



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Προγραμματισμός της Μεθόδου του Ιδιο-Γενικευμένου
Διαχωρισμού (Proper Generalized Decomposition) για την
Πρόλεξη και/ή τη Συμπύεση της Λύσης 2Δ Μόνιμων και
Μη-Μόνιμων ΜΔΕ. Εφαρμογή στη Βελτιστοποίηση με Χρήση
της Συζυγούς Μεθόδου

Διπλωματική Εργασία
του

Βασίλειου Παπαγεωργίου

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2017

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω κάποιους ανθρώπους που με βοήθησαν με οποιοδήποτε τρόπο κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Αρχικά τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα, καθώς και για την διαρκή υποστήριξη που μου παρείχε, αφιερώνοντας μου πολλές ώρες από το χρόνο του, όποτε είχα «κολλήσει» και χρειαζόμουν τη βοήθειά του.

Επίσης, ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα Κωνσταντίνο Σαμούχο για τη συνεργασία που είχαμε σε κάποια κομμάτια της διπλωματικής αυτής εργασίας και το χρόνο που μου διέθεσε όποτε ζήτησα τη βοήθειά του, καθώς και τα υπόλοιπα μέλη της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ για την προθυμία τους να απαντήσουν σε οποιαδήποτε απορία μπορεί να μου δημιουργήθηκε, είτε σε επιστημονικό, είτε σε καθαρά τεχνικό θέμα.

Τέλος, δεν μπορώ να παραλείψω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, την αδερφή μου Ισιδώρα και τη φίλη μου Ελένη για την έμπρακτη στήριξη που μου παρείχαν όλον αυτό το καιρό, ώστε να ξεπεράσω τις όποιες δυσκολίες και να καταφέρω να ολοκληρώσω την εργασία.



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Προγραμματισμός της Μεθόδου του Ιδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού
(Proper Generalized Decomposition) για την Πρόλεξη και/ή τη Συμπύεση της
Λύσης 2Δ Μόνιμων και Μη-Μόνιμων ΜΔΕ. Εφαρμογή στη Βελτιστοποίηση
με Χρήση της Συζυγούς Μεθόδου

Διπλωματική Εργασία
του Βασίλειου Παπαγεωργίου

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ
Αθήνα, 2017

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία πραγματεύεται τη χρήση της μεθόδου **Ιδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού (Proper Generalized Decomposition-PGD)** για τη συμπύεση ή/και την πρόλεξη πεδίων που αποτελούν λύσεις ΜΔΕ. Η μέθοδος αυτή συγκαταλέγεται εντός μιας ευρύτερης κατηγορίας μεθόδων που σκοπό έχουν την υποβάθμιση της τάξης πολύπλοκων και πολυ-παραμετρικών προβλημάτων (Reduced Order Models) ώστε αυτά να καταστούν ευκολότερα διαχειρίσιμα. Βασική της αρχή είναι η αποδόμηση των πεδίων που προκύπτουν ως λύσεις των ΜΔΕ που διέπουν τα φυσικά προβλήματα, σε 1Δ ανεξάρτητες μεταξύ τους συναρτήσεις και μετέπειτα η ανακατασκευή τους με τη χρήση ενός αθροίσματος προσέγγισης που αποτελείται από γινόμενα των συναρτήσεων αυτών. Με αυτόν τον τρόπο πραγματοποιείται εξοικονόμηση σε υπολογιστική ισχύ και μνήμη.

Συγκεκριμένα, η εργασία χωρίζεται θεματικά σε δύο μέρη. Στο ένα η μέθοδος χρησιμοποιείται για την επίλυση της 2Δ εξίσωσης διάχυσης θερμότητας, και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από ήδη υπάρχον λογισμικό της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ. Στο δεύτερο μέρος η μέθοδος PGD εξετάζεται ως προς την αποδοτικότητά της για τη συμπύεση 2Δ μη-μόνιμων πεδίων και δίνεται ιδιαίτερη σημασία στην επίδραση των συμπιεσμένων πεδίων στη βελτιστοποίηση με την συνεχή συζυγή μέθοδο.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα βελτιστοποίησης για τα οποία οι συζυγείς ΜΔΕ οφείλουν να ολοκληρωθούν με ανάποδη κατεύθυνση στο χρόνο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να απαιτείται η αποθήκευση όλης της λύσης του χρονικά μη-μόνιμου πρωτεύοντος προβλήματος ώστε να τροφοδοτήσει τον συζυγή επιλύτη, με αποτέλεσμα να αυξάνει η απαίτηση για υπολογιστική μνήμη. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί με τη χρήση ενός αλγορίθμου συμπύεσης που προτείνεται εδώ και ονομάζεται **Σταδιακός Ιδιο-Γενικευμένος Διαχωρισμός (Incremental Proper Generalized Decomposition-iPGD)**, διότι πραγματοποιεί τη συμπύεση «σταδιακά» καθώς συντελείται η χρονική ολοκλήρωση. Η μέθοδος εξετάζεται για δύο εφαρμογές βελτιστοποίησης που βασίζονται στη 2Δ μη-μόνιμη εξίσωση μετάδοσης θερμότητας και στις εξισώσεις συμπιεστής ατρίβους ροής, αντίστοιχα.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Section
Laboratory of Thermal Turbomachines
Parallel CFD & Optimization Unit

Programming of the Proper Generalized Decomposition Method for the Prediction and/or Compression of the Solution of 2D Steady and Unsteady PDEs. Applications in Adjoint-Based Optimization

Diploma Thesis

by **Vasileios Papageorgiou**

Supervisor: K. C. Giannakoglou, Professor NTUA
Athens, 2017

Abstract

This diploma thesis involves the implementation of **Proper Generalized Decomposition - PGD** for the prediction and/or compression of 2D fields derived as PDEs solution. PGD is part of a group of methods (Reduced Order Models) that aim to lower the computational complexity of multidimensional problems in order to make them manageable with the available computational means. The principle of the method is the decomposition of fields to a sum of products of 1D independent functions and their afterwards reconstruction using that sum. This way the computational cost or the requiring memory becomes significantly lower.

In particular, this diploma thesis is consisting of two parts. In the first one, PGD is used for solving the 2D heat conduction equation and the results are compared with those obtained by an existing software of PCopt/NTUA. In the second part, the method is examined for its efficiency in compressing 2D unsteady fields and their effect in a gradient-based optimization process with the assistance of the continuous adjoint method.

In gradient-based optimization of unsteady problems, the adjoint PDEs has to be integrated backwards in time. Thus, the primal solution time-series have to be stored, in order to be available for the adjoint solver, and as a result the requirements in storage memory increase. A solution to this problem is proposed by the development and programming of the **Incremental Proper Generalized Decomposition – iPGD** method as a means to approximate the primal solution, running during the time integration, to subsequently support the unsteady adjoint solver marching backwards in time. For the purpose of demonstration, two applications are examined based on the unsteady heat equation and the compressible inviscid flow equations respectively.

Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
ΜΔΕ	Μερική /-ές Διαφορική/-ές Εξίσωση /-εις
ΣΔΕ	Συνήθης /-εις Διαφορική /-εις Εξίσωση /-εις
1Δ	Μιας διάστασης (μονοδιάστατο)
2Δ	Δύο διαστάσεων (διδιάστατο)

NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit

CFD	Computational Fluid Dynamics
PDE	Partial Differential Equation
ODE	Ordinary Differential Equation
G.G.	Green–Gauss Theorem
PGD	Proper Generalized Decomposition
iPGD	Incremental Proper Generalized Decomposition

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Μοντέλα Μειωμένης Τάξης	1
1.2 Η Συνεχής Συζυγής Μεθοδος για Μη-Μόνιμα Προβλήματα	2
1.3 Στόχος και Δομή Εργασίας	3
2 Συμπύεση Πεδίων με Χρήση της Μεθόδου Ιδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού	7
2.1 Συμπύεση 2Δ Πεδίου	8
2.2 Βαθμιαία Δόμηση Αθροίσματος Προσέγγισης	9
2.2.1 Στρατηγική Εναλλασσόμενων Κατευθύνσεων	10
2.3 Κριτήρια Τερματισμού Διαδικασίας Εμπλουτισμού του Αθροίσματος	12
2.4 Προβολή κατά Galerkin- Η Βασική Ιδέα για τον Υπολογισμό της Προσεγγιστικής Αναπαράστασης	12
2.5 Παραδείγματα Συμπύεσης 2Δ πεδίων	14
2.6 Συμπύεση 3Δ Πεδίου	21
3 Η Μέθοδος PGD για Επίλυση ΜΔΕ	23
3.1 Επίλυση της Εξίσωσης Poisson με τη Μέθοδο PGD	24
3.1.1 Ομογενείς συνθήκες Diriclet	24
3.1.2 Μη-Ομογενείς Οριακές Συνθήκες Diriclet	29
3.2 2Δ πρόβλημα σε Τυχαίο Υπολογιστικό Χωρίο	31
3.3 Εφαρμογή Επίλυσης ΜΔΕ με Χρήση της Μεθόδου PGD	34
4 Σταδιακή Ανακατασκευή 1Δ Χρονικά Μη-Μόνιμου Πεδίου	37
4.1 Περιγραφή της Μεθόδου	37
4.2 Εφαρμογή στην Εξίσωση 1Δ Αρμονικού Κύματος	40
4.3 Εφαρμογή σε Τροποποιημένη Μορφή της Εξίσωσης Burgers	43
4.3.1 Ανάλυση Επίδρασης κάθε Όρου του Αθροίσματος Προσέγγισης στην Ανακατασκευή του Πεδίου	48
5 Σταδιακή Ανακατασκευή 2Δ Χρονικά Μη-Μόνιμου Πεδίου	57
5.1 Περιγραφή της Μεθόδου	57
5.2 Εφαρμογή στην Εξίσωση 2Δ Κύματος	61
6 Εφαρμογή Βελτιστοποίησης σε 2Δ Μη-Μόνιμο Πρόβλημα Μετάδοσης Θερμότητας	65
6.1 Διατύπωση Πρωτεύοντος Προβλήματος	66
6.2 Στόχος Βελτιστοποίησης και Συνάρτηση Κόστους	69
6.3 Ανάπτυξη της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου	71

6.4	Αποτελέσματα και Σύγκριση	76
6.4.1	Περίπτωση εκ των Υστέρων Συμπίεσης του Πεδίου	76
6.4.2	Περίπτωση Σταδιακής Συμπίεσης κατά τη Χρονική Ολοκλήρωση	85
7	Εφαρμογή του PGD στη Βελτιστοποίηση Μορφής για τις Μη-Μονιμες Εξισώσεις Euler	93
8	Σύνοψη – Συμπεράσματα – Προτάσεις για Περαιτέρω Μελέτη	99
	Βιβλιογραφία	101

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Μοντέλα Μειωμένης Τάξης

Τις τελευταίες δεκαετίες, οι υπολογιστικές μέθοδοι βρίσκονται σε διαρκή εξέλιξη και ανάπτυξη. Νέες ιδέες και τεχνικές στη μοντελοποίηση και διακριτοποίηση των προβλημάτων, στην αριθμητική ανάλυση καθώς και η ανάπτυξη της τεχνολογίας των υπολογιστών, έχουν καταστήσει δυνατή την υπολογιστική επίλυση απαιτητικών προβλημάτων που βρίσκουν εφαρμογή σε πολλούς τομείς και ιδιαίτερα στη βιομηχανία. Παρόλα αυτά, πολλά προβλήματα στην επιστήμη και τη μηχανολογία παραμένουν δυσεπίλυτα καθώς παρουσιάζουν συγκεκριμένες προκλήσεις, εξαιτίας της ιδιαίτερης πολυπλοκότητας που εμφανίζουν.

Μία τέτοια πρόκληση μπορεί να είναι ότι αρκετά συχνά τα μοντέλα που αναπτύσσονται εξαρτώνται από πλήθος ανεξάρτητων μεταβλητών. Το σύνολο των μεταβλητών αυτών ορίζει ένα διανυσματικό χώρο «καταστάσεων» (state space) μέσα στον οποίο βρίσκεται και εκείνος ο συνδυασμός παραμέτρων (εκείνη η «κατάσταση» των μεταβλητών) που αποτελεί τη λύση του προβλήματος. Μεγάλος αριθμός παραμέτρων οδηγεί σε αυξημένη διάσταση του χώρου κατάστασης. Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων υψηλής «τάξης» απαιτείται τεράστια υπολογιστική ισχύς, η οποία συχνά δεν είναι διαθέσιμη, καθώς και δυνατότητα χρήσης τεράστιας μνήμης ηλεκτρονικού υπολογιστή για τη διαχείριση του πλήθους των παραμέτρων, κάτι που καθιστά την επίλυση τέτοιων προβλημάτων απαγορευτική, παρόλο που το κατάλληλο λογισμικό επίλυσης μπορεί να είναι διαθέσιμο και απολύτως αξιόπιστο.

Ωστόσο, η υπολογιστική πολυπλοκότητα των προβλημάτων αυτών μπορεί να μειωθεί, αν χρησιμοποιηθούν κατάλληλα **Μοντέλα Μειωμένης Τάξης (Reduced Order Models – ROM)**. Η χρήση τέτοιων μοντέλων βασίζεται στην παρατήρηση ότι, αρκετές φορές, στα προβλήματα που εμφανίζονται στις πραγματικές εφαρμογές, η λύση μπορεί να αναζητηθεί σε έναν υπο-χώρο του συνολικού χώρου κατάστασης, ο οποίος έχει διάσταση πολύ μικρότερη του πραγματικού. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, μπορεί να κατασκευαστεί ένας μοντέλο μειωμένης τάξης, η επίλυση του οποίου θα δώσει μία προσεγγιστική λύση του πλήρους μοντέλου, αλλά σε σημαντικά συντομότερο χρόνο.

Η μέθοδος που εξετάζεται σε αυτήν τη διπλωματική εργασία αποτελεί μία μορφή μοντέλου μειωμένης τάξης και ονομάζεται **Μεθοδος του Ιδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού (Proper Generalized Decomposition – PGD)** [4],[2]. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι ένα πεδίο που εξαρτάται έστω από q ανεξάρτητες μεταβλητές μπορεί να προσεγγισθεί από την επαλληλία/συνάνθροιση μικρού αριθμού M γινομένων 1Δ συναρτήσεων, κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται από μία μόνο διαφορετική ανεξάρτητη μεταβλητή. Επομένως, το πεδίο αυτό δύναται να

γραφτεί στη διαχωρίσιμη μορφή:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_q) \approx \sum_{\mu=1}^M X_1^\mu(x_1) X_2^\mu(x_2) \dots X_q^\mu(x_q) \quad (1.1)$$

Η ανακατασκευή του πεδίου με τη χρήση τέτοιων αθροισμάτων 1Δ συναρτήσεων σε διαχωρίσιμη μορφή αποτελεί την καρδιά της μεθόδου PGD. Θεωρώντας ότι κάθε παράμετρος x_q από την οποία εξαρτάται το πεδίο διακριτοποιείται με n_q όρους, τότε, για τον πλήρη καθορισμό του απαιτείται η γνώση $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_q$ τιμών. Πλέον, μέσω της προσεγγιστικής ανακατασκευής, το πεδίο μπορεί να περιγραφεί με τη χρήση $M(n_1 + n_2 + \dots + n_q)$ όρων. Με τη προϋπόθεση ότι ο αριθμός M των όρων του αθροίσματος προσέγγισης, που χρειάζονται για την ικανοποιητική αναπαράσταση του πραγματικού πεδίου, είναι μικρός, η μέθοδος PGD είναι εμφανές ότι πραγματοποιεί σημαντική υποβάθμιση στη τάξη του προβλήματος.

Το πεδίο που επεξεργάζεται μέσω της μεθόδου μπορεί να εμπίπτει σε μία από τις δύο παρακάτω κατηγορίες:

- Δεδομένο πεδίο, που έχει υπολογιστεί με συμβατικό τρόπο χωρίς μείωση της διάστασης και το οποίο, στη συνέχεια, χρειάζεται να αποθηκευτεί με (μεγάλη) οικονομία στην απαραίτητη μνήμη.
- Άγνωστο πεδίο, το οποίο πρώτα θα αναλυθεί με βάση τη μέθοδο PGD, θα αντικατασταθεί στις ισχύουσες-κλασικές ΜΔΕ και θα προκύψουν νέες εξισώσεις, οι οποίες και θα λυθούν αριθμητικά (αντί των κλασικών).

Στη πρώτη περίπτωση η μέθοδος PGD δρα ως αλγόριθμος συμπίεσης του ήδη υπολογισθέντος πεδίου, ενώ στη δεύτερη, η μέθοδος χρησιμοποιείται για την εύρεση μίας προσεγγιστικής μορφής του, που θα προσεγγίζει τη λύση της ΜΔΕ. Όπως θα αναλυθεί στην εργασία αυτή διεξοδικά, το πρόβλημα επίλυσης της ΜΔΕ ανάγεται σε πρόβλημα υπολογισμού των συναρτήσεων X_q^μ (οι οποίες θα ονομάζονται στο εξής συναρτήσεις βάσης) και για τον υπολογισμό τους απαιτείται η επίλυση κάποιων ΣΔΕ, πολύ μικρότερου υπολογιστικού κόστους σε σχέση με την αρχική ΜΔΕ. Το μειονέκτημα που εμφανίζει αυτή η προσέγγιση είναι ότι, εφόσον οι συναρτήσεις βάσης βρίσκονται σε γινόμενο, για τον καθορισμό τους απαιτείται μία επιπλέον εσωτερική επαναληπτική διαδικασία.

1.2 Η Συνεχής Συζυγής Μεθοδος για Μη-Μόνιμα Προβλήματα

Στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης (ένα επιστημονικό πεδίο στο οποίο η μέθοδος PGD βρίσκει εφαρμογή), είναι απαραίτητη η γνώση των παραγώγων ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, οι οποίες μεταβάλλονται ανά κύκλο βελτιστοποίησης. Η συνεχής συζυγής μέθοδος [3][8], για την ανάπτυξη της οποίας έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση από τη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση αυτών των παραγώγων, με κύριο πλεονέκτημα ότι το υπολογιστικό κόστος είναι ανεξάρτητο του αριθμού των μεταβλητών σχεδιασμού. Για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας μέσω της συζυγούς μεθόδου, απαιτείται η επίλυση των συζυγών ΜΔΕ, λαμβάνοντας ως δεδομένο το πρωτεύον πεδίο που προέκυψε ως λύση των ΜΔΕ που περιγράφουν το ευθύ (πρωτεύον) πρόβλημα.

Σε μη-μόνιμες εφαρμογές βελτιστοποίησης, οι συζυγείς ΜΔΕ έχουν το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι πρέπει να ολοκληρωθούν αντίθετα στο χρόνο, κάτι που απαιτεί, επομένως, την αποθήκευση ή τον επανυπολογισμό της λύσης του χρονικά μη-μόνιμου ευθέως προβλήματος για ολόκληρο το

χρονικό διάστημα. Η πλήρης αποθήκευση του χρονικά μη-μόνιμου πεδίου καθίσταται απαγορευτική για προσομοιώσεις μεγάλης κλίμακας. Μία πιθανή εναλλακτική είναι η προσέγγιση των χρονοσειρών του πρωτεύοντος πεδίου μέσω μιας μεθόδου, που θα εκτελείται σταδιακά κατά τη χρονική ολοκλήρωση των πρωτεύουσών εξισώσεων, με χαμηλό υπολογιστικό κόστος. Ζητούμενο από μία τέτοια μέθοδο είναι, εκτός από το χαμηλό υπολογιστικό κόστος, να αναπαράγει με την απαιτούμενη ακρίβεια το πραγματικό πεδίο, ώστε να μην επηρεάζεται αρνητικά ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας.

Στη βιβλιογραφία προτείνονται διάφορες τεχνικές ώστε να ξεπεραστεί το πρόβλημα αποθήκευσης του πλήρους πεδίου. Η πιο συχνή είναι η τεχνική των σημείων-σταθμών (checkpoints)[7], η οποία αποθηκεύει τη λύση του ευθέως προβλήματος σε επιλεγμένα χρονικά βήματα. Άλλες μέθοδοι χρησιμοποιούν μοντέλα προσέγγισης όπως η γραμμική παρεμβολή ή μέσω κυβικών καμπυλών (cubic splines) τα οποία είναι ιδιαίτερα απλά αλλά αμφισβητήσιμης αξιοπιστίας για περίπλοκες εφαρμογές. Μία άλλη κατηγορία μεθόδων βασίζεται σε προσέγγιση μέσω σειρών Fourier (κατάλληλες για περιοδικά φαινόμενα) ή σε τεχνικές συμπίεσης δεδομένων όπως είναι η μέθοδος Διαχωρισμού μέσω Ιδιοτιμών (Singular Value Decomposition – SVD[5][12]).

Σε αυτήν την εργασία, αναπτύσσεται μία μέθοδος σταδιακής συμπίεσης του χρονικά μη-μόνιμου πεδίου, η οποία είναι βασισμένη στη μέθοδο PGD. Η χρονικά μη-μόνιμη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος (εδώ για μια 1Δ περίπτωση) προσεγγίζεται ως ένα άθροισμα 1Δ συναρτήσεων βάσης ως εξής:

$$u(x, t) \approx \sum_{\mu=1}^M X^{\mu}(x)T^{\mu}(t) \quad (1.2)$$

όπου x η χωρική συντεταγμένη και t ο χρόνος. Η συμπίεση του πεδίου γίνεται με τρόπο σταδιακό, έτσι ώστε, αμέσως μόλις είναι διαθέσιμη η λύση για τη δεδομένη χρονική στιγμή, να πραγματοποιείται η επεξεργασία μέσω της μεθόδου για την ανανέωση των 1Δ συναρτήσεων βάσης. Έπειτα, το στιγμιαίο πεδίο χάνεται και η διαδικασία συνεχίζεται για το επόμενο χρονικό βήμα με τις απαραίτητες πληροφορίες να είναι αποθηκευμένες με οικονομικό τρόπο στις 1Δ συναρτήσεις X και T . Η μέθοδος αυτή, από εδώ και στο εξής, θα αναφέρεται ως **Σταδιακός Ιδιο-Γενικευμένος Διαχωρισμός (Incremental Proper Generalized Decomposition – iPGD)**.

1.3 Στόχος και Δομή Εργασίας

Αυτή η διπλωματική εργασία βασίζεται στις αρχές της μεθόδου PGD για την πρόλεξη ή τη συμπίεση λύσεων ΜΔΕ. Συγκεκριμένα μπορεί θεματικά να χωριστεί σε δύο κομμάτια, όπου στο πρώτο γίνεται εκτενής μελέτη για την απόδοσή της ως μέσω συμπίεσης ή εύρεσης της λύσης ΜΔΕ, ενώ στο δεύτερο εξετάζεται η αποδοτικότητά της σε συνδυασμό με εφαρμογές βελτιστοποίησης σε χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα, όπου προτείνεται ένας νέος αλγόριθμος «σταδιακής» συμπίεσης του πεδίου κατά τη διάρκεια της χρονικής ολοκλήρωσης. Στο πλαίσιο της εργασίας αυτής έγιναν τα παρακάτω:

- Αναπτύχθηκε κώδικας που υλοποιεί τον αλγόριθμο που περιγράφει η κλασική μέθοδος PGD για την κατασκευή διαχωρίσιμων προσεγγίσεων (2Δ ή 3Δ) πεδίων που αποτελούν λύσεις ΜΔΕ σε γλώσσα προγραμματισμού *Fortran 77*.
- Προγραμματίστηκε λογισμικό για την επίλυση, μέσω της μεθόδου PGD, της ΜΔΕ που μοντελοποιεί ένα μόνιμο πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας σε 2Δ επίπεδη μεταλλική πλάκα. Το

λογισμικό αναπτύχθηκε για πλάκα ακανόνιστης γεωμετρίας που διακριτοποιείται με δομημένο υπολογιστικό πλέγμα. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων έγινε με την αντίστοιχη λύση που προέκυψε για την ίδια ΜΔΕ με ήδη υπάρχον λογισμικό επίλυσης της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ.

- Διατυπώθηκε μαθηματικά, αναπτύχθηκε και προγραμματίστηκε νέα μέθοδος βασισμένη στην ιδέα της μεθόδου PGD για την σταδιακή συμπίεση πεδίων που προκύπτουν ως λύσεις χρονικά μη-μόνιμων προβλημάτων (1Δ και 2Δ) καθώς συντελείται η χρονική ολοκλήρωση των αντίστοιχων ΜΔΕ.
- Η νέα μέθοδος που προτάθηκε εδώ, ελέγχθηκε για την αποτελεσματικότητάς της στην συμπίεση και αναπαραγωγή του πεδίου που προκύπτει ως λύση ενός 2Δ μη-μόνιμου προβλήματος μετάδοσης θερμότητας. Έπειτα εξετάστηκε ο τρόπος που επηρεάζει το προκύπτον προσεγγιστικό πεδίο την ποιότητα της εκτέλεσης μίας διαδικασίας βελτιστοποίησης που βασίζεται στο παραπάνω πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας.

Η δομή της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είναι η ακόλουθη:

- **Κεφάλαιο 2:** Παρουσιάζεται η βασική διατύπωση της μεθόδου PGD για την κατασκευή προσεγγιστικών αναπαραστάσεων 2Δ και 3Δ πεδίων που έχουν υποστεί συμπίεση μέσω αυτής. Περιγράφεται εκτενώς η μέθοδος που ακολουθεί ο αλγόριθμος συμπίεσης και εξετάζονται οι παράμετροι από τις οποίες εξαρτάται η απόδοσή του. Έπειτα παρουσιάζονται ενδεικτικά παραδείγματα συμπίεσμένων πεδίων και επιδεικνύεται η οικονομία σε υπολογιστική μνήμη που επιτυγχάνεται εξαιτίας της συμπίεσης.
- **Κεφάλαιο 3:** Παρουσιάζεται και αναλύεται ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί την μέθοδο PGD για την επίλυση της 2Δ εξίσωσης Poisson. Αρχικά η ανάπτυξη των εξισώσεων που την αποτελούν γίνεται για ορθογωνικό χωρίο επίλυσης και έπειτα γενικεύονται ώστε να καλύπτουν την περίπτωση οποιουδήποτε σχήματος υπολογιστικό χωρίο. Έπειτα ακολουθεί μία εφαρμογή, όπου η ακρίβεια της λύσης που προκύπτει μέσω PGD συγκρίνεται με την προκύπτουσα από έναν τυπικό επιλύτη της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ.
- **Κεφάλαιο 4:** Εδώ, προτείνεται μία νέα μέθοδος σταδιακής συμπίεσης χρονικά μη-μόνιμων πεδίων και αναπτύσσονται αναλυτικά οι εξισώσεις που την διέπουν αρχικά για τη 1Δ περίπτωση. Η μέθοδος αυτή δοκιμάζεται για τη συμπίεση του χρονικά μεταβαλλόμενου πεδίου ενός 1Δ αρμονικού κύματος και για την περίπτωση της λύσης μίας τροποποιημένης μορφής της 1Δ εξίσωσης Burgers. Τα αποτελέσματα της συμπίεσης συγκρίνονται με τα πραγματικά και ακολουθεί μία ανάλυση του τρόπου με τον οποίο κατασκευάζεται η προσέγγιση.
- **Κεφάλαιο 5:** Γενίκευση της μεθόδου που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο για 2Δ μη-μόνιμα προβλήματα και εφαρμογή της στη συμπίεση πεδίου 2Δ ταλαντώμενης μεμβράνης.
- **Κεφάλαιο 6:** Εφαρμογή βελτιστοποίησης κατανομής θερμοκρασίας στο όριο μίας 2Δ επίπεδης πλάκας. Το πρόβλημα διέπεται από τη μη-μόνιμη εξίσωση μεταφοράς θερμότητας και ως ζητούμενο τίθεται η ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου και του εμβαδού της πλάκας που υπερβαίνει κάποια κρίσιμη τιμή θερμοκρασίας. Η βελτιστοποίηση εκτελείται με τη μέθοδο της Απότομης Καθόδου και για την εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος. Η ίδια βελτιστοποίηση εκτελείται για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη, ο συζυγής επιλύτης λαμβάνει ως είσοδο το πλήρες χρονικά μη-μόνιμο πεδίο, στη δεύτερη το συμπίεσμένο εκ των υστέρων πεδίο μέσω της κλασικής μεθόδου PGD και στην τρίτη περίπτωση το πεδίο που συμπιέζεται σταδιακά μέσω της μεθόδου που αναπτύχθηκε στη διπλωματική εργασία και λειτουργεί κατά την χρονική ολοκλήρωση των ΜΔΕ του προβλήματος. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων για τα σφάλματα που εισάγονται στη διαδικασία της βελτιστοποίησης λόγω της χρήσης συμπίεσμένων μέσω PGD πεδίων.
- **Κεφάλαιο 7:** Εφαρμογή βελτιστοποίησης που βασίζεται στη μη-μόνιμη ροή γύρω από αεροτομή που διέπεται από τις εξισώσεις Euler. Η επίλυση γίνεται με τη μέθοδο Τεμνόμενων Κυψελών

(Cut–Cell)[11] μέσω κώδικα που έχει αναπτυχθεί στη ΜΠΥΡ&B/ΕΜΠ. Το χρονικά μη-μόνιμο πεδίο επεξεργάζεται μέσω της μεθόδου iPGD και αναλύεται η επίπτωση που έχει η προσέγγιση στην ποιότητα της βελτιστοποίησης.

- **Κεφάλαιο 8:** Συνοψίζονται τα συμπεράσματα που αφορούν τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν στην εργασία και προτείνονται κατευθύνσεις προς στις οποίες μπορεί να κινηθεί κάποιος που θα ήθελε να συνεχίσει τη μελέτη πάνω στα θέματα που αναλύθηκαν εδώ.

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε στη διπλωματική αυτή εργασία έχει γίνει δεχθεί για δημοσίευση σε διεθνές επιστημονικό συνέδριο. Η εργασία έχει τίτλο *"The Unsteady Continuous Adjoint Method Assisted by the Proper Generalized Decomposition Method"*¹.

¹ V. S. Papageorgiou, K. D. Samouchos and K. C. Giannakoglou. The Unsteady Continuous Adjoint Method Assisted by the Proper Generalized Decomposition Method. In *EUROGEN International Conference on Evolutionary and Deterministic Methods for Design Optimization and Control with Applications to Industrial and Societal Problems*, Sep 13-15, 2017 in Madrid, Spain

Κεφάλαιο 2

Συμπίεση Πεδίων με Χρήση της Μεθόδου Ιδιο–Γενικευμένου Διαχωρισμού

Η μεθοδολογία του Ιδιο–Γενικευμένου Διαχωρισμού (Proper Generalized Decomposition–PGD) είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή μιας προσεγγιστικής αναπαράστασης ενός δεδομένου πεδίου, που είτε έχει προκύψει ως λύση κάποιας ΜΔΕ είτε δίνεται ως συνάρτηση ανεξάρτητων ποσοτήτων. Η εφαρμογή της μεθόδου θα δώσει ως αποτέλεσμα μία προσεγγιστική αναπαράσταση σε διαχωρίσιμη μορφή. Ο όρος «διαχωρίσιμη» αναφέρεται στο γεγονός ότι το πεδίο αυτό αποδομείται ή «διαχωρίζεται» σε ένα πλήθος 1Δ συναρτήσεων, κάθε μία από τις οποίες εξαρτάται μόνο από μία ανεξάρτητη μεταβλητή του αρχικού πεδίου, μία ιδέα που δεν απέχει πολύ από την έννοια της μεθόδου των χωριζομένων μεταβλητών, της κλασικής διατύπωσης για την αναλυτική επίλυση ΜΔΕ.

Έστω, λοιπόν, ότι το πεδίο u που ζητείται να εκτιμηθεί προσεγγιστικά εξαρτάται από q ανεξάρτητες μεταβλητές. Σύμφωνα με τη βασική ιδέα της μεθόδου, το πεδίο u μπορεί να προσεγγισθεί ως ένα πεπερασμένο άθροισμα M γινομένων 1Δ συναρτήσεων, η κάθε μία εξαρτώμενη μόνο από μία ανεξάρτητη μεταβλητή του πεδίου. Δηλαδή, η αναμενόμενη προσέγγιση μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$u(x_1, \dots, x_q) \approx \sum_{\mu=1}^M F_{\mu}^1(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\mu}^q(x_q) \quad (2.1)$$

Εφόσον το προς διαχωρισμό πεδίο εξαρτάται από q ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητές, για την ανακατασκευή του απαιτείται, σύμφωνα και με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, ίσος αριθμός μονοδιάστατων συναρτήσεων $F_q(x_q)$ για κάθε γινόμενο στο άθροισμα προσέγγισης (2.1).

Στο πλαίσιο της ΥΡΔ, το πεδίο u θα μπορούσε να είναι οποιαδήποτε ροϊκή μεταβλητή, η οποία μπορεί να εξαρτάται από τις συντεταγμένες του χώρου (έστω x , y και z για το υπολογιστικό χωρίο ή ξ , η και ζ για το μετασχηματισμένο) ή/και τον χρόνο t . Οι χωρικές μεταβλητές μπορούν να διακριτοποιηθούν σε ένα δομημένο πλέγμα (διδιάστατο ή και τριδιάστατο) με $I \times J \times Z$ κόμβους ανά-κατεύθυνση και K χρονικά βήματα για το χρονικό διάστημα στο οποίο μελετάται η μορφή του πεδίου. Επομένως, σε μία τέτοια περίπτωση θα ήταν αναγκαία η αποθήκευση (ή και η εύρεση αν το πεδίο προκύπτει ως λύση ΜΔΕ) $I \times J \times Z \times K$ ποσοτήτων, ώστε να είναι δυνατή η χρονική και χωρική αναπαράσταση του πλήρους πεδίου. Αντιθέτως, εάν χρησιμοποιηθεί μία προσέγγιση του πεδίου σε διαχωρίσιμη μορφή, όπως αυτή της εξίσωσης (2.1), τότε για την πλήρη (έστω και προσεγγιστική) αναπαράσταση του πεδίου απαιτείται η αποθήκευση μόνο των τιμών των M 1Δ συναρτήσεων «βάσης», ήτοι $M(I + J + Z + K)$ τιμές. Εφόσον ο αριθμός των γινομένων

προσέγγισης M που απαιτούνται για την αξιοπρεπή αναπαράσταση του πεδίου είναι αρκετά μικρός, καθίσταται αμέσως σαφές το μέγεθος της «οικονομίας» που επιτυγχάνεται σε υπολογιστική ισχύ ή σε αποθηκευτική μνήμη μέσω μίας τέτοιου είδους διατύπωσης. Επομένως πραγματοποιείται μία συμπύεση των δεδομένων που απαιτούνται για την πλήρη αναπαράσταση του πεδίου.

Για την εξοικονόμηση μνήμης υπολογιστή τα πράγματα είναι ξεκάθαρα. Όσον αφορά την υπολογιστική ισχύ, το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί κλασικά για την εξαγωγή του μη-μόνιμου 3Δ πεδίου (στη γενική περίπτωση) είναι μία ΜΔΕ (ή συνηθέστερα στην ΥΡΔ ένα σύστημα ΜΔΕ), κάτι το οποίο είναι συχνά αρκετά δαπανηρό από άποψη υπολογιστικής ισχύος. Μέσω της διατύπωσης που προτείνει η μέθοδος PGD το πρόβλημα υποβιβάζεται από την επίλυση ΜΔΕ στην επίλυση κάποιων ΣΔΕ, οι οποίες, αν και εν γένει περισσότερες στον αριθμό, είναι κατά πολύ απλούστερες στην επίλυσή τους με τα σύγχρονα υπολογιστικά μέσα. Εκτός από εφαρμογές ΥΡΔ που ενδιαφέρουν κυρίως εδώ, η μέθοδος PGD μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οποιαδήποτε εφαρμογή εμφανίζονται μοντέλα υψηλής τάξης πολλών παραμέτρων και είναι αναγκαία η υποβάθμιση της διάστασή τους ώστε να είναι ευκολότερα διαχειρίσιμα.

Σε αυτό το Κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία της εύρεσης των 1Δ συναρτήσεων της μεθόδου PGD για προσέγγιση 2Δ ή 3Δ πεδίων. Η μεθοδολογία που περιγράφεται εδώ, εύκολα μπορεί να γενικευτεί για πεδία μεγαλύτερων διαστάσεων, όπως, παραδείγματος χάριν, 3Δ μη-μόνιμων περιπτώσεων.

2.1 Συμπύεση 2Δ Πεδίου

Έστω ένα 2Δ πεδίο $u(\xi, \eta)$ που περιγράφει κάποιο φυσικό φαινόμενο και είτε έχει προκύψει από την επίλυση κάποιας ΜΔΕ, είτε δίνεται ως δεδομένο εκ των προτέρων. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές που το συνθέτουν ξ και η μπορούν να αντιστοιχούν στις συντεταγμένες του χώρου και του χρόνου, ή σε οποιεσδήποτε άλλες παραμέτρους, χωρίς αυτό να επηρεάζει την πορεία της εξαγωγής των εξισώσεων της μεθόδου που θα παρουσιαστεί παρακάτω.

Σύμφωνα με την διατύπωση της μεθόδου PGD [4][2] η συνάρτηση που περιγράφει το παραπάνω πεδίο $u(\xi, \eta)$ μπορεί να προσεγγισθεί ως ένα πεπερασμένο άθροισμα γινομένων 1Δ συναρτήσεων, έστω $\phi(\xi)$ και $\theta(\eta)$, οι οποίες εξαρτώνται μόνο από μία ανεξάρτητη μεταβλητή από αυτές που συνθέτουν το πλήρες πεδίο. Επομένως, το πεδίο γράφεται σε προσεγγιστική μορφή ως εξής:

$$u(\xi, \eta) \approx \sum_{\mu=1}^M \phi^{\mu}(\xi)\theta^{\mu}(\eta) \quad (2.2)$$

όπου ο δείκτης μ λαμβάνει τιμές από την μονάδα (δηλαδή προσέγγιση με ένα γινόμενο των 1Δ συναρτήσεων) μέχρι έναν αριθμό M που είναι είτε προκαθορισμένος από τον χρήστη, είτε προκύπτει κατά τη διάρκεια της διαδικασίας όταν το σφάλμα της προσέγγισης και της πραγματικής τιμής του πεδίου πέσει κάτω από ένα συγκεκριμένο – εκ των προτέρων επιβαλλόμενο – κατώφλι σφάλματος.

Το άθροισμα της εξίσωσης (2.2) ξεκινά αρχικά με ένα μόνο γινόμενο και εμπλουτίζεται βαθμιαία μέσω διαδοχικών βημάτων μέχρι να προστεθεί ικανοποιητικός αριθμός όρων, ώστε η προσέγγιση να είναι όσο το δυνατόν εγγύτερα στη βέλτιστη επιθυμητή. Παρακάτω περιγράφεται αναλυτικά η διαδικασία «διαχωρισμού» του 2Δ πεδίου στο άθροισμα γινομένου 1Δ συναρτήσεων και η διαδικασία εύρεσης των συναρτήσεων αυτών, οι οποίες πολύ συχνά θα αναφέρονται και ως συναρτήσεις «βάσης».

2.2 Βαθμιαία Δόμηση Αθροίσματος Προσέγγισης

Για την παρουσίαση του αλγορίθμου εύρεσης του αθροίσματος προσέγγισης θεωρείται ότι η διαδικασία βρίσκεται στο βήμα m (με $m \geq 1$) και, επομένως, είναι ήδη γνωστοί οι $m - 1$ όροι της σχέσης (2.2) που έχουν προκύψει από προηγούμενα βήματα. Επομένως θα ισχύει ότι:

$$u^{m-1}(\xi, \eta) = \sum_{\mu=1}^{m-1} \phi^{\mu}(\xi) \theta^{\mu}(\eta) \quad (2.3)$$

Ζητούμενο είναι τώρα η προσθήκη ενός νέου όρου στο άθροισμα ώστε η προσέγγιση να βελτιωθεί ως προς την ακρίβειά της. Θεωρείται λοιπόν ότι η νέα προσεγγιστική διατύπωση του πεδίου θα είναι της παρακάτω μορφής:

$$u^m(\xi, \eta) = u^{m-1}(\xi, \eta) + \phi^m(\xi) \theta^m(\eta) \stackrel{(2.3)}{=} \sum_{\mu=1}^{m-1} \phi^{\mu}(\xi) \theta^{\mu}(\eta) + \phi^m(\xi) \theta^m(\eta) \quad (2.4)$$

Στο παρόν βήμα οι άγνωστοι είναι οι δύο νέες 1Δ συναρτήσεις $\phi^m(\xi)$ και $\theta^m(\eta)$ που πρέπει να προσδιοριστούν ώστε να συνθέσουν το νέο όρο του γινομένου προσέγγισης. Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι εφόσον αυτές οι δύο συναρτήσεις βρίσκονται σε γινόμενο, το πρόβλημα του υπολογισμού τους καθίσταται μη-γραμμικό και, επομένως, η εύρεσή τους μπορεί να γίνει μόνο μέσω κάποιας «εμφωλευμένης» επαναληπτικής διαδικασίας εντός του γενικότερου αλγορίθμου βαθμιαίου εμπλουτισμού του αθροίσματος προσέγγισης.

Ένα επαναληπτικό σχήμα τύπου «εναλλασσόμενης κατεύθυνσης» θα ήταν μια λογική επιλογή για τον παραπάνω υπολογισμό. Σε ένα τέτοιο σχήμα, σε κάθε εσωτερικό βήμα p της εσωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας η συνάρτηση $\phi_p^m(\xi)$ υπολογίζεται από την ήδη γνωστή συνάρτηση $\theta_{p-1}^m(\eta)$ και έπειτα η $\theta_p^m(\eta)$ ανανεώνεται βάσει της $\phi_p^m(\xi)$. Η όλη διαδικασία εκκινεί θεωρώντας αρχικά μία αυθαίρετη αρχικοποίηση για τη συνάρτηση $\theta_0^m(\eta)$. Η διαδικασία των εμφωλευμένων επαναλήψεων τερματίζεται όταν ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης που έχει θέσει ο χρήστης, π.χ.

$$\sqrt{\int_{\xi} (\phi_p^m(\xi) - \phi_{p-1}^m(\xi))^2 d\xi} < \epsilon \quad (2.5)$$

και

$$\sqrt{\int_{\eta} (\theta_p^m(\eta) - \theta_{p-1}^m(\eta))^2 d\eta} < \epsilon \quad (2.6)$$

όπου ϵ η ανοχή σφάλματος. Εφόσον επέλθει σύγκλιση των εσωτερικών επαναλήψεων, οι τιμές των $\phi_p^m(\xi)$ και $\theta_p^m(\eta)$ που έχουν βρεθεί εκχωρούνται στα $\phi^m(\xi)$ και $\theta^m(\eta)$ και η διαδικασία εμπλουτισμού συνεχίζεται με τον επόμενο όρο ($m + 1$) του αθροίσματος. Η συνολική διαδικασία εμπλουτισμού συνεχίζεται μέχρι να προστεθούν συνολικά M όροι, αριθμός προκαθορισμένος από το χρήστη, ή όταν ικανοποιηθεί με τη σειρά του κάποιο κριτήριο τερματισμού που αφορά το σφάλμα της προσέγγισης.

Παρακάτω ακολουθεί αναλυτικότερα η μεθοδολογία της στρατηγικής εναλλασσόμενων κατευθύνσεων για τον υπολογισμό του γινομένου $\phi^m(\xi)\theta^m(\eta)$ στο m -οστό βήμα εμπλουτισμού της μεθόδου PGD.

2.2.1 Στρατηγική Εναλλασσόμενων Κατευθύνσεων

Κάθε εσωτερική επανάληψη p , όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, πρέπει να γίνει σε δύο βήματα, όπου στο καθένα διαδοχικά θα υπολογιστούν οι ζητούμενες συναρτήσεις.

• **Βήμα 1ο:** Υπολογισμός $\phi_p^m(\xi)$ από $\theta_{p-1}^m(\eta)$

Εφόσον η διαδικασία εμπλουτισμού του αθροίσματος προσέγγισης βρίσκεται στο m -ιοστό βήμα και η εσωτερική διαδικασία στο βήμα p η προσέγγιση του πεδίου u μέχρι αυτό το σημείο θα δίνεται από τη σχέση:

$$u(\xi, \eta) \approx u^m(\xi, \eta) = \sum_{\mu=1}^{m-1} \phi^\mu(\xi) \theta^\mu(\eta) + \phi_p^m(\xi) \theta_{p-1}^m(\eta) \quad (2.7)$$

Υπενθυμίζεται εδώ ότι το πεδίο u σε αυτήν τη φάση, θεωρείται δεδομένο, επομένως η μόνη άγνωστη ποσότητα στην εξίσωση (2.7) για τη συγκεκριμένη επανάληψη είναι η συνάρτηση ϕ_p^m , εφόσον η θ_{p-1}^m είναι γνωστή από το προηγούμενο βήμα της εσωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας. Το ζητούμενο, επομένως είναι να βρεθεί ο τρόπος με τον οποίο θα υπολογιστεί η συνάρτηση ϕ_p^m . Ο συγκεκριμένος υπολογισμός θα βασιστεί στην προβολή του σφάλματος μεταξύ πραγματικού και προσεγγιστικού πεδίου κατά Galerkin. Για την ουσιαστική σημασία της κατά Galerkin προβολής γίνεται ιδιαίτερη μνεία στην Ενότητα 2.4.

Βάσει αυτής, όλοι οι όροι της εξίσωσης (2.7) μεταφέρονται στο πρώτο μέρος και ολοκληρώνονται και στις δύο κατευθύνσεις ξ και η , αφού πρώτα (κι εδώ είναι το κρίσιμο σημείο της κατά Galerkin προβολής) πολλαπλασιαστούν με μία «συνάρτηση ελέγχου» (test function) u^* . Εδώ, ως συνάρτηση ελέγχου επιλέγεται η ήδη γνωστή από το προηγούμενο βήμα θ_{p-1}^m . Μετά από την προαναφερθείσα διαδικασία η εξίσωση (2.7) λαμβάνει την μορφή:

$$\int_{\xi} \int_{\eta} \theta_{p-1}^m(\eta) u(\xi, \eta) d\eta d\xi - \int_{\xi} \int_{\eta} \theta_{p-1}^m(\eta) \sum_{\mu=1}^{m-1} \phi^\mu(\xi) \theta^\mu(\eta) d\eta d\xi - \int_{\xi} \int_{\eta} (\theta_{p-1}^m(\eta))^2 \phi_p^m(\xi) d\eta d\xi = 0 \quad (2.8)$$

Οι όροι που περιέχονται στην εξίσωση (2.8) εμφανίζονται στην πραγματικότητα απεπλεγμένοι καθώς καθένας από αυτούς εξαρτάται μόνο από μία ανεξάρτητη μεταβλητή ξ και η . Επομένως τα ολοκληρώματα μπορούν να αναδιαταχθούν με τέτοιο τρόπο, ώστε αυτά που είναι κατά την η -κατεύθυνση να περιέχουν ως ολοκληρωτέα ποσότητα μόνο κάποια συνάρτηση του η . Οι όροι αυτοί θα είναι εκ των πραγμάτων γνωστοί συντελεστές στην τελική εξίσωση υπολογισμού του μοναδικού αγνώστου, που θα είναι η συνάρτηση ϕ_p^m . Αντίστοιχα, το ολοκλήρωμα κατά ξ μπορεί να περικλείσει εντός του όλη την εξίσωση, έτσι προκύπτει:

$$\int_{\xi} \left(\int_{\eta} \theta_{p-1}^m(\eta) u(\xi, \eta) d\eta - \sum_{\mu=1}^{m-1} \phi^\mu(\xi) \int_{\eta} \theta_{p-1}^m(\eta) \theta^\mu(\eta) d\eta - \phi_p^m(\xi) \int_{\eta} (\theta_{p-1}^m(\eta))^2 d\eta \right) d\xi = 0 \quad (2.9)$$

Επίσης, εφόσον η ποσότητα που ολοκληρώθηκε στην εξίσωση (2.7) ισούται με το μηδέν, το ολοκλήρωμα κατά την ξ -κατεύθυνση μπορεί να απαλειφθεί εκ νέου (είχε μόνο επικουρικό χαρακτήρα και η σημασία του θα φανεί στην Ενότητα 2.4) και, επομένως, προκύπτει μία τελική εξίσωση με μοναδικό άγνωστο τη συνάρτηση $\phi_p^m(\xi)$. Επιλύοντας αυτή, προκύπτει η τελική σχέση

υπολογισμού:

$$\phi_p^m(\xi) = \frac{\int_{\eta} u(\xi, \eta) \theta_{p-1}^m(\eta) d\eta - \sum_{\mu=1}^{m-1} \phi^{\mu}(\xi) \int_{\eta} \theta_{p-1}^m(\eta) \theta^{\mu}(\eta) d\eta}{\int_{\eta} (\theta_{p-1}^m(\eta))^2 d\eta} \quad (2.10)$$

• **Βήμα 2ο:** Υπολογισμός $\theta_p^m(\eta)$ από $\phi_p^m(\xi)$

Πλέον, εφόσον έχει υπολογιστεί μία προσωρινή τιμή της συνάρτησης ϕ_p^m η προσέγγιση του πεδίου γράφεται ως εξής:

$$u(\xi, \eta) \approx \sum_{\mu=1}^{m-1} \phi^{\mu}(\xi) \theta^{\mu}(\eta) + \phi_p^m(\xi) \theta_p^m(\eta) \quad (2.11)$$

με άγνωστη πλέον, τη συνάρτηση θ_p^m . Εφαρμόζοντας εκ νέου μια προβολή στη λογική Galerkin για την εξίσωση (2.11), με χρήση της συνάρτησης ϕ_p^m ως «συνάρτηση ελέγχου» u^* προκύπτει η εξίσωση:

$$\int_{\eta} \int_{\xi} \phi_p^m(\xi) u(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_{\eta} \int_{\xi} \phi_p^m(\xi) \sum_{\mu=1}^{m-1} \theta^{\mu}(\eta) \phi^{\mu}(\xi) d\xi d\eta - \int_{\eta} \int_{\xi} (\phi_p^m(\xi))^2 \theta_p^m(\eta) d\xi d\eta = 0 \quad (2.12)$$

Τώρα, σε αντιστοιχία όσων έγιναν στο 1ο Βήμα, τα ολοκληρώματα κατά την ξ κατεύθυνση μπορούν να υπολογιστούν μη-πεπλεγμένα από την άλλη κατεύθυνση – εφόσον όλες οι ποσότητες που περιέχονται στο όρισμά τους είναι γνωστές – και λειτουργούν ως απλοί συντελεστές στην εξίσωση για την εύρεση της άγνωστης συνάρτησης θ_p^m . Επομένως η εξίσωση επαναδιατυπώνεται στην μορφή:

$$\int_{\eta} \left(\int_{\xi} \phi_p^m(\xi) u(\xi, \eta) d\xi - \sum_{\mu=1}^{m-1} \theta^{\mu}(\eta) \int_{\xi} \phi_p^m(\xi) \phi^{\mu}(\xi) d\xi - \theta_p^m(\eta) \int_{\xi} (\phi_p^m(\xi))^2 d\xi \right) d\eta = 0 \quad (2.13)$$

Μηδενίζοντας την ολοκληρωτέα ποσότητα της εξίσωσης 2.13 προκύπτει, τελικά, η αντίστοιχη εξίσωση ανανέωσης της άγνωστης συνάρτησης:

$$\theta_p^m(\eta) = \frac{\int_{\xi} u(\xi, \eta) \phi_p^m(\xi) d\xi - \sum_{\mu=1}^{m-1} \theta^{\mu}(\eta) \int_{\xi} \phi_p^m(\xi) \phi^{\mu}(\xi) d\xi}{\int_{\xi} (\phi_p^m(\xi))^2 d\xi} \quad (2.14)$$

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι τη σύγκλιση των συναρτήσεων ϕ^m και θ^m , οπότε το άθροισμα της εξίσωσης (2.3) εμπλουτίζεται με έναν επιπλέον όρο αυξάνοντας την ακρίβεια της προσέγγισης του πεδίου u . Η διαδικασία εμπλουτισμού του αθροίσματος σταματά είτε όταν έχει προστεθεί αριθμός όρων εκ των προτέρων καθορισμένος από το χρήστη, είτε όταν ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο τερματισμού. Περισσότερα για τα κριτήρια σύγκλισης και τερματισμού της διαδικασίας εμπλουτισμού του αθροίσματος προσέγγισης αναλύονται στην Ενότητα 2.3.

