



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

**Μελέτη Γεωδαισιακών
σε χωρόχρονους μελανών οπών**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Βασιλικής Ζαννή

Επιβλέπων: Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα
Ιούλιος 2017



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

**Μελέτη Γεωδαισιακών
σε χωρόχρονους μελανών οπών**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Βασιλικής Ζαννή

Επιβλέπων: Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τον Ιούλιο 2017.

(Υπογραφή)

.....
Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

(Υπογραφή)

.....
Ήργες Νικόλαος
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

(Υπογραφή)

.....
Γεώργιος Κουτσούμπας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2017

Εισαγωγή

Σύντομα μετά τη δημοσίευση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας το 1905, ο Einstein προσπάθησε να βρει τρόπο να συμπεριλάβει τη βαρύτητα στο νέο σχετικιστικό του πλαίσιο. Το 1907 ένα απλό νοητικό πείραμα που περιλάμβανε έναν παρατηρητή σε ελεύθερη πτώση, ήταν η απαρχή για την οκταετή έρευνά του πάνω στη σχετικιστική θεωρία της βαρύτητας. Μετά από μία πληθώρα λανθασμένων εκκινήσεων, η εργασία του κορυφώθηκε με την παρουσίαση των πεδιακών εξισώσεων του Einstein στην Πρωσική Ακαδημία Επιστημών το Δεκέμβριο του 1915 και τη δημοσίευσή τους στο περιοδικό *Annalen der Physik* το 1916. Οι εξισώσεις αυτές προσδιορίζουν τον τρόπο με τον οποίο η γεωμετρία του χώρου και του χρόνου επηρεάζεται από την ύπαρξη ύλης και ακτινοβολίας. Οι πεδιακές εξισώσεις του Einstein είναι μη γραμμικές και πολύ δύσκολο να επιλυθούν. Ο Einstein συγκεκριμένα, χρησιμοποίησε προσεγγιστικές μεθόδους στον υπολογισμό των αρχικών προβλέψεων της θεωρίας.

Σχεδόν αμέσως μόλις δημοσιεύτηκε λοιπόν το paper του Einstein, ο γερμανός αστρονόμος και αστροφυσικός Karl Schwarzschild έγραψε δύο paper τα οποία ουσιαστικά ήταν η πρώτη εφαρμογή της θεωρίας της γενικής σχετικότητας στην αστρονομία, και στα οποία παρουσίασε τις πρώτες ακριβείς λύσεις της. Στη συνέχεια, έστειλε το πρώτο paper με επιστολή στον Einstein, ζητώντας του να το παρουσιάσει στην Berlin Academy λόγω απουσίας του και αυτός του απάντησε:

"I had not expected that the exact solution to the problem could be formulated.
Your analytic treatment of the problem appears to me splendid."

Έπειτα από την παρουσίαση του paper στην Berlin Academy, ο Schwarzschild στο δεύτερο του paper έδειξε πώς η γενική σχετικότητα μπορεί να εφαρμοστεί για να περιγράψει τη δομή και τη δυναμική ενός ιδανικού άστρου. Είναι αρκετά πιθανό το γεγονός ότι εάν δεν υπήρχαν τα δύο paper του Schwarzschild, ίσως η θεωρία του Einstein να μην ήταν τόσο ευρέως γνωστή σήμερα.

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τη μελέτη των τροχιών σωματιδίων γύρω από μία Schwarzschild-AdS και μία Horndeski μελανή οπή. Αρχικά θα αναφερθούν κάποια πιο γενικά θεωρητικά στοιχεία, τα οποία είναι απαραίτητα για την κατανόηση βασικών εννοιών πάνω στις εξισώσεις κίνησης στον καμπύλο χωρόχρονο και τη γεωμετρία Schwarzschild, ενώ στη συνέχεια τροποποιώντας κατάλληλα τις δύο μετρικές θα επιχειρήσουμε να οδηγηθούμε τόσο σε ακτινικές όσο και σε μή ακτινικές τροχιές. Τέλος, θα αναφερθούν επιγραμματικά κάποια συμπεράσματα που εξαγάγαμε από τα διαγράμματα.

Ολοκληρώνοντας την εισαγωγή αυτή, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Ελευθέριο Παπαντωνόπουλο για τη βοήθεια και την καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας μου, καθώς και τον Κωνσταντίνο Ντρέκη για τις χρήσιμες συμβουλές του.

Περιεχόμενα

1 Βασικά στοιχεία Γενικής Σχετικότητας	4
1.1 Τανυστές	4
1.2 Συνδέσεις-Συναλλοίωτη παράγωγος	5
1.3 Παράλληλη μεταφορά	7
1.4 Τανυστής Riemann	8
1.5 Τα σύμβολα Christoffel	9
1.6 Γεωδαιτικές	11
1.7 Συμμετρίες των τανυστών Riemann και Ricci	14
1.8 Γεωμετρία Schwarzschild	15
1.9 Μελανή οπή Schwarzschild	15
1.10 Εξαγωγή της μετρικής Schwarzschild από τις εξισώσεις Einstein	16
2 Γεωδαισιακές σε Schwarzschild-AdS μελανή οπή	21
2.1 Timelike Γεωδαισιακές	24
2.1.1 Ακτινικές Τροχιές	25
2.1.2 Μη ακτινικές Τροχιές	29
2.2 Null Γεωδαισιακές	37
2.2.1 Ακτινικές Τροχιές	38
2.2.2 Μη ακτινικές Τροχιές	38
3 Timelike Γεωδαισιακές σε Horndeski μελανή οπή	49
3.1 Timelike Γεωδαισιακές	50
3.1.1 Ακτινικές Τροχιές	50

Κεφάλαιο 1

Βασικά στοιχεία Γενικής Σχετικότητας

1.1 Τανυστές

Αν θεωρήσουμε μία καμπύλη που διέρχεται από κάποιο σημείο A σε ένα χώρο n διαστάσεων, η καμπύλη αυτή θα καθορίζεται από n συναρτήσεις μιας βαθμωτής ποσότητας λ της μορφής

$$x^\mu = z^\mu(\lambda)$$

Αν στο σημείο A αντιστοιχεί η τιμή της παραμέτρου λ , τότε σε ένα διπλανό σημείο A' η τιμή της παραμέτρου θα είναι $\lambda + d\lambda$. Μπορούμε να ορίσουμε ως εφαπτόμενο διάνυσμα v^μ στο σημείο A το

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα v^μ που ορίζεται από την παραπάνω σχέση είναι ένα **ανταλλοίωτο διάνυσμα**.

Ένας μετασχηματισμός από το σύστημα x^μ σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων \bar{x}^μ , ορίζεται από τις n εξισώσεις

$$\bar{x}^\mu = f^\mu(x^\nu)$$

και ο αντίστροφος θα είναι

$$x^\mu = g^\mu(\bar{x}^\nu)$$

όπου $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1$. Οι μετασχηματισμοί αυτοί ισχύουν μόνο εάν οι Ιακωβιανές τους είναι διάφορες του μηδενός, δηλαδή εάν $\det \left| \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right| \neq 0$ και $\det \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \right| \neq 0$.

Ένα απειροστό διάνυσμα dx^ν που ορίζεται σε ένα σύστημα x^μ , θα μετασχηματίζεται σε ένα άλλο σύστημα \bar{x}^μ ως

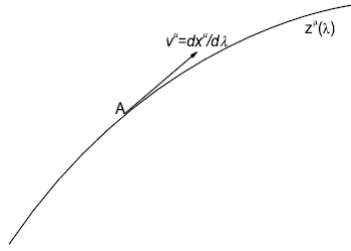
$$d\bar{x}^\mu = \sum_{\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \sum_{\nu} \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

για $\nu = 0, 1, \dots, n-1$.

Έστω ότι το ανταλλοίωτο διάνυσμα v^μ έχει οριστεί σε ένα σύστημα συντεταγμένων x^μ , τότε οι συνιστώσες του σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων, έστω το \bar{x}^μ θα δίνονται από μετασχηματισμούς της μορφής

$$\bar{v}^\mu = \frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda} = \sum_{\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \sum_{\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu$$

Αυτό είναι δυνατό επειδή η παράμετρος λ είναι βαθμωτό μέγεθος και συνεπώς η ποσότητα $d\lambda$ είναι αμετάβλητη κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων.



Σχήμα 1.1: Απεικόνιση ενός ανταλλοίωτου διανύσματος (Κώστας Δ. Κόκκοτας, Γενική Θεωρία της Σχετικότητας)

Αν δοθεί μία βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x)$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων x^μ , τότε οι n μερικοί παράγωγοι $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ μετασχηματίζονται στο νέο σύστημα συντεταγμένων ως

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^\mu} = \sum_{\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \quad (1.1)$$

Μια n -άδα ποσοτήτων $b_\mu = \{b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\}$ που μετασχηματίζεται όπως οι μερικοί παράγωγοι μιας βαθμωτής συνάρτησης, ονομάζεται **συναλλοίωτο διάνυσμα**. Οι σχέσεις μετασχηματισμού με βάση την (1.1) είναι

$$b_\mu = \sum_{\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \bar{b}_\nu$$

Τα βαθμωτά μεγέθη και τα διανύσματα (συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα) είναι ειδικές περιπτώσεις μιας ευρύτερης κατηγορίας γεωμετρικών ποσοτήτων που μετασχηματίζονται με βάση τους προηγούμενους κανόνες. Αυτές οι ποσότητες καλούνται **τανυστές**. Τα βαθμωτά μεγέθη είναι τανυστές μηδενικής τάξης ενώ τα διανύσματα είναι τανυστές πρώτης τάξης.

Θα ονομάζουμε ανταλλοίωτο τανυστή $2^{ηs}$ τάξης σε ένα n -διάστατο χώρο, την ποσότητα $T^{\mu\nu}$ η οποία έχει n^2 συνιστώσες και μετασχηματίζεται ως

$$\bar{T}^{a\beta} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} T^{\mu\nu}$$

Ομοίως, μπορούμε να ορίσουμε και τους τανυστές $2^{ηs}$ τάξης $T_{\mu\nu}$ (συναλλοίωτος) και T^μ_ν (μεικτός) που μετασχηματίζονται ως εξής

$$\bar{T}_{a\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} T_{\mu\nu} \quad \text{και} \quad \bar{T}^\alpha_\beta = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} T^\mu_\nu$$

1.2 Συνδέσεις-Συναλλοίωτη παράγωγος

Γνωρίζουμε ότι αν σε κάθε σημείο ενός χώρου αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα, τότε ορίζουμε ένα διανυσματικό πεδίο. Κατ' αντιστοιχία αν ορίσουμε έναν τανυστή τάξης m σε ένα χώρο, τότε θα έχουμε ορίσει ένα τανυστικό πεδίο. Προηγουμένως ορίσαμε στην εξίσωση (1.1) ότι η παράγωγος ενός βαθμωτού μεγέθους είναι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος. Αυτή είναι η

μόνη περίπτωση στην οποία η παράγωγος ενός ταυυστικού πεδίου είναι ταυυστής. Γενικά, η παραγωγή ενός ταυυστικού πεδίου δεν ορίζει ένα νέο ταυυστικό πεδίο. Ο λόγος είναι πως το διαφορικό ενός ταυυστή είναι πρακτικά ίσο με τη διαφορά ταυυστών που βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χωρόχρονου. Αλλά σε διαφορετικά σημεία οι ταυυστές μετασχηματίζονται με διαφορετικό τρόπο, γιατί οι συντελεστές του μετασχηματισμού είναι συναρτήσεις της θέσης. Ουσιαστικά θέλουμε να δούμε εάν είναι δυνατός ο ορισμός ενός νέου ταυυστικού πεδίου από την παραγωγή ενός αρχικού, υποθέτοντας ότι οι συνιστώσεις του αρχικού ταυυστή είναι συνεχείς και διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Η εξίσωση (1.1) ορίζει πως η μερική παράγωγος ενός βαθμωτού πεδίου $\phi = \phi(x^a)$ (ταυυστής μηδενικής τάξης) οδηγεί σε ταυυστικό πεδίο πρώτης τάξης (διάνυσμα), δηλαδή

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^a} = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^a} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^\lambda}$$

Θεωρούμε ένα ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $A^\lambda(x^\mu)$ και συμβολίζουμε τη μερική του παράγωγο ως $\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\kappa}$. Τότε ο μετασχηματισμός του $\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\kappa}$ σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων έστω \bar{x}^κ οδηγεί στη σχέση

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{A}^\nu \right) = \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\rho} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{A}^\nu \right) = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\rho} \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^a} \bar{A}^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{A}^\nu}{\partial \bar{x}^\rho}$$

Προφανώς, αν ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης ήταν μηδέν, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μερική παραγωγή ενός διανύσματος οδηγεί στη δημιουργία ενός ταυυστή δευτέρας τάξης, το οποίο είναι δυνατόν να ισχύει σε κάποιο ειδικό σύστημα συντεταγμένων, αλλά όχι γενικά. Συνεπώς, θα ισχύει

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^a} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^a} \left(\frac{\partial \bar{A}^\nu}{\partial x^\rho} + \underbrace{\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \bar{x}^\sigma \partial \bar{x}^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\kappa}}_{\bar{\gamma}_{\sigma\rho}^\nu} \bar{A}^\sigma \right)$$

Αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία για το μετασχηματισμό της μερικής παραγωγού του διανύσματος A^μ και θεωρήσουμε ένα μετασχηματισμό από το σύστημα συντεταγμένων x^μ σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων x'^μ , τότε θα έχουμε τον εξής μετασχηματισμό

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^a} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^a} \left(\frac{\partial A'^\nu}{\partial x^\rho} + \gamma'_{\sigma\rho}{}^\nu A'^\sigma \right)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι ποσότητες $\gamma'_{\sigma\rho}{}^\nu$ είναι αναγκαίες για το μετασχηματισμό της μερικής παραγωγού. Αν ζητούσαμε το μετασχηματισμό από το σύστημα συντεταγμένων \bar{x}^μ στο x'^μ (και εξαλείψαμε πλήρως τους όρους που σχετίζονται με το σύστημα συντεταγμένων x^μ), τότε θα είχαμε μια σχέση της μορφής

$$\frac{\partial \bar{A}^\mu}{\partial x^a} + \bar{\Gamma}_{a\lambda}^\mu \bar{A}^\lambda = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^a} \left(\frac{\partial A'^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma'_{\sigma\rho}{}^\nu A'^\sigma \right)$$

όπου οι ποσότητες $\bar{\Gamma}_{a\lambda}^\mu$ προέκυψαν κατά τη διάρκεια του μετασχηματισμού $\bar{x}^\mu \rightarrow x'^\mu$ και ονομάζονται **συνδέσεις**. Για να καταλήξουμε στην παραπάνω σχέση, χρησιμοποιήσαμε μετασχηματισμούς της μορφής

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \Gamma'_{\rho\nu}{}^\lambda - \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \Gamma'_{\kappa\lambda}{}^\mu$$

που οδηγούν στη σχέση

$$\Gamma'_{\rho\nu}{}^\lambda = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} + \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \Gamma'_{\kappa\sigma}{}^\mu$$

Η παραπάνω σχέση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι συνδέσεις δεν είναι ταυσιές, αλλά ποσότητες που ορίζονται σε κάθε σημείο του χώρου και μέσω αυτών γίνεται δυνατός ο ορισμός μιας αναλλοίωτης μορφής παραγώγισης, την οποία ονομάζουμε **συναλλοίωτη παράγωγο**. Ως συναλλοίωτη παράγωγο ενός ανταλλοίωτου διανύσματος A^μ ορίζουμε τον ταυσιτή δευτέρας τάξης που δίνεται από την παρακάτω σχέση

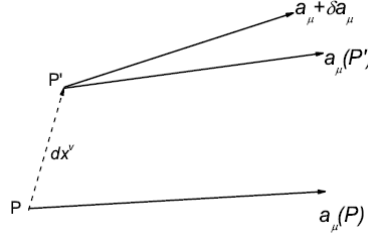
$$A^\mu_{;a} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^a} + \Gamma^\mu_{a\lambda} A^\lambda$$

1.3 Παράλληλη μεταφορά

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο a_μ . Θα συμβολίσουμε με $a_\mu(P)$ το διάνυσμα στη θέση P και με $a_\mu(P')$ αυτό που βρίσκεται στη θέση P' , όπου τα P και P' απέχουν κατά dx^ν . Τότε, ορίζουμε την ποσότητα

$$\delta^{(1)} a_\mu = a_\mu(P') - a_\mu(P) = a_\mu(P) + \frac{\partial a_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu - a_\mu(P) = \frac{\partial a_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

η οποία όμως δεν είναι διάνυσμα (ή γενικότερα ταυσιτής), γιατί η διαφορά δύο διανυσμάτων (ή ταυσιτών) είναι ταυσιτής μόνο αν ορίζονται στο ίδιο σημείο. Αυτό εξηγεί και το ότι ο $\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\nu}$ δεν είναι ταυσιτής.



Σχήμα 1.2: Παράλληλη μεταφορά του a_μ από το P στο P' (Κώστας Δ. Κόκκοτας, Γενική Θεωρία της Σχετικότητας)

Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε ένα νέο διάνυσμα στο σημείο P' το οποίο να μπορεί να θεωρηθεί ως ισοδύναμο του διανύσματος a_μ που ορίζεται στο P . Έστω λοιπόν ότι το ζητούμενο διάνυσμα είναι το $A_\mu(P') = a_\mu(P) + \delta a_\mu$, οπότε έχουμε

$$\underbrace{a_\mu(P') - A_\mu(P')}_{\text{vector}} = \underbrace{a_\mu + \delta^{(1)} a_\mu}_{\text{at } P} - \underbrace{(a_\mu + \delta a_\mu)}_{\text{at } P} = \underbrace{\delta^{(1)} a_\mu - \delta a_\mu}_{\text{vector}} = \underbrace{\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu - \delta a_\mu}_{\text{vector}} \quad (1.2)$$

Η ποσότητα δa_μ είναι ανάλογη του dx^ν και του αρχικού διανύσματος $a_\mu(P)$, άρα θα είναι της μορφής

$$\delta a_\mu = C^\lambda_{\mu\nu} a_\lambda dx^\nu$$

όπου $C^\lambda_{\mu\nu}$ μια ποσότητα που δεν είναι υποχρεωτικά ταυσιτής. Αν τώρα αντικαταστήσουμε την παραπάνω μορφή του δa_μ στην (1.2), καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu - \delta a_\mu = \left(\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\nu} - C^\lambda_{\mu\nu} a_\lambda \right) dx^\nu$$

Επειδή το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι διάνυσμα, θα πρέπει και το δεξί μέλος να είναι διάνυσμα, ή καλύτερα ο όρος εντός της παρένθεσης να είναι τανυστής. Προφανώς, τα $\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\nu}$ και $C_{\mu\nu}^\lambda$ δεν είναι τανυστές, υπάρχει όμως η δυνατότητα να είναι η ποσότητα $\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\nu} - C_{\mu\nu}^\lambda a_\lambda$ τανυστής, αν $C_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, δηλαδή αν είναι σύνδεση του χώρου, οπότε και η ποσότητα εντός της παρένθεσης γίνεται η συναλλοίωτη παράγωγος του διανύσματος a_μ , που έχουμε δείξει ότι είναι τανυστής. Άρα αν ένα διάνυσμα που ορίζεται στο σημείο P το μεταφέρουμε παράλληλα σε ένα κοντινό σημείο P' , η μεταβολή που θα υποστεί θα υπολογίζεται από τη σχέση

$$\delta a_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda a_\lambda dx^\nu$$

και αντίστοιχα μπορεί να δειχθεί ότι κατά την παράλληλη μεταφορά ενός ανταλλοίωτου διανύσματος, η μεταβολή θα δίνεται από τη σχέση

$$\delta a^\mu = -\Gamma_{\lambda\nu}^\mu a^\lambda dx^\nu$$

1.4 Τανυστής Riemann

Θα εξετάσουμε τώρα τη μεταβολή που υφίσταται ένα διάνυσμα κατά την παράλληλη μεταφορά του κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης. Στην προκειμένη περίπτωση δηλαδή, κατά τη μεταφορά του κατά μήκος ενός παραλληλογράμμου με πλευρές dx^λ και δx^λ .

Η παράλληλη μεταφορά του διανύσματος a^λ από το σημείο P στο σημείο A θα έχει ως συνέπεια τη μεταβολή του διανύσματος κατά μια ποσότητα $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(P) a^\mu dx^\nu$, δηλαδή το νέο διάνυσμα θα είναι

$$a^\lambda(A) = a^\lambda(P) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(P) a^\mu dx^\nu$$

Η περαιτέρω μεταφορά του διανύσματος στο σημείο B , θα δώσει το διάνυσμα

$$a^\lambda(B) = a^\lambda(A) - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda(A) a^\rho(A) \delta x^\sigma = a^\lambda(P) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(P) a^\mu dx^\nu - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda(A) [a^\rho(P) - \Gamma_{\beta\nu}^\rho(P) a^\beta dx^\nu] \delta x^\sigma$$

Επειδή όμως οι ποσότητες dx^ν και δx^ν είναι μικρές, μπορούμε προσεγγιστικά να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση

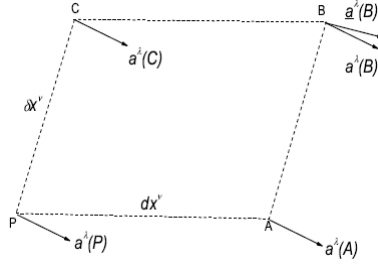
$$\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda(A) \approx \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda(P) + \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda}{\partial x^\mu}(P) dx^\mu$$

Με αυτή την αντικατάσταση περιγράφουμε τη συνολική μεταβολή που υφίσταται το διάνυσμα a^λ κατά τη μεταφορά του από το σημείο P στο A και στη συνέχεια στο B , σαν συνάρτηση μόνο ποσοτήτων ορισμένων στο αρχικό σημείο P . Οπότε, το διάνυσμα στο τέλος της διαδρομής θα δίνεται από τη σχέση

$$a^\lambda(B) = a^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda a^\mu dx^\nu - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda a^\rho \delta x^\sigma + \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \Gamma_{\beta\nu}^\rho a^\beta dx^\nu \delta x^\sigma + \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda}{\partial x^\tau} a^\rho dx^\tau \delta x^\sigma - \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda}{\partial x^\tau} \Gamma_{\beta\nu}^\rho a^\beta dx^\tau dx^\nu \delta x^\sigma \quad (1.3)$$

όπου όλοι οι όροι στο δεξί μέλος της εξίσωσης ορίζονται στο αρχικό σημείο P . Ο τελευταίος όρος στην παραπάνω σχέση είναι γινόμενο τριών απειροστά μικρών ποσοτήτων και ως εκ τούτου σημαντικά μικρότερος από τους υπόλοιπους όρους και μπορεί να παραληφθεί.

