



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**Δυναμική σολιτονίων σε μη γραμμικά μέσα με μη-
τοπική απόκριση**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μάριος Δ. Κοκμοτός

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Κομίνης Ιωάννης
Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα, Ιούνιος 2017



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μάριος Δ. Κοκμοτός

Επιβλέπων: Κομίνης Ιωάννης

Εγκρίθηκε από την εξεταστική επιτροπή την

.....
Χιτζανίδης Κυριάκος
Καθηγητής

.....
Κομίνης Ιωάννης
Επίκουρος καθηγητής

.....
Γλύτσης Ηλίας
Καθηγητής

Μάριος Δ. Κοκμοτός

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π

Copyright © Μάριος Κοκμοτός , 2017

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει ιδιαίτερο μαθηματικό ενδιαφέρον στη μελέτη σολιτονικών λύσεων που προκύπτουν από μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις όπως η μη γραμμική εξίσωση Schrodinger. Τα σολιτόνια αυτά είναι πειραματικά παρατηρήσιμα σε πληθώρα μέσων, όπως οι φωτονικοί κρύσταλλοι και το πλάσμα. Η άμεση επίλυση των εξισώσεων αυτών με αριθμητικές μεθόδους, επιλύει το πρόβλημα, αλλά δεν μας δίνει εποπτική ποιοτική εικόνα της δυναμικής εξέλιξης του συστήματος, πράγμα που είναι απαραίτητο για να κάνουμε ποιοτικές προβλέψεις της συμπεριφοράς του για εν δυνάμει πρακτικές εφαρμογές. Μια απλοποίηση της διαδικασίας επίλυσης επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του σωματιδίου (effective particle method) κατά την οποία ανάγουμε το πρόβλημα διάδοσης στην εξέλιξη κίνησης ενός χαμιλτονιανού συστήματος στο οποίο έχουμε αντικαταστήσει τη σολιτονική λύση με ένα σωματίδιο. Στην περίπτωση του προβλήματος μας έχουμε φαινόμενα μη τοπικής εξάρτησης τα οποία με τις κατάλληλες αναγωγές ενσωματώνονται στο χαμιλτονιανό σύστημα. Στην παρούσα εργασία παρατηρούμε ότι η παγίδευση των σολιτονίων (σωματιδίων) εξαρτάται από ένα αλληλοσυσχετισμό των χαρακτηριστικών τους με τα χαρακτηριστικά του μέσου. Παρατηρούμε ότι έχουμε περιορισμούς στις μορφές των σολιτονίων που μπορούν να παγιδευτούν λόγω της διαμόρφωσης του μέσου, όσο και λόγω της μη τοπικής συμπεριφοράς, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους. Αρχικά, αντιμετωπίζουμε τη δυναμική εξέλιξη του συστήματος όταν σε αυτό συνυπάρχουν όροι εγκάρσιας ανομοιογένειας και μη-τοπικότητας. Αυτοί οι όροι μεταφράζονται ως δυναμικό στο Χαμιλτονιανό σύστημα το οποίο σε αυτήν την περίπτωση αποτελεί ένα αυτόνομο σύστημα. Εν συνεχεία, στην περίπτωση ύπαρξης διαμήκους ανομοιογένειας στην εξίσωση NLS, αυτή οδηγεί σε ένα αντίστοιχο μη-αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα στο οποίο υπάρχει ένας όρος εξωτερικής διαταραχής που το καθιστά μη ολοκληρώσιμο και βλέπουμε πως ανακύπτει χαστική συμπεριφορά αν ικανοποιηθούν οι κατάλληλες συνθήκες. Τέλος συγκρίνουμε τα εξαγμένα αποτελέσματα από την απλοποιητική μέθοδο του σωματιδίου, με αυτά της άμεσης αριθμητικής επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Λέξεις κλειδιά: σολιτόνιο, μη γραμμική εξίσωση Schrodinger, μη τοπικότητα, μοντέλο ενεργού σωματιδίου

Abstract

Over the last years there has been an increasing interest in the study of soliton solutions that emerge from nonlinear partial differential equations such as the nonlinear Schrodinger equation. These solitons are experimentally observable in a majority of media such as plasma and photonic crystals. The direct solution of these equations with numerical methods gives an answer pretty fast but tells us nothing about the qualitative picture of the phenomenon. A simplification of the solution derivation is given by the so called method of the effective particle, according to which we reduce the problem into a Hamiltonian system of a particle moving inside a potential. In our case of study the soliton dynamics depend on the medium properties of an extended neighborhood of its position, due to the non-locality of the medium . The trapping of the solitons is strongly dependent on the relation of their parameters with those of the medium. We have constraints on the shape of solitons that can be trapped. Then we study the Hamiltonian system with an extra degree of freedom, which makes the system non-integrable and we see the emergence of chaos. As a final step we compare the results of the numerical solutions and the Hamiltonian system and comment on them.

Keywords: soliton, Nonlinear Schrodinger equation, non-locality, effective particle method

Ευχαριστίες

Θα ήθελα απο αυτή τη θέση να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον κύριο Κυριάκο Χιτζανίδη και τον κύριο Γλύτση που μου κάνουν την προσωπική τιμή να είναι μέλη της εξεταστικής επιτροπής.

Τον κύριο Γιάννη Κομίνη που έκανε αυτό το ταξίδι αρκετά πιο ενδιαφέρον από όσο θα περίμενα συμβάλλοντας με τις απόψεις του επι των θεμάτων και δείχνοντας το δρόμο συνεχώς, αλλά διατηρώντας σε περίοπτη θέση την ελεύθερη βούληση και προσωπική οπτική, η οποία είναι αναπόσπαστο συστατικό της ακαδημαϊκής ζωής. Πρωτίστως τον ευχαριστώ για την αλληλεπίδραση μας η οποία υπήρξε φιλική μα και ακέραια και για τον τρόπο με τον οποίο έκανε κάθε πρόβλημα πιο ελκυστικό. Για τον ανεπιτήδευτο τρόπο που προκάλούσε την πνευματική διέγερση προς αναζήτηση βαθύτερης γνώσης και κατανόησης και όχι απλά μηχανιστικής ολοκλήρωσης μιας εργασίας. Αν μου επιτραπεί να τον χαρακτηρίσω σε πρώτο χρόνο φίλο και ύστερα επιβλέποντα, θα ήμουν χαρούμενος και θα ένιωθα πως ο τελευταίος χρόνος ήταν ο πιο αποδοτικά καταναμεμημένος.

Οι νόμοι της φυσικής δεν μπορούν να είναι γραμμικοί.

Albert Einstein

Επιστήμη είναι η πίστη στην άγνοια ειδικών.

Richard Feynman

Περιεχόμενα

| | |
|---------------|----|
| Εισαγωγή..... | 10 |
|---------------|----|

Κεφάλαιο 1

| | |
|--|----|
| Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις..... | 14 |
|--|----|

| | |
|---|----|
| 1.1 Μη-γραμμική εξίσωση Schrodinger στην οπτική..... | 17 |
| 1.1.1 Η εξίσωση NLS..... | 18 |
| 1.1.2 Εξαγωγή της εξίσωσης NLS από τις εξισώσεις Maxwell..... | 19 |
| 1.1.3 Σολιτονικές λύσεις της NLS..... | 22 |
| 1.2 Φυσική και εφαρμογές των μέσων με μη τοπική απόκριση..... | 25 |
| 1.3 Φυσικά μοντέλα που οδηγούν στην μη-τοπική (nonlocal)NLS..... | 27 |
| 1.3.1 Γενικό μοντέλο μη-τοπικής NLS..... | 28 |

Κεφάλαιο 2

| | |
|---|----|
| Εγκάρσια ανομοιογένεια του δείκτη διάθλασης και μη-τοπική απόκριση..... | 31 |
|---|----|

| | |
|--|----|
| 2.1 Αδιαβατική θεωρία διαταραχών και μοντέλο ενεργού σωματιδίου (effective particle)..... | 32 |
| 2.1.1 Αδιαβατική θεωρία διαταραχών..... | 32 |
| 2.2.1 Αναλυτική μελέτη της δυναμικής του συστήματος ενεργού σωματιδίου..... | 37 |
| 2.3 Παραμετρική μελέτη συνθηκών παγίδευσης σολιτονίου..... | 47 |
| 2.4 Αριθμητική μελέτη της δυναμικής του ενεργού σωματιδίου..... | 53 |

Κεφάλαιο 3

Εγκάρσια ανομοιογένεια του δείκτη διάθλασης και διαμήκη ανομοιογένεια της μη-τοπικής απόκρισης63

3.1 Μη αυτόνομο σύστημα ενεργού
σωματιδίου.....64

3.2 Αριθμητική επίλυση μη αυτόνομου
συστήματος.....66

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική επίλυση της διαταραγμένης NLS

4.1 Ο αλγόριθμος split-step Fourier.....78

4.2 Αριθμητική επίλυση της NLS για εγκάρσια ανομοιογένεια και μη-
τοπικότητα.....80

4.2.1 Επίδραση της μη τοπικότητας στη δυναμική του
σολιτονίου.....80

4.2.2 Επίδραση της εγκάρσιας ανομοιογένειας στη δυναμική του
σολιτονίου.....84

4.2.3 Εγκάρσια ανομοιογένεια σε συνδυασμό με μη-τοπικότητα.....87

4.2.4 Αλληλεξάρτηση πλάτους σολιτονίου και ενεργού δυναμικού
που αντιμετωπίζει.....90

4.3 Αριθμητικές επίλυση NLS για την περίπτωση εγκάρσιας
ανομοιογένειας και διαμήκως μεταβαλλόμενης μη-
τοπικότητας.....92

4.3.1 Ταυτόχρονη ύπαρξη ανομοιογένειας και διαμήκους
μεταβαλλόμενης μη-τοπικότητας.....92

4.3.2 Ταυτόχρονη ύπαρξη ανομοιογένειας και διαμήκους
μεταβαλλόμενης μη-τοπικότητας με αυξημένο συντελεστή μη-
τοπικότητας.....95

4.4 Συμπεράσματα.....98

| | |
|---------------------------------------|------------|
| Επίλογος και συμπεράσματα..... | 100 |
| Βιβλιογραφία..... | 111 |

Εισαγωγή

Τα μη γραμμικά φαινόμενα είναι κυρίαρχα σε κάθε φυσική διεργασία στην οποία δεν έχουμε δεχθεί πολλές απλοποιητικές παραδοχές. Εμφανίζονται σε πληθώρα εφαρμογών και είναι αναπόσπαστο κομμάτι των κυματικών διαταραχών.

Σύγχρονες εφαρμογές στην οπτική έχουν έρθει αντιμέτωπες με μη γραμμική δυναμική στα μέσα που εφαρμόζονται. Διάφορα μέσα, όπως φωτοδιαθλαστικοί κρύσταλλοι, παρουσιάζουν μη γραμμικότητες οι οποίες επηρεάζουν ισχυρά τη δυναμική διάδοση των κυμάτων εντός τους. Οι μη γραμμικότητες ποικίλουν σε είδος και ένταση, ενώ είναι συνυφασμένες κυρίως με την εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από την ένταση του πεδίου. Η μεταβολή αυτή στο δείκτη διάθλασης οδηγεί σε ιδιαίτερες κυματικές συμπεριφορές, μέρος των οποίων είναι και τα λεγόμενα «σολιτονικά κύματα». Πρόκειται ουσιαστικά για κύματα τα οποία υπόκεινται σε διασπορά λόγω φασματικής απόκρισης του υλικού, αλλά και σε τάση εντοπισμού λόγω των μη γραμμικοτήτων.

Μια εξίσωση που μπορεί να περιγράψει τέτοια σολιτονικά κύματα είναι η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS). Θεωρούμε, για την ανάπτυξη μας, γνωστή τη λύση της αδιατάρακτης εξίσωσης NLS μέσω της τεχνικής της αντίστροφης σκέδασης, ενώ επίσης θεωρούμε πως οι διαταραχές που υπεισέρχονται στο πρόβλημα είναι αρκετά μικρές ώστε το προφίλ του σολιτονίου να μην διαταράσσεται σημαντικά και να παραμένει πρακτικά αμετάβλητο. Οι διαταραχές αποτελούν όρους που υπερτίθενται στην αδιατάρακτη εξίσωση NLS και ουσιαστικά πηγάζουν από τα μοντέλα περιγραφής φαινομένων σε μικροσκοπική και μακροσκοπική κλίμακα. Κατά την εξαγωγή της εξίσωσης NLS έχουμε κάνει μια παραξονική προσέγγιση, πράγμα που περιορίζει την εφαρμογή της σε περιπτώσεις που αυτή η προσέγγιση είναι δικαιολογημένη. Είναι σημαντικό να τονίσουμε πως είναι δυνατή η ύπαρξη, ανάλογα με τις προσεγγίσεις που κάνουμε και τα δυναμικά, διάφορων συμπεριφορών που μπορούν να ποικίλουν από καμπύλωση της τροχιάς μέχρι και ταλαντωτική συμπεριφορά του σολιτονίου. Αναλόγως των διαφορετικών προσεγγίσεων στην εξαγωγή των εξισώσεων, μπορούν να ανακύπτουν μη

γραμμικότητες διαφορετικής μορφής με βάση τα μικροσκοπικά και μακροσκοπικά μοντέλα.

Ο πιο άμεσος τρόπος να λυθεί το πρόβλημα, είναι η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση της εξίσωσης με συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες και περιορισμούς. Αυτή η προσέγγιση θα δώσει άμεσα λύσεις της εξίσωσης, δηλαδή διαδιδόμενα κύματα με κατάλληλα προφίλ, για τα οποία όμως θα έχουμε από ελάχιστη έως καθόλου ποιοτική πληροφορία. Η παντελής έλλειψη γνώσης ποιοτικής συμπεριφοράς των λύσεων αντενδείκνυται τόσο για τις πρακτικές εφαρμογές όσο και για καθαρά ακαδημαϊκούς σκοπούς. Έχουμε ανάγκη να μπορούμε να αιτιολογήσουμε την ποιοτική συμπεριφορά και να μπορούμε να την προβλέψουμε έτσι ώστε να αναπτύσσουμε πιο εύκολα εφαρμογές, αλλά και γιατί αυτή η ποιοτική περιγραφή μπορεί να αποτελέσει βάση για επόμενα βήματα και ανακαλύψεις νέων φαινομένων. Γι αυτό είναι καθοριστικής σημασίας η χρήση ενός μοντέλου πιο απλουστευμένου, αλλά ταυτόχρονα όσο το δυνατόν πιο εξαγωγικού από άποψη ποιοτικού χαρακτήρα των λύσεων. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι το μοντέλο του κλασσικού(ενεργού) σωματιδίου. Ουσιαστικά προκύπτει ένας παραλληλισμός του προβλήματος μας με ένα κλασσικό πρόβλημα χαμιλτονιανής μηχανικής. Οι εξισώσεις που διέπουν τη δυναμική του σολιτονίου, αλλά και ορισμένες διατηρήσιμες ποσότητες, μας επιτρέπουν να αντιστοιχίσουμε το σολιτόνιο σε ένα σωματίδιο συγκεκριμένης μάζας το οποίο κινείται σε ένα ενεργό δυναμικό. Το δυναμικό αυτό εξαρτάται από την ίδια τη φύση απόκρισης του μέσου η οποία προκαλεί μια πολύπλοκη δυναμική. Η αντιστοίχιση αυτή δεν πρέπει να ληφθεί ως επακριβής αφού είναι απλά μια μαθηματική αντιστοίχιση των δύο προβλημάτων στηριζόμενη στην ομοιότητα των εξισώσεων της δυναμικής εξέλιξης. Το μοντέλο διευκολύνει σε μεγάλο βαθμό τους υπολογισμούς και παρέχει εποπτεία και ποιοτική κατανόηση της πολύπλοκης δυναμικής διάδοσης των σολιτονίων.

Η απλότητα πλέον του προβλήματος, το οποίο έχει αναχθεί στην επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων ενός βαθμού ελευθερίας –σε σχέση με την επίλυση μιας μη γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης-, μας δίνει τη δυνατότητα να εξάγουμε ταχύτερα και πιο εύκολα ποιοτικά χαρακτηριστικά των λύσεων για πληθώρα διαφορετικών διατάξεων και διαταραχών.

Θα ορίσουμε το αντίστοιχο της μάζας και της ορμής του σωματιδίου για το σολιτόνιο και θα περιγράψουμε την εξέλιξη τους και τις σχέσεις που τα διέπουν. Ο ορισμός τους θα γίνει σε αντιστοιχία με την κυματική θεωρία και οι εξισώσεις εξέλιξής τους θα περιγράφονται από ένα Χαμιλτονιανό σύστημα, πράγμα που κάνει ελκυστική τη χρήση κλασικών μεθόδων ανάλυσης δυναμικών συστημάτων. Όπως είναι φυσικό, ένα απλοποιημένο μοντέλο θα αποτυγχάνει να περιγράψει όλα τα πιθανά παρατηρήσιμα φαινόμενα. Για παράδειγμα, σολιτόνια που διασπώνται σε δύο ή και περισσότερα κύματα θα είναι αδύνατο να περιγραφούν καθώς έχουμε θεωρήσει πλήρη εντοπισμό ενός και μόνου σωματιδίου που αντιστοιχεί σε ένα κύμα. Επίσης σε αυτή την εργασία θα αρκεστούμε σε διαταραχές της NLS οι οποίες δεν εμπεριέχουν όρους κέρδους ή απωλειών, το οποίο μεταφράζεται σε δυναμικά τα οποία δεν προσδίδουν ή αφαιρούν συνολικά ενέργεια στο χαμιλτονιανό σύστημα, συνεπώς όπως θα δούμε, δεν μεταβάλλουν τη μάζα του σωματιδίου. Έχουμε δηλαδή τελικά ένα σωματίδιο σε ένα ενεργό δυναμικό. Με βάση αυτό το μοντέλο κάνουμε προβλέψεις για τους τύπους των σολιτονίων που μπορούν να παγιδευτούν και πως αυτά συμπεριφέρονται κατά τη διάδοσή τους.

Σε μία δεύτερη πράξη, παρουσιάζουμε τη δυναμική του σωματιδίου αυτού σε ένα δυναμικό το οποίο μεταβάλλεται όχι μόνο ως προς τον εγκάρσιο άξονα του προφίλ της δέσμης, αλλά και ως προς τον διαμήκη άξονα διάδοσης. Αυτό αυτομάτως προσθέτει μια επιπλέον πολυπλοκότητα στη δυναμική του σωματιδίου που οδηγεί και σε χαστικά φαινόμενα. Σε μια ποιοτική περιγραφή αυτών των φαινομένων θα διαπιστώσουμε παγιδευμένες τροχιές, αλλά και το σπάσιμο της συμμετρίας του προβλήματος.

Τέλος επιλύουμε αριθμητικά την NLS και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της (τις τροχιές που προκύπτουν) με τις τροχιές που λαμβάνουμε από τη λύση του Χαμιλτονιανού συστήματος του σωματιδίου.

Όπως είναι λογικό αναμένουμε ότι το σύστημα του σωματιδίου δε θα μπορεί να περιγράψει επαρκώς κάθε δυνατή περίπτωση σολιτονίων, αφού σε αυτό υπεισέρχονται διάφορες παραδοχές, όμως για αυτές που θα μπορεί να περιγράψει, θα το κάνει έχοντας απλοποιήσει κατά πολύ το πρόβλημα, αφού οι άπειροι βαθμοί

ελευθερίας που χρειάζονται για να περιγράψουν τη συμπεριφορά του πλήρους κλασσικού κύματος έχουν πλέον αναχθεί σε έναν για την περιγραφή του χαμιλτονιανού συστήματος. Έτσι το πρόβλημα της πολύπλοκης δυναμικής του σολιτονίου μπορεί να αναχθεί σε ένα μη γραμμικό χαμιλτονιανό πρόβλημα στο οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλες τις μεθόδους ποιοτικής αλλά και προσεγγιστικής ανάλυσης.

Κεφάλαιο 1

Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον στα μη γραμμικά οπτικά συστήματα μετάδοσης και επεξεργασίας σημάτων. Η χρήση τους στις επικοινωνίες παρέχει σημαντικές δυνατότητες αμιγούς οπτικής επιλογής, μεταγωγής και δρομολόγησης χωρίς την μεσολάβηση οπτο-ηλεκτρονικής μετατροπής. Συνεπώς, δεν αποτελεί παράδοξο το γεγονός ότι υπάρχει μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα στη διάδοση κυμάτων σε αυτά τα μη γραμμικά συστήματα, στα οποία πολλές φορές υπεισέρχονται μοντέλα κλασσικής αλλά και κβαντικής οπτικής.

Ένα φαινόμενο το οποίο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα μη γραμμικά συστήματα κυματικής διάδοσης είναι αυτό της ύπαρξης και διάδοσης σολιτονίων. Πρόκειται ουσιαστικά για κύματα τα οποία διαδίδονται σε κάποιο μέσο, το οποίο έχει συγκεκριμένες ιδιότητες,

Κεφάλαιο 1 Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

χωρίς να μεταβάλλουν το προφίλ τους. Τέτοια κύματα σχηματίζονται και διαδίδονται τόσο σε οπτικά συστήματα όσο και σε άλλα μέσα [1],[2]. Τις τελευταίες δεκαετίες το αυξανόμενο θεωρητικό αλλά και πειραματικό ερευνητικό ενδιαφέρον για τα οπτικά σολιτόνια και τις εφαρμογές τους έχει οδηγήσει στην μελέτη και πειραματική επίδειξη διαφόρων ειδών σολιτονίων τόσο χωρικών όσο και χρονικών. Διάφοροι τύποι σολιτονίων, τόσο χωρικών όσο και χρονικών δημιουργούνται σε μέσα που παρουσιάζουν μη γραμμικότητες. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα σολιτόνια που αναπτύσσονται σε μέσα Kerr (υλικά στα οποία μεταβάλλεται ο δείκτης διάθλασης ανάλογα με την ένταση της προσπίπτουσας δέσμης), σολιτόνια τύπου Bragg και gap solitons σε περιοδικά διαμορφωμένα συστήματα, διακριτά σολιτόνια σε συστοιχίες κυματοδηγών αλλά και φωτονικούς κρυστάλλους, είναι σύνηθη στις σημερινές τεχνολογικές εφαρμογές.

Ουσιαστικά για να έχουμε ύπαρξη σολιτονίων το μέσο πρέπει να παρουσιάζει γραμμικά φαινόμενα διασποράς (dispersion) ή περίθλασης (diffraction), αλλά και μη γραμμικότητας. Τα δύο αυτά στοιχεία συνθέτουν μια πολύπλοκη δυναμική για σχηματισμό του σολιτονίου, αλλά εν τέλει έχουμε τη σχετική εξισορρόπηση των δύο αντικρουόμενων φυσικών μηχανισμών, όπου ο ένας τείνει να αυξήσει το χρονικό ή χωρικό εύρος του σολιτονίου, και ο άλλος να το μειώσει, έτσι ώστε το κύμα να παραμένει εντοπισμένο σε συγκεκριμένο πεπερασμένο εύρος. Φυσικά αντιμετωπίζουμε θέματα ευστάθειας καθότι όπως είναι λογικό μόνο τα ευσταθή κύματα θα διατηρηθούν και θα συνεχίσουν τη διάδοσή τους. Τα σολιτόνια εμφανίζονται ιδιαίτερα εύρωστα κάτω από την επίδραση διαφόρων ειδών διαταραχών οι οποίες τροποποιούν σημαντικά τη δυναμική της διάδοσής τους, χωρίς όμως να καταστρέφουν τον εντοπισμένο χαρακτήρα τους. Στην μη γραμμική οπτική παρατηρείται η εμφάνιση τόσο χωρικών όσο και χρονικών σολιτονίων, ανάλογα με το αν ο εντοπισμός γίνεται στον χώρο ή στο χρόνο κατά τη διάδοση του κύματος. Μία διαδεδομένη περίπτωση σολιτονίων είναι αυτά που σχηματίζονται σε μέσα στα οποία παρατηρείται το οπτικό φαινόμενο Kerr. Η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από την ένταση της ακτινοβολίας οδηγεί σε ανάπτυξη φαινομένων όπως χωρική αυτό-εστίαση της δέσμης και χρονική αυτό-διαμόρφωση, που αποτελούν και τα δύο

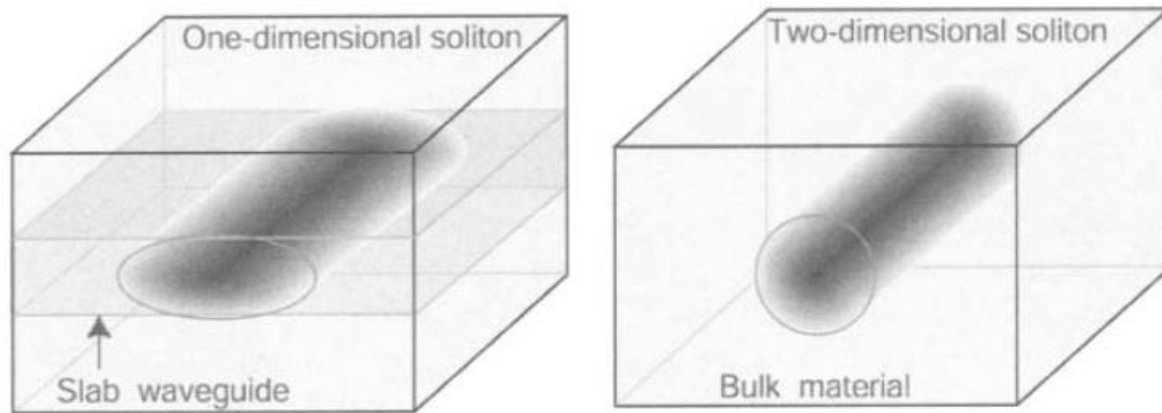
Κεφάλαιο 1 Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

κυριότερα μη γραμμικά χαρακτηριστικά που οδηγούν στην ανάπτυξη σολιτονίων. Ένα χωρικό σολιτόνιο σχηματίζεται όταν η τάση αυτό-εστίασης μιας δέσμης εξισορροπεί την επέκταση του λόγω περίθλασης της δέσμης, ενώ ένα αντίστοιχο χρονικό όταν η τάση αυτό-διαμόρφωσης της φάσης του αντιτίθεται στην τάση διασποράς του χρονικού παλμού. Και στις δύο περιπτώσεις μιλάμε για αυτό-εντοπισμένη δέσμη.

Σολιτόνια έχουν παρατηρηθεί ήδη από το 1980 στην μετάδοση σημάτων μέσω οπτικών ινών, τόσο τα λεγόμενα dark solitons, τα οποία παρουσιάζονται ως βυθίσεις στην ένταση του σήματος με βάση ένα υπόβαθρο, όσο και τα λεγόμενα bright solitons τα οποία παρουσιάζονται ως μία ανύψωση της έντασης της δέσμης σε μηδενικό υπόβαθρο. Χωρικά dark solitons μπορούν να δημιουργηθούν επίσης σε οπτικούς κυματοδηγούς όταν ο δείκτης διάθλασης είναι μικρότερος στην περιοχή υψηλών εντάσεων.

Οι οπτικές δέσμες στους κυματοδηγούς έχουν την τάση να περιθλώνται (διασπείρονται) κατά τη διάδοσή τους σε ομογενή μέσα. Αυτή η διασπορά όμως μπορεί να αντισταθμιστεί αν υπάρξει διάθλαση ή οποία θα προέρχεται από μεταβολή του δείκτη διάθλασης του υλικού στην εγκάρσια διεύθυνση της δέσμης. Τότε το υλικό λειτουργεί ως κυματοδηγός που περιορίζει την δέσμη στην περιοχή του υλικού με υψηλό δείκτη διάθλασης, προκαλώντας μια ισορροπία μεταξύ των φαινομένων της περίθλασης (διασποράς) και της διάθλασης. Η διάδοση της οπτικής δέσμης περιγράφεται από μια γραμμική μη ομογενή εξίσωση που ως λύση της δίνει τους κανονικούς τρόπους που διαδίδονται στον κυματοδηγό. Το ίδιο φαινόμενο, δηλαδή η εξισορρόπηση της περίθλασης από μεταβολή του δείκτη διάθλασης, μπορεί να συμβεί και μέσω αμιγώς μη γραμμικών φαινομένων και χαρακτηριστικών του μέσου. Οι μη γραμμικότητες οδηγούν την ίδια τη δέσμη να μεταβάλλει τον δείκτη διάθλασης γύρω της και να δημιουργεί η ίδια τον κυματοδηγό μέσα στον οποίο τελικά παγιδεύεται και διαδίδεται. Η μεταβολή του δείκτη είναι βαθμιαία σε σχέση με την ένταση της δέσμης, ενώ παρ'όλο που η δέσμη περιθλάται σε χαμηλές ισχείς, η ένταση σε πολλές περιπτώσεις είναι αρκετή ώστε να οδηγήσει σε δημιουργία σολιτονίου. Το σολιτόνιο μπορεί να θεωρηθεί ως ο βασικός κανονικός

τρόπος διάδοσης αυτής της δέσμης στο υλικό. Η εξίσωση που περιγράφει την διάδοση αυτή είναι μια μη-γραμμική μη-ομογενής, στη γενικότερη περίπτωση, μερική διαφορική εξίσωση.



Σχήμα 1.0. Σχηματική αναπαράσταση της περιοχής διάδοσης ενός σολιτονίου. Στην πρώτη περίπτωση (αριστερά) έχουμε μια διάταξη slab, όπου ουσιαστικά το σολιτόνιο έχει μία εγκάρσια διάσταση ελεύθερη, διότι η δεύτερη καθορίζεται από την ίδια τη διάταξη κυματοδότησης (περιοχή υλικού), ενώ στην δεύτερη (δεξιά) το σολιτόνιο έχει δύο μεταβλητές διαστάσεις. Αναφορά εικόνας : Kivshar, Agrawal - Optical solitons [2],σελ 8.

1.1 Μη-γραμμική εξίσωση Schrodinger στην οπτική

Ο μη-γραμμικός μηχανισμός που επιτρέπει τον σχηματισμό των σολιτονίων στην οπτική σχετίζεται με την εξάρτηση του δείκτη διάθλασης του οπτικού μέσου διάδοσης από την ίδια την ένταση ακτινοβολίας. Αυτή η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης έχει σαν αποτέλεσμα φαινόμενα χωρικής αυτό-εστίασης της δέσμης ή χρονικής αυτό-διαμόρφωσης. Η δημιουργία των σολιτονίων είναι επακόλουθο της εξισορρόπησης της επίδρασης της μη γραμμικότητας με την επίδραση του αντίστοιχου γραμμικού μηχανισμού περίθλασης ή διασποράς που έχει σαν

αποτέλεσμα τον σχηματισμό χωρικά εντοπισμένων οπτικών δεσμών ή χρονικά εντοπισμένων χρονικών παλμών, αντίστοιχα [2]. Ο σχηματισμός και η δυναμική διάδοσης σολιτονίων σε ένα μη-γραμμικό οπτικό μέσο περιγράφεται από τη Μη-Γραμμική εξίσωση Schrödinger (NonLinear Schrödinger – NLS).

1.1.1 Η εξίσωση NLS

Η μη-γραμμική εξίσωση Schrodinger βρίσκει εφαρμογές σε διάφορους τομείς των μαθηματικών και της φυσικής, τόσο ως εξαγόμενη από βασικές εξισώσεις, όσο και ως οριακή προσέγγιση διάφορων άλλων κυματικών εξισώσεων που αναφέρονται στην κλασική θεωρία πεδίου. Εκτός της οπτικής εμφανίζεται στη μελέτη συμπυκνωμάτων Bose-Einstein τα οποία παγιδεύονται σε ανισοτροπικά μέσα [15],[7], αλλά και σε κύματα μικρού πλάτους στην επιφάνεια ρευστού χωρίς ιζώδες με μεγάλο βάθος. Επίσης παρουσιάζεται σε εφαρμογές διάδοσης κυμάτων σε θερμό πλάσμα και στην ιονόσφαιρα, καθώς και σε πληθώρα άλλων φαινομένων [3].

Στην περίπτωση όπου η μη-γραμμικότητα του μέσου είναι τύπου Kerr, ο μη-γραμμικός δείκτης διάθλασης είναι ανάλογος της έντασης του κύματος. Η μη γραμμικότητα αυτή προκύπτει από την παρουσία της επιδεκτικότητας τρίτης τάξης του μέσου που προκαλεί μια εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από το τετράγωνο του μέτρου της έντασης πεδίου (ένταση ακτινοβολίας). Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση έχει την παρακάτω μορφή

$$iu_z + u_{xx} + 2|u|^2u = 0 \quad (1.1)$$

όπου u είναι η αργά μεταβαλλόμενη περιβάλλουσα του κύματος, z η κανονικοποιημένη απόσταση διάδοσης και x η κανονικοποιημένη εγκάρσια χωρική συντεταγμένη. Αν και, όπως

Κεφάλαιο 1 Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

προαναφέρθηκε, ο μηχανισμός σχηματισμού και διάδοσης σολιτονίων είναι αντίστοιχος στην περίπτωση χρονικών και χωρικών σολιτονίων, στην παρούσα εργασία θα αναφερόμαστε στη δεύτερη περίπτωση. Η τοπολογία των φωτονικών διατάξεων που αντιστοιχεί σε αυτή την περιγραφή είναι επίπεδη τοπολογία (slab waveguides) όπου το κύμα περιορίζεται στην y εγκάρσια διάσταση λόγω κυματοδότησης.

