ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΔΠΜΣ Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Ανάπτυξη Μεθόδων Προσομοίωσης Εν τω Βάθει Υπερθερμικής Θεραπείας

Διπλωματική Εργασία

Παπαδήμας Νικόλαος

Επιβλέπων: Ουζούνογλου Νικόλαος

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την ………… 2017

………………………..	………………………..	………………………..
Ουζούνογλου Νικόλαος	Καρανάσιος Σωτήριος	Χαραλαμόπουλος Αντώνιος
Καθηγητής	Καθηγητής	Αν. Καθηγητής

Αθήνα, Απρίλιος 2017

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΔΠΜΣ Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Νικόλας Παπαδήμας

Αθήνα, Απρίλιος 2017

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Αθήνα, Απρίλιος 2017

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση και η μοντελοποίηση της υπερθεμικής θεραπείας στις δυο διαστάσεις . Θα εξεταστούν οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα και θα λυθούν αριθμητικά με την βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών.

Ο αλγόριθμος της προσομοίωσης αυτής θα υποστεί κάποιες τροποποιήσεις καθώς θα μοντελοποιήσει διαφορετικές περιπτώσεις της θεραπείας.

Αρχικά θα μας απασχολήσει το ηλεκτρικό πρόβλημα που γεννάται κατά τη διάρκεια της θεραπείας όταν φορτισμένη πλάκα έρχεται σε επαφή με το ανθρώπινο σώμα. Τα αποτελέσματα θα χωριστούν σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις.

Στη συνέχεια τα αποτελέσματα αυτά θα βοηθήσουν στην εξαγωγή συμπερασμάτων για την μοντελοποίηση της διάχυσης της θερμότητας.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα πραγματοποιηθούν συγκρίσεις των μέχρι τώρα αποτελεσμάτων με σκοπό επιλογής της καλύτερης εφαρμογής της μεθόδου.

Τέλος, θα μας απασχολήσει μία τεχνική αποφυγής δυσάρεστων συνεπειών όταν η υπερθερμία χρησιμοποιηθεί για βαθύτερα στρώματα ανθρώπινου ιστού.

Αθήνα, Απρίλιος 2017

ABSTRACT

The principal aim of this thesis is the illustration and modeling of hyperthermal treatment in two dimensional space.

We study the equations that describes the problem and we solve these equations numerically using the Finite Difference Method. The algorithm of this simulation will undergo some changes as we model different case of treatment.

At first we look at the electrical problem, a problem tha emerges during treatment that involves contact of a charged plate with human body and results will be categorized in three separate situations. We use those results to draw conclusions about modeling of the method.

Finally, we study a technique of avoiding unpleasant consequences occurring when hyperthermia is used for deeper layers of human tissue.

Αθήνα, Απρίλιος 2017

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ορισμένους ανθρώπους που με τον ένα ή τον άλλο τρόπο συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Πρώτο από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της εργασίας, καθηγητή κ. Νικόλαο Ουζούνογλου που αμέσως αντιλήφθηκε τις ερευνητικές μου ανησυχίες και μου ανέθεσε ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, καθώς και για την αμέριστη στήριξή του. Θερμές ευχαριστίες και στους καθηγητές κ. Σωτήρη Καρανάσιο και κ. Αντώνη Χαραλαμόπουλο που δέχθηκαν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής αξιολόγησης της διπλωματικής μου εργασίας. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την πολύτιμη ηθική και υλική συμπαράσταση όλα αυτά τα χρόνια.

Στην Τατιανή

Αθήνα, Απρίλιος 2017

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το φαινόμενο της υπερθερμίας, της αξιοποίησης δηλαδή της θερμότητας για θεραπευτικούς σκοπούς στην Ιατρική, δεν εμφανίστηκε τα τελευταία χρόνια, αλλά έχει τις ρίζες του στο μακρινό παρελθόν. Ανατρέχοντας πολλούς αιώνες πριν, η πρώτη αναφορά στην υπερθερμία εντοπίζεται περίπου το 400 π.Χ. και ανήκει στο πατέρα της σύγχρονης Ιατρικής και θεμελιωτή της ορθολογικής Ιατρικής, το σπουδαίο Έλληνα ιατρό Ιπποκράτη. Συγκεκριμένα, ο Ιπποκράτης επισήμανε πως οι ασθένειες οι οποίες δεν μπορούν να θεραπευτούν με φαρμακευτική αγωγή, μπορούν ενδεχομένως να θεραπευτούν με κάποια χειρουργική παρέμβαση. Εάν και με την εφαρμογή των μεθόδων αυτών οι ασθένειες αυτές εξακολουθούν να μην θεραπεύονται ,τότε πολύ πιθανόν να μην επιδέχονται θεραπείας. Πράγματι η γενικότερη αρχή της μεταφοράς θερμότητας στον οργανισμό για την αντιμετώπιση προβλημάτων υγείας έβρισκε στο παρελθόν πολλές εφαρμογές, όπως επιβεβαιώνεται από ιστορικές αναφορές και αρχαιολογικά ευρήματα. Ενδεικτικά αναφέρεται η ύπαρξη ιαματικών πηγών με ζεστό νερό αλλά και διατάξεις που θυμίζουν δεξαμενές νερού οι οποίες χρησιμοποιούνταν για ιατρικούς σκοπούς στο παρελθόν και στην αρχαιότητα.

Την πολύ στενή σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ίαση ασθενειών και στη θερμότητα μπορεί κανείς εύκολα να αντιληφθεί από το γεγονός ότι σε κάθε προσβολή του οργανισμού από ιούς, βακτήρια και άλλους παθογόνους μικροοργανισμούς, η πρώτη γραμμή άμυνας του ανθρώπινου οργανισμού για τη θωράκιση της ομαλής λειτουργίας του και την καταπολέμηση του κινδύνου είναι η αύξηση της θερμοκρασίας του ανθρώπινου σώματος, με το έκδηλο σύμπτωμα του πυρετού σε θερμοκρασίες που αγγίζουν τους 39, 40 ακόμα και 41° C. Ουσιαστικά η εμπύρετη κατάσταση του οργανισμού είναι μια αυθόρμητη, βιολογική μορφή εφαρμογής υπερθερμίας για την αντιμετώπιση μιας μόλυνσης. Η παραπάνω διαπίστωση οδήγησε τους επιστήμονες να επικεντρώσουν της προσοχή τους στη αναζήτηση τεχνητών μεθόδων με σκοπό την μεταφορά σημαντικών ποσών θερμότητας στο εσωτερικό του οργανισμού για θεραπευτικούς σκοπούς. Ένα από τα παράδειγμα αφορά στην προσπάθεια καταστολής κακοήθων όγκων, μία περίπτωση που τα τελευταία χρόνια διεγείρει το ενδιαφέρον του ιατρικού κόσμου και παρουσιάζει αλματώδη πρόοδο ως προς τα αποτελέσματα της.

Αθήνα, Απρίλιος 2017

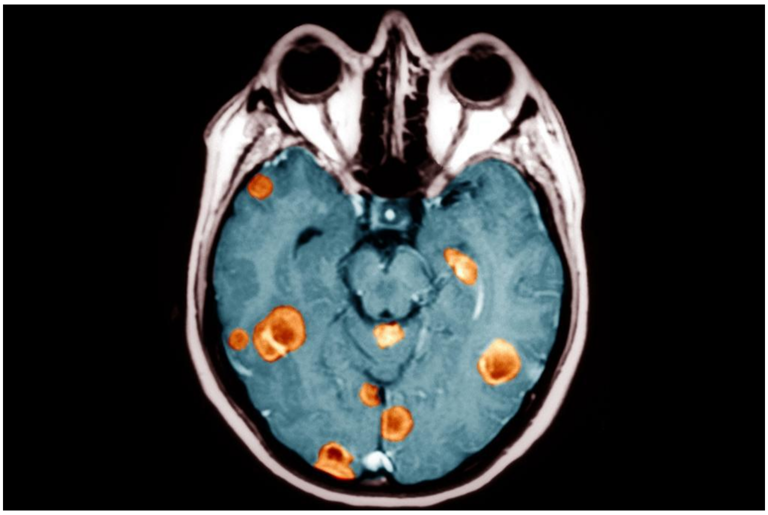
Ιατρική Θεώρηση

Μία από τις σοβαρότερες και πιο θανατηφόρες ασθένειες του τελευταίου αιώνα είναι ο καρκίνος, με πολλά θύματα και ακόμα περισσότερους ασθενείς σε όλον τον κόσμο. Δυστυχώς παρά την ενθαρρυντική εξέλιξη στην εφαρμογή νέων φαρμακευτικών αγωγών αλλά και χειρουργικών μεθόδων, το πρόβλημα συνεχίζει να υφίσταται. Για αυτόν ακριβώς το λόγο αναζητούνται νέες καινοτόμες ιδέες προς την καταπολέμηση της ασθένειας. Μία από αυτές, με ιδιαίτερα ελπιδοφόρα αποτελέσματα, είναι η υπερθερμία καρκινικών κυττάρων, με πρωταρχικό στόχο την επιβράδυνση της ανάπτυξης και του πολλαπλασιασμού τους και απώτερο σκοπό την οριστική καταστολή τους. Υπάρχει ήδη πληθώρα εργαστηριακώς δοκιμών σε πειραματόζωα, ενώ ταυτόχρονα ολοένα και πληθαίνουν οι περιπτώσεις κλινικών οι οποίες κάνουν χρήση της υπερθερμίας σε περιπτώσεις εθελοντών καρκινοπαθών.

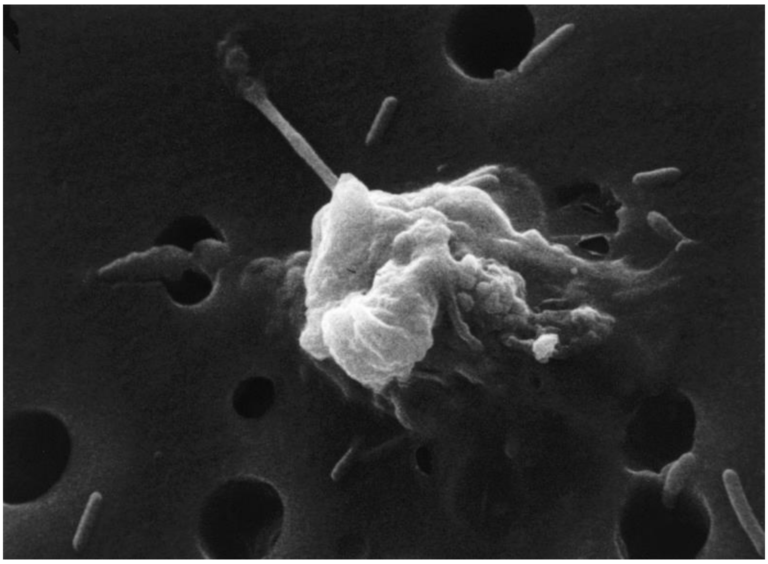
Εάν προσπαθήσουμε να εισέλθουμε νοητά στο μικροσκοπικό κόσμο των ανθρώπινων κυττάρων, θα παρατηρήσουμε ότι η γενικότερη συμπεριφορά των καρκινικών κυττάρων ευνοεί τη χρήση της υπερθερμίας σαν μία αποδοτική μορφή θεραπείας. Η αύξηση της θερμοκρασίας στο εσωτερικό των κυττάρων του ανθρώπινου σώματος άνω των 42- 43° C προκαλεί τη σταδιακή κυτταρική απόπτωση μέσω αρχικά της καταστροφής των κυτταρικών τους μεμβρανών και στη συνέχεια της νέκρωσής τους. Οι καρκινικοί ιστοί, σε αντίθεση με τους φυσιολογικούς υγιείς του ανθρώπινου οργανισμού, τροφοδοτούνται με αίμα από δίκτυο αγγείων τα οποία αδυνατούν να διαστέλλονται ομαλά κι επομένως να ανταλλάσσουν γρήγορα θερμότητα με το περιβάλλον τους. Συνεπώς, σε περίπτωση που στον καρκινικό ιστό προσφερθεί μεγάλο ποσό θερμότητας, δεν υπάρχει η δυνατότητα γρήγορης αποβολής της μέσω των φλεβών στο υπόλοιπο σώμα, όπως συμβαίνει σε φυσιολογικές συνθήκες, καθιστώντας τον περισσότερο ευπαθή σε σύγκριση με έναν υγιή ιστό. Με τον τρόπο αυτόν η θερμότητα για σημαντικό χρονικό διάστημα εγκλωβίζεται στο εσωτερικό του καρκινικού όγκου και οδηγεί σε ραγδαία μεταβολή της θερμοκρασίας του και εν συνεχεία σε αλλοίωση της μορφολογίας των κυττάρων του με τελικό αποτέλεσμα την καταστροφή του.

Φυσικά όπως όλες οι πρωτοποριακές μέθοδοι, έτσι και η υπερθερμία θέτει ορισμένους περιορισμούς στην κατά κόρον εφαρμογή της ως λύση στο πρόβλημα του καρκίνου, λόγω παρενεργειών που παρατηρήθηκαν σε κλινικές δοκιμές καθώς και άλλων απρόσμενων μη επιθυμητών αποτελεσμάτων. Πιο συγκεκριμένα, η θεωρητικά ιδανική μεταφορά ικανοποιητικής θερμότητας στο εσωτερικό των καρκινικών ιστών δεν είναι πρακτικά δυνατόν να γίνει με τόσο μεγάλη ακρίβεια ώστε να μην επηρεαστούν και γειτονικά υγιή κύτταρα. Κάτι τέτοιο είναι δυνατόν να συμβεί μόνο σε περιπτώσεις διακριτών μεμονωμένων όγκων σε βιολογικούς ιστούς, γεγονός όμως που σπάνια παρατηρείται στην πράξη. Επακόλουθο αυτού είναι η ταυτόχρονη αύξηση της θερμοκρασίας (φυσικά σε μικρότερο βαθμό από τα καρκινικά κύτταρα) και κατά συνέπεια η αλλοίωση και των υγιών κυττάρων, πράγμα που αποτελεί μια ανεπιθύμητη παρενέργεια της ιατρικής αυτής εφαρμογής. Επίσης, λόγω της πολυπλοκότητας της ασθένειας με την παρουσία αμέτρητων πολλές φορές διασκορπισμένων μικρών καρκινικών κυττάρων σε ένα όργανο ή συχνά και σε μεγάλο μέρος του ανθρώπινου σώματος σε μεταστατικές περιπτώσεις, η εφαρμογή της φιλοσοφίας της υπερθερμίας την καθίσταται λιγότερο αποτελεσματική από το επιθυμητό.

Για όλους αυτούς τους παραπάνω λόγους η υπερθερμία δεν μπορεί να αποτελέσει πανάκεια στο πρόβλημα του καρκίνου, έχει πολλά περιθώρια βελτίωσης και σε καμία περίπτωση όμως δεν παραγκωνίζει τις έως τώρα επικρατούσες μεθόδους για τη θεραπεία της ασθένειας. Για το λόγο αυτό το άλλωστε οι θεραπείες υπερθερμίας δεν γίνονται σε ευρεία κλίμακα ακόμα αποδεκτές, ενώ ταυτόχρονα παραμένουν και εξαιρετικά δαπανηρές. Από την άλλη πλευρά είναι σύνηθες φαινόμενο σε κλινικές δοκιμές η επικουρική χρήση της υπερθερμίας μαζί με ακτινοβολία, μία τεχνική που εφαρμοζόταν κατά κόρον μέχρι σήμερα, με ιδιαίτερα ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Ένας από τους λόγους που επιβεβαιώνει το τελευταίο είναι ότι η ακτινοβολία καταστρέφει τα εξωτερικά καλώς οξυγονωμένα καρκινικά κύτταρα του όγκου, ενώ αυτά που βρίσκονται στο εσωτερικό λόγω της απουσίας επαρκών ποσοτήτων οξυγόνου δεν είναι τόσο ευπαθή στην ακτινοβολία. Αυτό ακριβώς το σημείο έρχεται να βοηθήσει η υπερθερμία, η οποία με την αύξηση της θερμοκρασίας έχει σαν αποτέλεσμα την καλύτερη οξυγόνωση αυτών των κυττάρων αυτών, κάνοντάς έτσι τα πιο ευπαθή στην προσδιδόμενη ακτινοβολία [6].



Εικόνα 0.1 Πολλαπλές καρκινικές εστίες εγκεφάλου



Εικόνα 0.2 Καρκίνος δέρματος (μικροσκόπιο)

Αθήνα, Απρίλιος 2017

Εφαρμογές της Θεραπείας

Η υπερθερμία στη σύγχρονη Ιατρική διακρίνεται ανάλογα με το πεδίο εφαρμογής της σε τρία είδη: σε τοπική, όπου η επιτυγχάνεται εξωτερική θέρμανση όγκων σε βάθος ως και 4 cm από την επιφάνεια του δέρματος, σε περιοχική, όπου η θερμότητα αφορά ένα μεγαλύτερο μέρος του σώματος, όπως ολόκληρο το όργανο ή το άκρο (συνήθως ο στόχος είναι να μειωθούν τα καρκινικά κύτταρα έτσι ώστε να είναι πιο πιθανό να θανατωθούν με ακτινοβολία και χημειοθεραπευτικά φάρμακα) και σε ολόσωμη, όπου θερμότητα μεταφέρεται σε ολόκληρο το σώμα με τη χρήση δεξαμενών θερμότητας στις οποίες βυθίζεται ο ασθενής και αφορά κυρίως περιπτώσεις μεταστατικού καρκίνου. Επίσης, η υπερθερμία ανάλογα με το είδος της διάταξης που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά θερμότητας στον οργανισμό διακρίνεται σε διάφορες κατηγορίες, αλλά στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μας απασχολήσει η εν τω βάθει υπερθερμία, η οποία είναι και η περισσότερο διαδεδομένη μέθοδος στις κλινικές δοκιμές που έχουν λάβει χώρα μέχρι στιγμής[7].

Η εν τω βάθει υπερθερμία αφορά θεραπείες στις οποίες εφαρμόζεται εξωτερική θέρμανση όγκων, συνήθως σε συνδυασμό με ακτινοβολία ή χημειοθεραπεία, σε βάθος άνω των 4 cm από την επιφάνεια του δέρματος. Πιο συγκεκριμένα, τοποθετείται επάνω από την κοιλιά του ασθενούς ένας σάκος γεμάτος με νερό και η εστιασμένη ηλεκτρομαγνητική ενέργεια κατευθύνεται στον όγκο, θερμαίνοντας τον όγκο σε θερμοκρασία μεταξύ 40 ^{o}C και 43 ^{o}C. Δημιουργούνται έτσι οι εξής απορίες ''Ποια η διάχυση της θερμότητας; '' , '' Με τι ένταση του ηλεκτρικού πεδίου έχω τα επιθυμητά αποτελέσματα;''

Από τα παραπάνω προκύπτει πως τα κύρια ζητήματα που θα μας απασχολήσουν στην εργασία αυτή είναι η μοντελοποίηση της διάχυσης της θερμότητας. Συγκεκριμένα η ίδια η μελέτη του φαινομένου της υπερθερμίας μέσω των μαθηματικών εξισώσεων που τη διέπουν θα αποκαλύψει την συμπεριφορά της διάχυσης.

