ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΔΙΚΑΙΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ

ΣΙΟΥΜΑΛΑΣ-ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Αριθμός Μητρώου : 09109024

Ακαδημαϊκο Έτος : 2016-2017

Επιβλέπων : Α. Αραγεώργης

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής: Π. Στεφανέας, Σ. Στέλιος

Αθήνα 2017

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Αριστείδη Αραγεώργη, για την άψογη συνεργασία και επικοινωνία καθ’όλη τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας, την καθοδήγησή του, τις πολύτιμες συμβουλές και τη συνολική του βοήθεια.Σαφώς δεν θα μπορούσα να παραλείψω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την πίστη και τη συνολική στήριξη που μου παρείχαν.

Περίληψη. Η παρούσα διπλωματική εργασία διερευνά το πρόβλημα της δυνατότητας μαθηματικών εξηγήσεων φυσικών φαινομένων. Το πρόβλημα υπάγεται στο ευρύτερο ζήτημα της εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών στη μελέτη του μη μαθηματικού σύμπαντος και άπτεται τόσο της φιλοσοφίας των μαθηματικών όσο και της φιλοσοφίας των (εμπειρικών) φυσικών επιστημών. Στο πρώτο μέρος της εργασίας, αναλύεται το πρόβλημα και αναπτύσσονται επιχειρήματα υπέρ της θέσης ότι υπάρχουν μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων – επιχειρήματα που αντλούνται από γνωστά παραδείγματα στη βιβλιογραφία. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας, γίνεται μια επισκόπηση της θεωρίας της επιστημονικής εξήγησης. Στο τρίτο μέρος της εργασίας, γίνεται επισκόπηση των κυριοτέρων σχολών στη φιλοσοφία των μαθηματικών εστιάζοντας στο ποια από αυτές μπορεί καλύτερα να προσεγγίσει το πρόβλημα της εφαρμοσιμότητας. Αναπτύσσονται επιχειρήματα προς τα ακόλουθα συμπεράσματα. Πρώτο, η αιτιακή-μηχανιστική παράδοση στην επιστημονική εξήγηση, συνδυασμένη με μια οντολογική άποψη σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αφηρημένες οντότητες, δεν επιτρέπει τη δυνατότητα εξήγησης φυσικών φαινομένων με τη βοήθεια των μαθηματικών. Δεύτερο, ο πλατωνισμός, ο λογικισμός και ο φορμαλισμός θέτουν οντολογικά χάσματα μεταξύ μαθηματικών και φυσικών αντικειμένων που δυσχεραίνουν την επίλυση του προβλήματος της εφαρμοσιμότητας. Αντίθετα ο ιντουισιονισμός, πλαισιωμένος με καντιανά στοιχεία, προσφέρει μια ενδιαφέρουσα λύση στο πρόβλημα. Τέλος, ο μαθηματικός δομισμός φαίνεται να προσφέρει την πιο εύκολη αλλά και εύλογη λύση.

Abstract. The present diploma thesis explores the problem of the possibility of mathematical explanations of natural phenomena. The problem is subsumed under the wider issue of the applicability of mathematics to the study of the non-mathematical universe and touches upon both philosophy of mathematics and philosophy of the (empirical) natural sciences. In the first part of the thesis, the problem is analyzed and arguments are expounded to the effect that there exist mathematical explanations of natural phenomena – arguments drawn from known examples in the relevant literature. The second part of the thesis reviews the theory of scientific explanation. The third part of the thesis reviews the major schools in the philosophy of mathematics focusing on which one can better approach the problem of applicability. Arguments are expounded toward the following conclusions. First, the causal-mechanical tradition in scientific explanation, conjoined with an ontological view of mathematical objects as abstract entities, does not allow for the possibility of explaining natural phenomena with the aid of mathematics. Second, Platonism, logicism and formalism put forth such ontological chasms between mathematical and natural objects that make the solution of the problem of applicability more difficult. By contrast, intuitionism conjoined with Kantian elements offers an interesting solution. Last, mathematical structuralism seems to offer the easiest and more reasonable solution.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο άνθρωπος παρατηρεί το εξωτερικό του περιβάλλον, μεταφράζει τα φυσικά φαινόμενα σε συγκεκριμένα εννοιολογικά πλαίσια και μέσω αυτών αναπτύσσει θεωρίες που συμβάλλουν στην επιστημονική εξέλιξη. Ερχόμενος σε επαφή με τη φύση, προσλαμβάνει τα ερεθίσματα που προκύπτουν από τις ιδιομορφίες της και δημιουργεί ένα σύνολο λέξεων, συμβόλων και αριθμών. Με αυτό τον τρόπο κατορθώνει να *περιγράφει*, *εξηγεί* και, ενδεχομένως, να *προβλέπει* τα φυσικά φαινόμενα – με δυο λόγια, αποκτά γνώση από την εμπειρία.

Ωστόσο, η δημιουργία ενός μοντέλου για την εξήγηση φαινομένων δεν αναιρεί την αυτόνομη ύπαρξη του μοντέλου αυτή καθεαυτή. Πιο συγκεκριμένα, τα αντικείμενα και οι σχέσεις σε μαθηματικά πλαίσια που συνθέτουν ένα μοντέλο, όπως θα δούμε στη συνέχεια, δύνανται να έχουν τη δική τους υπόσταση.Τα μαθηματικά συνδέονται άρρηκτα με τη φυσική, με τον κόσμο της φύσης. Σύμφωνα με τον Καστοριάδη[1], υπάρχουν τέσσερις περιπτώσεις σχέσεων που συνδέουν αυτούς τους δύο κλάδους. Η πρώτη περίπτωση των σχέσεων τους είναι ότι τα μαθηματικά και η φυσική συμβαδίζουν. Η δεύτερη περίπτωση είναι εκείνη όπου τα μαθηματικά προηγούνται της φυσικής. Στην τρίτη περίπτωση των σχέσεων τους έχουμε την φυσική επιστήμη να προηγείται των μαθηματικών. Η τέταρτη περίπτωση έγκειται στη μη ταύτισή τους και οφείλεται στην ύπαρξη κλάδων των μαθηματικών που δεν έχουν και ούτε μπορούν να αποκτήσουν αντιστοιχία στον φυσικό κόσμο. Γενικά, τουλάχιστον από τον 17^{o} αιώνα, τα μαθηματικά έχουν συμβάλλει σημαντικά στη βαθύτερη κατανόηση του φυσικού κόσμου.

Η δυναμική σχέση μεταξύ μαθηματικών και φυσικής έχει αποτελέσει σπουδαίο αντικείμενο μελέτης και συζήτησης των επιστημόνων και φιλοσόφων κάθε εποχής. Είναι εφικτό ένα *μαθηματικό γεγονός* να εξηγήσει ένα φυσικό φαινόμενο; Με τον όρο «μαθηματικό γεγονός» εννοούμε μια μαθηματική πρόταση που αξιώνει να

[1] Ευαγγελόπουλος, Γ (2010), *Μαθηματικά και Φυσική, μια ιδιαίτερη σχέση-Με αφορμή σκέψεις του Κορνήλιου Καστοριάδη*, Εκδόσεις Ευρασία.

είναι αληθής (σε κάποιες φιλοσοφίες των μαθηματικών). Για να εξηγήσουμε ένα γεγονός είναι ορθό να το εξετάσουμε και να το αναλύσουμε υπό διάφορα πρίσματα. Η φιλοσοφική ανάλυση των μαθηματικών εξηγήσεων ανάγεται σε δυο πεδία. Το πρώτο πεδίο αφορά στον εξηγηματικό ρόλο των μαθηματικών σε σχέση με τις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες. Το δεύτερο πεδίο εξετάζει τη δυνατότητα ύπαρξης μαθηματικών εξηγήσεων σε μαθηματικά πλαίσια αποκλειστικά.

Η περιγραφή του *αντικειμένου* των μαθηματικών αποτελεί ένα από τα κυριότερα προβλήματα στη φιλοσοφία των μαθηματικών, ενώ η περιγραφή του κόσμου οδηγεί σε εξίσου σημαντικά προβλήματα στη γνωσιολογία και τη μεταφυσική και, πιο ειδικά, στη φιλοσοφία της επιστήμης. Η σύνδεση του αντικειμένου των μαθηματικών με αυτή του αντικειμένου της επιστήμης φαίνεται αδιαμφισβήτητη. Σκοπός μας είναι η περιγραφή και μελέτη του προβλήματος που αφορά την εξήγηση αυτής της σχέσης εστιάζοντας στο πώς αυτή ανταποκρίνεται στον πραγματικό κόσμο. Ταυτόχρονα, θα κάνουμε μια επισκόπηση των σημαντικότερων παραδοσιακών σχολών φιλοσοφίας των μαθηματικών δίνοντας έμφαση στο πώς η κάθε μια αντιλαμβάνεται το συγκεκριμένο πρόβλημα. Αρχικά όμως θα ήταν χρήσιμο να εστιάσουμε στη σύνδεση των μαθηματικών με τις άλλες επιστήμες ώστε να γίνει πιο αισθητή η αλληλεπίδραση των δύο πεδίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

1.1 Τα μαθηματικά στο μη μαθηματικό σύμπαν

Από όσο μας επιτρέπει η ιστορία να γνωρίζουμε τα μαθηματικά είχαν ήδη αναπτυχθεί περί το 1800 π.Χ. στην Αίγυπτο και τη Βαβυλωνία. Αρχικά τα μαθηματικά σχεδιάστηκαν και αναπτύχθηκαν για την εξυπηρέτηση πρακτικών αναγκών. Ήταν συνυφασμένα (τόσο η γεωμετρία όσο και η αριθμητική) με την ανθρώπινη καθημερινότητα και τον εμπειρικό κόσμο. Η γεωμετρία, ετυμολογικά «η μέτρηση της γης», λειτουργούσε ως εργαλείο για να υπολογίζονται εμβαδά ώστε μετά τις συχνές πλημμύρες του Νείλου που έσβηναν τα σύνορα να αποδίδονται στους αγρότες εκτάσεις ίσες με τις προηγούμενες. Η αριθμητική χρησιμοποιούνταν για σχηματισμό και διαχωρισμό συλλογών αντικειμένων και συνακόλουθα για τη διασφάλιση της ακρίβειας μεταξύ εμπορικών συναλλαγών.

Σήμερα το ενδιαφέρον των μαθηματικών δεν περιορίζεται στην εξυπηρέτηση των πρακτικών αναγκών, αλλά φαίνεται να αποκτά αυτονομία και υπεροχή πάνω στην ανθρώπινη διαίσθηση και εμπειρία. Συχνά, τα μαθηματικά είναι χρήσιμα όχι τόσο στην «εναρμόνιση» διαίσθησης και εμπειρίας, αλλά περισσότερο όταν έρχονται σε σύγκρουση με αυτές. Ας εξετάσουμε ένα απλό παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι μια νεαρή κοπέλα έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο δουλειές. Κάθε δουλειά προσφέρει ετήσιο μισθό 18.000€. Αν επιλέξει την πρώτη,έχει ετήσια αύξηση απολαβών 2.000€. Σε περίπτωση που επιλέξει την δεύτερη, θα έχει εξαμηνιαία αύξηση 500€. Ποια δουλειά είναι προτιμότερο να επιλέξει; Θα έλεγε κανείς ότι η απάντηση είναι προφανής. Η ετήσια αύξηση 2.000€ είναι προτιμότερη από αυτή που όπως φαίνεται είναι 1.000€ Ας κάνουμε ελάχιστες αριθμητικές πράξεις καταγράφοντας τις απολαβές ανά ένα επιτυχημένο εξάμηνο. Η πρώτη δουλειά αποφέρει απολαβές:

9.000€, 9.000€, 10.000€, 10.000€, 11.000€, 11.000€, 12.000€, 12.000€

Η δεύτερη δουλειά στην οποία πραγματοποιείται εξαμηνιαία αύξηση 500€ αποφέρει:

9.000€, 9.500€, 10.000€, 10.500€, 11.000€, 11.500€, 12.000€, 12.500€

Είναι φανερό από τους υπολογισμούς μισθών ότι η δεύτερη δουλειά αποφέρει καλύτερες απολαβές στο δεύτερο μισό του χρόνου και ίδιες στο πρώτο μισό. Η εξαμηνιαία αύξηση 500€ σημαίνει ότι ο μισθός θα είναι ψηλότερος κατά 500€ το πρώτο εξάμηνο – δηλαδή 1.000€ το χρόνο, επειδή θα δοθούν ακόμη 500€ το επόμενο εξάμηνο. Συνεπώς δύο τέτοιες αυξήσεις ισοδυναμούν με 2.000€ το χρόνο. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι και οι δυο δουλειές φαίνονται εξίσου ελκυστικές. Ωστόσο στη δεύτερη η αύξηση ξεκινά μετά τους έξι πρώτους μήνες ενώ στην πρώτη με την πάροδο ενός χρόνου. Έτσι προτιμότερη είναι η δεύτερη καθώς οι απολαβές είναι περισσότερες τους τελευταίους έξι μήνες κάθε χρόνο.

Τα μαθηματικά λοιπόν διαφαίνεται ότι παράγουν γνώση την οποία η εικασία, το ένστικτο και η εμπειρία αδυνατούν να παράγουν ή το κάνουν με ανακρίβεια. Τότε γεννιέται το ερώτημα: γιατί τα μαθηματικά πρέπει να αναπτύσσονται και ποιός είναι ο λόγος που παρουσιάζουν τόσο ενδιαφέρον; Τουλάχιστον από τον 17ο αιώνα μέχρι και τον 19ο αιώνα, το κύριο κίνητρο για την ανάπτυξη μαθηματικής ακρίβειας και ο πρωταρχικός λόγος για τον οποίο τα μαθηματικά ήταν «ουσιώδη» ήταν η αξία τους στη μελέτη της φύσης. Ποικίλα μαθηματικά μοντέλα και μαθηματικές μέθοδοι (π.χ., διαφορικός λογισμός) χρησιμοποιούνταν αποτελεσματικά στην αναπαράσταση και διερεύνηση της κίνησης των σωμάτων, της βαρύτητας, του φωτός, της θερμότητας, του ηλεκτρομαγνητισμού, της δομής της ύλης και πολλών άλλων επιστημονικών φαινομένων. Βέβαια στον 19ο αιώνα τα μαθηματικά απομακρύνθηκαν από τον εμπειρικό κόσμο. Αναπτύχθηκαν οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες, η αφηρημένη άλγεβρα, η λογική και η θεωρία των συνόλων που αποκάλυψε μια άπειρη ιεραρχία απείρων.

Ένα εξέχον θέμα της φιλοσοφίας των μαθηματικών είναι η εφαρμοσιμότητά τους στις επιστήμες που συνδέονται με την εμπειρία. Πολλοί κλάδοι της επιστήμης αντλούν από διάφορους τομείς των μαθηματικών για να περιγράψουν σχέσεις και να κατασκευάσουν θεωρίες, από την χρήση των χώρων Hilbert στην κβαντομηχανική μέχρι και τη χρήση διαφορικής γεωμετρίας στη γενική θεωρία της σχετικότητας. Η επιστήμη της βιολογίας χρησιμοποιεί σε μεγάλο βαθμό διαφορικές εξισώσεις και στατιστική, ενώ η αστρονομία σφαιρική γεωμετρία. Ωστόσο, ο ρόλος των μαθηματικών στις επιστημονικές θεωρίες ποικίλει μολονότι φαίνεται να είναι ουσιώδης για την εξήγηση διαφόρων φαινομένων. Επιπλέον, η αξία χρήσης των μαθηματικών προσδιορίζεται πολλές φορές από την δυνατότητα που μπορούν να παρέχουν όσον αφορά στην πρόβλεψη ενός φαινομένου (όπως η πρόγνωση του καιρού ή τυχόν ενδείξεις για σεισμικές δονήσεις).

Προφανώς, η αξία χρήσης των μαθηματικών δεν είναι διαχρονικά σταθερή με την έννοια ότι μεταβάλλεται και αποκτά διαφορετική λειτουργικότητα από εποχή σε εποχή. Για παράδειγμα, όταν ο Norbert Weiner έγραφε για μανθάνουσες μηχανές και αυτοματισμό, η αξία του έργου του ήταν κατανοητή από ένα μικρό σύνολο ανθρώπων, ενώ τώρα υπάρχει μια ευρύτατη χρήση αυτών των ιδεών· συνεπώς, η αξία χρήσης τους είναι διευρυμένη και αναβαθμισμένη. Σήμερα, όταν κάνουμε λόγο για πρόβλεψη τις εξέλιξης ενός φαινομένου, προϋποθέτουμε την ύπαρξη ενός μαθηματικού μοντέλου το οποίο δύναται να προσεγγίζει «ικανοποιητικά» τις διάφορες καταστάσεις του φαινομένου στη διάρκεια του χρόνου. Με αυτό τον τρόπο καταλαβαίνουμε ότι η πρόβλεψη που αφορά το εν λόγω φαινόμενο συντελείται βραχυπρόθεσμα ή μακροπρόθεσμα. Έτσι βλέπουμε μια άλλη μορφή σύνδεσης των μαθηματικών με τις επιστήμες και την πραγματικότητα.

Οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα μαθηματικά και στη φυσική επιστήμη είναι εκτεταμένες, ξεπερνώντας αυτούς τους κλάδους οι οποίοι μερικές φορές ονομάζονται συλλογικά «εφαρμοσμένα μαθηματικά». Οι πλούσιες διασυνδέσεις των μαθηματικών με την επιστήμη ακολουθούν διάφορες κατευθύνσεις. Όπως το έθεσε και ο Nicolas Goodman (1979, σελ. 550):

Οι περισσότεροι κλάδοι των μαθηματικών εξετάζουν / διαφωτίζουν σχετικά άμεσα κάποιο μέρος της φύσης. Η γεωμετρία αφορά στο χώρο. Η θεωρία των πιθανοτήτων μας διδάσκει για τις τυχαίες διαδικασίες. Η θεωρία ομάδων ρίχνει φως στη συμμετρία. Η λογική περιγράφει τον ορθό συμπερασμό. Πολλά τμήματα της ανάλυσης είχαν δημιουργηθεί για να μελετήσουν συγκεκριμένες διαδικασίες και είναι ακόμη απαραίτητα για την μέλετη αυτών των διαδικασιών.... Είναι μια πραγματικότητα ότι τα καλύτερά μας θεωρήματα δίνουν πληροφορίες για τον συγκεκριμένο κόσμο.[2]

Έτσι τα μαθηματικά φαίνονται ζωτικής σημασίας εξαιτίας του κεντρικού ρόλου τους σε κάθε επιστημονική προσπάθεια που στοχεύει στην ευρύτερη κατανόηση του υλικού (ή κοινωνικού) κόσμου. Για ορισμένες σχολές φιλοσοφίας, όμως, δεν αποτελούν ένα κλάδο που αφορά μόνο τις εμπειρικές επιστήμες. Είναι οι επιστήμες που χρησιμοποιούν τα μαθηματικά.Το ερώτημα κατά πόσο τα μαθηματικά αυτά καθαυτά είναι μια δραστηριότητα συλλογής γνώσεων αποτελεί ενα ουσιώδες φιλοσοφικό ζήτημα. Παρ' όλα αυτά, είναι σαφές οτι τα μαθηματικά είναι ένα πρωταρχικό και απαραίτητο εργαλείο για την επιστημονική προσέγγιση του κόσμου. Για αυτό το αξιοσημείωτο και συνάμα αδιαμφισβήτητο γεγονός αρκετοί φιλόσοφοι καταλήγουν σε διάφορα μεταφυσικά συμπεράσματα. Λόγου χάρη, οι Quine και Putnam υποστηρίζουν ότι η αναγκαιότητα των μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες δικαιολογεί το γεγονός να πιστεύουμε στην ύπαρξη (αφηρημένων) μαθηματικών οντοτήτων.[3] Σύμφωνα με αυτό το επιχείρημα, μαθηματικές οντότητες όπως τα σύνολα, οι αριθμοί, οι συναρτήσεις κ.λπ. αποδεικνύονται απαραίτητες για τις σημαντικότερες θεωρίες της επιστήμης. Συνεπώς οφείλουμε να λαμβάνουμε υπόψιν μας την ύπαρξη και λειτουργικότητα αυτών των οντοτήτων. Το επιχείρημα αυτό υπάρχει σε διάφορες εκδοχές που συλλογικά ονομάζονται *επιχειρήματα από το αναποδραστο* (indispensability arguments).[4] Ακριβέστερα, ένα τέτοιο επιχείρημα έχει ως αφετηρία τον *επιστημονικό ρεαλισμό* («αλήθεια των επιστημονικών θεωριών») και καταλήγει σε ένα ρεαλισμό ως προς τις μαθηματικές οντότητες («οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν και, μάλιστα, ανεξάρτητα από τους μαθηματικούς»). Μπορεί να σκιαγραφηθεί ως εξής:

(Π1) Τα μαθηματικά αναφέρονται σε, και περιλαμβάνουν μεταβλητές που λαμβάνουν ως τιμές, μαθηματικές οντότητες (σύνολα, συναρτήσεις, αριθμούς, κ.λπ.). Και αποδοχή της αλήθειας των προτάσεων των μαθηματικών δεσμεύει στην αποδοχή της ύπαρξης αυτών των οντοτήτων.

(Π2) Τα μαθηματικά είναι απαραίτητα για τη φυσική: η σύγχρονη φυσική δεν μπορεί να

[2] Βλ. και Polya (1954, 1977) για πολλά άλλα παραδείγματα.
[3] Μια οντότητα ονομάζεται *αφηρημένη* εάν είναι εκτός χώρου και χρόνου, αμετάβλητη και αιτιακώς ανενεργή. Βλ., π.χ., Shapiro (2000, σελ. 27).
[4] Εννοείται «από το αναποδραστο της χρήσης μαθηματικών στις επιστήμες». Για διάφορες εκδοχές, βλ. Colyvan (2008) και Marcus (2016).

διατυπωθεί ή να αναπτυχθεί χωρίς μαθηματικές προτάσεις.

(Π3) Αν τα μαθηματικά είναι απαραίτητα για τη φυσική, τότε όποιος αποδέχεται ότι η φυσική συγκροτεί αληθή περιγραφή της υλικής πραγματικότητας πρέπει να αποδεχθεί την αλήθεια των προτάσεων των μαθηματικών.

(Π4) Η φυσική είναι (κατά προσέγγιση) αληθής.

∴ Οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν.

Η προκείμενη (Π4) είναι η προκείμενη του επιστημονικού ρεαλισμού ενώ το συμπέρασμα ισχυρίζεται την ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων. Τέτοια επιχειρήματα από το αναποδραστο έχουν δεχθεί πολλές κριτικές. Για παράδειγμα, νομιναλιστές έχουν αρνηθεί την (Π2).[5] Δεν θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με αυτά τα ζητήματα. Αξίζει να σημειωθεί, πάντως, ότι το παραπάνω επιχείρημα δεν οδηγεί σε ένα ρεαλισμό ως προς τις μαθηματικές οντότητες – δηλαδή, στην πεποίθηση ότι υπάρχουν, *ανεξάρτητα από τον μαθηματικό*, (αφηρημένα) μαθηματικά αντικείμενα.

Όλα αυτά συνεπάγονται ότι ένα κεντρικό θέμα για τη φιλοσοφία των μαθηματικών είναι να κατανοηθεί η σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά και στους υπόλοιπους επιστημονικούς κλάδους. Ειδικότερα, έχοντας ως δεδομένο τις αλληλεπιδράσεις αυτών των κλάδων, η φιλοσοφική ανάλυση που αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι να εξετάσουμε το αν ενυπάρχει σχέση ανάμεσα στο περιεχόμενο των μαθηματικών (οτιδήποτε και αν είναι αυτό) και σε αυτό των φυσικών επιστημών (οτιδήποτε και αν είναι αυτό). Σε αυτή την κατεύθυνση, θα εξετάσουμε αν είναι εφικτό διάφορα φυσικά φαινόμενα να έχουν ορισμένες (λανθάνουσες) μαθηματικές εξηγήσεις.

