Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο.
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και
Φυσικών Επιστημών.

Διπλωματική Εργασία:

Η Stone-Čech Συμπαγοποίηση μέσω των Υπερφίλτρων και το Θεώρημα Hindman.

Τηνιακουδάκης Αντώνης.
Επιβλέπων Καθηγητής: Αρβανιτάκης Αλέξανδρος.

Μάιος 2017

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Δοθέντος ενός τοπολογικού χώρου X, υπάρχει συμπαγής χώρος $\hat{X}$ που να περιέχει τον X σαν υπόχωρο; Η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι ναι, αρκεί ο X να πληροί κάποια κριτήρια. Πως γίνεται όμως η κατασκευή ή εύρεση αυτού του $\hat{X}$; Για παράδειγμα αν ο X είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τότε μια καλή επιλογή θα ήταν ο $\hat{X}$ να είναι η κλειστότητα του X. Υπάρχουν όμως αρκετές γενικές μέθοδοι κατασκευής του $\hat{X}$ όταν τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Μια τέτοια διαδικάσια είναι γνωστή ως συμπαγοποίηση του χώρου X. Δικός μας σκοπός είναι η παρουσίαση μια συγκεκριμμένης μεθόδου, γνωστής ως *Stone-Čech* συμπαγοποίησης τοπολογικού χώρου (προς τιμήν των μαθηματικών *Marshal Stone* και *Eduard Čech* οι οποίοι μελέτησαν διεξοδικά τη συγκεκριμμένη ιδέα), η σημάσια της οποίας βασίζεται σε μία πολύ ισχυρή ιδιότητα της. Όπως θα δούμε, ο χώρος που κατασκευάζεται με αυτή την διαδικασία, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ο "μεγαλύτερος" συμπαγής χώρος *Hausdroff* που περίεχει τον X ως υπόχωρο. Ειδικότερα θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του υπερφίλτρου για την κατασκευή αυτή, καθώς υπάρχουν αρκετοί τρόποι ώστε να έχει κανείς την *Stone-Čech* συμπαγοποίηση ενός τοπολογικού χώρου.

Η "πορεία" που θα ακολουθήσουμε θα είναι η εξής. Στο πρώτο και εισαγωγικό κεφάλαιο θα αναφέρουμε κάποια πολύ βασικά στοιχεία της Γενικής Τοπολογίας τα οποία θα είναι απαραίτητα για τη συνέχεια. Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα δούμε την έννοια του φίλτρου. Ιστορικά, τα φίλτρα κάνουν την εμφάνιση τους γύρω στο 1935, σαν μια εναλλακτική έννοια του δικτύου. Η παρουσιάση αρχικά θα αφορά τα φίλτρα και μια ειδική κατηγορία αυτών, τα υπερφίλτρα, όπου θα αποδείξουμε χαρακτηριστικές τους ιδιότητες. Τα υπερφίλτρα θα αποτελέσουν τον κόρμο των όσων θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια. Στο υπόλοιπο δεύτερο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με φίλτρα σε τοπολογικούς χώρους και θα εισάγουμε την έννοια της σύγκλισης ένος φίλτρου. Από όσα θα δούμε, τα φίλτρα είναι ικανά να προσδιορίσουν πλήρως την τοπολογία σε ένα σύνολο και μας παρέχουν χρήσιμα κριτήρια συμπάγειας, συνέχειας συναρτήσεων ανάμεσα σε τοπολογικούς χώρους κ.α..

Στο κεφάλαιο 3 γίνεται η κατασκευή της *Stone-Čech* συμπαγοποίησης ενός $T_{3\frac{1}{2}}$ χώρου. Άρχικά εξετάζουμε ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί ένας τοπολογικός χώρος ώστε να μπορεί να εμφυτευθεί μέσα σε ένα συμπαγή χώρο. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε την έννοια της συμπαγοποίησης, δίνουμε τον ορισμό της *Stone-Čech* συμπαγοποίησης και παρουσιάζουμε την Ιδιότητα Συνεχόυς Επέκτασης που την χαρακτηρίζει άλλα και τις σημαντικές της συνέπειες. Στη βιβλιογραφία έχει επικρατήσει να συμβολίζεται με βX ο συμπαγής χώρος στον οποίο εμφυτεύουμε τον X μέσω της *Stone-Čech* συμπαγοποίησης. Όπως θα δούμε στις ενότητες 3.3 και 3.4 ο βX για έμας θα είναι το σύνολο όλων των υπερφίλτρων στο X (ή ένα κατάλληλο πηλίκο αυτού). Σημειώνουμε ότι η κατασκευή του βX για ένα χώρο X θα γίνει αρχικά για τη διακριτή περίπτωση και έπειτα για τη γενικότερη περίπτωση.

Στο τελευταίο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τον $\beta\mathbb{N}$, την *Stone-Čech* συμπαγοποίηση των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (θεωρώντας το $\mathbb{N}$ εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία). Θα δώσουμε στον $\beta\mathbb{N}$ μια δομή ημιομάδας, ορίζοντας μια πράξη "$\oplus$" πάνω στα στοιχεία του και σε συνδιασμό με όσα είδαμε στα κεφάλαια 2 και 3 θα αποδείξουμε το Θεώρημα *Hindman* (προς τιμήν του μαθηματικού *Neil Hindman*). Ένα αποτέλεσμα με καθαρά συνδιαστικό χαρακτήρα το οποίο αποδεικνύεται με πολύ κομψό τρόπο μέσω της *Stone-Čech* συμπαγοποίησης των φυσικών αριθμών και την αλγεβρική δομή που προκύπτει στον $\beta\mathbb{N}$ λόγω της πράξης "$\oplus$" που ορίσαμε.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σκοπός μας, για αυτό το πρώτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας, είναι να παρουσιάσουμε τα Διαχωριστικά Αξίωματα της τοπολογίας, και να παρουσιάσουμε αποτελέσματα που θα μας είναι απαραίτητα στα επόμενα κεφάλαια, με το βασικότερο να είναι το Λήμμα $Urysohn$ και η σχέση ανάμεσα σε χώρους T_4 και $T_{3\frac{1}{2}}$. Υποθέτουμε ότι οι πολύ στοιχειώδης έννοιες της τοπολογίας, όπως βάσεις, υποβάσεις, κλειστότητα και εσωτερικό συνόλου, περιοχές, υπόχωρος, συμπάγεια κτλ, είναι γνωστές στον αναγνώστη, και έτσι θα χρησιμοποιούμε βασικές ιδιότητες αυτών χωρίς να τις αποδεικνύουμε.

1.1 Διαχωριστικά Αξιώματα

Ορισμός 1.1.1. Έστω τοπολογικός χώρος (τ.χ.) $(X, \mathcal{T})$. Λέμε ότι ο $(X, \mathcal{T})$ είναι (ή ικανοποιεί το αξίωμα):

1) $\mathbf{T_1}$, αν για κάθε $x, y \in X$, $x \neq y$, υπάρχουν $U_x, U_y \in \mathcal{T}$, τ.ω. $x \in U_x$ και $y \notin U_x$, $y \in U_y$ και $x \notin U_y$.

2) $\mathbf{T_2}$ ή **Hausdorff**, αν για κάθε $x, y \in X$, $x \neq y$, υπάρχουν $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ τ.ω. $x \in U_x$, $y \in U_y$ και $U_x \cap U_y = \emptyset$.

3) **Regular** αν για κάθε $x \in X$ και $K \subseteq X$ κλειστό με $x \notin K$, υπάρχουν $U_x, U_K \in \mathcal{T}$ τ.ω. $x \in U_x$, $K \subseteq U_K$, $U_x \cap U_K = \emptyset$.

4) $\mathbf{T_3}$, αν είναι T_1 και $Regular$.

5) **Completely Regular**, αν για κάθε $x \in X$ και $K \subseteq X$ κλειστό με $x \notin K$, υπάρχει συνέχης $f : X \to [0, 1]$, τ.ω. $f(x) = 0$ και $f(K) = \{1\}$.

6) $\mathbf{T_{3\frac{1}{2}}}$ ή **Tychonoff**, αν είναι T_1 και *Completely Regular*.

7) **Normal** αν για κάθε $F, K \subseteq X$ κλειστά με $F \cap K = \emptyset$, υπάρχουν $U_F, U_K \in \mathcal{T}$, τ.ω. $F \subseteq U_F$, $K \subseteq U_K$ και $U_F \cap U_K = \emptyset$.

8) $\mathbf{T_4}$, αν είναι T_1 και *Normal*.

Παραθέτουμε τώρα μια σειρά από προτάσεις και παραδείγματα για το πως σχετίζονται μεταξύ τους οι χώροι που ικανοποιούν τα παραπάνω αξιώματα αλλά και χαρακτηριστικές τους ιδιότητες.

Πρόταση 1.1.1. *Ο τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ είναι T_1 ανν για κάθε $x \in X$, το $\{x\}$ είναι κλειστό.*

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Έστω ότι ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_1 και $x \in X$. Αν το X περιέχει μόνο ένα στοιχείο τότε το $X = \{x\}$ είναι κλειστο. Αν τώρα το X περιέχει τουλάχιστο δύο στοιχεία, ϑ.δ.ο. $X \backslash \{x\} \in \mathcal{T}$. Αν $y \in X \backslash \{x\}$ τότε, $x \neq y$ και άρα υπάρχει $U_y \in \mathcal{T}$ τ.ω. $y \in U_y$ και $x \notin U_y$, δηλαδή

$$y \in U_y \subseteq X \backslash \{x\}.$$

Επομένως το $X \backslash \{x\}$ είναι περιόχη κάθε σημειού του, και άρα $X \backslash \{x\} \in \mathcal{T}$.

$(\Leftarrow)$Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $x \in X$, το $\{x\}$ κλειστό. Αν $x, y \in X$, με $x \neq y$, τότε για

$$U_x = X \backslash \{y\} \ \text{ και } \ U_y = X \backslash \{x\},$$

από υπόθεση έχουμε ότι $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ και $x \in U_x$, $y \in U_y$ και προφανως $x \notin U_x$, $y \notin U_y$. Άρα ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_1. $\diamond$

Παρατήρηση 1.1. Είναι προφανές ότι ένας χώρος T_2 είναι και T_1. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε με το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1. Θεωρούμε το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, εφοδιασμένο με την συμπεπερασμένη τοπολογία $\mathcal{T}$, δηλάδη

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \backslash A : \text{πεπερασμένο}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Ο $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ είναι T_1. Πράγματι αν $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$, τότε αν

$$U_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \neq m\} \ \text{ και } \ U_m = \{k \in \mathbb{N} \mid k \neq n\},$$

έχουμε ότι $U_n, U_m \in \mathcal{T}$, και $n \in U_n, m \in U_m$ και προφανώς $m \notin U_n$, $n \notin U_m$. Όμως δεν είναι $Hausdorff$, αφού για κάθε $U, V \in \mathcal{T}$, $U \cap V \neq \emptyset$. Αυτό προκύπτει από το ότι,

$$U \cap V = \mathbb{N} \backslash ((\mathbb{N} \backslash U) \cup (\mathbb{N} \backslash V)),$$

και αφου τα $\mathbb{N}\backslash U, \mathbb{N}\backslash V$ πεπερασμένα, από την παραπάνω ταυτότητα, έπεται ότι το $U \cap V$ είναι άπειρο και συνεπώς μη κενό.

Παρατήρηση 1.2. Είναι εύκολο να δέιξουμε ότι αν, $(X, \mathcal{T})$ είναι $Hausdroff$, τότε και κάθε υπόχωρος $Y \subseteq X$ είναι επίσης $Hausdorff$. Θα δούμε παρακάτω ότι γινόμενο χώρων $Hausdorff$, είναι επίσης $Hausdorff$. Πριν συνεχίσουμε, θα υπενθυμίσουμε κάποια πολύ βασικά πράγματα για την τοπολογία γινόμενο.

Ορισμός 1.1.2. Έστω $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, όπου I κάποιο μη κενό σύνολο δεικτών, και $X = \prod_{i \in I} X_i$ το καρτεσιανό γινόμενο των X_i. Η τοπολογία γίνομενο στο X, ορίζεται ως η τοπολογία $\mathcal{T}$ με βάση την

$$\mathcal{B} = \Big\{ \prod_{i \in I} U_i \mid \forall\, i \in I,\ U_i \in \mathcal{T}_i \ \&\ \{i \in I \mid U_i \neq X_i\} \text{ πεπερασμένο} \Big\}.$$

Ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ καλείται χώρος γινόμενο.

Παρατήρηση 1.3. Αν για κάθε $i \in I$, $\pi_i : X \to X_i$, είναι η κανονική προβολή του X στο X_i,δηλαδή αν $x = (x_i)_{i \in I} \in X$, τότε $\pi_i(x) = x_i$, η τοπολογία γινόμενο ορίζεται ισοδύναμα και ως η αρχική τοπολογία στο X παραγόμενη από την οικογένεια συναρτήσεων $\{\pi_i\}_{i \in I}$. Έτσι έχουμε ότι κάθε προβολή είναι συνεχής, και ότι η οικογένεια

$$\mathcal{C} = \{\pi_i^{-1}(U_i) \mid i \in I,\ U_i \in \mathcal{T}_i\},$$

είναι μία υποβάση για την τοπολογία γινόμενο.

Πρόταση 1.1.2. *Έστω οικογένεια $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ τ.χ.. Αν για κάθε $i \in I$ ο $(X_i, \mathcal{T}_i)$ είναι $Hausdorff$ και $X = \prod_{i \in I} X_i$, τότε ο χώρος γινόμενο $(X, \mathcal{T})$ είναι $Hausdorff$.*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in X$, με $x \neq y$. Υπάρχει τότε $i_0 \in I$ τ.ω. $x_{i_0} \neq y_{i_0}$, και επειδή από υπόθεση ο X_{i_0} είναι $Hausdorff$, υπάρχουν U_{i_0}, V_{i_0} ανοικτές περιοχές των x_{i_0}, y_{i_0} αντίστοιχα, τ.ω. $U_{i_0} \cap V_{i_0} = \emptyset$. Αν $\pi_{i_0} : X \to X_{i_0}$ είναι η προβολή του X πάνω στον X_{i_0}, θέτουμε,

$$U_x = \pi_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) \ \text{ και } \ U_y = \pi_{i_0}^{-1}(V_{i_0}).$$

Αφού $\pi_{i_0}(x) = x_{i_0} \in U_{i_0}$, το U_x είναι ανοικτή περιοχή του x, αντίστοιχα το U_y είναι ανοικτή περιοχή του y, και αφού $U_{i_0} \cap V_{i_0} = \emptyset$, έχουμε ότι

$$U_x \cap U_y = \pi_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) \cap \pi_{i_0}^{-1}(V_{i_0}) = \pi_{i_0}^{-1}(U_{i_0} \cap V_{i_0}) = \emptyset,$$

δηλαδή ο X είναι $Hausdorff$. ◇

Πρόταση 1.1.3. *Αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_3, τότε είναι $Hausdorff$.*

Απόδειξη. Εφόσον ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_3, έπεται από προηγούμενη πρόταση ότι τα μονοσύνολα είναι κλειστά. Συνεπώς αν $x, y \in X$, $x \neq y$, και θεωρήσουμε το $\{y\}$ σαν κλειστό, τότε από υπόθεση υπάρχουν $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ με $x \in U_x$, $\{y\} \subseteq U_y$ και $U_x \cap U_y = \emptyset$. Άρα ο $(X, \mathcal{T})$ είναι $Hausdorff$. ◇

Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δέν ισχύει εν γένει. Ισχύει όμως το παρακάτω.

Πρόταση 1.1.4. *Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ συμπαγής και $Hausdorff$. Τότε ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_3.*

Απόδειξη. Αφου ο X $Hausdorff$, είναι T_1. Θα δείξουμε ότι είναι και $Regular$. Έστω λοιπόν $K \subseteq X$, μη κενό, κλειστό και $x \in X$ με $x \notin K$. Αφού ο X συμπαγής και το K είναι κλειστό υποσύνολο του, έπεται ότι το K είναι συμπαγές. Επειδή τώρα ο X $Hausdorff$, έχουμε ότι για κάθε $y \in K$, υπάρχουν $U_{x_y}, U_y \in \mathcal{T}$ τ.ω.

$$y \in U_y,\ x \in U_{x_y},\ U_y \cap U_{x_y} = \emptyset. \quad (1)$$

Προφανώς $K \subseteq \bigcup_{y \in K} U_y$, και άρα η οικογένεια $\{U_y\}_{y \in K}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα για το K. Από τη συμπάγεια του K, υπάρχουν $y_1, y_2, \ldots, y_n \in K$ έτσι ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Θέτουμε τώρα,

$$U_K = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} \quad \& \quad U_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_{y_i}}.$$

Έχουμε λοιπόν, $x \in U_x$, $K \subseteq U_K$ και $U_x, U_K \in \mathcal{T}$, μένει ν.δ.ο. $U_x \cap U_K = \emptyset$. Από την επιλογή των U_{y_i}, $U_{x_{y_i}}$ και τον ορισμό του U_x, παρατηρούμε ότι,

$$\forall\, 1 \leq i \leq n,\ U_{y_i} \cap U_x = \emptyset. \quad (2)$$

Πράγματι, αν $i_o \leq n$, τότε από την (1) έχουμε, $U_{y_{i_o}} \cap U_{x_{y_{i_o}}} = \emptyset$ και επομένως

$$U_{y_{i_o}} \cap (\bigcap_{i=1}^{n} U_{x_{y_i}}) = U_{x_{y_1}} \cap \cdots \cap U_{y_{i_o}} \cap U_{x_{y_{i_o}}} \cap \cdots \cap U_{x_{y_n}} = \emptyset,$$

και άρα $U_{y_{i_o}} \cap U_x = \emptyset$. Απο την (2) έχουμε ότι,

$$U_K \cap U_x = (\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}) \cap U_x = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{y_i} \cap U_x) = \emptyset,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\diamond$

Πρόταση 1.1.5. *Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$. Ο X είναι T_3 ανν για κάθε $U \in \mathcal{T}$ και για κάθε $x \in U$, υπάρχει $V \in \mathcal{T}$ τ.ω.*

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ο X, T_3 χώρος, U ανοικτό και $x \in U$. Το $X \backslash U$ είναι κλειστό και $x \notin X \backslash U$, και άρα υπάρχουν V, V_o ανοικτά έτσι ώστε $x \in V$, $X \backslash U \subseteq V_o$ και $V \cap V_o = \emptyset$. Ο ισχυρισμός μας είναι ότι το V είναι το ζητούμενο, για αυτό θα δείξουμε ότι $\overline{V} \subseteq U$. Έστω λοιπόν $x' \in \overline{V}$, και προς απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε ότι $x' \notin U$. Αφού το x' οριακό σημείο για το V, έχουμε ότι για κάθε περιοχή W του x',

$$W \cap V \neq \emptyset. \quad (1)$$

Απο την υπόθεση που κάναμε, έχουμε ότι $x' \in X \backslash U \subseteq V_o$, και αφου το V_o ανοικτό, το V_o είναι περιοχή του x', και απο τη σχέση (1) έχουμε ότι $V \cap V_o \neq \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο αφού τα V, V_o είναι ξένα μεταξύ τους. Άρα θα πρέπει $\overline{V} \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Έστω $K \subseteq X$, κλειστό και $x \notin K$. Έχουμε ότι $x \in X \backslash K$ το οποίο είναι ανοικτό, και από υπόθεση, υπάρχει ανοικτό V, τ.ω.

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \backslash K. \quad (2)$$

Θέτουμε $U_x = V$ και $U_K = X \backslash \overline{V}$, τα οποία είναι ανοικτά, και από τη σχέση (2) έχουμε ότι

$$x \in U_x, \quad K \subseteq U_K \quad \& \quad U_x \cap U_K.$$

Από τη τελευταία σχέση έχουμε ότι ο X είναι T_3. $\diamond$

Πρόταση 1.1.6. *Έστω T_3 τ.χ. $(X, \mathcal{T})$. Τότε κάθε υπόχωρος $Y \subseteq X$ είναι T_3.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω:

Για κάθε $F \subseteq Y$, κλειστό στον Y, υπάρχει $K \subseteq X$ κλειστό στον X, τ.ω. $F = Y \cap K$.

Πράγματι, έστω $F \subseteq Y$ κλειστό. Τότε το $Y \backslash F$ ανοίκτο στον Y, και συνεπώς υπάρχει $U \subseteq X$ ανοικτό στον X, τ.ω. $Y \backslash F = Y \cap U$. Αν $K = X \backslash U = U^c$, το οποίο είναι κλειστό στον X έχουμε,

$$F = Y \backslash (Y \backslash F) = Y \backslash (Y \cap U) = Y \cap (Y^c \cup U^c) = Y \cap U^c = Y \cap K.$$

Συνέχίζουμε τώρα με την απόδειξη της πρότασης, και υποθέτουμε ότι ο X είναι T_3, και $Y \subseteq X$ ένας υπόχωρος. Το ότι ο Y είναι T_1 έπεται εύκολα από το ότι ο X είναι T_1. Έστω λοιπόν $F \subseteq Y$, κλειστό και $y \in Y$ με $y \notin F$. Από τα παραπάνω, έχουμε ότι υπάρχει $K \subseteq X$, κλειστό, τ.ω. $F = Y \cap K$. Αφού $y \notin F$, έπεται ότι $y \notin K$, και επειδή ο X είναι T_3, υπάρχουν $U'_y, U'_K \subseteq X$, ανοικτά έτσι ώστε,

$$y \in U'_y, \quad K \subseteq U'_K \quad \& \quad U'_y \cap U'_K = \emptyset.$$

Θέτουμε $U_y = Y \cap U'_y$ και $U_F = Y \cap U'_K$. Τα U_y, U_F είναι ανοικτά υποσύνολα του Y και εύκολα επαληθέυουμε ότι $y \in U_y$, $F \subseteq U_F$ και $U_y \cap U_F = \emptyset$. ◇

Πρόταση 1.1.7. *Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$, $T_{3\frac{1}{2}}$. Τότε ο X είναι T_3.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο X είναι $Regular$. Έστω $K \subseteq X$, κλειστό, μη κενό και $x \notin K$. Από υπόθεση, υπάρχει συνεχής $f : X \to [0, 1]$, έτσι ώστε $f(x) = 0$ και $f(K) = \{1\}$. Τα διαστήματα $[0, \frac{1}{3})$ και $(\frac{2}{3}, 1]$ είναι ανοικτά στο $[0, 1]$ και επειδή η f συνεχής, έχουμε ότι, το $U_x = f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$ και το $U_K = f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$, είναι ανοικτά στον X και προφανώς

$$x \in U_x, \quad K \subseteq U_K \quad \& \quad U_x \cap U_K = f^{-1}([0, \frac{1}{3})) \cap f^{-1}((\frac{2}{3}, 1]) = \emptyset.$$

Επομένως ο X είναι T_3. ◇

Πρόταση 1.1.8. *Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$, $T_{3\frac{1}{2}}$ και $Y \subseteq X$ ένας υπόχωρος του. Τότε ο Y είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Απόδειξη. Έστω Y υπόχωρος του X, $F \subseteq Y$, μη κενό κλειστό στον Y, και $x \in Y$ με $x \notin F$. Από προηγουμενο σχόλιο, υπάρχει $K \subseteq X$, κλειστό τ.ω. $F = Y \cap K$. Αφού ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$, και $x \notin K$, υπάρχει συνεχής $f : X \to [0,1]$, με $f(x) = 0$ και $f(K) = \{1\}$. Αν $i_Y : Y \to X$ με $y \mapsto i_Y(y) = y$, η κανονική εμφύτευση του Y στον X, θεώρουμε $g = f \circ i_Y : Y \to [0,1]$. Η g είναι συνέχης ώς σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, και θα δείξουμε ότι διαχωρίζει το x από το F. Έχουμε ότι, $g(x) = f(i_Y(x)) = f(x) = 0$ και

$$g(F) = f(i_Y(Y \cap K)) \subseteq f(i_Y(Y)) \cap f(i_Y(K)) \subseteq f(K),$$

και άρα $g(F) = \{1\}$ αφού το F είναι μη κενό. Άρα ο Y είναι $T_{3\frac{1}{2}}$. $\diamond$

Πρόταση 1.1.9. *Έστω οικογένεια τοπολογικών χώρων $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$. Αν για κάθε $i \in I$ ο $(X_i, \mathcal{T}_i)$ είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ και $X = \prod_{i \in I} X_i$, τότε ο χώρος γινόμενο $(X, \mathcal{T})$ είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Απόδειξη. Έστω $F \subseteq X$ μη κενό, γνήσιο κλειστό και $x_0 = (x_i^0)_{i \in I} \in X \backslash F$. Αφού το $X \backslash F$ ανοικτό, υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και $U_{i_j} \subseteq X_{i_j}$, $\mathcal{T}_{i_j}$-ανοικτά, $1 \leq j \leq k$, τέτοια ώστε

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \subseteq X \backslash F, \quad (1)$$

όπου $\pi_{i_j} : X \to X_{i_j}$ είναι η προβολή του X στον X_{i_j}. Εφόσον κάθε X_i είναι $T_{3\frac{1}{2}}$, τα $X_{i_j} \backslash U_{i_j}$ είναι κλειστά και $x_{i_j}^0 \notin X_{i_j} \backslash U_{i_j}$ έχουμε ότι για κάθε $1 \leq j \leq k$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_j : X_{i_j} \to [0,1]$, ώστε

$$f_j(x_{i_j}^0) = 0 \ \text{ και } \ f_j(X_{i_j} \backslash U_{i_j}) = \{1\}. \quad (2)$$

Θέτουμε $f : X \to [0,1]$, με τύπο

$$f(x) = \max\{(f_j \circ \pi_{i_j})(x) \mid 1 \leq j \leq k\}.$$

Επειδή η $f_j \circ \pi_{i_j}$ είναι συνεχής για $1 \leq j \leq k$ ως σύνθεση συνεχών, είναι εύκολα να δείξουμε ότι και το μέγιστο αυτών θα είναι επίσης συνεχής, άρα η f συνεχής. Μένει να δείξουμε ότι διαχωρίζει το x_0 και το F. Από τη (2) είναι προφανές ότι $f(x_0) = 0$. Τώρα από τη σχέση (1) έχουμε ότι

$$F \subseteq \ X \backslash \big(\bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \big),$$

όμως

$$X\backslash\Big(\bigcap_{j=1}^{k}\pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j})\Big) = \bigcup_{j=1}^{k}\big(X\backslash\pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j})\big)$$
$$= \bigcup_{j=1}^{k}\big(\pi_{i_j}^{-1}(X_{i_j}\backslash U_{i_j})\big),$$

και έτσι έχουμε ότι

$$F \subseteq \bigcup_{j=1}^{k}\big(\pi_{i_j}^{-1}(X_{i_j}\backslash U_{i_j})\big). \quad (3)$$

Έστω λοιπόν ένα $x_1 = (x_i^1) \in F$. Από την (3) έχουμε ότι για κάποιο $j \leq k$, το οποίο υποθέτουμε χώρις βλάβη της γενικότητας πως είναι το k, θα είναι $\pi_{i_k}(x_1) = x_{i_k}^1 \in X_{i_k}\backslash U_{i_k}$, και από τη (2) θα έχουμε ότι $f_k(x_{i_k}^1) = 1$. Επειδή όμως κάθε συνάρτηση f_j παίρνει τιμές στο [0,1] θα είναι

$$f_k(x_{i_k}^1) \leq f(x_1) = \max\{f_j(x_{i_j}^1) \mid 1 \leq j \leq k\} \leq 1,$$

άρα $f(x_1) = 1$. Τέλος αφού το F είναι μη κενό και $f(F) \subseteq \{1\}$ έπεται ότι $f(F) = \{1\}$. $\diamond$

Για να μελετήσουμε τη σχέση ανάμεσα στους χώρους T_4 και $T_{3\frac{1}{2}}$, χρειαζόμαστε το Λήμμα $Urysohn$, το οπόιο θα το αποδείξουμε στην επόμενη παράγραφο. Η τελευταία προταση της πρώτης αυτής παραγράφου, είναι ανάλογη της Πρότασης 1.1.3., αφορά όμως τη σχέση ανάμεσα σε συμπάγης $Hausdorff$ και T_4 χώρους.