Περιγραφή του Προβλήματος

Η εργασία μας θα περιγράψει τη συμπεριφορά της θερμότητας στο ανθρώπινο σώμα, η οποία προέρχεται από το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος από κατάλληλη συσκευή. Η κατάλληλη φορτισμένη συσκευή εφάπτεται (θα είναι ένα σημαντικό κομμάτι της διπλωματικής) στο σώμα του ασθενούς παράγοντας ένα ηλεκτρικό πεδίο.

Ως γνωστόν ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από τη παρουσία ηλεκτρικού ρεύματος σε έναν καλό αγωγό. Η τοποθέτηση της φορτισμένης πλάκας κοντά στο ανθρώπινο σώμα θα προκαλέσει διαταραχές στη θερμοκρασία του σώματος.

Η ιδιαίτερη σύσταση του ανθρωπίνου σώματος (αποτελείται από ιστούς και κάτω από το δέρμα μια στρώση λίπους) μας υπαγορεύει να τη λάβουμε υπόψιν στους υπολογισμούς που θα κάνουμε. Ειδικότερα πρέπει να λάβουμε υπόψιν ότι το συσσωρευμένο λίπος έχει ''κακή'' ηλεκτρική αγωγιμότητα.

Στην εργασία μας θα χρησιμοποιήσουμε σάκο με νερό ανάμεσα στην ηλεκτρική πλάκα και το ανθρώπινο σώμα, ο οποίος και θα προστατεύει το σώμα από τυχόν εγκαύματα, λόγω της αύξησης της θερμοκρασίας. Αυτός ο σάκος με νερό είναι μια άλλη συνιστώσα που θα λάβουμε υπόψιν μας στους υπολογισμούς που θα πραγματοποιήσουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} - ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιδιώξουμε να κάνουμε μία μικρή εισαγωγή στα αριθμητικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε σε ολόκληρη την εργασία. Η εισαγωγή αυτή αφορά τον τρόπο με τον οποίο επιλύονται οι μερικές διαφορικές εξισώσεις μέσω του Η/Υ.

Οι πεπερασμένες διαφορές, δηλαδή ο βασικός τρόπος επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων στην συγκεκριμένη εργασία, πηγάζει σαν ιδέα από τον όρο divided differences που είναι μία μέθοδο στην Αριθμητική Ανάλυση Διαφορικών Εξισώσεων που αναπαριστά/προσεγγίζει παραγώγους.

Ορισμός 1. Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}\ για\ a < b$, να είναι μία φραγμένη συνάρτηση , και έστω απόσταση $h > 0$. Ορίζουμε την ‘’ προς τα εμπρός διαφορά’’ της f στο x με απόσταση h να είναι

$$\delta_{h,+} f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (1.1)$$

με δεδομένο ότι το $x + h \in [a,b]$. Ομοίως ορίζουμε την ‘’ προς τα πίσω διαφορά’’ της f στο x με απόσταση h να είναι

$$\delta_{h,-} f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \qquad (1.2)$$

με δεδομένο ότι το $x - h \in [a,b]$

Και τέλος ορίζουμε την ‘’ κεντρική διαφορά’’ της f στο x με απόσταση h να είναι

$$\delta_h f(x) = \frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f(x-\frac{h}{2})}{h} \qquad (1.3)$$

με δεδομένο ομοίως ότι το $x + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2} \in [a,b]$.

Να επισημανθεί ότι όσο το $h \to 0$ παίρνουμε

$$\lim_{h\to 0^+} \delta_{h,+} f(x) = f'_+(x), \qquad (1.4)$$

$$\lim_{h\to 0^-} \delta_{h,-} f(x) = f'_-(x), \qquad (1.5)$$

$$\lim_{h\to 0} \ \delta_{h,} f(x) = f'\ (x), \qquad (1.6)$$

Όπου το $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, $f'\ (x)$ δηλώνουν τη ‘’δεξιά‘’ παράγωγο , την ‘’αριστερή’’ παράγωγο και την ‘’κεντρική’’ παράγωγο της f στο x αντίστοιχα (όταν αυτές οι παράγωγοι είναι καλώς ορισμένες, ή ισοδύναμα, όταν τα όρια αυτά υπάρχουν). Πλέον δικαιολογημένα θεωρούμε τα $\delta_{h,+} f(x), \delta_{h,-} f(x)$, $\delta_{h,} f(x)$ προσεγγίσεις των $f'_+(x), f'_-(x)$, και $f'\ (x)$ αντίστοιχα.

Στον όρο προσέγγιση που χρησιμοποιείται στο παραπάνω κείμενο κρύβεται ο όρος σφάλμα, το οποίο είναι μία έννοια άρρηκτα συνδεδεμένη με την Αριθμητική Ανάλυση και ειδικότερα με την αριθμητική επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, αφού συνεχή προβλήματα προσπαθούμε να τα μετατρέψουμε σε διακριτά ώστε να χρησιμοποιήσουμε τις μεγάλες δυνατότητες του Η/Υ.

Για λόγους πληρότητας θα δώσουμε τα σφάλματα των προσεγγίσεων χωρίς καμία απόδειξη αν κ αυτές γίνονται εύκολα με τη χρήση του σειρών Taylor.

<u>Ορισμός 2.</u> Έστω $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}\ για\ a < b$, μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχής δεύτερη παράγωγο και απόσταση $h > 0$ όπως ακριβώς στον **Ορισμό 1** Τότε τα σφάλματα που ακολουθούν είναι άνω φραγμένα από τα παρακάτω:

$$\left|\delta_{h,+} f(x) - f'(x)\right| \leq \frac{h}{2} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| \tag{1.7}$$

$$\left|\delta_{h,-} f(x) - f'(x)\right| \leq \frac{h}{2} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| \tag{1.8}$$

Αν θεωρήσουμε ότι η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με συνεχής τρίτη παράγωγο τότε έχουμε και το άνω φράγμα για την κεντρική διαφορά να είναι :

$$\left|\delta_{h,} f(x) - f'(x)\right| \leq \frac{h^2}{24} \max_{\xi \in [a,b]} |f'''(\xi)| \tag{1.9}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η έννοια στου σφάλματος συνδέεται άμεσα με το διάστημα h και όσο μικρότερα διαστήματα επιλέγουμε τόσο πιο ''ακριβής'' θα είναι η προσέγγιση.

Απόρροια των όσων είπαμε είναι ο ορισμός των ''διαφορών'' αυτών για την προσέγγιση μεγαλύτερης τάξης παραγώγων. Μία από τις γνωστότερες ''διηρημένες διαφορές'' μεγαλύτερης τάξης από ένα είναι η ''δεύτερης τάξης διαφορά'' της f σε διάστημα h και ορίζεται να είναι η εξής :

$$\delta_h^2 f(x) = \delta_h\ \left(\delta_h\ f(x)\right) = \delta_h\ \left(\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x-\frac{h}{2})}{h}\right) = \frac{\frac{f\left(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)}{h}-\frac{f\left(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right)}{h}}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \tag{1.10}$$

Με σφάλμα προσέγγισης να ορίζεται ως εξής :

Έστω $f\colon [a,b] \to R \; για \; a < b$, μία τέσσερις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή τέταρτη παράγωγο και απόσταση h > 0 τέτοια ώστε $x-h,\, x+h \in [a,b]$. Τότε:

$$|\delta_h^2 f(x) - f''(x)| \leq \frac{h^2}{12} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(4)}(\xi) \right| \tag{1.12}$$

Τα προβλήματα που θα συναντήσουμε στη συνέχεια είναι ως επί το πλείστον Ελλειπτικού Τύπου οπότε χρειάζεται να αναπτύξουμε συνοπτικά μια διαδικασία επίλυσης την οποία θα ακολουθήσουμε στις επόμενες ενότητες.

Αρχικά θέλουμε να κατασκευάσουμε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών (finite difference method) για γενικά προβλήματα γραμμικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Ελλειπτικού τύπου 2ης τάξης σε δύο διαστάσεις.

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f \;, για \; (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \; και \; u = 0 \; στο \; \partial\Omega$$

Όπου τα a, b, c, f είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y και μόνο τέτοιες ώστε $D = b^2 - ac < 0$

Έχοντας στο μυαλό μας από την (1.10)

$$\delta_h^2 f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{1.13}$$

έχουμε ότι

$$\begin{gathered} u_{xx}(x,y) \approx (\delta_h^x)^2 u(x,y) \quad και \quad u_{yy}(x,y) \approx \left(\delta_h^y\right)^2 u(x,y) \\ u_{xy}(x,y) \approx \left(\delta_{2h}^y\right)\left(\delta_{2h}^x\right) u(x,y) \end{gathered} \tag{1.14}$$

με

$$\begin{aligned} \left(\delta_{2h}^y\right)\left(\delta_{2h}^x\right) u(x,y) = \left(\delta_{2h}^y\right)\left(\left(\delta_{2h}^x\right) u(x,y)\right) &= \left(\delta_{2h}^y\right)\left(\frac{u(x+h,y) - u(x-h,y)}{2h}\right) \\ &= \frac{1}{2h}\left(\delta_{2h}^y\, u(x+h,y) - \delta_{2h}^y u(x-h,y)\right) \\ &= \frac{1}{4h^2}(u(x+h,y+h) - u(x+h,y-h) - u(x-h,y+h) \\ &+ u(-h,y-h) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Άρα

$$f = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} \approx a(\delta_h^x)^2 u(x,y) + 2b\left(\delta_{2h}^y\right)\left(\delta_{2h}^x\right)u(x,y) + c\left(\delta_h^y\right)^2 u(x,y) \tag{1.16}$$

Θεωρούμε το πλέγμα, για λόγους ευκολίας και χωρίς βλάβη της γενικότητας, να είναι το $\Omega(0,1)^2$. Κατασκευάζουμε το συγκεκριμένο πλέγμα με την εξής διαμέριση: x_0< x_1<…< x_{N_x+1} με σταθερό βήμα h τέτοιο ώστε $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + h, \dots$,

$x_N = x_{N-1} + h$, $x_{N+1} = 1$

Στην κατεύθυνση του x και ανάλογα στην κατεύθυνση του y με διαμέριση τέτοια ώστε να έχω y_0< y_1<….< y_{N_x+1} με σταθερό βήμα h τέτοιο ώστε $y_0 = 0$, $y_1 = y_0 + h, \dots$, $y_N = y_{N-1} + h$, $y_{N+1} = 1$

Άρα παίρνουμε το $h = \frac{1}{N+1}$

Πλέον είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε το αριθμητικό σχήμα που θα χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα εργασία για να επιλύσουμε τα προβλήματα που θα συναντήσουμε.

Αυτό θα έχει την ακόλουθη μορφή :

$$\frac{a_{i,j}}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + \frac{b_{i,j}}{2h^2}\left(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}\right) + \frac{c_{i,j}}{h^2}\left(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right) = f_{i,j} \tag{1.17}$$

Για $1 \le i,j \le N$, όπου $a_{i,j} := a\left(x_i, y_j\right)$, $b_{i,j} := b\left(x_i, y_j\right), c_{i,j} := c\left(x_i, y_j\right)$,

$f_{i,j} := f\left(x_i, y_j\right)$

Οπότε παίρνουμε την εξίσωση :

$$\frac{b_{i,j}}{2}u_{i-1,j-1} + c_{i,j}u_{i,j-1} - \frac{b_{i,j}}{2}u_{i+1,j-1} + a_{i,j}u_{i-1,j} - 2\left(a_{i,j} + c_{i,j}\right)u_{i,j} + a_{i,j}u_{i+1,j} - \frac{b_{i,j}}{2}u_{i-1,j+1} + c_{i,j}u_{i,j+1} = h^2 f_{i,j} \tag{1.18}$$

Για να υπάρχει πληρότητα όμως πρέπει να συμπεριλάβουμε και τις οριακές συνθήκες

Έτσι: $u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0$.

Έχουμε πλέον καταφέρει να εκφράσουμε ένα γραμμικό σύστημα από N^2 εξισώσεις με N^2 αγνώστους. Το συγκεκριμένο σύστημα μπορεί να εκφραστεί για λόγους ευκολίας με την βοήθεια πινάκων ως $AU = h^2\, F$ όπου A είναι ένας πίνακας N^2 × N^2 το U ένα N^2 διάνυσμα και F επίσης ένα N^2 διάνυσμα.

Η αναλυτική μορφή των όσων αναφέρθηκαν πιο πάνω θα είναι η ακόλουθη :

$$\begin{pmatrix} B_1 & D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 & B_2 & D_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_3 & B_3 & D_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_{N-1} & B_{N-1} & D_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_N & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{N,1} \\ \vdots \\ u_{N,N} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ \vdots \\ f_{N,1} \\ \vdots \\ f_{N,N} \end{pmatrix} \qquad (1.19)$$

όπου τα στοιχεία 0 είναι ένας μηδενικός $N\times N$ πίνακας, τα B_j για $j = 1,2,\dots,N$, τα C_j για $j = 2,\dots,N$ και τα D_j για $j = 1,2,\dots,N-1$ είναι $N\times N$ πίνακες που ορίζονται όπως φαίνεται παρακάτω

$$B_j \begin{pmatrix} -2(\alpha_{1,j} + c_{1,j}) & a_{i,j} & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2,j} & -2(\alpha_{2,j} + c_{2,j}) & a_{2,j} & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,j} & -2(\alpha_{2,j} + c_{2,j}) & a_{3,j} & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & & & & a_{N-1,j} & -2(\alpha_{N,j} + c_{N,j}) \end{pmatrix}$$

$$D_j = \begin{pmatrix} c_{1,j} & \frac{b_{1,j}}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{b_{2,j}}{2} & c_{2,j} & \frac{b_{2,j}}{2} & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & & c_{N,j} \end{pmatrix}, C_j = \begin{pmatrix} c_{1,j} & -\frac{b_{1,j}}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{b_{2,j}}{2} & c_{2,j} & -\frac{b_{2,j}}{2} & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & & c_{N,j} \end{pmatrix}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

2.1 Διατύπωση του Προβλήματος και των Οριακών Συνθήκων

Όπως αναφερθήκαμε προηγουμένως αρχικός σκοπός της εργασίας είναι να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο σώμα. Ο υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου θα μας δώσει τις αναγκαίες πληροφορίες για την διάχυση της θερμότητας που είναι και ο αντικειμενικός σκοπός της εργασίας μας.

Για να το υλοποιήσουμε αυτό πρέπει να καθορίσουμε το περιβάλλον στο οποίο θα εργαστούμε.

Πιο φορμαλιστικά, δηλαδή, να καθοριστεί το πεδίο ορισμού του προβλήματος , ή αναλυτικότερα το πεδίο όπου θα εφαρμόσουμε τις σχέσεις μας για να φτάσουμε στο τελικό αποτέλεσμα

Το domain του προβλήματος θέλουμε να είναι μία προσομοίωση της κατάστασης του ανθρωπίνου σώματος μέσα στη συσκευή εν τω βάθει υπερθερμίας. Το πεδίο που θα εργαστούμε θα μοιάζει με το παρακάτω :

0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	0.5	4	4	4	4	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	4	4	4	4	4	4	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	4	4	4	4	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,1	0,1

Εδώ κάνουμε μία προσπάθεια να απεικονίσουμε το ανθρώπινο σώμα. Ο πίνακας που έχουμε είναι η αποτύπωση της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του σώματος.

Από τα στοιχεία του πίνακα το 0,1 είναι ο αέρας το 0,5 είναι το στρώμα του λίπους και το 4 είναι τα κύτταρα. Ως γνωστόν λόγω των αλάτων το σώμα έχει καλή αγωγιμότητα στον ηλεκτρισμό, το λίπος έχει μικρότερη ηλεκτρική αγωγιμότητα ενώ ο αέρας είναι μονωτής. Ο λόγος που θα χρησιμοποιήσουμε σαν βάση του χωρίου ένα πίνακα, είναι ότι θέλουμε να εργαστούμε με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

Άρα καλούμαστε να λύσουμε τα προβλήματα μας σε αυτό το χωρίο.

Αρχικά θα λύσουμε την διαφορική εξίσωση ελλειπτικού τύπου $\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0$, όπου φ είναι η συνάρτηση του δυναμικού και αποτελεί τον άγνωστο για το πρόβλημα και σ είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα η οποία είναι γνωστή. Γνωρίζουμε ότι μέσα στο σώμα παίρνει την τιμή $\sigma = 4$, εκτός αυτού έχει την τιμή $\sigma = 0{,}1$ και το στρώμα λίπους έχει $\sigma = 0{,}5$.

Οι συνοριακές συνθήκες που απαρτίζουν τον πρόβλημα είναι ότι φ=0 στο σύνορο αφού θέλουμε όλη η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου να βρίσκεται μέσα στη συσκευή εν τω βάθει υπερθερμίας.

Επιπλέον γνωρίζουμε το δυναμικό του σε συγκεκριμένα σημεία, δηλαδή τα σημεία στην πλάκα επαφής που εφάπτεται στο σώμα, όπως αναφέρθηκε και πριν, το δυναμικό εκεί ισούται με φ = 100V. Να σημειωθεί ότι στις μετρήσεις μας χρησιμοποιούμε τα 100V χωρίς αυτό να σημαίνει ότι αυτή η τιμή δεν μπορεί να διαφοροποιηθεί.

Έχουμε πλέον να λύσουμε ένα πρόβλημα σε ένα ιδιαίτερο χωρίο, η δε διαφορική εξίσωση που πρέπει να επιλύσουμε έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0 \\ &\varphi = 0 \;\; \sigma\tau o \;\; \partial \varphi \end{aligned} \qquad (2.1)$$

που όπως αναφέρθηκε υπάρχουν ήδη κάποιες γνωστές τιμές του φ, στα σημεία που εφάπτεται η ηλεκτρική πλάκα με το σώμα.

Το επόμενο βήμα μας είναι να καθορίσουμε τις εξισώσεις συνέχειας που διέπουν το πρόβλημα. Αφού αναφερόμαστε για παροχή ρεύματος πρέπει να εξετάσουμε την συνέχεια της πυκνότητας αυτού.

Γνωρίζουμε ότι ο νόμος του Ampère[8] συσχετίζει το μαγνητικό πεδίο H με την πυκνότητα ρεύματος J με την εξίσωση $\oint_c \; H\, dl = \iint_s \; J\, dS$, όπου :

- $\oint_c$ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρο από το σύνορο (κλειστή καμπύλη) C
- H το μαγνητικό πεδίο σε Αμπέρ προς μέτρα
- dl το απειροστό διαφορικό στοιχείο του συνόρου C
- J η πυκνότητα του ρεύματος (σε A/m^2) μέσα στην επιφάνεια του S που περικλείεται από σύνορο C
- dS είναι το διανυσματικό διαφορικό στοιχείο του εμβαδού της επιφάνειας S με απειροστά μικρό μέγεθος και κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια S

Ισοδύναμα, η μορφή του νόμου του Αμπέρ μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή:

$\nabla \times H = J$ οπότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $\nabla \cdot J = 0$, αφού η απόκλιση από κάθε διανυσματικό πεδίο που μπορεί να γραφεί σαν περιστροφή είναι ταυτοτικά 0.

Η δύναμη που οδηγεί τις φορτίσεις είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την δύναμη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου : $J = \sigma(E + v{\times}B)$, όπου αν η ταχύτητα των φορτίσεων είναι αρκετά μικρή, η μαγνητική δύναμη θα είναι μηδαμινή σε σχέση με την ηλεκτρική οπότε θα συνεισφέρει ελάχιστα. Ο νόμος του Ohm λοιπόν παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$J = \sigma E. \tag{2.2}$$

Επιπλέον, σε ηλεκτροστατικά προβλήματα, σαν αυτό που μελετάμε, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου E είναι ανεξάρτητη του χρόνου, οπότε δεν υπάρχει συμβολή του χρονο-εξαρτόμενου μαγνητικού παράγοντα.