1.2 Υπάρχουν μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων;

Σημαντική προσπάθεια ανάλυσης του θέματος περί μαθηματικών εξηγήσεων φυσικών φαινομένων έγινε από τον Mark Steiner (Steiner, 1978a, 1978b). Θα παρουσιάσουμε την κύρια ιδέα του με συντομία. Αρχικά αναφέρει ως παράδειγμα

[5] Οι σύγχρονοι νομιναλιστές στη φιλοσοφία των μαθηματικών αρνούνται την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων. Ο Hartry Field, ειδικά, στο βιβλίο του με τίτλο *Science without Numbers* για να αρνηθεί την αλήθεια της προκείμενης (Π2) κατασκευάζει μια εκδοχή της νευτωνειας θεωρίας της βαρύτητας χωρίς, “κατά τα φαινόμενα”, να χρησιμοποιεί πραγματική ανάλυση. Βλ. Shapiro (2000, σελ. 227-237).

την κίνηση ενός άκαμπτου στερεού σώματος με ένα σταθερό σημείο στον 3-διάστατο ευκλείδειο χώρο (Steiner 1978b, σελ. 17-18). Η κίνηση αυτή επιτυγχάνεται περιστρέφοντας το σώμα υπό συγκεκριμένη γωνία και ως προς ένα σταθερό άξονα. Πράγματι το *θεώρημα περιστροφής του Euler* (με εφαρμογές στη μηχανική) λέει ότι κάθε μετακίνηση ενός άκαμπτου στερεού σώματος γύρω από ένα σταθερό σημείο ισοδυναμεί με μία περιστροφή του σώματος γύρω από έναν άξονα (που περνά από το σταθερό σημείο). Μια αποδειξη με *εξηγητική* αξία έχει ως εξής. Κάθε περιστροφή γύρω από ένα άξονα στον 3-διάστατο ευκλείδειο χώρο αναπαριστάνεται από ένα 3×3 πίνακα πραγματικών αριθμών, ο οποίος αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό μετασχηματισμό που διατηρεί μήκη και γωνίες μεταξύ διανυσμάτων και μπορεί να ληφθεί συνεχώς από τον ταυτοτικό μετασχηματισμό. Αν *A* είναι ένας τέτοιος πίνακας, τότε:

(α) το γινόμενο οποιασδήποτε ιδιοτιμής με την συζυγή μιγαδική της είναι 1,

(β) ο συζυγής μιγαδικός μιας ιδιοτιμής είναι ιδιοτιμή και

(γ) το γινόμενο όλων των ιδιοτιμών ισούται 1.

Συνδυάζοντας τα (α), (β) και (γ), προκύπτει ότι μία από τις ιδιοτιμές υποχρεωτικά πρέπει να ισούται με 1.[6] Οπότε υπάρχει ένα πραγματικό διάνυσμα ***x*** έτσι ώστε *A**x***=***x*** το οποίο ορίζει έναν άξονα περιστροφής.

Σύμφωνα με τον Steiner το παραπάνω αποτελεί μια μαθηματική εξήγηση *φυσικού* γεγονότος μολονότι υπεισέρχονται και υποθέσεις για τον φυσικό κόσμο (π.χ., ότι ο φυσικός χώρος είναι 3-διάστατος και ευκλείδειος). Από την άλλη, τα (α), (β) και (γ) είναι καθαρά μαθηματκές προτάσεις και το 3-διάστατο του χώρου υπεισέρχεται μόνο για να διασφαλίσει ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι τρεις.

Ας παραθέσουμε ένα μέρος της γενικής θέσης του Steiner (1978b, σελ. 19):

Δεν θα αναπαραγάγω την ανάλυσή της έννοιας της μαθηματικής εξήγησης εδώ, αλλά ας

[6] Από το (α) προκύπτει ότι το τετράγωνο μιας πραγματικής ιδιοτιμής είναι 1 (ένας πραγματικός αριθμός ταυτίζεται με τον συζυγή μιγαδικό του). Έτσι κάθε πραγματική ιδιοτιμή πρέπει να ισούται με +1. Από τα (α) και (β) έπεται ότι το γινόμενο όλων των μιγαδικών ιδιοτιμών είναι +1. Από το (γ), το γινόμενο όλων των πραγματικών ιδιοτιμών πρέπει επίσης να είναι +1. Τώρα ο *λ* είναι ιδιοτιμή του *A* αν και μόνο αν $\det(A-\lambda I)=0$. Συνεπώς οι πραγματικές ιδιοτιμές είναι οι πραγματικές ρίζες μιας εξίσωσης 3ου βαθμού και, άρα, ή μια ή τρεις ως προς το πλήθος. Αλλά το γινόμενό τους πρέπει να είναι +1. Έτσι μια ιδιοτιμή πρέπει να είναι +1.

υποθέσουμε ότι η μαθηματική εξήγηση μαθηματικών φαινομένων υπάρχει. Τόσο στη μαθηματική όσο και στη φυσική εξήγηση φυσικών φαινομένων εμπεριέχονται μαθηματικές και φυσικές αλήθειες. Ωστόσο, μόνο στη μαθηματική εξήγηση ισχύει το εξής: όταν ”αφαιρέσουμε” τη φυσική, αυτό που απομένει είναι μια μαθηματική εξήγηση μιας μαθηματικής αλήθειας! Στο παράδειγμά μας η ”γέφυρα” μεταξύ των μαθηματικών και της φυσικής είναι η υπόθεση που κάναμε ότι ο χώρος είναι ευκλείδειος τριών διαστάσεων και ότι η περιστροφή ενός στερεού σώματος γύρω από ένα σταθερό σημείο παράγει ένα ορθογώνιο πραγματικό μετασχηματισμό (πίνακα). Παραμερίζοντας αυτές τις υποθέσεις, αποκτούμε μια εξηγηματική αποδειξη ενός θεωρήματος που αφορά μετασχηματισμούς και ιδιοδιανύσματα. Στη συνήθη επιστημονική εξήγηση, αφαιρώντας την φυσική δεν παραμένει απολύτως τίποτα.

Η άποψη του Steiner για το αν φυσικά φαινόμενα έχουν μαθηματικές εξηγήσεις φαίνεται να είναι θετική. Για τον ίδιο οι μαθηματικές εξηγήσεις των φυσικών φαινομένων δεν συνεπάγονται αυτές καθεαυτές την ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων ή αντικειμένων· αντίστροφα, όμως, η ίδια η ύπαρξη τέτοιων οντοτήτων προϋποθέτει την δυνατότητα να περιγραφούν και να εξηγηθούν. Η θέση του και το επιχείρημα του είναι σημαντικά προκειμένου να κατανοήσουμε πότε είναι εφικτό να υπάρχουν μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών γεγονότων.

Τα τελευταία χρόνια το θέμα περί μαθηματικών εξηγήσεων έχει αποκτήσει σημαντικό ενδιαφέρον ως αντικείμενο συζήτησης και μελέτης όχι μόνο στο πλαίσιο της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Ιδιαίτερα σημαντικό βρίσκουν το θέμα διάφοροι κλάδοι όπως η επιστημολογία, η μεταφυσική, η φιλοσοφία της φυσικής και γενικότερα η φιλοσοφία της επιστήμης. Ωστόσο, τι εννοούμε με τον όρο «μαθηματικές εξηγήσεις»; Θα μπορούσαμε να τον αντιληφθούμε με δύο «νοήματα»: εν γένει μπορούμε να μιλάμε για μαθηματικές εξηγήσεις μαθηματικών φαινομένων και για μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων. Στην πρώτη περίπτωση, μιλάμε για τα μαθηματικά «περιορισμένα» στον εαυτό τους. Όπως αναφέρει και ο τίτλος της εργασίας, εμείς θα εστιάσουμε στη δεύτερη περίπτωση – δηλαδή, στον εξηγητικό ρόλο των μαθηματικών σε ό,τι αφορά τα φυσικά φαινόμενα.

Οι μαθηματικές εξηγήσεις των φυσικών φαινομένων ουσιαστικά αποτελούν ένα «υποσύνολο» των φυσικών εξηγήσεων που αφορά τα φυσικά γεγονότα, δηλαδή τα γεγονότα που εξηγούνται και αναλύονται από τους φυσικούς νόμους. Κατά συνέπεια θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι οι μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων είναι βασικά φυσικές εξηγήσεις φυσικών γεγονότων οι οποίες εστιάζουν στη μαθηματική υπόσταση των εν λόγω φυσικών γεγονότων και νόμων. Με την έκφραση «φυσικές εξηγήσεις διαφόρων φυσικών γεγονότων» εννοούμε εξηγήσεις του πώς προκύπτουν ή μπορούν να προκύψουν φυσικά γεγονότα ή κανονικότητες, πώς αυτά επηρεάζονται ή διαφέρουν από άλλα φυσικά γεγονότα και με ποιο τρόπο τα φυσικά γεγονότα ή κανονικότητες συνδέονται με άλλα φυσικά γεγονότα ή κανονικότητες. Ας προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την μορφή εξήγησης που αφορά τις μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων με ορισμένα παραδείγματα.

Ένα παιδί ρωτά τον πατέρα του: «Μπαμπά,γιατί το μήλο πέφτει στη Γη;» Ο πατέρας δεν μπορεί να σκεφτεί μια καλή απάντηση. («Γιατί όχι;» σκέφεται). Το παιδί μετά από χρόνια ρωτάει ξανά τον πατέρα του: «Πώς εξηγείται το φαινόμενο της παλίρροιας;» Καμία απάντηση. Όταν ο νέος πια πήγε στο πανεπιστήμιο ρώτησε τον καθηγητή του γιατί οι πλανήτες κινούνται σε τροχιές γύρω από τον Ήλιο. «Εξαιτίας του νόμου της Παγκόσμιας Έλξης», απαντά ο καθηγητής και γράφει στον πίνακα τον γνωστό τύπο

$$F_{ij} = G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2},$$

εξηγώντας του ότι εκφράζει το μέτρο της δύναμης F_{ij} μεταξύ δύο αντικειμένων που έχουν μάζες m_i, m_j και απέχουν μεταξύ τους αποσταση ίση με r_{ij}^2 (όπου το *G* να είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης). Ο καθηγητής έδωσε ουσιαστικά μια μαθηματική περιγραφή ενός θεμελιώδους φυσικού νόμου, αυτού της παγκόσμιας έλξης. Ο Feynman[7] αναφέρει ότι ο νόμος της Παγκόσμιας Έλξης, η αρχή της ελάχιστης δράσης και η μέθοδος μέτρησης του τοπικού πεδίου αποτελούν τρείς μαθηματικές «φόρμουλες» οι οποίες δίνουν ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα. Ωστόσο αποτελούν όλες, όπως η περιγραφή που έκανε ο δάσκαλος στο παράδειγμα, μαθηματικές περιγραφές ενός θεμελιώδους νόμου. Έτσι, φαίνεται πως χρειαζόμαστε (και έχουμε) μόνο τα μαθηματικά έτσι ώστε να εξηγήσουμε το φαινόμενο της βαρύτητας. Πιο κάτω θα αναφέρουμε φαινόμενα που συναντώνται στη φύση, τα οποία θα τα εξετάσουμε υπό μαθηματικό πρίσμα.

[7] Feynman (1967, σελ. 47)

Στο φυσικό περιβάλλον, η μέλισσα προκειμένου να αναπαραχθεί και να αποθηκεύσει την τροφή της δημιουργεί κελιά σχηματίζοντας κηρήθρες. Για την κατασκευή αυτών των κελιών η μέλισσα χρησιμοποιεί το κανονικό εξάγωνο. Αυτή η επιλογή δικαιολογείται καθώς το κανονικό εξάγωνο σε σχέση με άλλα σχήματα (τρίγωνο, τετράγωνο, κ.ο.κ.) έχει τη μικρότερη δυνατή περίμετρο για δεδομένη επιφάνεια και ταυτόχρονα συμπληρώνει (”κλείνει”) το επίπεδο χωρίς να δημιουργεί κενά. Το γεγονός αυτό εξασφαλίζει στη μέλισσα την «επιθυμία» της να δαπανά όσο το δυνατό λιγότερο κερί για την κατασκευή των κελιών της. Επιπλέον, η χρήση του κανονικού εξαγώνου αποτελεί την καλύτερη διαμέριση για την αποθήκευση του μέγιστου όγκου του μελιού. Με λογισμό μεταβολών αποδεικνύεται ότι αν θέλουμε να διαμερίσουμε (χωρίσουμε σε μικρότερα τμήματα) ένα δοχείο ώστε να περιέχεται ο μέγιστος δυνατός όγκος στα κελιά, αυτό επιτυγχάνεται με την επιλογή κανονικού εξαγώνου.[8]

Ο χρυσός αριθμός φ ο οποίος μελετήθηκε πρώτη φορά από τους αρχαίους Έλληνες έχει σημαντική παρουσία τόσο στον φυσικό κόσμο όσο και στις τέχνες. Οι ίδιοι παρατήρησαν ότι πολλά πάνω στη Γη, από τα φυτά μέχρι το ανθρώπινο σώμα (Βιτρούβιος Άνθρωπος), αναπτύσσονται βάση μιας αναλογίας. Η χρυσή τομή ή χρυσός αριθμός φ ορίζεται ως το πηλίκο των θετικών αριθμών α, β έτσι ώστε να ισχύει $α/β=(α+β)/α=φ$. Προκύπτει ότι $φ=1.6180339…$. Η χρυσή τομή, δηλαδή, μας δίνει το σημείο που πρέπει να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα,ώστε ο λόγος του ως προς το μεγαλύτερο τμήμα να ισούται με τον λόγο του μεγαλύτερου τμήματος ως προς το μικρότερο. Η τομή αυτή θεωρείται ότι δίνει αρμονικές αναλογίες και γι’αυτό το λόγο χρησιμοποιούνταν τόσο στην αρχιτεκτονική όσο και στη μουσική και ζωγραφική. Η αναλογία αυτή είναι γνωστή και ως *χρυσή αναλογία* η οποία ονομάζεται στα μαθηματικά ως ο λόγος δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας Fibonacci η οποία είναι η ακόλουθη: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144, ...

Ο τρόπος με τον οποίο οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται στη φύση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Είναι δυνατόν να τους συναντήσουμε με μορφή αναλογίας στο ανθρώπινο σώμα, στο σώμα ενός δελφινιού ή αστερία, στη διάταξη των φύλλων ενός φυτού, στο μοτίβο των πετάλων ενός λουλουδιού, στο άνθος της

[8] Για αποδείξεις βλ. Hales (2001) αλλά και Hales (2000).

αγκινάρας ή σε ένα κουκουνάρι, στο κέλυφος των σαλιγκαριών κ.λπ. Η συμμετρία αυτή στη φύση εμφανίζεται μέσω της χρυσής αυτής ακολουθίας. Στην περίπτωση των φυλλωμάτων η συμμετρία σχετίζεται με τη μεγιστοποίηση του χώρου που είναι διαθέσιμος για την ανάπτυξη κάθε φύλλου ή τον τρόπο με τον οποίο ενώνονται τα φύλλα μεταξύ τους. Σε ό,τι αφορά την τέχνη, ο Leonardo da Vinci ζωγράφισε το πρόσωπο της Mona Lisa ώστε αυτό να χωράει τέλεια σε ένα χρυσό ορθογώνιο και δόμησε τον υπόλοιπο πίνακα γύρω από το πρόσωπο, χωρίζοντάς τον επίσης σε χρυσά ορθογώνια, ενώ ο Mozart διαίρεσε μεγάλο αριθμό από τις σονάτες του σε δυο μέρη, η χρονική αναλογία των οποίων αντιστοιχεί στη χρυσή τομή. Πέραν όμως από τα επιστημονικά δεδομένα, η χρυσή αναλογία, ο αριθμός φ, περιβάλλεται από ένα πέπλο μυστηρίου επειδή εντυπωσιακές προσεγγίσεις απαντούν σε ποίκιλα μέρη του φυσικού κόσμου. Ακόμη και μια τομή του ανθρώπινου DNA φαίνεται να ενσωματώνεται άψογα σε ένα χρυσό δεκάγωνο.

Ένα άλλο παράδειγμα στο πλαίσιο της εξελικτικής βιολογίας είναι αυτό που αφορά τον κύκλο ζωής των περιοδικών τζιτζικιών.[9] Τζιτζίκια, όπως τα Magicicada Tredecim και ειδικότερα τα Magicicada Septendecim, έχουν το μεγαλύτερο κύκλο ζωής από όλα τα άλλα έντομα. Τα παραπάνω είδη παρουσίασαν ένα χαρακτηριστικό για την εξήγηση του οποίου οι βιολόγοι ζήτησαν τη βοήθεια των μαθηματικών. Αρχικά, ο κύκλος ζωής ξεκινά κάτω από το έδαφος όπου οι νύμφες ρουφούν υπομονετικά τον χυμό από τις ρίζες των δέντρων. Τα έντομα αυτά μεγαλώνουν και στη συνέχεια βγαίνουν από τις φωλιές τους μετά από 13 ή 17 χρόνια και μέσα σε λίγες εβδομάδες ζευγαρώνουν, γεννούν τα αυγά τους και πεθαίνουν. Το ερώτημα που προβλημάτιζε τους βιολόγους ήταν γιατί ο κύκλος του τζιτζικιού είναι τόσο μακρύς και αν σήμαινε κάτι το γεγονός ότι ο κύκλος ζωής είναι πρώτος αριθμός ετών, δηλαδή διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και τη μονάδα.

Μια θεωρία διατυπώνει την άποψη ότι το τζιτζίκι προσπαθεί να αποφύγει ένα παράσιτο με εξίσου μεγάλο κύκλο ζωής. Αν το παράσιτο έχει κύκλο ζωής, λ.χ., δύο χρόνια, τότε το τζιτζίκι θα αποφύγει ένα κύκλο ζωής που διαιρείται με το 2, διαφορετικά το παράσιτο και το τζιτζίκι θα συμπίπτουν συχνά. Ομοίως αν το παράσιτο εμφανίζεται ανά τρία χρόνια το τζιτζίκι θέλει να αποφύγει ένα κύκλο ζωής

[9] Βλ. Baker (2005, σελ. 229-236).

που διαιρείται με το 3, αλλιώς επίσης θα συμπίπτουν συχνά. Φαίνεται λοιπόν ότι η καλύτερη στρατηγική για το τζιτζίκι για να αποφύγει τις συναντήσεις με ένα παράσιτο είναι να έχει ένα μακρύ κύκλο ζωής που να διαρκεί πρώτο αριθμό ετών. Επειδή κανένας αριθμός δεν διαιρεί το 13 και το 17, τα δύο είδη και ειδικά το Septendecim σπάνια θα συναντήσουν το παράσιτο. Αυτό συμβαίνει διότι αν το παράσιτο έχει κύκλο ζωής 2 χρόνια θα συναντιούνται κάθε 34 χρόνια (septendecim) ενώ αν έχει μεγαλύτερο κύκλο ζωής, λ.χ., 16 χρόνια θα συναντιούνται μόνο κάθε 272 (16x17) χρόνια. Ακόμη,το παράσιτο για να αντεπιτεθεί διαθέτει μόνο δύο κύκλους ζωής που αυξάνουν τη συχνότητα σύμπτωσης: τον ετήσιο κύκλο και τον 17ετή κύκλο όπως το τζιτζίκι. Με λίγα λόγια, είναι απίθανο για το παράσιτο να επιβιώσει επανεμφανιζόμενο 17 συνεχόμενα χρόνια αφού στις πρώτες 16 εμφανίσεις του δεν θα υπάρχουν τζιτζίκια για να παρασιτήσει. Από την άλλη, με σκοπό να φτάσουν τον 17ετή κύκλο ζωής,οι γενιές των παρασίτων θα έπρεπε να εξελίσσονται κατα το 16ετή κύκλο ζωής. Αυτό θα σήμαινε ότι σε κάποιο στάδιο της εξέλιξης το παράσιτο και το τζιτζίκι δεν θα συνέπιπταν για 272 χρόνια! Σε κάθε περίπτωση, ο μακρύς κύκλος πρώτων αριθμών ζωής του τζιτζικιού τα προστατεύει.

Στα προαναφερθέντα παραδείγματα εστιάσαμε στο μαθηματικό κομμάτι που αφορά κάθε φαινόμενο. Όπως φαίνεται, η ανάλυση ενός φυσικού γεγονότος υπό μαθηματικό πρίσμα δεν προυποθέτει την αυτόνομη ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων. Με λίγα λόγια, όταν θέλουμε να περιγράψουμε μαθηματικά ένα φυσικό φαινόμενο, στην πραγματικότητα δεν εξετάζουμε το αν τα μαθηματικά αντικείμενα προϋπάρχουν της φύσης ή το αντίστροφο ή οποιαδήποτε άλλη σχέση που να τα συνδέει. Συνεπώς τα μαθηματικά, είτε αποτελούν επινόηση του ανθρώπου είτε αυθύπαρκτες οντότητες, συμβάλλουν στην ουσιώδη εξήγηση διαφόρων φυσικών φαινομένων. Τα φαινόμενα που συμβαίνουν στη φύση τελικά «εμπεριέχουν» δομές οι οποίες αναλυόμενες σε μαθηματικά πλαίσια «φωτίζουν» το *πώς* και *εστιάζουν* στο γιατί συμβαίνει ένα φαινόμενο.

1.3 Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα

Όπως προαναφέραμε, για να εξηγήσουμε την εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στον φυσικό κόσμο, πρέπει να ανιχνεύσουμε μια σχέση ανάμεσα στον κόσμο των μαθηματικών και στη φύση. Μια «εμπειρία που είχα»[10] κατά τη διάρκεια ενός μαθήματος την περίοδο των σχολικών ετών μου ίσως διαφωτίσει αυτόν τον ισχυρισμό. Την ώρα ενός πειράματος που αφορούσε την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ενός σώματος, ο καθηγητής αποτύπωσε γραφικά στον πίνακα (διάγραμμα $v-t$) τη συνάρτηση που περιγράφει την ταχύτητα του σώματος σε σχέση με τον αντίστοιχο χρόνο που κινείται. Αυτό το οποίο είχε σχεδιάσει τελικά ήταν μια ευθεία παράλληλη στον άξονα που βρίσκεται ο χρόνος. Τότε πήρα το θάρρος και ρώτησα τον καθηγητή γιατί σχεδίασε με αυτό τον τρόπο την γραφική παράσταση. Ο καθηγητής μου απάντησε ότι, όπως παρατηρήθηκε στα πειράματα, η παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο ήταν μηδενική και συνεπώς η ταχύτητα του σώματος θα ήταν σταθερή, αμετάβλητη, συναρτήσει του χρόνου ($v'(t)=0$ για κάθε $t \cdot$ άρα $v(t)=c$ για κάθε t και κάποιο $c \in \mathbb{R}$). Στη συνέχεια προβληματίστηκα σκεπτόμενος πώς είναι δυνατόν ο μηδενισμός μιας συνάρτησης να ληφθεί ως μια εξήγηση ενός φυσικού γεγονότος αλλά δεν επέμεινα εκείνη τη στιγμή.

Το παράδειγμα αυτό φαίνεται να δείχνει ότι πολλές φορές η μαθηματική περιγραφή ενός γεγονότος συγκροτεί μια επιστημονική εξήγηση του γεγονότος αυτού. Πράγματι, σημαντικό μέρος του θεωρητικού κόσμου της επιστήμης αποτελείται από την κατασκευή ή την ανακάλυψη μαθηματικών μοντέλων για τα φυσικά φαινόμενα. Πολλά από τα προβλήματα που αφορούν την επιστήμη και τη μηχανοτεχνία (engineering) μπορούν να αναχθούν σε ζητήματα εύρεσης μιας ιδιαίτερης διαφορικής εξίσωσης, ενός κατάλληλου τύπου, ή μιας σωστής συνάρτησης που θα συσχετισθεί με μια κλάση φαινομένων.

Όμως είναι προφανές ότι μια μαθηματική σχέση, δομή, μοντέλο ή θεωρία δεν μπορεί να λειτουργήσει ως εξήγηση ενός μη μαθηματικού γεγονότος χωρίς πρώτα να εκτιμηθεί η σχέση μεταξύ των μαθηματικών και της επιστημονικής πραγματικότητας. Δίχως μια τέτοια αποτίμηση δεν είναι σαφές το αν και τι μπορεί να περιγράψει ή να εξηγήσει η όποια «επιστημονική εξήγηση». Γενικότερα, είναι αδύνατο να αρχίσει κανείς να κατανοεί τη συνεισφορά μιας επιστήμης στη γνώση χωρίς να έχει αντιληφθεί τη σύνδεση των μαθηματικών με το κομμάτι της

[10] Στην πραγματικότητα, μια «εμπειρία» που θα μπορούσε να έχει κάποιος με φιλοσοφικές προδιαθέσεις. Βλ. και Shapiro (1983a, σελ. 524).

