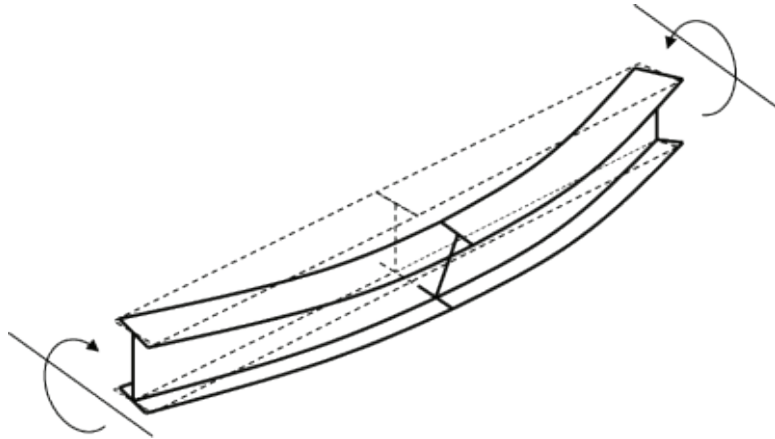




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Πλευρικός Λυγισμός Δοκών υπό Σύγχρονο Αξονικό και Καμπτικό Φορτίο



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Βαβούρης Αλέξανδρος και Χνάρης Νεκτάριος

Επιβλέπων: Τάσος Αβραάμ

Αθήνα, Ιούλιος 2017
ΕΜΚ ΔΕ 2017 20

Βαβούρης Α. Κ. και Χνάρης Ν. Ε. (2017)
Πλευρικός Λυγισμός Δοκών υπό Σύγχρονο Αξονικό και Καμπτικό Φορτίο
Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2017 20
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Vavouris A.K. and Chnaris N.E. (2017)
Lateral Buckling of Beams under Axial and Bending Load
Diploma Thesis ΕΜΚ ΔΕ 2017 20
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη.....	1
Abstract	2
Ευχαριστίες	3
1 Εισαγωγή.....	4
1.1 Γενική τοποθέτηση του προβλήματος.....	4
1.2 Διάρθρωση της διπλωματικής εργασίας.....	4
2 Ευστάθεια Μεμονομένων Μελών.....	5
2.1 Γενικά.....	5
2.2 Είδη λυγισμού μελών.....	6
2.3 Περιγραφή του φαινομένου του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού.....	8
2.3.1 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη.....	10
2.3.2 Στρεπτοκαμπτικός (ή πλευρικός) λυγισμός μη προστατευμένων πλευρικά δοκών σταθερής διατομής υπό κάμψη περί τον ισχυρό άξονα.....	11
2.3.3 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών υπό θλίψη και κάμψη.....	12
2.4 Μορφές ελαστικής ισορροπίας.....	13
3 Διατύπωση και Αντιμετώπιση του Προβλήματος του Λυγισμού.....	14
3.1 Γενικά.....	14
3.2 Βασικές παραδοχές.....	14
3.3 Διαφορική εξίσωση ισορροπίας στρεπτοκαμπτικού λυγισμού.....	16
3.4 Αντιμετώπιση του προβλήματος.....	17
3.4.1 Α Εθνικό συνέδριο σιδηρών κατασκευών - χρήση πολυωνμικής συνάρτησης.....	18
3.4.2 Χρήση τριγωνομετρικής συνάρτησης.....	19
4 Θεωρητική Επίλυση Φορτίσεων με Προσεγγιστικές Μεθόδους.....	20
4.1 Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ροπών κάμψεως στα άκρα της.....	20
4.1.1 Ακριβής μαθηματική επίλυση.....	20
4.1.2 Χωρίς αξονική δύναμη.....	23
4.1.3 Με αξονική δύναμη.....	27
4.2 Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της.....	31
4.2.1 Χωρίς αξονική δύναμη.....	31
4.2.2 Με αξονική δύναμη.....	40
4.3 Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο εντάσεως q	51
4.3.1 Χωρίς αξονική δύναμη.....	51
4.3.2 Με αξονική δύναμη.....	61
4.4 Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε ροπή κάμψεως στο ένα άκρο της.....	71
4.5 Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ομόφορων ροπών κάμψεως στα άκρα της.....	76
4.6 Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε δύο συγκεντρωμένα φορτία στα $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$ του μήκους της.....	81
5 Στρεπτοκαμπτικός Λυγισμός βάσει του Ευρωκώδικα 3.....	89
5.1 Εισαγωγή.....	89
5.2 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μη προστατευμένων πλευρικά δοκών υπό κάμψη περί τον ισχυρό τους άξονα.....	89
5.3 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη και κάμψη.....	92

6	Παρουσίαση Προγραμμάτων και Αριθμητικές Εφαρμογές.....	95
6.1	Εισαγωγή	95
6.2	Προσομοίωση φορέων στο Adina και στο Abaqus	95
6.2.1	Προσομοίωση στο Adina	95
6.2.2	Προσομοίωση στο Abaqus.....	105
6.3	Αριθμητικές εφαρμογές και σύγκριση αποτελεσμάτων	110
6.3.1	Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ροπών κάμψεως στα άκρα της	110
6.3.2	Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο φορτίο εντάσεως P στο μέσον της.....	114
6.3.3	Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο εντάσεως q.....	119
6.3.4	Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ροπή κάμψεως στο άκρο της.....	125
6.3.5	Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ομόφορων ροπών κάμψεως στα άκρα.....	129
6.3.6	Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε δύο συγκεντρωμένα φορτία στα $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$ του μήκους της	130
6.3.7	Ενιαία καμπύλη αξονικών δυνάμεων και ροπών	135
6.4	Διερεύνηση συντελεστών C_1 ανάλογα με τη θέση επιβολής του φορτίου	139
7	Συμπεράσματα	141
8	Βιβλιογραφία.....	146

Πλευρικός Λυγισμός Δοκών υπό Σύγχρονο Αξονικό και Καμπτικό Φορτίο

Βαβούρης Α.Κ. και Χνάρης Ν.Ε. (Επιβλέπων : Αβραάμ Τ.)

Περίληψη

Στις μέρες μας, βασική επιδίωξη σε όλων των ειδών τα δομικά έργα πέρα από την ασφάλεια και την ομαλή λειτουργία των κατασκευών είναι και η οικονομικότητά τους. Συγκεκριμένα, στις σιδηρές κατασκευές, στις οποίες ο δομικός χάλυβας είναι το κύριο υλικό, ο οικονομικός σχεδιασμός συνδέεται άμεσα με τη χρήση λεπτών μεταλλικών στοιχείων. Ωστόσο, στις μεταλλικές κατασκευές ο συνηθέστερος τρόπος αστοχίας είναι η απώλεια ευστάθειας, κίνδυνος ο οποίος αυξάνεται με τη χρήση λεπτών μεταλλικών ελασμάτων και στοιχείων γενικότερα. Συνεπώς, ο πρωταρχικός στόχος του Πολιτικού Μηχανικού κατά τον σχεδιασμό των κατασκευών είναι η επίτευξη της ευστάθειας και της οικονομίας παρά το γεγονός ότι στο σύνολο των περιπτώσεων οι δύο αυτές έννοιες είναι ανταγωνιστικά συνδεδεμένες.

Ένα από τα συνηθέστερα είδη απώλειας της ευστάθειας, που είναι πιθανόν να εμφανιστούν, είναι ο στρεπτοκαμπτικός λυγισμός είτε από ταυτόχρονη κάμψη και θλίψη είτε από κάμψη περί τον ισχυρό άξονα (πλευρικός λυγισμός).

Η προσπάθεια εύρεσης μίας ακριβούς μαθηματικής λύσης των φαινομένων αστάθειας είναι αρκετά επίπονη και πολλές φορές αδύνατη. Η αδυναμία αυτή έγκειται στην ανάγκη επίλυσης συστημάτων διαφορικών εξισώσεων, η ολοκλήρωση των οποίων είναι εξαιρετικά δυσχερής προκειμένου να καταλήξει σε κλειστές μαθηματικές σχέσεις. Έτσι λοιπόν, καλούμαστε να αναπτύξουμε και να αναζητήσουμε διάφορες προσεγγιστικές αλλά ταυτόχρονα αξιόπιστες λύσεις.

Για τον πλευρικό λυγισμό, που αποτελεί θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας, διατυπώνονται προσεγγιστικές λύσεις ανάλογα με τις διάφορες περιπτώσεις φόρτισης, με τις οποίες καταπονούνται οι μεταλλικές δοκοί. Ακόμα, πραγματοποιούνται γραμμικές αναλύσεις δοκών στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων Adina και Abaqus, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα και να ελεγχθεί η αξιοπιστία των μεθόδων που εφαρμόστηκαν. Τέλος, γίνονται συγκρίσεις και με τον Ευρωκώδικα 3(ΕC-3), ο οποίος περιλαμβάνει το σύνολο των διατάξεων που αφορούν το φαινόμενο του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού.

Lateral Buckling of Beams under Axial and Bending Load

Vavouris A.K. and Chnaris N.E. (Supervisor : Avraam T.)

Abstract

Designing economical structures, under a safety concept, is among the most important issues nowadays. More importantly, in steelwork construction, where the main material is structural steel, you can cut the cost with the use of thin metal sections. However, steelwork construction is prone to having stability issues, especially when thin metal sections are used. Therefore, the role of a Civil Engineer is to achieve stability and economic viability when designing these kinds of constructions, even though these are two competing concepts.

The most common mode of failure in stability by the use of thin metal elements, which concerns members subjected to bending concurrent with axial or not.

Reaching to exact mathematical formulas for specific instability issues, can be rather exhausting, if any at all, leading to time consuming solutions and confusing practical Engineers. For this reason, a most common practice is finding approximate and at the same time reliable solutions.

A major goal of the present study is to examine the approximate solutions for open thin-walled beams under lateral buckling. The validity of the analytical results is examined through numerical simulations, via two commercial finite element packages (i.e. Adina and Abaqus). The results are also compared with the ones provided by the European Standards (Eurocode 3) and useful conclusions are drawn.

Ευχαριστίες:

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον επιβλέποντα της παρούσας διπλωματικής εργασίας κ. Τάσο Αβραάμ, Λέκτορα του τομέα Δομοστατικής του εργαστηρίου μεταλλικών κατασκευών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την πολύτιμη βοήθεια και τις χρήσιμες συμβουλές που προσέφερε καθώς και τη στήριξη και την καθοδήγηση που παρείχε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, θέλουμε να ευχαριστήσουμε τον υποψήφιο διδάκτορα της σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ζαχαρία Φασουλάκη για την πολύτιμη συνεισφορά του στην πραγματοποίηση της διπλωματικής, τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε αλλά και την αρωγή που παρείχε στην επίλυση αποριών και προβλημάτων, που ανέκυπταν κατά τη χρήση των προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων Adina και Abaqus.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ αξίζει στις οικογένειές μας, οι οποίες προσέφεραν την απαραίτητη ψυχολογική κι οικονομική υποστήριξη, τόσο κατά την διάρκεια των μαθημάτων όσο και κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μας εργασίας.

Βαβούρης Α.Κ.
και Χνάρης Ν.Ε. ,

ΕΜΠ, Ιούλιος 2017

1. Εισαγωγή

1.1. Γενική τοποθέτηση του προβλήματος

Στην παρούσα διπλωματική μελετάται το φαινόμενο του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού. Πρόκειται για την μορφή αστάθειας ενός θλιβόμενου και/ή καμπτόμενου μέλους, κατά την οποία οι διατομές υπόκεινται, μετά τον λυγισμό, σε στροφή περί το κέντρο διάτμησης και σε ταυτόχρονη μετατόπιση σε σχέση με τον αρχικώς ευθύγραμμο διαμήκη άξονα του μέλους, ο οποίος μετά την παραμόρφωση παύει να είναι ευθύγραμμος.

Η εύρεση μίας ακριβούς μαθηματικής λύσης βάσει της οποίας θα προκύψουν τα κρίσιμα φορτία στρεπτοκαμπτικού λυγισμού αποτελεί μία δύσκολη και πολλές φορές αδύνατη διαδικασία. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ύπαρξη πολύπλοκων συστημάτων διαφορικών εξισώσεων που καλείται κανείς να επιλύσει προκειμένου να φτάσει σε κλειστές μαθηματικές σχέσεις διεξαγωγής των ζητούμενων κρίσιμων φορτίων. Κρίνεται επομένως απαραίτητη η ανάπτυξη προσεγγιστικών λύσεων.

1.2 Διάρθρωση της διπλωματικής εργασίας

Στο δεύτερο κεφάλαιο επεξηγείται το φαινόμενο του λυγισμού και γίνεται διάκριση και περιγραφή των ειδών του .

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές παραδοχές που αφορούν στο πρόβλημα του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού και μορφώνεται η διαφορική εξίσωση σύμφωνα με την οποία γίνονται οι υπολογισμοί. Τέλος παρουσιάζονται δύο διαφορετικές μέθοδοι προσέγγισης που χρησιμοποιούνται για την επίλυσή της.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή των προσδιοριστικών μεθόδων σε μία αμφιέριστη δοκό διατομής διπλού ταν, η οποία καταπονείται από διάφορες φορτίσεις.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η αντιμετώπιση του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού σύμφωνα με τις διατάξεις του Ευρωκώδικα 3.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αριθμητικών εφαρμογών των φορτίσεων του τετάρτου κεφαλαίου. Γίνεται εν συνεχεία προσομοίωση των υπό μελέτη δοκών και φορτίσεων μέσω των προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων Adina και Abaqus για την σύγκριση με τα αποτελέσματα των προσδιοριστικών μεθόδων αλλά και του Ευρωκώδικα 3 και εξάγονται συμπεράσματα, τα οποία παρουσιάζονται στο τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

2. Ευστάθεια Μεμονωμένων Μελών

2.1 Γενικά

Ένα από τα κυριότερα δομικά στοιχεία θεωρείται η δοκός, η οποία αποτελείται από ευθύγραμμο άξονα, του οποίου το μήκος είναι κατά πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με τις διαστάσεις της διατομής. Στην παρούσα εργασία το δομικό στοιχείο, που εξετάζεται είναι η δοκός, καθώς υποκείμενη σε εγκάρσια φόρτιση προβάλλει καμπτική και διατμητική αντίσταση κατά κύριο λόγο αλλά και σε κάποιες περιπτώσεις στρεπτική αντίσταση.

Ο σχεδιασμός των δοκών προσανατολίζεται για την ασφαλή ανάληψη της καμπτικής έντασης, από την οποία καταπονείται συνήθως. Ωστόσο, μία δοκός εκτός από κάμψη μπορεί να καταπονείται από θλίψη, διάτμηση και στρέψη ή ακόμα και με συνδυασμό αυτών. Σε πολλές περιπτώσεις η αντοχή της διατομής καθορίζει και την αντοχή ολόκληρου του μέλους (π.χ εφελκυσμός, κάμψη πλευρικά προστατευμένων δοκών). Δεν είναι όμως λίγες οι φορές, που σε μία δοκό ή γενικότερα σε ένα μέλος, διαπιστώνεται ότι υπάρχει στάθμη της εξωτερικής φόρτισης, για την οποία η δοκός χάνει την ευστάθειά της, αποκτά δηλαδή τη δυνατότητα να ισορροπήσει και σε μία άλλη θέση ισορροπίας πέραν της αρχικής (φαινόμενο λυγισμού). Η στάθμη αυτή της εξωτερικής φόρτισης εκφράζει την εξάντληση της αντοχής του μέλους, η οποία προηγείται της εξάντλησης της αντοχής της διατομής του, διότι η εντατική κατάσταση, που αναπτύσσεται είναι σε χαμηλότερη στάθμη στο μέλος συγκριτικά με τη διατομή.

Για την αύξηση της φέρουσας ικανότητας της διατομής σε κάμψη, διαμορφώνονται διατομές με συγκεντρωμένο το μεγαλύτερο μέρος του εμβαδού τους μακριά από τον ουδέτερο άξονα της κάμψης. Αυτή η πρακτική έχει σαν αποτέλεσμα να διαμορφώνονται υψίκορμες δοκοί, με τον κίνδυνο να μην μπορέσει η διατομή να εξαντλήσει τη φέρουσα ικανότητά της σε κάμψη να αυξάνεται, διότι πριν φτάσει σε αυτή την εντατική κατάσταση, το θλιβόμενο πέλμα χάνει την ευστάθειά του κι εκτρέπεται εκτός επιπέδου σε μία παραμορφωμένη κατάσταση σε σχέση με τη θέση ισορροπίας της δοκού.

Οι δυνάμεις, που αναπτύσσονται στην παραμορφωμένη κατάσταση είτε δρουν κατά τη φορά των παραμορφώσεων συμβάλλοντας στην περαιτέρω αύξησή τους είτε δρουν αντίθετα στη φορά των παραμορφώσεων συμβάλλοντας στη μείωσή τους. Οι πρώτες δυνάμεις ονομάζονται δυνάμεις εκτροπής, ενώ οι δεύτερες δυνάμεις επαναφοράς. Ευστάθεια ή απώλεια αυτής, είναι ένας γενικός όρος που αφορά την απώλεια ισορροπίας λόγω εμφάνισης δυνάμεων εκτροπής κατά την παραμόρφωση. Αυτό σημαίνει ότι ο φορέας, το μέλος, η δοκός δεν επανέρχονται από μόνα τους στην προηγούμενη θέση ισορροπίας έπειτα από μία τυχαία παραμόρφωση. Προβλήματα ευστάθειας παρατηρούνται στην περίπτωση των θλιβόμενων μελών. Η συμπεριφορά θλιβόμενων δοκών επηρεάζεται σημαντικά ως γνωστόν από φαινόμενα αστάθειας, τα οποία χαρακτηρίζονται από τον γενικό όρο “λυγισμός”.

Για τον αναλυτικό προσδιορισμό του λυγισμού εξετάζεται η ισορροπία του μέλους στην παραμορφωμένη κατάσταση, αμέσως μετά το λυγισμό. Η μικρότερη στάθμη φόρτισης για την οποία η ισορροπία είναι εφικτή αποτελεί τη φόρτιση λυγισμού, η οποία όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, εκφράζει την αντοχή του μέλους. Το φορτίο λυγισμού μπορεί να προσδιοριστεί επίσης πειραματικά. Η εύρεση του φορτίου λυγισμού είναι ιδιαίτερης σημασίας, καθώς σε πλήθος περιπτώσεων η αντοχή των μελών δεν προκύπτει από την αντοχή των διατομών τους αλλά απαιτείται η θεώρηση όλου του μέλους ως στοιχείου αναφοράς.

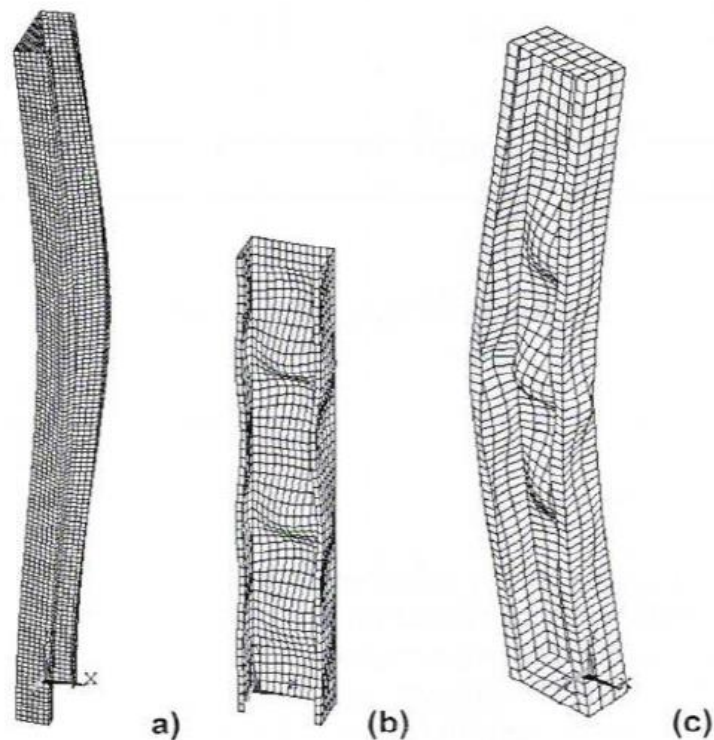
2.2 Είδη λυγισμού μελών

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρονται τα διάφορα είδη λυγισμού, η κατηγοριοποίηση των οποίων προκύπτει ανάλογα με το είδος και το μέγεθος των παραμορφώσεων που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια της φόρτισης.

Καθολικός λυγισμός μελών: Η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται από φαινόμενα καθολικής αστάθειας, τα οποία απομειώνουν και τελικά εξαντλούν την αντοχή των μελών. Στον καθολικό λυγισμό παρατηρείται ότι κατά τη διάρκεια της φόρτισης οι διατομές διατηρούν κατά την παραμόρφωσή το σχήμα τους και παραμορφώνονται ως στερεό σώμα, σαν να ήταν άκαμπτα διαφράγματα. Οι παραμορφώσεις αυτές αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις γύρω από τους κύριους άξονες και σε στροφές. Η μορφή αστάθειας αυτή εμφανίζεται σε ράβδους μεγάλου μήκους χωρίς ενδιάμεσες στηρίξεις (Σχ. 2.1a).

Τοπικός Λυγισμός Μελών: Τα μέλη ενός φορέα κινδυνεύουν να υποστούν λυγισμό με βάση τη λυγηρότητά τους. Οι προϋποθέσεις εμφάνισης τοπικού λυγισμού είναι η μεγάλη λυγηρότητα των φορέων κι η ανάπτυξη μεγάλων θλιπτικών τάσεων. Η έννοια αυτή λυγισμού, όμως αναφέρεται στην απώλεια επιδεδότητας του κορμού και των πελμάτων, στοιχεία της διατομής του φορέα που ενδέχεται να λυγίσουν τοπικά πριν από την εμφάνιση του καθολικού λυγισμού για μικρότερη τιμή του φορτίου. Αυτή η μορφή αστάθειας οδηγεί σε μείωση της αντοχής του μέλους με την εμφάνιση ανομοιομόρφων τάσεων και πολύ συχνά στην αστοχία του. Ο τοπικός λυγισμός εμφανίζεται συνήθως στις λεπτότοιχες διατομές κατηγορίας 4, πριν προλάβει να αναπτυχθεί η τάση διαρροής. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο λόγος πλάτους προς πάχος τόσο του κορμού όσο και των πελμάτων είναι μεγάλος, με αποτέλεσμα να προκαλείται αστάθεια στο φορέα. Σε ένα πρόβολο διπλού ταυ ή ακόμα και σε μία αμφιέριστη δοκό ίδιας διατομής, όταν υποβάλλονται σε αξονική θλίψη τοπικός λυγισμός εμφανίζεται στο άνω θλιβόμενο πέλμα και στο άνω θλιβόμενο τμήμα του κορμού στην περίπτωση που ο λόγος πλάτους προς πάχος του πέλματος είναι μεγάλος. Ως μορφή τοπικού λυγισμού θεωρείται και ο διατμητικός λυγισμός σε υψίκορμες δοκούς με μειωμένο πάχος κορμού. Η προστασία από τοπικό λυγισμό πραγματοποιείται με την κατάταξη της διατομής σε κατηγορίες 1 έως 4 ανάλογα με τη δυνατότητα ανάπτυξης πλαστικής ροπής αντοχής και στροφής ή ελαστικής ροπής αντοχής χωρίς τη δυνατότητα στροφής (Σχ. 2.1b).

Καθολικός και τοπικός λυγισμός μελών: Αποτελεί συνδυασμό των δύο ανωτέρων ειδών λυγισμού και εμφανίζεται σε ράβδους μεγάλου μήκους από λεπτότοιχες διατομές (Σχ. 2.1c).



Σχήμα 2.1 Είδη λυγισμού και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις

Στον καθολικό λυγισμό συναρτήσεως της θέσης της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση, διακρίνονται οι ακόλουθες μορφές λυγισμού:

Καμπτικός λυγισμός λόγω αξονικής θλιπτικής δύναμης (Flexural buckling):

Αποτελεί τη συνηθέστερη μορφή αστάθειας θλιβόμενων μελών μεταλλικών κατασκευών. Η απώλεια της ευστάθειας του αρχικώς ευθύγραμμου μέλους εκδηλώνεται με μετάπτωσή του σε μία καμπυλωμένη μορφή, με κάμψη περί τον ισχυρό ή τον ασθενή άξονα της διατομής του μέλους, χωρίς την ταυτόχρονη εμφάνιση σχετικής στροφής των διατομών. Όπως συμβαίνει και στις άλλες περιπτώσεις αστοχίας λόγω λυγισμού, το φαινόμενο λαμβάνει χώρα στο μέλος πριν την ανάπτυξη της πλαστικής αντοχής της διατομής του (Σχ. 2.2α).

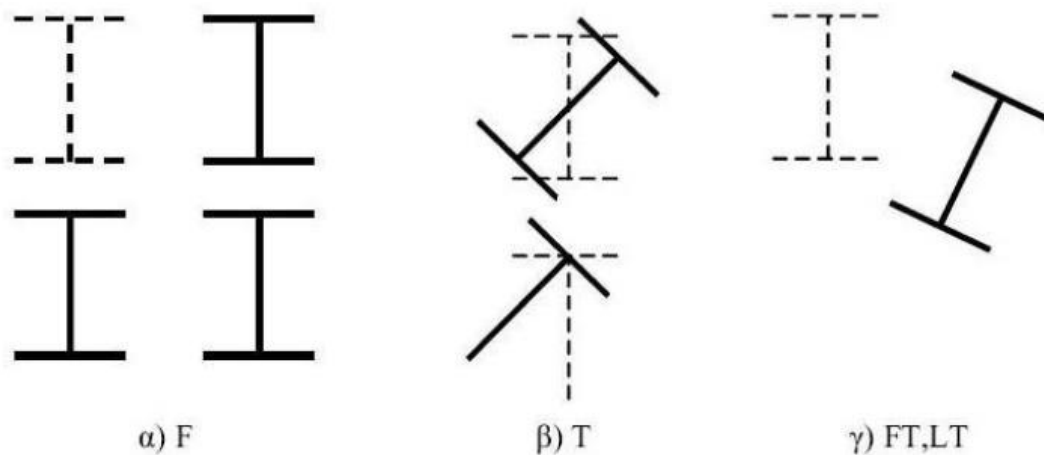
Στρεπτικός λυγισμός (Torsional buckling):

Στρεπτικός λυγισμός είναι η μορφή αστάθειας ενός θλιβόμενου μέλους σταθερής διατομής με ευθύγραμμο διαμήκη άξονα, κατά την οποία οι διατομές στρέφονται περί τον άξονα του μέλους, ο οποίος παραμένει ευθύγραμμος και μετά την παραμόρφωση. Ο κίνδυνος αστοχίας λόγω στρεπτικού λυγισμού απαντάται σε ανοικτές διατομές, ενώ δεν υφίσταται σε κλειστές διατομές εξαιτίας της μεγάλης δυστρεψιάς που διαθέτουν. Η υπόπιν αστάθεια εμφανίζεται μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Επειδή μία τέτοια μορφή λυγισμού συνδέεται με τη στρέψη, το κρίσιμο ελαστικό φορτίο λυγισμού (N_{cr}) εξαρτάται τόσο από τη δυστρεψία κατά Saint-Venant όσο και από τη δυσκαμψία στρέβλωσης. Επιπλέον, στους αριθμητικούς συντελεστές, που χρησιμοποιούνται πρέπει να εμπεριέχονται οι συνθήκες δέσμευσης των

άκρων σε στρέψη και στρέβλωση (συντελεστές k, k_w στον EC-3). Είναι πολύ πιθανόν, ωστόσο ο καμπτικός λυγισμός να εκδηλωθεί πριν το στρεπτικό, άρα πρέπει να εξετάζονται και οι δύο μορφές αστάθειας, ώστε να προκύψει εκείνη που δίνει το χαμηλότερο κρίσιμο φορτίο (Σχ. 2.2β).

Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός (FT ή LT):

Οι διατομές υπόκεινται τόσο σε μετατοπίσεις περί τους κύριους άξονες όσο και σε στροφές. Αποτελεί συνδυασμό των ανωτέρων ειδών λυγισμού (Σχ. 2.2γ).



Σχήμα 2.2 Μορφές καθολικού λυγισμού και αντίστοιχες παραμορφώσεις.

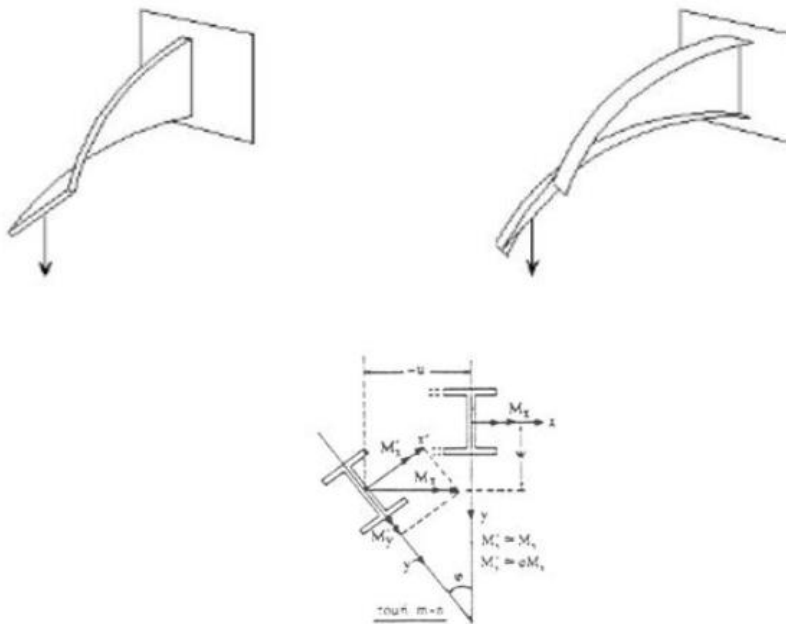
Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας αφορά το στρεπτοκαμπτικό λυγισμό, επομένως αναπτύσσεται περαιτέρω η έννοια αυτής της μορφής αστάθειας. Διακρίνονται παρακάτω τρεις κατηγορίες στρεπτοκαμπτικού λυγισμού.

2.3 Περιγραφή του φαινομένου του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού

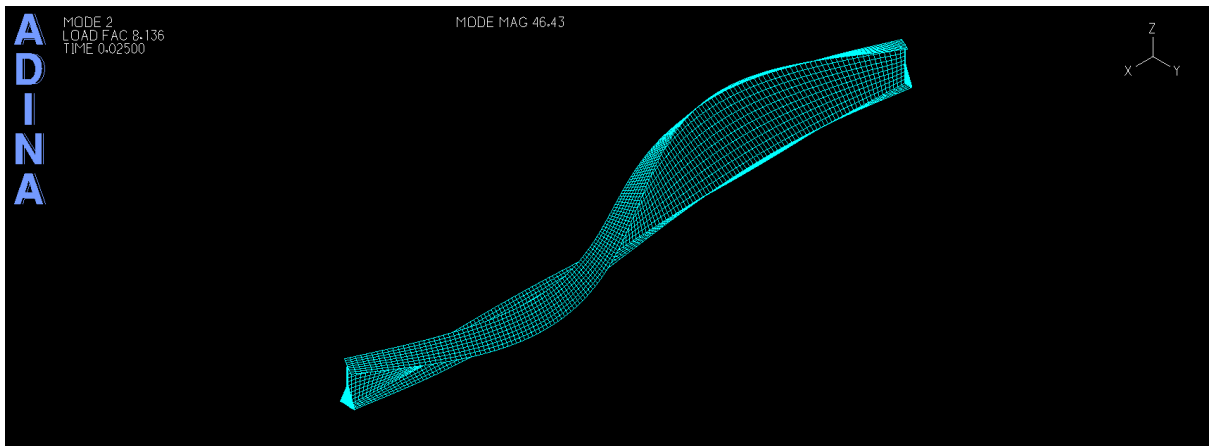
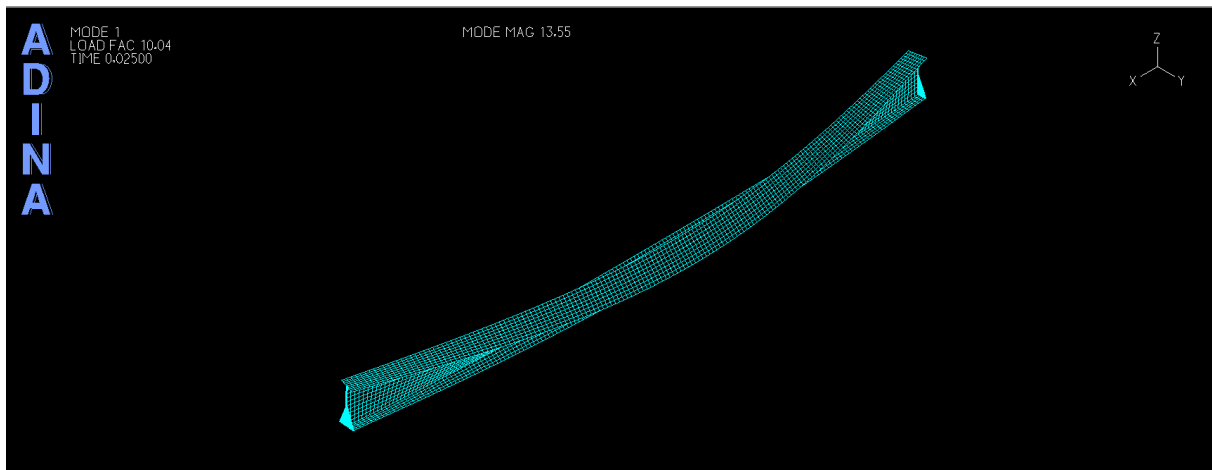
Πλευρικός λυγισμός είναι η μορφή αστάθειας ενός καμπτόμενου μέλους, κατά την οποία οι διατομές υπόκεινται μετά το λυγισμό, σε στροφή περί το κέντρο διάτμησης και σε ταυτόχρονη πλευρική μετατόπιση σε σχέση με τον αρχικώς ευθύγραμμο διαμήκη άξονα του μέλους, ο οποίος παύει πλέον να είναι ευθύγραμμος μετά την παραμόρφωση. Εάν το μέλος υπόκειται όχι μόνο σε εγκάρσια φορτία αλλά και σε αξονική θλίψη, το θλιβόμενο τμήμα της διατομής επεκτείνεται και η ένταση των θλιπτικών τάσεων αυξάνεται, με αποτέλεσμα ο κίνδυνος πλευρικού λυγισμού να είναι μεγαλύτερος και τότε ονομάζεται στρεπτοκαμπτικός λυγισμός (lateral-torsional buckling). Ευαίσθητες διατομές σε πλευρικό λυγισμό είναι οι διατομές διπλού ταυ ή οι U, οι οποίες διαθέτουν μικρή στρεπτική δυσκαμψία και είναι ευαίσθητες σε στρέβλωση. Αντιθέτως, οι κλειστές διατομές όπως είναι οι κοίλες ορθογωνικές και κοίλες κυκλικές, διαθέτουν μεγάλη στρεπτική δυσκαμψία και δεν είναι ευπαθείς σε πλευρικό λυγισμό. Επίσης, περισσότερο ευαίσθητες σε πλευρικό λυγισμό είναι οι διατομές με μεγαλύτερο λόγο I_y/I_z .

Το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού έχει την ακόλουθη ποιοτική ερμηνεία: Εάν μία δοκός μη προστατευόμενη έναντι πλευρικής εκτροπής υποβάλλεται σε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα της διατομής, τότε στο ένα πέλαμα της διατομής αναπτύσσονται λόγω κάμψης διαμήκεις ορθές θλιπτικές τάσεις. Το πέλαμα αυτό λειτουργώντας ως θλιβόμενη πλάκα έχει την τάση να λυγίσει, ωστόσο ο κορμός λόγω της μεγάλης δυσκαμψίας του παρεμποδίζει το

λυγισμό του θλιβόμενου πέλματος περί τον ασθενή του άξονα. Για αρκετά υψηλότερες τιμές του φορτίου το θλιβόμενο πέλμα (άνω ή κάτω ανάλογα με τη φόρτιση) λυγίζει περί τον ισχυρό του άξονα ή τον ασθενή άξονα του κορμού, δηλαδή εκτρέπεται πλευρικά. Το εφελκόμενο πέλμα δεν έχει την τάση να λυγίσει, επειδή όμως συνδέεται μέσω του κορμού με το θλιβόμενο πέλμα,εκτρέπεται πλευρικά και αυτό. Αποτέλεσμα είναι η στροφή της διατομής περί τον διαμήκη άξονα (Σχ. 2.3 και 2.4).



Σχήμα 2.3 Εικόνα Πλευρικού Λυγισμού



Σχήμα 2.4 Οι δύο πρώτες ιδιομορφές λυγισμού για αμφιέρειστη δοκό μήκους 8m.

Ανάλογα με τα επιβαλλόμενα επί του μέλους φορτία, διακρίνονται οι παρακάτω βασικές περιπτώσεις, οι οποίες απαντώνται στην πράξη και αντιμετωπίζονται κατάλληλα από τον κανονισμό:

2.3.1 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη

Η περίπτωση αυτή αντιμετωπίζεται όπως ο στρεπτικός λυγισμός. Ειδικότερα, παρουσιάζεται μια μορφή αστάθειας ενός θλιβόμενου μέλους σταθερής διατομής με ευθύγραμμο διαμήκη άξονα, κατά την οποία, οι διατομές στρέφονται περί τον άξονα του μέλους, ο οποίος παραμένει ευθύγραμμος και μετά την παραμόρφωση. Ο κίνδυνος αστοχίας εξαιτίας αυτού του είδους λυγισμού απαντάται σε ανοικτές διατομές, ενώ δεν υφίσταται σε κλειστές διατομές, λόγω της μεγάλης δυστρεψίας που διαθέτουν. Επιπρόσθετα, στους αριθμητικούς συντελεστές που χρησιμοποιούνται, θα πρέπει να εμπεριέχονται οι συνθήκες δέσμευσης των άκρων σε στρέψη και στρέβλωση.

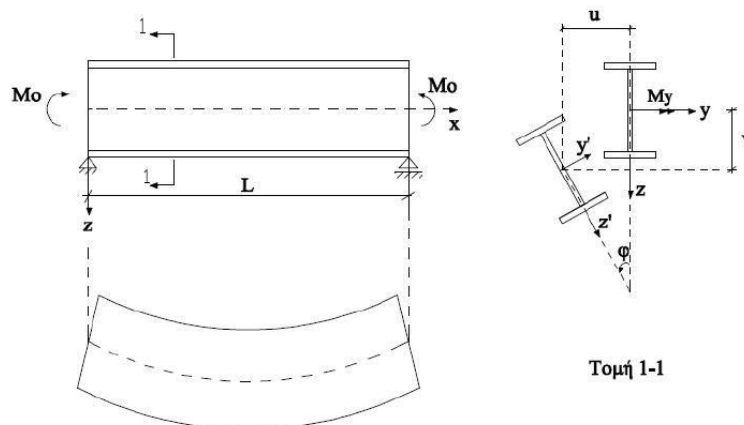
2.3.2. Στρεπτοκαμπτικός (ή πλευρικός) λυγισμός μη προστατευμένων πλευρικά δοκών σταθερής διατομής υπό κάμψη περί τον ισχυρό άξονα

Όταν μία δοκός μη προστατευμένη έναντι πλευρικής εκτροπής υποβάλλεται σε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα της διατομής της, είτε λόγω ακραίων ροπών, είτε συνηθέστερα, λόγω εγκάρσιων φορτίων, ένα από τα πέλματά της θλίβεται και καθίσταται επιρρεπές σε λυγισμό. Ο λυγισμός του θλιβόμενου πέλματος στο επίπεδο του κορμού παρεμποδίζεται λόγω της μεγάλης δυσκαμψίας του κορμού στο επίπεδό του, ενώ το άλλο ήμισυ της διατομής είναι, ως εφελκόμενο στοιχείο, ευσταθές. Ως συνέπεια, ο λυγισμός του θλιβόμενου πέλματος εκδηλώνεται εκτός του επιπέδου του κορμού, με ταυτόχρονη στροφή των κυρίων αξόνων της διατομής σε σχέση με την αρχική τους θέση. Η παραμόρφωση που προκύπτει, είναι επομένως συνδυασμός στρέψης και πλευρικής κάμψης (πλευρικός-στρεπτικός λυγισμός ή απλώς πλευρικός λυγισμός). Εάν στη δοκό εφαρμοστεί ταυτόχρονα και αξονική θλιπτική δύναμη, αυτή θα επιτείνει το φαινόμενο, αφού επαυξάνει την κάμψη (στη μετά το λυγισμό κατάσταση ισορροπίας) περί τον ασθενή άξονα της διατομής.

Σε μια τέλεια δοκό, που φορτίζεται κατά την ισχυρή διεύθυνση κάμψης, ο πλευρικός λυγισμός λαμβάνει χώρα για μια κρίσιμη τιμή της μέγιστης ροπής κάμψης. Οι σημαντικότεροι παράγοντες που επηρεάζουν αυτή την τιμή είναι:

- Το είδος και η θέση των φορτίων, τα οποία επηρεάζουν την κατανομή της ροπής κατά μήκος της δοκού (δηλαδή τη μορφή του διαγράμματος καμπτικών ροπών).
- Το σημείο εφαρμογής των φορτίων καθ' ύψος της διατομής (κέντρο βάρους, άνω πέλμα, κάτω πέλμα κλπ).
- Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού και σε ενδιάμεσες θέσεις της (περιορισμός κάμψης, στρέψης, στρέβλωσης).
- Η ύπαρξη ή όχι συνέχειας στις στηρίξεις.
- Η μορφή της διατομής.
- Τυχόν ασυνέχειες στη διατομή (αλλαγή διατομής, ανοίγματα κλπ).
- Οι ιδιότητες του υλικού.
- Οι γεωμετρικές ατέλειες και οι παραμένουσες τάσεις.

Στο σχήμα 2.5 παρουσιάζεται ο τρόπος εκδήλωσης του φαινομένου αυτού σε μία αμφιέριστη δοκό λόγω ροπών στα άκρα.



Σχήμα 2.5 Πλευρικός λυγισμός αμφιέριστης δοκού μήκους L λόγω ακραίων ροπών M_o .

2.3.3 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη και κάμψη.

Μέλη σταθερής διατομής καταπονούνται ταυτόχρονα από αξονική θλιπτική δύναμη και ροπές κάμψης περί τον ισχυρό και τον ασθενή άξονα της διατομής αποτελούν τη γενική περίπτωση καταπόνησης, ιδιαίτερα σε ότι αφορά κατακόρυφα μέλη χωρικών πλαισιωτών φορέων. Η ανάλυση της φέρουσας συμπεριφοράς τους, κατά την οποία εκτός από τις μετατοπίσεις των διατομών ως προς τους κεντροβαρικούς άξονες είναι πιθανόν να αναπτυχθούν ταυτόχρονα και στροφές περί τον διαμήκη άξονα του μέλους (στρεπτοκαμπτικός λυγισμός), είναι εξαιρετικά δύσκολη ακόμη και για την απλή ελαστική συμπεριφορά, καθιστώντας μη εφικτές κλειστές αναλυτικές λύσεις. Έτσι κατεβλήθη στους κανονισμούς προσπάθεια χρησιμοποίησης ενοποιημένων σχέσεων σχεδιασμού, οι οποίες διατυπώνονται σε μορφή εξισώσεων αλληλεπίδρασης.

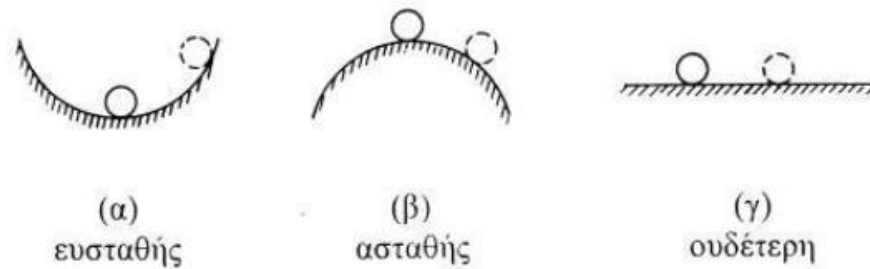
Στον παρακάτω πίνακα (Πίν. 2.1) παρουσιάζονται συνοπτικά τα διάφορα είδη και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις του καθολικού λυγισμού, ως συνάρτηση της φόρτισης και του τύπου της διατομής.

Είδος καθολικού λυγισμού	Φόρτιση	Είδη διατομών	Παραμορφώσεις
Καμπτικός λυγισμός	N N + M _y N + M _z N + M _y + M _z	όλες	v w v v, w
Στρεπτικός λυγισμός	N	ανοικτές	φ
Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός	N M _y N + M _y N + M _y + M _z	ανοικτές	v, w, φ

Πίνακας 2.1 Είδη και παραμορφώσεις καθολικού λυγισμού.

2.4 Μορφές ελαστικής ισορροπίας

Καθώς ο λυγισμός είναι μια μορφή αστάθειας, είναι απαραίτητο να γίνει μια διάκριση μεταξύ των εννοιών «ευσταθής», «ουδέτερη» και «ασταθής» ισορροπία. Οι τρεις αυτές μορφές ελαστικής ισορροπίας μπορούν να παρασταθούν με απλοϊκό τρόπο, θεωρώντας την ισορροπία μιας τελείως άκαμπτης σφαίρας σε διάφορες θέσεις μιας ομαλής επιφάνειας, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6 Οι τρεις δυνατές μορφές ισορροπίας

Αν και η σφαίρα ισορροπεί και στις τρεις θέσεις του Σχ. 2.6, μετά από προσεκτική εξέταση διαπιστώνεται η ύπαρξη ουσιαστικών διαφορών μεταξύ των τριών αυτών καταστάσεων ισορροπίας. Στο Σχ. 2.6α, αν η σφαίρα μετακινηθεί ελαφρώς από την αρχική της θέση ισορροπίας, θα επιστρέψει στη θέση αυτή, όταν αφαιρεθεί η δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνηση. Μια τέτοια συμπεριφορά χαρακτηρίζεται ως μορφή ευσταθούς ισορροπίας. Στο Σχ.2.6β, αν η σφαίρα μετακινηθεί ελαφρώς από την αρχική της θέση ισορροπίας, τότε είναι φανερό ότι δεν επιστρέφει στην αρχική θέση αλλά απομακρύνεται συνεχώς από την αρχική θέση ισορροπίας (μετά την αφαίρεση του αιτίου που προκάλεσε τη μετακίνησή της). Αυτή η μορφή ισορροπίας είναι ασταθής. Στο Σχ.2.6γ βλέπουμε μια Τρίτη μορφή ισορροπίας. Η σφαίρα μετά από μικρή μετακίνηση, ούτε επιστρέφει στην αρχική της θέση, ούτε συνεχίζει να κινείται απομακρυνόμενη από αυτή. Αντίθετα, παραμένει στη θέση στην οποία τη μετακίνησε η δύναμη που της εφαρμόστηκε. Αυτή η συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από ουδέτερη ή αδιάφορη ισορροπία.

Καθώς η δοκός περνάει από την ασταθή (ευθύγραμμη) μορφή ισορροπίας στην ευσταθή (ελαφρώς καμπυλωμένη λόγω λυγισμού), υποθέτουμε ότι υπάρχει μια μεταβατική ισορροπία, η οποία καλείται ουδέτερη ή αδιάφορη ισορροπία. Ο προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου γίνεται με βάση την ελαφρώς καμπυλωμένη μορφή ισορροπίας.

3. Διατύπωση και Αντιμετώπιση του Προβλήματος του Λυγισμού

3.1 Γενικά

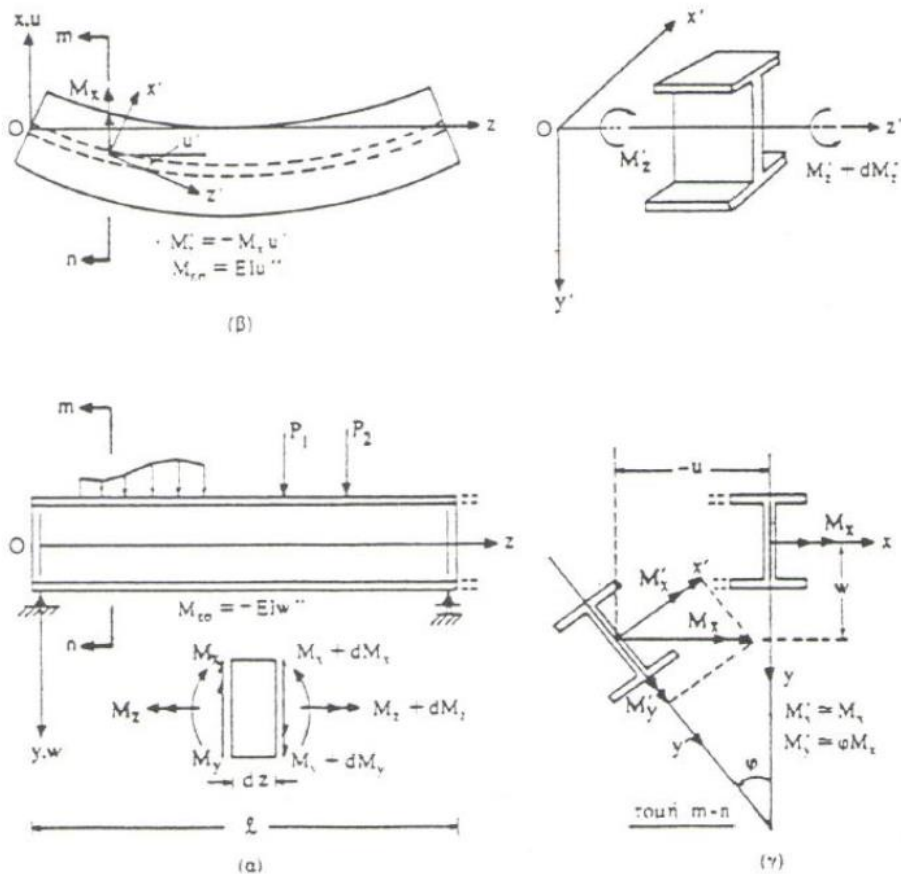
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο του προβλήματος του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού μίας δοκού καταπονούμενης σε κάμψη. Η δοκός καταπονείται είτε με συγκεντρωμένες ροπές στα άκρα είτε με εγκάρσια φορτία με την ταυτόχρονη ή μη δράση αξονικού θλιπτικού φορτίου.

Αρχικά, αναφέρονται οι κατάλληλες παραδοχές για την επίλυση του προβλήματος. Θεωρώντας ότι η δοκός κάμπτεται περί τον ισχυρό της άξονα μορφώνεται η διαφορική εξίσωση ισορροπίας, όπου φαίνεται η δυσχέρεια επίλυσής της εξαιτίας των πολύπλοκων συστημάτων που προκύπτουν. Καταλήγοντας, χρησιμοποιούνται οι κατάλληλες προσεγγίσεις, μέσω των οποίων διευκολύνεται η διαδικασία εύρεσης του κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού.

3.2 Βασικές παραδοχές

Όταν μια δοκός λυγίζει περί τον ισχυρό της άξονα (τον άξονα δηλαδή που εμφανίζει τη μέγιστη καμπτική αντίσταση) και δεν έχει επαρκή πλευρική υποστήριξη, τότε αυτή θα εκτραπεί πλευρικά και θα στρεβλωθεί, τη στιγμή που το φορτίο εφαρμογής φτάσει στην κρίσιμη τιμή του. Σύμφωνα με τις βασικές αρχές, στη στάθμη της εξωτερικής φόρτισης, αντιστοιχούν δύο διακεκριμένες απείρως γειτονικές θέσεις ισορροπίας. Το μικρότερο φορτίο που ικανοποιεί το κριτήριο γειτονικής ισορροπίας είναι το κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού. Για να υπολογιστεί το κρίσιμο φορτίο της δοκού πρέπει πρώτα να καθοριστούν οι συνθήκες ισορροπίας σε μια ελαφρώς παραμορφωμένη κατάσταση.

Στο Σχ.3.1γ που ακολουθεί, παρουσιάζεται η διατομή $m-n$ στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας. Η εξαγωγή των σχετικών διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας διευκολύνεται με την υιοθέτηση εκτός του σταθερού συστήματος ορθογωνίων αξόνων x, y, z και ενός κινητού x', y', z' που διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής αυτής.



Σχήμα 3.1 Δοκός διατομής I σε ελαφρώς παραμορφωμένη κατάσταση λόγω πλευρικού λυγισμού.

Οι βασικές παραδοχές, που χρησιμοποιούνται για την αντιμετώπιση των προβλημάτων στρεπτοκαμπτικού λυγισμού είναι οι ακόλουθες:

- Το υλικό είναι ομογενές, ισότροπο και ακολουθεί το νόμο ελαστικότητας (νόμος του Hooke).
- Η δοκός είναι γεωμετρικά τέλεια, δηλαδή δεν υπάρχουν αρχικές παραμορφώσεις όπως βέλος και στρόφη.
- Μέχρι τη στάθμη λυγισμού, οι τάσεις που αναπτύσσονται παραμένουν μικρότερες του ορίου αναλογίας.
- Ισχύει η θεωρία των μικρών μετατοπίσεων (βελών και στροφών). Σύμφωνα με αυτή τα βέλη και οι στρόφες είναι αρκετά μικρά, ώστε να μπορούν να συγκριθούν με τις διαστάσεις της διατομής, άρα να ισχύουν οι απλοποιημένοι τύποι καμπυλότητας από την τεχνική θεωρία κάμψης $\frac{d^2 w}{dz^2}$ και $\frac{d^2 u}{dz^2}$, όπου w και u τα βέλη κάμψης κατά τους άξονες $y(w)$ και $x(u)$ αντίστοιχα. Όταν οι γωνίες φ είναι μικρές είναι γενικά αποδεκτό οι παραπάνω καμπυλότητες να ισχύουν για τα αντίστοιχα επίπεδα, ακόμα και μετά το λυγισμό.
- Η γεωμετρία της διατομής παραμένει αμετάβλητη κατά το λυγισμό παρά την άμεση σύνδεση στρεπτικής και καμπτικής παραμόρφωσης της δοκού.
- Τα εξωτερικά φορτία παραμένουν παράλληλα προς την αρχική τους διεύθυνση, όταν τα σημεία εφαρμογής τους μετακινούνται.