Αντί να συνεχίσουμε τη μεταφορά του διανύσματος a^λ στο σημείο C και στη συνέχεια στο σημείο B ώστε να υπολογίσουμε τη συνολική μεταβολή του, μπορούμε εναλλακτικά να μεταφέρουμε το διάνυσμα a^λ ακολουθώντας τη διαδρομή $P \rightarrow C \rightarrow B$ και να αθροίσουμε τις



Σχήμα 1.3: Σχηματική παράσταση της διαδρομής που ακολουθεί το διάνυσμα a^λ (Κώστας Δ. Κόκκοτας, Γενική Θεωρία της Σχετικότητας)

μεταβολές που έχει υποστεί κατά τη διάρκεια των δύο διαδρομών που ακολούθησε.

Αυτή η τελευταία πράξη είναι σχετικά απλή, διότι για να υπολογίσουμε το διάνυσμα που θα προκύψει ακολουθώντας τη διαδρομή $P \rightarrow C \rightarrow B$, αρκεί να βάλουμε στη σχέση (1.3) όπου dx^ν το δx^ν και αντίστροφα, όπου δx^ν το dx^ν . Οπότε, το νέο διάνυσμα \underline{a}^λ θα είναι

$$\underline{a}^\lambda(B) = a^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda a^\mu \delta x^\nu - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda a^\rho dx^\sigma + \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \Gamma_{\beta\nu}^\rho a^\beta \delta x^\nu dx^\sigma + \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda}{\partial x^\tau} a^\rho \delta x^\tau dx^\sigma$$

Σχετικά εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\delta a^\lambda \equiv a^\lambda(B) - \underline{a}^\lambda(B) = a^\beta (dx^\nu \delta x^\sigma - dx^\sigma \delta x^\nu) \left(\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \Gamma_{\beta\nu}^\rho + \frac{\partial \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda}{\partial x^\nu} \right)$$

ενώ εναλλάσσοντας κατάλληλα τους δείκτες χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις $\nu \rightarrow \sigma$ και $\sigma \rightarrow \nu$, δημιουργούμε μια παρόμοια σχέση

$$\delta a^\lambda = a^\beta (dx^\sigma \delta x^\nu - dx^\nu \delta x^\sigma) \left(\Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\beta\sigma}^\rho + \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^\lambda}{\partial x^\sigma} \right)$$

Οπότε, προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, λαμβάνουμε ότι η συνολική μεταβολή που υπέστη το διάνυσμα κατά την περιφορά του, είναι

$$\delta a^\lambda = -\frac{1}{2} a^\beta R_{\beta\nu\sigma}^\lambda (dx^\sigma \delta x^\nu - dx^\nu \delta x^\sigma)$$

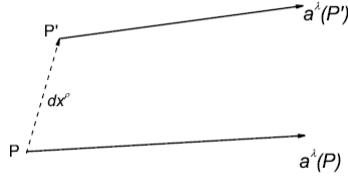
όπου

$$R_{\beta\nu\sigma}^\lambda = -\frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^\lambda}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\beta\sigma}^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$$

Ο τανυστής $R_{\beta\nu\sigma}^\lambda$ που είναι γνωστός ως **τανυστής Riemann**, εκφράζει την καμπυλότητα του χώρου και οι ιδιότητες και συμμετρίες του θα αναφερθούν αργότερα.

1.5 Τα σύμβολα Christoffel

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο a^λ . Συμβολίζουμε με $a^\lambda(P)$ το διάνυσμα στη θέση P και με $a^\lambda(P')$ αυτό που βρίσκεται στη θέση P' , όπου τα P και P' απέχουν κατά dx^ρ . Η παράλληλη



Σχήμα 1.4: Παράλληλη μεταφορά του a^λ από το P στο P' (Κώστας Δ. Κόκκοτας, Γενική Θεωρία της Σχετικότητας)

μεταφορά εξασφάλιζε ότι το μέτρο του a^λ δεν θα πρέπει να μεταβάλλεται κατά τη μεταφορά του από το P στο P' . Δηλαδή $|a|_P^2 = |a|_{P'}^2$, ή διαφορετικά,

$$g_{\mu\nu}(P)a^\mu(P)a^\nu(P) = g_{\mu\nu}(P')a^\mu(P')a^\nu(P') \quad (1.4)$$

Επειδή τα σημεία P και P' απέχουν dx^ρ , θα ισχύει προσεγγιστικά:

$$g_{\mu\nu}(P') \simeq g_{\mu\nu}(P) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}(P)dx^\rho$$

$$a^\mu(P') \simeq a^\mu(P) - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu(P)a^\sigma(P)dx^\rho$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω δύο σχέσεις στην (1.4), καταλήγουμε στη σχέση

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - g_{\mu\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^\sigma - g_{\sigma\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\sigma \right) a^\mu a^\nu dx^\rho = 0$$

Επειδή όμως η επιλογή του διανύσματος a^λ αλλά και της στοιχειώδους μετατόπισης dx^ρ ήταν τυχαία, θα ισχύει ότι

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - g_{\mu\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^\sigma - g_{\sigma\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\sigma = 0 \quad (1.5)$$

Αν εναλλάξουμε τους δείκτες,

$$\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - g_{\nu\sigma}\Gamma_{\rho\mu}^\sigma - g_{\sigma\rho}\Gamma_{\nu\mu}^\sigma = 0 \quad (1.6)$$

και συνεχίζοντας την εναλλαγή δημιουργούμε τη σχέση

$$\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - g_{\rho\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g_{\sigma\mu}\Gamma_{\rho\nu}^\sigma = 0 \quad (1.7)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1.5) και (1.6) και αφαιρώντας τη σχέση (1.7), βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} = 2g_{\sigma\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\sigma$$

οπότε, πολλαπλασιάζοντας με $g^{a\nu}$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\Gamma_{\mu\rho}^a = \frac{1}{2}g^{a\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} \right)$$

Οι σταθερές $\Gamma_{\mu\rho}^a$ καλούνται σύμβολα Christoffel. Τα σύμβολα Christoffel μπορούν να ληφθούν έτσι ώστε να είναι συμμετρικά ως προς τους δύο κάτω δείκτες, δηλαδή

$$\Gamma_{\mu\rho}^a = \Gamma_{\rho\mu}^a$$

1.6 Γεωδαιτικές

Γνωρίζουμε ότι το στοιχείο μήκους σε έναν επίπεδο χωρόχρονο ή αλλιώς χώρο Minkowski, ορίζεται ως εξής

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Η γεωμετρία του χωρόχρονου που καθορίζεται από την παραπάνω σχέση δεν είναι μία τετραδιάστατη Ευκλείδεια γεωμετρία, λόγω του προσήμου μείον στον όρο $(cdt)^2$. Ειδικότερα, το τετράγωνο της απόστασης που χωρίζει δύο σημεία μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν. Όταν το ds^2 είναι θετικό, τα σημεία λέγεται ότι είναι χωροειδώς χωρισμένα. Σε αυτήν την περίπτωση για παράδειγμα, θα είναι $dt = 0$ και $dx \neq 0$. Από την άλλη, όταν το ds^2 είναι αρνητικό τα σημεία λέμε ότι είναι χρονοειδώς χωρισμένα, πράγμα που συμβαίνει για παράδειγμα όταν δύο σημεία βρίσκονται στην ίδια θέση $dx = dy = dz = 0$ αλλά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές $dt \neq 0$. Τέλος, όταν το ds^2 είναι μηδέν, τότε τα σημεία ονομάζονται φωτοειδώς χωρισμένα. Για παράδειγμα, υπάρχει μηδενική απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία με $dy = dz = 0$ αλλά $dx = cdt$. Μηδενικώς χωρισμένα σημεία μπορούν να συνδεθούν με φωτεινές ακτίνες οι οποίες κινούνται με ταχύτητα c . Συνεπώς,

$$ds^2 > 0 \quad \text{χωροειδώς χωρισμένα,}$$

$$ds^2 = 0 \quad \text{φωτοειδώς χωρισμένα,}$$

$$ds^2 < 0 \quad \text{χρονοειδώς χωρισμένα.}$$

Ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων που είναι φωτοειδώς χωρισμένα από ένα σημείο P στο χωρόχρονο, ονομάζεται κώνος φωτός του σημείου και ουσιαστικά είναι μία τριδιάστατη επιφάνεια στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Ο μελλοντικός κώνος φωτός του P παράγεται από φωτεινές ακτίνες που εξέρχονται από το P , ενώ ο παρελθοντικός κώνος φωτός παράγεται από ακτίνες που συγκλίνουν στο P .

Τα σημεία που είναι χρονοειδώς χωρισμένα με το P βρίσκονται εντός του κώνου φωτός, ενώ τα σημεία που είναι χωροειδώς χωρισμένα με το P βρίσκονται εκτός του κώνου φωτός. Οι διαδρομές των ακτίνων φωτός είναι ευθείες γραμμές στο χωρόχρονο με σταθερή κλίση που αντιστοιχεί στην ταχύτητα του φωτός, και επομένως η διεύθυνσή τους συμπίπτει με αυτή των φωτοειδών κοσμικών γραμμών. Οι ευθείες γραμμές κατά τη διεύθυνση των κοσμικών γραμμών-ακτίνων φωτός είναι για κάθε σημείο P εφαπτομενικές του κώνου φωτός αυτού του σημείου. Συνεπώς, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων κατά μήκος μιας ακτίνας φωτός είναι μηδενική. Τα σωματίδια με μη μηδενική μάζα ηρεμίας, κινούνται κατά μήκος χρονοειδών κοσμικών γραμμών που βρίσκονται συνεχώς εντός του κώνου φωτός οποιουδήποτε σημείου της τροχιάς τους. Έτσι, η ταχύτητά τους σε κάθε σημείο είναι πάντοτε μικρότερη της ταχύτητας του φωτός. Δύο γειτονικά σημεία σε μια χρονοειδή κοσμική γραμμή (η καμπύλη που διαγράφει ένα σωματίδιο στο χωρόχρονο) είναι χρονοειδώς χωρισμένα, $ds^2 < 0$. Για τη μέτρηση αυτής της απόστασης κατά μήκος μιας κοσμικής γραμμής ενός σωματιδίου, εισαγάγουμε το μέγεθος

$$d\tau^2 \equiv -\frac{ds^2}{c^2}$$

Τότε, το $d\tau$ είναι πραγματικός αριθμός με διαστάσεις χρόνου. Γι' αυτό το λόγο, ένα ρολόι που κινείται κατά μήκος μιας χρονοειδούς καμπύλης μετρά την απόσταση τ κατά μήκος της. Εναλλακτικά, χρησιμοποιείται η ονομασία **ιδιόχρονος** γι' αυτή την απόσταση, ο χρόνος δηλαδή που θα μετρούσαν από ένα ρολόι εάν αυτό ακολουθούσε την κοσμική γραμμή.

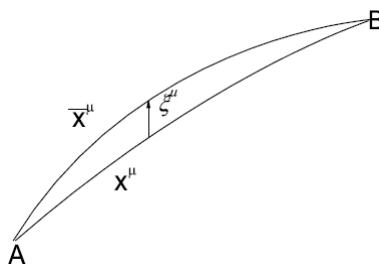
Οι τοπικές ιδιότητες του καμπυλωμένου χωρόχρονου δεν μπορούν να διακριθούν από αυτές του επίπεδου χωρόχρονου της ειδικής σχετικότητας. Συνεπώς, η γενική σχετικότητα "κληρονομεί" τη δομή των τοπικών κώνων φωτός της ειδικής σχετικότητας.

Οι καμπυλωμένοι χωρόχρονοι της γενικής σχετικότητας ερευνώνται, μελετώντας τη διέλευση δοκιμαστικών σωματιδίων και φωτεινών ακτίνων. Η μάζα ενός δοκιμαστικού σωματιδίου είναι τόσο μικρή που δεν προκαλεί κάποια αξιόλογη στρέβλωση στο χωρόχρονο. Αντιθέτως, κινείται ως αποτέλεσμα της στρέβλωσης που προκαλείται από άλλα σώματα με μη αμελητέα μάζα. Θα ασχοληθούμε λοιπόν με τις βασικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση δοκιμαστικών σωματιδίων και φωτεινών ακτίνων σε ένα γενικά καμπυλωμένο χωρόχρονο. Τα σωματίδια αυτά αποκαλούνται *ελεύθερα* (free), δηλαδή ελεύθερα από οποιαδήποτε επίδραση εκτός της καμπυλότητας του χωρόχρονου. Η γενική αρχή της κίνησης ελεύθερων δοκιμαστικών σωματιδίων στον καμπυλωμένο χωρόχρονο, διατυπώνεται ως εξής

Η Αρχή των Μεταβολών για την Κίνηση Ελεύθερου Δοκιμαστικού Σωματιδίου

Η κοσμική γραμμή ενός ελεύθερου δοκιμαστικού σωματιδίου μεταξύ δύο χρονοειδώς διαχωρισμένων σημείων του χωρόχρονου, οδηγεί σε τοπικό ακρότατο του ιδιόχρονου μεταξύ τους.

Οι κοσμικές γραμμές με ακρότατο στον ιδιόχρονο ονομάζονται **γεωδαιτικές** (geodesics) και οι εξισώσεις κίνησης που τις καθορίζουν συνιστούν τη **γεωδαιτική εξίσωση** (geodesic equation).



Σχήμα 1.5: Δύο καμπύλες x^μ και \bar{x}^μ που ενώνουν δύο σημεία A και B (Κώστας Δ. Κόκκοτας, Γενική Θεωρία της Σχετικότητας)

Έστω ότι το μήκος μιας καμπύλης $x^\mu(s)$ που ενώνει δύο σημεία A και B είναι S και δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \left[g_{\mu\nu}(x^a) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right]^{1/2} ds$$

Μία γειτονική καμπύλη $\bar{x}^\mu(s)$ που ενώνει τα ίδια σημεία A και B, θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu$$

με $\xi^\mu = 0$ στα άκρα A και B. Το μήκος της νέας καμπύλης θα είναι

$$\bar{S} = \int_A^B \left[g_{\mu\nu}(\bar{x}^a) \frac{d\bar{x}^\mu}{ds} \frac{d\bar{x}^\nu}{ds} \right]^{1/2} ds$$

οπότε για απλότητα αντικαθιστούμε $u^\mu = \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ και $\bar{u}^\mu = \dot{\bar{x}}^\mu = \frac{d\bar{x}^\mu}{ds} = \dot{x}^\mu + \epsilon \dot{\xi}^\mu$. Επίσης,

$$f(x^a, u^a) = [g_{\mu\nu}(x^a) u^\mu u^\nu]^{1/2}$$

$$\bar{f}(\bar{x}^a, \bar{u}^a) = [g_{\mu\nu}(\bar{x}^a) \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu]^{1/2}$$

Άρα, ορίζουμε τη διαφορά $\delta S = \bar{S} - S$, η οποία θα πρέπει να μηδενίζεται για να είναι το μήκος S ακρότατο, δηλαδή η απόσταση των σημείων Α και Β ελάχιστη. Οπότε,

$$\delta S = \int_A^B \delta f ds = \int_A^B (\bar{f} - f) ds = \epsilon \int_A^B \left[\frac{\partial f}{\partial x^a} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial f}{\partial u^a} \right) \right] \xi^a ds + \epsilon \int_A^B \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial f}{\partial u^a} \xi^a \right) ds$$

όπου έγινε χρήση των σχέσεων:

- $\bar{f}(\bar{x}^a, \bar{u}^a) = f(x^a + \epsilon \xi^a, u^a + \epsilon \dot{\xi}^a) = f(x^a, u^a) + \epsilon \xi^a \frac{\partial f}{\partial x^a} + \epsilon \dot{\xi}^a \frac{\partial f}{\partial u^a} + O(\epsilon^2)$
- $\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial f}{\partial u^a} \xi^a \right) = \frac{\partial f}{\partial u^a} \dot{\xi}^a + \frac{d}{ds} \frac{\partial f}{\partial u^a} \xi^a$

Ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης μηδενίζεται, διότι στα άκρα του διαστήματος, $\xi^a = 0$. Άρα, το μήκος θα γίνει ακρότατο αν

$$\delta S = \epsilon \int_A^B \left[\frac{\partial f}{\partial x^a} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial f}{\partial u^a} \right) \right] \xi^a ds = 0$$

και επειδή το διάνυσμα ξ^a είναι τυχαίο, η συνθήκη ακροτάτου μήκους γίνεται:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial f}{\partial u^\mu} \right) - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = 0 \quad (1.8)$$

Η Λαγκρανζιανή για ένα ελεύθερα κινούμενο σωματίδιο μάζας $m = 2$, θα είναι

$$L = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \pi \equiv f^2 \rightarrow f = L^{1/2}$$

οπότε αντικαθιστώντας τις $\frac{\partial f}{\partial u^a} = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial u^a} L^{-1/2}$ και $\frac{\partial f}{\partial x^a} = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x^a} L^{-1/2}$ στην (1.8), καταλήγουμε στη συνθήκη ακροτάτου μήκους των Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (1.9)$$

Θα δείξουμε τώρα πώς από τις εξισώσεις Euler-Lagrange θα καταλήξουμε στην τελική μορφή των εξισώσεων των γεωδαισιακών. Είπαμε προηγουμένως ότι η Λαγκρανζιανή έχει τη μορφή $L = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$, οπότε

$$\frac{\partial L}{\partial u^a} = g_{\mu\nu} \frac{\partial u^\mu}{\partial u^a} u^\nu + g_{\mu\nu} u^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial u^a} = g_{\mu\nu} \delta_a^\mu u^\nu + g_{\mu\nu} u^\mu \delta_a^\nu = 2g_{\mu a} u^\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^a} u^\mu u^\nu$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial u^a} \right) = \frac{d}{ds} (2g_{\mu a} u^\mu) = 2 \frac{dg_{\mu a}}{ds} u^\mu + 2g_{\mu a} \frac{du^\mu}{ds} = 2 \frac{\partial g_{\mu a}}{\partial x^\nu} u^\nu u^\mu + 2g_{\mu a} \frac{du^\mu}{ds} =$$

$$\frac{\partial g_{\mu a}}{\partial x^\nu} u^\nu u^\mu + \frac{\partial g_{\nu a}}{\partial x^\mu} u^\mu u^\nu + 2g_{\mu a} \frac{du^\mu}{ds}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (1.9), καταλήγουμε στη σχέση

$$g_{\mu a} \frac{du^\mu}{ds} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\mu a}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{a\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^a} \right] u^\mu u^\nu = 0$$

την οποία αν πολλαπλασιάσουμε με $g^{\rho a}$, οδηγούμαστε στην εξίσωση των γεωδαισιακών

$$\frac{du^\rho}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho u^\mu u^\nu = 0$$

Συχνότερα συναντώνται οι **εξισώσεις των γεωδαισιακών** στην παρακάτω μορφή

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Πρόκειται για τέσσερις εξισώσεις, μία για κάθε τιμή του ανεξάρτητου δείκτη ρ .

1.7 Συμμετρίες των τανυστών Riemann και Ricci

Ο **τανυστής Riemann** ή τανυστής καμπυλότητας Riemann (Riemann curvature tensor) αποτελεί θεμελιώδες μέγεθος, καθώς καθορίζει με μοναδικό τρόπο τη χωροχρονική καμπυλότητα. Συγκεκριμένα,

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\gamma\epsilon}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon - \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon$$

Γράφοντας τον τανυστή Riemann στη συναλλοίωτη μορφή του, δηλαδή

$$R_{\kappa\beta\gamma\delta} = g_{\kappa\alpha} R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$$

παρατηρούμε ότι ο τανυστής είναι αντισυμμετρικός ως προς τους δείκτες $\gamma\delta$ και τους δείκτες $\kappa\beta$ και συμμετρικός ως προς την εναλλαγή της σειράς του ζεύγους των δεικτών $\kappa\beta \leftrightarrow \gamma\delta$, δηλαδή

$$R_{\kappa\beta\gamma\delta} = -R_{\kappa\beta\delta\gamma}$$

$$R_{\kappa\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\kappa\gamma\delta}$$

$$R_{\kappa\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\kappa\beta}$$

Η **καμπυλότητα Ricci** εκφράζεται ως εξής:

$$R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\gamma\beta}^\gamma$$

Η καμπυλότητα Ricci μπορεί επίσης να εκφραστεί απευθείας σε σχέση με τα σύμβολα Christoffel

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^\delta - \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\delta$$

και εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ένας συμμετρικός τανυστής:

$$R_{\beta\mu} = R_{\mu\beta}$$

1.8 Γεωμετρία Schwarzschild

Οι απλούστεροι καμπυλωμένοι χωρόχρονοι της γενικής σχετικότητας είναι αυτοί που παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη συμμετρία. Τον πιο σημαντικό από αυτούς συνιστά η γεωμετρία του κενού χώρου στο εξωτερικό μιας σφαιρικά συμμετρικής πηγής καμπυλότητας, όπως είναι για παράδειγμα ένα σφαιρικό άστρο. Η γεωμετρία αυτή καλείται **γεωμετρία Schwarzschild** προς τιμήν του Karl Schwarzschild (1873-1916), ο οποίος έλυσε την εξίσωση Einstein το 1916. Η γεωμετρία Schwarzschild είναι μία λύση της εξίσωσης Einstein για το κενό, δηλαδή της εξίσωσης Einstein για τον καμπυλωμένο χωρόχρονο απουσία ύλης.

Το στοιχείο μήκους της γεωμετρίας Schwarzschild περιγράφεται σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων (σε μονάδες $c \neq 1$) από την:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

όπου η ποσότητα $\frac{2GM}{c^2 r}$ προσδιορίζει ουσιαστικά το βαθμό απόκλισης του χωρόχρονου Schwarzschild από το χωρόχρονο Minkowski. Η παραπάνω σχέση ουσιαστικά είναι η μετρική Schwarzschild, η οποία διακρίνεται από χρονική ανεξαρτησία και σφαιρική συμμετρία (ανεξάρτητη από t και ϕ). Η σταθερά M ερμηνεύεται ως η συνολική μάζα της πηγής καμπυλότητας. Η ακτίνα $r = \frac{2GM}{c^2}$ καλείται ακτίνα Schwarzschild (Schwarzschild radius) και αποτελεί χαρακτηριστικό της κλίμακας μεγέθους της καμπύλωσης στη γεωμετρία Schwarzschild. Αποδεικνύεται ωστόσο, ότι η επιφάνεια ενός στατικού αστέρα βρίσκεται πάντα έξω από αυτή την ακτίνα.