1.1.2 Εξαγωγή της εξίσωσης NLS από τις εξισώσεις Maxwell

Οι εξισώσεις του Maxwell δίνουν

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

Όπου \mathbf{E} είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, \mathbf{H} η ένταση του μαγνητικού πεδίου, \mathbf{D} η διηλεκτρική μετατόπιση και \mathbf{B} η μαγνητική επαγωγή. Επίσης έχουμε τις σχέσεις

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

με \mathbf{M} την μαγνήτιση και \mathbf{P} τη πόλωση. Για απλότητα θεωρούμε πως $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, ενώ έχουμε θεωρήσει επίσης πως δεν υπάρχουν πηγές στον χώρο, αλλά τα πεδία έχουν δημιουργηθεί από επιβαλλόμενες πηγές αρκετά μακριά τις οποίες δεν αναλύουμε. Θεωρούμε ότι η πόλωση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο όρων εκ των οποίων ο ένας αναφέρεται στο γραμμικό της μέρος και ο δεύτερος στο μη γραμμικό ως εξής:

Κεφάλαιο 1 Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(L)} + \mathbf{P}^{(NL)}$$

Παίρνοντας το στροβιλισμό της δεύτερης από τις εξισώσεις Maxwell έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

και τη σχέση για τη διηλεκτρική μετατόπιση,

$$\mathbf{D}^{(L)} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}^{(L)} = \varepsilon\mathbf{E}$$

όπου ε είναι η επιδεκτικότητα του μέσου και θεωρήσαμε πως ισχύει για το γραμμικό μέρος της πόλωσης ότι :

$$\mathbf{P}^{(L)} = \chi^{(1)}\mathbf{E}$$

Λαμβάνουμε τελικά:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}^{(L)} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{(NL)} = 0 \quad (1.2)$$

Θεωρούμε το ηλεκτρικό πεδίο διαδιδόμενο στην κατεύθυνση z , μπορούμε τότε να το αναπαραστήσουμε με την παρακάτω μορφή.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}(x, y, z) e^{ikz - i\omega t} + c.c.]$$

Κεφάλαιο 1 Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

όπου $A(x, y, z)$ είναι μια αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση σε σχέση με το μήκος κύματος του σολιτονίου. Στις πρακτικές εφαρμογές το προφίλ του πεδίου στη διάσταση y προσδιορίζεται από τις συνθήκες κυματοδότησης. Θεωρούμε πως ισχύει μια αντίστοιχη σχέση για την πόλωση:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} [\mathbf{p}(x, y, z) e^{ikz - i\omega t} + c. c]$$

Το γραμμικό μέρος της διηλεκτρικής μετατόπισης μπορεί να γραφεί ως:

$$D_i^{(L)} = \varepsilon_{ij}^{(L)} E_j$$

$$\varepsilon_{ij}^{(L)} = 1 + 4\pi\chi_{ij}^{(L)}$$

Θεωρώντας πως τα μη γραμμικά φαινόμενα έχουν πολύ μικρότερη συμμετοχή,

$$|\varepsilon_{ij}^{(NL)}| \ll |\varepsilon_{ij}^{(L)}|$$

τότε μπορεί να αγνοηθεί ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (1.2) και λαμβάνουμε τελικά:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(L)} \mathbf{E} + \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}^{(NL)} = 0 \quad (1.3)$$

Θεωρούμε ότι η περιβάλλουσα του ηλεκτρικού πεδίου, \mathbf{A} , μεταβάλλεται αργά ως προς τον άξονα διάδοσης σε σχέση με το μήκος κύματος, δηλαδή

$$\left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right| \ll k |\mathbf{A}|$$

Συνεπώς μπορούμε να προσεγγίσουμε την εξίσωση (1.3) ως:

$$2ik \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{A} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{A} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}^{(L)} \right) \mathbf{A} + \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{p}^{(NL)} = 0$$

Κεφάλαιο 1 Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

Σε ιστροπικά μέσα ισχύει πως , $\varepsilon_{ii}^{(L)} = \varepsilon_0$, ενώ για τον μη γραμμικό όρο της πόλωσης

$p^{(NL)} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx} |A|^2 A$. Αν διαλέξουμε ως k , το $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0^{(L)}}$ και με κανονικοποιήσεις τις :

$$\tau = kx , \xi = kz , \psi = \sqrt{\frac{3}{2} \pi \chi_{xxxx}^{(3)} / \varepsilon_0 A}$$

Λαμβάνουμε την εξίσωση NLS στην κανονικοποιημένη της μορφή [28]:

$$i \frac{\partial}{\partial \xi} \psi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \psi + |\psi|^2 \psi = 0 \quad (1.4)$$

Η εξαγωγή της εξίσωσης NLS που ακολουθήσαμε θεωρεί πως δεν υπάρχουν φαινόμενα συντονισμού στους όρους της μη γραμμικότητας καθώς και το ότι τα πιο σημαντικά φαινόμενα περιγράφονται από την περιβάλλουσα του οπτικού πεδίου που διαδίδεται στη βασική συχνότητα ω , η οποία σχετίζεται με τον κυματαριθμό k ως : $k = n(\omega) \omega / c$. Όλες οι ανώτερες αρμονικές θεωρούνται πολύ ασθενείς ώστε να επηρεάζουν την περιβάλλουσα που δημιουργείται στη βασική συχνότητα. Υπάρχουν βέβαια υπό κατάλληλες συνθήκες φαινόμενα wave mixing κατά τα οποία η περιβάλλουσα συζεύγνυται ισχυρά με ένα ή περισσότερα δευτερεύοντα πεδία, οπότε τότε παύει και η ισχύς της εξίσωσης NLS. Επίσης η εξίσωση NLS αποτυγχάνει μια καλή περιγραφή των φαινομένων σε περιπτώσεις στις οποίες μπορεί να υπάρξει μια κατάρρευση της περιβάλλουσας (ή απειρισμός) σε πεπερασμένο χρόνο διάδοσης. Αυτό οφείλεται στο ότι έχουμε μια παραβίαση της κλίμακας πάνω στην οποία στηρίχθηκε η ασυμπτωτική ανάλυση και τότε κανείς χρειάζεται να λάβει υπ' όψιν του τόσο ανώτερης τάξης διασπορά, όσο και την μη παραξονική συμπεριφορά της δέσμης. [8]

Στα πλαίσια της μη γραμμικής οπτικής η εξίσωση NLS μπορεί να περιγράψει επαρκώς αυτό-οδηγούμενες δέσμες σε κυματοδηγούς και σε μη γραμμικά μέσα σαν χωρικά σολιτόνια, οπτικούς παλμούς σε οπτικές ίνες σαν χρονικά σολιτόνια και αυτοεστίαση μιας δέσμης με πιθανότητα κατάρρευσης της. Όταν η NLS είναι σωστή σαν πρώτη προσέγγιση, τότε όλες οι διορθώσεις μπορούν να αντιμετωπιστούν ως διαταραχές, αρκεί να μην βρισκόμαστε κοντά σε

συντονισμούς γιατί τότε η έννοια της διαταραχής δεν έχει νόημα και πρέπει να ακολουθηθεί άλλη μεθοδολογία.

1.1.3 Σολιτονικές λύσεις της NLS

Από τους πιο γνωστούς τύπους σολιτονίων είναι αυτά που οφείλονται σε μη γραμμικότητα Kerr. Η μη γραμμικότητα αυτή προκύπτει από την παρουσία της επιδεκτικότητας τρίτης τάξης του μέσου που προκαλεί μια εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από το τετράγωνο του μέτρου της έντασης πεδίου (ένταση ακτινοβολίας). Τα σολιτόνια αυτά περιγράφονται από τη μη γραμμική εξίσωση Schrodinger (NLS) με την οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια. Τα σολιτόνια μπορούν να έχουν είτε μία χαρακτηριστική διάσταση περιορισμού του οπτικού πεδίου οπότε μιλάμε για διάδοση σε slab διατάξεις είτε να είναι δύο διαστάσεων οπότε μιλάμε για bulk. Στην περίπτωση μιας εγκάρσιας διάστασης, η εξίσωση NLS αποτελεί μια ολοκληρώσιμη μερική διαφορική εξίσωση. Σαν δυναμικό σύστημα άπειρων βαθμών ελευθερίας, η NLS έχει άπειρα ολοκληρώματα της κίνησης και αντίστοιχες άπειρες συμμετρίες. Η επίλυσή της μπορεί να πραγματοποιηθεί αναλυτικά με τη μέθοδο της Αντίστροφης Σκέδασης (Inverse Scattering) [4],[8].

Η εξίσωση NLS είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς κλίμακας, έτσι ώστε, αν θεωρήσουμε μια λύση της NLS, $u(x, z)$, τότε και η

$$u'(x, z; \eta) = \eta \cdot u(\eta x, z) e^{i\frac{\eta^2 z}{2}}$$

αποτελεί λύση της.

Επιπλέον, η λύση της εξίσωσης NLS παραμένει αναλλοίωτη κάτω από γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς. Αυτό γίνεται εμφανές αν θέσουμε όπου $x' = x - vz$. Έχουμε σε αυτή την περίπτωση ότι η:

$$u'(x, z; v) = u(x - vz, z) \cdot \exp(ivx - iv^2 z/2)$$

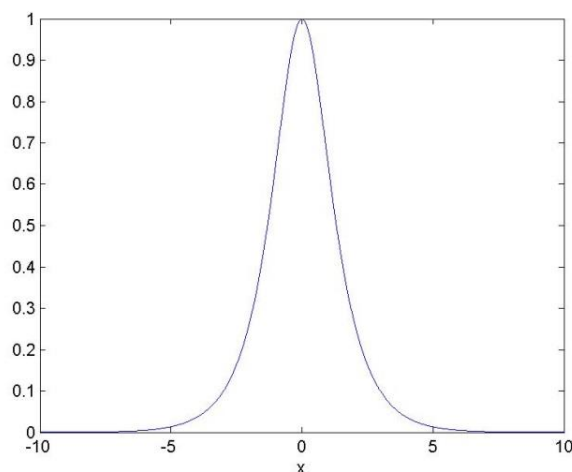
Κεφάλαιο 1 Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

αποτελεί επίσης λύση της εξίσωσης (1.1). Βλέπουμε δηλαδή ότι οι δύο λύσεις έχουν το ίδιο προφίλ εντός μιας απλής χωρικής μετατόπισης στη διεύθυνση του x και ενός παράγοντα φάσης, ο οποίος όμως δεν επηρεάζει το προφίλ του σολιτονίου.

Με ακριβή επίλυση της εξίσωσης NLS μέσω της μεθόδου αντίστροφης σκέδασης, είτε με αναζήτηση λύσης η οποία αντιστοιχεί σε solitary wave, δηλαδή σε κύμα που διαδίδεται ως προς μια κατεύθυνση και διατηρεί αναλλοίωτο το προφίλ του, λαμβάνουμε ως λύση της εξίσωσης [28]

$$u = \eta \cdot \operatorname{sech}(\eta(x - vz)) \cdot \exp\left(i\frac{\eta^2}{2}z + i(vx - v^2z/2)\right) \quad (1.5)$$

Παρατηρούμε πως το πλάτος του σολιτονίου η έχει αντίστροφη σχέση με το χωρικό του εύρος στη εγκάρσια διάσταση x και πως η παράμετρος v εκφράζει την κλίση της διεύθυνσης διάδοσης του σολιτονίου ως προς τον άξονα z . Αυτή η μορφή σολιτονίου είναι γνωστή ως bright soliton καθώς έχει ένα ανυψωμένο προφίλ το οποίο τείνει στο μηδέν σε μεγάλες εγκάρσιες αποστάσεις.

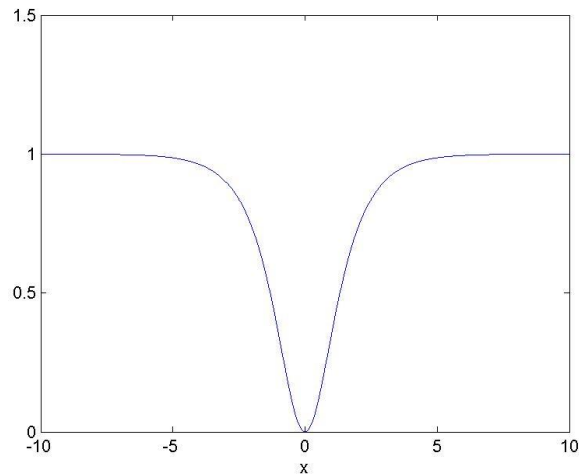


Σχήμα 1.1. Τυπική μορφή σολιτονίου (bright soliton)

Άλλοι τύποι σολιτονικών λύσεων, που αντιστοιχούν και σε τροποποιημένες μορφές της αρχικής εξίσωσης, είναι τα λεγόμενα dark solitons και grey solitons, τα οποία προκύπτουν όταν

Κεφάλαιο 1 Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

ο όρος της μη-γραμμικότητας στην NLS έχει αρνητικό πρόσημο πράγμα το οποίο δηλώνει μια αυτο-αφεστιάζουσα μη γραμμικότητα τύπου Kerr και έχει την ακόλουθη μορφή [2],[28].



Σχήμα 1.2. Προφίλ dark soliton

Εκτός της μη γραμμικότητας Kerr, παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και άλλες μορφές μη γραμμικής απόκρισης του μέσου που περιγράφονται από διαφορετική συναρτησιακή εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από την ένταση. Τέτοιες είναι επιγραμματικά οι κορέσιμες μη γραμμικότητες, οι οποίες μπορούν να περιγράψουν ατομικά συστήματα δύο επιπέδων, ή φωτοδιαθλαστικά (photorefractive) υλικά [25],[26]. Άλλες μη γραμμικότητες είναι αυτές στις οποίες εμφανίζεται εξάρτηση από δύο δυνάμεις της έντασης, συνήθως με λόγο δύο, μη γραμμικότητες με εξάρτηση από μια δύναμη έντασης αλλά και μη γραμμικότητες στις οποίες υπάρχει ένα κατώφλι προκειμένου να υπάρξει εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από την ένταση.

- Κορέσιμη μη γραμμικότητα : $N(I) = \frac{I}{1+\gamma I}$
- Μη γραμμικότητα με λόγο δυνάμεων 2 : $N(I) = I^n + aI^{2n}$
- Παραβολική μη γραμμικότητα : $N(I) = I + \nu I^2$
- Μη γραμμικότητα εξαρτώμενη από τυχαία δύναμη της έντασης I : $N(I) = I^b, b > 0$

- Μη γραμμικότητα κατωφλίου:
$$N(I) = \begin{cases} 0, & I < I_0 \\ n_2 - n_1, & I \geq I_0 \end{cases}$$

Οι παραπάνω τύποι μη-γραμμικής απόκρισης έχουν σαν κοινό χαρακτηριστικό το γεγονός ότι η τιμή του δείκτη διάθλασης σε κάποιο σημείο του μέσου εξαρτάται μόνο από την τιμή της έντασης του πεδίου στο σημείο αυτό. Μια τέτοια απόκριση χαρακτηρίζεται ως τοπική. Στην συνέχεια της εργασίας θα ασχοληθούμε με μη-γραμμικότητα η οποία περιλαμβάνει και φαινόμενα μη τοπικότητας στο δείκτη διάθλασης, δηλαδή εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από μια περιοχή ενός σημείου και όχι μόνο από την τιμή της έντασης στο σημείο αυτό.

1.2 Φυσική και εφαρμογές μέσων με μη τοπική απόκριση

Ενδιαφέρον από θεωρητική αλλά και πρακτική άποψη παρουσιάζουν τα μέσα στα οποία η μη γραμμικότητα εμφανίζει μια μη τοπική εξάρτηση. Αυτό σημαίνει πως σε κάθε σημείο ο αντίστοιχος δείκτης διάθλασης του μέσου εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή της έντασης ακτινοβολίας σε εκείνο το σημείο, αλλά υπάρχει και μια συνεισφορά από τα γειτονικά σημεία, προφανώς με κάποια αντίστοιχη βαρύτητα. Το πώς προσμετράται αυτή η βαρύτητα στο όριο του συνεχούς εξαρτάται από το εκάστοτε μοντέλο. Από φυσικής πλευράς φαίνεται εύλογο το ότι υπάρχει μια συνεχής μείωση της συνεισφοράς κατά την απομάκρυνση από το προς μελέτη σημείο.

Από τα πιο συνήθη υλικά που παρουσιάζουν τέτοιας μορφής μη τοπικότητα είναι τα λεγόμενα φωτοδιαθλαστικά (photorefractive materials) [19],[20],[21],[22],[26],[27]. Σε αυτά τα υλικά έχουμε φαινόμενα συμβολής από προσπίπτουσες δέσμες φωτός. Στις περιοχές που υπάρχει ενισχυτική συμβολή τα ηλεκτρόνια μπορούν να διεγερθούν στη ζώνη αγωγιμότητας και συνεπώς είναι ικανά να διαχυθούν μες στο υλικό εντός ενός συγκεκριμένου μήκους διάχυσης. Πέρα από αυτό το μήκος, στατιστικά, θα έχουμε επαναδέσμευση των ηλεκτρονίων

Κεφάλαιο 1 Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

σε θέσεις που υπάρχουν προσμίξεις. Αυτή η αναδιανομή των ηλεκτρονίων δημιουργεί ένα εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Το πεδίο αυτό παραμένει ακόμη και μετά την απομάκρυνση του φωτισμού του υλικού. Μέσω του ηλεκτρο-οπτικού φαινομένου σε σημεία που το πεδίο είναι ισχυρότερο έχουμε χωρικά εξαρτημένη μεταβολή του δείκτη διάθλασης.

Στην περίπτωση των σολιτονίων, το ίδιο το σολιτόνιο είναι αυτό που μέσω αλληλεπιδράσεων με τον περιβάλλοντα χώρο, διαμορφώνει το δείκτη διάθλασης και με τη σειρά του αυτός επηρεάζει τη δυναμική του σολιτονίου. Σε κάθε σημείο το σολιτόνιο 'νιώθει' ένα δείκτη διάθλασης που αποτελεί το σταθμισμένο μέσο όρο μιας ευρύτερης περιοχής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα μια δυναμική η οποία εξαρτάται άμεσα από τη διαμόρφωση του μέσου, αλλά και τα χαρακτηριστικά του κύματος. Διαφορετικά σολιτόνια θα αντιμετωπίζουν διαφορετικά το μέσο και διαφορετικές διαμορφώσεις του μέσου θα επιτρέπουν την ανάπτυξη διαφορετικών σολιτονίων. Το μέσο αποκτά μια επιλεκτικότητα στα διαδιδόμενα κύματα όχι μόνο με βάση τα χαρακτηριστικά τους (π.χ πλάτος, εύρος), αλλά και με βάση τις αρχικές συνθήκες δηλαδή τη θέση και τη γωνία πρόσπτωσης της δέσμης φωτός στο μέσο διάδοσης η οποία διεγείρει τη δημιουργία σολιτονίου. Φυσικά αυτές οι αρχικές συνθήκες μπορεί να αντιστοιχούν σε κάποιο διαφορετικό μέγεθος αναλόγως την εφαρμογή.

Σε φωτοδιαθλαστικούς φωτονικούς κρυστάλλους έχουμε συνήθως επιβολή εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου (bias) με αποτέλεσμα σημαντικές τιμές της μη-γραμμικότητας έτσι ώστε να διευκολύνεται ο σχηματισμός σολιτονίων. Υπάρχει ένα κατώτερο κατώφλι στην εξωτερική πόλωση για να αναπτυχθούν τα σολιτόνια. Οι κρύσταλλοι είναι συνήθως ευθυγραμμισμένοι με την κατεύθυνση διάδοσης του σολιτονίου ώστε να πετυχαίνουμε απαιτήσεις συμμετρίας. Τα PR (photorefractive) σολιτόνια μπορούν να παρατηρηθούν σε χαμηλές ισχύες πράγμα που τα κάνει πολύ ελκυστικά για εφαρμογές σε optical switching σε επίπεδο ισχύος microwatt. Σε περιπτώσεις ισχυρού εξωτερικού πεδίου μπορούν να παρατηρηθούν τα λεγόμενα dark solitons αλλά και bright και grey. [1],[2]

Ένα άλλο μέσο στο οποίο παρουσιάζονται τέτοια φαινόμενα είναι οι υγροί κρύσταλλοι. Ενώ δεν πρόκειται επακριβώς για κρυστάλλους, εν τούτοις τα μόρια του υλικού σχηματίζουν ηλεκτρικά δίπολα που μπορεί να προσανατολίζονται σε μια φαινόμενη κρυσταλλική μορφή. [2],[30]. Τυπικές εφαρμογές μέσων με μη τοπική απόκριση, κυρίως φωτονικών κρυστάλλων, είναι η ολογραφία αλλά και διάφορες εφαρμογές στην οπτική διαμόρφωση και μετάδοση σημάτων [30].

1.3 Φυσικά μοντέλα που οδηγούν στην μη-τοπική (nonlocal) NLS

Διάφορα μοντέλα που αγγίζουν τα πεδία της επιστήμης υλικών και της κβαντικής μηχανικής, είναι ικανά να περιγράψουν υπό κατάλληλες παραδοχές και απλοποιήσεις όρους που δημιουργούν μια μη-τοπική συμπεριφορά στο μέσο.

Ένα μοντέλο που συνυπολογίζει φαινόμενα σε μικροσκοπική κλίμακα ώστε να λάβουμε την μη-γραμμική και μη-τοπική κυματική εξίσωση διάδοσης είναι αυτό του Kukhtarev. Το μοντέλο αυτό συμπεριλαμβάνει φαινόμενα τοπικής μεταβολής του δείκτη διάθλασης λόγω επαγόμενων ηλεκτρικών φορτίων καθώς και φαινόμενα σύζευξης φάσης (phase coupling) μεταξύ γειτονικών σημείων σε συνεχές επίπεδο. Περισσότερο τεχνικές λεπτομέρειες του μοντέλου μπορούν να αναζητηθούν στη σχετική βιβλιογραφία [23], καθώς εδώ θα αρκεστούμε απλά σε μια φαινομενολογική περιγραφή της εξαγωγής της μη-τοπικής εξίσωσης NLS.

1.3.1 Γενικό μοντέλο μη-τοπικής NLS

Αρχικά θεωρούμε την κλασική μορφή της εξίσωσης NLS με τον μη-γραμμικό όρο να περιλαμβάνει την μη-τοπική απόκριση του μέσου:

$$iu_z + u_{xx} + 2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} R(x-x')I(x')dx' \right] u = 0$$

Κεφάλαιο 1 Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

Η συνάρτηση R περιγράφει την σταθμισμένη συνεισφορά της έντασης του πεδίου $I = |u|^2$ στην θέση x' ως προς τη διαμόρφωση του δείκτη διάθλασης του μέσου στη θέση x . Η μορφή της συνάρτησης R εξαρτάται από της ιδιότητες του μέσου και δηλώνει πρακτικά το χωρικό εύρος της μη-τοπικότητας. Η συνάρτηση της έντασης I μπορεί να αντικατασταθεί με το ανάπτυγμά της σε σειρά Taylor, πράγμα το οποίο καθίσταται εφικτό υπό την θεώρηση ότι το προφίλ u του σολιτονίου έχει αρκετά μεγαλύτερο εύρος τοπικά σε σχέση με τη συνάρτηση R , ώστε θεωρούμε πως μεταβάλλεται αρκετά αργά στη γειτονιά του σημείου. Γύρω από το σημείο x , έχουμε

$$I(x') = I(x) + \frac{\partial I}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x' - x)^2 + \dots$$

όπου οι παράγωγοι είναι υπολογισμένες στο x . Διατηρώντας μόνο τους δύο πρώτους όρους, έχουμε για το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int R(x-x')I(x')dx' &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') \left[I(x) + \frac{\partial I}{\partial x}(x' - x) \right] dx' \\ &= \int R(x-x')I(x)dx' + \int R(x-x') \frac{\partial I}{\partial x}(x' - x)dx' \\ &= I(x) \int R(x-x')dx' + \frac{\partial I}{\partial x} \int R(x-x')(x' - x)dx' \end{aligned}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση R κανονικοποιημένη έτσι ώστε $\int R(x-x')dx' = 1$. Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει μη τοπικότητα, η συνάρτηση R είναι απλά μια συνάρτηση δέλτα Dirac (δ).

Συνεπώς, ο πρώτος όρος δίνει απλά $I(x)$, ενώ ο δεύτερος

$$\gamma \frac{\partial I}{\partial x}, \text{ με } \gamma = \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x')(x' - x)dx'$$

Κεφάλαιο 1 Η εξίσωση NLS και οι σολιτονικές της λύσεις

όπου γ είναι το ολοκλήρωμα του δεύτερου όρου και αποτελεί ένα σταθερό όρο του οποίου η τιμή εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης R και εκφράζει την ασυμμετρία της.

Τελικά λοιπόν η διαταραγμένη εξίσωση NLS γίνεται

$$iu_z + u_{xx} + 2 \left[I(x) + \gamma \frac{\partial I}{\partial x} \right] u = 0$$

Έχουμε όμως πως $I(x) = |u(x)|^2$ οπότε η εξίσωση γίνεται στην τελική της μορφή

$$iu_z + u_{xx} + 2|u|^2u + 2\gamma \frac{\partial |u|^2}{\partial x} u = 0 \quad (1.6)$$

Όπως παρατηρούμε η μη-τοπική εξίσωση Schrödinger περιέχει, σε σχέση με την απλή μη γραμμική NLS, έναν επιπλέον όρο που ανακύπτει λόγω των φαινομένων μη τοπικότητας και εξαρτάται από την πρώτη παράγωγο της έντασης της δέσμης. Αυτό σημαίνει πως η χωρική παράγωγος του προφίλ της δέσμης στην εγκάρσια διεύθυνση θα παίζει σημαντικό ρόλο στη δυναμική της. Δηλαδή πιο εντοπισμένα σολιτόνια (μεγαλύτερη παράγωγος/ πιο απότομες μεταβολές στο προφίλ) αναμένουμε να έχουνε αρκετά διαφορετική συμπεριφορά από σολιτόνια με μεγαλύτερο χωρικό εύρος στον εγκάρσιο άξονα (πιο διεσπαρμένα). Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, το σολιτόνιο οφείλει να έχει καθορισμένο «εμβადόν» (ως προς το προφίλ του) λόγω διατήρησης της ενέργειας, συνεπώς το χωρικό εύρος θα σχετίζεται αντιστρόφως ανάλογα με το πλάτος του σολιτονίου. Αυτό μας οδηγεί στο να ασχοληθούμε με την ποιοτική συμπεριφορά των σολιτονίων βάσει του πλάτους τους και το πώς αυτό συσχετίζεται με τα χαρακτηριστικά του μέσου.

Κεφάλαιο 2

Εγκάρσια ανομοιογένεια του δείκτη διάθλασης και μη-τοπική απόκριση

Διάφορα φωτονικά συστήματα αποτελούνται από διατάξεις επίπεδων κυματοδηγών με χωρική ανομοιογένεια ως προς τον εγκάρσιο άξονα (κάθετο στον άξονα διάδοσης). Η ύπαρξη εγκάρσιας ανομοιογένειας στο δείκτη διάθλασης συνεπάγεται την δυνατότητα παγίδευσης μιας σολιτονικής δέσμης σε περιοχές με μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης. Η παγίδευση ενός σολιτονίου εξαρτάται ισχυρά τόσο από τα χαρακτηριστικά του σολιτονίου (π.χ. πλάτος, γωνία πρόσπτωσης δέσμης) όσο και από τα χαρακτηριστικά του μέσου (πλάτος όρου ανομοιογένειας, κυματάριθμος διαμόρφωσης).

Το πιο απλό μοντέλο δυναμικής σολιτονίων σε ανομοιογενή μέσα περιλαμβάνει την τοπική απόκριση του μέσου με τη μορφή ενός όρου εγκάρσιας ανομοιογένειας στην εξίσωση διάδοσης NLS. Υπάρχουν όμως μέσα τα οποία, επιπλέον της ανομοιογένειας, εμφανίζουν και μη-τοπική απόκριση πράγμα το οποίο έχει σαν αποτέλεσμα διαφορετικά χαρακτηριστικά σχηματισμού και δυναμικής διάδοσης των σολιτονίων [1][6][19][29][30]. Αναλόγως τη μορφή

της μη-τοπικότητας και τις ιδιότητες της (ένταση, εύρος, συμμετρίες) παρατηρούνται και διαφορετικές συμπεριφορές και ανακύπτουν νέα φαινόμενα του διάδοσης. Συνήθως τόσο η μη-τοπικότητα όσο και η ανομοιογένεια του μέσου υπεισέρχονται στο μοντέλο με αρκετά ασθενή συνεισφορά ώστε να μπορούν να αντιμετωπιστούν σαν διαταραχές και προστίθενται στην εξίσωση NLS σαν όροι που επηρεάζουν τον δείκτη διάθλασης.

2.1 Αδιαβατική θεωρία διαταραχών και μοντέλο ενεργού σωματιδίου (effective particle)

Για τη μελέτη της δυναμικής διάδοσης σολιτονίων σε μέσα με ασθενή μη-τοπικότητα και ανομοιογένεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαταρακτικές μεθόδους που λειτουργούν αρκετά καλά τόσο από ποιοτική όσο και από ποσοτική άποψη. Φυσικά πάντα υπάρχουν περιορισμοί σε μια διαταρακτική μέθοδο, και εδώ θα λάβουμε υπ' όψιν μας αυτούς τους περιορισμούς. Η παρουσία ασθενούς μη-τοπικότητας της απόκρισης και ασθενούς ανομοιογένειας έχει σαν αποτέλεσμα τη διατήρηση του εντοπισμένου χαρακτήρα και σχήματος του σολιτονίου, αλλά και τη δραστική μεταβολή των χαρακτηριστικών της διάδοσής του. Η εξίσωση NLS λοιπόν γίνεται

$$iu_z + u_{xx} + 2|u|^2u + 2\gamma \frac{\partial |u|^2}{\partial x} u = uA \sin kx \quad (2.0)$$

Όπως εξαγάγαμε στο πρώτο κεφάλαιο, ο τέταρτος όρος στο αριστερό μέλος αποτελεί τον όρο της μη-τοπικότητας, ενώ ο όρος στο δεξιό μέλος αντιστοιχεί σε μια ημιτονοειδή εγκάρσια ανομοιογένεια στο δείκτη διάθλασης του μέσου.

2.1.1 Αδιαβατική θεωρία διαταραχών

Για την εξίσωση NLS ορίζεται ως μάζα το ολοκλήρωμα

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx$$

Η μάζα αντιστοιχεί στην ολική ισχύ του κύματος (σολιτονίου) όπως αυτή ορίζεται από την κλασική φυσική ως το τετράγωνο του πλάτους. Χρησιμοποιώντας ως λύση της αδιατάρακτης εξίσωσης NLS την εξίσωση (1.2) του κεφαλαίου 1 βρίσκουμε πως η αντίστοιχη μάζα ισούται με $m = 2\eta$. Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας ως προς τον άξονα διάδοσης, δίνεται από την σχέση:

$$\frac{dm}{dz} = \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx$$

όπου αντικαθιστώντας $|u|^2 = u \cdot u^*$, παραγωγίζοντας και χρησιμοποιώντας την αδιατάρακτη εξίσωση NLS και τη συζυγή της

$$u_z = iu_{xx} + i2|u|^2u$$

$$u_z^* = -iu_{xx}^* - i2|u|^2u^*$$

μετά από παραγοντική ολοκλήρωση και θεωρώντας ότι στο άπειρο έχουμε $u \rightarrow 0$, προκύπτει ότι για τη λύση u της αδιατάρακτης NLS (εξίσωση 1.2 κεφαλαίου 1)

$$\frac{dm}{dz} = 0$$

Συνεπώς, η μάζα αποτελεί μια διατηρήσιμη ποσότητα για την αδιατάρακτη εξίσωση NLS.

Το ολοκλήρωμα:

$$p = i \int_{-\infty}^{\infty} [u \cdot u_x^* - u_x \cdot u^*] dx$$

ορίζεται ως ορμή. Με τρόπο αντίστοιχο με την μάζα, προκύπτει πως και η ορμή αποτελεί διατηρήσιμη ποσότητα της αδιατάρακτης NLS. Χρησιμοποιώντας την σχέση (1.5) του κεφαλαίου 1 προκύπτει πως $p = mv$, με αντίστοιχη μάζα ίση με $m = 2\eta$, που αποτελεί και

την αντίστοιχη σχέση ορισμού της ορμής στο χαμιλτονιανό σύστημα του κλασσικού σωματιδίου. Στην προκειμένη περίπτωση η ταχύτητα v σχετίζεται με την κλίση της κατεύθυνσης διάδοσης του σολιτονίου ως προς τη διεύθυνση του διαμήκου άξονα z .

Θεωρώντας γενικά τις διαταραχές ως έναν πρόσθετο όρο P η εξίσωση NLS γράφεται στη μορφή:

$$iu_z + u_{xx} + 2|u|^2u = P$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση αυτή και την συζυγή της:

$$u_z = iu_{xx} + i2|u|^2u - iP$$

$$u_z^* = -iu_{xx}^* - i2|u|^2u^* + iP^*$$

προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις αντίστοιχα για το ρυθμό μεταβολής της μάζας και της ορμής

$$\frac{dm}{dz} = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im}\{uP^*\} dx$$

$$\frac{dp}{dz} = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}\{u_x P^*\} dx$$

Στην προκειμένη περίπτωση η διαταραχή είναι η

$$P = -2\gamma \frac{\partial |u|^2}{\partial x} u + A \sin(kx)u$$

Όπως βλέπουμε όμως, όταν πάρουμε το μιγαδικό συζυγές και το πολλαπλασιάσουμε με u θα έχουμε μόνο όρους της μορφής $|u|^2$ που θα έχουν μηδενικό φανταστικό μέρος. Άρα η

ποσότητα μες στο ολοκλήρωμα είναι μηδενική οπότε και η μάζα θα διατηρείται $\frac{dm}{dz} = 0$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν είχαμε έναν όρο διαταραχής φανταστικό (πράγμα που θα δήλωνε όρο κέρδους ή απωλειών) τότε δεν θα είχαμε απαραίτητα διατήρηση της μάζας.

Για το ρυθμό μεταβολής της ορμής έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x P^* + u_x^* P) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[u_x u^* \left[-2\gamma \frac{\partial |u|^2}{\partial x} + A \sin(kx) \right] + u_x^* u \left[-2\gamma \frac{\partial |u|^2}{\partial x} + A \sin(kx) \right] \right] dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-2\gamma \frac{\partial |u|^2}{\partial x} [u_x u^* + u_x^* u] \right] dx + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} A \sin(kx) [u_x u^* + u_x^* u] dx \end{aligned}$$

όπου ο πρώτος όρος περιγράφει την επίδραση της μη-τοπικότητας και ο δεύτερος την επίδραση της ανομοιογένειας, στο ρυθμό μεταβολής της ορμής.