πραγματικότητας, στη γνώση του οποίου η εν λόγω επιστήμη έχει εξέχοντα ρόλο. Έτσι προκύπτουν ερωτήματα όπως: Με ποιό τρόπο εφαρμόζονται τα μαθηματικά στις επιστημονικές εξηγήσεις και περιγραφές; Ποιά είναι η εξήγηση (στο πλαίσιο της φιλοσοφίας) της εφαρμοσιμότητας και λειτουργικότητας των μαθηματικών στην επιστήμη; Τέτοιου τύπου θέματα αποκτούν ιδιαίτερη σημασία στη φιλοσοφία της επιστήμης και στη φιλοσοφία των μαθηματικών.

Γενικά, ο στόχος μιας επιστήμης είναι να *περιγράψει*, να *προβλέψει* και να *εξηγήσει / κατανοήσει* κάποιες όψεις (φυσικές, χημικές, βιολογικές, κ.λπ.) του κόσμου. Από μια οπτική (αν εξαιρεθούν οι Πυθαγόρειοι, εκδοχές του πλατωνισμού, κ.λπ.) αυτός ο κόσμος φαίνεται *μη μαθηματικός*. Ωστόσο, είναι γεγονός ότι οι βάσεις των περισσοτέρων σύγχρονων επιστημών συνίστανται από ποικίλες μαθηματικές δομές και ότι οι περισσότερες επιστημονικές εξηγήσεις και περιγραφές χρησιμοποιούν φυσικούς *και μαθηματικούς* όρους. Έτσι σημαντικό μέλημα της επιστήμης αποτελεί η χρήση και αντιστοιχία των μαθηματικών αποδείξεων σε σύμπαν που ανταποκρίνεται στον πραγματικό, εμπειρικό κόσμο. Με αυτό τον τρόπο καθίσταται εφικτή η ουσιώδης προσέγγιση και κατανόηση ενός μη μαθηματικού κόσμου των επιστημών.

Το ζήτημα αυτό μπορεί να εμφανιστεί σε διάφορα πλαίσια. Μπορεί κάποιος να αναρωτηθεί πως είναι δυνατόν ένα συγκεκριμένο μαθηματικό γεγονός να αποτελεί εξήγηση ένος άλλου μη μαθηματικού γεγονότος. Η απάντηση που λαμβάνει κανείς όταν εκφράζει την απορία πώς ο μηδενισμός μιας παραγώγου αποτελεί εξήγηση για ένα φυσικό γεγονός εντάσσεται στον παραπάνω προβληματισμό. Σε αυτή την περίπτωση, μια ολοκληρωμένη απάντηση είναι δυνατό να εμπεριέχει μια λεπτομερή περιγραφή της συγκεκριμένης επιστημονικής θεωρίας, η οποία συνδέει μια συγκεκριμένη κατηγορία μαθηματικών αντικειμένων (παράγωγοι συναρτήσεων) με μια κλάση φυσικών μεγεθών (ταχύτητα, επιτάχυνση, κ.λπ.). Μια δεύτερη εξίσου σημαντική απορία θα μπορούσε να είναι πώς είναι εφικτό να λειτουργεί αποτελεσματικά η μαθηματικοποιημένη επιστημονική θεωρία. Ως απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα μπορούσαμε να εστιάσουμε στην αδιαμφισβήτητη αποτελεσματικότητα των μαθηματικών σε επιστημονικά πλαίσια – δηλαδή, στην ικανότητά τους να ελέγχουν και προβλέπουν με σχετική ακρίβεια σημαντικά γεγονότα, μερικά από τα οποία είναι συνυφασμένα και με την ανθρώπινη καθημερινότητα (οικονομία, τεχνολογία, μετεωρολογία κ.ά.)

Έτσι ένα σημαντικό θέμα είναι ο τρόπος με τον οποίο λειτουργούν και εφαρμόζονται τα μαθηματικά στην επιστήμη. Προτού όμως προβούμε στην ανάλυσή του, στο πλαίσιο της φιλοσοφίας των μαθηματικών, θα ήταν φρόνιμο να επισημάνουμε τη διαφορά μεταξύ της «εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών» στις φυσικές επιστήμες και της «μαθηματικοποίησης» των φυσικών επιστημών. Μπορούμε να μιλήσουμε για *εφαρμοσιμότητα* των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες όταν η συγκεκριμένη επιστήμη που μελετάμε απλώς αξιοποιεί μαθηματικά για περιγραφή, πρόβεψη ή εξήγηση φαινομένων και αναζητεί λύσεις σε προβλήματα εντάσσοντάς τα σε μαθηματικές δομές. Από την άλλη, κάνουμε λόγο για *μαθηματικοποίηση* όταν το εξεταζόμενο αντικείμενο της επιστήμης μετατρέπεται σε μαθηματικό αντικείμενο. Αναλυτικότερα, τα μαθηματικά παράγουν ένα μοντέλο ενός φυσικού γεγονότος και το μοντέλο αυτό καθεαυτό μετατρέπεται πλέον στο αντικείμενο μελέτης της επιστήμης. Αυτή η διάκριση είναι ιδιαίτερα σημαντική στην προσπάθεια να κατανοήσουμε την αμφίδρομη επίδραση μεταξύ μαθηματικών και φυσικής επιστήμης.

Στις μέρες μας, τα μαθηματικά αναπτύσσονται κατά κύριο λόγο στο δικό τους πλαίσιο ανεξάρτητα από τη χρησιμότητά τους στη μελέτη ενός μη μαθηματικού σύμπαντος. Χρησιμοποιούν ορισμούς και αξιώματα που συχνά τα υιοθετούν a priori και με βάση αυτά συνθέτουν νέες σχέσεις και θεωρίες. Οι μαθηματικοί διατυπώνουν θεωρήματα και βρίσκουν «αμιγώς μαθηματικά» επιχειρήματα για να τα αποδείξουν (δικαιολογήσουν). Το γεγονός αυτό δεν διευκολύνει την αντιστοίχιση μαθηματικών εννοιών, σχέσεων ή μοντέλων με πτυχές του φυσικού κόσμου, ούτε την πλήρη κατανόηση της επιστημονικής πραγματικότητας. Έτσι διαφαίνεται ότι τα μαθηματικά εμπεριέχουν μια δομημένη «σκέψη» δίχως όμως να συνδέονται με την πραγματικότητα.

Παρ’ όλα αυτά, ο παραπάνω ισχυρισμός δεν είναι αληθής στην περίπτωση των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Γι’ αυτό το λόγο πρέπει όταν μιλάμε για μαθηματικά να έχουμε στο νου μας την διάκριση τους σε *καθαρά* και σε *εφαρμοσμένα*. Τα καθαρά μαθηματικά αναπτύσσονται και μελετώνται χωρίς να είναι στόχος η άμεση εφαρμογή τους στην επίλυση προβλημάτων από άλλες επιστήμες. Προφανώς υπάρχουν πτυχές διαφόρων πεδίων των καθαρών μαθηματικών που εφαρμόζονται σε ένα μη μαθηματικό σύμπαν, όπως στις περιοχές της ανάλυσης, των διαφορικών εξισώσεων, της άλγεβρας, της αριθμητικής και της γεωμετρίας, κ.ά. Για ορισμένες όμως σχολές της φιλοσοφίας των μαθηματικών (π.χ., τον δομισμό), ο διαχωρισμός αυτός είναι περισσότερο τυπικός και γίνεται κυρίως για να αντιληφθούμε ίσως πιο άμεσα ποια πεδία των μαθηματικών είναι λειτουργικά στον επιστημονικό, μη μαθηματικό, κόσμο.

Ο όρος «εφαρμοσμένα μαθηματικά» είναι αμφίσημος. Η μία σημασία του αφορά μαθηματικούς τομείς όπως η στατιστική, οι διαφορικές εξισώσεις, η αριθμητική ανάλυση, η θεωρία πιθανοτήτων και η θεωρία παιγνίων. Μια άλλη σημασία έχει να κάνει με την καθεαυτή χρήση διαφόρων μαθηματικών μεθόδων από ποικίλα μαθηματικά πεδία στην τεχνολογία, στις επιχειρήσεις, στη βιομηχανία και γενικότερα στην ανθρώπινη καθημερινότητα.

Ωστόσο προκειμένου να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζονται τα μαθηματικά στις φυσικές επιστήμες θα ήταν σωστό να γνωρίζουμε τόσο το φυσικό όσο και το μαθηματικό μοντέλο το οποίο περιγράφει το αντικείμενο μελέτης μας. Αυτό είναι ένα ουσιώδες πρόβλημα που αντιμετωπίζουν τόσο οι μαθηματικοί όσο και οι φυσικοί κυρίως κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Οι μεν φυσικοί χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για να περιγράψουν φυσικούς νόμους, οι δε μαθηματικοί χρησιμοποιούν φυσικά φαινόμενα με σκοπό να δώσουν παραδείγματα πραγμάτωσης μαθηματικών μοντέλων ή τύπων. Παρ' όλα αυτά οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν σε βάθος τα φαινόμενα που συμβαίνουν στη φύση και να αντιστοιχίσουν τα όποια μαθηματικά κρύβονται σε αυτά και αντιστρόφως. Για παράδειγμα, όταν ο καθηγητής αναφέρει μια συνάρτηση η οποία περιγράφει την κίνηση ενός υλικού σημείου σε μία διάσταση (ευθεία) ο μαθητής θα πρέπει να αντιληφθεί τι σημαίνει καταρχάς κίνηση, τι ορίζουμε ως υλικό σημείο και τι ως διάσταση του χώρου και στη συνέχεια να επεξεργαστεί και να «δικαιολογήσει στο νου του» το μαθηματικό υπόβαθρο του συγκεκριμένου φαινομένου. Προφανώς, μια σχετική πειραματική διαδικασία μπορεί να συμβάλει σημαντικά στην κατανόηση του φαινομένου και να βοηθήσει τον μαθητή να συλλάβει το πώς χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά. Συνεπώς η γνώση του μαθηματικού αλλά και φυσικού μοντέλου που «ντύνουν» ένα επιστημονικό γεγονός αποδεικνύεται σπουδαία για να έχει κάποιος μια ολοκληρωμένη εικόνα για το εν λόγω φαινόμενο.

Σε κάθε περίπτωση ο μαθηματικός, ο φυσικός ή ο επιστήμονας δεν θα πρέπει να περιορίζει τα μαθηματικά στο πλαίσιο αποκλειστικά των δικών του ενδιαφερόντων. Ακόμη η φιλοσοφία των μαθηματικών πρέπει να λαμβάνει υπόψη τη σπουδαιότητα των μαθηματικών για τη μελέτη του μη μαθηματικού σύμπαντος και να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο η μαθηματική γνώση σχετίζεται με τη γνώση της εμπειρικής πραγματικότητας. Όμως, για να γίνει αυτό εφικτό, πρέπει αρχικά να διευκρινιστεί τι ορίζουμε ως επιστημονική εξήγηση, τι είναι τα μαθηματικά και με ποιο τρόπο όλα αυτά συνδέονται μεταξύ τους. Στα επόμενα κεφάλαια θα κάνουμε μια απόπειρα στις κατευθύνσεις αυτές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΞΗΓΗΣΗ

2.1 Η κλασική θεωρία της επιστημονικής εξήγησης

Παλαιότερα ο άνθρωπος απέδιδε φυσικά γεγονότα στην ύπαρξη θεϊκών παρεμβάσεων και υπερφυσικών οντοτήτων ικανοποιώντας έτσι μερικώς την περιέργειά του. Ερωτήσεις όπως «Γιατί βρέχει;» ή «Γιατί είναι αγριεμένη η θάλασσα;» έβρισκαν απαντήσεις με αναφορές σε πλαστές θεότητες. Τέτοιες απορίες για το *πώς* και *γιατί* συμβαίνει ένα φαινόμενο είχαν ως απώτερο στόχο την βαθύτερη κατανόηση του κόσμου, της πραγματικότητας την οποία βίωνε ο άνθρωπος. Ωστόσο, η περιέργεια αυτή, ως εγγενές ανθρώπινο χαρακτηριστικό που δεν αρέσκεται σε περιορισμούς, μετουσιώθηκε σταδιακά με τη βοήθεια της εμπειρίας σε έγκυρη γνώση. Η ανάδυση της επιστήμης ως ενός οργανωμένου σώματος τεκμηριωμένης και εξακριβωμένης γνώσης αποτέλεσε και αποτελεί σημαντικό «αποκούμπι» για την περιγραφή και εξήγηση ποικίλων γεγονότων που λαμβάνουν χώρα στη φύση. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα εστιάσουμε στη συμβολή της επιστήμης στην κατανόηση του κόσμου μας, αναλύοντας την έννοια της επιστημονικής εξήγησης.

Είναι γεγονός ότι υπάρχουν πολλά είδη διαφορετικών εξηγήσεων που απαντούν σε ερωτήματα του τύπου «γιατί» ή «πώς». Για παράδειγμα, πώς μεταδίδεται ένα νόσημα από άνθρωπο σε άνθρωπο ή γιατί ο ουρανός είναι γαλανός. Όπως φαίνεται, η λέξη «εξήγηση» διαθέτει μεγάλη νοηματική ευρύτητα, δηλαδή αφορά και βρίσκει εφαρμογή σε μια πλούσια ποικιλία «αφηγήσεων». Εμείς, ωστόσο, θα επικεντρωθούμε σε εξηγήσεις γεγονότων σε επιστημονικό πλαίσιο.

Σημαντικό βήμα για τη διευκρίνιση της έννοιας της επιστημονικής εξήγησης είναι να κατανοήσουμε τη διαφορά του *γιατί* συμβαίνει ένα φαινόμενο από τον ισχυρισμό *ότι* αυτό πράγματι συμβαίνει. Ας δούμε ένα παράδειγμα ώστε να γίνει πιο αισθητή αυτή η διάκριση. Ανέκαθεν οι άνθρωποι έμπαιναν σε σκέψεις για τον ουρανό και το χρώμα του. Μερικοί θεωρούσαν ότι ο ουρανός είναι γαλάζιος επειδή καθρεφτίζεται σε αυτόν η θάλασσα. Άλλοι πίστευαν ότι ήταν γεμάτος μικρά γαλάζια σωματίδια που αιωρούνταν στον αέρα. Πρίν από περίπου 2.400 χρόνια, ο Αριστοτέλης υπέθεσε ότι τα χρώματα υπάρχουν μόνο στο φως, ενώ το σκοτάδι είναι άχρωμο. Και είχε δίκιο. Τα πράγματα γύρω μας φαίνονται χρωματιστά επειδή πέφτει πάνω τους το φως.Τα διάφορα αντικείμενα έχουν ξεχωριστά χρώματα γιατί οι διαφορετικές επιφάνειές τους ανακλούν και διαφορετικά μήκη κύματος του φωτός. Το φως του ήλιου, παρότι είναι λευκό, περιέχει όλα τα χρώματα του φάσματος (ερυθρό, πορτοκαλί, κίτρινο, πράσινο, μπλε και ιώδες). Δεν είναι όμως όλο το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας ορατό από το ανθρώπινο μάτι. Το ορατό φάσμα του φωτός είναι αυτό ανάμεσα στα 720 νανόμετρα και τα 380 νανόμετρα. Μέσα σε αυτό το φάσμα υπάρχουν όλα τα χρώματα που μπορούμε να αντιληφθούμε. Στη μία άκρη του φάσματος με το μικρότερο μήκος κύματός συναντάμε το ιώδες (μωβ) ενώ στην άλλη με μεγάλο μήκος κύματος είναι το ερυθρό (κόκκινο). Το ανθρώπινο μάτι αναγνωρίζει συνήθως τρείς αποχρώσεις (την κόκκινη, την πράσινη και την μπλε) και αυτές δημιουργούν ένα συνδυασμό ερεθισμάτων από όπου προκύπτουν και τα υπόλοιπα χρώματα. Όμως *γιατί* ο ουρανός φαίνεται γαλάζιος;

Στον ουρανό το ηλιακό φως συναντά διαρκώς εμπόδια καθώς ο αέρας δεν είναι «κενός» αλλά αποτελείται από πάρα πολλά μικρά σωματίδια. Τα περισσότερα είναι άζωτο ή οξυγόνο, ενώ τα υπόλοιπα είναι άλλα αέρια και μικρά αιωρούμενα σωματίδια που προέρχονται από τις εξατμίσεις των οχημάτων, τον καπνό των εργοστασίων, τις εκρήξεις ηφαιστείων κ.ά. Τα σωματίδια αυτά, παρά το μικρό τους μέγεθος, παρεμποδίζουν την πορεία του ηλιακού φωτός. Οι ηλιακές ακτίνες «σκοντάφτουν» σε αυτά και αλλάζουν κατεύθυνση, ανακλώνται και διαθλώνται. Το μπλε και το ιώδες, επειδή έχουν μικρότερο μήκος κύματος, διαθλώνται περισσότερο από ό,τι το πορτοκαλί ή το κόκκινο. Με αυτό τον τρόπο, το διαθλώμενο φως περιέχει περίπου δέκα φορές περισσότερο μωβ και έξι φορές περισσότερο μπλε από ό,τι κόκκινο. Έτσι το φως που διαθλάται φαίνεται μπλε – για την ακρίβεια, γαλάζιο. Συνεπώς όταν στρέφουμε τα μάτια μας στον ουρανό αντικρίζουμε το γαλάζιο διαθλώμενο φως και όχι το μη διαθλώμενο φως του ήλιου. Με παρόμοιο τρόπο εξηγείται το πορτοκαλοκόκκινο χρώμα του ουρανού κατά τη δύση του Ηλίου. Επειδή οι γαλάζιες και ιώδεις ακτίνες που έχουν μικρό μήκος κύματος διαθλώνται, φτάνουν στα μάτια μας μόνο τα πορτοκαλοκόκκινα χρώματα που έχουν μεγάλο μήκος κύματος. Οι ακτίνες αυτές κοιτάζοντας ολόισια μπροστά μας είναι κυρίως κίτρινες, κόκκινες και πορτοκαλιές.Τη μέρα δηλαδή βλέπουμε κυρίως το φως του ήλιου που διαθλάται, κι έτσι ο ουρανός φαίνεται γαλάζιος, ενώ με τη δύση του Ηλίου βλέπουμε αυτό που δεν διαθλάται, με αποτέλεσμα ο ουρανός να φαίνεται πορτοκαλοκόκκινος.

Στο παραπάνω παράδειγμα αυτό που εξηγεί το γαλάζιο χρώμα του ουρανού είναι η ίδια η φύση του φωτός (κυματική) και η δυνατότητά του να διαθλάται και να σκεδάζεται όταν οι ακτίνες του προσπέσουν σε μικροσκοπικά σωματίδια. Σε συνδυασμό με τα μήκη κύματος του φάσματος, όπως αναφέραμε προηγουμένως, είμαστε σε θέση να εξηγήσουμε *γιατί* βλέπουμε τον ουρανό γαλάζιο τη μέρα. Αλλά το γεγονός *ότι* ο ουρανός φαίνεται γαλάζιος τη μέρα *επικυρώνεται* από τις ίδιες μας τις αισθήσεις, από τον αμφιβληστροειδή χιτώνα του ματιού μας.

Ο Wesley Salmon αντιλαμβάνεται την επιστημονική εξήγηση ως μια απόπειρα να καταστήσουμε *κατανοήσιμο* ένα επιμέρους ή κάποιο γενικό γεγονός, προσφεύγοντας σε άλλα επιμέρους ή γενικά γεγονότα που έχουν τεκμηριωθεί από έναν ή περισσότερους κλάδους της εμπειρικής επιστήμης.[11] Ως γενικό γεγονός θεωρούμε μια κατάσταση πραγμάτων που περιγράφεται από μια *καθολική γενίκευση* («Όλα τα Α είναι Β», «Κανένα Α δεν είναι Β») ή *στατιστική γενίκευση* («x% των Α είναι Β» με 0 < x < 100, «Τα περισσότερα Α είναι Β», κ.λπ.). Από την άλλη, τα επιμέρους γεγονότα περιγράφονται από προτάσεις που αναφέρονται σε συγκεκριμένα άτομα, χωροχρονικές θέσεις, κ.λπ. Ωστόσο, σε τί συνίσταται μια εξήγηση; Υπάρχει κάποιο μοντέλο που πρέπει να ακολουθεί; Σε αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να αποτυπώσουμε τη δομή μιας εξήγησης ώστε να αποσαφηνίσουμε όσο είναι εφικτό τον όρο.

Μια εξήγηση αποτελείται από δύο μέρη, το *εξηγητέο* (explanandum) και το *εξηγούν* (explanans). Το εξηγητέο είναι το γεγονός που πρέπει να εξηγηθεί. Ακόμη, ονομάζουμε *εξηγητέα πρόταση* (explanandum-statement) την πρόταση που

[11] Μεγάλο μέρος της παρουσίασης της θεωρίας της επιστημονικής εξήγησης βασίζεται στο κεφ. 1 με τίτλο «Επιστημονική Εξήγηση» που συνέγραψε ο Wesley Salmon για το Salmon, M. H. κ.ά. ([1992] 1999) και στο Woodward (2014).

περιγράφει το εξηγητέο γεγονός. Συχνά όταν θέλουμε να διαχωρίσουμε το γεγονός που οφείλει να εξηγηθεί από την πρόταση που το διατυπώνει αναφερόμαστε σε αυτό ως το *εξηγητέο γεγονός* (explanandum-fact).

Από την άλλη, το εξηγούν είναι το μέρος που καθιστά εφικτή την εξήγηση και μπορεί να αποτελείται από διάφορα γεγονότα τα οποία ουσιαστικά μάς είναι χρήσιμα για να αναλύσουμε και να εξηγήσουμε το εξηγητέο. Όμοια, οι προτάσεις που περιγράφουν αυτά τα γεγονότα ονομάζονται *εξηγούσες προτάσεις* (explanans-statements) και αντίστοιχα προκειμένου να διαχωρίσουμε τα γεγονότα από τις προτάσεις που τα περιγράφουν αναφερόμαστε σε αυτά ως *εξηγούντα γεγονότα* (explanans-facts).

Στο παράδειγμά μας, το εξηγητέο γεγονός είναι το *γαλάζιο* χρώμα του ουρανού και η εξηγητέα πρόταση είναι αυτή που εκφράζει ότι ο ουρανός είναι πράγματι γαλάζιος. Τα εξηγούντα γεγονότα –δηλαδή, αυτά που εξηγούν τελικά γιατί ο ουρανός έχει αυτό το χρώμα– είναι η διάθλαση και η σκέδαση του φωτός σε συνάρτηση με το μήκος κύματος, το ορατό φάσμα του φωτός και το μικρό μήκος κύματος του μπλε χρώματος. Είναι πάντα εφικτή, λοιπόν, η εξήγηση ενός γεγονότος; Και υπάρχει, άραγε, κάποιο μοντέλο εξήγησης το οποίο να λειτουργεί αποτελεσματικά και καθολικά; Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε μοντέλα (πρότυπα) επιστημονικής εξήγησης σχολιάζοντας τη λειτουργικότητά τους σε ό,τι αφορά την εξήγηση φαινομένων σε επιστημονικά πλαίσια.

Το 1948 οι Carl Hempel και Paul Oppenheim διαμόρφωσαν με σχετικά μεγάλη ακρίβεια ένα πρότυπο επιστημονικής εξήγησης, ένα σχήμα που χρησιμοποιείται για να απαντήσει επιστημονικά σε ερωτήσεις τύπου «Γιατί...;». Αυτό είναι γνωστό ως το *παραγωγικο-νομολογικό* (Π-Ν) (deductive-nomological, D-N) μοντέλο της επιστημονικής εξήγησης. Μια εξήγηση αυτού του τύπου εξηγεί με το να υπάγει το εξηγητέο γεγονός σε ένα γενικό νόμο. Η βασική ιδέα για αυτό το μοντέλο συνίσταται στο ότι η επιστημονική εξήγηση έχει τη λογική μορφή επιχειρήματος αποτελούμενη από τις προκείμενες (*εξηγούν*) και το συμπέρασμα (*εξηγητέο*). Η αρχική μάλιστα μορφή του σχήματος προέβλεπε ότι το επιχείρημα πρέπει να είναι έγκυρο παραγωγικό ώστε η αλήθεια των προκειμένων να συνεπάγεται την αλήθεια του συμπεράσματος. Ας δούμε ένα κλασικό απλό παράδειγμα παραγωγικού συλλογισμού:

Όλοι οι πλανήτες του ηλιακού συστήματος κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο.
Ο Άρης είναι πλανήτης του ηλιακού συστήματος.

