

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΟ



ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Ανάπτυξη κι αξιολόγηση υπολογιστικού κώδικα
προσομοίωσης κίνησης στροφείου Ε/Π ΒΟ-105

Επιβλέπων καθηγητής:
Ριζιώτης Βασίλης, Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Μπόλαρης Εμμανουήλ

Νοέμβριος 2016

Σύνοψη

Τα Ε/Π αποτελούν στην σύγχρονη εποχή μία από τις πλέον αναπτυσσόμενες εφαρμογές στον κλάδο της αεροναυπηγικής και βρίσκουν πληθώρα εφαρμογών στον κλάδο των αερομεταφορών κι όχι μόνο. Λόγω της σημαντικότητας που έχουν τα ελικόπτερα στη σημερινή εποχή, απαιτείται ανάπτυξη σχεδιαστικών εργαλείων, ικανών να μπορούν να ανταποκριθούν στις δύο κύριες απαιτήσεις δηλαδή να συμπεριλαμβάνουν όλους τους υπάρχοντες φυσικούς μηχανισμούς που αφορούν στη λειτουργία ενός Ε/Π και να έχουν ένα πολύ καλό επίπεδο ακρίβειας και συνέπειας. Κάποιος νεόφερτος στον κλάδο της αεροδυναμικής πιθανώς θα προσδωκούσε να βρει πολλά σύγχρονα αεροδυναμικά μοντέλα σε εφαρμογή. Ωστόσο αυτό δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Η χρήση αεροδυναμικών μοντέλων βασισμένα στις στροβιλές μεθόδους κρίνεται υποχρεωτική, τουλάχιστον στις εφαρμογές μελέτης και σχεδίασης Ε/Π. Το κύριο πλεονέκτημα των στροβιλών μοντέλων είναι το πολύ χαμηλό υπολογιστικό κόστος σε σχέση με άλλα μοντέλα. Ακόμα κι αν η υπολογιστική ταχύτητα αυξανόταν κατά μερικές τάξεις μεγέθους κι αντίστοιχα ο υπολογιστικός χρόνος μειωνόταν, τα vortex μοντέλα ακόμα θα υπερτερούσαν. Η κύρια αιτία είναι ότι η διαδικασία σχεδίασης των στροφείων ενός Ε/Π, σε αντίθεση με άλλες αεροδυναμικές εφαρμογές, απαιτεί την εξέταση πολλών και διαφορετικών περιπτώσεων καταπονήσεων. Αυτό συμβαίνει διότι το περιβάλλον στο οποίο λειτουργούν τα Ε/Π είναι πολλές φορές σύνθετο λόγω των ανέμων με αποτέλεσμα να αυξάνεται το εύρος των φορτιάκων περιπτώσεων που πρέπει να καλυφθούν ώστε να καταλήξουμε σε ένα πλήρες φορτιακό φάσμα απαραίτητο για την σχεδίαση Ε/Π. Συνεπώς, η περίπτωση να γίνει σχεδίαση και μοντελοποίηση ενός Ε/Π βάσει των CFD μεθόδων κρίνεται άκρως απαγορευτική. Αντίθετα, τα μοντέλα που βασίζονται στις vortex μεθόδους αποτελούν μία ιδανική λύση που προσεγγίζει πολύ καλά τα πειραματικά δεδομένα. Λαμβάνοντας υπόψη την συνοχή των υποσωμάτων του Ε/Π, την επιθυμητή ακρίβεια και το υπολογιστικό κόστος, η σύνηθης τακτική είναι να ξεκινήσουμε με ένα απλό μοντέλο που περιέχει όλα τα βασικά φυσικά μοντέλα κι έπειτα να προχωρήσουμε στην βελτίωση τους. Η αλλαγή από ένα μη γραμμικό μοντέλο 2^{ης} τάξης ακρίβειας στον GenUVP στο μοντέλο βασισμένο στη μη γραμμική μέθοδο ανάλυσης των πολυ-σωμάτων στον hGAST προσδίδει μεγαλύτερη ακρίβεια κι οι παραμορφώσεις είναι πιο ρεαλιστικές λόγω αλληλουχίας των χρησιμοποιούμενων υποσωμάτων. Από την άλλη, το μοντέλο στο αεροδυναμικό κομμάτι παραμένει ίδιο με κύρια την αλλαγή μοντέλου του επαγόμενου πεδίου ταχυτήτων (ομόρρου) από hybrid στο particle mesh. Ο νέος κώδικας hGAST λειτουργεί πλέον παράλληλα σε αντίθεση με παλαιότερα που δεν είχε αυτή τη δυνατότητα.

Περιεχόμενα

Σύνοψη.....	ii
Κατάλογος εικόνων.....	4
Κεφάλαιο 1.....	5
Εισαγωγή.....	5
1.1 Περιγραφή βασικών στοιχείων ενός Ε/Π.....	5
1.2 Μοντελοποίηση ενός Ε/Π.....	9
1.2.1 Αεροδυναμική.....	10
1.2.2 Δομική και δυναμική ανάλυση.....	11
1.3 Συμβολή της διπλωματικής.....	12
Κεφάλαιο 2.....	14
Θεωρητικό Υπόβαθρο.....	14
2.1 Δομική δυναμική.....	14
2.1.1 Μοντελοποίηση με χρήση των πολυ-σωμάτων.....	14
2.1.2 Θεωρία δοκού του Timoshenko.....	18
2.1.3 Διακριτή διατύπωση πεπερασμένων στοιχείων.....	22
2.2 Το μοντέλο αεροδυναμικής ανάλυσης.....	26
2.2.1 Διατύπωση του προβλήματος.....	26
2.2.2 Το αριθμητικό μοντέλο.....	30
2.2.3 Υπολογισμός φορτίων.....	34
2.3 Η τεχνική Particle Mesh.....	34
Κεφάλαιο 3.....	36
Ανάλυση υπολογιστικών αποτελεσμάτων.....	36
3.1 Ανάλυση παραμορφώσεων κύριου στροφείου ως προς την ταχύτητα πτήσης.....	36
3.2 Ανάλυση φορτίων κύριου στροφείου ως προς την ταχύτητα πτήσης.....	43
Κεφάλαιο 4.....	51
Επίλογος-Συμπεράσματα.....	51
Αναφορές.....	52

Κατάλογος εικόνων

<i>Εικ. 1 Τα κύρια στοιχεία ενός Ε/Π</i>	<i>6</i>
<i>Εικ. 2 Βασικές δυνάμεις που ασκούνται στο Ε/Π σε διάφορες συνθήκες πτήσης.....</i>	<i>6</i>
<i>Εικ. 3 Το ουραίο στροφέιο κι η αντι-ροπή που παράγει για να αντισταθμίσει αυτή του κύριου.....</i>	<i>8</i>
<i>Εικ. 4 Διάφορες διατάξεις για τη δημιουργία “αντι-ροπής” του κύριου στροφείου.....</i>	<i>8</i>
<i>Εικ. 5 Βασικά χειριστήρια ενός Ε/Π.....</i>	<i>9</i>
<i>Εικ. 6 Διατύπωση συστήματος πολλών σωμάτων σε τοπικό και καθολικό σύστημα συντε/νων.....</i>	<i>15</i>
<i>Εικ. 7 Σχηματική απεικόνιση του τοπικού και καθολικού συστήματος συντε/νων για ένα τυχαίο ν-υπο-σώμα ενός κ-σώματος.....</i>	<i>17</i>
<i>Εικ. 8 Σύστημα συντε/νων μίας ακτίνας.....</i>	<i>18</i>
<i>Εικ. 9 Ορθή και διατμητικές τάσεις.....</i>	<i>19</i>
<i>Εικ. 10 Ισορροπία δυνάμεων για διαφορικό στοιχείο μιας ακτίνας,</i>	<i>20</i>
<i>Εικ. 11 Ορισμός ενός πεπερασμένου στοιχείου με τρεις εσωτερικούς κόμβους</i>	<i>24</i>
<i>Εικ. 12 Απεικόνιση των επιφανειών των αντωτικών σωμάτων, του απορρεύματος και των αντίστοιχων κάθετων διανυσμάτων.</i>	<i>26</i>
<i>Εικ. 13 Ορισμός ενός επιφανειακού διπόλου</i>	<i>27</i>
<i>Εικ. 14 Απόρρευμα μιας αντωτικής επιφάνειας</i>	<i>29</i>
<i>Εικ. 15 Συμβολισμός των στοιχείων του πλέγματος των σωμάτων καθώς και του απορρεύματος αυτών.</i>	<i>30</i>
<i>Εικ. 16 Το υβριδικό σχήμα του απορρεύματος.....</i>	<i>33</i>

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

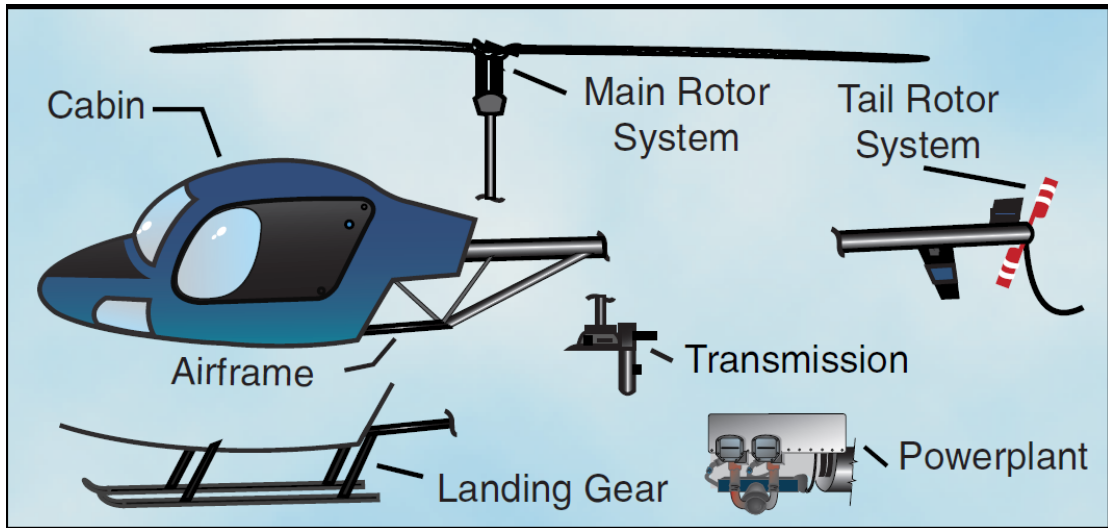
Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο, καθορίζεται το περιεχόμενο της διπλωματικής. Στοχεύοντας στην ανάπτυξη εργαλίων προσομοίωσης ικανών να λαμβάνουν υπόψη τους εκάστοτε υπάρχοντες φυσικούς μηχανισμούς, αρχικά δίνεται μία σύντομη περιγραφή των δομικών μερών ενός Ε/Π καθώς κι η ανάγκη για προσομοίωση τους λαμβάνοντας υπόψη τη διαθέσιμη τεχνογνωσία και εμπειρία. Έπειτα, παρουσιάζεται μία περίληψη των εργαλείων προσομοίωσης ως υπόβαθρο και μία σύνοψη αυτών των κερδών από αυτή τη διπλωματική.

1.1 Περιγραφή βασικών στοιχείων ενός Ε/Π

Τα Ε/Π αποτελούν στην σύγχρονη εποχή μία από τις πλέον αναπτυσσόμενες εφαρμογές στον κλάδο της αεροναυπηγικής και βρίσκουν πληθώρα εφαρμογών στον κλάδο των αερομεταφορών κι όχι μόνο. Κύριο πλεονέκτημα τους είναι η δυνατότητα τους για κάθετη προσγείωση κι απογείωση, η ικανότητα μετεώρησης καθώς κι η ευελιξία στον αέρα που του επιτρέπουν να ίπταται στατικά και να εκτελεί κινήσεις ανεξάρτητες μεταξύ τους σε αρκετά χαμηλές ταχύτητες. Οι παραπάνω χειριστικές ιδιότητες το καθιστούν άκρως σημαντικό, ιδιαίτερα σε δυσπρόσιτες περιοχές όπου άλλου τύπου Α/Φ μπορούν πολύ δύσκολα ή καθόλου να προσεγγίσουν. Σήμερα, οι κύριες χρήσεις των Ε/Π περιλαμβάνουν μεταφορά ατόμων και φορτίων, στρατιωτικές επιχειρήσεις, πυρόσβεση, έρευνα και διάσωση, διακομιδές ασθενών καθώς εφαρμογές στην αγροκαλλιέργια και στην παρατήρηση περιοχών.

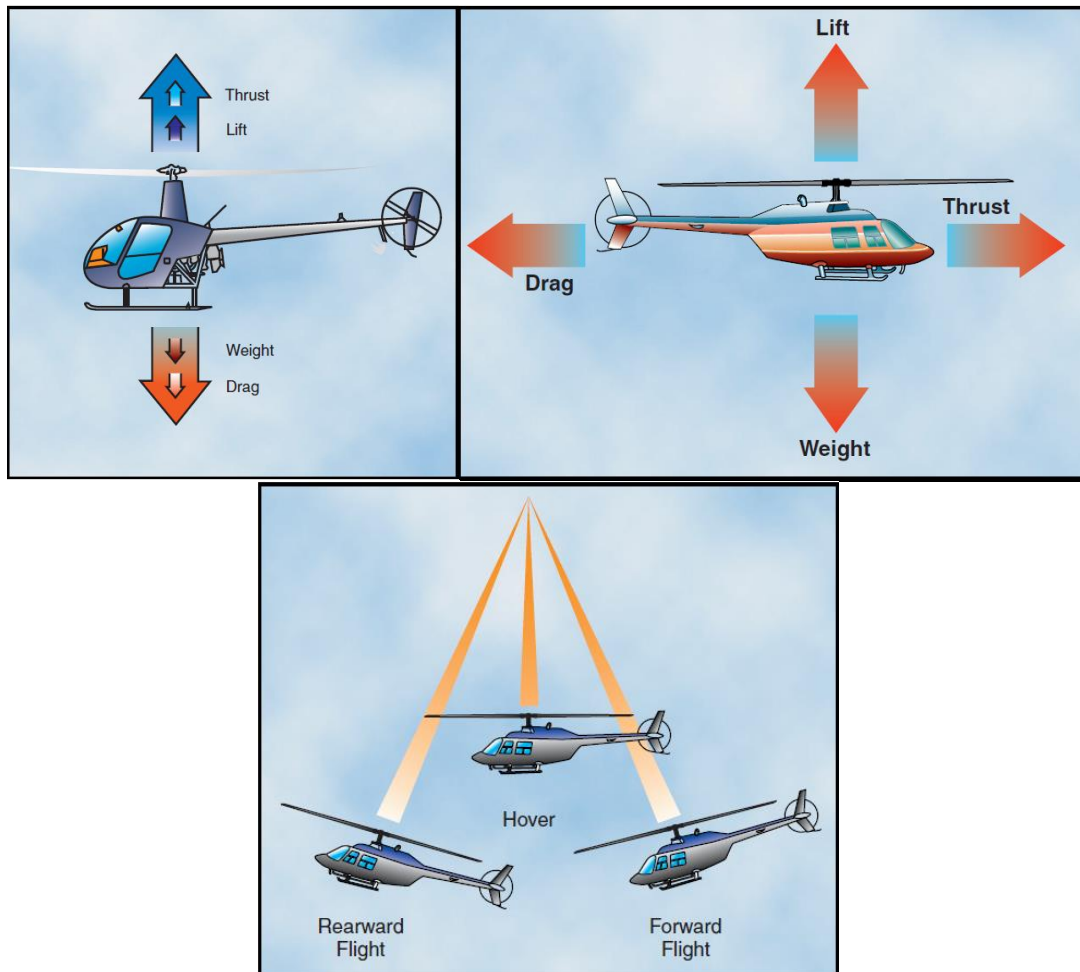
Όσον αφορά τη σχεδίαση των Ε/Π, περιλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα μεγεθών και σχημάτων αλλά η πλειοψηφία των Ε/Π έχουν ίδια κάποια βασικά στοιχεία. Συνοπτικά αυτά είναι:

- Η άτρακτος του Ε/Π πάνω στο οποίο συνδέονται όλα τα επιμέρους στοιχεία ενός Ε/Π
- Η καμπίνα του Ε/Π όπου και φέρεται το ωφέλιμο φορτίο δηλαδή το πλήρωμα/επιβάτες ή διάφορα άλλα φορτία (π.χ. αποσκευές)
- Ένα σύστημα παραγωγής ισχύος ή κινητήρας
- Το κύριο στροφέιο με το οποίο πραγματοποιείται η προώθηση του Ε/Π
- Το ουραίο στροφέιο το οποίο αντισταθμίζει τη επαγόμενη από το κύριο στροφέιο ροπή και βοηθάει στο να μη περιστρέφεται ανεξέλεγκτα το Ε/Π
- Το κύριο σύστημα μετάδοσης το οποίο μεταδίδει την ισχύ του κινητήρα στο κύριο και ουραίο στροφέιο καθώς και στα διάφορα παρελκόμενα.
- Το σύστημα Π/Γ που μπορεί να περιλαμβάνει από άκαμπτες δοκούς ή τρόχους μέχρι και σύστημα με σκι ή πλωτήρες



Εικ. 1 Τα κύρια στοιχεία ενός Ε/Π

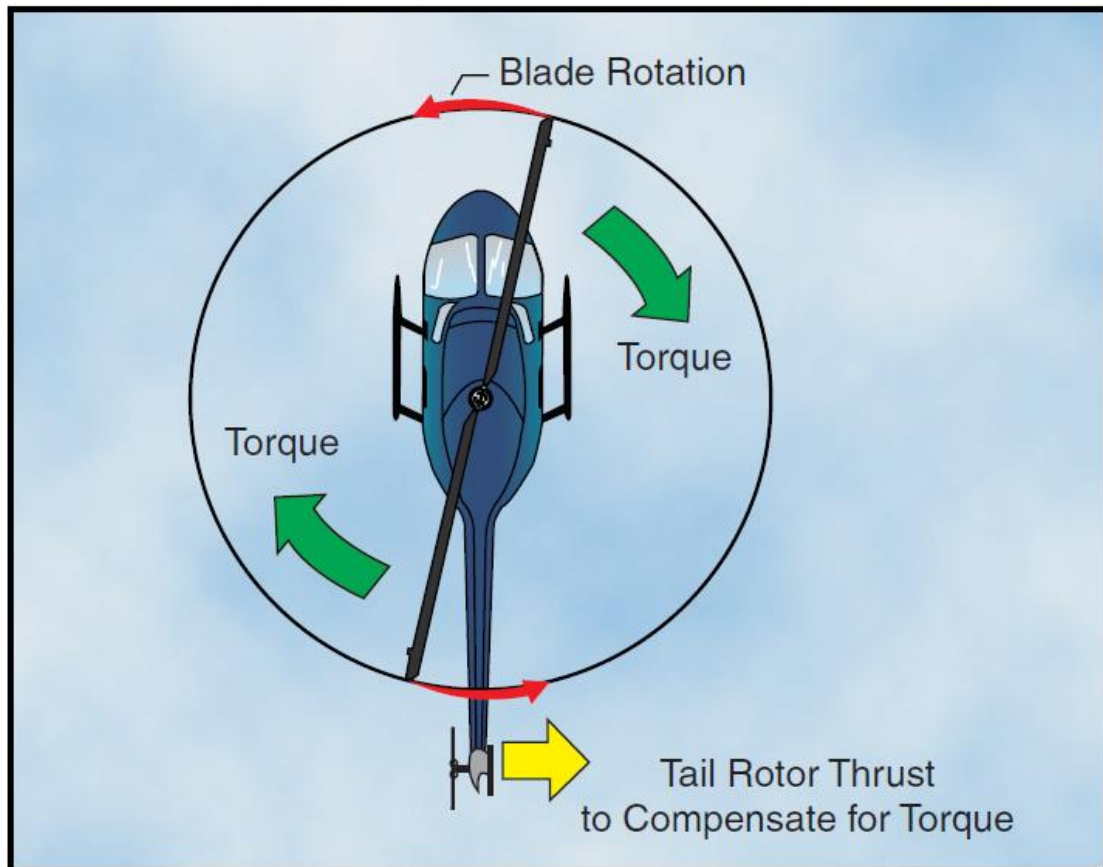
Αρχικά, το σύστημα του κύριου στροφείου ενός Ε/Π είναι υπεύθυνο για την παραγωγή άντωσης και ώσης χάρη στο οποίο ένα Ε/Π ίπταται. Ανάλογα με την διεύθυνση των παραγόμενων αεροδυνάμεων του στροφείου, επιτυγχάνεται η επιθυμητή κίνηση του Ε/Π.



Εικ. 2 Βασικές δυνάμεις που ασκούνται στο Ε/Π σε διάφορες συνθήκες πτήσης

Ένα κύριο στροφέιο μπορεί να ταξινομηθεί σε πλήρως αρθρωτό, ημιάκαμπτο ή άκαμπτο. Ένα πλήρως αρθρωτό σύστημα αποτελείται συνήθως από 3 ή 4 πτερύγια τα οποία είναι ελεύθερα να περιστραφούν γύρω και από τους 3 άξονες περιστροφής x,y,z εκτελώντας αντίστοιχες κινήσεις flapping, feathering και lead-lagging. Χάρη στην ελευθερία αυτή των κινήσεων απορροφούνται τα αεροδυναμικά φορτία μέσω των γυγγλισμών και επιβαρύνεται δομικά το σύστημα του στροφείου. Με την κίνηση του flapping επιτρέπεται στο κάθε πτερύγιο ξεχωριστά να κινηθεί πάνω-κάτω γύρω από έναν γυγγλισμό του οποίου η θέση καθορίζεται από τον κατασκευαστή με κριτηρια την ευστάθεια και τον έλεγχο του Ε/Π. Η κίνηση του lead-lag πραγματοποιείται με έναν κάθετο γυγγλισμό που επιτρέπει την εμπρός-πίσω κίνηση των πτερυγίων λόγω της επιτάχυνσης και επιβράδυνσης λόγω περιστροφής. Η χρήση αποσβεστήρων είναι μία σύνηθης διαδικαασία προκειμένου να περιοριστεί η υπερβολική lead-lag περιστροφή των πτερυγίων εντός αποδεκτών ορίων. Τέλος, η κίνηση του feathering πραγματοποιείται μέσω γυγγλισμών (spindle-sleeve assy) που επιτρέπουν στα πτερύγια να αλλάξουν τη γωνία βήματος (pitch angle) δηλαδή περιστροφή γύρω από τον άξονα κατά μήκος του εκπετάσματος. Αντίστοιχα, ένα ημιάκαμπτο σύστημα στροφείου επιτρέπει δύο κινήσεις, flapping και feathering. Αυτό το είδος στροφείου περιλαμβάνει κατά κανόνα δύο πτερύγια τα οποία είναι πακτωμένα πάνω στο hub το οποίο με την σειρά του συνδέεται πάνω στον άξονα περιστροφής με ένα trunnion bearing ή με έναν teetering γυγγλισμό. Αυτό επιτρέπει την αντίθετη κίνηση των πτερυγίων δηλαδή όταν το ένα κινείται ανοδικά, το άλλο κινείται καθοδικά. Το feathering γίνεται μέσω γυγγλισμών που επιτρέπουν στα πτερύγια να αλλάξουν τη γωνία βήματος (pitch angle). Τέλος, το άκαμπτο σύστημα είναι μηχανικά απλό αλλά δομικά σύνθετο διότι τα αεροδυναμικά φορτία θα πρέπει να απορροφηθούν σε κάμψη κι όχι μέσω της κίνησης των γυγγλισμών. Σ' αυτό το σύστημα δεν μπορούν να εκτελέσουν καμία κίνηση εκτός από το feathering.

Ένα Ε/Π μπορεί να περιλαμβάνει είτε μονό είτε διπλό στροφέιο. Στην περίπτωση του διπλού, τα στροφεία γυρνούν αντίστροφα ώστε η ροπή του ενός να αναιρεί τη ροπή του άλλου, ενώ τα μονό κύρια στροφεία απαιτούν ένα ξεχωριστό στροφέιο για να αντισταθμίσουν τη ροπή που δημιουργεί το πρώτο. Αυτό πετυχαίνεται μ' ένα ουραίο στροφέιο μεταβαλλόμενου βήματος το οποίο παράγει κάθε στιγμή την απαραίτητη ώση ώστε να επιγχάνεται ο έλεγχος της κατεύθυνσης ανάλογα με τις απαιτήσεις του κύριου στροφείου. Το στροφέιο μπορεί να είναι είτε εκτεθειμένο είτε δεξιά είτε αριστερά του ουραίου κάθετου σταθερού, ανάλογα με τις προτιμήσεις του κατασκευαστή αλλά και εσωτερικά του κάθετου σταθερού, διάταξη γνωστή ως fenestron. Άλλες φορές πάλι η αντιστάθμιση της ροπής πετυχαίνεται με πρόωθηση του αέρα μέσω ακροφυσίου στο άκρο του ουραίου (σύστημα NOTAR®).



Εικ. 3 Το ουραίο στροφέιο κι η αντι-ροπή που παράγει για να αντισταθμίσει αυτή του κύριου.

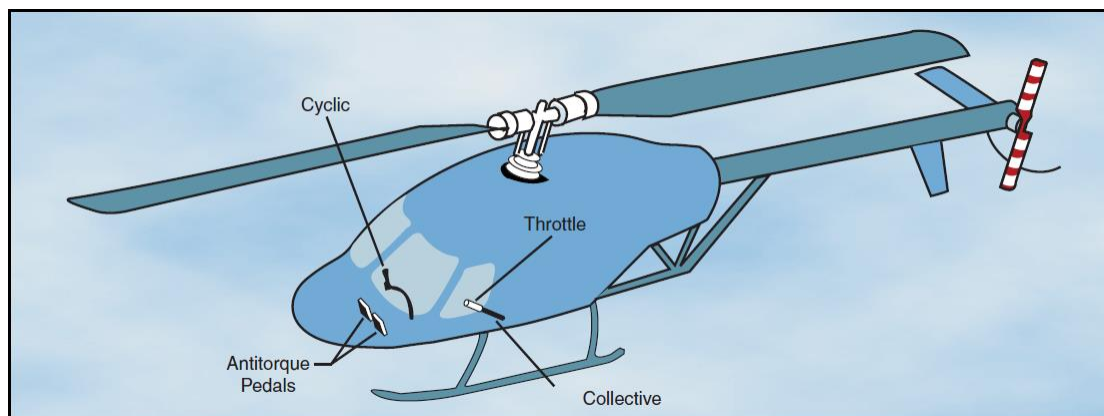


Εικ. 4 Διάφορες διατάξεις για τη δημιουργία “αντι-ροπής” του κύριου στροφέιου.

