (2.29) στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Ακολουθώντας τη μέθοδο του [65], διαλέγουμε η ακτινική συντεταγμένη του εσωτερικού χωρόχρονου (2.28) να είναι

$$Y = ra(t) \Rightarrow a(t)dr = dY - r\dot{a}(t)dt$$

με αποτέλεσμα

$$ds^2 = \left(\frac{Y^2 \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - 1\right) dt^2 + dY^2 - 2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} Y dt dY + Y^2 d\Omega^2. \quad (2.42)$$

Για την εξωτερική περιοχή χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Painleve - Gullstrand

$$T = t + f(Y)$$

με αποτέλεσμα

$$ds^2 = -\chi(Y)dt^2 - \left(\chi(Y)f'(Y) - \chi^{-1}(Y)\right) dY^2 - 2\chi(Y)f'(Y)dt dY + Y^2 d\Omega^2,$$

όπου  $f'(Y) = \frac{df(Y)}{dY}$ . Μπορούμε να διαλέξουμε το  $f'(Y)$  με τέτοιο τρόπο ώστε το όρος που πολλαπλασιάζει το  $dY^2$  να ισούται με τη μονάδα. Πιο συγκεκριμένα διαλέγουμε  $f'(Y) = \frac{\chi^{-1}(Y) - 1}{\chi(Y)}$ . Τότε η μετρική παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = -\chi(Y)dt^2 + dY^2 - 2\chi(Y)\sqrt{\frac{\chi^{-1}(Y) - 1}{\chi(Y)}} dt dY + Y^2 d\Omega^2. \quad (2.43)$$

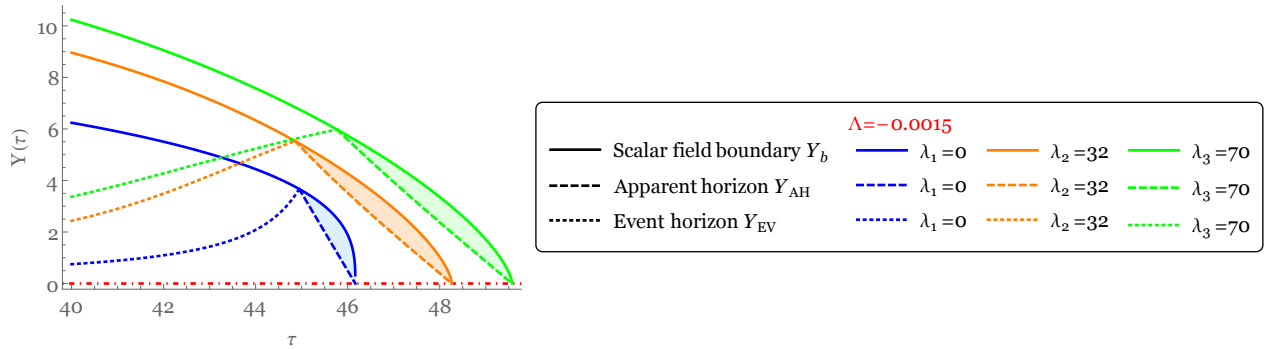
Ταυτίζοντας τα χρονικά κομμάτια των δύο μετρικών (2.42) και (2.43) βρίσκουμε μια συνθήκη ένωσης.

$$\left( \frac{Y^2 \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - 1 \right) = -\chi(Y) \Rightarrow \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{2M(t)}{Y^3} - \frac{1}{l^2}.$$

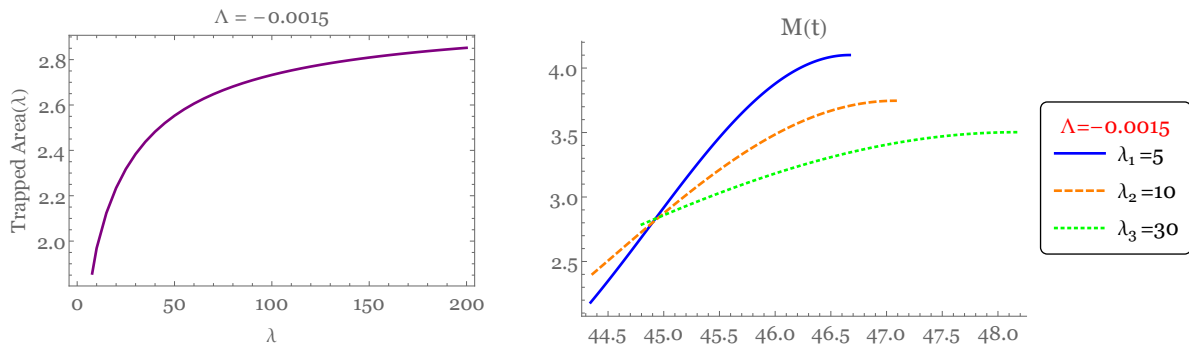
Χρησιμοποιώντας την έκφραση (2.40) για τη μάζα Misner-Sharp στο σύνορο βρίσκουμε

$$Y_b(\tau) = r_b a(\tau),$$

όπου το  $Y_b$  δηλώνει το σύνορο του κελύφους του βαθμωτού πεδίου. Μπορούμε επιπλέον να βρούμε τη συμπεριφορά του εν δυνάμει οριζοντα θέτοντας το χρονικό κομμάτι  $\left( \frac{Y_{AH}^2 \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - 1 \right) = 0$ . Τέλος βρίσκουμε τον οριζοντα γεγονότων από τη σχέση  $\left( 1 - \frac{2M(t)}{Y_{EV}} + \frac{Y_{EV}^2}{l^2} \right) = 0$ . Όπως έχουμε ήδη δηλώσει στην ενότητα 2.3.1 εφόσον  $\dot{a}^2(t_s) = +\infty$  μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε  $r_b$  και να έχουμε μια παγιδευμένη περιοχή. Στην αριθμητική μελέτη δίνουμε μια τιμή  $r_b = 3$  και μελετάμε την εξέλιξη του συνόρου. Συμμαζεύοντας τα παραπάνω αποτελέσματα στο Σχ. 2.6 δείχνουμε ότι ο εν δυνάμει οριζοντα δημιουργείται και τείνει προς το μηδέν καθώς το σύνορο πηγαίνει προς την ανωμαλία. Η παγιδευμένη περιοχή βρίσκεται ανάμεσα στον εν δυνάμει οριζοντα και στο κέλυφος του βαθμωτού πεδίου. Παρατηρούμε ότι το σχήμα της μεταβάλλεται και οι σχετιζόμενες ποσότητες εξαρτώνται από τη μη τετριμμένη σύζευξη  $\lambda$ . Στο Σχ. 2.7α' απεικονίζουμε το "εμβαδόν" της παγιδευμένης επιφάνειας ως προς το  $\lambda$ , ενώ στο Σχ. 2.7β' μπορούμε να δούμε πως μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου η παγιδευμένη μάζα για διάφορα  $\lambda$ . Οι χρονικές στιγμές που σχηματίζεται ο εν δυνάμει οριζοντα και η ανωμαλία συναρτήσει του  $\lambda$  φαίνεται στο Σχ. 2.8.



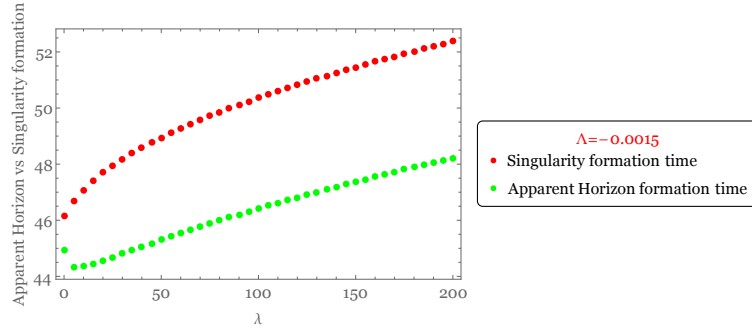
Σχήμα 2.6: Ο οριζοντα γεγονότων (τελείες) αυξάνεται μέχρι να συναντηθεί με το σύνορο της σφαίρας του βαθμωτού πεδίου. Τη στιγμή εκείνη σχηματίζεται ο εν δυνάμει οριζοντα ο οποίος τείνει προς το μηδέν καθώς το σύνορο του κελύφους υπό κατάρρευση πλησιάζει προς την ανωμαλία. Η παγιδευμένη περιοχή βρίσκεται ανάμεσα στον εν δυνάμει οριζοντα και στο σύνορο.



(α) "Εμβαδόν" παγιδευμένης περιοχής συναρτήσει της σύζευξης  $\lambda$ .

(β) Παγιδευμένη μάζα για  $\lambda = 5$  (συνεχής),  $\lambda = 10$  (διακεκομμένη),  $\lambda = 30$  (διακεκομμένη-τελείες)

Σχήμα 2.7: Παγιδευμένη περιοχή και μάζα για διάφορες τιμές της σύζευξης  $\lambda$ .



Σχήμα 2.8: Σχηματισμός του εν δυνάμει ορίζοντα πριν την ανωμαλία.

## 2.4 Βαρυτική κατάρρευση παρουσία δυναμικού

Συμπεριλαμβανοντας έναν όρο δυναμικού στη θεωρία μας

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \lambda G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\}, \quad (2.44)$$

έχουμε την αντίστοιχη εξίσωση Friedmann

$$\Lambda + 8\pi V(\phi(t)) + 4\pi \dot{\phi}^2(t) - 3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \left( 1 - 12\pi \lambda \dot{\phi}^2(t) \right) = 0,$$

και Klein - Gordon

$$-V_\phi(\phi(t)) - \dot{\phi}(t) \left( 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + 3\lambda \frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + 6\lambda \frac{\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right) - \left( 1 + 3\lambda \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) \ddot{\phi}(t) = 0.$$

Η πυκνότητα ενέργειας και η πίεση στον τανυστή ενέργειας-ορμής

$$T_\mu^\nu = \text{διαγ}(-\epsilon, p, p, p),$$

είναι

$$\epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{9}{2} \lambda \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \dot{\phi}^2(t), \quad (2.45)$$

και

$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{\lambda \left( \dot{a}^2(t) \dot{\phi}^2(t) + 2a(t) \dot{\phi}(t) \left( \dot{\phi}(t) \ddot{a}(t) + 2\dot{a}(t) \ddot{\phi}(t) \right) \right)}{2a^2(t)}. \quad (2.46)$$

Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση Friedmann στη μορφή

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi}{3} \epsilon. \quad (2.47)$$

Τότε ακολουθώντας τη μέθοδο του [59] και [51] προκειμένου να μελετήσουμε ένα σενάριο κατάρρευσης απαιτούμε η πυκνότητα ενέργειας να υπακούει στη σχέση

$$\epsilon = a^{-\nu}(t), \quad \nu > 0.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω στην (2.47) βρίσκουμε

$$\dot{a}^2(t) = \frac{\Lambda}{3} a^2(t) + \frac{8\pi}{3} a^{2-\nu}(t),$$

ή

$$\dot{a}^2(t) = \frac{\Lambda}{3} a^2(t) + \frac{8\pi}{3} a^{2\beta}(t), \quad \text{με } \beta = 1 - \frac{\nu}{2},$$



όπου έχουμε εισαγάγει την παράμετρο  $\beta$  όπως και στο [65]. Χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\frac{d}{dt}(\epsilon a^3) = -p \frac{d}{dt}(a^3)$  για  $\epsilon = a^{-\nu}$  βρίσκουμε ότι  $p = -\frac{3-\nu}{3a^\nu}$ . Εισάγοντας την παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης  $w$  από τη σχέση  $w = \frac{p}{\epsilon}$ , και λαμβάνοντας υπόψιν τα όρια  $-1 < w < 1$ , βρίσκουμε  $0 < \nu < 6$  ή  $-2 < \beta < 1$ . Συνεπώς πρέπει να εστιάσουμε μόνο σε αυτές τις τιμές για την παράμετρο  $\beta$ .

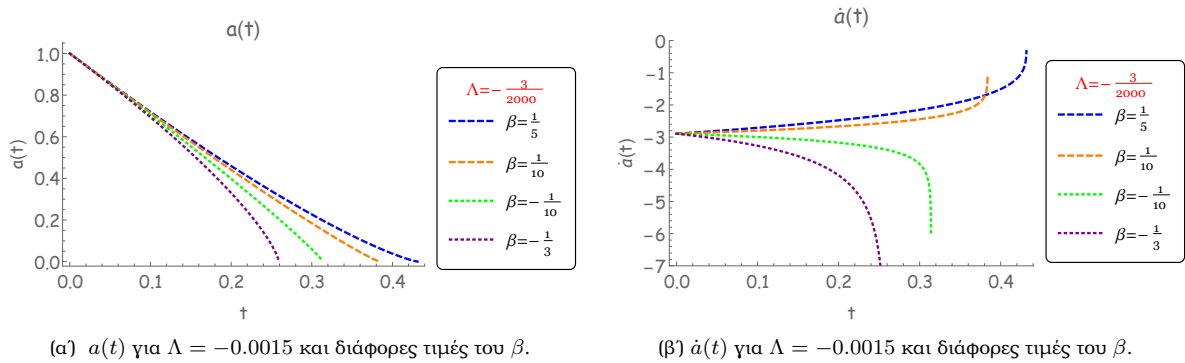
Ας αρχικές συνθήκες θεωρούμε  $a(0) = 1$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Το πεδίο εξελίσσεται φτάνοντας στην ανωμαλία όταν  $a(t_{\text{συνγυλαρτισμ}}) = 0$ . Συνεπώς θεωρούμε περιπτώσεις όπου ο παράγοντας  $a(t)$  είναι μια συνάρτηση του  $t$  που φθίνει μονότονα. Λύνουμε έτσι την εξίσωση

$$\dot{a}(t) = -\sqrt{\frac{\Lambda}{3}a^2(t) + \frac{8\pi}{3}a^{2\beta}(t)}$$

και βρίσκουμε

$$a(t) = (8\pi)^{\frac{1}{2-2\beta}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{|\Lambda|}} \sin \left[ \frac{t(\beta-1)}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{|\Lambda|}}} - \arcsin \left( \left( (8\pi)^{-\frac{1}{2}} \right) \sqrt{\frac{1}{|\Lambda|}} \Lambda \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1-\beta}}. \quad (2.48)$$

Ο σχηματισμός μιας μελανής οπής ή η γυμνή ανωμαλία καθορίζεται από το  $\dot{a}(t)$  και τότε πρέπει να μελετηθούν οι συνθήκες ταύτισης των θεμελιωδών μορφών. Η μελέτη αυτή πραγματοποιήθηκε στο [65] για  $\Lambda < 0$  και βρέθηκε ότι μια γυμνή ανωμαλία δημιουργείται για  $0 < \beta < 1$  ενώ ένας εν δυνάμει οριζοντας οδηγεί στη δημιουργία μιας μελανής οπής για  $-2 < \beta < 0$ . Η κατασκευή αυτή και τα παραπάνω αποτελέσματα δεν επηρεάζονται από τη μή-τετριμμένη σύζευξη  $\lambda$ . Στο Σχ. 2.9 δείχνουμε τη μορφή του παράγοντα  $a(t)$  και της παραγώγου του  $\dot{a}(t)$  για διάφορες τιμές του  $\beta$ . Από τη λύση (2.48) αλλά και από το Σχ. 2.9 είναι εμφανές ότι το  $\dot{a}(t)$  είναι πεπερασμένο για  $0 < \beta < 1$  (γυμνή ανωμαλία) ενώ πηγαίνει στο  $-\infty$  για  $-2 < \beta < 0$  (σχηματισμός μελανής οπής).



Σχήμα 2.9: Παράγοντας  $a(t)$  και η παράγωγός του  $\dot{a}(t)$  για  $\Lambda = -0.0015$  και διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\beta$ .

Υιοθετώντας τον παράγοντα  $a(t)$  της σχέσης (2.48) μπορούμε να συνεχίσουμε στη λύση των αντίστοιχων εξισώσεων κίνησης για το βαθμωτό πεδίο και το δυναμικό. Αρχικά διαφορίζουμε την εξίσωση Friedmann ως προς  $t$  με αποτέλεσμα

$$\frac{dV(\phi(t))}{dt} = -\frac{6}{8\pi} \left( 1 - 12\pi\lambda\dot{\phi}^2(t) \right) \left( \frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} - \frac{\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right) - \left( 1 + 9\lambda\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) \dot{\phi}(t)\ddot{\phi}(t), \quad (2.49)$$

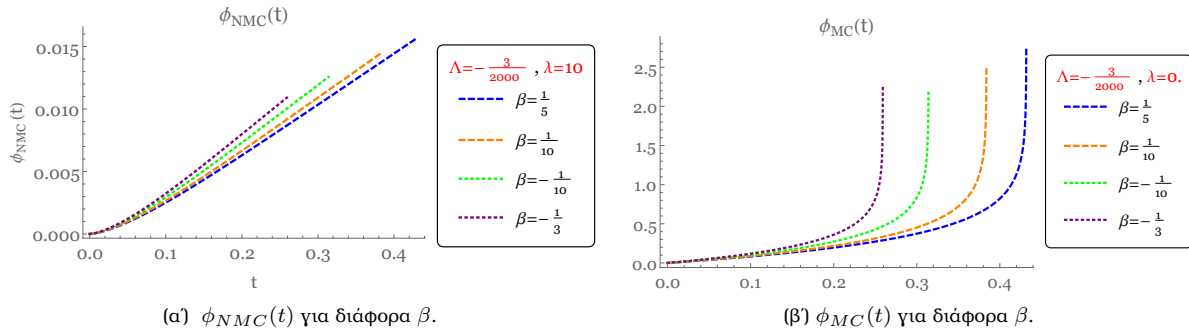
και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την Klein-Gordon με  $\dot{\phi}(t)$

$$\frac{dV(\phi(t))}{dt} = -\dot{\phi}^2(t) \left( 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + 3\lambda\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + 6\lambda\frac{\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right) - \left( 1 + 3\lambda\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) \dot{\phi}(t)\ddot{\phi}(t). \quad (2.50)$$

Αφαιρώντας την (3.30) από την (3.25) βρίσκουμε

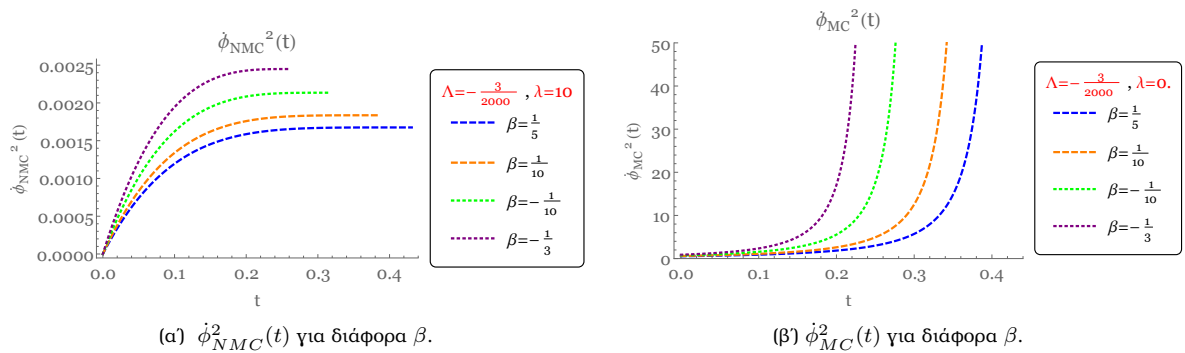
$$\frac{3\dot{a}^3(t) \left( 1 - 16\pi\lambda\dot{\phi}^2(t) \right)}{4\pi\dot{a}^3(t)} - \dot{a}(t) \left( \frac{3\dot{\phi}^2(t)}{a(t)} + \frac{3 \left( 1 - 4\pi\lambda\dot{\phi}^2(t) \right) \ddot{a}(t)}{4\pi a^2(t)} \right) + 6\lambda\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \dot{\phi}(t)\ddot{\phi}(t) = 0. \quad (2.51)$$

Λύνουμε την (2.51) αριθμητικά ως προς το  $\phi(t)$  χρησιμοποιώντας την έκφραση (2.48) για το  $a(t)$  και τις παραγώγους του με αρχικές συνθήκες  $\phi(0) = 0, \dot{\phi}(0) = 0.001$ , και τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχ. 2.10α'. Στο Σχ. 2.10β' δίνουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για την περίπτωση χωρίς σύζευξη. Όπως φαίνεται το πεδίο  $\phi(t)$ , εκτινάσσεται στην ανωμαλία για κάθε  $\beta \in (-2, 1)$  όσο το  $\lambda = 0$  κάτι που δεν συμβαίνει στην περίπτωση που  $\lambda \neq 0$ .



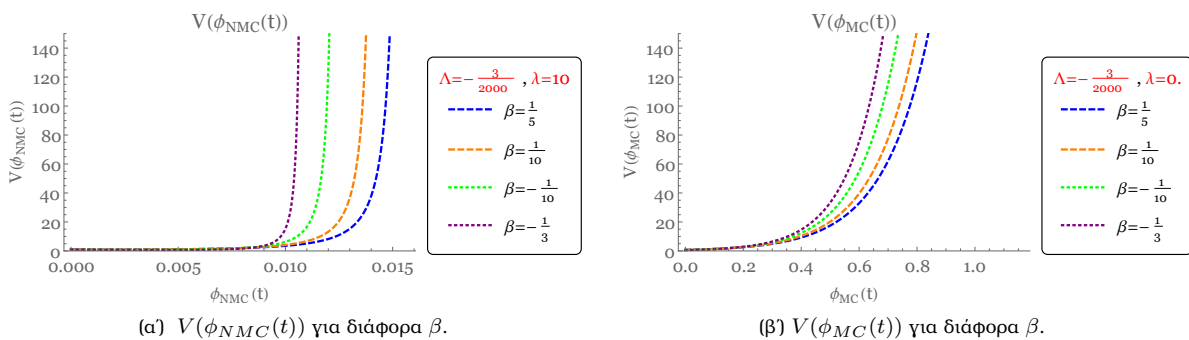
Σχήμα 2.10: Εξέλιξη του βαθμωτού πεδίου για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\beta$ .

Η μη-τετριμμένη σύζευξη επιβραδύνει την εξέλιξη του βαθμωτού πεδίου το οποίο εν τέλει παίρνει πεπερασμένη τιμή στην ανωμαλία. Επιβεβαιώνουμε το συμπέρασμα αυτό σχεδιάζοντας την εξέλιξη της παραγώγου του βαθμωτού πεδίου στο Σχ. 2.11. Βλέπουμε και πάλι πως για  $\lambda = 0$  η παράγωγος του πεδίου εκτινάσσεται στην ανωμαλία ενώ για  $\lambda \neq 0$  φτάνει σε μια σταθερή τιμή.



Σχήμα 2.11: Εξέλιξη του βαθμωτού πεδίου για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\beta$ .

Τελικά, έχοντας γνωστή τη συμπεριφορά του βαθμωτού πεδίου μπορούμε να βρούμε τη μορφή του δυναμικού χρησιμοποιώντας τις (2.45) και (2.47). Στο Σχ. 2.12 σχεδιάζουμε το δυναμικό συναρτήσει του βαθμωτού πεδίου  $\phi(t)$ .



Σχήμα 2.12: Αριθμητική λύση του δυναμικού για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\beta$ .

## 2.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη βαρυτική κατάρρευση ενός χρονοεξαρτώμενου βαθμωτού πεδίου σε μια θεωρία με αρνητική κοσμολογική σταθερά στην οποία, εκτός από τον κανονικό κινητικό όρο, το βαθμωτό πεδίο είναι κινηματικά συζευγμένο με τη βαρύτητα μέσω του τανυστή Einstein. Ο όρος αυτός είναι κομμάτι της θεωρίας Horndeski το οποίο καταλήγει σε εξισώσεις δεύτερης τάξης για τα πεδία και χαρακτηρίζεται από τη συμμετρία μετατόπισης. Στο πρώτο στάδιο έγινε μελέτη απουσία δυναμικού. Ελέγξαμε ότι κατάλληλες παράμετροι ικανοποιούν την ασθενή συνθήκη ενέργειας κατά τη διαδικασία της κατάρρευσης.

Βρίσκουμε ότι καθώς αυξάνεται η τιμή της σύζευξης  $\lambda$ , αυξάνεται και ο χρόνος  $t_s$  που χρειάζεται ο παράγοντας  $a(t)$  για να φτάσει στην ανωμαλία. Επιπλέον δείξαμε ότι χρειάζεται περισσότερος χρόνος για τον σχηματισμό του εν δυνάμει οριζοντα. Το βαθμωτό πεδίο έχει πεπερασμένη τιμή στην ανωμαλία στην περίπτωση που το  $\lambda$  είναι μη μηδενικό. Ενώνοντας την υπό κατάρρευση μετρική που αντιλαμβάνεται το βαθμωτό πεδίο με αυτή μιας Schwarzschild- $AdS_4$  μελανής οπής βρίσκουμε ότι σχηματίζεται ένας εν δυνάμει οριζοντας και εν τέλει ένας οριζοντας γεγονότων που καλύπτει την ανωμαλία.

Για να αντιμετωπίσουμε τη γενικευμένη περίπτωση της ύπαρξης δυναμικού με το οποίο αλληλεπιδρά το βαθμωτό πεδίο ακολουθήσαμε μια διαφορετική μέθοδο. Χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση  $\dot{a}^2(t) = \frac{\Lambda}{3}a^2(t) + \frac{8\pi}{3}a^{2\beta}(t)$  για τον παράγοντα  $a(t)$ , κάτι που έχει προταθεί στα [59], [65]. Για αρνητικά  $\beta$  βρίσκουμε τη συμπεριφορά ενός σεναρίου κατάρρευσης. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι σχηματίζεται ένας εν δυνάμει οριζοντας ο οποίος καλύπτει την ανωμαλία και έχουμε τη δημιουργία μιας μελανής οπής. Τέλος ανακατασκευάσαμε αριθμητικά τη μορφή του δυναμικού  $V(\phi(t))$  για το οποίο είναι συνεπείς οι εξισώσεις του Einstein, αντί να το επιλέξουμε τυχαία. Η διαδικασία αυτή ενσωματώνει την επίδραση της κοσμολογικής σταθεράς αλλά έχει το μειονέκτημα ότι η χρονική στιγμή  $t_s$  παύει να εξαρτάται από τη σύζευξη  $\lambda$ . Η επίδραση της σύζευξης αυτής μεταφέρεται τότε στη μορφή του βαθμωτού πεδίου το οποίο αποτελεί λύση των εξισώσεων Einstein για τη δεδομένη υπόθεση του παράγοντα  $a(t)$ . Βέβαια στην περίπτωση που κάποιος γνώριζε εξ'αρχής τη μορφή του δυναμικού η λύση του παράγοντα  $a(t)$  και συνεπώς η χρονική στιγμή  $t_s$  θα καθοριζόταν από τη σύζευξη  $\lambda$ .

Ως μια ιδέα του πως επηρεάζει το δυναμικό τη λύση αυτή έχουμε αναπτύξει μια αναλυτική προσέγγιση κοντά στη χρονική στιγμή  $t = t_s$ , για την περίπτωση που το δυναμικό έχει τη μορφή  $V = \gamma\phi^2$ , το οποίο μελετήθηκε και στο [65]. Έχουμε δείξει ότι  $a(t) \propto (t_s - t)^\zeta$  και έχουμε καταλήξει και σε μια έκφραση για το  $t_s$ .



## Κεφάλαιο 3

# Ενοποίηση Σκοτεινής Ύλης - Σκοτεινής Ενέργειας σε Θεωρίες με Γενικευμένα Πεδία Galileon

### 3.1 Εισαγωγή

Πρόσφατα παρατηρησιακά δεδομένα έχουν αναδείξει ότι το σύμπαν έχει υπεισέλθει σε μια περίοδο επιταχυνόμενης διαστολής [90, 91]. Στο πλαίσιο της Γενικής Σχετικότητας (ΓΣ) η συμπεριφορά αυτή μπορεί να καθοδηγηθεί με την εισαγωγή μιας νέας πυκνότητας ενέργειας με αρνητική πίεση, η οποία ονομάζεται Σκοτεινή Ενέργεια (Dark Energy) [92] και η προέλευσή της είναι άγνωστη. Η πιο αποδεκτή μορφή τέτοιας ενέργειας είναι η Κοσμολογική Σταθερά. Επιπλέον η ελλείπουσα μάζα μεμονωμένων γαλαξιών καθώς και οι κατανομές αστροφυσικών αντικειμένων μεγάλης κλίμακας σε όλο το σύμπαν, αποδίδονται σε μια νέα μορφή μάζας, η οποία καλείται Κρύα Σκοτεινή Ύλη (Cold Dark Matter) και θεωρείται ότι έχει αμελητέα πίεση. Οι νέες αυτές συνιστώσες μαζί με το καθιερωμένο πρότυπο των στοιχειωδών σωματιδίων αποτελούν το καθιερωμένο πρότυπο της κοσμολογίας, το σενάριο  $\Lambda$ CDM.

Τροποποιήσεις στο σενάριο  $\Lambda$ CDM πραγματοποιούνται είτε μεταβάλλοντας τους βαρυτικούς όρους της δράσης ή διατηρώντας τη ΓΣ και αλλάζοντας τη περιγραφή της σκοτεινής ύλης και ενέργειας. Στο πρώτο σενάριο, της τροποποιημένης βαρύτητας [93]), εισαγόνται επιπλέον γεωμετρικοί όροι ή επιπλέον βαθμωτά πεδία τα οποία είναι συζευγμένα με τη βαρύτητα.

Παράλληλα έχει γίνει μεγάλη προσπάθεια να γίνει κατανοητή η ιστορία του σύμπαντος μέσω μιας πιο ενοποιημένης θεωρίας. Η πυκνότητα ενέργειας μπορεί να προέρχεται από την αλλαγή στην καταστατική εξίσωση ενός εξωτικού ρευστού, του Charlygin gas. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε [96] με σκοπό να εισαγάγει μια παράμετρο καταστατικής εξίσωσης η οποία μπορεί να μιμηθεί ένα ρευστό χωρίς πίεση στα αρχικά στάδια της εξέλιξης του σύμπαντος τείνοντας προς την κοσμολογική σταθερά στη σημερινή εποχή. Αν και το Charlygin gas είναι ικανό να εξηγήσει την εξέλιξη του σύμπαντος σε συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα [97, 98], έχει το μειονέκτημα της τυχαίας επιλογής μιας παράξενης και πολύπλοκης καταστατικής εξίσωσης η οποία δεν προέρχεται από μια συγκεκριμένη Λαγκρανζιανή πυκνότητα.

Απαιτώντας οι εξισώσεις που προκύπτουν από την Γενικότερη Λαγκρανζιανή Horndeski να ικανοποιούν τη συμμετρία μετατόπισης (shift-symmetry) καταλήγουμε στην υπο-κλάση των θεωριών με πεδία Galileon. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε μια ενοποιημένη περιγραφή της σκοτεινής ύλης και ενέργειας στο πλαίσιο των θεωριών αυτών η οποία είναι διαφορετική από την καθιερωμένη προσέγγιση όπου το πεδίο Galileon περιγράφει μεμονωμένα τη σκοτεινή ενέργεια [107–110], ή τη σκοτεινή ύλη [111]. Πιο συγκεκριμένα, χωρίς να θεωρούμε επιπλέον όρους ύλης ή μια κοσμολογική σταθερά δείχνουμε ότι το βαθμωτό πεδίο μπορεί να περιγράψει ένα ενοποιημένο ρευστό με κατάλληλη καταστατική εξίσωση, τέτοια ώστε να συμπεριφέρεται ως ύλη χωρίς πίεση (σκοτεινή ύλη) στα αρχικά στάδια και ως σκοτεινή ενέργεια στη συνέχεια. Επιλέγοντας κατάλληλα της περιοχές των παραμέτρων του μοντέλου μπορούμε να επιτύχουμε τη βελτιστή περιγραφή που ταιριάζει με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Τέλος εξετάζοντας το μοντέλο σε διαταρακτικό επίπεδο, βλέπουμε ότι ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς που το καθιστούν επιτρεπτό.

### 3.2 Κοσμολογία με γενικευμένα πεδία Galileon

Στην ενότητα αυτή κάνουμε μια σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας με γενικευμένα πεδία Galileon, την ενσωματώνουμε σε ένα κοσμολογικό πλαίσιο και παρουσιάζουμε τις εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν καθώς και τους περιορισμούς που την καθιστούν αποδεκτή [112, 113].

Όπως έχουμε αναφέρει επανειλημμένως, η πιο γενικευμένη θεωρία βαθμωτού-τανυστή σε τέσσερις διαστάσεις που καταλήγει σε εξισώσεις κίνησης δεύτερης τάξης περιγράφεται από τη δράση

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (3.1)$$

όπου  $g$  είναι η ορίζουσα της μετρικής  $g_{\mu\nu}$ , και η Λαγκρανζιανή έχει τη μορφή [1]

$$\mathcal{L} = \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i, \quad (3.2)$$

με

$$\mathcal{L}_2 = K(\phi, X), \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X) \square \phi, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X) R + G_{4,X} [(\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)], \quad (3.5)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) - \frac{1}{6} G_{5,X} [(\square \phi)^3 - 3(\square \phi) (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) + 2(\nabla^\mu \nabla_\alpha \phi) (\nabla^\alpha \nabla_\beta \phi) (\nabla^\beta \nabla_\mu \phi)], \quad (3.6)$$

όπου για απλότητα έχουμε θέσει τη σταθερά του Νεύτωνα  $\kappa \equiv 8\pi G = 1$ . Οι συναρτήσεις  $K$  και  $G_i$  ( $i = 3, 4, 5$ ) εξαρτώνται από το βαθμωτό πεδίο  $\phi$  και την κινητική του ενέργεια  $X = -\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi / 2$ , ενώ  $R$  είναι το βαθμωτό Ricci και  $G_{\mu\nu}$  ο τανυστής Einstein. Τα  $G_{i,X}$  και  $G_{i,\phi}$  ( $i = 3, 4, 5$ ) αντιπροσωπεύουν μερικές παραγωγίσεις ως προς τα  $X$  και  $\phi$  αντίστοιχα, δηλαδή  $G_{i,X} \equiv \partial G_i / \partial X$  και  $G_{i,\phi} \equiv \partial G_i / \partial \phi$ . Η θεωρία με πεδία Galileon είναι η γενικότερη θεωρία με τη βασική ιδιότητα να υπακούει στη συμμετρία μετατόπισης. Παρ' όλα αυτά επεκτείνοντας την με γενικευμένα πεδία Galileon η συμμετρία αυτή σπάει και η θεωρία ταυτίζεται με τη θεωρία Horndeski.

Ενσωματώνουμε τα παραπάνω σε ένα κοσμολογικό πλαίσιο θεωρώντας μια επίπεδη μετρική Friedmann-Robertson-Walker (FRW) της μορφής

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + a^2(t) dx^2, \quad (3.7)$$

Στη γεωμετρία FRW το βαθμωτό πεδίο  $\phi$  γίνεται συνάρτηση μόνο του  $t$  και συνεπώς  $X(t) = \dot{\phi}^2(t)/2$ .

Μεταβάλλοντας τη δράση (3.1) ως προς τη μετρική καταλήγουμε στις εξισώσεις Einstein

$$\begin{aligned} & 2XK_{,X} - K + 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,\phi} - 6H^2G_4 + 24H^2X(G_{4,X} + XG_{4,XX}) \\ & - 12HX\dot{\phi}G_{4,\phi X} - 6H\dot{\phi}G_{4,\phi} + 2H^3X\dot{\phi}(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) \\ & - 6H^2X(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}) = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & K - 2X(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}) + 2(3H^2 + 2\dot{H})G_4 - 12H^2XG_{4,X} - 4H\dot{X}G_{4,X} - 8\dot{H}XG_{4,X} \\ & - 8HX\dot{X}G_{4,XX} + 2(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi})G_{4,\phi} + 4XG_{4,\phi\phi} + 4X(\ddot{\phi} - 2H\dot{\phi})G_{4,\phi X} \\ & - 2X(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^2\ddot{\phi})G_{5,X} - 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} + 4HX(\dot{X} - HX)G_{5,\phi X} \\ & + 2[\dot{H}X + H\dot{X}] + 3H^2X]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi} = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

όπου με τελεία ( $\dot{\phantom{x}}$ ) δηλώνεται η παραγωγή ως προς το χρόνο  $t$  και η παράμετρος Hubble ορίζεται ως  $H \equiv \dot{a}/a$ . Μεταβολή της δράσης (3.1) ως προς το πεδίο  $\phi(t)$  οδηγεί στην εξίσωση κίνησης Klein-Gordon

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (a^3 J) = P_\phi, \quad (3.10)$$

με

$$J \equiv \dot{\phi}K_{,X} + 6HXG_{3,X} - 2\dot{\phi}G_{3,\phi} + 6H^2\dot{\phi}(G_{4,X} + 2XG_{4,XX}) - 12HXG_{4,\phi X} + 2H^3X(3G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) - 6H^2\dot{\phi}(G_{5,\phi} + XG_{5,\phi X}), \quad (3.11)$$

$$P_\phi \equiv K_{,\phi} - 2X(G_{3,\phi\phi} + \ddot{\phi}G_{3,\phi X}) + 6(2H^2 + \dot{H})G_{4,\phi} + 6H(\dot{X} + 2HX)G_{4,\phi X} - 6H^2XG_{5,\phi\phi} + 2H^3X\dot{\phi}G_{5,\phi X}. \quad (3.12)$$

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή σημειώνοντας ότι προκειμένου το παραπάνω σενάριο να μην έχει αστάθειες και να είναι κοσμολογικά αποδεκτό πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής δύο συνθήκες [113–115]

$$c_S^2 \equiv \frac{3(2w_1^2w_2H - w_2^2w_4 + 4w_1w_2\dot{w}_1 - 2w_1^2\dot{w}_2)}{w_1(4w_1w_3 + 9w_2^2)} \geq 0, \quad (3.13)$$

για την αποφυγή ασταθειών της Λαγκρανζιανής που αφορούν τη ταχύτητα διάδοσης των βαθμωτών διαταραχών και

$$Q_S \equiv \frac{w_1(4w_1w_3 + 9w_2^2)}{3w_2^2} > 0, \quad (3.14)$$

για την αποφυγή επιπλέον ψεύτικων βαθμών ελευθερίας (ghost), όπου

$$w_1 \equiv 2(G_4 - 2XG_{4,X}) - 2X(G_{5,X}\dot{\phi}H - G_{5,\phi}), \quad (3.15)$$

$$w_2 \equiv -2G_{3,XX}\dot{\phi} + 4G_4H - 16X^2G_{4,XX}H + 4(\dot{\phi}G_{4,\phi X} - 4HG_{4,X})X + 2G_{4,\phi}\dot{\phi} + 8X^2HG_{5,\phi X} + 2HX(6G_{5,\phi} - 5G_{5,X}\dot{\phi}H) - 4G_{5,XX}\dot{\phi}X^2H^2, \quad (3.16)$$

$$w_3 \equiv 3X(K_{,X} + 2XK_{,XX}) + 6X(3X\dot{\phi}HG_{3,XX} - G_{3,\phi X}X - G_{3,\phi} + 6H\dot{\phi}G_{3,X}) + 18H(4HX^3G_{4,XXX} - HG_4 - 5X\dot{\phi}G_{4,\phi X} - G_{4,\phi}\dot{\phi} + 7HG_{4,XX}X + 16HX^2G_{4,XX} - 2X^2\dot{\phi}G_{4,\phi XX}) + 6H^2X(2H\dot{\phi}G_{5,XXX}X^2 - 6X^2G_{5,\phi XX} + 13XH\dot{\phi}G_{5,XX} - 27G_{5,\phi X}X + 15H\dot{\phi}G_{5,X} - 18G_{5,\phi}), \quad (3.17)$$

$$w_4 \equiv 2G_4 - 2XG_{5,\phi} - 2XG_{5,X}\ddot{\phi}. \quad (3.18)$$

### 3.3 Ενοποίηση Σκοτεινής Ύλης - Σκοτεινής Ενέργειας

Σκοπός μας είναι να χρησιμοποιήσουμε έναν κατάλληλο συνδυασμό των όρων της παραπάνω θεωρίας ώστε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο που θα συνδυάζει την καθιερωμένη ΓΣ με ένα επιπλέον βαθμό ελευθερίας που εξαρτάται από το βαθμωτό πεδίο. Το μοντέλο αυτό θα περιγράφει ένα ενοποιημένο ρευστό το οποίο συμπεριφέρεται ως σκοτεινή ύλη σε αρχικές και μεταγενέστερες χρονικές στιγμές και ως σκοτεινή ενέργεια σήμερα.

Για να έχουμε μια περιγραφή στο σύστημα Einstein θεωρούμε  $G_4(\phi, X) = \frac{1}{2}$  στη δράση (3.1), που οδηγεί στην εμφάνιση του γνωστού όρου της ΓΣ, του βαθμωτού Ricci,  $R$ . Οι υπολειπόμενες Λαγκρανζιανές  $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_5$  θα είναι κομμάτια της Λαγκρανζιανής του ενοποιημένου ρευστού  $\mathcal{L}_U = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_5$ . Σε μια γεωμετρία FRW οι εξισώσεις Einstein (3.8) και (3.9) απλοποιούνται στις

$$3H^2 = \rho_U, \quad (3.19)$$

$$-(3H^2 + 2\dot{H}) = p_U, \quad (3.20)$$

όπου

$$\rho_U = 2XK_{,X} - K + 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,\phi} + 2H^3X\dot{\phi}(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) - 6H^2X(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}), \quad (3.21)$$

$$p_U = K - 2X(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}) - 2X(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^2\ddot{\phi})G_{5,X} - 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} + 4HX(\dot{X} - HX)G_{5,\phi X} + 2[2(\dot{H}X + H\dot{X}) + 3H^2X]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi}. \quad (3.22)$$

Οι παραπάνω ποσότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον ορισμό της ενοποιημένης παραμέτρου καταστατικής εξίσωσης του σύμπαντος  $w_U$ , ώστε το ρευστό να ενσωματώνει την σκοτεινή ύλη και σκοτεινή ενέργεια σε μια ενιαία μορφή

$$w_U \equiv \frac{p_U}{\rho_U}. \quad (3.23)$$

Στόχος μας είναι να επιλέξουμε κατάλληλα τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις  $K(\phi, X)$ ,  $G_3(\phi, X)$  και  $G_5(\phi, X)$  ώστε να επιτύχουμε μια συμπεριφορά του  $w_U$  σε συμφωνία με την παρατηρήσιμη τιμή του. Πιο συγκεκριμένα, όπως είναι γνωστό, στην καθιερωμένη κοσμολογία η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης του σύμπαντος παραμένει στην τιμή μηδέν κατά την περίοδο κυριαρχίας της ύλης,  $z \sim 3000$  έως  $z \sim 2 - 3$  [34]. Στη συνέχεια αρχίζει να μειώνεται, περνώντας την τιμή  $-1/3$ , που σηματοδοτεί την επιταχυνόμενη διαστολή, περίπου στο  $z \sim 0.4 - 0.6$  και τέλος καταλήγοντας στη τιμή  $-0.7$  σήμερα ( $z = 0$ ) [34].

Στο σενάριο του  $\Lambda$ CDM η παραπάνω συμπεριφορά προκύπτει θεωρώντας ένα ρευστό σκοτεινής ύλης χωρίς πίεση με  $w_m \approx 0$  και την κοσμολογική σταθερά με  $w_\Lambda = -1$ , και παραμέτρους πυκνότητας  $\Omega_m$  και  $\Omega_\Lambda$  αντίστοιχα. Η συνολική παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης δίνεται από τη σχέση  $w_t = \Omega_m w_m + \Omega_\Lambda w_\Lambda \approx \Omega_\Lambda w_\Lambda$ , και συνεπώς παίρνουμε τη θεμιτή συμπεριφορά αφού το  $\Omega_\Lambda$  είναι περίπου μηδέν στην περίοδο κυριαρχίας της ύλης και αρχίζει να υπερσχύει μετά το  $z \sim 2 - 3$ .

Μια σημαντική υπόθεση στην κατασκευή του μοντέλου είναι η συμμετρία μετατόπισης shift symmetry. Κάτω από αυτή τη συμμετρία στις εξισώσεις (3.21), (3.22) και (3.10) εμφανίζονται μόνο οι παράγωγοι  $X(t)$  και  $\dot{X}(t)$  του βαθμωτού πεδίου και όχι το ίδιο το πεδίο  $\phi$ . Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να εξαλείψουμε τις παραγώγους αυτές ανάμεσα στα  $\rho_U$  και  $p_U$ , με αποτέλεσμα μια έκφραση της μορφής  $p_U(\rho_U)$ . Ρευστά με καταστατική εξίσωση τέτοιου είδους, για παράδειγμα μοντέλα Chaplygin gas και επεκτάσεις τους [96], έχει αποδειχθεί ότι μπορούν να οδηγήσουν σε μια ενοποιημένη περιγραφή σκοτεινής ύλης - σκοτεινής ενέργειας. Στα μοντέλα αυτά όμως η σχέση  $p_U(\rho_U)$  επιλέγεται αυθαίρετα ενώ στο σενάριο που περιγράφουμε προέρχεται από τη θεωρία, τους επιλεγμένους όρους της Λαγκρανζιανής Horndeski.

Σχολιάζουμε στη συνέχεια τις ιδιότητες που χρειάζεται να ικανοποιούν οι συναρτήσεις  $K(\phi, X)$ ,  $G_3(\phi, X)$  και  $G_5(\phi, X)$  προκειμένου το  $w_U$  να έχει την προαναφερθείσα συμπεριφορά. Αρχικά όσον αφορά το  $K(\phi, X)$  η συμμετρία μετατόπισης επιβάλλει να είναι συνάρτηση μόνο του  $X$ , δηλαδή  $K(X)$ , που περιλαμβάνει τον κανονικό κινητικό όρο  $\sim X$ . Για το  $G_3(\phi, X)$  όμοια η προφανής επιλογή είναι  $G_3(\phi, X) = G_3(X)$ , αν και μια επιλογή  $G_3(\phi, X) \sim \phi$  οδηγεί με ολοκλήρωση κατά παράγοντες σε εξισώσεις που υπακούουν στη συμμετρία μετατόπισης. Για το  $G_5(\phi, X)$ , ένας όρος  $\sim \phi$  με ολοκλήρωση κατά παράγοντες καταλήγει στη γνωστή σύζευξη της παραγώγου του πεδίου με τον τανυστή Einstein  $G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi$  [9]. Η σύζευξη αυτή όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα κεφάλαια σε μεγάλη κλίμακα δρα ως όρος τριτής στην εξέλιξη του πεδίου. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα αυτή ώστε να περιορίσουμε την κινητική ενέργεια του βαθμωτού πεδίου σε (σχεδόν) σταθερές τιμές για ένα μεγάλο διάστημα καταλήγοντας σε μια σχεδόν μηδενική παράμετρο  $w_U$  κατά την περίοδο κυριαρχίας της ύλης. Στη συνέχεια, όταν η σύζευξη αυτή γίνεται πιο αδύναμη, η διαστολή του σύμπαντος μειώνει την κινητική ενέργεια του πεδίου και το  $w_U$  τείνει προς τις αρνητικές τιμές σηματοδοτώντας την επιταχυνόμενη διαστολή.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή σημειώνοντας ότι πολλά σενάρια τροποποιημένης βαρύτητας καταλήγουν σε μια περιγραφή της εξέλιξης του σύμπαντος που συνάδει με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Όμως μια εκτενέστερη ανάλυση σε διαταρακτικό επίπεδο παρουσιάζει συχνά παθολογίες απορρίπτοντας έτσι τα μοντέλα αυτά. Αφού λοιπόν βρούμε την κατάλληλη λύση που θα βρίσκεται σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις θα πρέπει να διαπιστώσουμε ότι πράγματι ικανοποιεί τις σχέσεις (3.13) και (3.14) και κρίνεται ρεαλιστική.

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζουμε ένα απλό μοντέλο που ικανοποιεί τις παραπάνω απαιτήσεις και μελετάμε λεπτομερώς τις επιπτώσεις του στην κοσμολογία.

### 3.4 Ένα συγκεκριμένο μοντέλο

Θα κατασκευάσουμε μια υπο-κλάση της θεωρίας με πεδία Galileon η οποία οδηγεί σε μια ενοποιημένη περιγραφή για τη σκοτεινή ύλη και ενέργεια. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε τον κανονικό κινητικό όρο μαζί με δύο μη τριτοβάθμιους όρους πεδίων Galileon και τη σύζευξη με τον τανυστή Einstein. Θεωρούμε δηλαδή την Λαγκρανζιανή (3.2), με τις επιλογές  $K(\phi, X) = \eta(X + \eta_2 X^{1/2})$ ,  $G_3(\phi, X) = \frac{\lambda_3}{2} X$ ,  $G_4(\phi, X) = \frac{1}{2}$ ,  $G_5(\phi, X) = -\frac{\lambda_5}{2} \phi$ , και για ευκολία χρησιμοποιούμε μονάδες  $8\pi G = c = \hbar = 1$ . Η δράση (3.1) τότε παίρνει τη μορφή

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2} + \eta(X + \eta_2 X^{1/2}) - \frac{\lambda_3 X^{-1/2}}{2} + \frac{\lambda_5}{2} G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right]. \quad (3.24)$$

Χωρίς να χαθεί το γενικό πλαίσιο μπορούμε για απλούστευση να επιλέξουμε  $\eta_2 = 1$ . Σημειώνουμε εδώ ότι οι μορφές αυτές των συναρτήσεων  $K(\phi, X)$  και  $G_3(\phi, X)$ , που εμπεριέχουν τα  $X^{\pm 1/2}$ , δεν διαδραματίζουν τόσο ενεργό ρόλο στη προσομοίωση της φαινομενολογικής κοσμολογικής εξέλιξης όσο στην καταπολέμηση παθολογιών και ασταθειών της θεωρίας σε διαταρακτικό επίπεδο. Όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα,



δεν συμπεριλαμβάνουμε στη Λαγκρανζιανή έναν όρο ανάλογο του  $\phi\Box\phi$  αφού με ολοκλήρωση κατά παράγωγους οδηγεί στην ίδια συνεισφορά στις εξισώσεις κίνησης με έναν όρο ανάλογο του  $X$  τον οποίο διαθέτουμε ήδη.