∴ Ο Άρης κινείται ελλειπτικά γύρω από τον Ήλιο.

Οι δύο πρώτες προτάσεις αποτελούν τις *προκείμενες* του συγκεκριμένου επιχιερήματος ενώ η τελευταία το *συμπέρασμα*. Ωστόσο επειδή δεν είναι αναγκαίο κάθε παραγωγικός συλλογισμός να αποτελεί εξήγηση προκύπτει το ερώτημα του αν υπάρχει τρόπος να διαπιστωθεί πότε τα παραγωγικά επιχειρήματα αποτελούν επιστημονικές εξηγήσεις.

Γι' αυτό οι Hempel και Oppenheim παραθέτουν τέσσερις συνθήκες επάρκειας για τις Π-Ν εξηγήσεις:

ΠΝ1. Το εξηγητέο πρέπει να είναι λογική συνέπεια του εξηγούντος, δηλαδή κάθε εξήγηση πρέπει να συνιστά ένα λογικά έγκυρο παραγωγικό επιχείρημα.

ΠΝ2. Στο εξηγούν πρέπει να εμπεριέχεται τουλάχιστον ένας γενικός νόμος, ο οποίος είναι αναγκαίος για τη συναγωγή του εξηγητέου. Ειδικότερα, αν ο νόμος ή οι νόμοι δεν υπήρχαν, τότε ο συλλογισμός δεν θα ήταν πλέον έγκυρος (χωρίς να προστεθούν νέες προκείμενες).

ΠΝ3. Το εξηγούν πρέπει να έχει εμπειρικό περιεχόμενο. Πρέπει δηλαδή να είναι δυνατός ο έλεγχός του μέσω της εμπειρίας (παρατήρηση ή πείραμα)

ΠΝ4. Οι προτάσεις που συνιστούν το εξηγούν πρέπει να είναι αληθείς.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα για να κατανοήσουμε πιο άμεσα την αξία του μοντέλου. Μας έχει συμβεί αρκετές φορές να προσπαθούμε να αφαιρέσουμε το μεταλλικό καπάκι από ένα γυάλινο δοχείο και αυτό να μην ξεκολλάει. Ωστόσο, αφού τοποθετήσουμε το δοχείο σε ζεστό νερό για λίγη ώρα το μεταλλικό καπάκι μπορεί εύκολα πλέον να αφαιρεθεί. Ουσιαστικά, αυτό συμβαίνει επειδή το μέταλλο έχει μεγαλύτερο συντελεστή θερμικής διαστολής σε σχέση με το γυαλί. Συνεπώς αυξάνοντας τη θερμοκρασία προκαλούμε μεγαλύτερη διαστολή στο καπάκι από ό,τι στο γυάλινο σώμα και σε συνδυασμό με το ότι το μέταλλο είναι καλός αγωγός της θερμότητας η θερμοκρασία του καπακιού για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα είναι μεγαλύτερη από αυτή του γυαλιού. Έτσι κατά τη θέρμανση του σύνθετου σώματος αυξάνει περισσότερο η διαφορά των δυο περιμέτρων με αποτέλεσμα να αρχίζει σταδιακά να χαλαρώνει το καπάκι από την υποδοχή και να είναι σε θέση τελικώς να αφαιρεθεί. Οργανώνοντας λοιπόν το συλλογισμό μας έχουμε τα παρακάτω:

1) Η θερμότητα τείνει να μεταφέρεται από ένα σώμα σε ένα άλλο με χαμηλότερη θερμοκρασία με το οποίο βρίσκεται σε επαφή.
2) Καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία ενός σώματος, αυξάνονται οι διαστάσεις του (όγκος) κατά το φαινόμενο της θερμικής διαστολής.
3) Το μέταλλο, ως καλός αγωγός της θερμότητας, έχει μεγαλύτερο συντελεστή θερμικής διαστολής σε σχέση με το γυαλί.
4) Το μεταλλικό καπάκι διαστέλλεται περισσότερο σε σχέση με το γυάλινο σώμα καθώς ρίχνουμε ζεστό νερό.

∴ Το μεταλλικό καπάκι χαλαρώνει και αφαιρείται από το γυάλινο δοχείο.

Το εξηγητέο, δηλαδή η δυνατότητα αφαίρεσης του μεταλλικού καπακιού από το δοχείο (που αρχικά ήταν αδύνατο), είναι το συμπέρασμα του επιχειρήματος. Οι προκείμενες απαρτίζουν το εξηγούν. Η πρώτη προκείμενη αφορά ένα νόμο της θερμοδυναμικής και πιο συγκεκριμένα τη διαπίστωση ότι η θερμότητα τείνει να ρέει από θερμότερα προς ψυχρότερα σώματα. Η δεύτερη προκείμενη αποτελεί επίσης ένα νόμο της φύσης (για τη θερμική διαστολή των σωμάτων). Οι υπόλοιπες προκείμενες διατυπώνουν τις προγενέστερες συνθήκες της περίπτωσης.[12] Το συμπέρασμα απορρέει έγκυρα από τις προκείμενες· επομένως, το επιχείρημα είναι λογικώς ορθό. Η απλή γραμμή που χωρίζει τις προκείμενες από το συμπέρασμα συμβολίζει μια σχέση παραγωγικής συναγωγής μεταξύ προκειμένων και συμπεράσματος. Προφανώς θεωρούμε ότι οι προτάσεις που διατυπώνουν νόμους ή προγενέστερες συνθήκες της περίπτωσης είναι αληθείς και επικυρωμένες από πλήθος εμπειρικών δεδομένων.

Όπως είναι φανερό, στο παράδειγμά μας πληρούνται οι συνθήκες επάρκειας των Hempel και Oppenheim. Οι τρεις πρώτες συνθήκες (ΠΝ1-3) μπορούν να θεωρηθούν *λογικές* συνθήκες, ενώ η τέταρτη (ΠΝ4) έχει *εμπειρικό* χαρακτήρα. Ένα επιχείρημα που ικανοποιεί και τις τέσσερις συνθήκες μπορούμε να πούμε ότι

[12] Σε μια λεπτομερέστερη ανασυγκρότηση η 4) μπορεί να εμφανιστεί ως ενδιάμεσο συμπέρασμα ενός εκτεταμένου επιχειρήματος.

συνιστά μια εξήγηση. Από την άλλη ένα επιχείρημα το οποίο τις τρεις πρώτες συνθήκες, δίχως την τέταρτη, αποτελεί μια *δυνάμει* εξήγηση. Σύμφωνα με τους Hempel και Oppenheim, εκτός από από επιμέρους συμβάντα είναι δυνατό να έχουμε παραγωγικές-νομολογικές εξηγήσεις γενικών νόμων. Ωστόσο οι ίδιοι παρόλο που ασχολήθηκαν και με παραγωγικές εξηγήσεις επιμέρους συμβάντων και με παραγωγικές εξηγήσεις γενικών νόμων απέφυγαν να περιγράψουν οριστικά τα χαρακτηριστικά των εξηγήσεων που αφορούν γενικούς νόμους.[13]

Δεν εντάσσονται όλες οι εξηγήσεις στο πλαίσιο του παραγωγικο-νομολογικού προτύπου. Μετά από λίγα χρόνια,ο Hempel συνειδητοποίησε ότι το μοντέλο αυτό θα έπρεπε να διευρυνθεί συμπεριλαμβάνοντας *στατιστικούς* νόμους. Αυτοί οι νόμοι (γενικεύσεις) αφορούν μόνο ένα ποσοστό των αντικειμένων μιας κατηγορίας. Για παράδειγμα, η πρόταση «Οι περισσότεροι καταναλωτές καφέ πάσχουν από αϋπνία» δηλώνει ότι ένα ποσοστό (μεγαλύτερο του 50%) των ανθρώπων που πίνουν καφέ δεν μπορεί να κοιμηθεί. Έτσι, ο Hempel πρότεινε μια θεωρία εξήγησης στατιστικού τύπου που συμπεριλαμβάνει και τα δυο είδη επιχειρημάτων (παραγωγικά και επαγωγικά). Οι δύο αυτοί τύποι εξήγησης είναι ο *παραγωγικο-στατιστικός* (Π-Σ) και ο *επαγωγικο-στατιστικός* (Ε-Σ).

Σε ό,τι αφορά το παραγωγικο-στατιστικό τύπο, τα εξηγητέα γεγονότα είναι στατιστικοί νόμοι που εξηγούνται με παραγωγική συναγωγική από ευρύτερους στατιστικούς νόμους. Η διαφορά ουσιαστικά από το παραγωγικο-νομολογικό μοντέλο είναι ότι το εξηγούν πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα στατιστικό νόμο και το εξηγητέο επιπλέον είναι ένας στατιστικός νόμος. Για παράδειγμα:

Σε ένα κανονικό νόμισμα η πιθανότητα να φέρουμε «γράμματα» σε μία ρίψη είναι ½.
Οι διάφορες ρίψεις αποτελούν στατιστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους γεγονότα.

∴ Η πιθανότητα να φέρουμε «γράμματα» σε καθεμία από τρεις διαδοχικές ρίψεις είναι 1/8.

[13] Ένας λόγος ήταν το *πρόβλημα των μη συναφών συζεύξεων* (problem of irrelevant conjuctions) που είχαν εντοπίσει και δεν ήξεραν πώς να αντιμετωπίσουν. Ας συμβολίσουμε με Ν συλλογικά τους νόμους της κίνησης μαζί με το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα και με Κ τους τρεις νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών. Αν θεωρήσουμε τους πλανήτες ως υλικά σημεία (γεωμετρικά σημεία με μάζα) και τον Ήλιο ως ένα γεωμετρικό κέντρο δύναμης με μάζα (που δρα χωρίς να δέχεται δράση), τότε από τους Ν μπορούμε να συναγάγουμε τους Κ. Σε αυτή την προσέγγιση, επομένως, οι Ν προσφέρουν μια Π-Ν εξήγηση των Κ. Όμως, έστω ότι με Φ συμβολίζουμε την υπόθεση του Freud ότι τα όνειρα είναι συμβολικές εκφράσεις επιθυμιών. Τότε από τη σύζευξη Ν&Φ μπορούμε επίσης να συναγάγουμε τους Κ. Αλλά δεν θα θέλαμε να πούμε ότι οι Ν&Φ παρέχουν μια Π-Ν εξήγηση των Κ. Ο Φ δεν είναι νοηματικά συναφής με το εξηγητέο Κ.

Ωστόσο, αν θελήσουμε να εξηγήσουμε κάποιο επιμέρους συμβάν με βάση κάποιο στατιστικό νόμο διαπιστώνουμε ότι δεν μπορούμε να οδηγηθούμε με παραγωγικό τρόπο από το εξηγούν στο εξηγητέο. Ο δεύτερος τύπος στατιστικής εξήγησης, το επαγωγικο-στατιστικό μοντέλο είναι αυτό που εξηγεί τα επιμέρους γεγονότα υπάγοντάς τα σε γενικότερους στατιστικούς νόμους. Ας παραθέσουμε ένα από τα γνωστά παραδείγματα του Hempel έτσι ώστε να κατανοήσουμε το συγκεκριμένο σχήμα.

Σχεδόν όλοι οι άνθρωποι με βακτηριακές μολύνσεις αναρρώνουν γρήγορα με τη χορήγηση πενικιλίνης.
Ο Νίκος Αναγνώστου είχε βακτηριακή μόλυνση.
Ο Νίκος Αναγνώστου έτυχε αγωγής με πενικιλίνη.

∴ Ο Νίκος Αναγνώστου θεραπεύτηκε γρήγορα. [r]

Στο παραπάνω παράδειγμα οι τρείς προκείμενες συναποτελούν το εξηγούν. Αναλυτικότερα, η πρώτη προκείμενη διατυπώνει ένα στατιστικό νόμο και οι άλλες δύο τις προγενέστερες συνθήκες της περίπτωσης. Το συμπέρασμα διατυπώνει το εξηγητέο γεγονός. Σε αυτό το πρότυπο, η αλήθεια του εξηγούντος καθιστά, όχι βέβαιη (όπως στην παραγωγή), αλλά περισσότερο πιθανή την αλήθεια του εξηγητέου. Εδώ η γραμμή απεικονίζει μια σχέση επαγωγικής στήριξης και το r την ισχύ στήριξης, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως η αριθμητική τιμή μιας πιθανότητας (>0,5) ή περιφραστικά με εκφράσεις όπως «αρκετά πιθανό», «σχεδόν βέβαιο» κ.ο.κ. Πιο συγκεκριμένα αποτελεί το μέτρο του βαθμού της λογικής αξιοπιστίας που προσφέρει το εξηγούν στο εξηγητέο μέρος.

Ωστόσο, ο ίδιος ο Hempel έφερε στο προσκήνιο ένα βασικό πρόβλημα που προέκυψε σε ό,τι αφορά τη στατιστική εξήγηση επιμέρους συμβάντων. Ας εξετάσουμε το προηγούμενο παράδειγμα με τον Νίκο Αναγνώστου. Είναι γεγονός ότι ορισμένα είδη βακτηριακών μολύνσεων είναι απρόσβλητα από την πενικιλίνη. Ειδικότερα, αν η μόλυνση του Νίκου Αναγνώστου προερχόταν από τα συγκεκριμένα είδη βακτηρίων, τότε η πιθανότητα γρήγορης ανάρρωσής του μετά από αγωγή με πενικιλίνη θα ήταν μικρή. Πιο συγκεκριμένα, θα μπορούσαμε να καταστρώσουμε το ακόλουθο επαγωγικό επιχείρημα:

Σχεδόν καμία από τις περιπτώσεις βακτηριακών μολύνσεων που είναι απρόσβλητες από την πενικιλίνη δεν θεραπεύεται γρήγορα με αγωγή με πενικιλίνη.
Ο Νίκος Αναγνώστου είχε βακτηριακή μόλυνση απρόσβλητη από την πενικιλίνη.
Ο Νίκος Αναγνώστου έτυχε αγωγής με πενικιλίνη.

∴ Ο Νίκος Αναγνώστου δεν θεραπεύτηκε γρήγορα. [q]

Παρατηρούμε οτι οι συγκεκριμένες προκείμενες είναι συμβατές με εκείνες του προηγούμενου επιχειρήματος – μπορούν, δηλαδή, να είναι όλες αληθείς. Παρ' όλα αυτά τα συμπεράσματά τους αντιφάσκουν. Το γεγονός αυτό είναι χαρακτηριστικό των επαγωγικών επιχειρημάτων και δεν μπορούμε να το συναντήσουμε σε παραγωγικούς συλλογισμούς καθώς σε κάθε περίπτωση δύο έγκυρων παραγωγών με αντιφατικά μεταξύ τους συμπεράσματα, οι προκείμενες πρέπει να είναι ασυμβίβαστες . Το πρόβλημα αυτό ο Hempel το ονόμασε *πρόβλημα αμφισημίας* των επαγωγικο-στατιστικών εξηγήσεων.

Ο ίδιος προσπάθησε να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της αμφισημίας εισάγοντας την *απαίτηση για μέγιστη εξιδείκευση* (requirement of maximal specifity, RMS). Με λίγα λόγια, προκειμένου να δομηθεί αποτελεσματικά μια Ε-Σ εξήγηση πρέπει να ληφθεί υπόψη όλη η σχετική γνώση ή πληροφορία που θα ήταν κατ' αρχήν διαθέσιμη προτού συμβεί το εξηγητέο.[14] Σε αυτό το σημείο μπορούμε να γενικεύσουμε τις συνθήκες που είχαμε αναφέρει για τπ Π-Ν μοντέλο με τρόπο ώστε να εφαρμόζονται και στο Ε-Σ:

Η1. Η εξήγηση πρέπει να αποτελεί ένα λογικώς ορθό παραγωγικό ή επαγωγικό επιχείρημα με συμπέρασμα το εξηγητέο.[15]
Η2. Το εξηγούν πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα γενικό νόμο, αναγκαίο για τη συναγωγή του εξηγητέου.
Η3. Το εξηγούν πρέπει να είναι ελέγξιμο με την εμπειρία (παρατήρηση, πείραμα).
Η4. Οι προτάσεις που συγκροτούν το εξηγούν πρέπει να είναι αληθείς.
Η5. Η εξήγηση πρέπει να ικανοποιεί την απαίτηση για μέγιστη εξιδείκευση.

Παρά την εφαρμοσιμότητα των παραπάνω προτύπων εξήγησης διαπιστώθηκε ότι υπάρχουν αρκετά σημεία στα οποία δυσλειτουργούν. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ορισμένες περιπτώσεις στις οποίες τα προαναφερθέντα μοντέλα εξήγησης

[14] «Σχετική» με την έννοια ότι η αλήθεια της επηρεάζει την πιθανότητα να συμβεί το εξηγητέο.
[15] Έτσι η αλήθεια του εξηγούντος ή εγγυάται ή αποδίδει υψηλή (τουλάχιστον 0,5) πιθανότητα στην αλήθεια του εξηγητέου. Συνεπώς η εξήγηση καθιστά το εξηγητέο *αναμενόμενο* και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε κατάλληλο πλαίσιο για την πρόβλεψή του. Πρόκειται για τη θέση της *συμμετρίας εξήγησης-πρόβλεψης*.

αποτυγχάνουν.

2.2 Κριτικές της κλασικής θεωρίας

Η πρόοδος στην φιλοσοφία της επιστήμης οφείλεται συχνά στην κατασκευή *αντιπαραδειγμάτων* και στη διασκευή ορισμών και αναλύσεων με σκοπό να συμπεριληφθούν τα αντιπαραδείγματα αυτά. Τα αντιπαραδείγματα στην κλασική θεωρία για την επιστημονική εξήγηση μπορούμε να τα διαχωρίσουμε σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη ανήκουν αυτά που φαίνεται να αποτελούν ικανοποιητικές εξηγήσεις αλλά δεν ικανοποιούν τα κριτήρια και τις προϋποθέσεις των μοντέλων, ενώ στη δεύτερη αυτά που μολονότι πληρούν τα κριτήρια των μοντέλων δεν θεωρούνται ικανοποιητικές επιστημονικές εξηγήσεις.

Στην πρώτη περίπτωση συναντάμε αρκετά αντιπαραδείγματα στις κοινωνικές αλλά και τις φυσικές επιστήμες – παραδείγματα ευρέως αποδεκτών εξηγήσεων που αποτυγχάνουν να ικανοποιήσουν τα κριτήρια των μοντέλων. Για το Π-Ν μοντέλο παραβιάζεται ειδικά η απαίτηση που σχετίζεται με την αναφορά νόμων (ΠΝ2 στη σελ. 26 παραπάνω). Για παράδειγμα, η εξήγηση του ότι η Βρετανία μπήκε στον Α' Παγκόσμιο Πόλεμο εναντίον της Γερμανίας δεν φαίνεται να εμπεριέχει κάποιο νόμο. Φανταστείτε ότι κάποιος κατασκευάζει ένα νόμο του τύπου «Όταν η Βρετανική κυριαρχία προστατεύεται από κάποια συνθήκη και αυτή καταπατάται, τότε κηρύσσεται πόλεμος εναντίον του παραβάτη». Η πρόταση αυτή, ακόμη και αν τη δεχθούμε ως αληθή, δεν είναι *νόμος* επειδή αφορά ένα συγκεκριμένο μέρος του κόσμου.[16] Επίσης ακόμη και αν αντικαταστήσουμε τη λέξη «Βρετανική» με κάτι πιο γενικό όπως «οποιαδήποτε εθνική», το αποτέλεσμα είναι γενικότερο αλλά δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω ισχυρισμός έστω και αν μπορεί να αποτελέσει εξήγηση ενός γεγονότος δεν εμπεριέχει το κριτήριο που αφορά την παρουσία κάποιου γενικού νόμου, απαραίτητου για τη συναγωγή του εξηγητέου. Επίσης, γενικεύοντας τον ισχυρισμό φαίνεται ότι ο ίδιος

[16] Η φιλοσοφία της επιστήμης δεν έχει καταλήξει σε μια κοινώς αποδεκτή άποψη για το τι είναι ένας *νόμος της φύσης*. Όμως μια από τις κοινώς αποδεκτές παραδοχές είναι ότι ένας *γνήσιος* νόμος της φύσης ισχύει σε όλο το σύμπαν και δεν αναφέρεται σε συγκεκριμένα άτομα, συγκεκριμένες χωροχρονικές τοποθεσίες κ.λπ. Σύμφωνα με αυτή την παραδοχή, ο «νόμος» του Γαλιλαίου για την ελεύθερη πτώση των σωμάτων *κοντά στην επιφάνεια της Γης* ($s \propto t^2$) δεν είναι γνήσιος νόμος της φύσης.

παύει πλέον να είναι αληθής καθώς δεν εκφράζει απαραίτητα την πολιτική ή τον τρόπο αντιμετώπισης σε περίπτωση καταπάτησης της συνθήκης *οποιασδήποτε* χώρας. Είναι γεγονός ότι στην πρώτη περίπτωση,η απουσία ενός νόμου δεν φαίνεται να επηρεάζει τον εξηγητικό χαρακτήρα του ισχυρισμού και στη δεύτερη παρά την προσθήκη του νόμου ο ισχυρισμός φαίνεται να μην ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Συνεπώς σε κάθε περίπτωση,το συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα επιβεβαιώνει ότι η απουσία νόμου ναι μεν δεν ικανοποιεί τα κριτήρια του Π-Ν μοντέλου εξήγησης αλλά δεν αναιρεί την εξήγηση αυτή καθεαυτή και από την άλλη η παρουσία του δεν εγγυάται ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Τα μοντέλα των Hempel και Oppenheim έχουν δεχτεί έντονη κριτική μέσα από την οποία δημιουργήθηκε η ανάγκη συγκρότησης εναλλακτικών μοντέλων εξήγησης. Το Π-Ν μοντέλο φαντάζει *δεσμευτικό* και ταυτόχρονα *φιλελεύθερο* σε ό,τι αφορά την αναγνώριση εξηγήσεων. Για τον πρώτο χαρακτηρισμό οι κριτικές εστιάστηκαν στην μη αναγκαιότητα ύπαρξης κάποιου φυσικού νόμου για να πραγματοποιηθεί η εξήγηση. Ας εξετάσουμε ένα άλλο απλό παράδειγμα. Αν επιθυμώ να υπογραμμίσω τις σημειώσεις μου με έναν πορτοκαλί υπογραμμιστή χρειάζομαι κάποιο νόμο ο οποίος να εξηγεί γιατί βγήκε πορτοκαλί μελάνι από τον υπογραμμιστή; Είναι, δηλαδή, αναγκαίο να παραθέσω *ρητά* ένα νόμο που να λέει ότι όλοι οι πορτοκαλί υπογραμμιστές όταν χρησιμοποιηθούν παράγουν μια πορτοκαλί περιοχή σε άσπρο χαρτί; Προφανώς, όχι. Ο Hempel δέχεται ότι προφανώς δεν είναι αναγκαία η ρητή παράθεση ενός τέτοιου τετριμμένου «νόμου». Απλώς το ρητό κομμάτι της εξήγησης δεν είναι παρά *μερική* εξήγηση. Μιλάμε για *μερική* εξήγηση επειδή ακριβώς δεν εμπεριέχει κάποιο νόμο, παρ' όλο που ικανοποιεί όλα τα υπόλοιπα κριτήρια.

Ο «υπερβολικά φιλελεύθερος» χαρακτήρας της κλασικής θεωρίας επιβεβαιώνεται από τη δεύτερη κατηγορία αντιπαραδειγμάτων, τα οποία ενώ πληρούν τις συνθήκες του Hempel δεν φαίνεται να αποτελούν γνήσιες εξηγήσεις. Θα αναφέρουμε στη συνέχεια ορισμένα κλασικά παραδείγματα που προβληματίζουν σε ό,τι αφορά την λειτουργικότητα τόσο του Π-Ν όσο και του Ε-Σ προτύπου.