Σχετικά με το σύστημα Π/Γ, αυτό περιλαμβάνει ως επί το πλείστον ένα άκαμπτο σύστημα ράβδων ικανών για Π/Γ σε διάφορες μορφές εδάφους. Πολλές φορές μάλιστα περιλαμβάνει και αποσβεστήρες για απορρόφηση των φορτίων Π/Γ, τροχούς για εύκολη τροχοδρόμηση σε Α/Δ, πλωτήρες για Π/Γ σε ύδατα ή διάταξη με σκι για εύκολη Π/Γ σε πάγο.

Η παραγωγή ισχύος του Ε/Π πραγματοποιείται με κινητήρες που βρίσκονται εντός της ατράκτου του Ε/Π και μέσω διατάξεων μετάδοσης κινήσης και κιβωτίων γραναζιών μεταφέρεται η κίνηση από τον κινητήρα στο κύριο κι ουραίο στροφέιο αλλά και τα διάφορα παρελκόμενα. Ο χειρισμός δε του Ε/Π μπορεί να πραγματοποιηθεί με 3 διαφορετικά χειριστήρια, το collective, το cyclic και τα πωδοστήρια διεύθυνσης. Το collective ελέγχει την

ανοδική και καθοδική κίνηση ενώ το cyclic τις διάφορες πλευρικές κινήσεις, κινήσεις αντίστοιχες μ' αυτές των χειριστηρίων. Τα ποδοστήρια ελέγχουν την πορεία του Ε/Π δηλαδή στρίβοντάς το δεξιά ή αριστερά.



Εικ. 5 Βασικά χειριστήρια ενός Ε/Π

1.2 Μοντελοποίηση ενός Ε/Π

Λόγω της σημαντικότητας που έχουν τα ελικόπτερα στη σημερινή εποχή, απαιτείται ανάπτυξη σχεδιαστικών εργαλείων, ικανών να μπορούν να ανταποκριθούν στις δύο κύριες απαιτήσεις:

- Να συμπεριλαμβάνουν όλους τους υπάρχοντες φυσικούς μηχανισμούς που αφορούν τη λειτουργία ενός Ε/Π με γνώμονα την αξιοπιστία και την ασφάλεια.
- Να έχουν ένα πολύ καλό επίπεδο ακρίβειας και συνέπειας που επιτρέπει την επαλήθευση άλλων σχεδιαστικών εργαλείων μέσω κάποιων τυποποιημένων standards.

Οι μηχανισμοί αυτοί περιλαμβάνουν δύο μέρη: τη μελέτη των αεροδυναμικών φορτίων λόγω περιστροφής του στροφείου και τη μελέτη των δομικών καταπονήσεων και παραμορφώσεων του στροφείου. Καθένας από τους φυσικούς μηχανισμούς που αφορούν ένα Ε/Π μπορεί να μοντελοποιηθεί με διάφορα επίπεδα πολυπλοκότητας. Ωστόσο, επειδή η πολυπλοκότητα συνδέεται με την ακρίβεια των αποτελεσμάτων, πολλές φορές παραβλέπεται σε ένα σύστημα που περιέχει πολλούς μηχανισμούς αφού η βελτίωση της ακρίβειας σε ένα υποσώμα θα πρέπει να επιφέρει και βελτίωση της ακρίβειας όλου του συστήματος. Για παράδειγμα, αναβαθμίζοντας το αεροδυναμικό μοντέλο από την θεωρία Blade Element Momentum σε επιλύτες Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS) δε συνεπάγεται και βελτίωση του αεροελαστικού τμήματος μέσω της θεωρίας των ακτίνων. Εκτός όμως από την ακρίβεια, σημαντική παράμετρος της πολυπλοκότητας είναι το υπολογιστικό κόστος το οποίο σε πολλές περιπτώσεις καθιστά τα διάφορα πολύπλοκα μοντέλα ασύμφορα για σχεδίαση.

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη την συνοχή των υποσωμάτων, την επιθυμητή ακρίβεια και το υπολογιστικό κόστος, η σύνηθης τακτική είναι να ξεκινήσουμε με ένα απλό μοντέλο που περιέχει όλα τα βασικά φυσικά μοντέλα κι έπειτα να προχωρήσουμε στην βελτίωση τους. Οι βελτιώσεις αυτές καθορίζονται από τις μηχανολογικές απαιτήσεις.

1.2.1 Αεροδυναμική

Οι πρόκλησεις στην αεροδυναμική ενός Ε/Π είναι πολλές με τις σημαντικότερες από αυτές να είναι εξής:

- η ασταθής φύση της ροής γύρω από το στροφέιο λόγω των δυνάμεων συνεκτικότητας γύρω από πτερύγια καθώς κι η περιστροφική του κίνηση
- το σημείο στο οποίο εμφανίζεται απώλεια στήριξης, ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό της ροής ειδικά στα υπτάμενα μέσα
- το φαινόμενο της ανάπτυξης απορρεύματος
- η αύξηση των φορτίων πάνω στο στροφέιο λόγω περιστροφής
- η μη γραμμική αεροελαστική συμπεριφορά του στροφέιου

Είναι λοιπόν εμφανές ότι πρόκειται για ένα σύνολο απαιτήσεων το οποίο είναι αρκετά σύνθετο. Κάποιος νεόφερτος στον κλάδο της αεροδυναμικής πιθανώς θα προσδοκούσε να βρει πολλά σύγχρονα αεροδυναμικά μοντέλα σε εφαρμογή. Ωστόσο αυτό δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Όπως αναφέρεται και παρακάτω, η χρήση αεροδυναμικών μοντέλων βασισμένα στις vortex μεθόδους κρίνεται υποχρεωτική, τουλάχιστον στις εφαρμογές μελέτης και σχεδίασης Ε/Π. Υπάρχουν βέβαια κι άλλα πολύ πιο εξηζητημένα και λεπτομερή μοντέλα όπως τα CFD μοντέλα. Όμως η χρήση τους περιορίζεται για ερευνητικούς σκοπούς που σκοπεύουν στην κατανόηση των διαφόρων φυσικών φαινομένων ή ως ένα μέτρο αξιολόγησης των διαφόρων μοντέλων. Τα αεροδυναμικά μοντέλα μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με την πολυπλοκότητα τους η οποία πολλές φορές συνδέεται με την ακρίβεια, όμως αυτό δεν ισχύει πάντα. Τα μοντέλα BEMT ανήκουν στην κατηγορία της χαμηλής πολυπλοκότητας, τα vortex μοντέλα ανήκουν στην κατηγορία της μεσαίας πολυπλοκότητας ενώ τα μοντέλα CFD στην υψηλής πολυπλοκότητας.

Η στροβιλές μεθοδολογίες είναι αρκετά παλιές κι είναι μέρος της κλασικής αεροδυναμικής θεωρίας. Τα πιο γνωστά μοντέλα είναι οι θεωρίες της αντωτικής γραμμής και της αντωτικής επιφάνειας που αναπτύχθηκαν στις αρχές της δεκαετίας του 60' για A/Φ με σταθερές πτέρυγες. Τα στροβιλικά μοντέλα είναι εγγενώς 3D με δυνατή συνοχή κατά μήκος του εκπετάσματος πράγμα το οποίο δεν υπάρχει στα μοντέλα μικρής πολυπλοκότητας. Στα μοντέλα δινών δεν χρειάζονται διορθώσεις στις ρίζες των πτερύγων και στα ακροπτερύγια ενώ η θεώρηση απείρου αριθμού πτερύγων εγκαταλείπεται. Επίσης, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι μία αλλαγή στις συνθήκες εισόδου του αέρα επηρεάζει άμεσα τη διαμόρφωση του ελεύθερου ομόρρου.

Η πιο λεπτομερής έκδοση των μεθόδων δινών είναι αυτή που θεωρεί την ακριβή 3D γεωμετρία και συνδέεται με τη θεωρία δυναμικού και τις panel μεθόδους. Παρότι με τις μεθόδους δινών εξαλείφονται διάφορα μειονεκτήματα ανακρίβειας των αποτελεσμάτων, ακόμα βασίζονται σε 2D αεροδυναμική και χρησιμοποιούνται πίνακες για διόρθωση των φορτίων λόγω των δυνάμεων συνεκτικότητας. Επίσης, ένα φαινόμενο το οποίο προσεγγίζεται αρκετά καλά είναι η επαγωγή λόγω του ομόρρου. Βέβαια υπάρχουν και διάφορα μειονεκτήματα. Το υπολογιστικό κόστος είναι μεγάλο, ειδικά όταν το απόρρευμα είναι ελεύθερο να εξελιχθεί. Γι' αυτό το λόγο έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι μείωσης του κόστους που καθιστούν εφικτές μεγάλες προσομοιώσεις. Η τεχνική Particle mesh σε συνδιασμό με τις τεχνικές υβριδικού ομόρρου έχουν μειώσει ουσιαστικά το κόστος. Επίσης, στη μείωση του κόστους συμβάλλει το ότι οι μέθοδοι δινών παραλληλοποιούνται εύκολα αφού μειώνεται πλέον ο υπολογιστικός χρόνος.

Σε αντίθεση, τα CFD μοντέλα θεωρούνται ως η πιο αξιόπιστη λύση από θέμα πληρότητας και ακρίβειας. Η πιο συχνή επιλογή είναι να λύσουμε τις εξισώσεις Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS) συνοδευόμενες από κατάλληλες μοντελοποιήσεις κλεισίματος και μετάβασης στροβιλότητας (turbulence closure and transition modeling). Εκτός από τα κλεισίματα

στροβιλότητας, χρησιμοποιούνται συχνά eddy viscosity μοντέλα όπως τα Spalart-Almaras ή το k- ω . Όσον αφορά τη μετάβαση, υπάρχουν μοντέλα που βασίζονται στη θεωρία επίπεδου οριακού στρώματος, σε θεωρήσεις σταθερότητας όπως η e^N μέθοδος και σε θεωρίες ομοιότητας όπως το Re_θ - γ μοντέλο. Σε σχέση με άλλα μοντέλα, οι RANS απαιτούν ελάχιστα εξωτερικά inputs ή μοντελοποιήσεις ad-hoc. Μπορούν να αναπαράγουν την πλήρη 3D ροή γύρω από το στροφέιο ενός Ε/Π και την εκτίμηση των φορτίων. Οι προσομοιώσεις RANS θεωρούνται υψηλής αξιοπιστίας. Παρόλ' αυτά σε ροές με υψηλό αριθμό Reynolds όπου υπάρχει μεγάλη αστάθεια, οι RANS δεν είναι από μόνες τους αρκετές κι απαιτείται εφαρμογή πιο αποτελεσματικών μοντέλων όπως η DES (Detached Eddy Simulation) ή η LES (Large Eddy Simulation). Ακόμα όμως κι έτσι, τα μοντέλα υπερτερούν όλων των λιγότερο σύνθετων μεθόδων. Με στόχο να μειωθεί το κόστος το CFD μοντέλων χωρίς μείωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων, έχουν αναπτυχθεί διάφορα υβριδικά δινών-CFD μοντέλα με αρκετά καλά αποτελέσματα.

Το κύριο πλεονέκτημα των vortex μοντέλων είναι το πολύ χαμηλό υπολογιστικό κόστος σε σχέση με άλλα μοντέλα. Ακόμα κι αν η υπολογιστική ταχύτητα αυξανόταν κατά μερικές τάξεις μεγέθους κι αντίστοιχα ο υπολογιστικός χρόνος μειωνόταν, τα vortex μοντέλα ακόμα θα υπερτερούσαν. Η κύρια αιτία είναι ότι η διαδικασία σχεδίασης των στροφείων ενός Ε/Π, σε αντίθεση με άλλες αεροδυναμικές εφαρμογές, απαιτεί την εξέταση πολλών και διαφορετικών περιπτώσεων καταπονήσεων. Αυτό συμβαίνει διότι το περιβάλλον στο οποίο λειτουργούν τα Ε/Π είναι πολλές φορές σύνθετο λόγω των ανέμων με αποτέλεσμα να αυξάνεται το εύρος των φορτιάκων περιπτώσεων που πρέπει να καλυφθούν ώστε να καταλήξουμε σε ένα πλήρες φορτιακό φάσμα απαραίτητο για την σχεδίαση Ε/Π. Συνεπώς, η περίπτωση να γίνει σχεδίαση και μοντελοποίηση ενός Ε/Π βάσει των CFD μεθόδων κρίνεται άκρως απαγορευτική. Αντίθετα, τα μοντέλα που βασίζονται στις vortex μεθόδους αποτελούν μία ιδανική λύση που προσεγγίζει πολύ καλά τα πειραματικά δεδομένα.

1.2.2 Δομική και δυναμική ανάλυση

Όσον αφορά τη δομική μοντελοποίηση των Ε/Π, βασίζεται κατά κύριο λόγο στην θεωρία δοκού. Μία πλήρης 3D FEM δομική μοντελοποίηση εφαρμόζεται μόνο σε ορισμένες περιοχές όπως το hub κι η άτρακτος όπου η θεωρία δοκού αποτυγχάνει να δώσει σχεδιαστικές λεπτομέρειες. Στα πρώτα στάδια εφαρμογής αυτής της θεωρίας, χρησιμοποιούνταν η κλασική μοντελοποίηση με γραμμικές δοκούς. Κάνοντας ad hoc προσθήκες ή διορθώσεις εμφανίστηκαν κάποιες μη-γραμμικότητες, όπως για παράδειγμα η φυγοκεντρική ακαμψία λόγω περιστροφής των πτερυγίων. Όμως το κύριο μοντέλο παρέμενε γραμμικό δίνοντας σχετικά άκαμπτους σχεδιασμούς. Στο πλαίσιο αυτό, τα γραμμικά μοντέλα παρείχαν αρκετά καλά αποτελέσματα κι έτσι δεν υπήρχε ανάγκη για μία πιο προχωρημένη μοντελοποίηση. Ωστόσο, στην πράξη τα Ε/Π είναι ελαστικά και σε διάφορες περιπτώσεις εμφανίζονται μεγαλύτερες παραμορφώσεις οδηγώντας σε μη γραμμικά φαινόμενα συνοχής και αντίξοη δυναμικά φόρτιση των πτερυγίων. Στο πλαίσιο αυτό, δημιουργήθηκε η ανάγκη για μοντέλα που να μπορούν να χειρίζονται τις μη γραμμικότητες που εμφανίζονται σε μεγάλες παραμορφώσεις.

Συνεπώς, κατά τη διάρκεια των τελευταίων χρόνων, ένα σύνολο από προχωρημένα μη γραμμικά μοντέλα έχουν εφαρμοστεί στα νέας γενιάς αεροελαστικά εργαλεία σχεδίασης. Υπάρχουν 3 κατηγορίες αυτών των μοντέλων, αυτών που περιέχουν εγγενείς μη γραμμικές διατυπώσεις (γενικευμένες μέθοδοι Timoshenko), multi-body διατυπώσεις και μεθοδολογίες αποκοπής (truncation methods). Οι μέθοδοι της πρώτης κατηγορίας εφαρμόζουν μία επεκταμένη μορφή της αρχής του Hamilton. Ωστόσο, αντί οι διακυμάνσεις να εκφράζονται με όρους μεταβλητών μετατοπίσεων και ροπών, υιοθετούν μία εγγενή διατύπωση της

θεωρίας δοκού. Η διατύπωση θεωρείται εγγενής εάν δεν είναι εξαρτημένη από συγκεκριμένο τύπο μεταβλητών παραμόρφωσης και περιστροφής. Οι μέθοδοι της δεύτερης κατηγορίας χωρίζουν κάθε σώμα σε έναν αριθμό από αλληλοσυνδεόμενα στοιχεία που είτε θεωρούνται ως ελαστικές ακτίνες είτε ως άκαμπτα σώματα. Στην περίπτωση των άκαμπτων στοιχείων, σημειακά ελατήρια μπορούν εφαρμοστούν στα σημεία ένωσης τους ώστε να συμπεριλάβουν την ελαστικότητα του κάθε στοιχείου στις διάφορες διευθύνσεις. Για τις ελαστικές ακτίνες, όλοι οι τύποι μοντέλων έχουν χρησιμοποιηθεί, κυμαίνοντας από απλά γραμμικά σε γεωμετρικά ακριβή και μη γραμμικά μοντέλα. Τέλος, η τελευταία κατηγορία περιλαμβάνει μεθόδους στις οποίες οι μη γραμμικές δυναμικές εξισώσεις της παραμορφωμένης ακτίνας ακολουθώντας ένα συνεπές (consistent) σχήμα όπου οι όροι υψηλότερης τάξης πέρα από κάποιο βαθμό αποκόπτονται. Για τη δημιουργία των δυναμικών εξισώσεων, γίνεται η παραδοχή ότι τα υλικά είναι ομογενή κι ισοτροπικά. Μ' αυτόν τον τρόπο, τα απαραίτητα inputs περιορίζονται στο κύριο σετ των δομικών ιδιοτήτων (συντελεστές δυσκαμψίας κάμψης στη διαμήκη και εγκάρσια διεύθυνση, συντελεστές δυσκαμψίας στρέψης κ.τ.λ.). Πρόσφατα έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι στις οποίες λαμβάνεται υπόψη ένα πλήρες μητρώο δυσκαμψίας για ακτίνες με σύνθετα υλικά. Μέθοδοι αυτού του τύπου απαιτούν ως input τη λεπτομερή εσωτερική δομή των σύνθετων υλικών για να παράγουν τις κατάλληλες ισοδύναμες δομικές ιδιότητες της ακτίνας. Επιπλέον, ορισμένα πρόσφατα αναπτυγμένα εργαλεία προσφέρουν τη δυνατότητα να προσομοιωθούν μη γραμμικά υλικά καθώς και τα χαρακτηριστικά δομικής απόσβεσης.

Μεταξύ των υπάρχοντων εργαλείων σχεδίασης, ορισμένα εφαρμόζουν απευθείας τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων ενώ άλλα υιοθετούν μοντέλα χαμηλής τάξης βασισμένα σε διάφορες τεχνικές μείωσης όπως η γραμμική τμηματική επέκταση ή η μέθοδος Craig-Bampton. Στην τελευταία περίπτωση, ο στόχος να μειώσουμε ουσιαστικά την υπολογιστική προσπάθεια λαμβάνοντας υπόψη τη μεγάλη λίστα προσομοιώσεων απαραίτητη από τα IEC standard. Η μείωση του υπολογιστικού κόστους έχει οδηγήσει πολλούς τμηματικούς κώδικες να απαλλείψουν τη στρέψη υποθέτοντας ότι τα πτερύγια είναι άκαμπτα σε στρέψη.

1.3 Συμβολή της διπλωματικής

Η παρούσα διπλωματική στοχεύει στο να δημιουργηθεί ένα υπολογιστικό αεροδυναμικό εργαλείο ικανό να προσομοιώνει την κίνηση του στροφείου ενός Ε/Π καθώς υπολογίζοντας τις διάφορες χρήσιμες παραμέτρους όπως την κατανομή των καταπονήσεων και παραμορφώσεων πάνω στο στροφέιο και το πεδίο ταχυτήτων στον ομόρρο. Αυτό οδήγησε στην δημιουργία του GenUVP. Η μορφή των εργαλείων αυτών σήμερα είναι αποτέλεσμα πάνω από 20 χρόνων εργασίας και εμπειρίας πάνω στο κομμάτι της μοντελοποίησης Ε/Π. Αρχικά, τα πρώτα στάδια της εργασίας αφορούσαν την μελέτη του κώδικα GenUVP version 3, όπου έγινε επανασύνδεση με τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί ο κώδικας, τα βασικά δομικά του μέρη και τις βασικές παραμέτρους του, τα στοιχεία εισόδου και τα υπολογιστικά αποτελέσματα. Ανακτήθηκαν δηλαδή όλες οι πιθανώς ξεχασμένες λεπτομέρειες του κώδικα που τον καθιστούν εκ νέου διαθέσιμο για οποιασδήποτε μορφής εκμετάλλευση του. Στην περίπτωση μας, η ανάκτηση των υπολογιστικών αποτελεσμάτων αφορούσε την αξιολόγησή του GenUVP version 3 βάσει των πειραματικών δεδομένων καθώς και την μετέπειτα αξιολόγηση του νέου τροποποιημένου κώδικα hGAST σε σχέση με τα παλαιότερα αποτελέσματα. Αρχικά λοιπόν, έγινε μία παραμετρική ανάλυση ως προς την ταχύτητα πτήσης, αλλάζοντας βασικές παραμέτρους εισόδου που αφορούν τον κώδικα, με αποτέλεσμα να ανακτηθούν εκ νέου όλες οι σχηματικές απεικονήσεις σημαντικών τεχνικών λεπτομεριών με κυριότερες αυτές των φορτίσεων στη ρίζα των πτερυγίων και των

παραμορφώσεων στα ακροπτερύγια, δίνοντας τη δυνατότητα για μία πλήρη αξιολόγηση του GenUVP version 3.

Σε επόμενο στάδιο, έγινε η μελέτη των δυνατών τροποποιήσεων που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν ώστε, βάσει του GenUVP version 3, να δημιουργηθεί ένας νέος υπολογιστικός κώδικας που θα μπορεί να προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια τα υπολογιστικά δεδομένα ενώ παράλληλα θα μειώνει τον υπολογιστικό χρόνο. Μετά από μελέτη κι αξιολόγηση των υπάρχοντων μοντέλων που περιγράφουν τους φυσικούς μηχανισμούς ενός Ε/Π σε συνδιασμό με τις μηχανολογικές απαιτήσεις και τη δυνατότητα εφαρμογής τους, ο αρχικός αεροελαστικός κώδικας αντικαταστάθηκε από τον αντίστοιχο νέο με αεροελαστική συμπεριφορά των πτερυγίων κι έγινε εκ νέου παραμετρική μελέτη ως προς την ταχύτητα πτήσης των κρίσιμων ροπών και παραμορφώσεων στη ρίζα και στα ακροπτερύγια αντίστοιχα. Όσον αφορά το αεροελαστικό κομμάτι του νέου κώδικα hGAST, προχωρήσαμε σε αλλαγή από ένα μη γραμμικό μοντέλο 2^{ης} τάξης ακρίβειας στο μοντέλο βασισμένο στη μη γραμμική μέθοδο ανάλυσης των πολυ-σωμάτων. Πλέον, τα πτερύγια χωρίζονται σε επιμέρους υποσώματων (sub-bodies) καθένα από τα οποία έχει το δικό του σύστημα συντε/νων και παραμορφώνεται βάσει του προηγούμενου. Η προσέγγιση αυτή είναι σαφώς πιο αξιόπιστη αφού οι παραμορφώσεις μεταδίδονται και περιγράφονται πληρέστερα με χρήση πολλών αλληλένδετων σωμάτων κατά μήκος του πτερυγίου. Όσον αφορά το αεροδυναμικό μέρος, λειτουργεί ο κώδικας GenUVP υπολογίζοντας ένα πεδίο φορτίων το οποίο αποτελεί αφετηρία για τον νέο υπολογιστικό κώδικα hGAST. Τα φορτία αυτά τοποθετούνται στο άξονα περιστροφής του στροφείου (hub) δίνοντας ένα αρχικό προφίλ φορτίσεων αλλά και επακόλουθων παραμορφώσεων για τον νέο κώδικα. Η δυναμική είναι διαμορφωμένη με multi-body δηλαδή πραγματοποιείται θεωρώντας ένα σύνολο από αλληλένδετα υπο-σώματα που αφορούν τα δομικά μέρη του Ε/Π. Το πλεονέκτημα είναι ότι οι τελικές δυναμικές εξισώσεις κίνησης μπορούν εύκολα να γραμμικοποιηθούν αναλυτικά κι έπειτα να γίνει μία ανάλυση σταθερότητας γραμμικών ιδιοτιμών σε σχέση με μία πιθανώς αρκετά αποκλίνουσα σταθερή ή περιοδική κατάσταση. Όσον αφορά τον ομόρρου, η μοντελοποίηση από το παλαιότερο hybrid μοντέλο προχωράει στην τεχνική του particle mesh. Ενώ λοιπόν παλαιότερα περιοριζόμασταν από ένα πλέγμα στο οποίο η διακριτοποίηση κι ο υπολογισμός του πεδίου ταχυτήτων ήταν αρκετά δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία, πλέον προσομοιώνουμε τον ομόρρου με διάφορα σωματίδια τα οποία παρεμβάλουμε πάνω σε ένα νέο πλέγμα πάνω στο οποίο υπολογίζουμε το δυναμικό. Επόμενο βήμα, είναι η εκ νέου παρεμβόλη των ιδιοτήτων του πλέγματος πάνω στα σωματίδια. Το πλέγμα αυτό είναι σαφώς πιο εύκολα προσεγγίσιμο αφού προσφέρει ευελιξία ειδικά σε περιπτώσεις όπου η γεωμετρία είναι δύσκολη. Επίσης, ο συντελεστής απόσβεσης στο κώδικα hGAST είναι αρκετά υψηλός ώστε να αποσβένει πιθανές ταλαντώσεις που υπάρχουν κι οι οποίες δεν προσφέρουν υπολογιστική αξία.

Επόμενο βήμα αποτέλεσε η σύγκριση των αποτελεσμάτων του παλαιότερου και του νέου κώδικα με τα πειραματικά δεδομένα. Η αξιολόγηση έγινε βάσει σημαντικών φορτίσεων και παραμορφώσεων των πτερυγίων. Μέσω σχηματικών απεικονήσεων θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε τη βελτίωση των αποτελεσμάτων και τη σύγκλιση με τα πειραματικά δεδομένα κι επομένως την αξιοπιστία του κώδικα να περιγράφει σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό και χαμηλό υπολογιστικό κόστος την αεροδυναμική κι αεροελαστική συμπεριφορά του στροφείου ενός Ε/Π.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό Υπόβαθρο

Το παρών κεφάλαιο παρέχει το θεωρητικό υπόβαθρο του λογισμικού GenUVP. Το γενικό πρόβλημα έγκειται στην αναγνώριση των διαφόρων φυσικών μηχανισμών που διέπουν το σύστημα κι οι οποίοι αποτελούν τα δομικά μέρη του GenUVP. Οι μηχανισμοί αυτοί περιλαμβάνουν μοντέλα αεροδυναμικής, αεροελαστικότητας και δυναμικής παραμορφωσίμου σώματος. Αρχικά μελετάται το σύστημα ως ένα ενιαίο σύνολο και στη συνέχεια εξετάζεται κάθε επιμέρους τμήμα του ξεχωριστά.