Το στοιχείο μήκους Schwarzschild σε γεωμετροποιημένες μονάδες, έχει τη μορφή

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.10)$$

1.9 Μελανή οπή Schwarzschild

Όταν εξαντληθούν εντελώς τα θερμοπυρηνικά καύσιμα ενός αστρού, το άστρο είτε καταλήγει σε ισορροπία, είτε σε βαρυτική κατάρρευση. Έστω η ιδανική περίπτωση όπου το σώμα που καταρρέει βαρυτικά και ο χωρόχρονος στο εξωτερικό του έχουν σφαιρική συμμετρία. Ακόμα, υπάρχει ανεξαρτησία ως προς το χρόνο επειδή η μάζα διατηρείται. Τότε, η γεωμετρία στο εξωτερικό μιας συμμετρικής βαρυτικής κατάρρευσης είναι η χρονικά ανεξάρτητη γεωμετρία Schwarzschild. Η ιδιομορφία της μετρικής Schwarzschild στην ακτίνα $r = 2M$ αποδεικνύεται τελικά ότι δεν είναι ιδιομορφία του χωρόχρονου καθεαυτού, αλλά ιδιομορφία των συντεταγμένων Schwarzschild. Υπάρχουν αρκετά συστήματα συντεταγμένων στα οποία η μετρική δεν παρουσιάζει ιδιομορφία στο $r = 2M$, όπως π.χ το σύστημα συντεταγμένων Eddington-Finkelstein. Σε αυτό, αντικαθιστούμε στην (1.10) τη χρονική συντεταγμένη Schwarzschild t με μια νέα v που ορίζεται ως

$$t = v - r - 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (1.11)$$

και τότε καταλήγουμε στην

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.12)$$

Είναι η ίδια χρονικά ανεξάρτητη, σφαιρικά συμμετρική γεωμετρία που αναπαρίσταται από τη μετρική Schwarzschild, με διαφορετικό απλώς σύστημα συντεταγμένων για τον προσδιορισμό των σημείων. Το σημείο κλειδί στο να αντιληφθεί κανείς ότι η γεωμετρία Schwarzschild είναι στην ουσία μια μελανή οπή, αποτελεί η συμπεριφορά των ακτίνων φωτός κατά την ακτινική διεύθυνση. Οι τελευταίες κινούνται κατά μήκος κοσμικών γραμμών, για τις οποίες ισχύει $d\theta = d\phi = 0$ (ακτινικές) και $ds^2 = 0$ (φωτοειδείς). Με άλλα λόγια, σύμφωνα με την (1.12), για εκείνες τις κοσμικές γραμμές που ισχύει

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dvdr = 0 \quad (1.13)$$

Μια άμεση συνέπεια του παραπάνω είναι ότι κάποιες φωτεινές ακτίνες με ακτινική διεύθυνση κινούνται κατά μήκος των καμπυλών

$$v = \text{const} \quad (\text{φωτεινές ακτίνες κινούμενες ακτινικά προς το κέντρο})$$

Όπως διαπιστώνουμε από την (1.11), πρόκειται για φωτεινές ακτίνες κινούμενες ακτινικά προς το κέντρο και αυτό επειδή καθώς το t αυξάνει, το r θα πρέπει να μειώνεται για να διατηρείται το v σταθερό. Η άλλη δυνατή λύση της (1.13) είναι η

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv + 2dr = 0$$

Η σχέση αυτή μπορεί να επιλυθεί ως προς $\frac{dv}{dr}$ και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας το αποτέλεσμα, να βρεθεί ότι οι συγκεκριμένες φωτεινές ακτίνες κινούνται στις καμπύλες

$$v - 2\left(r + 2M \log\left|\frac{r}{2M} - 1\right|\right) = \text{const} \quad (1.14)$$

Όταν μία από αυτές τις φωτεινές ακτίνες βρίσκεται μακριά από μια μελανή οπή, τότε κινείται ακτινικά προς τα έξω αφού η (1.14) γίνεται $t = r + \text{constant}$ όπως υποδεικνύεται από την (1.11). Όταν όμως $r < 2M$, οι φωτεινές ακτίνες κινούνται ακτινικά προς το κέντρο επειδή το r ελαττώνεται με την αύξηση του v . Υπάρχει μια επιπλέον ειδική λύση της (1.13) πέραν των φωτοειδών καμπυλών $v = \text{const}$ και των καμπυλών (1.14). Η καμπύλη $r = 2M$ που ικανοποιεί την (1.13) και δεν περιγράφει ούτε καμπύλες κινούμενες προς τα μέσα ούτε προς τα έξω, αλλά αντίθετα στατικές καμπύλες.

Επομένως, η επιφάνεια $r = 2M$ διαμερίζει το χωρόχρονο σε δύο περιοχές: την περιοχή στο εξωτερικό της $r = 2M$ από την οποία το φως μπορεί να διαφύγει στο άπειρο, και την περιοχή στο εσωτερικό της $r = 2M$, όπου η βαρύτητα είναι τόσο ισχυρή που ούτε καν το φως δε μπορεί να διαφύγει. Αυτό είναι το βασικό χαρακτηριστικό της γεωμετρίας μιας μελανής οπής. Η επιφάνεια $r = 2M$ ονομάζεται **ορίζοντας γεγονότων** (ή πολλές φορές συνοπτικότερα, ορίζοντας) της μελανής οπής.

Στην περίπτωση που $r = 0$, η μετρική είναι ιδιόμορφη τόσο στις συντεταγμένες Schwarzschild όσο και στις Eddington-Finkelstein. Το $r = 0$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο άπειρης καμπύλωσης του χωρόχρονου και άπειρων βαρυτικών δυνάμεων, μία γνήσια δηλαδή φυσική ιδιομορφία.

1.10 Εξαγωγή της μετρικής Schwarzschild από τις εξισώσεις Einstein

Οι εξισώσεις Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

όπου στα αριστερά είναι ο συμμετρικός τανυστής Einstein $G_{\mu\nu}$ ως συνδιασμός του τανυστή Ricci $R_{\mu\nu}$ (συγκεκριμένα $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$) και της μετρικής $g_{\mu\nu}$, και στα δεξιά ο $T_{\mu\nu}$ ο τανυστής ενέργειας-ορμής και G η σταθερά βαρύτητας. Οι εξισώσεις αυτές είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και οι μαθηματικές μας γνώσεις δεν επιτρέπουν τη γενική επίλυσή τους. Εν τούτοις, αν θεωρήσουμε ότι η ζητούμενη λύση έχει μερικές 'λογικές' συμμετρίες, προερχόμενες από συγκεκριμένες φυσικές παραδοχές, τότε είναι δυνατή η εξεύρεση λύσεων που μπορούν να αναπαραστήσουν το χωρόχρονο γύρω και εντός αστρικών αντικειμένων που παρατηρούμε. Μία τέτοια παραδοχή είναι για παράδειγμα ότι η πηγή του πεδίου είναι σφαιρικά συμμετρική.

Γνωρίζουμε ότι η Schwarzschild είναι η εξής μετρική :

$$dS^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 ,$$

όπου

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2$$

Για να καταλήξουμε λοιπόν σε αυτή, αναζητάμε μία στατική και σφαιρικά συμμετρική μετρική. Το γεγονός ότι όλα τα κομμάτια της μετρικής είναι ανεξάρτητα του χρόνου, μας δεσμεύει ως προς τη χρήση όρων dt^2 και $dx^i dx^j$ και όχι όρων $tdx^i + dx^i dt$.

Ξεκινάμε λοιπόν από τη μετρική του χώρου Minkowski σε σφαιρικές συντεταγμένες (t,r,θ,φ)

$$dS_{\text{Minkowski}}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Η μετρική αυτή αφορά επίπεδο χωρόχρονο. Οπότε για καμπύλο χωρόχρονο, πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με διαφορετικούς συντελεστές, οι οποίοι είναι συναρτήσεις μόνο του r

$$dS^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε για απλοποίηση των πράξεων, $r' \equiv e^{\gamma(r)} r$

$$\Rightarrow dr' = e^{\gamma} dr + e^{\gamma} r d\gamma = \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right) e^{\gamma} dr$$

Συνεπώς, η μετρική τροποποιείται ως εξής

$$dS^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} dr'^2 + r'^2 d\Omega^2$$

Θέτοντας πάλι $r' \rightarrow r$ και θεωρώντας ότι $\left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \rightarrow e^{2\beta}$, τελικά έχουμε ότι :

$$dS^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Η μετρική δείχνει ίδια με πριν, με τη διαφορά ότι ο παράγοντας $e^{2\gamma}$ έχει εξαφανιστεί πλέον με την κατάλληλη επιλογή ακτινικής συντεταγμένης.

Έπειτα, υπολογίζουμε τα Christoffel symbols, σύμφωνα με τον τύπο

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} \right)$$

όπου

$$g_{\mu\nu} = (-e^{2\alpha r}, e^{2\beta r}, r^2, r^2 \sin^2(\theta))$$

και

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$$

Τα μόνα μη μηδενικά Christoffel symbols είναι τα παρακάτω (τα υπόλοιπα είτε μηδενίστηκαν λόγω πράξεων, είτε λόγω συμμετριών)

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2}g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{2}e^{-2\alpha(r)} \left(\frac{-\partial e^{2\alpha(r)}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2}e^{-2\alpha(r)}(-2\partial_r \alpha(r)e^{2\alpha(r)}) = \partial_r \alpha$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}e^{-2\beta(r)}(2\partial_r \alpha(r)e^{2\alpha(r)}) = e^{2(\alpha-\beta)}\partial_r \alpha$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}e^{-2\beta(r)}2\partial_r \beta(r)e^{2\beta(r)} = \partial_r \beta$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}e^{-2\beta(r)}(-2r) = -re^{-2\beta}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}e^{-2\beta(r)}(-2r \sin^2(\theta)) = -re^{-2\beta} \sin^2(\theta)$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} 2r = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (-2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) = -\sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial g_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} - \frac{\partial g_{r\phi}}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} 2r \sin^2(\theta) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

Στη συνέχεια, με βάση τα παραπάνω υπολογίζουμε τους τανυστές καμπυλότητας Riemann ως εξής

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = -R_{\beta\delta\gamma}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma_{\gamma\epsilon}^{\alpha} \Gamma_{\beta\delta}^{\epsilon} - \Gamma_{\delta\epsilon}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon}$$

Οι μόνοι λοιπόν μη μηδενικοί τανυστές καμπυλότητας Riemann που υπολογίστηκαν, είναι οι παρακάτω

$$R_{trt}^r = -R_{ttr}^r = \frac{\partial \Gamma_{tt}^r}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{tr}^r}{\partial t} + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{tr}^r = \partial_r^2 \alpha e^{2(\alpha-\beta)} + 2(\partial_r \alpha - \partial_r \beta) e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha +$$

$$+ e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha \partial_r \beta - (\partial_r \alpha)^2 e^{2(\alpha-\beta)} = e^{2(\alpha-\beta)} [\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta]$$

$$R_{t\theta t}^\theta = -R_{tt\theta}^\theta = \frac{\partial \Gamma_{tt}^\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{t\theta}^\theta}{\partial t} + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{t\epsilon}^\theta \Gamma_{t\theta}^\epsilon = \frac{1}{r} e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha = \frac{1}{r} e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha$$

$$R_{t\phi t}^\phi = -R_{tt\phi}^\phi = \frac{\partial \Gamma_{tt}^\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial \Gamma_{t\phi}^\phi}{\partial t} + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{t\epsilon}^\phi \Gamma_{t\phi}^\epsilon = \frac{1}{r} e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha = \frac{1}{r} e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha$$

$$R_{rtr}^t = -R_{rrt}^t = \frac{\partial \Gamma_{rr}^t}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{rt}^t}{\partial r} + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{rt}^t \Gamma_{rt}^r = \partial_r^2 \alpha + \partial_r \alpha \partial_r \beta - (\partial_r \alpha)^2 =$$

$$= -\partial_r^2 \alpha + \partial_r \alpha \partial_r \beta - (\partial_r \alpha)^2$$

$$R_{r\theta r}^\theta = -R_{rr\theta}^\theta = \frac{\partial \Gamma_{rr}^\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\theta}{\partial r} + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \partial_r \beta - \frac{1}{r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \partial_r \beta$$

$$R_{r\phi r}^\phi = -R_{rr\phi}^\phi = \frac{\partial \Gamma_{rr}^\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial \Gamma_{r\phi}^\phi}{\partial r} + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{r\phi}^\phi \Gamma_{r\phi}^\phi = -\left(-\frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r} \partial_r \beta - \frac{1}{r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \partial_r \beta$$

$$R_{\theta t \theta}^t = -R_{\theta \theta t}^t = \frac{\partial \Gamma_{\theta \theta}^t}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{\theta t}^t}{\partial \theta} + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\theta \theta}^r - \Gamma_{\theta \epsilon}^t \Gamma_{\theta t}^\epsilon = -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha = -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha$$

$$R_{\theta r \theta}^r = -R_{\theta \theta r}^r = \frac{\partial \Gamma_{\theta \theta}^r}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{\theta r}^r}{\partial \theta} + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta \theta}^r - \Gamma_{\theta \theta}^r \Gamma_{\theta r}^r = -e^{-2\beta} + r e^{-2\beta} 2\partial_r \beta - r e^{-2\beta} \partial_r \beta + e^{-2\beta} =$$

$$= r e^{-2\beta} \partial_r \beta$$

$$R_{\theta \phi \theta}^\phi = -R_{\theta \theta \phi}^\phi = \frac{\partial \Gamma_{\theta \theta}^\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial \Gamma_{\theta \phi}^\phi}{\partial \theta} + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\theta \theta}^r - \Gamma_{\theta \phi}^\phi \Gamma_{\theta \phi}^\phi = -\left(-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\right) - \frac{1}{r} r e^{-2\beta} - \frac{\cos(\theta) \cos(\theta)}{\sin(\theta) \sin(\theta)} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2(\theta)} - e^{-2\beta} - \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = 1 - e^{-2\beta}$$

$$R_{\phi t \phi}^t = -R_{\phi \phi t}^t = \frac{\partial \Gamma_{\phi \phi}^t}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{\phi t}^t}{\partial \phi} + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\phi \phi}^r - \Gamma_{\phi \epsilon}^t \Gamma_{\phi t}^\epsilon = -r e^{-2\beta} \sin^2(\theta) \partial_r \alpha = -r e^{-2\beta} \sin^2(\theta) \partial_r \alpha$$

$$R_{\phi r \phi}^r = -R_{\phi \phi r}^r = \frac{\partial \Gamma_{\phi \phi}^r}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{\phi r}^r}{\partial \phi} + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\phi \phi}^r - \Gamma_{\phi \phi}^r \Gamma_{\phi r}^r = -e^{-2\beta} \sin^2(\theta) + r \sin^2(\theta) e^{-2\beta} 2\partial_r \beta -$$

$$- r e^{-2\beta} \sin^2(\theta) \partial_r \beta + r e^{-2\beta} \sin^2(\theta) \frac{1}{r} = r e^{-2\beta} \sin^2(\theta) \partial_r \beta$$

$$R_{\phi\theta\phi}^{\theta} = -R_{\phi\phi\theta}^{\theta} = \frac{\partial\Gamma_{\phi\phi}^{\theta}}{\partial\theta} - \frac{\partial\Gamma_{\phi\theta}^{\theta}}{\partial\phi} + \Gamma_{\theta r}^{\theta}\Gamma_{\phi\phi}^r - \Gamma_{\phi\phi}^{\theta}\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) - \frac{1}{r}re^{-2\beta}\sin^2(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \sin^2(\theta)(1 - e^{-2\beta})$$

Όπου έχει τοποθετηθεί το ϵ , σημαίνει ότι όποιο συνδιασμό και να κάναμε, δεν υπήρχε μη μηδενικό Γ .

Συμμαζεύοντας λοιπόν τις τέσσερις τριάδες, έχουμε ότι

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)}[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha]$$

$$R_{rr} = \partial_r\alpha\partial_r\beta - \partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 + \frac{2}{r}\partial_r\beta$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta}[r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1] + 1$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2(\theta)R_{\theta\theta}$$

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση Einstein στο κενό γράφεται ως εξής:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Εφόσον

$$R_{tt} = 0$$

και

$$R_{rr} = 0$$

τότε θα ισχύει και ότι

$$e^{2(\alpha-\beta)}R_{rr} + R_{tt} = 0 \Rightarrow \frac{2}{r}(\partial_r\alpha + \partial_r\beta) = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta + c$$

Στη συνέχεια θέτουμε $c = 0$ με την προϋπόθεση ότι $t \rightarrow e^{-ct}$. Συνεπώς,

$$\alpha = -\beta$$

Επίσης

$$R_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow e^{2\alpha}(2r\partial_r\alpha + 1) = 1 \Rightarrow \partial_r(re^{2\alpha}) = 1 \Rightarrow e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r}$$

όπου R_s μία σταθερά που πρέπει να προσδιορίσουμε.

Τότε, η μετρική γίνεται

$$dS^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Γνωρίζουμε ότι στο όριο ασθενούς πεδίου,

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

η μετρική Schwarzschild θα πρέπει να ανάγεται σε περίπτωση ασθενούς πεδίου για $r \gg 2GM$, συνεπώς ταυτοποιούμε τους όρους g_{tt}

$$R_s = 2GM$$

Τελικά λοιπόν, καταλήγουμε στη μορφή της μετρικής Schwarzschild

$$dS^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Κεφάλαιο 2

Γεωδαισιακές σε Schwarzschild-AdS μελανή οπή

Εφόσον μελετήσαμε παραπάνω τη Schwarzschild μελανή οπή, πρέπει να αναφερθούμε και στον Anti-de Sitter ή αλλιώς AdS χώρο. Ο n -dimensional Anti-de Sitter (AdS_n) χώρος είναι μια μέγιστη συμμετρική Lorentzian πολλαπλότητα με σταθερή αρνητική καμπυλότητα. Ο χώρος Anti-de Sitter και ο χώρος de Sitter ονομάστηκαν από τον Willem de Sitter (1872-1934), καθηγητή αστρονομίας στο πανεπιστήμιο του Leiden και διευθυντή του Observatory Leiden. Οι Willem de Sitter και Albert Einstein συνεργάστηκαν στενά τη δεκαετία του 1920 στο Leiden για τη δομή του χωρόχρονου του σύμπαντος.

Οι πολλαπλότητες σταθερής καμπυλότητας είναι πολύ γνωστές στην περίπτωση των δύο διαστάσεων, όπου η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι μια επιφάνεια σταθερής θετικής καμπυλότητας, ένα (Ευκλείδιο) επίπεδο είναι μια επιφάνεια σταθερής μηδενικής καμπυλότητας και ένα υπερβολικό επίπεδο είναι μια επιφάνεια σταθερής αρνητικής καμπυλότητας.

Η θεωρία της σχετικότητας του Einstein τοποθετεί το χώρο και το χρόνο επί ίσοις όροις, έτσι ώστε να λαμβάνεται υπόψη η γεωμετρία ενός ενιαίου χωρόχρονου, αντί να εξετάζεται ξεχωριστά ο χώρος και ο χρόνος. Οι περιπτώσεις χωρόχρονου σταθερής καμπυλότητας είναι χώρος de Sitter (θετική), χώρος Minkowski (μηδέν) και χώρος Anti-de Sitter (αρνητική). Ως εκ τούτου, είναι ακριβείς λύσεις των εξισώσεων πεδίου του Einstein για ένα κενό σύμπαν με θετική, μηδενική ή αρνητική κοσμολογική σταθερά, αντίστοιχα.

Ένας χώρος Anti-de Sitter στη γενική σχετικότητα είναι παρόμοιος με έναν χώρο de Sitter, εκτός από την αλλαγή του σημείου της καμπυλότητας. Σε αυτή την περίπτωση, ελλείψει ύλης ή ενέργειας, η καμπυλότητα είναι αρνητική που αντιστοιχεί σε υπερβολική γεωμετρία, και αρχικά παράλληλες χρονοειδείς γεωδαισιακές τελικά τέμνονται. Αυτό αντιστοιχεί σε μια αρνητική κοσμολογική σταθερά (η οποία δεν ταιριάζει με τις κοσμολογικές παρατηρήσεις). Εδώ, ο κενός χώρος έχει αρνητική ενεργειακή πυκνότητα αλλά θετική πίεση. Σε ένα χώρο Anti-de Sitter, όπως σε ένα χώρο de Sitter, η εγγενής καμπυλότητα του χωρόχρονου αντιστοιχεί στην κοσμολογική σταθερά.

