ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΑΙΟΥ

Η συνάντηση των μαθηματικών και της αφήγησης στο αστυνομικό μυθιστόρημα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΡΕΝΙΕΡΗ ΑΝΝΑΣ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. Α.Μ. 09109022

Επιβλέπων : Θεολόγου Κώστας
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάιος 2017

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΑΙΟΥ

Η συνάντηση των μαθηματικών και της αφήγησης στο αστυνομικό μυθιστόρημα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΡΕΝΙΕΡΗ ΑΝΝΑΣ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. Α.Μ. 09109022

Επιβλέπων : Θεολόγου Κώστας
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
....	....	....
Θεολόγου Κώστας Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Στεφανέας Πέτρος Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Στέλιος Σπυρίδων ΕΔΙΠ Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάιος 2017

(Υπογραφή)

....

ΡΕΝΙΕΡΗ ΑΝΝΑ

Διπλωματούχος Μαθηματικός Εφαρμογών Ε.Μ.Π.

Στην οικογένειά μου,

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Θεολόγου Κώστα, για την υπομονή του, την πολύτιμη βοήθειά του σε κάθε στάδιο της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας και την προθυμία του, που διαμόρφωσαν μίαν άψογη συνεργασία.

- Τον κ. Στεφανέα Πέτρο και τον κ. Στέλιο Σπυρίδωνα για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

- Τον κ. Αραγεώργη Αριστείδη για την καθοριστική καθοδήγησή του και τις συμβουλές του στα πρώτα βήματα διερεύνησης του θέματος της διπλωματικής μου εργασίας.

- Τον Αντώνη που μου δώρισε το βιβλίο «Πυθαγόρεια Εγκλήματα» και μου παραχώρησε τον ηλεκτρονικό του υπολογιστή για να γράψω την εργασία μου.

- Την Ισμήνη που μου δάνεισε το βιβλίο «NUMB3RS».

- Τους γονείς μου Γιώργο και Δέσποινα, τον αδερφό μου Οδυσσέα, τη θεία μου Νικολίνα και τους φίλους μου, που με τόση υπομονή και αγάπη στάθηκαν δίπλα μου όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Περίληψη

Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας υπήρξε ο παραλληλισμός δύο δυνάμει διαφορετικών κόσμων, των μαθηματικών και της αφήγησης, και συνάμα η συσχέτιση των μαθηματικών αποδείξεων με την επίλυση μυστηρίων στα αστυνομικά μυθιστορήματα.

Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται, αρχικά, η έννοια της αφήγησης. Στη συνέχεια, καταγράφεται μία ιστορική ανασκόπηση της έννοιας της απόδειξης από την εποχή της Αρχαίας Ελλάδας μέχρι σήμερα, καθώς και μία τυπική κατηγοριοποίηση στις μεθόδους απόδειξης. Τέλος, παρουσιάζεται μία προσπάθεια γεφύρωσης του χάσματος μαθηματικών και αφήγησης, με αναφορά σε παραδείγματα που προσεγγίζουν τις αναλογίες των δύο αυτών κόσμων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζονται πέντε λογοτεχνικά έργα με μαθηματικό υπόβαθρο και η εργασία ολοκληρώνεται με τη συνεισφορά των μαθηματικών –άμεση και έμμεση- στην εξιχνίαση εγκλημάτων.

Abstract

The scope of this thesis was the parallelism of two virtually different worlds, mathematics and narrative, as well as the correlation of mathematical proofs with the solution of mysteries in detective stories.

Specifically, the first chapter initially presents the meaning of narration. Subsequently, there is a historical review of the concept of proof from ancient Greece until today, as well as a categorization of methods of proofs. Finally, an attempt is made to merge these two entities, with reference to examples which approach the similarities of mathematics and narrative.

In the second chapter, there is a presentation of five literary books with strong mathematical background. In conclusion, there is a spherical approach of the contribution of mathematics to the detection of crimes.

<u>**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**</u>

Εισαγωγή

Ο κόσμος των μαθηματικών, όσο χαοτικός και ακατανόητος κι αν φαντάζει για πολλούς ανθρώπους, στην πραγματικότητα αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρώπινου πολιτισμού, που με τη σωστή προσέγγιση μπορεί και ο πιο δύσπιστος να αφουγκραστεί τη μαγεία του. Τα μαθηματικά είναι ένας ύμνος της ανθρώπινης λογικής και δημιουργήθηκαν για να προάγουν τη ζωή όλων μας. Συνεπώς, θα ήταν άδικο να αντιμετωπίζονται ως προνόμιο των ιδιοφυών.

Μία ευχάριστη προσέγγιση αυτού του κόσμου μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της αφήγησης. Όπως ένα παιδί αρχίζει να επεξεργάζεται δυσνόητες -για εκείνο- έννοιες μέσω των παραμυθιών, έτσι και η αφήγηση αποτελεί μία σκοπιά από την οποία τα μαθηματικά αρχίζουν να αποκτούν διαφορετικό ενδιαφέρον. Πως μπορεί να συνδέονται δύο τόσο, τουλάχιστον φαινομενικά, διαφορετικές κουλτούρες;

Οι αρχαίοι Έλληνες, αφηγούμενοι τους προβληματισμούς τους γύρω από τα μαθηματικά, συνέβαλαν στη γέννηση μίας θεμελιώδους σημασίας έννοιας, της απόδειξης! Υπάρχουν, πράγματι, ομοιότητες ανάμεσα στις μαθηματικές αποδείξεις και στην αφήγηση; Πρόκειται για δύο κόσμους ίσους ή όμοιους;

Μία πιο ειδική σύνδεση μαθηματικών και αφήγησης, συναντάται σε ένα λογοτεχνικό είδος που τα τελευταία χρόνια φαίνεται να κερδίζει ολοένα και περισσότερους θαυμαστές, αυτό της «μαθηματικής λογοτεχνίας». Τα έργα αυτού του είδους παρουσιάζουν ιστορικό και αστυνομικό ενδιαφέρον και μέσα σε αυτά τα μαθηματικά αναμιγνύονται με ποικίλους τρόπους. Τι προσφέρει το μαθηματικό υπόβαθρο στα αστυνομικά μυθιστορήματα και με ποιους τρόπους σχετίζονται τα μαθηματικά με την πρόληψη, εξιχνίαση ή ακόμα και με τη συγκάλυψη εγκλημάτων;

1. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΑΦΗΓΗΣΗ

1.1 Η αφήγηση

Εξερευνώντας δύο διαφορετικούς κόσμους, τα μαθηματικά και την αφήγηση, με ένα –φαινομενικά- μεγάλο χάσμα ανάμεσά τους και μελετώντας την πιθανότητα ύπαρξης κάποιας γέφυρας που να τους συμφιλιώνει, είναι πρωτίστως αναγκαία η γνώση καθενός ξεχωριστά. Πρόκειται για δύο έννοιες που, στην πραγματικότητα, αποτελούν σύνολα αντικειμένων και όχι αυθύπαρκτες οντότητες. Αποτελούν δύο διακριτά διαφορετικές μορφές ανθρώπινης δραστηριότητας, οι οποίες αναπτύσσονται για την εξυπηρέτηση διαφορετικών αναγκών, είτε ατομικών, είτε συλλογικών. Καθεμία από αυτές τις δραστηριότητες παράγει τα δικά της μέσα έκφρασης, τα οποία αντικατοπτρίζουν τις διαφορές ανάμεσά τους, καθώς και τη μοναδικότητα που τις χαρακτηρίζει. Μία προσεγγιστική κατηγοριοποίησή τους, χαρακτηρίζει τα μαθηματικά ως «επιστημονική κουλτούρα» και την αφήγηση ως «λογοτεχνική κουλτούρα». (Λαγοδόντη, 2014: 11)

Σύμφωνα με το Λεξικό Μπαμπινιώτη, αφήγηση είναι η έκθεση σειράς γεγονότων (πραγματικών ή φανταστικών) με ορισμένο τρόπο (ιστορικό, λογοτεχνικό, παραμυθικό κ.ά.) και μπορεί να είναι είτε γραπτή, είτε προφορική (Μπαμπινιώτης, 2002: 325). Σε ένα αφηγηματικό έργο, ο αφηγητής (ή οι αφηγητές) μπορεί να αποτελεί πρόσωπο του αφηγηματικού περιεχομένου, με πρωταγωνιστικό ή δευτερεύοντα ρόλο και η αφήγηση γίνεται σε πρώτο πρόσωπο. Έτσι, εξασφαλίζεται η αμεσότητα και η αξιοπιστία της αφήγησης, καθώς ο δέκτης αντιλαμβάνεται ότι πρόκειται για μία προσωπική μαρτυρία την οποία ο αφηγητής εξομολογείται. Στην περίπτωση που ο αφηγητής δεν συμμετέχει στα γεγονότα που εκθέτει, η αφήγηση πραγματοποιείται σε τρίτο πρόσωπο και αποκτά έναν αποστασιοποιημένο χαρακτήρα, καθώς ο αφηγητής μοιάζει να παρακολουθεί τα δρώμενα από μακριά, ευρισκόμενος παντού και πάντα και γνωρίζοντας και την παραμικρή σκέψη των ηρώων. Σε κάθε περίπτωση, ο αφηγητής καλείται να παρουσιάσει στον αναγνώστη (ή ακροατή) διάφορα στοιχεία όπως το μέρος στο οποίο διαδραματίζονται τα γεγονότα, το χρόνο, τους ήρωες που συμμετέχουν σε αυτά και την εξέλιξή τους. (Παπαλεοντίου, 2014: 3-4)

Τα αφηγηματικά είδη διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:

- Αφήγηση πραγματικών γεγονότων (ιστοριογραφία, αυτοβιογραφία, απομνημονεύματα)
- Αφήγηση πλασματικών γεγονότων (μυθιστόρημα, παραμύθι, διήγημα)
- Μικτή αφήγηση πραγματικών και πλασματικών γεγονότων (μυθιστορηματική βιογραφία, ιστορικό μυθιστόρημα)

Καθένα από τα παραπάνω είδη υπηρετεί συγκεκριμένο σκοπό και γράφεται στο κατάλληλο ύφος. Αναλόγως, χρησιμοποιούνται και οι κατάλληλες αφηγηματικές τεχνικές, όπως, για παράδειγμα, η περιγραφή, η διήγηση, ο μονόλογος, ο διάλογος κ.ά. (Παπαλεοντίου, 2014: 11).

Η αφήγηση φαίνεται να είναι μία εκ γενετής έκφραση της σκέψης. Απορρέει από την ανάγκη να επικοινωνήσουμε, να περιγράψουμε τον κόσμο ή ακόμα να εκφράσουμε τη φαντασία μας πλάθοντας ήρωες και σχέσεις που τους συνδέουν. Για το λόγο αυτό δημιουργούμε ιστορίες που παίρνουν μορφή μέσα από τη γλωσσική ικανότητα. Οι ιστορίες, όμως, είναι το νόμισμα και το συνάλλαγμα μιας κουλτούρας, καθώς με την αφήγηση ιστοριών μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγουμε πολιτισμό. Από τα παραπάνω προκύπτει μία προσέγγιση σύμφωνα με την οποία, η αφήγηση δεν αποτελεί συγκεκριμένη ικανότητα μιας ομάδας ανθρώπων αλλά ανθρώπινο χαρακτηριστικό, όπως και η ύπαρξη της ίδιας της σκέψης. (Λέρη, 2008: 17)

1.2 Ο κόσμος των αποδείξεων μαθηματικών θεωρημάτων

Σύμφωνα με τον Γκαλιλέο Γκαλιλέι, το σύμπαν δεν μπορεί να διαβαστεί παρά μόνο αφού μαθευτεί η γλώσσα του και έχει γίνει εξοικείωση με τους χαρακτήρες με τους οποίους η γλώσσα του είναι γραμμένη. Η γλώσσα του είναι η μαθηματική γλώσσα, και τα γράμματα είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τα οποία συνεπώς είναι ανθρωπίνως αδύνατο να κατανοηθεί έστω και μια λέξη. Χωρίς αυτά, είναι σαν να περιπλανιόμαστε σε ένα σκοτεινό λαβύρινθο.[1]

Τα μαθηματικά είναι η επιστήμη που πραγματεύεται ένα σύστημα γνώσεων, το οποίο αποτελείται από θεμελιώδεις έννοιες και βασικές προτάσεις και μελετά τις σχέσεις όλων των μετρήσιμων αντικειμένων της φύσης, της πραγματικότητας αλλά και της φαντασίας μας. Οι πρωταρχικές έννοιες καθώς και οι προτάσεις που τις συνοδεύουν, αποτελούν τη βάση του κόσμου των μαθηματικών και σε συνδιασμό με τις συνέπειές τους συντελούν τα γνωστά σε όλους μας θεωρήματα. Τα θεωρήματα δεν αποτελούν προτάσεις η αλήθεια των οποίων είναι αδιαμφησβήτητα προφανής. Η διαδιακασία κατά την οποία επικυρώνεται η ορθότητα ενός θεωρήματος είναι η *απόδειξη*. Πρόκειται, λοιπόν, για ένα συλλογισμό ο οποίος οδηγεί στο συμπέρασμα πως μία πρόταση είναι αληθής σε όλες τις περιπτώσεις στις οποίες εφαρμόζεται, χωρίς καμία εξαίρεση. Όταν ένα θεώρημα έχει αποδεικτεί, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για την απόδειξη άλλων προτάσεων. Λήμμα μπορεί να λέγεται ένα θεώρημα αν χρησιμοποιείται ως βήμα στην απόδειξη ενός θεωρήματος. Τα αξιώματα είναι οι προτάσεις αυτές που δεν γίνεται, ή δεν χρειάζεται, να αποδεικτούν και η αλήθεια τους είναι καθολική.

Ένα θεμελιώδες ερώτημα είναι, γιατί οι Αρχαίοι Έλληνες από τη στιγμή που ασχολήθηκαν με τα μαθηματικά, «εισήγαγαν» την απόδειξη, η οποία και έλαβε εξαιρετικά σημαντική θέση στην επιστήμη; Αν υποτεθεί ότι τα μαθηματικά είναι απλά μία οδός «τακτοποίησης» χειροπιαστών και προφανών αντικειμένων, τότε η ύπαρξη της απόδειξης μοιάζει ανούσια. Αν, όμως, τα μαθηματικά πραγματεύονται ζητήματα που δεν γίνονται αντιληπτά από τις ανθρώπινες αισθήσεις, ή απαιτούν ιδιαίτερη διαίσθηση για να γίνουν κατανοητά, τότε η έννοια της απόδειξης είναι κάθε άλλο παρά ανούσια. Οι Αρχαίοι Έλληνες δεν υποβίβαζαν ούτε παρέβλεπαν την αξία

[1] Βλ. https://el.wikiquote.org/wiki/%CE%93%CE%B1%CE%BB%CE%B9%CE%BB%CE%B1%CE%AF%CE%BF%CF%82 (πρόσβαση στις 09/04/2017)

της εμπειρίας, της διαίσθησης και του πειράματος. Απλώς δεν αρκούνταν σε αυτά, παρά είχαν την ανάγκη να αιτιολογούν οποιαδήποτε διαδικασία ακολουθούσαν για τη λύση ενός προβλήματος. Έτσι, με τη συμβολή της απόδειξης όχι μόνο τεκμηριώθηκε ένας μεγάλος όγκος συσσωρευμένης γνώσης, αλλά πραγματοποιήθηκαν και πολλά από τα αξιοθαύμαστα επιτεύγματα της αρχαίας ελληνικής εποχής. Εξερευνώντας, λοιπόν, τα ίχνη της απόδειξης από τη γέννηση της ιδέας της και φωτίζοντας τις πτυχές της εξέλιξής της, ανοίγεται ένας δρόμος που οδηγεί στη σημερινή της μορφή και στις κατηγορίες από τις οποίες αποτελείται. (Καρδαμίτσης, 2010: 13˙ Εξαρχάκος, 1990: 89)

1.2.1 Ιστορική Αναδρομή

Η απόδειξη άσκησε θεμελιώδη ρόλο στην πορεία της επιστήμης των μαθηματικών, καθώς η ιδέα της συναντάται στους πρώτους κιόλας μαθηματικούς προβληματισμούς πολλούς αιώνες πριν. Συνέβαλε καθοριστικά στη γέννηση νέων εννοιών και μαθηματικών αντικειμένων, καθώς και στην επινόηση καινούριων κλάδων της επιστήμης.

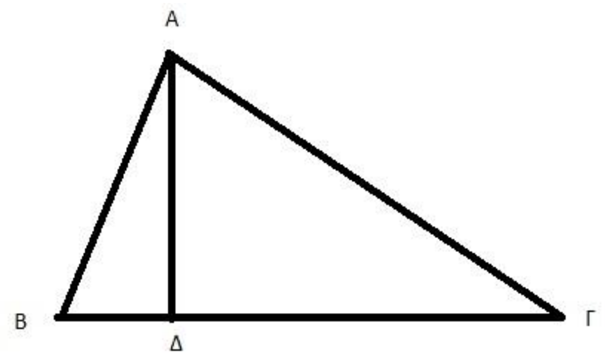
Ο πρώτος που αναφέρεται ότι εισήγαγε την έννοια της απόδειξης στο σύμπαν των μαθηματικών, προκειμένου να εγκυροποιήσει τους μαθηματικούς συλλογισμούς του, ήταν ο Θαλής ο Μιλήσιος (640 ή 624 π.Χ. - 546 π.Χ.). Ο Θαλής είναι ο αρχαιότερος προσωκρατικός φιλόσοφος, ο πρώτος των επτά σοφών της αρχαιότητας, μαθηματικός, φυσικός, αστρονόμος, μηχανικός, μετεωρολόγος και ιδρυτής της Ιωνικής Σχολής της φυσικής φιλοσοφίας στη Μίλητο. Χαρακτηριστικά ο Μπέρτραντ Ράσελ (1872-1970) είπε πως «Η Δυτική φιλοσοφία αρχίζει με τον Θαλή». Ο Θαλής προσπάθησε να κατανοήσει τον κόσμο και να κατανοήσει τα φυσικά φαινόμενα μέσα από τα μάτια της επιστήμης, χωρίς να αναφέρεται στη μυθολογία όπως γινόταν στην εποχή του. Κέρδισε το θαυμασμό των Αιγυπτίων υπολογίζοντας το ύψος των πυραμίδων, βασιζόμενος στο μήκος της σκιάς τους και της σκιάς μιας ράβδου. Η πρώτη απόδειξη στην ιστορία των μαθηματικών οφείλεται σε αυτόν και αφορά στην πρόταση: «Η διάμετρος ενός κύκλου τον διχοτομεί». Στο Θαλή αποδίδονται από τους αρχαίους συγγραφείς πέντε ακόμα αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων, μία εκ των οποίων είναι γνωστή ως «Το Θεώρημα του Θαλή». Ωστόσο, υπάρχουν μηδαμινές πληροφορίες σχετικά με το είδος των αποδείξεων του Θαλή.[2]

Στη συνέχεια πήραν τη σκυτάλη οι Πυθαγόρειοι, οι οποίοι είναι αναμφισβήτητο πως κατέχουν μία από τις σημαντικότερες θέσεις στην ιστορία της αρχαίας ελληνικής σκέψης. Σύμφωνα με την παράδοση, ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της σχολής των Πυθαγορείων ήταν η μυστικότητα, η οποία περιέβαλε όλα τα βασικά δόγματά της, αλλά και τον ίδιο τον Πυθαγόρα. Παρά τη μυστικότητα, όμως, ένα μεγάλο μέρος της διδασκαλίας του είναι γνωστό, όπως επίσης και η γενικότερη φιλοσοφική προσέγγιση της ζωής και της επιστήμης που πρέσβευαν οι Πυθαγόρειοι. Ωστόσο, οι γνώσεις μας για τους Πυθαγόρειους αντλούνται αποκλειστικά από έργα μεταγενέστερων συγγραφέων, στους οποίους

[2] Βλ. https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%98%CE%B1%CE%BB%CE%AE%CF%82 (πρόσβαση στις 24/05/2017)

περιλαμβάνονται και οι λεγόμενοι «Νεοπυθαγόρειοι». Αναπόφευκτα, λοιπόν, δεν είναι εφικτό να αποδειχθεί τι πραγματικά ανήκει στη σκέψη του ίδιου του Πυθαγόρα και τι στους μαθητές του.

Οι Πυθαγόρειοι, και πιο συγκεκριμένα το όνομα του Πυθαγόρα, είναι συνδεδεμένοι με το πυθαγόρειο θεώρημα. Στο ερώτημα, ποια ήταν ακριβώς η απόδειξη που ανακάλυψαν οι Πυθαγόρειοι, δεν υπάρχει σίγουρη απάντηση. Η απόδειξη που συναντάει κανένας στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (Βιβλίο 1, πρόταση 47) φαίνεται πως είναι αρκετά διαφορετική από την αρχική. Σύμφωνα με τον Robinson είναι πιθανό η αρχική απόδειξη να στηριζόταν στην θεωρία ομοίων τριγώνων, που ήταν γνωστή στους Πυθαγόρειους, και πιθανώς να είχε την παρακάτω μορφή:



Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε την κάθετο ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια προς το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ και, βέβαια, όμοια μεταξύ τους.