2.3 Κριτήρια Τερματισμού Διαδικασίας Εμπλουτισμού του Αθροίσματος

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η διαδικασία εμπλουτισμού του αθροίσματος προσέγγισης με επιπλέον όρους τερματίζεται είτε όταν έχει προστεθεί ένας συγκεκριμένος αριθμός M γινομένων 1Δ συναρτήσεων προκαθορισμένος από το χρήστη, είτε όταν ένα σφάλμα $\mathcal{E}(m)$ που έχει ορισθεί με κάποιο τρόπο λάβει τιμή μικρότερη από μία επιθυμητή ανοχή $\bar{\epsilon}$. Το σφάλμα $\mathcal{E}(m)$ εξαρτάται προφανώς από τον αύξοντα αριθμό του όρου του αθροίσματος προσέγγισης και μπορεί να ορισθεί με διάφορους τρόπους, ανάλογα με τη σημασία που θέλει να του προσδώσει ο χρήστης. Μια περίπτωση είναι ο ορισμός του ως η σχετική βαρύτητα που έχει ο νεοϋπολογισθείς όρος m στην προσέγγιση της μεθόδου PGD, δηλαδή σε ποιό βαθμό ο νέος όρος του αθροίσματος που προστίθεται αυξάνει την ακρίβεια της προσεγγιστικής απεικόνισης του πεδίου σε σχέση με τους προηγούμενους. Σε αυτήν την περίπτωση, το σφάλμα ορίζεται ως:

$$\mathcal{E}(m) = \frac{\|\phi^m(\xi)\theta^m(\eta)\|}{\left\|\sum_{\mu=1}^{m-1} \phi^\mu(\xi)\theta^\mu(\eta)\right\|} \quad (2.15)$$

Ο παραπάνω ορισμός έχει το μειονέκτημα ότι απαιτεί τον επανυπολογισμό του συνολικού αθροίσματος των $m - 1$ προηγούμενων όρων. Ένας δεύτερος ορισμός, που είναι απαλλαγμένος από το παραπάνω μειονέκτημα, θα μπορούσε να είναι πάλι η σχετική βελτίωση σε ακρίβεια που επιφέρει η προσθήκη του νέου όρου, αλλά πλέον σε σχέση με την τιμή που έχει ο πρώτος όρος του αθροίσματος. Ο ορισμός αυτός βασίζεται στην παρατήρηση ότι ο πρώτος όρος του αθροίσματος προσέγγισης είναι και ο σημαντικότερος καθώς περιέχει τη μεγαλύτερη ποσότητα πληροφορίας που προέρχεται από τον διαχωρισμό του πεδίου. Αυτό είναι ένα συνηθισμένο φαινόμενο στις προσεγγίσεις μέσω αθροισμάτων (όπως οι σειρές Taylor και Fourier) όπου οι πρώτοι όροι χαμηλότερης τάξης επηρεάζουν περισσότερο την ακρίβεια της προσέγγισης σε σχέση με τους επόμενους. Άρα, το αντίστοιχο σφάλμα εδώ μπορεί να ληφθεί ως:

$$\mathcal{E}(m) = \frac{\|\phi^m(\xi)\theta^m(\eta) - \phi^{m-1}(\xi)\theta^{m-1}(\eta)\|}{\|\phi^1(\xi)\theta^1(\eta)\|} \quad (2.16)$$

Άλλα κριτήρια τερματισμού θα μπορούσαν να βασίζονται στη μεταβολή του υπολοίπου της εξίσωσης προσέγγισης (2.2) με την προσθήκη ενός επιπλέον όρου. Στην εργασία αυτή, σε όλες τις περιπτώσεις όπου ο τερματισμός του εμπλουτισμού του αθροίσματος υπαγορεύεται από κριτήριο τερματισμού, γίνεται χρήση του σφάλματος που ορίζεται από την εξίσωση (2.16).

2.4 Προβολή κατά Galerkin— Η Βασική Ιδέα για τον Υπολογισμό της Προσεγγιστικής Αναπαράστασης

Σε αυτήν την ενότητα θα γίνει μια προσπάθεια επεξήγησης με ουσιαστικό και «πρακτικό» τρόπο – χωρίς την αυστηρή μαθηματική διατύπωση – της βασικής έννοιας της προβολής κατά Galerkin,

η οποία αποτελεί την βασική ιδέα πίσω από τον υπολογισμό κάθε 1Δ συνάρτησης βάσης του αθροίσματος προσέγγισης της μεθόδου PGD.

Για την επεξήγηση της βασικής ιδέας θεωρείται η διακριτοποιημένη μορφή του πεδίου $u(\xi, \eta)$ σε ένα 2Δ χωρίο. Το χωρίο αυτό διακριτοποιείται με $I \times J$ κόμβους, οπότε το 2Δ πεδίο γράφεται στη διακριτή μορφή του u_{ij} , με $i = 1, \dots, I$ και $j = 1, \dots, J$ αντίστοιχα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρείται, για λόγους απλότητας, ότι το πεδίο u_{ij} προσεγγίζεται από ένα μόνο γινόμενο 1Δ συναρτήσεων βάσει της μεθόδου PGD. Εδώ, βέβαια, οι συναρτήσεις αυτές εμφανίζονται στη μορφή διανυσμάτων που περιέχουν όλες τις αντίστοιχες διακριτοποιημένες κομβικές τιμές, άρα για κάθε κόμβο του 2Δ χωρίου θα ισχύει:

$$u_{ij} = \phi_i \theta_j \quad (2.17)$$

Το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα της προσεγγιστικής αναπαράστασης δίνεται από τον τύπο:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_{ij} (u_{ij} - \phi_i \theta_j)^2 \quad (2.18)$$

Τα παραπάνω αθροίσματα στην πραγματικότητα αντιστοιχούν σε ένα χωρικό ολοκλήρωμα στο συνεχές χωρίο πάνω στο οποίο ενεργεί το πεδίο u . Κατά τη διακριτοποίηση, το ολοκλήρωμα εκπίπτει σε ένα διπλό άθροισμα κατά τις δύο κατευθύνσεις του πεδίου και από τη διακριτοποίηση αυτή προκύπτει ο συντελεστής w_{ij} που λαμβάνει κατάλληλες τιμές ανάλογα με τη μέθοδο υπολογισμού του ολοκληρώματος. Για τη σκιαγράφηση της έννοιας της προβολής κατά *Galerkin*, η τιμή του w_{ij} δεν παίζει κάποιον ιδιαίτερο ρόλο, επομένως από εδώ και στο εξής θεωρείται ίση με τη μονάδα, χωρίς να αλλάζει κάτι ουσιαστικό στην αντιμετώπιση των εξισώσεων που ακολουθούν.

Το ζητούμενο στην περίπτωση αυτή είναι να ευρεθούν κατάλληλα ϕ_i και θ_j έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα E_{tot} (εξίσωση 2.4) και να προκύψει η ακριβέστερη δυνατή «διαχωρίσιμη» προσέγγιση του προς συμπίεση πεδίου u_{ij} . Για την εύρεση των δύο αυτών ζητούμενων ποσοτήτων που θα ελαχιστοποιούν το σφάλμα, πρέπει αυτό να παραγωγιστεί ως προς κάθε μία ξεχωριστά και οι δύο εξισώσεις που θα προκύψουν να τεθούν ίσες με το μηδέν. Επομένως προκύπτουν:

$$\frac{\partial E_{tot}}{\partial \phi_i} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^J (u_{ij} - \phi_i \theta_j) \theta_j = 0 \Rightarrow \phi_i = \frac{\sum_{j=1}^J u_{ij} \theta_j}{\sum_{j=1}^J (\theta_j)^2} \quad (2.19)$$

και αντίστοιχα

$$\frac{\partial E_{tot}}{\partial \theta_j} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^I (u_{ij} - \phi_i \theta_j) \phi_i = 0 \Rightarrow \theta_j = \frac{\sum_{i=1}^I u_{ij} \phi_i}{\sum_{i=1}^I (\phi_i)^2} \quad (2.20)$$

Με μία προσεκτική παρατήρηση των εξισώσεων υπολογισμού των ϕ_i , θ_j εύκολα διακρίνει κανείς την πλήρη αντιστοιχία με τις «συνεχείς» εξισώσεις (2.10) και (2.14) που εξήχθησαν για τον υπολογισμό των συναρτήσεων $\phi(\xi)$, $\theta(\eta)$ στην Ενότητα 2.1 (προφανώς για την περίπτωση χρήσης μόνο ενός όρου στο άθροισμα προσέγγισης). Με την παραπάνω αδρή παρουσίαση της ιδέας της προβολής κατά Galerkin, καθίσταται εμφανής ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των 1Δ συναρτήσεων βάσης που απαιτούνται για την παραγωγή προσεγγιστικών

διατυπώσεων μέσω της μεθόδου PGD.

2.5 Παραδείγματα Συμπύεσης 2Δ πεδίων

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα δεδομένων συναρτήσεων, οι οποίες αποσυνπλέκονται με χρήση της μεθόδου PGD σε 1Δ συναρτήσεις οι οποίες μπορούν να ανακατασκευάσουν μία προσεγγιστική μορφή του πλήρους πεδίου. Σημαντικό ρόλο στην ποιοτική αναπαράσταση των πεδίων αυτών παίζει η έννοια της «διαχωρισιμότητας». Η έννοια αυτή αναφέρεται στην ευκολία με την οποία ένα δεδομένο πεδίο που εξαρτάται από πολλές μεταβλητές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο 1Δ συναρτήσεων, ίδιου αριθμού με τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Για παράδειγμα, στη 2Δ περίπτωση, ένα πεδίο της μορφής

$$u(x, y) = \sin(x)\cos(y)$$

είναι πλήρως διαχωρίσιμο, αφού μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο 1Δ όρων, καθένας από τους οποίους εξαρτάται μόνο από μία ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή:

$$u(x, y) = u_1(x)u_2(y)$$

με $u_1(x) = \sin(x)$ και $u_2(y) = \cos(y)$. Όπως θα διαφανεί στη συνέχεια, ένα τέτοιο πεδίο μπορεί να προσεγγιστεί με πολύ μικρό αριθμό M όρων (πρακτικά μόνο ένας θα ήταν αρκετός) στο άθροισμα προσέγγισης της μεθόδου PGD.

Στον αντίποδα, μεγαλύτερη δυσκολία στην αποσύμπλεξή τους μέσω της μεθόδου παρουσιάζουν πεδία, των οποίων η έκφραση περιέχει όρους που περιπλέκουν με ποικίλους τρόπους τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Ένα τέτοιο πεδίο, για παράδειγμα, θα μπορούσε να είναι της μορφής

$$u(x, y) = x + e^{x \ln(2y)} \cos(x - 3y)$$

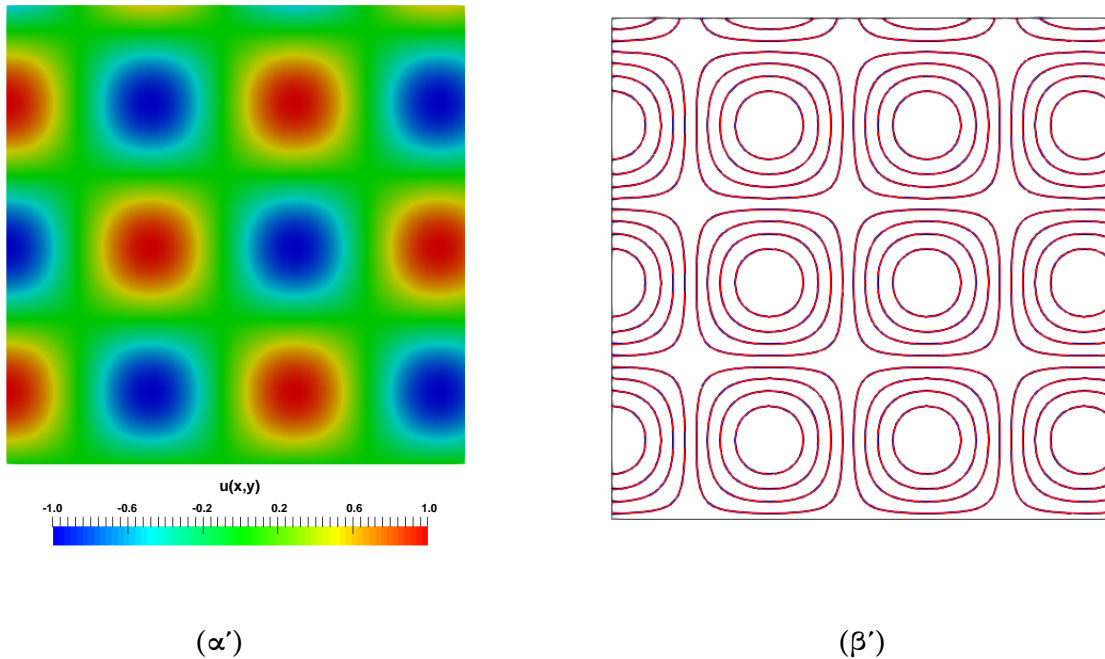
όπου η αποσύμπλεξή του δεν είναι προφανής.

Παρακάτω παρουσιάζονται τρεις περιπτώσεις 2Δ συναρτήσεων και συγκρίνονται με βάση τον αριθμό των όρων στο άθροισμα προσέγγισης που απαιτείται για την αναπαραγωγή του πεδίου, το συνολικό απόλυτο σφάλμα αναπαράστασης καθώς και την οικονομία που επιτυγχάνεται σε μνήμη υπολογιστή εξαιτίας της συμπύεσης. Το κριτήριο για τον τερματισμό της διαδικασίας εμπλουτισμού (βλ. εξίσωση 2.16) είναι $\bar{\epsilon} = 10^{-4}$, ενώ για λόγους οπτικοποίησης και μόνο (η μορφή του χωρίου πάνω στο οποίο δρα το πεδίο δεν παίζει κανένα ρόλο για τον αλγόριθμο συμπύεσης που αναπτύσσεται με τη μέθοδο PGD) το πεδίο παρουσιάζεται σε ένα τετράγωνο 2Δ χωρίο φυσικών διαστάσεων $[0, 10] \times [0, 10]$ όπου κάθε κατεύθυνση διακριτοποιείται με 100 ισαπέχοντες κόμβους.

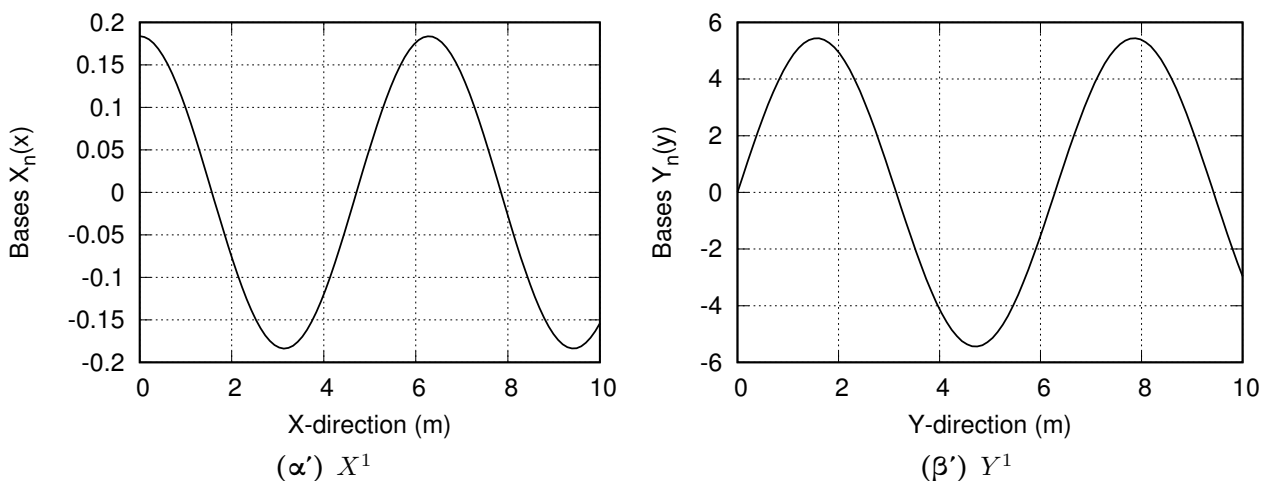
- Περίπτωση 1η

$$u(x, y) = \cos(x)\sin(y) \quad (2.21)$$

Η εξίσωση αυτή είναι πλήρως διαχωρίσιμη και επομένως η μέθοδος PGD μπορεί να την προσεγγίσει με μεγάλη ακρίβεια. Με την προσθήκη μόνο ενός όρου στο άθροισμα προσέγγισης ο αλγόριθμος τερματίζεται καθώς ικανοποιείται το κριτήριο που έχει τεθεί, και το συνολικό απόλυτο σφάλμα αναπαράστασης είναι $err = 10^{-18}$, δηλαδή πρακτικά μηδενικό. Η ποιότητα της προσέγγισης διαφαίνεται από τις ισογραμμές που παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.1, όπου αυτές του πραγματικού πεδίου συμπίπτουν απόλυτα με τις αντίστοιχες του ανακατασκευασμένου πεδίου που έχει προκύψει μετά τη συμπίεση.



Σχήμα 2.1: Εφαρμογή συμπίεσης με PGD στη συνάρτηση της εξίσωσης (2.21). (α') Μορφή του υπό συμπίεση πεδίου u της εξίσωσης 2.21 και (β') οι αντίστοιχες ισογραμμές. Με μπλε χρώμα παρουσιάζονται οι ισογραμμές του πραγματικού πεδίου και με κόκκινο χρώμα του ανακατασκευασμένου.



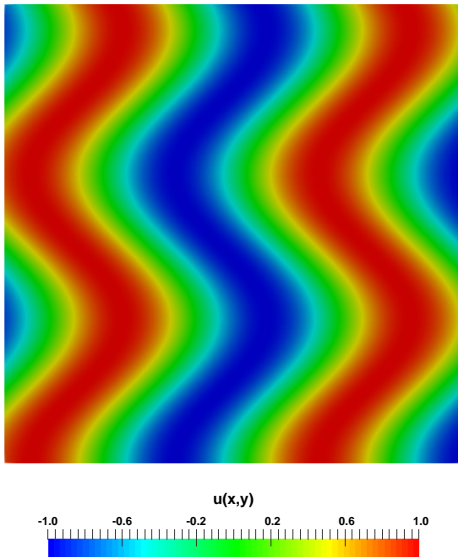
Σχήμα 2.2: Εφαρμογή συμπίεσης με PGD στη συνάρτηση της εξίσωσης (2.21). 1Δ Συναρτήσεις βάσης.

Ακόμα στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζονται οι αντίστοιχες 1Δ συναρτήσεις βάσης. Σε αυτές, διακρίνει κανείς ότι οι $X^1(x)$ και $Y^1(y)$ έχουν ημιτονοειδή μορφή, ώστε το γινόμενο τους να δώσει απευθείας τη ζητούμενη προσέγγιση του πεδίου. Οι μορφή των επόμενων συναρτήσεων δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο καθώς το γινόμενο τους έχει πρακτικά μηδενική τιμή, επομένως έχουν αμελητέα επίδραση στην ανακατασκευή του 2Δ πεδίου και μόνο το πρώτο γινόμενο αρκεί ώστε να δώσει μια αξιόλογη προσέγγιση. Στη πραγματικότητα η ύπαρξη των βάσεων 2 και 3 οφείλεται σε αριθμητικό σφάλμα που εισάγεται από την «αραιή» διακριτοποίηση των συναρτήσεων. Εφόσον, χρησιμοποιούνται 100 κόμβοι ανά-κατεύθυνση μέσω της μεθόδου PGD απαιτείται η αποθήκευση 600 τιμών ($3 \times 100 + 3 \times 100$) αντί των συνολικά 10000 του πραγματικού πεδίου.

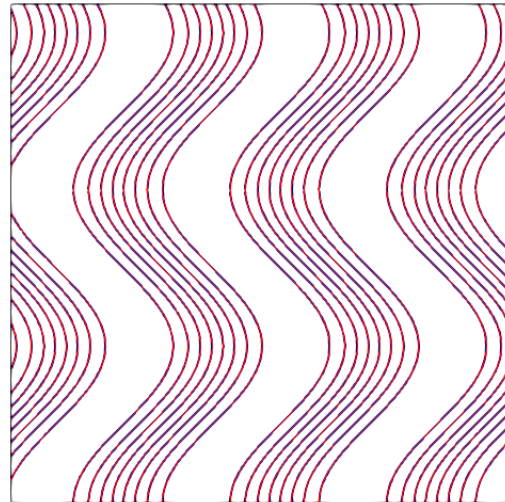
- Περίπτωση 2η

$$u(x, y) = \sin(x + \cos(y)) \quad (2.22)$$

Η συνάρτηση αυτή προσεγγίζεται με 2 όρους ($M = 2$) και η μορφή της καθώς και οι 1Δ συναρτήσεις που την απαρτίζουν φαίνονται στα παρακάτω σχήματα. Εδώ η πολυπλοκότητα του πεδίου έχει αυξηθεί ελαφρώς σε σχέση με το πρώτο, επομένως παρατηρούμε ότι χρειάζεται επαλληλία δύο όρων, ώστε να προκύψει αξιόπιστη προσέγγιση.

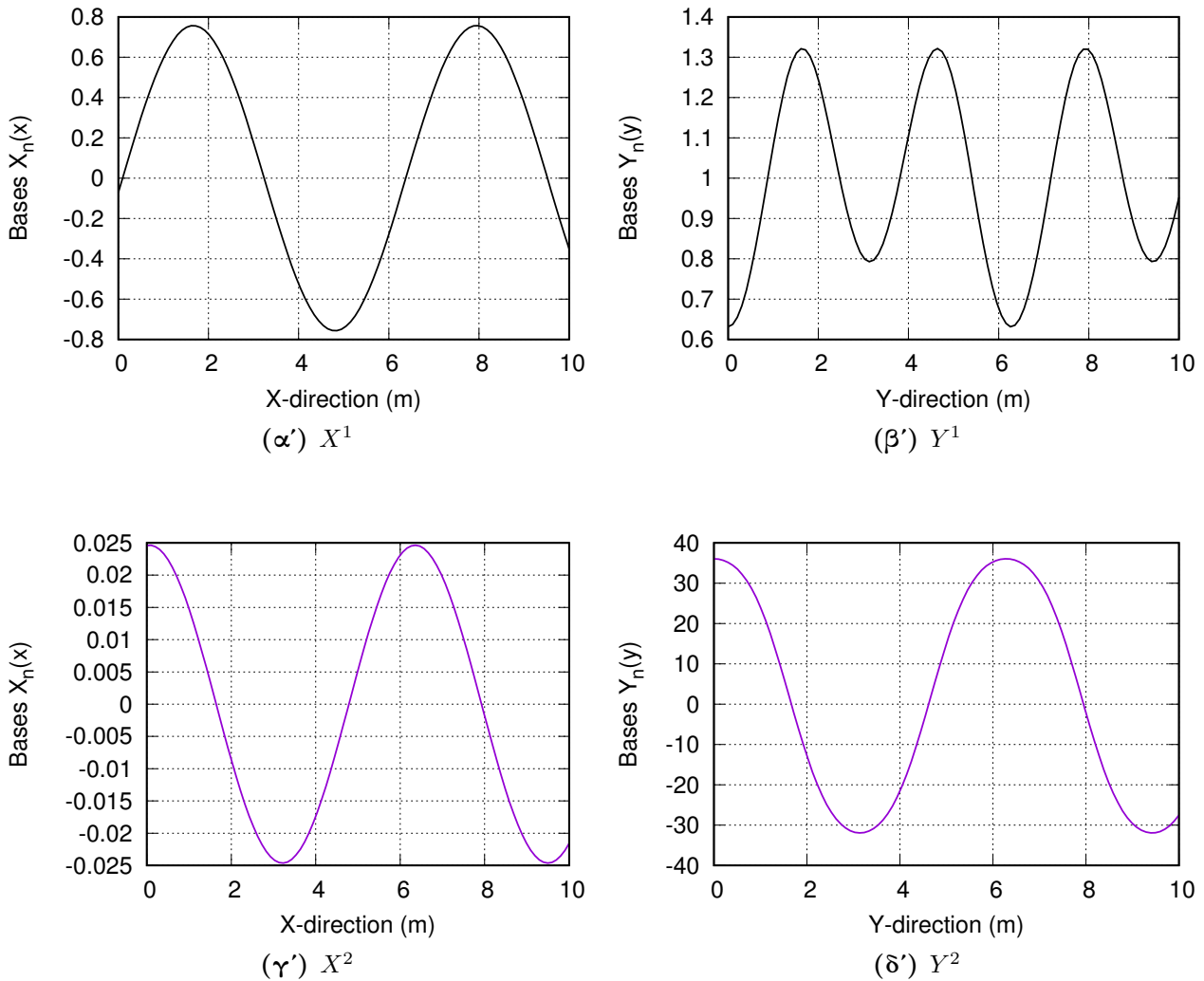


(α')



(β')

Σχήμα 2.3: Εφαρμογή συμπίεσης με PGD στη συνάρτηση της εξίσωσης (2.22). (α') Μορφή του υπό συμπίεση πεδίου u της εξίσωσης 2.22 και (β') οι αντίστοιχες ισογραμμές. Με μπλε χρώμα παρουσιάζονται οι ισογραμμές του πραγματικού πεδίου και με κόκκινο χρώμα του ανακατασκευασμένου.

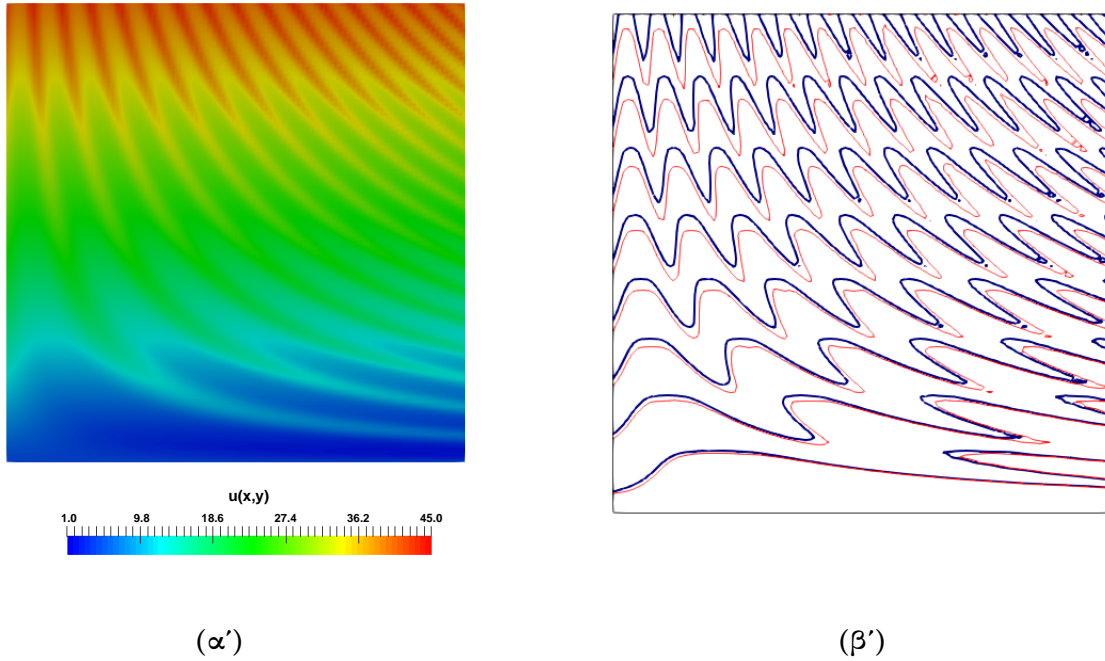


Σχήμα 2.2: Εφαρμογή συμπίεσης με PGD στη συνάρτηση της εξίσωσης (2.22). 1Δ Συναρτήσεις βάσης.

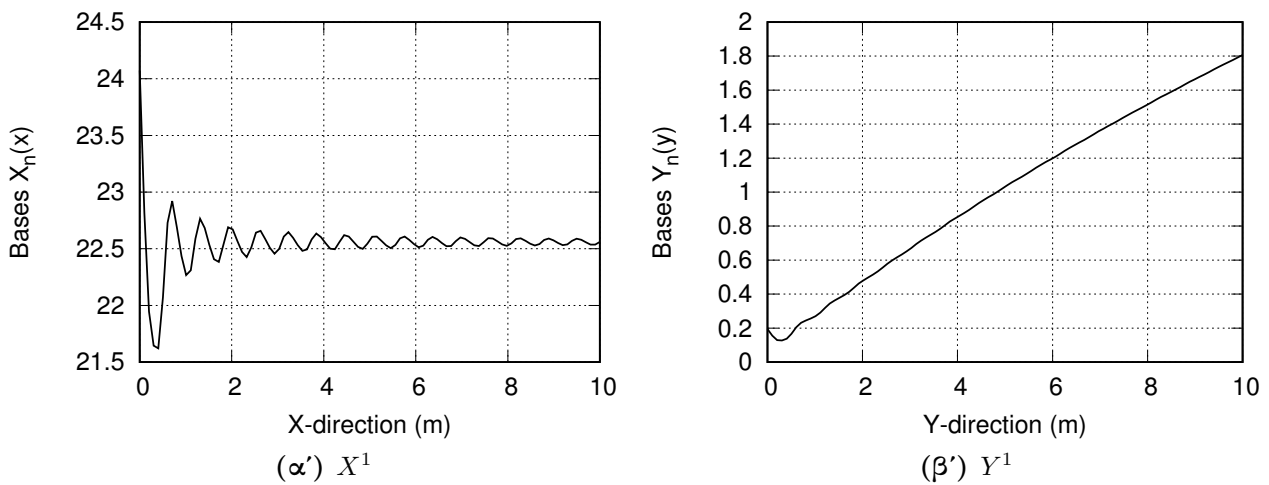
• 3η Περίπτωση

$$u(x, y) = (\sin(xy - 1) - 1)^2 + (\ln(y + 1) + 1)^3 \quad (2.23)$$

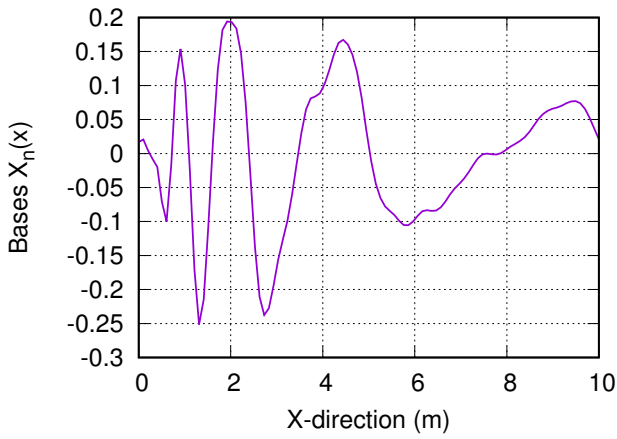
Τέλος, επιλέγεται μία περίπτωση συνάρτησης, η οποία εμφανίζεται σε αρκετά πεπλεγμένη μορφή, με αποτέλεσμα η μέθοδος PGD να χρειάζεται αρκετούς όρους για να την προσεγγίσει αποτελεσματικά. Συγκεκριμένα, για την ικανοποίηση του κριτηρίου τερματισμού απαιτήθηκαν 43 όροι στο άθροισμα προσέγγισης. Παρόλο που και σε αυτήν την ακραία περίπτωση συντελείται συμπίεση στο πεδίο (από 10000 τιμές απαιτείται η αποθήκευση μόνο 8600), δείχνει τη μεγαλύτερη δυσκολία της μεθόδου να προσεγγίσει πεδία τα οποία δεν είναι ευκόλως διαχωρίσιμα. Βέβαια, σε μεγαλύτερου μεγέθους εφαρμογές, όπου τα πεδία αποτελούνται από εκατοντάδες χιλιάδες κόμβους η συμπίεση που θα πραγματοποιούνταν για αυτή τη συνάρτηση θα ήταν πολύ αποδοτικότερη. Επιπλέον, εδώ παρουσιάζονται μόνο οι 9 πρώτες βάσεις, κυρίως για να συγκριθούν οι τιμές που παρουσιάζουν σε σχέση με όσα αναλύθηκαν έως τώρα. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι ακόμα και οι όροι μεγαλύτερης τάξης λαμβάνουν τιμές που επηρεάζουν την προσέγγιση του πεδίου. Στο Σχήμα 2.3β', όπου παρουσιάζονται οι ισογραμμές του πραγματικού και του ανακατασκευασμένου με 9 βάσεις πεδίου, παρατηρείται ότι, αν και η προσέγγιση είναι αξιοπρεπής, η μέθοδος δεν μπορεί μόνο με $M = 9$ όρους να δώσει μια ακριβέστατη αναπαράσταση του πεδίου. Στην πραγματικότητα, το πόσο ακριβής πρέπει να είναι η προσέγγιση εξαρτάται από την εφαρμογή και την επιλογή που κάνει ο χρήστης.



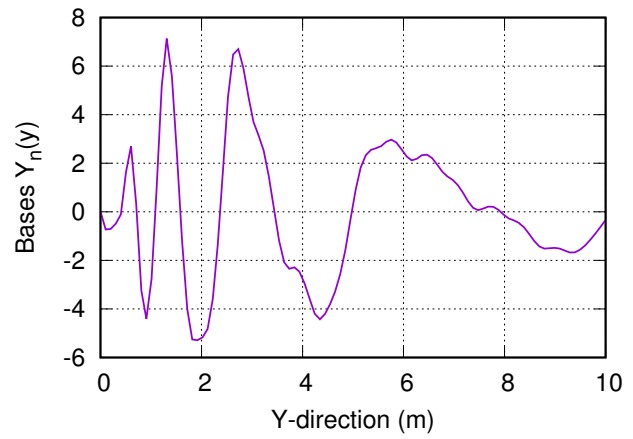
Σχήμα 2.3: Εφαρμογή συμπίεσης με PGD στη συνάρτηση της εξίσωσης (2.23). (α') Μορφή του υπό συμπίεση πεδίου u της εξίσωσης 2.23 και (β') οι αντίστοιχες ισογραμμές. Με μπλε χρώμα οι ισογραμμές του πραγματικού πεδίου και με κόκκινο χρώμα του ανακατασκευασμένου με 9 όρους του αθροίσματος προσέγγισης.



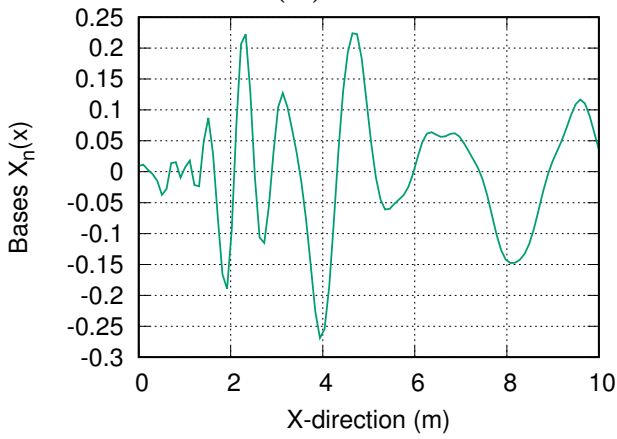
Σχήμα 2.4: Εφαρμογή συμπίεσης με PGD στη συνάρτηση της εξίσωσης (2.23). 1Δ Συναρτήσεις Βάσης.



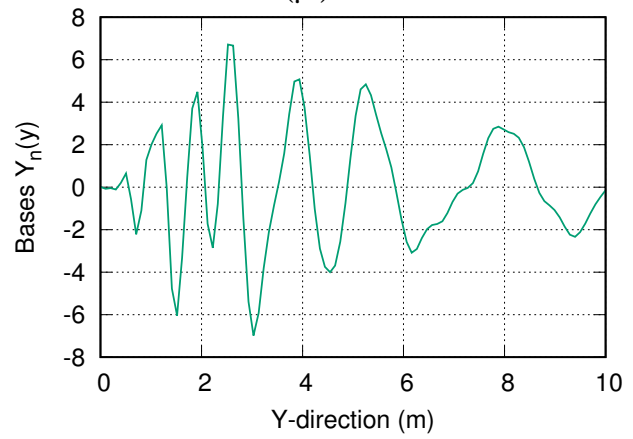
$(\alpha') X^2$



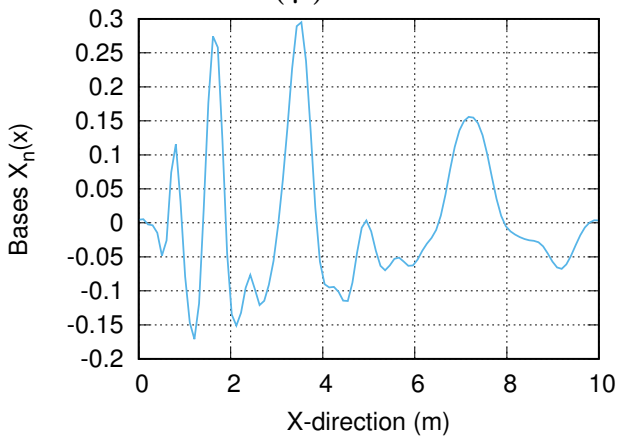
$(\beta') Y^2$



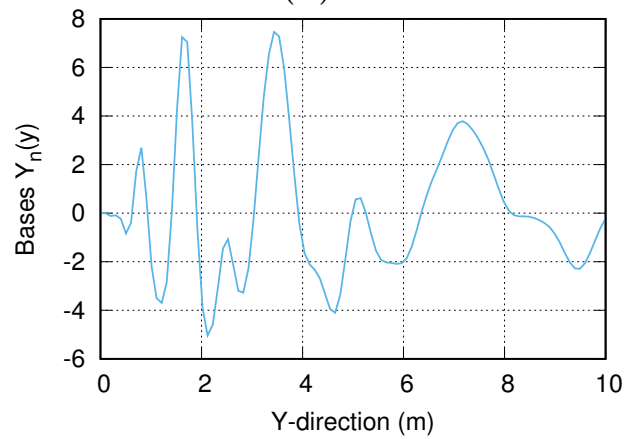
$(\gamma') X^3$



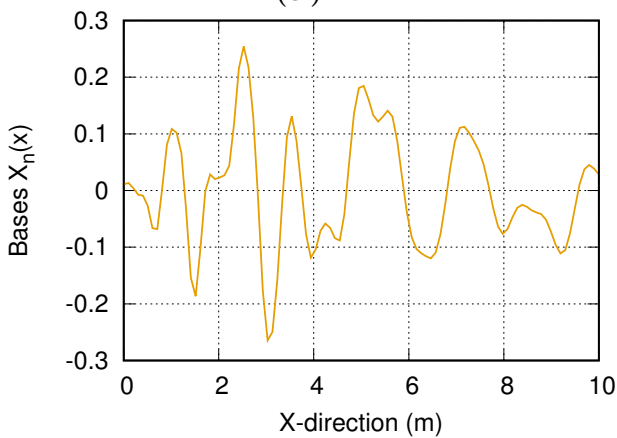
$(\delta') Y^3$



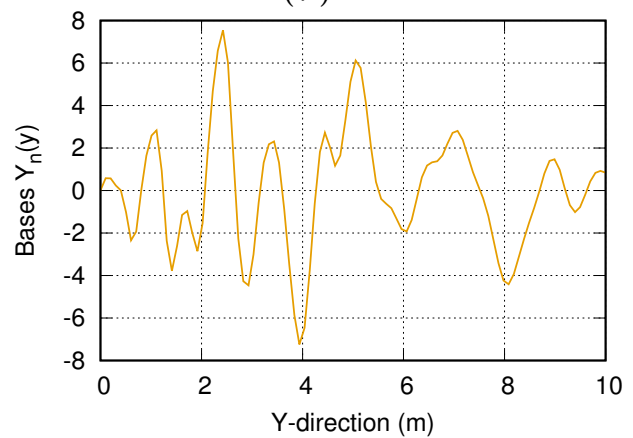
$(\epsilon') X^4$



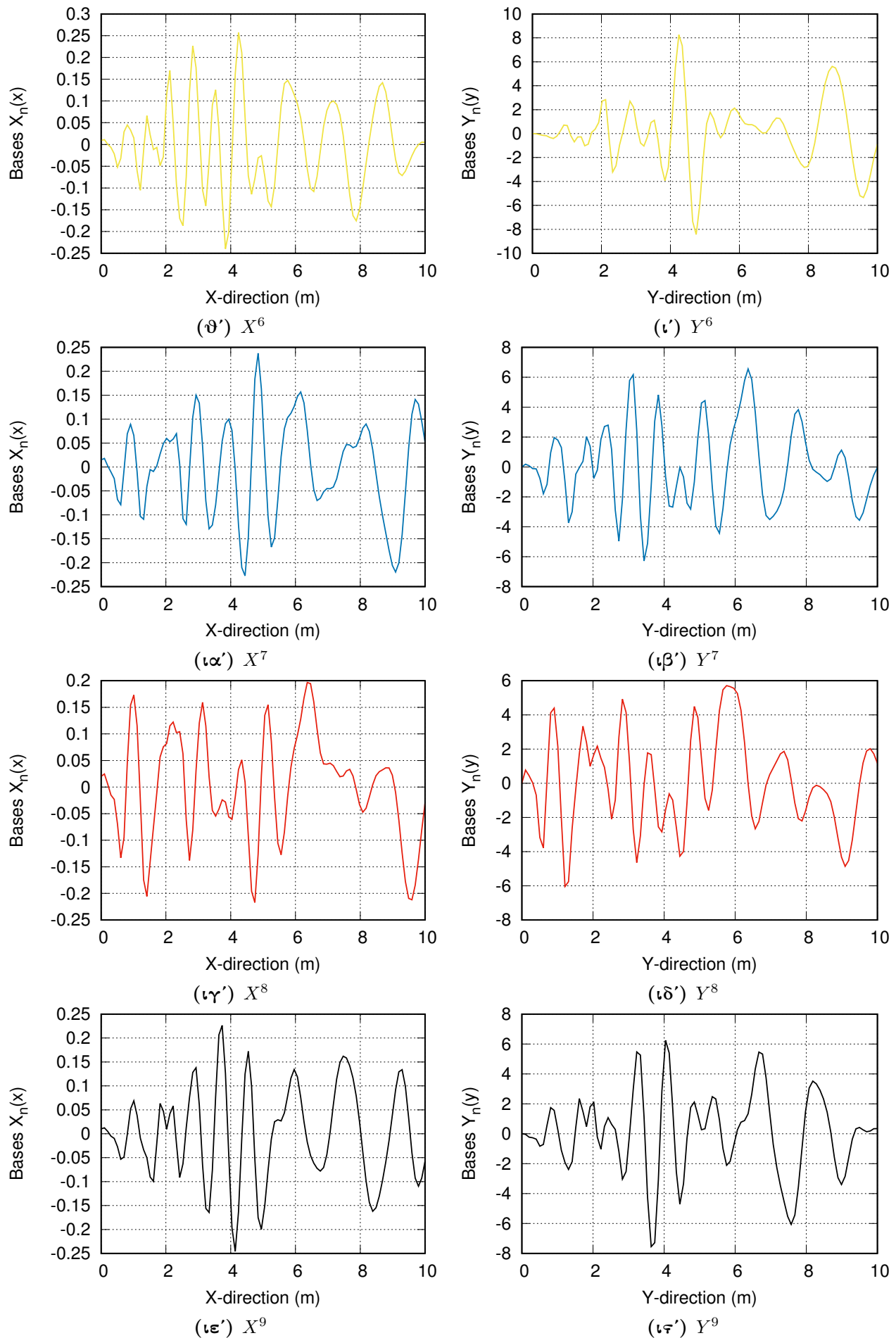
$(\zeta') Y^4$



$(\eta') X^5$



$(\theta') Y^5$



Σχήμα 2.3: Εφαρμογή συμπίεσης με PGD στη συνάρτηση της εξίσωσης (2.23). 1Δ Συναρτήσεις Βάσης.

2.6 Συμπύεση 3Δ Πεδίου

Η περίπτωση του διαχωρισμού ενός 2Δ πεδίου που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 2.1 μπορεί εύκολα να γενικευτεί για οποιασδήποτε διάστασης πεδίο. Εδώ θα παρουσιαστούν συνοπτικά οι εξισώσεις για την εξαγωγή της αποσυμπλεγμένης προσέγγισης ενός 3Δ πεδίου $u(\xi, \eta, t)$, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή αποτελεσμάτων στη συνέχεια. Ως επιπλέον τρίτη διάσταση μπορεί να θεωρηθεί η τρίτη διάσταση του χώρου ή και ο χρόνος, χωρίς αυτό να αλλάζει κάτι στη μέθοδο που ακολουθείται. Το 3Δ πεδίο θα προσεγγίζεται στη λογική της μεθόδου PGD μέσω του αθροίσματος:

$$u(\xi, \eta, \tau) \approx \sum_{\mu=1}^M \phi^{\mu}(\xi)\theta^{\mu}(\eta)\tau^{\mu}(t) \quad (2.24)$$

Στόχος είναι ο υπολογισμός των 1Δ συναρτήσεων για τον τυχαίο όρο m του αθροίσματος προσέγγισης, οι οποίες εμφανίζονται σε μη-γραμμική μορφή. Για το m -οστό βήμα εμπλουτισμού, όλοι οι όροι μέχρι το προηγούμενο βήμα $m - 1$ είναι γνωστοί. Επομένως, μπορεί να αναπτυχθεί η διαδικασία παρόμοια με την αντίστοιχη της Ενότητας 2.1 και να προκύψουν οι εξισώσεις υπολογισμού των συναρτήσεων $\phi^m(\xi)$, $\theta^m(\eta)$ και $\tau^m(t)$ για το τρέχον βήμα:

$$\phi^m = \frac{\int_{\eta} \int_t u \theta^m t^m dt d\eta - \sum_{\mu=1}^{m-1} \phi^{\mu} \int_{\eta} \int_t \theta^{\mu} \theta^{\mu} \tau^{\mu} \tau^{\mu} dt d\eta}{\int_{\eta} \int_t (\theta^m)^2 (\tau^m)^2 dt d\eta} \quad (2.25)$$

$$\theta^m = \frac{\int_{\xi} \int_t u \phi^m t^m dt d\xi - \sum_{\mu=1}^{m-1} \theta^{\mu} \int_{\xi} \int_t \phi^{\mu} \phi^{\mu} \tau^{\mu} \tau^{\mu} dt d\xi}{\int_{\xi} \int_t (\phi^m)^2 (\tau^m)^2 dt d\xi} \quad (2.26)$$

$$\tau^m = \frac{\int_{\eta} \int_{\xi} u \phi^m \theta^m d\xi d\eta - \sum_{\mu=1}^{m-1} \tau^{\mu} \int_{\eta} \int_{\xi} \phi^{\mu} \phi^{\mu} \theta^{\mu} \theta^{\mu} d\xi d\eta}{\int_{\eta} \int_{\xi} (\phi^m)^2 (\theta^m)^2 d\xi d\eta} \quad (2.27)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις επιλύονται κυκλικά μέχρι τη σύγκλιση οπότε και λαμβάνονται οι νέοι όροι του αθροίσματος προσέγγισης. Η ύπαρξη διπλών ολοκληρωμάτων που περιέχουν τους όρους που σχετίζονται με τις άλλες κατευθύνσεις, αυξάνει την πολυπλοκότητα του υπολογισμού των ϕ, θ και τ , με αποτέλεσμα να αυξάνει κι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου. Είναι στο χέρι το χρήστη να αποφασίσει, λαμβάνοντας υπόψη και την εφαρμογή, αν η συμπίεση που επιτυγχάνεται αντισταθμίζει αυτήν την αύξηση στο χρόνο εκτέλεσης.

Κεφάλαιο 3

Η Μέθοδος PGD για Επίλυση ΜΔΕ

Στο Κεφάλαιο 2 αναλύθηκε η χρήση της μεθόδου του Ιδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού για τη συμπίεση 2Δ και 3Δ πεδίων, τα οποία είναι γνωστά στο χρήστη εκ των προτέρων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, ωστόσο, παρουσιάζει και η περίπτωση χρήσης της μεθόδου ως επιλύτη ΜΔΕ. Στις συνήθεις εφαρμογές της Υπολογιστικής Μηχανικής και συγκεκριμένα της ΥΡΔ, συχνά απαιτείται η επίλυση μη-γραμμικών συστημάτων ΜΔΕ, τα οποία συνήθως εξαρτώνται από πολλές άγνωστες παραμέτρους (ιδιότητες των υλικών κ.λ.π.). Μέσω της απαιτούμενης διακριτοποίησης των εξισώσεων που περιγράφουν το φυσικό πρόβλημα προκύπτει ένα αλγεβρικό σύστημα το οποίο χρειάζεται να επιλυθεί για την εύρεση των άγνωστων ποσοτήτων. Σε πραγματικές εφαρμογές, όπου για τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου είναι απαραίτητος μεγάλος αριθμός κόμβων, τα συστήματα αυτά έχουν πολύ μεγάλη διάσταση (υπό την έννοια ότι απαιτείται ο υπολογισμός χιλιάδων ή και εκατομμύρια κομβικών τιμών) και η επίλυσή τους υπολογιστικά είναι ιδιαίτερα δαπανηρή. Επιπλέον, δε, η μη-γραμμικότητά τους απαιτεί την επίλυσή τους επαναληπτικά αυξάνοντας περαιτέρω το υπολογιστικό κόστος, ενώ, για μη-μόνιμα προβλήματα κάθε τέτοιο σύστημα πρέπει να λυθεί για κάθε χρονικό βήμα.

Σε πολλές περιπτώσεις ωστόσο, η λύση της ΜΔΕ που διέπει το φυσικό φαινόμενο βρίσκεται σε ένα υποσύνολο πολύ μικρότερης διάστασης από την πλήρη διάσταση του προβλήματος. Τα μοντέλα μειωμένης τάξης, στην κατηγορία των οποίων συγκαταλέγεται η μέθοδος PGD, βασίζονται σε αυτήν ακριβώς την αρχή για την εύρεση αξιόπιστων προσεγγίσεων της λύσης μίας ΜΔΕ με πολύ μικρότερο υπολογιστικό κόστος από αυτό που θα χρειαζόταν ένας «κλασσικός» επιλύτης.

Σε αυτό το Κεφάλαιο περιγράφεται η μέθοδος της επίλυσης μίας απλής 2Δ εξίσωσης Poisson η λύση της οποίας θα προκύψει σε διαχωρισμένη μορφή μέσω της μεθόδου PGD. Σε αυτήν την περίπτωση, η λύση της ΜΔΕ κατασκευάζεται βαθμιαία και βασικό ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός των 1Δ συναρτήσεων που συνθέτουν την προσεγγιστική λύση. Αρχικά θα παρουσιαστεί η μέθοδος για ομογενείς συνθήκες Diriclet σε 2Δ ορθογωνικό υπολογιστικό πλέγμα, έπειτα θα περιγραφεί ο τρόπος εισαγωγής και μη-ομογενών οριακών συνθηκών στο πρόβλημα και στο τέλος θα παρουσιαστεί η μέθοδος για την ανάπτυξη της μεθόδου για οποιοδήποτε σχήματος 2Δ υπολογιστικό χωρίο διακριτοποιημένο με δομημένο υπολογιστικό πλέγμα.