Η μετρική ενός στατικού, σφαιρικά συμμετρικού χωρόχρονου με μάζα M και κοσμολογική σταθερά $\Lambda = -\frac{3}{l^2}$ είναι

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$$

όπου η συνάρτηση κατάρρευσης $f(r)$ δίνεται παρακάτω

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}$$

και οι συντεταγμένες μπορούν να πάρουν τις ακόλουθες τιμές

$$-\infty \leq t \leq +\infty, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Αρχικά ψάχνουμε τον οριζοντα, βλέποντας πού μηδενίζεται η $f(r)$

$$f(r) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2} = 0 \Rightarrow rl^2 - 2Ml^2 + r^3 = 0$$

Είναι της μορφής

$$x^3 + ax - b = 0$$

όπου $a, b > 0$. Θεωρούμε

$$x = Z \sinh(\theta)$$

και πολλαπλασιάζουμε με ένα βαθμωτό α

$$\alpha Z^3 \sinh^3(\theta) + \alpha a Z \sinh(\theta) - \alpha b = 0$$

Βασίζομενοι στην ταυτότητα

$$4 \sinh^3(\theta) + 3 \sinh(\theta) - \sinh(3\theta) = 0$$

καταλήγουμε στα $\alpha Z^3 = 4, \alpha a Z = 3, \alpha b = \sinh(3\theta)$

$$\alpha Z^3 = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{Z^3} \Rightarrow \frac{4}{Z^3} a Z = 3 \Rightarrow \frac{4}{Z^2} a = 3 \Rightarrow Z = 2\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$\alpha b = \sinh(3\theta) \Rightarrow 3\theta = \sinh^{-1}(\alpha b) + 2n\pi i, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{1}{3} \sinh^{-1}\left(\frac{3}{aZ}b\right) + \frac{2}{3}n\pi i \Rightarrow \theta =$$

$$\frac{1}{3} \sinh^{-1}\left(\frac{3}{2a}\sqrt{\frac{3}{a}}b\right) + \frac{2}{3}n\pi i \Rightarrow \theta = \frac{1}{3} \sinh^{-1}\left(\frac{3b}{2}\sqrt{\frac{3}{a^3}}\right) + \frac{2\pi}{3}ni, n = 0, 1, 2$$

Έτσι, $r \equiv x = Z \sinh(\theta)$:

$$r_1 = 2\sqrt{\frac{a}{3}} \sinh\left[\frac{1}{3} \sinh^{-1}\left(\frac{3b}{2}\sqrt{\frac{3}{a^3}}\right)\right]$$

$$r_2 = 2\sqrt{\frac{a}{3}} \sinh\left[\frac{1}{3} \sinh^{-1}\left(\frac{3b}{2}\sqrt{\frac{3}{a^3}}\right) + \frac{2\pi}{3}i\right]$$

$$r_3 = 2\sqrt{\frac{a}{3}} \sinh\left[\frac{1}{3} \sinh^{-1}\left(\frac{3b}{2}\sqrt{\frac{3}{a^3}}\right) + \frac{4\pi}{3}i\right]$$

Η μοναδική πραγματική ρίζα είναι η r_1 , και για $a = l^2$ και $b = 2Ml^2$, παίρνουμε

$$r_+ = 2\sqrt{\frac{l^2}{3}} \sinh\left[\frac{1}{3} \sinh^{-1}\left(3Ml^2\sqrt{\frac{3}{l^6}}\right)\right] \Rightarrow r_+ = \frac{2}{3}\sqrt{3}l \sinh\left[\frac{1}{3} \sinh^{-1}\left(3\sqrt{3}\frac{M}{l}\right)\right]$$

Βασίζομενοι στις σχέσεις

$$\sinh(x) \simeq x + \frac{1}{6}x^3, \sinh^{-1}(x) \simeq x - \frac{1}{6}x^3$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
r_+ &\simeq \frac{2}{3}\sqrt{3}l \sinh \left[\frac{1}{3} \left(3\sqrt{3}\frac{M}{l} - \frac{1}{6} \left(3\sqrt{3}\frac{M}{l} \right)^3 \right) \right] = \frac{2}{3}\sqrt{3}l \sinh \left[\sqrt{3}\frac{M}{l} - \frac{27}{18}3\sqrt{3}\frac{M^3}{l^3} \right] = \\
&\frac{2}{3}\sqrt{3}l \sinh \left[\sqrt{3}\frac{M}{l} - \frac{27}{6}\sqrt{3}\frac{M^3}{l^3} \right] \simeq \frac{2}{3}\sqrt{3}l \left[\sqrt{3}\frac{M}{l} - \frac{27}{6}\sqrt{3}\frac{M^3}{l^3} + \frac{1}{6} \left(\sqrt{3}\frac{M}{l} - \frac{27}{6}\sqrt{3}\frac{M^3}{l^3} \right)^3 \right] = \\
&\frac{2}{3}\sqrt{3}l \left[\sqrt{3}\frac{M}{l} - \frac{27}{6}\sqrt{3}\frac{M^3}{l^3} + \frac{1}{6}3\sqrt{3}\frac{M^3}{l^3} \right] = \frac{2}{3}\sqrt{3}l \left[\sqrt{3}\frac{M}{l} - \frac{24}{6}\sqrt{3}\frac{M^3}{l^3} \right] = 2M - 8\frac{M^3}{l^2}
\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν,

$$r_+ \simeq 2M - 8\frac{M^3}{l^2} < r_{Schwarzschild} = 2M$$

Για να βρούμε τις γεωδαισιακές, λύνουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για τη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = -f(r)\dot{t}^2 + f^{-1}(r)\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2)$$

όπου οι τελείες αναπαριστούν παράγωγο ως προς την παράμετρο τ . Οι εξισώσεις κίνησης, είναι

$$\dot{\Pi}_q - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

όπου

$$\Pi_q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

είναι η συζυγής ορμή ως προς τη συντεταγμένη q . Από τη στιγμή που η Λαγκρανζιανή είναι ανεξάρτητη των t και ϕ , η αντίστοιχη συζυγής ορμή διατηρείται, οπότε

$$\begin{aligned}
\Pi_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} &= -2f(r)\dot{t} = -2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2} \right) \dot{t} = -2E \\
&\Rightarrow E = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2} \right) \dot{t} \tag{2.1}
\end{aligned}$$

και

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 2r^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi} = 2L \Rightarrow L = r^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi}$$

όπου τα E και L είναι σταθερές της κίνησης. Από τις εξισώσεις κίνησης για το θ , παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}_\theta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial(2r^2\dot{\theta})}{\partial \tau} - r^2\dot{\phi}^2 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{d(r^2\dot{\theta})}{d\tau} = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\dot{\phi}^2 \Rightarrow \\
\frac{dr^2}{d\tau}\dot{\theta} + r^2\frac{d\dot{\theta}}{d\tau} &= r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\dot{\phi}^2
\end{aligned}$$

Για απλότητα, θεωρούμε $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ και $\dot{\theta}_0 = 0$, έτσι λοιπόν βρίσκουμε από την παραπάνω εξίσωση ότι και $\ddot{\theta}_0 = 0$. $\dot{\theta}_0 = 0$, έτσι $\ddot{\theta}_0 = 0$, τότε $\ddot{\theta} = 0$.

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = c_1$$

και επειδή $\dot{\theta}_0 = 0$, $\dot{\theta} = 0$. Όπως προηγουμένως,

$$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = c_2$$

και επειδή $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Η κίνηση γίνεται στην $\theta = \frac{\pi}{2}$. Έτσι, έχουμε ότι

$$r^2 \dot{\phi} = L \quad (2.2)$$

και η Λαγκρανζιανή μας μπορεί να γραφτεί συνολικά ως

$$\mathcal{L} = -f(r)\dot{t}^2 + f^{-1}(r)\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2)$$

Μπορούμε να ορίσουμε η \mathcal{L} να ισούται με την $-\mathcal{L}$. Κάνουμε αυτή την υπόθεση για να έχουμε πιο εύκολους υπολογισμούς και δεν υπάρχει πρόβλημα, καθώς δίνουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης. Έτσι

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \frac{E^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)^2} - \\ &- \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} - r^2\dot{\phi}^2 = \frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} - r^2 \frac{L^2}{r^4} = \frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} - \\ &- \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} - \frac{L^2}{r^2} \equiv h \end{aligned}$$

όπου $h = 0$ για τα φωτόνια και $h = 1$ για τα σωματίδια με μάζα. Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση για \dot{r}^2 με σκοπό να βρούμε την ακτινική εξίσωση

$$\begin{aligned} h &= \frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} - \frac{L^2}{r^2} \Rightarrow \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} = \frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} - h - \frac{L^2}{r^2} \Rightarrow \\ &\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \left(h + \frac{L^2}{r^2}\right) \end{aligned}$$

Μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση ως την εξίσωση κίνησης σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{eff}^2$$

όπου

$$V_{eff}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \left(h + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

ένα ενεργό δυναμικό. Ξεκινάμε λοιπόν να τον υπολογισμό των timelike γεωδαισιακών.

2.1 Timelike Γεωδαισιακές

Σε αυτή την κατηγορία έχουμε $h = 1$, άρα

$$V_{eff}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

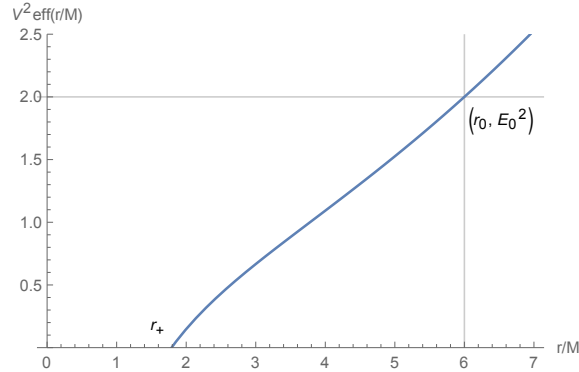
Έτσι λοιπόν, χρησιμοποιούμε το παραπάνω ενεργό δυναμικό και λύνουμε την ακτινική εξίσωση για ακτινικά και μη ακτινικά σωματίδια.

2.1.1 Ακτινικές Τροχιές

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Οι ακτινικές γεωδαισιακές αντιστοιχούν σε κίνηση σωματιδίων με μηδενική στροφορμή $L = 0$. Σε αυτή την περίπτωση, το ενεργό δυναμικό γίνεται

$$V_{eff}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)$$



Σχήμα 2.1: Το ενεργό δυναμικό συναρτήσει του r , για $l = \sqrt{27}$

και η ακτινική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)$$

Στην ελλειπτική καμπυλότητα την οποία και το V_{eff}^2 πρεσβεύει, τα σωματίδια πέφτουν στον ορίζοντα από μία απόσταση η οποία καθορίζεται από τη σταθερά κίνησης E , λόγω της ελκτικής δύναμης που παράγει το $\Lambda < 0$. Για να βρούμε ακριβείς λύσεις, λύνουμε για απλότητα την περίπτωση που οι δύο μιγαδικές ρίζες της κυβικής εξίσωσης είναι ίσες. Η ενέργεια που αντιστοιχεί είναι

$$E_0^2 = 1 + 3\sqrt[3]{\frac{M^2}{l^2}}$$

Γι' αυτή την τιμή της E , παρατηρούμε ότι

$$r_0 = 2\sqrt[3]{Ml^2} \quad (2.3)$$

Επιπλέον, η σταθερά της κίνησης E ως συνάρτηση του r_0 δίνεται παρακάτω

$$E_0^2 = 1 + \frac{3}{4l^2}r_0^2 \quad (2.4)$$

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα

$$\begin{aligned} \frac{M^2}{l^2} &= \frac{1}{l^6}(Ml^2)^2 \Rightarrow \frac{M^2}{l^2} = \frac{1}{l^6}\sqrt[3]{Ml^2}^6 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{M^2}{l^2}} = \frac{1}{4l^2}4\sqrt[3]{Ml^2}^2 \Rightarrow 1 + 3\sqrt[3]{\frac{M^2}{l^2}} = 1 + \frac{3}{4l^2}r_0^2 \Rightarrow \\ &E_0^2 = 1 + \frac{3}{4l^2}r_0^2 \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν, αντικαθιστούμε τις τιμές E_0^2 και $M = \frac{r_0^3}{8l^2}$ στην ακινική εξίσωση και παίρνουμε

$$\begin{aligned} r^2 = E_0^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) &= 1 + \frac{3}{4l^2}r_0^2 - \left(1 - \frac{2}{r} \frac{r_0^3}{8l^2} + \frac{r^2}{l^2}\right) = \frac{3}{4l^2}r_0^2 + \frac{r_0^3}{4rl^2} - \frac{r^2}{l^2} = \\ \frac{1}{l^2} \left(\frac{3r_0^2}{4} + \frac{r_0^3}{4r} - r^2\right) &= \frac{1}{l^2} \left(r_0^2 - \frac{r_0^2}{4} + \frac{r_0^3}{4r} - r^2 + rr_0 - rr_0\right) = \frac{1}{l^2} \left(r^2 + rr_0 + \frac{r_0^2}{4}\right) \left(\frac{r_0 - r}{r}\right) = \\ \frac{1}{l^2} \left(r + \frac{r_0}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}} & \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{l^2} \left(r + \frac{r_0}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}} \Rightarrow \frac{dr}{d\tau} = \pm \frac{1}{l} \left(r + \frac{r_0}{2}\right) \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}}$$

και επιλέγουμε

$$-\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{l} \left(r + \frac{r_0}{2}\right) \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}}$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής, $r = r_0 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)$ και η παραπάνω εξίσωση τροποποιείται ως εξής

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\tau} \left[r_0 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] &= \frac{1}{l} \left[r_0 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{r_0}{2}\right] \sqrt{\frac{r_0 - r_0 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{r_0 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\tau} \frac{1}{2} \left[2r_0 \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] = \\ \frac{1}{l} \left[r_0 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{r_0}{2}\right] &\sqrt{\frac{r_0(1 - \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right))}{r_0 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\tau} r_0 \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) = \\ \frac{1}{l} \left[r_0 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{r_0}{2}\right] &\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\tau} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) = \\ \frac{1}{l} \left[\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] \frac{\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\eta}{2}\right)} &= \frac{1}{l} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{1}{2l} \frac{\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\eta}{2}\right)} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\tau} = \\ \frac{1}{l} + \frac{1}{2l} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)} &= \frac{1}{l} + \frac{1}{2l \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\eta)\right]} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l[1 + \cos(\eta)]} = \\ \frac{1 + \cos(\eta) + 1}{l[1 + \cos(\eta)]} &\Rightarrow \frac{d\tau}{d\eta} = l \frac{1 + \cos(\eta)}{2 + \cos(\eta)} \end{aligned}$$

Προχωράμε στην ολοκλήρωση

$$\int \frac{d\tau}{d\eta} d\eta = l \int \frac{1 + \cos(\eta)}{2 + \cos(\eta)} d\eta$$

Υποθέτουμε $u = \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)$ και έχουμε

$$du = \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)} d\eta \Rightarrow d\eta = 2 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) du \Rightarrow d\eta = \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{\eta}{2}\right)} du \Rightarrow d\eta = \frac{2}{1 + u^2} du$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} \frac{1 - u^2}{1 + u^2} &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\eta}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}} = \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}} = \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\eta) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\eta) &= \cos(\eta) \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $\cos(\eta) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$. Βασιζόμενοι στα παραπάνω, έχουμε ότι

$$\int \frac{d\tau}{d\eta} = l \int \frac{1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}}{2 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du = l \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{\frac{3+u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du = l \int \frac{2}{3+u^2} \frac{2}{1+u^2} du = l \int \frac{4}{u^4 + 4u^2 + 3} du$$

Μελετάμε χωριστά τον παράγοντα $\frac{1}{u^4 + 4u^2 + 3}$

$$u^4 + 4u^2 + 3 = (u^2 + 3)(u^2 + 1) \Rightarrow \frac{1}{u^4 + 4u^2 + 3} = \frac{A}{u^2 + 1} + \frac{B}{u^2 + 3} \Rightarrow 1 = Au^2 + 3A + Bu^2 + B \Rightarrow$$

$$A + B = 0, \quad 3A + B = 1$$

Από το σύστημα παίρνουμε ότι $A = \frac{1}{2}$ και $B = -\frac{1}{2}$. Έτσι,

$$\frac{1}{u^4 + 4u^2 + 3} = \frac{1}{2(u^2 + 1)} - \frac{1}{2(u^2 + 3)}$$

Το βάζουμε στο ολοκλήρωμα και παίρνουμε

$$\int \frac{d\tau}{d\eta} = 4l \left[\int \frac{1}{2(u^2 + 1)} du - \int \frac{1}{2(u^2 + 3)} du \right] = 4l \left(\frac{1}{2} \arctan(u) - \frac{1}{2} \frac{\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} \right) =$$

(2.5)

$$2l \arctan\left(\tan\left(\frac{\eta}{2}\right)\right) - 2l \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \tau(\eta) = 2l \left[\frac{\eta}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left[\frac{\sqrt{3}}{3} \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] \right]$$

Γυρίζουμε τη σχέση ως προς r , δουλεύοντας ως εξής

$$r = r_0 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{r}{r_0} \Rightarrow \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{r}{r_0}} \Rightarrow \frac{\eta}{2} = \arccos\left(\pm \sqrt{\frac{r}{r_0}}\right)$$

και

$$\tan^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + 1 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)} \Rightarrow \tan^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + 1 = \frac{r_0}{r} \Rightarrow \tan^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{r_0 - r}{r} \Rightarrow \tan\left(\frac{\eta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}}$$

Διαλέγοντας τις κατάλληλες τιμές, έχουμε

$$\tau(r) = 2l \left[\arccos\left(-\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}}\right) \right]$$

Αν αναπαραστήσουμε γραφικά την παραπάνω σχέση, μπορούμε να δούμε ότι τα σωματίδια για να πέσουν στον οριζοντα χρειάζονται λιγότερο χρόνο απ' ότι θα ήθελαν στην περίπτωση της Schwarzschild. Τώρα, θα βρούμε την εξίσωση τροχιάς ως προς το χρόνο t . Έχουμε αποδείξει τις δύο σχέσεις

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}}$$

και

$$-\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{l} \left(r + \frac{r_0}{2} \right) \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}} \quad (2.6)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} \Rightarrow \frac{dt}{dr} \frac{dr}{d\tau} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} \Rightarrow \frac{dt}{dr} = -\frac{l}{\left(r + \frac{r_0}{2}\right) \sqrt{\frac{r_0-r}{r}}} \frac{E}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} = \quad (2.7)$$

$$-lE \frac{l^2 r}{\left(r + \frac{r_0}{2}\right) \sqrt{\frac{r_0-r}{r}} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) l^2 r} = -l^3 E \frac{r}{\left(r + \frac{r_0}{2}\right) \sqrt{\frac{r_0-r}{r}} (r^3 - 2Ml^2 + l^2 r)} \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{dr} = -l^3 E \frac{r}{\left(r + \frac{r_0}{2}\right) \sqrt{\frac{r_0-r}{r}} (r - r_+)(r^2 + r_+ r + \rho^2)}$$

Κάνουμε ξανά την αλλαγή $r = r_0 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)$, έτσι παίρνουμε

$$t(\eta) = A[B\tau(\eta) + CH(\eta) + D\eta - I(\eta)],$$

όπου

$$A = \frac{l^3 E}{r_0 + 2r_+}, B = \frac{r_0}{\rho^2 + \frac{r_0^2}{4} - \frac{r_0 r_+}{2}},$$

$$C = \frac{2r_+}{\rho^2 + 2r_+}, D = B + C,$$

και

$$H(\eta) = \eta + \cot \left[\frac{\eta_+}{2} \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\eta_+}{2}\right) + \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\eta_+}{2}\right) - \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right| \right],$$

$$I(\eta) = \int_0^\eta \frac{a \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + b}{r_0^2 \cos^4\left(\frac{\eta}{2}\right) + r_0 r_+ + \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + \rho^2} d\eta$$

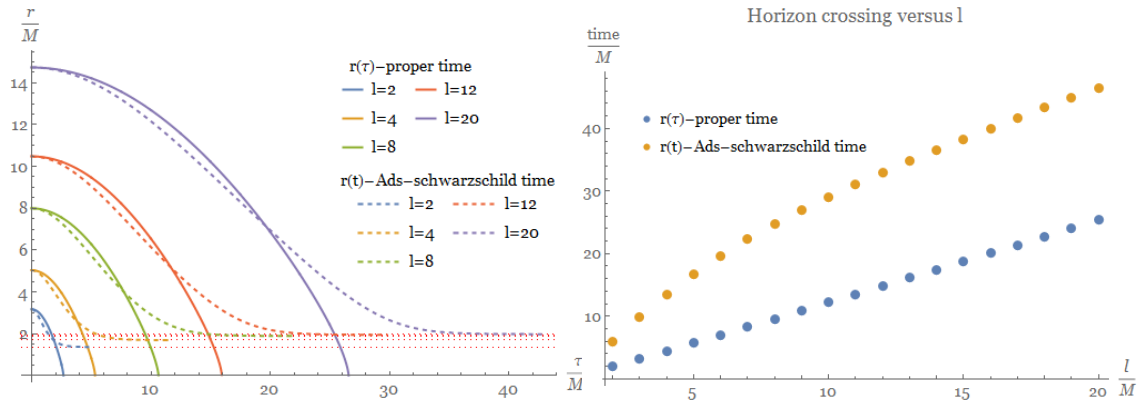
Παρατηρούμε ότι για $\eta \rightarrow \eta_+$ το $H(\eta)$ τείνει στο άπειρο, έτσι και το t τείνει επίσης στο άπειρο. Συμπερασματικά, το φυσικό αποτέλεσμα είναι συνεπές με την περίπτωση της Schwarzschild.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Ξεκινώντας, χρησιμοποιούμε τα r_0 , E_0 και τις εξισώσεις (2.3),(2.4) οι οποίες είναι χωρίς προσεγγίσεις. Ορίζουμε με τον ίδιο τρόπο όπως πριν $r = r_0 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)$ και καταλήγουμε πάλι στις ίδιες εξισώσεις (2.5) και (2.6). Μέσω αυτών των δύο σχέσεων, ορίζουμε το $r(\tau)$, αλλά τώρα για τον ορίζοντα λύνουμε χωρίς προσεγγίσεις την

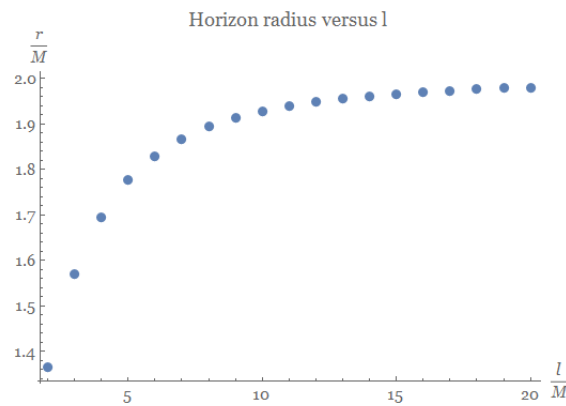
$$1 - 2\frac{M}{r} + \frac{r^2}{l^2} = 0$$

Τότε από τις (2.1) και (2.7), ορίζουμε το $r(t)$. Από τα παραπάνω λοιπόν, και μεταβάλλοντας τις τιμές της κοσμολογικής σταθεράς, παίρνουμε τα ακόλουθα διαγράμματα



(α) Τροχιές σωματιδίων συναρτήσει των t και τ , αλλάζοντας το l

(β) Οι χρόνοι t και τ που το σωματίδιο περνάει τον ορίζοντα, συναρτήσει του l



(γ) Βλέπουμε την ακτίνα του ορίζοντα, αλλάζοντας το l

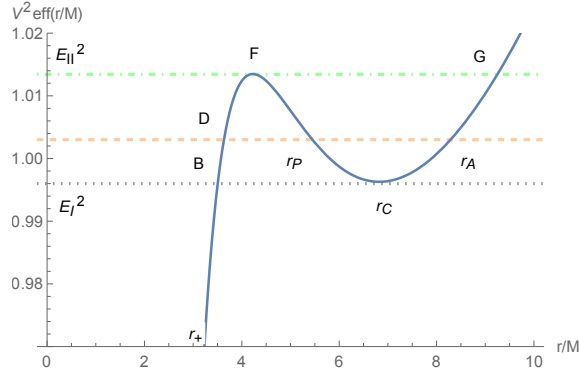
2.1.2 Μη ακτινικές Τροχιές

Σε αυτή την περίπτωση, $L \neq 0$ και η ακτινική εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

Κάνουμε το διάγραμμα του ενεργού δυναμικού συναρτήσει του r για μη ακτινικά σωματίδια

- Αν $E^2 = E_I^2$, το σωματίδιο μπορεί να περιστρέφεται σε μία σταθερή κυκλική τροχιά γύρω από το $r = r_C$. Μπορούμε επίσης να δούμε ότι το E_I^2 αντιστοιχεί και σε ένα άλλο σημείο, $r = B$ το οποίο είναι τόσο κοντά στον ορίζοντα, που πέφτει στην απροσδιοριστία.
- Αν $E_I^2 < E^2 < E_{II}^2$, το σωματίδιο περιστρέφεται σε μία δεσμευμένη τροχιά στο εύρος $r_P < r < r_A$, όπου τα r_P και r_A είναι το περιήλιο και το αφήλιο. Αυτές οι τροχιές καλούνται τροχιές πρώτης τάξης. Η άλλη πιθανή τροχιά, αντιστοιχεί σε σωματίδιο στο σημείο D , το οποίο για τον ίδιο ακριβώς λόγο με πριν, πέφτει στην απροσδιοριστία.
- Αν $E^2 = E_{II}^2$, το σωματίδιο μπορεί να περιστρέφεται σε μία ασταθή τροχιά γύρω από το $r = F$. Το πιο πιθανό είναι ότι ένα σωματίδιο τέτοιου τύπου θα πέσει από το $r = F$ είτε



Σχήμα 2.3: Το ενεργό δυναμικό συναρτήσει του r , για $l = 34$ και $L = 3.94$

στο $r = G$ είτε στην απροσδιοριστία στο $r = 0$.

