



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Υπολογιστική ανάλυση της αλληλεπίδρασης ελικοπτέρου με στερεά όρια
Computational analysis of the interaction of helicopters with obstacles

Φοιτητής: Λεωνίδας Α. Θεοφιλόπουλος

Επιβλέπων: Βουτσινάς Σπυρίδων Καθηγητής,

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, ΕΜΠ

ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ 2016-2017

Αθήνα, Μάρτιος 2016

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα περισσότερα μεγάλα ή μικρά αστικά κέντρα αλλά ακόμα και εκτός αυτών, οι πτήσεις διάφορων ειδών ελικοπτέρων είναι πλέον καθημερινό φαινόμενο. Αρκετά συχνά, υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα ελικόπτερα πρέπει να πλησιάζουν όσο πιο κοντά στο έδαφος γίνεται ή να βρεθούν σε πολύ μικρή απόσταση από κάποιο κτήριο. Αυτή η ανάγκη έχει οδηγήσει στη μελέτη της συμπεριφοράς των ελικοπτέρων κάτω από αυτές τις συνθήκες, ή γενικότερα όταν βρίσκονται σε στερεά εμπόδια.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη και η ανάλυση της αλληλεπίδρασης ελικοπτέρου με στερεά όρια μέσω της χρήσης υπολογιστικού προγράμματος. Για την ανάλυση της ροής θα χρησιμοποιηθεί αριθμητικό πρότυπο βασισμένο στην μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (πλαισίων) σε συνδυασμό με την μέθοδο στοιχείων στροβιλότητας για την προσομοίωση του ομόρρου (πρότυπο ελεύθερου ομόρρου). Το πρότυπο αναπτύχθηκε στον τομέα ρευστών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και στο πρώτο στάδιο της μελέτης θα ερευνηθεί η ικανότητά του να προσομοιώσει την ιδιαίτερη φύση της γεωμετρίας που εξετάζουμε.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Το Τεχνολογικό Πρόβλημα

1.2 Ελικόπτερα

1.2.1 ΒΟ-105

1.3 Δυνατές Μέθοδοι Προσομοίωσης

1.3.1 Επισκόπηση Αριθμητικών Μεθόδων

1.3.2 Επισκόπηση Πειραματικών Μεθόδων

1.4 Ο Στόχος της Εργασίας

1.4.1 Η Επιλογή της Μεθόδου (δυνατότητες, καινοτομίες και μεθοδολογικά προβλήματα)

1.5 Διάρθρωση της Εργασίας

Κεφάλαιο 2: ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

2.1 Αεροδυναμικό Πρότυπο

2.1.1 Διατύπωση του Προβλήματος

2.1.2 Το Αριθμητικό Πρότυπο

2.1.3 Υπολογισμός των Αεροδυναμικών Δυνάμεων

2.2 Η Διακριτοποίηση του Προβλήματος

2.2.1 Εισαγωγή

- 2.2.2 Η Διακριτοποίηση της Γεωμετρίας ενός Σώματος
- 2.2.3 Οι Βαθμοί Ελευθερίας των Διανομών των Ιδιομορφιών στα Σώματα
- 2.2.4 Ο υπολογισμός του Δυναμικού και των Επαγόμενων ταχυτήτων των
 Διανομών Ιδιομορφιών
- 2.2.5 Η Κινηματική Συνθήκη Μη Εισχώρησης
- 2.2.6 Η Δυναμική Συνθήκη Kutta-joukowski
- 2.2.7 Η Διάρθρωση του Συστήματος Εξισώσεων του Προβλήματος
- 2.2.8 Η Αναπαράσταση του Φύλλου Στροβιλότητας
- 2.2.9 Η Αποβολή Στροβιλότητας από το Ακροπτερύγιο
- 2.2.10 Ο Υπολογισμός των Φορτίων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

3.1 Εισαγωγή

- 3.1.1 Ο Ρόλος της Συμπιεστότητας
- 3.1.2 Ο Ρόλος των Ελαστικών Παραμορφώσεων

3.2 Το Πείραμα του ONERA

3.3 Προσομοίωση της Πτήσης Αιώρησης

- 3.3.1 Η Χρήση Συμμετρίας
- 3.3.2 Οι Περιπτώσεις που Εξετάστηκαν

3.4 Η Φόρτιση του Δρομέα

3.5 Οι Πιέσεις στο Έδαφος και στον Τοίχο

3.6 Σύνοψη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

4.1 Επισκόπηση της Εργασίας και των Αποτελεσμάτων

4.2 Προτάσεις για Μελλοντική Εργασία

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Το τεχνολογικό Πρόβλημα

Η λειτουργία ενός δρομέα βασίζεται στην εναλλαγή ενέργειας, που γίνεται μεταξύ της ενέργειας του ρευστού που ρέει γύρω από αυτόν και του μηχανικού έργου που εμφανίζεται στην άτρακτό του. Η παρεχόμενη ροπή από ένα σύστημα ισχύος μετατρέπεται σε ωστική δύναμη, ή αντίστροφα, από μία ροή ρευστού δεσμεύεται κινητική ενέργεια αποδίδοντας ροπή σε ένα σύστημα ισχύος. Η χρήση και η εξέλιξη των δρομέων είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με ποικίλες τεχνολογικές εφαρμογές, παρέχοντας σημαντική συνεισφορά στην εξέλιξη του ανθρώπινου πολιτισμού. Η πρόωση αεροσκαφών και πλοίων, η μεταφορά θερμότητας, η άντληση ρευστών, αλλά και η παραγωγή ενέργειας, γίνονται με τη χρήση ελίκων, ανεμιστήρων, αντλιών, υδροστροβίλων και ανεμοκινητήρων.

Τα μη μόνιμα φαινόμενα στους δρομείς δημιουργούνται τόσο από την μεταβολή των λειτουργικών τους χαρακτηριστικών (μεταβολή στροφών, ρύθμιση βήματος, κλπ), όσο και από τη μεταβολή των συνθηκών ροής γύρω από αυτούς εξαιτίας της περιστροφής των κινητών τμημάτων τους και των μεταβολών του επερχόμενου πεδίου ταχυτήτων της ροής στην είσοδο του δρομέα. Αυτές οι μεταβολές εκδηλώνονται ως χρονική μεταβολή των ρευστομηχανικών χαρακτηριστικών του πεδίου ροής (ταχύτητα, πίεση) σε κάθε σημείο του συστήματος. Η διερεύνηση αυτών των φαινομένων αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για την κατανόηση της λειτουργίας του δρομέα και έχουν άμεση σχέση με την απόδοσή του.