Η διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας διευκολύνεται με τη χρήση ενός κινητού συστήματος αξόνων x', y', z' , όπου οι άξονες x', y' είναι οι κύριοι άξονες αδρανείας

της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση, ενώ ο άξονας z' είναι ο εφαπτομενικός άξονας στην ελαστική γραμμή της δοκού μετά τον πλευρικό λυγισμό. Η μετατόπιση του κέντρου βάρους της διατομής ορίζεται από τις μετατοπίσεις w και u περί τους άξονες y και x αντιστοίχως, οι οποίες είναι θετικές στην περίπτωση που είναι ομόφορες με τον εκάστοτε άξονα, καθώς και από τη γωνία στροφής φ της διατομής περί τον άξονα z , που είναι θετική όταν η φορά της είναι δεξιόστροφη.

Η δοκός φορτίζεται επί του επιπέδου zy , οπότε υπάρχουν μόνο ροπές κάμψης M_x σε πρώτη φάση. Στη συνέχεια, αφού η υπό μελέτη δοκός λυγίσει αναπτύσσονται επιπλέον τόσο καμπτικές ροπές M_y όσο και στρεπτικές ροπές M_z λόγω της μετατοπίσεως εκτός του επιπέδου φορτίσεως των σημείων εφαρμογής των εγκάρσιων στον άξονα της δοκού φορτίων.

3.3 Διαφορική εξίσωση ισορροπίας στρεπτοκαμπτικού λυγισμού

Αν με M_x, M_y, M_z και M'_x, M'_y, M'_z συμβολίζονται οι ροπές που αντιστοιχούν στην απαραμόρφωτη και στην παραμορφωμένη κατάσταση της δοκού, τότε οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας διατυπώνονται με εφαρμογή της συνθήκης ισορροπίας εσωτερικών-εξωτερικών δυνάμεων ως εξής:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M'_x \quad (3.1)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M'_y \quad (3.2)$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = M'_z \quad (3.3)$$

Όπου I_x, I_y είναι οι ροπές αδρανείας της διατομής περί τους κύριους άξονες x και y αντίστοιχα. Οι τιμές των σταθερών στρέψεως και στρεβλώσεως συμβολίζονται με J (ή I_t) και C_w (ή I_w) αντιστοίχως και προσδιορίζονται από σχετικούς πίνακες.

Η εξίσωση (3.3) ισχύει για τις δοκούς, των οποίων οι διατομές είναι λεπτότοιχες, όπως οι διατομές I, ενώ για τις λεπτές ορθογωνικές διατομές ή τις διατομές L, U, V η σταθερά στρέβλωσης C_w μπορεί να ληφθεί ίση με το μηδέν.

Οι ροπές M'_x, M'_y, M'_z εκφράζονται συναρτήσει της ροπής M_x με τον ακόλουθο τρόπο:

$$M'_x = M_x \cos(x', x) = M_x \cos\varphi = M_x \quad (3.4)$$

$$M'_y = M_y \sin(y', y) = M_x \sin\varphi = M_x \varphi \quad (3.5)$$

$$M'_z = -M_x \sin(z', z) = -M_x \sin \frac{du}{dz} = -M_x \frac{du}{dz} \quad (3.6)$$

Αντικαθιστώντας τις ροπές M'_x, M'_y, M'_z στις σχέσεις (3.1), (3.2), (3.3) προκύπτουν:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M_x \quad (3.7)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M_x \varphi \quad (3.8)$$

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -M_x \frac{du}{dz} \quad (3.9)$$

Από την εξίσωση (3.7) συμπεραίνεται ότι το βέλος κάμψης w στο κύριο επίπεδο κάμψεως zy δεν επηρεάζει τη γωνία στροφής φ . Αντίθετα, από τις εξισώσεις (3.8) και (3.9) γίνεται αντιληπτό πως υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των u και φ . Παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.9) και λύνοντας ως προς τον όρο $\frac{d^2 u}{dz^2}$ προκύπτει η νέα εξίσωση:

$$EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{M_x^2 \varphi}{EI_y} = -M'_x(z) \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (3.10)$$

Όταν η ροπή M_x είναι ανεξάρτητη του z , τότε η επίλυση της (3.10) είναι αρκετά απλή. Όταν όμως η ροπή αυτή μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού, τότε είναι απαραίτητη κάποια προσεγγιστική μέθοδος για να προσδιοριστεί η λύση της, καθώς οι συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης (3.10) δεν είναι όλοι σταθεροί αλλά μεταβάλλονται κατά το μήκος z της δοκού.

3.4 Αντιμετώπιση του προβλήματος

Το θέμα της εύρεσης προσεγγιστικών μεθόδων στην προσομοίωση της διαφορικής εξίσωσης του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού είχε απασχολήσει τους Timoshenko και Gere (Theory of elastic stability 1961), οι οποίοι προσπάθησαν να την αντιμετωπίσουν με μια αυστηρά μαθηματική επίλυση. Αποδείχτηκε πως το φορτίο λυγισμού μπορεί να προσδιοριστεί βάσει μίας επαναληπτικής διαδικασίας με τη θεώρηση αυθαίρετων συναρτήσεων που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στην παραμορφωμένη κατάσταση. Είναι σαφώς δύσκολο να υποτεθεί γενική μέθοδος αντιμετώπισης σε ότι αφορά τον τρόπο προσέγγισης μετατοπίσεων ή στροφών μίας διατομής. Θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ο τρόπος καταπόνησης του φορέα καθώς και οι συνθήκες έδρασης αυτού. Στην παρούσα διπλωματική γίνεται χρήση των δύο κάτωθι προσδιοριστικών μεθόδων :

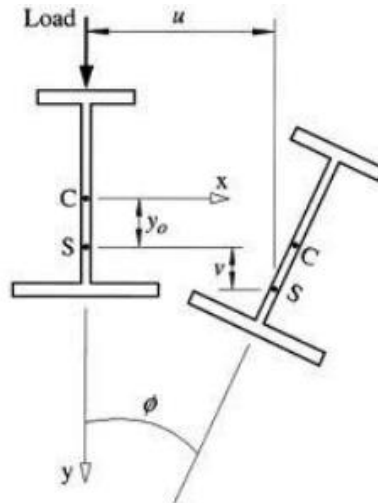
- Προσεγγιστικό πολώνυμο για την γωνία στροφής φ που αναπτύχθηκε στο Ά εθνικό συνέδριο σιδηρών κατασκευών από τους καθηγητές του ΕΜΠ, Α.Κουνάδη και Γ.Ιωαννίδη.
- Χρήση τριγωνομετρικής συνάρτησης για την προσέγγιση της γωνίας στροφής φ .

3.4.1 Α Εθνικό συνέδριο σιδηρών κατασκευών - χρήση πολυωνυμικής συνάρτησης

Στο συγκεκριμένο συνέδριο, αναπτύχθηκε μια τεχνική, η οποία αντίθετα από τις κλασικές αναλύσεις, απαιτεί στοιχειώδεις μαθηματικές γνώσεις απλών ολοκληρώσεων αλγεβρικών πολυωνύμων.

Σύμφωνα με την τεχνική αυτή, υποτίθεται ως γωνία στροφής της διατομής φ μια οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιούσα τις συνοριακές συνθήκες. Παραδείγματα αναλυτικά συναντώνται στο επόμενο κεφάλαιο.

Το πολύωνυμο που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση της γωνίας φ κατά μήκος της αμφιέρειστης δοκού παρουσιάζεται ακολούθως :



Σχήμα 3.2 Γωνία στροφής της διατομής κατά τον πλευρικό λυγισμό.

$$\varphi(\xi) = \alpha_4 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0 \quad (3.11)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε :

$$\varphi'(\xi) = 4\alpha_4 \xi^3 + 3\alpha_3 \xi^2 + 2\alpha_2 \xi + \alpha_1$$

$$\varphi''(\xi) = 12\alpha_4 \xi^2 + 6\alpha_3 \xi + 2\alpha_2$$

$$\varphi'''(\xi) = 24\alpha_4 \xi + 6\alpha_3$$

$$\varphi''''(\xi) = 24\alpha_4$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι :

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow \alpha_0 = 0$$

$$\varphi''(0) = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\varphi(1) = 0 \rightarrow \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\alpha_4 - \alpha_3$$

$$\varphi''(1) = 0 \rightarrow 12\alpha_4 + 6\alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = -2\alpha_4$$

Το πολύωνυμο γίνεται :

$$\varphi(\xi) = \alpha_4(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$$

Έστω φ_0 η άγνωστη στροφή στο μέσο της δοκού, δηλαδή $\varphi_0 = \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

Από την εξίσωση (3.11), για $\xi = \frac{1}{2}$ ισχύει :

$$\varphi_0 = \alpha_4 \left(\frac{1}{16} - \frac{2}{8} + \frac{1}{2} \right) \rightarrow \alpha_4 = \frac{16}{5} \varphi_0 \quad (3.12)$$

Και η τελική μορφή του πολυωνύμου είναι :

$$\varphi(\xi) = \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \quad (3.13)$$

Παρατηρείται πως η μορφή αυτή είναι ανεξάρτητη της φόρτισης της δοκού και είναι συνάρτηση μόνο της επιβαλλόμενης στήριξης. Από εδώ και στο εξής, θα γίνεται όπου κρίνεται σκόπιμο, χρήση της σχέσης (3.13) χωρίς σχετική απόδειξη.

3.4.2 Χρήση τριγωνομετρικής συνάρτησης

Εναλλακτικά γίνεται χρήση της συνάρτησης $\varphi(\xi) = \varphi_0 \sin(\pi\xi)$ (3.14). Η μέθοδος αυτή, παρουσιάστηκε επίσης από τους καθηγητές Α.Κουνάδη και Γ.Ιωαννίδη, σε δημοσίευση τον Απρίλιο του 1991. Παραδείγματα αναλυτικά για την χρήση αυτής προσέγγισης συναντώνται στο επόμενο κεφάλαιο.

4. Θεωρητική Επίλυση Φορτίσεων με Προσεγγιστικές Μεθόδους

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται διάφορα παραδείγματα, ώστε να γίνει η εφαρμογή των μεθόδων που αναφέρθηκαν αλλά και για να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα ως προς τους παραδοχές και τις προσεγγιστικές επιλύσεις. Η εφαρμογή των μεθόδων γίνεται σε αμφιέρειστες δοκούς διατομής I (IPE 600, IPE 500, IPE400), οι οποίες υποβάλλονται σε διάφορες περιπτώσεις φορτίσεων όπως η ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση, το συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της δοκού. Η αρχή γίνεται με την απλούστερη περίπτωση που μπορεί να παρουσιαστεί και αφορά την καθαρή κάμψη της δοκού λόγω δύο ίσων και αντίθετων ροπών στα άκρα της.

4.1 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ροπών κάμψεως στα άκρα της.

4.1.1 Ακριβής μαθηματική επίλυση.

Οι εξωτερικές ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται στη δοκό κατά το σταθερό σύστημα αξόνων στην απαραμόρφωτη κατάσταση και οι αντίστοιχες M'_x, M'_y, M'_z στην παραμορφωμένη κατάσταση περί τους άξονες x', y', z' είναι:

$$\begin{aligned} M_x &= M_0 \\ M_y &= M_z = 0 \end{aligned}$$

και

$$M'_x = M_x \cos(x', x) = M_x \cos\varphi = M_x$$

$$M'_y = M_x \sin(y', y) = M_x \sin\varphi = M_x \varphi$$

$$M'_z = -M_x \sin(z', z) = -M_x \sin \frac{du}{dz} = -M_x \frac{du}{dz}$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας εξωτερικών- εσωτερικών δυνάμεων στην παραμορφωμένη κατάσταση προκύπτει ότι:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M'_x$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M'_y \varphi$$

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -M'_z \frac{du}{dz}$$

Με αντικατάσταση των ανωτέρω σχέσεων:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M_0 \tag{4.1.1.1}$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M_0 \varphi \quad (4.1.1.2)$$

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -M_0 \frac{du}{dz} \quad (4.1.1.3)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (4.1.1.3) :

$$GJ \frac{d^3 \varphi}{dz^3} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = -M_0 \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (4.1.1.4)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση $\frac{d^2 u}{dz^2}$ από την εξίσωση 4.1.1.2 προκύπτει :

$$\begin{aligned} GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} &= -\frac{M_0^2 \varphi}{EI_y} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= \frac{M_0^2 \varphi}{EI_y EC_w} \\ \rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{M_0^2 \varphi}{EI_y EC_w} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.1.5)$$

Θέτοντας $\alpha = \frac{GJ}{2EC_w}$, $\beta = \frac{M_0^2}{EI_y EC_w}$ η 4.1.1.5 γίνεται :

$$\frac{d^4 \varphi}{dz^4} - 2\alpha \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \beta \varphi \quad (4.1.1.6)$$

Η εξίσωση (4.1.1.6) είναι τετάρτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και η λύση της είναι της μορφής:

$$\varphi = A \sin mz + B \cos mz + C e^{nz} + D e^{-nz} \quad (4.1.1.7)$$

όπου:

$$m = \sqrt{-a + \sqrt{a^2 + \beta}}, n = \sqrt{a + \sqrt{a^2 + \beta}} \quad (4.1.1.8)$$

Οι συνοριακές συνθήκες που αφορούν όλο το μήκος της δοκού είναι :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi''(0) &= 0 \\ \varphi(L) &= 0 \\ \varphi''(L) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Από τις } \varphi(0) = 0, \varphi''(0) = 0 \rightarrow B = 0, C = -D. \quad (4.1.1.9)$$

$$\text{Από τις } \varphi(L) = 0, \varphi''(L) = 0 \rightarrow A \sin mL - 2D \sinh nL = 0 \text{ και} \quad (4.1.1.10)$$

$$Am^2 \sin mL + 2Dn^2 \sinh nL = 0 \quad (4.1.1.11)$$

Για να μην προκύψει τετριμμένη λύση η ορίζουσα των ανωτέρω εξισώσεων πρέπει να είναι μηδενική, άρα:

$$\sin mL = 0$$

Η μικρότερη τιμή του m για την οποία επαληθεύεται η εξίσωση είναι:

$$m = \frac{\pi}{L}$$

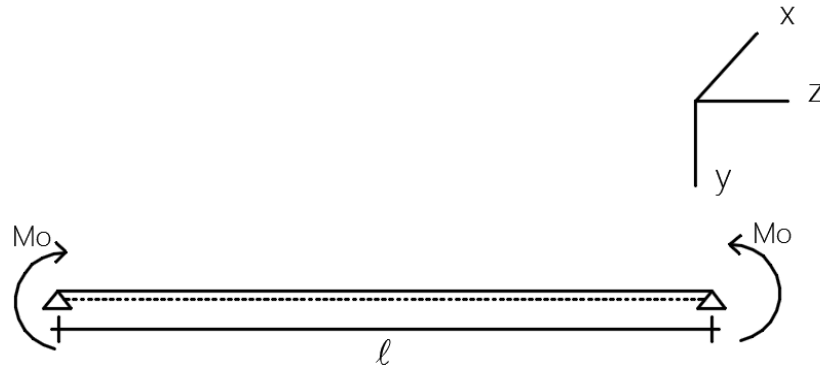
Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.1.1.8) προκύπτει:

$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta} = \frac{\pi}{L}$$

Με τη βοήθεια των α και β που τέθηκαν παραπάνω:

$$M_{0,cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{GJ E I_y} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E C_w}{GJ}}\right)^2\right)} \quad (4.1.1.12)$$

4.1.2 Χωρίς αξονική δύναμη



Σχήμα 4.1 Αμφιέριστη δοκός-ζεύγος σταθερής ροπής.

Σε αυτή την περίπτωση φόρτισης η ροπή M_0 στα άκρα είναι ανεξάρτητη του z , επομένως η επίλυση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που προκύπτει, είναι σχετικά απλή. Αναζητείται, λοιπόν η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού (M_{cr}) με την προσεγγιστική μέθοδο θεωρώντας ότι στα άκρα της δοκού ασκούνται δύο ίσες και αντίθετες ροπές κάμψεως:

$$M_x = M_0$$

$$M_y = M_z = 0$$

Οι αντίστοιχες M'_x , M'_y , M'_z έχουν τις εκφράσεις, που αποδείχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο στις σχέσεις (3.4), (3.5), (3.6), οι οποίες είναι έπειτα από την αντικατάσταση των εξισώσεων (3.7), (3.8), (3.9) :

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M_0 \quad (4.1.2.1)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M_0 \varphi \quad (4.1.2.2)$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -M_0 \frac{du}{dz} \quad (4.1.2.3)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (4.1.2.3) :

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = -M_0 \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση $\frac{d^2 u}{dz^2}$ από την εξίσωση 4.1.2.2 προκύπτει :

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = -\frac{M_0^2 \varphi}{EI_y} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= \frac{M_0^2 \varphi}{EI_y EC_w} \\ \rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{M_0^2 \varphi}{EI_y EC_w} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.2.4)$$

Θέτοντας $\xi = \frac{z}{l}$ όπου ξ αδιάστατη μεταβλητή.

Γνωρίζοντας πως :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3 \varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4 \varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4} \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση 4.1.2.4 προκύπτει :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^4} \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} - \frac{M_0^2}{EI_y EC_w} \varphi(\xi) &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} l^2 \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} - \frac{M_0^2}{EI_y EC_w} l^4 \varphi(\xi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.2.5)$$

Θέτοντας : $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2$, $k^4 = \frac{M_0^2}{EI_y EC_w} l^4$ η 4.1.2.5 γίνεται :

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) - k^4 \varphi(\xi) = 0 \text{ για } (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4.1.2.6)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του εν λόγω φορέα είναι :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi''(0) &= 0 \\ \varphi(1) &= 0 \\ \varphi''(1) &= 0 \end{aligned}$$

Μία πρώτη προσεγγιστική λύση για τη γωνία στροφής φ μπορεί να αναζητηθεί μέσω συναρτήσεως της μορφής:

$$\varphi(\xi) = \alpha_4 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0$$

Υπενθυμίζεται πως η παραπάνω σχέση κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών που προαναφέρθηκαν καταλήγει στην μορφή :

$$\varphi(\xi) = \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^4 - 2 \xi^3 + \xi)$$

,όπου η γωνία φ_0 είναι η άγνωστη γωνία στροφής στο μέσον της δοκού.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της $\varphi(\xi)$ στην διαφορική εξίσωση 4.1.2.6 προκύπτει:

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) = k^4 \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^4 - 2 \xi^3 + \xi)$$

Με διπλή ολοκλήρωση :

$$\varphi'''(\xi) - \beta^2 \varphi'(\xi) = k^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^5}{5} - 2 \frac{\xi^4}{4} + \frac{\xi^2}{2} \right) + C_1 \quad (4.1.2.7)$$

$$\varphi''(\xi) - \beta^2 \varphi(\xi) = k^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + C_1 \xi + C_2 \quad (4.1.2.8)$$

Η 4.1.2.8 για $\xi=0$ δίνει : $\varphi''(0) - \beta^2 \varphi(0) = 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$

Η 4.1.2.8 για $\xi=1$ δίνει :

$$\varphi''(1) - \beta^2 \varphi(1) = 0,64 \varphi_0 k^4 + C_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow C_1 = -0,64 \varphi_0 k^4 = -\frac{8}{25} \varphi_0 k^4$$

Επομένως επιστρέφοντας στην 4.1.2.8 κι αντικαθιστώντας τα C_1, C_2 προκύπτει :

$$\varphi''(\xi) = \beta^2 3,2 \varphi_0 (\xi^4 - 2 \xi^3 + \xi) + k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi}{10} \right)$$

Με διπλή ολοκλήρωση :

$$\varphi'(\xi) = \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) + k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^7}{210} - \frac{\xi^6}{60} + \frac{\xi^4}{24} - \frac{\xi^2}{20} \right) + C_3 \quad (4.1.2.9)$$

$$\varphi(\xi) = \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - \frac{\xi^3}{60} \right)$$

$$+ C_3 \xi + C_4 \quad (4.1.2.10)$$

Η 4.1.2.10 για $\xi=0$ δίνει :

$$\varphi(0) = 0 + C_4 \rightarrow C_4 = 0$$

Η 4.1.2.10 για $\xi=1$ δίνει :

$$\varphi(1) = 0,32 \varphi_0 \beta^2 - 0,032 \varphi_0 k^4 + C_3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow C_3 = -0,32 \varphi_0 \beta^2 + 0,032 \varphi_0 k^4$$

Επιστρέφοντας στην 4.1.2.10 προκύπτει :

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - 0,1\xi \right) + k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - \right. \\ & \left. - \frac{\xi^3}{60} + 0,010125\xi \right) \end{aligned} \quad (4.1.2.11)$$

Η 4.1.2.11 για $\xi = \frac{1}{2}$ δίνει :

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = & \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^6}{30} - \frac{(0,5)^5}{10} + \frac{(0,5)^3}{6} - 0,1(0,5) \right) + \\ & k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^8}{1680} - \frac{(0,5)^7}{420} + \frac{(0,5)^5}{120} - \frac{(0,5)^3}{60} + 0,010125 \right) \rightarrow \end{aligned}$$

$$1 = -0,10167 \beta^2 + 0,0103 k^4$$

$$\rightarrow k^4 = 97,09 + 9,87 \beta^2$$

Αντικαθιστώντας τα β^2, k^4 (με $M_0 = M_{0,cr}$) προκύπτει :

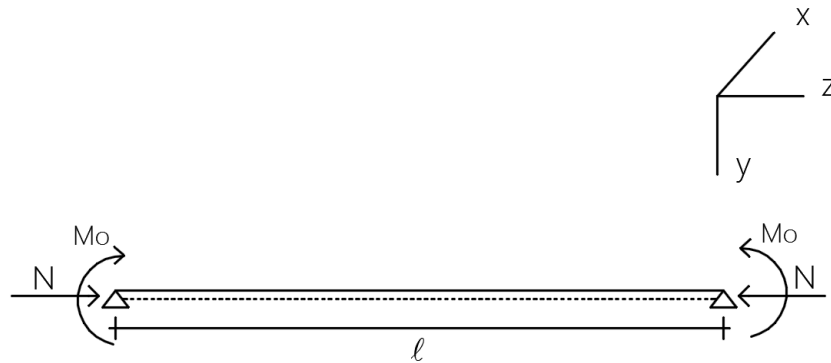
$$\frac{M_0^2}{EI_y EC_w} l^4 = 9,87 \frac{GJ}{EC_w} l^2 + 97,09$$

ή

$$M_{0,cr} = \sqrt{9,87 \frac{GJ EI_y}{L^2} + 97,09 \frac{EI_y EC_w}{L^4}} \quad (4.1.2.12)$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση (4.1.2.12), η οποία προέκυψε με τον προσεγγιστικό τρόπο με την εξίσωση (4.1.1.12), διαπιστώνεται ότι το αποτέλεσμα της μεθόδου, που εφαρμόστηκε προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό αυτό της μαθηματικής επίλυσης.

4.1.3 Με αξονική δύναμη.

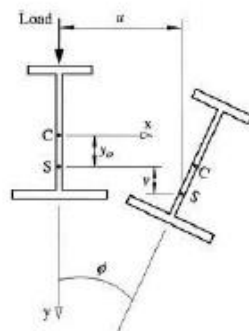


Σχήμα 4.2 Αμφιέριστη δοκός με σταθερή ροπή στα άκρα και αξονική δύναμη.

Θεωρείται μία αμφιέριστη δοκός διατομής I . Το επίπεδο εξωτερικής φόρτισης της δοκού αυτής, το οποίο έχει τη μεγαλύτερη ακαμψία ($I_x > I_y$), ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα y και τον διαμήκη κεντροβαρικό άξονα z . Η δοκός υπόκειται σε ομοιόμορφη ροπή κάμψης M_0 στα δύο άκρα της και σε σταθερή αξονική θλιπτική δύναμη N , η οποία ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής. Για σταδιακή αύξηση της M_0 από το μηδέν κι αφού η N παραμένει σταθερή, γίνονται οι εξής υποθέσεις:

- A. Η γεωμετρία της διατομής δεν αλλάζει
- B. Κατά την κρίσιμη τιμή $M_0 = M_{0cr}$, η οποία είναι μικρότερη από την ελαστική φέρουσα ικανότητα σε κάμψη της δοκού (ροπή διαρροής), η δοκός αναπτύσσει πλάγια κάμψη και συστροφή.

Η παραμορφωμένη κατάσταση της αρχικά τέλει δοκού ορίζεται από τις πλευρικές μετακινήσεις-εκτροπές w και u του κέντρου βάρους της διατομής αλλά και από τη γωνία στροφής αυτού (Σχ. 4.3).



Σχήμα 4.3 Γωνία στροφής ϕ και μετακινήσεις w, u του κέντρου βάρους της διατομής I .

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση στο στρεπτοκαμπτικό λυγισμό σύμφωνα με τους Timoshenko and Gere (1961) είναι:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} + Nw = -M_0 \cos \varphi \approx -M_0 \quad (4.1.3.1)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + Nu = M_0 \sin \varphi \approx M_0 \varphi \quad (4.1.3.2)$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -M_0 u' \quad (4.1.3.3)$$

Η παραγωγή της (4.1.3.3) είναι ως προς z και EI_x, EI_y είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ακαμψία της δοκού αντιστοίχως.

Αδιαστατοποιώντας τις διαφορικές εξισώσεις (4.1.3.2) και (4.1.3.3) προκύπτουν:

$$v''(\xi) + \beta^2 v(\xi) = M'_0 \varphi \quad (4.1.3.4)$$

$$\varphi'''(\xi) - \lambda^2 \varphi'(\xi) - p^2 M'_0 v'(\xi) = 0 \quad (4.1.3.5)$$

όπου: $v = \frac{u}{l}, \quad \xi = \frac{z}{l}, \beta^2 = \frac{Nl^2}{EI_y}, \quad M'_0 = \frac{M_0 l}{EI_y}, \quad \lambda^2 = \frac{GJl^2}{EC_w}, \quad p^2 = \frac{I_y l^2}{C_w}$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (4.1.3.4) είναι:

$$v'''(\xi) + \beta^2 v'(\xi) = M'_0 \varphi' \quad (4.1.3.6)$$

Συνδυάζοντας την (4.1.3.6) με την (4.1.3.5) προκύπτει η σχέση:

$$v'''(\xi) - \beta^2 \frac{\lambda^2 \varphi' - \varphi'''}{p^2 M'_0} = M'_0 \varphi' \quad (4.1.3.7)$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές τη σχέση (4.1.3.5) είναι:

$$\varphi''''(\xi) - \lambda^2 \varphi'''(\xi) - p^2 M'_0 v''''(\xi) = 0 \quad (4.1.3.8)$$

Από τις εξισώσεις (4.1.3.7) και (4.1.3.8):

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'''''' - \lambda^2 \varphi''''}{p^2 M'_0} - \beta^2 \frac{\lambda^2 \varphi' - \varphi'''}{p^2 M'_0} &= M'_0 \varphi' \rightarrow \\ \rightarrow \varphi'''''' - (\lambda^2 - \beta^2) \varphi'''' - (\beta^2 \lambda^2 + p^2 M'_0) \varphi' &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.3.9)$$

Η τελική μορφή της $\varphi(\xi)$ είναι:

$$\varphi(\xi) = C_1 \sin k \xi + C_2 \cos k \xi + C_3 \sinh k \xi + C_4 \cosh k \xi + C_5 \quad (4.1.3.10\alpha)$$

όπου k, k' είναι θετικές πραγματικές ποσότητες ίσες με:

$$k = \sqrt{-\frac{\lambda^2 - \beta^2}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \beta^2)^2}{4} + \beta^2 \lambda^2 + p^2 M'_0{}^2}} \quad (4.1.3.11\alpha)$$

και

$$k' = \sqrt{\frac{\lambda^2 - \beta^2}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \beta^2)^2}{4} + \beta^2 \lambda^2 + p^2 M'_0{}^2}} \quad (4.1.3.11\beta)$$

Παραγωγίζοντας τέσσερις φορές τη σχέση (4.1.3.10α) προκύπτουν:

$$\varphi'(\xi) = C_1 k \cos k\xi - C_2 k \sin k\xi + C_3 k' \cosh k'\xi + C_4 k' \sinh k'\xi \quad (4.1.3.10\beta)$$

$$\varphi''(\xi) = -C_1 k^2 \sin k\xi - C_2 k^2 \cos k\xi + C_3 k'^2 \sinh k'\xi + C_4 k'^2 \cosh k'\xi \quad (4.1.3.10\gamma)$$

$$\varphi'''(\xi) = -C_1 k^3 \cos k\xi + C_2 k^3 \sin k\xi + C_3 k'^3 \cosh k'\xi + C_4 k'^3 \sinh k'\xi \quad (4.1.3.10\delta)$$

$$\varphi''''(\xi) = C_1 k^4 \sin k\xi + C_2 k^4 \cos k\xi + C_3 k'^4 \sinh k'\xi + C_4 k'^4 \cosh k'\xi \quad (4.1.3.10\epsilon)$$

Οι συνοριακές συνθήκες που αντιστοιχούν στην περίπτωση της αμφιέρειστης δοκού, όπως έχει αναφερθεί είναι:

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi''(0) = 0$$

$$\varphi(1) = 0$$

$$\varphi''(1) = 0$$

Παραγωγίζοντας μία φορά την εξίσωση (4.1.3.5) προκύπτει ότι:

$$\varphi''''(\xi) - \lambda^2 \varphi'(\xi) - p^2 M'_0 v''(\xi) = 0 \quad (4.1.3.11)$$

Για $\xi=0$ είναι $\varphi'' = 0$ και $v'' = 0$, επομένως η (4.1.3.11) γίνεται:

$$\varphi''''(0) = 0 \quad (4.1.3.12)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες και τη σχέση (4.1.3.12):

$$\varphi''(0) = 0 \rightarrow -C_2 k^2 + C_4 k'^2 = 0 \rightarrow C_2 = C_4 \quad (4.1.3.13\alpha)$$

$$\varphi''''(0) = 0 \rightarrow C_2 k^4 + C_4 k'^4 = 0 \rightarrow C_2 = C_4 = 0 \quad (4.1.3.13\beta)$$

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow C_2 + C_4 + C_5 = 0 \rightarrow C_5 = 0 \quad (4.1.3.13\gamma)$$

$$\varphi(1) = 0 \rightarrow C_1 \sin k + C_3 \sinh k' = 0 \rightarrow C_1 \sin k = -C_3 \sinh k' \quad (4.1.3.13\delta)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(1) = 0 &\rightarrow -C_1 k^2 \sin k + C_3 k'^2 \sinh k' \rightarrow 2C_3 k'^2 \sinh k' = 0 \\ &\rightarrow C_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.1.3.13\epsilon)$$

Επομένως για τις σταθερές C προκύπτει ότι $C_2=C_3 = C_4=C_5 = 0$ και $\sin k = 0 \rightarrow k = n\pi, n = 1,2,\dots$

Για $n=1, k = \pi$ (η μικρότερη δυνατή τιμή)

Άρα η γενική λύση της $\varphi(\xi)$ γράφεται:

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 \sin(\pi\xi)$$

,όπου η γωνία φ_0 είναι η άγνωστη γωνία στροφής στο μέσον της δοκού η οποία είναι διαφορετική του μηδενός.

Τελικά, η κρίσιμη ροπή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού προκύπτει από τις ανωτέρω σχέσεις:

$$\pi = k \rightarrow \pi^2 = k^2 \rightarrow \pi^2 = -\frac{\lambda^2 - \beta^2}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \beta^2)^2}{4} + \beta^2 \lambda^2 + p^2 M'_0{}^2} \rightarrow$$

$$\pi^2 + \frac{\lambda^2 - \beta^2}{2} = \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \beta^2)^2}{4} + \beta^2 \lambda^2 + p^2 M'_0{}^2} \rightarrow$$

$$\pi^4 + \pi^2(\lambda^2 - \beta^2) = \beta^2 \lambda^2 + p^2 M'_0{}^2 \rightarrow$$

$$p^2 M'_0{}^2 = (\pi^2 + \lambda^2)(\pi^2 - \beta^2) \rightarrow$$

$$M'_0{}^2 = \frac{1}{p^2} (\pi^2 + \lambda^2)(\pi^2 - \beta^2) \quad (4.1.3.14)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.1.3.14) τα μεγέθη $v = \frac{u}{l}, \xi = \frac{z}{l}, \beta^2 = \frac{Nl^2}{EI_y}$,

$M'_0 = \frac{M_0 l}{EI_y}, \lambda^2 = \frac{GJl^2}{EC_w}, p^2 = \frac{I_y l^2}{C_w}$ η κρίσιμη ροπή προκύπτει:

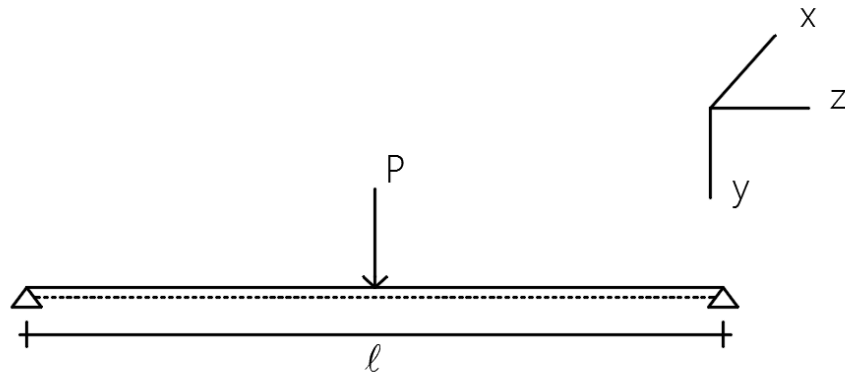
$$\left(\frac{M_0 l}{EI_y}\right)^2 = \frac{C_w}{I_y l^2} \left(\pi^2 + \frac{GJl^2}{EC_w}\right) \left(\pi^2 - \frac{Nl^2}{EI_y}\right) \rightarrow$$

$$M_{0cr} = \sqrt{\frac{EI_y EC_w}{l^4} \left(\pi^2 + \frac{GJl^2}{EC_w}\right) \left(\pi^2 - \frac{Nl^2}{EI_y}\right)}. \quad (4.1.3.15)$$

4.2 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της.

Εξετάζονται οι περιπτώσεις με και χωρίς τη δράση αξονικής θλιπτικής δύναμης και χρησιμοποιούνται δύο ειδών προσεγγίσεις η πολυωνυμική και η ημιτονοειδής, ώστε να διαπιστωθεί ποιά είναι καταλληλότερη.

4.2.1 Χωρίς αξονική δύναμη



Σχήμα 4.4 Αμφιέρειστη δοκός με συγκεντρωμένο φορτίο P στο μέσον.

Θεωρείται αμφιέρειστη δοκός διατομής I (Σχ. 4.4), η οποία καταπονείται από συγκεντρωμένο φορτίο P που εφαρμόζεται σε απόσταση a (στη γενική των περιπτώσεων) από το κέντρο βάρους της διατομής.

Θα προσδιοριστεί η τιμή του κρίσιμου φορτίου και κατά συνέπεια της κρίσιμης ροπής του πλευρικού λυγισμού για την οποία το επίπεδο κάμψης zy παύει να είναι ευσταθές. Κατά την κάμψη, τα άκρα της δοκού μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες x και y , ενώ η στροφή τους είναι αδύνατη περί τον κεντροβαρικό άξονα z . Θεωρείται ότι η δοκός έχει ελαφρώς καμφθεί στο επίπεδο zy και συγχρόνως στραφεί κατά μια μικρή γωνία φ περί τον άξονα z .

Στο σημείο αυτό διατυπώνονται οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας. Για να γίνει αυτό θα πρέπει πρώτα να προσδιοριστούν οι αναπτυσσόμενες ροπές M_x, M_y, M_z κατά το σταθερό σύστημα αξόνων και M'_x, M'_y, M'_z κατά το κινητό σύστημα αξόνων που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας σε τυχαία διατομή mn όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχ. 4.5).

Έτσι για τις αναπτυσσόμενες ροπές M_x, M_y, M_z ισχύει:

$$M_x = \frac{P}{2} z \quad (4.2.1.1)$$

$$M_y = 0 \quad (4.2.1.2)$$

$$M_z = \frac{P}{2} (u - u_M) - \frac{P}{2} \varphi_0 d \quad (4.2.1.3)$$

Όπου, u_M είναι το βέλος στο μέσον της αμφιέριστης δοκού, φ_0 η γωνία στροφής της διατομής στο μέσο της αμφιέριστης δοκού και d η κατακόρυφη απόσταση από το κέντρο βάρους της διατομής (θετική από το κέντρο βάρους και πάνω) με $-\frac{h}{2} < d < \frac{h}{2}$.

Σημείωση:

Ο όρος $\varphi(z)d$ είναι μηδενικός, όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους, ενώ είναι θετικός στην περίπτωση που εφαρμόζεται στο άνω πέλμα της διατομής με αποτέλεσμα η Mz να αυξάνεται και κατά συνέπεια η τιμή του κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού να μειώνεται. Το αντίστροφο συμβαίνει όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κάτω πέλμα της διατομής.

Στην παραμορφωμένη κατάσταση λόγω πλευρικού λυγισμού, εφαρμόζοντας την συνθήκη ισορροπίας εξωτερικών-εσωτερικών δυνάμεων προκύπτει :

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{P}{2} z \quad (4.2.1.4)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{P}{2} z \varphi(z) \quad (4.2.1.5)$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = \frac{P}{2} (u - u_M - \varphi_0 d) - \frac{P}{2} z \frac{du}{dz} \quad (4.2.1.6)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (4.2.1.6) προκύπτει:

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = \frac{P}{2} \frac{du}{dz} - \frac{P}{2} \frac{du}{dz} - \frac{P}{2} z \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Σημείωση:

Η παράγωγος των σταθερών όρων $\frac{P}{2} u_M$ και $\frac{P}{2} \varphi_0 d$ ισούται με μηδέν.

Αντικαθιστώντας την έκφραση $\frac{d^2 u}{dz^2}$ από την εξίσωση 4.2.1.5 προκύπτει :

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = -\left(\frac{P}{2} z\right)^2 \frac{\varphi(z)}{EI_y} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \left(\frac{P}{2} z\right)^2 \frac{\varphi(z)}{EI_y EC_w} \quad (4.2.1.7)$$

Θέτοντας $\xi = \frac{z}{l}$ όπου ξ αδιάστατη μεταβλητή.

Γνωρίζοντας πως :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2\varphi}{dzd\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3\varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4} \frac{d^4\varphi}{d\xi^4}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση 4.2.1.7 προκύπτει :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^4} \frac{d^4\varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{1}{l^2} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} &= \left(\frac{P}{2} \right)^2 \xi^2 l^2 \frac{\varphi(z)}{EI_y EC_w} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{d^4\varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} l^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} &= \frac{P^2 l^6 \xi^2}{4EI_y EC_w} \end{aligned} \quad (4.2.1.8)$$

Θέτοντας : $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2$, $k^4 = \frac{P^2 l^6}{4EI_y EC_w}$ η 4.2.1.8 γίνεται :

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) = k^4 \xi^2 \varphi(\xi) \quad (4.2.1.9)$$

A. Προσέγγιση με την πολυωνυμική συνάρτηση.

Οι συνοριακές συνθήκες για την μισή δοκό, λόγω συμμετρίας είναι:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi''(0) &= 0 \\ \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ EC_w \varphi'''\left(\frac{1}{2}\right) - GJ \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{P}{2} l^3 \varphi_0 d \end{aligned}$$

Η τελευταία συνθήκη γίνεται μέσω της τρίτης :

$$\varphi'''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{Pl^3}{2EC_w} \varphi_0 d$$

Γίνεται χρήση της ακόλουθης συνάρτησης :

$$\varphi(\xi) = \alpha_4 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει :

$$\begin{aligned}\varphi'(\xi) &= 4\alpha_4 \xi^3 + 3\alpha_3 \xi^2 + 2\alpha_2 \xi + \alpha_1 \\ \varphi''(\xi) &= 12\alpha_4 \xi^2 + 6\alpha_3 \xi + 2\alpha_2 \\ \varphi'''(\xi) &= 24\alpha_4 \xi + 6\alpha_3 \\ \varphi''''(\xi) &= 24\alpha_4\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει :

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0 \rightarrow \alpha_0 = 0 \\ \varphi''(0) &= 0 \rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \varphi'''(\frac{1}{2}) &= 0 \rightarrow \alpha_3 = -2\alpha_4 \\ \varphi'(\frac{1}{2}) &= 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_4\end{aligned}$$

Παραδοχή:

Έστω ότι η τιμή του όρου $\frac{P}{2} l^3 \varphi_0 d$ ισούται με μηδέν
Επιστρέφοντας στην αρχική συνάρτηση προκύπτει :

$$\varphi(\xi) = \alpha_4 (\xi^4 - 2 \xi^3 + \xi)$$

$$\text{Για } \varphi(\frac{1}{2}) = \varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = 0,3125\alpha_4 \rightarrow \alpha_4 = 3,2\varphi_0$$

, όπου η γωνία φ_0 είναι η άγνωστη γωνία στροφής στο μέσον της δοκού.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της $\varphi(\xi)$ στην διαφορική εξίσωση(4.2.1.9) προκύπτει:

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) = 3,2 k^4 \varphi_0 (\xi^6 - 2 \xi^5 + \xi^3)$$

Με διπλή ολοκλήρωση :

$$\varphi'''(\xi) - \beta^2 \varphi'(\xi) = k^4 3,2 \varphi_0 (\frac{\xi^7}{7} - \frac{\xi^6}{3} + \frac{\xi^4}{4}) + C_1 \quad (4.2.1.10)$$

$$\varphi''(\xi) - \beta^2 \varphi(\xi) = k^4 3,2 \varphi_0 (\frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{21} + \frac{\xi^5}{20}) + C_1 \xi + C_2 \quad (4.2.1.11)$$

$$\text{Η 4.2.1.11 για } \xi=0 \text{ δίνει : } \varphi''(0) - \beta^2 \varphi(0) = 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$$

Η 4.2.1.10 για $\xi=1/2$ δίνει :

$$\varphi'''(\frac{1}{2}) - \beta^2 \varphi'(\frac{1}{2}) = 0,037 \varphi_0 k^4 + C_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow C_1 = -0,037 \varphi_0 k^4 - \frac{Pl^3}{2EC_w} \varphi_0 d$$

Επομένως επιστρέφοντας στην 4.2.1.11 προκύπτει :

$$\varphi''(\xi) = \beta^2 3,2 \varphi_0 (\xi^4 - 2 \xi^3 + \xi) + k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{21} + \frac{\xi^5}{20} - 0,0116 \xi \right) - \frac{Pl^3}{2EC_w} \varphi_0 d$$

Με διπλή ολοκλήρωση :

$$\varphi'(\xi) = \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) + k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^9}{504} - \frac{\xi^8}{168} + \frac{\xi^6}{120} - 0,0116 \frac{\xi^2}{2} \right) - \frac{Pl^3}{2EC_w} \varphi_0 d \frac{\xi^2}{2} + C_3 \quad (4.2.1.12)$$

$$\varphi(\xi) = \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^{10}}{5040} - \frac{\xi^9}{1512} + \frac{\xi^7}{840} - 0,0116 \frac{\xi^3}{6} \right) - \frac{Pl^3}{2EC_w} \varphi_0 d \frac{\xi^3}{6} + C_3 \xi + C_4 \quad (4.2.1.13)$$

Η 4.2.1.13 για $\xi=0$ δίνει :

$$\varphi''(0) - \beta^2 \varphi(0) = 0 + C_4 \rightarrow C_4 = 0$$

Η 4.2.1.12 για $\xi=1/2$ δίνει :

$$\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) - \beta^2 \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0,32 \varphi_0 \beta^2 - 0,0043 \varphi_0 k^4 - 0,125 \frac{Pl^3}{2EC_w} \varphi_0 d + C_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow C_3 = -0,32 \varphi_0 \beta^2 + 0,0043 \varphi_0 k^4 + 0,125 \frac{Pl^3}{2EC_w} \varphi_0 d$$

Επιστρέφοντας στην 4.2.1.13 προκύπτει :

$$\varphi(\xi) = \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - 0,1 \xi \right) + k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^{10}}{5040} - \frac{\xi^9}{1512} + \frac{\xi^7}{840} - 0,0116 \frac{\xi^3}{6} + 1,34 \cdot 10^{-3} \xi \right) - \frac{Pl^3}{2EC_w} \varphi_0 d \frac{\xi^3}{6} + 0,125 \frac{Pl^3}{2EC_w} \varphi_0 d \xi \quad (4.2.1.14)$$

Η 4.2.1.14 για $\xi = \frac{1}{2}$ δίνει :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^6}{30} - \frac{(0,5)^5}{10} + \frac{(0,5)^3}{6} - 0,1(0,5) \right) + k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^{10}}{5040} - \frac{(0,5)^9}{1512} + \frac{(0,5)^7}{840} - 0,0116 \frac{(0,5)^3}{6} + 1,34 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}(0,5) \right) + 0,041671 \frac{Pl^3}{2EC_w} \varphi_0 d \rightarrow$$

$$1 = -0,10167 \beta^2 + 0,001397 k^4 + 0,041671 \frac{Pl^3}{2EC_w} d \rightarrow$$

$$\rightarrow k^4 = 715,86 + 72,77 \beta^2 - 29,83 \frac{Pl^3}{2EC_w} d$$

Αντικαθιστώντας τα β^2, k^4 προκύπτει :

$$\frac{P^2 l^6}{4EI_y EC_w} = 72,77 \frac{GJ}{EC_w} l^2 + 715,86 - 29,83 \frac{Pl^3}{2EC_w} d$$

ή

$$P^2 = 288,88 \frac{GJEI_y}{l^4} + 2863,44 \frac{EI_y EC_w}{l^6} - 59,66 \frac{PEI_y}{l^3} d$$

$$P^2 + 59,66 \frac{PEI_y}{l^3} d = 288,88 \frac{GJEI_y}{l^4} + 2863,44 \frac{EI_y EC_w}{l^6}$$

$$(P + 29,83 \frac{EI_y}{l^3} d)^2 = 288,88 \frac{GJEI_y}{l^4} + 2863,44 \frac{EI_y EC_w}{l^6} + (29,83 \frac{EI_y}{l^3} d)^2$$

$$P_{cr} = \sqrt{288,88 \frac{GJEI_y}{l^4} + 2863,44 \frac{EI_y EC_w}{l^6} + (29,83 \frac{EI_y}{l^3} d)^2} - 29,83 \frac{EI_y}{l^3} d \quad (4.2.1.15)$$

Αν ληφθεί υπόψη πως :

$$M_{cr} = \frac{P_{cr}}{4} l$$

Τότε :

$$M_{cr} = \sqrt{18,055 \frac{GJEI_y}{l^2} + 178,965 \frac{EI_y EC_w}{l^4} + (1,864 \frac{EI_y}{l} d)^2} - 7,458 \frac{EI_y}{l^2} d \quad (4.2.1.16)$$

Όπου M_{cr} , είναι η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού.

B. Προσέγγιση με την ημιτονοειδή συνάρτηση.

Μία δεύτερη προσεγγιστική λύση για τη γωνία στροφής φ μπορεί να αναζητηθεί μέσω συναρτήσεως της μορφής:

$$\varphi(z) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad 0 \leq z \leq l$$

ή

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 \sin(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \text{ αφού τίθεται } \xi = \frac{\pi z}{l}$$

Εξετάζεται η μισή δοκός $0 \leq z \leq \frac{l}{2}$ λόγω συμμετρίας γεωμετρίας και φόρτισης, άρα οι συνοριακές συνθήκες που διέπουν το σύστημα στήριξης του φορέα είναι:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0 \\ \varphi''(0) &= 0 \\ \varphi'(\frac{1}{2}) &= 0 \\ EC_w \varphi'''(\frac{1}{2}) - GJ\varphi'(\frac{1}{2}) &= -\frac{P}{2}l^3\varphi_0 d\end{aligned}$$

Η τελευταία συνθήκη γίνεται μέσω της τρίτης :

$$\varphi'''(\frac{1}{2}) = -\frac{Pl^3}{2EC_w}\varphi_0 d$$

όπου: φ_0 είναι η γωνία στροφής στο μέσον της δοκού ($\xi = 1/2$), όταν αυτή εκτρέπεται πλευρικά.

$$\text{Τίθενται: } \beta^2 = \frac{GJ}{EC_w}l^2, \alpha = \frac{P^2l^6}{4EI_y EC_w}, \gamma = \frac{-Pl^3d}{2EC_w}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω προσεγγιστική συνάρτηση στην εξίσωση (4.2.1.9) προκύπτει ότι:

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2\varphi''(\xi) = \alpha\xi^2\varphi_0\sin(\pi\xi) \text{ για } (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4.2.1.17)$$

Ολοκληρώνοντας δύο φορές την παραπάνω εξίσωση:

$$\varphi'''(\xi) - \beta^2\varphi'(\xi) = -a\varphi_0\left(\frac{2\xi\sin(\pi\xi)}{\pi^2} - \frac{(\pi^2\xi^2-2)\cos(\pi\xi)}{\pi^3}\right) + C_1 \quad (4.2.1.18)$$

$$\varphi''(\xi) - \beta^2\varphi(\xi) = -a\varphi_0\left(-\frac{2\sin(\pi\xi)}{\pi} + \frac{(\pi^2\xi^2-4)\sin(\pi\xi)}{\pi} + 4\xi\cos(\pi\xi)\xi\right) + C_1\xi + C_2 \quad (4.2.1.19)$$

Η εξίσωση (4.3.1.19) για $\xi = 0$ δίνει:

$$C_2 = 0$$

Η εξίσωση (4.3.1.18) για $\xi = 1/2$ δίνει:

$$C_1 = \gamma\varphi_0 - \frac{a\varphi_0}{\pi^2}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των C_1, C_2 στην εξίσωση (4.3.1.19), η $\varphi(\xi)$ παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}\varphi''(\xi) &= \beta^2\varphi_0\sin(\pi\xi) - a\varphi_0\left(-\frac{2\sin(\pi\xi)}{\pi} + \frac{(\pi^2\xi^2-4)\sin(\pi\xi)}{\pi} + 4\xi\cos(\pi\xi)\xi\right) + \\ &+ \left(\gamma\varphi_0 - \frac{a\varphi_0}{\pi^2}\right)\xi\end{aligned} \quad (4.2.1.20)$$

Κάνοντας διπλή ολοκλήρωση στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) &= \varphi_0 \frac{\left(\frac{-\cos(\pi\xi)(-\pi^2 a\xi^2 + 8a + \pi^4 \beta^2)}{\pi} - \frac{1}{2}\pi^2 a\xi^2 - 6a\xi \sin(\pi\xi) \right)}{\pi^4} + \\ &\varphi_0 \frac{\left(\frac{-\cos(\pi\xi)4a}{\pi} + \frac{1}{2}\pi^4 \gamma \xi^2 \right)}{\pi^4} + C_3 \end{aligned} \quad (4.2.1.21)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi_0 \frac{\left(\frac{-2 \sin(\pi\xi)(-\pi^2 a\xi^2 + 14a + \pi^4 \beta^2)}{\pi} + \frac{1}{3}\pi^3 \xi^3 (\pi^2 \gamma - a) - 6a\xi \sin(\pi\xi) \right)}{2\pi^5} + \\ &+ \varphi_0 \frac{\left(\frac{-12a \sin(\pi\xi)}{\pi} + 16a\xi \cos(\pi\xi) \right)}{2\pi^5} + C_3 \xi + C_4 \end{aligned} \quad (4.2.1.22)$$

Η εξίσωση (4.2.1.22) για $\xi = 0$ δίνει:

$$C_4 = 0$$

Η εξίσωση (4.2.1.21) για $\xi = 1/2$ δίνει:

$$C_3 = \varphi_0 \frac{\left(\frac{-\pi^2 a}{8} - 3a + \frac{\pi^4 \gamma}{8} \right)}{\pi^4}$$

Αντικαθιστώντας σε αυτό το σημείο τις τιμές των C_3, C_4 στην εξίσωση (4.2.1.22), η $\varphi(\xi)$ λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi_0 \frac{\left(\frac{-2 \sin(\pi\xi)(-\pi^2 a\xi^2 + 14a + \pi^4 \beta^2)}{\pi} + \frac{1}{3}\pi^3 \xi^3 (\pi^2 \gamma - a) - 6a\xi \sin(\pi\xi) \right)}{2\pi^5} + \\ &\varphi_0 \frac{\left(\frac{-12a \sin(\pi\xi)}{\pi} + 16a\xi \cos(\pi\xi) \right)}{2\pi^5} + \varphi_0 \frac{\left(\frac{-\pi^2 a}{8} - 3a + \frac{\pi^4 \gamma}{8} \right)}{\pi^4} \xi \end{aligned} \quad (4.2.1.23)$$

Έχει προηγουμένως οριστεί ότι : $\varphi(1/2) = \varphi_0$, επομένως για $\xi = 1/2$ η (4.2.1.23) γίνεται :

$$\varphi(1/2) = \varphi_0$$

$$\rightarrow \frac{1((-480 + 42\pi^2 + \pi^4)\alpha + \pi^4(\pi^2 \gamma + 24\beta^2))}{24\pi^6} = 1$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2$, $\alpha = \frac{p^2 l^6}{4EI_y EC_w} \gamma = \frac{-pl^3 d}{2EC_w}$ προκύπτει :

$$\frac{1((-480+42\pi^2+\pi^4)(\frac{P^2 l^6}{4EI_y EC_w})+\pi^4(\pi^2(-\frac{Pl^3 d}{2EC_w})+24\frac{GJ}{EC_w}l^2)}{24\pi^6} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow P^2 = \frac{298,015 GJ EI_y}{l^4} - \frac{61,215 EI_y d}{l^3} P + \frac{2938,304 EI_y EC_w}{l^6} \rightarrow$$

$$(P + \frac{30,6075 EI_y d}{l^3})^2 = \frac{298,015 GJ EI_y}{l^4} + (\frac{30,6075 EI_y d}{l^3})^2 + \frac{2938,304 EI_y EC_w}{l^6} \rightarrow$$

$$P_{cr} = \sqrt{\frac{298,015 GJ EI_y}{l^4} + \frac{2938,304 EI_y EC_w}{l^6} + (\frac{30,6075 EI_y d}{l^3})^2} - \frac{30,6075 EI_y d}{l^3} \quad (4.2.1.24)$$

Αν ληφθεί υπόψη πως :

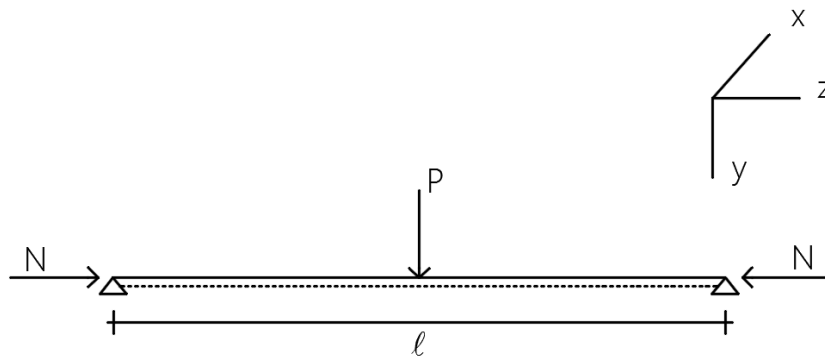
$$M_{cr} = \frac{P_{cr}}{4} l$$

Τότε :

$$M_{cr} = \sqrt{18,625 \frac{GJ EI_y}{l^2} + 1183,64 \frac{EI_y EC_w}{l^4} + (1,913 \frac{EI_y}{l} d)^2} - 7,65 \frac{EI_y}{l^2} d \quad (4.2.1.25)$$

Όπου M_{cr} , είναι η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού.