Είναι δυνατό να παρατηρήσουμε τις εξισώσεις τροχιάς, χρησιμοποιώντας την ακτινική εξίσωση και τη σχέση $r^2 \dot{\phi} = L$, αλλάζοντας τη μεταβλητή r . Θέτοντας $r = u^{-1}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \dot{r}^2 &= E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - 2Mu + \frac{1}{u^2 l^2}\right) (1 + L^2 u^2) \Rightarrow \\
 &\left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} L u^2\right)^2 = E^2 - \left(1 + L^2 u^2 - 2Mu - 2ML^2 u^3 + \frac{1}{u^2 l^2} + \frac{L^2}{l^2}\right) \Rightarrow L^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \\
 &E^2 - 1 - L^2 u^2 + 2Mu + 2ML^2 u^3 - \frac{1}{u^2 l^2} - \frac{L^2}{l^2} \Rightarrow \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2} - u^2 + \frac{2Mu}{L^2} + \\
 &+ 2Mu^3 - \frac{1}{L^2 u^2 l^2} - \frac{1}{l^2} \Rightarrow \left(u \frac{du}{d\phi}\right)^2 = u^2 \frac{E^2 - 1}{L^2} - u^4 + \frac{2M}{L^2} u^3 + 2Mu^5 - \frac{1}{L^2 l^2} - \\
 &- \frac{1}{l^2} u^2 \Rightarrow \left(u \frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^5 - u^4 + \frac{2M}{L^2} u^3 + \frac{E^2 - 1 - \frac{L^2}{l^2}}{L^2} u^2 - \frac{1}{l^2 L^2} \Rightarrow \\
 &\left(u \frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2M \left[u^5 - \frac{1}{2M} u^4 + \frac{1}{L^2} u^3 + \frac{E^2 - 1 - \frac{L^2}{l^2}}{2ML^2} u^2 - \frac{1}{2Ml^2 L^2} \right]
 \end{aligned}$$

και ονομάζοντας το πολυώνυμο μέσα στις αγκύλες $P(u)$, έχουμε

$$\left(u \frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2MP(u) \tag{2.8}$$

Ορίζουμε επίσης το ε^2 ως

$$\varepsilon^2 = E^2 - 1 - \frac{L^2}{l^2} \equiv E^2 - E_\Lambda^2$$

Δέσμιες Τροχίες

Όπως είδαμε προηγουμένως, δέσμιες τροχίες μπορούν να υπάρξουν σε χωρόχρονο Schwarzschild-AdS μόνο εάν $\varepsilon^2 \leq 0$ (από κλασική μηχανική). Το $P(u)$ είναι ένα πολυώνυμο 5^{ov} βαθμού, έτσι το πρόβλημα γίνεται απλό, εάν θεωρήσουμε ότι έχει μία διπλή αρνητική ρίζα $u_4 = u_5 = -\sigma$. Έτσι λοιπόν,

$$P(u) = (u + \sigma)^2 g(u),$$

όπου το $g(u)$ είναι ένα κυβικό πολυώνυμο το οποίο περιέχει όλη την πληροφορία για το φυσικό εύρος ενδιαφέροντος. Αυτό το πολυώνυμο είναι το κλειδί για τη μελέτη των τροχιών τις οποίες θα αναλύσουμε παρακάτω. Ολοκληρώνοντας την (2.8), παίρνουμε

$$\pm \Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{g(u')}} - \frac{\sigma}{\sqrt{2M}} \int_{u_0}^u \frac{du'}{(u' + \sigma)\sqrt{g(u')}}$$

ΤΡΟΧΙΕΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι τροχιές πρώτης τάξης αναπαριστούν δέσμιες τροχιές με δύο ακραίες τιμές. Μπορούμε να ταυτοποιήσουμε τρία είδη τροχιών πρώτης τάξης: τις πλανητικές, τις ασυμπτωτικές και τις κυκλικές.

ΠΛΑΝΗΤΙΚΕΣ

Οι πλανητικές τροχιές περιλαμβάνουν την ταλάντωση μεταξύ ενός αψηλίου και ενός περιηλίου. Αυτές οι αποστάσεις αντιστοιχούν στις ρίζες του $g(u)$. Η τρίτη ρίζα είναι επίσης πραγματική και θετική, αλλά βρίσκεται στην αριστερή μεριά της κορυφής του δυναμικού, δίνοντας μια τροχιά που πέφτει στην απροσδιοριστία. Για να παρατηρήσουμε αυτές τις ρίζες, κάνουμε την αντικατάσταση $u = \frac{1 + e \cos(x)}{R}$, όπου το e αναπαριστά την εκκεντρότητα των τροχιών και το P είναι η εστιακή παράμετρος (latus rectum-κάθετη εστιακή χορδή). Από την θεωρία των πολυωνύμων, $u_1 = \frac{1-e}{R}$, $u_2 = \frac{1+e}{R}$ και $u_3 = \frac{1}{2M} - \frac{2}{R} + 2\sigma$. Τότε,

$$\begin{aligned} \pm \Delta\phi &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-\frac{e \sin(x')}{R} dx'}{\sqrt{\left(\frac{1+e \cos(x')}{R} - \frac{1-e}{R}\right) \left(\frac{1+e \cos(x')}{R} - \frac{1+e}{R}\right) \left(\frac{1}{2M} - \frac{2}{R} + 2\sigma - \frac{1+e \cos(x')}{R}\right)}} - \\ &\frac{\sigma}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-\frac{e \sin(x')}{R} dx'}{\left(\frac{1+e \cos(x')}{R} + \sigma\right) \sqrt{\left(\frac{1+e \cos(x')}{R} - \frac{1-e}{R}\right) \left(\frac{1+e \cos(x')}{R} - \frac{1+e}{R}\right) \left(\frac{1}{2M} - \frac{2}{R} + 2\sigma - \frac{1+e \cos(x')}{R}\right)}} = \\ &\frac{1}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-\frac{e \sin(x')}{R} dx'}{\sqrt{\left[\frac{e(\cos(x')+1)}{R}\right] \left[\frac{e(\cos(x')-1)}{R}\right] \left(\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3+e \cos(x')}{R}\right)}} - \\ &\frac{\sigma}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-\frac{e \sin(x')}{R} dx'}{\left(\frac{1+e \cos(x')}{R} + \sigma\right) \sqrt{\left[\frac{e(\cos(x')+1)}{R}\right] \left[\frac{e(\cos(x')-1)}{R}\right] \left(\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3+e \cos(x')}{R}\right)}} = \\ &\frac{1}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-\sin(x') dx'}{\sin(x') \sqrt{\frac{3+e \cos(x')}{R} - 2\sigma - \frac{1}{2M}}} - \frac{\sigma}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-\sin(x') dx'}{\left(\frac{1+e \cos(x')}{R} + \sigma\right) \sin(x') \sqrt{\frac{3+e \cos(x')}{R} - 2\sigma - \frac{1}{2M}}} = \\ &\frac{1}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-dx'}{\sqrt{\frac{3+2e \cos^2\left(\frac{x'}{2}\right) - e}{R} - 2\sigma - \frac{1}{2M}}} - \frac{\sigma}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-dx'}{\left[\frac{1+2e \cos^2\left(\frac{x'}{2}\right) - e}{R} + \sigma\right] \sqrt{\frac{3+2e \cos^2\left(\frac{x'}{2}\right) - e}{R} - 2\sigma - \frac{1}{2M}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-dx'}{\sqrt{\frac{3-e}{R} - 2\sigma - \frac{1}{2M} + \frac{2e}{R} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2}\right)}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-dx'}{\left[\frac{1-e}{R} + \sigma + \frac{2e}{R} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right) \right] \sqrt{\frac{3-e}{R} - 2\sigma - \frac{1}{2M} + \frac{2e}{R} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right)}} = \\
& \frac{1}{\sqrt{2M}} \frac{1}{\sqrt{\frac{3-e}{R} - 2\sigma - \frac{1}{2M}}} \int_{\pi}^x \frac{-dx'}{\sqrt{1 - \frac{2e}{e+2R\sigma-3+\frac{R}{2M}} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right)}} - \\
& \frac{\sigma}{\sqrt{2M}} \frac{1}{\sqrt{\frac{3-e}{R} - 2\sigma - \frac{1}{2M} \left(\frac{1-e}{R} + \sigma \right)}} \int_{\pi}^x \frac{-dx'}{\left[1 - \frac{2e}{e-1-R\sigma} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right) \right] \sqrt{1 - \frac{2e}{e+2R\sigma-3+\frac{R}{2M}} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right)}} = \\
& \frac{1}{\sqrt{2M \left(\frac{3-e}{R} - 2\sigma \right) - 1}} \int_{\pi}^x \frac{-dx'}{\sqrt{1 - \kappa \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right)}} - \\
& \frac{\sigma}{\sqrt{2M \left(\frac{3-e}{R} - 2\sigma \right) - 1} \left(\frac{1-e}{R} + \sigma \right)} \int_{\pi}^x \frac{-dx'}{\sqrt{1 - \kappa \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right)} \left[1 - n \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right) \right]} = \\
& \frac{2}{\sqrt{2M \left(\frac{3-e}{R} - 2\sigma \right) - 1}} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2}} \frac{d \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right)}{\sqrt{1 - \kappa \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right)}} - \\
& \frac{2\sigma}{\sqrt{2M \left(\frac{3-e}{R} - 2\sigma \right) - 1} \left(\frac{1-e}{R} + \sigma \right)} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2}} \frac{d \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right)}{\sqrt{1 - \kappa \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right)} \left[1 - n \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x'}{2} \right) \right]} \Rightarrow \\
& \phi = \frac{2}{\sqrt{2M \left(\frac{3-e}{R} - 2\sigma \right) - 1}} \left[F \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}, \kappa \right) - \frac{\sigma}{\frac{1-e}{R} + \sigma} \Pi \left(n, \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}, \kappa \right) \right]
\end{aligned}$$

όπου τα F και Π είναι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα Jacobi πρώτου και τρίτου είδους, $\kappa = \frac{2e}{e+2\sigma R + \frac{R}{2M} - 3}$ και $n = \frac{2e}{e-1-\sigma R}$.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΕΣ

Αυτή η περίπτωση συμβαίνει όταν δύο πραγματικές ρίζες του $g(u)$ συμπίπτουν και είναι θετικές, δηλαδή $u_2 = u_3$, και επίσης όταν αυτές οι ρίζες βρίσκονται στο τοπικό μέγιστο του ενεργού δυναμικού, έτσι ώστε η ενέργεια να χαρακτηρίζεται από E_{II}^2 . Η αντικατάσταση είναι $u = \frac{1+e \cos(x)}{R}$. Παρατηρούμε ότι $u_1 = \frac{1-e}{R}$ και $u_2 = u_3 = \frac{1+e}{R}$, τα οποία είναι τα αντίστροφα από την αφήλια και την περιήλια απόσταση. Μάλιστα βρίσκουμε για $u_4 = u_5 = -\sigma$, ότι $\sigma = \frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\pm \Delta \phi &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-\frac{e \sin(x')}{R} dx'}{\sqrt{\left(\frac{1+e \cos(x')}{R} - \frac{1-e}{R} \right) \left(\frac{1+e \cos(x')}{R} - \frac{1+e}{R} \right)^2}} - \\
& \frac{\frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-\frac{e \sin(x')}{R} dx'}{\left(\frac{1+e \cos(x')}{R} + \frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e} \right) \sqrt{\left(\frac{1+e \cos(x')}{R} - \frac{1-e}{R} \right) \left(\frac{1+e \cos(x')}{R} - \frac{1+e}{R} \right)^2}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-\frac{e \sin(x')}{R} dx'}{\left[\frac{e(\cos(x')-1)}{R} \right] \sqrt{\frac{e(\cos(x')+1)}{R}}} - \frac{\frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}}{\sqrt{2M}} \int_{\pi}^x \frac{-\frac{e \sin(x')}{R} dx'}{\left(\frac{1+e \cos(x')}{R} + \frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e} \right) \left[\frac{e(\cos(x')-1)}{R} \right] \sqrt{\frac{e(\cos(x')+1)}{R}}} = \\
& - \frac{1}{\sqrt{\frac{2Me}{R}}} \int_{\pi}^x \frac{\sin(x') dx'}{(\cos(x')-1) \sqrt{\cos(x')+1}} + \frac{\frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}}{\sqrt{\frac{2Me}{R}}} \int_{\pi}^x \frac{\sin(x') dx'}{(\cos(x')-1) \sqrt{\cos(x')+1} \left(\frac{1+e \cos(x')}{R} + \frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e} \right)} = \\
& - \frac{1}{\sqrt{\frac{2Me}{R}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln \left(\sqrt{\cos(x)+1} + \sqrt{2} \right) - \ln \left(\left| \sqrt{\cos(x)+1} - \sqrt{2} \right| \right) \right] + \\
& \frac{\frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}}{\sqrt{\frac{2Me}{R}}} \left[R \frac{\ln \left(\sqrt{\cos(x)+1} + \sqrt{2} \right) - \ln \left(\left| \sqrt{\cos(x)+1} - \sqrt{2} \right| \right)}{\sqrt{2} \left(e+1 + 2 \frac{1-e^2}{3-e} \right)} + \frac{2\sqrt{e} \arctan \left[\frac{\sqrt{e} \sqrt{\cos(x)+1}}{\sqrt{1-e+2 \frac{1-e^2}{3-e}}} \right]}{\sqrt{1-e+2 \frac{1-e^2}{3-e}} \left(e+1 + 2 \frac{1-e^2}{3-e} \right)} \right] = \\
& - \frac{1}{2\sqrt{\frac{Me}{R}}} \ln \left[\frac{\sqrt{\cos(x)+1} + \sqrt{2}}{\left| \sqrt{\cos(x)+1} - \sqrt{2} \right|} \right] + \\
& \frac{\frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}}{\sqrt{\frac{2Me}{R}}} \left[R \frac{\ln \left[\frac{\sqrt{\cos(x)+1} + \sqrt{2}}{\left| \sqrt{\cos(x)+1} - \sqrt{2} \right|} \right]}{\sqrt{2} \left(e+1 + 2 \frac{1-e^2}{3-e} \right)} + \frac{2\sqrt{e} \arctan \left[\frac{\sqrt{e} \sqrt{\cos(x)+1}}{\sqrt{1-e+2 \frac{1-e^2}{3-e}}} \right]}{\sqrt{1-e+2 \frac{1-e^2}{3-e}} \left(e+1 + 2 \frac{1-e^2}{3-e} \right)} \right] = \\
& - \ln \left[\frac{\sqrt{\cos(x)+1} + \sqrt{2}}{\left| \sqrt{\cos(x)+1} - \sqrt{2} \right|} \right] \left[\frac{1}{2\sqrt{\frac{Me}{R}}} - \frac{\frac{1-e^2}{3-e}}{\sqrt{\frac{Me}{R}} \left(e+1 + 2 \frac{1-e^2}{3-e} \right)} \right] + \\
& \arctan \left[\sqrt{\frac{e(\cos(x)+1)}{1+2 \frac{1-e^2}{3-e} - e}} \right] \frac{\frac{4}{R} \frac{1-e^2}{3-e}}{\sqrt{\frac{2M}{R}} \left(e+1 + 2 \frac{1-e^2}{3-e} \right) \sqrt{1+2 \frac{1-e^2}{3-e} - e}} = \\
& 2 \ln \left(\tan \left(\frac{x}{4} \right) \right) \left[\frac{e+1}{2\sqrt{\frac{Me}{R}} \left(e+1 + 2 \frac{1-e^2}{3-e} \right)} \right] + \\
& \arctan \left[\sqrt{\frac{e(\cos(x)+1)}{1+2 \frac{1-e^2}{3-e} - e}} \right] \frac{\frac{4}{R} \frac{1-e^2}{3-e}}{\sqrt{\frac{2M}{R}} \left(e+1 + 2 \frac{1-e^2}{3-e} \right) \sqrt{1+2 \frac{1-e^2}{3-e} - e}} \Rightarrow \\
& \phi = \frac{e+1}{\sqrt{\frac{Me}{R}} \left(e+1 + 2 \frac{1-e^2}{3-e} \right)} \left[\ln \left(\tan \left(\frac{x}{4} \right) \right) + \arctan \left[\sqrt{\frac{e(\cos(x)+1)}{1+2 \frac{1-e^2}{3-e} - e}} \right] \frac{\frac{4}{R} \frac{1-e^2}{3-e}}{(e+1) \sqrt{\frac{2}{e}} \sqrt{1+2 \frac{1-e^2}{3-e} - e}} \right]
\end{aligned}$$

ΚΥΚΛΙΚΕΣ

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε $r = r_C = Ct_e$, όπου r_C ονομάζουμε την απόσταση της κυκλικής τροχιάς από την απροσδιοριστία. Είναι δυνατό να υπολογίσουμε τις περιόδους αυτών

των τροχιών, χρησιμοποιώντας τις σταθερές κίνησης E και L , μέσω των εξισώσεων (2.1) και (2.2). Τότε, έχουμε:

$$\frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{d\phi} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}} \frac{r^2}{L} = \frac{E}{L} \frac{r}{\frac{1}{r} - \frac{2M}{r^2} + \frac{r}{l^2}} \Rightarrow dt = \frac{E}{L} \frac{r_C}{f(r_C)} d\phi \quad (2.9)$$

Από την συνθήκη κυκλικών τροχιών, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (V_{eff}') = 0 &\Rightarrow \left[\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2} \right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2} \right) \right]' = 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2M}{r} - \frac{2ML^2}{r^3} + \frac{r^2}{l^2} + \frac{L^2}{l^2} \right)' = 0 \Rightarrow \\ &\frac{-2L^2}{r^3} + \frac{2M}{r^2} + \frac{6ML^2}{r^4} + \frac{2r}{l^2} = 0 \Rightarrow -2L^2 r l^2 + 2M r^2 l^2 + 6M L^2 l^2 + 2r^5 = 0 \Rightarrow \\ &2L^2 l^2 (3M - r) + 2r^2 (M l^2 + r^3) = 0 \Rightarrow L^2 = \frac{r_C^5 + l^2 M r_C^2}{l^2 (r_C - 3M)} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{r_C^5 + l^2 M r_C^2}{l^2 (r_C - 3M)}} \quad (2.10) \end{aligned}$$

και επίσης, για αυτές τις τροχιές ισχύει $E^2 = V_{eff}^2(r = r_C)$. Σε μία περίοδο $\Delta t \equiv T_t$, είναι $\Delta\phi = 2\pi$. Οπότε, χρησιμοποιώντας την (2.9) και μέσω της (2.10), έχουμε

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{V_{eff}}{L} \frac{r_C^2}{1 - \frac{2M}{r_C} + \frac{r_C^2}{l^2}} 2\pi = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_C} + \frac{r_C^2}{l^2} \right) \left(1 + \frac{L^2}{r_C^2} \right)}}{\sqrt{\frac{r_C^5 + l^2 M r_C^2}{l^2 (r_C - 3M)}}} \frac{r_C^2}{1 - \frac{2M}{r_C} + \frac{r_C^2}{l^2}} 2\pi = \frac{2\pi r_C^2 \sqrt{1 + \frac{r_C^3 + M l^2}{l^2 (r_C - 3M)}}}{\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2M}{r_C} + \frac{r_C^2}{l^2} \right) (r_C^5 + M l^2 r_C^2)}{l^2 (r_C - 3M)}}} \\ &= \frac{2\pi r_C^2 \sqrt{r_C^3 + l^2 r_C - 2M l^2}}{\sqrt{\frac{1}{l^2 r_C} (l^2 r_C - 2M l^2 + r_C^3)} \sqrt{r_C^5 + M l^2 r_C^2}} = \frac{2\pi l r_C^2 \sqrt{r_C}}{\sqrt{r_C^5 + M l^2 r_C^2}} = \frac{2\pi l r_C^2}{\sqrt{r_C^4 + M l^2 r_C}} = \frac{2\pi l r_C^2}{l \sqrt{M r_C} \sqrt{1 + \frac{r_C^3}{M l^2}}} \\ &= \frac{2\pi \sqrt{\frac{r_C^3}{M}}}{\sqrt{1 + \frac{r_C^3}{M l^2}}} \equiv \frac{T_{t,Sch}}{\sqrt{1 + \frac{r_C^3}{M l^2}}} \end{aligned}$$

όπου $T_{t,Sch}$ η περίοδος ως προς το χρόνο t στην Schwarzschild. Ομοίως, έχουμε:

$$\frac{d\tau}{d\phi} = \frac{r_C^2}{L} \Rightarrow T_\tau = \frac{r_C^2}{\sqrt{\frac{r_C^5 + l^2 M r_C^2}{l^2 (r_C - 3M)}}} 2\pi = \frac{2\pi r_C^2}{\sqrt{\frac{M l^2 r_C^2}{l^2 (r_C - 3M)} \left(1 + \frac{r_C^3}{M l^2} \right)}} = \frac{2\pi r_C \sqrt{\frac{r_C}{M} - 3}}{\sqrt{1 + \frac{r_C^3}{M l^2}}} \equiv \frac{T_{\tau,Sch}}{\sqrt{1 + \frac{r_C^3}{M l^2}}}$$

όπου $T_{\tau,Sch}$ η περίοδος ως προς το χρόνο τ στη Schwarzschild.

Αυτές οι περίοδοι βλέπουμε ότι είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες των τροχιών στη Schwarzschild, το οποίο ταιριάζει με το γεγονός ότι η αρνητική κοσμολογική σταθερά αυξάνει τη βαρυτική έλξη.

ΤΡΟΧΙΕΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ

Αυτές οι τροχιές αναπαριστούν επιτρεπόμενες τροχιές σε περιοχές στο αριστερό κομμάτι του ενεργού δυναμικού. Τα σωματίδια που ακολουθούν αυτές τις τροχιές, πέφτουν προς τον ορίζοντα. Για απλότητα, και εδώ χρησιμοποιούμε την ίδια ονομασία με πριν για τις τροχιές δεύτερας τάξης, καθώς έχουν την ίδια ενέργεια.