Παρά τη διαφοροποίηση της γεωμετρίας και των λειτουργικών χαρακτηριστικών ενός δρομέα ως προς την τελική του εφαρμογή, είναι κοινές σε μεγάλο ποσοστό οι κατευθύνσεις προς τις οποίες τίθενται τα τεχνολογικά ερωτήματα που σχετίζονται με την συμπεριφορά του.

Πρωταρχικό ζητούμενο είναι η ενεργειακή απόδοση του δρομέα που αποτελεί το βασικό τεχνολογικό χαρακτηριστικό του. Σε κάθε τεχνολογική εφαρμογή τεχνοοικονομικοί αλλά και περιβαλλοντικοί περιορισμοί επιβάλλουν πλέον την διερεύνηση της ενεργειακής απόδοσης σε συνάρτηση με τον παράγοντα εξοικονόμησης ενέργειας ως βασική παράμετρο σχεδιασμού. Αυτή σαφώς καθορίζεται από την γεωμετρική της σχεδίαση σε συνδυασμό με τις συνθήκες λειτουργίας της. Ιδιαίτερη σημασία έχει η κατανόηση της ρευστοδυναμικής απόκρισης

του δρομέα σε ρεαλιστικές συνθήκες λειτουργίας. Αυτή είναι η βασική πληροφορία που ενδιαφέρει τον κατασκευαστή για τον έλεγχο της διαστασιολόγησης, την επιλογή των υλικών κατασκευής, καθώς επίσης και για το σχεδιασμό του κατάλληλου συστήματος (αυτόματου) ελέγχου και ρύθμισης της εξεταζόμενης τεχνολογικής εφαρμογής.

Στις περιπτώσεις δρομέων με πτερύγια που έχουν σημαντικό λόγο επί μήκους θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και τα φαινόμενα ελαστικής παραμόρφωσης των πτερυγίων, που σαφώς επηρεάζουν τη δυναμική συμπεριφορά του δρομέα. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να γίνεται εκτίμηση της αντοχής των πτερυγίων σε φαινόμενα κόπωσης με κατάλληλους αεροελαστικούς υπολογισμούς. Επίσης τίθενται ερωτήματα που αφορούν ειδικά προβλήματα δυναμικής των ρευστών, όπως η αποκόλληση της ροής, η εμφάνιση διφασικών ροών (φαινόμενο σπηλαίωσης), καθώς και άλλα χαρακτηριστικά μίας τεχνολογικής εφαρμογής που σχετίζονται με το πεδίο ροής, όπως η πρόλεξη του παραγόμενου αεροδυναμικού-ρευστοδυναμικού θορύβου (ακουστική πίεση). Η διαρκώς αυξανόμενη ευαισθησία σε θέματα ηχητικής ρύπανσης συχνά θέτει όρια, που οφείλει να πληρεί μία εγκατάσταση προκειμένου να γίνεται αποδεκτή. Το μεταβαλλόμενο πεδίο πιέσεων στην επιφάνεια ενός σώματος όπως αυτό προκύπτει μέσα σε ένα μη μόνιμο πεδίο ροής, αποτελεί την πηγή γένεσης ακουστικού πεδίου πιέσεων. Σε όλες τις περιπτώσεις των προβλημάτων που αναφέρθηκαν το αεροδυναμικό πρόβλημα αποτελεί τη βασική παράμετρο διέγερσης των διαφόρων φυσικών μηχανισμών.

Παραδοσιακά, η κατανόηση και επίλυση αυτών των προβλημάτων γίνεται μέσω παρατηρήσεων και πειραματικών μετρήσεων (σε πλήρη κλίμακα, ή σε κατάλληλη πειραματική διάταξη) που μάλιστα πρέπει να λαμβάνονται με συστηματικό τρόπο και για μεγάλο διάστημα, προκειμένου να εκτιμάται ξεχωριστά η σημαντικότητα κάθε σχεδιαστικής παραμέτρου μίας τεχνολογικής εφαρμογής. Όμως αν μαζί με τις απαιτήσεις χρόνου συνεκτιμηθεί και ο παράγοντας κόστους υλοποίησης της εφαρμογής, ιδιαίτερα σε ένα πρόβλημα όπου η αρχική προσέγγιση της λύσης του απέχει από τη βέλτιστη, τότε υποχρεωτικά στρεφόμαστε στα υπολογιστικά εργαλεία προσομοίωσης αυτών των προβλημάτων. Με την χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή (H/Y) μπορούν να γίνουν οι απαραίτητοι υπολογισμοί της συμπεριφοράς μίας έλικας σε ποικίλες, μη μόνιμες συνθήκες ροής, καθώς επίσης και η διερεύνηση, αξιολόγηση και βελτιστοποίηση διαφόρων παραμέτρων που καθορίζουν τους φυσικούς μηχανισμούς λειτουργίας της. Το τελικό στάδιο επιλογής των σχεδιαστικών και λειτουργικών παραμέτρων ενός δρομέα, είναι δυνατό να επιβεβαιώνεται και από πειραματικές μετρήσεις σε πρότυπα υπό κλίμακα, καθώς οι αριθμητικοί υπολογισμοί δεν μπορούν να υποκαταστήσουν το πείραμα και τις μετρήσεις.

Η αριθμητική προσομοίωση του ασυμπίεστου μη συνεκτικού πεδίου ροής γύρω από δρομέα γίνεται συνήθως με την αποσύζευξη του συνολικού προβλήματος σε τρία επί μέρους προβλήματα, το ρευστοδυναμικό το ελαστικό και το ακουστικό πρόβλημα. Το