Επομένως:

$$ΒΑ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$$

$$ΑΓ^2 = ΓΔ \cdot ΒΓ$$

Αθροίζοντας κατά μέλη έχουμε ότι:

$$ΒΑ^2 + ΑΓ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ + ΓΔ \cdot ΒΓ = (ΒΔ+ΔΓ) \cdot ΒΓ = ΒΓ^2$$ (Robinson, 1968: 64)

Η ανακάλυψη αυτή οδήγησε σε μία τρομερή κρίση που είχε τελική συνέπεια την ουσιαστική διάλυση της σχολής των Πυθαγορείων. (Αναπολιτάνος, 1985: 13-14)

Αξίζει να αναφερθεί ένα παράδειγμα απόδειξης στην πρωταρχική της μορφή, δηλαδή, μία μέθοδος που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Έλληνες με σκοπό να υπολογίσουν το μέγιστο κοινό μέτρο ανάμεσα σε δύο δεδομένα μήκη. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως *μέθοδος της αμοιβαίας αφαίρεσης* και έχει ως εξής: δοθέντων δύο δεδομένων μηκών, έστω x και y με $y \geq x$, αφαιρούμε από το μήκος y το κατάλληλο πολλαπλάσιο του μήκους x, έτσι ώστε το υπόλοιπο z να ικανοποιεί τη σχέση $\mathrm{x} > \mathrm{z} \geq 0$. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία, έχοντας τώρα να συγκρίνουμε τα μήκη x και z, αφαιρούμε από το x κατάλληλο πολλαπλάσιο του z και συνεχίζουμε να εκτελούμε αυτόν τον αλγόριθμο μέχρις ότου το υπόλοιπο της αφαίρεσης να γίνει 0. Το μήκος που χρησιμοποιήθηκε τελευταίο ως διαιρέτης είναι το κοινό μέτρο των μηκών x και y. Στην περίπτωση που τα μήκη x και y είναι ασύμμετρα, τα παραπάνω βήματα επαναλαμβάνονται επ' άπειρον, εφόσον δεν μπορεί να επιτευχθεί υπόλοιπο 0. Πιθανολογείται πως η ανακάλυψη της ύπαρξης ασύμμετρων μεγεθών επετεύχθη από τον Πυθαγόρειο Ίππασο, όπως θα αναφερθεί και παρακάτω στο αστυνομικό μυθιστόρημα «Πυθαγόρεια Εγκλήματα». Η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών ήρθε σε πρόσκρουση με την πυθαγόρεια κοσμοθεωρία και ως αποτέλεσμα η καταστροφή αυτής της σχολής, οδήγησε σταδιακά μετά από αιώνες, στους γνωστούς σε όλους μας «πραγματικούς αριθμούς». (Αναπολιτάνος, 1985: 24)

Η αποδεικτική διαδικασία τελειοποιήθηκε στην Ακαδημία Πλάτωνος, η οποία ιδρύθηκε στην Αθήνα γύρω στο 387 π.Χ. από τον Πλάτωνα μετά το πρώτο ταξίδι του (398-390 π.Χ.) στη Σικελία. Η βασική συμβολή της Ακαδημίας στα μαθηματικά συνίσταται στο ότι συγκέντρωσε τις έως τότε μαθηματικές γνώσεις που προέρχονταν από τους Πυθαγορείους, τις ταξινόμησε, τις εξέλλιξε και τις έθεσε σε ένα λογικό αποδεικτικό σύστημα, καθιστώντας άρτιες τις αποδεικτικές μεθόδους. Ένα συμπαγές αποτέλεσμα όλων των παραπάνω, ήταν τα Στοιχεία του Ευκλείδη, που παρόλο που γράφτηκαν στην Αλεξάνδρεια, αποτελούν αποκλειστικό έργο της Ακαδημίας Πλάτωνος.

Κατά τον Πλάτωνα, αποδεικνύοντας ένα θεώρημα διατυπώνονται αλήθειες που σχετίζονται με την περιγραφή των μαθηματικών ιδεών. Οι αληθείς μαθηματικές προτάσεις, σύμφωνα με την Πλάτωνα, είναι από τη φύση τους αναγκαίες, δεδομένου πως βασίζονται σε πραγματικές δομικές σχέσεις των πλατωνικών ιδεών. Οι αλήθειες αυτές δεν εξαρτώνται από την ικανότητα του μαθηματικού να τις συλλάβει, αλλά υπάρχουν ανεξάρτητα από εκείνον. Ο μαθηματικός, για τον Πλάτωνα, δεν εφευρίσκει νέες μαθηματικές αλήθειες. Εκείνες υπάρχουν αναμένοντας για την εξερεύνισή τους.

Οι μαθηματικές αλήθειες είναι ανεξάρτητες από το φορμαλισμό, που συγκεκριμένα χρησιμοποιείται για τη διατύπωσή τους και η χρήση σχημάτων, γραμμών και εικόνων δεν έχει σχέση με τις ίδιες. Έχει σχέση με την ανακάλυψή τους. Η χρήση σχημάτων, γραμμών και εικόνων σχετίζεται με την αισθητηριακή παρατήρηση που υποβοηθεί στη σύλληψη των ιδεών και όχι στην εφεύρεσή τους. Πολλές φορές η ανακάλυψη αυτών των αληθειών περνάει μέσα από τους δαιδάλους συγκεκριμένων κατασκευαστικών αλγορίθμων. Ούτε αυτοί οι αλγόριθμοι είναι απαραίτητοι για το χαρακτηρισμό μια συγκεκριμένης πρότασης ως αληθούς ή ψευδούς. Είναι βέβαια απαραίτητοι για την ανακάλυψη της αλήθειας αλλά δεν αποτελούν απαραίτητο συστατικό της. Μία μαθηματική πρόταση είναι αληθής ή όχι, επειδή αντιστοιχεί ή όχι σε κάποια συγκεκριμένα δομικά χαρακτηριστικά του σύμπαντος των μαθηματικών Ιδεών τα οποία και περιγράφει. Η συγκεκριμένη κατασκευή ή ο αλγόριθμος που θα χρησιμοποιηθεί για την ανακάλυψή της, παίζει ρόλο καθαρά βοηθητικό και αντιπροσωπεύει το μίτο της Αριάδνης για την έξοδο από τον λαβύρινθο. Η έξοδος από τον λαβύρινθο υπάρχει ανεξάρτητα από το μίτο. Χρειάζεται βέβαια πολλές φορές ευφυϊα, υπομονή και πολλή εργατικότητα για την εύρεσή του. Η ύπαρξη όμως της εξόδου δεν έχει καμία σχέση με όλα αυτά. Ακόμα και η γλώσσα που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τέτοιων αλγορίθμων ή κατασκευών δίνει, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, τελείως λανθασμένη εντύπωση γύρω από το τι είναι η μαθηματική γνώση. Μία τέτοια περιγραφική γλώσσα είναι στραμένη προς την περιγραφή του συγκεκριμένου αλγορίθμου και έτσι δίνει την εντύπωση πως ο μαθηματικός δημιουργεί τα μαθηματικά του, ενώ η αλήθεια - κατά τον Πλάτωνα - είναι πως μόνο τα ανακαλύπτει. (Αναπολιτάνος, 1985: 34)

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η αντίληψη του Πλάτωνα για τη σχέση των εφαρμοσνένων μαθηματικών που βασίζονται στην ανθρώπινη αισθητηριακή αντίληψη και τη διέγερση της φαντασίας, με τα καθαρά μαθηματικά που εκφράζονται μέσω προτάσεων οι οποίες είναι αναγκαία αληθείς και αδιάβλητες στο χρόνο. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που καθιστά σαφή την αντίληψη αυτή του Πλάτωνα, είναι το εξής: η πρόταση " 1+1=2 " είναι αναγκαία αληθής, καθώς εκφράζει κάτι διαρκές και αναλλοίωτο, ενώ η πρόταση " 1 πέτρα + 1 πέτρα = 2 πέτρες " αποτελεί μία εμπειρική πρόταση η οποία προσεγγίζει την προηγούμενη και δανείζεται την αλήθεια της. Βασική προϋπόθεση είναι το αντικείμενο "πέτρα" να είναι ένα υπαρκτό αντικείμενο του φυσικού μας σύμπαντος, διαφορετικά η εμπειρική πρόταση που προαναφέρθηκε, δεν θα είχε κανένα νόημα σε ένα κόσμο χωρίς πέτρες! Συμπερασματικά, κατά τον Πλάτωνα, τα φυσικά αντικείμενα προσεγγίζουν τις ιδέες και έτσι τα εφαρμοσμένα μαθηματικά δικαιώνονται από την ύπαρξη των καθαρών μαθηματικών.

Για το ρόλο της διαλεκτικής μεθόδου στην ανακάλυψη λανθάνουσας γνώσης και τον παραλληλισμό της με τη μαιευτική τέχνη, είναι χαρακτηριστικός ο πλατωνικός διάλογος *Θεαίτητος* (Πλάτωνος, Θεαίτητος 148b – 151d). Στο διάλογο *Μένων* (Πλάτωνος, Μένων 81c – 86b) αναπτύσσεται διεξοδικά η πλατωνική θεωρία πως η γνώση είναι *ανάμνηση*. Εκεί ο Μένων καλεί ένα νεαρό δούλο του, μετά από παράκληση του Σωκράτη, τον οποίο στη συνέχεια χρησιμοποιεί ο Σωκράτης για να αποδείξει τη θεωρία του. Του υποβάλλει το παρακάτω ερώτημα: Ποιο είναι το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού ενός τεραγώνου πλευράς ίσης με 2 πόδες; Ο δούλος απαντάει αρχικά πως το μήκος πρέπει να είναι ίσο με 4 πόδες. Σε ένα πρώτο στάδιο ο Σωκράτης αφήνει το δούλο στον πλάνη του. Στη συνέχεια, κάνοντας σχετικούς υπολογισμούς, τον βοηθά να συνειδητοποιήσει πως όταν η πλευρά τετραγώνου διπλασιάζεται, το εμβαδόν του τετραπλασιάζεται. Η νέα πρόταση του δούλου μετά απ' αυτό είναι να θεωρηθεί η πλευρά του τετραγώνου μιάμιση φορά μεγαλύτερη του προηγούμενου, δηλαδή 3 πόδες. Το εξαγόμενο βέβαια δεν είναι σωστό γιατί το παραγόμενο τετράγωνο έχει εμβαδόν 9 τετραγωνικούς πόδες. Ο Σωκράτης στη συνέχεια διακόπτει τις ερωτήσεις και επισημαίνει στο Μένωνα πως η κριτική ικανότητα του δούλου έχει αυξηθεί σε σχέση με αυτή που είχε πριν αρχίσει ο διάλογος και πως αυτό συντελέστηκες χωρίς ο δούλος να αποκτήσει καμία πρόσθετη γνώση. Ο Σωκράτης σ'αυτό το σημείο θεωρεί ότι κάτι τέτοιο δείχνει πως οι ερωτήσεις που υποβλήθηκαν στο δούλο τον βοήθησαν να συνειδητοποιήσει απλώς την ήδη ενυπάρχουσα γνώση μέσα του. Προχωρεί στην επανάληψη του διαλόγου του με το δούλο και τον οδηγεί τελικά στη σωστή λύση του προβλήματος χωρίς, κατά τη γνώμη του πάλι, να τον μάθει τίποτε νέο. (Αναπολιτάνος, 1985: 36-37)

Ο επόμενος σταθμός του ιστορικού ταξιδιού που ακολούθησε η μαθηματική απόδειξη, αξίζει να γίνει σε έναν παγκοσμίου φήμης Έλληνα μαθηματικό, τον Ευκλείδη, ο οποίος πιθανότατα υπήρξε μαθητής της Ακαδημίας Πλάτωνος. Ο Ευκλείδης δίδαξε και πέθανε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, περίπου κατά την διάρκεια της βασιλείας του Πτολεμαίου Α΄ (323 π.Χ. - 283 π.Χ.) και στις μέρες μας είναι γνωστός ως ο «πατέρας» της Γεωμετρίας. Τον 3ο αιώνα π.Χ., το κορυφαίο κέντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης και της έρευνας ήταν το Μουσείο της Αλεξάνδρειας, όπου δίδαξε και έγραψε τα *Στοιχεία* (περ. 300 π.Χ.), τα οποία θεωρούνται ευρέως ως τα πιο επιτυχημένα και με την μεγαλύτερη επιρροή, βιβλία όλων των εποχών (βλ. Εικόνα 1). Τα *Στοιχεία*, τα οποία εισήγαγαν τη μαθηματική ακρίβεια μέσω της αξιωματικής μεθόδου, είναι το αρχαιότερο παράδειγμα που χρησιμοποίησε τη μορφή που χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα: ορισμός → αξίωμα → θεώρημα → απόδειξη. Θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί πως δεν πρόκειται ακριβώς για ένα μεγάλο καινοτόμο, όσο για έναν ευφιή οργανωτή που συστηματοποίησε και έθεσε σε στέρεα θεωρητικά θεμέλια τα συμπεράσματα στα οποία έφτασαν ο Θαλής, ο Εύδοξος και άλλες προσωπικότητες της εποχής. Ο Ευκλείδης είχε, ουσιαστικά, την ικανότητα να ανασυντάξει τις αποδείξεις των θεωρημάτων σε σύντομους αυστηρούς όρους.[3]

<u>Εικόνα 1:</u> Ένα από τα παλαιότερα σωζόμενα θραύσματα από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.

Επάξια αναλαμβάνει τη σκυτάλη ο Αρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) ο Συρακούσιος, ο οποίος θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης για να υπολογίσει την περιοχή κάτω από το τόξο μίας παραβολής με το άθροισμα των άπειρων σειρών, με τρόπο όχι ιδιαίτερα διαφορετικό συγκριτικά με τους μοντέρνους λογισμούς. Επιπλέον, απέδειξε ότι κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο της εξάρτησης για να υπολογίσει την τιμή του π με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, αποσπώντας την πιο ακριβή τιμή

[3] Βλ. https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%95%CF%85%CE%BA%CE%BB%CE%B5%CE%AF%CE%B4%CE%B7%CF%82 (πρόσβαση στις 05/05/2017)

του π που έχει υπάρξει, 310⁄71 < π < 310⁄70. Επιπροσθέτως, μελέτησε τη σπείρα στην οποία έδωσε και το όνομα του, εξάγοντας συναρτήσεις από τους όγκους των γεωμετρικών επιφανειών (παραβολή, έλλειψη, υπερβολή) και ενός ευφυέστατου συστήματος για να εκφράζει πολύ μεγάλους αριθμούς. Ο ίδιος θεώρησε ως το μέγιστο κατόρθωμα του την ανακάλυψη μέτρησης της επιφάνειας και του όγκου μίας σφαίρας, η οποία ισούται με τα 2/3 της επιφάνειας και του όγκου ενός εγγεγραμμένου κυλίνδρου στη σφαίρα. Αξίζει να σημειωθεί πως ο τάφος του είχε ένα γλυπτό που απεικόνιζε την παραπάνω μαθηματική απόδειξη. Οι τελευταίες λέξεις που του αποδίδονται είναι «μην ενοχλείτε τους κύκλους μου», αναφερόμενος στο μαθηματικό του σχέδιο το οποίο θεωρείται ότι μελετούσε όταν τον διέκοψε ο Ρωμαίος στρατιώτης (βλ. Εικόνα 2).[4]

Εικόνα 2: Ο Αρχιμήδης αποκρίνεται στον στρατιώτη που πλησιάζει να τον σκοτώσει: «μή μου τους κύκλους τάραττε».

Το δρόμο που χάραξε ο Αρχιμήδης ακολουθούν σπουδαίοι Έλληνες μαθηματικοί, όπως ο Απολλώνιος ο Περγαίος (262-190 π.Χ.) που έκανε σημαντικές βελτιώσεις στην μελέτη του κώνου, ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος (276-194 π.Χ.) που επινόησε το "Κόσκινο του Ερατοσθένη" το οποίο έβρισκε τους πρώτους αριθμούς, ο Ίππαρχος της Νίκαιας (190-120 π.Χ) ο οποίος θεωρείται ο θεμελιωτής της τριγωνομετρίας και ιδιαίτερα του πρώτου γνωστού τριγωνομετρικού πίνακα και ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (90-168 μ.Χ.) ο οποίος κρύβεται πίσω από την πιο ολοκληρωμένη και σημαντική τριγωνομετρική συνεισφορά στην αρχαιότητα.

Μετά τον Κλαύδιο ακολουθεί μία περίοδος στασιμότητας (μεταξύ 250 και 350 μ.Χ.), γνωστή και ως " Ασημένια Χρόνια" των Ελλήνων μαθηματικών. Σε αυτή την περίοδο, ο Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς (περίπου 210-290 μ.Χ.) έκανε σημαντικές βελτιώσεις στην άλγεβρα, και συγκεκριμένα την απροσδιόριστη ανάλυση, η οποία είναι γνωστή και ως "Διοφαντική Ανάλυση". Η μελέτη των Διοφαντικών εξισώσεων και της Διοφαντικής προσέγγισης είναι μια σημαντική συνεισφορά στις έρευνες που γίνονται εως και σήμερα. Η βασική του δουλεία ήταν πάνω στην *Αριθμητική*, μια συλλογή από 150 αλγεβρικά προβλήματα σχετικά με τις ακριβείς λύσεις

[4] Βλ. https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CF%81%CF%87%CE%B9%CE%BC%CE%AE%CE%B4%CE%B7%CF%82 (πρόσβαση στις 05/05/2017)

απροσδιόριστων εξισώσεων. Η *Αριθμητική* άσκησε σημαντική επιρροή στους μεταγενέστερους μαθηματικούς, όπως τον Πιέρ Ντε Φερμά , ο οποίος μελετώντας το έργο του Διόφαντου κατέληξε στο φημισμένο του θεώρημα, όπως θα αναφερθεί και παρακάτω στο έργο μαθηματικής λογοτεχνίας «Το Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά».[5]

Τους πρώτους αιώνες μ.Χ., η μαθηματική απόδειξη έχει πλέον αποκτήσει σαφή δομή και φτάνει στα χέρια μας σήμερα με την εξαιρετική συμβολή μαθηματικών όλου του κόσμου με αξιοσημείωτο έργο, όπως οι: Fibonacci, Gottfried Wilhelm Leibniz, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace κ.ά. Έτσι, από τον 19ο αιώνα και ύστερα η ιστορία μάς οδηγεί στα "σύγχρονα μαθηματικά", με βασικούς πρωταγωνιστές τους: Johann Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, William Rowan Hamilton, George Boole, Augustin-Louis Cauchy, Karl Weierstrass, George Cantor, Peano, LEJ Brouwer, David Hilbert, Bertrand Russell, Kurt Friedrich Gödel, Alan Matheson Turing και Srinivasa Aiyangar Ramanujan.