4.2.2 Με αξονική Δύναμη



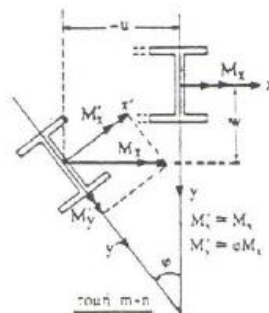
Σχήμα 4.5 Αμφιέρειστη δοκός με συγκεντρωμένο φορτίο P στο μέσον και αξονική δύναμη N.

Θεωρείται αμφιέρειστη δοκό διατομής I (Σχ. 4.5), η οποία καταπονείται από σταθερή αξονική δύναμη N και συγκεντρωμένο φορτίο P. Θεωρείται πως τα φορτία P και N εφαρμόζονται στο κέντρο βάρους της διατομής αυτής. Θα προσδιοριστεί η τιμή του κρίσιμου φορτίου πλευρικού λυγισμού για την οποία το επίπεδο κάμψεως zy παύει να είναι ευσταθές. Θα πρέπει να υποθεθεί, ότι κατά τη διάρκεια της κάμψεως, τα άκρα της δοκού (τα σημεία στήριξης) μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες x και y, με αδύνατη όμως στροφή περί τον κεντροβαρικό άξονα - κέντρο βάρους της διατομής z.

Το επίπεδο εξωτερικής φόρτισης της δοκού αυτής, το οποίο έχει τη μεγαλύτερη ακαμψία ($I_x > I_y$), ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα y και τον διαμήκη άξονα z (που περνάει από το κέντρο βάρους της διατομής). Για όσο το P αυξάνεται σταδιακά από το μηδέν και η N παραμένει σταθερή, ισχύουν οι εξής παραδοχές :

- A. Η γεωμετρία της διατομής δεν αλλάζει
- B. Κατά την κρίσιμη τιμή $M_0 = M_{cr}$, η οποία είναι μικρότερη από την ελαστική φέρουσα ικανότητα σε κάμψη της δοκού (ροπή διαρροής), η δοκός αναπτύσσει πλάγια κάμψη και συστροφή.

Η παραμορφωμένη κατάσταση της αρχικά τέλει δοκού ορίζεται από τις πλευρικές μετακινήσεις - εκτροπές w και u του κέντρου βάρους της διατομής αλλά και από τη γωνία στροφής αυτού (Σχ. 4.6).



Σχήμα 4.6 Τυχαία διατομή mn και δρώσες ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Στο σημείο αυτό διατυπώνονται οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας. Για να γίνει αυτό θα πρέπει πρώτα να προσδιοριστούν οι αναπτυσσόμενες ροπές κατά το σταθερό σύστημα αξόνων και κατά το κινητό σύστημα αξόνων που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας σε τυχαία διατομή μη όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα (Σχ. 4.6).

Για τις αναπτυσσόμενες ροπές M_x, M_y, M_z ισχύει :

$$M_x = \frac{P}{2}z, M_y = M_z = 0$$

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση στο στρεπτοκαμπτικό λυγισμό είναι:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} + Nw = -\frac{P}{2}z \quad (4.2.2.1)$$

$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} + Nu = \frac{P}{2}z \varphi \quad (4.2.2.2)$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = -\frac{P}{2}z u' \quad (4.2.2.3)$$

Η παραγωγή της (4.2.2.3) είναι ως προς z και EI_x, EI_y είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ακαμψία της δοκού αντιστοίχως.

Θέτοντας $\xi = \frac{z}{l}$ και $v = \frac{u}{l}$ όπου ξ και v αδιάστατες μεταβλητές.

Γνωρίζοντας πως :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2\varphi}{dz d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3\varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4} \frac{d^4\varphi}{d\xi^4}$$

H (4.2.2.2) γίνεται:

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + Nu = \frac{P}{2} z \varphi \rightarrow$$

$$EI_y \frac{1}{l^2} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + Nu = \frac{P}{2} \xi l \varphi \rightarrow EI_y \frac{1}{l^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2} + Nlv = \frac{P}{2} l \xi \varphi \rightarrow$$

$$v''(\xi) + \frac{Nl^2}{EI_y} v(\xi) = \frac{P}{2} \frac{l^2}{EI_y} \xi \varphi \quad (4.2.2.4)$$

Όμοια η (4.2.2.3) γίνεται:

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -\frac{P}{2} u' \rightarrow EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} - GJ \frac{d\varphi}{dz} = \frac{P}{2} u' \rightarrow$$

$$EC_w \frac{1}{l^3} \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3} - GJ \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{P}{2} \xi l \frac{du}{l d\xi} \rightarrow$$

$$\frac{EC_w}{l^3} \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3} - \frac{GJ}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{Pl}{2} \frac{dv}{d\xi} \rightarrow$$

$$\varphi'''(\xi) - \frac{GJl^2}{EC_w} \varphi'(\xi) = \frac{Pl^2}{2EI_y C_w} I_y l^2 v'(\xi) \quad (4.2.2.5)$$

$$\text{Τίθενται: } v = \frac{u}{l}, \xi = \frac{z}{l}, \beta^2 = \frac{Nl^2}{EI_y}, p = \frac{pl^2}{2EI_y}, \lambda^2 = \frac{GJl^2}{EC_w}, q^2 = \frac{I_y l^2}{C_w}$$

Οπότε οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται:

$$v''(\xi) + \beta^2 v(\xi) = p \xi \varphi \quad (4.2.2.6)$$

και

$$\varphi'''(\xi) - \lambda^2 \varphi'(\xi) = q^2 p \xi v'(\xi) \quad (4.2.2.7)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (4.2.2.1) είναι ανεξάρτητη, δηλαδή δε συνδέεται με τις υπόλοιπες. Αντιθέτως, με την επίλυση των (4.2.2.2), (4.2.2.3) λαμβάνονται οι συναρτήσεις της μετακίνησης u και της στροφής φ του κέντρου βάρους της διατομής και μάλιστα στην αδιαστατοποιημένη τους μορφή, σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.2.2.6), (4.2.2.7).

Αρχικά, επιλύεται η διαφορική εξίσωση $v''(\xi) + \beta^2 v(\xi) = p \xi \varphi$, χρησιμοποιώντας μία προσεγγιστική συνάρτηση για τη γωνία στροφής φ , η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, που διέπουν το σύστημα στήριξης του φορέα.

Θέτοντας:

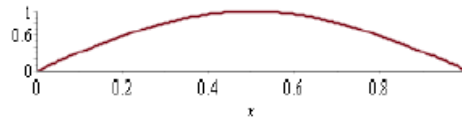
$$\varphi(z) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad 0 \leq z \leq l$$

ή

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 \sin(\pi \xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \text{ αφού τίθεται } \xi = \frac{z}{l}$$

Φαίνεται από το διάγραμμα (Σχ. 4.7) του $\sin(\pi x)$, που ακολουθεί ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες στήριξης της δοκού.

`plot(sin(pi*x), x=0..1)`



Σχήμα 4.7 Διάγραμμα $\sin(\pi x)$ στο διάστημα $[0,1]$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι: $\varphi(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi''(1) = 0$, $\varphi'(1/2) = 0$, οι οποίες ικανοποιούνται από τη συνάρτηση $\sin(\pi x)$ σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα.

Η πολυπλοκότητα της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης έχει σαν αποτέλεσμα την αναγκαιότητα αντικατάστασης του $\sin(\pi x)$ με σειρά "Maclaurin", Maclaurin 18^{ος} αιώνας, όπου:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \text{ για όλα τα } x.$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \text{ για όλα τα } x.$$

Αν γίνει χρήση μόνο των δύο πρώτων όρων κάθε έκφρασης (για να μειωθεί ο βαθμός του πολυωνύμου) θα υπάρχει ικανοποιητική προσέγγιση καθώς το σφάλμα προσέγγισης δεν είναι πάνω από $\frac{x^5}{5!}$ για την $\sin(x)$ και $\frac{x^4}{4!}$ για την $\cos(x)$.

Συνοψίζοντας η εξίσωση που πρέπει να επιλυθεί είναι η ακόλουθη :

$$v''(\xi) + \beta^2 v(\xi) = \varphi_0 p \left(\pi \xi^2 - \frac{\pi^3 \xi^4}{6} \right) \sin(\pi \xi)$$

Για την επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, θα γίνει χρήση του μαθηματικού εργαλείου Maple της Maplesoft. Έτσι λοιπόν, λαμβάνεται η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, ως εξής:

Κείμενο Μαθηματικό Σχεδίο Διάγραμμα Κίνηση

2D Math Times New Roman 12 B I U \equiv \equiv \equiv \equiv \equiv \equiv

$$ode := h'(x) + n^2 \cdot h(x) = w \cdot p \left(\pi x^2 - \frac{\pi^3 x^4}{6} \right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} h(x) + n^2 h(x) = w p \left(\pi x^2 - \frac{1}{6} \pi^3 x^4 \right)$$

`solve(ode)`

$$h(x) = \sin(nx) _C2 + \cos(nx) _C1 - \frac{1}{6} \frac{w p \pi (n^4 \pi^2 x^4 - 6 n^4 x^2 - 12 n^2 \pi^2 x^2 + 12 n^2 + 24 \pi^2)}{n^6}$$

Η γενική λύση λοιπόν που προκύπτει από το πρόγραμμα είναι:

$$v(\xi) = C_2 \sin(\beta\xi) + C_1 \cos(\beta\xi) - \frac{1}{6} \frac{\varphi_0 r \pi (\beta^4 \pi^2 \xi^4 - 6\beta^4 \xi^2 - 12\beta^2 \pi^2 \xi^2 + 12\beta^2 + 24\pi^2)}{\beta^6}$$

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι στις στηρίξεις (στα άκρα της δοκού) δεν επιτρέπεται καμία μετακίνηση κατά τους άξονες x και y παρά μόνο στροφή περί τον άξονα z, μπορεί να γίνει χρήση των συνοριακών συνθηκών $v(0)=v(1)=0$ και να υπολογιστούν οι σταθερές ολοκλήρωσης C1 και C2.

ans1 := dsolve({ode1, h(0)=0, h(1)=0})

$$h(x) = -\frac{1}{6} \frac{\sin(nx) \operatorname{wp}\pi(-n^4 \pi^2 + 6n^4 + 12n^2 \pi^2 + 12 \cos(n) n^2 + 24 \cos(n) \pi^2 - 12n^2 - 24\pi^2)}{\sin(n) n^6} + \frac{2 \cos(nx) \operatorname{wp}\pi(n^2 + 2\pi^2)}{n^6} - \frac{1}{6} \frac{\operatorname{wp}\pi(n^4 \pi^2 x^4 - 6n^4 x^2 - 12n^2 \pi^2 x^2 + 12n^2 + 24\pi^2)}{n^6}$$

Προκύπτει η ακόλουθη λύση :

$$v(\xi) = -\frac{1}{6} \frac{\sin(\beta\xi) \varphi_0 r \pi (-\beta^4 \pi^2 + 6\beta^4 + 12\beta^2 \pi^2 - 12\beta^2 - 24\pi^2)}{\sin(\beta) \beta^6} + \frac{2 \cos(\beta\xi) \varphi_0 r \pi (\beta^2 + 2\pi^2)}{\beta^6} - \frac{1}{6} \frac{\varphi_0 r \pi (\beta^4 \pi^2 \xi^4 - 6\beta^4 \xi^2 - 12\beta^2 \pi^2 \xi^2 + 12\beta^2 + 24\pi^2)}{\beta^6}$$

Κάνοντας χρήση των σειρών Maclaurin και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει :

$$\sin(\beta\xi) = \beta\xi - \frac{(\beta\xi)^3}{3!}$$

και

$$\cos(\beta\xi) = 1 - \frac{(\beta\xi)^2}{2!}$$

$$v(\xi) = -\frac{1}{6} \frac{(\beta\xi - \frac{(\beta\xi)^3}{3!}) \varphi_0 r \pi (-\beta^4 \pi^2 + 6\beta^4 + 12\beta^2 \pi^2 - 12\beta^2 - 24\pi^2)}{\sin(\beta) \beta^6} + \frac{2(1 - \frac{(\beta\xi)^2}{2!}) \varphi_0 r \pi (\beta^2 + 2\pi^2)}{\beta^6} - \frac{1}{6} \frac{\varphi_0 r \pi (\beta^4 \pi^2 \xi^4 - 6\beta^4 \xi^2 - 12\beta^2 \pi^2 \xi^2 + 12\beta^2 + 24\pi^2)}{\beta^6}$$

Παραγωγίζοντας μία φορά την παραπάνω λύση της διαφορικής εξίσωσης προκύπτει :

$$v'(\xi) = -\frac{1}{6} \frac{(\beta - \frac{1\beta^3 \xi^2}{2}) \varphi_0 r \pi (-\beta^4 \pi^2 + 6\beta^4 + 12\beta^2 \pi^2 + 12 \cos(\beta) \beta^2 + 24 \cos(\beta) \pi^2 - 12\beta^2 - 24\pi^2)}{\sin(\beta) \beta^6} - \frac{2\xi \varphi_0 r \pi (\beta^2 + 2\pi^2)}{\beta^6} - \frac{1}{6} \frac{\varphi_0 r \pi (4\beta^4 \pi^2 \xi^3 - 12\beta^4 \xi - 24\beta^2 \pi^2 \xi)}{\beta^6}$$

Απλοποιώντας την έκφραση μέσω του maple προκύπτει :

$$f(x) = \frac{1}{12} \frac{1}{n^5 \sin(n)} (w p \pi (-\pi^2 n^6 x^2 - 8 \pi^2 \sin(n) n^3 x^3 + 12 \pi^2 n^4 x^2 + 6 n^6 x^2 + 24 \pi^2 \cos(n) n^2 x^2 + 12 \cos(n) n^4 x^2 + 2 n^4 \pi^2 - 24 n^2 \pi^2 x^2 - 12 n^4 x^2 - 24 n^2 \pi^2 - 12 n^4 - 48 \cos(n) \pi^2 - 24 \cos(n) n^2 + 48 \pi^2 + 24 n^2))$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της $v'(\xi)$ στην αρχική εξίσωση προκύπτει :

$$\begin{aligned} \varphi''''(\xi) - \lambda^2 \varphi'(\xi) &= q^2 p \xi \frac{1}{12 \beta^5 \sin(\beta)} (\varphi_0 p \pi (-\beta^6 \pi^2 \xi^2 - 8 \pi^2 \sin(\beta) \beta^3 \xi^3 + \\ &+ 12 \pi^2 \beta^4 \xi^2 + 6 \beta^6 \xi^2 + 24 \pi^2 \cos(\beta) \beta^2 \xi^2 + 2 \beta^4 \pi^2 - 24 \pi^2 \beta^2 \xi^2 - 12 \beta^4 \xi^2 - 24 \pi^2 \beta^2 - \\ &12 \beta^4 - 48 \pi^2 \cos(\beta) - 24 \cos(\beta) \beta^2 + 48 \pi^2 + 24 \beta^2) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, κάνοντας χρήση των μεταβλητών f, x, l , αντί των μεταβλητών φ, ξ, λ αντίστοιχα, προχωράμε στην εξαγωγή της γενικής λύσης της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης μέσω του Maple 17

$$\begin{aligned} ode2 := f''(x) - l^2 f(x) &= p \cdot q^2 \cdot x \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n^5 \cdot \sin(n)} \cdot (w \cdot p \cdot \pi \cdot (-\pi^2 \cdot n^6 \cdot x^2 - 8 \cdot \pi^2 \cdot \sin(n) \cdot n^3 \cdot x^3 + 12 \cdot \pi^2 \cdot n^4 \cdot x^2 + 6 \cdot n^6 \cdot x^2 + 24 \cdot \pi^2 \cdot \cos(n) \cdot n^2 \cdot x^2 + 12 \cdot \cos(n) \cdot n^4 \cdot x^2 + 2 \\ &\cdot n^4 \cdot x^2 - 24 \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot x^2 - 12 \cdot n^4 \cdot x^2 - 24 \cdot n^2 \cdot \pi^2 - 12 \cdot n^4 - 48 \cdot \cos(n) \cdot \pi^2 - 24 \cdot \cos(n) \cdot n^2 + 48 \cdot \pi^2 + 24 \cdot n^2)) \\ \frac{d^3}{dx^3} f(x) - l^2 \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) &= \frac{1}{12} \frac{1}{n^5 \sin(n)} (p^2 q^2 x w \pi (-\pi^2 n^6 x^2 - 8 \pi^2 \sin(n) n^3 x^3 + 12 \pi^2 n^4 x^2 + 6 n^6 x^2 + 24 \pi^2 \cos(n) n^2 x^2 + 12 \cos(n) n^4 x^2 - 10 n^4 x^2 \\ &- 24 n^2 \pi^2 x^2 - 24 n^2 \pi^2 - 12 n^4 - 48 \cos(n) \pi^2 - 24 \cos(n) n^2 + 48 \pi^2 + 24 n^2)) \end{aligned}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης. Επίσης φαίνονται οι αναμενόμενες σταθερές ολοκλήρωσης, οι οποίες θα προσδιοριστούν στη συνέχεια με τη χρήση των συνοριακών συνθηκών στήριξης που ισχύουν για το συγκεκριμένο στατικό σύστημα. Οι συνοριακές συνθήκες αναφέρθηκαν παραπάνω.

$$\begin{aligned} ans2 := \text{solve}(ode2) \\ f(x) = \left[\left(-\frac{1}{24} \frac{1}{n^5 \sin(n)} \left(-24 e^{lx} _C2 n^5 l \sin(n) - 24 e^{-lx} _C1 n^5 l \sin(n) - p^2 q^2 w \left(\int e^{-lx} x \pi (-\pi^2 n^6 x^2 - 8 \pi^2 \sin(n) n^3 x^3 + 12 \pi^2 n^4 x^2 + 6 n^6 x^2 \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 24 \pi^2 \cos(n) n^2 x^2 + 12 \cos(n) n^4 x^2 - 10 n^4 x^2 - 24 n^2 \pi^2 x^2 - 24 n^2 \pi^2 - 12 n^4 - 48 \cos(n) \pi^2 - 24 \cos(n) n^2 + 48 \pi^2 + 24 n^2 \right) dx \right) e^{lx} + e^{-lx} p^2 q^2 w \left(\int e^{lx} x \pi (-\pi^2 n^6 x^2 - 8 \pi^2 \sin(n) n^3 x^3 + 12 \pi^2 n^4 x^2 + 6 n^6 x^2 + 24 \pi^2 \cos(n) n^2 x^2 + 12 \cos(n) n^4 x^2 - 10 n^4 x^2 - 24 n^2 \pi^2 x^2 - 24 n^2 \pi^2 - 12 n^4 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 48 \cos(n) \pi^2 - 24 \cos(n) n^2 + 48 \pi^2 + 24 n^2 \right) dx \right) \right] + _C3 \end{aligned}$$

Δηλαδή :

$$\varphi(\xi) = \int \left(-\frac{1}{24} \frac{1}{\beta^5 \lambda \sin(\beta)} \dots \right) d\xi + C_3$$

Με απλοποίηση της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει :

$$\varphi(\xi) = \int \left(-\frac{1}{24} \frac{1}{\beta^5 \lambda \sin(\beta)} (-24e^{\lambda\xi} C_2 \beta^5 \lambda \sin(\beta) - 24e^{-\lambda\xi} C_1 \beta^5 \lambda \sin(\beta) + \right. \\ \left. + p^2 q^2 \varphi_0 (-e^{\lambda\xi} I_1 + e^{-\lambda\xi} I_2) \right) d\xi + C_3$$

όπου :

$$I_1 = \int e^{-\lambda\xi} (-\pi^3 \beta^6 \xi^3 - 8\pi^3 \sin(\beta) \beta^3 \xi^4 + 12\pi^3 \beta^4 \xi^3 + 6\pi \beta^6 \xi^3 + 24\pi^3 \cos(\beta) \beta^2 \xi^3 + \\ + 12\pi \cos(\beta) \beta^4 \xi^3 - 10\pi \beta^4 \xi^3 - 24\pi^3 \beta^2 \xi^3 - 12\pi \beta^4 \xi - 48\pi^3 \cos(\beta) \xi - 24\pi \cos(\beta) \beta^2 \xi + \\ + 48\pi^3 \xi + 24\pi \beta^2 \xi) d\xi = \int e^{-\lambda\xi} \Pi(\xi) d\xi$$

$$\text{Με } \Pi(\xi) = -\pi^3 \beta^6 \xi^3 - 8\pi^3 \sin(\beta) \beta^3 \xi^4 + 12\pi^3 \beta^4 \xi^3 + 6\pi \beta^6 \xi^3 + 24\pi^3 \cos(\beta) \beta^2 \xi^3 + \\ + 12\pi \cos(\beta) \beta^4 \xi^3 - 10\pi \beta^4 \xi^3 - 24\pi^3 \beta^2 \xi^3 - 12\pi \beta^4 \xi - 48\pi^3 \cos(\beta) \xi - 24\pi \cos(\beta) \beta^2 \xi + \\ + 48\pi^3 \xi + 24\pi \beta^2 \xi$$

Επομένως :

$$I_1 = \int e^{-\lambda\xi} \Pi(\xi) d\xi = -\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) + \int \left(\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi'(\xi) \right) d\xi = -\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) \\ + \int \left(\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi''(\xi) \right) d\xi = -\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) + \int \left(\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi'''(\xi) \right) d\xi = \\ = -\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) + \int \left(\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^4} \Pi''''(\xi) \right) d\xi = \\ = -\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) + \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda^5} 192\pi^3 \sin(\beta) \beta^3$$

Επιπλέον

$$I_2 = \int e^{\lambda\xi} (-\pi^3 \beta^6 \xi^3 - 8\pi^3 \sin(\beta) \beta^3 \xi^4 + 12\pi^3 \beta^4 \xi^3 + 6\pi \beta^6 \xi^3 + 24\pi^3 \cos(\beta) \beta^2 \xi^3 + \\ + 12\pi \cos(\beta) \beta^4 \xi^3 - 10\pi \beta^4 \xi^3 - 24\pi^3 \beta^2 \xi^3 - 12\pi \beta^4 \xi - 48\pi^3 \cos(\beta) \xi - 24\pi \cos(\beta) \beta^2 \xi + \\ + 48\pi^3 \xi + 24\pi \beta^2 \xi) d\xi = \int e^{\lambda\xi} \Pi(\xi) d\xi$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int e^{\lambda\xi} \Pi(\xi) d\xi = \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \int \left(\frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda} \Pi'(\xi) \right) d\xi = \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \\
 &+ \int \left(\frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi''(\xi) \right) d\xi = \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) + \int \left(\frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi'''(\xi) \right) d\xi = \\
 &= \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) + \int \left(\frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^4} \Pi''''(\xi) \right) d\xi = \\
 &= \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) - \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^5} 192\pi^3 \sin(\beta) \beta^3
 \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έχουμε :

$$-I_1 e^{\lambda\xi} = \frac{1}{\lambda} \Pi(\xi) + \frac{1}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \frac{1}{\lambda^3} \Pi''(\xi) + \frac{1}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) - \frac{1}{\lambda^5} 192\pi^3 \sin(\beta) \beta^3$$

και

$$I_2 e^{-\lambda\xi} = \frac{1}{\lambda} \Pi(\xi) - \frac{1}{\lambda^2} \Pi'(\xi) + \frac{1}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{1}{\lambda^4} \Pi'''(\xi) - \frac{1}{\lambda^5} 192\pi^3 \sin(\beta) \beta^3$$

Επομένως :

$$-I_1 e^{\lambda\xi} + I_2 e^{-\lambda\xi} = \frac{2}{\lambda} \Pi(\xi) + \frac{2}{\lambda^3} \Pi''(\xi) - \frac{1}{\lambda^5} 384\pi^3 \sin(\beta) \beta^3$$

Όπου:

$$\begin{aligned}
 \Pi''(\xi) &= -6\pi^3 \beta^6 \xi^3 - 96\pi^3 \sin(\beta) \beta^3 \xi^2 + 72\pi^3 \beta^4 \xi + 36\pi \beta^6 \xi + 144\pi^3 \cos(\beta) \beta^2 \xi^2 + \\
 &+ 75\pi \cos(\beta) \beta^4 \xi - 60\pi \beta^4 \xi - 144\pi^3 \beta^2 \xi
 \end{aligned}$$

Τελικά :

$$\begin{aligned}
 \varphi(\xi) &= \int \left(-\frac{1}{24 \beta^5 \lambda \sin(\beta)} (-24e^{\lambda\xi} C_2 \beta^5 \lambda \sin(\beta) - 24e^{-\lambda\xi} C_1 \beta^5 \lambda \sin(\beta) + \right. \\
 &+ p^2 q^2 \varphi_0 (-e^{\lambda\xi} I_1 + e^{-\lambda\xi} I_2) \left. \right) d\xi + C_3 = \\
 &= \int \left(-\frac{1}{24 \beta^5 \lambda \sin(\beta)} (-24e^{\lambda\xi} C_2 \beta^5 \lambda \sin(\beta) - 24e^{-\lambda\xi} C_1 \beta^5 \lambda \sin(\beta) + \right. \\
 &+ p^2 q^2 \varphi_0 \left(\frac{2}{\lambda} (-\pi^3 \beta^6 \xi^3 - 8\pi^3 \sin(\beta) \beta^3 \xi^4 + 12\pi^3 \beta^4 \xi^3 + 6\pi \beta^6 \xi^3 + 24\pi^3 \cos(\beta) \beta^2 \xi^3 + \right. \\
 &+ 12\pi \cos(\beta) \beta^4 \xi^3 - 10\pi \beta^4 \xi^3 - 24\pi^3 \beta^2 \xi^3 - 12\pi \beta^4 \xi - 48\pi^3 \cos(\beta) \xi - 24\pi \cos(\beta) \beta^2 \xi
 \end{aligned}$$

$$+48\pi^3\xi + 24\pi\beta^2\xi) + \frac{2}{\lambda^3}(-6\pi^3\beta^6\xi^3 - 96\pi^3\sin(\beta)\beta^3\xi^2 + 72\pi^3\beta^4\xi + 36\pi\beta^6\xi + \\ +144\pi^3\cos(\beta)\beta^2\xi^2 + 75\pi\cos(\beta)\beta^4\xi - 60\pi\beta^4\xi - 144\pi^3\beta^2\xi) - \frac{1}{\lambda^5}384\pi^3\sin(\beta)\beta^3))d\xi$$

Η τελική μορφή που παίρνει η συνάρτηση της γωνίας στροφής $\varphi(\xi)$ της διατομής (I), που μελετάται κατά τον πλευρικό λυγισμό για τον συγκεκριμένο στατικό σύστημα στήριξη δοκού-φόρτιση, είναι:

$$\varphi(\xi) = C_2 \frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda} - C_1 \frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda} - \frac{p^2q^2\varphi_0}{24\beta^5\lambda\sin(\beta)} \left[\frac{-16\pi^3\beta^3\sin(\beta)}{5\lambda}\xi^5 + \left(-\frac{\pi^3\beta^6}{2\lambda} + \frac{6\pi^3\beta^4}{\lambda} + \frac{3\pi\beta^6}{\lambda} + \frac{12\pi^3\cos(\beta)\beta^2}{\lambda} + \frac{6\pi\cos(\beta)\beta^2}{\lambda} + \frac{6\pi\cos(\beta)\beta^4}{\lambda} - \frac{5\pi\beta^4}{\lambda} - \frac{12\pi^3\beta^2}{\lambda} \right) \xi^4 + \left(-\frac{64\pi^3\beta\sin(\beta)}{\lambda^3} \right) \xi^3 + \left(-\frac{24\pi^3\beta^2}{\lambda} - \frac{12\pi\beta^4}{\lambda} - \frac{48\pi^3\cos(\beta)}{\lambda} - \frac{24\pi\cos(\beta)\beta}{\lambda} + \frac{48\pi^3}{\lambda} + \frac{24\pi\beta^2}{\lambda} + \frac{72\pi^3\beta^4}{\lambda^3} + \frac{32\pi^6}{\lambda^3} + \frac{144\pi^3\cos(\beta)\beta^2}{\lambda^3} - \frac{6\pi^3\beta^6}{\lambda^3} + \frac{72\pi\cos(\beta)\beta^4}{\lambda^3} - \frac{60\pi\beta^4}{\lambda^3} - \frac{144\pi^3\beta^2}{\lambda^3} \right) \xi^2 - \frac{1}{\lambda^5}384\pi^3\sin(\beta)\beta^3\xi \right] + C_3$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, προκύπτουν τρεις σταθερές ολοκλήρωσης. Ο προσδιορισμός των σταθερών αυτών γίνεται αξιοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες στήριξης. Παρακάτω θα γίνει χρήση των εξής συνθηκών:

- i. $\varphi(0) = 0$
- ii. $\varphi''(0) = 0$
- iii. Μετά από διπλή παραγωγή της παραπάνω εξίσωσης, κάνοντας χρήση ότι

$$\varphi''(1) = u''(1) = 0 \rightarrow \varphi''''(1) = 0$$

Οπότε :

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow C_2 \frac{1}{\lambda} - C_1 \frac{1}{\lambda} = -C_3 \rightarrow C_2 - C_1 = -C_3\lambda$$

$$\varphi''(0) = 0 \rightarrow C_2\lambda - C_1\lambda = \frac{p^2q^2\varphi_0}{24\beta^5\lambda\sin(\beta)} \left(\frac{48\pi^3\beta^2}{\lambda} + \frac{24\pi\beta^4}{\lambda} + \frac{96\pi^3\cos(\beta)}{\lambda} + \frac{48\pi\cos(\beta)\beta}{\lambda} - \frac{96\pi^3}{\lambda} - \frac{48\pi\beta^2}{\lambda} - \frac{144\pi^3\beta^4}{\lambda^3} - \frac{64\pi^6}{\lambda^3} - \frac{288\pi^3\cos(\beta)\beta^2}{\lambda^3} + \frac{12\pi^3\beta^6}{\lambda^3} - \frac{144\pi\cos(\beta)\beta^4}{\lambda^3} + \frac{120\pi\beta^4}{\lambda^3} + \frac{288\pi^3\beta^2}{\lambda^3} \right) \rightarrow$$

$$C_3 = \frac{p^2q^2\varphi_0}{\sin(\beta)} \left(-\frac{2\pi^3}{\lambda^4\beta^3} - \frac{\pi}{\lambda^4\beta} - \frac{4\pi^3\cos(\beta)}{\lambda^4\beta^5} - \frac{2\pi\cos(\beta)}{\lambda^4\beta^4} + \frac{4\pi^3}{\beta^5\lambda^4} + \frac{2\pi}{\beta^3\lambda^4} + \frac{6\pi^3}{\beta\lambda^6} + \frac{16\pi^6}{6\beta^5\lambda^6} + \frac{12\pi^3\cos(\beta)}{\beta^3\lambda^6} - \frac{\pi^3\beta}{2\lambda^6} + \frac{6\pi\cos(\beta)}{\beta\lambda^3} - \frac{5\pi}{\beta\lambda^6} - \frac{12\pi^3}{\beta^3\lambda^6} \right)$$

$$\varphi''''(1) = 0 \rightarrow \lambda^3 e^\lambda C_2 - \lambda^3 e^{-\lambda} C_1 + \frac{p^2 q^2 \varphi_0 16\pi^3}{\beta^2 \lambda^2} - \frac{p^2 q^2 \varphi_0}{24\beta^5 \lambda \sin(\beta)} \left(-\frac{12\pi^3 \beta^6}{\lambda} + \frac{144\pi^3 \beta^4}{\lambda} + \right. \\ \left. + \frac{72\pi \beta^6}{\lambda} + \frac{144\pi \cos(\beta) \beta^4}{\lambda} - \frac{120\pi \beta^4}{\lambda} - \frac{288\pi^3 \beta^2}{\lambda} \right) = 0 \rightarrow$$

$$\lambda^3 e^\lambda C_2 - \lambda^3 e^{-\lambda} C_1 + A = 0 \rightarrow C_2 = e^{-2\lambda} C_1 - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^3} A$$

Σημειώνεται πως η χρήση της μεταβλητής A είναι ισοδύναμη με τη χρήση της παράστασης :

$$A(p^2, q, \varphi_0, \lambda, \beta) = \frac{p^2 q^2 \varphi_0 16\pi^3}{\beta^2 \lambda^2} - \frac{p^2 q^2 \varphi_0}{24\beta^5 \lambda \sin(\beta)} \left(-\frac{12\pi^3 \beta^6}{\lambda} + \frac{144\pi^3 \beta^4}{\lambda} + \frac{72\pi \beta^6}{\lambda} + \right. \\ \left. \frac{144\pi \cos(\beta) \beta^4}{\lambda} - \frac{120\pi \beta^4}{\lambda} - \frac{288\pi^3 \beta^2}{\lambda} \right)$$

Έτσι, προσδιορίζονται οι σταθερές C_1, C_2 επιλύοντας το εξής σύστημα των εξισώσεων που προέκυψαν παραπάνω :

$$C_2 - C_1 = -C_3 \lambda$$

$$C_2 = e^{-2\lambda} C_1 - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^3} A$$

Όπου οι σταθερές A και C_3 έχουν ήδη προσδιοριστεί.

Από την επίλυση του συστήματος προκύπτει :

$$C_1 = \frac{1}{(e^{-2\lambda} - 1)} (-\lambda C_3 + \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^3} A)$$

$$C_2 = -\frac{e^{-2\lambda}}{(e^{-2\lambda} - 1)} \lambda C_3 + \frac{e^{-\lambda}}{(e^{-2\lambda} - 1) \lambda^3} A$$

Με αυτόν τον τρόπο έχει οριστεί πλήρως η συνάρτηση $\varphi(\xi)$ της γωνίας στροφής της διατομής I σε όλες τις θέσεις ξ της αμφιέρειστης δοκού.

Αναζητείται η κρίσιμη εξίσωση πλευρικού λυγισμού για το εν λόγω στατικό σύστημα που εξετάζεται στην εφαρμογή που μελετάται. Προφανώς, το κρισιμότερο σημείο της αμφιέρειστης δοκού, μήκους l, είναι στο μέσον της δοκού. Επομένως, για $\xi=1/2$ η γωνία στροφής της διατομής στο μέσον της δοκού είναι:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = C_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - C_1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - \frac{p^2 q^2 \varphi_0}{24\beta^5 \lambda \sin(\beta)} \left(-3,1 \frac{\beta^3 \sin(\beta)}{\lambda} - 0,97 \frac{\beta^6}{\lambda} + 11,62 \frac{\beta^4}{\lambda} + 0,59 \frac{\beta^6}{\lambda} + \right. \\ \left. + 23,25 \frac{\cos(\beta) \beta^2}{\lambda} + 1,18 \frac{\cos(\beta) \beta^4}{\lambda} - 0,98 \frac{\beta^4}{\lambda} - 23,25 \frac{\beta^2}{\lambda} - 248,1 \frac{\beta \sin(\beta)}{\lambda^3} - 186,04 \frac{\beta^2}{\lambda} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -9,42 \frac{\beta^4}{\lambda} - 372,1 \frac{\cos(\beta)}{\lambda} - 18,85 \frac{\cos(\beta)\beta}{\lambda} + \frac{372,1}{\lambda} + 18,85 \frac{\beta^2}{\lambda} + 558,1 \frac{\beta^4}{\lambda^3} + \frac{7691,1}{\lambda^3} + \\
& + 1116,2 \frac{\cos(\beta)\beta^2}{\lambda^3} - 46,51 \frac{\beta^6}{\lambda^3} + 56,55 \frac{\cos(\beta)\beta^4}{\lambda^3} - 47,12 \frac{\beta^4}{\lambda^3} - 1116,22 \frac{\beta^2}{\lambda^3} - \\
& - \frac{1}{\lambda^5} 5953,21 \sin(\beta) \beta^3) + C_3 \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0 = & C_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - C_1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - \frac{p^2 q^2 \varphi_0}{24 \beta^5 \lambda \sin(\beta)} \left[-(3,1\lambda^4 + 5953,21) \frac{\beta^3 \sin(\beta)}{\lambda^5} + (-0,38\lambda^2 - \right. \\
& 46,51) \frac{\beta^6}{\lambda^3} + (23,25\lambda^2 + 1116,2) \frac{\cos(\beta)\beta^2}{\lambda^3} + (1,22\lambda^2 + 511) \frac{\beta^4}{\lambda^3} + (1,18\lambda^2 + \\
& 56,55) \frac{\cos(\beta)\beta^4}{\lambda^3} - (190,44\lambda^2 + 1116,22) \frac{\beta^2}{\lambda^3} + (372,10\lambda^2 + 7961,1) \frac{1}{\lambda^3} - (372,1 + \\
& \left. 18,85\beta) \frac{\cos(\beta)}{\lambda} - 248,1 \frac{\sin(\beta)\beta}{\lambda^3} \right] + C_3
\end{aligned}$$

Η κρίσιμη αδιαστατοποιημένη εξίσωση πλευρικού λυγισμού είναι :

$$\begin{aligned}
1 = & \Gamma_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - \Gamma_1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - \frac{p^2 q^2}{24 \beta^5 \lambda \sin(\beta)} \left[-(3,1\lambda^4 + 5953,21) \frac{\beta^3 \sin(\beta)}{\lambda^5} + (-0,38\lambda^2 - \right. \\
& 46,51) \frac{\beta^6}{\lambda^3} + (23,25\lambda^2 + 1116,2) \frac{\cos(\beta)\beta^2}{\lambda^3} + (1,22\lambda^2 + 511) \frac{\beta^4}{\lambda^3} + (1,18\lambda^2 + \\
& 56,55) \frac{\cos(\beta)\beta^4}{\lambda^3} - (190,44\lambda^2 + 1116,22) \frac{\beta^2}{\lambda^3} + (372,10\lambda^2 + 7961,1) \frac{1}{\lambda^3} - \\
& \left. -(372,1 + 18,85\beta) \frac{\cos(\beta)}{\lambda} - 248,1 \frac{\sin(\beta)\beta}{\lambda^3} \right] + \Gamma_3
\end{aligned}$$

Όπου :

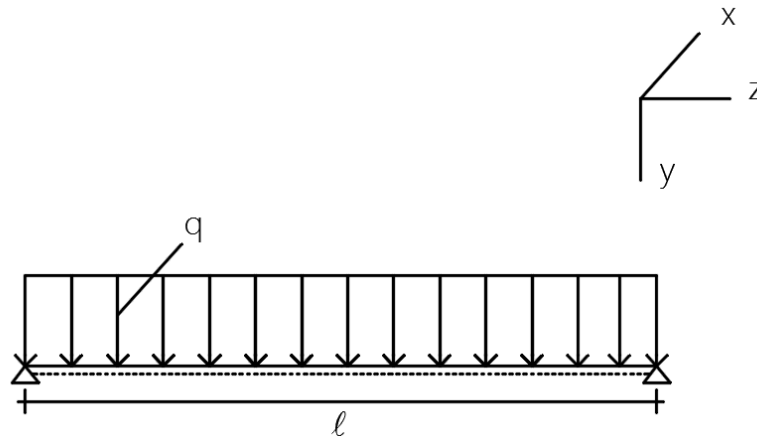
$$\Gamma_1 = \frac{C_1}{\varphi_0}, \Gamma_2 = \frac{C_2}{\varphi_0}, \Gamma_3 = \frac{C_3}{\varphi_0}$$

Η παραπάνω εξίσωση, περιγράφει τη σχέση που συνδέει την τιμή του συγκεντρωμένου φορτίου P με την αντίστοιχη ταυτόχρονη τιμή της αξονικής δύναμης που δρά στο φορέα, για τα οποία υπάρχει πλευρική εκτροπή. Στο Κεφάλαιο 5 θα γίνει αριθμητική εφαρμογή της παραπάνω εξίσωσης για συγκεκριμένη διατομή και μήκος φορέα, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από την προσομοίωση του στατικού συστήματος αυτού στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων Adina και Abaqus. Παρόλο που η εξίσωση αυτή θα μπορούσε να απλοποιηθεί περαιτέρω, κρίνεται απαραίτητο να μην προβεί κανείς σε απλοποίηση για να αποφευχθεί η απόκλιση των αποτελεσμάτων.

4.3 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο εντάσεως q

Εξετάζονται οι περιπτώσεις με και χωρίς τη δράση αξονικής θλιπτικής δύναμης και χρησιμοποιούνται δύο ειδών προσεγγίσεις η πολυωνυμική και η ημιτονοειδής, ώστε να διαπιστωθεί ποιά είναι καταλληλότερη.

4.3.1 Χωρίς αξονική δύναμη.



Σχήμα 4.7 Αμφιέρειστη δοκός με ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση.

Θεωρείται αμφιέρειστη δοκός διατομής I (Σχ. 4.7), η οποία φορτίζεται από ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q . Εξετάζονται οι περιπτώσεις, στις οποίες το φορτίο q ασκείται στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα της διατομής αντίστοιχα. Προσδιορίζεται η τιμή του κρίσιμου φορτίου πλευρικού λυγισμού, για την οποία το επίπεδο κάμψεως zy παύει να είναι ευσταθές. Εξετάζεται η μισή δοκός λόγω συμμετρίας γεωμετρίας και φόρτισης.

Μία αρχική υπόθεση, που πραγματοποιείται είναι ότι τα άκρα της δοκού μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες x και y , ενώ η στροφή τους περί τον κεντροβαρικό άξονα z είναι αδύνατη. Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3, θεωρείται ότι η δοκός έχει καμφθεί στο επίπεδο zy και συγχρόνως έχει στραφεί κατά μία μικρή γωνία φ περί τον άξονα z .

Υπολογίζονται σε αυτό το σημείο οι εξωτερικές ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται στη δοκό κατά το σταθερό σύστημα αξόνων στην απαραμόρφωτη κατάσταση και οι αντίστοιχες M'_x, M'_y, M'_z στην παραμορφωμένη κατάσταση περί τους άξονες x', y', z' :

$$M_x = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} = \frac{qz}{2}(l - z) \quad (4.3.1.1)$$

$$M_y = 0 \quad (4.3.1.2)$$

$$M_z = \frac{ql}{2}u(z) - \int_0^{l/2} q(u(z) + \varphi(z))dz - \int_0^z q(u(z) + \varphi(z))dz \quad (4.3.1.3)$$

Όπου:

d : η κατακόρυφη απόσταση από το κέντρο βάρους της διατομής (θετική από το κέντρο βάρους και πάνω) με $-\frac{h}{2} < d < \frac{h}{2}$.

Σημείωση:

Ο όρος $\varphi(z)d$ είναι μηδενικός, όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους, ενώ είναι θετικός στην περίπτωση που εφαρμόζεται στο άνω πέλμα της διατομής με αποτέλεσμα η Mz να αυξάνεται και κατά συνέπεια η τιμή του κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού να μειώνεται. Το αντίστροφο συμβαίνει όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κάτω πέλμα της διατομής.

Οι εξωτερικές ροπές M'_x, M'_y, M'_z είναι:

$$M'_x = M_x \cos(x', x) = M_x \cos\varphi \simeq M_x \quad (4.3.1.4)$$

$$M'_y = M_x \sin(y', y) = M_x \sin\varphi \simeq M_x \varphi \quad (4.3.1.5)$$

$$\begin{aligned} M'_z &= M_t(z) - M_x \frac{du}{dz} = \frac{ql}{2} u(z) - \int_0^{l/2} q(u(z) + \varphi(z)a) dz - \int_0^z q(u(z) + \\ &\varphi(z)a) dz - M_x \frac{du}{dz} \simeq \frac{ql}{2} u(z) - \int_0^{l/2} q(u(z) + \varphi(z)d) dz - \int_0^z q(u(z) + \\ &\varphi(z)d) dz - M_x \frac{du}{dz} \end{aligned} \quad (4.3.1.6)$$

Εφαρμόζοντας ισορροπία εξωτερικών δυνάμεων προκύπτει ότι:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{qz}{2} (l - z) \quad (4.3.1.7)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{qz}{2} (l - z) \varphi(z) \quad (4.3.1.8)$$

$$\begin{aligned} GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} &= \frac{ql}{2} u(z) - \int_0^{l/2} q(u(z) + \varphi(z)d) dz - \\ &-\int_0^z q(u(z) + \varphi(z)d) dz - M_x \frac{du}{dz} \end{aligned} \quad (4.3.1.9)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (4.3.1.9) :

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = \frac{ql}{2} \frac{du}{dz} - q\varphi(z)d - qu(z) - \frac{ql}{2} \frac{du}{dz} + qz \frac{du}{dz} - \frac{qz}{2} (l - z) \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Σημείωση:

Η παράγωγος του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_0^{l/2} q(u(z) + \varphi(z)a) dz$ ισούται με μηδέν. Επίσης, η συμβολή των όρων $qu(z)$ και $qz \frac{du}{dz}$ είναι μηδαμινή, συνεπώς αγνοούνται κατά τη συνέχεια της επίλυσης.

Αντικαθιστώντας την έκφραση $\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{qz}{2EI_y} (l - z)\varphi(z)$ από την εξίσωση (4.3.1.8) προκύπτει:

$$\begin{aligned} GJ \frac{d^2\varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4\varphi}{dz^4} &= -q\varphi(z)d - \frac{qz}{2} (l - z) \frac{qz}{2EI_y} (l - z)\varphi(z) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{d^4\varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2\varphi}{dz^2} &= \frac{q\varphi(z)d}{EC_w} + \frac{q^2z^2(l-z)^2}{4EI_yEC_w} \varphi(z) \\ \rightarrow \frac{d^4\varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2\varphi}{dz^2} &= \frac{q\varphi(z)d}{EC_w} + \frac{q^2z^2l^2(1-\frac{z}{l})^2}{4EI_yEC_w} \varphi(z) \end{aligned} \quad (4.3.1.10)$$

Θέτοντας $\xi = 1 - \frac{z}{l} \Rightarrow z = (1 - \xi)l$ όπου ξ αδιάστατη μεταβλητή.

Γνωρίζοντας πως :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2\varphi}{dzd\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3\varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4} \frac{d^4\varphi}{d\xi^4}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση 4.3.1.10 προκύπτει :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^4} \frac{d^4\varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{1}{l^2} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} &= \frac{q\varphi(z)d}{EC_w} + \frac{q^2z^2l^2(1-\frac{z}{l})^2}{4EI_yEC_w} \varphi(z) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{d^4\varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} l^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} &= \frac{q\varphi(\xi)d}{EC_w} l^4 + \frac{q^2\xi^2l^6(1-\xi)^2}{4EI_yEC_w} \varphi(\xi) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{d^4\varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} l^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} &= \frac{q^2l^8}{4EI_yEC_w} \xi^2 (1 - \xi)^2 \varphi(\xi) + \frac{ql^4d}{EC_w} \varphi(\xi) \end{aligned} \quad (4.3.1.11)$$

Θέτοντας : $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2$, $a = \frac{q^2l^8}{4EI_yEC_w}$, $\gamma = \frac{ql^4d}{EC_w}$, η (4.3.1.11) γίνεται :

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) = a \xi^2 (1 - \xi)^2 \varphi(\xi) + \gamma d \varphi(\xi) \quad \text{για } (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4.3.1.12)$$

A. Προσέγγιση με την πολυωνυμική συνάρτηση.

Μία πρώτη προσεγγιστική λύση για τη γωνία στροφής φ μπορεί να αναζητηθεί μέσω συναρτήσεως της μορφής:

$$\varphi(\xi) = \alpha_4 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω σχέση προκύπτουν:

$$\varphi'(\xi) = 4\alpha_4 \xi^3 + 3\alpha_3 \xi^2 + 2\alpha_2 \xi + \alpha_1$$

$$\varphi''(\xi) = 12\alpha_4 \xi^2 + 6\alpha_3 \xi + 2\alpha_2$$

$$\varphi'''(\xi) = 24\alpha_4 \xi + 6\alpha_3$$

$$\varphi''''(\xi) = 24\alpha_4$$

Οι συνοριακές συνθήκες του εν λόγω φορέα είναι :

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow \alpha_0 = 0$$

$$\varphi''(0) = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\varphi'(\frac{1}{2}) = 0 \rightarrow 0,5\alpha_4 + 0,75\alpha_3 + \alpha_1 = 0$$

$$EC_w \varphi''''(\frac{1}{2}) - GJ\varphi'(\frac{1}{2}) = -qd \int_0^{1/2} \varphi(\xi) d\xi$$

Παραδοχή:

Έστω ότι η τιμή του ολοκληρώματος ισούται με μηδέν.

Άρα:

$$EC_w \varphi''''(\frac{1}{2}) - GJ\varphi'(\frac{1}{2}) = 0 \rightarrow \varphi''''(\frac{1}{2}) = 0 \rightarrow \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \rightarrow \alpha_3 = -2\alpha_4$$

Επομένως:

$$\varphi'(\frac{1}{2}) = 0 \rightarrow 0,5\alpha_4 - 0,75 * 2\alpha_4 + \alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_4$$

$$\text{Τελικά: } \varphi(\xi) = \alpha_4 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \quad (4.3.1.13)$$

$$\text{Για } \varphi(\frac{1}{2}) = \varphi_0 \rightarrow \alpha_4(\frac{5}{16}) = \varphi_0 \rightarrow \alpha_4 = 3,2\varphi_0$$

$$\text{Επομένως: } \varphi(\xi) = 3,2\varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$$

όπου: φ_0 είναι η στροφή στο μέσον της δοκού ($\xi = 1/2$).

