ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ: $X+A^{*}\Phi(X)A=M$

Διπλωματική Εργασία

ΚΑΛΑΡΙΔΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ ΕΙΡΗΝΗ

Αριθμός Μητρώου: 09110046

Επιβλέπων Καθηγητής: Ψαρράκος Παναγιώτης,
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούνιος 2017

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ: $X+A^{*}\Phi(X)A=M$

Διπλωματική Εργασία

ΚΑΛΑΡΙΔΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ ΕΙΡΗΝΗ

Αριθμός Μητρώου: 09110046

Τριμελής Επιτροπή: Ψαρράκος Παναγιώτης, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (επιβλέπων)
Γιαννακάκης Νικόλαος, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Χρυσαφίνος Κωνσταντίνος, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2017

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελ.

Συμβολισμοί

$\mathbb{R}$	Σύνολο πραγματικών αριθμών
$\mathbb{C}$	Σύνολο μιγαδικών αριθμών
$\mathbb{N}$	Σύνολο φυσικών αριθμών
I, I_n	Μοναδιαίος (Ταυτοτικός) nxn πίνακας
A^{-1}	Αντίστροφος του πίνακα A
$\overline{A}$	Συζυγής του πίνακα A
A^T	Ανάστροφος του πίνακα A
$A^*, \overline{A}^T$	Αναστροφοσυζυγής του πίνακα A
x^T	Ανάστροφος του διανύσματος x
x^*	Αναστροφοσυζυγής του διανύσματος x
H(n)	Σύνολο Ερμιτιανών n x n πινάκων
Adj(A)	Ο συμπληρωματικός πίνακας του πίνακα A
A^n	Δύναμη πίνακα (n φυσικός αριθμός)
trA	Ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα
det(A)	Ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα A
σ(A)	Το φάσμα ενός τετραγωνικού πίνακα A
ρ(A)	Η φασματική ακτίνα ενός τετραγωνικού πίνακα A
$\|\cdot\|$	Διανυσματική νόρμα
$\|\cdot\|$	Η 2-νόρμα ή l_2 διανυσματική νόρμα ή Ευκλείδια νόρμα
$\|o\|$	Νόρμα πινάκων
$\|o\|_1$	Νόρμα μεγίστου αθροίσματος στηλών πίνακα
$\|o\|_2$	Η φασματική (τελεστική) νόρμα πίνακα
$\|o\|_\infty$	Νόρμα μεγίστου αθροίσματος γραμμών πίνακα
B(n)	Οικογένεια n x n θετικά ορισμένων πινάκων
$\overline{B}(n)$	Οικογένεια n x n θετικά ημιορισμένων πινάκων
M(n,q)	Σύνολο Μιγαδικών n x q πινάκων
M(n)	Σύνολο Μιγαδικών n x n πινάκων
K(n)	Κλειστό διάστημα της οικογένειας $\overline{B}(n)$
$A \otimes B$	Γινόμενο Kronecker των A και B

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του Προγράμματος Σπουδών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Το θέμα που αναπτύσσεται στην εργασία αυτή αφορά την μελέτη των συμμετρικών εξισώσεων πινάκων της μορφής $X+A^{*}\Phi(X)A=M$. Το κίνητρο για την επιλογή αυτού του θέματος πηγάζει από προσωπικό ενδιαφέρον, καθώς και από την σύνδεση τους με τη διακριτή αλγεβρική εξίσωση Riccati, η οποία εμφανίζεται στη θεωρία γραμμικών συστημάτων, καθώς και στη θεωρία ελέγχου. Οι εξισώσεις, που θα μελετήσουμε αποτελούν μια ειδική μορφή της διακριτής αλγεβρικής εξίσωσης Riccati. Σκοπός μας είναι να διερευνήσουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες υπάρχει λύση και το αν αυτή είναι μοναδική. Επίσης, σε κάποιες περιπτώσεις δίνεται η γενική μορφή αυτών των λύσεων. Με τις εξισώσεις αυτές ασχολήθηκαν κατά καιρούς γνωστοί σύγχρονοι μαθηματικοί όπως ο I.C. Gohberg, ο P. Lancaster, ο L. Rodman, ο S.M. El-Sayed, ο A.C.M. Ran, ο B. Meini και ο M. Weiss, η επιστημονική έρευνα των οποίων αποτέλεσε το κίνητρο και την βάση για την σύνταξη αυτής της εργασίας.

Το Κεφάλαιο 1 έχει εισαγωγικό και βοηθητικό χαρακτήρα. Σε αυτό παρουσιάζουμε βασικούς ορισμούς της Γραμμικής Άλγεβρας, της Ανάλυσης Πινάκων και της Πραγματικής και Συναρτησιακής Ανάλυσης. Επίσης, υπενθυμίζουμε βασικές παρατηρήσεις και θεωρήματα, τα οποία μας χρειάζονται στην εργασία μας. Ακολουθεί μια σύντομη αναφορά στην διακριτή αλγεβρική εξίσωση Riccati.

Στο Κεφάλαιο 2 ορίζεται με λεπτομέρειες η μορφή των εξισώσεων που θα μελετήσουμε και αναφέρεται ο τρόπος με τον οποίο η διακριτή αλγεβρική εξίσωση Riccati καταλήγει στην μορφή των εξισώσεων που μελετάμε. Ακόμη, ορίζεται μια βασική παραδοχή με την βοήθεια της οποίας μπορούμε πλέον να μελετήσουμε τις λύσεις της εξίσωσης μέσω Θεωρημάτων Σταθερού Σημείου. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι η παραδοχή αυτή στηρίζεται στην δημοσίευση των S.M. El-Sayed και A.C.M Ran, με τίτλο *On the nonlinear matrix equation* $X+A^{*}F(X)A=Q$: *Solutions and perturbation theory*, στο περιοδικό Linear Algebra and its Applications, 346:15-26 (2002). Εντέλει, αναφέρουμε και αποδεικνύουμε τα βασικότερα Θεωρήματα Σταθερού Σημείου που θα χρησιμοποιήσουμε, όπως το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder, καθώς και το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach.

Στο Κεφάλαιο 3, αρχικά ορίζουμε την μορφή της εξίσωσης Φ, η οποία θα ισχύει για το κεφάλαιο αυτό. Στη συνέχεια μελετάμε τις συνθήκες υπό τις οποίες υπάρχει λύση ανάλογα και με την συμπεριφορά της Φ. Αξίζει να σημειωθεί ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για τις θετικά ορισμένες λύσεις της εξίσωσης $X+A^{*}\Phi(X)A=M$. Ακολουθούν δύο εφαρμογές ενός σημαντικού λήμματος για συγκεκριμένες συναρτήσεις Φ. Έπειτα, με την βοήθεια του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Banach, μελετάμε την μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης $X+A^{*}\Phi(X)A=M$, αν αυτή υπάρχει. Καταλήγουμε λοιπόν σε μια ανίσωση που αν διατηρείται τότε έχουμε μοναδικότητα υπό κάποιες συνθήκες. Επίσης, μελετάμε μια διαφορετική συνθήκη μοναδικότητας για διάφορες μορφές της Φ, όμως πλέον θα αναφερόμαστε σε μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Για να επιτευχθεί αυτό εισάγουμε και αποδεικνύουμε ένα νέο Θεώρημα Σταθερού Σημείου. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η συνάρτηση Φ θεωρούμε ότι είναι γραμμική και μονότονη συνάρτηση, ώστε να ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος μας. Τέλος, στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου αυτού ασχολούμαστε με την Θεωρία Διαταραχών της $X+A^{*}\Phi(X)A=M$. Κυρίως μελετάμε τις συνθήκες υπό τις οποίες υπάρχει λύση $\widetilde{X}$ της $X+\widetilde{A}^{*}\Phi(X)\widetilde{A}=\widetilde{M}$ και την μελέτη της μοναδικότητας της.

Στο Κεφάλαιο 4, μελετάμε την ύπαρξη λύσης για τις γραμμικές, συμμετρικές εξισώσεις $X-A_1^{*}XA_1-\cdots-A_m^{*}XA_m=M$ και την $X+A^{*}{}_1XA_1+\cdots+A^{*}{}_mXA_m=M$, όπου οι M, A_1, ... ,$A_m \in M(n)$. Να σημειώσουμε, όπως και προηγουμένως, ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για τις θετικά ορισμένες λύσεις και την μελέτη της μοναδικότητάς τους, υποθέτοντας όμως ότι ο M είναι θετικά ορισμένος πίνακας. Για αυτό χρησιμοποιούμε το γινόμενο Kronecker, το οποίο ορίζουμε στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου. Στη συνέχεια, επικεντρωνόμαστε στην εξίσωση $X-A_1^{*}XA_1-\cdots-A_m^{*}XA_m=M$. Αρχικά ορίζουμε το είδος της ευστάθειας για τους πίνακες που θα χρησιμοποιήσουμε. Έπειτα αποδεικνύουμε πότε έχει θετικά ορισμένη λύση και πότε αυτή είναι μοναδική. Η μελέτη της $X+A^{*}{}_1XA_1+\cdots+A^{*}{}_mXA_m=M$ γίνεται σε σύγκρισή με την προηγούμενη εξίσωση και οι διαφορές επισημαίνονται καταλήγοντας έτσι σε χρήσιμα συμπεράσματα. Επιπλέον, η εξίσωση $X-A_1^{*}XA_1-\cdots-A_m^{*}XA_m=M$ συγκρίνεται με την εξίσωση $X-A_1XA^{*}{}_1-\cdots-A_mXA^{*}{}_m=M$ και αντίστοιχα η $X+A^{*}{}_1XA_1+\cdots+A^{*}{}_mXA_m=M$ με την $X+A_1XA^{*}{}_1+\cdots+A_mXA^{*}{}_m=M$ ως προς την ύπαρξη λύσης και την μοναδικότητα αυτής . Εντέλει, συνδυάζουμε τις δύο βασικές μας εξισώσεις σε μια και αποδεικνύουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες αυτή η εξίσωση έχει λύση. Αξίζει να σημειώσουμε ότι δεν μπορούμε να μιλήσουμε για μοναδικότητα της λύσης, εξαιτίας της μορφής της συνάρτησης F .

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία αποτελεί διπλωματική εργασία στο πλαίσιο σπουδών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Αρχικά, θα ήθελα να απευθύνω θερμές ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Παναγιώτη Ψαρράκο, Καθηγητή στον Τομέα των Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, ο οποίος με τις ουσιώδεις παρατηρήσεις του και με την υποστήριξη του με βοήθησε να φέρω εις πέρας αυτήν την εργασία. Θα ήθελα, ακόμη να τον ευχαριστήσω για την επιλογή αυτού του ενδιαφέροντος θέματος, καθώς και για την καθοδήγηση που μου προσέφερε καθ' όλη την διάρκεια ανάπτυξης της διπλωματικής μου. Η αμέριστη κατανόηση του και η πολύτιμη βοήθεια του αποτέλεσαν την θεμελιώδη βάση για την εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Θα ήθελα, ακόμη να ευχαριστήσω τον κ. Νικόλαο Γιαννακάκη (Αναπληρωτή Καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε.) καθώς και τον κ. Κωνσταντίνο Χρυσαφίνο (Αναπληρωτή Καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε.), που με τίμησαν με την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή μου.

Οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου, Μάρκο και Κωνσταντίνα, καθώς και στην αδελφή μου, Κλειώ Αγάπη, που με περιέβαλλαν με την αγάπη τους και μου έδωσαν τα κατάλληλα εφόδια για να πορευτώ στη ζωή μου. Ευχαριστώ και αφιερώνω την παρούσα εργασία στον σύζυγο μου, Κωνσταντίνο και στα παιδάκια μου, Μαρία και Νικόλα, που με την αγάπη και την υποστήριξη τους αποτέλεσαν πηγή άντλησης ενέργειας και έμπνευσης όλο αυτό το διάστημα. Δεν θα μπορούσα να μην αναφερθώ στην οικογένεια του συζύγου μου, στους γονείς του Νικόλαο και Μαίρη και στις αδελφές του Πηνελόπη και Παναγιώτα, οι οποίοι στάθηκαν στο πλευρό μου και με στήριξαν έμπρακτα με όλη τους την δύναμη και την φροντίδα. Τους ευχαριστώ ειλικρινά.

Εντέλει, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου Βάλια, Ελένη και Χρήστο για όλα όσα μοιραστήκαμε κατά την διάρκεια των σπουδών μου. Η ειλικρινή τους υποστήριξη και συμπαράσταση με βοήθησαν να ανταπεξέλθω σε κάθε δυσκολία που παρουσιάστηκε σε αυτό το διάστημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό, στοχεύει στην υπενθύμιση ορισμένων βασικών εννοιών και συμπερασμάτων, τα οποία θεωρούνται απαραίτητα για την κατανόηση της εργασίας. Οι έννοιες αυτές αφορούν τα πεδία της Γραμμικής Άλγεβρας, της Ανάλυσης Πινάκων, καθώς και της Πραγματικής Ανάλυσης. Είναι απαραίτητο να σημειωθεί ότι οι έννοιες αυτές θεωρούμε πως είναι γνωστές, επομένως οι αποδείξεις παραλείπονται.

1.1 Γενικοί Ορισμοί

Ορισμός 1.1.1: **Ίχνος** ενός πίνακα $A = (a_{ij})$, που συμβολίζουμε με $tr(A)$ ή $trace(A)$, ονομάζουμε το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα, δηλαδή $tr(A) = \sum_i a_{ii}$.

Ορισμός 1.1.2: Αν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός τύπου n x n και υπάρχει πίνακας X τέτοιος ώστε $AX = XA = I_n$, τότε λέμε ότι ο πίνακας A είναι **αντιστρέψιμος** και ο πίνακας X είναι ο **αντίστροφος πίνακας του A**. Τότε γράφουμε $X = A^{-1}$.
Σημείωση: Αν A, B δύο n x n αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε ισχύει ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ορισμός 1.1.3: Έστω A, B δύο n x n πίνακες. Τότε οι A, B λέγονται **όμοιοι**, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$.

Ορισμός 1.1.4: Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, τότε ο πίνακας που προκύπτει από τον A με εναλλαγή μεταξύ γραμμών και στηλών του λέγεται **ανάστροφος πίνακας** του A και συμβολίζεται με A^T, έχουμε δηλαδή $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$.
Σημείωση: Αν A, B δύο n x n πίνακες, τότε ισχύει ότι $(AB)^T = B^T A^T$.

Ορισμός 1.1.5: Αν $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$, τότε ο πίνακας με τα συζυγή στοιχεία του λέγεται **συζυγής πίνακας** $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$. Ο **αναστροφοσυζηγής** του πίνακα A συμβολίζεται με $A^* = \overline{A}^T$. Εάν ισχύει $A = A^*$, τότε ο πίνακας ονομάζεται **ερμιτιανός.** Ακόμη εάν $A^* = -A$, τότε ο πίνακας ονομάζεται **αντιερμιτιανός.**
Σημείωση: Αν A, B δύο n x n πίνακες, τότε ισχύει ότι $(AB)^* = B^* A^*$.

Ορισμός 1.1.6: Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται **ορθομοναδιαίος** αν ισχύει,

$$A^* A = A A^* \Leftrightarrow A^* = A^{-1}.$$

Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε ο πίνακας A λέγεται **ορθογώνιος** αν ισχύει,

$$A^T A = A A^T = I \Leftrightarrow A^T = A^{-1}.$$

Ορισμός 1.1.7: Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ καλείται **κανονικός** όταν αντιμετατίθεται με τον αναστροφοσυζυγή του, δηλαδή όταν ικανοποιεί τη σχέση

$$A\,A^* = A^*\,A\,.$$

Ορισμός 1.1.8: Ένας πίνακας A λέγεται **συμμετρικός**, αν ο πίνακας είναι ίσος με τον ανάστροφό του, δηλαδή ισχύει $A = A^T$ και **αντισυμμετρικός**, αν ο ανάστροφος του πίνακα είναι ο αντίθετος πίνακας. Τα διαγώνια στοιχεία αντισυμμετρικών πινάκων είναι μηδενικά.

Σημείωση: Κάθε πίνακας μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Ορισμός 1.1.9: Εάν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε η **ελάσσονα ορίζουσα** του στην i-γραμμή και j-στήλη, είναι η ορίζουσα του υποπίνακα του, ο οποίος αποτελείται από τα στοιχεία του A, εάν διαγράψουμε την i-γραμμή και την j-στήλη. Αυτός ο αριθμός, συνήθως συμβολίζεται ως $M_{i,j}$. Το **αλγεβρικό συμπλήρωμα του (i,j)-στοιχείου** προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την ελάσσονα ορίζουσα με το $(-1)^{i+j}$. Ο **πίνακας αλγεβρικών συμπληρωμάτων** (cofactor matrix) του A συμβολίζεται με C_{ij} και είναι ο $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Παράδειγμα:

Έστω $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 9 & 11 \end{bmatrix}$. Για να υπολογίσουμε τον M_{23} και το αλγεβρικό του συμπλήρωμα κάνουμε τα εξής:

$$M_{23}=\det\begin{vmatrix} 1 & 4 & \\ & & \\ -1 & 9 & \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = \big(9-(-4)\big) = 13$$

Επομένως το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου (2,3) είναι:

$C_{23}= (-1)^{2+3}M_{23}=-13$.

Ορισμός 1.1.10: Ο συμπληρωματικός πίνακας (adjoint) ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ είναι ο n x n πίνακας:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Σημείωση: Ισχύει η σχέση: $\mathbf{A\,adj(A) = det(A)\,I}$.

Ορισμός 1.1.11: Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $f : V \times V \to K$ μία συμμετρική διγραμμική μορφή $f(x, y) = x^T A y$ επί του V. Τότε η απεικόνιση

$$Q : V \to V, x \to Q(x) := f(x, x) = x^T A x,$$

λέγεται **τετραγωνική μορφή** επί του V αντίστοιχη της f.

Ορισμός 1.1.12: Έστω A ερμιτιανός n x n πίνακας. Σε αυτήν την περίπτωση καλείται **θετικά ορισμένος** πίνακας, εάν $x^*Ax > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

Σημείωση: Ένας συμμετρικός πίνακας A θα είναι θετικά ορισμένος, εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.

Παράδειγμα: Θα δείξουμε ότι ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος.

$$\det(A - \lambda x) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι λ=1(διπλή) και λ=4.Εφοσον όλες είναι θετικές, ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει ότι

$$x^T A x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_1+x_3)^2 > 0\,.$$

□

Ορισμός 1.1.13: Έστω A είναι ένας n x n (τετραγωνικός) πίνακας. Ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ ονομάζεται **δεξί ιδιοδιάνυσμα** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του λ, δηλαδή ένα διάνυσμα στήλη που πρέπει να τοποθετηθεί δεξιά από τον πίνακα A στη χαρακτηριστική εξίσωση

$$A\,x = \lambda\,x.$$

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα y που ικανοποιεί την εξίσωση

$$y^{*}A = \lambda\,y^{*},$$

καλείται **αριστερό ιδιοδιάνυσμα** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του λ.

Ορισμός 1.1.14: Η εξίσωση $m_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=0$ καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα $A \in \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, ενώ το πολυώνυμο p(λ), ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A. Το σύνολο των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οι οποίες και αποτελούν τις ιδιοτιμές του πίνακα A, ονομάζεται **φάσμα** και συμβολίζεται με σ(A).

Ορισμός 1.1.15: Μια ιδιοτιμή ενός πίνακα A είναι **απλή (simple)**, αν αυτή έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και **πολλαπλή (multile)** διαφορετικά. Μια ιδιοτιμή είναι **ημιαπλή (semisimple)**, εάν οι γεωμετρικές και οι αλγεβρικές πολλαπλότητες συμπίπτουν.

Παράδειγμα:

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Τότε η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι η:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -2$$

Επομένως, το φάσμα του πίνακα A είναι σ(A)={-2,5}.

□

Ορισμός 1.1.16: Ορίζουμε ως **υποσύνολο του διαστήματος [A,B]** το:

$$L_{A,B} = \{tA+(1-t)B / \, t\in[0,1]\},$$

το οποίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα των A και B.

1.2 Στοιχεία Ανάλυσης Πινάκων

Στην παράγραφο αυτή θα επεκταθούμε στην έννοια της νόρμας πίνακα στο $\mathbb{C}^{nxn}$, η οποία είναι βασικό κομμάτι της μελέτης μας.

Ορισμός 1.2.1: Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **νόρμα διανυσμάτων** αν για κάθε $x, y \in \mathbb{C}^n$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(i) $\|x\| \geq 0$ (μη αρνητική).

(ii) $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ για κάθε $a \in \mathbb{C}$.

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Μία συνάρτηση $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα (i), (iii) και (iv) του παραπάνω ορισμού καλείται **ημι-νόρμα διανυσμάτων**. Η ημι-νόρμα αποτελεί μια γενίκευση της έννοιας της νόρμας, η οποία επιτρέπει σε μη μηδενικά διανύσματα να έχουν μηδενικό μέτρο.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα νορμών διανυσμάτων στο $\mathbb{C}^n$ είναι τα εξής:

- Η l_p-νόρμα (ή p-νόρμα), για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $p \geq 1$, ορίζεται ως

$$\|x\|_p = \|[x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n]^T\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

- Η Ευκλείδεια νόρμα (ή l_2-νόρμα, ή 2-νόρμα) ορίζεται ως
$$\|x\|_2 = \|[x_1 \; x_2 \cdots x_n]^T\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2}.$$
Αποτελεί μια ειδική περίπτωση της p-νόρμας (για p = 2), είναι ίσως η πιο γνωστή νόρμα διανυσμάτων, και επάγεται από το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο,

$$\langle x, y\rangle = y^* x = [\overline{y_1}\ \overline{y_2} \cdots \overline{y_n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \overline{y_1}\, x_1 + \overline{y_2}\, x_2 + \cdots + \overline{y_n}\, x_n .$$

- Η αθροιστική νόρμα (ή l_1-νόρμα, ή 1-νόρμα) ορίζεται ως,

$$||x||_1 = \|[\, x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T\ \|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| .$$

- Η μέγιστη νόρμα (ή max-νόρμα, ή ∞-νόρμα) ορίζεται ως,

$$||x||_\infty = \|[x_1 x_2\ \cdots x_n]^T\ \|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} .$$

Είναι γνωστό ότι το σύνολο $\mathbb{C}^{n\times n}$ των n x n μιγαδικών πινάκων είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n^2, ο οποίος είναι ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^{n^2}$.