3.1 Επίλυση της Εξίσωσης Poisson με τη Μέθοδο PGD

Η αρχική παρουσίαση της μεθόδου βασίζεται στη 2Δ εξίσωση Poisson, η οποία αποτελεί την απλούστερη περίπτωση εξίσωσης ελλειπτικού τύπου και εμφανίζεται σε πάμπολλες εφαρμογές της επιστήμης του Μηχανολόγου Μηχανικού, όπως στη Μετάδοση Θερμότητας. Η χρήση της εξίσωσης αυτής γίνεται εδώ, καθώς αποτελεί ένα απλό και επεξηγηματικό παράδειγμα για την επίδειξη της εφαρμογής της μεθόδου.

Το βασικό στοιχείο της μεθόδου, είναι η μετατροπή του προβλήματος, από πρόβλημα εύρεσης απευθείας του πεδίου που αποτελεί λύση της ΜΔΕ, σε πρόβλημα εύρεσης κατάλληλων στοιχείων που συνθέτουν ένα προσεγγιστικό πεδίο, το οποίο θα μπορεί να αναπαράγει ικανοποιητικά την πραγματική λύση. Αυτό, όπως θα διαφανεί παρακάτω, μπορεί να είναι πολύ πιο «οικονομικό» όσον αφορά την απαιτούμενη υπολογιστική ισχύ και/ή τη μνήμη του υπολογιστή.

3.1.1 Ομογενείς συνθήκες Diriclet

Θεωρείται, επομένως, η εξίσωση Poisson σε ορθογωνικό χωρίο $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$ που καθορίζει, έστω, τη θερμοκρασιακή κατανομή $T(x, y)$ στην επιφάνεια του χωρίου:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} T(x, y) = f \quad (3.1)$$

όπου ο επαναλαμβανόμενος δείκτης δηλώνει άθροιση κατά τη γνωστή σύμβαση του Einstein. Σε πρώτη προσέγγιση, θεωρούνται ομογενείς συνοριακές συνθήκες Diriclet για το πεδίο θερμοκρασιών $T(x, y)$, δηλαδή μηδενική τιμή θερμοκρασίας στο όριο του χωρίου,

$$T(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \quad (3.2)$$

Ο όρος πηγής $f(x, y)$ μπορεί να λαμβάνει οποιαδήποτε μορφή ανάλογα την εφαρμογή, χωρίς αυτό να επηρεάζει την ανάπτυξη της μεθόδου. Αντικειμενικός στόχος στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η εύρεση του κατάλληλου πεδίου $T(x, y)$, το οποίο πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση (3.1), αλλά να εκφράζεται σε διαχωρισμένη μορφή, ως γινόμενο 1Δ συναρτήσεων του x και του y κατά το συνηθισμένο πλαίσιο της μεθόδου PGD. Άρα θα είναι:

$$T(x, y) = \sum_{\mu=1}^M X^\mu(x) Y^\mu(y) \quad (3.3)$$

Το συγκεκριμένο άθροισμα (3.3) κατασκευάζεται βαθμιαία [4], καθώς η μέθοδος, με μία διαδικασία συνεχόμενου «εμπλουτισμού» του με γινόμενα των 1Δ συναρτήσεων βάσης, προσπαθεί να βελτιώσει την προσέγγιση του πραγματικού πεδίου που αποτελεί λύση της υπόψη ΜΔΕ. Παρακάτω, παρουσιάζεται και αναλύεται διεξοδικά ο τρόπος με τον οποίο συντελείται ο εμπλουτισμός αυτός, ώστε να προκύψει η προσεγγιστική λύση της εξίσωσης (3.1).

Βαθμιαία Δόμηση Αθροίσματος Προσέγγισης του Πεδίου

Έστω ότι ο αλγόριθμος για τον εμπλουτισμό του αθροίσματος που αναπαράγει την προσεγγιστική λύση βρίσκεται στο m -οστό βήμα (με $m \geq 1$). Επομένως, έχουν ήδη προηγηθεί $m - 1$ βήματα και, άρα, είναι γνωστές οι αντίστοιχες 1Δ συναρτήσεις βάσης που αποτελούν τους $m - 1$ όρους προσέγγισης της εξίσωσης (3.3). Έτσι η προσέγγιση του πεδίου θερμοκρασίας μέχρι αυτό το βήμα εμπλουτισμού είναι:

$$T^{m-1}(x, y) = \sum_{\mu=1}^{m-1} X^{\mu}(x) Y^{\mu}(y) \quad (3.4)$$

Ζητούμενο, στο συγκεκριμένο βήμα, είναι ο υπολογισμός του νέου όρου $X^m(x) Y^m(y)$ που θα προστεθεί στο άθροισμα (3.4) ώστε να ληφθεί η νέα ακριβέστερη προσέγγιση $T^m(x, y)$ του θερμοκρασιακού πεδίου. Η προσθήκη του όρου αυτού δίνει την εξίσωση:

$$T^m(x, y) = T^{m-1}(x, y) + X^m(x) Y^m(y) \stackrel{(3.4)}{=} \sum_{\mu=1}^{m-1} X^{\mu}(x) Y^{\mu}(y) + X^m(x) Y^m(y) \quad (3.5)$$

Σε αυτήν τη φάση, και οι ζητούμενες δύο 1Δ συναρτήσεις $X^m(x)$ και $Y^m(y)$ είναι άγνωστες και καθιστούν το πρόβλημα εύρεσής τους μη γραμμικό, εφόσον εμφανίζονται σε γινόμενο. Επομένως, απαιτείται κι εδώ μία επιπλέον «εσωτερική» επαναληπτική διαδικασία για την εύρεση κάθε συνάρτησης, όπως αυτή που χρησιμοποιήθηκε στο Κεφάλαιο 2. Αντίστοιχα με όσα αναφέρθηκαν εκεί, κάθε βήμα αυτής της εσωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας θα συμβολίζεται με p , ώστε να ξεχωρίζει από τη γενικότερη «εξωτερική» βαθμιαία διαδικασία του εμπλουτισμού του αθροίσματος προσέγγισης της λύσης. Έτσι, λοιπόν, η εξίσωση (3.5) γράφεται για το συγκεκριμένο βήμα p ως:

$$T_p^m(x, y) = T^{m-1}(x, y) + X_p^m(x) Y_p^m(y) \quad (3.6)$$

Για την επίλυση του μη-γραμμικού αυτού προβλήματος χρησιμοποιείται ένα απλό επαναληπτικό σχήμα τύπου «εναλλασσόμενων διευθύνσεων», όπου, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η συνάρτηση $X_p^m(x)$ υπολογίζεται από την $Y_{p-1}^m(y)$ και έπειτα η $Y_p^m(y)$ από την ήδη υπολογισθείσα $X_p^m(x)$. Για την εκκίνηση της επαναληπτικής μεθόδου απαιτείται ο προσδιορισμός αυθαίρετης αρχικοποίησης $Y_0^m(y)$, ενώ οι εσωτερικές επαναλήψεις σταματούν όταν ικανοποιηθεί και για τις δύο συναρτήσεις το κριτήριο σύγκλισης που έχει θέσει ο χρήστης. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα κριτήριο της μορφής:

$$\sqrt{\int_{\Omega_x} (X_p^m(x) - X_{p-1}^m(x))^2} < \epsilon \quad (3.7)$$

και

$$\sqrt{\int_{\Omega_y} (Y_p^m(y) - Y_{p-1}^m(y))^2} < \epsilon \quad (3.8)$$

όπου ϵ μία ανοχή σφάλματος. Εφόσον επέλθει σύγκλιση των εσωτερικών επαναλήψεων p τότε οι τιμές των $X_p^m(x)$ και $Y_p^m(y)$ εκχωρούνται στα $X^m(x)$ και $Y^m(y)$ αντίστοιχα. Η συνολική διαδικασία εμπλουτισμού της διανυσματικής βάσης των μονοδιάστατων συναρτήσεων τερματίζεται όταν ικανοποιηθεί ένα αντίστοιχο κριτήριο σύγκλισης του σφάλματος, π.χ. όταν γίνει $\mathcal{E}(n) < \bar{\epsilon}$. Για τον ορισμό του \mathcal{E} μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες διατυπώσεις, όπως αυτές που αναφέρθηκαν στην Ενότητα 2.3.

Μέχρι στιγμής η διαδικασία που περιγράφεται δεν φαίνεται να διαφέρει σε τίποτα σε σχέση με όσα αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 2, όπου αναλύθηκε η χρήση της μεθόδου PGD για τη συμπίεση δεδομένων πεδίων. Παρακάτω ακολουθεί αναλυτικότερα η μέθοδος της στρατηγικής εναλλασσόμενων διευθύνσεων για τον υπολογισμό του γινομένου $X^m(x)Y^m(y)$ στο m -οστό βήμα εμπλουτισμού της βάσης, στην οποία θα αναλυθεί η ιδιαιτερότητα της περίπτωσης αυτής και θα εξεταστεί ο τρόπος με τον οποίο παράγεται η προσεγγιστική λύση της ΜΔΕ.

Στρατηγική Εναλλασσόμενων Διευθύνσεων

Στο m -οστό βήμα εμπλουτισμού του αθροίσματος προσέγγισης όλοι οι όροι που το απαρτίζουν μέχρι εκείνο το σημείο είναι γνωστοί, καθώς έχουν υπολογιστεί από τα προηγούμενα βήματα. Στο τρέχον βήμα, ο νέος όρος που θα υπολογιστεί απαρτίζεται από τις δύο νέες συναρτήσεις $X^m(x)$ και $Y^m(y)$ και η απαιτούμενη επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό τους αποτελείται από τα ακόλουθα δύο βήματα:

- **Βήμα 1ο:** Υπολογισμός $X_p^m(x)$ από $Y_{p-1}^m(y)$

Έστω το βήμα p των εσωτερικών επαναλήψεων, επομένως η προσέγγιση του πεδίου θα δίνεται από την εξίσωση:

$$T_p^m(x, y) = \sum_{\mu=1}^{m-1} X^\mu(x) Y^\mu(y) + X_p^m(x) Y_{p-1}^m(y) \quad (3.9)$$

η οποία περιέχει τις ήδη γνωστές συναρτήσεις βάσης για τα προηγούμενα βήματα εμπλουτισμού μ και τον νέο όρο που θα προστεθεί τώρα, για την επαύξηση της ακρίβειας του προσεγγιστικού πεδίου. Η συνάρτηση $Y_{p-1}^m(y)$ θεωρείται γνωστή από τον προηγούμενο κύκλο της εσωτερικής επαναληπτικής διαδικασίας, επομένως, η μόνη άγνωστη ποσότητα σε αυτήν τη φάση είναι η συνάρτηση $X_p^m(x)$. Το θερμοκρασιακό πεδίο $T_p^m(x, y)$ εφόσον αποτελεί λύση της εξίσωσης (3.1) οφείλει να την ικανοποιεί και, επομένως, μπορεί να γίνει αντικατάσταση της σχέσης (3.9) στην (3.1). Εδώ είναι το σημείο διαφοροποίησης με την εκ των υστέρων συμπίεση του πεδίου που εξετάστηκε αλλού, καθώς αυτό που αλλάζει είναι η εξίσωση που διέπει το πρόβλημα. Τα δύο μέρη της εξίσωσης που προκύπτει πολλαπλασιάζονται με Y_{p-1}^m και ολοκληρώνονται πάνω στο χωρίο επίλυσης σύμφωνα με την αρχή της προβολής κατά Galerkin, που εξετάστηκε συνοπτικά στην Ενότητα 2.4. Έτσι, προκύπτει η εξίσωση:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_x \times \Omega_y} Y_{p-1}^m(y) \left(\frac{d^2 X_p^m(x)}{dx^2} Y_{p-1}^m(y) + X_p^m(x) \frac{d^2 Y_{p-1}^m(y)}{dy^2} \right) dx dy \\ &= - \iint_{\Omega_x \times \Omega_y} Y_{p-1}^m(y) \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\frac{d^2 X^\mu(x)}{dx^2} Y^\mu(y) + X^\mu(x) \frac{d^2 Y^\mu(y)}{dy^2} \right) dx dy \quad (3.10) \\ &+ \iint_{\Omega_x \times \Omega_y} Y_{p-1}^m(y) f dx dy \end{aligned}$$

Η (3.10) αποτελείται από όρους που εξαρτώνται είτε μόνο από τη x είτε μόνο από τη y συνιστώσα και τα διπλά ολοκληρώματα που εμφανίζονται μπορούν, επομένως, να υπολογιστούν απεπλεγμένα κατά τις δύο διαφορετικές κατευθύνσεις ως απλά. Επιπλέον, όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση και εξαρτώνται από τη y -συνιστώσα θεωρούνται σε αυτό το βήμα της εσωτερικής διαδικασίας γνωστές και παίζουν το ρόλο σταθερών συντελεστών. Άρα, η εξίσωση

(3.10) γράφεται ως προς το μοναδικό άγνωστο $X_p^m(x)$ στη μορφή:

$$\int_{\Omega_x} \left(\alpha_x \frac{d^2 X_p^m(x)}{dx^2} + \beta_x X_p^m(x) \right) dx = - \int_{\Omega_x} \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\gamma_x^\mu \frac{d^2 X^\mu(x)}{dx^2} + \delta_x^\mu X^\mu(x) \right) dx + \int_{\Omega_x} \xi_x dx \quad (3.11)$$

με τους γνωστούς συντελεστές που εξαρτώνται μόνο από τη συνιστώσα y να είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \int_{\Omega_y} (Y_{p-1}^m(y))^2 dy \\ \beta_x &= \int_{\Omega_y} Y_{p-1}^m(y) \frac{d^2 Y_{p-1}^m(y)}{dy^2} dy \\ \gamma_x^\mu &= \int_{\Omega_y} Y_{p-1}^m(y) Y^\mu(y) dy \\ \delta_x^\mu &= \int_{\Omega_y} Y_{p-1}^m(y) \frac{d^2 Y^\mu(y)}{dy^2} dy \\ \xi_x^\mu &= \int_{\Omega_y} Y_{p-1}^m(y) f dy \end{aligned} \quad (3.12)$$

Εφόσον η εξίσωση (3.11) προέρχεται από την (3.1) τα ολοκληρώματα κατά x μπορούν να απαλειφθούν και να προκύψει η εξίσωση σε διαφορική μορφή:

$$\alpha_x \frac{d^2 X_p^m(x)}{dx^2} + \beta_x X_p^m(x) = - \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\gamma_x^\mu \frac{d^2 X^\mu(x)}{dx^2} + \delta_x^\mu X^\mu(x) \right) + \xi_x \quad (3.13)$$

Ο υπολογισμός των μονοδιάστατων ολοκληρωμάτων κατά τη y -κατεύθυνση είναι τετριμμένος, επομένως το πρόβλημα της εύρεση της κατάλληλης συνάρτησης βάσης $X_p^m(x)$ για αυτό το βήμα της εσωτερικής επανάληψης ανάγεται στην επίλυση της ΣΔΕ (3.13). Η εξίσωση αυτή μπορεί να διακριτοποιηθεί με κάποιο αριθμητικό σχήμα (π.χ. με πεπερασμένες διαφορές 2ης τάξης ακρίβειας) και να προκύψει ένα αλγεβρικό σύστημα (τριδιαγώνιας μορφής για το συγκεκριμένο σχήμα) το οποίο μπορεί να επιλυθεί πρακτικά με μηδαμινό υπολογιστικό κόστος σε έναν σύγχρονο Η/Υ. Για την επίλυση απαιτείται, ωστόσο, η υποβολή κάποιων οριακών συνθηκών για τα άκρα του υπο-χωρίου Ω_x πάνω στο οποίο γίνεται η επίλυση της ΣΔΕ. Στην αρχική ΜΔΕ 3.1, όπως ήδη έχει αναφερθεί, επιβάλλονται ομογενείς οριακές συνθήκες, άρα και για τη συνάρτηση βάσης $X_p^m(x)$ επιβάλλονται μηδενικές οριακές συνθήκες, δηλαδή:

$$X_p^m(x_{min}) = X_p^m(x_{max}) = 0 \quad (3.14)$$

ώστε να ικανοποιείται για το προσεγγιστικό πεδίο $T_p^m(x, y) = X_p^m(x) Y_{p-1}^m(y)$ η οριακή συνθήκη (3.2). Με γνωστή πλέον τη συνάρτηση $X_p^m(x)$ η διαδικασία προχωρά στον υπολογισμό της δεύτερης συνάρτησης βάσης.

- **Βήμα 2ο:** Υπολογισμός $Y_p^m(y)$ από το ευρεθέν $X_p^m(x)$

Αναλογικά με την παραπάνω διαδικασία η εξίσωση (3.9) γράφεται τώρα ως:

$$T_p^m(x, y) = \sum_{\mu=1}^{m-1} X^\mu(x) Y^\mu(y) + X_p^m(x) Y_p^m(y). \quad (3.15)$$

Πλέον ο άγνωστος προς υπολογισμό είναι η συνάρτηση $Y_p^m(y)$. Κατά την ίδια λογική που χρησιμοποιήθηκε και για την εύρεση της κατά τη x -κατεύθυνση 1Δ συνάρτησης η εξίσωση (3.15) εισάγεται στην εξίσωση που διέπει το φυσικό πρόβλημα (3.1), και το αποτέλεσμα αυτής της αντικατάστασης, αφού πολλαπλασιαστεί με $X_p^m(x)$ και ολοκληρωθεί πάνω στο υπολογιστικό χωρίο Ω , κατά τη λογική της Galerkin προβολής, δίνει την εξίσωση:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_x \times \Omega_y} X_p^m(x) \left(\frac{d^2 X_p^m(x)}{dx^2} Y_p^m(y) + X_p^m(x) \frac{d^2 Y_p^m(y)}{dy^2} \right) dx dy \\ &= - \iint_{\Omega_x \times \Omega_y} X_p^m(x) \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\frac{d^2 Y^\mu(y)}{dy^2} X^\mu(x) + Y^\mu(y) \frac{d^2 X^\mu(x)}{dx^2} \right) dx dy \\ &+ \iint_{\Omega_x \times \Omega_y} X_p^m(x) f dx dy \end{aligned} \quad (3.16)$$

Έπειτα από την κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία για το διαχωρισμό των διπλών ολοκληρωμάτων και τη μετατροπή τους σε απλά κατά τις δύο κατευθύνσεις προκύπτει η εξίσωση για τον υπολογισμό της $Y_p^m(y)$.

$$\int_{\Omega_y} \left(\alpha_y \frac{d^2 Y_p^m(y)}{dy^2} + \beta_y Y_p^m(y) \right) dy = - \int_{\Omega_y} \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\gamma_y^\mu \frac{d^2 Y^\mu(y)}{dy^2} + \delta_y^\mu Y^\mu(y) \right) dy + \int_{\Omega_y} \xi_y dy \quad (3.17)$$

με τους αντίστοιχους συντελεστές να δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \alpha_y &= \int_{\Omega_x} (X_p^m(x))^2 dx \\ \beta_y &= \int_{\Omega_x} X_p^m(x) \frac{d^2 X_p^m(x)}{dx^2} dx \\ \gamma_y^\mu &= \int_{\Omega_x} X_p^m(x) X^\mu(x) dx \\ \delta_y^\mu &= \int_{\Omega_x} X_p^m(x) \frac{d^2 X^\mu(x)}{dx^2} dx \\ \xi_y^\mu &= \int_{\Omega_x} X_p^m(x) f dx \end{aligned} \quad (3.18)$$

Απαλείφοντας τα ολοκληρώματα στο Ω_y προκύπτει τελικά η προς επίλυση ΣΔΕ:

$$\alpha^y \frac{d^2 Y_p^m(y)}{dy^2} + \beta^y Y_p^m(y) = - \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\gamma_y^\mu \frac{d^2 Y^\mu(y)}{dy^2} + \delta_y^\mu Y^\mu(y) \right) + \xi_y \quad (3.19)$$

Η επίλυση της ΣΔΕ (3.19) γίνεται με τρόπο ανάλογο της αντίστοιχης (3.13) και μηδενικές οριακές συνθήκες Diriclet:

$$Y_p^m(y_{min}) = Y_p^m(y_{max}) = 0 \quad (3.20)$$

Μετά το τέλος του συγκεκριμένου βήματος και οι δύο συναρτήσεις βάσης X_p^m και Y_p^m καθίστανται πλέον γνωστές και η διαδικασία προχωρά στο επόμενο βήμα $p + 1$ μέχρις ότου αυτές συγκλίνουν σε συγκεκριμένες τιμές.

Όταν οι εσωτερικές επαναλήψεις συγκλίνουν, σύμφωνα με ένα δεδομένο κριτήριο σύγκλισης όπως αυτό των εξισώσεων (3.7) και (3.8), το άθροισμα (3.3) εμπλουτίζεται με έναν επιπλέον όρο, αυξάνοντας την ακρίβεια της προσέγγισης του πραγματικού πεδίου.

Μέσω της περιγραφής της διαδικασίας εμπλουτισμού γίνονται εμφανή τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει η μέθοδος PGD για την επίλυση ΜΔΕ. Αρχικά, μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι, μέσω αυτής, για την εύρεση του 2Δ πεδίου χρειάζεται να επιλυθούν απλώς δύο ΣΔΕ, αντί μίας 2Δ ΜΔΕ της οποίας ο υπολογισμός είναι, εν γένει, πολυπλοκότερος αριθμητικά. Αυτή η μετατροπή οδηγεί σε έναν υποβιβασμό της τάξης του προβλήματος, καθώς κάθε κατεύθυνση του χώρου «διαχωρίζεται» από την άλλη και η αντίστοιχη ΣΔΕ λύνεται για την αντίστοιχη κατάσταση. Η άλλη κατεύθυνση επιδρά κάθε φορά στη λύση μόνο μέσω των σταθερών συντελεστών που υπάρχουν στις εξισώσεις (3.13) και (3.19), που θεωρούνται γνωστοί για κάθε βήμα.

Το τίμημα, ωστόσο, που πρέπει να πληρώσει κάποιος που θέλει να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο είναι, ότι το πρόβλημα υπολογισμού των συναρτήσεων που συνθέτουν το άθροισμα προσέγγισης της λύσης απαιτεί επαναλήψεις για την επίλυσή του, καθώς οι ζητούμενες 1Δ συναρτήσεις βρίσκονται σε μορφή γινομένου. Ακόμα σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια της προσέγγισης παίζει και ο αριθμός των όρων του αθροίσματος που θα χρησιμοποιηθούν. Αν μικρός αριθμός τέτοιων όρων είναι αποδεκτός και οδηγεί σε μία ικανοποιητική προσέγγιση της λύσης, η διαδικασία της μεθόδου μπορεί να γίνει πολύ γρήγορα και αποδοτικά. Αντίθετα, χρήση περισσότερων όρων οδηγεί στην αύξηση του υπολογιστικού κόστους λόγω της απαίτησης υπολογισμού πολλών ολοκληρωμάτων για το κάθε βήμα εσωτερικής επανάληψης και εμπλουτισμού του αθροίσματος προσέγγισης.

Μέχρι στιγμής παρουσιάστηκε η μέθοδος για την επίλυση της εξίσωσης Poisson σε 2Δ ορθογωνικό χωρίο. Στις επόμενες Ενότητες παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο γίνεται ο χειρισμός μη-ομογενών συνθηκών και επιπλέον η παραπάνω αλγοριθμική διαδικασία γενικεύεται ώστε να εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε σχήματος 2Δ χωρίο.

3.1.2 Μη-Ομογενείς Οριακές Συνθήκες Diriclet

Θεωρούνται μη-ομογενείς συνθήκες σε ένα τμήμα του ορίου του υπολογιστικού χωρίου $\partial\Omega$, ώστε να ισχύει $T(x, y) = \bar{T}(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$. Η μαθηματική διατύπωση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} T(x, y) &= f(x, y), & \forall (x, y) \in \Omega \\ T(x, y) &= \bar{T}(x, y), & \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.21)$$

Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος μπορεί να θεωρηθεί ότι δίνεται από την επαλληλία δύο διαφορετικών πεδίων $T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y)$ για τα οποία θα ισχύει:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} T_1(x, y) = f(x, y), & \forall (x, y) \in \Omega \\ T_1(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} T_2(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \Omega \\ T_2(x, y) = \bar{T}(x, y), & \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.23)$$

έτσι ώστε ο γραμμικός συνδυασμός των δύο επιμέρους προβλημάτων να δίνει το αρχικό πρόβλημα (3.21).

Για την εφαρμογή της μεθόδου PGD για τις μη ομογενείς οριακές συνθήκες θεωρείται γνωστή συνάρτηση $g(x, y)$ για την οποία ισχύει $g(x, y) = \bar{T}(x, y)$ πάνω στο όριο, ενώ στο εσωτερικό του πεδίου λαμβάνει μηδενική τιμή, ώστε να ικανοποιεί τη ΜΔΕ και τις οριακές συνθήκες του υποπροβλήματος (3.23).

Η συνάρτηση $g(x, y)$, όντας δεδομένη, μπορεί να αναλυθεί μέσω της μεθόδου PGD για τον εκ των υστέρων διαχωρισμό ενός δεδομένου πεδίου που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2. Έστω ότι για την διαχωρισμένη επέκταση της συνάρτησης αυτής χρησιμοποιήθηκαν K όροι, άρα η προσεγγιστική μορφή της θα δίνεται από το άθροισμα:

$$g(x, y) \approx \sum_{\mu=1}^K X_{BC}^{\mu}(x) Y_{BC}^{\mu}(y) \quad (3.24)$$

Η επέκταση αυτή ικανοποιεί προσεγγιστικά τις απαιτήσεις του προβλήματος 3.23, επομένως λαμβάνεται το πεδίο $T_2(x, y)$ στη μορφή του διαχωρισμένου αθροίσματος της εξίσωσης (3.24). Το άθροισμα θα αναπτυχθεί και θα εμπλουτιστεί περαιτέρω με νέους όρους οι οποίοι θα λαμβάνουν υπόψη και το πεδίο $T_1(x, y)$, ώστε να προκύψει τελικά η προσέγγιση της λύσης $T(x, y)$ του πλήρους προβλήματος 3.21. Για να γίνει αυτό, εφαρμόζεται η μέθοδος που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 3.1.1 για το πεδίο $T_1(x, y)$ πλέον, στο οποίο επιβάλλονται ομογενείς συνθήκες και επομένως η διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί χωρίς δυσκολία. Η μόνη διαφοροποίηση που συναντάται εδώ είναι ότι η διαδικασία του εμπλουτισμού του αθροίσματος προσέγγισης θα συνεχιστεί από τον όρο $\mu = K + 1$, τον επόμενο δηλαδή από αυτόν στον οποίο σταμάτησε το άθροισμα (3.24). Μετά το πέρας της διαδικασίας, η συνολική λύση της ΜΔΕ του προβλήματος δίνεται από το άθροισμα:

$$T(x, y) \approx \sum_{\mu=1}^K X_{BC}^{\mu}(x) Y_{BC}^{\mu}(y) + \sum_{\mu=K+1}^M X^{\mu}(x) Y^{\mu}(y) \quad (3.25)$$

στο οποίο ο πρώτος όρος ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες ενώ ο δεύτερος τη ΜΔΕ στο εσωτερικό του πεδίου.

3.2 2Δ πρόβλημα σε Τυχαίο Υπολογιστικό Χωρίο

Η περίπτωση που αναλύθηκε στην ενότητα 3.1.1 αφορούσε την επίλυση μίας εξίσωσης Poisson σε ορθογωνικό πλέγμα με τη χρήση της μεθόδου PGD. Για τις περισσότερες εφαρμογές τα φυσικά χωρία επίλυσης είναι σπάνια ορθογώνιου σχήματος και, επομένως, η χρήση καμπυλόγραμμων υπολογιστικών πλεγμάτων είναι αναγκαία. Εδώ θα γίνει αναφορά μόνο στα δομημένα 2Δ υπολογιστικά πλέγματα και στην ανάπτυξη της μεθόδου πάνω σε αυτά.

Σύμφωνα με τον συνήθη μετασχηματισμό από το καμπυλόγραμμο φυσικό χωρίο (x, y) στο ορθογώνιο υπολογιστικό (ξ, η) η εξίσωση (3.1) που διέπει το φυσικό πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας μετασχηματίζεται στην:

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J g^{ij} \frac{\partial T}{\partial \xi^j} \right) = f \quad (3.26)$$

όπου $\xi^1 \equiv \xi$ και $\xi^2 \equiv \eta$, ενώ g^{ij} οι ανταλλοιώτες μετρικές δεύτερης τάξης και J η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού. Στην ανάλυση που παρατίθεται εδώ, θεωρούνται ομογενείς συνοριακές συνθήκες, καθώς η ύπαρξη μη-ομογενών συνθηκών μπορεί να χειριστεί ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στην Ενότητα 3.1.2. Αν η εξίσωση (3.26) αναπτυχθεί εφαρμόζοντας την άθροιση που υπαγορεύεται από τους διπλούς δείκτες λαμβάνεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} J g^{11} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (J g^{11}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J g^{12}) \right] \frac{\partial T}{\partial \xi} + 2 J g^{12} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta \partial \xi} \\ + \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (J g^{12}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J g^{22}) \right] \frac{\partial T}{\partial \eta} + J g^{22} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = J f \end{aligned} \quad (3.27)$$

Το πεδίο θερμοκρασιών $T(\xi, \eta)$ μπορεί βάσει της μεθόδου να υπολογιστεί στη διαχωρισμένη μορφή:

$$T(\xi, \eta) \approx \sum_{\mu=1}^M \Xi^\mu(\xi) H^\mu(\eta) \quad (3.28)$$

η οποία πλέον αποτελείται από 1Δ συναρτήσεις που «ζουν» πάνω στις καμπυλόγραμμες πλεγματικές γραμμές του υπολογιστικού χωρίου. Κάθε νέος όρος του παραπάνω αθροίσματος προστίθεται βαθμιαία, αμέσως μετά την ολοκλήρωση υπολογισμού των προηγούμενων, κατά τη γνωστή διαδικασία που αναφέρεται εκτενώς στην Ενότητα 3.1.1, αυξάνοντας την ακρίβεια της προσεγγιστικής αναπαράστασης της λύσης, ενώ οι 1Δ συναρτήσεις Ξ και H που συνθέτουν τους όρους του αθροίσματος υπολογίζονται και εδώ με μία διαδικασία εναλλασσόμενων διευθύνσεων, λόγω της μη-γραμμικής φύσης τους. Η διαδικασία αυτή παρατίθεται ξανά για τη νέα περίπτωση, ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να έχει μία εικόνα για τη μέθοδο και τις εξισώσεις που χρειάζονται για την υλοποίηση της μεθόδου, χωρίς να χρειάζεται να ανατρέχει συνεχώς στα προηγούμενα κεφάλαια.

Περιγραφή της Μεθόδου

Έστω ότι η διαδικασία βρίσκεται σε ένα βήμα m εμπλουτισμού του αθροίσματος προσέγγισης οπότε όλοι οι προηγούμενοι όροι είναι γνωστοί. Κατά τα γνωστά η τιμή του πεδίου θερμοκρασιών $T(\xi, \eta)$ και όλες οι παράγωγοι ως προς ξ και η θα γραφτούν στην αντίστοιχη διαχωρισμένη μορφή

ως εξής:

$$T(\xi, \eta) \approx \sum_{\mu=1}^{m-1} \Xi^{\mu}(\xi) H^{\mu}(\eta) + \Xi^m(\xi) H^m(\eta) \quad (3.29\alpha')$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} T(\xi, \eta) \approx \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{d\Xi^{\mu}(\xi)}{d\xi} H^{\mu}(\eta) + \frac{d\Xi^m(\xi)}{d\xi} H^m(\eta) \quad (3.29\beta')$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} T(\xi, \eta) \approx \sum_{\mu=1}^{m-1} \Xi^{\mu}(\xi) \frac{dH^{\mu}(\eta)}{d\eta} + \Xi^m(\xi) \frac{dH^m(\eta)}{d\eta} \quad (3.29\gamma')$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} T(\xi, \eta) \approx \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{d^2\Xi^{\mu}(\xi)}{d\xi^2} H^{\mu}(\eta) + \frac{d^2\Xi^m(\xi)}{d\xi^2} H^m(\eta) \quad (3.29\delta')$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} T(\xi, \eta) \approx \sum_{\mu=1}^{m-1} \Xi^{\mu}(\xi) \frac{d^2 H^{\mu}(\eta)}{d\eta^2} + \Xi^m(\xi) \frac{d^2 H^m(\eta)}{d\eta^2} \quad (3.29\epsilon')$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} T(\xi, \eta) \approx \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{d\Xi^{\mu}(\xi)}{d\xi} \frac{dH^{\mu}(\eta)}{d\eta} + \frac{d\Xi^m(\xi)}{d\xi} \frac{dH^m(\eta)}{d\eta} \quad (3.29\zeta')$$

Οι εξισώσεις (3.29) μπορούν να αντικατασταθούν στην εξίσωση (3.27) και να προκύψει η αντίστοιχη έκφραση για την αρχική ΜΔΕ σε μορφή αποτελούμενη μόνο από όρους που περιέχουν 1Δ συναρτήσεις. Για να βρεθούν οι νέες συναρτήσεις $\Xi(\xi)$ και $H(\eta)$ πρέπει να επιλυθεί το μη γραμμικό πρόβλημα που προέκυψε. Επιλέγεται μία στρατηγική εναλλασσόμενων διευθύνσεων για την επίλυση αυτού του προβλήματος (αν και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και άλλες τεχνικές) η οποία λειτουργεί ως εξής:

Αρχικά θεωρείται μία αυθαίρετη τιμή για τη συνάρτηση $H(\eta)$. Έπειτα, η εξίσωση (3.27), αφού αντικατασταθούν σε αυτή όλοι οι όροι (3.29) που είναι γραμμένοι σε διαχωρισμένη μορφή, πολλαπλασιάζεται με τη συνάρτηση $H(\eta)$ και ολοκληρώνεται κατά τη διεύθυνση της η -συνιστώσας. Εφόσον τα ολοκληρώματα είναι μόνο κατά την η -διεύθυνση, οι όροι που εξαρτώνται από το ξ μπορούν να βγουν εκτός ολοκληρωμάτων. Επομένως, προκύπτει τελικά μια ΣΔΕ της μορφής:

$$\alpha_{\xi} \frac{d^2\Xi^m(\xi)}{d\xi^2} + \beta_{\xi} \frac{d\Xi^m(\xi)}{d\xi} + \gamma_{\xi} \Xi^m(\xi) = - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_{\xi}^{\mu} \frac{d^2\Xi^{\mu}(\xi)}{d\xi^2} + \epsilon_{\xi}^{\mu} \frac{d\Xi^{\mu}(\xi)}{d\xi} + \zeta_{\xi} \Xi^{\mu}(\xi) \right) + \sigma_{\xi} \quad (3.30)$$

Η παραπάνω ΣΔΕ μπορεί να διακριτοποιηθεί και να επιλυθεί εύκολα ως προς τη ζητούμενη συνάρτηση $\Xi^m(\xi)$, όπως αναφέρθηκε και στις προηγούμενες ενότητες. Οι συντελεστές της εξίσωσης εξαρτώνται μόνο από γνωστές ποσότητες και υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\alpha_\xi &= \int_{\eta} Jg^{11}(H^m(\eta))^2 d\eta \\
\beta_\xi &= \int_{\eta} \left[\frac{d(Jg^{11})}{d\xi} (H^m(\eta))^2 + Jg^{12} H^m(\eta) \frac{dH^m(\eta)}{d\eta} + \frac{d(Jg^{12} H^m(\eta))}{d\eta} H^m(\eta) \right] d\eta \\
\gamma_\xi &= \int_{\eta} \left[\frac{d}{d\eta} \left(Jg^{22} \frac{dH^m(\eta)}{d\eta} \right) H^m(\eta) + \frac{d(Jg^{12})}{d\xi} \frac{dH^m(\eta)}{d\eta} H^m(\eta) \right] d\eta \\
\delta_\xi^\mu &= \int_{\eta} Jg^{11} H^m(\eta) H^\mu(\eta) d\eta \\
\epsilon_\xi^\mu &= \int_{\eta} \left[\frac{d(Jg^{11})}{d\xi} H^m(\eta) H^\mu(\eta) + Jg^{12} H^m(\eta) \frac{dH^\mu(\eta)}{d\eta} + \frac{d(Jg^{12} H^\mu(\eta))}{d\eta} H^m(\eta) \right] d\eta \\
\zeta_\xi^\mu &= \int_{\eta} \left[\frac{d}{d\eta} \left(Jg^{22} \frac{dH^\mu(\eta)}{d\eta} \right) H^m(\eta) + \frac{d(Jg^{12})}{d\xi} \frac{dH^\mu(\eta)}{d\eta} H^m(\eta) \right] d\eta \\
\sigma_\xi &= \int_{\eta} Jf H^m(\eta) d\eta
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Εφόσον υπολογιστεί η συνάρτηση $\Xi^m(\xi)$, αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται πλέον για την εύρεση της συνάρτησης $H^m(\eta)$ και οδηγεί στην αντίστοιχη $\Sigma\Delta E$:

$$\alpha_\eta \frac{d^2 H^m(\eta)}{d\eta^2} + \beta_\eta \frac{dH^m(\eta)}{d\eta} + \gamma_\eta H^m(\eta) = - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_\eta^\mu \frac{d^2 H^\mu(\eta)}{d\eta^2} + \epsilon_\eta^\mu \frac{dH^\mu(\eta)}{d\eta} + \zeta_\eta H^\mu(\eta) \right) + \sigma_\eta \tag{3.32}$$

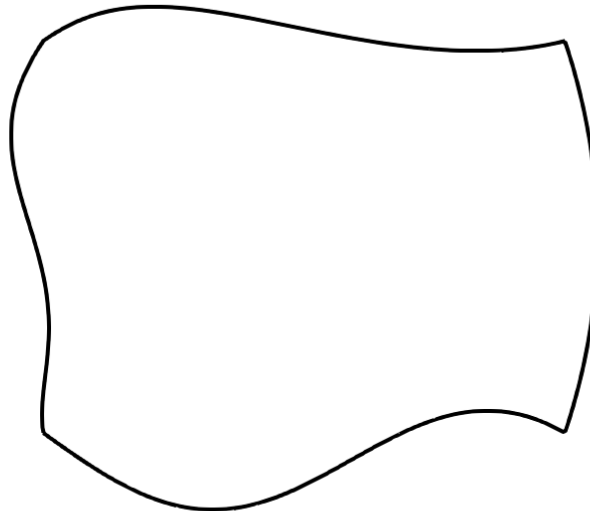
με συντελεστές

$$\begin{aligned}
\alpha_\eta &= \int_{\xi} Jg^{22} (\Xi^m(\xi))^2 d\xi \\
\beta_\eta &= \int_{\xi} \left[\frac{d(Jg^{22})}{d\eta} (\Xi^m(\xi))^2 + Jg^{12} \Xi^m(\xi) \frac{d\Xi^m(\xi)}{d\xi} + \frac{d(Jg^{12} \Xi^m(\xi))}{d\xi} \Xi^m(\xi) \right] d\xi \\
\gamma_\eta &= \int_{\xi} \left[\frac{d}{d\xi} \left(Jg^{11} \frac{d\Xi^m(\xi)}{d\xi} \right) \Xi^m(\xi) + \frac{d(Jg^{12})}{d\eta} \frac{d\Xi^m(\xi)}{d\xi} \Xi^m(\xi) \right] d\xi \\
\delta_\eta^\mu &= \int_{\xi} Jg^{22} \Xi^m(\xi) \Xi^\mu(\xi) d\xi \\
\epsilon_\eta^\mu &= \int_{\xi} \left[\frac{d(Jg^{22})}{d\xi} \Xi^m(\xi) \Xi^\mu(\xi) + Jg^{12} \Xi^m(\xi) \frac{d\Xi^\mu(\xi)}{d\xi} + \frac{d(Jg^{12} \Xi^\mu(\xi))}{d\xi} \Xi^m(\xi) \right] d\xi \\
\zeta_\eta^\mu &= \int_{\xi} \left[\frac{d}{d\xi} \left(Jg^{11} \frac{d\Xi^\mu(\xi)}{d\xi} \right) \Xi^m(\xi) + \frac{d(Jg^{12})}{d\eta} \frac{d\Xi^\mu(\xi)}{d\xi} \Xi^m(\xi) \right] d\xi \\
\sigma_\eta &= \int_{\xi} Jf \Xi^m(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται κυκλικά μέχρις ότου οι τιμές των συναρτήσεων $\Xi^m(\xi)$ και $H^m(\eta)$ σταθεροποιηθούν και λάβουν την τελική μορφή τους. Τότε ο όρος $\Xi^m(\xi)H^m(\eta)$ προστίθεται στο άθροισμα της εξίσωσης (3.28) και έτσι αυξάνει την ακρίβεια της προσεγγιστικής λύσης της ΜΔΕ που ενδιαφέρει (εδώ η εξίσωση Poisson).

3.3 Εφαρμογή Επίλυσης ΜΔΕ με Χρήση της Μεθόδου PGD

Για την εφαρμογή της μεθόδου που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 3.2, επιλέγεται ένα πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας σε μία μεταλλική επίπεδη πλάκα, με ακανόνιστη γεωμετρία ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος για τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1: Επίπεδη μεταλλική πλάκα χαλκού για την οποία επιλύεται το πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας

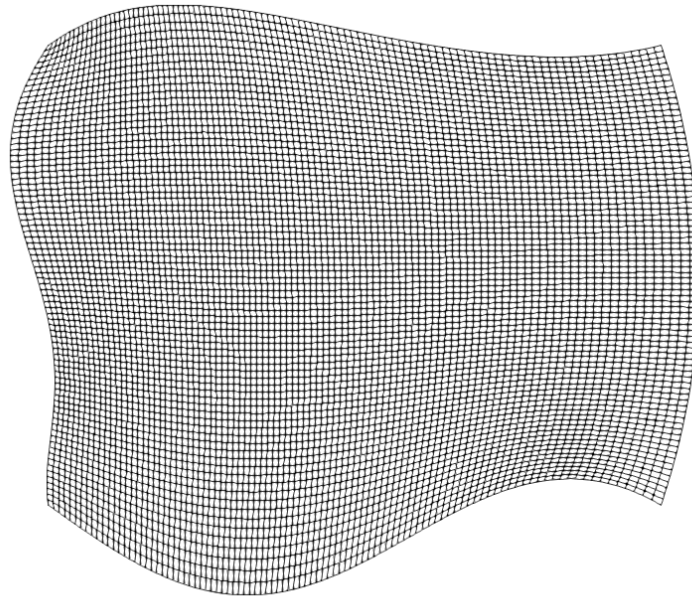
Η εξίσωση που διέπει το φυσικό πρόβλημα δεν είναι άλλη από την εξίσωση Poisson στη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = f \quad (3.34)$$

όπου f μία πηγή θερμότητας στο εσωτερικό της πλάκας με σταθερή τιμή ίση με $f = 100W/m^2$ και k ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του υλικού. Στη περίπτωση αυτή, θεωρείται ότι ο συντελεστής k δεν είναι σταθερός αλλά μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία βάσει μίας συγκεκριμένης πολυωνυμικής σχέσης. Αν ως υλικό της μεταλλικής πλάκας επιλεγεί ο χαλκός, τότε από τη βιβλιογραφία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος:

$$k(T) = 0.00006495 T^2 - 0.1249 T + 415.9 \quad [W/mK] \quad (3.35)$$

Το υπολογιστικό χωρίο διακριτοποιείται με ένα δομημένο πλέγμα 100×80 κόμβων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Υπολογιστικό πλέγμα 100×80 κόμβων για την διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου

Έτσι η εξίσωση 3.34 μετασχηματίζεται από το υπολογιστικό χωρίο (x, y) στο μετασχηματισμένο (ξ, η) με $(\xi, \eta) \in [0, 1]$ και λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(k J g^{ij} \frac{\partial T}{\partial \xi^j} \right) = f \quad (3.36)$$

όπου εμφανίζονται οι ανταλλοίωτες μετρικές δεύτερης τάξης g^{ij} και η Ιακωβιακή ορίζουσα J του μετασχηματισμού.

Ως οριακές συνθήκες για το πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας θεωρούνται οι ακόλουθες:

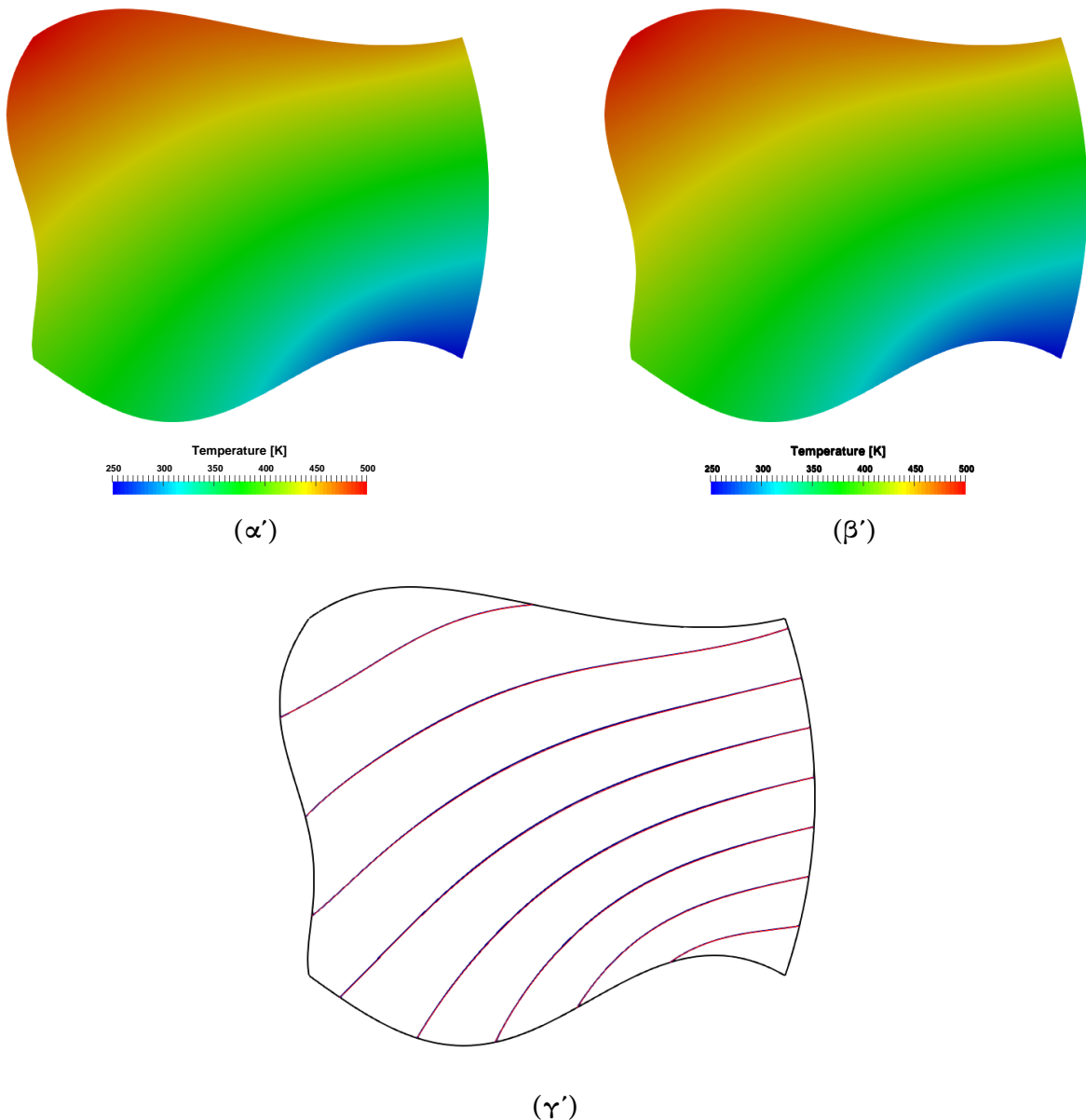
- $T(\xi=0, \eta) = 400 + 100\eta$
- $T(\xi=1, \eta) = 250 + 200\eta$
- $T(\xi, \eta=0) = 400 - 150\xi$
- $T(\xi, \eta=1) = 500 - 50\xi$

Η εξίσωση (3.36) επιλύεται στο υπολογιστικό χωρίο με δύο τρόπους. Αρχικά με έναν «κλασικό» επιλύτη ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο MSIP (Modified Strongly Implicit Procedure)[13] για τη LU παραγοντοποίηση του μητρώου που προκύπτει κατά την επίλυση του αλγεβρικού συστήματος που προκύπτει από την διακριτοποίηση της ΜΔΕ του προβλήματος. Ο κώδικας που υλοποιεί αυτή τη μέθοδο παρέχεται από τη ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ και χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης της ποιότητας της λύσης που θα προκύψει από τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε και υλοποιεί τη μέθοδο PGD για επίλυση 2Δ ΜΔΕ.

Για την επίλυση της ΜΔΕ του προβλήματος με χρήση της εδώ αναπτυσσόμενης μεθόδου χρειάστηκαν 15 όροι στο άθροισμα προσέγγισης μέχρις ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο $\mathcal{E} < \bar{\epsilon}$ (βλ. εξίσωση 2.16), όπου εδώ τίθεται $\bar{\epsilon} = 10^{-6}$. Ο χειρισμός του μεταβλητού με τη θερμοκρασία συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας βασίστηκε στην εξής παρατήρηση. Όπως έχει ήδη αναφερθεί ο πρώτος όρος του αθροίσματος προσέγγισης έχει τη μεγαλύτερη βαρύτητα στη προσέγγιση της λύσης του πεδίου. Επομένως, αρχικά επιλέγεται μία τιμή για το συντελεστή k που βασίζεται

σε μια μέση αναμενόμενη θερμοκρασία που θα εμφανίζει το πεδίο. Έπειτα, εκτελείται το πρώτο βήμα εμπλουτισμού του αθροίσματος προσέγγισης της λύσης του πεδίου και εξάγονται οι πρώτες συναρτήσεις βάσης για τις οποίες προσεγγιστικά θα ισχύει $T \approx T^1 = \Xi^1(\xi)H^1(\eta)$. Η τιμή του k ανανεώνεται βάσει των προσεγγιστικών τιμών του θερμοκρασιακού πεδίου και η διαδικασία προχωρά στο επόμενο βήμα.

Στο Σχήμα 3.3 παρουσιάζονται τα δύο πεδία που προέκυψαν με τον τυπικό επιλύτη και τον επιλύτη με χρήση της μεθόδου PGD καθώς και οι αντίστοιχες ισοθερμοκρασιακές καμπύλες. Το Σχήμα αυτό συνηγορεί στη αξιόπιστη χρήση της μεθόδου για επίλυση ΜΔΕ.



Σχήμα 3.3: Αποτελέσματα από τη χρήση της μεθόδου PGD για επίλυση 2Δ ΜΔΕ. Αντιπαραβάλλεται η κατανομή θερμοκρασίας που προέκυψε (α') από τον τυπικό επιλύτη και (β') τον αντίστοιχο για τη μέθοδο PGD. Στο (γ') παρουσιάζονται οι αντίστοιχες ισοθερμοκρασιακές καμπύλες, με μπλε χρώμα για τον τυπικό και με κόκκινο για τον προτεινόμενο επιλύτη. Οι καμπύλες αυτές συμπίπτουν σχεδόν επακριβώς.