Στο σενάριο αυτό οι εξισώσεις (3.8) και (3.9) καταλήγουν στις

$$3H^2 = (\eta + 9\lambda_5 H^2)X - \frac{3\lambda_3 H}{\sqrt{2}}, \quad (3.25)$$

και

$$-(3H^2 + 2\dot{H}) = -\eta\sqrt{X} + X \left( \eta - 3\lambda_5 H^2 - 2\lambda_5 \dot{H} \right) - 2\lambda_5 H \dot{X} + \frac{\lambda_3 \dot{X}}{2\sqrt{2}X}, \quad (3.26)$$

με  $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  και  $X(t) = \frac{\dot{\phi}^2(t)}{2}$ , οι οποίες φαίνονται στη μορφή των (3.19) και (3.20) ως

$$\rho_U \equiv (\eta + 9\lambda_5 H^2)X - \frac{3\lambda_3 H}{\sqrt{2}}, \quad (3.27)$$

$$p_U \equiv -\eta\sqrt{X} + X \left( \eta - 3\lambda_5 H^2 - 2\lambda_5 \dot{H} \right) - 2\lambda_5 H \dot{X} + \frac{\lambda_3 \dot{X}}{2\sqrt{2}X}. \quad (3.28)$$

Συνεπώς η παράμετρος της ενοποιημένης καταστατικής εξίσωσης του σύμπαντος (3.23) θα έχει τη μορφή

$$w_U \equiv \frac{p_U}{\rho_U} = \frac{-\eta\sqrt{X} + X \left( \eta - 3\lambda_5 H^2 - 2\lambda_5 \dot{H} \right) - 2\lambda_5 H \dot{X} + \frac{\lambda_3 \dot{X}}{2\sqrt{2}X}}{(\eta + 9\lambda_5 H^2)X - \frac{3\lambda_3 H}{\sqrt{2}}}. \quad (3.29)$$

Επιπλέον, η εξίσωση Klein-Gordon (3.10) γίνεται

$$-6\sqrt{2}\eta H X^{3/2} + 12\sqrt{2}H X^2 \left( \eta + 3\lambda_5 + 2\lambda_5 \dot{H} \right) + 3\lambda_3 H \dot{X} + 2X \left[ -3\lambda_3 \dot{H} + \eta\sqrt{2}\dot{X} + H^2 \left( -9\lambda_3 + 3\sqrt{2}\lambda_5 \dot{X} \right) \right] = 0, \quad (3.30)$$

όπου κάνοντας χρήση των εξισώσεων (3.27) και (3.28), μπορεί να ξαναγραφεί στη γνωστή μορφή

$$\dot{\rho}_U + 3H(\rho_U + p_U) = 0. \quad (3.31)$$

Έχουμε ήδη επισημάνει ότι οι εξισώσεις που προέρχονται από δράση (3.24) υπακούουν στη συμμετρία μετατόπισης ώστε να μην εμφανίζεται το βαθμωτό πεδίο  $\phi$  αλλά μόνο παράγωγοι του  $X(t)$ ,  $\dot{X}(t)$ . Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (3.25), (3.30) και (3.27) ώστε να εξαλείψουμε τις παραγώγους αυτές από την εξίσωση (3.28), με αποτέλεσμα μια έκφραση για το  $p_U$  συναρτήσει του  $\rho_U$ ,

$$\begin{aligned} p_U(\rho_U) = & \left\{ [3\lambda_5 f(\rho_U) - 2] \left\{ -3\lambda_3^2 \{ 4 + \lambda_5 f(\rho_U) [9\lambda_5 f(\rho_U) - 28] \} [\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U)] \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\eta f(\rho_U) [3\lambda_5 f(\rho_U) - 2] \left\{ \sqrt{3}\lambda_3 \lambda_5 f(\rho_U) [3\lambda_5 f(\rho_U) - 14] - 2 \{ 2 + 3\lambda_5 f(\rho_U) [\lambda_5 f(\rho_U) - 1] \} g(\rho_U) \right\} \right\} \right\}^{-1} \\ & \cdot \left\{ -36\sqrt{3}\lambda_3^5 - 18\lambda_3^4 \{ 2g(\rho_U) + \lambda_5 f(\rho_U) [\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U)] \} - 2\eta^2 f^{3/2}(\rho_U) [2 - 3\lambda_5 f(\rho_U)]^2 \right. \\ & \left. \left\{ -6\sqrt{6}\lambda_3 \lambda_5 f(\rho_U) - 2\sqrt{2} [\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U)] + 2\sqrt{f(\rho_U)} [2\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U)] + \lambda_5 f^{3/2}(\rho_U) [11\sqrt{3}\lambda_3 + 2g(\rho_U)] \right\} \right. \\ & \left. \left. + 3\eta\lambda_3^2 f(\rho_U) [3\lambda_5 f(\rho_U) - 2] \left\{ 10\sqrt{3}\lambda_3 + 6g(\rho_U) - 12\sqrt{2}\lambda_5 \sqrt{f(\rho_U)} [\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U)] + \lambda_5 f(\rho_U) [21\sqrt{3}\lambda_3 + 19g(\rho_U)] \right\} \right\} \right\}, \quad (3.32) \end{aligned}$$

όπου  $f(\rho_U) = \frac{2\eta\rho_U + 6\lambda_5\rho_U^2 + [6\lambda_3^2\rho_U(\eta + 3\lambda_5\rho_U)]^{1/2}}{(\eta + 3\lambda_5\rho_U)^2}$  και  $g(\rho_U) = [3\lambda_3^2 + 4\eta f(\rho_U) - 6\eta\lambda_5 f^2(\rho_U)]^{1/2}$ . Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης του ενοποιημένου ρευστού

$$w_U(\rho_U) = \frac{p_U(\rho_U)}{\rho_U} \quad (3.33)$$

ως συνάρτηση του παράγοντα  $a(t)$  και των ζεύξεων που εμφανίζονται στη δεδομένη δράση (3.24). Με όσα έχουμε σχολιάσει στην εισαγωγή του κεφαλαίου παρατηρούμε ότι η σχέση  $p_U(\rho_U)$  μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μοντέλο γενικευμένου Charlygin gas [97, 122], με το πλεονέκτημα ότι έχει προκύψει από τις εξισώσεις κίνησης του ρευστού που υπακούει στην παραπάνω δράση και δεν εισάγεται αυθαίρετα.

Για να αποκτήσουμε μια ενοποιημένη περιγραφή της σκοτεινής ύλης και σκοτεινής ενέργειας από το παραπάνω μοντέλο λύνουμε την εξίσωση (3.25) ως προς  $X$  με αποτέλεσμα

$$X = \frac{3H(\sqrt{2}\lambda_3 + 2H)}{2(\eta + 9\lambda_5 H^2)}. \quad (3.34)$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στην εξίσωση Klein-Gordon (3.30) καταλήγουμε σε μια διαφορική εξίσωση για το  $H(t)$ ,

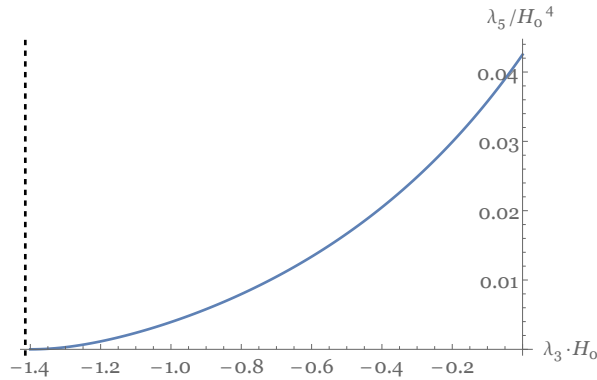
$$\dot{H} = \frac{\sqrt{6}H^{3/2}(\eta + 9\lambda_5 H^2) \left\{ \eta(\sqrt{2}\lambda_3 + 2H)^{3/2}(\eta + 9\lambda_5 H^2)^{1/2} - \sqrt{6}H \left[ \lambda_3^2(\eta - 3\lambda_5 H^2) + 3\sqrt{2}\lambda_3 H(\eta + \lambda_5 H^2) + 4H^2(\eta + 3\lambda_5 H^2) \right] \right\}}{\lambda_3^2(\eta - 27\lambda_5 H^2)(\eta + 3\lambda_5 H^2) + 6\sqrt{2}\lambda_3 H(\eta^2 + 5\eta\lambda_5 H^2 + 36\lambda_5^2 H^4) + 8H^2[\eta^2 + 9\lambda_5 H^2(\eta + 6\lambda_5 H^2)]}. \quad (3.35)$$

Τέλος εισαγάγοντας τις (3.34) και (3.35) στην (3.29) βρίσκουμε

$$w_U = \left\{ 3H \left\{ \lambda_3^2(\eta - 27\lambda_5 H^2)(\eta + 3\lambda_5 H^2) + 6\sqrt{2}\lambda_3 H(\eta^2 + 5\eta\lambda_5 H^2 + 36\lambda_5^2 H^4) + 8H^2[\eta^2 + 9\lambda_5 H^2(\eta + 6\lambda_5 H^2)] \right\} \right\}^{-1} \cdot \left\{ -2\sqrt{6}H\eta(\sqrt{2}\lambda_3 + 2H)^{3/2}(\eta + 9\lambda_5 H^2)^{3/2} + 3H \left\{ 8\eta H^2(\eta + 15\lambda_5 H^2) + 3\lambda_3^2(\eta^2 + 16\eta\lambda_5 H^2 - 9\lambda_5^2 H^4) + 6\sqrt{2}\lambda_3 H[\eta^2 + 3\lambda_5 H^2(5\eta - 6\lambda_5 H^2)] \right\} \right\}. \quad (3.36)$$

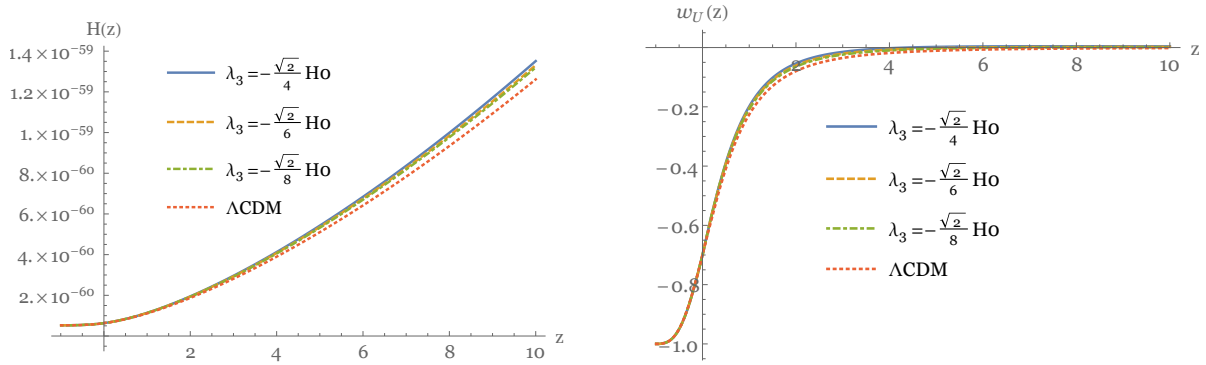
Συμπεώς, η λύση  $H(t)$  που προκύπτει από την διαφορική εξίσωση (3.35), οδηγεί στη λύση της παραμέτρου  $w_U$  από την εξίσωση (3.36). Η εξίσωση (3.35) δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά εν γένει. Για το λόγο αυτό στα παρακάτω χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους για την εύρεση της λύσης  $H(t)$  και εν τέλει της συμπεριφοράς του  $w_U$ . Για διευκόλυνση και προκειμένου να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με τα παρατηρησιακά δεδομένα χρησιμοποιούμε την παράμετρο μετατόπισης προς το ερυθρό (redshift)  $z = -1 + a_0/a$  ως την ανεξάρτητη μεταβλητή,  $a_0 = 1$  τη σημερινή τιμή του παράγοντα  $a(t)$  και μελετάμε πλέον τη διαφορική εξίσωση  $\dot{H} = -(1+z)H(z)H'(z)$  (ο τόνος δηλώνει παραγωγή ως προς  $z$ ).

Η σημερινή ( $z = 0$ ) τιμή του  $H$  είναι  $H_0 = \frac{h}{3000} Mpc^{-1}$ , με την αδιάστατη σταθερά  $h$  να διαφοροποιείται στο διάστημα  $0.67 - 0.72$  ανάλογα με τον παρατηρητή (Hubble Space Telescope, Planck Mission, WMAP). Επιλέγουμε την γενικά αποδεκτή τιμή  $h = 0.69$  και σε μονάδες  $8\pi G = c = \hbar = 1$  βρίσκουμε  $H_0 \approx 6 \times 10^{-61}$ . Επιπλέον χρησιμοποιούμε την παρούσα τιμή της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης  $w_U(z = 0) \approx -0.7$ , σύμφωνα με τις παρατηρήσεις [34]. Επιλέγοντας την παράμετρο  $\eta = \frac{1}{2}$  ώστε να συμπεριλάβουμε τον τετριμμένο κινητικό όρο, καταλήγουμε στο ζεύγος των παραμέτρων  $(\lambda_3, \lambda_5)$  που ικανοποιούν τις παραπάνω αρχικές συνθήκες αλλά και τους περιορισμούς που έχουμε αναφέρει στην ανάλυσή μας. Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο Σχ. 3.1 Στο αριστερό γράφημα του Σχ. 3.2 παρουσιάζουμε τη λύση  $H(z)$  της εξίσωσης

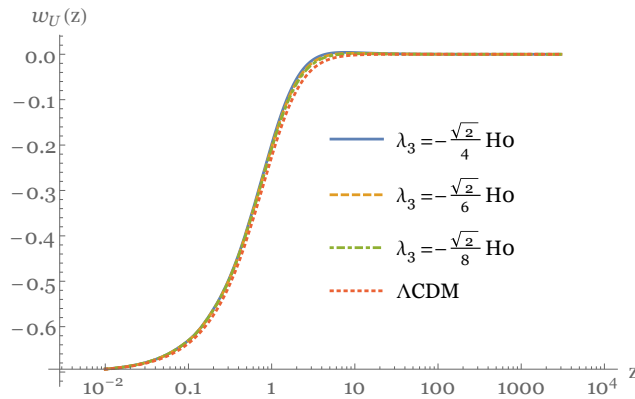


Σχήμα 3.1: Ο χώρος των παραμέτρων  $(\lambda_3, \lambda_5)$  που ικανοποιεί τους θεωρητικούς περιορισμούς της ενότητας 3.3 και τις συνοριακές συνθήκες  $H(z = 0) \equiv H_0 \approx 6 \times 10^{-61}$ ,  $w_U(z = 0) \approx -0.7$ . Η κάθετη διακεκομμένη γραμμή σηματοδοτεί την παραβίαση των παραπάνω.

(3.35), για τρεις επιλογές του  $\lambda_3$  ενώ για σύγκριση απεικονίζουμε την αντίστοιχη εξέλιξη που προκύπτει από το σενάριο  $\Lambda$ CDM. Στο δεξιό γράφημα του Σχ. 3.2 φαίνεται η εξέλιξη της ενοποιημένης παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης από την εξίσωση (3.36), μαζί με την αντίστοιχη συνολική παράμετρο του  $\Lambda$ CDM. Τέλος για μεγαλύτερη ευκρίνεια στο Σχ. 3.3 παρουσιάζουμε το  $w_U(z)$  σε λογαριθμική κλίμακα ώστε να είναι εμφανής η συμπεριφορά σε μεγαλύτερα  $z$ . Όπως είναι εμφανές η μορφή του  $w_U(z)$  είναι σε



Σχήμα 3.2: Αριστερά: Η εξέλιξη της παραμέτρου Hubble συναρτήσει του  $z$ , για το μοντέλο (3.24), για διάφορες τιμές του  $\lambda_3$  σε μονάδες όπου  $8\pi G = c = \hbar = 1$ . Κατά την εξαγωγή των αποτελεσμάτων έχουμε χρησιμοποιήσει την σημερινή τιμή της παραμέτρου της καταστατικής εξίσωσης του σύμπαντος  $w_U(z=0) \approx -0.7$  καθώς και την σημερινή τιμή του  $H$ ,  $H_0 \approx 6 \times 10^{-61}$  που καθορίζουν στη συνέχεια την τιμή  $\lambda_5$  (βλ. Σχ. 3.1). Δεξιά: Η εξέλιξη της παραμέτρου  $w_U(z)$ . Και στα δύο γραφήματα παρουσιάζουμε τις αντίστοιχες καμπύλες όπως προβλέπονται από το σενάριο  $\Lambda$ CDM.



Σχήμα 3.3: Η εξέλιξη του  $w_U(z)$  όπως παρουσιάζεται στο δεξιό γράφημα του Σχ. 3.2, σε λογαριθμική κλίμακα ως το  $z \sim 3000$ .

άριστη συμφωνία με τις παρατηρήσεις. Δηλαδή, έχει την τιμή μηδέν κατά την περίοδο κυριαρχίας της ύλης δηλαδή για ( $z \sim 3000$  έως  $z \sim 2 - 3$ ), στη συνέχεια μειώνεται διασχίζοντας το σύνορο  $-1/3$  και σηματοδοτώντας την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος καταλήγοντας στην σημερινή ( $z = 0$ ) τιμή  $-0.7$ . Τονίζουμε ότι δεν έχουμε υποθέσει κάποιο επιπλέον κομμάτι ύλης. Το ίδιο το πεδίο Galileon είναι αυτό που περιγράφει τα κομμάτια της σκοτεινής ύλης και ενέργειας με έναν ενοποιημένο τρόπο. Για πληρότητα στα παραπάνω σχήματα παρουσιάζουμε και την εξέλιξη του  $w_U(z)$  στο μακρινό μέλλον προς το αναμενόμενο όριο  $w_U \rightarrow -1$ . Σημειώνουμε ότι αυτή η φάση που έχει τη μορφή de-Sitter προκύπτει χωρίς να θεωρήσουμε μια κοσμολογική σταθερά, συνεπώς πρόκειται για ένα αρκετά ενδιαφέρον, μη τετριμμένο αποτέλεσμα.

Μπορούμε να σκιαγραφήσουμε μια ποιοτική εικόνα από τα παραπάνω αποτελέσματα. Αν καταφέρουμε με κάποιο μηχανισμό να διατηρήσουμε το  $X$  σε σταθερές τιμές στο παρελθόν (δηλ. για μεγάλα  $H$ ) τότε παρατηρούμε από την έκφραση (3.29) ότι το  $w_U$  τείνει στην τιμή  $w_U \rightarrow 0$ . Στη συνέχεια η μεταβολή του  $X$  σε μικρότερες τιμές οδηγεί στην απομάκρυνση του  $w_U$  από τη μηδενική τιμή. Το μοντέλο μας παρουσιάζει αυτή τη συμπεριφορά και παρατηρούμε ότι πράγματι για μεγάλα  $H$  έχουμε  $X \rightarrow \frac{1}{3\lambda_5} =$  σταθερό όπως θέλαμε. Από την άλλη μεριά αν λαμβάναμε υπόψιν μας έναν όρο  $\sim G_5(X)$  [124], τότε η επιπλέον πληροφορία από τους όρους  $\sim \dot{\phi}$  θα μετέβαλλε την κινητική ενέργεια του ρευστού με αποτέλεσμα  $w_U \neq 0$  στο παρελθόν.

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με τα παρατηρησιακά δεδομένα που προέρχονται από υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ia (Type Ia Supernovae), μια διαδικασία σχετικά άμεση εφόσον γνωρίζουμε ήδη την εξέλιξη του  $H(z)$ . Οι παρατηρήσεις μετρούν την φαινόμενη φωτεινότητα (apparent

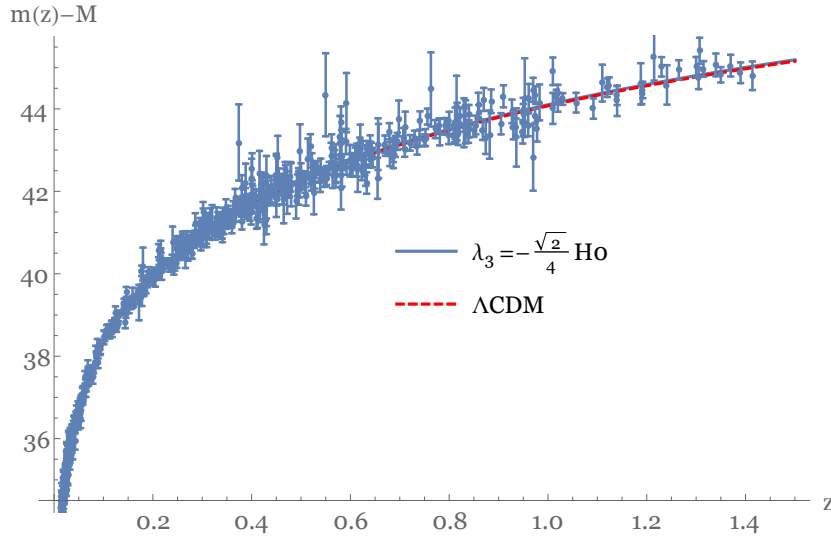
luminosity) συναρτήσει του  $z$ ,  $l(z)$ , ή ισοδύναμα το φαινόμενο μέγεθος apparent magnitude που συνδέεται με την ακτίνα φωτεινότητας (luminosity distance) σύμφωνα με τη σχέση

$$2.5 \log \left[ \frac{L}{l(z)} \right] = \mu \equiv m(z) - M = 5 \log \left[ \frac{d_L(z)_{\text{obs}}}{\text{Mpc}} \right] + 25, \quad (3.37)$$

όπου  $L$  και  $M$  η απόλυτη (absolute) φωτεινότητα και το απόλυτο μέγεθος αντίστοιχα. Από θεωρητικής απόψεως η προβλεπόμενη παράμετρος Hubble σχετίζεται με την ακτίνα φωτεινότητας  $d_L(z)_{\text{th}}$  ως

$$d_L(z)_{\text{th}} \equiv (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.38)$$

Στο μοντέλο μας η εξέλιξη του  $H(z)$  βρίσκεται αριθμητικά από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.35), όπως παρουσιάστηκε στο αριστερό γράφημα του Σχ. 3.2. Για το σενάριο του  $\Lambda$ CDM το αντίστοιχο  $H(z)$  δίνεται από τη σχέση  $H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}]$ , με  $\Omega_m$  και  $\Omega_\Lambda$  η παράμετρος πυκνότητας της συνολικής μάζας και της κοσμολογικής σταθεράς αντίστοιχα, με τον δείκτη '0' να δηλώνει τη σημερινή τιμή τους. Στο Σχ. 3.4 παρουσιάζουμε τη θεωρητικά προβλεπόμενη διαφορά  $m(z) - M$  για το μοντέλο (3.24), ως προς τα αντίστοιχα αποτελέσματα από τα δεδομένα 580 υπερκαινοφανών αστέρων τύπου Ia [125], αλλά και την καμπύλη που προβλέπει το σενάριο  $\Lambda$ CDM. Όπως φαίνεται το προτεινόμενο μοντέλο ενοποίησης βρίσκεται σε άριστη συμφωνία με της παρατηρήσεις και σχεδόν αδιαχώριστο από τα αποτελέσματα του  $\Lambda$ CDM. Αυτό είναι ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα του κεφαλαίου. Με σκοπό να συγκρίνουμε τα



Σχήμα 3.4: Η θεωρητικά προβλεπόμενη διαφορά του σχετικού μείον του απόλυτου magnitude για το μοντέλο (3.24), με  $\lambda_3 = -\sqrt{2}H_0/4$  σε μονάδες  $8\pi G = c = \hbar = 1$ , σε αντιστοιχία με την παρατηρησιακή τιμή από τα δεδομένα 580 υπερκαινοφανών αστέρων τύπου Ia [125]. Προς σύγκριση έχουμε συμπεριλάβει και τα προβλεπόμενα αποτελέσματα από το σενάριο  $\Lambda$ CDM.

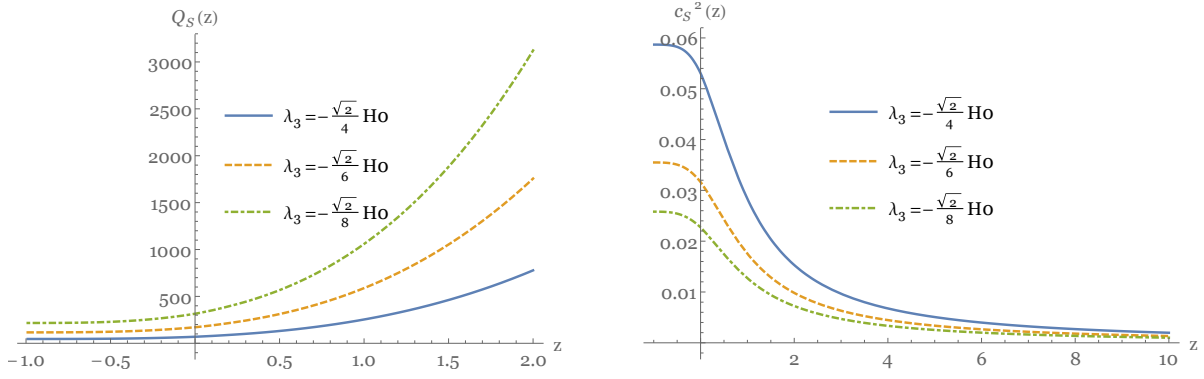
παραπάνω δύο μοντέλα μεταξύ τους χρησιμοποιούμε το κριτήριο Akaike Information Criterion [126]. Το  $AIC$  ορίζεται ως

$$AIC = -2 \ln \mathcal{L} + 2d = \chi_{min}^2 + 2d, \quad (3.39)$$

με  $\mathcal{L} = \exp(-\chi_{min}^2/2)$  τη συνάρτηση μέγιστης πιθανότητας και  $d$  τον αριθμό των παραμέτρων του μοντέλου. Η ελαχιστοποίηση του  $\chi^2$  δίνεται από τη σχέση

$$\chi_{min}^2 = \sum_i^N \frac{[\mu(z_i)_{\text{obs}} - \mu(z_i)_{\text{th}}]^2}{\sigma_i^2}, \quad (3.40)$$

με  $N = 580$  τον αριθμό των παρατηρησιακών δεδομένων και  $\sigma_i$  το σφάλμα που αντιστοιχεί σε κάθε  $\mu(z_i)_{\text{obs}}$ . Το σενάριο του  $\Lambda$ CDM θα είναι το σενάριο αναφοράς ως προς το οποίο θα συγκριθεί το μοντέλο μας. Αν για κάποιο μοντέλο  $M$ , υπολογίζοντας τη διαφορά  $\Delta AIC = AIC_M - AIC_{\Lambda\text{CDM}}$  καταλήξουμε σε αποτέλεσμα



Σχήμα 3.5: Αριστερά: Η εξέλιξη του  $Q_s$  από τη σχέση (3.42) που δηλώνει την απουσία ασταθειών στο μοντέλο (3.24) για διάφορα  $\lambda_3$  σε μονάδες  $8\pi G = c = \hbar = 1$ . Δεξιά: Η αντίστοιχη εξέλιξη της ταχύτητας διάδοσης των βαθμωτών διαταραχών από την σχέση (3.43).

$\leq 2$ , σημαίνει ότι το μοντέλο αυτό είναι παρατηρησιακά αποδεκτό [127, 128]. Όσον αφορά τα εν λόγω μοντέλα το  $\Lambda$ CDM έχει μία παράμετρο ενώ το προτεινόμενο μοντέλο έχει τρεις. Το αποτέλεσμα είναι

$$\Delta AIC = 0.65 < 2, \quad (3.41)$$

και για το λόγο αυτό το προτεινόμενο σενάριο μπορεί να υποστηρίξει την παρατηρούμενη κοσμολογία.

Ολοκληρώνουμε την ανάλυσή μας για το μοντέλο που περιγράφει με έναν ενοποιημένο τρόπο την σκοτεινή ύλη και σκοτεινή ενέργεια υπενθυμίζοντας ότι πρέπει να προβούμε σε έναν έλεγχο τυχόν παθολογιών και ασταθειών σε διαταρακτικό επίπεδο. Στη θεωρία μας, όπως έχουμε αναφέρει, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι δύο περιορισμοί (3.13) και (3.14), οι οποίοι για το δεδομένο μοντέλο έχουν τη μορφή

$$Q_s = -\frac{2(\lambda_5 X - 1) \left\{ 3\lambda_3^2 + 6\sqrt{2}\lambda_3 H(1 - 5\lambda_5 X) + 8X [\eta - \eta\lambda_5 X + 3\lambda_5 H^2(1 + 3\lambda_5 X)] \right\}}{[\sqrt{2}\lambda_3 + H(4 - 12\lambda_5 X)]^2} > 0, \quad (3.42)$$

$$c_s^2 = \left\{ (\lambda_5 X - 1) \left\{ 3\lambda_3^2 + 6\sqrt{2}\lambda_3 H(1 - 5\lambda_5 X) + 8X [\eta - \eta\lambda_5 X + 3\lambda_5 H^2(1 + 3\lambda_5 X)] \right\} \right\}^{-1} \cdot \left\{ 32\lambda_5^2 H^2 X^2 (3\lambda_5 X - 1) - 8(\lambda_5 X - 1)^2 (3\lambda_5 X - 1) \dot{H} + \lambda_3 \left[ \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_5 X - 4\sqrt{2}\lambda_5 (\lambda_5 X - 1) \dot{X} \right] - 2H \left\{ \sqrt{2}\lambda_3 [\lambda_5 X(2 + 7\lambda_5 X) - 1] - 4\lambda_5 (\lambda_5 X - 1)(1 + 3\lambda_5 X) \dot{X} \right\} \right\} \geq 0, \quad (3.43)$$

με το επιπλέον όριο  $c_s^2 \leq 1$ . Οι περιορισμοί αυτοί οφείλουν να ισχύουν σε κάθε χρονική στιγμή.

Στο Σχ. 3.5 παρουσιάζουμε την εξέλιξη των  $Q_s$  και  $c_s^2$  για τις παραμέτρους και τις λύσεις του Σχ. 3.2 και παρατηρούμε ότι πράγματι οι παραπάνω περιορισμοί ικανοποιούνται πάντα και το μοντέλο μας είναι ελεύθερο από παθολογίες και αστάθειες.

### 3.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό έχουμε παρουσιάσει μια ενοποιημένη περιγραφή της σκοτεινής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας στο πλαίσιο των θεωριών με πεδία Galileon τα οποία υπακούουν στη συμμετρία μετατόπισης. Στη καθιερωμένη βιβλιογραφία τα πεδία Galileon χρησιμοποιούνται σε μια προσπάθεια να περιγράψουν τη συμπεριφορά της σκοτεινής ενέργειας ενώ το κομμάτι της σκοτεινής ύλης περιγράφεται ξεχωριστά. Στη δικιά μας προσέγγιση κατασκευάσαμε με μη τετριμμένους όρους της δράσης ένα ρευστό με κατασταστική εξίσωση που περιγράφει τη σκοτεινή ύλη και ενέργεια ταυτόχρονα. Ο συνδυασμός αυτός των κατάλληλων όρων είχε ως αποτέλεσμα η ενοποιημένη παράμετρος καταστατικής εξίσωσης να αντιπροσωπεύει ύλη χωρίς πίεση στο μακρινό παρελθόν (σκοτεινή ύλη) και μια επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος σήμερα (σκοτεινή ενέργεια) καταλήγοντας έτσι σε μια ενοποιημένη περιγραφή της κοσμολογικής εξέλιξης. Αυτά τα καταφέραμε χωρίς να θεωρήσουμε ένα επιπλέον κομμάτι ύλης ή μια κοσμολογική σταθερά.

Πιο συγκεκριμένα η συμμετρία μετατόπισης μας επέτρεψε να γράψουμε την πίεση του ρευστού συναρτήσει της πυκνότητας ενέργειας  $p_U = p_U(\rho_U)$ , μια μορφή ανάλογη με αυτή που παρουσιάζεται σε

γενικευμένα μοντέλα Chaplygin gas. Το μειονέκτημα των μοντέλων αυτών που αφορούν την αυθαίρετη επιλογή της καταστατικής εξίσωσης εξαλείφεται πλέον αφού η ενοποιημένη παράμετρος  $w_U$  του ρευστού εξαγάγεται από τις εξισώσεις κίνησης της προτεινόμενης δράσης,

Η συμπεριφορά του  $w_U(z)$  που προκύπτει κατά την ανάλυση του παραπάνω μοντέλου είναι σε άριστη συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Έχει μηδενική τιμή για  $z \sim 3000$  έως  $z \sim 2 - 3$ , στη συνέχεια μειώνεται φτάνοντας στην τιμή  $-1/3$  στο  $z \sim 0.5$ , σηματοδοτώντας την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος και καταλήγει στην σημερινή της τιμή  $-0.7$ . Επιπλέον, σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα παρατηρησιακά δεδομένα από υπερκαινοφανείς αστέρες καθιστούν το μοντέλο αυτό κοσμολογικά αποδεκτό και σχεδόν μη διαφοροποιήσιμο από το σενάριο  $\Lambda$ CDM

Τέλος μελετώντας το παραπάνω μοντέλο ενοποίησης σε διαταρακτικό επίπεδο βρίσκουμε ότι απουσιάζουν παθολογίες όπως ψεύτικοι βαθμοί ελευθερίας (ghosts) και αστάθειες περνώντας έτσι και τον τελευταίο έλεγχο ώστε να θεωρηθεί ένα αποδεκτό κοσμολογικό σενάριο.



## Παράρτημα Α΄

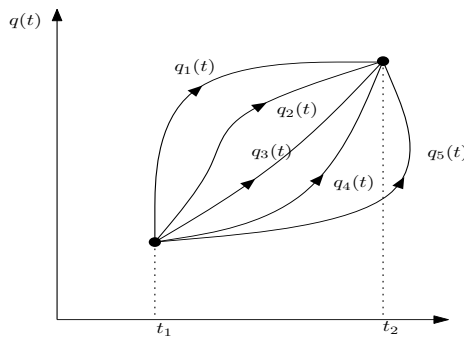
# Κλασική Θεωρία Πεδίου & Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Χωρόχρονο Minkowski

### Α΄.1 Αρχή της ελάχιστης δράσης

Οι κβαντικές θεωρίες χτίζονται εφαρμόζοντας μια διαδικασία κβάντωσης στις κλασικές θεωρίες. Το σημείο έναρξης μιας κλασικής θεωρίας είναι η αρχή της ελάχιστης δράσης. Η τροχία που θα ακολουθήσει ένα σωματίδιο προσδιορίζεται από το αξίωμα (αρχή) ότι από την ποικιλία των δυνατοτήτων θα επιλέξει εκείνη για την οποία μια ποσότητα που καλείται δράση θα γίνει ελάχιστη. Η δράση  $S$  ορίζεται

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (\text{Α.1})$$

όπου  $q(t)$  η θέση του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου και  $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  η ταχύτητά του, ενώ η  $L$  ονομάζεται Λαγκρανζιανή συνάρτηση. Η συνάρτηση  $S$  δεν είναι απλά μια συνάρτηση του  $t$  - είναι καλύτερα μια συνάρτηση ολόκληρου του συνόλου των σημείων  $q(t)$ . Είναι μια συνάρτηση της συνάρτησης  $q(t)$ , ή αλλιώς ένα συναρτησιακό του  $q(t)$ . Αυτό που θέλουμε να ξέρουμε είναι ποιό συγκεκριμένο  $q_c(t)$  ελαχιστοποιεί την  $S$ .



Σχήμα Α.1: Πιθανές χωροχρονικές τροχιές από το σημείο  $q(t_1)$  στο  $q(t_2)$

Θεωρούμε μια μικρή αλλαγή  $\delta q(t)$  στη διαδρομή από το  $q(t_1)$  στο  $q(t_2)$ . Στο ελάχιστο η αλλαγή  $\delta S$  στη δράση που αντιστοιχεί στην αλλαγή  $\delta q(t)$  θα πρέπει να μηδενίζεται. Η αλλαγή στη δράση δίνεται από τη σχέση

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) dt \quad (\text{Α.2})$$

αφού γενικά για μια συνάρτηση  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ισχύει

$$df(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} dx_n$$



Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\delta\dot{q}(t) = \frac{d(\delta q(t))}{dt}$  έχουμε

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{d(\delta q(t))}{dt} \right) dt$$

και ολοκληρώνοντας στην (Α.2) τον δεύτερο όρο κατά παράγοντες

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right) dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right]_{t_1}^{t_2}$$

Εφόσον θεωρούμε αλλαγές στη διαδρομή κατά την οποία όλες οι τροχιές ξεκινούν τη χρονική στιγμή  $t_1$  και σταματούν τη χρονική στιγμή  $t_2$  θα έχουμε ότι  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . Έτσι η συνθήκη  $\delta S = 0$  γίνεται

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \left( \frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) dt = 0$$

Η παραπάνω όμως πρέπει να ισχύει για κάθε  $\delta q(t)$  αφού η επιλογή του  $\delta q(t)$  ήταν εξ αρχής αυθαίρετη. Έτσι καταλήγουμε στην

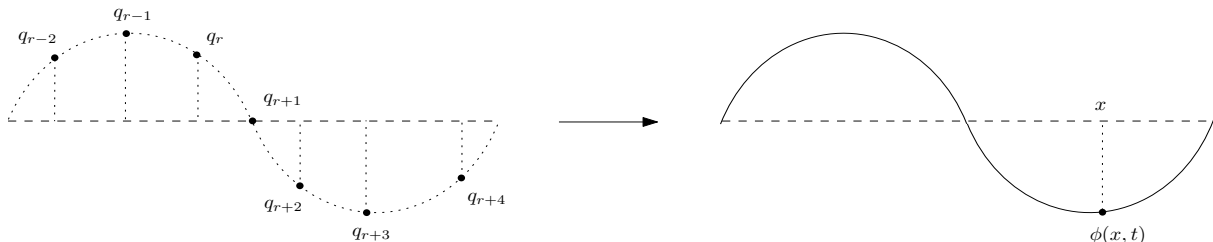
$$\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} = 0 \quad (\text{Α.3})$$

που είναι η περίφημη εξίσωση κίνησης Euler - Lagrange. Η λύση της δίνει την τροχιά  $q_o(t)$  που πραγματικά ακολουθεί το σωματίδιο.

Θα δούμε τώρα πως θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Lagrange - Hamilton για το πεδίο, ξεκινώντας από την κλασική περίπτωση και περιοριζόμενοι στη μία διάσταση για αρχή. Θα έχουμε στο μυαλό μας το όριο  $N \rightarrow \infty$  της περίπτωσης των  $N$  βαθμών ελευθερίας.

$$\{q_r(t); r = 1, 2, \dots, N\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \phi(x, t)$$

όπου το  $x$  τώρα είναι μία συνεχής μεταβλητή που επισημαίνει την μετατόπιση της “χορδής” (Σχήμα 1.2). Η



Σχήμα Α.2: το πέρασμα από ένα μεγάλο αριθμό διακριτών βαθμών ελευθερίας (σωματίδια με μάζα που συνδέονται με ελατήρια) στον συνεχή βαθμό ελευθερίας (πεδίο).

εγκάρσια ταλάντωση της χορδής περιγράφεται από το πεδίο  $\phi(x, t)$ . Σε κάθε σημείο  $x$  της χορδής το  $\phi(x, t)$  μετράει τη μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας, τη χρονική στιγμή  $t$ , ενός μικρού στοιχείου χορδής γύρω από το σημείο  $x$ . Σε κάθε σημείο  $x$  έχουμε έναν ανεξάρτητο βαθμό ελευθερίας  $\phi(x, t)$  - έτσι το σύστημα πεδίο έχει ένα “συνεχές άπειρο” βαθμών ελευθερίας.

Ένα καινούργιο δεδομένο εμφανίζεται επειδή η  $\phi$  είναι συνεχής συνάρτηση του  $x$ . Υποθέτουμε ότι η ίδια η  $L$  θα πρέπει να είναι χωρικό ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης η οποία θα εξαρτάται και από το  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  εκτός των  $\phi$  και  $\dot{\phi}$ . Τη συνάρτηση αυτή την ονομάζουμε Λαγκρανζιανή πυκνότητα  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dot{\phi})$  (σε μια διάσταση). Θα εκφράσουμε τώρα τα πάντα συναρτήσει της Λαγκρανζιανής πυκνότητας  $\mathcal{L}$ . Η δράση  $S[\phi]$  είναι ένα συναρτησιακό

$$S[\phi] = \int L dt = \int dt \int \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dot{\phi}) dx$$

Όπως και πριν χρησιμοποιούμε την ίδια θεμελιώδη αρχή

$$\delta S = 0$$

με την αλλαγή στη δράση να δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\delta S &= \int dt \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right] dx \\ &= \int dt \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \frac{d}{dt} (\delta \phi) \right] dx\end{aligned}$$

αφού  $\delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi)$  και  $\delta \dot{\phi} = \frac{d}{dt} (\delta \phi)$ . Εφαρμόζοντας ξανά ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο  $x$  και στο  $t$  στον δεύτερο και τρίτο όρο αντίστοιχα έχουμε

$$\delta S = \int dt \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \right) \delta \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \delta \phi \right] dx + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \delta \phi \right]_{x_2}^{x_2} + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \phi \right]_{x_2}^{x_2}$$

Οι δύο τελευταίοι όροι μηδενίζονται από τις αρχικές συνθήκες  $\delta \phi(x_1) = \delta \phi(x_2) = 0$  αφήνοντας

$$\delta S = \int dt \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \right) \delta \phi - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \delta \phi \right] dx$$

Εφόσον η  $\delta \phi$  είναι μια τυχαία συνάρτηση η απαίτηση  $\delta S = 0$  μας δίνει την εξίσωση πεδίου Euler - Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0$$

Η γενίκευση στις τρεις διαστάσεις είναι

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0$$

Για τα σχετικιστικά πεδία η εξίσωση Euler - Lagrange γράφεται άμεσα σε αναλλοίωτη μορφή

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση αυτή την Λαγκρανζιανή  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$  θα έχουμε

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) - \partial_\mu \left( \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \right) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) - \nabla \left( \frac{\partial}{\partial (\nabla \phi)} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \right) = 0 \\ \Rightarrow & -m^2 + \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0\end{aligned}$$

Καταλήξαμε έτσι στην εξίσωση Klein - Gordon για το πεδίο  $\phi(\mathbf{x}, t)$

$$(\square + m^2)\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{A.4}$$

Το πεδίο  $\phi(\mathbf{x}, t)$  είναι ένα βαθμωτό πεδίο. Βαθμωτό σημαίνει ότι το πεδίο έχει μόνο μία ανεξάρτητη συνιστώσα σε κάθε σημείο  $(\mathbf{x}, t)$  - σε αντίθεση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, για παράδειγμα, στο οποίο η ανάλογη ποσότητα έχει τέσσερις συνιστώσες φτιάχνοντας ένα τετραδιάστατο διανυσματικό πεδίο  $A^\mu(\mathbf{x}, t) = (A_0(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t))$ . Στην κβαντική περίπτωση τα βαθμωτά πεδία είναι κατάλληλα για να περιγράψουν σωματίδια με σπιν 0.

Ο λόγος που χρησιμοποιούμε τον Λαγκρανζιανό φορμαλισμό είναι ότι καθιστά εύκολο να ικανοποιηθεί το αναλλοίωτο κατά Lorentz καθώς και άλλες συμμετρίες. Μια κλασική θεωρία με Lorentz αναλλοίωτη Λαγκρανζιανή πυκνότητα όταν κβαντιστεί με κανονικό τρόπο κβάντωσης οδηγεί σε μια Lorentz αναλλοίωτη κβαντική θεωρία.

## A'.2 Το θεώρημα Noether

Η σχέση ανάμεσα σε συμμετρίες και νόμους διατήρησης στη θεωρία πεδίου δίνεται από το θεώρημα Noether. Το θεώρημα αυτό αφορά συνεχείς μετασχηματισμούς στα πεδία  $\phi$  οι οποίοι σε απειροστή μορφή μπορούν να γραφτούν

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + a\delta\phi(x)$$

όπου  $a$  είναι μια απειροστή παράμετρος και  $\delta\phi$  είναι μια παραμόρφωση του πεδίου. Θα λέμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι μια συμμετρία αν αφήνει τις εξισώσεις κίνησης αναλλοίωτες. Αυτό εξασφαλίζεται αν η δράση  $S$  είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό  $\phi \rightarrow \phi'$ .

Το θεώρημα Noether συνοψίζεται ως εξής. Θεωρούμε σύστημα που περιγράφεται από μια Λαγκρανζιανή  $L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$  και έχει εξίσωση κίνησης  $\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0$ . Κάθε συνεχής μετασχηματισμός που αφήνει αναλλοίωτη τη δράση  $S = \int L dt$  συνεπάγεται ύπαρξη διατηρούμενου ρεύματος  $j^\mu(x)$ . Πιο γενικά μπορούμε να επιτρέψουμε στη δράση να αλλάζει κατά έναν επιφανειακό όρο αφού το ολοκλήρωμά του εν τέλει θα μηδενιστεί και δεν θα επηρεάσει την παραγωγή της εξίσωσης Euler-Lagrange. Η Λαγκρανζιανή λοιπόν αρκεί να είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό  $\phi \rightarrow \phi'$  μέχρι και την τετρα-παραγώγιση

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + a\partial_\mu J^\mu(x) \quad \text{για κάποιο } J^\mu \quad (\text{A'.5})$$

Στην πράξη, αν εφαρμόσουμε ένα μετασχηματισμό της μορφής

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + a\delta\phi$$

η αλλαγή στη Λαγκρανζιανή θα είναι ένας επιπλέον όρος

$$a\delta\mathcal{L} = a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)$$

Όμως η διαφορά των παραγώγων ισούται με την παράγωγο της διαφοράς

$$\delta(\partial_\mu\phi) \equiv \partial_\mu\phi' - \partial_\mu\phi = \partial_\mu(\phi' - \phi) = \partial_\mu\delta\phi$$

έτσι η παραπάνω γράφεται

$$a\delta\mathcal{L} = a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)$$

Επιπλέον ισχύει

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi$$

Έτσι η αλλαγή στη Λαγκρανζιανή τελικά είναι

$$\begin{aligned} a\delta\mathcal{L} &= a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + a\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) - a\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right)\delta\phi \\ &= a \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right)\delta\phi + a\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) = a\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) \end{aligned}$$

όπου ο πρώτος όρος μηδενίστηκε λόγω της εξίσωσης Euler - Lagrange. Εξισώνοντας την αλλαγή αυτή με τον όρο  $a\partial_\mu J^\mu(x)$  της σχέσης (1.5) βρίσκουμε

$$a\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) = a\partial_\mu J^\mu \quad \Rightarrow \quad a\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - J^\mu \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (\text{A'.6})$$

με  $j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - J^\mu(x)$ . Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει ότι το ρεύμα  $j^\mu$  διατηρείται. Ο παραπάνω νόμος διατήρησης εκφράζεται επίσης λέγοντας ότι το φορτίο, που ορίζουμε  $Q = \int_{\chi\acute{\omega}\rho\omicron} j^0 d^3x$ , είναι σταθερό στο χρόνο.

### Α.3 Τανυστής ενέργειας - ορμής και ορμή πεδίου

Το θεώρημα Noether μπορεί να εφαρμοστεί και σε χωροχρονικούς μετασχηματισμούς όπως οι μετατοπίσεις και οι περιστροφές. Μπορούμε να περιγράψουμε μια απειροστή χωροχρονική μετατόπιση

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu$$

σαν ένα μετασχηματισμό του πεδίου με τη βοήθεια του θεωρήματος Taylor

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x+a) = \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (\text{A.7})$$

Η Λαγκρανζιανή είναι επίσης μια βαθμωτή συνάρτηση έτσι θα πρέπει να μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\nu (\delta_\nu^\mu \mathcal{L}) \quad (\text{A.8})$$

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με την (1.5) συμπεραίνουμε ότι  $J^\mu = \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$ . Έτσι εφαρμόζοντας το θεώρημα Noether θα έχουμε από τη σχέση (1.6)

$$\partial_\mu \left( a^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi - a^\nu \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) = 0 \quad \stackrel{(1.7)}{\Rightarrow} \quad \partial_\mu \left( a^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - a^\nu \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) = 0$$

τέσσερα ξεχωριστά ρεύματα

$$T_\nu^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (\text{A.9})$$

Αυτός ακριβώς είναι ο τανυστής τάσης - ενέργειας ή αλλιώς ο τανυστής ενέργειας - ορμής του πεδίου  $\phi$ . Το διατηρούμενο φορτίο που σχετίζεται με χρονικές μετατοπίσεις είναι η χαμιλτονιανή

$$H = \int T^{00} d^3x = \int \mathcal{H} d^3x$$

όπου με  $\mathcal{H}$  έχουμε συμβολίσει την χαμιλτονιανή πυκνότητα.

Για τη Λαγκρανζιανή Klein - Gordon  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\kappa \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2$  η σχέση (1.9) θα δώσει

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \left( \frac{1}{2}(\partial_\kappa \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right) \partial_\nu \phi - \left( \frac{1}{2}(\partial_\kappa \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right) \delta_\nu^\mu$$

πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με τον μετρικό τανυστή  $\eta^{a\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

$$\begin{aligned} \eta^{a\nu} T_\nu^\mu &= T^{\mu a} \\ &= \eta^{a\nu} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \left( \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right) \partial_\nu \phi - \eta^{a\nu} \left( \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right) \delta_\nu^\mu \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} T^{00} &= \eta^{0\nu} \frac{\partial}{\partial (\partial_0 \phi)} \left( \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right) \partial_\nu \phi - \eta^{0\nu} \left( \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right) \delta_\nu^0 \\ &= \partial_0 \phi \partial^0 \phi - \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 = (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Βρήκαμε έτσι τη μορφή της χαμιλτονιανής πυκνότητας. Το διατηρούμενο ρεύμα που σχετίζεται με χωρικές μεταβολές είναι η ορμή

$$P^i = \int T^{0i} d^3x$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} T^{0i} &= \eta^{i\nu} \frac{\partial}{\partial (\partial_0 \phi)} \left( \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right) \partial_\nu \phi - \eta^{i\nu} \left( \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right) \delta_\nu^0 \\ &\stackrel{(i \neq 0)}{=} \partial_0 \phi \partial^i \phi = -\partial_0 \phi \partial_i \phi \end{aligned}$$

Όπως θα δείξουμε και στη συνέχεια η  $\pi = \partial_0\phi$  είναι η λεγόμενη συζυγής ορμή του πεδίου Klein-Gordon. Θα είναι τότε

$$P^i = - \int \pi \partial_i \phi d^3x \quad (\text{A'.11})$$

και αντιμετωπίζουμε την ποσότητα αυτή ως την (φυσική) ορμή που φέρει το πεδίο, την οποία δεν πρέπει να τη συγχέουμε με τη συζυγή ορμή που θα χρησιμοποιούμε κατά την κβάντωση της θεωρίας αργότερα.

Ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός της θεωρίας πεδίου είναι κατάλληλος για τη σχετικιστική δυναμική επειδή όλες οι εκφράσεις είναι Lorentz αναλλοίωτες. Παρ' όλα αυτά είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε και τον χαμιλτονιανό φορμαλισμό καθώς διευκολύνει τη μετάβαση στην κβαντική μηχανική. Αρχικά ορίζουμε τη συζυγή ορμή ενός πεδίου ως την παράγωγο της Λαγκρανζιανής πυκνότητας ως προς τη χρονική παράγωγο του πεδίου.

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \quad (\text{A'.12})$$

Όπως έχουμε ήδη δηλώσει στην περίπτωση της Λαγκρανζιανής Klein - Gordon η συζυγής ορμή είναι

$$\pi = \frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi)} \left( \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) = \partial_0\phi$$

Φυσικά αφού αναφερόμαστε στη χρονική παράγωγο σημαίνει ότι έχουμε επιλέξει ένα συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Επομένως η χαμιλτονιανή διατύπωση απαραίτητα παραβιάζει το αναλλοίωτο κατά Lorentz. Παρ' όλα αυτά, αν είμαστε προσεκτικοί, οι παρατηρήσιμες ποσότητες θα είναι Lorentz αναλλοίωτες. Η χαμιλτονιανή είναι το χωρικό ολοκλήρωμα της χαμιλτονιανής πυκνότητας

$$H = \int \mathcal{H} d^{n-1}x$$

Η χαμιλτονιανή πυκνότητα με τη σειρά της σχετίζεται με τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα με τον μετασχηματισμό Legendre

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$$

Έτσι από τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα Klein - Gordon μπορούμε να κατασκευάσουμε την χαμιλτονιανή πυκνότητα

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int d^3x (\pi \dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)) = \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \right) \\ &= \int d^3x \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \dot{\phi} - \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \right) \\ &= \int d^3x \left( \dot{\phi}\dot{\phi} - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) = \int d^3x \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \end{aligned}$$

που είναι ακριβώς αυτή που βρήκαμε στη σχέση (A'.10).

## A'.4 Λύση της κλασικής θεωρίας

Εμείς θα δουλέψουμε στην εικόνα του Heisenberg στην οποία είναι πιο εύκολη η μελέτη χρονοεξαρτώμενων ποσοτήτων. Πριν προχωρήσουμε στην κβάντωση του πεδίου θα ολοκληρώσουμε την κλασική ανάλυση λύνοντας τη θεωρία. Ένα σύνολο λύσεων της εξίσωσης Klein - Gordon

$$(\square + m^2)\phi = 0$$

είναι το επίπεδο κύμα

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) \sim e^{-ik^\mu x_\mu} = e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

όπου το κυματάνυσμα  $k^\mu$  έχει συνιστώσες  $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$  και η συχνότητα  $\omega$  πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση διασποράς

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$$

Μπορούμε να γράψουμε την πιο γενική λύση κατασκευάζοντας ένα πλήρες, ορθοκανονικό σύνολο λύσεων (modes) ως προς της οποίες μπορεί να εκφραστεί οποιαδήποτε λύση. Για να έχει έννοια ο όρος

“ορθοκανονικό” χρειάζεται να ορίσουμε ένα βαθμωτό γινόμενο στο χώρο των λύσεων της εξίσωσης Klein - Gordon. Αν και οι λύσεις είναι συναρτήσεις του χωροχρόνου το κατάλληλο βαθμωτό γινόμενο μπορεί να εκφραστεί ως το ολοκλήρωμα πάνω σε μια χρονικά σταθερή υπερεπιφάνεια<sup>1</sup>  $\Sigma_t$ .

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma_t} (\phi_1 \partial_t \phi_2^* - \phi_2^* \partial_t \phi_1) d^{n-1}x \equiv -i \int_{\Sigma_t} \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_2^* d^{n-1}x \quad (\text{A.13})$$

Θα δείξουμε τώρα ότι το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο είναι ανεξάρτητο από την υπερεπιφάνεια στην οποία ολοκληρώνουμε. Έστω δύο υπερεπιφάνειες  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ . Υποθέτουμε ότι  $\phi_1$  και  $\phi_2$  ικανοποιούν την εξίσωση Klein - Gordon  $(\partial_\mu^2 + m^2)\phi = 0$ . Επιπλέον αν οι υπερεπιφάνειες δεν είναι συμπαγείς θεωρούμε ότι οι εξισώσεις αυτές μηδενίζονται στο χωρικό άπειρο. Έστω  $N$  ο χώρος που περικλύεται από τις  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  και , αν είναι απαραίτητο , χρονοειδή όρια στα οποία ισχύει  $u_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}^* = 0$ . Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_2} - (\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_1} = -i \oint_{\partial N = \Sigma_1 - \Sigma_2} (\phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2^*) d^{n-1}x = -i \int_N \partial^\mu (\phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2^*) d^n x$$

όπου στο τελευταίο βήμα έχουμε χρησιμοποιήσει την  $n$ -διάστατη εκδοχή του νόμου του Gauss. Η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\begin{aligned} \partial^\mu (\phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2^*) &= \partial^\mu (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial_\mu \phi_1) = \partial^\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_2^* + \phi_1 \partial^\mu \partial_\mu \phi_2^* - \partial^\mu \phi_2^* \partial_\mu \phi_1 - \phi_2^* \partial^\mu \partial_\mu \phi_1 \\ &= \phi_1 \partial^\mu \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial^\mu \partial_\mu \phi_1 = -\phi_1 m^2 \phi_2^* + \phi_2^* m^2 \phi_1 = 0 \end{aligned}$$

λόγω της εξίσωσης Klein - Gordon. Επομένως πράγματι

$$(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_1} = (\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_2}$$

Εφαρμόζοντας το εσωτερικό γινόμενο σε δύο επίπεδα κύματα με διαφορετικά κυματανύσματα θα έχουμε

$$\begin{aligned} (e^{-ik_1^\mu x_\mu}, e^{-ik_2^\mu x_\mu}) &= -i \int (e^{-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}} \partial_t e^{i\omega_2 t - i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}} - e^{i\omega_2 t - i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}} \partial_t e^{-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}}) d^{n-1}x \\ &= -i \int (e^{-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}} i\omega_2 e^{i\omega_2 t - i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}} + i\omega_1 e^{i\omega_2 t - i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}} (e^{-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}})) d^{n-1}x \\ &= \int (\omega_2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{x}} + \omega_1 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{x}}) d^{n-1}x \\ &= (\omega_1 + \omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} \int e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{x}} d^{n-1}x = (\omega_1 + \omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} (2\pi)^{n-1} \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα της  $\delta$  συνάρτησης

$$\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^{n-1}x = (2\pi)^{n-1} \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}) \quad (\text{A.14})$$

Το εσωτερικό γινόμενο μηδενίζεται εκτός κι αν τα χωρικά κυματανύσματα, και επομένως και οι συχνότητες  $\omega$ , είναι ίδια και για τις δύο λύσεις. Έτσι ένα ορθοκανονικό σύνολο από λύσεις θα δίνεται από τη σχέση

$$u_{\mathbf{k}}(x^\mu) = \frac{-e^{ik_\mu x^\mu}}{((2\pi)^{n-1} 2\omega)^{1/2}}$$

με

$$(u_{\mathbf{k}_1}, u_{\mathbf{k}_2}) = \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$$

<sup>1</sup>Για να εξηγήσουμε τον όρο υπερεπιφάνεια θα πρέπει πρώτα να δώσουμε τον ορισμό μιας πολλαπλότητας. Η έννοια της πολλαπλότητας αντιστοιχεί σε έναν χώρο ο οποίος μπορεί να είναι καμπύλος και να έχει μια πολύπλοκη τοπολογία αλλά σε τοπικές περιοχές μοιάζει με τον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n$ . Λέγοντας “μοιάζει σαν” δεν εννοούμε ότι η μετρική είναι ίδια αλλά ότι πιο αρχικές έννοιες όπως συναρτήσεις και συντεταγμένες λειτουργούν με παρόμοιο τρόπο. Ολόκληρη η πολλαπλότητα κατασκευάζεται ενώνοντας ομαλά αυτές τις περιοχές μεταξύ τους. Ένα κρίσιμο σημείο είναι ότι η διάσταση  $n$  των Ευκλείδειων χώρων που χρησιμοποιούνται πρέπει να είναι ίδια σε κάθε κομμάτι της πολλαπλότητας. Τότε λέμε ότι η πολλαπλότητα είναι διάστασης  $n$ . Με αυτή τη προσέγγιση μπορούμε να αναλύσουμε συναρτήσεις σε έναν τέτοιο χώρο μετατρέποντάς τις (τοπικά) σε συναρτήσεις του Ευκλείδειου χώρου. Μια υπερεπιφάνεια είναι μια  $(n-1)$ -διάστατη υποπολλαπλότητα  $\Sigma$  μιας  $n$ -διάστατης πολλαπλότητας  $M$ . (Φυσικά αν  $n = 3$  η  $\Sigma$  είναι απλά μια επιφάνεια). Η πιο συχνή χρήση της υπερεπιφάνειας είναι ως το σύνορο μιας κλειστής περιοχής  $N$  μιας πολλαπλότητας  $M$  που κατά σύμβαση δηλώνεται  $\partial N$ . Αν για παράδειγμα η  $N$  αποτελείται από όλα τα στοιχεία του  $\mathbb{R}^n$  που βρίσκονται σε μια απόσταση από την αρχή  $r \leq 1$  τότε το όριο  $\partial N$  είναι η  $(n-1)$  σφαίρα που καθορίζεται από το  $r = 1$ .

Η στρατηγική μας είναι να επιμείνουμε ότι το  $\omega$  θα είναι πάντα θετικός αριθμός και θα συμπληρώσουμε το σύνολο των λύσεων με τις μιγαδικές συζυγείς  $u_{\mathbf{k}}^*(x^\mu)$ . Θα λέμε ότι οι  $u_{\mathbf{k}}$  λύσεις είναι θετικής συχνότητας εννοώντας ότι ικανοποιούν τη σχέση

$$\partial_t u_{\mathbf{k}} = -i\omega u_{\mathbf{k}} \quad , \quad \omega > 0$$

ενώ τα  $u_{\mathbf{k}}^*$  είναι αρνητικής συχνότητας ικανοποιώντας την

$$\partial_t u_{\mathbf{k}}^* = i\omega u_{\mathbf{k}}^* \quad , \quad \omega > 0$$

Οι συζυγείς μιγαδικές λύσεις είναι ορθογώνιες στις αρχικές λύσεις καθώς

$$\begin{aligned} (u_{\mathbf{k}_1}, u_{\mathbf{k}_2}^*) &= -i \int (u_{\mathbf{k}_1} \partial_t (u_{\mathbf{k}_2}^*)^* - (u_{\mathbf{k}_2}^*)^* \partial_t u_{\mathbf{k}_1}) d^{n-1}x = -i \int (u_{\mathbf{k}_1} \partial_t u_{\mathbf{k}_2} - u_{\mathbf{k}_2} \partial_t u_{\mathbf{k}_1}) d^{n-1}x \\ &= -i \int (u_{\mathbf{k}_1} (-i\omega) u_{\mathbf{k}_2} - u_{\mathbf{k}_2} (-i\omega) u_{\mathbf{k}_1}) d^{n-1}x = 0 \end{aligned}$$

και ορθοκανονικά μεταξύ τους

$$\begin{aligned} (u_{\mathbf{k}_1}^*, u_{\mathbf{k}_2}^*) &= -i \int (u_{\mathbf{k}_1}^* \partial_t (u_{\mathbf{k}_2}^*)^* - (u_{\mathbf{k}_2}^*)^* \partial_t u_{\mathbf{k}_1}^*) d^{n-1}x \\ &= -i \int (u_{\mathbf{k}_1}^* \partial_t u_{\mathbf{k}_2} - u_{\mathbf{k}_2} \partial_t u_{\mathbf{k}_1}^*) d^{n-1}x = -i \int (u_{\mathbf{k}_1}^* (-i\omega) u_{\mathbf{k}_2} - u_{\mathbf{k}_2} (i\omega) u_{\mathbf{k}_1}^*) d^{n-1}x \\ &= -i \int \left( \frac{e^{i\omega t - i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}} (-i\omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}}}{(2\pi)^{n-1} 2\omega} - \frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}} (i\omega) e^{i\omega t - i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}}}{(2\pi)^{n-1} 2\omega} \right) d^{n-1}x \\ &= \frac{-i(-i\omega)}{(2\pi)^{n-1} 2\omega} \int (e^{i(\omega-\omega)t} e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \mathbf{x}} + e^{i(\omega-\omega)t} e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \mathbf{x}}) d^{n-1}x \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^{n-1}} \int e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \mathbf{x}} d^{n-1}x = -\delta^{n-1}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) = -\delta^{n-1}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \end{aligned}$$

όπου και πάλι έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα (Α.14) καθώς και το γεγονός ότι η  $\delta$  είναι άρτια συνάρτηση.

Μαζί οι λύσεις  $u_{\mathbf{k}}$  και  $u_{\mathbf{k}}^*$  σχηματίζουν ένα πλήρες σύνολο με τα στοιχεία του οποίου μπορούμε να αναπαράγουμε οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης Klein - Gordon. Έτσι θα έχουμε τη γενική λύση

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{k} [a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) + a_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t)] \quad (\text{Α.15})$$

## Α.5 Χώροι Hilbert και σημειογραφία Dirac

Οι κβαντικοί τελεστές όπως οι  $q(t), p(t)$  μπορούν να αναπαρασταθούν από γραμμικούς μετασχηματισμούς σε κατάλληλους απειροδιάστατους χώρους Hilbert. Σε αυτό το παράρτημα συγκεντρώνουμε τις ιδιότητες των χώρων Hilbert και εισαγάγουμε την σημειογραφία Dirac. Θα θεωρούμε πάντα μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους.

### Απειροδιάστατοι διανυσματικοί χώροι

Ένα διάνυσμα σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης μπορεί να επεικονιστεί σαν μια συλλογή συνιστωσών, π.χ  $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, a_3, a_4)$ , όπου κάθε  $a_k$  είναι ένας (μιγαδικός) αριθμός. Για να περιγράψουμε διανύσματα σε απειροδιάστατους χώρους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε απείρως πολλές συνιστώσες. Ένα σημαντικό παράδειγμα ενός απειροδιάστατου μιγαδικού διανυσματικού χώρου είναι ο χώρος  $L^2$  των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, δηλαδή το σύνολο όλων των συναρτήσεων μιγαδικών τιμών  $\psi(q)$  τέτοιων ώστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(q)|^2 dq$$

να συγκλίνει. Ένας γραμμικός συνδυασμός δύο τέτοιων συναρτήσεων  $\lambda_1 \psi_1(q) + \lambda_2 \psi_2(q)$  με σταθερούς συντελεστές  $\lambda_{1,2}$  είναι και πάλι ένα στοιχείο του ίδιου διανυσματικού χώρου. Μια συνάρτηση  $\psi \in L^2$

μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο απείρως πολλών συνιστωσών  $\psi_q = \psi(q)$  με έναν συνεχή “δείκτη”  $q$ . Αποδεικνύεται ότι ο χώρος των κβαντικών καταστάσεων μιας σημειακής μάζας στην κβαντική μηχανική είναι ακριβώς ο χώρος των  $L^2$  τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων  $\psi(q)$  όπου το  $q$  είναι η χωρική συνιστώσα του σωματιδίου. Σε αυτή τη περίπτωση η συνάρτηση  $\psi(q)$  ονομάζεται κυματοσυνάρτηση. Οι κβαντικές καταστάσεις ενός συστήματος δύο σωματιδίων ανήκουν στο χώρο των συναρτήσεων  $\psi(q_1, q_2)$  όπου  $q_{1,2}$  είναι οι συντεταγμένες κάθε σωματιδίου. Στην κβαντική θεωρία πεδίου οι “συντεταγμένες” είναι διαμορφώσεις  $\hat{\phi}(x)$  του πεδίου και η κυματοσυνάρτηση είναι ένα συναρτησιακό  $\Psi[\hat{\phi}(x)]$ .

## Σημειογραφία Dirac

Η γραμμική άλγεβρα χρησιμοποιείται σε πολλούς τομείς της φυσικής και η σημειογραφία Dirac είναι ένα βολικό εργαλείο για υπολογισμούς με διανύσματα και γραμμικούς τελεστές. Η σημειογραφία αυτή χρησιμοποιείται και για πεπερασμένους και για απειροδιάστατους διανυσματικούς χώρους.

Για να δηλώσει ένα διάνυσμα ο Dirac πρότεινε να γράφουμε ένα σύμβολο όπως τα  $|a\rangle, |x\rangle, |\lambda\rangle$ , δηλαδή ένα γράμμα μέσα στις ειδικές αγκύλες (ket)  $| \rangle$ . Γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων γράφονται σαν  $2|v\rangle - 3i|\omega\rangle$ .

Ένας γραμμικός τελεστής  $\hat{A} : V \rightarrow V$  που δρα στον χώρο  $V$  μετασχηματίζει ένα διάνυσμα  $|v\rangle$  στο διάνυσμα  $\hat{A}|v\rangle$ . Ένας τελεστής  $\hat{A}$  είναι γραμμικός αν

$$\hat{A}(|v\rangle + \lambda|\omega\rangle) = \hat{A}|v\rangle + \lambda\hat{A}|\omega\rangle$$

για κάθε  $|v\rangle, |\omega\rangle \in V$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Γραμμικές μορφές που δρούν πάνω σε διανύσματα,  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  είναι covectors (διανύσματα από τον δυικό χώρο) και δηλώνονται με  $\langle f|$  (η αγκύλη  $\langle |$  ονομάζεται bra). Μια γραμμική μορφή  $\langle f|$  δρα πάνω στο διάνυσμα  $|v\rangle$  και δίνει ως αποτέλεσμα τον αριθμό  $\langle f|v\rangle$ .

Συνήθως ορίζουμε ένα βαθμωτό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο  $V$ . Το βαθμωτό γινόμενο των διανυσμάτων  $|v\rangle$  και  $|\omega\rangle$  μπορεί να γραφτεί ως  $(|v\rangle, |\omega\rangle)$  και είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Το βαθμωτό γινόμενο καθιερώνει μια αντιστοιχία ανάμεσα στα διανύσματα και τα covectors. Κάθε διάνυσμα  $|v\rangle$  ορίζει ένα covector  $\langle v|$  το οποίο είναι η γραμμική απεικόνιση  $|\omega\rangle \rightarrow (|v\rangle, |\omega\rangle)$ . Έτσι η σημειογραφία Dirac μας επιτρέπει να γράψουμε το εσωτερικό γινόμενο πιο συνοπτικά ως  $(|v\rangle, |\omega\rangle) = \langle v|\omega\rangle$ .

Αν  $\hat{A}$  είναι ένας γραμμικός τελεστής ο συμβολισμός  $\langle v|\hat{A}|\omega\rangle$  δηλώνει το βαθμωτό γινόμενο των διανυσμάτων  $|v\rangle$  και  $\hat{A}|\omega\rangle$ . Η ποσότητα  $\langle v|\hat{A}|\omega\rangle$  καλείται επίσης στοιχείο πίνακα του τελεστή  $\hat{A}$  ως προς τις καταστάσεις  $|v\rangle$  και  $|\omega\rangle$ .

Αν  $|v\rangle$  είναι ένα ιδιοδιάνυσμα ενός τελεστή  $\hat{A}$  με ιδιοτιμή  $v$  τότε γράφουμε

$$\hat{A}|v\rangle = v|v\rangle$$

Δεν θα πρέπει να υπάρχει σύγχυση ανάμεσα στην ιδιοτιμή  $v$  (η οποία είναι αριθμός) και του διανύσματος  $|v\rangle$ .

## Ερμιτιανότητα

Το βαθμωτό γινόμενο σε ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο είναι ερμιτιανό αν  $(\langle v|\omega\rangle)^* = \langle \omega|v\rangle$  για όλα τα διανύσματα  $|v\rangle$  και  $|\omega\rangle$  (ο αστερίσκος  $*$  δηλώνει μιγαδική συζυγία). Σε αυτή τη περίπτωση η νόρμα  $\langle v|v\rangle$  ενός διανύσματος  $|v\rangle$  είναι πραγματικός αριθμός.

Ένα ερμιτινό βαθμωτό γινόμενο μας επιτρέπει να ορίσουμε έναν ερμιτιανό συζυγή  $\hat{A}^\dagger$  του τελεστή  $\hat{A}$  μέσω της σχέσης

$$\langle v|\hat{A}^\dagger|\omega\rangle = (\langle \omega|\hat{A}|v\rangle)^*$$

η οποία θα πρέπει να ισχύει για κάθε  $|v\rangle$  και  $|\omega\rangle$ . Σημειώνουμε ότι ένας τελεστής  $\hat{A}^\dagger$  προσδιορίζεται μοναδικά αν είναι γνωστά τα στοιχεία πίνακα  $\langle v|\hat{A}^\dagger|\omega\rangle$  ως προς όλα τα  $|v\rangle$  και  $|\omega\rangle$ .

Η διαδικασία της ερμιτιανής συζυγίας έχει τις ιδιότητες

$$(\hat{A} + \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger \quad (\lambda\hat{A})^\dagger = \lambda^*\hat{A}^\dagger \quad (\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$$

Ένας τελεστής  $\hat{A}$  ονομάζεται ερμιτιανός αν  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ , αντερμιτιανός αν  $\hat{A}^\dagger = -\hat{A}$  και μοναδιακός αν  $\hat{A}^\dagger\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^\dagger = 1$ .

Σύμφωνα με ένα αξίωμα της κβαντικής μηχανικής το αποτέλεσμα της μέτρησης κάποιας ποσότητας είναι πάντα μια ιδιοτιμή του τελεστή  $\hat{A}$  που αντιστοιχεί σε αυτή την ποσότητα. Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού



τελεστή είναι πάντα πραγματικές. Αυτό παρακινεί μια σημαντική υπόθεση που διατυπώνεται στην κβαντική μηχανική: *Οι τελεστές που αντιστοιχούν σε όλες τις παρατηρήσιμες ποσότητες είναι ερμιτιανοί.*

Τα ιδιοδιανύσματα ενός ερμιτιανού τελεστή που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι πάντα ορθογώνια. Αυτό είναι εύκολο να αποδειχθεί: Αν  $|v_1\rangle$  και  $|v_2\rangle$  είναι ιδιοδιανύσματα ενός ερμιτιανού τελεστή  $\hat{A}$  με ιδιοτιμές  $v_1$  και  $v_2$  τότε τα  $v_{1,2}$  είναι πραγματικά. Έτσι  $\langle v_1|\hat{A} = v_1\langle v_1|$ ,  $\hat{A}|v_2\rangle = v_2|v_2\rangle \rightarrow \langle v_1|\hat{A}v_2\rangle = v_1\langle v_1|v_2\rangle = v_2\langle v_1|v_2\rangle$  πράγμα που σημαίνει ότι  $\langle v_1|v_2\rangle = 0$  για  $v_1 \neq v_2$ .

## Χώροι Hilbert

Σε ένα N-διάστατο διανυσματικό χώρο μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο από διανύσματα βάσης  $|e_1\rangle, \dots, |e_N\rangle$  τέτοια ώστε οποιοδήποτε διάνυσμα  $|v\rangle$  να εκφράζεται μοναδικά σαν ένας γραμμικός συνδυασμός

$$|v\rangle = \sum_{n=1}^N v_n |e_n\rangle$$

Οι συντελεστές  $v_n$  ονομάζονται συνιστώσες του διανύσματος  $|v\rangle$  στη βάση  $|e_n\rangle$ . Σε μια ορθοκανονική βάση που ικανοποιεί την σχέση  $\langle e_m|e_n\rangle = \delta_{mn}$  το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $|v\rangle$ ,  $|\omega\rangle$  εκφράζεται μέσω των συνιστωσών τους  $v_n$ ,  $\omega_n$  ως

$$\langle v|\omega\rangle = \sum_{n=1}^N v_n^* \omega_n$$

Εξ ορισμού ένας διανυσματικός χώρος είναι άπειρης διάστασης αν κανένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση. Σε αυτή τη περίπτωση κάποιος θα περίμενε να έχουμε μια άπειρη βάση  $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots$ , τέτοια ώστε οποιοδήποτε διάνυσμα  $|v\rangle$  εκφράζεται μοναδικά από τον άπειρο γραμμικό συνδυασμό

$$|v\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} v_n |e_n\rangle \quad (\text{A.16})$$

Παρ' όλα αυτά η σύγκλιση αυτής της άπειρης σειράς δεν είναι τετριμένο θέμα. Για παράδειγμα αν τα διανύσματα βάσης  $|e_n\rangle$  είναι ορθοκανονικά τότε η νόρμα του διανύσματος  $|v\rangle$  είναι

$$\langle v|v\rangle = \left( \sum_{m=1}^{\infty} v_m^* \langle e_m| \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} v_n |e_n\rangle \right) = \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^2 \quad (\text{A.17})$$

Αυτή η σειρά πρέπει να συγκλίνει αν το διάνυσμα  $|v\rangle$  έχει πεπερασμένη νόρμα, συνεπώς οι αριθμοί  $v_n$  δεν μπορεί να είναι τυχαίοι. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να περιμένουμε το άθροισμα  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |e_n\rangle$  αναπαριστά ένα καλά ορισμένο διάνυσμα. Τώρα, αν οι συντελεστές  $v_n$  πράγματι ελαττώνονται αρκετά γρήγορα έτσι ώστε η σειρά (A.2) να συγκλίνει φαινεταιί πιθανό ο άπειρος γραμμικός συνδυασμός (A.1) να συγκλίνει και να καθορίζει μοναδικά το διάνυσμα  $|v\rangle$ . Παρ' όλα αυτά κάτι τέτοιο δεν ισχύει για όλους τους απειροδιάστατους χώρους. Οι απαιτούμενες ιδιότητες από τον διανυσματικό χώρο είναι γνωστές στην συναρτησιακή ανάλυση ως πληρότητα και διαχωριστικότητα.

Ένας χώρος Hilbert είναι ένας πλήρης διανυσματικός χώρος με ερμιτιανό βαθμωτό γινόμενο. Όταν ορίζουμε μια κβαντική θεωρία διαλέγουμε έναν διαχωρισμένο χώρο Hilbert ως το χώρο των κβαντικών καταστάσεων. Σε αυτή τη περίπτωση υπάρχει μια αριθμήσιμη βάση  $|e_n\rangle$  και όλα τα διανύσματα μπορούν να αναπτυχθούν όπως στην (A.1). Από τη στιγμή που μια ορθοκανονική βάση επιλέγεται όλα τα διανύσματα  $|v\rangle$  αναπαριστώνται από συλλογές  $(v_1, v_2, \dots)$  των συνιστωσών τους. Για το λόγο αυτό ένας διαχωρισμός χώρος Hilbert μπορεί να ειπωθεί ως ο χώρος των άπειρων μιγαδικών αριθμών  $|v\rangle \equiv (v_1, v_2, \dots)$  τέτοιων ώστε το άθροισμα  $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^2$  να συγκλίνει. Η απαίτηση της σύγκλισης εγγυάται ότι κάθε βαθμωτό γινόμενο  $\langle v|\omega\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^* \omega_n$  είναι πεπερασμένο.

## Εξέλιξη ενός κβαντικού συστήματος

Η εξέλιξη ενός συστήματος μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν από τους δύο παρακάτω τρόπους. Ως μια χρονοεξαρτώμενη εξέλιξη της κατάστασης στον χώρο Hilbert (εικόνα Schrödinger) ή κρατώντας την κατάσταση "φιξαρισμένη" και επιτρέποντας στις παρατηρήσιμες ποσότητες να εξελιχθούν σύμφωνα με τις εξισώσεις κίνησης (εικόνα Heisenberg). Στην εικόνα του Heisenberg οποιαδήποτε κατάσταση μπορεί να γραφτεί ως

μια “φιξαρισμένη” κατάσταση στην οποία δρα ένας μοναδιακός χρονικά εξελισσόμενος τελεστής. (με τον όρο μοναδιακός εννοούμε ότι ισχύει  $U^\dagger U = U^{-1}U = 1$ )

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle$$

όπου

$$U(t) = e^{i \int H dt}$$

Αν η χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου έχουμε απλά  $U(t) = e^{-iHt}$ . Η έκφραση που προκύπτει από την εικόνα του Schrödinger για έναν χρονοανεξάρτο τελεστή  $A$  ανάμεσα σε χρονοεξαρτώμενες καταστάσεις  $|\Psi_1(t)\rangle$  και  $|\Psi_2(t)\rangle$  μπορεί να γραφτεί στην εικόνα του Heisenberg με χρονοεξαρτώμενο τελεστή  $A(t)$  και χρονοανεξάρτητες καταστάσεις ως

$$\begin{aligned} \langle \Psi_2(t) | A | \Psi_1(t) \rangle &= \langle \Psi_2(0) | U^\dagger(t) A U(t) | \Psi_1(0) \rangle \\ &= \langle \Psi_2(0) | A(t) | \Psi_1(0) \rangle \end{aligned}$$

όπου προφανώς ο τελεστής της εικόνας Heisenberg δίνεται από τη σχέση

$$A(t) = U^\dagger(t) A U(t) = e^{iHt} A e^{-iHt} \quad (\text{A.18})$$

Εφόσον ο  $A(t)$  είναι χρονοεξαρτώμενος αναρωτιόμαστε ποιά θα είναι η εξίσωση κίνησής του. Διαφορίζοντας την παραπάνω σχέση βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= iH e^{iHt} A e^{-iHt} + e^{iHt} A (-iH) e^{-iHt} = iHA(t) - iA(t)H \\ &= -i[A(t)H - HA(t)] = -i[A(t), H] \end{aligned}$$

Η σχέση

$$\frac{dA(t)}{dt} = -i[A(t), H] \quad (\text{A.19})$$

ονομάζεται εξίσωση κίνησης του Heisenberg για τον  $A(t)$ . Στο δεξί μέλος το  $H$  είναι ο τελεστής του Schrödinger. Παρ’ όλα αυτά αν αντικαταστήσουμε τον  $H$  στη θέση του  $A(t)$  στη σχέση (A.3) βρίσκουμε

$$H(t) = e^{iHt} H e^{-iHt} = H^* e^{iHt} e^{-iHt} = H e^{iHt} e^{-iHt} = H$$

έτσι ο  $H$  μπορεί ισοδύναμα να ερμηνευτεί ως τελεστής του Heisenberg.

## A.6 Κβάντωση του βαθμωτού πεδίου

Έχουμε εισαγάγει το πεδίο  $\phi(t, \mathbf{x})$  που έχει ρόλο ανάλογο της συνιστώσας  $q(t)$  και το πεδίο  $\pi(t, \mathbf{x})$  που έχει ρόλο ανάλογο της ορμής  $p(t)$ . Για να περάσουμε στην κβάντωση της θεωρίας πεδίου μιμούμαστε την διαδικασία που ακολουθούμε στη διακριτή περίπτωση και προάγουμε τις ποσότητες  $\phi$  και  $\pi$  στους τελεστές  $\hat{\phi}$  και  $\hat{\pi}$  στην εικόνα του Heisenberg. Το ξεχωριστό χαρακτηριστικό την κβαντικής θεωρίας είναι η μη-μεταθετικότητα των βασικών ποσοτήτων της θεωρίας - για παράδειγμα ο θεμελιώδης μεταθέτης ( $\hbar = 1$ )

$$[\hat{q}_r(t), \hat{p}_s(t)] = i\delta_{rs} \quad (\text{A.20})$$

της διακριτής περίπτωσης. Περιμένουμε λοιπόν ότι οι τελεστές  $\hat{\phi}$  και  $\hat{\pi}$  θα υπακούουν κάποια σχέση μετάθεσης η οποία είναι μια συνεχής γενίκευση της (2.1). Ο μεταθέτης θα είναι της μορφής  $[\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)]$  αφού οι διακριτοί δείκτες  $r$  και  $s$  έχουν μετατραπεί στις συνεχείς μεταβλητές  $x$  και  $x'$ . Σημειώνουμε επίσης ότι η (2.1) αναφέρεται σε τελεστές την ίδια χρονική στιγμή. Η συνεχής γενίκευση του συμβόλου  $\delta_{rs}$  είναι η συνάρτηση  $\delta$  του Dirac,  $\delta(x - x')$ . Έτσι λοιπόν ο θεμελιώδης μεταθέτης της κβαντικής θεωρίας πεδίου θα είναι

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = i\delta^{n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

σε υπερεπιφάνειες ίδιου χρόνου. Επιπλέον ο μεταθέτης των δύο  $\hat{\phi}$  ή δύο  $\hat{\pi}$  είναι

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] &= 0 \\ [\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] &= 0 \end{aligned}$$

Θυμίζουμε ότι για τη συζυγή ορμή ισχύει

$$\hat{\pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \hat{\phi})} = \partial_t \hat{\phi}$$

για την Λαγκρανζιανή Klein - Gordon. Η συνάρτηση  $\delta$  στην πρώτη σχέση υποδηλώνει ότι οι τελεστές σε ίδιες χρονικές στιγμές μετατίθενται παντού εκτός από τα χωρικά σημεία στα οποία συμπίπτουν. Το δεδομένο αυτό προκύπτει από τις απαιτήσεις της αιτιότητας. Τελεστές που είναι χωροειδώς διαχωρισμένοι δεν μπορούν να επηρεάσουν ο ένας τον άλλο.

Στην εικόνα του Heisenberg οι τελεστές  $\hat{\phi}$  και  $\hat{\pi}$  μπορούν να γίνουν χρονικά εξαρτώμενοι (Παράρτημα Α) και τότε

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = e^{iHt} \hat{\phi}(\mathbf{x}) e^{-iHt}$$

όμοια

$$\hat{\pi}(x) = \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = e^{iHt} \hat{\pi}(\mathbf{x}) e^{-iHt}$$

Η εξίσωση κίνησης του Heisenberg (Α.5) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη χρονική εξάρτηση των  $\hat{\phi}$  και  $\hat{\pi}$ .

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \left( \frac{1}{2} \hat{\pi}^2(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}', t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2(\mathbf{x}', t) \right) \right] \\ &= \left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} \hat{\pi}^2(\mathbf{x}', t) \right] + \left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}', t))^2 \right] + \left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2(\mathbf{x}', t) \right] \\ &= \left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} \hat{\pi}^2(\mathbf{x}', t) \right] \\ &= \left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} \hat{\pi}(\mathbf{x}', t) \right] \int d^3 x' \hat{\pi}(\mathbf{x}', t) + \int d^3 x' \hat{\pi}(\mathbf{x}', t) \left[ \hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} \hat{\pi}(\mathbf{x}', t) \right] \\ &= \int d^3 x' \left( \frac{1}{2} i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\pi}(\mathbf{x}', t) \right) + \int d^3 x' \left( \frac{1}{2} i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\pi}(\mathbf{x}', t) \right) \\ &= \int d^3 x' \left( i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\pi}(\mathbf{x}', t) \right) = i \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

όμοια

$$i \frac{\partial \hat{\pi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[ \hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \left( \frac{1}{2} \hat{\pi}^2(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}', t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2(\mathbf{x}', t) \right) \right] \quad (\text{Α.21})$$

Ισχύει η σχέση

$$\nabla(\hat{\phi}(\nabla \hat{\phi})) = \nabla \hat{\phi} \nabla \hat{\phi} + \hat{\phi} \nabla^2 \hat{\phi}$$

έτσι το δεύτερο ολοκλήρωμα της (Α.21) γράφεται

$$\int d^3 x' (\nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}', t))^2 = \int d^3 x' \nabla(\hat{\phi}(\mathbf{x}', t)(\nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}', t))) - \int d^3 x' \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) \nabla^2 \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) = - \int d^3 x' \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) \nabla^2 \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)$$

αφού το πρώτο ολοκλήρωμα μπορούμε να το μετατρέψουμε σε επιφανειακό το οποίο εν τέλει θα μηδενιστεί. Η (Α.21) τότε θα γίνει

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \hat{\pi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \left[ \hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \left( \frac{1}{2} \hat{\pi}^2(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{2} \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) (-\nabla^2 + m^2) \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) \right) \right] \\ &= \left[ \hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} \hat{\pi}^2(\mathbf{x}', t) \right] + \left[ \hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) (-\nabla^2 + m^2) \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) \right] \\ &= \left[ \hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) \right] \int d^3 x' (-\nabla^2 + m^2) \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) + \int d^3 x' \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) \left[ \hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} (-\nabla^2 + m^2) \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) \right] \\ &= \int d^3 x' \left( -i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (-\nabla^2 + m^2) \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) \right) = -i (-\nabla^2 + m^2) \hat{\phi}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την  $[\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)] = -i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ . Από τα δύο αποτελέσματα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)}{\partial t} = \frac{-i(-\nabla^2 + m^2) \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)}{i} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)}{\partial t^2} &= (-\nabla^2 + m^2) \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) \Rightarrow \left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 + m^2 \right) \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) = 0 \\ \Rightarrow (\square + m^2) \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Α.22})$$

που δεν είναι άλλη από την εξίσωση Klein - Gordon.

Ακριβώς όπως οι κλασικές λύσεις της Klein - Gordon μπορούν να αναπτυχθούν ως προς τις λύσεις  $u_{\mathbf{k}}(x^\mu)$  έτσι μπορεί και ο κβαντικός τελεστής πεδίου  $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$ . Δηλώνουμε τους τελεστές της ανάπτυξης του  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  και  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  και έχουμε

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \int d^{n-1}k [\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})] \quad (\text{A'.23})$$

και παρόμοια έκφραση για την συζυγή ορμή

$$\hat{\pi}(t, \mathbf{x}) = \dot{\hat{\phi}}(t, \mathbf{x}) = \int d^{n-1}k (-i\omega) [\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})] \quad (\text{A'.24})$$

Για να δούμε τις σχέσεις μετάθεσης που ικανοποιούν οι τελεστές  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  και  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  θα εισάγουμε τις (A'.23) και (A'.24) στη θεμελιώδη μεταθετική σχέση

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Θα έχουμε λοιπόν

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = \quad (\text{A'.25})$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \int d^{n-1}k (\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})), \int d^{n-1}k' (-i\omega_{\mathbf{k}'}) (\hat{a}_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x}') - \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}'}^*(t, \mathbf{x}')) \right] \\ &= \left[ \int d^{n-1}k \hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}), \int d^{n-1}k' (-i\omega_{\mathbf{k}'}) \hat{a}_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x}') \right] - \left[ \int d^{n-1}k \hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}), \int d^{n-1}k' (-i\omega_{\mathbf{k}'}) \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}'}^*(t, \mathbf{x}') \right] \\ &+ \left[ \int d^{n-1}k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}), \int d^{n-1}k' (-i\omega_{\mathbf{k}'}) \hat{a}_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x}') \right] - \left[ \int d^{n-1}k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}), \int d^{n-1}k' (-i\omega_{\mathbf{k}'}) \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}'}^*(t, \mathbf{x}') \right] \\ &= \int d^{n-1}k \int d^{n-1}k' [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] (-i\omega_{\mathbf{k}'}) u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x}') \quad (\text{A}) \end{aligned}$$

$$+ \int d^{n-1}k \int d^{n-1}k' [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] (i\omega_{\mathbf{k}'}) u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'}^*(t, \mathbf{x}') \quad (\text{B})$$

$$+ \int d^{n-1}k \int d^{n-1}k' [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] (i\omega_{\mathbf{k}'}) u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'}^*(t, \mathbf{x}') \quad (\text{Γ})$$

$$+ \int d^{n-1}k \int d^{n-1}k' [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] (-i\omega_{\mathbf{k}'}) u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x}') \quad (\text{Δ})$$

$$= i\delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Αναγκαία συνθήκη για να ισχύει αυτή η ισότητα, δηλαδή η

$$(\text{A}) + (\text{B}) + (\text{Γ}) + (\text{Δ}) = i\delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{A'.26})$$

είναι να μηδενίζονται οι δύο πρώτοι όροι της όπου η χρονική εξάρτηση έχει τη μορφή

$$e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t} \quad \text{και} \quad e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t}$$

η οποία είναι αδύνατον να απαλειφθεί όπως απαιτείται ώστε το αποτέλεσμα να είναι ανεξάρτητο του  $t$ . Αυτή η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται αυτόματα αν ισχύουν οι

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad (\text{A'.27})$$

Στους όρους (Γ) και (Δ) τώρα, τα χρονικά εκθετικά έχουν αντίθετο πρόσημο οπότε η χρονική τους εξάρτηση θα είναι της μορφής

$$e^{i(\omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}})t} \quad \text{και} \quad e^{-i(\omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}})t}$$

και μπορεί να απαλειφθεί αρκεί να είναι  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ , το οποίο διασφαλίζεται αυτόματα με μια μεταθετική σχέση του τύπου

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] \sim \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Όπως θα δείξουμε αμέσως η ισχύς της (2.7) απαιτεί να είναι ακριβώς

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Πράγματι για  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} \Rightarrow \omega_{\mathbf{k}'} = \omega_{\mathbf{k}}$  θα είναι (χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (1.14))

$$(\Gamma) = \int d^{n-1}k \frac{(i\omega_{\mathbf{k}})}{(2\pi)^{n-1}2\omega_{\mathbf{k}}} e^{ik(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = i \frac{(2\pi)^{n-1}}{(2\pi)^{n-1}2} \delta^{n-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{i}{2} \delta^{n-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

και όμοια

$$(\Delta) = \int d^{n-1}k \frac{(-1)(-i\omega_{\mathbf{k}})}{(2\pi)^{n-1}2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = \frac{i}{2} \delta^{n-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

αφήνοντας το επιθυμητό αποτέλεσμα

$$(\Gamma) + (\Delta) = i\delta^{(n-1)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

Δείξαμε λοιπόν ότι οι τελεστές  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  και  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] &= 0 \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= 0 \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned} \quad (\text{A'.28})$$

Στην εικόνα του Heisenberg οι κβαντικές καταστάσεις καλύπτουν ένα χώρο Hilbert. Μια βολική βάση σε αυτό το χώρο Hilbert είναι η λεγόμενη αναπαράσταση Fock. Τα κανονικοποιημένα διανύσματα ket της βάσης, τα οποία συμβολίζουμε  $|\rangle$ , μπορούν να κατασκευαστούν από το διάνυσμα  $|0\rangle$ , που ονομάζουμε κενό ή κατάσταση χωρίς σωματίδια. Η κατάσταση  $|0\rangle$  έχει την ιδιότητα ότι εκμηδενίζεται από όλους τους τελεστές (καταστροφής)  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k} \quad (\text{A'.29})$$

Η κατάσταση που παίρνουμε δρώντας στην κατάσταση  $|0\rangle$  με τον τελεστή (δημιουργίας)  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  ονομάζεται κατάσταση ενός σωματιδίου και συμβολίζεται  $|1_{\mathbf{k}}\rangle$

$$|1_{\mathbf{k}}\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle$$

Η κατάσταση με  $n_{\mathbf{k}}$  σωματίδια με ίδια ορμή  $\mathbf{k}$  δημιουργείται με επαναλαμβανόμενη δράση του τελεστή  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}}}|0\rangle$$

ενώ η κατάσταση με  $j$   $n$  διεγέρσεις (σωματίδια) διαφόρων ορμών  $\mathbf{k}_i$  θα είναι

$$|1_{\mathbf{k}_1}, 2_{\mathbf{k}_2}, \dots, j_{\mathbf{k}_j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1_{\mathbf{k}_1}! 2_{\mathbf{k}_2}! \dots j_{\mathbf{k}_j}!}} (\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger)^{1_{\mathbf{k}_1}} (\hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger)^{2_{\mathbf{k}_2}} \dots (\hat{a}_{\mathbf{k}_j}^\dagger)^{j_{\mathbf{k}_j}} |0\rangle$$

Δρώντας σε μια τέτοια κατάσταση οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής αλλάζουν τον αριθμό των σωματιδίων ως

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_j\rangle &= \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots, n_j\rangle \\ \hat{a}_{\mathbf{k}_i} |n_1, n_2, \dots, n_j\rangle &= \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots, n_j\rangle \end{aligned}$$

Ορίζουμε τον τελεστή αριθμησης για κάθε κυματόνισμα

$$\hat{n}_{\mathbf{k}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \quad (\text{A'.30})$$

ο οποίος υπακούει στη σχέση

$$\hat{n}_{\mathbf{k}_i} |n_1, n_2, \dots, n_j\rangle = n_i |n_1, n_2, \dots, n_j\rangle$$

Οι καταστάσεις που είναι ιδιοκαταστάσεις των τελεστών αριθμησης σχηματίζουν τη βάση Fock όπως έχουμε ήδη αναφέρει.

Όταν πρωτοαναφερθήκαμε στη χαμιλτονιανή διατύπωση δηλώσαμε ότι αν και παραβιάζει το αναλλοίωτο κατά Lorentz θα μπορούσαμε εν τέλει να έχουμε παρατηρήσιμες ποσότητες που να είναι Lorentz αναλλοιώτες. Ας ερευνήσουμε λοιπόν τη συμπεριφορά της βάσης Fock κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Μεχρι τώρα είχαμε το πλεονέκτημα των συμμετριών του χώρου Minkowski, για παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε το επίπεδο κύμα ως βάση για τις λύσεις της εξίσωσης Klein - Gordon. Το σημαντικό χαρακτηριστικό αυτών

των λύσεων είναι η ιδιότητα να διαχωρίσουμε τις αρνητικές και τις θετικές συχνότητες επιτρέποντας έτσι την ερμηνεία των συντελεστών στην ανάπτυξη του  $\hat{\phi}$ , ως προς τις λύσεις, ως τελεστές καταστροφής και δημιουργίας. Ας θεωρήσουμε τώρα μια ώθηση με ταχύτητα  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$  η οποία μας οδηγεί σε νέες συντεταγμένες  $x^{\mu'}$  που δίνονται από τις σχέσεις

$$t' = \gamma t - \gamma \mathbf{v} \mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}' = \gamma \mathbf{x} - \gamma \mathbf{v} t$$

όπου  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$  και ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από τις

$$t = \gamma t' + \gamma \mathbf{v} \mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x} = \gamma \mathbf{x}' + \gamma \mathbf{v} t'$$

Η χρονική παράγωγος των λύσεων στο νέο σύστημα θα είναι

$$\begin{aligned} \partial_{t'} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) &= \partial_{t'} \left( \frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{[(2\pi)^{n-1} 2\omega]^{1/2}} \right) = \partial_{t'} \left( \frac{e^{-i\omega(\gamma t' + \gamma \mathbf{v} \mathbf{x}) + i\mathbf{k}(\gamma \mathbf{x}' + \gamma \mathbf{v} t')}}{[(2\pi)^{n-1} 2\omega]^{1/2}} \right) \\ &= (-i\omega\gamma + i\mathbf{k}\gamma\mathbf{v}) \frac{e^{-i\omega(\gamma t' + \gamma \mathbf{v} \mathbf{x}) + i\mathbf{k}(\gamma \mathbf{x}' + \gamma \mathbf{v} t')}}{[(2\pi)^{n-1} 2\omega]^{1/2}} = (-i\omega\gamma + i\mathbf{k}\gamma\mathbf{v}) u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) \\ &= -i(\omega\gamma - \mathbf{k}\gamma\mathbf{v}) u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = -i\omega' u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

όπου

$$\omega' = \gamma\omega - \gamma\mathbf{v}\mathbf{k}$$

είναι απλά η συχνότητα του νέου συστήματος. Είναι ξεκάθαρο λοιπόν ότι η κατάσταση που περιγράφει ένα σύνολο σωματιδίων με συγκεκριμένη ορμή “ωθείται” σε μια κατάσταση που περιγράφει τα ίδια σωματίδια με “ενισχυμένη” ορμή. Έτσι ο τελεστής αρίθμησης στα δύο συστήματα θα συμπίπτει και συγκεκριμένα η κατάσταση του κένου θα συμπίπτει. Με αυτή την έννοια η επιλογή του αρχικού συστήματος αναφοράς ήταν άνευ σημασίας.

## A.7 Ενέργεια του κενού

Θυμίζουμε τη μορφή της χαμιλτονιανής

$$H = \int d^{n-1}x \left( \frac{1}{2} \dot{\hat{\phi}}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 \right)$$

καθώς και την ανάπτυξη

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int d^{n-1}k (\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}))$$

Έστω ότι θέλουμε να εκφράσουμε τη χαμιλτονιανή αυτή ως προς τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Ξεκινάμε με τον όρο  $\hat{\phi}^2$  για απλότητα.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m^2 \int d^{n-1}x \hat{\phi}^2 &= \frac{1}{2} m^2 \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k \int d^{n-1}k' (\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*) (\hat{a}_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} + \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}'}^*) \\ &= \frac{1}{2} m^2 \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k \int d^{n-1}k' (\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'}^* + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}^* + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'} ) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Επικεντρώνοντας στον πρώτο όρο της παρένθεσης και αμελώντας προς το παρόν το ολοκλήρωμα στο  $\mathbf{k}$  μπορούμε να εισάγουμε τις μορφές των λύσεων  $u_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{[(2\pi)^{n-1} 2\omega]^{1/2}}$  με αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} &= \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} \frac{e^{-i(\omega+\omega')t} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1} \sqrt{\omega\omega'}} \\ &\stackrel{(\text{A.14})}{=} \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} \frac{e^{-i(\omega+\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}} \delta^{n-1}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \\ &\stackrel{\mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}}{=} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} \frac{e^{-2i\omega t}}{2\omega} \end{aligned}$$

Θυμίζουμε ότι λόγω της σχέσης διασποράς  $\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$  θα ισχύει  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{-\mathbf{k}}$ . Όμοια για τους υπόλοιπους όρους

$$\begin{aligned} \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'} &= \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \frac{e^{i(\omega-\omega')t} e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}} \\ &= \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \frac{e^{i(\omega-\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}} \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \\ &\stackrel{\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}}{=} \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}}{2\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}^* &= \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \frac{e^{i(\omega'-\omega)t} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}} \\ &= \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \frac{e^{i(\omega'-\omega)t}}{2\sqrt{\omega\omega'}} \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ &\stackrel{\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}}{=} \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger}{2\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'}^* &= \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \frac{e^{i(\omega+\omega')t} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}} \\ &= \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \frac{e^{i(\omega+\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}} \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \\ &\stackrel{\mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}}{=} \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{2i\omega t}}{2\omega} \end{aligned}$$

Βρίσκουμε έτσι ότι η συνεισφορά του όρου με το  $\hat{\phi}^2$  στη χαμιλτονιανή θα είναι

$$\frac{1}{2}m^2 \int d^{n-1}\hat{\phi}^2 = \frac{1}{2}m^2 \int d^{n-1}k \frac{1}{2\omega} [\hat{a}_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} e^{-2i\omega t} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{2i\omega t}] \quad (\text{A'.32})$$

Με βάση τα παραπάνω είναι εύκολο να υπολογίσουμε και τις συνεισφορές των υπολοίπων όρων καθώς η χρονική παράγωγος θα “κατεβάζει” κάθε φορά έναν όρο ( $\pm i\omega$ ) ενώ τα υπόλοιπα αποτελέσματα μένουν ίδια. Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^{n-1}x \dot{\phi}^2 &= \frac{1}{2} \int d^{n-1}k \frac{1}{2\omega} [-\omega^2 \hat{a}_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} e^{-2i\omega t} + \omega^2 \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \omega^2 \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - \omega^2 \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{2i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \int d^{n-1}k \frac{\omega}{2} [-\hat{a}_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} e^{-2i\omega t} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{2i\omega t}] \end{aligned} \quad (\text{A'.33})$$

Όμοια η χωρική παραγωγή θα “κατεβάζει” κάθε φορά έναν όρο ( $\pm i\mathbf{k}$ ) με αποτέλεσμα

$$\frac{1}{2} \int d^{n-1}k x (\nabla \hat{\phi})^2 = \frac{1}{2} \int d^{n-1}k \frac{\mathbf{k}^2}{2\omega} [\hat{a}_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} e^{-2i\omega t} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{2i\omega t}] \quad (\text{A'.34})$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (A'.32) και (A'.34) έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int d^{n-1}k \frac{m^2}{2\omega} [\hat{a}_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} e^{-2i\omega t} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{2i\omega t}] \\ &+ \frac{1}{2} \int d^{n-1}k \frac{\mathbf{k}^2}{2\omega} [\hat{a}_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} e^{-2i\omega t} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{2i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \int d^{n-1}k \frac{\omega^2}{2\omega} [\hat{a}_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} e^{-2i\omega t} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{2i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \int d^{n-1}k \frac{\omega}{2} [\hat{a}_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} e^{-2i\omega t} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{2i\omega t}] \end{aligned} \quad (\text{A'.35})$$

Όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση  $\mathbf{k}^2 + m^2 = \omega^2$ . Τέλος προσθέτοντας την (Α'.33) στην (Α'.35) βρίσκουμε ότι η χαμιλιονιανή για το βαθμώτο πεδίο παίρνει τη μορφή

$$H = \frac{1}{2} \int d^{n-1}k [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] \omega = \int d^{n-1}k [\hat{n}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \delta^{(n-1)}(0)] \omega \quad (\text{Α'.36})$$

Στο τελευταίο βήμα έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση μετάθεσης

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

που δίνει

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] = \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} = \delta(0) \Rightarrow \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger = \delta(0) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

καθώς και τον τελεστή αρίθμησης  $\hat{n}_{\mathbf{k}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$ .