Π.1. Το κοντάρι και η σκιά του. Έστω ότι στήνουμε ένα κοντάρι ύψους 1 μέτρου κάθετα στο έδαφος και ο Ήλιος στον ουρανό βρίσκεται υπό γωνία ανύψωσης 45 μοιρών. Το κοντάρι σχηματίζει μια σκιά μήκους 1 μέτρου. Η απάντηση στο γιατί η σκιά έχει το συγκεκριμένο μήκος είναι σχεδόν άμεση. Το ύψος του κονταριού, η γωνία που σχηματίζουν οι ηλιακές ακτίνες με το έδαφος, η ευθεία διάδοση του φωτός και η χρήση απλής γεωμετρίας (τριγωνομετρίας) βοηθούν στο να υπολογίσουμε το μήκος της σκιάς. Μέχρι στιγμής έχουμε μια Π-Ν εξήγηση. Όμως, στην ερώτηση «Γιατί το κοντάρι έχει ύψος 1 μέτρο;» θα μπορούσαμε να απαντήσουμε και να δώσουμε κάποια εξήγηση λαμβάνοντας υπόψιν μας το μήκος της σκιάς και την ανύψωση του Ηλίου; Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο επιχείρημα που ταιριάζει στο Π-Ν πρότυπο:

Το φώς ταξιδεύει σε ευθείες γραμμές (νόμος)
Ο ήλιος εκπέμπει φώς υπό γωνία ανύψωσης 45 μοιρών σε σχέση με το έδαφος και το κοντάρι είναι κάθετο σε αυτό.
Η σκιά του κονταριού έχει ύψος 1 μέτρο.
Ένα ορθογωνιο τρίγωνο με οξεία γωνία 45 μοιρών είναι ισοσκελές.

∴ Το ύψος του κονταριού είναι 1 μέτρο.

Παρ' όλο που φαίνεται αυτή η απόπειρα να ακολουθεί τις συνθήκες του Π-Ν προτύπου, σαφώς δεν αποτελεί επαρκή εξήγηση για το ύψος του κονταριού.Εδώ υπάρχει μια σύγχυση αναφορικά με το αίτιο και το αποτέλεσμα ενός γεγονότος. Πράγματι, μπορούμε να εξηγήσουμε επαρκώς την σκιά του κονταριού που δημιουργείται από την ανύψωση του ήλιου και το ίδιο το ύψος του. Η σκιά στην παρούσα περίπτωση είναι αποτέλεσμα αυτών των δύο αιτιακών παραγόντων. Ωστόσο δεν φαίνεται σωστό να εξηγούμε το ύψος του κονταριού με δεδομένα το μήκος της σκιάς και την ανύψωση του ήλιου. Και αυτό γιατί το μήκος της σκιάς είναι το αποτέλεσμα του ύψους του κονταριού και της ηλιακής ανύψωσης και δεν ανήκει στο αιτιακό μέρος που αφορά το ύψος του κονταριού. Συνοψίζοντας, δεν είναι ορθό να εξηγούμε αιτίες (ύψος κονταριού, ανύψωση Ηλίου) με βάση τα αποτελέσματά τους (σκιά κονταριού). Οι προγενέστερες συνθήκες που παρουσιάζονται στο εξηγούν οφείλουν να έχουν αιτιακή σχέση με το εξηγητέο.

Π.2. Ο άνδρας και το χάπι. Έστω ότι ένας άνδρας παίρνει τακτικά αντισυλληπτικά χάπια και δεν μένει έγκυος. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα χάπια απέτρεψαν την εγκυμοσύνη; Μπορούμε πάντως να κατασκευάσουμε ένα επιχείρημα που ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του Π-Ν μοντέλου με συμπέρασμα ότι ο άντρας δεν έμεινε έγκυος. Από μια πλευρά, το Π-Ν επιχείρημα φαίνεται τεχνικά ορθό γιατί ο άνδρας όντως πήρε τα χάπια και στην πραγματικότητα τα χάπια αποτρέπουν την εγκυμοσύνη (υποθέτουμε με 100% βεβαιότητα). Προφανώς, όμως, μιας και οι άνδρες δεν μένουν έγκυοι ούτως ή άλλως, η ίδια η χορήγηση τέτοιου είδους χαπιών σε άντρες δεν εξηγεί τίποτα. Αυτό το παράδειγμα μάς δείχνει ότι μπορεί κανείς να συγκροτήσει ένα Π-Ν επιχείρημα με αληθείς προκείμενες, χωρίς όμως αυτές να είναι σχετικές με το εξηγητέο ώστε να μπορούν να συμβάλουν σε μια γνήσια εξηγησή του. Απαιτείται να ορίσουμε ως επιπλέον προϋπόθεση ότι οι προγενέστερες συνθήκες και νόμοι («άνδρας», «χάπια») πρέπει είναι σχετικές με το εξηγητέο («αποφυγή εγκυμοσύνης»).

Σε ό,τι αφορά το Ε-Σ πρότυπο υπήρξαν ποικίλες κριτικές γύρω από τις έννοιες της εξήγησης και της πρόβλεψης. Ο Hempel, σχετικά με τα δομικά χαρακτηριστικά της εξήγησης και της πρόβλεψης, υποστήριξε τα εξής: (α) κάθε επαρκής εξήγηση αποτελεί μια *εν δυνάμει* πρόβλεψη και (β) κάθε επαρκής πρόβλεψη αποτελεί μια *εν δυνάμει* εξήγηση.[17] Εφόσον, κατά Hempel, η επιστημονική εξήγηση ουσιαστικά είναι ένα επιχείρημα, αυτό σημαίνει ότι το εξηγητέο μπορεί να προκύψει με παραγωγικό ή επαγωγικό τρόπο από το εξηγούν. Αν γνωρίζουμε ήδη το εξηγητέο, το επιχείρημα είναι μια εξήγηση . Αντίθετα, αν το εξηγητέο δεν είναι γνωστό (γιατί έπεται χρονικά), τότε το επιχείρημα είναι μια πρόβλεψη.

Ωστόσο, τα δομικά χαρακτηριστικά της εξήγησης και της πρόβλεψης αποτέλεσαν αντικείμενο έντονης κριτικής από αρκετούς φιλοσόφους. Ας δούμε ένα διαφωτιστικό επιχείρημα του Scriven που αφορά ένα συφιλιδικό δήμαρχο. Ας φανταστούμε ότι ο κ. Ιωαννίδης, δήμαρχος μιας μικρής πόλης, πάσχει από ένα

[17] Βλ. και υποσημείωση 13 παραπάνω.

είδος πάρεσης. Εφόσον η πάρεση προκαλείται μόνο από την (τριτογενή) σύφιλη και ο δήμαρχος είναι συφιλιδικός εδώ και χρόνια χωρίς να λάβει κατάλληλη θεραπεία, η χρόνια σύφιλη εξηγεί την πάρεση. Παρ' όλα αυτά, η πιθανότητα του να αναπτύξει κάποιος πάρεση με μη θεραπεύσιμη σύφιλη είναι χαμηλή (το πολύ 10%, δηλαδή το 90% των συφιλιδικών δεν είναι ευπαθείς στην πάρεση). Συνεπώς, αν χρησιμοποιήσουμε στατιστικό συλλογισμό, η πρόβλεψη θα έπρεπε να ήταν «Ο κ. Ιωαννίδης δεν θα εμφανίσει πάρεση». Αυτό το αντιπαράδειγμα δείχνει ότι η εξήγηση και η πρόβλεψη έχουν διαφορετική φύση και ότι ουσιαστικά δεν υπάρχουν δομικά χαρακτηριστικά που να περιγράφουν ισομορφικά αυτές τις έννοιες.

Ο Scriven (1959) καθώς και άλλοι φιλόσοφοι τονίζουν ότι η θεωρία της εξέλιξης μπορεί να εξηγήσει, αλλά όχι να προβλέψει, την ποικιλία των ειδών.Για παράδειγμα,μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί οι λεοπαρδάλεις τρέχουν τόσο γρήγορα ή γιατί η καμηλοπαρδάλεις έχουν μακρύ λαιμό με βάση την εξελικτική θεωρία: είναι αποτελέσματα της φυσικής «επιλογής». Όμως η θεωρία της εξέλιξης δεν μπορεί να μας πει πώς θα μοιάζουν τα μελλοντικά είδη. Συνεπώς η θεωρία της εξέλιξης μπορεί να εξηγεί αλλα όχι να προβλέπει.

Επιπρόσθετα, ο Scriven υποστηρίζει ότι κάποια γεγονότα μπορούν μόνο να εξηγηθούν σε μεταγενέστερο στάδιο χωρίς να μπορούν να είναι προβλέψιμα σε πρώιμο στάδιο. Παραδείγματος χάριν, συνήθως μελετάμε τα αίτια για να εξηγήσουμε την κατάρρευση μιας γέφυρας αφότου αυτή έχει συμβεί. Δεν είναι εφικτό να προβλέψουμε την πτώση της γέφυρας από πρίν. Τα αεροπορικά δυστυχήματα συνήθως έχουν πολλά θύματα. Άρα αν γινόταν να τα προβλέψουμε προτού συμβούν, προφανώς θα αποφεύγαμε τις όποιες τραγωδίες αποτελεσματικά. Ωστόσο, το μόνο που μπορούμε να κάνουμε σε πραγματικές συνθήκες είναι να δίνουμε καθοριστικές εξηγήσεις για τις καταστροφές που προκλήθηκαν. Όσον αφορά τέτοια γεγονότα, οι εξηγήσεις δεν ταυτίζονται με τις προβλέψεις.

Ο Hempel προτείνει επίσης ως συνθήκη για το Ε-Σ πρότυπο την απαίτηση για μέγιστη εξιδείκευση (RMS) – επιλογή που αμφισβητείται από τον Salmon[18]. Ας θεωρήσουμε ότι το αλάτι έχει μια υψηλή πιθανότητα (περίπου 95%) να διαλυθεί σε κρύο νερό μέσα σε 5 λεπτά. Μπορούμε να κάνουμε κάποια «ξόρκια διάλυσης» του

[18] Βλ.Salmon (1984, σελ. 92).

αλατιού (Kyburg 1965), μετατρέποντάς το έτσι σε «μαγεμένο αλάτι», και έπειτα να κατασκευάσουμε μια γενίκευση ως νόμο της μορφής «Το μαγεμένο αλάτι έχει υψηλή πιθανότητα να διαλυθεί σε κρύο νερό μέσα σε 5 λεπτά». Και ας υποθέσουμε ότι έχουμε να εξηγήσουμε το γεγονός ότι κάποια ποσότητα μαγεμένου αλατιού διαλύθηκε σε κρύο νερό. Σύμφωνα με την απαίτηση για μέγιστη εξιδείκευση, πρέπει να διευκρινίσουμε ότι το αλάτι είναι πλέον μαγεμένο αλάτι. Έτσι η εξήγηση θα έχει ως εξής:

Το μαγεμένο αλάτι έχει υψηλή πιθανότητα να διαλυθεί σε κρύο νερό μέσα σε 5 λεπτά.
Το μαγεμένο αλάτι έπεσε σε κρύο νερό.

∴ Το μαγεμένο αλάτι διαλύθηκε εντός 5 λεπτών.

Όπως είναι εμφανές, όμως, αυτή δεν αποτελεί μια ικανοποιητική επιστημονική εξήγηση. Γι' αυτό το λόγο ο Salmon ισχυρίζεται ότι αυτή η απαίτηση του Hempel για μέγιστη εξιδείκευση δεν αρκεί. Μάλιστα, υποστηρίζει ότι θα ήταν πιο ορθή και κατάλληλη για το μοντέλο μια απαίτηση που να αφορά τη *μέγιστη* κλάση (σύνολο) της μέγιστης εξιδείκευσης. Πιο συγκεκριμένα, αφού τόσο το κανονικό όσο και το μαγεμένο αλάτι διαλύονται εντός 5 λεπτών, θα πρέπει να επιλέξουμε το μέγιστο σύνολο της μέγιστης εξιδείκευσης (δηλαδή, το «αλάτι») αντί το μικρότερο (δηλαδή, το «μαγεμένο αλάτι»).

Παρ' όλα αυτά, ο ίδιος ο Salmon διαπιστώνει ότι αυτή η διόρθωση δεν βοηθά ιδιαίτερα καθώς δεν φαίνεται πάντα εύκολο να επιλέξουμε τη σωστή μέγιστη κλάση της μέγιστης εξιδείκευσης. Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι το αλάτι και η μαγειρική σόδα έχουν υψηλή πιθανότητα να διαλυθούν σε κρύο νερό μέσα σε 5 λεπτά. Όταν εξηγούμε τη διάλυση του μαγεμένου αλατιού, πρέπει να επιλέξουμε «το αλάτι και τη μαγειρική σόδα» ως τη μέγιστη κλάση της μέγιστης εξιδείκευσης; Επιλέγοντας αυτό, θα σήμαινε ότι εξηγούμε τη διάλυση του μαγεμένου αλατιού με τη φράση «Το αλάτι και η μαγειρική σόδα έχουν μεγάλη πιθανότητα να διαλυθούν σε κρύο νερό μέσα σε 5 λεπτά». Προφανώς αυτό αντιφάσκει με τη συνήθη επιστημονική πρακτική. Έτσι, καθώς το μοντέλο εξήγησης του Hempel έχει δεχτεί κριτικές απασχολώντας διάφορους φιλοσόφους για τη βιωσιμότητά του, αρκετοί φιλόσοφοι της επιστήμης προσπάθησαν να δημιουργήσουν νέες προσεγγίσεις και πρότυπα επιστημονικής εξήγησης.

2.3 Ενοποίηση και αιτιότητα

Μέχρι στιγμής έχουμε αναφέρει και αναλύσει οπτικές του τι είναι και σε τι συνίσταται η επιστημονική εξήγηση παραθέτοντας κριτικές που ασκήθηκαν στο πλαίσιο της σχετικής φιλοσοφικής συζήτησης. Στη συγκεκριμένη ενότητα θα κάνουμε λόγο για δύο σημαντικές παραδόσεις που έχουν παίξει καθοριστικό ρόλο τόσο στην επιστημονική εξήγηση όσο και στην επιστημονική εξέλιξη αυτή καθεαυτή.

Η πρώτη είναι η *ενοποιητική* προσέγγιση (unification). Σύμφωνα με αυτή, πολύ γενικά, ένα γεγονός εξηγείται με υπαγωγή σε μια θεωρία που ενοποιεί ποικιλόμορφα φαινόμενα και δείχνοντας με αυτό τον τρόπο ότι το γεγονός είναι μέρος ενός πολύ γενικού, ίσως εντελώς διάχυτου, μοτίβου γεγονότων στο σύμπαν. Στο αρτιότερα ανεπτυγμένο ενοποιητικό σύστημα, ένα γεγονός εξηγείται με παραγωγικό τρόπο χρησιμοποιώντας τη θεωρία η οποία ενώνει τα φαινόμενα πιο αποτελεσματικά από οποιαδήποτε άλλη. Αυτή η ενοποιητική θεωρία δύναται να περιέχει αρκετά μέρη και να συνδυάζει αρκετές επιστήμες όπως η φυσική, η βιολογία, η ψυχολογία κ.λπ.

Ο Michael Friedman (1974) προσπάθησε να αναλύσει την ιδέα της ενοποίησης στην επιστήμη. Ισχυρίστηκε ότι κατανόησή μας του φυσικού κόσμου αυξάνεται όσο μειώνεται το πλήθος των ανεξάρτητα αποδεκτών νομοειδών προτάσεων[19] που χρειαζόμαστε προκειμένου να περιγράψουμε τον κόσμο. Αλλά η αυστηρή επεξήγηση αυτού του ισχυρισμού με τη βοήθεια της τυπικής λογικής αποδείχθηκε δύσκολο εγχείρημα.

Ο Salmon, αναφερόμενος σε αυτή την άποψη, έρχεται να προσθέσει ότι αυτή η συστηματική ενοποίηση της επιστημονικής γνώσης δίνει μια περιεκτική εικόνα του κόσμου αντιπροσωπεύοντας ταυτόχρονα ένα κύριο χαρακτηριστικό της επιστημονικής εξήγησης. Αναφέρει χαρακτηριστικά ότι «είναι η ιδέα ότι καταλαβαίνουμε τι γίνεται στον κόσμο γύρω μας αν μπορούμε να τον κάνουμε να

[19] Μια πρόταση ονομάζεται *νομοειδής* (law-like) αν έχει όλα τα χαρακτηριστικά ενός νόμου της φύσης (όποια και αν είναι αυτά) εκτός ίσως από την αλήθεια. Ο όρος χρησιμοποιείται γιατί ενδέχεται να μην γνωρίσουμε ποτέ με βεβαιότητα ποιοι είναι οι πραγματικοί νόμοι της φύσης που κυβερνούν τον κόσμο μας.

ταιριάζει με ένα περιεκτικό κοσμοείδωλο» [20]. Πιο συγκεκριμένα, μια επιστημονική εξήγηση είναι ικανοποιητική αν για την περιγραφή του συγκεκριμένουμε εξηγητέου κάνουμε αναγωγή σε κάτι ευρύτερο από αυτό. Αυτό μπορεί να είναι ένα σύνολο που εμπεριέχει όλα τα χαρακτηριστικά και τις ιδιομορφίες του φαινομένου που μελετάμε, ένα σύνολο ιδιοτήτων, ένα σύνολο κανόνων ή νόμων κ.λπ. Για τον Friedman αυτή είναι μια *καθολική* σύλληψη της εξήγησης.

Αυτή η βασική ιδέα, ότι η έννοια και αξία της εξήγησης έγκειται στον συγκερασμό των φαινομένων σε μια συνεκτική δομή, έχει αναλυθεί και βελτιωθεί σε εντυπωσιακό βαθμό από τον Philip Kitcher (1976, 1981). Κατά τον Kitcher, η κατανόησή μας του φυσικού κόσμου αυξάνεται όσο μειώνεται το πλήθος των ανόμοιων εξηγητικών σχημάτων που χρειαζόμαστε προκειμένου να εξηγήσουμε τα φαινόμενα του κόσμου. Ωστόσο, και αυτός ο ισχυρισμός δύσκολα επεξηγείται τυπικά.

Ανεξάρτητα πάντως από τις σημαντικές τεχνικές δυσκολίες, η βασική ιδέα της ενοποίησης είναι ότι η επιστημονική *κατανόηση* αυξάνεται με την ένταξη μεγάλου εύρους φαινομένων σε ένα ενιαίο εξηγητικό πλαίσιο. Η ενοποίηση παρουσιάζει συνδέσεις ή σχέσεις μεταξύ φαινομένων που σε πρωταρχικό στάδιο φάνταζαν ασυσχέτιστα και αυτό είναι κάτι το οποίο καθιστά ικανοποιητική μια επιστημονική εξήγηση. Η διατύπωση νόμων και η εξήγηση ποικίλων φαινομένων και ιδιομορφιών με βάση αυτούς αποτελεί αναποσπαστο στοιχείο διάφορων επιστημών και ιδιαίτερα της θεωρητικής φυσικής. Χαρακτηριστικά παραδείγματα με ενοποιητικό χαρακτήρα συναντάμε στη *νευτώνεια σύνθεση* που συμπεριέλαβε επίγειες και ουράνιες κίνησεις σωμάτων καθώς και στη θεωρία του Maxwell που συμπεριέλαβε ηλεκτρικά, μαγνητικά και οπτικά φανόμενα. Το ερώτημα-κλειδί όμως είναι αν η εύληπτη ιδέα (ή ιδέες) της ενοποίησης μπορεί να γίνει πιο ακριβής με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να εκτιμάμε ποσοτικά τα χαρακτηριστικά που πιστεύουμε ότι πρέπει να έχουν οι ικανοποιητικές εξηγήσεις.

Κατά την *αιτιακή* προσέγγιση (causality), από την άλλη, αυτό που εξηγεί ένα γεγονός είναι η «αιτιακή» συγκρότηση και ιστορία του γεγονότος. Η ιδέα της «αιτιακής» συγκρότησης και ιστορίας, ωστόσο, φαίνεται σχετικά ασαφής καθώς δεν

[20] Ο Salmon (1984, σελ. 39) αναφέρει τη συγκεκριμένη άποψη αποδεχόμενος τον προαναφερθέντα ισχυρισμό του Friedman.Βλ. και υποσημείωση 18

υπάρχει κάποια συμφωνία για το τι ακριβώς είναι ή σε τι συνίσταται η αιτιότητα. Το βασικό στοιχείο για την αιτιακή προσέγγιση είναι η *αναγνώριση* και *ταυτοποίηση* των αιτίων (*μηχανισμών*): η πορεία της εξήγησης να συμβαίνει παράλληλα με την πορεία της αιτιότητας. Όπως είχαμε δει παραπάνω, το ύψος του κονταριού εξηγεί το μήκος της σκιάς αλλά το μήκος της σκιάς δεν εξηγεί το ύψος του κονταριού. Τούτη η εξηγητική ασυμμετρία αντικατοπτρίζει μια αιτιακή ασυμμετρία. Λαμβάνοντας υπόψιν τους αυτή την ασυμμετρία, οι υποστηρικτές της αιτιακής προσέγγισης υποστηρίζουν ότι η αιτιότητα είναι θεμελιώδες συστατικό μια επιτυχημένης επιστημονικής εξήγησης.

Σε πολλές περιπτώσεις, το να βρεί κανείς την εξήγηση ενός συμβάντος ισοδυναμεί απλώς με το να βρεί τις αιτίες. Στο παράδειγμα με την κατάρρευση της γέφυρας γνωρίζοντας τα ακριβή αίτια της πτώσης μπορούμε ταυτόχρονα να εξηγήσουμε και την πτώση αυτή καθεαυτή. Άλλες φορές αναζητούμε αιτιακές εξηγήσεις για να προσπαθήσουμε να αποφύγουμε τραγωδίες στο μέλλον, όπως στο παράδειγμα με το αεροπορικό δυστύχημα.

Στην απλούστερη περίπτωση, η γενική δήλωση που βεβαιώνει μια αιτιακή σχέση μεταξύ δύο γεγονότων Α και Β είναι ισοδύναμη με την πρόταση που δηλώνει ότι σε οποιαδήποτε περίσταση συμβαίνει το γεγονός Α τότε αυτή θα συνοδεύεται με την πραγμάτωση του γεγονότος Β. Ειδικότερα, το Α αποτελεί *αίτιο* του Β αν το Α ξεκινά ή επιφέρει κάποια αλλαγή σε κάποια κατάσταση που σχετίζεται με το Β. Λέγοντας λοιπόν ότι το Α προκαλεί το Β, όπως αναφέρει ο Scriven[21], είναι όμοιο με το να πούμε ότι κάτω από *συγκεκριμένες συνθήκες* το γεγονός Α θα ακολουθείται από το Β. Αν αυτές οι *συγκεκριμένες συνθήκες* δεν μπορούν να προσδιοριστούν, τουλάχιστον σε ένα ικανοποιητικό βαθμό, η οποιαδήποτε ανάλυση που θα ακολουθήσει δεν μπορεί να μας δώσει ότι το Α προκαλεί το γεγονός Β.

Για περιπτώσεις στις οποίες έχουμε προτάσεις που αφορούν μεμονωμένα συμβάντα έχουμε παρόμοιες παρατηρήσεις. Για παράδειγμα, η πρόταση «Ο θάνατος του κ. Μπέκα προκλήθηκε από υπερβολική δόση ενός ηρεμιστικού φαρμάκου» σίγουρα προϋποθέτει για την εξηγητική της επάρκεια μια γενίκευση και, συγκεκριμένα, μια δήλωση που εκφράζει μια γενική αιτιακή σχέση μεταξύ δυο

[21] Scriven (1958, σελ. 185).

τύπων γεγονότων: ενός ατόμου που έλαβε υπερβολική δόση ηρεμιστικών και του θανάτου αυτού του ατόμου.

Ας θυμηθούμε τώρα λίγο το παράδειγμα που αναφέραμε στο Π-Ν μοντέλο εξήγησης με το καπάκι του δοχείου. Σε αυτό το παράδειγμα, μπορούμε να πούμε ότι η διαστολή του καπακιού προκλήθηκε από την εμβύθισή του σε ζεστό νερό. Αιτιακές αποδόσεις τέτοιας μορφής προϋποθέτουν την ύπαρξη συγκεκριμένων νόμων όπως «Οποιοδήποτε μέταλλο θερμαίνεται με συνεχή ένταση διαστέλλεται». Εδώ παρατηρούμε ότι έχουμε τόσο στοιχεία που υποδηλώνουν *ενοποίηση* όσο και *αιτιότητα*. Η έκφραση «οποιοδήποτε μέταλλο» εμπεριέχει ουσιαστικά μια γενίκευση και ταυτόχρονα αποτελεί ένα νόμο – γεγονός που μας επιτρέπει να κάνουμε λόγο για ενοποίηση. Από την άλλη, μπορούμε να κατανοήσουμε τη διαστολή καθεαυτή ως *αποτέλεσμα* της θέρμανσης του μετάλλου. Με βάση αυτά που προαναφέραμε, μπορούμε έτσι να ισχυριστούμε ότι η παραπάνω πρόταση εκφράζει μια αιτιακή σχέση μεταξύ των δύο αυτών τύπων συμβάντων.