Κεφάλαιο 4

Σταδιακή Ανακατασκευή 1Δ Χρονικά Μη-Μόνιμου Πεδίου

4.1 Περιγραφή της Μεθόδου

Στα μη-μόνιμα προβλήματα ζητούμενο είναι η συμπίεση του πεδίου που προκύπτει ως λύση των ΜΔΕ του προβλήματος κατά τη διάρκεια της χρονικής ολοκλήρωσης, έτσι ώστε να μην απαιτείται η αποθήκευση του πλήρους πεδίου, αλλά ενός μικρού αριθμού γινομένων 1Δ συναρτήσεων που θα είναι ικανά, μέσω κατάλληλης «αντίστροφης» διαδικασίας, να ανακατασκευάσουν το πλήρες. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η περίπτωση της βελτιστοποίησης με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε μη-μόνιμα φαινόμενα, όπου για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος πρέπει να είναι διαθέσιμη η λύση του πρωτεύοντος για όλα τα χρονικά βήματα. Η συμπίεση του πεδίου πρέπει να γίνεται με τρόπο σταδιακό, έτσι ώστε, αμέσως μόλις είναι διαθέσιμη η λύση για τη δεδομένη χρονική στιγμή, να επεξεργάζεται μέσω της μεθόδου για την εύρεση των 1Δ συναρτήσεων. Έπειτα, το στιγμιαίο πεδίο χάνεται και η διαδικασία συνεχίζεται για το επόμενο χρονικό βήμα με τις απαραίτητες πληροφορίες να είναι αποθηκευμένες με οικονομικό τρόπο στις 1Δ συναρτήσεις βάσης της μεθόδου. Η μέθοδος που αναπτύσσεται εδώ βασίζεται στη λογική της μεθόδου Ιδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού, η οποία όμως θα εκτελείται σταδιακά για κάθε στιγμή κατά τη διάρκεια της χρονικής ολοκλήρωσης. Επομένως, από εδώ και στο εξής, θα αναφέρεται ως **Σταδιακός Ιδιο-Γενικευμένος Διαχωρισμός (Incremental Proper Generalized Decomposition – iPGD)**.

Έστω, λοιπόν, ένα 1Δ χρονικά μη-μόνιμο πεδίο $U(x, t)$ το οποίο προκύπτει από οποιαδήποτε υπολογιστική μέθοδο και σύμφωνα με τη θεωρία της μεθόδου PGD μπορεί να γραφτεί στη διαχωρίσιμη μορφή:

$$U(x, t) \approx \sum_{\mu=1}^M X^{\mu}(x) T^{\mu}(t) \quad (4.1)$$

όπου M ο συνολικός αριθμός των χρησιμοποιούμενων βάσεων καθορισμένος εκ των προτέρων από το χρήστη. Η χωρική συντεταγμένη x διακριτοποιείται με I κόμβους ($i=1, \dots, I$), ενώ ο συνολικός χρόνος ή μόνο μία περίοδος, αν το φαινόμενο είναι περιοδικό, χωρίζεται σε διακριτά βήματα ($k=1, \dots, K, \dots$) μέσα στην περίοδο κι εφόσον στο φαινόμενο έχει αποκατασταθεί περιοδικότητα, με K το τρέχον χρονικό βήμα. Εδώ θεωρούνται σταθερά τα βήματα Δt και Δx , χωρίς αυτό να επηρεάζει την ανάπτυξη της μεθόδου. Η εξίσωση (4.1) δύναται να γραφτεί σε διακριτή μορφή για κάθε κόμβο

και χρονική στιγμή ως εξής:

$$U_{i,k} \approx \sum_{\mu=1}^M X_i^\mu T_k^\mu \quad (4.2)$$

Η αναπαράσταση του πεδίου μέσω του αθροίσματος προσέγγισης μέχρι τη χρονική στιγμή $K+1$ γίνεται βέλτιστη όταν, για τον δεδομένο αριθμό βάσεων που έχει επιλεγεί, ελαχιστοποιηθεί το συνολικό σφάλμα (για όλον το χώρο και χρόνο):

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{K+1} \left[\sum_{\mu=1}^M X_i^\mu T_k^\mu - U_{i,k} \right]^2 \quad (4.3)$$

Από την εξίσωση (4.3) θα μπορούσαν να υπολογιστούν οι βάσεις X και Y ώστε να προκύψει μία καλή προσέγγιση του πεδίου μέσω της μεθόδου PGD με τον τρόπο που αναλύθηκε διεξοδικά στα προηγούμενα κεφάλαια. Για να γίνει αυτός ο υπολογισμός, όμως, απαιτείται το ακριβές πεδίο U να είναι διαθέσιμο για όλες τις χρονικές στιγμές, κάτι που θα ήταν ασύμφορο και πρακτικά ανούσιο εφόσον στόχος της μεθόδου είναι η συμπίεση στα δεδομένα του μη-μόνιμου προβλήματος.

Επομένως, πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια διαφορετική προσέγγιση σταδιακού διαχωρισμού του πεδίου, ώστε σε κάθε χρονικό βήμα να απαιτείται μόνο η τρέχουσα λύση $U_{i,K+1}$ για τον υπολογισμό των συναρτήσεων βάσης. Για τις προηγούμενες χρονικές στιγμές, αντί για το ακριβές πεδίο $U_{i,k}$ ($k=1, \dots, K$), γίνεται χρήση των M βάσεων που έχουν ήδη υπολογιστεί από τα προηγούμενα χρονικά βήματα και συμβολίζονται με \tilde{X} και \tilde{T} .

Στο χρονικό βήμα $K+1$ κάθε συνάρτηση βάσης του m -οστού όρου του αθροίσματος προσέγγισης χρειάζεται να επαναπροσδιοριστεί, ώστε να λαμβάνει υπόψη τη χρονική μεταβολή που υφίσταται το πεδίο. Για να γίνει αυτό, το σφάλμα, όπως ορίστηκε από την εξίσωση (4.3) επαναδιατυπώνεται στη μορφή:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \left[\sum_{\mu=1}^m X_i^\mu T_{K+1}^\mu - U_{i,K+1} \right]^2 + \frac{w}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \left[\sum_{\mu=1}^m \left(X_i^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) \right]^2 \quad (4.4)$$

Η έκφραση (4.4) αποτελείται από δύο μέρη, όπου το πρώτο αφορά τη νέα χρονική στιγμή ενώ το δεύτερο είναι η αντίστοιχη έκφραση για τις προηγούμενες χρονικές στιγμές, με το άγνωστο πεδίο $U_{i,k}$ ($k=1, \dots, K$) να έχει αντικατασταθεί με τη διαχωρισμένη προσέγγιση $\sum_{\mu=1}^m \tilde{X}_i^\mu \tilde{T}_k^\mu$. Ο δεύτερος αυτός όρος πολλαπλασιάζεται επιπλέον με ένα βάρος w , το οποίο καθορίζεται από το χρήστη και δίνει μια σχετική «ελαστικότητα» στον βαθμό που θα αλλάζουν οι βάσεις από το ένα χρονικό βήμα στο επόμενο.

Για κάθε βάση m , οι άγνωστοι στην εξίσωση (4.4) είναι οι τιμές X_i^m και T_k^m που χρειάζεται να επαναπροσδιοριστούν, ενώ πρέπει να προστεθεί και η νέα τιμή T_{K+1}^m ώστε να ληφθεί υπόψη η νέα χρονική στιγμή στην προσέγγιση του πεδίου. Για την εύρεση των άγνωστων συναρτήσεων η συνάρτηση σφάλματος (4.4) παραγωγίζεται ως προς τους αγνώστους και οι προκύπτουσες παράγωγοι μηδενίζονται ώστε να την ελαχιστοποιούν. Επομένως, οι σχέσεις υπολογισμού για τις άγνωστες συναρτήσεις βάσης δίνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial X_i^m} = 0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{\mu=1}^m X_i^\mu T_{K+1}^\mu - U_{i,K+1} \right) T_{K+1}^m + w \sum_{k=1}^K \left[\sum_{\mu=1}^m \left(X_i^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) T_k^m \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow T_{K+1}^m \sum_{\mu}^{m-1} X_i^\mu T_{K+1}^\mu - T_{K+1}^m U_{i,K+1} + X_i^m (T_{K+1}^m)^2 \\
&\quad + w \sum_{k=1}^K \left[\sum_{\mu=1}^{m-1} \left(X_i^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) T_k^m \right] + w X_i^m \sum_{k=1}^K (T_k^m)^2 - w \tilde{X}_i^m \sum_{k=1}^K \tilde{T}_k^m T_k^m = 0
\end{aligned}$$

οπότε προκύπτει:

$$X_i^m = \frac{T_{K+1}^m U_{i,K+1} - T_{K+1}^m \sum_{\mu}^{m-1} X_i^\mu T_{K+1}^\mu - w \sum_{k=1}^K \left[\sum_{\mu=1}^{m-1} \left(X_i^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) T_k^m \right] + w \tilde{X}_i^m \sum_{k=1}^K \tilde{T}_k^m T_k^m}{(T_{K+1}^m)^2 + \sum_{k=1}^K w (T_k^m)^2} \quad (4.5)$$

Αντίστοιχα είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial T_k^m} = 0 &\Leftrightarrow w \sum_{i=1}^I \left[\sum_{\mu=1}^m \left(X_i^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) \right] X_i^m = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^I \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(X_i^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) X_i^m + T_k^m \sum_{i=1}^I (X_i^m)^2 - \tilde{T}_k^m \sum_{i=1}^I \tilde{X}_i^m X_i^m = 0
\end{aligned}$$

και άρα είναι:

$$T_k^m = \frac{\tilde{T}_k^m \sum_{i=1}^I \tilde{X}_i^m X_i^m - \sum_{i=1}^I \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(X_i^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) X_i^m}{\sum_{i=1}^I (X_i^m)^2} \quad (4.6)$$

Τέλος, τη νέα χρονική στιγμή για την ανανέωση της χρονικά εξαρτώμενης βάσης θα είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial T_{K+1}^m} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^I \left(\sum_{\mu=1}^{m-1} X_i^\mu T_{K+1}^\mu - U_{i,K+1} \right) X_i^m = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{\mu=1}^{m-1} T_{K+1}^\mu \sum_{i=1}^I X_i^\mu X_i^m - \sum_{i=1}^I U_{i,K+1} X_i^m + T_{K+1}^m \sum_{i=1}^I (X_i^m)^2 = 0
\end{aligned}$$

οπότε τελικά:

$$T_{K+1}^m = \frac{\sum_{i=1}^I U_{i,K+1} X_i^m - \sum_{\mu=1}^{m-1} T_{K+1}^\mu \sum_{i=1}^I X_i^\mu X_i^m}{\sum_{i=1}^I (X_i^m)^2} \quad (4.7)$$

Στις εξισώσεις (4.5)-(4.7) οι άγνωστες ποσότητες εμφανίζονται σε πεπλεγμένη μορφή, επομένως σε κάθε νέο χρονικό βήμα $K + 1$ για την εύρεση των συναρτήσεων που αποτελούν των m -οστό όρο του αθροίσματος προσέγγισης της μεθόδου PGD χρειάζεται να εκτελεστεί κατά τα γνωστά μία «εσωτερική» επαναληπτική διαδικασία. Την αρχική χρονική στιγμή ($k = 1$), απαιτείται αρχικοποίηση των βάσεων ώστε να εκκινήσει η διαδικασία. Επιλέγεται η εξής:

$$X_i^\mu = U_{i,1}, \quad \mu = 1, \dots, M \quad (4.8\alpha')$$

$$T_1^\mu = \begin{cases} 1, & \mu = 1 \\ 0, & \mu = 2, \dots, M \end{cases} \quad (4.8\beta')$$

Εύκολα διαπιστώνεται πως η επιλογή αυτή εξασφαλίζει ότι, την αρχική χρονική στιγμή, το πεδίο αναπαράγεται επακριβώς από τον πολλαπλασιασμό των βάσεων. Για τις επόμενες χρονικές στιγμές οι βάσεις αυτές εμπλουτίζονται και διορθώνονται ώστε όταν τελειώσει το χρονικό διάστημα για το οποίο μελετάται το φυσικό φαινόμενο (συνήθως μία περίοδος αν το πρόβλημα είναι περιοδικό), να έχουν την κατάλληλη μορφή ώστε να είναι δυνατό, μέσω του αθροίσματος προσέγγισης της μεθόδου PGD, να ανακατασκευαστεί το χρονικά μη-μόνιμο πεδίο με ακρίβεια.

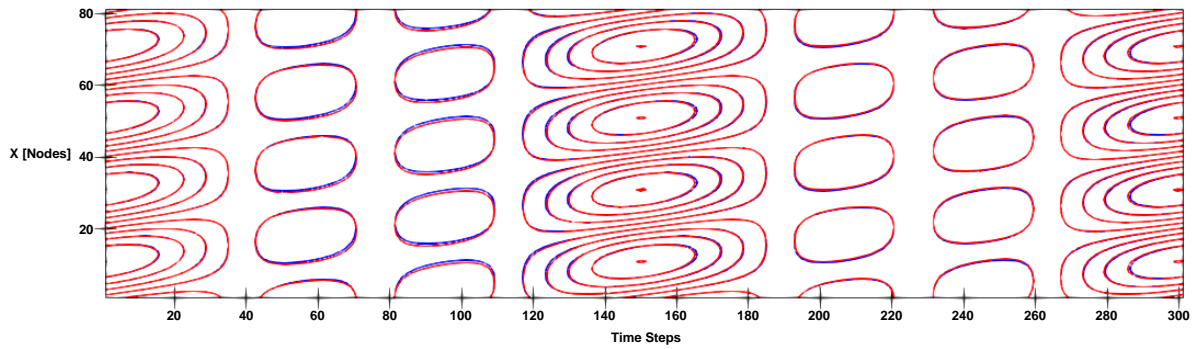
4.2 Εφαρμογή στην Εξίσωση 1Δ Αρμονικού Κύματος

Για να πιστοποιηθεί η ποιότητα της μεθόδου στην ανακατασκευή χρονικά μη-μόνιμων πεδίων θα εξεταστούν δύο περιπτώσεις και οι ανακατασκευασμένες λύσεις που θα προκύψουν μέσω της μεθόδου θα συγκριθούν με το αληθινό πεδίο. Για την εξαγωγή των παρακάτω αποτελεσμάτων το βάρος αυτό θεωρείται ίσο με μονάδα, προσδίδοντας ίδια βαρύτητα και στους δύο όρους που συναποτελούν το σφάλμα E .

Στην πρώτη περίπτωση, γίνεται επίδειξη της μεθόδου σε χρονικά μη μόνιμο πεδίο που προσομοιάζει την κίνηση ενός 1Δ οδεύοντος κύματος με χρονικά εξαρτημένο πλάτος ταλάντωσης. Η εξίσωση που διέπει την κίνηση του κύματος είναι:

$$u(x, t) = \cos(2\omega t) \cos(4\omega t) \sin(\omega t - kx) \quad (4.9)$$

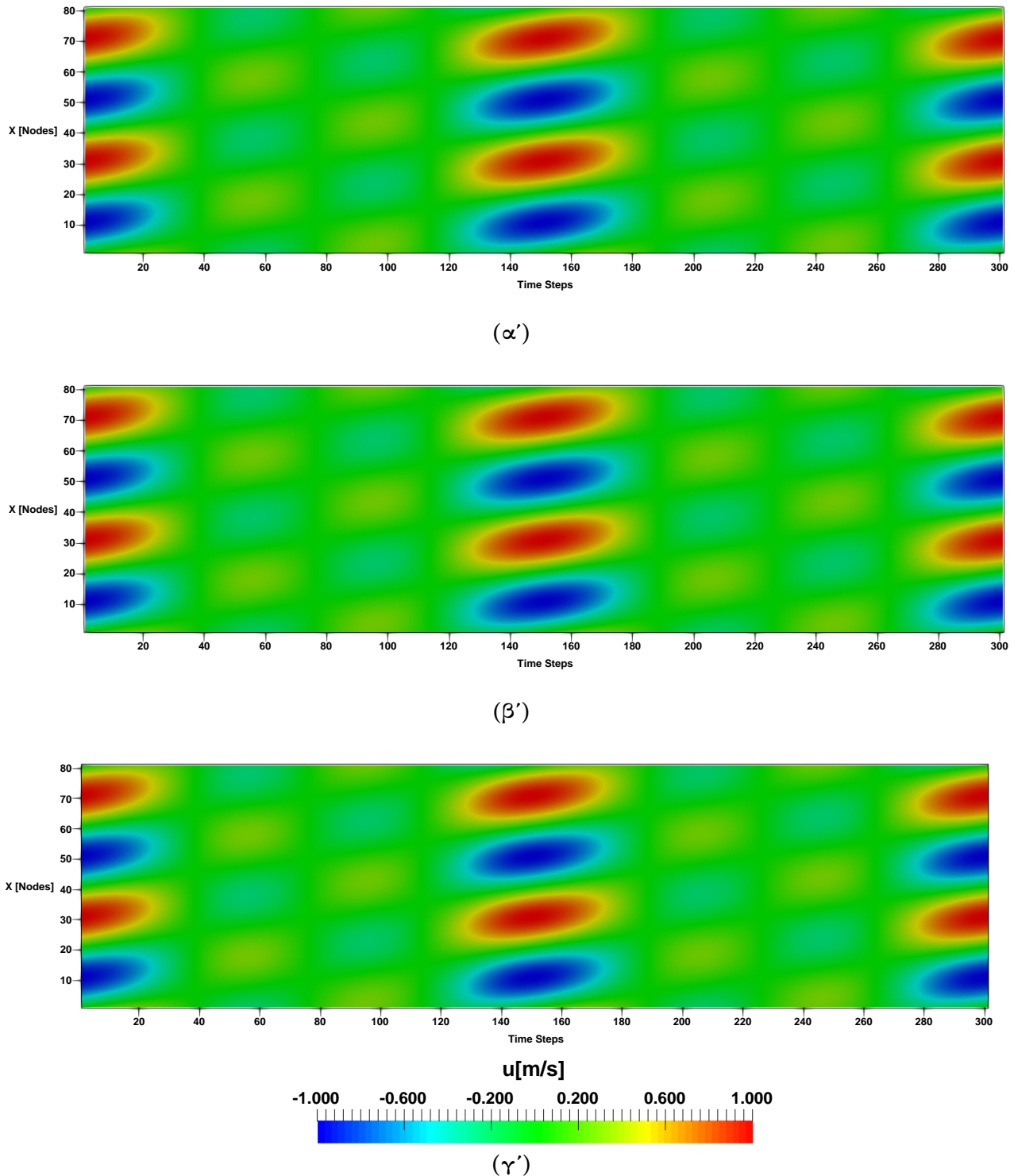
όπου $\omega = \frac{2\pi}{T_a}$ η γωνιακή συχνότητα και $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ο κυματαριθμός. Η περίοδος του κύματος είναι $T_a = 0.02s$ και το μήκος κύματος $\lambda = 0.5m$. Θεωρείται ότι το μήκος που ταλαντώνεται είναι $1m$ και διακριτοποιείται με $I = 81$ κόμβους, ενώ η περίοδος με $K = 300$ χρονικά βήματα.



Σχήμα 4.1: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.9). Με μπλε χρώμα παρουσιάζονται οι ισοϋψείς καμπύλες του πραγματικού πεδίου και με κόκκινο οι αντίστοιχες για το ανακατασκευασμένο (2 βάσεις *PGD*).

Στο παράδειγμα αυτό, με την εφαρμογή της μεθόδου, παρατηρείται ότι με τη χρήση ακόμα και πολύ μικρού αριθμού βάσεων $M = 2$ η προσέγγιση του πεδίου είναι ακριβής. Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζονται οι ισοταχείς καμπύλες του πραγματικού πεδίου και οι αντίστοιχες του ανακατασκευασμένου, οι οποίες συμπίπτουν σχεδόν απόλυτα συνηγορώντας για την ποιότητα της προσέγγισης.

Ακόμα, στο Σχήμα 4.2, παρουσιάζονται το πραγματικό χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο της παραπάνω εξίσωσης (4.9) και το αντίστοιχο ανακατασκευασμένο μέσω της μεθόδου *PGD* με χρήση δύο και τριών βάσεων. Με τη χρήση τριών όρων στο άθροισμα προσέγγισης, το ανακατασκευασμένο και το πραγματικό πεδίο συμπίπτουν επακριβώς.

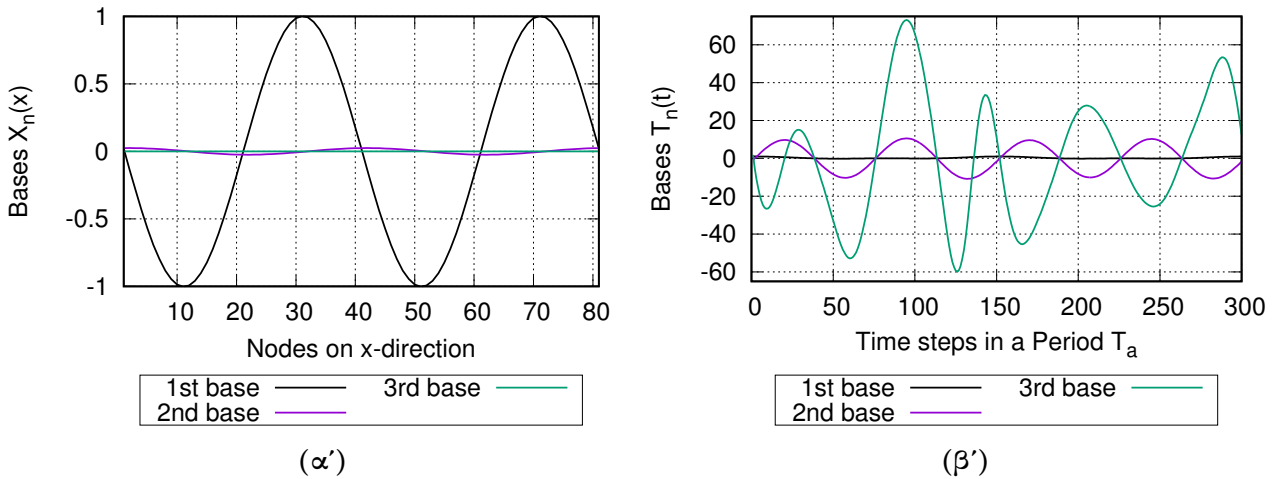


Σχήμα 4.2: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.9). Πεδίο ταχυτήτων για το αρμονικό κύμα σε μία περίοδο T_a , όπου (α') το πραγματικό πεδίο, (β') το ανακατασκευασμένο με 3 βάσεις και (γ') το ανακατασκευασμένο με 2 βάσεις.

Επιπλέον για την απόκτηση καλύτερης εποπτείας στη λειτουργία της μεθόδου, παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.3 οι τρεις βάσεις που συνθέτουν το ανακατασκευασμένο πεδίο μέσω της μεθόδου PGD. Αξιοσημείωτη είναι η διαφορά στην τάξη μεγέθους που παρουσιάζει η πρώτη χωρική βάση X σε σχέση με τις άλλες δύο. Αυτό είναι ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της μεθόδου, η πρώτη βάση που υπολογίζεται να απορροφά το μεγαλύτερο μέρος της απαραίτητης πληροφορίας για την εκ των υστέρων ανακατασκευή του πεδίου. Οι υπόλοιπες δύο συναρτήσεις βάσης έχουν αισθητά

μικρότερες τιμές, καθώς αναπαριστούν μικρότερες λεπτομέρειες στη μορφή του πεδίου.

Οι χρονικά εξαρτώμενες συναρτήσεις T παρουσιάζουν αντίθετη συμπεριφορά, με την τάξη μεγέθους τους να αυξάνει όσο μεγαλώνει ο αριθμός τους. Το γεγονός αυτό είναι σε άμεση συσχέτιση με τη συμπεριφορά των χωρικών μεταβαλλόμενων βάσεων παρουσιάζοντας μία συμπληρωματικότητα όσον αφορά την τάξη μεγέθους, ώστε οι τιμές του ανακατασκευασμένου πεδίου να βρίσκονται γύρω στη μονάδα, δηλαδή στην περιοχή που κυμαίνονται και οι τιμές του πραγματικού.



Σχήμα 4.3: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.9). Συναρτήσεις βάσης για την περίπτωση ανακατασκευής του πεδίου της εξίσωσης 4.9 με χρήση τριών όρων στο άθροισμα προσέγγισης.

4.3 Εφαρμογή σε Τροποποιημένη Μορφή της Εξίσωσης Burgers

Εκτός από το παραπάνω απλό πεδίο που χρησιμοποιήθηκε για την επίδειξη της μεθόδου, κρίνεται σκόπιμο να αναλυθεί και παρουσιαστεί μία δεύτερη περίπτωση η οποία βασίζεται στη 1Δ μη-γραμμική εξίσωση Burgers. Η εξίσωση αυτή προσομοιάζει τη διάδοση ενός κύματος στο οποίο μπορεί να εμφανιστεί ασυνέχεια, κάτι που την καθιστά έναν αρκετά αυστηρό κριτή για την πιστοποίηση της ποιότητας της λύσης της μεθόδου. Η 1Δ μη-μόνιμη εξίσωση Burgers δίνεται από τον τύπο:

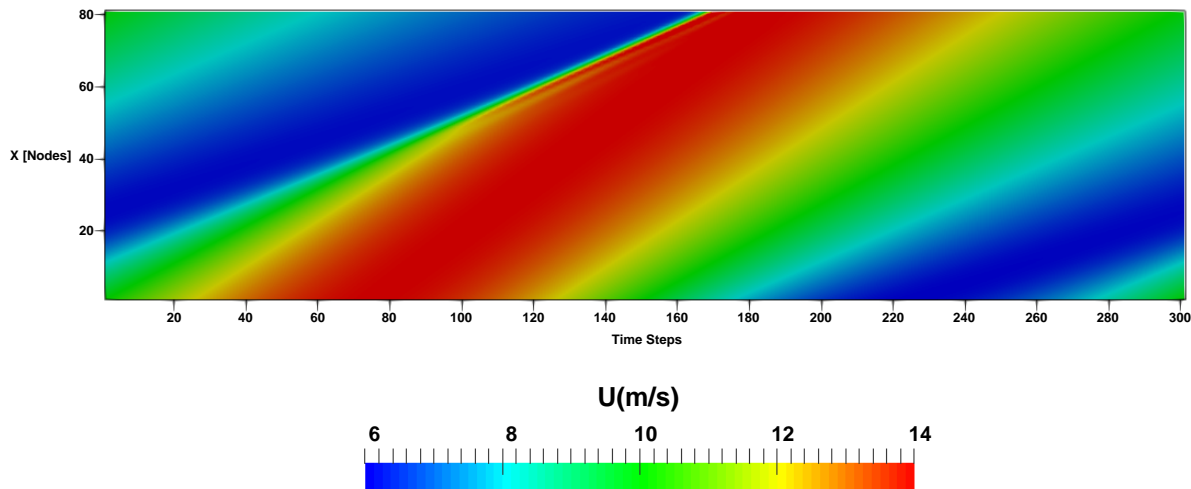
$$\frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial U}{\partial x} = S_q \quad (4.10)$$

με $S_q = p_a(x)U$ να παίζει τον ρόλο του όρου πηγής και $p_a(x)$ μία συνάρτηση καθοριζόμενη από τον χρήστη. Η εξίσωση (4.10) επιλύεται επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη (4.11) για χρόνο μίας περιόδου $T_a = 0.02s$.

$$U(x=0, t) = 10 + 4 \sin(\omega t) \quad (4.11)$$

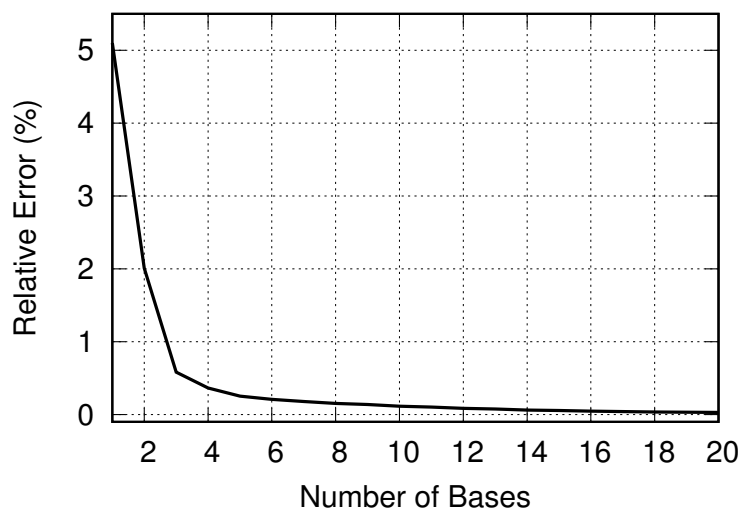
Η χωρική και χρονική διακριτοποίηση είναι ίδια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε και στην πρώτη

περίπτωση. Η εξίσωση (4.10) επιλύεται για 5 περιόδους μέχρι η λύση να γίνει περιοδική και μόνο η επόμενη περίοδος επεξεργάζεται μέσω της μεθόδου PGD.



Σχήμα 4.4: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). Πραγματικό 1Δ χρονικά μη-μόνιμο πεδίο που προέκυψε από την επίλυση της εξίσωσης (4.10).

Στο Σχήμα 4.6 παρουσιάζονται οι κατανομές ταχυτήτων για διαφορετικές περιπτώσεις αριθμού βάσεων. Χαρακτηριστικό των κατανομών αυτών είναι η ασυνέχεια που δημιουργείται και αποτελεί ιδιαιτερότητα της τροποποιημένης εξίσωσης Burgers που περιγράφει το μη-γραμμικό κύμα. Η παραπάνω ιδιομορφία καθιστά την ανακατασκευή του πεδίου μέσω της μεθόδου PGD πιο δύσκολη σε σχέση με την περίπτωση του αρμονικού κύματος που αναλύθηκε παραπάνω, επομένως απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός βάσεων. Στο Σχήμα 4.7 παρουσιάζονται οι αντίστοιχες καμπύλες σταθερής ταχύτητας για το πραγματικό πεδίο και τις ανακατασκευασμένες εκδόχές του. Για περίπου 20 βάσεις οι ισογραμμές των δύο πεδίων συμπίπτουν σε ικανοποιητικό βαθμό αποδεικνύοντας την αξιοπιστία της μεθόδου στην προσέγγιση του χρονικά μη-μόνιμου πεδίου.



Σχήμα 4.5: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). Μεταβολή ποσοστιαίου σχετικού σφάλματος όπως ορίζεται στην εξίσωση (4.12) σε σχέση με το μέγιστο αριθμό βάσεων M που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση του 1Δ χρονικά μη-μόνιμου πεδίου.

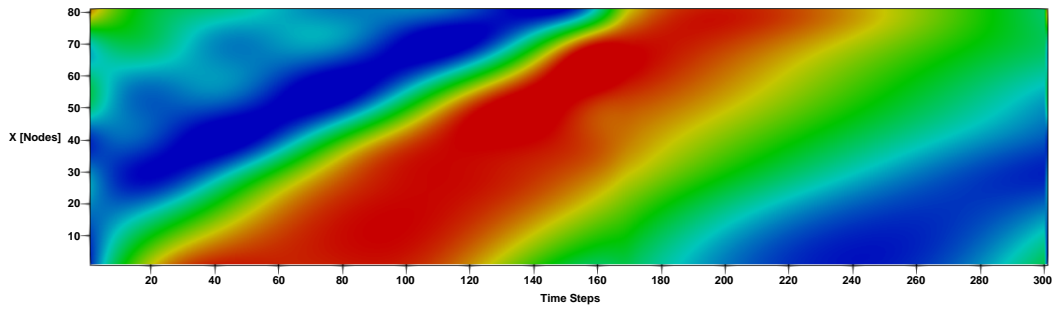
Εκτός από την ποιοτική σύγκριση μεταξύ του πραγματικού και των ανακατασκευασμένων πεδίων

που γίνεται μέσω των Σχημάτων 4.6 και 4.7, θεωρείται σκόπιμο να υπάρχει και μία ποσοτικοποίηση της ποιότητας της μεθόδου. Για αυτόν τον λόγο ορίζεται το συνολικό σχετικό σφάλμα προσέγγισης \mathcal{E} με μία παράσταση της μορφής:

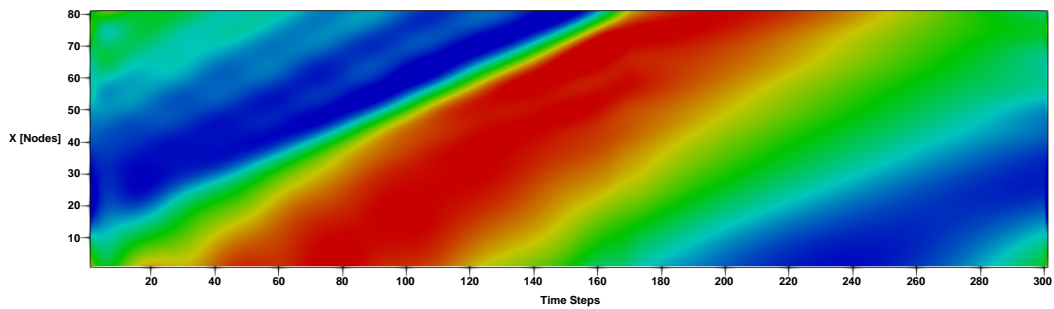
$$\mathcal{E}(M) = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \left(U_{i,k} - \sum_{\mu=1}^M X_i^\mu T_k^\mu \right)^2}{\sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K U_{i,k}^2} \quad (4.12)$$

που εξαρτάται προφανώς από το συνολικό αριθμό βάσεων M που έχει χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή της προσεγγιστικής λύσης. Εδώ, για λόγους ανάλυσης και μελέτης, είναι διαθέσιμο και το ακριβές πεδίο $U_{i,k}$, κάτι το οποίο δεν θα ισχύει για περιπτώσεις πραγματικών εφαρμογών, όπου το σχετικό σφάλμα πρέπει να οριστεί με διαφορετικό τρόπο.

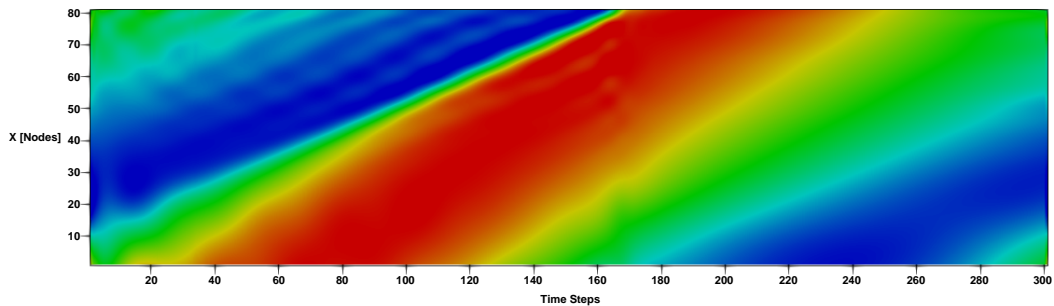
Στο Σχήμα 4.5 παρουσιάζεται η μεταβολή του σφάλματος όπως ορίστηκε στην παραπάνω σχέση (4.12). Ήδη με χρήση $M = 5$ όρων στο άθροισμα προσέγγισης ($M = 5$) το σφάλμα έχει πέσει κάτω από το 1%, ενώ μεγαλύτερο αριθμό βάσεων τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν. Ακόμα, αξίζει να σημειωθεί ότι ήδη με χρήση μόνο μίας βάσης ($M = 1$) το σφάλμα είναι στο 5%, γεγονός που πιστοποιεί την δυνατότητα της μεθόδου να προσεγγίζει ικανοποιητικά το 1Δ πεδίο ακόμα και με μικρό αριθμό βάσεων, τουλάχιστον όσον αφορά την τάξη μεγέθους των τιμών που το απαρτίζουν. Στην υπο-ενότητα 4.3.1 γίνεται ανάλυση της επίδρασης κάθε γινομένου $X_i^\mu T_k^\mu$ στην ανακατασκευή του υπόψη πεδίου.



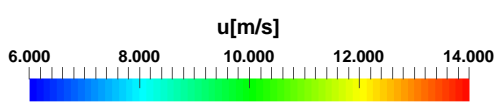
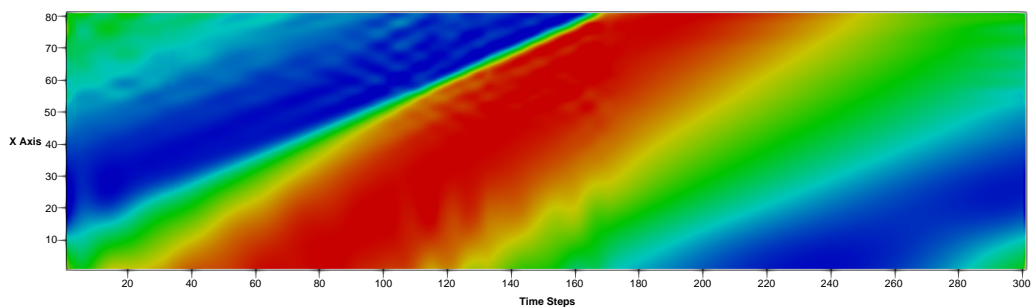
(α') Ανακατασκευή με 6 βάσεις PGD



(β') Ανακατασκευή με 12 βάσεις PGD

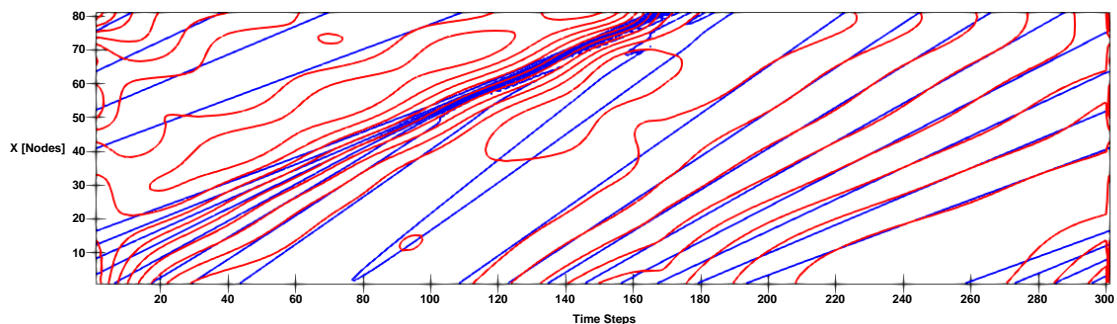


(γ') Ανακατασκευή με 16 βάσεις PGD

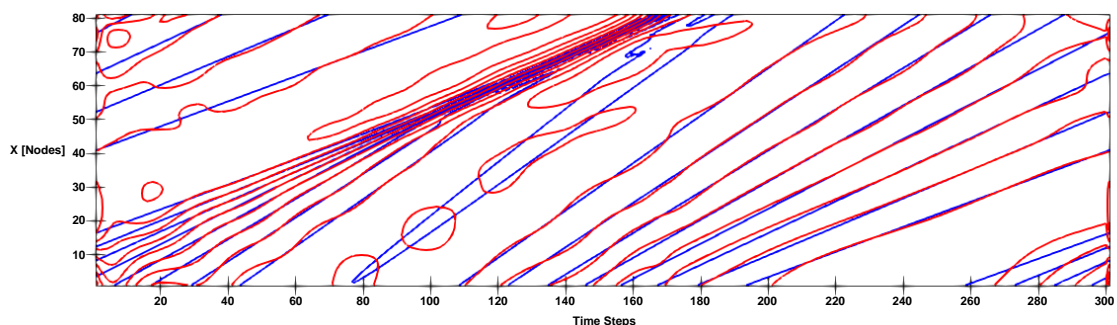


(δ') Ανακατασκευή με 20 βάσεις PGD

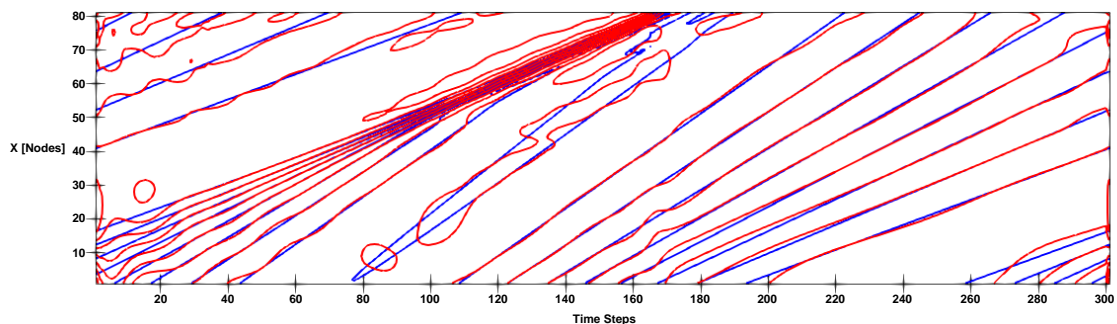
Σχήμα 4.6: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). Ανακατασκευασμένα πεδία ταχυτήτων για τη λύση της εξίσωσης (4.10) με χρήση διαφορετικού πλήθους όρων προσέγγισης μέσω της μεθόδου PGD.



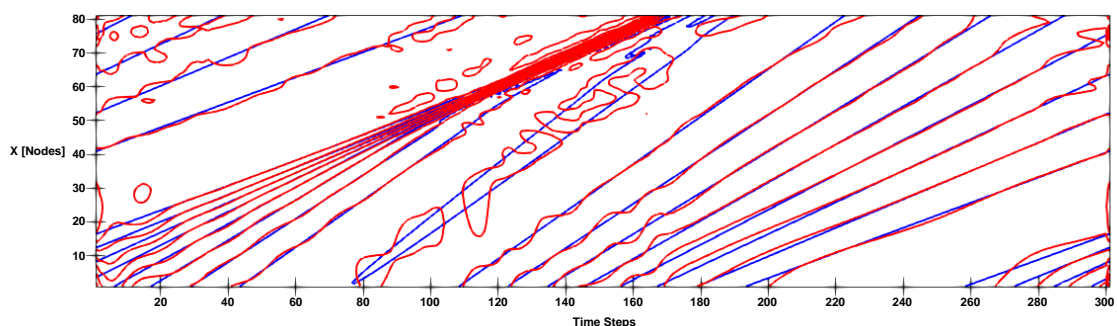
(α') Ανακατασκευή με 6 βάσεις PGD



(β') Ανακατασκευή με 12 βάσεις PGD



(γ') Ανακατασκευή με 16 βάσεις PGD



(δ') Ανακατασκευή με 20 βάσεις PGD

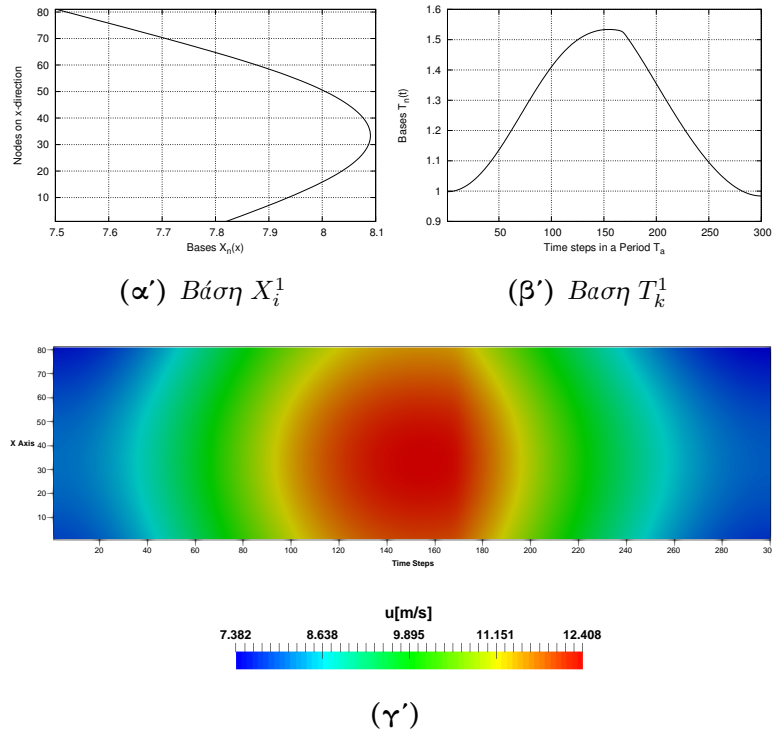
Σχήμα 4.7: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). Ισοταχείς καμπύλες για τη λύση της εξίσωσης (4.10). Με μπλέ χρώμα σημειώνονται οι καμπύλες του πραγματικού πεδίου, ενώ με κόκκινο χρώμα οι αντίστοιχες καμπύλες για τα ανακατασκευασμένα μέσω PGD πεδία.

4.3.1 Ανάλυση Επίδρασης κάθε Όρου του Αθροίσματος Προσέγγισης στην Ανακατασκευή του Πεδίου

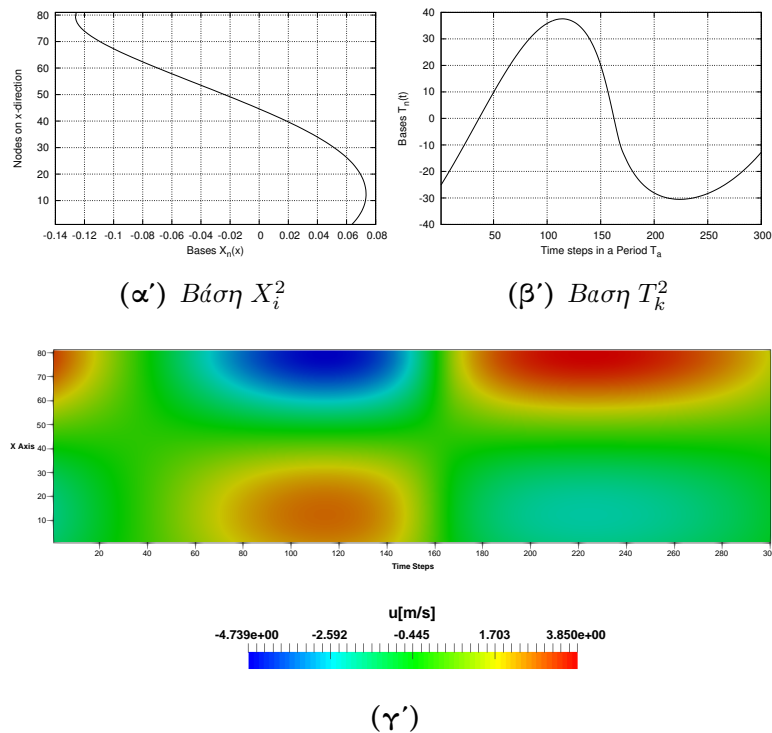
Η μέθοδος PGD, όπως έχει ήδη γίνει αντιληπτό μέσω αυτής της εργασίας, χαρακτηρίζεται από την προσπάθεια προσέγγισης του πεδίου με τις λιγότερες δυνατές 1Δ συναρτήσεις. Συγκεκριμένα οι βάσεις που υπολογίζονται πρώτες, έχουν το χαρακτηριστικό να απορροφούν την μεγαλύτερη ποσότητα πληροφορίας που καθορίζει το πεδίο. Αυτό δεν είναι ένα παράδοξο γεγονός. Από τα μαθηματικά και την ανάπτυξη συναρτήσεων με τη βοήθεια δυναμοσειρών (π.χ. σειρές Taylor) είναι γνωστό ότι οι όροι μεγαλύτερης τάξης παίζουν μικρότερο ρόλο στην ακριβή προσέγγιση της συνάρτησης και η αναπαραγωγή της κυριαρχείται από τους μικρότερης τάξης όρους. Εντελώς ανάλογα, στο πλαίσιο της μεθόδου PGD, η συνάρτηση που δίνει την έκφραση ενός πεδίου αποσυμπλέκεται με χρήση αθροίσματος γινομένων 1Δ συναρτήσεων, επομένως είναι αναμενόμενο να παρουσιάζεται παρόμοια συμπεριφορά, με τους πρώτους όρους του αθροίσματος να έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα.

Στα διαγράμματα που ακολουθούν διαπιστώνεται ακριβώς αυτή η συμπεριφορά και στο παράδειγμα που εξετάζεται εδώ για ανακατασκευή με 15 ζεύγη συναρτήσεων βάσης. Οι πρώτοι όροι στο άθροισμα προσέγγισης παίζουν τον ρόλο ρυθμιστών των πιο γενικών χαρακτηριστικών του πεδίου, όπως είναι η τάξη των μεγεθών και η κατεύθυνση διάδοσης της πληροφορίας (Σχήματα 4.8 – 4.10). Η εξίσωση (4.10), που προσομοιάζει ένα μη γραμμικό κύμα, εμφανίζει μία απότομη εναλλαγή (ασυνέχεια) στο πεδίο που παράγει. Αυτή η έντονη εναλλαγή είναι εμφανής και στις χρονικά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις βάσης T και μπορεί να γίνει ιδιαίτερα αντιληπτή από τα «σπασίματα» που παρουσιάζουν αυτές οι συναρτήσεις γύρω στην περιοχή των κόμβων 150-170 και φαίνονται έντονα στα Σχήματα 4.10–4.12 και λιγότερο στις μεγαλύτερης τάξης βάσεις (Σχήμα 4.8 και 4.9). Αυτό είναι λογικό, εφόσον οι πρώτες βάσεις αναλαμβάνουν να κάνουν μια αδρή προσέγγιση του πεδίου και οι αμέσως επόμενες προσεγγίζουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά.

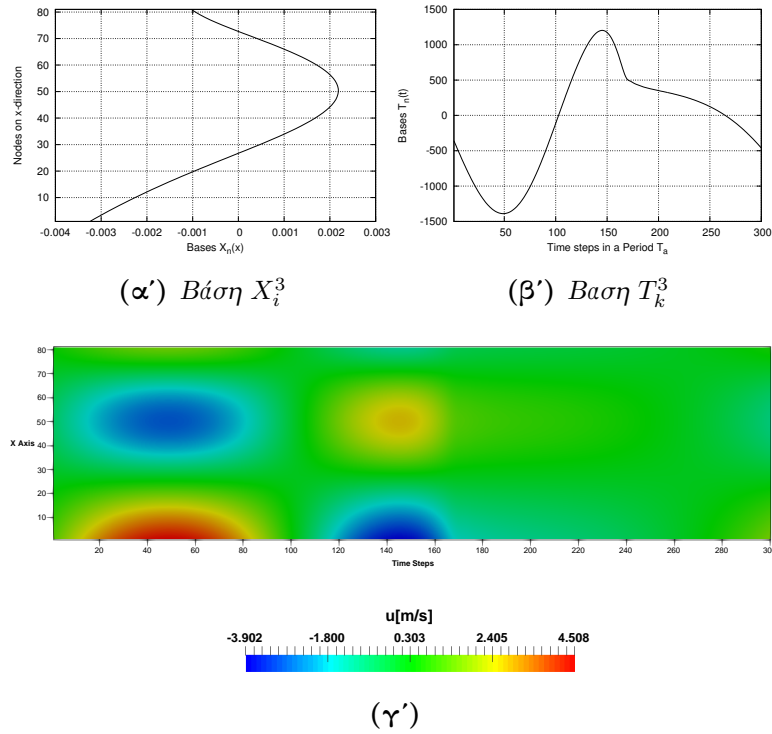
Όσον αφορά τις βάσεις ακόμα μεγαλύτερης τάξης (Σχήματα 4.14-4.22), παρατηρείται η έντονη ταλαντωτική συμπεριφορά τους και οι ακραίες τιμές που εμφανίζουν. Συγκεκριμένα, η χωρική 1Δ συνάρτηση X εμφανίζει πολύ μικρές τιμές, ενώ η αντίστοιχη χρονικά εξαρτώμενη συνάρτηση T λαμβάνει τιμές τέτοιες ούτως ώστε όταν οι δύο 1Δ συναρτήσεις πολλαπλασιαστούν να δώσουν πεδίο τιμών κοντά στην μονάδα, κοντά στην τάξη μεγέθους που βρίσκεται και το πραγματικό. Οι βάσεις αυτές επιδρούν σε πολύ μικρό βαθμό στην ανακατασκευή του πεδίου, ρυθμίζοντας μόνο μικρές λεπτομέρειες στην μορφή του, κάτι που είναι εμφανές και από την επίδρασή τους στο σχετικό σφάλμα (Σχήμα 4.5).