Έτσι μπορούμε, επομένως, να ορίσουμε νόρμες πινάκων με τρόπο ανάλογο με αυτόν που ορίσαμε τις νόρμες διανυσμάτων.

Ορισμός 1.2.2: Μια συνάρτηση $||\circ||: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **νόρμα πινάκων** αν για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(i) $||A|| \geq 0$ (μη αρνητική).

(ii) $||A|| = 0$ αν και μόνο αν $A = 0$.

(iii) $||\alpha A|| = |\alpha|\, ||A||$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iv) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$ (τριγωνική ανισότητα).

(v) $||A B|| \leq ||A||\, ||B||$ (υπο-πολλαπλασιαστική).

Ειδικότερα, για κάθε νόρμα πινάκων $||\circ||$ και για το μοναδιαίο πίνακα I_n, ισχύει

$$||I_n|| = ||I_n^2|| \leq ||I_n||^2 \Rightarrow ||I_n|| \geq 1.$$

Επομένως, για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$1 \leq ||I_n|| = ||A\, A^{-1}|| \leq ||A||\, ||A^{-1}|| \Rightarrow ||A^{-1}|| \geq \frac{1}{||A||} .$$

Κάποιες από τις νόρμες διανυσμάτων αποτελούν νόρμες πινάκων, όταν εφαρμόζονται στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^{n\times n}$, ενώ κάποιες άλλες όχι.

Τα πιο γνωστά παραδείγματα είναι οι l_p-νόρμες, για p = 1, 2, ∞.

- Η l_1-νόρμα ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορίζεται ως

$$||A||_{l_1} = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- Η νόρμα Frobenius (ή l_2-νόρμα) ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορίζεται ως

$$||A||_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\text{trace}\,(A^*A)},$$

όπου με trace(·) συμβολίζουμε το ίχνος του πίνακα και με A^* είναι ο αναστροφοσυζυγής του πίνακα A.

- Η l_∞-νόρμα ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορίζεται ως

$$||A||_{l_\infty} = \max\{|\alpha_{ij}| : i, j = 1,2,\ldots,n\}.$$

Για παράδειγμα, έστω $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Τότε,

- $||A||_{l_1} = \left\|\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\right\|_{l_1} = \sum_{i,j=1}^{4} |a_{ij}| = 8.$
- $||A||_F = \left\|\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\right\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{4} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{20}\,.$
- $||A||_{l_\infty} = \left\|\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\right\|_{l_\infty} = \max\{|\alpha_{ij}| : i, j = 1, 2, 3, 4\} = 4.$

Με απλές πράξεις, μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι οι συναρτήσεις $||\circ||_{l_1}$ και $||\circ||_{l_2}$ αποτελούν πράγματι νόρμες πινάκων. Αντίθετα, η $||\circ||_{l_\infty}$ αν και ικανοποιεί τα (i) - (iv) του Ορισμού 18, δεν ικανοποιεί το (v) του ορισμού και δεν είναι νόρμα πίνακα. Για παράδειγμα,

$$\left\|\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2\right\|_{l_\infty} = \left\|\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}\right\|_{l_\infty} = 22 \geq 16 = 4^2 = \left\|\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right\|_{l_\infty}^2.$$

Αν για έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, συμβολίζουμε με $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^n$ τις στήλες του A, τότε ο A γράφεται ως $A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]$.

Έτσι μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι,

$$||A||_F^2 = ||a_1||_2^2 + ||a_2||_2^2 + \cdots + ||a_n||_2^2.$$

Ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στις νόρμες πινάκων παίζουν οι επαγόμενες νόρμες ή αλλιώς φυσικές νόρμες.

Ορισμός 1.2.3: Έστω $||\circ||$ μια νόρμα διανυσμάτων στο $\mathbb{C}^n$. Η **επαγόμενη από την $||\circ||$ νόρμα** στο $\mathbb{C}^{n\times n}$ (induced norm) ορίζεται ως

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax|| = \max_{||x||\leq 1} ||Ax|| = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

Σημείωση: Αν $||\cdot||$ μια νόρμα διανυσμάτων στο $\mathbb{C}^n$ και $||\circ||$ η επαγόμενη από την $||\cdot||$ νόρμα στο $\mathbb{C}^{n\times n}$, τότε αποδεικνύεται ότι η $||\circ||$ αποτελεί νόρμα πινάκων. Επιπλέον, ισχύει ότι $||A\,x|| \leq ||A||\,||x||$, για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$.

Ακόμη αναφέρουμε τα σημαντικότερα παραδείγματα νορμών πινάκων που επάγονται από τις γνωστές l_p-νόρμες. Θεωρούμε έναν τετραγωνικό πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

- Η νόρμα πινάκων μεγίστου αθροίσματος κατά στήλη στο $\mathbb{C}^{n\times n}$ ορίζεται ως

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Η νόρμα $||\circ||_1$ επάγεται από τη διανυσματική l_1-νόρμα. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τον πίνακα A γραμμένο ως προς τις στήλες, δηλαδή $A = [\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n]$, τότε για κάθε διάνυσμα $x = [x_i] \in \mathbb{C}^n$, ισχύει

$$\begin{aligned} ||Ax||_1 &= ||x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n||_1 \\ &\leq |x_1|\,||a_1||_1 + |x_2|\,||a_2||_1 + \cdots + |x_n|\,||a_n||_1 \\ &\leq (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|) \max_{1\leq k\leq n} ||a_k||_1 \\ &= ||x||_1\,||A||_1. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\max_{||x||_1=1} ||Ax||_1 \leq ||A||_1.$$

Αν τώρα επιλέξουμε $x = e_k$ να είναι το διάνυσμα της κανονικής βάσης που αντιστοιχεί στη στήλη α_k του A με τη μεγαλύτερη l_1-νόρμα, τότε παρατηρούμε ότι $||Ae_k||_1 = ||a_k||_1 = ||A||_1$. Δηλαδή,

$$\max_{||x||_1=1} ||Ax||_1 = ||A||_1.$$

Συνεπώς, η νόρμα $||\circ||_1$ επάγεται από τη διανυσματική l_1-νόρμα και αποτελεί νόρμα πινάκων.

- Η νόρμα πινάκων μεγίστου αθροίσματος κατά γραμμή στο $\mathbb{C}^{n\times n}$ ορίζεται ως

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Η νόρμα $||\circ||_\infty$ επάγεται από τη διανυσματική l_∞-νόρμα, δηλαδή

$$||A||_\infty = \max_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty.$$

Η απόδειξη αυτής της παρατήρησης είναι παρόμοια με αυτή του προηγούμενου παραδείγματος, για αυτό και παραλείπεται. Προφανώς και η νόρμα $||\circ||_\infty$ (ως επαγόμενη) αποτελεί νόρμα πινάκων.

- Η φασματική (τελεστική) νόρμα πινάκων στο $\mathbb{C}^{n\times n}$ ορίζεται ως,

$$||A||_2 = \max_{x\neq 0}\left[\frac{x^* A^* A\, x}{x^*\, x}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Επίσης, ορίζεται και ως την μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του πίνακα A, δηλαδή

$$||A||_2 = \max \{ \sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(A^*A) \},$$

όπου με $\sigma(A)$ συμβολίζουμε το φάσμα ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, δηλαδή το σύνολο των ιδιοτιμών του A και με A^* συμβολίζουμε τον αναστροφο-συζηγή του πίνακα A.
Η νόρμα αυτή είναι νόρμα πινάκων, η οποία επάγεται από τη διανυσματική νόρμα l_2, δηλαδή,

$$||A||_2 = \max_{||x||_2=1} ||Ax||_2.$$

Από την άλλη πλευρά, μερικές νόρμες πινάκων, όπως η νόρμα Frobenious και η l_1-νόρμα παραπάνω, δεν επάγονται.

Ορισμός 1.2.4: Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με φάσμα $\sigma(A) = \{\lambda \in C: \det(\lambda I_n - A) = 0\}$. Η **φασματική ακτίνα** του A ορίζεται ως

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Σημείωση: Η φασματική ακτίνα δεν αποτελεί νόρμα πινάκων.

1.3 Στοιχεία Πραγματικής Ανάλυσης

Ορισμός 1.3.1: **Μετρικός χώρος** (metric space) είναι ένα ζεύγος (X, ρ), όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο και $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

i) $\rho(x,y) \geq 0$, για κάθε $x,y \in X$ και $\rho(x,y)=0$ αν και μόνο αν $x=y$.

ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, για κάθε $x, y \in X$ (Συμμετρική Ιδιότητα).

iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$, για κάθε $x,y,z \in X$ (Τριγωνική Ανισότητα).

Η απεικόνιση ρ ονομάζεται **μετρική** (metric), τα στοιχεία του συνόλου X ονομάζονται **σημεία** (points) και ο αριθμός ρ(x,y) ονομάζεται **απόσταση (**distance) του x από το y.

Ορισμός 1.3.2: Έστω (X, ρ) και (Y, d) δύο μετρικοί χώροι και $f : (X,\rho) \to (Y,d)$ μια συνάρτηση. Η συνάρτηση f ονομάζεται Lipschitz συνεχής ή λέμε ότι ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz, αν υπάρχει πραγματική σταθερά $C \geq 0$ τέτοια ώστε για κάθε $x,y \in X$ να ισχύει:

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq C\rho(x, y).$$

Η σταθερά C ονομάζεται σταθερά Lipschitz για την συνάρτηση f.

Ορισμός 1.3.3: Έστω (X,ρ) και (Y,d) δύο μετρικοί χώροι και $f : (X,\rho) \to (Y,d)$ μια συνάρτηση. Η συνάρτηση f ονομάζεται **ομοιόμορφα συνεχής** (uniformly continuous), αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $\rho(x,y) < \delta$ να ισχύει ότι: $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Σημείωση: Είναι εύκολο να δειχθεί ότι κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αρκεί να θέσουμε για $\varepsilon > 0$ και $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$, όπου C η σταθερά Lipschitz.

Ορισμός 1.3.4: Έστω X ένα σύνολο και f μια απεικόνιση από το X στον εαυτό του. Ένα στοιχείο $x \in X$ καλείται **σταθερό σημείο** της f αν $f(x)=x$, δηλαδή, αν το x είναι λύση της συναρτησιακής εξίσωσης $f(x)=x$ στο X.

Ορισμός 1.3.5: Η ανοικτή σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο $x \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνα $\rho > 0$ είναι το σύνολο: $S(x_0,\varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^n / ||x_0-\varepsilon|| < \rho\}$.

Ορισμός 1.3.6: Ένα υποσύνολο U ενός μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται ανοικτό αν ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\text{Για κάθε } x \in U \text{ υπάρχει } \varepsilon > 0 \text{ ώστε } S(x,\varepsilon) \subset U.$$

Ορισμός 1.3.7: Ένα υποσύνολο F του μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται κλειστό αν το συμπλήρωμα του $X\backslash F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Ορισμός 1.3.8: Έστω X,Y δύο τοπολογικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ ονομάζεται **συνεχής**, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\text{για κάθε } V \subseteq Y \text{ ανοικτό, το σύνολο } f^{-1}(V) \text{ είναι ανοικτό,}$$

ή αλλιώς,

$$\text{για κάθε } F \subseteq Y \text{ κλειστό, το σύνολο } f^{-1}(F) \text{ είναι κλειστό.}$$

Ορισμός 1.3.9: Μια ακολουθία (x_n) στοιχείων ενός μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται **βασική** ή **Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq n_0$ ισχύει $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$.

<u>Σημείωση</u>: Είναι εύκολο να δείξουμε ότι κάθε βασική ακολουθία με την συνήθη μετρική συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$, μέσω του Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass.

Ορισμός 1.3.10: Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται **πλήρης** αν κάθε βασική ακολουθία του (X,ρ) είναι συγκλίνουσα.

Ορισμός 1.3.11: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \to X$ καλείται συνάρτηση συστολής, αν υπάρχει $0 < C < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq C\, \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Ορισμός 1.3.12: Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Μια οικογένεια $\{Gi\}_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του X καλείται **κάλυμμα** του A αν $A \subset \bigcup_{i\in I} G_i$. Αν επιπλέον για κάθε $i \in I$ το G_i είναι ανοικτό, το $\{Gi\}_{i\in I}$ λέγεται **ανοικτό κάλυμμα** ενώ στην περίπτωση που το I είναι πεπερασμένο το $\{Gi\}_{i\in I}$

λέγεται **πεπερασμένο κάλυμμα**. Αν $J \subset I$ ώστε $A \subset \bigcup_{i \in J} G_i$ το $\{Gi\}_{i \in J}$λέγεται **υποκάλυμμα** του $\{Gi\}_{i \in I}$ (για το Α).

Ορισμός 1.3.13: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $K \subset X$. Το K θα καλείται **συμπαγές** αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή αν για κάθε οικογένεια $\{Gi\}_{i \in I}$ανοικτών υποσυνόλων του X με $K \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ ώστε $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{ik}$. Ειδικότερα αν K=X τότε ο X θα καλείται **συμπαγής μετρικός χώρος**.

1.4 Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης

Ορισμός 1.4.1: **Πραγματικός διανυσματικός χώρος** (ή γραμμικός χώρος) ονομάζεται μια τριάδα (X,+,•), όπου X είναι ένα σύνολο, $+ : X \times X \to X$ μια εσωτερική πράξη (πρόσθεση) και $\bullet : \mathbb{R} \times X \to X$ μια εξωτερική πράξη (βαθμωτό γινόμενο) που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

i. $(x+y)+z=x+(y+z)$ για κάθε $x, y, z \in X$,
ii. $x+y=y+x$, για κάθε $x, y \in X$,
iii. Υπάρχει ένα στοιχείο 0 του X, που ονομάζεται μηδενικό στοιχείο, ώστε $x+0=0+x=x$, για κάθε $x \in X$,
iv. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα στοιχείο $-x$ του X, που ονομάζεται αντίθετο του x, ώστε $x + (-x) = 0$,
v. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$, για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$,
vi. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
vii. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
viii. $1x=x$, για κάθε $x \in X$.

Ορισμός 1.4.2: Μια διμελής σχέση $\leq$ σε ένα μη κενό σύνολο E καλείται **μερική διάταξη στο E** αν είναι:

i. Αυτοπαθής, δηλαδή $x \leq x$, για κάθε $x \in X$,
ii. Μεταβατική, δηλαδή αν $x, y, z \in E$ με $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$,
iii. Αντισυμμετρική, δηλαδή αν $x, y \in E$ με $x \leq y$ και $y \leq x$, τότε $x = y$.

Αν $\leq$ είναι μια μερική διάταξη σε ένα σύνολο E, τότε ο $(E, \leq)$ καλείται **μερικά διατεταγμένος χώρος**.

Ορισμός 1.4.3: Ένα υποσύνολο T ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται **κυρτό** αν για κάθε $x, y \in T$ και $0 \leq \lambda \leq 1$ είναι $\lambda x+(1-\lambda)y \in T$.

Ορισμός 1.4.4: Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **χώρος Banach** αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα.

Σημείωση: Με άλλα λόγια, ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X.

Ορισμός 1.4.5: Έστω X και Y πραγματικοί χώροι Banach και έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Θα λέμε ότι η $\varphi : U \to Y$ είναι **Fréchet διαφορίσιμη** στο u αν υπάρχει ένα $A \in L(X, Y)$ τέτοιο ώστε:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\varphi(u+h) - \varphi(u) - A(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Ένα τέτοιο A θα καλείται Fréchet διαφορικό της φ στο u και θα συμβολίζεται με $A = D\varphi(u)$. Εάν η φ είναι Fréchet διαφορίσιμη σε κάθε $u \in U$, θα λέμε ότι η φ είναι Fréchet διαφορίσιμη στο U. Σε αυτήν την περίπτωση η απεικόνιση $\varphi' : U \to L(X, Y)$ θα ορίζεται ως $\varphi'(u) = D\varphi(u)$ και θα καλείται **Fréchet διαφορικό** της φ.

1.5 Αλγεβρική Εξίσωση Riccati

Αξίζει να αναφερθούμε στην Αλγεβρική Εξίσωση Riccati , η οποία παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην μελέτη των προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου και αποτελεί την αφετηρία για την εργασία μας.

Η Αλγεβρική Εξίσωση Riccati είναι ένας τύπος μη γραμμικής εξίσωσης, η οποία προκύπτει στα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου απείρου ορίζοντα σε συνεχή ή διακριτό χρόνο.

Η Αλγεβρική Εξίσωση Riccati για συνεχή χρόνο είναι της μορφής:

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + Q = 0$$

όπου,

X :ένας άγνωστος n x n συμμετρικός πίνακας

A,B,Q,R: γνωστοί, πραγματικοί συντελεστές πινάκων.

Αντίστοιχα η Αλγεβρική Εξίσωση Riccati για διακριτό χρόνο είναι της μορφής:

$$X = A^*XA - (A^*XB + S^*)(R = B^*XB)^{-1}(B * XA + S) + Q$$

όπου,

X: ένας άγνωστος n x n συμμετρικός πίνακας

A,B,Q,R: γνωστοί, πραγματικοί συντελεστές πινάκων.

Εμείς θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην Αλγεβρική Εξίσωση Riccati (AER) σε διακριτό χρόνο ,η οποία θα μας χρησιμεύσει και στην συνέχεια.

Αλγεβρική Εξίσωση Riccati για διακριτό χρόνο

Το πρόβλημα εύρεσης του ελέγχου u για το γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου είναι:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = 0$$

όπου A: είναι ένας nxn πίνακας

B: είναι ένας nxm πίνακας, ο οποίος ελαχιστοποιεί την τετραγωνική μορφή

$$J(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S^* \\ S & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix},$$

όπου,

S: είναι ένας m x n πίνακας

Q: είναι ένας n x n θετικά ημιορισμένος πίνακας ή ερμιτιανός

R: είναι ένας m x m θετικά ορισμένος πίνακας

Η λύση u αυτού του προβλήματος μπορεί να δοθεί μέσω της μέγιστης ερμιτιανής λύσης της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati διακριτού χρόνου και δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$X = A^*XA + Q - (A^*XB + S^*)(R + B^*XB)^{-1}(B^*XA + S).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

2.1 Η Μορφή των Συμμετρικών εξισώσεων Πινάκων

Η μορφή των εξισώσεων πινάκων που θα μας απασχολήσει είναι η :

$$X + A^{*}\Phi(X)A = M \qquad (2.1)$$

όπου, ο A είναι ένας τυχαίος m x n πίνακας,

ο M είναι ένας θετικά ορισμένος n x n πίνακας,

και η Φ είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο των n x n θετικά ορισμένων πινάκων, η οποία είναι συνήθως μη γραμμική.

Οι εξισώσεις αυτής της μορφής προκύπτουν από την εξίσωση Riccati, η οποία αποτέλεσε τον λόγο μελέτης τους. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι εάν πάρουμε την εξίσωση Riccati στην μορφή:

$$X = A^{*}XA + M - A^{*}XB(R + B^{*}XB)^{-1}B^{*}XA\,, \qquad (2.2)$$

η οποία είναι ακριβώς η μέγιστη ερμιτιανή λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati διακριτού χρόνου έχοντας θέσει όπου S=0, τότε αυτή είναι της μορφής (2.1).

Αυτό μπορούμε να το δούμε αντικαθιστώντας τον B με τον $BR^{-\frac{1}{2}}$,τότε έχουμε ότι:

$$X = A^{*}XA + M - A^{*}XB(R + B^{*}XB)^{-1}B^{*}XA$$

$$\Rightarrow X = A^{*}XA + M - A^{*}X\left(BR^{-\frac{1}{2}}\right)\left(R + \left(BR^{-\frac{1}{2}}\right)^{*}X\left(BR^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^{-1}\left(BR^{-\frac{1}{2}}\right)^{*}XA\,.$$

Ανάγοντας στην περίπτωση όπου $R=I_n$, ο I_n είναι ο n x n ταυτοτικός πίνακας, τότε έχουμε τα εξής :

$$X = A^{*}XA + M - A^{*}XB(I_n + B^{*}XB)^{-1}B^{*}XA\,. \qquad (2.3)$$

Υπό τον περιορισμό, που έχουμε θέσει, ότι ο M είναι θετικά ορισμένος, τελικά η εξίσωση (2.3) είναι της μορφής (2.1) και η συνάρτηση Φ θα δίνεται από τον τύπο:

$$\Phi(X) = -X + XB(I_n + B^{*}XB)^{-1}B^{*}X. \qquad (2.4)$$

Αυτό προκύπτει εύκολα από την εξίσωση (2.3) ως εξής:

$$X = A^*XA + M - A^*XB(I_n + B^*XB)^{-1}B^*XA$$

$$\Rightarrow\ (A^*)^{-1}X = \ (A^*)^{-1}A^*XA + (A^*)^{-1}M - (A^*)^{-1}A^*XB(I_n + B^*XB)^{-1}B^*XA$$

$$\Rightarrow (A^*)^{-1}X = (A^{-1})^*A^*XA + (A^*)^{-1}M - (A^{-1})^*A^*XB(I_n + B^*XB)^{-1}B^*XA$$

$$\Rightarrow (A^*)^{-1}X = (AA^{-1})^*XA + (A^*)^{-1}M - (AA^{-1})^*XB(I_n + B^*XB)^{-1}B^*XA\,,$$

όμως γνωρίζουμε ότι $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, επομένως,

$$\Rightarrow (A^*)^{-1}X = I_n^*XA + (A^*)^{-1}M - I_n^*XB(I_n + B^*XB)^{-1}B^*XA$$

$$\Rightarrow (A^*)^{-1}X = XA + (A^*)^{-1}M - XB(I_n + B^*XB)^{-1}B^*XA$$

$$\Rightarrow (A^*)^{-1}XA^{-1} = XAA^{-1} + (A^*)^{-1}MA^{-1} - XB(I_n + B^*XB)^{-1}B^*XAA^{-1}$$

$$\Rightarrow\ (A^*)^{-1}XA^{-1} = XI_n + (A^*)^{-1}MA^{-1} - XB(I_n + B^*XB)^{-1}B^*XI_n$$

$$\Rightarrow -X + XB(I_n + B^*XB)^{-1}B^*X = -(A^*)^{-1}XA^{-1} + (A^*)^{-1}MA^{-1}.$$

Παίρνοντας την (2.1) παρατηρούμε ότι:

$$X + A^*\Phi(X)A = M$$

$$\Rightarrow (A^*)^{-1}XA^{-1} + (A^*)^{-1}A^*\Phi(X)AA^{-1} + (A^*)^{-1}MA^{-1}$$

$$\Rightarrow \Phi(X) = +(A^*)^{-1}MA^{-1} - (A^*)^{-1}XA^{-1}.$$

Επομένως αφού τα δεύτερα μέλη είναι ίσα θα είναι και τα πρώτα έτσι:

$$\Phi(X) = -X + XB(I_n + B^*XB)^{-1}B^*X\,.$$

Πράγματι, λοιπόν η αλγεβρική εξίσωση Riccati διακριτού χρόνου είναι της μορφής (2.1), δηλαδή της μορφής των συμμετρικών εξισώσεων πινάκων που μελετάμε.