ΠΛΑΝΗΤΙΚΕΣ

Οι πλανητικές τροχιές δευτέρας τάξης έχουν την ίδια ενέργεια με τις πλανητικές τροχιές πρώτης τάξης και επιπλέον ξεκινάνε από μία αφήλια απόσταση $r = r_3$. Αυτό σημαίνει ότι το φυσικό εύρος είναι τώρα $r < r_3$ ή $u > u_3$. Επομένως, το κυβικό πολυώνυμο $g(u)$ πρέπει να γραφτεί ως $g(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$ και η αντικατάσταση είναι $u = u_3 + (u_3 - u_2) \tan^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$, όπου τα u_1, u_2 και u_3 είναι τα ίδια όπως πριν στις πλανητικές τροχιές πρώτης τάξης. Έτσι λοιπόν,

$$\begin{aligned} \pm \Delta\phi &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{(u_3 - u_2) \tan\left(\frac{\xi'}{2}\right) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)} d\xi'}{\sqrt{(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)}} - \\ &\frac{\sigma}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{(u_3 - u_2) \tan\left(\frac{\xi'}{2}\right) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)} d\xi'}{\sqrt{(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \left[u_3 + \sigma + (u_3 - u_2) \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right]}} = \\ &\frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{(u_3 - u_2) \tan\left(\frac{\xi'}{2}\right) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)} d\xi'}{\sqrt{(u_3 - u_2)^2 \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \left[1 + \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right] \left[u_3 - u_1 + (u_3 - u_2) \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right]}} - \\ &\frac{\sigma}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{(u_3 - u_2) \tan\left(\frac{\xi'}{2}\right) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)} d\xi'}{\sqrt{(u_3 - u_2)^2 \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \left[1 + \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right] \left[u_3 - u_1 + (u_3 - u_2) \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right] \left[u_3 + \sigma + (u_3 - u_2) \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right]}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{\frac{1}{\cos\left(\frac{\xi'}{2}\right)} d\xi'}{\sqrt{\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3-e}{R} + \left(\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3+e}{R}\right) \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}} - \\ &\frac{\sigma}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{\frac{1}{\cos\left(\frac{\xi'}{2}\right)} d\xi'}{\sqrt{\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3-e}{R} + \left(\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3+e}{R}\right) \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \left[\frac{1}{2M} - \frac{2}{R} + 3\sigma + \left(\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3+e}{R}\right) \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right]}} = \\ &\frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{d\xi'}{\sqrt{\left(\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3-e}{R}\right) \left[1 - \sin^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right] + \left(\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3+e}{R}\right) \sin^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}} - \frac{\sigma}{\sqrt{2M} \left(\frac{1}{2M} - \frac{2}{R} + 3\sigma\right)} \\ &\int_0^\xi \frac{d\xi'}{\sqrt{\left(\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3-e}{R}\right) \left[1 - \sin^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right] + \left(\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3+e}{R}\right) \sin^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \left[1 + \frac{\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3+e}{R}}{\frac{1}{2M} - \frac{2}{R} + 3\sigma} \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right]}} = \\ &\frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{d\xi'}{\sqrt{\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3-e}{R} - \frac{2e}{R} \sin^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}} - \frac{\sigma}{\sqrt{2M} \left(\frac{1}{2M} - \frac{2}{R} + 3\sigma\right)} \\ &\int_0^\xi \frac{d\xi'}{\sqrt{\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3-e}{R} - \frac{2e}{R} \sin^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \left[1 + \frac{\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3+e}{R}}{\frac{1}{2M} - \frac{2}{R} + 3\sigma} \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) \right]}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{1+2M\left(2\sigma-\frac{3-e}{R}\right)}} \int_0^\xi \frac{d\xi'}{\sqrt{1-\kappa \sin^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}} - \\
& \frac{\sigma}{\sqrt{1+2M\left(2\sigma-\frac{3-e}{R}\right)}\left(\frac{1}{2M}-\frac{2}{R}+3\sigma\right)} \int_0^\xi \frac{d\xi'}{\sqrt{1-\kappa \sin^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}\left[1+m \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)\right]} = \\
& \frac{2}{\sqrt{1+2M\left(2\sigma-\frac{3-e}{R}\right)}} F\left(\frac{\xi}{2}, \kappa\right) + \frac{2i\sigma}{\sqrt{1+2M\left(2\sigma-\frac{3-e}{R}\right)}\left(\frac{1}{2M}-\frac{2}{R}+3\sigma\right)} \Pi\left(m, i \operatorname{arcsinh}\left(\tan\left(\frac{\xi}{2}\right)\right), 1-\kappa\right) = \\
& \frac{2}{\sqrt{1+2M\left(2\sigma-\frac{3-e}{R}\right)}} F\left(\frac{\xi}{2}, \kappa\right) + \frac{2i\sigma}{\sqrt{1+2M\left(2\sigma-\frac{3-e}{R}\right)}\left(\frac{1}{2M}-\frac{2}{R}+3\sigma\right)} \frac{i}{1-m} \left[F\left(\frac{\xi}{2}, \kappa\right) - m \Pi\left(1-m, \frac{\xi}{2}, \kappa\right)\right] \\
\Rightarrow \phi &= \frac{2\left[\left(\frac{1}{2M}-\frac{2}{R}+3\sigma\right)(1-m)-\sigma\right]}{\sqrt{1+2M\left(2\sigma-\frac{3-e}{R}\right)}\left(\frac{1}{2M}-\frac{2}{R}+3\sigma\right)(1-m)} \left[F\left(\frac{\xi}{2}, \kappa\right) + \frac{\sigma m}{\left(\frac{1}{2M}-\frac{2}{R}+3\sigma\right)(1-m)-\sigma} \Pi\left(1-m, \frac{\xi}{2}, \kappa\right)\right]
\end{aligned}$$

όπου τα F και Π είναι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα Jacobi πρώτου και τρίτου είδους, $\kappa =$

$$\frac{2e}{e+2\sigma R + \frac{R}{2M} - 3} \quad \text{και} \quad m = \frac{\frac{1}{2M} + 2\sigma - \frac{3+e}{R}}{\frac{1}{2M} + 3\sigma - \frac{2}{R}}.$$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΕΣ

Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στη συνέχιση της ασυμπτωτικής τροχιάς που αναφέρθηκε προηγουμένως, αλλά τώρα το φυσικό εύρος είναι $u > u_2 = u_3$. Επομένως κάνουμε την αντικατάσταση $u = \frac{1+e+2e \tan^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{R}$, με τις τιμές των ριζών να είναι ίδιες με αυτές που δόθηκαν στις τροχίες πρώτης τάξης. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
\pm \Delta\phi &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{\frac{2e}{R} \tan\left(\frac{\xi'}{2}\right) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)} d\xi'}{\sqrt{\frac{2e\left[1+\tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)\right]}{R} \left[\frac{2e \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}{R}\right]^2}} \\
&= \frac{\frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{\frac{2e}{R} \tan\left(\frac{\xi'}{2}\right) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)} d\xi'}{\sqrt{\frac{2e\left[1+\tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)\right]}{R} \left[\frac{2e \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}{R}\right]^2 \left[\frac{1+e+2e \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}{R} + \frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}\right]}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{\frac{2e}{R} \tan\left(\frac{\xi'}{2}\right) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)} d\xi'}{\frac{2e \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}{R} \frac{1}{\cos\left(\frac{\xi'}{2}\right)} \sqrt{\frac{2e}{R}}} - \frac{\frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{\frac{2e}{R} \tan\left(\frac{\xi'}{2}\right) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)} d\xi'}{\frac{2e \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}{R} \frac{1}{\cos\left(\frac{\xi'}{2}\right)} \sqrt{\frac{2e}{R}} \left[\frac{1+e+2e \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}{R} + \frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}\right]} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{\frac{4Me}{R}}} \int_0^\xi \frac{d\xi'}{\cos\left(\frac{\xi'}{2}\right) \tan\left(\frac{\xi'}{2}\right)} - \frac{\frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}}{\sqrt{2M}} \int_0^\xi \frac{d\xi'}{\cos\left(\frac{\xi'}{2}\right) \tan\left(\frac{\xi'}{2}\right) \frac{5-3e^2+2e+6e \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right) - 2e^2 \tan^2\left(\frac{\xi'}{2}\right)}{R(3-e)}} = \\
& \frac{1}{\sqrt{\frac{4Me}{R}}} \left[\ln\left(1 - \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right) - \ln\left(1 + \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right) \right] - \\
& \frac{2(1-e^2)}{\sqrt{\frac{4Me}{R}}} \left[\frac{\ln\left(1 - \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right) - \ln\left(1 + \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)}{5+2e-3e^2} + \frac{2\sqrt{6e-2e^2} \arctan\left[\frac{\sqrt{5+2e-3e^2+2e^2-6e \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)}}{\sqrt{6e-2e^2}}\right]}{(5+2e-3e^2)\sqrt{5+2e-3e^2+2e^2-6e}} \right] = \\
& \frac{1}{\sqrt{\frac{4Me}{R}}} \ln\left[\frac{1 - \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)}\right] - \frac{2(1-e^2)}{\sqrt{\frac{4Me}{R}}} \left[\frac{\ln\left[\frac{1 - \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)}\right]}{5+2e-3e^2} + \frac{2\sqrt{\frac{6e-2e^2}{5-4e-e^2}}}{5+2e-3e^2} \arctan\left[\sqrt{\frac{5-4e-e^2}{6e-2e^2}} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right] \right] = \\
& \frac{2 \ln\left(\tan\left(\frac{\xi}{4}\right)\right)}{\sqrt{\frac{4Me}{R}}} - \frac{4(1-e^2)}{\sqrt{\frac{4Me}{R}}(5+2e-3e^2)} \ln\left(\tan\left(\frac{\xi}{4}\right)\right) - \\
& \frac{4(1-e^2)\sqrt{\frac{6e-2e^2}{5-4e-e^2}}}{\sqrt{\frac{4Me}{R}}(5+2e-3e^2)} \arctan\left[\sqrt{\frac{5-4e-e^2}{6e-2e^2}} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right] \Rightarrow \\
& \phi = \frac{6+4e-2e^2}{\sqrt{\frac{4Me}{R}}(5+2e-3e^2)} \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\xi}{4}\right)\right) - \frac{4(1-e^2)\sqrt{\frac{6e-2e^2}{5-4e-e^2}}}{6+4e-2e^2} \arctan\left[\sqrt{\frac{5-4e-e^2}{6e-2e^2}} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right] \right]
\end{aligned}$$

2.2 Null Γεωδαισιακές

Για τα φωτόνια, $h = 0$, οπότε το ενεργό δυναμικό δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$V_{eff}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \frac{L^2}{r^2}$$

Επομένως, η ακτινική εξίσωση γίνεται

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \frac{L^2}{r^2}$$

Λόγω της ύπαρξης μίας αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς, ο ορίζοντας γεγονότων r_+ είναι μικρότερος από $2M$ που είναι ο ορίζοντας γεγονότων της Schwarzschild. Φωτόνια πέφτουν από μία απόσταση $r_0 = 2M$, έχοντας μία κρίσιμη ενέργεια ίση με $E_\Lambda^2 - 1$.

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{1}{r}$, μαζί με την (2.2), η ακτινική εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \frac{L^2}{r^2} \Rightarrow \left(\frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - 2Mu + \frac{1}{u^2 l^2}\right) L^2 u^2 \Rightarrow \\
\left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} L u^2\right)^2 &= E^2 - \left(L^2 u^2 - 2ML^2 u^3 + \frac{L^2}{l^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{l^2} - u^2 + 2Mu^3 = \\
2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{D^2} &= z(u)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

όπου $\frac{1}{D^2} = \frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{l^2}$ και το D υποδηλώνει την παράμετρο σύγκρουσης.

2.2.1 Ακτινικές Τροχιές

Σε αυτή την περίπτωση, $L = 0$, οπότε η ακτινική εξίσωση έρχεται στη μορφή

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm E \quad (2.12)$$

όπου το (+) είναι για τα φωτόνια που εξέρχονται, ενώ το (-) για αυτά που εισέρχονται. Οπότε, έχουμε από την ολοκλήρωση

$$r = \pm E\tau + r_0$$

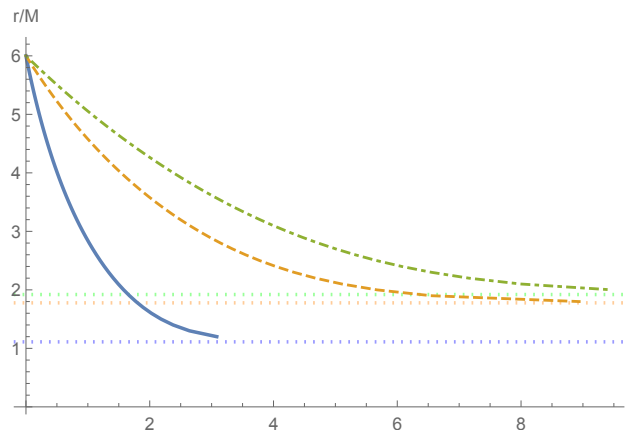
όπου το r_0 είναι σταθερά της ολοκλήρωσης που αντιστοιχεί στην αρχική θέση του φωτονίου. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι **για τα φωτόνια, ως προς το χρόνο τ η ακτινική κίνηση είναι ανεξάρτητη της κοσμολογικής σταθεράς**. Για να παρατηρήσουμε την εξίσωση κίνησης ως προς το χρόνο t , χρησιμοποιώντας τις (2.1) και (2.12), έχουμε

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \dot{t} \Rightarrow \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) = \pm \frac{1}{rl^2}(rl^2 - 2Ml^2 + r) = \pm \frac{1}{rl^2}(r - r_+)(r^2 + r_+r + \rho^2)$$

Οπότε, ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$t = \pm \frac{l^2 r_+}{2r_+ + \rho^2} \left[\ln(r - r_+) - \frac{1}{2} \ln(r^2 + rr_+ + \rho^2) + \delta \arctan\left(\frac{2r + r_+}{\beta}\right) \right] + B$$

όπου $\beta = \sqrt{4\rho^2 - r_+^2}$, $\delta = \frac{2\alpha + r_+}{\beta}$, $\alpha = \frac{\rho^2}{r_+}$, $\rho^2 = \frac{2Ml^2}{r_+}$ και B μία σταθερά ολοκλήρωσης.



Σχήμα 2.4: Οι τροχιές συναρτήσει του t , για $l = 3$ (μπλε), 6 (πορτοκαλί) και 10 (πράσινο), επιλέγοντας $r_0 = 6M$

2.2.2 Μη ακτινικές Τροχιές

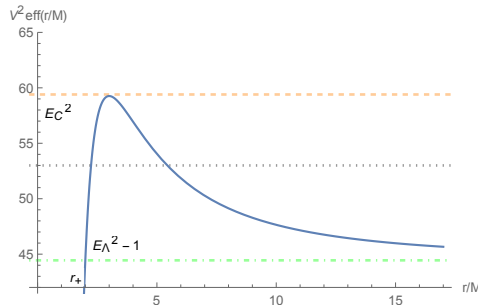
Για διαφορετικές τιμές της σταθεράς E , οι επιτρεπόμενες τροχιές έχουν ως εξής

- Εάν $E^2 \leq E_\Lambda^2 - 1$, τα φωτόνια πέφτουν στην απροσδιοριστία, ξεκινώντας από αρχικές αποστάσεις $r \leq 2M$. Για $E^2 = E_\Lambda^2 - 1$, οι τροχιές των φωτονίων είναι καρδιοειδείς. Θα δείξουμε παρακάτω ότι αυτές οι περιπτώσεις περιγράφουν δέσμιες τροχιές.

Οι ακόλουθες γεωδαισιακές είναι μη δέσμιες.

- Εάν $E_\Lambda^2 - 1 \leq E^2 < E_C^2$, τα φωτόνια μπορούν ερχόμενα από το άπειρο να φτάσουν σε μία ελάχιστη απόσταση $r = P$ και μετά να ξαναπάνε στο άπειρο, δηλαδή εκτρέπονται μόνο. Οι άλλες επιτρεπόμενες τροχιές αντιστοιχούν σε φωτόνια που κινούνται στην άλλη πλευρά του φραγμού δυναμικού, οπότε και πέφτουν στην απροσδιοριστία.
- Εάν $E^2 = E_C^2$, τα φωτόνια μπορούν να περιστρέφονται σε ασταθείς κυκλικές τροχιές, ακτίνας $r = 3M$, ανεξάρτητης της στροφορμής. Τα φωτόνια ερχόμενα από το άπειρο, προσεγγίζουν ασυμπτωτικά τον κύκλο ακτίνας $r = 3M$.
- Εάν $E^2 > E_C^2$, τα φωτόνια που έρχονται από το άπειρο, πέφτουν στην απροσδιοριστία.

Στο παρακάτω διάγραμμα, βλέπουμε το ενεργό δυναμικό για μη ακτινικά φωτόνια.



Σχήμα 2.5: Το ενεργό δυναμικό συναρτήσει του r , για $l = 3$ και $L = 20$

Δέσμιες Τροχιές

ΤΡΟΧΙΕΣ ΜΕ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΕΣ ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΕΣ

Αυτού του τύπου οι τροχιές μπορούν να υπάρξουν όταν η ενέργεια είναι τέτοια ώστε $0 < E^2 < \frac{L^2}{l^2} \equiv E_\Lambda^2 - 1$. Ορίζοντας την παράμετρο B από την έκφραση

$$\frac{1}{B^2} = \frac{1}{l^2} - \frac{E^2}{L^2}$$

η ακτινική εξίσωση γίνεται

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 - \frac{1}{B^2} = 2Mh(u)$$

και το φυσικό εύρος είναι $r_+ < r \leq r_3 = A$, όπου A η αφήλια απόσταση αυτής της τροχιάς. Η εξίσωση $h(u) = 0$ επιτρέπει μόνο μία πραγματική ρίζα, A^{-1} και ένα ζεύγος μιγαδικών συζυγών, u_1 και u_2 . Γι' αυτό το λόγο, θα χαρακτηρίσουμε τις ρίζες του $h(u)$ με φανταστικές εκκεντρότητες

$$u_1 = \frac{-1 + ie}{R}, \quad u_2 = \frac{-1 - ie}{R}, \quad u_3 = \frac{1}{A}$$

Από το άθροισμα των ριζών, έχουμε ότι $u_3 = \frac{1}{A} = \frac{1}{2M} + \frac{2}{R}$. Επίσης, έχουμε ότι

$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = 0 \Rightarrow \frac{1+e^2}{R^2} + \left(\frac{1}{2M} + \frac{2}{R}\right) \left(-\frac{2}{R}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1+e^2}{R^2} - \frac{1}{MR} - \frac{4}{R^2} = 0 \Rightarrow$$

$$M + Me^2 - R - 4M = 0 \Rightarrow Me^2 - 3M = R \Rightarrow e^2 - 3 = \frac{R}{M} \equiv \frac{1}{\mu} > 0 \Rightarrow e^2 > 3$$

Ακόμα, από το γινόμενο των ριζών και την τελευταία σχέση, έχουμε

$$u_1 u_2 u_3 = \frac{1}{2M} \frac{1}{B^2} \Rightarrow \frac{1+e^2}{R^2} \left(\frac{1}{2M} + \frac{2}{R}\right) = \frac{1}{2M} \frac{1}{B^2} \Rightarrow \frac{1+e^2}{R^2} + \frac{4M(1+e^2)}{R^3} = \frac{1}{B^2} \Rightarrow$$

$$1+e^2 + \frac{4M(1+e^2)}{R} = \left(\frac{R}{B}\right)^2 \Rightarrow 4 + \frac{1}{\mu} + 4\mu \left(4 + \frac{1}{\mu}\right) = \left(\frac{R}{B}\right)^2 \Rightarrow 8 + \frac{1}{\mu} + 16\mu = \left(\frac{R}{B}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{R}{B}\right)^2 = \frac{(1+4\mu)^2}{\mu}$$

Οπότε, η ακτινική εξίσωση γίνεται τώρα

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2M \left(u - \frac{ie-1}{R}\right) \left(u - \frac{-ie-1}{R}\right) \left(u - \frac{1}{2M} - \frac{2}{R}\right) = 2M \left[\left(u + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{e^2}{R^2}\right] \left(u - \frac{1}{2M} - \frac{2}{R}\right) \quad (2.13)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $u = \frac{e \tan\left(\frac{\xi}{2}\right) - 1}{R}$ όπου $\frac{1}{2M} + \frac{2}{R} \leq u < \infty$ και $\xi_0 \leq \xi < \pi$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2M} + \frac{2}{R} = \frac{e \tan\left(\frac{\xi_0}{2}\right) - 1}{R} \Rightarrow e \tan\left(\frac{\xi_0}{2}\right) - 1 = \frac{R}{2M} + 2 \Rightarrow e \tan\left(\frac{\xi_0}{2}\right) = \frac{1}{2\mu} + 3 = \frac{1+6\mu}{2\mu} \Rightarrow$$

$$\tan\left(\frac{\xi_0}{2}\right) = \frac{6\mu+1}{2\mu e}$$

Οπότε μπορούμε να πούμε ότι

$$\sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right) = \frac{6\mu+1}{\Delta}, \quad \cos\left(\frac{\xi_0}{2}\right) = \frac{2\mu e}{\Delta}$$

Τότε

$$\sin^2\left(\frac{\xi_0}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\xi_0}{2}\right) = 1 \Rightarrow \Delta^2 = (6\mu+1)^2 + 4\mu^2 e^2$$

Τότε, μέσω της αντικατάστασης που αναφέραμε παραπάνω, η (2.13) γίνεται

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2M \left[\left(u + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{e^2}{R^2}\right] \left(u - \frac{1}{2M} - \frac{2}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\xi}{d\phi} \frac{du}{d\xi}\right)^2 = 2M \left[\left(\frac{e \tan\left(\frac{\xi}{2}\right) - 1}{R} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{e^2}{R^2}\right] \left[\frac{e \tan\left(\frac{\xi}{2}\right) - 1}{R} - \frac{1}{2M} - \frac{2}{R}\right] \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\xi}{d\phi}\right)^2 \frac{e^2}{4R^2} \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\xi}{2}\right)} = 2M \left[\frac{e^2 \tan^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{R^2} + \frac{e^2}{R^2}\right] \left[\frac{e \tan\left(\frac{\xi}{2}\right) - 3}{R} - \frac{1}{2M}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\xi}{d\phi}\right)^2 &= 8M \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \left[\frac{e \sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{R \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)} - \frac{3}{R} - \frac{1}{2M} \right] = 8\mu e \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) - (24\mu + 4) \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) = \\ &= 4\mu e \sin(\xi) - (6\mu + 1)4 \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) = 4\mu e \sin(\xi) - \Delta \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right)(2 + 2 \cos(\xi)) = \\ &= 2\Delta \cos\left(\frac{\xi_0}{2}\right) \sin(\xi) - 2\Delta \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right) \cos(\xi) - 2\Delta \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right) = 2\Delta \left[\sin\left(\xi - \frac{\xi_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right) \right] \Rightarrow \\ \frac{d\xi}{d\phi} &= \pm \sqrt{2\Delta} \sqrt{\sin\left(\xi - \frac{\xi_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right)} \Rightarrow \frac{d\phi}{d\xi} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \frac{1}{\sqrt{\sin\left(\xi - \frac{\xi_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right)}} \Rightarrow \\ \pm \phi &= -\sqrt{\frac{2}{\Delta - 6\mu - 1}} F\left(\frac{\pi - 2\xi + \xi_0}{4}, -\frac{2}{\sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right) - 1}\right) \end{aligned}$$

ΚΑΡΔΙΟΕΙΔΕΙΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

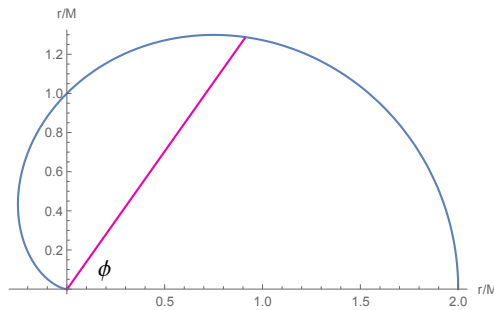
Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι $r_+ \leq r \leq r_0$ και επίσης ότι η αφήλια απόσταση είναι η $r_0 = 2M$, πράγμα που σημαίνει ότι $E^2 = \frac{L^2}{l^2} = E_\Lambda^2 - 1$. Οπότε,

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) \frac{L^2}{r^2} = \frac{L^2}{l^2} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2ML^2}{r^3} - \frac{L^2}{l^2} \Rightarrow \\ \dot{r}^2 &= \frac{L^2}{r^3}(2M - r), \quad r < 2M \end{aligned}$$

Μέσω της (2.2), έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= \frac{L^2}{r^3}(2M - r) \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{L^2}{r^3}(2M - r) \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{L^2}{r^4} = \frac{L^2}{r^3}(2M - r) \Rightarrow \\ \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= r(2M - r) \Rightarrow r(\phi) = M(1 + \cos(\phi)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Αυτή είναι η εξίσωση του καρδιοειδούς.