Για τον όρο της μη τοπικότητας έχουμε:

$$-4 \int u_x u^* \gamma \frac{\partial |u|^2}{\partial x} + u_x^* u \gamma \frac{\partial |u|^2}{\partial x} dx = -4 \int \frac{\partial |u|^2}{\partial x} \gamma \frac{\partial |u|^2}{\partial x} dx = -4\gamma \int \left(\frac{\partial |u|^2}{\partial x} \right)^2 dx$$

Θεωρώντας ότι ο όρος $\left(\frac{\partial |u|^2}{\partial x} \right)$ τείνει στο μηδέν πιο γρήγορα από ότι το x στο άπειρο, και

κάνοντας την παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει ότι ο όρος της μη-τοπικότητας έχει την ακόλουθη μορφή:

$$4\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial |u|^2}{\partial x} \right)^2 dx$$

Θεωρώντας λύση της μορφής

$$u = f(x - x_0) \cdot e^{i\varphi(x - x_0, z)}$$

όπου x_0 θεωρούμε το κέντρο του σολιτονίου, έχουμε τη σχέση $\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x_0}$, οπότε

λαμβάνουμε για τον όρο μη τοπικότητας

$$-4\gamma \frac{\partial}{\partial x_0} \int x \left(\frac{\partial |u|^2}{\partial x} \right)^2 dx$$

Από την παραπάνω μορφή, φαίνεται ότι η μη-τοπικότητα του μέσου έχει σαν αποτέλεσμα τη μεταβολή της ορμής του κύματος η οποία αντιστοιχεί σε μια δύναμη που προκύπτει από την συνάρτηση δυναμικού

$$V_{NL} = 4\gamma \int x \left(\frac{\partial |u|^2}{\partial x} \right)^2 dx$$

Θεωρώντας ότι οι διαταραχές είναι τόσο μικρές ώστε να αφήνουν το προφίλ του σολιτονίου ανεπηρέαστο μπορούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό χρησιμοποιώντας την γνωστή λύση φωτεινού σολιτονίου (εξίσωση 1.2) της αδιατάρακτης NLS

$$u = \eta \operatorname{sech}(\eta(x - x_0)) \cdot e^{i \left[\frac{v}{2}(x - x_0) + \left(\eta^2 + \frac{v^2}{4} \right) z \right]}$$

όπου $x_0 = v \cdot z$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα προκύπτει

$$V_{NL}(x_0) = -\frac{64}{15} \gamma \eta^5 x_0$$

όπου παρατηρούμε ότι το δυναμικό εξαρτάται γραμμικά από το σημείο x_0 , και συνεπώς η παράγωγος του που αντιστοιχεί σε μια εφαρμοζόμενη δύναμη είναι ανεξάρτητη της θέσης όπως άλλωστε θα περίμενε κανείς αφού η μη τοπικότητα είναι ένα φαινόμενο που παρατηρείται σε όλη την έκταση του μέσου με τον ίδιο τρόπο καθώς οφείλεται σε μικροσκοπικά χαρακτηριστικά.

Για τον όρο της ανομοιογένειας με εντελώς ανάλογο τρόπο προκύπτει μια συνάρτηση δυναμικού της μορφής

$$V_P = \int_{-\infty}^{+\infty} 2|u|^2 A \sin(kx) dx$$

από την οποία προκύπτει η δύναμη που εκφράζει τη μεταβολή της ορμής λόγω ανομοιογένειας. Αντικαθιστώντας την γνωστή λύση φωτεινού σολιτονίου (εξίσωση 1.5) της αδιατάρακτης NLS προκύπτει:

$$V_P = 2 \frac{A\pi k}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} \sin(kx_0)$$

Όπως παρατηρούμε το πλάτος του δυναμικού εξαρτάται πολύ έντονα από το λόγο της χωρικής διαμόρφωσης του δυναμικού (κυματαριθμός k) και του πλάτους του σολιτονίου η . Μάλιστα η εξάρτηση είναι εκθετική αφού υπάρχει ο όρος υπερβολικού ημιτόνου που περιέχει το λόγο αυτό, πράγμα που μας δείχνει ότι σολιτόνια με διαφορετικό πλάτος, θα αντιμετωπίζουν ένα αρκετά διαφορετικό δυναμικό ακόμη και αν η διαφορά στο πλάτος τους είναι σχετικά μικρή. Βλέπουμε πώς η αντίστοιχη δύναμη εξαρτάται από τη θέση του σολιτονίου, πράγμα το οποίο είναι αναμενόμενο. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πως οι συναρτήσεις δυναμικού που περιγράφουν την επίδραση των διαταραχών μπορούν να εξαγονται ανεξάρτητα, πράγμα που κάνει πολύ εύκολο στο μοντέλο μας να προστίθενται και άλλοι διαταρακτικοί όροι ανάλογα με τα φαινόμενα που υπεισέρχονται στο σύστημα.

2.1.2 Αναλυτική μελέτη της δυναμικής του συστήματος ενεργού σωματιδίου

Οι παραπάνω ορισμοί της μάζας και της ορμής του κύματος καθώς και οι εξισώσεις μεταβολής τους λόγω της επίδρασης των διαταραχών επιτρέπει την μελέτη της δυναμικής διάδοσης του σολιτονίου με ένα σύστημα που αντιστοιχεί στην κίνηση ενός σωματιδίου αντίστοιχης μάζας και ορμής, το οποίο βρίσκεται στην θέση x_0 που αντιστοιχεί στο κέντρο του

σολιτονίου. Η απόσταση διάδοσης έχει τη θέση της ανεξάρτητης μεταβλητής και είναι αντίστοιχη του χρόνου.

Πιο συγκεκριμένα πρόκειται για ένα σωματίδιο συγκεκριμένης μάζας (αφού στην περίπτωση μας δείξαμε πως η μάζα διατηρείται) το οποίο βρίσκεται εντός ενός ενεργού δυναμικού V_{eff} , το οποίο προσδιορίζει την εξέλιξη της δυναμικής του. Η Χαμιλτονιανή του κλασσικού αυτού συστήματος είναι:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_{eff} \rightarrow$$

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{64}{15} \gamma \eta^5 x_0 + 2 \frac{A \pi k}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} \sin(kx_0)$$

και είναι ίση με την συνολική ενέργεια του σωματιδίου, η οποία αποτελεί μια διατηρήσιμη ποσότητα της κίνησής του, οπότε το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο.

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κίνησης είναι

$$\frac{dx_0}{dz} = v \quad (2.1)$$

$$m \frac{dv}{dz} = - \frac{\partial V_{eff}}{\partial x_0} \quad (2.2)$$

όπου η ταχύτητα v του σωματιδίου αντιστοιχεί στην κλίση της οπτικής δέσμης ως προς τη διεύθυνση διάδοσης.

Για τη μελέτη της δυναμικής καθοριστική σημασία έχουν τα στάσιμα σημεία του συστήματος, τα οποία προσδιορίζονται ως τα σημεία ισορροπίας της κίνησης και αντιστοιχούν σε μηδενική ταχύτητα και θέση ίση με κάποιο τοπικό ακρότατο της συνάρτησης δυναμικού. Οι συνθήκες για την ύπαρξη στάσιμου σημείου του δυναμικού συστήματος δίνουν:

$$v = 0$$

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial x_0} = 0$$

Από τη δεύτερη εξίσωση και χρησιμοποιώντας την έκφραση για το ενεργό δυναμικό έχουμε τη σχέση

$$\cos(k\bar{x}_0) = -\frac{64\gamma\eta^5}{15} \frac{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)}{2A\pi k^2} \quad (2.3.\alpha)$$

Αυτή η σχέση αποτελεί την απαραίτητη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται στα σημεία ακροτάτου \bar{x}_0 . Αυτομάτως βλέπουμε πως τίθεται ένας περιορισμός στην σχέση μεταξύ γ , η , A και k , για την ύπαρξη ακροτάτων στο δυναμικό:

$$|\cos(k\bar{x}_0)| < 1 \quad (2.3.\beta)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θέσεις ελαχίστου στην περίπτωση που υπάρχει μη-τοπικότητα είναι μετατοπισμένες σε σχέση με την περίπτωση που υπάρχει μόνο ο όρος της ημιτονοειδούς εγκάρσιας ανομοιογένειας. Όταν στο δυναμικό υπάρχει μόνο η ημιτονοειδής ανομοιογένεια, τα ακρότατα σημεία βρίσκονται στα σημεία εκείνα \bar{x}_0 για τα οποία ισχύει η εξίσωση:

$$\cos(k\bar{x}_0) = 0$$

Η παραπάνω γενική συνθήκη για την ύπαρξη ακροτάτων (2.3.α) και (2.3.β) αντιστοιχεί στην ανίσωση:

$$\frac{64}{15} \gamma \eta^5 < \frac{2A\pi k^2}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} \quad (2.4)$$

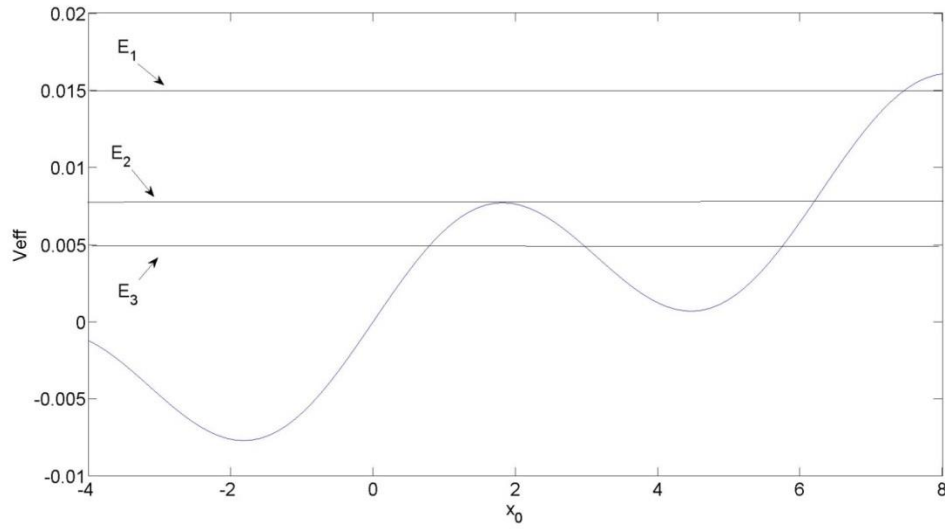
Τα σημεία τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης δυναμικού αντιστοιχούν σε ευσταθή ισορροπία ενώ τα σημεία τοπικού μεγίστου σε ασταθή. Για τα σημεία ελαχίστου θα πρέπει να ισχύει η σχέση κυρτότητας:

$$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial x_0^2} > 0$$

Από αυτή τη σχέση, θεωρώντας πως το δυναμικό της εγκάρσιας ανομοιογένειας έχει μια περιοδικότητα 2π , λαμβάνουμε πως για τα σημεία ελαχίστου ισχύει $kx_0 \in (\pi, 2\pi)$. Δηλαδή σε κάθε περίοδο της ανομοιογένειας εμφανίζεται ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο όπως ακριβώς στην απλή ημιτονοειδή περίπτωση. Ανάλογα με τις παραμέτρους γ, k, A , οι οποίες χαρακτηρίζουν την εκάστοτε διάταξη, προκύπτουν οι τιμές του η για τις οποίες μπορεί να υπάρξει παγίδευση.

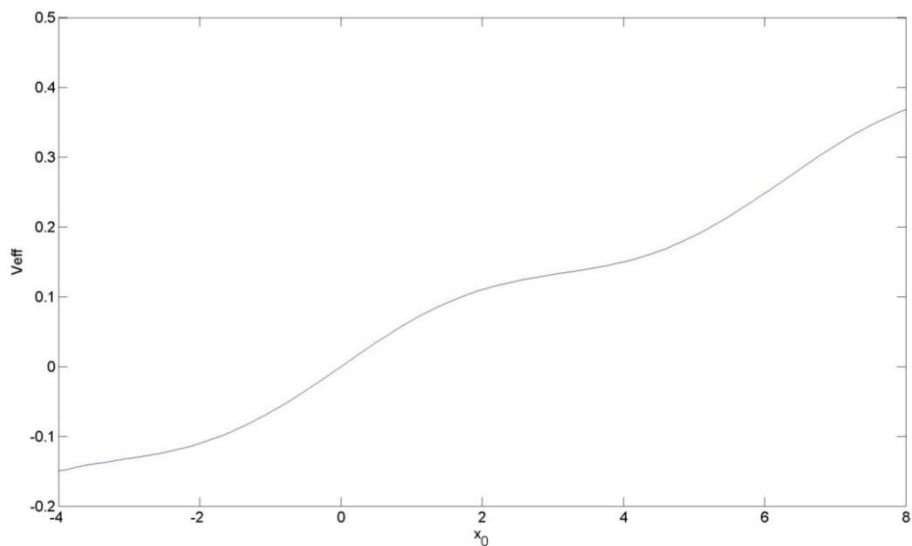
Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι για το ίδιο δυναμικό, σολιτόνια με διαφορετικό πλάτος έχουν διαφορετική δυναμική. Κάποια μπορεί να ικανοποιούν την συνθήκη οπότε και παγιδεύονται, ενώ άλλα δεν παγιδεύονται πουθενά. Φυσικά ακόμη και για αυτά που ικανοποιούν τη συνθήκη μπορούν να υπάρχουν περιπτώσεις που δεν παραμένουν παγιδευμένα σε ένα πηγάδι δυναμικού, καθώς η δυναμική τους εξέλιξη εξαρτάται και από την αρχική τιμή της ταχύτητάς τους.

Το ενεργό δυναμικό για μια τυπική περίπτωση στην οποία είναι δυνατή η παγίδευση σολιτονίου έχει την ακόλουθη μορφή:



Σχήμα 2.1. Ενεργό δυναμικό για $A = \gamma = 0.01$ και $\eta = 0.5, k = 1$ για διάφορες τιμές της ολικής ενέργειας του ενεργού σωματιδίου

Στην περίπτωση κατά την οποία δεν υπάρχει δυνατότητα παγίδευσης, το δυναμικό δεν εμφανίζει τοπικά ακρότατα όπως φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 2.2. Ενεργό δυναμικό για $A = \gamma = 0.01$ και $\eta = 1, k = 1$

Για την ποιοτική μελέτη της κίνησης του ενεργού σωματιδίου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συνολική του ενέργεια, η οποία διατηρείται σταθερή κατά την κίνηση. Οι περιοχές επιτρεπτής κίνησης καθορίζονται από την απαίτηση για θετική κινητική ενέργεια. Η αρχική συνολική ενέργεια σε συνδυασμό με το πρόσημο της αρχικής ταχύτητας καθορίζουν ποιοτικά διαφορετικές δυνατότητες κίνησης.

Όπως βλέπουμε στην σχήμα 1, έχουμε θεωρήσει τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις ενεργειών σε σχέση με ένα δυναμικό στο οποίο είναι δυνατή η παγίδευση σολιτονίων σε κάποιες θέσεις. Αν θεωρήσουμε τη στάθμη της ενέργειας E_1 , παρατηρούμε ότι το σωματίδιο έχει αρκετή ολική ενέργεια ώστε να προσπερνά κάθε πηγάδι δυναμικού που βρίσκεται σε μικρότερες θέσεις από τη θέση $x_0 = 7$ (περίπου), που αποτελεί, λόγω διατήρησης ενέργειας, και τη μεγαλύτερη θέση που είναι ικανό να φτάσει το σωματίδιο, με την προϋπόθεση ότι η αρχική του ταχύτητα έχει φορά προς τα δεξιά. Σε περίπτωση που η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου έχει φορά προς τα μικρότερα x , τότε το σωματίδιο θα κινηθεί προς αυτές τις θέσεις.

Στην δεύτερη περίπτωση όπως είναι εμφανές, η συνολική ενέργεια του σωματιδίου έχει την ίδια τιμή με την συνάρτηση δυναμικού στο τοπικό μέγιστο $x_0 = 2$ που αντιστοιχεί σε θέση ασταθούς ισορροπίας. Ένα σωματίδιο στη θέση αυτή, με ελάχιστα μικρότερη ενέργεια μπορεί να βρεθεί παγιδευμένο στο πηγάδι δυναμικού δεξιά του τοπικού μεγίστου, ενώ με ελάχιστα μεγαλύτερη ενέργεια, η τροχιά του σωματιδίου θα γίνει μη φραγμένη, και θα είναι απαγίδευτο. Στην τρίτη περίπτωση η ενέργεια είναι τέτοια που είναι εμφανής η δυνατότητα παγίδευσης σε ένα πηγάδι δυναμικού, αλλά και η δυνατότητα μη φραγμένης τροχιάς αν η αρχική θέση βρίσκεται αριστερότερα του πηγαδιού αυτού.

Δύο άλλα ποσοτικά χαρακτηριστικά που μπορούμε να εξάγουμε από μοντέλο ενεργού σωματιδίου είναι η μέγιστη συχνότητα ταλαντώσεων που θα έχει το σωματίδιο όντας παγιδευμένο σε ένα πηγάδι δυναμικού, αλλά και οι μέγιστες τιμές της αρχικής ταχύτητας που μπορεί να έχει το σωματίδιο έτσι ώστε να παραμένει παγιδευμένο όταν η αρχική του θέση αντιστοιχεί σε ένα ελάχιστο της συνάρτησης δυναμικού. Το σωματίδιο που θα βρεθεί δέσμο σε ένα πηγάδι δυναμικού θα έχει τη δυνατότητα να ταλαντώνεται μέσα σ' αυτό με συχνότητες που θα ποικίλουν από τη μηδενική έως μια μέγιστη συχνότητα που θα την ονομάσουμε ω_0 . Οι

ταλαντώσεις που έχουν αυτήν την τιμή της συχνότητας ω_0 , είναι οι μικρές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας, δηλαδή το τοπικό ελάχιστο του πηγαδιού. Για τον υπολογισμό αυτής της συχνότητας κάνουμε προσέγγιση μικρών ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας έτσι ώστε να μπορέσουμε να γραμμικοποιήσουμε το σύστημα των εξισώσεων κίνησης και να φτάσουμε σε μια απλή λύση. Έστω στη συγκεκριμένη περίπτωση y_0 το σημείο ισορροπίας και δy η μικρή μετατόπιση από αυτό. Τότε η εξίσωση κίνησης μας δίνει

$$m \frac{d^2(y_0 + \delta y)}{dz^2} = - \frac{\partial V_{eff}(y_0 + \delta y)}{\partial y}$$

$$m \left[\frac{d^2 y_0}{dz^2} + \frac{d^2 \delta y}{dz^2} \right] = - \frac{64}{15} \gamma \eta^5 - \frac{2A\pi k^2}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} \cos(k(y_0 + \delta y))$$

Οπότε παίρνοντας και το ανάπτυγμα Taylor του συνημιτόνου έχουμε:

$$m \left[\frac{d^2 y_0}{dz^2} + \frac{d^2 \delta y}{dz^2} \right] = - \frac{64}{15} \gamma \eta^5 - \frac{2A\pi k^2}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} [\cos(ky_0) - k \cdot \sin(ky_0) \cdot \delta y + O(\delta y^2)]$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση επειδή το y_0 είναι σημείο ισορροπίας έχουμε απλοποιήσεις στα δύο μέλη των όρων που δεν περιέχουν δy , οπότε η εξίσωση απλοποιείται στην εξής:

$$m \left[\frac{d^2 \delta y}{dz^2} \right] = - \frac{2A\pi k^2}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} [-k \cdot \sin(ky_0) \cdot \delta y]$$

$$m \left[\frac{d^2 \delta y}{dz^2} \right] = \frac{2A\pi k^3}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} [\sin(ky_0) \cdot \delta y]$$

$$2\eta \frac{d^2 \delta y}{dz^2} = \frac{2A\pi k^3}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} [\sin(ky_0) \cdot \delta y]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι για τη μάζα του σωματιδίου ισχύει $m = 2\eta$.

Εμφανίζοντας στη σχέση το συνημίτονο αντί του ημιτόνου έχουμε :

$$2\eta \frac{d^2 \delta y}{dz^2} = \pm \frac{2A\pi k^3}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} \sqrt{1 - (\cos(ky_0))^2} \cdot \delta y$$

Από τα δύο πρόσημα θα κρατήσουμε το αρνητικό που αντιπροσωπεύει μια δύναμη επαναφοράς. Λαμβάνουμε λοιπόν για τη συχνότητα:

$$\omega_0^2 = \frac{2A\pi k^3}{2\eta \cdot \sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} \sqrt{1 - (\cos(ky_0))^2}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τη σχέση (2.3.α) για το συνημίτονο που πρέπει να ικανοποιείται στα σημεία ελαχίστου, έχουμε

$$\omega_0^2 = \frac{2A\pi k^3}{2\eta \sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{64\gamma\eta^5}{15} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)}{2A\pi k^2} \right)^2}$$

Βλέπουμε ότι η ύπαρξη μη-τοπικότητας ($\gamma \neq 0$) μεταβάλλει τις συχνότητες ταλάντωσης των παγιδευμένων σολιτονίων με διαφορετικό τρόπο για κάθε σολιτόνιο ανάλογα με τις παραμέτρους του.

Αν θεωρήσουμε ως y_0 το σημείο τοπικού ελαχίστου του δυναμικού (ελάχιστο πηγαδιού), τότε επειδή για τα ελάχιστα ισχύει όπως αναφέραμε η απαίτηση $ky_0 \in (n\pi, (n+1)\pi)$, για n

περιττό, αυτό σημαίνει πως τα μέγιστα θα βρίσκονται στο αντίστοιχο διάστημα $(n\pi, (n+1)\pi)$ για άρτιο n .

Για την κρίσιμη ταχύτητα θα έχουμε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας

$$\frac{1}{2}mv_{cr}^2 = V_{eff}\left(\frac{2\pi}{k} - y_0\right) - V_{eff}(y_0)$$

όπου ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος είναι η τιμή του δυναμικού στο ελάχιστο, ενώ ο πρώτος όρος είναι η τιμή του δυναμικού στο τοπικό μέγιστο που βρίσκεται αριστερά του ελαχίστου (βλέπε σχήμα 2.1). Η διαφορά στην ενέργεια μεταξύ των δύο, αποτελεί και την ελάχιστη απαιτούμενη ενέργεια η οποία θα δοθεί με τη μορφή κινητικής, ώστε να υπάρξει αποπαγίδευση του σωματιδίου. Όπως είδαμε, η ταχύτητα σχετίζεται με τη γωνία πρόσπτωσης της δέσμης, αυτό κάνει την κρίσιμη ταχύτητα να σχετίζεται με τη μέγιστη γωνία με την οποία μπορεί να προσπέσει η δέσμη στο εκάστοτε σημείο ώστε να παγιδεύεται οριακά (πάνω από αυτήν την τιμή η τροχιά του σολιτονίου καθίσταται απαγίδευτη).

$$\frac{1}{2}2\eta v_{cr}^2 = \frac{64}{15}\gamma\eta^5\left(\frac{2\pi}{k} - y_0\right) + \frac{2A\pi k}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)}\sin(2\pi - ky_0) - \frac{64}{15}\gamma\eta^5 \cdot y_0 - \frac{2A\pi k}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)}\sin(ky_0)$$

$$\frac{1}{2}2\eta \cdot v_{cr}^2 = \frac{64}{15}\gamma\eta^5\left(\frac{2\pi}{k} - 2y_0\right) + \frac{2A\pi k}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)}[-2\sin(ky_0)]$$

Οπότε έχουμε τελικά για την κρίσιμη ταχύτητα:

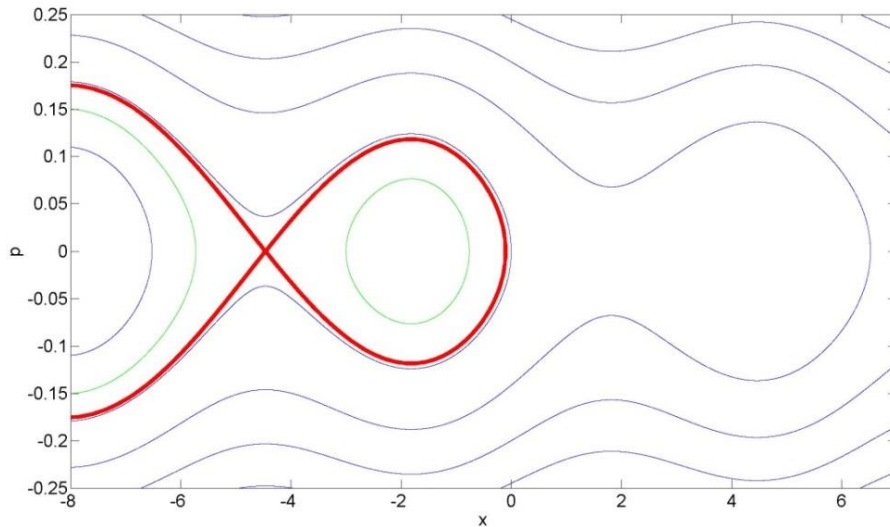
$$v_{cr}^2 = \frac{1}{\eta} \left[\frac{64}{15}\gamma\eta^5\left(\frac{2\pi}{k} - 2y_0\right) - \frac{4A\pi k}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)}[\sin(ky_0)] \right]$$

Διαλέγοντας ένα οποιοδήποτε σημείο τοπικού ελαχίστου του δυναμικού, ουσιαστικά αφαιρούμε την τιμή σε εκείνο το σημείο από το σημείο τοπικού μεγίστου που βρίσκεται

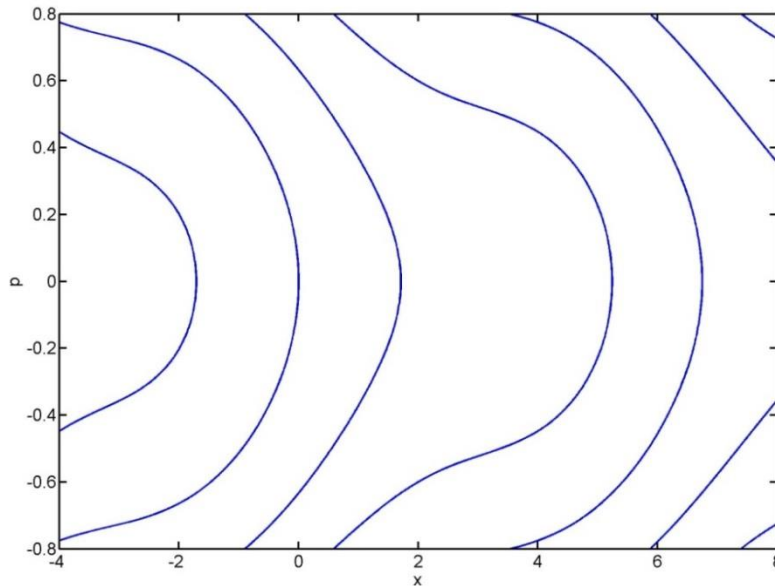
ακριβώς στα αριστερά του. Έτσι παίρνουμε την ελάχιστη ενέργεια που είναι απαραίτητη για να έχουμε αποπαγίδευση του σωματιδίου. Είναι σημαντικό να τονίσουμε το ότι είναι δυνατό το σωματίδιο να έχει αρχική ταχύτητα μεγαλύτερη από την κρίσιμη και με φορά προς περιοχές μεγαλύτερου δυναμικού (στη συγκεκριμένη περίπτωση προς τα δεξιά). Τότε η κίνηση του θα είναι αρχικά προς τα δεξιά μέχρι να αντιμετωπίσει φράγμα δυναμικού που δεν μπορεί να υπερπηδήσει οπότε και θα αναπηδήσει και θα κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση (μικρότερα x).

Ο φασικός χώρος (θέσεων-ταχυτήτων) για το ενεργό σωματίδιο αποτελείται από τις ισοσταθμικές καμπύλες της ενέργειας

$$E = \frac{p^2}{2m} + V_{eff}(x_0)$$



Σχήμα 2.3. Φασικός χώρος για το δυναμικό της πρώτης περίπτωσης όπου υπάρχει παγίδευση, $A=\gamma=0.01$, $\eta=0.5$, $k=1$. Με έντονη γραμμή παρουσιάζεται η οριακή τροχιά (διαχωρίζουσα) που διαχωρίζει παγιδευμένες και απαγιδευτές τροχιές στο αντίστοιχο πηγάδι δυναμικού με ενέργεια που αντιστοιχεί στην E_2 της εικόνας 1)



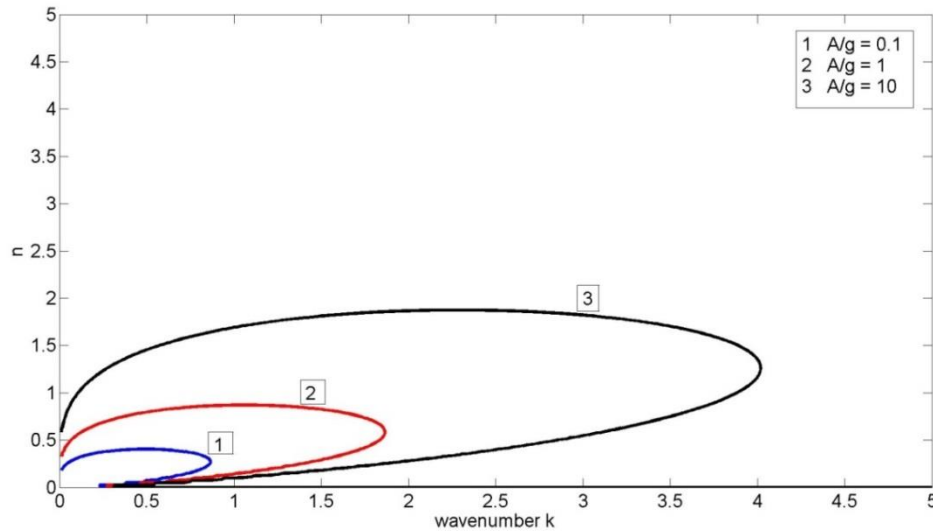
Σχήμα 2.4. Φασικός χώρος για το δυναμικό της δεύτερης περίπτωσης όπου δεν υπάρχει παγίδευση, $A=\gamma=0.01$, $\eta=1, k=1$. Η απουσία παγίδευσης είναι εμφανής από το γεγονός πως δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές στο φασικό χώρο

2.2 Παραμετρική μελέτη συνθηκών παγίδευσης σολιτονίου

Στη συνέχεια διερευνούμε το ρόλο της μη-τοπικότητας σε σχέση με την εγκάρσια ανομοιογένεια ως προς τη δυνατότητα παγίδευσης του σολιτονίου. Θεωρούμε τις περιπτώσεις που αντιστοιχούν σε λόγο πλάτους εγκάρσιας διαμόρφωσης A προς πλάτος του όρου της μη-τοπικότητας γ , $\frac{A}{\gamma} = 1, 10, 0.1$, και εξετάζουμε:

- A)** το μέγιστο επιτρεπτό πλάτος η του σολιτονίου για κάθε k ώστε να παραμένει παγιδευμένο το σολιτόνιο
- B)** την κρίσιμη ταχύτητα ως συνάρτηση του πλάτους του σολιτονίου για διάφορα k
- Γ)** την συχνότητα μικρών ταλαντώσεων κοντά στο τοπικό ελάχιστο του δυναμικού ως συνάρτηση του πλάτους του σολιτονίου.

A) Επιτρεπόμενα πλάτη σολιτονίου με δεδομένο κυματαριθμό ώστε να υπάρχει παγίδευση



Σχήμα 2.5. Υπαρξη ελάχιστου και μέγιστου ύψους σολιτονίου για να υπάρξει παγίδευση συναρτήσε του κυματαριθμού k . Από το πιο εξωτερικό προς το πιο εσωτερικό γράφημα έχουμε αντιστοίχως λόγο A/γ ίσο με 10, 1, 0.1

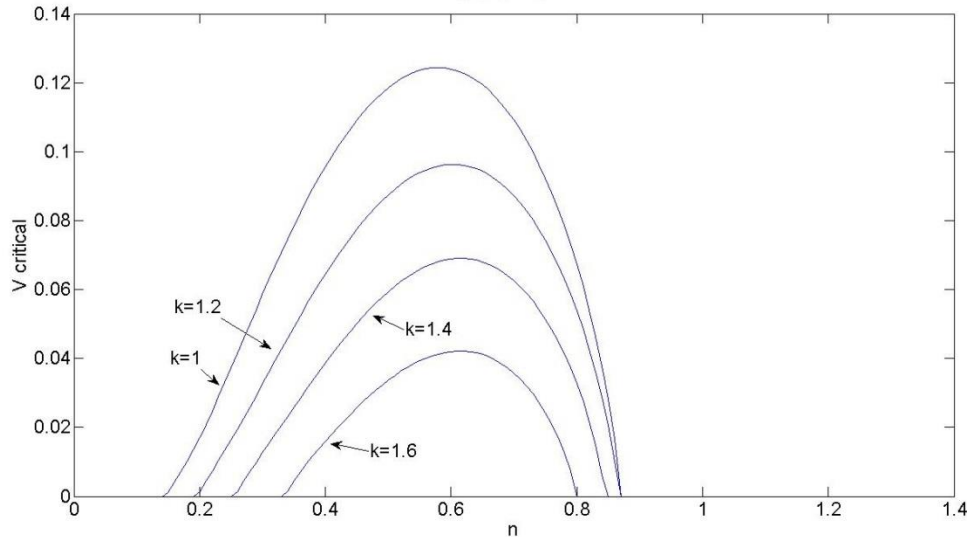
Οι περιοχές που περικλείονται από τις καμπύλες προσδιορίζουν τους συνδυασμούς πλάτους η του σολιτονίου και κυματαριθμού k της ανομοιογένειας για τους οποίους μπορεί να υπάρξει παγίδευση του σολιτονίου, με δεδομένο τον εκάστοτε λόγο πλάτους εγκάρσιας διαμόρφωσης A προς πλάτος του όρου της μη-τοπικότητας γ , $\frac{A}{\gamma}$. Αντιστοίχως οι περιοχές εκτός των καμπυλών είναι αυτές στις οποίες δεν είναι εφικτή η παγίδευση.