Έτσι η εξίσωση $E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$, έχει τελική την απλούστερη μορφή

$$E = -\nabla\varphi. \tag{2.3}$$

2.2 Αριθμητική Λύση του Ελλειπτικού Προβλήματος

Αφού λοιπόν έχουμε φτάσει στον καθορισμό της διαφορικής εξίσωσης, το επόμενο βήμα μας είναι να επιλύσουμε αυτήν. Η επίλυσή της $\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0$ θα γίνει με την μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών (Finite difference method) .

Αρχικά, θα αναλύσουμε την διαφορική μας εξίσωση και στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε τον αλγόριθμο επίλυσης του προβλήματος. Πρώτο βήμα είναι να δημιουργήσουμε ένα πλέγμα στο χωρίο μας ώστε να οριστούν εκεί πάνω οι πεπερασμένες διαφορές.

Στους άξονες X, Y ορίζω μια διαμέριση τέτοια ώστε : $x_0 < x_1 < \ldots < x_{N_x+1}$ η απόσταση μεταξύ τους να είναι σταθερή και ίση με α, οπότε έχω στο χωρίο [a,b] ∋X a=x_0, $x_1 = x_0 + \alpha$, $x_2 = x_1 + \alpha$, $x_3 = x_2 + \alpha$, …, $x_{N_x} = x_{N_x - 1} + \alpha$, $x_{N_x+1} = \mathrm{b}$

Ομοίως και για την κατεύθυνση Y έχω στο χωρίο [a,b] ∋ Y με a=y_0, $y = y_0 + \alpha$, $y_2 = y_1 + \alpha$, $y_3 = y_2 + \alpha$, …, $y_{N_y} = y_{N_y - 1} + \alpha$, $y_{N_y+1} = \mathrm{b}$

Τελικά δημιουργείται ένα ομοιόμορφο πλέγμα σε ένα τετράγωνο χωρίο και εκεί θα εφαρμοσθεί η θεωρία των Πεπερασμένων Διαφορών ώστε να καταστεί δυνατή η επίλυση της παρακάτω εξίσωσης :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0 \Rightarrow (\nabla \sigma) \cdot \nabla \varphi + \sigma \nabla^2 \varphi = 0 \tag{2.4}$$

Σύμφωνα με την ανάλυση Taylor έχουμε :

$$\nabla \sigma = \left(\frac{\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j}}{2a}\right) \hat{x} + \left(\frac{\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1}}{2a}\right) \hat{y}$$

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2a}\right) \hat{x} + \left(\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2a}\right) \hat{y}$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} - 4\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j}}{\alpha^2}$$

Άρα

$$(\nabla \sigma) \cdot \nabla \varphi + \sigma \nabla^2 \varphi = 0 \Rightarrow \frac{(\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j})\,(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j})}{4a^2} + \frac{(\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1})(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1})}{4a^2} + \sigma(i,j) \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} - 4\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j}}{\alpha^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4(\sigma_{i,j} + \sigma_{i-1,j} - \sigma_{i+1,j})\varphi_{i-1,j} - 16\sigma_{i,j}\,\varphi_{i,j} + (4\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j})\varphi_{i+1,j} + (4\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1})\varphi_{i,j+1} + (4\sigma_{i,j} - \sigma_{i,j+1} + \sigma_{i,j-1})\varphi_{i,j-1} = 0 \tag{2.5}$$

Από ότι φαίνεται έχουμε φτάσει σε ένα αποτέλεσμα ενός γραμμικού συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους. Δημιουργήθηκε έτσι ένας πίνακας ''ζώνη'' 5-διαγώνιος. Από την μορφή του πίνακα ''ζώνη'' διαπιστώνεται ότι η ανάλυση που πραγματοποιήθηκε απλουστεύει τους υπολογισμούς, αφού δημιουργήθηκε ένας σχετικά ''άδειος'' πίνακας. Η ύπαρξη πολλών μηδενικών στοιχείων μας δίνει την δυνατότητα να επιτύχουμε λιγότερη δέσμευση της μνήμης RAM και επιπλέον την πραγματοποίηση πολύ λιγότερων πράξεων από τον Η/Υ. Το γραμμικό σύστημα που τελικά θέλουμε να επιλύσουμε έχει την μορφή :

$$\begin{pmatrix} B_1 & D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 & B_2 & D_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_3 & B_3 & D_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_{N-1} & B_{N-1} & D_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_N & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \\ \vdots \\ \varphi_{N,1} \\ \vdots \\ \varphi_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

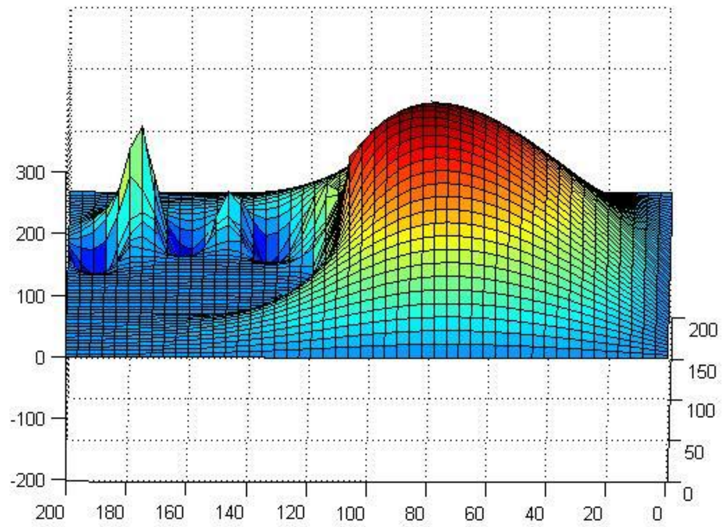
όπου τα στοιχεία 0 είναι ένας μηδενικός $N \times N$ πίνακας, τα B_j για $j = 1,2,\dots,N$ τα C_j για $j = 2,\dots,N$ και τα D_j για $j = 1,2,\dots,N-1$ είναι $N \times N$ πίνακες που ορίζονται όπως φαίνεται παρακάτω

$$B_j \begin{pmatrix} -16\sigma_{i,j} & 4\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4\sigma_{i,j} + \sigma_{i-1,j} - \sigma_{i+1,j} & & 4\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

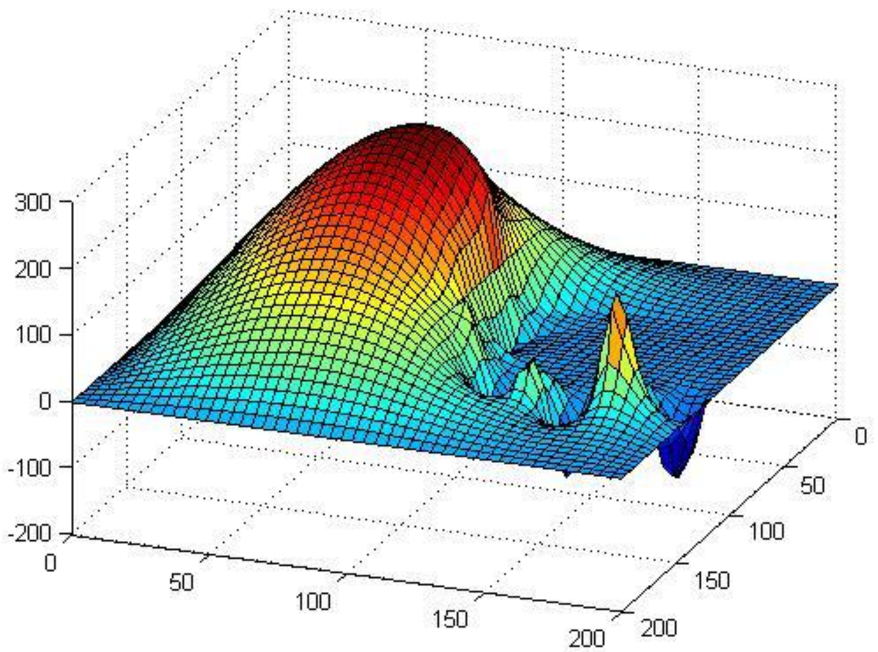
$$D_j = \begin{pmatrix} 4\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}, C_j = \begin{pmatrix} 4\sigma_{i,j} - \sigma_{i,j+1} + \sigma_{i,j-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Η διαφορά που υπάρχει στη συγκεκριμένη ανάλυση είναι ότι υπάρχουν κάποια ήδη γνωστά $\varphi_{i,j}$ και είναι αυτά στα οποία υπάρχει η ηλεκτρική επαφή στο σώμα. Η τιμή τους είναι $\varphi_{i,j} = 100$. Τώρα προκύπτει ένα σύστημα όχι $N \times N$ αλλά ένα σύστημα $(N - (\,\tau\alpha\ dots\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma)) \times (N - (\tau\alpha\ dots\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma))$.

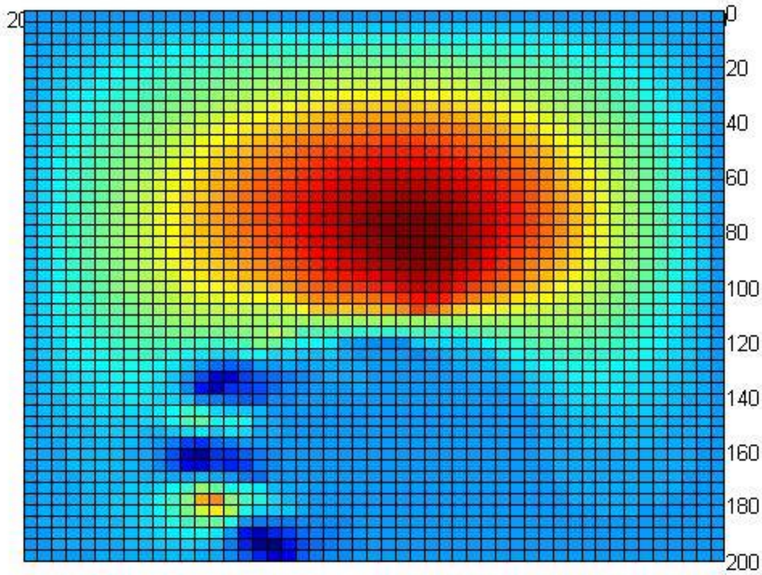
Η λύση του 5-διαγώνιου πίνακα θα πραγματοποιηθεί μέσω της μεθόδου Gauss και η γραφική παράσταση της λύσης είναι η εξής :



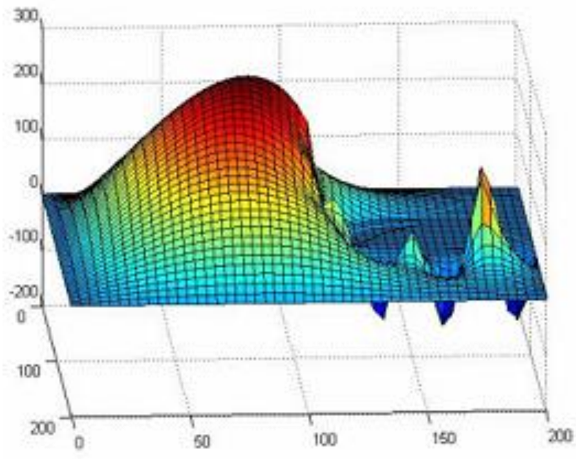
Εικόνα 2.1 Εδώ παρατηρείται η γραφική παράσταση της λύσης του φ από μια πλάγια οπτική γωνία. Συμπεραίνεται λοιπόν ότι δυναμικό υπάρχει μέσα στο σώμα και όσο απομακρυνόμαστε από την πηγή αυτό φθίνει , ενώ εκτός αυτού μειώνεται δραματικά.



Εικόνα 2.2 Εδώ βλέπουμε τη συμπεριφορά της λύσης από άλλη οπτική γωνία όπου φαίνονται τα σφάλματα της αριθμητικής μεθόδου στο τέλος των υπολογισμών



Εικόνα 2.3 Εδώ έχουμε την κάτοψη των αποτελεσμάτων μας και φαίνεται ξεκάθαρα ότι κοντά στην ηλεκτρική επαφή υπάρχει μεγαλύτερη τάση



Εικόνα 2.4 Παρατηρείται ότι υπάρχουν κάποια σφάλματα, που οφείλονται στην Αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματός μας. Τα σφάλματα αυτά δεν θα επηρεάσουν σημαντικά το αποτέλεσμα της ανάλυσής μας που είναι ο υπολογισμός της διάχυσης της θερμότητας, καθόσον το ηλεκτρικό πεδίο θα υψωθεί στο τετράγωνο

2.3 Υπολογισμός Εναποτιθέμενης Ισχύος

Στο εδάφιο αυτό θα υπολογίσουμε την εναποτιθέμενη ισχύ στο σώμα, μέγεθος άρρηκτα συνδεδεμένο με το θερμικό μας πρόβλημα. Γνωρίζουμε από τη φυσική ότι το

$$Q_r = \frac{1}{2}\sigma \cdot |E|^2 \,. \tag{2.6}$$

Αρχικά λοιπόν είναι απαραίτητο να υπολογιστεί το μέγεθος E (ένταση του ηλεκτρικού πεδίο). Είναι γνωστό ότι $E = -\nabla\varphi$ [9] και σύμφωνα με την ανάλυση Taylor θα έχω τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$E = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2a}\right) - \left(\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2a}\right)$$

Ο πίνακας επίλυσης του προβλήματος θα έχει την παρακάτω μορφή:

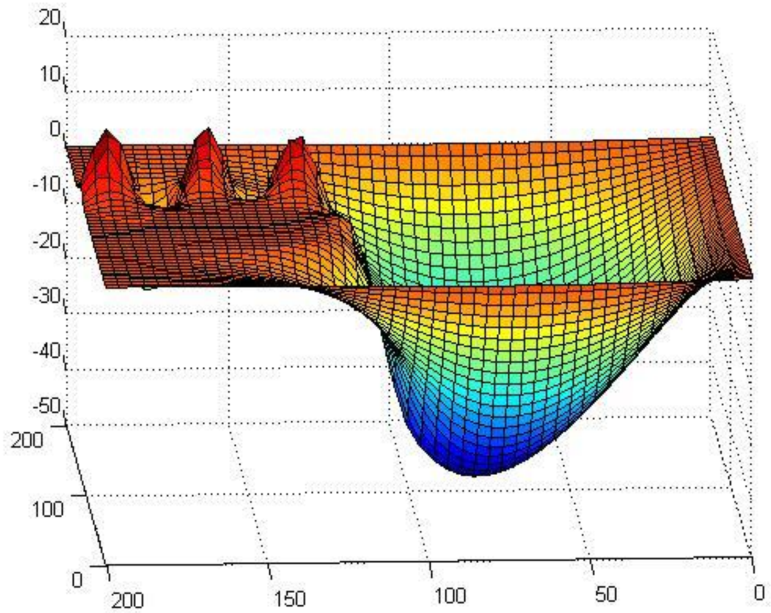
$$-\begin{pmatrix} B_1 & D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 & B_2 & D_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_3 & B_3 & D_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_{N-1} & B_{N-1} & D_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_N & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \\ \vdots \\ \varphi_{N,1} \\ \vdots \\ \varphi_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1,1} \\ E_{2,1} \\ \vdots \\ E_{N,N-2} \\ E_{N,N-1} \\ E_{N,N} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & & \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & & & & \\ \ddots & 0 & -1 & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & -1 & 0 & & \end{pmatrix} \quad D_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, C_i = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

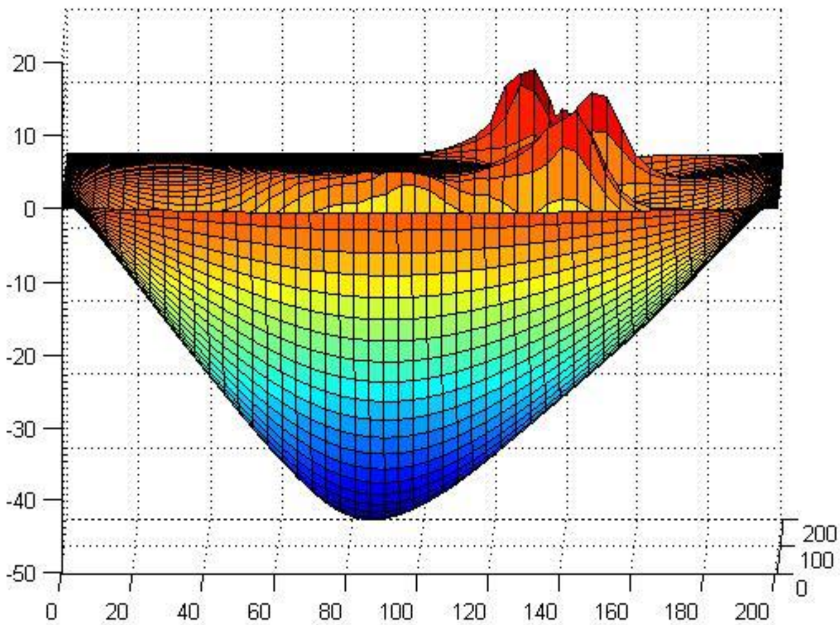
Τα στοιχεία 0 είναι ένας μηδενικός $N{\times}N$ πίνακας, τα B_j για $j = 1,2, \dots, N$ τα C_j για $j = 2, \dots, N$ και τα D_j για $j = 1,2, \dots, N-1$ είναι $N{\times}N$ πίνακες.

Παρατηρείται ότι υπάρχει ένα ∇. Αυτό αναλύεται με μπροστινές, πίσω ή κεντρικές διαφορές. Στη συγκεκριμένη ανάλυση θα χρησιμοποιηθούν κεντρικές διαφορές επειδή η επιδίωξή μας είναι η ευστάθεια του συστήματος, αφού στο προηγούμενο εδάφιο χρησιμοποιήθηκε ένα αριθμητικό σχήμα με κεντρικές διαφορές για το ∇^2.