Πρόταση 1.1.10. *Κάθε τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ συμπαγής και $Hausdorff$, είναι T_4.*

Απόδειξη. Έστω $F, K \subseteq X$, κλειστά και ξένα μεταξύ τους. Από τη Πρόταση 1.1.3. έχουμε ότι ο X είναι T_3, άρα έχουμε ότι για κάθε $x \in F$, υπάρχουν $U_x, U_x^K \in \mathcal{T}$, τ.ω.

$$x \in U_x,\ K \subseteq U_x^K \quad \& \quad U_x \cap U_x^K = \emptyset. \quad (1)$$

Είναι φανερό από τα παραπάνω ότι, $F \subseteq \bigcup_{x\in F} U_x$ και $K \subseteq \bigcap_{x\in F} U_x^K$. Το F, σαν κλειστό υποσύνολο συμπαγούς χώρου, είναι συμπαγές και άρα υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$, τ.ω.

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \ \text{ και } \ K \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}^K, \quad (2)$$

(αφου $\bigcap_{x\in F} U_x^K \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}^K$) και αν θέσουμε $U_F = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, $U_K = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}^K$, εύκολα επαληθεύουμε από τις (1) και (2), ότι τα U_F, U_K, διαχωρίζουν τα F, K. Συνεπώς, ο X είναι T_4. $\diamond$

1.2 Λήμμα $Urysohn$

Το Λήμμα $Urysohn$, είναι ένα σημαντικό εργαλείο της Τοπολογίας. Παίζει σημαντικό ρόλο στην αποδείξη αρκετών σημαντικών Θεωρημάτων με πιο γνωστό το Θεωρήμα Μετρικοποιησιμότητας του $Urysohn$. Πρόκειται όμως και για ένα θεώρημα, που μας παρέχει έναν εναλλακτικό χαρακτηρισμό για τους χώρους T_4. Για εμάς, θα είναι χρήσιμο στο Κεφάλαιο 3, αλλά λόγω της σημασίας και της πολύ ωραίας και πρωτότυπης απόδειξής του, το παρουσιάζουμε ξεχωριστά σε αυτή την παράγραφο.

Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το εν λόγω θεώρημα, δίνουμε την παρακάτω πρόταση, η οποία θα είναι κλειδί για την απόδειξη.

Πρόταση 1.2.1. *Ο τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ είναι $Normal$ ανν για κάθε $K \subseteq X$, κλειστό και $U \in \mathcal{T}$, με $K \subseteq U$, υπάρχει $V \in \mathcal{T}$, τ.ω.*

$$K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι ο X είναι $Normal$, $K \subseteq X$, μη τετριμμένο κλειστό και $U \in \mathcal{T}$, $K \subseteq U$. Το $F = X\backslash U$ είναι κλειστό, $F \cap K = \emptyset$, και αφού ο X είναι $Normal$, υπάρχουν $U_F, U_K \in \mathcal{T}$ τ.ω.

$$F \subseteq U_F,\ K \subseteq U_K \ \text{ και } \ U_F \cap U_K = \emptyset. \quad (1)$$

Ο ισχυρισμός είναι ότι το U_K είναι το ζητούμενο. Θα δείξουμε ότι $\overline{U_K} \subseteq U$. Από την (1) έχουμε ότι $U_K \subseteq X\backslash U_F$, όμως το $X\backslash U_F$ κλειστό και άρα θα ισχύει $\overline{U_K} \subseteq X\backslash U_F$. Τέλος, από τον ορισμό του $F = X\backslash U$ έπεται ότι,

$$\overline{U_K} \subseteq X\backslash U_F \subseteq X\backslash F = U.$$

Άρα για $V = U_K$ έχουμε το ζητούμενο.

($\Leftarrow$) Έστω τώρα $F, K \subseteq X$, κλειστά με $F \cap K = \emptyset$. Αν $U = X\backslash K$, τότε έχουμε $U \in \mathcal{T}$ και $F \subseteq U$. Από υπόθεση υπάρχει $V \in \mathcal{T}$, τ.ω.

$$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Θέτουμε $U_F = V$ και $U_K = X\backslash\overline{V}$. Τότε από τη παραπάνω σχέση έχουμε $F \subseteq V$, και $K = X\backslash U \subseteq X\backslash\overline{V} = U_K$. Τέλος $U_K = X\backslash\overline{V} \subseteq X\backslash V = X\backslash U_F$. Συνοψίζοντας, από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$F \subseteq U_F,\ K \subseteq U_K \text{ και } U_F \cap U_K = \emptyset.$$

Άρα ο X είναι $Normal$. ◇

Θεώρημα 1.2.1 (Λήμμα Urysohn). *Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ T_1. Τότε ο X είναι T_4 ανν για κάθε $F, K \subseteq X$, κλειστά με $F \cap K = \emptyset$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$, τ.ω. $f(F) = \{0\}$ και $f(K) = \{1\}$.*

Πριν ξεκινήσουμε να αποδείξουμε το Λήμμα $Urysohn$, θα πούμε λίγα λόγια σχετικά με τη βασικη ιδέα της απόδειξης, για να κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση σχεδόν απο το πουθενά!

Αν λοιπον έχουμε $F, K \subseteq X$ κλειστά και ξένα μεταξύ τους και ο X είναι T_4, τότε έχουμε ότι $F \subseteq X\backslash K$, και το $X\backslash K$ ανοικτό, επομένως από την Πρόταση 1.2.1. έχουμε ότι υπάρχει $U_0 \in \mathcal{T}$, με

$$F \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq X\backslash K.$$

Θέτουμε επίσης $U_1 = X$. Τώρα αφού $\overline{U_0} \subseteq X\backslash K$, με το ίδιο επιχείρημα, υπάρχει $U_{\frac{1}{2}} \in \mathcal{T}$, τ.ω.

$$F \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq X\backslash K.$$

Κατασκευάσαμε με αυτό τον τρόπο ανοικτά σύνολα με: $U_0 \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq U_1$ τα οποία ικανοποιούν τη παρακάτω σχέση,

$$F \subseteq U_0 \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq X\backslash K \subseteq U_1 = X.$$

Με την χρήση αυτών των τριών ανοικτών, ορίζουμε συνάρτηση $q : X \to [0, 1]$, με $q(x) = min\{r \mid x \in U_r\}$. Η συνάρτηση q διαχώρίζει τα F, K άλλα δεν είναι απαραίτητα συνεχής. Σκοπός της απόδειξης είναι να κατασκευάσει τόσο πολλά ανοικτά σύνολα U_r, ώστε να " αναγκάσει" τη συνάρτηση q να είναι συνεχής.

Απόδειξη (Λήμμα $Urysohn$). ($\Leftarrow$) Δείχνουμε πρώτα την εύκολη κατεύθυνση. Έστω $F, K \subseteq X$, κλειστά και ξένα μεταξύ τους. Από υπόθεση υπάρχει συνεχής $f : X \to [0, 1]$, τ.ω. $f(F) = \{0\}$ και $f(K) = \{1\}$. Θέτουμε

$$U_F = f^{-1}([0, \frac{1}{3})) \text{ και } U_K = f^{-1}((\frac{2}{3}, 1]),$$

τα οποία είναι ανοικτά, αφού τα $[0, \frac{1}{3})$ και $(\frac{2}{3}, 1]$ είναι ανοικτά στο [0,1] με τη σχετική τοπολογία και η f συνεχής. Επίσης είναι ξένα μεταξύ τους και $F \subseteq U_F$, $K \subseteq U_K$, άρα ο X είναι T_4.

($\Rightarrow$) Αρχικά, θα συμβολίζουμε με Q το σύνολο των ρητών μεταξύ 0 και 1, δηλαδή $Q = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Βήμα 1: Για κάθε $p \in Q$, θα κατασκευάσουμε ανοικτό $U_p \subseteq X$, έτσι ώστε για $p, q \in Q$ να ισχύει

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q. \quad (1)$$

Αφού το Q είναι αριθμήσιμο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $Q = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ και για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι τα πρώτα δύο στοιχεία της ακολουθίας είναι το 1 και το 0.

Θα ορίσουμε αναδρομικά τα $\{U_p\}_{p \in Q}$. Αρχικά ορίζουμε, $U_1 = X \backslash K = K^c$. Άφου $F \subseteq U_1$, και ο X είναι T_4, μπορούμε να επιλέξουμε $U_0 \in \mathcal{T}$ τ.ω.

$$F \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1.$$

Τώρα αν $Q_n = \{p_i \mid i \leq n\}$, και υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει τα $U_p \in \mathcal{T}$, $p \in Q_n$, έτσι ώστε,

$$p, q \in Q_n,\ p < q \Rightarrow \overline{U_q} \subseteq U_p.$$

Αν $r = p_{n+1}$, $Q_{n+1} = Q_n \cup \{r\}$, θέλουμε να όρισουμε το U_r. Πρώτα, αφού το Q_{n+1} είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του [0,1], διατεταγμένο με τη συνήθη διάταξη των πραγματικών αριθμών, έχουμε ότι το r έχει έναν αμμέσως προηγούμενο $s \in Q_{n+1}$ και έναν αμμέσως επόμενο $t \in Q_{n+1}$ (διότι το r δεν είναι ουτε το ελάχιστο (0), ουτε το μέγιστο (1) στοιχειο του Q_{n+1}). Δηλαδή $s < r < t$, και από την επαγωγική υπόθεση, για τα U_s, U_t θα ισχύει ότι,

$$\overline{U_s} \subseteq U_t.$$

Επειδή ο X είναι T_4, μπορούμε να ορίσουμε το $U_r \in \mathcal{T}$, ώστε να ισχύει,

$$\overline{U_s} \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq U_t.$$

Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $p, q \in Q_{n+1}$, δίοτι αν $p, q \in Q_n$, ισχύει από την επαγωγική υπόθεση, ενώ αν π.χ. $p = r$, τότε είτε $q \leq s$ και τότε $\overline{U_q} \subseteq \overline{U_s} \subseteq U_r$, ή στην άλλη περίπτωση $t \leq q$, όπου πάλι θα είχαμε $\overline{U_r} \subseteq \overline{U_t} \subseteq U_q$. Αναδρομικά λοιπόν ορίσαμε την $\{U_p\}_{p \in Q}$ που ικανοποιεί την (1).

Βήμα 2: Θα επεκτείνουμε τώρα τον ορισμό των U_p για κάθε $p \in \mathbb{Q}$. Ορίζουμε

$$U_p = \emptyset,\ p \in (-\infty, 0) \cap \mathbb{Q} \quad \text{και} \quad U_p = X,\ p \in (1, +\infty) \cap \mathbb{Q}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η σχέση (1) ικανοποιείται και τώρα για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$. Για κάθε στοιχείο $x \in X$ τώρα ορίζουμε,

$$R(x) = \{p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p\}.$$

Από τον ορισμό των U_p σε όλο το $\mathbb{Q}$, που κάναμε στην αρχή του Βήματος 2, έχουμε ότι για κάθε $R(x)$, ισχύει ότι

$$\forall\, p \in R(x),\ p \geq 0 \quad \text{και} \quad (1, +\infty) \cap \mathbb{Q} \subseteq R(x), \quad (2)$$

αφού για κάθε $p < 0$, κανένα x δεν ανήκει στο $U_p = \emptyset$, και αν $p > 1$ τότε όλα τα x ανήκουν στον $U_p = X$. Αφού λοιπόν $\inf[(1, +\infty) \cap \mathbb{Q}] = 1$, από τη (2) έχουμε ότι $\inf R(x) \in [0, 1]$.

Βήμα 3: Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$, με τύπο

$$x \mapsto f(x) = \inf R(x).$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι η f διαχωρίζει τα F, K. Έστω λοιπόν $x \in F$. Από τον τρόπο που κατασκευάσαμε τα σύνολα U_p, έχουμε ότι $x \in F \subseteq U_0 \subseteq U_p$, για κάθε $p \in [0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, άρα $R(x) = [0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$,και επομένως

$$f(x) = \inf R(x) = 0.$$

Αν τώρα $x \in K$, επειδη $U_1 = K^c$, έπεται ότι $x \notin U_1$, και άρα $x \notin U_p$, για όλα τα $p \leq 1$, επομένως από τη (2) θα πρέπει, $R(x) = (1, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, και έτσι

$$f(x) = \inf R(x) = 1.$$

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι $f(F) = \{0\}$ και $f(K) = \{1\}$.

Βήμα 4: Δείχνουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. Θα χρειαστούμε γι αυτό τις παρακάτω σχέσεις,

(α′) $x \in \overline{U_p} \Rightarrow f(x) \leq p$, (β′) $x \notin U_p \Rightarrow f(x) \geq p$.

Δείχνουμε πρώτα την (α′). Αν $x \in \overline{U_p}$, τότε από την (1) έχουμε,

$$\forall\ s > p,\ x \in U_s \Rightarrow s \in R(x),$$

από το οποίο έπεται ότι, $(p, +\infty) \cap \mathbb{Q} \subseteq R(x)$, και συνεπώς $f(x) \leq p$, από τον ορισμό της f.
Για την (β′) αν $x \notin U_p$, τότε και

$$\forall\ s < p,\ x \notin U_s \Rightarrow s \notin R(x),$$

δηλαδή το $R(x)$ δεν περιέχει κανένα ρητό μικρότερο από το p, και άρα το p είναι ένα κάτω φράγμα του $R(x)$, και επομένως $f(x) \geq p$.

Έστω λοιπόν $x_0 \in X$, και $a, b \in \mathbb{R}$, με $f(x_0) \in (a, b) \cap [0, 1]$. Αναζητάμε περιοχή V του x_0, έτσι ώστε $f(V) \subseteq (a, b) \cap [0, 1]$. Επιλέγουμε $p, q \in Q$ τ.ω.

$$a < p < f(x_0) < q < b, \quad (3)$$

και θέτουμε $V = U_q \backslash \overline{U_p}$, και ο ισχυρισμός μας είναι ότι η V είναι η ζητούμενη περιοχή του x_0. Πρώτα δείχνουμε ότι $x_0 \in V$. Αφού $f(x_0) > p$ από την (α′) έχουμε $x_0 \notin \overline{U_p}$ (αφού αν $x_0 \in \overline{U_p}$ θα έπρεπε $f(x_0) \leq p$). Επίσης από τη (β′), αφού $f(x_0) < q$, έχουμε ότι $x_0 \in U_q$. Άρα, $x_0 \in U_q \cap (\overline{U_p})^c = U_q \backslash \overline{U_p} = V$. Μένει να δείξουμε ότι $f(V) \subseteq (a, b) \cap [0, 1]$. Έστω λοιπόν $x \in V$. Έχουμε οτι $x \in U_q \subseteq \overline{U_q}$, άρα από την (α′), $f(x) \leq q$. Επίσης $x \notin \overline{U_p}$, επομένως και $x \notin U_p$, και από τη (β′) θα είναι $f(x) \geq p$. Συνδιάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι

$$x \in V \Rightarrow p \leq f(x) \leq q,$$

άρα από την (3), έπεται ότι $f(x) \in (a, b) \cap [0, 1]$, δηλαδή $f(V) \subseteq (a, b) \cap [0, 1]$, και έτσι έχουμε ότι η f είναι συνεχής. ◇

Έχοντας τώρα στα χέρια μας το Λήμμα *Urysohn* είναι προφανές ότι κάθε χώρος T_4 είναι και $T_{3\frac{1}{2}}$. Έχουμε δει ότι η αν ένας Χώρος είναι $T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ τότε και καθε υπόχωρος του θα ικανοποιεί το αντίστοιχο αξίωμα. Αυτό όμως δεν ίσχυει σε ένα χώρο T_4, δηλάδη η ιδιότητα της φυσιολογικότητας (*normality*), δεν κληροδοτείται σε όλους τους υποχώρους παρα μόνο αν είναι κλειστοί. Έχουμε όμως την επόμενη πρόταση, γενικά για υποχώρους των T_4.

Πρόταση 1.2.2. *Αν ο τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ είναι T_4, τότε κάθε υπόχωρός του είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Απόδειξη. Έστω $Y \subseteq X$ υπόχωρος, $F \subseteq Y$, μη κενό, κλειστό στον Y και $x \in y$, με $x \notin F$. Τότε υπάρχει $K \subseteq X$ κλειστό, τ.ω. $F = Y \cap K$ και $x \notin K$. Από το Λήμμα *Urysohn*, επειδή ο X είναι T_4 άρα και T_1 , υπάρχει $f : X \to [0,1]$, τ.ω. $f(x) = 0$ και $f(K) = \{1\}$. Αν $i_Y : Y \to X$, $i_Y(y) = y$, η κανονική εμφύτευση του Y, και θέωρήσουμε την $g = f \circ i_Y : Y \to [0,1]$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η g είναι συνεχής, $g(x) = 0$, $g(F) = \{1\}$ και συνεπώς ο Y είναι $T_{3\frac{1}{2}}$. $\diamond$

Συνοψίζοντας όσα είδαμε σε αυτό το πρώτο εισαγωγικό κεφάλαιο, έχουμε την παρακάτω σύνδεση ανάμεσα στους χώρους T_i

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1,$$

το οποίο θα επικαλούμαστε αρκετά συχνά στα παρακάτω κεφάλαια.

Κεφάλαιο 2

Φίλτρα

Η έννοια του φίλτρου παρουσιάσθηκε για πρώτη φορά γύρω στα 1935 με 1937 από τον αμερικάνο *Garrett Birkhoff* και τον γάλλο *Henri Cartan*. Ο τελευταίος ήταν και ιδρυτικό μέλος της ομάδας *Bourbaki*, στο βίβλιο της όποιας "*Topologie Général*", συμπεριλαμβανόταν η έννοια του φίλτρου και η πρώτη μελέτη της από τη σκοπιά της Τοπολογίας. Σε αυτό το κεφάλαιο έμεις θα δώσουμε τον ορισμό του φίλτρου σε ένα μη κένο σύνολο X. Ο γενικότερος όρισμος του φίλτρου δίνεται σε ένα μερικά διατεταγμενο χώρο, όπου για μας θα είναι το δυναμοσύνολο του X, $\mathcal{P}(X)$ εφοδιασμένο με τη σχέση "$\subseteq$" του περιέχεσθαι. Θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα που αφορούν τα φίλτρα και θα συνδέσουμε την έννοια τους με την Τοπολογία, κάνοντας το πρώτο βήμα για τα όσα θα δούμε στο κεφάλαιο 3.

2.1 Φίλτρα και Υπερφίλτρα

Ορισμός 2.1.1. Έστω X μη κενό σύνολο. Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του X καλείται **φίλτρο** (**filter**) στο X αν

1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

2) αν $A, B \in \mathcal{F}$ τότε $A \cap B \in \mathcal{F}$,

3) αν $A \in \mathcal{F}$ και $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $B \in \mathcal{F}$.

Παρατήρηση 2.1. Από τη συνθήκη (3) έχουμε ότι για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X, $X \in \mathcal{F}$. Επίσης με επαγωγή, δείχνει κανείς από τη συνθήκη (2) ότι αν $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, τότε και $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$.

Έστω τώρα φίλτρα $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ στο X, τέτοια ώστε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Το $\mathcal{F}$ καλείται ασθενέστερο του $\mathcal{G}$ και αντίστοιχα το $\mathcal{G}$ ισχυρότερο του $\mathcal{F}$. Επίσης μερικές φορές θα αναφερόμαστε στα στοιχεία ενός φίλτρου $\mathcal{F}$ και ως $\mathcal{F}$-σύνολα.

Παράδειγμα 2.1. Αν X μη κενό σύνολο, τότε η κλάση $\mathcal{F} = \{X\}$ αποτελεί, κατά τετριμμένο τρόπο, φίλτρο στο X.

Παράδειγμα 2.2. Αν $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι η κλάση

$$\mathcal{F}_A = \{F \subseteq X \mid A \subseteq F\}$$

είναι ένα φίλτρο στο X. Στην περίπτωση όπου $A = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$ τότε το φίλτρο

$$\mathcal{F}_x = \{F \subseteq X \mid x \in F\}$$

καλείται **κύριο** (**principal**).

Παράδειγμα 2.3. Αν το X είναι άπειρο σύνολο, τότε η οικογένεια

$$\mathfrak{F}(X) = \{F \subseteq X \mid X \backslash F : \text{πεπερασμένο}\}$$

είναι ένα φίλτρο στο X, το οποίο καλείται **συμπεπερασμένο** (**cofinite**) ή **Fréchet** φίλτρο. Παρατηρούμε ότι αν το X είναι πεπερασμένο, τότε η παραπάνω οικογένεια δεν είναι φίλτρο αφού θα είχαμε $\emptyset \in \mathfrak{F}(X)$.

Παράδειγμα 2.4. Παρατηρούμε ότι, από τον ορισμό της περιοχής ενός σημείου σε ένα τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, η οικογένεια των περιοχών ενός $x \in X$, την οποία θα συμβολίζουμε με $\mathcal{N}(x)$, δηλαδή

$$\mathcal{N}(x) = \{V \subseteq X \mid V : \text{περιοχή του } x\},$$

είναι ένα φίλτρο στο X. Από εδώ και στο εξής, όταν βρισκόμαστε σε ένα τοπολογικό χώρο, θα ανεφερόμαστε στο φίλτρο $\mathcal{N}(x)$ ως **φίλτρο περιοχών του σημείου** x.

Ορισμός 2.1.2. Έστω X μη κενό σύνολο. Η μη κενή κλάση $\mathcal{B}$ υποσυνόλων του X αποτελεί μια **βάση φίλτρου** αν

1) $\emptyset \notin \mathcal{B}$, και

2) $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\exists\, B_3 \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Στη συνέχεια αποδυκνείουμε ότι η κλάση όλων των υπερσυνόλων στοιχείων μιας βάσης φίλτρου ένος συνόλου X είναι φίλτρο.

Πρόταση 2.1.1. *Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια βάση φίλτρου, τότε η κλάση*

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid \exists\, B \in \mathcal{B}\,, B \subseteq F\},$$

είναι ένα φίλτρο στο X. Λέμε ότι το φίλτρο $\mathcal{F}$ παράγεται από τη βάση $\mathcal{B}$ ή αντίστοιχα ότι η $\mathcal{B}$ παράγει το $\mathcal{F}$.

