Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Προσεγγισιμότητα και επαλήθευση προσφορών στο Σχεδιασμό Μηχανισμών

Διπλωματική Εργασία

του

Αρσένη Π. Γεράσιμου

Επιβλέπων: Δημήτρης Φωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών
Αθήνα, Ιούλιος 2017

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Προσεγγισιμότητα και επαλήθευση προσφορών στο Σχεδιασμό Μηχανισμών

Διπλωματική Εργασία

του

Αρσένη Π. Γεράσιμου

Επιβλέπων: Δημήτρης Φωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την $31^{η}$ Μαΐου 2017.

....	....	....
Δημήτρης Φωτάκης	Άρης Παγουρτζής	Νίκος Παπασπύρου
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών
Αθήνα, Ιούλιος 2017

....
Γεράσιμος Αρσένης
Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Στα πλαίσια του Σχεδιασμού Μηχανισμών, επαλήθευση (verification) είναι η δυνατότητα που έχει ένας μηχανισμός να ελέγχει (πιθανώς εν μέρη) αν οι δηλώσεις των παικτών είναι αληθείς. Στη βιβλιογραφία έχει μελετηθεί με ποιο τρόπο μπορεί αυτή η τεχνική να χρησιμοποιηθεί ώστε να δώσει κίνητρο στους παίκτες να δηλώσουν τις πραγματικές τους προτιμήσεις, δηλαδή να καταστήσει το μηχανισμό *φιλαλήθη* (truthful). Η φιλαλήθεια είναι μια πολύ επιθυμητή ιδιότητα ενός μηχανισμού αλλά ακόμα και με τη χρήση επαλήθευσης δεν μπορεί να επιτευχθεί πάντα. Στόχος μας είναι να μελετήσουμε αν η χαλάρωση της απαίτησης της φιλαλήθειας μπορεί να ξεπεράσει κάποια από τα αρνητικά αποτελέσματα στη βιβλιογραφία της επαλήθευσης. Στην παρούσα διπλωματική εργασία κάνουμε ένα βήμα προς αυτή την κατεύθυνση μελετώντας απλές μη-φιλαλήθης υλοποιήσεις συνδυαστικών δημοπρασιών (combinatorial auctions) και αξιολογώντας αυτές με τη χρήση του Τιμήματος Αναρχίας (Price of Anarchy) που εκφράζει το κατά πόσο ο μηχανισμός προσεγγίζει την απόδοση ενός αντίστοιχου φιλαλήθη μηχανισμού. Αρχικά γίνεται μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας πάνω στην χρήση της επαλήθευσης και στην ανάλυση του Τιμήματος Αναρχίας (PoA) με έμφαση στην προσέγγιση του Tim Roughgarden [24] που δίνει έναν ενιαίο τρόπο υπολογισμού κάτω φραγμάτων στο PoA απλών δημοπρασιών. Καταλήγουμε με το αρνητικό αποτέλεσμα ότι η επαλήθευση δεν μπορεί να ξεπεράσει τα προαναφερθέντα κάτω φράγματα και προτείνουμε νέες γραμμές έρευνας.

Λέξεις Κλειδιά

Σχεδιασμός Μηχανισμών, Επαλήθευση, Τίμημα Αναρχίας, Συνδυαστικές Δημοπρασίες

Abstract

In the field of Mechanism Design, verification is the ability of the mechanism to verify (maybe partially) whether the agents report their true preferences. In the literature of the field, it has been studied how this technique can be used to incentivize players to report their true preferences, thus making the mechanism truthful. Truthfulness is a desirable property of a mechanism but even under the assumption that some kind of verification is in use, it is difficult to achieve. Our goal is to study whether relaxing the requirement of truthfulness can bypass some negative results in the literature of verification. In this diploma thesis, we make a step towards this direction by studying non-truthful implementations of combinatorial auctions and evaluating them using the Price of Anarchy which is a measure of how much the mechanism approximates the performance of a corresponding truthful mechanism. We start by reviewing the relative literature on the use of verification and on the analysis of the Price of Anarchy (PoA) focusing on the approach of Tim Roughgarden [24] who presents a unified way of proving lower bounds on the PoA of simple auctions. We conclude with the negative result that verification cannot bypass the aforementioned lower bounds and we propose new lines of research.

Keywords

Mechanism Design, Verification, Price of Anarchy, Combinatorial Auctions

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω ένα εγκάρδιο ευχαριστώ στον καθηγητή μου Δημήτρη Φωτάκη. Η επιστημονική καθοδήγηση που μου προσέφερε τόσο κατα τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας όσο και στα υπόλοιπα χρόνια των σπουδών μου ήταν καθοριστικής σημασίας. Ακόμη σημαντικότερη όμως ήταν η στήριξη σε προσωπικό επίπεδο και η εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου και στις δυνατότητές μου.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Ζάχο, τον Διονύση Ζήνδρο, τη Λυδία Ζακυνθινού, τον Μανώλη Ζαμπετάκη και τον Μανώλη Βλατάκη για το ενδιαφέρον και τη συμπαράσταση που έδειξαν όταν τη χρειάστηκα.

Ως προς το τεχνικό κομμάτι της διπλωματικής μου, πέρα από τον κ. Φωτάκη, θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Θοδωρή Λυκούρη και τη Φαίδρα Μονάχου που μέσα από τα σχόλια και τις επισημάνσεις τους με βοήθησαν να κατανοήσω καλύτερα τη σημασία και το πλαίσιο εφαρμογής της εργασίας μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του Εργαστηρίου Λογικής και Επιστήμης Υπολογιστών (CoReLab) για το ευχάριστο και φιλικό κλίμα που φροντίζουν να υπάρχει πάντα στο εργαστήριο και του οποίου είχα τη χαρά να είμαι μέλος!

Μάκης Αρσένης

Περιεχόμενα

Κατάλογος πινάκων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο γίνεται μια παρουσίαση των εννοιών του κλάδου της Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων και του Σχεδιασμού Μηχανισμών που θα μας φανούν χρήσιμες στη συνέχεια χωρίς να δίνεται έμφαση στη μαθηματική αυστηρότητα αλλά στην υψηλού επιπέδου κατανόησή τους. Παραθέτουμε επίσης παραδείγματα προβλημάτων με τα οποία έχει ασχοληθεί ο τομέας — κάποια από τα οποία θα είναι και βασικό αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής (όπως οι Δημοπρασίες).

Μέσα από αυτή την εισαγωγή παρουσιάζουμε τα βασικά ερωτήματα που προσπαθούμε να απαντήσουμε με αυτή τη δουλειά, αναδεικνύουμε τα κίνητρα που μας οδήγησαν να ασχοληθούμε με το παρόν θέμα και τέλος γίνεται μια περιγραφή της πορείας που θα ακολουθήσουμε με στόχο ο αναγνώστης να μπορεί να κατανοήσει από νωρίς σε ποια σημεία θα μας φανεί χρήσιμο το υπόβαθρο που αναπτύσσουμε στα Κεφάλαια 2 και 3.

1.1 Παίγνια και Σχεδιασμός Μηχανισμών

Η Θεωρία Παιγνίων είναι ο κλάδος — κυρίως των Οικονομικών αλλά και άλλων επιστημών — που μελετάει την αλληλεπίδραση στρατηγικών οντοτήτων (*strategic agents*), δηλαδή ανθρώπων, βιολογικών οργανισμών κ.λ.π. όπου ο κάθε ένας εκ των οποίων ενεργεί με γνώμονα τη μεγιστοποίηση της «ευχαρίστησής» του — ανάλογα το πλαίσιο το οποίο μελετάμε αυτό μπορεί να είναι χρηματικό κέρδος, μεγιστοποίηση της πιθανότητας επιβίωσης κ.α. Για παράδειγμα, αντικείμενο μελέτης θα μπορούσε να είναι δύο αντίπαλες εταιρίες. Κάθε μία, μέσω των επιλογών και ενεργειών της αποβλέπει επικράτησή της στην αγορά και τη μεγιστοποίηση τους κέρδους της. Το κατά πόσο θα καταφέρει να επιτύχει τους στόχους της μια εταιρία εξαρτάται τόσο από τις ενέργειες της ίδια όσο και από τις ενέργειες της αντίπαλης εταιρίας.

Μαθηματικά, οι παραπάνω καταστάσεις μπορούν να μοντελοποιηθούν ως *παίγνια* όπου οι στρατηγικές οντότητες είναι οι παίκτες, οι ενέργειες που είναι σε θέση να εκτελέσουν αντιστοιχούν στις «κινήσεις» του παιχνιδιού, οι περιορισμοί που επιβάλει το περιβάλλον στο οποίο διενεργείται η αλληλεπίδραση είναι οι κανόνες του παιχνιδιού και τέλος η «ευχαρίστηση» κάθε οντότητας είναι το σκορ κάθε παίκτη. Βασική υπόθεση που γίνεται σε αυτό το μοντέλο είναι ότι κάθε παίκτης είναι ορθολογιστής (*perfectly rational*), δηλαδή έχει τη δυνατότητα να κάνει αυθαίρετα πολύπλοκους λογικούς συλλογισμούς κατά την επιλογή των κινήσεών του με μοναδικό σκοπό να μεγιστοποιήσει σκορ του.

Η Θεωρία Παιγνίων αναπτύχθηκε με βασικό σκοπό τη μελέτη ήδη υπάρχοντων παιγνίων που εμφανίζονται στη φύση, στην κοινωνία κ.λ.π. και την εξαγωγή συμπερασμάτων για την έκβαση αυτών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο μελετητής έχει περιορισμένο έως καθόλου έλεγχο πάνω στο τρόπο που εξελίσσεται ένα παίγνιο και το μόνο που μπορεί να κάνει είναι προβλέψεις για την έκβασή του.

Τα τελευταία χρόνια, κυρίως με την εμφάνιση του Internet, υπήρξε μια προσέγγιση πιο «μηχανιστική» (engineering prospective) στα θέματα της Θεωρίας Παιγνίων καθώς βρισκόμασταν μπροστά σε ένα περιβάλλον με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Περιλαμβάνει strategic agents που δεν είναι απαραίτητα άνθρωποι/χρήστες αλλά πολλές φορές είναι λογισμικό.
- Ο σχεδιαστής του συστήματος έχει τον έλεγχο τον «κανόνων» του παιχνιδιού και μπορεί να τους προσαρμόσει ώστε να βελτιώσει την έκβασή του.
- Όταν οι παίκτες δεν είναι φυσικά πρόσωπα αλλά είναι λογισμικό, μας δίνεται η δυνατότητα να σχεδιάζουμε «περίπλοκα» παίγνια και επιπλέον, σε αυτή την περίπτωση, η υπόθεση ότι που αναφέραμε πως οι παίκτες έχουν perfectly rational behavior είναι πολύ πιο κοντά στην πραγματικότητα και έτσι τα αποτελέσματα των θεωριών ανταποκρίνονται καλύτερα στην πράξη.

Ο κλάδος αυτός, που γεννήθηκε από τη συνεργασία Οικονομικών (Θεωρίας Παιγνίων) και Πληροφορικής έγινε γνωστός ως **Σχεδιασμός Μηχανισμών** (Mechanism Design)[1]. Στην ουσία, ο κλάδος αυτός μελετάει υπολογιστικά προβλήματα από μία νέα οπτική γωνία: Όπως και στην πληροφορική, στόχος μας είναι ο σχεδιασμός αλγορίθμων που χρησιμοποιούν αποδοτικά κάποιους πόρους (χρόνο, χώρο κτλ) ώστε να υπολογίσουν (ή να προσεγγίσουν) τη βέλτιστη λύση ενός προβλήματος με τη διαφορά ότι στο Σχεδιασμό Μηχανισμών έχουμε τον επιπλέον περιορισμό ότι η είσοδος του αλγορίθμου (*μηχανισμού*) είναι ένα σύνολο ιδιωτικών πληροφοριών των παικτών. Οι παίκτες συμπεριφέρονται ως strategic agents και στην προσπάθειά τους να μεγιστοποιήσουν την ωφέλεια τους είναι πιθανό να δηλώσουν ψευδείς πληροφορίες στον μηχανισμό ώστε να τον χειραγωγήσουν και να υπολογίσει μια λύση που είναι προς το συμφέρον του παίκτη που είπε ψέματα.

Το ζητούμενο είναι ο μηχανισμός να δίνει κίνητρα στους παίκτες ώστε να δηλώσουν τις πραγματικές πληροφορίες που διαθέτουν, δηλαδή οι παίκτες με το να πουν ψέματα να μπορούν μόνο να μειώσουν την ωφέλειά τους. Ένας μηχανισμός που το καταφέρνει αυτό λέγεται **φιλαλήθης** (**truthful** ή incentive compatible).

1.2 Παραδείγματα

Παρακάτω εξετάζουμε ορισμένα θεμελιώδη προβλήματα του Σχεδιασμού Μηχανισμών.

1.2.1 Scheduling Problems

Το πρόβλημα του **scheduling on unrelated machines** [5] είναι το εξής: Υπάρχουν n μηχανές (machines) και m εργασίες (tasks). Η μηχανή i μπορεί να εκτελέσει την εργασία j σε χρόνο t_{ij} και οι χρόνοι αυτοί δεν σχετίζονται απαραίτητα μεταξύ τους (εξ ου και unrelated). Στόχος είναι να υπολογιστεί μία ανάθεση των εργασιών σε μηχανές που να ελαχιστοποιεί το makespan, δηλαδή τον χρόνο ολοκλήρωσης της εργασίας που τερματίζει τελευταία.

Υπολογιστικά, το παραπάνω πρόβλημα είναι NP-Hard όπως και NP-Hard είναι η προσεγγισιμότητά του με λόγο προσέγγισης καλύτερο από 3/2 (υπάρχει παρ' όλα αυτά πολυωνυμικός 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος) [17].

[1] Για μια σύντομη ιστορική αναδρομή ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 2.

Εξετάζοντας το παραπάνω πρόβλημα από μία παιγνιοθεωρητική σκοπιά, κάθε μηχανή είναι ένας strategic agent με ιδιωτικές πληροφορίες τα t_{ij} για $j = 1, 2, \ldots, m$ που θέλει να ελαχιστοποιήσει το χρόνο εκτέλεσής του. Συνεπώς οι μηχανές έχουν κίνητρο να πουν ψέματα ώστε να αποφύγουν την ανάθεση εργασιών σε αυτές.

Ειδική περίπτωση του παραπάνω προβλήματος είναι το **scheduling on related machines** όπου κάθε εργασία χαρακτηρίζεται από ένα φόρτο p_j και κάθε μηχανή από μία ταχύτητα s_i και πλέον τα t_{ij} προσδιορίζονται ως $t_{ij} = p_j/s_i$.

1.2.2 Δημοπρασίες

Στην πιο απλή της εκδοχή σε μια Δημοπρασία ενός αντικειμένου (**single-item auction**) [27] υπάρχουν n παίκτες κι ένα αντικείμενο που διαθέτει ο δημοπράτης (auctioneer). Κάθε παίκτης (bidder) i έχει μια ευχαρίστηση (valuation) v_i που θα αποκομίσει από την απόκτηση του αντικειμένου. Μπορούμε να σκεφτόμαστε τα v_i ως το μέγιστο ποσό σε χρήματα που θα έδινε ο bidder για να αποκτήσει το αντικείμενο. Τα v_i είναι η ιδιωτική πληροφορία κάθε παίκτη.

Ο μηχανισμός ζητάει από τους παίκτες να καταθέσουν τις προσφορές (bids) τους κρυφά ο ένας από τον άλλον (sealed-bid auction). Με βάση τις προσφορές b_i των παικτών $i = 1, \ldots, n$ ο μηχανισμός αποφασίζει σε ποιόν bidder θα δώσει το αντικείμενο (μπορεί να το πάρει μόνο ένας) και την τιμή p_i που θα τον χρεώσει. Μοντελοποιούμε την ωφέλεια (utility) του κάθε παίκτη με βάση το quasilinear utility model όπου το utility των παικτών που δεν πήραν κανένα αντικείμενο είναι 0 ενώ το utility του παίκτη i που πήρε το αντικείμενο πληρώνοντας p_i είναι $u_i = v_i - p_i$.

Στόχος του σχεδιαστή του μηχανισμού συνήθως είναι να μεγιστοποιήσει την Κοινωνική Ευχαρίστηση (Social Welfare) $\sum_{i=1}^{n} v_i$, δηλαδή να δώσει το αντικείμενο στον παίκτη που το κάνει value περισσότερο. Στην περίπτωση που οι παίκτες δεν είναι στρατηγικοί, ο μηχανισμός θα μπορούσε να ρωτήσει απλά τους παίκτες για τα v_i τους και να δώσει το αντικείμενο στον παίκτη με το μέγιστο v_i (ties broken arbitrarily) και να μην τον χρεώσει τίποτα.

Αν παίκτες είναι strategic agents τότε τα b_i που θα δηλώσουν θα διαφέρουν από τα πραγματικά v_i. Σε αυτή την περίπτωση ο μηχανισμός χρησιμοποιεί τα χρήματα για να δώσει κίνητρο στους παίκτες να πουν την αλήθεια. Για παράδειγμα, θα μπορούσε ο μηχανισμός να χρεώνει τον νικητή ένα ποσό ίσο με το bid του. Αυτός ο μηχανισμός είναι γνωστός ως **First-price auction** και έχει το μειονέκτημα ότι *δεν* είναι truthful. Για παράδειγμα ο νικητής έχει κίνητρο να δηλώσει bid χαμηλότερο από το πραγματικό του valuation (αρκεί να παραμένει ο παίκτης με το μέγιστο bid) ώστε να πάρει το αντικείμενο σε χαμηλότερη τιμή και να έχει θετικό utility.

Ένας truthful μηχανισμός για το single-item sealed-bid auction είναι το **Second-price auction** όπου ο νικητής πληρώνει το bid του παίκτη με το δεύτερο μεγαλύτερο bid. Ο αναγνώστης καλείται να επαληθεύσει ότι κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει το utility του με το να δηλώσει $b_i \neq v_i$.

Άλλες φορές είναι επιθυμητό ο σχεδιαστής του μηχανισμού να μεγιστοποιήσει τις εισπράξεις (revenue). Σε εκείνη την περίπτωση τα χρήματα δεν είναι χρήσιμα μόνο για να δίνουν κίνητρο στους παίκτες αλλά εμπλέκονται και στο optimization objective. Τέτοιες δημοπρασίες δεν θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

Θα μελετήσουμε τώρα μια γενίκευση των δημοπρασιών που μόλις είδαμε. Ενώ προηγουμένως είχαμε ένα μόνο αντικείμενο να διαθέσουμε στους παίκτες, τώρα εξετάζουμε την περίπτωση που έχουμε ένα σύνολο M από m διαφορετικά μεταξύ τους αντικείμενα. Κάθε παίκτης i χαρακτηρίζεται μια συνάρτηση αξιολόγησης (valuation function) $v_i : 2^M \to \mathbb{R}^+$ που δείχνει την «ευχαρίστηση» που λαμβάνει ο παίκτης i για κάθε υποσύνολο (bundle) αντικειμένων. Για τις v_i υποθέτουμε ότι έχουν τουλάχιστον τις ιδιότητες $v_i(\emptyset) = 0$ (normalization) και $v_i(S) \leq v_i(T)$ όταν $S \subseteq T$ (non-decreasing). Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται general valuation functions και συμβολίζουμε με

General το σύνολο όλων των v με αυτές τις ιδιότητες[2]. Στόχος είναι να βρεθεί μια διαμέριση $\mathbf{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ των m αντικειμένων στους n παίκτες που να μεγιστοποιεί το Social Welfare $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$. Αυτού του είδους οι δημοπρασίες ονομάζονται **Συνδυαστικές Δημοπρασίες (Combinatorial Auctions)**.

Το setting του προβλήματος είναι αρκετά γενικό καθώς επιτρέπει στους παίκτες να εκφράζουν πολύπλοκες προτιμήσεις ως προς τους συνδυασμούς αντικειμένων και όχι μόνο προς κάθε αντικείμενο ξεχωριστά.

1.2.3 Facility Location Problems

Ας ξεκινήσουμε με μια απλή εκδοχή του προβλήματος, το **facility location on a line**: Κάθε παίκτης i βρίσκεται σε μία θέση $x_i \in \mathbb{R}$ πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Στόχος είναι η επιλογή μίας θέσης $y \in \mathbb{R}$ στην οποία θα τοποθετηθεί ένα δημόσιο κτήριο (facility). Το κόστος του παίκτη i είναι η απόστασή του $|y - x_i|$ από το facility.

Η επιλογή της θέσης y από το μηχανισμό γίνεται συνήθως με κάποιο από το εξής κριτήρια:

1. την ελαχιστοποίηση του **Κοινωνικού Κόστους** (Social Cost) που ορίζεται ως το άθροισμα του κόστους όλων των παικτών $\sum_{i=1}^{n} |y - x_i|$ ή

2. την ελαχιστοποίηση του **Μέγιστου Κόστους** (Fairness) των παικτών, δηλαδή της ποσότητας $\max_i |y - x_i|$.