2.1 Δομική δυναμική

Η δομική μελέτη όλου του συστήματος γίνεται μέσω διαφόρων αλγεβροδιαφορικών μοντέλων και αφορά τα τρία επιμέρους του Ε/Π:

- Το κύριο στροφίο
- Το ουραίο στροφίο
- Τον άξονα περιστροφής

Όλα τα επιμέρους σώματα θεωρούνται ελαστικά και μοντελοποιούνται ως δομές ακτίνων οι οποίες μπορούν να καταπονηθούν σε τρεις διευθύνσεις, προκαλώντας τις αντίστοιχες 6 παραμορφώσεις (3 μετατοπίσεις και 3 περιστροφές). Συνεπώς γίνεται μελέτη όλων των επιμέρους μερών ξεχωριστά, το καθένα εκ των οποίων έχει το δικό του σύστημα συντε/νων σύμφωνα με το οποίο υπολογίζονται οι τάσεις κι οι παραμορφώσεις. Στα σημεία επαφής των επιμέρους σωμάτων εφαρμόζονται δυναμικές και κινηματικές συνθήκες ώστε να λαμβάνονται υπόψη μη γραμμικά γεωμετρικά φαινόμενα.

2.1.1 Μοντελοποίηση με χρήση των πολυ-σωμάτων

Σύμφωνα με αυτή τη διατύπωση, η δυναμική συμπεριφορά του Ε/Π πραγματοποιείται θεωρώντας ένα σύνολο από αλληλένδετα υπο-σώματα που αφορούν τα δομικά μέρη του Ε/Π (δηλαδή κύριο κι ουραίο στροφείο, hub). Ένα τοπικό σύστημα συντε/νων (Οxyz) καταχωρείται στην αρχή κάθε υπο-σώματος σύμφωνα με το οποίο υπολογίζονται οι τοπικές ελαστικές παραμορφώσεις. Κάθε υπο-σώμα έχει 6 βαθμούς ελευθερίας δηλαδή 3 μετατοπίσεις και 3 περιστροφές γύρω από τους αντίστοιχους άξονες.

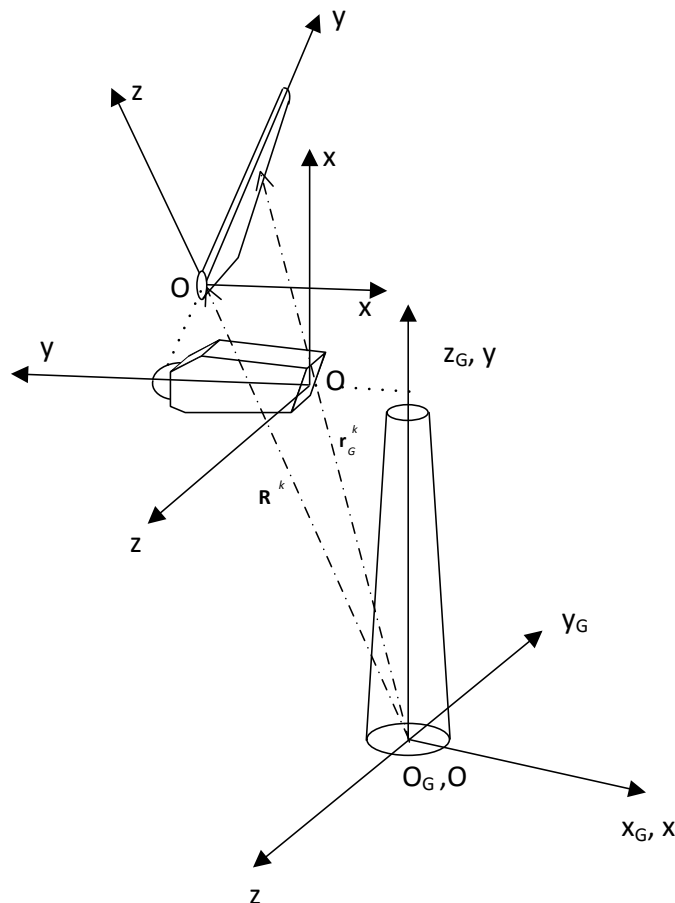
Έστω \mathbf{R}^k το διάνυσμα θέσης του k-στοιχείου στο τοπικό σύστημα συντε/νων (Οxyz) και \mathbf{T}^k το μητρώο περιστροφής από το τοπικό στο καθολικό σύστημα συντε/νων, τότε η θέση ενός σημείου του k-στοιχείου σε σχέση με το αδρανιακό (καθολικό) σύστημα συντε/νων (Ο_kx_ky_kz_k) \mathbf{r}_G^k καθώς κι η πρώτη κι η δεύτερη παράγωγος δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_G^k &= \mathbf{R}^k + \mathbf{T}^k \cdot \mathbf{r}^k \\ \dot{\mathbf{r}}_G^k &= \dot{\mathbf{R}}^k + \dot{\mathbf{T}}^k \cdot \mathbf{r}^k + \mathbf{T}^k \cdot \dot{\mathbf{r}}^k \\ \ddot{\mathbf{r}}_G^k &= \ddot{\mathbf{R}}^k + \ddot{\mathbf{T}}^k \cdot \mathbf{r}^k + 2 \cdot \dot{\mathbf{T}}^k \cdot \dot{\mathbf{r}}^k + \mathbf{T}^k \cdot \ddot{\mathbf{r}}^k\end{aligned}\tag{1}$$

ενώ η επιτάχυνση εκφρασμένη στο τοπικό σύστημα ορίζεται ως:

$$\left(\mathbf{T}^k\right)^T \cdot \ddot{\mathbf{r}}_G^k = \underbrace{\left(\mathbf{T}^k\right)^T \cdot \ddot{\mathbf{R}}^k}_{\text{acceleration of the origin}} + \underbrace{\left(\mathbf{T}^k\right)^T \cdot \dot{\mathbf{T}}^k \cdot \mathbf{r}^k}_{\text{centrifugal acceleration}} + \underbrace{2 \cdot \left(\mathbf{T}^k\right)^T \cdot \dot{\mathbf{T}}^k \cdot \dot{\mathbf{r}}^k}_{\text{Coriolis acceleration}} + \dot{\mathbf{r}}^k \quad (2)$$

Η εξ. (2) περιέχει τους όρους φυγοκεντρικής και Coriolis επιτάχυνσης που εμφανίζονται μέσω των χρονικών παραγώγων του μητρώου \mathbf{T}^k .



Εικ. 6 Διατύπωση συστήματος πολλών σωμάτων σε τοπικό και καθολικό σύστημα συντε/νων.

Ως \mathbf{R}^k και \mathbf{T}^k ορίζονται η ακολουθία των μετατοπίσεων και περιστροφών \mathbf{d}_j και \mathbf{t}_j που συνδέουν το τοπικό σύστημα συντε/νων $[\mathbf{Oxyz}]$ με το καθολικό $[\mathbf{O_Gx_Gy_Gz_G}]$ δηλαδή:

$$\mathbf{r}_G^k = \mathbf{d}_m + \mathbf{t}_m \cdot \left\{ \dots \left[\mathbf{d}_2 + \mathbf{t}_2 \cdot \left(\mathbf{d}_1 + \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{r}^k \right) \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{R}^k = \mathbf{d}_m + \mathbf{t}_m \cdot \left\{ \dots \left[\mathbf{d}_2 + \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{d}_1 \right] \right\}, \quad \mathbf{T}^k = \prod_{j=1}^{J(k)} \mathbf{t}_j \quad (3)$$

Καθένα από τα \mathbf{d}_j και \mathbf{t}_j είναι συνδεδεμένα είτε με μία απλή μετατόπιση είτε με μία απλή περιστροφή σε μία συγκεκριμένη διεύθυνση. Αθροίζοντας όλες τις μετατοπίσεις και περιστροφές που περιέχονται στα διανύσματα \mathbf{R}^k και \mathbf{T}^k , για όλα τα υπο-σώματα, προκύπτει το διάνυσμα των κινηματικών βαθμών ελευθερίας \mathbf{q} . Κάθε στοιχείο του \mathbf{q} συνδέεται με

κάποια συγκεκριμένη μετατόπιση ή περιστροφή σε κάποια διεύθυνση και έτσι $\mathbf{d}_j = \mathbf{d}_j(q_n; \text{dir}_n)$ αντιστοιχεί σε μία μετατόπιση q_n στην dir_n διεύθυνση κι αντίστοιχα για το \mathbf{t}_j . Γενικά τα στοιχεία του \mathbf{q} είναι χρονικά εξαρτώμενα και συνεπώς $\mathbf{R}^k = \mathbf{R}^k(\mathbf{q}_k; t)$ και $\mathbf{T}^k = \mathbf{T}^k(\mathbf{q}_k; t)$. Εάν q_n αναφέρεται σε κίνηση άκαμπτου σώματος τότε η αντίστοιχη δυναμική εξίσωση προστίθεται στο σύστημα ελέγχου του όλου συστήματος. Εάν q_n αναφέρεται σε ένα ήδη υπάρχων βαθμό ελευθερίας τότε προστίθεται μία απλή εξίσωση καταχώρησης. Για παράδειγμα, τα πτερύγια ακολουθούν την ελαστική κίνηση του hub κι έτσι οι αποκλίσεις του hub περιέχονται στο \mathbf{q} . Επιπλέον τα πτερύγια ακολουθούν την περιστροφή του άξονα και την αλλαγή βήματος (pitch angle) , τα οποία όλα περιλαμβάνονται στο \mathbf{q} ως βαθμοί ελευθερίας των αντίστοιχων κινήσεων.

Στα σημεία σύνδεσης των υπο-σωμάτων, εκτός από κινηματικές συνθήκες, εφαρμόζονται και δυναμικές συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε σημείο σύνδεσης κάθε υπο-σώμα συμβάλει στις μετατοπίσεις και περιστροφές και των άλλων υπο-σωμάτων, γεγονός το οποίο με τη σειρά του συμβάλει στα μεταξύ τους φορτία (αντιδράσεις δυνάμεων). Συνεπώς, στο προηγούμενο παράδειγμα, το στροφείο θα δεχτεί φορτία από το hub.

Το πλεονέκτημα της παραπάνω μεθόδου σε σχέση με άλλες διατυπώσεις πολυ-σωμάτων που εφαρμόζουν πολλα/στες Lagrange είναι ότι οι τελικές δυναμικές εξισώσεις κίνησης μπορούν εύκολα να γραμμικοποιηθούν αναλυτικά κι έπειτα να γίνει μία ανάλυση σταθερότητας γραμμικών ιδιοτιμών (linear eigenvalue stability analysis) σε σχέση με μία πιθανώς αρκετά αποκλίνουσα σταθερή ή περιοδική κατάσταση (steady or periodic state). Η μη γραμμική κινηματική στην εξ. 2 , καθιστά τις δυναμικές εξ του συστήματος μη γραμμικές ανεξάρτητα αν το μοντέλο ακτινών (beam model) είναι γραμμικό ή όχι. Η μη γραμμικότητα οφείλεται στη εξάρτηση του \mathbf{q} από \mathbf{T}^k , \mathbf{R}^k . Υποθέτοντας μικρές διαταραχές $\delta \mathbf{q}$ σε σχέση με μία κατάσταση αναφοράς \mathbf{q}^0 , το \mathbf{q} κι οι παράγωγοί του προσεγγίζονται ως εξής:

$$\mathbf{q} \cong \mathbf{q}^0 + \delta \mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{q}} \cong \dot{\mathbf{q}}^0 + \delta \dot{\mathbf{q}}, \quad \ddot{\mathbf{q}} \cong \ddot{\mathbf{q}}^0 + \delta \ddot{\mathbf{q}} \quad (4)$$

κι αντίστοιχα τα \mathbf{T}^k , \mathbf{R}^k γραμμικοποιούνται ως εξής (ο δείκτης k παραλείπεται για λόγους απλότητας):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{q}) &\cong \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) + \partial_j \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) \cdot \delta q_j \\ \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}) &\cong \partial_j \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) \cdot \dot{q}_j^0 + \partial_{jk} \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) \cdot \dot{q}_j^0 \cdot \delta q_k + \partial_j \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) \cdot \delta \dot{q}_j \\ \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}) &\cong \partial_j \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) \cdot \ddot{q}_j^0 + \partial_{jk} \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) \cdot \dot{q}_k^0 \cdot \dot{q}_j^0 + \partial_{jkm} \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) \cdot \dot{q}_m^0 \cdot \dot{q}_k^0 \cdot \delta q_j + \\ &\quad \partial_{jk} \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) \cdot \ddot{q}_k^0 \cdot \delta q_j + 2 \partial_{jk} \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) \cdot \dot{q}_k^0 \cdot \delta \dot{q}_j + \partial_j \mathbf{R}(\mathbf{q}^0) \cdot \delta \ddot{q}_j \end{aligned} \quad (5)$$

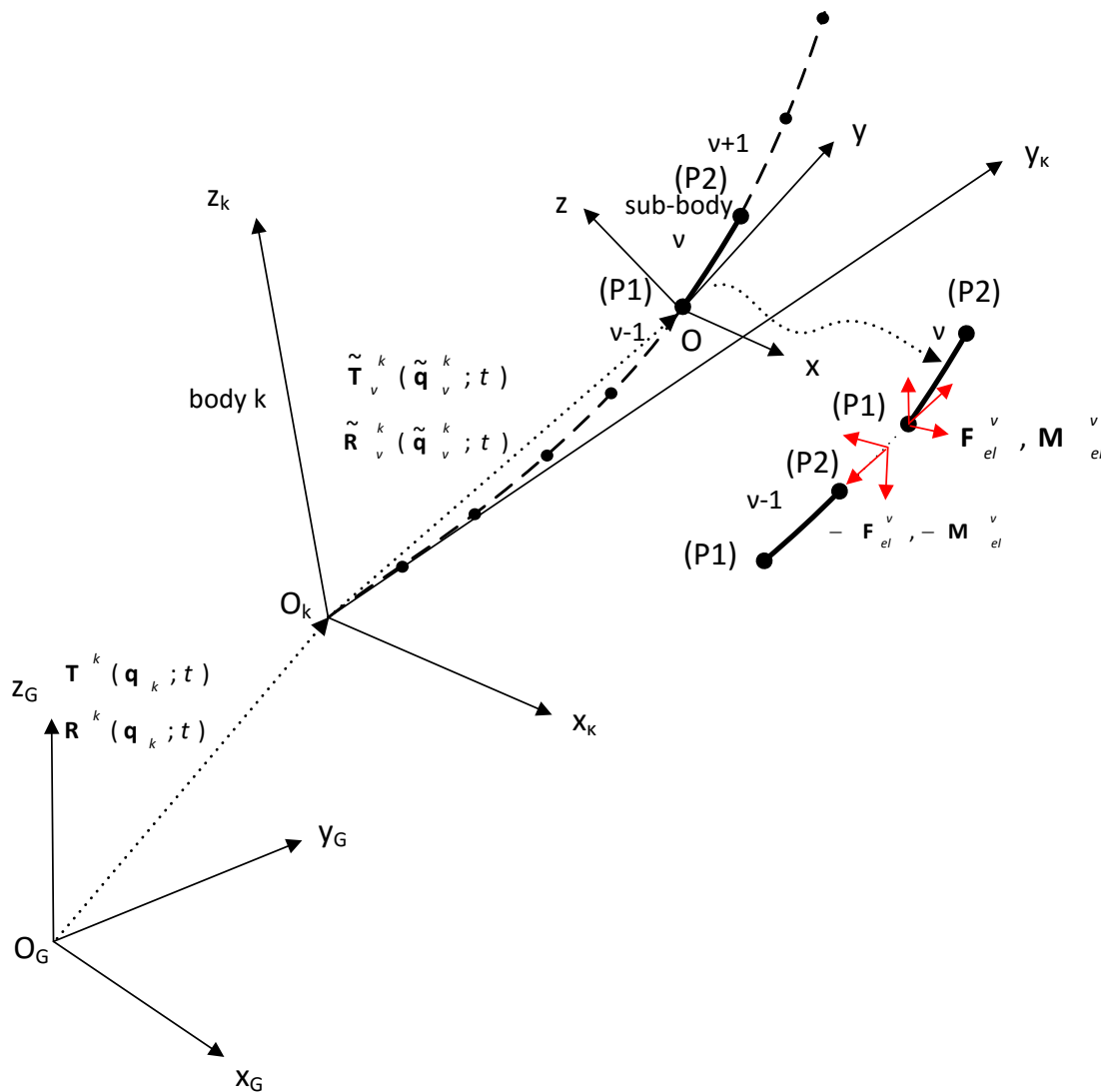
Στην τελευταία εξίσωση, οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες δηλώνουν άθροιση ενώ τα $\partial_j(\cdot)$, $\partial_{jk}(\cdot)$, $\partial_{jkm}(\cdot)$ δηλώνουν τα διαφορικά 1^{ης}, 2^{ης} και 3^{ης} τάξης ως προς τις μεταβλητές q . Αντίστοιχα ορίζονται οι εκφράσεις για το \mathbf{T}^k . Έτσι, εισάγοντας τις γραμμικοποιημένες εκφράσεις για τα \mathbf{T}^k , \mathbf{R}^k στην εξ 2.9 και διατηρώντας όρους μέχρι 1^{ης} τάξης η εξ 2.9 γραμμικοποιείται.

Άλλο πλεονέκτημα είναι ότι αποφεύγονται οι γραμμικοί περιορισμοί. Οι περιοριστικές εξισώσεις αυξάνουν την δυσκαμψία του μητρώου του συστήματος και συνεπώς επιβραδύνεται η σύγκλιση. Η ίδια διατύπωση πολυ-σωμάτων μπορεί να επεκταθεί και σε επίπεδο μικρότερης κλίμακας, δηλαδή κάθε υπο-σώμα να χωριστεί σε άλλα επιμέρους αλληλένδετα υπο-σώματα, το καθένα ως ξεχωριστό στοιχείο ακτίνων ή ως μία ομάδα ακτίνων. Κάθε υπο-σώμα έχει το δικό του σύστημα συντε/νων $[\mathbf{Oxyz}]$ που ακολουθεί τις αποκλίσεις του σώματος. Κάθε υπο-σώμα έχει ένα άκρο ($P1$) την αρχή των αξόνων \mathbf{O} ενώ το

άλλο άκρο (P2) θεωρείται ως ελεύθερο άκρο . Το σύστημα συντε/νων $[Oxyz]$ του v - υπο- σώματος του k -σώματος ορίζεται σε σχέση με το σύστημα συντε/νων $[O_kx_ky_kz_k]$ μέσω του διανύσματος θέσης \tilde{R}_v^k και του μητρώου περιστροφής \tilde{T}_v^k . Μεγάλες μετατοπίσεις και περιστροφές χτίζονται σταδιακά και μη γραμμική δυναμική εφαρμόζεται στα υπο-σώματα τα οποία θεωρούνται άκαμπτα. Έτσι ορίζεται το διάνυσμα αποκλίσεων (μετατοπίσεων και περιστροφών στο ελεύθερο άκρο) \tilde{q}_v^k του v - υπο-σώματος του k -σώματος κι ισχύουν $\tilde{R}_v^k = \tilde{R}_v^k(\tilde{q}_v^k; t)$ and $\tilde{T}_v^k = \tilde{T}_v^k(\tilde{q}_v^k; t)$. Εάν ένα σώμα διαιρεθεί σε ένα επαρκώς μεγάλο αριθμό υπο-σωμάτων, τότε οι αποκλίσεις θεωρούνται μικρές και μπορούν να περιγραφούν από γραμμικές εξισώσεις ακτίνων. Το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου του v - υπο-σώματος του k -σώματος εκφράζεται σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα $[O_kx_ky_kz_k]$ ως εξής:

$$r_{G,v}^k = R^k(q_k; t) + T^k(q_k; t) \cdot \{ \tilde{R}_v^k(\tilde{q}_v^k; t) + \tilde{T}_v^k(\tilde{q}_v^k; t) \cdot r_v^k \} \quad (6)$$

Η δυναμική σύζευξη μεταξύ των υπο-σωμάτων επιτυγχάνεται μέσω μεταφοράς των φορτίων (3 δυνάμεις και 3 ροπες) του πρώτου κόμβου του κάθε υπο-σώματος στο ελεύθερο κόμβο του προηγούμενου υπο-σώματος ως εξωτερικά φορτία.

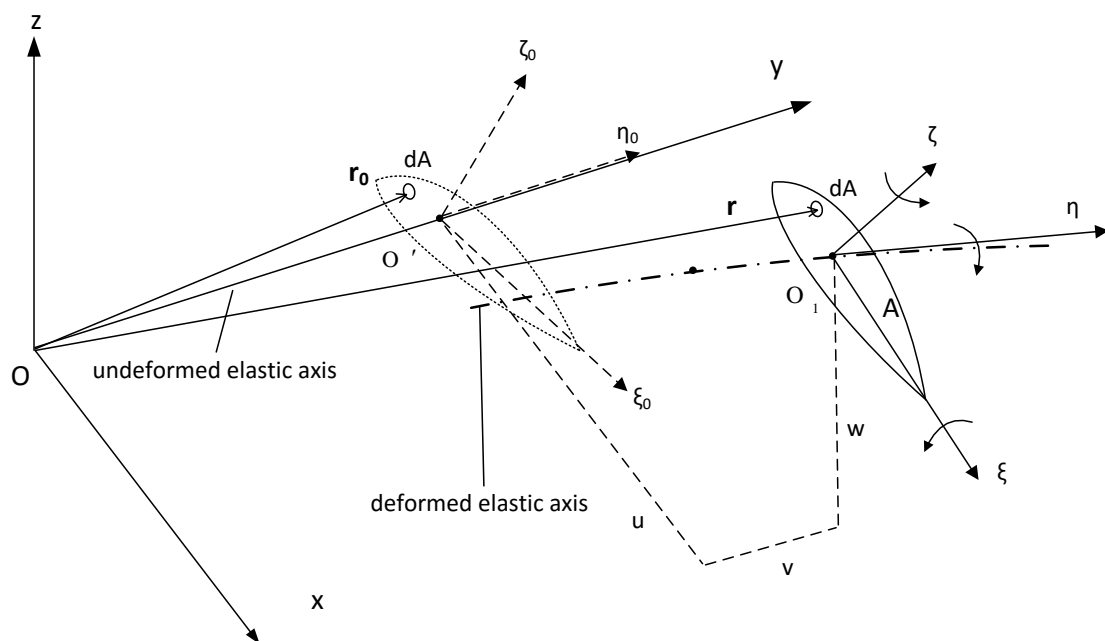


Εικ. 7 Σχηματική απεικόνιση του τοπικού και καθολικού συστήματος συντε/νων για ένα τυχαίο v -υπο-σώμα ενός k -σώματος.

2.1.2 Θεωρία δοκού του Timoshenko

Οι εξισώσεις της θεωρίας δικού βασίζονται στην ισορροπία δυνάμεων του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα αλλά μπορούν να προκύψουν κι από το την Αρχή του Hamilton. Η διαδικασία μπορεί να περιγραφεί από τα εξής βήματα:

- Ορισμός των καταπονήσεων και παραμορφώσεων
- Εισαγωγή σχέσεων τάσης-παραμόρφωσης κι υπολογισμός των εσωτερικών φορτίων
- Σχηματισμός των διαφορικών εξισώσεων λόγω ισορροπίας δυνάμεων



Εικ. 8 Σύστημα συντε/νων μίας ακτίνας

Έστω $[Oxyz]$ δείχνει το σύστημα συντε/νων σύμφωνα με το οποίο ο άξονας της ακτίνας σε απαραμόρφωτη κατάσταση είναι ο y ενώ οι x και z αντιστοιχούν στους δύο άλλους άξονες. Έστω η ακτίνα υφίσταται μία συνδιασμένη κάμψη στις διευθύνσεις x και z μαζί με διάτμηση και στρέψη κι εφελκυσμό στην y διεύθυνση. Σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία 1^{ης} τάξης, η θέση r οποιουδήποτε σημείου $P(x, y, z)$ στην παραμορφωμένη κατάσταση θα είναι:

$$\mathbf{r}(r_0; t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{U}(r_0; t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{S}(x_0, z_0) \cdot \mathbf{u}(y_0; t) = \mathbf{r}_0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_0 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \vartheta_x \\ \vartheta_y \\ \vartheta_z \end{pmatrix} \quad (7)$$

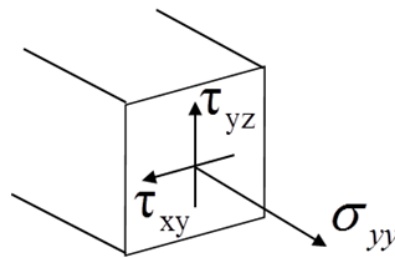
όπου $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ δείχνει τη θέση του r στην απαραμόρφωτη κατάσταση και $\mathbf{u}(y_0; t) = (u, v, w, \vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)^T$ δείχνει τις μετατοπίσεις και περιστροφές στους άξονες x, y, z . Το $\mathbf{U} = (U, V, W)^T$ αποτελεί το πεδίο μετατοπίσεων σύμφωνα με το οποίο καθορίζονται οι παραμορφώσεις. Το μητρώο S εξαρτάται μόνο από τα x_0, z_0 ενώ το u μόνο από το yR_0 και το

χρόνο. Ολοκληρώνοντας πάνω σε μία εγκάρσια τομή μιας ακτίνας, η εξάρτηση των παραμορφώσεων από τα x_0, z_0 θα καθορίσει τελικά τις ιδιότητες της ακτίνας και έτσι η παραγωγή θα περιέχει μόνο παράγωγους στην y διεύθυνση που συμβολίζονται με ένα τόνο (\cdot)' .