κάθε πρόβλημα επιλύεται ξεχωριστά από τα άλλα με ένα ρητό σύστημα εξισώσεων, που όμως προβλέπει την επικοινωνία των οριακών συνθηκών μεταξύ των τριών προβλημάτων. Το αεροδυναμικό πρόβλημα της μη μόνιμης ροής γύρω από δρομείς έχει αντιμετωπιστεί στο παρελθόν με υπολογιστικά εργαλεία που συνδυάζουν τη θεωρία των λεπτών ανωστικών επιφανειών με τη μέθοδο των στοιχείων στροβιλότητας. Αυτός ο συνδυασμός μεθοδολογιών χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία στη μελέτη της αεροδυναμικής και αεροελαστικής λειτουργίας δρομέων ανεμοκινητήρων (Μπέλεσης 1998). Στο επίπεδο της ελαστοδυναμικής ανάλυσης επιλέγεται συνήθως η χρήση της μονοδιάστατης αναπαράστασης των πτερυγίων στα πλαίσια της θεωρίας δοκού. Η θεώρηση αυτή έχει χαμηλό υπολογιστικό κόστος και αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποτελεσματική εάν γίνει η κατάλληλη ολοκλήρωση των ελαστικών χαρακτηριστικών της σύνθετης διατομής σε μία μονοδιάστατη κατανομή κατά μήκος του πτερυγίου (*Belessis, Chassapoyiannis et al 2001*). Η θεωρία των λεπτών ανωστικών επιφανειών αποτέλεσε τη βάση σύνθετων εργαλείων ανάλυσης συμπλεγμένων προβλημάτων όπως της αεροακουστικής συμπεριφοράς δρομέων (Πόθου 1997) και της αεροελαστικής συμπεριφοράς του πλήρους συστήματος του ανεμοκινητήρα, όπου μπορούν να συνυπολογίζονται επιπλέον και οι αεροδυναμικές απώλειες στήριξης του δρομέα (Ριζιώτης 2003). Επίσης χρησιμοποιήθηκε με ικανοποιητικά αποτελέσματα στην αεροδυναμική και την αεροακουστική ανάλυση δρομέων ελικοπτέρων (Τριάντος 2002).

Σε όλες αυτές τις εργασίες η απάλειψη του πάχους έχει ως αποτέλεσμα την υποβάθμιση τόσο της αλληλεπίδρασης μεταξύ των στερεών σωμάτων, όσο και της αλληλεπίδρασης μεταξύ στερεών σωμάτων και στροβιλότητας, με συνέπειες που μπορούν να εντοπιστούν στην ακρίβεια υπολογισμού των πιέσεων. Στην περίπτωση των λεπτών ανωστικών επιφανειών ο υπολογισμός της κατανομής των πιέσεων πάνω στην πραγματική επιφάνεια του πτερυγίου γίνεται προσεγγιστικά καθώς όλα τα μεγέθη εκτιμώνται στη μέση επιφάνεια του πτερυγίου και στη συνέχεια χρειάζεται να επιλυθεί το αντίστοιχο δισδιάστατο πρόβλημα ροής γύρω από την αντίστοιχη αεροτομή με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες για το πεδίο ροής. Τα σφάλματα αυτών των προσεγγίσεων μπορεί να είναι ιδιαίτερα έντονα σε εφαρμογές όπως στην περίπτωση των ναυτικών ελίκων και των υδροστροβίλων, όπου ο λόγος επί μήκους (*aspect ratio*) είναι κοντά στη μονάδα και η επίδραση του πάχους είναι σημαντική. Ομοίως προσεγγιστική μπορεί να είναι και η πρόλεξη της αλληλεπίδρασης μεταξύ στερεών σωμάτων, όταν αυτά αναπαρίστανται ως λεπτές ανωστικές επιφάνειες, με σφάλμα που μεγιστοποιείται στην περιοχή όπου αυτά συνορεύουν. Για παράδειγμα στο ακροπτερύγιο ενός υδροστροβίλου, όπου το διάκενο μεταξύ των ακροπτερυγίων και του περιβάλλοντος τοιχώματος είναι της τάξης μεγέθους του πάχους στο ακροπτερύγιο, οπότε η ροή στην περιοχή αυτή χαρακτηρίζεται από έντονα τρισδιάστατα φαινόμενα αλληλεπίδρασης. Σαφώς η ρητή εισαγωγή του πάχους μπορεί να οδηγήσει στην ακριβέστερη προσομοίωση της ροής σε αυτή την περιοχή.

Στην κατεύθυνση διερεύνησης των δυνατοτήτων των μη-πλεγματικών μεθόδων εντάσσεται και το πρόβλημα της προσθήκης συνεκτικών διορθώσεων με τη μορφή ισχυρής αλληλεπίδρασης (*strong viscous in viscid interaction*) σε δρομείς. Κάτι τέτοιο

μπορεί να επιτευχθεί μόνο με τη λεπτομερή πρόλεξη της ισοδύναμης μη-συνεκτικής κατανομής πίεσης και προϋποθέτει την επίλυση της ροής γύρω από πραγματική γεωμετρία. Η επιλογή της μεθόδου όπως περιγράφηκε γίνεται με την προσδοκία ότι θα συμβάλει στην απάντηση των παραπάνω ερωτημάτων.

1.2 Ελικόπτερα

Το πρώτο σχέδιο που αναπαριστά μία πτητική μηχανή με τη δυνατότητα της αιώρησης καταγράφεται κάπου στο 15^ο αιώνα σε σχέδιο του *Leonardo Da Vinci* και βασίζεται σε μία διαπλατυσμένη έλικα του Αρχιμήδη, που περιστρεφόμενη παράγει άνωση, παρουσιάζοντας σημαντική ομοιότητα με το



Εικόνα 1.1 Η Πτητική Μηχανή του Leonardo da Vinci (1483)

σύγχρονο ελικόπτερο (Εικόνα 1.1). Ο *Leonardo da Vinci*, έχοντας αντιληφθεί ότι η πυκνότητα του αέρα είναι σημαντικά χαμηλότερη από αυτή του νερού, περιγράφει ότι απαιτείται μεγάλη διάμετρος έλικας προκειμένου να αναπτυχθεί η απαραίτητα για την πτήση άνωση.

Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα τοποθετούνται οι πρώτες επιτυχημένες προσπάθειες υλοποίησης αυτής της πρωτοποριακής ιδέας από διάφορους μηχανικούς (*George de Bothezat 1922, Corradino d'Ascanio 1930, Maitland Bleeker 1930, Nicolas Florine 1930*), ενώ η πρώτη επιτυχημένη πτήση ελικοπτέρου αποδίδεται στους *Louis Bregue* και *Rene Dorand (1935)* που διένυσαν 44Km σε 62min.

Τα πρώτα μοντέλα ελικοπτέρων μαζικής παραγωγής παρουσιάστηκαν από τους *Igor Sikorsky (R-4, 1941)* και *Bell Aircraft Corporation (Bell-30, 1942)* (Εικόνες 1.2, 1.3). Το τελευταίο μάλιστα αποτέλεσε τη βάση σχεδιασμού για το δημοφιλές *Bell-47*.