Συχνά, όταν προσπαθούμε να εντοπίσουμε αιτιακές εξηγήσεις για διάφορα γεγονότα, πρέπει να αναζητήσουμε συμβάντα τα οποία δεν είναι άμεσα αντιληπτά από τις ανθρώπινες αισθήσεις τουλάχιστον χωρίς κάποια ενδελεχή μελέτη. Για παράδειγμα, για να κατανοήσει κάποιος τη νόσο του AIDS πρέπει να ασχοληθεί και να πληροφορηθεί σχετικά με κύτταρα και ιούς. Για να είμαστε σε θέση να εξηγήσουμε τη μετάδοση χαρακτηριστικών από τους γονείς στους απογόνους χρειαζόμαστε γνώσεις για το DNA. Συνεπώς, όταν κατασκευάζουμε αιτιακές εξηγήσεις, προσπαθούμε να ανακαλύψουμε (κρυμμένους ή λανθάνοντες) μηχανισμούς, οι οποίοι είναι αιτιακά υπεύθυνοι για τα γεγονότα που επιζητούν εξήγηση. Αυτές οι αναζητήσεις συγκροτούν μια μεγάλη παράδοση στα πλαίσια της επιστημονικής εξήγησης, την *αιτιακή-μηχανιστική* (causal-mechanical tradition).

Είναι ενδιαφέρον να αναζητήσουμε το κοινό σημείο των δύο αυτών παραδόσεων, της ενοποίησης και της αιτιακής-μηχανιστικής παράδοσης, το σημείο στο οποίο συναντώνται. Όταν κατορθώσουμε και βρούμε τα αίτια ενός γεγονότος, το αποτέλεσμα είναι συχνά η ανακάλυψη ενός πλήθους κανόνων ή μηχανισμών που διέπουν ή συγκροτούν ένα ευρύ πεδίο φαινομένων. Με λίγα λόγια, η εύρεση του γιατί συμβαίνει ένα φαινόμενο μπορεί ταυτοχρόνως να συντελέσει και στην ανακάλυψη ενός κανόνα ή μηχανισμού που το διέπει ή που κρύβεται πίσω από αυτό. Η εξήγηση διαφορετικών φαινομένων με βάση κοινούς μηχανισμούς συντελεί στη *θεωρητική* ενοποίηση. Η ανακάλυψη της διπλής έλικας του DNA είχε ως αποτέλεσμα την ενοποίηση βιολογίας, χημείας, βιοιατρικής. Η ανακάλυψη των βαρυτικών κυμάτων είχε ως αποτέλεσμα τη μείζονα ενοποίηση διάφορων κλάδων όπως η αστρονομία, η κοσμολογία και η θεωρητική φυσική.

Ωστόσο, καθεμιά από τις παραπάνω παραδόσεις αντιμετωπίζει σημαντικές δυσκολίες όσον αφορά την αυστηρή επεξήγηση της έννοιας της επιστημονικής εξήγησης. Η ενοποίηση, όπως είδαμε, αντιμετωπίζει το πρόβλημα του να μετρήσει κανείς το πλήθος των ανεξάρτητα αποδεκτών νομοειδών προτάσεων που χρειαζόμαστε προκειμένου να περιγράψουμε τον κόσμο. Μια πτυχή του προβλήματος πηγάζει από το πρόβλημα των μη συναφών συζεύξεων που δεν ήξεραν πώς να αντιμετωπίσουν οι Hempel και Oppenheim (βλ. υποσημείωση 11 παραπάνω). Οι τεχνικές δυσκολίες είναι πολλές. Μια αφορά το ακριβές περιεχόμενο του όρου «νομοειδής πρόταση». Μια άλλη έγκειται στο ότι με μία ή δυο προτάσεις πρέπει να καταστήσουμε κάτι πλήρως κατανοητό και ταυτόχρονα αυτές οι προτάσεις πρέπει να έχουν καθολικό χαρακτήρα, να είναι τόσο γενικές που να καλύπτουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Η αιτιακή-μηχανιστική παράδοση αντιμετωπίζει εξίσου ουσιώδη προβλήματα. Οι φιλόσοφοι δεν έχουν συμφωνήσει στο περιεχόμενο του όρου «αιτιότητα». Δεν είναι καν σαφές ότι υπάρχει μόνο μία έννοια αιτιότητας. Επίσης η δυνατότητα γνώσης αιτιακών σχέσεων, όπως τη διερεύνησε ο David Hume τον 18ο αιώνα, αμφισβητείται. Το βασικό πρόβλημα είναι το ότι φαντάζει αδύνατο να προσεγγίσουμε και να προσδιορίσουμε τη *σύνδεση* αίτιου και αποτελέσματος. Αρκετοί φιλόσοφοι τόνισαν τη συγκεκριμένη δυσκολία και είχαν αμφιβολίες για το πόσο μπορούμε να ενσωματώνουμε αιτιακούς ισχυρισμούς στις επιστημονικές εξηγήσεις.

Παρ’ όλα αυτά, οι υπέρμαχοι της αιτιακής-μηχανιστικής παράδοσης εστίασαν στις παραπάνω δυσκολίες δίνοντας βάση περισσότερο στο πώς μπορεί η επιστήμη να συνδέσει αποτελεσματικά το αίτιο και το αποτέλεσμα. Πράγματι, η επιστημονική γνώση ίσως διαφωτίσει πιο άμεσα το ζήτημα. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι το αλάτι συνήθως διαλύεται στο νερό, αλλά ο ακριβής λόγος ουσιαστικά μας δίνεται από τη χημεία. Ειδικότερα, γνωρίζουμε ότι κάποιες χημικές ουσίες διαλύονται, άλλες καίγονται, άλλες εκρήγνυνται, άλλες προσφέρονται για διατροφή ενώ άλλες είναι δηλητηριώδεις για τους ανθρώπους ή τα ζώα. Όλες αυτές οι ιδιότητες μπορούν τελικά να εξηγηθούν.

Είναι γεγονός ότι η επιστήμη κάνει συχνά αναφορές σε οντότητες που δεν μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε ή να παρατηρήσουμε όπως τα άτομα, τα νετρόνια, οι αλυσίδες DNA και άλλα «στοιχεία» που παίζουν καθοριστικό ρόλο σε επιστημονικές εξηγήσεις. Όλα αυτά τα «στοιχεία», παρότι φαίνονται να αποτελούν θεωρητικές οντότητες, δεν θεωρούνται σε καμία περίπτωση λιγότερο πραγματικά.

Ένας οπαδός του θετικισμού ίσως απέρριπτε τα παραπάνω. Γι' αυτόν, εφόσον οι αιτιακές σχέσεις μεταξύ συμβάντων είναι ζητήματα που αφορούν θεωρίες οι οποίες θέτουν μη παρατηρήσιμα αντικείμενα ή «στοιχεία», οποιαδήποτε συζήτηση περί αιτιότητας θα ισοδυναμούσε με την είσοδο της μεταφυσικής στην επιστήμη. Κανένας δεν έχει δεί ένα νετρίνο ή την ίδια τη βαρύτητα. Το μόνο που βλέπει είναι τα φαινόμενα που θεωρούνται αποτελέσματα τέτοιων οντοτήτων. Οπότε γιατί να μην ισχυριστούμε ότι τέτοιες οντότητες έχουν καθεστώς ανάλογο με εκείνο των θεοτήτων; Γιατί να δεχθούμε ότι τέτοιες οντότητες υπάρχουν;

Για έναν επιστημονικό ρεαλιστή, η απάντηση είναι σαφής. Η επιστήμη προοδεύει δημιουργώντας θεωρίες οι οποίες αν είναι αληθείς ταυτόχρονα προσφέρουν και τις καλύτερες δυνατές εξηγήσεις των φαινομένων. Οι θεωρίες αυτές προβλέπουν οντότητες και διαδικασίες που θεωρούνται πραγματικές στο βαθμό που προϋποτίθενται από τις καλύτερες δυνατές εξηγήσεις. Η κεντρική ιδέα είναι ότι πρέπει να δεσμευόμαστε οντολογικά σε όλες και μόνον εκείνες τις οντότητες που είναι απαραίτητες για τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες.

Όπως είναι αναμενόμενο αντιρεαλιστές διαφόρων ειδών, έχουν πολλά να αντιτάξουν στα παραπάνω. Όμως δεν θα επιμείνουμε στο σημείο αυτό. Θα προχωρήσουμε σε λίγα σχόλια για τον τρόπο με τον οποίο οι δυο μεγάλες παραδόσεις στη θεωρία της επιστημονικής εξήγησης στέκονται απέναντι στη δυνατότητα μαθηματικών εξηγήσεων φυσικών φαινομένων.

Οδηγεί σε ενοποίηση (και καλύτερη *κατανόηση* του κόσμου) η εισαγωγή νέων μαθηματικών οντοτήτων και η εμφύτευση σε ευρύτερες μαθηματικές δομές; Η απάντηση φαίνεται καταφατική. Για παράδειγμα, η εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών επέφερε ενοποίηση στη λύση, όχι μόνο αλγεβρικών, αλλά και διαφορικών εξισώσεων. Θεωρήστε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$a_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0,$$

όπου $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ και y είναι μια πραγματική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x. Αν η χαρακτηριστική εξίσωση,

$$a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0,$$

έχει δυο διακριτές πραγματικές ή μιγαδικές λύσεις r_1 και r_2, τότε η γενική λύση έχει τη μορφή

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \ (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ αυθαίρετα}).$$

Έτσι, όπως παρατηρεί ο Colyvan (1999), η χρήση μιγαδικών αριθμών επιτρέπει να προσεγγίζουμε με ενιαίο τρόπο τις εξισώσεις $y'' - y = 0$ (της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες) και $y'' + y = 0$ (της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες). Και αυτό είναι ένα είδος ενοποίησης που όμως δεν αφορά *φυσικά* γεγονότα.

Από την άλλη, κατά την αιτιακή-μηχανιστική παράδοση, δεν φαίνεται δυνατή η ύπαρξη γνήσιων μαθηματικών εξηγήσεων φυσικών φαινομένων – τουλάχιστον, αν τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αφηρημένες οντότητες και συνεπώς αιτιακά αδρανή. Τέτοιες παρατηρήσεις εμπλέκουν τη συζήτηση για το οντολογικό καθεστώς των μαθηματικών αντικειμένων και συναφή ζητήματα της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Τέτοια ζητήματα θα θίξουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Πράγματι, μέχρι τώρα επιχειρήσαμε μια επισκόπηση σε ό,τι αφορά τη συμβολή των μαθηματικών στην επιστήμη και τη σχέση μεταξύ τους. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα εστιάσουμε στην αποτίμηση αυτής της σχέσης μεταξύ μαθηματικών και επιστημονικής πραγματικότητας, υπό το πρίσμα διάφορων παραδοσιακών σχολών φιλοσοφίας των μαθημτικών. Ειδικότερα, θα σχολιάσουμε πώς κάθε σχολή αντιμετωπίζει το πρόβλημα μαθηματικών εξηγήσεων φυσικών φαινομένων ξεκινώντας από το πώς προσεγγίζει τα μαθηματικά αντικείμενα, τη μαθηματική αλήθεια και τη μαθηματική γνώση.[22]

[22] Η πραγμάτευση θα στηριχθεί στα Αναπολιτάνος (1985), Shapiro (2000), Horsten (2012) αλλά και στο Shapiro (1983a) για το θέμα της εφαρμοσιμότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΧΟΛΕΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

3.1 Πλατωνισμός

Θα ξεκινήσουμε παραθέτοντας και αναλύοντας τις απόψεις διαφόρων φιλοσοφικών σχολών με αφετηρία την αρχαία Ελλάδα, κοιτίδα της φιλοσοφίας και των επιστημών. Ο Πλάτων, ως πρωτεργάτης μιας μεγάλης παράδοσης μαθηματικού ρεαλισμού, του πλατωνισμού, προβληματίστηκε για τη σχέση μαθηματικών και εμπειρικής πραγματικότητας.

Σύμφωνα με τον μαθηματικό πλατωνισμό, υπάρχει μια αντικειμενική πραγματικότητα ανεξάρτητη από το υποκείμενο που τη γνωρίζει ή δύναται να την νοήσει. Οι μαθηματικές οντότητες, τα μαθηματικά αντικείμενα, αποτελούν διακεκριμένο μέρος αυτής της αντικειμενικής πραγματικότητας. Ειδικότερα, στον πλατωνισμό, το αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών αποτελεί ένα νοητικό σύμπαν, το οποίο υπάρχει ανεξάρτητα από τον φυσικό κόσμο και την ανθρώπινη δραστηριότητα. Τα μαθηματικά αντικείμενα, δηλαδή, υπάρχουν πάντοτε («άχρονα») και εμφανίζονται ως αυθύπαρκτες μεμονωμένες οντότητες. Ωστόσο, το γεγονός ότι η ύπαρξη του μαθηματικού από τον φυσικό κόσμο είναι αυτόνομη δεν συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει κάποιο είδος συσχέτισης μεταξύ τους. Το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών δύναται να σχετίζεται με αυτό του κόσμου της φύσης. Παρ' όλα αυτά, ο πλατωνισμός δεν αναλώνεται στο να εξηγήσει τη σχέση αυτή αλλά την αφήνει τελικά απροσέγγιστη. Βέβαια, ο ίδιος ο Πλάτων είχε προσπαθήσει να αποκαταστήσει κάποιες γέφυρες ανάμεσα στον κόσμο των μαθηματικών αντικειμένων και στον εμπειρικό κόσμο. Αφενός τα αντικείμενα της εμπειρίας (πλανήτες, τραπέζια, κ.λπ.) *μετέχουν*, μάλλον ως *ατελή αντίγραφα*, των ιδεών των μαθηματικών αντικειμένων (σφαίρα, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κ.λπ.). Αφετέρου, σύμφωνα με τον πλατωνικό διάλογο *Τίμαιος*, ο Δημιουργός έφτιαξε τον εμπειρικό κόσμο επιβάλλοντας ένα ορθολογικό μαθηματικό σχέδιο πάνω σε ένα προϋπάρχον άτακτα κινούμενο υλικό. Πάντως το πρόβλημα για τον πλατωνισμό παραμένει: πώς σχετίζεται ο κόσμος των μαθηματικών με τον εμπειρικό κόσμο έτσι ώστε αλήθειες για τον πρώτο να συμμετέχουν στην εξήγηση αληθειών για τον δεύτερο;

Κατά τον πλατωνισμό, τα μαθηματικά αντικείμενα, όπως οι αριθμοί ή τα γεωμετρικά σχήματα, δεν δημιουργούνται, δεν καταστρέφονται και δεν μπορούν να τροποποιηθούν. Παραμένουν αμετάβλητα, αιώνια και αναλλοίωτα. Από την εποχή του Πλάτωνα έως και σήμερα, οι ορισμοί και τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας θεωρούνταν απόλυτα και αυστηρά. Όμως, ο εμπειρικός κόσμος δεν περιέχει τέλειες ευθείες γραμμές χωρίς καθόλου πάχος, ούτε τέλειους κύκλους. Πιο συγκεκριμένα, ο Πλάτων είχε την πεποίθηση ότι τα αξιώματα της γεωμετρίας είναι αντικειμενικά αληθή ή ψευδή ανεξαρτήτως του ανθρωπίνου νου και της γλώσσας. Συνεπώς η γνώση της γεωμετρίας φαίνεται να είναι ανεξάρτητη της αισθητηριακής παρατήρησης και επομένως ένας πλατωνιστής θα απέρριπτε τον ισχυρισμό ότι τα γεωμετρικά αντικείμενα υπάρχουν στο φυσικό χώρο. Σε σύγχρονη ορολογία, τα μαθηματικά αντικείμενα για τον πλατωνιστή είναι *αφηρημένες οντότητες* (βλ. και υποσημείωση 2 παραπάνω).

Η αναγκαιότητα της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων έγκειται στο ότι περιγράφουν αμετάβλητες δομικές σχέσεις ενός σύμπαντος αναλλοίωτων αντικειμένων. Όπως πολύ εύστοχα αναφέρει ο Αναπολιτάνος[23], η μαθηματική αλήθεια δεν εξαρτάται από τη δυνατότητα του μαθηματικού να τη συλλάβει. Υπάρχει ανεξάρτητα από αυτόν και ο ίδιος σταδιακά την ανακαλύπτει όπως ο αστρονόμος ανακαλύπτει για πρώτη φορά ένα άγνωστο άστρο. Ο Αναπολιτάνος συνεχίζει τονίζοντας ότι ο μαθηματικός για τον Πλάτωνα δεν εφευρίσκει νέες μαθηματικές αλήθειες. Απλώς αυτές υπάρχουν ανεξάρτητα από αυτόν και αναμένουν υπομονετικά τον εξερευνητή τους.

Συχνά, η ανακάλυψη της μαθηματικής αλήθειας προέρχεται μέσα από σύνθετους κατασκευαστικούς αλγορίθμους οι οποίοι δεν αποτελούν πανάκεια για το χαρακτηρισμό μιας πρότασης ως αληθούς ή ψευδούς. Από τη μια είναι απαραίτητοι

[23] Βλ. ενότητα 1.2 στο Αναπολιτάνος (1985).

για την ανακάλυψη της μαθηματικής αλήθειας, από την άλλη δεν αποτελούν αναγκαίο συστατικό της. Οι αλγόριθμοι έχουν βοηθητικό ρόλο. Αποτελούν το μέσο ή τη διαδικασία με την οποία καταλήγουμε σε έναν ισχυρισμό. Συνεπώς, παρότι η ίδια η κατασκευή αλγορίθμων φαίνεται σαν να υπαγορεύει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα δημιουργούνται από τον μαθηματικό, σύμφωνα με την ιδέα του μαθηματικού ρεαλισμού αυτά υπάρχουν ούτως ή άλλως. Ας παραθέσουμε την άποψη ενός ένθερμου υποστηρικτή του πλατωνισμού, του Gödel (1964, σελ. 483-484), που έρχεται να επιβεβαιώσει τον παραπάνω ισχυρισμό:

… τα αντικείμενα της υπερπεπερασμένης θεωρίας των συνόλων … ασφαλώς δεν ανήκουν στον φυσικό κόσμο … Αλλά παρ' όλη την απόστασή τους από την αισθητηριακή εμπειρία, έχουμε ένα είδος αντίληψης των αντικειμένων της θεωρίας συνόλων, όπως δείχνει το γεγονός ότι τα αξιώματα μας επιβάλλονται από μόνα τους ως αληθή. Δεν βλέπω το λόγο γιατί θα έπρεπε να έχουμε λιγότερη εμπιστοσύνη σ' αυτό το είδος αντίληψης – δηλαδή, στη μαθηματική εποπτεία (intuition) – απ' ό,τι στην αισθητηριακή αντίληψη … Προφανώς το μαθηματικό «δεδομένο» σχετίζεται στενά με τα αφηρημένα στοιχεία που περιέχονται στις εμπειρικές ιδέες μας. Ωστόσο, αυτό καθόλου δεν σημαίνει ότι τα δεδομένα αυτού του δεύτερου είδους, επειδή δεν μπορούν να συσχετισθούν με τη δράση ορισμένων πραγμάτων πάνω στα όργανα των αισθήσεων, είναι κάτι το καθαρά υποκειμενικό, όπως υποστήριξε ο Kant. Αντίθετα, μπορεί να αναπαριστούν μια όψη της αντικειμενικής πραγματικότητας …

Σε αυτό το κείμενο, ο Gödel σκιαγραφεί μια αναλογία μεταξύ μαθηματικών και εμπειρικής επιστήμης, με την αισθητηριακή αντίληψη και τη μαθηματική εποπτεία να δίνουν τις αφετηρίες γνώσης αντίστοιχα. Ο ίδιος ο Πλάτων υποστήριζε μια παρόμοια θέση. Για τον ζωντανό άνθρωπο, η μαθηματική γνώση είναι εν πολλοίς «έμφυτη». Στην πραγματικότητα, είναι ανάμνηση κάποιων γεγονότων που γνωρίζαμε ήδη αλλά έχουμε ξεχάσει – τα είχε γνωρίσει η ψυχή του ανθρώπου μέσω ενός είδους εποπτείας.

Για τους πλατωνιστές, η τυχόν ύπαρξη αναπάντητων μαθηματικών ερωτημάτων σημαίνει ότι δεν έχουν ανακαλυφθεί (μέχρι στιγμής, τουλάχιστον) τα αξιώματα ή οι κανόνες που θα οδηγήσουν σε απάντηση. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε καλώς διατυπωμένη ερώτηση σχετικά με ένα μαθηματικό γεγονός ή αντικείμενο φαίνεται να αντιστοιχεί και μια συγκεκριμένη απάντηση χωρίς να εστιάζουμε στο αν μπορούμε να την ανακαλύψουμε ή όχι. Ο μαθηματικός, λοιπόν, σύμφωνα με τον πλατωνισμό, δεν μπορεί να καινοτομήσει εφόσον όλα προϋπάρχουν. Αυτό που μπορεί να κατορθώσει είναι ανακαλύψει τα μαθηματικά αντικείμενα. Δηλαδή, η μαθηματική γνώση μπορεί να επεκταθεί και να διευρυνθεί σε σημαντικό βαθμό μόνο με την ανακάλυψη νέων αποτελεσμάτων τα οποία όμως δεν είναι άμεσα συνυφασμένα με τον κόσμο της φύσης. Πολλοί υποστηρικτές του μαθηματικού ρεαλισμού, ωστόσο, αναφέρονται συχνά στην ικανότητα που έχουν τα μαθηματικά να περιγράψουν πρότυπα που βρίσκονται τόσο στη φύση όσο και στον τεχνολογικό τομέα.

Σύμφωνα με τον πλατωνικό ρεαλισμό, η *γνήσια* μαθηματική γνώση είναι βέβαιη και η δικαιολόγηση αυτής της βεβαιότητας έγκειται στις αληθινές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των πλατωνικών μαθηματικών αντικειμένων. Θα μπορούσαμε να συναγάγουμε ότι τα μαθηματικά φαίνονται αναγκαία αληθή στην πραγματικότητα που βιώνουμε, επειδή αυτός ο κόσμος είναι μια αντανάκλαση του Κόσμου των Ιδεών του Πλάτωνα. Για παράδειγμα, η ευκλείδεια γεωμετρία αποτελεί αναγκαία αλήθεια. Όμως, αν η ίδια η ευκλείδεια γεωμετρία εκφράζει κάτι το αναγκαία αληθές, όλες οι μη Ευκλείδιες Γεωμετρίες αναγκαστικά πρέπει να είναι ψευδείς.

Είναι προφανές ότι η ανακάλυψη μη ευκλείδιων γεωμετριών κλόνισε σημαντικά τον πλατωνισμό και ό,τι ήταν συνυφασμένο με τη μαθηματική γνώση στο πλαίσιό του.[24] Η χρήση της γεωμετρίας στην εποχή του Πλάτωνα αποτελούσε το κατ' εξοχήν παράδειγμα βεβαιότητας για την ανθρώπινη γνώση, οπότε η είσοδος τέτοιου είδους γεωμετριών στον κόσμο των μαθηματικών (γύρω στο 1830) έπληξε ακόμη πιο έντονα το πλατωνικό δόγμα και αποτέλεσε έναυσμα για τη φιλοσοφία γενικότερα. Έτσι, ταυτόχρονα με τις έρευνες για διαφορετικές, εναλλακτικές γεωμετρίες, μια ομάδα μαθηματικών ξεκίνησε την προσπάθεια θεμελίωσης της αριθμητικής.

3.2 Λογικισμός

Το 1879 ο Frege ήταν από τους πρώτους που υποστήριξε την άποψη περί αναγωγής των μαθηματικών στη λογική. Σύμφωνα με τον ίδιο, οι μαθηματικές και λογικές αλήθειες είναι αδιαμφισβήτητες. Το 1897, δηλαδή δεκαοκτώ χρόνια αργότερα, η παραπάνω ιδέα αναπτύχθηκε περαιτέρω από τον Russell και έπειτα

[24] Το ίδιο ισχύει και για άλλες φιλοσοφίες των μαθηματικών, όπως εκείνη του Kant.