Εφαρμόζοντας το νόμο παραμορφώσεων του Green και το νόμο του Hook για τη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων για ένα ισότροπο υλικό, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις για τις τάσεις:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= E \cdot \varepsilon_{yy} = E \cdot \frac{\partial V}{\partial y_0} = E \cdot v' - E \cdot z_0 \cdot \vartheta_x' + E \cdot x_0 \cdot \vartheta_z' \\ \tau_{xy} &= G_x \cdot \gamma_{xy} = G_x \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial y_0} + \frac{\partial V}{\partial x_0} \right) = G_x \cdot u' + G_x \cdot z_0 \cdot \vartheta_y' + G_x \cdot \vartheta_z \\ \tau_{yz} &= G_z \cdot \gamma_{yz} = G_z \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z y_0} + \frac{\partial W}{\partial y_0} \right) = G_z \cdot w' - G_z \cdot x_0 \cdot \vartheta_y' - G_z \cdot \vartheta_x\end{aligned}\quad (8)$$

όπου $\varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ δείχνουν τις παραμορφώσεις και σ_{yy}, τ_{xy} and τ_{yz} τις αντίστοιχες τάσεις, E η σταθερά του Young και G_x, G_z οι συντελεστές διάτμησης στις x και z διευθύνσεις αντίστοιχα.



Εικ. 9 Ορθή και διατμητικές τάσεις

Ολοκληρώνοντας τις τάσεις πάνω σε μία εγκάρσια τομή μιας ακτίνας, βρίσκουμε τις εσωτερικές δυνάμεις και ροπές που χρειάζονται στις εξισώσεις για ισορροπία δυνάμεων και ροπών.

$$\begin{aligned}F_x &= \int_A \tau_{xy} dA = \int_A (G_x u' + G_x z_0 \vartheta_y' + G_x \vartheta_z) dA \\ F_y &= \int_A \sigma_{yy} dA = \int_A (E v' - E z_0 \vartheta_x' + E x_0 \vartheta_z') dA \\ F_z &= \int_A \tau_{yz} dA = \int_A (G_z w' - G_z x_0 \vartheta_y' - G_z \vartheta_x) dA \\ M_x &= - \int_A \sigma_{yy} z_0 dA = \int_A (E z_0 v' - E z_0^2 \vartheta_x' + E x_0 z_0 \vartheta_z') dA \\ M_y &= \int_A (\tau_{xy} z_0 - \tau_{yz} x_0) dA = \\ &= \int_A [(G_x z_0^2 + G_z x_0^2) \vartheta_y' + G_x z_0 u' + G_x z_0 \vartheta_z - G_z x_0 w' + G_z x_0 \vartheta_x] dA \\ M_z &= \int_A \sigma_{yy} x_0 dA = \int_A (E x_0 v' - E z_0 x_0 \vartheta_x' + E x_0^2 \vartheta_z') dA\end{aligned}\quad (9)$$

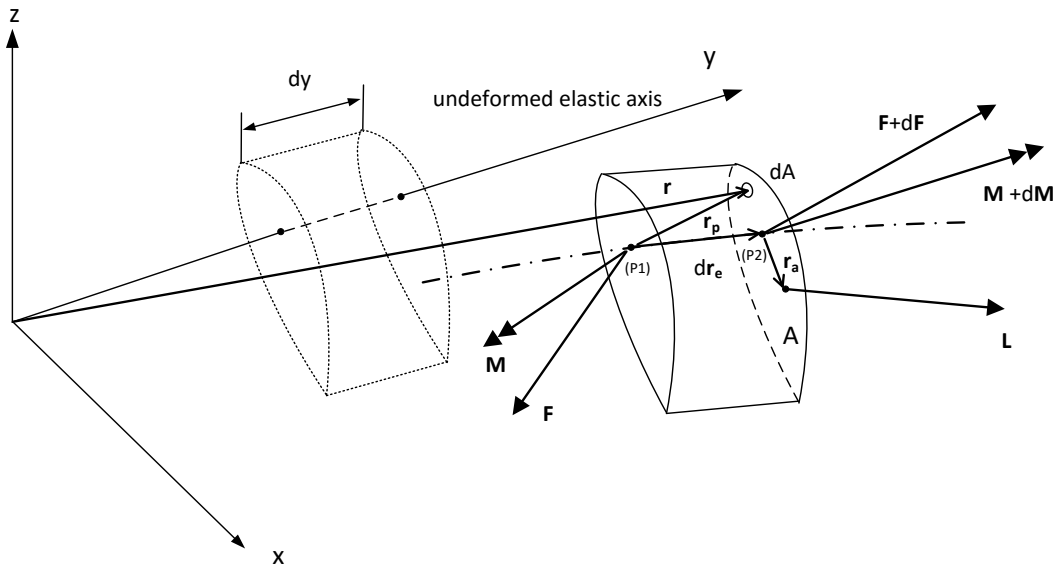
Οι ιδιότητες ακαμψίας της τομής μιας ακτίνας ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 EA &= \int_A E dA, & EAx &= \int_A Ez_0 dA, & EAz &= \int_A Ex_0 dA \\
 El_{xx} &= \int_A Ez_0^2 dA, & El_{xz} &= \int_A Ex_0 z_0 dA, & El_{zz} &= \int_A Ex_0^2 dA \\
 GJ &= \int_A (G_x z_0^2 + G_z x_0^2) dA \\
 GxA &= \int_A G_x dA, & GzA &= \int_A G_z dA, \\
 GxAx &= \int_A G_x z_0 dA, & GzAz &= \int_A G_z x_0 dA,
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Έστω ένα διαφορικό τμήμα μιας ακτίνας διατομής A , πάχους dy και με άκρα τα $(P1)$, $(P2)$. Το ισορροπία δυνάμεων και ροπών σε σχέση με το σημείο $(P1)$ στο σύστημα συντε/νων $[Oxyz]$ θα πάρει την ακόλουθη διαφορική μορφή

$$\mathbf{f}^i dy = d\mathbf{F} + \mathbf{f}^e dy: \quad \mathbf{f}^i = \int_A \rho \dot{\mathbf{r}} dA, \quad \mathbf{f}^e = \int_A \rho \mathbf{g} dA + \mathbf{L}
 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}^i dy = d\mathbf{M} + d\mathbf{r}_e \times (\mathbf{F} + d\mathbf{F}) + \mathbf{m}^e dy: \quad \mathbf{m}^i &= \int_A \rho (\mathbf{r}_p \times \dot{\mathbf{r}}) dA, \\
 \mathbf{m}^e &= \int_A \rho (\mathbf{r}_p \times \mathbf{g}) dA + \mathbf{r}_a \times \mathbf{L}
 \end{aligned}$$



Εικ. 10 Ισορροπία δυνάμεων για διαφορικό στοιχείο μιας ακτίνας.

Στις τελευταίες εξισώσεις, το $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)^T$ αναφέρεται στο διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων ανά μονάδα μήκους που δρουν πάνω στο διαφορικό στοιχείο (δηλαδή αεροδυναμικά φορτία), $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$ και $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ είναι οι καθαρές ελαστικές εσωτερικές δυνάμεις και ροπές, $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)^T$ η επιτάχυνση της βαρύτητας, $\mathbf{F} + d\mathbf{F}$ το διάνυσμα της δύναμης στο άκρο $(P2)$ και \mathbf{r}_e το διάνυσμα θέσης στον παραμορφωμένο ελαστικό άξονα ως εξής:

$$\mathbf{r}_e = \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Επίσης έστω τα διανύσματα θέσης στα δύο άκρα είναι $\mathbf{r}_e^{(2)}$, $\mathbf{r}_e^{(1)}$ τότε η τελική παραμόρφωση θα ορίζεται ως $d\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_e^{(2)} - \mathbf{r}_e^{(1)}$, $\mathbf{r}_a = (x_a, 0, z_a)^T$ είναι το κέντρο εφαρμογής των δυνάμεων σε σχέση με τον ελαστικό άξονα της ακτίνας και $\mathbf{r}_p = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e^{(1)}$.

Εισάγωντας τις εξ. 9 και 10 στις εξ. 11, το τελικό σει εξισώσεων σε συμπιγμένη μορφή με βάση το νόμο του Νεύτωνα θα είναι:

$$\int_A \rho dA \mathbf{I} \mathbf{S} \ddot{\mathbf{r}} = [\mathbf{K}_1 \mathbf{u}'] + [\mathbf{K}_2 \mathbf{u}] + [\mathbf{K}_3 \mathbf{u}'] + [\mathbf{K}_4 \mathbf{u}] + \int_A \rho dA \mathbf{I} \mathbf{T}^T \mathbf{g} + \mathbf{I} \mathbf{L} \quad (13)$$

όπου τα μητρώα σε θα έχουν τη μορφή:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} G_x A & 0 & 0 & 0 & G_x A x & 0 \\ 0 & EA & 0 & -EAx & 0 & EAz \\ 0 & 0 & G_z A & 0 & -G_z Az & 0 \\ 0 & -EAx & 0 & El_{xx} & 0 & -El_{xz} \\ G_x A x & 0 & -G_z Az & 0 & GJ & 0 \\ 0 & EAz & 0 & -El_{xz} & 0 & El_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_x A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_z A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_z Az & 0 & G_x A x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_z A - F_y & 0 & -G_z Az & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_y - G_x A & 0 & 0 & 0 & -G_x A & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_z A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_x A \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_0 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{H}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_a & 0 \end{bmatrix}^T$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, παρόλο που πρόκειται για μία γραμμική 1^{ης} τάξης ακτίνα, εμφανίζονται και μη γραμμικοί περιστροφικοί όροι δυσκαμψίας $F_y \cdot w'$ και $F_y \cdot u'$ οι οποίοι δεν μπορούν να αμεληθούν λόγω των σημαντικών τους φορτίων.

Παρόμοια, η ολοκλήρωση των εξ.10 πάνω στη διατομή A της ακτίνας θα δώσει τις ακόλουθες ιδιότητες μάζας-αδράνειας:

$$\begin{aligned} m &= \int_A \rho dA, & mx &= \int_A \rho z_0 dA, & mz &= \int_A \rho x_0 dA \\ mI_{xx} &= \int_A \rho z_0^2 dA, & mI_{xz} &= \int_A \rho x_0 z_0 dA, & mI_{zz} &= \int_A \rho x_0^2 dA \\ I_p &= \int_A \rho (z_0^2 + x_0^2) dA \end{aligned} \quad (15)$$

Η επέκταση της παραπάνω διατύπωσης στην περίπτωση μίας κινούμενης ακτίνας είναι άμεση και γίνεται αν εισάγουμε την εξ. 2 στο αριστερό μέλος της εξ. 13 που εκφράζει την ισορροπία δυνάμεων και ροπών. Αυτό θα προκαλέσει την παρουσία κάποιων μη γραμμικών αδρανειακών όρων οι οποίοι θα δημιουργήσουν επιπλέον βαθμούς ελευθερίας τόσο στο διάνυσμα \mathbf{u} όσο και στο \mathbf{q} . Όπως ήδη αναφερθεί το \mathbf{q} παρέχει τα στοιχεία για την κινηματική σύζευξη σωμάτων και υπο-σωμάτων σε ενιαίο δυναμικό σύνολο.

2.1.3 Διακριτή διατύπωση πεπερασμένων στοιχείων

Το σύστημα των δυναμικών εξισώσεων εξ.13, μετά από εισαγωγή της επιτάχυνσης της εξ.2, ανασηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \int_A \rho dA \mathbf{H} \mathbf{S} (\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{r}}_G) dy + \\ & \int_0^L (\delta \mathbf{u}')^T \mathbf{K}_1 \mathbf{u}' dy + \int_0^L (\delta \mathbf{u}')^T \mathbf{K}_2 \mathbf{u} dy - \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_3 \mathbf{u}' dy - \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_4 \mathbf{u} dy = \\ & \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \int_A \rho dA \mathbf{H} \mathbf{T}^T \mathbf{g} dy + \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{H}_a \mathbf{L} dy + \left[(\delta \mathbf{u}')^T [\mathbf{K}_1 \mathbf{u}' + \mathbf{K}_2 \mathbf{u}] \right]_0^L \end{aligned} \quad (16)$$

όπου $\delta \mathbf{u}$ δείχνει την εικονική μετατόπιση κι ο τελευταίος όρος στο δεξί μέρος δείχνει τους συνοριακούς όρους που εμφανίζονται έπειτα από ολοκλήρωση.

Η παραπάνω εξίσωση διακριτοποιείται βάσει των προσεγγίσεων των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό πραγματοποιείται με το εκφράσουμε το πεδίο μετατοπίσεων και την

εικονική κινηματική μετατόπισή του δu βάσει των ίδιων διακριτών συναρτήσεων. Σε επίπεδο «στοιχείου» (ένδειξη με το σύμβολο “e”), θα ισχύει:

$$\mathbf{u}_e(\gamma, t) = \mathbf{N}(\gamma) \hat{\mathbf{u}}_e(t); \quad \delta \mathbf{u}_e(\gamma, t) = \mathbf{N}(\gamma) \delta \hat{\mathbf{u}}_e(t) \quad (17)$$

όπου $\mathbf{N}(\gamma)$ το μητρώο των συναρτήσεων σχήματος και $\hat{\mathbf{u}}_e$ το διακριτών βαθμών ελευθερίας. Επιλέγοντας ένα πεπερασμένο στοιχείο με 15 βαθμούς ελευθερίας με 3 εσωτερικούς κόμβους, τα $\hat{\mathbf{u}}_e$ και $\mathbf{N}(\gamma)$ ορίζονται ως εξής:

$$\hat{\mathbf{u}}_e = (u^1, v^1, w^1, \vartheta_x^1, \vartheta_y^1, \vartheta_z^1, v^3, \vartheta_y^5, v^4, u^2, v^2, w^2, \vartheta_x^2, \vartheta_y^2, \vartheta_z^2)^T \quad (18)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{b0,x}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{b1,x}^1 & 0 & 0 & 0 & N_{b0,x}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{b1,x}^2 \\ 0 & N_v^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_v^3 & 0 & N_v^4 & 0 & N_v^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{b0,z}^1 & N_{b1,z}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{b0,z}^2 & N_{b1,z}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{b0,\vartheta x}^1 & N_{b1,\vartheta x}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{b0,\vartheta x}^2 & N_{b1,\vartheta x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_t^1 & 0 & 0 & N_t^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_t^2 \\ N_{b0,\vartheta z}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{b1,\vartheta z}^1 & 0 & 0 & 0 & N_{b0,\vartheta z}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{b1,\vartheta z}^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Στην εξ.19, χρησιμοποιούνται συναρτήσεις σχήματος:

- 3^{ης} τάξης ακρίβεια για την παραμόρφωση v (εφελκυσμός):

$$\begin{aligned} N_v^1(\xi) &= 0.125(1-\xi)[-10+9((2\xi-1)^2+1)] \\ N_v^3(\xi) &= 4.5(1-\xi)\xi(2-3\xi) \\ N_v^4(\xi) &= 4.5(1-\xi)\xi(-1+3\xi) \\ N_v^2(\xi) &= 0.125\xi[-10+9((2\xi-1)^2+1)] \end{aligned} \quad (20)$$

- 3^{ης} τάξης ακρίβεια για την παραμόρφωση ϑ_y (στρέψη):

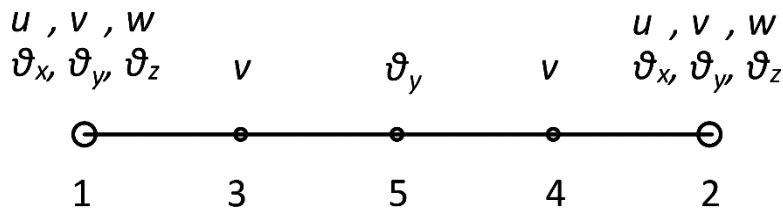
$$\begin{aligned} N_t^1(\xi) &= -(1-\xi)(2\xi-1) \\ N_t^5(\xi) &= 4(1-\xi)\xi \\ N_t^2(\xi) &= \xi(2\xi-1) \end{aligned} \quad (21)$$

- Τροποποιημένες Ερμητιανές για τις παραμορφώσεις u και w :

$$\begin{aligned}
N_{b0,x}^1(\xi) &= 1 - \xi\Phi_{x1} - 3\xi^2\Phi_{x2} + 2\xi^3\Phi_{x2} \\
N_{b0,x}^2 &= 1 - N_{b0,x}^1(\xi) \\
N_{b1,x}^1(\xi) &= L(-\xi + 0.5\xi\Phi_{x1} + 0.5\xi^2\Phi_{x1} + 2\xi^2\Phi_{x2} - \xi^3\Phi_{x2}) \\
N_{b1,x}^2(\xi) &= L(+ 0.5\xi\Phi_{x1} - 0.5\xi^2\Phi_{x1} + \xi^2\Phi_{x2} - \xi^3\Phi_{x2}) \\
\\
N_{b0,\vartheta z}^1(\xi) &= 6\xi L^{-1}\Phi_{x1}(1-\xi) \\
N_{b0,\vartheta z}^2(\xi) &= -N_{b0,\vartheta z}^1(\xi) \\
N_{b1,\vartheta z}^1(\xi) &= 1 + \xi[-\Phi_{x1} + \Phi_{x1}(-4 + 3\xi)] \\
N_{b1,\vartheta z}^2(\xi) &= + \xi[-\Phi_{x1} + \Phi_{x1}(-2 + 3\xi)] \\
\\
\varphi_x &= \frac{12 \overline{Elzz}}{GxA L^2}, \quad \Phi_{x1} = \frac{\varphi_x}{1 + \varphi_x}, \quad \Phi_{x2} = \frac{1}{1 + \varphi_x}
\end{aligned}
\tag{22}$$

Οι εξ.22 αντιστοιχούν σε κάμψη στην x διεύθυνση. Παρόμοιες εκφράσεις για την z διεύθυνση προκύπτουν με αλλαγή των δεικτών από x σε z. Οι μπάρες στις εκφράσεις \overline{Elzz} , GxA δηλώνουν μέση τιμή στο στοιχείο ενώ τροποποιημένες συναρτήσεις βαρύτητας προλαμβάνουν «κλείδωμα» της διάτμησης.

Οι παραπάνω συναρτήσεις σχήματος ορίζονται βάσει του αδιάστατου μήκους του στοιχείου $\xi \in [0,1]$ και περιλαμβάνουν μέσω των συναρτήσεων βαρύτητας Φ το μήκος του στοιχείου L.



Εικ. 11 Ορισμός ενός πεπερασμένου στοιχείου με τρεις εσωτερικούς κόμβους

Αφού εισάγουμε τις εξ. 17 και εξ.2 στην 16, απαλοίφοντας τις εικονικές μετατοπίσεις $\delta \hat{u}_e$ και εφαρμόζοντας γραμμικοποίηση, προκύπτει το σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων σε επίπεδο στοιχείου,

$$\mathbf{M} \delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}_q \delta \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q \delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q \delta \mathbf{q} = \mathbf{Q}
\tag{23}$$

όπου ο δείκτης e έχει παραληφθεί από τα $\delta \mathbf{u}$, $\delta \dot{\mathbf{u}}$, $\delta \ddot{\mathbf{u}}$ οι οποίοι δείχνουν τη διαταραχή των ελαστικών βαθμών ελευθερίας του στοιχείου, κι αντίστοιχα με την εξ.4 γραμμικοποιούνται οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου ως εξής:

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{u}^0 + \delta \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{u}} \cong \dot{\mathbf{u}}^0 + \delta \dot{\mathbf{u}}, \quad \ddot{\mathbf{u}} \cong \ddot{\mathbf{u}}^0 + \delta \ddot{\mathbf{u}}
\tag{24}$$

Έπειτα από αντικατάσταση της εξ.7 στην εξ.2 προκύπτει η εξίσωση:

$$\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{S} \ddot{\mathbf{u}} + 2 \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}} \mathbf{S} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}} \mathbf{S} \mathbf{u} + \mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}} \mathbf{r}_0 \quad (25)$$

η οποία είναι γραμμικοποιημένη βάσει των εξ. 4, 5 και 24. Τα μητρώα της εξ. 23 προκύπτουν ως εξής:

$$\mathbf{M} = L \int_0^1 \int_A \rho dA \mathbf{N}^T \mathbf{I} \mathbf{S} \mathbf{N} dy$$

$$\mathbf{C} = L \int_0^1 \int_A 2\rho dA \mathbf{N}^T \mathbf{I} (\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}})^0 \mathbf{S} \mathbf{N} dy$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & L \int_0^1 \int_A \rho dA \mathbf{N}^T \mathbf{I} (\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}})^0 \mathbf{S} \mathbf{N} dy + L \int_0^1 (\mathbf{N}')^T \mathbf{K}_1 \mathbf{N}' dy \\ & + L \int_0^1 (\mathbf{N}')^T \mathbf{K}_2 \mathbf{N} dy - L \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{K}_3 (\mathbf{N}')^T dy - L \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{K}_4 \mathbf{N} dy \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_q = L \int_0^1 \sum_{i=1}^{nq} \int_A \rho dA \mathbf{N}^T \mathbf{I} \left[\partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}})_i \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{u}^0 + \partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{R}})_i + \partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}})_i \mathbf{r}_0 \right] dy \quad (26)$$

$$\mathbf{C}_q = L \int_0^1 \sum_{i=1}^{nq} \int_A \rho dA \mathbf{N}^T \mathbf{I} \left[2 \partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}})_i \mathbf{S} \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^0 + \partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}})_i \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{u}^0 + \partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{R}})_i + \partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}})_i \mathbf{r}_0 \right] dy$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_q = & L \int_0^1 \sum_{i=1}^{nq} \int_A \rho dA \mathbf{N}^T \mathbf{I} \left[2 \partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}})_i \mathbf{S} \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^0 + \partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}})_i \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{u}^0 + \partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{R}})_i + \partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}})_i \mathbf{r}_0 \right] dy \\ & - L \int_0^1 \sum_{i=1}^{nq} \int_A \rho dA \mathbf{N}^T \mathbf{I} \partial_{\dot{q}_i} (\mathbf{T}^T)_i \mathbf{g} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & L \int_0^1 \int_A \rho dA \mathbf{N}^T \mathbf{I} \mathbf{T}^T \mathbf{g} dy + L \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{I} \mathbf{a} \mathbf{L} dy \\ & - L \int_0^1 \int_A \rho dA \mathbf{N}^T \mathbf{I} \left[\mathbf{S} \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^0 + 2 (\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}})^0 \mathbf{S} \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^0 + (\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}})^0 \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{u}^0 + (\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{R}})^0 + (\mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{T}})^0 \mathbf{r}_0 \right] dy \\ & - L \int_0^1 (\mathbf{N}')^T \mathbf{K}_1 \mathbf{N}' \mathbf{u}^0 dy + L \int_0^1 (\mathbf{N}')^T \mathbf{K}_2 \mathbf{N} \mathbf{u}^0 dy - L \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{K}_3 (\mathbf{N}')^T \mathbf{u}^0 dy - L \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{K}_4 \mathbf{N} \mathbf{u}^0 dy \end{aligned}$$

όπου nq δηλώνει το συνολικό αριθμό των q βαθμών ελευθερίας.

Τα μητρώα \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} έχουν διαστάσεις (15x15), τα \mathbf{M}_q , \mathbf{C}_q , \mathbf{K}_q (15 x nq) και το \mathbf{Q} (15x1). Οι σταθεροί συνοριακοί όροι οι οποίοι εμφανίζονται με ολοκλήρωση κατά μέλη στο τέλος απαλοίφονται. Η ολοκλήρωση πάνω στο στοιχείο γίνεται χρησιμοποιώντας την τετραγωνοποίηση κατά Gauss με έξι σημεία η οποία περιέχει τις συναρτήσεις σχήματος αλλά επίσης σχέσεις μάζας-αδράνεις.

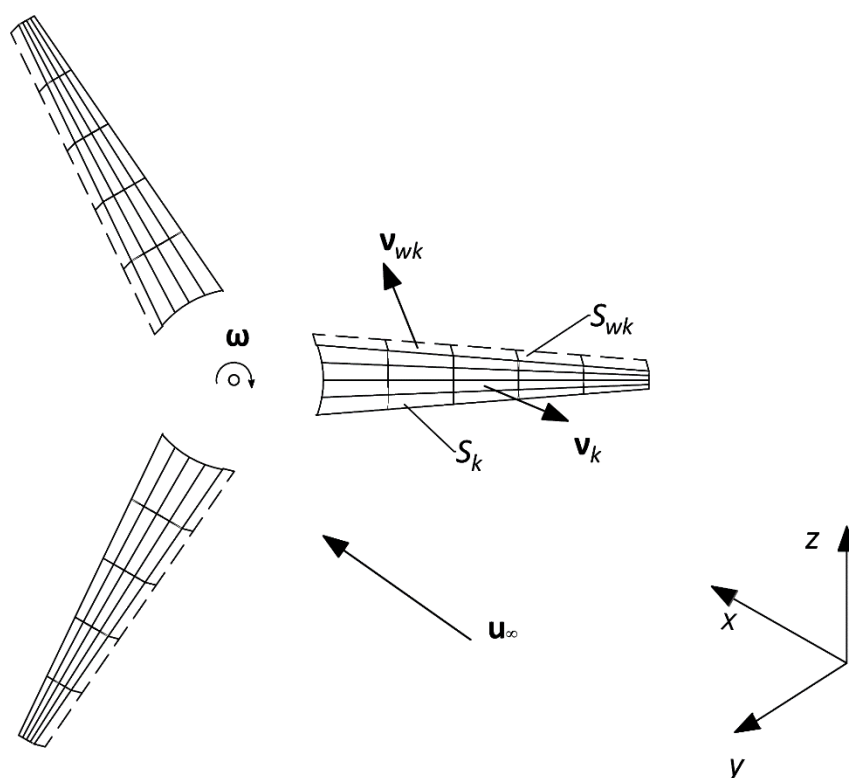
2.2 Το μοντέλο αεροδυναμικής ανάλυσης

2.2.1 Διατύπωση του προβλήματος

Έστω μία ασταθής ροή ενός ασυμπίεστου, χωρίς ιξώδες ρευστού γύρω από ένα σύνολο N_B τρισδιάστατων σωμάτων B_k (πτερύγια) με σύνορα S_k , $k = 1, N_B$ που σχηματίζουν το στροφέιο ενός Ε/Π. Κάθε πτερύγιο του στροφέιου θεωρείται ένα απείρως λεπτό αντωτικό σώμα. Για να περιγράψουμε τη γεωμετρία της ροής, εισάγουμε ένα σταθερό σύστημα συντε/νων. Επομένως, όλες οι παράμετροι της ροής περιγράφονται βάσει αυτού του συστήματος.