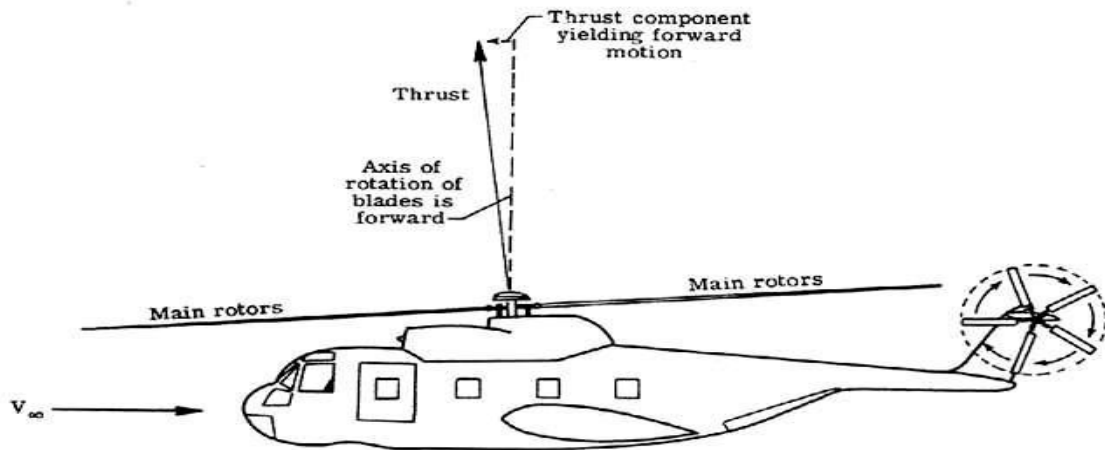


Εικόνα 1.2 Sikorsky R-4



Εικόνα 1.3 Bell-30.

Το ελικόπτερο σε σύγκριση με το παραδοσιακό πρότυπο αεροπλάνου, εκτός από τη δυνατότητα της οριζόντιας πτήσης, έχει και τις ιδιαίτερες δυνατότητες της οριζόντιας πτήσης με χαμηλή ταχύτητα, της κάθετης πτήσης και της αιώρησης. Αυτό είναι συνέπεια της βασικής αρχής λειτουργίας του που βασίζεται στην ανάπτυξη ώσης μέσω της περιστροφής ενός οριζόντιου δρομέα (του κυρίως δρομέα, “*main rotor*”) με διάμετρο της τάξης του μήκους της ατράκτου του. Το σημαντικότερο μέρος της αναπτυσσόμενης ώσης (“*Thrust*”) αντισταθμίζει το βάρος, ενώ ένα μικρό μέρος της (“*thrust component yielding forward motion*”) χρησιμοποιείται για την οριζόντια προώθησή του (Εικόνα 1.4).



Εικόνα 1.4 Η Βασική Αρχή Λειτουργίας του Ελικοπτέρου

Αυτές οι δυνατότητες διαφοροποιούν το ελικόπτερο από το αεροπλάνο εξασφαλίζοντάς του ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, που σχετίζονται τόσο με υπηρεσίες άμεσης παρέμβασης λόγω της δυνατότητας κάθετης απογείωσης-προσγείωσης, όσο και με υπηρεσίες επιτήρησης λόγω της δυνατότητας αιώρησης και μεταφορικής ταχύτητας με χαμηλή ταχύτητα. Έτσι εκτός από την στρατιωτική χρήση του ελικοπτέρου σε διάφορες μορφές (επιθετικό αεροσκάφος, μεταγωγικό κλπ) ανάλογα

με την επιτελούμενη αποστολή του, σήμερα χρησιμοποιείται ευρέως στις υπηρεσίες της ιατρικής περίθαλψης, της αστυνομίας, της πυροσβεστικής καθώς και ως ιδιωτικό μεταφορικό μέσο.

Το ελικόπτερο είναι μία σύνθετη κατασκευή στην οποία υπάρχουν διάφορα υποσυστήματα διέγερσης μηχανικών ταλαντώσεων όπως οι δρομείς, οι κινητήρες και τα συστήματα μετάδοσης κίνησης.

Η ανάλυση του πλήρους προβλήματος πτήσεως ενός ελικοπτέρου θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει την ταυτόχρονη αεροελαστική και αεροακουστική ανάλυση όλων αυτών των συστημάτων.

1.2.1 BO-105

Το *Bo-105*, που είναι το ελικόπτερο που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή τη διπλωματική, είναι ένα ελαφρύ, δικινητήριο, πολλαπλών χρήσεων ελικόπτερο που αναπτύχθηκε από την εταιρία *Bölkow* της Δυτικής Γερμανίας. Ήταν το πρώτο τόσο ελαφρύ δικινητήριο ελικόπτερο που φτιάχτηκε στον κόσμο, και το πρώτο ελικοφόρο που θα μπορούσε να εκτελεί ακροβατικούς ελιγμούς.



Εικόνα 1.5 A German-registered Bo 105

Το *Bo-105* διαθέτει ένα επαναστατικό σύστημα ρότορα, όπου εκείνη τη στιγμή ήταν μια πρωτοποριακή καινοτομία στον τομέα των ελικοπτερων. Εισήχθη σε υπηρεσία το 1970 και η παραγωγή του ξεκίνησε από την τότε προσφάτως συγχωνευμένη *Messerschmitt Bolkow-Blohm (MBB)*.

Οι κύριες εγκαταστάσεις παραγωγής του *Bo-105* βρίσκονταν στη Γερμανία και τον Καναδά, λόγω του επιπέδου των εξαγωγικών πωλήσεων που επικρατούσαν, αλλά στήθηκαν και επιπλέον γραμμές παραγωγής στην Ισπανία, την Ινδονησία και τις Φιλιππίνες. Η *MBB* έγινε μέρος της *Eurocopter* (τώρα *Airbus Helicopters*) το 1991, η οποία συνέχισε την παραγωγή του μοντέλου μέχρι το 2001. Το *Bo-105* εξελίχθηκε και αντικαταστάθηκε επίσημα στην παραγωγή της *Eurocopter* από το νέο *Eurocopter EC-135*.

Ιστορική εξέλιξη

Η παραγωγή του *Bo-105* ξεκίνησε στο *Bölkow* το 1964, αν και η κατασκευή για το ρότορα που θα χρησιμοποιούσε είχε αρχίσει νωρίτερα. Στις 16 Φεβρουαρίου 1967 η πρωτότυπη δεύτερη εκδοχή (*Bo-105A*) διεξήγαγε την παρθενική του πτήση στο *Ottobrunn* της Γερμανίας, ενώ η πρώτη δημόσια επίδειξη έγινε το Μάιο του 1967. Το πρόγραμμα δοκιμής αναλύεται σε στάδια, καθώς το *Bo-105* θα περιελάμβανε μία



Εικόνα 1.6 Offshore-configured Bo-105

νέα άτρακτο, νέο σύστημα ρότορα, και μια νέα μηχανή. Έτσι, το πρωτότυπο *Bo-105* εξοπλίστηκε με ένα κύριο ρότορα από την *Westland Helicopter's Scout* και τη δικινητήρια μηχανή *Model 250 turboshaft* από την *Allison* για να βελτιώσουν την παραγωγής τους. Η *Sud Aviation* συνεργάστηκε με την *Bölkow* για την ανάπτυξη του ελικοφόρου και ένα ελικόπτερο *Alouette II* τροποποιήθηκε ενσωματώνοντας τον δρομέα του *Bo-105* και χρησιμοποιήθηκε για τη δοκιμή και την αξιολόγηση της απόδοσής του. Το τρίτο πρωτότυπο του *Bo-105* ήταν εξοπλισμένο με τους αρχικούς στάνταρ κινητήρες *MAN Turbo 6022 turboshaft* και κατασκευάστηκαν συνολικά έξι προ-παρασκευαστικά *Bo-105* για να τεθούν προς δοκιμή.