Απόδειξη. Αρκεί να επαληθεύσουμε τις τρεις συνθήκες του ορισμού 2.1.1. για την κλάση $\mathcal{F}$. Πρώτον, εφόσον η $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση φίλτρου είναι προφανές $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
Έστω τώρα $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Από τον ορισμό της κλάσης $\mathcal{F}$ έχουμε ότι υπάρχουν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ έτσι ώστε,

$$B_1 \subseteq F_1 \text{ και } B_2 \subseteq F_2,$$

και συνεπώς

$$B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2.$$

Από τη συνθήκη (2) του ορισμού 2.1.2. έπεται ότι υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ ώστε,

$$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2,$$

άρα $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
Τέλος, αν $F \in \mathcal{F}$ και $G \subseteq X$ τ.ω. $F \subseteq G$, τότε υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $B \subseteq F \subseteq G$, δηλάδη $G \in \mathcal{F}$. ◇

Ορισμός 2.1.3. Έστω $\mathcal{C} = \{A_i \mid i \in I\}$ οικογένεια συνόλων, όπου I κάποιο σύνολο δεικτών. Λέμε ότι η οικογένεια $\mathcal{C}$ έχει την **ιδιότητα της πεπερασμένης τομής**, και θα συμβολίζουμε με **ΙΠΤ**, αν

$$\forall J \subseteq I\ ,\ J : \text{πεπερασμένο} \Rightarrow \bigcap_{i\in J} A_i \neq \emptyset.$$

Πρόταση 2.1.2. *Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ με την ΙΠΤ. Τότε υπάρχει φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X τ.ω. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{C} = \{A_i \mid i \in I\}$ για κάποιο σύνολο δεικτών I, και θέτουμε

$$\mathcal{B} = \{ \bigcap_{i\in J} A_i \mid A_i \in \mathcal{C}, J \subseteq I \text{ και } J : \text{πεπερασμένο}\}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, και δείχνουμε τώρα ότι $\mathcal{B}$ είναι μια βάση φίλτρου. Πράγματι $\emptyset \notin \mathcal{B}$ αφού η οικογένεια $\mathcal{C}$ έχει την ΙΠΤ, και αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, τότε υπάρχουν $J_1, J_2 \subseteq I$ πεπερασμένα τ.ω.

$$B_1 = \bigcap_{i \in J_1} A_i \ \text{ και } \ B_2 = \bigcap_{i \in J_2} A_i,$$

τότε είναι προφάνες ότι το $B = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ και $B \subseteq B_1 \cap B_2$. Από την πρόταση 2.1.1. έχουμε ότι το φίλτρο $\mathcal{F}$ που παράγεται από τη $\mathcal{B}$ είναι το ζητούμενο. $\diamond$

Ορισμός 2.1.4. Έστω μη-κενά σύνολα X, Y, συνάρτηση $f : X \to Y$ και $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στο X. Ορίζουμε την **εικόνα του φίλτρου** $\mathcal{F}$ **(push-forward filter)** την οποία θα συμβολίζουμε με $f * \mathcal{F}$ ως εξής:

$$f * \mathcal{F} = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}.$$

Παρατήρηση 2.2. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η οικογένεια $f * \mathcal{F}$ είναι ένα φίλτρο στο Y. Πράγματι $\emptyset \notin f * \mathcal{F}$ αφού $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \mathcal{F}$. Αν τώρα $A_1, A_2 \in f * \mathcal{F}$, τότε

$$f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2) \in \mathcal{F} \Rightarrow f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{F},$$

άρα και $A_1 \cap A_2 \in f * \mathcal{F}$. Τέλος, αν $A \in f * \mathcal{F}$ και $B \subseteq Y$ τ.ω. $A \subseteq B$, τότε $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ και $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$, από το οποίο έχουμε ότι $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, δηλαδή $B \in f * \mathcal{F}$.

Πριν δώσουμε τον ορίσμο του υπερφίλτρου, θα αποδείξουμε ένα σύντομο λήμμα το οποίο θα μας είναι χρήσιμο παρακάτω.

Λήμμα 2.1.1. *Αν $\mathcal{F}$ φίλτρο στο X και $A \subseteq X$ τ.ω. $X \backslash A \notin \mathcal{F}$, τότε η οικογένεια*

$$\mathcal{C} = \mathcal{F} \cup \{A\}$$

έχει την ΙΠΤ.

Απόδειξη. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ι-σχύει. Τότε υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και $F_1, F_2, \ldots, F_k \in \mathcal{F}$ τ.ω.

$$A \cap (\bigcap_{i=1}^{k} F_i) = \emptyset. \quad (1)$$

Αφού $F_i \in \mathcal{F}$ για $1 \leq i \leq k$, τότε $\bigcap_{i=1}^{k} F_i \in \mathcal{F}$, και από τη σχέση (1) έπεται ότι

$$\mathcal{F} \ni \bigcap_{i=1}^{k} F_i \subseteq X \backslash A. \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) όμως προκύπτει ότι $X \backslash A \in \mathcal{F}$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η $\mathcal{C}$ έχει την ΙΠΤ. $\diamond$

Ορισμός 2.1.5. Ένα φίλτρο $\mathcal{U}$ σε κάποιο σύνολο X λέγεται **υπερφίλτρο** (**ultrafilter**) αν δεν υπάρχει φίλτρο στο X γνήσια ισχυρότερο του $\mathcal{U}$. Ισοδύναμα αν για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X τ.ω. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ έχουμε $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

Από τον προηγούμενο ορισμό είναι φανερό ότι δεν είναι εύκολο να διαπιστώνουμε πότε ένα φίλτρο είναι πράγματι υπερφίλτρο. Γι αυτό το λόγο η επόμενη πρόταση θα μας φανεί πολύ χρήσιμη για τη συνέχεια, δίνωντας μας δύο ικανες και αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένα υπερφίλτρο.

Πρόταση 2.1.3. *Έστω φίλτρο $\mathcal{U}$ στο X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Το $\mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο.*

(ii) $\forall\, A \subseteq X,\ A \in \mathcal{U}$ *ή* $X \backslash A \in \mathcal{U}$.

(iii) *Αν* $A \cup B \in \mathcal{U},\ A \in \mathcal{U}$ *ή* $B \in \mathcal{U}$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$. Έστω ότι το $\mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο και $A \subseteq X$ έτσι ώστε $A \notin \mathcal{U}$. Από το Λήμμα 2.1.1. αφού $X \backslash (X \backslash A) = A$ και $A \notin \mathcal{U}$, έχουμε ότι η κλάση

$$\mathcal{C} = \mathcal{U} \cup \{X \backslash A\}, \quad (1)$$

έχει τη ΙΠΤ. Από την Πρόταση 2.1.2. έχουμε ότι υπάρχει φίλτρο $\mathcal{G}$ στο X το οποίο περιέχει τη $\mathcal{C}$, και συνεπώς $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$, ομώς επειδή το $\mathcal{U}$ υπερφίλτρο, θα πρέπει $\mathcal{U} = \mathcal{G}$. Τέλος από τη σχέση (1) έχουμε ότι

$$X \backslash A \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{G} = \mathcal{U},$$

άρα $X \backslash A \in \mathcal{U}$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Έστω ότι $A \cup B \in \mathcal{U}$ και υποθέτουμε ότι $A \notin \mathcal{U}$. Από το (ii) έχουμε ότι $X \backslash A \in \mathcal{U}$, άρα

$$(X \backslash A) \cap (A \cup B) \in \mathcal{U},$$

όμως αν $A^c = X \backslash A$ τότε

$$A^c \cap (A \cup B) = (A^c \cap A) \cup (A^c \cap B) = A^c \cap B \in \mathcal{U}, \quad (2)$$

και επειδή $A^c \cap B \subseteq B$, από τη (2) έχουμε ότι $B \in \mathcal{U}$.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Έστω φίλτρο $\mathcal{U}$ που ικανοποιεί το (iii). Παρατηρούμε αρχικά ότι αφού για κάθε $A \subseteq X$ έχουμε $X = A \cup (X \backslash A)$, και από το (iii) για το $\mathcal{U}$ έχουμε ότι,

$$\forall\, A \subseteq X \Rightarrow A \in \mathcal{U} \text{ ή } X \backslash A \in \mathcal{U}. \quad (3)$$

Έστω τώρα φίλτρο $\mathcal{G}$ τ.ω. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$. Έστω $G \in \mathcal{G}$. Από τη σχέση (3) έπεται ότι είτε $G \in \mathcal{U}$, είτε $X \backslash G \in \mathcal{U}$. Αν ίσχυε ότι $X \backslash G \in \mathcal{U}$, τότε αφού $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$, θα είχαμε

$$G \in \mathcal{G} \ \text{ και } \ X \backslash G \in \mathcal{G},$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα θα πρέπει $G \in \mathcal{U}$. Καταλήξαμε λοιπόν ότι,

$$G \in \mathcal{G} \Rightarrow G \in \mathcal{U},$$

άρα $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$ και σε συνδυασμό με την υπόθεση ότι $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ έπεται ότι $\mathcal{G} = \mathcal{U}$, δηλαδή το $\mathcal{U}$ υπερφίλτρο. $\diamond$

Παρατήρηση 2.3. Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι η συνθήκη (iii) της προηγούμενης πρότασης, ισχύει και για οποιαδήποτε πεπερασμένη ένωση.

Παράδειγμα 2.5. Με χρήση του κριτηρίου (ii) της προηγούμενης πρότασης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι για κάθε σύνολο $X \neq \emptyset$, για κάθε $x \in X$, το κύριο φίλτρο $\mathcal{F}_x$ είναι υπερφίλτρο, αφού για κάθε $A \subseteq X$, $x \in A$ ή $x \notin A$.

Παράδειγμα 2.6. Αν $\mathcal{N}(x)$ το φίλτρο περιοχών για κάποιο x σε έναν τ.χ., τότε μπορει κανείς εύκολα να δείξει ότι το $\mathcal{N}(x)$ είναι υπερφίλτρο ανν το x είναι μεμωνομένο σημείου του χώρου.

Πρόταση 2.1.4. *Έστω υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ σε ένα μη κενό σύνολο X και συνάρτηση $f : X \to Y$. Τότε το $f * \mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο στο Y.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq Y$. Από υπόθεση έχουμε ότι είτε $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ ή $X \backslash f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$. Αν $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ τότε έχουμε ότι $A \in f * \mathcal{U}$, ενώ στην άλλη περίπτωση αφού $X \backslash f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \backslash A) \in \mathcal{U}$ έπεται ότι $Y \backslash A \in f * \mathcal{U}$. Άρα από την Πρόταση 2.1.3 έχουμε ότι το $f * \mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο στο Y. $\diamond$

Μια ωραία ερμηνεία των υπερφίλτρων είναι τα δούμε ως 0-1 πεπερασμένα αθροιστικά μέτρα στο X. Αν $\mathcal{U}$ είναι ένα υπερφίλτρο στο X μπορούμε να ορίσουμε ένα πεπερασμένα αθροιστικό μέτρο στο X ως εξής, για $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & A \in \mathcal{U} \\ 0, & A \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Από την Πρόταση 2.1.3 μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό μέτρο στο X.

Ορισμός 2.1.6. Ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο σύνολο X καλείται:

1) **ελεύθερο** (**free**) αν $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$,

2) **σταθερό** (**fixed**) αν $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Παρατήρηση 2.4. Είναι προφανές ότι ένα ελεύθερο φίλτρο δε μπορεί να είναι κύριο, ούτε και να παράγεται από κάποιο μη κένο σύνολο A. Επίσης αν το $\mathcal{F}$ είναι ελεύθερο τότε και κάθε φίλτρο $\mathcal{G}$ ισχυρότερο του $\mathcal{F}$ είναι ελεύθερο.

Παράδειγμα 2.7. Αν $\mathcal{F}(X)$ είναι το συμπεμερασμένο φίλτρο σε κάποιο άπειρο σύνολο X, τότε το $\mathcal{F}(X)$ είναι ελεύθερο. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in X$, ώστε $x \in \bigcap \mathcal{F}(X)$, τότε για οποιοδήποτε $F \in \mathcal{F}(X)$ θα είχαμε,

$$x \in F \quad \& \quad \tilde{F} = F \backslash \{x\} \in \mathcal{F}(X),$$

αφού το $\tilde{F}$ έχει πεπερασμένο συμπλήρωμα από το ότι,

$$X \backslash \tilde{F} = X \backslash (F \cap (X \backslash \{x\})) = (X \backslash F) \cup \{x\}.$$

Άρα $x \in \bigcap \mathcal{F}(X)$ και $\tilde{F} \in \mathcal{F}(X)$, συνεπάγεται ότι

$$x \in \tilde{F} = F \backslash \{x\},$$

το οποίο είναι άτοπο!

Από το γεγονός ότι καθε φίλτρο έχει την ΙΠΤ, αν έχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο $X \neq \emptyset$, τότε είναι προφανές ότι κάθε φίλτρο στο X είναι σταθερό. Σε αυτή την περίπτωση, το φίλτρο είτε θα είναι κύριο, αν η τομή όλων των στοιχείων του φίλτρου είναι μονοσύνολο, είτε θα παράγεται από κάποιο υποσύνολο του X. Μάλιστα κάθε υπερφίλτρο σε ένα πεπερασμένο σύνολο X είναι κύριο.

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ένα υπερφιλτρό σε ένα οποιδήποτε σύνολο είναι κύριο αν και μόνο αν περιέχει πεπερασμένο σύνολο (πολύ εύκολα από την Πρόταση 2.1.3 (iii)).

Το ερώτημα που θέτουμε τώρα είναι αν σε ένα άπειρο σύνολο X υπάρχουν υπερφίλτρα τα οποία δεν είναι κύρια. Με τη βοήθεια του Αξιώματος Επιλογής υπο τη μορφή του Λήμματος $Zorn$, μπορούμε να απαντήσουμε θετικά σε αυτό το ερώτημα, αποδυκνείωντας ότι καθε φίλτρο σε κάποιο σύνολο X περιέχεται μέσα σε κάποιο υπερφίλτρο. Υπενθυμίζουμε αρχικά το Λήμμα του $Zorn$.

Λήμμα 2.1.2 (Λήμμα Zorn). *Έστω $(P, \leq)$ μερικά διατεταγμένος χώρος. Αν κάθε αλυσίδα C στον P έχει άνω φράγμα, τότε ο P έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Θεώρημα 2.1.1 (Λήμμα Υπερφίλτρου). *Για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στο σύνολο X, υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ τ.ω. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

Απόδειξη. Αν το $\mathcal{F}$ είναι το ίδιο υπερφίλτρο, το συμπέραμσα είναι προφανές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχει $A \subseteq X$ τ.ω.

$$A \notin \mathcal{F} \;\text{ και }\; X \setminus A \notin \mathcal{F}.$$

Από το Λήμμα 2.1.1. και την Πρόταση 2.1.2. έχουμε ότι υπάρχει φίλτρο $\mathcal{G}_o$ τ.ω. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}_o$. Θετουμε

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} : \text{φίλτρο στο } X \;\&\; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}.$$

Αρχικά, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, αφού $\mathcal{G}_o \in \mathcal{A}$. Εφοδιάζοντας το $\mathcal{A}$ με τη σχέση του περιέχεσθαι "$\subseteq$" έχουμε ένα μερικά διατεταγμένο χώρο. Θα δείξουμε ότι ο $(\mathcal{A}, \subseteq)$ ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος $Zorn$. Έστω $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ μια αλυσίδα. Αρχικά έχουμε ότι $\bigcup \mathcal{C}$ είναι ένα φράγμα για το $\mathcal{C}$. Θα δείξουμε ότι $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$. Πρώτα δείχνουμε ότι το $\bigcup \mathcal{C}$ είναι φίλτρο στο X. Το $X \in \bigcup \mathcal{C}$ αφού

$$X \in \bigcup \mathcal{C} \iff \exists\, \mathcal{G} \in \mathcal{C},\; X \in \mathcal{G},$$

το οποίο ίσχυει αφού κάθε στοιχείο της $\mathcal{C}$ είναι φίλτρο. Υποθέτουμε τώρα ότι $A, B \in \bigcup \mathcal{C}$. Άρα υπάρχουν $\mathcal{G}_A, \mathcal{G}_B \in \mathcal{C}$, τ.ω. $A \in \mathcal{G}_A$ και $B \in \mathcal{G}_B$. Από υπόθεση έχουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα, και επομένως μπορούμε χ.β.γ. να υποθέσουμε ότι $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_B$. Άρα έχουμε,

$$\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_B \Rightarrow A, B \in \mathcal{G}_B,$$

και αφού το $\mathcal{G}_B$ φίλτρο έχουμε ότι,

$$A \cap B \in \mathcal{G}_B \quad \& \quad \mathcal{G}_B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \bigcup \mathcal{C}.$$

Τέλος, αν $A \in \bigcup \mathcal{C}$ και $A \subseteq B \subseteq X$, έχουμε ότι υπάρχει φίλτρο $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$ ώστε $A \in \mathcal{G}$, και αφού $A \subseteq B$, έχουμε ότι $B \in \mathcal{G} \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Άρα το $\bigcup \mathcal{C}$ είναι φίλτρο στο X, ισχυρότερο του $\mathcal{F}$, αφου $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ για κάθε $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, και συνεπώς $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$. Επομένως δείξαμε ότι μία τυχαία αλυσιδά στο $\mathcal{A}$ έχει άνω φράγμα, και άρα ο $(\mathcal{A}, \subseteq)$ ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος *Zorn*. Άρα υπάρχει $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ μεγιστικό. Εύκολα επαληθεύουμε ότι το $\mathcal{U}$ είναι το ζητούμενο υπερφίλτρο. $\diamond$

Αν το X είναι άπειρο σύνολο, για να δείξουμε ότι υπάρχει μη κύριο υπερφίλτρο στο X, θεωρούμε αρχικά το συμπεπερασμενο φίλτρο $\mathcal{F}(X)$ στο X. Αν $\mathcal{U}$ υπερφίλτρο στο X τ.ω. $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{U}$, τότε από την Παρατήρηση 2.3 και το Παράδειγμα 2.7, το $\mathcal{U}$ είναι ελέυθερο και συνεπώς δεν είναι κύριο. Μάλιστα, ισχύει το παρακάτω.

Πρόταση 2.1.5. *Έστω $\mathcal{U}$ υπερφίλτρο σε ένα άπειρο σύνολο X. Το $\mathcal{U}$ είναι ελέυθερο ανν περιέχει το συμπεπερασμένο φίλτρο του X, δηλαδή $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{U}$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν το $\mathcal{U}$ είναι ελεύθερο, τότε δεν περιέχει πεπερασμένα υποσύνολα, άρα έχουμε ότι αν $A \in \mathcal{F}(X)$, τότε $A \in \mathcal{U}$, αφού το $X \setminus A$ πεπερασμένο και το $\mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο. Άρα $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{U}$.

($\Leftarrow$) Εφόσον $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{U}$ και $\bigcap \mathcal{F}(X) = \emptyset$, έχουμε ότι

$$\bigcap \mathcal{U} \subseteq \bigcap \mathcal{F}(X) = \emptyset,$$

άρα το $\mathcal{U}$ είναι ελεύθερο. $\diamond$

Συνοψίζοντας, έχουμε πως στην περίπτωση που το X είναι πεπερασμένο, υπάρχει μια αντιστοιχία $(x \mapsto \mathcal{F}_x)$ ανάμεσα στα στοιχεία και τα υπερφίλτρα του X. Από την άλλη μερία, αν το X είναι άπειρο, από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε πως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Μάλιστα αποδεικνύεται ότι αν $|X| \geq \aleph_0$, τότε υπάρχουν $2^{2^{|X|}}$ υπερφίλτρα στο X! Επομένως όχι μόνο υπάρχουν ελέυθερα υπερφίλτρα σε ένα άπειρο σύνολο αλλά είναι και πολύ περισσότερα από τα κύρια. Αυτό προσδίδει μεγάλη σημασία στο σύνολο των υπερφίλτρων στο X, κατι που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, οπου θα μελετήσουμε τη συμπαγοποίση $Stone - \check{C}ech$.

2.2 Φίλτρα και Τοπολογία

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε πως συνδέονται τα φίλτρα με την τοπολογία, αλλά και τη μεγάλη χρησιμότητα τους για να αποδείξουμε σημαντικά αποτελέσματα της τοπολογίας. Πριν δώσουμε τον πρώτο ορισμό υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο περιοχών ένος σημείου σε ένα τοπολογικό χώρο είναι ένα φίλτρο, όπως είδαμε και στο παράδειγμα 2.4.

Ορισμός 2.2.1 (Σύγκλιση). Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ και $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στο X. Λέμε ότι το $\mathcal{F}$ συγκλίνει στο σημείο $x \in X$ και θα συμβολίζουμε με $\mathcal{F} \to x$, αν το $\mathcal{F}$ περιέχει κάθε περιοχή του x. Ισοδύναμα αν το $\mathcal{F}$ είναι ισχυρότερο του $\mathcal{N}(x)$, δηλαδή $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$.

Ορισμός 2.2.2. Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ και $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στο X. Το σημείο $x \in X$ είναι ορίακο σημείο του $\mathcal{F}$ αν ισχύει ότι,

$$\forall\, V \in \mathcal{N}(x),\ \forall\, F \in \mathcal{F} \Rightarrow V \cap F \neq \emptyset.$$

Ισοδύναμα αν $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

Παρατήρηση 2.5. Είναι προφανές ότι αν ένα φίλτρο συγκλίνει σε κάποιο σημείο x, τότε το x είναι οριακό σημείο του φίλτρου. Το αντιστρόφο, όπως θα δούμε παρακάτω, ισχύει μόνο για υπερφίλτρα.

Παράδειγμα 2.8. Έστω μη κενό σύνολο X εφοδιασμένο με κάποια τοπολογία $\mathcal{T}$. Είναι προφανές ότι για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι $\mathcal{N}(x) \to x$. Επίσης έχουμε $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}_x$, άρα και $\mathcal{F}_x \to x$.

Παράδειγμα 2.9. Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$, όπου $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. Τότε οποιοδήποτε φίλτρο στο $\mathcal{F}$ συκλίνει σε όλα τα σημεία του χώρου, αφού για κάθε $x \in X$ έχουμε $\mathcal{N}(x) = \{X\}$.

Παράδειγμα 2.10. Ας θεωρήσουμε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική τοπολογία και $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ το συμπεπερασμένο φίλτρο στο $\mathbb{R}$. Το $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ δεν συγκλίνει σε κανένα πραγματικό αριθμό, άφου αν υπήρχε $x \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\mathfrak{F}(\mathbb{R}) \to x$ θα έπρεπε

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \mathbb{R} \backslash (x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \text{πεπερασμένο},$$

το οποίο φυσικά είναι άτοπο! Όμως είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε $F \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ από το οποίο προκύπτει ότι κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακό σημειό του $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Παρατήρηση 2.6. Από τα προηγούμενα παραδείγματα είναι φανερό ότι ένα φίλτρο μπορεί να συκλίνει σε ένα ή περισσότερα σημεία του χώρου. Για αυτό το λόγο θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\lim \mathcal{F}$ για το σύνολο των ορίων ενός φίλτρου $\mathcal{F}$, δηλάδη $x \in \lim \mathcal{F}$ ανν $\mathcal{F} \to x$. Αν γνωρίζουμε ότι το $\mathcal{F}$ συγκλίνει σε ένα μοναδικό x τότε θα γράφουμε $x = \lim \mathcal{F}$.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω φίλτρο $\mathcal{F}$ στον τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ και $x_o \in X$. Τότε*

$$\mathcal{F} \to x_o \iff \forall\, V \in \mathcal{N}(x_o),\ \exists\, F \in \mathcal{F},\ F \subseteq V.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι $\mathcal{F} \to x_o$. Άρα έχουμε

$$\forall\, V \in \mathcal{N}(x_o),\ V \in \mathcal{F},$$

θεωρώντας για κάθε περιοχή V του x_o, $F = V \in \mathcal{F}$ έχουμε το ζητούμενο $F \subseteq V$.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω $V \in \mathcal{N}(x_o)$. Από υπόθεση υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ με $F \subseteq V$. Αφού το $\mathcal{F}$ φίλτρο έχουμε ότι και $V \in \mathcal{F}$, δηλαδή $\mathcal{N}(x_o) \subseteq \mathcal{F}$ και συνεπώς $\mathcal{F} \to x_o$. ◇

Πρόταση 2.2.2. *Έστω υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στον τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ και $x \in X$. Το $\mathcal{U}$ συγκλίνει στο x ανν το x είναι οριακό σημείο του $\mathcal{U}$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Προφανές.

($\Leftarrow$) Έστω ότι το $x \in X$ είναι οριακό για το $\mathcal{U}$. Επομένως έχουμε ότι

$$\forall\, V \in \mathcal{N}(x),\ \forall\, F \in \mathcal{U} \Rightarrow V \cap F \neq \emptyset, \quad (1)$$

και αφού το $\mathcal{U}$ υπερφίλτρο, έχουμε ότι

$$\forall\, V \in \mathcal{N}(x) \Rightarrow V \in \mathcal{U}\ \text{ ή }\ X \backslash V \in \mathcal{U}. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{U}$, διότι αν υπήρχε $V_o \in \mathcal{N}(x)$, τ.ω. $V_o \notin \mathcal{U}$, τότε από την (2) θα ήταν, $X \backslash V_o \in \mathcal{U}$, και έτσι θα είχαμε

$$V_o \in \mathcal{N}(x)\ \ \&\ \ X \backslash V_o \in \mathcal{U},\ V_o \cap (X \backslash V_o) = \emptyset,$$

πράγμα άτοπο από την (1). ◇

Πρόταση 2.2.3. *Έστω τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στο X και $x \in X$. Το x είναι οριακό σημείο του $\mathcal{F}$ αν και μόνο αν υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ τ.ω. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ και $\mathcal{U} \to x$.*

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Υποθέτουμε ότι $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. Θέτουμε,

$$\mathcal{C} = \mathcal{F} \cup \mathcal{N}(x)$$

και ο ισχυρισμός μας είναι ότι η οικογένεια $\mathcal{C}$ έχει την ΙΠΤ. Πράγματι, αφού το x είναι οριακό σημείο για κάθε $F \in \mathcal{F}$ έχουμε ότι για V κάθε περιοχή του x, θα ισχύει ότι $V \cap F \neq \emptyset$, από το οποίο έχουμε ότι κάθε πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathcal{C}$ έχει μη κενή τομή. Επεκτείνωντας την $\mathcal{C}$ τώρα σε ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ έχουμε ότι

$$\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{C} = \mathcal{F} \cup \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{U},$$

άρα $\mathcal{U} \to x$ και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

$(\Leftarrow)$ Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\mathcal{U}$ είναι ένα υπερφίλτρο έτσι ώστε $\mathcal{U} \to x$ και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Αν $F \in \mathcal{F}$, τότε για κάθε $V \in \mathcal{N}(x)$ έχουμε ότι $F, V \in \mathcal{U}$ από το οποίο προκύπτει ότι $F \cap V \neq \emptyset$, από όπου έπεται ότι $x \in \overline{F}$. Εφόσον το F ήταν ένα τυχαίο στοιχείο του $\mathcal{F}$ έχουμε ότι $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. $\diamond$

Ουσιαστικά η Προταση 2.2.2 είναι ένα πόρισμα της 2.2.3 αν το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο. Με βάση αυτή την πρόταση μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ελεύθερο συγκλίνων υπερφίλτρο στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική τοπολογία. Θεωρούμε ένα πραγματικό αριθμό x και την οικογένεια

$$\mathcal{C} = \{V \backslash \{x\} \mid V \in \mathcal{N}(x)\}.$$

Είναι προφανές ότι η $\mathcal{C}$ έχει την ΙΠΤ και επομένως υπάρχει φίλτρο $\mathcal{F}$ τ.ω. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. Επίσης αφού $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$ έχουμε ότι $\bigcap \mathcal{F} \subseteq \bigcap \mathcal{C} = \emptyset$, επομένως το $\mathcal{F}$ είναι ελεύθερο. Ο ισχυρισμός μας είναι ότι το x είναι οριακό σημείο του $\mathcal{F}$. Πράγματι αφού για κάθε V περιοχή του x έχουμε ότι $V \backslash \{x\} \in \mathcal{F}$, τότε για κάθε $F \in \mathcal{F}$ έχουμε

$$\emptyset \neq F \cap (V \backslash \{x\}) \subseteq F \cap V,$$

άρα $x \in \overline{F}$, για κάθε $F \in \mathcal{F}$, επομένως το x είναι οριακό σημείο του $\mathcal{F}$. Από την Πρόταση 2.2.3 υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο $\mathbb{R}$ τ.ω. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ και $\mathcal{U} \to x$. Το $\mathcal{U}$ είναι ελεύθερο αφού,

$$\bigcap \mathcal{U} \subseteq \bigcap \mathcal{F} \subseteq \bigcap \mathcal{C} = \emptyset.$$

Είναι προφανές βέβαια ότι η παραπάνω διαδικάσια δεν θα μπορούσε να γενικευθεί σε ένα χώρο όπου το x θα ήταν μεμονωμένο, για παράδειγμα σε οποιονδήποτε διακριτό χώρο.