Σχήμα 2.6: Το r συναρτήσει του ϕ

Βλέπουμε ότι η τροχιά για μη ακτινικά φωτόνια σε αυτή την περιοχή είναι ανεξάρτητη της στροφορμής. Υπάρχει εξάρτηση μόνο από τη μάζα της μαύρης τρύπας.

Εφόσον είπαμε ότι το φωτόνιο ξεκινά από μια απόσταση $r = 2M$, μπορούμε να πούμε ότι περνάει τον ορίζοντα για μία γωνία $0 < \phi_+ < \pi$. Αντικαθιστώντας τώρα την (2.2) στην (2.14), παίρνουμε

$$r(\phi) = M(1 + \cos(\phi)) \Rightarrow L = M^2(1 + \cos(\phi))^2 \frac{d\phi}{d\tau} \Rightarrow \frac{d\tau}{d\phi} = \frac{M^2(1 + \cos(\phi))^2}{L} \Rightarrow$$

$$\tau(\phi) = \frac{M^2}{2L} [3\phi + (4 + \cos(\phi)) \sin(\phi)]$$

Λύνουμε ως προς $\cos(\phi)$ την (2.14) και έχουμε

$$r(\phi) = M(1 + \cos(\phi)) \Rightarrow \cos(\phi) = \frac{r - M}{M} = \frac{r}{M} - 1$$

και στη συνέχεια βάζουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στην $\tau(\phi)$, οπότε

$$\tau(\phi) = \frac{M^2}{2L} [3\phi + (4 + \cos(\phi)) \sin(\phi)] \Rightarrow \tau(r) = \frac{M^2}{2L} \left[3 \cos^{-1} \left(\frac{r}{M} - 1 \right) + \left(3 + \frac{r}{M} \right) \sin(\phi) \right] \Rightarrow$$

$$\tau(r) = \frac{M^2}{2L} \left[3 \cos^{-1} \left(\frac{r}{M} - 1 \right) + \left(3 + \frac{r}{M} \right) \sqrt{\frac{r}{M} \left(2 - \frac{r}{M} \right)} \right]$$

Μη δέσμιες Τροχιές

Σε αυτή την περίπτωση, αντίθετα από την προηγούμενη, $E^2 > \frac{L^2}{l^2}$.

ΚΡΙΣΙΜΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

Γυρνώντας στην (2.11), πρέπει να διαχωρίσουμε διαφορετικές περιπτώσεις ως προς τη διάταξη των ριζών της κυβικής εξίσωσης

$$z(u) = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{D^2} = 0 \quad (2.15)$$

Το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών, μας δίνουν

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2M}, \quad u_1 u_2 u_3 = -\frac{1}{2MD^2}$$

Η κυβική εξίσωση επιτρέπει μία αρνητική πραγματική ρίζα και οι δύο που μένουν μπορεί να είναι είτε πραγματικές (μία διπλή ή δύο διαφορετικές) ή ένα ζευγάρι συζυγών μιγαδικών. Η περίπτωση της μίας διπλής θετικής ρίζας παίζει έναν καθοριστικό ρόλο στη διάκριση των null γεωδαισιακών. Γι' αυτό θα θεωρήσουμε πρώτη αυτή την περίπτωση. Παραγωγίζοντας την (2.15), παίρνουμε

$$z'(u) = 6Mu^2 - 2u = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{3M}$$

οπότε η $u = (3M)^{-1}$ είναι ρίζα και θα είναι και ρίζα (διπλή) της (2.15), οπότε

$$2M \frac{1}{27M^3} - \frac{1}{9M^2} + \frac{1}{D^2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{27M^2} - \frac{3}{27M^2} + \frac{1}{D^2} = 0 \Rightarrow D = 3\sqrt{3}M$$

Από το γινόμενο των ριζών, έχουμε

$$u_1 u_2 u_3 = -\frac{1}{2MD^2} \Rightarrow u_1 \left(\frac{1}{3M} \right)^2 = -\frac{1}{54M^3} \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{6M}$$

Οπότε, η (2.11) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2M \left(u + \frac{1}{6M}\right) \left(u - \frac{1}{3M}\right)^2$$

ολοκληρώνοντας την οποία, καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{1}{u} = r = \frac{3M}{\frac{3}{2} \tanh^2 \frac{1}{2}(\phi - \phi_0) - \frac{1}{2}}$$

όπου ϕ_0 μια σταθερά ολοκλήρωσης. Επιλέγοντας $\tanh^2 \left(\frac{\phi_0}{2}\right) = \frac{1}{3}$, τότε όταν $\phi = 0$, $r \rightarrow \infty$

και $u = 0$, ενώ όταν $\phi \rightarrow \infty$ τότε $u = \frac{1}{3M}$. Οπότε, εδώ έχουμε μία null γεωδαισιακή ερχόμενη από το άπειρο να προσεγγίζει κύκλο ακτίνας $3M$ ασυμπτωτικά, γυρίζοντας γύρω του. Από την (2.15) πρέπει να έχουμε και τροχιά $2^{η}$ τάξης η οποία να πέφτει στην απροσδιοριστία, προσεγγίζοντας ασυμπτωτικά τον ίδιο κύκλο, γυρίζοντας γύρω του. Τέτοια τροχιά μπορεί να παρατηρηθεί μέσω της αντικατάστασης

$$u = \frac{1}{3M} + \frac{1}{2M} \tan^2 \left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (2.16)$$

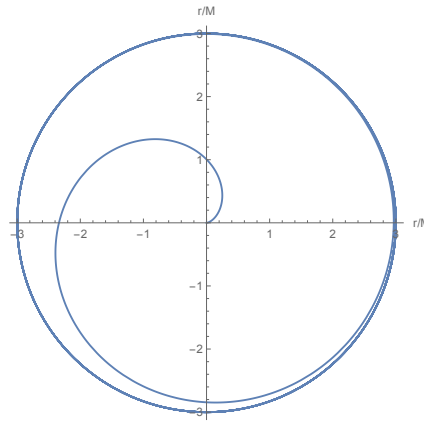
στην (2.15). Τότε, έχουμε

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2M \left(u + \frac{1}{6M}\right) \left(u - \frac{1}{3M}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{d\xi}{d\phi} \frac{du}{d\xi}\right)^2 = 2M \left(u + \frac{1}{6M}\right) \left(u - \frac{1}{3M}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\xi}{d\phi}\right)^2 \frac{1}{4M^2} \tan^2 \left(\frac{\xi}{2}\right) \frac{1}{\cos^4 \left(\frac{\xi}{2}\right)} = 2M \left[\frac{1}{2M} + \frac{1}{2M} \tan^2 \left(\frac{\xi}{2}\right)\right] \frac{1}{4M^2} \tan^4 \left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\xi}{d\phi}\right)^2 \frac{1}{\cos^4 \left(\frac{\xi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\xi}{2}\right)} \tan^2 \left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{d\xi}{d\phi}\right)^2 = \cos^2 \left(\frac{\xi}{2}\right) \tan^2 \left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\xi}{d\phi}\right)^2 = \sin^2 \left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow \phi = 2 \ln \left(\tan \left(\frac{\xi}{4}\right)\right) \Rightarrow \tan \left(\frac{\xi}{4}\right) = e^{\frac{\phi}{2}}$$



Σχήμα 2.7: Το r συναρτήσει του ϕ

Βάζοντας το αποτέλεσμα στην (2.16), έχουμε

$$\frac{1}{r} = u = \frac{1}{3M} + \frac{1}{2M} \frac{4 \tan^2 \left(\frac{\xi}{4} \right)}{\left[1 - \tan^2 \left(\frac{\xi}{4} \right) \right]^2} = \frac{1}{3M} + \frac{1}{2M} \frac{4e^\phi}{1 - 2e^\phi + e^{2\phi}} \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{3M} + \frac{2e^\phi}{M(e^\phi - 1)^2}$$

Παρατηρούμε ότι όταν $\phi \rightarrow 0$, $r = 0$ και $u \rightarrow \infty$, ενώ όταν $\phi \rightarrow \infty$, $u = \frac{1}{3M}$.

ΤΡΟΧΙΕΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Σε αυτή την περίπτωση, όλες οι ρίζες της κυβικής εξίσωσης $z(u) = 0$ είναι πραγματικές και οι δύο θετικές είναι διαφορετικές. Έστω οι ρίζες

$$u_1 = \frac{P - 2M - Q}{4MP}, \quad u_2 = \frac{1}{P}, \quad u_3 = \frac{P - 2M + Q}{4MP}$$

Συγκεκριμένα, το άθροισμα των ριζών είναι $\frac{1}{2M}$ όπως πρέπει και $u_1 < 0$. Επίσης, η $u_1 < u_2 < u_3$ απαιτεί ότι

$$\frac{1}{P} < \frac{P - 2M + Q}{4MP} \Rightarrow Q + P - 6M > 0 \quad (2.17)$$

Συνεπώς, $z(u) = 2M(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$, δηλαδή

$$z(u) = 2M \left(u - \frac{P - 2M - Q}{4MP} \right) \left(u - \frac{1}{P} \right) \left(u - \frac{P - 2M + Q}{4MP} \right) =$$

$$2M \left[u^2 - \left(\frac{1}{P} + \frac{P - 2M - Q}{4MP} \right) u + \frac{P - 2M - Q}{4MP^2} \right] \left(u - \frac{P - 2M + Q}{4MP} \right) =$$

$$2M \left[u^3 - \frac{1}{2M} u^2 + \left(\frac{P - 2M}{2MP^2} + \frac{(P - 2M)^2 - Q^2}{16M^2 P^2} \right) u - \frac{(P - 2M)^2 - Q^2}{16M^2 P^3} \right] =$$

$$2M u^3 - u^2 + \left(\frac{P - 2M}{P^2} + \frac{(P - 2M)^2 - Q^2}{8MP^2} \right) u - \frac{(P - 2M)^2 - Q^2}{8MP^3}$$

και αν την εξισώσουμε με την (2.11), παίρνουμε

$$\frac{P - 2M}{P^2} + \frac{(P - 2M)^2 - Q^2}{8MP^2} = 0 \Rightarrow 8MP - 16M^2 + P^2 - 4PM + 4M^2 = Q^2 \Rightarrow$$

$$Q^2 = P^2 + 4MP - 12M^2 \Rightarrow Q^2 = (P + 6M)(P - 2M) \quad (2.18)$$

και

$$\frac{1}{D^2} = \frac{1}{8MP^3} [Q^2 - (P - 2M)^2] = \frac{1}{8MP^3} [(P + 6M)(P - 2M) - (P - 2M)^2] =$$

$$\frac{1}{8MP^3} (P - 2M)(P + 6M - P + 2M) = \frac{1}{8MP^3} (P - 2M)8M = \frac{1}{P^3} (P - 2M) \Rightarrow$$

$$D^2 = \frac{P^3}{P - 2M}$$

Επίσης, μέσω της (2.18), η ανισότητα (2.17) δίνει

$$(P + 6M)(P - 2M) > (P - 6M)^2 \Rightarrow P^2 - 2MP + 6MP - 12M^2 > P^2 - 12MP + 36M^2 \Rightarrow 16MP - 48M^2 > 0 \Rightarrow P > 3M$$

Κάνοντας την αντικατάσταση

$$u - \frac{1}{P} = -\frac{Q - P + 6M}{8MP}(1 + \cos x) \quad (2.19)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} u - \frac{1}{P} &= -\frac{Q - P + 6M}{8MP}(1 + \cos x) \Rightarrow u + \frac{Q - P + 6M}{4MP} - \frac{1}{P} = \\ \frac{Q - P + 6M}{4MP} - \frac{Q - P + 6M}{8MP} - \frac{Q - P + 6M}{8MP} \cos x &\Rightarrow u + \frac{Q - P + 2M}{4MP} = \frac{Q - P + 6M}{8MP}(1 - \cos x) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Παρατηρούμε ότι όταν $x = \pi$, $u = \frac{1}{P}$, ενώ όταν $\frac{1 - \cos x}{2} = \frac{Q - P + 2M}{Q - P + 6M} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{Q - P + 2M}{Q - P + 6M}$, $u = 0$ και $r \rightarrow \infty$. Αντικαθιστώντας τις (2.19) και (2.20) στην (2.11), παρατηρούμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= 2M(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \Rightarrow \left(\frac{dx}{d\phi} \frac{du}{dx}\right)^2 = 2M(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \Rightarrow \\ \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 \left(\frac{Q - P + 6M}{8MP}\right)^2 \sin^2 x &= \\ 2M \left[\frac{Q - P + 6M}{8MP}(1 - \cos x)\right] \left[-\frac{Q - P + 6M}{8MP}(1 + \cos x)\right] \left[-\frac{Q}{2MP} + \frac{Q - P + 6M}{8MP}(1 - \cos x)\right] &= \\ -2M \left(\frac{Q - P + 6M}{8MP}\right)^2 (1 - \cos^2 x) \frac{1}{2M} \left[-\frac{Q}{P} + \frac{Q - P + 6M}{4P}(1 - \cos x)\right] &\Rightarrow \\ \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{Q}{P} - \frac{Q - P + 6M}{4P}(1 - \cos x) = \frac{Q}{P} - \frac{Q - P + 6M}{2P} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{Q}{P} \left[1 - \frac{Q - P + 6M}{2Q} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] &\Rightarrow \\ \frac{d\phi}{dx} = \sqrt{\frac{P}{Q}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \Rightarrow \phi = -2\sqrt{\frac{P}{Q}} \left[K\left(\frac{6M - P + Q}{2Q}\right) - F\left(\frac{x}{2}, \frac{6M - P + Q}{2Q}\right)\right] \end{aligned}$$

όπου $k^2 = \frac{6M - P + Q}{2Q}$ και $K(k)$ είναι το ελλειπτικό ολοκλήρωμα Jacobi πρώτου είδους αλλά με πάνω όριο στο ολοκλήρωμα το $\frac{\pi}{2}$. Οπότε, χρησιμοποιώντας την (2.20) στην παραπάνω εξίσωση, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{P - Q - 2M}{4MP} + \frac{Q - P + 6M}{4MP} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{P - Q - 2M + (Q - P + 6M) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4MP} = \\ \frac{(P - Q - 2M + Q - P + 6M) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + (P - Q - 2M) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4MP} &= \frac{4M \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + (P - Q - 2M) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4MP} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$r = \frac{4MP}{4M \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + (P - Q - 2M) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{4MP}{4Msn^2 \left[K\left(\frac{6M-P+Q}{2Q}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{P}}\phi \right] - (Q - P + 2M)cn^2 \left[K\left(\frac{6M-P+Q}{2Q}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{P}}\phi \right]}$$

όπου sn και cn είναι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi.

ΤΡΟΧΙΕΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ

Σε αυτήν την περίπτωση το φυσικό εύρος είναι $u > u_3 > u_2$. Με την αντικατάσταση

$$u = \frac{1}{P} + \frac{Q + P - 6M}{4MP} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (2.21)$$

παρατηρούμε ότι για $x = 0$, $u = u_3 = \frac{Q + P - 6M}{4MP}$, ενώ για $x = \pi$, $u \rightarrow \infty$ και $r \rightarrow 0$. Τότε, αντικαθιστώντας την (2.21) στην (2.11), παίρνουμε

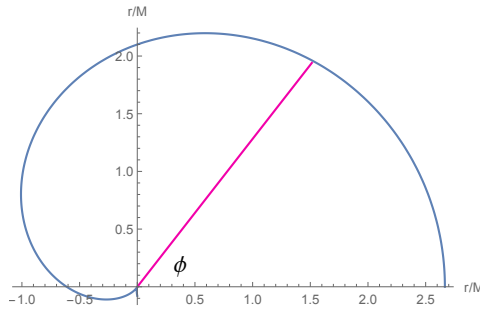
$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= 2M(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \Rightarrow \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 \left(\frac{Q + P - 6M}{4MP}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^6\left(\frac{x}{2}\right)} = \\ 2M \left[\frac{Q - P + 6M}{4MP} + \frac{Q + P - 6M}{4MP} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right] \frac{Q + P - 6M}{4MP} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{6M - P - Q}{4MP} \left[1 - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right] &\Rightarrow \\ \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{Q + P - 6M}{4MP} &= - \left[\frac{Q + P - 6M}{2P} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{6M + Q - P}{2P} \right] \frac{Q + P - 6M - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4MP} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow \\ \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{Q + P - 6M}{2P} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{6M + Q - P}{2P} \Rightarrow \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \\ \frac{Q + P - 6M}{2P} + \left(\frac{6M + Q - P}{2P}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{Q + P - 6M}{2P} + \frac{6M + Q - P}{2P} - \frac{6M + Q - P}{2P} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \\ \frac{Q}{P} - \frac{6M + Q - P}{2P} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &\Rightarrow \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{Q}{P} \left[2 - k^2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right] \Rightarrow \phi = 2\sqrt{\frac{P}{Q}} F\left(\frac{x}{2}, \frac{6M - P + Q}{2Q}\right) \end{aligned}$$

$$\text{όπου } k^2 = \frac{6M - P + Q}{2Q}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{P} + \frac{Q + P - 6M}{4MP} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{4M + (Q + P - 6M) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{4MP} \Rightarrow \\ r &= \frac{4MP}{4M + (Q + P - 6M) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{4MP}{4M + (Q + P - 6M)nc^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{P}}\phi\right)} \end{aligned}$$

όπου nc είναι ελλειπτική συνάρτηση Jacobi.



Σχήμα 2.8: Το r συναρτήσει του ϕ

ΤΡΟΧΙΕΣ ΜΕ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΕΣ ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΕΣ

Σε αυτή την κατηγορία, οι δύο ρίζες της $z(u) = 0$ είναι ζεύγος συζυγών μιγαδικών, συγκεκριμένα $u_2 = u_3^*$, ενώ η τρίτη ρίζα είναι αρνητική. Οπότε γράφουμε

$$u_2 = \frac{1 + ie}{R}, \quad u_3 = \frac{1 - ie}{R}$$

οπότε, $u_1 = \frac{1}{2M} - \frac{2}{R}$ και η $z(u)$ γράφεται

$$z(u) = 2M \left(u - \frac{1}{2M} + \frac{2}{R} \right) \left[\left(u - \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{e^2}{R^2} \right] \quad (2.22)$$

$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2M} - \frac{2}{R} \right) \frac{2}{R} + \frac{1 + e^2}{R^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{MR} - \frac{4}{R^2} + \frac{1 + e^2}{R^2} = 0 \Rightarrow$$

$$R - 4M + M + Me^2 = 0 \Rightarrow Me^2 = 3M - R \Rightarrow e^2 = \frac{3M - R}{M} = \frac{3\frac{M}{R} - 1}{\frac{M}{R}} = \frac{3\mu - 1}{\mu} \Rightarrow$$

$$e^2 = 3 - \frac{1}{\mu}$$

και

$$u_1 u_2 u_3 = -\frac{1}{2MD^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2M} - \frac{2}{R} \right) \frac{1 + e^2}{R^2} = -\frac{1}{2MD^2} \Rightarrow \frac{1 + e^2}{2MR^2} - \frac{2 + 2e^2}{R^3} = -\frac{1}{2MD^2} \Rightarrow$$

$$\frac{R + Re^2 - 4M + 4Me^2}{2MR^3} = -\frac{1}{2MD^2} \Rightarrow D^2 = -\frac{R^3}{R(1 + e^2) - 4M(1 + e^2)} \Rightarrow$$

$$D^2 = -\frac{R^2}{(1 + e^2) \left(1 - \frac{4M}{R} \right)} \Rightarrow \frac{D^2}{M^2} = -\frac{\frac{R^2}{M^2}}{\frac{4\mu - 1}{\mu} (1 - 4\mu)} = -\frac{\frac{1}{\mu^2}}{\frac{4\mu - 1}{\mu} (1 - 4\mu)} =$$

$$-\frac{1}{(4\mu^2 - \mu)(1 - 4\mu)} = \frac{1}{\mu(1 - 4\mu)^2}$$

Εφόσον $e^2 = 3 - \frac{1}{\mu}$, τότε $\mu > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\mu} < 3$. Ακόμα,

$$\mu > \frac{1}{3} \Rightarrow 4\mu > \frac{4}{3} \Rightarrow 1 - 4\mu < -\frac{1}{3} \Rightarrow (1 - 4\mu)^2 > \left(\frac{1}{3} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1 - 4\mu)^2} < 9$$

Οπότε,

$$\frac{1}{\mu(1-4\mu)^2} < 27 \Rightarrow \frac{D^2}{M^2} < 27 \Rightarrow D < 3\sqrt{3}M$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $u = \frac{1 + e \tan\left(\frac{\xi}{2}\right)}{R}$ όπου $u_0 < u < \infty$ και $\xi_0 < \xi < \pi$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2M} - \frac{2}{R} &= \frac{e \tan\left(\frac{\xi_0}{2}\right) + 1}{R} \Rightarrow e \tan\left(\frac{\xi_0}{2}\right) + 1 = \frac{R}{2M} - 2 \Rightarrow e \tan\left(\frac{\xi_0}{2}\right) = \frac{1}{2\mu} - 3 = \frac{1-6\mu}{2\mu} \Rightarrow \\ \tan\left(\frac{\xi_0}{2}\right) &= \frac{1-6\mu}{2\mu e} \end{aligned}$$