Αντικαθιστώντας την έκφραση της $\varphi(\xi)$ στην εξίσωση $\varphi''''(\xi) - \beta^2\varphi''(\xi) = \alpha\xi^2(1 - \xi)^2\varphi(\xi) + \gamma d\varphi(\xi)$ είναι:

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2\varphi''(\xi) = \alpha\xi^2 3,2\varphi_0(1 - \xi)^2(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + \gamma d 3,2\varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) &= \alpha \xi^2 3,2 \varphi_0 (1 - 2\xi + \xi^2) (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + \gamma d 3,2 \varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \\
\rightarrow \varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) &= \alpha 3,2 \varphi_0 (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + \gamma d 3,2 \varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \\
\rightarrow \varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) &= \alpha 3,2 \varphi_0 (\xi^6 - 2\xi^5 + \xi^3 - 2\xi^7 + 4\xi^6 - 2\xi^4 + \xi^8 - 2\xi^7 + \xi^5) + \\
&+ \gamma d 3,2 \varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \rightarrow \\
\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) &= \alpha 3,2 \varphi_0 (\xi^8 - 4\xi^7 + 5\xi^6 - \xi^5 - 2\xi^4 + \xi^3) + \\
&+ \gamma d 3,2 \varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \tag{4.3.1.14}
\end{aligned}$$

Με διπλή ολοκλήρωση της (4.3.1.14) :

$$\begin{aligned}
\varphi'''(\xi) - \beta^2 \varphi'(\xi) &= 3,2 \alpha \varphi_0 \left(\frac{\xi^9}{9} - 4 \frac{\xi^8}{8} + 5 \frac{\xi^7}{7} - \frac{\xi^6}{6} - 2 \frac{\xi^5}{5} + \frac{\xi^4}{4} \right) + \\
&+ \gamma d \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) + C_1 \tag{4.3.1.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi''(\xi) - \beta^2 \varphi(\xi) &= 3,2 \alpha \varphi_0 \left(\frac{\xi^{10}}{90} - \frac{\xi^9}{18} + 5 \frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^5}{20} \right) + \\
&+ \gamma d \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + C_1 \xi + C_2 \tag{4.3.1.16}
\end{aligned}$$

$$\text{Για } \xi = 0 \text{ από (4.3.1.16)} \rightarrow \varphi''(0) - \beta^2 \varphi(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{Για } \xi = 1/2 \text{ από (4.3.1.15)} \rightarrow \varphi'''(1/2) - \beta^2 \varphi'(1/2) = 0 \rightarrow C_1 + 3,2 \alpha \varphi_0 \frac{11}{2520} + \gamma d 3,2 \varphi_0 = 0$$

$$\rightarrow C_1 = -\alpha \varphi_0 \frac{22}{1575} - 0,32 \gamma d \varphi_0$$

Επομένως, η $\varphi(\xi)$ γίνεται:

$$\begin{aligned}
\varphi''(\xi) &= \beta^2 3,2 \varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + 3,2 \alpha \varphi_0 \left(\frac{\xi^{10}}{90} - \frac{\xi^9}{18} + 5 \frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^5}{20} \right) + \\
&+ 3,2 \gamma d \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + \left(-\alpha \varphi_0 \frac{22}{1575} - 0,32 \gamma d \varphi_0 \right) \xi \tag{4.3.1.17}
\end{aligned}$$

Μέσω δύο ολοκληρώσεων είναι:

$$\varphi'(\xi) = \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) + 3,2 \alpha \varphi_0 \left(\frac{\xi^{11}}{990} - \frac{\xi^{10}}{180} + 5 \frac{\xi^9}{504} - \frac{\xi^8}{336} - \frac{\xi^7}{105} + \frac{\xi^6}{120} \right) +$$

$$+3,2\gamma d \varphi_0 \left(\frac{\xi^7}{210} - \frac{\xi^6}{60} + \frac{\xi^4}{24} \right) + \left(-\alpha\varphi_0 \frac{22}{1575} - 0,32\gamma d \varphi_0 \right) \frac{\xi^2}{2} + C_3 \quad (4.3.1.18)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & \beta^2 3,2\varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + 3,2\alpha\varphi_0 \left(\frac{\xi^{12}}{11880} - \frac{\xi^{11}}{1980} + \frac{\xi^{10}}{1008} - \frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} + \frac{\xi^7}{840} \right) + \\ & + 3,2\gamma d \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} \right) + \left(-\alpha\varphi_0 \frac{22}{1575} - 0,32\gamma d \varphi_0 \right) \frac{\xi^3}{6} + C_3\xi + C_4 \end{aligned} \quad (4.3.1.19)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες:

$$\text{Για } \xi = 0 \text{ από (4.3.1.19)} \rightarrow \varphi(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$\text{Για } \xi = 1/2 \text{ από (4.3.1.18)} \rightarrow \varphi'(1/2) = 0 \rightarrow$$

$$C_3 + 3,2\beta^2\varphi_0 \frac{1}{10} + 3,2\alpha\varphi_0 \frac{13}{221760} + \gamma d 3,2\varphi_0 \frac{1}{420} + 0,125 \left(-\alpha\varphi_0 \frac{22}{1575} - 0,32\gamma d \varphi_0 \right) = 0 \rightarrow$$

$$C_3 + 0,32\beta^2\varphi_0 + \alpha\varphi_0 \frac{13}{69300} + \gamma d \varphi_0 \frac{4}{525} + \varphi_0 - \alpha\varphi_0 \frac{11}{6300} - \gamma d \varphi_0 \frac{1}{25} = 0 \rightarrow$$

$$C_3 + 0,32\beta^2\varphi_0 - \alpha\varphi_0 \frac{3}{1925} - \gamma d \varphi_0 \frac{17}{525} = 0 \rightarrow$$

$$C_3 = -0,32\beta^2\varphi_0 + \alpha\varphi_0 \frac{3}{1925} + \gamma d \varphi_0 \frac{17}{525}$$

Επομένως, η $\varphi(\xi)$ γίνεται:

$$\varphi(\xi) = \beta^2 3,2\varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + 3,2\alpha\varphi_0 \left(\frac{\xi^{12}}{11880} - \frac{\xi^{11}}{1980} + \frac{\xi^{10}}{1008} - \frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} + \frac{\xi^7}{840} \right) +$$

$$+ 3,2\gamma d \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} \right) - \frac{11}{4725} \alpha\varphi_0 \xi^3 - \frac{4}{75} \gamma d \varphi_0 \xi^3$$

$$+ \xi \left(\frac{3}{1925} \alpha\varphi_0 \right) - \xi \beta^2 0,32\varphi_0 + \xi \left(\frac{17}{525} \gamma d \varphi_0 \right) \rightarrow$$

$$\varphi(\xi) = \beta^2 3,2\varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi}{10} \right) +$$

$$+ 3,2\alpha\varphi_0 \left(\frac{\xi^{12}}{11880} - \frac{\xi^{11}}{1980} + \frac{\xi^{10}}{1008} - \frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} + \frac{\xi^7}{840} - \frac{11\xi^3}{15120} + \frac{3\xi}{6166} \right) +$$

$$+ 3,2\gamma d \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - \frac{\xi^3}{60} + \frac{17\xi}{1680} \right) \quad (4.3.1.20)$$

$$\text{Για } \xi = 1/2 \text{ από (4.3.1.20)}$$

$$\rightarrow \varphi(1/2) = \varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \beta^2 3,2\varphi_0 \left(\frac{-61}{1920} \right) + 3,2\alpha\varphi_0 (1,573 * 10 - 4) + 3,2\gamma d \varphi_0 \left(\frac{277}{86016} \right)$$

$$1 = \beta^2 \left(\frac{-61}{600} \right) + 5,0336 * 10 - 4\alpha + \gamma d \left(\frac{277}{86016} \right)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2$, $a = \frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w}$, $\gamma = \frac{ql^4}{EC_w}$ για $q=q_{cr}$ τότε:

$$5,0336 * 10 - 4 \frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w} = 1 + \left(\frac{61}{600} \right) \frac{GJ}{EC_w} l^2 - \frac{ql^4}{EC_w} d \left(\frac{277}{86016} \right) \rightarrow$$

$$\frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w} = 1986,5 + 201,976 \frac{GJ}{EC_w} l^2 - 20,4725 \frac{ql^4}{EC_w} d \rightarrow$$

$$q^2 + \frac{81,89qEI_y d}{l^4} = \frac{7946,6EI_y EC_w}{l^8} + \frac{807,904EI_y GJ}{l^6} \rightarrow$$

$$q^2 + \left(\frac{81,89qEI_y d}{l^4} \right) + \left(\frac{40,945qEI_y d}{l^4} \right)^2 = \frac{7946,6EI_y EC_w}{l^8} + \frac{807,904EI_y GJ}{l^6} + \left(\frac{40,945qEI_y d}{l^4} \right)^2 \rightarrow$$

όπου:

ο όρος $\left(\frac{40,945qEI_y d}{l^4} \right)^2$ προστέθηκε και στα δύο μέρη της εξίσωσης για να δημιουργηθεί ταυτότητα.

Άρα:

$$\left(q + \frac{40,945qEI_y d}{l^4} \right)^2 = \frac{7946,6EI_y EC_w}{l^8} + \frac{807,904EI_y GJ}{l^6} + \left(\frac{40,945qEI_y d}{l^4} \right)^2$$

Εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει το κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού και η κρίσιμη ροπή αντίστοιχα ως εξής:

$$q_{cr} = \sqrt{\frac{7946,6EI_y EC_w}{l^8} + \frac{807,904EI_y GJ}{l^6} + \left(\frac{40,945qEI_y d}{l^4} \right)^2} - \frac{40,945qEI_y d}{l^4} \quad (4.3.1.21)$$

και

$$M_{cr} = \frac{q_{cr} l^2}{8} = \frac{l^2}{8} \left(\sqrt{\frac{7946,6EI_y EC_w}{l^8} + \frac{807,904EI_y GJ}{l^6} + \left(\frac{40,945qEI_y d}{l^4} \right)^2} - \frac{40,945qEI_y d}{l^4} \right) \quad (4.3.1.22)$$

B. Προσέγγιση με την ημιτονοειδή συνάρτηση.

Μία δεύτερη προσεγγιστική λύση για τη γωνία στροφής φ μπορεί να αναζητηθεί μέσω συναρτήσεως της μορφής:

$$\varphi(z) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad 0 \leq z \leq l$$

ή

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 \sin(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \text{ αφού τίθεται } \xi = \frac{\pi z}{l}$$

Εξετάζεται η μισή δοκός ($0 \leq z \leq l/2$) λόγω συμμετρίας γεωμετρίας και φόρτισης, άρα οι συνοριακές συνθήκες που διέπουν το σύστημα στήριξης του φορέα είναι:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi''(0) &= 0 \\ \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ EC_w \varphi'''\left(\frac{1}{2}\right) - GJ\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \rightarrow \varphi'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

όπου: φ_0 είναι η γωνία στροφής στο μέσον της δοκού ($\xi = 1/2$), όταν αυτή εκτρέπεται πλευρικά.

$$\text{Τίθενται: } \beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2, \quad a = \frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w}, \quad \gamma = \frac{ql^4 d}{EC_w}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω προσεγγιστική συνάρτηση στην εξίσωση (4.3.1.12) προκύπτει ότι:

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) = \alpha \xi^2 (1 - \xi)^2 \varphi_0 \sin(\pi \xi) + \gamma \varphi_0 \sin(\pi \xi) \quad \text{για } (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4.3.1.23)$$

Ολοκληρώνοντας δύο φορές την παραπάνω εξίσωση:

$$\begin{aligned} \varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) &= \\ \frac{\varphi_0 2\pi\alpha(2\xi-1)(\pi^2\xi(\xi-1)-6)\sin(\pi\xi)}{\pi^5} - \frac{\varphi_0 \cos(\pi\xi)\{\alpha(\pi^4(\xi-1)^2\xi^2 - 2\pi^2(6\xi^2-6\xi+1)+24)+\pi^4\gamma\}}{\pi^5} & \\ + C_1 & \end{aligned} \quad (4.3.1.24)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(\xi) - \beta^2 \varphi(\xi) &= \\ - \frac{\varphi_0 \sin(\pi\xi)\{a(\pi^4\xi^2(\xi-1)^2 - 6\pi^2(6\xi^2-6\xi+1)+120)+\pi^4\gamma\}}{\pi^6} - \frac{\varphi_0 4\pi\alpha(2\xi-1)\{\pi^2(\xi-1)\xi-12\}\cos(\pi\xi)}{\pi^6} + & \\ C_1\xi + C_2 & \end{aligned} \quad (4.3.1.25)$$

Η εξίσωση (4.3.1.25) για $\xi = 0$ δίνει:

$$C_2 = \frac{48\varphi_0\alpha}{\pi^5}$$

Η εξίσωση (4.3.1.24) για $\xi = 1/2$ δίνει:

$$C_1 = 0$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των C_1, C_2 στην εξίσωση (4.3.1.25), η $\varphi(\xi)$ παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \varphi''(\xi) = & \beta^2 \varphi(\xi) - \frac{\varphi_0 \sin(\pi\xi) \{a(\pi^4 \xi^2 (\xi-1)^2 - 6\pi^2 (6\xi^2 - 6\xi + 1) + 120) + \pi^4 \gamma\}}{\pi^6} - \\ & - \frac{\varphi_0 4\pi \alpha (2\xi-1) \{\pi^2 (\xi-1) \xi - 12\} \cos(\pi\xi)}{\pi^6} + \frac{48\varphi_0 \alpha}{\pi^5} \end{aligned} \quad (4.3.1.26)$$

Κάνοντας διπλή ολοκλήρωση στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) = & \frac{\varphi_0 6\pi \alpha \{ (2\xi-1) (\pi^2 \xi (\xi-1) - 20) \sin(\pi\xi) - 8\pi \xi \}}{\pi^7} - \\ & - \frac{\varphi_0 \cos(\pi\xi) \{ \alpha [\pi^4 (\xi-1)^2 \xi^2 - 20\pi^2 (6\xi^2 - 6\xi + 1) + 840] + \pi^4 (\gamma - \pi^2 \beta^2) \}}{\pi^7} + C_3 \end{aligned} \quad (4.3.1.27)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & \frac{\varphi_0 \sin(\pi\xi) \{ \alpha [\pi^4 \xi^2 (\xi-1)^2 - 20\pi^2 (6\xi^2 - 6\xi + 1) + 840] + \pi^4 (\gamma - \pi^2 \beta^2) \}}{\pi^8} - \\ & - \frac{\varphi_0 \{ 24\pi^3 \alpha \xi^2 + 8\pi \alpha (2\xi-1) [\pi^2 \xi (\xi-1) - 30] \cos(\pi\xi) \}}{\pi^8} + C_3 \xi + C_4 \end{aligned} \quad (4.3.1.28)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες οι συντελεστές C_3, C_4 λαμβάνουν τις τιμές:

Η εξίσωση (4.3.1.28) για $\xi = 0$ δίνει:

$$C_4 = -\frac{240\varphi_0 \alpha}{\pi^7}$$

Η εξίσωση (4.3.1.27) για $\xi = 1/2$ δίνει:

$$C_3 = -\frac{24\varphi_0 \alpha}{\pi^5}$$

Αντικαθιστώντας σε αυτό το σημείο τις τιμές των C_3, C_4 στην εξίσωση (4.3.1.28), η $\varphi(\xi)$ λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & \frac{\varphi_0 \sin(\pi\xi) \{ \alpha [\pi^4 \xi^2 (\xi-1)^2 - 20\pi^2 (6\xi^2 - 6\xi + 1) + 840] + \pi^4 (\gamma - \pi^2 \beta^2) \}}{\pi^8} - \\ & - \frac{\varphi_0 \{ 24\pi^3 \alpha \xi^2 + 8\pi \alpha (2\xi-1) [\pi^2 \xi (\xi-1) - 30] \cos(\pi\xi) \}}{\pi^8} - \frac{24\varphi_0 \alpha}{\pi^5} \xi - \frac{240\varphi_0 \alpha}{\pi^7} \end{aligned} \quad (4.3.1.29)$$

Έχει προηγουμένως οριστεί ότι : $\varphi(1/2) = \varphi_0$, επομένως για $\xi=1/2$ η (4.3.1.29) γίνεται :

$$\varphi(1/2) = \varphi_0 \leftrightarrow \frac{(840 + 10\pi^2 + \frac{\pi^4}{16})\alpha + 6\pi^3 \alpha + \pi^4 (\gamma - \pi^2 \beta^2)}{\pi^8} \varphi_0 - \frac{12\alpha}{\pi^5} \varphi_0 - \frac{240\alpha}{\pi^7} \varphi_0 = \varphi_0$$

$$\rightarrow \frac{(840+10\pi^2+\frac{\pi^4}{16})\alpha+6\pi^3\alpha+\pi^4(\gamma-\pi^2\beta^2)}{\pi^8} - \frac{12\alpha}{\pi^5} - \frac{240\alpha}{\pi^7} = 1$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2$, $\alpha = \frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w}$, $\gamma = \frac{ql^4 d}{EC_w}$ για $q=q_{cr}$ τότε:

$$\rightarrow \frac{(840+10\pi^2+\frac{\pi^4}{16})(\frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w})+6\pi^3(\frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w})+\pi^4[\frac{ql^4 d}{EC_w}-\pi^2\frac{GJ}{EC_w}l^2]}{\pi^8} - \frac{12(\frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w})}{\pi^5} - \frac{240(\frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w})}{\pi^7} = 1 \leftrightarrow$$

$$\rightarrow q^2 + \frac{66,44ql_y d}{l^4} = \frac{6541,6EI_y EC_w}{l^8} + \frac{654,2EI_y GJ}{l^6} \leftrightarrow$$

$$\rightarrow q^2 + (\frac{66,44ql_y d}{l^4}) + (\frac{33,22ql_y d}{l^4})^2 = \frac{6541,6EI_y EC_w}{l^8} + \frac{654,2EI_y GJ}{l^6} + (\frac{33,22ql_y d}{l^4})^2$$

όπου:

Ο όρος $(\frac{33,22ql_y d}{l^4})^2$ προστέθηκε και στα δύο μέρη της εξίσωσης για να δημιουργηθεί ταυτότητα.

Άρα:

$$(q + \frac{33,22ql_y d}{l^4})^2 = \frac{6541,6EI_y EC_w}{l^8} + \frac{654,2EI_y GJ}{l^6} + (\frac{33,22ql_y d}{l^4})^2$$

Εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει το κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού και η κρίσιμη ροπή αντίστοιχα

$$q_{cr} = \sqrt{\frac{6541,6EI_y EC_w}{l^8} + \frac{654,2EI_y GJ}{l^6} + (\frac{33,22ql_y d}{l^4})^2} - \frac{33,22ql_y d}{l^4} \quad (4.3.1.30)$$

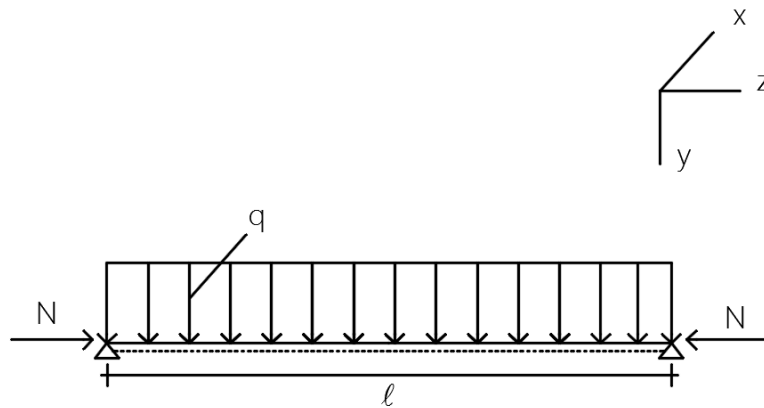
και

$$M_{cr} = \frac{q_{cr} l^2}{8} = \frac{l^2}{8} \left\{ \sqrt{\frac{6541,6EI_y EC_w}{l^8} + \frac{654,2EI_y GJ}{l^6} + (\frac{33,22ql_y d}{l^4})^2} - \frac{33,22ql_y d}{l^4} \right\} \quad (4.3.1.31)$$

Σημείωση:

Στο κεφάλαιο 6 πραγματοποιείται σύγκριση των θεωρητικών επιλύσεων για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, όπως υπολογίζονται στο εν λόγω κεφάλαιο με τα αντίστοιχα κρίσιμα μεγέθη, τα οποία όμως προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Εκεί, διαπιστώνεται ότι η επίλυση με την προσεγγιστική πολυωνυμική συνάρτηση (μέθοδος A) έχει μεγαλύτερη ακρίβεια από την αντίστοιχη με την ημιτονοειδή συνάρτηση. Τα ακριβή αποτελέσματα και οι συγκρίσεις παρατίθενται στο κεφάλαιο αυτό. Οι λόγοι, που πιθανόν να υπάρχει αυτή η απόκλιση μεταξύ των δύο μεθόδων είναι ότι για τη συνάρτηση ημιτόνου δεν λήφθηκε υπόψιν 2^{ος} και 3^{ος} της σειράς McLaurin, οπότε η τελική λύση δεν είναι απόλυτα ακριβής αλλά και επειδή τα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιούν πολυωνυμικές παρεμβολές, ενδεχομενως η επίλυση με πολυώνυμο προσεγγίζει περισσότερο την πραγματική λύση.

4.3.2 Με αξονική δύναμη



Σχήμα 4.8 Αμφιέρειστη δοκός με ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση και αξονική δύναμη.

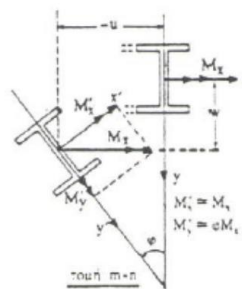
Θεωρείται μία αμφιέρειστη δοκός διατομής I , η οποία υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση q και σε σταθερή αξονική θλιπτική δύναμη N , η οποία ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής. Προσδιορίζεται η τιμή του κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, για την οποία το επίπεδο κάμψεως zy παύει να είναι ευσταθές.

Τα άκρα της δοκού (οι στηρίξεις) μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες x και y , ωστόσο είναι αδύνατη η στροφή περί τον κεντροβαρικό άξονα z .

Το επίπεδο εξωτερικής φόρτισης της δοκού αυτής, το οποίο έχει τη μεγαλύτερη ακαμψία ($I_x > I_y$), ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα y και τον διαμήκη κεντροβαρικό άξονα z . Για σταδιακή αύξηση του q από το μηδέν κι αφού η N παραμένει σταθερή, γίνονται οι εξής υποθέσεις:

- C. Η γεωμετρία της διατομής δεν αλλάζει
- D. Κατά την κρίσιμη τιμή $M_0 = M_{cr}$, η οποία είναι μικρότερη από την ελαστική φέρουσα ικανότητα σε κάμψη της δοκού (ροπή διαρροής), η δοκός αναπτύσσει πλάγια κάμψη και συστροφή.

Η παραμορφωμένη κατάσταση της αρχικά τέλει δοκού ορίζεται από τις πλευρικές μετακινήσεις-εκτροπές w και u του κέντρου βάρους της διατομής αλλά και από τη γωνία στροφής αυτού (Σχ 4.9).



Σχήμα 4.9 Τυχαία διατομή mn και δρώσες ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση στο στρεπτοκαμπτικό λυγισμό είναι:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} + Nw = -\frac{qz}{2}(l-z) \quad (4.3.2.1)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + Nu = \frac{qz}{2}(l-z)\varphi \quad (4.3.2.2)$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -\frac{qz}{2}(l-z)u' \quad (4.3.2.3)$$

Η παραγωγή της (4.3.2.3) είναι ως προς z και EI_x, EI_y είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ακαμψία της δοκού αντιστοίχως.

Θέτοντας $\xi = \frac{z}{l}$ και $v = \frac{u}{l}$ όπου ξ και v αδιάστατες μεταβλητές.

Γνωρίζοντας πως :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2 \varphi}{dz d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3 \varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4 \varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4} \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4}$$

Η (4.3.2.2) γίνεται:

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + Nu = \frac{qz}{2}(l-z)\varphi \rightarrow$$

$$EI_y \frac{1}{l^2} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + Nu = \frac{q}{2} \xi l (l - \xi l) \varphi \rightarrow EI_y \frac{l}{l^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2} + Nlv = \frac{q}{2} l^2 (\xi - \xi^2) \varphi \rightarrow$$

$$EI_y v''(\xi) + Nlv(\xi) = \frac{ql^2}{2} (\xi - \xi^2) \varphi \rightarrow$$

$$v''(\xi) + \frac{Nl^2}{EI_y} v(\xi) = \frac{ql^3}{2EI_y} (\xi - \xi^2) \varphi \quad (4.3.2.4)$$

Όμοια η (4.3.2.3) γίνεται:

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -\frac{qz}{2}(l-z)u' \rightarrow EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} - GJ \frac{d\varphi}{dz} = \frac{qz}{2}(l-z)u' \rightarrow$$

$$EC_w \frac{1}{l^3} \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3} - GJ \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{q\xi l}{2} (l - \xi l) \frac{1}{l} \frac{du}{d\xi} \rightarrow$$

$$\frac{EC_w}{l^3} \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3} - \frac{GJ}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{ql^2}{2} (\xi - \xi^2) \frac{du}{d\xi} \rightarrow$$

$$\frac{EC_w}{l^3} \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3} - \frac{GJ}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{ql^2}{2} (\xi - \xi^2) \frac{dv}{d\xi} \rightarrow$$

$$\varphi'''(\xi) - \frac{GJl^2}{EC_w} \varphi'(\xi) = \frac{ql^5}{2EC_w} (\xi - \xi^2) v'(\xi) \quad (4.3.2.5)$$

$$\text{Τίθενται: } \nu = \frac{u}{l}, \xi = \frac{z}{l}, \beta^2 = \frac{Nl^2}{EI_y}, q' = \frac{ql^3}{2EI_y}, \lambda^2 = \frac{GJl^2}{EC_w}, p^2 = \frac{I_y l^2}{C_w}$$

Οπότε οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται:

$$\nu''(\xi) + \beta^2 \nu(\xi) = q'(\xi - \xi^2) \varphi \quad (4.3.2.6)$$

και

$$\varphi'''(\xi) - \lambda^2 \varphi'(\xi) = p^2 q'(\xi - \xi^2) \nu'(\xi) \quad (4.3.2.7)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (4.3.2.1) είναι ανεξάρτητη, δηλαδή δε συνδέεται με τις υπόλοιπες. Αντιθέτως, με την επίλυση των (4.3.2.2),(4.3.2.3) λαμβάνονται οι συναρτήσεις της μετακίνησης u και της στροφής φ του κέντρου βάρους της διατομής και μάλιστα στην αδιαστατοποιημένη τους μορφή, σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.3.2.6),(4.3.2.7).

Αρχικά, επιλύεται η διαφορική εξίσωση $\nu''(\xi) + \beta^2 \nu(\xi) = q(\xi - \xi^2) \varphi$, χρησιμοποιώντας μία προσεγγιστική συνάρτηση για τη γωνία στροφής φ , η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, που διέπουν το σύστημα στήριξης του φορέα.

Θέτοντας:

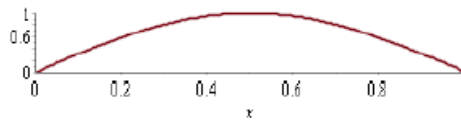
$$\varphi(z) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad 0 \leq z \leq l$$

ή

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 \sin(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \text{αφού τίθεται } \xi = \frac{\pi z}{l}$$

Φαίνεται από το διάγραμμα (Σχ 4.7) του $\sin(\pi x)$, που ακολουθεί ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες στήριξης της δοκού.

plot(sin(π x), x=0..1)



Σχήμα 4.7 Διάγραμμα $\sin(\pi x)$ στο διάστημα $[0,1]$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι: $\varphi(0) = 0, \varphi''(0) = 0, \varphi(1) = 0, \varphi''(1) = 0, \varphi''(1/2) = 0$, οι οποίες ικανοποιούνται από τη συνάρτηση $\sin(\pi x)$ σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα.

Αντικαθιστώντας τη $\varphi(\xi)$ στην εξίσωση (4.3.2.6) προκύπτει ότι:

$$v''(\xi) + \beta^2 v(\xi) = \varphi_0 q(\xi - \xi^2) \sin(\pi \xi)$$

Η πολυπλοκότητα της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης έχει σαν αποτέλεσμα την αναγκαιότητα αντικατάστασης του $\sin(\pi \xi)$ με σειρά “Maclaurin”, Maclaurin 18^{ος} αιώνας, όπου:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \text{ για όλα τα } x.$$

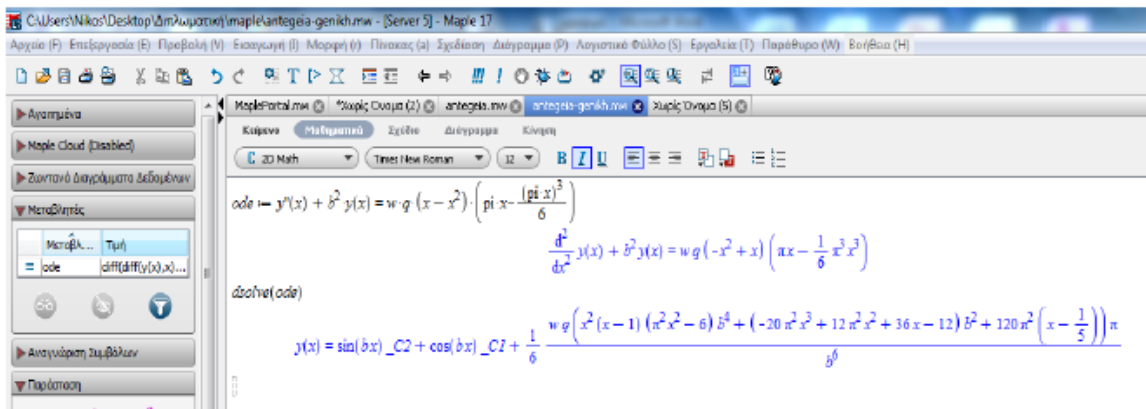
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \text{ για όλα τα } x.$$

Αν γίνει χρήση μόνο των δύο πρώτων όρων κάθε έκφρασης (για να μειωθεί ο βαθμός του πολωνύμου) θα υπάρξει ικανοποιητική προσέγγιση καθώς το σφάλμα προσέγγισης δεν είναι πάνω από $\frac{x^5}{5!}$ για την $\sin(x)$ και $\frac{x^4}{4!}$ για την $\cos(x)$.

Συνοψίζοντας η εξίσωση που πρέπει να επιλυθεί είναι η ακόλουθη :

$$v''(\xi) + \beta^2 v(\xi) = \varphi_0 q'(\xi - \xi^2) \left(\pi \xi - \frac{(\pi \xi)^3}{3!} \right) \quad (4.3.2.8)$$

Για την επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, θα γίνει χρήση του μαθηματικού εργαλείου Maple της Maplesoft. Έτσι λοιπόν, λαμβάνεται η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, ως εξής:



Η γενική λύση λοιπόν που προκύπτει από το πρόγραμμα είναι:

$$v(\xi) = \frac{1}{6} \frac{\varphi_0 q' (\xi^2 (\xi-1) (\pi^2 \xi^2 - 6) \beta^4 + (-20\pi^2 \xi^3 + 12\pi^2 \xi^2 + 36\xi - 12) \beta^2 + 120\pi^2 (\xi - \frac{1}{5})) \pi}{\beta^6} + C_2 \sin(\beta \xi) + C_1 \cos(\beta \xi)$$

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι στις στηρίξεις (στα άκρα της δοκού) δεν επιτρέπεται καμία μετακίνηση κατά τους άξονες x και y παρά μόνο στροφή περί τον άξονα z, μπορεί να γίνει χρήση των συνοριακών συνθηκών $v(0)=v(1)=0$, ώστε να υπολογιστούν οι σταθερές ολοκλήρωσης C_1 και C_2 .

$$ode := y''(x) + b^2 \cdot y(x) = q \cdot (x - x^2) \cdot w \cdot \left(\pi x - \frac{(\pi \cdot x)^3}{6} \right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + b^2 y(x) = q (-x^2 + x) w \left(\pi x - \frac{1}{6} \pi^3 x^3 \right)$$

$$ans := dsolve(\{ode, y(0) = 0, y(1) = 0\})$$

$$y(x) = -\frac{2}{3} \frac{\sin(bx) q \pi w (-2\pi^2 b^2 + 3 \cos(b) b^2 + 6 \cos(b) \pi^2 + 6 b^2 + 24 \pi^2)}{\sin(b) b^6} + \frac{2 \cos(bx) q \pi w (b^2 + 2 \pi^2)}{b^6}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{q \left(x^2 (x-1) (\pi^2 x^2 - 6) b^4 + (-20 \pi^2 x^3 + 12 \pi^2 x^2 + 36 x - 12) b^2 + 120 \left(x - \frac{1}{5} \right) \pi^2 \right) \pi w}{b^6}$$

Προκύπτει η ακόλουθη λύση :

$$v(\xi) = -\frac{2}{3} \frac{\sin(\beta \xi) \varphi_0 q' \pi (-2\pi \beta^2 + 3 \cos(\beta) \beta^2 + 6 \cos(\beta) \pi^2 + 6 \beta^2 + 24 \pi^2)}{\sin(\beta) \beta^6} + \frac{2 \cos(\beta \xi) \varphi_0 q' \pi (\beta^2 + 2 \pi^2)}{\beta^6}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\varphi_0 q' \pi (\xi^2 (\xi-1) (\pi^2 \xi^2 - 6) \beta^4 + (-20\pi^2 \xi^3 + 12\pi^2 \xi^2 + 36\xi - 12) \beta^2 + 120\pi^2 (\xi - \frac{1}{5}))}{\beta^6}$$

Κάνοντας χρήση των σειρών Maclaurin και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει :

$$\sin(\beta \xi) = \beta \xi - \frac{(\beta \xi)^3}{3!}$$

και

$$\cos(\beta \xi) = 1 - \frac{(\beta \xi)^2}{2!}$$

$$v(\xi) = -\frac{2}{3} \frac{(\beta \xi - \frac{(\beta \xi)^3}{6}) \varphi_0 q \pi (-2\pi \beta^2 + 3 \cos(\beta) \beta^2 + 6 \cos(\beta) \pi^2 + 6 \beta^2 + 24 \pi^2)}{\sin(\beta) \beta^6} + \frac{2(1 - \frac{(\beta \xi)^2}{2}) \varphi_0 q \pi (\beta^2 + 2 \pi^2)}{\beta^6}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\varphi_0 q \pi (\xi^2 (\xi-1) (\pi^2 \xi^2 - 6) \beta^4 + (-20\pi^2 \xi^3 + 12\pi^2 \xi^2 + 36\xi - 12) \beta^2 + 120\pi^2 (\xi - \frac{1}{5}))}{\beta^6}$$

Παραγωγίζοντας μία φορά την παραπάνω λύση της διαφορικής εξίσωσης προκύπτει :

$$v'(\xi) = -\frac{2}{3} \frac{(\beta - \frac{\beta^3 \xi^2}{2}) \varphi_0 q \pi (-2\pi \beta^2 + 3 \cos(\beta) \beta^2 + 6 \cos(\beta) \pi^2 + 6\beta^2 + 24\pi^2)}{\sin(\beta) \beta^6} - \frac{2\xi \varphi_0 q \pi (\beta^2 + 2\pi^2)}{\beta^6}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\varphi_0 q \pi ((5\pi^2 \xi^4 - 4\pi^2 \xi^3 - 18\xi^2 + 12\xi) \beta^4 + (-60\pi^2 \xi^2 + 24\pi^2 \xi + 36) \beta^2 + 120\pi^2)}{\beta^6}$$

Απλοποιώντας την έκφραση μέσω του maple προκύπτει :

$$\text{simple}(t)$$

$$v(x) = \frac{1}{6} \frac{1}{\sin(b) b^6} (q \pi (5 \pi^2 \sin(b) b^4 w x^4 - 4 \pi^2 \sin(b) b^4 w x^3 - 4 \pi^2 b^5 w x^2 + 12 \pi^2 \cos(b) b^3 w x^2 + 6 \cos(b) b^5 w x^2 - 60 \pi^2 \sin(b) b^2 w x^2 + 48 \pi^2 b^3 w x^2$$

$$- 18 \sin(b) b^4 w x^2 + 12 b^5 w x^2 + 24 \pi^2 \sin(b) b^2 w x + 12 \sin(b) b^4 w x + 8 \pi^2 b^3 w - 24 \pi^2 \cos(b) b w - 12 \cos(b) b^3 w - 12 x w (2 \pi^2 + b^2) \sin(b) b^2$$

$$+ 120 \pi^2 \sin(b) w - 96 \pi^2 b w + 36 \sin(b) b^2 w - 24 b^3 w))$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της $v'(\xi)$ στην αρχική εξίσωση προκύπτει :

$$\varphi'''(\xi) - \lambda^2 \varphi'(\xi) = -\frac{1}{6} \frac{1}{\beta^6 \sin(\beta)} (\varphi_0 q'^2 \pi \xi (\xi - 1) (5\pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \xi^4 - 4 \sin(\beta) \pi^2 \beta^4 \xi^3 -$$

$$- 4\pi^2 \beta^5 \xi^2 + 12\pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \xi^2 + 12\pi^2 \beta^4 \xi^2 + 6 \cos(\beta) \beta^5 \xi^2 - 60\pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \xi^2 -$$

$$- 18 \sin(\beta) \beta^4 \xi^2 + 48\pi^2 \beta^3 \xi^2 + 12 \beta^5 \xi^2 + 24 \sin(\beta) \pi^2 \beta^2 \xi +$$

$$+ 12 \sin(\beta) \beta^4 \xi + 8\pi^2 \beta^3 - 24\pi^2 \cos(\beta) \beta^2 - 12 \cos(\beta) \beta^3 - 12(\beta^2 + 2\pi^2) \sin(\beta) \beta^2 \xi +$$

$$+ 120 \sin(\beta) \pi^2 + 36 \sin(\beta) \beta^3 - 96\pi^2 \beta - 24 \beta^3))$$

Στη συνέχεια, κάνοντας χρήση των μεταβλητών f, x, l, q, p, b, w αντί των μεταβλητών $\varphi, \xi, \lambda, \beta, \varphi_0$ αντίστοιχα, προχωράμε στην εξαγωγή της γενικής λύσης της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης μέσω του Maple 17.

Κείμενο Μαθηματικά Σχόλιο Διάγραμμα Κίνηση Ανεύρωση

C 2D Input Times New Roman 12 B I U

$$ode := f'(x) - l^2 \cdot f(x) = -\frac{1}{6} \frac{1}{\sin(b) \cdot b^6} (p^2 \cdot q^2 \cdot x(x-1) \pi (5 \sin(b) \cdot \pi^2 \cdot b^4 \cdot w \cdot x^4 - 4 \sin(b) \cdot \pi^2 \cdot b^4 \cdot w \cdot x^3 - 4 \pi^2 \cdot b^5 \cdot w \cdot x^2 + 12 \cos(b) \cdot \pi^2 \cdot b^3 \cdot w \cdot x^2 + 6 \cos(b) \cdot b^5 \cdot w \cdot x^2 - 60 \sin(b) \cdot \pi^2 \cdot b^3 \cdot w \cdot x^2 - 18 \sin(b) \cdot b^4 \cdot w \cdot x^2 + 48 \pi^2 \cdot b^3 \cdot w \cdot x^2 + 12 \cdot b^5 \cdot w \cdot x^2 + 24 \sin(b) \cdot \pi^2 \cdot b^2 \cdot w \cdot x + 12 \sin(b) \cdot b^4 \cdot w \cdot x + 8 \pi^2 \cdot b^3 \cdot w - 24 \cos(b) \cdot \pi^2 \cdot b \cdot w - 12 \cos(b) \cdot b^3 \cdot w - 12 \cdot x \cdot w (2 \cdot \pi^2 + b^2) \sin(b) \cdot b^2 + 120 \sin(b) \cdot \pi^2 \cdot w + 36 \sin(b) \cdot b^2 \cdot w - 96 \pi^2 \cdot b \cdot w - 24 \cdot b^3 \cdot w))$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - l^2 \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) = -\frac{1}{6} \frac{1}{\sin(b) \cdot b^6} (p^2 \cdot q^2 \cdot x(x-1) \pi (5 \sin(b) \cdot \pi^2 \cdot b^4 \cdot w \cdot x^4 - 4 \sin(b) \cdot \pi^2 \cdot b^4 \cdot w \cdot x^3 - 4 \pi^2 \cdot b^5 \cdot w \cdot x^2 + 12 \cos(b) \cdot \pi^2 \cdot b^3 \cdot w \cdot x^2 + 6 \cos(b) \cdot b^5 \cdot w \cdot x^2 - 60 \sin(b) \cdot \pi^2 \cdot b^3 \cdot w \cdot x^2 - 18 \sin(b) \cdot b^4 \cdot w \cdot x^2 + 48 \pi^2 \cdot b^3 \cdot w \cdot x^2 + 12 \cdot b^5 \cdot w \cdot x^2 + 24 \sin(b) \cdot \pi^2 \cdot b^2 \cdot w \cdot x + 12 \sin(b) \cdot b^4 \cdot w \cdot x + 8 \pi^2 \cdot b^3 \cdot w - 24 \cos(b) \cdot \pi^2 \cdot b \cdot w - 12 \cos(b) \cdot b^3 \cdot w - 12 \cdot x \cdot w (b^2 + 2 \pi^2) \sin(b) \cdot b^2 + 120 \sin(b) \cdot \pi^2 \cdot w + 36 \sin(b) \cdot b^2 \cdot w - 96 \pi^2 \cdot b \cdot w - 24 \cdot b^3 \cdot w)) \quad (1)$$

Επομένως, προκύπτει η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης ως εξής:

ans := dsolve(ode)

$$f(x) = \left[\frac{1}{6} \frac{1}{b^6 \pi^8 \sin(b)} (-12 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x^2 b^3 l^6 + 12 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x^4 b^3 l^6 - 12 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x^3 b^3 l^6 + 144 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x^2 b^3 l^4 - 72 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x b^3 l^4 - 24 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x^2 b l^6 + 24 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) x b l^6 - 36 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x b^3 l^4 + 12 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x b^3 l^6 + 6 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x^4 b^5 l^6 - 6 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x^3 b^5 l^6 + 72 q^2 p^2 \pi w \cos(b) x^2 b^5 l^4 - 9 p^2 \pi^2 q^2 w x^5 b^4 l^6 \sin(b) - 60 p^2 q^2 x^4 \pi^3 w b^2 l^6 \sin(b) + 4 p^2 q^2 x^4 \pi^3 w b^4 l^6 \sin(b) + 60 q^2 p^2 \pi^3 q^2 w x^3 b^2 l^6 \sin(b) + 150 q^2 p^2 \pi^3 q^2 w x^4 b^4 l^4 \sin(b) - 180 q^2 p^2 \pi^3 w x^3 b^4 l^4 \sin(b) + 48 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^4 l^4 \sin(b) - 720 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^2 l^4 \sin(b) + 360 p^2 \pi^3 q^2 w x b^2 l^4 \sin(b) - 1080 p^2 \pi^3 q^2 w x b^4 l^2 \sin(b) + 1800 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^4 l^2 \sin(b) - 18 q^2 p^2 \pi w x^4 b^4 l^6 \sin(b) + 36 q^2 p^2 \pi w x^2 b^2 l^6 \sin(b) + 18 q^2 p^2 \pi w x^4 b^4 l^6 \sin(b) - 36 q^2 p^2 \pi w x b^2 l^6 \sin(b) - 216 q^2 p^2 \pi w x^2 b^4 l^4 \sin(b) + 108 q^2 p^2 \pi w x b^4 l^4 \sin(b) + 5 p^2 \pi^3 q^2 w x^6 b^4 l^6 \sin(b) + 3600 p^2 \pi^3 q^2 w b^4 l^4 \sin(b) + 240 p^2 \pi^3 q^2 w l^4 \sin(b) + 48 p^2 q^2 x^4 \pi^3 w b^3 l^6 - 48 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^3 l^6 + 576 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^3 l^4 - 288 p^2 \pi^3 q^2 w x b^3 l^4 - 96 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b l^6 + 96 p^2 \pi^3 q^2 w x b l^6 - 4 p^2 q^2 x^4 \pi^3 w b^5 l^6 + 4 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^5 l^6 + 8 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^3 l^6 - 8 p^2 \pi^3 q^2 w x b^3 l^6 + 24 p^2 \pi^3 q^2 w x b^5 l^4 - 48 q^2 p^2 \pi^3 w x^2 b^5 l^4 + 12 q^2 p^2 \pi w x^4 b^5 l^6 - 12 q^2 p^2 \pi w x^3 b^5 l^6 + 144 q^2 p^2 \pi w x^2 b^5 l^4 - 24 q^2 p^2 \pi w x^2 b^3 l^6 - 72 q^2 p^2 \pi w x b^5 l^4 + 24 q^2 p^2 \pi w x b^3 l^6 + 6 e^{-lx} _C1 b^6 \pi^8 \sin(b) + 6 e^{-lx} _C1 b^6 \pi^8 \sin(b) + 288 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) b^3 l^2 - 48 q^2 p^2 \pi^3 w \cos(b) b l^4 + 144 q^2 p^2 \pi w \cos(b) b^5 l^2 - 24 q^2 p^2 \pi w \cos(b) b^3 l^4 + 96 p^2 \pi^3 q^2 w b^4 l^2 \sin(b) - 1440 p^2 \pi^3 q^2 w b^2 l^2 \sin(b) - 432 q^2 p^2 \pi w b^4 l^2 \sin(b) + 72 q^2 p^2 \pi w b^2 l^4 \sin(b) + 120 q^2 p^2 \pi^3 w x l^6 \sin(b) - 120 p^2 \pi^3 q^2 w x l^6 \sin(b) - 48 q^2 p^2 \pi w b^3 l^4 + 1152 p^2 \pi^3 q^2 w b^3 l^2 + 288 q^2 p^2 \pi w b^5 l^2 - 96 p^2 \pi^3 q^2 w b^5 l^2 + 16 p^2 \pi^3 q^2 w b^3 l^4 - 192 p^2 \pi^3 q^2 w b l^4) dx + _C3$$

Με απλοποίηση της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει :

$$\varphi(\xi) = \frac{p^2 q^2 \pi \varphi_0}{6 \beta^6 \lambda^8 \sin(\beta)} \left[\frac{5}{7} \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 \xi^7 - \frac{9}{6} \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 \xi^6 + \left(\frac{12}{7} \pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 + \frac{6}{5} \cos(\beta) \beta^5 \lambda^6 - 12 \pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 + \frac{4}{5} \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 + 30 \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 - \frac{18}{5} \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 + \frac{48}{5} \pi^2 \beta^3 \lambda^6 - \frac{4}{5} \pi^2 \beta^5 \lambda^6 + \frac{12}{5} \beta^5 \lambda^6 \right) \xi^5 + (-3 \pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 - \frac{6}{4} \cos(\beta) \beta^5 \lambda^6 + 15 \pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 - 45 \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 + \frac{18}{4} \sin(\beta) \beta^4 \lambda^6 - 12 \pi^2 \beta^3 \lambda^6 + \pi^2 \beta^5 \lambda^6 - 3 \beta^5 \lambda^6) \xi^4 + (-4 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 + 48 \pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^4 - 8 \pi^2 \cos(\beta) \beta \lambda^6 + 24 \cos(\beta) \beta^5 \lambda^4 + 16 \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 - 240 \pi^2 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^4 + 600 \pi^2 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^2 + 12 \sin(\beta) \beta^2 \lambda^6 - 72 \sin(\beta) \beta^4 \lambda^4 + 192 \pi^2 \beta^3 \lambda^4 - 32 \pi^2 \beta \lambda^6 + \frac{8}{3} \pi^2 \beta^3 \lambda^6 - 16 \pi^2 \beta^5 \lambda^4 + 48 \beta^5 \lambda^4 - 8 \beta^3 \lambda^6 + 40 \pi^2 \sin(\beta) \lambda^6) \xi^3 + (-36 \pi^2 \cos(\beta) \beta^3 \lambda^4 + 12 \pi^2 \cos(\beta) \beta \lambda^6 -$$

$$\begin{aligned}
& 18\cos(\beta)\beta^5\lambda^4 + 6\cos(\beta)\beta^3\lambda^6 + 180\pi^2\sin(\beta)\beta^2\lambda^4 - 540\pi^2\sin(\beta)\beta^4\lambda^2 - \\
& 18\sin(\beta)\beta^2\lambda^6 + 54\sin(\beta)\beta^4\lambda^4 - 144\pi^2\beta^3\lambda^4 + 48\pi^2\beta\lambda^6 - 4\pi^2\beta^3\lambda^6 + 12\pi^2\beta^5\lambda^4 - \\
& 36\beta^5\lambda^4 + 12\beta^3\lambda^6 - 60\pi^2\sin(\beta)\lambda^6\xi^2 + (3600\pi^2\sin(\beta)\beta^4 + 240\pi^2\sin(\beta)\lambda^4 + \\
& 288\pi^2\cos(\beta)\beta^3\lambda^2 - 48\pi^2\cos(\beta)\beta\lambda^4 + 144\cos(\beta)\beta^5\lambda^2 - 24\cos(\beta)\beta^3\lambda^4 + \\
& 96\pi^2\sin(\beta)\beta^4\lambda^2 - 1440\pi^2\sin(\beta)\beta^2\lambda^2 + 16\pi^2\beta^3\lambda^4 - 192\pi^2\beta\lambda^4)\xi] + \\
& \frac{C_2e^{\lambda\xi}}{\lambda} - \frac{C_1e^{-\lambda\xi}}{\lambda} + C_3
\end{aligned}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, προκύπτουν τρεις σταθερές ολοκλήρωσης. Ο προσδιορισμός των σταθερών αυτών γίνεται αξιοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες στήριξης. Παρακάτω θα γίνει χρήση των εξής συνθηκών:

- i. $\varphi(0) = 0$
- ii. $\varphi''(0) = 0$
- iii. $\varphi''(1) = 0$

Οπότε :

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow \frac{1}{6\beta^6\lambda^8\sin(\beta)} [C_26\beta^6\lambda^7\sin(\beta) - C_16\beta^6\lambda^7\sin(\beta)] + C_3 = 0 \rightarrow \frac{C_2}{\lambda} - \frac{C_1}{\lambda} + C_3 \rightarrow$$

$$C_2 - C_1 = -\lambda C_3$$

$$\varphi''(0) = 0 \rightarrow \frac{1}{6\beta^6\lambda^8\sin(\beta)} (-C_16\beta^6\lambda^9\sin(\beta) + p^2q'^2\varphi_0(-180\pi^3\beta^4\lambda^2\sin(\beta) - 288\pi^3\beta^3\lambda^4 +$$

$$360\pi^3\beta^2\lambda^4\sin(\beta) - 36\pi\beta^2\lambda^6\sin(\beta) + 108\pi\beta^4\lambda^2\sin(\beta) - 72\pi^3\beta^3\lambda^4\cos(\beta) + 24\pi^3\beta\lambda^6\cos(\beta) -$$

$$36\pi\beta^5\lambda^4\cos(\beta) + 12\pi\beta^3\lambda^6\cos(\beta) + 96\pi^3\beta\lambda^6\cos(\beta) - 8\pi^3\beta^3\lambda^6 + 24\pi\beta^3\lambda^6 - 120\pi^3\lambda^6\sin(\beta)) +$$

$$C_26\beta^6\lambda^9\sin(\beta) = 0 \rightarrow$$

$$-C_36\beta^6\lambda^{10}\sin(\beta) + 2p^2q^2\pi\varphi_0\beta\lambda[-540\pi^2\beta^3\lambda\sin(\beta) - 144\pi^2\beta^2\lambda^3 +$$

$$180\pi^2\beta\lambda^3\sin(\beta) - 18\beta\lambda^5\sin(\beta) + 54\beta^3\lambda^3\sin(\beta) - 36\pi^2\beta^2\lambda^3\cos(\beta) + 12\pi^2\lambda^5\cos(\beta) -$$

$$18\beta^4\lambda^3\cos(\beta) + 6\beta^2\lambda^5\cos(\beta) + 48\pi^2\lambda^5\cos(\beta) - 4\pi^2\beta^2\lambda^5 + 12\pi^2\beta^4\lambda^3 - 36\beta^4\lambda^3 + 12\beta^2\lambda^5 - 60\pi^2\frac{\lambda^5}{\beta}\sin(\beta)] = 0 \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
C_3 = \frac{1}{3}p^2q^2\pi\varphi_0 & \left(-\frac{540\pi^2}{\lambda^8\beta^2} - \frac{144\pi^2}{\lambda^6\beta^3\sin(\beta)} + \frac{180\pi^2}{\lambda^6\beta^4} - \frac{18}{\lambda^4\beta^4} + \frac{54}{\beta^2\lambda^6} - \frac{36\pi^2\cot(\beta)}{\beta^3\lambda^6} + \frac{12\pi^2\cot(\beta)}{\beta^5\lambda^4} - \right. \\
& \left. \frac{18\cot(\beta)}{\beta\lambda^6} + \frac{6\cot(\beta)}{\beta^3\lambda^4} + \frac{48\pi^2\cot(\beta)}{\beta^5\lambda^4} - \frac{4\pi^2}{\beta^3\lambda^4\sin(\beta)} + \frac{12\pi^2}{\beta\lambda^6\sin(\beta)} - \frac{36}{\beta\lambda^6\sin(\beta)} + \frac{12}{\beta^3\lambda^4\sin(\beta)} - \frac{60\pi^2}{\beta^6\lambda^4} \right)
\end{aligned}$$

$$\varphi''(1) = 0 \rightarrow \frac{p^2 q'^2 \pi \varphi_0}{6\beta^6 \lambda^8 \sin(\beta)} (\pi^2 \beta^4 \lambda^6 \sin(\beta) + 12\pi^2 \beta^3 \lambda^6 \cos(\beta) + 6\beta^5 \lambda^6 \cos(\beta) - 60\pi^2 \beta^2 \lambda^6 \sin(\beta) + 156\pi^2 \beta^4 \lambda^4 \sin(\beta) - 18\beta^4 \lambda^6 \sin(\beta) + 56\pi^2 \beta^3 \lambda^6 - 4\pi^2 \beta^5 \lambda^6 + 12\beta^5 \lambda^6 - 12\beta^3 \lambda^6 \cos(\beta) + 216\pi^2 \beta^3 \lambda^4 \cos(\beta) - 24\pi^2 \lambda^6 \cos(\beta) + 108\beta^5 \lambda^4 \cos(\beta) - 1080\pi^2 \beta^2 \lambda^4 \sin(\beta) + 2520\pi^2 \beta^4 \lambda^2 \sin(\beta) + 36\beta^2 \lambda^6 \sin(\beta) - 324\beta^4 \lambda^4 \sin(\beta) + 864\pi^2 \beta^3 \lambda^4 - 96\pi^2 \beta \lambda^6 - 72\pi^2 \beta^5 \lambda^4 + 216\beta^5 \lambda^4 - 24\beta^3 \lambda^6 + 120\pi^2 \lambda^6 \sin(\beta) + C_2 \lambda e^\lambda - C_1 \lambda e^{-\lambda} = 0 \rightarrow$$

$$A + C_2 \lambda e^\lambda - C_1 \lambda e^{-\lambda} = 0 \rightarrow C_2 = C_1 e^{-2\lambda} - \frac{A}{\lambda} e^{-\lambda}$$

όπου ως A ορίζεται η μεταβλητή που είναι ισοδύναμη με την παράσταση:

$$A = \frac{p^2 q'^2 \pi \varphi_0}{6\beta^6 \lambda^8 \sin(\beta)} (\pi^2 \beta^4 \lambda^6 \sin(\beta) + 12\pi^2 \beta^3 \lambda^6 \cos(\beta) + 6\beta^5 \lambda^6 \cos(\beta) - 60\pi^2 \beta^2 \lambda^6 \sin(\beta) + 156\pi^2 \beta^4 \lambda^4 \sin(\beta) - 18\beta^4 \lambda^6 \sin(\beta) + 56\pi^2 \beta^3 \lambda^6 - 4\pi^2 \beta^5 \lambda^6 + 12\beta^5 \lambda^6 - 12\beta^3 \lambda^6 \cos(\beta) + 216\pi^2 \beta^3 \lambda^4 \cos(\beta) - 24\pi^2 \lambda^6 \cos(\beta) + 108\beta^5 \lambda^4 \cos(\beta) - 1080\pi^2 \beta^2 \lambda^4 \sin(\beta) + 2520\pi^2 \beta^4 \lambda^2 \sin(\beta) + 36\beta^2 \lambda^6 \sin(\beta) - 324\beta^4 \lambda^4 \sin(\beta) + 864\pi^2 \beta^3 \lambda^4 - 96\pi^2 \beta \lambda^6 - 72\pi^2 \beta^5 \lambda^4 + 216\beta^5 \lambda^4 - 24\beta^3 \lambda^6 + 120\pi^2 \lambda^6 \sin(\beta))$$

Οι σταθερές C_1 , C_2 υπολογίζονται από την επίλυση του συστήματος:

$$C_2 - C_1 = \lambda C_3$$

και

$$C_2 = C_1 e^{-2\lambda} - \frac{A}{\lambda} e^{-\lambda}$$

όπου A και C_3 είναι γνωστές από προηγούμενως

Από την επίλυση του συστήματος προκύπτει ότι:

$$C_1 = \frac{1}{(e^{-2\lambda} - 1)} (-\lambda C_1 + \frac{A}{\lambda} e^{-\lambda})$$

και

$$C_2 = \frac{-e^{-2\lambda}}{(e^{-2\lambda} - 1)} \lambda C_3 + \left(\frac{A e^{-\lambda} (e^{-2\lambda} - 1)}{\lambda} \right)$$

Έχει οριστεί πλέον η συνάρτηση $\varphi(\xi)$ της γωνίας στροφής της διατομής σε όλες τις θέσεις ξ της αμφιέρειστης δοκού.