από τον Whitehead. Ωστόσο, η σχολή του λογικισμού έχει τις βάσεις της στον Liebniz, καθώς τυπικά ήταν ο πρώτος ο οποίος οραματίστηκε ένα θεμελιώδες σύστημα λογισμού, μέσω του οποίου θα μπορούσαμε να τυποποιήσουμε τις μαθηματικές προτάσεις και τα αντικείμενα. Όμως ο ίδιος δεν κατάφερε τελικά να πραγματοποιήσει το όνειρό του.

Ο λογικισμός, ως φιλοσοφική σχολή, υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά είναι κομμάτι της λογικής και έχει ασχοληθεί παραδοσιακά κυρίως με τους κλάδους της αριθμητικής και της πραγματικής ανάλυσης. Η κεντρική ιδέα του είναι ότι οι έννοιες μαθηματικών αντικειμένων, όπως οι αριθμοί, αποτελούν ή μπορούν να αναχθούν σε λογικές έννοιες. Αυτά τα αντικείμενα, εμπλουτισμένα με μια λογική ορολογία και με βάση μια αλληλουχία λογικών αξιωμάτων και κανόνων, αποδεικνύεται ότι ικανοποιούν μαθηματικά θεωρήματα.

Ωστόσο, ο λογικισμός δεν έχει να κάνει με αυθαίρετη «χρήση λογικών αξιωμάτων» καθώς αυτό είναι κάτι τελείως διαφορετικό από την «αναγωγή των μαθηματικών στη λογική». Ειδικότερα, για τη σχολή του λογικισμού, υπάρχει μόνο μία πραγματική λογική από την οποία πηγάζουν όλα, συμπεριλαμβανομένων και των μαθηματικών. Δεν υπάρχουν «αξιώματα» στα οποία «εφαρμόζεται» η λογική. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο είναι ότι οι λογικιστές ισχυρίζονται ότι οι λογικές και μαθηματικές αλήθειες είναι ακριβώς αυτό: *αλήθειες*. Η παραπάνω άποψη, ότι δηλαδή οι μαθηματικές αλήθειες, αν κατανοηθούν ορθά, αποτελούν λογικές αλήθειες, συνιστά σύμφωνα με τον Shapiro (1983a) την κύρια ιδέα μιας μορφής λογικισμού που ονομάζεται *μεταφραστικός λογικισμός* (translation logicism).

Ο μεταφραστικός λογικισμός υποστηρίζει ότι κάθε μαθηματικό θεώρημα ή αξίωμα αποτελεί ουσιαστικά μια λογική αλήθεια. Έτσι αποκλείει οποιαδήποτε δυνατότητα σύνδεσης μεταξύ θεωρημάτων ενός μαθηματικού πεδίου και τομέων της επιστημονικής πραγματικότητας. Πράγματι οι λογικές (μαθηματικές) αλήθειες δεν θα μπορούν να εξηγήσουν ή να περιγράψουν ένα φυσικό φαινόμενο καθώς αυτό δεν θα έχει λάβει χώρα *λόγω της μορφής του*. Και αφού η λογική αλήθεια (π.χ., οι ταυτολογίες) είναι αποκλειστικά ζήτημα λογική μορφής, ένα φυσικό φαινόμενο δεν θα μπορεί να «αναχθεί» στη λογική. Όπως καταλαβαίνουμε, οποιαδήποτε μαθηματική σχέση ή θεωρία δεν θα αντιστοιχίζεται με κάποιο κομμάτι του φυσικού κόσμου ή της επιστήμης – γεγονός που κάνει αυτή τη μορφή λογικισμού να φαίνεται άχρηστη, ή τουλάχιστον ατελέσφορη, όσον αφορά το ζήτημα της εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών στο μη μαθηματικό σύμπαν.

Μία δεύτερη εκδοχή στην οποία απαντά ο λογικισμός είναι ο *αιτηματικός λογικισμός* (postulate logicism). O Shapiro (1983a) τονίζει ότι, σε αυτή την εκδοχή λογικισμού, τα μαθηματικά είναι ουσιαστικά μια ανάλυση λογικών συμπερασμάτων που προκύπτουν από ένα σύνολο ανερμήνευτων αξιωμάτων. Αν αντιληφθούμε με αυτό τον τρόπο τα μαθηματικά, συνάγουμε ότι δεν έχουν συγκεκριμένο και προκαθορισμένο περιεχόμενο, όπως οι φυσικοί αριθμοί ή ο ευκλείδειος χώρος. Οι βασικές μη λογικές μαθηματικές προτάσεις γίνονται αντικείμενο λογικής επεξεργασίας και ανάπτυξης χωρίς κάποια ερμηνεία, χωρίς να έχουν κάποιο βασικό μονοσήμαντο νόημα.

Σύμφωνα με αυτόν τον τύπο λογικισμού, ένα πεδίο των μαθηματικών είναι δυνατόν να αφορά οποιαδήποτε ερμηνεία των πρωταρχικών του όρων η οποία ικανοποιεί ταυτόχρονα τα αξιώματα που περιέχονται σε αυτό. Συνεπώς είναι εφικτό να υπάρξει ένα είδος αντιστοίχισης και σύνδεσης των μαθηματικών θεωριών και αξιωμάτων με την επιστημονική πραγματικότητα. Το μέσο για αυτή την αντιστοιχία είναι η προσαρμοσμένη ερμηνεία των αντικειμένων του εν λόγω κλάδου στο μη μαθηματικό σύμπαν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ευκλείδεια γεωμετρία, η επέκταση της οποίας διαμορφώθηκε αρχικά με γνώμονα την ερμηνεία μέσω αντιστοίχισης των βασικών όρων της στη μη μαθηματική πραγματικότητα. Είναι προφανές ότι εάν η ερμηνεία καθιστά τα αξιώματα αληθή αυτό σημαίνει ότι και τα θεωρήματα που κατασκευάζονται υπό την ίδια ερμηνεία οφείλουν να είναι αληθή. Η ουσία λοιπόν και ο απώτερος σκοπός των μαθηματικών στο πλαίσιο μιας επιστήμης είναι να «ξεσκεπάζει» λογικές αλληλουχίες και αποτελέσματα μεταξύ ορισμένων επιστημονικών πορισμάτων.

Ωστόσο, ο αιτηματικός λογικισμός θέτει ως αναγκαία προϋπόθεση για την όποια σύνδεση μαθηματικών και επιστήμης τη σαφή διάκριση μεταξύ καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών. Τα μαθηματικά αποτελούνται από όρους που δεν έχουν ερμηνευθεί ενώ τα εφαρμοσμένα μαθηματικά από όρους που έχουν ερμηνευθεί. Οι όροι είναι συχνά ίδιοι και αυτό συμβάλλει στο να μην παραβλέψουμε ουσιώδεις συνδέσεις που ενυπάρχουν εξαρχής μεταξύ των δύο αυτών κλάδων. Για παράδειγμα, ένα ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί στο πλαίσιο των εφαρμοσμένων μαθηματικών να ερμηνευθεί ως εμβαδό ενός συγκεκριμένου χωρίου, ενώ στα καθαρά μαθηματικά μπορεί απλώς να αποτελέσει ένα εργαλείο ή αντικείμενο για την ανάπτυξη θεμελιωδών θεωρημάτων του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού.

Από την άλλη, κάποιες περιοχές των μαθηματικών, όπως η αφηρημένη άλγεβρα ή οι μη ευκλείδεις γεωμετρίες, παρότι εφαρμόζονται σε ποικίλες πτυχές της πραγματικότητας (π.χ., στη μελέτη της συμμετρίας ή στη δομή του φυσικού χώρου), δεν έχουν σαφείς και άμεσες ερμηνείες. Ειδικότερα, για έναν υποστηρικτή του αιτηματικού λογικισμού, οι πρωταρχικοί όροι αυτών των τομέων, εφόσον δεν αντιστοιχούν σε κάτι πέρα από τα μαθηματικά πλαίσια, θεωρούνται αυθαίρετοι (τουλάχιστον στην αρχή). Γι' αυτόν είναι ιδιαίτερα αξιοπερίεργο το πώς υπάρχει τόση ποικιλία εφαρμογών στην επιστημονική πραγματικότητα μαθηματικών όρων και αντικειμένων που εκ πρώτης όψεως ήταν φαινομενικά ασυσχέτιστα με αυτή. Προφανώς, λοιπόν, αν δεχθούμε τούτη την άποψη του αιτηματικού λογικισμού, φαίνεται ιδιαίτερα ασυνήθιστη αυτή η *μη προβλέψιμη* εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στην πραγματικότητα και ίσως να αποδίδαμε το εν λόγω φαινόμενο στην τυχαιότητα.

Επίσης, είναι άξιο αναφοράς ότι η συγκεκριμένη μορφή λογικισμού επιτρέπει την εφαρμογή ενός μαθηματικού κλάδου μόνο αν όλοι οι πρωταρχικοί όροι του κλάδου ερμηνευθούν έτσι ώστε να ικανοποιούν όλα τα συναφή αξιώματα. Σαφώς όμως υπάρχουν περιοχές, όπως η μιγαδική ανάλυση ή η θεωρία συνόλων, οι οποίες, μολονότι οι πρωταρχικοί όροι τους δεν έχουν κάποια ερμηνεία, εφαρμόζονται άψογα στη μη μαθηματική επιστημονική πραγματικότητα.[25] Σταδιακά, τόσο η μιγαδική ανάλυση όσο και η θεωρία συνόλων, διαμορφώθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να αποφεύγονται κατά το δυνατόν τα όποια παράδοξα καταλήγοντας έτσι σε μια πολυσύνθετη δομή. Σε μια τέτοια δομή δύσκολα κάποιος θα ήταν σε θέση να διακρίνει την καθαρή λογική με τη μορφή όρων, προτάσεων και κανόνων. Κατά συνέπεια δεν θα ήταν εύκολο να πειστεί κανείς ότι τα μαθηματικά

[25] Η χρήση του όρου «φανταστικός αριθμός» σηματοδοτεί το γεγονός ότι αρχικά οι μιγαδικοί αριθμοί ήταν ανερμήνευτοι. Όμως βρήκαν εφαρμογή στη φυσική και σε κλάδους μηχανικών. Επίσης δεν υπάρχει ειδική ερμηνεία της λέξης «σύνολο» που να επιτρέπει την εφαρμογή της θεωρίας συνόλων στην υπολογισιμότητα (computability).

περιορίζονται σε μια λογική. Έπεται ότι ο αιτηματικός λογικισμός δεν είναι σε θέση να εξηγήσει τέτοιου είδους εφαρμογές.

3.3 Φορμαλισμός

Ο φορμαλισμός ως φιλοσοφικό ρεύμα εμφανίστηκε κατά τον 19ο αιώνα και γύρω στο 1910 είχε ως κυριότερο εκφραστή τον David Hilbert. Ο ίδιος είχε προτείνει την πλήρη τυποποίηση όλων των μαθηματικών θεωριών και γενικότερα του μαθηματικού συλλογισμού. Ωστόσο αυτή η προσπάθειά του δεν τελεσφόρησε.

Η κεντρική ιδέα του φορμαλισμού είναι ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι σύμβολα ή χαρακτήρες που υπακούουν σε συγκεκριμένους κανόνες. Ένας φορμαλιστής ή ταυτίζει τα μαθηματικά αντικείμενα με τα ονόματά τους (φορμαλισμός όρων) ή τα θεωρεί χαρακτήρες που δεν έχουν ουσιαστικό νόημα και όχι σύμβολα που θα μπορούσαν εννοιολογικά να αναφέρονται σε οτιδήποτε άλλο (φορμαλισμός παιγνίων). Ειδικότερα, ένας μαθηματικός τύπος δεν δηλώνει απολύτως τίποτα πέρα από αυτό που φαίνεται. Αλλά τότε τι δηλώνει η αριθμητική ταυτότητα «5+5=6+4»; Ότι το σύμβολο «5+5» είναι το ίδιο με το σύμβολο «6+4»; Αυτό όμως δεν φαίνεται εύλογο. Από την άλλη, ένας οπαδός του φορμαλισμού δεν θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι τα δύο σύμβολα υποδηλώνουν τον ίδιο αριθμό εφόσον η κύρια ιδέα του φορμαλισμού δεν εμπεριέχει μαθηματικές οντότητες ή αντικείμενα πέρα από το γλωσσικό περιβάλλον στις οποίες αντιστοιχούν οι μαθηματικές εκφράσεις. Πώς, λοιπόν ένας φορμαλιστής όρων μπορεί να αντιληφθεί αυτή την ταυτότητα; Σύμφωνα με τον Frege, θα μπορούσε μόνο να ισχυριστεί ότι η ταυτότητα σημαίνει ακριβώς το εξής: σε οποιοδήποτε πλαίσιο, ο χαρακτήρας «5+5» μπορεί να αντικατασταθεί χωρίς καμία αλλαγή από τον χαρακτήρα «6+4». Αλλά χωρίς καμία αλλαγή *σε τι*; Για ένα φορμαλιστή όρων, χωρίς καμία αλλαγή στην αληθοτιμή του πλαισίου· για ένα φορμαλιστή παιγνίων χωρίς καμία αλλαγή στις δυνατότητες εφαρμογής κανόνων σχηματισμού και μετασχηματισμού μαθηματικών εκφράσεων. Ο Frege, βέβαια, απέρριπτε τη θεωρία του φορμαλισμού καθώς πίστευε ότι τα μαθηματικά θα περιορίζονταν έτσι, και ίσως κατέληγαν, σε ένα απλό παιχνίδι συμβόλων.

Αναφερθήκαμε ήδη σε δυο είδη φορμαλισμού: στον *φορμαλισμό όρων* και στον *φορμαλισμό παιγνίων*. Σύμφωνα με το πρώτο είδος φορμαλισμού, οι μαθηματικές οντότητες είναι το όνομά τους και τίποτε παραπάνω και τα μαθηματικά ασχολούνται με το αν προτάσεις που εμπεριέχουν τέτοιου τύπου οντότητες είναι αληθείς ή ψευδείς. Έτσι ο φορμαλισμός όρων, από τη μία απαλλάσει τα μαθηματικά από μεταφυσικές και φιλοσοφικές ερωτήσεις που αφορούν τη φύση ή την οντολογία τους, αλλά από την άλλη δεν μπορεί να δώσει κάποιο νόημα σε μαθηματικές προτάσεις.

Ο φορμαλισμός παιγνίων αντιμετωπίζει τα μαθηματικά σαν ένα παιχνίδι γλωσσικών χαρακτήρων που δεν αντιστοιχούν σε τίποτα. Η μαθηματική γνώση είναι γνώση του χειρισμού τους μέσω συγκεκριμένων κανόνων σχηματισμού (συντακτικοί κανόνες) και μετασχηματισμού (αποδεικτικοί κανόνες ή κανόνες συναγωγής). Οι φορμαλιστές ασπάζονται εν μέρει την άποψη των λογικιστών για το πόσο απαραίτητη είναι η λογική για τη θεμελίωση των μαθηματικών· ωστόσο, επιμένουν ότι η μαθηματική γνώση αποκτάται μέσω αυτού του χειρισμού (τύπων και κανόνων) των ανερμήνευτων συμβόλων. Αυτό που έχει σημασία για τον φορμαλισμό είναι να τηρούνται οι κανόνες και η όποια ερμηνεία που μπορεί εμείς να προσδώσουμε στα μαθηματικά αντικείμενα είναι απλά ένα παραπάνω ερέθισμα για την εύρεση μιας απόδειξης μιας μαθηματικής πρότασης.[26]

Ο φορμαλισμός, όπως σκιαγραφήθηκε παραπάνω, αφήνει αναπάντητο το ερώτημα που αφορά την εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών σε μια μη μαθηματική σφαίρα. Για τον υποστηρικτή της εν λόγω φιλοσοφικής σχολής είναι ορθό οι κανόνες, τους οποίους ακολουθούμε σε μια μαθηματική θεωρία, να έχουν λογικά αποτελέσματα ακόμη και αν τα αξιώματα τεθούν ως αυθαίρετα, τελείως ανερμήνευτα. Προφανώς μπορεί κάποιος να μη δεχτεί την άποψη ότι η επιλογή των κανόνων ενός μαθηματικού κλάδου είναι πάντα αυθαίρετη. Θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι τουλάχιστον σε ορισμένες περιπτώσεις οι κανόνες που αφορούν τον χειρισμό των συμβόλων επιλέγονται, συνειδητά ή μη, με βάση μια επιστημονική θεωρία ή ένα επιστημονικό στόχο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού από τον Νεύτωνα και τον Leibniz με σκοπό τη μελέτη της κίνησης (μεταβολής). Επίσης, θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι ένας μαθηματικός κλάδος όπως η μιγαδική ανάλυση εφαρμόζεται, λόγου χάριν, στην

[26] Η συζήτηση αυτή αφορά τα καθαρά, όχι τα εφαρμοσμένα, μαθηματικά.

κβαντομηχανική με τη βοήθεια μιας απεικόνισης του γλωσσικού κώδικα της μιγαδικής ανάλυσης σε αυτόν της κβαντομηχανικής. Η απεικόνιση αυτή πρέπει να λειτουργεί κατά κάποιο τρόπο και σαν αντίστροφη συνάρτηση. Πρέπει να είναι σε θέση αποδίδει θεωρήματα και λογικά συμπεράσματα της κβαντομηχανικής σε αξιώματα και ορθά συμπεράσματα της μιγαδικής ανάλυσης. Από την άλλη, υπάρχουν μαθηματικές θεωρίες, όπως οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες, που δεν επινοήθηκαν με απώτερο στόχο να εφαρμοστούν στον μη μαθηματικό κόσμο αλλά τελικά εφαρμόστηκαν. Για μια τέτοια περίπτωση, ο φορμαλιστής παιγνίων δεν μπορεί παρά να πει ότι είναι αποτέλεσμα ευτυχούς σύμπτωσης.

Τελικά, ο φορμαλισμός, συνυφασμένος με όλες τις πτυχές του είναι δυνατόν να εξηγήσει ικανοποιητικά την εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών σε μη μαθηματικούς κλάδους; Μπορεί να «ξεφύγει» πέρα από ένα σύνολο χαρακτήρων και συμβόλων; Το φιλοσοφικό ρεύμα του φορμαλισμού, αν και δεν αρνείται εν γένει τη σύνδεση μαθηματικών και επιστημονικής πραγματικότητας, δεν εμβαθύνει σε περαιτέρω ανάλυση για το ποιά ακριβώς είναι αυτή η σχέση ή σε τι συνίσταται. Αντίθετα εμπεριέχει μια σαφή διάκριση μεταξύ καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών (παρόμοια με αυτή που αναφέραμε στο λογικισμό). Όταν κάνουμε λόγο για καθαρά μαθηματικά εννοούμε τους μαθηματικούς τομείς των οποίων τα αντικείμενα είναι αυθαίρετα σύμβολα (που δεν συμβολίζουν κάτι πέρα από τον εαυτό τους), ένω όταν αναφερόμαστε στα εφαρμοσμένα μαθηματικά υπονοούμε οτι υπάρχει ένα είδος αντιστοιχίας αυτών των μαθηματικών αντικειμένων με αντικείμενα μιας εμπειρικής επιστήμης. Όπως έχουμε προαναφέρει, αυτές οι δυο μαθηματικές δραστηριότητες συνδέονται στενά καθώς έχουν παρόμοιους κανόνες που τους πλαισιώνουν. Αν οι τύποι που πλαισιώνουν τα αντικείμενα τα οποία πραγματεύονται τα εφαρμοσμένα μαθηματικά έχουν στενές σχέσεις με την επιστημονική γλώσσα, τότε το ίδιο θα ισχύει και για, μερικούς τουλάχιστον, τύπους των καθαρών μαθηματικών. Παρ' όλα αυτά θα πρέπει να δοθεί η δέουσα έμφαση στην εξήγηση τέτοιου τύπου συνδέσεων και όχι να γίνεται απλώς μια αναφορά στην ύπαρξή τους όπως απλώς κάνει ο φορμαλισμός.

3.4 Ιντουισιονισμός

Η σχολή του ιντουισιονισμού ξεκίνησε περίπου το 1908 από τον Ολλανδό μαθηματικό L. E. J. Brouwer. Ο ίδιος υποστήριξε την άποψη ότι αυτό που πραγματεύονται τα μαθηματικά είναι υποκειμενικές νοητικές κατασκευές των μαθηματικών που ασχολούνται με την έρευνα απορρίπτοντας όσες περιοχές των μαθηματικών που δεν ταίριαζαν με αυτή τη θεώρηση.

Ο ιντουισιονισμός ως φιλοσοφική σχολή θεωρεί πως η μαθηματική δραστηριότητα είναι προγλωσσική και προλογική. Τα μαθηματικά κατ' ουσίαν θεωρούνται ανεξάρτητα από την εμπειρία του εξωτερικού περιβάλλοντος και εν γένει ανεξάρτητα από τη γλώσσα. Η γλώσσα είναι δυνατό να λειτουργεί και να φανεί χρήσιμη στην παρουσίαση νοητικών κατασκευών σε άλλους. Ωστόσο, δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι αυτές οι άλλες κατασκευές που θα προκύψουν μέσω της επαφής αυτής θα ταυτίζονται. Με αυτή την έννοια, η γλώσσα είναι ένα ατελές μέσο για την επικοινωνία ανάμεσα στους μαθηματικούς ενώ η λογική είναι μια προσεγγιστική τυποποίηση των κανόνων αυτού του μέσου. Έτσι για τους ιντουισιονιστές, σε αντίθεση με τους λογικιστές και τους φορμαλιστές, η λογική δεν παίζει πρωτεύοντα ρόλο στη μαθηματική δραστηριότητα.

Ο ιντουισιονισμός απορρίπτει τον πλατωνικό ισχυρισμό περί αυτόνομης ύπαρξης ενός αντικειμενικού μαθηματικού σύμπαντος. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι ο μαθηματικός είναι εκείνος που δημιουργεί και κατασκευάζει τα μαθηματικά αντικείμενα όπως οι αριθμοί, τα σχήματα κ.λπ. χωρίς αυτά να υπάρχουν ανεξάρτητα από τη νόησή του. Η μαθηματική δραστηριότητα, δηλαδή, δεν εξαρτάται ούτε μπορεί να αναχθεί σε κάποιο λογικό υπόβαθρο πλαισιωμένο από ένα σύστημα κανόνων. Η προτεραιότητα της μαθηματικής δραστηριότητας έναντι της γλωσσικής και αυτής του λόγου οφείλεται, σύμφωνα με τον Brouwer, στη προτεραιότητα της *θεμελιώδους διακριτής χρονικής εποπτείας* (ενόραση).

Για τους οπαδούς του ιντουισιονισμού, η έννοια της αλήθειας στα μαθηματικά είναι απόλυτα συνυφασμένη με την έννοια της (κατασκευαστικής) απόδειξης. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι γι' αυτούς η έννοια και το νόημα της αλήθειας ταυτίζονται με αυτά της αποδειξιμότητας. Οι ιντουσιονιστές θεωρούν κάτι αντικειμενικά υπαρκτό αν έχει κατασκευαστεί σε πρωταρχικό στάδιο. Για παράδειγμα, κάθε υπαρκτικό θεώρημα, το οποίο για την απόδειξή του στα κλασικά μαθηματικά χρησιμοποιείται η «εις άτοπον απαγωγή», δεν αποτελεί θεώρημα των ιντουισιονιστικών μαθηματικών εκτός εάν η προηγούμενη αποδειξή του αντικατασταθεί με μία καθαρά κατασκευαστικού χαρακτήρα. Ο Brouwer υποστηρίζει ότι πρέπει να γίνουν δεκτές προσεγγίσεις της μαθηματικής αλήθειας που σχετίζονται τόσο με τη φαντασία όσο και με τη ενόραση, θεωρώντας τα ως βασικά στάδια της εφευρετικότητας. Μια απόδειξη, συνεπώς, αποτελεί μια διαδικασία, μια συστηματική κατασκευή του νου αυτή καθεαυτή, και όχι ένα τυποποιημένο σχήμα ή προϊόν.