Έστω D το ροϊκό πεδίο, S το σύνορο του πεδίου και \mathbf{v} το προς τα έξω μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια S . Η παρουσία των αντωτικών σωμάτων B_k παράγει ομόρρου. Η επιφάνεια του απορρεύματος θεωρείται ως ένα ενεργό σύνορο του προβλήματος. Έτσι αν S_{wk} , $k = 1, N_B$ είναι οι επιφάνειες των στρωμάτων των δινών που παράγονται από τα N_B πτερύγια και \mathbf{v}_{wk} τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στις επιφάνειες S_{wk} , τότε η συνολική επιφάνεια του συνόρου θα είναι:

$$\partial D \equiv S = \bigcup_{k=1}^{N_B} S_k + \bigcup_{k=1}^{N_B} S_{wk} \quad (27)$$



Εικ. 12 Απεικόνιση των επιφανειών των αντωτικών σωμάτων, του απορρεύματος και των αντίστοιχων κάθετων διανυσμάτων.

Σύμφωνα με το θεώρημα αποσύνθεσης του Helmholtz (Helmholtz decomposition), το πεδίο ταχύτητας $\mathbf{u}(\mathbf{x}; t)$ παίρνει τη μορφή:

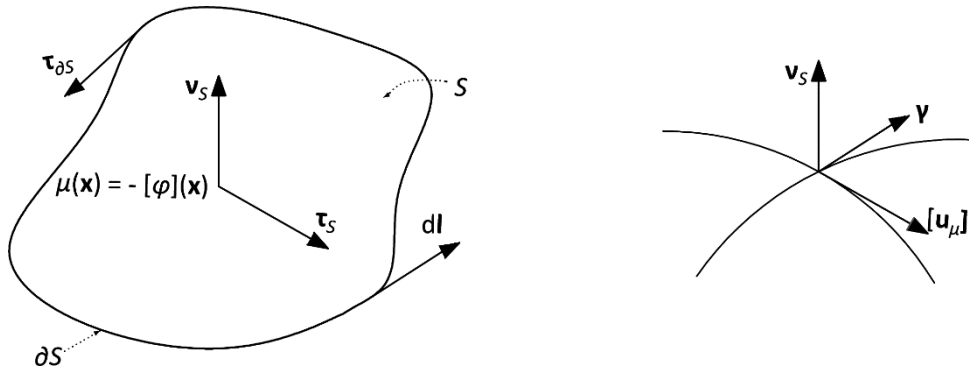
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; t) = \mathbf{u}_\infty(\mathbf{x}; t) + \nabla\varphi(\mathbf{x}; t) + \mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}; t), \quad \mathbf{x} \in D, \quad t \geq 0 \quad (28)$$

όπου $\mathbf{u}_\infty(\mathbf{x};t)$ είναι το άπειρο πεδίο ταχύτητα, $\varphi(\mathbf{x};t)$ το δυναμικό της ταχύτητας διαταραχής και $\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x};t)$ η επαγόμενη ταχύτητα από το ελευθέρη στροβιλότητα του ομόρρου.

Στο πλαίσιο της θεωρίας δυναμικού (potential theory), το δυναμικό της ταχύτητας μπορεί να περιγραφεί με διανομές επιφανειακών ιδιομορφιών (surface singularity distributions). Στην περίπτωση των λεπτών πτερυγίων, διανομές διπόλων ορίζονται στις στερεές επιφάνειες και στο αντίστοιχο απόρρευμα. Η διανομή διπόλων $\mu(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S$ ορισμένη πάνω σε μία επιφάνεια S , εισάγει μία ασυνέχεια στο βαθμωτό δυναμικό:

$$\mu(\mathbf{x}) = -[\varphi](\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \quad (29)$$

όπου $[\varphi]$ δείχνει το "άλμα" του δυναμικού πάνω στην επιφάνεια S .



Εικ. 13 Ορισμός ενός επιφανειακού διπόλου

Το δυναμικό σε ένα τυχαίο σημείο \mathbf{x}_0 του πεδίου D δίνεται από τον τύπο:

$$\varphi(\mathbf{x}_0;t) = - \int_S \frac{\mu(\mathbf{x};t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^3} dS(\mathbf{x}) \quad (30)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία εξίσωση κι έπειτα από εφαρμογή του θεωρήματος του Stokes προκύπτει το αντίστοιχο πεδίο $\mathbf{u}_\mu(\cdot; t)$ ως εξής:

$$\mathbf{u}_\mu(\mathbf{x}_0;t) = \nabla \varphi(\mathbf{x}_0;t) = \int_S \frac{\nabla_s \mu(\mathbf{x};t) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^3} dS(\mathbf{x}) + \int_{\partial S} \mu(\mathbf{x};t) \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^3} \quad (31)$$

όπου ∂S είναι το σύνορο της επιφάνειας S και $d\mathbf{l}$ το διαφορικό διάνυσμα που εφάπτεται στην επιφάνεια S . Ο τελεστής $\nabla(\cdot)$ σημαίνει παραγώγιση ως προς \mathbf{x}_0 ενώ το $\nabla_s(\cdot)$ δηλώνει επιφανειακή παραγώγιση.

Όσο το \mathbf{x}_0 προσεγγίζει την επιφάνεια S , η ταχύτητα γίνεται ασυνεχής. Συγκεκριμένα, εάν $[\mathbf{u}_\mu]$ δηλώνει το "άλμα" της ταχύτητας πάνω στην επιφάνεια S , τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_\mu](\mathbf{x}_0;t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) &= 0, & \mathbf{x}_0 \in S \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) \times [\mathbf{u}_\mu](\mathbf{x}_0;t) &= \nabla_s \mu(\mathbf{x}_0;t) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}_0;t), & \mathbf{x}_0 \in S \end{aligned} \quad (32)$$

όπου $\boldsymbol{\gamma}(\cdot; t)$ δείχνει την ένταση της επιφανειακής στροβιλότητας, $\nabla_s(\cdot) = (\nabla(\cdot) \cdot \boldsymbol{\tau}_s) \cdot \boldsymbol{\tau}_s$ τον τεχνητό διαφορικό τελεστή, $\boldsymbol{\tau}_s$ το μοναδιαίο διάνυσμα εφάπτομενο στην επιφάνεια S και διεύθυνση ίδια με αυτήν της επιφανειακής στροβιλότητας $\boldsymbol{\gamma}$. Οι εξ. 31 και 32 δηλώνουν ότι

αν σε μία επιφάνεια υπάρχουν δίπολα τότε αυτή αντιστοιχεί σε φύλλο στροβιλότητας δηλαδή μία επιφάνεια με ασυνέχεια των εφαπτομενικών ταχυτήτων.

Σύμφωνα με την εξ.30 το δυναμικό της ταχύτητας διαταραχής $\varphi(\cdot; t)$ μπορεί να διαιρεθεί σε δύο τμήματα, ένα των στερεών σωμάτων κι ένα του απορρεύματος ως εξής:

$$\varphi(\mathbf{x}_0; t) = - \sum_{k=1}^{N_B} \int_{S_k} \mu_k(\mathbf{x}; t) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^3} dS(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{N_B} \int_{S_{wk}} \mu_{wk}(\mathbf{x}; t) \frac{\mathbf{v}_w(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^3} dS_w(\mathbf{x}) \quad (33)$$

όπου $\mu_k(\cdot; t)$ η κατανομή διπόλων της k- λεπτής αντωτικής επιφάνειας και $\mu_{wk}(\cdot; t)$ η κατανομή διπόλων του φύλλου στροβιλότητας που οφείλεται στην k-επιφάνεια.

Λόγω της αστάθειας της ροής, τα άγνωστα δίπολα $\mu_k(\cdot; t)$ και $\mu_{wk}(\cdot; t)$ είναι χρονικά εξαρτώμενα. Εκτός απ' αυτό, όσο τα φύλλα στροβιλότητας S_{wk} κινούν ελεύθερα τις υλικές επιφάνειες, η γεωμετρία του προβλήματος είναι επίσης χρονικά μεταβαλλόμενη. Συνεπώς το προς επίλυση πρόβλημα αποτελεί ένα πρόβλημα ελεύθερου συνόρου (free boundary problem) με αγνώστους τις επιφανειακές κατανομές $\mu_k(\cdot; t)$ και $\mu_{wk}(\cdot; t)$ καθώς επίσης τη γεωμετρία των φύλλων στροβιλότητας S_{wk} . Για να καθορίσουμε τα άγνωστα αυτά πεδία, πρέπει να εισάγουμε δύο διαφορετικές συνθήκες:

A) τις κινηματικές συνθήκες και πιο συγκεκριμένα τη συνθήκη μη εισχώρησης σε όλες τις στερεές επιφάνειες καθώς και τις συνθήκες που περιγράφουν εξέλιξη των φύλλων στροβιλότητας

B) τις δυναμικές συνθήκες δηλαδή την απαίτηση για μηδενικό "άλμα"-ασυνέχεια πίεσης καθόλη την επιφάνεια των φύλλων στροβιλότητας.

Έστω $\mathbf{u}_B(\cdot; t)$ δείχνει το προφίλ ταχυτήτων πάνω στα πτερύγια που περιλαμβάνει και τις άκαμπτες και τις ελαστικές κίνησης αυτών. Τότε οι εξισώσεις μη εισχώρησης παίρνουν τη μορφή:

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}_0; t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_0; t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\mathbf{x}_0; t) = (\mathbf{u}_{Bk} - \mathbf{u}_\infty - \mathbf{u}_w) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_0; t), \quad \mathbf{x}_0 \in S_k, \quad k = 1, N_B \quad (34)$$

Για τον υπολογισμό του πεδίου της ταχύτητας, χρησιμοποιείται η εξ.31 η οποία και παίρνει μία πιο ελαστική μορφή εάν θεωρήσουμε μία "κομματιαστή" προσέγγιση της κατανομής των διπόλων. Σ' αυτήν την περίπτωση, ο 1^{ος} όρος στο δεξί μέλος θα ισούται με μηδέν. Ο εναπομένον όρος είναι η συμβολή μιας γραμμής στροβιλότητας πάνω σύνορο ∂S της επιφάνειας S.

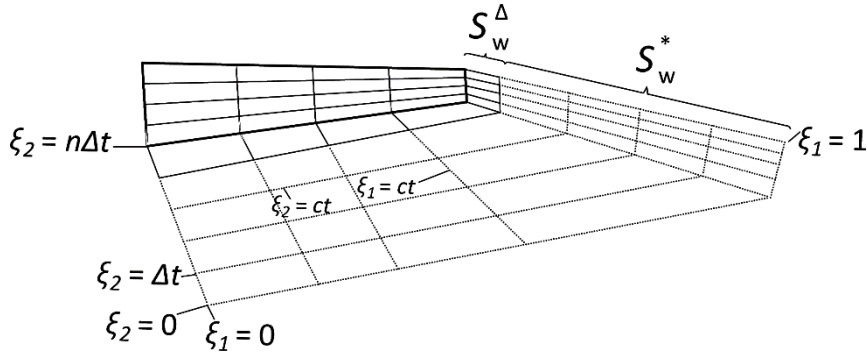
$$\text{Έστω } \mathbf{x}_w \in S_w : \quad \mathbf{x}_w = \mathbf{x}_w(\xi_1, \xi_2; t), \quad \xi_1 \in [-0, 1], \quad \xi_2 \geq 0, \quad t \geq 0 \quad (35)$$

δείχνει μία παραμετρική αναπαράσταση ενός φύλλου στροβιλότητας S_w που ξεκινάει από ένα αντωτικό σώμα κατά μήκος του χείλους εκφυγής και πιθανώς στα ακροπτερύγια του. Η S_w μπορεί να θεωρηθεί ως μία επιφάνεια που σχηματίζεται από την ακολουθία των υλικών γραμμών ξεκινώντας τη γραμμή εκπομπής (χείλος εκφυγής, ακροπτερύγια). Για να ανιχνεύσουμε την ιστορία μιας δίνης, ένα σημείο $\mathbf{x}_w(\xi_1, \xi_2; t)$ αναγνωρίζεται ως η θέση σε χρόνο t ενός υλικού σημείου που ξεκίνησε σε χρόνο $\xi_2 \leq t$ από ένα σημείο εκπομπής ξ_1 . Συνεπώς, το $\mathbf{x}_w(\xi_1, t; t)$ αναπαριστά την τρέχουσα θέση της γραμμής εκπομπής. Επιπλέον, οι γραμμές $\xi_1 = ct$ έχουν σχηματιστεί από υλικά στοιχεία που ξεκίνησαν από το ίδιο σημείο πάνω στην γραμμή εκπομπής.

Η εξέλιξη του ομόρρου $S_w(t)$ στο χρόνο καθορίζεται μέσω της ακόλουθης κινηματικής εξίσωσης:

$$\frac{d\mathbf{x}_w(\boldsymbol{\xi};t)}{dt} = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}_w;t) = \mathbf{u}_\infty(\mathbf{x}_w;t) + \nabla\varphi(\mathbf{x}_w;t) + \mathbf{u}_w(\mathbf{x}_w;t), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2) \quad (36)$$

όπου $\mathbf{u}_m(\mathbf{x}_w;t)$ είναι η μέση ταχύτητα του φύλλου ομόρρου.



Εικ. 14 Ο ομόρρους μιας αντωτικής επιφάνειας

Εφαρμόζοντας την εξ. Bernoulli στις δύο επιφάνειες των S_{wk} και συνυπολογίζοντας ότι η δυναμική διαφορά πίεσης είναι μηδέν πάνω στον ομόρρου δηλαδή $[\rho](\mathbf{x}_w;t) = 0$, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial[\varphi]}{\partial t} + \mathbf{u}_m(\mathbf{x}_w;t) \cdot [\mathbf{u}_\mu](\mathbf{x}_w;t) = 0 \quad (37)$$

όπου $[\mathbf{u}_\mu](\mathbf{x}_w;t)$ είναι η διαφορά/"άλμα" ταχύτητας πάνω στην επιφάνεια του απορεύματος.

Από τις εξ.29 και 32 έπεται ότι:

$$\mu_w(\boldsymbol{\xi};t) = -[\varphi](\boldsymbol{\xi};t) \quad , \quad [\mathbf{u}_\mu](\boldsymbol{\xi};t) = \nabla_{S_w} \mu_w(\boldsymbol{\xi};t) \quad (38)$$

Έτσι αν

$$\frac{d_m(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla_{S_w})(\cdot) \quad (39)$$

είναι η επιφανειακή υλική χρονική παράγωγος, τότε έπεται ότι:

$$\frac{d_m \mu_w(\cdot)}{dt} = 0 \quad (40)$$

Από την τελευταία εξίσωση, είναι εμφανές ότι η κατανομή διπόλων πάνω σε ένα φύλλο στροβιλότητας διατηρείται υλικά και ότι αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με το θεώρημα του Kelvin. Όσον αφορά τη περίπτωση ενός φύλλου στροβιλότητας ερχόμενο από αντωτικό σώμα, η τελευταία εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο τρόπους.

Πρώτον, με το ιστορικό του χρόνου ως εξής:

$$\mu_w(\mathbf{x}_w(\xi_1, \xi_2; t); t) = \mu_w(\mathbf{x}_w(\xi_1, \xi_2; \xi_2); \xi_2) \quad (41)$$

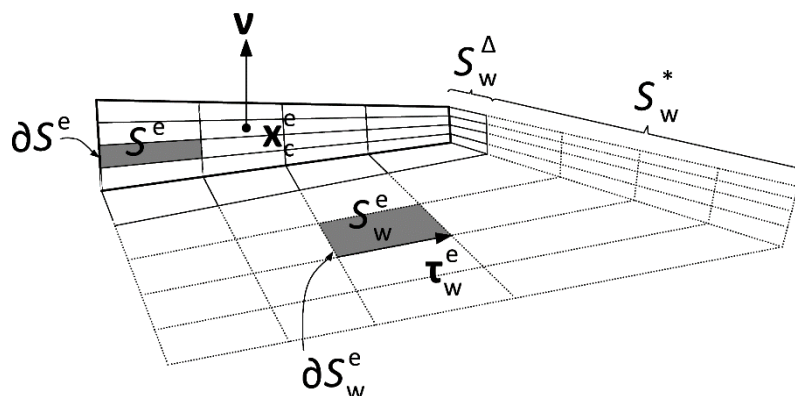
Η τελευταία εξίσωση απλά δείχνει ότι η πυκνότητα της κατανομής των διπόλων που φέρει το υλικό στοιχείο ξ είναι η ίδια με αυτή που είχε το στοιχείο προτού ξεκινήσει από την αρχή εκπομπής του στερεού σώματος.

Δεύτερον, η τελευταία συνθήκη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί η πυκνότητα της στροβιλότητας που ξεκινάει από την γραμμή εκπομπής οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Στην περίπτωση μίας κομματιαστής σταθερής προσέγγισης της κατανομής διπόλων, η εξ.41 οδηγεί σε ίσες τιμές των $\mu_k(\cdot; t)$ και $\mu_{wk}(\cdot; t)$ για δύο σημεία του σώματος και του απορреύματος γειτονικά στην γραμμή εκπομπής.

Θεωρητικά αποτελέσματα όπως επίσης πειραματικές και αριθμητικές ενδείξεις υποδεικνύουν ότι κατά την πάροδο του χρόνου, ένα ελεύθερο φύλλο στροβιλότητας χάνει την απαλότητά του εξαιτίας του ιδιάζοντα (singular) χαρακτήρα των ολοκληρωμάτων που περιέχονται στον υπολογισμό του $\nabla\varphi(\mathbf{x}_w; t)$. Για να παρακάμψουμε αυτή τη δυσκολία εισάγουμε μία γενίκευση της της στροβιλότητας. Βάσει της εξ. 32, το γενικευμένο πεδίο στροβιλότητας το οποίο συνδέεται με ένα φύλλο στροβιλότητας μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \omega_{S_w}(\mathbf{x}; t) = \nabla \times \mathbf{u}_\mu(\mathbf{x}; t) = & \underbrace{\delta_{S_w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{S_w}) \cdot [\nabla \mu_w(\mathbf{x}_{S_w}; t) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}_{S_w}; t)]}_{\text{surface term}} \\ & + \underbrace{\delta_{\partial S_w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\partial S_w}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}_{\partial S_w}; t) \cdot \mu_w(\mathbf{x}_{S_w}; t)}_{\text{line term}} \end{aligned} \quad (42)$$

όπου $\delta_{S_w}(\cdot)$ και $\delta_{\partial S_w}(\cdot)$ δείχνουν την επιφανειακή και γραμμική συνάρτηση Dirac ορισμένη στο εσωτερικό και στο σύνορο του $S_w(t)$ αντίστοιχα και $\boldsymbol{\tau}(\cdot; t)$ το μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτομενικό στο $\partial S_w(t)$. Είναι εμφανές ότι αν έχουμε μία κομματιαστή σταθερή προσέγγιση, ο επιφανειακός όρος της εξ.42 απαλοίφεται. Η παραπάνω γενικευμένη μορφή επιτρέπει την εφαρμογή μιας προσέγγισης με σωματίδια δίνων για τον ομόρρου.



Εικ. 15 Συμβολισμός των στοιχείων του πλέγματος των σωμάτων καθώς και του απορреύματος αυτών.

2.2.2 Το αριθμητικό μοντέλο

Σε κάθε σώμα S_k και στο απόρρευμα του S_{wk} ορίζεται ένα πλέγμα, το οποίο τα χωρίζει σε ένα αριθμό από στοιχεία (panels) $S_k^e, e = 1, E_k$ και $S_{wk}^e, e = 1, E_{wk}$ αντίστοιχα (όπου E_k και E_{wk} ο αριθμός των panels στο σώμα και στο απόρρευμα αντίστοιχα) και σύνορα ∂S_k^e και ∂S_{wk}^e . Σε κάθε στοιχείο του σώματος και απορреύματος ορίζεται σταθερή κατανομή διπόλων. Έτσι, η επαγόμενη ταχύτητα από μία αντωτική επιφάνεια προκύπτει ως το άθροισμα των κατανομών των γραμμών στροβιλότητας που αντιστοιχούν στα στοιχεία του πλέγματος των επιφανειών S_k και S_{wk} . Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω παρατήρηση, η κινηματική συνθήκη εξ.34 παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(\mathbf{x}_0; t) \cdot \sum_{k=1}^{N_B} \sum_{e=1}^{E_k} \mu_k^e(t) \iint_{\partial S_k^e} \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^3} = -\mathbf{v}(\mathbf{x}_0; t) \cdot \sum_{k=1}^{N_B} \sum_{e=1}^{E_{wk}} \mu_{wk}^e(t) \iint_{\partial S_{wk}^e} \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}{4\pi |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^3} + \\
+ \mathbf{v}(\mathbf{x}_0; t) \cdot (\mathbf{u}_{Bk}(\mathbf{x}_0; t) - \mathbf{u}_\infty(\mathbf{x}_0; t) - \mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}_0; t)) \quad (43)
\end{aligned}$$

Η τελευταία συνθήκη προβάλλει τις διακριτές εξισώσεις για τις άγνωστες ποσότητες $\mu_k^e(\cdot; t)$. Αυτό επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας την εξ.43 στα κέντρα \mathbf{x}_c^e των στοιχείων που σχηματίζουν τα στερεά σύνορα S_k δηλαδή όταν $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_c^e$. Οι ποσότητες των διπόλων $\mu_{Wk}^e(\cdot; t)$ του απορρεύματος υπολογίζονται από τη δυναμική συνθήκη εξ.41. Δεδομένης μίας κομματιαστής σταθερής προσέγγισης, η εφαρμογή της εξ.41 στα στοιχεία του απορρεύματος S_{Wk}^e έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των άγνωστων βαθμών ελευθερίας σε εκείνες μόνο τις ποσότητες διπόλων που έχουν μόλις ξεκινήσει και έχουν κατανεμηθεί κατά μήκος τις γραμμή εκπομπής. Οι τιμές των υπόλοιπων βαθμών ελευθερίας του απορρεύματος βαθμών ελευθερίας του απορρεύματος θεωρείται γνωστή από προηγούμενες χρονικές στιγμές. Επιπλέον, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η εξ.40 ορίζει ίσες τιμές διπόλων μ_k^e και μ_{Wk}^e για το σώμα και το απόρρευμα που είναι γειτονικά στη γραμμή εκπομπής. Οι παραπάνω παρατηρήσεις ολοκληρώνουν το σύστημα εξισώσεων για τους αγνώστους μ_k^e και μ_{Wk}^e .

Αφού το πρόβλημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο, ορίζεται ένα χρονικά μεταβαλλόμενο σχήμα. Έστω Δt είναι το χρονικό βήμα του σχήματος. Σύμφωνα με προηγούμενη ανάλυση, όλες οι πληροφορίες που αφορούν τα φύλλα στροβιλότητας της ροής είναι γνωστά από προηγούμενα χρονικά βήματα εκτός από το κομμάτι που δημιουργήθηκε στο τρέχον χρονικό βήμα. Συνεπώς διάφορες προσεγγίσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το νέο και το παλιό μέρος των φύλλων στροβιλότητας. Οι διάφορες υποθέσεις αυτές έχουν νόημα μόνο στην περιοχή όπου ξεκινάει το απόρρευμα ενώ από εκεί και πέρα το φύλλο στροβιλότητας μετατρέπεται σε μία χωρικά ελεύθερη στροβιλότητα όπου εφαρμόζεται κάποια προσέγγιση σωματιδίων δίνης.

Έτσι, ορίζουμε S_{Wk}^Δ και S_{Wk}^* ως το κοντινό και απόμακρο τμήμα αντίστοιχα του φύλλου στροβιλότητας του k-αντωτικού σώματος. Αντίστοιχα, το δυναμικό του απορρεύματος ($2^{\text{ος}}$ όρος της εξ.33) χωρίζεται σε δύο μέρη: το δυναμικό του κοντινού μέρους και το δυναμικό $\varphi_{Wk}^*(\cdot, t)$ απόμακρου μέρους των φύλλων στροβιλότητας. Έτσι το συνολικό επαγόμενο δυναμικό ορίζεται ως:

$$\varphi(\mathbf{x}; t) = \varphi_B(\mathbf{x}; t) + \varphi_W^\Delta(\mathbf{x}; t) + \varphi_W^*(\mathbf{x}; t)$$

όπου

$$\begin{aligned}
\varphi_B(\mathbf{x}; t) &= \sum_{k=1}^{N_B} \varphi_{Bk}(\mathbf{x}; t) \\
\varphi_W^\Delta(\mathbf{x}; t) &= \sum_{k=1}^{N_B} \varphi_{Wk}^\Delta(\mathbf{x}; t) \\
\varphi_W^*(\mathbf{x}; t) &= \sum_{k=1}^{N_B} \varphi_{Wk}^*(\mathbf{x}; t) \quad (44)
\end{aligned}$$

είναι τα επαγόμενα από τα σώματα δυναμικά.