Το έργο του Γερμανού μαθηματικού David Hilbert (1862 – 1943) και το πρόγραμμά του (Hilbert’s Program) θεωρείται αφετηρία της συμβολικής θεωρίας αποδείξεων. Στις πρώτες δεκαετίες του 20ου αιώνα το πρόγραμμα του Hilbert αποτέλεσε κεντρικό σημείο αναφοράς για τα θεμελιώδη προβλήματα των μαθηματικών. Βασικά ζητήματα που θέτει το πρόγραμμα είναι η απόδειξη της συνέπειας των μαθηματικών θεωριών, καθώς και θέματα ανεξαρτησίας αξιωμάτων, αποφασισιμότητας και πληρότητας. Σύμφωνα με την προσέγγιση του Hilbert, η τυποποίηση των μαθηματικών θεωριών επιτρέπει τη χρήση μεταμαθηματικών εργαλείων, προσφέροντας έτσι γόνιμο έδαφος για τη μελέτη τους. Ωστόσο, η υλοποίηση του προγράμματος του Hilbert αποδείχθηκε ανέφικτη λόγω των εργασιών του Gödel και συγκεκριμένα λόγω του θεωρήματος που αφορά στην αποδειξιμότητα της συνέπειας μιας θεωρίας. (Στεφανέας, 2011: 15-16)

Ένα από τα σημαντικότερα βήματα στη συμβολική θεωρία αποδείξεων οφείλεται στον Gerhard Gentzen (1909 – 1945), ο οποίος εισήγαγε ένα νέο τυπικό σύστημα για τις αποδείξεις. Από τη δεκαετία του 1950 μέχρι σήμερα, η έρευνα

---

[5] Βλ. https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%99%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%81%CE%AF%CE%B1_%CF%84%CF%89%CE%BD_%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8E%CE%BD (πρόσβαση στις 05/05/2017)

σχετικά με τη θεωρία αποδείξεων έχει επικεντρωθεί, μεταξύ άλλων, στις μη περατοκρατικές αποδείξεις και στη διασύνδεσή τους με τους διατακτικούς αριθμούς, σε εφαρμογές της μεθόδου της συναρτησιακής ερμηνείας του Gödel και σε εφαρμογές στην ανάλυση, στη θεωρητική πληροφορική, στη θεωρία συνόλων και στην αριθμητική. (Στεφανέας, 2011: 16)

1.2.2 Μέθοδοι Απόδειξης

Έστω ότι Α είναι μία μαθηματική θεωρία. Προκειμένου η θεωρία αυτή να τεθεί προς απόδειξη, πρέπει προτίστως να έχει μία συγκεκριμένη δομή. Η διαδικασία δόμησης μίας μαθηματικής θεωρίας ονομάζεται *αξιωματική θεμελίωση*. Αρχικά, ορίζονται του στοιχεία της Α, οι ιδιότητές τους και οι πράξεις που είναι δυνατό να εκτελεστούν μεταξύ τους. Όλα τα παραπάνω με τη σειρά τους έχουν ορισθεί χρησιμοποιώντας έννοιες που έχουν ορισθεί προηγουμένως, οι οποίες ομοίως βασίζονται σε ορισμούς εννοιών που έχουν προηγηθεί κ.ο.κ. Αυτή η συνεχής αναδρομή κάποια στιγμή θα σταματήσει, διαφορετικά θα δημιουργηθεί κύκλος –γεγονός μη αποδεκτό στα μαθηματικά-, δηλαδή μία έννοια k για να ορισθεί θα χρησιμοποιήσει μία έννοια m, η οποία στον ορισμό της χρησιμοποιεί την έννοια k. Όταν η αναδρομή αυτή σταματήσει, σημαίνει ότι έχουμε φτάσει σε έννοιες που δεν μπορούν να αναλυθούν σε απλούστερες και αποτελούν τους αρχικούς όρους της θεωρίας Α. Μία όμοια αναδρομική διαδικασία ισχύει και για τις προτάσεις της θεωρίας Α, όπου σε αυτήν την περίπτωση οι προτάσεις που δεν προκύπτουν από άλλες προηγούμενές τους και γίνονται δεκτές χωρίς απόδειξη, ονομάζονται αξιώματα της θεωρίας Α. Επιπλέον, είναι απαραίτητο να ορισθούν και οι αποδεικτικοί κανόνες της θεωρίας Α, οι οποίοι καθορίζουν τους τρόπους με τους οποίους μία πρόταση προκύπτει από τις προηγούμενές της. Κάθε τέτοια πρόταση ονομάζεται θεώρημα. Την αξιωματική αυτή θεωρία εισήγαγε ο Ευκλείδης και τελειοποίησε ο David Hilbert στο έργο του «Grundlagen der geometrie». (Εξαρχάκος, 1990: 90-91)

Σε κάθε απόδειξη διακρίνονται τα εξής:

- η *υπόθεση*, δηλαδή οι προτάσεις που θεωρούνται δεδομένες στο πρόβλημα προς απόδειξη,
- τα *αποδεικτικά στοιχεία*, που αποτελούνται από τους αρχικούς όρους και τα αξιώματα του δοθέντος προβλήματος,
- οι *αποδεικτικοί κανόνες*, που είναι οι «νόμοι» σύμφωνα με τους οποίους εξασφαλίζεται η ορθή πορεία που οδηγεί στο ζητούμενο και
- το *συμπέρασμα*, που αποτελεί το ζητούμενο του προβλήματος.

(Εξαρχάκος, 1990: 99-100)

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, ακολυθεί μία τυπική κατηγοριοποίηση των μεθόδων απόδειξης.

<u>ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ</u>

Η διασημότερη των αποδεικτικών μεθόδων, ιστορικά εμφανίζεται από τον Ζήνωνα (488-430 π.Χ.), ο οποίος χρησιμοποιεί αυτή τη διαδικασία με σκοπό να ερμηνεύσει τα παράδοξά του. Πρόκειται για μία μέθοδο που δεν εστιάζει στην αποδεικτέα αλήθεια, αλλά στην απόρριψη της άρνησής της, που συχνά αποτελεί πολύ πιο απλή προσέγγιση. Στη μέθοδο αυτή, λοιπόν, δείχνεται ότι αν κάποια πρόταση ήταν ψευδής, τότε συμβαίνει μια λογική αντίφαση, επομένως η αρχική πρόταση θα πρέπει να είναι αληθής.

<u>Παράδειγμα 1^{o}:</u>

Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.

Απόδειξη:

Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω ότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι άρρητος. Τότε, γράφεται στη μορφή $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, όπου οι a, b είναι ακέραιοι αριθμοί, πρώτοι μεταξύ τους (δηλαδή το κλάσμα $\frac{a}{b}$ είναι ανάγωγο). Έχουμε:

$\sqrt{2}=\frac{a}{b} \Leftrightarrow a=\sqrt{2}\cdot b \Leftrightarrow a^2=2b^2$, επομένως ο a^2 είναι άρτιος και κατά συνέπεια και ο a είναι άρτιος, δηλαδή, γράφεται στη μορφή $a=2c$, όπου c ακέραιος. Αντικαθιστώντας παραπάνω, προκύπτει:

$(2c)^2=2b^2 \Leftrightarrow 4c^2=2b^2 \Leftrightarrow b^2=2c^2$, επομένως ο b^2 είναι άρτιος και κατά συνέπεια και ο b είναι άρτιος. Τελικά, στο κλάσμα $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ και οι δύο όροι του κλάσματος είναι άρτιοι, άρα έχουν κοινό διαιρέτη τον αριθμό 2. ΑΤΟΠΟ, γιατί το κλάσμα είναι ανάγωγο. Άρα, ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.

Παράδειγμα 2^{ο}:

Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δεν είναι άνω φραγμένο.

Απόδειξη:

Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Άρα, ως μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, από το Αξίωμα Πληρότητας το $\mathbb{N}$ έχει supremum. Από το χαρακτηρισμό του supremum:

Για $\varepsilon = 1 \ \exists x \in \mathbb{N}: \ \sup\mathbb{N} - \varepsilon < x$

$$\Leftrightarrow \sup\mathbb{N} - 1 < x$$
$$\Leftrightarrow \sup\mathbb{N} < x + 1$$

όπου $x+1 \in \mathbb{N}$. *ΑΤΟΠΟ, γιατί το* $\sup\mathbb{N}$ *είναι άνω φράγμα του* $\mathbb{N}$. *Άρα, το σύνολο* $\mathbb{N}$ *δεν είναι άνω φραγμένο.*

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ Ή ΤΕΛΕΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ</u>

Οι πρώτες μελέτες της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής έγιναν από την Ιταλό μαθηματικό Francesco Maurolico (1494 – 1575) τον 16^{ο} αιώνα και το Γάλλο ερευνητή Blaise Pascal (1623 – 1662) τον 17^{ο} αιώνα. Τελικά, οι όροι «τέλεια επαγωγή» ή «μαθηματική επαγωγή» καθιερώθηκαν τον 19^{ο} αιώνα από τους A. De Morgan (1806 – 1871) και R. Dedekind (1831 – 1916). [6]

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι αναμφισβήτητα το απλούστερο των αριθμητικών συστημάτων. Οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν τα πρώτα μαθηματικά αντικείμενα που έγιναν αντιληπτά από τον άνθρωπο στη διαδικασία της εξέλιξής του. Για παράδειγμα, είναι κατανοητό ότι αν βρισκόμαστε στο φυσικό αριθμό m, τότε μπορούμε να μεταβούμε στον m+1 και μεταξύ τους δεν υπάρχει κανένας φυσικός. Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: μεταξύ όλων των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών, ποιες είναι οι ελάχιστες δυνατές που αν υποθέσουμε ότι ισχύουν σε ένα σύνολο $\mathbb{N}$, τότε το $\mathbb{N}$ υποχρεωτικά ταυτίζεται με το σύνολο των φυσικών αριθμών; Οι ελάχιστες αυτές ιδιότητες εντοπίστηκαν μετά το 1850 από διάφορους μαθηματικούς,

[6] Βλ. http://dide.flo.sch.gr/Exercises/Math-Epagogi.pdf (Πρόσβαση στις 13/04/2017)

ανεξάρτητα, και έχει επικρατήσει να ονομάζονται «Αξιώματο Peano», παρόλο ο Peano (1858 – 1932) δεν ήταν ο πρώτος που τα όρισε!

<u>Τα αξιώματα του Peano.</u> *Το σύνολο* $\mathbb{N}$ *των φυσικών αριθμών είναι ένα ζεύγος* $(\mathbb{N}, s)$ *όπου* s *είναι μία απεικόνιση* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με τις εξής ιδιότητες:*

(i) Υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in \mathbb{N}$.

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$*,* $s(n) \neq 1$.

(iii) Η s *είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1).*

(iv) Εάν $U \subset \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $1 \in U$ *και για κάθε* $n \in U$ *,* $s(n) \in U$*, τότε* $U = \mathbb{N}$.

(Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής).

Το πιο ενδιαφέρον από τα παραπάνω αξιώματα, είναι αυτό της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής. Ασκεί σημαντικό ρόλο τόσο στον ορισμό των πράξεων, όσο και στον ορισμό της διάταξης και θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι είναι μία θεμελιώδης αρχή «διαχείρισης του απείρου». Άμεση συνέπειά της αποτελεί η μαθηματική επαγωγή ως αποδεικτική διαδικασία. Ακριβέστερα, ισχύει το ακόλουθο:

Έστω $P(n)$ *μία μαθηματική πρόταση που διατυπώνεται για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Υποθέτουμε τα ακόλουθα:

(i) Η $P(1)$ *ισχύει.*

(ii) Αν ισχύει η $P(n)$ *τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει η* $P(s(n))$.

Τότε συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει η* $P(n)$*. Δηλαδή το σύνολο* $\{n \in \mathbb{N} : \text{η } P(n) \text{ ισχύει}\}$ *ισούται με το* $\mathbb{N}$. (Αργυρός, 2011: 11-12)

Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής δημιουργήθηκε από την ανάγκη να ελεγχθούν τα αποτελέσματα της επαγωγικής μεθόδου. Για το λόγο αυτό, η μέθοδος αποτελεί μία μορφή παραγωγικού συλλογισμού. Άλλωστε, δεν θα μπορούσε να είναι αλλιώς, καθώς σύμφωνα με τα πρότυπα του παρελθόντος, κανένα μαθηματικό αποτέλεσμα δεν θα μπορούσε να θεωρηθεί έγκυρο εάν δεν είχε προκύψει με παραγωγικό τρόπο με τις αρχές της τυπικής λογικής από τις υποθέσεις και τα αξιώματα. Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής είναι μία ακριβώς διατυπωμένη πρόταση της οποίας η διαισθητική πειστικότητα θεωρείται από τους μαθηματικούς αναμφισβήτητη. Ωστόσο, όπως και οποιαδήποτε παραγωγική μέθοδος συλλογισμού, δεν είναι σε θέση από μόνη της να ανακαλύψει καινούρια γνώση, για τον απλούστατο λόγο πως η αφετηρία της είναι αποτέλεσμα κάποιων άλλων τρόπων γνώσης. (Καρδαμίτσης, 2010: 74-75)

<u>Παράδειγμα 1^{ο}:</u>

Να αποδειχθεί ότι $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.

Απόδειξη:

Βασικό βήμα : Ελέγχουμε αν η πρόταση ισχύει για $n=1$. *Πράγματι,* $1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι η πρόταση προς απόδειξη ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό $n=k$, *δηλαδή* $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

Επαγωγικό βήμα: Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, δείχνουμε ότι εφόσον η πρόταση προς απόδειξη ισχύει για $n=k$, *τότε ισχύει και για* $n=k+1$, *δηλαδή ότι* $1+2+3+...+k+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. *Από την επαγωγική υπόθεση:*

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}\Leftrightarrow 1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. *Άρα, η πρόταση ισχύει για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.

<u>Παράδειγμα 2^{ο}:</u>

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ *με* $n\neq 1$ *υπάρχει* $m\in\mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $s(m)=n$.

Απόδειξη:

Θα κάνουμε χρήση της μαθηματικής επαγωγής. Θα θέσουμε

$$U=\{n\in\mathbb{N}:\ \text{υπάρχει m}\in\mathbb{N}\ \text{ώστε s}(m)=n\}$$

και θα δείξουμε ότι $U\bigcup\{1\}=\mathbb{N}$. *Πράγματι,* $1\in U\bigcup\{1\}$. *Αν το* $n\in U\bigcup\{1\}$ *τότε για* $m=n\in\mathbb{N}$ *έχουμε ότι* $s(n)=s(m)$ *και επομένως* $s(n)\in U$. *Άρα* $s(n)\in U\bigcup\{1\}$. *Από μαθηματική επαγωγή έχουμε ότι* $U\bigcup\{1\}=\mathbb{N}$. *Επομένως για κάθε* $n\in\mathbb{N}$ *με* $n\neq 1$ *υπάρχει* $m\in\mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $s(m)=n$.

(Αργυρός, 2011: 13)

<u>ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Η ευθεία απόδειξη δικαρίνεται σε δύο κατηγορίες, τη συνθετική και την αναλυτική. Στη συνθετική απόδειξη, ξεκινάμε από μία αληθή πρόταση p η οποία είτε δίνεται, είτε αποτελεί αξίωμα των μαθηματικών και αποδεικνύουμε ότι η συνεπαγωγή $p\Rightarrow q$ είναι αληθής πρόταση, όπου q η πρόταση προς απόδειξη. Στην αναλυτική απόδειξη, δεχόμαστε πως η πρόταση προς απόδειξη q είναι αληθής και κατασκευάζουμε μία διαδοχή προτάσεων με εκκίνηση τη q. Αν το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι αληθής πρόταση, τότε και η αρχική πρόταση είναι αληθής, εφόσον συνθετικά μπορούμε να αναχθούμε σε αυτήν κινούμενοι κατά την αντίστροφη πορεία. (Εξαρχάκος, 1990: 115-116)

<u>Παράδειγμα Συνθετικής Απόδειξης:</u>

Αν $a<b$, *να δειχθεί ότι* $\frac{a+b}{2}<b$.

Απόδειξη:

$$a<b\Rightarrow a+b<b+b\Rightarrow a+b<2b\Rightarrow\frac{a+b}{2}<\frac{2b}{2}\Rightarrow\frac{a+b}{2}<b$$

<u>Παράδειγμα Αναλυτικής Απόδειξης:</u>

Έστω $a,b\in\mathbb{R}$. *Να δειχθεί ότι* $a^2+b^2\geq 2ab$.

Απόδειξη:

$a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$ που ισχύει $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

<u>ΑΝΤΙΘΕΤΟΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ</u>

Η απόδειξη με αντιθετοαντιστροφή ή αντιμετάθεση δείχνει το συμπέρασμα "αν p τότε q" αποδεικνύοντας το ισοδύναμο αντιθετοαντίστροφο "αν όχι q τότε όχι p". Ουσιαστικά, η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην ισοδυναμία $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$, δηλαδή ξεκινάμε με την υπόθεση ότι η $\overline{q}$ είναι αληθής και αποδεικνύουμε ότι και η $\overline{p}$ είναι αληθής, επομένως και η $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ είναι αληθής. Τότε, όμως, η $p \Rightarrow q$ είναι αληθής και επειδή η p είναι αληθής, θα είναι και η q αληθής.

<u>Παράδειγμα:</u>

Αν x είναι ακέραιος και x^2 περιττός, τότε ο x είναι περιττός.

Απόδειξη:

Υπόθεση p: x ακέραιος, x^2 περιττός

Συμπέρασμα q: x περιττός

Έστω ότι η $\overline{q}$ είναι αληθής. Τότε, ο x δεν είναι περιττός, άρα είναι άρτιος. Τότε, $\exists k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $x=2k$. Άρα, $x^2=4k^2$, επομένως ο x^2 είναι άρτιος. Δηλαδή, η $\overline{p}$ είναι αληθής και άρα η $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ είναι αληθής. Τελικά, η $p \Rightarrow q$ και άρα η q είναι αληθής. (Εξαρχάκος, 1990: 112)

<u>ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ (ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)</u>

Η θέση του αντιπαραδείγματος είναι αρκετά σημαντική στην αποδεικτική διαδικασία των μαθηματικών προτάσεων. Ο «όρος» αντιπαράδειγμα κατασκευάστηκε στα νεότερα χρόνια και δεν υπάρχει στα αρχαία Ελληνικά, δεν είναι αυστηρά μαθηματικός όρος, αλλά χρησιμοποιείται σε πολλές επιστήμες. Σύμφωνα με το Νεοελληνικό Λεξικό του Μπαμπινιώτη αντιπαράδειγμα είναι το παράδειγμα που ανατρέπει την ισχύ μιας υπόθεσης ή μιας άποψης η οποία βασίζεται σε άλλα παραδείγματα. (Καρδαμίτσης, 2010: 85)

Έστω η πρόταση $(\forall x)\left[p(x)\right]$, η οποία θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι ψευδής. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι η πρόταση $(\exists x)\overline{\left[p(x)\right]}$ είναι αληθής. Επομένως, θα πρέπει να βρούμε ένα τουλάχιστον στοιχείο κ του συνόλου αναφοράς Ω έτσι ώστε η πρόταση $p(\kappa)$ να είναι ψευδής. Το στοιχείο κ ονομάζεται *αντιπαράδειγμα* της πρότασης $(\forall x)\left[p(x)\right]$. (Καρδαμίτσης, 2010: 86)
Στην μέθοδο αυτή, λοιπόν, αποδεικνύεται η μη ορθότητα μιας πρότασης με την κατασκευή κατάλληλου αντιπαραδείγματος.

<u>Παράδειγμα:</u>
Όλοι οι πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί. Αντιπαράδειγμα: ο αριθμός 2 είναι πρώτος (γιατί έχει μοναδικούς διαιρέτες τη μονάδα και τον εαυτό του) και είναι άρτιος. Άρα, η παραπάνω πρόταση είναι ψευδής.

<u>**ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΤΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ (ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗ)**</u>

Στην απόδειξη με εξάντληση, το συμπέρασμα δείχνεται διαιρώντας το σε έναν πεπερασμένο αριθμό περιπτώσεων, και αποδεικνύοντας την κάθε μια ξεχωριστά. Ο αριθμός των περιπτώσεων μπορεί μερικές φορές να γίνει πολύ μεγάλος. Για παράδειγμα, η πρώτη απόδειξη του θεωρήματος τεσσάρων χρωμάτων, σύμφωνα με το οποίο αρκούν το πολύ τέσσερα χρώματα για να χρωματιστεί ένα επίπεδο γράφημα, ήταν απόδειξη με εξάντληση με 1936 περιπτώσεις. Η απόδειξη αυτή ήταν επίμαχη γιατί η πλειονότητα των περιπτώσεων ελέγχθηκαν από ένα πρόγραμμα υπολογιστή, κι όχι με το χέρι. Η μικρότερη γνωστή απόδειξη για το θεώρημα τεσσάρων χρωμάτων έχει και σήμερα πάνω από 600 περιπτώσεις.[7]

<u>ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ</u>

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όταν έχουμε να δείξουμε την πρόταση $p \Rightarrow q$ και στη διαδικασία της απόδειξης ανακαλύπτουμε ότι είναι αληθής η πρόταση $p \Rightarrow q \vee q_1 \vee q_2 \vee ... \vee q_n$, με $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε, προσπαθούμε να δείξουμε ότι οι προτάσεις $q_1, q_2, ..., q_n$ είναι ψευδείς, οπότε η $p \Rightarrow q$ είναι αληθής.

<u>Παράδειγμα:</u>

Αν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου ΑΒΓ και $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, να δειχθεί ότι $\hat{A} > 90^o$.

Απόδειξη:

Υπόθεση $p:$ α, β, γ πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$

Συμπέρασμα $q:$ $\hat{A} > 90^o$

Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου είναι δυνατόν να είναι

q_1: οξεία, δηλαδή $\hat{A} < 90^o$

q_2: ορθή, δηλαδή $\hat{A} = 90^o$

q_3: αμβλεία, δηλαδή $\hat{A} > 90^o$

Επομένως, η πρόταση $p \Rightarrow q \vee q_1 \vee q_2$ είναι αληθής. Θα δείξουμε ότι οι προτάσεις q_1 και q_2 είναι ψευδείς. Έστω q_1 αληθής. Τότε, $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, που είναι αντίφαση στην πρόταση p (υπόθεση). Άρα, η q_1 είναι ψευδής. Έστω q_2 αληθής. Τότε, $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αντίφαση προς την p. Άρα, η q είναι αληθής.
(Εξαρχάκος, 1990: 115)

ὅπερ ἔδει δεῖξαι

[7] Βλ. https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%B1%CF%80%CF%8C%CE%B4%CE%B5%CE%B9%CE%BE%CE%B7 (πρόσβαση στις 07/05/2017)

1.3 Αναλογίες μεταξύ αφήγησης και μαθηματικών αποδείξεων

Τα κείμενα που εισάγουν ή εξηγούν μία μαθηματική θεωρία, παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με τις αφηγήσεις. Η φυσική ροή του λόγου, εμποδίζει μία θεωρία να παρουσιαστεί σε μία μόλις σκηνή, καθώς τα σταυροδρόμια της απαιτούν διαπραγμάτευση, κάθε πόλη, κάθε κτίριο και κάθε μονοπάτι πρέπει να εξερευνηθεί εξονυχιστικά. Αν αληθεύει, όμως, ότι τα μαθηματικά κείμενα, σαν σύνολο αλλά και καθένα από αυτά ξεχωριστά, έχουν τη μορφή αφηγήσεων, το ερώτημα είναι το εξής: για ποιον αφηγούνται οι μαθηματικοί αυτές τις ιστορίες; Τι παρακινεί τους μαθηματικούς να διδάσκουν, να δίνουν διαλέξεις σε συναδέλφους τους, να γράφουν μαθηματικά άρθρα και βιβλία; Οι άνθρωποι νιώθουν την ανάγκη να αφηγηθούν τις εμπειρίες τους από τα μαθηματικά τους ταξίδια, θεωρώντας πως αυτές οι ιστορίες παρουσιάζουν μέρη που αξίζει κι άλλοι άνθρωποι να μάθουν και να επισκεφθούν (Lafforgue, 2014: 6-7). Άλλωστε, η εξάρτηση των μαθηματικών από την αφήγηση δεν προκαλεί έκπληξη, καθώς τα μαθηματικά δημιουργούνται από τους ανθρώπους και οι άνθρωποι ζουν, μεγαλώνουν, σκέφτονται και δημιουργούν ιστορίες. Όπως οι ιστορίες ασκούν καθοριστικό ρόλο στις ανθρώπινες δημιουργίες και στην οργάνωση της γνώσης, ομοίως και τα μαθηματικά έχουν μεγάλη ανάγκη για αφήγηση (Δοξιάδης, 2011: vii).