Στις 13 Οκτωβρίου 1970 η Αρχή γερμανική Πολιτικής Αεροπορίας πιστοποίησε το *Bo-105* και λίγο αργότερα έγιναν και οι αρχικές παραδόσεις για τους πρώτους πελάτες (*ADAC Air Rescue*, κρατική αστυνομία της Βαυαρίας). Το 1972, περαιτέρω πιστοποίηση τύπου χορηγήθηκε από την Ομοσπονδιακή Διοίκηση Αεροπορίας (*FAA*) και της Υπηρεσίας Πολιτικής Αεροπορίας (ΥΠΑ), επιτρέποντας παραγγελίες για εξαγωγές από τις Ηνωμένες Πολιτείες και τη Βρετανία, αντίστοιχα, οι οποίες και πολύ σύντομα πραγματοποιήθηκαν. Το 1972, αναπτύχθηκε μια βελτιωμένη έκδοση του ελικοφόρου με πιο ισχυρούς κινητήρες, το *Bo-105C*, το οποίο και αντικατέστησε γρήγορα τον *Bo-105A*. Στις 25 Σεπτεμβρίου 1973, πραγματοποίησε την πρώτη του πτήση το πρωτότυπο *Bo-106* το οποίο είχε πολλές ομοιότητες με το *Bo-105*, και κύρια διαφορά ότι είχε διευρυμένη καμπίνα, ικανή να χωράει τρία άτομα στην πρώτη σειρά και τέσσερα στο πίσω μέρος της καμπίνας.

Το 1976, εισήχθη στην αγορά το *Bo-105CB*, που ήταν εξοπλισμένο με πιο ισχυρούς κινητήρες (*Allison 250-C20B*). Το *Bo-105C* αναπτύχθηκε περαιτέρω στο *Bo-105CBS*, η κύρια αλλαγή του οποίου ήταν η αύξηση του μήκους της άτρακτου κατά 10 ίντσες για να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις της Αμερικής για τις επιχειρήσεις της επείγουσας ιατρικής υπηρεσίας (*EMS*). Αυτή η έκδοση αναφέρεται συχνά στις Ηνωμένες Πολιτείες και ως *Bo-105 Twin Jet*. Η αμερικάνικη αεροδιαστημική εταιρεία *Boeing-Vertol* βοήθησε στην παραγωγή και την περαιτέρω ανάπτυξη του ελικοπτερού,

καθώς και στην προώθηση του *Bo-105* στην αγορά των ΗΠΑ. Οι παραλλαγές *Bo-105CB* και *Bo-105CBS* πήραν άδεια κατασκευής και ξεκίνησαν την παραγωγή τους από την *Philippine Aerospace Development Corporation* στις Φιλιππίνες, την *Indonesian Aerospace (IPTN)* στην Ινδονησία, και την *Construcciones Aeronáuticas SA (CASA)* στην Ισπανία σε συνεργασία με την κύρια γραμμή παραγωγής στη Γερμανία.

Το 1984, αναπτύχθηκε το *Bo-105LS* με τη διευρυμένη άτρακτο του *Bo-105CBS* σε συνδυασμό με την πιο ισχυρή δύναμη που πρόσφεραν οι κινητήρες *Allison 250-C28C* με αποτέλεσμα την αύξηση του μέγιστο βάρους απογείωσης, καθώς και τη βελτίωση των επιδόσεων της πτήσης. Το *Bo-105LS* κατασκευάστηκε σε συνεργασία με την *Eurocopter Canada*. Βελτιώσεις και τροποποιήσεις του *Bo-105LS* συνεχίστηκαν μέχρι το 1995.

Η παραγωγή του *Bo-105* από την *Eurocopter* έληξε επισήμως το 2001, αφού το ελικόπτερο είχε αντικατασταθεί από την καλύτερη εκδοχή του, το πιο σύγχρονο *Eurocopter EC-135*. Μέχρι το τέλος της παραγωγής, συνολικά 1.406 ελικοφόρα είχαν κατασκευαστεί και είχαν χρησιμοποιηθεί παγκοσμίως σε 55 διαφορετικές χώρες.

Το *Bo-105* έχει επιλεγεί από αρκετές χώρες για στρατιωτική χρήση. Η Ολλανδική Πολεμική Αεροπορία έχει συνολικά 30 ελικόπτερα.

Το 1975, οι ανάγκες του γερμανικού στρατού οδήγησαν στην κατασκευή του *Bo-105PAH-1s*, το οποίο ήταν αντιαρματικό και είχε τη δυνατότητα να σπλιστεί με μέχρι και έξι πυραύλους *Euromissile HOT*. Παραδόθηκαν προς χρήση συνολικά 212 *Bo-105PAH-1s* μεταξύ του 1979 και του 1984. Οι Γερμανοί ηγέτες του Στρατού αποφάσισαν όμως ότι η χρήση του *Bo-105PAH-1s* θα ήταν προσωρινή, καθώς ήταν απογοητευμένοι με την ανικανότητά του να εκτελεί νυχτερινές αποστολές, όπως συνάμα και με τις

ελάχιστες δυνατότητες αυτοπροστασίας που διέθετε,

και το αντικατέστησαν τελικά με το *Eurocopter Tiger*.

Το 1977, το Υπουργείο Άμυνας της Γερμανίας επέλεξε

το *Bo-105C* για τη χρήση του στο πρόγραμμα *light observation helicopter (VBH)*, οδηγώντας στην

απόκτηση άλλων 100 ελικοφόρων.