Στην πρώτη περίπτωση ο βέλτιστος αλγόριθμος είναι να επιλέξουμε ως y τη διάμεσο (median) των x_i που δηλώνουν οι παίκτες. Ο αλγόριθμος αυτός τυγχάνει να είναι και truthful! Πράγματι, έστω ένας παίκτης i και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $y > x_i$. Αν ο i δηλώσει $x'_i > x_i$ τότε μπορεί μόνο να απομακρύνει το facility από αυτόν. Επίσης, αν δηλώσει $x'_i < x_i$ τότε δεν μπορεί να επηρεάσει την τιμή του median. Συνεπώς δεν έχει κάτι να χάσει με το να πει την αλήθεια.

Στη δεύτερη περίπτωση ο βέλτιστος αλγόριθμος είναι $y = (x_l + x_r)/2$ όπου x_l η αριστερότερη και x_r η δεξιότερη θέση που δήλωσε κάποιος παίκτης. Αντίθετα με πριν, ο αλγόριθμος αυτός δεν είναι truthful καθώς ο παίκτης που βρίσκεται αριστερότερα μπορεί να δηλώσει $x'_l = x_l - (x_r - x_l)$ και ο μηχανισμός να τοποθετήσει το facility στην θέση $y' = x_l$ που είναι η πραγματική του θέση και να έχει κόστος 0.

Υπάρχουν πολλές γενικεύσεις του παραπάνω προβλήματος που μελετώνται τόσο από υπολογιστική (βλ. [28]) όσο και από παιγνιοθεωρητική σκοπιά (βλ. [23]). Για παράδειγμα μια πρώτη γενίκευση είναι η τοποθέτηση δύο ή περισσότερων facilities. Μπορούμε επίσης να γενικεύσουμε τον χώρο στον οποίο βρίσκονται οι παίκτες από μια γραμμή σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο.

1.3 Truthfulness

Στη βιβλιογραφία έχουν μελετηθεί διάφοροι τρόποι με τους οποίους ο σχεδιαστής του μηχανισμού κατορθώνει να τον καταστήσει truthful. Παρακάτω εξετάζουμε μερικούς από αυτούς:

- **Χρήματα**: Με αυτό τον τρόπο ο μηχανισμός είτε «τιμωρεί» τους παίκτες που λένε ψέματα με το να ζητάει περισσότερα χρήματα (βλ. ενότητα 1.2.2) ή «επιβραβεύει» τους παίκτες που λένε την αλήθεια.

[2] Στην ενότητα 2.2 παραθέτουμε κι άλλες γνωστές κατηγορίες συναρτήσεων αξιολόγησης.

Ένα δημοφιλές παράδειγμα τέτοιου μηχανισμού είναι ο VCG [6, 14, 31] που εφαρμόζεται σε προβλήματα όπου το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση της Κοινωνικής Ευχαρίστησης (Social Welfare) και χρεώνει τους παίκτες κατάλληλα υπολογισμένα χρηματικά ποσά ώστε να είναι truthful. Ειδική περίπτωση του μηχανισμού αυτού είναι το second-price auction για τα single-item auctions που είδαμε νωρίτερα.

Πολλές φορές η χρήση χρημάτων δεν είναι επιθυμητή είτε για ηθικούς λόγους (π.χ. σε ψηφοφορίες πολιτικού περιεχομένου) είτε για νομικούς λόγους (π.χ. σε δωρεές οργάνων) [22, Κεφάλαιο 10]. Στις περιπτώσεις αυτές έχουμε τις εξής εναλλακτικές:

- **Προσέγγιση** ή/και **Τυχαιότητα**: Η ιδέα αυτή χρησιμοποιείται ήδη στην πληροφορική ώστε να αντιμετωπίσει υπολογιστικές δυσκολίες, για παράδειγμα αναζητούμε πολυωνυμικούς προσεγγιστικούς (approximate) ή/και τυχαιοποιημένους (randomized) αλγόριθμους για NP-Πλήρη προβλήματα. Στα πλαίσιο του σχεδιασμού μηχανισμών οι ιδέες αυτές είναι κι εδώ χρήσιμες για να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες που προκύπτουν από την ύπαρξη των κινήτρων των παικτών. Συγκεκριμένα, υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο βέλτιστος αλγόριθμος για ένα πρόβλημα δεν είναι truthful όμως ένας προσεγγιστικός/τυχαιοποιημένος είναι. Αυτή γραμμή έρευνας ξεκίνησε στο [23].

- **Verification**: Ορισμένες φορές δεν είναι ρεαλιστικό να θεωρούμε πως οι παίκτες μπορούν να πουν ό,τι ψέμα θέλουν επειδή κάποιες μορφές ψέματος μπορεί να είναι εύκολα ανιχνεύσιμες από το μηχανισμό. Για παράδειγμα σε scheduling problems μια μηχανή μπορεί να κάνει overstate το χρόνο που χρειάζεται ώστε να ολοκληρώσει μια εργασία αλλά όχι understate γιατί στη δεύτερη περίπτωση δεν θα μπορέσει να έχει ολοκληρώσει μέχρι την προθεσμία.

  Στο facility location problem μπορούμε στην πράξη να υποθέσουμε ότι ο μηχανισμός μπορεί να επαληθεύσει τις θέσεις που δήλωσαν οι παίκτες έστω και προσεγγιστικά (αν για παράδειγμα οι θέσεις ανταποκρίνονται φυσικές τοποθεσίες, ο μηχανισμός θα μπορούσε να επαληθεύσει ότι κάθε παίκτης δήλωσε σωστή διεύθυνση σε επίπεδο Δήμου ή Πόλης).

  Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι Nisan και Ronen [21] πρότειναν ένα μοντέλο το οποίο περιορίζει το ψέμα που μπορεί να πει κάθε παίκτης. Η τεχνική αυτή ονομάζεται *verification* (επαλήθευση).

1.4 Μη-Φιλαλήθεις Υλοποιήσεις Μηχανισμών

Μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας που ασχολείται με το verification έχει να κάνει με τη χρήση του ως εργαλείο για να κάνει truthful ένα μηχανισμό (με ή χωρίς χρήματα). Οι μορφές του verification που έχουν τη δυνατότητα να το επιτύχουν αυτό όμως είναι συνήθως εκείνες που δεν είναι εύκολο να εφαρμοστούν στην πράξη. Για παράδειγμα, υπάρχει το asymmetric verification που ουσιαστικά μοντελοποιεί την κατάσταση όπου ο μηχανισμός μπορεί να ελέγξει με ακρίβεια τη μία κατεύθυνση ψέματος. Στο facility location problem αυτό σημαίνει ότι ο μηχανισμός έχει τη δυνατότητα να μην επιτρέψει σε κάποιον παίκτη να πει ψέμα προς τα δεξιά αλλά να του αφήσει ένα περιθώριο να πει ψέμα προς τα αριστερά (ή το αντίστροφο και πιθανώς διαφορετική κατεύθυνση για κάθε παίκτη). Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2, τέτοιο είδους verification είναι αρκετά ισχυρό ώστε να κάνει truthful ένα μηχανισμό.

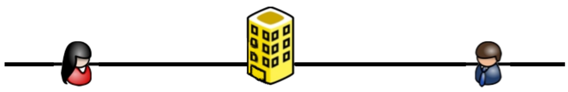
Η προϋπόθεση όμως ότι η μία κατεύθυνση του ψέματος θα πρέπει να μπορεί να ελεγχθεί με ακρίβεια δεν είναι καθόλου ρεαλιστική γιατί πολλές φορές από την πλευρά του μηχανισμού οι δύο κατευθύνσεις που μπορεί να πει ψέμα ένας παίκτης είναι ισοδύναμες και έτσι αν μπορεί να επαληθεύσει με ακρίβεια την μία πλευρά θα μπορεί να το κάνει και για την άλλη.

Μια άλλη μορφή verification είναι είναι το ϵ-verification (που ανήκει στην κατηγορία symmetric verification). Στα πλαίσια του facility location problem, ϵ-verification σημαίνει ότι ο μηχανισμός μπορεί να απαγορεύσει στους παίκτες να δηλώσουν μια θέση που είναι περισσότερο από ϵ μακριά από την πραγματική τους θέση. Αυτό το είδος verification, παρόλο που είναι πιο ρεαλιστικό, δεν είναι αρκετά ισχυρό ώστε να μας δώσει την ιδιότητα του truthfulness (περισσότερες λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 2).

Η ύπαρξη όμως προβλημάτων με πρακτικές εφαρμογές για τα οποία η χρήση χρημάτων δεν είναι επιθυμητή μας έδωσε το κίνητρο να αναζητήσουμε τρόπους να «σώσουμε» το verification. Αυτό θα μπορούσε να γίνει χαλαρώνοντας κάποιες από τις απαιτήσεις μας ώστε να ξεπεράσουμε τα παραπάνω αρνητικά αποτελέσματα. Η βασική απαίτηση που είχαμε μέχρι στιγμής είναι πως οι μηχανισμοί μας θα πρέπει να έχουν την ιδιότητα του truthfulness. Ακόμα και υπό την παρουσία verification, όπου ο μηχανισμός δεν απαγορεύει όλα τα ψέματα, τελικά κανένας παίκτης δεν θα πει ψέματα καθώς δεν είναι προς το συμφέρον του.

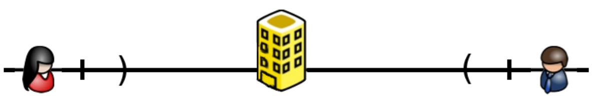
Η ιδιότητα αυτή είναι αρκετά ισχυρή και είναι επιθυμητή κυρίως επειδή επιτρέπει στον μηχανισμό να δώσει μια βέλτιστη λύση που ανταποκρίνεται όντως στις προτιμήσεις των παικτών. Αυτό όμως μπορούμε να το πετύχουμε και χωρίς αυτή την ισχυρή απαίτηση. Ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Στο πρόβλημα facility location on a line (βλ. ενότητα 1.2.3) με objective την *ελαχιστοποίηση του μέγιστου κόστους* θεωρούμε το ακόλουθο στιγμιότυπο με δύο παίκτες στις θέσεις $+1$ και -1 αντίστοιχα.



Η βέλτιστη λύση όπως είχαμε δει είναι να μπει το facility στο μέσο όρο των ακραίων θέσεων, στη συγκεκριμένη περίπτωση στη θέση $y = 0$. Ο αλγόριθμος αυτός όμως δεν είναι truthful και στην πραγματικότητα οι παίκτες θα προσπαθήσουν να δηλώσουν θέσεις μακριά από την αρχή των αξόνων ώστε να φέρουν το facility κοντά τους. Απουσία verification, οι συμπεριφορά των παικτών δεν είναι προβλέψιμη καθώς δεν υπάρχουν θέσεις που μπορούν να δηλώσουν οι παίκτες οι οποίες να αποτελούν ισορροπία. Πάντοτε, είτε ο αριστερότερος παίκτης θα έχει κίνητρο να κινηθεί αριστερά είτε ο δεξιότερος να κινηθεί δεξιά ώστε να «τραβήξει» το facility κοντά του.

Παρουσία όμως ϵ-verification (για οποιοδήποτε ϵ), τα πράγματα είναι διαφορετικά. Όπως είπαμε προηγουμένως, σε αυτό το setting ϵ-verification σημαίνει ότι ένας παίκτης που βρίσκεται στη θέση x_i απαγορεύεται να δηλώσει ότι βρίσκεται σε θέση που δεν ανήκει στο διάστημα $[x_i - \epsilon, x_i + \epsilon]$. Έστι, αν ο αριστερός παίκτης δηλώσει $-1-\epsilon$ και ο δεξιός παίκτης $+1+\epsilon$ τότε το facility θα τοποθετηθεί στη θέση $y = \frac{(-1-\epsilon)+(1+\epsilon)}{2} = 0$ και κανένας από τους δύο παίκτες δεν θα έχει κίνητρο να αλλάξει τη θέση που έχει δηλώσει. Στη θεωρία παιγνίων, μία τέτοια κατάσταση όπου κανένας παίκτης δεν έχει συμφέρον από μόνος του να τροποποιήσει τη δήλωσή του (δεδομένου ότι οι υπόλοιποι παίκτες διατηρούν τις δικές τους δηλώσεις) ονομάζεται **Ισορροπία Nash** (Nash Equilibrium, βλ. Ορισμό 2.5). Σε αυτή την ισορροπία λοιπόν, ο μηχανισμός θα τοποθετήσει το facility στη θέση που είναι και η βέλτιστη λύση.



Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η παρουσία ϵ-verification, παρόλο που δεν κατάφερε να κάνει τον μηχανισμό truthful, βοήθησε τους παίκτες να συντονιστούν σε μία ισορροπία που είχε την ίδια απόδοση με αυτή της βέλτιστης λύσης.

Ακόμα όμως και να μην καταφέρναμε να έχουμε την ίδια απόδοση, θα μπορούσε η ισορροπία στην οποία καταλήγουν οι παίκτες να δίνει μία λύση η οποία να είναι αρκετά καλή προσέγγιση της βέλτιστης λύσης. Ο τρόπος που χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία για την ποσοτικοποίηση της απόδοσης των ισορροπιών ενός παιγνίου είναι με τη χρήση της έννοιας του **Τιμήματος της Αναρχίας** (Price of Anarchy, βλ. Ορισμό 2.8). Έστω ότι OPT είναι η τιμή του objective function της βέλτιστης λύσης και έστω (wrst. Equilibrium) η τιμή της χειρότερης Ισορροπίας (στην περίπτωση παιγνίων ελαχιστοποίησης κόστους, η ισορροπία με το μέγιστο κόστος). Τότε το τίμημα της Αναρχίας ορίζεται ως:

$$\mathrm{PoA} = \frac{\mathrm{OPT}}{\text{wrst. Equilibrium}}$$

Μηχανισμοί με PoA κοντά στη μονάδα είναι μηχανισμοί που έχουν καλή απόδοση (δίνουν λύση κοντά στη βέλτιστη ακόμα και όταν οι παίκτες παίζουν στρατηγικά και δηλώνουν ψευδή στοιχεία) ενώ PoA μακριά από το 1 σημαίνει κακή απόδοση. Στο παραπάνω παράδειγμα με το facility location, το PoA (στο συγκεκριμένο instance) είναι 1 όταν υπάρχει verification ενώ *δεν* ορίζεται στην περίπτωση που απουσιάζει το verification καθώς δεν υπάρχει καμία ισορροπία στο παίγνιο.

1.5 Στόχος της διπλωματικής εργασίας

Στόχος μας σε αυτή τη διπλωματική εργασία είναι η μελέτη του κατά πόσον είναι δυνατόν η χρήση verification να φέρει το PoA ενός μηχανισμού πιο κοντά στο 1 σε σχέση με την περίπτωση όπου απουσιάζει το verification. Το facility location problem μας έδωσε το έναυσμα ώστε να ξεκινήσουμε να δουλεύουμε προς αυτή την κατεύθυνση αλλά ελλείψει κατάλληλων εργαλείων για την ανάλυση του PoA σε τέτοιους μηχανισμούς, στρέψαμε την προσοχή μας στο πρόβλημα των Συνδυαστικών Δημοπρασιών.

Βρισκόμαστε αντιμέτωποι σε αυτό το σημείο με δύο ερωτήματα στα οποία η παρούσα διπλωματική καλείται να δώσει απάντηση:

1. *Πώς θα ορίσουμε το verification στο context των δημοπρασιών;*

   Σε αντίθεση με το facility location problem, σε προβλήματα Συνδυαστικών Δημοπρασιών η ιδιωτική πληροφορία κάθε παίκτη είναι κάτι που όχι μόνο είναι δύσκολο έως αδύνατο να το ελέγξει επακριβώς κάποιος τρίτος αλλά συνήθως δεν μπορεί να την προσδιορίσει ούτε ο ίδιος ο παίκτης! Συνεπώς μέθοδοι verification που απαιτούν να μπορεί να ελέγξει ο μηχανισμός τις δηλωθήσες πληροφορίες χωρίς περιθώριο σφάλματος (π.χ. asymmetric verification) είναι μη ρεαλιστικές.

   Επίσης, ο τρόπος που συνήθως υλοποιούνται Συνδυαστικές Δημοπρασίες στην πράξη είναι με τη διενέργεια μιας single-item auction για κάθε αντικείμενο, όπου θα μπορούσαν να γίνονται όλες την ίδια στιγμή (παράλληλα) ή η μία μετά την άλλη (σειριακά). Σε μία τέτοια υλοποίηση, ο Μηχανισμός ζητάει από τους παίκτες να δηλώσουν μια προσφορά για κάθε αντικείμενο, κι όχι για κάθε συνδυασμό αντικειμένων. Έτσι οι ιδιωτικές πληροφορίες κάθε παίκτη, δεν είναι σε ένα-προς-ένα αντιστοιχία με τις δηλώσεις του. Συνεπώς δεν υπάρχει προφανής ορισμός για το τι σημαίνει ένας παίκτης να «λέει την αλήθεια» σε αυτό το context.

2. *Μπορεί η χρήση κάποιου είδους verification να φέρει το PoA μιας δημοπρασίας πιο κοντά στη μονάδα;*

Τα εργαλεία που θα χρειαστούμε για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα μας τα παρέχει η εργασία [24] του Tim Roughgarden. Στο συγκεκριμένο paper, αναπτύσσεται μια γενική μεθοδολογία με την οποία μπορεί κανείς να αντλεί κάτω φράγματα στο PoA απλών υλοποιήσεων συνδυαστικών δημοπρασιών (μεταξύ άλλων). Με τον όρο «απλή υλοποίηση» στο συγκεκριμένο context εννοούμε μια δημοπρασία που ζητάει από τους παίκτες να δηλώσουν εμμέσως τις προτιμήσεις τους, απαιτώντας πολύ λιγότερη πληροφορία σε σχέση με το να τους ζήταγε να δώσουν μια περιγραφή της συνάρτησής τους $v_i : 2^M \to \mathbb{R}^+$ (για λεπτομέρειες βλ. Ορισμό 4.2).

Στόχος μας είναι η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο προκύπτουν τα προαναφερθέντα κάτω φράγματα ώστε να τα τροποποιήσουμε (εφόσον χρειαστεί) ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν και υπό την παρουσία verification. Μεγάλο μέρος της δουλειάς του Roughgarden χρησιμοποιεί αποτελέσματα από τη Θεωρία Πληροφορίας και συγκεκριμένα το κλάδο Πολυπλοκότητα Επικοινωνίας (Communication Complexity). Θα χρειαστούμε λοιπόν κάποιες βασικές γνώσεις από το συγκεκριμένο τομέα τις οποίες παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 3.

Επιπλέον, η κατανόηση της παραπάνω δουλειάς θα μας βοηθήσει να απαντήσουμε και το προηγούμενο ερώτημα σχετικά με τον ορισμό του verification.

1.6 Οργάνωση της διπλωματικής εργασίας

Σε αυτό το κεφάλαιο κάναμε μία εισαγωγή στις έννοιες της Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων και του Σχεδιασμού Μηχανισμών χωρίς τη χρήση τεχνικών όρων καθώς επίσης δώσαμε κι ένα σχεδιάγραμμα για το στόχο που προσπαθούμε να επιτύχουμε. Στο δεύτερο κεφάλαιο παραθέτουμε τους τυπικούς ορισμούς για τις έννοιες αυτές και παράλληλα εμβαθύνουμε σε πιο πρόσφατα αποτελέσματα σε αυτούς τους τομείς με έμφαση 1) στις δυνατότητες των διάφορων μορφών verification να οδηγήσουν σε truthful συμπεριφορά και 2) σε τεχνικές εύρεσης *άνω φραγμάτων* (upper bounds) του PoA μηχανισμών και κυρίως Δημοπρασιών.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρεκκλίνουμε λίγο από την πορεία μας ώστε να κάνουμε μια εισαγωγή στην Πολυπλοκότητα Επικοινωνίας (Communication Complexity) που όπως αναφέραμε, τα εργαλεία αυτής της θεωρίας θα μας φανούν πολύ χρήσιμα στην ανάλυση του PoA «απλών» δημοπρασιών και συγκεκριμένα στην εύρεση *κάτω φραγμάτων* (lower bounds).

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο, προσπαθούμε να δώσουμε απάντηση στο κεντρικό ερώτημα της διπλωματικής. Χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια δείχνουμε ότι σε «απλές» υλοποιήσεις των Συνδυαστικών Δημοπρασιών το verification *δεν* μπορεί να βελτιώσει την κατάσταση. Ο λόγος για τον οποίο το Τίμημα της Αναρχίας είναι υψηλό σε αυτές τις υλοποιήσεις έχει τις ρίζες του στην εγγενή πολυπλοκότητα των προτιμήσεων των παικτών και όχι στην παρουσία των κινήτρων επομένως το verification δεν είναι το σωστό εργαλείο για αυτό το είδος δημοπρασιών.

Κεφάλαιο 2

Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

Στο κεφάλαιο αυτό κάνουμε μια τυπική (formal) εισαγωγή στο πεδίο της Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων και του Σχεδιασμού Μηχανισμών.