Όπως παρατηρούμε, ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι υπάρχει τόσο ένα μέγιστο, όσο και ένα ελάχιστο επιτρεπόμενο όριο στις τιμές που μπορεί να λάβει το πλάτος του σολιτονίου για δοσμένο k . Αναμένουμε πως για δεδομένο κυματαριθμό k , η ύπαρξη μέγιστου επιτρεπόμενου πλάτους σολιτονίου θα οφείλεται στην ενίσχυση των φαινομένων μη-τοπικότητας λόγω της αύξησης της παραγώγου του προφίλ του σολιτονίου. Από την άλλη πλευρά, μια ελάχιστη τιμή του απαιτούμενου πλάτους για να υπάρξει παγίδευση, είναι εύλογο να υπάρχει καθώς δικαιολογείται από το γεγονός πως όσο το πλάτος μικραίνει, το χωρικό εύρος του σολιτονίου οφείλει να αυξάνεται με ένα συσχετιζόμενο ρυθμό. Από ένα σημείο και

έπειτα, το σολιτόνιο καθίσταται τόσο πλατύ που ουσιαστικά υπερκαλύπτει κάθε τοπική μεταβολή του δυναμικού, με αποτέλεσμα να μην επηρεάζεται πλέον από πηγάδια δυναμικού που είναι χωρικά εντοπισμένα. Συνεπώς για να βρίσκεται παγιδευμένο, δεν πρέπει να υποβαίνει το πλάτος του μια συγκεκριμένη τιμή, γιατί τότε το εύρος του καθίσταται συγκρίσιμο με τη χωρική διαμόρφωση του μέσου. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που $A < \gamma$, η περιοχή στην οποία μπορεί να υπάρξει παγιδευμένο σολιτόνιο έχει συρρικνωθεί κατά πολύ σε σχέση με τις άλλες δύο σε επίπεδα κυματαριθμών και πλατών. Εντούτοις σε όλες τις περιπτώσεις διατηρείται η ίδια ποιοτική συμπεριφορά μεταβαλλόμενη ως προς έναν παράγοντα κλίμακας.

Όπως παρατηρούμε για αυξανόμενο k υπάρχει μια τάση αύξησης και ύστερα ελάττωσης του μέγιστου πλάτους που μπορεί να έχει ένα σολιτόνιο έτσι ώστε να παραμένει παγιδευμένο. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί από το γεγονός ότι τα σολιτόνια υφίστανται διαφορετικά την επίδραση των διαταραχών, όπως περιγράφεται από την αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικού, ανάλογα με τις παραμέτρους τους. Σε ένα δυναμικό με μεγάλο κυματαριθμό k τα πηγάδια δυναμικού γίνονται στενότερα, οπότε για να βρεθεί εντοπισμένο ένα σολιτόνιο, θα πρέπει να έχει κατάλληλα μικρό εγκάρσιο πλάτος, το οποίο όμως συνεπάγεται μεγαλύτερο ύψος, αφού τα δύο τους είναι συσχετισμένα. Αυτή η αυξητική τάση στο μέγιστο ύψος σολιτονίου παρατηρείται και στη γραφική παράσταση αυξανόμενου του k . Βλέπουμε όμως πως όσο αυξάνεται ο κυματάριθμος υπάρχει μια μείωση στο μέγιστο ύψος σολιτονίου, πράγμα που δεν θα περιμέναμε, οφείλεται όμως στη συνεισφορά της μη τοπικότητας που επηρεάζει κατά πολύ τη συμπεριφορά του σολιτονίου εν συγκρίσει με την περίπτωση όπου είχαμε μόνο την ανομοιογένεια.

B) Κρίσιμη ταχύτητα για αποπαγίδευση

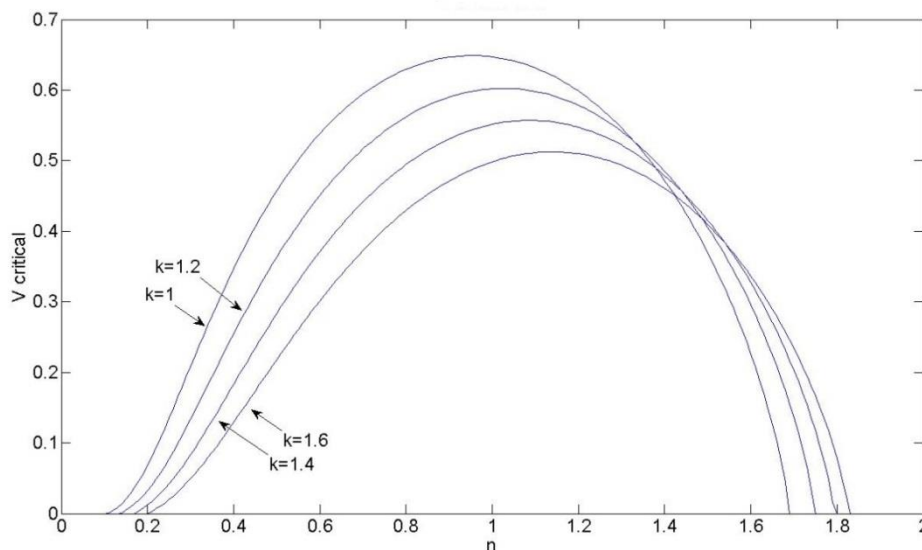


Σχήμα 2.6. Γραφική παράσταση της κρίσιμης ταχύτητας ως προς το πλάτος του σολιτονίου για διάφορες τιμές του κυματαριθμού k . Περίπτωση με $A/\gamma = 1$, $A = 0.01$

Παρατηρούμε την αυξανόμενη και πτωτική τάση της μέγιστης ταχύτητας που μπορεί να έχει το σωματίδιο (αντίστοιχα γωνία πρόσπτωσης για το κύμα) συναρτήσει του πλάτους του σολιτονίου. Η αρχικά αυξανόμενη τάση είναι λογική, καθώς το κύμα όσο αυξάνει το πλάτος του, τόσο μειώνει το εγκάρσιο εύρος του. Αυτό συντελεί στην ευκολότερη παγίδευση του σε ένα πηγάδι δυναμικού καθώς είναι πιο εντοπισμένο, άρα μπορεί να δεχθεί υψηλότερες τιμές ταχύτητας (γωνίας πρόσπτωσης) μέχρι την αποπαγίδευσή του. Αυτή η συμπεριφορά συνεχίζει μέχρι ένα συγκεκριμένο πλάτος σολιτονίου καθώς ύστερα βλέπουμε μια πτώση στη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει το σωματίδιο (γωνία για το κύμα). Θα περιμέναμε πως η μεγάλη αύξηση του πλάτους, που οδηγεί σε μεγάλη μείωση στο χωρικό εύρος, θα το έκανε πιο εύκολα περιορισίμο στα όρια ενός πηγαδιού δυναμικού, πράγμα που δεν συμβαίνει. Εκεί κάνει εμφανή την επίδραση του ο όρος μη-τοπικότητας. Όσο μεγαλύτερο πλάτος έχει το σολιτόνιο, τόσο αυξάνει η κλίση του πράγμα που έχει μια θετική επίδραση στην αύξηση του όρου της μη-τοπικότητας, καθώς είδαμε πως εξαρτάται από την χωρική παράγωγο της έντασης ως προς την εγκάρσια διάσταση. Αυτό σημαίνει πως όσο αυξάνεται η κλίση αυξάνεται και ο όρος του

δυναμικού που σχετίζεται με την μη τοπικότητα καθιστώντας την κίνηση απαγίδευτη (αφού υπάρχει μια τάση η μη τοπικότητα να το ωθεί σαν σταθερή δύναμη προς μια κατεύθυνση (παραλληλισμός με σωματίδιο υπό σταθερή δύναμη)). Παρατηρούμε επίσης τον απότομο τερματισμό της καμπύλης στις ανώτερες τιμές του ύψους του σολιτονίου. Αυτό οφείλεται στο ότι από αυτές τις τιμές και έπειτα δεν έχουμε συνθήκες παγίδευσης (η αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικού δεν εμφανίζει τοπικά ελάχιστα) πράγμα που καθιστά άνευ νοήματος την αναζήτηση κρίσιμης ταχύτητας. Είναι έντονη επίσης η ελάττωση του χώρου πιθανών πλατών του σολιτονίου καθώς αυξάνεται ο κυματαριθμός k . Αυτό είναι κάτι που αναμένεται όπως τονίζεται και στο σχήμα 5.

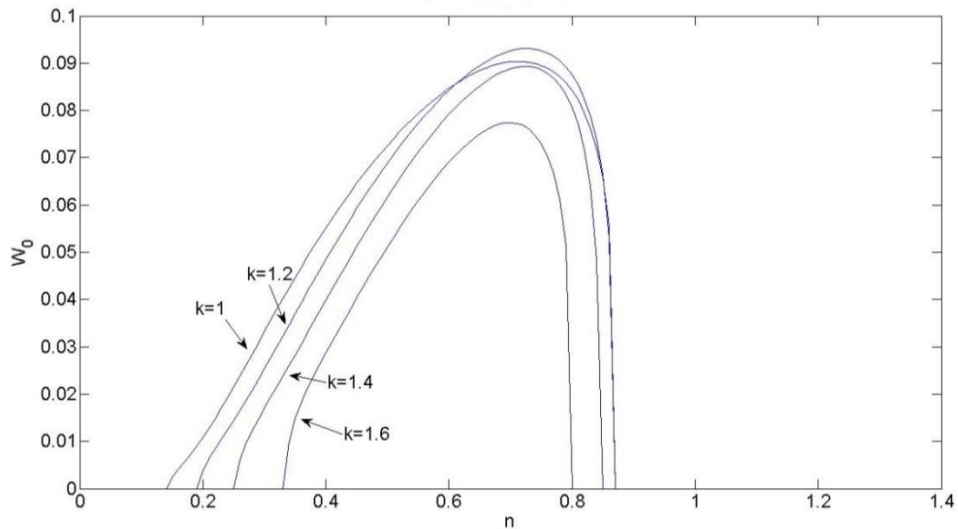
Αντίστοιχα για πλάτη $A = 0.1$ και $\gamma = 0.01$ παίρνουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση, όπου παρατηρείται μια παρόμοια ποιοτική συμπεριφορά, αλλά με εμφανώς μεγαλύτερα περιθώρια στην κρίσιμη ταχύτητα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε αυτήν την περίπτωση το δυναμικό που οφείλεται στην εγκάρσια διαμόρφωση είναι τοπικά αρκετά πιο βαθύ από το δυναμικό της διαμήκουσ και αυτό καθιστά το σωματίδιο πιο έντονα παγιδευμένο. Εν αντιθέσει με την προηγούμενη περίπτωση που ήταν και τα δυο της ίδιας τάξης μεγέθους και ο συνδυασμός τους μπορούσε να φέρει πιο εύκολα το σωματίδιο σε απαγίδευτη κατάσταση.



Σχήμα 2.7. Κρίσιμη ταχύτητα ως προς ύψος σολιτονίου για διαφορετικούς κυματαριθμούς και για $A=0.1, \gamma=0.01$

Εδώ παρατηρούμε μια παρόμοια ποιοτική συμπεριφορά. Παρατηρούμε την αναμενόμενη αύξηση στα μέγιστα πλάτη των σολιτονίων με την αντίστοιχη αύξηση των κυματαριθμών.

Γ) Συχνότητα μικρών ταλαντώσεων

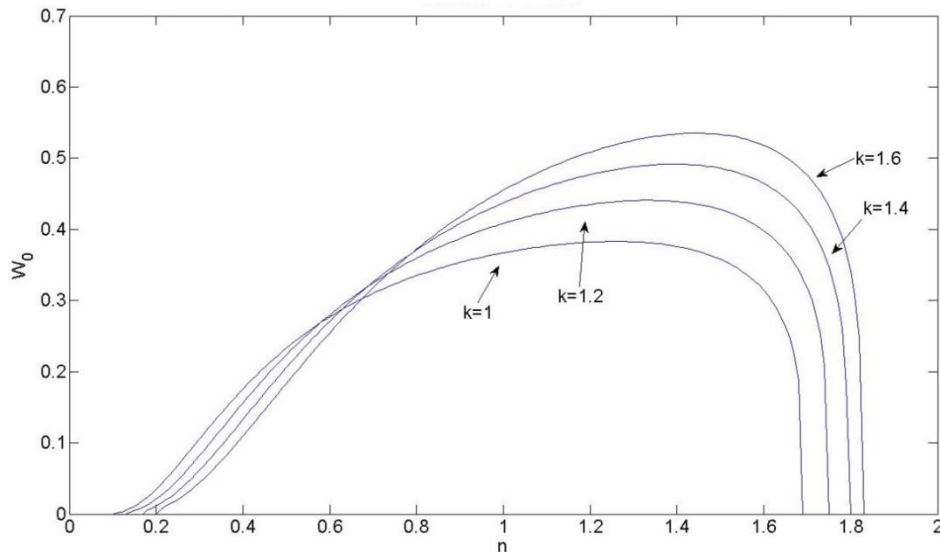


Σχήμα 2.8. Εδώ έχουμε τις συχνότητες ταλαντώσεων γύρω από τα σημεία ισορροπίας ως συναρτήσεις των πλατών των σολιτονίων για διαφορετικές τιμές των κυματαριθμών. Περίπτωση με $A/\gamma = 1$, $A = 0.01$

Έχουμε και εδώ μια περίπου ίδια συμπεριφορά όπως στην περίπτωση των κρίσιμων ταχυτήτων, πράγμα αναμενόμενο, επειδή αν σκεφτεί κανείς τα πηγάδια στην προσέγγισή τους γύρω από τα σημεία ισορροπίας τους ως αρμονικούς ταλαντωτές, τότε βλέπουμε την άμεση σχέση που έχει η συχνότητα ταλάντωσης με την ενέργεια και συνεπώς την κρίσιμη (μέγιστη) ταχύτητα. Όπως είναι φυσικό δεν μπορούμε να έχουμε απόλυτη ταύτιση ποσοτικά λόγω διαφορετικών συντελεστών αλλά ούτε και ποιοτικά καθώς τα πηγάδια δυναμικού δεν ταυτίζονται απόλυτα με το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή.

Τέλος, και για την περίπτωση λόγου $A/\gamma = 10$, η ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος είναι η ίδια. Ποσοτικά παρατηρούμε διαφορές στη μέγιστη συχνότητα που μπορεί να επιτευχθεί. Αυτό γίνεται κατανοητό από το γεγονός πως ένας τέτοιος λόγος πλατών δίνει πιο βαθιά πηγάδια δυναμικού από τον αντίστοιχο για την άνω περίπτωση. Το σωματίδιο

βρισκόμενο σε βαθύτερο πηγάδι, έχει μεγαλύτερη απαίτηση σε ελάχιστη ενέργεια για να αποπαγιδευτεί, πράγμα που με τη σειρά του δίνει δυνατότητα για ταλαντώσεις μεγαλύτερης συχνότητας (άρα και ενέργειας στην προσέγγιση αρμονικού ταλαντωτή).

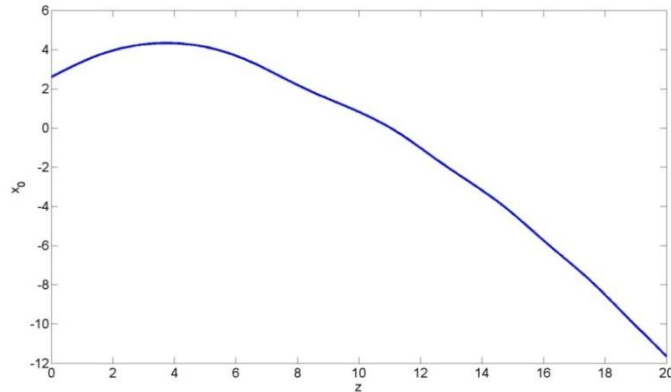


Σχήμα 2.9. Συχνότητα ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας συναρτήσει του ύψους του σολιτονίου για διάφορες τιμές του κυματαριθμού k και για $A=0.1$, $\gamma=0.01$

2.3 Αριθμητική μελέτη της δυναμικής του ενεργού σωματιδίου

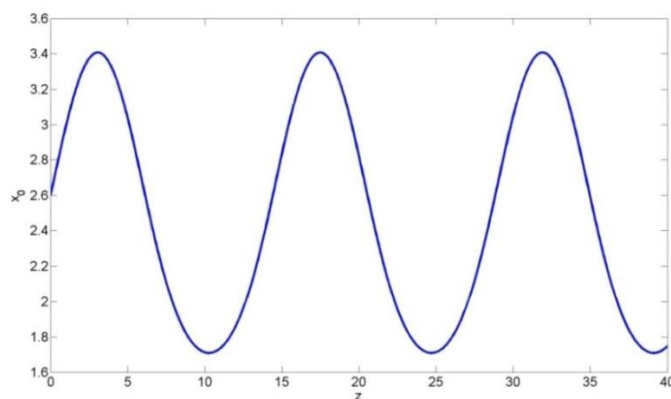
Παρακάτω παραθέτουμε διάφορες ενδεικτικές τροχιές των σολιτονίων που αποκτήθηκαν με απλή αριθμητική επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων του μοντέλου του ενεργού σωματιδίου.

2.3.1 Περίπτωση $A=0.1$, $\gamma=0.01$



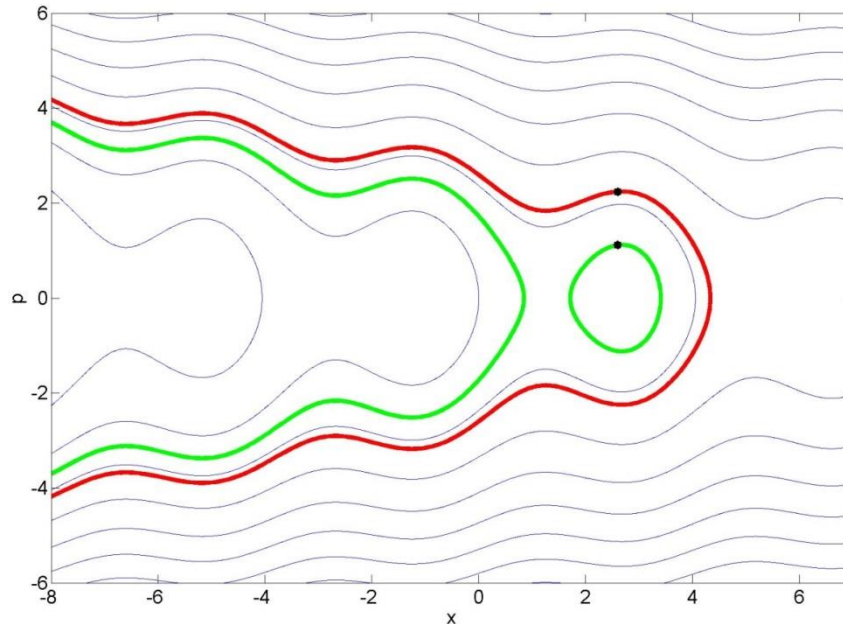
Σχήμα 2.10. Τροχιά σολιτονίου για $k=1.6$ και $n=1.4$ με αρχικές συνθήκες για τη θέση $x=2.6$ και την ταχύτητα $v=0.8$. Σημειώνουμε πως στη συγκεκριμένη περίπτωση παραμέτρων, το ελάχιστο εμφανίζεται στη θέση $x=2.6760$ και με κρίσιμη ταχύτητα $v_{cr}=0.4607$

Αφού λοιπόν έχουμε αρχική ταχύτητα μεγαλύτερη από την κρίσιμη είναι αναμενόμενη η κίνηση του ως αποπαγιδευμένο (εκτελεί μη φραγμένη κίνηση). Παρατηρούμε πως η αρχική ταχύτητα είναι θετική και αυτό μεταφράζεται ως μια αρχική θετική κλίση της τροχιάς. Η τιμή της είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη μέγιστη επιτρεπόμενη για να παραμείνει παγιδευμένο το σολιτόνιο, συνεπώς είμαστε σίγουροι πως δεν θα παραμείνει στο πηγάδι δυναμικού το οποίο περιέχει το σημείο της αρχικής του θέσης.



Σχήμα 2.11. Στην περίπτωση αυτή λαμβάνουμε ως αρχική ταχύτητα $v=0.4$ που είναι αρκετά μικρότερη της κρίσιμης, γι αυτό παρατηρούμε ότι το σολιτόνιο παραμένει δέσμιο και διαγράφει μια ταλαντωτική τροχιά.

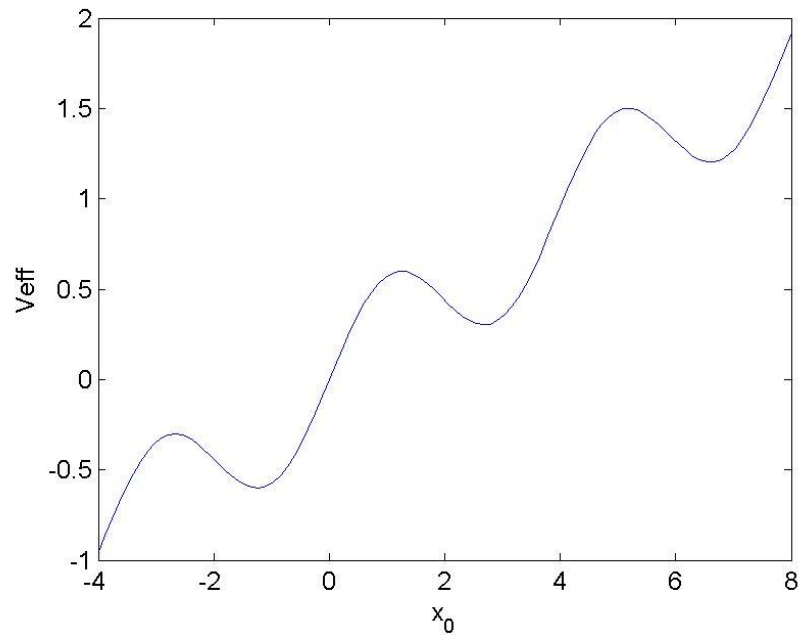
Ο φασικός χώρος του συστήματος για τις δοθείσες παραμέτρους είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 2.12. Φασικός χώρος του συστήματος για τις δοθείσες παραμέτρους, στον οποίο είναι εμφανείς οι δύο ανωτέρω τροχιές των εικόνων 10 και 11. Η άνω έντονη κουκίδα είναι το σημείο αρχικών συνθηκών της απαγίδευτης τροχιάς ($x = 2.6, v = 0.8$) (εικόνα 10), ενώ η ακριβώς από κάτω κουκίδα είναι το σημείο αρχικών συνθηκών της παγιδευμένης τροχιάς (σχήμα 2.11)

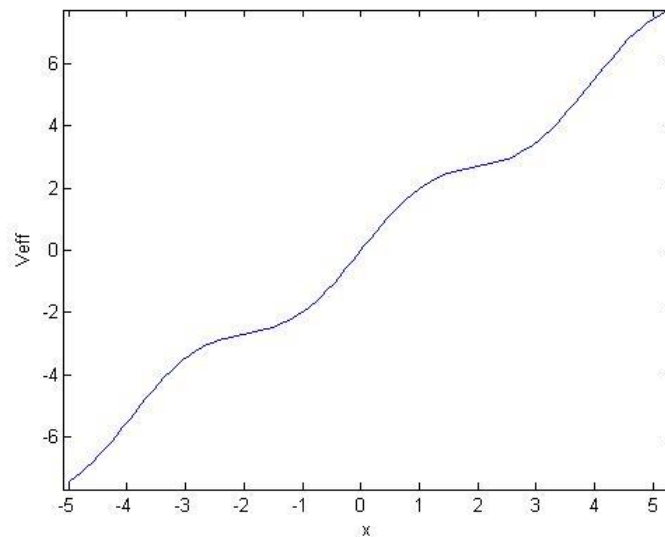
Παρατηρούμε πως στην πρώτη περίπτωση η τροχιά του φασικού χώρου παραμένει ανοικτή πράγμα που υποδηλώνει πως η τροχιά δεν είναι περιοδική. Συγκεκριμένα καθώς ο χρόνος αυξάνεται, η τροχιά διαγράφεται προς τα αριστερά, δηλαδή τείνει συνεχώς σε πιο μικρές τιμές της θέσης x , με ολοένα αυξανόμενη ταχύτητα. Στην δεύτερη περίπτωση της κλειστής τροχιάς στο φασικό χώρο, παρατηρούμε την περιοδική κίνηση του σολιτονίου.

Το αντίστοιχο δυναμικό που δημιουργεί τις ανωτέρω τροχιές είναι το ακόλουθο:



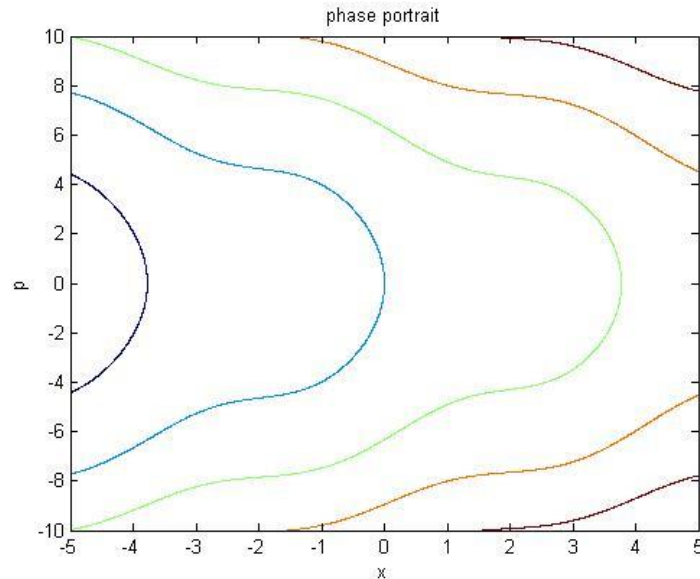
Σχήμα 2.13.α. Δυναμικό για την περίπτωση $A = \gamma = 0.01$, κυματάρημο $k = 1.6$ και πλάτος σολιτονίου $\eta = 1.4$

Μια δεύτερη ενδεικτική περίπτωση είναι αυτή όπου δεν εμφανίζεται παγίδευση σολιτονίου για καμία πιθανή τιμή αρχικής ταχύτητας και θέσης. Ένα τέτοιο δυναμικό είναι το παρακάτω:



Σχήμα 2.13.β. Το δυναμικό αυτό προκύπτει για $k = 1.6$ και $n = 2$, $A = 0.1$, $\gamma = 0.01$

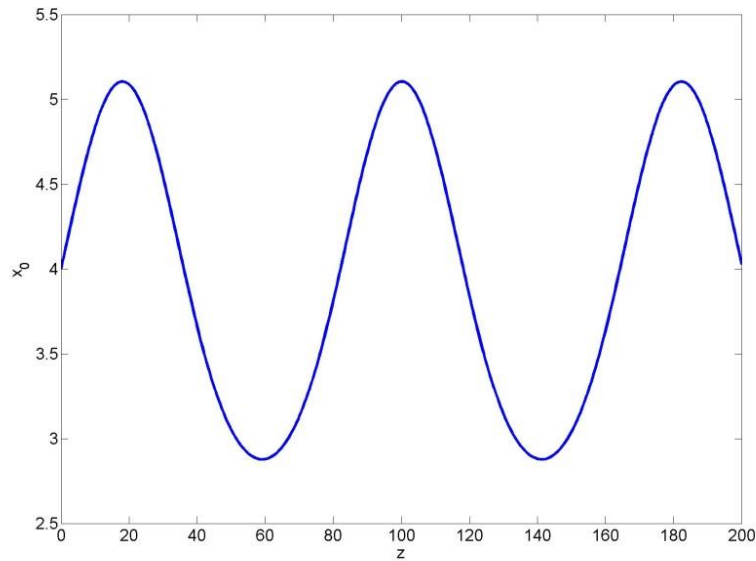
Είναι εμφανές πως δεν υπάρχει παγίδευση καθώς δεν έχουμε σε κανένα σημείο δημιουργία πηγαδιού δυναμικού. Αντίστοιχα για αυτήν την περίπτωση παίρνουμε τον ακόλουθο φασικό χώρο στον οποίο είναι εμφανές πως δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές, πράγμα που σημαίνει πως δεν υπάρχει παγίδευση.



Σχήμα 2.14. Φασικός χώρος για $k = 1.6$ και $n = 2, A = 0.1, \gamma = 0.01$

2.3.2 Περίπτωση $A=0.01$ και $\gamma=0.01$

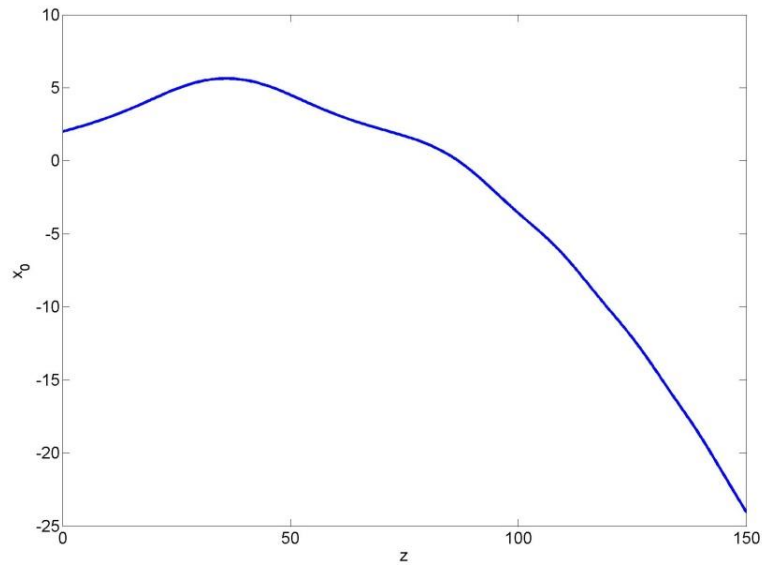
Στην περίπτωση όπου έχουμε λόγο πλατών $A/\gamma=1$ και θεωρώντας αρχικές συνθήκες με θέση κοντά στο τοπικό ελάχιστο του δυναμικού και ταχύτητα μικρότερη της κρίσιμης, λαμβάνουμε μια τροχιά όπως η παρακάτω:



Σχήμα 2.15. Τροχιά σολιτονίου για $k = 1$ και $n = 0.7$ με αρχικές συνθήκες : θέση $x = 4$ και ταχύτητα $v = 0.09$. Το σημείο ελαχίστου παρουσιάζεται για τη συγκεκριμένη περίπτωση παραμέτρων στη θέση $x=4.15$ και με κρίσιμη ταχύτητα παγίδευσης $v = 0.105$

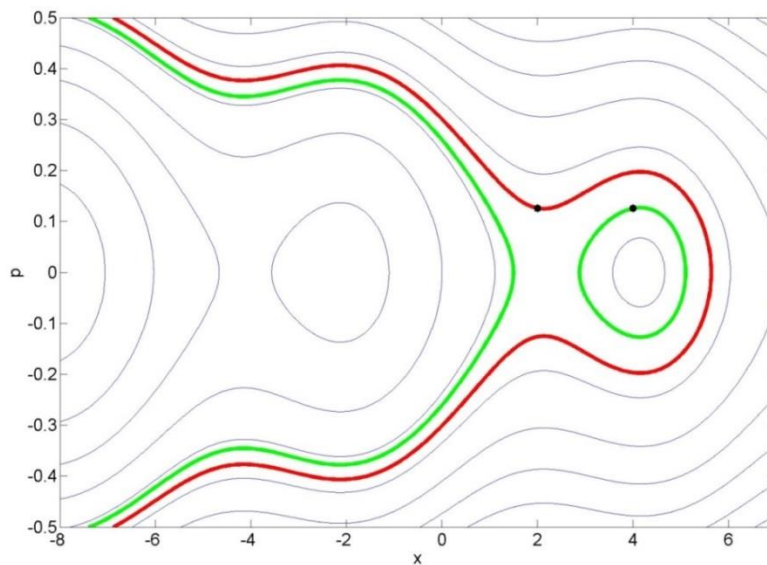
Παρατηρούμε την αρκετά μεγάλο πλάτους ταλαντωτική συμπεριφορά η οποία οφείλεται στην αρκετά μεγάλη -σε σύγκριση με τη μέγιστη- αρχική ταχύτητα. Το σολιτόνιο με αυτές τις παραμέτρους παραμένει παγιδευμένο.

Με την ίδια αρχική ταχύτητα, αλλά αυτή τη φορά με αρχική θέση $x = 2$, η οποία βρίσκεται πολύ κοντά σε τοπικό μέγιστο του δυναμικού, αναμένουμε πως το σολιτόνιο θα διαγράψει μια απαγίδευτη τροχιά, λαμβάνουμε έτσι λοιπόν την παρακάτω τροχιά του σολιτονίου:



Σχήμα 2.16. Τροχιά σολιτονίου με $k = 1$, $n = 0.7$ και αρχική θέση $x = 2$ και αρχική ταχύτητα $v = 0.09$

Ο αντίστοιχος φασικός χώρος είναι ο εξής:

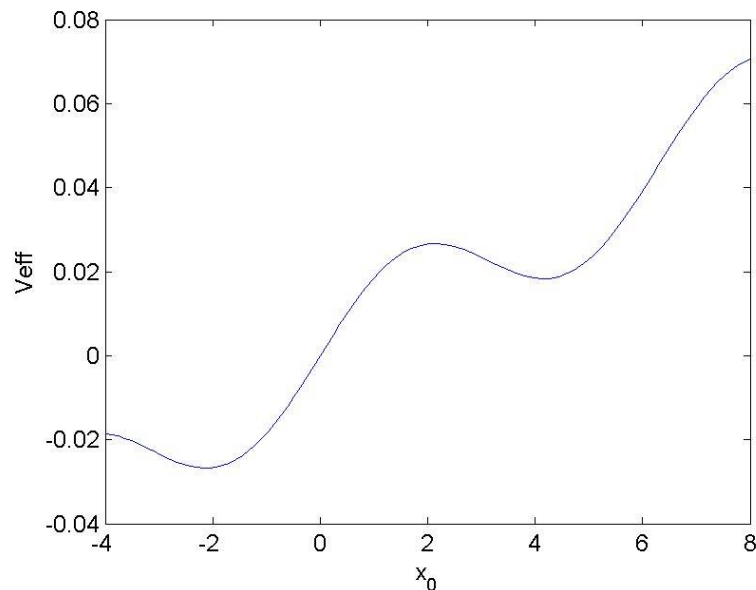


Σχήμα 2.17. Φασικός χώρος στον οποίο είναι ευδιάκριτες οι τροχιές που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες των σχημάτων 2.15 και 2.16. Είναι ευδιάκριτα και τα αντίστοιχα σημεία που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες κάθε φορά

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η τροχιά του παγιδευμένου σολιτονίου που λαμβάνουμε σχετίζεται με τη δεξιά εσωτερικής κόκκινη τροχιά (βλ. αρχικές συνθήκες) στο φασικό χώρο που όπως είναι εμφανές αντιστοιχεί σε κλειστή τροχιά. Αντιστοίχως, η δεύτερη τροχιά (η πιο εξωτερική από τις δύο στο φασικό χώρο) αντιστοιχεί στην τροχιά του σολιτονίου του σχήματος 16. Σε εκείνη την περίπτωση έχουμε απαγίδευτη τροχιά και όπως είναι εμφανές από το φασικό χώρο, κανένα κομμάτι της δεν σχηματίζει μια κλειστή καμπύλη.