Με τις επόμενες δύο προτάσεις διαπιστώνουμε, πως τα φίλτρα, σε αντίθεση με τις ακολουθίες, είναι ικανά να προσδιορίσουν πλήρως την τοπολογία σε ένα σύνολο.

Πρόταση 2.2.4. *Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$. Το μη κενό $U \subseteq X$ είναι ανοικτό ανν για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X με $\mathcal{F} \to x$ και $x \in U$, τότε $U \in \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε άρχικα ότι το $U \subseteq X$ είναι ανοικτό και έστω φίλτρο $\mathcal{F}$ το οποίο συγκλίνει σε κάποιο $x \in U$. Εφόσον $\mathcal{F} \to x$, έχουμε ότι $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Από το γεγονός ότι $x \in U$ και U ανοικτό έχουμε ότι $U \in \mathcal{N}(x)$. Άρα $U \in \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω $x \in U$. Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{N}(x) \to x$, και από υπόθεση $U \in \mathcal{N}(x)$. Εφόσον το U είναι περιοχή του x, έχουμε ότι,

$$\exists\, U_x \in \mathcal{T},\ U_x \subseteq U.$$

Συνεπώς έχουμε ότι το $U = \bigcup_{x \in U} U_x$, και έτσι το U είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών. $\diamond$

Πρόταση 2.2.5. *Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T})$ και $A \subseteq X$, με $A \neq \emptyset$. Τότε το $x \in \overline{A}$ ανν υπάρχει φίλτρο $\mathcal{F}$ τ.ω. $\mathcal{F} \to x$ και $A \in \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $x \in \overline{A}$. Αφού το x είναι οριακό σημείου του A έχουμε ότι,

$$\forall\, V \in \mathcal{N}(x),\ V \cap A \neq \emptyset. \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) έπεται ότι η κλάση:

$$\mathcal{C} = \mathcal{N}(x) \cup \{A\},$$

έχει την ΙΠΤ, και από την πρόταση 2.1.2. υπάρχει φίλτρο $\mathcal{F}$ που να περιέχει τη $\mathcal{C}$, επομένως

$$\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}. \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) και τον ορισμό της κλάσης $\mathcal{C}$ έχουμε ότι $\mathcal{F} \to x$ και $A \in \mathcal{F}$.

($\Leftarrow$) Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει φίλτρο $\mathcal{F}$, ώστε $\mathcal{F} \to x$ και $A \in \mathcal{F}$. Από την υπόθεση έχουμε αμέσως ότι,

$$\forall\, V \in \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F},\ V \cap A \neq \emptyset,$$

και συνεπώς $x \in \overline{A}$. $\diamond$

Συνεχίζουμε με το πρώτο σημαντικό Θέωρημα που φανερώνει την σημασία των φίλτρων στην τοπολογία. Είναι γενίκευση του ακολουθιακού κριτηρίου συνέχειας συναρτήσεων ορισμένες σε πρωταριθμήσιμους χώρους, μονό που έδω δεν χρειαζόμαστε καμμία τέτοια υπόθεση.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ και συνάρτηση $f : X \to Y$. Η f είναι συνεχής στο $x_o \in X$ ανν για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X τ.ω. $\mathcal{F} \to x_o$, να ισχύει ότι $f * \mathcal{F} \to f(x_o)$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$)Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o και έστω φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X τ.ω. $\mathcal{F} \to x_o$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{N}_Y(f(x_o)) \subseteq f*\mathcal{F}$. Αν $W \in \mathcal{N}_Y(f(x_o))$, τότε από τη συνέχεια της f στο x_o έχουμε ότι,

$$\exists\, V \in \mathcal{N}_X(x_o) \text{ τ.ω. } V \subseteq f^{-1}(W). \quad (1)$$

Αφού τώρα $\mathcal{F} \to x_o$, έχουμε ότι $V \in \mathcal{F}$ και από τη σχέση (1) έπεται ότι και $f^{-1}(W) \in \mathcal{F}$. Από τον ορισμό 2.1.4. του $f * \mathcal{F}$ είναι φανερό ότι $W \in f * \mathcal{F}$, επομένως $\mathcal{N}_Y(f(x_o)) \subseteq f * \mathcal{F}$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε τώρα ότι για καθέ φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X τ.ω. $\mathcal{F} \to x_o$, έχουμε ότι $f * \mathcal{F} \to f(x_o)$ στον Y. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o. Θεωρούμε το φίλτρο περιοχών του x_o, $\mathcal{N}_X(x_o)$, το οποίο προφανώς συγκλίνει στο x_o. Από υπόθεση έχουμε ότι $f * \mathcal{N}_X(x_o) \to f(x_o)$, επομένως ισχύει ότι,

$$\mathcal{N}_Y(f(x_o)) \subseteq f * \mathcal{N}_X(x_o). \quad (2)$$

Αν λοιπόν $W \in \mathcal{N}_Y(f(x_o))$, από τη σχέση (2) έχουμε ότι $W \in f * \mathcal{N}_X(x_o)$, δηλαδή,

$$f^{-1}(W) \in \mathcal{N}_X(x_o).$$

Θεωρώντας τώρα $V = f^{-1}(W) \in \mathcal{N}_X(x_o)$ έχουμε ότι,

$$V \in \mathcal{N}_X(x_o) \text{ και } V \subseteq f^{-1}(W).$$

Απο την τελευταία σχέση έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o. $\diamond$

Η τελευταία πρόταση για αυτή την παράγραφο μας δίνει ένα κριτήριο σχετικά με το πότε ένας τοπολογικός χώρος είναι $Hausdorff$.

Πρόταση 2.2.6. *Ο τ.χ. $(X,\mathcal{T})$ είναι $Hausdorff$ ανν κάθε φίλτρο στο X συγκλίνει το πολύ σε ένα σημείο.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι ο $(X,\mathcal{T})$ είναι $Hausdorff$. Αν $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο στο X τ.ω. $\mathcal{F} \to x_1$ και $\mathcal{F} \to x_2$, ϑ.δ.ο. $x_1 = x_2$. Από τον ορισμό της σύγκλισης του $\mathcal{F}$ στα x_1, x_2, έχουμε ότι

$$\forall\, V \in \mathcal{N}(x_1),\ \forall\, W \in \mathcal{N}(x_2) \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{F}. \quad (1)$$

Αφού τώρα κάθε στοιχείο του $\mathcal{F}$ είναι μη κένο, και βρισκόμαστε σε χώρο $Hausdorff$ ο μόνος τρόπος να ισχύει η σχέση (1) είναι να έχουμε ότι $x_1 = x_2$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε τώρα ότι κάθε συγκλίνων φίλτρο στο X έχει μοναδικό όριο, και προς απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε ότι χώρος δεν είναι $Hausdorff$. Επομένως έχουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ τ.ω.

$$\forall\, V \in \mathcal{N}(x_1),\ \forall\, W \in \mathcal{N}(x_2) \Rightarrow V \cap W \neq \emptyset. \quad (2)$$

Από την (2), έχουμε ότι η οικογένεια

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(x_1) \cup \mathcal{N}(x_2),$$

έχει την ΙΠΤ και άρα επεκτείνεται σε καποίο φίλτρο $\mathcal{F}$. Είναι προφανές τότε ότι αφού $\mathcal{N}(x_1) \subseteq \mathcal{F}$ και $\mathcal{N}(x_2) \subseteq \mathcal{F}$, το $\mathcal{F}$ ϑα συγκλίνει σε δύο διαφορετικά σημεία του X, πράγμα που έρχεται σε αντίϑεση με την αρχική μας υπόθεση. Άρα ο $(X,\mathcal{T})$ $Hausdorff$. $\diamond$

2.3 Θεώρημα $Tychonoff$

Για το τέλος αυτού του κεφαλαίου σκοπός μας είναι να αποδείξουμε, ένα από τα βασικότερα ϑεωρήματα της τοπολογίας, το Θέωρημα $Tychonoff$ και να δούμε πόσο κομψά προκύπτει το συγκεκριμμένο αποτέλεσμα με τη βοήθεια των υπερφίλτρων. Η απόδειξη του γίνεται αρκετά απλή με την χρήση όσων είδαμε μέχρι τώρα, και πιο συγκεκριμμένα με τις δύο προτάσεις που ϑα αποδείξουμε παρακάτω. Η πρώτη ϑα μας δώσει έναν ισοδύναμο ορισμό για το πότε ένας τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής, ενώ η δεύτερη μια ικάνη και αναγκαία συνϑήκη για την σύγκλιση φίλτρων σε χώρους γινόμενο.

Πρόταση 2.3.1. *Ο τοπολογικός χώρος $(X,\mathcal{T})$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε υπερφίλτρο στο X συγκλίνει τουλάχιστο σε ένα σημείο.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε αρχικά ότι ένας χώρος X είναι συμπάγης ανν κάθε οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ΙΠΤ, έχει μη κενή τομή.
$(\Rightarrow)$ Έστω ότι ο X είναι συμπαγής και $\mathcal{U}$ είναι ένα υπερφίλτρο στο X. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι το $\mathcal{U}$ δεν συγκλίνει σε κανένα σημείο του X. Άρα έχουμε ότι,

$$\forall\, x \in X,\ \exists\, V_x \in \mathcal{N}(x) \cap \mathcal{T} \Rightarrow V_x \notin \mathcal{U}. \quad (1)$$

Προφανώς, $X = \bigcup_{x\in X} V_x$, και άρα η οικογένεια $\{V_x\}_{x\in X}$, είναι ένα ανοικτό κάλυμμα για τον X. Από τη συμπάγεια του X έχουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_k$ τ.ω. $X = \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}$. Όμως, $\mathcal{U}$ υπερφίλτρο και $X = \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i} \in \mathcal{U}$, από την Πρόταση 2.1.3. έχουμε ότι για κάποιο $i_o \leq k$, $V_{x_{i_o}} \in \mathcal{U}$, το οποίο είναι άτοπο από την σχέση (1).

$(\Leftarrow)$ Υποθέτουμε τώρα ότι καθε υπερφίλτρο στον X συγκλίνει, και θεωρούμε $\{F_i\}_{i\in I}$, οικογένεια υποσυνόλων του X με την ΙΠΤ. Αφού η $\{F_i\}_{i\in I}$ έχει την ΙΠΤ (συνεπώς και η οικογένεια $\{\overline{F_i}\}_{i\in I}$ έχει την ΙΠΤ), υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ που την επεκτείνει, και από υπόθεση $\mathcal{U} \to x$ για κάποιο $x \in X$. Από την Πρόταση 2.2.2. έχουμε ότι το x είναι οριακό σημείο του $\mathcal{U}$, και άρα οριακό σημείο για κάθε $F \in \mathcal{U}$, από τον ορισμό του οριακού σημείου για φίλτρα. Αφού τώρα $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{U}$ έχουμε ότι

$$\forall\, i \in I,\ x \in \overline{F_i} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} \overline{F_i}.$$

Δηλαδή $\bigcap_{i\in I} \overline{F_i} \neq \emptyset$, και επομένως ο $(X,\mathcal{T})$ συμπαγής. ◇

Παρατήρηση 2.7. Η προηγούμενη πρόταση θα μπορούσε να διατυπωθεί ισοδύναμα: Ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε φίλτρο στο X έχει οριακό σημείο.

Πρόταση 2.3.2. *Έστω $\{(X_i,\mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ οικογένεια τ.χ., $X = \prod_{i\in I} X_i$, $(X,\mathcal{T})$ ο χώρος γινόμενο, $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στον X και $x = (x_i)_{i\in I} \in X$. Τότε έχουμε ότι,*

$$\mathcal{F} \to x \iff \forall\, i \in I,\ \pi_i * \mathcal{F} \to \pi_i(x) = x_i,$$

όπου $\pi_i : X \to X_i$, οι κανονικές προβολές του X στα X_i.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν το $\mathcal{F} \to x$ στον X, τότε αφού ο X είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο, έχουμε ότι κάθε π_i είναι συνέχης και το συμπέρασμα έπεται άμμεσα από το Θεώρημα 2.2.1.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα υποθέτουμε ότι για κάθε $i \in I$, έχουμε ότι $\pi_i * \mathcal{F} \to \pi_i(x)$. Έστω $V \in \mathcal{N}_X(x)$, ϑ.δ.ο. $V \in \mathcal{F}$. Αφου V είναι περιοχή του x, έχουμε ότι υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ τ.ω. $U \subseteq V$. Γνωρίζουμε ότι η οικογένεια,

$$\mathcal{C} = \{\pi_i^{-1}(U_i) \mid i \in I,\ U_i \in \mathcal{T}_i\},$$

είναι μια υποβάση για την $\mathcal{T}$. Άρα υπάρχουν $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_k}$, με $U_{i_j} \subseteq X_{i_j}$, $\mathcal{T}_{i_j}$-ανοικτά, για $1 \leq j \leq k$, τ.ω.

$$x \in \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \subseteq U \subseteq V. \quad (1)$$

Όμως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) &\iff \forall\, 1 \leq j \leq k,\ x \in \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \\ &\iff \forall\, 1 \leq j \leq k,\ \pi_{i_j}(x) \in U_{i_j} \\ &\iff \forall\, 1 \leq j \leq k,\ x_{i_j} \in U_{i_j}. \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε ότι για κάθε $1 \leq j \leq k$, το U_{i_j} είναι περιοχή του x_{i_j}. Από υπόθεση τώρα έχουμε ότι $\pi_{i_j} * \mathcal{F} \to x_{i_j}$, από τον ορισμό της σύγκλισης και της εικόνας φίλτρου έχουμε ότι, για όλα τα $1 \leq j \leq k$,

$$U_{i_j} \in \pi_{i_j} * \mathcal{F} \Rightarrow \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \in \mathcal{F}. \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) έχουμε ότι $\bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \in \mathcal{F}$ και από την (1) έπεται ότι και $V \in \mathcal{F}$. Άρα $\mathcal{N}_X(x) \subseteq \mathcal{F}$ και συνεπώς $\mathcal{F} \to x$. $\diamond$

Είμαστε έτοιμοι τώρα να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το Θεώρημα $Tychonoff$.

Θεώρημα 2.3.1 (Tychonoff). *Έστω οικογένεια $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ τ.χ. και $(X, \mathcal{T})$ ο χώρος γινόμενο. Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε $i \in I$ ο $(X_i, \mathcal{T}_i)$ συμπαγής.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $(X, \mathcal{T})$ είναι συμπάγης. Έστω $i \in I$ και $\pi_i : X \to X_i$ η αντίστοιχη προβολή του X στον X_i. Αφού η π_i συνέχης και επί του X_i, έπεται ότι ο $X_i = \pi_i(X)$ συμπαγής, ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου.

($\Leftarrow$)Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $i \in I$, ο $(X_i, \mathcal{T}_i)$ συμπαγής, και θεωρούμε ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στον X. Από την υπόθεση μας και την Πρόταση 2.3.1 έχουμε ότι για κάθε $i \in I$ το φίλτρο $\pi_i * \mathcal{U}$ συγκλίνει τουλάχιστο σε ένα σημείο στον X_i. Για $i \in I$, θέτουμε

$$\Lambda_i = \{x \in X_i \mid x \in \lim \pi_i * \mathcal{U}\}.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι για όλα τα $i \in I$, $\emptyset \neq \Lambda_i \subseteq X_i$. Από το Αξίωμα Επιλογής, μπορούμε να επιλέξουμε $\tilde{x}_i \in \Lambda_i$, για κάθε $i \in I$. Προφανώς, το $\tilde{x} = (\tilde{x}_i)_{i \in I}$ είναι στοιχείο του X και από την επιλογή του έχουμε ότι

$$\forall\, i \in I,\ \pi_i * \mathcal{U} \to \tilde{x}_i = \pi_i(\tilde{x}). \quad (1)$$

Από την (1) και την Πρόταση 2.3.2 έπεται ότι $\mathcal{U} \to \tilde{x} \in X$, και τέλος από την Πρόταση 2.3.1 έχουμε ότι ο χώρος γινόμενο $(X, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής. $\diamond$

Έχοντας ολοκληρώσει το δεύτερο κεφάλαιο σε αυτό το σημείο, διαπιστώνουμε την σημασία των υπερφίλτρων για την τοπολογία. Παρέχουν γενικεύσεις αποτελεσμάτων τα οποία χρησιμοποιούν ακολουθίες (οι οποίες είναι εύκολα "διαχειρίσιμες") που είναι μεν ήδη γνώστα, άλλα δεν ισχύουν σε οποιονδήποτε τοπολογικό χωρό. Επομένως μπορούμε να φανταστούμε τα φίλτρα σα μια γενίκευση της οριακής διαδικάσιας που εμπεριέχει η έννοια της ακολουθίας. Είμαστε έτοιμοι λοιπόν να δούμε στα επόμενα δύο κεφάλαια ενδιαφέρουσες εφαρμογές τους στηριζόμενοι κατά κύριο λόγο στα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε σε αυτο το κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

Συμπαγοποίηση *Stone-Čech*

Φτάνουμε σιγά, σιγά στο κύριο μέρος αυτής της εργασίας. Το κεφάλαιο αυτό είναι χωρισμένο σε τέσσερις ενότητες. Στη πρώτη και σύντομη ενότητα θα δούμε το Λήμμα Εμφύτευσης και ως πόρισμα αυτού θα έχουμε ότι κάθε $T_{3\frac{1}{2}}$ χώρος είναι ομοιομορφίκος με έναν υπόχωρο ενός κύβου, δηλαδή ενός χώρου της μορφής K^I, όπου $K \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές. Στις επόμενες ενότητες, θα κατασκευάσουμε τη συμπαγοποίηση *Stone-Čech* ενός τοπολογικού χώρου, με τη βοήθεια των υπερφίλτρων και όσων είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αρχικά για χώρους εφοδιασμένους με τη διακριτή τοπολογία και έπειτα για τη γενικότερη περίπτωση.

3.1 Λήμμα Εμφύτευσης

Στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφάλαιου, όπως ήδη αναφέραμε, θα αποδείξουμε ότι κάθε χώρος $T_{3\frac{1}{2}}$ εμφυτεύεται μέσα σε ένα κύβο, για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε το Λήμμα Εμφύτευσης. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτό θα μας δώσει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε ένας χώρος να έχει συμπαγοποίηση. Ξεκινάμε λοιπόν με κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 3.1.1. Έστω μη κενά σύνολα X, $\{Y_i\}_{i\in I}$, συναρτήσεις $f_i : X \to Y_i$, για $i \in I$, και $Y = \prod_{i\in I} Y_i$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $e : X \to Y$, με τύπο, $e(x) = (f_i(x))_{i\in I}$. Η e καλείται **συνάρτηση εκτίμησης** για την οικογένεια $\{f_i\}_{i\in I}$.

Ορισμός 3.1.2. Έστω τ.χ $(X, \mathcal{T})$, οικογένεια τ.χ. $\{(Y_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$, και οικογένεια συναρτήσεων $\{f_i\}_{i\in I}$, με $f_i : X \to Y_i$, για $i \in I$. Λέμε ότι:

(1) η οικογένεια $\{f_i\}_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία του X αν, για κάθε $x, y \in X$, με $x \neq y$, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $f_{i_0}(x) \neq f_{i_0}(y)$.

(2) η οικογένεια $\{f_i\}_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία από τα κλειστά υποσύνολα του X, αν για κάθε $x \in X$, $K \subseteq X$, κλειστό με $x \notin F$, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(K)}$.

Παρατήρηση 3.1. Αν ο τ.χ. X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ και συμβολίσουμε με $\mathcal{C}_X$, την οικογένεια όλων των συνεχών συναρτήσεων από τον X στο $[0,1]$ εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική τοπολογία, δηλαδή

$$\mathcal{C}_X = \{f : X \to [0,1] \mid f \text{ συνεχής}\},$$

τότε αφού ο X είναι *completely regular* και T_1, είναι προφανές ότι η $\mathcal{C}_X$ διαχωρίζει τα σημεία του X, και τα σημεία από τα κλειστα υποσύνολα.

Πριν συνεχίσουμε, αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα το οποίο θα μας είναι χρήσιμο στην απόδειξη για το Λήμμα Εμφύτευσης.

Λήμμα 3.1.1. *Έστω τ.χ. $(X, \mathcal{T}_X)$, οικογένεια τ.χ. $\{(Y_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ και οικογένεια συναρτήσεων $\{f_i\}_{i\in I}$, με $f_i : X \to Y_i$. Αν $Y = \prod_{i\in I} Y_i$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ο χώρος γινόμενο και $e : X \to Y$ η συνάρηση εκτίμησης για την $\{f_i\}_{i\in I}$, τότε η e είναι συνεχής ανν για κάθε $i \in I$, η f_i συνεχής.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η $e : X \to Y$ είναι συνεχής και έστω $i \in I$. Αν $\pi_i : Y \to Y_i$, είναι η προβολή του Y επί του Y_i, τότε ως γνωστόν η π_i είναι συνεχής. Από τον ορισμό της συνάρτησης εκτίμησης, έχουμε ότι $f_i = \pi_i \circ e$, συνεπώς η f_i είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήεων.

($\Leftarrow$) Αντίσροφα, υπόθετουμε ότι για κάθε $i \in I$, η f_i συνεχής. Έστω $x_0 \in X$ και φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X τ.ω. $\mathcal{F} \to x_0$. Θα δείξουμε ότι $e * \mathcal{F} \to e(x_0)$. Αφού το $e * \mathcal{F}$ είναι ένα φίλτρο στον $Y = \prod_{i\in I} Y_i$, από την Πρόταση 2.3.2 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $i \in I$,

$$\pi_i * (e * \mathcal{F}) \to \pi_i(e(x_0)) = f_i(x_0).$$

Έστω λοιπόν $i \in I$. Από υπόθεση η $f_i : X \to Y_i$, είναι συνεχής και από το Θεώρημα 2.2.1 έχουμε ότι $f_i * \mathcal{F} \to f_i(x_0)$. Θα δείξουμε ότι $f_i * \mathcal{F} = \pi_i * (e * \mathcal{F})$.

Αφού $f_i = \pi_i \circ e$ έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} A \in f_i * \mathcal{F} &\iff f_i^{-1}(A) \in \mathcal{F} \\ &\iff e^{-1}(\pi_i^{-1}(A)) \in \mathcal{F} \\ &\iff \pi_i^{-1}(A) \in e * \mathcal{F} \\ &\iff A \in \pi_i * (e * \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Άρα, αφού $f_i * \mathcal{F} \to f_i(x_0)$, τότε και $\pi_i * (e * \mathcal{F}) \to f_i(x_0) = \pi_i(e(x_0))$. Έτσι έχουμε ότι $e * \mathcal{F} \to e(x_0)$, και από το Θεώρημα 2.2.1 έπεται ότι η e είναι συνεχής. $\diamond$

Θεώρημα 3.1.1 (Λήμμα Εμφύτευσης). *Έστω τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T}_X)$, οικογένεια τοπολογικών χώρων $\{(Y_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ και οικογένεια συνέχων συναρτήσεων $\{f_i\}_{i\in I}$, με $f_i : X \to Y_i$, για $i \in I$. Αν ισχύει ότι:*

(i) η οικογένεια $\{f_i\}_{i\in I}$, διαχωρίζει τα σημεία του X και,

(ii) η οικογένεια $\{f_i\}_{i\in I}$, διαχωρίζει τα σημεία από τα κλειστά υποσύνολα του X,

τότε η συνάρτηση εκτίμησης e ως προς την $\{f_i\}_{i\in I}$, είναι ομοιομορφίκη εμφύτευση του X στο χώρο γινόμενο $Y = \prod_{i\in I} Y_i$.

Απόδειξη. Για να έχουμε το συμπέρασμα, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση εκτίμησης $e : X \to Y$, είναι συνεχής, 1-1 και ανοικτή αν περιοριοριστεί στην εικόνα $e(X)$.

Αρχικά, εφόσον κάθε f_i είναι συνεχής, από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι η e είναι συνεχής.

Δείχνουμε τώρα ότι η e είναι 1-1. Έστω λοιπόν $x_1, x_2 \in X$, με $x_1 \neq x_2$. Από τη συνθήκη (i), υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε, $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$, και αφού $e(x) = (f_i(x))_{i\in I}$, έπεται ότι $e(x_1) \neq e(x_2)$. Άρα η e είναι 1-1.