Ο παράγοντας  $\delta^{(n-1)}(0)$  υποδηλώνει ότι η χαμιλιονιανή είναι άπειρη όταν μετριέται στο κενό  $|0\rangle$ . Δηλαδή το κενό περιέχει μια άπειρη πυκνότητα ενέργειας. Στον επίπεδο χωρόχρονο το πρόβλημα αυτό λύνεται εύκολα. Μια τέτοια ενέργεια δεν είναι μετρήσιμη στη μη-βαρυτική φυσική έτσι μπορούμε να ανακανονικοποιήσουμε την ενέργεια του κενού ακόμα και κατά ένα άπειρο ποσό χωρίς να επηρεάσουμε τις παρατηρήσιμες ποσότητες. Αυτό μπορούμε να το κατορθώσουμε απλά πετώντας τον όρο  $\frac{1}{2} \delta^{(n-1)}(0) \omega$  ή, πιο κομψά, ορίζοντας τη διαδικασία της φυσικής διάταξης, την οποία συμβολίζουμε  $::$ , και απαιτεί κάθε φορά που εμφανίζεται ένα γινόμενο τελεστών καταστροφής και δημιουργίας να βρίσκονται όλοι οι τελεστές καταστροφής στα δεξιά των τελεστών δημιουργίας. Έτσι επιστρέφοντας στη σχέση (2.17) η φυσική διάταξη απαιτεί

$$:\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger: = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

οπότε

$$:H: = \int d^{n-1}k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \omega$$

και ο προβληματικός όρος  $\frac{1}{2} \delta^{(n-1)}(0) \omega$  έχει εξαφανιστεί. Μετά από αυτή την αναθεώρηση η κατάσταση του κενού μετατρέπεται σε μια ιδιοκατάσταση μηδενικής ενέργειας

$$\langle 0|H|0\rangle = 0$$



## Παράρτημα Β΄

# Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

### Η αρχή της ισοδυναμίας

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, η θεωρία του Einstein για τη βαρύτητα είναι από τις πιο καλά θεμελιωμένες φυσικές θεωρίες. Είναι η ίδρυση της κοσμολογίας - το αντικείμενο που ανιχνεύει την εξέλιξη του σύμπαντος από την έντονα θερμή και πυκνή αρχική του κατάσταση μέχρι την πιθανή μελλοντική<sup>1</sup>. Ο Einstein επιδίωξε να βρει την απάντηση στην ερώτηση η οποία φαινόταν στους σύγχρονους του, αλλά και στους προηγούμενους, άνευ σημασίας. *Ποιά έννοια συνδέεται με την απόλυτη ισοδυναμία της αδρανειακής και της βαρυτικής μάζας*; Αν όλα τα σώματα κινούνται σε βαρυτικά πεδία με ακριβώς τον ίδιο τρόπο, ανεξαρτήτως της σύστασής τους ή των δέσμιων δυνάμεων, τότε αυτό σημαίνει ότι η κίνησή τους δεν έχει τίποτα να κάνει με τη φύση τους, αλλά μάλλον με τη φύση του χωροχρόνου. Και αν ο χωρόχρονος καθορίζει την κίνηση των σωματιδίων, τότε σύμφωνα με το νόμο της δράσης - αντίδρασης, αυτό υποδηλώνει ότι ο χωρόχρονος με τη σειρά του διαμορφώνεται από τα σώματα και την κίνησή τους.

Η ισοδυναμία της αδρανειακής και της βαρυτικής μάζας έχει εξακριβωθεί με μεγάλη ακρίβεια για τις δέσμιες ενέργειες των ατόμων και των πυρήνων. Επιπλέον, ως αποτέλεσμα πολύ προσεκτικών πειραμάτων με χρήση λέιζερ, η γη και το φεγγάρι βρέθηκαν να “πέφτουν” προς τον ήλιο με ίδια επιτάχυνση με ακρίβεια 1 προς  $10^{13}$ , καλύτερη και από τα πιο ακριβή πειράματα τύπου Εδνός που πραγματοποιούνται στο εργαστήριο. Τα ουσιώδη αυτά αποτελέσματα έχουν καθιερώσει τη λεγόμενη ισχυρή εκδοχή της ισοδυναμίας αδρανειακής και βαρυτικής μάζας. Όλα τα ελεύθερα σωματίδια, ανεξαρτήτως της σύστασής τους ή του πόσο δεμένα είναι τα συστατικά τους, κινούνται στο χωρόχρονο μέσα σε ένα τυχαίο βαρυτικό πεδίο σαν να ήταν ταυτοτικά σωματίδια. *Επειδή η κίνησή τους στον χωρόχρονο δεν έχει να κάνει με τη φύση τους, έχει τελικά να κάνει με τη φύση του χωροχρόνου.*

Ο Einstein ένιωθε σίγουρος ότι υπήρχε ένα βαθύτερο νόημα στην ισοδυναμία αυτή. “Η πειραματικά εξακριβωμένη ανεξαρτησία της μάζας από την επιτάχυνση της πτώσης είναι ... ένα ισχυρό επιχείρημα ώστε το αξίωμα της σχετικότητας να επεκταθεί σε συστήματα αναφοράς τα οποία, ως προς άλλα συστήματα, δεν είναι σε ομοιόμορφη κίνηση”. Η πεποίθηση αυτή τον οδήγησε στην διατύπωση της *Αρχής της ισοδυναμίας*. Η αρχή της ισοδυναμίας παρέχει τη σύνδεση ανάμεσα στους φυσικούς νόμους όπως τους παρατηρούμε στο εργαστήριο και στη μορφή τους κάτω από οποιαδήποτε κατάσταση στο σύμπαν - πιο συγκεκριμένα, σε ισχυρά και ποικίλα βαρυτικά πεδία. Παρέχει επίσης ένα εργαλείο στην ανάπτυξη της θεωρίας της βαρύτητας όπως θα δούμε αργότερα.

Το σύμπαν είναι γεμάτο με αντικείμενα μεγάλης μάζας τα οποία κινούνται σχετικά μεταξύ τους. Το βαρυτικό πεδίο μπορεί να αλλάζει τυχαία με το χώρο και το χρόνο. Παρ’ όλα αυτά, η παρουσία της βαρύτητας δεν μπορεί να ανιχνευτεί σε αρκετά μικρά συστήματα αναφοράς με ένα σωματίδιο τα οποία είναι σε ελεύθερη πτώση χωρίς καμία άλλη επίδραση πέραν της βαρύτητας. Το σωματίδιο θα παραμείνει σε ηρεμία σε ένα τέτοιο σύστημα. Είναι ένα *τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς*. Ο όρος τοπικό αδρανειακό σύστημα και τοπικό Lorentz σύστημα είναι όροι συνώνυμοι. Οι νόμοι της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας ισχύουν σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς και γι’ αυτό ισχύουν και στη γειτονιά ενός συστήματος σε ελεύθερη πτώση. Με αυτό το τρόπο η σχετικότητα επεκτείνεται σε τυχαία βαρυτικά πεδία.

Σε ένα δεδομένο χωροχρονικό γεγονός αντιστοιχούν άπειρα τοπικά αδρανειακά συστήματα τα οποία σχετίζονται με μετασχηματισμούς Lorentz. Όλα είναι ισοδύναμα για την περιγραφή φυσικών φαινομένων

<sup>1</sup> Ο ίδιος ο Einstein δεν εφάρμοσε ποτέ τη θεωρία του στην εξέλιξη του κόσμου. Πράγματι όταν ανακάλυψε τη θεωρία (1915), ήταν κανόνας της δυτικής σκέψης ότι ο κόσμος διαρκούσε από το “αιώνιο” στο “αιώνιο”. Η ανακάλυψη του Edwin Hubble (1927) της διαστολής του σύμπαντος κλόνησε αυτή τη πίστη.

σε μια αρκετά μικρή περιοχή του χωροχρόνου. Έτσι φτάνουμε στη διατύπωση της αρχής της ισοδυναμίας

*Σε κάθε σημείο του χωροχρόνου σε ένα τυχαίο βαρυτικό πεδίο (εννοώντας οποιοδήποτε και οπουδήποτε στο σύμπαν), μπορούμε να διαλέξουμε ένα τοπικό αδρανειακό (Lorentz) σύστημα αναφοράς ώστε οι νόμοι της φύσης να παίρνουν τη μορφή που έχουν σε ένα μη επιταχυνόμενο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων απουσία βαρύτητας.*

Αυτό είναι το νόημα της ισοδυναμίας της αδρανειακής και βαρυτικής μάζας που είδε ο Einstein.

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται υπό την επίδραση μόνο βαρυτικών δυνάμεων. Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση  $\xi^a$  στο οποίο η εξίσωση κίνησής του θα είναι αυτή της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης στο χωρόχρονο, δηλαδή

$$\frac{d^2 \xi^a}{d\tau^2} = 0 \quad (\text{B.1})$$

όπου  $d\tau$  είναι ο ιδιόχρονος

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} \quad (\text{B.2})$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων  $\chi^{\mu}$ , το οποίο μπορεί να είναι ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε ηρεμία αλλά μπορεί επίσης να είναι καμπυλόγραμμο, επιταχυνόμενο, περιστρεφόμενο ή όπως θέλουμε. Οι συντεταγμένες  $\xi^a$  είναι συναρτήσεις του  $\chi^{\mu}$  και η (3.1) γίνεται

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\xi^a}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\chi^{\mu}}{d\tau} \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^{\mu}} \right) = \frac{d^2 \chi^{\mu}}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^{\mu}} + \frac{d\chi^{\mu}}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^{\mu}} \right) \\ &= \frac{d^2 \chi^{\mu}}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^{\mu}} + \frac{d\chi^{\mu}}{d\tau} \frac{d\chi^{\nu}}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \chi^{\nu}} \left( \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^{\mu}} \right) = \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^{\mu}} \frac{d^2 \chi^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}} \frac{d\chi^{\mu}}{d\tau} \frac{d\chi^{\nu}}{d\tau} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη διαφορίση του  $\xi^a(\chi^{\mu})$

$$d\xi^a(\chi^{\mu}) = \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^{\mu}} d\chi^{\mu}$$

ενώ γενικά ισχύει

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d\chi^{\lambda}}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \chi^{\lambda}}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.3) με  $\frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \xi^a}$  και χρησιμοποιώντας τον κανόνα

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \xi^a} = \delta_{\mu}^{\lambda}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \xi^a} \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^{\mu}} \frac{d^2 \chi^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \xi^a} \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}} \frac{d\chi^{\mu}}{d\tau} \frac{\partial \chi^{\nu}}{d\tau} &= 0 \\ \Rightarrow \delta_{\mu}^{\lambda} \frac{d^2 \chi^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \xi^a} \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}} \frac{d\chi^{\mu}}{d\tau} \frac{\partial \chi^{\nu}}{d\tau} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 \chi^{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \xi^a} \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}} \frac{d\chi^{\mu}}{d\tau} \frac{\partial \chi^{\nu}}{d\tau} &= 0 \end{aligned}$$

καταλήγοντας έτσι στην εξίσωση κίνησης

$$\frac{d^2 \chi^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{d\chi^{\mu}}{d\tau} \frac{\partial \chi^{\nu}}{d\tau} = 0 \quad (\text{B.4})$$

όπου έχουμε ορίσει την αφινική σύνδεση

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \xi^a} \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}} \quad (\text{B.5})$$

Η τροχιά που καθορίζεται από τη σχέση (3.4) ονομάζεται γεωδαιτική. Ο ιδιόχρονος (3.2) μπορεί επίσης να εκφραστεί σε ένα τυχαίο σύστημα αναφοράς

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \chi^\mu} d\chi^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\nu} d\chi^\nu = -g_{\mu\nu} d\chi^\mu d\chi^\nu \quad (\text{B'.6})$$

όπου  $g_{\mu\nu}$  είναι ο μετρικός τανυστής και ορίζεται ως

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \chi^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\nu} \quad (\text{B'.7})$$

### Η σχέση ανάμεσα στα $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ και $g_{\mu\nu}$

Η μελέτη των σωματιδίων σε ελεύθερη πτώση μας δείχνει ότι το πεδίο που καθορίζει τη βαρυτική δύναμη είναι η αφινική σύνδεση  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  ενώ το αναλλοίωτο χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο γεγονότα με δεδομένες απειροστές διαφορές συντεταγμένων καθορίζεται από τον μετρικό τανυστή  $g_{\mu\nu}$ . Θα δείξουμε τώρα ότι το  $g_{\mu\nu}$  είναι επίσης το βαρυτικό δυναμικό, ότι δηλαδή οι παράγωγοί του καθορίζουν το πεδίο  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ . Παραγωγίζοντας τη σχέση (3.7) ως προς  $\chi^\lambda$  δίνει

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^\lambda} = \frac{\partial}{\partial \chi^\lambda} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \chi^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\nu} \eta_{\alpha\beta} \right) = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \chi^\lambda \partial \chi^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \chi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial \chi^\lambda \partial \chi^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial \chi^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \chi^\mu \partial \chi^\nu} \Rightarrow \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \chi^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \chi^\mu \partial \chi^\nu}$$

έχουμε

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \chi^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\rho} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \chi^\mu} \eta_{\alpha\beta}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την (3.7) έχουμε

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} \Rightarrow \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^k g_{k\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^k g_{k\mu} \quad (\text{B'.8})$$

Γράφουμε την ίδια εξίσωση εναλλάσσοντας τα  $\mu$  και  $\lambda$

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^\mu} = \Gamma_{\mu\lambda}^k g_{k\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^k g_{k\lambda}$$

και εναλλάσσοντας τα  $\nu$  και  $\lambda$  ( στην (3.8) )

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^\nu} = \Gamma_{\nu\mu}^k g_{k\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^k g_{k\mu}$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες και αφαιρώντας την τρίτη θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^\nu} &= \Gamma_{\lambda\mu}^k g_{k\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^k g_{k\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^k g_{k\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^k g_{k\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^k g_{k\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^k g_{k\mu} \\ &= 2g_{k\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^k \end{aligned} \quad (\text{B'.9})$$

(Τα  $\Gamma_{\mu\nu}^k$  και  $g_{\mu\nu}$  είναι συμμετρικά κάτω από την αλλαγή  $\mu \leftrightarrow \nu$ )

Ορίζουμε έναν πίνακα  $g^{\nu\sigma}$  ως τον αντίστροφο του  $g_{\nu\sigma}$  έτσι ώστε

$$\begin{aligned} g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} &= \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \chi^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \chi^\sigma}{\partial \xi^\beta} \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \chi^\kappa} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial \chi^\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \chi^\sigma}{\partial \xi^\beta} \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \chi^\kappa} \frac{\partial \chi^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial \chi^\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \chi^\sigma}{\partial \xi^\beta} \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \chi^\kappa} \delta_a^\delta = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \chi^\sigma}{\partial \xi^\beta} \eta_{\gamma a} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \chi^\kappa} \\ &= \delta_\gamma^\beta \frac{\partial \chi^\sigma}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \chi^\kappa} = \frac{\partial \chi^\sigma}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\kappa} = \delta_k^\sigma \end{aligned}$$

και πολλαπλασιάζουμε την (3.9) με το  $g^{\nu\sigma}$ . Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^\nu} \right) &= 2g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \\ \Rightarrow g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^\nu} \right) &= 2\delta_k^\sigma \Gamma_{\lambda\mu}^k \\ \Rightarrow \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma &= \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^\nu} \right) \end{aligned} \quad (\text{B'.10})$$

Το δεξί μέλος της (3.10) ονομάζεται και σύμβολο Christoffel και συμβολίζεται

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^\nu} \right)$$

### Διανύσματα και τανυστές

Ας θεωρήσουμε μια καμπύλη που διέρχεται από κάποιο σημείο  $A$  σε ένα χώρο  $n$ -διαστάσεων. Η καμπύλη αυτή θα καθορίζεται από  $n$  συναρτήσεις μιας βαθμωτής ποσότητας  $\lambda$  της μορφής

$$x^\mu = z^\mu(\lambda) \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1$$

Αν στο σημείο  $A$  αντιστοιχεί η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  τότε σε ένα διπλανό σημείο  $A'$  η τιμή της παραμέτρου θα είναι  $\lambda + d\lambda$ . Μπορούμε τώρα να ορίσουμε ως εφαπτόμενο διάνυσμα  $V^\mu$  στο σημείο  $A$  το

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα  $V^\mu$  που ορίζεται από την παραπάνω σχέση θα λέμε ότι είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. Ένας μετασχηματισμός από το σύστημα  $\chi^\mu$  σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων  $\chi'^\mu$  ορίζεται από τις  $n$  εξισώσεις

$$\chi'^\mu = f^\mu(\chi^\nu) \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1$$

ενώ ο αντίστροφός του θα είναι

$$x^\mu = g^\mu(\chi'^\nu) \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι δυνατοί αν και μόνο αν οι Ιακωβιανές τους είναι διάφορες του μηδενός, δηλαδή αν

$$\det \left( \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\nu} \right) \neq 0 \quad \text{και} \quad \det \left( \frac{\partial \chi^\mu}{\partial \chi'^\nu} \right) \neq 0$$

Ένα απειροστό διάνυσμα  $d\chi^\nu$  που ορίζεται σ' ένα σύστημα  $\chi^\mu$  θα μετασχηματίζεται σ' ένα άλλο σύστημα  $\chi'^\mu$  ως

$$d\chi'^\mu = \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\nu} d\chi^\nu$$

Έστω ότι το ανταλλοίωτο διάνυσμα  $V^\mu$  έχει ορισθεί σε ένα σύστημα συντεταγμένων  $\chi^\mu$ . Τότε οι συνιστώσες του σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων, έστω το  $\chi'^\mu$ , θα δίνονται από μετασχηματισμούς της μορφής

$$V'^\mu = \frac{d\chi'^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\nu} \frac{d\chi^\nu}{d\lambda} = \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\nu} V^\nu$$

Φυσικά μπορούμε να γυρίσουμε πίσω στις αρχικές συντεταγμένες καθώς ισχύει

$$\frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\nu} \frac{\partial \chi^\nu}{\partial \chi'^\alpha} = \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi'^\alpha} = \delta_a^\mu \Rightarrow \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\nu} \frac{\partial \chi^\nu}{\partial \chi'^\mu} = 1$$

και έτσι έχουμε

$$V'^\mu = \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\nu} V^\nu \Rightarrow \frac{\partial \chi^\nu}{\partial \chi'^\mu} V'^\mu = \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\nu} \frac{\partial \chi^\nu}{\partial \chi'^\mu} V^\nu \Rightarrow V^\nu = \frac{\partial \chi^\nu}{\partial \chi'^\mu} V'^\mu$$

Ένας στενά σχετιζόμενος κανόνας μετασχηματισμού είναι αυτός του συναλλοίωτου διανύσματος  $U_\mu$  το οποίο κάτω από το μετασχηματισμό συντεταγμένων  $\chi^\mu \rightarrow \chi'^\mu$  μετασχηματίζεται ως

$$U'_\mu = \frac{\partial \chi^\nu}{\partial \chi'^\mu} U_\nu$$

και αντίστροφα

$$U_\nu = \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\nu} U'_\mu$$

Ο πιο απλός κανόνας μετασχηματισμού είναι αυτός του βαθμωτού, το οποίο απλά δεν αλλάζει κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Μια βαθμωτή συνάρτηση  $\phi(\chi^\mu)$  σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων θα είναι

$$\phi = \phi(\chi'^\mu) = \phi(\chi^\mu)$$

Η μερική παράγωγος όμως ενός βαθμωτού πεδίου  $\partial\phi/\partial\chi^\mu$  είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα καθώς σε ένα μετασχηματισμένο σύστημα αναφοράς είναι

$$\frac{\partial\phi}{\partial\chi'^\mu} = \frac{\partial\chi^\nu}{\partial\chi'^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial\chi^\nu}$$

μετασχηματίζεται δηλαδή όπως τα συναλλοίωτα διανύσματα.

Τα βαθμωτά μεγέθη και τα διανύσματα (συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα) είναι ειδικές περιπτώσεις μιας ευρύτερης κατηγορίας γεωμετρικών ποσοτήτων που μετασχηματίζονται με βάση τους προηγούμενους κανόνες. Οι ποσότητες αυτές καλούνται τανυστές. Τα βαθμωτά μεγέθη είναι τανυστές μηδενικής τάξης ενώ τα διανύσματα είναι τανυστές πρώτης τάξης. Θα ονομάζουμε ανταλλοίωτο τανυστή 2ης τάξης, σε ένα  $n$ -διάστατο χώρο, την ποσότητα  $T^{\mu\nu}$  η οποία έχει  $n^2$  συνιστώσες και μετασχηματίζεται ως

$$T'^{a\beta} = \frac{\partial\chi'^a}{\partial\chi^\mu} \frac{\partial\chi'^\beta}{\partial\chi^\nu} T^{\mu\nu}$$

Και' ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και τους τανυστές 2ης τάξης  $T_{\mu\nu}$  (συναλλοίωτος) και  $T_{\mu\nu}$  (μεικτός) που μετασχηματίζονται ως

$$T'_{a\beta} = \frac{\partial\chi^\mu}{\partial\chi'^a} \frac{\partial\chi^\nu}{\partial\chi'^\beta} T_{\mu\nu} \quad \text{και} \quad T'^a_{\beta} = \frac{\partial\chi'^a}{\partial\chi^\mu} \frac{\partial\chi^\nu}{\partial\chi'^\beta} T^{\mu}_{\nu}$$

Ένας τανυστής με πάνω δείκτες  $\mu, \nu, \dots$  και κάτω δείκτες  $k, \lambda, \dots$  μετασχηματίζεται ως γινόμενο ανταλλοίωτων διανυσμάτων  $V^\mu W^\nu \dots$  και συναλλοίωτων διανυσμάτων  $U_k Y_\lambda \dots$ . Για παράδειγμα κάτω από το μετασχηματισμό  $\chi^\mu \rightarrow \chi'^\mu$  ένας τανυστής  $T^{\mu\lambda}_{\nu}$  θα μετασχηματιστεί στο

$$T'^{\mu\lambda}_{\nu} = \frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\kappa} \frac{\partial\chi'^\lambda}{\partial\chi'^\nu} \frac{\partial\chi^\sigma}{\partial\chi^\rho} T^{\kappa\sigma}_{\rho}$$

Το πιο σημαντικό παράδειγμα είναι ο μετρικός τανυστής που όπως έχουμε δηλώσει για ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων είναι

$$g_{\mu\nu} = \eta_{a\beta} \frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^\mu} \frac{\partial\xi^b}{\partial\chi^\nu}$$

όπου  $\xi^a$  είναι ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Σε ένα διαφορετικό σύστημα αναφοράς  $\chi'^\mu$  ο μετρικός τανυστής είναι

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{a\beta} \frac{\partial\xi^a}{\partial\chi'^\mu} \frac{\partial\xi^b}{\partial\chi'^\nu} = \eta_{a\beta} \frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^\rho} \frac{\partial\chi^\rho}{\partial\chi'^\mu} \frac{\partial\xi^b}{\partial\chi^\sigma} \frac{\partial\chi^\sigma}{\partial\chi'^\nu} = \frac{\partial\chi^\rho}{\partial\chi'^\mu} \frac{\partial\chi^\sigma}{\partial\chi'^\nu} g_{\rho\sigma}$$

Βλέπουμε ότι ο  $g_{\mu\nu}$  είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής. Ο αντίστροφός του είναι ένας ανταλλοίωτος τανυστής καθώς αν ορίσουμε το  $g^{\lambda\mu}$  έτσι ώστε

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi'^\lambda}{\partial\chi^\rho} \frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\sigma} g^{\rho\sigma} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial\chi'^\lambda}{\partial\chi^\rho} \frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\sigma} g^{\rho\sigma} \frac{\partial\chi^\kappa}{\partial\chi'^\mu} \frac{\partial\chi^\eta}{\partial\chi'^\nu} g_{\kappa\eta} = \frac{\partial\chi'^\lambda}{\partial\chi^\rho} g^{\rho\sigma} \delta^\kappa_\sigma \frac{\partial\chi^\eta}{\partial\chi'^\nu} g_{\kappa\eta} = \frac{\partial\chi'^\lambda}{\partial\chi^\rho} g^{\rho\kappa} \frac{\partial\chi^\eta}{\partial\chi'^\nu} g_{\kappa\eta} \\ &= \frac{\partial\chi'^\lambda}{\partial\chi^\rho} \frac{\partial\chi^\eta}{\partial\chi'^\nu} \delta^\rho_\eta = \frac{\partial\chi'^\lambda}{\partial\chi^\rho} \frac{\partial\chi^\rho}{\partial\chi'^\nu} = \delta^\lambda_\nu \end{aligned}$$

είναι λουπόν

$$g^{\lambda\mu'} = \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi^{\rho}} \frac{\partial\chi'^{\mu}}{\partial\chi^{\sigma}} g^{\rho\sigma}$$

όπως απαιτείται για έναν ανταλλοίωτο τανυστή.

Κάθε εξίσωση θα είναι αναλλοίωτη κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων αν δηλώνει την ισότητα δύο τανυστών με ίδιους πάνω και κάτω δείκτες. Για παράδειγμα αν  $A^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda}$  και  $B^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda}$  είναι δύο τανυστές που υπακούν στον κανόνα μετασχηματισμού των τανυστών και στο σύστημα συντεταγμένων  $\chi^{\mu}$  ισχύει  $A^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda} = B^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda}$  τότε και στο σύστημα  $\chi'^{\mu}$  θα ισχύει  $A^{\mu'}_{\nu'}{}^{\lambda'} = B^{\mu'}_{\nu'}{}^{\lambda'}$ .

## Β.1 Καμπυλότητα του χωροχρόνου - τανυστής Riemann

Ας θεωρήσουμε ένα πείραμα σκέψης. Δύο γειτονικά σώματα που αφήνονται από την ηρεμία πάνω από τη γη ακολουθούν παράλληλες διαδρομές σε μια μικρή περιοχή των τροχιών τους, όπως ξέρουμε από την αρχή της ισοδυναμίας. Αλλά αν μπορούσαμε να ανοίξουμε τρύπες στην γη μέσα από τις οποίες θα περνούσαν τα σωματίδια, τότε αυτά θα διασταυρώνονταν στο κέντρο της. Οπότε δεν υπάρχει ένας χωρόχρονος Minkowski ο οποίος να καλύπτει μια μεγάλη περιοχή ή ολόκληρη τη περιοχή που εμπεριέχει ένα σώμα με μεγάλη μάζα.

Η άποψη του Einstein ήταν ότι η καμπυλότητα του χωροχρόνου προκαλούσε τη διασταύρωση αυτή των σωμάτων. Σώματα τα οποία σε αυτό τον καμπύλο χωρόχρονο ακολουθούσαν ευθείες διαδρομές σε κάθε μικρή περιοχή, ακριβώς όπως θα κάνανε στο χωρόχρονο Minkowski (επίπεδος) απουσία βαρύτητας. Η παρουσία των βαρυτικών σωμάτων εμποδίζει την ύπαρξη ενός τέτοιου καθολικού αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Ο χωρόχρονος θα ήταν επίπεδος παντού μόνο αν υπήρχε ένα τέτοιο σύστημα. Συνεπώς, ο χωρόχρονος καμπυλώνεται από τα σώματα με μάζα. Υπο την παρουσία τους ένα σωματίδιο ακολουθεί μια γεωδαιτική τροχιά, που είναι πάντα τοπικά ευθεία. Η έννοια της βαρυτικής δύναμης έχει πλέον αντικατασταθεί από την καμπυλότητα του χωροχρόνου, και οι κινήσεις των ελεύθερων σωματιδίων μέσα σ' αυτόν καθορίζονται από τις γεωδαιτικές (3.4).

Θέλουμε τώρα να κατασκευάσουμε έναν τανυστή από τον μετρικό τανυστή και τις παραγώγους του. Αν χρησιμοποιήσουμε μόνο τον  $g_{\mu\nu}$  και τις πρώτες παραγώγους του τότε κανένας νέος τανυστής δεν μπορεί να κατασκευαστεί καθώς σε κάθε σημείο μπορούμε να βρούμε ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο οι πρώτες παράγωγοι του μετρικού τανυστή μηδενίζονται. Τότε ο επιθυμητός τανυστής θα είναι ίσος με κάποιον που μπορεί να κατασκευαστεί μόνο από τον μετρικό τανυστή, και αφού αυτή θα είναι μια ισοδυναμία ανάμεσα σε τανυστές θα ισχύει σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Η επόμενη απλούστερη περίπτωση είναι να κατασκευάσουμε έναν τανυστή από τον μετρικό τανυστή, τις πρώτες και τις δεύτερες παραγώγους του. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρειαστούμε τον μετασχηματισμό της αφινικής σύνδεσης. Θυμίζουμε τον ορισμό της

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial\chi^{\lambda}}{\partial\xi^a} \frac{\partial^2\xi^a}{\partial\chi^{\mu}\partial\chi^{\nu}}$$

όπου  $\xi^a$  είναι το τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Στο παράρτημα Β' βρίσκουμε ότι περνώντας από το  $\chi^{\mu}$  σε ένα διαφορετικό σύστημα  $\chi'^{\mu}$  βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}' &= \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\xi^k} \frac{\partial^2\xi^a}{\partial\chi'^{\mu}\partial\chi'^{\nu}} = \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi^{\rho}} \frac{\partial\chi^{\rho}}{\partial\xi^a} \frac{\partial}{\partial\chi'^{\mu}} \left( \frac{\partial\chi^{\sigma}}{\partial\chi'^{\nu}} \frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^{\sigma}} \right) = \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi^{\rho}} \frac{\partial\chi^{\rho}}{\partial\xi^a} \left[ \frac{\partial\chi^{\sigma}}{\partial\chi'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial\chi'^{\mu}} \left( \frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^{\sigma}} \right) + \frac{\partial^2\chi^{\sigma}}{\partial\chi'^{\mu}\partial\chi'^{\nu}} \frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^{\sigma}} \right] \\ &= \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi^{\rho}} \frac{\partial\chi^{\rho}}{\partial\xi^a} \left[ \frac{\partial\chi^{\sigma}}{\partial\chi'^{\nu}} \frac{\partial\chi^{\tau}}{\partial\chi'^{\mu}} \frac{\partial^2\xi^a}{\partial\chi^{\tau}\partial\chi^{\sigma}} + \frac{\partial^2\chi^{\sigma}}{\partial\chi'^{\mu}\partial\chi'^{\nu}} \frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^{\sigma}} \right] \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αφινικής σύνδεσης έχουμε

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}' &= \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi^{\rho}} \frac{\partial\chi^{\tau}}{\partial\chi'^{\mu}} \frac{\partial\chi^{\sigma}}{\partial\chi'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi^{\rho}} \frac{\partial\chi^{\rho}}{\partial\xi^a} \frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^{\sigma}} \frac{\partial^2\chi^{\sigma}}{\partial\chi'^{\mu}\partial\chi'^{\nu}} = \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi^{\rho}} \frac{\partial\chi^{\tau}}{\partial\chi'^{\mu}} \frac{\partial\chi^{\sigma}}{\partial\chi'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi^{\rho}} \delta^{\rho}_{\sigma} \frac{\partial^2\chi^{\sigma}}{\partial\chi'^{\mu}\partial\chi'^{\nu}} \\ &= \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi^{\rho}} \frac{\partial\chi^{\tau}}{\partial\chi'^{\mu}} \frac{\partial\chi^{\sigma}}{\partial\chi'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi^{\rho}} \frac{\partial^2\chi^{\rho}}{\partial\chi'^{\mu}\partial\chi'^{\nu}} \end{aligned} \quad (\text{B'.11})$$

Εναλλάσσοντας τις πρωτεύουσες με τις δευτερεύουσες συντεταγμένες η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial\chi^{\lambda}}{\partial\chi'^{\tau'}} \frac{\partial\chi^{\rho'}}{\partial\chi^{\mu}} \frac{\partial\chi^{\sigma'}}{\partial\chi^{\nu}} \Gamma^{\tau\rho\sigma'} + \frac{\partial\chi^{\lambda}}{\partial\chi'^{\tau'}} \frac{\partial^2\chi^{\tau'}}{\partial\chi^{\mu}\partial\chi^{\nu}}$$

Ο όρος στα δεξιά είναι αυτός που κάνει το  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  να μην είναι ταυσιτής οπότε ας τον απομονώσουμε

$$\frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \chi^{\tau'}} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} + \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \chi^{\tau'}} \frac{\partial^2 \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}} \Rightarrow \frac{\partial^2 \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}} = \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'}$$

Για να διώξουμε το αριστερό μέλος θα χρησιμοποιήσουμε την μεταθετικότητα της μερικής παραγώγισης καθώς

$$\frac{\partial^3 \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\kappa} \partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}} = \frac{\partial^3 \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\nu} \partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\kappa}}$$

Έτσι λοιπόν παραγώγιση ως προς το  $\chi^{\kappa}$  θα δώσει

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\kappa} \partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}} &= \frac{\partial}{\partial \chi^{\kappa}} \left( \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\kappa} \partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2 \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\kappa} \partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} - \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial^2 \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda} \partial \chi^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} + \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial \chi^{\kappa}} - \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'}}{\partial \chi^{\kappa}} \\ &= \left( \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\eta}} \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta} - \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\kappa}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \right) \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \left( \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\eta}} \Gamma_{\kappa\mu}^{\eta} - \frac{\partial \chi^{\eta'}}{\partial \chi^{\kappa}} \frac{\partial \chi^{\xi'}}{\partial \chi^{\mu}} \Gamma_{\nu\xi}^{\rho'} \right) \\ &= \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\eta}} \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \chi^{\eta}} \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\kappa\eta}^{\eta} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\kappa}} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda}} \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\eta}} \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \\ &+ \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \frac{\partial \chi^{\eta'}}{\partial \chi^{\kappa}} \frac{\partial \chi^{\xi'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\lambda}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\xi}} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \chi^{\sigma}} \Gamma_{\rho\lambda}^{\tau'} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\tau'} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda}} \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\eta}} \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} \\ &+ \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho'}} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda}} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\xi}} \frac{\partial \chi^{\eta'}}{\partial \chi^{\kappa}} \frac{\partial \chi^{\xi}}{\partial \chi^{\nu}} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau'} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} + \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial \chi^{\kappa}} - \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \frac{\partial \chi^{\eta'}}{\partial \chi^{\kappa}} \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'}}{\partial \chi^{\eta}} \\ &= \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\kappa\eta}^{\eta} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\kappa}} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\nu}} + \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \frac{\partial \chi^{\eta'}}{\partial \chi^{\kappa}} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\rho\lambda}^{\tau'} \\ &- \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} + \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \frac{\partial \chi^{\eta'}}{\partial \chi^{\kappa}} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau'} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} + \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial \chi^{\kappa}} - \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'}}{\partial \chi^{\kappa}} \\ &= \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \left( \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial \chi^{\kappa}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} \right) - \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \frac{\partial \chi^{\eta'}}{\partial \chi^{\kappa}} \left( \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'}}{\partial \chi^{\eta}} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\tau'} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau'} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} \right) \\ &- \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda}} \left( \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\kappa}} + \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} + \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\nu}} \right) \end{aligned}$$

Η ίδια σχέση με αλλαγμένα τα  $\nu$  και  $\kappa$  θα δώσει

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\nu} \partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\kappa}} &= \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \left( \frac{\partial \Gamma_{\mu\chi^{\kappa}}^{\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right) - \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\kappa}} \frac{\partial \chi^{\eta'}}{\partial \chi^{\nu}} \left( \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'}}{\partial \chi^{\eta}} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\tau'} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau'} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} \right) \\ &- \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda}} \left( \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\nu}} + \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\kappa}} \right) \\ &= \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \left( \frac{\partial \Gamma_{\mu\chi^{\kappa}}^{\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right) - \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \frac{\partial \chi^{\eta'}}{\partial \chi^{\kappa}} \left( \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'}}{\partial \chi^{\eta}} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\tau'} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\eta}^{\tau'} \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda} \right) \\ &- \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\lambda}} \left( \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\nu}} + \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\kappa}} \right) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν αφαιρέσουμε τις δύο αυτές σχέσεις οι όροι που περιλαμβάνουν γινόμενα των  $\Gamma$  με τα  $\Gamma'$  απαλείφονται δίνοντας

$$0 = \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \left( \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial \chi^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right) - \frac{\partial \chi^{\rho'}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma'}}{\partial \chi^{\nu}} \frac{\partial \chi^{\eta'}}{\partial \chi^{\kappa}} \left( \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'}}{\partial \chi^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\eta}^{\tau'}}{\partial \chi^{\sigma}} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau'} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\eta}^{\tau'} \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda} \right)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί σαν ένας κανόνας μετασχηματισμού

$$R_{\rho\sigma\eta}^{\tau'} = \frac{\partial \chi^{\tau'}}{\partial \chi^{\lambda}} \frac{\partial \chi^{\mu}}{\partial \chi^{\rho'}} \frac{\partial \chi^{\nu}}{\partial \chi^{\sigma'}} \frac{\partial \chi^{\kappa}}{\partial \chi^{\eta}} R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \quad (\text{B.12})$$

όπου έχουμε ορίσει

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \quad (\text{B'.13})$$

Η εξίσωση (3.11) υποδηλώνει ότι ο  $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$  είναι ένας τανυστής. Ο τανυστής αυτός ονομάζεται τανυστής καμπυλότητας Riemann - Christoffel και εκφράζει την καμπυλότητα του χώρου. Ο μηδενισμός του τανυστή Riemann σημαίνει ότι ο χώρος είναι επίπεδος.

Η συστολή του τανυστή Riemann οδηγεί σε ένα τανυστή δεύτερης τάξης, τον τανυστή Ricci

$$R_{\mu\kappa} \equiv R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda}$$

Μηδενισμός του τανυστή Ricci  $R_{\mu\nu} = 0$  σημαίνει ότι ο χώρος είναι κενός ύλης - ενέργειας. Αξίζει λοιπόν να σημειώσουμε ότι η εξίσωση  $R_{\mu\nu} = 0$  από μόνη της δεν σημαίνει ότι ο χώρος είναι επίπεδος. Η παραπέρα συστολή του τανυστή Ricci οδηγεί στη βαθμωτή καμπυλότητα Ricci

$$R \equiv R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}$$

## B'.2 Τανυστές Riemann και Einstein στο 4-διάστατο σύμπαν FRW

### Υπολογισμός της βαθμωτής καμπυλότητας R για το 4-διάστατο σύμπαν FRW

Όπως έχουμε δηλώσει σε όλη την εργασία χρησιμοποιούμε για τη μετρική τη σύμβαση (+---). Θυμίζουμε κάποιες βασικές σχέσεις όπως ο τανυστής Riemann

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \quad (\text{B'.14})$$

ο τανυστής Ricci

$$R_{\mu\kappa} \equiv R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}$$

η αφινική σύνδεση

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left( \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right)$$

και η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci

$$R \equiv g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (\text{B'.15})$$

Για το 4-διάστατο σύμπαν FRW με μετρική  $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t)\}$  ο ανταλλοιώτος μετρικός τανυστής προκύπτει από τη σχέση  $g_{\mu\kappa} g^{\mu\lambda} = \delta_{\kappa}^{\lambda}$  και έχει τη μορφή  $g^{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -a^{-2}(t), -a^{-2}(t), -a^{-2}(t)\}$ . Υπολογίζουμε τα δυνατά αποτελέσματα των συμβόλων Christoffel

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{\lambda 0} \left( \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\lambda}} \right) = \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) = 0$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{\lambda i} \left( \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\lambda}} \right) = \frac{1}{2} g^{ii} \left( \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \right) = 0$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2} g^{\lambda 0} \left( \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^{\lambda}} \right) = \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} \right) = 0$$

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} g^{\lambda i} \left( \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^{\lambda}} \right) = \frac{1}{2} g^{ii} \left( \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} \right) = 0$$

$$\Gamma_{0i}^j = \frac{1}{2} g^{\lambda j} \left( \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^{\lambda}} \right) = \frac{1}{2} g^{jj} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^j} \right) = \frac{1}{2} (-a^{-2}(t)) (-2a(t)\dot{a}(t)) \delta_{ij} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \delta_{ij}$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} g^{\lambda 0} \left( \frac{\partial g_{j\lambda}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\lambda}} \right) = \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) = -\frac{1}{2} (-2a(t)\dot{a}(t)) \delta_{ij} = a(t)\dot{a}(t) \delta_{ij}$$



Σύμφωνα με αυτά οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή Ricci θα είναι

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\partial \Gamma_{0\lambda}^{\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{00}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{0\lambda}^{\eta} \Gamma_{0\eta}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^0} + \Gamma_{01}^{\eta} \Gamma_{0\eta}^1 + \frac{\partial \Gamma_{02}^2}{\partial x^0} + \Gamma_{02}^{\eta} \Gamma_{0\eta}^2 + \frac{\partial \Gamma_{03}^3}{\partial x^0} + \Gamma_{03}^{\eta} \Gamma_{0\eta}^3 \\
&= 3 \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^0} + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 = 3 \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^0} + 3 \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 = 3 \left[ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right] = 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \\
R_{11} &= -\frac{\Gamma_{11}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{1\lambda}^{\eta} \Gamma_{1\eta}^{\lambda} - \Gamma_{11}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} = -\frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} + \Gamma_{10}^{\eta} \Gamma_{1\eta}^0 + \Gamma_{12}^{\eta} \Gamma_{12}^{\lambda} - \Gamma_{11}^{\eta} \Gamma_{2\eta}^2 + \Gamma_{13}^{\eta} \Gamma_{1\eta}^3 - \Gamma_{11}^{\eta} \Gamma_{3\eta}^3 \\
&= -\frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{30}^3 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 = -\dot{a}(t)a(t) - a(t)\ddot{a}(t) - a(t)\dot{a}(t)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - a(t)\dot{a}(t)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + a(t)\dot{a}(t)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\
&= -\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t)
\end{aligned}$$

Όμοια βρίσκουμε

$$R_{22} = -\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t) \quad \text{και} \quad R_{33} = -\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα Ricci από τη σχέση (Β.15)

$$\begin{aligned}
R &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\
&= 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - 3(a^{-2}(t))(-\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t)) = 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 6 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\
&= 6 \frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \tag{Β.16}
\end{aligned}$$

### Υπολογισμός του τανυστή Einstein για το 4-διάστατο σύμπαν FRW

Εφόσον έχουν γίνει οι προηγούμενοι υπολογισμοί η εύρεση του τανυστή Einstein είναι εύκολη υπόθεση. Ο τανυστής Einstein ορίζεται από τη σχέση

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά

$$\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{1}{2} 6 \frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\
G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = -\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t) - \frac{1}{2} (-a^2(t)) 6 \frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\
&= -\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t) + 3\ddot{a}(t)a(t) + 3\dot{a}^2(t) = 2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)
\end{aligned}$$

και όμοια βρίσκουμε

$$G_{22} = 2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t) \quad \text{και} \quad G_{33} = 2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)$$

Για να βρούμε τα ανταλλοίωτα στοιχεία του τανυστή χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
G^{00} &= g^{0\mu} g^{0\nu} G_{\mu\nu} = g^{00} g^{00} G_{00} = -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\
G^{11} &= g^{1\mu} g^{1\nu} G_{\mu\nu} = g^{11} g^{11} G_{11} = (-a^2(t))(-a^2(t))(2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)) = \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)}
\end{aligned}$$

Όμοια βρίσκουμε

$$G^{22} = \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} \quad \text{και} \quad G^{33} = \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)}$$

### Β.3 Εξισώσεις βαθμωτού πεδίου του Einstein από την αρχή ελάχι- στης δράσης

Θυμίζουμε τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου

$$\nabla_\lambda V^\mu \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό αυτό σε έναν γενικό τανυστή. Η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς  $x^\kappa$  ενός τανυστή  $T:::$  ισούται με  $\partial_\kappa T:::$  συν ,για κάθε ανταλλοίωτο δείκτη  $\lambda$ , έναν όρο  $\Gamma_{\kappa\eta}^\lambda$  επί  $T$  με το  $\lambda$  αντικατεστημένο με  $\eta$  μείον , για κάθε συναλλοίωτο δείκτη  $\mu$ , έναν όρο  $\Gamma_{\kappa\mu}^\eta$  επί  $T$  με το  $\mu$  αντικατεστημένο με  $\eta$ . Για να γίνει πιο ξεκάθαρο δίνουμε ένα παράδειγμα

$$\nabla_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\eta - \Gamma_{\kappa\mu}^\eta \Gamma_{\eta\nu}^\lambda - \Gamma_{\kappa\nu}^\eta \Gamma_{\eta\mu}^\lambda$$

Γράφουμε τον τανυστή Riemann (Β.14) στη μορφή

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda$$

Θα δηλώσουμε και θα αποδείξουμε ορισμένες σχέσεις που θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Για τη μεταβολή του τανυστή Riemann ισχύει

$$\delta R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \nabla_\kappa (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda) \quad (\text{B.17})$$

Απόδειξη. Μεταβολή του τανυστή Riemann θα δώσει

$$\delta R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \partial_\kappa (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \partial_\nu (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda) + (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\eta) \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\eta (\delta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda) - (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\eta) \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta (\delta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda)$$

Από τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου για τανυστές που δείξαμε παραπάνω μπορούμε να βρούμε για τη μεταβολή του  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  ότι θα ισχύει μια σχέση της μορφής

$$\nabla_\kappa (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) = \partial_\kappa (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) + \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\eta) - \Gamma_{\kappa\mu}^\eta (\delta \Gamma_{\eta\nu}^\lambda) - \Gamma_{\kappa\nu}^\eta (\delta \Gamma_{\eta\mu}^\lambda)$$

Όμοια μπορούμε να γράψουμε

$$\nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda) = \partial_\nu (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda) + \Gamma_{\nu\eta}^\lambda (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\eta) - \Gamma_{\nu\mu}^\eta (\delta \Gamma_{\eta\kappa}^\lambda) - \Gamma_{\nu\kappa}^\eta (\delta \Gamma_{\eta\mu}^\lambda)$$

Αφαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη προκύπτει

$$\begin{aligned} \nabla_\kappa (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda) &= \partial_\kappa (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \partial_\nu (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda) + (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\eta) \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\eta (\delta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda) \\ &\quad - (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\eta) \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta (\delta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda) \end{aligned}$$

Άρα πράγματι

$$\delta R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \nabla_\kappa (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda)$$

□

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει άμεσα ότι για τη μεταβολή του τανυστή Ricci ισχύει

$$\delta R_{\mu\kappa} \equiv \delta R_{\mu\nu\kappa}^\nu = \nabla_\kappa (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\nu) \quad (\text{B.18})$$

Η ποσότητα  $g^{\mu\nu} [\nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\kappa) - \nabla_\kappa (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\kappa)]$  μπορεί να γραφτεί

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} [\nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\kappa) - \nabla_\kappa (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\kappa)] &= \nabla_\nu [g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\kappa)] - \nabla_\kappa [g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\kappa)] \\ &= \nabla_\sigma [g^{\mu\sigma} (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\kappa)] - \nabla_\sigma [g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma)] \\ &= \nabla_\sigma [g^{\mu\sigma} (\delta \Gamma_{\mu\kappa}^\kappa) - g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma)] \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα  $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$  και στη συνέχεια έχουμε μετονομάσει κάποιους βουβούς δείκτες.