2.2 Η Εξίσωση $F(X) = M - A^*\Phi(X)A$

Οι S.M. El-Sayed και A.C.M Ran μελετώντας τις μη γραμμικές εξισώσεις πινάκων έκαναν την εξής παραδοχή. Θεωρώντας ότι στην εξίσωση

$$X + A^*\Phi(X)A = M \,, \qquad (2.1)$$

- η συνάρτηση Φ είναι μονότονη,
- ο πίνακας $M - A^*\Phi(M)A$ είναι θετικά ορισμένος,

ορίζουν τις λύσεις της (2.1) ως σταθερά σημεία της απεικόνισης

$$F(X) = M - A^*\Phi(X)A \,. \qquad (2.4)$$

Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να εφαρμόσουμε Θεωρήματα Σταθερού Σημείου για την μελέτη της ύπαρξης και της μοναδικότητας της λύσης της (2.1) εξίσωσης.

2.3 Χρήσιμα Θεωρήματα Σταθερού Σημείου

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την ύπαρξη λύσεων της εξίσωσης,

$$X + A^*\Phi(X)A = M \,, \qquad (2.1)$$

για διαφορετικές συναρτήσεις Φ, καθώς και την μοναδικότητα των λύσεων αυτών. Πιο συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε μόνο με τις θετικά ορισμένες λύσεις της εξίσωσης πινάκων: $X + A^*\Phi(X)A = M$ και θα εξετάσουμε την μοναδικότητα τους. Οφείλουμε να επισημάνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης (2.1) είναι τα σταθερά σημεία της συνάρτησης $F(X) = M - A^*\Phi(X)A$.

Θεώρημα 2.3.1.(Σταθερού Σημείου του Schauder)

Εάν K ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X και $\varphi: K \to K$ μια συνεχής απεικόνιση, τότε υπάρχει $\bar{x} \in K$,τέτοιο ώστε $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$.

Απόδειξη.

Έστω X ένας χώρος Banach. Έστω δοθέν $\varepsilon > 0$, παρατηρούμε ότι η οικογένεια ανοικτών συνόλων $\{B_\varepsilon(x) : x \in S\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του K. Επειδή το K είναι συμπαγές υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχουν N σημεία $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_N$ του K τέτοια ώστε οι σφαίρες $B_\varepsilon(\rho_i)$ να καλύπτουν όλο το σύνολο K.

Έστω K το κυρτό περίβλημα των $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_N$ και V_ε ο (N-1)-διάστατος χώρος που περιέχει αυτά τα σημεία έτσι ώστε $K_\varepsilon \subset V_\varepsilon$.

Τώρα ορίζουμε μια προβολή $\pi_\varepsilon : X \rightarrow V_\varepsilon$ τέτοια ώστε: $\|\pi_\varepsilon(x) - \pi_\varepsilon(y)\| \leq \|x - y\|$ και ορίζουμε:

$$f_\varepsilon : K_\varepsilon \rightarrow K_\varepsilon,\ f_\varepsilon(x) = \pi_\varepsilon(f(x)).$$

Αυτή είναι μια συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σε ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο K_ε ενός πεπερασμένου διανυσματικού χώρου V_ε . Από το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer, δεχόμαστε ότι $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$.

Αφού το K είναι ακολουθιακά συμπαγές μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $\varepsilon_\kappa \rightarrow 0$ τέτοια ώστε $x_\kappa = x_{\varepsilon\kappa}$, η οποία να συγκλίνει σε κάποιο σταθερό σημείο $\overline{x} \in K$.

Ισχυριζόμαστε ότι $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Γνωρίζουμε ότι: $f_{\varepsilon\kappa}(x_\kappa) = x_\kappa$ τείνει στο $\overline{x}$.

Συνοψίζοντας, χρειάζεται μόνο να δείξουμε ότι $f_{\varepsilon\kappa}(x_\kappa)$ τείνει στο $f(\overline{x})$ ή ισοδύναμα ότι $\|f_{\varepsilon\kappa}(x_\kappa) - f(\overline{x})\|$ τείνει στο 0 .

Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|f_{\varepsilon\kappa}(x_\kappa) - f(\overline{x})\| &= \|\pi_{\varepsilon\kappa}(f(x_\kappa) - f(\overline{x})\| \\ &\leq \|\pi_{\varepsilon\kappa}(f(x_\kappa) - f(x_\kappa)\| + \|f(x_\kappa) - f(\overline{x})\| \\ &\leq \varepsilon_\kappa + \|f(x_\kappa) - f(\overline{x})\|, \end{aligned}$$

η οποία τείνει στο 0, το : $\|\pi_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon$ επειδή το $x \in K$ το οποίο περιέχεται σε μια σφαίρα B_ε με κέντρο το K_ε .

◻

Παρατηρήσεις:

1) Εμείς θα ασχοληθούμε με σύνολα της μορφής [A,B], όπου τα A , B ανήκουν στο σύνολο H(n), των n x n ερμιτιανών πινάκων. Αυτά τα σύνολα τα θεωρούμε συμπαγή. Πράγματι είναι συμπαγή γιατί είναι κλειστά υποσύνολα ενός πεπερασμένου χώρου με νόρμα.

2) Όπως παρατηρούμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder δεν μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα του σταθερού σημείου.

Ένα θεώρημα που, υπό συνθήκες μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα του είναι το Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach , το οποίο αναφέρουμε παρακάτω.

Θεώρημα 2.3.2.(Σταθερού Σημείου του Banach)

Έστω ο X ένας πλήρης μετρικός χώρος. Τότε κάθε συνάρτηση συστολής $\varphi : X \to X$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_0 \in X$ ώστε $\varphi(x_0)= x_0$.

Απόδειξη.

Η φ είναι συστολή, από τον ορισμό έστω $0 < C < 1$ τέτοιο ώστε να ισχύει για την φ ότι: $\rho(\varphi(x),\varphi(y)) \leq C\ \rho(x,y)$, για κάθε $x,y \in X$. Για $n = 1,2,3,\ldots\ldots$ θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi^n : X \to X$ με $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \ \ldots \ldots \circ \varphi}_{n\ \text{φορές}}$.

Αλλιώς η φ^n ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$\varphi^1 = \varphi$$

και $$\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n \text{, για } n = 1,2,\ldots\ .$$

Έστω ένα τυχαίο σημείο $x \in X$.

Ισχυριζόμαστε ότι η $\left(\varphi^n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Κατ' αρχήν με επαγωγή αποδεικνύεται ότι $\rho(\varphi^n(x), \varphi^{n+1}(x)) \leq C^n\ \rho(x, \varphi(x))$ για κάθε n=1,2,... . Επομένως, αν m, n φυσικοί με $m < n$,τότε

$$\begin{aligned}
\rho\left(\varphi^n(x), \varphi^m(x)\right) &\leq \rho\left(\varphi^n(x), \varphi^{n+1}(x)\right) + \rho\left(\varphi^{n+1}(x), \varphi^{n+2}(x)\right) + \cdots + \\
&\quad \cdots + \rho(\varphi^{m-1}, \varphi^m(x)) \\
&\leq C^n\ \rho\left(x, \varphi(x)\right) + C^{n+1}\rho\left(x, \varphi(x)\right) + \cdots + C^{m-1}\rho\left(x, \varphi(x)\right) \\
&\leq \rho\left(x, \varphi(x)\right)C^n\ (1 + C + \cdots + C^{m-n+1}) \\
&\leq \rho\left(x, \varphi(x)\right)C^n\ \frac{1}{1-C},
\end{aligned}$$

αφού το $0 < C < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} C^k$ συγκλίνει στο $\frac{1}{1-C}$.

Έστω, λοιπόν $\varepsilon > 0$, επιλέγω $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\rho(x, \varphi(x)) \frac{C^{n_0}}{1-C} < \varepsilon$.

Τότε για κάθε $m > n \geq n_0$ έχουμε ότι : $\rho(\varphi^n(x), \varphi^m(x)) < \varepsilon$.Επομένως η ακολουθία $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Επίσης, ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος, άρα η $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ως Cauchy ακολουθία θα συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in X$.

Ακόμη, η συνάρτηση φ είναι Lipschitz με σταθερά C, άρα είναι συνεχής.

Συνεπώς, από Αρχή της Μεταφοράς η ακολουθία $\varphi((\varphi^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, άρα από τον ορισμό μας η συνάρτηση $(\varphi^{n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει στο $\varphi(x_0)$. Όμως, η $(\varphi^{n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, είναι υπακολουθία της $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ και άρα συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτήν, δηλαδή στο x_0. Από την μοναδικότητα του ορίου έπεται ότι $\varphi(x_0)=x_0$, δηλαδή το σταθερό σημείο της φ είναι τελικά το x_0 .

Για να δείξουμε τώρα ότι είναι μοναδικό το σταθερό σημείο, θα υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένα δεύτερο σταθερό σημείο, το $y_0 \in X$, με $x_0 \neq y_0$ ούτως ώστε $\varphi(y_0)=y_0$. Τότε, $\rho(x_0 ,y_0)=\rho(\varphi(x_0), \varphi(y_0)) \leq C\, \rho(x_0,y_0)$ και αφού $\rho(x_0,y_0) > 0$ (καθώς $x_0\neq y_0$) έπεται ότι $1 \leq C$, άτοπο. Άρα το σταθερό σημείο είναι μοναδικό.

□

Επίσης, μπορούμε να ελέγξουμε εάν η απεικόνιση φ είναι συστολή, ελέγχοντας την τιμή της ποσότητας $\|D\varphi(u)\|$. Εάν είναι $\|D\varphi(u)\| <1$, $\forall\, u \in U$, όπου U ένα ανοικτό υποσύνολο του X , τότε η φ είναι συστολή. Αυτό προκύπτει από το παρακάτω θεώρημα.

Λήμμα 2.3.4.

Έστω X , Υ πραγματικοί Banach χώροι και έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Έστω $\varphi : U \to Y$ μια Frèchet διαφορίσιμη συνάρτηση στο U. Εάν u,v $\in$ U και είναι τέτοια ώστε $L_{u,v} \subset U$, τότε

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_y \leq \sup_{w\in L_{u,v}} \|D\varphi(w)\| \|u - v\|_x .$$

Η φ είναι συστολή στον U, εάν: $X = Y$, $\varphi : U \to U$ και $\|D\varphi(u)\| < 1$, $\forall\, u \in U$.

Απόδειξη :

Γνωρίζουμε ότι: $\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_y \leq \sup_{w \in Lu,v} \|D\varphi(w)\| \|u - v\|_x$ (1).

Επίσης, $\|D\varphi(u)\| < 1, \forall\, u \in U$.

Αν $w \in L_{U,V}$ τότε αυτό ερμηνεύεται ως: $w \in L_{U,V} = \{tu + (1 - t)v, t \in [0,1]\}$.

Θέλουμε να καταλήξουμε στο ότι η φ είναι συστολή, δηλαδή ότι:

$\exists\, 0 < c < 1$ τέτοιο ώστε $\rho(\varphi(x),\varphi(y)) \leq C\, \rho(x,y)$, όμως από την

(1) => $\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_y \leq \sup_{w \in Lu,v} \|D\varphi(w)\| \|u - v\|_x < \sup_{w \in Lu,v} ||u\text{-}v||_x$.

Επομένως, το $C= \sup_{w \in Lu,v} ||u\text{-}v||_x$ και η φ είναι συστολή.

Θεώρημα 2.3.3.

Έστω X , Y πραγματικοί Banach χώροι και έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Έστω $\varphi : U \to Y$ μια Frèchet διαφορίσιμη συνάρτηση στο U. Εάν u,v $\in$ U και είναι τέτοια ώστε $L_{u,v} \subset U$, τότε

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_y \leq \sup_{w \in Lu,v} \|D\varphi(w)\| \|u - v\|_x .$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $X+A^*\Phi(X)A=M$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την εξίσωση $X + A^*\Phi(X)A = M$, στην πιο γενική της μορφή. Αρχικά, θεωρούμε ότι η συνάρτηση Φ, ορίζεται ως: $\Phi : B(n) \to B(q)$ ή $\Phi : B(n) \to -B(q)$, όπου όπως έχουμε προαναφέρει το $B(n)$ είναι οικογένεια θετικά ορισμένων n x n πινάκων και το $-B(n)$ οικογένεια αρνητικά ορισμένων πινάκων. Η συνάρτηση Φ δεν έχει κάποια συγκεκριμένη μορφή στο κεφάλαιο αυτό, εκτός και αν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό.

3.1 Ύπαρξη Λύσης της $X + A^*\Phi(X)A = M$

Σε αυτήν την παράγραφο θα μελετήσουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες υπάρχει λύση της $X + A^*\Phi(X)A = M$ (2.1). Για την μελέτη αυτή ,θα χρησιμοποιήσουμε τον ισχυρισμό των S.M. El-Sayed και A.C.M Ran, δηλαδή ότι οι λύσεις (2.1) είναι τα σταθερά σημεία της απεικόνισης $F(X)=M - A^*\Phi(X)A$.

Έτσι, λοιπόν βασιζόμενοι στο Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder θα μελετήσουμε τελικά τις συνθήκες υπό τις οποίες υπάρχει η λύση της (2.1) .

Λήμμα 3.1.1.

Έστω $M \in B(n)$, $A \in M(q,n)$ και έστω $\Phi: \overline{B}(n) \to \overline{B}(q)$ μια συνεχής συνάρτηση στο $[0,M]$.

(1) Εάν η εξίσωση (2.1) έχει θετικά ημιορισμένη λύση $\bar{X}$, τότε $\bar{X} \leq M$ και $A^*\Phi(\bar{X})A \leq M$,

(2) Εάν $A^*\Phi(X)A \leq M$, για κάθε $X \in [0,M]$, τότε η (2.1) έχει λύση στο $[0,M]$.

Απόδειξη.

Ας υποθέσουμε αρχικά, ότι η (2.1) έχει μια λύση $\bar{X} \geq 0$, η Φ έχει εικόνες στο σύνολο $\overline{B}(q)$, δηλαδή στο σύνολο των θετικά ημιορισμένων q x q πινάκων, επομένως $\Phi(\bar{X}) \geq 0$. Όμως, αυτό σημαίνει ότι ο $A^*\Phi(\bar{X})A \geq 0$, επομένως από την (2.1), $\bar{X}+A^*\Phi(\bar{X})A=M \Rightarrow \bar{X} = M-A^*\Phi(\bar{X})A$.

Όμως $M-A^*\Phi(\bar{X})A \leq M$, άρα $\bar{X} \leq M$.

Αφού $\bar{X} \geq 0$, αυτό συνεπάγεται ότι:

$$0 \leq \bar{X} \leq M - A^*\Phi(\bar{X})A \leq M$$

άρα $$A^*\Phi(\bar{X})A = M - \bar{X} \leq M.$$

Οπότε αποδείχθηκε ότι $A^*\Phi(\bar{X})A \leq M$, που είναι το (1) του Λήμματος 3.1.1. .

Υποθέτουμε ότι $A^*\Phi(X)A \leq M, \forall\, X \in [0, M]$. Τότε,

$$F(X) = M - A^*\Phi(X)A \in [0, M] \text{ για } X \in [0, M]\,.$$

Οπότε η F αντιστοιχεί το [0,M] στο [0,M], το οποίο είναι ένα κλειστό, συμπαγές σύνολο. Επίσης, η F είναι συνεχής στο [0,M], επειδή η Φ είναι και αυτή συνεχής στο σύνολο αυτό. Οπότε από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder προκύπτει ότι η F έχει ένα σταθερό σημείο στο [0,M]. Όπως, όμως έχουμε προαναφέρει αυτό το σταθερό σημείο είναι και λύση της (2.1), άρα αποδείχθηκε το (2) Λήμματος 3.1.1. .

□

Πόρισμα 3.1.2.

Έστω $M \in B(n)$, $A \in M(q,n)$ και έστω μια συνάρτηση $\Phi : \overline{B}(n) \to \overline{B}(q)$, η οποία είναι συνεχής και αύξουσα, τέτοια ώστε $A^*\Phi(M)A \leq M$. Τότε η εξίσωση (2.1) έχει μια λύση στο [0,M]. Επίσης, κάθε θετικά ημιορισμένη λύση της περιέχεται στο [0,M].

Απόδειξη.

Η Φ είναι αύξουσα και ισχύει ότι $A^*\Phi(M)A \leq M$, τότε μπορούμε να πούμε ότι:

$$X \leq M \Rightarrow \Phi(X) \leq \Phi(M),$$

άρα, επειδή η Φ αύξουσα,

$$A^*\Phi(X)A \leq A^*\Phi(M)A\,,$$

και από την συνθήκη του Πορίσματος 3.1.2 ισχύει ότι

$$A^*\Phi(X)A \leq A^*\Phi(M)A \leq M.$$

Άρα το Λήμμα 3.1.1.(2) ικανοποιείται και έτσι η (2.1) έχει λύση στο [0,M].

□

Παρατήρηση 3.1.3.

Όπως έχουμε αναφέρει οι λύσεις της (2.1), είναι τα σταθερά σημεία της συνάρτησης $F(X) = M - A^*\Phi(X)A$. Το Πόρισμα 3.1.2 λοιπόν, έχει την εξής εφαρμογή στην F: $0 \leq X \leq M$ και η Φ είναι αύξουσα, άρα

$$\Phi(X) \leq \Phi(M)$$

$$\Rightarrow A^*\Phi(X)A \leq A^*\Phi(M)A$$

$$\Rightarrow -A^*\Phi(X)A \geq -A^*\Phi(M)A$$

$$\Rightarrow M - A^*\Phi(X)A \geq M - A^*\Phi(M)A$$

$$\Rightarrow F(X) \geq F(M)$$

άρα η F είναι φθίνουσα .

Οπότε υπό τις συνθήκες του πορίσματος, κάθε θετικά ημιορισμένη λύση της (2.1) περιέχεται στο [F(M),M].

□

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου η $\Phi(X)$ έχει αρνητικά ορισμένες τιμές, δηλαδή $\Phi: B(n) \to -B(q)$ και θα μελετήσουμε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε.

Λήμμα 3.1.4.

Έστω $M \in B(n)$, $A \in B(q,n)$ και έστω $\Phi : \overline{B}(n) \to -\overline{B}(q)$ μια συνεχής απεικόνιση στο σύνολο $\{X \in B(n) \,/\, X \geq M\}$.

(i) Εάν η (2.1) έχει θετικά ημιορισμένη λύση $\bar{X}$, τότε $\bar{X} \geq M$. Για αυτό, κάθε θετικά ημιορισμένη λύση της (2.1) είναι θετικά ορισμένη.

(ii) Εάν υπάρχει $N \geq M$, τέτοια ώστε

$$M - N \leq A^*\Phi(X)A \leq 0 \text{ , για όλα τα } X \in [M,N] \qquad (3.1.1)$$

τότε η (2.1) έχει λύση στο [M,N]. Επίσης, η (3.1.1) ικανοποιείται για κάθε $X \geq M$. Τότε όλες οι θετικά ημιορισμένες λύσεις της (2.1) περιέχονται στο [M,N] .

Απόδειξη.

(i) Θέλουμε να δείξουμε ότι εάν η (2.1) έχει θετικά ημιορισμένη λύση $\bar{X}$, τότε $\bar{X} \geq M \Rightarrow \bar{X} - M \geq 0$, άρα κάθε θετικά ημιορισμένη λύση της είναι θετικά ορισμένη.

Αυτό προκύπτει από το ότι η $\Phi(\bar{X}) \leq 0$, αφού έχει αρνητικά ορισμένες τιμές, και

$$\bar{X} + A^*\Phi(\bar{X})A = M \Rightarrow \bar{X} = M - A^*\Phi(\bar{X})A$$

που αυτή η ποσότητα είναι θετική, άρα κάθε θετικά ημιορισμένη λύση της (2.1), όπως η $\bar{X}$, είναι θετικά ορισμένη.

(ii) Υποθέτουμε ότι υπάρχει πίνακας $N \geq M$, τέτοιος ώστε η (3.1.1) να διατηρείται.

Έστω $X \in [M,N]$.Τότε,

$$M - N \leq A^*\Phi(X)A \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq -A^*\Phi(X)A \leq N - M$$

$$\Rightarrow M \leq M - A^*\Phi(X)A = F(X) \leq N$$

$$\Rightarrow M \leq F(X) \leq N.$$

Καταλήγουμε, λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η F αντιστοιχεί το [M,N] στον εαυτό του και η F είναι συνεχής σε αυτό το σύνολο. Επομένως, έχει ένα σταθερό σημείο στο [M,N]. Όμως, το σταθερό σημείο της F είναι λύση της (2.1). Άρα η (2.1) έχει λύση στο [M,N].

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η (3.1.1) διατηρείται για όλα τα $X \geq M$ και έστω $\bar{X} \geq 0$ μια λύση της (2.1). Τότε:

$$\bar{X} = M - A^*\Phi(\bar{X})A \leq M - (M - N) = N$$

άρα $\bar{X} \leq N$. Όμως, γνωρίζουμε ότι η $\bar{X} \geq M$. Τελικά, λοιπόν η $\bar{X} \in [M,N]$. Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Όπως έχουμε αναφέρει, η μελέτη μας είναι άρρηκτα δεμένη με την συνάρτηση $F(X) = M - A^*\Phi(X)A$. Η παρακάτω συνέπεια θα μας συνδέσει το Λήμμα 3.1.4. με την συνάρτηση αυτή.

Συνέπεια 3.1.5.