Εικόνα 1.7 Germany Army Bo-105, 1986

Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1970, εκδόθηκε άδεια για την παραγωγή του *Bo-105* από την *Indonesian Aerospace (IPTN)* ως μέρος μιας ευρύτερης συμφωνίας για να βοηθηθεί η ανάπτυξη της αερο-βιομηχανίας της Ινδονησίας. Το *Bo-105* έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορους κλάδους των Ινδονησιακών Εθνικών Ενόπλων Δυνάμεων και φέρεται να έχει χρησιμοποιηθεί και το 1999 τόσο στην κρίση του Ανατολικού Τιμόρ όσο και στη σύγκρουση με την Παπούα ενώ γενικά έχει επίσης συμμετάσχει σε πολλές κοινές ασκήσεις μεγάλης κλίμακας.

Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1980, το Μεξικανικό Ναυτικό χρησιμοποιεί μία σειρά από ένοπλα *Bo-105* για να εκτελέσουν καθήκοντά θαλάσσιας αναγνώρισης.

Για το λόγο αυτό προμηθεύονται και μια σειρά από περιπολικά πλοία που ήταν εξοπλισμένα για να υποδέχονται το *Bo-105* με σκοπό τη χρήση του σε επιχειρήσεις *off-shore*. Το 2005, ολοκληρώθηκε μια σειρά από αναβαθμίσεις σε 11 *Bo-105* του Μεξικανικού



Εικόνα 1.8 A Mexican Navy *Bo-105* onboard *USS Yorktown*, 2002

Ναυτικού, εξοπλίζοντάς τα με υπέρυθρους (*FLIR*) αισθητήρες, *Global Positioning System (GPS)*, ραντάρ αναζήτησης, νέα πτερύγια, πυλώνες εξοπλισμών, και άλλα αλλαγές. Τον Νοέμβριο του 2014, η *Jet Rescue Air Ambulance* εγκαινίασε το πρώτο ειδικό ελικοφόρο ασθενοφόρο πολιτικής αεροπορίας του Μεξικού το οποίο ήταν ένα *Bo-105*.

Κατά τα τέλη της δεκαετίας του 1990, η αεροπορία του Στρατού της Νότιας Κορέας προμηθεύεται μια σειρά από *Bo-105* ως μέρος μιας συνεχιζόμενης προσπάθειας με σκοπό τη βελτίωση της δύναμής της ως προς τις δυνατότητες αναγνώρισης και εποπτείας. Αυτά είχαν κατασκευαστεί βάσει μιας συμφωνίας συμπαραγωγής μεταξύ της Eurocopter και της νεοσύστατης *Korea Aerospace Industries (KAI)*, η οποία αλλά προώθησε επίσης και μοντέλα για τη μετακίνηση πελατών.

Το *Bo-105* έχει ευρεία χρήση και από ιατρικούς φορείς για επείγουσες ιατρικές υπηρεσίες (*EMS*). Το 1998, το περιοδικό *Flying Magazine* ανέφερε ότι το *Bo-105* και το *Kawasaki BK-117*(νεότερο ελικοφόρο που προέρχεται από το *Bo-105*), κατέχουν το 35% του μεριδίου αγοράς όλων των *EMS* παγκοσμίως. Το πρώτο *Bo-105* χρησιμοποιήθηκε από για ιατρικούς σκοπούς (*EMS*) στη Σκωτία το 1989 ενώ το Νοέμβριο του 2015 στη Βρετανία, αποσύρθηκε και το τελευταίο ασθενοφόρο *Bo-105*, αφού πλέον είχε αντικατασταθεί από το νεότερο *Eurocopter EC-135*. Το 2009, το τελευταίο *Bo-105* που έχει παραχθεί αγοράστηκε από την *Dam Helicopters(Canadian EMS specialist)*.

Τον Μάιο του 2014, η *Airbus Helicopter* ανέφερε ότι παγκοσμίως το *Bo-105* είχε συνολικά 8.000.000 ώρες πτήσης, και ότι περίπου 700 *Bo-105* χρησιμοποιούνται ακόμα.

1.3 Δυνατές μέθοδοι προσομοίωσης

Στην προσπάθεια μελέτης και ανάλυσης της αεροδυναμικής συμπεριφοράς ελικοπτέρων είτε σε πτήση ανόδου ή καθόδου, οριζόντια πτήση, ή πτήση αιώρησης όπως στη δική μου εργασία, με ή χωρίς φυσικά εμπόδια, και γενικά δρομέων σε μη μόνιμες καταστάσεις λειτουργίας, γίνεται διερεύνηση της βιβλιογραφίας προς δύο κατευθύνσεις.

Από τη μία καταγράφονται οι συνήθεις αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση αυτού του προβλήματος και από την άλλη επισημαίνονται οι φυσικοί μηχανισμοί και οι ιδιαιτερότητες των ροών αυτών όπως προκύπτουν από τις πειραματικές παρατηρήσεις.

Σαφώς οι μη μόνιμες συνθήκες λειτουργίας διαφοροποιούν καθοριστικά τα μέσα χρονικά φορτία, από όπου προκύπτει η ενεργειακή απόδοση μίας έλικας, αλλά και τη δυναμική απόκριση των πτερυγίων σε φαινόμενα κόπωσης που κατά συνέπεια χαρακτηρίζει την αξιοπιστία της διάταξης.

Οι πειραματικές εργασίες που αφορούν την αλληλεπίδραση των σωμάτων με στροβιλότητα εξετάζουν τον τρόπο που η ελεύθερη στροβιλότητα μεταφέρεται κατάντι μίας έλικας και αλληλεπιδρά με το πεδίο ροής ή προσπίπτει σε άλλο σώμα. Αυτό γίνεται με διάφορους μηχανισμούς που διακρίνονται σε μη συνεκτικούς και συνεκτικούς. Οι μη συνεκτικοί μηχανισμοί είναι μεγάλης και μεσαίας κλίμακας, μήκους τάξης μεγέθους της διαμέτρου της έλικας όπως η μεταβολή του πεδίου πιέσεων στην ακμή προσβολής και περιγράφονται ικανοποιητικά με μη πλεγματικές μεθοδολογίες. Οι συνεκτικοί μηχανισμοί είναι μικρής κλίμακας και αφορούν κυρίως τον τρόπο ανάπτυξης οριακού στρώματος στην επιφάνεια των σωμάτων, την αποκόλληση της ροής και τον τρόπο που η προσπίπτουσα στροβιλότητα διαφοροποιεί το οριακό στρώμα ενός πτερυγίου, απαιτούν δε, τη χρήση πλεγματικών μεθόδων.