Συγκρίνοντας τον φασικό χώρο αυτής της περίπτωσης με αυτόν της προηγούμενης, παρατηρούμε μια σημαντική μείωση στο εύρος των τιμών της ορμής για δεδομένη θέση ώστε να έχουμε παγιδευμένη τροχιά. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην προηγούμενη περίπτωση (λόγος $A/\gamma = 10$) το δυναμικό έχει πιο βαθιά πηγάδια (βλέπε σχήμα 13.α σύγκριση με σχήμα 18), πράγμα που απαιτεί μεγαλύτερες ταχύτητες (άρα και ορμές) για την αποπαγίδευση του σωματιδίου. Ποιοτικά, και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε τόσο παγιδευμένες όσο και απαγίδευτες τροχιές.

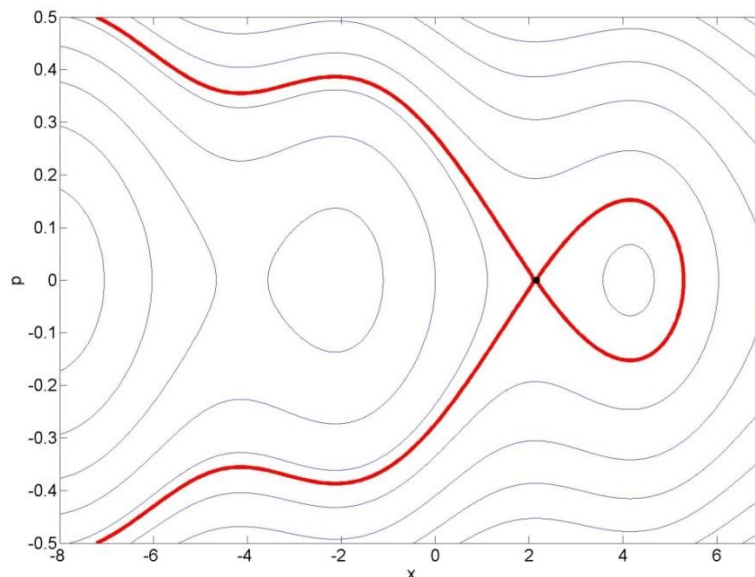
Το δυναμικό που δημιουργεί τις δύο προηγούμενες τροχιές είναι το ακόλουθο :



Σχήμα 2.18. Μορφή δυναμικού για $k = 1, n = 0.7, A/\gamma = 1$

Όπως είναι εμφανές στο σημείο με $x = 4$ βρισκόμαστε εντός του πηγαδιού δυναμικού και πολύ κοντά στο ελάχιστο, αυτό σημαίνει πως αν η ταχύτητα δεν υπερβεί μια συγκεκριμένη τιμή τότε το σολιτόνιο παραμένει παγιδευμένο όπως και συμβαίνει. Αντίθετα, στην περίπτωση που η αρχική θέση είναι $x = 2$, βρισκόμαστε σχεδόν στην κορυφή του λοφίσκου του δυναμικού, κοντά δηλαδή σε ένα τοπικό μέγιστο, που καθιστά τη δυναμική της κίνησης ασταθή. Ακόμη και με ταχύτητα που δεν υπερβαίνει την κρίσιμη το σολιτόνιο εν τέλει ακολουθεί μια απαγίδευτη τροχιά. Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πως επειδή η αρχική ταχύτητα είναι θετική, το σολιτόνιο αρχικά οδεύει προς τα δεξιά, όπου όμως συναντά φράγμα δυναμικού που δεν του επιτρέπει τη διέλευση και τελικά το ωθεί προς τα αριστερά, δηλαδή προς μικρότερα x , που είναι ακριβώς η κίνηση που θα έκανε ένα κλασσικό σωματίδιο σε ένα δυναμικό τέτοιας μορφής.

Παρακάτω παραθέτουμε, για λόγους πληρότητας, μια ενδεικτική διαχωρίζουσα τροχιά στο φασικό χώρο η οποία αποτελεί το όριο ανάμεσα σε περιοχές παγιδευμένης και απαγίδευτης κίνησης.



Σχήμα 19. Ενδεικτική τροχιά διαχωρίζουσας καμπύλης, ίδιες παράμετροι με την ανωτέρω, λήφθηκε για $x = 2.15, p = 0$. Έχει σημειωθεί και το αντίστοιχο σημείο ασταθούς ισορροπίας

Είναι εμφανές το ασταθές σημείο ισορροπίας που υπάρχει σε αυτήν την κίνηση και είναι το σημείο τομής της καμπύλης με τον εαυτό της. Το σημείο αυτό ασταθούς ισορροπίας αντιστοιχεί σε σημείο τοπικού μεγίστου του δυναμικού το οποίο στο συγκεκριμένο παράδειγμα αντιστοιχεί στο σημείο $x = 2$ (περίπου) με αρχική ταχύτητα μηδενική (βλ. μορφή δυναμικού, σχήμα 2.18)).

Κεφάλαιο 3

Εγκάρσια ανομοιογένεια δείκτη διάθλασης και διαμήκης ανομοιογένεια της μη-τοπικής απόκρισης

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τη διάδοση σολιτονίων σε φωτονικές διατάξεις που παρουσιάζουν, εκτός από την εγκάρσια ανομοιογένεια, μια ανομοιογένεια κατά τον άξονα διάδοσης. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε την επίδραση της διαμήκης ανομοιογένειας του όρου της μη τοπικότητας στην δυναμική διάδοσης του σολιτονίου [6],[17]. Θα θεωρήσουμε μια απλή ημιτονοειδή διαμήκη διαμόρφωση της μη-τοπικότητας και θα δούμε πως αυτή περιπλέκει τη δυναμική του συστήματος.

Αν προστεθεί στο μοντέλο του προβλήματος μας μια διαμόρφωση του συντελεστή της μη-τοπικότητας κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης του σολιτονίου, τότε ουσιαστικά προσθέτουμε έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας στο σύστημα πράγμα που του προσδίδει εν δυνάμει ιδιότητες χαοτικής δυναμικής. Ουσιαστικά θα επιτρέψουμε στον όρο της μη τοπικότητας να έχει μια ασθενή εξάρτηση από το z , έτσι ώστε ο σχετικός όρος εξάρτησης από

τη διεύθυνση διάδοσης να είναι μικρότερος από το σταθερό όρο της μη τοπικότητας. Το αξιόλογο όπως θα δούμε είναι ότι αν και τόσο μικρός έχει σημαντικές επιπτώσεις στη δυναμική της διάδοσης του σολιτονίου. Συγκεκριμένα η διαμόρφωση του συντελεστή της μη τοπικότητας θα έχει την εξής μορφή :

$$\gamma = \gamma_0 \cdot (1 + \varepsilon \sin(\omega z))$$

όπου γ_0 είναι ο όρος που αναφέρεται στο απόλυτο πλάτος της διαταραχής λόγω μη-τοπικότητας, ε είναι το σχετικό πλάτος της διαμήκους εξάρτησης και ω είναι ο κυματάριθμος της διαμήκους διαμόρφωσης. Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε παντού τιμή $\varepsilon=0.1$, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

Μεταβάλλοντας το ω θα παρατηρήσουμε δραστικές ποιοτικές αλλαγές στη δομή και τοπολογία του αντίστοιχου φασικού χώρου του ενεργού σωματιδίου που αντιστοιχούν σε διαφορετική δυναμική διάδοση του σολιτονίου και θα εστιάσουμε στις περιπτώσεις που παρουσίασαν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

3.1 Μη αυτόνομο σύστημα ενεργού σωματιδίου

Το Χαμιλτονιανό σύστημα εξαρτάται από την ανεξάρτητη μεταβλητή z που παίζει το ρόλο του χρόνου στην κίνηση του ενεργού σωματιδίου, οπότε το σύστημα είναι πλέον μη-αυτόνομο. Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται ως εξής:

$$\frac{dx_0}{dz} = v \quad (1)$$

$$m \frac{dv}{dz} = - \frac{\partial V_{eff}(x_0, z)}{\partial x_0} \quad (2)$$

όπου για το ενεργό δυναμικό έχουμε την ακόλουθη σχέση (βλ. κεφάλαιο 2) με τον εξαρτώμενο πλέον, από την μεταβλητή εξέλιξης, συντελεστή γ .

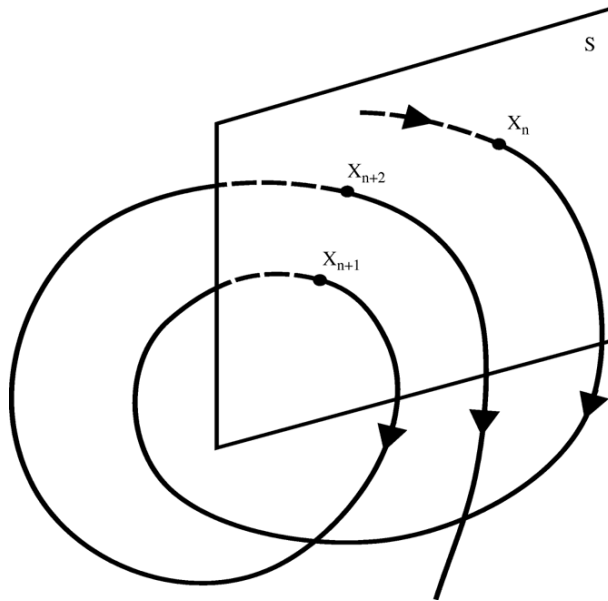
$$V_{eff}(x_0, z) = -\frac{64}{15} \eta^5 \gamma_0 (1 + 0.1 \sin(\omega \cdot z)) x_0 + \frac{2A\pi k}{\sinh\left(\frac{\pi k}{2\eta}\right)} \sin(kx_0)$$

Ο φασικός χώρος του αρχικού αυτόνομου συστήματος (χωρίς διαμήκη διαμόρφωση) είχε διάσταση 2, και το σύστημα είχε ένα βαθμό ελευθερίας. Στην περίπτωση αυτή, η Χαμιλτονιανή, που αντιστοιχεί στην ενέργεια του ενεργού σωματιδίου ήταν διατηρήσιμη ποσότητα και το σύστημα ήταν ολοκληρώσιμο, πράγμα που μας έδινε τη δυνατότητα επίλυσης σε κλειστή μορφή. Η ύπαρξη ενός επιπλέον βαθμού ελευθερίας, λόγω άμεσης εξάρτησης από το z καθιστά το σύστημα μη-αυτόνομο. Η ενέργεια δεν διατηρείται πλέον και το σύστημα είναι μη ολοκληρώσιμο. Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα μας έχει αποκτήσει ακριβώς τη μορφή που έχει ένα πρόβλημα ενός ταλαντωτή που επιδέχεται μια περιοδικά μεταβαλλόμενη δύναμη. Αναμένουμε λοιπόν παρόμοια χαρακτηριστικά πολύπλοκης δυναμικής. Η απόσταση διάδοσης που έχει το ρόλο του χρόνου, μπορεί να θεωρηθεί σαν επιπλέον μεταβλητή οπότε το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί σαν αυτόνομο σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας σε έναν νέο εκτεταμένο φασικό χώρο. Ο νέος φασικός χώρος έχει 4 διαστάσεις αλλά, καθώς η νέα Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται πλέον από την ανεξάρτητη μεταβλητή (που είναι πλέον άλλη από την z) αποτελεί μια σταθερά της κίνησης. Έτσι, η δυναμική περιορίζεται σε τριδιάστατες επιφάνειες σταθερής ενέργειας μέσα στον τετραδιάστατο φασικό χώρο. [10],[11]

Μια μέθοδος που διευκολύνει σημαντικά την ανάλυση των μη αυτόνομων συστημάτων και παρέχει ποιοτικές πληροφορίες μέσω των αριθμητικών τους λύσεων είναι αυτή της χρήσης των τομών Poincare [11]-[14]. Ουσιαστικά πρόκειται για μια στροβοσκόπηση της τροχιάς σε έναν χώρο που επιπλέον των διαστάσεων που αντιστοιχούν στη θέση και την ορμή έχει και τη

Κεφάλαιο 3 Εγκάρσια ανομοιογένεια δείκτη διάθλασης και διαμήκης ανομοιογένεια της μη-τοπικής απόκρισης

διάσταση του “χρόνου” (z). Η στροβοσκόπηση γίνεται με την συχνότητα της εξάρτησης του συστήματος από το z δηλ. με συχνότητα ω .



Σχήμα 3.1. Σχηματική περιγραφή της τομής Poincaré στην τροχιά του εκτεταμένου φασικού χώρου

Ο φασικός χώρος του μη-αυτόνομου συστήματος που προκύπτει από τις τομές Poincaré, αποτελείται από διαφορετικού τύπου καμπύλες και σημεία, ανάλογα με τις συχνότητες των κινήσεων και το συσχετισμό τους με τη συχνότητα διαμόρφωσης του μέσου. Πιο συγκεκριμένα στο σύστημα αναπτύσσονται, λόγω παγιδευμένης κίνησης του σολιτονίου στην εγκάρσια διεύθυνση, ταλαντωτικές συμπεριφορές συγκεκριμένων συχνοτήτων (βλ. κεφ 2), ενώ ταυτόχρονα έχουμε ως προς τη μεταβλητή διάδοσης (διαμήκης άξονας z) μια διαμόρφωση του μέσου σε προκαθορισμένη συχνότητα (κυματαριθμό). Ο συσχετισμός αυτών των δύο τύπων συχνοτήτων δημιουργεί τις εκάστοτε δομές στο φασικό χώρο. Όταν ο λόγος των συχνοτήτων αυτών είναι ρητός, τότε έχουμε την ύπαρξη περιοδικά επαναλαμβανόμενων σημείων στον φασικό χώρο τα οποία υποδηλώνουν την ύπαρξη περιοδικών τροχιών των σολιτονίων ως προς τη μεταβλητή εξέλιξης z . Αυτά τα σημεία αποτελούν κέντρα των

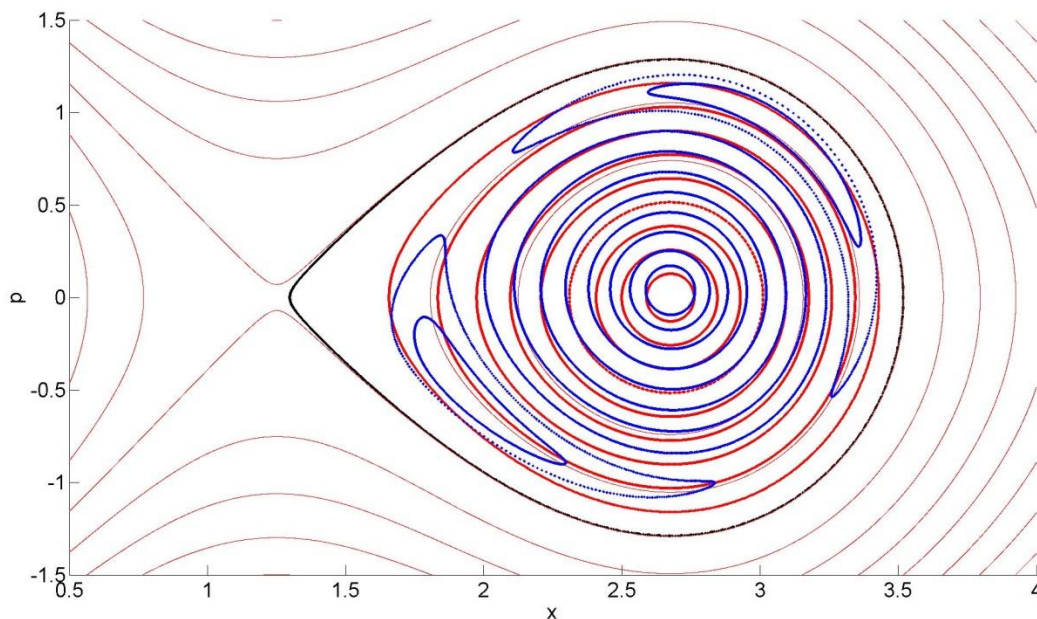
λεγόμενων νησίδων, οι οποίες είναι σχηματισμοί από κλειστές καμπύλες στο φασικό χώρο που έχουν διαχωριστεί από τις ευρύτερες κλειστές καμπύλες που έχουμε στην περίπτωση του αυτόνομου συστήματος (κεφ. 2). Οι κλειστές καμπύλες δημιουργούνται λόγω ύπαρξης άρρητου λόγου συχνοτήτων, που έχει ως συνέπεια κατά την τομή Poincare να μην έχουμε ποτέ επανάληψη του ίδιου σημείου στο επίπεδο της τομής, αλλά αντ' αυτού να έχουμε την πυκνή κάλυψη από σημεία με αποτέλεσμα να σχηματίζουν κλειστή καμπύλη. Κάθε νησίδα αποτελείται από το κεντρικό της σημείο και πολλές κλειστές καμπύλες γύρω της, ενώ υπάρχουν διαχωρίζουσες καμπύλες που τις καθιστούν διακριτές νησίδες. Στις διαχωρίζουσες αυτές καμπύλες, τα σάγματα είναι τα πρώτα σημεία στα οποία εμφανίζεται χάος όταν αυξηθεί η διαταραχή που καθιστά το σύστημα μη αυτόνομο, ενώ στη συνέχεια αρχίζει να καταστρέφεται και η δομή των νησίδων με την αύξηση της διαταραχής.

3.2 Αριθμητική μελέτη του μη-αυτόνομου συστήματος

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε την επίδραση της διαμήκους ανομοιογένειας της μη-τοπικότητας στις τροχιές του ενεργού σωματιδίου σε σύγκριση με την περίπτωση απουσίας διαμήκους ανομοιογένειας όπου το αντίστοιχο σύστημα είναι αυτόνομο. Στη γενική περίπτωση, βγάζουμε ως κοινό παράγοντα στο δυναμικό τον όρο A , ο οποίος είναι της τάξης 10^{-2} . Αυτή είναι και μια τυπική τιμή η οποία αντιμετωπίζεται σε πρακτικές εφαρμογές. Ο όρος της μη τοπικότητας γ , συνήθως προκύπτει μια τάξης μικρότερος ή και πιο μικρός ακόμη. Αυτό καθιστά δυνατό και διευκολύνει την ποιοτική οπτική, αν σχηματίσουμε το λόγο $\frac{\gamma}{A}$ και στις διάφορες προσομοιώσεις είναι η μεταβλητή μας παράμετρος.

3.2.1 Περίπτωση λόγου $\frac{\gamma}{A} = 0.1$ ($A = 0.1$ και $\gamma_0 = 0.01$)

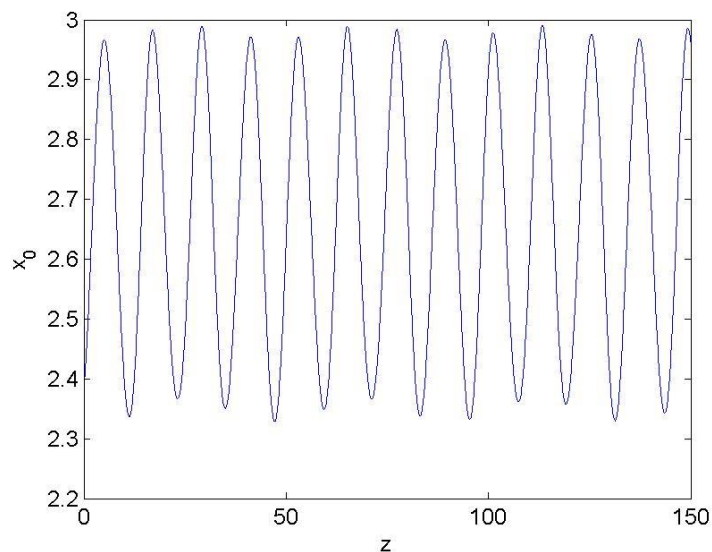
Για την πρώτη περίπτωση όπου έχουμε $A = 0.1$ και $\gamma_0 = 0.01$ με σημείο ελαχίστου το $x_0 = 2.6760$ και κρίσιμη ταχύτητα $v = 0.4607$, ύψος σολιτονίου $n = 1.4$ και κυματαριθμό εγκάρσιας διαμόρφωσης $k = 1.6$, λαμβάνουμε για κυματάριθμο διαμήκους διαμόρφωσης $\omega = 0.9$ τον ακόλουθο φασικό χώρο.



Σχήμα 3.2. Φασικός χώρος μη αυτόνομου συστήματος με μπλέ χρώμα για την περίπτωση $A = 0.1$, $\gamma_0 = 0.01$, $k = 1.6$, $n = 1.4$ στην προσομοίωση πήραμε αρχικές συνθήκες $x=2.6$ και ταχύτητα v έως 0.4 . Στο υπόβαθρο με κόκκινο χρώμα είναι ο φασικός χώρος του αυτόνομου συστήματος για τις ίδιες παραμέτρους. Ο φασικός χώρος του αυτόνομου συστήματος λαμβάνεται ουσιαστικά προβάλλοντας για διάφορες τιμές της Χαμιλτονιανής, τις αντίστοιχες καμπύλες στο επίπεδο $p - x$. Με μαύρο χρώμα είναι εμφανής η διαχωρίζουσα καμπύλη του αυτόνομου συστήματος, καμπύλη η οποία διακρίνει τις παγιδευμένες (εσωτερικές) από τις απαγιδευτες (εξωτερικές) τροχιές. Με έντονη κόκκινη γραμμή φαίνονται οι παγιδευμένες τροχιές για διάφορες αρχικές τιμές της ταχύτητας μέχρι την κρίσιμη. Οι πιο αχνές κόκκινες γραμμές λήφθηκαν τυχαία για διάφορες τιμές της συνολικής ενέργειας. Δεν υπάρχει ποιοτική διαφορά μεταξύ των δύο για τις παγιδευμένες τροχιές, παρά μόνο ότι αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές ενέργειας.

Όπως παρατηρούμε, στο φασικό χώρο του μη αυτόνομου συστήματος έχουμε τη δημιουργία νησίδων οι οποίες σηματοδοτούν κάποιο συντονισμό μεταξύ της συχνότητας της περιοδικής ταλάντωσης του σολιτονίου σε ένα πηγάδι δυναμικού και της συχνότητας (κυματάριθμο) της διαμήκους ανομοιογένειας, αλλά και σχεδόν κυκλικές κλειστές τροχιές που οφείλονται σε ένα άρρητο λόγο συχνοτήτων. Βλέπουμε πως ο νέος φασικός χώρος είναι ελαφρώς μετατοπισμένος ως προς τον αντίστοιχο του αυτόνομου συστήματος, ενώ έχει χαθεί η συμμετρία γύρω από το $p = 0$. Αυτό σημαίνει πως η δυναμική σολιτονίων με αντίθετο πρόσημο στη γωνία πρόσπτωσης (αρχική ταχύτητα) μπορεί να είναι εντελώς διαφορετική.

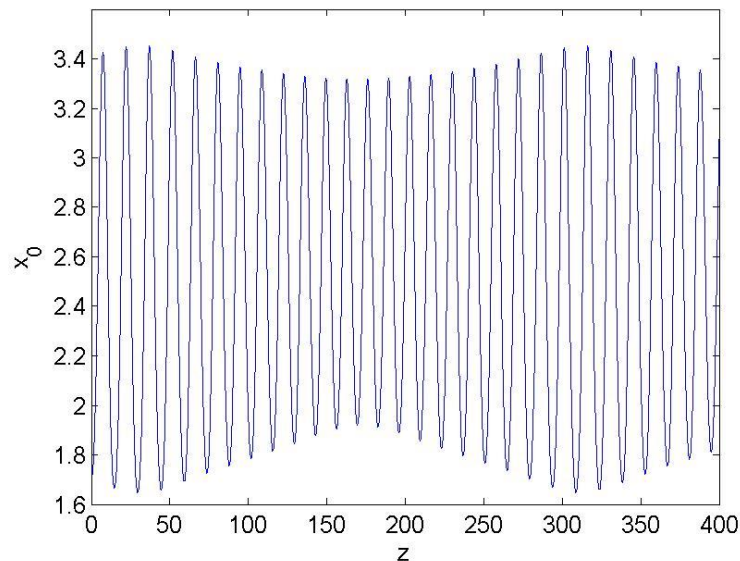
Λαμβάνοντας ένα ενδεικτικό σημείο σε μία από τις εσωτερικές σχεδόν κυκλικές τροχιές, με αρχικές συνθήκες έστω το $x = 2.38$ και $v = 0.08646$ και υπολογίζοντας την εξέλιξη της θέσης x συναρτήσει του χρόνου, λαμβάνουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση.



Σχήμα 3.3. Τροχιά σολιτονίου με αρχικές συνθήκες $x = 2.38$ και ταχύτητα $v = 0.08646$. Οι αρχικές συνθήκες αυτές ανήκουν σε σημείο των εσωτερικών κλειστών καμπυλών οι οποίες υποδηλώνουν κάποιον άρρητο λόγο μεταξύ συχνοτήτων.

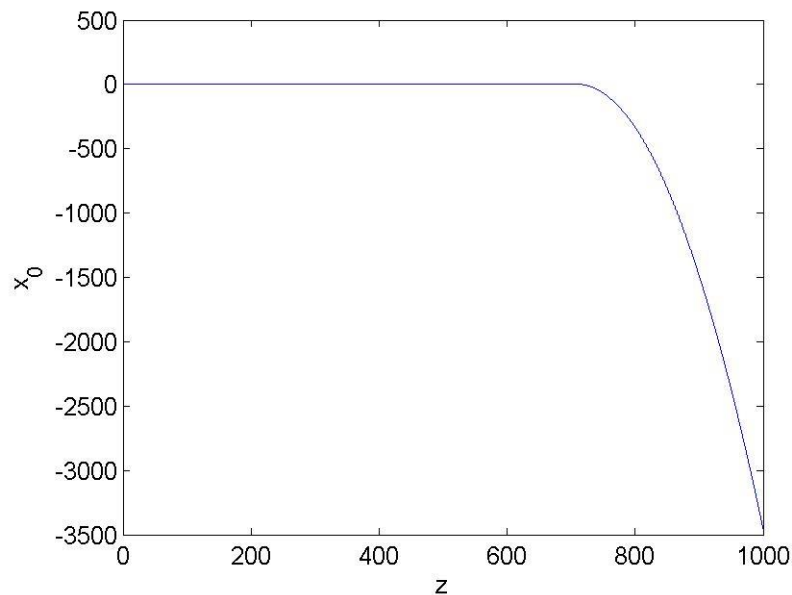
Όπως βλέπουμε η τροχιά ακολουθεί μια σχεδόν ημιτονοειδή τροχιά, αλλά είναι εμφανής η συνεισφορά από μια δεύτερη συχνότητα περίπου σε ένα λόγο 8 προς 1 με την πρώτη. Η τροχιά που ακολουθεί το σολιτόνιο είναι φραγμένη και αυτό είναι εμφανές από την

αντίστοιχη καμπύλη στο φασικό χώρο, η οποία σε κανένα σημείο της δεν περνά τη διαχωρίζουσα έτσι ώστε να προκύψει αποπαγίδευση του σολιτονίου. Αν τώρα λάβουμε ένα σημείο πάνω σε μια νησίδα ως αρχική συνθήκη ώστε να βρούμε την τροχιά που αυτό ακολουθεί έχουμε τα εξής. Το σημείο που διαλέγουμε είναι το $x=1.7$ και με $v=0$ ($p=0$) και βρίσκεται ανάμεσα στις δύο νησίδες όπως αποτυπώνεται στο σχήμα. Τότε η τροχιά που ακολουθεί είναι η ακόλουθη (σχήμα 3.4).



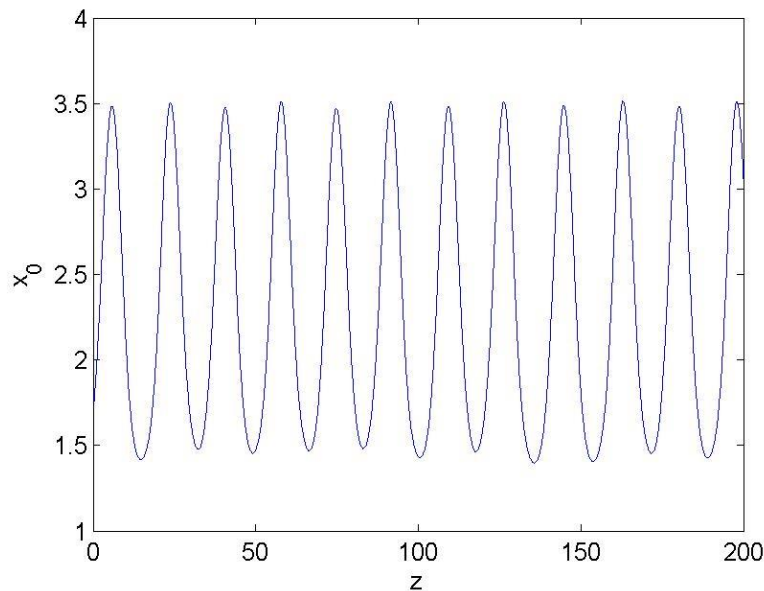
Σχήμα 3.4. Τροχιά για αρχικές συνθήκες $x=1.7$ και $v=0$, που αντιστοιχούν σε σημείο επάνω σε καμπύλη που ανήκει σε νησίδα συντονισμού.

Βλέπουμε πως σε αυτήν την περίπτωση που βρισκόμαστε σε μια νησίδα, υπάρχει ένας λόγος συχνοτήτων ο οποίος οδηγεί στη δημιουργία διακροτήματος. Ακολουθώντας, για τις ίδιες συνθήκες διαμόρφωσης και ύψους σολιτονίου, αν λάβουμε ως αρχικό σημείο της τροχιάς ένα σημείο το οποίο βρίσκεται κοντά στη διαχωρίζουσα, έστω το $x = 1.699$ και $v = 0.2015$ λαμβάνουμε την παρακάτω τροχιά εξέλιξης.



Σχήμα 3.5. Τροχιά για αρχικές συνθήκες πολύ κοντά στη διαχωρίζουσα. Είναι εμφανές το απαγίδευτο της τροχιάς

Όπως παρατηρούμε, αυτή η τροχιά είναι μη φραγμένη, αλλά η αστάθεια της προκύπτει μετά από αρκετό χρόνο. Αυτό οφείλεται στη χαστική συμπεριφορά του συστήματος που ωθεί το σολιτόνιο εκτός ευστάθειας (λόγω του ότι βρίσκεται πολύ κοντά στη διαχωρίζουσα) παρ' όλο που έχει ξεκινήσει με συνθήκες που στο αυτόνομο σύστημα οδηγούσαν σε ευσταθή τροχιά. Ακόμη και μια μικρή διαταραχή το στέλνει εκτός της διαχωρίζουσας στην περιοχή αστάθειας. Αν σχεδιάσουμε την τροχιά μέχρι ένα σημείο στο οποίο παραμένει φραγμένη έχουμε την εξής γραφική.

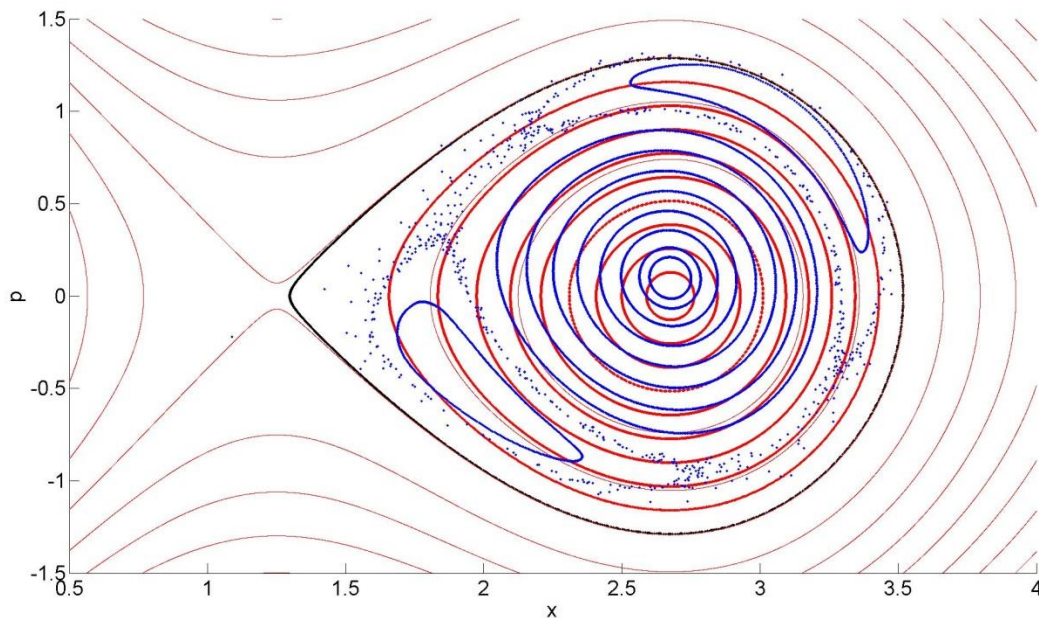


Σχήμα 3.6 . Τροχιά του σχήματος 5 πριν αυτή καταστεί μη φραγμένη

Υπάρχει μεγάλη συνεισφορά από μια συχνότητα, η οποία είναι εμφανής και από το χαρακτήρα της τροχιάς, αλλά υπάρχουν και επιπλέον συχνότητες που συμμετέχουν, πράγμα που καθιστά την τροχιά μη ημιτονοειδή.