Μένει να δείξουμε ότι η $e : X \to e(X)$, είναι ανοικτή. Αρκεί να δείξουμε ότι, αν $x \in X$ και U μια ανοικτή περιοχή του x, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του $e(x)$ στον Y, τέτοια ώστε

$$V \cap e(X) \subseteq e(U).$$

Επειδή το $X \backslash U$ κλειστό και $x \in U$, από τη (ii) υπάρχει $i_0 \in I$ έτσι ώστε,

$$f_{i_0}(x) \in Y_{i_0} \backslash \overline{f_{i_0}(X \backslash U)}.$$

Αν $\pi_{i_0} : Y \to Y_{i_0}$, είναι η κανονική προβολή του Y στον Y_{i_0}, θέτουμε

$$V = \pi_{i_0}^{-1}(Y_{i_0} \backslash \overline{f_{i_0}(X \backslash U)}),$$

το οποίο είναι ανοικτό στον χώρο γινόμενο Y, αφού το $Y_{i_0} \backslash \overline{f_{i_0}(X \backslash U)}$ είναι ανοικτό στον Y_{i_0}, και $e(x) \in V$, επειδή $\pi_{i_0}(e(x)) = f_{i_0}(x)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $V \cap e(X) \subseteq e(U)$. Αν $y \in V \cap e(X)$, υπάρχει $z \in X$, τέτοιο ώστε $y = e(z)$ και $e(z) \in V$. Από τον ορισμό του V έχουμε ότι,

$$\pi_{i_0}(e(z)) = f_{i_0}(z) \in Y_{i_0} \backslash \overline{f_{i_0}(X \backslash U)},$$

και επειδή $f_{i_0}(X \backslash U) \subseteq \overline{f_{i_0}(X \backslash U)}$, θα είναι και, $f_{i_0}(z) \in Y_{i_0} \backslash f_{i_0}(X \backslash U)$. Επομένως ισχύει ότι,

$$z \in f_{i_0}^{-1}(f_{i_0}(z)) \subseteq f_{i_0}^{-1}(Y_{i_0} \backslash f_{i_0}(X \backslash U)) = X \backslash f_{i_0}^{-1}(f_{i_0}(X \backslash U)),$$

όμως

$$X \backslash f_{i_0}^{-1}(f_{i_0}(X \backslash U)) \subseteq X \backslash (X \backslash U) = U,$$

άφου $X \backslash U \subseteq f_{i_0}^{-1}(f_{i_0}(X \backslash U))$. Άρα $z \in U$ και συνεπώς $y = e(z) \in e(U)$. Συνοψίζοντας, έχουμε ότι η $e : X \to e(X)$, είναι ομοιομορισμός και έτσι η συνάρτηση εκτίμησης είναι ομοιομορφική εμφύτευση του X στον Y. ◇

Έχοντας τώρα στη διάθεση μας το Λήμμα Εμφύτευσης, είναι πολύ απλό να δείξουμε ότι κάθε χώρος $T_{3\frac{1}{2}}$ είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο ενός κύβου, αρκεί να θυμήθουμε αυτό που ήδη αναφέραμε στην Παρατήρηση 3.1 και έχουμε πολύ εύκολα το ζητούμενο. Διατυπώνουμε λοιπόν τα παραπάνω με την επόμενη πρόταση, η οποία είναι ουσιαστικά ένα πόρισμα του λήμματος εμφύτευσης.

Πρόταση 3.1.1. *Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ ανν εμφυτέυεται ομοιομορφικά στον $[0,1]^I$, για κάποιο σύνολο I.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν $\mathcal{C}_X = \{f : X \to [0,1] \mid f \text{ συνεχής}\}$, τότε επειδή ο X είναι *completely regular* τα στοιχεία του $\mathcal{C}_X$ διαχώριζουν τα κλειστά από τα σημεία του X, και αφού είναι και T_1 διαχωρίζουν και τα σημεία του. Θέτουμε λοιπόν για $f \in \mathcal{C}_X$, $Y_f = [0,1]$. Η οικογένεια $\mathcal{C}_X$ ικανοποιεί λοιπόν τις συνθήκες του λήμματος εμφύτευσης, και έτσι η συνάρτηση εκτίμησης $e : X \to [0,1]^{\mathcal{C}_X}$, $e(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{C}_X}$, είναι ομοιομορφική εμφύτευη.

($\Leftarrow$) Εφόσον ο $[0,1]^I$ είναι $T_{3\frac{1}{2}}$, τότε κάθε υπόχωρος του είναι επίσης $T_{3\frac{1}{2}}$, άρα ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ ως ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του $[0,1]^I$. ◇

3.2 Συμπαγοποίηση *Stone-Čech*

Αρκετές φορές στην τοπολογία, όταν μελετά κανείς έναν χώρο X, ο οποίος δεν είναι συμπαγής, είναι πιο βολικό να εργαστεί σε έναν "μεγαλύτερο" χώρο $\hat{X}$ που είναι συμπαγής και περιέχει τον X ως υπόχωρο. Σε κάποιες περίπτώσεις η εύρεση του $\hat{X}$ είναι απλή, για παράδειγμα αν $X = (a, b)$ με τη μετρική τοπολογία που επάγεται από το $\mathbb{R}$, τότε μια καλή επιλογή θα ήταν ο $\hat{X} = [a, b]$. Τα πράγματα όμως γίνονται πιο δύσκολα αν θεώρησουμε χώρους πιο σύνθετους από ένα απλό φραγμένο διάστημα των πραγματικών αριθμών. Καταλαβαίνουμε ότι για να δώσει κανείς λύση σε αυτό το πρόβλημα, πρέπει πρώτα να κατασκευάσει τον χώρο $\hat{X}$ και έπειτα τη συνάρτηση $h : X \to \hat{X}$, που θα εμφυτεύει τον αρχικό μας χώρο μέσα στον συμπαγή $\hat{X}$. Η διαδικάσια κατασκευής ενός τέτοιου ζευγαριού $(\hat{X}, h)$ είναι γνωστή ως συμπαγοποίηση του τοπολογικού χώρου X. Σημειώνουμε ότι καλό θα ήταν ο χώρος μας X να εμφυτεύεται, με αυτή τη διαδικασία, ως πυκνός υπόχωρος του $\hat{X}$, δίοτι εναλλακτικά θα μας "έκανε" και ο μικρότερος $\hat{X} = \overline{h(X)}$. Επίσης σημειώνουμε ότι από εδω και στο εξής θα ασχολειθούμε αποκλειστικά με χώρους που είναι τουλάχιστον $Hausdorff$.

Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι που δίνουν λύση στο πρόβλημα συνπαγοποίησης ένος τοπολογικόυ χώρου, άλλα μόνο μία έχει μια πολύ σημαντική ιδιότητα που της προσδίδει τον χαρακτηρισμό της "γενικότερης" συμπαγοποίησης ένος χώρου. Η μέθοδος στην οποία αναφερόμαστε είναι γνωστή ως *Stone-Čech* συμπαγοποίηση. Ιστορικά, η ιδέα για την κατασκευή της εμφανίζεται σε μια δημοσίευση του $Andrey\ Tychonoff$ το 1930, άλλα ήταν ο αμερικανός $Marshal$ *Stone* και ο τσέχος *Eduard Čech* οι οποίοι μελέτησαν και ανέπτυξαν συστηματικά την μέθοδο γύρω στο 1937, η οποία πήρε και το όνομα τους. Εμείς θα παρουσιάσουμε μια ενάλλακτικη μορφή της, βασιζόμενοι στα υπερφίλτρα και θα αναφέρουμε πολύ σύντομα ποιά ήταν η αρχική κατασκευή που έκαναν οι *Stone* και *Čech* στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

Το πλάνο που θα ακολουθήσουμε για να παρουσιάσουμε όλη τη διαδικάσια είναι, αρχικά σε αυτή την ενότητα να δώσουμε τον ορισμό της *Stone-Čech* συμπαγοποίησης και τις ιδιότητες της, και στις επόμενες δύο ενότητες να κατασκευάσουμε, και άρα να αποδείξουμε την ύπαρξη της. Αρχικά θα εργαστούμε σε ένα χώρο με τη διακριτή τοπολογία, και μέτα θα δούμε την κατασκευή στη γενική περίπτωση. Ξεκινάμε με τον ορισμό της συμπαγοποίησης και μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, ωστε ένας τοπολογικός χώρος να έχει συμπαγοποίηση.

Ορισμός 3.2.1. Έστω τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$. Το ζευγάρι $(\hat{X}, h)$ καλείται **συμπαγοποίηση** (**compactification**) του χώρου X αν:

(1) Ο $\hat{X}$ είναι συμπαγής χώρος $Hausdorff$.

(2) Η συνάρτηση $h : X \to \hat{X}$ είναι ομοιομορφική εμφύτευση του X.

(3) Η εικόνα $h(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\hat{X}$.

Πρόταση 3.2.1. *Έστω τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$. Ο X έχει συμπαγοποίηση αν και μόνο αν είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $(\hat{X}, h)$ μια συμπαγοποίηση του X. Ο χώρος $\hat{X}$ είναι T_4, αφού είναι συμπαγής και $Hausdorff$, και έτσι κάθε υπόχωρος του είναι $T_{3\frac{1}{2}}$. Άρα ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ ως ομοιομορφικός με τον υπόχωρο $h(X) \subseteq \hat{X}$.

($\Leftarrow$)Αν ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$, τότε από τη Πρόταση 3.1.1 έχουμε ότι εμφυτεύεται στον $[0,1]^I$, για κάποιο σύνολο I. Αφού ο $[0,1]$ σαν υπόχωρος του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγής και $Hausdorff$, από το θεώρημα $Tychonoff$, ο $[0,1]^I$ είναι συμπαγής και $Hausdorff$ ως γινόμενο χώρων $Hausdorff$. Αν η $h : X \to [0,1]^I$ είναι η ομοιομορφική εμφύτευση του X, θέτουμε $\hat{X} = \overline{h(X)}$ και έχουμε ότι ο $\hat{X}$ είναι συμπαγής, ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $[0,1]^I$ και $Hausdorff$. Άρα το ζευγάρι $(\hat{X}, h)$ είναι μια $Hausdorff$ συμπαγοποίηση του X. $\diamond$

Ορισμός 3.2.2. Η **συμπαγοποίηση Stone-Cěch** (S-C) ενός τοπολογικού χώρου X, είναι μία εμφύτευση $i : X \to \beta X$, όπου ο χώρος βX είναι συμπαγής και $Hausdorff$, με την εξής ιδιότητα: Για κάθε χώρο K συμπαγή, $Hausdroff$ και για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to K$, υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $\beta f : \beta X \to K$, τέτοια ώστε $\beta f \circ i = f$.
Θα αναφερόμαστε στην παραπάνω ιδιότητα του βX ως Ιδιότητα Συνεχούς Επέκτασης και για συντομία θα γράφουμε ΙΣΕ.

Παρατήρηση 3.2. Από αυτό το σημείο και έπειτα θα συμβολίζουμε με βX τη *Stone-Cěch* συμπαγοποίηση του χώρου X.

Αν ταυτίσουμε τον X με την εικόνα του $i(X)$, θα μπορούσαμε να δούμε τη συνάρτηση βf ως τη μοναδική συνεχή επέκταση της f σε όλο τον βX, δηλαδή $\beta f|_{i(X)} = f$ ή ισοδύναμα τη σύνεχή επέκταση της $f \circ i^{-1} : i(X) \to K$. Σχηματικά, για οποιονδήποτε συμπαγή χώρο $Hausdorff$ και για οποιαδήποτε $f \in \mathcal{C}(X, K)$, δημιουργείται ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα της παρακάτω μορφής.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Θεωρώντας τώρα $(\hat{X}, h)$ μια συμπαγοποίηση του X, τότε από τα παραπάνω, υπάρχει μοναδική συνεχής $\beta h : \beta X \to \hat{X}$, έτσι ώστε $\beta h \circ i = h$. Με αυτό τον τρόπο οποιαδήποτε συμπαγοποίηση του X μπορεί να "προκύψει" από τον βX, γι αυτό το λόγο μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τον βX ως τη γενικότερη συμπαγοποίηση ενός χώρου.

Πριν συνεχίζουμε, υπενθυμίζουμε ότι η κατασκευή του βX θα γίνει στις επόμενες ενότητες και για την απόδειξη των παρακάτω χρησιμοποιούμε απλά τον ορισμό 3.2.1 θέλοντας να δείξουμε τις συνέπειες της ιδιότητας συνεχούς επέκτασης της S-C συμπαγοποίησης.

Θεώρημα 3.2.1 (Stone-Čech). *Έστω X τοπολογικός χώρος $T_{3\frac{1}{2}}$ και $(\beta X, i)$ η S-C συμπαγοποίηση του X. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) Ο $i(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του βX.

(ii) Κάθε συμπαγοποίηση $(\hat{X}, h)$ του X για την οποία ισχύει η ΙΣΕ είναι ομοιομορφική με τον βX.

(iii) Για κάθε συμπαγοποίηση $(\hat{X}, h)$ του X υπάρχει συνάρτηση $\beta h : \beta X \to \hat{X}$, συνεχής και επί.

Απόδειξη. (i) Αρχικά, ο βX είναι συμπαγής και $Hausdorff$ άρα είναι T_4. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι $\overline{i(X)} \subsetneq \beta X$, και άρα υπάρχει $z \in \beta X$, με $z \notin \overline{i(X)}$. Επομένως υπάρχει συνέχης $\hat{f} : \beta X \to [0, 1]$ τ.ω. $\hat{f}(\overline{i(X)}) = \{0\}$ και $\hat{f}(z) = 1$. Αν $f : X \to [0, 1]$, με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, εύκολα επαλυθεύουμε ότι η $\beta f : \beta X \to [0, 1]$, με $\beta f(z) = 0$ για όλα τα $z \in \beta X$ είναι συνεχής επέκταση της f σε όλο τον βX, όμως και η $\hat{f}$ είναι συνέχης επέκταση της f, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη μοναδικότητα της ΙΣΕ. Επομένως $\beta X \subseteq \overline{i(X)}$, και άρα το $i(X)$ είναι πυκνο.

(ii) Έστω $(\hat{X}, h)$ μια συμπαγοποίηση για την οποία ισχύει η ΙΣΕ. Εχουμε λοιπόν ότι υπαρχουν συναρτήσεις $\beta h : \beta X \to \hat{X}$, $\hat{h} : \hat{X} \to \beta X$, συνεχείς, έτσι ώστε,

$$\beta h \circ i = h \text{ και } \hat{h} \circ h = i. \quad (1)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $z \in i(X) \subseteq \beta X$, $z = i(x)$, τότε

$$\begin{aligned}(\hat{h} \circ \beta h)|_{i(X)}(z) =& (\hat{h} \circ \beta h)(i(x)) \\ =& ((\hat{h} \circ \beta h) \circ i)(x) \\ =& (\hat{h} \circ (\beta h \circ i))(x) \quad (1) \\ =& (\hat{h} \circ h)(x) \\ =& i(x) = z.\end{aligned}$$

Άρα αν $id_{i(X)}$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση στον $i(X)$, από το παραπάνω έπεται ότι $\hat{h} \circ \beta h|_{i(X)} = id_{i(X)}$. Με ανάλογο τρόπο, βασιζόμενοι στην (1) δείχνουμε ότι $\beta h \circ \hat{h}|_{h(X)} = id_{h(X)}$. Επειδή όμως τα $i(X)$, $h(X)$ είναι πυκνοί υπόχωροι των βX και $\hat{X}$ αντίστοιχα οι οποίοι είναι $Hausdorff$, έχουμε ότι

$$\hat{h} \circ \beta h = id_{\beta X} \text{ και } \beta h \circ \hat{h} = id_{\hat{X}}. \quad (2)$$

Θα δείξουμε $\beta h = \hat{h}^{-1}$. Πρώτον, η βh είναι 1-1, αφου αν $x_1, x_2 \in \beta X$ τότε,

$$\begin{aligned}\beta h(x_1) = \beta h(x_2) &\Rightarrow \hat{h}(\beta h(x_1)) = \hat{h}(\beta h(x_2)) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2,\end{aligned}$$

λόγω της (2). Επίσης είναι επί του $\hat{X}$, καθώς αν $y \in \hat{X}$, τότε για $x = \hat{h}(y)$, από τη (2) έχουμε ότι $\beta h(x) = \beta h(\hat{h}(y)) = y$. Άρα, πάλι από τη (2) έχουμε ότι πράγματι $\beta h = \hat{h}^{-1}$. Είναι εύκολο να δείξουμε τώρα ότι η $\beta h : \beta X \to \hat{X}$ είναι ομοιομορφισμός και άρα $\beta X \simeq \hat{X}$.

(iii) Αν $(\hat{X}, h)$ είναι μια συμπαγοποίηση του X, τότε από την ΙΣΕ έχουμε ότι υπάρχει συνεχής $\beta h : \beta X \to \hat{X}$, τ.ω. $\beta h \circ i = h$. Θα δείξουμε ότι η βh είναι επί του $\hat{X}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι το $\beta h(\beta X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\hat{X}$, και αφου ο $\hat{X}$ είναι $Hausdorff$ είναι και κλειστό. Άρα έχουμε ότι,

$$h(X) = (\beta h \circ i)(X) = \beta h(i(X)) \subseteq \beta h(\beta X),$$

όμως $\hat{X} = \overline{h(X)} = \beta h(\beta X)$, και συνεπώς η βh είναι επί. $\diamond$

Αξίζει να σημειωθεί, ότι όλα τα παραπάνω αποδείχθηκαν βασιζόμενοι ουσιαστικά μόνο στην ΙΣΕ της S-C συμπαγοποίησης. Από το (ii) του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε τη μοναδικότητα της S-C συμπαγοποίησης ενώ απο το (iii) βλέπουμε τον "μεγιστικό" της χαρακτήρα. Θα μπορούσαμε μάλιστα να ορίσουμε μια σχέση διάταξης "$\leq$" πάνω σε όλες τις συμπαγοποιήσεις ένος χώρου X, ως εξής:

$(\hat{X}_1, h_1) \leq (\hat{X}_2, h_2)$ ανν υπάρχει συνάρτηση $h : \hat{X}_2 \to \hat{X}_1$, συνεχής και επί τ.ω. $h \circ h_2 = h_1$.

Τότε λόγω της ΙΣΕ και του (iii) θα είχαμε ότι για κάθε $Hausdorff$ συμπαγοποίηση του X,

$$(\hat{X}, h) \leq (\beta X, i),$$

και λόγω του (ii),

$$(\beta X, i) \leq (\hat{X}, h) \Rightarrow \beta X \simeq \hat{X},$$

το οποίο φανερώνει την "μεγιστική" ιδιότητα του βX.

Παράδειγμα 3.1. Θεωρούμε ως $X = (0,1)$ με τη συνήθη μετρική τοπολογία του $\mathbb{R}$ και $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||x-y||_2 = 1\}$, η μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^2$, όπου $||\cdot||_2$ είναι η ευκλείδια νόρμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : (0,1) \to S^1$ με τύπο,

$$h(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το ζευγάρι (S^1, h) είναι μια συμπαγοποίηση του $(0,1)$. Αν θεωρήσουμε όμως την ταυτοτική συνάρτηση $id : (0,1) \to [0,1]$, $x \mapsto x$, τότε η id δεν έχει συνεχή επέκταση στην S^1. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

$$\lim_{x \to 0^+} id = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 1^-} id$$

και άρα δε γίνεται να υπάρχει συνεχής $\hat{f} : S^1 \to [0,1]$ τ.ω.

$$\lim_{(x,y) \searrow (1,0)} \hat{f} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y) \nearrow (1,0)} \hat{f} = 1,$$

όπου στο πρώτο όριο προσεγγίζουμε το (1,0) με την ορολογιακή φορά πάνω στην S^1 ένω στο δεύτερο με την αντίθετη φορά.

Δώσαμε το προηγούμενο παράδειγμα για να τονίσουμε ότι η ΙΣΕ δεν ισχύει πάντα για μια οποιαδήποτε συμπαγοποίηση, ακόμα και σε μια τόσο απλή περίπτωση όπως της ταυτοτικής συνάρτησης.

3.3 Ο Χώρος βX. Διακριτή Περίπτωση

Θα ξεκινήσουμε, σε αυτή την ενότητα να κατασκευάζουμε τη $(\beta X, i)$ συμπαγοποίηση *Stone-Cěch* για ένα χώρο X, εφοδιασμένο με τη διακρίτη τοπολογία. Ο λόγος για τον οποίο κατασκευάζουμε τον βX πρώτα για τη διακριτή περίπτωση είναι δίοτι θα μας είναι απαραίτητη για τη γενίκευση της κατασκευής του βX για οποιαδήποτε τοπολογία $\mathcal{T}$ (για την οποία ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ φυσικά). Θα ορίσουμε αρχικά ποιά θα είναι τα στοιχεία του βX, έπειτα μια τοπολογία στο βX και μετα τη συνάρτηση $i : X \to \beta X$, για την οποία $X \simeq i(X)$, αποδεικνύοντας τελικά ότι το ζευγάρι $(\beta X, i)$ είναι πράγματι η *S-C* συμπαγοποίηση του X.

Ορισμός 3.3.1. Έστω μη κενό σύνολο X. Ορίζουμε βX να είναι το σύνολο όλων των υπερφίλτρων στο X, δηλαδή

$$\beta X = \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{U} : \text{υπερφίλτρο}\}.$$

Για έμας λοιπόν ο συμπαγής *Hausdorff* χώρος μεσα στον οποίο θα δούμε ένα αντίγραφο του X θα είναι το σύνολο όλων των υπερφίλτρων στο X. Θα πρέπει να ορίσουμε όμως μια τοπολογία στο βX και να αποδείξουμε ότι έχει πράγματι τις ιδιότητες που θέλουμε. Ξεκινάμε λοιπόν με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.3.2. Έστω X μη κενό σύνολο και βX το σύνολο όλων των υπερφίλτρων στο X. Για $A \subseteq X$ ορίζουμε το $\langle A \rangle \subseteq \beta X$ ως,

$$\langle A \rangle = \{\mathcal{U} \in \beta X \mid A \in \mathcal{U}\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{\langle A \rangle \mid A \subseteq X\},$$

είναι βάση για μια τοπολογία στον βX. Πριν από αυτό όμως θα αποδείξουμε κάποιες ίδιότητες της απεικόνισης $\langle \cdot \rangle : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(\beta X)$, $A \mapsto \langle A \rangle$, που θα μας χρησιμεύσουν αργότερα.

Πρόταση 3.3.1. *Η απεικόνιση $\langle \cdot \rangle : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(\beta X)$ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες.*

(i) $\langle \emptyset \rangle = \emptyset$ *και* $\langle X \rangle = \beta X$.

(ii) *Αν* $A \subseteq B$ *τότε* $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$.

(iii) $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle \cup \langle B \rangle$ *και* $\langle A \cap B \rangle = \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$.

(iv) $\langle X \backslash A\rangle = \beta X \backslash \langle A\rangle$.

(v) *Η* $\langle\cdot\rangle$ *είναι 1-1.*

Απόδειξη. (i) Αν $\mathcal{U} \in \beta X$, τότε $\emptyset \notin \mathcal{U}$ και συνεπώς $\langle\emptyset\rangle = \emptyset$, και αντίστοιχα αφου $X \in \mathcal{U}$ για όλα τα $\mathcal{U}$ έπεται ότι $\langle X\rangle = \beta X$.

(ii) Αν $\mathcal{V} \in \langle A\rangle$, τότε $A \in \mathcal{V}$, και αν $A \subseteq B$ τότε και $B \in \mathcal{V}$ αφού το $\mathcal{V}$ είναι υπερφίλτρο, άρα $\mathcal{V} \in \langle B\rangle$, δηλαδή $\langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$.

(iii) Αν $\mathcal{V} \in \langle A \cup B\rangle$, τότε $A \cup B \in \mathcal{V}$, και αφού το $\mathcal{V}$ είναι υπερφίλτρο θα είναι είτε $A \in \mathcal{V}$, είτε $B \in \mathcal{V}$. Και στις δυό περιπτώσεις $\mathcal{V} \in \langle A\rangle \cup \langle B\rangle$, επομένως

$$\langle A \cup B\rangle \subseteq \langle A\rangle \cup \langle B\rangle.$$

Αν τώρα $\mathcal{V} \in \langle A\rangle \cup \langle B\rangle$, χ.β.γ. υποθέτουμε ότι $\mathcal{V} \in \langle A\rangle$, άρα $A \in \mathcal{V}$ και αφού $A \subseteq A \cup B$, έπεται ότι $A \cup B \in \mathcal{V}$, συνεπώς $\mathcal{V} \in \langle A \cup B\rangle$, άρα

$$\langle A\rangle \cup \langle B\rangle \subseteq \langle A \cup B\rangle,$$

και καταλήγουμε ότι $\langle A \cup B\rangle = \langle A\rangle \cup \langle B\rangle$. Η αντίστοιχη ιδιότητα για τις τομές αποδεικνύεται ανάλογα.

(iv) Έστω $\mathcal{V} \in \langle X \backslash A\rangle$, τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} \in \langle X \backslash A\rangle &\iff X \backslash A \in \mathcal{V} \\
&\iff A \notin \mathcal{V} \\
&\iff \mathcal{V} \notin \langle A\rangle \\
&\iff \mathcal{V} \in \beta X \backslash \langle A\rangle,
\end{aligned}$$

άρα $\langle X \backslash A\rangle = \beta X \backslash \langle A\rangle$.

(v) Έστω $A, B \subseteq X$, με $A \neq B$. Επιλέγουμε $x \in A$, τ.ω. $x \notin B$ (είτε το ανάποδο), και παρατηρούμε ότι το κύριο υπερφίλτρο στο x, $\mathcal{F}_x \in \langle A\rangle$. Όμως αφου $x \notin B$, έπεται ότι $B \notin \mathcal{F}_x$, άρα $\mathcal{F}_x \notin \langle B\rangle$, επομένως $\langle A\rangle \neq \langle B\rangle$. Άρα η απεικόνιση $\langle\cdot\rangle$ είναι 1-1. $\diamond$

Πρόταση 3.3.2. *Η οικογένεια* $\mathcal{B} = \{\langle A\rangle \mid A \subseteq X\}$ *αποτελεί βάση για μια τοπολογία στο* βX.