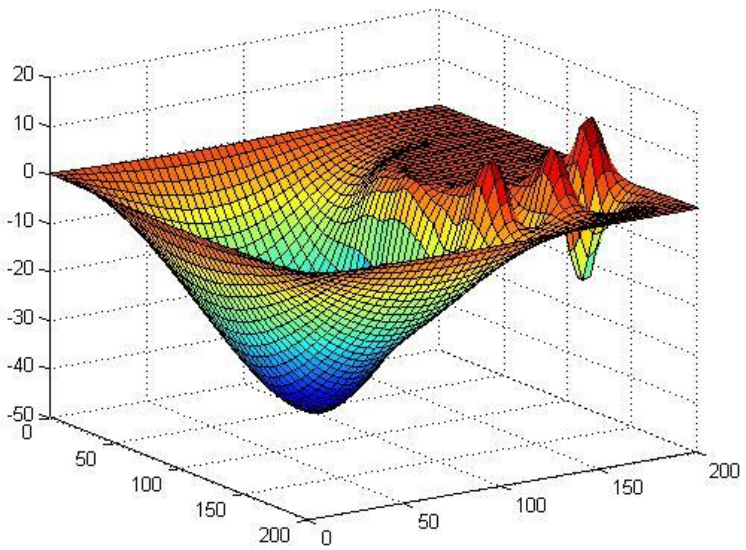
Κατά τον υπολογισμό του E παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι η ακόλουθη :



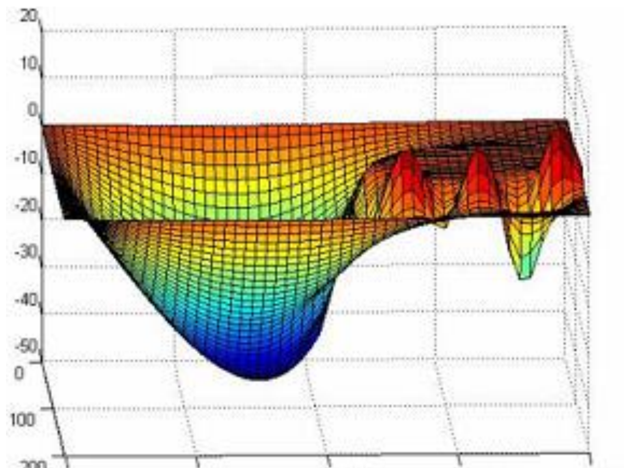
Εικόνα 2.5 Η απεικόνιση του ηλεκτρικού πεδίου από μία πλάγια θεώρηση. Διακρίνουμε τα σφάλματα της αριθμητικής επίλυσης



Εικόνα 2.6 Από την γραφική παράσταση του ηλεκτρικού πεδίου καταλαβαίνουμε την συμπεριφορά του μέσα στο ανθρώπινο σώμα



Εικόνα 2.7 Από μία άλλη οπτική γωνία φαίνεται η συμπεριφορά του Ε

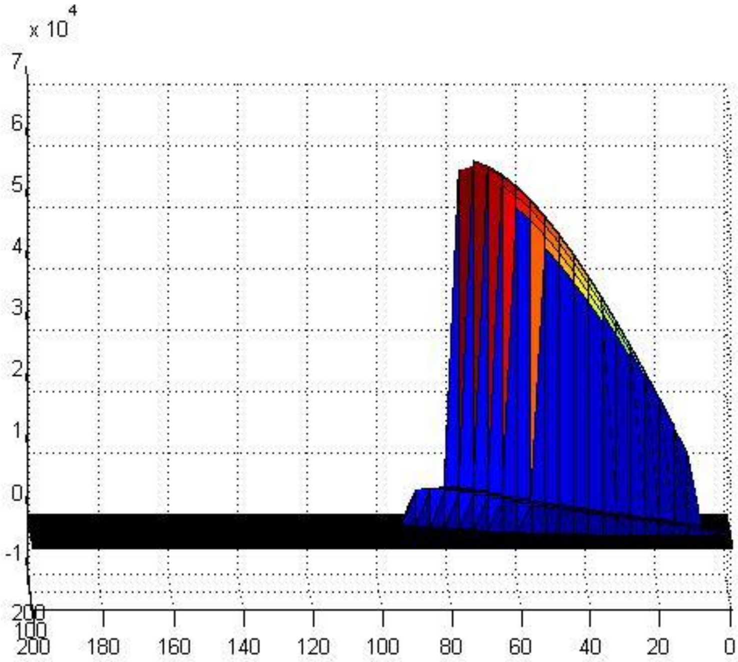


Εικόνα 2.8 Όπως διαπιστώνουμε έχουμε περίπου την ίδια γραφική παράσταση με την τάση. Η διαφορά που παρατηρούμε είναι στο αρνητικό πρόσημο (-). Ακόμα και τα σφάλματα της αριθμητικής μεθόδου είναι τα αντίστοιχα στο ίδιο σημείο και με ένα πρόσημο αλλαγμένο

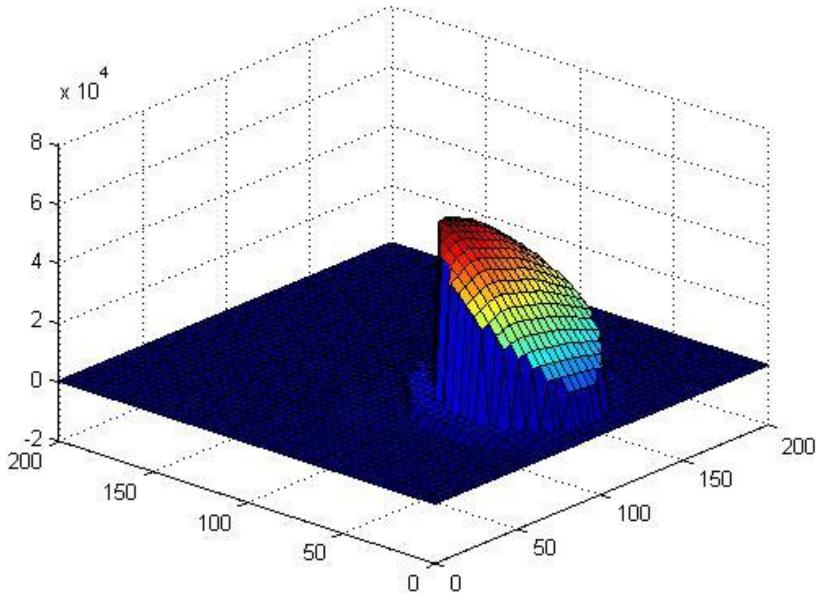
Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την εναποτιθέμενη ισχύ

$$Q_r = \frac{1}{2}\sigma \cdot |E|^2, \tag{2.8}$$

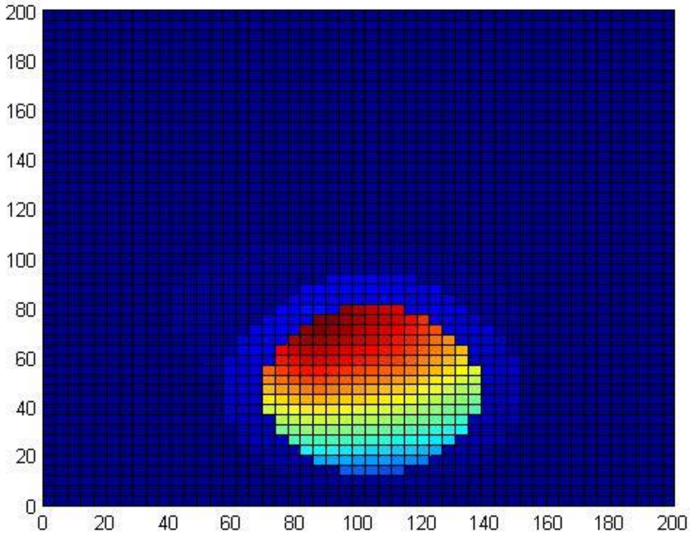
όπου σαν σ θα έχω τον πίνακα των τιμών έτσι όπως έχει παρουσιαστεί πιο πάνω στην διατύπωση του προβλήματος. Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω:



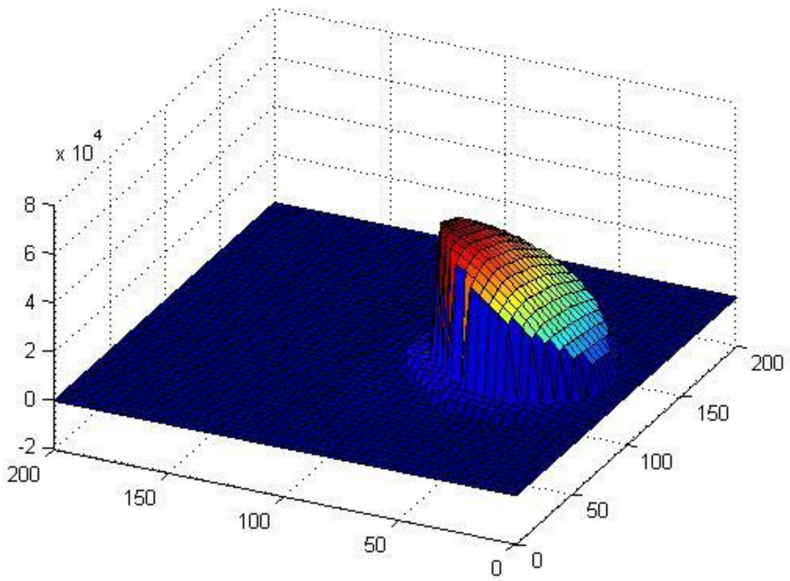
Εικόνα 2.9 Η γραφική παράσταση της εναποτιθέμενης ισχύος Q



Εικόνα 2.10 Η γραφική παράσταση της εναποτιθέμενης ισχύος Q από άλλη οπτική γωνία



Εικόνα 2.11 Μια πανοραμική θεώρηση της γραφικής παράστασης της εναποτιθέμενης ισχύος



Εικόνα 2.12

Όπως διακρίνουμε η ισχύς έχει μεγάλες τιμές κοντά στην ηλεκτρική επαφή και όσο απομακρυνόμαστε από αυτή οι τιμές ελαττώνονται. Η δε ταχύτητα μείωσης αυτών είναι ανάλογη με την ηλεκτρική αγωγιμότητα του σώματος , του λίπους και του αέρα.

Επιπλέον να σημειωθεί ότι ΔΕΝ υπάρχει συμμετρία στα σχήματα. Ο λόγος είναι ότι λόγο της διακριτοποίησης υπάρχει ένα στοιχείο του δυναμικού με 100V περισσότερο στη δεξιά μεριά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{O} - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

3.1 Διατύπωση του Προβλήματος

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι ο υπολογισμός της διάχυσης της θερμότητας κατά τη διαδικασία της υπερθερμίας. Για αυτόν τον σκοπό θα χρησιμοποιήσουμε ξανά τις αριθμητικές μεθόδους των πεπερασμένων διαφορών, καθόσον η ίδια μέθοδος ακολουθήθηκε και σε προηγούμενα κεφάλαια.

Το χωρίο που θα εργαστούμε είναι το ίδιο, αφού μελετάμε μια μοντελοποίηση της κατάστασης του ανθρώπινου σώματος κατά την διάρκεια της θεραπείας της υπερθερμίας. Ένα από τα προβλήματα που θα συναντήσουμε είναι η επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης, γνωστό και ως μοντέλο του Pennes [5]:

$$\rho c \ \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{k}\, \nabla^2 \Delta T + W_b C_b (T_a - T) + Q_r \tag{3.1}$$

Όπου :

- T είναι η θερμοκρασία σε βαθμούς $°C$
- ρ να είναι η πυκνότητα της μάζας
- c είναι η ειδική θερμότητα ιστών σε $\frac{J}{kg\ °C}$
- k θερμική αγωγιμότητα ιστών σε $W/m°C$
- W_b η ροή αίματος σε $kg/m^3 s$
- C_b ειδική θερμοκρασία αίματος
- T_a αρτηριακή θερμοκρασία αίματος
- Q_r παραγόμενη ισχύς ανά μονάδα όγκου από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Το $\frac{\partial T}{\partial t}$ θα το θεωρήσουμε 0 γιατί μιλάμε για μία στάσιμη κατάσταση.

Το επόμενο βήμα μας είναι να υπολογίσουμε την διαφορά ΔT της Θερμοκρασίας του σώματος (που ορίζεται να είναι η θερμοκρασία του σώματος μείον η αρτηριακή θερμοκρασία του αίματος) οπότε πλέον η διαφορική εξίσωση που επιζητούμε την επίλυσή της είναι η ακόλουθη :

$$W_b C_b (T - T_a) - \mathrm{k}\, \nabla^2 \Delta T = Q_r(x, z) \tag{3.2}$$

όπου το $Q_r(x, z)$ είναι γνωστό μέγεθος και το έχουμε υπολογίσει από την εξίσωση (2.8) $Q_r = \frac{\sigma\, |E|^2}{2}$ (εναποτιθέμενη ισχύς) στο προηγούμενο εδάφιο.

Ένα επιπρόσθετο στοιχείο που πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας είναι οι συνοριακές συνθήκες, οι οποίες για το πρόβλημά μας στην επιφάνεια του σώματος είναι οι εξής:

$$-\mathrm{k}\,\hat{n}\cdot\ \nabla(\Delta T) = h_f\,\left(T - T_f\right) \tag{3.3}$$

$$-\mathrm{k}\,\hat{n}\cdot\nabla(\Delta T) = h_f\left(\left(T - T_f\right) + T_a - T_a\right) \tag{3.4}$$

$$-\mathrm{k}\,\hat{n}\cdot\ \nabla(\Delta T) = h_f\,\left(\,(T - T_a) + T_a - T_f\right) \tag{3.5}$$

$$-\mathrm{k}\,\hat{n}\cdot\ \nabla(\Delta T) = h_f\,\Delta T + h_f\left(T_a - T_f\right) \tag{3.6}$$

Όπου:

- $\hat{n}$ να είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα
- T_f να είναι η θερμοκρασία του αέρα
- k = 0,5 $W/m°C$
- h_f = 100 $^{W}/_{m^2}$
- $W_b = 0{,}5\ ^{kg}/_{m^3\,s}$
- $T_a - T_f$ μια σταθερή θερμοκρασία (12 ℃) ή αν εφαρμόσουμε ένα σάκο νερού για ψύξη T_f= 5℃

3.2 Αριθμητική Επίλυση Θερμικού Προβλήματος

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιλύσουμε αριθμητικά το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας πάντα την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

Αρχικά διαμερίζουμε το χωρίο μας όπως ακριβώς κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή διαμερίζουμε και ορίζουμε το πλέγμα μας όπου τα X, Y να είναι : x_0< x_1<…< x_{N_x+1} η απόσταση μεταξύ τους να είναι σταθερή και ίση με h οπότε έχω στο χωρίο [a,b] ∋ X a=x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h$, …, $x_{N_x} = x_{N_x-1} + h$, $x_{N_x+1} = \mathrm{b}$

Ομοίως και για την κατεύθυνση Υ έχω στο χωρίο [a,b] ∋ Y με a=y_0, $y = y_0 + h$, $y_2 = y_1 + h$, $y_3 = y_2 + h$, …., $y_{N_y} = y_{N_y-1} + h$, $y_{N_y+1} = \mathrm{b}$

Καταφέρνουμε πλέον έτσι να δημιουργήσουμε ένα ομοιόμορφο τετράγωνο πλέγμα, όπου στα σημεία αυτού θα εφαρμόσουμε τις πεπερασμένες διαφορές.

Στόχος τώρα είναι η ανάλυση της διαφορικής εξίσωσης μέσω των αναπτυγμάτων Taylor.

Επειδή έχω ∇^2 θα χρησιμοποιήσω το σχήμα των κεντρικών διαφορών με 5 σημεία, οπότε η $W_b C_b (T - T_a) - \mathrm{k}\,\nabla^2 \varDelta T = Q_r(x,z)$ γίνεται :

$$-k\frac{(\varDelta T_{i,j+1}+\varDelta T_{i+1,j}-4\varDelta T_{i,j}+\varDelta T_{i-1,j}+\varDelta T_{i,j-1})}{h^2} + W_b C_b \varDelta T_{i,j} = Q_r \tag{3.7}$$

$$-k\left(\varDelta T_{i,j+1} + \varDelta T_{i+1,j} - 4\varDelta T_{i,j} + \varDelta T_{i-1,j} + \varDelta T_{i,j-1}\right) + h^2 W_b C_b \varDelta T_{i,j} = Q_r\, h^2 \tag{3.8}$$

$$-k\varDelta T_{i,j+1} - k\varDelta T_{i+1,j} + (4k + h^2 W_b C_b)\varDelta T_{i,j} - k\varDelta T_{i-1,j} - k\varDelta T_{i,j-1} = Q_r\, h^2 \tag{3.9}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι συνοριακές συνθήκες στο σώμα. Γνωρίζουμε ότι:

$$-\mathrm{k}\,\hat{n}\cdot\nabla(\varDelta T) = h_f\, \varDelta T + h_f\left(T_a - T_f\right) \tag{3.10}$$

οπότε:

$$-\mathrm{k}\,\hat{n}\cdot\nabla(\varDelta T_{i,j}) = h_f\, \varDelta T_{i,j} + h_f\left(T_a - T_f\right). \tag{3.11}$$

Με $T_a - T_f$ να είναι μία σταθερά την οποία για περισσότερη ευκολία θα την ονομάσω $R_y T$ οπότε θα έχω : $-\mathrm{k}\,\hat{n}\cdot\nabla(\Delta T_{i,j}) = h_f\,\Delta T_{i,j} + h_f R_y T$ (3.12)

σαν συνοριακή συνθήκη.

Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στο ότι οι συνοριακές συνθήκες είναι συνδεδεμένες με το κάθετο διάνυσμα $\hat{n}$, οπότε αλλάζει κατεύθυνση ανάλογα σε ποιο σημείο του χωρίου βρισκόμαστε.

Αρχικά θα θεωρήσουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες θα εφαρμοστούν γύρω από το σώμα και για κάθε κατεύθυνση θα έχουμε διαφορετικές.

Αφού έχουμε ∇ (grad) θα επιλέξω τις κεντρικές διαφορές για καλύτερη ευστάθεια του σχήματος. Άρα για κάποιο σταθερό i θα έχω :

$$-\mathrm{k}\ \frac{\left(\Delta T_{i-1,j} - \Delta T_{i+1,j}\right)}{2h} = h_f\,\Delta T_{i,j} + h_f R_y T. \tag{3.13}$$

Την παραπάνω εξίσωση θα την εφαρμόσουμε στην αρχική σχέση (3.9) ώστε να δημιουργηθεί ένας πίνακας που θα αποφέρει τη λύση για να βρούμε την συμπεριφορά της ΔT όπου είναι και ο στόχος μας.