Περιπτώσεις ισχυρότερης διαμήκους διαμόρφωσης της μη-τοπικότητας (ϵ)

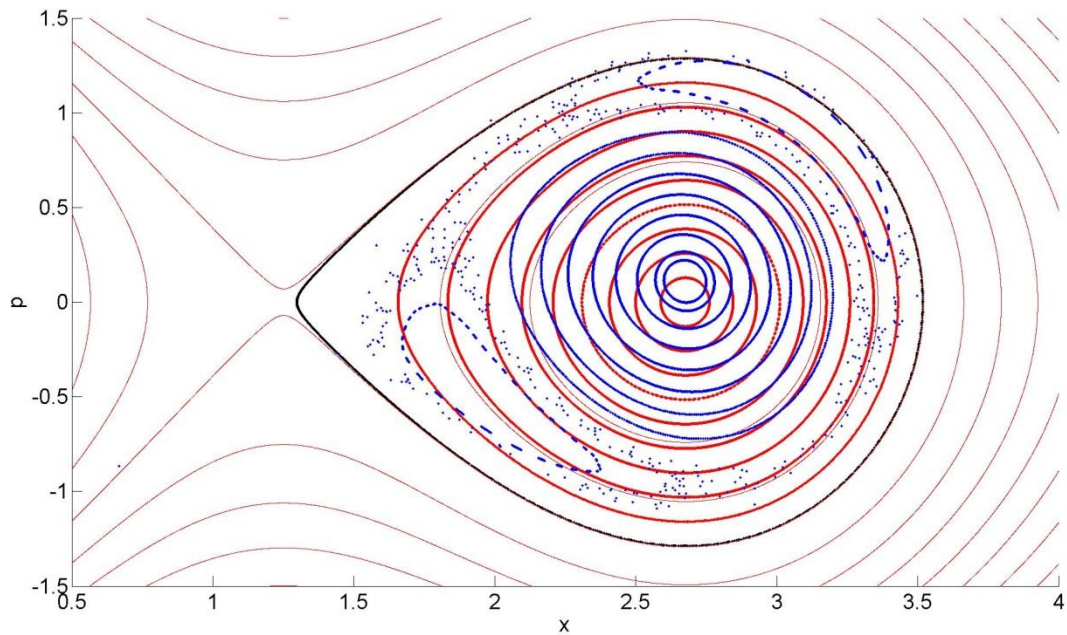
Αν τώρα αυξήσουμε το μέγεθος της διαμήκους διαταραχής, η οποία είναι αυτή που προκαλεί τα χαστικά φαινόμενα, στην τιμή $\epsilon=0.25$ τότε θα λάβουμε ένα φασικό χώρο ο οποίος θα δείχνει με μεγαλύτερη ευκολία και ευκρίνεια τη χαστική αυτή συμπεριφορά. Ο αντίστοιχος φασικός χώρος για τις συνθήκες διαμόρφωσης που είχαμε μέχρι τώρα, $A = 0.1$, $\gamma_0 = 0.01$, $k = 1.6$ και $n = 1.4$ και με συνθήκες για την προσομοίωση $x = 2.6$ και ταχύτητα έως 0.4 , είναι ο ακόλουθος:



Σχήμα 3.7. Φασικός χώρος του συστήματος για συντελεστή διαμήκους διαμόρφωσης $\varepsilon = 0.25$, $A = 0.1$, $\gamma_0 = 0.01$. Αρχικές συνθήκες, για την θέση $x = 2.6$ και ταχύτητα έως $v = 0.4$.

Είναι εμφανής πλέον η χαοτική συμπεριφορά που εμφανίζεται με τη μορφή μη-ομαλών τροχιών οι οποίες δεν περιορίζονται σε λείες καμπύλες αλλά έχουν μορφή διάσπαρτων σημείων. Παρατηρούμε ότι η μια νησίδα που αντιστοιχεί και στη μέγιστη τιμή της ταχύτητας ($v = 0.4$) δεν είναι πλέον αυστηρά καθορισμένη και διάφορα σημεία της βρίσκονται ακόμη και εκτός της διαχωρίζουσας του αυτόνομου συστήματος. Η αύξηση του συντελεστή της διαμήκους διαμόρφωσης οδηγεί σταδιακά το σύστημα να γίνεται συνεχώς πιο χαοτικό, το οποίο γίνεται εμφανές από το σπάσιμο των τροχιών σταδιακά από αυτές με τις υψηλότερες ενέργειες προς τις μικρότερες.

Αυξάνοντας λίγο ακόμη το συντελεστή ε στο 0.28 έχουμε την ακόλουθη μορφή του φασικού χώρου:



Σχήμα 3.8. Φασικός χώρος για $A = 0.1$, $\gamma_0 = 0.01$, $\varepsilon = 0.28$, κυματαριθμό εγκάρσιας διαμόρφωσης $k = 1.6$, πλάτος σολιτονίου $n = 1.4$ και κυματαριθμό διαμήκους διαμόρφωσης $\omega = 0.9$. Είναι εμφανής η διάσπαση που υφίστανται οι πιο εξωτερικές καμπύλες (κοντά στη διαχωρίζουσα) με την αύξηση του συντελεστή ε . Οι πιο εσωτερικές καμπύλες παραμένουν αναλλοίωτες, αλλά αρκετά μετατοπισμένες σε σχέση με το αυτόνομο σύστημα, είναι αυτές που θα καταστραφούν τελευταίες αν συνεχιστεί η αύξηση του συντελεστή.

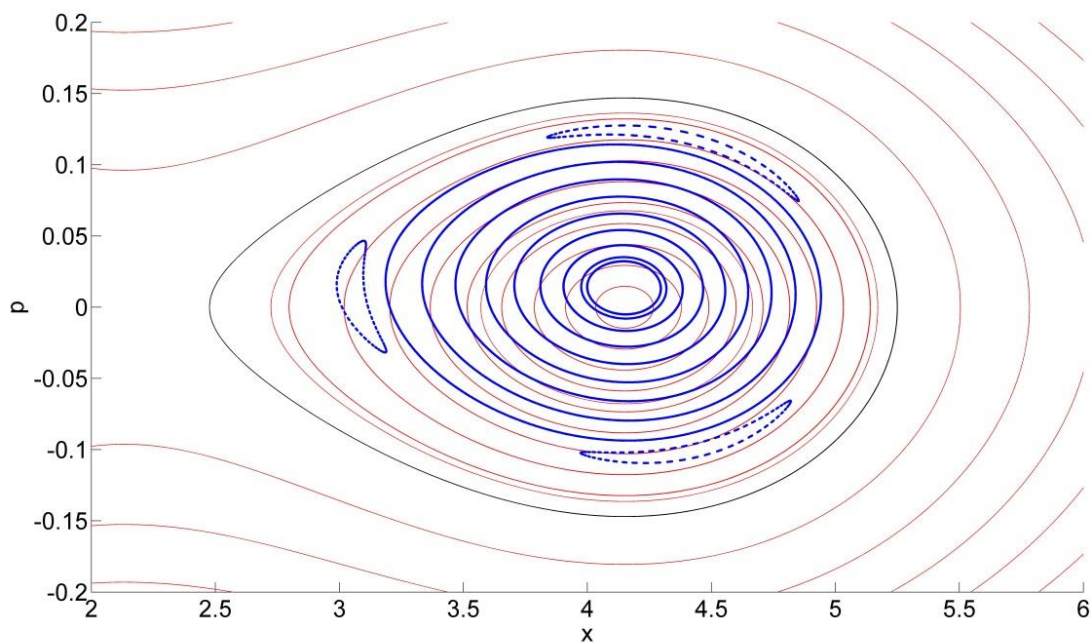
Όπως είναι εμφανές τώρα έχουμε εντονότερη διασπορά σημείων στις νησίδες, ενώ παρατηρούμε και σημεία που προκύπτουν εκτός της διαχωρίζουσας. Όπως είναι εμφανές, όσο αυξάνουμε το επίπεδο διαταραχής, το σύστημα αποκτά μεγαλύτερη 'χαοτικότητα' που εκδηλώνεται με το ακανόνιστο σχήμα αρχικά των πιο εξωτερικών τροχιών και ύστερα, στην ακραία περίπτωση πολύ ισχυρής διαταραχής, στην πλήρη αποδιοργάνωση οποιασδήποτε μορφής καλά καθορισμένης καμπύλης στο φασικό χώρο.

Για συντελεστή στο 0.3 οι καμπύλες φεύγουν πολύ γρήγορα στο άπειρο, πράγμα που δηλώνει την πλήρη αδυναμία παγίδευσης του σολιτονίου από ένα επίπεδο διαταραχής και πάνω ακόμη και για σχετικά μικρές ταχύτητες σε σχέση με την κρίσιμη.

3.2.2 Περίπτωση λόγου $\frac{\gamma}{A} = 1$, ($A = 0.01$ και $\gamma_0 = 0.01$)

Στην περίπτωση αυτή, και για $k = 1$ και $n = 0.7$ η θέση ελαχίστου στο αυτόνομο σύστημα είναι $x = 4.15$ και η αντίστοιχη κρίσιμη ταχύτητα $v = 0.105$.

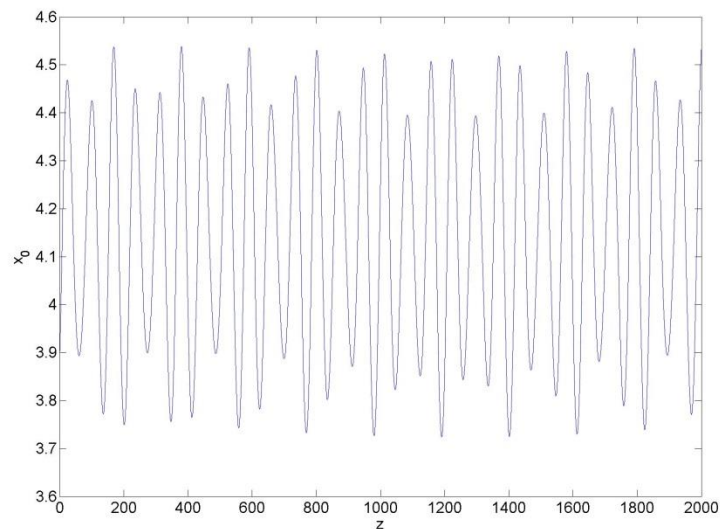
Στην προσομοίωση για το μη αυτόνομο σύστημα θέτουμε $x = 4$ και ταχύτητα έως 0.09 . Ο κυματάριθμος διαμήκους διαμόρφωσης είναι $\omega = 0.12$, οπότε ο φασικός χώρος που λαμβάνουμε είναι ο εξής (σχήμα 3.9).



Σχήμα 3.9. Φασικός χώρος μη αυτόνομου συστήματος για την περίπτωση λόγου $\gamma/A = 1$, δηλαδή οι δύο διαταραχές είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Η μέγιστη αρχική ταχύτητα λήφθηκε ίση με $v = 0.09$.

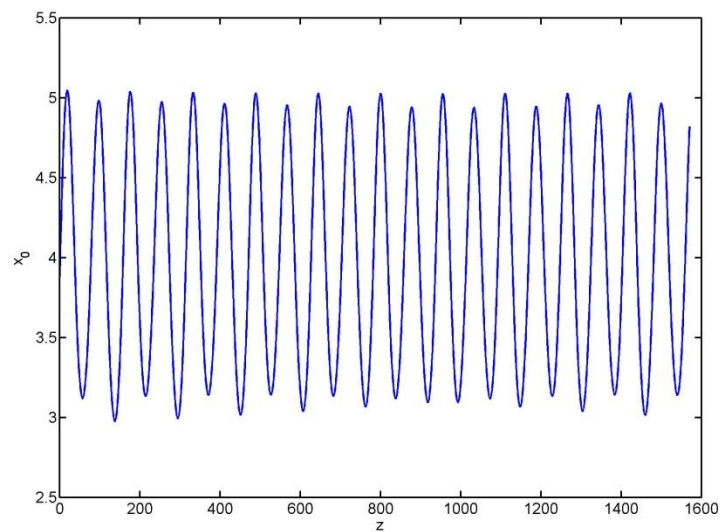
Αρχικά θεωρούμε ένα σημείο σε μια από τις εσωτερικές καμπύλες, έστω το $x = 3.867$ και $v = 0.0262$. Αυτό μας δίνει την ακόλουθη τροχιά εξέλιξης στο χρόνο.

Κεφάλαιο 3 Εγκάρσια ανομοιογένεια δείκτη διάθλασης και διαμήκης ανομοιογένεια της μη-τοπικής απόκρισης



Σχήμα 3.10 . Τροχιά σολιτονίου με αρχικές συνθήκες $x = 3.867$ και $\nu = 0.0262$. Είναι εμφανής η συμμετοχή διαφορετικών συχνοτήτων στο φάσμα της τροχιάς που την καθιστούν ημι-περιοδική.

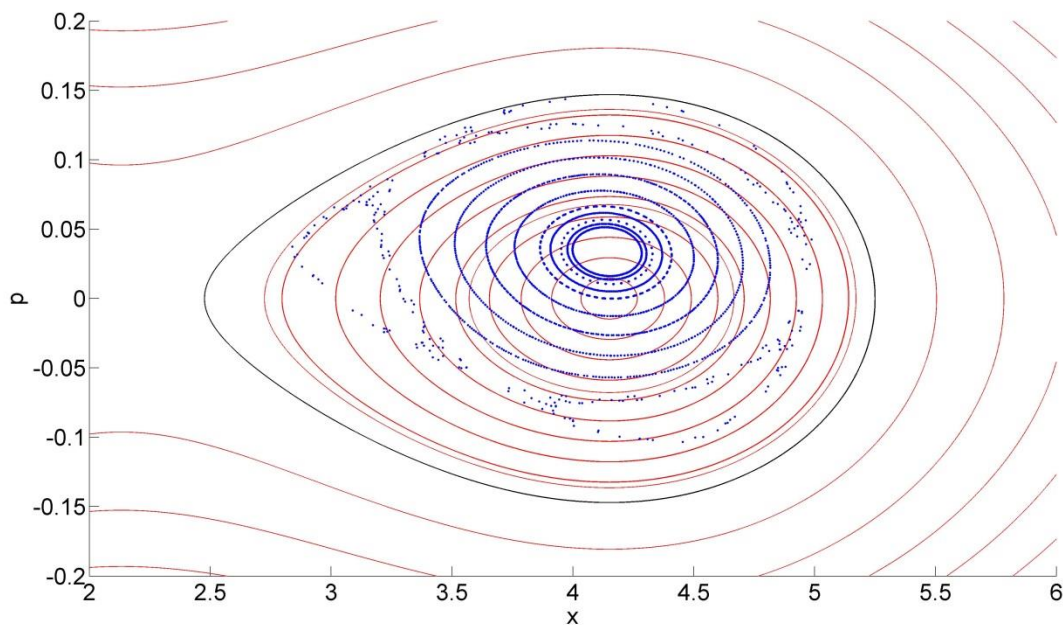
Ύστερα θα θεωρήσουμε ένα σημείο επάνω σε μια από τις νησίδες, έστω το $x = 3.847$ και $\nu = 0.0859$ ($p = 0.1202$) τότε η τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο είναι



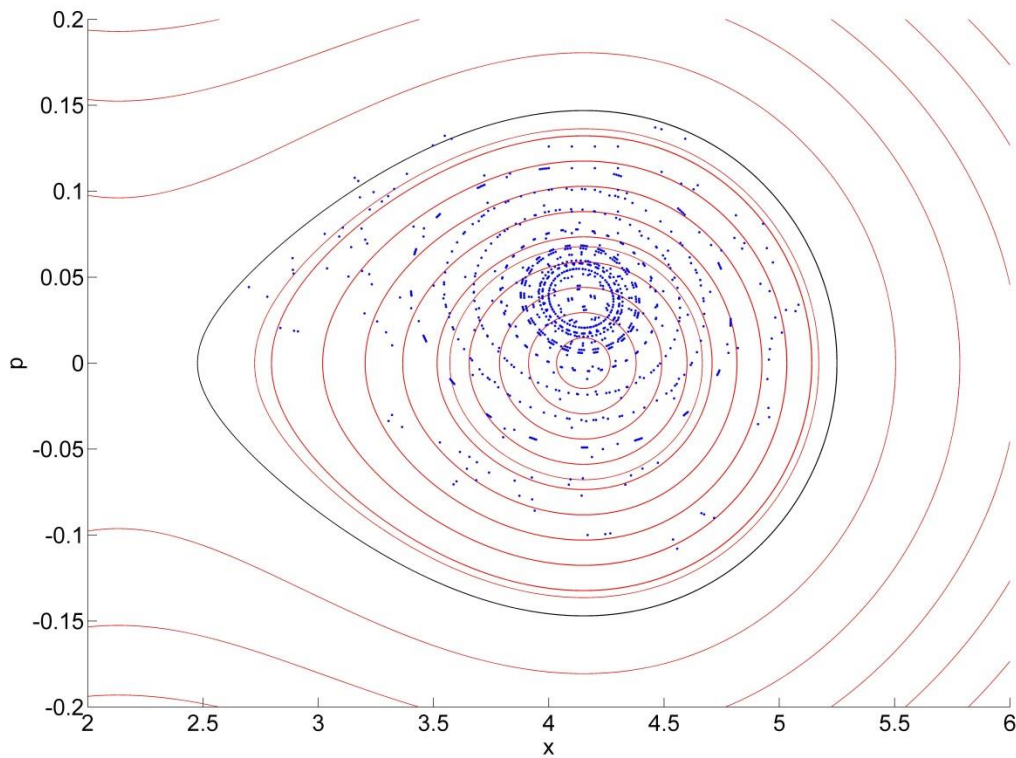
Σχήμα 3.11 . Τροχιά σολιτονίου με αρχικές συνθήκες $x = 3.847$ και $\nu = 0.0859$. Όπως είναι εμφανές εμφανίζει μια ημι-περιοδικότητα

Περιπτώσεις ισχυρότερης διαμήκους διαμόρφωσης της μη-τοπικότητας (ϵ)

Θεωρώντας το συντελεστή της διαμήκους διαμόρφωσης $\epsilon = 0.25$ παρατηρούμε πως αρχίζει να αναπτύσσεται χαοτική συμπεριφορά με την αρχική διάσπαση των πιο εξωτερικών καμπυλών του φασικού χώρου, ενώ επίσης παρατηρούμε και μια συνολική κατακόρυφη μετατόπιση του φασικού πορτραίτου σε σχέση με την περίπτωση όπου είχαμε $\epsilon = 0.1$. Αν αυξήσουμε ακόμη περισσότερο τον συντελεστή στο $\epsilon = 0.28$ τότε βλέπουμε πως πλέον αρχίζουν και διαταράσσονται και οι πιο εσωτερικές καμπύλες τόσο έντονα που χάνουν τον κλειστό χαρακτήρα που είχαν και αποτελούνται πλέον από διεσπαρμένα σημεία. Επίσης η κατακόρυφη μετατόπιση είναι αρκετά πιο έντονη. Οι δύο φασικοί χώροι φαίνονται παρακάτω.



Σχήμα 3.13. Φασικός χώρος για συντελεστή $\epsilon = 0.25$, $A/\gamma = 1$, $A = 0.01$



Σχήμα 3.14. Φασικός χώρος για συντελεστή $\varepsilon = 0.28$, $A/\gamma = 1$, $A = 0.01$

Παρατηρούμε ότι μια αύξηση στο πλάτος του όρου διαταραχής, που αντιστοιχεί στον επιπλέον βαθμό ελευθερίας, δημιουργεί μια πιο έντονη χαοτική συμπεριφορά. Οι τροχιές «σπάνε» για πολύ μικρότερες μεταβολές της θέσης ή της ταχύτητας σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Ενώ αν αφήσουμε για μεγαλύτερο χρόνο προσομοίωσης η τροχιά ξεκινά να γίνεται μη περιορισμένη και θα φύγει στο άπειρο.

Για ακόμη μεγαλύτερο χρονικό διάστημα προσομοίωσης οι τροχιές του φασικού χώρου «φεύγουν» στο άπειρο ακόμη και με μικρές ταχύτητες, οπότε ήταν σκόπιμο να μην σχεδιαστούν.

Συμπερασματικά μπορούμε να παρατηρήσουμε πως όσο αυξάνεται ο συντελεστής της διαμήκους ανομοιογένειας, έχουμε την εμφάνιση πιο έντονων χαοτικών φαινομένων γιατί

απομακρυνόμαστε από τις συνθήκες του θεωρήματος KAM στο οποίο απαιτείται μικρή διαταραχή για να έχουμε διατήρηση κάποιων ομαλών τροχιών από το αυτόνομο (ολοκληρώσιμο) σύστημα. Στην προκειμένη περίπτωση οι πρώτες τροχιές που αρχίζουν και «σπάνε» είναι αυτές κοντά στη διαχωρίζουσα οι οποίες είναι πιο επιρρεπείς σε μεταβολές τις ενέργειας ώστε να κατασταθούν χαοτικές. Η εμφάνιση νησίδων σχετίζεται με συντονισμούς ανάμεσα στην περίοδο της διαμήκους διαμόρφωσης και στην περίοδο της (αδιατάρακτης) παγιδευμένης κίνησης. Τα κέντρα των νησίδων αντιστοιχούν σε περιοδικές τροχιές ενώ οι ομαλές τους καμπύλες σε ημι-περιοδικές (quasiperiodic) τροχιές [10],[11]. Ο νέος φασικός χώρος είναι μετατοπισμένος σε σχέση με αυτόν του αυτόνομου συστήματος, με αποτέλεσμα να σπάει η συμμετρία μεταξύ θετικών και αρνητικών ορμών. Αυτό υποδηλώνει μια πιθανή διαφοροποίηση τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά στις τροχιές που θα ακολουθήσουν δύο σολιτόνια με ίδια σε μέτρο, αλλά διαφορετικού προσήμου ταχύτητα (γωνία πρόσπτωσης) στο ίδιο σημείο. Είναι εμφανές στο σχήμα 3.13 πως ένα σολιτόνιο με αρχική ορμή $p = 0.1$ θα έχει τη δυνατότητα να παραμείνει παγιδευμένο καθότι υπάρχει κλειστή καμπύλη που να αγγίζει αυτήν την τιμή. Αντιθέτως, δεν υπάρχει κλειστή καμπύλη του φασικού χώρου που να περνά από το $p = -0.1$, παρά μόνο καμπύλες που έχουν αρχίσει να αποκτούν χαοτική συμπεριφορά.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική επίλυση της διαταραγμένης NLS

Σε αυτό το κεφάλαιο θα πραγματοποιήσουμε μια σύγκριση των αποτελεσμάτων που μας δίνει το μοντέλο του ενεργού σωματιδίου, σε σχέση με τις αριθμητικές λύσεις που λαμβάνουμε κατά την επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης NLS. Η επίλυση της εξίσωσης γίνεται με τη μέθοδο split-step Fourier. Στη συνέχεια θα δείξουμε τη συμφωνία των λύσεων και που αυτή καταρρέει, ενώ με αυτόν τον τρόπο θα αναδειχθεί αβίαστα η δύναμη της μεθόδου του σωματιδίου τόσο στις ποιοτικές όσο και στις ποσοτικές προβλέψεις.

4.1 Μέθοδος split-step Fourier

Η μέθοδος αυτή χαρακτηρίζεται από μεγάλη ταχύτητα υπολογισμού, η οποία οφείλεται κυρίως στη χρήση του αλγορίθμου FFT για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier. Η ιδέα είναι να χωρίσουμε την εξίσωση σε δύο κομμάτια τα οποία παράγονται από δύο διαφορετικούς τελεστές. Ο ένας αναφέρεται στη διασπορά και τις απώλειες που θα υπήρχαν αν το μέσο ήταν γραμμικό και ο άλλος είναι ένας μη γραμμικός τελεστής ο οποίος αναφέρεται στις μη γραμμικότητες που υπεισέρχονται στην εξίσωση [1]. Οπότε θα έχουμε γενικά :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A$$

Όπου D είναι ο διαφορικός τελεστής που αντιστοιχεί στις απώλειες και τη διασπορά στο γραμμικό μέσο, ενώ N είναι ο μη γραμμικός τελεστής που εμπεριέχει τη συνεισφορά της μη γραμμικότητας του μέσου.

Γενικά η μη γραμμικότητα και η διασπορά δρούν ταυτόχρονα κατά τη διάδοση μιας δέσμης. Η μέθοδος split-step υποθέτει ότι κατά τη διάδοση σε ένα μικρό βήμα h , τα δύο στοιχεία λειτουργούν ανεξάρτητα. Η διάδοση από ένα σημείο z σε ένα σημείο $z+h$ διενεργείται σε δύο βήματα. Κατά το πρώτο βήμα λειτουργεί μόνο η μη γραμμικότητα, οπότε $\hat{D} = 0$, ενώ κατά το δεύτερο βήμα λειτουργεί μόνο ο διαφορικός τελεστής οπότε $\hat{N} = 0$.

Μαθηματικά έχουμε πως : $A(z+h, T) \approx \exp[h\hat{D}] \exp[h\hat{N}] A(z, T)$

Το εκθετικό του τελεστή D μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, αφού πρώτα έχουμε αντικαταστήσει τον όρο $-i\omega$ για κάθε παράγωγο ως προς την εγκάρσια διεύθυνση.

Η ακρίβεια της μεθόδου αν συγκρίνουμε το γινόμενο των εκθετικών των δύο τελεστών με το εκθετικό του αθροίσματος τους, προκύπτει κάνοντας χρήση του τύπου Baker-Hausdorff για δύο μη μετατιθέμενους τελεστές πως είναι της τάξης του τετραγώνου του βήματος (h^2). Ουσιαστικά η μέθοδος αγνοεί την μη μεταθετικότητα των τελεστών, αλλά με σχετικά μικρό σφάλμα. Κάνοντας χρήση της συμμετροποιημένης μεθόδου split-step (symmetrized), κατά την οποία ουσιαστικά παρεμβάλουμε τη δράση του μη γραμμικού τελεστή N ανάμεσα σε δύο δράσεις του τελεστή D που η καθεμία αντιστοιχεί στο μισό βήμα. Αυτό μπορεί να ρίξει το σφάλμα της μεθόδου ανεβάζοντας την τάξη σε $O(h^3)$.

Ο μη γραμμικός τελεστής εμφανίζεται ως ολοκλήρωμα της μορφής : $\exp\left(\int_z^{z+h} \hat{N}(z') dz'\right)$

Για απλοποίηση αν το h είναι αρκετά μικρό, μπορούμε να πάρουμε την τιμή του ολοκληρώματος ως $h\hat{N}$, που κάνει το σφάλμα τρίτης τάξης ως προς το βήμα, είτε μπορούμε να το προσεγγίσουμε με τραπεζοειδή κανόνα ως $\frac{h}{2}(\hat{N}(z) + \hat{N}(z+h))$, όπου όμως χρειάζεται

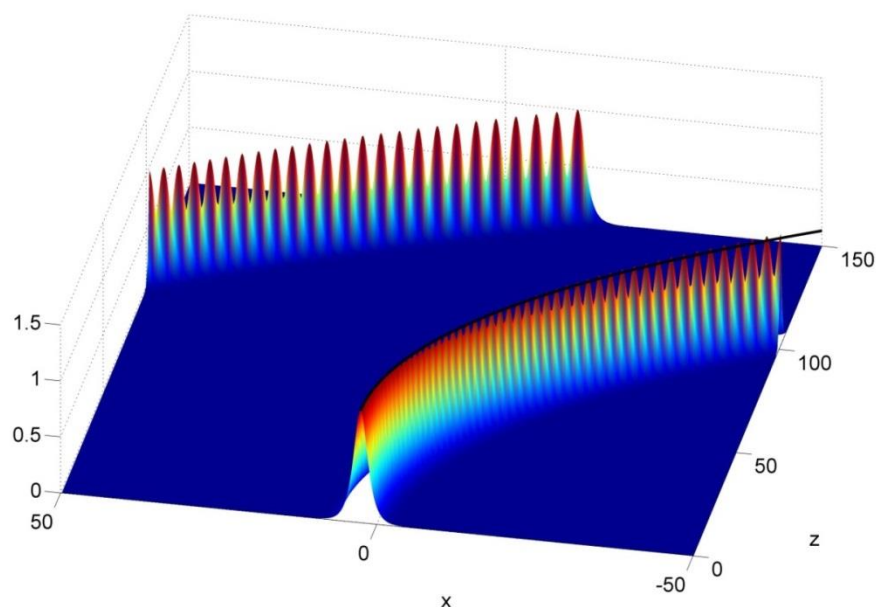
μα επαναληπτική διαδικασία γιατί το $\hat{N}(z+h)$ δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων. Ουσιαστικά βάζουμε στη θέση του το $\hat{N}(z)$ και υπολογίζουμε το $A(z+h, T)$ από όπου ακολούθως υπολογίζουμε το νέο $\hat{N}(z+h)$.

4.2 Αριθμητική επίλυση της NLS για εγκάρσια ανομοιογένεια και μη-τοπικότητα

Αρχικά θα δούμε ποιες είναι οι αριθμητικές λύσεις της εξίσωσης NLS όταν στο πρόβλημα εισάγουμε μόνο τον όρο της μη τοπικότητας ως διαταραχή, ύστερα και ανεξάρτητα θα δούμε τη λύση όταν υφίσταται μόνο ο όρος της ανομοιογένειας του μέσου, ενώ τελικά θα δούμε την απόκριση όταν συνυπάρχουν αυτά τα δύο, ενώ ταυτόχρονα θα γίνεται μια σύγκριση με τα αποτελέσματα που δίνει το μοντέλο του ενεργού σωματιδίου για τις αντίστοιχες παραμέτρους.

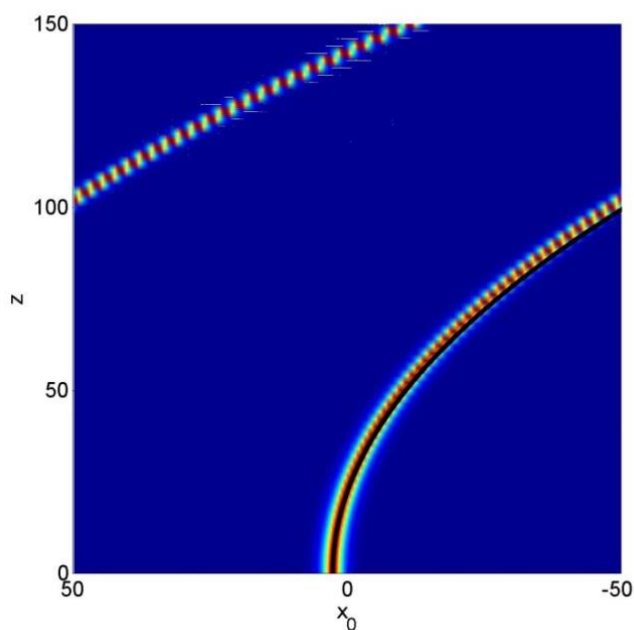
4.2.1 Επίδραση της μη-τοπικότητας στη δυναμική του σολιτονίου

Παρακάτω βλέπουμε τη λύση που αποκτούμε με την αριθμητική επίλυση της NLS και υπερτιθέμενη πάνω σε αυτή, την τροχιά που δίνει το μοντέλο του effective particle. Οι αρχικές συνθήκες είναι για τη θέση $x = 2.6$ ενώ θεωρήσαμε μηδενική αρχική ταχύτητα, $v = 0$. Το πλάτος του σολιτονίου στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι $\eta=1$, ενώ ο συντελεστής της μη τοπικότητας είναι $\gamma = 0.005$. Προφανώς, αφού δεν έχουμε περιοδική διαμόρφωση, $A = 0$.



Σχήμα 4.1. Αριθμητική λύση της NLS με υπερτιθέμενη τη λύση των εξισώσεων κίνησης του ενεργού σωματιδίου. Αρχική θέση είναι $x = 2.6$, αρχική ταχύτητα $v = 0$, ενώ έχουμε μόνο διαμόρφωση εξαιτίας του όρου μη τοπικότητας με $\gamma = 0.005$. Το πλάτος του σολιτονίου είναι $\eta = 1$.

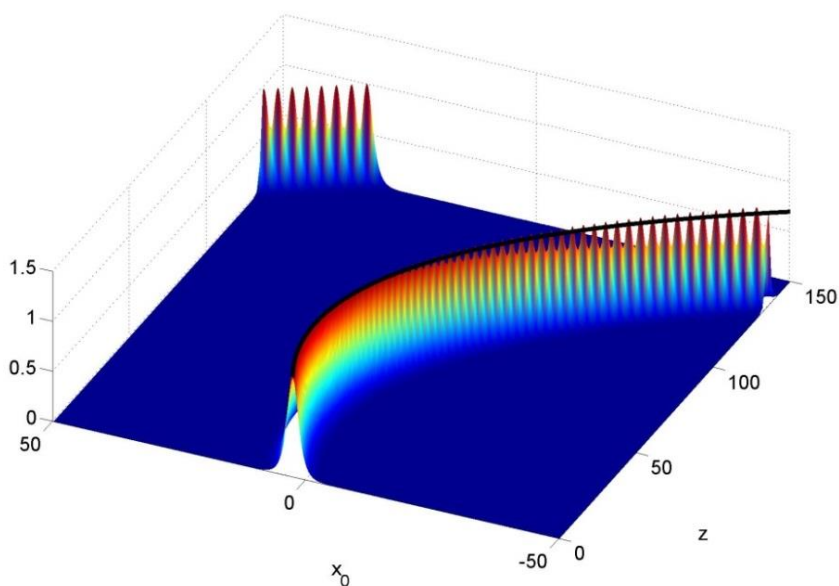
Από μια δεύτερη οπτική γωνία βλέπουμε το εξής:



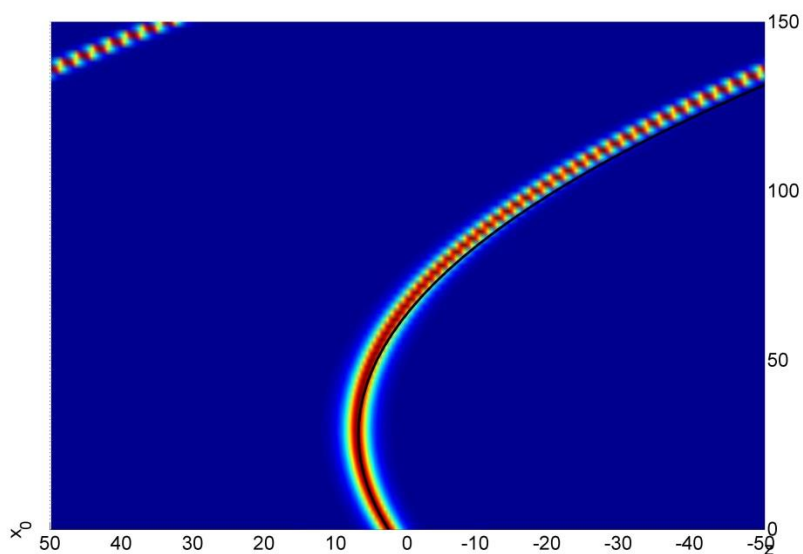
Σχήμα 4.2. Μια δεύτερη οπτική του σχήματος 1, στην οποία φαίνεται καλύτερα η συμφωνία των δύο μεθόδων.