1.3.1 Επισκόπηση αριθμητικών μεθόδων

Οι μεθοδολογίες που αναφέρονται στη βιβλιογραφία είναι δυνατό να αναπαριστούν σε διαφορετικό βαθμό λεπτομέρειας τη γεωμετρία των σωμάτων και την διαταραγμένη ροή, καθώς επίσης και να λαμβάνουν υπόψη ή όχι τρισδιάστατα φαινόμενα, φαινόμενα συνεκτικότητας και συμπίεστικότητας της ροής. Οι αριθμητικές μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης του πεδίου ροής διακρίνονται σε πλεγματικές και μη πλεγματικές, ανάλογα με το αν η περιγραφή του πεδίου ροής γίνεται με τη χρήση ενός τρισδιάστατου πλέγματος που καλύπτει ή όχι όλο το χώρο του πεδίου ροής.

Μη Πλεγματικές Μέθοδοι

Οι μη πλεγματικές μεθοδολογίες αναπαριστούν με σαφώς απλούστερη θεώρηση το πεδίο ροής ενός δρομέα και ιστορικά αποτέλεσαν τις πρώτες αριθμητικές που εφαρμόστηκαν. Το βασικό χαρακτηριστικό τους είναι ότι δεν απαιτούν την εφαρμογή ενός διακριτού πλέγματος που να καλύπτει όλο τον τρισδιάστατο χώρο του πεδίου ροής και στο οποίο να ικανοποιούνται οι βασικές εξισώσεις της μεθόδου.

(α) Η μέθοδος των Στοιχείων Πτερύγωσης (Blade Element Methods) και οι θεωρίες Δίσκου Ενέργειας, (Actuator Disk) και Γραμμής Άνωσης (Lifting Line Methods).

Σε αυτές τις μεθόδους ο δρομέας αναπαρίσταται είτε ως δίσκος ενέργειας, είτε μονοδιάστατα ως γραμμή άνωσης. Στο βασικό σύστημα εξισώσεων, που διαρθρώνεται σε κάθε περίπτωση, λαμβάνονται υπόψη οι μέσες τιμές των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των πτερυγίων και όχι η γεωμετρική τους λεπτομέρεια. Σύμφωνα με τη θεωρία δίσκου ενέργειας ο δρομέας θεωρείται ως δίσκος που ενεργεί πάνω στο ρευστό. Τα θεωρήματα διατήρησης της ορμής και της στροφορμής εφαρμόζονται σε κυλινδρικούς δακτυλίους απείρου μήκους, που έχουν σαν γενέτειρες ακτινικά τμήματα ενός πτερυγίου και η σύνδεση με το κινηματικό μέρος του προβλήματος γίνεται μέσω της μεθόδου των στοιχείων πτερύγωσης. Τα φορτία υπολογίζονται με δεδομένα τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά των αεροτομών που σχηματίζουν το πτερύγιο. Η μέθοδος αυτή είναι η παλαιότερη και απλούστερη. Εμπλουτιζόμενη με εμπειρικές σχέσεις είναι δυνατόν να συμπεριλάβει τις απώλειες των ακροπτερυγίων και να χρησιμοποιηθεί στη πρόλεξη μη μόνιμων ροών, ροών σε απόκλιση, αποκολλημένων ροών και ροών με τρισδιάστατα συνεκτικά φαινόμενα. Στη θεωρία γραμμής άνωσης το κάθε πτερύγιο προσομοιώνεται από ευθύγραμμους δινοσωλήνες σταθερής έντασης. Στην εφαρμογή της μεθόδου σε δρομείς ομοόρους σχηματίζεται από σπειροειδείς δινοσωλήνες ημίαπειρου μήκους. Και σε αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιείται η θεωρία των στοιχείων πτερύγωσης για τη σύνδεση για τη σύνδεση των υπολογισμών των φορτίων και των ταχυτήτων. Η διαφοροποίηση της μεθόδου από την προηγούμενη είναι ότι υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσα στα

στοιχεία της ππερύγωσης, που εισέρχεται μέσω των εξισώσεων των δινωσωλήνων του ομόρρου. Έτσι αναπαράγεται ένα σημαντικό μέρος του τρισδιάστατου χαρακτήρα της ροής. Η μέθοδος αυτή έχει εφαρμοστεί με επιτυχία σε υπολογισμούς φορτίων για δρομείς κάθε τύπου (αεροπορικούς, ανεμογεννητριών, ναυτικούς).

Το σημαντικό πλεονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι ότι έχοντας μικρές απαιτήσεις σε αριθμητικούς υπολογισμούς μπορούν να υπολογίζουν με ικανοποιητική ακρίβεια τις χαρακτηριστικές καμπύλες λειτουργίας του δρομέα. Τα μειονεκτήματα αυτών των μεθόδων εστιάζονται στο ότι χρησιμοποιούν πειραματικά και εμπειρικά δεδομένα και στο ότι δεν μπορούν να δώσουν λεπτομερή αποτελέσματα για την φόρτιση πάνω στην επιφάνεια των ππερυγίων και το πεδίο ροής κοντά σε περιοχές που εμφανίζονται έντονα τρισδιάστατα φαινόμενα.

Τα πρώτα σχέδια ελικοπτέρων στην δεκαετία του 1950 και 1960 βασίστηκαν σε αυτές τις μεθοδολογίες (*Glauert 1943; Fogarty and Sears 1950; Loewy 1957*). Τα πρότυπα αυτά εμπλουτιζόμενα με εμπειρικές και ημιεμπειρικές σχέσεις αποτελούν έως και σήμερα τα βασικά υπολογιστικά εργαλεία στο επίπεδο σχεδίασης των δρομέων ανεμοκινητήρων (*Schepers and Snel 1994; Schepers and Snel 1995; Voutsinas and Katopis 1996; Quarton 1998; Schepers 2001*).

(β) *Τρισδιάστατες στροβιλές μεθοδολογίες (Vortex Methods)*.

Στις μεθόδους αυτές επιλύεται η ασυμπύεστη μη συνεκτική ροή γύρω από σώματα που η γεωμετρία τους αναπαρίσταται με τρισδιάστατο πλέγμα (είτε στην πραγματική τους επιφάνεια, είτε στη μέση προσέγγισή της). Στο επιφανειακό πλέγμα των σωμάτων τοποθετούνται κατανομές ιδιομορφιών (πηγές, δίπολα). Η ροή αναπαρίσταται μέσω της συνάρτησης δυναμικού και τη βοήθεια των θεωρημάτων αναπαράστασης των *Helmholtz* και *Green*. Οι άγνωστες εντάσεις των ιδιομορφιών υπολογίζονται από την επίλυση μίας εξίσωσης *Laplace* για το δυναμικό με συνοριακές συνθήκες *Neumann* ή *Dirichlet*.