Η Θεωρία Παιγνίων ξεκίνησε με μία εργασία του Von Neumann (ο οποίος θεωρείται κι ένας από τους πατέρες της Επιστήμης των Υπολογιστών) το 1928. Έπειτα, με το βιβλίο του "Theory of Games and Economic Behavior" που συνέγραψε μαζί με τον Oskar Morgenstern πραγματοποιήθηκε η εδραίωσή της σε ξεχωριστό επιστημονικό κλάδο γύρω στο 1950.

Η Θεωρία Παιγνίων και η Επιστήμη των Υπολογιστών εξελίχθηκαν αρχικά ανεξάρτητα η μία από την άλλη με την πρώτη να ακολουθεί μια πορεία πιο κοντά στις Οικονομικές Επιστήμες. Στις αρχές της νέας χιλιετίες υπήρξε μια τομή των δύο αυτών επιστημών (την οποία βοήθησε ιδιαίτερα το Internet όπως συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 1). Ο νέος αυτός κλάδος ονομάστηκε *Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων* και μελετάει μεταξύ άλλων κλασσικά προβλήματα (όπως ύπαρξη ισορροπιών) από μια υπολογιστική σκοπιά, αναλύει προβλήματα χρησιμοποιώντας έννοιες και ιδέες από την επιστήμη των υπολογιστών και ασχολείται με το σχεδιασμό νέων παιγνίων με τρόπο ώστε να έχουν ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες. Ο τελευταίος αυτός κλάδος ονομάζεται *Σχεδιασμός Μηχανισμών*.

Ο ενδιαφερόμενος για εκτενέστερη μελέτη αναγνώστης παραπέμπεται στα [29, Κεφάλαιο 3] και [22]. Μεγάλο μέρος του κεφαλαίου αυτού βασίζεται στα προαναφερθέντα βιβλία.

2.1 Θεωρία Παιγνίων

2.1.1 Παίγνια

Ορισμός 2.1 (Παίγνιο (σε Κανονική Μορφή) — Game (in Normal Form))**.**
Ένα παίγνιο n παικτών σε κανονική μορφή είναι μια τριάδα (N, A, u), όπου:

- Το N είναι ένα πεπερασμένο σύνολο n παικτών (players).
- $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, όπου A_i ένα πεπερασμένο σύνολο *ενεργειών* (actions) που έχει κάθε παίκτης στη διάθεσή του. Κάθε $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ ονομάζεται *προφίλ ενεργειών* (action profile) ή *έκβαση* (outcome) του παιγνίου.
- $u = (u_1, \ldots, u_n)$ όπου $u_i : A \to \mathbb{R}$ η *συνάρτηση ωφέλειας* (utility function) του παίκτη i. Δηλαδή $u_i(\mathbf{a})$ είναι το utility του παίκτη i όταν όλοι μαζί εκτελούν τις ενέργειες $\mathbf{a}$ και εξαρτάται όχι μόνο από τη δική του ενέργεια αλλά και από των υπολοίπων παικτών.

Ένας εύκολος τρόπος οπτικοποιημένης αναπαράστασης του παιγνίου είναι με έναν n-διάστατο πίνακα όπου η θέση $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ περιέχει ένα διάνυσμα με τα utilities κάθε παίκτη όταν οι παίκτες εκτελέσουν τις ενέργειες **a**.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα παίγνιο γνωστό στη βιβλιογραφία ως Prisoner's Dilemma:

Παράδειγμα 2.1 (Prisoner's Dilemma). *Δύο μέλη μιας εγκληματικής οργάνωσης (θα τους ονομάζουμε A και B) συλλαμβάνονται, οδηγούνται στη φυλακή και κρατούνται σε διαφορετικά κελιά χωρίς να υπάρχει δυνατότητα οποιουδήποτε είδους επικοινωνίας μεταξύ τους. Οι εισαγγελείς δεν έχουν επαρκή στοιχεία ώστε να τους καταδικάσουν για κάποιο σοβαρό αδίκημα. Πιστεύουν όμως ότι μπορούν να τους καταδικάσουν σε ένα χρόνο φυλάκισης με βάση μικρο-αδικήματα που έχουν διαπράξει. Παράλληλα, οι εισαγγελείς κάνουν την εξής προσφορά στους κρατούμενους: κάθε ένας από τους κρατούμενους μπορεί είτε να προδώσει (betray) τον άλλο είτε να συνεργαστεί (cooperate) μαζί του και να παραμείνει σιωπηλός. Η προσφορά είναι η εξής:*

- *Αν και ο A και ο B προδώσουν ο ένας τον άλλον, τότε θα καταδικαστούν σε 2 χρόνια φυλάκισης.*
- *Αν ο A προδώσει τον B αλλά ο B παραμείνει σιωπηλός τότε ο A θα αφεθεί ελεύθερος και ο B θα καταδικαστεί σε 3 χρόνια φυλάκισης (και αντίστροφα).*
- *Αν και ο A και ο B συνεργαστούν και παραμείνουν σιωπηλοί και οι δύο τότε θα καταδικαστούν σε 1 χρόνο φυλάκισης (με την κατηγορία των μικρο-αδικημάτων).*

Το παραπάνω μπορούμε να το αναπαραστήσουμε με τον εξής πίνακα:

	B cooperates	**B betrays**
A cooperates	$-1, -1$	$-3, 0$
A betrays	$0, -3$	$-2, -2$

Τα νούμερα σε κάθε κελί είναι η ωφέλεια που θα επιφέρει η επιλογή των συγκεκριμένων στρατηγικών στον A και στον B αντίστοιχα. Ως ωφέλεια στη συγκεκριμένη περίπτωση θεωρούμε το αρνητικό του πλήθους των ετών καταδίκης τους σε κάθε περίπτωση.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 λοιπόν, $N = \{A, B\}, A = \{cooperate, betray\} \times \{cooperate, betray\}$ *και u η συνάρτηση που αναπαρίσταται από τον παραπάνω πίνακα.*

Παράδειγμα 2.2 (Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί[1]). *Ο πίνακας του παιγνίου φαίνεται παρακάτω.*

$A \backslash B$	**Πέτρα**	**Ψαλίδι**	**Χαρτί**
Πέτρα	$0, 0$	$+1, -1$	$-1, +1$
Ψαλίδι	$-1, +1$	$0, 0$	$+1, -1$
Χαρτί	$+1, -1$	$-1, +1$	$0, 0$

Το συγκεκριμένο παίγνιο ανήκει στην κατηγορία παιγνίων μηδενικού αθροίσματος (zero sum games) για τα οποία το utility του αντιπάλου είναι το αρνητικό του utility του άλλου παίκτη. Τα παίγνια αυτά μπορούν να αναπαρασταθούν ευκολότερα αφού χρειάζεται να προσδιορίσουμε μόνο το utility του ενός παίκτη αλλά έχουν και πολλές χρήσιμες ιδιότητες.

[1] Στην Ελλάδα είναι διαδεδομένη η παραλλαγή αυτού του παιχνιδιού με μία επιπλέον στρατηγική και είναι γνωστό ως Πέτρα-Μολύβι-Ψαλίδη-Χαρτί.

2.1.2 Στρατηγικές

Πολλές φορές, οι παίκτες δεν έχουν κάποια ενέργεια που να είναι αυστηρά καλύτερη από τις υπόλοιπες και που να την προτιμούν πάντα με αποτέλεσμα να είναι προς το συμφέρον τους να χρησιμοποιούν κάποιου είδους τυχαιότητα στην επιλογή του action τους.

Για παράδειγμα στο παίγνιο Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί, κάθε παίκτης δεν μπορεί να γνωρίζει τι θα παίξει ο άλλος, μπορεί όμως να έχει μάθει από προηγούμενα παιχνίδια με τον ίδιο αντίπαλο ότι για παράδειγμα ο άλλος παίκτης παίζει Πέτρα με μεγαλύτερη συχνότητα σε σχέση με Χαρτί ή Ψαλίδι. Με αυτή τη γνώση, ο πρώτος παίκτης μπορεί να ακολουθήσει την εξής στρατηγική: Με μεγάλη πιθανότητα να παίζει Χαρτί ώστε να νικάει την Πέτρα που ο άλλος παίκτης επιλέγει συχνά.

Προκειμένου να μοντελοποιήσουμε τέτοιες καταστάσεις εισάγουμε την έννοια της *στρατηγικής*:

Ορισμός 2.2 (Probability Simplex)**.** Έστω X ένα διακριτό σύνολο k στοιχείων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $X = \{1, 2, \ldots, k\}$. Ονομάζουμε *Probability Simplex* το σύνολο:

$$\Pi(X) = \{(p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{R}^k \; : \; p_1 + \ldots + p_k = 1, p_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\}$$

όλων των probability distributions πάνω στο X.

Ορισμός 2.3 (Στρατηγική — Strategy)**.** Έστω (N, A, u) ένα παίγνιο σε κανονική μορφή. Ονομάζουμε *μικτή στρατηγική* (mixed strategy) κάθε στοιχείο του συνόλου $S_i = \Pi(A_i)$. Θα συμβολίζουμε $\sigma_i(a)$ την πιθανότητα p_i που αναθέτει η στρατηγική $\sigma_i \in S_i$ στην ενέργεια $a \in A_i$.

Στην ειδική περίπτωση μιας στρατηγικής $\sigma_i \in S_i$ για την οποία υπάρχει $a \in A_i$ με $\sigma_i(a) = 1$, η στρατηγική αυτή ονομάζεται *αμιγής* (pure) και όταν αναφερόμαστε σε αυτή θα τη συμβολίζουμε απλά a.

Ορισμός 2.4 (Προφίλ μικτών στρατηγικών — Mixed-strategy profile)**.** Ένα διάνυσμα $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ όπου $\sigma_i \in \Pi(A_i)$ για $i = 1, \ldots, n$ ονομάζεται *προφίλ μικτών στρατηγικών* (mixed strategy profile).

Ορίζουμε το σύνολο όλων των προφίλ μικτών στρατηγικών ως $S_1 \times \ldots \times S_n$.

Στο σημείο αυτό επεκτείνουμε την έννοια του utility στην περίπτωση που οι παίκτες επιλέγουν μικτές στρατηγικές χρησιμοποιώντας την *αναμενόμενη ωφέλεια* (expected utility) η οποία ορίζεται ως:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{a}\sim\sigma}[u_i(\mathbf{a})] = \sum_{\mathbf{a}\in A} u_i(\mathbf{a}) \cdot \prod_{j}^{n} \sigma_j(a_j)$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, οι μικτές στρατηγικές είναι θεμελιώδους σημασίας για την ύπαρξη ισορροπιών στα παίγνια.

2.1.3 Ισορροπίες

Βασικός στόχος της Θεωρίας Παιγνίων είναι να μελετήσει πώς θα συμπεριφερθούν οι παίκτες ενός δεδομένου παιγνίου. Μια τέτοιου είδους πρόβλεψη δεν μπορεί να γίνει λαμβάνοντας υπόψιν τις ενέργειες και την ωφέλεια κάθε παίκτη απομονωμένα αλλά χρειάζεται ένα εργαλείο που να προσμετράει τις επιλογές και τα συμφέροντα όλων των παικτών ταυτόχρονα.

Τέτοια εργαλεία είναι οι Ισορροπίες (Equilibria), η πιο γνωστή από αυτές και η πρώτη που μελετήθηκε είναι η Ισορροπία Nash (Nash Equilibrium). Μια έκβαση (outcome) του παιγνίου γενικά ονομάζεται ισορροπία αν οι παίκτες δεν έχουν κίνητρο να αλλάξουν τη στρατηγική τους δεδομένου ότι οι άλλοι παίκτες διατηρούν τη δική τους στρατηγική αμετάβλητη. Ανάλογα με τις τεχνικές λεπτομέρειες του τυπικού ορισμού, προκύπτουν διάφορες μορφές ισορροπίας όπως θα δούμε παρακάτω.

Κάθε ορισμός ισορροπίας προσπαθεί να συλλάβει την έννοια της ευσταθούς έκβασης του παιγνίου, μιας κατάστασης δηλαδή που αν φτάσουν σε αυτή οι παίκτες δεν θα έχουν κίνητρο να μεταβούν σε άλλη κι αυτό είναι ισχυρό στοιχείο που μας κάνει να πιστεύουμε ότι και στην πραγματικότητα οι παίκτες όντως θα διαλέξουν να εκτελέσουν ενέργειες που όλες μαζί θα αποτελούν μια ισορροπία.

Συμβολισμός: Στο εξής θα συμβολίζουμε $\mathbf{a_{-i}}$ το διάνυσμα που έχει όλες τις συνιστώσες του **a εκτός** της i-οστής. Δηλαδή: $\mathbf{a_{-i}} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Ο συμβολισμός αυτός, αν και ανορθόδοξος, έχει επικρατήσει στη βιβλιογραφία της Θεωρίας Παιγνίων λόγω της ευχρηστίας του.

Ορισμός 2.5 (Αμιγής Ισορροπία Nash — Pure Nash Equilibrium — PNE)**.**
Μια έκβαση (outcome) $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ονομάζεται Pure Nash Equilibrium αν κανένας παίκτης i δεν μπορεί να αυξήσει το utility του με μία μονομερή απόκλιση. Πιο τυπικά, αν:

$$\forall i \in N, a \in A_i : u_i(\mathbf{a}) \geq u_i(\mathbf{a_{-i}}, a)$$

Παράδειγμα 2.3. *Στο παίγνιο Prisoner's Dilemma που είδαμε προηγουμένως, η μοναδική Αμιγής Ισορροπία Nash είναι προδώσουν και οι δύο. Από την πλευρά του A, αν αλλάξει την στρατηγική του σε "cooperate" τότε το utility του μειώνεται από -2 σε -3. Αντίστοιχα και για τον παίκτη B. Επιπλέον, ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι αυτή είναι η μοναδική αμιγής ισορροπία Nash σε αυτό το παίγνιο.*

Παρατήρηση 2.1. *Η ύπαρξη αμιγών ισορροπιών Nash δεν εξασφαλίζεται για όλα τα παίγνια. Για παράδειγμα στο παίγνιο Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί, για οποιονδήποτε συνδυασμό ενεργειών που επιλέγουν οι δύο παίκτες, πάντα ένας από τους δύο θα έχει κίνητρο να αλλάξει τη ενέργειά του στο αντικείμενο (πέτρα, ψαλίδι ή χαρτί) που νικάει τον αντίπαλο. Αυτό μας οδηγεί στο να γενικεύσουμε τον ορισμό της ισορροπίας συμπεριλαμβάνοντας και στρατηγικές.*

Ορισμός 2.6 (Μικτή Ισορροπία Nash — Mixed Nash Equilibrium — MNE)**.**
Ένα strategy profile $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ονομάζεται *Mixed Nash Equilibrium* αν κανένας παίκτης δεν μπορεί να μεταβάλει το αναμενόμενο utility του με μονομερή απόκλιση από τη στρατηγική του. Πιο τυπικά:

$$\forall i \in N, s \in S_i : \mathbb{E}_{\mathbf{a} \sim \sigma}[u_i(\mathbf{a})] \geq \mathbb{E}_{\mathbf{a} \sim (\sigma_{-i}, s)}[u_i(\mathbf{a})]$$

Σύμβαση: Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε Ισορροπία Nash, θα εννοούμε MNE εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

Τα MNE είναι γενίκευση των PNE (κάθε αμιγής ισορροπία είναι και μικτή). Προηγουμένως είδαμε ότι υπάρχουν παίγνια που δεν έχουν PNE. Για τις MNE η κατάσταση είναι διαφορετική όπως απέδειξε ο John Nash το 1950:

Θεώρημα 2.1 ([19])**.** *Κάθε (πεπερασμένο) παίγνιο, έχει τουλάχιστον ένα Mixed-Strategy Nash Equilibrium.*

Παράδειγμα 2.4. *Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ακόλουθη στρατηγική είναι MNE για το παίγνιο Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί: Κάθε παίκτης διαλέγει μία από τις τρεις ενέργειες τυχαία με ομοιόμορφη πιθανότητα $1/3$ για κάθε επιλογή.*

Ορισμός 2.7 (ϵ-MNE)**.** Έστω $\epsilon > 0$. Μια ϵ-MNE ισορροπία είναι το προσεγγιστικό ανάλογο της MNE ισορροπίας όπου επιτρέπουμε να υπάρχει μονομερής απόκλιση που να βελτιώνουν το expected utility ενός παίκτη, όχι όμως πάνω από ϵ. Συγκεκριμένα, η σχέση του προηγούμενου ορισμού γίνεται σε αυτή την περίπτωση:

$$\forall i \in N, s \in S_i : \mathbb{E}_{\mathbf{a}\sim\sigma}[u_i(\mathbf{a})] \geq \mathbb{E}_{\mathbf{a}\sim(\sigma_{-i},s)}[u_i(\mathbf{a})] - \epsilon$$

Η έννοια των approximate MNE γενικεύει την έννοια του MNE κι έτσι το Θεώρημα 2.1 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ϵ-MNE τα οποία εν γένει είναι περισσότερα από τα απλά MNE και θα μας φανούν χρήσιμα στη μελέτη μας στο Κεφάλαιο 4.

Η μελέτη των ϵ-MNE ισορροπιών διευκολύνει πολλές φορές την ανάλυση του προβλήματος χωρίς να βλάπτει τη γενικότητα καθώς στην πλειοψηφία των πρακτικών εφαρμογών οι παίκτες είναι οντότητες με πεπερασμένη ακρίβεια υπολογισμών (ϵ).

2.1.4 Τίμημα Αναρχίας

Για πολλά από τα παίγνια που μελετάμε μας ενδιαφέρει, εκτός από το ποια θα είναι η πιο πιθανή έκβαση, και το πόσο «καλή» είναι με βάση κάποιο κριτήριο (μια objective function). Για παράδειγμα στο Prisoner's Dilemma, είχαμε δει ότι η μοναδική Ισορροπία Nash είναι οι παίκτες να προδώσουν ο ένας τον άλλον το οποίο θα τους οδηγήσει σε 2 χρόνια φυλάκισης τον κάθε έναν. Αν ορίζαμε ως objective function το αρνητικό του αθροίσματος των χρόνων φυλάκισης, τότε η τιμή του στην ισορροπία είναι -4. Παρατηρούμε όμως ότι η βέλτιστη λύση ως προς αυτό το objective θα ήταν να συνεργαστούν ώστε να έχει τιμή -2.

Αυτό που μας διδάσκει το παραπάνω παράδειγμα είναι ότι όταν οι παίκτες είναι ελεύθεροι να συμπεριφέρονται εγωιστικά προσπαθώντας να μεγιστοποιήσουν το δικό τους μόνο κέρδος και όχι κάποιο κοινό στόχο, τότε μπορεί να καταλήξουν σε outcomes που να απέχουν από την κοινωνικά βέλτιστη λύση. Προκειμένου να ποσοτικοποιήσουμε πόσο χειρότερη επίδοση μπορεί να έχουμε όταν οι παίκτες συμπεριφέρονται εγωιστικά σε σχέση με το να είχαμε κάποιον «συντονιστή» ο οποίος θα οδηγούσε το παίγνιο σε βέλτιστο outcome ως προς το objective function, χρησιμοποιούμε το *Τίμημα της Αναρχίας* (Price of Anarchy — PoA).

Η έννοια αυτή ορίσθηκε πρώτη φορά από τους Κουτσουπιά και Παπαδημητρίου [15] ως ανάλογο του λόγου προσέγγισης των προσεγγιστικών αλγορίθμων.

Ορισμός 2.8 (Price of Anarchy — PoA)**.** Έστω ένα παίγνιο (N, A, u), μια objective function $f : A \to \mathbb{R}$ την οποία προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε και μία έννοια Ισορροπίας (Equilibrium) (για παράδειγμα μια από αυτές που ορίσαμε νωρίτερα). Ορίζουμε Price of Anarchy το λόγο:

$$\text{PoA} = \frac{\max_{\sigma\in S} \mathbb{E}_{\mathbf{a}\sim\sigma}[f(\mathbf{a})]}{\max_{\sigma:\textsc{Equilibrium}} \mathbb{E}_{\mathbf{a}\sim\sigma}[f(\mathbf{a})]}$$

Παρατηρούμε ότι για δεδομένο παίγνιο, το Τίμημα Αναρχίας δεν μπορεί να μειωθεί αν γενικεύσουμε την έννοια της Ισορροπίας για την οποία το υπολογίζουμε. Έτσι για παράδειγμα στις Ισορροπίες που έχουμε δει μέχρι στιγμής το PoA έχει τη μικρότερη τιμή για τα PNE και τη μεγαλύτερη για ϵ-MNE. Συνεπώς όταν σε επόμενα κεφάλαια αποδείξουμε κάποιο κάτω φράγμα για την PoA ενός παιγνίου για ϵ-MNE ισορροπίες, το φράγμα θα ισχύει και για τις πιο ειδικές ισορροπίες.