Όπως παρατηρούμε και οι δύο τροχιές ακολουθούν μια παραβολική τροχιά και είναι απαγίδευτες. Αυτό είναι αναμενόμενο καθότι η μη τοπικότητα παρουσιάζεται σαν ένας όρος σταθερής δύναμης που επιταχύνει το σωματίδιο. Παρατηρούμε μια απόκλιση των δύο τροχιών για μεγάλες αποστάσεις διάδοσης, η ποιοτική συμπεριφορά τους όμως παραμένει η ίδια και έχουμε πολύ καλή συμφωνία για αρκετά μεγάλο διάστημα.

Αν για την ίδια αρχική θέση και τις ίδιες παραμέτρους προσδώσουμε μια αρχική ταχύτητα στο σωματίδιο, έστω $v=0.3$, η οποία μεταφράζεται ως θετική γωνία πρόσπτωσης της δέσμης, έχουμε την εξής απόκριση



Σχήμα 4.3. Για τις ίδιες παραμέτρους με τα σχήματα 1 και 2, αλλά με αρχική ταχύτητα $v = 0.3$



Σχήμα 4.4. Μια δεύτερη οπτική γωνία του σχήματος 3

Όπως παρατηρούμε εξακολουθεί να υπάρχει αυτή η παραβολική κίνηση που οφείλεται στον σταθερό όρο δύναμης ο οποίος επιταχύνει το σωματίδιο προς αρνητικές θέσεις, όμως σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε μια αρχική κίνηση προς τα θετικά του άξονα x , η οποία οφείλεται στην αρχική ταχύτητα (γωνία πρόσπτωσης).

Παρατηρούμε πως σε περίπτωση ύπαρξης μόνο του όρου μη τοπικότητας, το σολιτόνιο τείνει να επιταχύνεται συνεχώς ως αποτέλεσμα της σταθερής επίδρασης που του ασκείται, η οποία στο μοντέλο του σωματιδίου μεταφράζεται ως σταθερή δύναμη. Είναι λοιπόν αδύνατη η παγίδευση ενός σολιτονίου σε ένα τέτοιο μέσο.

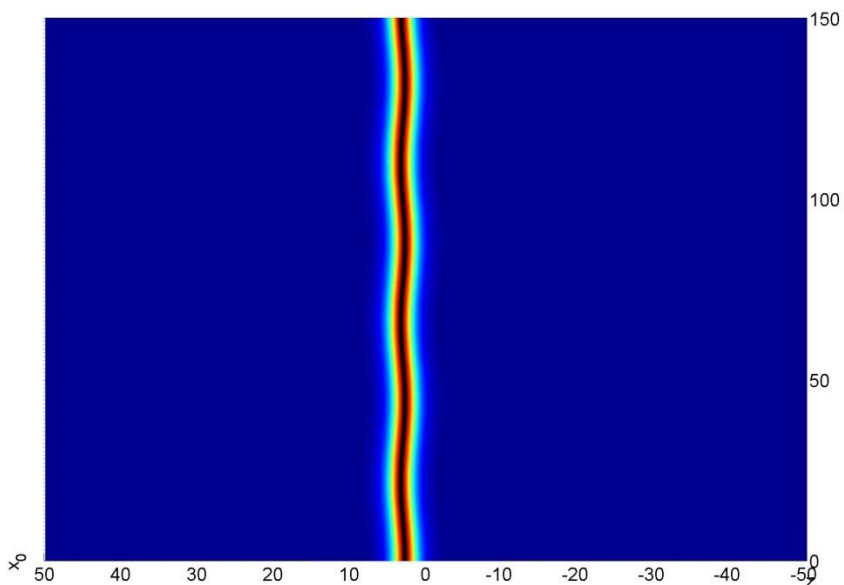
Στη γενική περίπτωση προσομοίωσης, για μεγάλες αποστάσεις διάδοσης παρατηρούμε μια ασυμφωνία μεταξύ των μοντέλων στο ποσοτικό τους μέρος.

4.2.2 Επίδραση της εγκάρσιας ανομοιογένειας στη δυναμική του σολιτονίου

Στην περίπτωση που δεχόμαστε πως στο μέσο έχουμε μόνο την περιοδική διαμόρφωση και δεν εμφανίζεται ο όρος της μη τοπικότητας, θέτουμε $\gamma = 0$ και $A = 0.01$.

Για κυματάριθμο $k = 1.6$ και για πλάτος σολιτονίου ίσο με $\eta = 1$, έχουμε υπολογίσει νωρίτερα στο κεφάλαιο 2 πως η θέση ελαχίστου του δυναμικού εμφανίζεται κοντά στο $x = 2.6760$ και η κρίσιμη ταχύτητα είναι $v = 0.4607$.

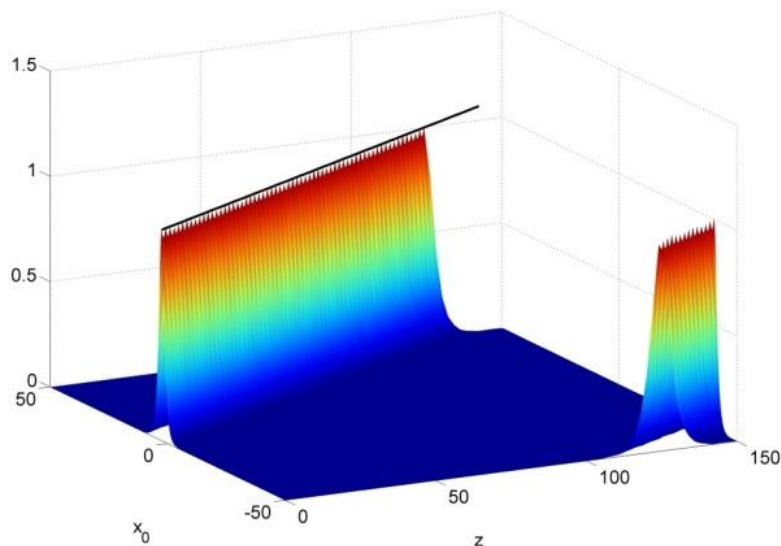
Θεωρώντας ως αρχική θέση όσο πιο κοντά γίνεται στην αρχική θέση ελαχίστου που υπολογίσαμε και αρχική ταχύτητα $v = 0$ τότε έχουμε την εξής εξέλιξη:



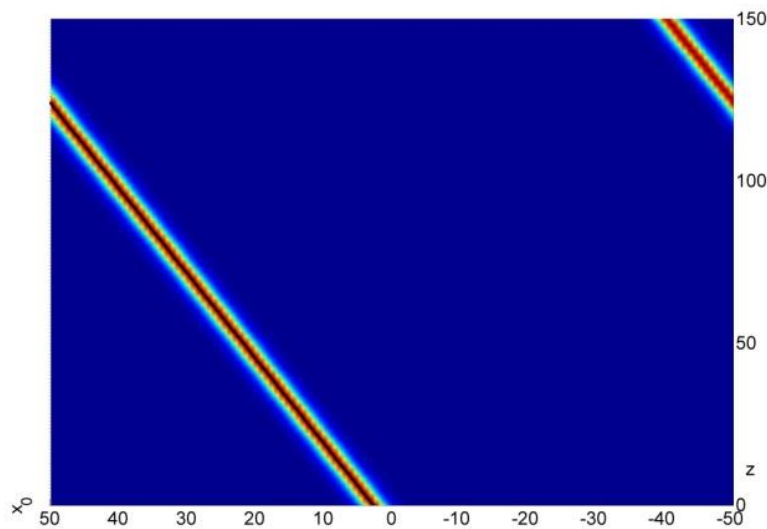
Σχήμα 4.5. Λύση στην περίπτωση ύπαρξης μόνο του περιοδικού δυναμικού, χωρίς τον όρο μη-τοπικότητας. Αρχική θέση $x = 2.6765$, σημείο που αποτελεί ελάχιστο του περιοδικού δυναμικού, και με κρίσιμη ταχύτητα $v = 0.4607$. Εδώ θεωρούμε ταχύτητα $v = 0$. Το πλάτος του δυναμικού είναι $A = 0.01$ και ο κυματάριθμός του $k = 1.6$, ενώ το πλάτος του σολιτονίου $\eta = 1$.

Όπως βλέπουμε υπάρχει εξαιρετική συμφωνία των αριθμητικών αποτελεσμάτων με αυτά που προκύπτουν από το μοντέλο του effective particle.

Στην περίπτωση που θεωρούμε αρχική θέση $x=2.6$, αρκετά μακρύτερα από τη θέση ελαχίστου, και αρχική ταχύτητα $v=0.4$, η οποία είναι αρκετά κοντά στην κρίσιμη ταχύτητα αποπαγίδευσης, έχουμε:



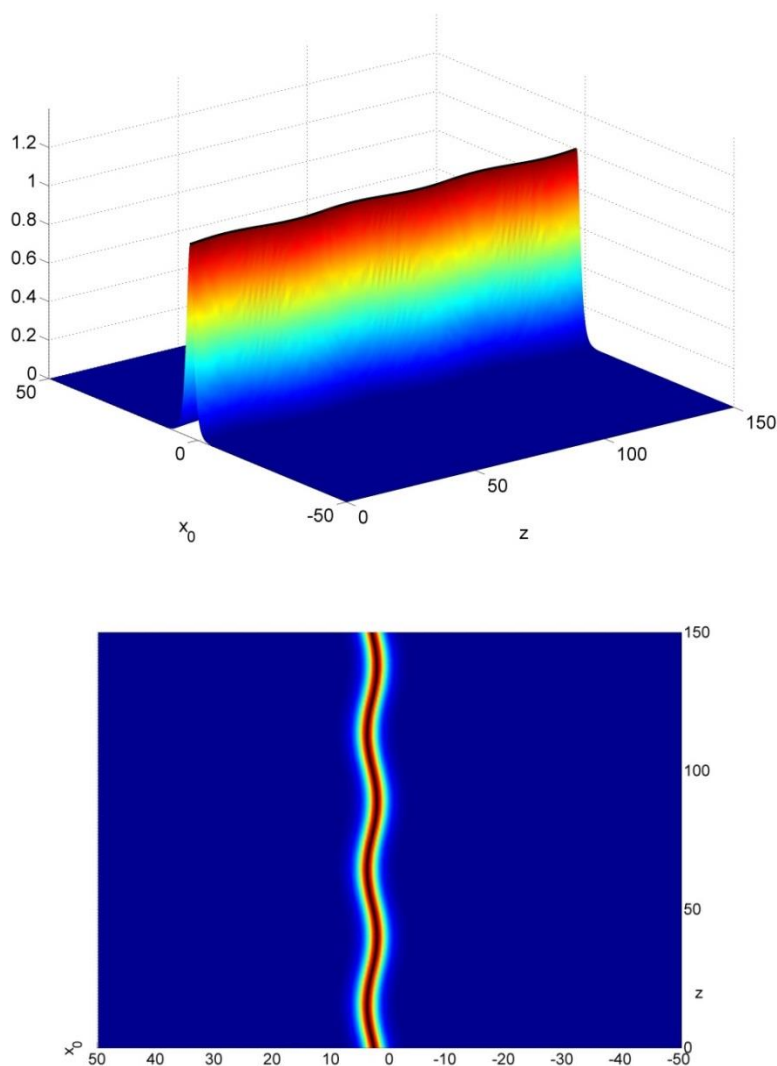
(a)



(b)

Σχήμα 4.6. Αρχικές συνθήκες $x = 2.6$ και $v = 0.4$. εδώ βρισκόμαστε μακρύτερα από τη θέση ελαχίστου σε σχέση με την εικόνα 5 και η ταχύτητα είναι αρκετά κοντά στην κρίσιμη. Αυτό κάνει την κίνηση απαγίδευτη.

Παρατηρούμε ότι το σολιτόνιο ακολουθεί μια αποπαγιδευμένη τροχιά και αυτό είναι λογικό καθότι βρισκόμαστε πιο μακριά από το τοπικό ελάχιστο του δυναμικού και η ταχύτητα είναι αρκετή ώστε να οδηγήσει το σωματίδιο σε αποπαγίδευση. Όπως είναι εμφανές, οι υπολογισμοί ταυτίζονται επακριβώς και έχουμε πλήρη συμφωνία αριθμητικών αποτελεσμάτων και μοντέλου σωματιδίου. Αν αντίστοιχα θεωρήσουμε την ίδια αρχική θέση $x = 2.6$, αλλά μικρότερη αρχική ταχύτητα $v = 0.1$, βλέπουμε τα εξής:



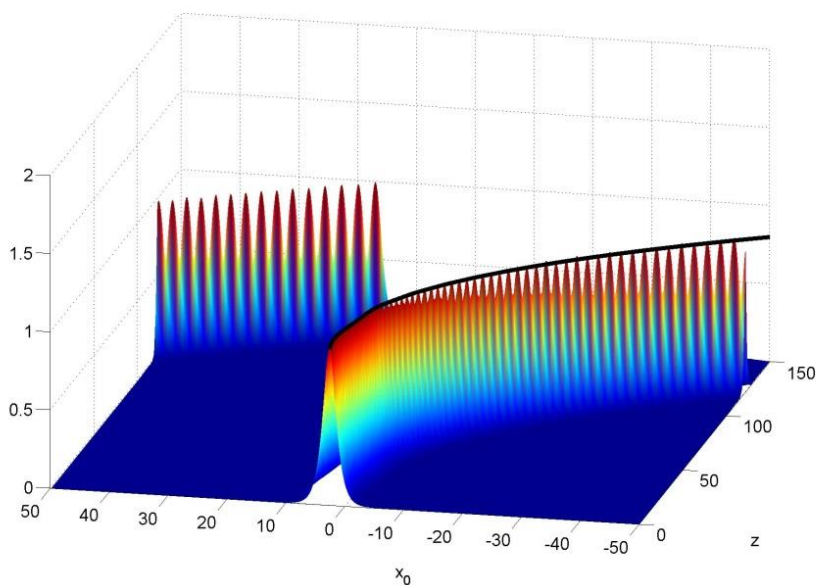
Σχήμα 4.7. Για αρχική θέση $x = 2.6$ και ταχύτητα $v = 0.1$, αρκετά μικρότερη της κρίσιμης, παρατηρούμε παγιδευμένη τροχιά εντός του πηγαδιού δυναμικού, αλλά με μια ταλαντωτική συμπεριφορά που οφείλεται στην αρχική ταχύτητα.

Όπως παρατηρούμε σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει αποπαγίδευση, αλλά αντ' αυτού μια ταλαντωτική συμπεριφορά εξαιτίας του ότι βρισκόμαστε εντός του πηγαδιού δυναμικού. Η συμφωνία των δύο μεθόδων είναι εξαιρετική για ολόκληρη τη διάρκεια της κίνησης.

4.2.3 Εγκάρσια ανομοιογένεια σε συνδυασμό με μη-τοπικότητα

Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε πλάτος περιοδικής διαμόρφωσης $A = 0.01$ και πλάτος του όρου της μη-τοπικότητας ως $\gamma = 0.005$. Αυτές οι τιμές αποτελούν ρεαλιστικές τιμές διαμορφώσεων που εμφανίζονται στις πρακτικές εφαρμογές και είναι επίσης σε ικανοποιητικά επίπεδα έτσι ώστε να υφίσταται η διαταρακτική προσέγγιση που έχουμε υιοθετήσει έως τώρα στην ανάλυσή μας.

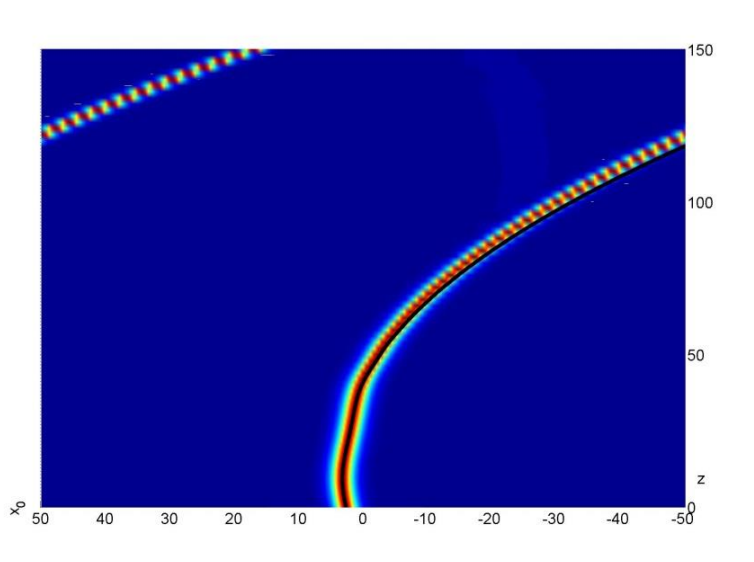
Θεωρώντας ως αρχική θέση την $x = 2.6$ και αρχική ταχύτητα $v = 0.1$, λαμβάνουμε την εξής απόκριση:



Σχήμα 4.8. Λύση στην περίπτωση που εμφανίζεται τόσο ο όρος δυναμικού διαμόρφωσης όσο και αυτός της μη-τοπικότητας, με αντίστοιχα πλάτη $A = 0.01$ και $\gamma = 0.005$. οι αρχικές συνθήκες είναι όπως $x = 2.6$ και $v = 0.1$.

Παρατηρούμε σε σύγκριση με την περίπτωση των σχημάτων 7, ότι με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, ακόμη και ένας όρος μη τοπικότητας αρκετά μικρός μπορεί να καταστήσει την

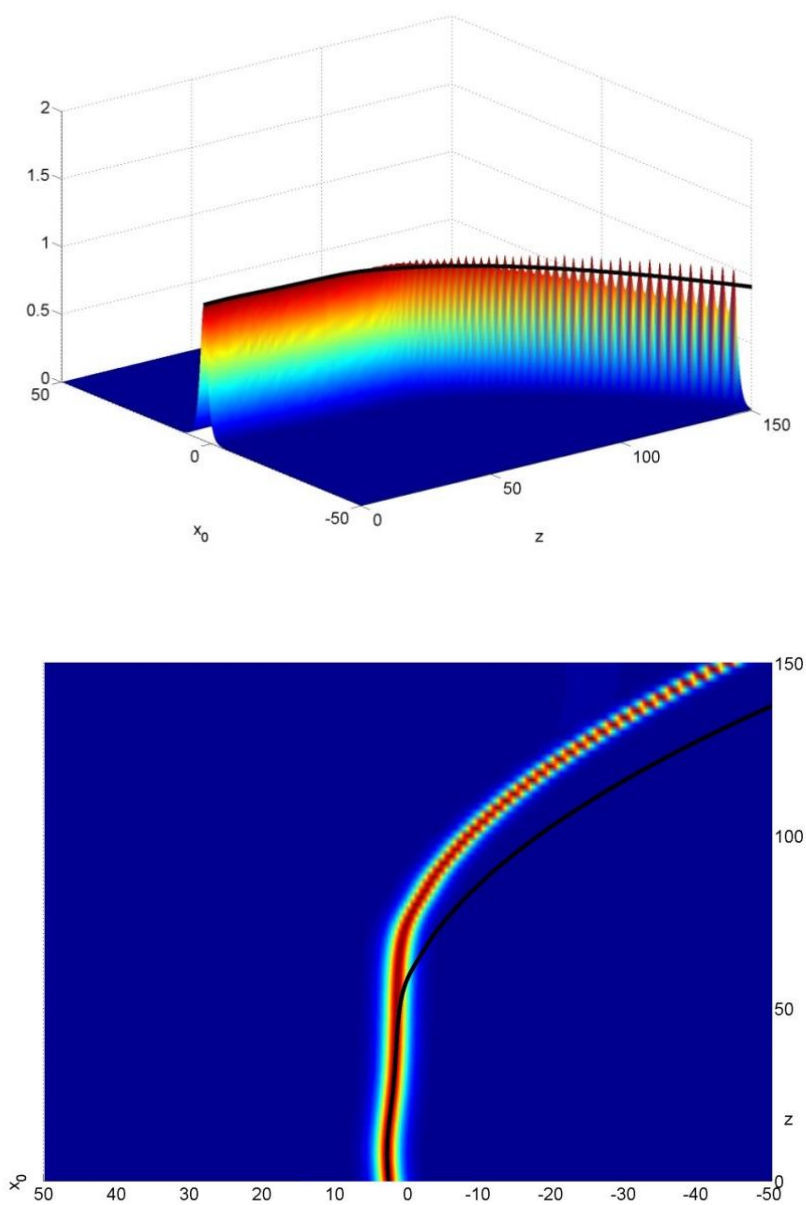
κίνηση μη φραγμένη. Με την ερμηνεία του ενεργού σωματιδίου βλέπουμε ότι αν και μικρή, η σταθερή δύναμη συμβάλει καθοριστικά στη δυναμική του.



Σχήμα 4.9. Μια διαφορετική οπτική του σχήματος 4.8

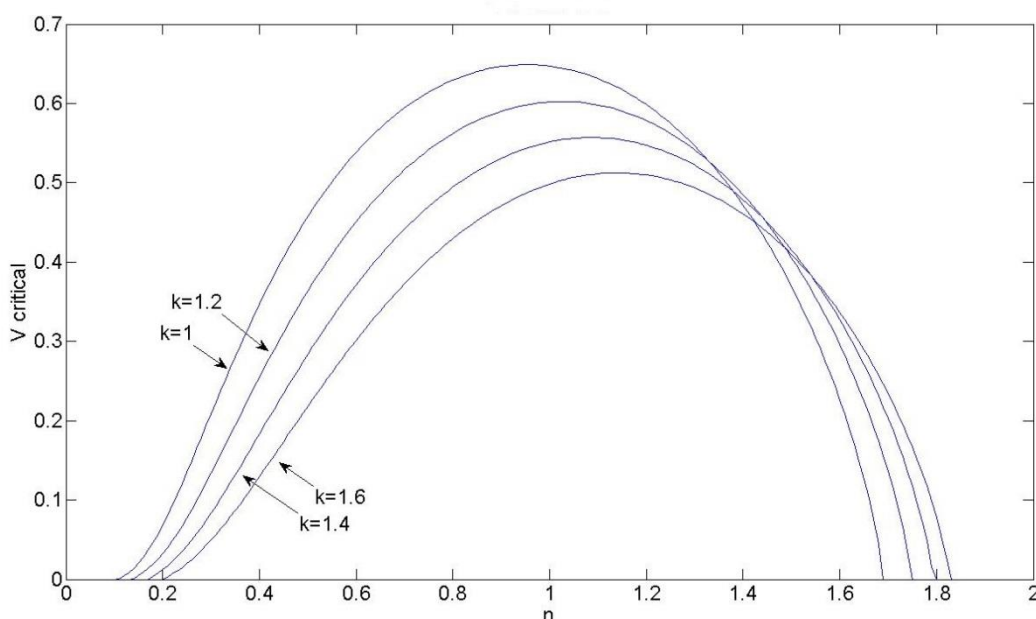
Όπως παρατηρούμε, η τροχιά που έχει υπολογιστεί μέσω του μοντέλου του σωματιδίου ακολουθεί αρκετά καλά σε ποιοτικό επίπεδο την τροχιά που έχει υπολογιστεί αριθμητικά, αλλά όχι επακριβώς. Αν παρατηρήσουμε πιο προσεκτικά θα δούμε ότι πραγματοποιούν τις ίδιες ταλαντωτικές κινήσεις, αλλά όσο αυξάνει ο 'χρόνος' (απόσταση z) η τροχιά δείχνει μια απαγίδευτη συμπεριφορά, παρατηρούμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση (όπως και όταν είχαμε μόνο μη τοπικότητα) οι δύο τροχιές αποκλίνουν για μεγάλο διάστημα εξέλιξης.

Για την περίπτωση που μειώσουμε την αρχική ταχύτητα στο $v = 0.05$ κρατώντας την ίδια αρχική θέση:



Σχήμα 4.10. Για αρχική ταχύτητα $v = 0.05$ και θέση $x = 2.6$. Πλάτη $A = 0.01, \gamma = 0.005$.

Βλέπουμε ότι οι δύο τροχιές είναι σε πολύ καλή συμφωνία μέχρι που η τροχιά του effective particle αποπαγιδευεται νωρίτερα από την αριθμητικά υπολογισμένη. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό μπορεί να γίνει εμφανής από το παρακάτω σχήμα που υπολογίζεται η κρίσιμη ταχύτητα συναρτήση του ύψους του σολιτονίου η για κυματάριθμο $k=1.6$ και τα αντίστοιχα πλάτη των διαταραχών.



Σχήμα 4.11. Αναπαράγωγή σχήματος 2. , όπου είναι εμφανές ότι η ταχύτητα $v=0.05$ αποτελεί και την κρίσιμη για τις επιλεγμένες παραμέτρους. Αυτό φέρνει την καμπύλη στο φασικό χώρο πολύ κοντά στη διαχωρίζουσα με πιθανότητα ανάπτυξης μη φραγμένης τροχιάς.

Όπως βλέπουμε η κρίσιμη ταχύτητα για $\eta = 1$ είναι περίπου στο 0.05. Γι'αυτό ενώ ξεκινά φραγμένη η κίνηση, ξαφνικά αποπαγιδεύεται, ακόμη και μια μικρή αριθμητική διαφοροποίηση στους υπολογισμούς, για τέτοια οριακή περίπτωση ταχύτητας, μπορεί να οδηγήσει σε απαγίδευτη τροχιά. (βλέπε κεφ. 2 για περισσότερες πληροφορίες)

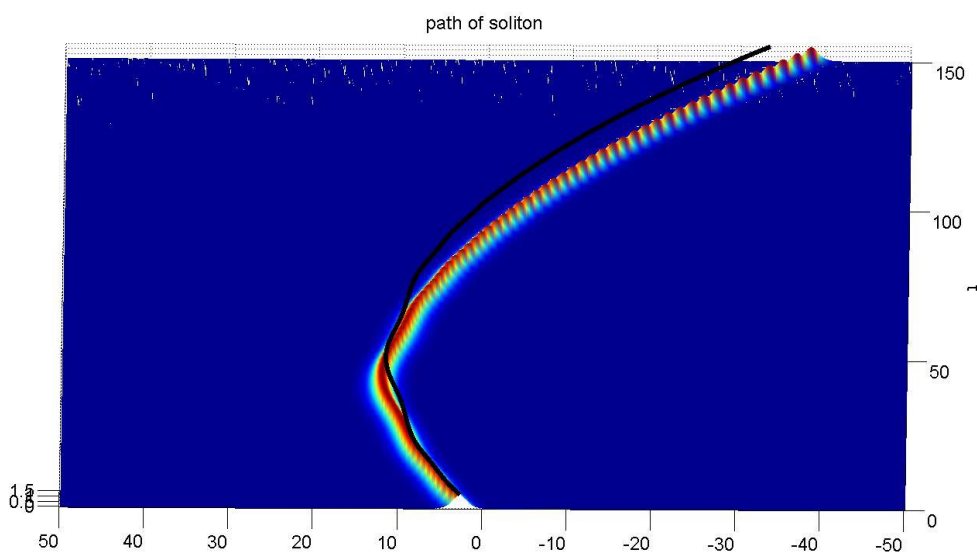
4.2.4 Αλληλεξάρτηση πλάτους σολιτονίου και ενεργού δυναμικού που αυτό αντιμετωπίζει

Αξίζει σε αυτό το σημείο να τονιστεί πως παρουσιάζεται ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην απόκλιση που αναπτύσσεται μεταξύ της αριθμητικής λύσης της NLS και της λύσης μέσω του χαμιλτονιανού συστήματος του σωματιδίου όταν έχουμε υψηλότερες τιμές του ύψους του σολιτονίου. Συγκεκριμένα είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο πως ο όρος μη τοπικότητας εισέρχεται στο δυναμικό ως

$$-\frac{64}{15}\gamma\eta^5$$

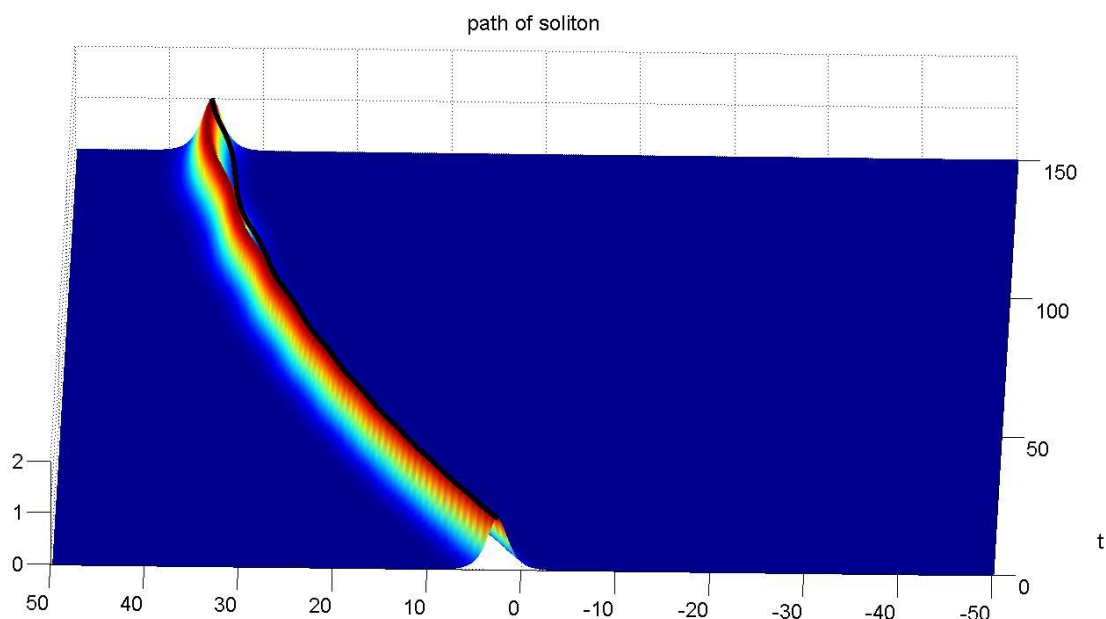
Αυτό σημαίνει για παράδειγμα πως για ύψος σολιτονίου ίσο με $\eta = 1.4$ και $\gamma = 0.001$ ο όρος αυτός είναι της τάξης του 0.022 ενώ για $\eta = 1$ είναι της τάξης του 0.004, δηλαδή μια τάξη μεγέθους μικρότερος. Αυτό δείχνει την έντονη εξάρτηση της μη τοπικότητας από τα χαρακτηριστικά του σολιτονίου και επιστρέφουμε στη γενική διαπίστωση που αναφέραμε στην αρχή πως διαφορετικά σολιτόνια αντιμετωπίζουν διαφορετικό δυναμικό.

Χαρακτηριστικά, δίνοντας ένα παράδειγμα για $\eta = 1.4$ με μη τοπικότητα και περιοδικότητα ταυτόχρονα, έστω: $A = 0.01, \gamma = 0.001$, και αρχικές συνθήκες $x = 2.6$ και $v = 0.4$



Σχήμα 4.12. Παράδειγμα μη ικανοποιητικής συμφωνίας λόγω έντασης μη-τοπικότητας

Όπως είναι εμφανές, η λύση του effective particle δεν ακολουθεί ικανοποιητικά την αριθμητική λύση και αυτό συμβαίνει γιατί ο όρος της μη τοπικότητας είναι μεγαλύτερος κατα μία τάξη μεγέθους. Σε αντιδιαστολή παρατίθεται η αντίστοιχη απόκριση για $\eta = 1$.



Σχήμα 4.13. Περίπτωση τροχιάς για $\eta = 1$ και παραμέτρους $A = 0.01, \gamma = 0.001$, και αρχικές συνθήκες $x = 2.6$ και $v = 0.4$

4.3 Αριθμητικές επίλυση NLS για την περίπτωση εγκάρσιας ανομοιογένειας και διαμήκως μεταβαλλόμενης μη-τοπικότητας

Υπενθυμίζουμε πως σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μια εξάρτηση του συντελεστή της μη τοπικότητας γ από τη χρονική παράμετρο z ως:

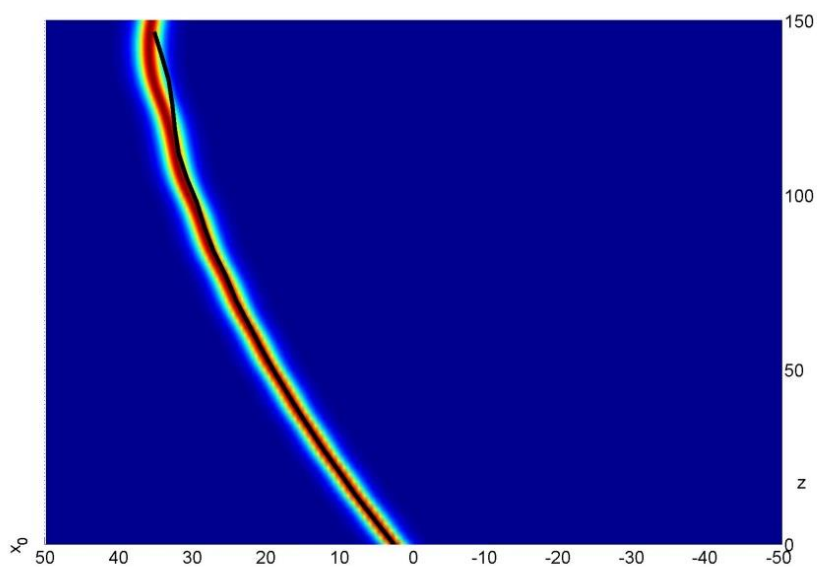
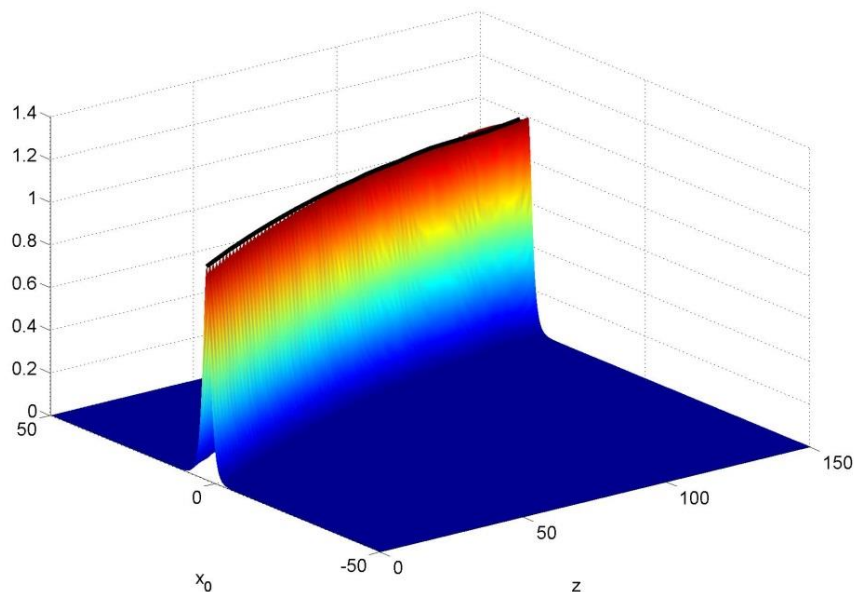
$$\gamma = \gamma_0(1 + 0.1 \sin \omega z)$$

Θα θεωρήσουμε το συντελεστή γ_0 ότι είναι της τάξης του 10^{-3} , δηλαδή μιας τάξης μικρότερος από το αντίστοιχο πλάτος της ημιτονοειδούς διαμόρφωσης, A .