Αναζητείται η κρίσιμη εξίσωση στρεπτοκαμπτικού λυγισμού για το στατικό σύστημα,

που εξετάζεται. Το κρίσιμότερο σημείο της αμφιέριστης δοκού μήκους l είναι το μέσον της δοκού, οπότε για $\xi=1/2$ η γωνία στροφής της διατομής στο μέσον της δοκού είναι:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = & \frac{p^2 q'^2 \pi \varphi_0}{6\beta^6 \lambda^8 \sin(\beta)} \left[-\frac{96}{5376} \pi^2 \beta^4 \lambda^6 \sin(\beta) - \frac{3}{160} \pi^2 \beta^3 \lambda^6 \cos(\beta) - \frac{36}{640} \beta^5 \lambda^6 \cos(\beta) + \right. \\ & \frac{18}{32} \pi^2 \beta^2 \lambda^6 \sin(\beta) + \frac{4}{32} \pi^2 \beta^4 \lambda^4 \sin(\beta) + \frac{108}{640} \beta^4 \lambda^6 \sin(\beta) - \frac{134}{120} \pi^2 \beta^3 \lambda^6 + \frac{6}{160} \pi^2 \beta^5 \lambda^6 - \\ & \frac{18}{160} \beta^5 \lambda^6 + \cos(\beta) \beta^3 \lambda^6 - 8\pi^2 \beta^3 \lambda^4 \cos(\beta) + \frac{36}{8} \beta^4 \lambda^4 \sin(\beta) - 4\pi^2 \beta^3 \lambda^4 + 8\pi^2 \beta \lambda^6 + \\ & \pi^2 \beta^5 \lambda^4 - 3\beta^5 \lambda^4 + 2\beta^3 \lambda^6 - 10\pi^2 \lambda^6 \sin(\beta) + 1800\pi^2 \beta^4 \sin(\beta) + 120\pi^2 \lambda^4 \sin(\beta) + \\ & 144\pi^2 \beta^3 \lambda^2 \cos(\beta) - 24\pi^2 \beta \lambda^4 \cos(\beta) + 72\beta^5 \lambda^2 \cos(\beta) - 12\beta^3 \lambda^4 \cos(\beta) + \\ & 48\pi^2 \beta^4 \lambda^2 \sin(\beta) - 720\pi^2 \beta^2 \lambda^2 \sin(\beta) - 216\beta^4 \lambda^2 \sin(\beta) + 36\beta^2 \lambda^4 \sin(\beta) - 24\beta^3 \lambda^4 + \\ & \left. 576\pi^2 \beta^3 \lambda^2 + 144\beta^5 \lambda^2 - 48\pi^2 \beta^5 \lambda^2 - \frac{192}{2} \pi^2 \beta \lambda^4 \right] + C_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - C_1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} + C_3 \end{aligned}$$

Η κρίσιμη αδιαστατοποιημένη εξίσωση πλευρικού λυγισμού είναι :

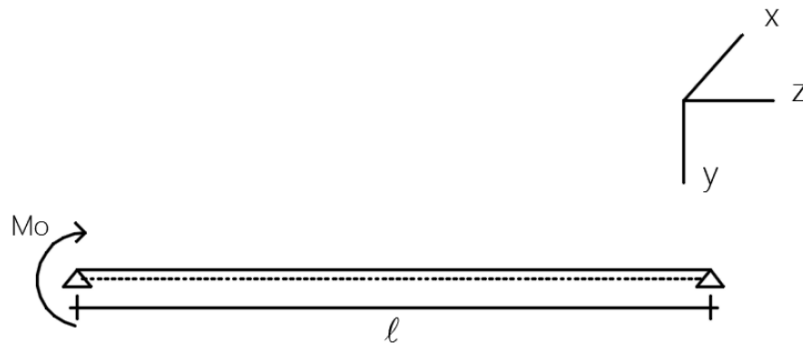
$$\begin{aligned} 1 = & \frac{p^2 q'^2 \pi \varphi_0}{6\beta^6 \lambda^8 \sin(\beta)} \left[0,24\beta^4 \lambda^6 \sin(\beta) + (0,82\cos(\beta) - 9,02)\beta^3 \lambda^6 + (-0,05625\cos(\beta) + \right. \\ & 0,26)\beta^5 \lambda^6 + 2,55\beta^2 \lambda^6 \sin(\beta) + 3,27\beta^4 \lambda^4 \sin(\beta) + (-41,6\cos(\beta) - 63,5)\beta^3 \lambda^4 + \\ & (19,74\cos(\beta) + 78,96)\beta \lambda^6 + (-1,5\cos(\beta) + 6,87)\beta^5 \lambda^4 + 184,04\sin(\beta)\beta^2 \lambda^4 - \\ & 334,44\sin(\beta)\beta^4 \lambda^2 - 98,69\sin(\beta)\lambda^6 + (17765,3\beta^4 1184,35\lambda^4)\sin(\beta) + \\ & (1421,22\cos(\beta) + 5684,9)\beta^3 \lambda^2 + (-236,87\cos(\beta) - 947,5)\beta \lambda^4 - \\ & \left. 7106,12\sin(\beta)\beta^2 \lambda^2 - 329,74\beta^5 \lambda^2 \right] + \Gamma_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} - \Gamma_1 \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\lambda} + \Gamma_3 \end{aligned}$$

Όπου :

$$\Gamma_1 = \frac{C_1}{\varphi_0}, \Gamma_2 = \frac{C_2}{\varphi_0}, \Gamma_3 = \frac{C_3}{\varphi_0}$$

Η παραπάνω εξίσωση, περιγράφει τη σχέση που συνδέει την τιμή του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου q με την αντίστοιχη ταυτόχρονη τιμή της αξονικής δύναμης που δρά στο φορέα, για τα οποία υπάρχει πλευρική εκτροπή. Στο Κεφάλαιο 6 θα γίνει αριθμητική εφαρμογή της παραπάνω εξίσωσης για συγκεκριμένη διατομή και μήκος φορέα, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από την προσομοίωση του στατικού συστήματος αυτού στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων Adina και Abaqus. Παρόλο που η εξίσωση αυτή θα μπορούσε να απλοποιηθεί περαιτέρω, κρίνεται απαραίτητο να μην προβεί κανείς σε απλοποίηση για να αποφευχθεί η απόκλιση των αποτελεσμάτων.

4.4 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ροπή κάμψεως στο ένα άκρο της



Σχήμα 4.10 Αμφιέρειστη δοκός με ροπή κάμψεως στο ένα άκρο της.

Στην περίπτωση αυτή η ροπή M_o είναι ποσότητα που εξαρτάται από το z και η επίλυση της ομογενούς αυτής διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας με σταθερούς συντελεστές είναι σχετικά απλή. Στη συνέχεια αναζητείται η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού με την προσεγγιστική μέθοδο πολυωνύμου που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Αν θεωρηθεί ότι στο άκρο μιας δοκού διατομής I ασκείται μία ροπή όπως στο Σχήμα 4.10, τότε οι ροπές κάμψεως και στρέψεως που θα αναπτυχθούν μετά την απώλεια ευστάθειας του καμπτικού επιπέδου σε τυχαία διατομή είναι:

$$M_x = M_o \left(1 - \frac{z}{l}\right)$$

$$M_y = M_z = 0$$

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση στο στρεπτοκαμπτικό λυγισμό είναι :

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M_x \cos \varphi = -M_o \left(1 - \frac{z}{l}\right) \quad (4.4.1)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -M_x \sin \varphi = M_o \left(1 - \frac{z}{l}\right) \varphi(z) \quad (4.4.2)$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -M_x \frac{du}{dz} = -M_o \left(1 - \frac{z}{l}\right) \frac{du}{dz} \quad (4.4.3)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (4.4.3) προκύπτει :

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = -M_o \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{M_o}{l} \frac{du}{dz} + \frac{M_o z}{l} \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση $\frac{d^2 u}{dz^2}$ από την εξίσωση 4.4.2 και αγνοώντας τον όρο $\frac{M_o}{l} \frac{du}{dz}$ αφού η συμβολή του στο τελικό αποτέλεσμα είναι μηδαμινή προκύπτει :

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = -\frac{M_0^2}{EI_y} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \varphi + \frac{M_0^2 z}{EI_y l} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \varphi \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{M_0^2}{EI_y EC_w} \left(1 - \frac{z}{l} - \frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2}\right) \varphi \quad (4.4.4)$$

Θέτοντας $\xi = \frac{z}{l}$ όπου ξ αδιάστατη μεταβλητή.

Γνωρίζοντας πως :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3 \varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4 \varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4} \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση 4.4.4 προκύπτει :

$$\frac{1}{l^4} \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{M_0^2}{EI_y EC_w} (1 - 2\xi + \xi^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} l^2 \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{M_0^2}{EI_y EC_w} l^4 (1 - 2\xi + \xi^2) \quad (4.4.5)$$

Θέτοντας : $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2, k^4 = \frac{2M_0^2}{EI_y EC_w} l^4, \lambda^4 = \frac{k^4}{2}, o^4 = \lambda^4$ η 4.4.5 γίνεται :

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) = o^4 \xi^2 \varphi(\xi) - k^4 \xi \varphi(\xi) + \lambda^4 \varphi(\xi) \text{ για } (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4.4.6)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του εν λόγω φορέα είναι :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi''(0) &= 0 \\ \varphi(1) &= 0 \\ \varphi''(1) &= 0 \end{aligned}$$

Μία πρώτη προσεγγιστική λύση για τη γωνία στροφής φ μπορεί να αναζητηθεί μέσω συναρτήσεως της μορφής:

$$\varphi(\xi) = \alpha_4 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0$$

Υπενθυμίζεται πως η παραπάνω σχέση κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών που προαναφέρθηκαν καταλήγει στην μορφή :

$$\varphi(\xi) = \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$$

,όπου η γωνία φ_0 είναι η άγνωστη γωνία στροφής στο μέσον της δοκού.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της $\varphi(\xi)$ στην διαφορική εξίσωση 4.4.6 προκύπτει:

$$\begin{aligned} \varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) &= o^4 \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^6 - 2\xi^5 + \xi^3) - k^4 \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^5 - 2\xi^4 + \xi^2) + \\ &+ \lambda^4 \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \end{aligned}$$

Με διπλή ολοκλήρωση :

$$\begin{aligned} \varphi'''(\xi) - \beta^2 \varphi'(\xi) &= o^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^7}{7} - \frac{\xi^6}{3} + \frac{\xi^4}{4} \right) - k^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{6} - 2\frac{\xi^5}{5} + \frac{\xi^3}{3} \right) + \\ &+ \lambda^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) + C_1 \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(\xi) - \beta^2 \varphi(\xi) &= o^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{21} + \frac{\xi^5}{20} \right) - k^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^4}{12} \right) + \\ &+ \lambda^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + C_1 \xi + C_2 \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

$$\text{Η 4.4.8 για } \xi=0 \text{ δίνει : } \varphi''(0) - \beta^2 \varphi(0) = 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$$

Η 4.4.7 για $\xi=1$ δίνει :

$$\begin{aligned} \varphi''(1) - \beta^2 \varphi(1) &= 0,0648 \varphi_0 o^4 - 0,1295 \varphi_0 k^4 + 0,32 \varphi_0 \lambda^4 + C_1 \rightarrow \\ \rightarrow C_1 &= -0,0648 \varphi_0 o^4 + 0,1295 \varphi_0 k^4 - 0,32 \varphi_0 \lambda^4 \end{aligned}$$

Επομένως επιστρέφοντας στην 4.4.8 προκύπτει :

$$\begin{aligned} \varphi''(\xi) &= \beta^2 3,2 \varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + o^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{21} + \frac{\xi^5}{20} - 0,0203\xi \right) \\ &- k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^4}{12} - 0,0405\xi \right) + \lambda^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - 0,1\xi \right) \end{aligned}$$

Με διπλή ολοκλήρωση :

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) &= \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) + o^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^9}{504} - \frac{\xi^8}{168} + \frac{\xi^6}{120} - 0,0203 \frac{\xi^2}{2} \right) \\ &- k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{336} - \frac{\xi^7}{105} + \frac{\xi^5}{60} - 0,0405 \frac{\xi^2}{2} \right) + \lambda^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^7}{210} - \frac{\xi^6}{60} + \frac{\xi^4}{24} - 0,1 \frac{\xi^2}{2} \right) + C_3 \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + o^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^{10}}{5040} - \frac{\xi^9}{1512} + \frac{\xi^7}{840} - 0,0203 \frac{\xi^3}{6} \right) \\ & - k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} + \frac{\xi^6}{360} - 0,0405 \frac{\xi^3}{6} \right) + \lambda^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - 0,1 \frac{\xi^3}{6} \right) + \\ & C_3 \xi + C_4 \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Η 4.4.10 για $\xi=0$ δίνει :

$$\varphi''(0) - \beta^2 \varphi(0) = 0 + C_4 \rightarrow C_4 = 0$$

Η 4.4.9 για $\xi=1$ δίνει :

$$\begin{aligned} \varphi''(1) - \beta^2 \varphi(1) = & 0,32 \varphi_0 \beta^2 - 8,552 \cdot 10^{-3} \varphi_0 o^4 + 0,0155 \varphi_0 k^4 - 0,0324 \varphi_0 \lambda^4 + C_3 \\ \rightarrow C_3 = & -0,32 \varphi_0 \beta^2 + 8,552 \cdot 10^{-3} \varphi_0 o^4 - 0,0155 \varphi_0 k^4 + 0,0324 \varphi_0 \lambda^4 \end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην 4.4.10 προκύπτει :

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - 0,1\xi \right) + o^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^{10}}{5040} - \frac{\xi^9}{1512} + \frac{\xi^7}{840} - \right. \\ & \left. - 0,0203 \frac{\xi^3}{6} + 2,67 \cdot 10^{-3} \xi \right) - k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} + \frac{\xi^6}{360} - 0,0405 \frac{\xi^3}{6} + 4,844 \cdot 10^{-3} \xi \right) \\ & + \lambda^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - 0,1 \frac{\xi^3}{6} + 0,010125 \xi \right) \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Η 4.4.11 για $\xi = \frac{1}{2}$ δίνει :

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = & \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^6}{30} - \frac{(0,5)^5}{10} + \frac{(0,5)^3}{6} - 0,1(0,5) \right) + o^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^{10}}{5040} - \frac{(0,5)^9}{1512} + \right. \\ & \left. + \frac{(0,5)^7}{840} - 0,0203 \frac{(0,5)^3}{6} + 2,67 \cdot 10^{-3} (0,5) \right) - k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^9}{3024} - \frac{(0,5)^8}{840} + \frac{(0,5)^6}{360} - \right. \\ & \left. - 0,0405 \frac{(0,5)^3}{6} + 4,844 \cdot 10^{-3} (0,5) \right) + \lambda^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^8}{1680} - \frac{(0,5)^7}{420} + \frac{(0,5)^5}{120} - 0,1 \frac{(0,5)^3}{6} \right. \\ & \left. + 0,010125(0,5) \right) \rightarrow \end{aligned}$$

$$1 = -0,10167 \beta^2 + 2,938 \cdot 10^{-3} o^4 - 5,18 \cdot 10^{-3} k^4 + 0,0103 \lambda^4$$

ή λόγω των $\lambda^4 = \frac{k^4}{2}$, $o^4 = \lambda^4$

$$1 = -0,10167 \beta^2 + 1,439 \cdot 10^{-3} \kappa^4 \rightarrow$$

$$\rightarrow \kappa^4 = 694,92 + 70,66 \beta^2$$

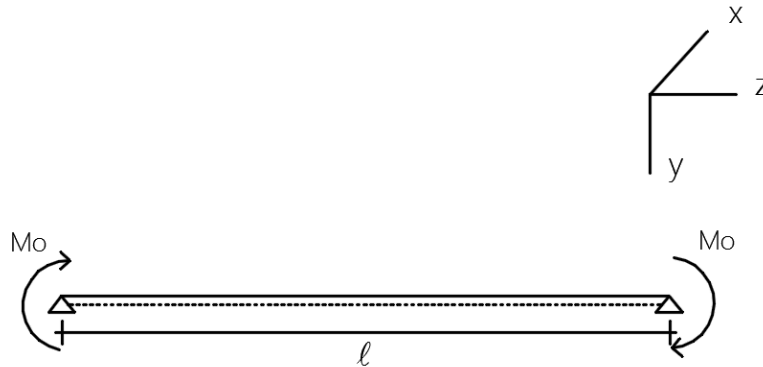
Αντικαθιστώντας τα β^2, k^4 (με $M_0 = M_{cr}$) προκύπτει :

$$\frac{2M_0^2}{EI_y EC_w} l^4 = 70,66 \frac{GJ}{EC_w} l^2 + 694,92$$

ή

$$M_{cr} = \sqrt{35,33 \frac{GJ EI_y}{l^2} + 347,46 \frac{EI_y EC_w}{l^4}} \quad (4.4.12)$$

4.5 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ομόφορων ροπών κάμψεως στα άκρα της



Σχήμα 4.11 Αμφιέρειστη δοκός με ζεύγος ομόφορων ροπών κάμψεως στα άκρα της.

Στην περίπτωση αυτή η ροπή M_o είναι ποσότητα που εξαρτάται από το z και η επίλυση της ομογενούς αυτής διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας με σταθερούς συντελεστές είναι σχετικά απλή. Στη συνέχεια αναζητείται η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού με την προσεγγιστική μέθοδο πολωνύμου που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Αν θεωρηθεί ότι στα άκρα μιας δοκού διατομής I ασκείται ζεύγος ομόφορων ροπών όπως στο σχήμα 4.11, τότε οι ροπές κάμψεως και στρέψεως που θα αναπτυχθούν μετά την απώλεια ευστάθειας του καμπτικού επιπέδου σε τυχαία διατομή είναι:

$$M_x = M_o \left(1 - 2 \frac{z}{l}\right)$$

$$M_y = M_z = 0$$

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση στο στρεπτοκαμπτικό λυγισμό είναι :

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M_x \cos \varphi = -M_o \left(1 - 2 \frac{z}{l}\right) \quad (4.5.1)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -M_x \sin \varphi = M_o \left(1 - 2 \frac{z}{l}\right) \varphi(z) \quad (4.5.2)$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -M_x \frac{du}{dz} = -M_o \left(1 - 2 \frac{z}{l}\right) \frac{du}{dz} \quad (4.5.3)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (4.5.3) προκύπτει :

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = -M_o \frac{d^2 u}{dz^2} + 2 \frac{M_o}{l} \frac{du}{dz} + 2 \frac{M_o z}{l} \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση $\frac{d^2u}{dz^2}$ από την εξίσωση 4.5.2 και αγνοώντας τον όρο $2 \frac{M_0}{l} \frac{du}{dz}$ αφού η συμβολή του στο τελικό αποτέλεσμα είναι μηδαμινή προκύπτει :

$$GJ \frac{d^2\varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4\varphi}{dz^4} = -\frac{M_0^2}{EI_y} \left(1 - 2\frac{z}{l}\right) \varphi + 2 \frac{M_0^2 z}{EI_y l} \left(1 - 2\frac{z}{l}\right) \varphi \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^4\varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{M_0^2}{EI_y EC_w} \left(1 - 2\frac{z}{l} - 2\frac{z}{l} + 4\frac{z^2}{l^2}\right) \varphi \quad (4.5.4)$$

Θέτοντας $\xi = \frac{z}{l}$ όπου ξ αδιάστατη μεταβλητή.

Γνωρίζοντας πως :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = \frac{1}{l} \frac{d^2\varphi}{dz d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi}\right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3\varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4} \frac{d^4\varphi}{d\xi^4}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση 4.5.4 προκύπτει :

$$\frac{1}{l^4} \frac{d^4\varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{1}{l^2} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \frac{M_0^2}{EI_y EC_w} (1 - 4\xi + 4\xi^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^4\varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} l^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \frac{M_0^2}{EI_y EC_w} l^4 (1 - 4\xi + 4\xi^2) \quad (4.5.5)$$

Θέτοντας : $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2, k^4 = \frac{4M_0^2}{EI_y EC_w} l^4, \lambda^4 = \frac{k^4}{4}, o^4 = k^4$ η 4.5.5 γίνεται :

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) = o^4 \xi^2 \varphi(\xi) - k^4 \xi \varphi(\xi) + \lambda^4 \varphi(\xi) \text{ για } (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4.5.6)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του εν λόγω φορέα είναι :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi''(0) &= 0 \\ \varphi(1) &= 0 \\ \varphi''(1) &= 0 \end{aligned}$$

Μία πρώτη προσεγγιστική λύση για τη γωνία στροφής φ μπορεί να αναζητηθεί μέσω συναρτήσεως της μορφής:

$$\varphi(\xi) = \alpha_4 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0$$

Υπενθυμίζεται πως η παραπάνω σχέση κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών που προαναφέρθηκαν καταλήγει στην μορφή :

$$\varphi(\xi) = \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^4 - 2 \xi^3 + \xi)$$

,όπου η γωνία φ_0 είναι η άγνωστη γωνία στροφής στο μέσον της δοκού.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της $\varphi(\xi)$ στην διαφορική εξίσωση 4.5.6 προκύπτει:

$$\begin{aligned} \varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) &= o^4 \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^6 - 2 \xi^5 + \xi^3) - k^4 \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^5 - 2 \xi^4 + \xi^2) \\ &+ \lambda^4 \frac{16}{5} \varphi_0 (\xi^4 - 2 \xi^3 + \xi) \end{aligned}$$

Με διπλή ολοκλήρωση :

$$\begin{aligned} \varphi''(\xi) - \beta^2 \varphi'(\xi) &= o^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^7}{7} - \frac{\xi^6}{3} + \frac{\xi^4}{4} \right) - k^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{6} - 2 \frac{\xi^5}{5} + \frac{\xi^3}{3} \right) \\ &+ \lambda^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) + C_1 \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) - \beta^2 \varphi(\xi) &= o^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{21} + \frac{\xi^5}{20} \right) - k^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^4}{12} \right) \\ &+ \lambda^4 \frac{16}{5} \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + C_1 \xi + C_2 \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

$$\text{Η 4.5.8 για } \xi=0 \text{ δίνει : } \varphi'(0) - \beta^2 \varphi(0) = 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$$

Η 4.5.7 για $\xi=1$ δίνει :

$$\begin{aligned} \varphi'(1) - \beta^2 \varphi(1) &= 0,0648 \varphi_0 o^4 - 0,1295 \varphi_0 k^4 + 0,32 \varphi_0 \lambda^4 + C_1 \rightarrow \\ \rightarrow C_1 &= -0,0648 \varphi_0 o^4 + 0,1295 \varphi_0 k^4 - 0,32 \varphi_0 \lambda^4 \end{aligned}$$

Επομένως επιστρέφοντας στην 4.5.8 προκύπτει :

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) &= \beta^2 3,2 \varphi_0 (\xi^4 - 2 \xi^3 + \xi) + o^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{21} + \frac{\xi^5}{20} - 0,0203 \xi \right) \\ &- k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^7}{42} - \frac{\xi^6}{15} + \frac{\xi^4}{12} - 0,0405 \xi \right) + \lambda^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - 0,1 \xi \right) \end{aligned}$$

Με διπλή ολοκλήρωση :

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) &= \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) + o^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^9}{504} - \frac{\xi^8}{168} + \frac{\xi^6}{120} - 0,0203 \frac{\xi^2}{2} \right) \\ &- k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{336} - \frac{\xi^7}{105} + \frac{\xi^5}{60} - 0,0405 \frac{\xi^2}{2} \right) + \lambda^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^7}{210} - \frac{\xi^6}{60} + \frac{\xi^4}{24} - 0,1 \frac{\xi^2}{2} \right) + C_3 \quad (4.5.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} \right) + o^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^{10}}{5040} - \frac{\xi^9}{1512} + \frac{\xi^7}{840} - 0,0203 \frac{\xi^3}{6} \right) \\ &- k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} + \frac{\xi^6}{360} - 0,0405 \frac{\xi^3}{6} \right) + \lambda^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - 0,1 \frac{\xi^3}{6} \right) + \\ &+ C_3 \xi + C_4 \quad (4.5.10) \end{aligned}$$

Η 4.5.10 για $\xi=0$ δίνει :

$$\varphi''(0) - \beta^2 \varphi(0) = 0 + C_4 \rightarrow C_4 = 0$$

Η 4.5.9 για $\xi=1$ δίνει :

$$\begin{aligned} \varphi''(1) - \beta^2 \varphi(1) &= 0,32 \varphi_0 \beta^2 - 8,552 \cdot 10^{-3} \varphi_0 o^4 + 0,0155 \varphi_0 k^4 - 0,0324 \varphi_0 \lambda^4 + C_3 \\ \rightarrow C_3 &= -0,32 \varphi_0 \beta^2 + 8,552 \cdot 10^{-3} \varphi_0 o^4 - 0,0155 \varphi_0 k^4 + 0,0324 \varphi_0 \lambda^4 \end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην 4.5.10 προκύπτει :

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6} - 0,1 \xi \right) + o^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^{10}}{5040} - \frac{\xi^9}{1512} + \frac{\xi^7}{840} - 0,0203 \frac{\xi^3}{6} \right) \\ &+ 2,67 \cdot 10^{-3} \xi - k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^9}{3024} - \frac{\xi^8}{840} + \frac{\xi^6}{360} - 0,0405 \frac{\xi^3}{6} + 4,844 \cdot 10^{-3} \xi \right) + \\ &\lambda^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120} - 0,1 \frac{\xi^3}{6} + 0,010125 \xi \right) \quad (4.5.11) \end{aligned}$$

Η 4.5.11 για $\xi = \frac{1}{2}$ δίνει :

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2}\right) &= \beta^2 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^6}{30} - \frac{(0,5)^5}{10} + \frac{(0,5)^3}{6} - 0,1(0,5) \right) + o^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^{10}}{5040} - \frac{(0,5)^9}{1512} + \right. \\ &+ \frac{(0,5)^7}{840} - 0,0203 \frac{(0,5)^3}{6} + 2,67 \cdot 10^{-3} (0,5) \left. \right) - k^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^9}{3024} - \frac{(0,5)^8}{840} + \frac{(0,5)^6}{360} - \right. \\ &- 0,0405 \frac{(0,5)^3}{6} + 4,844 \cdot 10^{-3} (0,5) \left. \right) + \lambda^4 3,2 \varphi_0 \left(\frac{(0,5)^8}{1680} - \frac{(0,5)^7}{420} + \frac{(0,5)^5}{120} - 0,1 \frac{(0,5)^3}{6} \right. \\ &+ 0,010125 (0,5) \left. \right) \rightarrow \end{aligned}$$

$$1 = -0,10167 \beta^2 + 2,938 \cdot 10^{-3} \sigma^4 - 5,18 \cdot 10^{-3} k^4 + 0,0103 \lambda^4$$

ή λόγω των $\lambda^4 = \frac{k^4}{4}$, $\sigma^4 = \lambda^4$

$$1 = -0,10167 \beta^2 + 3,33 \cdot 10^{-4} \kappa^4 \rightarrow$$

$$\rightarrow \kappa^4 = 3003 + 305,315 \beta^2$$

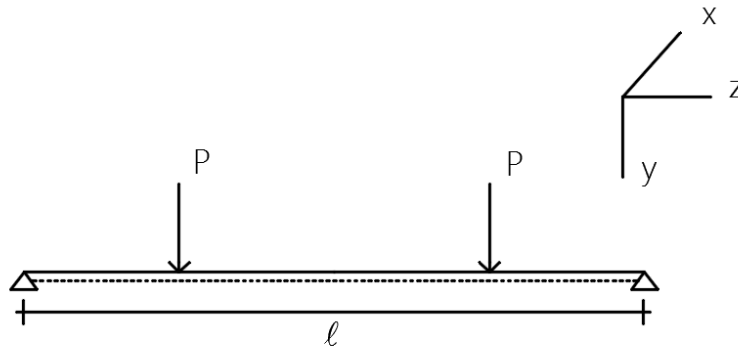
Αντικαθιστώντας τα β^2 , k^4 (με $M_0 = M_{cr}$) προκύπτει :

$$\frac{4M_0^2}{EI_y EC_w} l^4 = 305,315 \frac{GJ}{EC_w} l^2 + 3003$$

ή

$$M_{cr} = \sqrt{76,33 \frac{GJ EI_y}{l^2} + 750,75 \frac{EI_y EC_w}{l^4}} \quad (4.5.12)$$

4.6 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε δύο συγκεντρωμένα φορτία στα $1/4$ και $3/4$ του μήκους της.



Σχήμα 4.12 Αμφιέρειστη δοκός με ζεύγος συγκεντρωμένων φορτίων στα $L/4$ και $3L/4$

Θεωρείται αμφιέρειστη δοκός διατομής I (Σχ. 4.12), η οποία φορτίζεται από δύο συγκεντρωμένα φορτία P στα $l/4$ και $3l/4$, όπου l το συνολικό μήκος της δοκού. Εξετάζονται οι περιπτώσεις, στις οποίες τα φορτία P ασκούνται στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα της διατομής αντίστοιχα. Προσδιορίζεται η τιμή του κρίσιμου φορτίου πλευρικού λυγισμού, για την οποία το επίπεδο κάμψεως zy παύει να είναι ευσταθές. Εξετάζεται η μισή δοκός ($0 \leq z \leq l/2$) λόγω συμμετρίας γεωμετρίας και φόρτισης.

Μία αρχική υπόθεση, που πραγματοποιείται είναι ότι τα άκρα της δοκού μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες x και y , ενώ η στροφή τους περί τον κεντροβαρικό άξονα z είναι αδύνατη. Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3, θεωρείται ότι η δοκός έχει καμφθεί στο επίπεδο zy και συγχρόνως έχει στραφεί κατά μία μικρή γωνία φ περί τον άξονα z .

Υπολογίζονται σε αυτό το σημείο οι εξωτερικές ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται στη δοκό κατά το σταθερό σύστημα αξόνων στην απαραμόρφωτη κατάσταση και οι αντίστοιχες M'_x, M'_y, M'_z στην παραμορφωμένη κατάσταση περί τους άξονες x', y', z' :

$$M_x = Pz \quad (0 \leq z \leq l/4) \quad (4.6.1.a)$$

$$M_x = -Pz - P(z - l/4) = \frac{Pl}{4} \quad (l/4 \leq z \leq l/2) \quad (4.6.1.b)$$

$$M_y = 0 \quad (0 \leq z \leq l/2) \quad (4.6.2)$$

$$M_z = P(u(z) - u_k) - Pa\varphi_0 \quad (0 \leq z \leq l/4) \quad (4.6.3.a)$$

$$M_z = Pu(z) - Pu_k - P(u(z) - u_k) - Pa\varphi_0 \quad (l/4 \leq z \leq l/2) \quad (4.6.3.b)$$

Όπου:

a : η κατακόρυφη απόσταση από το κέντρο βάρους της διατομής (θετική από το κέντρο βάρους και πάνω) με $-\frac{h}{2} < a < \frac{h}{2}$.

Σημείωση:

Ο όρος $\varphi(z)$ είναι μηδενικός, όταν τα φορτία εφαρμόζονται στο κέντρο βάρους, ενώ είναι θετικός στην περίπτωση που εφαρμόζονται στο άνω πέλμα της διατομής με αποτέλεσμα η M_z να αυξάνεται και κατά συνέπεια η τιμή του κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού να μειώνεται. Το αντίστροφο συμβαίνει όταν τα φορτία εφαρμόζονται στο κάτω πέλμα της διατομής.

Οι εξωτερικές ροπές M'_x, M'_y, M'_z είναι:

$$M'_x = M_x \cos(x', x) = M_x \cos\varphi \simeq M_x \quad (4.6.4)$$

$$M'_y = M_x \sin(y', y) = M_x \sin\varphi \simeq M_x \varphi \quad (4.6.5)$$

$$M'_z = M_t(z) - M_x \sin \frac{du}{dz} \quad (4.6.6)$$

Παρακάτω μορφώνονται τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων για τα εξής δύο διαστήματα:

$$0 \leq z \leq l/4$$

και

$$l/4 \leq z \leq l/2$$

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -Pz \quad (4.6.7.a)$$

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{Pl}{4} \quad (4.6.7.b)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = Pz\varphi(z) \quad (4.6.8.a)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{Pl}{4}\varphi(z) \quad (4.6.8.b)$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -Pz \frac{du}{dz} + Pu(z) - Pu_k - Pa\varphi_0 \quad (4.6.9.a)$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -\frac{Pl}{4} \frac{du}{dz} - Pa\varphi_0 \quad (4.6.9.b)$$

α. Για το διάστημα $0 \leq z \leq l/4$:

Παραγωγίζοντας την σχέση (4.6.9.a) :

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = -Pz \frac{d^2 u}{dz^2} + P \frac{du}{dz} - P \frac{du}{dz} - P \frac{duk}{dz} - Pa \frac{d\varphi_0}{dz} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = - \frac{Pz}{EC_w} \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση $\frac{d^2 u}{dz^2}$ από την εξίσωση (4.6.8.α) προκύπτει :

$$\rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -Pz \frac{Pz\varphi}{EI_y EC_w} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = - \frac{P^2 z^2 \varphi}{EI_y EC_w} \quad (4.6.10.α)$$

β. Για το διάστημα $l/4 \leq z \leq l/2$:

Παραγωγίζοντας την σχέση (4.6.9.β) :

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} = - \frac{Pl}{4} \frac{d^2 u}{dz^2} - Pa \frac{d\varphi_0}{dz} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = - \frac{Pl}{4EC_w} \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση $\frac{d^2 u}{dz^2}$ από την εξίσωση (4.6.8.β) προκύπτει :

$$\rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = - \frac{\left(\frac{Pl}{4}\right)^2}{EI_y EC_w} \quad (4.6.10.β)$$

Σημείωση:

Οι παράγωγοι $\frac{d\varphi_0}{dz}$ και $\frac{du_k}{dz}$ είναι μηδενικές ως προς z , διότι οι τιμές u_k και φ_0 είναι σταθερές.

Θέτοντας $\xi = \frac{z}{l}$ όπου ξ αδιάστατη μεταβλητή.

Γνωρίζοντας πως :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2 \varphi}{dz d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3 \varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3} \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4 \varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4} \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση 4.5.10α και 4.6.10.β προκύπτει :

$$\frac{1}{l^4} \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{P^2 \xi^2 l^2}{EI_y EC_w} \varphi(\xi)$$

$$\rightarrow \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w} l^2 \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{P^2 l^6}{EI_y EC_w} \varphi(\xi) \quad (4.6.11.α)$$

Θέτοντας : $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2$, $M^4 = \frac{P^2}{EI_y EC_w} l^6$, η (4.6.11.α) γίνεται :

$$\varphi_1''''(\xi) - \beta^2 \varphi_1''(\xi) = M^4 \xi^2 \varphi_1(\xi), \text{ για } (0 \leq \xi \leq 1 \text{ και } 0 \leq z \leq l/4) \quad (4.6.12.α)$$

Όμοια:

$$\varphi_2''''(\xi) - \beta^2 \varphi_2''(\xi) = \frac{M^4}{16} \varphi_2(\xi), \text{ για } (0 \leq \xi \leq 1 \text{ και } l/4 \leq z \leq l/2) \quad (4.6.12.β)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του εν λόγω φορέα είναι :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi''(0) &= 0 \\ \varphi(1/2) &= 0 \\ \varphi'''(1/2) &= \frac{Pa\varphi_0 l^3}{EC_w} = P' \varphi_0, \quad P' = \frac{Pal^3}{EC_w} \end{aligned}$$

Μία πρώτη προσεγγιστική λύση για τη γωνία στροφής φ μπορεί να αναζητηθεί μέσω συναρτήσεως της μορφής:

$$\varphi(\xi) = \alpha_4 \xi^4 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω σχέση προκύπτουν:

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) &= 4\alpha_4 \xi^3 + 3\alpha_3 \xi^2 + 2\alpha_2 \xi + \alpha_1 \\ \varphi''(\xi) &= 12\alpha_4 \xi^2 + 6\alpha_3 \xi + 2\alpha_2 \\ \varphi'''(\xi) &= 24\alpha_4 \xi + 6\alpha_3 \\ \varphi''''(\xi) &= 24\alpha_4 \end{aligned}$$

Οι συνοριακές συνθήκες του εν λόγω φορέα είναι :

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 &\rightarrow \alpha_0 = 0 \\ \varphi''(0) = 0 &\rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \varphi'(\frac{1}{2}) = 0 &\rightarrow 0,5\alpha_4 + 0,75\alpha_3 + \alpha_1 = 0 \\ EC_w \varphi'''(\frac{1}{2}) - GJ\varphi'(\frac{1}{2}) = 0 &\rightarrow \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \rightarrow \alpha_3 = -2\alpha_4 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\varphi'(\frac{1}{2}) = 0 \rightarrow 0,5\alpha_4 - 0,75 * 2\alpha_4 + \alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_4$$

Τελικά: $\varphi(\xi) = \alpha_4 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$

Για $\varphi(\frac{1}{4}) = \varphi_0 \rightarrow \alpha_4 = 4,49\varphi_0$

Επομένως:

$$\varphi_1''''(\xi) - \beta^2 \varphi_1''(\xi) = 4,49M^4 \varphi_0 (\xi^6 - 2\xi^5 + \xi^3) \quad (4.6.13.\alpha)$$

και

$$\varphi_2''''(\xi) - \beta^2 \varphi_2''(\xi) = 0,281M^4 \varphi_0 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \quad (4.6.13.\beta)$$

όπου: φ_0 είναι η στροφή στο μέσον της δοκού ($\xi = \frac{1}{2}$).

Ολοκληρώνοντας δύο φορές τις παραπάνω σχέσεις:

$$\varphi_1'''(\xi) - \beta^2 \varphi_1'(\xi) = 4,49M^4 \varphi_0 (\frac{\xi^7}{7} - \frac{\xi^6}{3} + \frac{\xi^4}{4}) + C_1 \quad (4.6.14.\alpha)$$

$$\varphi_1''(\xi) - \beta^2 \varphi_1(\xi) = 4,49M^4 \varphi_0 (\frac{\xi^8}{56} - \frac{\xi^7}{21} + \frac{\xi^5}{20}) + C_1 \xi + C_2 \quad (4.6.15.\alpha)$$

Για $\xi = 0$ από (4.6.15. α)

$$\rightarrow \varphi_1''(0) - \beta^2 \varphi_1(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Για $\xi = 1/4$ από (4.6.14. α)

$$\rightarrow \varphi_1'''(1/4) - \beta^2 \varphi_1'(1/4) = C_1 + 0,004059M^4 \varphi_0 \quad (4.6.16.\alpha)$$

Για $\xi = 1/4$ από (4.6.15. α)

$$\rightarrow \varphi_1''(1/4) - \beta^2 \varphi_1(1/4) = 0,25C_1 + 0,0002074M^4 \varphi_0 \quad (4.6.17.\alpha)$$

Με διπλή ολοκλήρωση :

$$\varphi_1'(\xi) = \beta^2 4,49 \varphi_0 (\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2}) + M^4 4,49 \varphi_0 (\frac{\xi^9}{504} - \frac{\xi^8}{168} + \frac{\xi^6}{120}) + C_1 \frac{\xi^2}{2} + C_3 \quad (4.6.18.\alpha)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= 4,49\beta^2 \varphi_0 (\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6}) + 4,49M^4 \varphi_0 (\frac{\xi^{10}}{5040} - \frac{\xi^9}{1512} + \frac{\xi^7}{840}) + \\ &+ C_1 \frac{\xi^3}{6} + C_3 \xi + C_4 \end{aligned} \quad (4.6.19.\alpha)$$

Για $\xi = 0$ από (4.6.19. α)

$$\rightarrow \varphi_1(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

Για $\xi = 1/4$ από (4.6.18. α)

$$\varphi_1'(1/4) = 0,03125C_1 + C_3 + 0,00000876M^4\varphi_0 + 0,1324\beta^2\varphi_0 \quad (4.6.20.\alpha)$$

Για $\xi = 1/4$ από (4.6.19. α)

$$\varphi_1(1/4) = 0,0026C_1 + C_3 + 0,0000003157M^4\varphi_0 + 0,01129\beta^2\varphi_0 \quad (4.6.21.\alpha)$$

Όμοια για τη $\varphi_1(\xi)$ ολοκληρώνοντας δύο φορές:

$$\varphi_2'''(\xi) - \beta^2\varphi_2'(\xi) = 0,281M^4\varphi_0\left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2}\right) + C_5 \quad (4.6.14.\beta)$$

$$\varphi_2''(\xi) - \beta^2\varphi_2(\xi) = 0,281M^4\varphi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6}\right) + C_5\xi + C_6 \quad (4.6.15.\beta)$$

Για $\xi = 1/2$ από (4.6.14. β)

$$\rightarrow C_5 = P'\varphi_0 - 0,0281M^4\varphi_0$$

Για $\xi = 1/4$ από (4.6.14. β) \rightarrow

$$\varphi_2'''(1/4) - \beta^2\varphi_2'(1/4) = P'\varphi_0 - 0,01981M^4\varphi_0 \quad (4.6.16.\beta)$$

Για $\xi = 1/4$ από(4.6.15. β) \rightarrow

$$\varphi_2''(1/4) - \beta^2\varphi_2(1/4) = 0,25C_5 + C_6 + 0,000706M^4\varphi_0 \quad (4.6.17.\beta)$$

Με διπλή ολοκλήρωση στην (4.6.17.β) :

$$\begin{aligned} \varphi_2'(\xi) &= 4,49\beta^2\varphi_0\left(\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^4}{2} + \frac{\xi^2}{2}\right) + 0,281M^4\varphi_0\left(\frac{\xi^7}{210} - \frac{\xi^6}{60} + \frac{\xi^4}{24}\right) + \\ &+ C_5\frac{\xi^2}{2} + C_6\xi + C_7 \end{aligned} \quad (4.6.18.\beta)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\xi) &= 4,49\beta^2\varphi_0\left(\frac{\xi^6}{30} - \frac{\xi^5}{10} + \frac{\xi^3}{6}\right) + 0,281M^4\varphi_0\left(\frac{\xi^8}{1680} - \frac{\xi^7}{420} + \frac{\xi^5}{120}\right) + \\ &+ C_5\frac{\xi^3}{6} + C_6\frac{\xi^2}{2} + C_7\xi + C_8 \end{aligned} \quad (4.6.19.\beta)$$

Για $\xi = 1/2$ από (4.6.19. β) $\rightarrow \varphi_2'(1/2) = 0 \rightarrow$

$$0,449\beta^2\varphi_0 + 0,000669M^4\varphi_0 + 0,125C_5 + 0,5C_6 + C_7 = 0 \rightarrow$$

$$C_7 = -0,449\beta^2\varphi_0 - 0,000669M^4\varphi_0 - 0,125C_5 - 0,5C_6$$

Για $\xi = 1/4$ από (4.6.18.β) \rightarrow

$$\varphi_2'(1/4) = 0,25C_6 + C_7 - 0,000833M^4\varphi_0 + 0,1324\beta^2\varphi_0 + 0,03125P'\varphi_0 \quad (4.6.20.\beta)$$

Για $\xi = 1/4$ από (4.6.19.β) \rightarrow

$$\varphi_2(1/4) = -0,094C_6 + C_8 + 0,00064M^4\varphi_0 - 0,100968\beta^2\varphi_0 - 0,0287P'\varphi_0 \quad (4.6.21.\beta)$$

Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)$:

$$\varphi_1(1/4) = \varphi_2(1/4)$$

$$\varphi_1'(1/4) = \varphi_2'(1/4)$$

$$\varphi_1''(1/4) - \beta^2\varphi_1(1/4) = \varphi_2''(1/4) - \beta^2\varphi_2(1/4)$$

$$\varphi_1'''(1/4) - \beta^2\varphi_1'(1/4) = \varphi_2'''(1/4) - \beta^2\varphi_2'(1/4)$$

Άρα οι συντελεστές C_1 έως C_8 είναι:

$$\varphi_1'''(1/4) = \varphi_2'''(1/4) \Rightarrow -0,01981M^4\varphi_0 + P'\varphi_0 = 0,004059M^4\varphi_0 + C_1 \rightarrow$$

$$C_1 = -0,02387M^4\varphi_0 + P'\varphi_0$$

$$\varphi_1''(1/4) = \varphi_2''(1/4) \rightarrow -0,00576M^4\varphi_0 + 0,25P'\varphi_0 = -0,006319M^4\varphi_0 + 0,25P'\varphi_0$$

$$+C_6 \rightarrow C_6 = 0,000559M^4\varphi_0$$

$$\varphi_1'(1/4) = \varphi_2'(1/4) \rightarrow$$

$$0,1324\beta^2\varphi_0 - 0,0007372M^4\varphi_0 + 0,03125P'\varphi_0 + C_3 = -0,3166\beta^2\varphi_0 +$$

$$0,001872M^4\varphi_0 - 0,0919P'\varphi_0 \rightarrow$$

$$C_3 = -0,449\beta^2\varphi_0 + 0,002609M^4\varphi_0 - 0,12315P'\varphi_0$$

$$\varphi_1(1/4) = \varphi_2(1/4) \rightarrow$$

$$-0,10096\beta^2\varphi_0 + 0,0005905M^4\varphi_0 - 0,0282P'\varphi_0 = C_8 - 0,10096\beta^2\varphi_0 +$$

$$0,0005875M^4\varphi_0 - 0,0287P'\varphi_0$$

$$C_8 = 0$$

Για $\xi=1/4$ πρέπει οι δύο εξισώσεις $\varphi_1(\xi)=\varphi_2(\xi)$, οπότε είναι:

$$\varphi_1(1/4) = -0,10096\beta^2\varphi_0 + 0,0005905M^4\varphi_0 - 0,0282P'\varphi_0$$

$$\varphi_2(1/4) = -0,10096\beta^2\varphi_0 + 0,0005875M^4\varphi_0 - 0,0287P'\varphi_0$$

Διαπιστώνεται ότι οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται, συνεπώς παίρνοντας τη μία από τις δύο προκύπτει το κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού ως εξής:

$$1 = \beta^2 (-0,10096) + 5,88 * 10 - 4M4 - 0,0282P'$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w} l^2$, $M^4 = \frac{P^2 l^6}{EI_y EC_w}$, $P' = \frac{P a l^3}{EC_w}$ για $P=P_{cr}$ τότε:

$$P^2 - \frac{48,18PEI_y a}{l^3} = \frac{1700,69EI_y EC_w}{l^6} + \frac{170,29EI_y GJ}{l^4} \rightarrow$$

$$P^2 - \frac{48,18PEI_y a}{l^3} + \left(\frac{24,06PEI_y a}{l^3}\right)^2 = \frac{1700,69EI_y EC_w}{l^6} + \frac{170,29EI_y GJ}{l^4} + \left(\frac{24,06PEI_y a}{l^3}\right)^2 \rightarrow$$

όπου:

ο όρος $\left(\frac{24,06PEI_y a}{l^3}\right)^2$ προστέθηκε και στα δύο μέρη της εξίσωσης για να δημιουργηθεί ταυτότητα.

Άρα:

$$\left(P - \frac{23,98PEI_y a}{l^3}\right)^2 = \frac{1700,69EI_y EC_w}{l^6} + \frac{170,29EI_y GJ}{l^4} + \left(\frac{24,06PEI_y a}{l^3}\right)^2$$

$$P_{cr} = \sqrt{\frac{1700,69EI_y EC_w}{l^6} + \frac{170,29EI_y GJ}{l^4} + \left(\frac{23,98PEI_y a}{l^3}\right)^2} + \left(\frac{24,06PEI_y a}{l^3}\right) \quad (4.6.22)$$

και

$$M_{cr} = \frac{P_{cr} l}{8} = \frac{l}{4} \left\{ \sqrt{\frac{1700,69EI_y EC_w}{l^6} + \frac{170,29EI_y GJ}{l^4} + \left(\frac{23,98PEI_y a}{l^3}\right)^2} + \left(\frac{24,06PEI_y a}{l^3}\right) \right\} \quad (4.6.23)$$

5. Στρεπτοκαμπτικός Λυγισμός βάσει του Ευρωκώδικα 3

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνεται η εξίσωση της κρίσιμης ελαστικής ροπής πλευρικού λυγισμού σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 3, έτσι ώστε να είναι δυνατές στο επόμενο κεφάλαιο οι απαραίτητες συγκρίσεις των αποτελεσμάτων αυτών με τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου που αναπτύχθηκε. Επίσης θα προσδιοριστεί η ροπή αντοχής σε πλευρικό λυγισμό $M_{b,Rd}$ για να ελεγχθεί η απόκλιση της από την κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού.

5.2 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μη προστατευμένων πλευρικά δοκών υπό κάμψη περί τον ισχυρό τους άξονα

Καθώς ο πλευρικός λυγισμός περιλαμβάνει στρέψη και κάμψη περί τον ασθενή άξονα, η κρίσιμη ροπή κάμψης, η οποία είναι και το καθοριστικό μέγεθος σε αυτή τη μορφή αστάθειας, εκφράζεται συναρτήσει του μήκους της δοκού, της δυστρεψιάς, της δυσκαμψιάς στρέβλωσης καθώς και της καμπτικής αντίστασης περί τον ασθενή άξονα.

Στην περίπτωση δοκού σταθερής διατομής, με συνήθεις στρεπτικές συνθήκες στήριξης στα άκρα της, συμμετρικής ως προς τον ασθενή άξονα αδρανείας x και υποκειμένης σε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα αδρανείας z η κρίσιμη ελαστική ροπή πλευρικού λυγισμού δίνεται από τον τύπο:

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_y}{(kL)^2} \left\{ \left[\left[\frac{k}{k_w} \right]^2 \frac{C_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GJ}{\pi^2 EI_x} + (C_2 z_g - C_3 z_j)^2 \right]^{0.5} - (C_2 z_g - C_3 z_j) \right\}$$

όπου:

C_1, C_2, C_3 συντελεστές εξαρτώμενοι από τις συνθήκες φόρτισης και στρεπτικής στήριξης

J σταθερά στρέψης

C_w σταθερά στρέβλωσης

I_y ροπή αδρανείας ως προς τον ασθενή άξονα

L μήκος δοκού

k, k_w συντελεστές εξαρτώμενοι από το είδος των στηρίξεων ως προς την ελευθερία στροφής και στρέβλωσης των άκρων του εξεταζόμενου τμήματος

z_a η τεταγμένη του σημείου εφαρμογής του φορτίου ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $z-z$

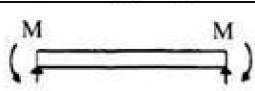
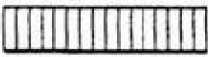
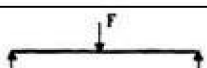

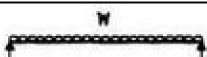
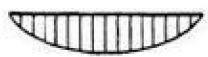
z_s η τεταγμένη του κέντρου διάτμησης ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $z-z$

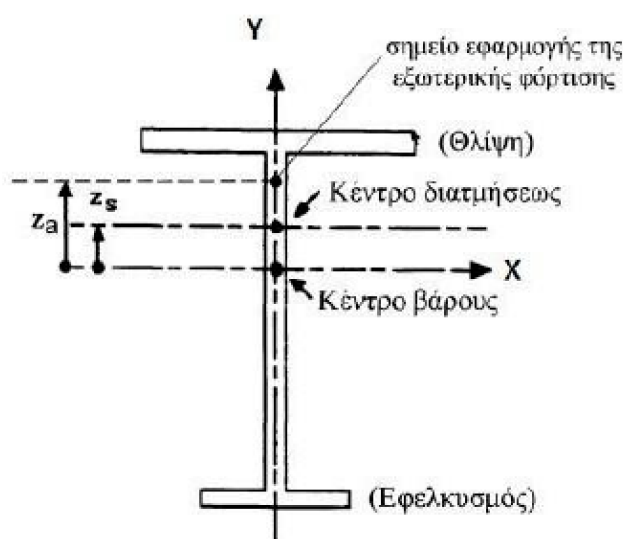
$z_g = z_a - z_s$ η απόσταση του κέντρου διάτμησης από το σημείο εφαρμογής του φορτίου.

Ο συντελεστής k_w αφορά τη στρέβλωση του άκρου και λαμβάνεται ίσος με μονάδα (1,0) για άκρα με ελεύθερη στρέβλωση.

Οι τεταγμένες z_a και z_s μετρώνται με αφετηρία το κέντρο βάρους της διατομής και είναι προσημασμένες με θετική φορά προς το θλιβόμενο πέλμα της διατομής.

Πίνακας 5.1 Συντελεστές C_1 , C_2 και C_3 για $k = 1$

Φόρτιση και συνθήκες στήριξης	Διάγραμμα καμπτικών ροπών	Συντελεστές		
		C_1	C_2	C_3
		1,000	0	1,000
		1,365	0,553	1,730
		1,132	0,459	0,525



Σχήμα 5.1 Προσδιορισμός z_a , z_s

Σύμφωνα με τον κανονισμό, μια δοκός σταθερής διατομής μη προστατευμένη πλευρικά, που υπόκειται σε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα, πρέπει να ελέγχεται έναντι πλευρικού λυγισμού με βάση τη σχέση:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1,0$$

όπου :

M_{Ed} η ροπή κάμψης σχεδιασμού

$M_{b,Rd}$ η ροπή αντοχής έναντι πλευρικού λυγισμού

Η ροπή αντοχής έναντι πλευρικού λυγισμού υπολογίζεται από τη σχέση :

$$M_{\alpha, Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$$

όπου :

$W_y = W_{pl,y}$ για διατομές κατηγορίας 1 ή 2

$W_y = W_{el,y}$ για διατομές κατηγορίας 3

$W_y = W_{eff,y}$ για διατομές κατηγορίας 4

χ_{LT} ο μειωτικός συντελεστής για πλευρικό λυγισμό

Η τιμή του χ_{LT} για καμπτόμενα μέλη σταθερής διατομής καθορίζεται από τη σχέση :

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^2}}, \text{ με } \chi_{LT} \leq 1$$

όπου :

$\Phi_{LT} = 0,5 [1 + \alpha_{LT}(\lambda_{LT} - 0,2) + \lambda_{LT}^2]$ για διατομές κατηγορίας 1 ή 2

α_{LT} συντελεστής ατελειών

$\lambda_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}}$ η ανηγμένη λυγηρότητα πλευρικού λυγισμού

M_{cr} η ελαστική κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού, από εξίσωση

Πίνακας 5.2: Συντελεστής ατελειών για καμπύλες πλευρικού λυγισμού

Καμπύλη λυγισμού	a	b	c	d
Συντελεστής ατελειών α_{LT}	0,21	0,34	0,49	0,76

Οι καμπύλες λυγισμού που χρησιμοποιούνται, δίνονται από τον Πίνακα (5.3)

Πίνακας 5.3: Καμπύλες πλευρικού λυγισμού

Διατομή	Όρια	Καμπύλη λυγισμού
Ελατές διατομές I	$h/b \leq 2$	a
	$h/b > 2$	b
Συγκολλητές διατομές I	$h/b \leq 2$	c
	$h/b > 2$	d
Άλλες διατομές	–	d

5.3 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη και κάμψη

Η ανάλυση της φέρουσας συμπεριφοράς δοκών που καταπονούνται ταυτόχρονα από αξονική θλιπτική δύναμη και ροπές κάμψης είναι εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία καθιστώντας μη εφικτές κλειστές αναλυτικές λύσεις. Γι αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται οι παρακάτω εξισώσεις αλληλεπίδρασης:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Fk}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Fk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Fk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Fk}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Fk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Fk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1$$

όπου :

$N_{Ed}, M_{y,Ed}$ και $M_{z,Ed}$ οι τιμές σχεδιασμού της θλιπτικής αξονικής δύναμης και των μεγίστων ροπών ως προς τους άξονες y-y και z-z κατά μήκος του μέλους αντίστοιχα
 $\Delta M_{y,Ed}, \Delta M_{z,Ed}$ οι ροπές λόγω της μετατόπισης του κεντροβαρικού άξονα

χ_y, χ_z οι μειωτικοί συντελεστές λόγω καμπτικού λυγισμού

χ_{LT} ο μειωτικός συντελεστής για πλευρικό λυγισμό

$k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$ οι συντελεστές αλληλεπίδρασης, εξαρτώμενοι από τη μέθοδο που έχει επιλεγεί.