Ένας από τους πρώτους που έθιξε το ζήτημα αυτών των δύο διαφορετικών κόσμων, του λογοτεχνικού και του επιστημονικού, ήταν ο C.P.Snow (1905-1980) το 1959. Στη διάλεξή του με τίτλο «Οι δύο κουλτούρες» στο Cambridge και στη συνέχεια στο κείμενο «Μία επανεξέταση», μίλησε για το χάσμα των δύο κουλτούρων, εντοπίζοντας την ελλειπή επικοινωνία ανάμεσα στους ανθρώπους των γραμμάτων και των τεχνών με τους επιστήμονες. Επεσήμανε πως αυτό το χάσμα λειτουργούσε εις βάρος και των δύο πλευρών, επιβραδύνοντας, παράλληλα και την παγκόσμια πρόοδο. Η τοποθέτηση του Snow οδήγησε σε συζητήσεις που διήρκησαν δεκαετίες, με βασικό προβληματισμό το κάτα πόσον υπάρχουν πράγματι αυτοί οι δύο διαφορετικοί κόσμοι και αν είναι δυνατή η δημιουργία ενός τρίτου. Κατά τον Snow, η τρίτη αυτή κουλτούρα, θα ήταν εφικτό να στελεχωθεί από ανθρώπους που δεν είναι επιστήμονες, ωστόσο θα έχουν την περιέργεια και τα κατάλληλα κίνητρα να γεφυρώσουν το χάσμα. (Λαγοδόντη, 2014: 13)

Σύμφωνα με τον Teissier, η έννοια της αφήγησης διαφέρει από τόπο σε τόπο, με αποτέλεσμα να είναι δύσκολο να της δοθεί ακριβής ορισμός. Ομοίως, θεωρεί πως υπάρχουν πολλά και διαφορετικά είδη μαθηματικών κειμένων, τα οποία εξαρτώνται τόσο από τον τόπο, όσο και από τον χρόνο. Επιπλέον, κατά τον Teissier, οι δημοφιλέστερες αφηγήσεις της εποχής μας είναι τα μυθιστορήματα και αντίστοιχα, τα πιο ευρέως γνωστά μαθηματικά κείμενα είναι οι αποδείξεις. Διατυπώνει την άποψη πως η αφήγηση βοηθά τον αναγνώστη να ταυτιστεί με τους χαρακτήρες –ή έστω να συλλάβει την ουσία τους-, καθώς προσφέρει παραστατικά την εμπειρία μίας διαδρομής σε ένα σύνολο αλληλεπιδράσεων μεταξύ ανθρώπων, αντικειμένων και καταστάσεων. Ωστόσο, στις αφηγήσεις που οι χαρακτήρες δεν υφίστανται στον πραγματικό κόσμο, επινοήθηκαν για να υπηρετήσουν ένα συγκεκριμένο σκοπό και στη συνέχεια η αναγνώριση μπορεί να γίνει πιο ενδιαφέρουσα. Ομοίως, συμπληρώνει ο Teissier, οι αποδείξεις αποτελούν, μεταξύ άλλων, μονοπάτια σε ένα γράφημα λογικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ καταφάσεων. Μάλιστα, παρομοιάζει την επινόηση χαρακτήρων στις αφηγήσεις, με κάποια αντικείμενα που δημιουργούνται προκειμένου να εξυπηρετήσουν την πορεία μίας μαθηματικής απόδειξης. Παράλληλα, επισημαίνει την ύπαρξη μίας διαφοράς, η οποία αφορά στην κατανόηση αφήγησης και αποδείξεων, σημειώνοντας πως η κατανόηση της αφήγησης είναι πιο άμεση. Έτσι, κατά τον συγγραφέα, οι μαθηματικές αποδείξεις καθίστανται απλούστερα αντιληπτές, μόνο όταν κατανοηθούν ως μία αφήγηση (Λαγοδόντη, 2014: 25-27). Μια αφηγηματική απόδειξη είναι μια ακολουθία από ίχνη τα οποία οδηγούν στην ανακάλυψη της λογικής δομής της απόδειξης. Προκειμένου να είναι αποτελεσματική η εξέταση των πραγματικών διαφορών και ομοιοτήτων μεταξύ του μαθηματικού και του αφηγηματικού νοήματος, ο Teissier προτείνει ότι πρέπει κανείς να εισχωρήσει στα θεμέλια της αλήθειας και τα θεμέλια του νοήματος. (Λαγοδόντη, 2014: 27)

Μία άλλη αναλογία που συναντάται ανάμεσα στις μαθηματικές αποδείξεις και στην αφήγηση, στην ουσία φέρνει στην επιφάνεια μία θεμελιώδη διαφορά τους. Στις αποδείξεις μαθηματικών θεωρημάτων, οποιοδήποτε αντικείμενο μπορεί να αντικατασταθεί με κάποιο ίσο του. Για παράδειγμα, είτε χρησιμοποιηθεί ο αριθμός 3, είτε χρησιμοποιηθεί η τετραγωνική ρίζα του 9, το αποτέλεσμα είναι ακριβώς το ίδιο, χωρίς να αλλοιώνεται η εγκυρότητα και η αλήθεια των υπολογισμών και κατ' επέκταση ολόκληρης της απόδειξης. Ωστόσο, η Lois Lane ξέρει ότι ο Superman μπορεί να πετάει, αλλά δεν ξέρει ότι ο Clark Kent μπορεί να πετάει, ακόμα κι αν ο Superman «ισούται» με τον Clark Kent. Είναι, σαφώς, αδύνατο να αντικατασταθεί ο ένας με τον άλλον. [8]

Μία επιπλέον διάκριση των μαθηματικών αποδείξεων, είναι πως κάθε αποδεικτικό γεγονός είναι μοναδικό και δεν επαναλαμβάνεται. Η αποδοχή μίας απόδειξης είναι καθαρά αποτέλεσμα διαπραγμάτευσης ανάμεσα στα πρόσωπα που εμπλέκονται στο αποδεικτικό αυτό γεγονός και σε πολλές περιπτώσεις είναι μη προβλέψιμη. Ωστόσο, συγκεκριμένα στην περίπτωση των μαθηματικών αποδείξεων υπάρχει η μέγιστη δυνατή αποδοχή και προβλεψιμότητα. Αυτό συμβαίνει γιατί οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν μία κοινή γλώσσα και αποδέχονται κοινούς κανόνες με τον πιο σαφή τρόπο. (Στεφανέας, 2011: 18)

Σύμφωνα με τον Reviel Netz, όπως οι μυθιστοριογράφοι, έτσι και οι μαθηματικοί είναι δημιουργικοί συγγραφείς. Με τη χρήση διαγραμμάτων, συμβολισμών, καθώς και με τα στοιχεία της έκπληξης, μια καλή απόδειξη διαβάζεται σαν μια καλή ιστορία. Τα μαθηματικά είναι δομημένα γύρω από κείμενα – αποδείξεις, τα οποία έχουν πολύ πλούσια πρωτόκολλα ως προς τη διατύπωσή τους, τόσο στη χρήση μη λεκτικών στοιχείων - διαγραμμάτων, όσο και στη χρήση μιας συγκεκριμένης συντακτικής γλώσσας, με σκοπό την πλήρη και άρτια διαμόρφωση του κειμένου. Ο Netz, ένας από τους κορυφαίους εμπειρογνώμονες του κόσμου για τα έργα του Αρχιμήδη, θεωρεί τις αποδείξεις ως αφηγήσεις που οδηγούν τον αναγνώστη να γυρνάει εναγωνίως τις σελίδες. Η αποδείξη, έτσι, μεταμορφώνεται σε μια εξελισσόμενη ιστορία που τελειώνει με μια μαθηματική λύση. Ο Netz διατυπώνει την άποψη πως στα μαθηματικά κείμενα υπάρχουν αρκετά λογοτεχνικά στοιχεία, όπως, για παράδειγμα, η μεταφορά η οποία συναντάται συχνά. Τα μαθηματικά μπορούν να αποκτήσουν πραγματικά ενδιαφέρον και αυθεντικότητα, μόνο όταν συνεπάγονται τη λειτουργία του να βλέπεις κάτι σαν κάτι άλλο - ένα ζευγάρι τριγώνων με παρόμοια εμφάνιση, ας πούμε, ως χώρο για μια αφηρημένη αναλογία.[9]

Σε μία *επιχειρηματολογία*, από ένα ή περισσότερα σημεία εκκίνησης, δηλαδή αξιώσεις αληθείας που ονομάζονται «προκείμενες», οδηγούμαστε σε ένα τελικό σημείο, δηλαδή έναν ισχυρισμό αληθείας που ονομάζεται «συμπέρασμα» (Baggini -

[8] Βλ. http://abcnews.go.com/Technology/wireStory/study-whale-boat-collisions-common-46967201 (πρόσβαση στις 23/04/2017)
[9] Βλ. http://news.stanford.edu/news/2012/may/math-literature-netz-050712.html (πρόσβαση στις 29/04/2017)

Fosl, 2005: 18). Η διαδικασία της επιχειρηματολογίας, που συχνά συναντάται στην αφήγηση, μοιάζει να είναι απολύτως ανάλογη με αυτή της μαθηματικής απόδειξης, καθώς θα μπορούσε να παρομοιάσει κανείς τις προκείμενες με τα μαθηματικά αξιώματα και το συμπέρασμα με τα θεωρήματα που τελικά προκύπτουν. Το μονοπάτι που ακολουθεί ο ανθρώπινος νους και κατ' επέκταση ο λόγος, γραπτός ή προφορικός, φαίνεται να είναι το ίδιο είτε πρόκειται για αφηγητή που επιχειρηματολογεί, είτε για μαθηματικό που αποδεικνύει κάποιο θεώρημα.

Η μορφή συλλογισμού, που συχνά μιμείται τις στερεοτυπικές λύσεις των κλασικών αστυνομικών μυθιστορημάτων, δηλαδή η *παραγωγή*, είναι η πλέον επακριβής μορφή επιχειρηματολογίας, εφόσον η μετάβαση από τις προκείμενες στο συμπέρασμα είναι τέτοια, ώστε, αν οι προκείμενες είναι αληθείς, τότε και τα πορίσματα πρέπει να είναι επίσης αληθή (Baggini - Fosl, 2005: 25). Η παραγωγική, συγκεκριμένα, επιχειρηματολογία, παραπέμπει το νου στην επαγωγική μέθοδο απόδειξης, η οποία έχει αναλυθεί παραπάνω. Στην *υποθετικο-παραγωγική* μέθοδο ξεκινώντας από μία αρχική υπόθεση, συνεπάγεται ένα συμπέρασμα το οποίο είτε την επαληθεύει είτε τη διαψεύδει. Στην περίπτωση που το πόρισμα είναι αληθές και άρα η αρχική υπόθεση επιβεβαιώνεται, η αφηγηματική αυτή οδός είναι ανάλογη με την αναλυτική περίπτωση της ευθείας μεθόδου απόδειξης, η οποία έχει προαναφερθεί. Στην περίπτωση που το συμπέρασμα είναι αναληθές και επομένως η αρχική υπόθεση απορρίπτεται, η αφήγηση οδεύει στα μονοπάτια της περίφημης απαγωγής σε άτοπο.

Στα αφηγηματικά κείμενα συχνά χρησιμοποιείται ο *αναγωγισμός*, δηλαδή, η διαδικασία κατά την οποία επεξηγείται ένα φαινόμενο υπό όρους των απλούστερων, πιο στοιχειωδών φαινομένων, τα οποία υποκρύπτονται τόσο κάτω από το ίδιο, όσο και από άλλα φαινόμενα (Baggini - Fosl, 2005: 103). Παράλληλα, *μαθηματική αναγωγή* ονομάζεται η μετατροπή μιας έκφρασης σε ταυτόσιμη αλλά απλούστερη μορφή. Χρησιμοποιείται σε όλους σχεδόν τους κλάδους των μαθηματικών. Για παράδειγμα στα κλάσματα, αναγωγή ή αλλιώς «απλοποίηση» ονομάζεται η επανεγγραφή των όρων του κλάσματος με απλούστερους όρους, χρησιμοποιώντας το μέγιστο κοινό διαιρέτη του αριθμητή και του παρονομαστή. Στα ριζικά αναγωγή ονομάζεται η επανεγγραφή του περιεχομένου των ριζικών με απλούστερο τρόπο, ανάλογα με την τάξη της ρίζας. Στη Γραμμική Άλγεβρα η αναγωγή εφαρμόζει κανόνες για να μετατρέψει την εξίσωση, το σύστημα εξισώσεων ή τους πίνακες (μήτρες) σε ισοδύναμη αλλά απλούστερη μορφή. Επιπλέον, η αναγωγή αναφέρεται και στην τεχνική της ολοκλήρωσης κατά μέλη για τη διευκόλυνση του υπολογισμού τους με την επανεγγραφή τους ως έκφρασης που περιέχει απλούστερα (στον υπολογισμό) ολοκληρώματα. Στη δυναμική ανάλυση η «στατική αναγωγή» ή «αναγωγή Guyan» αναφέρεται στην αναγωγή των βαθμών ελευθερίας. Η στατική αναγωγή μπορεί, επίσης, να εφαρμοστεί για την απλοποίηση ενός προβλήματος γραμμικής άλγεβρας.[10] Η έννοια της αναγωγής συναντάται και στα θρανία των δημοτικών σχολείων, στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα, η οποία χρησιμοποιείται όταν είναι γνωστή η τιμή μιας ομάδας πραγμάτων και ζητείται η τιμή μιας άλλης ομάδας. Συμπερασματικά, η αναγωγή είναι μία διαδικασία που μπορεί να εξυπηρετήσει τόσο έναν αφηγητή, όσο και ένα μαθηματικό, καθώς πρόκειται για ένα εργαλείο που απλουστεύει τη ροή σε ένα κείμενο, αφηγηματικό ή μαθηματικό.

Σε αυτό το σημείο αξίζει αναμφίβολα να παρουσιαστεί μία ημερίδα η οποία διοργωνάθηκε από το *The Oxford Research Centre in the Humanities*, ένα ερευνητικό κέντρο του πανεπιστημίου της Οξφόρδης. Ο τίτλος της συζήτησης ήταν «Narrative and proof: Two sides of the same equation?», στην οποία συμμετείχε με μία εκπληκτική ομιλία ο Marcus du Sautoy (γεννηθής 26/08/1965), καθηγητής μαθηματικών και ο Simonyi Professor for the Public Understanding of Science στο πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Ο Sautoy ξεκινά την ομιλία του εξηγώντας πως η επιστήμη των μαθηματικών είναι κάτι πολύ περισσότερο από απλά μία λίστα που περιέχει όλες τις αληθείς καταστάσεις που μπορούμε να ανακαλύψουμε γύρω από τους αριθμούς. Οι μαθηματικοί είναι αφηγητές, οι χαρακτήρες είναι αριθμοί και γεωμετρικά σχήματα και οι αφηγήσεις των μαθηματικών είναι οι αποδείξεις που δημιουργούν σχετικά με τους χαρακτήρες αυτούς. Αναρωτιέται γιατί το τελευταίο θεώρημα του Φερμά θεωρείται μία από τις σημαντικότερες μαθηματικές υπάρξεις του τελευταίου αιώνα, ενώ ένας ισάξια περίπλοκος αριθμητικός υπολογισμός αντιμετωπίζεται ως τετριμμένος και ελλειπής ενδιαφέροντος. Αυτό που θέλει να υποδείξει ο Sautoy, είναι πως ο αφηγηματικός χαρακτήρας της απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος, είναι αυτός που προάγει αυτή την αληθή πρόταση στις πρώτες θέσεις του βάθρου των μαθηματικών.

[10] Βλ. https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%B1%CE%BD%CE%B1%CE%B3%CF%89%CE%B3%CE%AE (πρόσβαση στις 29/04/2017)

Η εικασία του ομιλητή, αν τοποθετηθεί στα πλαίσια μία μαθηματικής εξίσωσης, είναι η εξής:

Απόδειξη = Αφήγημα

Προκειμένου να υποστηρίξει την υπόθεσή του ο Sautoy, αρχικά ορίζει προσεγγιστικά την έννοια της απόδειξης. Παρομοιάζει την απόδειξη με το ταξίδι των μαθηματικών, όπως όταν ο Φερμά, δηλώνοντας πως οι εξισώσεις του δεν έχουν ακέραιες λύσεις, άνοιξε το παράθυρο των μαθηματικών και ταξίδεψε. Κατά τον ομιλητή, η πρόκληση για τους μεταγενέστερους μαθηματικούς ήταν να βρουν ένα μονοπάτι που να οδηγεί από τις οικίες περιοχές που είχαν ήδη εξερευνήσει, σε αυτήν την ξένη γη. Εντός των συνόρων των οικείων αυτών περιοχών, βρίσκονται τα αξιώματα των μαθηματικών, οι αυταπόδεικτες αλήθειες γύρω από τους αριθμούς, καθώς και όλες οι προτάσεις που έχουν ήδη αποδειχθεί. Σε ένα τέτοιο σκηνικό ξεκινούν οι μεταγενέστεροι μαθηματικοί την αναζήτησή τους και το ταξίδι τους περιβάλλεται από τους κανόνες των μαθηματικών, όπως ακριβώς και οι νόμιμες κινήσεις ενός πιονιού στο σκάκι ορίζουν τα δυνατά βήματα που μπορεί να κάνει σε αυτόν το γύρο. Κάποιες φορές στο ταξίδι μπορεί να εμφανιστεί κάποιο αδιέξοδο και ο μαθηματικός να αναγκαστεί να αλλάξει μονοπάτι ή ακόμα και να γυρίσει πίσω, ώστε να βρει το σωστό δρόμο. Άλλες φορές μπορεί να χρειαστεί να περιμένει μέχρις ότου εμφανιστούν νέοι μαθηματικοί χαρατκήρες, όπως για παράδειγμα οι φανταστικοί αριθμοί, προκειμένου να είναι εφικτό να συνεχίσει το ταξίδι του. Ο ομιλητής παρουσιάζει ουσιαστικά την απόδειξη ως το χάρτη με τις συντεταγμένες του ταξιδιού. Μία πετυχημένη απόδειξη μοιάζει να είναι ένας δρόμος γεμάτος πινακίδες που επιτρέπει σε όλους τους επερχόμενους μαθηματικούς να κάνουν το ίδιο ακριβώς ταξίδι. Οι αναγνώστες τις απόδειξης, κατά τον Sautoy, θα βιώσουν την ίδια εκπληκτική συνειδητοποίηση όπως και ο συγγραφέας της. Συχνά οι αποδείξεις δεν στέκονται σε κάθε λεπτομέρεια, όπως και σε μία ιστορία δεν παρουσιάζεται εκτενώς κάθε πτυχή της ζωής ενός χαρακτήρα. Πρόκειται για μία περιγραφή ενός ταξιδιού και όχι απαραίτητα για αναπαράσταση κάθε βήματος ξεχωριστά. Ο μαθηματικός ως αφηγητής μία απόδειξης, προσπαθεί να επηρεάσει την ψυχολογία του ακροατή ή αναγνώστη και να κεντρίσει το ενδιαφέρον του, δημιουργώντας για παράδειγμα εικόνες, μεταφορικά και κυριολεκτικά.