2.2 Συναρτήσεις Αξιολόγησης σε Συνδυαστικές Δημοπρασίες

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε το πρόβλημα των συνδυαστικών δημοπρασιών ως εξής:

Ορισμός 2.9 (Συνδυαστικές Δημοπρασίες)**.** Έστω ένα σύνολο N από n παίκτες και ένα σύνολο M από m διαφορετικά μεταξύ τους αντικείμενα. Κάθε παίκτης i χαρακτηρίζεται από μια *συνάρτηση αξιολόγησης* (valuation function) $v_i : 2^M \to \mathbb{R}^+$. Ζητούμενο είναι να βρεθεί μια διαμέριση $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ των m αντικειμένων στους n παίκτες που να μεγιστοποιεί το Social Welfare $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$. Αυτού του είδους οι δημοπρασίες ονομάζονται **Συνδυαστικές Δημοπρασίες (Combinatorial Auctions)**.

Οι συναρτήσεις αξιολόγησης των παικτών συνήθως δεν μπορούν να είναι αυθαίρετες αλλά θα πρέπει να αντλούνται από μια γνωστή εκ των προτέρων κλάση συναρτήσεων αξιολόγησης. Κάποιες από τις πιο γνωστές κλάσεις που μελετώνται στη βιβλιογραφία είναι οι παρακάτω (με σειρά μειούμενης γενικότητας):

- General (**Γενικές**):

  Αυτή είναι η πιο γενική κατηγορία. Απαιτούμε από μια $v \in$ General να έχει τις εξής πολύ φυσιολογικές ιδιότητες:

  - $v(\emptyset) = 0$ (κανονικοποίηση)
  - $v(S) \le v(T)$ οποτεδήποτε $S \subseteq T$ (μονοτονία)

- Subadditive (**Υποαθροιστικές**):

  $$v \in \text{Subadditive αν } v(S \cup T) \le v(S) + v(T) \text{ για κάθε } S, T \subseteq M$$

  Αυτή η κατηγορία δεν επιτρέπει παίκτες που αντιλαμβάνονται τα αντικείμενα ως συμπληρωματικά (complements), που θα είχαν δηλαδή μεγαλύτερη ευχαρίστηση από την απόκτηση ενός συνδυασμού αντικειμένων απ' ότι αν έπαιρναν το κάθε αντικείμενο ξεχωριστά.

- Submodular:

  $$v \in \text{Submodular αν για κάθε } S \subseteq T \text{ και } j \notin T : v(T \cup \{j\}) - v(T) \le v(S \cup \{j\}) - v(S)$$

  Αυτό που προσπαθεί να μοντελοποιήσει η παραπάνω σχέση είναι παίκτες των οποίων η ευχαρίστηση μεταβάλλεται όλο και δυσκολότερα όσο περισσότερα αντικείμενα έχουν. Εκτός από την πρακτική τους σημασία, οι submodular valuation functions είναι χρήσιμες και από τεχνικής πλευράς και έχουν ήδη μελετηθεί αρκετά στον κλάδο των προσεγγιστικών αλγορίθμων καθώς προσφέρονται για ανάπτυξη άπληστων προσεγγιστικών αλγορίθμων (βλ. [3]).

- XOS:

  $v \in$ XOS αν υπάρχουν r συναρτήσεις $z^l : M \to \mathbb{R}^+$ για $l = 1, \dots r$ τέτοιες ώστε η v να μπορεί να αναπαρασταθεί ως pointwise max αθροιστικών (βλ. επόμενο bullet) valuations:

  $$v(S) = \max_{l=1}^{r} \sum_{j \in S} z_j^l$$

- Additive (**Αθροιστικές**):

$$v \in \text{Additive αν για κάθε } S \subseteq M : v(S) = \sum_{j \in S} v(\{j\})$$

2.3 Σχεδιασμός Μηχανισμών χωρίς χρήματα

Όπως συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 1, τα χρήματα δεν είναι ο μοναδικός (και κάποιες φορές ούτε επιθυμητός) τρόπος να δώσουμε κίνητρα στους παίκτες να δηλώσουν τις πραγματικές τους προτιμήσεις. Ένας άλλος τρόπος είναι η *επαλήθευση* (verification) στην οποία θα επικεντρωθούμε σε αυτή την ενότητα.

Παρακάτω μελετάμε κάποια (κυρίως αρνητικά) αποτελέσματα πάνω στη χρήση του verification ως εργαλείο για την επίτευξη του truthfulness. Βασιζόμαστε στην εργασία [12] που δίνει ένα γενικευμένο πλαίσιο στο οποίο η μελέτη της αποτελεσματικότητας του verification ανάγεται στον έλεγχο γραφοθεωρητικών ιδιοτήτων ενός κατάλληλα σχεδιασμένου γράφου που αντιστοιχεί στο μηχανισμό.

2.3.1 Το πλαίσιο

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μια πολύ βασική υπόθεση απλούστευσης: Εφόσον μας ενδιαφέρουν μόνο περιπτώσεις όπου ο μηχανισμός θα είναι τελικά truthful, μπορούμε να αγνοήσουμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παικτών — υπενθυμίζουμε ότι η ιδιότητα του truthfulness σημαίνει πως είναι προς το συμφέρον κάθε παίκτη να δηλώσει τις πραγματικές του προτιμήσεις ανεξάρτητα από τις ενέργειες των υπολοίπων παικτών. Συνεπώς μπορούμε να μελετήσουμε το μηχανισμό από την πλευρά ενός μόνο παίκτη σταθεροποιώντας (fixing) τις προτιμήσεις όλων των υπόλοιπων παικτών. Το πλαίσιο αυτό είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως *principle agent model* (βλ. [1]).

Στο εξής θεωρούμε λοιπόν ότι υπάρχει ένας μόνο παίκτης. Επίσης, θεωρούμε ένα σύνολο O από *εκβάσεις* (outcomes) του μηχανισμού. Ο παίκτης χαρακτηρίζεται από ένα *τύπο* $x : O \to \mathbb{R}$ που δίνει την «ευχαρίστηση» που λαμβάνει για κάθε πιθανή έκβαση του μηχανισμού. Το σύνολο όλων των επιτρεπτών τύπων του παίκτη θα το συμβολίζουμε με D. Ο Σχεδιαστής του Μηχανισμού θέλει να υλοποιήσει μια *συνάρτηση κοινωνικής επιλογής* (social choice function) $f : D \to O$, να καταφέρει δηλαδή να μάθει τον τύπο x του παίκτη και να επιλέξει το outcome $f(x)$.

Ορισμός 2.10 (truthful implementation)**.** Μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f : D \to O$ θα ονομάζεται *truthfully implementable* αν για κάθε $x, y \in D : x(f(x)) \geq x(f(y))$, αν δηλαδή ένας παίκτης με πραγματικός τύπο x δεν μπορεί να αυξήσει την ευχαρίστησή του με το να δηλώσει y.

Ορισμός 2.11 (verification)**.** Η ύπαρξη verification σε ένα μηχανισμό μοντελοποιείται από μία συνάρτηση της μορφής $M : D \to 2^D$ που περιορίζει τις δηλώσεις του παίκτη. Συγκεκριμένα, ένας παίκτης με πραγματικό τύπο x μπορεί υπό την παρουσία *M-verification* να δηλώσει κάποιο τύπο y μόνο εάν αυτός ανήκει στο $M(x) \subseteq D$.

Παρακάτω προσαρμόζουμε τον ορισμό του truthful implementation στην περίπτωση που υπάρχει M-verification.

Ορισμός 2.12 (M-truthful implementation)**.** Μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f : D \to O$ θα ονομάζεται *M-truthfully implementable* αν για κάθε $x \in D$ και κάθε $y \in M(x) : x(f(x)) \geq x(f(y))$.

Τέλος, ορίζουμε ένα γράφο με βάση τη συνάρτηση f και το verification που θα μας φανεί χρήσιμος στη συνέχεια:

Ορισμός 2.13 (correspondance graph)**.** Το M-verification μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα κατευθυνόμενο γράφο $G_M = (D, \{(x, y) : y \in M(x)\})$, δηλαδή ένα γράφο με σύνολο κορυφών το σύνολο D των πιθανών τύπων και στον οποίο υπάρχει μια κατευθυνόμενη ακμή (x, y) αν ο παίκτης με πραγματικό τύπο x επιτρέπεται να δηλώσει y.

Επιπλέον, δοθείσας μιας συνάρτησης κοινωνικής επιλογής f, ορίζουμε τον παρακάτω κατευθυνόμενο γράφο με βάρη:

$$G_{M,f} = (D, \{(x, y) : y \in M(x)\}, w),\ \text{όπου}\ w(x, y) = x(f(x)) - x(f(y))$$

Τα βάρη στον $G_{M,f}$ αναπαριστούν το κέρδος (ή την απώλεια αν $w(x, y) < 0$) σε ευχαρίστηση που έχει ένας παίκτης με πραγματικό τύπο x όταν δηλώνει στο μηχανισμό $y \in M(x)$.

Ορισμός 2.14 (Symmetric and asymmetric verification)**.** Το verification χαρακτηρίζεται *symmetric* (συμμετρικό) αν ο γράφος G_M είναι συμμετρικός, δηλαδή αν $(x, y) \in E(G_M)$ οποτεδήποτε $(y, x) \in E(G_M)$.

Asymmetric (ασύμμετρο) χαρακτηρίζεται το verification του οποίου ο γράφος είναι ένα ακυκλικό τουρνουά (acyclic tournament), το οποίο σημαίνει ότι για κάθε $x, y \in V(G_M)$ είτε $(x, y) \in E(G_M)$ είτε $(y, x) \in E(G_M)$ και επιπλέον δεν σχηματίζονται κύκλοι.

Ας δούμε πώς ορίζεται σε αυτό το πλαίσιο το πρόβλημα Facility Location on a line που είδαμε informally στο προηγούμενο κεφάλαιο καθώς και το ϵ-verification πάνω σε αυτό το πρόβλημα.

Ορισμός 2.15. Στο Facility Location problem, έχουμε να τοποθετήσουμε ένα facility πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Μια έκβαση είναι ένα $z \in \mathbb{R}$ στο οποίο τοποθετείται το facility συνεπώς $O = \mathbb{R}$.

Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, ο τύπος ενός παίκτη είναι είτε μια θέση πάνω στην ευθεία (το σημείο $x \in \mathbb{R}$ στο οποίο βρίσκεται ο παίκτης) είτε η συνάρτηση που δίνει την ευχαρίστηση του παίκτη όταν το facility τοποθετείται στη θέση o ($x(o) = |x - o|$). Θα είναι ξεκάθαρο από τα συμφραζόμενα αν αναφερόμαστε στη θέση ή στη συνάρτηση κάθε φορά.

Έχοντας εξασφαλίσει τον ισοδύναμο αυτό χαρακτηρισμό των τύπων των παικτών μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνολο D των πιθανών τύπων είναι $D = \mathbb{R}$.

Σημείωση 2.1. *Η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής που συνήθως θέλουμε να υλοποιήσουμε είναι εκείνη που επιλέγει να τοποθετήσει το facility στο σημείο που ελαχιστοποιεί είτε α) το άθροισμα των αποστάσεων όλων παίκτη από αυτό είτε β) τη μέγιστη απόσταση ενός παίκτη από αυτό.*

Στο principle agent model, θεωρώντας ότι οι $n-1$ παίκτες βρίσκονται στις θέσεις $x_1, \ldots, x_{n-1}$, και ο n-οστός παίκτης δηλώνει θέση $x \in \mathbb{R}$ στο μηχανισμό, έχουμε:

$$f_{\textit{Social Cost}}(x) = argmin_{y \in O} \left(|y - x| + \sum_{i=1}^{n-1} |y - x_i| \right)$$

$$f_{\textit{Fairness}}(x) = argmin_{y \in O} \max(|y - x|, \max_{i=1}^{n-1} \{|y - x_i|\})$$

Όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 1, η $f_{\textit{Social Cost}}$ είναι truthfully implementable ενώ η $f_{\textit{Fairness}}$ δεν είναι.

Σημείωση 2.2. *Μια πιο γενική περίπτωση του παραπάνω προβλήματος είναι η τοποθέτηση $k > 1$ facilities με τον κάθε παίκτη να μετράει ως κόστος την απόστασή του από το κοντινότερό του* *facility. Τα αποτελέσματα που παραθέτουμε αργότερα ισχύουν και σε αυτή τη γενικευμένη εκδοχή του προβλήματος.*

Ορισμός 2.16 (ϵ-verification)**.** Δεδομένου ενός $\epsilon > 0$, ορίζουμε $M^\epsilon(x) = \{y \in D : |x - y| \leq \epsilon\}$.

2.3.2 Ισοδυναμία truthfulness και M-truthfulness

Ένα από τα βασικά αποτελέσματα στο [12] στο πιο απλό setting (σε μηχανισμούς χωρίς τυχαιότητα και χωρίς χρήματα) είναι το παρακάτω:

Ορισμός 2.17 (Order-Preserving Path)**.** Δεδομένου ενός verification M, ένα $x - y$ μονοπάτι p στον G_M ονομάζεται *order-preserving* αν για κάθε outcomes $a, b \in O$ με $x(a) > x(b)$ και $y(a) \geq y(b)$ να ισχύει για κάθε ενδιάμεσο τύπο $w \in p$ ότι $w(a) > w(b)$. Το μονοπάτι p ονομάζεται *strict order-preserving* αν για κάθε τύπο $w \in p$ το κομμάτι του μονοπατιού p από το x μέχρι το w είναι order-preserving.

Θεώρημα 2.2 ([12, Theorem 1])**.** *Έστω M ένα symmetric, strict order-preserving verification. Τότε το truthfulness είναι ισοδύναμο με το M-truthfulness, δηλαδή για οποιαδήποτε συνάρτηση κοινωνικής επιλογής f, η f είναι truthfully implementable αν και μόνο αν είναι M-truthfully implementable.*

Τα παραπάνω θεωρήματα παρέχουν ένα γενικό και εύκολο τρόπο ελέγχου αν ένα είδος verification θα είναι χρήσιμο. Μπορεί για παράδειγμα να αποδειχθεί το εξής:

Λήμμα 2.1 ([12, Lemma 6])**.** *Για κάθε $\epsilon > 0$, το M^ϵ-verification είναι symmetric, strict order-preserving για το Facility Location problem.*

Το Λήμμα αυτό σε συνδυασμό με το προηγούμενο θεώρημα και το γεγονός ότι το f_{Fairness} *δεν* είναι truthful μας λέει ότι ούτε το M^ϵ verification μπορεί να κάνει truthful το μηχανισμό.

2.4 Άνω φράγματα στο τίμημα της αναρχίας

Στην ενότητα αυτή μελετάμε τεχνικές για την απόδειξη άνω φραγμάτων στο τίμημα της αναρχίας δημοπρασιών. Το framework που θα παρουσιάσουμε αναπτύσσεται στο paper [30] και παρέχει μεθόδους για τη μεταφορά των άνω φραγμάτων από ένα «απλό» setting (π.χ. μία δημοπρασία ενός αντικειμένου) σε ένα «περίπλοκο» setting (π.χ. μία S1A).

Τα παραπάνω επιτυγχάνονται με τον ορισμό του (λ, μ)-*smooth mechanism* που είναι μια αναπροσαρμογή της έννοιας του smooth game που είχε ορίσει ο Tim Roughgarden στο [25]. Ένας μηχανισμός που είναι (λ, μ)-smooth, αποδεικνύεται ότι έχει PoA $< \frac{\max(1,\mu)}{\lambda}$. Επίσης, η έννοια του smoothness έχει την ιδιότητα (βλ. θεώρημα σύνθεσης) ότι αν ισχύει για απλές[2] δημοπρασίες τότε θα ισχύει και για παράλληλες ή και σειριακές εκδοχές τους (όπου δηλαδή πωλούνται αντικείμενα είτε όλα μαζί π.χ. με μια S1A είτε το ένα μετά το άλλο).

Με αυτό τον τρόπο, η απόδειξη άνω φραγμάτων ανάγεται στην απόδειξη της ιδιότητας του smoothness σε μια απλούστερη εκδοχή της υπό εξέταση δημοπρασίας.

[2]Στην παρούσα ενότητα η έννοια απλή δημοπρασία αναφέρεται σε δημοπρασίες ενός αντικειμένου στο complete information setting εν αντιθέσει με τα παρακάτω κεφάλαια όπου η έννοια απλή ορίζεται όπως στον Ορισμό 4.2.

2.4.1 Το πλαίσιο

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να ορίσουμε ξανά την έννοια του μηχανισμού (με χρήματα) καθώς εδώ δεν αναζητούμε πλέον truthful μηχανισμούς κι έτσι δεν είμαστε στο principle agent model που εισάγαμε στην προηγούμενη ενότητα. Παρακάτω θα δώσουμε ένα γενικό ορισμό μηχανισμού καθώς και έναν ορισμό *σύνθεσης* μηχανισμών.

Θεωρούμε λοιπόν ότι υπάρχουν n παίκτες, ένα σύνολο από εκβάσεις (outcomes) $\mathcal{X} \subseteq \times_i \mathcal{X}_i$ όπου $\mathcal{X}_i$ το σύνολο των πιθανών outcomes που αφορούν τον παίκτη i. Κάθε παίκτης έχει μια συνάρτηση αξιολόγησης $v_i : \mathcal{X}_i \to \mathbb{R}_+$ πάνω στις εκβάσεις του μηχανισμού. Δεδομένου ενός outcome $x_i \in \mathcal{X}_i$, και μίας πληρωμής $p_i \in \mathbb{R}_+$ που επιβάλλει ο μηχανισμός στον παίκτη i, η ευχαρίστηση (utility) του παίκτη i είναι:

$$u_i^{v_i}(x_i, p_i) = v_i(x_i) - p_i$$

Στο πλαίσιο αυτό έχουμε:

Ορισμός 2.18 (Μηχανισμός)**.** Δεδομένου ενός χώρου συναρτήσεων αξιολόγησης $\mathcal{V} = \times_i \mathcal{V}_i$, ένας *μηχανισμός* είναι μια τριάδα $(\mathcal{A}, X, P)$ όπου $\mathcal{A} = \times_i \mathcal{A}_i$ είναι το σύνολο των ενεργειών (actions) κάθε παίκτη i, $X : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ είναι η συνάρτηση ανάθεσης που δέχεται τα actions των παικτών και επιλέγει ένα outcome και $P : \mathcal{A} \to \mathcal{R}_+^n$ η συνάρτηση πληρωμών που δέχεται τα actions των παικτών και αναθέτει μια πληρωμή p_i σε κάθε παίκτη i.

Ας δούμε για παράδειγμα πώς μια δημοπρασία ενός αντικειμένου σε n παίκτες μπορεί να μοντελοποιηθεί στο παραπάνω framework: Η έκβαση του μηχανισμού από τη σκοπιά ενός παίκτη i είναι $\mathcal{X}_i = \{1, 0\}$, δηλαδή να του ανατεθεί ή όχι αντίστοιχα το αντικείμενο που δημοπρατείται. Το σύνολο των εκβάσεων του μηχανισμού είναι εκείνο το υποσύνολο του $\times_i \mathcal{X}_i$ για το οποίο υπάρχει μόνος ένας παίκτης i στον οποίο ανατίθεται το αντικείμενο, δηλαδή $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_1 = 1, \mathbf{x} \in \times_i \mathcal{X}_i\}$. Το action space $\mathcal{A}_i$ κάθε παίκτη αποτελείται από όλα τα πιθανά bids που μπορεί να υποβάλλει στο μηχανισμό ο παίκτης i.

Προκειμένου να ορίσουμε σύνθετους μηχανισμούς (αποτελούμενους από απλούστερους): θεωρούμε n παίκτες που παίρνουν μέρος σε m μηχανισμούς. Κάθε μηχανισμός $\mathcal{M}_i$ είναι μια τριάδα $(\mathcal{A}^j, X^j, P^j)$ ο καθένας με το δικό του σύνολο εκβάσεων $\mathcal{X}^j$.

Υποθέτουμε ότι οι παίκτες αξιολογούν την έκβαση του γενικού μηχανισμού συνδυάζοντας τις εκβάσεις των επιμέρους μηχανισμών έχοντας μια συνάρτηση αξιολόγησης $v_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{R}^+$ όπου σε αυτό το πλαίσιο $\mathcal{X}_i = \times_j \mathcal{X}_i^j$. Το utility κάθε παίκτη είναι:

$$u_i^{v_i}(\mathbf{x_i}, \mathbf{p_i}) = v_i(x_i^1, \ldots, x_i^m) - \sum_{j=1}^{m} p_i^j$$

Ορισμός 2.19 (Παράλληλη σύνθεση μηχανισμών)**.** Η *παράλληλη σύνθεση μηχανισμών* (simultaneous composition) των μηχανισμών $\mathcal{M}_j$ για $j = 1, \ldots, m$ είναι ένας μηχανισμός $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, X, P)$ όπου $\mathcal{A}_i = \times_j \mathcal{A}_i^j, \mathcal{X} = \times_j \mathcal{X}^j, X(\mathbf{a}) = (X^j(a^j))_j$ και $P(\mathbf{a}) = \sum_j P^j(a^j)$.