Πίνακας 5.4: Τιμές για $N_{Rk}=f_y A_i$, $M_{i,Rk}=f_y W_i$ και $\Delta M_{i,Ed}$

Κατηγορία διατομής	1	2	3	4
A_i	A	A	A	A_{eff}
W_y	$W_{pl,y}$	$W_{pl,y}$	$W_{el,y}$	$W_{eff,y}$
W_z	$W_{pl,z}$	$W_{pl,z}$	$W_{el,z}$	$W_{eff,z}$
$\Delta M_{y,Ed}$	0	0	0	$e_{N,y} N_{Ed}$
$\Delta M_{z,Ed}$	0	0	0	$e_{N,z} N_{Ed}$

Οι συντελεστές αλληλεπίδρασης k_{yy} , k_{yz} , k_{zy} , k_{zz} δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 5.5: Συντελεστές αλληλεπίδρασης k_{ij}

Συντελεστές αλληλεπίδρασης	Παραδοχές σχεδιασμού	
	ελαστικές ιδιότητες διατομής κατηγορία 3, κατηγορία 4	πλαστικές ιδιότητες διατομής κατηγορία 1, κατηγορία 2
k_{yy}	$C_{my} C_{mLT} \frac{\mu_y}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}$	$C_{my} C_{mLT} \frac{\mu_y}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \frac{1}{C_{yy}}$
k_{yz}	$C_{mz} \frac{\mu_y}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}}$	$C_{mz} \frac{\mu_y}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}} \frac{1}{C_{yz}} 0,6 \sqrt{\frac{w_z}{w_y}}$
k_{zy}	$C_{my} C_{mLT} \frac{\mu_z}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}$	$C_{my} C_{mLT} \frac{\mu_z}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \frac{1}{C_{zy}} 0,6 \sqrt{\frac{w_y}{w_z}}$
k_{zz}	$C_{mz} \frac{\mu_z}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}}$	$C_{mz} \frac{\mu_z}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}} \frac{1}{C_{zz}}$

Βοηθητικοί συντελεστές	
$\mu_y = \frac{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}{1 - \chi_y \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}$	$C_{zy} = 1 + (w_y - 1) \left[\left(2 - \frac{1,6}{w_y} C_{my}^2 \bar{\lambda}_{max} - \frac{1,6}{w_y} C_{my}^2 \bar{\lambda}_{max}^{-2} \right) n_{pl} - b_{LT} \right] \geq \frac{W_{el,y}}{W_{pl,y}}$ με $b_{LT} = 0,5 a_{LT} \frac{\bar{\lambda}_0^{-2}}{\chi_{LT}} \frac{M_{y,Ed}}{M_{pl,y,Rd}} \frac{M_{z,Ed}}{M_{pl,z,Rd}}$
$\mu_z = \frac{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}}{1 - \chi_z \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}}$	$C_{yz} = 1 + (w_z - 1) \left[\left(2 - 14 \frac{C_{mz}^2 \bar{\lambda}_{max}^{-2}}{w_z^5} \right) n_{pl} - c_{LT} \right] \geq 0,6 \sqrt{\frac{w_z}{w_y} \frac{W_{el,z}}{W_{pl,z}}}$ με $c_{LT} = 10 a_{LT} \frac{\bar{\lambda}_0^{-2}}{5 + \bar{\lambda}_z^4} \frac{M_{y,Ed}}{C_{my} \chi_{LT} M_{pl,y,Rd}}$
$w_y = \frac{W_{pl,y}}{W_{el,y}} \leq 1,5$	$C_{zy} = 1 + (w_y - 1) \left[\left(2 - 14 \frac{C_{my}^2 \bar{\lambda}_{max}^{-2}}{w_y^5} \right) n_{pl} - d_{LT} \right] \geq 0,6 \sqrt{\frac{w_y}{w_z} \frac{W_{el,y}}{W_{pl,y}}}$ με $d_{LT} = 2 a_{LT} \frac{\bar{\lambda}_0}{0,1 + \bar{\lambda}_z^4} \frac{M_{y,Ed}}{C_{my} \chi_{LT} M_{pl,y,Rd}} \frac{M_{z,Ed}}{C_{mz} M_{pl,z,Rd}}$
$w_z = \frac{W_{pl,z}}{W_{el,z}} \leq 1,5$	$C_{zz} = 1 + (w_z - 1) \left[\left(2 - \frac{1,6}{w_z} C_{mz}^2 \bar{\lambda}_{max} - \frac{1,6}{w_z} C_{mz}^2 \bar{\lambda}_{max}^{-2} \right) - e_{LT} \right] n_{pl} \geq \frac{W_{el,z}}{W_{pl,z}}$ με $e_{LT} = 1,7 a_{LT} \frac{\bar{\lambda}_0}{0,1 + \bar{\lambda}_z^4} \frac{M_{y,Ed}}{C_{my} \chi_{LT} M_{pl,y,Rd}}$
$n_{pl} = \frac{N_{Ed}}{N_{Rk} / \gamma_{M1}}$	
C_{my} βΛΕΠΕ Πίνακα Α.2	
$a_{LT} = 1 - \frac{I_T}{I_y} \geq 0$	

Πίνακας 5.5: (Συνέχεια)

$$\bar{\lambda}_{\max} = \max \left\{ \bar{\lambda}_y, \bar{\lambda}_z \right\}$$

$\bar{\lambda}_0$ = ανηγμένη λυγηρότητα για στρεπτοκαμπτικό (πλευρικό) λυγισμό λόγω σταθερής καμπτικής ροπής, δηλ.
 $\psi_y = 1,0$ στον Πίνακα Α.2

$\bar{\lambda}_{LT}$ = ανηγμένη λυγηρότητα για στρεπτοκαμπτικό (πλευρικό) λυγισμό

$$\text{Εάν } \bar{\lambda}_0 \leq 0,2\sqrt{C_1} \sqrt{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right) \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,TF}}\right)}: \quad C_{my} = C_{my,0}$$

$$C_{mz} = C_{mz,0}$$

$$C_{mLT} = 1,0$$

$$\text{Εάν } \bar{\lambda}_0 > 0,2\sqrt{C_1} \sqrt{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right) \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,TF}}\right)}: \quad C_{my} = C_{my,0} + (1 - C_{my,0}) \frac{\sqrt{\varepsilon_y a_{LT}}}{1 + \sqrt{\varepsilon_y a_{LT}}}$$

$$C_{mz} = C_{mz,0}$$

$$C_{mLT} = C_{my}^2 \frac{a_{LT}}{\sqrt{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right) \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,TF}}\right)}} \geq 1$$

$$\varepsilon_y = \frac{M_{y,Ed}}{N_{Ed}} \frac{A}{W_{el,y}} \quad \text{για διατομές κατηγορίας 1, 2 και 3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{M_{y,Ed}}{N_{Ed}} \frac{A_{eff}}{W_{eff,y}} \quad \text{για διατομές κατηγορίας 4}$$

C_1 = συντελεστής εξαρτώμενος από τις συνθήκες φόρτισης και στρεπτικής στήριξης (βλέπε και παράγραφο 3.3.5.2)

$N_{cr,y}$ = ελαστική δύναμη καμπτικού λυγισμού περί τον άξονα y-y

$N_{cr,z}$ = ελαστική δύναμη καμπτικού λυγισμού περί τον άξονα z-z

$N_{cr,T}$ = ελαστική δύναμη στρεπτικού λυγισμού

I_T = σταθερά στρέψης St. Venant

I_y = ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα y-y

6. Παρουσίαση Προγραμμάτων και Αριθμητικές Εφαρμογές

6.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση και σύγκριση των κρίσιμων φορτίων, που προκύπτουν από την προσδιοριστική μέθοδο, που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 4 για τις διάφορες φορτίσεις επί της αμφιερείστου. με τα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων adina και abaqus αλλά και τον Ευρωκώδικα 3.

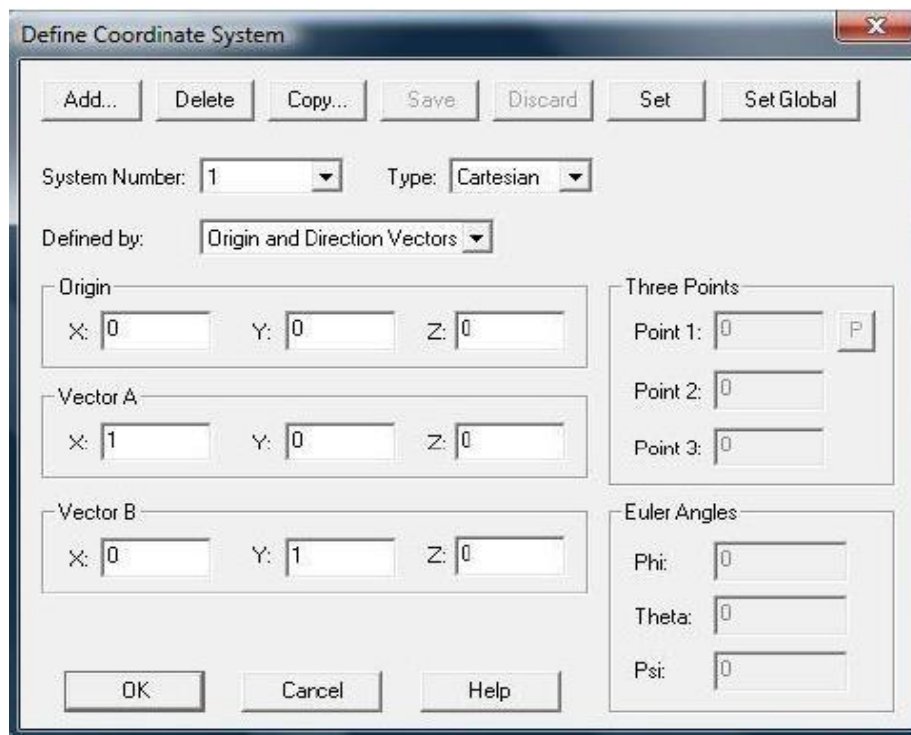
6.2 Προσομοίωση φορέων στο Adina και το Abaqus

Η παρουσίαση των βημάτων που ακολουθήθηκαν για την προσομοίωση του φορέα μέσω των δύο προγραμμάτων ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία κρίνεται απαραίτητη για την πληρότητα της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Μελετάται αμφιέριστη δοκός IPE 500 μήκους 8 μέτρων που καταπονείται από ζεύγος αντίφορων ροπών στα άκρα της.

6.2.1 Προσομοίωση στο Adina

Σύστημα συντεταγμένων

Για να οριστεί το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα γίνει η προσομοίωση της υπό μελέτη δοκού ακολουθούνται τα βήματα Geometry Coordinate Systems και στην καρτέλα Define Coordinate Systems επιλέγεται System Number 1 και Type Cartesian (καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων) όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1 Ορισμός Συστήματος Συντεταγμένων.

Γεωμετρία Φορέα

Πρέπει να οριστούν τα σημεία (points), οι γραμμές (lines) και οι επιφάνειες (surfaces) του φορέα. Για να οριστούν τα σημεία ακολουθείται η διαδρομή Geometry Points και στην καρτέλα που εμφανίζεται για κάθε σημείο ορίζονται οι συντεταγμένες του x,y,z σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων που θεωρήθηκε παραπάνω (Σχ. 6.2).

Geometry Points

Save Discard OK Cancel

Method: Define By Coordinates << click Discard to re-activate

Default Coordinate System: 1 ...

Auto... Import... Export... Clear Del Row Ins Row Help

	Point #	X1	X2	X3	System
1	1	0.0	0.0	0.0	1
2	2	0.0	-0.1	0.242	1
3	3	0.0	0.1	0.242	1
4	4	0.0	-0.1	-0.242	1
5	5	0.0	0.1	-0.242	1
6	6	0.0	0.0	0.242	1
7	7	0.0	0.0	-0.242	1
8	8	8.0	0.0	0.0	1
9	9	8.0	-0.1	0.242	1
10	10	8.0	0.1	0.242	1
11	11	8.0	0.1	0.242	1

Σχήμα 6.2 Ορισμός Σημείων Φορέα.

Για να οριστούν οι γραμμές ακολουθείται η πορεία Geometry Lines Define Add και ενώνονται τα σημεία που έχουν προηγουμένως δημιουργηθεί (Σχ. 6.3).

Define Line

Add... Delete Copy... Save Discard OK Cancel Help

Delete Points When Line is Deleted

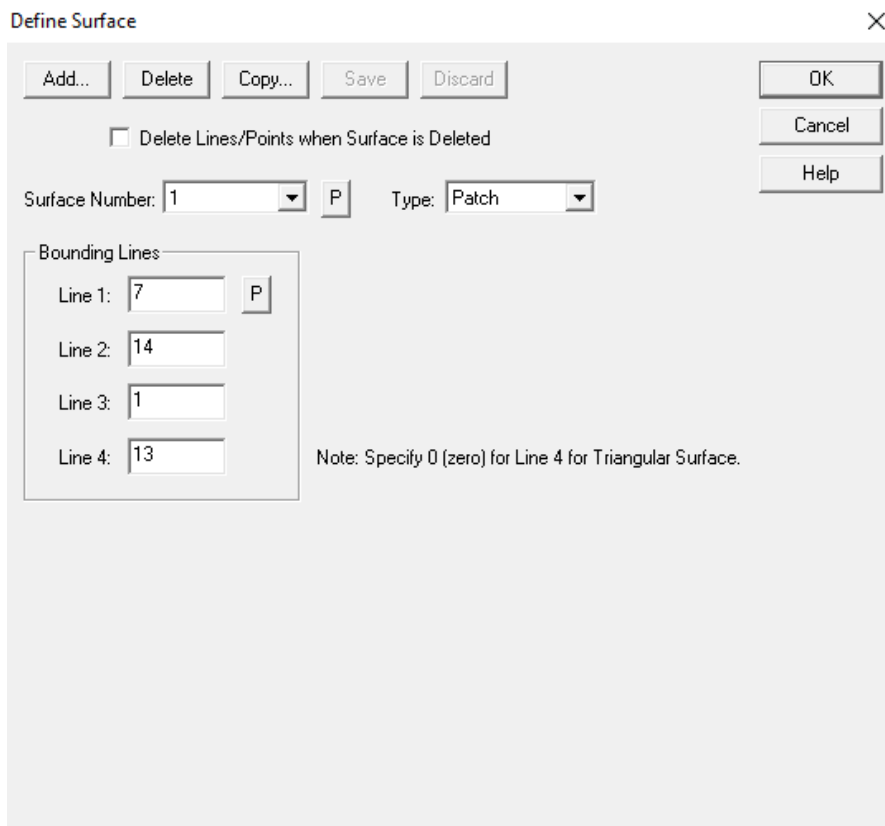
Line Number: 1 P Type: Straight

Point 1: 2 P

Point 2: 6

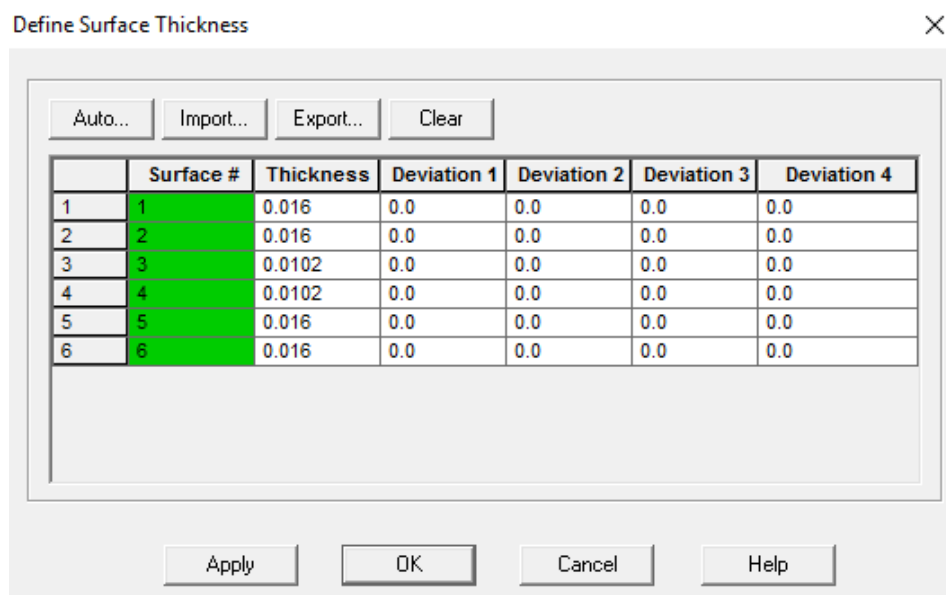
Σχήμα 6.3 Ορισμός Γραμμών Φορέα.

Για να οριστούν οι επιφάνειες ακολουθείται η πορεία Geometry Surfaces Define Add (Σχ. 6.4). Ο φορέας αποτελείται από 12 επιφάνειες (4 για κάθε πέλμα και 4 για τον κορμό).



Σχήμα 6.4 Ορισμός Επιφανειών Φορέα.

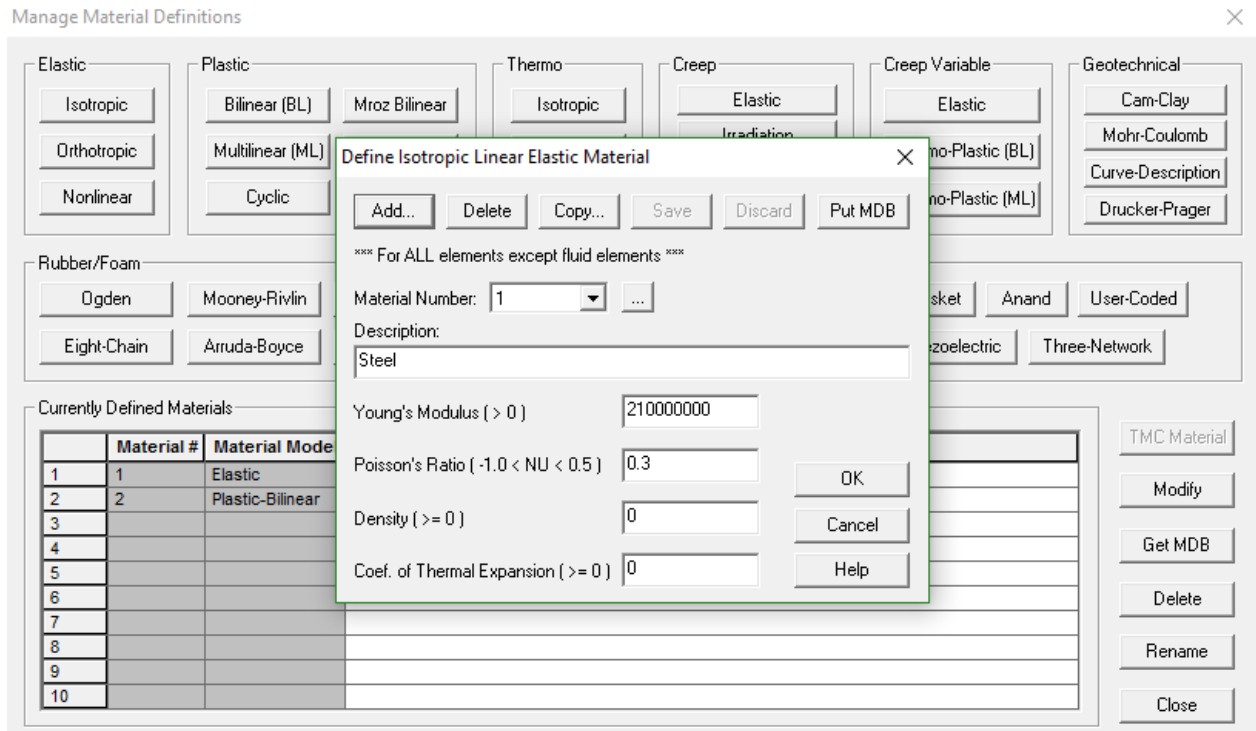
Τέλος πρέπει να οριστεί το πάχος των επιφανειών που δημιουργήθηκαν. Αυτό γίνεται μέσω των εντολών Geometry Surfaces Thickness (Σχ. 6.5).



Σχήμα 6.5 Ορισμός Πάχους Επιφανειών Φορέα.

Ορισμός του υλικού του φορέα

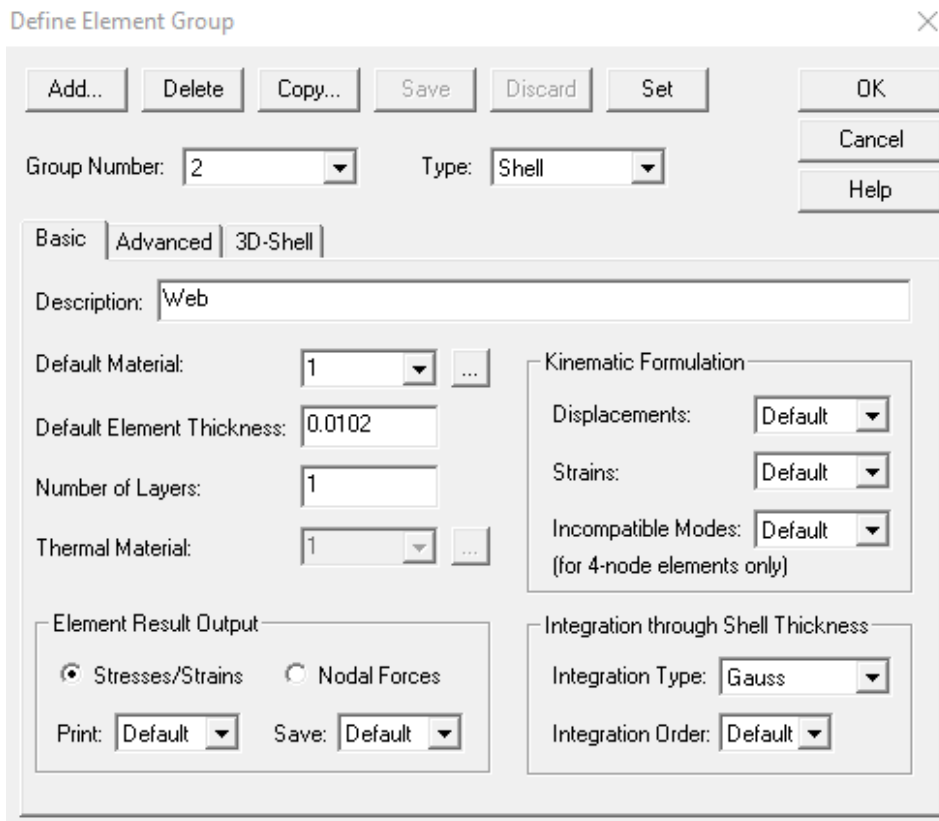
Για να οριστεί το υλικό ακολουθείται η πορεία Model Materials Manage Materials Elastic Isotropic Add και πληκτρολογείται το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος Poisson ν (Σχ. 6.6).



Σχήμα 6.6 Ορισμός Υλικού Φορέα.

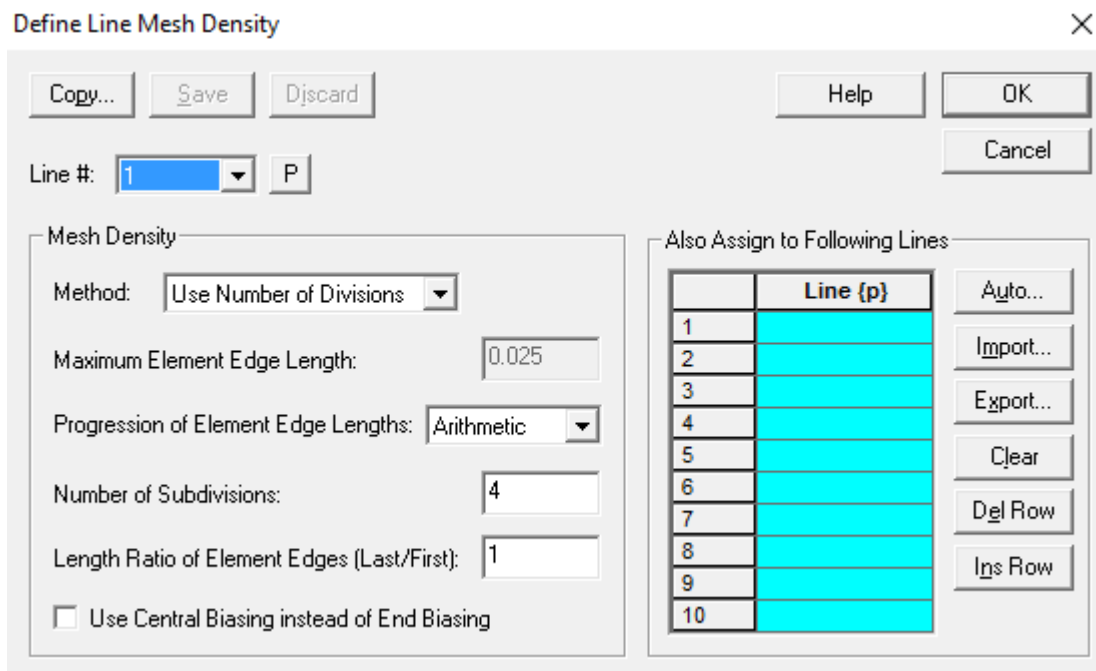
Διακριτοποίηση φορέα

Για τη διακριτοποίηση του φορέα χρησιμοποιούνται πεπερασμένα στοιχεία Shell elements και ορίζεται διαφορετικό element group για τα πέλατα και τον κορμό της δοκού. Ακολουθούνται τα βήματα Meshing Element groups Add. Ορίζουμε Type Shell και στο κελί Default Element Thickness πληκτρολογείται το πάχος των επιφανειών του συγκεκριμένου element group, Web ή Flanges (Σχ. 6.7).



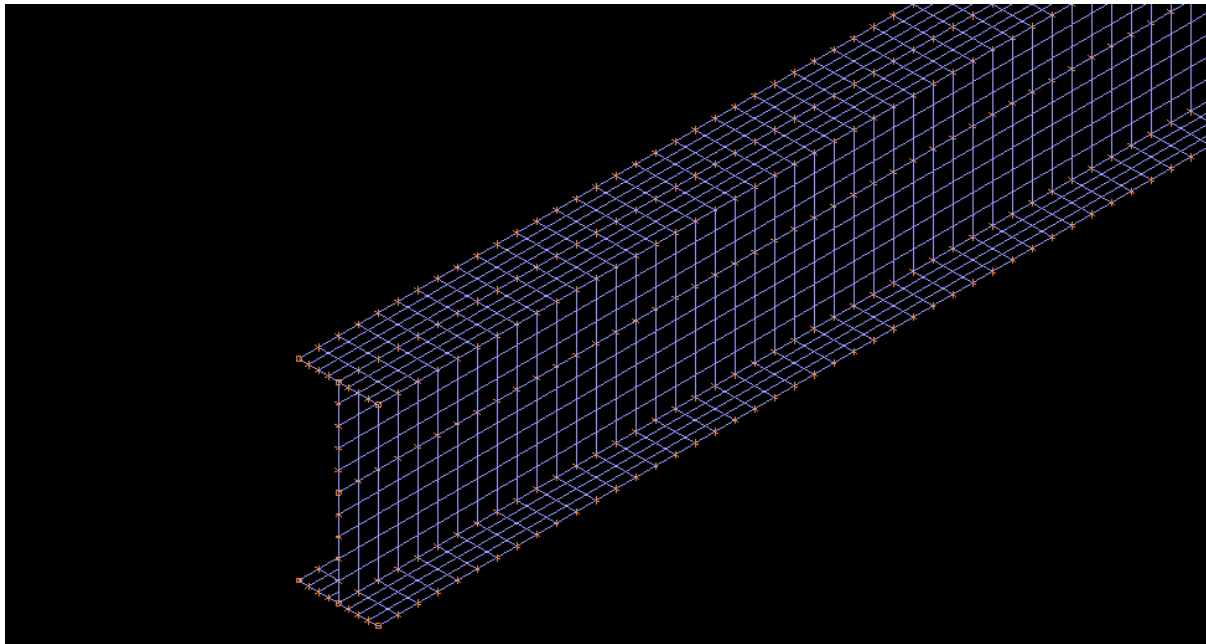
Σχήμα 6.7 Ορισμός Element Group.

Για τη διακριτοποίηση των επιφανειών επιλέγεται Meshing Mesh Density Line (Σχ. 6.8).



Σχήμα 6.8 Διακριτοποίηση Του Φορέα.

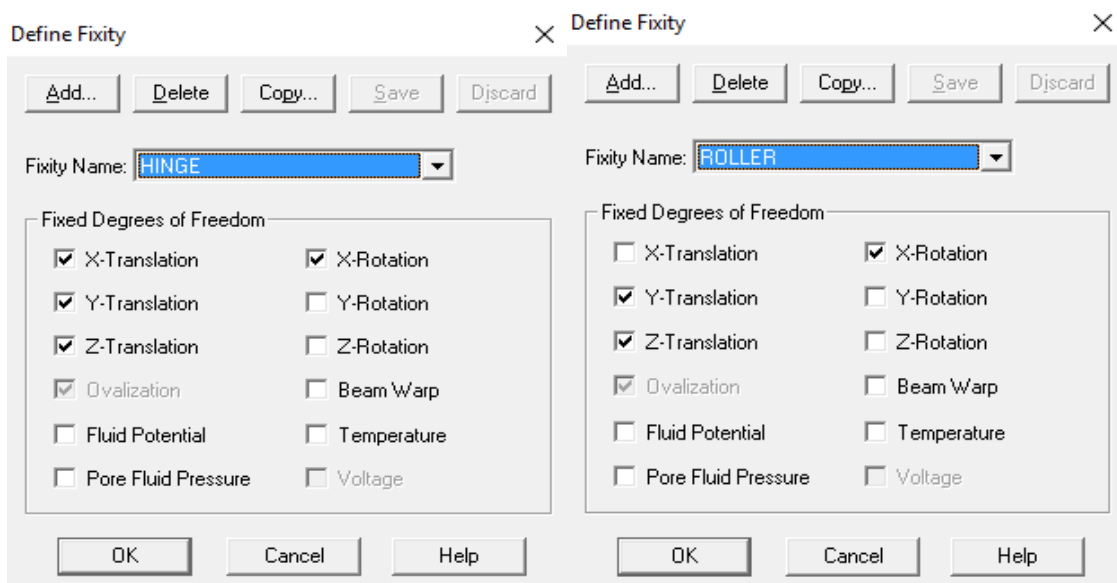
Με την ολοκλήρωση των παραπάνω βημάτων προκύπτει ο διακριτοποιημένος φορέας.(Σχ. 6.9)



Σχήμα 6.9 Διακριτοποιημένος Φορέας.

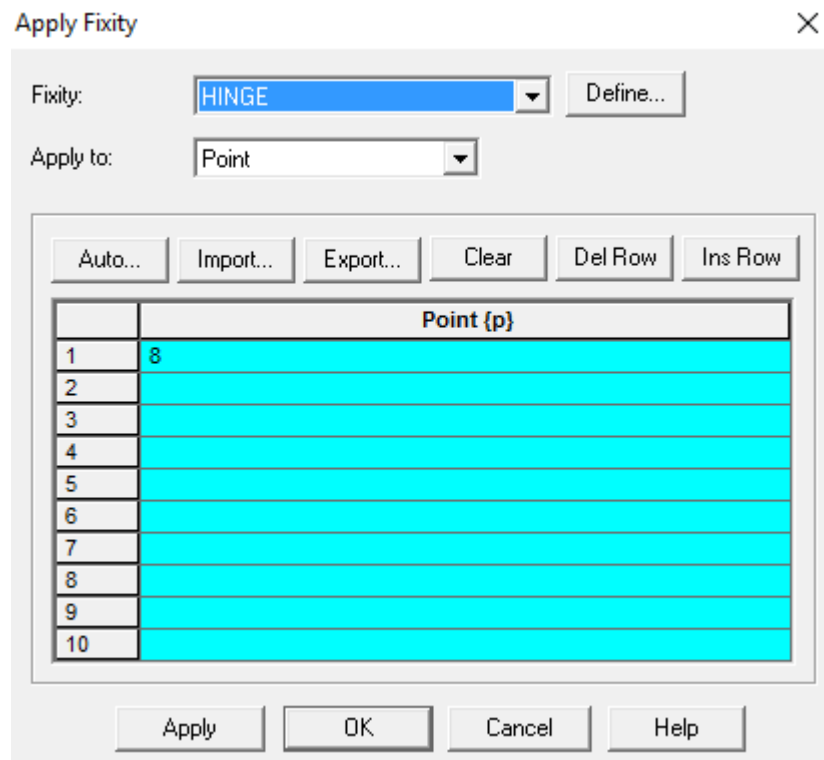
Συνοριακές συνθήκες

Ακολουθώντας τη διαδρομή Model Boundary Conditions Define Fixity εμφανίζεται η καρτέλα του Σχήματος A.14 όπου δημιουργούνται οι στηρίξεις του φορέα που μελετάται (άρθρωση (Σχ. 6.10 αριστερά) στο ένα άκρο και κύλιση (Σχ. 6.10 δεξιά) στο άλλο).



Σχήμα 6.10 Ορισμός Συνοριακών Συνθηκών Φορέα.

Στη συνέχεια μέσω της διαδρομής Model Boundary Conditions Apply Fixity καθορίζονται τα σημεία στα οποία θα τοποθετηθούν οι στηρίξεις που δημιουργήθηκαν (Σχ. 6.11).

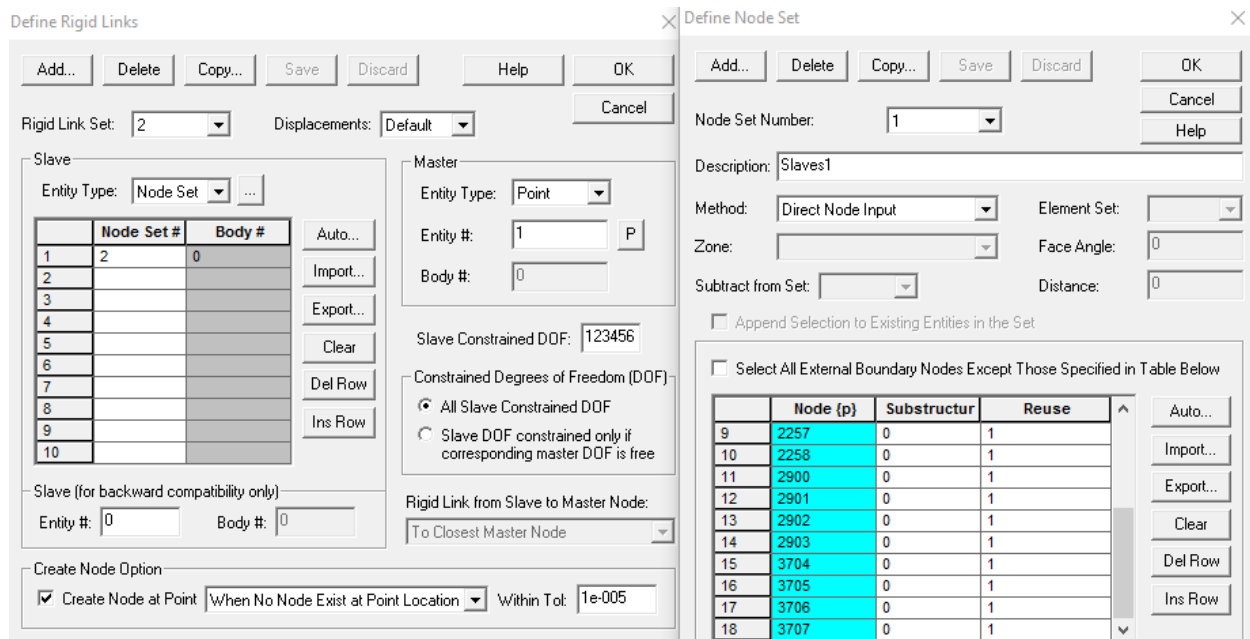


Σχήμα 6.11 Εισαγωγή Στηρίξεων.

Rigid Links

Ακολουθώντας τη διαδρομή Model Constraints Rigid Links (Σχ. 6.12) τοποθετείται ως master το point 1 (σημείο που βρίσκεται στο κέντρο βάρους της διατομής για μήκος δοκού $L=0m$) με:

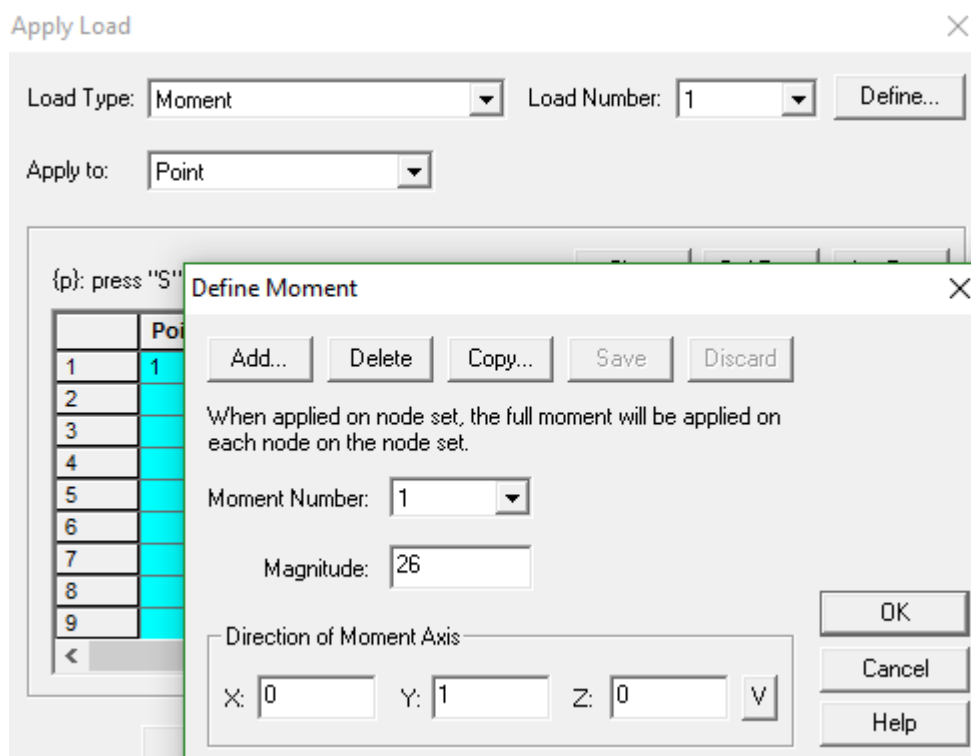
5,1450,1451,1452,1453,1454,2255.2256.2257.2258,2900.2901.2902,2903,3704,3705,3706.3707 τα αντίστοιχα slave-nodes. Αντίστοιχα δουλεύουμε και για τη διατομή που βρίσκεται στο τέλος της δοκού ($L=8 m$).



Σχήμα 6.12 Ορισμός Rigid Link.

Φόρτιση φορέα

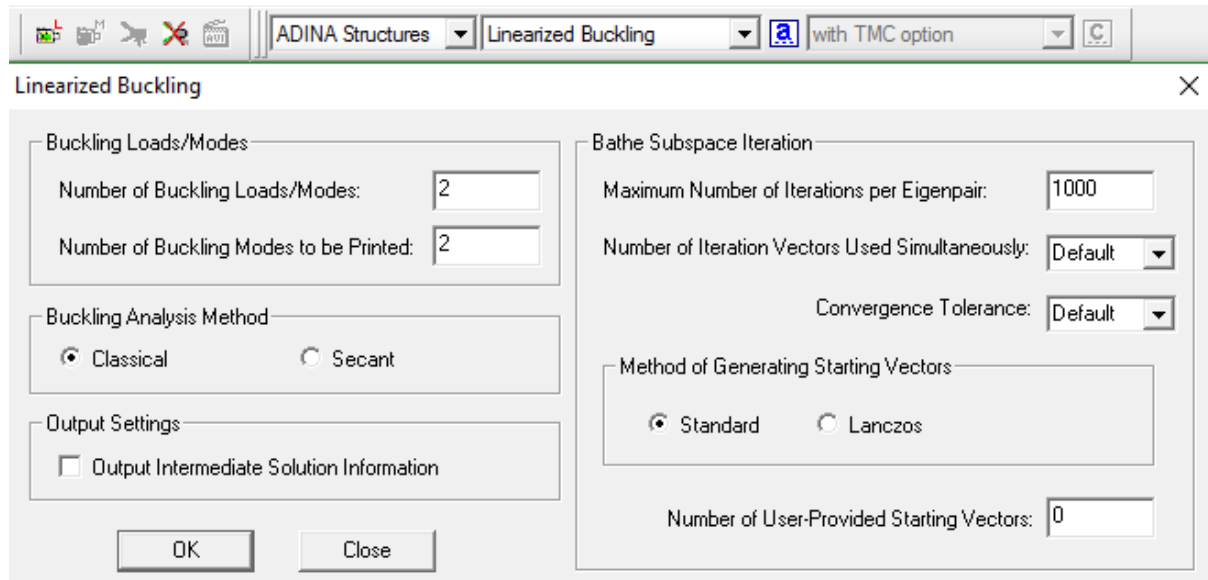
Για την επιβολή της επιθυμητής φόρτισης ακολουθείται η διαδρομή Model Loading Apply. Μιας και στο παράδειγμα υπάρχει ζεύγος συγκεντρωμένων ροπών στα δύο άκρα της δοκού, επιλέγεται Load Type Moment (Σχ. 6.13). Επιλέγοντας Define Add πληκτρολογείται το μέγεθος της ροπής και η διεύθυνσή της. (Σχ. 6.14). Επιστρέφοντας στο παράθυρο του Σχήματος 6.13 επιλέγεται το σημείο στο οποίο ασκείται η ροπή.



Σχήμα 6.13 Ορισμός Φόρτισης και Σχήμα 6.14 Ορισμός Διευθύνσεως και Εντάσεως Φόρτισης.

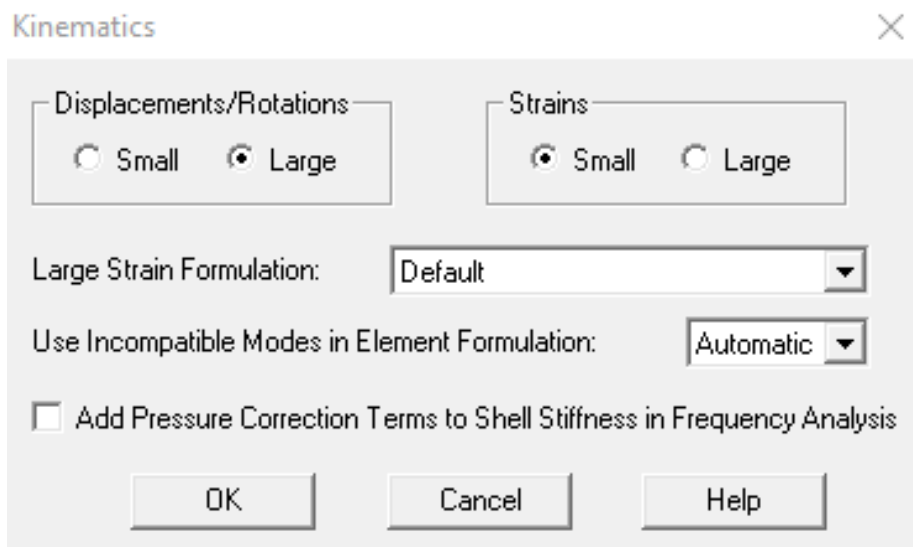
Ανάλυση φορέα

Η γραμμική ανάλυση λυγισμού πραγματοποιείται αν στη θέση Analysis Type επιλεγεί Linearized Buckling και στο εικονίδιο Analysis Options οριστεί ο αριθμός των απαιτούμενων ιδιομορφών καθώς και ο αριθμός των επαναλήψεων που θα πραγματοποιήσει το πρόγραμμα για την εύρεσή τους (Σχ. 6.15).



Σχήμα 6.15 Επιλογή Τύπου Ανάλυσης.

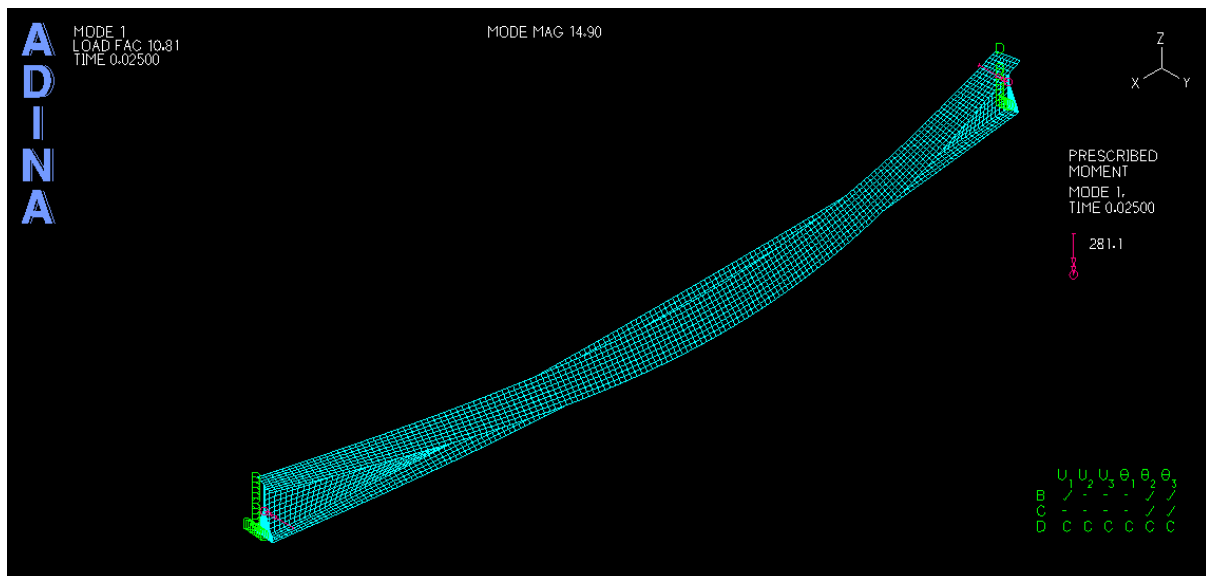
Τέλος για την πραγματοποίηση της γραμμικής ανάλυσης λυγισμού ενεργοποιείται η επιλογή των μεγάλων παραμορφώσεων μέσω της διαδρομής Control Analysis Assumption Kinematics και στη θέση Displacements/Rotations σημειώνεται Large (Σχ. 6.16).



Σχήμα 6.16 Ιδιότητες Ανάλυσης.

Το μοντέλο ξεκινάει την ανάλυση μέσω της διαδρομής Solution Data File/Run.

Ένα παράδειγμα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την ανάλυση μιας δοκού IPE500 μήκους 8 μέτρων που καταπονείται από ζεύγος ροπών στα άκρα της δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 6.17 Αποτελέσματα Ανάλυσης Φορέα.

6.2.2 Προσομοίωση στο Abaqus

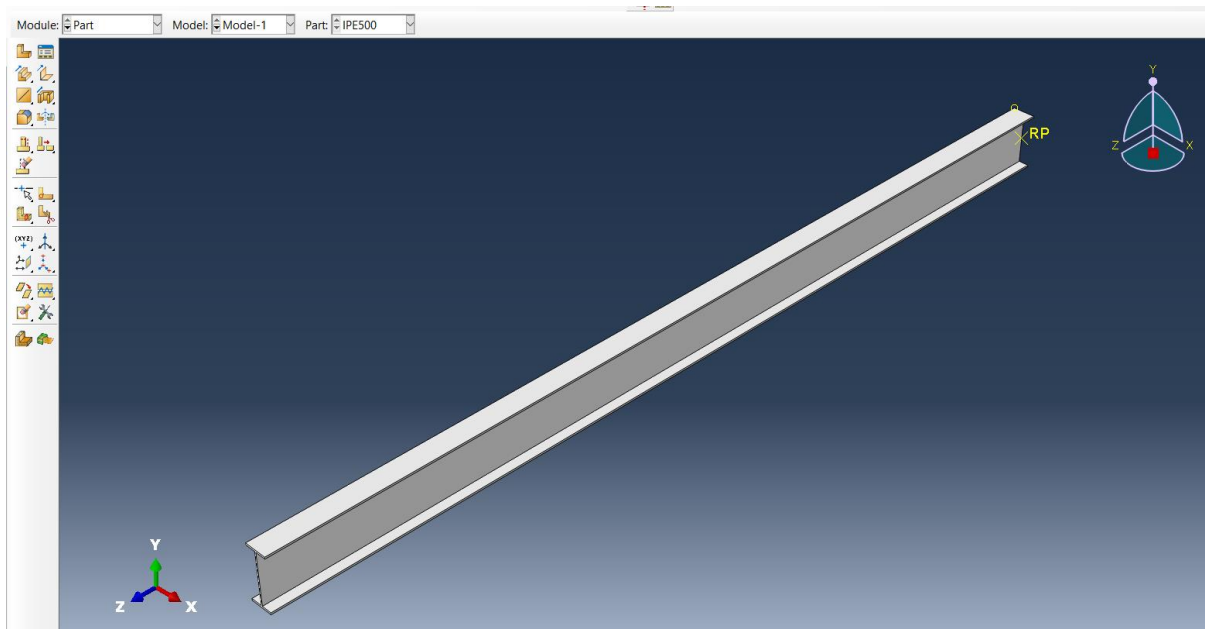
Γεωμετρία Φορέα

Πραγματοποιείται εκκίνηση του abaqus και επιλέγεται η πορεία File→New Model Database→With Standard/Explicit Model. Στη συνέχεια, στην επιλογή Module→Part πραγματοποιείται ο σχεδιασμός της διατομής του φορέα ακολουθώντας τις εξής εντολές: Create Part→Name:IPE 500→3D→Deformable→Solid→extrusion.

Έπειτα, είναι: Create lines:connected→σχεδιασμός διατομής με τυχαίες διαστάσεις→Add Dimension για την ορθή διαστασιολόγηση της διατομής→Esc→Done→Depth 8 (Σχ 6.18).

Σημείωση:

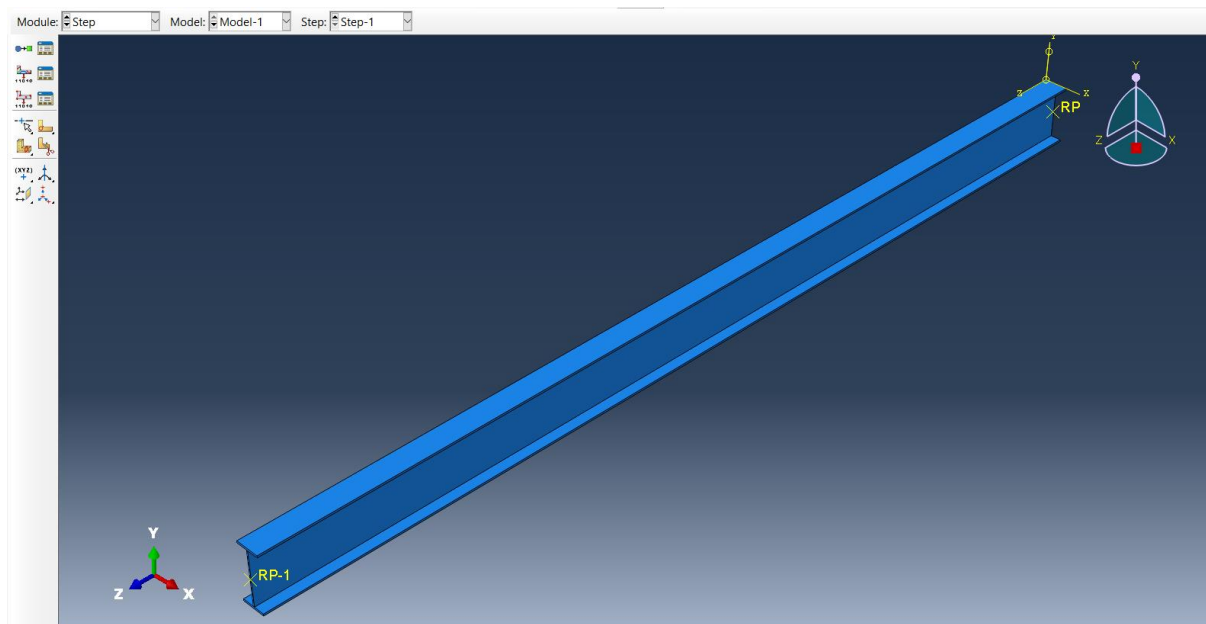
Οι δυνάμεις τίθενται σε N και οι αποστάσεις σε m.



Σχήμα 6.18 Ορισμός Γεωμετρίας Του Φορέα.