Απόδειξη. Για να έχουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία στο βX, αρκει να δείξουμε ότι $\bigcup \mathcal{B} = \beta X$ και αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, τότε υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$, τ.ω. $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Αρχικά είναι προφανές ότι $\bigcup \mathcal{B} = \beta X$, αφού $\beta X = \langle X \rangle \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Αν τώρα $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, τότε $B_1 = \langle A_1 \rangle$ και $B_2 = \langle A_2 \rangle$, για κάποια $A_1, A_2 \subseteq X$. Απο την Πρόταση 3.3.1 αν $A_3 = A_1 \cap A_2$, έχουμε

$$\langle A_3 \rangle = \langle A_1 \cap A_2 \rangle = \langle A_1 \rangle \cap \langle A_2 \rangle = B_1 \cap B_2,$$

άρα αν $B_3 = \langle A_3 \rangle$ το οποίο είναι στοιχείο της $\mathcal{B}$, έχουμε το ζητούμενο. $\diamond$

Παρατήρηση 3.3. Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε το βX εφοδιασμένο με την τοπολογία που έχει ως βάση την οικογένεια $\mathcal{B}$. Δηλαδή ένα $U \subseteq \beta X$ θα είναι ανοικτό αν και μόνο αν υπάρχει $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ τ.ω. $U = \bigcup_{i \in I} \langle A_i \rangle$.

Πριν συνεχίσουμε, θα πούμε λίγα λόγια για το πώς προκύπτει η συγκεκριμμένη τοπολογία στο βX. Ας θεωρήσουμε ένα μη κενό σύνολο I, για το οποίο θέλουμε να εφοδίασουμε το δύναμοσύνολο του $\mathcal{P}(I)$ με μία τοπολογία, και τον διακριτό χώρο $\{0,1\}$. Αν τώρα $\{0,1\}^I$ είναι ο χώρος γινόμενο, τότε τα βασικά ανοικτά στον σε αυτόν θα είναι της μορφής

$$\{(x_i)_{i \in I} \in \{0,1\}^I \mid x_{i_0}, \ldots, x_{i_n} = 0, x_{k_0}, \ldots, x_{k_m} = 1\},$$

για όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα $\{i_j\}_{j=0}^n, \{k_l\}_{l=0}^m$ του I. Ως γνωστόν, υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στα υποσύνολα του I και το στοιχεία του $\{0,1\}^I$, στέλνοντας το $A \subseteq I$ στην χαρακτηριστική του συνάρτηση χ_A, η οποία μεταφέρει την τοπολογία του $\{0,1\}^I$ στον $\mathcal{P}(I)$. Έτσι είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι τα βασικά ανοικτά στον $\mathcal{P}(I)$ θα είναι της μορφής

$$\{S \in \mathcal{P}(I) \mid i_0, \ldots, i_n \notin S, k_0, \ldots, k_m \in S\},$$

πάλι για όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα $\{i_j\}_{j=0}^n, \{k_l\}_{l=0}^m$ του I. Τώρα αν $I = \mathcal{P}(X)$, χρησιμοποιώντας αυτή τη λογίκη και τις ιδιότητες που έχουν τα υπεφίλτρα μπορούμε να δείξουμε ότι τα βασικά ανοικτά στον $\beta X \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ θα είναι ακριβώς άυτα που ορίσαμε στην Πρόταση 3.3.2.

Παρατήρηση 3.4. Παρατηρούμε ότι αφού $\langle X \backslash A \rangle = \beta X \backslash \langle A \rangle$, τα στοιχεία της $\mathcal{B}$ είναι και κλειστά, συνεπώς είναι ανοικτά-κλειστά. Επομένως έχουμε ότι ο βX είναι ολικά μη συνεκτικός, δηλαδή τα μόνα συνεκτικά "κομμάτια" του βX είναι το $\emptyset$ και τα μονοσύνολα. Μάλιστα ισχύει το παρακάτω.

Πρόταση 3.3.3. *Έστω $C \subseteq \beta X$. Το C είναι ανοικτό-κλειστό αν και μόνο αν $C = \langle A \rangle$ για κάποιο $A \subseteq X$.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο την ευθεία κατεύθυνση καθώς η άλλη είναι προφανής. Θα χρησιμοποιήσουμε τη συμπάγεια του βX την οποία όμως θα αποδείξουμε παρακάτω. Έστω $C \subseteq \beta X$ ανοικτό-κλειστό, τότε $C = \bigcup_{i\in I}\langle A_i\rangle$. Αφού το C είναι κλειστό από τη συμπάγεια του βX έχουμε ότι είναι συμπαγές και ότι η οικογένεια $\{\langle A_i\rangle\}_{i\in I}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα για το C. Άρα υπάρχουν $i_0, \ldots, i_k \in I$ τ.ω. $C = \bigcup_{j=0}^{k}\langle A_{i_j}\rangle$, από την Πρόταση 3.3.1 (iii) έχουμε ότι $C = \langle A\rangle$, όπου $A = \bigcup_{j=0}^{k} A_{i_j}$. $\diamond$

Έχοντας τώρα μια τοπολογία στο βX, είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε ότι αν X είναι ένας διακριτός χώρος, τότε ο βX είναι η S-C συμπαγοποίηση του. Ξεκινάμε με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.3.4. *Ο χώρος βX είναι συμπαγής και $Hausdorff$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι είναι $Hausdorff$. Έστω $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta X$, με $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, και $A \subseteq X$ τ.ω. $A \in \mathcal{U}$ και $A \notin \mathcal{V}$. Αφού το $\mathcal{V}$ είναι υπερφίλτρο έπεται ότι $X\backslash A \in \mathcal{V}$ και αφού

$$\langle A\rangle \cap \langle X\backslash A\rangle = \langle A\rangle \cap (\beta X\backslash\langle A\rangle) = \emptyset,$$

έχουμε ότι τα $\langle A\rangle, \langle X\backslash A\rangle$ είναι ανοικτές και ξένες μεταξύ τους περιοχές των $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ αντίστοιχα, άρα ο βX είναι $Hausdorff$.

Για να δείξουμε ότι είναι συμπαγής δείχνουμε πρώτα ότι αν $\{\langle F_i\rangle\}_{i\in I}$ οικογένεια βασικών κλειστών με την ΙΠΤ τότε υπάρχει $\mathcal{U} \in \bigcap_{i\in I}\langle F_i\rangle$. Έστω λοιπόν ότι η $\{\langle F_i\rangle\}_{i\in I}$ έχει την ΙΠΤ, έχουμε από την Πρόταση 3.3.1 ότι

$$\langle F_{i_0}\rangle \cap \cdots \cap \langle F_{i_n}\rangle = \langle F_{i_0} \cap \cdots \cap F_{i_n}\rangle,$$

και άρα η οικογένεια $\{\langle F_i\rangle\}_{i\in I}$ έχει την ΙΠΤ αν και μόνο αν η οικογένεια $\{F_i\}_{i\in I}$ έχει την ΙΠΤ. Από όσα είδαμε στην παράγραφο 2.1, υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ τ.ω. $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{U}$, και έτσι προκύπτει ότι $\mathcal{U} \in \bigcap_{i\in I}\langle F_i\rangle$.

Έχοντας το προηγούμενο, θεωρούμε τώρα $\{K_i\}_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών, μη κενών υποσυνόλων του βX με την ΙΠΤ. Από την Παρατήρηση 3.4 έχουμε ότι για κάθε $i \in I$ υπάρχει $B_i \subseteq \mathcal{P}(X)$, τ.ω.

$$K_i = \bigcap_{A\in B_i}\langle A\rangle.$$

Υποθέτουμε ότι,

$$\mathcal{C} = \{\langle A\rangle \mid A \in \bigcup_{i\in I} B_i\}$$

και ο ισχυρισμός μας είναι ότι η $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\beta X)$ έχει την ΙΠΤ. Πράγματι, για οποιοδήποτε n το πλήθος στοιχεία της $\mathcal{C}$, έστω $\langle A_{i_1}\rangle, \langle A_{i_2}\rangle, \ldots, \langle A_{i_n}\rangle$, έχουμε ότι

$$\emptyset \neq \bigcap_{j=1}^{n} K_{i_j} \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \langle A_{i_j}\rangle,$$

αφού $K_i \subseteq \langle A\rangle$ για όλα τα $A \in B_i$ και για όλα τα $i \in I$. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι $\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{i\in I} K_i$. Εφόσον η $\mathcal{C}$ είναι οικογένεια βασικών κλειστών με την ΙΠΤ, έχουμε ότι υπάρχει $\mathcal{U} \in \bigcap \mathcal{C}$, άρα $\mathcal{U} \in \bigcap_{i\in I} K_i$ και συνεπώς ο βX συμπαγής. ◇

Ας παρατηρήσουμε ότι αν ο χώρος X που μελεταμε είναι άπειρος, τότε ο βX δεν είναι διακριτός, διότι δεν θα μπορουσε να είναι συμπαγής σε αυτή την περίπτωση. Αν όμως ο X είναι πεπερασμένος τότε είναι εύκολο να δούμε ότι ο βX είναι διακριτός, και όπως θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ουσιαστικά οι δυο χώροι είναι ομοιομορφικοί. Είμαστε έτοιμοι να ορισούμε τώρα την $i : X \to \beta X$ και να αποδείξουμε ότι το ζευγάρι $(\beta X, i)$ είναι η S-C συμπαγοποίηση ενός διακριτού χώρου X.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω διακριτός τοπολογικός χώρος X, ορίζουμε τη συνάρτηση $i : X \to \beta X$ με τύπο $x \mapsto i(x) = \mathcal{F}_x$. Τότε το ζευγάρι $(\beta X, i)$ είναι η $Stone - \check{C}ech$ συμπαγοποίηση του X.*

Απόδειξη. Αρχικά από την Πρόταση 3.3.4 έχουμε ότι ο βX είναι συμπαγής και $Hausdorff$.

Βήμα 1: Δείχνουμε ότι η σύναρτηση $i : X \to \beta X$ είναι ομοιομορφική εμφύτευση του X. Κατ'αρχάς, εφόσον ο X είναι διακριτός η i είναι συνεχής. Επίσης είναι 1-1, αφού αν $x_1 \neq x_2$ τότε $\mathcal{F}_{x_1} \neq \mathcal{F}_{x_2}$. Θα δείξουμε ότι είναι και ανοικτή. Έστω μη κενό $A \subseteq X$, θα δείξουμε ότι το $i(A) \subseteq i(X)$ είναι ανοικτό στον $i(X)$. Επειδή

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \in i(A) &\iff \exists\, x \in A,\, \mathcal{U} = \mathcal{F}_x \\ &\iff \mathcal{U} \in i(X) \;\&\; A \in \mathcal{U} \\ &\iff \mathcal{U} \in i(X) \cap \langle A\rangle \end{aligned}$$

έχουμε ότι $i(A) = i(X) \cap \langle A\rangle$ και έτσι το $i(A)$ είναι ανοικτό στον $i(X)$. Άρα $X \simeq i(X)$.

Βήμα 2: Δείχνουμε ότι ο $i(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του βX. Αρκεί να δείξουμε ότι τέμνει κάθε βασικό ανοικτό. Έστω λοιπόν $\langle A\rangle$, για κάποιο μη κενό $A \subseteq X$. Τότε για οποιοδήποτε $x \in A$ έχουμε ότι $i(x) = \mathcal{F}_x \in \langle A\rangle$ και άρα $\mathcal{F}_x \in i(X) \cap \langle A\rangle$. Επόμενως $\overline{i(X)} = \beta X$.

Βήμα 3: Μένει να δείξουμε ότι η $(\beta X, i)$ ικανοποιεί την ιδιότητα συνεχούς επέκτασης. Γι'αυτό το λόγο θεώρουμε K έναν συμπαγή, $Hausdorff$ χώρο και μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to K$ (αφού ο X είναι διακριτός, ουσιαστικά μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε $f \in K^X$). Αρχικά θα κατασκευάσουμε τη συνάρτηση $\beta f : \beta X \to K$, για την οποία ισχύει $\beta f \circ i = f$. Εφόσον ο K είναι συμπαγής και $Hausdorff$ έχουμε ότι κάθε υπερφίλτρο στον K συγκλίνει σε ακριβώς ένα σημείο. Έχοντας αυτό, ορίζουμε για $\mathcal{U} \in \beta X$,

$$\beta f(\mathcal{U}) = \lim f * \mathcal{U}, \quad (1)$$

η οποία είναι μια καλώς ορισμένη συνάρτηση $\beta f : \beta X \to K$, αφού το $f * \mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο στον K. Δείχνουμε τώρα ότι $\beta f \circ i = f$. Έστω $x \in X$, τότε έχουμε ότι

$$\beta f(i(x)) = \beta f(\mathcal{F}_x) = \lim f * \mathcal{F}_x, \quad (2)$$

όμως αφού η f συνέχης και $\mathcal{F}_x \to x$, έπεται ότι $f * \mathcal{F}_x \to f(x)$ και από τη (2) τώρα $\beta f(i(x)) = f(x)$, επομένως $\beta f \circ i = f$. Έχει απομείνει μόνο δείξουμε ότι η βf είναι συνεχής. Έστω $\mathcal{U} \in \beta X$ και $V \subseteq K$ μια ανοικτή περιοχή του $\beta f(\mathcal{U})$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει βασικό ανοικτό $\langle U\rangle$ τ.ω.

$$\mathcal{U} \in \langle U\rangle \subseteq \beta f^{-1}(V).$$

Επειδή ο K είναι T_3 αφού είναι συμπαγής και $Hausdorff$, έχουμε ότι υπάρχει $W \subseteq K$ ανοικτό τ.ω.

$$\beta f(\mathcal{U}) \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V. \quad (3)$$

Θέτουμε $U = f^{-1}(W) \subseteq X$ το οποίο είναι ανοικτό, και αφού

$$\lim f * \mathcal{U} = \beta f(\mathcal{U}) \in W$$

έπεται από πρόταση της ενότητας 2.2 ότι $W \in f * \mathcal{U}$, δηλαδή $f^{-1}(W) \in \mathcal{U}$ και άρα $\mathcal{U} \in \langle U\rangle = \langle f^{-1}(W)\rangle$. Για να δείξουμε ότι $\beta f(\langle U\rangle) \subseteq V$, απο την (3) αρκεί να δείξουμε ότι $\beta f(\langle U\rangle) \subseteq \overline{W}$. Πρός απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχει $\mathcal{Y} \in \langle U\rangle$ με $\beta f(\mathcal{Y}) \in K \backslash \overline{W}$. Με τον ίδιο συλλογισμο όπως και παραπάνω αφού το $K\backslash\overline{W}$ είναι ανοικτό και $\beta f(\mathcal{Y}) = \lim f * \mathcal{Y}$, έχουμε ότι $f^{-1}(K\backslash\overline{W}) \in \mathcal{Y}$. Συνολικά λοιπόν έχουμε ότι $f^{-1}(W), f^{-1}(K\backslash\overline{W}) \in \mathcal{Y}$, από το οποίο προκύπτει ότι,

$$f^{-1}(W) \cap f^{-1}(K\backslash\overline{W}) = f^{-1}(W \cap K\backslash\overline{W}) = \emptyset \in \mathcal{Y}$$

αφου $W \cap K\backslash\overline{W} = \emptyset$. Καταλήξαμε λοιπόν ότι υπάρχει $\mathcal{Y} \in \beta X$ με $\emptyset \in \mathcal{Y}$ το οποίο είναι φυσικά άτοπο, άρα $\beta f(\langle U\rangle) \subseteq \overline{W}$. Συνοψίζοντας από την (3) έχουμε ότι $\beta f(\langle U\rangle) \subseteq V$, επομένως

$$\langle U\rangle \subseteq \beta f^{-1}(\beta f(\langle U\rangle)) \subseteq \beta f^{-1}(V),$$

το οποίο αποδεικνύει τη συνέχεια της βf. Τέλος η μοναδικότητα της βf προκύπτει από το γεγονός ότι το $i(X)$ είναι πυκνό υποσύνολο του βX και ο K είναι $Hausdorff$. ◇

Πόρισμα 3.3.1. *Έστω μη κενό σύνολο X και K συμπαγής χώρος $Hausdroff$. Τότε για κάθε $f \in K^X$ υπάρχει μοναδική συνεχής $\beta f : \beta X \to K$ η οποία επεκτείνει την f.*

Παρατήρηση 3.5. Έχοντας τώρα την εμφύτευση $i : X \to \beta X$, $x \to \mathcal{F}_x$ και αν θυμηθούμε ότι σε ένα πεπερασμένο σύνολο X όλα τα υπερφίλτρα είναι κύρια, τότε ο πεπερασμένος διακριτός χώρος X είναι συμπαγής και είναι ομοιομορφικός με τον βX. Στην περίπτωση όμως που ο X είναι άπειρος, λόγω της ύπαρξης μη κύριων υπερφίλτρων όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, έχουμε ότι $i(X) \subsetneq \beta X$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε επίσης ότι τα μόνα μεμονωμένα σημεία του βX είναι ακριβώς τα κύρια υπερφίλτρα.

Τέλος θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε το γεγονός ότι το $i(X)$ είναι πυκνό στον βX με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.3.5. *Έστω $A \subseteq X$, τότε ισχύει ότι $\langle A\rangle = \overline{i(A)}$.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq X$ μη κενό. Θα δείξουμε ότι $\langle A\rangle \subseteq \overline{i(A)}$. Έστω $\mathcal{U} \in \langle A\rangle$ και $V \subseteq X$ τ.ω. $\mathcal{U} \in \langle V\rangle$. Είναι προφανές ότι θα πρέπει $V \cap A \neq \emptyset$, συνεπώς για $x \in V \cap A$, έχουμε ότι $\mathcal{F}_x \in \langle V\rangle \cap i(A)$, από το οποίο έπεται ότι $\langle V\rangle \cap i(A) \neq \emptyset$ και άρα $\mathcal{U} \in \overline{i(A)}$, δηλαδή $\langle A\rangle \subseteq \overline{i(A)}$. Αφού τέλος το $\langle A\rangle$ είναι και κλειστό θα πρέπει $\langle A\rangle = \overline{i(A)}$. ◇

Αν ταυτίζαμε λοιπόν τον X με την εικόνα του $i(X)$ μέσα στον βX θα είχαμε ότι για κάθε $A \subseteq X$, $\langle A\rangle = \overline{A}^{\beta X}$.

3.4 Ο Χώρος βX. Γενική Περίπτωση

Έχοντας κατασκευάσει την S-C συμπαγοποίηση του X στη διακριτή περίπτωση, είμαστε έτοιμοι να περάσουμε στη γενικότερη περίπτωση όπου ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος $T_{3\frac{1}{2}}$. Η κατασκευή δε θα μπορούσε να γενικευθεί άμμεσα αφού η σύναρτηση $i : X \to \beta X$, $x \mapsto i(x) = \mathcal{F}_x$ δεν είναι απαραίτητα συνεχής στη μη διακριτή περίπτωση. Παρ'όλα αυτά η κατασκευή που κάναμε στην ενότητα 3.3 θα παίξει ουσιαστικό ρόλο για τη γενικότερη κατασκευή.

Πριν ξεκινήσουμε θα κάνουμε μερικές συμβάσεις τις οποίες θα χρησιμοποίησουμε παρακάτω. Έστω μη κενό σύνολο X, από αυτό το σημείο και για το υπόλοιπο αυτής της ενότητας, θα συμβολίζουμε με X_δ τον διακριτο χώρο $(X, \mathcal{P}(X))$, και με X τον $T_3\frac{1}{2}$ χώρο $(X, \mathcal{T})$ του οποίου θέλουμε να κατασκευάσουμε τη S-C συμπαγοποίηση. Επίσης το ζεύγος $(\beta X_\delta, i_\delta)$ θα είναι η S-C συμπαγοποίηση του X_δ, όπως την είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, id_δ θα είναι η ταυτοτική συνάρτηση $id_\delta : X_\delta \to X$ και για οποιαδήποτε συνάρτηση $f : X \to Y$, σε κάποιον τοπολογικό χώρο Y, f_δ θα είναι η $f_\delta = f \circ id_\delta : X_\delta \to Y$.

Αρχικά θα ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας "$\sim$" πάνω στα στοιχεία του βX_δ. Πριν από αυτό όμως ας παρατηρήσουμε ότι αν K είναι ένας συμπαγής και $Hausdroff$ χώρος και $f : X \to K$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει μοναδική συνεχής $\beta f_\delta : \beta X_\delta \to K$, τ.ω. $\beta f_\delta \circ i_\delta = f_\delta$ (η f_δ είναι συνεχής αφού είναι ορισμένη στον διακριτό χώρο X_δ). Σχηματικά μπορούμε να δούμε το προηγούμενα με το παρακάτω διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
X_\delta \arrow[r, "i_\delta"] \arrow[d, "id_\delta"'] \arrow[dr, "f_\delta"] & \beta X_\delta \arrow[d, "\beta f_\delta"] \\
X \arrow[r, "f"'] & K
\end{tikzcd}$$

Λόγω της Ιδιότητας Συνεχούς Επέκτασης που έχει ο βX_δ, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, έχουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν για οποιονδήποτε συμπαγή, $Hausdorff$ χώρο K και για οποιαδήποτε $f \in \mathcal{C}(X, K)$.

Με βάση τα παραπάνω σχόλια μπορούμε να δώσουμε τώρα τον ορισμό της σχέσης ισοδυναμίας "$\sim$" στον βX_δ. Υπενθυμίζουμε ότι με $\mathcal{C}_X$ συμβολίζουμε το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από τον X στο $[0, 1]$.

Ορισμός 3.4.1. Ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας "$\sim$" στον βX_δ ως εξής:

$$\mathcal{U} \sim \mathcal{V} \iff \lim f * \mathcal{U} = \lim f * \mathcal{V},\ \forall\ f \in \mathcal{C}_X.$$

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η παραπάνω σχέση είναι πράγματι μια σχέση ισοδυναμίας στον βX_δ, και με $[\mathcal{U}]$ θα συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του $\mathcal{U}$, δηλαδή

$$[\mathcal{U}] = \{\mathcal{V} \in \beta X_\delta \mid \mathcal{U} \sim \mathcal{V}\}.$$

Επομένως δύο υπερφίλτρα στον X θα είναι ισοδύναμα αν δεν μπορούν να "διαχωριστούν" από καμία συνεχή συνάρτηση $f : X \to [0,1]$. Με αυτή τη σχέση ισοδυναμίας θα ορίσουμε τον βX στη γενική περίπτωση.

Ορισμός 3.4.2. Έστω X τοπολογικός χώρος $T_{3\frac{1}{2}}$. Ορίζουμε βX τον χώρο πηλίκο της "$\sim$", δηλαδη

$$\beta X = \beta X_\delta / \sim = \{[\mathcal{U}] \mid \mathcal{U} \in \beta X_\delta\}.$$

Επίσης με $\pi : \beta X_\delta \to \beta X$, θα συμβολίζουμε τη συνάρτηση που απεικονίζει το $\mathcal{U}$ στην κλάση ισοδυναμίας του, $\mathcal{U} \mapsto \pi(\mathcal{U}) = [\mathcal{U}]$.

Παρατήρηση 3.6. Πριν συνεχίσουμε υπενθυμίζουμε ότι αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, "$\sim$" μια σχέση ισοδυναμίας στο X, $X/\sim$ ο χώρος πηλίκο και $\pi : X \to X/\sim$, $x \mapsto \pi(x) = [x]$, τότε ορίζεται κατα φυσιολογικό τρόπο η τοπολογία πηλίκο στον $X/\sim$, ως εξής:

$$U \subseteq X/\sim : \text{ανοικτό} \iff \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}.$$

Από εδώ και στο εξής θα θεώρουμε το βX εφοδιασμένο με την τοπολογία πηλίκο, δηλαδή το U ανοικτό στον βX αν και μόνο αν το $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον βX_δ.

Θεωρούμε τώρα έναν οποιοδήποτε συμπαγή χώρο $Hausdorff$ K και μια συνεχή $f : X \to K$. Αν $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ είναι δύο ισοδύναμα υπερφίλτρα στον X, τι μπορούμε να πούμε για τα όρια τους μέσα στον K μέσω της συνάρτησης f; Η απάντηση δίνεται με την πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 3.4.1. *Έστω X τοπολογικός χώρος $T_{3\frac{1}{2}}$, υπερφίλτρα $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ στον X τ.ω. $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$ και συνεχής $f : X \to K$, οπού K είναι συμπαγής χώρος $Hausdorff$. Τότε ισχύει ότι*

$$\lim f * \mathcal{U} = \lim f * \mathcal{V}.$$

Απόδειξη. Εφόσον ο K είναι συμπαγής και $Hausdorff$, έχουμε ότι είναι T_4 και από το Λήμμα $Urysohn$ είναι και $T_{3\frac{1}{2}}$. Από την Πρόταση 3.1.1 έχουμε ότι ο K είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του $[0,1]^I$, για κάποιο σύνολο I.

Έστω λοιπόν $h : K \to [0,1]^I$ αυτή η ομοιομορφική εμφύτευση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : X \to [0,1]^I$, $F = h \circ f$, η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Αν με π_i συμβολίσουμε την i-οστή συνάρτηση προβολής του $[0,1]^I$ στο $[0,1]$, από την F προκύπτει με φυσιολογικό τρόπο η οικογένεια συναρτήσεων $\{\phi_i\}_{i\in I}$, με $\phi_i : X \to [0,1]$, $\phi_i = \pi_i \circ F$.