Για τη μεταβολή της μετρικής ισχύει

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} \delta g^{\kappa\lambda} \quad (\text{B.20})$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε από τη σχέση

$$g^{\kappa\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\kappa}$$

Παίρνοντας τη μεταβολή θα έχουμε

$$\delta g^{\kappa\lambda}g_{\lambda\nu} + g^{\kappa\lambda}\delta g_{\lambda\nu} = 0 \Rightarrow g^{\kappa\lambda}\delta g_{\lambda\nu} = -g_{\lambda\nu}\delta g^{\kappa\lambda}$$

Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με  $g_{\kappa\mu}$  και τα δύο μέλη (ο δείκτης  $\kappa$  είναι ελεύθερος)

$$\begin{aligned} g_{\kappa\mu}g^{\kappa\lambda}\delta g_{\lambda\nu} &= -g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\kappa\lambda} \Rightarrow \delta_{\mu}^{\lambda}\delta g_{\lambda\nu} = -g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\kappa\lambda} \\ &\Rightarrow \delta g_{\mu\nu} = -g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\kappa\lambda} \end{aligned}$$

□

Για τη μεταβολή της ορίζουσας της μετρικής ισχύουν

$$\delta g = g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) \quad \text{και} \quad \delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (\text{B'.21})$$

Απόδειξη. Ισχύει η ακόλουθη σχέση για οποιονδήποτε τετραγωνικό πίνακα  $M$  με μη-μηδενική ορίζουσα

$$\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M)$$

Μεταβολή αυτής της ταυτότητας δίνει

$$\frac{1}{\det M}\delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1}\delta M)$$

Επιλέγοντας τον πίνακα  $M$  να είναι η μετρική  $g_{\mu\nu}$  έτσι ώστε  $\det M = \det g_{\mu\nu} = g$  βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \delta g &= g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = -g(g^{\mu\nu}g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\kappa\lambda}) = -g(\delta_{\kappa}^{\nu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\kappa\lambda}) \\ &= -g(g_{\kappa\lambda}\delta g^{\kappa\lambda}) = -g(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση (B'.20). Άμεσα προκύπτει τώρα

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = \frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

□

Συνεχίζουμε με τα παραπάνω ως δεδομένα. Θεωρούμε μία δράση της μορφής

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi G} + S_M$$

όπου  $S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi G}$  ονομάζεται δράση Einstein-Hilbert και  $S_M$  είναι η δράση για την ύλη. Μεταβολή της δράσης αυτής θα δώσει

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [\delta\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\delta R] + \delta S_M \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [\delta\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})] + \delta S_M \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [\delta\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}] + \delta S_M \\ &\stackrel{(\text{B'.21})}{=} \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}[\nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\kappa}) - \nabla_{\kappa}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa})] \right] + \delta S_M \\ &\stackrel{(\text{B'.18})}{=} \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}R\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\nabla_{\sigma}[g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\kappa}) - g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma})] \right] + \delta S_M \end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος αντιστοιχεί σε ένα ολοκλήρωμα ως προς το στοιχείο όγκου  $d^4x$  της συναλλοίωτης παραγώγου ενός διανύσματος. Σύμφωνα με το θεώρημα του Stoke αυτό είναι ισοδύναμο με μια συνοριακή συνθήκη στο άπειρο, η οποία μπορεί να είναι ο μηδενισμός της μεταβολής στο άπειρο. Απομένει λοιπόν

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R + \sqrt{-g}R_{\mu\nu} \right] + \delta S_M$$

Εξ' ορισμού για την συναρτησιακή παράγωγο της δράσης ισχύει

$$\delta S = \int \sum_i \left[ \frac{\delta S}{\delta \Phi^i} \delta \Phi^i \right] d^4 x$$

όπου  $\{\Phi^i\}$  είναι ένα πλήρες σύνολο πεδίων ως προς τα οποία μεταβάλλουμε την δράση. Στην περίπτωση μας έχουμε μόνο ένα, το  $g^{\mu\nu}$ . Από την αρχή ελάχιστης δράσης  $\delta S = 0$  θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16\pi G} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} R + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \right] + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{16\pi G} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \end{aligned}$$

Ορίζουμε τον τανυστή ενέργειας - ορμής

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

και καταλήγουμε στις εξισώσεις πεδίου του Einstein

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (\text{B'.22})$$

Μπορούμε σε αυτό το σημείο να υπολογίσουμε τον τανυστή ενέργειας - ορμής του πεδίου  $\phi$  με δράση

$$S_\phi = \int d^4 x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

Μεταβολή της δράσης δίνει

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \int d^4 x \left[ \delta \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) + \sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \delta g^{\mu\nu} \right] \\ &\stackrel{(\text{B'.21})}{=} \int d^4 x \left( -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \left( \frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi) \right) + \sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4 x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi) \right] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Έτσι από την αρχή ελάχιστης δράσης για μεταβολή ως προς  $g^{\mu\nu}$  θα έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi)$$

Απ' όπου προκύπτει ο τανυστής ενέργειας - ορμής

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (\text{B'.23})$$

## B'.4 Εξισώσεις του Einstein από τη δράση βαθμωτού πεδίου με μη-τετρισμένους κινητικούς όρους

Και εδώ θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας ορισμένες σχέσεις που θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

$$\begin{aligned} \delta R_{ab} \partial^a \phi \partial^b \phi &= \frac{1}{2} \left[ g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) - \delta g^{\mu\nu} \nabla_b \nabla_\mu (\partial_\nu \phi \partial^b \phi) \right. \\ &\quad \left. - \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_\nu (\partial^a \phi \partial_\mu \phi) + \delta g^{\mu\nu} \square (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \right] \end{aligned} \quad (\text{B'.24})$$

Απόδειξη. Θυμίζουμε τη σχέση (B'.18)

$$\delta R_{ab} = \nabla_b (\delta \Gamma_{a\mu}^\mu) - \nabla_\mu (\delta \Gamma_{ab}^\mu)$$

και τη μεταβολή των συμβόλων Christoffel

$$\delta \Gamma_{ab}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[ \nabla_b (\delta g_{\nu a}) + \nabla_a (\delta g_{\nu b}) - \nabla_\nu (\delta g_{ab}) \right]$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\delta R_{ab} &= \nabla_b \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\nabla_\mu (\delta g_{\nu a}) + \nabla_a (\delta g_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (\delta g_{a\mu})] \right) - \nabla_\mu \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\nabla_b (\delta g_{\nu a}) + \nabla_a (\delta g_{\nu b}) - \nabla_\nu (\delta g_{ab})] \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[ \nabla_b \nabla_\mu (\delta g_{\nu a}) + \nabla_b \nabla_a (\delta g_{\nu\mu}) - \nabla_b \nabla_\nu (\delta g_{a\mu}) - \nabla_\mu \nabla_b (\delta g_{\nu a}) + \nabla_\mu \nabla_a (\delta g_{\nu b}) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g_{ab}) \right] \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[ \nabla_b \nabla_a (\delta g_{\nu\mu}) - \nabla_b \nabla_\nu (\delta g_{a\mu}) + \nabla_\mu \nabla_a (\delta g_{\nu b}) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g_{ab}) \right]
\end{aligned}$$

Επομένως θα είναι

$$\begin{aligned}
\delta R_{ab} \partial^a \phi \partial^b \phi &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[ \nabla_b \nabla_a (\delta g_{\nu\mu}) - \nabla_b \nabla_\nu (\delta g_{a\mu}) + \nabla_\mu \nabla_a (\delta g_{\nu b}) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g_{ab}) \right] \partial^a \phi \partial^b \phi \\
&= \frac{1}{2} \left[ \nabla_a \nabla_b (g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\mu}) - \nabla_b \nabla^\mu (\delta g_{a\mu}) + \nabla_a \nabla^\nu (\delta g_{\nu b}) - \square (\delta g_{ab}) \right] \partial^a \phi \partial^b \phi \\
&= \frac{1}{2} \left[ -g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) + \delta g_{a\mu} \nabla_b \nabla^\mu (\partial^a \phi \partial^b \phi) \right. \\
&\quad \left. + \delta g_{\nu b} \nabla_a \nabla^\nu (\partial^a \phi \partial^b \phi) - \delta g_{ab} \square (\partial^a \phi \partial^b \phi) \right] + \text{επιφανειακοί όροι} \\
&\stackrel{\text{(B.20)}}{=} \frac{1}{2} \left[ g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) - \delta g^{\mu\nu} \nabla_b \nabla_\mu (\partial_\nu \phi \partial^b \phi) - \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_\nu (\partial^a \phi \partial_\mu \phi) + \delta g^{\mu\nu} \square (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \right]
\end{aligned}$$

□

Αλλάζοντας τους βουβούς δείκτες στην μεταβολή του συναλλοίωτου τανυστή Riemann μπορούμε να γράψουμε

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu (g^{\kappa\rho} \delta g_{\kappa\rho}) - \nabla_\nu \nabla_\rho (g^{\kappa\rho} \delta g_{\mu\kappa}) - \nabla_\kappa \nabla_\mu (g^{\kappa\rho} \delta g_{\rho\nu}) + \square (\delta g_{\mu\nu}) \right] \quad (\text{B.25})$$

Για τη μεταβολή του ανταλλοίωτου τανυστή Riemann μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\delta R^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi &= \delta (g^{\mu a} g^{\nu b} R_{ab}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\
&= \delta g^{\mu a} g^{\nu b} R_{ab} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g^{\mu a} \delta g^{\nu b} R_{ab} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g^{\mu a} g^{\nu b} \delta R_{ab} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\
&= \delta g^{\mu a} \partial_\mu \phi \partial^b \phi R_{ab} + \delta g^{\nu b} \partial_\nu \phi \partial^a \phi R_{ab} + \partial^a \phi \partial^b \phi \delta R_{ab}
\end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Για τη μεταβολή της ποσότητας  $\delta(g^{\mu\nu} R)$  ισχύει

$$-\frac{1}{2} \delta(g^{\mu\nu} R) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \left[ \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R + R_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 + g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2 \right] \quad (\text{B.27})$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \delta(g^{\mu\nu} R) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi &= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 \delta R = -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} [R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] (\partial\phi)^2 \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 \\
&\stackrel{\text{(B.25)}}{=} -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu (g^{\kappa\rho} \delta g_{\kappa\rho}) \right. \\
&\quad \left. - \nabla_\nu \nabla_\rho (g^{\kappa\rho} \delta g_{\mu\kappa}) - \nabla_\kappa \nabla_\mu (g^{\kappa\rho} \delta g_{\rho\nu}) + \square (\delta g_{\mu\nu}) \right] (\partial\phi)^2 \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{4} \left[ \square (g^{\kappa\rho} \delta g_{\kappa\rho}) \right. \\
&\quad \left. - \nabla^\mu \nabla^\kappa (\delta g_{\mu\kappa}) - \nabla^\rho \nabla^\nu (\delta g_{\rho\nu}) + \square (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \right] (\partial\phi)^2 \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{4} \left[ -g^{\kappa\rho} \delta g_{\kappa\rho} \square (\partial\phi)^2 \right. \\
&\quad \left. + \delta g_{\mu\kappa} \nabla^\mu \nabla^\kappa (\partial\phi)^2 + \delta g_{\rho\nu} \nabla^\rho \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 \right] + \text{επιφανειακοί όροι} \\
&\stackrel{\text{(B.20)}}{=} -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{4} \left[ g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2 - \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 \right] \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \left[ \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R + R_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 + g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2 \right]
\end{aligned}$$

□

Για μια δράση της μορφής  $S_{NM}^{(1)} = \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$  η μεταβολή θα είναι

$$\begin{aligned}
\delta S_{NM}^{(1)} &= \int d^4x \frac{1}{2} [\delta(\sqrt{-g}) R^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta R^{\mu\nu}] \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\
&\stackrel{\text{(B.21)}}{\stackrel{\text{(B.26)}}{=}} \int d^4x \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \sqrt{-g} [\delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial^a \phi R_{\nu b} + \delta g^{\mu\nu} \partial^a \phi \partial_\nu \phi R_{\mu a} + \partial^a \phi \partial^b \phi \delta R_{ab}] \right] \\
&\stackrel{\text{(B.24)}}{=} \int d^4x \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \sqrt{-g} [\delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial^a \phi R_{\nu b} + \delta g^{\mu\nu} \partial^a \phi \partial_\nu \phi R_{\mu a} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} [g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) - \delta g^{\mu\nu} \nabla_b \nabla_\mu (\partial_\nu \phi \partial^b \phi) - \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_\nu (\partial^a \phi \partial_\mu \phi) + \delta g^{\mu\nu} \square (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi)] \right] \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + 2 \partial^a \phi \partial_{(\mu} \phi R_{\nu a)} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) \right. \\
&\quad \left. - \nabla_a \nabla_{(\mu} (\nabla_{\nu)} \phi \nabla^a \phi) + \frac{1}{2} \square (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \right]
\end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mu\nu}^{(1)} &\equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{NM}^{(1)}}{\delta g^{\mu\nu}} \\
&= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + 2 \partial^a \phi \partial_{(\mu} \phi R_{\nu a)} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) - \nabla_a \nabla_{(\mu} (\nabla_{\nu)} \phi \nabla^a \phi) + \frac{1}{2} \square (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi)
\end{aligned} \tag{B.28}$$

Για μια δράση της μορφής  $S_{NM}^{(2)} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$  η μεταβολή θα είναι

$$\begin{aligned}
\delta S_{NM}^{(2)} &= \int d^4x \frac{1}{2} [\delta \sqrt{-g} (-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) - \sqrt{-g} \frac{1}{2} (\delta g^{\mu\nu} R)] \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\
&\stackrel{\text{(B.21)}}{\stackrel{\text{(B.27)}}{=}} \int d^4x \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \left( -\frac{1}{2} R (\partial\phi)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} [\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R + R_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 + g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2] \right] \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R + R_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 + g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2] \right] \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \frac{1}{4} \left[ -G_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - R \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2 \right]
\end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\Theta_{\mu\nu}^{(2)} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{NM}^{(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} [-G_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - R \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2] \tag{B.29}$$

Ο συνδιασμός τους  $\Theta_{\mu\nu}^{(1)} + \Theta_{\mu\nu}^{(2)}$  θα δώσει

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_a \phi \partial_b \phi R^{ab} + 2 \partial^a \phi \partial_{(\mu} \phi R_{\nu a)} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) \\
&\quad - \nabla_a \nabla_{(\mu} (\nabla_{\nu)} \phi \nabla^a \phi) + \frac{1}{2} \square (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R \\
&\quad - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2
\end{aligned} \tag{B.30}$$

ή αλλιώς

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi R + 2\partial_a\phi\partial_{(\mu}\phi R_{\nu)}^a - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}(\partial\phi)^2 + \nabla^a\phi\nabla^b\phi R_{\mu a\nu b} + \nabla_\mu\nabla^a\phi\nabla_\nu\nabla_a\phi \\ & - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi + g_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}\nabla^a\nabla^b\phi\nabla_a\nabla_b\phi + \frac{1}{2}(\Box\phi)^2 - \nabla_a\phi\nabla_b\phi R^{ab}\right]\end{aligned}\quad (\text{B'.31})$$

Αν θεωρήσουμε τώρα τη συνολική δράση

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\lambda G^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right\}$$

η αρχής της ελάχιστης δράσης για μεταβολή ως προς  $g^{\mu\nu}$  θα δώσει

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{NM}^{(1)}}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{NM}^{(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{NM}^{(1)}}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{NM}^{(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{G_{\mu\nu}}{8\pi G} + T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}^{(1)} + \Theta_{\mu\nu}^{(2)}\end{aligned}$$

Η εξίσωση Einstein θα είναι λοιπόν

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G[T_{\mu\nu} + \lambda\Theta_{\mu\nu}]\quad (\text{B'.32})$$

με

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + g_{\mu\nu}V(\phi)$$

και

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi R + 2\partial_a\phi\partial_{(\mu}\phi R_{\nu)}^a - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}(\partial\phi)^2 + \nabla^a\phi\nabla^b\phi R_{\mu a\nu b} + \nabla_\mu\nabla^a\phi\nabla_\nu\nabla_a\phi \\ & - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi + g_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}\nabla^a\nabla^b\phi\nabla_a\nabla_b\phi + \frac{1}{2}(\Box\phi)^2 - \nabla_a\phi\nabla_b\phi R^{ab}\right]\end{aligned}$$

## Παράρτημα Γ'

# Κοσμολογική δημιουργία σωματιδίων

### Η έννοια των σωματιδίων - ανιχνευτές σωματιδίων

Έστω ότι ένα σύστημα είναι στο  $\psi$ -κενό  $|0_\psi\rangle$ , στο οποίο δεν παρατηρούνται  $\psi$ -σωματίδια. Θα θέλαμε να μάθουμε πόσα σωματίδια παρατηρούνται από έναν παρατηρητή που χρησιμοποιεί τις λύσεις  $\chi$ . Υπολογίζουμε λοιπόν την αναμενόμενη τιμή του τελεστή αρίθμησης  $\hat{n}_{\chi\mathbf{k}}$  στο  $\psi$ -κενό

$$\begin{aligned}\langle 0_\psi | \hat{n}_{\chi\mathbf{k}} | 0_\psi \rangle &= \langle 0_\psi | \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} | 0_\psi \rangle \stackrel{(\Delta.4)}{=} \langle 0_\psi | \sum_{\mathbf{k}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}) \sum_{\mathbf{i}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \hat{b}_{\mathbf{i}'} - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger) | 0_\psi \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{i}'} | 0_\psi \rangle - \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger | 0_\psi \rangle \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'} | 0_\psi \rangle + \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger | 0_\psi \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger | 0_\psi \rangle\end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $\hat{b}|0_\psi\rangle = 0$  και  $\langle 0_\psi|\hat{b}^\dagger = 0$ . Χρησιμοποιώντας την σχέση  $[\hat{b}_{\mathbf{k}'}, \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \Rightarrow \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} + \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'}$  θα έχουμε τελικά

$$\begin{aligned}\langle 0_\psi | \hat{n}_{\chi\mathbf{k}} | 0_\psi \rangle &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} + \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} | 0_\psi \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \langle 0_\psi | 0_\psi \rangle = \sum_{\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*\end{aligned}$$

Με αυτόν τον τρόπο ο μέσος αριθμός των  $\chi$ -σωματιδίων στο  $\psi$ -κενό έχει εκφραστεί ως προς τους συντελεστές Bogolyubov

$$\langle 0_\psi | \hat{n}_{\chi\mathbf{k}} | 0_\psi \rangle = \sum_{\mathbf{k}'} |\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2$$

Δεν υπάρχει κάποιος λόγος να μηδενιστεί αυτή η ποσότητα. Αυτό που φαίνεται σαν κενό σε έναν παρατηρητή είναι μια κατάσταση γεμάτη σωματίδια για έναν άλλον. Οι καταστάσεις κενού δεν συμπίπτουν.

Το ερώτημα που εμφανίζεται είναι το ποιο σύνολο λύσεων μας προμηθεύει με την “καλύτερη” περιγραφή του φυσικού κενού και αντιστοιχεί πλησιέστερα στην πραγματική μας εμπειρία της “μη ύπαρξης σωματιδίων”. Όπως φαίνεται τελικά το ερώτημα αυτό δεν μπορεί να απαντηθεί όπως διατυπώθηκε καθώς είναι απαραίτητο να συγκεκριμενοποιήσουμε τις λεπτομέρειες της διαδικασίας της κβαντικής μέτρησης η οποία χρησιμοποιείται για να ανιχνεύσουμε την ύπαρξη κβάντων. Συγκεκριμένα η κατάσταση κίνησης της συσκευής μέτρησης μπορεί να επηρεάσει το αν θα παρατηρηθούν σωματίδια ή όχι. Για παράδειγμα ένας ανιχνευτής σε ελεύθερη πτώση δεν θα καταγράψει πάντα την ίδια πυκνότητα σωματιδίων όπως ένας μη αδρανειακός, επιταχυνόμενος ανιχνευτής. Στην πραγματικότητα αυτό είναι αλήθεια ακόμα και στον χωρόχρονο Minkowski. Ένας επιταχυνόμενος ανιχνευτής θα καταγράψει κβάντα ακόμα και στη κατάσταση κενού που ορίζεται από τη σχέση  $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle$ . Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του χωροχρόνου Minkowski δεν είναι ότι υπάρχει ένα μοναδικό κενό (δεν υπάρχει), αλλά ότι η συμβατική κατάσταση κενού όπως ορίζεται ως προς τις λύσεις  $u_{\mathbf{k}}(x^\mu) = [(2\pi)^{n-1}2\omega]^{-1/2} e^{ik_\mu x^\mu}$  είναι το ίδιο κενό για όλες τις αδρανειακές συσκευές μέτρησης



σε όλο το χωρόχρονο. Αυτό συμβαίνει γιατί το κενό όπως ορίζεται από την  $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle$  είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.

Από την ανάπτυξη αυτού του θέματος μάθαμε ότι η έννοια των σωματιδίων δεν έχει καθολική σημασία. Τα σωματίδια μπορούν να καταγράψουν την παρουσία τους σε κάποιους ανιχνευτές ενώ σε άλλους όχι. Κάποιος είναι ελεύθερος να υποστηρίξει την ύπαρξη σωματιδίων αλλά χωρίς να προσδιορίσει την κατάσταση κίνησης του ανιχνευτή η έννοια των σωματιδίων δεν είναι πολύ χρήσιμη ακόμα και στο χωρόχρονο Minkowski.

Σε πολλά προβλήματα που μας ενδιαφέρουν ο χωρόχρονος μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ασυμπτωτικά Minkowski στο μακρινό παρελθόν και/ή μέλλον. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η επιλογή του “φυσικού” κενού Minkowski όπως ορίζεται από την σχέση (2.10) έχει ένα πολύ κατανοητό φυσικό νόημα, την απουσία δηλαδή σωματιδίων σύμφωνα με όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές στην ασυμπτωτική περιοχή. Αναφερόμαστε στο μακρινό παρελθόν και μέλλον ως τις “μέσα” και “έξω” περιοχές αντίστοιχα. Αυτή η ορολογία μεταφέρθηκε από την κβαντική θεωρία πεδίου Minkowski όπου θεωρούμε ότι καθώς το  $t \rightarrow \pm\infty$  όλες οι αλληλεπιδράσεις των πεδίων τείνουν στο μηδέν. Εφόσον δουλεύουμε στην εικόνα του Heisenberg αν διαλέξουμε την κατάσταση του κβαντικού πεδίου στην “μέσα” περιοχή να είναι η κατάσταση του κενού τότε θα παραμείνει σε αυτή την κατάσταση κατά τη διάρκεια της εξέλιξης στην οποία υπόκειται. Παρ’ όλα αυτά όπως θα δείξουμε σύντομα, σε μετέπειτα στιγμές έξω από την “μέσα” περιοχή οι ανιχνευτές σε ελεύθερη πτώση μπορεί να καταγράψουν σωματίδια σε αυτή την κατάσταση κενού. Συγκεκριμένα αν υπάρχει και μια “έξω” περιοχή τότε το “μέσα” κενό μπορεί να μη συμπίπτει με το “έξω” κενό. Σε αυτή τη περίπτωση μια φυσική (αδρανειακή) ομάδα παρατηρητών στην “έξω” περιοχή θα ανιχνεύει την παρουσία σωματιδίων. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι σωματίδια έχουν δημιουργηθεί από το χρονοεξαρτώμενο εξωτερικό βαρυτικό πεδίο.

## Γ.1 Ένα απλό παράδειγμα

Σε αυτό το κομμάτι θα μελετήσουμε το πως μπορεί να προκληθεί δημιουργία σωματιδίων σε ένα χωρόχρονο με “μέσα” και “έξω” περιοχές Minkowski. Ένας κατάλληλος χωρόχρονος είναι ένα δισδιάστατο σύμπαν Robertson - Walker με στοιχειώδες μήκος

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 \quad (\Gamma.1)$$

όπου τα χωρικά μέρη επεκτείνονται ομοιόμορφα όπως περιγράφεται από τη βαθμωτή συνάρτηση  $a(t)$ . Εισάγωντας μια νέα παράμετρο του χρόνου  $\eta$  (το λεγόμενο σύμμορφο χρόνο) που ορίζεται ως  $d\eta = dt/a$  θα έχουμε

$$t = \int^t dt' = \int^\eta a(\eta')d\eta'$$

και η (4.18) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2) = C(\eta)(d\eta^2 - dx^2) \quad (\Gamma.2)$$

όπου έχουμε ορίσει τον σύμμορφο βαθμωτό παράγοντα  $C(\eta) = a^2(\eta)$ . Αυτή η μορφή του στοιχειώδους μήκους είναι προφανώς σύμμορφη (Παράρτημα Γ) στον χωρόχρονο Minkowski. Θυμίζουμε πως ένας σύμμορφος μετασχηματισμός μιας μετρικής  $g_{\mu\nu}$  περιγράφεται από

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$$

Αφού λοιπόν ο χωρόχρονος Minkowski περιγράφεται από το στοιχειώδες μήκος  $ds^2 = d\eta^2 - dx^2$  και μετρική  $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  ο χωρόχρονος με  $ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2)$  και μετρική  $\tilde{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = a^2(\eta)g_{\mu\nu}$  είναι σύμμορφος μ’ αυτόν. Σημειώνουμε ότι ο αναλλοίωτος τανυστής θα μετασχηματιστεί ως

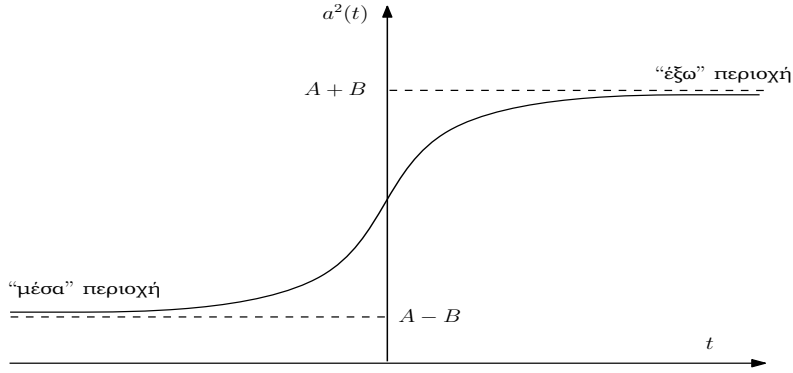
$$g^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu} = a^{-2}(\eta)g^{\mu\nu} \quad (\Gamma.3)$$

Ας υποθέσουμε ότι

$$C(\eta) = A + B \tanh(\rho\eta) \quad \text{με} \quad A, B, \rho \quad \text{σταθερά}$$

τότε στο μακρινό παρελθόν και μέλλον ο χωρόχρονος γίνεται Minkowski αφού

$$C(\eta) \rightarrow A \pm B, \quad \eta \rightarrow \pm\infty$$



Σχήμα Γ.1: Ο σύμμορφος παράγοντας  $C(\eta) = A + B \tanh(\rho\eta)$  αντιπροσωπεύει ένα ασυμπτωτικά στατικό σύμπαν το οποίο υπόκειται σε μια περίοδο ομαλής επέκτασης.

Θεωρούμε την παραγωγή ελάχιστα συζευγμένων βαθμωτών σωματιδίων με μάζα. Θυμίζουμε πως η εξίσωση για ένα βαθμώτο πεδίο με μάζα σε καμπύλο χωρόχρονο είναι

$$[\square + m^2 + \xi(n)R(x)]\hat{\phi}(x) = 0 \quad (\Gamma.4)$$

Για την ελάχιστα συζευγμένη περίπτωση έχουμε  $\xi = 0$  ενώ για τη σύμμορφα συζευγμένη περίπτωση έχουμε  $\xi(n) \equiv \frac{1}{4}[(n-2)/(n-1)]$ . Παρατηρούμε ότι στις 2 διαστάσεις που μελετάμε το πρόβλημά μας η ελάχιστη και η σύμμορφη σύζευξη είναι ισοδύναμες ( $\xi = 0$ ).

Εφόσον το  $C(\eta)$  δεν είναι συνάρτηση του  $x$  (της χωρικής συνιστώσας) μπορούμε να χωρίσουμε τις μεταβλητές στις βαθμωτές συναρτήσεις που εμφανίζονται στη λύση

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i [\hat{a}_i u_i(x) + \hat{a}_i^\dagger u_i^*(x)]$$

γράφοντας

$$u_k(\eta, x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ikx} \chi_k(\eta) \quad (\Gamma.5)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.22) στην θέση του  $\hat{\phi}$  στην (4.21) με  $\xi = 0$ , την d'Alembertian (4.3) και τη μετρική που δίνεται από τη σχέση (4.19) θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \square u_k(\eta, x) + m^2 u_k(\eta, x) = 0 \\ \Rightarrow & (-g)^{-1/2} \partial_\mu [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu (e^{ikx} \chi_k(\eta))] + m^2 e^{ikx} \chi_k(\eta) = 0 \\ \Rightarrow & C(\eta)^{-1} \partial_\mu [C(\eta) g^{\mu\nu} \partial_\nu (e^{ikx} \chi_k(\eta))] + m^2 e^{ikx} \chi_k(\eta) = 0 \\ \Rightarrow & C(\eta)^{-1} \partial_\mu [C(\eta) C(\eta)^{-1} n^{\mu\nu} \partial_\nu (e^{ikx} \chi_k(\eta))] + m^2 e^{ikx} \chi_k(\eta) = 0 \\ \Rightarrow & C(\eta)^{-1} \partial_\mu [\partial^\mu (e^{ikx} \chi_k(\eta))] + m^2 e^{ikx} \chi_k(\eta) = 0 \\ \Rightarrow & C(\eta)^{-1} \left( e^{ikx} \frac{\partial^2 \chi_k(\eta)}{\partial \eta^2} + k^2 e^{ikx} \chi_k(\eta) \right) + m^2 e^{ikx} \chi_k(\eta) = 0 \end{aligned}$$

Προκύπτει έτσι μια διαφορική εξίσωση για το  $\chi_k(\eta)$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \chi_k(\eta) + (k^2 + C(\eta)m^2) \chi_k(\eta) = 0 \quad (\Gamma.6)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί αναλυτικά με τη βοήθεια υπεργεωμετρικών συναρτήσεων. Οι κανονικοποιημένες λύσεις που συμπεριφέρονται σαν τις λύσεις θετικής συχνότητας στον χώρο Minkowski στο μακρινό παρελθόν είναι

$$\begin{aligned} u_k^{in}(\eta, x) &= (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+ \eta - (i\omega_- / \rho) \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} \\ &\times {}_2F_1[1 + (i\omega_- / \rho), i\omega_- / \rho; 1 - (i\omega_{in} / \rho); \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))] \\ &\xrightarrow{\eta \rightarrow -\infty} (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_{in} \eta} \end{aligned} \quad (\Gamma.7)$$

όπου

$$\begin{aligned}\omega_{in} &= [k^2 + m^2(A - B)]^{\frac{1}{2}} \\ \omega_{out} &= [k^2 + m^2(A + B)]^{\frac{1}{2}} \\ \omega_{\pm} &= \frac{1}{2}(\omega_{out} \pm \omega_{in})\end{aligned}\quad (\Gamma.8)$$

Από την άλλη μεριά οι λύσεις που συμπεριφέρονται σαν λύσεις Minkowski θετικής συχνότητας στην “έξω” περιοχή καθώς το  $\eta \rightarrow +\infty$  είναι

$$\begin{aligned}u_k^{out}(\eta, x) &= (4\pi\omega_{out})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho) \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} \\ &\times {}_2F_1[1 + (i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1 + (i\omega_{out}/\rho); \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\ &\xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} (4\pi\omega_{out})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_{out}\eta}\end{aligned}\quad (\Gamma.9)$$

Προφανώς τα  $u_k^{in}$  και  $u_k^{out}$  δεν είναι ίσα, πράγμα που σημαίνει ότι ο συντελεστής Bogolyubov  $\beta$  στη σχέση

$$u_k^{in}(x) = \sum_{k'} (\alpha_{kk'} u_{k'}^{out}(x) + \beta_{kk'} u_{k'}^{out*}(x)) \quad (\Gamma.10)$$

που περιγράφει τη συσχέτιση δυο διαφορετικών συνόλων λύσεων, δεν πρέπει να μηδενίζεται. Για να το δείξουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες γραμμικού μετασχηματισμού των υπεργεωμετρικών συναρτήσεων (ενότητα  $\Gamma.2$ ) ώστε να γράψουμε το  $u_k^{in}$  ως προς το  $u_k^{out}$  στη μορφή

$$u_k^{in}(\eta, x) = \alpha_k u_k^{out}(\eta, x) + \beta_k u_{-k}^{out*}(\eta, x) \quad (\Gamma.11)$$

με

$$\alpha_k = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} \quad \beta_k = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση ( $\Gamma.11$ ) με την ( $\Gamma.10$ ) βρίσκουμε ότι οι συντελεστές Bogolyubov δίνονται από τις

$$\alpha_{kk'} = \alpha_k \delta_{kk'} \quad \beta_{kk'} = \beta_k \delta_{-kk'} \quad (\Gamma.12)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μέτρο των συντελεστών Bogolyubov στο τετράγωνο. Άλλωστε η μέση τιμή του τελεστή αριθμησης  $N$  είναι  $|\beta_k|^2$ . Κάνουμε χρήση των σχέσεων

$$\begin{aligned}\Gamma(iy)\Gamma(-iy) &= |\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)} \\ \Gamma(1 + iy)\Gamma(1 - iy) &= |\Gamma(1 + iy)|^2 = \frac{\pi y}{\sinh(\pi y)}\end{aligned}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}|\alpha_k|^2 &= \alpha_k \alpha_k^* = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right) \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} \frac{\Gamma(1 + i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_+/\rho)\Gamma(1 + i\omega_+/\rho)} \\ &= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right) \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(1 + i\omega_{in}/\rho)}{\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)\Gamma(1 + i\omega_+/\rho)} \frac{\frac{\pi}{\omega_{out}/\rho \sinh(\pi\omega_{out}/\rho)}}{\frac{\pi}{\omega_+/\rho \sinh(\pi\omega_+/\rho)}} = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right) \frac{\frac{\pi\omega_{in}/\rho}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)} \frac{\pi}{\omega_{out}/\rho \sinh(\pi\omega_{out}/\rho)}}{\frac{\pi\omega_+/\rho}{\sinh(\pi\omega_+/\rho)} \frac{\pi}{\omega_+/\rho \sinh(\pi\omega_+/\rho)}} \\ &= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right) \frac{\omega_{in}/\rho \sinh(\pi\omega_+/\rho) \omega_+/\rho \sinh(\pi\omega_+/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho) \sinh(\pi\omega_{out}/\rho) \omega_{out}/\rho \omega_+/\rho} = \frac{\sinh^2(\pi\omega_+/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho) \sinh(\pi\omega_{out}/\rho)}\end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε

$$|\beta_k|^2 = \frac{\sinh^2(\pi\omega_-/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho) \sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \quad (\Gamma.13)$$

Τέλος, ως μια μικρή επαλήθευση των υπολογισμών μας, έχουμε αποδείξει ότι για τους συντελεστές Bogolyubov ισχύει  $\sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij}$ . Πράγματι στην περίπτωση μας χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\sinh \frac{z}{2} &= \left(\frac{\cosh z - 1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \cosh(a \pm b) &= \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b\end{aligned}$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 &= \frac{\sinh^2(\pi\omega_+/\rho) - \sinh^2(\pi\omega_-/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} = \frac{\sinh^2\left(\frac{\pi}{2}(\omega_{out} + \omega_{in})\right) - \sinh^2\left(\frac{\pi}{2}(\omega_{out} - \omega_{in})\right)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \\
&= \frac{\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}(\omega_{out} + \omega_{in})\right) - 1}{2} - \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}(\omega_{out} - \omega_{in})\right) - 1}{2}}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} = \frac{\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out} + \frac{\pi}{\rho}\omega_{in}\right)}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out} - \frac{\pi}{\rho}\omega_{in}\right)}{2}}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out}\right)\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{in}\right) + \sinh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out}\right)\sinh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{in}\right)}{2\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \\
&= \frac{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out}\right)\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{in}\right) + \sinh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out}\right)\left(-\sinh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{in}\right)\right)\right]}{2\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \\
&= \frac{2\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)}{2\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} = 1
\end{aligned}$$

ακριβώς αυτό που περιμέναμε.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που ένα κβαντικό πεδίο βρίσκεται στην κατάσταση  $|0_{in}\rangle$ , όπως ορίζεται από την  $u_k^{in}|0\rangle = 0$ . Στο μακρινό παρελθόν, όπου ο χωρόχρονος είναι Minkowski, όλοι οι αδρανειακοί ανιχνευτές σωματιδίων θα καταγράφουν απουσία σωματιδίων, έτσι ώστε μη επιταχυνόμενοι παρατηρητές θα αναγνωρίσουν την κβαντική κατάσταση εκεί ως το φυσικό κενό.

Στην “έξω” περιοχή ( $\eta \rightarrow +\infty$ ) ο χωρόχρονος είναι επίσης Minkowski και το κβαντικό πεδίο είναι επίσης στην κατάσταση  $|0_{in}\rangle$  (αφού δουλεύουμε στην εικόνα του Heisenberg), αλλά σε αντίθεση με την κατάσταση στην “μέσα” περιοχή, η  $|0_{in}\rangle$  δεν θεωρείται από τους αδρανειακούς παρατηρητές στην “έξω” ως το φυσικό κενό. Το ρόλο αυτό παίζει η κατάσταση  $|0_{out}\rangle$  όπως ορίζεται συναρτήσει των λύσεων  $u_k^{out}$ . Πράγματι οι μη επιταχυνόμενοι ανιχνευτές σωματιδίων εκεί θα καταγράφουν την παρουσία κβάντων. Ο αναμενόμενος αριθμός των κβάντων που θα καταγράφονται δίνεται από τη σχέση (4.29). Μπορούμε λοιπόν να περιγράψουμε αυτή την κβαντική εξέλιξη ως τη δημιουργία σωματιδίων λόγω της διαστολής του σύμπαντος.

## Γ.2 Υπολογισμός των συντελεστών Bogolyubov για το δισδιάστατο σύμπαν Robertson - Walker

Ξεκινάμε με την υπεργεωμετρική

$${}_2F_1[1 + (i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1 - (i\omega_{in}/\rho); \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))]$$

και θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα (Abramowitz & Stegun 1965)

$$\begin{aligned}
F[a, b; c; z] &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F[a, b; a+b-c+1; 1-z] \\
&+ (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F[c-a, c-b; c-a-b-1; 1-z] \quad (\Gamma.14)
\end{aligned}$$

Θα έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
& F[1 + (i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1 - (i\omega_{in}/\rho); \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))] \\
&= \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho - 1 - i\omega_-/\rho - i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1 - i\omega_{in}\rho - 1 - i\omega_-/\rho)\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho - i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 + i\omega_-/\rho + i\omega_-/\rho - 1 + i\omega_{in}/\rho + 1; 1 - \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))] \\
&+ (1 - \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta)))^{(1 - \omega_{in}/\rho - 1 - i\omega_-/\rho - i\omega_-/\rho)} \\
&\times \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(1 + i\omega_-/\rho + i\omega_-/\rho - 1 + i\omega_{in}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[1 - i\omega_{in}/\rho - 1 - i\omega_-/\rho, 1 - i\omega_{in}/\rho - i\omega_-/\rho; \\
&\quad 1 - i\omega_{in}/\rho - 1 - i\omega_-/\rho - i\omega_-/\rho + 1; 1 - \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))] \\
&= \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{in}/\rho - 2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(-i\omega_{in}/\rho - i\omega_-/\rho)\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho - i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 + 2i\omega_-/\rho + i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&+ (\frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta)))^{(-i\omega_{in}/\rho - 2i\omega_-/\rho)} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho + i\omega_{in}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[-i\omega_{in}/\rho - i\omega_-/\rho, 1 - i\omega_{in}/\rho - i\omega_-/\rho; -i\omega_{in}/\rho - 2i\omega_-/\rho + 1; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&= \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{in}/\rho - \frac{2i}{2\rho}(\omega_{out} - \omega_{in}))}{\Gamma(-i\omega_{in}/\rho - \frac{i}{2\rho}(\omega_{out} - \omega_{in}))\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho - \frac{i}{2\rho}(\omega_{out} - \omega_{in}))} \\
&\times F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 + \frac{2i}{2\rho}(\omega_{out} - \omega_{in}) + i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&+ [\frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))]^{(-i\omega_{in}/\rho - \frac{2i}{2\rho}(\omega_{out} - \omega_{in}))} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(\frac{2i}{2\rho}(\omega_{out} - \omega_{in}) + i\omega_{in}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[-i\omega_{in}/\rho - \frac{i}{2\rho}(\omega_{out} - \omega_{in}), 1 - i\omega_{in}/\rho - \frac{i}{2\rho}(\omega_{out} - \omega_{in}); \\
&\quad -i\omega_{in}/\rho - \frac{2i}{2\rho}(\omega_{out} - \omega_{in}) + 1; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&= \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 + i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&+ [\frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))]^{-i\omega_{out}/\rho} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[-i\omega_+/\rho, 1 - i\omega_+/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \tag{Γ.15}
\end{aligned}$$

Στην υπεργεωμετρική της ποσότητας (Δ.2) κάνουμε χρήση της σχέσης

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z) \tag{Γ.16}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}
& F[-i\omega_+/\rho, 1 - i\omega_+/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&= F[1 - i\omega_{out}/\rho + i\omega_+/\rho, 1 - i\omega_{out}/\rho - 1 + i\omega_+/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&\times (1 - \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta)))^{(1 - i\omega_{out}/\rho + i\omega_+/\rho - 1 + i\omega_+/\rho)} \\
&= F[1 - i\omega_{out}/\rho + \frac{i}{2\rho}(\omega_{out} + \omega_{in}), -i\omega_{out}/\rho + \frac{i}{2\rho}(\omega_{out} + \omega_{in}); 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&\times (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh(\rho\eta))^{(-i\omega_{out}/\rho + \frac{2i}{2\rho}(\omega_{out} + \omega_{in}))} \\
&= F[1 - i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&\times [\frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))]^{i\omega_{in}/\rho}
\end{aligned} \tag{Γ.17}$$

Αντικαθιστώντας τη μορφή (Δ.4) στην υπεργεωμετρική (Δ.2) θα έχουμε για την αρχική υπεργεωμετρική

$$\begin{aligned}
& F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))] \\
&= \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 + i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&+ \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} F[1 - i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&\times [\frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))]^{-i\omega_{out}/\rho} [\frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))]^{i\omega_{in}/\rho}
\end{aligned} \tag{Γ.18}$$

Ας δούμε τι μπορούμε να κάνουμε με τον παράγοντα

$$[\frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))]^{-i\omega_{out}/\rho} [\frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))]^{i\omega_{in}/\rho}$$

Ισχύει ότι  $z^w = e^{w \ln z}$  για κάθε μιγαδικό  $z$  και  $w$ . Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}
[\frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))]^{-i\omega_{out}/\rho} &= e^{-i\omega_{out}/\rho \ln[\frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))]} \\
[\frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))]^{i\omega_{in}/\rho} &= e^{i\omega_{in}/\rho \ln[\frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))]}
\end{aligned}$$

Το γινόμενο των παραπάνω ποσοτήτων δίνει

$$\begin{aligned}
[\frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))]^{-i\omega_{out}/\rho} [\frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))]^{i\omega_{in}/\rho} &= e^{-i\omega_{out}/\rho \ln[\frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))]} e^{i\omega_{in}/\rho \ln[\frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))]} \\
&= e^{-i\omega_{out}/\rho \ln\left[\frac{1}{2} \frac{\cosh(\rho\eta) - \sinh(\rho\eta)}{\cosh(\rho\eta)}\right]} e^{i\omega_{in}/\rho \ln\left[\frac{1}{2} \frac{\cosh(\rho\eta) + \sinh(\rho\eta)}{\cosh(\rho\eta)}\right]} \\
&= e^{-i\omega_{out}/\rho \ln\left[\frac{1}{2} \frac{e^{-\rho\eta}}{\frac{1}{2}(e^{\rho\eta} + e^{-\rho\eta})}\right]} e^{i\omega_{in}/\rho \ln\left[\frac{1}{2} \frac{e^{\rho\eta}}{\frac{1}{2}(e^{\rho\eta} + e^{-\rho\eta})}\right]} \\
&= e^{-i\omega_{out}/\rho [\ln[e^{-\rho\eta}] - \ln[e^{\rho\eta} + e^{-\rho\eta}]]} e^{i\omega_{in}/\rho [\ln[e^{\rho\eta}] - \ln[e^{\rho\eta} + e^{-\rho\eta}]]} \\
&= e^{-i\omega_{out}/\rho [-\rho\eta - \ln(2 \cosh(\rho\eta))]} e^{i\omega_{in}/\rho [\rho\eta - \ln(2 \cosh(\rho\eta))]} \\
&= e^{[i\omega_{out}\eta + i\omega_{out}/\rho \ln(2 \cosh(\rho\eta))]} e^{[i\omega_{in}\eta - i\omega_{in}/\rho \ln(2 \cosh(\rho\eta))]} \\
&= e^{[i\omega_{out}\eta + i\omega_{out}/\rho \ln(2 \cosh(\rho\eta)) + i\omega_{in}\eta - i\omega_{in}/\rho \ln(2 \cosh(\rho\eta))]} \\
&= e^{2i\omega_+\eta + \ln(2 \cosh(\rho\eta)) \frac{i}{\rho}(\omega_{out} - \omega_{in})} \\
&= e^{2i\omega_+\eta + (2i\omega_-/\rho) \ln(2 \cosh(\rho\eta))}
\end{aligned}$$

Έχουμε έτοιμη τη νέα μορφή της αρχικής υπεργεωμετρικής

$$\begin{aligned}
& F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))] = \\
& = \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 + i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
& + e^{2i\omega_+\eta + (2i\omega_-/\rho) \ln(2 \cosh(\rho\eta))} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \times F[1 - i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))]
\end{aligned} \tag{Γ.19}$$

την οποία θα αντικαταστήσουμε στη σχέση (4.24) για το  $u_k^{in}(\eta, x)$

$$\begin{aligned}
u_k^{in}(\eta, x) & = (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho) \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} \times F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))] \\
& = (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho) \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} \\
& \times \left[ \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 + i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \right. \\
& + e^{2i\omega_+\eta + (2i\omega_-/\rho) \ln(2 \cosh(\rho\eta))} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
& \left. \times F[1 - i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \right] \\
& = (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho) \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} \\
& \times F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 + i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} \\
& + (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho) \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} e^{2i\omega_+\eta + (2i\omega_-/\rho) \ln(2 \cosh(\rho\eta))} \\
& \times F[1 - i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
& = (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho) \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} \\
& \times F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 + i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} \\
& + (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx + i\omega_+\eta + (i\omega_-/\rho) \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} \\
& \times F[1 - i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)}
\end{aligned} \tag{Γ.20}$$

Όμως ισχύει

$$\begin{aligned}
u_k^{out}(\eta, x) & = (4\pi\omega_{out})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho) \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} \\
& \times F[1 + i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1 + i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
u_{-k}^{out*}(\eta, x) & = (4\pi\omega_{out})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx + i\omega_+\eta + (i\omega_-/\rho) \ln[2 \cosh(\rho\eta)]} \\
& \times F[1 - i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))]
\end{aligned}$$

και τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
u_k^{in}(\eta, x) & = \left( \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} u_k^{out} \\
& + \left( \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} u_{-k}^{out*} \\
& = \alpha_k u_k^{out}(\eta, x) + \beta_k u_{-k}^{out*}
\end{aligned} \tag{Γ.21}$$

$\mu\varepsilon$

$$\alpha_k = \left( \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} \quad (\Gamma.22)$$

$$\beta_k = \left( \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \quad (\Gamma.23)$$

$$\alpha_{kk'} = \alpha_k \delta_{kk'} \quad \beta_{kk'} = \beta_k \delta_{-kk'} \quad (\Gamma.24)$$



## Παράρτημα Δ΄

# Παραγωγή Σωματιδίων σε Βαρυτικές Θεωρίες με Γενικευμένους Κινητικούς Όρους

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε μια μελέτη που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος ειδίκευσης “Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές” του Τομέα Φυσικής ΕΜΠ και δημοσιεύτηκε στο επιστημονικό περιοδικό *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* (JCAP 1308 (2013) 027). Συγκεκριμένα μελετήσαμε την βαρυτική παραγωγή βαρέων σωματιδίων  $X$  με μάζα της τάξης του πληθωριστικού πεδίου (inflaton), τα οποία παράγονται μετά το τέλος του πληθωρισμού. Βρίσκουμε ότι, παρουσία μιας ζεύξης του κινητικού όρου του inflaton ή/και του κβαντικού πεδίου  $X$  με τον ταυνοστή Einstein, ο αριθμός των βαρυτικά παραγόμενων σωματιδίων μειώνεται καθώς η ζεύξη ενισχύεται.

### Δ΄.1 Εισαγωγή

Η βαρυτική δημιουργία σωματιδίων ([129, 130]) είναι ένας μηχανισμός παραγωγής κβαντικών πεδίων σε καμπύλους χωρόχρονους, αντίστοιχος της δημιουργίας σωματιδίων από ισχυρά ηλεκτρικά πεδία. Ο μηχανισμός αυτός έχει χρησιμοποιηθεί για να εξηγήσει την ύπαρξη σκοτεινής ύλης (Dark Matter), η οποία πιστεύεται ότι αποτελεί την περισσότερη από την μάζα του σύμπαντος, μέσω της παραγωγής υπερ-βαρέων σωματιδίων μετά τον πληθωρισμό (inflation) κατά τη διαδικασία της προ-θέρμανσης (preheating) [131, 132].

Το σενάριο του πληθωρισμού είναι καλά γνωστό και έχει μελετηθεί εκτενώς [133]. Κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, ο οποίος καθοδηγείται από ένα βαθμωτό πεδίο  $\phi$  (inflaton), το σύμπαν διαστέλλεται εκθετικά λύνοντας έτσι το πρόβλημα του οριζοντα και του επίπεδου σύμπαντος της καθιερωμένης κοσμολογίας. Η δομή μεγάλης κλίμακας του σύμπαντος κατασκευάζεται μέσω των διακυμάνσεων κατά την περίοδο του πληθωρισμού. Αυτό ορίζει τη μάζα του inflaton να φέρει την τιμή  $m_\phi \simeq 10^{13} GeV$ . Κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, το πληθωριστικό πεδίο “κυλάει” αργά προς το ελάχιστο του δυναμικού του. Η φάση του πληθωρισμού ολοκληρώνεται όταν η δυναμική ενέργεια του πεδίου γίνει συγκρίσιμη με την κινητική του ενέργεια. Όταν συμβεί αυτό όλη η ενέργεια του σύμπαντος έχει εναποτεθεί σε μορφή ταλαντώσεων του πεδίου γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού του. Εκείνη τη στιγμή μέσω ενός καθαρά κλασικού μηχανισμού παραμετρικού συντονισμού (parametric resonance) [134], ο οποίος έχει μελετηθεί λεπτομερώς [17, 135], παράγονται σε αφθονία σωματίδια πολύ μεγάλης μάζας. Τα σωματίδια αυτά θα τα καλούμε σωματίδια  $X$  με μάζες  $m_X \gtrsim m_\phi$  και μετά τον πληθωρισμό θα καλύπτουν μεγάλο μέρος του σύμπαντος. Ο παραμετρικός συντονισμός για τα σωματίδια  $X$  δεν έχει μεγάλη επίδραση αν τα  $X$  είναι φερμιονικά πεδία ή αν η σύζευξή τους με το inflaton είναι ασθενής [135].