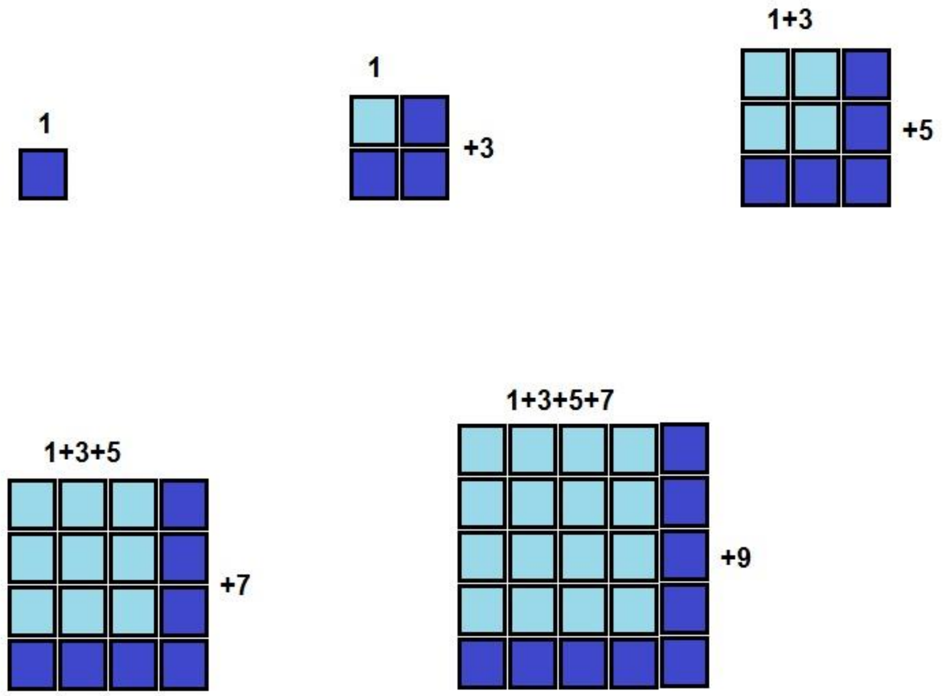
Ο Sautoy αποφασίζει πως ο καλύτερος τρόπος για να παραστήσει αποτελεσματικά την έννοια της απόδειξης, είναι να αφηγηθεί ο ίδιος μία από αυτές τις μαθηματικές ιστορίες. Οι κύριοι χαρακτήρες της απόδειξης που αφηγείται είναι οι πρώτοι αριθμοί, εκείνοι, δηλαδή, που έχουν μοναδικούς διαιρέτες τη μονάδα και τον εαυτό τους, όπως, για παράδειγμα, το 7 και το 13. Το αφηγηματικό ταξίδι που επιθυμεί να προσφέρει στο κοινό είναι να αποκαλύψει πως οι χαρακτήρες αυτοί είναι άπειροι. Πρέπει να αποδείξει, δηλαδή, πως αν προσπαθήσει κανείς να καταγράψει σε μία λίστα όλους αυτούς τους διαφορετικούς χαρακτήρες, τότε θα γράφει για πάντα. Αυτό είναι και ένα χαρακτηριστικά παράξενο «κέρασμα» των μαθηματικών ιστοριών, ότι, δηλαδή, ξεκινάνε λέγοντας πρώτα το τέλος! Η πρόκληση, τότε, είναι να δειχθεί πως μπορεί κανείς να φτάσει στην κορύφωση ξεκινώντας από το δεδομένο στάδιο της ιστορίας. Το βασικό χαρακτηριστικό των πρώτων αριθμών που εκμεταλλεύεται ο Sautoy, είναι ότι αποτελούν τα τούβλα της οικοδομής όλων των αριθμών. Κάθε αριθμός, δηλαδή, γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να πάρει τον αριθμό 105 αν πολλαπλασιάσει μεταξύ τους τους αριθμούς 3, 5 και 7. Ο ομιλητής, προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτει πως στην πραγματικότητα οι πρώτοι αριθμοί είναι πεπερασμένοι, επομένως, είναι δυνατόν να φτιάξει μία λίστα με αυτούς τους χαρακτήρες. Αυτή είναι μία κλασσική αφηγηματική συσκευή στα εργαλεία των μαθηματικών, όπως *Η Αλίκη στη Χώρα των Θαυμάτων* ή *Ο Μάγος του Οζ*, ο μαθηματικός φαντάζεται έναν κόσμο στον οποίο το αντίθετο αυτού που προσπαθεί να αποδείξει είναι αληθές και αφήνει την αφήγηση να φέρει στην επιφάνεια έναν παράλογο επίλογο. Ο Sautoy υποθέτει, λοιπόν, πως η λίστα που περιέχει όλους αυτούς τους πεπερασμένους χαρακτήρες, είναι οι αριθμοί 2, 3, 5, 7, ... , 43, από τους οποίους μπορούν να δημιουργηθούν όλοι οι υπόλοιποι αριθμοί. Χρησιμοποιώντας τη λίστα αυτών των χαρακτήρων και μόνο, πρέπει κάπως να καταλήξει ότι κάποιος πρώτος αριθμός του έχει ξεφύγει. Αρχικά, πολλαπλασιάζει όλους αυτούς τους αριθμούς μεταξύ τους: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 43$. Στη συνέχεια, αποφασίζει να κάνει ένα απρόσμενο βήμα, να προσθέσει, δηλαδή, στον παραπάνω αριθμό τη μονάδα. Έτσι, δημιουργεί έναν νέο αριθμό, ο οποίος θα πρέπει και εκείνος με τη σειρά του να μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών, υπενθυμίζοντας πως αυτή ήταν η οικεία περιοχή στην οποία έγινε η επιβίβαση και ξεκίνησε το ταξίδι. Καταλήγει, έτσι, στο συμπέρασμα πως κάποιος χαρακτήρας λείπει από τη λίστα του και πως, μάλιστα, μπορεί να πει πολλές φορές την ίδια ιστορία για να αποκαλύψει ότι κάθε φορά θα χάνει κάποιον πρώτο αριθμό. Άρα, οι χαρακτήρες της ιστορίας θα πρέπει να είναι άπειροι.

Σύμφωνα με τον Sautoy, σημασία δεν έχει η τελική επίτευξη της απόδειξης, αλλά το ταξίδι που ακολουθεί κανείς για να φτάσει ως εκεί. Όπως σε ένα μουσικό κομμάτι δεν αξίζει μόνο η τελευταία στροφή. Έτσι, δεν είναι τόσο σημαντική η γνώση αυτή καθ’ εαυτήν ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι, όσο η ικανοποίηση να ξέρει κανείς γιατί συμβαίνει αυτό. Η χαρά της ανάγνωσης και της γραφής μαθηματικών, έρχεται από τη στιγμή που όλα τελικά βγάζουν νόημα και λύνουν το μυστήριο. Όπως η στιγμή του αποκορυφώματος σε ένα μουσικό κομμάτι, ή η στιγμή που αποκαλύπτεται ποιος διέπραξε ένα αποτρόπαιο έγκλημα σε ένα αστυνομικό μυθιστόρημα. Όταν ξεκινάει κανείς να συνθέτει ένα μαθηματικό κομμάτι, οι επιλογές που κάνει είναι τέτοιες, ώστε να συνεπαίρνει το κοινό στο ταξίδι, το οποίο είναι γεμάτο ανηφόρες, κατηφόρες, στροφές και εκπλήξεις.

Όπως στην αφήγηση, έτσι και στις μαθηματικές αποδείξεις, τυχαίνει δύο χαρακτήρες που συμμετέχουν στην εξέλιξη της ιστορίας, αρχικά να φαίνεται πως είναι άσχετοι μεταξύ τους, δημιουργώντας προβληματισμό στο κοινό. Στην πορεία, όμως, αποδεικνύεται πως είναι άρρικτα συνδεδεμένοι και εξίσου σημαντικοί για την εξέλιξη των γεγονότων, απλά αυτό δεν ήταν προφανές από την αρχή. Ο Sautoy, προκειμένου να καταστίσει σαφή τα λεγόμενά του, φέρνει ως παράδειγμα μία μαθηματική αλήθεια, η οποία τον εξέπληξε όταν την αντίκροισε για πρώτη φορά στο σχολείο, ότι, δηλαδή, όταν προσθέτεις περιττούς αριθμούς μεταξύ τους, το αποτέλεσμα είναι πάντα τέλειο τετράγωνο:

$$
\begin{aligned}
&1+3=4=2^2\\
&1+3+5=9=3^2\\
&1+3+5+7=16=4^2\\
&1+3+5+7+9=25=5^2
\end{aligned}
$$

Όλος ο ενθουσιασμός, όμως, ήταν για εκείνον να δει γιατί και πως συνδέονταν μεταξύ τους το άθροισμα περιττών αριθμών με τα τέλεια τετρτάγωνα, δύο εκ πρώτης όψεος άσχετοι μεταξύ τους χαρακτήρες. Η εξήγηση είναι πολύ απλή αν παρουσιαστεί ως μία μαθηματική ιστορία με εικόνες, ακριβώς όπως και ένα πολύ αγαπητό αφηγηματικό είδος, το παραμύθι.



Κατά τον Sautoy, ο τρόπος με τον οποίο δημιουργούνται οι αποδείξεις ώστε να έχουν ενδιαφέρον, είναι κλασσικό εργαλείο της αφήγησης. Διεγείρονται ερωτήματα στον αναγνώστη, τα οποία τον ωθούν να διαβάζει με αγωνία παρακάτω, με την ελπίδα ότι τελικά θα του γίνει αντιληπτό το πως λύνεται το μυστήριο, μία πρόκληση που του έχει προσφερθεί από την αρχή. Αυτή η αφηγηματική συσκευή είναι το χαρακτηριστικό που προσδίδει όλη την απόλαυση στη μελέτη των μαθηματικών, αυτή η επιθυμία για την αποκάλυψη της λύσης του αινίγματος. Υπό αυτό το πρίσμα, οι μαθηματικές αποδείξεις έχουν πολλά κοινά με τα καλά αστυνομικά μυστήρια.

Ο ομιλητής συμπληρώνει πως, ένας δεύτερος κοινός κώδικας αποδείξεων και αφήγησης είναι οι κινήσεις οι οποίες είναι αρχικά ανεξήγητες και προσδίδουν περιπετειώδη χαρακτήρα στην εξέλιξη της ιστορίας. Στην απόδειξη με τους πρώτους αριθμούς, για παράδειγμα, ο αναγνώστης αναρωτιέται γιατί ο συγγραφέας πολλαπλασίασε τους αριθμούς που είχε μεταξύ τους και στη συνέχεια στο αποτέλεσμα πρόσθεσε τη μονάδα. Πως του γεννήθηκε η έμπνευση να προχωρήσει σε αυτήν την κίνηση; Γιατί δημιούργησε αυτόν τον νέο αριθμό και πως συνδέεται αυτός με όσα έχουν ειπωθεί προηγουμένως; Αυτές οι κλιμακωτές κινήσεις, το χτίσιμο τόσο της αφήγησης, όσο και της απόδειξης, υπονοούν ότι ακολουθούν κι άλλες εκπλήξεις και οδηγούν στο αποκορύφωμα, στην αποκάλυψη της λύσης.

Μία τρίτη συσχέτιση των δύο κόσμων, παρουσιάζεται από τον Sautoy ότι είναι η αναφορά σε γεγονότα, στοιχεία, αντικείμενα και γενικές αλήθειες, που βρίσκονται έξω από την αφήγηση ή την απόδειξη αντίστοιχα και προσφέρουν στην εκάστοτε περίπτωση πρόσθετο νόημα. Έτσι, οι αναγνώστες είναι εξοπλισμένοι με ένα μεγάλο εύρος ιδεών από προϋπάρχον περιεχόμενο, το οποίο εισάγεται σταδιακά από τον συγγραφέα, ώστε τόσο η αφήγηση, όσο και η απόδειξη, να έχουν τον επιθυμητό αντίκτυπο στον αναγνώστη. Αναφέρεται, ακόμη, πως και στους δύο κόσμους υπάρχουν κάποια αρχέτυπα, κάποιες θεμελιώδεις ιστορίες στον κόσμο της αφήγησης και για παράδειγμα οι μέθοδοι απόδειξης στον κόσμο των μαθηματικών.

Ο Sautoy δίνει έμφαση σε μία πτυχή της αφήγησης, η οποία φαίνεται να απουσιάζει από τα μαθηματικά κείμενα και αυτή είναι η σχέση με το χρόνο. Ενώ τα μαθηματικά κείμενα διαδραματίζονται εκτός τόπου και χρόνου, οι αφηγήσεις βασίζουν ένα καθοριστικό κομμάτι τους στην αντίληψη που έχουν οι άνθρωποι σχετικά με το χωροχρόνο. Στις αποδείξεις υπάρχει μία γραμμικότητα στην εξέλιξή τους, η οποία ελέγχεται από κάθε λογικό βήμα και είναι σαν να δημιουργεί μία δική τους, εσωτερική έννοια του χρόνου. Σε ένα βαθμό, αυτή η αίσθηση του χρόνου στις αποδείξεις, αντικατοπτρίζει τον αφηγηματικό τους χαρακτήρα.

Σύμφωνα με τον ομιλητή, μία άλλη κοινή παράμετρος αποδείξεων και αφήγησης, είναι ότι και στις δύο περιτπώσεις χρειάζεται και υπάρχει κάποιος άνθρωπος στο ρόλο του αφηγητή. Κάθε απόδειξη, συνήθως, πρώτα ειπώνεται προφορικά και ύστερα γράφεται. Επιπλέον, όπως τα μαθηματικά διαθέτουν αφηγηματικό χαρακτήρα, αντίστοιχα και στην αφήγηση παρατηρούνται μαθηματικές πτυχές. Στη λογοτεχνία, συχνά εμφανίζονται έννοιες όπως η συμμετρία και άλλες μαθηματικές προσεγγίσεις που πλαισιώνουν την αφήγηση.

Επειδή, όμως, τα παραδείγματα δεν αποδεικνύουν μία θεωρία, δεν μπορεί να ισχυριστεί κανείς με βεβαιότητα ότι η πρόταση «Απόδειξη=Αφήγημα» είναι αληθής. Σίγουρα, όμως, καλλιεργείται γόνιμος προβληματισμός γύρω από το ζήτημα αν αυτοί οι δύο φαινομενικά αντίθετο κόσμοι, είναι δυνατόν να αποτελούν τα δύο μέλη της ίδιας εξίσωσης.[11]

[11] Βλ. http://www.torch.ox.ac.uk/narrative-and-proof-two-sides-same-equation-0 (πρόσβαση στις 02/05/2017)

2. ΤΟ ΑΣΤΥΝΟΜΙΚΟ ΜΥΘΙΣΤΟΡΗΜΑ

2.1 Αναφορά σε έργα μαθηματικής λογοτεχνίας και σε αστυνομικά μυθιστορήματα

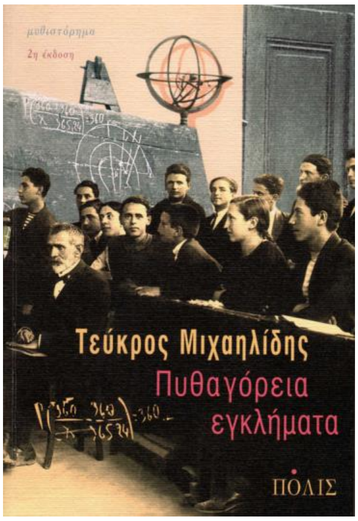
Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν, αρχικά, οι απαραίτητοι ορισμοί των κυρίαρχων εννοιών τις εργασίας καθώς και μία κατηγοριοποίηση των μεθόδων απόδειξης μαθηματικών θεωρημάτων. Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε μία προσέγγιση της γεφύρωσης του χάσματος μεταξύ μαθηματικών και αφήγησης και περιγράφηκαν οι δομικές αναλογίες των δύο παραπάνω κόσμων, με σκοπό τη διέγερση προβληματισμού σχετικά με την εγκυρότητα της εξίσωσης «Απόδειξη=Αφήγημα». Στο σημείο αυτό, θα παρουσιαστούν ορισμένα αστυνομικά μυθιστορήματα με έντονο μαθηματικό υπόβαθρο, με απώτερο σκοπό τη συσχέτιση της επίλυσης μυστηρίων με τις μαθηματικές αποδείξεις.

Η ανάγκη σύνδεσης των μαθηματικών με τη λογοτεχνία φαίνεται να πηγάζει με ένα φυσικό τρόπο, από την ανάγκη του ανθρώπου να συνδυάσει δύο διαφορετικούς τρόπους έκφρασης της περιγραφής του κόσμου στον οποίο ζει. Σαφώς, δε νιώθουν όλοι οι άνθρωποι την παραπάνω ανάγκη στον ίδιο βαθμό. Η λογοτεχνική γλώσσα, σε αντίθεση με τη μαθηματική, μοιάζει περισσότερο προσιτή και απευθύνεται στο ευρύ κοινό. Το συνονθύλευμα των δύο γλωσσών, φαίνεται να οδηγεί στην κατανόηση μέρους των μαθηματικών ιδεών αποφεύγοντας τις παρανοήσεις, καθώς η λογοτεχνική γλώσσα δημιουργεί ένα φανταστικό και οικείο περιβάλλον στον αναγνώστη που του επιτρέπει να προσεγγίσει τα μαθηματικά με έναν εναλλακτικό τρόπο πέρα από την αυστηρότητα της μαθηματικής γλώσσας. Έτσι, σημαντικά ιστορικά μαθηματικά γεγονότα, μαθηματικές αλήθειες και βιογραφίες μαθηματικών, έχουν τη δυνατότητα να γίνουν προσιτά σε μη ειδικό κοινό. Το αποτέλεσμα της σύνδεσης μαθηματικών και λογοτεχνίας, ενδεχομένως να αποτελεί μία από τις μορφές επικοινωνίας μεταξύ των ανθρώπων για την ερμηνεία του κόσμου. (Λέρη, 2008: 31)

Η συγγένεια που συνδέει τα μαθηματικά με τη λογοτεχνία, όπου χρονολογείται από την αρχαιότητα, το μεγάλο πλήθος λογοτεχνικών βιβλίων που έχουν γραφτεί ως απόρροια της σύνδεσης των μαθηματικών με τη λογοτεχνία, η συνεχώς αυξανόμενη συχνότητα με την οποία εκδίδονται σήμερα λογοτεχνικά βιβλία με μαθηματική υπόσταση, φανερώνει την ανάπτυξη μιας νέας κατηγορίας βιβλίων, που ονομάζεται «μαθηματική λογοτεχνία». Ως «μαθηματική λογοτεχνία» ονομάζεται η κατηγορία των λογοτεχνικών βιβλίων, εκλαϊκευτικών και μη, στην πλοκή των οποίων τα μαθηματικά ασκούν καθοριστικό ρόλο. Η συζήτηση για τον όρο «μαθηματική λογοτεχνία» έχει ξεκινήσει τα τελευταία χρόνια, καθώς φαίνεται να έχει πολλούς αναγνώστες. Δεν είναι σαφές το κατά πόσο είναι εφικτό να δοθεί ακριβής ορισμός του όρου, καθώς η λογοτεχνία από μόνη της αποτελεί μορφή έκφρασης τέχνης και δεν μπορεί να οριστεί κατά ένα μοναδικό τρόπο. Η διευκρίνιση αυτής της κατηγορίας όπως πραγματοποιήθηκε παραπάνω, θα βοηθήσει στη συνέχεια να γίνει αντιληπτό το είδος των λογοτεχνικών βιβλίων τα οποία θα αναφερθούν. (Λέρη, 2008: 27-29)

Πυθαγόρεια Εγκλήματα (Τεύκρος Μιχαηλίδης, 2006, εκδόσεις ΠΟΛΙΣ)

Στα *Πυθαγόρεια Εγκλήματα* (βλ. Εικόνα 3), ο Μιχαηλίδης χτίζει την ιστορία και τους χαρακτήρες πάνω στα θεμέλια μίας μαθηματικής απόδειξης, αφηγούμενος ένα φανταστικό έγκλημα με φόντο ένα αληθινό, σημαντικό και μαθηματικό πρόβλημα.



Εικόνα 3: Εξώφυλλο του βιβλίου «Πυθαγόρεια Εγκλήματα».

Συγκεκριμένα, στην Αθήνα του 1929, ο Στέφανος Κανταρτζής, ένας άσημος μαθηματικός της μέσης εκπαίδευσης, βρίσκεται νεκρός στο δωμάτιό του. Ο επιστήθιος φίλος του, επίσης μαθηματικός αλλά και επιτυχημένος επιχειρηματίας, Μιχαήλ Ιγερινός, καλείται για να αναγνωρίσει το πτώμα. Λίγο προτού αρχίσει να μιλάει με την αστυνομία για να την κατατοπίσει σχετικά με την προσωπικότητα και τον κύκλο γνωριμιών του δολοφονηθέντος (ή αυτόχειρα;), ο Ιγερινός κάνει μια αναδρομή στη μακρόχρονη φιλία του με τον εκλιπόντα. Η πρώτη τους γνωριμία πραγματοποιείται το 1900 σε ένα διεθνές μαθηματικό συνέδριο στο Παρίσι, με κεντρικό ομιλητή τον Ντέιβιντ Χίλμπερτ, ο οποίος διατυπώνει τα 23 άλυτα προβλήματα των μαθηματικών που προβλέπει πως θα πρωταγωνιστήσουν στο επιστημονικό στερέωμα τα επόμενα χρόνια. Οι δυο τους παρευρέθηκαν εκεί ως φοιτητές μαθηματικών και μαζί με αυτούς, πολλές υπαρκτές προσωπικότητες των μαθηματικών που γράφτηκαν στην ιστορία του 20^{ου} αιώνα.