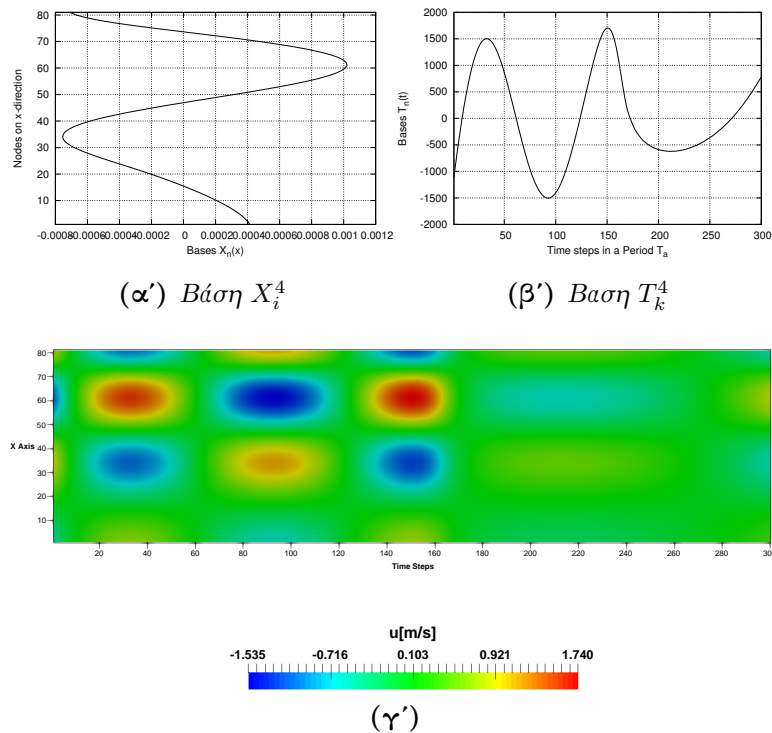
Σχήμα 4.8: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α) X_i^1 και (β) T_k^1 για $\mathbf{m}=1$ ενώ (γ) το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενό τους.



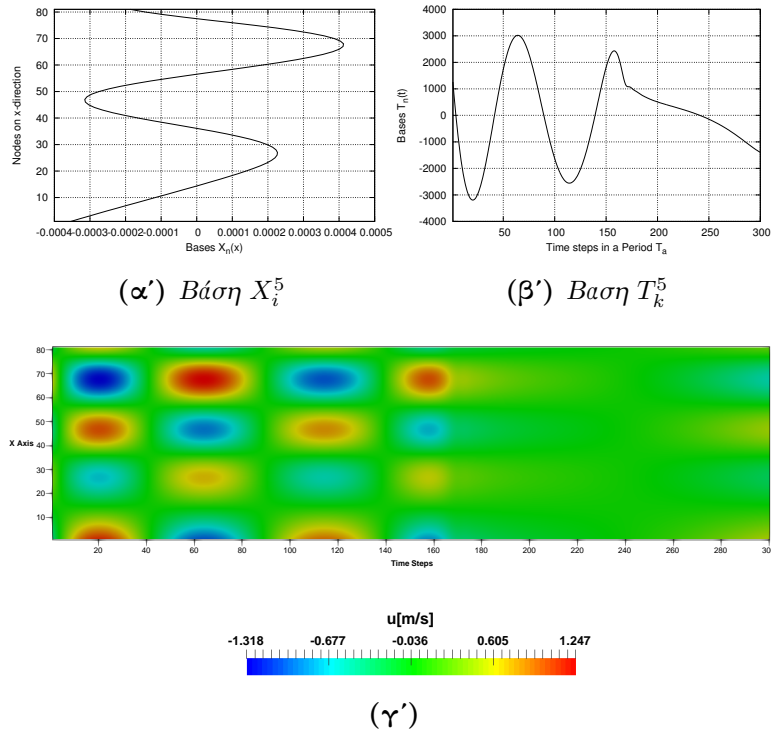
Σχήμα 4.9: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α) X_i^2 και (β) T_k^2 για $\mathbf{m}=2$ ενώ (γ) το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενό τους.



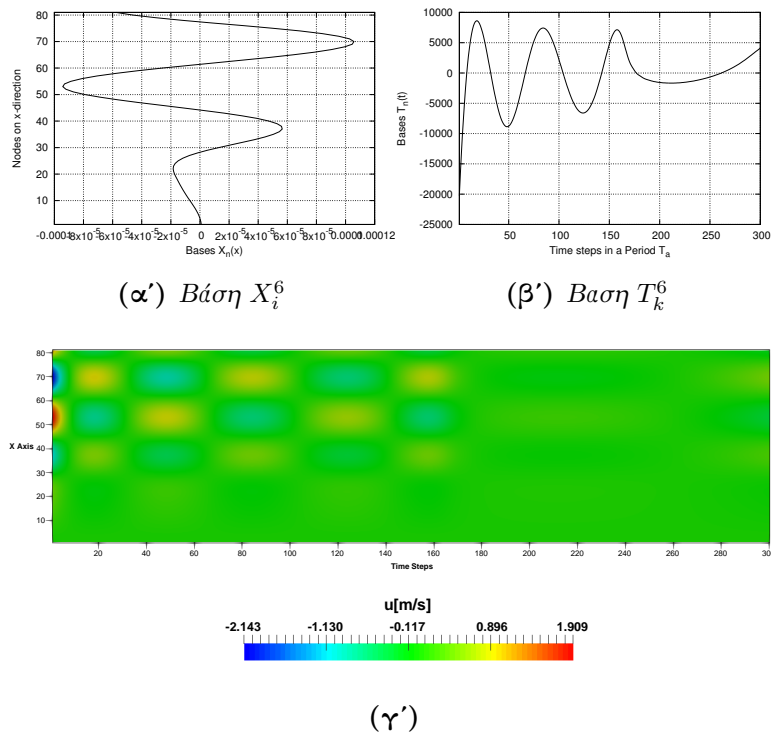
Σχήμα 4.10: 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^3 και (β') T_k^3 για $m=3$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενο τους.



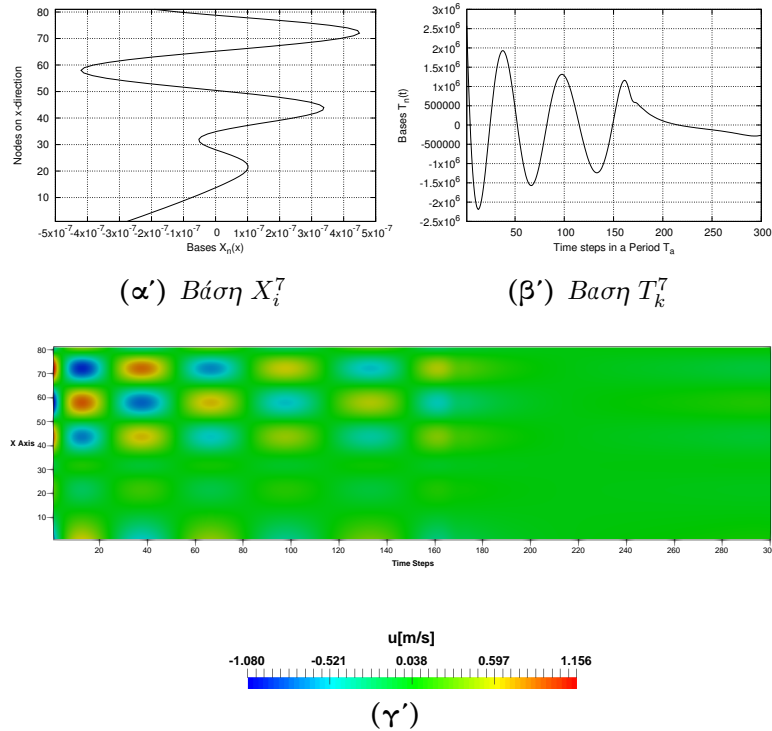
Σχήμα 4.11: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^4 και (β') T_k^4 για $m=4$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενο τους



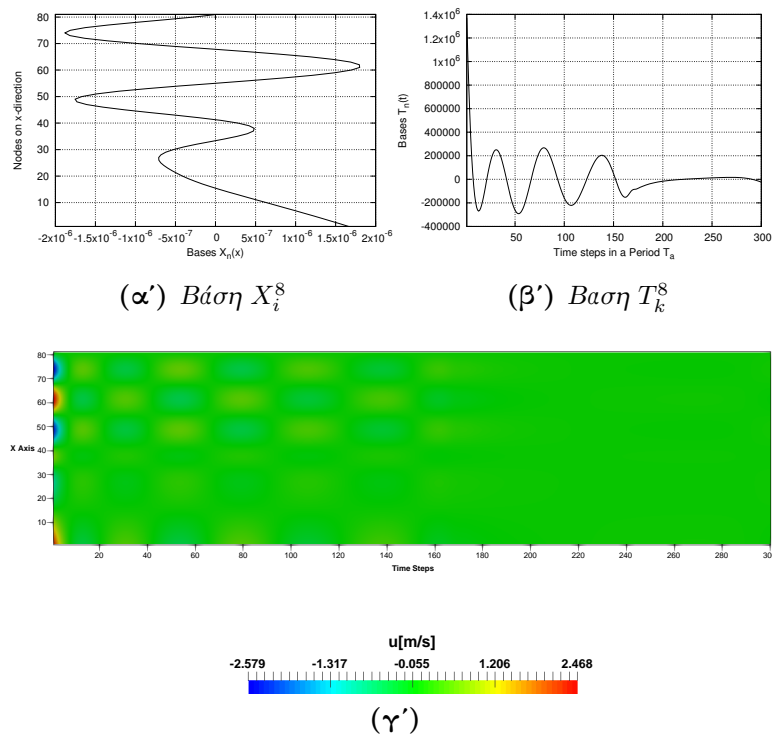
Σχήμα 4.12: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^5 και (β') T_k^5 για $m=5$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενο τους.



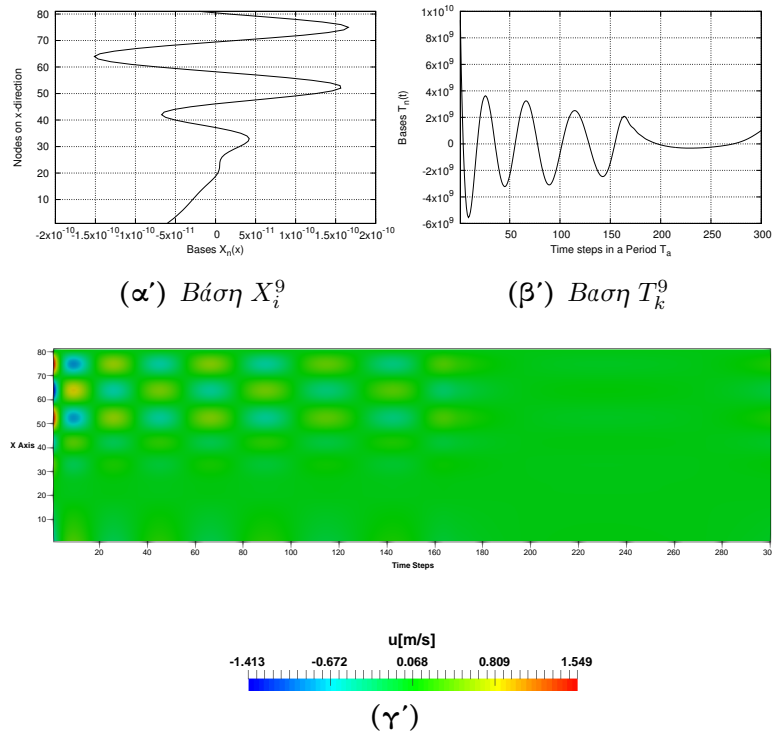
Σχήμα 4.13: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^6 και (β') T_k^6 για $m=6$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενο τους.



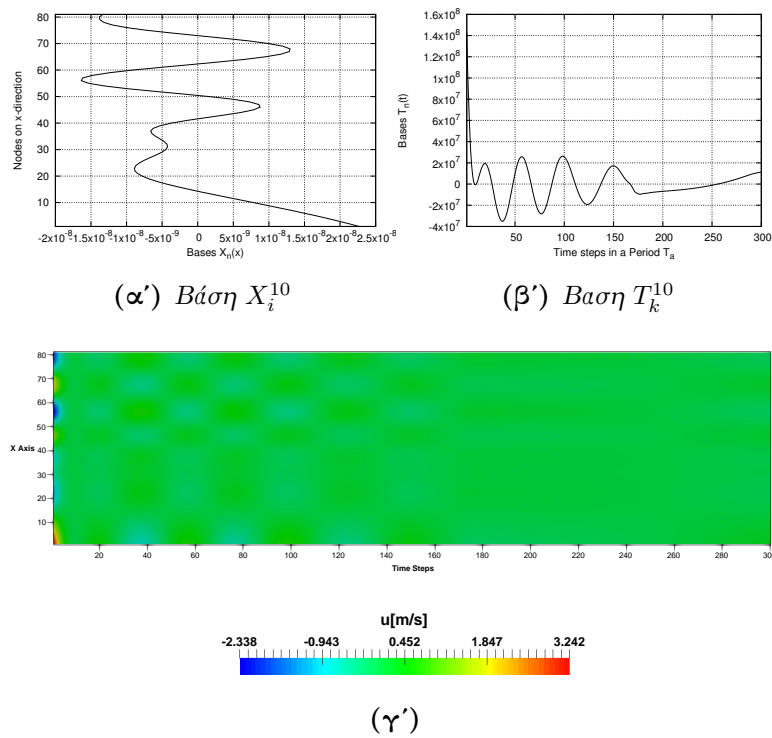
Σχήμα 4.14: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^7 και (β') T_k^7 για $m=7$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενο τους.



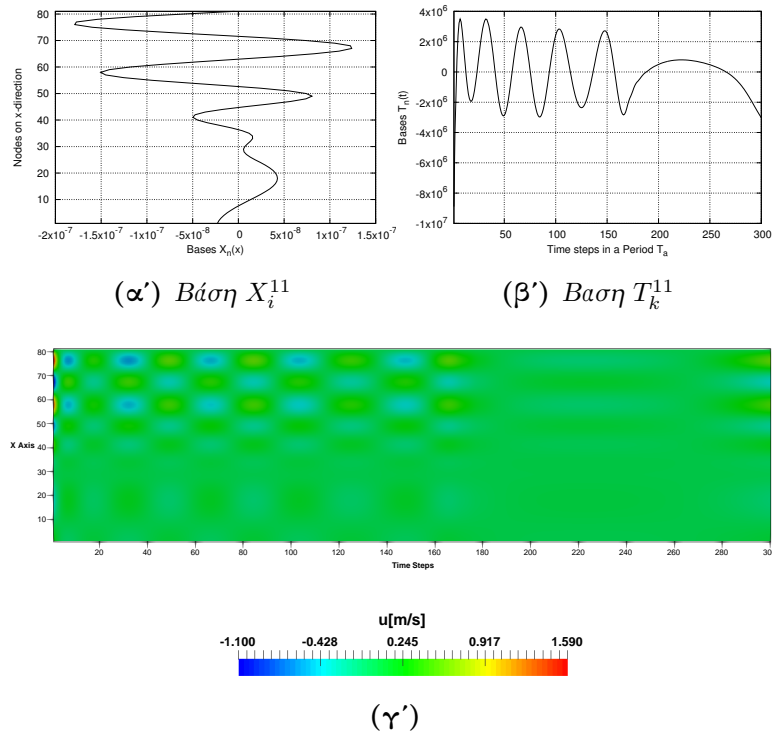
Σχήμα 4.15: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^8 και (β') T_k^8 για $m=8$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενο τους.



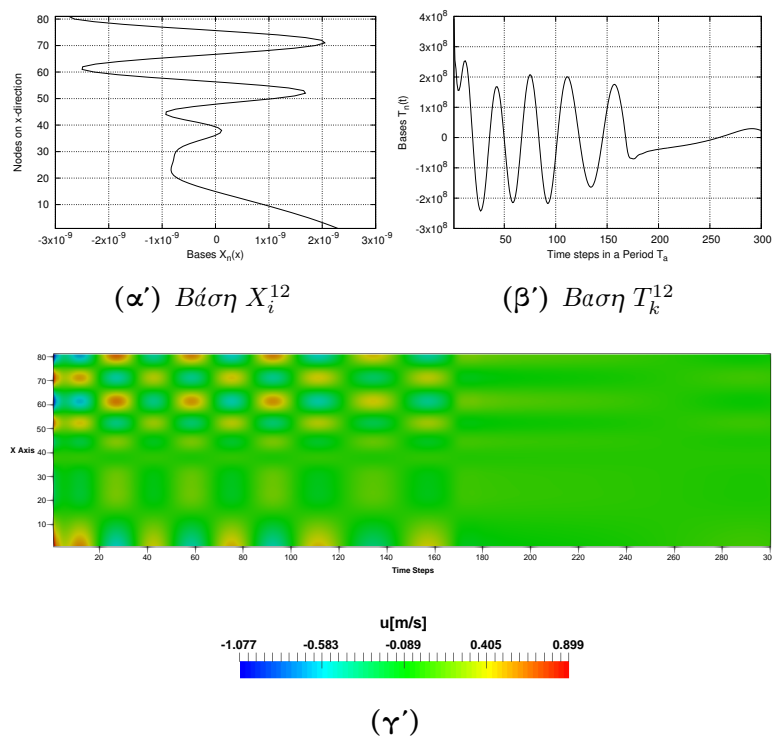
Σχήμα 4.16: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^9 και (β') T_k^9 για $m=9$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενο τους.



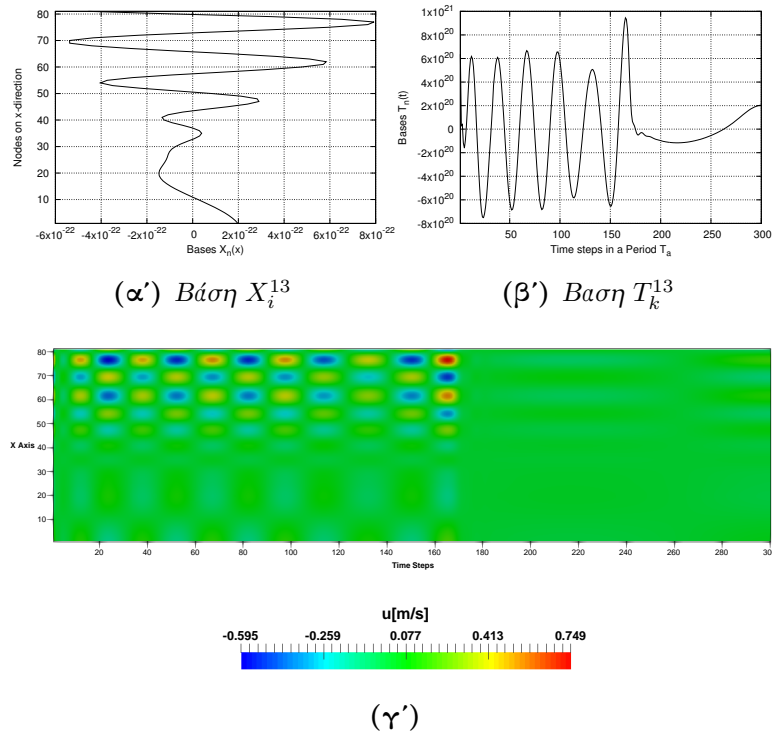
Σχήμα 4.17: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^{10} και (β') T_k^{10} για $m=10$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενο τους.



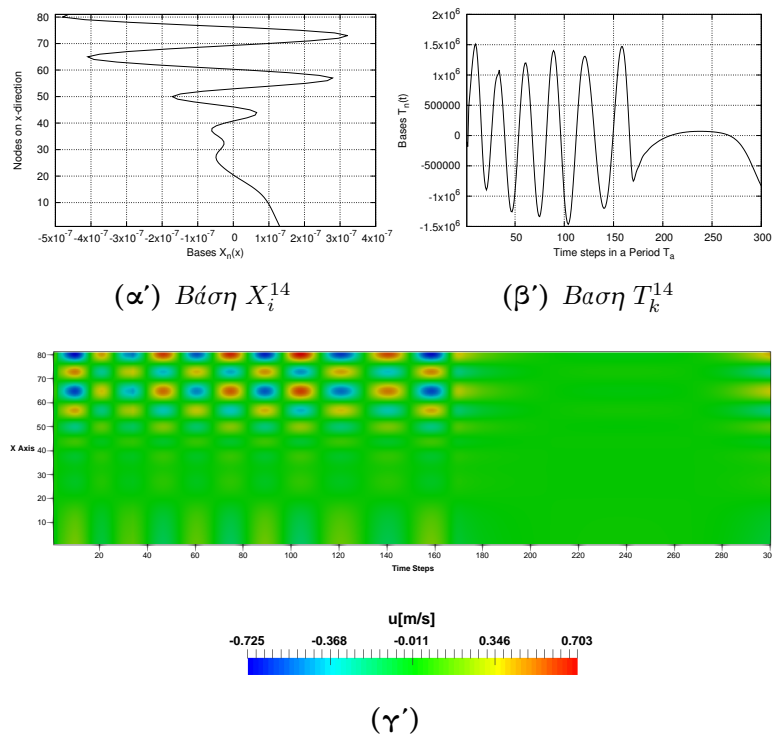
Σχήμα 4.18: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^{11} και (β') T_k^{11} για $m=11$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενό τους.



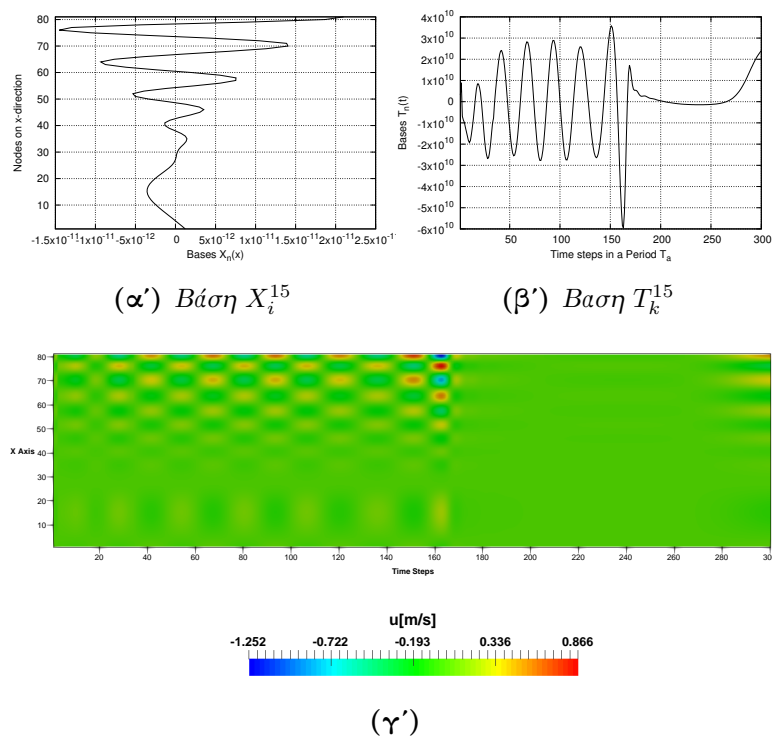
Σχήμα 4.19: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^{12} και (β') T_k^{12} για $m=12$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενό τους.



Σχήμα 4.20: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^{13} και (β') T_k^{13} για $m=13$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενό τους.



Σχήμα 4.21: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α') X_i^{14} και (β') T_k^{14} για $m=14$ ενώ (γ') το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενό τους.



Σχήμα 4.22: Σταδιακή συμπίεση μέσω της μεθόδου *iPGD* για το πεδίο που δίνεται από την εξίσωση (4.10). 1Δ συναρτήσεις βάσης (α) X_i^{15} και (β) T_k^{15} για $\mathbf{m}=15$ ενώ (γ) το πεδίο που προκύπτει ως γινόμενο τους.

Κεφάλαιο 5

Σταδιακή Ανακατασκευή 2Δ Χρονικά Μη-Μόνιμου Πεδίου

5.1 Περιγραφή της Μεθόδου

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο για τη σταδιακή συμπίεση ενός 1Δ μη-μόνιμου πεδίου, επεκτείνεται εδώ για 2Δ μη-μόνιμα πεδία, όπου εμφανίζεται αυξημένη πολυπλοκότητα λόγω της προσθήκης μίας επιπλέον διάστασης. Το πρόβλημα διατυπώνεται σε 2Δ υπολογιστικό χωρίο, το οποίο διακριτοποιείται με δομημένο υπολογιστικό πλέγμα $I \times J$ κόμβων, ενώ το χρονικό διάστημα χωρίζεται σε K_t χρονικά βήματα μέσα σε μία περίοδο του φαινομένου και εφόσον έχει αποκατασταθεί η περιοδικότητα. Σε αντιστοιχία με την εξίσωση (4.12) πλέον το συνολικό τροποποιημένο σφάλμα της προσέγγισης του πεδίου, μετά την προσθήκη και της y κατεύθυνσης, θα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\sum_{\mu=1}^m X_i^\mu Y_j^\mu T_{K+1}^\mu - U_{i,j,K+1} \right]^2 + \frac{w}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\sum_{\mu=1}^m \left(X_i^\mu Y_j^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{Y}_j^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) \right]^2 \quad (5.1)$$

Όπως και για την 1Δ περίπτωση το σφάλμα που ορίζεται εδώ αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο αναφέρεται στο τρέχον χρονικό βήμα ενώ το δεύτερο κομμάτι αφορά όλες τις προηγούμενες χρονικές στιγμές. Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης 5.1 πολλαπλασιάζεται επιπλέον με έναν «συντελεστή βαρύτητας» w . Όπως θα αναλυθεί και παρακάτω, μετά την εξαγωγή των εξισώσεων της μεθόδου, σε κάθε χρονικό βήμα, όλες οι συναρτήσεις βάσης που έχουν υπολογιστεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή ανανεώνονται, ώστε να ληφθούν υπόψη στη συμπίεση και την προσθήκη των νέων τιμών του πεδίου. Ο συντελεστής βαρύτητας w δηλώνει την επίδραση που έχει η νέα χρονική στιγμή στην ανανέωση των υπολογισθεισών βάσεων. Μεγάλη τιμή του συντελεστή βαρύτητας, υπαγορεύει στη μέθοδο να μην τροποποιήσει σε μεγάλο βαθμό τις βάσεις που υπολογίστηκαν για τις προηγούμενες χρονικές στιγμές, ενώ μικρότερη τιμή του δίνει μεγαλύτερη ευελιξία να εκτελέσει δραστηριότερες τροποποιήσεις. Η κατάλληλη επιλογή του συντελεστή αυτού εξαρτάται από την εμπειρία του χρήστη και από τη φύση του χρονικά μεταβαλλόμενου πεδίου. Σε ένα πεδίο με μικρές χρονικές μεταβολές, κρίνεται ορθότερη η χρήση ενός μεγάλου συντελεστή w , ενώ ένας μικρότερος συντελεστής θα ήταν αποδοτικότερος για ένα πεδίο με απότομες μεταβολές στο χρόνο ώστε ο αλγόριθμος συμπίεσης να αντιλαμβάνεται και να ενσωματώνει τις μεταβολές αυτές στην προσεγγιστική αναπαράσταση.

Στόχος της μεθόδου είναι ο υπολογισμός των 1Δ συναρτήσεων $X(x), Y(y)$ και $T(t)$ οι οποίες

θα συνθέσουν το ανακατασκευασμένο πεδίο. Οι εξισώσεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό των συναρτήσεων προκύπτουν από την απαίτηση ελαχιστοποίησης του σφάλματος E της παραπάνω εξίσωσης (5.1). Παραγωγίζοντας το σφάλμα ως προς τις άγνωστες κομβικές τιμές X_i^m, Y_j^m και T_k^m για όλα τα προηγούμενα χρονικά βήματα καθώς και ως προς τη νέα τιμή T_{K+1}^m για το τρέχον βήμα $K + 1$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial X_i^m} = 0 &\Leftrightarrow \left[\sum_{j=1}^J \left(\sum_{\mu=1}^m X_i^\mu Y_j^\mu T_{K+1}^\mu - U_{i,j,K+1} \right) Y_j^m \right] T_{K+1}^m \\
&+ w \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \left[\sum_{\mu=1}^m \left(X_i^\mu Y_j^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{Y}_j^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) Y_j^m T_k^m \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{T_{K+1}^m \sum_{\mu=1}^{m-1} \left[\left(\sum_{j=1}^J (Y_j^\mu Y_j^m) \right) X_i^\mu T_{K+1}^\mu \right]}_{Q1_x} - T_{K+1}^m \sum_{j=1}^J Y_j^m U_{i,j,K+1} \\
&+ X_i^m (T_{K+1}^m)^2 \sum_{j=1}^J (Y_j^m)^2 + w \underbrace{\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \left[\sum_{\mu=1}^{m-1} \left(X_i^\mu Y_j^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{Y}_j^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) Y_j^m T_k^m \right]}_{Q2_x} \\
&+ w X_i^m \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J (Y_j^m)^2 (T_k^m)^2 - w \tilde{X}_i^m \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \tilde{Y}_j^m Y_j^m \tilde{T}_k^m T_k^m = 0 \tag{5.2}
\end{aligned}$$

οπότε προκύπτει:

$$X_i^m = \frac{T_{K+1}^m \sum_{j=1}^J Y_j^m U_{i,j,K+1} + w \tilde{X}_i^m \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \tilde{Y}_j^m Y_j^m \tilde{T}_k^m T_k^m - Q1_x - Q2_x}{(T_{K+1}^m)^2 \sum_{j=1}^J (Y_j^m)^2 + w \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J (Y_j^m)^2 (T_k^m)^2} \tag{5.3}$$

Αντιστοίχως για την δεύτερη χωρική συνάρτηση Y είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial Y_j^m} = 0 &\Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^I \left(\sum_{\mu=1}^m Y_j^\mu X_i^\mu T_{K+1}^\mu - U_{i,j,K+1} \right) X_i^m \right] T_{K+1}^m \\
&+ w \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \left[\sum_{\mu=1}^m \left(X_i^\mu Y_j^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{Y}_j^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) X_i^m T_k^m \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{T_{K+1}^m \sum_{\mu=1}^{m-1} \left[\left(\sum_{i=1}^I (X_i^\mu X_i^m) \right) Y_j^\mu T_{K+1}^\mu \right]}_{Q1_y} - T_{K+1}^m \sum_{i=1}^I X_i^m U_{i,j,K+1} \\
&+ Y_j^m (T_{K+1}^m)^2 \sum_{i=1}^I (X_i^m)^2 + w \underbrace{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \left[\sum_{\mu=1}^{m-1} \left(X_i^\mu Y_j^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{Y}_j^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) X_i^m T_k^m \right]}_{Q2_y} \\
&+ w Y_j^m \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I (X_i^m)^2 (T_k^m)^2 - w \tilde{Y}_j^m \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \tilde{X}_i^m X_i^m \tilde{T}_k^m T_k^m = 0 \tag{5.4}
\end{aligned}$$

οπότε προκύπτει:

$$Y_j^m = \frac{T_{K+1}^m \sum_{i=1}^I X_i^m U_{i,j,K+1} + w \tilde{Y}_j^m \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \tilde{X}_i^m X_i^m \tilde{T}_k^m T_k^m - Q1_y - Q2_y}{(T_{K+1}^m)^2 \sum_{i=1}^I (X_i^m)^2 + w \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I (X_i^m)^2 (T_k^m)^2} \quad (5.5)$$

Ενώ για την χρονοεξαρτώμενη συνιστώσα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial T_k^m} = 0 &\Leftrightarrow w \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\sum_{\mu=1}^m \left(X_i^\mu Y_j^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{Y}_j^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) \right] X_i^m Y_j^m = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(X_i^\mu Y_j^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{Y}_j^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) X_i^m Y_j^m \\ &\quad + T_k^m \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (X_i^m)^2 (Y_j^m)^2 - \tilde{T}_k^m \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \tilde{X}_i^m X_i^m \tilde{Y}_j^m Y_j^m = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

και άρα για τα προηγούμενα χρονικά βήματα ($k = 1, \dots, K$), η ανανέωση των κομβικών τιμών της συνάρτησης T δίνεται από τον τύπο:

$$T_k^m = \frac{\tilde{T}_k^m \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \tilde{X}_i^m X_i^m \tilde{Y}_j^m Y_j^m - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(X_i^\mu Y_j^\mu T_k^\mu - \tilde{X}_i^\mu \tilde{Y}_j^\mu \tilde{T}_k^\mu \right) X_i^m Y_j^m}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (X_i^m)^2 (Y_j^m)^2} \quad (5.7)$$

ενώ για το νέο χρονικό βήμα $k = K + 1$ επιβάλλεται η συνθήκη:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial T_{K+1}^m} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\sum_{\mu=1}^m X_i^\mu Y_j^\mu T_{K+1}^\mu - U_{i,j,K+1} \right) X_i^m Y_j^m = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{\mu=1}^{m-1} \left[T_{K+1}^\mu \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J X_i^\mu X_i^m Y_j^m Y_j^\mu \right] \\ &\quad + T_{K+1}^m \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (X_i^m)^2 (Y_j^m)^2 - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J X_i^m Y_j^m U_{i,j,K+1} = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

οπότε τελικά:

$$T_{K+1}^m = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J X_i^m Y_j^m U_{i,j,K+1} - \sum_{\mu=1}^{m-1} \left[T_{K+1}^\mu \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J X_i^\mu X_i^m Y_j^m Y_j^\mu \right]}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (X_i^m)^2 (Y_j^m)^2} \quad (5.9)$$

Στις εξισώσεις (5.3)–(5.9) οι άγνωστοι για το νέο χρονικό βήμα $K + 1$ βρίσκονται σε πεπλεγμένη μορφή εξαιτίας της φύσης της μεθόδου, όπως έχει ήδη αναφερθεί και στα προηγούμενα

κεφάλαια. Επομένως, κατά τα γνωστά, απαιτείται η χρήση μίας επαναληπτικής διαδικασίας για την εύρεση των συναρτήσεων του m -οστού όρου του αθροίσματος που θα αποτελέσει την προσεγγιστική λύση.

Την αρχική χρονική στιγμή απαιτείται η υποβολή κατάλληλης αρχικοποίησης για τις συναρτήσεις βάσης, ώστε να γίνει σωστή εκκίνηση της μεθόδου. Τη δεδομένη χρονική στιγμή, εφόσον είναι διαθέσιμο το πεδίο $U_{i,j,1}$ μπορεί να εφαρμοστεί μία εκ των υστέρων συμπύεση του 2Δ πεδίου μέσω της κλασικής μεθόδου PGD με τον τρόπο που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2 για τον ίδιο αριθμό βάσεων M που θα χρησιμοποιηθούν και για τις επόμενες χρονικές στιγμές. Από αυτήν τη διαδικασία θα προκύψουν δύο διακριτές συναρτήσεις για κάθε βάση m , οι $X_{i,step=1}^\mu$, $Y_{j,step=1}^\mu$ που αντιστοιχούν πρακτικά στο χρονικά μόνιμο πεδίο $U_{step=1}$. Επομένως, για τον αλγόριθμο σταδιακού διαχωρισμού του χρονικά μη-μόνιμου πεδίου η αρχικοποίηση που δίνεται είναι:

$$X_i^\mu = X_{i,step=1}^\mu \quad (5.10\alpha')$$

$$Y_j^\mu = Y_{j,step=1}^\mu \quad (5.10\beta')$$

$$T_1^\mu = 1 \quad (5.10\gamma')$$

όπου $\mu = 1, \dots, M$. Η αρχικοποίηση δίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε για την αρχική χρονική στιγμή να ισχύει:

$$U_{i,j,1} = \sum_{\mu=1}^M X_i^\mu \cdot Y_j^\mu \cdot T_k^\mu = \sum_{\mu=1}^M X_{i,step=1}^\mu \cdot Y_{j,step=1}^\mu \cdot 1 = U_{step=1} \quad (5.11)$$

Επομένως ο αλγόριθμος της μεθόδου iPGD μπορεί να συνοψισθεί στα εξής βήματα:

- **Βήμα 1ο:** Αρχικοποίηση των βάσεων X , Y , T για το πρώτο χρονικό βήμα ($k=1$) σύμφωνα με τις εξισώσεις (5.10)
- **Βήμα 2ο:** Μετακίνηση στο επόμενο χρονικό βήμα k και εκκίνηση του σταδιακού αλγορίθμου
- **Βήμα 3ο:** Χρήση των εξισώσεων 5.3-5.7 για ανανέωση των βάσεων X , Y , T των προηγούμενων χρονικών στιγμών για όλους του όρους m του αθροίσματος προσέγγισης. Για κάθε όρο m απαιτείται εσωτερική επαναληπτική διαδικασία για την εύρεση των βάσεων X^m , Y^m , T^m καθώς εμφανίζονται σε πεπλεγμένη μορφή στις εξισώσεις υπολογισμού. Η εσωτερική επαναληπτική διαδικασία εκκινείται με χρήση αυθαίρετων αρχικών τιμών (συνηθέστερα μονάδα).
- **Βήμα 4ο:** Χρήση εξίσωσης (5.9) για προσθήκη νέας τιμής στη βάση T που αντιστοιχεί στο τρέχον χρονικό βήμα k
- **Βήμα 5ο:** Επιστροφή στο Βήμα 2 μέχρι την περάτωση όλων των χρονικών βημάτων εντός του μελετώμενου χρονικού διαστήματος.

Μετά την εκτέλεση της παραπάνω διαδικασίας και στο τέλος του χρονικού διαστήματος που ενδιαφέρει τον χρήστη (π.χ. στο τέλος μίας περιόδου κι εφόσον έχει επέλθει περιοδικότητα στο πεδίο) οι βάσεις X, Y και η T (με όλες τις χρονικές στιγμές) θα είναι πλέον διαθέσιμες και έτοιμες προς χρήση. Επομένως, οι τιμές του πεδίου για όλες τις χρονικές στιγμές μέσα στο δεδομένο χρονικό διάστημα μπορούν εύκολα να αναπαραχθούν μέσω του κατάλληλου αθροίσματος προσέγγισης και να προκύψει ένα πεδίο $U_{i,j,k}^{rec}$, το οποίο θα αποτελεί μία – ως ένα βαθμό – αξιόπιστη προσέγγιση του πραγματικού πεδίου $U_{i,j,k}$. Το άθροισμα προσέγγισης για το μη-μόνιμο 2Δ πεδίο δίνεται από την σχέση:

$$U_{i,j,k}^{rec} = \sum_{\mu=1}^M X_i^\mu Y_j^\mu T_k^\mu \quad (5.12)$$

Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας μελετήθηκαν διαφορετικές περιπτώσεις για τη συμπίεση του πεδίου μέσω του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε και βασίζεται στη μέθοδο PGD. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές τιμές παραμέτρων ώστε να γίνει αντιληπτό σε ποιο βαθμό και με ποιον τρόπο οι παράμετροι αυτές επηρεάζουν την αποτελεσματικότητα της μεθόδου. Συγκεκριμένα, εκτός από τον αριθμό M των βάσεων του αθροίσματος προσέγγισης μελετήθηκε και η επίδραση της παραμέτρου ω που εμφανίζεται στην εξίσωση (5.1) και προσδίδει ιδιαίτερη βαρύτητα στη διατήρηση των τιμών των βάσεων που έχουν υπολογισθεί μέχρι την τρέχουσα χρονική στιγμή. Για τις διαφορετικές παραμετρικές μελέτες που πραγματοποιήθηκαν, ως μέτρο της αξιοπιστίας της αναπαράστασης του πεδίου με την χρήση της μεθόδου χρησιμοποιείται το συνολικό τετραγωνικό σχετικό σφάλμα προσέγγισης που ορίζεται ως:

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\sum_{k=1}^{K_t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (U_{i,j,k} - U_{i,j,k}^{rec})^2}{\sum_{k=1}^{K_t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{i,j,k}^2} \quad (5.13)$$

Προφανώς, εδώ για λόγους μελέτης και ανάλυσης της αξιοπιστίας της μεθόδου, είναι δυνατή η πλήρης αποθήκευση του 2Δ μη-μόνιμου πεδίου $U_{i,j,k}$ ώστε να συγκριθεί με το αντίστοιχο ανακατασκευασμένο $U_{i,j,k}^{rec}$. Κάτι, τέτοιο δεν μπορεί να συμβεί σε μία πραγματική εφαρμογή. Επομένως, για εκείνες τις περιπτώσεις πρέπει να ληφθούν άλλα κριτήρια για την αποδοτικότητα της μεθόδου.

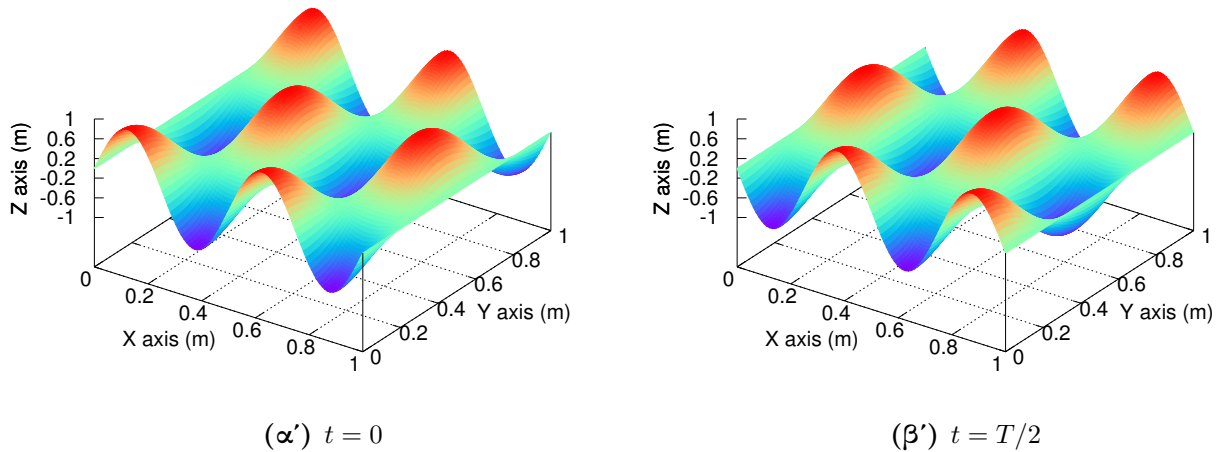
5.2 Εφαρμογή στην Εξίσωση 2Δ Κύματος

Ένα απλό πεδίο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως παράδειγμα για την εφαρμογή της μεθόδου είναι μία 2Δ εκδοχή του αρμονικού κύματος (Εξ. 4.9) που ήδη εξετάστηκε στην εφαρμογή της Ενότητας 4.2 για την συμπίεση 1Δ μη-μόνιμων πεδίων μέσω PGD. Η εξίσωση του πεδίου που θα χρησιμοποιηθεί εδώ ως παράδειγμα είναι:

$$z(x, y, t) = \cos(2\omega t) \cos(4\omega t) \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - 0.5ky) \quad (5.14)$$

όπου $\omega = \frac{2\pi}{T_a}$ η γωνιακή συχνότητα και $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ο κυματαριθμός του κύματος. Η περίοδος του κύματος είναι $T_a = 0.01s$ και το μήκος κύματος $\lambda = 0.5m$. Θεωρείται ότι 2Δ χωρίο που εξετάζεται είναι τετράγωνο πλευρά μήκους $1m$ και διακριτοποιείται με $I \times J = 81 \times 51$ κόμβους, ενώ η περίοδος με $K = 50$ χρονικά βήματα.

Για να υπάρχει μια ειοπτεία της μορφής που έχει η συνάρτηση 5.14 στο Σχήμα 5.1 παρουσιάζεται η κατανομή της για την αρχική χρονική στιγμή ($t = 0s$) και πως έχει αυτή διαμορφωθεί έπειτα από το πέρας μισής περιόδου ($t = T_a/2s$).



Σχήμα 5.1: Μορφή της εξίσωσης (5.14) για (α') την αρχική χρονική στιγμή και (β') έπειτα από την πάροδο μισής περιόδου.

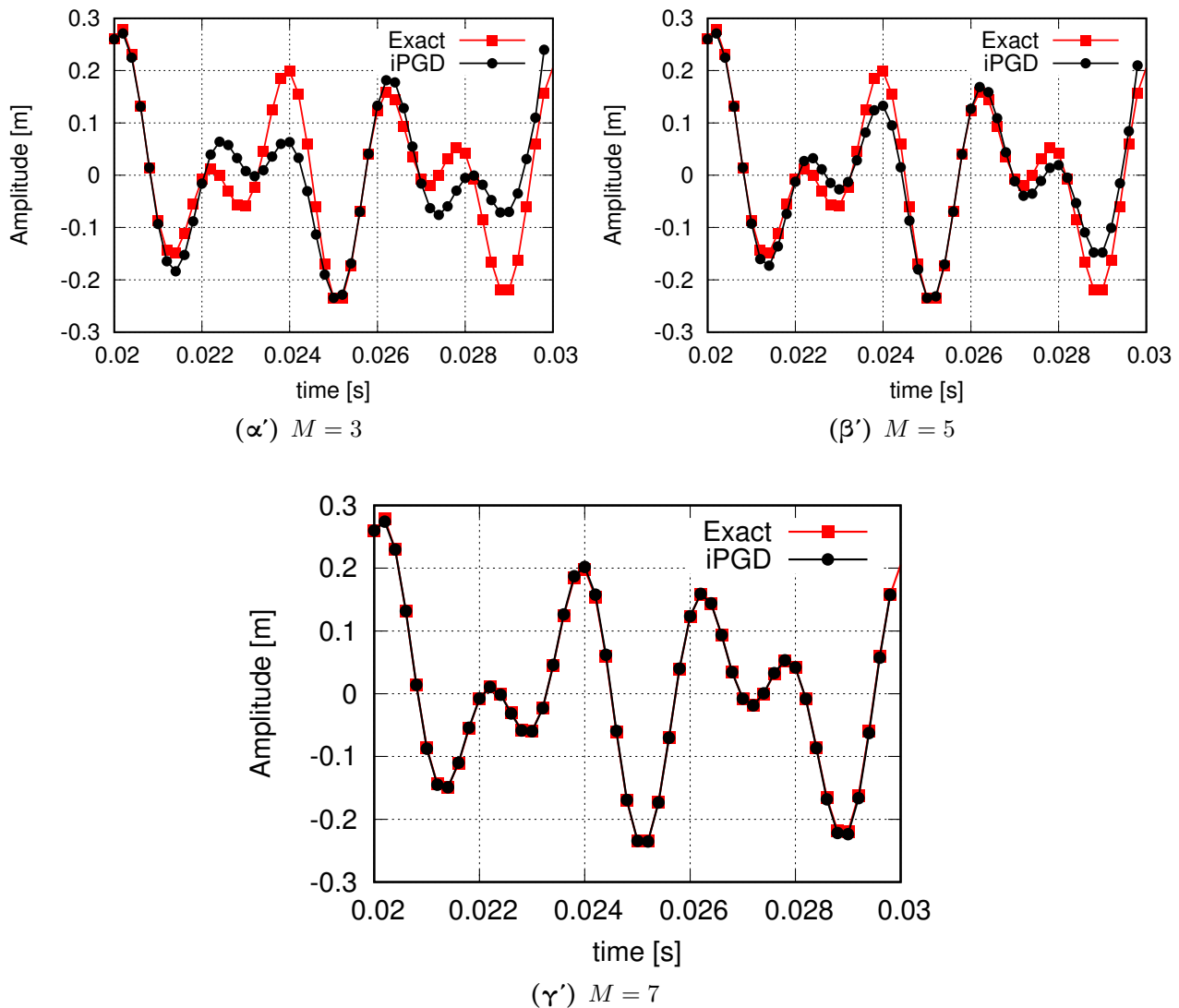
Για το συγκεκριμένο πρόβλημα ο αλγόριθμος της της μεθόδου iPGD χρησιμοποιεί παράμετρο βάρους $w = 1000$. Αυτή η επιλογή γίνεται αυθαίρετα από τον χρήστη και η επιτυχία της έγκειται στην εμπειρία του. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, στην αρχική χρονική στιγμή έχει γίνει μία πολύ καλή εκτίμηση των βάσεων που συνθέτουν την αρχική ανακατασκευασμένη λύση μέσω της κλασσικής μεθόδου PGD. Επομένως, ο συντελεστής βάρους είναι λογικό να παίρνει μεγάλη τιμή, συγκριτικά με την τάξη μεγέθους των τιμών του προβλήματος, έτσι ώστε κατά την πάροδο των χρονικών βημάτων οι νέες προσθήκες να μην «καταστρέφουν» τα ήδη καλά αποτελέσματα των προηγούμενων χρονικών στιγμών.

Για σταθερή παράμετρο $w = 1000$ και για διαφορετικές περιπτώσεις αριθμού όρων στο άθροισμα προσέγγισης (Εξίσωση 5.12) παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα το συνολικό τετραγωνικό σχετικό σφάλμα όπως αυτό ορίστηκε στην σχέση (5.13).

Πίνακας 5.1: Συνολικό τετραγωνικό σχετικό σφάλμα ανακατασκευασμένου πεδίου $U_{i,j,k}^{rec}$ σε σχέση με το πραγματικό πεδίο της εξίσωσης (5.14) για σταθερή την παράμετρο βάρους $w = 1000$.

number of modes M	1	3	5	7	9
$\mathcal{E}(M)$	0.3285	6.511E-2	3.665E-2	3.619E-3	2.972E-3

Από τον Πίνακα 5.1 παρατηρείται η αναμενόμενη πτώση του σφάλματος με την αύξηση των όρων του αθροίσματος προσέγγισης. Αυτό είναι λογικό διότι περισσότεροι όροι επιτρέπουν την αναπαράσταση του πεδίου με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, καθώς λαμβάνονται υπόψη και οι μικροδιακυμάνσεις στη μορφή του, σε αντίθεση με την περίπτωση μικρού αριθμού βάσεων, όπου γίνεται μία πιο αδρή προσέγγισή του. Αυτό καθίσταται εμφανέστερο στα σχήματα που ακολουθούν και παρουσιάζουν τη χρονική μεταβολή της κατακόρυφης θέσης ενός συγκεκριμένου κόμβου μέσα στο διακριτοποιημένο χωρίο. Σε αυτά παρουσιάζεται η πραγματική χρονική μεταβολή για μία περίοδο, και η αντίστοιχη για το ανακατασκευασμένο πεδίο που έχει προκύψει μετά την επεξεργασία μέσω της μεθόδου της iPGD.



Σχήμα 5.2: Χρονική μεταβολή κατακόρυφης θέσης συγκεκριμένου κόμβου του τετραγωνικού χωρίου για το ακριβές και το ανακατασκευασμένο πεδίο που εκφράζεται από την εξίσωση 5.14. Παρουσιάζονται τρεις περιπτώσεις για (α') τρεις όρους στο άθροισμα προσέγγισης, (β') πέντε και (γ') επτά.