Για να είναι εφικτή, λοιπόν, η όποια αποτίμηση της σχέσης μεταξύ των μαθηματικών και της επιστημονικής πραγματικότητας, υπό το πρίσμα της ιντουσιονιστικής αντίληψης, θα ήταν ουσιώδες να προσδιορίσουμε μια σχέση μεταξύ της υλικής πραγματικότητας και του αρμοδίου τμήματος του ανθρωπίνου νου που συνδέεται με τη μαθηματική δραστηριότητα. Ειδικότερα, η δυνατότητα ύπαρξης μιας αμφίδρομης αναγωγικής σχέσης μεταξύ της δομής του νου που είναι υπεύθυνη για την κατασκευή μαθηματικών αντικειμένων με αυτή των φυσικών διαδικασιών της επιστημονικής πραγματικότητας θα μπορούσε να δικαιολογήσει την όποια σχέση μαθηματικών και πραγματικότητας.

Όμως οι ιντουισιονιστές δεν εκλαμβάνουν με αυτό τον τρόπο την παραπάνω σχέση. Στο βαθμό που θεωρούν ότι τα μαθηματικά αντικείμενα αποτελούν υποκειμενικές νοητικές κατασκευές και ότι η φιλοσοφία των μαθηματικών δεν έχει νόημα να ασχολείται με (άλλες) μεταφυσικές υποθέσεις, η όποια σύνδεση για αυτούς μεταξύ των μαθηματικών και της υλικής πραγματικότητας φαίνεται αδύνατη. Ωστόσο, η καντιανή φιλοσοφία της επιστήμης ίσως διαφώτιζε ως ένα βαθμό στο πώς αντιμετωπίζει τη μαθηματική γνώση σε σχέση με την υλική πραγματικότητα ένας ιντουισιονιστής. Ο συγκερασμός και εναρμονισμός της *αισθητικότητας* (της ικανότητας να προσλαμβάνουμε καταστάσεις σχετικές με το εξωτερικό περιβάλλον) με τη *νόηση* (τη δυνατότητα απόκτησης γνώσης μέσω των παραστάσεων-απεικονίσεων), όπως αναφέρει η καντιανή φιλοσοφία, φαίνεται ικανός να παράγει τη μαθηματική γνώση γεφυρώνοντας τη σχέση μαθηματικών και πραγματικότητας. Με πιο απλά λόγια, η εμπειρική πραγματικότητα που μελετά η επιστήμη είναι εν μέρει διαμορφωμένη από τον ανθρώπινο νου που κατασκευάζει τα ίδια τα μαθηματικά αντικείμενα. Τα μαθηματικά έχουν να κάνουν με τον χώρο και τον χρόνο – το δομικό πλαίσιο κάθε δυνατής ανθρώπινης εμπειρίας.

Η φιλοσοφία του Kant ήταν πρόδρομος εκείνης της σχολής των ιντουισιονιστών στο βαθμό που η πρακτική των μαθηματικών αποτελεί πρωτίστως μια (δι-)υποκειμενική νοητική δραστηριότητα. Ο ιντουισιονιστής, αποδεχόμενος την καντιανή οπτική μπορεί να είναι σε θέση να κατανοήσει την εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών μέσω της σύνδεσης μεταξύ της νοητικής δραστηριότητας που αφορά τα μαθηματικά δημιουργήματα και αυτής της αντίληψης και κατανόησης. Το υποκείμενο, δηλαδή, ίσως πέρα από το να παρεμβαίνει ενεργά στη διαδικασία παραγωγής της μαθηματικής γνώσης, ταυτόχρονα θα μπορεί να αντιλαμβάνεται τις μαθηματικές κατασκευές ως απεικόνιση δομικών στοιχείων των φαινομένων που εισάγονται από το εξωτερικό περιβάλλον, δηλαδή από την εμπειρική πραγματικότητα. Αυτή είναι μια οπτική η οποία φαίνεται ικανοποιητική και αποτελεσματική σε ό,τι αφορά την απόκτηση μαθηματικής γνώσης τόσο στα πλαίσια ενός μαθηματικού όσο και σε αυτά ενός μη μαθηματικού σύμπαντος.

3.5 Δομισμός

Ο μαθηματικός δομισμός ή στρουκτουραλισμός (mathematical structuralism) πρωτοεμφανίστηκε ως ιδιαίτερο ρεύμα στις αρχές του 20ου αιώνα και συνοδεύτηκε από διάφορες εξελίξεις σχετικές με τη λογική και τα μαθηματικά. Βασικοί υπερασπιστές του ρεύματος ήταν ο Paul Benacerraf (1965), ο Geoffrey Hellman (1989), ο Michael Resnik (1997) και ο Stewart Shapiro (1997). Η βασική ιδέα του είναι ότι τα μαθηματικά είναι *η επιστήμη της δομής*.

Οι περισσότεροι δομιστές είναι ρεαλιστές ως προς την αληθοτιμή, δηλαδή υποστηρίζουν ότι κάθε σαφής μαθηματική πρόταση είναι αληθής ή ψευδής ανεξάρτητα από το νου, τη γλώσσα ή την όποια κοινωνική σύμβαση έχει κάνει ένας μαθηματικός ή κοινότητα στην οποία εντάσσεται. Στην ουσία οι δομιστές διαφοροποιούνται στο υπαρκτικό ζήτημα που σχετίζεται με τα μαθηματικά αντικείμενα. Οι Benacerraf και Hellman υπερασπίζουν πτυχές του δομισμού που δεν προϋποθέτουν την ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων ενώ οι Resnik και Shapiro θεωρούνται οντολογικοί ρεαλιστές, με την εκδοχή τους να έχει ποικίλες διακλαδώσεις σε ό,τι αφορά έννοιες όπως η ύπαρξη, το αντικείμενο και η ταυτότητα στα μαθηματικά.

Ο μαθηματικός δομισμός υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά διαθέτουν δικό τους αντικείμενο μελέτης που αποτελείται από *πρότυπα* (patterns) ή *δομές* (structures) και όχι από ένα σύνολο μαθηματικών οντοτήτων. Σύμφωνα με τον Shapiro, για παράδειγμα, η αριθμητική νοείται ως μελέτη και ανάλυση της δομής των φυσικών αριθμών ή ενός προτύπου κάποιου συστήματος που εμπεριέχει μια άπειρη ακολουθία αντικειμένων μαζί με ένα αντικείμενο το οποίο θεωρείται ως αρχικό και μια σχέση διαδοχής. Αυτή η δομή, δηλαδή, είναι που χαρακτηρίζει κάθε σύστημα αυτής της μορφής και για την οποία κατασκευάζονται συγκεκριμένες θεωρίες και αξιώματα. Στην άλγεβρα, για να δώσουμε ένα άλλο παράδειγμα, η θεωρία των ομάδων συγκροτεί την ανάλυση των δομών που εμφανίζεται στα συστήματα αντικειμένων που εμπεριέχουν μια προσεταιριστική διμελή πράξη, ένα ουδέτερο στοιχείο και το αντίστροφο στοιχείο για κάθε στοιχείο. Κοινές δομές ομάδων αποτελούν πρότυπο για ποίκιλα συστήματα συμμετριών ή μεταθέσεων.

Ένας αποτελεσματικός τρόπος για να αντιληφθούμε ένα συγκεκριμένο πρότυπο, είναι να θεωρήσουμε ένα σύνολο διατεταγμένων αντικειμένων συχνά πλαισιωμένων με κανόνες και να απορρίψουμε οποιοδήποτε στοιχείο δεν αφορά την εν λόγω διάταξη. Ταυτόχρονα αυτός ο τρόπος σύλληψης είναι δυνατό να αποτελεί ένα βήμα στο να προσεγγίσουμε την μαθηματική αλήθεια. Δεχόμενος κανείς ένα αρχικό σύστημα αντικειμένων, καταλήγει στο να επικεντρωθεί στη διάταξή τους, με την ίδια να αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα του συγκεκριμένου προτύπου. Για παράδειγμα, μπορεί κάποιος να αντιληφθεί το πρότυπο λειτουργίας μιας επιχείρησης είτε με το να την επισκεφθεί και να εστιάσει στη διάταξη των στελεχών της (μη δίνοντας σημασία στα εξωτερικά τους χαρακτηριστικά όπως την ενδυμασία, το ύψος ή το βάρος τους) είτε συλλαμβάνοντας μια άμεση περιγραφή του προτύπου που θα μπορούσε να είναι της μορφής: ποιος κατέχει την υψηλότερη θέση στην επιχείρηση, ποιος είναι αυτός που έχει την χαμηλότερη κ.λπ. Ωστόσο, εάν επικεντρωνόμασταν στο ποιός λαμβάνει σημαντικές αποφάσεις για την επιχείρηση, ποιός εκτελεί χρέη γραμματέα ή διευθυντή κ.ο.κ. θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι αυτή είναι μια «δομιστική» σύλληψη, η οποία εστιάζει στην έννοια της δομής ή του προτύπου;

Εδώ τίθεται ένα σημαντικό ζήτημα που σχετίζεται με τις οντολογικές προϋποθέσεις του δομισμού. Ο δομισμός υποστηρίζει ότι τα «μαθηματικά αντικείμενα» –όπως οι αριθμοί, τα σημεία του χώρου ή τα σύνολα– είναι στην ουσία συγκεκριμένες θέσεις στο εσωτερικό δομών. Άρα, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, αν εστιάσουμε στην ιδιότητα (διευθυντής, γραμματέας) του στελέχους της επιχείρησης, αυτή η διάκριση θα πρέπει οπωσδήποτε να εμπεριέχεται σε κάποια δομή, τη δομή της επιχείρησης με την έννοια της διάταξης των στελεχών από χαμηλότερο σε υψηλότερο. Συνεπώς προκύπτουν δύο ζητήματα οντολογικού χαρακτήρα, το καθεστώς των ίδιων των δομών –δηλαδή, ουσιαστικά σε τι συνίσταται μια δομή– και το καθεστώς των «μαθηματικών αντικειμένων» ή θέσεων μέσα σε κάθε δομή. Ποικίλες απόψεις έχουν διατυπωθεί από πολλούς φιλοσόφους όσον αφορά αυτά τα ζητήματα, αλλά εμείς θα εστιάσουμε στο πώς προσεγγίζει ο μαθηματικός δομισμός το ζήτημα της εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών στην επιστημονική πραγματικότητα.

Η σύλληψη και ανάλυση της σχέσης μαθηματικών και επιστημονικής πραγματικότητας, όπως εύστοχα παρατηρεί ο Stewart Shapiro (1983a), ανάγεται στη συνειδητοποίηση ότι το περιεχόμενο ενός μη μαθηματικού σύμπαντος αναδεικνύει μαθηματικές δομές όταν τα αντικείμενά του αλληλοσχετίζονται και αλληλεπιδρούν. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι μια μαθηματική δομή παρόμοια με αυτή της μεταβολής πραγματικών αριθμών σύμφωνα με το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου αποτυπώνεται στην αμοιβαία έλξη φυσικών αντικειμένων (ειδικότερα σε σημειακές πηγές βαρυτικών δυνάμεων, ηλεκτρικών δυνάμεων, φωτός, ήχου ή ακτινοβολίας). Γενικότερα οι φυσικοί νόμοι που εκφράζονται με μαθηματική ορολογία μπορούν να ερμηνευθούν ως γεγονότα τα οποία εντοπίζουν κάποια συγκεκριμένη μαθηματική δομή στο φυσικό σύμπαν.

Η δομιστική φιλοσοφία των μαθηματικών φαίνεται να παρέχει μια πολλά υποσχόμενη ουσιαστική περιγραφή της σχέσης μαθηματικών και επιστήμης. Η επιστήμη φαίνεται να εξελίσσεται με αυτό τον τρόπο: με το να ανακαλύπτει παραδείγματα μαθηματικών δομών μεταξύ παρατηρήσιμων φυσικών αντικειμένων. Πολύ απλά, αν κάθε μελέτη δομής είναι μαθηματικά και η εμπειρική επιστήμη μελετά δομές στον φυσικό κόσμο, τότε η εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στη φυσική δεν αποτελεί πλέον πρόβλημα.

Η ολιστική άποψη των μαθηματικών και της επιστήμης που προσφέρει ο δομισμός εξηγώντας ταυτόχρονα την πλούσια αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών των δύο πεδίων αποτελεί ένα από τα μεγάλα πλεινεκτήματα αυτής της φιλοσοφικής προσέγγισης. Πολλοί κλάδοι των μαθηματικών όπως η αριθμητική, η πραγματική ή η μιγαδική ανάλυση αναπτύχθηκαν και επεκτάθηκαν για να μελετηθούν σε βάθος φυσικές διαδικασίες.

Ένα εξίσου σημαντικό όφελος που προκύπτει από την αποδοχή της κεντρικής ιδέας του δομισμού είναι η κατανόηση μιας περιοχής των μαθηματικών με βάση κάποια άλλη *ευρύτερη*. Παραδείγματα αποτελούν η χρήση της πραγματικής ανάλυσης για την απόδειξη θεωρημάτων που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς ή η χρήση της συναρτησιακής ανάλυσης για την απόδειξη θεωρημάτων που αφορούν διανυσματικούς χώρους κ.ά. Αυτό είναι εφικτό γιατί η δομή που μελετά η μια περιοχή εμπεριέχεται (έστω και λανθάνουσα) στη δομή που μελετά η άλλη περιοχή. Αυτό το γεγονός επιτρέπει την «έμμεση» σύνδεση τους και διευκολύνει την σε βάθος ανάλυση και κατανόηση ποικίλων θεωρημάτων τουλάχιστον από δύο οπτικές.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το πρόβλημα της εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών στη μελέτη του μη μαθηματικού σύμπαντος, μαζί με το επιμέρους πρόβλημα της δυνατότητας μαθηματικών εξηγήσεων φυσικών φαινομένων, αποτελεί σημαντικό ζήτημα τόσο της φιλοσοφίας των μαθηματικών όσο και της φιλοσοφίας των εμπειρικών επιστημών. Γενικότερα, η σχέση των μαθηματικών και φυσικών φαινομένων αποτέλεσε και αποτελεί σπουδαίο αντικείμενο συζήτησης μεταξύ φιλοσόφων, μαθηματικών και φυσικών. Τα μαθηματικά, αν τα αντιληφθούμε είτε ως στοιχεία ενός κόσμου με αυθύπαρκτη υπόσταση είτε ως κατασκευές του ανθρώπινου νου (π.χ., μέσω εξιδανικεύσεων των δεδομένων της εμπειρίας με τα υλικά αντικείμενα του φυσικού κόσμου), φαίνεται να μπορούν να εξηγήσουν φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Προφανώς υπάρχουν μαθηματικά γεγονότα τα οποία δεν αντιστοιχούν σε γεγονότα του κόσμου της ύλης. Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι τα μαθηματικά είναι δημιουργήματα του ανθρώπου, ούτε ότι αυτά προϋπάρχουν της φύσης.

Το θέμα εμπλέκει ζητήματα οντολογίας (φύση των μαθηματικών και των υλικών αντικειμένων), γνωσιολογίας (πηγή της μαθηματικής και επιστημονικής γνώσης) και μεθοδολογίας (θεωρία επιστημονικής εξήγησης). Όπως προαναφέραμε, οι θεωρίες της επιστημονικής εξήγησης που εντάσσονται στην αιτιακή-μηχανιστική παράδοση, συνδυασμένες με μια οντολογική άποψη σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αυθύπαρκτες αφηρημένες οντότητες, δεν επιτρέπουν τη δυνατότητα εξήγησης φυσικών φαινομένων με τη βοήθεια μαθηματικών γεγονότων. Επιπλέον, όλες οι φιλοσοφίες των μαθηματικών που θέτουν ένα οντολογικό χάσμα μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων και φυσικών αντικειμένων (π.χ., πλατωνισμός, λογικισμός, φορμαλισμός) περιορίζουν τις δυνατότητες εξήγησης της εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών στη διερεύνηση του φυσικού κόσμου. Εξαίρεση αποτελεί ο ιντουισιονισμός, συμπληρωμένος με μία καντιανή άποψη για τη συγκρότηση του κόσμου της εμπειρίας. Σε αυτή την περίπτωση, τα μαθηματικά αντικείμενα είναι κατασκευές του νου του μαθηματικού και η εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στη μελέτη του εμπειρικού κόσμου εξηγείται από το γεγονός ότι ο ίδιος ο κόσμος της εμπειρίας είναι εν μέρει διαμορφωμένος από τον ανθρώπινο νου.

Τέλος, ο μαθηματικός δομισμός φαίνεται να προσφέρει μια εύκολη και εύλογη λύση στο πρόβλημα της εφαρμοσιμότητας. Η φυσική (εμπειρική) επιστήμη μελετά δομές στον φυσικό (εμπειρικό) κόσμο και ο στόχος των μαθηματικών είναι ακριβώς η μελέτη δομών χωρίς να ενδιαφέρει η φύση των αντικειμένων που καταλαμβάνουν τις θέσεις σε κάθε δομή (αν είναι αριθμοί, άστρα, μόρια, κ.λπ.). Σε αυτή την προσέγγιση, δεν υπάρχει ουσιώδης διάκριση μεταξύ καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών. Και η ίδια η έννοια της μαθηματικής εξήγησης φυσικών δεδομένων δεν είναι προβληματική: τα χαρακτηριστικά μιας δομής αξιοποιούνται για την εξήγηση των χαρακτηριστικών μιας ισόμορφης δομής.

Ωστόσο, όπως καταλαβαίνουμε, η έννοια της επιστημονικής εξήγησης δεν είναι τόσο σαφής ώστε να την προσδιορίσουμε με αυστηρότητα. Αρκετά πρότυπα επιστημονικής εξήγησης, τα οποία προαναφέραμε, παρουσιάζουν κενά ή δεν έχουν καθολική ισχύ καθώς λειτουργούν μόνο υπό κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες. Για παράδειγμα, το Π-Ν πρότυπο φαίνεται να ταιριάζει περισσότερο στη θεωρητική φυσική ενώ οι βιοϊατρικές επιστήμες ενδιαφέρονται περισσότερο για μηχανισμούς παρά για νόμους. Έτσι είναι δύσκολο να συμπεριλάβουμε σε ένα ενιαίο πρότυπο όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μπορεί να συνιστούν μια γνήσια επιστημονική εξήγηση. Ίσως η μεθοδολογία της επιστημονικής εξήγησης να διαφέρει από κλάδο σε κλάδο, από γνωστικό αντικείμενο σε γνωστικό αντικείμενο ή / και ανάλογα με τα ενδιαφέροντα του ερευνητή.

5.*ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ*

Αναπολιτάνος, Δ. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.

Ευαγγελόπουλος, Γ. (2010). *Μαθηματικά και Φυσική: Μια Ιδιαίτερη Σχέση με αφορμή σκέψεις του Κορνήλιου Καστοριάδη*. Αθήνα: Εκδόσεις ΕΥΡΑΣΙΑ.

Asbaugh, M. S., C. C. Chicone, and R. H. Cushman (1991). "The Twisting Tennis Racket", *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **3**(1): 67–85.

Baker, A. (2005). "Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena?", *Mind*, **114**: 223–238.

Cartwright, N. (1979). "Causal Laws and Effective Strategies", *Noûs*, **13**: 419-437.

Cartwright, N. (2004). "From Causation to Explanation and Back". In B. Leiter (ed.), *The Future for Philosophy*, 230-245. Oxford: Oxford University Press.

Colyvan, M. (1999). "Confirmation theory and indispensability", *Philosophical Studies*, **96**: 1-19.

Colyvan, M. (2001). *The Indispensability of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Colyvan, M. (2002). "Mathematics and Aesthetic Considerations in Science", *Mind*, **11**: 69–78.

Colyvan, M. (2008). "Indispensability arguments in the philosophy of mathematics". In E. Zalta (ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu

Feigl, H., Scriven, M., and Maxwell, G. (1958). *Concepts, Theories, and the Mind-Body Problem*. Minneapolis:

Feynman, R., (1967). *The Character of Physical Law*. New York, Modern Library Edition, 1994.

Field, H. (1989). *Realism, Mathematics, and Modality*. Oxford: Blackwell.

Friedman, M. (1974). "Explanation and Scientific Understanding", *The Journal of*

Philosophy, **71**: 5-19.

Gödel, K. (1964). “What Is Cantor’s Continuum Problem?” In Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.) (1983), *Philosophy of Mathematics*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press, 470-485.

Goodman, N. D. (1979). “Mathematics as an objective science”, *American Mathematical Monthly*, **88**: 540-551.

Hales, T. (2000). “Canonballs and Honeycombs”, *Notices of the American Mathematical Society*, **47**: 440–449.

Hales, T. (2001). “The Honeycomb Conjecture”, *Discrete and Computational Geometry*, **25**: 1–22.

Hempel, C. (1945). “On the nature of mathematical truth’, *American Mathematical Monthly* **52**: 543-556.

Hempel, C. (1965). *Aspects of Scientic Explanation*. New York: Free Press.

Hempel, C. and Oppenheim, P. (1948). “Studies in the Logic of Explanation”, *Philosophy of Science Studies*, **15**: 135-175.

Horsten, L. (2012). “Philosophy of Mathematics”. In E. N. Zalta (ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/

Kitcher, P. (1976). “Explanation, Conjunction, and Unification”, *The Journal of Philosophy*, **73**: 207-212.

Kitcher, P. (1981). “Explanatory Unification”, *Philosophy of Science*, **48**: 507-531.

Kitcher, P. (1989). “Explanatory unification and the causal structure of the world”. In P. Kitcher and W. Salmon (eds.), *Scientific Explanation, vol. XIII of Minnesota Studies in the Philosophy of Science.* Minneapolis: University of Minnesota Press, 410-505.

Lipton, P. (2004). “What Good is an Explanation”. In J. Cornwell (ed.), *Explanations, Styles of Explanation in Science*. Oxford: Oxford University Press, 1–21.

Mancosu, P., Jørgensen, K. and Pedersen, S. (eds.) (2005). *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*. Berlin: Springer.

Marcus, R. (2016). “The Indispensability Argument in the Philosophy of Mathematics”. In J. Fieser and B. Dowden (eds.), *Internet Encyclopedia of Philosophy*. http://www.iep.utm.edu/indimath/#H1

Mancosu, P. (2011). “Explanation in Mathematics”. In E. N. Zalta (ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. https://plato.stanford.edu/entries/mathematics-explanation/

Panza, M. (2002). “Mathematisation of the Science of Motion and the Birth of Analytical Mechanics: A Historiographical Note”. In P. Cerrai, P. Freguglia, C. Pellegrini (eds.), *The Application of Mathematics to the Sciences of Nature. Critical moments and Aspects*. New York: Kluwer, 253-271.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1977). *Mathematical Methods in Science*. Washington, D. C.: Mathematical

Railton, P. (1981). “Probability, Explanation, and Information”, *Synthese*, **48**: 233–256.

Resnik, M. (1975), “Mathematical knowledge and pattern recognition”, *Canadian Journal of Philosophy*, **5**: 25–39.

Resnik, M., (1980). *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Ithaca, New York: Cornell University Press.

Resnik, M., and Kushner, D. (1987). “Explanation, Independence, and Realism in Mathematics”, *British Journal for the Philosophy of Science*, **38**: 141–158.

Salmon, W. (1984). *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World*. Princeton: Princeton University Press.

Salmon, W. (1994). “Causality without Counterfactuals”, *Philosophy of Science*, **61**: 297–312.

Salmon, W. (1997). “Causality and Explanation: A Reply to Two Critiques”, *Philosophy of Science*, **64**: 461–477.

Salmon, W. and Kitcher, P. (eds.) (1989). *Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Vol 13: Scientific Explanation*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Salmon, M. H., Earman, J., Glymour, C., Lennox, J. G., Machamer, P., McGuire, J. E., Norton, J. D., Salmon, W. C., and Schaffner, K. F. ([1992] 1999): *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία της Επιστήμης*. Μτφρ. Π. Θεοδώρου,Κ.Παγωνδιώτης, Γ. Φουρτούνης. Επιμ. Α. Μπαλτάς. 2^{η} έκδοση. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Scriven, M. (1959). “Explanation and prediction in evolutionary theory”, *Science* **30**: 477–482.

Shapiro, S. (1983a). “Mathematics and Reality”, *Philosophy of Science* **50**: 523-548.
Shapiro, S. (2000). *Thinking about Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Steiner, M. (1978a). “Mathematical explanation”, *Philosophical Studies*, **34**: 135-151.

Steiner, M. (1978b). “Mathematics, explanation and scientific knowledge”, *Noûs*, **12**: 17-28.

Steiner, M. (1989). “The application of mathematics to natural science”, *The Journal of Philosophy*, **86**: 449-480.
Woodward, J. (2014). “Scientific Explanation”. In E. N. Zalta (ed.), *Standord Encyclopedia of Philosophy*. https://plato.stanford.edu/entries/scientific-explanation/