Όσον αφορά τον υπολογισμό της ταχύτητας, από τις εξ. 32 και 42 έπεται ότι το $\nabla\varphi_W^*(\cdot; t)$ μπορεί να περιγραφεί ως το περιστροφικό κομμάτι της ροής $\mathbf{u}_\omega(\cdot; t)$:

$$\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}_0; t) = \int_{D_\omega(\mathbf{x}; t)} \frac{\boldsymbol{\omega}_w(\mathbf{x}; t) \times (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}{4\pi|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^3} dD(\mathbf{x}) \quad (45)$$

όπου $D_\omega(t)$ δείχνει τη στήριξη της ελεύθερης στροβιλότητας $\boldsymbol{\omega}_w(\cdot; t)$, δεδομένου ότι:

$$\boldsymbol{\omega}_w(\mathbf{x}; t) = \nabla \times \mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}; t) = \sum_{k=1}^{N_b} \sum_{e=1}^{E_{wk}} \delta_{\partial S_{wk}^e}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{wk}) \cdot \boldsymbol{\tau}_{wk}^e(\mathbf{x}_w; t) \cdot \boldsymbol{\mu}_{wk}^e(t) \quad (46)$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι στην τελευταία σχέση περιλαμβάνονται μόνο οι όροι γραμμικών δινών εξαιτίας της κομματιαστής σταθερής προσέγγισης των κατανομών των διπόλων $\boldsymbol{\mu}_{Wk}^e(\cdot; t)$. Η παραπάνω ερμηνεία του $\nabla\varphi_W^*(\cdot; t)$ οδηγεί σε κάποιες τροποποιήσεις στις εξ.33 και 43. Η κατανομή του ομόρρου πρέπει να περιορίζεται μόνο από τα κοντινά μέρη S_{Wk}^Δ , ενώ πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τα $\varphi_W^*(\cdot, t)$ και $\mathbf{u}_\omega(\cdot; t)$. Στην εξ.43 το $\mathbf{u}_\omega(\cdot; t)$ αντιστοιχεί στην κατανομή του μακρινού ομόρρου και βρίσκεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης.

Όσον αφορά τη διακριτή προσέγγιση του $\boldsymbol{\omega}_w(\cdot; t)$ μέσω σωματιδίων δινών, ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{\omega}_w(\mathbf{x}; t) = \sum_{j \in J(t)} \boldsymbol{\Omega}_j(t) \cdot \zeta_\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{Z}_j(t)) \quad (47)$$

όπου $\boldsymbol{\Omega}_j(t)$ και $\mathbf{Z}_j(t)$ δείχνουν την ποσότητα και τη θέση των σωματιδίων δινών, $J(t)$ ο δείκτης των σωματιδίων δινών και $\zeta_\epsilon(r)$ η cut-off συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$\zeta_\epsilon(\mathbf{r}_j) = \frac{1}{\epsilon^3} \exp\left(-\left(\frac{r_j}{\epsilon}\right)^3\right), \quad r_j = |\mathbf{x} - \mathbf{Z}_j(t)| \quad (48)$$

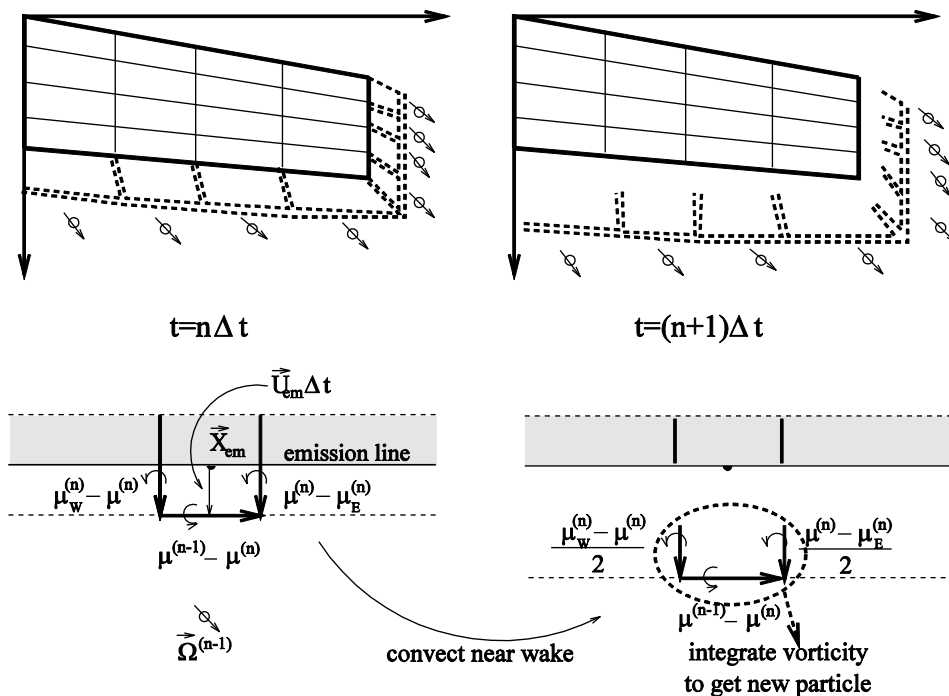
Από την εξ.47, το $\mathbf{u}_\omega(\cdot; t)$ παίρνει τη μορφή:

$$\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}; t) = \sum_{j \in J(t)} \frac{\boldsymbol{\Omega}_j(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{Z}_j(t))}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{Z}_j|^3} \cdot \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{Z}_j|}{\epsilon}\right)^3\right)\right) \quad (49)$$

Έτσι, αντί να υπολογίσουμε τη γεωμετρία των φύλλων στροβιλότητας και τις κατανομές των διπολών που αυτά φέρουν, η εξέλιξη των σωματιδίων δίνης καθορίζεται από τις ακόλουθες δυναμικές εξισώσεις:

$$\frac{d\mathbf{Z}_j(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{Z}_j; t), \quad j \in J(t) \quad (50)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}_j(t)}{Dt} = (\boldsymbol{\Omega}_j(t) \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{Z}_j; t), \quad j \in J(t)$$



Εικ. 16 Το υβριδικό σχήμα του απορρεύματος

Οι εξ.50 αφορούν την εξέλιξη των απόμακρων μερών του σμόρρου. Όσο τα κοντινά μέρη διατηρούν τη μορφή του φύλλου στροβιλότητας, ο καθορισμός τους είναι διαφορετικός. Έστω \mathbf{u}_{em} δείχνει τη μέση ταχύτητα σε ένα σημείο \mathbf{x}_{em} κατά μήκος της γραμμής εκπομπής της στροβιλότητας ενός αντωτικού σώματος. Η γεωμετρία του κοντινού μέρους του αντίστοιχου απορρεύματος S_{Wk}^{Δ} καθορίζεται κινηματικά από την σχέση:

$$\mathbf{X}^{\Delta} = \mathbf{X}_{em} + \Delta t \cdot \mathbf{u}_{em} \quad (51)$$

όπου $\mathbf{X}^{\Delta} - \mathbf{X}_{em}$ είναι το πλάτος του S_{Wk}^{Δ} σε διανυσματική μορφή. Τελικά, οι τιμές της κατανομής των διπόλων καθορίζεται από τη εξ.40 .

Εξαιτίας της χρονικά εξαρτώμενου χαρακτήρα του προβλήματος, τα σωματίδια της ελεύθερης στροβιλότητας παράγονται σταδιακά σε κάθε χρονικό βήμα, από την ολοκλήρωση της επιφανειακής στροβιλότητας που φέρουν τα στοιχεία του κοντινού απορρεύματος. Για να καθοριστεί αρχικά οι τιμές $\mathbf{\Omega}_j(t)$ κι η θέση $\mathbf{Z}_j(t)$ κάθε νέου σωματιδίου δίνης, χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathbf{\Omega}_j = \int_{S_{wk}^{\Delta e}} \boldsymbol{\omega}_w dS_w, \quad \mathbf{\Omega}_j \times \mathbf{Z}_j = \int_{S_{wk}^{\Delta e}} \boldsymbol{\omega}_w \times \mathbf{x} dS_w \quad (52)$$

όπου $S_{Wk}^{\Delta e}$, $e = 1, E_{Wk}^{\Delta}$ είναι τα στοιχεία που αποτελούν το κοντινό απόρρευμα του κ-σώματος. Με αυτόν τον τρόπο, η στροβιλότητα κάθε στοιχείου του κοντινού απορρεύματος ολοκληρώνεται για να παραγεί ένα σωματίδιο δίνης.

2.2.3 Υπολογισμός φορτίων

Τα αεροδυναμικά φορτία σε κάθε αντωτική επιφάνεια υπολογίζονται κατευθείαν μέσω την εξίσωσης Bernoulli για δύο γειτονικά σημεία της επιφάνειας ενός πτερυγίου, το ένα τοποθετημένο στην πάνω και το άλλο στην κάτω πλευρά του λεπτού πτερυγίου. Τότε, η ακόλουθη έκφραση για τη διαφορά πίεσης $[p](\cdot; t)$ ανάμεσα στα δύο σημεία θα είναι:

$$\frac{\partial[\varphi]}{\partial t}(\mathbf{x}; t) + \mathbf{u}_m(\mathbf{x}; t) \cdot [\mathbf{u}](\mathbf{x}; t) = -\frac{[\rho]}{\rho} \quad (53)$$

όπου $\mu = -[\varphi]$ είναι η κατανομή των διπόλων πάνω στο πτερύγιο, \mathbf{u}_m και $[\mathbf{u}] = \nabla[\varphi] = -\nabla\mu$ η μέση ταχύτητα κι η διαφορά ταχυτήτων στις δύο πλευρές αντίστοιχα. Έχοντας εφρμόσει την κομματιαστή σταθερή προσέγγιση για τα δίπολα, το $\nabla\mu$ υπολογίζεται με όρους πεπερασμένων διαφορών κατά μήκος των διευθύνσεων των δύο επιφανειών.

Στο διακριτό πρόβλημα της εξ.53 εφαρμόζουμε σημεία ελέγχου στα κέντρα των στοιχείων. Έστω $[p]_k^e$, $e = 1, E_k$ και $k = 1, N_B$ είναι η ασυνέχεια της πίεσης στο e-στοιχείο του κ-σώματος, τότε η αεροδύναμη του στοιχείου θα υπολογίζεται από τη σχέση $\mathbf{F}_k^e(t) = \mathbf{v}_k^e \cdot [p]_k^e \cdot S_k^e$. Η ολοκλήρωση των στοιχειωδών δυνάμεων πάνω στα τμήματα του πτερυγίου θα δώσει την κατανομή των φορτίων και μήκος του εκπετάσματος δηλαδή:

$$\mathbf{F}_k^{\text{strip}}(t) = \sum_e \mathbf{v}_k^e [p]_k^e S_k^e \quad (54)$$

Αντίστοιχα, η τοπική ροπής πρόνευσης (pitching) ενός τμήματος (strip) του πτερυγίου ως προς το ένα τέταρτο της χορδής δίνεται από:

$$\mathbf{M}_k^{\text{strip}}(t) = \sum_e (\mathbf{r}_o^e \times \mathbf{v}_k^e) [p]_k^e S_k^e \quad (55)$$

όπου \mathbf{r}_o^e είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου ελέγχου του e-στοιχείου σε σχέση με το $\frac{1}{4}$ της χορδής του πτερυγίου όπου υπολογίζεται κι η ροπή.

Εξαιτίας του εγγενώς μη ιξώδους χαρακτήρα της μεθόδου αυτής, τα υπολογιζόμενα φορτία μέσω της εξίσωσης Bernoulli δεν περιλαμβάνουν τα φαινόμενα λόγω του ιξώδους όπως η τριβή των τοιχωμάτων ή η αποκόλληση της ροής. Ένας τρόπος για να συμπεριλάβουμε αυτά τα φαινόμενα είναι μέσω της εκ των υστέρων εφαρμογής διαφόρων σχημάτων διόρθωσης πάνω στα φορτία, βασισμένα πάνω στους αεροδυναμικούς συντελεστές C_L , C_D και C_M .

2.3 Η τεχνική Particle Mesh

Το particle mesh πρόκειται για μία υπολογιστική μέθοδος για τον υπολογισμό δυνάμεων πάνω σε ένα σύστημα σωματιδίων. Τα σωματίδια αυτά μπορεί να είναι από άτομα μέχρι στοιχεία ενός ρευστού και γι'αυτό η συγκεκριμένη μέθοδος έχει εφαρμογή σε πολλά πεδία

όπως αστροφυσική ή ρευστομηχανική. Στην περίπτωση μας την εφαρμόζουμε στο πεδίο της στροβιλότητας του ομόρρου. Η βασική αρχή είναι ένα σύστημα σωματιδίων το οποίο μετετρέπεται σε ένα πλέγμα με τιμές πυκνότητας. Έτσι το δυναμικό επιλύεται πάνω σ' αυτό το πλέγμα πυκνότητας κι οι υπολογιζόμενες δυνάμεις εφαρμόζονται πάνω σε κάθε σωματίδιο ανάλογα με το κελί στο οποίο βρίσκεται αλλά και με το που βρίσκεται το σωματίδιο αυτό. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για να μετατραπεί ένα σύστημα σωματιδίων σε ένα πλέγμα όπου υπάρχουν πυκνότητες. Μία από αυτές είναι ότι κάθε σωματίδιο δίνει τη μάζα του στο πλησιέστερο σημείο του πλέγματος. Άλλη μέθοδος είναι η Cloud-in-Cell (CIC) όπου τα σωματίδια μοντελοποιούνται ως κύβοι σταθερής πυκνότητας και η μάζα κάθε σωματιδίου μπορεί να συμβάλει σε αρκετά κελιά. Όταν υπολογιστεί η κατανομή πυκνοτήτων, το δυναμικό ενέργειας κάθε σημείου στο πλέγμα μπορεί να καθοριστεί από τη διαφορική μορφή του νόμου του Gauss που οδηγεί στην εξίσωση του Poisson η οποία επιλύεται μέσω μετατροπής Fourier. Έτσι, είναι προτιμότερο να εκτελεστούν οι υπολογισμοί με τη μέθοδο του Particle Mesh από ότι να βρεθούν οι αλληλεπιδράσεις ενός σωματιδίου πάνω στα άλλα για δύο λόγους: πρώτον τα σημεία του πλέγματος είναι συνήθως λιγότερα από τα σωματίδια κι έτσι ο αριθμός των αλληλεπιδράσεων για υπολογισμό είναι μικρότερος και δεύτερον η τεχνική του πλέγματος επιτρέπει διαδικασίες μετατροπής Fourier για την εύρεση του δυναμικού, διαδικασία που είναι πολύ πιο γρήγορη. Βέβαια η μέθοδος αυτή συναντά αδυναμίες σε παρεμβολές σωματιδίων που βρίσκονται πολύ κοντά. Για το λόγο αυτό, έχουν βρεθεί διάφορες βελτιώσεις τις μεθόδου όπως η μέθοδος Particle-Particle Particle-Mesh.

Γενικά, οι μέθοδοι σωματιδίων μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο διαφορετικές κατηγορίες, αυτή που αφορά φυσική διατύπωση κι αυτή που αφορά υπολογιστική διατύπωση. Σύμφωνα με τη φυσική μοντελοποίηση, υπάρχουν δύο επιμέρους κατηγορίες, οι μεν βασίζονται σε αιτοκρατικά και οι δε σε στοχαστικά μοντέλα. Από την άλλη, η υπολογιστική μοντελοποίηση χωρίζεται σε δύο επιμέρους κατηγορίες, αυτές που χρησιμοποιούνται ως προσέγγιση της ισχυρής μορφής μιας ΜΔΕ κι αυτές της ασθενούς μορφής μιας ΜΔΕ. Μεταξύ άλλων, οι μέθοδοι particle mesh υπερτερούν άλλων διότι:

- Μπορούν να χειριστούν προσομοιώσεις πολύ μεγάλων παραμορφώσεων αφού η συνοχή μεταξύ των κόμβων παράγεται ως αποτέλεσμα των υπολογισμών και μπορεί να αλλάξει με το χρόνο.
- Η δομή μιας meshfree διακριτοποίησης μπορεί να συνδεθεί πιο εύκολα με βάσεις δεδομένων CAD από ότι διακριτοποιήσεις πεπερασμένων στοιχείων, αφού δεν απαιτούν πλέγμα.
- Οι meshfree διακριτοποιήσεις μπορούν εύκολα να περιγράψουν με ακρίβεια ποικίλα αντικείμενα όλων των γεωμετριών.
- Η μέθοδος είναι σχεδιασμένη να προσαρμόζει τις αλλαγές της γεωμετρίας του συνεχούς και παρέχει υπολογιστική ευελιξία στο να χειρίζεται τις ενδεχόμενες καταστροφές ή απόσυνθέσεις του, όπως διάδοση ρωγμής, υποβρύχια έκρηξη ή διάτμηση υλικού.
- Παρέχει μία ευέλικτη διαδικασία “πύκνωσης” στην περιοχή όπου επιθυμούμε μεγαλύτερη υπολογιστική ακρίβεια προσθέτοντας απλά περισσότερα σωματίδια.

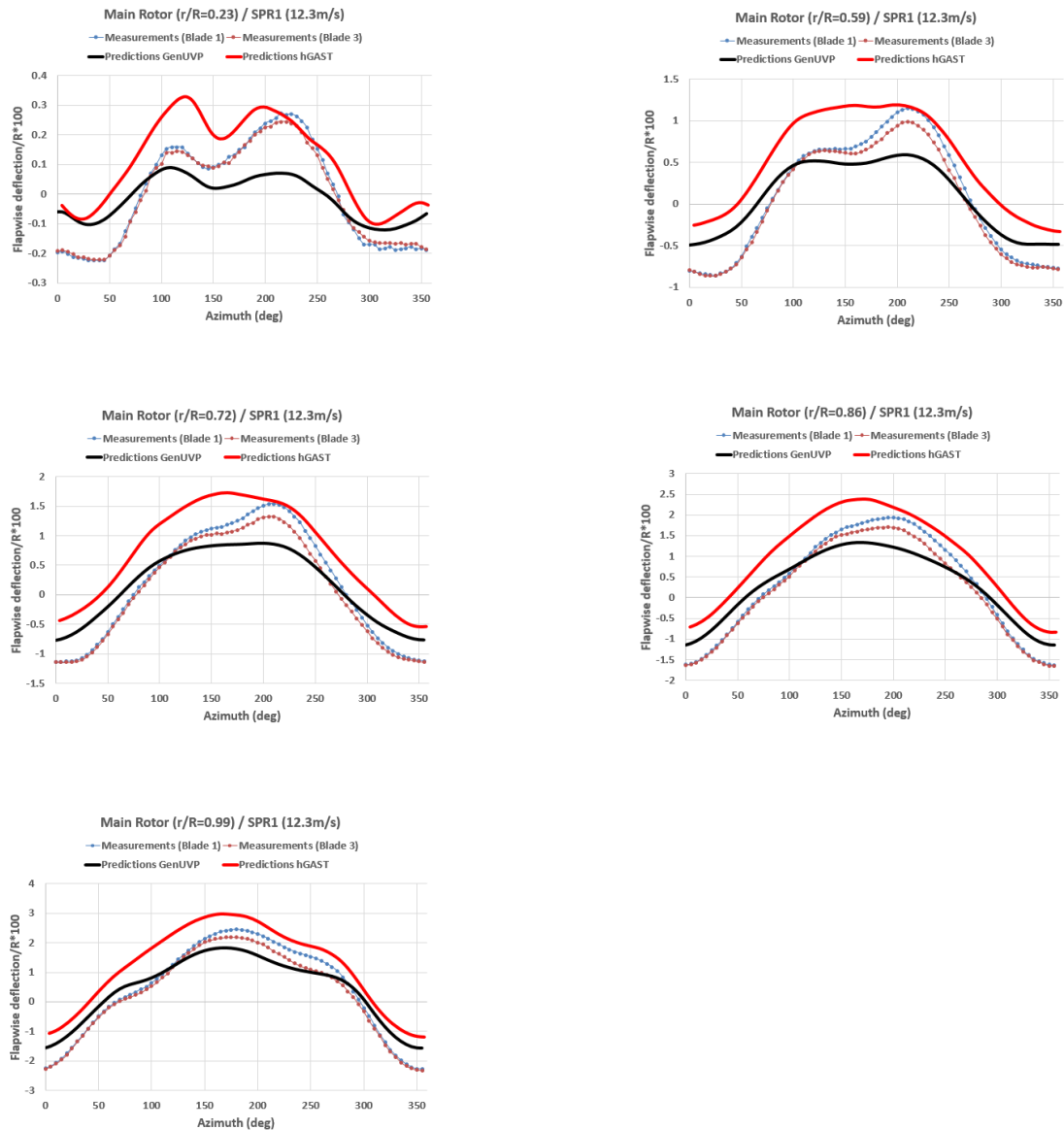
Κεφάλαιο 3

Ανάλυση υπολογιστικών αποτελεσμάτων

Στο τρέχον κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα υπολογιστικά αποτελέσματα των προσομοιώσεων με χρήση του κώδικα hGAST καθώς η σύγκριση με τα αποτελέσματα του παλαιότερου κώδικα GenUVP v3. Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι να αναδείξει με διαγραμματικές απεικονήσεις τις βελτιώσεις της μοντελοποίησης βάσει του νέου κώδικα.

3.1 Ανάλυση παραμορφώσεων κύριου στροφείου ως προς την ταχύτητα πτήσης

Η μελέτη των παραμορφώσεων αποτελεί μία πολύ σημαντική παράμετρο στην αξιολόγηση και μελέτη ενός ελαστικού μοντέλου υπό την διενέργεια διαφόρων φορτίων. Η μελέτη τους και στις τρεις διαστάσεις αναδεικνύει την αξιοπιστία του υπολογιστικού μοντέλου με σημαντικότερες αυτές κάθετα στη χορδή των πτερυγίων (flapwise bending deflection), παράλληλα στη χορδή των πτερυγίων (lead-lag bending deflection) και τη στρέψη (torsion). Παρακάτω, παρουσιάζονται οι παραμορφώσεις σε πέντε θέσεις κατά μήκος του εκπετάσματος όπου υπήρχαν οι πειραματικές μετρήσεις δηλαδή στις σχετικές θέσεις $r/R=0.23, 0.59, 0.72, 0.86, 0.99$ για τις flapwise και lead-lag παραμορφώσεις και στις σχετικές θέσεις $r/R=0.15, 0.55, 0.70, 0.85, 0.99$ για τις torsion παραμορφώσεις. Η ανάλυση των παραμορφώσεων γίνεται σε δύο διαφορετικές ταχύτητες πτήσης δηλαδή στις 12.3m/s και 50.9m/s .

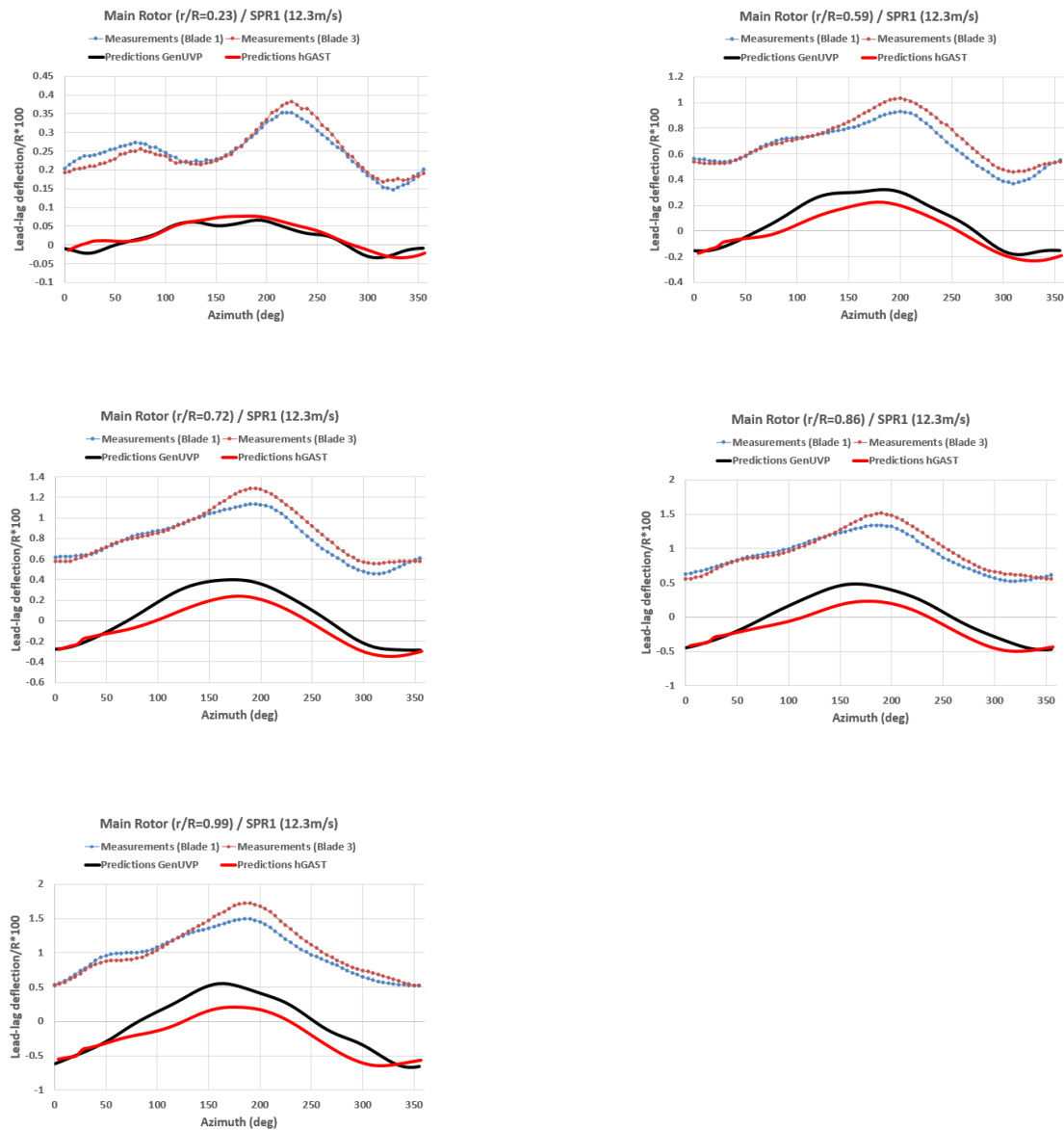


Εικ. 17 MR blade flapwise deflections vs azimuth (SPR1, 12.3 m/s)

Αρχικά, βλέπουμε τις flapwise παραμορφώσεις στην ταχύτητα 12.3 m/s. Παρατηρούμε ότι σ' όλες τις θέσεις κατά μήκος του πτερυγίου οι καμπύλες των υπολογιστικών αποτελεσμάτων συμφωνούν μ' αυτές των πειραματικών δεδομένων, διαφέρουν όμως οι αποκλίσεις. Έτσι, ξεκινώντας από τη θέση $r/R=0.15$ βλέπουμε ο κώδικας GenUVP υποτιμά τις τιμές των παραμορφώσεων είτε αυτές είναι θετικές είτε αρνητικές δίνοντας μικρότερες του κανονικού. Αντίστοιχη κατάσταση αλλά με αρκετά μικρότερες αποκλίσεις που σταδιακά ελατώνονται ισχύει και για τις άλλες θέσεις του πτερυγίου ($r/R=0.55, 0.70$) μέχρι ότου καταλήξουμε κοντά στο ακροπτερύγιο ($r/R=0.86, 0.99$) όπου και τελικά οι αποκλίσεις ελατώνονται στο ελάχιστο προσεγγίζοντας πολύ καλά τα πειραματικά δεδομένα.