Έστω $M \in B(n)$, $A \in M(q,n)$ και $\Phi: \overline{B}(n) \to -\overline{B}(q)$ μια συνεχής και αύξουσα συνάρτηση. Τότε η (2.1) έχει μια λύση στο $[M,F(M)]$ και κάθε θετικά ημιορισμένη λύση της (2.1) περιέχεται στο σύνολο αυτό.

Απόδειξη.

Αφού η Φ είναι αύξουσα συνάρτηση στο σύνολο $-\overline{B}(q)$, η F θα είναι φθίνουσα. Αυτό το αποδείξαμε και στην Συνέπεια 3.1.2.. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι $X \geq M$, θα ισχύει ότι

$$F(X) \leq F(M) \Rightarrow M - A^*\Phi(X)A \leq F(M) \Rightarrow M - F(M) \leq A^*\Phi(X)A$$

για όλα τα $X \geq M$. Όμως η $\Phi \in -\overline{B}(q)$, οπότε και η

$$M - F(M) \leq 0 \Rightarrow M \leq F(M).$$

Παρατηρούμε, λοιπόν ότι υποθέτοντας ότι $N=F(M)$ ικανοποιείται το (ii) του Λήμματος 3.1.4.. □

Παρατήρηση 3.1.6.

Όπως είδαμε προηγουμένως, όταν η συνάρτηση Φ είναι αύξουσα, η συνάρτηση $F(X) = M - A^*\Phi(X)A$ είναι φθίνουσα. Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε ότι όταν η Φ είναι φθίνουσα, η F θα είναι αύξουσα. Αυτό γίνεται ως εξής:

Έστω $\Phi : \overline{B}(n) \to -\overline{B}(q)$ φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση, τότε η $F(X) = M - A^*\Phi(X)A$ αποδεικνύεται ότι είναι φθίνουσα ως εξής, το $X \geq M$

$$\Rightarrow \Phi(X) \geq \Phi(M)$$

$$\Rightarrow A^*\Phi(X)A \geq A^*\Phi(M)A$$

$$\Rightarrow -A^*\Phi(X)A \leq -A^*\Phi(M)A$$

$$\Rightarrow M - A^*\Phi(X)A \leq M - A^*\Phi(M)A$$

$$\Rightarrow F(X) \leq F(M) .$$

Επομένως, η F είναι πράγματι αύξουσα. Συμπεραίνουμε, λοιπόν ότι όταν η μια από τις δύο συναρτήσεις F και Φ, έχει ένα είδος μονοτονίας, η άλλη θα έχει το αντίθετο εξ ορισμού τους.

Πόρισμα 3.1.7.

Έστω $M \in B(n)$, $A \in M(q,n)$ και έστω $\Phi : \overline{B}(n) \rightarrow -\overline{B}(q)$ είναι συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση, τέτοια ώστε να υπάρχει $\tilde{X}_0 > 0$, το οποίο να ικανοποιεί την $F(\tilde{X}_0) \leq \tilde{X}_0$. Η εξίσωση (2.1) έχει μια λύση στο $[M, \tilde{X}_0]$. Επίσης, η ακολουθία $\{F^k(M)\}_{k=0}^{\infty}$ αυξάνεται στην μικρότερη λύση της (2.1), ενώ η ακολουθία $\{F^k(\tilde{X}_0)\}_{k=0}^{\infty}$ μειώνεται στην μεγαλύτερη λύση της (2.1), εντός του συνόλου $[M, \tilde{X}_0]$.

Απόδειξη.

Από το Λήμμα 3.1.4 και την Συνέπεια 3.1.5 αποδεικνύεται η ύπαρξη λύσης εντός του $[M, \tilde{X}_0]$. Επομένως, θέλουμε να αποδείξουμε το δεύτερο τμήμα. Επειδή η $\Phi \in -\overline{B}(q)$, για κάθε $X \geq 0$, θα ισχύει ότι $F(X) \geq M$, για κάθε $X \geq 0$. Εάν θέσουμε $X=\tilde{X}_0$,τότε $M \leq F(\tilde{X}_0) \leq \tilde{X}_0$. Αφού η Φ είναι φθίνουσα, η F θα είναι αύξουσα (Παρατήρηση 3.1.6), οπότε θα ισχύει ότι: αν $M \leq X \leq \tilde{X}_0$

$$\Rightarrow M \leq F(M) \leq F(X) \leq F(\tilde{X}_0) \leq \tilde{X}_0 .$$

Εφαρμόζοντας επαναλαμβανόμενα την F βλέπουμε ότι η ακολουθία $\{F^k(M)\}_{k=0}^{\infty}$ είναι αύξουσα και φράζεται από ένα άνω όριο $F^k(\tilde{X}_0)$, για οποιαδήποτε τιμή του k, ενώ η $\{F^k(\tilde{X}_0)\}_{k=0}^{\infty}$ φθίνουσα και φράζεται από ένα κάτω όριο $F^l(\tilde{X}_0)$, για οποιαδήποτε τιμή του l. Και οι δύο όμως συγκλίνουν σε ένα θετικά ορισμένο όριο. Συμβολίζω με $X\_$,το όριο της $F^k(M)\}_{k=0}^{\infty}$ και με X_+, το όριο της $\{F^k(\tilde{X}_0)\}_{k=0}^{\infty}$. Έστω ότι η X είναι λύση της (2.1), τότε $M \leq F(X)$ και εφαρμόζοντας επαναλαμβανόμενα την F καταλήγουμε ότι $X\_ \leq X$. Εάν $X \in [M, \tilde{X}_0]$,τότε επαναλαμβάνοντας την F καταλήγουμε ότι $X \leq X_+$.

□

3.2 Εφαρμογή του Λήμματος σε Εξισώσεις

Εφαρμογή 1.

Έστω $M = I_n$ και $\Phi(X) = X^{\alpha}$, με $0 < \alpha \leq 1$. Αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής και αύξουσα. Υποθέτουμε ότι η $\|A\| < 1$, τότε όπως ήδη γνωρίζουμε αυτό ισοδυναμεί με την ανίσωση $A^*A < I_n$, επειδή η $\|\cdot\|$ είναι η φασματική νόρμα. Επομένως,

$$A^*\Phi(I_n)A = A^*I_nA = A^*A < I_n\ ,$$

από το Πόρισμα 3.1.2. η εξίσωση (2.1) έχει μια λύση στο διάστημα $[0,I_n]$. Επιπλέον, από την ανίσωση

$$F(I_n) > 0$$

$$\Rightarrow M - A^*\Phi(I_n)A > 0$$

$$\Rightarrow M - A^*A > 0$$

που ισχύει, άρα από την Παρατήρηση 3.1.3. προκύπτει ότι κάθε θετικά ημιορισμένη λύση της (2.1) είναι τελικά θετικά ορισμένη.

Εφαρμογή 2.

Στη συνέχεια παραθέτουμε μια εφαρμογή αυτού του λήμματος για την συνάρτηση $\Phi(X) = -X^{-\alpha}$ με $\alpha > 1$.

Έστω $M=I_n$ και $\Phi(X) = -X^{-\alpha}$, με $\alpha > 1$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο σύνολο $\{X \in B(n)/X \geq I_n\}$ και ορίζεται στο $B(n)$ και όχι σε ολόκληρο το $\overline{B}(n)$.

Επιπλέον, ικανοποιεί την ανίσωση (3.1.1), πράγματι:

για $M=I_n$, $N=I_n+A^*A$ αντικαθιστώντας στην (3.1.1) έχουμε ότι:

$$I_n - (I_n + A^*A) \leq A^*\Phi(X)A \leq 0$$

$$\Rightarrow -A^*A \ \leq A^*\Phi(X)A \ \leq 0$$

$$\Rightarrow -I_n \ \leq \Phi(X) \leq 0\ ,$$

που ισχύει αφού : $-I_n \leq \Phi(X) < 0$, για όλα τα $X \geq In$.

Επομένως, εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.1.4, παρατηρούμε ότι: υπάρχει $N=I_n+A^*A \geq M = I_n$, τέτοιο ώστε: $M-N \leq A^*\Phi(X)A \leq 0$, για κάθε $X \in [M,N]$.

Άρα από το λήμμα αφού η $-I_n \leq \Phi(X) < 0$, ικανοποιείται για όλα τα $X \geq I_n$, τότε όλες οι θετικά ορισμένες λύσεις της (2.1) περιέχονται στο [M,N]. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder συμπεραίνουμε ότι η $F(X) = M - A^*(-X^{-\alpha})A$, έχει σταθερό σημείο στο διάστημα $[I_n, I_n + A^*A]$.

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι η $\Phi(X) = -X^{-\alpha}$, με $\alpha > 1$, δεν ορίζεται σε όλο το $\overline{B}(n)$ αλλά μόνο στο $B(n)$, δηλαδή έχει μόνο θετικά ορισμένες και όχι θετικά ημιορισμένες λύσεις, όπως απαιτεί το Λήμμα 3.1.4, κάτι όμως, που δεν μας επηρεάζει στην εφαρμογή του.

□

3.3 Μελέτη της Μοναδικότητας της Λύσης της $X + A^*\Phi(X)A = M$

Όπως γνωρίζουμε για την μελέτη των λύσεων της εξίσωσης (2.1) είναι σκόπιμο να μελετούμε τα σταθερά σημεία της συνάρτησης F. Αξιοποιώντας, λοιπόν το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach για την F, μπορούμε να μελετήσουμε την μοναδικότητα των σταθερών σημείων της και κατ' επέκταση των λύσεων της (2.1). Εδώ είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι, για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Banach θα πρέπει η F να είναι συστολή και αν το Θεώρημα ισχύει, τότε το σταθερό σημείο της είναι μοναδικό, άρα και η λύση της (2.1).

Σε αυτό το σημείο υπενθυμίζουμε ότι $K(n)$ είναι ένα κλειστό διάστημα του $\overline{B}(n)$, όχι απαραίτητα φραγμένο. Επίσης, θεωρώ $M_{K(n)} > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η ανίσωση:

$$\|F(X) - F(Y)\| \leq M_{K(n)} \|X - Y\|, \text{ για } X, Y \in K(n) \qquad (3.3.1)$$

η οποία ορίζει την F συστολή.

Λήμμα 3.3.1.

Έστω ότι ο $M \in B(n)$, ο $A \in M(q, n)$ και έστω $\Phi : \overline{B}(n) \rightarrow \pm\overline{B}(q)$ μια συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε ότι η (2.1) έχει λύση στο διάστημα $K(n)$. Εάν η ανίσωση $\boldsymbol{M_{K(n)} \|A\|^2 < 1}$ διατηρείται, τότε η λύση αυτή είναι η μοναδική λύση στο $K(n)$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι οι X_1, X_2 είναι λύσεις της (2.1) στο διάστημα $K(n)$, με $X_1 \neq X_2$. Τότε θα επαληθεύουν την (2.1), επομένως:

$$X_1 - X_2 = A^*(\Phi(X_1) - \Phi(X_2))A$$

άρα,

$$\|X_1 - X_2\| \leq \|A\|^2 \ \|\Phi(X_1) - \Phi(X_2)\|$$

όμως, η συνάρτηση Φ είναι συστολή, άρα από την ανίσωση (3.3.1) ισχύει ότι :

$$\|X_1 - X_2\| \leq M_{K(n)} \|A\|^2 \ \|X_1 - X_2\|.$$

Άτοπο, καθώς ισχύει ότι $M_{K(n)}$ $\|A\|^2 < 1$, άρα $X_1 = X_2$ και επομένως, αποδείχθηκε ότι η λύση είναι μοναδική.

□

Στο επόμενο Λήμμα, θα αποδείξουμε ότι εάν η Φ απεικονίζει το K(n) στον εαυτό του, τότε η συνθήκη $M_{K(n)}$ $\|A\|^2 < 1$ είναι επαρκής για την ύπαρξη λύσης.

Λήμμα 3.3.2.

Έστω $M \in B(n)$, $A \in M(q,n)$ και έστω $\Phi : \overline{B}(n) \rightarrow \pm\overline{B}(q)$ συνεχής συνάρτηση. Εάν η F απεικονίζει το K(n) στον εαυτό του και $M_{K(n)}$ $\|A\|^2 <$ 1, τότε η εξίσωση (2.1) έχει μοναδική λύση $\bar{X}$ στο K(n) και

$$\lim_{k \to \infty} F^k(X) = \bar{X} \text{ για όλα τα } X \in K(n). \tag{3.3.2}$$

Απόδειξη.

Έστω ότι οι $X, Y \geq 0$, τότε χρησιμοποιώντας την (3.3.1), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|F(X) - F(Y)\| &= \|A^*\Phi(Y)A - A^*\Phi(X)A\| \\ &\leq \|A\|^2 \|\Phi(Y) - \Phi(X)\| \\ &\leq M_{K(n)} \|A\|^2 \|X - Y\| \end{aligned}$$

Άρα η συνθήκη $M_{K(n)}$ $\|A\|^2 < 1$ συνεπάγεται ότι η F είναι συστολή στο K(n), ο οποίος είναι πλήρης μετρικός χώρος. Οπότε από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η F έχει μοναδικό σταθερό σημείο $\bar{X}$ στο K(n) και ότι η (3.3.2) διατηρείται. □

3.4 Παρατηρήσεις επί των Λημμάτων

Στην παράγραφο 3.1 μελετήσαμε συγκεκριμένα τις περιπτώσεις όπου η Φ είναι αύξουσα ή φθίνουσα σε σχέση με την ύπαρξη λύσης σε συγκεκριμένα διαστήματα. Επομένως, εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3.2, για κάθε περίπτωση ξεχωριστά μπορούμε να καταλήξουμε σε ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις.

I) Εάν η Φ ορίζεται ως: $\Phi : \overline{B}(q) \to \overline{B}(q)$ και είναι αύξουσα, τότε από το Λήμμα 3.1.1 υπό την συνθήκη ότι $A^{*}\Phi(M)A \leq M$, το σύνολο K(n)=[0,M]. Επίσης από το Πόρισμα 3.1.2 γνωρίζουμε ότι κάθε θετικά ημιορισμένη λύση περιέχεται στο [0,M], οπότε εάν η $X + A^{*}\Phi(X)A = M$ έχει μοναδική λύση στο [0,M], θα έχει και στο $\overline{B}(n)$.

II) Εάν η Φ ορίζεται ως: $\Phi : \overline{B}(q) \to -\overline{B}(q)$ και είναι αύξουσα, τότε το σύνολο K(n) είναι $K(n) = \overline{B}(n)$ ή $K(n) = [M, F(M)]$. Επίσης από το Πόρισμα 3.1.5 γνωρίζουμε ότι κάθε θετικά ημιορισμένη λύση περιέχεται στο [M, F(M)], οπότε εάν η $X + A^{*}\Phi(X)A = M$ έχει μοναδική λύση στο [M, F(M)], θα έχει κατ' επέκταση μοναδική λύση και στο $\overline{B}(n)$ (αφού $[M, F(M)] \subset \overline{B}(n)$).

3.5 Θεώρημα Σταθερού Σημείου για Μερικώς Διατεταγμένα Σύνολα και Εφαρμογές

Στις προηγούμενες παραγράφους και ιδιαίτερα στην Παράγραφο 3.3, θεωρούσαμε ότι η συνάρτηση F είναι υπό συγκεκριμένες συνθήκες συστολή. Έτσι μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Banach στον πλήρη μετρικό χώρο K(n) για την συνάρτηση συστολής F. Επίσης, καταλήξαμε σε μια συνθήκη η οποία μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα της λύσης της (2.1), η οποία είναι: $M_{K(n)}\ \|A\|^2 < 1$, όπου $M_{K(n)}$ είναι ο συντελεστής της συστολής.

Σε αυτήν την παράγραφο θα μελετήσουμε μια διαφορετική συνθήκη μοναδικότητας για διάφορες μορφές της Φ, όμως πλέον θα αναφερόμαστε σε μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Για να επιτευχθεί αυτό θα ακολουθήσουμε ένα νέο Θεώρημα Σταθερού Σημείου, το οποίο θα αποδείξουμε παρακάτω.

Θεώρημα 3.5.1, (Σταθερού Σημείου)

Έστω Α ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και έστω ρ μια μετρική στο Α τέτοια ώστε (Α, ρ) να είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος. Εάν η Φ είναι μια συνεχής, μονότονη συνάρτηση, όπου $\Phi: A \rightarrow A$ τέτοια ώστε

$$\exists\ 0 \leq c \leq 1 : \rho(\Phi(x), \Phi(y)) \leq c\, \rho(x, y)\,, \tag{3.5.1}$$

για όλα τα $x,y \in A$ με $x \leq y$ και αν

$$\exists\ x_0 \in \mathbb{R} : x_0 \leq \Phi(x_0) \text{ ή } x_0 \geq \Phi(x_0)\,, \tag{3.5.2}$$

τότε η Φ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο. Επίσης, για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι η ακολουθία $\{\Phi^k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της.

Απόδειξη.

Έστω ένα $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $x_0 \leq \Phi(x_0)$ ή $x_0 \geq \Phi(x_0)$.Επειδή η Φ είναι μονότονη θα ισχύει επίσης ότι: $\Phi^k(x_0) \leq \Phi^{k+1}(x_0)$ ή ότι $\Phi^k(x_0) \geq \Phi^{k+1}(x_0)$ για $k = 0,1,2,3,\ldots$.

Επομένως από την συνθήκη (3.5.1) έχουμε ότι:

$$\exists\ 0 \leq c \leq 1 : \ \rho(\Phi^{k+1}(x_0), \Phi^k(x_0)) \leq c\, \rho(\Phi^k(x_0), \Phi^{k-1}(x_0))\,.$$

Επαγωγικά, λοιπόν μας δίνει την εξής ανίσωση,

$$\rho(\Phi^{k+1}(x_0), \Phi^k(x_0)) \le c^k \rho(\Phi(x_0), x_0) .$$

Ακολουθώντας, λοιπόν την απόδειξη του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Banach θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\{\Phi^k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ είναι Cauchy .
Έστω $k < l$, τότε,

$$\rho(\Phi^k(x_0), \Phi^l(x_0)) \le \sum_{i=k+1}^{l} \rho(\Phi^i(x_0), \Phi^{i-1}(x_0))$$

$$\le \left(c^k + c^{k+1} + \cdots + c^{l-k-1}\right)\rho(\Phi(x_0), x_0)$$

$$= c^k \, \frac{1-c^{l-k-1}}{1-c} \, \rho(\Phi(x_0), x_0) ,$$

δηλαδή, τελικά $\rho(\Phi^k(x_0), \Phi^l(x_0)) \le c^k \frac{1-c^{l-k-1}}{1-c} \rho(\Phi(x_0), x_0)$.

Επομένως η ακολουθία $\{\Phi^k(x_0)\}_{k=0}^{\infty}$ είναι πράγματι Cauchy.

Επιπλέον ο χώρος (Α,ρ) είναι πλήρης, άρα εξ ορισμού κάθε Cauchy (βασική) ακολουθία είναι συγκλίνουσα, επομένως : $\lim_{k\to\infty} \Phi^k(x_0) = \bar{x}$, για κάποιο $\bar{x} \in A$.
Όμως η Φ είναι, από υπόθεση, συνεχής συνάρτηση, οπότε: $\lim_{k\to\infty} \Phi^k(\bar{x}) = \bar{x}$, άρα το $\bar{x}$ είναι σταθερό σημείο της Φ.
Αποδείξαμε ότι το $\bar{x}$ είναι σταθερό σημείο της Φ, θέλουμε να δείξουμε ότι είναι και μοναδικό. Αν δείξουμε ότι το $\lim_{k\to\propto} \Phi^k(x) = \bar{x}$, για κάθε $x \in A$, τότε το $\bar{x}$ θα είναι μοναδικό σταθερό σημείο της Φ.
Για $x \le x_0$ και $x \ge x_0$ είναι προφανές ότι ισχύει διότι και στις δυο περιπτώσεις

$$\Phi^k(x) \le \Phi^k(x_0) \text{ ή } \Phi^k(x) \ge \Phi^k(x_0) .$$

Από την (3.5.1) έχουμε ότι: $\rho(\Phi^k(x), \Phi^k(x_0)) \le c^k \rho(x, x_0)$.

Το δεξί μέρος της παραπάνω ανίσωσης τείνει στο 0 αν το k τείνει στο ∞, επομένως, $\lim_{k\to\infty} \Phi^k(x) = \lim_{k\to\infty} \Phi^k(x_0) = \bar{x}$.

Εντέλει, έστω ένα τυχαίο $x \in A$ και έστω $x_1, x_2 \in A$ τέτοια ώστε $x, x_0 \in [x_1 ,x_2]$.

Επειδή $x_1 \le x \le x_2$ από την μονοτονία της Φ προκύπτει ότι:

$$\Phi^k(x_1) \ge \Phi^k(x) \ge \Phi^k(x_2) \quad (3.5.a) \text{ ή } \quad \Phi^k(x_1) \le \Phi^k(x) \le \Phi^k(x_2) \quad (3.5.b)$$

και επειδή $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ έχουμε ότι:

$$\lim_{k\to\infty} \Phi^k(x_1) = \lim_{k\to\infty} \Phi^k(x_2) = \bar{x} \qquad (3.5.c)$$

Συνδυάζοντας τις (3.5.a) , (3.5.b) , (3.5.c) καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

$$\lim_{k\to\infty} \Phi^k(x) = \bar{x}$$

κάτι που αποδεικνύει ότι είναι μοναδικό σταθερό σημείο το $\bar{x}$ και ολοκληρώνει την απόδειξη μας.

□

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η συνάρτηση $\Phi : M(n) \to M(nm)$ είναι της μορφής,

$$\Phi(X) = \mathrm{diag}\{\bar{\Phi}(X), \bar{\Phi}(X), \dots, \bar{\Phi}(X)\},$$

όπου $\bar{\Phi} : \bar{B}(n) \to \pm\bar{B}(n)$. Επομένως την εξίσωση (2.1) μπορούμε να την γράψουμε στην μορφή:

$$X + \sum_{i=1}^{m} A_i^* \bar{\Phi}(X) A_i = M. \qquad (3.5.3)$$

Παρατήρηση:

Για να μελετήσουμε την (3.5.3) με την βοήθεια του Θεωρήματος (3.5.1) θα ορίσουμε δύο συνθήκες για την $\bar{\Phi}(X)$.