Ένας άλλος μηχανισμός για την παραγωγή βαριάς σκοτεινής ύλης έχει προταθεί στο [132]. Εκεί η σκοτεινή ύλη παράγεται στην μετάβαση ανάμεσα σε ένα πληθωριστικό σύμπαν και σε ένα σύμπαν που κυριαρχεί η μάζα (matter dominated) λόγω της δράσης της “μη-αδιαβατικής” διαστολής του χωρόχρονου πάνω σε κβαντικές διακυμάνσεις του κενού. Αποδεικνύεται ότι, για μια συγκεκριμένη περιοχή μαζών των σωματιδίων  $X$ , η σκοτεινή ύλη που χρειάζεται για να καλυφθεί το σύμπαν μπορεί να παραχθεί βαρυτικά, ανεξάρτητα από τις λεπτομέρειες στη μετάβαση από τη πληθωριστική φάση στη φάση κυριαρχίας της μάζας.

Σε μια προσπάθεια να εξηγηθεί το φάσμα των κοσμικών ακτίνων υψηλών ενεργειών στο [131] προτείνεται

η παραγωγή σκοτεινής ύλης λόγω διακυμάνσεων του κενού κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Αποδεικνύεται ότι, προκειμένου να επιτευχθεί η σωστή ποσότητα σωματιδίων  $X$ , η μάζα τους θα πρέπει να είναι συγκρίσιμη με τη μάζα του inflaton.

Θα μελετήσουμε τη βαρυτική παραγωγή σωματιδίων σε θεωρίες όπου ο κινητικός όρος του inflaton συζεύγνυται με τον τανυστή Einstein και το κβαντικό πεδίο  $X$ , εκτός από τη σύζευξη του στο inflaton συζεύγνυται και αυτό με τον τανυστή Einstein. Θα δείξουμε ότι οι συζεύξεις αυτές εν γένει οδηγούν σε έναν μηχανισμό μείωσης της παραγωγής βαρέων σωματιδίων  $X$ .

## Δ'.2 Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Καμπύλους Χωρόχρονους

### Δ'.2.1 Κβάντωση του βαθμωτού πεδίου σε καμπύλο χώροχρονο

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο πεδίων  $\phi(x)$  που διαδίδονται σε ένα καμπύλο χώροχρονο με αναλλοίωτο στοιχείο μήκους

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

Αν το  $n$  δηλώνει τη διάσταση του χώροχρόνου τότε  $x^0$  θα είναι η χρονική συντεταγμένη και  $x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$  θα είναι οι χωρικές. Η δράση  $S$  κατασκευάζεται από το πεδίο  $\phi$  έτσι ώστε να είναι αναλλοίωτη κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων

$$S[\phi'(x), \partial' \phi(x'), g'_{\mu\nu}(x')] = S[\phi(x), \partial \phi(x), g_{\mu\nu}(x)]$$

Ο πιο απλός τρόπος να κατασκευάσουμε μια τέτοια δράση είναι να ξεκινήσουμε με τη δράση στο χώροχρονο Minkowski και να αντικαταστήσουμε τους τανυστές  $\eta^{\mu\nu}$  με τους τανυστές  $g^{\mu\nu}$  και τους στοιχειώδεις όγκους  $d^n x$  με τους αναλλοίωτους στοιχειώδεις όγκους  $(-g)^{1/2} d^n x$  όπου  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . Η απαίτηση η δράση να είναι αναλλοίωτη κάτω από μεταβολές στα πεδία, οι οποίες μηδενίζονται στα όρια της ολοκλήρωσης, δίνει τις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα ενός βαθμωτού πεδίου σε καμπύλο χώροχρονο είναι

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} [g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi] - V(\phi) \right\}$$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιούμε για την μετρική τη σύμβαση  $(+ - - -)$ . Αντικατάσταση αυτής της Λαγκρανζιανής πυκνότητας στην εξίσωση Euler - Lagrange μας δίνει την εξίσωση κίνησης του βαθμωτού πεδίου. Υπολογίζουμε ξεχωριστά

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\sqrt{-g} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \equiv -\sqrt{-g} V_\phi$$

$$\begin{aligned} -\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) &= -\partial_0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \right) - \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \right) = -\partial_0 \left( \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi \right]}{\partial (\partial_0 \phi)} \right) - \partial_i \left( \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi \right]}{\partial (\partial_i \phi)} \right) \\ &= -\partial_0 \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \frac{\partial (\partial_\kappa \phi)}{\partial (\partial_0 \phi)} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \frac{\partial (\partial_\lambda \phi)}{\partial (\partial_0 \phi)} \right) - \partial_i \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \frac{\partial (\partial_\kappa \phi)}{\partial (\partial_i \phi)} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \frac{\partial (\partial_\lambda \phi)}{\partial (\partial_i \phi)} \right) \\ &= -\partial_0 \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \delta_{0\kappa} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \delta_{\lambda 0} \partial_\kappa \phi \right) - \partial_i \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \delta_{i\kappa} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \delta_{\lambda i} \partial_\kappa \phi \right) \\ &= -\partial_0 \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{0\lambda} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa 0} \partial_\kappa \phi \right) - \partial_i \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{i\lambda} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa i} \delta_{\lambda i} \partial_\kappa \phi \right) \\ &= -\partial_0 (\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 \phi) - \partial_i (\sqrt{-g} g^{ii} \partial_i \phi) = -\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα δύο αυτά αποτελέσματα καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \sqrt{-g} V_\phi &= 0 \\ \Rightarrow \square \phi + V_\phi &= 0 \quad \text{με} \quad \square \phi = (-g)^{-1/2} \partial_\mu [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] \end{aligned} \quad (\Delta'.1)$$

Προχωράμε στην κβάντωση της θεωρίας προάγοντας το πεδίο  $\phi$  σε τελεστή  $\phi \rightarrow \hat{\phi}$  και ορίζοντας την συζυγή ορμή

$$\hat{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)}$$

Για την Λαγκρανζιανή πυκνότητα που μελετάμε η συζυγής ορμή είναι

$$\hat{\pi} = \sqrt{-g}\partial_0\hat{\phi}$$

Επιβάλλουμε τις σχέσεις μετάθεσης των τελεστών  $\hat{\phi}$  και  $\hat{\pi}$  σε ίδιες χρονικές στιγμές

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] &= 0 \\ [\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] &= 0 \\ [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] &= \frac{i}{\sqrt{-g}}\delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (\Delta'.2)$$

Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των λύσεων της (Δ'.1) ως

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int (-g)^{1/2} g^{0\nu} (\phi_1^*(x) \partial_\nu \phi_2(x) - \phi_2(x) \partial_\nu \phi_1^*(x)) d^3x \quad (\Delta'.3)$$

Αν βρούμε ένα σύνολο λύσεων που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$(\chi_{\mathbf{k}}, \chi_{\mathbf{k}'}^*) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\chi_{\mathbf{k}}^*, \chi_{\mathbf{k}'}^*) = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\chi_{\mathbf{k}}, \chi_{\mathbf{k}'}^*) = 0$$

τότε το σύνολο αυτό είναι πλήρες και μπορούμε να αναπτύξουμε το πεδίο  $\phi$  στη βάση των  $\chi_{\mathbf{k}}$  ως

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}\chi_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\chi_{\mathbf{k}}^*(x))$$

Οι τελεστές  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  και  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = 0 \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Υπάρχει μια κατάσταση κενού η οποία μηδενίζεται από όλους τους τελεστές καταστροφής  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0_\chi\rangle = 0 \quad \text{για όλα τα } \mathbf{k}$$

Από αυτήν την κατάσταση κενού μπορούμε να δημιουργήσουμε μια βάση Fock για τον χώρο Hilbert. Μια κατάσταση με  $n_{\mathbf{k}}$  διεγέρσεις δημιουργείται με την επαναλαμβανόμενη δράση του τελεστή δημιουργίας  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  στο κενό

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}}} |0_\chi\rangle$$

και παρόμοια για καταστάσεις με διαφορετικό είδος διεγέρσεων. Μπορούμε να ορίσουμε έναν τελεστή αριθμησης για κάθε συνάρτηση  $\chi_{\mathbf{k}}$

$$\hat{n}_{\chi_{\mathbf{k}}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

Ο κάτω δείκτης  $\chi$  στην κατάσταση κενού και στον τελεστή αριθμησης μας θυμίζουν ότι ορίζονται ως προς το σύνολο των λύσεων  $\chi_{\mathbf{k}}$ .

## Δ'.2.2 Συντελεστές Bogolyubov

Θεωρούμε το πιο γενικό πλαίσιο όπου ένας παρατηρητής ορίζει τα σωματίδια ως προς ένα πλήρες σύνολο λύσεων  $\chi_{\mathbf{k}}$  και ένας άλλος ως προς ένα διαφορετικό πλήρες σύνολο λύσεων  $\psi_{\mathbf{k}'}$ . Γενικά οι δύο αυτοί παρατηρητές θα διαφωνούν στο πόσα σωματίδια παρατηρούνται (ή αν παρατηρούνται καθόλου σωματίδια). Για να το δούμε αυτό είναι βολικό να αναπτύξουμε το ένα σύνολο λύσεων ως προς το άλλο (κάτι που είναι εφικτό αφού τα δύο σύνολα είναι πλήρη).

$$\chi_{\mathbf{k}}(x) = \sum_{\mathbf{k}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\psi_{\mathbf{k}'}(x) + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\psi_{\mathbf{k}'}^*(x))$$

Ο μετασχηματισμός αυτός από το ένα σύνολο λύσεων στο άλλο είναι γνωστός ως μετασχηματισμός Bogolyubov και τα  $\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ ,  $\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  που υλοποιούν τον μετασχηματισμό είναι οι συντελεστές Bogolyubov. Το πεδίο  $\phi(x)$  μπορεί να αναπτυχθεί είτε στη βάση των  $\chi_{\mathbf{k}}$

$$\hat{\phi}(x) = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}\chi_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\chi_{\mathbf{k}}^*(x))$$

είτε στη βάση των  $\psi_{\mathbf{k}'}$

$$\hat{\phi}(x) = \sum_{\mathbf{k}'} (\hat{b}_{\mathbf{k}'} \psi_{\mathbf{k}'}(x) + \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \psi_{\mathbf{k}'}^*(x))$$

Οι συντελεστές Bogolyubov μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τον μετασχηματισμό ανάμεσα στους τελεστές

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{b}_{\mathbf{k}'} - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger) \quad (\Delta'.4)$$

και

$$\hat{b}_{\mathbf{k}'} = \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)$$

Θα αποδείξουμε την  $(\Delta'.4)$ . Για να το κάνουμε αυτό ξεκινάμε από το γεγονός ότι

$$(\chi_{\mathbf{k}}, \hat{\phi}) = \left( \chi_{\mathbf{k}}, \sum_{\mathbf{i}} (\hat{a}_{\mathbf{i}} \chi_{\mathbf{i}} + \hat{a}_{\mathbf{i}}^\dagger \chi_{\mathbf{i}}^*) \right) = \sum_{\mathbf{i}} \hat{a}_{\mathbf{i}} (\chi_{\mathbf{k}}, \chi_{\mathbf{i}}) + \sum_{\mathbf{i}} \hat{a}_{\mathbf{i}}^\dagger (\chi_{\mathbf{k}}, \chi_{\mathbf{i}}^*) = \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}} &= (\chi_{\mathbf{k}}, \hat{\phi}) = \left( \chi_{\mathbf{k}}, \sum_{\mathbf{k}'} (\hat{b}_{\mathbf{k}'} \psi_{\mathbf{k}'} + \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \psi_{\mathbf{k}'}^*) \right) = \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} (\chi_{\mathbf{k}}, \psi_{\mathbf{k}'}) + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger (\chi_{\mathbf{k}}, \psi_{\mathbf{k}'}^*) \\ &= \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \left( \sum_{\mathbf{i}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'} \psi_{\mathbf{i}'} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'} \psi_{\mathbf{i}'}^*) \right) + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \left( \sum_{\mathbf{i}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'} \psi_{\mathbf{i}'} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'} \psi_{\mathbf{i}'}^*) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* (\psi_{\mathbf{i}'}, \psi_{\mathbf{k}'}) + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* (\psi_{\mathbf{i}'}, \psi_{\mathbf{k}'}) + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \sum_{\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* (\psi_{\mathbf{i}'}, \psi_{\mathbf{k}'}^*) + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \sum_{\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* (\psi_{\mathbf{i}'}, \psi_{\mathbf{k}'}^*) \\ &= \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* (-\delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'})) = \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* - \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \\ &= \sum_{\mathbf{k}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{b}_{\mathbf{k}'} - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger) \end{aligned}$$

Ας φανταστούμε τώρα ότι το σύστημα είναι στο κενό  $\psi$ ,  $|0_\psi\rangle$ , στο οποίο δεν παρατηρούνται σωματίδια  $\psi$ . Θα θέλαμε να μάθουμε πόσα σωματίδια παρατηρούνται από έναν παρατηρητή που χρησιμοποιεί τις λύσεις  $\chi$ . Υπολογίζουμε λοιπόν την αναμενόμενη τιμή του τελεστή αριθμησης  $\hat{n}_{\chi_{\mathbf{k}}}$  στο κενό  $\psi$

$$\begin{aligned} \langle 0_\psi | \hat{n}_{\chi_{\mathbf{k}}} | 0_\psi \rangle &= \langle 0_\psi | \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} | 0_\psi \rangle \stackrel{(\Delta'.4)}{=} \langle 0_\psi | \sum_{\mathbf{k}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}) \sum_{\mathbf{i}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \hat{b}_{\mathbf{i}'} - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger) | 0_\psi \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{i}'} | 0_\psi \rangle - \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger | 0_\psi \rangle \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'} | 0_\psi \rangle + \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger | 0_\psi \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger | 0_\psi \rangle \end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $\hat{b}|0_\psi\rangle = 0$  και  $\langle 0_\psi | \hat{b}^\dagger = 0$ . Χρησιμοποιώντας την σχέση  $[\hat{b}_{\mathbf{k}'}, \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \Rightarrow \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} + \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'}$  θα έχουμε τελικά

$$\langle 0_\psi | \hat{n}_{\chi_{\mathbf{k}}} | 0_\psi \rangle = \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} + \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} | 0_\psi \rangle = \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \langle 0_\psi | 0_\psi \rangle = \sum_{\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*$$

Με αυτόν τον τρόπο ο μέσος αριθμός των σωματιδίων  $\chi$  στο κενό  $\psi$  έχει εκφραστεί ως προς τους συντελεστές Bogolyubov

$$\langle 0_\psi | \hat{n}_{\chi_{\mathbf{k}}} | 0_\psi \rangle = \sum_{\mathbf{k}'} |\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2$$

Δεν υπάρχει κάποιος λόγος να μηδενιστεί αυτή η ποσότητα. Αυτό που φαίνεται σαν κενό σε έναν παρατηρητή είναι μια κατάσταση γεμάτη σωματίδια για έναν άλλον. Οι καταστάσεις κενού δεν συμπίπτουν.

### Δ'.2.3 Ασυμπτωτικές περιοχές Minkowski σε ένα 4-διάστατο σύμπαν FRW

Θεωρούμε το 4-διάστατο σύμπαν Friedmann - Robertson - Walker με στοιχειώδες μήκος

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2$$

όπου τα χωρικά μέρη επεκτείνονται ομοιόμορφα όπως περιγράφεται από τη συνάρτηση  $a(t)$ . Η μετρική είναι της μορφής  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t))$  και προφανώς  $\sqrt{-g} = a^3(t)$ . Μπορούμε από την (Δ'.1) να βρούμε την εξίσωση κίνησης που θα ικανοποιεί ένα βαθμωτό πεδίο  $\phi$  σε έναν τέτοιο χωρόχρονο

$$\begin{aligned} \square\phi + V_\phi &= 0 \\ \Rightarrow (-g)^{-1/2}\partial_\mu[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] + V_\phi &= 0 \Rightarrow a^{-3}(t)\partial_\mu[a^3(t)g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x)] + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow a^{-3}(t)\left(\partial_0[a^3(t)g^{00}\partial_0\phi] + \partial_i[a^3(t)g^{ij}\partial_j\phi]\right) + V_\phi &= 0 \Rightarrow a^{-3}(t)\left(\partial_0[a^3(t)\partial_0\phi] + a^3(t)g^{ij}\partial_i\partial_j\phi\right) + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow a^{-3}(t)\left(3a^2(t)\dot{a}(t)\partial_0\phi + a^3(t)\partial_0\partial_0\phi + a^3(t)g^{ij}\partial_i\partial_j\phi\right) + V_\phi &= 0 \\ \Rightarrow a^{-3}(t)\left(3a^2(t)\dot{a}(t)\dot{\phi} + a^3\ddot{\phi} - a^3(t)a^{-2}(t)\sum_{i=1}^3\partial_i^2\phi\right) + V_\phi &= 0 \end{aligned}$$

Καταλήξαμε έτσι στην εξίσωση

$$\ddot{\phi}(x) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\phi}(x) - a^{-2}(t)\sum_{i=1}^3\partial_i^2\phi(x) + V_\phi = 0$$

Εξειδικεύουμε τη μελέτη σε ένα δυναμικό της μορφής  $V(\phi) = \frac{1}{2}[m_\phi^2\phi^2 + \zeta R(t)\phi^2]$ . Δίνουμε δηλαδή στο πεδίο  $\phi$  έναν όρο μάζας και του επιτρέπουμε να συζευχθεί με την καμπυλότητα  $R$ . Τότε η παραπάνω θα έχει τη μορφή

$$\ddot{\phi}(x) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\phi}(x) - a^{-2}(t)\sum_{i=1}^3\partial_i^2\phi(x) + [m_\phi^2 + \zeta R(t)]\phi = 0 \quad (\Delta'.5)$$

Μπορούμε να αναπτύξουμε το πεδίο  $\phi(x)$  ως προς την πλήρη βάση των  $\chi_{\mathbf{k}}$

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}\chi_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\chi_{\mathbf{k}}^*(x)]$$

Αν αντικαταστήσουμε το  $\chi_{\mathbf{k}}$  στην (Δ'.5) θεωρώντας επιπλέον ότι είναι της μορφής  $\chi_{\mathbf{k}} \sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\chi_{\mathbf{k}}(t)$  θα έχουμε

$$\begin{aligned} \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} - a^{-2}(t)(i\mathbf{k})^2\chi_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + [m_\phi^2 + \zeta R(t)]\chi_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + \left[\frac{k^2}{a^2(t)} + m_\phi^2 + \zeta R(t)\right]\chi_{\mathbf{k}}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\Delta'.6)$$

Είναι βολικό να απαλλαγούμε από τον όρο με την πρώτη παράγωγο του  $\chi_{\mathbf{k}}$ . Αυτό γίνεται γενικά, για μια εξίσωση της μορφής  $\ddot{\chi}(t) + A(t)\dot{\chi}(t) + B(t)\chi(t) = 0$ , μέσω του μετασχηματισμού  $\chi(t) = f(t)h(t)$ . Βρίσκουμε τότε μια καινούργια εξίσωση και η απαίτηση να εξαλειφεται η πρώτη παράγωγος οδηγεί στον προσδιορισμό της συνάρτησης  $f(t)$ :

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}\int A(t)dt} \quad , \quad \dot{f}(t) = -\frac{A(t)}{2}f(t) \quad , \quad \ddot{f}(t) = \left[-\frac{\dot{A}(t)}{2} + \frac{A^2(t)}{4}\right]f(t)$$

Παρατηρούμε ότι τα  $\dot{f}(t)$  και  $\ddot{f}(t)$  είναι πολλαπλάσια του  $f(t)$ , οπότε το ίδιο το  $f(t)$  δεν θα εμφανίζεται στην εξίσωση. Η εξίσωση για το  $h(t)$  θα είναι τότε της μορφής

$$\ddot{h}(t) + \left[B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4}\right]h(t) = 0$$

Για την εξίσωση (Δ'.6) βλέπουμε εύκολα ότι

$$A(t) = 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad , \quad B(t) = \left[\frac{k^2}{a^2(t)} + m_\phi^2 + \zeta R(t)\right]$$

και

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2} \int 3 \frac{\dot{a}(t')}{a(t')} dt'} = e^{-\frac{3}{2} \int \frac{d \ln(a(t'))}{dt'} dt'} = e^{-\frac{3}{2} \ln(a(t))} = e^{\ln [a(t)^{-\frac{3}{2}}]} = \frac{1}{a^{3/2}(t)}$$

Δηλαδή αν γράψουμε

$$\chi_{\mathbf{k}}(t) \equiv f(t)h_{\mathbf{k}}(t) = \frac{h_{\mathbf{k}}(t)}{a^{3/2}(t)}$$

η (Δ'.6) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \left[ m_{\phi}^2 + \frac{k^2}{a^2(t)} + \zeta R(t) - \frac{1}{2} 3 \left( \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) - \frac{1}{4} 9 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right] h_{\mathbf{k}}(t) = 0 \\ \Rightarrow & \ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \left[ m_{\phi}^2 + \frac{k^2}{a^2(t)} + \zeta R(t) - \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right] h_{\mathbf{k}}(t) = 0 \end{aligned} \quad (\Delta'.7)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση  $a(t)$  έχει τέτοια μορφή που στο μακρινό παρελθόν και μέλλον έχει σταθερή τιμή (και οι παράγωγοί της μηδενίζονται) τότε σε αυτές τις περιοχές, που θα τις ονομάσουμε “μέσα” και “έξω”, ανακτούμε την κβαντική θεωρία πεδίου σε χωρόχρονο Minkowski. Έτσι για την (Δ'.7) μπορούμε να βρούμε μια λύση  $h_{\mathbf{k}}^{in}(t)$  η οποία στο μακρινό παρελθόν θα είναι  $h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{-i\omega_{in}t}}{\sqrt{2\omega_{in}}}$  αλλά και μια λύση  $h_{\mathbf{k}}^{out}(t)$  η οποία στο μακρινό μέλλον θα είναι  $h_{\mathbf{k}}^{out}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-i\omega_{out}t}}{\sqrt{2\omega_{out}}}$ . Μπορούμε λοιπόν να βρούμε δύο σύνολα λύσεων

$$\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} \quad \text{και} \quad \chi_{\mathbf{k}}^{out}(x) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{out}(t)}{a(t)^{3/2}}$$

Το πεδίο  $\phi(x)$  μπορεί να αναπτυχθεί ως προς το πρώτο σύνολο

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}^{in}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \chi_{\mathbf{k}}^{in*}(x)]$$

ή ως προς το δεύτερο

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}'} [\hat{b}_{\mathbf{k}'} \chi_{\mathbf{k}'}^{out}(x) + \hat{b}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \chi_{\mathbf{k}'}^{out*}(x)]$$

Ας δούμε ποια είναι η συνθήκη ώστε τα δύο αυτά σύνολα να είναι πλήρη. Θυμίζουμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου (Δ'.3)

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int (-g)^{1/2} g^{0\nu} (\phi_1^*(x) \partial_{\nu} \phi_2(x) - \phi_2(x) \partial_{\nu} \phi_1^*(x)) d^3x$$

Βρίσκουμε για τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{in}$

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathbf{k}}^{in}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in}) &= i \int a(t)^3 \left[ \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} \right) - \frac{e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} \right) \right] d^3x \\ &= ia(t)^3 \left[ \frac{h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} \left( \frac{\dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{5/2}} \dot{a}(t) \right) - \frac{h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} \left( \frac{\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{5/2}} \dot{a}(t) \right) \right] \int e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} d^3x \\ &= ia(t)^3 \left[ \frac{h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} \frac{\dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} - \frac{h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} \frac{\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} \right] \int e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} d^3x = i [h_{\mathbf{k}}^{in*}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}'}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)] \int e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} d^3x \\ &= i [h_{\mathbf{k}}^{in*}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}'}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)] (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι για  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$  το αποτέλεσμα είναι μηδέν λόγω της συνάρτησης δέλτα. Για να δούμε τι γίνεται στην περίπτωση  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  θεωρούμε ότι τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x)$  βρίσκονται μέσα σε ένα κουτί όγκου  $V$  τον οποίο θα αφήσουμε να πάει στο άπειρο. Αν το κάνουμε αυτό η συνάρτηση δέλτα παίρνει τη μορφή

$$\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} d^3x$$

και για  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  θα έχουμε

$$\delta^{(3)}(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

Με αυτήν την επισήμανση το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο μπορεί να πάρει τη μορφή

$$(\chi_{\mathbf{k}}^{in}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in}) = i[h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)](2\pi)^3 \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = i[h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)]V\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Φαίνεται τώρα ότι αν θέλουμε τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x)$  να είναι ορθοκανονικά θα πρέπει αρχικά να ενσωματώσουμε την παράμετρο  $V$  μέσα τους γράφοντας

$$\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2}a(t)^{3/2}} \quad (\Delta'.8)$$

και στη συνέχεια να απαιτήσουμε να είναι

$$i[h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)] = 1$$

ή αλλιώς

$$h_{\mathbf{k}}^{in}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) = i \quad (\Delta'.9)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι η ποσότητα  $h_{\mathbf{k}}^{in}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t)$  δεν είναι τίποτα άλλο από την Wroskian της (Δ'.7) η οποία ξέρουμε ότι είναι χρονοανεξάρτητη, απλά τώρα απαιτήσαμε να έχει και συγκεκριμένη τιμή. Δείξαμε λοιπόν ότι με τον ορισμό (Δ'.8) και την απαίτηση (Δ'.9) θα είναι

$$(\chi_{\mathbf{k}}^{in}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι δεδομένης της απαίτησης (Δ'.9):

$$(\chi_{\mathbf{k}}^{in*}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in*}) = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad \text{και} \quad (\chi_{\mathbf{k}}^{in}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in*}) = 0$$

Εντελώς όμοιες σχέσεις θα ισχύουν και για τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{out}(x)$  με τον ορισμό

$$\chi_{\mathbf{k}}^{out}(x) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}h_{\mathbf{k}}^{out}(t)}{V^{1/2}a(t)^{3/2}}$$

Θα έχουμε δηλαδή

$$(\chi_{\mathbf{k}}^{out}, \chi_{\mathbf{k}'}^{out}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad , \quad (\chi_{\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}'}^{out*}) = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad , \quad (\chi_{\mathbf{k}}^{out}, \chi_{\mathbf{k}'}^{out*}) = 0$$

Τώρα λοιπόν που έχουμε κάνει τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x)$  και  $\chi_{\mathbf{k}}^{out}(x)$  ορθοκανονικά μπορούμε να γράψουμε το ένα ως προς το άλλο με έναν μετασχηματισμό Bogolyubov της μορφής

$$\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x) = \sum_{\mathbf{k}'} [\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\chi_{\mathbf{k}'}^{out}(x) + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}(x)] \quad (\Delta'.10)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τα εσωτερικά γινόμενα που προκύπτουν λόγω της μορφής (Δ'.10)

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathbf{k}'}^{out}, \chi_{\mathbf{k}}^{in}) &= (\chi_{\mathbf{k}'}^{out}, \sum_{\mathbf{i}} [\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}}\chi_{\mathbf{i}}^{out} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}}\chi_{\mathbf{i}}^{out*}]) \\ &= \sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}}(\chi_{\mathbf{k}'}^{out}, \chi_{\mathbf{i}}^{out}) + \sum_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}}(\chi_{\mathbf{k}'}^{out}, \chi_{\mathbf{i}}^{out*}) = \sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}\mathbf{k}'} = \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned}$$

και όμοια

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}}^{in}) &= (\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}, \sum_{\mathbf{i}} [\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}}\chi_{\mathbf{i}}^{out} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}}\chi_{\mathbf{i}}^{out*}]) \\ &= \sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}}(\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}, \chi_{\mathbf{i}}^{out}) + \sum_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}}(\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}, \chi_{\mathbf{i}}^{out*}) = \sum_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}}(-\delta_{\mathbf{i}\mathbf{k}'} ) = -\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned}$$

Ας δούμε τι παίρνουμε για τα ίδια εσωτερικά γινόμενα από τον ορισμό τους

$$(\chi_{\mathbf{k}'}^{out}, \chi_{\mathbf{k}}^{in}) = i \int a(t)^3 \left[ \frac{e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{x}}h_{\mathbf{k}'}^{out*}(t)}{V^{1/2}a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2}a(t)^{3/2}} \right) - \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2}a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{x}}h_{\mathbf{k}'}^{out*}(t)}{V^{1/2}a(t)^{3/2}} \right) \right] d^3x \sim \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

και όμοια

$$(\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}}^{in}) = i \int a(t)^3 \left[ \frac{e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}'}^{out}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \right) - \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}'}^{out}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \right) \right] d^3x \sim \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι μπορούμε να γράψουμε για τους συντελεστές Bogolyubov

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \alpha_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \beta_{\mathbf{k}} \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned}$$

και η εξίσωση (Δ'.10) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{k}}^{in}(x) &= \sum_{\mathbf{k}'} [\alpha_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \chi_{\mathbf{k}'}^{out}(x) + \beta_{\mathbf{k}} \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'} \chi_{\mathbf{k}'}^{out*}(x)] \\ &= \alpha_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}^{out}(x) + \beta_{\mathbf{k}} \chi_{-\mathbf{k}}^{out*}(x) \end{aligned}$$

Για να προσδιορίσουμε το  $\beta_{\mathbf{k}}$  δρούμε στην παραπάνω από αριστερά με  $\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}$

$$(\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in}) = \beta_{\mathbf{k}'} (\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{-\mathbf{k}'}^{out*}) = -\beta_{\mathbf{k}'} \delta_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$$

Βρίσκουμε λοιπόν

$$\beta_{\mathbf{k}} = -(\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}}^{in})$$

και πιο συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} (\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}}^{in}) &= i \int a(t)^3 \left[ \frac{e^{i(-\mathbf{k})\mathbf{x}} h_{-\mathbf{k}}^{out}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \right) - \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i(-\mathbf{k})\mathbf{x}} h_{-\mathbf{k}}^{out}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \right) \right] d^3x \\ &= i(h_{\mathbf{k}}^{out}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{out}(t)) \end{aligned}$$

άρα

$$\beta_{\mathbf{k}} = i(h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{out}(t) - h_{\mathbf{k}}^{out}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t)) \quad (\Delta'.11)$$

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα Δ'.2.2 ο μέσος αριθμός σωματιδίων στην κατάσταση  $\mathbf{k}$  που θα μετρήσει στο κενό  $\chi^{out}$  ένας παρατηρητής που χρησιμοποιεί τις λύσεις  $\chi^{in}$  θα είναι

$$\langle 0_{\chi^{out}} | \hat{n}_{\chi^{in}} | 0_{\chi^{out}} \rangle = \sum_{\mathbf{k}'} |\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2 = \sum_{\mathbf{k}'} |\beta_{\mathbf{k}} \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2 = |\beta_{\mathbf{k}}|^2$$

Τέλος από την ορθοκανονικότητα των λύσεων προκύπτει

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathbf{k}}^{in}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in*}) &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ \Rightarrow (\alpha_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}^{out} + \beta_{\mathbf{k}} \chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \alpha_{\mathbf{k}'} \chi_{\mathbf{k}'}^{out} + \beta_{\mathbf{k}'} \chi_{-\mathbf{k}'}^{out*}) &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \Rightarrow \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{k}'} (\chi_{\mathbf{k}}^{out}, \chi_{\mathbf{k}'}^{out}) + \beta_{\mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{k}'} (\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{-\mathbf{k}'}^{out*}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ \Rightarrow \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \beta_{\mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{k}'} (-\delta_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \Rightarrow |\alpha_{\mathbf{k}}|^2 - |\beta_{\mathbf{k}}|^2 = 1 \end{aligned}$$

#### Δ'.2.4 Παραγωγή σωματιδίων σε 4-διάστατο σύμπαν FRW με ασυμπτωτικές πε- ριοχές Minkowski

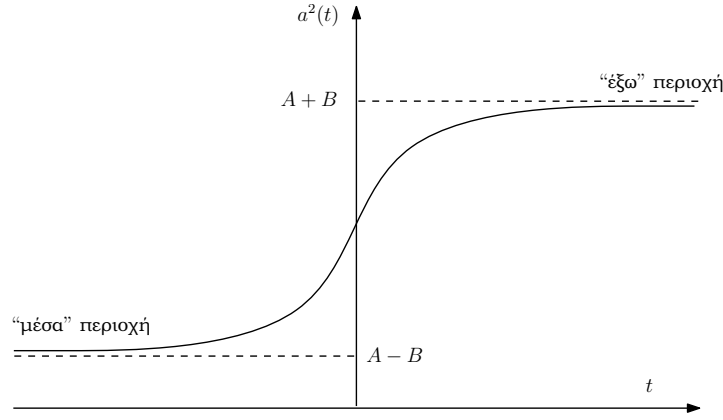
Μια μορφή της συνάρτησης  $a(t)$  η οποία μπορεί να μετατρέψει τον χωρόχρονο FRW σε Minkowski στο μακρινό παρελθόν και μέλλον είναι η

$$a^2(t) = A + B \tanh(\rho t) \quad \text{με } A, B, \rho \text{ σταθερά}$$

η οποία έχει τη μορφή του σχήματος Δ'.1. Είναι βολικό να δουλέψουμε με αδιάστατες ποσότητες. Ορίζουμε τον αδιάστατο χρόνο  $t = M_{pl} t$ . Τότε η (Δ'.6) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{aligned} M_{pl}^2 \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + 3M_{pl} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} M_{pl}(t) \dot{\chi}_{\mathbf{k}} + \left[ \frac{k^2}{a^2(t)} + m_{\phi}^2 + \zeta R(t) \right] \chi_{\mathbf{k}}(t) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \dot{\chi}_{\mathbf{k}} + \left[ \frac{k^2}{M_{pl}^2 a^2(t)} + \frac{m_{\phi}^2}{M_{pl}^2} + \frac{\zeta R(t)}{M_{pl}^2} \right] \chi_{\mathbf{k}}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\Delta'.12)$$





Σχήμα Δ'.1: Ο παράγοντας  $a^2(t) = A + B \tanh(\rho t)$  αντιπροσωπεύει ένα ασυμπτωτικά στατικό σύμπαν το οποίο υπόκειται σε μια περίοδο ομαλής επέκτασης.

με

$$a(t) = \sqrt{A + B \tanh\left(\rho \frac{t}{M_{pl}}\right)}$$

όπου τώρα η τελεία  $\cdot$  δηλώνει παραγώγιση ως προς το χρόνο  $t$ . Όπως δείξαμε στο παράρτημα Β'.2 η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci έχει τη μορφή (Β'.15)

$$R(t) = 6 \frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \quad \rightarrow \quad R(t) = 6M_{pl}^2 \frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο που παρουσιάσαμε στην ενότητα Δ'.2.3 μπορούμε να απαλλαγούμε από την πρώτη παράγωγο της διαφορικής οριζοντας  $\chi_{\mathbf{k}}(t) = f(t)h_{\mathbf{k}}(t)$ . Τότε η (Δ'.12) παίρνει τη μορφή

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \left[ B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4} \right] h_{\mathbf{k}}(t) = 0$$

με

$$A(t) = 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad B(t) = \frac{k^2}{M_{pl}^2 a^2(t)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}^2} + \frac{\zeta R(t)}{M_{pl}^2}$$

ή αλλιώς

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \Omega^2(t) h_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (\Delta'.13)$$

με

$$\Omega(t) = \sqrt{\frac{k^2}{M_{pl}^2 a^2(t)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}^2} + \frac{\zeta R(t)}{M_{pl}^2} - \frac{3}{2} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}$$

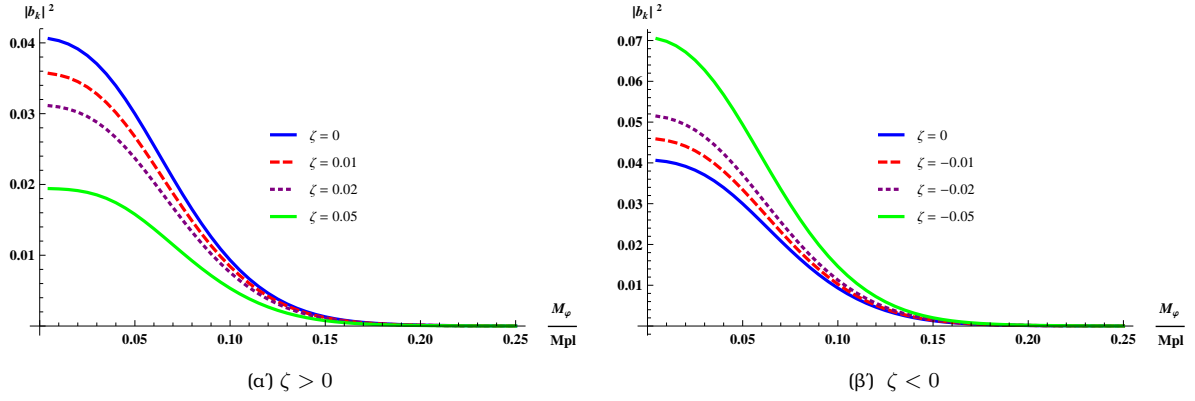
Η μορφή του  $a(t)$  είναι τέτοια που στο μακρινό παρελθόν/μέλλον οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοι του μηδενίζονται. Συνεπώς τότε θα μηδενίζεται και η καμπυλότητα R. Η αρχική και τελική τιμή του  $\Omega$  θα

είναι  $\omega_{in} = \sqrt{\frac{k^2}{M_{pl}^2 (A-B)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}^2}}$  και  $\omega_{out} = \sqrt{\frac{k^2}{M_{pl}^2 (A+B)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}^2}}$  αντίστοιχα. Λύνουμε αριθμητικά με τη

βοήθεια του mathematica τη διαφορική (Δ'.13) πρώτα για αρχική συνθήκη  $h_{\mathbf{k}}^{in}(t_-) = \frac{e^{-i\omega_{in} t_-}}{\sqrt{2\omega_{in}}}$  και στη

συνέχεια για αρχική συνθήκη  $h_{\mathbf{k}}^{out}(t_+) = \frac{e^{-i\omega_{out} t_+}}{\sqrt{2\omega_{out}}}$ . Αντικαθιστούμε τις δύο λύσεις που προκύπτουν στην

σχέση (Δ'.11). Μπορούμε τότε για κατάλληλες παραμέτρους να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση του μέσου αριθμού σωματιδίων στην κατάσταση  $\mathbf{k}$ ,  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$ , συναρτήσει της μάζας των σωματιδίων που παράγονται,  $m_\phi$ . Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα Δ'.2. Παρατηρούμε τη μείωση του αριθμού σωματιδίων που παράγονται με την αύξηση της μάζας καθώς και αλλαγές στον αριθμό παραγόμενων σωματιδίων ίδιας μάζας ανάλογα τη ζεύξη  $\zeta$ .



Σχήμα Δ.2: Γραφική παράσταση του  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  συναρτήσει της μάζας  $m_\phi$

### Δ.2.5 Μη-τετριμμένοι κινητικοί όροι βαθμωτού πεδίου στο σύμπαν FRW

Μέχρι τώρα μελετούσαμε μια Λαγκρανζιανή πυκνότητα της μορφής

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi] - V(\phi) \right\}$$

Αν εισαγάγουμε έναν κινητικό όρο  $\lambda G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ , όπου  $G^{\mu\nu}$  ο τανυστής Einstein και η σύζευξη  $\lambda$  έχει μονάδες  $[\lambda] = M_{pl}^{-2}$ , η παραπάνω Λαγκρανζιανή παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} + \lambda G^{\mu\nu}] \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\}$$

και η εξίσωση Klein - Gordon (Δ.1) γίνεται

$$\square \phi + V_\phi = 0 \quad \text{με} \quad \square \phi = (-g)^{-1/2} \partial_\mu \left[ (-g)^{1/2} [g^{\mu\nu} + \lambda G^{\mu\nu}] \partial_\nu \phi \right]$$

Μπορούμε να βρούμε την εξίσωση κίνησης που θα ικανοποιεί ένα βαθμωτό πεδίο για μετρική FRW:

$$\begin{aligned} & \square \phi + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow & (-g)^{-1/2} \partial_\mu \left[ (-g)^{1/2} [g^{\mu\nu} + \lambda G^{\mu\nu}] \partial_\nu \phi \right] + V_\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad a^{-3}(t) \partial_\mu \left[ a^3(t) [g^{\mu\nu} + \lambda G^{\mu\nu}] \partial_\nu \phi(x) \right] + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow & a^{-3}(t) \left( \partial_0 \left[ a^3(t) [g^{00} + \lambda G^{00}] \partial_0 \phi \right] + \partial_i \left[ a^3(t) [g^{ij} + \lambda G^{ij}] \partial_j \phi \right] \right) + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow & a^{-3}(t) \left( \partial_0 \left[ a^3(t) \partial_0 \phi \right] + \partial_0 \left[ \lambda a^3(t) \left( -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) \partial_0 \phi \right] + a^3(t) [g^{ij} + \lambda G^{ij}] \partial_i \partial_j \phi \right) + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow & a^{-3}(t) \left( 3a^2(t) \dot{a}(t) \partial_0 \phi + a^3(t) \partial_0 \partial_0 \phi - 3\lambda \dot{a}^3(t) \partial_0 \phi - 6\lambda a(t) \dot{a}(t) \ddot{a}(t) \partial_0 \phi \right. \\ & \quad \left. - 3\lambda a(t) \dot{a}^2(t) \partial_0 \partial_0 \phi + a^3(t) g^{ii} \partial_i \partial_i \phi + \lambda a^3(t) G^{ii} \partial_i \partial_i \phi \right) + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow & a^{-3}(t) \left( 3a^2(t) \dot{a}(t) \dot{\phi} + a^3(t) \ddot{\phi} - 3\lambda \dot{a}^3(t) \dot{\phi} - 6\lambda a(t) \dot{a}(t) \ddot{a}(t) \dot{\phi} \right. \\ & \quad \left. - 3\lambda a(t) \dot{a}^2(t) \ddot{\phi} - a^3(t) a^{-2}(t) \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 \phi + \lambda a^3(t) \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 \phi \right) + V_\phi = 0 \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει από το παράρτημα Β.2 τις συνιστώσες του τανυστή Einstein

$$G^{00} = -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \quad \text{και} \quad G^{ii} = \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)}$$

Καταλήξαμε έτσι στην εξίσωση κίνησης

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - 3\lambda \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right] \ddot{\phi}(x) + 3 \left[ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda \left( \frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right) \right] \dot{\phi}(x) \\ & + \left[ -a^{-2}(t) \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 \phi(x) + \lambda \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 \phi(x) \right] + V_\phi = 0 \end{aligned} \quad (\Delta'.14)$$

Χρησιμοποιούμε ένα δυναμικό της μορφής  $V(\phi) = \frac{1}{2} [m_\phi^2 \phi^2 + \zeta R(t) \phi^2]$  και αναπτύσσουμε το πεδίο  $\phi$  ως προς ένα πλήρες σύνολο λύσεων  $\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \chi_{\mathbf{k}}^*(x)]$  τις οποίες θεωρούμε να έχουν τη μορφή  $\chi_{\mathbf{k}}(x) \sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \chi_{\mathbf{k}}(t)$ . Τότε η εξίσωση ( $\Delta'.14$ ) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - 3\lambda \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right] \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + 3 \left[ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda \left( \frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right) \right] \dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) \\ & + \left[ \frac{k^2}{a^2(t)} - \lambda k^2 \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + m_\phi^2 + \zeta R(t) \right] \chi_{\mathbf{k}}(t) = 0 \end{aligned} \quad (\Delta'.15)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το τέχνασμα της ενότητας  $\Delta'.2.3$  γράφοντας  $\chi_{\mathbf{k}}(t) = f(t)h_{\mathbf{k}}(t)$ , η ( $\Delta'.15$ ) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \left[ B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4} \right] h_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (\Delta'.16)$$

με

$$A(t) = \frac{3 \left[ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda \left( \frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right) \right]}{1 - 3\lambda \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}, \quad B(t) = \frac{\frac{k^2}{a^2(t)} - \lambda k^2 \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + m_\phi^2 + \zeta R(t)}{1 - 3\lambda \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}$$

και

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}}$$

Οι λύσεις  $\chi_{\mathbf{k}}$  θα έχουν τη μορφή

$$\chi_{\mathbf{k}}(x) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(t) h_{\mathbf{k}}(t) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}(t)}{\sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}}$$

Ας δούμε πως οι λύσεις αυτές γίνονται ορθοκανονικές ώστε να μπορούμε να ορίσουμε συντελεστές Bogolyubov. Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int (-g)^{1/2} [g^{0\nu} + \lambda G^{0\nu}] (\phi_1^*(x) \partial_\nu \phi_2(x) - \phi_2(x) \partial_\nu \phi_1^*(x)) d^3x$$

απ' όπου προκύπτει

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x), \chi_{\mathbf{k}'}^{in}(x)) &= i \left( \frac{a^2(t) - 3\lambda \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) (h_{\mathbf{k}}^{in*} \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in} - h_{\mathbf{k}'}^{in} \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}) \left( \frac{a(t)^3}{a(t) [3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)]} \right) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= -i (h_{\mathbf{k}}^{in*} \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in} - h_{\mathbf{k}'}^{in} \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε ξανά την υπόθεση ότι οι λύσεις  $\chi_{\mathbf{k}}(x)$  βρίσκονται μέσα σε ένα κουτί όγκου  $V$  και το εσωτερικό γινόμενο παίρνει τη μορφή

$$(\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x), \chi_{\mathbf{k}'}^{in}(x)) = -i (h_{\mathbf{k}}^{in*} \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in} - h_{\mathbf{k}'}^{in} \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}) V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Φαίνεται τώρα ότι αν θέλουμε τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{in}$  να είναι ορθοκανονικά θα πρέπει αρχικά να ενσωματώσουμε την παράμετρο  $V$  γράφοντας

$$\chi_{\mathbf{k}}(x) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}(t)}{V^{1/2} \sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}}$$

και στη συνέχεια να απαιτήσουμε να είναι

$$-i (h_{\mathbf{k}}^{in*} \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in} - h_{\mathbf{k}'}^{in} \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}) = 1$$

ή αλλιώς

$$h_{\mathbf{k}}^{in*} \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in} - h_{\mathbf{k}'}^{in} \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*} = i$$

Ο συντελεστής Bogolyubov  $\beta_{\mathbf{k}}$  που χρειαζόμαστε δίνεται από τη σχέση

$$\beta_{\mathbf{k}} = -(\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}}^{in})$$

και πιο συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} & (\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}(x), \chi_{\mathbf{k}}^{in}(x)) = \\ & = i \int a(t)^3 \left( \frac{a^2(t) - 3\lambda \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) \left[ \frac{e^{i(-\mathbf{k})\mathbf{x}} h_{-\mathbf{k}}^{out}(t)}{V^{1/2} \sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} \sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} \sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}} \partial_t \left( \frac{e^{i(-\mathbf{k})\mathbf{x}} h_{-\mathbf{k}}^{out}(t)}{V^{1/2} \sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}} \right) \right] d^3x \\ & = -i (h_{-\mathbf{k}}^{out}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{-\mathbf{k}}^{out}(t)) \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}} = -i (h_{\mathbf{k}}^{out}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{out}(t)) \end{aligned}$$

άρα

$$\beta_{\mathbf{k}} = i (h_{\mathbf{k}}^{out}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{out}(t)) \quad (\Delta'.17)$$

Αυτός είναι ο συντελεστής Bogolyubov που χρειαζόμαστε για τη μελέτη της παραγωγής σωματιδίων στη νέα κατάσταση.

Ξεκινάμε γράφοντας την  $(\Delta'.15)$  συναρτήσει του αδιάστατου χρόνου  $t = M_{pl} t$

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - 3\lambda M_{pl}^2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right] \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + 3 \left[ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda M_{pl}^2 \left( \frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right) \right] \dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) \\ & + \left[ \frac{k^2}{M_{pl}^2 a^2(t)} - \lambda k^2 \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}} + \frac{\zeta R(t)}{M_{pl}} \right] \chi_{\mathbf{k}}(t) = 0 \end{aligned}$$

Γράφοντας  $\chi_{\mathbf{k}}(t) = f(t)h(t)$  καταλήγουμε στη σχέση

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \left[ B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4} \right] h_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (\Delta'.18)$$

με

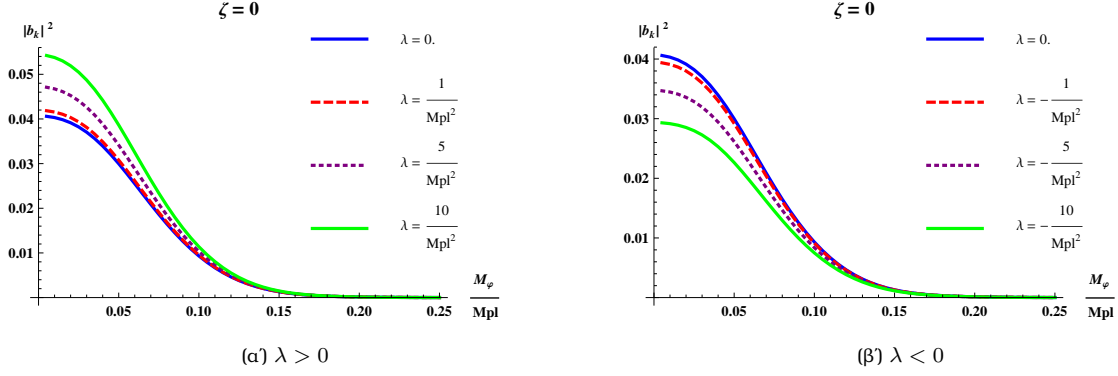
$$A(t) = \frac{3 \left[ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda M_{pl}^2 \left( \frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right) \right]}{1 - 3\lambda M_{pl}^2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}$$

και

$$B(t) = \frac{\frac{k^2}{M_{pl}^2 a^2(t)} - \lambda k^2 \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}} + \frac{\zeta R(t)}{M_{pl}}}{1 - 3\lambda M_{pl}^2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}$$

Οι αρχικές και οι τελικές μορφές των λύσεων θα είναι και εδώ  $h_{\mathbf{k}}^{in}(t_-) = \frac{e^{-i\omega_{in}t_-}}{\sqrt{2\omega_{in}}}$  και  $h_{\mathbf{k}}^{out}(t_+) = \frac{e^{-i\omega_{out}t_+}}{\sqrt{2\omega_{out}}}$  αφού οι παράγωγοι του  $a(t)$  μηδενίζονται ξανά στο μακρινό παρελθόν/μέλλον. Από την αριθμητική επίλυση της  $(\Delta'.18)$  προκύπτουν οι λύσεις  $h_{\mathbf{k}}$  που αντικαθιστούμε στην  $\Delta'.17$ . Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε τη μείωση του αριθμού σωματιδίων που παράγονται με την αύξηση της μάζας καθώς και αλλαγές στον αριθμό παραγόμενων σωματιδίων ίδιας μάζας ανάλογα τη σύζευξη  $\lambda$ . Για θετικά  $\lambda$  τα παραγόμενα σωματίδια αυξάνονται ενώ για αρνητικά  $\lambda$  μειώνονται (Σχ.  $\Delta'.3$ ).