Συνοψίζουμε την πορεία μας μέχρι στιγμής με το παρακάτω διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_i"'] \arrow[dr, "F"] & K \arrow[d, "h"] \\
{[0,1]} & {[0,1]^I} \arrow[l, "\pi_i"']
\end{tikzcd}$$

Είναι προφανές ότι για κάθε $i \in I$, η ϕ_i είναι συνεχής και συνεπώς $\{\phi_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{C}_X$. Από την υπόθεση μας ότι $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$ έχουμε τις εξής ισοδυναμίες,

$$\begin{aligned}
\forall\, i \in I,\ \lim \phi_i * \mathcal{U} = \lim \phi_i * \mathcal{V} &\iff \\
\forall\, i \in I,\ \lim \pi_i * (F * \mathcal{U}) = \lim \pi_i * (F * \mathcal{V}) &\iff \\
\lim F * \mathcal{U} = \lim F * \mathcal{V}, \quad (1)&
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από την Πρόταση 2.3.2. Από τη σχέση (1) και τον ορισμό της F έχουμε ότι, $\lim h * (f * \mathcal{U}) = \lim h * (f * \mathcal{V})$ και υποθέτουμε ότι το κοινό τους όριο είναι το $y_0 \in [0,1]^I$. Είναι εύκολο να δούμε ότι θα πρέπει $y_0 \in h(K)$ και άρα υπάρχει $x_0 \in K$ τ.ω. $y_0 = h(x_0)$.

Ο ισχυρισμός μας είναι ότι,

$$\lim f * \mathcal{U} = \lim f * \mathcal{V} = x_0.$$

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας θεωρούμε $U \subseteq K$ με $U \in \mathcal{N}(x_0)$. Εφόσον η $h^{-1} : h(K) \to K$ είναι συνεχής, υπάρχει $V \subseteq [0,1]^I$, $V \in \mathcal{N}(y_0)$ τ.ω. $h^{-1}(V \cap h(K)) \subseteq U$ και αφού η h είναι 1-1 έχουμε ότι

$$h^{-1}(V) \subseteq U. \quad (2)$$

Όμως, από το γεγονός ότι το y_0 είναι το κοινό όριο των $h*(f*\mathcal{U}), h*(f*\mathcal{V})$, έχουμε ότι,

$$h^{-1}(V) \in f * \mathcal{U} \quad \& \quad h^{-1}(V) \in f * \mathcal{V},$$

και από την σχέση (2) θα πρέπει $U \in f * \mathcal{U}$ και $U \in f * \mathcal{V}$. Τέλος αφού το U ήταν μια τυχαία περιοχή του x_0 συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{N}(x_0) \subseteq f * \mathcal{U} \quad \& \quad \mathcal{N}(x_0) \subseteq f * \mathcal{V},$$

από το οποίο προκύπτει άμμεσα το ζητούμενο. ◇

Παρατήρηση 3.7. Αν λοιπόν $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ είναι ισοδύναμα στον βX_δ τότε από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι για κάθε συμπαγή χώρο $Hausdorff$ K και για κάθε $f \in \mathcal{C}(X, K)$ ισχύει ότι

$$\beta f_\delta(\mathcal{U}) = \beta f_\delta(\mathcal{V}),$$

λόγω της κατασκευής της συνάρτησης βf_δ στο Θεώρημα 3.3.1.

Συνεχίζουμε με το παρακάτω σύντομο λήμμα.

Λήμμα 3.4.1. *Έστω $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικός χώρος X, σχέση ισοδυναμίας "$\sim$" στον βX_δ όπως στον Ορισμό 3.4.1 και συνεχής $f : X \to K$, όπου K συμπαγής και $Hausdorff$. Τότε υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $\beta f : \beta X \to K$ τ.ω.*

$$\beta f \circ \pi = \beta f_\delta.$$

Απόδειξη. Για $[\mathcal{U}] \in \beta X$ θέτουμε,

$$\beta f([\mathcal{U}]) = \beta f_\delta(\mathcal{U}).$$

Από τον ορισμό της σχέσης ισοδυναμίας στον βX_δ και την Πρόταση 3.4.1 έχουμε μια καλώς ορισμένη συνάρτηση $\beta f : \beta X \to K$, η μοναδικότητα της οποίας προκύπτει από το γεγονός ότι η π είναι επί του βX, και προφανως $\beta f \circ \pi = \beta f_\delta$.

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι η βf είναι συνεχής. Έστω $U \subseteq K$, ανοικτό. Θα δείξουμε ότι το $\beta f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον βX. Από τον ορισμό της τοπολογίας στον βX, αρκεί να δείξουμε ότι το $\pi^{-1}(\beta f^{-1}(U))$ είναι ανοικτό στον βX_δ. Εφόσον $\beta f \circ \pi = \beta f_\delta$ ισχύει ότι,

$$\pi^{-1}(\beta f^{-1}(U)) = \beta {f_\delta}^{-1}(U) \subseteq \beta X_\delta. \quad (1)$$

Όμως η $\beta f_\delta : \beta X_\delta \to K$ είναι η συνεχής επέκταση της f, συνεπώς το $\beta {f_\delta}^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον βX_δ, και από την (1) τώρα έπεται άμμεσα το ζητούμενο. ◇

Ουσιαστικά η συναρτηση β_f του Λήμματος 3.4.1 είναι η μοναδική συνεχής επέκταση της f σε όλο τον βX όπως θα δούμε παρακάτω, όπου θα αποδείξουμε ότι ο βX είναι η S-C συμπαγοποίηση του X με την κατάλληλη εμφύτευση i. Μπορούμε να συνοψίσουμε την μέχρι στιγμής πορεία μας με το παρακάτω διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
X_\delta \arrow[r, "i_\delta"] \arrow[d, "id_\delta"'] \arrow[dr, "f_\delta"] & \beta X_\delta \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta f_\delta"] & \beta X \arrow[dl, "\beta f"] \\
X \arrow[r, "f"'] & K &
\end{tikzcd}$$

από το οποίο μπορούμε να δούμε ποιό "μονοπάτι" θα πρέπει να ακολουθήσουμε ώστε ξεκινώντας από τον X να καταλήξουμε στον βX και έτσι να έχουμε την συνάρτηση i που θα μάς εμφυτεύσει τον X μεσα στον βX. Συνεχίζουμε με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.4.2. *Ο βX είναι συμπαγής χώρος $Hausdorff$.*

Απόδειξη. Κατ'αρχάς ο βX είναι συμπαγής, αφού $\beta X = \pi(\beta X_\delta)$, η π είναι συνεχής και βX_δ συμπαγής. Δείχνουμε τώρα ότι είναι $Hausdorff$. Έστω λοιπόν $[\mathcal{U}], [\mathcal{V}] \in \beta X$, με $[\mathcal{U}] \neq [\mathcal{V}]$, τότε $\mathcal{U} \nsim \mathcal{V}$ και άρα υπάρχει $f \in \mathcal{C}_X$ έτσι ώστε $\beta f_\delta(\mathcal{U}) \neq \beta f_\delta(\mathcal{V})$, όπου $\beta f_\delta : \beta X_\delta \to [0,1]$ η συνεχής επέκταση της αντίστοιχης f_δ. Εφόσον ο $[0,1]$ είναι $Hausdroff$ έχουμε ότι υπάρχουν $U, V \subseteq [0,1]$, ανοικτά τ.ω.

$$\beta f_\delta(\mathcal{U}) \in U,\ \beta f_\delta(\mathcal{V}) \in V,\ U \cap V = \emptyset. \quad (1)$$

Από το Λήμμα 3.4.1 υπάρχει συνεχής $\beta f : \beta X \to [0,1]$ ώστε $\beta f \circ \pi = \beta f_\delta$, και θέτουμε

$$U' = \beta f^{-1}(U) \quad \& \quad V' = \beta f^{-1}(V),$$

που είναι ανοικτές περιοχές στον βX των $[\mathcal{U}], [\mathcal{V}]$ αντίστοιχα, το οποίο προκύπτει από την (1) και από το γεγονός ότι $\beta_f \circ \pi = \beta_{f_\delta}$. Επίσης έχουμε ότι,

$$U' \cap V' = \beta f^{-1}(U) \cap \beta f^{-1}(V) = \beta f^{-1}(U \cap V) = \emptyset,$$

επομένως ο βX είναι $Hausdorff$. $\diamond$

Για να αποδείξουμε το κύριο Θεώρημα αυτής της ενότητας θα χρειαστούμε το παρακάτω σύντομο λήμμα.

Λήμμα 3.4.2. *Έστω $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικός χώρος $(X,\mathcal{T})$ και $F \subseteq X$ κλειστό, τότε υπάρχει $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{C}_X$ τ.ω. $F = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(\{0\})$.*

Απόδειξη. Αν το F είναι το $\emptyset$ ή το X το συμπέρασμα είναι προφανές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το F είναι μη κενό, γνήσιο κλειστό υποσύνολο του X. Εφόσον ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ έχουμε ότι για κάθε $x \in X\backslash F$, υπάρχει $f_x \in \mathcal{C}_X$ τ.ω.

$$f_x(x) = 1 \quad \& \quad f_x(F) = \{0\}. \quad (1)$$

Για κάθε $x \in X\backslash F$ έχουμε ότι $F \subseteq f_x^{-1}(\{0\})$, άρα $F \subseteq \bigcap_{x\in X\backslash F} f_x^{-1}(\{0\})$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό υποθέτουμε ότι για κάποιο $x_0 \in \bigcap_{x\in X\backslash F} f_x^{-1}(\{0\})$ ισχύει ότι $x_0 \notin F$, και έτσι από την (1) έχουμε ότι $f_{x_0}(x_0) = 1$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\bigcap_{x\in X\backslash F} f_x^{-1}(\{0\}) \subseteq F$ από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. $\diamond$

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω τοπολογικός χώρος X, $T_{3\frac{1}{2}}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $i = \pi \circ i_\delta \circ id_\delta^{-1} : X \to \beta X$. Τότε το ζευγάρι $(\beta X, i)$ είναι η Stone-Cěch συμπαγοποίηση του X.*

Απόδειξη. Αρχικά από την Πρόταση 3.4.2 έχουμε ότι ο βX είναι συμπαγής και $Hausforff$.

<u>Βήμα 1:</u> Δείχνουμε ότι η $i : X \to \beta X$ είναι 1-1. Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$, τότε $i_\delta(x_1) = \mathcal{F}_{x_1} \neq \mathcal{F}_{x_2} = i_\delta(x_2)$. Επειδή τώρα ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ υπάρχει συνεχής $f : X \to [0,1]$ τ.ω.

$$f(x_1) = 0 \neq 1 = f(x_2),$$

άρα και $\beta f_\delta(i_\delta(x_1)) \neq \beta f_\delta(i_\delta(x_2))$. Δηλαδή $\mathcal{F}_{x_1} \nsim \mathcal{F}_{x_2}$, από το οποίο προκύπτει ότι,

$$\pi(i_\delta(x_1)) = [\mathcal{F}_{x_1}] \neq [\mathcal{F}_{x_2}] = \pi(i_\delta(x_2)),$$

και άρα αφού η id_δ^{-1} είναι η ταυτοτική συνάρτηση έπεται ότι η i είναι 1-1.

<u>Βήμα 2:</u> Δείχνουμε ότι η $i : X \to \beta X$ είναι συνεχής.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν $\mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο στο X (θεωρούμε το $\mathcal{U}$ πάνω στον διακριτό χώρο X_δ) τότε ισχύει ότι $\lim i_\delta * \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Πράγματι, θα δείξουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{U}$ ισχύει ότι $\langle A \rangle \in i_\delta * \mathcal{U}$. Επειδή

$$i_\delta * \mathcal{U} = \big\{U \subseteq \beta X_\delta \mid \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \in U\} \in \mathcal{U}\big\},$$

και από το γεγονός ότι για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει ότι $\{x \in X \mid \mathcal{F}_x \in \langle A \rangle\} = A$ έχουμε άμμεσα ότι αν $A \in \mathcal{U}$ τότε θα πρέπει $\langle A \rangle \in i_\delta * \mathcal{U}$.

Θεωρούμε τώρα ένα $x \in X$ και υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στον X τ.ω. $\mathcal{U} \to x$. Αρκεί να διαπιστώσουμε ότι $i * \mathcal{U} \to i(x)$. Από τα σχόλια που προηγήθηκαν έχουμε ότι $\lim i_\delta * \mathcal{U} = \mathcal{U} \in \beta X_\delta$ και αφού η απεικόνιση $\pi : \beta X_\delta \to \beta X$ είναι συνεχής έπεται ότι $\lim \pi * (i_\delta * \mathcal{U}) = \pi(\mathcal{U})$. Μένει να δείξουμε ότι $\pi(\mathcal{U}) = \pi(\mathcal{F}_x)$, το οποίο ισχύει αφού από υπόθεση έχουμε ότι $\mathcal{U} \to x$ και άρα για κάθε $f \in \mathcal{C}_x$ θα έχουμε $\lim f * \mathcal{U} = f(x) = \lim f * \mathcal{F}_x$. Άρα η i είναι συνεχής στο τυχαίο $x \in X$ από το οποίο έχουμε το ζητούμενο.

Βήμα 3: Θα δείξουμε τώρα ότι η i απεικονίζει βασικά κλειστά του X σε κλειστά υποσύνολα του $i(X)$. Στο Λήμμα 3.4.2 είδαμε ότι τα βασικά κλειστά του X είναι της μορφής $f^{-1}(\{0\})$, $f \in \mathcal{C}_X$, έτσι θεωρούμε για κάποια συνεχή $f : X \to [0,1]$, $F = f^{-1}(\{0\})$ ένα μη κενό βασικό κλειστό στον X. Θέτουμε

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \langle f^{-1}([0, \frac{1}{n})) \rangle \subseteq \beta X_\delta,$$

το οποίο είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του βX_δ, αφού η οικογένεια κλειστών $\{\langle f^{-1}([0, \frac{1}{n})) \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ έχει την ΙΠΤ και ο βX_δ είναι συμπαγής. Ο ισχυρισμός μας είναι ότι το K περίεχει κάθε κλάση ισοδυναμίας την οποία τέμνει, δηλαδή για $[\mathcal{U}] \in \beta X$ ισχύει ότι,

$$\pi^{-1}([\mathcal{U}]) \cap K \neq \emptyset \Rightarrow \pi^{-1}([\mathcal{U}]) \subseteq K. \quad (1)$$

Έστω λοιπόν $\mathcal{F} \in \pi^{-1}([\mathcal{U}]) \cap K$, θα δείξουμε ότι και $\mathcal{U} \in K$. Αρχικά, εφόσον $\mathcal{F} \in K$ έχουμε ότι

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, f^{-1}([0, \frac{1}{n})) \in \mathcal{F},$$

από το οποίο προκύπτει ότι για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $[0, \frac{1}{n}) \in f * \mathcal{F}$, επομένως $\lim f * \mathcal{F} = 0$. Αφού τώρα $\mathcal{U} \sim \mathcal{F}$ έχουμε ότι και $\lim f * \mathcal{U} = 0$, άρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}, [0, \frac{1}{n}) \in f * \mathcal{U} &\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{-1}([0, \frac{1}{n})) \in \mathcal{U} \\
&\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U} \in \langle f^{-1}([0, \frac{1}{n})) \rangle \\
&\Rightarrow \mathcal{U} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \langle f^{-1}([0, \frac{1}{n})) \rangle = K.
\end{aligned}$$

Άρα $\pi^{-1}([\mathcal{U}]) \subseteq K$. Παρατηρούμε τώρα ότι το $\pi(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του βX, το οποίο προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι είναι συμπαγές υποσύνολο χώρου $Hausdorff$. Τέλος ισχυριζόμαστε ότι $i(F) = i(X) \cap \pi(K)$.

Δείχνουμε πρώτα ότι $i(F) \subseteq i(X) \cap \pi(K)$. Έστω $x \in F$, από τον ορισμό του K έχουμε ότι $\mathcal{F}_x \in K$, και λόγω της ιδιότητας (1) που έχει το K έχουμε ότι $[\mathcal{F}_x] \in \pi(K)$. Άρα $i(x) = \pi(i_\delta(x)) = [\mathcal{F}_x] \in \pi(K)$, επομένως $i(F) \subseteq i(X) \cap \pi(K)$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει $[\mathcal{F}_x] \in \pi(K)$ με $x \notin F$. Επειδή $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([0, \frac{1}{n}))$, έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x \notin f^{-1}([0, \frac{1}{n_0}))$, από το οποίο έχουμε ότι $\mathcal{F}_x \notin \langle f^{-1}([0, \frac{1}{n_0})) \rangle$, το οποίο είναι άτοπο αφού θα πρέπει $\mathcal{F}_x \in K$. Άρα πράγματι $i(F) = i(X) \cap \pi(K)$.

Βήμα 4: Μας έχει μείνει μόνο να δείξουμε ότι το ζευγάρι $(\beta X, i)$ έχει την Ιδιότητα Συνεχούς Επέκτασης. Θεωρούμε λοιπόν συμπαγή χώρο $Hausdorff$ K και συνεχή $f : X \to K$. Στο Λήμμα 3.4.1 είδαμε ότι υπάρχει μοναδική συνεχής $\beta f : \beta X \to K$ έτσι ώστε $\beta f \circ \pi = \beta f_\delta$. Θα δείξουμε ότι $\beta f \circ i = f$. Έχουμε λοιπόν ότι,

$$\begin{aligned} \beta f \circ i &= \beta f \circ (\pi \circ i_\delta \circ id_\delta^{-1}) \\ &= (\beta f \circ \pi) \circ (i_\delta \circ id_\delta^{-1}) \\ &= (\beta f_\delta \circ i_\delta) \circ id_\delta^{-1} \\ &= f_\delta \circ id_\delta^{-1} \\ &= f. \end{aligned}$$

Για τη μοναδικότητα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\beta f, \beta f' : \beta X \to K$, ώστε να ισχύει $\beta f \circ i = \beta f' \circ i$, και ισοδύναμα

$$(\beta f \circ \pi) \circ i_\delta = (\beta f' \circ \pi) \circ i_\delta,$$

και λόγω της ΙΣΕ για τον $(\beta X_\delta, i_\delta)$ έχουμε ότι $\beta f \circ \pi = \beta f' \circ \pi$ και επειδή η π είναι επί έχουμε ότι $\beta f = \beta f'$. $\diamond$

Για το τέλος αυτού του κεφαλαίου θα πούμε δύο λόγια για την κατασκευή των *Stone* και *Čech*. Στην ενότητα 3.1 είδαμε ως πόρισμα του Λήμματος Εμφύτευσης ότι κάθε τοπολογικός χώρος $T_{3\frac{1}{2}}$ εμφυτεύεται μέσα στον $[0,1]^I$ για κάποιο σύνολο I. Πιο συγκεκριμμένα, θεωρούμε ένα τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, $T_{3\frac{1}{2}}$, και με $\mathcal{C}_X$ συμβολίζουμε το σύνολο των συνεχών συνάρτησεων από το X στο $[0,1]$. Η οικογένεια $\mathcal{C}_X$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος Εμφύτευσης, επόμενως η συνάρτηση εκτίμησης $e : X \to [0,1]^{\mathcal{C}_X}$, $x \mapsto (f(x))_{f \in \mathcal{C}_X}$ είναι ομοιομορφική εμφύτευση. Η *Stone-Čech* συμπαγοποίηση του X ορίζεται ισοδύναμα να είναι το ζευγάρι $(\overline{e(X)}, e)$. Αποδεικνύεται ότι ο $\beta X = \overline{e(X)}$ ικανοποιεί την ΙΣΕ καθώς και τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 3.2.1.

Κεφάλαιο 4

Το Θεώρημα *Hindman*

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο θα δούμε μια εφαρμογή της συμπαγοποίησης *Stone-Cěch* του $\mathbb{N}$ στην απόδειξη ένος θεωρήματος της συνδιαστικής, το Θεώρημα *Hindman*. Το συγκεκριμμένο Θεώρημα είχε διατυπωθεί αρχικά ως υπόθεση από τους αμερικανούς *Ronald Graham* και *Bruce Rothschild*, αλλά πήρε το όνομα του από τον αμερικανό μαθηματικό *Neil Hindman* που το απέδειξε το 1972. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε εμείς χρησιμοποιεί την τοπολογία του $\beta\mathbb{N}$, είναι διαφορετική από την πρωτότυπη (η οποία μπορεί να βρεθεί στο [3]) και δεν οφείλεται στον ίδιο τον *Hindman*. Προτού ξεκινήσουμε σημειώνουμε ότι με $\mathbb{N}$ θα εννοούμε όλους τους μη μηδενικούς φυσικούς αριθμούς, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ με τη διακριτή τοπολογία και τον $\beta\mathbb{N}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία που είδαμε στην ενότητα 3.3.

4.1 Η Ημιομάδα $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$

Στην ενότητα αυτή θα εφοδιάσουμε το σύνολο των υπερφίλτρων στο $\mathbb{N}$, $\beta\mathbb{N}$ με μια πραξή "$\oplus$" και θα δούμε ότι το ζεύγος $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ απότελει μια ημιομάδα, δηλαδή είναι κλειστό ως προς την προσεταιριστική πράξη $\oplus$. Ξεκινάμε με τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4.1.1. Για $A \subseteq \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A - k$ να είναι το σύνολο

$$A - k = \{n \in \mathbb{N} \mid n + k \in A\} = \mathbb{N} \cap \{n - k \mid n \in A\}.$$

Το $A - k$ είναι υπό μια έννοια το A μετατοπίσμενο κατα k προς τα άριστερα μέσα στην ακολουθία των φυσικών αριθμών. Συνεχίζουμε με ένα συντόμο άλλα χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 4.1.1. *Έστω $A, B \subseteq \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.*

(i) $\mathbb{N}\backslash(A-k) = \mathbb{N}\backslash A - k$

(ii) $(A \cap B) - k = (A-k) \cap (B-k)$.

Απόδειξη. (i) Έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες,

$$\begin{aligned} m \in \mathbb{N}\backslash(A-k) &\iff m \notin A-k \\ &\iff m+k \notin A \\ &\iff m+k \in \mathbb{N}\backslash A \\ &\iff m \in \mathbb{N}\backslash A - k. \end{aligned}$$

Επομένως $\mathbb{N}\backslash(A-k) = \mathbb{N}\backslash A - k$.

(ii) Αν τώρα $A, B \subseteq \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} m \in (A \cap B) - k &\iff m+k \in A \cap B \\ &\iff m+k \in A \,\&\, m+k \in B \\ &\iff m \in A-k \,\&\, m \in B-k \\ &\iff m \in (A-k) \cap (B-k), \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. ◇

Δίνουμε τώρα τον όρισμο της πράξης $\oplus$ στο $\beta\mathbb{N}$.

Ορισμός 4.1.2. Για $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ ορίζουμε την οικογένεια $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ ως εξής,

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \big\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \{k \in \mathbb{N} \mid A-k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\big\}.$$

Η οικογένεια $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ αποτελείται από όλα τα $A \subseteq \mathbb{N}$ για τα οποία το $A-k$ είναι ένα $\mathcal{U}$-σύνολο για όλα τα στοιχεία k ενός $\mathcal{V}$-συνόλου.

Παρατήρηση 4.1. Από τον ορισμό της $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ είναι φανέρο ότι εν γένει $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Με την επόμενη πρόταση θα αποδείξουμε ότι ο $\beta\mathbb{N}$ είναι κλειστός ως προς την πράξη $\oplus$, έτσι έχουμε μια διμελή πράξη $\oplus : \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$.

Πρόταση 4.1.1. *Αν $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ τότε και $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Επίσης για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}_n \oplus \mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{n+m}.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε αρχικά ότι το $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ είναι φίλτρο στο $\mathbb{N}$. Εφόσον $\emptyset - k = \emptyset$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\emptyset \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Αν τώρα $A, B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ τότε έχουμε ότι υπάρχουν $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ ώστε το $A - k \in \mathcal{U}$ για όλα τα $k \in V_1$ και $B - l \in \mathcal{U}$ για όλα τα $l \in V_2$. Αν $V = V_1 \cap V_2$, τότε $V \in \mathcal{V}$ και για όλα τα $k \in V$ θα έχουμε

$$(A - k), (B - k) \in \mathcal{U},$$

και συνεπώς από το Λήμμα 4.1.1

$$(A - k) \cap (B - k) = (A \cap B) - k \in \mathcal{U}.$$

Καταλήξαμε λοιπόν ότι για κάθε $k \in V$, $(A \cap B) - k \in \mathcal{U}$, από το οποίο έπεται ότι $A \cap B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Θεωρούμε τώρα $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ και $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$. Αφού $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ έχουμε ότι για όλα τα k σε ένα $\mathcal{V}$-σύνολο, θα είναι $A - k \in \mathcal{U}$, όμως $A - k \subseteq B - k$ και συνεπώς $B - k \in \mathcal{U}$. Άρα $B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Για να δείξουμε ότι το $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ είναι υπερφίλτρο, θεωρούμε ένα $A \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Αφού το $\mathcal{V}$ είναι υπερφίλτρο έχουμε ότι το $V = \{k \in \mathbb{N} \mid A - k \notin \mathcal{U}\}$ ανήκει στο $\mathcal{V}$ (αν δεν ανήκε θα καταλήγαμε ότι $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$), άρα για όλα τα $k \in V$ θα είχαμε $A - k \notin \mathcal{U}$ και εφόσον το $\mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο από το Λήμμα 4.1.1 έχουμε

$$\mathbb{N} \backslash (A - k) = \mathbb{N} \backslash A - k \in \mathcal{U}.$$

Άρα για κάθε $k \in V$, $\mathbb{N} \backslash A - k \in \mathcal{U}$, δηλαδή $\mathbb{N} \backslash A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Πράγματι λοιπόν απο τα παραπάνω έχουμε ότι $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$.

Για να δείξουμε τέλος την ιδιότητα που έχουν τα κύρια υπερφίλτρα, παρατηρούμε ότι για $n, m \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{F}_n \oplus \mathcal{F}_m &\iff m \in \{k \in \mathbb{N} \mid A - k \in \mathcal{F}_n\} \\ &\iff A - m \in \mathcal{F}_n \\ &\iff n \in A - m \\ &\iff n + m \in A \\ &\iff A \in \mathcal{F}_{n+m}, \end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. ◇

Γνωρίζοντας τώρα ότι το $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ είναι ένα στοιχείο του $\beta\mathbb{N}$, από την Παρατήρηση 4.1 έχουμε ότι η πράξη $\oplus$ δεν είναι αντιμεταθετική αλλά όπως θα δούμε με την επόμενη πρόταση είναι προσεταιριστική.