Συχνό θέμα συζήτησης μεταξύ τους, αποτελεί το δεύτερο από τα προβλήματα που παρουσίασε ο Χίλμπερτ, το οποίο ο Κανταρτζής έχει διακαή πόθο να αποδείξει. Ο Ιγερινός θυμάται τις περιπλανήσεις τους στα παριζιάνικα στέκια, τις παρέες τους με καλλιτέχνες –ένας εκ των οποίων και ο Πικάσο-, τις θυελλώδεις μαθηματικές τους διαφωνίες, τους έρωτές τους που σχετίστηκαν μεταξύ τους με απρόσμενους τρόπους και τις πολεμικές τους εμπειρίες, μέχρι που ο ήχος μίας ρομβίας τον επαναφέρει στο παρόν. Το ερώτημα είναι επιτακτικό: Ποιος σκότωσε τον Στέφανο Κανταρτζή, και κυρίως γιατί τον σκότωσε; Το περιστατικό αυτό, παραλληλίζεται πολύ εύστοχα με το πρώτο Πυθαγόρειο έγκλημα, που ήταν η δολοφονία του ‘Ιππασου, ενός από τους παλαιότερους μαθητές του Πυθαγόρα. Ο λόγος της δολοφονίας του ήταν ότι τόλμησε να εκμυστηρευτεί την σκέψη του για το αν η διαγώνιος ενός τετραγώνου με μοναδιαία πλευρά είναι ένας πραγματικός αριθμός ή κάτι άλλο. Κάτι τέτοιο θα κατέρριπτε συθέμελα την κοσμοθεωρία των Πυθαγορείων και ουσιαστικά θα τους κατέστρεφε μια για πάντα. Έτσι, προκειμένου να παρεμποδιστεί η δημοσιοποίηση της ανακάλυψής του και να προστατευθεί ο Πυθαγόρας και η σχολή του, ο Ίππασος αποβλήθηκε από τη σχολή και υποχρεώθηκε να αποχωρήσει με ένα καράβι που μίσθωσε η ίδια η σχολή, το οποίο τελικά ναυάγησε. Ή αυτό το σενάριο, τουλάχιστον, ανακοινώθηκε στους Πυθαγόρειους!

Ακολουθεί ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα του συλλογισμού του αστυνόμου, ο οποίος κατηγορεί τον Ιγερινό για τη δολοφονία του Κανταρτζή:

> *«Ο θάνατος του Στέφανου Κανταρτζή δεν οφείλεται σε παθολογικά αίτια, σε ανακοπή καρδιάς, όπως υπαινίχθηκε χθες ο γιατρός. Ο νεκρός είχε καταναλώσει μεγάλες ποσότητες άγνωστου ακόμα υπνωτικού. [....] Το λάθος μάλλον αποκλείεται. Δεν βρέθηκε στο δωμάτιό του κάποια συσκευασία, και αφού δεν συνήθιζε να παίρνει τέτοια σκευάσματα, δεν μπορεί να πήρε μεγαλύτερη δόση από αφηρημάδα. Έτσι μας μένουν μόνο δύο εκδοχές. [....] Η αυτοκτονία και η δολοφονική ενέργεια. [....] Από κάπου πρέπει να προμηθεύτηκε το ναρκωτικό που τον σκότωσε. Είτε το πήρε οικειοθελώς είτε του το έδωσαν χωρίς να το καταλάβει. [....] Επισκεφθήκατε τον Στέφανο Κανταρτζή την Πέμπτη 24 Ιανουαρίου 1929 στις πέντε το απόγευμα και μείνατε μαζί του μέχρι τις εννέα. [....] Και στις τέσσερις ώρες που*

μείνατε μαζί [....] λογοφέρατε; Μήπως τσακωθήκατε; [....] Η σπιτονοικοκυρά του, Καλλιόπη Βουρβούνη, κατέθεσε ότι άκουσε φωνές. [....] Κατέθεσε ότι σας άκουσε να φωνάζετε έξαλλα: "Δεν έχεις το δικαίωμα να το κάνεις αυτό. Δεν θα σε αφήσω να το κάνεις!" Τι ήταν αυτό που δεν θα τον αφήνατε να κάνει, κύριε Ιγερινέ; [....] Κύριε Ιγερινέ, το απόγευμα της Πέμπτης 24 Ιανουαρίου 1929, δεν παίξατε σκάκι. Ο Κανταρτζής μάθαινε σκάκι στο παιδί της γειτόνισσας. Το τελευταίο τους μάθημα έγινε την Τετάρτη 23 Ιανουαρίου. Στο σπίτι της γειτόνισσας. Φεύγοντας, άφησε την σκακιέρα εκεί. Στο δωμάτιο του Κανταρτζή δεν βρέθηκε άλλο σκάκι... [....] Επιστρέψατε στο σπίτι σας γύρω στις εννέα και μισή, και δεν ξαναβγήκατε καθόλου; [....] Η οικονόμος σας [...] κατέθεσε πως σας άκουσε να βγαίνετε και πάλι στις εντεκάμιση. [....] Σας άκουσε [...] και όταν επιστρέψατε, γύρω στις δωδεκάμιση. [....] Στις 25 Ιανουαρίου το πρωί η καμαριέρα καθάρισε δύο ζευγάρια λασπωμένα παπούτσια. Βέβαια στις 24 είχε βρέξει πολύ και οι δρόμοι ήταν γεμάτοι λάσπη. Αφού όμως βγήκατε μόνο μία φορά, πως γίνεται να λασπώσατε δυο ζευγάρια παπούτσια; [....] Στις 24 Ιανουαρίου επισκεφθήκατε τον φίλο σας. Φύγατε από το σπίτι του στις εννέα το βράδυ. Γύρω στις δέκα έφυγε και ο ίδιος... [....] Επέστρεψε σώος και αβλαβής στο σπίτι του γύρω στη μία μετά τα μεσάνυχτα –ο γείτονας που είχε αϋπνίες μας το επιβεβαίωσε- και πήγε κατευθείαν για ύπνο. Στο τραπέζι του βρέθηκε μία κανάτα με λίγο νερό – το περισσότερο το είχε πιει ο Κανταρτζής πριν κοιμηθεί. Όπως ξέρετε, στείλαμε τα υπολείμματα του νερού για ανάλυση. Το νερό περιείχε τεράστιες ποσότητες υπνωτικού, το ίδιο που βρέθηκε και στο σώμα του Κανταρτζή κατά τη νεκροψία. Χωρίς αμφιβολία, αυτό το υπνωτικό είναι που τον σκότωσε. [....] Η σύνθεση του υπνωτικού δεν ταιριάζει με κανένα από αυτά που εισάγονται στην Ελλάδα. Τα δύο μεγάλα φαρμακεία που εισάγουν υπνωτικά μας έδωσαν δείγματα όλων των σχετικών σκευασμάτων που εισήγαγαν τα τελευταία χρόνια. Το υπνωτικό που σκότωσε τον Κανταρτζή δεν είναι κανένα από αυτά. [....] Αντίθετα το φαρμακείο του σπιτιού σας περιέχει μεγάλη ποσότητα αυτού ακριβώς του υπνωτικού. Όπως μας είπε η καμαριέρα σας, το φέρνετε μόνος σας από τη Γερμανία, την οποία, από όσο γνωρίζουμε, *επισκέπτεσθε τακτικά, και υπάρχουν πάντα αποθέματα στο φαρμακείου του δωματίου σας. Ωστόσο το χρησιμοποιείτε με φειδώ και πολύ αραιά. Όμως, λίγες μέρες μετά το θάνατο του φίλου σας, η καμαριέρα διαπίστωσε ότι έλειπαν δύο ολόκληρα σωληνάρια. Η καημένη ανησύχησε μάλιστα μήπως αρχίσατε να κάνετε κατάχρηση λόγω του θανάτου του φίλου σας. Τι έγιναν δύο ολόκληρα σωληνάρια υπνωτικού, κύριε Ιγερινέ; Πως εξαφανίστηκαν μέσα σε τρεις μέρες; [....] Φύγατε από το σπίτι του φίλου σας στις εννέα και επιστρέψατε στο δικό σας. Στις έντεκα και μισή, φορώντας καθαρά παπούτσια –αυτά που φορούσατε το απόγευμα είχαν λασπωθεί-, επιστρέψατε στο σπίτι του Κανταρτζή που γνωρίζατε ότι θα λείπει. Σας είδε ένας γείτονας που ήταν ξύπνιος κι ένας περαστικός. Σας αναγνώρισαν και οι δύο από τη φωτογραφία σας που τους δείξαμε. Μπήκατε στο δωμάτιό του και αδειάσατε δύο σωληνάρια υπνωτικό στην κανάτα του με το νερό. Δεν μείνατε στο δωμάτιο περισσότερα από πέντε λεπτά. [....] Στη διάρκεια των βαλκανικών πολέμων, ο ''φίλος'' σας, όπως τον αποκαλείτε, συνήψε μια πρόσκαιρη σχέση με την πρώην σύζυγό σας. Οι γυναίκες είχαν την παράξενη συνήθεια να σας εγκαταλείπουν και να στρέφονται προς τον Κανταρτζή. Από μια άποψη σας καταλαβαίνω. Ένας άντρας δύσκολα το δέχεται αυτό˙ και μάλιστα, δύο φορές. Έχω μαζί μου το ένταλμα συλλήψεως. Είναι καλύτερα για εσάς να ομολογήσετε. Τα στοιχεία είναι αδιάσειστα. Σκοτώσατε τον Στέφανο Κανταρτζή, οργισμένος που μια κοπέλα την οποία θεωρούσατε ιδιοκτησία σας προτίμησε το φίλο σας. Το γεγονός ότι δεν διάλεξε έναν νέο της ηλικίας της, αλλά έναν συνομήλικό σας, και μάλιστα με πολύ μικρότερη οικονομική άνεση από εσάς, έθιξε καίρια τη ματαιοδοξία σας. Του είχατε παλιότερα συγχωρήσει το δεσμό του με την πρώην γυναίκα σας. Δεν ανεχθήκατε το ίδιο όταν συνέβη δεύτερη φορά με την πρώην ερωμένη σας. Όλα τα στοιχεία και οι μαρτυρίες δείχνουν ότι εσείς είστε ο δολοφόνος».* (σελ. 220-233)

<u>Η αφοσίωση του υπόπτου Χ</u> <u>(Keigo Higashino, 2012, Εκδόσεις ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ)</u>

Το αστυνομικό μυθιστόρημα *Η αφοσίωση του υπόπτου Χ* (βλ. Εικόνα 4) έχει μία μοναδική ιδιαιτερότητα: ο αναγνώστης γνωρίζει τον δολοφόνο από τις πρώτες κιόλας σελίδες. Εδώ, λοιπόν, το ενδιαφέρον δεν επικεντρώνεται στο κυνήγι του δολοφόνου και την επίλυση του μυστηρίου, αλλά ακριβώς στο αντίθετο, στη συγκάλυψη του δολοφόνου.

<u>Εικόνα 4:</u> Εξώφυλλο του βιβλίου «Η αφοσίωση του υπόπτου Χ».

Η Γιασούκο, πρώην χορεύτρια σε νυχτερινό μαγαζί, μητέρα της έφηβης Μισάτο, αλλάζει γειτονιά και βρίσκει μια ήρεμη δουλειά σε ένα μικρό εστιατόριο διανομής φαγητών. Είναι η εποχή που αρχίζει να πιστεύει ότι έχει ξεφύγει από τον πρώην σύζυγό της, ο οποίος την κακομεταχειριζόταν και της ζητούσε, διαρκώς, λεφτά. Ωστόσο, ο Τογκάσι εντοπίζει τα ίχνη της για ακόμα μία φορά. Η ξαφνική επανεμφάνισή του στη ζωή της, δίνει στην ιστορία μια απρόβλεπτη τροπή. Οι απειλές που εξαπολύει ο Τογκάσι στη Γιασούκο και την κόρη της, την ωθούν να τον πνίξει μέσα στο ίδιο της το σπίτι με το καλώδιο της θερμάστρας, με τη βοήθεια της ανήλικης κόρης της.

Προτού, ακόμα, συνειδητοποιήσουν τι έχουν κάνει, οι δύο γυναίκες δέχονται την επίσκεψη του αινιγματικού γείτονά τους, του ευφυή καθηγητή Μαθηματικών Ισιγκάμι. Ο λιγομίλητος μαθηματικός με την ανέκφραστη όψη και τον ασκητικό βίο, τους αποκαλύπτει ότι γνωρίζει το έγκλημά τους και προσφέρεται να τις βοηθήσει δημιουργώντας το τέλειο άλλοθι, αλλά και να αντιμετωπίσουν τις επίμονες ερωτήσεις των αστυνομικών, σε περίπτωση που οι υποψίες στραφούν εναντίον τους, με μοναδικό όρο να ακολουθήσουν τις οδηγίες του κατά γράμμα.

Ο ντετέκτιβ της αστυνομίας του Τόκιο που αναλαβάνει την υπόθεση, βρίσκεται σύντομα σε αδιέξοδο και ζητάει βοήθεια από τον φίλο του Δρα Γιουκάβα, έναν πανέξυπνο καθηγητή Φυσικής. Πολύ σύντομα οι δύο καθηγητές, γνώριμοι από τα φοιτητικά τους χρόνια, εμπλέκονται με όλες τους τις δυνάμεις σε μια ανελέητη μάχη ευστροφίας, κατά τη διάρκεια της οποίας ο Φυσικός χρησιμοποιεί τις ικανότητες και το πνεύμα του για να αποκαλύψει την αλήθεια και ο Μαθηματικός διακινδυνεύει τα πάντα προκειμένου να αποδείξει το μέγεθος της αφοσίωσής του.

Ακολουθεί ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα, το οποίο αναδεικνύει την βαθιά αφοσίωση του Ισιγκάμι στη Γιασούκο, καθώς και την ακρίβεια με την οποία έχει υφάνει το πλέγμα της προστασίας:

«Η Γιασούκο καθόταν ακίνητη στο παγκάκι. [....] Ο Ισιγκάμι δεν της είπε ποτέ τι είχε κάνει τη σορό του Τογκάσι. Της είχε πει να μην ανησυχεί. "Τακτοποίησα τα πάντα" της είχε πει στο τηλέφωνο μ' εκείνη την ήρεμη φωνή.

Είχε αναρωτηθεί για ποιο λόγο η αστυνομία ρωτούσε διαρκώς για το άλλοθί της την επομένη της δολοφονίας του Τογκάσι. Πολύ πριν την άφιξη των αστυνομικών, ο Ισιγκάμι τής είχε δώσει αναλυτικές οδηγίες για το τι έπρεπε να κάνει το βράδυ της δεκάτης Μαρτίου. Για την ταινία, τα νουντλς, το καραόκε, ακόμη και για το μεταμεσονύχτιο τηλεφώνημα. Είχε ακολουθήσει πιστά τις οδηγίες του χωρίς να ξέρει για ποιον λόγο τα έκανε όλα αυτά. Όταν οι αστυνομικοί ρώτησαν για το άλλοθι, τους είπε αυτά ακριβώς που έκανε, στην ουσία όμως ήθελε να τους ρωτήσει "Γιατί με ρωτάτε για τις δέκα του μήνα;".

Πλέον όλα είχαν ξεκαθαρίσει. Ο Ισιγκάμι τους είχε οδηγήσει στην παγίδα. Μια φριχτή παγίδα, όμως. Αν και συνειδητοποιούσε ότι δεν υπήρχε άλλη εξήγηση, αρνιόταν να την πιστέψει. Όχι, δεν ήθελε να την πιστέψει. Δεν ήθελε να σκέφτεται ότι είχε χαραμίσει τη ζωή του για μια συνηθισμένη, μεσήλικη γυναίκα που δεν του πρόσφερε το παραμικρό αντάλλαγμα, ούτε διέθετε κάποια ιδιαίτερη γοητεία. Η Γιασούκο σκέφτηκε ότι η καρδιά της δεν είχε τη δύναμη να αντέξει τέτοια θυσία. [....]

Το σημείωμα έλεγε πως να χρησιμοποιήσει τα γράμματα και τι έπρεπε να πει στους αστυνομικούς που θα έρχονταν να της μιλήσουν - όλα με τον συνηθισμένο λεπτομερή τρόπο του Ισιγκάμι. Υπήρχαν οδηγίες όχι μόνο για τη Γιασούκο αλλά και για τη Μισάτο. Κάλυπταν τα πάντα, κάθε πιθανή κατάσταση που ίσως αντιμετώπιζαν, διασφαλίζοντας πως οτιδήποτε και αν συνέβαινε στις Χαναόκα θα ήξεραν τι να κάνουν. Οι οδηγίες του Ισιγκάμι είχαν βοηθήσει τη

Γιασούκο και τη Μισάτο να αντιμετωπίσουν την αστυνομία. Η Γιασούκο γνώριζε ότι, αν έκανε το παραμικρό λάθος και οι αστυνομικοί διαπίστωναν την απάτη, όλη η σκληρή δουλειά του Ισιγκάμι θα διαλυόταν σαν καπνός. Αναμφίβολα το γνώριζε και η Μισάτο.

Αμέσως μετά τις οδηγίες είχε προσθέσει ένα τελευταίο μήνυμα: "Πιστεύω ότι ο Κουνιάκι Κούντο είναι έντιμος και έμπιστος. Αν τον παντρευτείτε, σίγουρα ενισχύετε τις πιθανότητες να ευτυχήσετε, εσείς και η Μισάτο. Σας παρακαλώ να με ξεχάσετε. Μη νιώθετε τύψεις. Αν δεν είστε ευτυχισμένη, όσα έκανα θα είναι μάταια."

Ξαναδιάβασε το γράμμα και τα μάτια της πλημμύρισαν δάκρυα.

Πρώτη φορά συναντούσε τόσο βαθιά αφοσίωση». (σελ. 323-329)

Το Θεώρημα του παπαγάλου (Denis Guedj, 1999, εκδόσεις ΠΟΛΙΣ)

Στο *Θεώρημα του παπαγάλου* (βλ. Εικόνα 5), το Παρίσι, οι ταξιδιωτικές περιγραφές και η περιπετειώδης αφήγηση της ιστορίας των μαθηματικών, είναι τα συστατικά ενός εκρηκιτκού μείγματος που αποκτά μορφή αστυνομικού μυθιστορήματος και μυεί με διασκεδαστικό τρόπο μικρούς και μεγάλους στον κόσμο των αριθμών και της λογικής.

Εικόνα 5: Εξώφυλλο του βιβλίου «Το Θεώρημα του παπαγάλου».

Τι σχέση μπορεί να έχει ένας παπαγάλος με τα μαθηματικά; Ένα γράμμα του Γκροσρούβρ, φίλου από τα παλιά, συνοδευόμενο από ένα φορτίο πολύτιμων βιβλίων μαθηματικού περιεχομένου, έρχονται να κάνουν άνω κάτω τη ζωή των ενοίκων της οδού Ραβινιάν στους πρόποδες της Μονμάρτης. Ο παπαγάλος, ένας ηλικιωμένος πρώην βιβλιοπώλης, ένα κουφό αγόρι και τα ετεροθαλή δίδυμα αδέρφια του, διάνοιες στα μαθηματικά, συνεργάζονται με σκοπό τη διαλεύκανση ενός φόνου που συνέβη χιλιάδες χιλιόμετρα μακριά τους. Ο Γκροσρούβρ ισχυρίζεται πως έχει αποδείξει το τελευταίο θεώρημα του Φερμά και την εικασία του Γκόλντμπαχ και ο μοναδικός στον οποίο έχει εκμυστηρευτεί αυτές τις αποδείξεις είναι... ο παπαγάλος! Η παρέα των ηρώων, προσπαθώντας να εξιχνιάσουν τον περίεργο θάνατο του φίλου τους, αναζητούν τη λύση του μυστηρίου μέσα στις σελίδες μαθηματικών συγγραμάτων. Κάνουν, έτσι, ένα ταξίδι στους αιώνες μέσα από το μαγικό κόσμο των Μαθηματικών, έναν κόσμο πολύ πιο ανθρώπινο απ' όσο αφήνουν να φανεί οι περίπλοκες εξισώσεις που τον πλαισιώνουν συνήθως.

Όπως και στα *Πυθαγόρεια Εγκλήματα*, έτσι και στο *Θεώρημα του παπαγάλου* γίνεται παραλληλισμός του εγκλήματος με μία υπόθεση που αφορά στους Πυθαγόρειους. Ακολουθεί το σχετικό απόσπασμα, στο οποίο ξεδιπλώνεται ο συλλογισμός του βιβλιοπώλη κ. Ρυς που κατηγορεί έναν Ιταλό μαφιόζο για το φόνο:

« -Στην πυρκαγιά του σπιτιού του. Κάηκαν όλα. Κι αυτός ακόμα! Ο κ. Ρυς αισθάνθηκε το θυμό να ανεβαίνει μέσα του. Έπρεπε όμως να προσέξει μήπως και προδοθεί. Δεν έπρεπε να του ξεφύγει λέξη που να δείχνει ότι ήξερε πολλά σχετικά με το επεισόδιο. Τα λόγια του Γκροσρούβρ ήταν ακόμα ζωντανά στο μυαλό του. Προσπάθησε να αλλάξει κουβέντα:

-Τώρα μου ήρθε στο μυαλό μια ιστορία που συνέβη όχι μακριά από εδώ, στον Κρότωνα, δυο τρεις αιώνες πριν από τον Αρχιμήδη. Μπορεί και να σου τη διηγήθηκε ο Γκροσρούβρ, πρόκειται για τους πυθαγόρειους. Στον Κρότωνα, ζούσε ένας πλούσιος και ισχυρός άνδρας, ο Κύλων. Θαύμαζε τους πυθαγόρειους και ήθελε οπωσδήποτε να γίνει δεκτός στις τάξεις τους. Οι πυθαγόρειοι τον έβρισκαν λίγο ύποπτο, ας πούμε. Τον απέρριψαν. Ο Κύλων σκύλιασε από το κακό του. Δεν ήταν συνηθισμένος να του αρνούνται αυτά που ζητούσε. Ένα βράδυ, τα μέλη της σχολής ήταν συγκεντρωμένα στον συνηθισμένο τους χώρο. Ο Κύλων και οι οπαδοί του πλησίασαν και έβαλαν φωτιά στο σπίτι. Όλοι οι πυθαγόρειοι χάθηκαν. Μόνο ένας σώθηκε.