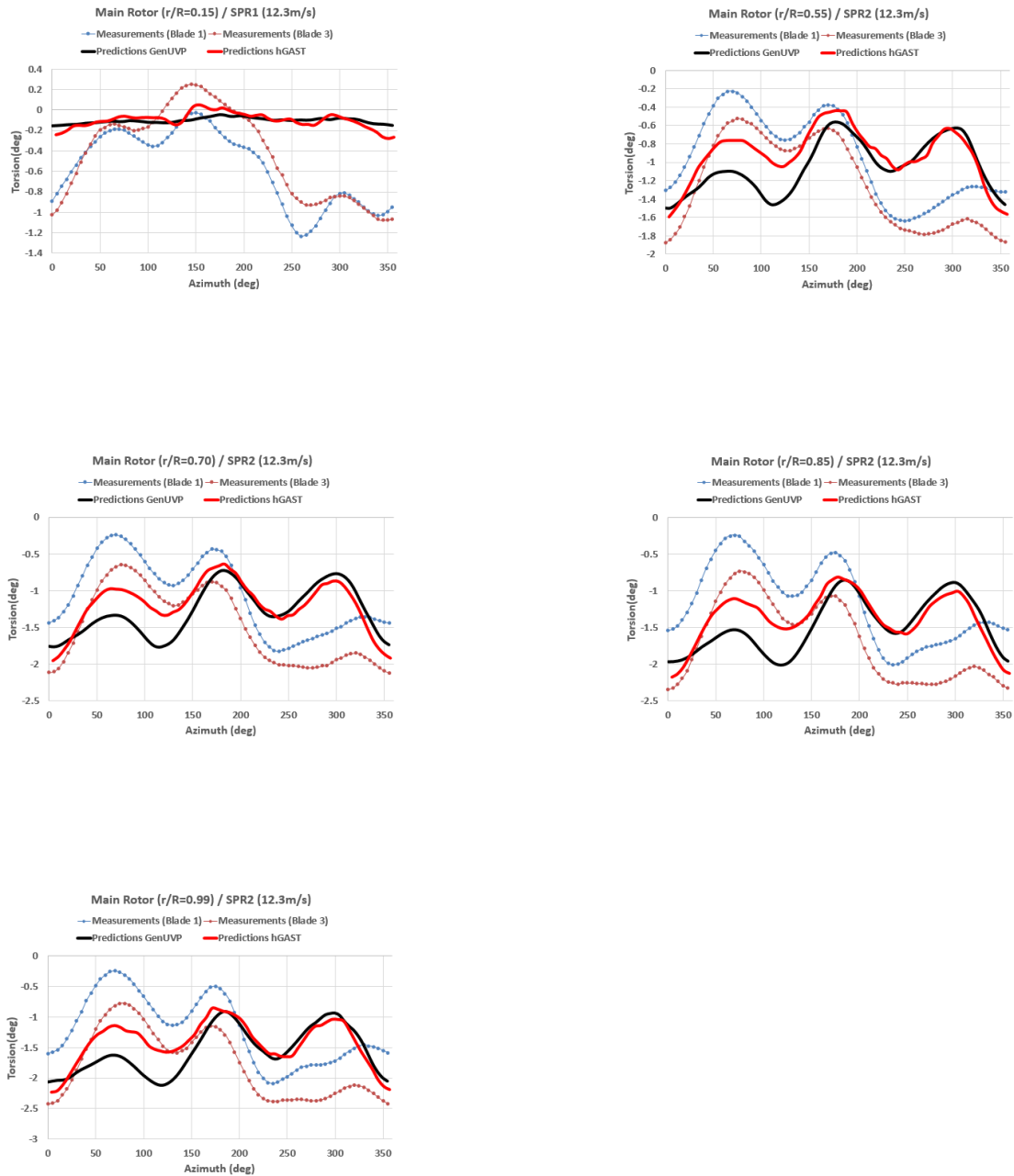
Από την άλλη, οι flapwise παραμορφώσεις του hGAST σ' όλες τις θέσεις του εκπετάσματος προκύπτουν υπερτιμημένες οι οποίες ωστόσο ακολουθούν την καμπύλη των αντίστοιχων πειραματικών δεδομένων και εκτιμώντας σε μεγάλο βαθμό τα τοπικά ακρότατα. Η διαφορά

του πλάτους των flapwise παραμορφώσεων οφείλεται κατά κύριο λόγο στο αρχικό trimming που δέχεται ο hGAST από τον GenUVP. Αυτές οι αρχικές τιμές, παραμένοντας αμετάβλητες καθόλη την κίνηση του στροφείου φέρουν μαζί τους και υπερτιμημένες flapwise παραμορφώσεις.



Εικ. 18 MR blade lead-lag deflections vs azimuth (SPR1, 12.3 m/s)

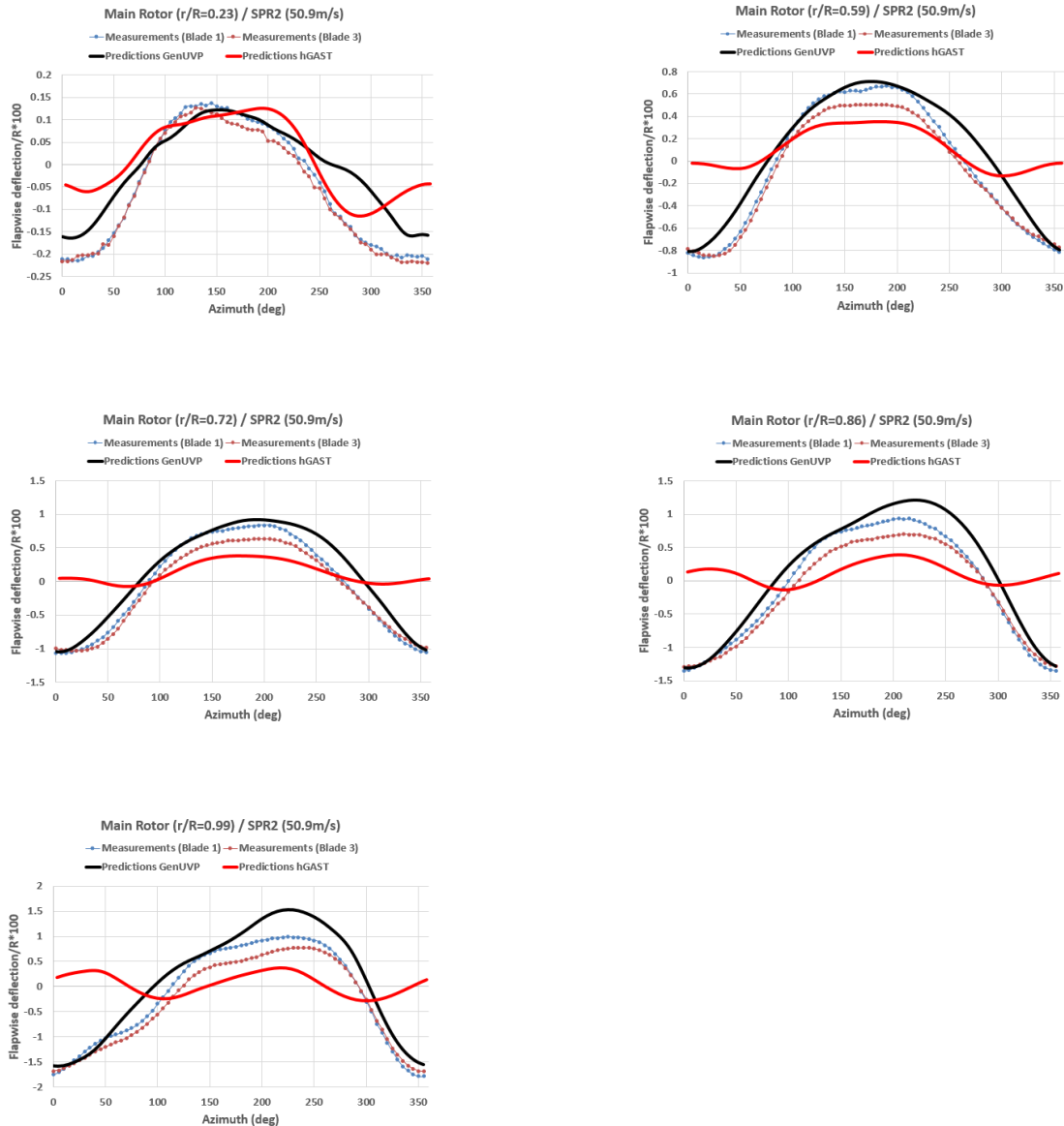
Στη συνέχεια, διαπιστώνουμε ότι οι προβλέψεις των lead-lag παραμορφώσεων, τόσο του GenUVP όσο και του hGAST, είναι γενικά υποτιμημένες. Παρόλο που οι πορείες των καμπυλών συμφωνούν μεταξύ τους, εντούτοις δεν υπάρχει αντιστοιχία των τιμών, ξεκινώντας από μία πιο μικρή διαφορά στη θέση $r/R=0.15$ που όσο κινούμαστε προς το ακροπερύγιο μεγαλώνει καταλήγωντας να έχουμε τη μεγαλύτερη απόκλιση στη θέση $r/R=0.99$. Εδώ είναι και πάλι εμφανές ότι το αρχικό trimming που δέχεται ο hGAST είναι εσφαλμένο με αποτέλεσμα να μην υπάρχει βελτίωση στις lead-lag ροπές.



Εικ. 19 MR blade torsion angle deflections vs azimuth (SPR1, 12.3 m/s)

Όσον αφορά τις torsion παραμορφώσεις, υπάρχει μία αδυναμία του GenUVP αλλά και του hGAST να τις περιγράψει κοντά στον άξονα περιστροφής ($r/R=0.15$ m/s) υποτιμώντας αυτές. Πέρα όμως από αυτό διαπιστώνουμε ότι οι προβλέψεις των παραμορφώσεων είναι σε μεγάλο βαθμό σύμφωνες με τα πειραματικά δεδομένα με μία διαφορά φάσης. Πιο συγκεκριμένα, σ' όλες τις θέσεις του πτερυγίου παρατηρούμε μία καθυστέρηση των προβλέψεων κατά 120 περίπου μοίρες. Αγνοώντας λοιπόν τη διαφορά αυτή της φάσης, βλέπουμε σ' όλες τις υπόλοιπες θέσεις του πτερυγίου ($r/R=0.55, 0.70, 0.85$ και 0.99 m/s) μία συμφωνία των καμπυλών των προβλέψεων-μετρήσεων με μικρές σχετικά αποκλίσεις. Ωστόσο το γεγονός ότι τα νέα αποτελέσματα σέβονται σαν καμπύλες αλλά διαφέρουν σε φάση αναδεικνύει την ικανότητα του hGAST να προβλέπει δεδομένα που όμως θέλουν

βελτιωμένο αρχικό trimming ώστε να εξαληφθούν οι υπάρχουσες ασυμφωνίες με τα πειραματικά δεδομένα.

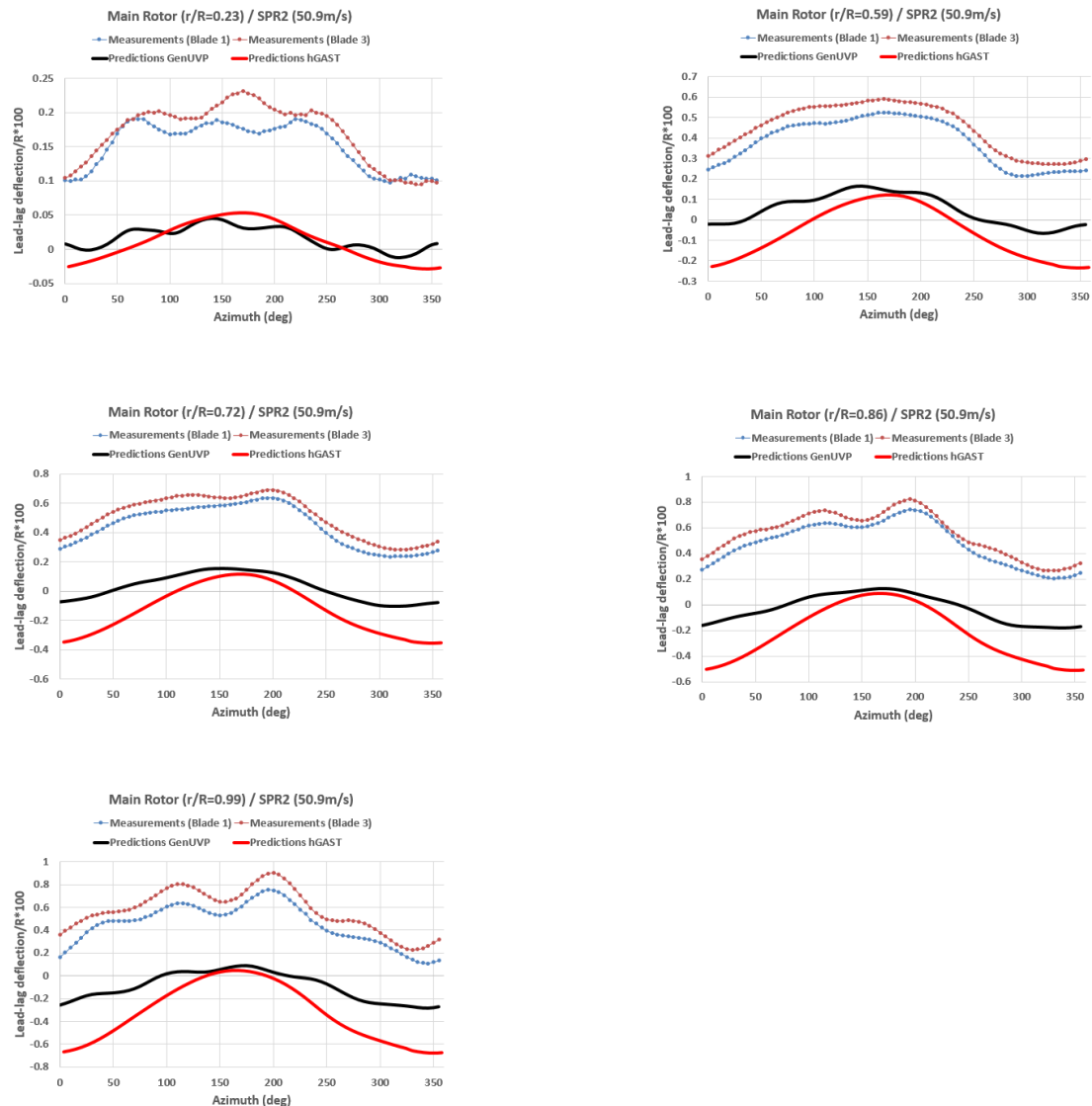


Εικ. 20 MR blade flapwise deflections vs azimuth (SPR2, 50.9 m/s)

Όσον αφορά τις flapwise παραμορφώσεις στη ταχύτητα 50.9 m/s, παρατηρούμε μία αρκετά καλή πρόβλεψη των μετρήσεων στον GenUVP αφού οι καμπύλες ακολουθούν ίδια πορεία με τις προβλέψεις να είναι ελαφρώς υπερτιμημένες, ειδικά όσο πλησιάζουμε στο ακροπτερύγιο ($r/R=0.86, 0.99$).

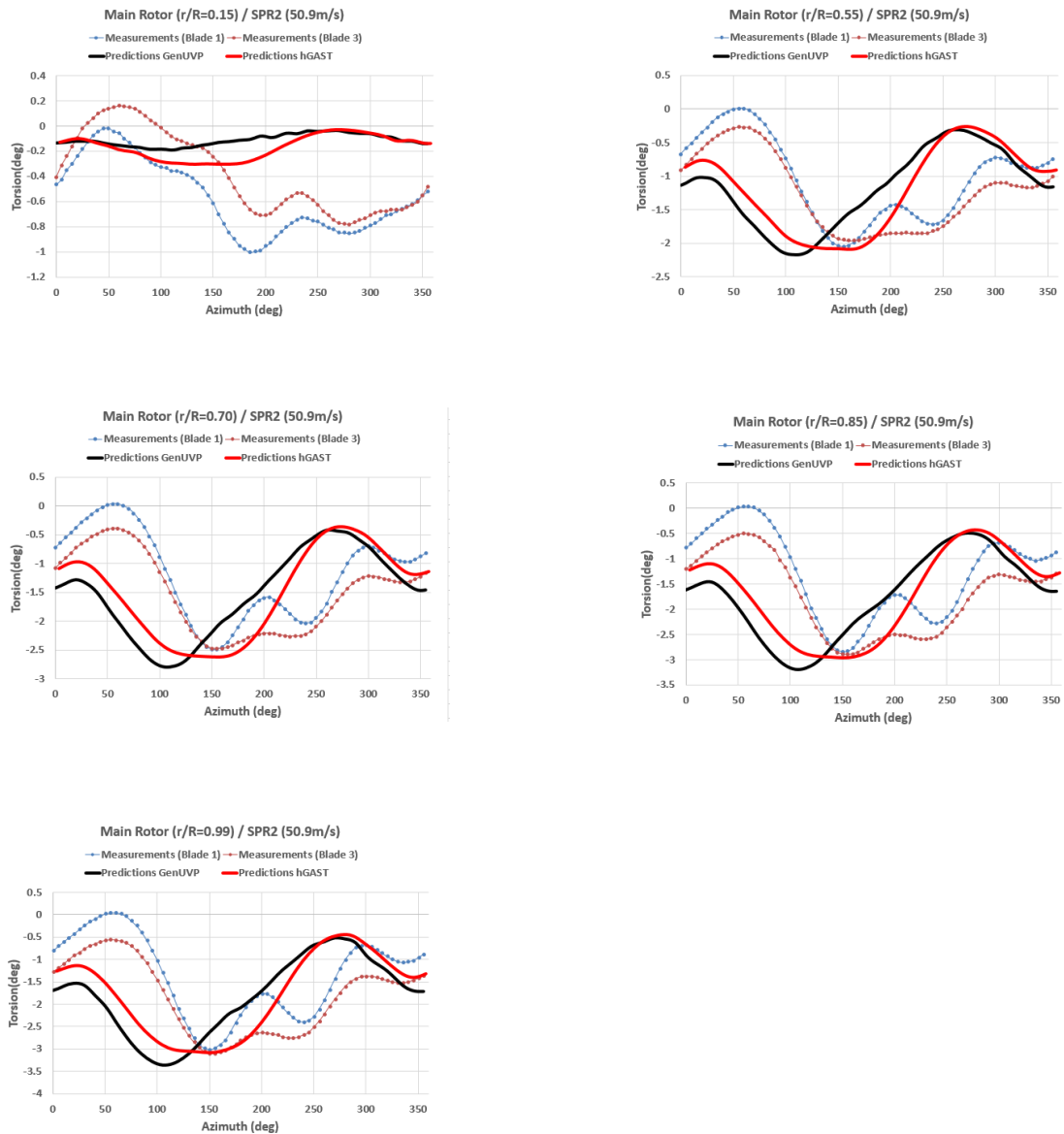
Η κατάσταση όμως είναι αρκετά διαφορετική για τον hGAST. Σ' όλες τις θέσεις κατά μήκος του εκπετάσματος ο κώδικας προβλέπει την καμπύλη των μετρήσεων και σέβεται σε μεγάλο

βαθμό τα τοπικά ακρότατα. Όμως και πάλι το κακό trimming δεν του επιτρέπει να πιάσει το πλάτος των παραμορφώσεων.



Εικ. 21 MR blade lead-lag deflections vs azimuth (SPR2, 50.9 m/s)

Στην ίδια ταχύτητα, οι lead-lag παραμορφώσεις του GenUVP ακολουθούν πορεία αντίστοιχη με τις μετρήσεις μόνο που είναι αρκετά υποτιμημένες. Έτσι, σ' όλες τις θέσεις παρατηρούμε μία μικρή διαφορά που ανεπαίσθητα μεγαλώνει προς το ακροπτερύγιο. Αντίστοιχη συμπεριφορά ακολουθούν κι οι lead-lag παραμορφώσεις του hGAST οι οποίες με τη σειρά τους προβλέπουν και πάλι τις διάφορες φάσεις των μετρήσεων χωρίς όμως να είναι ικανές να πιάσουν το πλάτος αυτών λόγω του εσφαλμένου trimming. Η εμφανής έλλειψη των διαφόρων ταλαντώσεων στην περίπτωση του hGAST οφείλεται στο γεγονός ότι έχει υψηλό συντελεστή απόσβεσης (damping).

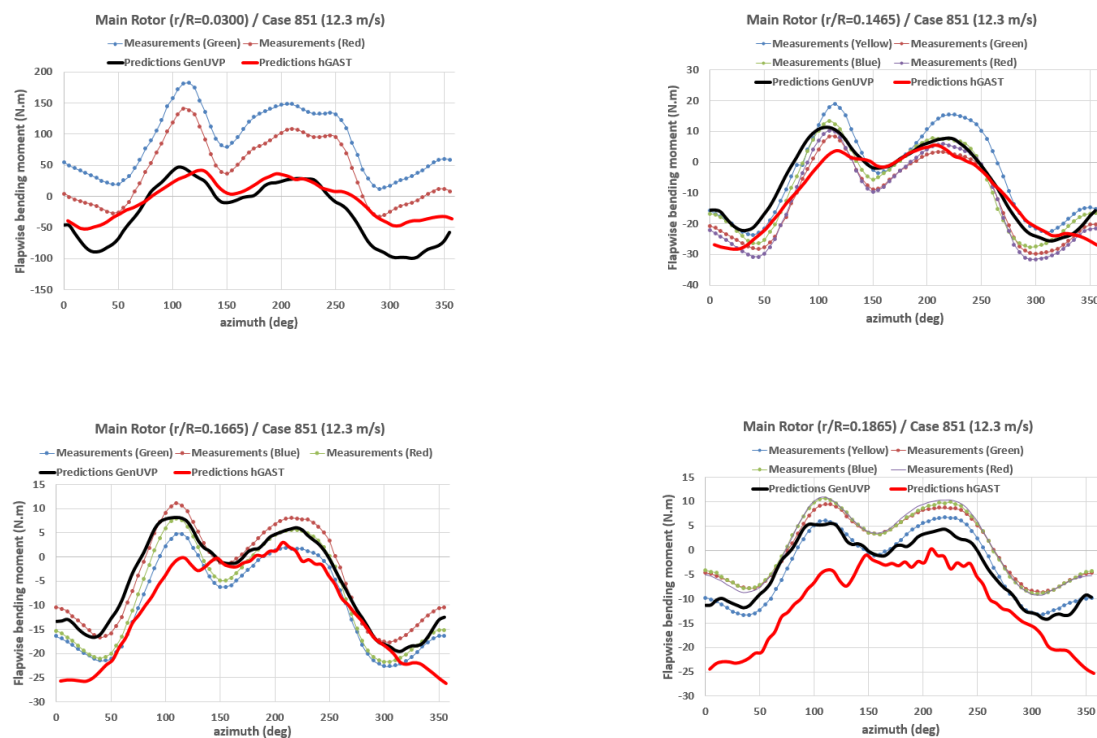


Εικ. 22 MR blade torsion angle deflections vs azimuth (SPR2, 50.9 m/s)

Οι torsion παραμορφώσεις παρουσιάζουν μία διαφορετική εικόνα και για τον GenUVP και για τον hGAST. Κοντά στη ρίζα ($r/R=0.15$) παρατηρούμε πάρα πολύ υποτιμημένη πρόβλεψη των παραμορφώσεων. Όσο πλησιάζουμε προς το ακροπτερύγιο διαπιστώνουμε μία πρόβλεψη που έχει καταρχήν μία διαφορά φάσης -220 μοίρες περίπου από τα πειραματικά δεδομένα. Υπάρχουν τμήματα που συμφωνούν ακριβώς καθώς κι άλλα που είναι υπερτιμημένα ή υποτιμημένα. Γενικά όμως μιλώντας, η πρόβλεψη είναι καλή με αυτή του hGAST να υπερέχει ελαφρώς.

3.2 Ανάλυση φορτίων κύριου στροφείου ως προς την ταχύτητα πτήσης

Η μελέτη και ανάλυση των φορτίων αποτελεί επίσης μία πολύ σημαντική παράμετρο στην αξιολόγηση και μελέτη ενός ελαστικού μοντέλου. Ως μέτρο σύγκρισης των φορτίων λαμβάνονται οι ροπές κατά τους τρεις άξονες δηλαδή η ροπή πτερύγισης (flapwise moment), η ροπή περιστροφής (lead-lag moment) και η ροπή στρέψης των πτερυγίων (torsion moment). Η παραμετρική μελέτη των φορτίων σε σχέση με τη γωνία περιστροφής των πτερυγίων (αζιμούθιο) γίνεται σε διάφορες θέσεις (κοντά στη ρίζα διότι εκεί τα φορτία παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους) όπου υπήρχαν οι αντίστοιχες πειραματικές μετρήσεις δηλαδή στις σχετικές θέσεις $r/R=0.0300$, 0.1465 , 0.1665 και 0.1865 για τις flapwise ροπές, στις σχετικές θέσεις $r/R=0.0300$, 0.1440 και 0.1740 για τις lead-lag ροπές και στη σχετική θέση $r/R=0.3320$ για τις torsion ροπές. Παρακάτω παρουσιάζεται η ανάλυση των φορτίσεων σε επτά διαφορετικές ταχύτητες πτήσης δηλαδή στις 12.3, 19.7, 25.5, 29.5, 39.9, 50.5, 58.2 & 69.6 m/s ώστε να διαπιστωθεί η αξιοπιστία του μοντέλου.