4.3.1 Ταυτόχρονη ύπαρξη ανομοιογένειας και διαμήκως μεταβαλλόμενης μη-τοπικότητας

Σε αυτήν την περίπτωση λαμβάνουμε $A = 0.01$ και $\gamma_0 = 0.001$. Διατηρώντας τις ίδιες παραμέτρους με πριν, δηλαδή $k = 1.6$ και ύψος σολιτονίου $\eta = 1$ καθώς και κυματάρημο διαμόρφωσης ως προς το διαμήκη άξονα $\omega = 0.9$ έχουμε τα ακόλουθα.

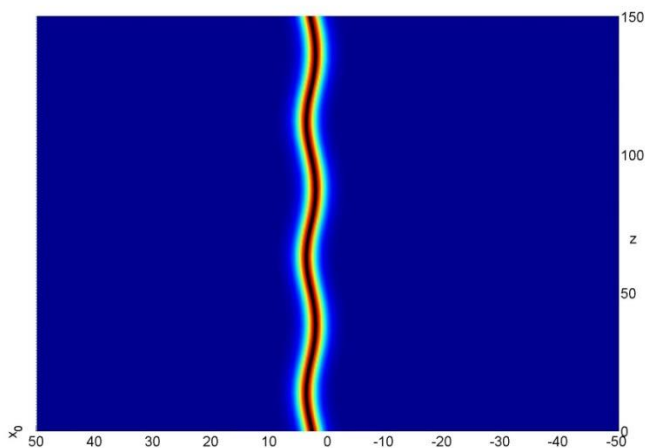
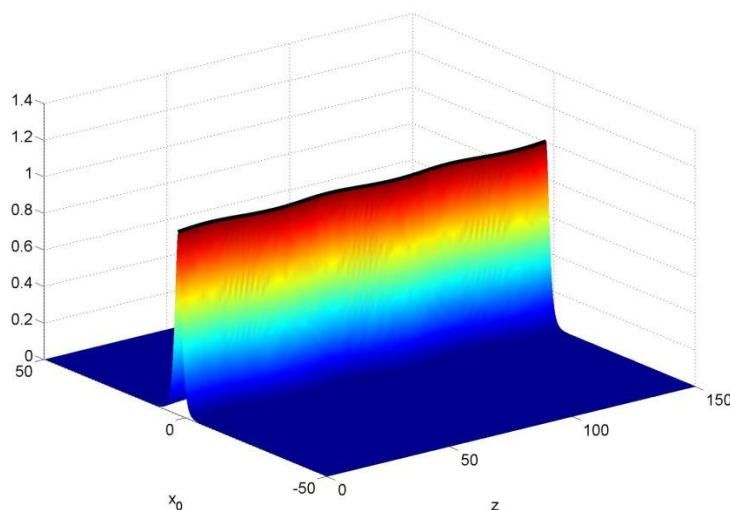
Για αρχική θέση $x = 2.6$ και αρχική ταχύτητα $v = 0.4$ έχουμε:



Σχήμα 4.12 . Τροχιά σολιτονίου για πλάτη περιοδικού δυναμικού και μη-τοπικότητας $A = 0.01$ $\gamma = 0.001$ αντίστοιχα, πλάτος σολιτονίου $\eta = 1$, κυματάριθμο διαμόρφωσης περιοδικού δυναμικού $k = 1.6$. Αρχική θέση $x = 2.6$ και ταχύτητα $v = 0.4$. Διαμόρφωση όρου μη-τοπικότητας ως προς διαμήκη άξονα $\omega = 0.9$

Όπως βλέπουμε το σολιτόνιο δεν είναι παγιδευμένο, πράγμα που αναμένεται, αφού η ταχύτητα είναι αρκετά κοντά στην αντίστοιχη κρίσιμη και του αυτόνομου συστήματος ενώ η ποιοτική συμφωνία των δύο αποτελεσμάτων είναι ικανοποιητική. Παρατηρούμε πάλι πως αρχίζει και αναπτύσσεται μια απόκλιση για αυξανόμενο χρόνο ανάμεσα στα δύο αποτελέσματα.

Αν για την αρχική θέση $x = 2.6$ λάβουμε μια αρχική ταχύτητα $v = 0.1$



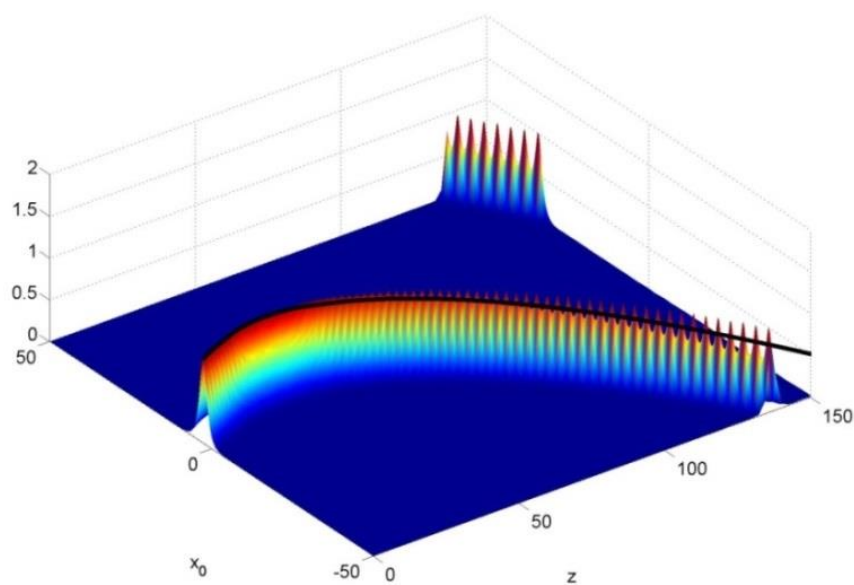
Σχήμα 4.13. (a,b) Τροχιά σολιτονίου για αρχική ταχύτητα $v = 0.1$. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με αυτές του σχήματος 4.12.

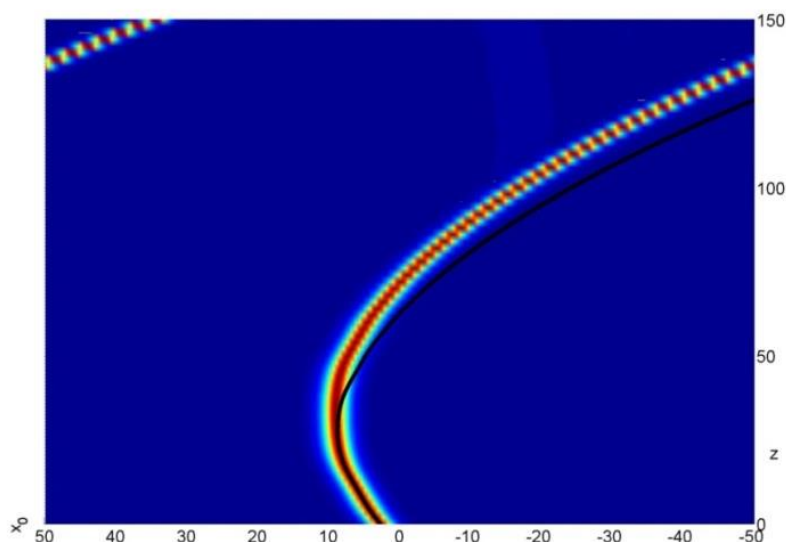
Σε αυτήν την περίπτωση το σολιτόνιο παραμένει παγιδευμένο και διαγράφει μια ταλαντωτική κίνηση. Η αρχική του ταχύτητα είναι μικρή σε σχέση με την κρίσιμη και δεν το οδηγεί σε απαγίδευτη τροχιά. Όμοια συμπεριφορά έχουμε και στο αυτόνομο σύστημα με τις ίδιες παραμέτρους.

4.3.2 Ταυτόχρονη ύπαρξη ανομοιογένειας και διαμήκουσ μεταβαλλόμενης μη-τοπικότητας με αυξημένο συντελεστή μη-τοπικότητας

Θεωρούμε σε αυτήν την περίπτωση $A = 0.01$, αλλά αυξάνουμε λίγο το συντελεστή της μη τοπικότητας $\gamma_0 = 0.005$. Το πλάτος του σολιτονίου παραμένει $\eta = 1$ και ο κυματάριθμος της εγξάρσιας διαμόρφωσης $k = 1.6$.

Για αρχική θέση $x = 2.6$ και αρχική ταχύτητα $v = 0.4$ λαμβάνουμε

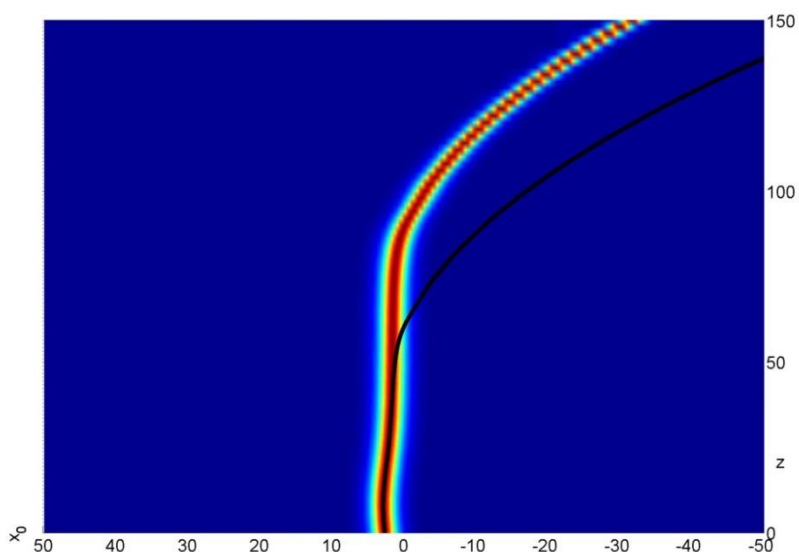




Σχήμα 4.14. Τροχιά σολιτονίου για πλάτη $A = 0.01$, $\gamma_0 = 0.005$ και αρχικές συνθήκες $x = 2.6$, $v = 0.4$. Οι υπόλοιπες παράμετροι διατηρούνται ίδιες.

Όπως παρατηρούμε σε σχέση με το σχήμα 4.12, η μόνη διαφορά τους έγκειται στη διαφορά του πλάτους της μη-τοπικότητας μόλις κατά ένα παράγοντα 5, δηλαδή λιγότερο από μια τάξη μεγέθους. Εντούτοις, όπως παρατηρούμε η συμπεριφορά της τροχιάς είναι πολύ διαφορετική καθώς παρατηρείται μια απότομα καμπυλωμένη τροχιά. Ποιοτικά η τροχιά είναι επίσης απαγίδευτη, αλλά είναι εμφανής η διαφορά. Αυτό είναι μια ένδειξη της ευαισθησίας σε παραμέτρους που διακατέχει το σύστημα και μας προειδοάζει για την χαοτική του συμπεριφορά. Παρατηρούμε, επίσης, πως η συμφωνία της αριθμητικής λύσης και της τροχιάς του συστήματος ενεργού σωματιδίου παρουσιάζουν μια απόκλιση η οποία εμφανίζεται πολύ νωρίτερα στην εξέλιξη της τροχιάς σε σχέση με τη περίπτωση όπου έχουμε χαμηλότερο συντελεστή μη-τοπικότητας. Θα μπορούσαμε να πούμε πως όσο πιο έντονη η μη τοπικότητα και συνεπώς και η μη παγίδευση της τροχιάς, τόσο μεγαλύτερες αποκλίσεις παρουσιάζονται στις δύο μεθόδους υπολογισμού.

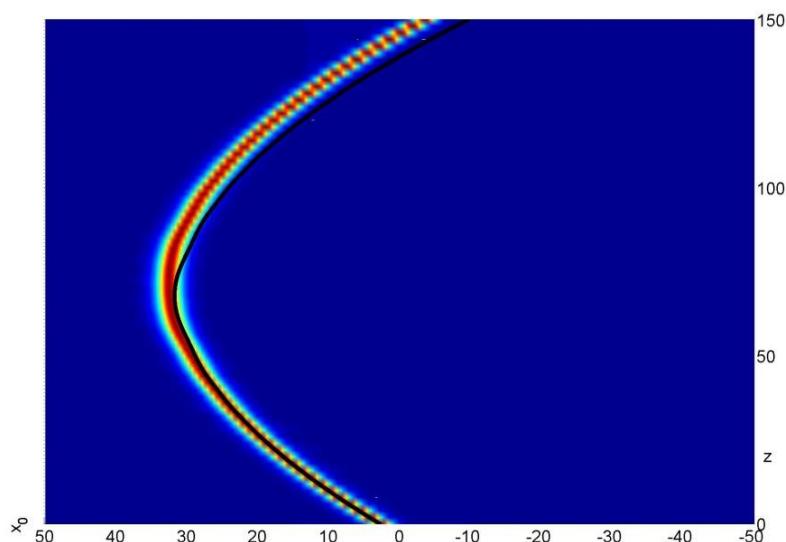
Ενώ για την ίδια αρχική θέση με ταχύτητα $v = 0.05$ θα λάβουμε την παρακάτω τροχιά (σχήμα 4.15).



Σχήμα 4.15 .Τροχιά σολιτονίου για αρχική ταχύτητα $v = 0.05$. Οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν ίδιες , δηλαδή πλάτη $A = 0.01$, $\gamma_0 = 0.005$, $\eta = 1$ και αρχική θέση $x = 2.6$.

Παρατηρούμε πως η τροχιά εμφανίζει την ίδια ποιοτική συμπεριφορά με την αντίστοιχη περίπτωση όπου $\gamma_0 = 0.001$ (σχήμα 4.10). Η τροχιά ξεκινά παγιδευμένη και εν τέλει καθίσταται απαγίδευτη. Παρατηρούμε πως η απόκλιση των δύο μεθόδων είναι μεγαλύτερη σε αυτήν την περίπτωση που είναι μεγαλύτερο και το πλάτος της μη-τοπικότητας. Ποιοτικά, οι δύο μέθοδοι περιγράφουν με τον ίδιο τρόπο την εξέλιξη του συστήματος.

Τέλος, για μια μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα $v = 0.8$:



Σχήμα 4.16. Τροχιά για αρχική ταχύτητα $v = 0.8$ και ίδιες παραμέτρους με το σχήμα 4.15.

Σε αυτή την περίπτωση είναι εμφανής η έντονη παραβολική κίνηση που πραγματοποιεί το σολιτόνιο, καθώς και το ότι πρόκειται για μη φραγμένη κίνηση, που αναμένουμε λόγω της ,πολύ μεγαλύτερης από την κρίσιμη, αρχικής ταχύτητας, οπότε μακροπρόθεσμα περιμένουμε μια ασυμφωνία μεταξύ των δύο αποτελεσμάτων.

4.4 Συμπεράσματα

Όπως έγινε εμφανές από την συμφωνία των αποτελεσμάτων, το μοντέλο του effective particle έχει τη δυνατότητα να περιγράφει ικανοποιητικά την εξέλιξη του συστήματος για διάφορες παραμέτρους και αρχικές συνθήκες. Η καλύτερη συμφωνία παρουσιάζεται στις περιπτώσεις όπου το σολιτόνιο παραμένει παγιδευμένο. Σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε άψογη συμφωνία, ενώ ακόμη και για τις περιπτώσεις που δεν έχουμε παγίδευση, έχουμε μια ικανοποιητική ποσοτική συμφωνία μέχρι ενός σημείου της δυναμικής εξέλιξης, ενώ μετά από αυτό παρουσιάζεται μια απόκλιση συνεχώς αυξανόμενη , αλλά η ποιοτική συμπεριφορά παραμένει η ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

Έγινε εμφανές το γεγονός ότι υπάρχει ισχυρή εξάρτηση του ενεργού δυναμικού που αντιμετωπίζει ένα σολιτόνιο από τις ίδιες τις παραμέτρους του σολιτονίου (σωματιδίου) συνεπώς υπάρχουν διαφοροποιήσεις στο πόσο ακριβείς μπορούν να είναι μεταξύ τους οι δυο προσεγγίσεις της δυναμικής εξέλιξης, ανάλογα με το αν το σολιτόνιο παγιδεύεται ή όχι .

Να υπενθυμίσουμε ότι στις περιπτώσεις μελέτης μας οι όροι διαταραχής ήταν αρκετά μικροί ώστε να ισχύουν οι τεχνικές της θεωρίας διαταραχών. Αυτό δεν είναι μόνο θεωρητική απαίτηση καθώς τέτοιες τάξεις μεγέθους διαταραχών είναι και οι φυσικά πραγματοποιήσιμες, και είναι εμφανές πως το μοντέλο λειτουργεί ικανοποιητικά μειώνοντας σε μεγάλο βαθμό την υπολογιστική πολυπλοκότητα.

Συνοπτικά θα έλεγε κανείς ότι η χρήση του μοντέλου ενδείκνυται όχι μόνο γιατί μας δίνει μια ποιοτική περιγραφή των φαινομένων, πράγμα που καθιστά ευκολότερη την αντίληψή μας αλλά και πιο ισχυρή την ικανότητά μας να προβλέπουμε την ποιοτική συμπεριφορά ως συνάρτηση των εφαρμοζόμενων διαταραχών, αλλά και γιατί δίνει ποσοτικά αποτελέσματα στις περισσότερες των περιπτώσεων τα οποία είναι σε εξαιρετική συμφωνία με τα αριθμητικά. Στις περιπτώσεις που δεν συμφωνούν επακριβώς τα αποτελέσματα, το σφάλμα είναι σχετικά μικρό για μικρές αποστάσεις διάδοσης.

Θα έλεγε λοιπόν κανείς πως η απλοποίηση που συντελείται στους υπολογισμούς ,και η ελάττωση της πολυπλοκότητας τους, υπερκεράζει κατα μια έννοια τον περιορισμό του μοντέλου του σωματιδίου λόγω της αδυναμίας περιγραφής σολιτονίων που διασπώνται ή που παρουσιάζουν απώλειες ακτινοβολίας.

Επίλογος και Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία αναλύσαμε τη διάδοση σολιτονικών κυμάτων σε μέσα που παρουσιάζουν μη-τοπική απόκριση και ανομοιογένεια. Συγκεκριμένα όταν ο δείκτης διάθλασης τους είναι διαμορφωμένος περιοδικά και υπάρχει επίσης μια επίδραση από φαινόμενα μη τοπικότητας, φαινόμενα δηλαδή που επηρεάζουν την δυναμική του σολιτονίου, λαμβάνοντας υπόψιν την διαταραχή σε μια ευρύτερη χωρική έκταση. Θεωρήσαμε ότι τα σολιτόνια εμφανίζονται στο μέσο διάδοσης ως λύσεις της εξίσωσης NLS και συνεπώς στην αδιατάρακτη περίπτωση περιγράφεται πλήρως η εξέλιξή τους από αυτήν την εξίσωση.

Αυτά τα φαινόμενα περιγράφονται ως επιπρόσθετοι όροι που υπεισέρχονται στη μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση NLS. Αναφερόμαστε σε αυτά ως διαταραχές διότι σε επίπεδο πρακτικών εφαρμογών συνιστούν όντως διαταρακτικούς όρους, αφού οι εντάσεις τους (πλάτη) είναι εξαιρετικά χαμηλές σε σύγκριση με τους υπόλοιπους όρους της αδιατάρακτης εξίσωσης NLS. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε διαταρακτική θεωρία και να θεωρήσουμε πως η λύση (προφίλ σολιτονίου) δεν μεταβάλλεται καθόλου σε σχέση με την αρχικά αδιατάρακτη.

Εντούτοις, η λύση σε κλειστή μορφή δεν είναι πάντα εφικτή για κάθε τύπου διαταρακτικούς όρους. Αυτό συνιστά μια πολυπλοκότητα του προβλήματος η οποία χρήζει μιας πιο απλής προσέγγισης. Αυτή η προσέγγιση έρχεται μέσα από την παρατήρηση ότι η μορφή της λύσης δεν αλλάζει πολύ ,σε σχέση με τη λύση της αδιατάρακτης εξίσωσης, όταν εφαρμόζονται μικρές διαταραχές. Αυτό μας επιτρέπει μέσω διατηρήσιμων ποσοτήτων, να εξάγουμε τις εξισώσεις της δυναμικής εξέλιξης του συστήματος και διαπιστώνουμε μια αναγωγή του προβλήματος σε αυτό ενός σωματιδίου σε κλασσικά δυναμικά. Εξάγουμε λοιπόν μέσω της δυναμικής αυτού του «ενεργού σωματιδίου» , μια αντιστοίχιση ένα κλασσικό Χαμιλτονιανό σύστημα εξέλιξης. Η αντιστοίχιση αυτή προκύπτει από την ίδια τη θεωρία διαταραχών και δεν στηρίζεται σε απλές φαινομενολογικές παραδοχές. Αυτό απλοποιεί κατά πολύ το πρόβλημα αφού πλέον έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα ενός βαθμού

ελευθερίας, όπου οι ,ίσως, πολύπλοκοι όροι διαταραχής, έχουν μετατραπεί σε δυναμικά. Η δυναμική εξέλιξη της κίνησης του ενεργού σωματιδίου ακολουθεί ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, το οποίο εκ των πραγμάτων είναι πολύ πιο εύκολο να λυθεί σε σχέση με μια μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση. Το πραγματικό κέρδος της μεθόδου όμως δεν είναι μόνο η μείωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας επίλυσης του προβλήματος, αλλά είναι η ποιοτική εποπτεία που αποκομίζουμε για τη λύση συναρτήσει των εκάστοτε δυναμικών. Με πολύ μικρή υπολογιστική προσπάθεια εντοπίζουμε τους συνδυασμούς εκείνους των παραμέτρων του σολιτονίου που μας δίνουν μια χαρακτηριστική δυναμική, όπως παγίδευση/αποπαγίδευση, για το εκάστοτε δυναμικό.

Η ανάλυση αυτή, με βάση το μοντέλο του «ενεργού» σωματιδίου, γίνεται στην παρούσα εργασία για διάφορες περιπτώσεις που παρουσιάζουν ενδιαφέρουσα δυναμική. Αρχικά θεωρούμε πως στο μέσο συνυπάρχει ο όρος της εγκάρσιας ανομοιογένειας στο δείκτη διάθλασης και ο όρος της μη-τοπικότητας ο οποίος είναι σταθερός σε καθ'όλη την εγκάρσια διάσταση του μέσου. Στη συνέχεια επιτρέπουμε στον όρο της μη-τοπικότητας να έχει μια εξάρτηση από τη μεταβλητή διάδοσης, να είναι δηλαδή διαμήκως μεταβαλλόμενος. Οι αντίστοιχες αναγωγές του συστήματος, στο σύστημα του «ενεργού σωματιδίου» δίνουν ένα αυτόνομο και ένα μη αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα. Αυτός ο προσδιορισμός προέρχεται από τη θεωρία δυναμικών συστημάτων, στο μη αυτόνομο σύστημα παρουσιάζεται μια εξάρτηση των δυναμικών εξισώσεων από την παράμετρο εξέλιξης (εδώ είναι το μήκος διάδοσης). Αυτός ο χαρακτήρας του μη αυτόνομου υπεισέρχεται στο σύστημα ως ανεξάρτητη μεταβλητή του δείκτη μη τοπικότητας, φυσικά θα μπορούσε να εμφανίζεται σε οποιονδήποτε όρο.

Τελικά, η σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου επίλυσης με αναγωγή σε ένα κλασσικό πρόβλημα ενός βαθμού ελευθερίας με τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης της μη γραμμικής ΜΔΕ, είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά για τη μέθοδο του ενεργού σωματιδίου καθώς υπάρχει πολύ καλή συμφωνία ανάμεσα στα δύο, η οποία έχει επιτευχθεί μετά από μια απλούστευση ,σε μεγάλο βαθμό , του προβλήματος. Η συμφωνία τείνει να γίνεται καλύτερη όσο μικρότερη είναι η ένταση των διαταραχών, ενώ είναι εξαιρετική για τις περιπτώσεις όπου υπάρχει

παγίδευση του σολιτονίου. Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει παγίδευση του σολιτονίου σε πηγάδι δυναμικού συμφωνά με την αριθμητική επίλυση, δηλαδή εντοπισμός του ως προς τον εγκάρσιο άξονα σε ένα πεπερασμένο χωρίο, οι δύο περιγραφές δίνουν όλο και αυξανόμενα αποκλίνοντα αποτελέσματα κατά την εξέλιξη του συστήματος, αλλά η ποιοτική περιγραφή είναι η ίδια, δηλαδή και το μοντέλο του «ενεργού» σωματιδίου δείχνει αποπαγίδευση του σολιτονίου. Σημαντικό ρόλο παίζει το γεγονός πως σε κάθε περίπτωση το σολιτόνιο αντιμετωπίζει ένα ενεργό δυναμικό με βάση τα ίδια του τα χαρακτηριστικά. Αυτό μας επιτρέπει να κάνουμε κάποιες γενικεύσεις για το αυτόνομο σύστημα, αλλά στην περίπτωση του μη αυτόνομου, οι πιθανοί συντονισμοί μεταβάλλουν κατά πολύ τη δυναμική του συστήματος. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε περιπτώσεις όπου για τις ίδιες παραμέτρους του σολιτονίου, το αυτόνομο και το μη αυτόνομο σύστημα να συμπεριφέρονται εντελώς διαφορετικά ποιοτικά.

Μολονότι τα αποτελέσματα της μεθόδου του «ενεργού» σωματιδίου είναι ενθαρρυντικά, πρέπει να υπάρχει πάντα η σύνεση και η αναγνώριση των προσεγγίσεων που έχουν γίνει. Για την εξαγωγή του μοντέλου αυτού, θεωρήσαμε πως η μορφή του σολιτονίου παραμένει πρακτικά αμετάβλητη σε σχέση με την αδιατάρακτη λύση, παρά την επιβολή των διαταραχών. Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο εγγενώς αδυνατεί να περιγράψει περιπτώσεις που έχουμε διάσπαση σολιτονίων σε περισσότερα, ή που έχουμε παραμόρφωση τους εξαιτίας απωλειών ακτινοβολίας. Επίσης, το μοντέλο καταρρέει στην περίπτωση ισχυρών διαταραχών, περίπτωση που όμως δεν είναι η πιο συνήθης στις πρακτικές εφαρμογές.

Μελλοντικές επεκτάσεις

Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να μελετήσουμε τη δυναμική εξέλιξη του συστήματος όταν εισάγουμε συνεχώς περισσότερους ρεαλιστικούς όρους διαταραχών στην εξίσωσή μας και κατ'επέκταση στο μοντέλο του «ενεργού» σωματιδίου, έτσι ώστε να περιγράψουμε τη δυναμική των σολιτονικών λύσεων, πράγμα που θα βοηθήσει όχι μόνο στην ανάλυση της δυναμικής, αλλά και στη σύνθεση επιλέγοντας τα κατάλληλα δυναμικά. Νέοι όροι είναι ικανοί να

δημιουργούν πιο πολύπλοκες συμπεριφορές, ακόμη και να ωθούν στην εμφάνιση νέων φαινομένων. Όροι που θα μπορούσαν να προστεθούν είναι όροι οι οποίοι προσδίδουν ή αφαιρούν ενέργεια από το σύστημα (gain/loss) με ένα πολύπλοκο τρόπο που μπορεί να εξαρτάται τόσο από τη διαμήκη όσο και από την εγκάρσια διάσταση της διάταξης και όροι ανομοιογένειας που ακολουθούν τη μορφή πιο πολύπλοκων συναρτήσεων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον και πολύπλοκη δυναμική έχουν οι περιπτώσεις όπου υπάρχουν όροι αλληλεπίδρασης που περιγράφουν ελαστικές ή ανελαστικές συγκρούσεις μεταξύ δύο (η και περισσότερων) σολιτονίων σε ένα μέσο.

Βιβλιογραφικές Αναφορές:

- [1] *G. Agrawal* - Nonlinear fiber optics 4th ed., Academic Press
- [2] *Y. S. Kivshar, G. Agrawal* - Optical Solitons From Fibers to Photonic Crystals, Academic press
- [3] *E. Kuznetsov* - Soliton stability in plasmas and hydrodynamics, Physics Reports ,Review Section of Physics Letters 142, No. 3, 1986 103—165.
- [4] *M. J. Ablowitz* – Solitons and the inverse scattering transform, Studies in Applied Mathematics, 1981
- [5] *D. N. Christodoulides, M. I. Carvalho* - Compression, self-bending, and collapse of Gaussian beams in photorefractive crystals, Optics letters Vol. 19, No.21 ,1994
- [6] *Π. Παπαγιάννης*- Μελέτη της δυναμικής και των αλληλεπιδράσεων φωτεινών δεσμών σε μη-γραμμικά οπτικά μέσα, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ, 2012
- [7] *O. Morsch, M. Oberthaler*- Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices. Reviews of Modern Physics 78, 179 ,2006
- [8] *Mark J. Ablowitz* - Nonlinear dispersive waves, asymptotic analysis and solitons, Cambridge university press 2011
- [9] *R. W. Boyd* - Nonlinear optics, 3rd ed., Academic Press
- [10] *H. Goldstein, C. Poole, J. Safko* – Classical mechanics , 3rd ed. , 2001.
- [11] *A. Lichtenberg, M. Leiberman* – Regular and chaotic dynamics, Springer, 2nd edition June 24, 1992
- [12] *E. Ott* – Chaos in dynamical systems , Cambridge University Press, 1993
- [13] *R. Hilborn* – Chaos and nonlinear dynamics , Oxford University Press
- [14] *D. Jordan, P. Smith* - Nonlinear ordinary differential equations, Oxford university press, 2007
- [15] *B. Malomed et al.* – Spatiotemporal optical solitons, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 7 ,2005

- [16] *R. Carretero-Gonzalez, D. J. Frantzeskakis, P. G. Kevrekidis* - Nonlinear waves in Bose–Einstein condensates: physical relevance and mathematical techniques, *Nonlinearity* **21**, 2008, IOP science
- [17] *P. Papagiannis, Y. Kominis, and K. Hizanidis*, Power- and momentum-dependent soliton dynamics in lattices with longitudinal modulation, *Physical Review A* **84**, 2011
- [18] *E. M. Gromov, B. A. Malomed*, Soliton dynamics in an extended nonlinear Schrödinger equation with a spatial counterpart of the stimulated Raman scattering, *J. Plasma Physics*, 2013, vol. 79, part 6, pp. 1057–1062.
- [19] *H. Zhang, J. Jia, S. Jia, Lu Li* - Spatial soliton steering induced by weak nonlocality in optical lattices, *Optics Communications* **281**, 2008
- [20] *S. Pua, C. Houb, C. Yuan* - Soliton switching in inhomogeneous nonlocal media, *Optik* **125**, 2014
- [21] *D.N. Christodoulides, M. I. Carvalho* - Compression, self-bending, and collapse of Gaussian beams in photorefractive crystals, *Optics Letters* Vol. 19, No. 21, November 1, 1994
- [22] *Y.V. Kartashov et al.*- Tunable soliton self-bending in Optical Lattices with Nonlocal Nonlinearity, *Physical review letters*, Volume 93, Number 15, 8 October 2004
- [23] *N. Kukhtarev, V. B. Markov, S. G. Odulov, M. S. Soskin, and V. L. Vinetskii* - Holographic storage in electrooptic crystals. I. Steady state, *Ferroelectrics* **22**, 1979; *V. O. Vinetskii and N. V. Kukhtarev* - Theory of the conductivity induced by recording holographic gratings in nonmetallic crystals, *Sov. Phys. Solid State* **16**, 1975.
- [24] *I. Bloch* - Ultracold quantum gases in optical lattices, *Nature Physics*, Vol 1, October 2005
- [25] *C. Hou, Y. Pei, Z. Zhou, and X. Sun* - Spatial solitons in two-photon photorefractive media, *Physical Review A* **71**, 2005
- [26] *W. Krolikowski, N. Akhmediev, B. Luther-Davies, M. Cronin-Golomb* - Self-bending photorefractive solitons, *Physical Review E*, vol. 54, number 5 November 1996
- [27] *M. Segev et al.* - Spatial Solitons in Photorefractive Media, *Physical Review Letters*, vol. 68, num. 7, 17, 1992

- [28] *N. N. Akhmediev, A. Ankiewicz – Solitons Nonlinear pulses and beams*, (Chapman & Hall)
- [29] *G. Agrawal – Applications of nonlinear fiber optics 2nd ed.*, Academic press 2008
- [30] *J. Joannopoulos – Photonic crystals 2nd ed.*, Princeton University Press 2008