Στο Σχήμα 5.2 μπορούμε να διακρίνουμε πως η παράμετρος ω και ο αριθμός των όρων στο άθροισμα προσέγγισης της συνάρτησης 5.14 επιδρούν στην ποιότητα του παραγόμενου προσεγγιστικού πεδίου.

Αρχικά, και στα τρία διαγράμματα που παρουσιάζονται διακρίνει κανείς την πολύ καλή ακρίβεια που έχει η προσέγγιση για τα πρώτα χρονικά βήματα εντός της περιόδου. Η αρχικοποίηση που έχει τεθεί για τις βάσεις την πρώτη χρονική στιγμή (Εξισώσεις 5.10) αναπαράγει με μεγάλη ακρίβεια το αρχικό πεδίο. Έπειτα, εφόσον η παράμετρος ω είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην μεταβάλει πολύ τη μορφή των ήδη πολύ καλών βάσεων που έχουν υπολογιστεί για την αρχική χρονική στιγμή, η αναπαράσταση της τιμής της κατακόρυφης θέσης του συγκεκριμένου κόμβου για τις αμέσως επόμενες χρονικές στιγμές είναι εξαιρετικά ακριβής ακόμα και με τη χρήση μόνο τριών βάσεων. Έπειτα ο κόμβος στο συγκεκριμένο σημείο αρχίζει να ταλαντώνεται εντονότερα στο χρόνο και η προσέγγιση με μικρό αριθμό βάσεων δεν είναι ικανή να ακολουθήσει τις ταχείες αυτές εναλλαγές. Παρόλα αυτά με την αύξηση του πλήθους των όρων η προσέγγιση γίνεται ακριβέστερη κάτι που φαίνεται και στο Σχήμα 5.2 αλλά και από την πτώση του συνολικού σφάλματος που παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.1.

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογή Βελτιστοποίησης σε 2Δ Μη-Μόνιμο Πρόβλημα Μετάδοσης Θερμότητας

Σε χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα βελτιστοποίησης που βασίζονται στη συζυγή μέθοδο, για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, οι συζυγείς ΜΔΕ πρέπει να ολοκληρωθούν με αντίθετη φορά στην κατεύθυνση του χρόνου. Συνεπώς, σε κάθε χρονική στιγμή, πρέπει να είναι διαθέσιμη η λύση που προέκυψε για το πρωτεύον πεδίο. Σε πραγματικές εφαρμογές είναι αναγκαία η εκτέλεση πολλών χρονικών βημάτων και αυτό, σε συνδυασμό με το μεγάλο αριθμό κόμβων για τη διακριτοποίηση του φυσικού χωρίου με ακρίβεια, έχει ως αποτέλεσμα τη δέσμευση τεράστιου όγκου υπολογιστικής μνήμης.

Γίνεται, επομένως, άμεσα αντιληπτό ότι είναι αναγκαία η χρήση μίας μεθόδου «συμπίεσης» των αποτελεσμάτων του πρωτεύοντος προβλήματος, ώστε να μειωθεί ο όγκος των δεδομένων που θα αποθηκευτούν στη μνήμη και θα διατεθούν στο συζυγή επιλύτη. Αυτή η συμπίεση των δεδομένων όμως δεν πρέπει να επιδρά αρνητικά στην ακρίβεια των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας, έτσι ώστε να μην αλλοιωθεί η ποιότητα της βελτιστοποίησης. Η μέθοδος PGD θα αποτελούσε μία καλή επιλογή για τη συμπίεση και ανακατασκευή του χρονικά μη-μόνιμου πρωτεύοντος πεδίου όσον αφορά την οικονομία σε μνήμη υπολογιστή.

Ωστόσο, η κλασική μέθοδος PGD απαιτεί την ύπαρξη (άρα και αποθήκευση) του πλήρους μη-μόνιμου πεδίου $U(x, y, t)$. Έτσι μία «εκ των υστέρων» συμπίεση των χρονικά μη-μόνιμων πεδίων δεν θα είχε καμία αξία σε μία πραγματική εφαρμογή, καθώς η λύση του πρωτεύοντος θα έπρεπε να αποθηκευτεί ολόκληρη και μετά να συμπιεστεί, κάτι το οποίο δεν θα προσφέρει τίποτα ως προς την εξοικονόμηση μνήμης υπολογιστή.

Στην πραγματικότητα, ο αλγόριθμος συμπίεσης πρέπει να λειτουργεί σταδιακά κατά τη διάρκεια της χρονικής ολοκλήρωσης αποθηκεύοντας σε κάθε χρονικό βήμα μόνο τις σημαντικότερες πληροφορίες, ώστε στο τέλος να μπορεί να γίνει αξιόπιστη ανακατασκευή του πεδίου. Ως ένας τέτοιος αλγόριθμος συμπίεσης θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η εκδοχή του Σταδιακού Ιδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού (iPGD) που διατυπώθηκε και παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5 για την σταδιακή συμπίεση του χρονικά μη-μόνιμου πεδίου κατά την διάρκεια εκτέλεσης της χρονικής ολοκλήρωσης.

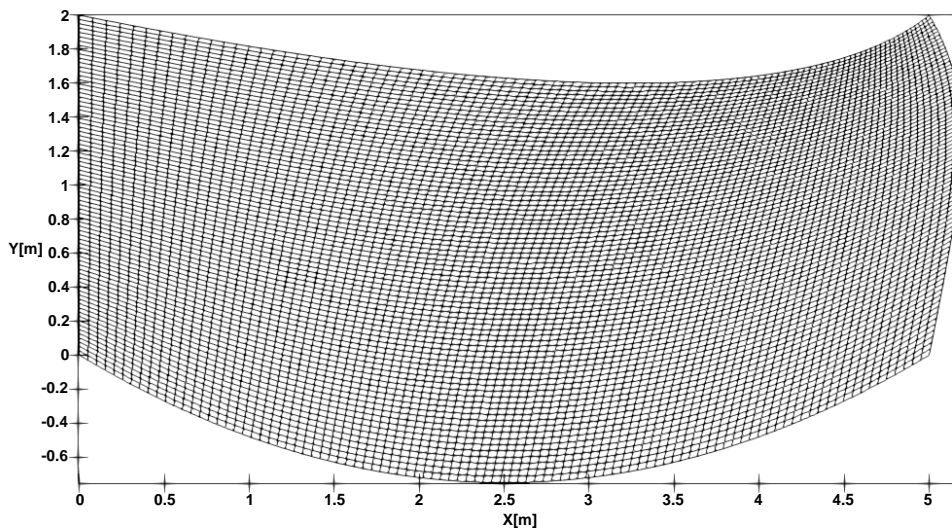
Για να εκτιμηθεί η επίδραση της προσέγγισης του πεδίου, μέσω PGD, στην ποιότητα του αποτελέσματος του αλγορίθμου βελτιστοποίησης παρουσιάζεται ένα πρόβλημα βασισμένο στη μη-μόνιμη 2Δ εξίσωση μετάδοσης θερμότητας. Η βελτιστοποίηση εκτελείται τέσσερις φορές: μία με πλήρη αποθήκευση της λύσης του πρωτεύοντος πεδίου και άλλες τρεις με συμπίεση των αποτελεσμάτων μέσω των δύο μεθόδων (είτε της κλασικής εκδοχής PGD, είτε της σταδιακής) για διαφορετικό αριθμό όρων στο άθροισμα προσέγγισης. Η αξία των εκτελούμενων προσομοιώσεων

έγκειται στο να διαπιστωθούν τα σφάλματα που μπορεί να εισάγονται στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας λόγω της χρήσης προσεγγιστικών πεδίων από τον συζυγή επιλύτη. Η εκ των υστέρων συμπίεση του χρονικά μη-μόνιμου πεδίου και η μετέπειτα τροφοδότηση του συζυγούς επιλύτη με την ανακατασκευασμένη λύση δεν έχει ιδιαίτερη αξία για πραγματικές εφαρμογές, όπως ήδη έχει αναφερθεί. Εντούτοις, εδώ θα εξεταστεί και αυτή η περίπτωση και η επίδρασή της στη ποιότητα της βελτιστοποίησης καθώς αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση που θα μπορούσε να γίνει με μεθόδους βασισμένες στη μέθοδο PGD. Οποιαδήποτε άλλη προσέγγιση παραγόμενη με τρόπο σταδιακό καθώς εκτελείται η χρονική ολοκλήρωση των ΜΔΕ δεν θα μπορούσε ποτέ να ξεπεράσει την ακρίβεια της εκ των υστέρων συμπίεσης των δεδομένων, για τον ίδιο αριθμό όρων του αθροίσματος προσέγγισης.

6.1 Διατύπωση Πρωτεύοντος Προβλήματος

Η εξίσωση που διέπει το φυσικό μη-μόνιμο πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας με αγωγή χωρίς εσωτερικές πηγές ή καταβόθρες ενέργειας είναι:

$$R = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (6.1)$$



Σχήμα 6.1: Διδιάστατο δομημένο υπολογιστικό πλέγμα για τη διακριτοποίηση του φυσικού χωρίου 100×80 κόμβων.

όπου ρ η πυκνότητα του μετάλλου, C_p η ειδική θερμοχωρητικότητα και k ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας. Ως φυσικό χωρίο επίλυσης της παραπάνω εξίσωσης θεωρείται μία 2Δ μεταλλική πλάκα ακανόνιστου σχήματος. Η διακριτοποίηση του φυσικού χωρίου γίνεται με χρήση δομημένου πλέγματος 100×80 κόμβων (Σχήμα 6.1). Επομένως, η εξίσωση (6.1) μετασχηματίζεται από το

φυσικό χωρίο (x, y) στο υπολογιστικό (ξ, η) και λαμβάνει τη μορφή:

$$R = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(k J g^{ij} \frac{\partial T}{\partial \xi^j} \right) = 0 \quad (6.2)$$

όπου εμφανίζονται οι ανταλλοιώτες μετρικές δεύτερης τάξης g^{ij} και η Ιακωβιανή ορίζουσα J του μετασχηματισμού $(x, y) \leftrightarrow (\xi, \eta)$.

Θεωρώντας το αλουμίνιο ως υλικό κατασκευής της επίπεδης πλάκας, από πίνακες με τις ιδιότητες των υλικών, προκύπτει $\rho = 2.7 \text{ kg/m}^3$ και $C_p = 0.910 \text{ kJ/kgK}$. Επιπλέον, θεωρείται ότι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας k εξαρτάται από τη θερμοκρασία και δίνεται από τη σχέση

$$k(T) = 0.0002213 T^2 - 0.09592 T + 211.5 \quad [\text{W/mK}] \quad (6.3)$$

όπου T σε Kelvin καθιστώντας την εξίσωση (6.2) μη-γραμμική. Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής επιβάλλονται οι παρακάτω συνθήκες [14]:

- Οριακές Συνθήκες:

$$T(\xi=0, \eta, t) = \tilde{T}(\eta) + 20 \eta(1-\eta) \sin\left(\frac{2\pi t}{T_a}\right) \quad (6.4\alpha')$$

$$T(\xi=1, \eta, t) = T_4 - (T_4 - T_3)\eta \quad (6.4\beta')$$

$$T(\xi, \eta=0, t) = T_1 - (T_1 - T_4)\xi \quad (6.4\gamma')$$

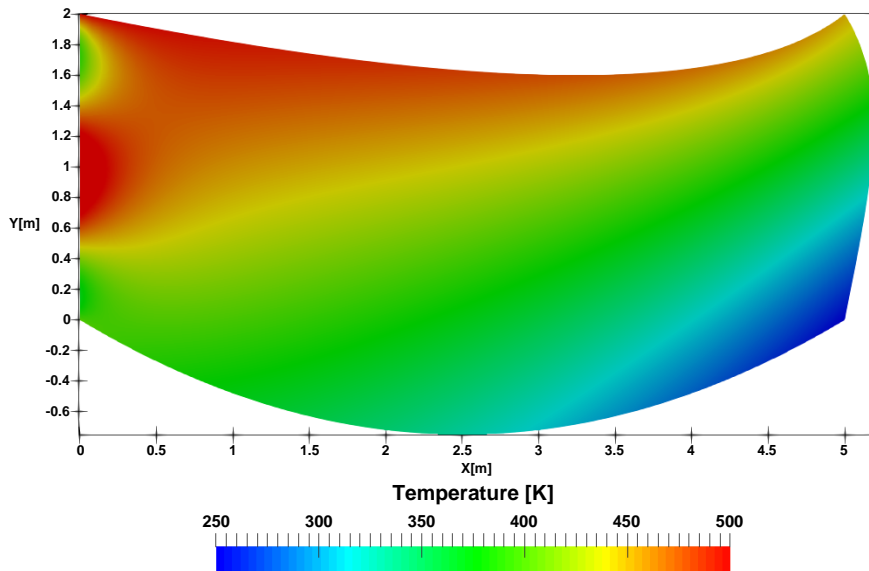
$$T(\xi, \eta=1, t) = T_2 - (T_2 - T_3)\xi \quad (6.4\delta')$$

όπου T_1, T_2, T_3, T_4 οι σταθερές θερμοκρασίες των τεσσάρων γωνιών του υπολογιστικού χωρίου, αριθμημένες ωρολογιακά εκκινώντας από την κάτω-αριστερά. Στο αριστερό όριο (S_c), η θερμοκρασιακή κατανομή προκύπτει από την υπέρθεση μίας χρονικά σταθερής κατανομής (\tilde{T}) και μίας δεύτερης περιοδικά μεταβαλλόμενης με περίοδο T_a , η οποία επιλέγεται από τον σχεδιαστή, αυτή προκαλεί τη μη-μονιμότητα στο πρόβλημα. Η κατανομή θερμοκρασίας στα τρία εναπομείναντα όρια του χωρίου προκύπτει με γραμμική παρεμβολή μεταξύ των δύο γωνιακών θερμοκρασιών κάθε πλευράς και παραμένει σταθερή στο χρόνο. Επιλέγονται $T_1 = 400\text{K}$, $T_2 = 500\text{K}$, $T_3 = 450\text{K}$, $T_4 = 250\text{K}$, ενώ επιπλέον θεωρείται περίοδος $T_a = 800\text{s}$.

- Αρχικές Συνθήκες: Ως αρχική συνθήκη του προβλήματος θεωρείται η:

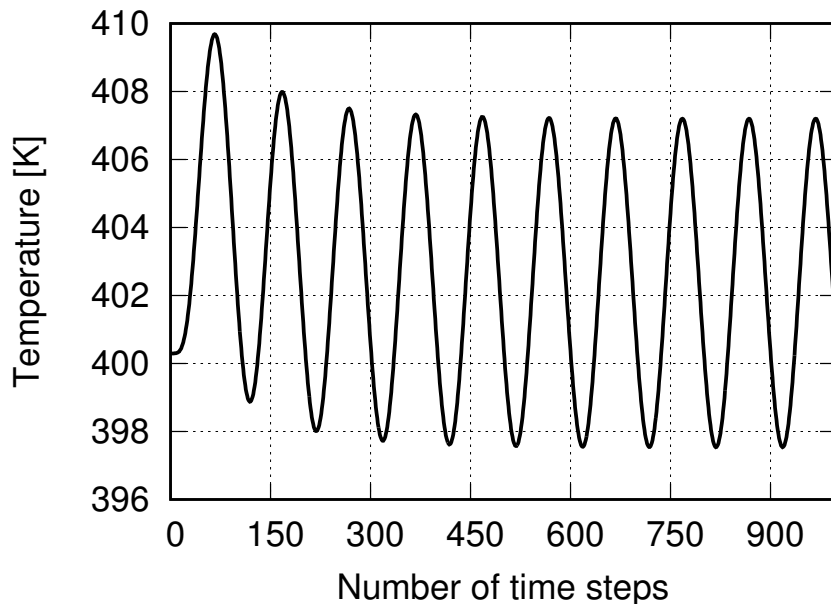
$$\frac{\partial}{\partial t} T(\xi, \eta, t=0) = 0 \quad (6.5)$$

Για να διευκολυνθεί η σύγκλιση, αρχικά επιλύθηκε το χρονικά μόνιμο πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας (με οριακές συνθήκες τις 6.4α'-6.4δ' και $t = 0\text{s}$) και το πεδίο που προέκυψε (Σχήμα 6.2) χρησιμοποιήθηκε ως αρχικοποίηση του χρονικά μεταβαλλόμενου προβλήματος.

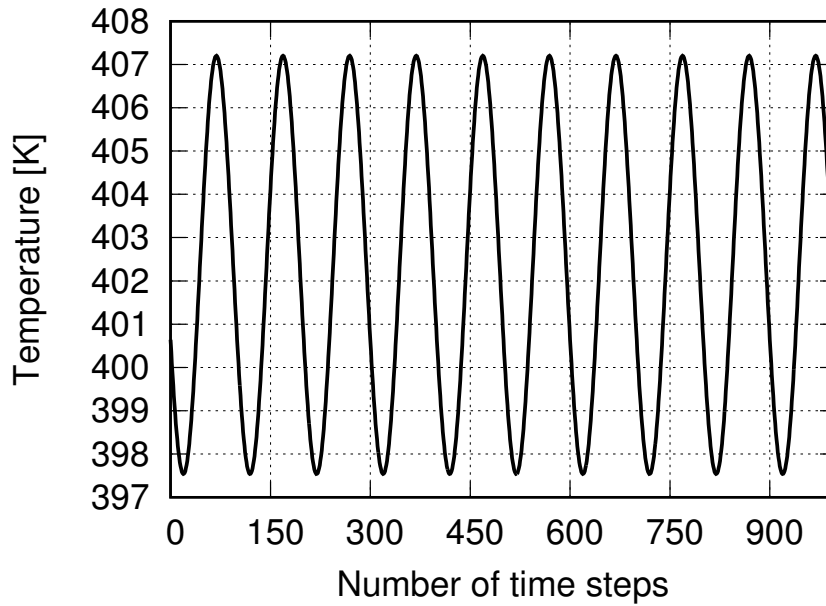


Σχήμα 6.2: Θερμοκρασιακό πεδίο την αρχική χρονική στιγμή.

Στο Σχήμα 6.3 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της κατανομής της θερμοκρασίας ενός κόμβου του υπολογιστικού πλέγματος ο οποίος βρίσκεται κοντά στο όριο S_c του χωρίου. Παρατηρείται ότι, έπειτα από την πάροδο δέκα περιόδων T_a , η εξέλιξη του φαινομένου καθίσταται περιοδική, και επομένως μόνο η αποθήκευση της τελευταίας περιόδου αρκεί ώστε να τροφοδοτήσει τον συζυγή επιλύτη. Στην πραγματικότητα, ο συζυγής επιλύτης δέχεται ως είσοδο ένα πεδίο όπως αυτό που παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.4 (εδώ για έναν κόμβο του υπολογιστικού πλέγματος), που αποτελεί επανάληψη της τελευταίας περιόδου του πρωτεύοντος.



Σχήμα 6.3: Χρονική εξέλιξη θερμοκρασιακής τιμής ενός κόμβου του υπολογιστικού πλέγματος κοντά στην περιοχή του ορίου S_c . Έπειτα από μικρό χρονικό διάστημα η απόκριση καθίσταται περιοδική. Η περίοδος είναι $T_a = 800s$ και διακριτοποιείται με 100 χρονικά βήματα.



Σχήμα 6.4: Μορφή της χρονικής εξέλιξης θερμοκρασιακής τιμής ενός κόμβου του υπολογιστικού πλέγματος, όπως το αντιλαμβάνεται ο επιλύτης του συζυγούς προβλήματος

6.2 Στόχος Βελτιστοποίησης και Συνάρτηση Κόστους

Ως στόχος τίθεται η εύρεση της κατανομής \tilde{T} της εξίσωσης (6.4α') ώστε να ελαχιστοποιείται το εμβαδόν και ο χρόνος που η θερμοκρασία σε κάποια σημεία της επίπεδης πλάκας υπερβαίνει μία κρίσιμη τιμή καθοριζόμενη από το χρήστη (εδώ $T_{crit} = 400K$).

Η κατανομή \tilde{T} είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\eta) = & \beta_1(5\eta - 20\eta^2 + 30\eta^3 - 20\eta^4 + 5\eta^5) \\ & + \beta_2(10\eta^2 - 30\eta^3 + 30\eta^4 - 10\eta^5) \\ & + \beta_3(10\eta^3 - 20\eta^4 + 10\eta^5) \\ & + \beta_4(5\eta^4 - 5\eta^5) \\ & + T_1(-5\eta + 10\eta^2 - 10\eta^3 + 5\eta^4 - \eta^5) + T_2\eta^5 \end{aligned} \quad (6.6)$$

με $\eta \in [0, 1]$ η καμπυλόγραμμη συντεταγμένη του υπολογιστικού χωρίου (ξ, η) . Οι συντελεστές $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\beta_1 = \frac{1}{(b_1 - b_2)^2 + 3} - \frac{1}{(b_3 + 2)^2 + 5} \quad (6.7)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{(b_2 + b_3)^2 + 4} - \frac{1}{(b_3 - 1)^2 + 1} \quad (6.8)$$

$$\beta_4 = \frac{1}{(b_3 + 1)^2 + 2} - \frac{1}{(b_1 - b_3)^2 + 5} \quad (6.9)$$

με b_q ($q = 1, 2, 3$) τις τρεις μεταβλητές σχεδιασμού, τις τιμές των οποίων αναζητά η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Επιπλέον, για να υπολογιστεί και η τέταρτη σταθερά β_3 (η οποία θεωρείται

δεσμευμένη εφόσον συναρτάται των άλλων τριών) απαιτείται επιπλέον η ικανοποίηση της σχέσης:

$$\int_0^{y_{max}} \tilde{T}(y) dy = \frac{T_1 + T_2}{2} y_{max} \quad (6.10)$$

που πρακτικά επιβάλλει τη διατήρηση της μέσης θερμοκρασίας του υπόψη ορίου σταθερή. Εκτελώντας τις αντίστοιχες πράξεις προκύπτει:

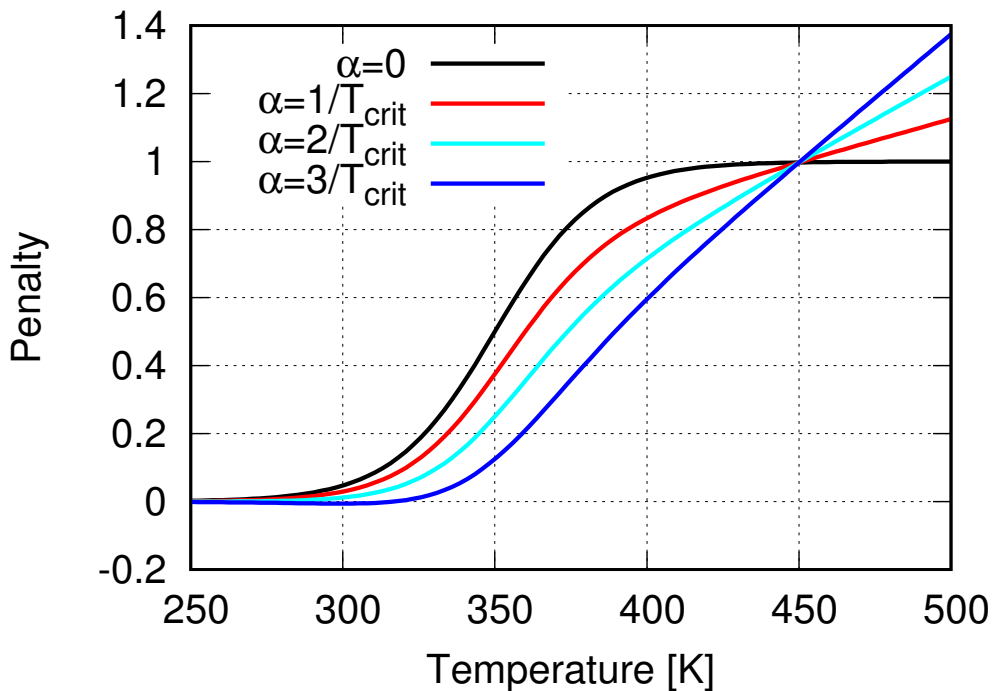
$$\beta_3 = 2(T_1 + T_2) - \beta_1 - \beta_2 - \beta_4 \quad (6.11)$$

και, συνεπώς, η κατανομή \tilde{T} καθορίζεται πλήρως αν είναι γνωστές οι τιμές των τριών μεταβλητών βελτιστοποίησης β_1, β_2 και β_4 .

Η συνάρτηση κόστους προς ελαχιστοποίηση, στο πρόβλημα που μελετάται, δίνεται από τη σχέση:

$$F = \frac{1}{\Omega T_a} \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{k_2(T-T_{crit})+k_1}} \right) (aT + b) d\Omega dt \quad (6.12)$$

όπου Ω είναι το συνολικό εμβαδόν του χωρίου, $k_1 = \log(1/(1-c))$, $k_2 = k_1/(T_{safe} - T_{crit})$, $a = 3/T_{crit}$, $b = 1 - aT_{safe}$, $c = 0.999$ και $T_{safe} = 450K > T_{crit}$ (ένα λιγότερο αυστηρό ασφαλές όριο καθοριζόμενο από τον χρήστη). Η χρονική ολοκλήρωση εκτείνεται σε μία περίοδο T_a εκκινώντας από τη χρονική στιγμή (t^*) όταν έχει πλέον επέλθει περιοδικότητα στη λύση. Η ολοκληρωτέα ποσότητα της συνάρτησης κόστους (6.12) παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.5.



Σχήμα 6.5: Ολοκληρωτέα ποσότητα της Συνάρτησης Κόστους 6.12 για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου α .

Η συνάρτηση αυτή έχει την εξής συμπεριφορά: Για θερμοκρασίες πολύ μικρότερες της T_{crit} έχει μηδενική τιμή ενώ, όσο η θερμοκρασία σε κάποιον κόμβο αυξάνεται, αποκτά τιμές που παίζουν τον ρόλο ποινής καθώς αυξάνουν τη συνολική τιμή της συνάρτησης κόστους. Οι κόμβοι που έχουν θερμοκρασία ίση με την T_{safe} «τιμωρούνται» δίνοντας μοναδιαία τιμή στη συνάρτηση ποινής.

Για κόμβους με μεγαλύτερη θερμοκρασία, δίνεται στον χρήστη η δυνατότητα να επιλέξει τη σχετική βαρύτητα που θα έχει η ποινή που θα τεθεί σε αυτούς, ανάλογα με το πόσο υπερβαίνουν την T_{safe} . Αυτό γίνεται μέσω της παραμέτρου α . Για $\alpha=0$ το μόνο που ενδιαφέρει είναι η υπέρβαση ή όχι της T_{crit} : ανεξάρτητα από το αν ένας κόμβος έχει θερμοκρασία που οριακά υπερβαίνει την T_{crit} ή την υπερβαίνει κατά πολύ, θα του καταλογιστεί η ίδια τιμή στη συνάρτηση ποινής. Αν είναι επιθυμητό οι κόμβοι που υπερβαίνουν κατά πολύ την κρίσιμη θερμοκρασία να τιμωρούνται αυστηρότερα (όπως στην περίπτωση που εξετάζεται εδώ), η παράμετρος α λαμβάνει θετικές τιμές με τις μεγαλύτερες να επιβάλουν αυστηρότερο κριτήριο. Η μορφή των παραμέτρων α, b στην εξίσωση (6.12) είναι τέτοια ώστε να εξασφαλίζεται συνέχεια και παραγωγισιμότητα της συνάρτησης κόστους.

6.3 Ανάπτυξη της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου

Η επαυξημένη συνάρτηση κόστους, όπως ορίζεται βάσει της θεωρίας της συνεχούς συζυγούς μεθόδου (Continuous Adjoint) είναι [3]:

$$L = F + \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \Psi R \, d\Omega dt \quad (6.13)$$

όπου Ψ το πεδίο της συζυγούς θερμοκρασίας και t^* η χρονική στιγμή κατά την οποία έχει επέλθει η περιοδικότητα. Παραγωγίζοντας την εξίσωση (6.13) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_q και με χρήση της (6.1) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta b_q} &= \frac{\delta F}{\delta b_q} + \frac{\delta}{\delta b_q} \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \Psi R \, d\Omega dt \\ &= \underbrace{\frac{\delta F}{\delta b_q} + \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \Psi \frac{\delta}{\delta b_q} \left(\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) d\Omega dt}_{I_1} - \underbrace{\int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \Psi \frac{\delta}{\delta b_q} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega dt}_{I_2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Αναλύοντας τους όρους I_1 και I_2 της εξίσωσης (6.14) είναι:

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho C_p \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \Psi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta T}{\delta b_q} \right) d\Omega dt \\ &= -\rho C_p \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\delta T}{\delta b_q} d\Omega dt + \rho C_p \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi \frac{\delta T}{\delta b_q} \right) d\Omega dt \\ &= -\rho C_p \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\delta T}{\delta b_q} d\Omega dt + \rho C_p \left[\int_{\Omega} \Psi \frac{\delta T}{\delta b_q} d\Omega \right]_{t^*}^{t^*+T_a} \end{aligned} \quad (6.15)$$

και

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \Psi \frac{\delta}{\delta b_q} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega dt = \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \Psi \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\delta}{\delta b_q} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega dt \\
 &\stackrel{G.G.}{=} \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_S \Psi \frac{\delta}{\delta b_q} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) n_i dS dt - \underbrace{\int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\delta b_q} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) d\Omega dt}_{I_1^*}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

$$I_1^* = - \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{dk}{dT} \frac{\delta T}{\delta b_q} d\Omega dt - \underbrace{\int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} k \frac{\delta}{\delta b_q} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) d\Omega dt}_{I_2^*} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
 I_2^* &= - \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta T}{\delta b_q} \right) d\Omega dt \\
 &\stackrel{G.G.}{=} \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right) \frac{\delta T}{\delta b_q} d\Omega dt - \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_S k \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} n_i \frac{\delta T}{\delta b_q} dS dt
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι το πλέγμα δεν εξαρτάται από τις μεταβλητές σχεδιασμού άρα οι μερικές παράγωγοι μπορούν να εναλλαχθούν με τις ολικές απευθείας χωρίς να εμφανίζονται επιπλέον όροι. Οπότε τελικά προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta L}{\delta b_q} &= \frac{\delta F}{\delta b_q} - \underbrace{\int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_S \Psi \frac{\delta}{\delta b_q} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) n_i dS dt}_{\text{term 1}} + \underbrace{\int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{dk}{dT} \frac{\delta T}{\delta b_q} d\Omega dt}_{FAE} \\
 &- \underbrace{\int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right) \frac{\delta T}{\delta b_q} d\Omega dt}_{FAE} + \underbrace{\int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_S k \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{\delta T}{\delta b_q} dS dt}_{\text{term 2}} \\
 &+ \underbrace{\rho C_p \left[\int_{\Omega} \Psi \frac{\delta T}{\delta b_q} d\Omega \right]_{t^*}^{t^*+T_a}}_{\text{term 3}} - \underbrace{\int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\delta T}{\delta b_q} d\Omega dt}_{FAE}
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Μηδενίζοντας τους όρους των χρονικών και χωρικών ολοκληρωμάτων που πολλαπλασιάζουν την παράγωγο $\frac{\delta T}{\delta b_q}$ προκύπτει η Συζυγής Πεδιακή Εξίσωση (Field Adjoint Equation–FAE),

$$-\rho C_p \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{dk}{dT} = q_v \tag{6.20}$$

ή, γραμμένη στο μετασχηματισμένο υπολογιστικό χωρίο (ξ, η) ,

$$-\rho C_p \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(k J g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^j} \right) + g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^j} \frac{\partial T}{\partial \xi^i} \frac{\partial k}{\partial T} = q_v \tag{6.21}$$

όπου ο όρος πηγής q_v προκύπτει από την απευθείας παραγωγή της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και είναι

$$q_v = -\frac{1}{\Omega T_a} \left\{ \frac{k_2 e^{k_2(T-T_{crit}+k_1)}}{(1 + e^{k_2(T-T_{crit}+k_1)})^2} (aT + b) + a \left(1 - \frac{1}{1 + e^{k_2(T-T_{crit}+k_1)}} \right) \right\} \quad (6.22)$$

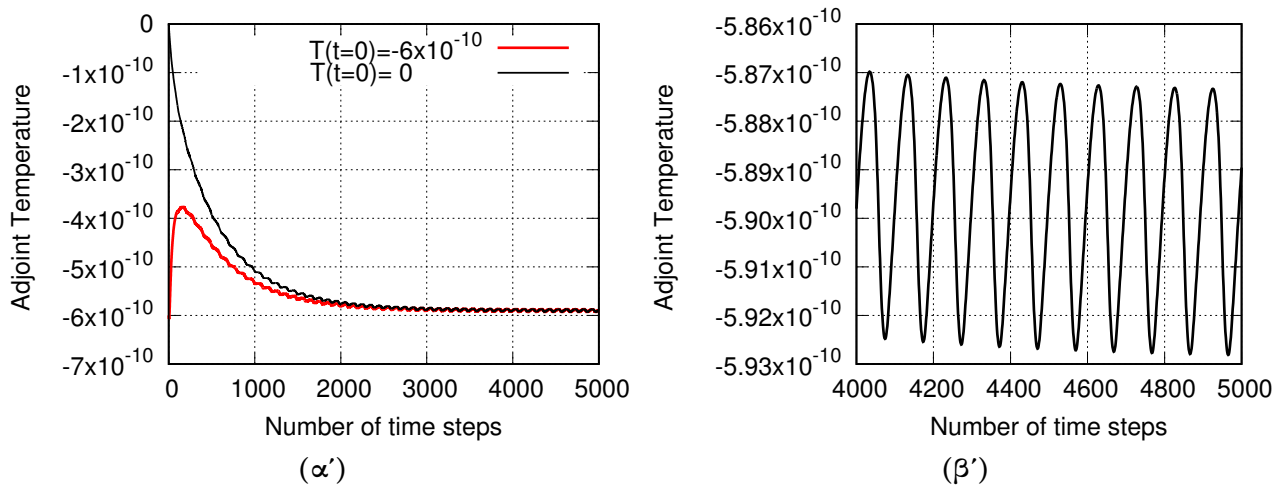
Ο όρος 1 (term 1) στην εξίσωση (6.19) απαλείφεται αν, σε κάθε χρονική στιγμή, επιβληθούν μηδενικές συζυγείς οριακές συνθήκες (Adjoint Boundary Conditions) δηλαδή

$$\Psi|_{S,\forall t} = 0$$

όπου S το σύνορο του υπολογιστικού χωρίου. Αντίστοιχα, ο όρος 3 (term 3) θα γίνει μηδέν όταν επέλθει περιοδικότητα για το συζυγές πεδίο, δηλαδή όταν ισχύει

$$\Psi|_{t=t^*} = \Psi|_{t=t^*+T_a}$$

Για να επιτευχθεί αυτό, η χρονική ολοκλήρωση του συζυγούς πεδίου διαρκεί αρκετά χρονικά βήματα (πενταπλάσια αυτών που χρειάστηκε το πρωτεύον πρόβλημα), όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.6 όπου παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της τιμής της συζυγούς θερμοκρασίας για τον ίδιο κόμβο που εξετάστηκε στο Σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.6: Σύγκλιση συζυγούς επιλύτη για έναν κόμβο. (α') συγκλίσεις για δύο διαφορετικές αρχικές τιμές, (β') λεπτομέρεια του διαγράμματος για την στιγμή που εγκαθίστανται η περιοδικότητα

Στο Σχήμα 6.6, η χρονική μεταβολή της συζυγούς θερμοκρασίας παρουσιάζεται για δύο διαφορετικές αρχικές τιμές του συζυγούς πεδίου. Όπως παρατηρείται, η επιλογή της αρχικής συνθήκης δεν επηρεάζει την ταχύτητα σύγκλισης ούτε και τη μορφή του πεδίου όταν επέλθει περιοδικότητα, επομένως θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες. Αυτό συμβαίνει διότι στην εξίσωση (6.19) δεν υπάρχει κάποιος όρος που πρέπει και μπορεί να μηδενιστεί με την επιβολή συγκεκριμένων αρχικών συνθηκών για το συζυγές πρόβλημα.

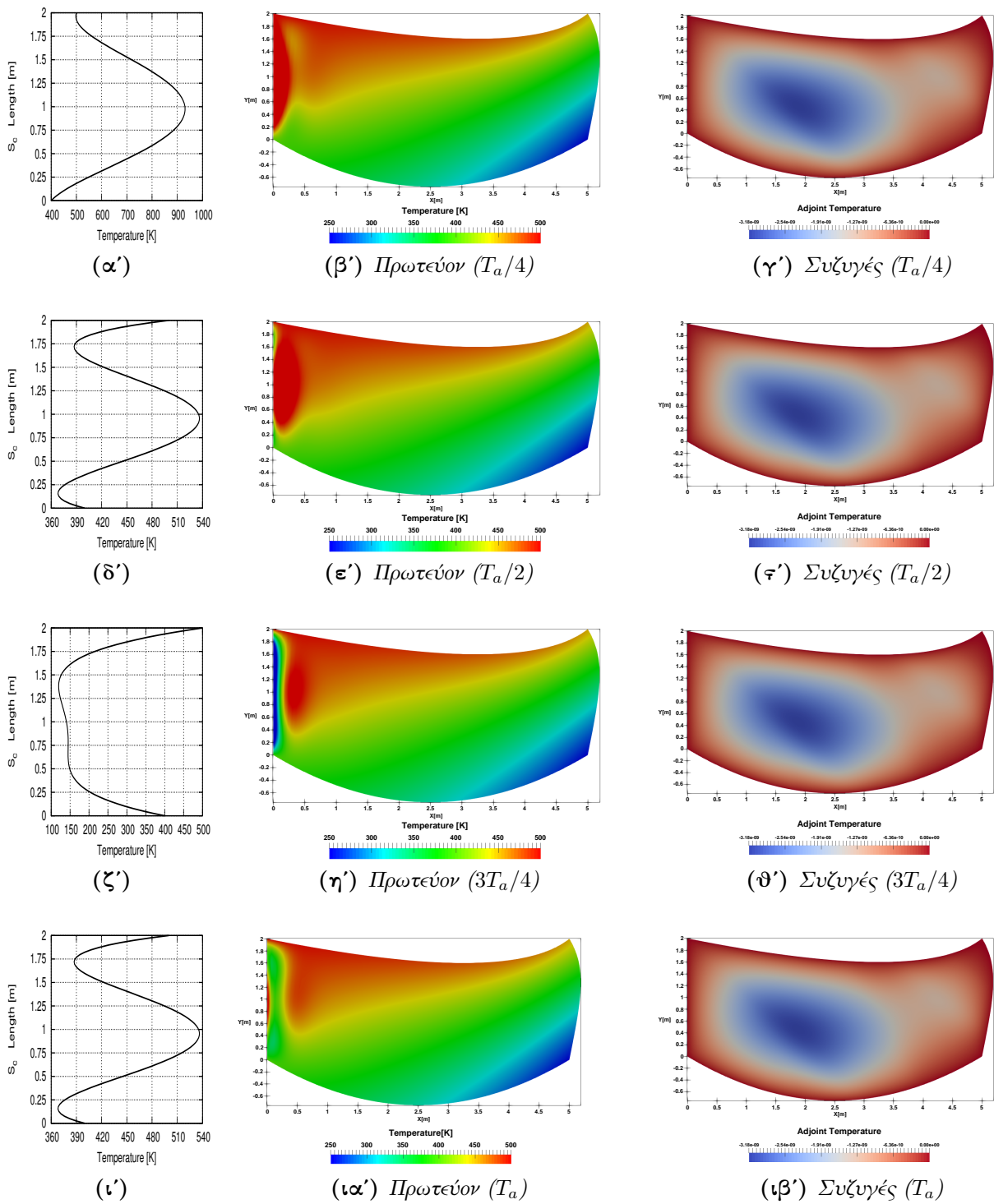
Ο όρος 2 (term 2) περιέχει την παράγωγο $\frac{\delta T}{\delta b_q}$ η οποία μηδενίζεται για τις τρεις πλευρές του ορίου, στις οποίες η κατανομή θερμοκρασίας δεν εξαρτάται από τις μεταβλητές σχεδιασμού και διατηρείται μόνο για την πλευρά S_c . Επομένως, οι ζητούμενες παράγωγοι ευαισθησίας (Sensitivity

Derivatives–SD) δίνονται από τη σχέση:

$$\frac{\delta F}{\delta b_q} = \int_{t^*}^{t^*+T_a} \int_{S_c} k \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{\delta T}{\delta b_q} dS dt, \quad q = 1, 2, 3 \quad (6.23)$$

ενώ ισχύει $\frac{\delta T}{\delta b_q}|_{S_c} = \frac{\delta T}{\delta \beta_k} \frac{\delta \beta_k}{\delta b_q}$ ($k = 1, 2, 3$) και υπολογίζεται με χρήση των σχέσεων 6.6-6.9.

Στο Σχήμα 6.7 παρουσιάζονται στιγμιότυπα των πεδίων, τόσο του πρωτεύοντος όσο και το συζυγούς προβλήματος, για κάποιες επιλεγμένες χρονικές στιγμές. Η χρονική μεταβολή του συζυγούς πεδίου είναι ανεπαίσθητη (της τάξης του 10^{-12}) όπως παρατηρείται και από το Σχήμα 6.6, με αποτέλεσμα στα στιγμιότυπα του συζυγούς πεδίου να μην είναι ορατή σε σχέση με την χωρική μεταβολή.



Σχήμα 6.7: Επιλεγμένα στιγμιότυπα του χρονικά μη-μόνιμου πρωτεύοντος και συζυγούς πεδίου με την στιγμιαία κατανομή θερμοκρασίας στο αριστερό όριο του χωρίου. Τα πεδία παρουσιάζονται για τη τελευταία περίοδο, οπότε έχει εγκαθιδρυθεί η περιοδικότητα.

6.4 Αποτελέσματα και Σύγκριση

6.4.1 Περίπτωση εκ των Υστέρων Συμπίεσης του Πεδίου

Η ΜΔΕ του πρωτεύοντος προβλήματος (6.2) ολοκληρώνεται για 10 περιόδους μέχρι να επέλθει περιοδικότητα στη λύση, ενώ κάθε περίοδος διακριτοποιείται με 100 χρονικά βήματα. Η τελευταία μόνο περίοδος αποθηκεύεται ώστε να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος (6.21), είτε στην πλήρη έκτασή της, είτε αφού υποστεί επεξεργασία από τον αλγόριθμο συμπίεσης της μεθόδου PGD. Η προς τα πίσω χρονική ολοκλήρωση της συζυγούς πεδιακής εξίσωσης εκτελείται μέχρις ότου το συζυγές πεδίο καταστεί περιοδικό.

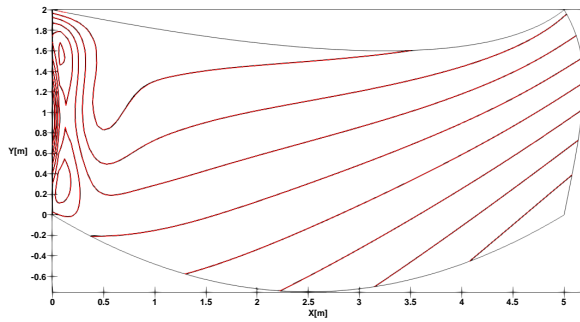
Όπως αναφέρθηκε, ο χρόνος που χρειάζεται ο συζυγής επιλύτης ώστε να επέλθει περιοδικότητα στο αντίστοιχο πεδίο είναι σχεδόν πενταπλάσιος αυτού για το πρωτεύον πρόβλημα. Οι προσομοιώσεις εκτελέστηκαν σε προσωπικό Η/Υ με 4-πύρηνο επεξεργαστή 2.5 GHz, 64-bit με 4 GB μνήμη RAM και κάθε επίλυση του πρωτεύοντος χρειάστηκε χρόνο ρολογιού περίπου 5 λεπτά ενώ η αντίστοιχη του συζυγούς προβλήματος απαιτεί περίπου 25 λεπτά.

Η βελτιστοποίηση πραγματοποιήθηκε με έναν αλγόριθμο απότομης καθόδου για 19 κύκλους και εξετάστηκαν τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις. Αρχικά, επιλύθηκε το πρόβλημα βελτιστοποίησης με πλήρη αποθήκευση του πρωτεύοντος πεδίου, ώστε να χρησιμοποιηθεί ως σημείο αναφοράς για την αξιολόγηση της επίδρασης της επεξεργασίας των αποτελεσμάτων του πρωτεύοντος προβλήματος μέσω της μεθόδου PGD στη βελτιστοποίηση. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, τα αποτελέσματα του πρωτεύοντος επιλύτη συμπιέζονται μέσω PGD πριν χρησιμοποιηθούν από τον επιλύτη του συζυγούς. Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου συμπίεσης είναι περίπου 40 δευτερόλεπτα σε χρόνο ρολογιού για την ακριβέστερη περίπτωση (με 10 όρους στο άθροισμα προσέγγισης του PGD), εξαιτίας του μεγάλου όγκου δεδομένων που πρέπει να υποστούν επεξεργασία. Άρα, η εκτέλεση ενός πλήρους κύκλου βελτιστοποίησης διήρκεσε περίπου μισή ώρα στον (χαμηλών επιδόσεων) προσωπικό Η/Υ.

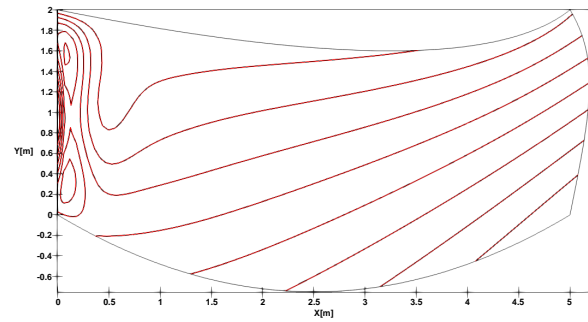
Πίνακας 6.1: Παράγωγοι ευαισθησίας για μεταβλητές σχεδιασμού $b_1 = 0.05$, $b_2 = b_3 = 0.01$ στην περίπτωση πλήρους αποθήκευσης του πεδίου και στις περιπτώσεις εκ των υστέρων συμπίεσης και ανακατασκευής του μέσω της μεθόδου PGD.

-	$\delta F/\delta b_1$	$\delta F/\delta b_2$	$\delta F/\delta b_3$
full storage	-1.3715605463477231E-004	4.5884641457681259E-006	1.3595687117018465E-002
10 modes	-1.3706538161618127E-004	4.5302353791679217E-006	1.3595206334453779E-002
7 modes	-1.3835909544902982E-004	5.3225537378645342E-006	1.3649385607253225E-002
5 modes	-1.3990552856595566E-004	5.9500544510322297E-006	1.3745158676937694E-002

Στον Πίνακα 6.1 παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας που προκύπτουν για τις τρεις μεταβλητές σχεδιασμού στις διαφορετικές περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Παρατηρείται ότι, ήδη με χρήση μόνο 10 όρων στο άθροισμα προσέγγισης του χρονικά μη-μόνιμου πεδίου, οι παράγωγοι ευαισθησίας είναι πολύ κοντά σε αυτές της πλήρους αποθήκευσης. Ακόμα στα Σχήματα 6.8 και 6.9 γίνεται σύγκριση μεταξύ του πλήρους πεδίου και των αντίστοιχων ανακατασκευασμένων μέσω PGD, για επιλεγμένες χρονικές στιγμές μέσα στην περίοδο T_a και για συγκεκριμένο αριθμό βάσεων. Οι ισοθερμοκρασιακές καμπύλες που παρουσιάζονται (με μαύρο για το πραγματικό πεδίο και κόκκινο για το ανακατασκευασμένο) αντιστοιχούν σε ίδιες θερμοκρασίες για τα δύο πεδία ώστε να γίνει εμφανής η ποιότητα της προσέγγισης. Με χρήση ακόμα και μικρού αριθμού βάσεων, οι καμπύλες συμπίπτουν.

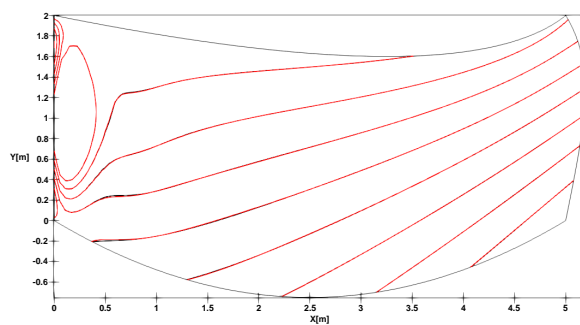


(α') 7 βάσεις PGD

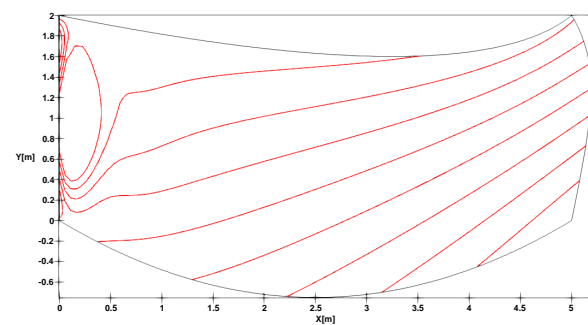


(β') 10 βάσεις PGD

Σχήμα 6.8: Χρονική στιγμή T_a . Με μαύρο χρώμα οι ισοθερμοκρασιακές καμπύλες του πλήρως αποθηκευμένου πεδίου και με κόκκινο οι αντίστοιχες για το ανακατασκευασμένο πεδίο.



(α') 7 βάσεις PGD

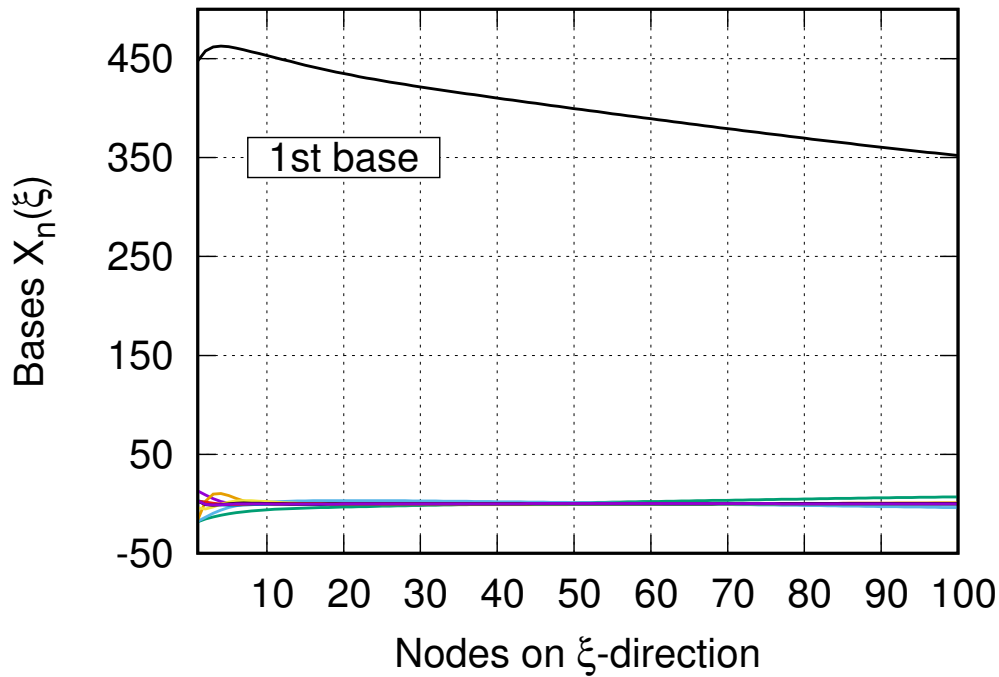


(β') 10 βάσεις PGD

Σχήμα 6.9: Χρονική στιγμή $T_a/2$. Με μαύρο χρώμα οι ισοθερμοκρασιακές καμπύλες του πλήρως αποθηκευμένου πεδίου και με κόκκινο οι αντίστοιχες για το ανακατασκευασμένο πεδίο.