Ο Ντον Οττάβιο σηκώθηκε πελιδνός. Έμεινε για μια στιγμή αμίλητος, με το χέρι του να συνθλίβει τη λαβή του μπαστουνιού του.

-Ποιος είναι αυτός ο πλούσιος και ισχυρός άνδρας; Με κατηγορείς, Πιερ Ρυς, ότι έβαλα φωτιά στο σπίτι του Ελγκάρ; Ισχυρίζεσαι ότι τον δολοφόνησα;

Ο κ. Ρυς φοβήθηκε. Η οργή του Ντον Οττάβιο ήταν τρομακτική.

-Με κατηγορείς για κάτι ανήκουστο. Εγώ, να δολοφονήσω ένα φίλο...

-...που σου αρνήθηκε αυτό που επιθυμούσες. Χωρίς αμφιβολία, ήταν ο μόνος που τόλμησε ποτέ κάτι τέτοιο...

-Μάλιστα, ο Ελγκάρ μου αρνήθηκε αυτό που επιθυμούσα. Αλήθεια, είναι ο μόνος που τόλμησε ποτέ κάτι τέτοιο. Όμως επρόκειτο να μου δώσει την οριστική του απάντηση εκείνο το βράδυ. Είχαμε ραντεβού στο σπίτι του, με τη δύση του ηλίου. Του είχα προτείνει ένα τεράστιο ποσό. Κανείς δεν ξέρει τι θα μου απαντούσε.

Ο κ. Ρυς δάγκωσε τα χείλη του για να μην εκραγεί. Όλα αυτά τα ήξερε:

"Θα επιστρέψουν το σούρουπο. Πίστεψέ με, Πιερ, δεν θα πάρουν στα χέρια τους τις αποδείξεις μου! Θα τις κάψω μόλις τελειώσω αυτό το γράμμα..."». (σελ. 598-599)

Το τελευταίο Θεώρημα του Φερμά (Simon Singh, 1998, εκδοτικός οίκος ΤΡΑΥΛΟΣ)

Στο έργο μαθηματικής λογοτεχνίας *Το τελευταίο Θεώρημα του Φερμά* (βλ. Εικόνα 6), πραγματοποιείται μία εξαιρετικά ενδιαφέρουσα ιστορική αναδρομή με σταθμούς εκείνα τα μέρη των μαθηματικών που άσκησαν καθοριστικό ρόλο στην τελική μορφή της απόδειξης του ομώνυμου θεωρήματος.

Εικόνα 6: Εξώφυλλο του βιβλίου «Το τελευταίο θεώρημα του Φερμά».

Τον 17ο αιώνα, μελετώντας το βιβλίο «Αριθμητικά» του Διόφαντου, ο Πιέρ ντε Φερμά στάθηκε στο πυθαγόρειο θεώρημα ($x^2 + y^2 = z^2$) και σημείωσε στο περιθώριο της σελίδας το συμπέρασμα ότι είναι αδύνατον να ισχύει το $x^n + y^n = z^n$. Επίσης συμπλήρωσε: "Έχω ανακαλύψει μία πραγματικά θαυμάσια απόδειξη, όμως το περιθώριο της σελίδας είναι πολύ στενό για να την αναπτύξω".

Για τα επόμενα 350 χρόνια, η φράση αυτή του Φερμά έγινε έμμονη ιδέα των πιο διάσημων μαθηματικών μυαλών, που από τότε ρίχνονται σ' έναν φοβερό αγώνα για την επίλυση του διασημότερου μαθηματικού προβλήματος.

Στο απόσπασμα που ακολουθεί, σκιαγραφείται η περίοδος κατά την οποία ο Ουάιλς ξεκίνησε το περίφημο "ταξίδι" του:

«Στη στροφή του αιώνα, όταν ο σπουδαίος μαθηματικός της λογικής Ντάβιντ Χίλμπερτ ρωτήθηκε γιατί δεν είχε ποτέ αποπειραθεί να αποδείξει το Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά, απάντησε: "Πριν ξεκινήσω θα έπρεπε να αφιερώσω τρία ολόκληρα χρόνια σε εντατική μελέτη˙ δεν έχω τόσο χρόνο να σπαταλήσω για μία πιθανή αποτυχία". Ο Ουάιλς γνώριζε ότι για να έχει κάποιες ελπίδες, έπρεπε πρώτα να βυθιστεί εντελώς στο πρόβλημα. Σε αντίθεση με τον Χίλμπερτ, ήταν προετοιμασμένος να το διακινδυνεύσει. Μελέτησε όλα τα επιστημονικά περιοδικά και κατόπιν δοκίμασε τις τελευταίες τεχνικές ξανά και ξανά, μέχρι που έγιναν δεύτερη φύση του. Για να καταφέρει να συγκεντρώσει τα απαραίτητα όπλα για τον αγώνα, έπρεπε να θυσιάσει τους επόμενους δεκαοκτώ μήνες ώστε να εξοικιωθεί με κάθε κομματάκι μαθηματικών που είχε ποτέ εφαρμοστεί σε ελλειπτικές εξισώσεις ή μορφές modular, ή είχε προκύψει από τη μελέτη τους. Αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί μικρή, συγκριτικά, επένδυση, αν λάβουμε υπόψη ότι ο Ουάιλς υπολόγιζε ότι κάθε σοβαρή απόπειρα απόδειξης μπορούσε εύκολα να απαιτήσει δέκα χρόνια απερίσπαστης προσπάθειας.

Ο Ουάιλς εγκατέλειψε κάθε εργασία που δεν είχε άμεση σχέση με την απόδειξη του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά και έπαψε να παρακολουθεί τους ατέλειωτους γύρους συνεδρίων και διασκέψεων. Επειδή όμως εξακολουθούσε να έχει αρμοδιότητες στο Τμήμα των μαθηματικών του Πρίνστον, συνέχισε να παρακολουθεί σεμινάρια, να δίνει διαλέξεις και να κάνει φροντιστηριακά μαθήματα σε προπτυχιακούς φοιτητές. Όποτε πάντως ήταν δυνατόν, απέφευγε ό,τι τον αποσπούσε και εργαζόταν στο σπίτι του, όπου έβρισκε καταφύγιο στο γραφείο του στη σοφίτα. Εκεί μπορούσε να επιχειρεί κάθε είδους *διεύρυνση των καθιερωμένων τεχνικών, ελπίζοντας στην ανάπτυξη κάποιας στρατηγικής ικανής για την αντιμετώπιση της εικασίας. [....]*

Από τη στιγμή που ανέλαβε την απόδειξη, ο Ουάιλς αποφάσισε να εργαστεί σε πλήρη απομόνωση και μυστικότητα. Στα σύγχρονα μαθηματικά έχει αναπτυχθεί ένα κλίμα συμβολής και συνεργασίας, και γι' αυτό η απόφαση του Ουάιλς έμοιαζε με επιστροφή σε προηγούμενα ήθη, θύμιζε την προσέγγιση του ίδιου του Φερμά, του πιο ξακουστού μαθηματικού ερημίτη. Ο Ουάιλς διευκρίνισε ότι, σε κάποιο βαθμό, η απόφαση να εργαστεί με μυστικότητα σχετιζόταν με την επιθυμία του να μην τον αποσπούν: "Συνειδητοποίησα ότι οτιδήποτε έχει να κάνει με το Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά δημιουργεί μεγάλο ενδιαφέρον. Δεν μπορείς πραγματικά να συγκεντρωθείς για χρόνια εκτός κι αν έχεις απερίσπαστη προσήλωση, την οποία οι πολλοί θεατές θα κατέστρεφαν".

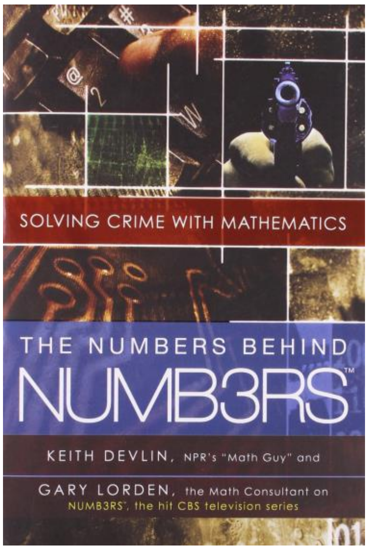
Ένα άλλο κίνητρο για τη μυστικότητα του Ουάιλς πρέπει να ήταν η λαχτάρα του για δόξα. Φοβόταν την περίπτωση όπου ενώ θα είχε ολοκληρώσει το κύριο μέρος της απόδειξης, θα έλειπε ακόμη το τελικό στοιχείο του υπολογισμού. Σε αυτό το σημείο, αν η είδηση για τις ανακαλύψεις του διέρρεε, τίποτα δεν θα μπορούσε να σταματήσει κάποιον ανταγωνιστή που θα οικοδομούσε πάνω στο έργο του Ουάιλς ολοκληρώνοντας την απόδειξη και κλέβοντας το βραβείο. Στα χρόνια που ακολούθησαν, ο Ουάιλς έκανε μια σειρά από εξαιρετικές ανακαλύψεις, καμία όμως από αυτές δεν συζητήθηκε και δεν δημοσιεύτηκε μέχρι να ολοκληρωθεί η απόδειξη. Ακόμη και οι πιο στενοί συνεργάτες του αγνοούσαν την έρευνά του. [....]

Για να αποδείξει το Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά, ο Ουάιλς έπρεπε να αποδείξει την εικασία Τανιγιάμα-Σιμούρα: κάθε ελλειπτική εξίσωση μπορεί να συσχετιστεί με μια μορφή modular. Ακόμη και πριν από τη σύνδεσή της με το Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά, οι μαθηματικοί είχαν προσπαθήσει απελπισμένα να αποδείξουν την εικασία, όλες όμως οι απόπειρες είχαν καταλήξει σε αποτυχία. Ο Ουάιλς γνώριζε καλά τις αποτυχίες του παρελθόντος: "Τελικά αυτό που κάποιος, αφελώς, θα προσπαθούσε να κάνει, και οι περισσότεροι πράγματι το έκαναν, ήταν, μετρώντας τις ελλειπτικές εξισώσεις και τις *μορφές modular, να δείξουν ότι ήταν ίσες σε πλήθος. Όμως κανείς ποτέ δεν είχε βρει έναν απλό τρόπο γι' αυτό. Το πρώτο πρόβλημα είναι ότι και οι μεν και οι δε είναι άπειρες. Δεν μπορείς να μετρήσεις ένα άπειρο πλήθος,, δεν υπάρχει τρόπος να το κάνεις".[....]*

Ύστερα από ένα χρόνο συνεχούς σκέψης, ο Ουάιλς αποφάσισε να υιοθετήσει μια γενική στρατηγική, την επαγωγή, ως βάση για την απόδειξη». (σελ. 264-269)

<u>NUMB3RS</u> <u>(Keith Devlin, Gary Lorden, 2010, εκδοτικός οίκος ΤΡΑΥΛΟΣ)</u>

Τέλος, το βιβλίο *NUMB3RS* (βλ. Εικόνα 7), είναι το πιο κατατοπιστικό και κατάλληλο για να κλείσει αυτό το κεφάλαιο, καθώς αποτελεί την ιδανική εισαγωγή για το επόμενο. Εδώ, αξίζει να αποτυπωθεί η περίληψη ακριβώς όπως είναι στο οπισθόφυλλο του βιβλίου:



<u>Εικόνα 7:</u> Εξώφυλλο του βιβλίου «NUMB3RS».

«Κι όμως! Τα μαθηματικά έχουν τηλεθέαση. Παρακολουθώντας την αστυνομική τηλεοπτική σειρά NUMB3RS –και μάλιστα στην πιο καυτή χρονική ζώνη- χιλιάδες τηλεθεατές είδαν τα μαθηματικά από εντελώς διαφορετική σκοπιά.

Σε κάθε επεισόδιο, η σειρά παρουσιάζει δραματοποιημένες, πραγματικές υποθέσεις, στις οποίες αληθινές μαθηματικές ιδέες παίζουν κρίσιμο ρόλο. Ένας από τους δύο ήρωες, ο καθηγητής Τσάρλι Επς, είναι μαθηματικός˙ μεγάλο μέρος της δράσης κινείται γύρω από τα μαθηματικά, καθώς ο Τσάρλι χρησιμοποιεί την επιστήμη και την τετράγωνη λογική του για να βοηθήσει τον μεγαλύτερο αδερφό του, Ντον, πράκτορα του FBI, στην ταυτοποίηση και στον εντοπισμό εγκληματιών.

Οι συγγραφείς του βιβλίου –καθηγητές μαθηματικών και επιστημονικοί σύμβουλοι της σειράς NUMB3RS- αναλύουν τις μαθηματικές ιδέες που χρησιμοποιούνται.

Από την ιατροδικαστική μέχρι την αντιτρομοκρατία, από την Υπόθεση Ρίμαν μέχρι την ανασύνθεση εικόνας και την εξόρυξη δεδομένων, από τους κώδικες στις πιστωτικές κάρτες μέχρι τη θεωρία παιγνίων και τις απάτες στο καζίνο, οι αριθμοί κυριαρχούν.

Τα μαθηματικά είναι κάτι παραπάνω από εξισώσεις και τύπους˙ είναι η λογική˙ είναι η ικανότητα να σκεφτόμαστε˙ είναι η αξιοποίηση του μυαλού μας. Τα χρησιμοποιούμε για να αποκαλύψουμε πρότυπα˙ για να προβλέψουμε τη συμπεριφορά˙ για να αναλύσουμε το έγκλημα. Χρησιμοποιώντας τους αριθμούς, μπορούμε να λύσουμε τα μεγαλύτερα μυστήρια του κόσμου μας.

Κι αν εξακολουθείτε να αναρωτιέστε σε τι χρησιμεύουν τα μαθηματικά στη ζωή μας, η απάντηση είναι αποστομωτική: τα μαθηματικά ΕΙΝΑΙ η ζωή μας. Everything is NUMB3RS».

Το παρακάτω απόσπασμα αφορά στο πρώτο επεισόδιο της σειράς και παρουσιάζει τη γέννηση της ιδέας του μαθηματικού Τσάρλι, ορμώμενος από την πραγματική ζωή, να βοηθήσει τον αδερφό του Ντον στην εξιχνίαση των υποθέσεων που αναλαμβάνει, χρησιμοποιώντας τις μαθηματικές του γνώσεις:

«Ο ειδικός πράκτορας του FBI Ντον Επς ρίχνει μία ακόμη ματιά στον μεγάλο οδικό χάρτη του Λος Άντζελες που είναι απλωμένος στο τραπέζι του σαλονιού, στο σπίτι του πατέρα του. Σταυροί σημειωμένοι πάνω στο χάρτη δείχνουν τις τοποθεσίες που έδρασε ένας σκληροτράχηλος κατά συρροήν δολοφόνος τους τελευταίους μήνες, βιάζοντας και στη συνέχεια δολοφονώντας νεαρές γυναίκες. Αυτό που πρέπει να κάνει ο Ντον είναι να τον πιάσει πριν χτυπήσει ξανά. Όμως, η έρευνα έχει καθυστερήσει. Ο Ντον έχει ξεμείνει από στοιχεία, και δεν ξέρει πώς να συνεχίσει.

"Μπορώ να βοηθήσω;" ακούγεται η φωνή του Τσάρλι, του νεότερου αδελφού του Ντον, ενός ευφυούς νεαρού καθηγητή μαθηματικών στο γειτονικό πανεπιστήμιο CalSci.

Ο Ντον έβλεπε πάντοτε με δέος τις απίστευτες ικανότητες του αδελφού του στα μαθηματικά, και ειλικρινά, τούτη τη στιγμή, θα *καλοδεχόταν οποιαδήποτε βοήθεια. Όμως… βοήθεια από έναν μαθηματικό;*

"Η υπόθεση αυτή δεν έχει να κάνει με αριθμούς, Τσάρλι". Ο εκνευρισμός στη φωνή του Ντον οφείλεται περισσότερο στην απογοήτευση παρά στον θυμό, εντούτοις ο Τσάρλι φαίνεται να μην τον αντιλαμβάνεται, και η απάντησή του είναι απολύτως ρεαλιστική, σε έντονο, όμως, ύφος:

"Τα πάντα είναι αριθμοί".

Ο Ντον δεν πείθεται. [….]

Ακόμη και ο Τσάρλι συμφωνεί ότι, κοιτώντας απλώς τον χάρτη, δεν υπάρχει τρόπος να προβλέψουμε με μαθηματικό τρόπο το επόμενο χτύπημα. Πηγαίνει προς το παράθυρο και ατενίζει τον κήπο έξω από το σπίτι, αφουγκράζεται την ησυχία του απογεύματος˙ το μόνο που ″σπάει″ την ηρεμία είναι το συνεχόμενο φλικ-φλικ-φλικ του αυτόματου ψεκαστήρα που ποτίζει το γρασίδι. [….]

Φλικ-φλικ-φλικ. Ο Τσάρλι παρατηρεί τον ψεκαστήρα˙ ξαφνικά, τον διαπερνά ένα ρίγος, καθώς αντιλαμβάνεται ότι βρήκε την απάντησή του. Θα μπορούσε να βοηθήσει τον Ντον να διαλευκάνει την υπόθεση, και η λύση ήταν εκεί και τον κοιτούσε κατάματα απ' την αρχή. Απλώς δεν την είχε αντιληφθεί.

Τραβά τον Ντον προς το παράθυρο. "Λάθος ερώτημα κάναμε", του λέει. "Σύμφωνα με όσα γνωρίζεις, δεν υπάρχει τρόπος να προβλέψουμε που θα χτυπήσει την επόμενη φορά ο δολοφόνος". Δείχνει τον ψεκαστήρα. "Το ίδιο ισχύει κι εκεί. Όσο κι αν μελετήσεις που πέφτει κάθε σταγόνα νερού πάνω στο γρασίδι, δεν υπάρχει τρόπος να προβλέψεις που θα πέσει η επόμενη. Η αβεβαιότητα είναι πολύ μεγάλη". Ρίχνει μια γρήγορη ματιά στον Ντον για να δει αν τον ακούει. "Ας υποθέσουμε, όμως, ότι δεν μπορείς να δεις τον ψεκαστήρα και το μόνο διαθέσιμο στοιχείο είναι το σχήμα που δημιουργείται από τα σημεία που –μέχρι στιγμής- έχουν πέσει οι σταγόνες. Τότε, χρησιμοποιώντας μαθηματικά, μπορείς να βρεις με ακρίβεια τη θέση του ψεκαστήρα. Δεν μπορείς να χρησιμοποιήσεις το μοτίβο για να *προβλέψεις που θα πέσει η επόμενη σταγόνα, αλλά μπορείς να το χρησιμοποιήσεις αντιστρόφως, για να εντοπίσεις την πηγή. Εκεί βρίσκεται ο δολοφόνος σου".*

Ο Ντον δυσκολεύεται να συμφωνήσει με τον ισχυρισμό του αδελφού του. "Τσάρλι, θέλεις να μου πεις ότι μπορείς να βρεις που μένει ο δολοφόνος;"

Η απάντηση του Τσάρλι είναι απλή: "Ναι".» (σελ.15-18)

2.2 Η επίλυση ενός αστυνομικού μυστηρίου και η σχέση του με τις μαθηματικές αποδείξεις

Στο βιβλίο «NUMB3RS» γίνεται απόλυτα ξεκάθαρο ότι η επιστήμη των μαθηματικών μπορεί εμπράκτως και αποτελεσματικά να συμβάλει στην επίλυση ενός μυστηρίου. Πολλοί κλάδοι των μαθηματικών και αναρίθμητοι μαθηματικοί τύποι και μεθοδολογίες, εφαρμοσμένες από κατάλληλα καταρτισμένους επιστήμονες, οδηγούν στα ίχνη εγκληματιών με μεγάλη επιτυχία.

Στο απόσπασμα του βιβλίου που παρατίθεται παραπάνω, τα μαθηματικά που χρησιμοποιεί τελικά ο Τσάρλι για να εντοπίσει την κατοικία του δολοφόνου, είναι μία υπαρκτή μέθοδος που ονομάζεται «Σκιαγράφηση Γεωγραφικού Προφίλ». Πρόκειται για μία μαθηματική τεχνική που παρήγαγε ο Κιμ Ρόμσο τη δεκαετία του '80, η οποία χρησιμοποιώντας ως δεδομένα τα μέρη στα οποία έχει δράσει ο εγκληματίας, μπορεί και προβλέπει την τοποθεσία της κατοικίας του. Η Στατιστική είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που συμβάλει ιδιαίτερα στην εξιχνίαση εγκλημάτων, με μεθόδους όπως ο έλεγχος υποθέσεων και η μέθοδος του Μπέις. Προκειμένου να αναλυθούν διάφορα είδη δραστηριότητας σε μεγάλα πλήθη, γίνεται χρήση εξισώσεων ρευστοδυναμικής και εφαρμόζονται σε περιπτώσεις όπως η ανάλυση της ροής της κυκλοφορίας σε αυτοκινητόδρομους, στην είσοδο και έξοδο θεατών σε μεγάλα στάδια, στις εξόδους κινδύνου σε φλεγόμενα κτίρια ή σε κτίρια που βρίσκονται υπό την απειλή βόμβας κ.ά. Επιπλέον, τα νευρωνικά δίκτυα, δηλαδή εξειδικευμένα υπολογιστικά προγράμματα, χρησιμοποιούνται ώστε να προβλέψουν την πιθανότητα εγκληματικών και τρομοκρατικών επιθέσεων, για να ανιχνεύσουν απάτες με πιστωτική κάρτα ή τηλεφωνικές απάτες, καθώς επίσης, χρησιμοποιούνται και στα συστήματα αναγνώρισης προσώπου. Μία άλλη προσφορά των μαθηματικών στην επίλυση μυστηρίων, είναι η κωδικοποίηση δακτυλικών αποτυπωμάτων μέσω της ανάλυσης Φουριέ. Ένας τρόπος αποτελεσματικής ανάκρισης εγκληματιών, πηγάζει από τη Θεωρία Παιγνίων και ονομάζεται «το δίλημμα του κρατουμένου».