- Αρχικά θεωρούμε ότι $\bar{\Phi}(X) = \pm X$,κατά αυτόν τον τρόπο η (3.5.3) γίνεται γραμμική εξίσωση πινάκων, που είναι και το αντικείμενο μελέτης μας.
- Κατά δεύτερον, θεωρούμε ότι η $\bar{\Phi}$ και ακολούθως η Φ, είναι μονότονη συνάρτηση, αύξουσα ή φθίνουσα. Έτσι εξασφαλίζουμε την συνθήκη που αναφέρει το Θεώρημα (3.5.1).

Στη συνέχεια θα δούμε την εφαρμογή του Θεωρήματος (3.5.1) σε γραμμικές εξισώσεις και θα καταλήξουμε σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα που αφορούν την ύπαρξη μοναδικής λύσης της (3.5.3).

Εφαρμογή για $\bar{\Phi}(X)=\pm X$ (Γραμμικές Εξισώσεις Πινάκων)

Οι γραμμικές εξισώσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε είναι της μορφής:

$$X - A_1^* X A_1 - \cdots - A_m^* X A_m = M \qquad (3.5.4)$$

και

$$X + A^*_1XA_1 + \cdots + A^*_mXA_m = M \qquad (3.5.5)$$

όπου $M \in B(n)$ και $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M(n)$.

Όπως προαναφέραμε ενδιαφερόμαστε για την μελέτη ύπαρξης μοναδικής λύσης των παραπάνω γραμμικών εξισώσεων. Η μελέτη αυτή θα γίνει με την βοήθεια του Θεωρήματος (3.5.1). Καθώς ασχολούμαστε με ένα Θεώρημα Σταθερού σημείου, σε αυτό το σημείο πρέπει να ορίσουμε τις συναρτήσεις F που οι λύσεις των (3.5.4) και (3.5.5) είναι τα σταθερά σημεία αυτών. Υπενθυμίζουμε ότι ο ορισμός αυτών των συναρτήσεων βασίζεται στον ισχυρισμό των S.M. El-Sayed και A.C.M Ran, ο οποίος αναφέρεται αναλυτικά στην παράγραφο 2.2 .

Οι συναρτήσεις αυτές είναι αντίστοιχα:

$$F_+(X) = M + \sum_{j=1}^{m} A_j^* X A_j \qquad (3.5.6)$$

και

$$F_-(X) = M - \sum_{j=1}^{m} A_j^* X A_j \,. \qquad (3.5.7)$$

Οι συναρτήσεις αυτές αντιστοιχούν το $H(n)$ στον εαυτό του και είναι και οι δύο μονότονες και συνεχείς, πιο συγκεκριμένα η F_+ είναι αύξουσα ενώ η F_- φθίνουσα συνάρτηση.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να δούμε ότι οι περισσότερες συνθήκες του Θεωρήματος (3.5.1) που χαρακτηρίζουν την συνάρτηση Φ (στη θέση της Φ του Θεωρήματος τοποθετούμε τις F_+ και F_-) ικανοποιούνται.

- Επιπλέον το σύνολο $H(n)$ είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο και εφοδιασμένο με νόρμα αποτελεί έναν πλήρη μετρικό χώρο.
- Όσον αφορά την συνθήκη (3.5.2) παρατηρούμε ότι ικανοποιείται, καθώς για $x_0=0$, η $F_+(0)=M > 0$ και $F_-(0)=M > 0$. (Υπενθυμίζουμε την συνθήκη (3.5.2) η οποία είναι ότι πρέπει να $\exists\, x_0 \in R : x_0 \le \Phi(x_0)$ ή $x_0 \ge \Phi(x_0)$).

Μας μένει, λοιπόν να ικανοποιήσουμε την συνθήκη (3.5.1) (υπενθυμίζουμε την συνθήκη (3.5.1) που είναι η: $\exists\, 0 \le c \le 1 : \rho(\Phi(x), \Phi(y)) \le c\, \rho(x, y)$). Πρέπει επομένως να παράγουμε κατάλληλες συνθήκες για τις F_+ , F_-, ούτως ώστε να ισχύει η (3.5.1).

Μετρικός Χώρος

Αρχικά, πρέπει να ορίσουμε ποιος είναι ο μετρικός μας χώρος. Θα χρησιμοποιήσουμε, λοιπόν την νόρμα $\|o\|_{1,M}$ η οποία ορίζεται ως

$\|X\|_{1,M} = \left\|M^{\frac{1}{2}}XM^{\frac{1}{2}}\right\|_1$, όπου $\|o\|_1$ είναι η trace norm του X. Υπενθυμίζουμε ότι η trace norm είναι η : $\|X\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j$ (X), όπου $\sigma_1(X),\ldots,\sigma_n(X)$ είναι οι χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα X. Σημειώνουμε πως αν πρόκειται για κανονικό πίνακα οι χαρακτηριστικές τιμές του είναι η απόλυτη τιμή των ιδιοτιμών του. Επομένως ο μετρικός μας χώρος θα είναι ο $(H(n), \|o\|_{1,M})$.

Αφού ορίσαμε τις συνθήκες μας για τις F_+ , F_- και τον μετρικό μας χώρο, θα αποδείξουμε ένα σημαντικό θεώρημα για την εφαρμογή μας. Πρώτα όμως, θα αναφερθούμε σε ένα λήμμα που θα μας φανεί χρήσιμο στην απόδειξη του θεωρήματός μας.

Λήμμα 3.5.8.

Έστω A≥0 και B≥0 πίνακες που ανήκουν στο σύνολο M(n) των μιγαδικών πινάκων. Τότε $0 \leq tr(AB) \leq \|A\|tr(B)$.

Απόδειξη.

Γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του γινομένου δύο θετικά ημιορισμένων πινάκων είναι μη αρνητικό. Πιο συγκεκριμένα $tr(AB) \geq 0$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $A \leq \|A\|I_n$.

Επομένως έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 0 &\leq tr\big((\|A\| - A)B\big) \\ &= tr(\|A\|B - AB) \\ &= \|A\|tr(B) - tr(AB) \end{aligned}$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξή μας.

□

Παράδειγμα 1:

Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Τότε παρατηρούμε ότι:

$AB=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ και tr(AB)=2, tr(B)=3 και $\|A\|= 3.4142$.

Άρα πράγματι $0 \leq tr(AB) \leq \|A\| tr(B)$.

Παράδειγμα 2:

Έστω οι πίνακες $K= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ και ο $\Lambda= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$. Τότε παρατηρούμε ότι:

$K\Lambda=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ και tr(ΚΛ)=5, ενώ tr(Λ)=2. Επίσης $\|K\| = 3.7025$.

Άρα, $0 \leq trace(K\Lambda) \leq \|K\| trace(\Lambda)$.

Θεώρημα 3.5.9.

Έστω $M \in B(n)$ και $A_1,\ldots,A_m \in M(n)$ τέτοιοι ώστε να υπάρχει $\widetilde{M} \in B(n)$ που να ικανοποιεί την ανίσωση $\widetilde{M} - \sum_{j=1}^{m} A_j \widetilde{M} A_j^* > 0$. Τότε οι F_+ και F_- έχουν μοναδικό σταθερό σημείο στον H(n). Επίσης, για κάθε $X \in H(n)$ έχουμε ότι η ακολουθία $\{ F_+^k(X)\}_{k=0}^{\infty}$ συγκλίνει στην μοναδική ερμιτιανή λύση της (3.5.4), ενώ η ακολουθία $\{ F_-^k(X)\}_{k=0}^{\infty}$ συγκλίνει στην μοναδική ερμιτιανή λύση της (3.5.5).

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα μόνο για την F_+ , καθώς για την F_- είναι το ίδιο.

Πρώτα από όλα παρατηρούμε ότι η: $\widetilde{M} - \sum_{j=1}^{m} A_j\widetilde{M}A^*_j > 0$ είναι ισοδύναμη με την $\sum_{j=1}^{m} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}}A_j\widetilde{M}A^*_j\widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} < I_n$,επομένως $\left\|\sum_{j=1}^{m} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}}A_j \widetilde{M}A_j^*\widetilde{M}^{-\frac{1}{2}}\right\| < 1$.

Θα δείξουμε ότι η (3.5.1) ικανοποιείται για την μετρική που επάγεται από την νόρμα $\|o\|_{1,\widetilde{M}}$, με $c = \left\|\sum_{j=1}^{m} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}}A_j \widetilde{M}A_j^*\widetilde{M}^{-\frac{1}{2}}\right\|$.

Έστω $X , Y \in H(n)$ τέτοιο ώστε $X \leq Y$. Τότε,

$$\|F_+(Y) - F_-(X)\|_{1,\widetilde{M}} =\|\widetilde{M}^{\frac{1}{2}}(F_+(Y)-F_+(X))\widetilde{M}^{\frac{1}{2}})\|_1$$

$$= \operatorname{tr}(\sum_{j=1}^{m} \widetilde{M}^{\frac{1}{2}} A^{*}{}_{j} (Y - X) A_{j} \widetilde{M}^{\frac{1}{2}})$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση ίχνους ενός πίνακα είναι γραμμική συνάρτηση και από ιδιότητες ίχνους ότι tr(AB)=tr(BA) για τυχαίους n x n πίνακες. Άρα το παραπάνω είναι ίσο με

$$\operatorname{tr}(\sum_{j=1}^{m} \widetilde{M}^{\frac{1}{2}} A^{*}{}_{j}(Y - X)A_{j}\widetilde{M}^{\frac{1}{2}})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{tr} (\widetilde{M}^{\frac{1}{2}} A^{*}{}_{j}(Y - X)A_{j}\widetilde{M}^{\frac{1}{2}})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{tr}(A_{j} \widetilde{M} A_{j}^{*}(Y-X)).$$

Επίσης μπορούμε να το γράψουμε ως:

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{tr}(A_{j}\widetilde{M}A_{j}^{*} (Y-X)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{tr}(\widetilde{M}^{\frac{1}{2}} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} A_{j} \widetilde{M} A_{j}^{*} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} \widetilde{M}^{\frac{1}{2}} (Y-X))$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{tr}(\widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} A_{j}\widetilde{M} A_{j}^{*} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} (\widetilde{M}^{\frac{1}{2}} (Y-X) \widetilde{M}^{\frac{1}{2}}))$$

$$= \operatorname{tr} (\sum_{j=1}^{m}(\widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} A_{j} \widetilde{M} A_{j}^{*} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} (\widetilde{M}^{\frac{1}{2}} (Y-X) \widetilde{M}^{\frac{1}{2}}))).$$

Από το Λήμμα 3.5.8 προκύπτει ότι:

$$\operatorname{tr} (\sum_{j=1}^{m}(\widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} A_{j} \widetilde{M}A_{j}^{*} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} (\widetilde{M}^{\frac{1}{2}} (Y - X) \widetilde{M}^{\frac{1}{2}})))$$

$$\leq \left\|\sum_{j=1}^{m} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} A_{j} \widetilde{M}A_{j}^{*} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}}\right\| \left\|\widetilde{M}^{\frac{1}{2}} (Y - X) \widetilde{M}^{\frac{1}{2}}\right\|_{1}$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{m} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} A_{j} \widetilde{M}A^{*} A_{j}^{*}\widetilde{M}^{-\frac{1}{2}}\right\| \|(Y - X)\|_{1,\widetilde{M}}.$$

Αυτό δείχνει ότι:

$\|F_{+}(Y)- F_{-}(X)\|_{1,\widetilde{M}} \leq \left\|\sum_{j=1}^{m} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} A_{j}\widetilde{M}A_{j}^{*} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}}\right\| \|Y - X\|_{1,\widetilde{M}}$. Ήδη όμως έχουμε δείξει ότι : $\left\|\sum_{j=1}^{m} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}} A_{j} \widetilde{M}A_{j}^{*} \widetilde{M}^{-\frac{1}{2}}\right\| < 1$.

Επομένως η συνθήκη (3.5.1) επαληθεύεται.

Ομοίως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει και για την F_{-}.

□

Μια χρήσιμη συνέπεια του Θεωρήματος 3.5.9 είναι η παρακάτω, στην οποία συμπεραίνουμε ότι το σταθερό σημείο είναι θετικά ορισμένο.

Συνέπεια 3.5.10.

Έστω $M \in B(n)$ και $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M(n)$ τέτοιο ώστε να υπάρχει $\widetilde{M} \in B(n)$ που να ικανοποιεί την ανίσωση $\widetilde{M} - \sum_{j=1}^{m} A_j \widetilde{M} A^*_j > 0$. Τότε η F_+ έχει ένα μοναδικό ερμιτιανό σταθερό σημείο, το οποίο είναι θετικά ορισμένο. Επίσης, για κάθε πίνακα X έχουμε ότι η ακολουθία $\{F^k{}_+\}_{k=0}^{\propto}$ συγκλίνει στη μοναδική ερμιτιανή λύση της εξίσωσης (3.5.4).

Απόδειξη.

Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από το προηγούμενο θεώρημα, όπου δείξαμε ότι η F_+ έχει μοναδικό σταθερό σημείο στον $H(n)$. Όμως η $F_+ : \overline{B}(n) \to \overline{B}(n)$, άρα έχει μοναδικό σταθερό σημείο στον $\overline{B}(n)$. Επίσης, αν $\overline{X}$ το σταθερό, τότε $\overline{X} \geq M$ και επομένως είναι θετικά ορισμένο. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

□

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι εάν θεωρήσουμε ότι $F_-(M) > 0$ και συνδυάσουμε το Θεώρημα (3.5.9) με την Συνέπεια (3.1.2) καταλήγουμε στο παρακάτω συμπέρασμα.

Συνέπεια 3.5.11.

Έστω $M \in B(n)$ και $A_1, A_2, \ldots A_m \in B(n)$ τέτοιο ώστε να υπάρχει $\widetilde{M} \in B(n)$που να ικανοποιεί την ανίσωση $\widetilde{M} - \sum_{j=1}^{m} A_j \widetilde{M} A_j^* > 0$ και υποθέτω ότι η $F_-(M) > 0$ διατηρείται. Τότε η F_- έχει ένα μοναδικό, ερμιτιανό στάσιμο σημείο το οποίο ανήκει στο σύνολο $[0, M]$. Επίσης, για κάθε X έχουμε ότι $\{F_-^k(X)\}_{k=0}^{\propto}$ συγκλίνει στη μοναδική ερμιτιανή λύση της (3.5.5).

3.6 Θεωρία Διαταραχών για την $X + A^*\Phi(X)A = M$

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την διαταραγμένη μορφή της εξίσωσης (2.1), η οποία είναι:

$$X + \widetilde{A}^*\Phi(X)\widetilde{A} = \widetilde{M} \qquad (3.6.1)$$

όπου $\widetilde{A}$, $\widetilde{M}$ είναι μικρές διαταραχές των A και M. Ιδιαίτερα ενδιαφέρον είναι ότι η συνάρτηση Φ δεν χρειάζεται να είναι μονότονη.

Θα ασχοληθούμε κυρίως με την μελέτη των συνθηκών υπό των οποίων υπάρχει λύση $\tilde{X}$ της (3.6.1) και την μελέτη της μοναδικότητας της. Η μελέτη μας, λοιπόν αρχίζει με ένα χρήσιμο λήμμα. Εάν η μη διαταραγμένη εξίσωσή μας, η

$$X + A^*\Phi(X)A = M \qquad (2.1)$$

έχει λύση $\bar{X}$ σε ένα κλειστό διάστημα K(n), τότε το παρακάτω λήμμα μας δίνει ένα άνω όριο για την ποσότητα $\|\bar{X} - \tilde{X}\|$. Όμως δεν μας εγγυάται την ύπαρξη λύσης της (3.6.1).

Λήμμα 3.6.1.

Έστω $M \in B(n)$, $A \in M(q,n)$ και $\Phi: \overline{B}(n) \to \pm\overline{B}(q)$. Υποθέτουμε ότι η (2.1) έχει θετικά ορισμένη λύση $\bar{X}$ στο K(n). Εάν η ανίσωση $M_{K(n)}\|A\|^2 < 1$ και ισχύει:

(α) $\|\widetilde{A}\| < \|A\|$ ή

(β) $\|\widetilde{A}\| > \|A\|$ και $\|A - \widetilde{A}\| < \frac{1 - M_{K(n)}\|A\|^2}{M_{K(n)}\|A\|}$,

τότε,

$$\|\bar{X} - \tilde{X}\| \le \frac{(\|\widetilde{A}\|\|\Phi(\tilde{X})\| + \|A\|\|\Phi(\bar{X})\|)\|A - \widetilde{A}\| + \|M - \widetilde{M}\|}{1 - M_{K(n)}\|A\|\|\widetilde{A}\|} \qquad \mathbf{(3.6.2)}$$

για όλες τις λύσεις $\tilde{X}$ της (3.6.1) (εάν υπάρχουν).

Απόδειξη.

Αρχικά, θεωρούμε ότι διατηρείται η (α) συνθήκη, τότε επειδή γνωρίζουμε ότι $M_{K(n)}\|A\|^2 < 1$, έπεται άμεσα ότι $M_{K(n)}\|A\|\|\tilde{A}\| < 1$ καθώς $M_{K(n)}\|A\|^2 = M_{K(n)}\|A\|\|A\|$, όμως από (α)

$$\|\tilde{A}\| < \|A\|$$

$$\Rightarrow \|\tilde{A}\|\|A\| < \|A\|\|A\|$$

$$\Rightarrow M_{K(n)}\|A\|\|\tilde{A}\| < M_{K(n)}\|A\|\|A\|$$

$$\Rightarrow M_{K(n)}\|A\|\|A\| < 1 .$$

Εάν ισχύει η (β) συνθήκη, τότε

$$M_{K(n)}\|A\|\|\tilde{A}\| \leq M_{K(n)}\|A\| \left(\|A\| + \|A - \tilde{A}\|\right)$$

$$< M_{K(n)}\|A\|^2 + M_{K(n)}\|A\| \frac{1-M_{K(n)}\|A\|^2}{M_{K(n)}\|A\|}$$

$$= 1.$$

Τώρα, έστω $\tilde{X}$ η λύση της (3.6.1). Τότε,

$$\bar{X} - \tilde{X} = \tilde{A}^2\, \Phi(\tilde{X})\tilde{A} - A^*\Phi(\bar{X})A + M - \tilde{M}$$

$$= \tilde{A}^*\Phi(\tilde{X})(\tilde{A} - A) + \tilde{A}^*(\Phi(\tilde{X})(\tilde{A} - A) + \tilde{A}^*\Big(\Phi(\tilde{X}) -$$

$$-\Phi(\bar{X})\Big)A + (\tilde{A}^* - A^*)\Phi(\bar{X})A + M - \tilde{M} .$$

Τότε από το παραπάνω και από την ανίσωση (3.3.1), δηλαδή την $\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq M_{K(n)}\|X - Y\|$, προκύπτει ότι

$$\|\bar{X} - \tilde{X}\| \leq (\|\tilde{A}\|\, \|\Phi(\tilde{X})\| + \|A\|\, \|\Phi(\bar{X})\|)\, \|A - \tilde{A}\| +$$

$$+\|A\|\, \|\tilde{A}\|\, \|\Phi(\tilde{X}) - \Phi(\bar{X})\| + \|M - \bar{M}\|$$

$$\leq \left(\|\tilde{A}\|\, \|\Phi(\tilde{X})\| + \|A\|\|\Phi(\bar{X})\|\right)\|A - \tilde{A}\| +$$

$$+M_{K(n)}\|A\|\|\tilde{A}\|\|\tilde{X} - \bar{X}\| + \|M - \tilde{M}\|.$$

Επειδή όμως $M_{K(n)}\|A\|\|\tilde{A}\| < 1$, η τελευταία ανίσωση είναι ισοδύναμη της (3.6.2) .

Παρατήρηση:

Εάν η $\left\|\Phi(\tilde{\mathrm{X}})\right\|$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για $\left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\|$ και $\left\|\mathrm{M}-\widetilde{\mathrm{M}}\right\|$ αρκετά μικρά, τότε προκύπτει από την (3.6.2) ότι υπάρχουν δ, M_1 , M_2 τέτοια ώστε :

$$\left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\|+\left\|\mathrm{M}-\widetilde{\mathrm{M}}\right\|<\delta$$

$$\Rightarrow \left\|\tilde{\mathrm{X}}-\bar{\mathrm{X}}\right\| \leq \mathrm{M}_1\left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\|+\mathrm{M}_2\left\|\mathrm{M}-\widetilde{\mathrm{M}}\right\|$$

$$\Rightarrow \left\|\tilde{\mathrm{X}}-\bar{\mathrm{X}}\right\| \leq \mathrm{M}.$$

Τελικά, η λύση $\bar{\mathrm{X}}$ είναι Lipschitz συνεχής ως προς Α και Μ. Καταλήγοντας, αν η Φ είναι τέτοια ώστε οι λύσεις της εξίσωσης (2.1) να φράσσονται από μια ομοιόμορφη σταθερά, τότε η $\bar{\mathrm{X}}$ είναι Lipschitz συνεχής. Αυτό μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμο διότι, αν η Φ:B(n)→B(q), τότε $\bar{\mathrm{X}} \leq \mathrm{M}$ και $\tilde{\mathrm{X}} \leq \mathrm{M}$, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες $\|\Phi(\bar{\mathrm{X}})\|$ και $\left\|\Phi(\tilde{\mathrm{X}})\right\|$, από την νόρμα $\|\mathrm{M}\|$.

□

Παρατηρούμε ότι από το Λήμμα 3.6.1 και την σχέση (3.6.4), οι λύσεις της (3.6.1) είναι κοντά στην μοναδική λύση της (2.1), εάν οι $\left\|\widetilde{\mathrm{A}}-\mathrm{A}\right\|$ και $\left\|\widetilde{\mathrm{M}}-\mathrm{M}\right\|$ είναι αρκετά μικρές και αν $M_{K(n)}\|\mathrm{A}\|^2<1$.

- Εάν $\left\|\widetilde{\mathrm{A}}\right\|<\|\mathrm{A}\|$, τότε η λύση της διαταραγμένης είναι επίσης μοναδική.
- Αλλιώς, χρειαζόμαστε μια ακόμη συνθήκη, η οποία θα μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα της (3.6.1). Η παρακάτω πρόταση μας δίνει δύο συνθήκες που εξασφαλίζουν και την μοναδικότητα της λύσης της (3.6.1).

Πρόταση 3.6.2.