Υλικό του φορέα

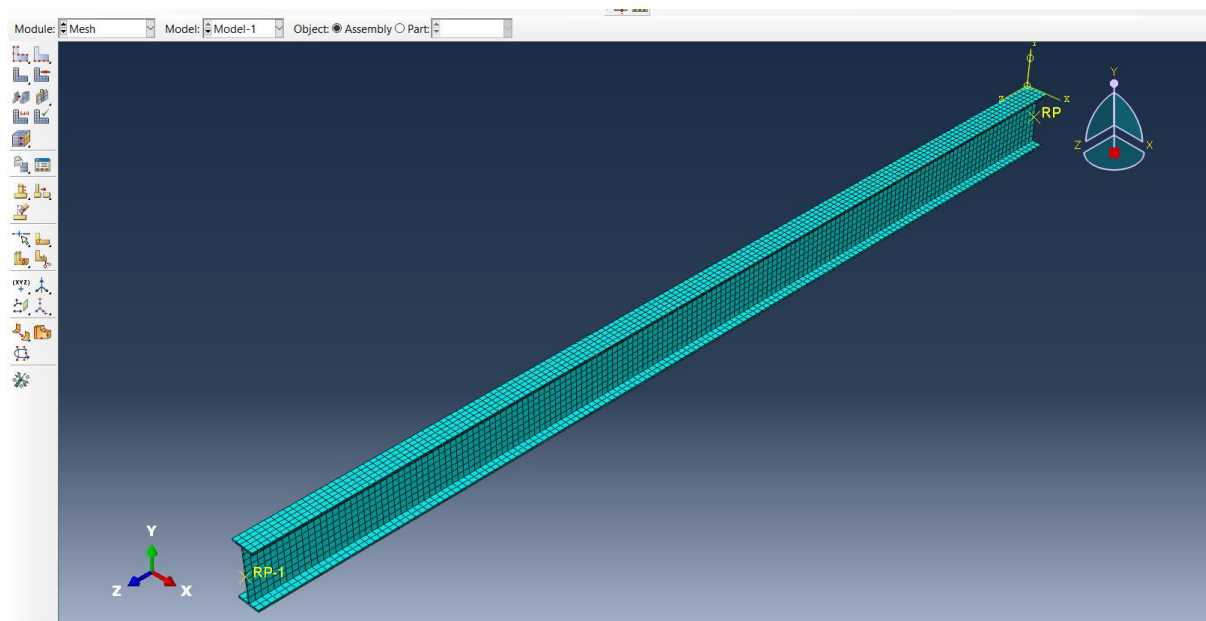
Για να οριστεί το υλικό ακολουθείται η πορεία:Module→Property→Steel→General→Mechanical→Elasticity→Elastic→ $E=2.1e11, \nu=0.30$ →Create section→Beam Sec→Solid→Homogeneous→Steel→Assign.section→Done→Module:Assembly→Independent→OK→Module:Step→Create step→Linear Perturbation→Buckle→Eigenvalues :2→Maximum number of iteration: 200 (Σχ 6.19)



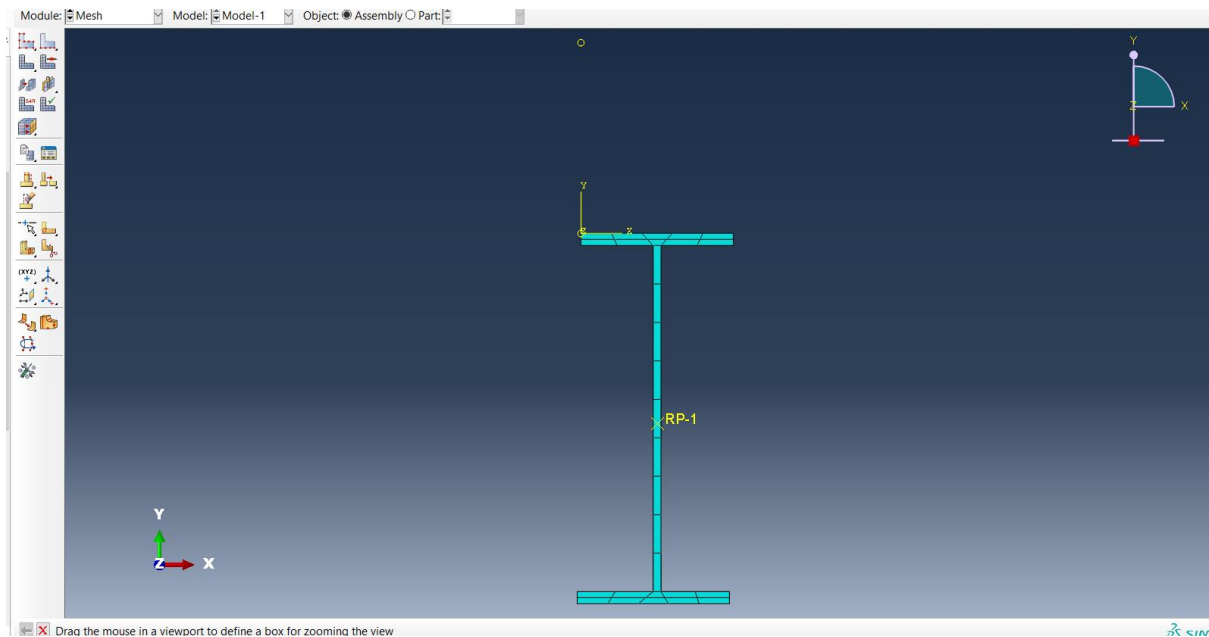
Σχήμα 6.18 Ορισμός Υλικού Του Φορέα.

Διακριτοποίηση φορέα

Για τη διακριτοποίηση του φορέα χρησιμοποιούνται πεπερασμένα στοιχεία Solid elements. Ακολουθούνται τα βήματα Module→ Mesh→Partition Cell-Define Cutting Plane →Point and Normal→Create Partition→Done. Ορίζουμε Approximate global size: 0,05→OK→Mesh Part Instance→Yes→Assign Element Type→επιλογή του φορέα→Done→3D Stress→Standard→Linear→OK (Σχ. 6.19α Σχ. 6.19β).



Σχήμα 6.19α Διακριτοποιημένος Φορέας.



Σχήμα 6.19β Διακριτοποιημένη Διατομή Φορέα.

Συνοριακές συνθήκες

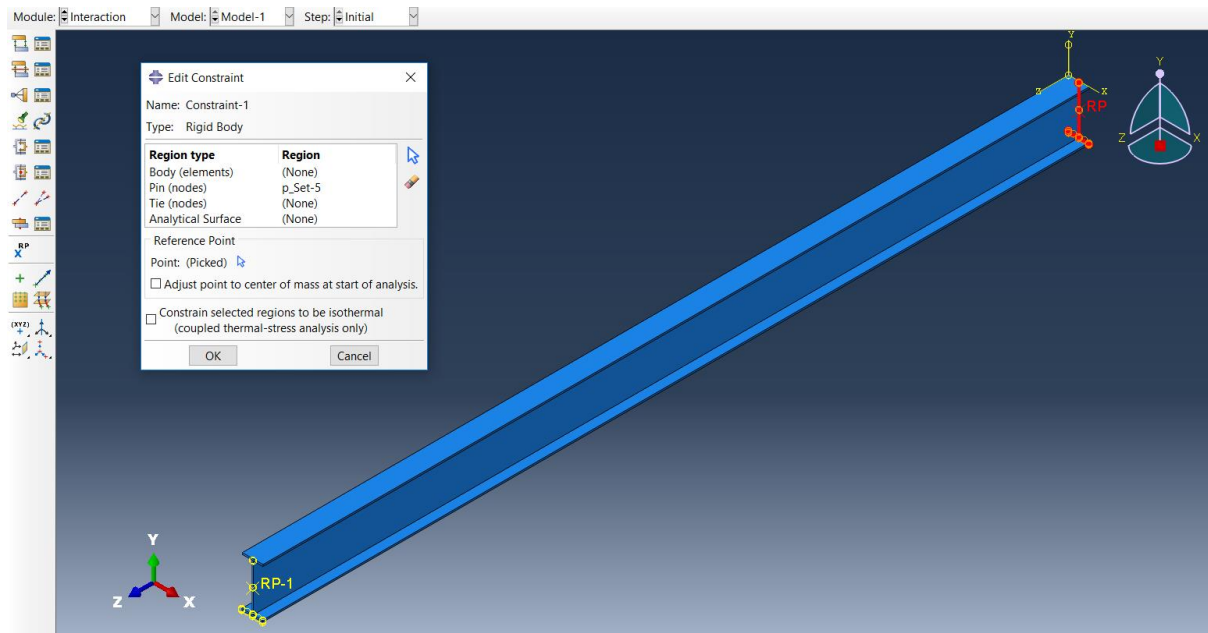
Ακολουθώντας τη διαδρομή Module→Load→Create Boundary Conditions→επιλογή αριστερού άκρου→DONE→U1,U2,U3,UR3→επιλογή δεξιού άκρου→DONE→U1,U2,UR3.

Rigid Links

Ακολουθώντας τη διαδρομή Tools→Reference Point→Select point to act as a reference point→επιλογή σημείων στο μέσο των δύο ακραίων διατομών→Constraints→Create→Rigid body→επιλογή pin και επιλογή επιφανειών που θα υπακούσουν στο RP→επιλεγμένες επιφάνειες→επιλογή RP (Σχ. 6.20)

Σημείωση:

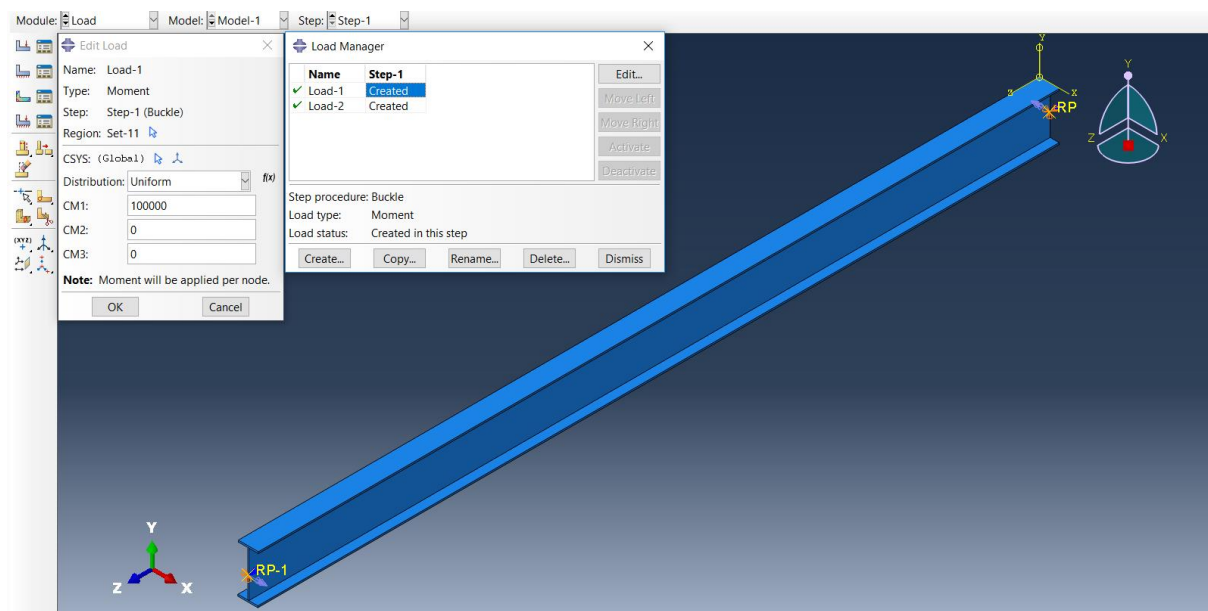
Τοποθετείται ως master το point RP (σημείο που βρίσκεται στο κέντρο βάρους της διατομής για μήκος δοκού $L=0$ m) και ως slave τα nodes του κορμού και του κάτω πέλματος. Αντίστοιχα δουλεύουμε και για τη διατομή που βρίσκεται στο τέλος της δοκού ($L=8$ m)(Σχ. 6.20).



Σχήμα 6.20 Ορισμός Rigid Link.

Φόρτιση φορέα

Για την επιβολή της επιθυμητής φόρτισης ακολουθείται η διαδρομή Module→ Load. Μιας και στο παράδειγμα υπάρχει ζεύγος συγκεντρωμένων ροπών στα δύο άκρα της δοκού, επιλέγεται Load Type Moment (Σχ. 6.21). Επιλέγοντας CM1 πληκτρολογείται το μέγεθος της ροπής και η διεύθυνσή της. Επιστρέφοντας στο παράθυρο του Σχήματος 6.21 επιλέγεται το σημείο στο οποίο ασκείται η ροπή.



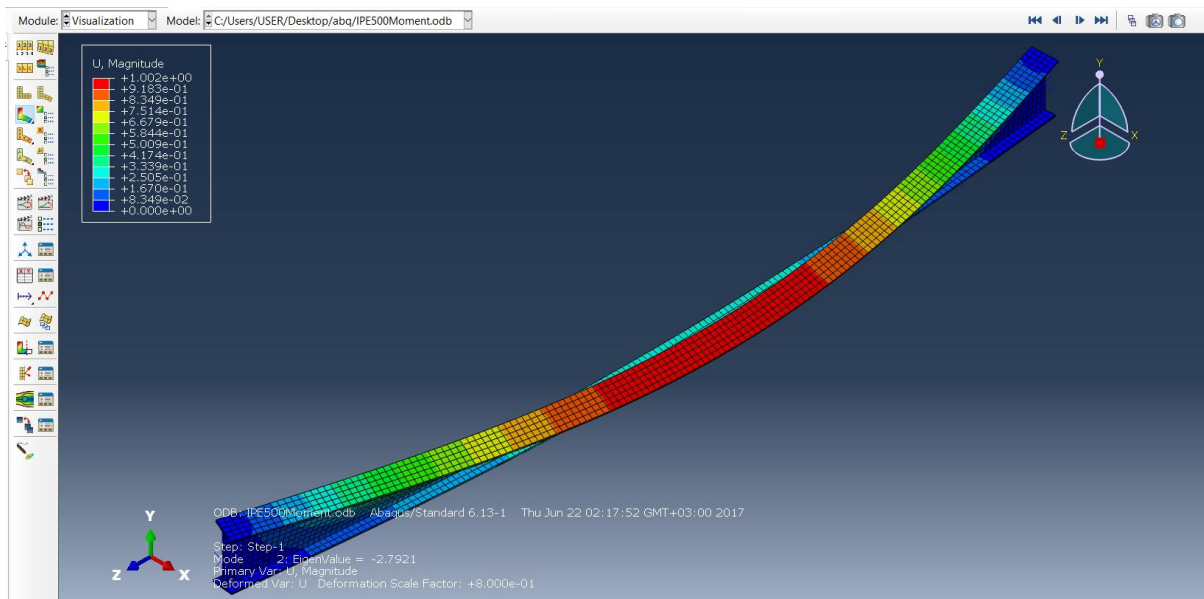
Σχήμα 6.21 Ορισμός Εντάσεως και Διευθύνσεως Φορτίσεων.

Ανάλυση φορέα

Η γραμμική ανάλυση λυγισμού πραγματοποιείται αν στη θέση Module→Step→ επιλεγεί Buckle και στο εικονίδιο Create Step→Linear perturbation, όπου θα οριστεί ο αριθμός των απαιτούμενων ιδιομορφών καθώς και ο αριθμός των επαναλήψεων που θαπραγματοποιήσει το πρόγραμμα για την εύρεσή τους (Σχ. 6.22). Το μοντέλο ξεκινάει την ανάλυση μέσω της διαδρομής :

Job→Create→IPE500→Continue→OK→Submit→Visualization→Results (Σχ. 6.22).

Ένα παράδειγμα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την ανάλυση μιας δοκού IPE500 μήκους 8 μέτρων που καταπονείται από ζεύγος ροπών στα άκρα της δίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχ. 6.22).



Σχήμα 6.22 Αποτελέσματα Ανάλυσης.

6.3 Αριθμητικές εφαρμογές και σύγκριση αποτελεσμάτων

6.3.1 Αμφιέριστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ροπών κάμψεως στα άκρα της

A. Χωρίς αξονική δύναμη

Στο κεφάλαιο 4.1.1 με μία αυστηρά μαθηματική επίλυση, που εφαρμόστηκε, η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού αποδείχθηκε ότι περιγράφεται από τη σχέση:

$$M_{0,cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{GJ E I_y} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E C_w}{GJ}}\right)^2\right)}$$

ενώ στο κεφάλαιο 4.1.2 με την εφαρμογή της προσεγγιστικής μεθόδου προέκυψε η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού, η οποία περιγράφεται από τη σχέση:

$$M_{0,cr} = \sqrt{9,87 \frac{GJ E I_y}{l^2} + 97,09 \frac{E I_y E C_w}{l^4}}$$

Στον Πίνακα 6.1, που ακολουθεί, παρουσιάζονται οι κρίσιμες ροπές, οι οποίες προέκυψαν με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου και με τη χρήση των προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων Adina και Abaqus πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού (linear buckling analysis) αλλά και με τον Ευρωκώδικα 3. Οι εφαρμογές πραγματοποιήθηκαν σε πρότυπες ελατές διατομές IPE (500) με μήκος 8 μέτρα. Όλες οι ροπές $M_{0,cr}$ είναι σε kNm.

Πίνακας 6.1: Αποτελέσματα $M_{0,cr}$.

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	$M_{0,cr}$	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος	279,56	-
		Μαθ. Επίλυση	279,72	0,05
		Adina	281,20	0,58
		Abaqus	279,29	0,10
		EC3	279,72	0,05

Παρατηρείται ότι η προσεγγιστική μέθοδος δίνει περίπου το ίδιο αποτέλεσμα με την αυστηρά μαθηματική επίλυση και τον Ευρωκώδικα 3, αφού οι αποκλίσεις είναι σχεδόν μηδενικές, 0,05% και 0,05% αντίστοιχα. Επίσης, εξίσου μικρές είναι και οι αποκλίσεις μεταξύ της προσεγγιστικής μεθόδου και των δύο προγραμμάτων, που χρησιμοποιήθηκαν, αφού είναι 0,58% με το Adina και 0,10% με το Abaqus, γεγονός που καταδεικνύει με τον πλέον αξιόπιστο τρόπο ότι η προσομοίωση, που πραγματοποιήθηκε στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων, πλησιάζει όσο το δυνατόν περισσότερο τον πραγματικό φορέα και τις συνθήκες στήριξής του.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μεταξύ του Ευρωκώδικα 3 και της επίλυσης στο Adina και στο Abaqus διαπιστώνεται ότι οι αποκλίσεις είναι 0,529% και 0,15% αντίστοιχα, γεγονός που είναι αναμενόμενο εξαιτίας του συμπεράσματος, που αναφέρθηκε παραπάνω.

B. Με αξονική δύναμη στο Adina

Έχει αποδειχθεί ότι η κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή πλευρικού λυγισμού συναρτήσει της αξονικής δύναμης δίνεται από τη σχέση :

$$M_{0,cr} = \frac{1}{p} \sqrt{(\pi^2 + \lambda^2)(\pi^2 - n^2)} \quad \text{για } n^2 < \pi^2 \text{ (περίπτωση θλιπτικού φορτίου)}$$

$$\text{όπου: } v = \frac{u}{l}, \xi = \frac{z}{l}, n^2 = \frac{Nl^2}{EI_y}, M'_0 = \frac{M_0 l}{EI_y}, \lambda^2 = \frac{GJl^2}{EC_w}, p^2 = \frac{I_y l^2}{C_w}, n^2 = \frac{p^2 M_0^2}{\lambda^2} \text{ (περίπτωση εφελκυστικού φορτίου) ή } N_0 = \frac{M_0^2}{GJ}.$$

Πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού στο Adina και το Abaqus για διάφορους συνδυασμούς αξονικής δύναμης N και καμπτικής ροπής M προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες και τα αντίστοιχα διαγράμματα, στα οποία συγκρίνονται οι θεωρητικές επιλύσεις με τις αριθμητικές επιλύσεις στα προγράμματα:

Πίνακας 6.2: Αποτελέσματα $M_{0,cr}$ και αποκλίσεις 1ης Φάσης.

Ελεγχος Πλαστικοποίησης	η^2	N	M Θεωρίας	M Adina	Αποκλίσεις % Πρώτης Φάσης	
145699,48	OK	0,00	0,00	279,72	281,20	0,530
130893,31	OK	1,00	70,21	265,17	264,27	0,340
115357,25	OK	2,00	140,43	249,77	245,62	1,664
102605,27	OK	3,00	210,65	233,37	233,03	0,145
82150,75	OK	4,00	280,87	215,71	205,42	4,771
66045,11	OK	5,00	351,09	196,48	185,60	5,537
49331,52	OK	6,00	421,31	175,15	164,59	6,028
35351,33	OK	7,00	491,53	150,83	149,04	1,186
14534,06	OK	8,00	561,75	121,74	120,76	0,810
-11489,29	OK	9,00	631,96	83,03	83,24	0,258
162274,56	OK	-1,00	-70,21	293,55	301,20	0,530
178064,42	OK	-2,00	-140,43	306,75	319,34	2,608
194595,35	OK	-3,00	-210,65	319,41	338,43	4,103
211463,07	OK	-4,00	-351,09	331,59	357,71	5,955
229272,07	OK	-5,00	-351,09	343,34	378,16	7,877
244134,21	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
262473,29	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
281613,10	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
296686,85	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
					Μέση Απόκλιση	2,823

Πίνακας 6.3: Αποτελέσματα $M_{0,cr}$ και αποκλίσεις 2ης Φάσης.

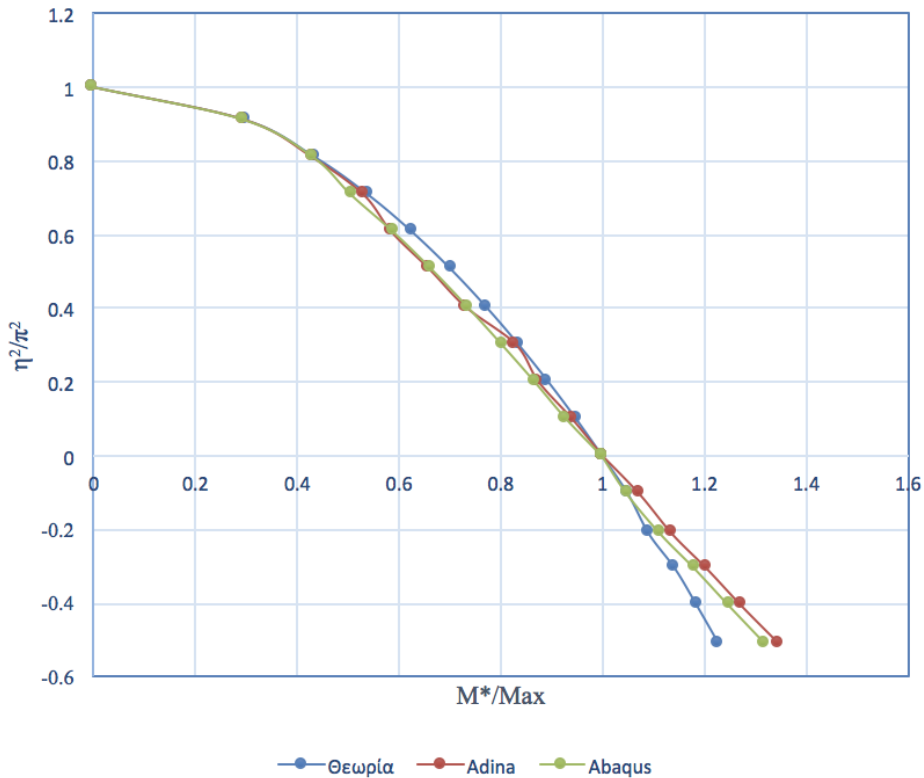
N Adina	η^2 Adina	M*Adina	M*θεωρητικό	Αποκλίσεις % Δεύτερης Φάσης
0,00	0,000	0,501	0,498	0,507
69,98	0,99	0,470	0,472	0,359
138,10	1,97	0,437	0,446	1,872
210,35	2,99	0,415	0,416	0,177
281,70	4,01	0,366	0,384	4,676
349,40	4,98	0,330	0,351	5,770
417,00	5,94	0,293	0,314	6,765
485,70	6,92	0,265	0,272	2,586
557,20	7,94	0,215	0,220	2,485
633,60	9,02	0,148	0,146	1,625
-72,050	-1,03	0,501	0,498	0,530
-146,20	-2,08	0,536	0,523	2,485
-223,20	-3,18	0,568	0,548	3,745
-303,00	-4,35	0,602	0,573	5,227
-386,70	-5,51	0,637	0,597	6,672
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
			Μέση Απόκλιση	2,964

Οι παραπάνω πίνακες προέκυψαν πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού στο Adina για διάφορους συνδυασμούς αξονικής δύναμης N και καμπτικής ροπής M. Ουσιαστικά, σε κάθε βήμα της ανάλυσης διατηρείται σταθερή η αξονική δύναμη και μεταβάλλεται η ροπή μέσω του λόγου M/N, ο οποίος έχει προκύψει από τις θεωρητικές επιλύσεις. Σε κάθε βήμα της ανάλυσης εξάγονται τα κρίσιμα μεγέθη N_{cr} , M_{cr} , τα οποία συγκρίνονται με τα αντίστοιχα θεωρητικά, ώστε να βρεθεί κατά πόσο συγκλίνουν μεταξύ τους, καταλήγοντας σε μία μέση τιμή απόκλισης πρώτης φάσης. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται τόσο για θλιπτικά όσο και για εφελκυστικά φορτία. Αξίζει να σημειωθεί ότι για μεγάλες τιμές εφελκυστικών φορτίων δεν ελέγχεται ο στρεπτοκαμπτικός λυγισμός λόγω πλαστικοποίησης του φορέα, όπως φαίνεται και στην αντίστοιχη στήλη παραπάνω.

Σημειώνεται πως με θετικό πρόσημο παρουσιάζεται η θλίψη ενώ ο εφελκυσμός με αρνητικό ενώ τα αποτελέσματα N και M παρουσιάζονται σε kN και kNm αντίστοιχα.

Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι δίνεται σταθερός λόγος M/N στο Adina κατά τη διάρκεια της ανάλυσης ο λόγος αυτός μεταβάλλεται, επομένως υπολογίζονται εκ νέου οι αποκλίσεις δευτέρας φάσεως μεταξύ των θεωρητικών και αριθμητικών αναλύσεων και εξάγονται τα τελικά διαγράμματα.

Σταθερές Ροπές στα Άκρα



Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα ,στο οποίο παρουσιάζονται οι καμπύλες αποτελεσμάτων τόσο των θεωρητικών επιλύσεων όσο και αυτών που προέκυψαν από τα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων Adina και Abaqus, είναι εμφανής η επιτυχής προσομοίωση του φορέα μιας και υπάρχει σχεδόν πλήρης ταύτιση των σημείων. Οι όποιες διαφορές, όπως αυτές παρουσιάστηκαν με την μορφή αποκλίσεων στους παραπάνω πίνακες οφείλονται στις παραδοχές που πραγματοποιήθηκαν κατά την μόρφωση του φορέα στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων.

Παρατηρείται αύξηση των αποκλίσεων όσο ο φορέας τείνει προς την πλαστικοποίηση (εφελκυσμός). Αξίζει αναφοράς ότι σε τέτοια επίπεδα φόρτισης κρίσιμος είναι ο έλεγχος υλικού και όχι ευστάθειας (για συμβατικά υλικά δομικού χάλυβα).

Σε αυτό το σημείο ελέγχεται και ένας συγκεκριμένος συνδυασμός ροπής-αξονικής δύναμης,για τον οποίο η δοκός εκτρέπεται πλευρικά, με στόχο τον προσδιορισμό της απόκλισης των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων και την προσεγγιστική επίλυση, που πραγματοποιήθηκε στο κεφάλαιο 4.1.3.

Ένας κρίσιμος συνδυασμός από το Adina είναι: $M_0=244,9$ kNm, $N=244,9$ kN για ταυτόχρονη δράση ζεύγους ροπών $M_0=100$ kNm και αξονικής δύναμης $N=100$ kN, από τον οποίο συνδυασμό προέκυψε load factor 2,449.

Αντίστοιχα, η πρεσεγγιστική μέθοδος δίνει:

$$M_{0cr} = \sqrt{\frac{EI_y EC_w}{l^4} (\pi^2 + \frac{GJ}{EC_w} l) (\pi^2 - \frac{Nl^2}{EI_y})}$$

Αν στον παραπάνω τύπο θεωρηθεί $N=244,9$ kN, τότε η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού προκύπτει $M_{0cr}=243,2$ kNm. Παρατηρείται, λοιπόν ότι η απόκλιση είναι 0,69%, δηλώνοντας ότι η προσέγγιση είναι σχεδόν ακριβής.

6.3.2 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο φορτίο εντάσεως P στο μέσο της

A. Χωρίς αξονική δύναμη

Στο κεφάλαιο 4.2.1.A με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου για την πολυωνυμική προσέγγιση, το κρίσιμο φορτίο και η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού αποδείχθηκε ότι περιγράφονται από τη σχέση:

$$P_{cr} = \sqrt{288,88 \frac{GJEI_y}{l^4} + 2863,44 \frac{EI_y EC_w}{l^6} + (29,83 \frac{EI_y}{l^3} d)^2} - 29,83 \frac{EI_y}{l^3} d$$

και

$$M_{cr} = \sqrt{18,055 \frac{GJEI_y}{l^2} + 178,965 \frac{EI_y EC_w}{l^4} + (1,864 \frac{EI_y}{l} d)^2} - 7,458 \frac{EI_y}{l^2} d$$

Ενώ στο κεφάλαιο 4.2.1.B με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου για την ημιτονοειδή προσέγγιση, προέκυψε το κρίσιμο φορτίο και η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού, τα οποία περιγράφονται από τη σχέση:

$$P_{cr} = \sqrt{\frac{298,015 GJEI_y}{l^4} + \frac{2938,304 EI_y EC_w}{l^6} + \left(\frac{30,6075 EI_y d}{l^3}\right)^2} - \frac{30,6075 EI_y d}{l^3}$$

και

$$M_{cr} = \sqrt{18,625 \frac{GJEI_y}{l^2} + 1183,64 \frac{EI_y EC_w}{l^4} + (1,913 \frac{EI_y}{l} d)^2} - 7,65 \frac{EI_y}{l^2} d$$

Στους πίνακες 6.4,6.5,6.6 που ακολουθούν, παρουσιάζονται τα κρίσιμα φορτία και οι κρίσιμες ροπές, όταν το φορτίο P ασκείται στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα και, τα οποία προέκυψαν με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου και με τη χρήση των προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων adina και abaqus πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού (linear buckling analysis) αλλά και με τον Ευρωκώδικα 3. Οι εφαρμογές πραγματοποιήθηκαν σε πρότυπες ελατές διατομές IPE (500) με μήκος 8 μέτρα. Όλες οι ροπές M_{cr} είναι σε kNm και τα P_{cr} σε kN.

Πίνακας 6.4: Αποτελέσματα P_{cr} , M_{cr} όταν το P ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	P_{cr}	M_{cr}	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος(A)	190,46	380,92	-
		Πρ. Μέθοδος(B)	190,26	380,52	-
		Adina	181,6	363,2	4,71
		EC3	188,81	377,62	0,87

Πίνακας 6.5: Αποτελέσματα P_{cr} , M_{cr} όταν το P ασκείται στο άνω πέλμα της διατομής

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	P_{cr}	M_{cr}	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος(A)	137,06	274,11	-
		Πρ. Μέθοδος(B)	127,26	254,51	-
		Adina	133,33	266,66	2,72
		EC3	136,32	272,63	0,54

Πίνακας 6.6: Αποτελέσματα P_{cr} , M_{cr} , όταν το P ασκείται στο κάτω πέλμα της διατομής

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	P_{cr}	M_{cr}	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος(A)	264,68	529,35	-
		Πρ. Μέθοδος(B)	256,95	513,89	-
		Adina	256,95	525,4	0,74
		EC3	261,53	523,05	1,79

Παρατηρείται ότι οι αποκλίσεις των αποτελεσμάτων μεταξύ των τριών μεθόδων είναι σχετικά μικρές και δεν υπερβαίνουν το 5% σε κανένα συνδυασμό. Παρατίθενται παρακάτω αναλυτικά οι μέγιστες αποκλίσεις για τις περιπτώσεις που το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα της διατομής.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου και του Adina η μέγιστη απόκλιση είναι 4,71% και παρατηρείται όταν το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής IPE 500 δοκού 8 μέτρων, ενώ όταν ασκείται στο κάτω πέλμα και στο άνω οι αποκλίσεις είναι 2,72% και 0,74% αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3 η μέγιστη απόκλιση είναι 1,79% στην περίπτωση που το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα της διατομής, ενώ όταν ασκείται στο κέντρο βάρους και στο άνω πέλμα οι αποκλίσεις είναι 0,87% και 0,54% αντίστοιχα.

B. Με αξονική δύναμη

Έχει αποδειχθεί ότι η κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή πλευρικού λυγισμού για την περίπτωση φόρτισης της δοκού με ένα συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της συναρτήσεται της αξονικής δύναμης δίνεται από τη σχέση :

$$M_{cr} = 1,35M_{0,cr} = 1,35\left\{\frac{1}{p}\sqrt{(\pi^2 + \lambda^2)(\pi^2 - n^2)}\right\} \quad \text{για } n^2 < \pi^2 \text{ (περίπτωση θλιπτικού φορτίου)}$$

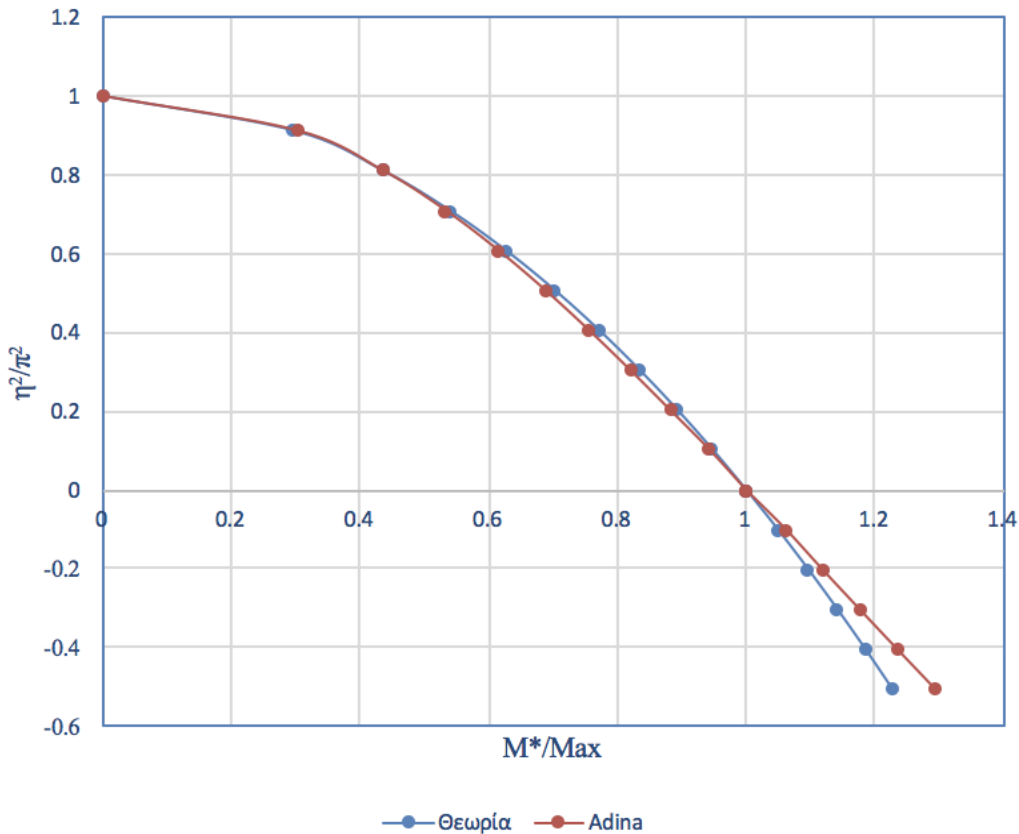
όπου:
$$v = \frac{u}{l}, \xi = \frac{z}{l}, n^2 = \frac{Nl^2}{EI_y}, M'_0 = \frac{M_0l}{EI_y}, \lambda^2 = \frac{GJl^2}{EC_w}, p^2 = \frac{I_y l^2}{C_w}, n^2 = \frac{p^2 M_0^2}{\lambda^2}$$
 (περίπτωση εφελκυστικού φορτίου) ή $N_0 = \frac{M_0^2}{GJ}$.

Πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού στο Adina και το Abaqus για διάφορους συνδυασμούς αξονικής δύναμης N και καμπτικής ροπής M προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες και τα αντίστοιχα διαγράμματα, στα οποία συγκρίνονται οι θεωρητικές επιλύσεις με τις αριθμητικές επιλύσεις στα προγράμματα:

Πίνακας 6.7: Αποτελέσματα M_{cr} και αποκλίσεις 1ης Φάσης

Ελεγχος Πλαστικοποίησης		η^2	N	M Θεωρίας	M Adina	Αποκλίσεις % Πρώτης Φάσης
188186,53	OK	0,00	0,000	377,62	363,20	3,818
183852,66	OK	1,00	70,21	357,98	343,62	4,011
178715,74	OK	2,00	140,43	337,19	322,56	4,340
173325,83	OK	3,00	210,65	315,04	301,04	4,445
167395,29	OK	4,00	280,87	291,21	278,44	4,386
160670,12	OK	5,00	351,09	265,25	254,12	4,195
152888,67	OK	6,00	421,31	236,45	227,60	3,742
143422,97	OK	7,00	491,53	203,62	197,48	3,014
131075,96	OK	8,00	561,75	164,35	161,26	1,882
112401,72	OK	9,00	631,96	112,09	111,93	0,142
204427,71	OK	-1,00	-70,21	396,29	383,24	3,293
219822,56	OK	-2,00	-140,44	414,12	401,60	3,022
235173,30	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
250876,98	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
266398,41	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
282361,81	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
297638,51	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
313371,87	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
329266,49	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
					Μέση Απόκλιση	3,358

Συγκεντρωμένο Φορτίο στο Μέσο



Σε αυτό το σημείο ελέγχεται και ένας συγκεκριμένος συνδυασμός συγκεντρωμένου φορτίου P στο μέσον της αμφιερέιστου, διατομής IPE 500 και μήκους 8 m-αξονικής δύναμης N, για τον οποίο η δοκός εκτρέπεται πλευρικά, με στόχο τον προσδιορισμό της απόκλισης των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων και την προσεγγιστική επίλυση, που πραγματοποιήθηκε στο κεφάλαιο 4.2.2.

Από ταυτόχρονη δράση φορτίου P=50 kN (αντιστοιχεί σε ροπή Mo=100 kNm στο μέσον της δοκού) και αξονικής δύναμης N=100 kN στο Adina, προκύπτει φορτιστικός συντελεστής load factor 2,79, επομένως ένας κρίσιμος συνδυασμός που προκύπτει είναι P(kN)-N(kN)= 139,5-279.

Με τη χρήση του μαθηματικού προγράμματος maple, θεωρείται αξονικό φορτίο N=279 kN και αναζητείται το κρίσιμο φορτίο P, το οποίο προκύπτει από την προσεγγιστική επίλυση που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 4.2.2.

Από την αδιαστατοποιημένη εξίσωση του κεφαλαίου 4.2.2 με εφαρμογή στο maple για αξονικό φορτίο N=279 kN προκύπτει κρίσιμη τιμή συγκεντρωμένου φορτίου P=144,2 kN. Παρατηρείται, λοιπόν ότι η απόκλιση είναι 3,26%, επιβεβαιώνοντας ότι η θεωρητική προσέγγιση είναι σχετικά ικανοποιητική και η όποια απόκλιση οφείλεται στις παραδοχές που έγιναν και στους όρους που παραλήφθηκαν, ώστε να διευκολυνθεί η μαθηματική επίλυση.

6.3.3 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο εντάσεως q

A. Χωρίς αξονική δύναμη

Στο κεφάλαιο 4.3.1.A με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου για την πολυωνυμική προσέγγιση, το κρίσιμο φορτίο και η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού αποδείχθηκε ότι περιγράφονται από τη σχέση:

$$q_{cr} = \sqrt{\frac{7946,6EI_yEC_w}{l^8} + \frac{807,904EI_yGJ}{l^6} + \left(\frac{40,945qEI_yd}{l^4}\right)^2} - \frac{40,945qEI_yd}{l^4}$$

και

$$M_{cr} = \frac{q_{cr}l^2}{8} = \frac{l^2}{8} \left(\sqrt{\frac{7946,6EI_yEC_w}{l^8} + \frac{807,904EI_yGJ}{l^6} + \left(\frac{40,945qEI_yd}{l^4}\right)^2} - \frac{40,945qEI_yd}{l^4} \right)$$

Ενώ στο κεφάλαιο 4.3.1.B με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου για την ημιτονοειδή προσέγγιση, προέκυψε το κρίσιμο φορτίο και η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού, τα οποία περιγράφονται από τη σχέση:

$$q_{cr} = \sqrt{\frac{6541,6EI_yEC_w}{l^8} + \frac{654,2EI_yGJ}{l^6} + \left(\frac{33,22qEI_yd}{l^4}\right)^2} - \frac{33,22qEI_yd}{l^4}$$

και

$$M_{cr} = \frac{q_{cr}l^2}{8} = \frac{l^2}{8} \left\{ \sqrt{\frac{6541,6EI_yEC_w}{l^8} + \frac{654,2EI_yGJ}{l^6} + \left(\frac{33,22qEI_yd}{l^4}\right)^2} - \frac{33,22qEI_yd}{l^4} \right\}$$

Στους πίνακες 6.9,6.10,6.11 που ακολουθούν, παρουσιάζονται τα κρίσιμα φορτία και οι κρίσιμες ροπές, όταν το φορτίο q ασκείται στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα και, τα οποία προέκυψαν με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου και με τη χρήση των προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων adina και abaqus πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού (linear buckling analysis) αλλά και με τον Ευρωκώδικα 3. Οι εφαρμογές πραγματοποιήθηκαν σε πρότυπες ελατές διατομές IPE (500) με μήκος 8 μέτρα. Όλες οι ροπές M_{cr} είναι σε kNm και τα q_{cr} σε kN/m.

Πίνακας 6.9: Αποτελέσματα q_{cr} , M_{cr} όταν το q ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	q_{cr}	M_{cr}	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος(A)	39,518	316,151	-
		Πρ. Μέθοδος(B)	35,58	284,64	-
		Adina	39,076	312,608	1,13
		Abaqus	40,23	321,84	1,77
		EC3	39,51	316,08	0,022

Πίνακας 6.10: Αποτελέσματα q_{cr} , M_{cr} όταν το q ασκείται στο άνω πέλμα της διατομής

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	q_{cr}	M_{cr}	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος(A)	30,116	240,925	-
		Πρ. Μέθοδος(B)	36,65	293,225	-
		Adina	29,624	236,992	1,65
		Abaqus	28,23	225,85	6,26
		EC3	29,83	238,64	0,96

Πίνακας 6.11: Αποτελέσματα q_{cr} , M_{cr} όταν το q ασκείται στο κάτω πέλμα της διατομής

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	q_{cr}	M_{cr}	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος(A)	51,858	414,868	-
		Πρ. Μέθοδος(B)	36,65	293,225	-
		Adina	51,24	409,92	1,69
		Abaqus	48	384	7,44
		EC3	52,33	418,64	0,42

Παρατηρείται ότι οι αποκλίσεις των αποτελεσμάτων μεταξύ των τριών μεθόδων είναι πολύ μικρές και δεν υπερβαίνουν το 2% σε κανένα συνδυασμό. Ιδιαίτερα οι αποκλίσεις μεταξύ της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3 δεν ξεπερνούν το 1%. Παρατίθενται παρακάτω αναλυτικά οι μέγιστες αποκλίσεις για τις περιπτώσεις που το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα της διατομής.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου και του Adina η μέγιστη απόκλιση είναι 1,69% και παρατηρείται όταν το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα της διατομής IPE500 δοκού 8 μέτρων, ενώ όταν ασκείται στο κέντρο βάρους και στο άνω πέλμα οι αποκλίσεις είναι 1,13% και 1,65% αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3 η μέγιστη απόκλιση είναι 0,96% στην περίπτωση που το φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα της διατομής, ενώ όταν ασκείται στο κέντρο βάρους και στο κάτω πέλμα οι αποκλίσεις είναι 0,022% και 0,42% αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μεταξύ του Ευρωκώδικα 3 και της επίλυσης στο Adina διαπιστώνεται ότι η μέγιστη απόκλιση είναι 2,08% για εφαρμογή του φορτίου q στο κάτω πέλμα της διατομής, ενώ όταν εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους και στο άνω πέλμα της, οι αποκλίσεις είναι 1,098% και 0,69% αντίστοιχα.

Οι αποκλίσεις μεταξύ της προσδιοριστικής μεθόδου και του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Abaqus είναι σαφώς μεγαλύτερες. Η τάξη αυτή των αποκλίσεων οφείλεται κυρίως στο γεγονός, ότι κατά την επίλυση μέσω του προγράμματος Abaqus δεν χρησιμοποιήθηκε γραμμικό φορτίο (Line Load) όπως γίνεται στο πρόγραμμα Adina αλλά κατακόρυφη πίεση (Pressure) για να προσομοιάσει την ζητούμενη φόρτιση.

Καταλήγοντας, φαίνεται ότι οι αποκλίσεις μεταξύ της μεθόδου που αναπτύχθηκε και του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Adina είναι μεγαλύτερες από τις αποκλίσεις μεταξύ της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3. Επομένως, το συμπέρασμα είναι ότι η μέθοδος του κεφαλαίου 4 είναι ιδιαίτερα ακριβής και τυχόν αποκλίσεις οφείλονται στις παραδοχές που έγιναν, ώστε να διευκολυνθεί η επίλυση αλλά και στην προσομοίωση της αμφιερείστου με δέσμευση στροφής περί τον κεντροβαρικό άξονα στα άκρα της στο Adina.

B. Με αξονική δύναμη

Έχει αποδειχθεί ότι η κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή πλευρικού λυγισμού για την περίπτωση αμφιέριστης δοκού, που καταπονείται από ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο συναρτίζεται της αξονικής δύναμης δίνεται από τη σχέση :

$$M_{cr} = 1,13M_{0,cr} = 1,13\left\{\frac{1}{p}\sqrt{(\pi^2 + \lambda^2)(\pi^2 - n^2)}\right\} \quad \text{για } n^2 < \pi^2 \quad (\text{περίπτωση θλιπτικού φορτίου})$$

όπου: $u = \frac{u}{l}, \xi = \frac{z}{l}, n^2 = \frac{Nl^2}{EI_y}, M'_0 = \frac{M_0l}{EI_y}, \lambda^2 = \frac{GJl^2}{EC_w}, p^2 = \frac{I_y l^2}{C_w}, n^2 = \frac{p^2 M_0^2}{\lambda^2}$ (περίπτωση εφελκυστικού φορτίου) ή $N_0 = \frac{M_0^2}{GJ}$.

Πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού στο Adina και το Abaqus για διάφορους συνδυασμούς αξονικής δύναμης N και καμπτικής ροπής M προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες και τα αντίστοιχα διαγράμματα, στα οποία συγκρίνονται οι θεωρητικές επιλύσεις με τις αριθμητικές επιλύσεις στα προγράμματα:

Πίνακας 6.12: Αποτελέσματα M_{cr} και αποκλίσεις 1ης Φάσης

Ελεγχος Πλαστικοποίησης	η^2	N	M Θεωρίας	M Adina	Αποκλίσεις % Πρώτης Φάσης	
161973,06	OK	0,00	0,000	316,08	312,61	1,099
159769,98	OK	1,00	70,21	299,64	296,77	0,957
155245,84	OK	2,00	140,43	282,24	276,70	1,964
150525,13	OK	3,00	210,65	263,70	256,34	2,792
145081,08	OK	4,00	280,87	243,75	234,97	3,605
141932,45	OK	5,00	351,09	222,02	212,92	4,100
133324,92	OK	6,00	421,31	197,92	190,02	3,990
126099,50	OK	7,00	491,53	170,44	164,46	3,506
116731,05	OK	8,00	561,75	137,57	134,15	2,486
101923,77	OK	9,00	631,96	93,82	92,23	1,698
178052,58	OK	-1,00	-70,21	331,71	331,95	0,073
193427,95	OK	-2,00	-140,44	346,63	349,74	0,897
209796,94	OK	-3,00	-210,66	360,94	369,07	2,253
226222,99	OK	-4,00	-280,86	374,70	388,19	3,602
242956,31	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
259907,27	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
277764,44	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
295905,50	Πλαστική Περ.	--	-	-	-	-
314596,87	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
					Μέση Απόκλιση	2,359

Πίνακας 6.13: Αποτελέσματα M_{cr} και αποκλίσεις 2ης Φάσης

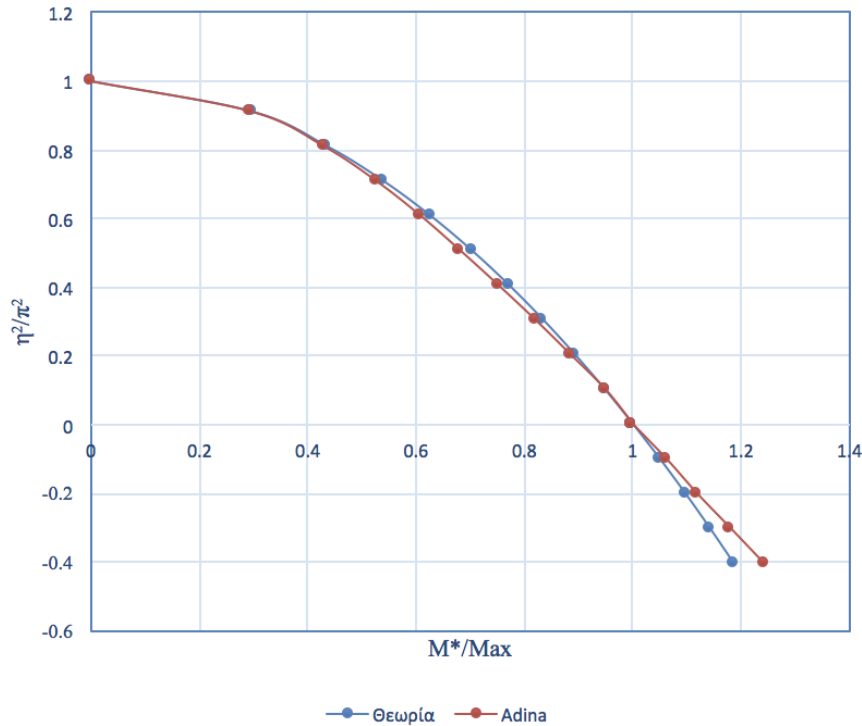
N Adina	η^2 Adina	M*Adina	M*θεωρητικό	Αποκλίσεις % Δεύτερης Φάσης
0,00	0,00	0,556	0,563	1,099
69,61	0,99	0,528	0,534	1,005
137,77	1,96	0,493	0,504	2,199
205,40	2,93	0,456	0,472	3,318
270,70	3,86	0,418	0,439	4,773
366,690	5,22	0,379	0,386	1,835
404,48	5,76	0,338	0,363	6,832
474,29	6,75	0,293	0,316	7,387
547,79	7,80	0,239	0,258	7,291
627,98	8,94	0,164	0,172	4,759
-70,27	-1,01	0,591	0,591	0,070
-141,70	-2,02	0,623	0,618	0,821
-215,40	-3,07	0,657	0,644	1,986
-291,00	-4,14	0,691	0,670	3,068
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
			Μέση Απόκλιση	3,317

Ακολουθώντας την ίδια πορεία με την περίπτωση των δύο σταθερών ροπών στα άκρα της δοκού προκύπτουν οι παραπάνω πίνακες στους οποίους παρουσιάζεται η μέση απόκλιση πρώτης αλλά και δεύτερης φάσης βάσει της οποίας προκύπτει το κάτωθι διάγραμμα.

Σημειώνεται πως με θετικό πρόσημο παρουσιάζεται η θλίψη ενώ ο εφελκυσμός με αρνητικό ενώ τα αποτελέσματα N και M παρουσιάζονται σε kN.

Οι αποκλίσεις μεταξύ θεωρητικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων παραμένουν ικανοποιητικές.

Κατανεμημένο Φορτίο



Σε αυτό το σημείο ελέγχεται και ένας συγκεκριμένος συνδυασμός ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου q στο μήκος $L=8m$ της αμφιερέιστου, διατομής IPE 500 -αξονικής δύναμης N , για τον οποίο η δοκός εκτρέπεται πλευρικά, με στόχο τον προσδιορισμό της απόκλισης των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων και την προσεγγιστική επίλυση, που πραγματοποιήθηκε στο κεφάλαιο 4.3.2.

Από ταυτόχρονη δράση φορτίου $q=12,50 \text{ kN/m}$ (αντιστοιχεί σε ροπή $M_0=100 \text{ kNm}$ στο μέσον της δοκού) και αξονικής δύναμης $N=100 \text{ kN}$ στο Adina, προκύπτει φορτιστικός συντελεστής $load\ factor=2,446$, επομένως ένας κρίσιμος συνδυασμός που προκύπτει είναι $q(\text{kN/m})-N(\text{kN})= 30,575-244,6$.

Με τη χρήση του μαθηματικού προγράμματος maple, θεωρείται αξονικό φορτίο $N=244,6 \text{ kN}$ και αναζητείται το κρίσιμο φορτίο q , το οποίο προκύπτει από την προσεγγιστική επίλυση που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 4.3.2.

Από την αδιαστατοποιημένη εξίσωση του κεφαλαίου 4.3.2 με εφαρμογή στο maple για αξονικό φορτίο $N=244,6 \text{ kN}$ προκύπτει κρίσιμη τιμή ομοιόμορφου φορτίου $q=31,7 \text{ kN}$. Παρατηρείται, λοιπόν ότι η απόκλιση είναι 3,55%, επιβεβαιώνοντας ότι η θεωρητική προσέγγιση είναι σχετικά ικανοποιητική και η όποια απόκλιση οφείλεται στις παραδοχές που έγιναν και στους όρους που παραλήφθηκαν, ώστε να διευκολυνθεί η μαθηματική επίλυση.

6.3.4 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ροπή κάμψεως στο άκρο της

A. Χωρίς αξονική δύναμη

Στο κεφάλαιο 4.4 με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου για την πολυωνυμική προσέγγιση, η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M_{cr} για τη φόρτιση της αμφιέρειστης δοκού με ροπή κάμψεως μόνο στο αριστερό άκρο της, αποδείχθηκε ότι περιγράφεται από τη σχέση:

$$M_{cr} = \sqrt{35,33 \frac{GJ EI_y}{l^2} + 347,46 \frac{EI_y EC_w}{l^4}}$$

Στον πίνακα 6.14, που ακολουθεί, παρουσιάζονται οι κρίσιμες ροπές, οι οποίες προέκυψαν με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου και με τη χρήση των προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων adina και abaqus πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού (linear buckling analysis) αλλά και με τον Ευρωκώδικα 3. Οι εφαρμογές πραγματοποιήθηκαν σε πρότυπες ελατές διατομές IPE (500) με μήκος 8 μέτρα. Όλες οι ροπές M_{cr} είναι σε kNm.