Πρόταση 4.1.2. *Η πράξη $\oplus$ στο $\beta\mathbb{N}$ είναι προσεταιριστική, για $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{Y} \in \beta\mathbb{N}$ ισχύει ότι,*

$$\mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{Y}) = (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{Y}.$$

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{Y})$. Έχουμε τις εξής ισοδυναμίες,

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{Y}) &\iff \{k \in \mathbb{N} \mid A - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{Y} \\ &\iff \big\{l \in \mathbb{N} \mid \{k \in \mathbb{N} \mid A - k \in \mathcal{U}\} - l \in \mathcal{V}\big\} \in \mathcal{Y}, \end{aligned}$$

όμως $m \in \{k \in \mathbb{N} \mid A - k \in \mathcal{U}\} - l$ ανν $(A - l) - m \in \mathcal{U}$, άρα

$$A \in \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{Y}) \iff \big\{l \in \mathbb{N} \mid \{m \in \mathbb{N} \mid (A - l) - m \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\big\} \in \mathcal{Y}.$$

Όμως από τον ορισμό της $\oplus$ για τα $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ και την παραπάνω σχέση έχουμε ότι $A - l \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ επομένως,

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{Y}) &\iff \{l \in \mathbb{N} \mid A - l \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}\} \in \mathcal{Y} \\ &\iff A \in (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{Y}, \end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\diamond$

Από τις δύο προηγούμενες προτάσεις έχουμε η $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ είναι πράγματι μια ημιομάδα. Επίσης αναφέρουμε ότι αφού $\mathcal{F}_n \oplus \mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{n+m}$, έχουμε ότι η απεικόνιση $i : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}, n \mapsto \mathcal{F}_n$ είναι ένας ομομορφισμός ανάμεσα στις ημιομάδες $(\mathbb{N}, +)$ και $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ εφόσον

$$i(n + m) = \mathcal{F}_{n+m} = \mathcal{F}_n \oplus \mathcal{F}_m = i(n) \oplus i(m).$$

Αν θέλουμε τώρα να δουμε πως σχετίζεται η πράξη $\oplus$ με την τοπολογία του $\beta\mathbb{N}$, έχουμε ότι η απεικόνιση $\oplus : \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ δεν είναι συνεχής, μπορούμε όμως να αποδείξουμε μια ασθενέστερη μορφή συνέχειας, που θα μας είναι χρήσιμη παρακάτω.

Πρόταση 4.1.3. *Για κάθε $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, απεικόνιση $u : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$, με τύπο $\mathcal{V} \mapsto u(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ και u η αντίστοιχη απεικόνιση. Θα δείξουμε ότι η αντίστροφες εικόνες βασικών ανοικτών μέσω της u είναι βασικα ανοικτά στον $\beta\mathbb{N}$. Αν λοιπόν $\mathcal{V} \in u^{-1}(\langle A \rangle)$, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \in u^{-1}(\langle A \rangle) &\iff \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \langle A \rangle \\ &\iff A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \\ &\iff \{k \in \mathbb{N} \mid A - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\tilde{A} = \{k \in \mathbb{N} \mid A - k \in \mathcal{U}\}$ από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\mathcal{V} \in u^{-1}(\langle A \rangle) \iff \mathcal{V} \in \langle \tilde{A} \rangle,$$

άρα το $u^{-1}(\langle A \rangle)$ είναι βασικό ανοικτό στον $\beta\mathbb{N}$. $\diamond$

Παρατήρηση 4.2. Με βάση την προηγούμενη πρόταση, θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε την πράξη $\oplus$ ως δεξία συνεχής. Κοιτάζοντας λίγο την προηγούμενη απόδειξη, παράτηρουμε ότι η εύρεση ενός αντίστοιχου $\tilde{A}$ στην περίπτωση όπου "προσθέταμε" από τα άριστερα σε ένα σταθέρο $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ δεν είναι δυνάτη, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $\oplus : \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ δεν είναι συνεχής.

4.2 Θεώρημα *Hindman*

Όσα είδαμε στην προηγούμενη ενότητα θα παιξούν σημαντικό ρόλο ώστε να αποδείξουμε το Θεώρημα *Hindman*. Κεντρικό ρόλο στη διατύπωση του εν λόγω θεωρήματος έχει η έννοια του IP-συνόλου, το οποίου τον ορισμό θα δώσουμε παρακατώ. Πριν ξεκινήσουμε, για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$, θα συμβολίζουμε με $Fin(A)$ το σύνολο όλων των μη κενών, πεπερασμένων υποσυνόλων του A, δηλαδή

$$Fin(A) = \{J \subseteq A \mid J\text{: μη κενό, πεπερασμένο}\},$$

ενώ με $FS[A]$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων αθροισμάτων από στοιχεία του A,

$$FS[A] = \Big\{ \sum_{n \in J} n \mid J \in Fin(A) \Big\}.$$

Μπορούμε τώρα να πούμε πότε ένα σύνολο θα καλείται IP.

Ορισμός 4.2.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$. Το A καλείται **IP-σύνολο** αν για κάποιο άπειρο $B \subseteq \mathbb{N}$ ισχύει ότι $FS[B] \subseteq A$.

Παρατήρηση 4.3. Παρατηρούμε από τον παραπάνω ορισμό ότι τα IP-σύνολα θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως "μεγάλα" υποσύνολα του $\mathbb{N}$, αφού μπορούμε να δούμε μέσα τους μια παρόμοια δομή με αυτή της ημιομάδας $(\mathbb{N}, +)$.

Το Θεώρημα *Hindman* χονδρικά μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Για οποιονδήποτε χρωματισμό των φυσικών αριθμών με r, $r < \infty$, το πλήθος χρώματα, όπου κάθε αριθμός έχει ένα και μόνο ένα χρωμα, υπάρχει μονοχρωματικό IP-σύνολο.

Καταλαβαίνουμε, από τη συγκεκριμμένη διατύπωση ότι "χρωματισμός" του $\mathbb{N}$ αναφέρεται ουσιαστικά σε μια διαμέριση των φυσικών. Για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα, θα δείξουμε άρχικα ότι υπάρχει ταυτοδύναμο, ως προς την πράξη $\oplus$, υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$, δηλαδή $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ τ.ω. $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Από το γεγονός ότι για τα κύρια υπερφίλτρα ισχύει ότι $\mathcal{F}_n \oplus \mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{n+m}$, συμπεραίνουμε ότι αν υπάρχει ταυτοδύναμο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$, δεν γίνεται να είναι κύριο, αφού για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n + m \neq n$. Έχοντας δείξει την ύπαρξη ενός τέτοιου υπερφίλτρου $\mathcal{U}$, θα δούμε ότι κάθε $A \in \mathcal{U}$ πρέπει να είναι IP-σύνολο.

Πριν συνεχίσουμε, για μη κενά $S_1, S_2 \subseteq \beta\mathbb{N}$, με $S_1 \oplus S_2$ θα εννοούμε το σύνολο

$$S_1 \oplus S_2 = \{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \mid \mathcal{U} \in S_1, \mathcal{V} \in S_2\}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν $S_1, S_2, S \subseteq \beta\mathbb{N}$ τ.ω. $S_1 \subseteq S_2$ τότε και $S_1 \oplus S \subseteq S_2 \oplus S$. Ξεκινάμε με το πρώτο από τα δύο Θεώρήματα που θα μας οδηγήσουν στην απόδειξή του Θεωρήματος *Hindman*.

Θεώρημα 4.2.1. *Υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$.*

Απόδειξη. Βήμα 1: Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{S \subseteq \beta\mathbb{N} \mid S \neq \emptyset, \text{ κλειστό και } S \oplus S \subseteq S\}.$$

Αν η $\mathcal{A}$ είναι μερικώς διατεταγμένη από τη σχέση του αντίστροφου εγκλεισμού, χρησιμοποιώντας το Λήμμα του *Zorn* θα δείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{A}$ έχει ελαχιστικό στοιχείο. Αρχικά παρατηρούμε ότι $\mathcal{A} \neq \emptyset$, αφού $\beta\mathbb{N} \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ μια αλυσίδα στην $\mathcal{A}$, θα δείξουμε ότι $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{A}$ και ότι $\bigcap \mathcal{C}$ είναι ένα κάτω φράγμα για την $\mathcal{C}$. Κατ'αρχάς το $\bigcap \mathcal{C}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\beta\mathbb{N}$ ως τομή κλειστών. Παρατηρούμε επίσης ότι η οικογένεια $\mathcal{C}$ έχει την ΙΠΤ, εφόσον είναι ολικά διατεταγμένη, και αφού ο $\beta\mathbb{N}$ είναι συμπαγής έπεται ότι $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Αν τώρα $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \bigcap \mathcal{C}$, έχουμε ότι για κάθε $S \in \mathcal{C}$, $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in S$ και συνεπώς αφού $S \oplus S \subseteq S$, θα ισχύει ότι $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in S$, για όλα τα $S \in \mathcal{C}$, από το οποίο προκύπτει ότι $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \bigcap \mathcal{C}$. Επομένως $(\bigcap \mathcal{C}) \oplus (\bigcap \mathcal{C}) \subseteq \bigcap \mathcal{C}$, άρα $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{A}$. Προφανώς το $\bigcap \mathcal{C}$ είναι ένα κατω φράγμα για την $\mathcal{C}$ αφού για κάθε $S \in \mathcal{C}$ ισχύει ότι $\bigcap \mathcal{C} \subseteq S$. Από το Λήμμα του *Zorn* έπεται ότι υπάρχει $M \in \mathcal{A}$ το οποίο είναι ελαχιστικό, υπό την έννοια ότι αν $M' \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε $M' \subseteq M$, τότε $M' = M$. Σημειώνουμε ότι $M \neq \emptyset$ αφού $M \in \mathcal{A}$.

Βήμα 2: Δείχνουμε τώρα ότι για κάθε $\mathcal{U} \in M$ ισχύει ότι

$$\mathcal{U} \oplus M = \{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \mid \mathcal{V} \in M\} = M.$$

Έστω λοιπόν $\mathcal{U} \in M$ και $M' = \mathcal{U} \oplus M$. Αρχικά έχουμε ότι αφού $M \in \mathcal{A}$,

$$M' = \mathcal{U} \oplus M \subseteq M \oplus M \subseteq M. \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι και $M' \in \mathcal{A}$. Κατ'αρχάς $M' \neq \emptyset$ αφού $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \in M'$. Επίσης το $M' \subseteq \beta\mathbb{N}$ είναι κλειστό. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $u : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$, $\mathcal{V} \mapsto u(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ (η συνέχεια έπεται από την Πρόταση 4.1.3) και έχουμε ότι $M' = u(M)$, το οποίο M είναι συμπαγές υποσύνολο του $\beta\mathbb{N}$, ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς χώρου. Αφού η u είναι συνεχής έχουμε ότι το $M' = u(M)$ είναι συμπαγές και αφού ο $\beta\mathbb{N}$ είναι $Hausdorff$ έχουμε ότι το M' είναι κλειστό. Μένει να διαπιστώσουμε ότι $M' \oplus M' \subseteq M'$. Εφόσον $M' \oplus M' = (\mathcal{U} \oplus M) \oplus (\mathcal{U} \oplus M)$, έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}(\mathcal{U} \oplus M) \oplus (\mathcal{U} \oplus M) &\subseteq (\mathcal{U} \oplus M) \oplus (M \oplus M)\\ &\subseteq (\mathcal{U} \oplus M) \oplus M\\ &\subseteq \mathcal{U} \oplus (M \oplus M)\\ &\subseteq \mathcal{U} \oplus M = M'.\end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι $M' \neq \emptyset$, κλειστό και $M' \oplus M' \subseteq M'$, άρα $M' \in \mathcal{A}$ και από την (1) έχουμε ότι $M' \subseteq M$, από το οποίο προκύπτει ότι $M' = M$ αφού το M ελαχιστικό.

Βήμα 3: Τέλος θα δείξουμε ότι κάθε $\mathcal{U} \in M$ είναι ταυτοδύναμο. Έστω $\mathcal{U} \in M$ και θέτουμε,

$$S = \{\mathcal{V} \in M \mid \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{U}\}.$$

Κατ'άρχας παρατηρούμε ότι αφού $\mathcal{U} \oplus M = M$, έχουμε ότι υπάρχει $\mathcal{V} \in M$ τ.ω. $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{U}$, επομένως $S \neq \emptyset$. Επίσης είναι προφανές ότι

$$S = M \cap \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \mid \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{U}\},$$

από το οποίο προκύπτει ότι το S είναι κλειστό αφού το M είναι κλειστό και το σύνολο $\{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \mid \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{U}\}$ είναι επίσης κλειστό ως αντίστροφη εικόνα του κλειστού $\{\mathcal{U}\}$ μεσώ της συνεχής απεικόνισης $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Ισχυριζόμαστε τέλος ότι $S \oplus S \subseteq S$. Πράγματι αν $\mathcal{V}, \mathcal{Y} \in S$ τότε

$$\mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{Y}) = (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{Y} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{Y} = \mathcal{U}, \quad (2)$$

επειδή $\mathcal{V}, \mathcal{Y} \in S \subseteq M$ και $M \oplus M \subseteq M$ από την (2) έπεται ότι $\mathcal{V} \oplus \mathcal{Y} \in S$, άρα $S \oplus S \subseteq S$. Από τα παραπάνω καταλήγουμε ότι $S \in \mathcal{A}$ και $S \subseteq M$, από όπου έπεται ότι $S = M$. Τέλος αφού $\mathcal{U} \in M = S$ έχουμε ότι $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$. $\diamond$

Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε ένα ταυτοδύναμο υπερφίλτρο ως αναλλοίωτο ως προς τις μετατοπίσεις προς τα "κάτω" στα στοιχεία του. Σημειώνουμε ότι το προηγούμενο αποτέλεσμα γενικέυεται ως: Κάθε συμπαγής δεξία τοπολογική ημιομάδα (εννοώντας μια ημιομάδα $(S, \cdot)$ εφοδιασμένη με μια τοπολογία ώστε η πράξη "$\cdot$" να είναι δεξιά συνεχής) έχει ταυτοδύναμο στοιχείο.

Παρατήρηση 4.4. Όπως ήδη σχολιάσαμε προηγουμένως ένα ταυτοδύναμο $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ δεν γίνεται να είναι κύριο. Οπώς είχαμε δει στο Κεφάλαιο 2, ένα υπερφίλτρο είναι κύριο αν και μόνο αν περιέχει ένα πεπερασμένο σύνολο. Επόμενως, εφόσον κάθε ταυτοδύναμο $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ δεν είναι κύριο, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε στοιχείο ενός τέτοιου $\mathcal{U}$ θα είναι ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Επίσης παρατηρούμε ότι εφόσον

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \big\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \{k \in \mathbb{N} \mid A - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}\big\},$$

αν $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$, τότε για κάθε $A \in \mathcal{U}$, υπάρχει $n \in A$ τ.ω. $A \cap (A - n) \in \mathcal{U}$.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του δέυτερου κεντρικού θεωρήματος αυτής της ενότητας το οποίο ακουλουθεί αμμέσως.

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Τότε κάθε $A \in \mathcal{U}$ είναι IP-σύνολο.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι ένα $A \in \mathcal{U}$ είναι IP-σύνολο θα κατασκευάσουμε μια άπειρη ακολουθία $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ φυσικών τέτοια ώστε

$$FS[\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}] \subseteq A.$$

Έστω $A \in \mathcal{U}$, θα συμβολίζουμε με $\tilde{A}$ το

$$\tilde{A} = \{k \in \mathbb{N} \mid A - k \in \mathcal{U}\}.$$

Πριν ξεκινήσουμε παρατηρούμε ότι αν $A \in \mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$, τότε έπεται ότι και $\tilde{A} \in \mathcal{U}$.

Βήμα 1: Θα κατασκευάσουμε αναδρομικά τα παρακάτω:

- Ακολουθία συνόλων τ.ω. $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ και $A_i, \tilde{A}_i \in \mathcal{U}$
- Γνησιώς αύξουσα ακολουθία φυσικών $\{k_i\}_{i\geq 0}$ τ.ω. $k_i \in A_i \cap \tilde{A}_i$ και $A_{i+1} = (A_i - k_i) \cap A_i$.

Θέτουμε $A_0 = A \in \mathcal{U}$, ισχύει ότι $\tilde{A}_0 \in \mathcal{U}$ και συνεπώς $A_0 \cap \tilde{A}_0 \in \mathcal{U}$, από το οποίο προκύπτει ότι $A_0 \cap \tilde{A}_0 \neq \emptyset$, οπότε επιλέγουμε $k_0 \in A_0 \cap \tilde{A}_0$ (για παράδειγμα $k_0 = \min A_0 \cap \tilde{A}_0$). Εξ'ορισμού του $\tilde{A}_0$ έχουμε ότι $A_0 - k_0 \in \mathcal{U}$, επομένως $(A_0 - k_0) \cap A_0 \in \mathcal{U}$. Θέτουμε

$$A_1 = (A_0 - k_0) \cap A_0 \in \mathcal{U},$$

πάλι ισχύει ότι $\tilde{A}_1 \in \mathcal{U}$, άρα $A_1 \cap \tilde{A}_1 \in \mathcal{U}$ και από την Παρατήρηση 4.4 έχουμε ότι το $A_1 \cap \tilde{A}_1$ είναι άπειρό υποσύνολο του $\mathbb{N}$, άρα μπορούμε να επιλέξουμε $k_1 \in A_1 \cap \tilde{A}_1$ έτσι ώστε $k_1 > k_0$. Υποθέτοντας ότι έχουμε κατασκευάσει τα $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_i$ και $k_0 < k_1 < \dots < k_i$, ισχύει ότι $k_i \in A_i \cap \tilde{A}_i$ και $(A_i - k_i), A_i \in \mathcal{U}$. Θέτουμε

$$A_{i+1} = (A_i - k_i) \cap A_i \in \mathcal{U}.$$

Αφού $A_{i+1} \in \mathcal{U}$ έχουμε ότι $\tilde{A}_{i+1} \in \mathcal{U}$, συνεπώς και $A_{i+1} \cap \tilde{A}_{i+1} \in \mathcal{U}$, άρα το $A_{i+1} \cap \tilde{A}_{i+1}$ είναι άπειρο και μπορούμε να επιλέξουμε $k_{i+1} \in A_{i+1} \cap \tilde{A}_{i+1}$ με $k_{i+1} > k_i$.

Βήμα 2: Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $Fin(\mathbb{N} \cup \{0\})$ ισχύει ότι

$$\sum_{i \in J} k_i \in A_{\min\{J\}}. \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του J.

Αν $J \in Fin(\mathbb{N} \cup \{0\})$ με $|J| = 1$, τότε $J = \{i_0\}$ και εξ'ορισμού του k_{i_0} έχουμε ότι $k_{i_0} \in A_{i_0}$.

Επαγωγική Υπόθεση: Για κάθε $J \in Fin(\mathbb{N} \cup \{0\})$, με $|J| = n$ ισχύει ότι $\sum_{i \in J} k_i \in A_{\min\{J\}}$.

Έστω τώρα $J \in Fin(\mathbb{N} \cup \{0\})$, τ.ω. $|J| = n + 1$ και έστω $i_0 = \min\{J\}$. Θέτουμε $J' = J \backslash \{i_0\}$, προφανώς $|J'| = n$ και από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι,

$$\sum_{i \in J'} k_i \in A_{\min\{J'\}}.$$

Αν $i_1 = \min\{J'\}$ και $k = \sum_{i \in J'} k_i$, έχουμε ότι $k \in A_{i_1}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $k + k_{i_0} \in A_{i_0}$. Από την κατασκευή των A_i έχουμε ότι $A_{i_1} \subseteq A_{i_0+1}$, αφου $i_0 + 1 \leq i_1$. Επόμενως $k \in A_{i_0+1}$ και έχουμε τις εξής συνεπαγωγές,

$$\begin{aligned} k \in A_{i_0+1} &\Rightarrow k \in (A_{i_0} - k_{i_0}) \cap A_{i_0} \\ &\Rightarrow k \in A_{i_0} - k_{i_0} \\ &\Rightarrow k + k_{i_0} \in A_{i_0} \\ &\Rightarrow k + k_{i_0} \in A_{\min\{J\}} \end{aligned}$$

Επομένως $\sum_{i \in J} k_i \in A_{\min\{J\}}$. Τέλος, έχοντας την σχέση (1), αν θεωρήσουμε $k_{i_0} < k_{i_1} < \cdots < k_{i_n}$ τότε $\sum_{j=0}^{n} k_{i_j} \in A_{i_0} \subseteq A$ από το οποίο προκύπτει ότι,

$$FS[\{k_i\}_{i \geq 0}] \subseteq A.$$

Επομένως το A είναι IP-σύνολο το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. ◇

Έχοντας αποδείξει την ύπαρξη ταυτοδύναμων υπερφίλτρων και με το Θεώρημα 4.2.2, η απόδειξη του Θεωρήματος *Hindman* γίνεται πολύ απλή.

Θεώρημα 4.2.3 (Hindman). *Για κάθε πεπερασμένη διαμέριση των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, τουλάχιστον ένα από τα C_i είναι IP-σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Από την Πρόταση 2.1.3 του Κεφαλαίου 2, έχουμε ότι αφού $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i \in \mathcal{U}$, υπάρχει $i_0 \leq r$ τέτοιο ώστε $C_{i_0} \in \mathcal{U}$. Από το Θεώρημα 4.2.2 έχουμε ότι το C_{i_0} είναι IP-σύνολο. ◇

Θα μπορούσαμε να ερμηνέυσουμε το Θεώρημα *Hindman* ως εξής, έχοντας μια αρχική δομή (ή οργάνωση) στο $\mathbb{N}$ σαν ημιομάδα, με όποιον τρόπο και αν "χωρίσουμε" το $\mathbb{N}$ σε πεπερασμένα το πλήθος κομμάτια, πάντα τουλάχιστον ένα θα έχει μια δομή (ή θα έχει μια αργάνωση) που θα παρομοιάζει με την αρχική. Τέτοιου είδους αποτελέσματα συναντά κανείς κατά κύριο λόγο στην Θεωρία *Ramsey*, για το λόγο αυτό το Θεώρημα *Hindman* έχει μεγάλη σημασία και για αυτό τον κλάδο των μαθηματικών.

Ολοκληρώνοντας, παραθέτουμε δύο προγενέστερα αποτελέσματα των οποίων η απόδειξη προκύπτει άμμεσα από το Θέωρημα *Hindman*. Το πρώτο οφείλεται στον *David Hilbert* που το απέδειξε σε μία δημοσίευση του γύρω στο 1892, ενώ το δεύτερο στον *Issai Schur*.

Θεώρημα 4.2.4 (**Λήμμα Hilbert**). *Για κάθε πεπερασμένη διαμέριση των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ ώστε το σύνολο,*

$$Q_k = \{a_0 + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j a_j \mid \varepsilon_j \in \{0,1\}, 1 \leq j \leq k\},$$

να ανήκει σε τουλάχιστον ένα από τα C_i.

Θεώρημα 4.2.5 (**Schur**). *Για κάθε πεπερασμένη διαμέριση των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, υπάρχουν $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a_0, a_1, (a_0 + a_1) \in C_{i_0}$ για κάποιο $i_0 \leq r$.*

Επιστρέφοντας πάλι στους χρωματισμόύς του $\mathbb{N}$, το Θεώρημα *Schur* για παράδειγμα πιστοποιεί ότι εξισώσεις της μορφής $x + y = z$ στο $\mathbb{N}$ επιδέχονται μονοχρωματικές λύσεις και το Λήμμα *Hilbert* ότι συστήματα γραμμικών εξισώσεων επιδέχονται μονοχρωματικές λύσεις. Σημειώνουμε ότι και τα δύο παραπάνω απότελέσματα έχουν και αντίστοιχη "πεπερασμένη" μορφή, υπό την έννοια ότι για κάθε $r, k \in \mathbb{N}$ (ή για κάθε $r \in \mathbb{N}$ για το Θεώρημα *Schur*) υπάρχει $N = N(r, k) \in \mathbb{N}$ ώστε το συμπέρασμα να ισχύει και για κάθε διαμέριση του $\{1, 2, \ldots, N\}$ σε r το πλήθος σύνολα, η απόδειξή τους όμως ξεφεύγει από το σκόπο της παρούσας εργασίας.

Βιβλιογραφία

[1] Bergelson Vitaly, *Ergodic Ramsey Theory - an Update*. London Mathematical Society (1996).

[2] Bourbaki Nicolas, *Elements of Mathematics*, *General Topology Part* 1. Addison-Wesley Publishing (1966).

[3] Hindman Neil, *Finite Sums from Sequences Within Cells of a Partition of* $\mathbb{N}$. Journal of Combinatorial Theory (A) 17 (1974).

[4] Hindman Neil, *The Existence of Certain Ultrafilters on* $\mathbb{N}$ *and a Conjecture of Graham and Rothschild*. American Mathematical Society (1972).

[5] Kelley John, *General Topology*. Van Nostrand (1975).

[6] Moorhouse Eric, *The Stone-Čech Compactification* (2015).
www.uwyo.edu/moorhouse/courses/5600/stone-cech.pdf

[7] Munkres James, *General Topology*. Pearson (2nd Edition) (2000).

[8] Κανελλόπουλος Βασίλης, *Γενική Τοπολογία και Εφαρμογές*.
mycourses.ntua.gr/courses/SEMFE1122/document/topology-Notes.pdf

[9] Καρυοφύλλης Χρήστος, Κωνσταντιλάκη-Σαββοπούλου Χαρίκλεια, *Τοπολογία ΙΙ*. Εκδόσεις Ζήτη (1986).