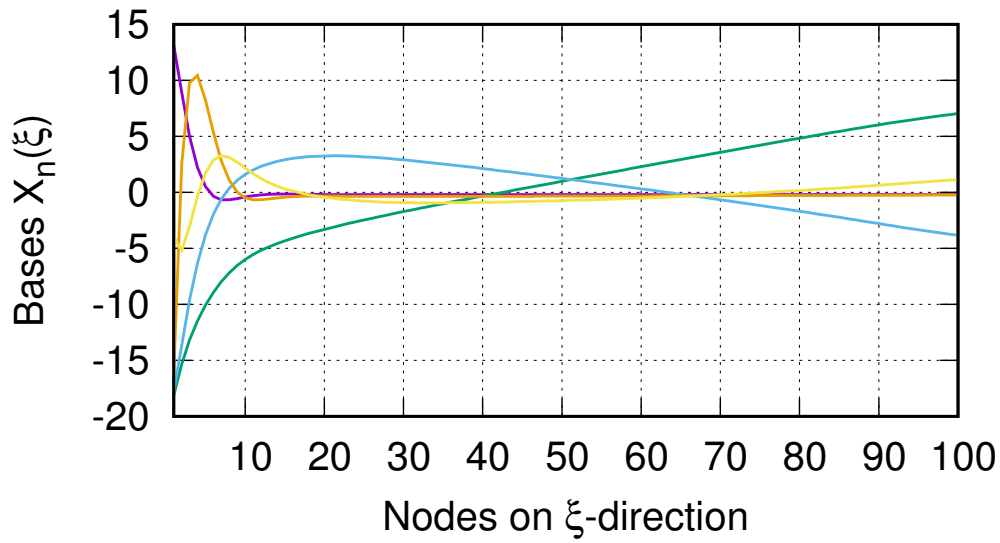
Στα Σχήματα 6.10-6.13 παρουσιάζεται η μορφή των 1Δ συναρτήσεων του κατά PGD αθροίσματος προσέγγισης του χρονικά μη-μόνιμου πεδίου, για τις αρχικές τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, στην περίπτωση όπου χρησιμοποιούνται $M=10$ συναρτήσεις βάσης.

Για τη συμπίεση του χρονικά μη-μόνιμου πεδίου, σε κάθε εσωτερική επανάληψη ενός βήματος εμπλουτισμού πρώτα υπολογίζονται οι συναρτήσεις $X(\xi)$ έπειτα οι $Y(\eta)$ και τέλος οι $T(\tau)$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η πρώτη συνάρτηση που θα υπολογιστεί να περιέχει και το μεγαλύτερο ποσοστό χρήσιμης πληροφορίας για την ανακατασκευή του πεδίου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αυτή είναι η $X_1(\xi)$ και, από το Σχήμα 6.10, είναι αισθητή η διαφορά σε μέγεθος τιμών που εμφανίζει σε σχέση με τις υπόλοιπες, τόσο κατά την ίδια κατεύθυνση (Σχήμα 6.11), όσο και για τις άλλες δύο κατευθύνσεις (Σχήμα 6.12 & Σχήμα 6.13).

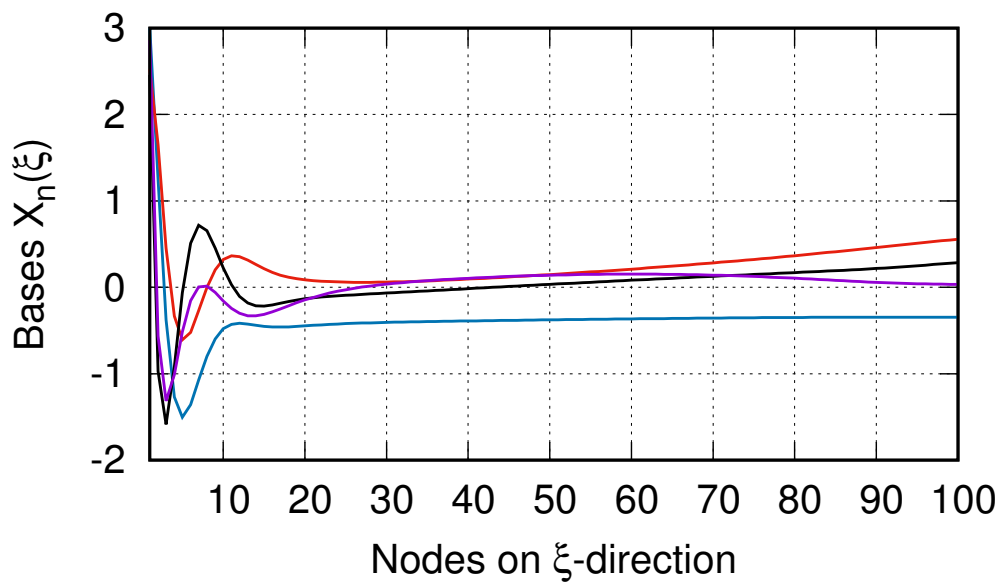


Σχήμα 6.10: 1Δ συναρτήσεις βάσης εξαρτώμενες από την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη ξ για την περίπτωση προσέγγισης του πεδίου που προκύπτει για τις αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού με 10 όρους στο άθροισμα προσέγγισης.

Θα μπορούσε κανείς να συμπεράνει, ότι η πρώτη βάση που υπολογίζεται κάνει μία αδρή (με τη καλή έννοια του όρου) προσέγγιση της τάξης μεγέθους που έχουν οι τιμές του πεδίου και, έπειτα, οι υπόλοιπες βάσεις αναλαμβάνουν να προσεγγίσουν λεπτομερέστερα τις χωρικές και χρονικές μεταβολές. Ακόμα, αξίζει να παρατηρηθεί η αναμενόμενη απότομη μεταβολή των συναρτήσεων X κοντά στο αριστερό άκρο του χωρίου ώστε να προσεγγίσουν επαρκώς την έντονη χρονική μεταβολή του θερμοκρασιακού πεδίου σε εκείνα τα σημεία λόγω της οριακής συνθήκης (Εξίσωση 6.4α').

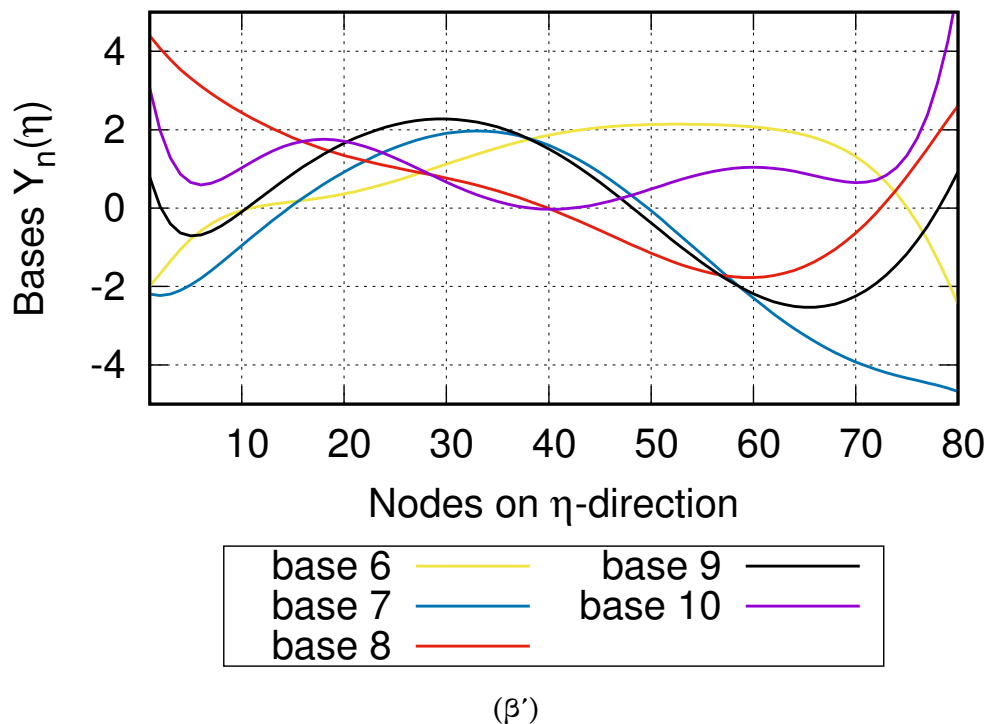
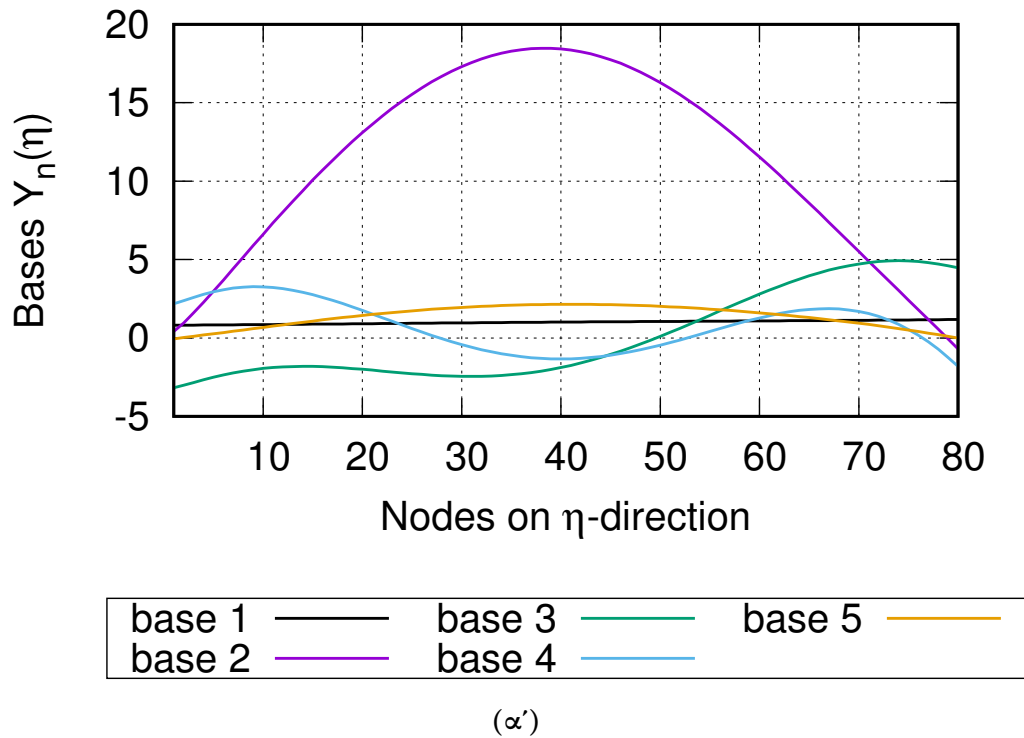


(α')

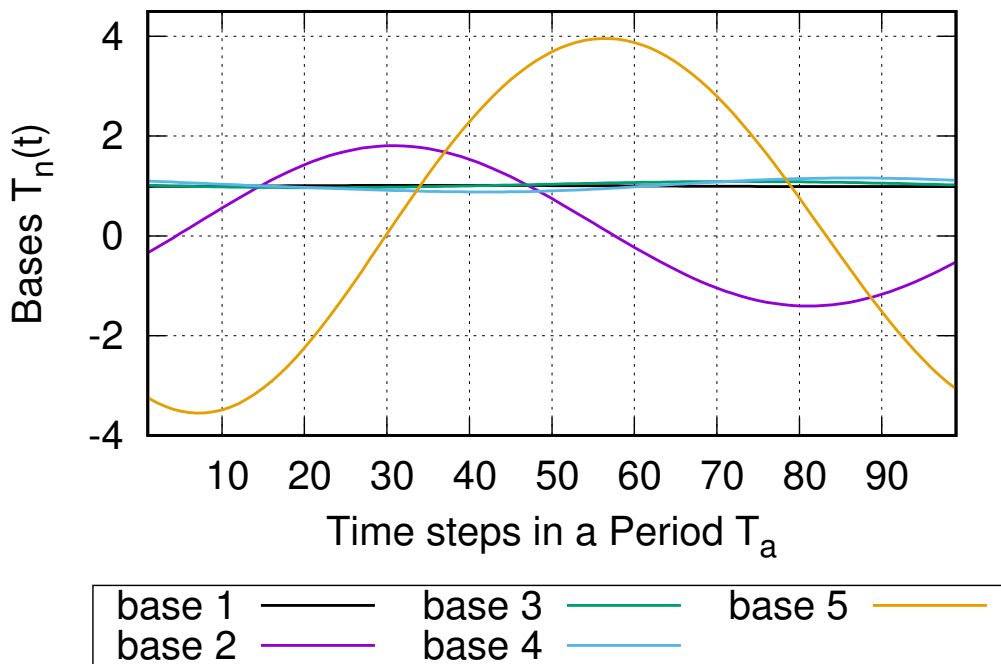


(β')

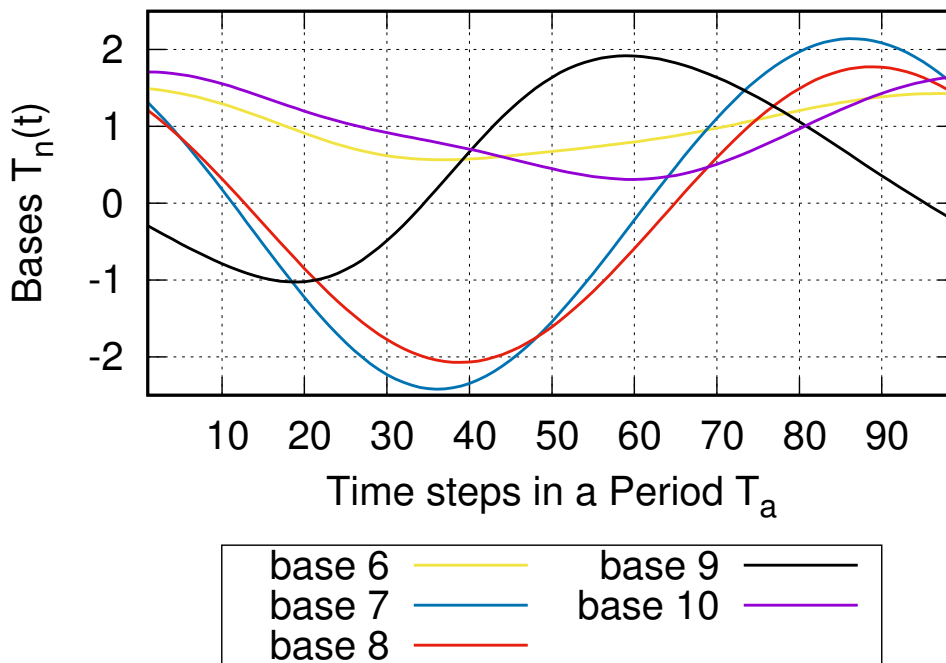
Σχήμα 6.11: 1Δ συναρτήσεις βάσης εξαρτώμενες από την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη ξ για την περίπτωση προσέγγισης του πεδίου που προκύπτει για τις αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού με 10 όρους στο άθροισμα προσέγγισης.



Σχήμα 6.12: 1Δ συναρτήσεις βάσης εξαρτώμενες από την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη η για την περίπτωση προσέγγισης του πεδίου που προκύπτει για τις αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού με 10 όρους στο άθροισμα προσέγγισης.



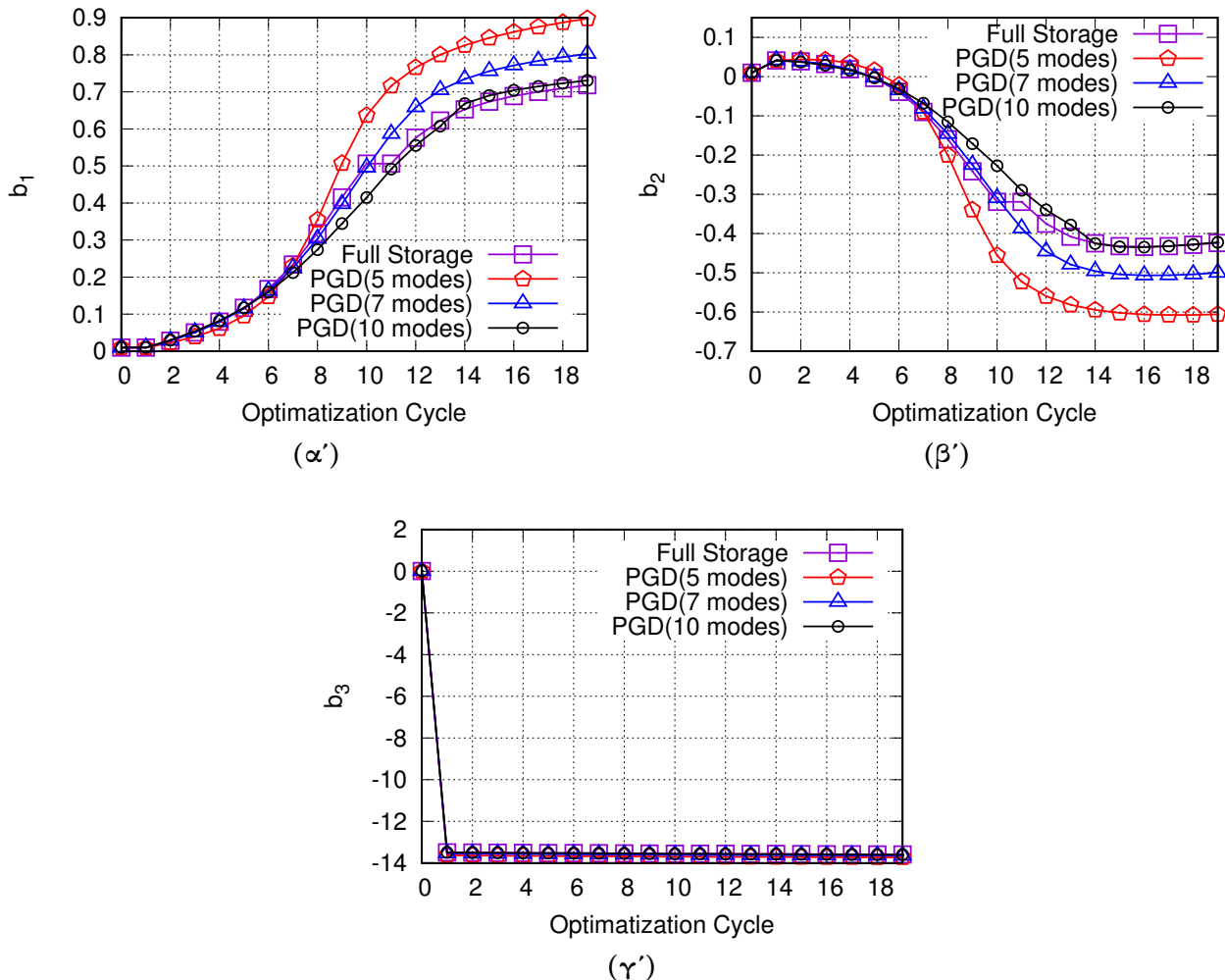
(α')



(β')

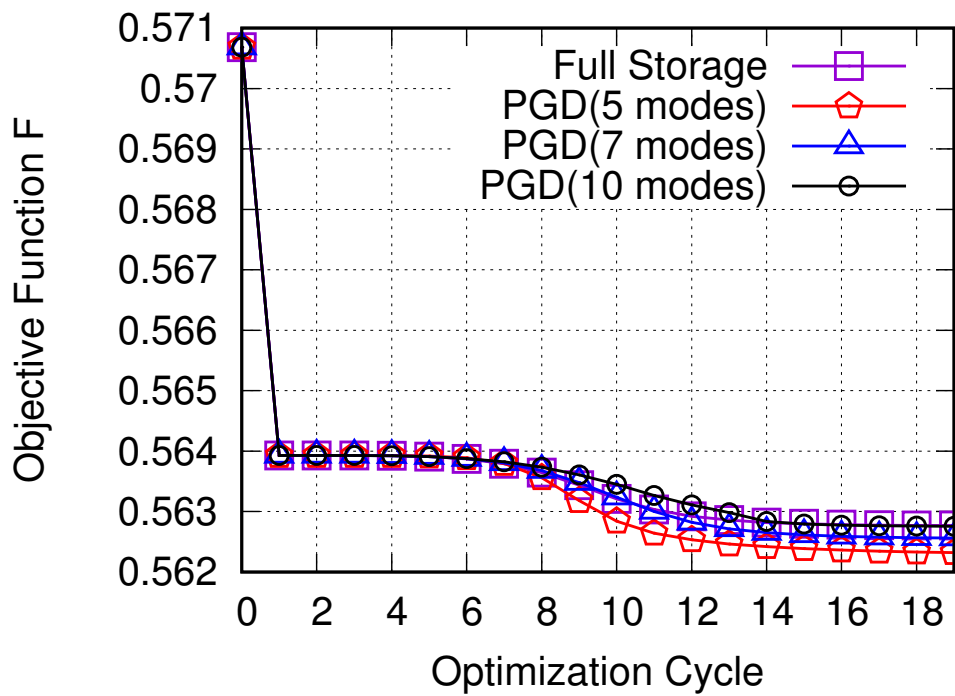
Σχήμα 6.13: 1Δ χρονικά εξαρτώμενες συναρτήσεις βάσης για την περίπτωση προσέγγισης του πεδίου που προκύπτει για τις αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού με 10 όρους στο άθροισμα προσέγγισης.

Η εξέλιξη των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.14. Για μικρό αριθμό όρων στην προσέγγιση μέσω PGD, παρατηρείται μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ των καμπυλών μεταβολής των μεταβλητών σχεδιασμού σε σχέση με την περίπτωση της πλήρους αποθήκευσης. Αξιοσημείωτο είναι ότι η απόκλιση αυτή αυξάνει όσο εξελίσσεται ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης καθώς το σφάλμα από τις προσεγγιστικές ανακατασκευές των επιθυμητών πρωτεύοντων πεδίων συσσωρεύεται. Για 10 όρους, οι αντίστοιχες καμπύλες συμπίπτουν σχεδόν πλήρως και οδηγούν με πολύ μικρό σφάλμα στις ίδιες βέλτιστες μεταβλητές (αναμενόμενο εφόσον, όπως ελέγχθη παραπάνω, για 10 όρους το ανακατασκευασμένο πεδίο συμπίπτει με αμελητέο σφάλμα με το πραγματικό).

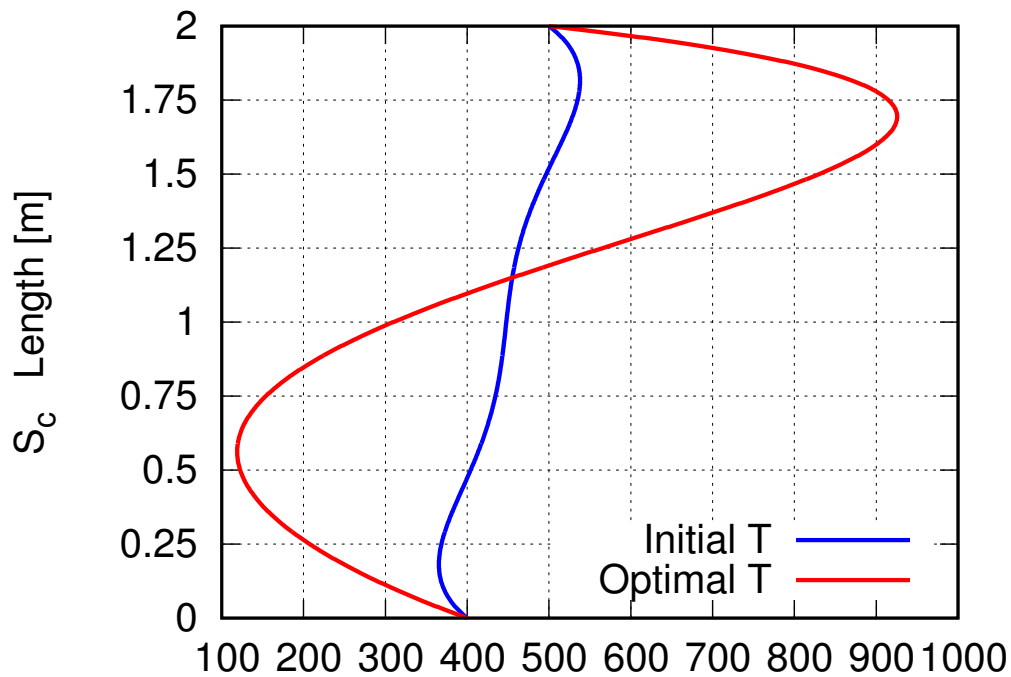


Σχήμα 6.14: Μεταβολή των τριών μεταβλητών σχεδιασμού κατά τη διάρκεια των διαφορετικών περιπτώσεων βελτιστοποίησης που εξετάστηκαν.

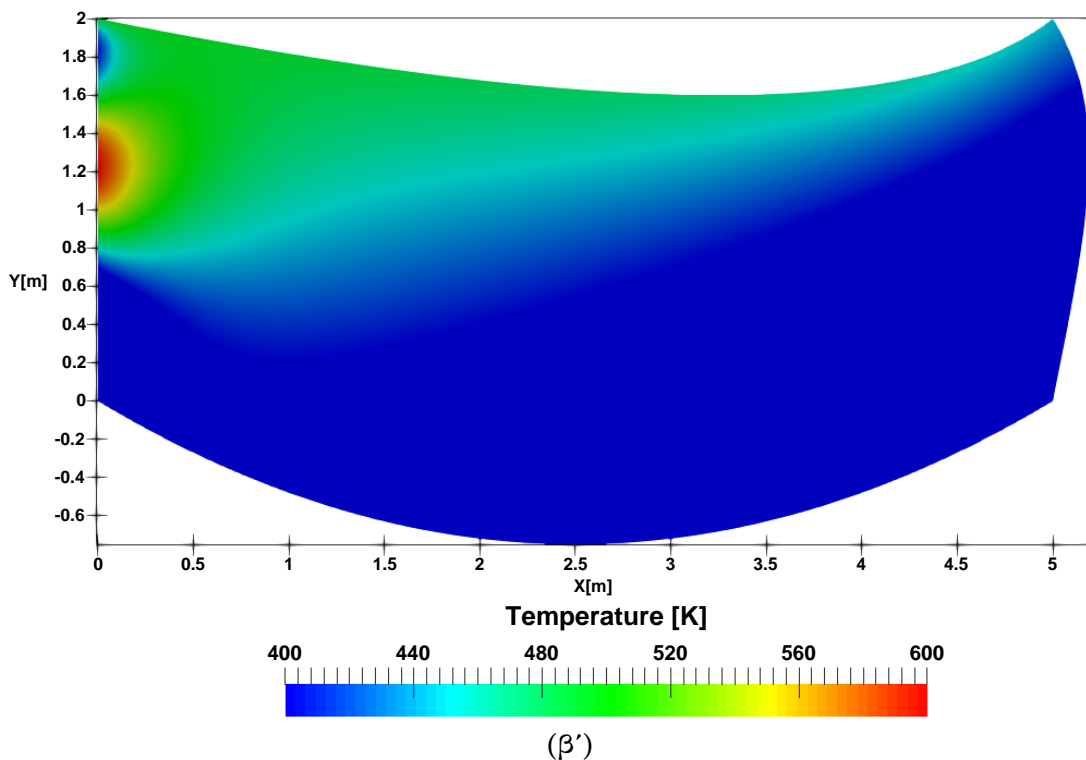
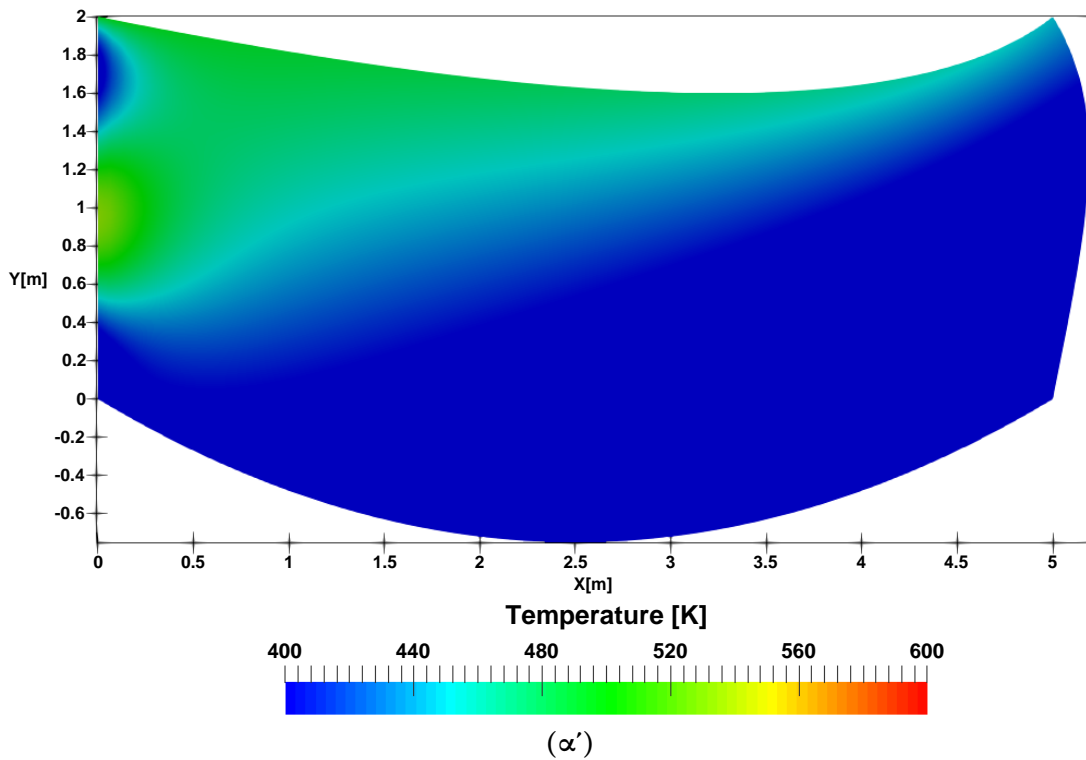
Αντίστοιχη συμπεριφορά διακρίνεται και στο διάγραμμα σύγκλισης της συνάρτησης κόστους του προβλήματος βελτιστοποίησης (Σχήμα 6.15), όπου οι περιπτώσεις της πλήρους αποθήκευσης και της συμπίεσης με 10 όρους συμπίπτουν. Επομένως, η χρήση της μεθόδου PGD δεν φαίνεται να επηρεάζει την αξιοπιστία της εύρεσης των παραγώγων ευαισθησίας που χρησιμοποιούνται στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης. Για λόγους πληρότητας, τα Σχήματα 6.16 και 6.17 παρουσιάζουν την αρχική και τελική κατανομή της \tilde{T} καθώς και τα μέσα χρονικά θερμοκρασιακά πεδία για την αρχική και τη βέλτιστη περίπτωση.



Σχήμα 6.15: Σύγκριση Συνάρτησης Κόστους για τις τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις που εξετάστηκαν.



Σχήμα 6.16: Αρχική και βελτιστοποιημένη κατανομή θερμοκρασίας στο αριστερό όριο του χωρίου. Η βέλτιστη κατανομή προέκυψε με πλήρη αποθήκευση της λύσης του πρωτεύοντος προβλήματος.



Σχήμα 6.17: Υπολογιστικό χωρίο για το μη-μόνιμο πρόβλημα αγωγής θερμότητας με χρονικά μεταβαλλόμενη κατανομή θερμοκρασίας στο αριστερό όριο. Χρονικά μέσες κατανομές για (α') την αρχική \tilde{T} με $b_1=b_2=b_3=0.01$ και (β') τη βέλτιστη με $b_1=0.7325$, $b_2=-0.4127$, $b_3=-13.5195$.

6.4.2 Περίπτωση Σταδιακής Συμπίεσης κατά τη Χρονική Ολοκλήρωση

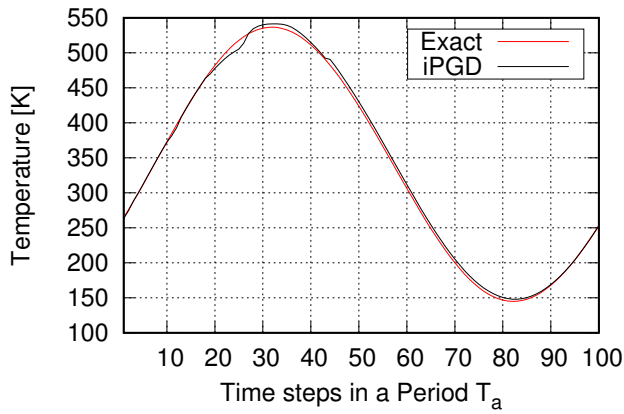
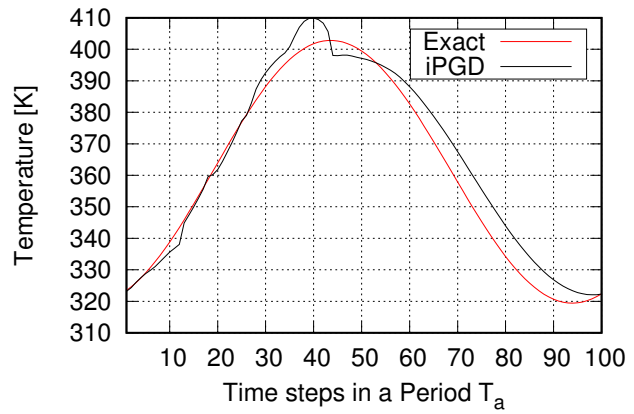
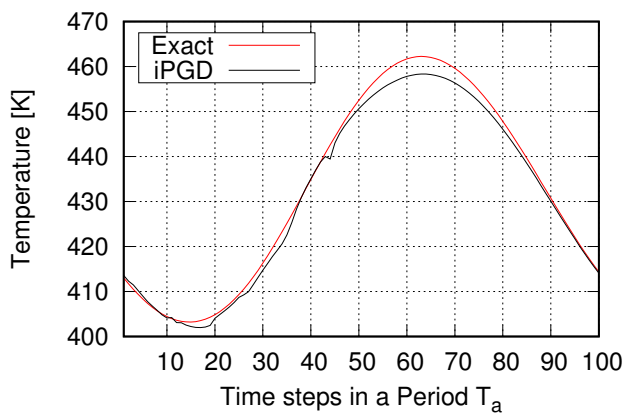
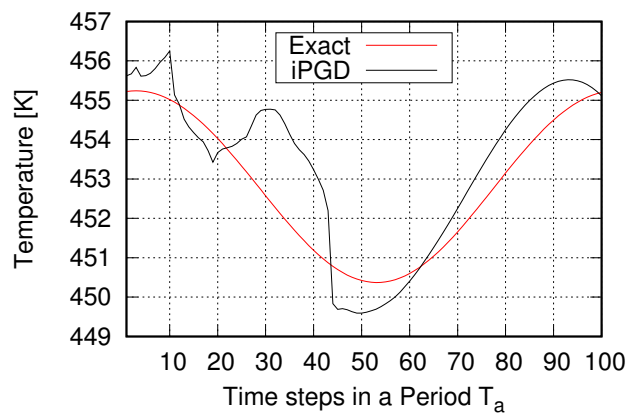
Σε αυτήν την εκδοχή, πάλι η ΜΔΕ του πρωτεύοντος προβλήματος (εξίσωση 6.2) ολοκληρώνεται για 10 περιόδους μέχρι να επέλθει περιοδικότητα στην λύση και μόνο τα χρονικά βήματα της τελευταίας περιόδου επεξεργάζονται μέσω της μεθόδου iPGD. Έπειτα το συμπίεσμένο, σε σχέση με το πραγματικό, πεδίο που θα προκύψει τροφοδοτεί το συζυγή επιλύτη ο οποίος κινείται αντίθετα στο χρόνο μέχρι να επέλθει και σε αυτόν περιοδικότητα. Από την τελευταία περίοδο υπολογίζονται οι ζητούμενες παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού που χρησιμοποιούνται για την εκτέλεση της βελτιστοποίησης με μία μέθοδο απότομης καθόδου.

Σε αντίθεση με την περίπτωση της απλής εκ των υστέρων συμπίεσης του πεδίου, στη χρονικά σταδιακή συμπίεση, εκτός από τον αριθμό των όρων του αθροίσματος που θα χρησιμοποιηθούν, την ποιότητα της προσέγγισης επηρεάζει και ο συντελεστής βαρύτητας w που υπάρχει στις εξισώσεις (5.3) και (5.5). Επομένως, πριν την εκτέλεση της βελτιστοποίησης, για λόγους ανάλυσης, θα προηγηθεί εδώ μία παραμετρική μελέτη για τον συντελεστή w και τον αριθμό βάσεων στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Ως μέτρο σύγκρισης επιλέγεται το συνολικό σχετικό τετραγωνικό σφάλμα όπως ορίζεται από την εξίσωση (5.13). Στον Πίνακα 6.2 παρουσιάζονται, ενδεικτικά, οι τιμές του σφάλματος αυτού για σταθερό αριθμό βάσεων και διαφορετικές τιμές παραμέτρου w και σταθερή τιμή w και διαφορετικό αριθμό βάσεων αντίστοιχα.

Πίνακας 6.2: Συνολικό τετραγωνικό σχετικό σφάλμα ανακατασκευασμένου πεδίου με τον αλγόριθμο της μεθόδου iPGD σε σχέση με το πραγματικό πεδίο που προκύπτει ως λύση της εξίσωσης (6.1) για την τελευταία περίοδο του φαινομένου. Παρουσιάζεται το σφάλμα \mathcal{E} για μία περίπτωση σταθερού αριθμού βάσεων και μεταβλητού w , και μία δεύτερη όπου διατηρείται για σταθερή η παράμετρος βάρους και αλλάζει ο αριθμός των βάσεων για την προσέγγιση του πεδίου.

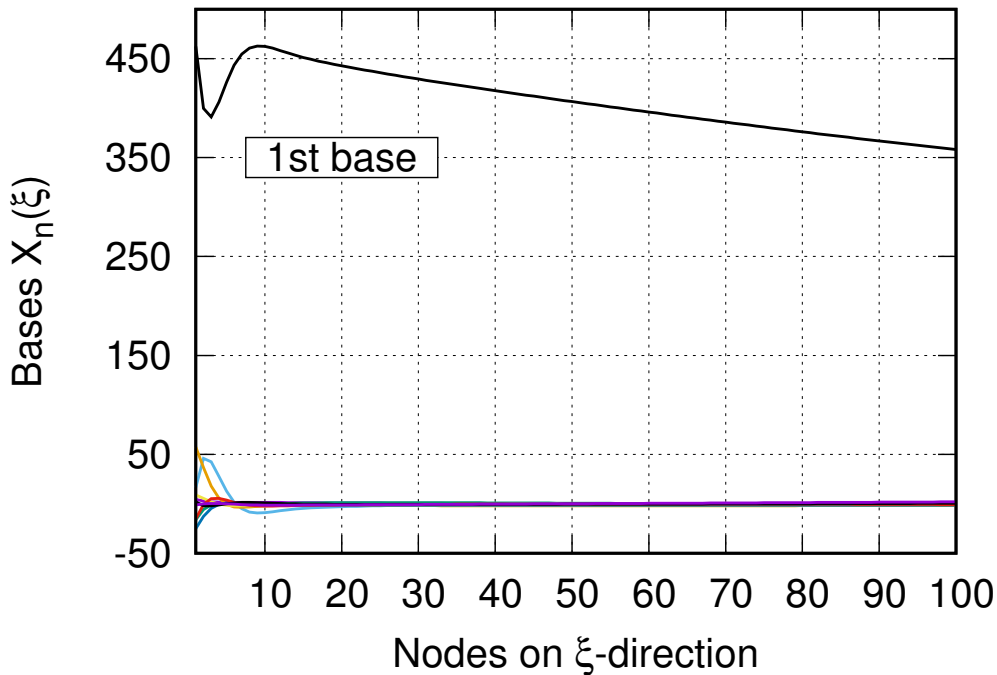
$w = 50$					
number of modes M	10	15	20	25	30
\mathcal{E}	7.022E-4	3.796E-4	1.259E-4	9.189E-5	5.642E-5
number of Modes $M = 30$					
weight w	1000	200	80	50	10
\mathcal{E}	4.004E-4	1.362E-4	4.192E-4	5.64E-5	2.465E-4

Στον Πίνακα 6.2 παρατηρείται ότι, για σταθερή παράμετρο βάρους w , η αύξηση του αριθμού των βάσεων μειώνει το σχετικό σφάλμα, επομένως βελτιώνει την ποιότητα της προσεγγιστικής αναπαράστασης του πεδίου. Για την τιμή της παραμέτρου βαρύτητας δεν μπορεί να εξαχθεί ένα σαφές συμπέρασμα για το ποια είναι η κατάλληλη τιμή της καθώς παρατηρείται ότι για μεγάλες τιμές το σφάλμα είναι αρκετά μεγάλο (άρα αδύναμη προσέγγιση του πεδίου), έπειτα παρουσιάζει μια ελάχιστη τιμή για $w = 50$, αλλά, έπειτα, για ακόμα μικρότερες τιμές (π.χ. για $w = 10$) το σφάλμα αυξάνεται εκ νέου. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο σημείο, η κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου w εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος και την εμπειρία του χρήστη. Σε αυτήν την εργασία δεν μελετήθηκε διεξοδικά και σε βάθος ο τρόπος με τον οποίο ο συντελεστής αυτός επηρεάζει την ποιότητα της προσέγγισης ώστε να εξαχθεί κάποιο ακριβές κριτήριο το οποίο θα δίνει με αυστηρό τρόπο την τιμή (ή τις τιμές σε περίπτωση που δεν παραμένει σταθερός) που πρέπει να λαμβάνει κατά την διάρκεια της εξέλιξης της αλγοριθμικής διαδικασίας. Περαιτέρω μελέτη του συγκεκριμένου θέματος στο μέλλον μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερα και πιο αξιόπιστα συμπεράσματα.

(α') $L = 110$ (β') $L = 250$ (γ') $L = 510$ (δ') $L = 1000$

Σχήμα 6.18: Χρονική μεταβολή τιμών θερμοκρασίας για επιλεγμένους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος. Παρουσιάζεται η πραγματική καμπύλη σε σύγκριση με την καμπύλη που προκύπτει μετά την ανακατασκευή του πεδίου με τη μέθοδο PGD

Στα διαγράμματα 6.18 παρουσιάζεται η χρονική μεταβολή των τιμών επιλεγμένων κόμβων για την περίπτωση του ακριβούς πλήρως αποθηκευμένου πεδίου και των αντίστοιχων για το πεδίο που ανακατασκευάστηκε μέσω 30 βάσεων που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο iPGD. Η αρίθμηση των κόμβων πάνω στο δομημένο υπολογιστικό πλέγμα γίνεται μέσω του τύπου $L = (i-1)*J + j$ με $i \in (1, I)$ και $j \in (1, J)$. Παρατηρείται ότι για τους κόμβους που βρίσκονται εγγύτερα στην πηγή της χρονικής μη-μονιμότητας (που στην προκειμένη περίπτωση είναι η ταλάντωση της θερμοκρασίας του αριστερού ορίου του υπολογιστικού χωρίου) η προσέγγιση που επιτυγχάνει η μέθοδος iPGD είναι πολύ ακριβής. Μακρύτερα από το όριο η προσέγγιση αυτή γίνεται χειρότερη εισάγοντας σφάλματα στην αναπαράσταση του 2Δ χρονικά μη-μόνιμου πεδίου.



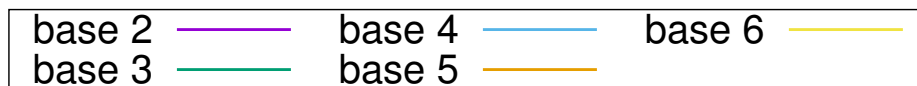
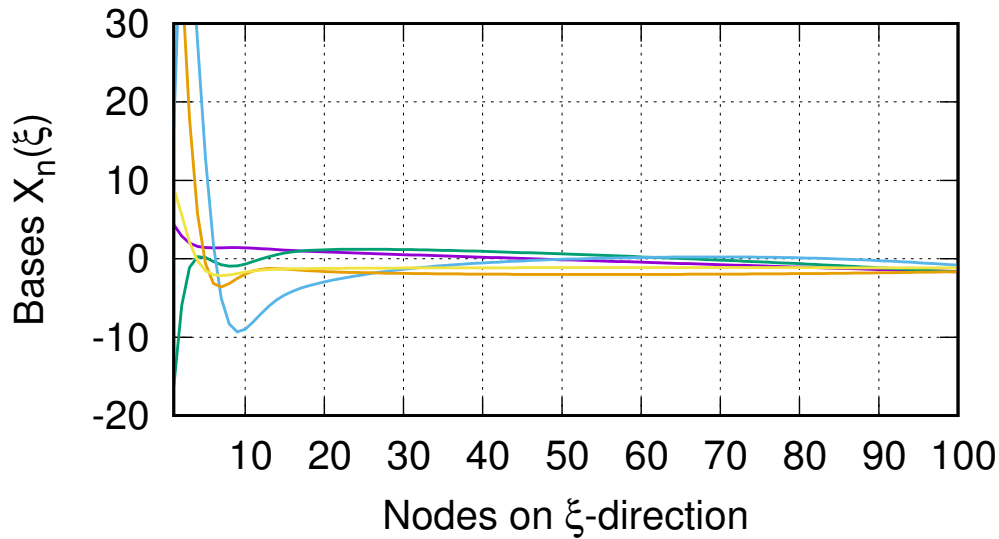
Σχήμα 6.19: 1Δ συναρτήσεις βάσης εξαρτώμενες από την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη ξ για την περίπτωση προσέγγισης του πεδίου που προκύπτει για τις αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού.

Επιπλέον παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.19–6.22 οι μορφές που έχουν οι 10 πρώτες 1Δ συναρτήσεις βάσης X , Y και T , όπως αυτές υπολογίστηκαν για το 2Δ μη-μόνιμο πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας μέσω της μεθόδου iPGD. Οι μορφές που εμφανίζουν οι βάσεις αυτές μπορούν να αντιπαραβληθούν με τις αντίστοιχες που προκύπτουν από την εκ των υστέρων συμπίεση του 2Δ μη-μόνιμου πεδίου μέσω της κλασικής μεθόδου PGD (Σχήματα 6.10–6.13). Και εδώ η X_1 εμφανίζει τις μεγαλύτερες τιμές και παίζει τον σημαντικό ρόλο να καθορίσει την τάξη μεγέθους των τιμών του πεδίου. Όσον αφορά τις υπόλοιπες κατά την ξ -κατεύθυνση βάσεις, αυτές εμφανίζουν παρόμοια μορφή με πριν, με έντονες εναλλαγές στην αρχή (εκεί δηλαδή που το πεδίο εμφανίζει μεγάλες θερμοκρασιακές μεταβολές) οι οποίες εξομαλύνονται στη συνέχεια που η θερμοκρασία έχει μία πιο ομοιόμορφη κατανομή. Αντίστοιχη είναι και η συμπεριφορά των βάσεων κατά την η -κατεύθυνση.

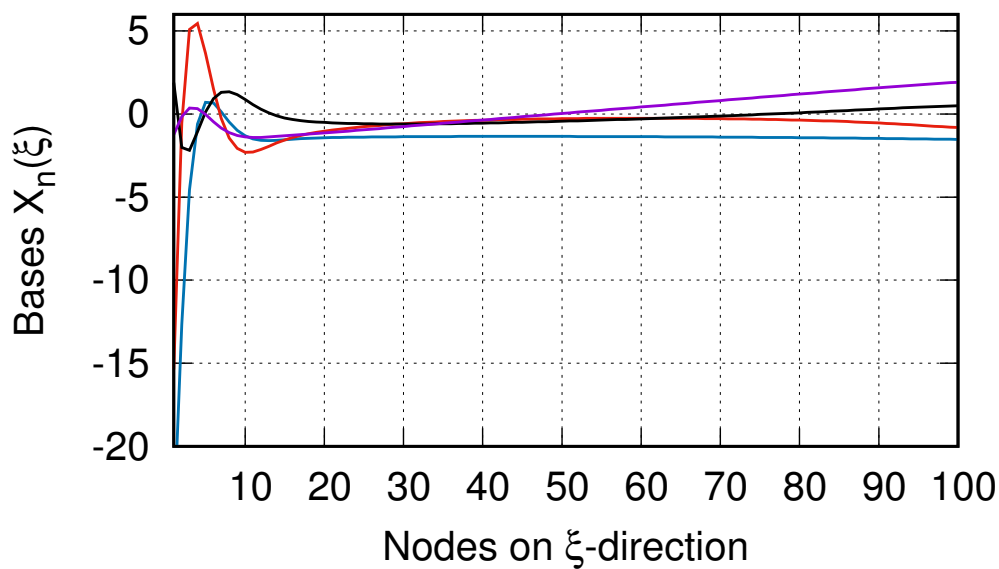
Διαφοροποίηση σε σχέση με την εκ των υστέρων συμπίεση του πεδίου παρουσιάζουν οι 1Δ χρονικές συναρτήσεις βάσης. Εδώ παρουσιάζεται ιδιαιτερότητα ήδη από την εξαγωγή των εξισώσεων, εφόσον οι συναρτήσεις αυτές (ή πιο συγκεκριμένα τα διανύσματα των διακριτών τιμών τους) δεν έχουν σταθερή διάσταση, αλλά η διάστασή τους αυξάνει καθώς προστίθεται ένα στοιχείο σε κάθε νέο χρονικό βήμα. Όπως αναφέρθηκε στην περιγραφή της μεθόδου στο Κεφάλαιο 5, για κάθε νέο χρονικό βήμα $K + 1$ οι βάσεις X_i , Y_j και T_k με $k < K + 1$ ανανεώνονται με βάση τις εξισώσεις (5.3), (5.5) και (5.7) αντίστοιχα, ενώ προστίθεται επιπλέον και η νέα τιμή T_{K+1} που υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης (5.9). Η διαφορετική εξίσωση που χρησιμοποιείται για ένα μόνο στοιχείο των T συναρτήσεων μπορεί να εισάγει απότομες εναλλαγές ή ασυνέχειες που επηρεάζουν αρνητικά την ποιότητα της αναπαράστασης. Οι ασυνέχειες αυτές μπορούν να γίνουν εμφανείς στο συγκεκριμένο πρόβλημα κοντά στην περιοχή του δέκατου χρονικού βήματος για την 5η, 6η και 7η βάση που παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.22.

Όσον αφορά το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου, η μέθοδος iPGD έχει το μειονέκτημα να είναι αρκετά χρονοβόρα, κάτι που παρουσιάζεται αναπόφευκτα λόγω του σταδιακού χρονικά υπολογισμού και ανανέωσης των βάσεων. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση που μελετήθηκε εδώ, ο χρόνος που απαιτείται για τη σταδιακή συμπίεση, με χρήση 10 όρων προσέγγισης, προέκυψε 4

φορές μεγαλύτερος από τον χρόνο επίλυσης του πρωτεύοντος προβλήματος. Σε αυτό συμβάλλει ο μεγάλος όγκος ολοκληρωμάτων που πρέπει να υπολογιστεί, ο οποίος αυξάνει όσο περνούν τα χρονικά βήμα. Περαιτέρω μελέτη πρέπει να γίνει σε αυτόν τον τομέα, ώστε να βελτιωθεί η ταχύτητα και αποδοτικότητα του αλγορίθμου. Υπενθυμίζεται ότι αυτή είναι η πρώτη φορά που υλοποιείται ο iPGD αλγόριθμος, οποίος δεν συναντάται στη βιβλιογραφία.