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να αναπτύξουμε την παραπάνω μελέτη σε μία πιο ρεαλιστική κατάσταση. Για να το κάνουμε αυτό θα χρειαστούμε το μοντέλο του πληθωρισμού (inflation) το οποίο θεωρείται ότι ακολούθησε τη Μεγάλη Έκρηξη. Ο πληθωρισμός καθορίζεται από ένα κλασικό βαθμωτό πεδίο  $\phi$ . Μετά το τέλος του πληθωρισμού θεωρούμε ότι το σύμπαν βρίσκεται στη φάση που επικρατεί η ύλη (matter domination) και προσπαθούμε να συζεύσουμε το πεδίο  $\phi$  με ένα κβαντικό πεδίο  $X$  ώστε να μελετήσουμε τις αλλαγές στην παραγωγή σωματιδίων.



Σχήμα Δ'.3: Γραφική παράσταση του  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  συναρτήσει της μάζας  $m_\phi$

### Δ'.3 Πληθωρισμός

#### Δ'.3.1 Το βαθμωτό πεδίο $\phi$ (inflaton) που καθοδηγεί τον πληθωρισμό

Δεν θα αναπτύξουμε πλήρως την ιδέα του πληθωρισμού καθώς αυτό είναι ένα θέμα από μόνο του. Ο πληθωρισμός τοποθετείται ακριβώς μετά τη Μεγάλη Έκρηξη, διαρκεί ελάχιστα και φαίνεται απαραίτητος ώστε να γίνουν κατανοητές παρατηρήσεις που δεν μπορούν να εξηγηθούν χρησιμοποιώντας μόνο το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης.

Θεωρούμε ένα 4-διάστατο σύμπαν FRW με μετρική  $ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2$  και ένα βαθμωτό πεδίο  $\phi$  το οποίο είναι ομογενές και εξαρτάται μόνο από το χρόνο  $t$ . Ξεκινάμε από τη δράση

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

Όπως δείχνουμε στο παράρτημα Β'.3 μεταβολή αυτής της δράσης ως προς  $\delta g^{\mu\nu}$  οδηγεί στις εξισώσεις πεδίου του Einstein (Β'.22)

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

με τον τανυστή ενέργειας-ορμής (Β'.23)

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + g_{\mu\nu} V(\phi)$$

Παίρνουμε το χρονικό κομμάτι των εξισώσεων του Einstein

$$\begin{aligned} G_{00} = -8\pi G T_{00} &\Rightarrow G_{00} = -8\pi G \left[ \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} g_{00} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + g_{00} V(\phi) \right] \\ \Rightarrow G_{00} = -8\pi G \left[ \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} g^{00} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + V(\phi) \right] &\Rightarrow -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = -8\pi G \left[ \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \end{aligned}$$

και καταλήγουμε στην εξίσωση Friedmann

$$H^2(t) = \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right] \quad (\Delta'.19)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει  $G = M_{pl}^{-2}$  και έχουμε ορίσει την παράμετρο Hubble  $H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ . Αν πάρουμε το χωρικό κομμάτι των εξισώσεων του Einstein θα έχουμε

$$\begin{aligned} G_{ii} = -8\pi G T_{ii} &\Rightarrow G_{ii} = -8\pi G \left[ \partial_i \phi \partial_i \phi - \frac{1}{2} g_{ii} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + g_{ii} V(\phi) \right] \\ \Rightarrow G_{ii} = -8\pi G \left[ -\frac{1}{2} g_{ii} g^{00} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + g_{ii} V(\phi) \right] &\Rightarrow 2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t) = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \left[ -\frac{1}{2} (-a^2(t)) \dot{\phi}^2 - a^2(t) V(\phi) \right] \\ \Rightarrow 2 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} &= -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right] \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς για την πυκνότητα ενέργειας  $\rho_\phi \equiv \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$  και την πίεση  $p_\phi \equiv \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)$  και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την (Δ'.19) προκύπτει η εξίσωση επιτάχυνσης

$$2 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \rho_\phi = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} p_\phi \Rightarrow 2 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} p_\phi - \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \rho_\phi \Rightarrow \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi}{3M_{pl}^2} (\rho_\phi + 3p_\phi) \quad (\Delta'.20)$$

Τέλος το πεδίο  $\phi$  ικανοποιεί την εξίσωση Klein - Gordon

$$\ddot{\phi}(t) + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \dot{\phi}(t) + V_\phi = 0 \Rightarrow \ddot{\phi}(t) + 3H(t) \dot{\phi}(t) + V_\phi = 0$$

αφού εξαρτάται μόνο από το χρόνο.

Ορίζουμε τον πληθωρισμό (inflation) να είναι η χρονική περίοδος κατά την οποία  $\ddot{a}(t) > 0$ , μια επιταχυνόμενη διαστολή. Αυτό μπορεί να γραφτεί

$$inflation \equiv \ddot{a}(t) > 0 \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{H^{-1}(t)}{a(t)} \right) < 0 \equiv p_\phi < -\frac{\rho_\phi}{3}$$

Ο ορισμός  $\frac{d}{dt} \left( \frac{H^{-1}(t)}{a(t)} \right) < 0$  είναι αυτός που έχει ένα άμεσο γεωμετρικό νόημα. Σημαίνει ότι το μήκος Hubble ( $H^{-1}$ ), μετρημένο ως προς τις συν-κινούμενες συντεταγμένες  $\frac{H^{-1}}{a}$ , μειώνεται κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Επιστρέφουμε στις εξισώσεις του πεδίου  $\phi$  που θα ονομάζουμε inflaton

$$H(t)^2 = \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right] \quad (\Delta'.21)$$

$$\ddot{\phi} + 3H(t) \dot{\phi} + V_\phi = 0 \quad (\Delta'.22)$$

Από τον τελευταίο ορισμό για τον πληθωρισμό που προκύπτει άμεσα από την εξίσωση επιτάχυνσης (Δ'.20) έχουμε

$$\ddot{a} > 0 \iff p_\phi < -\frac{\rho_\phi}{3} \iff \frac{\dot{\phi}^2}{2} < V(\phi)$$

Δηλαδή έχουμε πληθωρισμό όταν ο όρος της δυναμικής ενέργειας επικρατεί. Αυτό είναι πιθανό αν το δυναμικό είναι αρκετά επίπεδο ώστε το βαθμωτό πεδίο να “κυλάει” αργά. Επιπλέον το δυναμικό πρέπει να έχει ελάχιστο στο οποίο όταν φτάσει το πεδίο  $\phi$  ο πληθωρισμός θα σταματήσει.

Η στρατηγική που ακολουθείται στη λύση αυτών των εξισώσεων είναι η προσέγγιση slow-roll σύμφωνα με την οποία θεωρούμε

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \quad \text{και} \quad \dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$$

Τότε οι εξισώσεις (Δ'.21) και (Ε'.1) έχουν την απλούστερη μορφή

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} V(\phi) \quad 3H\dot{\phi} \simeq -V_\phi$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές εξισώσεις μπορούμε να βρούμε

$$H(t) = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \frac{V}{V_\phi} \dot{\phi}$$

απ' όπου προκύπτει η σχέση για το  $a(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \frac{V}{V_\phi} \dot{\phi} &\Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} [\ln(a(t'))] dt' = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{t_0}^t \frac{V}{V_\phi} \dot{\phi} dt' \Rightarrow \ln a(t) - \ln a(t_0) = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} \frac{V}{V_\phi} d\phi \\ &\Rightarrow \ln \left[ \frac{a(t)}{a(t_0)} \right] - \frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} \frac{V}{V_\phi} d\phi \Rightarrow a(t) = a_0 \exp \left[ -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{\phi_0}^{\phi(t)} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi \right] \end{aligned} \quad (\Delta'.23)$$

με  $a_0 = a(t_0)$ ,  $\phi_0 = \phi(t_0)$  και  $t_0$  η χρονική στιγμή που ξεκινάει το inflation. Επιπλέον συνδυάζοντας πάλι τις δυο εξισώσεις μπορούμε να βρούμε για το πεδίο

$$\dot{\phi} = -\frac{M_{pl}}{\sqrt{24\pi}} \frac{V_\phi}{\sqrt{V}}$$

απ' όπου προκύπτει η σχέση για το  $\phi(t)$

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{M_{pl}}{\sqrt{24\pi}} \int_{t_0}^t \frac{V_\phi}{\sqrt{V}} dt' \quad (\Delta'.24)$$

Το τέλος του σεναρίου slow-roll έρχεται όταν  $\frac{\dot{\phi}^2}{2} \simeq V(\phi)$ . Δηλαδή για τη χρονική στιγμή  $t_f$  που τελειώνει το inflation θα ισχύει

$$\left[ -\frac{M_{pl}}{\sqrt{24\pi}} \frac{V_\phi}{\sqrt{V}} \right]^2 \simeq 2V \Rightarrow \frac{V(\phi(t_f))}{V_\phi(\phi(t_f))} = \frac{M_{pl}}{\sqrt{48\pi}} \quad (\Delta'.25)$$

Εξειδικεύουμε τη μελέτη στο δυναμικό  $V(\phi) = \frac{1}{2}M_\phi^2\phi^2$ . Τότε οι εξισώσεις (Δ'.21) και (Ε'.1) παίρνουν τη μορφή

$$H^2 = \frac{8\pi}{6M_{pl}^2}(\dot{\phi}^2 + M_\phi^2\phi^2) \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + M_\phi^2\phi = 0$$

Από την (Δ'.23) η σχέση για το  $a(t)$  γράφεται

$$a(t) = a_0 \exp \left[ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{M_\phi}{M_{pl}} \left( \phi_0 t - \frac{M_\phi M_{pl}}{\sqrt{48\pi}} t^2 \right) \right]$$

(έχουμε επιλέξει  $t_0 = 0$ ) ενώ από την (Δ'.24) η σχέση για το  $\phi$  γίνεται

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{M_\phi M_{pl}}{\sqrt{12\pi}} t$$

Για τη χρονική στιγμή που τελειώνει ο πληθωρισμός από την (Δ'.25) προκύπτει

$$t_f = \frac{-M_{pl} + 2\phi_0\sqrt{3\pi}}{M_\phi M_{pl}}$$

που δίνει στο  $\phi$  την τελική τιμή

$$\phi(t_f) = \frac{M_{pl}}{\sqrt{12\pi}}$$

Αρχικά θα ορίσουμε έναν αδιάστατο χρόνο  $t \equiv M_\phi t$  και το αδιάστατο πεδίο  $\phi(t) \equiv \frac{\phi(t)}{M_{pl}}$  και θα ξαναγράψουμε τις σχέσεις μας στην μορφή

$$a(t) = a_0 \exp \left[ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left( \phi_0 t - \frac{t^2}{\sqrt{48\pi}} \right) \right] \quad , \quad \phi(t) = \phi_0 - \frac{t}{\sqrt{12\pi}}$$

$$t_f = 2\sqrt{3\pi}\phi_0 - 1 \quad , \quad \phi(t_f) = \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \quad , \quad \dot{\phi}(t_0) = -\frac{1}{\sqrt{12\pi}}$$

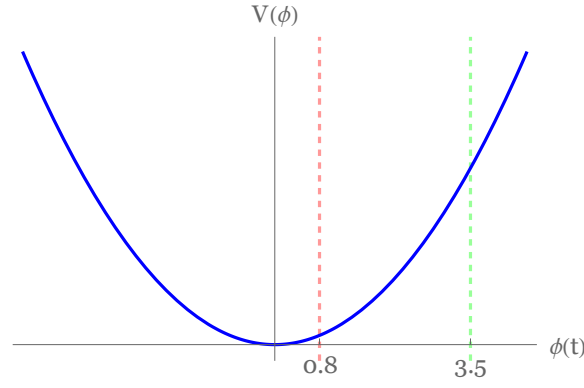
Οι παράμετροι που χρησιμοποιούμε στην αριθμητική μελέτη είναι

$$M_{pl} = 10^{19} \text{ GeV} \quad , \quad \phi_0 = 3.5 \quad , \quad t_0 = 0 \quad , \quad a_0 = 1 \quad , \quad M_\phi = 10^{-6} M_{pl}$$

Η παράμετρος που χρειάζεται κάποια εξήγηση είναι η αρχική τιμή του πεδίου  $\phi_0 = 3.5$ . Ορίζουμε μια ποσότητα  $N$  που ονομάζουμε e-folds με τη σχέση

$$N \equiv \ln \frac{a(t_f)}{a(t_0)}$$

η οποία υπολογίζεται στα πλαίσια της προσέγγισης slow - roll. Η ελάχιστη ποσότητα των e-folds που χρειάζεται να έχει το μοντέλο για να μην εμφανίσει κοσμολογικά προβλήματα είναι  $\sim 70$ . Μόνο τότε δηλαδή



Σχήμα Δ'.4: Γραφική παράσταση του δυναμικού  $V(\phi) = \frac{M_\phi^2 \phi^2}{2M_{pl}^2}$  συναρτήσεως του πεδίου  $\phi$

θα έχουμε αρκετό πληθωρισμό. Επιλέγουμε λοιπόν ως αρχικές συνθήκες στη θεωρία μας  $\phi(t_0) = 3.5$  και  $\dot{\phi}(t_0) = 1$ . Τότε στα πλαίσια της προσέγγισης slow - roll οι λύσεις μας ικανοποιούν την συνθήκη αυτή δίνοντας  $N = 74$ . Ποιοτικά αυτό μπορεί να γίνει πιο κατανοητό παρατηρώντας τη μορφή του δυναμικού του προβλήματος (Σχήμα (Δ'.4))

Παρατηρούμε ότι για να δουλέψει σωστά το σενάριο slow - roll, το πεδίο θα πρέπει να βρίσκεται πιο “ψηλά” αλλιώς θα φτάσει πολύ γρήγορα στο ελάχιστο και το φαινόμενο του πληθωρισμού θα εξαλειφθεί.

Θα λύσουμε τώρα αριθμητικά το αρχικό σύστημα των εξισώσεων Friedmann (Δ'.21) και Klein - Gordon (Ε'.1) γραμμένες σε αδιάστατη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} &= \frac{4\pi}{3M_{pl}^2} [\dot{\phi}^2 + M_\phi^2 \phi^2] \quad \longrightarrow \quad M_\phi^2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{4\pi}{3M_{pl}^2} [M_\phi^2 \dot{\phi}^2 + M_\phi^2 \phi^2] \\ &\Rightarrow \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{4\pi}{3} (\dot{\phi}^2(t) + \phi^2(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) + 3H(t)\dot{\phi}(t) + M_\phi^2 \phi(t) &= 0 \quad \longrightarrow \quad M_\phi^2 \ddot{\phi}(t) + 3M_\phi H(t)M_\phi \dot{\phi}(t) + M_\phi^2 \phi(t) = 0 \\ &\Rightarrow \ddot{\phi}(t) + 3H(t)\dot{\phi}(t) + \phi(t) = 0 \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας όμως τις αρχικές συνθήκες που έχουν προκύψει στα πλαίσια του slow - roll ,δηλαδή

$$\phi(t_0) = \phi_0 \quad , \quad \dot{\phi}(t_0) = -\frac{1}{\sqrt{12\pi}}$$

Στο σχήμα (Δ'.5) φαίνεται η μορφή του  $\phi$  από την αριθμητική λύση καθώς και από την προσέγγιση slow - roll. Η κάθετη γράμμη δηλώνει τη χρονική στιγμή που τελειώνει ο πληθωρισμός

$$t_f = 2\sqrt{3\pi}\phi_0 - 1$$

Παρατηρούμε πως μέχρι το τέλος του πληθωρισμού η αριθμητική και η προσεγγιστική λύση ταυτίζονται. Μετά το τέλος του πληθωρισμού το πεδίο  $\phi$  ταλαντώνεται στο ελάχιστο του δυναμικού παράγοντας σωματίδια μέχρι να αποδιεγερθεί εντελώς.

### Δ'.3.2 Γενικευμένοι κινητικοί όροι του inflaton

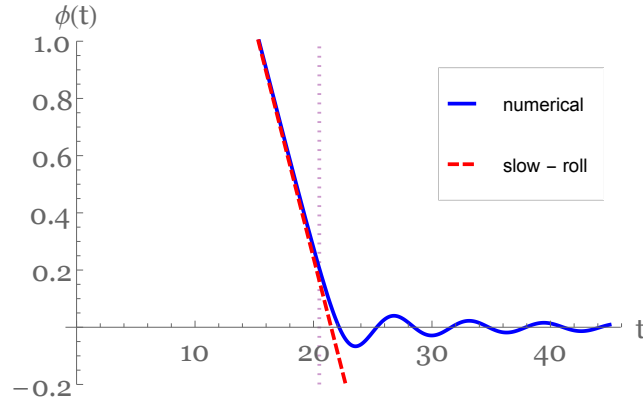
Εισαγάγουμε στην μελέτη μας έναν κινητικό όρο  $\lambda_1 G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$  και η δράση του πεδίου  $\phi$  παίρνει τη μορφή

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \lambda_1 G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\}$$

Όπως δείχνουμε και στο παράρτημα Β'.4 μεταβολή της δράσης αυτής ως προς  $g^{\mu\nu}$  δίνει τις εξισώσεις Einstein στη μορφή (Β'.32)

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G [T_{\mu\nu} + \lambda_1 \Theta_{\mu\nu}]$$





Σχήμα Δ.5: Γραφική παράσταση του  $\phi$  συναρτήσει του  $t$ . Στο γράφημα απεικονίζεται η αριθμητική λύση του  $\phi$  (συνεχής), η λύση στα πλαίσια του slow - roll (διακεκομμένη) καθώς και το τέλος του slow - roll (κουκίδες)

με

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + g_{\mu\nu} V(\phi)$$

και

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R + 2 \partial_a \phi \partial_{(\mu} \phi R_{\nu)}^a - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 + \nabla^a \phi \nabla^b \phi R_{\mu a \nu b} + \nabla_\mu \nabla^a \phi \nabla_\nu \nabla_a \phi \\ & - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \square \phi + g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} \nabla^a \nabla^b \phi \nabla_a \nabla_b \phi + \frac{1}{2} (\square\phi)^2 - \nabla_a \phi \nabla_b \phi R^{ab} \right] \end{aligned}$$

Για τις χρονικές συνιστώσες ισχύουν

$$G_{00} = -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}$$

$$T_{00} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} g_{00} (\partial_a \phi \partial^a \phi) + g_{00} V_\phi = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 + V_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V_\phi$$

και

$$\begin{aligned} \Theta_{00} = & -\frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi R + \partial_0 \phi \partial_0 \phi R_0^0 + \partial_0 \phi \partial_0 \phi R_0^0 + \partial^0 \phi \partial^0 \phi R_{0000} + \nabla_0 \nabla^a \phi \nabla_0 \nabla_a \phi \\ & - \nabla_0 \nabla_0 \phi \square \phi - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 G_{00} + g_{00} \left[ -\frac{1}{2} \nabla^a \nabla^b \phi \nabla_a \nabla_b \phi + \frac{1}{2} (\square\phi)^2 - \partial_0 \phi \partial_0 \phi R^{00} \right] \\ = & -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 R + 2 \dot{\phi}^2 R_0^0 + \ddot{\phi}^2 - \ddot{\phi} \left( \ddot{\phi} - 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \dot{\phi} \right) - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 G_{00} \\ & + g_{00} \left[ -\frac{1}{2} \left( \ddot{\phi} - 3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \dot{\phi}^2 \right) + \frac{1}{2} \left( \ddot{\phi}^2 - 6 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \dot{\phi} \ddot{\phi} + \frac{9 \dot{a}^2(t)}{2 a^2(t)} \dot{\phi}^2 \right) - \dot{\phi}^2 R^{00} \right] \\ = & -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 R + 2 \dot{\phi}^2 R_0^0 - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 G_{00} + \frac{12 \dot{a}^2(t)}{2 a^2(t)} \dot{\phi}^2 - g_{00} \dot{\phi}^2 R^{00} = \dot{\phi}^2 \left[ -\frac{1}{2} R + 2 R_0^0 + \frac{1}{2} G_{00} + \frac{12 \dot{a}^2(t)}{2 a^2(t)} + R^{00} \right] \\ = & \dot{\phi}^2 \left[ -\frac{1}{2} 6 \left( \frac{\ddot{a}(t) a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) + 2 \left( 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \right) - \frac{1}{2} \left( -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) + \frac{12 \dot{a}^2(t)}{2 a^2(t)} + \left( -3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \right) \right] \\ = & \dot{\phi}^2 \left[ -\frac{6 \dot{a}^2(t)}{2 a^2(t)} + \frac{12 \dot{a}^2(t)}{2 a^2(t)} + \frac{3 \dot{a}^2(t)}{2 a^2(t)} \right] = \frac{9}{2} \dot{\phi}^2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \end{aligned}$$

Η εξίσωση Friedmann θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} G_{00} = & -8\pi G [T_{00} + \lambda_1 \Theta_{00}] \\ \Rightarrow & -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V_\phi + \lambda_1 \frac{9}{2} \dot{\phi}^2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right] \Rightarrow \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{4\pi}{3M_{pl}^2} \left[ \dot{\phi}^2(t) \left( 1 - 9\lambda_1 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) + 2V(\phi) \right] \end{aligned}$$

ενώ για την εξίσωση κίνησης από την (Δ.14) βρίσκουμε

$$\left(1 - 3\lambda_1 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) \ddot{\phi}(t) + \left(3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - 3\lambda_1 \left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)\right) \dot{\phi}(t) + V_\phi = 0$$

Εξειδικεύουμε τη μελέτη για ένα δυναμικό της μορφής  $V(\phi) = \frac{1}{2}M_\phi^2\phi^2$  και οι παραπάνω γράφονται

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{4\pi}{3M_{pl}^2} \left[ \dot{\phi}^2(t) \left(1 - 9\lambda_1 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) + M_\phi^2\phi^2(t) \right]$$

$$\left(1 - 3\lambda_1 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) \ddot{\phi}(t) + \left(3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - 3\lambda_1 \left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)\right) \dot{\phi}(t) + M_\phi^2\phi(t) = 0$$

Ορίζουμε τα αδιάστατα  $t \equiv M_\phi \cdot t$ ,  $\phi(t) \equiv \phi(t)/M_{pl}$  και παίρνουμε τις αδιάστατες εξισώσεις

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{4\pi}{3} \left[ \dot{\phi}^2(t) \left(1 - 9\lambda_1 M_\phi^2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) + \phi^2(t) \right]$$

$$\left(1 - 3\lambda_1 M_\phi^2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) \ddot{\phi}(t) + \left(3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - 3\lambda_1 M_\phi^2 \left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)\right) \dot{\phi}(t) + \phi(t) = 0$$

Αρχικά θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια αριθμητική λύση για το  $\phi(t)$ . Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε τον ορισμό της παραμέτρου Hubble  $H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  και γράφουμε τις παραπάνω στη μορφή

$$H^2(t) = \frac{4\pi}{3} \left[ \dot{\phi}^2(t) \left(1 - 9\lambda_1 M_\phi^2 H^2(t)\right) + \phi^2(t) \right] \quad (\Delta.26)$$

$$\left(1 - 3\lambda_1 M_\phi^2 H^2(t)\right) \ddot{\phi}(t) + \left(3H(t) - 3\lambda_1 M_\phi^2 H(t)(2\dot{H}(t) + 3H^2(t))\right) \dot{\phi}(t) + \phi(t) = 0 \quad (\Delta.27)$$

Λύνουμε την (Δ.26) ως προς  $H(t)$  και στη συνέχεια παίρνουμε τη χρονική παράγωγο του αποτελέσματος. Αντικατάστασή τους στην (Δ.27) έχει ως αποτέλεσμα μια εξίσωση Klein - Gordon η οποία θα εμπεριέχει μόνο το  $\phi(t)$  και χρονικές του παραγώγους. Στο όριο  $\lambda_1 \rightarrow 0$  η μορφή του  $\phi(t)$  είναι ίδια με την αρχική μας περίπτωση. Για  $\lambda_1 \neq 0$  αλλά αρνητικό μπορούμε να βρούμε και πάλι τέτοιες μορφές λύσεων. Χρειαζόμαστε όμως την προσέγγιση slow - roll για να βρούμε τις αρχικές συνθήκες που θα μας δώσουν τα απαραίτητα e-folds. Ας δούμε λοιπόν τι συμβαίνει στα πλαίσια του slow roll. Αρχικά παίρνουμε την προσέγγιση  $\dot{\phi}(t)^2 \ll V(\phi)$  στην αρχική εξίσωση friedmann οπότε η εξίσωση (Δ.26) δίνει

$$H^2(t) = \frac{4\pi}{3} \phi^2(t) \quad (\Delta.28)$$

Επιπλέον θεωρούμε τις προσεγγίσεις  $3\lambda_1 H^2 \gg 1$ ,  $\frac{\dot{H}}{H} \ll 1$  και  $\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}$  στην αρχική εξίσωση Klein - Gordon οπότε η (Δ.27) δίνει

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\phi(t)}{9\lambda_1 M_\phi^2 H^3(t)} \quad (\Delta.29)$$

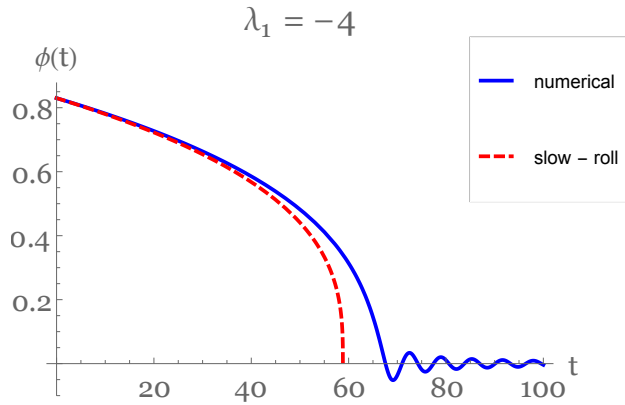
Ορίζουμε μια ποσότητα  $N$  που ονομάζουμε e-folds με τη σχέση

$$N \equiv \ln \frac{a(t_f)}{a(t_0)}$$

Όπως πριν η ελάχιστη ποσότητα των e-folds που χρειάζεται να έχει το μοντέλο για να μην εμφανίσει κοσμολογικά προβλήματα είναι  $\sim 70$ . Επιλέγουμε λοιπόν ως αρχικές συνθήκες στη θεωρία μας  $\phi(t_0) = 0.83$ ,  $a(t_0) = 1$  και  $\lambda_1 \equiv \lambda_1 M_\phi^2 = -4$ . Τότε στα πλαίσια της προσέγγισης slow - roll οι λύσεις μας ικανοποιούν την συνθήκη αυτή δίνοντας  $N = 74$ . Ξεκινάμε λύνοντας την (Δ.28) ως προς  $H(t)$  και αντικαθιστώντας στην (Δ.29). Η σχέση που δίνει το  $\phi(t)$  σε αυτή την περίπτωση μπορεί να βρεθεί αναλυτικά

$$\phi(t) = \frac{\left(18.2972 - \frac{\sqrt{3}t}{\pi^{3/2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{2 \cdot 2^{3/2}} = 0.31498(18.2972 - 0.311054t)^{\frac{1}{3}}$$

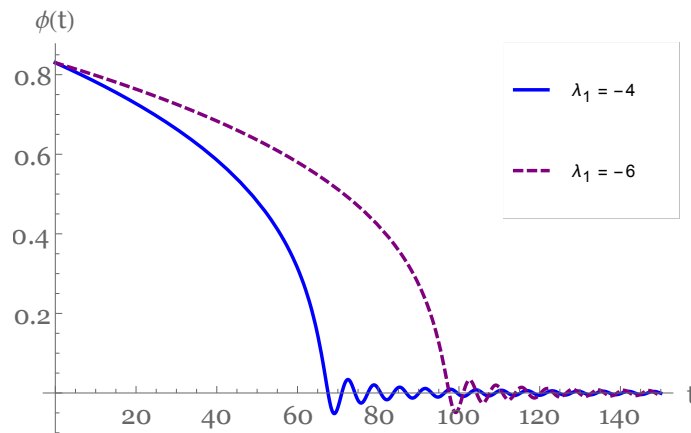
Παρατηρούμε εδώ ότι από κάποια χρονική στιγμή και μετά η βάση του εκθέτη  $\frac{1}{3}$  γίνεται αρνητική και πέρα από αυτό το σημείο δεν μπορεί να συνεχιστεί η γραφική αναπαράσταση του  $\phi$ , κάτι που φαίνεται και στο



Σχήμα Δ'.6: Αναλυτική λύση για το  $\phi(t)$  στα πλαίσια του slow roll approximation (διακεκομμένο) και αριθμητική λύση από τις αρχικές σχέσεις (συνεχές)

σχήμα (Δ'.6). Με αυτές τις αρχικές συνθήκες που έχουν προκύψει στα πλαίσια του slow - roll μπορούμε να βρούμε και την αριθμητική λύση από το σύστημα των αρχικών εξισώσεων. Τις απεικονίζουμε και τις δύο στο σχήμα (Δ'.6)

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι με την εισαγωγή της ζεύξης με τον τανυστή Einstein στη θεωρία μας μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο  $\lambda_1$  τέτοιο ώστε να έχουμε τον απαραίτητο αριθμό από e-folds ακόμα και αν το πεδίο  $\phi$  έχει μικρότερη αρχική τιμή. Δηλαδή ακόμα και αν το πεδίο αρχίσει να κυλά από χαμηλότερο σημείο του δυναμικού υπάρχουν κατάλληλα  $\lambda_1$  που μπορούν να παρατείνουν τον πληθωρισμό. Επιπλέον όσο αυξάνεται το  $\lambda_1$  κατά απόλυτη τιμή τόσο θα αργεί να έρθει το τέλος του σεναρίου slow - roll όπως φαίνεται και στο σχήμα (Δ'.7) Το τέλος του σεναρίου slow roll έρχεται όταν στην αρχική εξίσωση Friedmann



Σχήμα Δ'.7: Αριθμητική λύση για το  $\phi(t)$  από τις αρχικές σχέσεις για  $\lambda_1 = -4$  (συνεχές) και  $\lambda_1 = -6$  (διακεκομμένο)

ο κινητικός όρος γίνει συγκρίσιμος με το δυναμικό

$$\dot{\phi}^2(t) \left( 1 - 9\lambda_1 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) \simeq 2V(\phi)$$

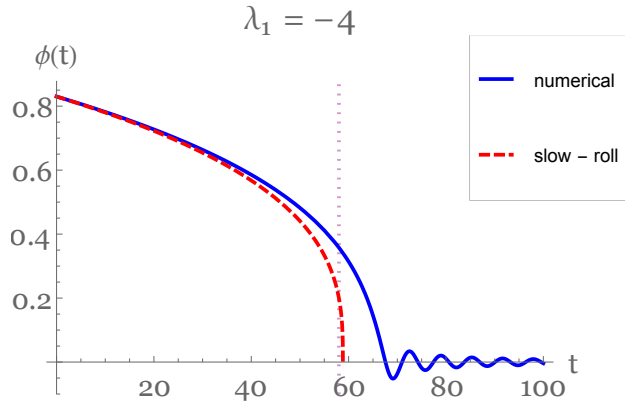
το οποίο μεταφράζεται στην σχέση

$$\dot{\phi}^2(t) = \frac{\phi^2(t)}{1 - 9\lambda_1 H^2(t)}$$

Σημειώνουμε ότι αυτό είναι ένα ακόμα σημάδι ότι το  $\lambda_1$  πρέπει να είναι αρνητικό ή στην περίπτωση που είναι θετικό να μην είναι τέτοιο που να δίνει μηδενισμό στον παρονομαστή. Αντικατάσταση της αναλυτικής

λύσης του  $\phi(t)$  που έχει βρεθεί στα πλαίσια της slow roll δίνει την χρονική στιγμή του τέλους του slow roll

$$t_f = 58.0149$$



Σχήμα Δ'.8: Χρονική στιγμή που τελειώνει το slow roll (κουκίδες)

Στα πλαίσια της προσέγγισης slow - roll το τέλος του σεναρίου slow roll όπως περιγράφηκε παραπάνω ισοδυναμεί με το τέλος του πληθωρισμού. Για να το δούμε αυτό βρίσκουμε αρχικά την αναλυτική μορφή του  $a(t)$  στα πλαίσια της προσέγγισης slow-roll. Εξ ορισμού έχουμε πληθωρισμό όσο το  $\ddot{a}(t) > 0$ . Η λύση του  $a(t)$  από το slow - roll δίνει ότι το τέλος του inflation έρχεται τη χρονική στιγμή

$$t_f = 58.0067$$

## Δ'.4 Παραγωγή Σωματιδίων μετά τον Πληθωρισμό

### Δ'.4.1 Παραγωγή σωματιδίων με κανονικό κινητικό όρο

Μελετάμε την παραγωγή σωματιδίων μετά το τέλος του πληθωρισμού χρησιμοποιώντας δύο συζευγμένα βαθμωτά πεδία σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν FRW. Τα πεδία που χρησιμοποιούμε είναι το κλασικό πεδίο inflaton,  $\phi(t)$ , που καθοδηγεί τον πληθωρισμό και ένα κβαντικό πεδίο,  $X(x)$ , που μας βοηθά στη μέτρηση των παραγόμενων σωματιδίων. Η δράση του προβλήματος μπορεί να γραφτεί ως

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{M_{pl}^2 R}{16\pi} + \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (g^{\mu\nu} + \lambda_1 G^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - M_\phi^2 \phi^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ (g^{\mu\nu} + \lambda_2 G^{\mu\nu}) \partial_\mu X \partial_\nu X - (M_X^2 + \zeta R + g^2 \phi^2) X^2 \right] \right\}$$

Ορίζουμε τον αδιάστατο χρόνο  $t = M_\phi t$  και την αδιάστατη παράμετρο  $\xi = \lambda M_\phi^2$ . Η δράση για το πεδίο  $\phi$  οδηγεί στις εξισώσεις Friedmann

$$H^2(t) = \frac{4\pi}{3} \left[ \dot{\phi}^2(t) (1 - 9\lambda_1 H^2(t)) + \phi^2(t) \right]$$

και Klein - Gordon

$$(1 - 3\lambda_1 H(t)^2) \ddot{\phi}(t) + (3H(t) - 3\lambda_1 H(t)(2\dot{H}(t) + 3H^2(t))) \dot{\phi}(t) + \phi(t) = 0$$

από τις οποίες στο προηγούμενο κεφάλαιο βρήκαμε τη χρονική στιγμή που τελειώνει ο πληθωρισμός καθώς και την αριθμητική λύση του  $\phi$  που θα συζευχθεί με το  $X$ .

Μεταβολή της δράσης ως προς το πεδίο  $X$  οδηγεί στην εξίσωση Klein - Gordon

$$\square X + [M_X + \zeta R + g^2 \phi^2] X = 0 \quad \text{με} \quad \square X = (-g)^{-1/2} \partial_\mu [(-g)^{1/2} [g^{\mu\nu} + \lambda_2 G^{\mu\nu}] \partial_\nu X]$$

Για την μετρική μας  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t))$  έχουμε

$$G^{00} = -3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}, \quad G^{ii} = \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)}, \quad R = 6\frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)}$$

και η Klein - Gordon παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \left(1 - 3\lambda_2\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right)\ddot{X}(x) + \left(3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - 3\lambda_2\left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)\right)\dot{X}(x) \\ & - a^{-2}(t)\sum_{i=1}^3\partial_i^2 X(x) + \lambda_2\frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)}\sum_{i=1}^3\partial_i^2 X(x) + (M_X^2 + \zeta R + g^2\phi^2(t))X(x) = 0 \end{aligned}$$

Γράφουμε το πεδίο  $X(x)$  στη μορφή

$$X(x) = \sum_{\mathbf{k}}[\hat{a}_{\mathbf{k}}\chi_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\chi_{\mathbf{k}}^*(x)]$$

Αντικαθιστούμε το  $\chi_{\mathbf{k}}(x)$  στην παραπάνω θεωρώντας επιπλέον ότι είναι της μορφής  $\chi_{\mathbf{k}}(x) \sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\chi_{\mathbf{k}}(t)$  και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \left(1 - 3\lambda_2\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right)\ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + \left(3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - 3\lambda_2\left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)\right)\dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) \\ & + \left[\frac{k^2}{a^2(t)} - \lambda_2k^2\frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + M_X^2 + \zeta R + g^2\phi^2(t)\right]\chi_{\mathbf{k}}(t) = 0 \end{aligned}$$

Αν γράψουμε  $\chi_{\mathbf{k}}(t) \equiv f(t)h_{\mathbf{k}}(t)$  μπορούμε να διώξουμε την πρώτη παράγωγο και έτσι θα έχουμε

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \Omega^2(t)h_{\mathbf{k}}(t) = 0$$

με

$$\Omega(t) = \sqrt{B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4}}$$

όπου

$$A(t) = 3\frac{\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda_2\left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + 2\frac{\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)}{1 - 3\lambda_2\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}, \quad B(t) = \frac{\frac{k^2}{a^2(t)} - \lambda_2k^2\frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + M_X^2 + \zeta R + g^2\phi^2(t)}{1 - 3\lambda_2\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφτούν σε αδιάστατη μορφή

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \Omega^2(t)h_{\mathbf{k}}(t) = 0 \tag{Δ.30}$$

με

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \sqrt{B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4}} \\ A(t) &= 3\frac{\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda_2\left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + 2\frac{\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)}{1 - 3\lambda_2\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}} \\ B(t) &= \frac{\frac{k^2}{M_\phi^2 a^2(t)} - \lambda_2 M_\phi^2 \frac{k^2}{M_\phi^2} \frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + \frac{M_X^2}{M_\phi^2} + \frac{\zeta R(t)}{M_\phi^2} + \frac{g^2\phi(t)M_{pl}^2}{M_\phi^2}}{1 - 3\lambda_2\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}} \end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι μετά το τέλος του πληθωρισμού βρισκόμαστε στη φάση που επικρατεί η ύλη (matter domination) και ο παράγοντας  $a(t)$  θα έχει τη μορφή

$$a(t) = t^{2/3}$$

Είναι σημαντικό εδώ να σημειώσουμε ότι στη φάση που μελετάμε, δηλαδή για  $a(t) = t^{2/3}$  ο όρος του  $\lambda_2$  που εμφανίζεται στον αριθμητή της παραπάνω έκφρασης του  $B(t)$  τυχαίνει να μηδενίζεται. Αν προσδιορίσουμε τους συντελεστές Bogolyubov από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{\alpha}_k(t) = \frac{\dot{\Omega}_k(t)}{2\Omega_k(t)} \exp \left[ 2i \int \Omega_k(t') dt' \right] \beta_k(t) \quad (\Delta'.31)$$

$$\dot{\beta}_k(t) = \frac{\dot{\Omega}_k(t)}{2\Omega_k(t)} \exp \left[ -2i \int \Omega_k(t') dt' \right] \alpha_k(t) \quad (\Delta'.32)$$

τότε μια λύση της μορφής

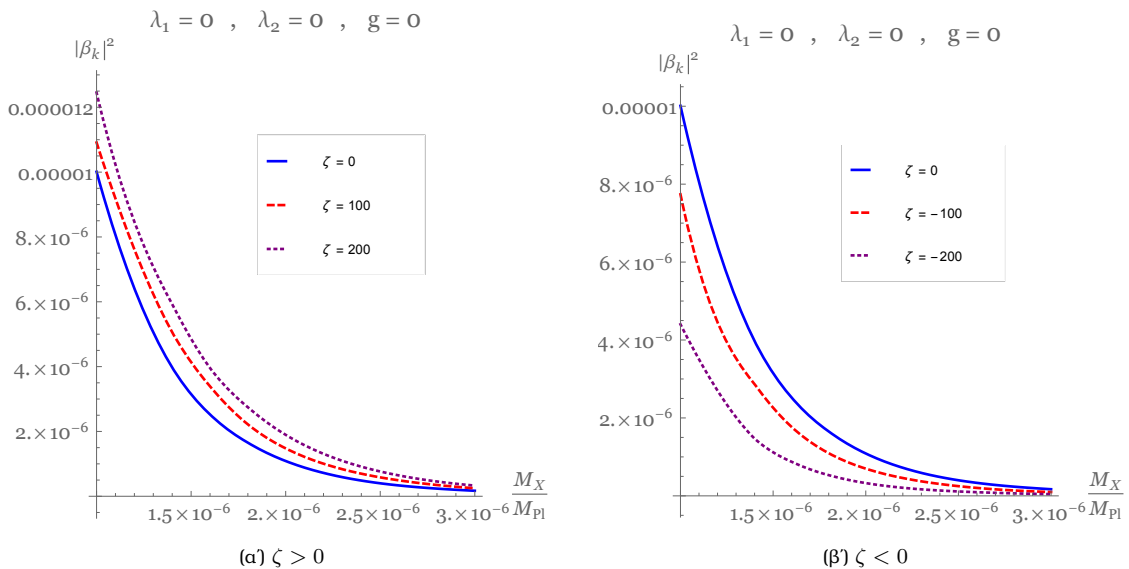
$$h_{\mathbf{k}}(t) = \frac{\alpha(t)}{\sqrt{2\Omega(t)}} e^{-i \int \Omega(t') dt} + \frac{\beta(t)}{\sqrt{2\Omega(t)}} e^{i \int \Omega(t') dt}$$

είναι λύση της (Δ'.30). Η ποσότητα  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  δηλώνει τον μέσο αριθμό σωματιδίων στην κατάσταση  $\mathbf{k}$ .

Σε αυτήν την ενότητα θεωρούμε ότι έχουμε το inflaton χωρίς επιπλέον κινητικούς όρους ( $\lambda_1 = 0$ ) όπως παρουσιάστηκε στο σχήμα (Δ'.5). Όμοια και το πεδίο  $X$  δεν έχει επιπλέον κινητικούς όρους ( $\lambda_2 = 0$ ). Την χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  έχουμε την αρχή του πληθωρισμού ο οποίος σύμφωνα με το σενάριο slow - roll θα τελειώσει τη χρονική στιγμή  $t_f = 20$ . Τότε το inflaton ταλαντώνεται γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού παράγοντας σωματίδια μέχρι να αποδιεγερθεί εντελώς. Από τη χρονική στιγμή  $t_f$  και μετά μπαίνουμε στη φάση που επικρατεί η ύλη. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε σύμφωνα με τα παραπάνω τον μέσο αριθμό σωματιδίων  $X$  που παράγονται. Θεωρούμε ότι μέχρι το τέλος του inflation δεν έχουμε παραγωγή σωματιδίων. Θα έχουμε δηλαδή ως αρχικές συνθήκες

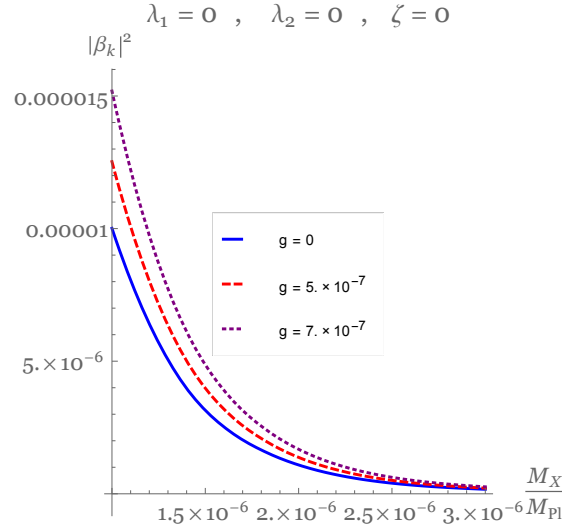
$$\alpha(t_f) = 1 \quad , \quad \beta(t_f) = 0$$

Επιπλέον για την αριθμητική μελέτη χρησιμοποιούμε  $M_\phi = 10^{-6} M_{pl}$  ,  $k = 10^{-5} M_{pl}$ . Τότε  $\Omega(t) > 0$  και ισχύει η αδιαβατική προσέγγιση  $\frac{\dot{\Omega}(t)}{\Omega(t)} \ll 1$ . Οι συντελεστές Bogolyubov θα σταθεροποιηθούν μετά τη χρονική στιγμή  $t_{flat} = 200$  και μετρώντας τους τότε μπορούμε να βρούμε τη μορφή του μέσου αριθμού σωματιδίων  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  συναρτήσει της μάζας  $M_X$  για  $M_X > 10^{-6} M_{pl}$ . Αρχικά επιλέγουμε το πεδίο  $X$  να μην έχει σύζευξη το πεδίο  $\phi$ , ( $g = 0$ ), αλλά να έχει σύζευξη στην καμπυλότητα  $R$ , ( $\zeta = 0$ ). Το σχήμα Δ'.9 επιβεβαιώνει το ήδη γνωστό αποτέλεσμα από το σχήμα Δ'.3, ότι δηλαδή ο αριθμός των παραγόμενων σωματιδίων αυξάνεται με θετική σύζευξη του πεδίου στην καμπυλότητα και μειώνεται με αρνητική σύζευξη. Ενισχύεται με αυτόν τον τρόπο και η διαφορετική αντιμετώπιση εύρεσης των συντελεστών Bogolyubov όπως προτείνεται μέσω της επίλυσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (Δ'.31),(Δ'.32).



Σχήμα Δ'.9: Πεδίο  $X$  χωρίς σύζευξη στο πεδίο  $\psi$  αλλά με σύζευξη στην καμπυλότητα.

Στη συνέχεια επιλέγουμε το πεδίο  $X$  να μην έχει σύζευξη στην καμπυλότητα  $R$ , ( $\zeta = 0$ ) αλλά να έχει σύζευξη με το πεδίο  $\phi$  ( $g \neq 0$ ), σχήμα Δ'.10.



Σχήμα Δ'.10: Πεδίο  $X$  χωρίς σύζευξη στη καμπυλότητα αλλά με σύζευξη στο πεδίο  $\phi$ .

Παρατηρούμε την πιο ραγδαία αύξηση στην παραγωγή σωματιδίων ίδιας μάζας καθώς ενισχύεται η σύζευξη  $g$ , αλλά και έναν πιθανό συσχετισμό των αποτελεσμάτων ανάμεσα σε μετρήσεις με  $g \neq 0$ ,  $\zeta = 0$  και  $g = 0$ ,  $\zeta > 0$

#### Δ'.4.2 Παραγωγή σωματιδίων με γενικευμένους κινητικούς όρους

Σε αυτήν την ενότητα θεωρούμε ότι το inflaton έχει μη-τετριμμένους κινητικούς όρους όπως περιγράφηκε στο σχήμα Δ'.8. Όμοια θα επιτρέψουμε και στο πεδίο  $X$  να έχει επιπλέον κινητικό όρο με διαφορετική εν γένει σύζευξη από αυτή του  $\phi$ , ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ). Θα έχουμε δηλαδή την πλήρη θεωρία της προηγούμενης ενότητας με δράση

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{M_{pl}^2 R}{16\pi} + \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (g^{\mu\nu} + \lambda_1 G^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - M_\phi^2 \phi^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ (g^{\mu\nu} + \lambda_2 G^{\mu\nu}) \partial_\mu X \partial_\nu X - (M_X^2 + \zeta R + g^2 \phi^2) X^2 \right] \right\}$$

μοντέλα του πληθωρισμού με  $\lambda_1 \neq 0$  και διαφορική εξίσωση

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \Omega^2(t) h_{\mathbf{k}}(t) = 0$$

όπου

$$\Omega(t) = \sqrt{B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4}}$$

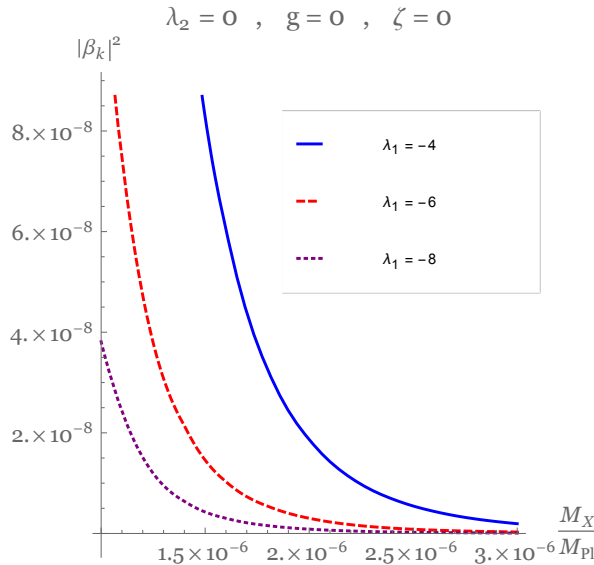
$$A(t) = 3 \frac{\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda_2 \left( \frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + 2 \frac{\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right)}{1 - 3\lambda_2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}$$

$$B(t) = \frac{\frac{k^2}{M_\phi^2 a^2(t)} - \lambda_2 M_\phi^2 \frac{k^2}{M_\phi^2} \frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + \frac{M_X^2}{M_\phi^2} + \frac{\zeta R(t)}{M_\phi^2} + \frac{g^2 \phi(t) M_{pl}^2}{M_\phi^2}}{1 - 3\lambda_2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}$$

με  $\lambda_2 \neq 0$ . Θεωρούμε ξανά πως στην εποχή μετά τον πληθωρισμό που μελετάμε την παραγωγή σωματιδίων ο παράγοντας  $a(t)$  έχει τη μορφή

$$a(t) = t^{2/3}$$

έτσι και εδώ ο παραπάνω όρος με  $\lambda_2$  στον αριθμητή του  $B(t)$  μηδενίζεται. Το διάγραμμα που μελετάμε είναι και εδώ ο μέσος αριθμός σωματιδίων στην κατάσταση  $\mathbf{k}$ ,  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$ , συναρτήσει της μάζας  $M_X$  για διάφορες παραμέτρους. Ξεκινάμε με πληθωρισμό όπου  $\lambda_1 \neq 0$  στο πεδίο  $X$  έχουμε  $\lambda_2 = 0$ . Επιπλέον δεν έχουμε σύζευξη του  $X$  με το  $\phi$  ή την καμπυλότητα. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα Δ.11. Η παραγωγή



Σχήμα Δ.11: Πεδίο  $X$  με κανονικό κινητικό όρο, χωρίς σύζευξη στο πεδίο  $\phi$ , χωρίς σύζευξη στην καμπυλότητα.

σωματιδίων είναι μειωμένη για ισχυρότερες συζεύξεις  $\lambda_1$ . Σημειώνουμε ότι το  $X$  δεν είναι συζευγμένο στο  $\phi$ , η μόνη επίδραση του  $\lambda_1$  είναι η αλλαγή στη χρονική στιγμή που τελειώνει το πληθωρισμό. Ο γενικευμένος κινητικός όρος δρα ως όρος τριτής για το inflaton καθυστερώντας το τέλος του πληθωρισμού και επηρεάζοντας έτσι τις αρχικές συνθήκες της παραγωγής σωματιδίων.