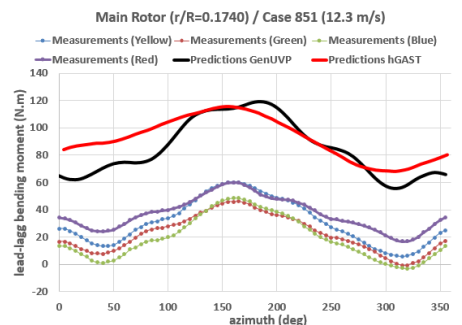
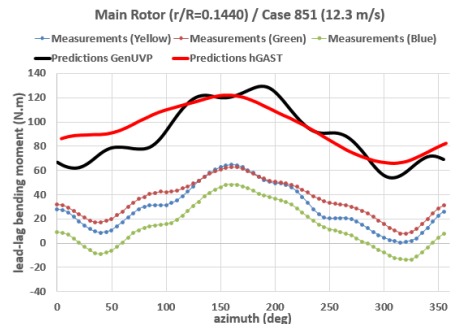
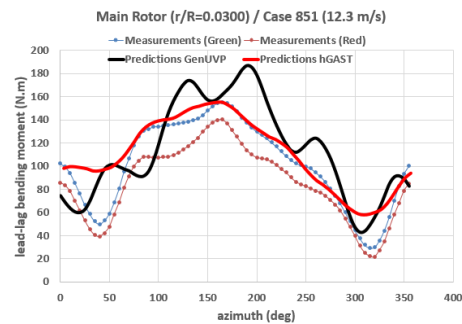


Εικ. 23 MR blade flapwise bending moment vs azimuth (dpt 851, 12.3 m/s)

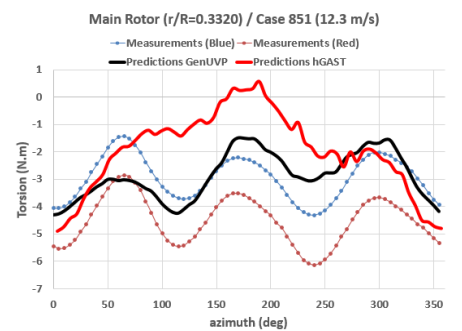
Παρατηρούμε ότι ο κώδικας GenUVP στην ταχύτητα 12.3 m/s υποτιμά την flap ροπή στη ρίζα του πτερυγίου του πτερυγίου ($r/R=0.0300$) δίνοντας ένα προφίλ αντίστοιχο με αυτό των πειραματικών δεδομένων αλλά με πολύ χαμηλότερες τιμές. Αυτό πιθανώς οφείλεται στη θεώρηση ότι ο άξονας περιστροφής είναι άκαμπτος κι επομένως δεν περιγράφονται ορθά οι φορτίσεις στη ρίζα των πτερυγίων. Παρόλ' αυτά, ο κώδικας GenUVP προσομοιάζει καλύτερα τις φορτίσεις με μία μικρή απομάκρυνση από ρίζα. Έτσι, παρατηρούμε ότι στις στις σχετικές

θέσεις $r/R=0.1465$, $r/R=0.1665$ και $r/R=0.1865$ ο κώδικας προβλέπει αρκετά καλά τις μετρήσεις πλησιάζονται πολύ κοντά στην μέση τιμή τους ακολουθώντας αντίστοιχη πορεία.

Από την άλλη, ο κώδικας hGAST προβλέπει υποτιμημένα τις flapwise ροπές. Το γεγονός ότι μπορεί να προβλέψει τις πορείες των καμπυλών και τα τοπικά ακρότατα αλλά όχι το πλάτος αυτών είναι δείγμα ενός εσφαλμένου trimming το οποίο χρήζει διόρθωσης προκειμένου να διορθωθούν αυτές οι ασυνέχειες.



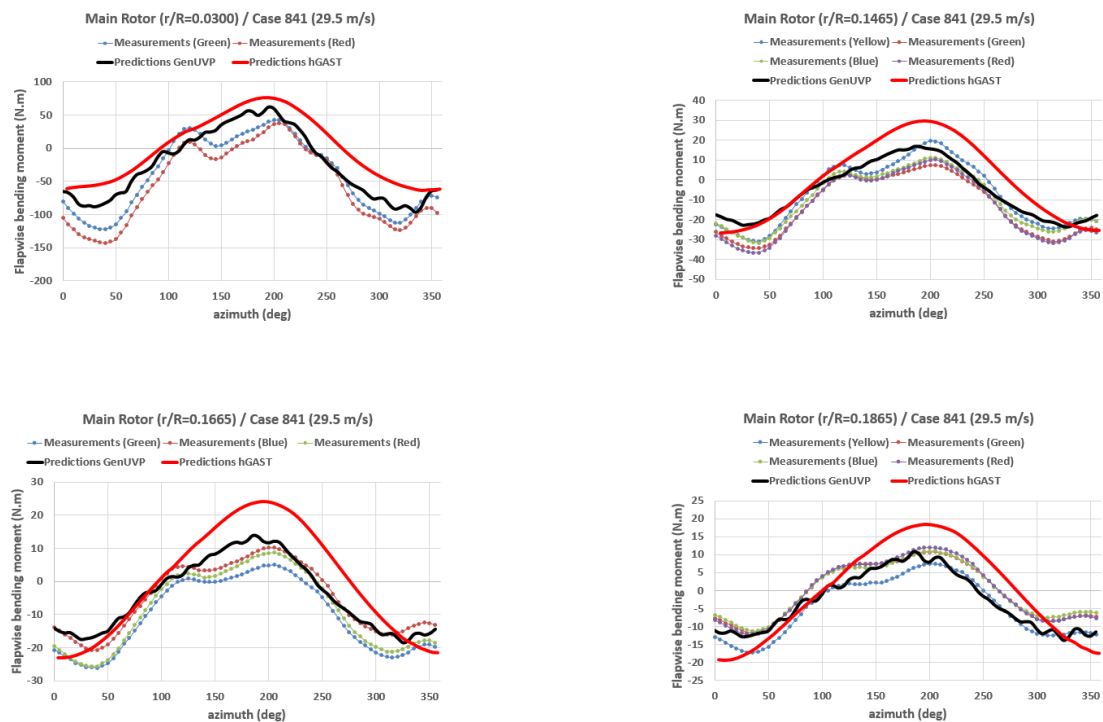
Εικ. 24 MR blade lead-lag bending moment vs azimuth (dpt 851, 12.3 m/s)



Εικ. 25 MR blade torsion vs azimuth (dpt 851, 12.3 m/s)

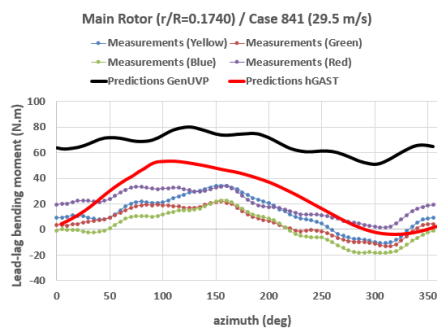
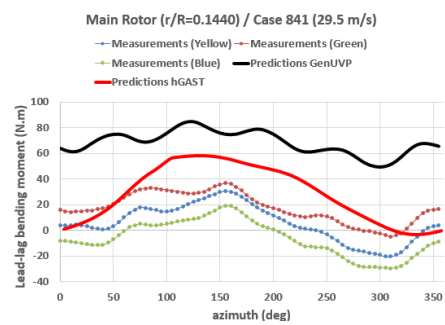
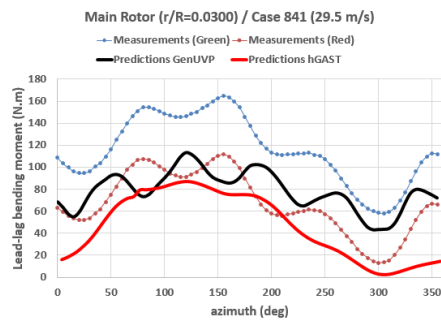
Ωστόσο, τα αποτελέσματα είναι λίγο δυσοίωνα όσον αφορά τις lead-lag ροπές. Ενώ κοντά στο άξονα περιστροφής $r/R=0.0300$ οι προβλέψεις του GenUVP κυμαίνονται κοντά στις πειραματικές μετρήσεις, όταν απομακρυνόμαστε από τον άξονα (θέσεις $r/R=0.1440$ και $r/R=0.1740$) παρατηρούμε μία υπερτίμηση των πειραματικών μετρήσεων τα οποία ωστόσο ακολουθούν αντίστοιχη καμπυλή. Αυτό κατά κυριο λόγο οφείλεται στο ότι το μοντέλο της potential flow που αμελεί τις δυνάμεις συνεκτικότητας. Αντίστοιχα αποτελέσματα λαμβάνονται και στην torsion ροπή $r/R=0.3320$ όπου οι προβλέψεις ακολουθούν αντίστοιχη καμπύλη με τις πειραματικές μετρήσεις αλλά οι τιμές είναι εμφανώς αρκετά υπερτιμημένες.

Από την άλλη, οι lead-lag ροπές του hGAST ακολουθούν γενικά τα αποτελέσματα του GenUVP εκτός από τη θέση $r/R=0.0300$ όπου η πρόβλεψη είναι πολύ καλή προβλέποντας πιστά τις μετρήσεις. Η κατάσταση διαφέρει για τη torsion ροπή όπου οι πρόβλεψη δεν είναι επαρκής παρόλου που φαίνεται να συμφωνεί σε ορισμένα σημεία.

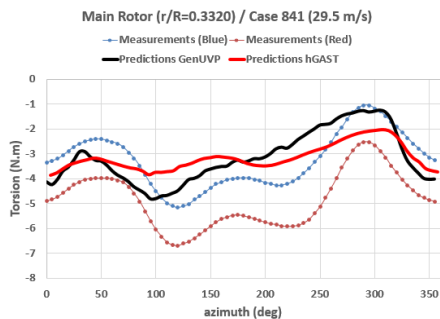


Εικ. 26 MR blade flapwise bending moment vs azimuth (dpt 841, 29.5 m/s)

Παρόμοια με τις προηγούμενη ταχύτητες πτήσης, η 29.5 m/s προβλέπει με μεγάλη ακρίβεια με ελαφρές τροποποιήσεις τις μετρήσεις των flapwise ροπών στις τέσσερις θέσεις $r/R=0.0300$, $r/R=0.1465$, $r/R=0.1665$ και $r/R=0.1865$. Οι ελαφρώς υπερτιμημένες ροπές του hGAST θα λέγαμε ότι οφείλονται σε αρχικό κακό trimming.



Εικ. 27 MR blade lead-lag bending moment vs azimuth (dpt 841, 29.5 m/s)

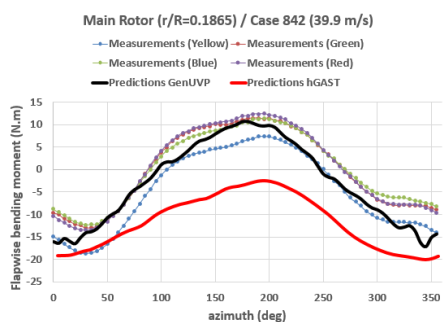
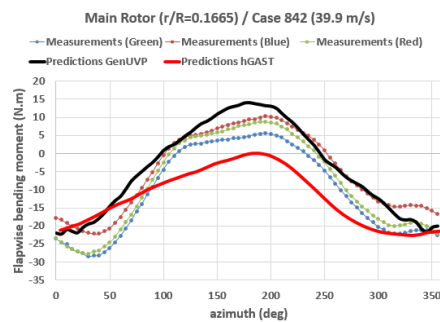
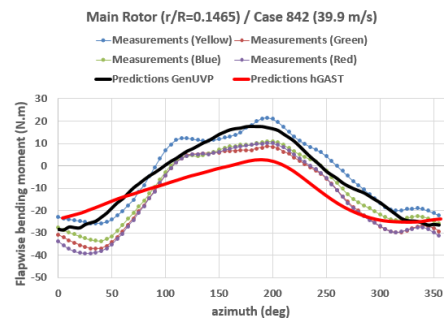
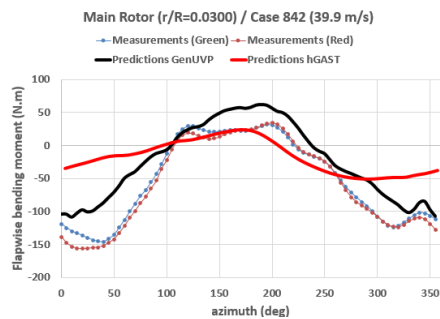


Εικ. 28 MR blade torsion vs azimuth (dpt 841, 29.5 m/s)

Παρόμοια δε κατάσταση ισχύει και για τις lead-lag ροπές $r/R=0.0300$, $r/R=0.1440$ και $r/R=0.1740$. Κοντά στον άξονα οι προβλέψεις είναι αρκετά επαρκείς ενώ λίγο πιο μακριά είναι και πάλι εμφανής η αδυναμία του GenUVP για ορθή πρόβλεψη των μετρήσεων. Παρατηρούμε και σ' αυτή την ταχύτητα μία υπερίμηση των lead-lag ροπών που κατά κυριο λόγο οφείλεται στο ότι το μοντέλο της potential flow που αμελεί τις δυνάμεις συνεκτικότητας. Όμως, η πιστότητα της καμπύλης, αν και υπερτιμημένης, είναι αρκετά ικανοποιητική. Οι δε lead-lag ροπές στη θέση $r/R=0.3320$ είναι και πάλι σε μία πολύ καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα.

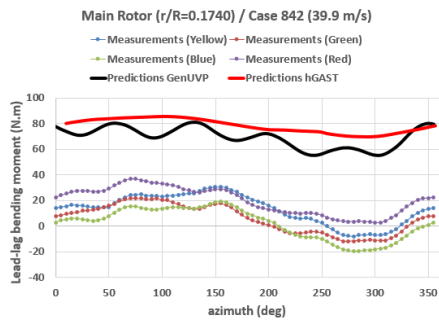
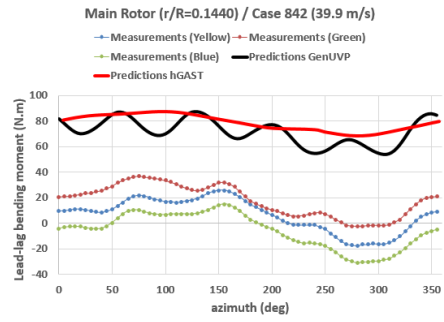
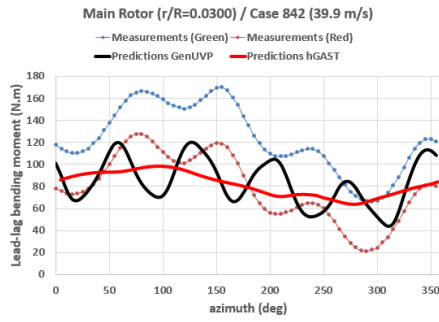
Από την άλλη, ο hGAST φαίνεται βελτιωμένος σ' αυτήν την περίπτωση. Προβλέπει αρκετά καλά την lead-lag ροπή κοντά στον άξονα ενώ πιο μακριά από αυτόν λίγο υπερτιμημένα αλλά

σε καλή φάση. Η δε torsion ροπή έχει μία αρκετά καλή καμπύλη ελαφρώς αυξημένη από τα πειραματικά δεδομένα.

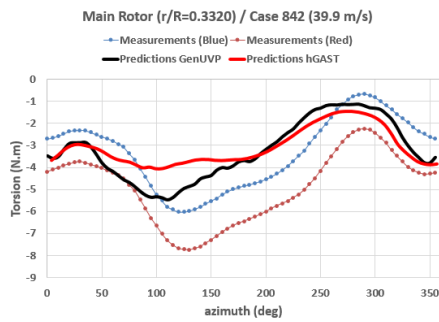


Εικ. 29 MR blade flapwise bending moment vs azimuth (dpt 842, 39.9 m/s)

Η κατάσταση για τον GenUVP παραμένει παρόμοια για την ταχύτητα πτήσης 39.9 m/s. Οι προβλέψεις για τις flapwise ροπές στις τέσσερις θέσεις $r/R=0.0300$, $r/R=0.1465$, $r/R=0.1665$ και $r/R=0.1865$ παρουσιάζουν μεγάλη ακρίβεια. Ωστόσο, ενώ ο hGAST προβλέπει την καμπύλη των μετρήσεων, αδυνατεί να προβλέψει το πλάτος λόγω του trimming.

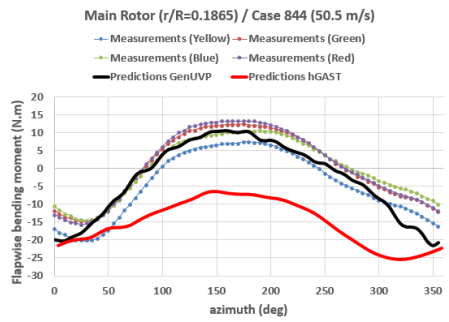
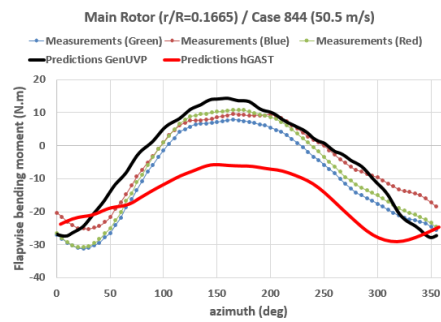
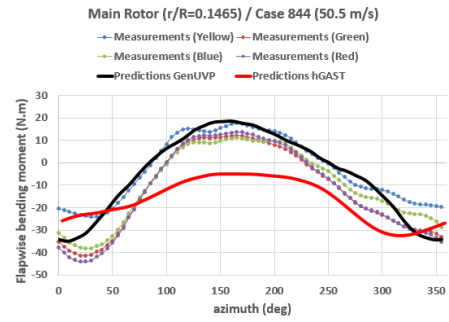
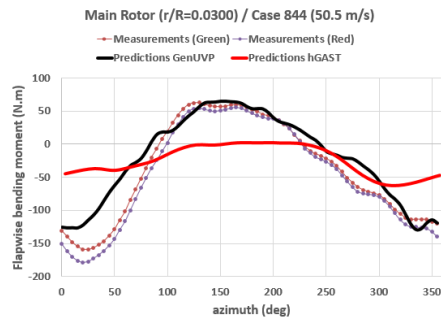


Εικ. 30 MR blade lead-lag bending moment vs azimuth (dpt 842, 39.9 m/s)



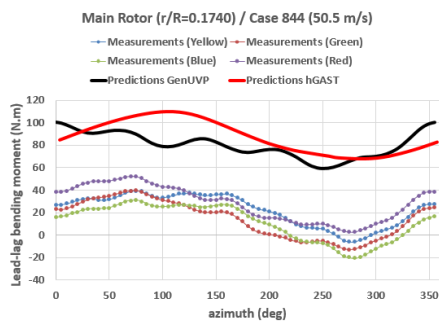
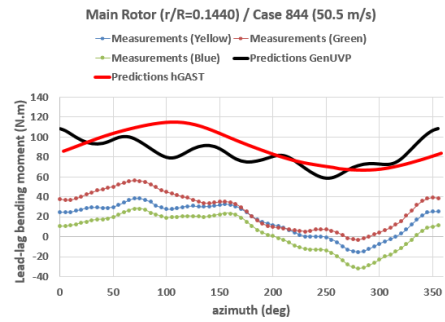
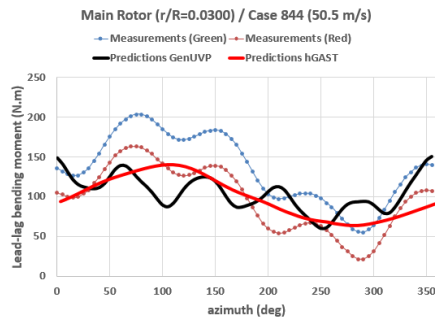
Εικ. 31 MR blade torsion vs azimuth (dpt 842, 39.9 m/s)

Αντίστοιχα με την προηγούμενη ταχύτητα, οι lead-lag και torsion ροπές συμπεριφέρονται ανάλογα. Στην ταχύτητα αυτή, χαρακτηριστική είναι η διαφορά του hGAST έναντι του GenUVP αφού αμελεί τις διάφορες ταλαντώσεις μικρότερης κλίμακας λόγω του υψηλού συντελεστή απόσβεσης που χρησιμοποιεί.

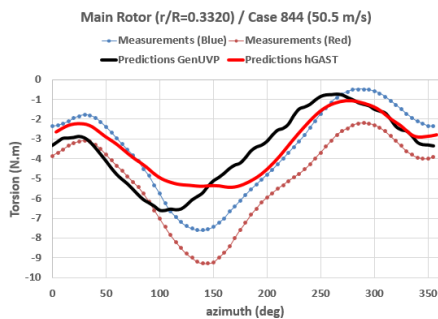


Εικ. 32 MR blade flapwise bending moment vs azimuth (dpt 844, 50.5 m/s)

Αντίστοιχα με τις προηγούμενες περιπτώσεις, στη ταχύτητα πτήσης 50.5 m/s παρατηρούμε πολύ επαρκή πρόβλεψη των μετρήσεων του GenUVP με αρκετά μικρές αποκλίσεις όσον αφορά τις flapwise ροπές στις τέσσερις θέσεις $r/R=0.0300$, $r/R=0.1465$, $r/R=0.1665$ και $r/R=0.1865$. Όμως, λόγω του κακού trimming ο hGAST πρόβλεπει τη φάση των των μετρήσεων υποτιμώντας αρκετά των πλάτων αυτών.



Εικ. 33 MR blade lead-lag bending moment vs azimuth (dpt 844, 50.5 m/s)



Εικ. 34 MR blade torsion vs azimuth (dpt 844, 50.5 m/s)

Αντίστοιχα με πριν, κοντά στον άξονα ($r/R=0.0300$) οι προβλέψεις των δύο κωδίκων συμφωνούν αφού έχουν τιμές της ίδιας τάξης μεγέθους με μικρές αποκλίσεις στην περιγραφή της καμπύλης, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από αυτόν ($r/R=0.1440$ και $r/R=0.1740$) οι πρόβλεψεις είναι και πάλι υπερτιμημένες ακολουθώντας όμως αντίστοιχη καμπύλη. Η πρόβλεψη της torsion ροπής είναι και πάλι αρκετά σύμφωνη με τα πειραματικά δεδομένα. Εμφανής είναι και πάλι η ύπαρξη του υψηλού συντελεστή απόσβεσης του hGAST ειδικά στη θέση $r/R=0.0300$.

Κεφάλαιο 4

Επίλογος-Συμπεράσματα

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα του υπολογιστικά κώδικα hGAST, διαπιστώνουμε μία γενική επιδείνωση των υπολογιστικών αποτελεσμάτων σε σχέση με αυτά του GenUVP. Κύρια αιτία είναι το εσφαλμένο trimming που δέχεται ως input ο hGAST και δε διορθώνεται αυτόματα και όχι ο ίδιος ο υπολογιστικός κώδικας. Επομένως, μία ενδεχόμενη σύγκλιση των πειραματικών μετρήσεων με τα νέα υπολογιστικά αποτελέσματα δεν είναι εμφανής στα υπολογιστικά αποτελέσματα στις διάφορες ταχύτητες πτήσης λόγω της διαφοράς πλατών είτε των παραμορφώσεων είτε των φορτίων. Η αλλαγή των μοντέλου από ένα μοντέλο γραμμικής Euler-Bernoulli θεωρίας ακτινών 2^{ης} τάξης ακρίβειας στον GenUVP στο μοντέλο 1^{ης} τάξης ακρίβειας του Timoshenko στο νέο κώδικα hGAST πιθανώς να βελτιώνει τα διαγράμματα παραμορφώσεων, πράγμα το οποίο ωστόσο δεν είναι εμφανές στα υπάρχοντα αποτελέσματα. Από την άλλη, στο αεροδυναμικό κομμάτι, η βελτίωση στα διαγράμματα των αεροδυναμικών φορτίων δεν είναι εμφανής παρόλες τις βελτιώσεις επί του κώδικα του hGAST όπως περιγραφή του ομόρρου με particle mesh. Εν κατακλείδι, τα νέα υπολογιστικά αποτελέσματα του κώδικα hGAST πιθανώς να είναι αρκετά αξιόπιστα για τη προσομοίωση της κίνησης του στροφείου του Ε/Π ΒΟ-105, πράγμα το οποίο όμως δεν είναι ξεκάθαρο στα τρέχοντα διαγράμματα λόγω του ανεπαρκούς trimming. Συνεπώς η περαιτέρω ανάλυση και μελέτη του κώδικα hGAST συνιστά απαραίτητη προϋπόθεση για την τελική ανάδειξη του ως ένα αξιόπιστο εργαλείο προσομείωσης της κίνησης του στροφείου ενός Ε/Π με βασικές τις εξής διορθωτικές ενέργειες:

- Βελτίωση του trimming, ώστε να διορθώνεται αυτόματα βάσει κάποιων πειραματικών μετρήσεων
- Πύκνωση του πλέγματος, ώστε να επιτευχθεί μεγαλύτερη ακρίβεια στα υπολογιστικά αποτελέσματα.
- Πιθανή επαναξιολόγηση κάποιων μοντέλων, ώστε να διαπιστωθεί η ικανότητα πρόβλεψης των πειραματικών δεδομένων.

Αναφορές

- [1] Riziotis, V., et al, *HeliNOVI: Current Vibration Research Activities*, 31st European Rotorcraft Forum; Florence, Italy; September 13-15, 2005
- [2] Riziotis, V., Voutsinas, S., *Modelling of wind tunnel interference on helicopter measurements and assessment of the currently used corrections based on the Helinovi database*, NTUA, Athens, 2011
- [3] Riziotis, V., Voutsinas, S., *HeliNOVI-WP2: Validation of vibration excitation sources*, NTUA activities, NTUA, Athens, 2006
- [4] Voutsinas, S., *Manual of GenUVP 7*, NTUA, Athens, 2011
- [5] Manolas, D., *Development of simulation tools for the integrated analysis of offshore wind turbines*, NTUA, Athens, 2011
- [6] U.S. Department Of Transportation, Federal Aviation Administration, *Rotorcraft flying handbook*, FAA publications, 2000
- [7] Katz J, Plotkin, A., *Low-speed aerodynamics*. New York: McGraw-Hil, 1991
- [8] Bierbooms, W., *A comparison between unsteady aerodynamic models*, Proc. EWEC'91, Amsterdam, 1991