Οπότε μπορούμε να πούμε ότι

$$\sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right) = \frac{1-6\mu}{\Delta}, \quad \cos\left(\frac{\xi_0}{2}\right) = \frac{2\mu e}{\Delta}$$

Τότε

$$\sin^2\left(\frac{\xi_0}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\xi_0}{2}\right) = 1 \Rightarrow \Delta^2 = (1-6\mu)^2 + 4\mu^2 e^2$$

Τότε, μέσω της αντικατάστασης που αναφέραμε παραπάνω, η (2.22) γίνεται

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= 2M \left(u - \frac{1}{2M} + \frac{2}{R}\right) \left[\left(u - \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{e^2}{R^2}\right] \Rightarrow \left(\frac{d\xi}{d\phi}\right)^2 \frac{e^2}{4R^2 \cos^4\left(\frac{\xi}{2}\right)} = \\ 2M \left[\frac{e^2 \tan^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{R^2} + \frac{e^2}{R^2}\right] \left[\frac{3 + e \tan\left(\frac{\xi}{2}\right)}{R} - \frac{1}{2M}\right] &\Rightarrow \left(\frac{d\xi}{d\phi}\right)^2 \frac{e^2}{4R^2 \cos^4\left(\frac{\xi}{2}\right)} = \\ \frac{2Me^2}{R^2} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)} \left[\frac{3}{R} - \frac{1}{2M} + \frac{e \sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{R \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)}\right] &\Rightarrow \left(\frac{d\xi}{d\phi}\right)^2 = 8M \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \left[\frac{3}{R} - \frac{1}{2M} + \frac{e \sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{R \cos\left(\frac{\xi}{2}\right)}\right] = \\ (24\mu - 4) \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + 8\mu e \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) &= 4\mu e \sin(\xi) + (6\mu - 1)4 \cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) = \\ 4\mu e \sin(\xi) - \Delta \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right) (2 + 2 \cos(\xi)) &= 2\Delta \cos\left(\frac{\xi_0}{2}\right) \sin(\xi) - 2\Delta \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right) - 2\Delta \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right) \cos(\xi) = \\ 2\Delta \left[\sin\left(\xi - \frac{\xi_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right)\right] &\Rightarrow \frac{d\xi}{d\phi} = \pm \sqrt{2\Delta} \sqrt{\sin\left(\xi - \frac{\xi_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right)} \Rightarrow \\ \frac{d\phi}{d\xi} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \frac{1}{\sqrt{\sin\left(\xi - \frac{\xi_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right)}} &\Rightarrow \phi = - \sqrt{\frac{2}{\Delta [1 - \sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right)]}} F \left[\frac{\pi - 2\xi + \xi_0}{4}, - \frac{2}{\sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right) - 1} \right] \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3

Timelike Γεωδαισιακές σε Horndeski μελανή οπή

Ξεκινώντας, θεωρούμε τη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{z}{m_p^2} G^{\mu\nu} \right) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$$

όπου m_p η μάζα Planck, z ένας πραγματικός αριθμός, $G_{\mu\nu}$ ο τανυστής Einstein, ϕ ένα βαθμωτό πεδίο και $g_{\mu\nu}$ η μετρική. Τότε,

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + G(r)dr^2 + \rho^2(r)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$$

Από τη στιγμή που οι εξισώσεις κίνησης είναι γνωστές, θέτοντας $\rho = r$ βρίσκουμε την ακόλουθη λύση

$$F(r) = \frac{3}{4} + \frac{r^2 m_p^2}{12z} - \frac{2M}{m_p^2 r} + \frac{\sqrt{z}}{4m_p r} \arctan\left(\frac{m_p r}{\sqrt{z}}\right)$$
$$G(r) = \frac{(m_p^2 r^2 + 2z)^2}{4(m_p^2 r^2 + z)^2 F(r)}$$

όπου M μία σταθερά που θα παίζει το ρόλο μάζας, και αργότερα θα διαλέξουμε $m_p = 1$. Έτσι,

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + G(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \Rightarrow \mathcal{L} = -F(r)\dot{t}^2 + G(r)\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2)$$

όπου οι τελείες αντιπροσωπεύουν την παράγωγο ως προς την παράμετρο τ . Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\dot{\Pi}_q - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

όπου $\Pi_q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ είναι η συζυγής ορμή ως προς τη συντεταγμένη q . Από τη στιγμή που η Λαγκρανζιανή είναι ανεξάρτητη των (t, ϕ) , οι αντίστοιχες συζυγείς ορμές θα διατηρούνται, οπότε

$$\Pi_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -2F(r)\dot{t} = -2E \Rightarrow E = F(r)\dot{t} \quad (3.1)$$

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 2r^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi} = 2L \Rightarrow L = r^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi}$$

Από τις εξισώσεις κίνησης για το θ έχουμε

$$\ddot{\theta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(2r^2\dot{\theta})}{\partial \tau} - r^2\dot{\phi}^2 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{d(r^2\dot{\theta})}{d\tau} = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dr^2}{d\tau} \dot{\theta} + r^2 \frac{d\dot{\theta}}{d\tau} = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2$$

Για απλότητα, θεωρούμε $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ και $\dot{\theta}_0 = 0$, οπότε βρίσκουμε ότι $\ddot{\theta}_0 = 0$. Έχουμε ότι $\dot{\theta}_0 = 0$ και $\ddot{\theta}_0 = 0$, οπότε $\ddot{\theta} = 0$.

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = c_1$$

και καθώς $\dot{\theta}_0 = 0$, τότε $\dot{\theta} = 0$. Παρόμοια,

$$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = c_2$$

και επειδή $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Η κίνηση γίνεται στη διεύθυνση $\theta = \frac{\pi}{2}$. Έχουμε τότε ότι

$$r^2 \dot{\phi} = L \tag{3.2}$$

και η Λαγκρανζιανή μας μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\mathcal{L} = -F(r)\dot{t}^2 + G(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

Μπορούμε να ορίσουμε τη \mathcal{L} ως:

$$\mathcal{L} = F(r)\dot{t}^2 - G(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2$$

Κάνουμε αυτή την υπόθεση για να έχουμε πιο εύκολους υπολογισμούς και δεν υπάρχει πρόβλημα, καθώς δίνουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης. Από τις (3.1) και (3.2):

$$\mathcal{L} = E \frac{E}{F(r)} - G(r)\dot{r}^2 - L \frac{L}{r^2} = \frac{E^2}{F(r)} - G(r)\dot{r}^2 - \frac{L^2}{r^2} \equiv h$$

όπου $h = 0$ για φωτόνια και $h = 1$ για σωματίδια με μάζα. Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς \dot{r}^2 για να παρατηρήσουμε την ακτινική εξίσωση.

$$G(r)\dot{r}^2 = \frac{E^2}{F(r)} - \frac{L^2}{r^2} - h \Rightarrow$$

$$\dot{r}^2 = \frac{E^2}{F(r)G(r)} - \frac{1}{G(r)} \left(\frac{L^2}{r^2} + h \right)$$

3.1 Timelike Γεωδαισιακές

3.1.1 Ακτινικές Τροχιές

$$\dot{r}^2 = \frac{E^2}{F(r)G(r)} - \frac{1}{G(r)} = \frac{4E^2(r^2+z)^2}{(r^2+2z)^2} - \frac{(r^2+z)^2 \left[-24Mz + 3z^{3/2} \arctan\left(\frac{r}{\sqrt{z}}\right) + 9zr + r^3 \right]}{3zr(2z+r^2)^2}$$

και

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{F(r)} = \frac{E}{\frac{3}{4} + \frac{r^2}{12z} - \frac{2M}{r} + \frac{\sqrt{z}}{4r} \arctan\left(\frac{r}{\sqrt{z}}\right)}$$

Για μεγάλα r , έχουμε

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \simeq 4E^2 - 3 + \frac{8M}{r} - \frac{r^2}{3z}$$

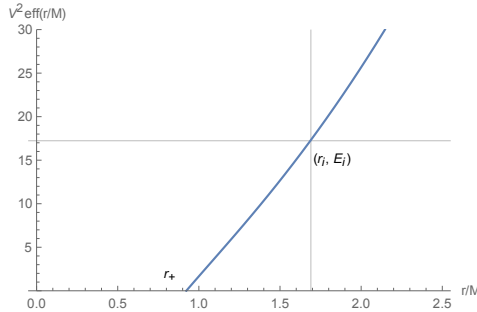
Θεωρούμε τροχιές σωματιδίων που ξεκινάνε σε ηρεμία από κάποια απόσταση r_i και πέφτουν προς το κέντρο. Στο r_i , $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0$.

$$4E^2 - 3 + \frac{8M}{r} - \frac{r^2}{3z} = 0 \Rightarrow (4E^2 - 3)r + 8M - \frac{r^3}{3z} = 0 \Rightarrow r^3 + (9z - 12zE^2)r - 24Mz = 0$$

Η κυβική εξίσωση έχει 3 ρίζες, 1 πραγματική και 2 μιγαδικές. Για απλότητα απαιτούμε οι 2 μιγαδικές ρίζες να είναι ίσες, το οποίο συμβαίνει όταν $E_i^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{9M^2}{4z}\right)^{\frac{1}{3}}$. Τότε βάζουμε αυτή την τιμή στην πραγματική ρίζα και βρίσκουμε ότι

$$r_i = (12)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{[z(\frac{M^2}{z})^{\frac{1}{3}} + ((-Mz)^2)^{\frac{1}{3}}]^2}{((-Mz)^2)^{\frac{1}{3}}}} = (12)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{[(M^2z^2)^{\frac{1}{3}} + (Mz)^{\frac{2}{3}}]^2}{(Mz)^{\frac{2}{3}}}} = (12)^{\frac{1}{3}} \frac{(Mz)^{\frac{2}{3}} + (Mz)^{\frac{2}{3}}}{(Mz)^{\frac{1}{3}}} = (12)^{\frac{1}{3}} 2(Mz)^{\frac{1}{3}} = 2(12Mz)^{\frac{1}{3}} = (96Mz)^{\frac{1}{3}}$$

Κρατάμε στο μυαλό μας ότι η επιλογή των παραμέτρων (E, M, z) πρέπει να είναι τέτοια ώστε το r_i να μένει θετικό και πραγματικό.



Σχήμα 3.1: Το ενεργό δυναμικό συναρτήσει του r , για $z = 0.05$

Για να μπορέσουμε να βγάλουμε λύση για τον οριζοντα γεγονότων, θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση ότι το z είναι μικρό. Όπως μπορούμε να δούμε, $G(r) \sim \frac{1}{F(r)}$, έτσι παίρνουμε τον οριζοντα γεγονότων από τη σχέση $F(r) = 0$. Αναζητώντας τον οριζοντα γεγονότων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Έτσι για $x = \frac{r}{\sqrt{z}}$, τότε $\arctan\left(\frac{r}{\sqrt{z}}\right) = \frac{\pi}{2}$. Οπότε ο οριζοντας δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$F(r) = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{r_+^2}{12z} - \frac{2M}{r_+} + \frac{\sqrt{z}}{4r_+} \frac{\pi}{2} = 0$$

Για σωματίδια που πέφτουν μέσα, έχουμε

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{4E^2(r^2+z)^2}{(r^2+2z)^2} - \frac{(r^2+z)^2 \left[-24Mz + 3z^{3/2} \arctan\left(\frac{r}{\sqrt{z}}\right) + 9zr + r^3 \right]}{3zr(2z+r^2)^2}}$$

Χρησιμοποιούμε μια νέα μεταβλητή $r = r_i \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)$, όπου $\eta_0 = \pi$ και το η_H συμβαίνει όταν $r(\eta) = 2M - \frac{2}{3} \frac{M^3}{z}$, που σημαίνει ότι η τιμή του εξαρτάται από την τιμή του z . Ως προς η , οι εξισώσεις που θα ολοκληρωθούν είναι

$$\frac{dr}{d\eta} = -r_i \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

και

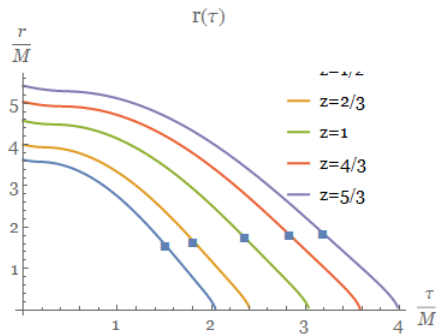
$$\frac{dr}{d\tau} =$$

$$-\sqrt{\frac{\left[\left(z + r_i^2 \cos^4\left(\frac{\eta}{2}\right) \right)^2 \left(-24Mz + 3z^{\frac{3}{2}} \arctan\left(\frac{r_i \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{z}}\right) - 3r_i z (-3 + 4E^2) \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + r_i^3 \cos^6\left(\frac{\eta}{2}\right) \right) \sec^2\left(\frac{\eta}{2}\right) \right]}{3r_i z \left[2z + r_i^2 \cos^4\left(\frac{\eta}{2}\right) \right]^2}}$$

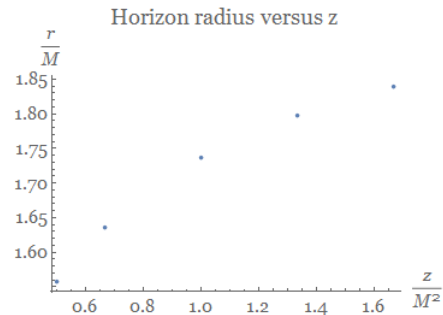
Παίρνοντας το ηλίκο των δύο παραπάνω σχέσεων, έχουμε

$$\frac{d\tau}{d\eta} = \frac{\sqrt{3}r_i \sin(\eta)}{2 \left[\frac{\left(z + r_i^2 \cos^4\left(\frac{\eta}{2}\right) \right)^4 \left(-24Mz + 3z^{\frac{3}{2}} \arctan\left(\frac{r_i \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{z}}\right) - 3r_i z (-3 + 4E^2) \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + r_i^3 \cos^6\left(\frac{\eta}{2}\right) \right)^2 \sec^4\left(\frac{\eta}{2}\right)}{r_i^2 z^2 \left[2z + r_i^2 \cos^4\left(\frac{\eta}{2}\right) \right]^4} \right]^{\frac{1}{4}}}$$

Έτσι, από τις παραπάνω σχέσεις και για $z = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right\}$, καταλήγουμε στα ακόλουθα διαγράμματα



(α) Τροχιές σωματιδίων συναρτήσει του τ για διάφορα z . Οι ρόμβοι δείχνουν τη στιγμή που τα σωματίδια περνάνε τον ορίζοντα



(β) Βλέπουμε πώς η ακτίνα του ορίζοντα αλλάζει όσο μεταβάλλουμε το z

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Για τις τιμές των u_1, u_2 και u_3 καθώς και την τιμή του σ στην περίπτωση των δεσμευμένων τροχιών στην Schwarzschild-AdS και την Horndeski, χρησιμοποιούμε τη θεωρία των πολυωνύμων και συγκεκριμένα το Θεώρημα του Abel
Έστω ένα πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού

$$P(u) = u^5 - au^4 + bu^3 - cu^2 + du - e$$

στην παραγοντοποιημένη του μορφή

$$P(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4)(u - u_5)$$

όπου u_i ($i = 1, \dots, 5$) οι ρίζες του $P(u)$. Τότε, αυτές ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = a$$

$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_1u_5 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_2u_5 + u_3u_4 + u_3u_5 + u_4u_5 = b$$

$$u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_2u_5 + u_1u_3u_4 + u_1u_3u_5 + u_1u_4u_5 + u_2u_3u_4 + u_2u_4u_5 + u_2u_3u_5 + u_3u_4u_5 = c$$

$$u_1u_2u_3u_4 + u_1u_2u_3u_5 + u_1u_2u_4u_5 + u_1u_3u_4u_5 + u_2u_3u_4u_5 = d \quad (3.3)$$

$$u_1u_2u_3u_4u_5 = e$$

Συγκεκριμένα, στην περίπτωση των ασυμπτωτικών τροχιών και στις δύο μελανές οπές, όπου $u_1 = \frac{1-e}{R}, u_2 = u_3 = \frac{1+e}{R}$ και $u_4 = u_5 = -\sigma$, για το σ από την (3.3) παίρνουμε:

$$d = 0 \Rightarrow -2\sigma \frac{1-e^2}{R^2} \frac{1+e}{R} + 2\sigma^2 \frac{1-e^2}{R^2} + \sigma^2 \frac{(1+e)^2}{R^2} = 0 \Rightarrow -\frac{2\sigma}{R}(1+e-e^2-e^3) + 2\sigma^2(1-e^2) +$$

$$\sigma^2(1+2e+e^2) = 0 \Rightarrow \frac{2\sigma}{R}(e^3+e^2-e-1) + \sigma^2(3-e^2+2e) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2\sigma}{R}(e+1)(e^2-1) + \sigma^2(3-e)(1+e) = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{2}{R} \frac{1-e^2}{3-e}$$

Συμπεράσματα

Μελανή οπή Schwarzschild-AdS

Μελετήσαμε τη δομή των γεωδαισιακών αναλύοντας τη συμπεριφορά των null και timelike σωματιδίων ως προς το ενεργό δυναμικό που εμφανίζεται στην ακτινική εξίσωση κίνησης.

Για τα ακτινικά timelike σωματίδια, το ενεργό δυναμικό είναι μη δέσμιο και τα σωματίδια πάντα πέφτουν στον ορίζοντα από μία αρχική απόσταση η οποία εξαρτάται από το l . Από τα διαγράμματα που εξαγάγαμε μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα, όπως το ότι με την αύξηση του l (η ακτίνα του χώρου AdS), δηλαδή με τη μείωση της κοσμολογικής σταθεράς, ο ορίζοντας μεγαλώνει και τείνει στον ορίζοντα της Schwarzschild (πράγμα που ήταν ήδη γνωστό), η αρχική θέση μεγαλώνει καθώς και τα σωματίδια κάνουν περισσότερο χρόνο να συναντήσουν τον ορίζοντα.

Για τα μη ακτινικά timelike σωματίδια, επιτρέπονται δέσμιες τροχιές εάν $E^2 \leq 1 + \frac{L^2}{l^2}$, και

για $E^2 = 1 + \frac{L^2}{l^2}$, υπάρχουν ασταθείς τροχιές. Μάλιστα, για $E^2 < 1 + \frac{L^2}{l^2}$, υπάρχουν τροχιές

πρώτης και δευτέρας τάξης. Οι τροχιές πρώτης τάξης αντιπροσωπεύουν δέσμιες τροχιές με δύο ακραίες τιμές, και διακρίνονται σε πλανητικές, κυκλικές και ασυμπτωτικές, οι οποίες προσεγγίζουν τις κυκλικές τροχιές γυρνώντας γύρω τους. Συγκεκριμένα είδαμε ότι η περίοδος των κυκλικών τροχιών είναι μικρότερη από την περίπτωση της μελανής οπής Schwarzschild. Οι τροχιές δευτέρας τάξης έχουν την ίδια ενέργεια με τις τροχιές πρώτης τάξης, όμως περιγράφουν κινήσεις στην αριστερή πλευρά του δυναμικού, όπου τα σωματίδια πέφτουν προς τον ορίζοντα. Για τα ακτινικά null σωματίδια, μπορούμε να δούμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το l , τόσο τα σωματίδια αργούν να φτάσουν στον ορίζοντα. Επίσης, και σε αυτή την περίπτωση τα σωματίδια πάντα πέφτουν στον ορίζοντα από μία αρχική απόσταση. Πολύ σημαντικό είναι και το γεγονός ότι η κίνηση των φωτονίων στον ιδιόχρονο είναι ανεξάρτητη της κοσμολογικής σταθεράς.

Το ενεργό δυναμικό για τα μη ακτινικά null σωματίδια δείχνει ότι δέσμιες τροχιές υπάρχουν για $E^2 \leq \frac{L^2}{l^2}$ (το "μικρότερο" αντιστοιχεί σε τροχιές με φανταστικές εκκεντρότητες), ενώ για

$E^2 = \frac{L^2}{l^2}$ η αρχική απόσταση από την οποία πέφτουν είναι $r = 2M$, δηλαδή ο ορίζοντας

γεγονότων της Schwarzschild και τότε οι τροχιές είναι καρδιοειδείς. Εδώ επιτρέπονται και μη δέσμιες τροχιές για τιμές ενέργειας μεγαλύτερες από $\frac{L^2}{l^2}$, οι οποίες και αυτές διακρίνονται σε διάφορες περιπτώσεις, αναλόγως την ενέργειά τους, το είδος και τη διάταξη των ριζών της κυβικής εξίσωσης.

Έχουμε τις κρίσιμες τροχιές (μία διπλή πραγματική θετική ρίζα), τις τροχιές πρώτης και δευτέρας τάξης (δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες) και τις τροχιές με φανταστικές εκκεντρότητες (ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών).

Μελανή οπή Horndeski

Εδώ μελετήσαμε τη δομή των γεωδαισιακών αναλύοντας τη συμπεριφορά των timelike σωματιδίων ως προς το ενεργό δυναμικό που εμφανίζεται στην ακτινική εξίσωση κίνησης.

Για τα ακτινικά timelike σωματίδια, το ενεργό δυναμικό είναι μη δέσμιο και τα σωματίδια πάντα πέφτουν στον ορίζοντα από μία αρχική απόσταση η οποία εξαρτάται από το z , για μικρά z . Από τα διαγράμματα που εξαγάγαμε μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα, όπως ότι με την αύξηση του z μεγαλώνει η ακτίνα του ορίζοντα καθώς και τα σωματίδια κάνουν περισσότερο χρόνο να τον συναντήσουν.

Βιβλιογραφία

- [1] Chandrasekhar S.
The Mathematical Theory of Black Holes, Clarendon Press Oxford (1983).
- [2] Carroll S.
Spacetime and Geometry, Addison Wesley (2004).
- [3] James B. Hartle
Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity,
Benjamin Cummings Publishing Company (2002).
- [4] Κόκκοτας Κ.
Γενική Θεωρία της Σχετικότητας: Σημειώσεις για τους φοιτητές.
- [5] 't Hooft G.
Introduction to General Relativity, Princeton, Rinton Press (2001).
- [6] Cruz N. et al.
The geodesic structure of the Schwarzschild Anti-de Sitter black hole,
arxiv.org/abs/gr-qc/0408016.
- [7] Rinaldi M.
Black holes with non-minimal derivative coupling,
arxiv.org/abs/1208.0103.