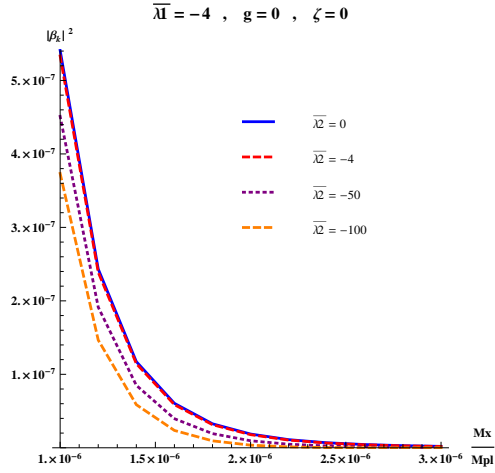
Στη συνέχεια επιτρέπουμε γενικευμένους όρους και στα δύο πεδία  $\phi$  και  $X$ , ( $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ ). Καταλήγουμε τότε στο σχήμα Δ.12 Παρατηρούμε πως χρειαζόμαστε αρκετά μεγαλύτερη σύζευξη  $\lambda_2$  από την τιμή του  $\lambda_1$  προκειμένου να έχουμε κάποια αλλαγή στην παραγωγή σωματιδίων. Αυτό συμβαίνει γιατί τη χρονική περίοδο που μελετάμε ο τανυστής Einstein έχει ήδη εξασθενήσει και χρειαζόμαστε μια πιο ισχυρή σύζευξη για εμφανή αποτελέσματα. Το συμπέρασμα και σε αυτή την περίπτωση είναι ότι η παρουσία σύζευξης του βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή Einstein δρα ως όρος τριτής απορροφώντας ενέργεια από την κινητική ενέργεια του βαθμωτού πεδίου. Όσο η σύζευξη  $\lambda_1$  γίνεται πιο ισχυρή, λιγότερη ενέργεια μεταφέρεται στο πεδίο  $X$  μέσω της σύζευξης με το inflaton, συνεπώς παράγονται λιγότερα σωματίδια.

## Δ.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την παραγωγή σωματιδίων λόγω της διαστολής του σύμπαντος για ένα βαθμωτό πεδίο με κινητικούς όρους συζευγμένους στον τανυστή Einstein. Αφού έγινε μια ανασκόπηση του μηχανισμού βαρυτικής παραγωγής σωματιδίων τον εφαρμόσαμε σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν FRW. Εισάγοντας τη σύζευξη στον τανυστή Einstein βρήκαμε ότι ο αριθμός των βαρυτικά παραγόμενων σωματιδίων μειώνεται όσο η σύζευξη αυτή γίνεται πιο ισχυρή.

Σε μια πιο ρεαλιστική κατάσταση, μελετήσαμε την παραγωγή σωματιδίων λόγω της διαστολής του σύμπαντος μετά το τέλος του πληθωρισμού, στην περίοδο της προ-θέρμανσης (preheating). Εισάγοντας ένα πεδίο  $X$  συζευγμένο στο πεδίο inflaton βρίσκουμε ότι όσο η σύζευξη αυτή αυξάνεται θα αυξάνεται και ο αριθμός των σωματιδίων  $X$  που παράγονται, όπως ήταν αναμενόμενο.





Σχήμα Δ'.12: Πεδίο  $X$  με μη-τετριμμένους κινητικούς όρους, χωρίς σύζευξη στο πεδίο  $\phi$  , χωρίς σύζευξη στην καμπυλότητα.

Στη συνέχεια παρουσιάσαμε την πληθωριστική φάση όταν αυτή καθοδηγείται από το πεδίο inflaton συζευγμένο με τον τανυστή Einstein και εισαγάγαμε την αντίστοιχη σύζευξη και στο πεδίο  $X$ . Αναπτύξαμε αναλυτικά τη μελέτη βαρυτικής παραγωγής σωματιδίων βαρέων σωματιδίων  $X$  παρουσία γενικευμένων κινητικών όρων. Βρήκαμε ότι όσο πιο ισχυρή είναι η σύζευξη των κινητικών όρων, είτε του inflaton είτε των  $X$ , με τον τανυστή Einstein τόσο μειώνεται ο αριθμός των παραγόμενων σωματιδίων. Η κυρίαρχη επίδραση έρχεται από τη σύζευξη του inflaton στον τανυστή Einstein κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού αφού μετά το τέλος του ο τανυστής Einstein εξασθενεί.

Όπως αναφέραμε η παρουσία σύζευξης του βαθμωτού πεδίου με τον τανυστή Einstein δρα ως όρος τριβής απορροφώντας ενέργεια από την κινητική ενέργεια του βαθμωτού πεδίου. Μπορούμε να αποδώσουμε τη μείωση στην παραγωγή σωματιδίων στον ίδιο μηχανισμό. Όσο η σύζευξη  $\lambda_1$  γίνεται πιο ισχυρή, λιγότερη ενέργεια μεταφέρεται στο πεδίο  $X$  μέσω της σύζευξης με το inflaton, συνεπώς παράγονται λιγότερα σωματίδια. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό και ως αποτέλεσμα της γεωμετρίας. Η επίδραση της καμπυλότητας είναι ισχυρή κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού απορροφώντας ενέργεια, ενώ μετά τον πληθωρισμό η καμπυλότητα είναι μικρή και αυτός είναι ο λόγος που η σύζευξη του  $X$  με τον τανυστή Einstein έχει ασήμαντη επίδραση.

Το κύριο θεωρητικό πρόβλημα στην παραγωγή σωματιδίων μετά τον πληθωρισμό είναι να περιοριστούν τα σωματίδια που παράγονται έτσι ώστε να μην κατακλύσουν το σύμπαν. Αυτό κατορθώνεται επιλέγοντας κατάλληλα τις παραμέτρους της θεωρίας. Η βαρυτική παραγωγή σωματιδίων είναι ένας δυναμικός μηχανισμός ανάμεσα σε ένα κλασικό πεδίο  $\phi$  και ένα κβαντικό πεδίο  $X$ . Η εισαγωγή γενικευμένων κινητικών όρων στη θεωρία φαίνεται ότι μπορεί να περιορίσει τον αριθμό των παραγόμενων σωματιδίων μειώνοντας έτσι τις παραμέτρους που χρειάζονται για να παραγάγουν ένα ρεαλιστικό κοσμολογικό μοντέλο.

## Παράρτημα Ε΄

# Προσεγγιστικές λύσεις βαθμωτού πεδίου υπό κατάρρευση

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε μια αναλυτική λύση των εξισώσεων Einstein και Klein-Gordon στο τετριμμένο σενάριο,  $\lambda = 0$ , καθώς και μια προσεγγιστική λύση τους κοντά στη χρονική στιγμή  $t = t_s$  για  $\lambda \neq 0$ .

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Klein-Gordon με  $\dot{\phi}(t)$  και θέτοντας  $w(t) \equiv \dot{\phi}^2(t)$  καταλήγουμε στην

$$(3\lambda a(t)\dot{a}^2(t) + a^3(t)) \dot{w}(t) + (6\lambda\dot{a}^3 + 12\lambda a(t)\dot{a}(t)\ddot{a}(t) + 6a^2(t)\dot{a}(t)) w(t) = -2\frac{dV}{dt} a^3(t), \quad (\text{E'.1})$$

όπου η τελεία (·) δηλώνει παραγώγιση ως προς το χρόνο. Με τις ίδιες αντικαταστάσεις η εξίσωση Friedmann παίρνει τη μορφή

$$a^2(t)[-|\Lambda| + 4\pi w(t)] - 3\dot{a}^2(t)(1 - 12\pi\lambda w(t)) + 8\pi a^2(t)V = 0. \quad (\text{E'.2})$$

Όπως αναφέραμε εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση  $V = 0$ ,  $\lambda = 0$ . Οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται τότε στις

$$a^3(t)\dot{w}(t) + 6a^2(t)\dot{a}(t)w(t) = 0, \quad (\text{E'.3})$$

$$a^2(t)[-|\Lambda| + 4\pi w(t)] - 3\dot{a}^2(t) = 0. \quad (\text{E'.4})$$

Λύνοντας την δεύτερη εξίσωση ως προς  $w(t)$  και αντικαθιστώντας τη λύση αυτή στην πρώτη βρίσκουμε

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 2\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{\dot{a}^4(t)}{a^4(t)} = -|\Lambda|.$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε  $\dot{a}(t) = H(t)a(t)$ ,  $\ddot{a}(t) = \frac{dH(t)}{dt}a(t) + H(t)\dot{a}(t) = \left(\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t)\right)a(t)$ . Το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{dH(t)}{dt} = -|\Lambda| - 3H^2(t). \quad (\text{E'.5})$$

Ολοκλήρωση της παραπάνω δίνει

$$C_1 - t = \frac{1}{\sqrt{3|\Lambda|}} \arctan\left(\sqrt{3|\Lambda|}H(t)\right) \Leftrightarrow H(t) = \frac{|\Lambda|}{3} \tan[\sqrt{3|\Lambda|}(C_1 - t)], \quad (\text{E'.6})$$

όπου  $C_1$  μια σταθερά ολοκλήρωσης. Ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά η εξίσωση

$$\frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} = \frac{|\Lambda|}{3} \tan[\sqrt{3|\Lambda|}(C_1 - t)]$$

καταλήγει στη λύση

$$a(t) = C_2 \left| \cos\left[\sqrt{3|\Lambda|}(C_1 - t)\right] \right|^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{E'.7})$$

## Ε.1 Προσέγγιση της λύσης παρουσία δυναμικού στο όριο $t \rightarrow t_s$

Στην ενότητα 2.4 υιοθετήσαμε μια συγκεκριμένη μορφή (2.48) για το  $a(t)$  και ανακατασκευάσαμε το δυναμικό που κάνει συνεπείς τις εξισώσεις κίνησης. Διαλέγουμε τώρα μια διαφορετική μέθοδο και προσεγγίζουμε τη λύση παρουσία της μη τετριμμένης σύζευξης  $\lambda$  για μια συγκεκριμένη μορφή δυναμικού όπως προτείνεται στο [65],

$$V = \gamma \dot{\phi}^2(t) \equiv \gamma w(t).$$

Ξεκινώντας από την (Ε.6) και θέτοντας  $\frac{1}{\sqrt{3|\Lambda|}} \equiv A$ ,  $\sqrt{3|\Lambda|} \equiv B$ , έχουμε

$$C_1 - t = A \arctan(BH(t)). \quad (\text{Ε.8})$$

Εφόσον μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της λύσης στο όριο  $t \rightarrow t_s$ , έτσι ώστε  $H(t) \rightarrow -\infty$ , η σχέση αυτή μπορεί προσεγγιστικά να γραφτεί ως

$$C_1 - t \approx -\frac{A\pi}{2} - \frac{A}{BH(t)}, \quad t \rightarrow t_s. \quad (\text{Ε.9})$$

Λύνοντας την βρίσκουμε

$$H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} \approx \frac{A}{B(t - C_1 - \frac{A\pi}{2})} = -\frac{A}{B(t_s - t)}, \quad t_s \equiv C_1 + \frac{A\pi}{2}. \quad (\text{Ε.10})$$

Η έκφραση για το  $a(t)$  θα είναι

$$a(t) = C_2(t_s - t)^\zeta, \quad \zeta \equiv \frac{A}{B} = \frac{1}{3}. \quad (\text{Ε.11})$$

Βλέπουμε ότι η προσεγγιστική αυτή λύση ενσωματώνει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά της αντίστοιχης (Ε.7), δηλαδή μηδενίζεται στο  $t = t_s$  ενώ η παράγωγός της τείνει στο  $-\infty$  για την τιμή αυτή.

Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία στην περίπτωση όπου  $\lambda \neq 0$ ,  $V \neq 0$ , με το δυναμικό να έχει τη μορφή

$$V = \gamma \dot{\phi}^2(t) \equiv \gamma w(t) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \gamma \dot{w}(t),$$

όπως προτείνεται στο [65] οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή

$$(3\lambda a(t)\dot{a}^2(t) + a^3(t)) \dot{w}(t) + (6\lambda \dot{a}^3 + 12\lambda a(t)\dot{a}(t)\ddot{a}(t) + 6a^2(t)\dot{a}(t)) w(t) = -2\gamma \dot{w}(t)a^3(t), \quad (\text{Ε.12})$$

$$a^2(t)(-|\Lambda| + 4\pi w(t)) - 3\dot{a}^2(t)(1 - 12\pi\lambda w(t)) + 8\pi a^2(t)\gamma w(t) = 0. \quad (\text{Ε.13})$$

Λύνοντας την εξίσωση (Ε.13) για  $w(t)$  και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην (Ε.1) έχουμε

$$\begin{aligned} |\Lambda|(1 + 2\gamma) + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}(2 + 2\gamma - 4\gamma^2 + 13\lambda|\Lambda| + 8\gamma\lambda|\Lambda|) + \frac{\dot{a}^4(t)}{a^4(t)}(27\lambda + 18\lambda^2|\Lambda|) \\ + 27\lambda^2 \frac{\dot{a}^6(t)}{a^6(t)} + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}(1 + 4\gamma + 4\gamma^2 - \lambda|\Lambda| - 2\gamma\lambda|\Lambda|) \\ + \frac{\ddot{a}(t)\dot{a}^2(t)}{a(t)a^2(t)}(9\lambda + 18\gamma\lambda + 9\lambda^2|\Lambda|) + 54\lambda^2 \frac{\ddot{a}(t)\dot{a}^4(t)}{a(t)a^4(t)} = 0. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε  $\dot{a}(t) = H(t)a(t)$ ,  $\ddot{a}(t) = \frac{dH(t)}{dt}a(t) + H(t)\dot{a}(t) = \left(\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t)\right)a(t)$ , καταλήγοντας στην

$$\frac{dH(t)}{dt} = -\frac{[|\Lambda| + 3H^2(t)][1 + 3\lambda H^2(t)][1 + 2\gamma + 9\lambda H^2(t)]}{(1 + 2\gamma)(1 + 2\gamma - \lambda|\Lambda|) + 9\lambda(1 + 2\gamma + \lambda|\Lambda|)H^2(t) + 54\lambda^2 H^4(t)}. \quad (\text{Ε.14})$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί αναλυτικά

$$C_1 - t = A_1 \arctan(B_1 H(t)) + A_2 \arctan(B_2 H(t)) + A_3 \arctan(B_3 H(t)), \quad (\text{Ε.15})$$

όπου

$$A_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \frac{2 - \gamma + 2\gamma^2 - 2\lambda|\Lambda| - \gamma\lambda|\Lambda|}{(\gamma - 1)(\lambda|\Lambda| - 1)}, \quad B_1 = \sqrt{3\lambda},$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{\lambda(1+2\gamma)}}{\gamma-1}, \quad B_2 = 3\sqrt{\frac{\lambda}{1+2\gamma}}, \quad A_3 = \frac{1+2\gamma-\lambda|\Lambda|}{\sqrt{3|\Lambda|(1-\lambda|\Lambda|)}}, \quad B_3 = \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}},$$

Η σύζευξη  $\lambda$  μπορεί να θεωρηθεί μηδενική αλλά όχι η κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$  καθώς αυτή εμφανίζεται στους παρονομαστές. Αναπτύσσοντας κατά Taylor βρίσκουμε προσεγγιστικά

$$C_1 - t \approx -\frac{\pi}{2}(A_1 + A_2 + A_3) - \frac{\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_3}{B_3}}{H(t)} \Rightarrow H(t) = \frac{-\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_2}{B_2} - \frac{A_3}{B_3}}{C_1 + \frac{\pi}{2}(A_1 + A_2 + A_3) - t}. \quad (\text{E'.16})$$

Ολοκληρώνοντας, με αρχική συνθήκη  $a(0) = 1$  και θέτοντας

$$\zeta \equiv \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_3}{B_3}, \quad t_s \equiv C + \frac{\pi}{2}(A_1 + A_2 + A_3)$$

καταλήγουμε στην

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{\zeta}{t_s - t} \Rightarrow a(t) = C_2 \exp\left[-\int dt \frac{\zeta}{t_s - t}\right] = C_2 (t_s - t)^\zeta. \quad (\text{E'.17})$$

Στην περίπτωση μας η παράμετρος  $\zeta$  προκύπτει να έχει την τιμή  $\zeta = \frac{2}{3}$ . Τελικά

$$a(t) = C_2 (t_s - t)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow H(t) = -\frac{2C_2}{3} (t_s - t)^{-\frac{1}{3}}. \quad (\text{E'.18})$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor βρίσκουμε

$$C_1 - t \approx -\frac{\pi}{2}(A_1 + A_2 + A_3) - \frac{\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_3}{B_3}}{H(t)} \Rightarrow H(t) = \frac{-\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_2}{B_2} - \frac{A_3}{B_3}}{C_1 + \frac{\pi}{2}(A_1 + A_2 + A_3) - t}. \quad (\text{E'.19})$$

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε μια ακόμα φορά, με αρχική συνθήκη  $a(0) = 1$ . Θέτοντας

$$\zeta \equiv \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_3}{B_3}, \quad t_s \equiv C + \frac{\pi}{2}(A_1 + A_2 + A_3)$$

βρίσκουμε

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{\zeta}{t_s - t} \Rightarrow a(t) = C_2 \exp\left[-\int dt \frac{\zeta}{t_s - t}\right] = C_2 (t_s - t)^\zeta. \quad (\text{E'.20})$$

Στην περίπτωση μας προκύπτει  $\zeta = \frac{2}{3}$ , οπότε τελικά

$$a(t) = C_2 (t_s - t)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow H(t) = -\frac{2C_2}{3} (t_s - t)^{-\frac{1}{3}}. \quad (\text{E'.21})$$

Είναι εμφανές ότι για  $t = t_s$ , ο παράγοντας  $a(t)$  μηδενίζεται ενώ το  $H(t)$  τείνει στο  $-\infty$ , έτσι η ποσότητα  $t_s$  είναι η χρονική στιγμή που δημιουργείται η ανωμαλία. Ο εν δυνάμει ορίζοντας καλύπτει την ανωμαλία και έτσι δημιουργείται μια μελανή οπή. Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της σύζευξης  $\lambda$  και της παραμέτρου  $\gamma$  του δυναμικού ! Αυτός είναι και ο λόγος που ισχυριζόμαστε ότι η (E'.21) είναι η προσεγγιστική λύση στην ενότητα 2.3.1 όπου  $\gamma = 0$  με  $\lambda \neq 0$ .



# Βιβλιογραφία

- [1] G. W. Horndeski, “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space,” *Int. J. Theor. Phys.* **10**, 363 (1974).
- [2] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer and G. Zahariade, “From k-essence to generalised Galileons,” *Phys. Rev. D* **84** (2011) 064039 [arXiv:1103.3260 [hep-th]].
- [3] A. Nicolis, R. Rattazzi, E. Trincherini, “The Galileon as a local modification of gravity,” *Phys. Rev. D* **79** (2009) 064036. [arXiv:0811.2197 [hep-th]].
- [4] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, “Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations,” *Prog. Theor. Phys.* **126** (2011) 511 doi:10.1143/PTP.126.511 [arXiv:1105.5723 [hep-th]].
- [5] T. Kolyvaris, G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “Scalar Hair from a Derivative Coupling of a Scalar Field to the Einstein Tensor,” *Class. Quant. Grav.* **29**, 205011 (2012), [arXiv:1111.0263 [gr-qc]].
- [6] M. Rinaldi, “Black holes with non-minimal derivative coupling,” *Phys. Rev. D* **86**, 084048 (2012) [arXiv:1208.0103 [gr-qc]].
- [7] T. Kolyvaris, G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “Phase Transition to a Hairy Black Hole in Asymptotically Flat Spacetime,” *JHEP* **1311**, 133 (2013), [arXiv:1308.5280 [hep-th]].
- [8] G. Koutsoumbas, K. Ntrekis, E. Papantonopoulos and M. Tsoukalas, “Gravitational Collapse in Horndeski Theory,” arXiv:1512.05934 [gr-qc].
- [9] L. Amendola, “Cosmology with nonminimal derivative couplings,” *Phys. Lett. B* **301**, 175 (1993) [arXiv:gr-qc/9302010].
- [10] C. Germani and Y. Watanabe, “UV-protected (Natural) Inflation: Primordial Fluctuations and non-Gaussian Features,” *JCAP* **1107** (2011) 031 Addendum: [JCAP **1107** (2011) A01] doi:10.1088/1475-7516/2011/07/031, 10.1088/1475-7516/2011/07/A01 [arXiv:1106.0502 [astro-ph.CO]].
- [11] C. Germani, L. Martucci and P. Moyassari, “Introducing the Slotheon: a slow Galileon scalar field in curved space-time,” *Phys. Rev. D* **85** (2012) 103501 doi:10.1103/PhysRevD.85.103501 [arXiv:1108.1406 [hep-th]].
- [12] C. Germani, Y. Watanabe and N. Wintergerst, “Self-unitarization of New Higgs Inflation and compatibility with Planck and BICEP2 data,” *JCAP* **1412** (2014) no.12, 009 doi:10.1088/1475-7516/2014/12/009 [arXiv:1403.5766 [hep-ph]].
- [13] K. Kamada, T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, “Higgs G-inflation,” *Phys. Rev. D* **83** (2011) 083515 doi:10.1103/PhysRevD.83.083515 [arXiv:1012.4238 [astro-ph.CO]].
- [14] T. Kunimitsu, T. Suyama, Y. Watanabe and J. Yokoyama, “Large tensor mode, field range bound and consistency in generalized G-inflation,” *JCAP* **1508** (2015) no.08, 044 doi:10.1088/1475-7516/2015/08/044 [arXiv:1504.06946 [astro-ph.CO]].

- [15] F. Farakos, C. Germani, A. Kehagias and E. N. Saridakis, “A New Class of Four-Dimensional N=1 Supergravity with Non-minimal Derivative Couplings,” *JHEP* **1205** (2012) 050 doi:10.1007/JHEP05(2012)050 [arXiv:1202.3780 [hep-th]].
- [16] I. Dalianis and F. Farakos, “Higher Derivative D-term Inflation in New-minimal Supergravity,” *Phys. Lett. B* **736** (2014) 299 doi:10.1016/j.physletb.2014.07.028 [arXiv:1403.3053 [hep-th]].
- [17] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, “Towards the theory of reheating after inflation,” *Phys. Rev. D* **56** (1997) 3258 doi:10.1103/PhysRevD.56.3258 [hep-ph/9704452].
- [18] H. M. Sadjadi and P. Goodarzi, “Reheating in nonminimal derivative coupling model,” *JCAP* **1302** (2013) 038 doi:10.1088/1475-7516/2013/02/038 [arXiv:1203.1580 [gr-qc]].
- [19] A. Ghalee, “A new phase of scalar field with a kinetic term non-minimally coupled to gravity,” *Phys. Lett. B* **724** (2013) 198 doi:10.1016/j.physletb.2013.06.039 [arXiv:1303.0532 [astro-ph.CO]].
- [20] H. M. Sadjadi and P. Goodarzi, “Reheating temperature in non-minimal derivative coupling model,” *JCAP* **1307** (2013) 039 doi:10.1088/1475-7516/2013/07/039 [arXiv:1302.1177 [gr-qc]].
- [21] B. Gumjudpai and P. Rangdee, “Non-minimal derivative coupling gravity in cosmology,” *Gen. Rel. Grav.* **47**, no. 11, 140 (2015), [arXiv:1511.00491 [gr-qc]].
- [22] R. Jinno, K. Mukaida and K. Nakayama, “The universe dominated by oscillating scalar with non-minimal derivative coupling to gravity,” *JCAP* **1401** (2014) 031 doi:10.1088/1475-7516/2014/01/031 [arXiv:1309.6756 [astro-ph.CO]].
- [23] Y. Ema, R. Jinno, K. Mukaida and K. Nakayama, “Particle Production after Inflation with Non-minimal Derivative Coupling to Gravity,” *JCAP* **1510**, no. 10, 020 (2015), [arXiv:1504.07119 [gr-qc]].
- [24] Y. S. Myung and T. Moon, “Inflaton decay and reheating in nonminimal derivative coupling,” arXiv:1601.03148 [gr-qc].
- [25] Y. Ema, R. Jinno, K. Mukaida and K. Nakayama, “Gravitational Particle Production in Oscillating Background and Its Cosmological Implications,” arXiv:1604.08898 [hep-ph].
- [26] C. Germani, N. Kudryashova and Y. Watanabe, “On post-inflation validity of perturbation theory in Horndeski scalar-tensor models,” arXiv:1512.06344 [astro-ph.CO].
- [27] J. Martin, C. Ringeval and V. Vennin, “Observing Inflationary Reheating,” *Phys. Rev. Lett.* **114**, no. 8, 081303 (2015), [arXiv:1410.7958 [astro-ph.CO]].
- [28] J. B. Munoz and M. Kamionkowski, “Equation-of-State Parameter for Reheating,” *Phys. Rev. D* **91** (2015) 4, 043521 doi:10.1103/PhysRevD.91.043521 [arXiv:1412.0656 [astro-ph.CO]].
- [29] L. Dai, M. Kamionkowski and J. Wang, “Reheating constraints to inflationary models,” *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 041302 doi:10.1103/PhysRevLett.113.041302 [arXiv:1404.6704 [astro-ph.CO]].
- [30] J. O. Gong, S. Pi and G. Leung, “Probing reheating with primordial spectrum,” *JCAP* **1505** (2015) 05, 027 doi:10.1088/1475-7516/2015/05/027 [arXiv:1501.03604 [hep-ph]].
- [31] J. L. Cook, E. Dimastrogiovanni, D. A. Easson and L. M. Krauss, “Reheating predictions in single field inflation,” *JCAP* **1504**, 047 (2015), [arXiv:1502.04673 [astro-ph.CO]].
- [32] T. Rehagen and G. B. Gelmini, “Low reheating temperatures in monomial and binomial inflationary potentials,” *JCAP* **1506** (2015) 06, 039 doi:10.1088/1475-7516/2015/06/039 [arXiv:1504.03768 [hep-ph]].
- [33] M. Drewes, “What can the CMB tell about cosmic reheating?,” arXiv:1511.03280 [astro-ph.CO].
- [34] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters,” arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO].

- [35] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], “Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation,” arXiv:1502.02114 [astro-ph.CO].
- [36] L. Amendola *et al.* [Euclid Theory Working Group Collaboration], “Cosmology and fundamental physics with the Euclid satellite,” *Living Rev. Rel.* **16** (2013) 6 doi:10.12942/lrr-2013-6 [arXiv:1206.1225 [astro-ph.CO]].
- [37] P. Andre *et al.* [PRISM Collaboration], “PRISM (Polarized Radiation Imaging and Spectroscopy Mission): A White Paper on the Ultimate Polarimetric Spectro-Imaging of the Microwave and Far-Infrared Sky,” arXiv:1306.2259 [astro-ph.CO].
- [38] T. Matsumura *et al.*, “Mission design of LiteBIRD,” *J. Low. Temp. Phys.* **176** (2014) 733 doi:10.1007/s10909-013-0996-1 [arXiv:1311.2847 [astro-ph.IM]].
- [39] S. Kuroyanagi, K. Nakayama and J. Yokoyama, “Prospects of determination of reheating temperature after inflation by DECIGO,” *PTEP* **2015** (2015) no.1, 013E02 doi:10.1093/ptep/ptu176 [arXiv:1410.6618 [astro-ph.CO]].
- [40] A. R. Liddle and S. M. Leach, “How long before the end of inflation were observable perturbations produced?,” *Phys. Rev. D* **68** (2003) 103503 doi:10.1103/PhysRevD.68.103503 [astro-ph/0305263].
- [41] L. McAllister, E. Silverstein, A. Westphal and T. Wrase, “The Powers of Monodromy,” *JHEP* **1409** (2014) 123 doi:10.1007/JHEP09(2014)123 [arXiv:1405.3652 [hep-th]].
- [42] Y. Shtanov, J. H. Traschen and R. H. Brandenberger, “Universe reheating after inflation,” *Phys. Rev. D* **51** (1995) 5438 doi:10.1103/PhysRevD.51.5438 [hep-ph/9407247].
- [43] M. A. Amin, M. P. Hertzberg, D. I. Kaiser and J. Karouby, “Nonperturbative Dynamics Of Reheating After Inflation: A Review,” *Int. J. Mod. Phys. D* **24** (2014) 1530003 doi:10.1142/S0218271815300037 [arXiv:1410.3808 [hep-ph]].
- [44] D. I. Podolsky, G. N. Felder, L. Kofman and M. Peloso, “Equation of state and beginning of thermalization after preheating,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 023501 doi:10.1103/PhysRevD.73.023501 [hep-ph/0507096].
- [45] S. Dodelson and L. Hui, “A Horizon ratio bound for inflationary fluctuations,” *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 131301 doi:10.1103/PhysRevLett.91.131301 [astro-ph/0305113].
- [46] I. Dalianis and F. Farakos, “Non-minimal derivative couplings and inflation in supergravity,” *PoS CORFU* **2014** (2015) 098 [arXiv:1504.06875 [hep-th]].
- [47] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, “On Massive Neutron Cores,” *Phys. Rev. D* **55**, 374 (1939).
- [48] R. C. Tolman, “Static Solutions of Einstein’s Field Equations for Spheres of Fluid,” *Phys. Rev. D* **55**, 364 (1939).
- [49] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, “On Continued Gravitational Contraction,” *Phys. Rev. D* **56**, 455 (1939).
- [50] P. S. Joshi and D. Malafarina, “Recent developments in gravitational collapse and spacetime singularities,” *Int. J. Mod. Phys. D* **20**, 2641 (2011) [arXiv:1201.3660 [gr-qc]].
- [51] R. Goswami and P. S. Joshi, “Naked singularity formation in scalar field collapse,” gr-qc/0410144.
- [52] M. W. Choptuik, “Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field,” *Phys. Rev. Lett.* **70**, 9 (1993).
- [53] D. Christodoulou, “Violation of cosmic censorship in the gravitational collapse of a dust cloud,” *Commun. Math. Phys.* **93**, 171 (1984).
- [54] D. Christodoulou, “Examples of naked singularity formation in the gravitational collapse of a scalar field,” *Annals Math.* **140**, 607 (1994).



- [55] D. Christodoulou, “The instability of naked singularities in the gravitational collapse of a scalar field,” *Annals Math.* **149**, 183 (1999).
- [56] R. Penrose, “Gravitational collapse: The role of general relativity,” *Riv. Nuovo Cim.* **1**, 252 (1969) [*Gen. Rel. Grav.* **34**, 1141 (2002)].
- [57] T. Hertog, G. T. Horowitz and K. Maeda, “Negative energy in string theory and cosmic censorship violation,” *Phys. Rev. D* **69**, 105001 (2004) [hep-th/0310054].
- [58] K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, “Gravitational lensing by naked singularities,” *Phys. Rev. D* **65**, 103004 (2002).
- [59] R. Giambo, “Gravitational collapse of homogeneous scalar fields,” *Class. Quant. Grav.* **22**, 2295 (2005) [gr-qc/0501013].
- [60] R. Goswami and P. S. Joshi, “Naked singularity formation in scalar field collapse,” gr-qc/0410144.
- [61] S. S. Deshingkar, S. Jhingan, A. Chamorro and P. S. Joshi, “Gravitational collapse and cosmological constant,” *Phys. Rev. D* **63**, 124005 (2001) [gr-qc/0010027].
- [62] K. Lake, “Gravitational collapse of dust with a cosmological constant,” *Phys. Rev. D* **62**, 027301 (2000), [gr-qc/0002044].
- [63] M. Cissoko, J. C. Fabris, J. Gariel, G. Le Denmat and N. O. Santos, “Gravitational dust collapse with cosmological constant,” gr-qc/9809057.
- [64] T. A. Madhav, R. Goswami and P. S. Joshi, “Gravitational collapse in asymptotically anti-de Sitter/de Sitter backgrounds,” *Phys. Rev. D* **72**, 084029 (2005) [gr-qc/0502081].
- [65] R. Baier, H. Nishimura and S. A. Stricker, “Scalar field collapse with negative cosmological constant,” *Class. Quant. Grav.* **32**, no. 13, 135021 (2015) [arXiv:1410.3495 [gr-qc]].
- [66] C. Y. Zhang, S. J. Zhang, D. C. Zou and B. Wang, “Charged scalar gravitational collapse in de Sitter spacetime,” *Phys. Rev. D* **93**, no. 6, 064036 (2016) [arXiv:1512.06472 [gr-qc]].
- [67] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza and F. Vernizzi, “New Class of Consistent Scalar-Tensor Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **114**, no. 21, 211101 (2015) [arXiv:1404.6495 [hep-th]].
- [68] X. Gao, “Unifying framework for scalar-tensor theories of gravity,” *Phys. Rev. D* **90** (2014) 081501 [arXiv:1406.0822 [gr-qc]].
- [69] A. Padilla, D. Stefanyszyn and M. Tsoukalas, “Generalised Scale Invariant Theories,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) 065009 [arXiv:1312.0975 [hep-th]].
- [70] S. Ohashi, N. Tanahashi, T. Kobayashi and M. Yamaguchi, *JHEP* **1507**, 008 (2015) [arXiv:1505.06029 [gr-qc]].
- [71] C. Deffayet and D. A. Steer, “A formal introduction to Horndeski and Galileon theories and their generalizations,” *Class. Quant. Grav.* **30**, 214006 (2013), [arXiv:1307.2450 [hep-th]].
- [72] A. Anabalon, A. Cisterna and J. Oliva, “Asymptotically locally AdS and flat black holes in Horndeski theory,” *Phys. Rev. D* **89**, 084050 (2014), [arXiv:1312.3597 [gr-qc]]; M. Minamitsuji, “Solutions in the scalar-tensor theory with nonminimal derivative coupling,” *Phys. Rev. D* **89**, 064017 (2014) [arXiv:1312.3759 [gr-qc]]; A. Cisterna and C. Erices, “Asymptotically locally AdS and flat black holes in the presence of an electric field in the Horndeski scenario,” *Phys. Rev. D* **89**, 084038 (2014) [arXiv:1401.4479 [gr-qc]].
- [73] L. Hui and A. Nicolis, “No-Hair Theorem for the Galileon,” *Phys. Rev. Lett.* **110**, 241104 (2013) [arXiv:1202.1296 [hep-th]].
- [74] E. Babichev and C. Charmousis, “Dressing a black hole with a time-dependent Galileon,” *JHEP* **1408**, 106 (2014) [arXiv:1312.3204 [gr-qc]].

- [75] C. Charmousis, T. Kolyvaris, E. Papantonopoulos and M. Tsoukalas, “Black Holes in Bi-scalar Extensions of Horndeski Theories,” JHEP **1407**, 085 (2014) [arXiv:1404.1024 [gr-qc]].
- [76] A. Cisterna, M. Cruz, T. Delsate and J. Saavedra, “Nonminimal derivative coupling scalar-tensor theories: odd-parity perturbations and black hole stability,” Phys. Rev. D **92**, no. 10, 104018 (2015), [arXiv:1508.06413 [gr-qc]].
- [77] H. Ogawa, T. Kobayashi and T. Suyama, “Instability of hairy black holes in shift-symmetric Horndeski theories,” Phys. Rev. D **93**, no. 6, 064078 (2016) [arXiv:1510.07400 [gr-qc]].
- [78] C. Charmousis and M. Tsoukalas, “Lovelock Galileons and black holes,” Phys. Rev. D **92** (2015) 104050 [arXiv:1506.05014 [gr-qc]].
- [79] A. Cisterna, T. Delsate and M. Rinaldi, “Neutron stars in general second order scalar-tensor theory: The case of nonminimal derivative coupling,” Phys. Rev. D **92**, no. 4, 044050 (2015), [arXiv:1504.05189 [gr-qc]].
- [80] H. O. Silva, A. Maselli, M. Minamitsuji and E. Berti, “Compact objects in Horndeski gravity,” Int. J. Mod. Phys. D **25**, no. 09, 1641006 (2016) [arXiv:1602.05997 [gr-qc]].
- [81] A. Maselli, H. O. Silva, M. Minamitsuji and E. Berti, “Neutron stars in Horndeski gravity,” Phys. Rev. D **93**, no. 12, 124056 (2016), [arXiv:1603.04876 [gr-qc]].
- [82] Y. Brihaye, A. Cisterna and C. Erices, “Boson stars in biscalar extensions of Horndeski gravity,” Phys. Rev. D **93**, no. 12, 124057 (2016) [arXiv:1604.02121 [hep-th]].
- [83] A. Cisterna, T. Delsate, L. Ducobu and M. Rinaldi, “Slowly rotating neutron stars in the non-minimal derivative coupling sector of Horndeski gravity,” Phys. Rev. D **93**, no. 8, 084046 (2016) [arXiv:1602.06939 [gr-qc]].
- [84] E. N. Saridakis and S. V. Sushkov, “Quintessence and phantom cosmology with non-minimal derivative coupling,” Phys. Rev. D **81** (2010) 083510.
- [85] C. Germani and A. Kehagias, “UV-Protected Inflation,” Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 161302.
- [86] I. Dalianis, G. Koutsoumbas, K. Ntrekis and E. Papantonopoulos, “Reheating predictions in Gravity Theories with Derivative Coupling,” arXiv:1608.04543 [gr-qc].
- [87] X. M. Kuang and E. Papantonopoulos, “Building a Holographic Superconductor with a Scalar Field Coupled Kinematically to Einstein Tensor,” JHEP **1608**, 161 (2016) [arXiv:1607.04928 [hep-th]].
- [88] D. Garfinkle and L. A. Pando Zayas, “Rapid Thermalization in Field Theory from Gravitational Collapse,” Phys. Rev. D **84**, 066006 (2011) [arXiv:1106.2339 [hep-th]].
- [89] D. Garfinkle, L. A. Pando Zayas and D. Reichmann, “On Field Theory Thermalization from Gravitational Collapse,” JHEP **1202**, 119 (2012) [arXiv:1110.5823 [hep-th]].
- [90] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], “Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe and its cosmological implications,” Nature **391**, 51 (1998) [astro-ph/9712212].
- [91] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team], “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” Astron. J. **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201].
- [92] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, “Dynamics of dark energy,” Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753 (2006) [hep-th/0603057].
- [93] A. Joyce, B. Jain, J. Khoury and M. Trodden, “Beyond the Cosmological Standard Model,” Phys. Rept. **568**, 1 (2015) [arXiv:1407.0059 [astro-ph.CO]].
- [94] B. Wang, E. Abdalla, F. Atrio-Barandela and D. Pavon, “Dark Matter and Dark Energy Interactions: Theoretical Challenges, Cosmological Implications and Observational Signatures,” Rept. Prog. Phys. **79**, no. 9, 096901 (2016).

- [95] Y. L. Bolotin, A. Kostenko, O. A. Lemets and D. A. Yerokhin, “Cosmological Evolution With Interaction Between Dark Energy And Dark Matter,” *Int. J. Mod. Phys. D* **24**, no. 03, 1530007 (2014).
- [96] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen, “Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy matter *Phys. Rev. D* **66**, 043507 (2002). [gr-qc/0202064].
- [97] M. d. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen, “Generalized Chaplygin gas and CMBR constraints,” *Phys. Rev. D* **67**, 063003 (2003) [astro-ph/0210468].
- [98] M. C. Bento, O. Bertolami, M. J. Reboucas and P. T. Silva, “Generalized Chaplygin gas model, supernovae and cosmic topology,” *Phys. Rev. D* **73**, 043504 (2006) [gr-qc/0512158].
- [99] M. U. Farooq, M. Jamil and M. A. Rashid, “Interacting entropy-corrected holographic Chaplygin gas model,” *Int. J. Theor. Phys.* **49**, 2334 (2010) [arXiv:1003.3399 [gr-qc]].
- [100] V. Gorini, A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, O. F. Piattella and A. A. Starobinsky, “Gauge-invariant analysis of perturbations in Chaplygin gas unified models of dark matter and dark energy,” *JCAP* **0802**, 016 (2008) [arXiv:0711.4242 [astro-ph]].
- [101] U. Debnath, A. Banerjee and S. Chakraborty, “Role of modified Chaplygin gas in accelerated universe,” *Class. Quant. Grav.* **21**, 5609 (2004) [gr-qc/0411015].
- [102] M. Bouhmadi-Lopez and P. Vargas Moniz, “FRW quantum cosmology with a generalized Chaplygin gas,” *Phys. Rev. D* **71**, 063521 (2005) [gr-qc/0404111].
- [103] M. R. Setare, “Interacting holographic generalized Chaplygin gas model,” *Phys. Lett. B* **654**, 1 (2007) [arXiv:0708.0118 [hep-th]].
- [104] Y. Fujii and K. Maeda, *The scalar-tensor theory of gravitation*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [105] M. Ostrogradsky, “Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres”, *Mem. Acad. St. Petersbourg* **6**, no. 4, 385 (1850).
- [106] A. I. Vainshtein, “To the problem of nonvanishing gravitation mass,” *Phys. Lett. B* **39**, 393 (1972).
- [107] N. Chow and J. Khoury, “Galileon Cosmology,” *Phys. Rev. D* **80**, 024037 (2009).
- [108] A. De Felice, R. Kase and S. Tsujikawa, “Vainshtein mechanism in second-order scalar-tensor theories,” *Phys. Rev. D* **85**, 044059 (2012).
- [109] E. Babichev, C. Deffayet and G. Esposito-Farese, “Improving relativistic MOND with Galileon k-mouflage,” *Phys. Rev. D* **84**, 061502 (2011).
- [110] E. N. Saridakis and M. Tsoukalas, “Cosmology in new gravitational scalar-tensor theories,” *Phys. Rev. D* **93**, no. 12, 124032 (2016) [arXiv:1601.06734 [gr-qc]].
- [111] M. Rinaldi, “Mimicking dark matter in Horndeski gravity,” *Phys. Dark Univ.* **16**, 14 (2017). [arXiv:1608.03839 [gr-qc]].
- [112] A. De Felice and S. Tsujikawa, “Generalized Galileon cosmology,” *Phys. Rev. D* **84**, 124029 (2011).
- [113] A. De Felice and S. Tsujikawa, “Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models,” *JCAP* **1202**, 007 (2012).
- [114] A. De Felice and S. Tsujikawa, “Cosmology of a covariant Galileon field,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 111301 (2010).
- [115] S. A. Appleby and E. V. Linder, “The Paths of Gravity in Galileon Cosmology,” *JCAP* **1203**, 043 (2012).
- [116] C. Gao, “When scalar field is kinetically coupled to the Einstein tensor,” *JCAP* **1006**, 023 (2010) [arXiv:1002.4035 [gr-qc]].

- [117] L. N. Granda, “Non-minimal Kinetic coupling to gravity and accelerated expansion,” JCAP **1007**, 006 (2010) [arXiv:0911.3702 [hep-th]].
- [118] E. N. Saridakis and S. V. Sushkov, “Quintessence and phantom cosmology with non-minimal derivative coupling,” Phys. Rev. D **81**, 083510 (2010) [arXiv:1002.3478 [gr-qc]].
- [119] J. B. Dent, S. Dutta, E. N. Saridakis and J. Q. Xia, “Cosmology with non-minimal derivative couplings: perturbation analysis and observational constraints,” JCAP **1311**, 058 (2013) [arXiv:1309.4746 [astro-ph.CO]].
- [120] C. Bogdanos and E. N. Saridakis, “Perturbative instabilities in Horava gravity,” Class. Quant. Grav. **27**, 075005 (2010) [arXiv:0907.1636 [hep-th]].
- [121] A. De Felice, A. E. Gumrukcuoglu and S. Mukohyama, “Massive gravity: nonlinear instability of the homogeneous and isotropic universe,” Phys. Rev. Lett. **109**, 171101 (2012) [arXiv:1206.2080 [hep-th]].
- [122] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen, “WMAP Constraints on the Generalized Chaplygin Gas Model,” Phys. Lett. B **575**, 172 (2003).
- [123] L. N. Granda, E. Torrente-Lujan and J. J. Fernandez-Melgarejo, “Non-minimal kinetic coupling and Chaplygin gas cosmology,” Eur. Phys. J. C **71**, 1704 (2011). [arXiv:1106.5482 [hep-th]].
- [124] T. Harko, F. S. N. Lobo, E. N. Saridakis and M. Tsoukalas, “Cosmological models in modified gravity theories with extended nonminimal derivative couplings,” Phys. Rev. D **95**, no. 4, 044019 (2017).
- [125] N. Suzuki *et al.*, “The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the Dark Energy Constraints Above  $z > 1$  and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample,” Astrophys. J. **746**, 85 (2012).
- [126] H. Akaike, “A new look at the statistical model identification,” IEEE Transactions on Automatic Control, **19**, 716 (1974).
- [127] R. C. Nunes, S. Pan, E. N. Saridakis and E. M. C. Abreu, “New observational constraints on  $f(R)$  gravity from cosmic chronometers,” JCAP **1701**, no. 01, 005 (2017).
- [128] A. de la Cruz-Dombriz, P. K. S. Dunsby, O. Luongo and L. Reverberi, “Model-independent limits and constraints on extended theories of gravity from cosmic reconstruction techniques,” JCAP **1612**, no. 12, 042 (2016).
- [129] N. Birrell and P. Davies, Quantum fields in curved space, Cambridge University Press, Cambridge (1982).
- [130] B. S. DeWitt, Quantum field theory in curved space-time, Phys.Rept. **19** 295 (1975).
- [131] V. Kuzmin and I. Tkachev, “Ultra-high-energy cosmic rays, superheavy long living particles, and matter creation after inflation,” JETP Lett. **68**, 271 (1998) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **68**, 255 (1998)] [hep-ph/9802304].
- [132] D. J. H. Chung, E. W. Kolb and A. Riotto, “Superheavy dark matter,” Phys. Rev. D **59**, 023501 (1999) [hep-ph/9802238].
- [133] A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, (Harwood Academic, New York, 1990); E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, (Addison-Wesley, Reading, Ma., 1990).
- [134] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, “Reheating after inflation,” Phys. Rev. Lett. **73**, 3195 (1994) [hep-th/9405187].
- [135] S. Y. Khlebnikov and I. I. Tkachev, “Resonant decay of Bose condensates,” Phys. Rev. Lett. **79**, 1607 (1997) [hep-ph/9610477].
- [136] C. Gao, “When scalar field is kinetically coupled to the Einstein tensor,” JCAP **1006**, 023 (2010) [arXiv:1002.4035 [gr-qc]].

- [137] L. N. Granda, “Non-minimal Kinetic coupling to gravity and accelerated expansion,” JCAP **1007**, 006 (2010) [arXiv:0911.3702 [hep-th]].
- [138] J. Alsup, E. Papantonopoulos and G. Siopsis, “A Novel Mechanism to Generate FFLO States in Holographic Superconductors,” Phys. Lett. B **720**, 379 (2013) [arXiv:1210.1541 [hep-th]].
- [139] J. Alsup, E. Papantonopoulos, G. Siopsis and K. Yeter, “Spontaneously Generated Inhomogeneous Phases via Holography,” arXiv:1305.2507 [hep-th].
- [140] S. Sushkov, Realistic cosmological scenario with non-minimal kinetic coupling,” Phys. Rev. D **85**, 123520 (2012) [arXiv:1204.6372 [gr-qc]].
- [141] A. D. Linde, Chaotic Inflation, Phys. Lett. B **129** 177 (1983).
- [142] D. J. H. Chung, “Classical inflation field induced creation of superheavy dark matter,” Phys. Rev. D **67**, 083514 (2003) [hep-ph/9809489].
- [143] L. Parker, Quantized fields and particle creation in expanding universes, Phys.Rev. **183** (1969) 1057
- [144] L. Parker, “Particle creation and particle number in an expanding universe,” J. Phys. A **45**, 374023 (2012) [arXiv:1205.5616 [astro-ph.CO]].
- [145] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, A. Vikman, “Covariant Galileon,” Phys. Rev. **D79** (2009) 084003. [arXiv:0901.1314 [hep-th]].
- [146] C. Deffayet, S. Deser and G. Esposito-Farese, “Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors,” Phys. Rev. D **80**, 064015 (2009) [arXiv:0906.1967].
- [147] S. V. Sushkov, “Exact cosmological solutions with nonminimal derivative coupling,” Phys. Rev. D **80**, 103505 (2009) [arXiv:0910.0980 [gr-qc]].
- [148] C. Germani and A. Kehagias, “New Model of Inflation with Non-minimal Derivative Coupling of Standard Model Higgs Boson to Gravity,” Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 011302 doi:10.1103/PhysRevLett.105.011302 [arXiv:1003.2635 [hep-ph]].
- [149] C. Germani and A. Kehagias, “UV-Protected Inflation,” Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 161302 doi:10.1103/PhysRevLett.106.161302 [arXiv:1012.0853 [hep-ph]].
- [150] S. Tsujikawa, “The effective field theory of inflation/dark energy and the Horndeski theory,” Lect. Notes Phys. **892**, 97 (2015) [arXiv:1404.2684 [gr-qc]].
- [151] S. Tsujikawa, “Observational tests of inflation with a field derivative coupling to gravity,” Phys. Rev. D **85**, 083518 (2012) [arXiv:1201.5926 [astro-ph.CO]].
- [152] S. Tsujikawa, J. Ohashi, S. Kuroyanagi and A. De Felice, “Planck constraints on single-field inflation,” Phys. Rev. D **88** (2013) no.2, 023529 doi:10.1103/PhysRevD.88.023529 [arXiv:1305.3044 [astro-ph.CO]].
- [153] I. Dalianis and F. Farakos, “Exponential potential for an inflaton with nonminimal kinetic coupling and its supergravity embedding,” Phys. Rev. D **90** (2014) no.8, 083512 doi:10.1103/PhysRevD.90.083512 [arXiv:1405.7684 [hep-th]].
- [154] G. Koutsoumbas, K. Ntrekis and E. Papantonopoulos, “Gravitational Particle Production in Gravity Theories with Non-minimal Derivative Couplings,” JCAP **1308**, 027 (2013), [arXiv:1305.5741 [gr-qc]].
- [155] J. Martin and C. Ringeval, “First CMB Constraints on the Inflationary Reheating Temperature,” Phys. Rev. D **82** (2010) 023511 doi:10.1103/PhysRevD.82.023511 [arXiv:1004.5525 [astro-ph.CO]].
- [156] J. Mielczarek, “Reheating temperature from the CMB,” Phys. Rev. D **83** (2011) 023502 doi:10.1103/PhysRevD.83.023502 [arXiv:1009.2359 [astro-ph.CO]].
- [157] F. L. Bezrukov and D. S. Gorbunov, “Distinguishing between  $R^2$ -inflation and Higgs-inflation,” Phys. Lett. B **713** (2012) 365 doi:10.1016/j.physletb.2012.06.040 [arXiv:1111.4397 [hep-ph]].