Η Κοινωνική Ωφέλεια (Social Welfare) ενός τέτοιου μηχανισμού δίνεται από:

$$\mathrm{SW}^v(\mathbf{a}) = \sum_i v_i(X_i(\mathbf{a}))$$

Η βέλτιστη έκβαση (ως προς την κοινωνική ωφέλεια) συμβολίζεται ως:

$$\mathrm{OPT}(v) = \max_{\mathbf{x}^*} \sum_i v_i(\mathbf{x}^*)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τροποποιήσουμε τον ορισμό των κλάσεων συναρτήσεων αξιολόγησης. Μας ενδιαφέρουν οι ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών όταν συνδυάζουν αποτελέσματα από *διαφορετικούς* μηχανισμούς. Ορίζουμε λοιπόν την κλάση XOS — που θα μας φανεί χρήσιμη παρακάτω. Οι ορισμοί των υπόλοιπον είναι αντίστοιχοι.

Ορισμός 2.20 (XOS)**.** Μία συνάρτηση $v : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ στο $\mathcal{X} = \times_j \mathcal{X}_j$ ονομάζεται XOS αν υπάρχει ένα σύνολο $\mathcal{L}$ από συναρτήσεις $v_j^l : \mathcal{X}_j \to \mathbb{R}_+$, τέτοιες ώστε:

$$v(x) = \max_{l \in \mathcal{L}} \sum_j v_j^l(x_j)$$

Ας σημειωθεί ότι δεν απαιτούμε οι v_j^l (που αξιολογούν αποτελέσματα από τον κάθε μηχανισμό ξεχωριστά) να ανήκουν σε κάποια ιδιαίτερη κλάση συναρτήσεων αξιολόγησης. Μας ενδιαφέρει μόνο η γενίκευσή τους σε σύνθετους μηχανισμούς να έχει την αναμενόμενη ιδιότητα των XOS συναρτήσεων.

2.4.2 Smooth Μηχανισμοί

Θεώρημα 2.3. *Ένα μηχανισμός είναι (λ, μ)-smooth (για κάποια $\lambda, \mu \geq 0$) αν για κάθε valuation profile $v \in \times_i \mathcal{V}_i$ και για κάθε action profile a, υπάρχει randomized action $\mathbf{a}_i^*(v, a_i)$ για κάθε παίκτη i τέτοιο ώστε:*

$$\sum_i u_i^{v_i}(\mathbf{a}_i^*, a_{-i}) \geq \lambda \text{O}\textsc{pt}(v) - \mu \sum_i P_i(a)$$

Συμβολίζουμε με $u_i^{v_i}(\mathbf{a})$ το expected utility ενός παίκτη i όταν το $\mathbf{a}$ είναι το διάνυσμα των randomized στρατηγικών όλων των παικτών.

Θεώρημα 2.4 ([30, Theorem 4.2])**.** *Αν ένας μηχανισμός είναι (λ, μ)-smooth τότε:*

$$PoA_{MNE} \leq \frac{\max(\mu, 1)}{\lambda}$$

Παράδειγμα 2.5. *Ας δούμε για παράδειγμα την First Price Auction ενός αντικειμένου σε n παίκτες. Θα δείξομε ότι ο μηχανισμός αυτός είναι $(1 - 1/e, 1)$-smooth*

Απόδειξη. Θεωρούμε αυθαίρετο valuation profile $v \in \times_i \mathcal{V}_i$ και έστω $h = \text{argmax}_i v_i$ ο παίκτης με το μεγαλύτερο valuation v_h. Θεωρούμε την εξής randomized bidding strategy των παικτών: Οι παίκτες δηλώνουν $b_i = 0$ εκτός από τον παίκτη h που επιλέγει τυχαία μια τιμή στο διάστημα $\left[0, \left(1 - \frac{1}{e}\right) v_h\right]$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{1}{v_h - x}$.

Έτσι, για κάθε (ντετερμινιστική) στρατηγική των παικτών (έστω $b_1, b_2, \ldots, b_n$) το utility των παικτών όταν οι παίκτες αποκλίνουν μονομερώς στην randomized στρατηγική που μόλις περιγράψαμε είναι:

$$
\begin{aligned}
\sum_i u_i^{v_i}(\mathbf{b}_i^*, b_{-i}) &= u_h^{v_h}(\mathbf{b}_i^*, b_{-i}) \\
&= \int_{\max_{i\neq h} b_i}^{(1-\frac{1}{e})v_h} (v_h - x) f(x)\ dx \\
&= \left(1 - \frac{1}{e}\right) v_h - \max_{i\neq h} b_i \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) v_h - \max_i b_i \\
&= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{e}\right)}_{\lambda} \cdot \mathrm{OPT}(v) - \underbrace{1}_{\mu} \cdot \sum_i P_i(b)
\end{aligned}
$$

□

2.4.3 Θεωρήματα Σύνθεσης

Στην περίπτωση που τα valuations των παικτών πάνω στους διαφορετικούς μηχανισμούς είναι XOS τότε μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.5 ([30, Theorem 5.1])**.** *Έστω μια παράλληλη σύνθεση m μηχανισμών όπου κάθε μηχανισμός $\mathcal{M}_j$ είναι (λ, μ)-smooth όταν τα valuations των παικτών προέρχονται από μια κλάση $(\mathcal{V}_i^j)_{i\in[n]})$. Αν το valuation $v_i : \mathcal{X}_i \to \mathbb{R}^+$ κάθε παίκτη είναι XOS μεταξύ των μηχανισμών (δηλαδή μπορεί να εκφραστεί με βάση συναρτήσεις $v_{ij}^l \in \mathcal{V}_i^j$) τότε και η γενικός μηχανισμός $\mathcal{M}$ είναι (λ, μ)-smooth.*

Εφαρμόζοντας αυτό το θεώρημα στο Παράδειγμα 2.5 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο μηχανισμός που εκτελεί m παράλληλες First Price Auctions m αντικειμένων σε n παίκτες (όταν οι παίκτες έχουν XOS valuations για τα αντικείμενα) είναι $(1 - 1/e, 1)$-smooth και συνεπώς έχει PoA $\leq \frac{e}{1-e}$.

Κεφάλαιο 3

Πολυπλοκότητα Επικοινωνίας

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια εισαγωγή στην Πολυπλοκότητα Επικοινωνίας (Communication Complexity — C.C.). Τα αποτελέσματά της, τα οποία περιλαμβάνουν κυρίως κάτω φράγματα, έχουν εφαρμογές σε πολλούς τομείς της Θεωρητικής Πληροφορικής και στη συγκεκριμένη εργασία θα μας φανούν χρήσιμα στην απόδειξη κάτω φραγμάτων για το Τίμημα της Αναρχίας ορισμένων υλοποιήσεων Συνδυαστικών Δημοπρασιών.

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα της θεωρίας αυτής είναι ότι τα αποτελέσματά της δεν εξαρτώνται από ανοικτές εικασίες σε αντίθεση με πολλά από τα αποτελέσματα της Θεωρίας Πολυπλοκότητας (ορισμένα εκ των οποίων βασίζονται για παράδειγμα στην εικασία $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$). Επιπλέον, οι ορισμοί που θα δώσουμε οδηγούν απευθείας στα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία που χρειάζονται για τη μελέτη τους, πράγμα που κάνει πολλές από τις αποδείξεις των βασικών θεωρημάτων να είναι εύκολο να πραγματοποιηθούν λεπτομερώς ακόμα και στο πλαίσιο αυτής της εργασίας.

Σκοπός του κεφαλαίου είναι να εισάγει τις έννοιες και τα εργαλεία που θα μας φανούν χρήσιμα στη συνέχεια και ως εκ τούτου δεν γίνεται αναφορά σε πολλά από τα σημαντικά θεωρήματα καθώς και στις εφαρμογές της θεωρίας αυτής. Για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπουμε στα [2, Κεφάλαιο 13], [16].

3.1 Το μοντέλο

Ο όρος Communication Complexity εισήχθει από τον Andrew Yao [33]. Ένα αντιπροσωπευτικό πρόβλημα με το οποίο ασχολείται η θεωρία αυτή είναι το ακόλουθο: Θεωρούμε δύο άτομα (παίκτες), την Αλίκη και τον Βασίλη, κάθε ένας από τους οποίους έχει στην κατοχή του έναν αριθμό των n bits (στο εξής θα αναφερόμαστε σε αυτούς τους αριθμούς ως η είσοδος του κάθε παίκτη). Συγκεκριμένα η Αλίκη διαθέτει το $x \in \{0,1\}^n$ και ο Βασίλης το $y \in \{0,1\}^n$. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσει τουλάχιστον ένας από τους δύο μια δίτιμη (boolean) συνάρτηση $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ γνωστή εκ των προτέρων και στους δύο η οποία εξαρτάται τόσο από το x όσο και από το y, ανταλλάσσοντας όσο το δυνατόν λιγότερη πληροφορία.

Μία προφανής λύση στο παραπάνω πρόβλημα θα ήταν να μεταδώσει η Αλίκη αυτούσια την είσοδό της στον Βασίλη κι έτσι αυτός να είναι πλέον σε θέση να υπολογίσει την τιμή της f. Η λύση αυτή απαιτεί τη μετάδοση n bits πληροφορίας όμως για αρκετές από τις ενδιαφέρουσες συναρτήσεις υπάρχουν λύσεις που απαιτούν τη μετάδοση πολύ λιγότερων bits. Στόχος του Communication Complexity είναι να δώσει *κάτω φράγματα* στην απαιτούμενη επικοινωνία μεταξύ των δύο παικτών για δεδομένες συναρτήσεις.

Το μοντέλο που μόλις περιγράφηκε αποτελείται από δύο παίκτες (**two-party**) και επιτρέπει την ανταλλαγή πληροφοριών και προς τις δύο κατευθύνσεις (**interactive**). Δεν είναι όμως το μοναδικό και στη βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορες παραλλαγές του (βλ. [2, Κεφάλαιο 13]). Ενδεικτικά αναφέρουμε τις παρακάτω:

- Η ύπαρξη άνω των δύο ατόμων οδηγεί στο μοντέλο **multi-party C.C.** στο οποίο θα αναφερθούμε εκτενέστερα στη συνέχεια.
- Αν επιτρέψουμε την ροή πληροφορίας μόνο προς τη μία κατεύθυνση (για παράδειγμα μόνο από την Αλίκη στο Βασίλη) τότε το μοντέλο ονομάζεται μονής κατεύθυνσης (**one-way**) και χρησιμοποιείται κυρίως σε κάτω φράγματα αλγορίθμων ροής δεδομένων (streaming algorithms).
- Ανάλογα με το είδος του πρωτοκόλλου/αλγορίθμου που επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουν οι παίκτες διακρίνονται σε: Ντετερμινιστικά (**Deterministic**), Μή-Ντετερμινιστικά (**Non-Deterministic**) και Τυχαιοποιημένα (**Randomized**) πρωτόκολλα.

Στη συνέχεια δίνουμε τυπικούς ορισμούς για τα δύο μοντέλα του Communication Complexity που θα μας φανούν χρήσιμα αργότερα.

3.1.1 Two-party, interactive C.C.

Σε αυτό το μοντέλο ο χώρος στον οποίο ανήκουν οι είσοδοι κάθε παίκτη αποτελείται από τις δυαδικές συμβολοσειρές μήκους n, δηλαδή $X = Y = \{0,1\}^n$. Όπως πριν, η Αλίκη έχει ως είσοδο κάποιο $x \in X$ και ο Βασίλης κάποιο $y \in Y$.

Ορισμός 3.1. Ένα *ντετερμινιστικό πρωτόκολλο* επικοινωνίας (ή αλλιώς *αλγόριθμος* επικοινωνίας) ορίζει τις εξής παραμέτρους (κάθε μία συναρτήσει των μηνυμάτων που έχουν ανταλλαχθεί μέχρι στιγμής):

- ποιός έχει σειρά να μιλήσει (να στείλει δηλαδή bits στον άλλο παίκτη).
- πότε η επικοινωνία πρέπει να σταματήσει.
- ποια τιμή υπολογίστηκε μετά το πέρας της ανταλλαγής μηνυμάτων.

Ορισμός 3.2. Η Πολυπλοκότητα Επικοινωνίας (CC) ενός πρωτοκόλλου $\mathcal{P}$ για τον υπολογισμό μίας συνάρτησης f ορίζεται ως:

$$\mathrm{CC}(\mathcal{P}) = \max_{x,y}\{\text{πλήθος bits που ανταλλάσσει η Αλίκη με τον Βασίλη}\}$$

Ορισμός 3.3. Η Πολυπλοκότητα Επικοινωνίας (CC) μίας συνάρτησης f ορίζεται ως η πολυπλοκότητα του καλύτερου πρωτοκόλλου για την f:

$$\mathrm{CC}(f) = \min_{\mathcal{P}} \mathrm{CC}(\mathcal{P})$$

Παράδειγμα 3.1. *Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση* Parity *η οποία αποφαίνεται αν το πλήθος των μονάδων που εμφανίζονται στα x, y είναι περιττός αριθμός. Ένα πρωτόκολλο γι' αυτή τη συνάρτηση θα ήταν το εξής: Η Αλίκη υπολογίζει το άθροισμα των μονάδων που εμφανίζονται στο x και κρατάει το υπόλοιπο του αθροίσματος* $\bmod 2$ *το οποίο ας ονομάσουμε a. Έπειτα στέλνει το αποτέλεσμα στον Βασίλη ο οποίος εκτελεί την ίδια διαδικασία στο y ώστε να πάρει το b. Τώρα ο Βασίλης απλά υπολογίζει την $f(x, y)$ ως $(a + b) \bmod 2$.*

Το παραπάνω πρωτόκολλο απαιτεί επικοινωνία 1 bit για κάθε πιθανό συνδυασμό από εισόδους συνεπώς η πολυπλοκότητά του είναι 1. Επίσης παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρξει πρωτόκολλο με λιγότερη επικοινωνία αφού χωρίς να γίνει ανταλλαγή πληροφορίας δεν μπορεί να υπολογιστεί η τιμή της f από μόνο έναν από τους δύο παίκτες. Συνεπώς $CC(\textsc{Parity}) = 1$.

Σημείωση 3.1. *Ας προσέξουμε ότι στο μοντέλο που θα μελετήσουμε δεν μας ενδιαφέρει καθόλου η υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων που θα χρησιμοποιούν η Αλίκη και ο Βασίλης. Το μόνο που έχει σημασία είναι το πλήθος των bits που θα πρέπει να ανταλλάξουν.*

3.1.2 Multi-party, interactive C.C.

Γενικεύοντας τα προηγούμενα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την boolean συνάρτηση $f : \{0,1\}^{n_1} \times \ldots \times \{0,1\}^{n_k} \rightarrow \{0,1\}$ η οποία εξαρτάται από k εισόδους $x_1, \ldots, x_k$ (συνήθως θα είναι $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$). Δύο από τα πιο ενδιαφέροντα μοντέλα για το παραπάνω πρόβλημα είναι τα εξής: Το **number-in-hand** (νούμερο-στο-χέρι) μοντέλο (NIH) όπου ο παίκτης i γνωρίζει *μόνο* τη δική του είσοδο x_i. Υπάρχει όμως και το **number-on-forehead** (νούμερο-στο-μέτωπο) μοντέλο (NOF) όπου κάθε παίκτης i *γνωρίζει όλα τα υπόλοιπα* x_j για $j \neq i$ εκτός από το δικό του.

Το μοντέλο NOF μελετάται κυρίως για τις εφαρμογές του στην Πολυπλοκότητα Κυκλωμάτων (Circuit Complexity) και δεν θα μας απασχολήσει στη συνέχεια. Αντιθέτως, το NIH μοντελοποιεί κατάλληλα τα προβλήματα που μας απασχολούν σε αυτή την εργασία, όπου δηλαδή ένας μηχανισμός θέλει να συμψηφίσει τις ιδιωτικές προτιμήσεις κάθε παίκτη και απαιτείται ανταλλαγή πληροφορίας μεταξύ των παικτών και του μηχανισμού.

Τα **ντετερμινιστικά** πρωτόκολλα ορίζονται όπως πριν (βλ. Ορισμό (3.1)) με την διαφορά ότι η επικοινωνία είναι *δημόσια*, δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε παίκτης γράφει το μήνυμα που θέλει να στείλει σε ένα πίνακα (blackboard) ο οποίος είναι προσβάσιμος από όλους. Οι ορισμοί (3.2), (3.3) γενικεύονται με προφανή τρόπο.

Ο ορισμός των **μη-ντετερμινιστικών** πρωτοκόλλων γίνεται ως εξής:

Ορισμός 3.4. Ένα *μη-ντετερμινιστικό πρωτόκολλο* επικοινωνίας αποτελείται από έναν prover ο οποίος γράφει στον πίνακα μία απόδειξη για το γεγονός ότι $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = y$. Οι παίκτες (verifiers) ελέγχουν, με βάση τη δική του είσοδο ο καθένας, ότι η απόδειξη είναι σωστή και αναλόγως την αποδέχονται ή την απορρίπτουν. Το πρωτόκολλο *αποδέχεται* αν και μόνο αν όλοι παίκτες αποδεχτούν την απόδειξη του prover.

Η **πολυπλοκότητα επικοινωνίας (CC)** ενός τέτοιου πρωτοκόλλου ορίζεται ως το μέγεθος της απόδειξης του prover.

Ο Ορισμός 3.3 ισχύει ως έχει και για μη-ντετερμινιστικά πρωτόκολλα.

Σημείωση 3.2. *Τα μη-ντετερμινιστικά πρωτόκολλα είναι πιο ισχυρά από τα ντετερμινιστικά: κάθε ντετερμινιστικό πρωτόκολλο μπορεί να μετατραπεί σε μη-ντετερμινιστικό διατηρώντας την ίδια πολυπλοκότητα επικοινωνίας με το να θεωρήσουμε ότι γράφονται στον πίνακα ως απόδειξη όλα τα μηνύματα τα οποία θα αντάλλασσαν οι παίκτες. Συνεπώς ένα κάτω φράγμα που αποδεικνύεται για μη-ντετερμινιστικά πρωτόκολλα θα ισχύει και για τα ντετερμινιστικά.*

Ένα δύσκολο πρόβλημα γι' αυτό το μοντέλο είναι το Multi-Disjointness το οποίο ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 3.5 (Multi-Disjointness)**.** Κάθε ένας από τους k παίκτες έχει μια είσοδο $x_i \in \{0,1\}^n$ την οποία μπορούμε να την ερμηνεύσουμε ως ένα σύνολο $S_i \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Το ζητούμενο είναι να διαφοροποιήσουν οι παίκτες τις εισόδους εκείνες που ανήκουν σε μία από τις παρακάτω κατηγορίες[1]:

(1) "Πλήρως ξένα μεταξύ τους": $S_i \cap S_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$.

(0) "Πλήρως επικαλυπτόμενα": $\bigcap_{i=1}^{k} S_i \neq \emptyset$.

Στην περίπτωση όπου η απάντηση για ένα σύνολο εισόδων είναι (0) τότε μία απόδειξη που θα μπορούσε να πείσει τους παίκτες για την απάντηση αυτή είναι να γράψει ο prover στον πίνακα το index i ενός στοιχείου που είναι κοινό για όλα τα σύνολα S_j. Εφόσον υπάρχουν n στοιχεία διαθέσιμα, απαιτούνται $\log_2 n$ bits για την αναπαράσταση του i.

Όπως θα δείξουμε όμως σε επόμενη ενότητα, στην περίπτωση όπου η έξοδος είναι (1) η επικοινωνία που απαιτείται είναι της τάξης των n/k bits στη χειρότερη περίπτωση κι αυτός είναι ο λόγος που χαρακτηρίσαμε το πρόβλημα «δύσκολο».

3.2 Τεχνικές απόδειξης κάτω φραγμάτων

Μελετάμε τώρα τεχνικές με τις οποίες μπορούμε να δείξουμε κάτω φράγματα στην πολυπλοκότητα επικοινωνίας διάφορων συναρτήσεων[2]. Ως παράδειγμα εφαρμογής των μεθόδων αυτών θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση EQ που αποφαίνεται για την ισότητα ή μη των δύο εισόδων της. Πιο τυπικά:

$$\mathrm{EQ}(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } x = y \\ 0 & , \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$

3.2.1 Σύνολα Εξαπάτησης

Έστω ένα πρωτόκολλο επικοινωνίας $\mathcal{P}$ και έστω $x, x' \in X$ και $y, y' \in Y$ με $(x, x') \neq (y, y')$ για τα οποία τα bits που ανταλλάσσουν η Αλίκη και ο Βασίλης όταν οι είσοδοί τους είναι (x, y) είναι ακριβώς τα ίδια με την περίπτωση που οι είσοδοί τους είναι (x', y'). Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι και για τις εισόδους $(x, y'), (x', y)$ τα bits που θα ανταλλάξουν οι παίκτες θα είναι πάλι ίδια.

Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή στο πλήθος των βημάτων του πρωτοκόλλου. Συγκεκριμένα, τα bits που θα στείλει η Αλίκη στο πρώτο βήμα εξαρτώνται μόνο από την είσοδό της άρα θα είναι τα ίδια ανεξάρτητα με το αν η είσοδός της είναι x ή x' (λόγω της υπόθεσης). Στο δεύτερο βήμα, ο Βασίλης θα βασίσει την απάντησή του στην είσοδό του και στα bits που έχει ήδη λάβει από την Αλίκη τα οποία είναι ανεξάρτητα της εισόδου της Αλίκης, και λόγω της υπόθεσης, ανεξάρτητα της εισόδου του Βασίλη άρα εκείνος θα στείλει τα ίδια bits στην Αλίκη κ.ο.κ. Συνεπώς και στις τέσσερις περιπτώσεις η επικοινωνία θα είναι ακριβώς η ίδια και έτσι αναγκαστικά η τιμή της f που θα υπολογίσουν θα είναι η ίδια: $f(x, y) = f(x', y') = f(x, y') = f(x', y)$.

Η παραπάνω παρατήρηση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αν βρούμε ένα σύνολο S από ζεύγη εισόδων (x_i, y_i) για τα οποία οι απαντήσεις που δίνει η f είναι ίδια σε όλα αυτά τα ζεύγη και ίση με b αλλά για τα ζεύγη της μορφής (x_i, y_j) με $i \neq j$ ισχύει $f(x_i, y_j) \neq b$ τότε οι γύροι που θα πρέπει να πραγματοποιηθούν ώστε να μην καταλήγουμε σε άτοπο λόγω της παρατήρησης είναι

[1]Προφανώς υπάρχουν και είσοδοι που δεν ανήκουν σε καμία από τις δύο κατηγορίες. Σε αυτή την περίπτωση δεν μας ενδιαφέρει πώς θα συμπεριφέρεται το πρωτόκολλο που λύνει το πρόβλημα.

[2]Τις τεχνικές που θα μελετήσουμε θα τις δούμε στο πλαίσιο των ντετερμινιστικών πρωτοκόλλων με δύο παίκτες αλλά επεκτείνονται εύκολα και σε μη-ντετερμινιστικά πρωτόκολλα ή και σε multi-party settings.

τουλάχιστον $\log_2|S|$. Γιατί αν υπήρχαν λιγότεροι γύροι τότε οι πιθανές ακολουθίες από bits που θα μπορούσαν να ανταλλάξουν οι δύο παίκτες θα είναι λιγότερες $2^{\log_2|S|} = |S|$ κι έτσι από την αρχή της περιστεροφωλιάς, υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά ζεύγη εισόδων $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ για τα οποία η επικοινωνία είναι η ίδια άρα λόγω της παρατήρησης και $f(x_i, y_j) = f(x_j, y_i)$. Άτοπο.

Τα παραπάνω αποδεικνύουν δηλαδή το εξής:

Λήμμα 3.1. *Έστω μια συνάρτηση $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ για την οποία υπάρχει ένα σύνολο εξαπάτησης (fooling set) μεγέθους M, δηλαδή υπάρχει σύνολο $S \subseteq \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n$ και μία τιμή $b \in \{0,1\}$ τέτοια ώστε:*

1. *Για κάθε $(x, y) \in S, f(x, y) = b$*
2. *Για κάθε δύο διαφορετικά ζεύγη $(x, y), (x', y') \in S$, είτε $f(x, y') \neq b$ είτε $f(x', y) \neq b$.*

Τότε ισχύει ότι $CC(f) \geq \log_2 M$.

Παράδειγμα 3.2. *Για τη συνάρτηση* EQ *υπάρχει το εξής σύνολο εξαπάτησης: $S = \{(x, x) : x \in \{0,1\}^n\}$. Ισχύει ότι $EQ(x, x) = 1$ αλλά ενώ $EQ(x', x') = 1$ (για κάποιο $x' \neq x$) εντούτοις $EQ(x, x') = 0$. Συνεπώς $CC(EQ) \geq \log_2|S| = \log_2 2^n = n$.*

Δηλαδή η Αλίκη και ο Βασίλης δεν μπορούν να αποφανθούν για την ισότητα ή μη των εισόδων τους χωρίς να ανταλλάξουν τουλάχιστον n bits. Έχοντας δείξει ότι για κάθε f έχουμε $CC(f) \leq n$ (με το να στείλει η Αλίκη όλη την είσοδό της στον Βασίλη) συμπεραίνουμε ότι $CC(EQ) = n$.

3.2.2 Μονοχρωματικά ορθογώνια

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην ίδια αρχή με την προηγούμενη γενικεύοντάς την με το να «κοιτάει» τη συνάρτηση f καθολικά (globally).

Ορισμός 3.6. Ο πίνακας $M(f)$ μιας συνάρτησης f είναι ένας $2^n \times 2^n$ πίνακας όπου στη θέση (x, y) περιέχει την τιμή $f(x, y)$.

Για παράδειγμα για την συνάρτηση EQ, $M(\mathrm{EQ}) = I_{2^n \times 2^n}$.

Ορισμός 3.7. Ένα *(συνδυαστικό) ορθογώνιο* (combinatorial rectangle) είναι ένας υποπίνακας του πίνακα $M(f)$ που περιλαμβάνει τις γραμμές $A \subseteq \{0,1\}^n$ και τις στήλες $B \subseteq \{0,1\}^n$. Θα λέμε ότι το ορθογώνιο $A \times B$ είναι *μονοχρωματικό* αν όλα τα στοιχεία του είναι ίσα.

Ορισμός 3.8. Μια *μονοχρωματική πλακόστρωση* (monochromatic tiling) του $M(f)$ είναι μια διαμέριση του $M(f)$ σε μονοχρωματικά ορθογώνια. Ο ελάχιστος αριθμός από μονοχρωματικά ορθογώνια που χρειάζονται για να να καλύψουν τον $M(f)$ θα συμβολίζεται με $\chi(f)$.

Ας δούμε πώς εκτελείται ένα πρωτόκολλο που υπολογίζει μια συνάρτηση f. Στον πρώτο γύρο η Αλίκη στέλνει ένα bit. Ανάλογα με το αν αυτό το bit είναι 1 ή 0, χωρίζουμε τον $M(f)$ σε δύο ορθογώνια. Εκείνα που οι είσοδος της Αλίκης είναι τέτοια ώστε στον πρώτο γύρο εκείνη να στείλει 1 και στα υπόλοιπα. Έπειτα, στον δεύτερο γύρο, το bit που θα στείλει ο Βασίλης χωρίζει το κάθε ορθογώνιο σε δύο άλλα. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο παρατηρούμε ότι μετά το πέρας της επικοινωνίας στην οποία ανταλλάχθησαν n bits, ο πίνακας $M(f)$ έχει διαμεριστεί σε 2^n ορθογώνια τα οποία επιπλέον είναι και μονοχρωματικά αφού για ίδιες ακολουθίες από bit που ανταλλάσσουν οι δύο παίκτες θα πρέπει να καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα.

Έχουμε λοιπόν ότι το ελάχιστο πλήθος bits που μπορούμε να ελπίζουμε ότι θα ανταλλάξουν η Αλίκη και ο Βασίλης φράσσεται από κάτω από το ελάχιστον πλήθος μονοχρωματικών ορθογωνίων με τα οποία μπορούμε να καλύψουμε τον $M(f)$, έχουμε δηλαδή το εξής Θεώρημα:

Θεώρημα 3.1. $CC(f) \geq \log_2 \chi(f)$

3.3 Κάτω φράγματα για την C.C. του προβλήματος Multi-Disjointness

Έχοντας στη διάθεσή μας τα εργαλεία που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα θα δείξουμε το εξής κάτω φράγμα για το πρόβλημα Multi-Disjointness (Ορισμός 3.5):

Θεώρημα 3.2. *Η **μη-ντετερμινιστική πολυπλοκότητα επικοινωνίας** του προβλήματος* Multi-Disjointness*, με k παίκτες και n bits εισόδου, είναι $\Omega(n/k)$.*

Η απόδειξη που θα κάνουμε ακολουθεί εκείνη του [20] και η οποία οφείλεται στους Jaikumar Radhakrishnan και Venkatesh Srinivasan.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον k-διάστατο πίνακα M(Multi-Disjointness). Κάθε θέση του πίνακα μπορεί να έχει είτε την τιμή 0, είτε την τιμή 1 είτε την τιμή $*$ όπου το τελευταίο σημαίνει ότι η είσοδος δεν ανήκει στις κατηγορίες (1), (0) και συνεπώς το πρωτόκολλο είναι ελεύθερο να δώσει ως έξοδο είτε 0 είτε 1. Όταν αναφερόμαστε σε μονοχρωματικά ορθογώνια στο εξής θα εννοούμε συνδυαστικά ορθογώνια που δεν περιέχουν 0 και 1 (μπορούν όμως να περιέχουν $*$).

Αρχικά μετράμε το πλήθος των άσσων στον M(Multi-Disjointness). Για να είναι πλήρως ξένα μεταξύ τους k σύνολα θα πρέπει για κάθε στοιχείο $i = 1, \ldots, n$ να εμφανίζεται το πολύ σε ένα από τα k σύνολα. Συνεπώς υπάρχουν $k+1$ επιλογές για κάθε αντικείμενο (είτε να εμφανιστεί σε κάποιο από τα k σύνολα είτε να μην εμφανιστεί καθόλου). Η ανάθεση κάθε αντικειμένου σε ένα από τα k σύνολα είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες συνεπώς το συνολικό πλήθος περιπτώσεων είναι $(k+1)^n$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχει γίνει μια μονοχρωματική πλακόστρωση στον M(Multi-Disjointness). Θα δείξουμε ότι κάθε 1-μονοχρωματικό ορθογώνιο $B = A_1 \times \ldots \times A_k$ έχει το πολύ k^n άσσους. Αυτό ισχύει γιατί για κάθε $i = 1, \ldots, n$, υπάρχει ένας δείκτης $1 \leq j \leq k$ τέτοιος ώστε όλα τα $S \in A_j$ να μην περιέχουν το στοιχείο i. Διότι έστω ότι υπήρχε i τέτοιο ώστε για κάθε j να υπάρχει $S_j^i \in A_j$ τέτοιο ώστε $i \in S_j^i$. Τότε $(S_1^i, S_2^i, \ldots, S_k^i) \in B$ αλλά $i \in S_j^i$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ το οποίο είναι άτοπο αφού τότε τα σύνολα είναι πλήρως επικαλυπτόμενα και η έξοδος θα έπρεπε να ήταν (0). Άρα κάθε (1)-είσοδος στο ορθογώνιο μπορεί να παραχθεί διαλέγοντας για κάθε αντικείμενο i το πολύ έναν από τους $k-1$ παίκτες που θα το αναθέσουμε (πρέπει να το αναθέσουμε το πολύ σε έναν ώστε να είναι (1)-είσοδος και πρέπει όπως είπαμε να υπάρχει ένας παίκτης που δεν θα του ανατεθεί το αντικείμενο i) άρα συνολικά υπάρχουν k^n πιθανές (1)-είσοδοι στο B.

Το μέγεθος της ελάχιστης πλακόστρωσης λοιπόν μπορεί να φραχθεί ως:

$$\chi(\textsc{Multi-Disjointness}) \geq \frac{(k+1)^n}{k^n} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 έχουμε[3]:

$$CC(\textsc{Multi-Disjointness}) \geq \log_2 \chi(\textsc{Multi-Disjointness}) \geq n \log_2 \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \Theta(n/k)$$

δηλαδή $CC(\textsc{Multi-Disjointness}) = \Omega(n/k)$. □

Σημείωση 3.3 ([13]). *Το παραπάνω θεώρημα ισχύει ακόμα και για randomized πρωτόκολλα με two-sided error.*

[3] Ισχύει $\log_a(1 + 1/x) = \Theta(1/x)$

3.4 Μη προσεγγισιμότητα του Welfare-Maximization

Το πρόβλημα στο οποίο θα επικεντρωθούμε σε αυτή την ενότητα είναι το εξής:

Πρόβλημα 1 (Welfare-Maximization($\mathcal{V}$))**.** *Υπάρχουν k παίκτες και ένα σύνολο M αποτελούμενο από m αντικείμενα. Κάθε παίκτης i χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση αξιολόγησης (valuation function) $v_i : 2^M \to \mathbb{R}_+$ η οποία ανήκει στην κλάση συναρτήσεων $\mathcal{V}$[4].*

Το ζητούμενο είναι να βρεθεί μία διαμέριση του συνόλου M σε σύνολα $T_1, T_2, \ldots, T_k$ έτσι ώστε να μεγιστοποιείται (πιθανώς προσεγγιστικά) η κοινωνική ωφέλεια (Social Welfare):

$$\sum_{i=1}^{k} v_i(T_i)$$

Το κίνητρο πίσω από τον ορισμό του Welfare-Maximization είναι οι Συνδυαστικές Δημοπρασίες. Στο πλαίσιο που μελετάμε όμως αυτό το πρόβλημα θα αγνοήσουμε προς το παρόν τα κίνητρα (incentives) των παικτών (θα επανέλθουμε όμως σε αυτό στο επόμενο κεφάλαιο) και θα εστιάσουμε στη δυσκολία του προβλήματος στην περίπτωση όπου οι παίκτες είναι πρόθυμοι να ακολουθήσουν ένα πρωτόκολλο που έχει συμφωνηθεί από πριν και επιπλέον είναι φιλαλήθεις. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η *προσέγγιση* του Welfare-Maximization με ικανοποιητικό λόγο προσέγγισης είναι «δύσκολη», απαιτεί δηλαδή εκθετική επικοινωνία (ως προς m και k).

Ο τρόπος που επιτυγχάνεται αυτό είναι στα πλαίσιο της Πολυπλοκότητας Επικοινωνίας είναι ο εξής: Αν θέλουμε να δείξουμε ότι ένα πρόβλημα δεν είναι k-προσεγγίσιμο υπό κάποιες συνθήκες περιορισμένης επικοινωνίας τότε αρκεί να δείξουμε ότι το αντίστοιχο πρόβλημα *απόφασης* είναι δύσκολο υπό τις ίδιες συνθήκες πιθανώς κάνοντας μια αναγωγή σε ήδη γνωστό πρόβλημα που είναι αδύνατο να λυθεί από τις ίδιες συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα, θα ορίσουμε παραμετρικά το πρόβλημα απόφασης που αντιστοιχεί στο Welfare-Maxization στο πλαίσιο της Πολυπλοκότητας Επικοινωνίας ως εξής:

Πρόβλημα 2 (Welfare-Maximization($\mathcal{V}, \alpha, \beta$))**.** *Θεωρούμε k παίκτες και ένα σύνολο M από m αντικείμενα. Ως είσοδο κάθε παίκτη θεωρούμε μία συνάρτηση αξιολόγησης $v_i \in \mathcal{V}$. Οι παίκτες καλούνται να αναγνωρίσουν σε ποια από τις παρακάτω δύο κατηγορίες ανήκουν τα v_i (υποθέτουμε ότι τους έχει δωθεί είσοδος η οποία είναι εξασφαλισμένο ότι θα ανήκει σε μία από τις κατηγορίες αυτές):*

(1) Κάθε κατανομή (allocation) αντικειμένων στους παίκτες έχει κοινωνική ωφέλεια το πολύ α.

(0) Υπάρχει κατανομή των αντικειμένων ώστε η κοινωνική ωφέλεια να είναι τουλάχιστον β.

Παρατήρηση 3.1. *Ένα κάτω φράγμα ως προς την Πολυπλοκότητα Επικοινωνίας του Προβλήματος 2 μεταφράζεται σε μη προσεγγισιμότητα του Προβλήματος 1 με λόγο προσέγγισης καλύτερο από $\frac{\beta}{\alpha}$ όταν η επικοινωνία είναι περιορισμένη από το εν λόγω κάτω φράγμα.*

Στη συνέχεια δείχνουμε τη δυσκολία του Προβλήματος 2 για κάθε μία από τις πιο ενδιαφέρουσες κλάσης συναρτήσεων αξιολόγησης. Οι ορισμοί των κλάσεων αυτών υπάρχουν στην ενότητα 2.2. Τα αποτελέσματα που ακολουθούν συνοψίζονται στον Πίνακα 3.1.

[4]Για να αποφύγουμε υπολογιστικά προβλήματα που μπορεί να προκύψουν αν υποθέσουμε ότι τα $v_i(T)$ αναπαρίστανται ως πραγματικοί αριθμοί, στο εξής θα υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι αυτά είναι ακέραιοι αριθμοί με μέγεθος περιγραφής πολυωνυμικό στα k, m.

3.4.1 Γενικές συναρτήσεις αξιολόγησης

Θεωρούμε την κλάση General με τις πιο γενικές συναρτήσεις αξιολόγησης. Απαιτούμε από τα v_i μόνο κάποιες πολύ βασικές ιδιότητες όπως:

1. *Κανονικοποίηση*: $v_i(\emptyset) = 0$.
2. *Μονοτονία*: $v_i(S) \leq v_i(T)$ οποτεδήποτε $S \subseteq T$.

Θεώρημα 3.3 ([20]). *Η Πολυπλοκότητα Επικοινωνίας του προβλήματος* Welfare-Maximization(General, $1, k$) *είναι* $e^{\Omega(m/k^2)}$.

Απόδειξη. Θα ανάγουμε το Welfare-Maximization(General, $1, k$) στο Multi-Disjointness. Θεωρούμε λοιπόν ότι το πρώτο μπορεί να λυθεί με πολυπλοκότητα επικοινωνίας $e^{O(m/k^2)}$ (με ντετερμινιστικό, μη-ντετερμινιστικό ή τυχαιοποιημένο πρωτόκολλο επικοινωνίας) και θα δείξουμε ότι σε αυτή την περίπτωση το Multi-Disjointness μπορεί να λυθεί με πολυπλοκότητα $O(m/k^2)$. Αυτό είναι άτοπο σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2 κι έτσι προκύπτει το ζητούμενο.

Πριν προχωρήσουμε στις λεπτομέρειες της αναγωγής, παραθέτουμε κάποιους χρήσιμους ορισμούς και ένα λήμμα το οποίο αποδεικνύουμε με χρήση της πιθανοτικής μεθόδου:

Ορισμός 3.9. Μια οικογένεια διαμερίσεων $P^1, \ldots, P^t$, όπου $P^j = (P_1^j, \ldots, P_k^j)$ μια διαμέριση των στοιχείων του M στους k παίκτες, ονομάζεται *επικαλυπτόμενη* (overlapping) αν για κάθε $i \neq i'$ και $j \neq j'$ ισχύει $P_i^j \cap P_{i'}^{j'} \neq \emptyset$.

Λήμμα 3.2. *Για κάθε $m, k \geq 1$, υπάρχει μια επικαλυπτόμενη οικογένεια διαμερίσεων $P^1, \ldots, P^t$ μεγέθους $t = e^{\Omega(m/k^2)}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο τυχαίες διαμερίσεις $P^j, P^{j'}$. Με τον όρο «τυχαίες» εννοούμε διαμερίσεις στις οποίες κάθε στοιχείο του M ανατίθεται σε ένα από τα k partitions ανεξάρτητα και με ομοιόμορφη πιθανότητα.

Η πιθανότητα δύο σύνολα $i \neq i'$ των διαμερίσεων $P^j, P^{j'}$ να έχουν κενή τομή είναι:

$$\mathbb{P}[P_i^j \cap P_{i'}^{j'} = \emptyset] = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^m \leq e^{-m/k^2}$$

Με χρήση Union Bound έχουμε:

$$\mathbb{P}[\exists i \neq i', j \neq j' \ : \ P_i^j \cap P_{i'}^{j'} = \emptyset] \leq k^2 t^2 e^{-m/k^2}$$

Συνεπώς για $t < \frac{1}{k} e^{m/(2k^2)}$ η πιθανότητα το τυχαίο πείραμα να αποτύχει (να μην παράγει την ζητούμενη οικογένεια) είναι μικρότερη του 1 και έτσι προκύπτει το ζητούμενο.

□

Προχωράμε τώρα στην αναγωγή. Αρχικά οι k παίκτες συμφωνούν σε μια επικαλυπτόμενη οικογένεια διαμερίσεων P, m στοιχείων (υπάρχει τέτοια σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα). Έστω $(S_1, \ldots, S_k), S_i \subseteq \{1, 2, \ldots, t\}$ μια είσοδος για το πρόβλημα Multi-Disjointness, όπου $t = e^{\Omega(m/k^2)}$. Κάθε παίκτης i φτιάχνει, με βάση την είσοδό του S_i και την οικογένεια διαμερίσεων P, την εξής συνάρτησης αξιολόγησης:

$$v_i(T) = \begin{cases} 1 & , \quad \exists j \in S_i : T \supseteq P_i^j \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και λύνουν το πρόβλημα Welfare-Maximization(General, 1, k) με αυτές τις συναρτήσεις αξιολόγησης (είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι αυτές οι συναρτήσεις ικανοποιούν τις προϋποθέσεις 1, 2 των General valuations, συγκεκριμένα η ιδιότητα 2 ισχύει επειδή η οικογένεια P είναι επικαλυπτόμενη, συνεπώς όλα τα P_i^j είναι μή κενά και έτσι $v_i(\emptyset) = 0$ αφού δεν γίνεται $\emptyset \supseteq P_i^j \neq \emptyset$). Θα δείξουμε ότι η έξοδος και στα δύο αυτά προβλήματα θα πρέπει να είναι η ίδια:

1. Αν η είσοδος στο Multi-Disjointness δίνει απάντηση (1) τότε και η αντίστοιχη είσοδος στο Welfare-Maximization(General, 1, k) θα δίνει απάντηση (1).