Τα παραδείγματα «εκμετάλλευσης» των μαθηματικών εργαλείων προς όφελος της εγκληματολογίας, είναι αναρίθμητα. Τι γίνεται, όμως, όταν σε ένα αστυνομικό μυθιστόρημα δεν συμμετέχουν –όχι εμφανώς, τουλάχιστον- τα μαθηματικά; Τότε, η επίλυση ενός μυστηρίου και η επιστήμη των μαθηματικών είναι δύο ασύμβατες έννοιες; Προσφέρουν κάτι τα μαθηματικά στην εξιχνίαση ενός εγκλήματος όταν δεν εφαρμόζωνται οι εξισώσεις τους;

Ο Ερνέστο Σάμπατο σε ένα μικρό κείμενό του για την αστυνομική λογοτεχνία που βρίσκεται στο βιβλίο του «Ετεροδοξία», αναφέρει ότι ο Έντγκαρ Άλαν Πόε ήταν λάτρης των μαθηματικών και επινόησε με μιας το απόλυτο αστυνομικό είδος. Κατ' αυτόν, ένα μυστηριώδες σύνολο από στοιχεία, όπως ένα δακτυλικό αποτύπωμα, ένα ματωμένο γάντι, ένα μισοτελειωμένο τσιγάρο, ένα χαρακτηριστικό χαμόγελο, μία πατημασιά στη λάσπη, μία μακριά ξανθιά τρίχα, μπορούν να βοηθήσουν τον ερευνητή στην εξιχνίαση ενός εγκλήματος. Επομένως, ο ήρωας του Πόε, ο Αύγουστος Ντιπέν, δεν χρειάζεται ούτε να κρατάει όπλο ούτε να μεταμφιέζεται, του αρκεί να κάνει μια αλληλουχία συλλογισμών ώστε να οδηγηθεί στη λύση του αινίγματος. Ο Πόε στα διηγήματά του χρησιμοποιεί μια γερή αποδεικτική διαδικασία με στόχο να δώσει αληθοφάνεια στη λύση του αινίγματος. Στους Φόνους της οδού Μοργκ γράφει τη φράση: «Η αναλυτική ικανότητα μπορεί να ενισχυθεί πολύ από την ενασχόληση με τα μαθηματικά και ιδίως με τον ανώτερο κλάδο τους». Ο πρώτος και σημαντικότερος μαθητής του Πόε, ο Άρθουρ Κόναν Ντόιλ, ο άνθρωπος που πήρε τον Ντιπέν, του άλλαξε χαρακτηριστικά και τον ονόμασε Σέρλοκ Χολμς, ήταν γιατρός και χρησιμοποιεί την επιστήμη στις έρευνές του για να φτάσει σε λογικά συμπεράσματα σχετικά με ένα έγκλημα. Επομένως, οι πρώτες αστυνομικές ιστορίες, τα πρώτα αστυνομικά μυθιστορήματα, ήταν ουσιαστικά παιχνίδια ευφυΐας, στηριγμένα στα μαθηματικά. Ο αστυνόμος είναι εκείνος που πρέπει να βάλει τα πράματα σε μια τάξη. Γι' αυτό, στη Λέσχη Αστυνομικών Συγγραφέων του Λονδίνου, στην οποία ήταν μέλος και η Άγκαθα Κρίστι, υπήρχε ένας αυστηρός όρος με καθοριστική σημασία: οι ντετέκτιβ έπρεπε να εξιχνιάζουν το έγκλημα βασιζόμενοι στις πνευματικές τους ικανότητες και όχι κατά λάθος ή από σύμπτωση. Ωστόσο, σήμερα δεν είναι απαραίτητοι παρόμοιοι συλλογισμοί για την εξιχνίαση ενός εγκλήματος και την αποκάλυψη του δράστη, που στα κλασικά αστυνομικά μυθιστορήματα προκαλεί έκπληξη στον αναγνώστη που οφείλεται στην ανατροπή της εξέλιξης. Η ανατροπή σηματοδοτείται πλέον και από μετατόπιση του ενδιαφέροντος. Συχνά, ο δολοφόνος είναι γνωστός από την αρχή, οπότε το θέμα, πλέον, είναι πώς θα συλληφθεί, πώς θα καταδικαστεί, ή πως θα συγκαλυφθεί, όπως προαναφέρθηκε στο αστυνομικό μυθιστόρημα «Η αφοσίωση του υπόπτου Χ».[12]

Η επίλυση, λοιπόν, ενός μυστηρίου, είναι ένας συλλογισμός, ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων, όπου κάθε βήμα αποτελεί το κίνητρο και προσδιορίζει το επόμενο, μέχρις ότου ο συλλογισμός αυτός οδηγήσει με επιτυχία στο ζητούμενο. Τα δεδομένα του προβλήματος είναι στοιχεία, όπως η κατάθεση ενός αυτόπτη μάρτυρα, δακτυλικά αποτυπώματα και στοιχεία με γενετικό υλικό, αρχεία από κάμερες παρακολούθησης, φονικά όπλα κ.ά. Ο άνθρωπος που καλείται να λύσει το πρόβλημα, έχει στα χέρια του κάποια στοιχεία, τα οποία καθορίζουν και τα πρώτα του βήματα. Κατά την προσπάθεια της επίλυσης, προκύπτουν νέα στοιχεία που δεν υπήρχαν ή δεν ήταν προφανή από την αρχή, τα οποία ξεκαθαρίζουν κι άλλο το τοπίο και βοηθούν στην εξέλιξη και στην δρομολόγηση των επόμενων βημάτων. Πολλές φορές, η εξιχνίαση συναντά αδιέξοδο˙ τα στοιχεία στερεύουν και δεν υπάρχει τρόπος εύρεσης του επόμενου βήματος. Τότε, ο συλλογισμός ξεκινά κάποια βήματα προς τα πίσω, μέχρι να βρεθεί κάτι που ίσως είχε ξεφύγει από τη συλλογιστική διαδικασία και οδηγεί σε ένα άλλο τοπίο, εμφανίζοντας νέα στοιχεία και δημιουργώντας νέες επιλογές βημάτων. Τελικά, η σωστή χρήση των στοιχείων την κατάλληλη στιγμή, με συμμάχους τη λογική, την παρατηρητικότητα και την ευστροφία, οδηγούν, τελικά, σε κάποιο βήμα το οποίο θα είναι το τελευταίο και θα αποτελεί τη λύση του αινίγματος.

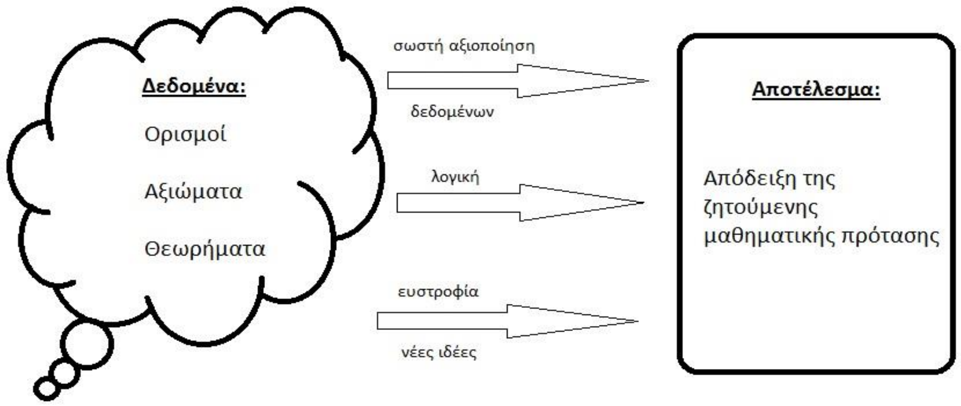
Η παραπάνω διαδικασία, θα μπορούσε κάλλιστα να περιγράφει έναν μαθηματικό που επιχειρεί να αποδείξει κάποια μαθηματική πρόταση. Ο μαθηματικός έχει στα χέρια του ένα πρόβλημα και κάποια στοιχεία που θα συμβάλλουν στην έναρξη της επίλυσής του. Τα στοιχεία αυτά είναι ορισμοί μαθηματικών εννοιών, μαθηματικά αξιώματα και αποδεδειγμένα θεωρήματα. Ο μαθηματικός, αξιοποιώντας ένα ή κάποια από τα δεδομένα του, κάνει το πρώτο βήμα. Έτσι, με τη χρήση συνεπαγωγών και νέων ιδεών που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της επίλυσης, κάθε βήμα οδηγεί στο επόμενο, νέα στοιχεία έρχονται στην επιφάνεια και ανοίγουν νέοι δρόμοι. Όμοια με την εξιχνίαση ενός μυστηρίου και στην επίλυση ενός προβλήματος ο μαθηματικός ενδεχομένως να βρεθεί σε αδιέξοδο. Έτσι, λοιπόν, κι εκείνος πραγματοποιώντας κάποια βήματα προς τα πίσω, προσπαθεί να ανακαλύψει ποιο στοιχείο χρησιμοποίησε λάθος, ή ποιο στοιχείο υπήρχε και δεν το χρησιμοποίησε

[12] Βλ. https://crimefictionclubgr.wordpress.com/opinion-detective-stories/sabbato/ (πρόσβαση στις 18/05/2017)

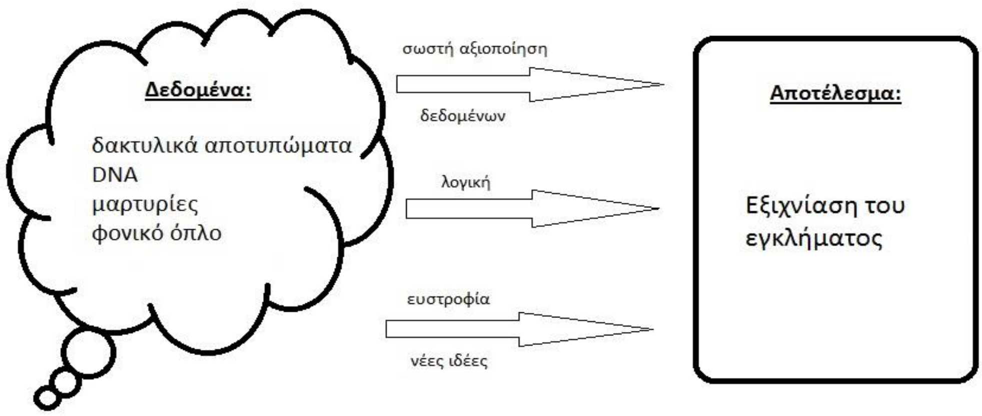
καθόλου, προκειμένου να διαλευκανθεί η αιτία που προκάλεσε την εμπλοκή του συλλογισμού. Ο μαθηματικός, αξιοποιώντας του ίδιους συμμάχους με τον αστυνόμο που εξιχνιάζει μία υπόθεση, κάποια στιγμή οδηγείται σε εκείνο το τελευταίο βήμα που φανερώνει τη λύση του προβλήματος.

Με σκοπό την αποτελεσματικότερη κατανόηση της παραπάνω συσχέτισης των μαθηματικών αποδείξεων με την επίλυση μυστηρίων στα αστυνομικά μυθιστορήματα, ακολουθεί μία γραφική απεικόνιση:

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



<u>ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΥΣΤΗΡΙΟΥ</u>



Ως παράδειγμα της παραπάνω αναλογίας, θα χρησιμοποιηθεί μία απόδειξη που αναφέρεται στην παράγραφο 1.2.2 και ο συλλογισμός του αστυνόμου στο απόσπασμα από το αστυνομικό μυθιστόρημα «Πυθαγόρεια Εγκλήματα».

Απόδειξη:

Δεδομένο : $a < b$

Συλλογισμός : $a < b \Rightarrow a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < \frac{2b}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b$

Ζητούμενο αποτέλεσμα : $\frac{a+b}{2} < b$

Επίλυση μυστηρίου:

Δεδομένο : φονικό όπλο (υπνωτικό)

Συλλογισμός : το υπνωτικό στο νερό του θύματος ταιριάζει με αυτό που λείπει από το σπίτι του του υπόπτου $\Rightarrow$ το υπνωτικό ανήκει στον ύποπτο $\Rightarrow$ ο ύποπτος το έριξε στο νερό του θύματος όταν τον είδε ο γείτονας να ξαναμπαίνει σπίτι του $\Rightarrow$ ο ύποπτος είναι ο δολοφόνος

Ζητούμενο αποτέλεσμα : εύρεση του δολοφόνου

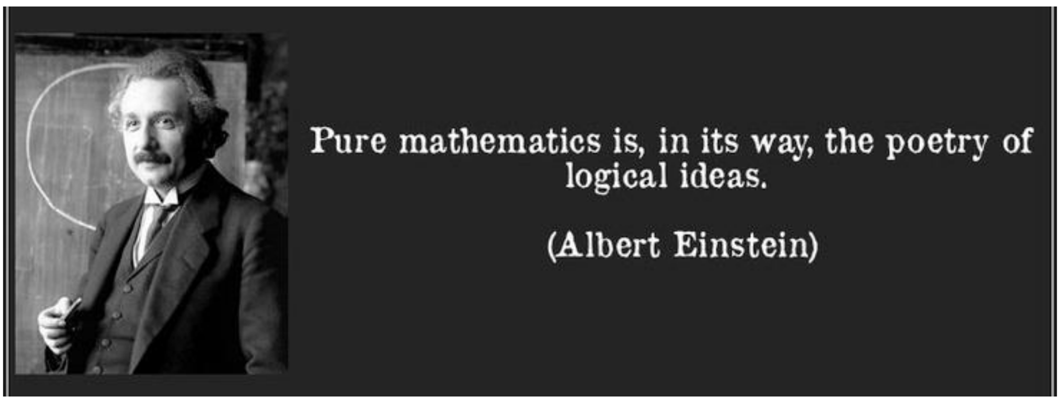
Κατ' αναλογία, λοιπόν, των δύο διαδικασιών, θα μπορούσε να εξαχθεί το συμπέρασμα, πως, η εξιχνίαση εγκλημάτων στα αστυνομικά μυθιστορήματα, εμπεριέχει τον κόσμο της μαθηματικής επιστήμης, ακόμα και αν κανένας από τους ήρωες δεν είναι μαθηματικός, ή τα μαθηματικά δεν εμφανίζονται με κανέναν άλλο οφθαλμοφανή τρόπο. Σε δεύτερη ανάγνωση ή ακόμα και υποσυνείδητα, η επίλυση του μυστηρίου παρουσιάζει στον αναγνώστη τη μαθηματική λογική, τον μαθηματικό τρόπο σκέψης και συλλογισμού, που σε πολλούς ανθρώπους φαντάζει τελείως ξένος και ακατανόητος. Αν επεξεργαστεί κανείς την παραπάνω συσχέτιση αντίστροφα, θα μπορούσε να σκεφτεί πως η λύση ενός αινίγματος θα επιτευχθεί πιο άμεσα, αν ο άνθρωπος που έχει αναλάβει την υπόθεση διαθέτει έντονα τη μαθηματική νοοτροπία και τη λεγόμενη «τετράγωνη λογική».

Συμπέρασμα

Η ισχύς (ή η διάψευση) μία πρότασης είναι δυνατό να επικυρωθεί μόνο μέσω της διαδικασίας της απόδειξης. Επομένως, η εικασία πως τα μαθηματικά και η αφήγηση αποτελούν τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, δεν μπορεί να θεωρηθεί αυστηρά αληθής. Ομοίως, είναι αδύνατο –με την υπάρχουσα γνώση- να αποδειχθεί πως αν ένας άνθρωπος που προσπαθεί να επιλύσει ένα μυστήριο, κατέχει μαθηματικές γνώσεις, θα το επιλύσει πιο άμεσα και ορθά από κάποιον που δεν κατέχει.

Ωστόσο, σύμφωνα με την παραπάνω προσέγγιση και "χωρίς βλάβη της γενικότητας", επικυρώνεται η αλήθεια της πρότασης « $\text{Α}πόδειξη \approx \text{Α}φήγημα$ » και συσχετίζεται άμεσα η διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης με το συλλογισμό που ακολουθείται σε μία επίλυση μυστηρίου. Τουλάχιστον, διεγείρεται ο προβληματισμός γύρω από αυτά τα ζητήματα και ο κόσμος των μαθηματικών αποκτά μία ακόμα πλευρά που παραμένει ακόμα σχεδόν ανεξερεύνητη.

Το μοναδικό γεγονός που δεν χωρεί αμφιβολίας, είναι ότι η επιστήμη των μαθηματικών που συνεχώς εξελίσσεται, συμβάλει στην εξέλιξη και των υπόλοιπων επιστημών και ως αποτέλεσμα και στην πρόληψη εγκλημάτων, στην εύρεση και σύλληψη εγκληματιών και κατ' επέκταση στην προστασία του πολίτη, σε ένα κόσμο που οι κίνδυνοι αυξάνονται με εκθετικό ρυθμό μεταβολής.



Βιβλιογραφία

1. Αναπολιτάνος, Δ. 2009. *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών* (7η έκδοση). Αθήνα, Εκδόσεις Νεφέλη.

2. Στεφανέας, Π. 2011. *Signum: Δύο προσεγγίσεις στην έννοια της απόδειξης*. Αθήνα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.

3. Baggini, J. και Fosl, P. 2005. *Τα εργαλεία του φιλοσόφου*. Αθήνα, Εκδόσεις Καστανιώτη.

4. Αργυρός, Σ. 2011. *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης* (3η έκδοση).

5. Devlin, K. και Lorden, G. 2010. *Τα μαθηματικά της τηλεοπτικής σειράς NUMB3RS*. Αθήνα, Εκδοτικός Οίκος ΤΡΑΥΛΟΣ.

6. Μιχαηλίδης, Τ. 2015. *Πυθαγόρεια Εγκλήματα* (19η έκδοση). Αθήνα, Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ.

7. Higashino, K. 2012. *Η αφοσίωση του υπόπτου Χ*. Αθήνα, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

8. Guedj, D. 2003. *Το θεώρημα του παπαγάλου* (τεσσαρακοστή έκτη χιλιάδα). Αθήνα, Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ.

9. Singh, S. 1998. *Το τελευταίο θεώρημα του Φερμά*. Αθήνα, Εκδοτικός Οίκος ΤΡΑΥΛΟΣ.

10. Λαγοδόντη, Α. 2014. *Διερευνώντας τη σχέση μαθηματικών και αφήγησης. Δυνατότητα αξιοποίησης στη διδασκαλία των μαθηματικών.*

11. Καρδαμίτσης, Σ. 2010. *Η απόδειξη στα μαθηματικά και σχετικές αντιλήψεις των μαθητών λυκείου.*

12. Λέρη, Β. 2008. *Η αξιοποίηση της "μαθηματικής λογοτεχνίας" ως μέσο βελτίωσης των στάσεων των μαθητών για τα μαθηματικά.*

13. Robinson, J.M. 1968. *An Introduction to Early Greek Philosophy*. Boston, Houghton Mifflin Co.

14. Δοξιάδης, Α. 2011. *Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative: A Streetcar Named (among Other Things) Proof: From Storytelling to Geometry, via Poetry and Rhetoric.* New Jersey, Princeton University Press.

Διαδίκτυο

1. Παπαλεοντίου, Μ. 2014. *Ο λογοτεχνικός γραμματισμός στην πεζογραφία.* http://www.pi.ac.cy/pi/files/epimorfosi/ekpaid_yliko/logot_mesi/logotexnia_afigimatologia.pdf

2. Εξαρχάκος, Θ. 1995. *Η απόδειξη στα μαθηματικά.* http://www.hdml.gr/pdfs/journals/1394.pdf

3. http://news.stanford.edu/news/2012/may/math-literature-netz-050712.html

4. http://www.torch.ox.ac.uk/narrative-and-proof-two-sides-same-equation-0

5. Lafforgue, L. 2014. *Forms of truth and the unity of knowledge: Speculation and narration in mathematics*. https://www.laurentlafforgue.org/textes/SpeculationNarrationMathematics.pdf

6. http://abcnews.go.com/Technology/WhosCounting/story?id=711316&page=1

7. https://www.wikipedia.org/

8. https://thalesandfriends.org/el/

9. http://mathandliterature.blogspot.gr/

10. http://www.komvos.edu.gr/

11. http://www.elsal.gr/index.php/el/