Πιο συγκεκριμένα η (3.13) αφορά το πάνω μέρος της συνοριακής συνθήκης και έχουμε :

$-\mathrm{k}\,\Delta T_{i-1,j} = 2hh_f\,\Delta T_{i,j} + 2hh_f R_y T - k\Delta T_{i+1,j}$ και αυτό εφαρμοζόμενο στην (3.9) γίνεται

$$-k\Delta T_{i,j+1} - 2k\Delta T_{i+1,j} + \left(4k + h^2 W_b C_b + 2hh_f\right)\Delta T_{i,j} - 0 - k\Delta T_{i,j-1} = Q_r\,h^2 - 2hh_f R_y T \tag{3.14}$$

Αντίστοιχα για το αριστερό μέρος της συνοριακής συνθήκης έχουμε:

$$-2k\Delta T_{i,j+1} - k\Delta T_{i+1,j} + \left(4k + h^2 W_b C_b + 2hh_f\right)\Delta T_{i,j} - k\Delta T_{i-1,j} - 0 = Q_r\,h^2 - 2hh_f R_y T \tag{3.15}$$

Για το δεξιό μέρος της συνοριακής συνθήκης έχουμε:

$$-0 - k\Delta T_{i+1,j} + \left(4k + h^2 W_b C_b + 2hh_f\right)\Delta T_{i,j} - k\Delta T_{i-1,j} - 2k\Delta T_{i,j-1} = Q_r\,h^2 - 2hh_f R_y T \tag{3.16}$$

Και τελικά για το κάτω μέρος :

$$-k\Delta T_{i,j+1} - 0 + \left(4k + h^2 W_b C_b + 2hh_f\right)\Delta T_{i,j} - 2k\Delta T_{i-1,j} - k\Delta T_{i,j-1} = Q_r\, h^2 - 2hh_f R_y T \tag{3.17}$$

Πλέον πρέπει να δημιουργήσουμε τον πίνακα, που θα επιλύσει αριθμητικά το πρόβλημα ώστε να βρούμε το ΔT που είναι ο άγνωστος.

$$\begin{pmatrix} B_1 & D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 & B_2 & D_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_3 & B_3 & D_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_{N-1} & B_{N-1} & D_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_N & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T_{1,1} \\ \Delta T_{2,1} \\ \vdots \\ \Delta T_{N,1} \\ \vdots \\ \Delta T_{N,N} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} Q_{r,11} \\ Q_{r21} \\ \vdots \\ Q_{r,N1} \\ Q_{r,21} \\ Q_{r,NN} \end{pmatrix}$$

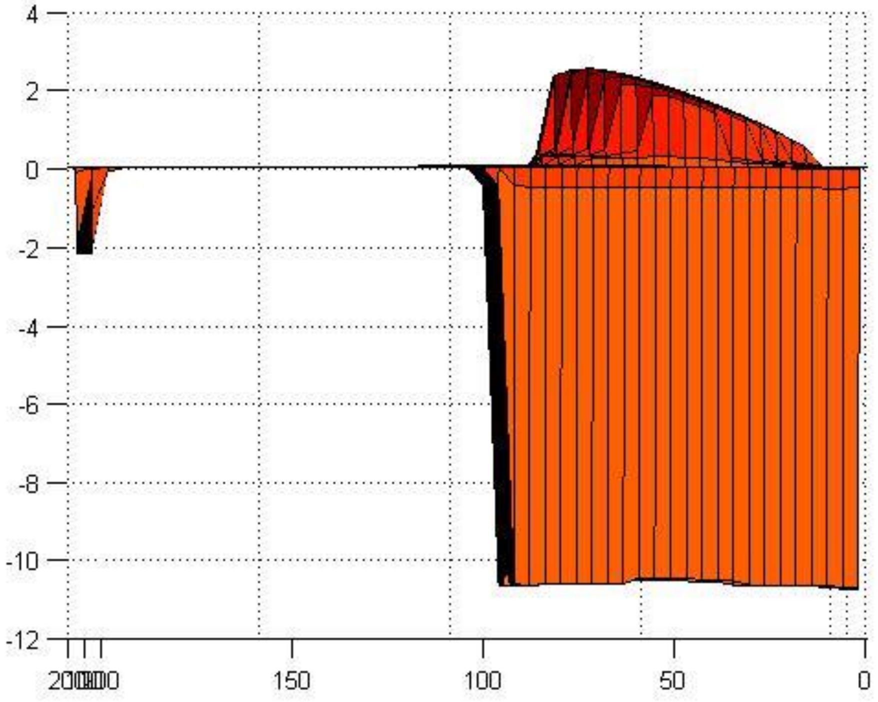
τα B_j για $j = 1,2,\dots,N$ τα C_j για $j = 1,2,\dots,N$ και τα D_j για $j = 1,2,\dots,N-1$ είναι $N \times N$ πίνακες που ορίζονται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$B_j = \begin{pmatrix} 4k + h^2 W_b C_b + 2hh_f & -k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k & & -k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \\ \ddots & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

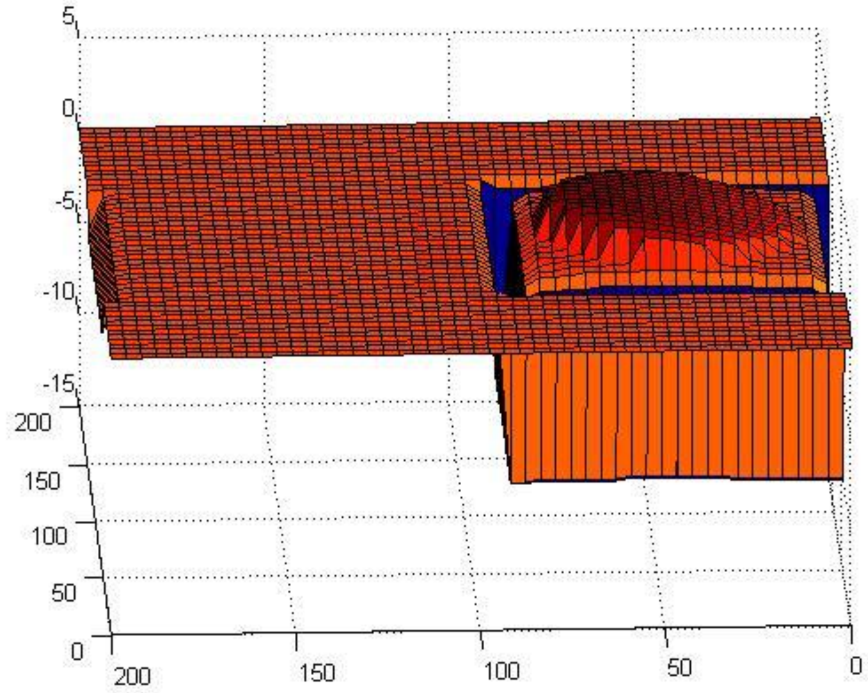
$$D_j = \begin{pmatrix} -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \qquad C_j = \begin{pmatrix} -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Και στα σημεία που έχουμε συνοριακές συνθήκες θα εφαρμοστούν τα αποτελέσματα που έχουμε για αυτές.

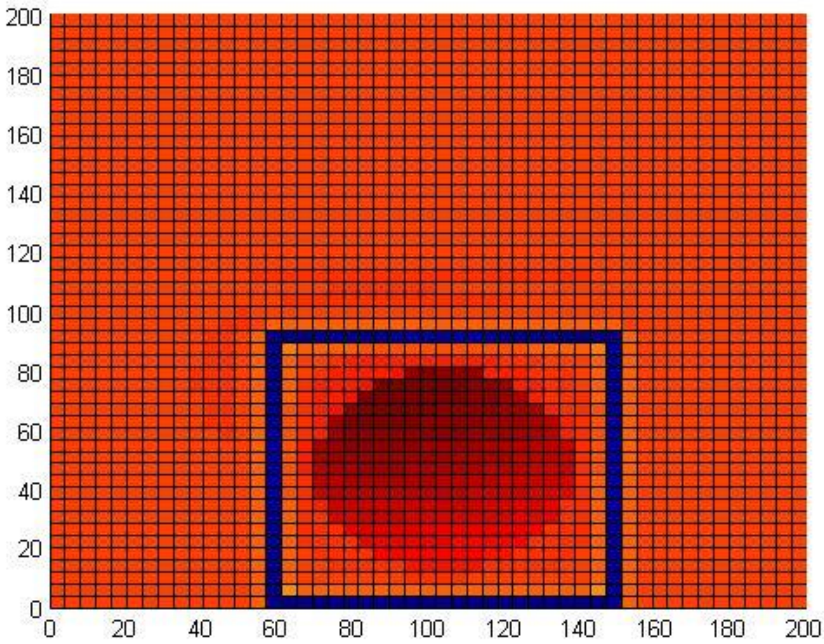
Τέλος η γραφική παράσταση που έχουμε για την διαφορά θερμοκρασίας είναι η ακόλουθη :



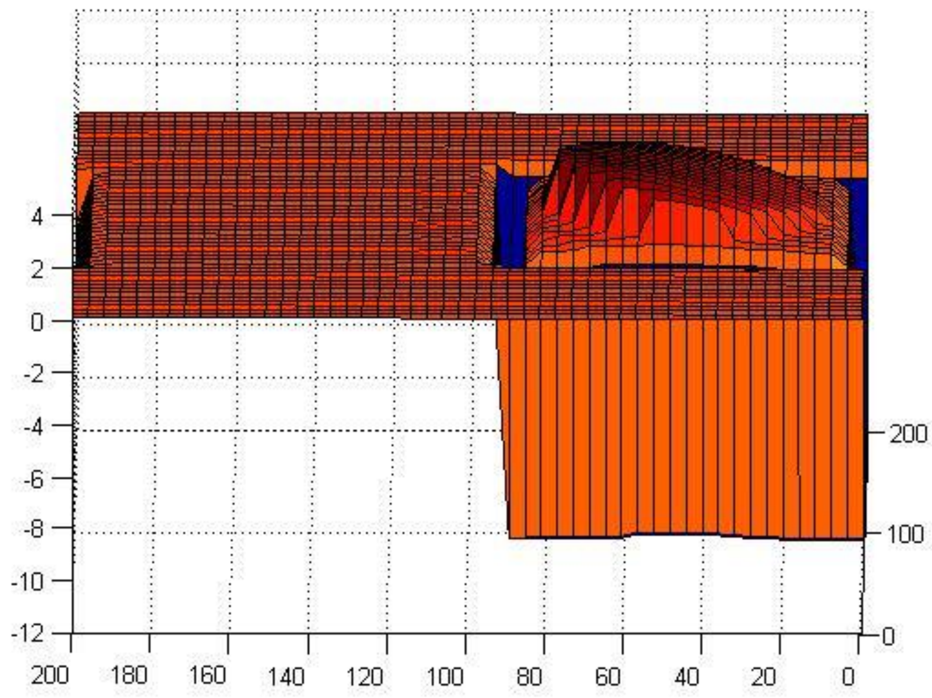
Εικόνα 3.1 Εδώ παρατηρείται ότι η διαφορά θερμοκρασίας μέσα στο σώμα ανέρχεται στους 2,5 περίπου βαθμούς Κελσίου



Εικόνα 3.2 Παρατηρούνται επίσης κάποια σφάλματα από αυτή την οπτική γωνία που οφείλονται στην προσέγγιση της αριθμητικής επίλυσης



Εικόνα 3.3 Μια πανοραμική θεώρηση της γραφικής παράστασης της διαφοράς της θερμοκρασίας που μας δίνει πληροφορίες για το πως εκχύεται η θερμότητα στο σώμα



Εικόνα 3.4 Η γραφική παράσταση της διαφοράς της θερμότητας που μας επιτρέπει να δούμε την κλίση άρα και το σημείο που η θερμοκρασία παίρνει την μέγιστη τιμή της

Τελικά παρατηρούμε ότι:

- Το σώμα ανεβάζει θερμοκρασία κατά 2,5 βαθμούς κελσίου περίπου κοντά στην ηλεκτρική επαφή.
- Η θερμότητα υποχωρεί όσο απομακρυνόμαστε από την πηγή, αλλά μέσα στη συσκευή εν τω βάθει υπερθερμίας συνεχίζει να υπάρχει θερμότητα.
- Έξω από τη συσκευή να μην υπάρχει καμία αλλαγή και στο σύνορο να παρατηρείται -10 °C , λόγω της ύπαρξης του σάκου προστασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο} - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να ελέγξει τα αποτελέσματα που έχουν παραχθεί. Θα συγκριθούν γραφικές παραστάσεις ώστε να επισημανθούν τυχόν διαφορές. Ως απώτερος σκοπός είναι η εξέταση της καταλληλόλητας του αλγορίθμου που κατασκευάστηκε και τα συμπεράσματα που βγαίνουν από τον έλεγχο των γραφικών παραστάσεων.

Η αρχική μας θεώρηση θέλουμε να έχει την μορφή που εξετάζουμε στα προηγούμενα κεφάλαια:

- Το σώμα να εισέρχεται στη συσκευή εν τω βάθει υπερθερμίας
- Το σώμα έχει τη σύσταση που έχουμε περιγράψει (στρώματα κυττάρων, λίπους, αέρα)
- Η ηλεκτρική επαφή να εφάπτεται στο σώμα

Η μορφή που θα έχει ο αρχικός πίνακας (χωρίο) πάνω στον οποίο θα εργαστούμε είναι η ακόλουθη:

h= 100cm

0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	0.5	4	4	4	4	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	4	4	4	4	4	4	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	4	4	4	4	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,1	0,1

Ενώ η ηλεκτρική επαφή έχει 100V και τοποθετείται πάνω από το σώμα

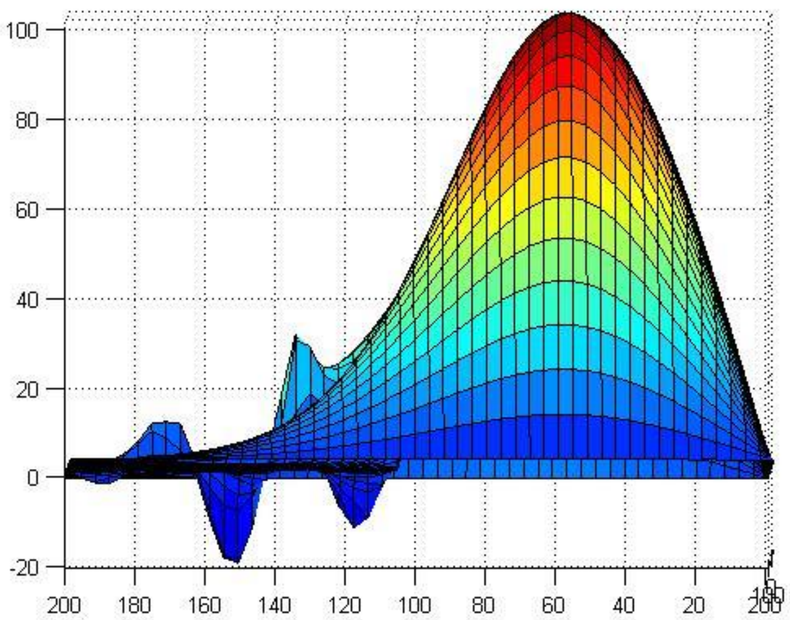
h= 100cm

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	100	100	100	100	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

h= 50cm

Έχουμε αποφασίσει ότι θα αρχίσουμε την θεώρησή μας από το γεγονός ότι η ηλεκτρική φόρτιση δεν ακουμπάει το ανθρώπινο σώμα και μεταξύ του σώματος και της ηλεκτρικής επαφής υπάρχει στρώμα αέρα. Ο σάκος με το παγωμένο νερό δεν φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα μιας και είναι ενσωματωμένος στις συνοριακές συνθήκες.

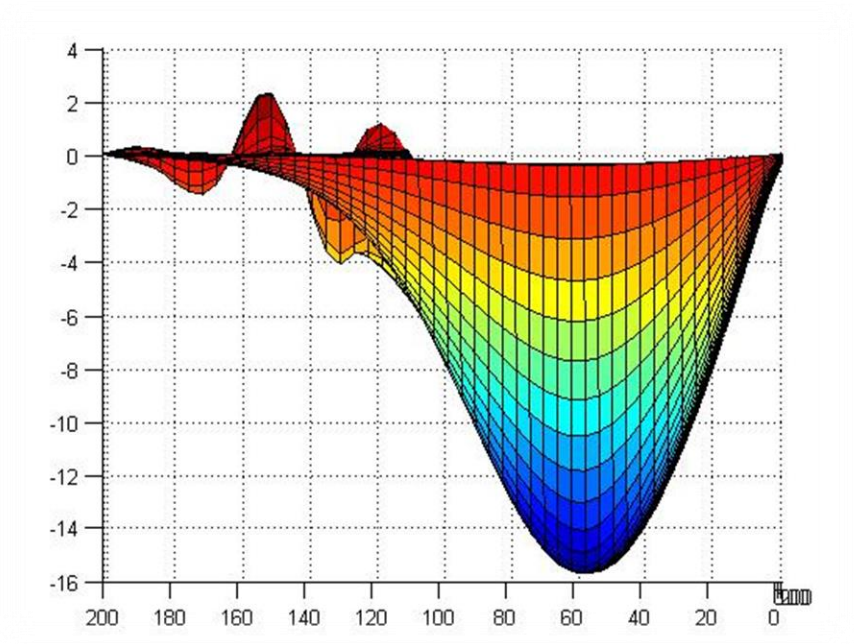
Οπότε από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε τα αποτελέσματα για αυτήν την περίπτωση είναι ότι το *φ* την παρακάτω γραφική παράσταση:



Εικόνα 4.1 Όπου η μέγιστη τιμή για το φ είναι 100 βολτ (όσα βάλαμε στην ηλεκτρική επαφή) και αυτό διαχέεται στο σώμα.

Οι ασυνέχειες είναι απόρροια του αριθμητικού σχήματος. Επιπλέον φαίνεται ότι αυτές οι ασυνέχειες βρίσκονται μακριά από το χωρίο (ανθρώπινο σώμα) που υπολογίζουμε το φ.

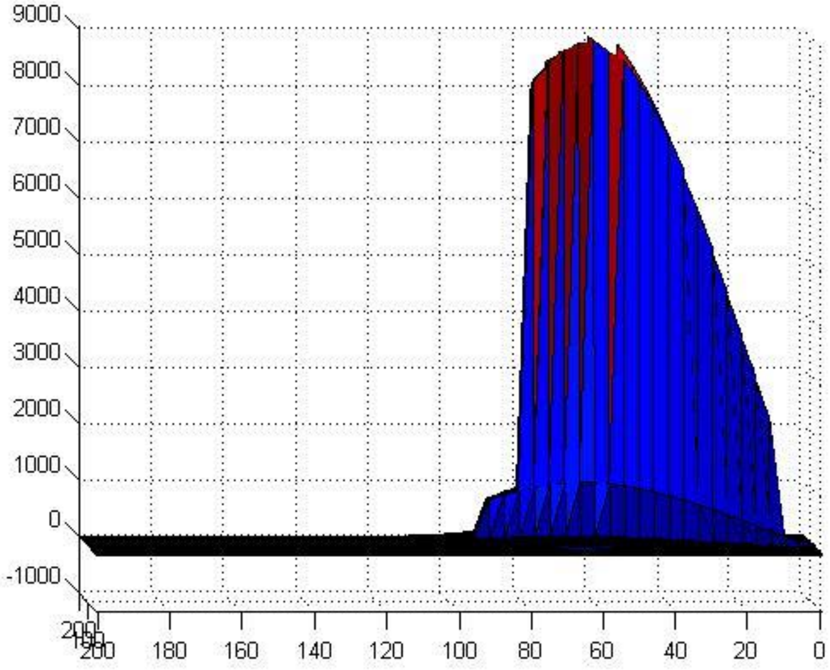
Το ενδιαφέρον πλέον στρέφεται στον υπολογισμό του *E*. Οι μέθοδοι για τον υπολογισμό αυτού έχουν αναλυθεί εκτενώς σε προηγούμενο κεφάλαιο. Οπότε η γραφική παράσταση του Ε είναι η ακόλουθη :



Εικόνα 4.2

Όπου στα ίδια σημεία που παρατηρήσαμε τις μέγιστες τιμές για το *E* τώρα υπάρχουν οι ελάχιστες για το *E*. Όπως επισημάναμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο.)

Με αυτά τα δεδομένα επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της εναποτιθέμενης ισχύος. Η γραφική της παράσταση είναι :

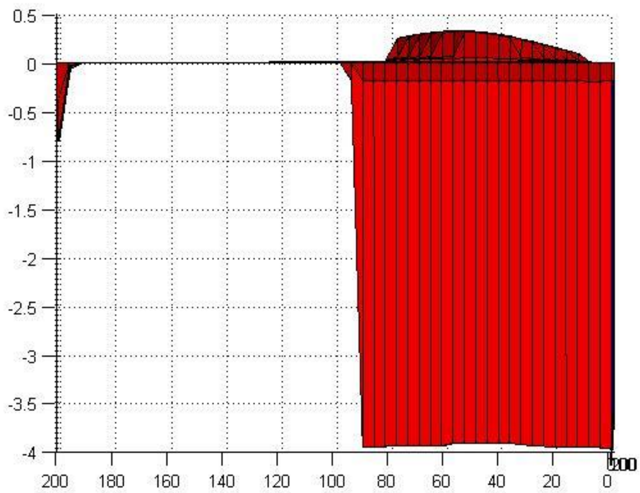


Με μέγιστες τιμές να είναι τα 9000 και αυτό να φθίνει όσο πλησιάζουμε στο πίσω μέρος του σώματος (στην αντίθετη πλευρά από εκεί που εφαρμόζουμε την ηλεκτρική επαφή)

Εικόνα 4.3

Τέλος υπάρχουν όλα τα απαραίτητα εργαλεία για να υπολογιστεί η συμπεριφορά της διαφοράς της θερμότητας στο σώμα.