Πίνακας 6.14: Αποτελέσματα M_{cr}

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	M_{cr}	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος	528,89	-
		Adina	514,80	2,73
		Abaqus	500,00	5,77
		EC3	525,87	0,58

Παρατηρείται ότι η προσδιοριστική μέθοδος δίνει περίπου το ίδιο αποτέλεσμα με τον Ευρωκώδικα 3, αφού η απόκλιση είναι 0,575%. Επίσης, εξίσου μικρές είναι και οι αποκλίσεις μεταξύ της προσδιοριστικής μεθόδου και των δύο προγραμμάτων, που χρησιμοποιήθηκαν, αφού είναι 2,73% με το Adina και 5,77% με το Abaqus, γεγονός που καταδεικνύει με τον πλέον αξιόπιστο τρόπο ότι η προσομοίωση, που πραγματοποιήθηκε στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων, πλησιάζει όσο το δυνατόν περισσότερο τον πραγματικό φορέα και τις συνθήκες στήριξής του.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μεταξύ του Ευρωκώδικα 3 και της επίλυσης στο Adina και στο Abaqus διαπιστώνεται ότι οι αποκλίσεις είναι 2,1% και 5,17% αντίστοιχα, γεγονός που ενισχύει τον ισχυρισμό περί καταλληλότητας της προσομοίωσης.

B. Με αξονική δύναμη

Έχει αποδειχθεί ότι η κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή πλευρικού λυγισμού για τη φόρτιση αμφιέρειστης δοκού με ροπή κάμψεως στο ένα άκρο της συναρτήσεται της αξονικής δύναμης δίνεται από τη σχέση :

$$M_{cr} = 1,88M_{0,cr} = 1,88\left\{\frac{1}{p}\sqrt{(\pi^2 + \lambda^2)(\pi^2 - n^2)}\right\} \text{ για } n^2 < \pi^2 \text{ (περίπτωση θλιπτικού φορτίου)}$$

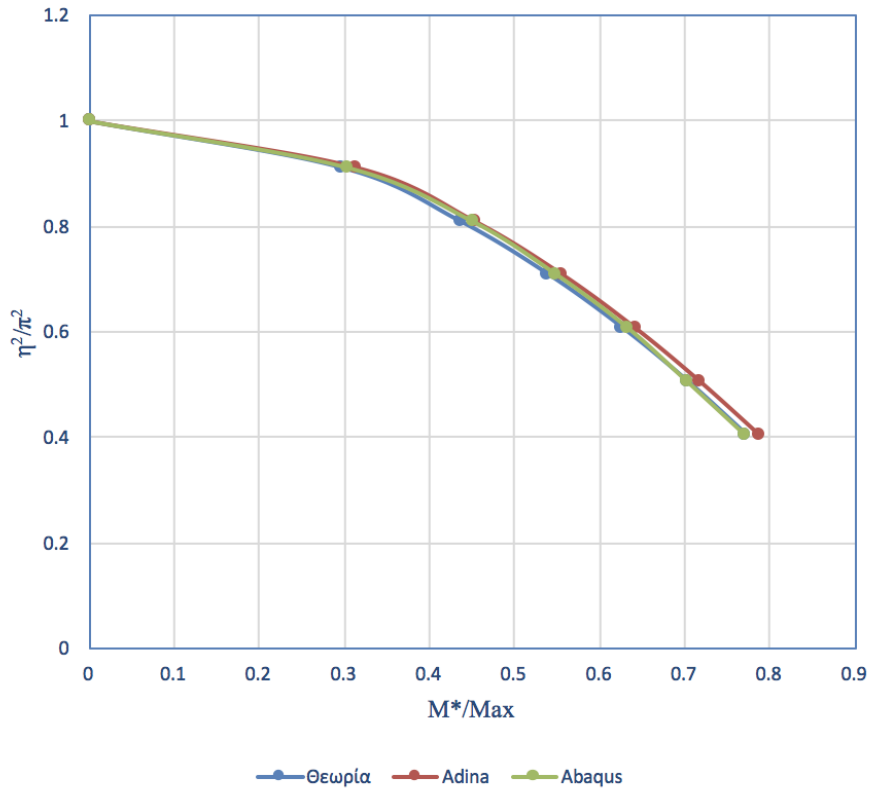
όπου: $v = \frac{u}{l}, \xi = \frac{z}{l}, n^2 = \frac{Nl^2}{EI_y}, M'_0 = \frac{M_0l}{EI_y}, \lambda^2 = \frac{GJl^2}{EC_w}, p^2 = \frac{I_y l^2}{C_w}, n^2 = \frac{p^2 M_0^2}{\lambda^2}$ (περίπτωση εφελκυστικού φορτίου) ή $N_0 = \frac{M_0^2}{GJ}$.

Πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού στο Adina και το Abaqus για διάφορους συνδυασμούς αξονικής δύναμης N και καμπτικής ροπής M προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες και τα αντίστοιχα διαγράμματα, στα οποία συγκρίνονται οι θεωρητικές επιλύσεις με τις αριθμητικές επιλύσεις στα προγράμματα:

Πίνακας 6.15: Αποτελέσματα M_{cr} και αποκλίσεις 1ης Φάσης

Ελεγχος Πλαστικοποίησης	η^2	N	M Θεωρίας	M Adina	Αποκλίσεις % Πρώτης Φάσης	
258409,326	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	
246277,046	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	
248055,682	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	
237689,834	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	
226643,470	OK	4,000	280,875	405,539	392,200	3,289
214526,264	OK	5,000	351,094	369,382	357,500	3,217
200889,048	OK	6,000	421,313	329,277	319,700	2,909
184833,572	OK	7,000	491,531	283,556	276,900	2,347
164597,999	OK	8,000	561,750	228,878	225,500	1,476
135527,559	OK	9,000	631,969	156,095	156,300	0,131
288309,192	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
308493,925	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
328863,320	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
349396,596	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
369990,129	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
390764,785	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
411625,648	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
432762,551	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
454374,902	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
					Μέση Απόκλιση	2,421

Μία Σταθερή Ροπή



Αξίζει να παρατηρηθεί πως για πολύ χαμηλές τιμές του θλιπτικού φορτίου ($\eta^2 < 4$), η παρούσα δοκός πλαστικοποιείται λόγω μεγάλων τιμών της ροπής και ως εκ τούτου δεν προσδίδει συνεχή καμπύλη στο διάγραμμα. Για εποπτικούς λόγους παρουσιάζεται πλήρης η καμπύλη των θεωρητικών αναλύσεων.

Τέλος όπως φαίνεται από το διάγραμμα οι καμπύλες των δύο προγραμμάτων σχεδόν ταυτίζονται και μεταξύ τους αλλά και με τη θεωρητική, γεγονός που επιβεβαιώνει την αξιοπιστία των αναλύσεων και των αποτελεσμάτων.

6.3.5 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ομόφορων ροπών κάμψεως στα άκρα

A. Χωρίς αξονική δύναμη

Στο κεφάλαιο 4.5 με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου για την πολυωνυμική προσέγγιση, η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M_{cr} για τη φόρτιση της αμφιέρειστης δοκού με ζεύγος ροπών κάμψεως στα άκρα της, αποδείχθηκε ότι περιγράφεται από τη σχέση:

$$M_{cr} = \sqrt{76,33 \frac{GJ E I_y}{l^2} + 750,75 \frac{E I_y E C_w}{l^4}}$$

Στον πίνακα 6.17, που ακολουθεί, παρουσιάζονται οι κρίσιμες ροπές, οι οποίες προέκυψαν με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου και με τη χρήση των προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων adina και abaqus πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού (linear buckling analysis) αλλά και με τον Ευρωκώδικα 3. Οι εφαρμογές πραγματοποιήθηκαν σε πρότυπες ελατές διατομές IPE (500) με μήκος 8 μέτρα. Όλες οι ροπές M_{cr} είναι σε kNm.

Πίνακας 6.17: Αποτελέσματα M_{cr}

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	M_{cr}	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος	777,41	-
		Adina	750,2	3,63
		Abaqus	801,8	3,05
		EC3	769,23	1,07

Παρατηρείται ότι η προσδιοριστική μέθοδος δίνει περίπου το ίδιο αποτέλεσμα με τον Ευρωκώδικα 3, αφού η απόκλιση είναι 1,07%. Επίσης, εξίσου μικρές είναι και οι αποκλίσεις μεταξύ της προσδιοριστικής μεθόδου και των δύο προγραμμάτων, που χρησιμοποιήθηκαν, αφού είναι 3,63% με το Adina και 3,05% με το Abaqus, γεγονός που καταδεικνύει με τον πλέον αξιόπιστο τρόπο ότι η προσομοίωση, που πραγματοποιήθηκε στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων, πλησιάζει όσο το δυνατόν περισσότερο τον πραγματικό φορέα και τις συνθήκες στήριξής του.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μεταξύ του Ευρωκώδικα 3 και της επίλυσης στο Adina και στο Abaqus διαπιστώνεται ότι οι αποκλίσεις είναι 2,47% και 4,06% αντίστοιχα, γεγονός που ενισχύει τον ισχυρισμό περί καταλληλότητας της προσομοίωσης.

6.3.6 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε δύο συγκεντρωμένα φορτία στα $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$ του μήκους της

A. Χωρίς αξονική δύναμη

Στο κεφάλαιο 4.6 με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου για την πολυωνυμική προσέγγιση, το κρίσιμο φορτίο P_{cr} και η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M_{cr} αποδείχθηκε ότι περιγράφονται από τη σχέση:

$$P_{cr} = \sqrt{\frac{1700,69EI_y EC_w}{l^6} + \frac{170,29EI_y GJ}{l^4} + \left(\frac{23,98PEI_y a}{l^3}\right)^2 + \left(\frac{24,06PEI_y a}{l^3}\right)}$$

και

$$M_{cr} = \frac{P_{cr} l}{8} = \frac{l^2}{4} \left\{ \sqrt{\frac{1700,69EI_y EC_w}{l^6} + \frac{170,29EI_y GJ}{l^4} + \left(\frac{23,98PEI_y a}{l^3}\right)^2 + \left(\frac{24,06PEI_y a}{l^3}\right)} \right\}$$

Στους πίνακες 6.18, 6.19, 6.20 που ακολουθούν, παρουσιάζονται τα κρίσιμα φορτία και οι κρίσιμες ροπές, όταν τα φορτία P ασκούνται στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα και, τα οποία προέκυψαν με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου και με τη χρήση των προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων adina και abaqus πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού (linear buckling analysis) αλλά και με τον Ευρωκώδικα 3. Οι εφαρμογές πραγματοποιήθηκαν σε πρότυπες ελατές διατομές IPE (500) με μήκος 8 μέτρα. Όλες οι ροπές M_{cr} είναι σε kNm και τα P_{cr} σε kN.

Πίνακας 6.18: Αποτελέσματα P_{cr} , M_{cr} όταν τα P ασκούνται στο κέντρο βάρους της διατομής

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	P_{cr}	M_{cr}	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος	145,43	290,86	-
		Adina	141,20	282,40	2,98
		EC3	146,29	292,585	0,59

Πίνακας 6.19: Αποτελέσματα P_{cr} , M_{cr} όταν τα P ασκούνται στο άνω πέλμα της διατομής

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	P_{cr}	M_{cr}	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος	103,702	207,40	-
		Adina	111,137	222,274	6,68
		EC3	111,41	222,819	6,90

Πίνακας 6.20: Αποτελέσματα P_{cr} , M_{cr} όταν τα P ασκούνται στο κάτω πέλμα της διατομής

Διατομή	Μήκος (m)	Μέθοδος	P_{cr}	M_{cr}	Αποκλίσεις (%)
IPE 500	8	Πρ. Μέθοδος	203,96	407,92	-
		Adina	190,50	381	7,05
		EC3	191	382	6,78

Παρατηρείται ότι οι αποκλίσεις των αποτελεσμάτων μεταξύ των τριών μεθόδων είναι σχετικά μικρές και δεν υπερβαίνουν το 7% σε κανένα συνδυασμό. Ιδιαίτερα οι αποκλίσεις μεταξύ της αριθμητικής επίλυσης στο Adina και του Ευρωκώδικα 3 δεν ξεπερνούν το 3,5%. Παρατίθενται παρακάτω αναλυτικά οι μέγιστες αποκλίσεις για τις περιπτώσεις που τα φορτία ασκούνται στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα της διατομής.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου και του Adina η μέγιστη απόκλιση είναι 7,05% και παρατηρείται όταν τα φορτία ασκούνται στο κάτω πέλμα της διατομής IPE500 δοκού 8 μέτρων, ενώ όταν ασκούνται στο κέντρο βάρους και στο άνω πέλμα οι αποκλίσεις είναι 2,98% και 6,68% αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3 η μέγιστη απόκλιση είναι 6,90% στην περίπτωση που τα φορτία ασκούνται στο άνω πέλμα της διατομής, ενώ όταν ασκούνται στο κέντρο βάρους και στο κάτω πέλμα οι αποκλίσεις είναι 0,589% και 6,78% αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μεταξύ του Ευρωκώδικα 3 και της επίλυσης στο Adina διαπιστώνεται ότι η μέγιστη απόκλιση είναι 3,48% για εφαρμογή των φορτίων P στο κέντρο βάρους της διατομής, ενώ όταν εφαρμόζονται στο άνω και κάτω πέλμα της οι αποκλίσεις είναι 0,244% και 0,262% αντίστοιχα.

Καταλήγοντας, φαίνεται ότι οι αποκλίσεις μεταξύ της μεθόδου που αναπτύχθηκε και του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Adina και του Ευρωκώδικα 3 είναι σχετικά μικρές. Επομένως, το συμπέρασμα είναι ότι η μέθοδος του κεφαλαίου 4 είναι ιδιαίτερα ακριβής και τυχόν αποκλίσεις οφείλονται στις παραδοχές που έγιναν με την απαλοιφή κάποιων όρων, ώστε να διευκολυνθεί η επίλυση αλλά και στην προσομοίωση της αμφιερείστου με δέσμευση στροφής περί τον κεντροβαρικό άξονα στα άκρα της στο Adina.

B. Με αξονική δύναμη

Έχει αποδειχθεί ότι η κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή πλευρικού λυγισμού στην περίπτωση που η αμφιέρειστη δοκός καταπονείται με δύο συγκεντρωμένα φορτία στα 1/4 και 3/4 του μήκους της (l) συναρτήσει της αξονικής δύναμης δίνεται από τη σχέση :

$$M_{cr} = 1,046M_{0,cr} = 1,046\left\{\frac{1}{p}\sqrt{(\pi^2 + \lambda^2)(\pi^2 - n^2)}\right\} \quad \text{για } n^2 < \pi^2 \text{ (περίπτωση θλιπτικού φορτίου)}$$

$$\text{όπου: } u = \frac{u}{l}, \xi = \frac{z}{l}, n^2 = \frac{Nl^2}{EI_y}, M'_0 = \frac{M_0 l}{EI_y}, \lambda^2 = \frac{GJl^2}{EC_w}, p^2 = \frac{I_y l^2}{C_w}, n^2 = \frac{p^2 M_0^2}{\lambda^2} \quad \text{(περίπτωση}$$

εφελκυστικού φορτίου) ή $N_0 = \frac{M_0^2}{GJ} \cdot w$ Πραγματοποιώντας γραμμική ανάλυση λυγισμού στο Adina και το Abaqus για διάφορους συνδυασμούς αξονικής δύναμης N και καμπτικής ροπής M προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες και τα αντίστοιχα διαγράμματα, στα οποία συγκρίνονται οι θεωρητικές επιλύσεις με τις αριθμητικές επιλύσεις στα προγράμματα:

Πίνακας 6.21: Αποτελέσματα M_{cr} και αποκλίσεις 1ης Φάσης

Ελεγχος Πλαστικοποίησης		η^2	N	M Θεωρίας	M Adina	Αποκλίσεις % Πρώτης Φάσης
146321,24	OK	0,00	0,000	290,91	282,40	2,924
132213,04	OK	1,00	70,21	275,78	266,46	3,378
117448,37	OK	2,00	140,43	259,76	249,08	4,113
102654,62	OK	3,00	210,65	242,70	231,56	4,588
87553,60	OK	4,00	280,87	224,34	213,44	4,859
71908,96	OK	5,00	351,09	204,34	194,34	4,893
55356,02	OK	6,00	421,31	182,15	173,68	4,652
37340,54	OK	7,00	491,53	156,86	150,57	4,011
16690,08	OK	8,00	561,75	126,61	123,03	2,830
-9664,35	OK	9,00	631,96	86,35	85,65	0,816
161412,52	OK	-1,00	-70,21	305,29	300,04	1,718
175748,37	OK	-2,00	-140,44	319,02	316,05	0,933
190391,50	OK	-3,00	-210,66	332,19	332,39	0,059
205274,36	OK	-4,00	-280,86	344,85	348,90	1,173
220417,38	OK	-5,00	-351,09	357,07	365,60	2,388
235858,27	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
251625,34	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
267763,11	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
284301,958	Πλαστική Περ.	-	-	-	-	-
					Μέση Απόκλιση	2,889

Πίνακας 6.22: Αποτελέσματα M_{cr} και αποκλίσεις 2ης Φάσης

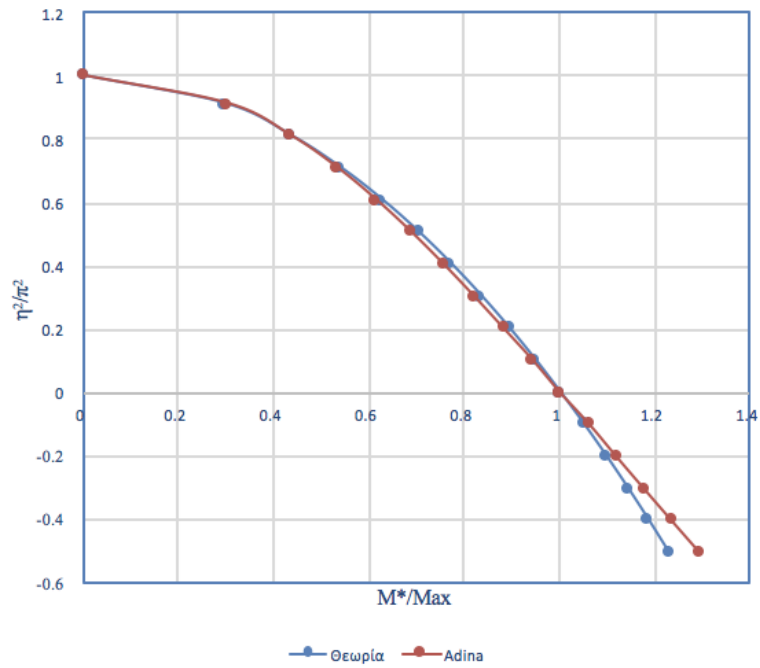
N Adina	η^2 Adina	M*Adina	M*θεωρητικό	Αποκλίσεις % Δεύτερης Φάσης
0,00	0,00	0,503	0,518	2,924
67,85	0,97	0,474	0,492	3,561
134,66	1,92	0,443	0,465	4,611
200,99	2,86	0,412	0,436	5,530
267,23	3,81	0,380	0,406	6,396
333,91	4,76	0,346	0,373	7,196
401,75	5,72	0,309	0,336	7,909
471,83	6,72	0,268	0,293	8,385
545,85	7,77	0,219	0,239	8,229
626,87	8,93	0,152	0,160	4,714
-69,01	-0,98	0,534	0,543	1,640
-139,13	-1,98	0,563	0,567	0,855
-210,78	-3,00	0,592	0,591	0,052
-284,17	-4,05	0,621	0,615	1,003
-359,48	-5,12	0,651	0,638	1,979
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
			Μέση Απόκλιση	4,332

Ακολουθώντας την ίδια πορεία με την περίπτωση των δύο σταθερών ροπών στα άκρα της δοκού προκύπτουν οι παραπάνω πίνακες στους οποίους παρουσιάζεται η μέση απόκλιση πρώτης αλλά και δεύτερης φάσης βάσει της οποίας προκύπτει το κάτωθι διάγραμμα.

Σημειώνεται πως με θετικό πρόσημο παρουσιάζεται η θλίψη ενώ ο εφελκυσμός με αρνητικό ενώ τα αποτελέσματα N και M παρουσιάζονται σε kN και kNm αντίστοιχα.

Οι αποκλίσεις μεταξύ θεωρητικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων παραμένουν ικανοποιητικές.

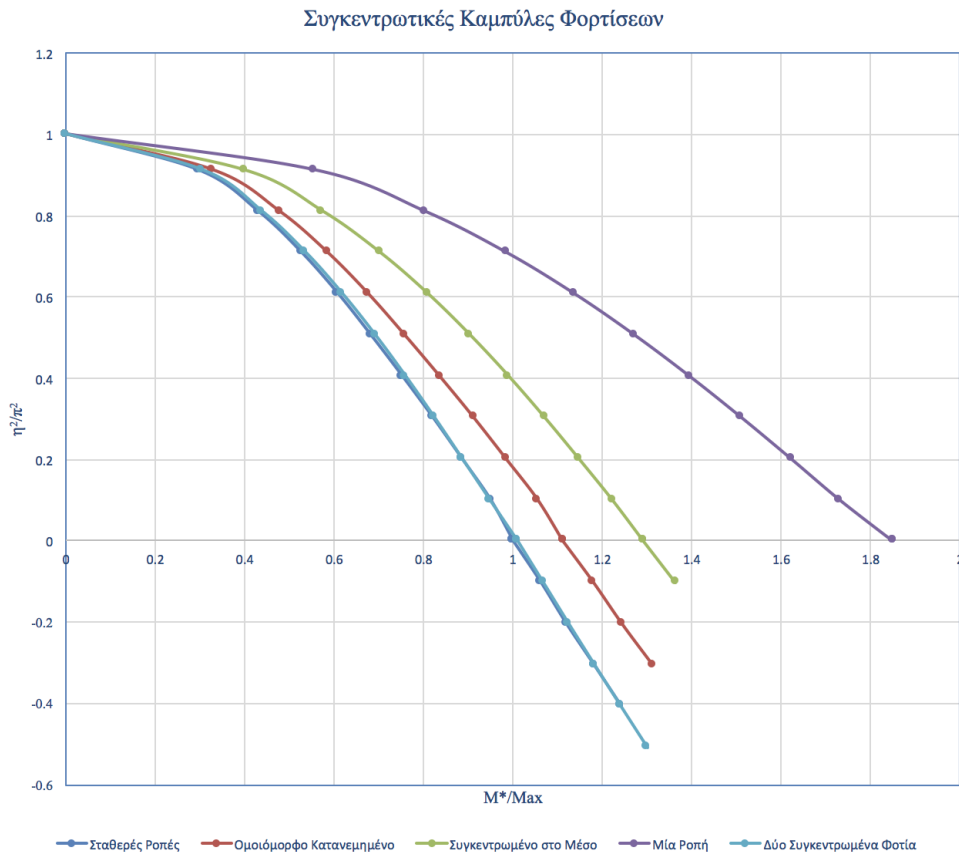
Δύο Συγκεντρωμένα Φορτία (L/4,3L/4)



Παρατηρείται στο διάγραμμα ,πως η καμπύλη του προγράμματος adina σχεδόν ταυτίζεται με τη θεωρητική, γεγονός που επιβεβαιώνει την αξιοπιστία των αναλύσεων και των αποτελεσμάτων.

6.3.7 Ενιαία καμπύλη αξονικών δυνάμεων και ροπών

Ακολουθεί ένα συγκεντρωτικό διάγραμμα κρίσιμης ροπής-αξονικής δύναμης, το οποίο περιλαμβάνει τις καμπύλες όλων των φορτίσεων, που εξήχθησαν παραπάνω και στο οποίο φαίνεται η σχέση του συντελεστή C_1 , ανάλογα με τη φόρτιση. Συγκεκριμένα για ζεύγος σταθερών ροπών στα άκρα είναι $C_1=1,00$, για το συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της δοκού αλλά και για την περίπτωση των συγκεντρωμένων φορτίων στα $1/4$ και $3/4$ του μήκους της είναι $C_1=1,35$ και $C_1=1,046$, για το ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο είναι $C_1=1,13$, ενώ για τη μία σταθερή ροπή στο ένα άκρο της δοκού είναι $C_1=1,88$. Παρατηρείται στο διάγραμμα, που ακολουθεί, ότι η σχέση των παραπάνω συντελεστών επιβεβαιώνεται.



Σε αυτό το σημείο γίνεται έλεγχος τυχαίων τιμών της αξονικής για να εξεταστεί εάν οι παραπάνω λόγοι των συντελεστών C_1 διατηρούνται περίπου σταθεροί ή μεταβάλλονται. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον κάτωθι πίνακα :

	η^2/π^2	N	M	Λόγος M/Mo	Λόγος Ευρωκώδικα	Απόκλιση %
Σταθερές Ροπές	0,8	554,38	122,83	-	-	-
Ομοιόμορφο Κατανεμημένο			134,13	1,09	1,13	3,360
Συγκεντρωμένο στο Μέσο			161,24	1,31	1,35	2,761
Μία Ροπή			224,90	1,83	1,88	2,604
Δύο Συγκεντρωμένα Φορτία			123,03	1,001	1,046	4,398

	η^2/π^2	N	M	Λόγος M/Mo	Λόγος Ευρωκώδικα	Απόκλιση %
Σταθερές Ροπές	0,6	415,77	172,66	-	-	-
Ομοιόμορφο Κατανεμημένο			189,75	1,10	1,13	2,741
Συγκεντρωμένο στο Μέσο			224,93	1,30	1,35	3,499
Μία Ροπή			319,70	1,85	1,88	1,509
Δύο Συγκεντρωμένα Φορτία			173,89	1,01	1,046	3,444

	η^2/π^2	N	M	Λόγος M/Mo	Λόγος Ευρωκώδικα	Απόκλιση %
Σταθερές Ροπές	0,4	277,22	208,65	-	-	-
Ομοιόμορφο Κατανεμημένο			234,94	1,13	1,13	0,353
Συγκεντρωμένο στο Μέσο			278,39	1,33	1,35	1,168
Μία Ροπή			390,73	1,87	1,88	0,391
Δύο Συγκεντρωμένα Φορτία			209,75	1,01	1,046	3,444

	η^2/π^2	N	M	Λόγος M/M ₀	Λόγος Ευρωκώδικα	Απόκλιση %
Σταθερές Ροπές	0,2	138,61	247,74	-	-	-
Ομοιόμορφο Κατανεμημένο			276,73	1,12	1,13	1,148
Συγκεντρωμένο στο Μέσο			322,54	1,30	1,35	3,561
Μία Ροπή			456,11	1,84	1,88	2,070
Δύο Συγκεντρωμένα Φορτία			248,05	1	1,046	4,398

	η^2/π^2	N	M	Λόγος M/M ₀	Λόγος Ευρωκώδικα	Απόκλιση %
Σταθερές Ροπές	-0,2	-138,61	314,66	-	-	-
Ομοιόμορφο Κατανεμημένο			349,53	1,11	1,13	1,698
Συγκεντρωμένο στο Μέσο			-	-	1,35	-
Μία Ροπή			-	-	1,88	-
Δύο Συγκεντρωμένα Φορτία			315,05	1	1,046	4,398

	η^2/π^2	N	M	Λόγος M/M ₀	Λόγος Ευρωκώδικα	Απόκλιση %
Σταθερές Ροπές	-0,4	-277,22	348,13	-	-	-
Ομοιόμορφο Κατανεμημένο			-	-	1,13	-
Συγκεντρωμένο στο Μέσο			-	-	1,35	-
Μία Ροπή			-	-	1,88	-
Δύο Συγκεντρωμένα Φορτία			349,24	1	1,046	4,398

Παρατηρήσεις:

Ένα σημαντικό συμπέρασμα, που εξάγεται από την ανάλυση στους παραπάνω πίνακες είναι ότι η αναλογία των συντελεστών C_1 διατηρείται σταθερή ή μεταβάλλεται ελάχιστα για τις διάφορες τιμές αξονικής δύναμης. Για παράδειγμα, στον πρώτο πίνακα για αξονική δύναμη $N = 554,58 \text{ kN}$ η κρίσιμη ροπή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού για τις σταθερές ροπές είναι $M_{0,cr} = 122,83 \text{ kNm}$, για το ομοιόμορφο φορτίο είναι $M_{cr} = 134,13 \text{ kNm}$, για το συγκεντρωμένο στο μέσον της δοκού είναι $M_{cr} = 161,24 \text{ kNm}$, για τη ροπή στο ένα άκρο

είναι $M_{cr} = 224,90 \text{ kNm}$ και για τα δύο συγκεντρωμένα φορτία είναι $M_{cr} = 134,13 \text{ kNm}$. Οι παραπάνω τιμές αντιστοιχούν σε συντελεστές $C_1 = 1,09$ με απόκλιση 3,36% για το ομοιόμορφο, $C_1 = 1,31$ με απόκλιση 2,761% για το συγκεντρωμένο στο μέσο, $C_1 = 1,83$ με απόκλιση 2,604% για τη μία ροπή και $C_1 = 1,00$ με απόκλιση 4,398% για τα δύο συγκεντρωμένα φορτία στα $L/4$ και $3L/4$ της δοκού.

Όμοια για αξονική δύναμη $N = 277,22 \text{ kN}$ η κρίσιμη ροπή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού για τις σταθερές ροπές είναι $M_{0,cr} = 208,65 \text{ kNm}$, για το ομοιόμορφο φορτίο είναι $M_{cr} = 234,94 \text{ kNm}$ για το συγκεντρωμένο στο μέσον της δοκού είναι $M_{cr} = 278,22 \text{ kNm}$, για τη ροπή στο ένα άκρο είναι $M_{cr} = 390,73 \text{ kNm}$ και για τα δύο συγκεντρωμένα φορτία είναι $M_{cr} = 208,65 \text{ kNm}$. Οι παραπάνω τιμές αντιστοιχούν σε συντελεστές $C_1 = 1,13$ με απόκλιση 0,353% για το ομοιόμορφο, $C_1 = 1,33$ με απόκλιση 1,168% για το συγκεντρωμένο στο μέσο, $C_1 = 1,87$ με απόκλιση 0,391% για τη μία ροπή και $C_1 = 1,00$ με απόκλιση 4,398% για τα δύο συγκεντρωμένα φορτία στα $L/4$ και $3L/4$ της δοκού.

Με τον ίδιο τρόπο πραγματοποιείται η ανάλυση και για τα άλλα αξονικά φορτία, διαπιστώνοντας ότι οι συντελεστές C_1 διατηρούνται σχεδόν σταθεροί, γεγονός που αποδεικνύει με τον πλέον κατάλληλο τρόπο την ακρίβεια της μεθόδου.

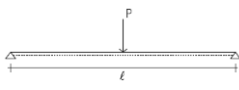
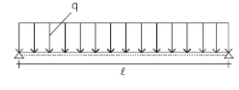

6.4 Διερεύνηση συντελεστών C_1 ανάλογα με τη θέση επιβολής του φορτίου

Ένα σημαντικό τμήμα της διπλωματικής εργασίας αποτελεί η διερεύνηση των συντελεστών C_1 της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού ανάλογα με τη θέση εφαρμογής των κατακόρυφων φορτίων, καθώς επηρεάζουν τη κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού M_{cr} .

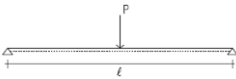
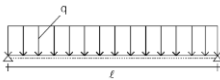

Όπως προέκυψε σε προηγούμενες αναλύσεις η M_{cr} συναρτήσεως της αξονικής δύναμης αυξάνεται, όταν τα κατακόρυφα φορτία ασκούνται στο κάτω πέλμα ενώ μειώνεται όταν ασκούνται στο άνω πέλμα συγκριτικά με το κέντρο βάρους της διατομής. Προκειμένου λοιπόν, να βρεθεί σε τι ποσοστό μεταβάλλονται οι συντελεστές C_1 για τις διαφορετικές περιπτώσεις κατακόρυφων φορτίσεων, όταν εφαρμόζονται στο άνω και κάτω πέλμα σχετικά με την περίπτωση που εφαρμόζονται στο κέντρο βάρους των διατομών, πραγματοποιήθηκαν γραμμικές αναλύσεις λυγισμού σε δοκούς 8 m, διατομών IPE 600, IPE 550, IPE 500 διατηρώντας κάθε φορά σταθερές τις αξονικές δυνάμεις και μεταβάλλοντας τα κατακόρυφα φορτία q ή P , άρα τις ροπές M ανάλογα με τους λόγους M/N όπως φαίνεται και στους πίνακες της παραγράφου 6.3.

Ουσιαστικά για κάθε φόρτιση σε όλες τις αναλύσεις οι αξονικές δυνάμεις N , οι οποίες ασκούνται στο κέντρο βάρους των ακραίων διατομών, παραμένουν σταθερές και μεταβάλλεται σε κάθε βήμα η ροπή M ανάλογα με τους λόγους M/N , οι οποίοι προκύπτουν από τις θεωρητικές επιλύσεις. Επομένως, στο Adina διατηρώντας σταθερές αξονικές N και μεταβάλλοντας τις ροπές M ή προτιμότερο τα φορτία q και P , που προκύπτουν από τις ροπές ανάλογα με τη φόρτιση, προκύπτει σε κάθε βήμα ένας κρίσιμος συνδυασμός αξονικής δύναμης N και καμπτικής ροπής M . Διαιρώντας την κρίσιμη ροπή M_{cr} του κάθε βήματος, όταν το φορτίο ασκείται στο άνω ή στο κάτω πέλμα, με τη M_{cr} όταν το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής, προκύπτει ένας μέσος συντελεστής C_1 για τα άνω και κάτω πέλματα και ο οποίος είναι ανάλογος της λυγηρότητας και της δυσκαμψίας της κάθε διατομής. Παρουσιάζονται παρακάτω υπό μορφή πινάκων (Πίνακες 6.23 και 6.24) τα αποτελέσματα των αναλύσεων και ακολουθεί σχολιασμός των αποτελεσμάτων που προκύπτουν:

Πίνακας 6.23: Συντελεστές C_1 για την καθ' ύψος μεταβολή των κατακόρυφων φορτίων

Φόρτιση	Διατομή	L(m)	C_1 (Κ.Β)	C_1 (Άνω πέλμα)	C_1 (Κάτω πέλμα)
	IPE 500	8	1,35	1,136	1,611
	IPE 550		1,35	1,132	1,621
	IPE 600		1,35	1,131	1,628
	IPE 500	8	1,13	0,961	1,286
	IPE 550		1,13	0,965	1,293
	IPE 600		1,13	0,960	1,282
	IPE 500	8	1,04	0,910	1,170
	IPE 550		1,04	0,905	1,175
	IPE 600		1,04	0,905	1,178

Πίνακας 6.24: Προτεινόμενοι μέσοι συντελεστές C_1 ανάλογα με τη θέση του φορτίου καθ' ύψος

Φόρτιση	Προτεινόμενοι συντελεστές C_1		Αποκλίσεις C_1 από Κ.Β.(%)
	Κ.Β		
	Κ.Β	1,35	-
	Άνω πέλμα	1,133	-19,15
	Κάτω πέλμα	1,62	16,67
	Κ.Β	1,13	-
	Άνω πέλμα	0,962	-17,46
	Κάτω πέλμα	1,287	12,19
	Κ.Β	1,04	-
	Άνω πέλμα	0,907	-14,66
	Κάτω πέλμα	1,174	11,41

Οι προτεινόμενοι συντελεστές C_1 για το άνω και το κάτω πέλμα των διατομών ανάλογα με τις φορτίσεις του πίνακα 6.24, προκύπτουν ως μέση τιμή των συντελεστών C_1 του πίνακα 6.23 για τις διάφορες διατομές ΙΡΕ από τις αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν στο Adina. Αξίζει να τονιστεί ότι οι συντελεστές αυτοί είναι ανάλογοι της λυγρότητας (λ) και της δυσκαμψίας της εκάστοτε διατομής.

Οι παραπάνω συντελεστές, λοιπόν αναφέρονται μόνο σε διατομές ΙΡΕ, αφού δεν έγιναν αντίστοιχες αναλύσεις για άλλες διατομές όπως ΗΕΑ ή ΗΕΒ, αφού δεν ήταν αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας. Συνεπώς, δε γενικεύονται οι μέσοι προτεινόμενοι συντελεστές C_1 για όλες τις πρότυπες διατομές, πράγμα το οποίο μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα για την εκπόνηση αντίστοιχων διπλωματικών στο μέλλον.

7. Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται η διπλωματική εργασία με την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων από τις αναλυτικές και αριθμητικές επιλύσεις, που προηγήθηκαν. Ουσιαστικά, συνοψίζονται οι παρατηρήσεις και οι παραδοχές, που πραγματοποιήθηκαν στις θεωρητικές προσεγγίσεις για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου πλευρικού λυγισμού για την εκάστοτε περίπτωση φόρτισης με ή χωρίς τη δράση αξονικού φορτίου. Επίσης, σχολιάζεται ο τρόπος προσομοίωσης των διαφόρων δοκών διατομής IPE, καθώς και οι αναλύσεις που εκτελέστηκαν στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων, που χρησιμοποιήθηκαν για τις ανάγκες της εργασίας, προκειμένου να βρεθεί το κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού. Στόχος ήταν η σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των θεωρητικών-προσεγγιστικών αναλύσεων και των αντίστοιχων αριθμητικών, ώστε να παραχθούν σημαντικά συμπεράσματα για το φαινόμενο του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού.

Μελετήθηκαν καμπτώμενες δοκοί με ή χωρίς αξονικό φορτίο για διάφορους τύπους καμπτικού φορτίου μέσω προσεγγιστικής θεωρητικής ανάλυσης αλλά και μέσω εφαρμογής εμπορικών προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων (Adina και Abaqus)

Ένας τρόπος επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού πραγματοποιείται με μία αυστηρά μαθηματική θεωρητική λύση που αναπτύχθηκε από τους Timoshenko και Gere (1961). Ωστόσο, η μεθοδολογία αυτή είναι αρκετά πολύπλοκη, συνεπώς εφαρμόστηκε μία διαφορετική μεθοδολογία, μέσω της οποίας τα αποτελέσματα που προκύπτουν έχουν τον επιθυμητό βαθμό ακρίβειας παρά το γεγονός ότι χρησιμοποιήθηκαν κάποιες παραδοχές για να επιλυθεί το πρόβλημα.

Για τις προσδιοριστικές μεθόδους, που αναπτύχθηκαν για την εύρεση του κρίσιμου ελαστικού φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, έχει αποδειχθεί με αυστηρά μαθηματικό τρόπο ότι το φορτίο λυγισμού προσδιορίζεται βάσει μίας επαναληπτικής διαδικασίας, η οποία δίνει την επιθυμητή ακρίβεια από τον πρώτο κύκλο επανάληψης. Σκοπός είναι η εφαρμογή και η ανάπτυξη μίας τυποποιημένης μεθοδολογίας για την αντιμετώπιση του προβλήματος.

Οι κρίσιμες ροπές για συγκεκριμένη στάθμη αξονικού φορτίου και για διάφορες περιπτώσεις εγκάρσιας φόρτισης προκύπτουν από την κρίσιμη ροπή για περίπτωση ομοιόμορφης ροπής και για ίδια στάθμη αξονικού φορτίου επί ένα συντελεστή C1 (διαφορετικό για κάθε περίπτωση φόρτισης) περίπου ίδιο για τις αντίστοιχες περιπτώσεις κάμψης χωρίς αξονικό φορτίο.

Κατ'αυτόν τον τρόπο αναπτύχθηκε μία προσδιοριστική μέθοδος για την εύρεση του ελαστικού φορτίου πλευρικού λυγισμού σε αμφιέριστες δοκούς διατομής I (IPE 600, IPE 550, IPE 500), μήκους 8 m για μία σειρά φορτίσεων όπως οι ομόμορφες ροπές στα άκρα, το ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο, το συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της δοκού αλλά και τα δύο συγκεντρωμένα φορτία στα $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$ του μήκους της, οι οποίες είχαν συμμετρία φορτίσεως, εν αντιθέσει με το συγκεντρωμένο φορτίο στο $L/4$ τη ροπή μόνο στο ένα άκρο και τις αντίφορες ροπές στα δύο άκρα που είναι ασύμμετρες φορτίσεις. Οι επιλύσεις πραγματοποιήθηκαν με ταυτόχρονη ή μη εφαρμογή αξονικού φορτίου. Στη συνέχεια, ακολούθησε γραμμική ελαστική ανάλυση λυγισμού (linear buckling analysis) με τα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων Adina και Abaqus, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Ο λόγος μάλιστα, που χρησιμοποιήθηκαν δύο προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων είναι για να ελεγχθεί η αξιοπιστία των προγραμμάτων αυτών και να συγκριθούν τα αντίστοιχα αποτελέσματα που εξήχθησαν από το καθένα. Σύγκριση έγινε, επίσης και με τον κανονισμό, ειδικότερα με τις διατάξεις του Ευρωκώδικα 3, στον οποίο περιγράφεται αναλυτικά το φαινόμενο του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού. Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή των τριών αυτών μεθόδων είχαν μικρές αποκλίσεις μεταξύ τους της τάξεως του 2% έως 4%. Ιδιαίτερα τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου και του

κανονισμού έδωσαν αποκλίσεις 0,5%-1% στις περισσότερες περιπτώσεις. Το μέγεθος των αποκλίσεων υποδηλώνει ότι οι παραδοχές που έγιναν για τις ανάγκες της αναλυτικής επίλυσης ήταν ορθές, διότι οι όροι που τελικά παραλείφθηκαν, προκειμένου να διευκολυνθεί η επίλυση δεν είχαν σημαντική συνεισφορά στο τελικό αποτέλεσμα. Αποδεικνύεται, μάλιστα ότι η προσομοίωση των φορέων στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων ήταν όσο το δυνατόν κοντά στην πραγματικότητα, γεγονός που οφείλεται στην πυκνή διακριτοποίηση των φορέων με πεπερασμένα στοιχεία (κελύφους - shell elements στο adina και τρισδιάστατα-solid elements στο abaqus) αλλά και στην επιλογή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών, αφού τελικά χρησιμοποιήθηκαν διχαλωτές στηρίξεις για την προσομοίωση. Όσον αφορά τον Ευρωκώδικα 3 (EC-3) η σύγκριση με την προσεγγιστική μέθοδο πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας την κρίσιμη ροπή

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \left[\left(\frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g - C_3 z_j)^2 \right]^{0.5} - (C_2 z_g - C_3 z_j) \right\}$$

σχέση που υπάρχει στις διατάξεις του κανονισμού και αφορά τον στρεπτοκαμπτικό λυγισμό για εφαρμογή των φορτίων σε κάθε θέση καθ' ύψος της διατομής για τις διάφορες περιπτώσεις φορτίσεων. Κατ' αυτόν τον τρόπο προέκυψαν οι αποκλίσεις μεταξύ θεωρητικής-προσεγγιστικής μεθόδου και Ευρωκώδικα 3.

Τα κατακόρυφα φορτία (ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο, συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της δοκού, δύο συγκεντρωμένα φορτία στα $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$ του μήκους της δοκού) εφαρμόστηκαν όχι μόνο στο κέντρο βάρους των διατομών αλλά και στο άνω και στο κάτω πέλμα με ταυτόχρονη εφαρμογή αξονικής δύναμης, γιατί αυτός ο τρόπος φόρτισης είναι ο πλέον αντιπροσωπευτικός των φορτίσεων που γίνονται στην πράξη και αφορούν τις μεταλλικές κατασκευές. Το σπουδαιότερο συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι για τις αμφιέρειστες δοκούς διαφόρων διατομών I (IPE 600 , IPE 550 , IPE 500) για κοινό μήκος $l=8$ m και για όλες τις περιπτώσεις κατακόρυφων φορτίων οι αποκλίσεις των κρίσιμων μεγεθών από την εφαρμογή των φορτίων στο άνω πέλμα, στο κέντρο βάρους και στο κάτω πέλμα αντίστοιχα αυξανόταν ανάλογα με τη θέση του φορτίου σε κάθε δοκό αλλά ήταν πολύ μικρές για το ίδιο μήκος δοκού, την ίδια φόρτιση και για διαφορετικές διατομές. Πιο συγκεκριμένα, το κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού είχε τη μεγαλύτερη τιμή του, όταν το κατακόρυφο φορτίο εφαρμοζόταν στο κάτω πέλμα της διατομής και μειωνόταν ανεβαίνοντας προς το άνω πέλμα, έως ότου λάβει την ελάχιστη τιμή του, η οποία παρουσιαζόταν για εφαρμογή του φορτίου στο άνω πέλμα. Η μείωση του κρίσιμου ελαστικού φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού κατά τη μετακίνηση των φορτίων από το κέντρο βάρους των διατομών προς το άνω πέλμα αλλά και η αύξησή του κατά τη μεταφορά των φορτίων στο κάτω πέλμα των διατομών IPE, αμφιέρειστων δοκών μήκους 8 m, ήταν ανάλογη για τις διαφορετικές περιπτώσεις φορτίσεων. Από τις αναλύσεις, που πραγματοποιήθηκαν προέκυψε ότι οι συντελεστές C_1 , που χρησιμοποιούνται στην ελαστική κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού του Ευρωκώδικα 3 και εξαρτώνται από τις συνθήκες φόρτισης και στρεπτικής στήριξης ανάλογα με το σημείο εφαρμογής των φορτίων καθ' ύψος της διατομής, είναι ανάλογοι τόσο με τη λυγηρότητα όσο και με τη δυσκαμψία της διατομής. Συνεπώς, προτείνονται μέσοι συντελεστές C_1 , οι οποίοι αναφέρονται μόνο σε διατομές IPE, αφού δεν έγιναν αντίστοιχες αναλύσεις για άλλες διατομές όπως HEA ή HEB, αφού δεν ήταν αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας, οπότε δε γενικεύονται οι συντελεστές C_1 για όλες τις πρότυπες διατομές, πράγμα το οποίο μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα για την εκπόνηση αντίστοιχων διπλωματικών στο μέλλον.

Ακολουθεί ο συγκεντρωτικός πίνακας με τη φόρτιση, τους μέσους προτεινόμενους συντελεστές C_1 για το άνω και κάτω πέλμα και οι αποκλίσεις των τιμών αυτών από τις αντίστοιχες τιμές του C_1 για το κέντρο βάρους των διατομών. Η ανάλυση αυτή πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας τη σχέση $M_{0,cr} = \frac{1}{p} \sqrt{(\pi^2 + \lambda^2)(\pi^2 - n^2)}$ για

διάφορους συνδυασμούς αξονικής δύναμης N και καμπτικής ροπής M . Επομένως, οι συντελεστές που ακολουθούν αφορούν μόνο τις τρεις περιπτώσεις εγκάρσιας φόρτισης συναρτήσει της αξονικής δύναμης.

Αναφερόμενοι στα μοντέλα που μελετήθηκαν για περιπτώσεις που το φορτίο εφαρμόζεται στο κάτω πέλμα της δοκού παρατηρήθηκε αύξηση στην κρίσιμη ροπή κατά 11% έως 16% σε σχέση με την περίπτωση εφαρμογής του φορτίου στο κέντρο βάρους-κέντρο διάτμησης (διατομές διπλής συμμετρίας). Ενώ για την περίπτωση εφαρμογής του φορτίου στο άνω πέλμα παρατηρήθηκε μείωση της αντίστοιχης κρίσιμης ροπής 14% έως 19%.

Είναι γνωστό από τους πίνακες του Ευρωκώδικα 3 ότι αν η κρίσιμη ροπή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού μίας δοκού, η οποία καταπονείται με ίσες ροπές στα άκρα της είναι M_{0cr} , τότε η κρίσιμη ροπή δοκού με συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της ισούται με $1.35 * M_{0cr}$, με ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο ισούται με $1.13 * M_{0cr}$, με δύο συγκεντρωμένα φορτία στα $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$ του μήκους της ισούται με $1.046 * M_{0cr}$, για το συγκεντρωμένο στα $\frac{1}{4}$ του μήκους ισούται με $1.44 * M_{0cr}$ και για τη μία σταθερή ροπή στο ένα άκρο της δοκού η κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού είναι $1.88 * M_{0cr}$, όπου οι τιμές 1.35, 1.13, 1.046, 1.44, 1.88 αναφέρονται στο συντελεστή C_1 για την περίπτωση της αμφιέριστης δοκού, όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής.

Προτείνεται, λοιπόν μία μικρή τροποποίηση της κρίσιμης ροπής πλευρικού λυγισμού συναρτήσει της αξονικής δύναμης στην περίπτωση που η δοκός είναι αμφιέριστη, διατομής IPE, μήκους 8 m και φορτίζεται με κατακόρυφα φορτία όπως το ομοιόμορφα κατανομημένο, το συγκεντρωμένο στο μέσο και τα δύο συγκεντρωμένα στα $L/4$ και $3L/4$.

Στις θεωρητικές επιλύσεις, που πραγματοποιήθηκαν στο κεφάλαιο 4 η γωνία στροφής φ προσεγγίστηκε τόσο με πολυωνυμική συνάρτηση όσο και με ημιτονοειδή. Παρατηρήθηκε ότι η συνάρτηση πολυωνύμου προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια την πραγματική λύση, καθώς οι αποκλίσεις με τον EC3 αλλά και με το Adina ήταν σχετικά μικρές. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στο γεγονός ότι για την ημιτονοειδή προσέγγιση δεν έχει ληφθεί υπόψιν της σειράς μόνο οι δύο πρώτοι όροι της σειράς McLaurin. Επιπλέον πιθανός λόγος απόκλισης με την ημιτονοειδή προσέγγιση αποτελεί και το γεγονός ότι το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina χρησιμοποιεί πολυωνυμικές συναρτήσεις για τις αριθμητικές επιλύσεις.

Αξίζει να αναφερθεί ότι για την προσομοίωση των δοκών και ιδιαίτερα των συνθηκών στηρίξης τους στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων Adina και Abaqus έγιναν αρκετές δοκιμές. Επειδή στις προσδιοριστικές μεθόδους θεωρήθηκε ότι τα άκρα της δοκού μπορούν να στρεβλωθούν ελεύθερα, κρίθηκε πιο αξιόπιστη η δέσμευση μόνο του κορμού και του κάτω πέλματος, καθώς τα αποτελέσματα που προέκυπταν ήταν περισσότερο ακριβή από την περίπτωση που πραγματοποιούνταν δέσμευση ολόκληρης της ακραίας διατομής. Επομένως, για την καταλληλότερη προσομοίωση των στηρίξεων χρησιμοποιήθηκαν rigid links (άκαμπτοι σύνδεσμοι), οι οποίοι συνδέουν το μεσαίο κόμβο της εκάστοτε ακραίας διατομής με τους υπόλοιπους κόμβους κορμού αλλά και τους κόμβους του άνω και κάτω πέλματος, σε όλες τις δοκιμές που έγιναν και στα δύο προγράμματα. Ουσιαστικά, στη μία ακραία διατομή ο μεσαίος κόμβος δεσμεύεται ως προς τις μετατοπίσεις προς όλες τις διευθύνσεις και τη στροφή ως προς τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής, ενώ στην άλλη ακραία διατομή στο μεσαίο κόμβο γίνονται οι ίδιες δεσμεύσεις, με τη μόνη διαφορά ότι επιτρέπεται οριζόντια μετακίνηση στο άκρο αυτό. Κλείνοντας, τόσο στο Adina όσο και στο Abaqus πραγματοποιήθηκε πυκνή διακριτοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία, για την ακριβέστερη απεικόνιση της πραγματικότητας στα προγράμματα αυτά. Μία σημαντική παρατήρηση, που αφορά τα δύο προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν είναι ότι έπειτα από τις γραμμικές αναλύσεις λυγισμού, που πραγματοποιήθηκαν με σχεδόν την ίδια διακριτοποίηση και στα δύο είναι ότι το Abaqus έχει μεγαλύτερη ευαισθησία (sensitivity) από το Adina όσον αφορά το κρίσιμο φορτίο πλευρικού λυγισμού, κυρίως στις περιπτώσεις των

κατακόρυφων φορτίων (συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της δοκού, ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο).

8. Βιβλιογραφία

1. Αντωνίου Ν. Κουνάδη: "Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας", εκδ. Συμεών (Β' Έκδοση - Αθήνα 1977).
2. Ι. Βάγιας, Ι. Ερμόπουλος, Γ. Ιωαννίδης: "Σχεδιασμός Δομικών Έργων από χάλυβα με Παραδείγματα και Εφαρμογές", εκδ. Κλειδάριθμος, 2013.
3. Ιωάννης Κ. Βάγιας: "Σιδηρές Κατασκευές Ανάλυση και Διαστασιολόγηση", εκδ. Κλειδάριθμος, 2003.
4. Χάρης Γαντές: Σημειώσεις διαλέξεων "Μη Γραμμικής Συμπεριφοράς Μεταλλικών Κατασκευών", 2012.
5. Χάρης Γαντές: Σημειώσεις διαλέξεων "Σιδηρών Κατασκευών Ι", 2014.
6. Χάρης Γαντές: Σημειώσεις διαλέξεων "Σιδηρών Κατασκευών ΙΙ", 2014.
7. Τάσος Αβραάμ: Σημειώσεις διαλέξεων "Ειδικών Θεμάτων Εφαρμοσμένης Στατικής και Δυναμικής", 2016.
8. Λεωνίδας Θ. Σταυρίδης: "Στατική των Δομικών Φορέων, Μέρος Α", εκδ. Κλειδάριθμος, 2006.
9. Timoshenko and Gere: "Theory of Elastic Stability", 1961.
10. Ευρωκώδικας 3, Κατασκευές από χάλυβα, (ENV 1993).
11. Α. Κουνάδης, Γ. Ιωαννίδης: "Μία απλοποιημένη και αποτελεσματική μέθοδος για τον προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου πλευρικού και στρεπτοκαμπτικού λυγισμού", 1991.
12. Νικόλαος Ε. Βαονάκης: "Πλευρικός Λυγισμός Δοκών υπό Κάμψη και Αξονικό Φορτίο", Διπλωματική Εργασία, Αθήνα, Δεκέμβριος 2013.
13. Νικόλαος Ε. Βαονάκης: "Γραμμική και Μη Γραμμική Ανάλυση Πλευρικά μη Εξασφαλισμένων Δοκών υπό Κάμψη και Αξονικό Φορτίο", Μεταπτυχιακή Εργασία, Αθήνα, Ιούνιος 2015.
14. Τάσος Π. Αβραάμ, Γεώργιος Ι. Ιωαννίδης, Ζαχαρίας Χ. Φασουλάκης: "Η Επιρροή της Αξονικής Εφελκυστικής Δύναμης στην Κρίσιμη Ροπή Στρεπτοκαμπτικού Λυγισμού Καμπτόμενων Δοκών", 8^ο Εθνικό Συνέδριο Μεταλλικών Κατασκευών, Τρίπολη, Οκτώβριος 2014.
15. Adina Systems 8.5 Online Manuals, Adina R&D, Inc (February 2008).
16. Β. Μελισσιανός, Σ. Βερνάρδος, Η. Θανασούλας: "Οδηγίες Χρήσης Λογισμικού Adina", Απρίλιος 2016.