   Πράγματι, αν τα σύνολα S_i είναι ξένα μεταξύ τους τότε η κοινωνική ωφέλεια δεν μπορεί να είναι πάνω από 1. Γιατί αν ήταν ≥ 2 τότε θα υπήρχαν δύο σύνολα T_1, T_2 με $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ και $i \neq i'$ τέτοια ώστε $v_i(T_1) = v_{i'}(T_2) = 1$, δηλαδή $\exists j \neq j'$ τέτοια ώστε $T_1 \supseteq P_i^j, T_2 \supseteq P_{i'}^{j'}$ που σημαίνει ότι $P_i^j \cap P_{i'}^{j'} = \emptyset$. Άτοπο γιατί η οικογένεια P είναι επικαλυπτόμενη.

2. Αν η είσοδος στο Multi-Disjointness δίνει απάντηση (0) τότε και η αντίστοιχη είσοδος στο Welfare-Maximization(General, 1, k) θα δίνει απάντηση (0).

   Αν υπάρχει στοιχείο $r \in S_i$ για κάθε $1 \leq i \leq t$ τότε η εξής ανάθεση έχει κοινωνική ωφέλεια k: Δίνουμε στον παίκτη i τα αντικείμενα P_i^r. Πράγματι, για $T = P_i^r$ ισχύει $T \supseteq P_i^r$ και $r \in S_i$ άρα $v_i(P_i^r) = 1$ για κάθε παίκτη i.

□

Πόρισμα 3.1. *Η k-προσεγγισιμότητα του* Welfare-Maximization(General) *απαιτεί επικοινωνία* $e^{\Omega(m/k^2)}$.

3.4.2 Υποαθροιστικές συναρτήσεις αξιολόγησης

Από αλγοριθμικής σκοπιάς, το Πόρισμα 3.1 είναι ένα αρνητικό αποτέλεσμα αφού απαγορεύει μη-τετριμμένες προσεγγίσεις χωρίς εκθετική επικοινωνία. Μια προσπάθεια παράκαμψής του θα ήταν επιβάλλουμε κάποια πλουσιότερη δομή στις συναρτήσεις αξιολόγησης ελπίζοντας ότι τώρα η πληροφορία που θα πρέπει να μοιραστούν οι παίκτες με το μηχανισμό θα είναι σημαντικά λιγότερη. Δυστυχώς όμως όπως θα δείξουμε παρακάτω αυτό δεν ισχύει ακόμα και για *υποαθροιστικές συναρτήσεις*.

Ακολουθώντας την προηγούμενη απόδειξη και με μικρές παραλλαγές μπορούμε να δείξουμε ότι:

Θεώρημα 3.4 ([8], Θεώρημα 1.2)**.** *Η Πολυπλοκότητα Επικοινωνίας του* Welfare-Maximization(Subadditive, 1, 2) *είναι* $e^{\Omega(m/k^2)}$.

Απόδειξη. Τροποποιώντας τις συναρτήσεις αξιολόγησης της προηγούμενης απόδειξης:

$$v_i(T) = \begin{cases} 2 & , \quad \exists j \in S_i : T \supseteq P_i^j \\ 0 & , \quad T \neq \emptyset \\ 1 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ο αναγνώστης μπορεί να ελγξει ότι τα v_i είναι subadditive συναρτήσεις και ότι οι έξοδοι των Multi-Disjointness και Welfare-Maximization(Subadditive, 1, 2) είναι ίδιες για αντίστοιχες εισόδους. □

Πόρισμα 3.2. *Η 2-προσεγγισιμότητα του* Welfare-Maximization(Subadditive) *απαιτεί επικοινωνία* $e^{\Omega(m/k^2)}$.

3.4.3 XOS συναρτήσεις αξιολόγησης

Θεώρημα 3.5 ([8], Θεώρημα 4.2)**.** *Η προσέγγιση του* WELFARE-MAXIMIZATION(XOS) *με λόγο προσέγγισης καλύτερο από* $e/(e-1)$ *(για* $m, k \to \infty$*) απαιτεί επικοινωνία* $e^{\Omega(m/k^4)}$.

3.4.4 Submodular συναρτήσεις αξιολόγησης

Θεώρημα 3.6 ([9], Θεώρημα 1.1)**.** *Η προσέγγιση του* WELFARE-MAXIMIZATION(SUBMODULAR) *με λόγο προσέγγισης καλύτερο από* $2e/(2e-1)$ *(για* $m, k \to \infty$*) απαιτεί εκθετική επικοινωνία.*

Κλάση Συναρτήσεων	**Κάτω φράγμα προσεγγισιμότητας**
Γενικές	k [20]
Υποαθροιστικές	2 [8]
XOS	$e/(e-1)$ [8]
Submodular	$2e/(2e-1)$ [9]

Πίνακας 3.1: Κάτω φράγματα στο λόγο προσέγγισης του προβλήματος WELFARE-MAXIMIZATION για διάφορες κλάσεις συναρτήσεων αξιολόγησης (valuation function)

Κεφάλαιο 4

Κάτω φράγματα στο PoA υπό την παρουσία verification

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε ότι η προσέγγιση της κοινωνικά βέλτιστης λύσης στο πρόβλημα των Συνδυαστικών Δημοπρασιών (πρόβλημα Welfare-Maximization) δεν μπορεί να γίνει μέσα από «απλές» δημοπρασίες, χωρίς δηλαδή οι παίκτες να μοιραστούν ένα μεγάλο μέρος των ιδιωτικών τους προτιμήσεων ακόμα και για περιορισμένες συναρτήσεις αξιολόγησης. Ένα ερώτημα που παραμένει όμως είναι αν η δυσκολία αυτή μπορεί να ξεπεραστεί μεταφέροντας το βάρος από το πρωτόκολλο στους παίκτες, δηλαδή με το να αφήσουμε τους παίκτες να καταλήξουν σε μία ισορροπία με χαμηλό Τίμημα Αναρχίας.

Το ερώτημα αυτό δεν έχει προφανή απάντηση καθώς οι ισορροπίες είναι μια υπολογιστικά ισχυρή έννοια ([7], [4]) τουλάχιστον από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Όπως θα δούμε όμως παρακάτω, ο Tim Roughgarden στο [24] έδειξε ότι η κατάσταση είναι διαφορετική στη συγκεκριμένη περίπτωση και ότι τα κάτω φράγματα στο λόγο προσέγγισης λόγω πολυπλοκότητας επικοινωνίας μεταφράζονται σε κάτω φράγματα στο Τίμημα της Αναρχίας ορισμένων απλών δημοπρασιών (που απαιτούν μικρή ανταλλαγή πληροφοριών).

Ορμώμενοι από τη γραμμή έρευνας που μελετάει την χρησιμότητα της έννοιας του verification (βλ. Κεφάλαιο 2) προσπαθούμε στη συνέχεια να εξετάσουμε αν στο πλαίσιο των Συνδυαστικών Δημοπρασιών το verification είναι ικανό να παρακάμψει αυτά τα κάτω φράγματα και βελτιώσει το Τίμημα της Αναρχίας. Καταλήγουμε δίνοντας αρνητική απάντηση σε αυτό το ερώτημα.

4.1 Απλές Συνδυαστικές Δημοπρασίες

Επιστρέφουμε σε αυτή την ενότητα σε Δημοπρασίες όπου ο δημοπράτης θέλει να διαθέσει m αντικείμενα σε k παίκτες (ενότητα 1.2.2). Μία απλή ιδέα υλοποίησης που θα μπορούσε να σκεφτεί κάποιος θα ήταν να πουλήσει τα αντικείμενα διεξάγοντας m ανεξάρτητες δημοπρασίες (μία για κάθε αντικείμενο) την ίδια χρονική στιγμή (simultaneous) όπου σε κάθε μία δίνει το αντικείμενο στον παίκτη με την μεγαλύτερη προσφορά και τον χρεώνει την αξία της προσφοράς του. Στο εξής θα ονομάζουμε αυτό τον τύπο δημοπρασίας **simultaneous first-price auction (S1A)**:

Ορισμός 4.1. Σε μία S1A, κάθε παίκτης υποβάλει ένα διάνυσμα $\mathbf{b_i} = (b_i^1, \ldots, b_i^m) \in \mathcal{A}_i = \{0, 1, \ldots, V_{\max}\}^m$ [1] με τις προσφορές του για κάθε αντικείμενο. Έπειτα ο μηχανισμός εκτελεί μια

[1] Θεωρούμε ότι οι προσφορές (bids) των παικτών είναι περιορισμένες σε αυτό το διακριτό σύνολο μεγέθους $V_{\max} + 1 = \mathrm{poly}(k, m)$, αντί για το $\mathbb{R}$, ώστε το παίγνιο να είναι πεπερασμένο.

first-price auction για κάθε αντικείμενο j: Αναθέτει το αντικείμενο στον παίκτη $z = \text{argmax}_i b_i^j$ και τον χρεώνει b_z^j.

Η S1A χαρακτηρίζεται από την πλευρά του μηχανισμού ως «απλή» δημοπρασία με την έννοια ότι ο παίκτης δεν χρειάζεται να δώσει στον μηχανισμό ένα bid για κάθε συνδυασμό αντικειμένων (σε εκείνη την περίπτωση το action set του παίκτη θα ήταν διπλά εκθετικό στο m) αλλά ένα για κάθε αντικείμενο (action set απλά εκθετικό ως προς m). Είναι πιθανόν ότι από την πλευρά του παίκτη η δημοπρασία αυτή είναι πιο δύσκολη καθώς για να παίξει στρατηγικά θα πρέπει να ξέρει περισσότερες πληροφορίες για το πώς θα συμπεριφερθούν οι υπόλοιποι παίκτες.

Άλλες απλές υλοποιήσεις μπορούμε να παράγουμε αν αντί να πουλήσουμε τα αντικείμενα ταυτόχρονα τα πουλάμε το ένα μετά το άλλο ή αν αλλάξουμε τον κανόνα πληρωμής και δεν ζητάμε από τον νικητή κάθε γύρου να πληρώσει το bid του αλλά το δεύτερο μεγαλύτερο bid (όπως στο second price auction). Στα παρακάτω θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στα S1A και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1 θα δείξουμε ότι τόσο αυτές όσο και άλλες απλές δημοπρασίες που το σύνολο των ενεργειών κάθε παίκτη είναι πολύ περιορισμένο έχει Τίμημα Αναρχίας που φράσσεται από κάτω από την Πολυπλοκότητα Επικοινωνίας του προβλήματος βελτιστοποίησης που προσπαθεί να λύσει ο δημοπράτης διεξάγοντας την δημοπρασία.

Ορισμός 4.2. Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε μία δημοπρασία ως *απλή* θα εννοούμε ότι το σύνολο ενεργειών (action set) $\mathcal{A}$ κάθε παίκτη είναι υπο-διπλά-εκθετικό (sub-doubly-exponential) στα k, m. Πιο τυπικά αν υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε: $\log(\log(|\mathcal{A}|)) = p(k, m)$.

Με βάση αυτό τον ορισμό, η S1A όπως ορίστηκε παραπάνω είναι απλή δημοπρασία.

Για τις απλές δημοπρασίες, μπορούμε να δείξουμε το εξής αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 3:

Θεώρημα 4.1 ([24]). *Έστω μια κλάση $\mathcal{V}$ από συναρτήσεις αξιολόγησης και έστω ότι δεν υπάρχει μη-ντετερμινιστικό πρωτόκολλο με υποεκθετική (στα m, k) επικοινωνία για την αναγνώριση των (1)-εισόδων του προβλήματος* WELFARE-MAXIMIZATION$(\mathcal{V}, W^*/a, W^*)$ *(για αυθαίρετο W^*). Έστω επίσης $1/\epsilon$, κάτω φραγμένο από ένα πολυώνυμο των k, m.*

Τότε κάθε δημοπρασία με πλήθος ενεργειών (actions) κάθε παίκτη υπο-διπλά-εκθετικό (sub-doubly-exponential) (στα k, m) έχει PoA για τις ϵ-MNE ισορροπίες τουλάχιστον a.

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη:

Λήμμα 4.1 ([18]). *Για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε παίγνιο k παικτών και σύνολα ενεργειών (action sets) $A_1, \ldots, A_k$, υπάρχει μία ϵ-MNE ισορροπία με μέγεθος περιγραφής πολυωνυμικό στα $k, \log(\max_{i=1}^k |A_i|), \frac{1}{\epsilon}$.*

Έστω δημοπρασία k παικτών, m αντικειμένων με το πολύ A ενέργειες για κάθε παίκτη. Έστω επίσης $\epsilon > 1/p(k, m)$ όπου p πολυώνυμο. Θα δείξουμε ότι αν PoA $< a$ (για ϵ-MNE ισορροπίες) τότε το A θα πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλά εκθετικό στο m.

Έστω λοιπόν ότι A υπο-διπλά-εκθετικό στο m, άρα $\log(A)$ υποεκθετικό ως προς m, συνεπώς από το Λήμμα 4.1 προκύπτει ότι υπάρχει ϵ-MNE ισορροπία με μέγεθος περιγραφής υποεκθετικό ως προς m. Χρησιμοποιώντας αυτή την ισορροπία θα δείξουμε ότι το WELFARE-MAXIMIZATION$(\mathcal{V}, W^*/a, W^*)$ λύνεται με υποεκθετική επικοινωνία ως προς m το οποίο είναι άτοπο από τις υποθέσεις του θεωρήματος.

Μια απόδειξη που θα μπορούσε να δώσει ο prover ώστε να πείσει τους παίκτες ότι η έξοδος είναι (1), είναι μια περιγραφή $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ της ϵ-MNE ισορροπίας του Λήμματος 4.1. Εφόσον η έξοδος είναι (1), κάθε ισορροπία έχει κοινωνική ωφέλεια $W \leq W^*/a$ κι έτσι το ίδιο θα ισχύει και για την σ. Επίσης ο prover δίνει κι ένα διάνυσμα $(\mathbb{E}_{S\sim\sigma}[v_1(S)], \ldots, \mathbb{E}_{S\sim\sigma}[v_k(S)])$ με το αναμενόμενο όφελος κάθε παίκτη. Με αυτές τις πληροφορίες (υποεκθετικού μεγέθους), κάθε παίκτης i μπορεί να ελέγξει ότι το σ_i είναι όντως best response για τα σ_{-i} (εντός προσθετικού σφάλματος ϵ) και ότι το αναμενόμενο όφελός του είναι σωστά υπολογισμένο. Αν αν αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται τότε ο παίκτης αποδέχεται αν και μόνο αν η κοινωνική ωφέλεια $W = \Sigma_i \mathbb{E}_{S\sim\sigma}[v_i(S)]$ της ισορροπίας αυτής είναι $W \leq W^*/a$.

Είναι προφανές ότι αν η έξοδος είναι (1) τότε όλοι οι παίκτες αποδέχονται. Μένει να δείξουμε και ότι αν η έξοδος είναι (0), ο prover δεν μπορεί να δώσει απόδειξη για την οποία να αποδέχονται όλοι οι παίκτες. Κατ αρχάς αν το σ δεν αντιστοιχεί σε ισορροπία τότε θα έχει ανατεθεί σε τουλάχιστον έναν παίκτη μια στρατηγική που δεν είναι best response στους υπόλοιπους κι αυτός ο παίκτης θα απορρίψει. Έστω λοιπόν ότι ο prover δίνει την περιγραφή μίας ισορροπίας με κοινωνική ωφέλεια W. Έχουμε υποθέσει ότι $\text{PoA} < a \Rightarrow \frac{\text{OPT}}{\text{wrst. EQ}} < a$. Όμως $\text{OPT} > W^*$ και $(\text{wrst. EQ}) < W$ συνεπώς $\frac{W^*}{W} < \text{PoA} < a \Rightarrow W > \frac{W^*}{a}$, δηλαδή κανένας παίκτης δεν αποδέχεται. □

- **Γενικές συναρτήσεις αξιολόγησης**

  Συνδυάζοντας το Θεώρημα 4.1 με το Πόρισμα 3.1 έχουμε:

  Πόρισμα 4.1. *Για γενικές συναρτήσεις αξιολόγησης σε απλές δημοπρασίες ισχύει PoA* $\geq \min\{k, m^{(1/2)-\epsilon}\}$ *για* ϵ*-MNE ισορροπίες.*

- **Υποαθροιστικές συναρτήσεις αξιολόγησης**

  Συνδυάζοντας το Θεώρημα 4.1 με το Πόρισμα 3.2 έχουμε:

  Πόρισμα 4.2. *Για υποαθροιστικές συναρτήσεις αξιολόγησης σε απλές δημοπρασίες ισχύει PoA* ≥ 2 *για* ϵ*-MNE ισορροπίες.*

- **XOS συναρτήσεις αξιολόγησης**

  Συνδυάζοντας το Θεώρημα 4.1 με το Πόρισμα 3.5 έχουμε:

  Πόρισμα 4.3. *Για XOS συναρτήσεις αξιολόγησης σε απλές δημοπρασίες ισχύει PoA* $\geq e/(e-1)$ *για* ϵ*-MNE ισορροπίες.*

- **Submodular συναρτήσεις αξιολόγησης**

  Συνδυάζοντας το Θεώρημα 4.1 με το Πόρισμα 3.6 έχουμε:

  Πόρισμα 4.4. *Για submodular συναρτήσεις αξιολόγησης σε απλές δημοπρασίες ισχύει PoA* $\geq 2e/(2e-1)$ *για* ϵ*-MNE ισορροπίες.*

Συνοψίζουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στον Πίνακα 4.1 παραθέτοντας και αντίστοιχα upper bounds για την περίπτωση των S1A:

Παρατηρούμε ότι τα φράγματα που παίρνουμε από το Θεώρημα 4.1 είναι τις περισσότερες φορές tight με εξαίρεση τις submodular valuation functions. Με την τεχνική που χρησιμοποιήσαμε όμως δεν θα μπορούσαμε να έχουμε καλύτερο αποτέλεσμα αφού στο [32] αποδεικνύεται ότι υπάρχει πολυωνυμικό πρωτόκολλο (στα k, m) που προσεγγίζει το βέλτιστο welfare με λόγο προσέγγισης σχεδόν $e/(e-1)$. Παρ' όλα αυτά, το κάτω φράγμα που $2e/(2e-1)$ είναι χρήσιμο γιατί ισχύει όχι μόνο για τις S1A αλλά για κάθε δημοπρασία με υπο-διπλά-εκθετικό action set παικτών.

Κλάση	Κάτω φράγμα **PoA**	Άνω Φράγμα **PoA**
Γενικές	$\Omega(m^{(1/2)-\epsilon})$	$O(\sqrt{m})$ [30]
Υποαθροιστικές	2	2 [10]
XOS	$e/(e-1)$	$e/(e-1)$ [30]
Submodular	$2e/(2e-1) \simeq 1.225$	$e/(e-1) \simeq 1.582$ [30]

Πίνακας 4.1: Φράγματα στο Τίμημα της Αναρχία (Price of Anarchy) των S1A για κάθε μία από τις πιο ενδιαφέρουσες κλάσεις συναρτήσεων αξιολόγησης. Τα κάτω φράγματα ισχύουν για *κάθε* απλή δημοπρασία.

4.2 Verification

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2, η παρουσία ϵ-verification πολλές φορές δεν οδηγεί σε φιλαλήθεις υλοποιήσεις (βλ. υποενότητα 2.3.2). Είναι φυσικό λοιπόν να αναρωτηθούμε αν μπορεί αυτή ή κάποια άλλη έννοια verification να επιτύχει κάτι λιγότερο ισχυρό, να οδηγήσει σε ύπαρξη ισορροπιών στις οποίες οι παίκτες δεν αποκλίνουν πολύ από το να πουν την αλήθεια σχετικά με τις προτιμήσεις τους και συνεπώς η λύση του μηχανισμού να είναι αρκετά κοντά στη βέλτιστη όταν οι παίκτες λένε την αλήθεια.

Ως πρώτο πρόβλημα εφαρμογής της παραπάνω ιδέας εξετάζουμε τις Συνδυαστικές Δημοπρασίες και πιο συγκεκριμένα τις απλές υλοποιήσεις τους (όπως το S1A). Κατ' αρχάς σε αυτό το πρόβλημα το ϵ-verification είναι μία πιο φυσιολογική έννοια verification σε σχέση με τις υπόλοιπες που έχουν ορισθεί στη βιβλιογραφία, όπως εξηγούμε στη συνέχεια, καθώς οι προτιμήσεις των παικτών εμπεριέχουν εγγενώς μια ασάφεια.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα το παραπάνω ας θεωρήσουμε το πρόβλημα Facility Location όπου η ιδιωτική πληροφορία κάθε παίκτη είναι σαφώς καθορισμένη και είναι η θέση του σε κάποιο μετρικό χώρο. Επιπλέον, είναι τέτοια η φύση της ιδιωτικής πληροφορίας που μπορεί να ελεγχθεί από κάποιον τρίτο ακόμα και με μηδενικό σφάλμα με το να εξετάσει κάποιος αν ο παίκτης βρίσκεται όντως στη θέση που δήλωσε. Έτσι σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι εφαρμόσιμα στην πράξη διάφορα είδη verification εκτός από το ϵ-verification (asymmetric verification, selective verification [11] κ.λ.π.).