Η γραφική της παράσταση είναι η ακόλουθη:



Εικόνα 4.4 Να επισημανθεί στο σημείο αυτό ότι ο σάκος με το παγωμένο νερό οφείλεται για την ένδειξη των αποτελεσμάτων τα οποία φτάνουν στους -4 βαθμούς Κελσίου.

4.2 Σύγκριση Αποτελεσμάτων

Στην ενότητα αυτήν θα πραγματοποιηθεί η σύγκριση των αποτελεσμάτων που έχουν βρεθεί μέχρι στιγμής.

Αρχικά το χωρίο που εργαζόμασταν θα μεταβληθεί και θα πάρει την εξής μορφή:

h= 100cm

0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	0.5	4	4	4	4	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	4	4	4	4	4	4	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	4	4	4	4	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,1	0,1

Ενώ η ηλεκτρική επαφή έχει 100V και τοποθετείται πάνω ακριβώς στο σώμα

h= 100cm

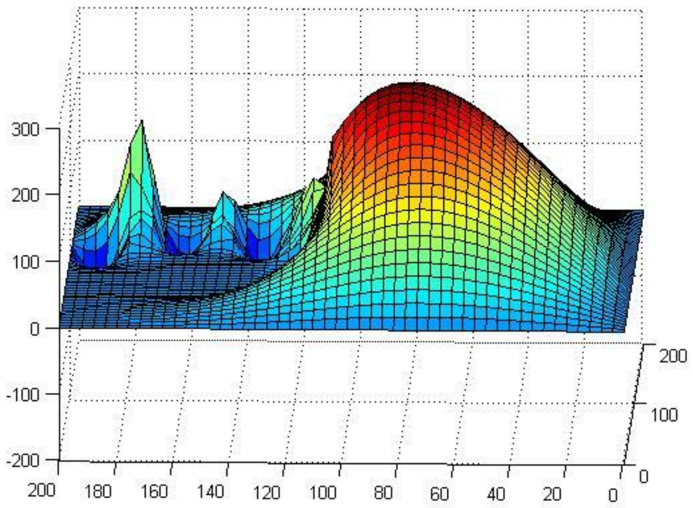
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	100	100	100	100	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

h= 25cm

Παρατηρείται ότι η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι η ηλεκτρική επαφή πλέον έχει απόσταση 25cm από το έδαφος πράγμα που την κάνει να είναι εφαρμοστή στο σώμα. Δηλαδή μεταξύ της ηλεκτρικής πηγής και του ανθρωπίνου σώματος δεν υπάρχει στρώμα αέρα όπως προηγουμένως.

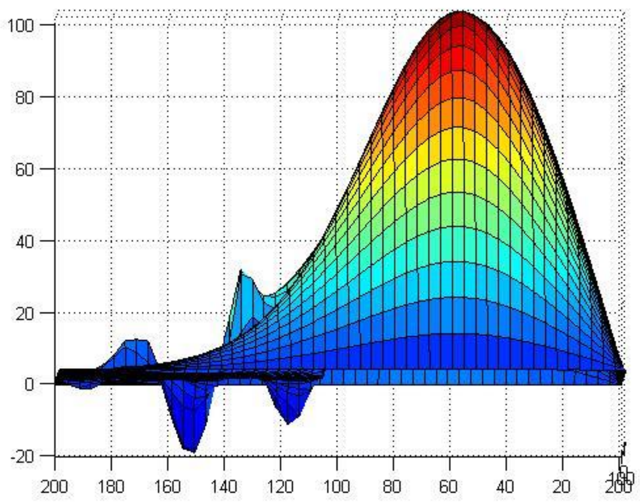
Το αναμενόμενο αποτελέσμα είναι να υπάρξει μεγέθυνση όλων των μεγεθών και τελικά μεγαλύτερη θερμοκρασία μέσα στο σώμα, πράγμα που όπως θα δούμε θα το επιτύχουμε.

Με την συνήθη ανάλυση βρίσκεται η γραφική παράσταση για να είναι η ακόλουθη:



Εικόνα 4.5

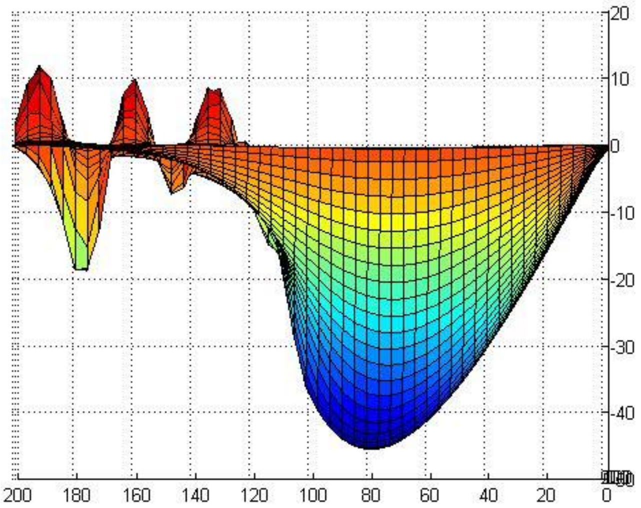
Εδώ παρατηρούνται μεγαλύτερες τιμές για το δυναμικό σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Ο λόγος είναι όπως προαναφέραμε το γεγονός ότι η ηλεκτρική επαφή έρχεται πιο κοντά στο σώμα, για τον λόγο του αληθές στην προκειμένη περίπτωση η ηλεκτρική επαφή εφάπτεται στο σώμα.



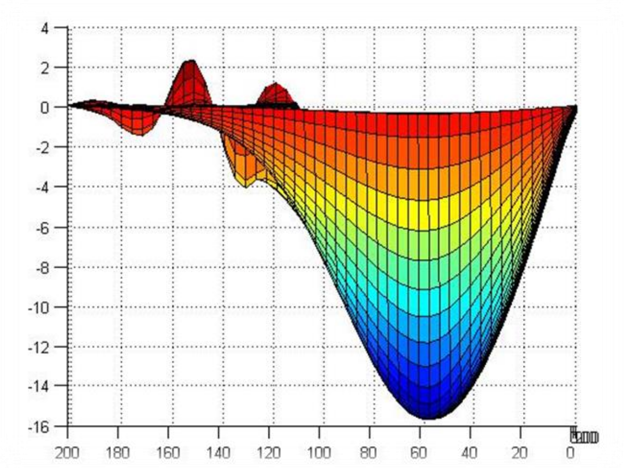
Εικόνα 4.1

Σε αυτό το σημείο παραθέτουμε και την γραφική παράσταση του *φ* που είχαμε αρχικά για να πραγματοποιηθούν τυχών συγκρίσεις

Ως αποτέλεσμα των παραπάνω είναι και η αύξηση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου *E* κατά απόλυτη τιμή όπως φαίνεται και από την γραφική της παράσταση :



Εικόνα 4.6

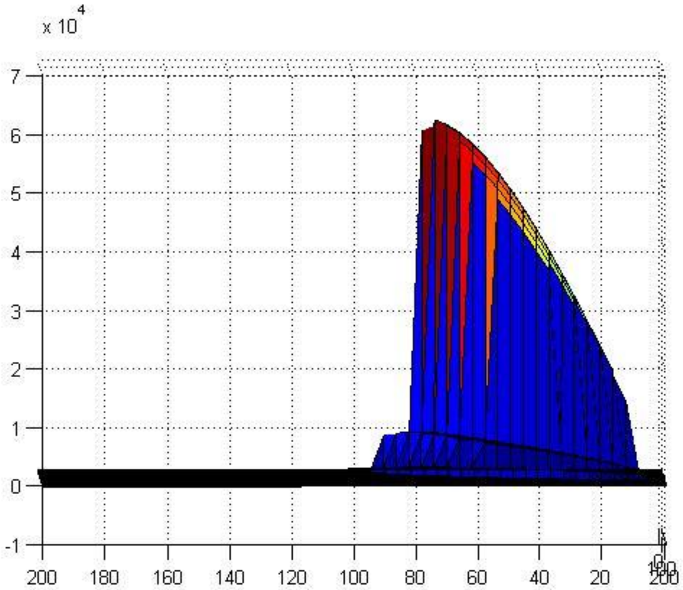


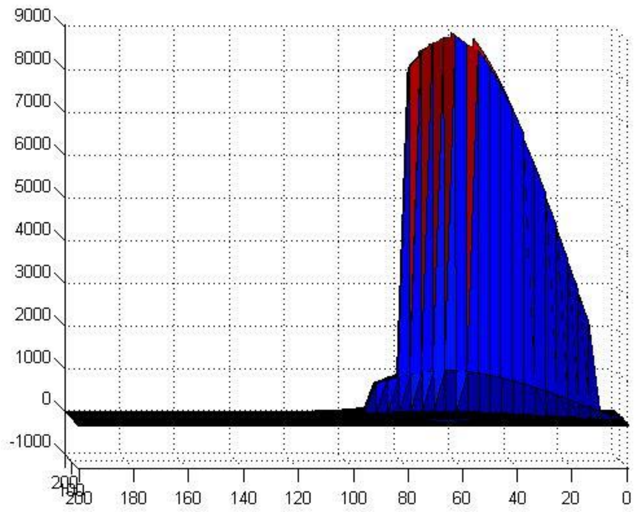
Εικόνα 4.2

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε τις δύο γραφικές παραστάσεις του *E* , με την αριστερή εικόνα να παρουσιάζεται το *E* στην κατάσταση όπου το σώμα απέχει από το δάπεδο 25cm ενώ στην δεξιά εικόνα είναι η ίδια γραφική παράσταση όταν η απόσταση γίνεται 35cm.

Όπως είχε επισημανθεί, όταν η ηλεκτρική επαφή είναι πιο κοντά στο σώμα, τα προσδοκώμενα αποτελέσματα είναι η αύξηση όλων των δεικτών, πράγμα που επαληθεύεται μέσω των γραφικών παραστάσεων.

Επόμενος στόχος είναι η σύγκριση της εναποτιθέμενης ισχύος.





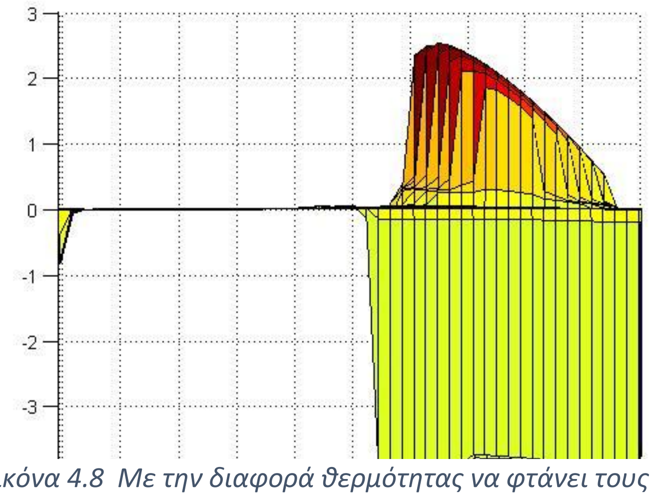
Εικόνα 4.7 *Εικόνα 4.3*

Παρατηρείται επίσης αύξηση της ισχύος όσο η πηγή πλησιάζει το σώμα, πράγμα αναμενόμενο και επιθυμητό.

Έχει φτάσει το σημείο στο οποίο η θερμοκρασία μέσα στο σώμα μπορεί να υπολογιστεί.

Όπως και προηγουμένως θα εξεταστεί η διαφοροποίηση των τιμών της θερμοκρασίας ανάλογα με το σημείο που βρίσκεται η ηλεκτρική επαφή.

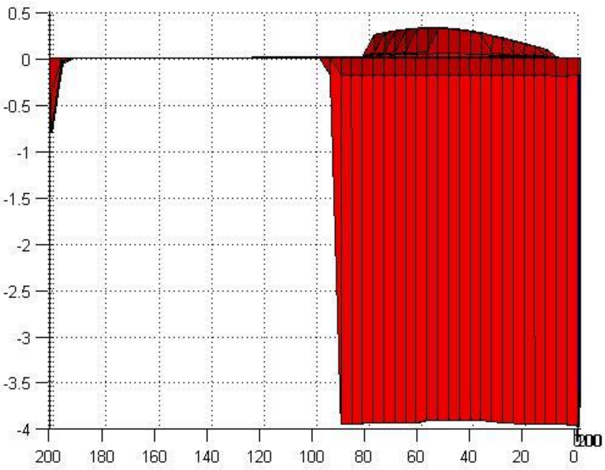
Η συμπεριφορά της θερμοκρασίας μέσα στο σώμα περιγράφεται από την παρακάτω γραφική παράσταση, στην οποία η ηλεκτρική επαφή βρίσκεται στα 25cm απόσταση από βάση της συσκευής εν τω βάθει υπερθερμίας:



Εικόνα 4.8 Με την διαφορά θερμότητας να φτάνει τους 2,5 βαθμούς Κελσίου

Παρατηρείται αύξηση της θερμότητας στο εσωτερικό του σώματος και σταδιακή μείωση όσο απομακρυνόμαστε από την ηλεκτρική πηγή. Άλλο ένα αξιοπρόσεκτο στοιχείο είναι η μεγαλύτερη θερμοκρασία που αναπτύσσει το σώμα σε σχέση με το προηγούμενο γράφημα της θερμοκρασίας. Ο λόγος είναι πάλι πως η ηλεκτρική επαφή πλησίασε το σώμα.

Τέλος υπάρχει μία ομοιότητα, η οποία είναι οι ελάχιστες τιμές που παίρνει η θερμοκρασία και στις δύο περιπτώσεις, και αυτή φτάνει τους -4 βαθμούς Κελσίου. Όπως αναφερθήκαμε και πιο πάνω το -4 συνεχίζει να είναι η συνοριακή που δημιουργείται αν η αρτηριακή θερμοκρασία του αίματος είναι σταθερά στους 37 βαθμούς και στα τοιχώματα του δέρματος βάλουμε μια σακούλα με χλιαρό νερό στους 17 βαθμούς Κελσίου.



Εικόνα 4.4

Εδώ φαίνονται ξεκάθαρα οι ομοιότητες στην κατώτατη τιμή της θερμοκρασίας αλλά και η διαφορά στις ψηλές θερμοκρασίες που αναπτύσσονται μέσα στο σώμα

Τέλος, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα όταν ηλεκτρική επαφή τοποθετηθεί σε απόσταση 35 cm από την βάση. Ο πίνακας για την κατανόηση του προβλήματος δεν αλλάζει για ευνόητους λόγους, στον αλγόριθμο όμως αυξομειώνεται η απόσταση ανάλογα με την κατάσταση που εξετάζεται. Όπως και στην πρώτη θεώρηση μεταξύ του ανθρωπίνου σώματος και της ηλεκτρικής πλάκας, έτσι και εδώ υπάρχει στρώμα αέρα. Πιο συγκεκριμένα η ηλεκτρική πλάκα δεν εφάπτεται στο σώμα.

Το σώμα έχει ακριβώς την ίδια μοντελοποίηση αφού αναφερόμαστε στον ίδιο ανθρώπινο οργανισμό.

h= 100cm

0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	0.5	4	4	4	4	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	4	4	4	4	4	4	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	4	4	4	4	0,5	0,1	0,1
0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,1	0,1

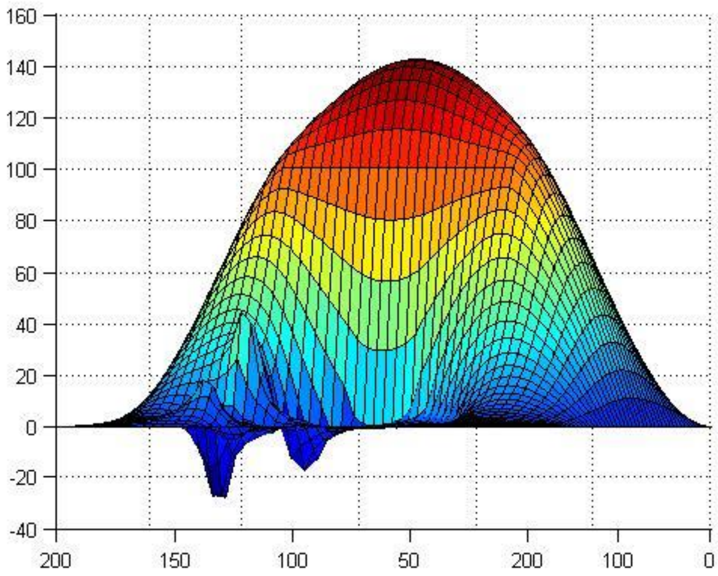
h= 100cm

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	100	100	100	100	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

h= 35cm

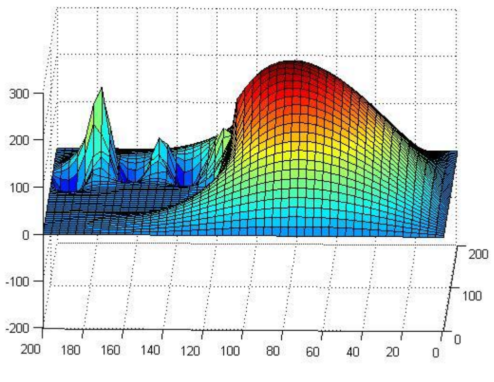
Τα προσδοκόμενα αποτελέσματα είναι οι γραφικές παραστάσεις των εκάστοτε μεγεθών να παίρνουν τιμές οι οποίες να κυμαίνονται μεταξύ των τιμών των δύο διαφορετικών καταστάσεων που έχουμε εξετάσει μέχρι στιγμής.

Έτσι η γραφική παράσταση της τάσης φ να είναι η ακόλουθη:

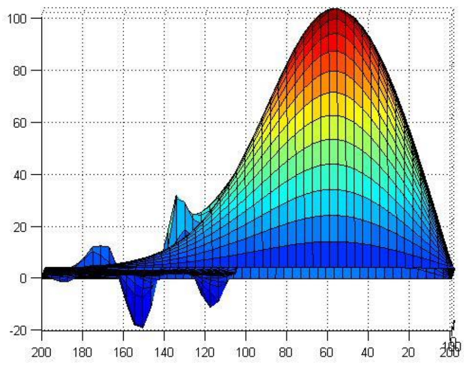


Εικόνα 4.9

Οι τιμές της είναι όντως οι προσδοκώμενες αφού αν συγκριθούν με τις τιμές των προηγούμενων γραφικών παραστάσεων παρατηρείται αυτό που μόλις αναφέρθηκε. Ότι δηλαδή οι τιμές της κυμαίνονται ανάμεσα στις τιμές των δύο προηγούμενων γραφικών παραστάσεων για το φ.