Έστω $\mathrm{M} \in \mathrm{B}(\mathrm{n})$, $\mathrm{A} \in \mathrm{M}(\mathrm{q}, \mathrm{n})$ και έστω $\Phi: \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{n}) \rightarrow \pm\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{q})$ συνεχής συνάρτηση στο B(n) . Επίσης, έστω ότι οι εξισώσεις (2.1) και (3.6.1) που έχουν και οι δύο λύση στο σύνολο K(n) και υποθέτουμε ότι $M_{K(n)}\|\mathrm{A}\|^2<1$. Εάν,

(α) $\left\|\widetilde{\mathrm{A}}\right\| \leq \|\mathrm{A}\|$ ή (β) $\|\widetilde{A} - A\| < \frac{1}{\sqrt{M_{K(n)}}} - \|A\|$,

τότε η (3.6.1) έχει επίσης μοναδική λύση στο Κ(n) .

Απόδειξη.

Από το Λήμμα 3.3.1 αποδεικνύουμε ότι $M_{K(n)}\|\widetilde{A}\|^2 < 1$. Εάν ισχύει η (α) συνθήκη, τότε είναι προφανές. Εάν ισχύει η (β), τότε

$$\begin{aligned} M_{K(n)}\|\widetilde{A}\|^2 &= M_{K(n)}\|A + (\widetilde{A} - A)\|^2 \\ &\leq M_{K(n)} \left(\|A\| + \|\widetilde{A} - A\| \right)^2 \\ &< M_{K(n)} \left(\frac{1}{\sqrt{M_{K(n)}}} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη .

□

Λήμμα 3.6.3.

Εάν $M_{K(n)}\|A\|^2 < 1$. Τότε

$$\frac{1}{\sqrt{M_{K(n)}}} - \|A\| < \frac{1 - M_{K(n)}\|A\|^2}{M_{K(n)}\|A\|} . \qquad (3.6.5)$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη προκύπτει από άμεσους υπολογισμούς:

$$\frac{1}{\sqrt{M_{K(n)}}} - \|A\| = \frac{\|A\| - \sqrt{M_{K(n)}}\|A\|^2}{\sqrt{M_{K(n)}}\|A\|} = \frac{\sqrt{M_{K(n)}}\|A\| - M_{K(n)}\|A\|^2}{M_{K(n)}\|A\|}$$

Αφού, λοιπόν έχουμε υποθέσει ότι $M_{K(n)}\|A\|^2 < 1$, προκύπτει άμεσα η (3.6.5).

□

Παρατήρηση.

Γνωρίζουμε ότι :

$$\|\widetilde{A} - A\| < \frac{1}{\sqrt{M_{K(n)}}} - \|A\| < \frac{1 - M_{K(n)}\|A\|^2}{M_{K(n)}\|A\|}$$

Επομένως, τελικά :

$$\left\|\widetilde{A} - A\right\| < \frac{1 - M_{K(n)}\|A\|^{2}}{M_{K(n)}\|A\|} \tag{3.6.6}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν ότι, η συνθήκη:

$$\frac{1}{\sqrt{M_{K(n)}}} - \|A\| < \frac{1 - M_{K(n)}\|A\|^2}{M_{K(n)}\|A\|} \tag{3.6.5}$$

είναι πιο ισχυρή από την συνθήκη

$$\left\|A - \widetilde{A}\right\| < \frac{1 - M_{K(n)}\|A\|^2}{M_{K(n)}\|A\|} \quad . \tag{3.6.6}$$

Στο επόμενο θεώρημα, θα αποδείξουμε και θα ορίσουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες η λύση της (3.6.1) στο K(n) είναι μοναδική.

Θεώρημα 3.6.4.

Έστω $M \in B(n)$, $A \in M(q,n)$ και έστω $\Phi : \overline{B}(n) \to \pm\overline{B}(q)$ συνεχής στο $\overline{B}(n)$. Επίσης, υποθέτουμε ότι $M_{K(n)}\|A\|^2 < 1$ και ότι η (2.1) έχει λύση $\bar{X}$ στο K(n). Παρατηρούμε ότι η $\bar{X}$ είναι η μοναδική λύση της (2.1) στο K(n). Τελικά θέτω $b=\|\Phi(\bar{X})\|$. Τότε

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: \begin{cases} \left\|A - \widetilde{A}\right\| < \delta \\ \left\|M - \widetilde{M}\right\| < 4b\|A\|\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{εάν η (3.6.1) έχει λύση } \tilde{X} \\ \text{στο K(n), τότε είναι μοναδική} \\ \text{στο K(n) και } \left\|\bar{X} - \tilde{X}\right\| < \varepsilon. \end{cases}$$

Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση η μοναδική λύση $\tilde{X}$ είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση των A και M.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε ότι

$$\delta = -\|A\| + \sqrt{\|A\|^2 + \frac{\varepsilon}{3b + \varepsilon M_{K(n)}}\left(1 - M_{K(n)}\|A\|^2\right)}$$

Αφού $M_{K(n)}\|A\|^2 < 1$ μας εξασφαλίζει ότι το $\delta > 0$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι:

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{M_{K(n)}}} - \|A\| \tag{3.6.7}$$

Για αυτόν τον σκοπό, παρατηρούμε ότι,

$$\frac{\varepsilon}{3b + \varepsilon M_{K(n)}} = \frac{1}{\frac{3b}{\varepsilon} + M_{K(n)}} < \frac{1}{M_{K(n)}}$$

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την (3.6.7). Πράγματι,

$$\delta = -\|A\| + \sqrt{\|A\|^2 + \frac{\varepsilon}{3b + \varepsilon M_{K(n)}}(1 - M_{K(n)}\|A\|^2)}$$

$$< -\|A\| + \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{M_{K(n)}}(1 - M_{K(n)}\|A\|^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M_{K(n)}}} - \|A\|.$$

Άρα αποδείξαμε την (3.6.7).

Τώρα παίρνουμε $\widetilde{A}$ και $\widetilde{M}$ τέτοια ώστε:

$$\|A - \widetilde{A}\| < \delta\,,\ \|M - \widetilde{M}\| < 4b\|A\|\delta,$$

και υποθέτουμε ότι η (3.6.1) έχει λύση $\widetilde{\mathbf{X}}$ στο K(n). Τότε από την Πρόταση 3.6.2 έπεται ότι η $\widetilde{\mathbf{X}}$ είναι η μοναδική λύση της (3.6.1) στο K(n). Στη συνέχεια θα φτιάξουμε ένα άνω όριο για την $\|\bar{\mathbf{X}} - \widetilde{\mathbf{X}}\|$. Χρησιμοποιώντας την (3.3.1), βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|\bar{\mathbf{X}} - \widetilde{\mathbf{X}}\| &\le \|\widetilde{A}^*\Phi(\widetilde{X})\widetilde{A} - A^*\Phi(\bar{X})A\| + \|M - \widetilde{M}\| \\
&= \Big\|\widetilde{A}^*\left(\Phi(\widetilde{X}) - \Phi(\bar{X})\right)\widetilde{A} + (\widetilde{A}^*\Phi(\bar{X})(\widetilde{A} - A) + \\
&\quad +(\widetilde{A}^* - A^*)\Phi(\bar{X})\widetilde{A} + (\widetilde{A}^* - A^*)\Phi(\bar{X})(A - \widetilde{A})\| \\
&\quad + \|M - \widetilde{M}\| \\
&\le M_{K(n)}\,\|\widetilde{A}\|^2\|\widetilde{X} - \bar{X}\| + \left(2\|\widetilde{A}\| + \|\widetilde{A} - A\|\right) \\
&\quad \|\widetilde{A} - A\|\|\Phi(\bar{X})\| + \|M - \widetilde{M}\| \\
&\le\ M_{K(n)}\left(\|A\| + \|A - \widetilde{A}\|\right)^2\|\bar{X} - \widetilde{X}\| + b
\end{aligned}$$

$$+\left(2\|\mathrm{A}\| + 3\left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\|\right)\left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\| + \left\|\mathrm{M}-\widetilde{\mathrm{M}}\right\| .$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\left\|\overline{\mathbf{X}}-\widetilde{\mathbf{X}}\right\| - M_{K(n)}\left(\|\mathrm{A}\| + \left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\|\right)^2\left\|\overline{\mathrm{X}}-\widetilde{\mathrm{X}}\right\|$$

$$\leq \mathrm{b}\left(2\|\mathrm{A}\| + 3\left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\|\right)\left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\| + \left\|\mathrm{M}-\widetilde{\mathrm{M}}\right\|,$$

άρα

$$\left\|\overline{\mathbf{X}}-\widetilde{\mathbf{X}}\right\|\left\{1 - M_{K(n)}\left(\|\mathrm{A}\| + \left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\|\right)^2\right\}$$

$$\leq \mathrm{b}\left(2\|\mathrm{A}\| + 3\left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\|\right)\left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\| + \left\|\mathrm{M}-\widetilde{\mathrm{M}}\right\|,$$

άρα

$$\left\|\overline{\mathbf{X}}-\widetilde{\mathbf{X}}\right\| \leq \frac{\mathrm{b}\left(2\|\mathrm{A}\| + 3\left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\|\right)\left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\| + \left\|\mathrm{M}-\widetilde{\mathrm{M}}\right\|}{1 - M_{K(n)}\left(\|\mathrm{A}\| + \left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\|\right)^2}.$$

Αυτό είναι το άνω όριο του $\left\|\overline{\mathbf{X}}-\widetilde{\mathbf{X}}\right\|$.

Εντέλει θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$\begin{cases} \left\|\mathrm{A}-\widetilde{\mathrm{A}}\right\| < \delta \\ \left\|\mathrm{M}-\widetilde{\mathrm{M}}\right\| < 4\mathrm{b}\|\mathrm{A}\|\delta \end{cases} \Rightarrow \quad \left\|\overline{\mathrm{X}}-\widetilde{\mathrm{X}}\right\| < \varepsilon.$$

Για να απλουστεύσουμε την απόδειξη θα ορίσουμε ως:

$$\delta_1 = \sqrt{\|\mathrm{A}\|^2 + \frac{\varepsilon}{3\mathrm{b}+\varepsilon M_{K(n)}}\left(1 - M_{K(n)}\|\mathrm{A}\|^2\right)} .$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση, βλέπουμε ότι

$$\left\|\overline{\mathbf{X}}-\widetilde{\mathbf{X}}\right\| < \frac{\mathrm{b}(2\|\mathrm{A}\| + 3\delta)\delta + 4\mathrm{b}\|\mathrm{A}\|\delta}{1 - M_{K(n)}(\|\mathrm{A}\| + \delta)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{b}(-\|\mathrm{A}\| + 3\delta_1)(-\|\mathrm{A}\| + \delta_1) - 4\mathrm{b}\|\mathrm{A}\|^2 + 4\mathrm{b}\|\mathrm{A}\|\delta_1}{1 - M_{K(n)}\delta_1^2}$$

$$= \frac{3\mathrm{b}(\delta_1^2 - \|\mathrm{A}\|^2)}{1 - M_{K(n)}\delta_1^2}$$

$$= \frac{\frac{3b\varepsilon}{3b+\varepsilon\, M_{K(n)}}\left(1-M_{K(n)}\|A\|^2\right)}{1-M_{K(n)}\|A\|^2-\frac{\varepsilon\, M_{K(n)}}{3b+\varepsilon M_{K(n)}}+\frac{\varepsilon M_{K(n)}^2}{3b+\varepsilon M_{K(n)}}\|A\|^2}$$

$$= \frac{\frac{3b\varepsilon}{3b+\varepsilon\, M_{K(n)}}\left(1-M_{K(n)}\|A\|^2\right)}{\frac{3b}{3b+\varepsilon\, M_{K(n)}}\left(1-M_{K(n)}\|A\|^2\right)}$$

$$= \varepsilon,$$

κάτι που αποδεικνύει το πρώτο μέλος του θεωρήματος.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η λύση είναι Lipschitz συνεχής. Έτσι εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.6.1 και την Παρατήρηση 1 που ακολουθεί του Λήμματος. Πράγματι, η συνθήκη (β) του Λήμματος ικανοποιείται, επειδή

$$\left\|A-\widetilde{A}\right\| < \delta < \frac{1}{\sqrt{M_{K(n)}}} - \|A\| \tag{3.6.7}$$

$$< \frac{1-M_{K(n)}\|A\|^2}{M_{K(n)}\|A\|}. \qquad \text{(Λήμμα 3.6.1)}$$

Επίσης, η $\left\|\Phi(\widetilde{X})\right\|$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, αφού η Φ είναι συνεχής και η $\widetilde{X}$ είναι κοντά στην $\bar{X}$, όπως έχουμε δείξει.

□

Εντέλει, λοιπόν αποδείξαμε ότι η λύση της (3.6.1) είναι μοναδική στο K(n), καθώς και Lipscitz συνεχής. Με αυτό το Θεώρημα ολοκληρώνεται η σύντομη αναφορά μας στην Θεωρία Διαταραχών για την εξίσωση (2.1).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΜΕΛΕΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετήσαμε την εξίσωση $X = A^*\Phi(X)A + M$ και δημιουργήσαμε συνθήκες, υπό τις οποίες αυτή έχει λύση, επίσης είδαμε πότε αυτή είναι μοναδική. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την ύπαρξη λύσης για τις γραμμικές, συμμετρικές εξισώσεις

$$X - A^*_1XA_1 - \cdots - A^*_mXA_m = M \tag{4.1}$$

και την

$$X + A^*_1XA_1 + \cdots + A^*_mXA_m = M \tag{4.2}$$

όπου οι M, $A_1,\dots,A_m \in M(n)$. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για τις θετικά ορισμένες λύσεις και την μελέτη της μοναδικότητάς τους, υποθέτοντας όμως ότι ο M είναι θετικά ορισμένος πίνακας. Για την μελέτη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του γινομένου Kronecker, το οποίο θα ορίσουμε λεπτομερώς στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

4.1 Γινόμενα Kronecker και η Σχέση τους με τις Γραμμικές Εξισώσεις Πινάκων

Ορισμός 4.1.1

Το **γινόμενο Kronecker** δύο πινάκων $A \in M(n)$ και $B \in M(m)$, συμβολίζεται με $A \otimes B$, ορίζεται με τον πίνακα

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \alpha_{12}B & \cdots & \alpha_{1n}B \\ \alpha_{21}B & \alpha_{22}B & \cdots & \alpha_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}B & \alpha_{n2}B & \cdots & \alpha_{nn}B \end{pmatrix} \in M(nm)$$

όπου, α_{ij} είναι το (i,j)-στοιχείο του πίνακα A.

Αριθμητικά Παραδείγματα

1) Έχουμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}$ που είναι 2x2 και τον B= $\begin{bmatrix} 10 & 0.5 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$ το γινόμενο Kronecker είναι:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 4x10 & 4x0.5 & 5x10 & 5x0.5 \\ 4x0 & 4x0.2 & 5x0 & 5x0.2 \\ 2x10 & 2x0.5 & 0.5x10 & 0.5x0.5 \\ 2x0 & 2x0.2 & 0.5x0 & 0.5x0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 2 & 50 & 2.5 \\ 0 & 0.8 & 0 & 1 \\ 20 & 1.5 & 5 & 0.25 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

2) Έχουμε τον πίνακα A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0.4 & 5 \end{bmatrix}$ και τον πίνακα B= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0.5 & 0.1 & 10 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, το μεταξύ τους γινόμενο Kronecker είναι:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 1x2 & 1x3 & 1x6 & 3x2 & 3x3 & 3x6 \\ 1x0.5 & 1x0.1 & 1x10 & 3x0.5 & 3x0.1 & 3x10 \\ 1x0 & 1x7 & 1x2 & 3x0 & 3x7 & 3x2 \\ 0.4x2 & 0.4x3 & 0.4x6 & 5x2 & 5x3 & 5x6 \\ 0.4x0.5 & 0.4x0.1 & 0.4x10 & 5x0.5 & 5x0.1 & 5x10 \\ 0.4x0 & 0.4x7 & 0.4x2 & 5x0 & 5x7 & 5x2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 6 & 9 & 18 \\ 0.5 & 0.1 & 10 & 1.5 & 0.3 & 30 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 21 & 6 \\ 0.8 & 1.2 & 2.4 & 10 & 15 & 30 \\ 0.2 & 0.04 & 4 & 2.5 & 0.5 & 50 \\ 0 & 2.8 & 0.8 & 0 & 35 & 10 \end{pmatrix}$$

Πρόταση 4.1.2.

Έστω $A_1,\ldots,A_m \in M(n)$ και $B_1,\ldots,B_m \in M(r)$. Τότε

(α) $I_n \otimes I_r = I_{nr}$,

(β) $A_1 \otimes (B_1+B_2)=(A_1 \otimes B_1)+(A_1 \otimes B_2)$,

(γ) $(A_1+A_2) \otimes B_1=(A_1 \otimes B_1)+(A_2 \otimes B_1)$,

(δ) $(A_1 \otimes B_1)^*=A^*{}_1 \otimes B^*{}_1$,

(ε) $(A_1 \otimes B_1)\, (A_2 \otimes B_2)\cdots\ (A_m \otimes B_m)=(A_1A_2\cdots A_m) \otimes (B_1B_2\cdots B_m)$,

(στ) $(A_1 \otimes B_1)^{-1}=A^{-1}{}_1 \otimes B^{-1}{}_1$.

Οι αποδείξεις των παραπάνω προκύπτουν είτε άμεσα από τον ορισμό του γινομένου Kronecker είτε είναι πολύ απλές και γι' αυτό δεν θα αναφερθούμε περαιτέρω σε αυτές.

Πρόσθετες Ιδιότητες.

Έστω δύο πίνακες A και B που ανήκουν στο M(n) και M(q) αντίστοιχα.

Τότε έχουμε τα εξής:

Φάσμα Γινομένου Kronecker Δύο Πινάκων A και B

Έστω $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ και $\kappa_1,\dots,\kappa_q$ οι ιδιοτιμές των A και B αντίστοιχα. Τότε οι ιδιοτιμές του A⊗B είναι οι: $\boldsymbol{\lambda_i \kappa_j}$ με i=1,2,...,n και j=1,2,...,q.

Ίχνος Γινομένου Kronecker

$$\mathrm{tr}(A\otimes B)=\mathrm{tr}A\ \mathrm{tr}B.$$

Ορίζουσα Γινομένου Kronecker

$$\det(A\otimes B)=\det(A)^{n}\det(B)^{q}.$$

Αντίστροφος Γινομένου Kronecker

Εάν οι A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε και το A⊗B είναι αντιστρέψιμο, επομένως:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Ορισμός 4.1.3.

Έστω A ένας πίνακας που ορίζεται ως $A=[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$, με $\alpha_1, \dots ,\alpha_n \in \mathbb{C}^q$. Ορίζουμε την **συνάρτηση-στήλη (vec-function)**:

$$\mathrm{vec}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{qn}.$$

Παρατήρηση (Σχέση Γινομένου Kronecker-vec(A)).

Η σχέση του Γινομένου Kronecker και του διανύσματος στήλη vec(A) είναι η εξής:

$$\mathrm{vec}(AXB) = (B^{T} \otimes A)\mathrm{vec}(X),$$

όπου $A \in M(n), B \in M(q)$ και $X \in M(n,q)$.

Απόδειξη.

Έστω $B=[b_1\ b_2 \cdots b_n]$ (μεγέθους m x n) και $X=[x_1\ x_2 \cdots x_m]$. Τότε, η j-στήλη του πίνακα AXB είναι:

$$(\mathbf{A\,X\,B})_{.,j} = \mathbf{A\,X\,b}_j = \mathbf{A}\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i\, b_{i,j} = [\mathbf{b}_{1,j}A\ \ \mathbf{b}_{2,j}A \cdots \ \mathbf{b}_{m,j}A]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$= ([\mathbf{b}_{1,j}, \mathbf{b}_{2,j}, \dots, \mathbf{b}_{m,j}] \otimes \mathbf{A}])\mathrm{vec}(\mathbf{X}) = (b^T{}_j \otimes \mathbf{A})\ \mathrm{vec}(\mathbf{X}),$$

όπου, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \mathrm{vec}(X)$.

Ενώνοντας τις στήλες, έχουμε:

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A\,X\,B}) = \begin{pmatrix} AXB_{.,1} \\ AXB_{.,2} \\ \vdots \\ AXB_{.,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^T{}_1 \otimes \mathbf{A} \\ \mathbf{b}^T{}_2 \otimes \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^T{}_n \otimes \mathbf{A} \end{pmatrix} \mathrm{vec}(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\mathrm{vec}(\mathbf{X})\ .$$

□

Αυτή η σχέση μεταξύ του Γινομένου Kronecker και του vec(A) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετατρέψει μια γραμμική εξίσωση πινάκων σε μια εξίσωση πίνακα-διανύσματος. Πράγματι, εφαρμόζοντας την στην γραμμική εξίσωση:

$$A_1XB_1+A_2XB_2+\cdots+A_mXB_m=M \qquad (4.1.1)$$

με $A_1, \dots, A_m \in M(n)$ και $B_1, \dots, B_m \in M(r)$ και $X, M \in M(n,r)$ παίρνουμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.4.

Ένας πίνακας X διάστασης n x q είναι η λύση της εξίσωσης (4.1.1) εάν και μόνο εάν το διάνυσμα x=vec(X) είναι μια λύση της εξίσωσης Fx=v, με

$$F = \sum_{j=1}^{m} B_j^T \otimes A_j$$

και v=vec(M). Συνεπώς, η εξίσωση (4.1.1) έχει μια μοναδική λύση για κάθε $M \in M(n)$ αν και μόνο αν ο πίνακας F είναι αντιστρέψιμος. □

Στη συνέχεια, ορίζουμε τους πίνακες:

$$Z=I_n^2 - \sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^* \;\text{ και } H=I_n^2 + \sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^* \,. \qquad (4.1.2)$$

Παρατήρηση 4.1.5.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.5, οι πίνακες (4.1.2) είναι αντιστρέψιμοι εάν και μόνο εάν οι εξισώσεις (4.1) και (4.2) (αντίστοιχα για τους πίνακες Z και H) έχουν μοναδική λύση για κάθε M. Αυτή την παρατήρηση θα την χρησιμοποιήσουμε στις επόμενες παραγράφους.

4.2 Μελέτη της Εξίσωσης $X-A^*{}_1XA_1-\cdots-A^*{}_m X A_m=M$

Εξίσωση Stein 4.2.1.