Εν αντιθέση, σε προβλήματα Συνδυαστικών Δημοπρασιών η ιδιωτική πληροφορία κάθε παίκτη είναι κάτι που όχι μόνο είναι δύσκολο να το ελέγξει με ακρίβεια ο σχεδιαστής του μηχανισμού αλλά συνήθως ούτε ο ίδιος ο παίκτης έχει μια σαφή περιγραφή της συνάρτησης αξιολόγησής του. Γι' αυτό το λόγο οι μέθοδοι verification που απαιτούν να μπορεί να ελέγξει ο μηχανισμός πληροφορίες που δηλώνουν οι παίκτες χωρίς περιθώριο σφάλματος είναι μη ρεαλιστικές. Επίσης, σε μία απλή υλοποίηση Συνδυαστική Δημοπρασίας, οι ενέργειες (actions) κάθε παίκτη δεν αποκαλύπτουν τη συνάρτηση αξιολόγησής του επομένως είναι δύσκολο να ορίσουμε τι σημαίνει να πει την «αλήθεια» ο παίκτης.

Παρ' όλα αυτά όμως, οι προτιμήσεις των παικτών συνήθως δεν είναι τυχαίες συναρτήσεις αξιολόγησης αλλά έχουν μια δομή που αντανακλά το γεγονός ότι ο παίκτης θέλει κάποια αντικείμενα ή συνδυασμό αντικειμένων περισσότερο από άλλα. Οδηγούμαστε λοιπόν στο να ορίσουμε μια έννοια verification που φαίνεται πιο ρεαλιστική από το ϵ-verification σε αυτό το πρόβλημα. Συγκεκριμένα το να μπορεί να ελέγχει ο μηχανισμός ότι οι δηλώσεις κάθε παίκτη είναι συνεπείς με κάποια συνάρτηση αξιολόγησης $v_j \in \mathcal{V}_i$ όπου $\mathcal{V}_i$ είναι η κλάση πιθανών συναρτήσεων αξιολόγησης του παίκτη i. Η $\mathcal{V}_i$ προκύπτει τόσο από εγγενείς περιορισμούς στη δομή της συνάρτησης (subadditive, submodular κ.λ.π.) αλλά και στη γνώση που έχει αποκτήσει ο μηχανισμός με τον έλεγχο του παίκτη i. Για παράδειγμα μπορεί ο μηχανισμός να είναι σε θέση να καταλάβει ότι ένας παίκτης είναι single-minded (ενδιαφέρεται δηλαδή για ένα μόνο αντικείμενο από τη δημοπρασία) κι έτσι να του απαγορεύσει να δηλώσει κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με αυτή την υπόθεση.

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια είναι αν αυτή η έννοια verification αλλά και γενικότερα οποιαδήποτε άλλη θα μπορούσε να ορίσει κανείς γι' αυτό το πρόβλημα μπορούν να οδηγήσουν σε ισορροπίες με καλύτερη επίδοση (χαμηλότερο Τίμημα Αναρχίας). Το Πόρισμα που ακολουθεί δείχνει ότι *οποιαδήποτε* έννοια verification σε απλές υλοποιήσεις Δημοπρασιών δεν μπορεί να ξεπεράσει τα εμπόδια που εισάγει το γεγονός ότι δεν ανταλλάσσεται αρκετή πληροφορία μεταξύ του μηχανισμού και των παικτών (Θεώρημα 4.1). Δηλαδή ο λόγος που δεν μπορούν οι παίκτες να βρουν μια ισορροπία με χαμηλό PoA δεν είναι ότι λένε «μεγάλα» ψέματα αλλά το ότι ο ίδιος ο μηχανισμός τους περιορίζει τόσο ώστε ακόμα και να ήταν φιλαλήθεις δεν θα μπορούσαν να αποκαλύψουν επαρκώς τις προτιμήσεις τους ώστε να δώσει ο μηχανισμός μια κοινωνικά βέλτιστη λύση.

4.2.1 S1A with verification

Ορισμός 4.3. Έστω μία S1A δημοπρασία όπου οι συναρτήσεις αξιολόγησης των παικτών αντλούνται από το σύνολο $\mathcal{V}$ (π.χ. $\mathcal{V} = \textsc{Submodular}$).

Έστω επίσης $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}$ για $i = 1, \ldots, n$ κλάσεις συναρτήσεων αξιολόγησης με $v_i \in \mathcal{V}_i$ για κάθε i. Η $\mathcal{V}_i$ είναι η κλάση στην οποία πιστεύει ο μηχανισμός ότι ανήκει η συνάρτηση αξιολόγησης του παίκτη i.

Τέλος, έστω συνάρτηση $f : \mathcal{V} \to 2^{\mathcal{B}^m}$ όπου $\mathcal{B} = \{0, 1, \ldots, V_{\max}\}$. Ο ρόλος της συνάρτησης f είναι να αντιστοιχεί σε κάθε τύπο παίκτη $v_i \in \mathcal{V}$ ένα σύνολο B_i με όλα τις πιθανές προσφορές (bids) $\mathbf{b_i} = (b_i^1, b_i^2, \ldots, b_i^m)$ που μπορεί να καταθέσει στο μηχανισμό ο παίκτης i όταν ο πραγματικός του τύπος είναι v_i.

Μια δημοπρασία όπου ο παίκτης i έχει action set $\mathcal{A}_i^{\text{ver}} = \mathcal{B}^m \cap \bigcup_{v \in V_i} f(v)$ θα την ονομάζουμε **S1A-V** (S1A with verification).

Το *Τίμημα της Αναρχίας* σε αυτή την περίπτωση ακολουθεί τον Ορισμό 2.8. Ο αριθμητής του κλάσματος υπολογίζεται ως η βέλτιστη τιμή του objective function (social welfare σε αυτή την περίπτωση) πάνω σε όλα τα strategy profiles των παικτών. Η βέλτιστη ανάθεση μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα strategy profile όπου ο παίκτης i κάνει bid μόνο στα αντικείμενα που λαμβάνει στη βέλτιστη λύση. Συνεπώς ένας απλοποιημένος ορισμός του Price of Anarchy είναι:

$$\text{PoA} = \frac{\text{OPT}}{\text{wrst. EQ}}$$

Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του S1A-V ότι:

Πόρισμα 4.5. *Το action set κάθε παίκτη σε μια S1A-V είναι υποσύνολο του action set του παίκτη αυτού στην αντίστοιχη S1A:* $\mathcal{A}_i^{ver} \subseteq \mathcal{A}_i = \mathcal{B}^m$.

Συνεπώς το μέγεθος του action set κάθε παίκτη μπορεί μόνο να μειωθεί με την προσθήκη verification και ως εκ τούτου τα Πορίσματα 4.1–4.4 μπορούν να αποδειχθούν με τον ίδιο τρόπο για την περίπτωση των S1A-V:

Πόρισμα 4.6. *Τα κάτω φράγματα που αναφέρονται στον Πίνακα 4.1 ισχύουν και στην περίπτωση των S1A-V για οποιαδήποτε* $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}, f : \mathcal{V} \to 2^{\mathcal{B}^m}$.

4.2.2 Γενίκευση

Από τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι η βασική ιδιότητα του verification που χρησιμοποιήσαμε είναι ότι μειώνει το μέγεθος του action set των παικτών. Η ιδιότητα αυτή ισχύει σε κάθε είδους verification:

Παρατήρηση 4.1. *Εν γένει, το verification είναι ο περιορισμός των δηλώσεων ενός παίκτη σε ένα υποσύνολο $\mathcal{A}_i^{ver} \subseteq \mathcal{A}_i$ που περιέχει μόνο τις δηλώσεις που θεωρούνται αποδεκτές από το μηχανισμό.*

Συνεπώς:

Πόρισμα 4.7. *Κάθε έννοια verification που ικανοποιεί την προηγούμενη παρατήρηση δεν μπορεί να ξεπεράσει τα κάτω φράγματα που προκύπτουν μέσω του Θεωρήματος 4.1.*

4.3 Ανοικτά προβλήματα και Κατευθύνσεις Έρευνας

- **Verification σε απλές δημοπρασίες**

  Για τις S1A, το Πόρισμα 4.7 δεν αφήνει περιθώριο βελτίωσης του PoA μέσω verification των Γενικών, των Υποαθροιστικών και των XOS valuations. Ανοικτό όμως παραμένει το ερώτημα αν μπορεί να βελτιώσει το PoA στην περίπτωση των *submodular συναρτήσεων* με το να υπάρξει.

  Ένας τρόπος να ξεπεράσουμε Πόρισμα 4.7 είναι με τη μελέτη διαφορετικών συναρτήσεων αξιολόγησης. Υπάρχουν αρκετά προβλήματα όπου οι παίκτες μπορούν να μοντελοποιηθούν με ακρίβεια μέσω ειδικότερων συναρτήσεων και από τις submodular. Για παράδειγμα σε δημοπρασίες φάσματος (spectrum auctions) τα αντικείμενα είναι άδειες εκπομπής σε μια δεδομένη συχνότητα και καλύπτουν μια δεδομένη γεωγραφική περιοχή. Οι bidders ενδιαφέρονται να αγοράσουν άδειες ώστε να μεγιστοποιήσουν την γεωγραφική τους κάλυψη. Πιο συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε με X_i τις πόλεις που ενδιαφέρεται ο παίκτης i να καλύψει μέσω των αδειών που θα αγοράσει και $A_{ij} \subseteq X_i$ τις πόλεις που καλύπτει η j-οστή άδεια, τότε ο παίκτης i αξιολογεί ένα σύνολο S από άδειες ως εξής:

  $$v_i(S) = \left| \bigcup_{j \in S} A_{ij} \right|$$

  Τέτοιου είδους συναρτήσεις αξιολόγησης ονομάζονται *coverage valuation functions* [26]. Κάθε coverage valuation function είναι submodular.

  Άλλο ένα ενδιαφέρον είδος valuation function είναι οι Budget Additive στις οποίες ο παίκτης έχει ένα budget και αξιολογεί τις αντικείμενα με additive τρόπο μέχρι να φτάσει το budget του όπου από εκεί και πέρα το valuation του παραμένει σταθερό και ίσο με B.

- **Verification και μη-φιλαλήθεις υλοποιήσεις άλλων μηχανισμών**

  Το πρόβλημα το οποίο αρχικά μας έδωσε το κίνητρο να μελετήσουμε τη χρησιμότητα του verification σε μη-φιλαλήθεις υλοποιήσεις είναι το facility location. Για αυτό το πρόβλημα όμως δεν υπάρχουν (εξ όσων γνωρίζουμε) γενικά εργαλεία για την ανάλυση των ισορροπιών του.

  Στο πλαίσιο των δημοπρασιών, μελετήσαμε υλοποιήσεις στις οποίες είχαμε περιορίσει το action space κάθε παίκτη σε ένα πεπερασμένο σύνολο (περιορίζοντας τα bids που μπορεί να υποβάλει στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, V_{\max}\}$ με $V_{\max} = O(\text{poly}(n, m))$). Ο περιορισμός αυτός φάνηκε χρήσιμος για 2 λόγους: 1) Επιτρέπει τη μελέτη της πολυπλοκότητας επικοινωνίας μιας λύσης και το οποίο στη συγκεκριμένη περίπτωση ήταν θεμελιώδες λόγω της προσέγγισής μας και 2) Καθιστά το παίγνιο που ορίζεται από την δημοπρασία *πεπερασμένο* με αποτέλεσμα να μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα του Nash περί ύπαρξης MNE ισορροπιών.

Στο facility location on a line με τοποθέτηση ≥ 2 facilities και με optimization objective το Social Welfare, είναι ανοικτά τα εξής προβλήματα:

- Η ύπαρξη ισορροπιών (pure ή mixed) υπό την παρουσία ϵ-verification στην άπειρη εκδοχή του facility location (η δήλωση κάθε παίκτη να είναι πραγματικός αριθμός $y_i \in (x_i - \epsilon, x_i + \epsilon)$ όπου x_i η πραγματική του θέση).
- Η ύπαρξη pure ισορροπιών στην πεπερασμένη εκδοχή του προβλήματος με ϵ-verification, όπου οι δηλώσεις κάθε παίκτη είναι περιορισμένες σε ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $(x_i - \epsilon, x_i + \epsilon)$.

  Δουλεύοντας προς τη συγκεκριμένη κατεύθυνση είχαμε εκτελέσει προσομοιώσεις σε ένα σύνολο από instances του προβλήματος και οι παρατηρήσεις μας υποδεικνύουν ότι η απάντηση στο ερώτημα είναι θετική. Παρόλα αυτά δεν έχουμε απόδειξη ακόμα.

  Ο λόγος που μας ενδιαφέρουν οι pure ισορροπίες είναι ότι σε πρώτο στάδιο διευκολύνουν την ανάλυση του PoA γνωστών μηχανισμών για το πρόβλημα εφόσον δεν έχουμε κάποιο γενικό εργαλείο στη διάθεσή μας για την ανάλυση αυτή.

Βιβλιογραφία

[1] Aaron Archer and Robert Kleinberg. "Truthful Germs Are Contagious: A Local to Global Characterization of Truthfulness". In: *Proceedings of the 9th ACM Conference on Electronic Commerce*. EC '08. Chicago, Il, USA: ACM, 2008, pp. 21–30. URL: http://doi.acm.org/10.1145/1386790.1386796.

[2] Sanjeev Arora and Boaz Barak. *Computational Complexity: A Modern Approach*. 1st. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2009.

[3] Ashwinkumar Badanidiyuru and Jan Vondrák. "Fast Algorithms for Maximizing Submodular Functions". In: *Proceedings of the Twenty-fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. SODA '14. Portland, Oregon: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014, pp. 1497–1514. URL: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2634074.2634184.

[4] Xi Chen, Xiaotie Deng, and Shang-Hua Teng. "Settling the Complexity of Computing Two-player Nash Equilibria". In: *J. ACM* 56.3 (May 2009), 14:1–14:57. URL: http://doi.acm.org/10.1145/1516512.1516516.

[5] George Christodoulou and Elias Koutsoupias. "Mechanism design for scheduling". In: *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (BEATCS)* 97 (Feb. 2009), pp. 39–59.

[6] Edward H. Clarke. "Multipart pricing of public goods". In: *Public Choice* 11.1 (1971), pp. 17–33. URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF01726210.

[7] Constantinos Daskalakis, Paul W. Goldberg, and Christos H. Papadimitriou. "The Complexity of Computing a Nash Equilibrium". In: *Proceedings of the Thirty-eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '06. Seattle, WA, USA: ACM, 2006, pp. 71–78. URL: http://doi.acm.org/10.1145/1132516.1132527.

[8] Shahar Dobzinski, Noam Nisan, and Michael Schapira. "Approximation Algorithms for Combinatorial Auctions with Complement-Free Bidders". In: *Math. Oper. Res.* 35.1 (Feb. 2010), pp. 1–13. URL: http://dx.doi.org/10.1287/moor.1090.0436.

[9] Shahar Dobzinski and Jan Vondrák. "Communication Complexity of Combinatorial Auctions with Submodular Valuations". In: *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. SODA '13. New Orleans, Louisiana: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013, pp. 1205–1215. URL: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2627817.2627904.

[10] Michal Feldman et al. "Simultaneous Auctions are (almost) Efficient". In: *CoRR* abs/1209.4703 (2012). URL: http://arxiv.org/abs/1209.4703.

[11] Dimitris Fotakis, Christos Tzamos, and Emmanouil Zampetakis. "Who to Trust for Truthfully Maximizing Welfare?" In: *CoRR* abs/1507.02301 (2015). URL: http://arxiv.org/abs/1507.02301.

[12] Dimitris Fotakis and Emmanouil Zampetakis. "Truthfulness Flooded Domains and the Power of Verification for Mechanism Design". In: *ACM Trans. Econ. Comput.* 3.4 (July 2015), 20:1–20:29. URL: http://doi.acm.org/10.1145/2790086.

[13] Andre Gronemeier. "Asymptotically Optimal Lower Bounds on the NIH-Multi-Party Information". In: *CoRR* abs/0902.1609 (2009). URL: http://arxiv.org/abs/0902.1609.

[14] Theodore Groves. "Incentives in Teams". In: *Econometrica* 41.4 (1973), pp. 617–631. URL: http://www.jstor.org/stable/1914085.

[15] Elias Koutsoupias and Christos H. Papadimitriou. "Worst-case equilibria". In: *Computer Science Review* 3.2 (2009), pp. 65–69. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.cosrev.2009.04.003.

[16] Eyal Kushilevitz and Noam Nisan. *Communication Complexity*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1997.

[17] J. K. Lenstra, D. B. Shmoys, and É. Tardos. "Approximation Algorithms for Scheduling Unrelated Parallel Machines". In: *Math. Program.* 46.3 (Feb. 1990), pp. 259–271. URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF01585745.

[18] Richard J. Lipton, Evangelos Markakis, and Aranyak Mehta. "Playing Large Games Using Simple Strategies". In: *Proceedings of the 4th ACM Conference on Electronic Commerce*. EC '03. San Diego, CA, USA: ACM, 2003, pp. 36–41. URL: http://doi.acm.org/10.1145/779928.779933.

[19] John F. Nash. "Equilibrium points in n-person games". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36.1 (1950), pp. 48–49. eprint: http://www.pnas.org/content/36/1/48.full.pdf. URL: http://www.pnas.org/content/36/1/48.short.

[20] Noam Nisan. "The Communication Complexity of Approximate Set Packing and Covering". In: *Automata, Languages and Programming: 29th International Colloquium, ICALP 2002 Málaga, Spain, July 8–13, 2002 Proceedings*. Ed. by Peter Widmayer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002, pp. 868–875. URL: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-45465-9_74.

[21] Noam Nisan and Amir Ronen. "Algorithmic Mechanism Design". In: *Games and Economic Behavior* 35.1-2 (2001), pp. 166–196. URL: http://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:gamebe:v:35:y:2001:i:1-2:p:166-196.

[22] Noam Nisan et al. *Algorithmic Game Theory*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007.

[23] Ariel D. Procaccia and Moshe Tennenholtz. "Approximate Mechanism Design Without Money". In: *ACM Trans. Econ. Comput.* 1.4 (Dec. 2013), 18:1–18:26. URL: http://doi.acm.org/10.1145/2542174.2542175.

[24] Tim Roughgarden. "Barriers to Near-Optimal Equilibria". In: *Proceedings of the 2014 IEEE 55th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. FOCS '14. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2014, pp. 71–80. URL: http://dx.doi.org/10.1109/FOCS.2014.16.

[25] Tim Roughgarden. "Intrinsic Robustness of the Price of Anarchy". In: *Proceedings of the Forty-first Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '09. Bethesda, MD, USA: ACM, 2009, pp. 513–522. URL: http://doi.acm.org/10.1145/1536414.1536485.

[26] Tim Roughgarden. *Lecture #10: Coverage Valuations and Convex Rounding*. 2014. URL: http://theory.stanford.edu/~tim/w14/l/l30.pdf (visited on 05/22/2017).

[27] Tim Roughgarden. *Lecture #2: Mechanism Design Basics*. 2013. URL: http://theory.stanford.edu/~tim/f13/l/l2.pdf (visited on 05/18/2017).

[28] David B. Shmoys, Éva Tardos, and Karen Aardal. "Approximation Algorithms for Facility Location Problems (Extended Abstract)". In: *Proceedings of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '97. El Paso, Texas, USA: ACM, 1997, pp. 265–274. URL: http://doi.acm.org/10.1145/258533.258600.

[29] Yoav Shoham and Kevin Leyton-Brown. *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008.

[30] Vasilis Syrgkanis and Éva Tardos. "Composable and Efficient Mechanisms". In: *CoRR* abs/1211.1325 (2012). URL: http://arxiv.org/abs/1211.1325.

[31] William Vickrey. "Counterspeculation, Auctions, and competitive sealed tenders". In: *The Journal of Finance* 16.1 (1961), pp. 8–37. URL: http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x.

[32] Jan Vondrak. "Optimal Approximation for the Submodular Welfare Problem in the Value Oracle Model". In: *Proceedings of the Fortieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '08. Victoria, British Columbia, Canada: ACM, 2008, pp. 67–74. URL: http://doi.acm.org/10.1145/1374376.1374389.

[33] Andrew Chi-Chih Yao. "Some Complexity Questions Related to Distributive Computing (Preliminary Report)". In: *Proceedings of the Eleventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '79. Atlanta, Georgia, USA: ACM, 1979, pp. 209–213. URL: http://doi.acm.org/10.1145/800135.804414.