Εικόνα 4.5

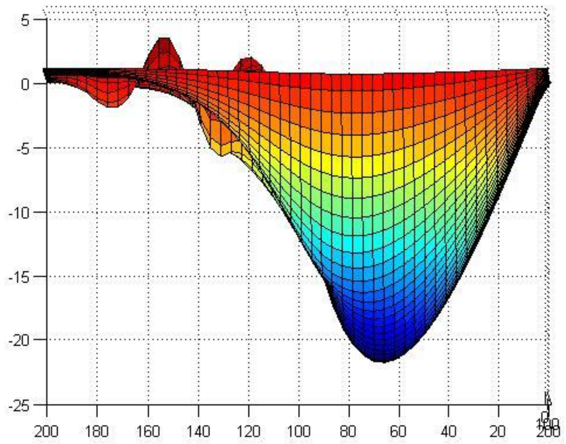


Εικόνα 4.1

Εδώ παρατίθενται οι δύο προηγούμενες γραφικές παραστάσεις του φ για να πραγματοποιηθεί η εξακρίβωση των όσων ειπωθήκαν

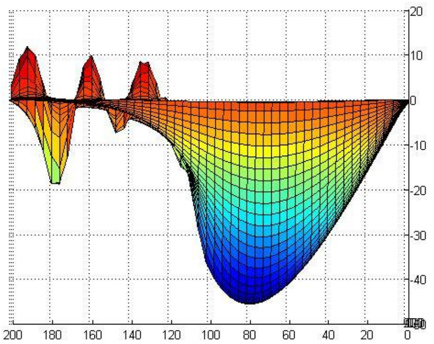
Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της έντασης ηλεκτρικού πεδίου *E* και η σύγκρισή του με τα προηγούμενα αποτελέσματα.

Η γραφική παράσταση του *E* βρίσκεται να έχει τις ακόλουθες τιμές :

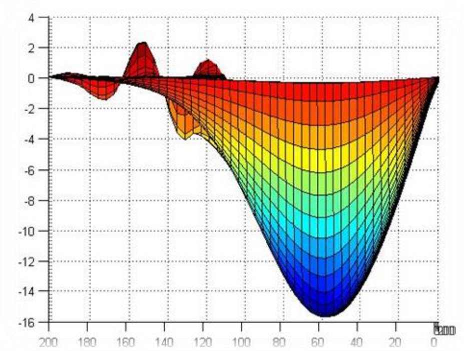


Εικόνα 4.10

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να συγκριθούν τα αποτελέσματα που παράχθηκαν από τον υπολογισμό της έντασης ηλεκτρικού πεδίου *E* στην κατάσταση που παρουσιάστηκε προηγουμένως.



Εικόνα 4.6

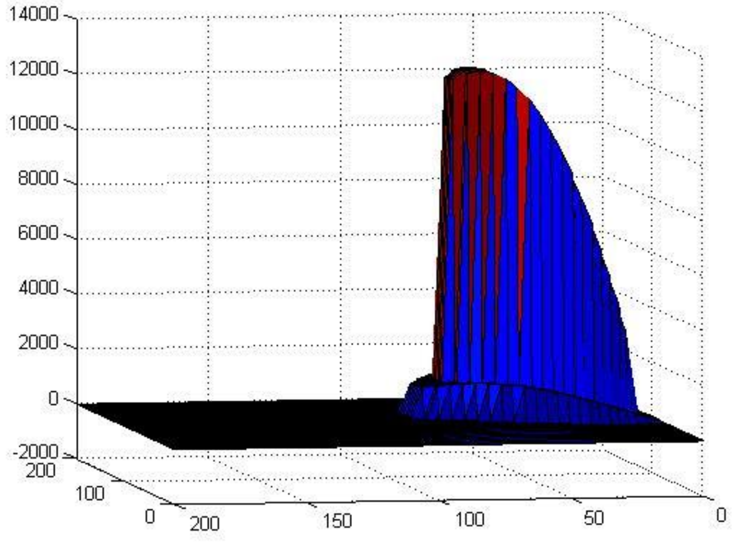


Εικόνα 4.2

Από την σύγκριση των γραφικών παραστάσεων προκύπτει ένα αναμενόμενο και παρόλα αυτά επιθυμητό αποτέλεσμα. Αυτό είναι ότι οι τιμές του *E* που μόλις υπολογίστηκε βρίσκονται κατά απόλυτο τιμή ανάμεσα στις τιμές (κατά απόλυτο τιμή) των δύο προηγούμενων καταστάσεων.

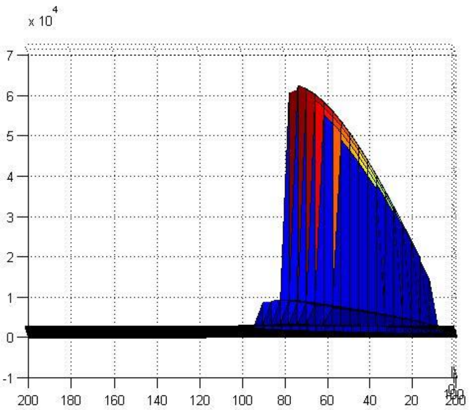
Επόμενος στόχος του κεφαλαίου είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων της εναποτιθέμενης ισχύος στις τρεις διαφορετικές καταστάσεις που έχουμε έως τώρα περιγράψει.

Η γραφική παράσταση της ισχύος Q βρίσκεται να παίρνει τις ακόλουθες τιμές, σε συνθήκες όπου η ηλεκτρική επαφή είναι σε απόσταση από το σώμα μήκος 35 cm:

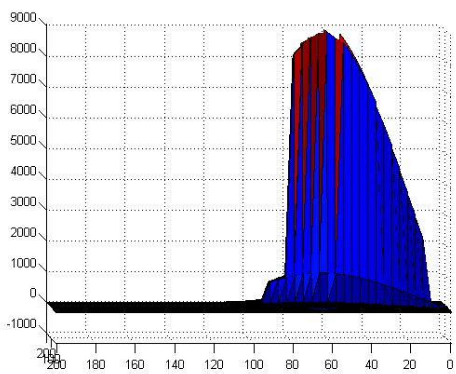


Εικόνα 4.11

Όπως και προηγουμένως, τα προσδοκόμενα αποτελέσματα στη γραφική παράσταση της Q είναι ότι οι τιμές της να βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές των δύο προηγούμενων συνθηκών. Γεγονός που αληθεύει αν κάποιος συγκρίνει τις τρεις διαφορετικές γραφικές παραστάσεις.



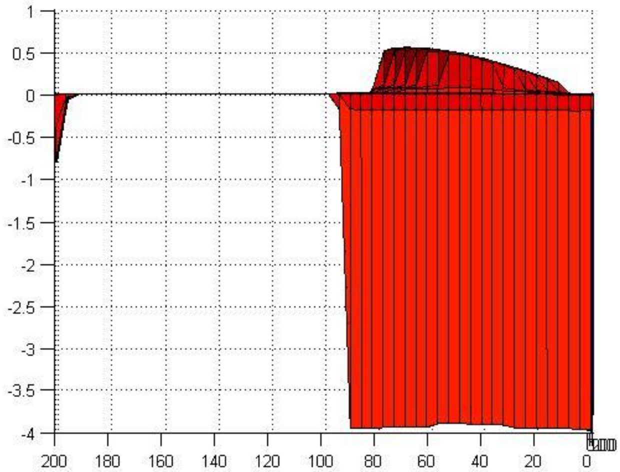
Εικόνα 4.7



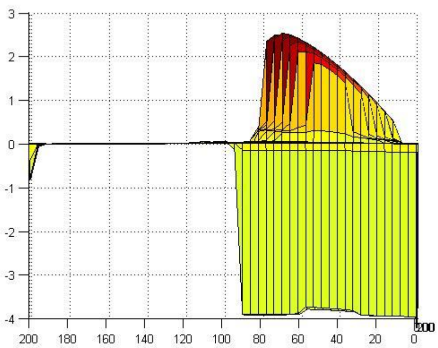
Εικόνα 4.3

Τέλος, βρισκόμαστε στο τελικό στάδιο του κεφαλαίου που είναι η σύγκριση των τιμών της θερμοκρασίας μέσα στο σώμα ανάλογα με την απόσταση που έχει η ηλεκτρική επαφή από το ίδιο το σώμα.

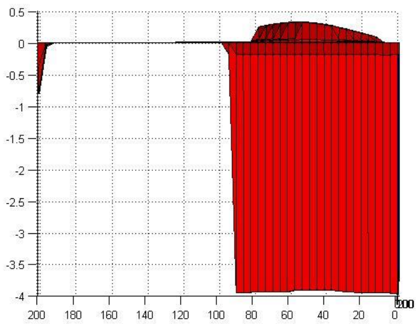
Η γραφική παράσταση που ακολουθεί είναι η συμπεριφορά της θερμοκρασίας μέσα στο σώμα όταν η ηλεκτρική επαφή βρίσκεται στο ύψος των 35 cm.



Εικόνα 4.12



Εικόνα 4.8



Εικόνα 4.4

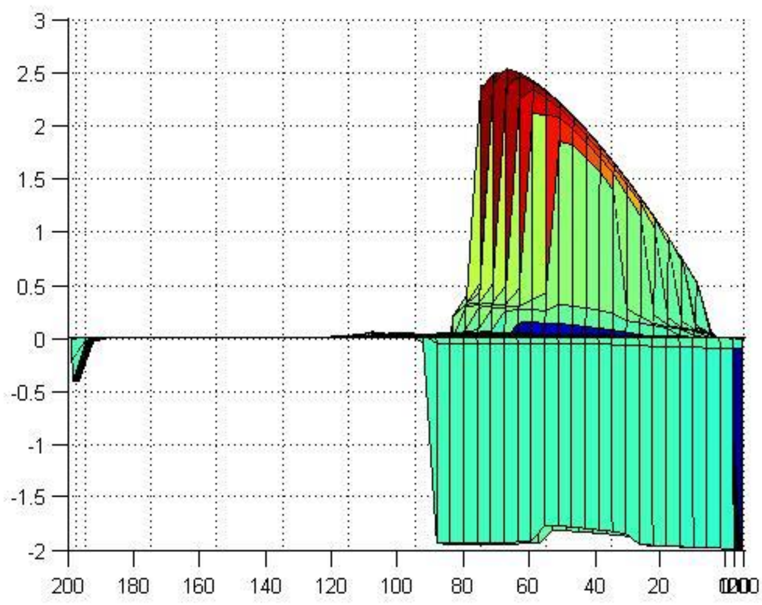
Τέλος παρατηρείται η διαφοροποίηση των τιμών της θερμοκρασίας ανάλογα με την απόσταση της ηλεκτρικής πλάκας από το ανθρώπινο σώμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο} - ΣΗΜΑΣΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΤΟΥ ΣΑΚΟΥ ΝΕΡΟΥ/ΨΥΧΟΥΣ

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την σημασία ύπαρξης του σάκου νερού/ ψύχους, ο οποίος κατά κόρον αναφέρθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

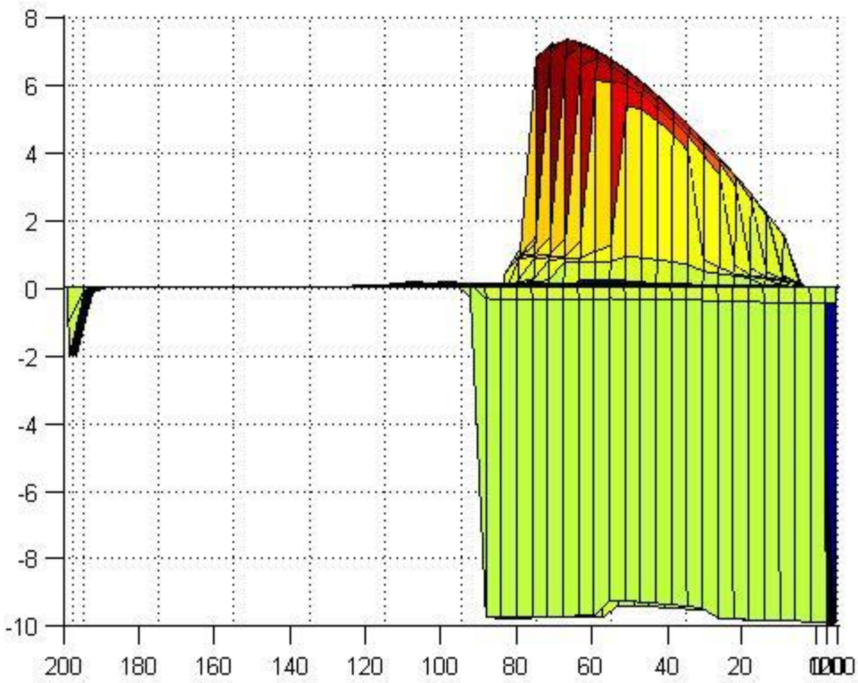
Θεωρητικά ο λόγος ύπαρξης αυτού είναι ο εξής. Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή της διπλωματικής η υπερθερμία είναι μία ‘’συμπληρωματική’’ θεραπεία κατά του καρκίνου η οποία έχει μεγάλη εφαρμογή σε κακοήθεις όγκους οι οποίοι είναι σχετικά επιφανειακοί (3-4 εκατοστά απόσταση από την επιφάνεια του σώματος). Όταν όμως ο όγκος αυτός βρίσκεται βαθύτερα, πρέπει με κάποιο τρόπο η απαιτούμενη ποσότητα θερμότητας να φτάσει σε αυτόν και ο τρόπος για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο είναι η αύξηση του δυναμικού. Σαν αποτέλεσμα αυτού, όμως, κινδυνεύουν με εγκαύματα οι κυτταρικοί ιστοί που βρίσκονται στο εξωτερικό του ανθρωπίνου σώματος. Ο τρόπος αποφυγής μια τέτοιας δυσάρεστης εξέλιξης είναι η τοποθέτηση ενός σάκου με νερό του οποίου μπορούμε να ρυθμίσουμε την θερμοκρασία ώστε να αποτελέσει μια ασπίδα προστασίας. Έτσι, όσο βαθύτερα χρειάζεται να φτάσει η μέθοδος, τόσο θα αυξάνεται το δυναμικό και τόσο θα μειώνεται η θερμοκρασία του σάκου με το νερό, ούτως ώστε να προστατευτούν από την υψηλή θερμοκρασία τα εξωτερικά κύτταρα.

Τώρα θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα του αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκε και στα προηγούμενα κεφάλαια για να προσομοιωθεί η διαδικασία της Υπερθερμίας.



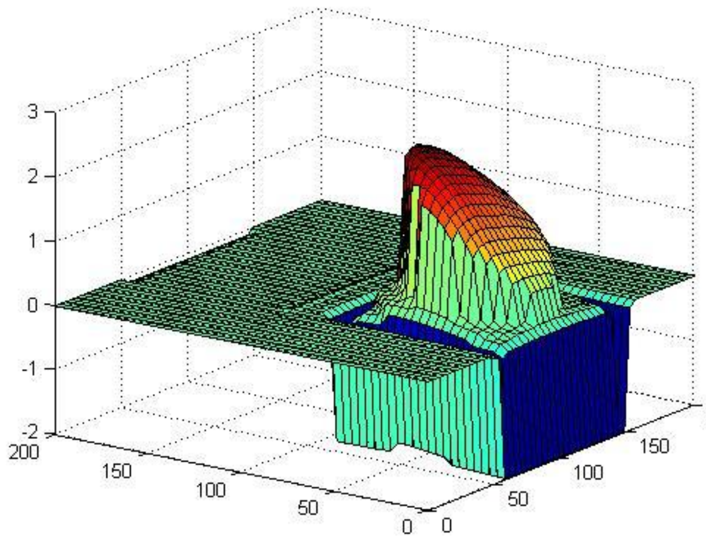
Εδώ παρουσιάζουμε η μέθοδος της υπερθερμίας με τον σάκο νερού να είναι στους 25 βαθμούς Κελσίου, δηλαδή σε θερμοκρασία δωματίου. Επιπλέον η ηλεκτρική επαφή είναι στα 100V

Εικόνα 5.1

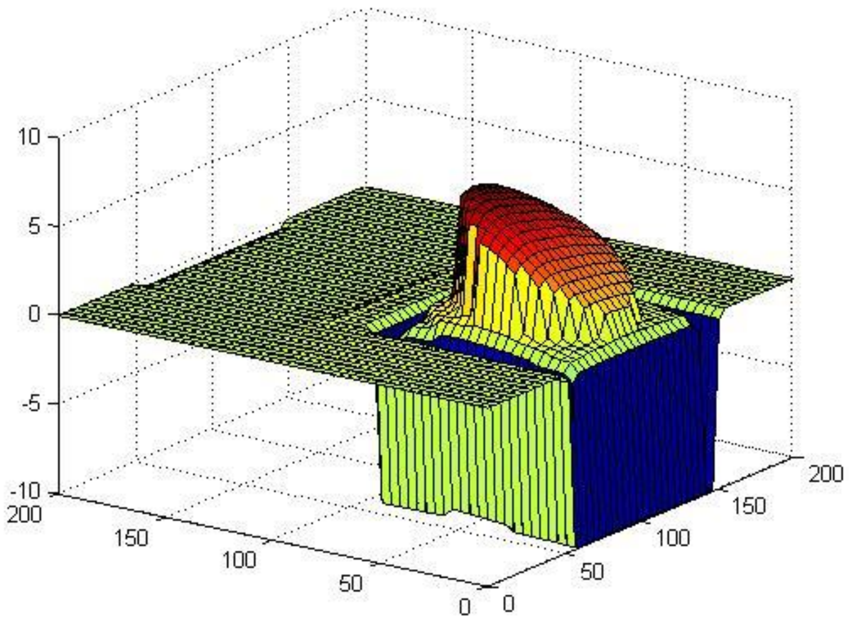


Εικόνα 5.2 Σε αντίθεση με την παραπάνω γραφική παράσταση, εδώ παρουσιάζεται η μέθοδος της υπερθερμίας με την εξής διαφορά: έχουν αυξηθεί τα Volt σε 170 οπότε και η θερμοκρασία στο σώμα έχει ανέβει αισθητά και επιπλέον έχουμε εφαρμόσει τον σάκο προστασίας που αναφέραμε. Έτσι διαπιστώνεται ότι οι οριακές συνθήκες έχουν ελαττωθεί αισθητά και έτσι επιτυγχάνεται ο στόχος, που είναι να υπάρχει μία κλίση της γραφικής παράστασης ώστε να φτάσει πιο ‘’ βαθιά’’ η μέθοδος

Θα παρατεθούν άλλες δύο γραφικές παραστάσεις από την κάθε περίπτωση ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα.