Η Εξίσωση Stein, η οποία αλλιώς ονομάζεται Διακριτή Lyapunov Εξίσωση είναι της μορφής:

$$X - A^*{}_1XA_1 = M, \qquad (4.2.1)$$

όπου A, M, X ∈ M(n). Οι Εξισώσεις Stein παίζουν σπουδαίο ρόλο στον γραμμικό έλεγχο και στην θεωρία για τα συστήματα ελέγχου με διακριτό χρόνο. Παρατηρούμε ότι η (4.2.1) είναι μια ειδική περίπτωση της εξίσωσης $X - A^*{}_1XA_1 - \cdots - A^*{}_m\ X\ A_m=M$, για m=1. Η ύπαρξη θετικά ορισμένης λύσης της (4.2.1) εξαρτάται από την σταθερότητα του πίνακα A_1 σε σχέση με τον μοναδιαίο κύκλο. Θα ορίσουμε στην συνέχεια τι εννοούμε με τον όρο σταθερότητα ως προς τον μοναδιαίο κύκλο.

Ορισμός 4.2.2.

Ένας πίνακας A ∈ M(n) καλείται ευσταθής ως προς τον μοναδιαίο κύκλο, εάν όλες οι ιδιοτιμές του βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο. Δηλαδή, εάν $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ οι ιδιοτιμές του, τότε $|\lambda i| < 1$, για i=1, … ,n.

Παρατηρήσεις.

1) Ο A είναι ευσταθής εάν και μόνο εάν <u>ρ(A)<1</u>.

2)Η Εξίσωση Stein (4.2.1) έχει μοναδική λύση, θετικά ορισμένη, εάν και μόνο εάν ο πίνακας A_1 είναι ευσταθής. Η μοναδική αυτή λύση δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{\bar{X} = \sum_{i=0}^{\infty} A_1^{*i} M {A^i}_1} . \tag{4.2.2}$$

3) Εάν ο πίνακας A_1 είναι ευσταθής, τότε γνωρίζουμε ότι και οι A_1^T και A_1^* είναι ευσταθείς. Επίσης από τις ιδιότητες του γινομένου Kronecker και τον ορισμό των ιδιοτιμών του, ο πίνακας $A_1^T \otimes A_1^*$ θα είναι επίσης ευσταθής. Επομένως, αν ο A_1 είναι ευσταθής τότε και ο $A_1^T \otimes A_1^*$ είναι ευσταθής.

Πρόταση 4.2.3.

Έστω $A_1 \in M(n)$ και $M \in B(n)$.

α) Εάν ${A^T}_1 \otimes {A^*}_1$ είναι ευσταθής, τότε η εξίσωση (4.2.1) έχει μια μοναδική λύση, που είναι θετικά ορισμένη και δίνετε από τον τύπο

$$\bar{X} = \sum_{i=0}^{\infty} A_1^{*i} M {A^i}_1 .$$

β) Εάν υπάρχει ένας θετικά ορισμένος πίνακας $\bar{X}$ που να ικανοποιεί την (4.2.1), τότε ο ${A^T}_1 \otimes {A^*}_1$ είναι ευσταθής.

(Ο πίνακας $\bar{X} = \sum_{i=0}^{\infty} A_1^{*i} M {A^i}_1$ συγκλίνει επειδή $|\lambda_0| < 1$, $\forall$ $\lambda_0 \in \sigma(A_1)$, δηλαδή λόγω σταθερότητας του πίνακα A_1).

□

Με βάση την παραπάνω πρόταση, συνεχίζουμε με το κεντρικό Θεώρημα της παραγράφου μας.

Θεώρημα 4.2.4.

Έστω $M, A_1, \dots, A_m \in M(n)$.

(α) Εάν ο $\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^*$ είναι ευσταθής, τότε η (4.1) έχει μια μοναδική λύση $\bar{X}$, η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{X} = M + \sum_{\iota=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_i=1}^{m} A_{j_1}^* \cdots A_{j_i} M A_{j_i} \cdots A_{j_1} . \tag{4.2.3}$$

Επίσης, αυτή η μοναδική λύση είναι θετικά ορισμένη εάν $M \in B(n)$.

(β) Εάν $M \in B(n)$ και αν υπάρχει ένας θετικά ορισμένος πίνακας $\bar{X}$ που να ικανοποιεί την (4.1), τότε ο $\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A^*{}_j$ είναι ευσταθής.

Απόδειξη.

Αρχικά υποθέτουμε ότι ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A^*$ είναι ευσταθής, δηλαδή ότι $\rho(\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A^*{}_j) < 1$. Συνεπάγεται, επομένως ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\rho\,(\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A^*{}_j) + \varepsilon < 1$.

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε ένα λήμμα το οποίο θα μας βοηθήσει να συνεχίσουμε την απόδειξή μας.

Λήμμα. Έστω $A \in M(n)$ και δοθέν $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει μια νόρμα πινάκων $\|o\|$ τέτοια ώστε $\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Απόδειξη Λήμματος.

Από το Θεώρημα Τριγωνοποίησης του Schur υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας U και ένας άνω τριγωνικός πίνακας Λ τέτοιος ώστε: $A=U^*\Lambda U$. Ορίζουμε τον $D_t = \mathrm{diag}\,(t, t^2, t^3, \dots, t^n)$ και υπολογίζουμε τον

$$D_t \Lambda D_t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t^{-1}d_{12} & t^{-2}d_{13} & \cdots & \cdots & t^{-n+1}d_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t^{-1}d_{23} & \cdots & \cdots & t^{-n+2}d_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \cdots & t^{-n+3}d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t^{-1}d_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

Επομένως, για $t > 0$, αρκετά μεγάλο, μπορούμε να δούμε ότι το άθροισμα όλων των απόλυτων τιμών των μη διαγώνιων στοιχείων του πίνακα $D_t \Lambda D_t$ είναι μικρότερο του ε. Δηλαδή, η νόρμα $\|Dt\,\Lambda\,Dt\|_1 \leq \rho(A)+\varepsilon$ για αρκετά μεγάλο t. Επομένως, αν ορίσουμε μια πίνακα νόρμα ως $\|A\| = \|Dt\, U^*AU\, Dt^{-1}\| = \|(UDt^{-1})^{-1}A(UDt^{-1})\|_1$, για κάθε $A \in M(n)$ και αν επιλέξουμε αρκετά μεγάλο t, τότε θα έχουμε κατασκευάσει μια νόρμα πίνακα τέτοια ώστε $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Αφού, λοιπόν $\|A\| \geq \rho(A)$, για κάθε νόρμα πίνακα, η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

□

Έτσι, λοιπόν χρησιμοποιώντας την παραπάνω νόρμα παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$\|(\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A^*{}_j)\| < \rho(\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^*) + \varepsilon < 1$$

Από Θεώρημα του βιβλίου I.C. Gohberg and S. Goldberg, *Basic Operator Theory*, Birkhäuser, 1981, έχουμε ότι ο πίνακας

$$Z = I_n^2 - \sum_{j=1}^{m} A^T{}_j \otimes A^*{}_j$$

είναι αντιστρέψιμος. Από αυτό το συμπέρασμα, καταλήγουμε στο ότι η (4.1) έχει μοναδική λύση για κάθε πίνακα M (από την Παρατήρηση 4.1.6). Ο αντίστροφος του Z δίνεται από τον τύπο:

$$Z^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^*)^i = I_n^2 + \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^*)^i \ .$$

κάτι που προκύπτει από το προαναφερθέν γνωστό Θεώρημα.

Με επαγωγή, μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$(\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^*)^i = \sum_{j_1,\dots,j_i=1}^{m} (A_{j_i}^T \otimes A_{j_i}^*) \cdots (A_{j_i}^T \otimes A_{j_i}^*)$$

από την Πρόταση (4.1.2 ε) βλέπουμε ότι ο Z^{-1} είναι ισοδύναμος με τον

$$Z^{-1} = I_n^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_i=1}^{m} (A_{j_1}^T \cdots A_{j_i}^T) \otimes (A_{j_1}^* \cdots A_{j_i}^*).$$

Επειδή η $\bar{X}$ είναι η μοναδική λύση της (4.1), η ικανοποιεί την σχέση $vec(\bar{X}) = Z^{-1} vec(M)$, έπεται ότι

$$vec(\bar{X}) = vec(M) + (\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_i=1}^{m} (A_{j_1}^T \cdots A_{j_i}^T) \otimes (A_{j_1}^* \cdots A_{j_i}^*) vec(M)$$

και έτσι

$$\bar{X} = M + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_i=1}^{m} A_{j_1}^* \cdots A_{j_i}^* \, M \, A_{j_i} \cdots A_{j_1} ,$$

άρα ο $\bar{X}$ είναι θετικά ορισμένος, εάν ο M είναι θετικά ορισμένος.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, αρχικά υποθέτουμε ότι ο $M \in B(n)$ και ότι υπάρχει ένας $\bar{X} \in B(n)$, ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση (4.1). Αφού ικανοποιεί την (4.1), δηλαδή είναι λύση της, από το προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι

$$\bar{X} - \sum_{j=1}^{m} A^*{}_j \bar{X} A_j > 0 \qquad (4.2.4)$$

ικανοποιείται. Αρχικά, λοιπόν θα δείξουμε ότι ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A^T{}_j \otimes A^*{}_j$ είναι ευσταθής, εάν η ανίσωση (4.2.4) διατηρείται.

Θεωρώ ότι $\overline{X} = I_n$.

Αλλιώς, θέλω να δείξω ότι θα διατηρείται η ανίσωση

$$I_n - \sum_{j=1}^{m} A^*{}_j\overline{X}A_j > 0 \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{m} A^*{}_jA_j < I_n \,.$$

Αυτό θα το αποδείξουμε ως εξής, έστω λ μια ιδιοτιμή του $\sum_{j=1}^{m} A^T{}_j \otimes A^*{}_j$ και u το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, άρα τα λ και u ικανοποιούν την σχέση, $(\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^*)u=\lambda u$.

Αυτό συνεπάγεται ότι ο X, με u=vex(X) είναι μια λύση της $A^*{}_1XA_1+\cdots+A^*{}_m XA_m=\lambda X$.

Αυτήν την εξίσωση μπορούμε να την γράψουμε με έναν συντομότερο τρόπο, θέτοντας ως A και $\hat{X}$ τους πίνακες-block

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \text{ και } \hat{X} = \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & X \end{pmatrix} \in M(mn). \qquad (4.2.5)$$

Άρα η εξίσωση μας γράφεται τώρα ως:

$$\lambda X = A^*\hat{X}A\,. \qquad (4.2.6)$$

Να παρατηρήσουμε ότι οι πίνακες X, $\hat{X}$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και έτσι $\|X\| = \|\hat{X}\|$. Βάζοντας, λοιπόν νόρμα και στα 2 μέλη της (4.2.6) έχουμε ότι

$$|\lambda|\|X\| = \|A^*\hat{X}A\| \le \|A\|^2\|\hat{X}\| = \|A^*A\|\|X\|$$

(αφού γνωρίζουμε ότι $\|A\|^2 = \lambda^+(A^*A) = \|A^*A\|$) άρα $|\lambda| \le \|A^*A\|$. Πλέον, από την υπόθεση $A^*A = \sum_{j=1}^{m} A^*{}_j A_j < I_n$, τελικά $|\lambda| < 1$, κάτι που πράγματι αποδεικνύει ότι η $\sum_{j=1}^{m} A^T{}_j \otimes A^*{}_j$ είναι σταθερή.

Θεωρώ ότι ο $\overline{X}$ δεν είναι απαραίτητα ίσος με τον I_n .

Τότε η (4.2.4) είναι ισοδύναμη της:

$$I_n - \sum_{j=1}^{m} \left(\overline{X}^{-\frac{1}{2}} A^*{}_j\, \overline{X}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\overline{X}^{-\frac{1}{2}}\, A_j\, \overline{X}^{-\frac{1}{2}}\right) > 0\,.$$

Έτσι, από τα προηγούμενα έχουμε ήδη αποδείξει ότι ο πίνακας

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\overline{X}^{-\frac{1}{2}T}A^{T}{}_{j}\,\overline{X}^{\frac{1}{2}T}\right)\otimes\left(\overline{X}^{-\frac{1}{2}}\,A^{*}_{j}\,\overline{X}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

είναι ευσταθής.

Από την Πρόταση 4.1.2(ε) και (στ)έχουμε ότι:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\overline{X}^{-\frac{1}{2}T}A^{T}{}_{j}\,\overline{X}^{\frac{1}{2}T}\right)\otimes\left(\overline{X}^{-\frac{1}{2}}\,A^{*}_{j}\,\overline{X}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(\overline{X}^{-\frac{1}{2}T}\otimes\,\overline{X}^{-\frac{1}{2}}\right)\left(A^{T}{}_{j}\otimes A^{*}_{j}\right)\left(\overline{X}^{\frac{1}{2}T}\otimes\overline{X}^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\left(\overline{X}^{\frac{1}{2}T}\otimes\,\overline{X}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m}A^{T}{}_{j}\otimes A^{*}_{j}\right)\left(\overline{X}^{\frac{1}{2}T}\otimes\overline{X}^{\frac{1}{2}}\right)$$

κάτι που συνεπάγεται ότι ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m}A^{T}{}_{j}\otimes A^{*}{}_{j}$ είναι ευσταθής.

Και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη μας. □

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι λύσεις της εξίσωσης (4.1) ήταν τα σταθερά σημεία της συνάρτησης:

$$F_{+}(X)=M+\sum_{j=1}^{m}A^{*}_{j}\,X\,A_{j}\,.$$

Στο ακόλουθο λήμμα βλέπουμε μια χρήσιμη σχέση για την F_{+} συνάρτηση.

Λήμμα 4.2.5

Έστω $M, A_1, \dots, A_\mu \in M(n)$. Για k=0 , 1 , 2 , ….. η επόμενη ισότητα ισχύει:

$$F^{k}{}_{+}(M)=M+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j_1,\dots j_i=1}^{\mu}A^{*}_{j_1}\cdots A^{*}_{j_i}MA_{j_i}\cdots A_{j_1}. \qquad (4.2.6)$$

Απόδειξη :

Για να αποδείξουμε το παραπάνω λήμμα θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της επαγωγής. Για k=0 και k=1 είναι προφανές.

Επομένως, θεωρούμε ότι k=a, τότε θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για k=a+1. Άρα

$F_{+}^{a+1}(M)=F_{+}(F_{+}^{a}\,(M))=F_{+}(M+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j_1,\dots j_i=1}^{\mu}A^{*}_{j_1}\cdots A^{*}_{j_i}MA_{j_i}\cdots A_{j_1}.)$

$= \mathrm{M} + \sum_{j=1}^{\mu} A^*{}_j M A_j + \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j_1,\dots j_i=1}^{\mu} A^*{}_j A^*_{j_1} \cdots A^*_{j_i} M A_{j_i} \cdots A_{j_1} A_j$

$= \mathrm{M} + \sum_{j=1}^{\mu} A^*{}_j M A_j + \sum_{i=1}^{a} \sum_{j_1,\dots j_{i+1}=1}^{\mu} A^*_{j_1} \cdots A^*_{j_{i+1}} M A_{j_{i+1}} \cdots A_{j_1}$

$= \mathrm{M} + \sum_{j=1}^{\mu} A^*{}_j M A_j + \sum_{i=2}^{a+1} \sum_{j_1,\dots j_i=1}^{\mu} A^*_{j_1} \cdots A^*_{j_i} M A_{j_{i+1}} \cdots A_{j_1}$

$$= \mathrm{M} + \sum_{j_1,\dots j_i=1}^{\mu} A^*_{j_1} \cdots A^*_{j_i} M A_{j_{i+1}} \cdots A_{j_1}$$

επομένως, η (4.2.6) ισχύει και για k=a+1. Από επαγωγή, λοιπόν,

$F_+^k(M) = M + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j1,\dots ji=1}^{\mu} A^*{}_j \cdots A^*{}_{ji} M A_{ji} \cdots A_{j1}$. □

Συμπέρασμα

Από το Πόρισμα 3.1.7 και το Θεώρημα 4.2.4 βλέπουμε ότι η μοναδική λύση $\bar{X}$ της (4.1) ικανοποιεί την

$$\bar{X} = \lim_{k\to\infty} F^k{}_+(M)$$

εάν ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A^T{}_j \otimes A^*{}_j$ είναι ευσταθής. Ας σημειώσουμε εδώ, ότι το όριο αυτό είναι για την $\bar{X}$ η ίδια ακριβώς, έκφραση με την (4.2.3).

Τις παραπάνω σχέσεις και την συνάρτηση F_+ μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για την εξαγωγή αριθμητικών αποτελεσμάτων , ούτως ώστε να πάρουμε μια προσέγγιση της λύσης $\bar{X}$.

4.3 Μελέτη της Εξίσωσης $X+A^*{}_1XA+\cdots+A^*{}_m X A_m=M$

Στην προηγούμενη παράγραφο, μελετήσαμε την εξίσωση:

$$X - A_1^* X A - \cdots - A_m X A_m = M \qquad (4.1)$$

και την ύπαρξη (μοναδικής) λύσης αυτής. Τώρα θα μελετήσουμε την εξίσωση:

$$X + A_1^* X A + \cdots + A_m X A_m = M \qquad (4.2)$$

με την βοήθεια της προηγούμενης παραγράφου, θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις που υπάρχει θετικά ορισμένη λύση και το πότε αυτή είναι μοναδική, καθώς και τις διαφορές που υπάρχουν μεταξύ των δύο εξισώσεων, σε σχέση με τις συνθήκες που απαιτούνται για την ύπαρξη λύσης τους.

Πρόταση 4.3.1

Έστω $M, A_1, \ldots, A_m \in M(n)$. Εάν ο $\sum_{j=1}^{m} A^T{}_j \otimes A_j^*$ είναι ευσταθής, τότε η (4.2) έχει μοναδική λύση $\bar{X}$, η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{X} = M + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_i=1}^{m} (-1)^i A_{j_1}^* \cdots A_{j_i}^* M A_{j_i} \cdots A_{j_1}. \qquad (4.3.1)$$

Παρατηρήσεις

α) Παρατηρούμε ότι η Πρόταση 4.3.1 είναι ανάλογη του Θεωρήματος 4.2.4(α), όμως για την εξίσωση (4.2) δεν ισχύει το αντίστροφο.

Επίσης, το ότι ο πίνακας M είναι θετικά ορισμένος, δεν συνεπάγεται ότι η λύση $\bar{X}$ είναι και αυτή θετικά ορισμένη. Θα ορίσουμε, λοιπόν στη συνέχεια μια συνθήκη που θα εξασφαλίζει ότι η $\bar{X}$ είναι θετικά ορισμένη.

β) Η εξίσωση F_-, η οποία είναι η αντίστοιχη της F_+ ,ορίζεται ως:

$$F_- = M - \sum_{j=1}^{m} A_j^* X A_j$$

και οι λύσεις της (4.2) είναι τα σταθερά σημεία της F_-.

Λήμμα 4.3.2

Έστω $M \in B(n)$ και $A_1, \ldots, A_m \in M(n)$ τέτοια ώστε η ανίσωση

$$M - \sum_{j=1}^{m} A_j^* M A_j > 0$$

να διατηρείται. Τότε η εξίσωση (4.2) έχει λύση στο $[F_-(M), M]$ και όλες οι θετικά ημιορισμένες λύσεις της περιέχονται στο σύνολο αυτό.

Παρατήρηση

Όπως παρατηρήσαμε παραπάνω, η Πρόταση 4.3.1 είναι ανάλογη του Θεωρήματος 4.2.4 (α), δεν υπάρχει όμως κάποια συνθήκη για την (4.2), ανάλογη του Θεωρήματος 4.2.4 (β). Το Λήμμα 4.3.2, λοιπόν μας δίνει μια τέτοια συνθήκη. Αν, λοιπόν η ανίσωση $M - \sum_{j=1}^{m} A^*{}_j M A_j > 0$ διατηρείται, τότε ο $\sum_{j=1}^{m} A^T{}_j \otimes A_j^*$ είναι ευσταθής. Άρα από την Πρόταση 4.3.1 η λύση της (4.2) στο διάστημα $[F_-(M), M]$ είναι η μοναδική θετικά ορισμένη λύση της (4.2). Έτσι, καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.3

Έστω $M \in B(n)$ και $A_1, \dots, A_m \in M(n)$ τέτοια ώστε η ανίσωση

$$M - \sum_{j=1}^{\infty} A^*_j M A_j > 0$$

να διατηρείται. Τότε η (4.2) έχει μοναδική λύση, η οποία είναι θετικά ορισμένη. Επίσης, η ακολουθία $\{F^k_-\}_{k=0}^{\infty}$ συγκλίνει στην μοναδική αυτή λύση.

Απόδειξη.

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.4(β) αποδείξαμε την εξής συνθήκη:

ο $\sum_{j=1}^{m} A^T_j \otimes A^*_j$ είναι ευσταθής, αν υπάρχει πίνακας $\bar{X} \in B(n)$ τέτοιος ώστε: $\bar{X} - \sum_{j=1}^{m} A^*_j \bar{X} A_j > 0$.

(Στο σημείο αυτό, να παρατηρήσουμε ότι μέχρι στιγμής είχαμε ασχοληθεί με την ανίσωση $\bar{X} - \sum_{j=1}^{m} A_j \bar{X} A^*_j > 0$.)

Άρα, στην δική μας περίπτωση, ο $\sum_{j=1}^{m} A^T_j \otimes A^*_j$ είναι ευσταθής, αν:

$$\bar{X} - \sum_{j=1}^{m} A^*_j \bar{X} A_j > 0\,.$$

(Να υπενθυμίσουμε ότι στο προηγούμενο κεφάλαιο, αποδείξαμε ότι η παραπάνω συνθήκη είναι επαρκής για την ύπαρξη μοναδικής λύσης της (4.1))

Άρα από το Λήμμα 4.3.2, ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A^T_j \otimes A^*_j$ είναι ευσταθής, αν

$$\bar{X} - \sum_{j=1}^{m} A^*_j \bar{X} A_j > 0\,,$$

όπου $\bar{X}$ η λύση της (4.2) στο σύνολο $[F_-(M), M]$.

Επίσης, από την Πρόταση 4.3.1, η λύση αυτή είναι και μοναδική.