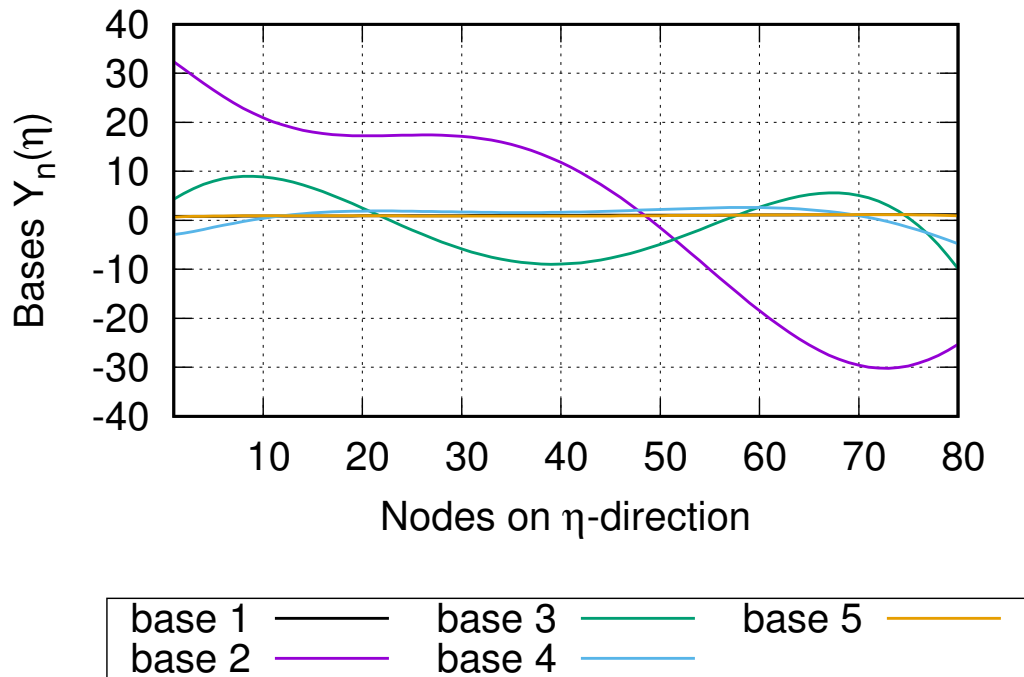


(α')

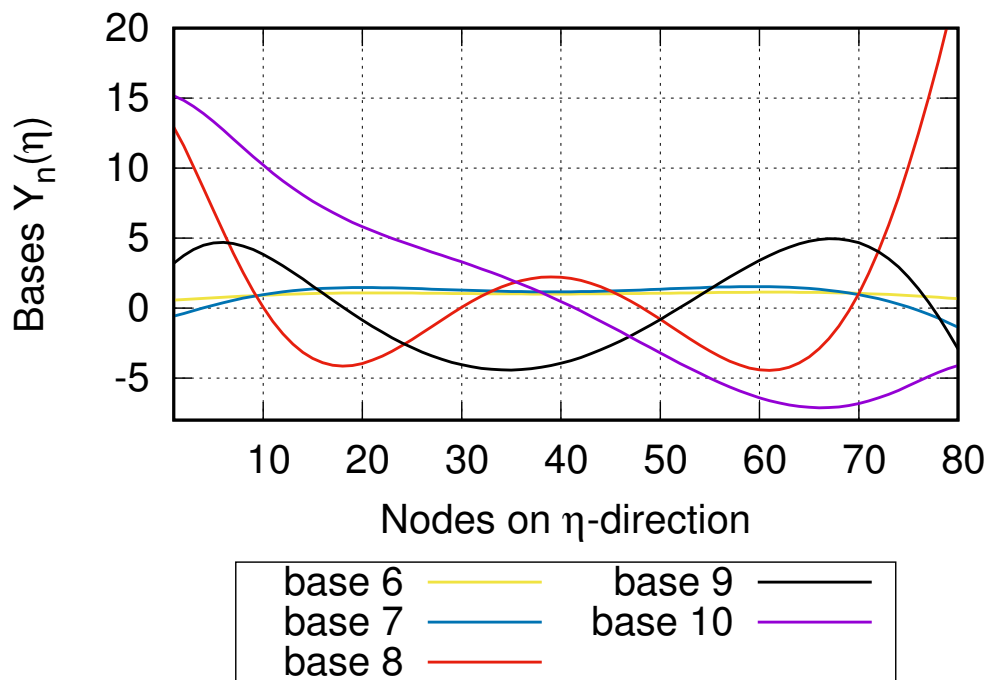


(β')

Σχήμα 6.20: 1Δ συναρτήσεις βάσης εξαρτώμενες από την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη ξ για την περίπτωση προσέγγισης του πεδίου που προκύπτει για τις αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού με 10 όρους στο άθροισμα προσέγγισης.

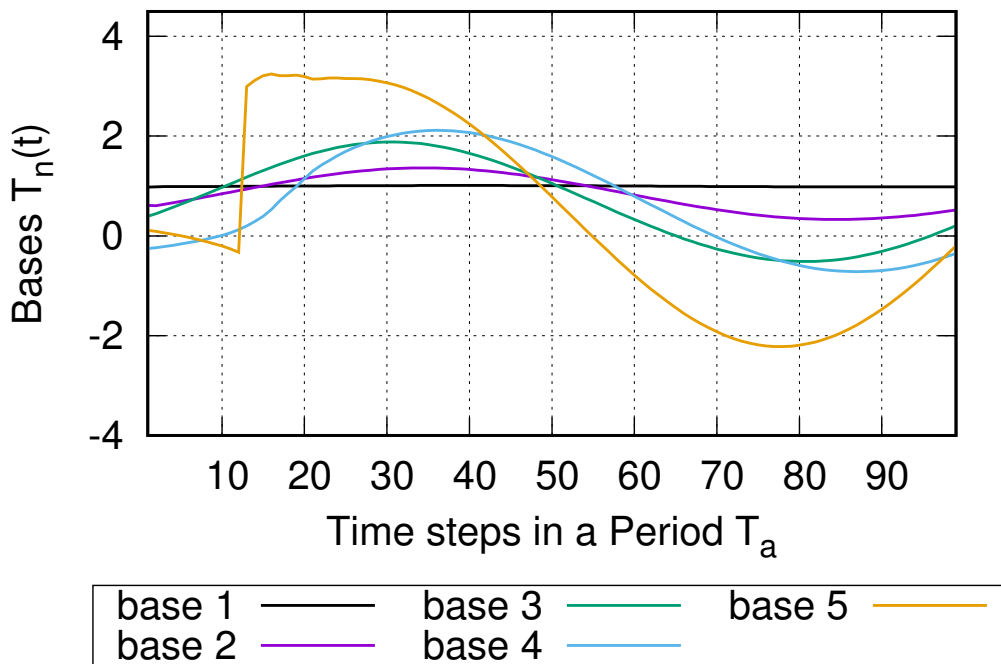


(α')

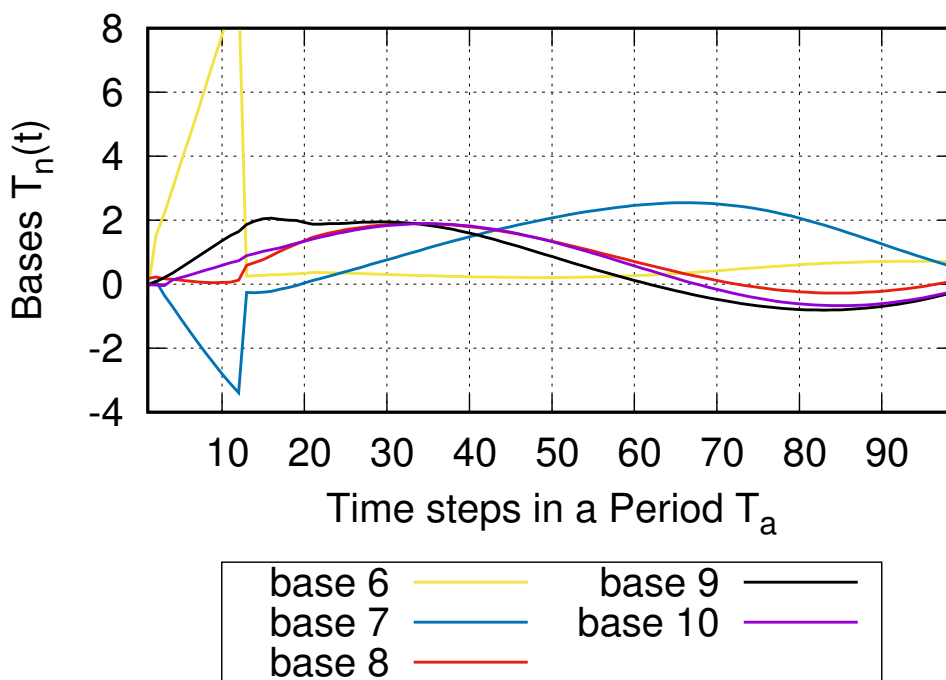


(β')

Σχήμα 6.21: 1Δ συναρτήσεις βάσης εξαρτώμενες από την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη η για την περίπτωση προσέγγισης του πεδίου που προκύπτει για τις αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού με 10 όρους στο άθροισμα προσέγγισης.



(α')



(β')

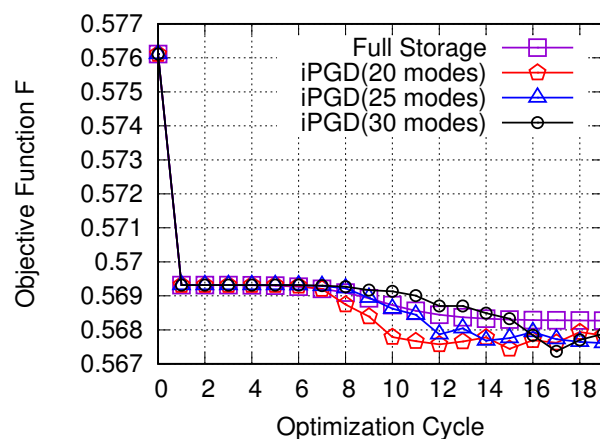
Σχήμα 6.22: 1Δ χρονικά εξαρτώμενες συναρτήσεις βάσης για την περίπτωση προσέγγισης του πεδίου που προκύπτει για τις αρχικές μεταβλητές σχεδιασμού με 10 όρους στο άθροισμα προσέγγισης.

Επόμενο ζητούμενο είναι η διαπίστωση της μεθόδου στην βελτιστοποίηση. Για την εκτέλεσή της χρησιμοποιείται εδώ ως παράμετρος βαρύτητας w η τιμή $w = 50$ εφόσον αυτή δίνει το μικρότερο σφάλμα μεταξύ των περιπτώσεων που εξετάστηκαν. Η βελτιστοποίηση εκτελείται τέσσερις φορές: μία με πλήρη αποθήκευση του πεδίου και άλλες τρεις για τα ανακατασκευασμένα πεδία μέσω του αλγορίθμου της μεθόδου iPGD για διαφορετικό αριθμό όρων στο άθροισμα προσέγγισης της μεθόδου. Σημειώνεται εδώ ότι χρησιμοποιήθηκαν περισσότερες βάσεις σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση της εκ των υστέρων συμπίεσης του πεδίου που εξετάστηκε στην Υπό-ενότητα 6.4.1.

Πίνακας 6.3: Παράγωγοι ευαισθησίας για μεταβλητές σχεδιασμού $b_1 = 0.05$, $b_2 = b_3 = 0.01$ στην περίπτωση πλήρους αποθήκευσης του πεδίου και στις περιπτώσεις σταδιακής συμπίεσης κατά τη διάρκεια της χρονικής ολοκλήρωσης και ανακατασκευής του μέσω της μεθόδου iPGD.

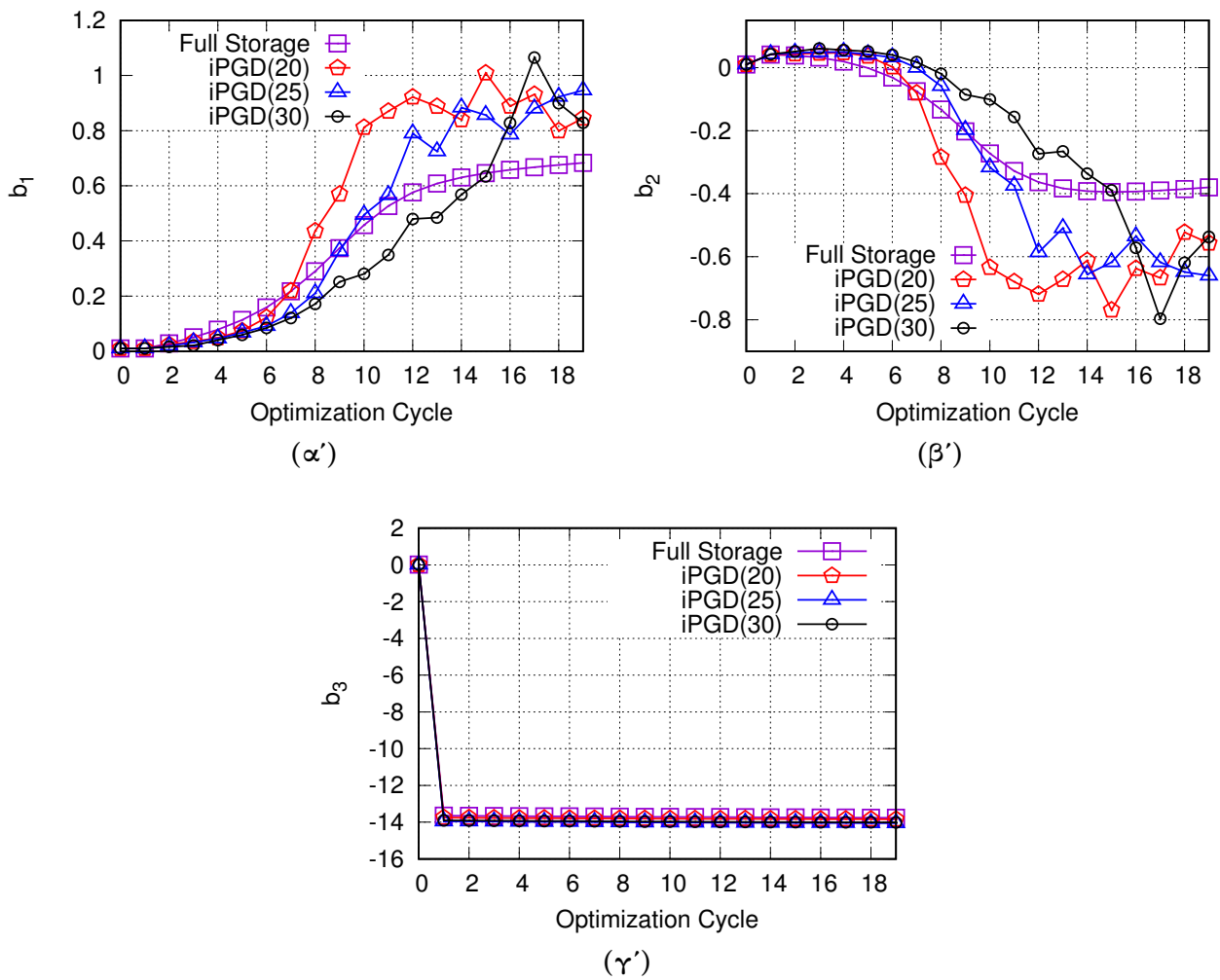
-	$\delta F/\delta b_1$	$\delta F/\delta b_2$	$\delta F/\delta b_3$
full storage	-1.3715605463477231E-004	4.5884641457681259E-006	1.3595687117018465E-002
30 modes	-1.4020728460627571E-004	4.3113618800885519E-006	1.3917655915201423E-002
25 modes	-1.4067134121493034E-004	6.4219368405810317E-006	1.3812747913019004E-002
20 modes	-1.4357302527437712E-004	6.7785627829755520E-006	1.4065766839714768E-002

Στον Πίνακα 6.3 παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας για τις αρχικές τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού. Παρατηρείται ότι οι τιμές που έχουν προκύψει από την ανακατασκευασμένη λύση είναι πολύ κοντά στις αντίστοιχες του πλήρους πεδίου. Ακόμα η βέλτιστη κατανομή θερμοκρασίας $T(\zeta)$ που προκύπτει είναι πολύ κοντά σε αυτήν που προέκυψε για την πλήρη αποθήκευση του πεδίου. Παρόλα αυτά, η πορεία της βελτιστοποίησης δεν είναι εντελώς όμοια για όλες τις περιπτώσεις που εξετάζονται εδώ. Στο Σχήμα 6.23 που παρουσιάζεται η σύγκλιση της συνάρτησης κόστους, παρατηρείται ότι για τους πρώτους κύκλους βελτιστοποίησης, οι καμπύλες των ανακατασκευασμένων και του ακριβούς είναι πολύ κοντά η μία στην άλλη, αλλά στη συνέχεια αρχίζουν να αποκλίνουν καθώς το σφάλμα που εισάγουν οι προσεγγιστικές αναπαραστάσεις του πεδίου προστίθεται σε κάθε βήμα βελτιστοποίησης, οδηγώντας σε ιδιαίτερα «θορυβώδεις» καμπύλες.

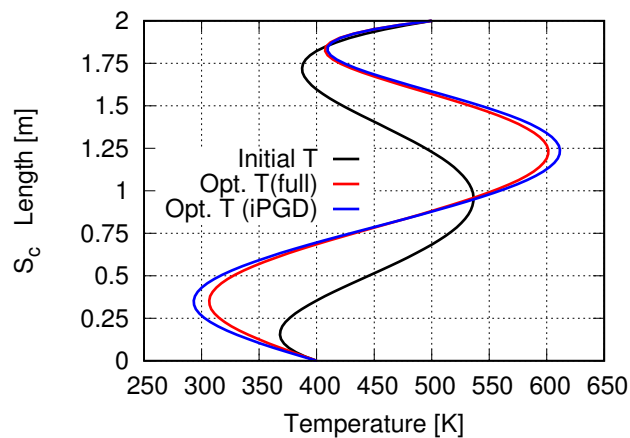


Σχήμα 6.23: Σύγκλιση Συνάρτησης Κόστους για τις τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις που εξετάστηκαν.

Αυτή η συμπεριφορά είναι εμφανής και στα διαγράμματα που παρουσιάζουν τη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού (Σχήμα 6.24).



Σχήμα 6.24: Μεταβολή των τριών μεταβλητών σχεδιασμού κατά τη διάρκεια των διαφορετικών περιπτώσεων βελτιστοποίησης που εξετάστηκαν.

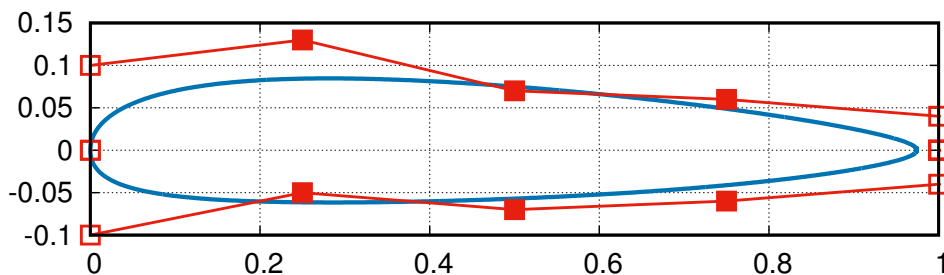


Σχήμα 6.25: Αρχική και βέλτιστες κατανομές θερμοκρασίας για την περίπτωση της πλήρους αποθήκευσης και τη συμπίεση μέσω iPGD

Κεφάλαιο 7

Εφαρμογή του PGD στη Βελτιστοποίηση Μορφής για τις Μη-Μονιμες Εξισώσεις Euler

Για την πιστοποίηση της ποιότητας της μεθόδου iPGD στη αποτελεσματική συμπίεση και ανακατασκευή χρονικά μη-μόνιμων πεδίων, κρίνεται σκόπιμο να εξεταστεί και μία δεύτερη εφαρμογή βελτιστοποίησης του σχήματος μίας μεμονωμένης αεροτομής, η οποία ταλαντώνεται σε ελεύθερο ρεύμα αέρα, το οποίο παραμετροποιείται με καμπύλες Bézier (Σχήμα 7.1). Οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου Bézier αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού b_q .



Σχήμα 7.1: Πολύγωνο σημείων ελέγχου Bézier που παραμετροποιεί το σχήμα της αεροτομής. Στα σημεία που παρουσιάζονται ως τετράγωνα χρωματισμένα στο εσωτερικό επιτρέπεται η κίνησή τους κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης.

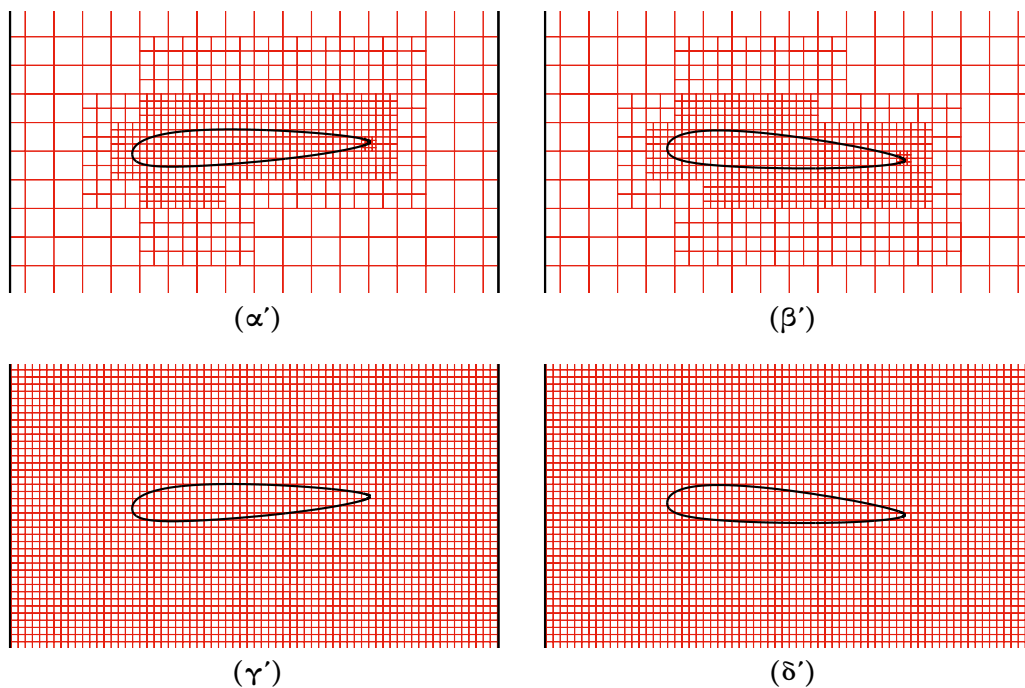
Για την αδιατάρακτη ροή θεωρείται αριθμός Mach ίσος με $M_\infty = 0.3$, ενώ η αεροτομή ταλαντώνεται κατά τον εγκάρσιο άξονα (pitching) γύρω από την οριζόντια θέση σύμφωνα με την εξίσωση $\alpha = A \sin(\frac{2\pi t}{T_a}) [deg]$, με πλάτος ταλάντωσης $A = 3^\circ$ και περίοδο $T_a = 0.015s$. Οι ΜΔΕ που διέπουν το πρόβλημα της ροής γύρω από την αεροτομή είναι οι μη-μόνιμες 2Δ εξισώσεις Euler:

$$R_i = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 4 \quad (7.1)$$

όπου $\vec{U} = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad E]^T$ είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών της ροής και $\vec{f}_x = [\rho u \quad \rho u^2 + p \quad \rho uv \quad u(E + p)]^T$, $\vec{f}_y = [\rho v \quad \rho uv \quad \rho v^2 + p \quad v(E + p)]^T$ τα διανύσματα πυκνότητας ατρίβους ροής (fluxes) στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα. Επίσης ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, u και v είναι οι Καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας της ροής, p η στατική πίεση και E η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου.

Η επίλυση της ροής εκτελείται με τη χρήση της μεθόδου Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell method [11][6]) βάση της οποίας η προσομοίωση λαμβάνει χώρα πάνω σε ένα Καρτεσιανό πλέγμα, το οποίο καλύπτει τόσο τις περιοχές του στερεού, όσο και του ρευστού. Για τα κελιά που τέμνονται από το στερεό σώμα είναι απαραίτητο να ληφθούν κατάλληλα μέτρα, ώστε να εξασφαλίζεται η ικανοποίηση των εξισώσεων διατήρησης στην περιοχή κοντά στα στερεά όρια, χωρίς να παρουσιάζεται ελάττωση της ακρίβειας. Η αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων ροής βασίζεται σε στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων με κεντροκυβελική διατύπωση δεύτερης τάξης στο χώρο και το χρόνο. Επιπλέον, τα διανύσματα πυκνότητας ροής \vec{f}_x και \vec{f}_y στα όρια του πεπερασμένου όγκου υπολογίζονται με χρήση του σχήματος του Roe[10].

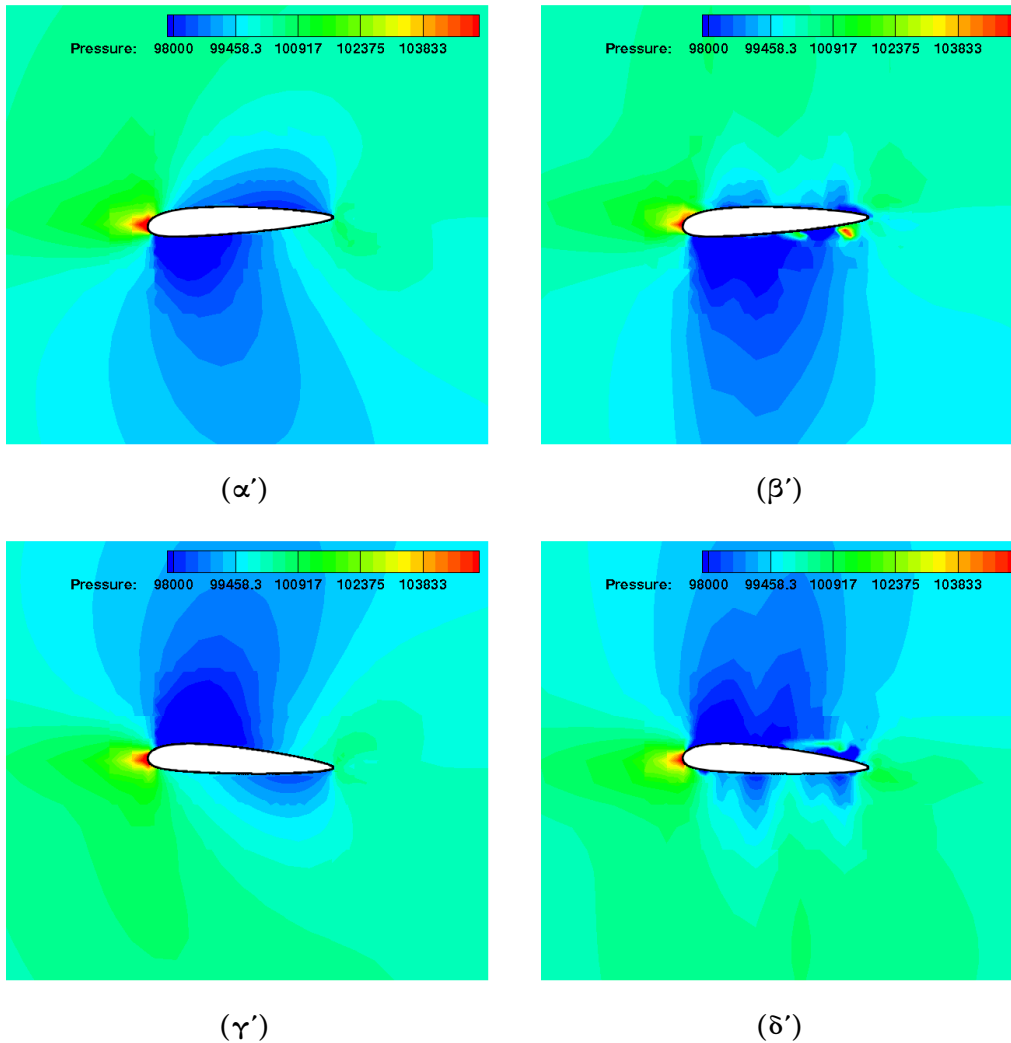
Στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής εργασίας, για την υλοποίηση της μεθόδου των τεμνομένων κυψελών χρησιμοποιήθηκε λογισμικό το οποίο έχει αναπτυχθεί από την ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ χωρίς να γίνει κάποια επέμβαση στο τμήμα επίλυσης της ροής. Η μέθοδος χρησιμοποιεί για την επίλυση της ροής κατά μέσο όρο 7000 κελιά για κάθε χρονικό βήμα. Ο αριθμός αυτός μεταβάλλεται καθώς η ιδιαιτερότητα της μεθόδου έγκειται στο ότι το πλέγμα τροποποιείται σε κάθε χρονικό βήμα, μαζί με τη κίνηση της αεροτομής, ώστε να πυκνώνει περισσότερο στα σημεία που απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια, δηλαδή στη περιοχή γύρω από το στερεό όριο της γεωμετρίας. Η χρονική ολοκλήρωση διαρκεί μέχρι να επέλθει περιοδικότητα στο φαινόμενο, με την περίοδο να διακριτοποιείται με 20 χρονικά βήματα. Εφόσον, αποκατασταθεί η περιοδικότητα, η επόμενη περίοδος επεξεργάζεται μέσω της μεθόδου iPGD, που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας, ώστε να προκύψει μία συμπιεσμένη εκδοχή του. Για να γίνει αυτό, απαιτείται σε κάθε χρονική στιγμή το καρτεσιανό πλέγμα να έχει τον ίδιο αριθμό κόμβων, ώστε να προκύψουν χωρικές συναρτήσεις βάσης σταθερής διάστασης. Για να επιτευχθεί αυτό, το μη-δομημένο πλέγμα που χρησιμοποιεί ο επιλύτης της ροής μετατρέπεται σε ένα δομημένου τύπου πλέγμα, του οποίου τα κελιά έχουν μέγεθος ίσο με το μικρότερο κελί που προέκυψε από την μέθοδο τεμνομένων κυψελών, ώστε να συντελεστεί η συμπίεση μέσω iPGD. Έτσι, ένα κελί του μη-δομημένου πλέγματος αντιστοιχεί



Σχήμα 7.2: Προσαρμοσμένα πλέγματα (α') και (β') στις δύο ακραίες θέσεις της ταλαντούμενη αεροτομής. Αντίστοιχα δομημένα «ενδιάμεσα» πλέγματα (γ'), (δ') για χρήση από iPGD.

σε ένα ή περισσότερα κελιά του δομημένου. Κατά την μεταφορά του πεδίου από το ένα πλέγμα στο άλλο, τα συγκεκριμένα κελιά λαμβάνουν όλα τις ίδιες τιμές των τεσσάρων συντηρητικών

μεταβλητών και ίσες με τις τιμές του αντίστοιχου κελιού του μη-δομημένου. Αυτή η μεταφορά εισάγει περαιτέρω σφάλμα στα αποτελέσματα της συμπίεσης μέσω iPGD. Για την επίλυση του



Σχήμα 7.3: Εφαρμογή μη-μόνιμης ατριοβούς ροής γύρω από ταλαντούμενη αεροτομή. Παρουσιάζονται το πραγματικό (α') και το ανακατασκευασμένο (β') (με $M = 30$ βάσεις) πεδίο πίεσης για την κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης της αεροτομής, και τα αντίστοιχα πεδία (γ'), (δ') για την άνω ακραία θέση.

συζυγούς προβλήματος, τα πεδία ανακατασκευάζονται στο δομημένο πλέγμα και μεταφέρονται στο μη-δομημένο, που απαιτεί η επίλυση με τη μέθοδο τεμνομένων κυψελών, με κατάλληλη αντίστροφη διαδικασία. Για τη συμπίεση χρησιμοποιήθηκαν, εδώ, $M = 30$ όροι προσέγγισης. Στο Σχήμα 7.3 παρουσιάζεται η σύγκριση των πραγματικών στιγμιαίων πεδίων πίεσης για τις δύο ακραίες θέσεις της αεροτομής. Παρατηρείται ότι δεν εμφανίζεται ιδιαίτερη διαφοροποίηση μεταξύ των πραγματικών και προσεγγιστικών πεδίων, κάτι που συνηγορεί για την ποιότητα της μεθόδου iPGD στη προσέγγιση των χρονικά μη-μόνιμων πεδίων. Παρόμοια είναι τα αποτελέσματα για τα αντίστοιχα πεδία πυκνότητας και ταχύτητας που δεν παρουσιάζονται εδώ.

Ως αντικειμενική συνάρτηση (F) ορίζεται η χρονικά μέση άνωση και υπολογίζεται για την τελευταία περίοδο από την εξίσωση:

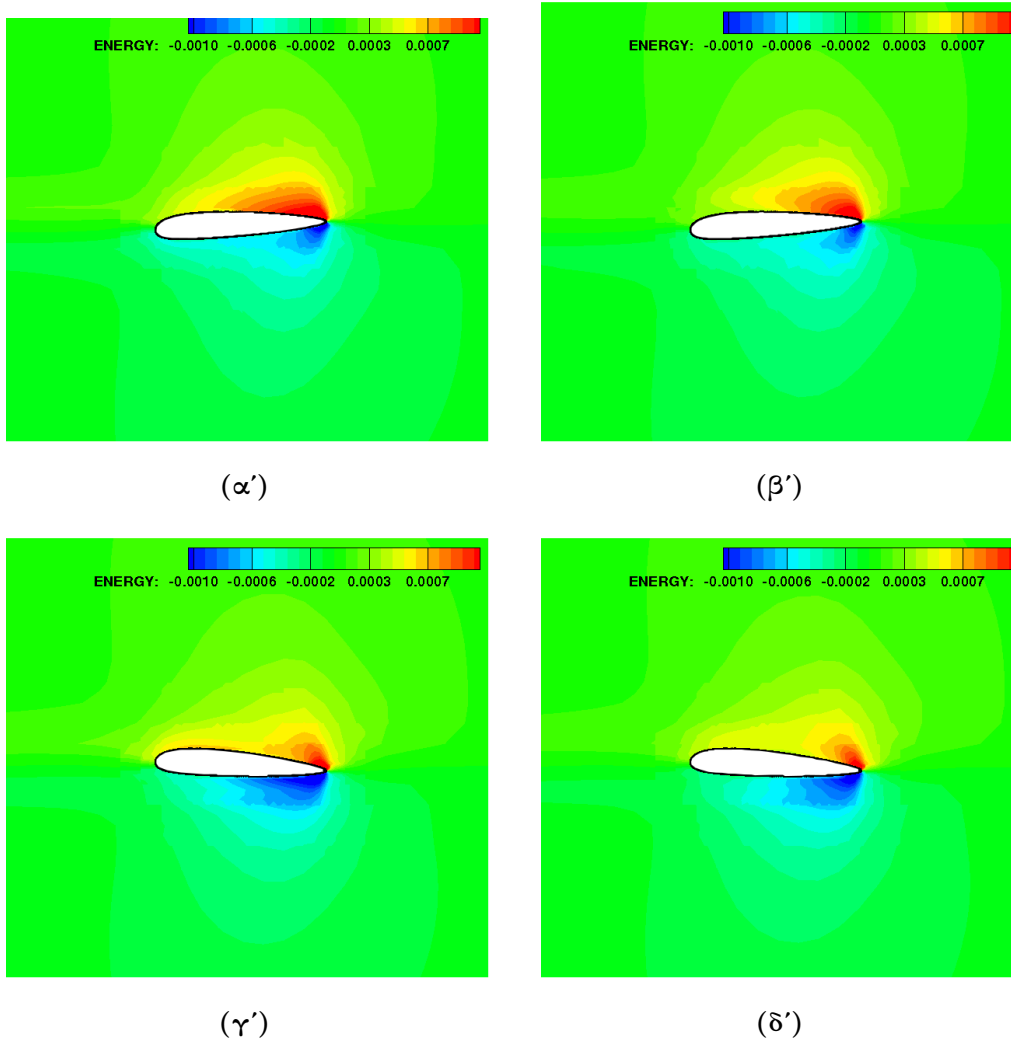
$$F = \frac{1}{T_a} \int_0^{T_a} \int_{S_w} p n_k r_k dS dt \quad (7.2)$$

όπου n_k, r_k είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος κάθετα στην επιφάνεια της αεροτομής και στην επ' άπειρον ταχύτητα αντίστοιχα.

Για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης F ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_q επιλύεται το συζυγές πρόβλημα που διέπεται από τις συζυγείς ΜΔΕ [11]:

$$-\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - A_{jik} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} = 0 \quad i, j = 1, 4 \quad (7.3)$$

όπου $A_{ijk} = \frac{\partial f_{ik}}{\partial U_j}$ και $\Psi_n, n = 1, 4$ είναι τα πεδία των συζυγών μεταβλητών. Οι συζυγείς οριακές συνθήκες είναι $\Psi_i = 0$ για το επ' άπειρον όριο και $\Psi_{k+1}n_k + \Psi_4 u_n^w + \frac{1}{T_a} n_k r_k = 0$ για την επιφάνεια της αεροτομής, όπου Ψ_4 είναι η συζυγής ενέργεια και u_n^w είναι η ταχύτητά σε κάθε σημείο του στερεού ορίου προβεβλημένη στην κάθετη σε αυτό κατεύθυνση.



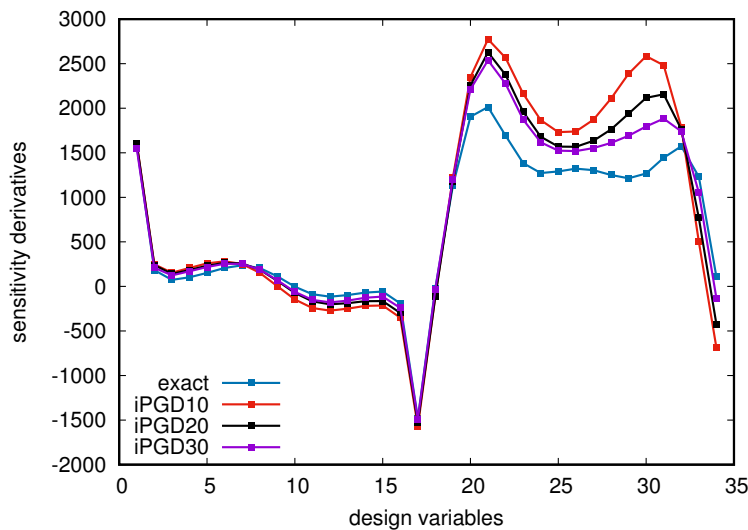
Σχήμα 7.4: Εφαρμογή μη-μόνιμης ατριβούς ροής γύρω από ταλαντούμενη αεροτομή. Παρουσιάζονται τα πραγματικά συζυγή πεδία ενέργειας για την κάτω (α') και την άνω (γ') ακραία θέση και τα αντίστοιχα πεδία που προέκυψαν από το συμπιεσμένο μέσω iPGD πρωτεύον πεδίο με $M = 30$ βάσεις για την κάτω (β') και άνω (δ') ακραία θέση, αντίστοιχα.

Στο Σχήμα 7.4 παρουσιάζονται τα πεδία συζυγούς ενέργειας για την πλήρη αποθήκευση και την προσεγγιστική εκδοχή. Παρατηρείται ότι τα πεδία εμφανίζουν παραπλήσια μορφή. Μεγάλη διαφοροποίηση υπάρχει για την άνω ακραία θέση της αεροτομής κοντά στην ακμή προσβολής της πτερύγωσης. Πιθανόν, λόγω των σχετικά απότομων μεταβολών στα μεγέθη που εμφανίζονται εκεί,

ο αλγόριθμος iPGD δυσκολεύεται στο να προσεγγίσει σωστά τα πρωτεύοντα πεδία. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ο συζυγής επιλύτης, που γενικά είναι πιο ευαίσθητος στις τυχόν μεταβολές του πρωτεύοντος πεδίου, να μεγενθύνει το σφάλμα στο συγκεκριμένο σημείο. Μετά την αποκατάσταση της περιοδικότητας για το συζυγές πεδίο – που ολοκληρώνεται με ανάποδη κατεύθυνση στο χρόνο – υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας βάσει της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_q} &= \frac{1}{T_a} \int_0^{T_a} \int_{S_w} p \frac{\delta(n_k r_k dS)}{\delta b_q} dt + \int_0^{T_a} \int_{S_w} (\Psi_{k+1} p - \Psi_i f_{ik}) \frac{\delta n_k}{\delta b_q} dS dt \\ &+ \int_0^{T_a} \int_{S_w} \Psi_i \left(\frac{\partial f_{il} \delta x_k}{\partial x_l \delta b_q} - \frac{\partial f_{ik} \delta x_l}{\partial x_l \delta b_q} \right) n_k dS dt \\ &+ \int_0^{T_a} \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial U_i}{\partial x_l} u_n^w \frac{\delta x_l}{\delta b_q} dS dt + \int_0^{T_a} \int_{S_w} (\Psi_i U_i + p \Psi_4) \frac{\delta u_n^w}{\delta b_q} dS dt \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 7.5 παρουσιάζεται η επίδραση της συμπίεσης του πεδίου στην ακρίβεια των υπολογιζόμενων παραγώγων ευαισθησίας. Παρατηρείται ότι η επιπλέον διακύμανση που εισάγεται στις παραγώγους ευαισθησίας λόγω της συμπίεσης του πεδίου μέσω της μεθόδου iPGD βρίσκεται σε ανεκτά πλαίσια, επομένως δεν αναμένεται να επηρεάσει αρνητικά την εκτέλεση της βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, οι δύο καμπύλες ακολουθούν σε σημαντικό βαθμό η μία την άλλη και σε καμία περίπτωση οι παράγωγοι ευαισθησίας δεν εμφανίζονται με διαφορετικό πρόσημο, κάτι το οποίο θα ήταν καταστροφικό για την εκτελούμενη βελτιστοποίηση. Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν μια καλή ένδειξη για την ποιότητα της προτεινόμενης μεθόδου στην προσέγγιση χρονικά μη-μόνιμων πεδίων.



Σχήμα 7.5: Σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας υπολογισμένων με την συζυγή μέθοδο με χρήση πλήρους αποθήκευσης του πεδίου και του προσεγγιστικού πεδίου που προέκυψε μέσω της μεθόδου iPGD.

Κεφάλαιο 8

Σύνοψη – Συμπεράσματα – Προτάσεις για Περαιτέρω Μελέτη

Συνοψίζοντας, στην εργασία αυτή παρουσιάστηκε η μέθοδος Ιδιο-Γενικευμένου Διαχωρισμού (PGD) σε δύο διαφορετικές εκδοχές της ως αλγόριθμου συμπίεσης δεδομένων πεδίων (2Δ και 3Δ) και ως επιλύτη 2Δ ΜΔΕ. Συγκεκριμένα, η μελέτη επικεντρώθηκε στην επίδραση της συμπίεσης των πεδίων, που προκύπτουν ως λύση του πρωτεύοντος προβλήματος για περιπτώσεις βελτιστοποίησης με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, στον αξιόπιστο και αποδοτικό υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας. Επιπλέον, διατυπώθηκε και αναπτύχθηκε ένας αλγόριθμος σταδιακής συμπίεσης δεδομένων για τη περίπτωση 1Δ και 2Δ μη-μόνιμων προβλημάτων που εκτελείται κατά τη διάρκεια της χρονικής ολοκλήρωσης για την αποφυγή της πλήρους αποθήκευσης των μη-μόνιμων πεδίων. Ο αλγόριθμος αυτός εφαρμόστηκε για ένα πρόβλημα βασισμένο στην μη-μόνιμη μεταφορά θερμότητας και σε ένα πρόβλημα ροής που διέπεται από τις εξισώσεις Euler. Τα βασικότερα συμπεράσματα που εξήχθησαν κατά τη μελέτη είναι τα ακόλουθα:

- Η μέθοδος PGD είναι ικανή για την αποδοτική συμπίεση πεδίων που προκύπτουν από την επίλυση ΜΔΕ, χωρίς να χάνεται σημαντική ποσότητα πληροφορίας, εφόσον επιλεγεί κατάλληλος αριθμός βάσεων. Σημαντικό ρόλο στην ποιότητα της συμπίεσης (σε σχέση, πάντα, με τον αριθμό M των βάσεων που χρειάζονται) παίζει η μορφή του πεδίου και κατά πόσο αυτό είναι εύκολο να εκφραστεί σε διαχωρίσιμη μορφή.
- Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά και ως απευθείας επιλύτης ΜΔΕ, με κέρδος την υποβάθμιση της τάξης του προβλήματος σε επίλυση ΣΔΕ για τον υπολογισμό των όρων που συνθέτουν την προσέγγιση της πραγματικής λύσης. Μειονέκτημα αποτελεί η ανάγκη επαναληπτικής διαδικασίας για την εύρεση των βάσεων που βρίσκονται σε μη-γραμμική μορφή.
- Ο νέος αλγόριθμος που αναπτύχθηκε (iPGD) για τη σταδιακή συμπίεση πεδίων που προκύπτουν από την επίλυση μη-μόνιμων ΜΔΕ παρουσιάζει ιδιαίτερα ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Όπως αναλύθηκε για τις δύο περιπτώσεις βελτιστοποίησης που εξετάστηκαν, η επίδραση των 2Δ πεδίων που συμπιέζονται με αυτόν τον τρόπο στις παραγώγους ευαισθησίας που προκύπτουν με τη συνεχή συζυγή μέθοδο δεν επηρεάζει αρνητικά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης και το σφάλμα παραμένει σε ανεχτά όρια. Η συσσώρευση σφάλματος κατά τη διάρκεια των κύκλων βελτιστοποίησης, λόγω προσεγγιστικής αναπαράστασης των μη-μόνιμων πεδίων, οδηγεί σε μικρές διαφοροποιήσεις σε σχέση με τη περίπτωση της πλήρους αποθήκευσης.
- Η μέθοδος iPGD παρουσιάζει ευαισθησία στη κατάλληλη επιλογή του συντελεστή βαρύτητας w για την αποδοτική αναπαράσταση ενός μη-μόνιμου πεδίου. Επιπλέον, εμφανίζει αδυναμία προσέγγισης πεδίων στα οποία η χωρική μεταβολή είναι πολύ μεγαλύτερη από την χρονική.

Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα, εγείρονται διάφορα θέματα τα οποία θα μπορούσαν να προταθούν για μελλοντική μελέτη και ανάπτυξη. Κάποια από αυτά παρουσιάζονται παρακάτω:

- Στη συγκεκριμένη εργασία διερευνήθηκε μόνο η περίπτωση επίλυσης της 2Δ εξίσωσης Poisson, επομένως ενδιαφέρον θα είχε η επέκταση της μεθόδου και για την επίλυση 3Δ προβλημάτων καθώς και η ανάπτυξη της μεθόδου για επίλυση και άλλων ΜΔΕ που βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στη ΥΡΔ (π.χ. Εξισώσεις Euler), με τα εκεί χρησιμοποιούμενα ανάντι σχήματα διακριτοποίησης των όρων μεταφοράς.
- Στις μελέτες που έγιναν διαπιστώθηκε ότι, για τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε και υλοποιεί τη μέθοδο iPGD για τη σταδιακή συμπίεση χρονικά μη-μόνιμων πεδίων, σημαντικό ρόλο στην απόδοση της προσέγγισης έχει η κατάλληλη επιλογή του συντελεστή βαρύτητας w που αναφέρεται στη ευελιξία που προσδίδεται στον αλγόριθμο για το πόσο του επιτρέπεται να μεταβάλλει τις 1Δ συναρτήσεις βάσης που έχουν υπολογιστεί μέχρι την τρέχουσα χρονική στιγμή. Μέχρι τώρα η επιλογή του συντελεστή αυτού έγκειται στην εμπειρία του χρήστη, επομένως θα ήταν σκόπιμο να διερευνηθεί περαιτέρω ο σημασία του και να διατυπωθεί κάποιο κριτήριο με βάση το οποίο θα μπορεί να γίνεται αυτόματα η επιλογή του, ώστε να προκύπτει η μέγιστη δυνατή ποιότητα προσέγγισης.
- Ενδιαφέρον θα είχε η περαιτέρω ανάπτυξη και βελτιστοποίηση της μεθόδου iPGD η οποία παρουσιάζει το μειονέκτημα του αρκετά μεγάλου χρόνου εκτέλεσης. Η ανάπτυξη αυτή μπορεί να γίνει σε αλγοριθμικό επίπεδο ώστε να εκτελείται ταχύτερα και με μικρότερο υπολογιστικό κόστος. Επιπλέον θα μπορούσαν να αναπτυχθούν και τεχνικές παραλληλοποίησης του αλγορίθμου με χρήση επεξεργαστών σε κάρτες γραφικών, για την βελτίωση της απόδοσης του.

Βιβλιογραφία

- [1] Κ. Γιαννάκογλου. Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική. Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2006.
- [2] P. Ladevèze. *PGD in Linear and Nonlinear Computational Solid Mechanics*. Springer, Vienna, 2014.
- [3] D. Papadimitriou and K. Giannakoglou. Aerodynamic shape optimization using first and second order adjoint and direct approaches. *Archives of Computational Methods in Engineering.*, 15(4):447–488, 2008.
- [4] F. Chinesta, R. Keunings, and A. Leygue. *The Proper Generalized Decomposition for Advanced Numerical Simulations, A Primer*. Springer International Publishing, Nantes, France, 2014.
- [5] L. Balzano and S. Wright. On grouse and incremental SVD. In *Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), 2013 IEEE 5th International Workshop*, St. Martin, Dec 2013.
- [6] D. Clarke, H. Hassan, and M. Salas. Euler calculations for multielement airfoils using cartesian grids. *AIAA Journal*, 24(3):353 – 358, 1986.
- [7] A. Griewank and A. Walther. Algorithm 799: Revolve: an implementation of checkpointing for the reverse or adjoint mode of computational differentiation. *ACM Trans. on Math. Software (TOMS)*, 26(1):19–45, 2000.
- [8] A. Jameson. Aerodynamic design via control theory. *Journal of Scientific Computing*, 3:233–260, 1988.
- [9] O. Pironneau. On optimum design in fluid mechanics. *Journal of Fluid Mechanics*, 64:97–110, 1974.
- [10] P. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43(2):357 – 372, 1981.
- [11] K. Samouchos, S. Katsanoulis, and K.C. Giannakoglou. Unsteady adjoint to the cut-cell method using mesh adaptation on GPUs. In *ECCOMAS Congress 2016, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Crete island, Greece, June 5-10 2016.
- [12] C. Vezyris, I. Kavvadias, E. Papoutsis-Kiachagias, and K. Giannakoglou. Unsteady continuous adjoint method using POD for jet-based flow control. In *ECCOMAS Congress 2016, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Crete island, Greece, June 5-10 2016.
- [13] G.E. Schneider & M. Zedan A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems *Numerical Heat Transfer*, 4:1,1-19, 1981.
- [14] V. Papageorgiou, K. Samouchos, and K.C Giannakoglou. The Unsteady Continuous Adjoint Method Assisted by the Proper Generalized Decomposition Method. In *EURO-GEN International Conference on Evolutionary and Deterministic Methods for Design Optimization and Control with Applications to Industrial and Societal Problems*, Madrid, Spain, Sep 13-15 2017