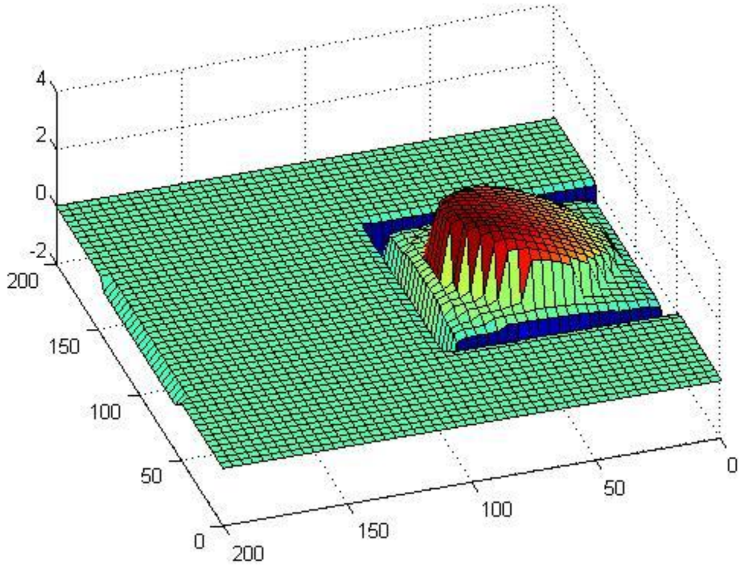


Εικόνα 5.3 Γραφική παράσταση χωρίς την προσθήκη σάκου νερού και τάση στα 100V



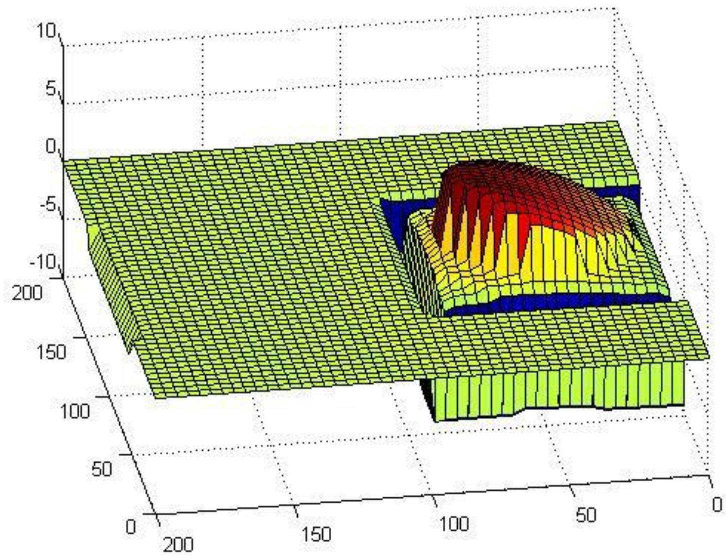
Εικόνα 5.4 Γραφική παράσταση με την προσθήκη σάκου ψύχους και τάση στα 170V

Στις γραφικές παραστάσεις αυτές φαίνεται ξεκάθαρα η επίτευξη του στόχου που είχε τεθεί στην αρχή του κεφαλαίου. Στην πρώτη γραφική παράσταση που διαπιστώνεται η γρήγορη εξασθένηση της θερμότητας απεικονίζεται η διαδικασία της υπερθερμίας χωρίς τη χρήση του σάκου νερού . Ενώ στην δεύτερη διαπιστώνουμε ότι με την χρήση του σάκου, όντως η θεραπεία επηρεάζει κύτταρα που βρίσκονται ενδότερα εξού και η ομαλότερη απώλεια θερμότητας μέσα στο σώμα



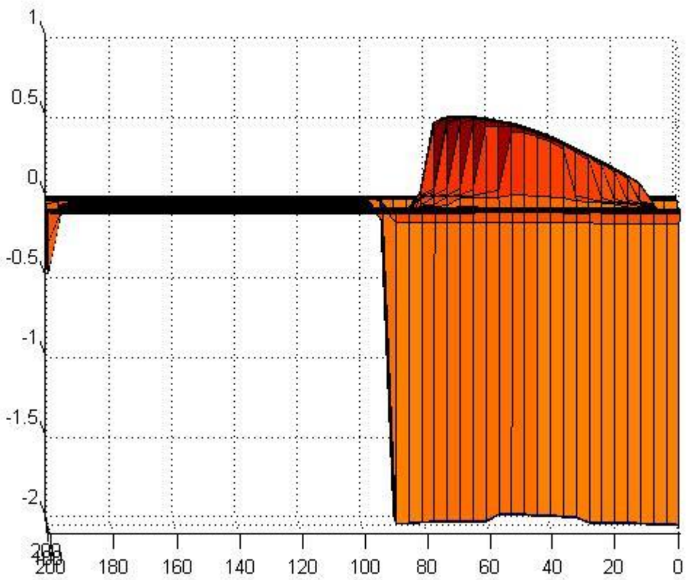
Εδώ από μια άλλη οπτική γωνία διαπιστώνεται η σημασία και η χρησιμότητα της προσθήκης σάκου νερού. Τα αποτελέσματα είναι αυτά που έχουν αναφερθεί και παραπάνω. Στην δεύτερη γραφική παράσταση η θεραπεία φαίνεται ότι επηρεάζει περισσότερο τα κύτταρα που βρίσκονται πιο εσωτερικά

Εικόνα 5.5



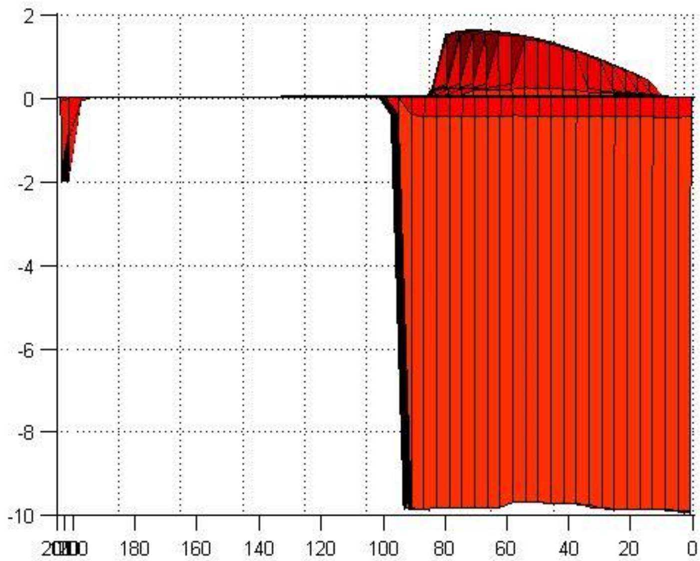
Εικόνα 5.6

Στις επόμενες σελίδες θα προσπαθήσουμε να διαπιστώσουμε πως με τον σάκο ψύχους επηρεάζονται διαφορετικές καταστάσεις της τεχνικής της Υπερθερμίας. Οι καταστάσεις αυτές είναι γνώριμες από τα προηγούμενα κεφάλαια και αφορούν τις περιπτώσεις που απομακρύνουμε την ηλεκτρική επαφή από το σώμα.



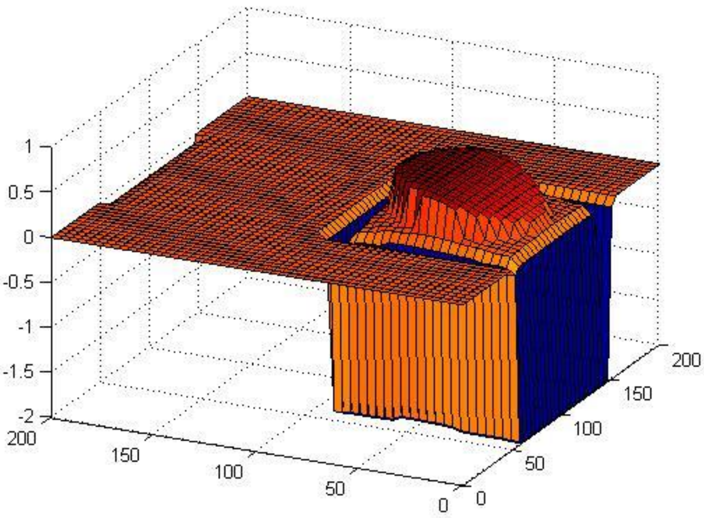
Εικόνα 5.7 Γραφική παράσταση χωρίς την προσθήκη σάκου ψύχους και τάση στα 100V

Οι γραφικές παραστάσεις εδώ αφορούν την κατάσταση κατά την οποία η ηλεκτρική επαφή απέχει από το σώμα κατά 35 cm. Σε αυτές τις γραφικές παραστάσεις διαπιστώνεται η χρησιμότητα της προσθήκης του σάκου νερού. Υπάρχει μία κλίση στο μέγιστο σημείο της θερμοκρασίας και έτσι γίνεται κατανοητό ότι η μέθοδο της υπερθερμίας επηρεάζει κύτταρα που βρίσκονται πιο εσωτερικά όσο αυξάνεται η ένταση του πεδίου. Επιπλέον, με την ύπαρξη του σάκου προστατεύουμε τα εξωτερικά στρώματα κυττάρων από τυχόν εγκαύματα.



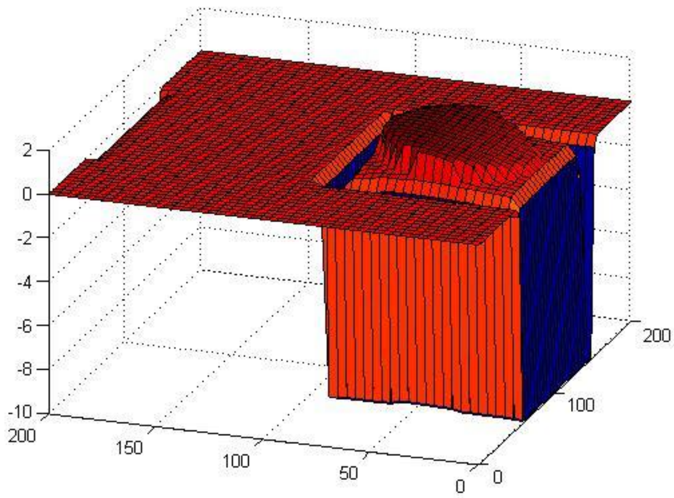
Εικόνα 5.8 Γραφική παράσταση με προσθήκη σάκου ψύχους και τάση στα 170 V

Το ίδιο συμπέρασμα μπορεί να προκύψει και από άλλες όψεις των γραφικών παραστάσεων.



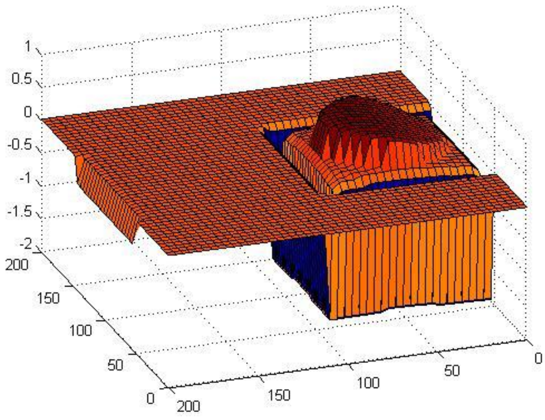
Εικόνα 5.9 Γραφική παράσταση χωρίς την προσθήκη σάκου ψύχους και τάση στα 100V

Από αυτή την οπτική γωνία διαπιστώνεται ξανά η πιο ομαλή διάχυση της θερμότητας μέσα στο ανθρώπινο σώμα λόγω της προσθήκης του σάκου. Έτσι, επιτρέπεται στην μέθοδο της υπερθερμίας να επηρεάσει κύτταρα που βρίσκονται πιο βαθιά στον ανθρώπινο ιστό.

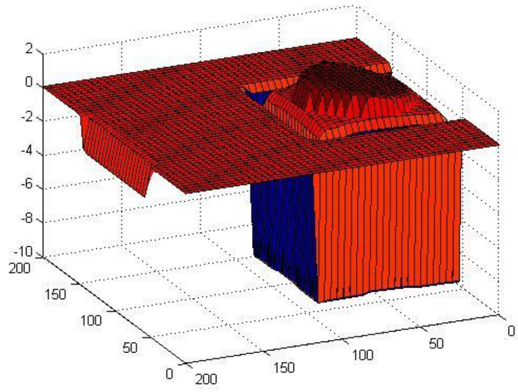


Εικόνα 5.10 Γραφική παράσταση με προσθήκη σάκου προστασίας και τάση στα 170 V

Σε παρόμοιο συμπέρασμα οδηγούμαστε και από την εξέταση της παρακάτω γραφικής παράστασης που απεικονίζει τις ίδιες καταστάσεις απλά από διαφορετική οπτική γωνία.



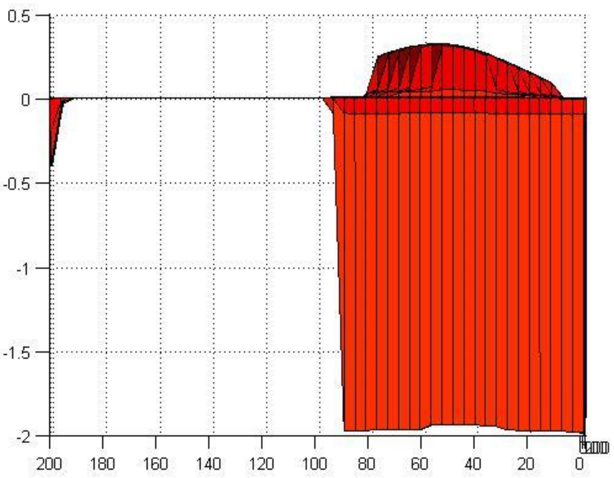
Εικόνα 5.11



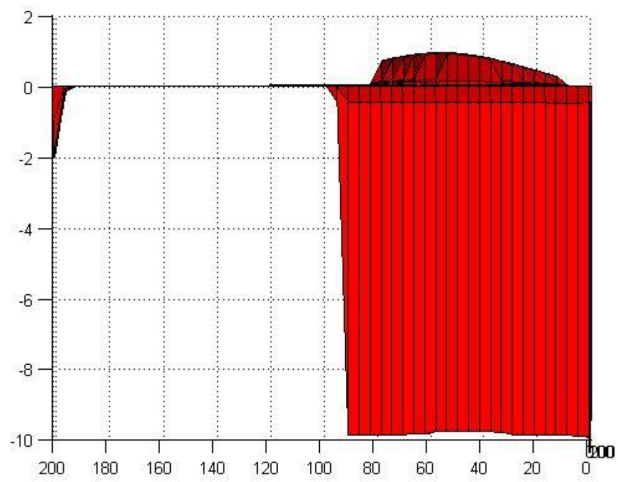
Εικόνα 5.12

Φαίνεται ξεκάθαρα πλέον η ομαλότερη διάχυση της θερμότητας στο σώμα.

Τέλος, θα συγκριθούν και τα αποτελέσματα και για την τρίτη και τελευταία κατάσταση όταν δηλαδή βρίσκεται η επαφή στα 50 cm.

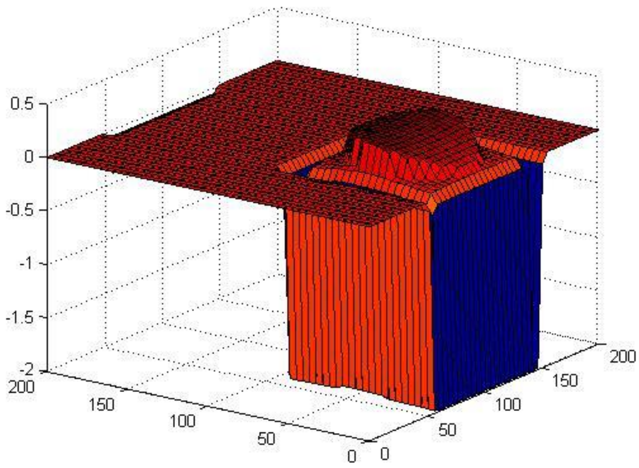


Εικόνα 5.13

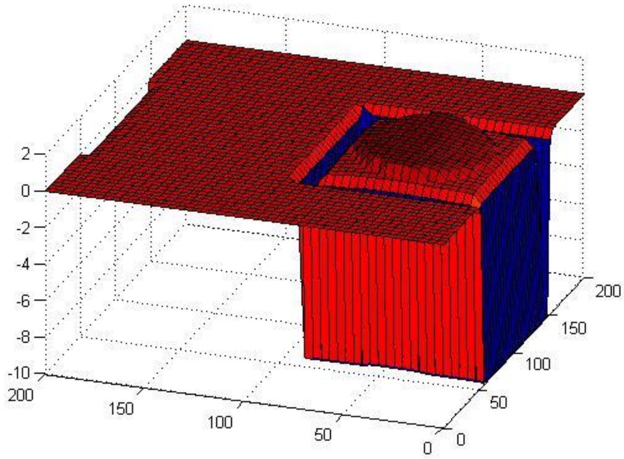


Εικόνα 5.14

Τα συμπεράσματα συμπίπτουν με αυτά των προηγούμενων καταστάσεων καθώς φαίνεται η κλίση στα γραφήματα που χρησιμοποιήθηκε ο σάκος ρύθμισης της θερμοκρασίας. Επιπλέον φαίνεται και μία αύξηση της θερμοκρασίας λόγω της αύξησης της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος.



Εικόνα 5.15



Εικόνα 5.16

Το ίδιο συμπέρασμα βγαίνει και από τη μελέτη των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου διαπιστώνεται η ομαλότητα και η εις βάθος διάχυση της θερμότητας στην κατάσταση κατά την οποία εφαρμόζεται σάκος ψύχους και αυξάνεται ταυτόχρονα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{Ο} - ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ - ΤΡΟΠΟΙ ΕΞΕΛΙΞΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε τυχόν βελτιστοποιήσεις που μπορούν να πραγματοποιηθούν στην παρούσα διπλωματική.

Αρχικά να αναφερθούμε στο γεγονός ότι εξετάσαμε το θέμα με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Οπότε μία βελτιστοποίηση μπορεί επιτευχθεί με την εισαγωγή νέων μεθόδων μοντελοποίησης, όπως τα πεπερασμένα στοιχεία ή ακόμα και οι πεπερασμένοι όγκοι. Οι δύο τελευταίες μέθοδοι θα μας βοηθήσουν να εξετάσουμε το πρόβλημα με μία γενικότερη θεώρηση αφού ενδείκνυνται για την μοντελοποήηση προβλημάτων 3D. Μην ξεχνάμε ότι η παρούσα διπλωματική εξέτασε το θέμα σε δύο διαστάσεις.

Επιπλέον, ο αλγόριθμος επίλυσης έγινε σε Matlab οπότε μία αλλαγή σε άλλες γλώσσες προγραμματισμού όπως η C++ ή η Python θα βοηθούσε σε αρκετά σημεία να γίνει ο αλγόριθμος πιο γρήγορος και ενδεχομένως με λιγότερη χρήση μνήμης Ram του Η/Υ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Heat Transfer, V.P Isachenko V.A Osipova A.S Sukomel, MIR PUBLISHER MOSCOW, 1969
[2] Modeling Temperature in a Breast Cancer Tumor for Ultrasound- Based Hyperthermia Treatment, Brian Ho, Kanmani Kannayiram, Ryan Tam, Harrison Yang
[3] Modeling an Injection Profile of Nanoparticles to Optimize Tumor Treatment Time with Magnetic Hyperthermia, Sonja Eagle, Samantha Wadsworth, Alexa Wnorowski. BEE 4530: Computer-Aided Engineering: Application to Biomedical Processes Spring 2015
[4] Analytical characterization of heat transport through biological media incorporating hyperthermia treatment, Shaji Mahjoob, Kambiz Vafai, International journal of Heat and Mass Transfer, 2008
[5] Modeling and numerical simulation of bioheat transfer and biomechanics in soft tissue, Jun Zhang, Fuqian Yang, Mathematical and Computer Modeling, 2005
[6] Μαγνητική υπερθερμία για την καταστολή καρκινικών όγκων και προσομοίωση με τη βοήθεια του Comsol Multiphysics, Μασιαλάκη Κ – Τσάμη Δ, 2012
[7] Υπερθερμία ως Συμπηρωματική Μέθοδο για την Θεραπεία το Καρκίνου, www.latronet.gr , 30 Μαρτίου 2012
[8] *Ampère's law*, Wikipedia
[9] Classical Electrodynamics, Alexander Altland,
[10] Georgoulis Manolis, Partial Differential Equations, 2015 (lecture notes)