Ανάλογα, λοιπόν με το Λήμμα 4.2.5, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$F^k_-(M) = M + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots j_i=1}^{\mu} (-1)^i A^*_{j_1} \cdots A^*_{j_i} M A_{j_i} \cdots A_{j_1}$$

οπότε,

$$\lim_{k\to\infty} F^{k}.(M)=\overline{X}= M + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots j_i=1}^{\mu}(-1)^i A_{j_1}^{*}\cdots A_{j_i}^{*}MA_{j_i}\cdots A_{j_1}$$

η οποία είναι και η μοναδική λύση της (4.2) σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.1.Έτσι αποδεικνύουμε το Θεώρημα 4.3.3.

□

Σημαντικές Παρατηρήσεις.

1) Είναι σημαντικό να τονίσουμε μια διαφορά που υπάρχει μεταξύ των εξισώσεων (4.1) και (4.2) ως προς την ύπαρξη λύσης τους. Παρατηρούμε, λοιπόν ότι εάν ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A^{T}{}_{j}\otimes A^{*}{}_{j}$ δεν είναι ευσταθής, τότε η εξίσωση (4.1) δεν έχει θετικά ορισμένες λύσεις, σε αντίθεση με την (4.2), η οποία μπορεί και να έχει. Στο παρακάτω παράδειγμα βλέπουμε μια τέτοια περίπτωση.

Παράδειγμα:

Έστω οι συμμετρικοί πίνακες $A_1=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$ και $A_2=\begin{bmatrix}-1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$ και ο $M=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.

Στην περίπτωσή μας ισχύει ότι $A_1=A_1^T$ και $A_2=A_2^T$, αφού είναι συμμετρικοί και $A_1=A_1^*$ και $A_2=A_2^*$. Άρα $\sum_{j=1}^{m} A^{T}{}_{j}\otimes A^{*}{}_{j} =\sum_{j=1}^{m} A^{T}{}_{j}\otimes A^{*}{}_{j}$ $=A_1^T\otimes A_1^*+A_2^T\otimes A_2^* =A_1\otimes A_1+A_2\otimes A_2$.

Με την βοήθεια του μαθηματικού προγράμματος Matlab προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα.

Ο πίνακας $\sum_{j=1}^{2} A^{T}{}_{j}\otimes A^{*}{}_{j}$ είναι,

$$\sum_{j=1}^{2} A^{T}{}_{j}\otimes A^{*}{}_{j} =\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

και το φάσμα του είναι $\sigma(\sum_{j=1}^{2} A^{T}{}_{j}\otimes A^{*}{}_{j})=\{-1 , 0 , 0 , 1\}$, συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο πίνακας $\sum_{j=1}^{2} A^{T}{}_{j}\otimes A^{*}{}_{j}$ δεν είναι ευσταθής, καθώς $|\lambda_i|\nless 1$. Οπότε η εξίσωση (4.1) δεν έχει θετικά ορισμένη λύση σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.4. Όμως, η εξίσωση (4.2) έχει πολλές θετικά ορισμένες λύσεις. Πράγματι, μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι ο πίνακας

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha i \\ -\alpha i & 1 \end{bmatrix}$$

για $\alpha \in (-1,1)$ είναι μια θετικά ορισμένη λύση της εξίσωσης (4.2).

2)Έχουμε ήδη αποδείξει ότι εάν ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A^{T}{}_{j} \otimes A^{*}{}_{j}$ είναι ευσταθής, τότε οι εξισώσεις (4.1) και (4.2) έχουν μοναδική θετικά ορισμένη λύση. Επίσης, από το Κεφάλαιο 2 έχουμε αποδείξει ότι έχουν μοναδική θετικά ορισμένη λύση, εάν υπάρχει πίνακας $\widetilde{M} \in B(n)$ τέτοιος ώστε $\widetilde{M} - \sum_{j=1}^{m} A_j \widetilde{M} A^{*}{}_{j} > 0$. Αυτές οι συνθήκες, λοιπόν είναι ισοδύναμες. Αυτό θα το αποδείξουμε στο παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 4.3.4.

Έστω $A_1, \dots, A_m \in M(n)$. Ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A^{T}{}_{j} \otimes A^{*}{}_{j}$ είναι ευσταθής,

αν και μόνο αν

υπάρχει ένας πίνακας $\widetilde{M} \in B(n)$ τέτοιος ώστε $\widetilde{M} - \sum_{j=1}^{m} A_j \widetilde{M} A_j^{*} > 0$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας πίνακας $\widetilde{M} \in B(n)$ τέτοιος ώστε η $\widetilde{M} - \sum_{j=1}^{m} A_j \widetilde{M} A^{*}{}_{j} > 0$ να ισχύει. Τότε από το Θεώρημα 4.2.4 (β) ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A^{T}{}_{j} \otimes A^{*}{}_{j}$ είναι ευσταθής. Να παρατηρήσουμε εδώ ότι

$$\sum_{j=1}^{m} A^{*T}{}_{j} \otimes A_j = \sum_{j=1}^{m} A^{T*}{}_{j} \otimes A_j = \left(\sum_{j=1}^{m} A^{T}{}_{j} \otimes A^{*}{}_{j}\right)^{*} .$$

Άρα και ο $\sum_{j=1}^{m} A^{T}{}_{j} \otimes A^{*}{}_{j}$ είναι ευσταθής.

Αντίστροφα, τώρα θεωρούμε ότι ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A^{T}{}_{j} \otimes A^{*}{}_{j}$ είναι ευσταθής, επομένως και ο $\sum_{j=1}^{m} A^{*T}{}_{j} \otimes A_j$ είναι ευσταθής. Άρα η

$$X - A_1 X A^{*}{}_{1} - \cdots - A_m X A^{*}{}_{m} = M,$$

έχει μια μοναδική θετικά ορισμένη λύση για $M \in B(n)$. Τότε υπάρχει ένας πίνακας $\widetilde{M} \in B(n)$ τέτοιος ώστε $\widetilde{M} - \sum_{j=1}^{m} A_j \widetilde{M} A^{*}{}_{j} > 0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξή μας.

□

Παρατήρηση 4.3.5.

Μέχρι στιγμής, από τις δύο συνθήκες που μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη λύσης των (4.1) και (4.2) μπορούμε να βγάλουμε ένα χρήσιμο συμπέρασμα. Από το Θεώρημα 4.2.4 έχουμε ότι:

ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A^{T}{}_{j} \otimes A^{*}{}_{j}$ είναι ευσταθής, αν και μόνο αν υπάρχει $\breve{M} \in B(n)$ τέτοιο ώστε $\breve{M} - \sum_{j=1}^{m} A_j^{*} \breve{M} A_j > 0$. Αν αυτό το συνδυάσουμε, με το Λήμμα 4.3.4 τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\exists \text{ ένας } \breve{M} \in B(n) \text{ τέτοιος ώστε } \breve{M} - \sum_{j=1}^{m} A_j^{*} \breve{M} A_j > 0$$

αν και μόνο αν

$$\exists \text{ ένας } \tilde{M} \in B(n) \text{ τέτοιος ώστε } \tilde{M} - \sum_{j=1}^{m} A_j \tilde{M} A_j^{*} > 0 \ .$$

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι πίνακες $\breve{M}$ και $\tilde{M}$ δεν είναι απαραιτήτως ίσοι. Αυτό μπορεί εύκολα να φανεί με ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα:

Έστω οι πίνακες $\breve{M} = \tilde{M} = I_2$ και οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.18 & -0.37 \\ -0.25 & 0.65 \end{bmatrix} \text{ και } A_2 = \begin{bmatrix} -0.03 & 0.33 \\ -0.07 & 0.56 \end{bmatrix}.$$

Τότε παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A_1^{*}A_1 + A_2^{*}A_2$ έχει ιδιοτιμές 0.077454 και 1.005146 και και ο $A_1 A_1^{*} + A_2 A_2^{*}$ έχει τις 0.27896 και 0.80364. Επειδή είναι συμμετρικοί πίνακες και έχουν θετικές ιδιοτιμές, συμπεραίνουμε ότι θα είναι και θετικά ορισμένοι. Όμως, βλέπουμε ότι αν υπολογίσουμε τον πίνακα $\breve{M} - \sum_{j=1}^{2} A^{*}{}_{j} \breve{M} A_j = I_2 - \sum_{j=1}^{2} A^{*}{}_{j} \breve{M} A_j = \begin{bmatrix} 0.8993 & 0.145 \\ 0.145 & 0.0181 \end{bmatrix}$ και οι ιδιοτιμές του είναι -0.0051463 και 0.9225463. Άρα δεν είναι θετικά ορισμένος και έτσι,

$$I_2 - \sum_{j=1}^{m} A_j^{*} A_j \not> 0 \ \Rightarrow \ \sum_{j=1}^{2} A^{*}{}_{j} A_j \not< I_2 .$$

Αντίστοιχα έχουμε τον πίνακα,

$$\tilde{M} - \sum_{j=1}^{2} A_j \tilde{M} A_j^{*} = I_2 - \sum_{j=1}^{2} A_j A^{*}{}_{j} = \begin{bmatrix} 0.7209 & 0.0086 \\ 0.0086 & 0.1965 \end{bmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές του είναι 0.19636 και 0.72104. Καθότι είναι συμμετρικός με θετικές ιδιοτιμές, συμπεραίνουμε ότι είναι θετικά ορισμένος πίνακας. Άρα

$$I_2 - \sum_{j=1}^{m} A^{*}{}_{j} A_j > 0 \ \Rightarrow \ \sum_{j=1}^{2} A_j^{*} A_j \ < I_2 \ .$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν ότι δεν είναι απαραίτητο οι πίνακες $\breve{M}, \widetilde{M}$ να είναι ίσοι ώστε να ισχύει η Παρατήρηση 4.3.5. Τα παραπάνω υπολογίστηκαν με την βοήθεια του μαθηματικού προγράμματος Matlab. □

4.4 Ένας Χρήσιμος Συσχετισμός

Θεωρούμε, τις εξισώσεις

$$X - A_1 X A^{*}{}_{1} - \cdots - A_m X A^{*}{}_{m} = M \tag{4.4.1}$$

και

$$X + A_1 X A^{*}{}_{1} + \cdots + A_m X A^{*}{}_{m} = M \tag{4.4.2}$$

Υπενθυμίζουμε τις εξισώσεις που μελετάμε οι οποίες είναι της μορφής

$$X - A^{*}{}_{1} X A_1 - \cdots - A^{*}{}_{m} X A_m = M \tag{4.1}$$

και η

$$X + A^{*}{}_{1} X A_1 + \cdots + A^{*}{}_{m} X A_m = M \tag{4.2} .$$

Στην Παράγραφο 4.1 αναφέραμε το Θεώρημα 4.1.5 από το οποίο συμπεράναμε ότι οι εξισώσεις (4.1) και (4.2) έχουν μοναδική λύση εάν οι πίνακες

$$Z = I_n^2 - \sum_{j=1}^{m} A_j^{T} \otimes A_j^{*} \ \ \text{και} \ \ H = I_n^2 + \sum_{j=1}^{m} A_j^{T} \otimes A_j^{*}$$

είναι αντιστρέψιμοι. Γνωρίζοντας ότι εάν ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος τότε και ο adjoint του θα είναι αντιστρέψιμος ακολουθεί, ισοδύναμα ότι οι εξισώσεις (4.4.1) και (4.4.2) έχουν μοναδική λύση εάν οι πίνακες

$$Z^{*} = I_n^2 - \sum_{j=1}^{m} A_j^{*T} \otimes A_j \ \ \text{και} \ \ H^{*} = I_n^2 + \sum_{j=1}^{m} A_j^{*T} \otimes A_j$$

είναι αντιστρέψιμοι, οι οποίοι είναι οι adjoint των Z και H αντίστοιχα.

Εάν, λοιπόν χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 4.3.4 και την Παρατήρηση 4.3.5 προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα, το οποίο μας δίνει μια ισχυρή συσχέτιση μεταξύ των (4.1) και (4.5.1).

Θεώρημα 4.4.1.

Έστω $M \in B(n)$ και $A_1, \dots, A_m \in M(n)$. Τότε η εξίσωση (4.1)

$$X - A^*{}_1 X A_1 - \cdots - A^*{}_m X A_m = M$$

έχει μια μοναδική λύση, η οποία είναι θετικά ορισμένη εάν και μόνο εάν η εξίσωση (4.4.1)

$$X - A_1 X A^*{}_1 - \cdots - A_m X A^*{}_m = M$$

έχει μοναδική λύση, η οποία, επίσης είναι θετικά ορισμένη.

Απόδειξη.

Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση (4.1) έχει μια μοναδική λύση, η οποία είναι θετικά ορισμένη. Τότε από το Θεώρημα 4.2.4 (β) ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^*$ είναι ευσταθής. Άρα ισοδύναμα και ο $\sum_{j=1}^{m} A_j^{*T} \otimes A_j$ θα είναι ευσταθής. Επομένως, από το Θεώρημα 4.2.4 (α) η εξίσωση (4.5.1) έχει μια μοναδική λύση, η οποία είναι θετικά ορισμένη, αφού ο $\sum_{j=1}^{m} A_j^{*T} \otimes A_j$ είναι ευσταθής. Άρα συμπεραίνουμε ότι εάν η (4.1) έχει μια μοναδική, θετικά ορισμένη λύση τότε και η (4.5.1) έχει μια μοναδική, θετικά ορισμένη λύση. Το αντίστροφο αποδεικνύεται ανταλλάσοντας τους όρους A_j και A_j^*. □

Παρατήρηση:

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι δεν ισχύει κάτι ανάλογο για τις εξισώσεις $X + A_1^* X A_1 + \cdots + A_m^* X A_m = M$ και την εξίσωση $X - A_1 X A_1^* - \cdots - A_m X A_m^* = M$, δηλαδή τις (4.2) και (4.4.2).

Αυτό συμβαίνει διότι από την Πρόταση 4.3.1 γνωρίζουμε πως το αντίστροφο της δεν ισχύει πάντα, δηλαδή αν υπάρχει μοναδική, θετικά ορισμένη λύση της (4.2) δεν συνεπάγεται ότι ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^*$ είναι ευσταθής.

4.5 Η Γενική Μορφή μιας Γραμμικής Εξίσωσης Πινάκων

Μέχρι στιγμής, η εργασία μας έχει επικεντρωθεί στην μελέτη των εξισώσεων $X - A^*_1XA_1 - \cdots - A^*_mXA_m = M$ (4.1) και της $X + A^*_1XA_1 + \cdots + A^*_mXA_m = M$ (4.2), και ασχοληθήκαμε με την καθεμία ξεχωριστά. Θα ήταν, λοιπόν ενδιαφέρον να μελετήσουμε την ύπαρξη λύσεων του συνδυασμού αυτών των δύο εξισώσεων, στην παρακάτω μορφή:

$$X - \sum_{j=1}^{m_1} A_j^* XA_j + \sum_{j=m_1+1}^{m} A_j^* XA_j = M, \tag{4.5.1}$$

με $M \in B(n)$ και $A_1, \ldots, A_m \in M(n)$.

Η (4.5.1) μπορεί να γενικευτεί και στην μορφή:

$$X - \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j A_j^* XA_j = M, \tag{4.5.2}$$

όπου $M \in B(n)$ και $A_1,\ldots, A_m \in M(n)$ και $\varepsilon_1=e^{i\theta_1}, \ldots, \varepsilon_m=e^{i\theta_m}$ για $\theta_1, \ldots, \theta_m \in [0,2\pi)$, έτσι το στοιχείο ε_j βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο για όλα τα $j=\{1, \ldots, m\}$. Επίσης, για την εξίσωση (4.5.2) μπορούμε να αποδείξουμε ότι η σταθερότητα του πίνακα $\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^*$ είναι επαρκής για την ύπαρξη μοναδικής λύσης της.

Λήμμα 4.5.1.

Έστω $A_1,\ldots,A_m \in M(n)$. Εάν ο $\sum_{j=1}^{m} A^T{}_j \otimes A^*{}_j$ είναι ευσταθής, τότε ο πίνακας

$$K_\varepsilon = I_{n^2} - \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j A_j^T \otimes A_j^*,$$

όπου $\varepsilon_1=e^{i\theta_1}, \ldots, \varepsilon_m=e^{i\theta_m}$ για $\theta_1, \ldots, \theta_m \in [0,2\pi)$, είναι αντιστρέψιμος. Σε αυτήν την περίπτωση η (4.5.2) έχει μοναδική λύση $\bar{X}$ για κάθε $M \in B(n)$. Επίσης, η λύση της (4.5.2) δίνεται από τον τύπο

$$\bar{X} = M + \sum_{\iota=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_i=1}^{m} \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{j_i} A_{j_1}^* \cdots A_{j_i}^* M A_{j_i} \cdots A_{j_1}.$$

Απόδειξη:

Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι η σταθερότητα του πίνακα $\sum_{j=1}^{m} A_j^T \otimes A_j^*$ είναι ισοδύναμη της ύπαρξης ενός $\widetilde{M} \in B(n)$, τέτοιο ώστε $\widetilde{M} - \sum_{j=1}^{m} A^*{}_j \widetilde{M} A_j > 0$. Θα αποδείξουμε, λοιπόν ότι ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j A^T{}_j \otimes A^*{}_j$ είναι ευσταθής, εάν ο $\widetilde{M} = I_n$. Τότε το Λήμμα αποδεικνύεται όπως το Θεώρημα 4.2.4.

Έστω λ μια ιδιοτιμή του $\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j A^T{}_j \otimes A^*{}_j$ και x το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε, ως γνωστόν τα λ και x ικανοποιούν την σχέση:

$$(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j A^T{}_j \otimes A^*{}_j)x=\lambda x.$$

Εάν υπάρχει X τέτοιο ώστε x=vec(X), τότε ο X είναι μια λύση της

$$\varepsilon_1 A^*{}_1 X A_1 + \cdots + \varepsilon_m A^*{}_m X A^*{}_m = \lambda X.$$

Όμως,

$$\hat{X}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \varepsilon_m X \end{pmatrix}$$

αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως $\lambda X = A^* \hat{X}_\varepsilon A$.

Αυτό όμως συνεπάγεται ότι,

$$|\lambda| \|X\| \leq \|A^* \hat{X}_\varepsilon A\| \leq \|A^* A\| \|\hat{X}_\varepsilon\|.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι,

$$\|\hat{X}_\varepsilon\| = \sqrt{\lambda^+(\hat{X}^*\varepsilon)(\hat{X}\varepsilon)} = \max\{\sqrt{\lambda^+(|\varepsilon_1|^2 X^* X)}, \ldots, \sqrt{\lambda^+(|\varepsilon_m|^2 X^* X)}\}$$

$$= \sqrt{\lambda^+(X^* X)} = \|X\|.$$

καθώς, $|\varepsilon_1|^2 = \cdots = |\varepsilon_m|^2 = 1$.

Επομένως, έχουμε ότι:

$$|\lambda| \|X\| \leq \|A^* A\| \|X\|,$$

άρα ακολουθεί από την $\sum_{j=1}^{m} A^*{}_j A_j < I_n$, ότι $|\lambda| < 1$. Αυτό δείχνει ότι ο πίνακας $\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j A^T{}_j \otimes A^*{}_j$ είναι ευσταθής, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη μας. □

Συμπέρασμα.

Από το Λήμμα 4.5.1 παίρνουμε μια συνθήκη για την ύπαρξη λύσης της (4.5.2), όμως όπως και στην εξίσωση (4.2), δεν συνεπάγεται ότι αν ο $M \in B(n)$, υπάρχει μοναδική, θετικά ορισμένη λύση.
Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση, $F_\varepsilon(X) = M + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j A_j^* X A_j$ της οποίας τα σταθερά σημεία είναι οι λύσεις της (4.5.2), δεν είναι μονότονη, ούτε

αντιστοιχεί το σύνολο $\overline{B}(n)$ στο $\pm\overline{B}(n)$, δεν μπορούμε να βρούμε επαρκείς συνθήκες που να αφορούν την ύπαρξη λύσης της (4.5.2). Μπορούμε, εδώ να καταλάβουμε πόσο σημαντική είναι η παραδοχή των S.M. El-Sayed και A.C.M Ran ότι οι λύσεις της (2.1) είναι τα σταθερά σημεία της απεικόνισης $F(X) = M - A^{*}\Phi(X)A$ (2.4), που μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε Θεωρήματα Σταθερών Σημείων για την μελέτη της (2.1).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Martine Reurings, Symmetric Matrix Equations, 2002.

2) A.C.M Ran and M.C.B. Reurings, *The symmetric linear matrix equation*, Electronic Journal of Linear Algebra, 9:93-107, 2002

3) Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

4) S .M El-Sayed and A.C.M Ran, *On an Iteration method for solving a class of non-linear matrix equations, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,* 2001.

5) P. Lancaster and L.Rodman, *Algebraic Riccati Equations*, Oxford University Press, 1995.

6) A.C.M. Ran and M.C.B Reurinds, *On the nonlinear matrix equation* $X+A^{*}F(X)A=Q$*: Solutions and perturbation theory. Linear Algebra and its Applications, 346:15-26, 2002.*

7) R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Gratuate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1997.

8) I.C. Gohberg and S. Goldberg, *Basic Operator Theory*, Birkhäuser, 1981.

9) S.Bittanti,A.J Laub and J.C. Willems (EDS.). *The Ricatti Equation*. Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag, 1991

10) Peter Benner, Enrique S. Quintana-Orti and Gregorio Quintana-Orti, *Solving Stable Stein Equations on Distributed Memory Computers,* Germany. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.55.6926&rep=rep1&type=pdf.

11) Horia Cornean, *Schauder's Fixed Point Theorem,* 2006. http://people.math.aau.dk/~cornean/index.html/newindex_files/schauder.pdf

12) A.J. Rojas, *On the Discrete-Time Algebraic Riccati Equation and Its Solution in Closed-Form,* Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad deConcepción, Chile. http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/prost/proceedings/ifac11proceedings/data/html/papers/0410.pdf

13) Π. Ψαρράκος, *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων*, 2014.

14) Α.Γ. Φελλούρης, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, 2006.

15) Αργυρός Σπυρίδων, *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Αθήνα 2011.

16) Αργυρός Σπυρίδων, *Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης*, Αθήνα 2004.

17) Ι. Β. Μαρουλάς, *Σημειώσεις Ανάλυσης Πινάκων*, Αθήνα, 2005.