Όσον αφορά τον τρόπο αναπαράστασης των σωμάτων, στην πιο κλασσική τους εκδοχή οι μεθοδολογίες αυτές βασίζονται στη θεωρία της επιφάνειας άνωσης, όπου τα ππερύγια θεωρούνται λεπτές ανωστικές επιφάνειες και αναπαρίστανται από μία επιφανειακή διανομή δινωπλεγμάτων (*vortex lattice*). Η επίλυση του προβλήματος της ροής στην πραγματική επιφάνεια του σώματος γίνεται με την θεωρία των συνοριακών στοιχείων, όπου διακρίνουμε τις εκδοχές της άμεσης διατύπωσης (*Morino and Kuo 1974; Βουτσινάς 1990*) και της διατύπωσης πηγών- δίπολων (*Hess and Smith 1962; Hess 1972*), την οποία υλοποιεί η παρούσα εργασία.

Το αποβαλλόμενο φύλλο στροβιλότητας των ανωστικών σωμάτων αναπαρίσταται ως μία λεπτότοιχη επιφάνεια που καθορίζεται είτε από πλέγμα δινοπλεγμάτων (*nortex lattice*), είτε από στοιχεία στροβιλότητας (*vortex particles*). Είναι δυνατό να προσεγγιστεί με μεθόδους προδιαγεγραμμένου (*prescribed wake*), ή ελεύθερου ομόρρου (*free wake*). Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιώντας εμπειρικά ή πειραματικά δεδομένα ο ομόρρος αποτελείται από τμήματα δινοσωλήνων που ακολουθούν μία γεωμετρία με περιορισμένους βαθμούς ελευθερίας. Στην περίπτωση δρομέων πρόκειται για σπείρες όπου οι βασικοί βαθμοί ελευθερίας είναι η ακτίνα και το βήμα της σπείρας. Επιπλέον βαθμοί ελευθερίας περιγράφουν τον τρόπο αναδίπλωσης του ομόρρου σε περιοχές όπου παρουσιάζονται έντονα τρισδιάστατα φαινόμενα όπως στο ακροπτερύγιο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την απλοποίηση των υπολογισμών και την αποφυγή αριθμητικών ασταθειών. Στην δεύτερη περίπτωση ο ομόρρος είναι ελεύθερος και η γεωμετρία του καθορίζεται από την επίλυση των κινηματικών και δυναμικών εξισώσεων για την ελεύθερη στροβιλότητα. Αυτό έχει σαν συνέπεια την αύξηση των υπολογιστικών αναγκών της μεθόδου. Όμως ως αποτέλεσμα οι μεθοδολογίες αυτές μπορούν να αναπαράγουν καλύτερα τις σύνθετες δομές κατανομής στροβιλότητας που περιγράφουν τον τρισδιάστατο χαρακτήρα μίας δυναμικής μη μόνιμης ροής. Αυτό είναι και το σημαντικό πλεονέκτημα αυτών των μεθόδων, που ουσιαστικά περιορίζονται από τις υποθέσεις του ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού.

Πλεγματικές μέθοδοι

Σε προβλήματα περιστρεφόμενων δρομέων είναι δυνατή η εμφάνιση τόσο συνεκτικών φαινομένων, όπως λ.χ. η περίπτωση αποκόλλησης της ροής, όσο και φαινομένων συμπίεσότητας (κύμα κρούσης) που έχουν ως συνέπεια την σημαντική τροποποίηση της δυναμικής συμπεριφοράς του πτερυγίου. Στις μη πλεγματικές μεθοδολογίες τα φαινόμενα συμπίεσότητας παραμελούνται, ενώ τα φαινόμενα συνεκτικότητας εισάγονται σε ένα ποσοστό ως διορθώσεις.

Στις πλεγματικές μεθόδους το πεδίο ροής υπολογίζεται μέσω των εξισώσεων συνέχειας και ορμής και είναι δυνατή η αριθμητική προσομοίωση της πυκνότητας και της τυρβώδους συνεκτικότητας του ρευστού (με κατάλληλα μοντέλα τύρβης), ακόμα και η πρόλεξη του θερμοκρασιακού πεδίου του πεδίου ροής. Στην περίπτωση αυτών των μεθόδων ο χώρος του πεδίου ροής καλύπτεται από τρισδιάστατο πλέγμα, που κατά κανόνα πυκνώνει ακολουθώντας τις γεωμετρικές ασυνέχειες των σωμάτων, που περιλαμβάνονται σε αυτόν. Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πεδίο ροής επιλύονται στο εσωτερικό ενός διακριτού πεπερασμένου χωρίου, που αποτελεί μία κυψέλη του τρισδιάστατου πλέγματος, με κατάλληλες οριακές συνθήκες που και αυτές επικοινωνούν μεταξύ των γειτονικών κυψελών. Ανάλογα με το επίπεδο προσέγγισης των φυσικών μηχανισμών οι πλεγματικές μέθοδοι διακρίνονται στους επιλυτές *Euler* και *Navier-Stokes*.

Οι επιλύτες της πλήρους εξίσωσης του δυναμικού ουσιαστικά επιλύουν την εξίσωση *Laplace* του δυναμικού και χαρακτηρίζονται από το χαμηλό υπολογιστικό τους κόστος. Η επίλυση του πεδίου ροής με την επίλυση της πλήρους εξίσωσης του δυναμικού δεν προσομοιώνει συνεκτικούς μηχανισμούς καθώς και έντονα συμπιεστά φαινόμενα. Με τους επιλυτές Euler είναι δυνατόν να συμπεριληφθούν στην επίλυση του προβλήματος τα φαινόμενα συμπίεσότητας, ενώ οι επιλυτές *Navier-Stokes* επιλύουν το πλήρες πρόβλημα λαμβάνοντας υπόψη τόσο τη συμπίεσότητα όσο και την συνεκτικότητα του πεδίου ροής. Η εξέλιξη αυτών των μεθόδων σε προβλήματα στρεφόμενων δρομέων είναι διαρκής, μέσα στην τελευταία δεκαετία, παρά το γεγονός ότι η ανάπτυξη των σχημάτων διακριτοποίησης (*TVD*, *ENO*) καθώς και των μοντέλων τύρβης (κ-ε, *Baldwin-Lomax*) είχαν προηγηθεί σημαντικά. Σε αυτό συνέβαλε η εξέλιξη των υπολογιστών που μπορούν να παρέχουν πια την απαραίτητη υπολογιστική ισχύ που απαιτεί η εφαρμογή επιλυτών τέτοιου τύπου στην επίλυση πεδίων ροής ελίκων.

Τα βασικά προβλήματα που παρουσιάζονται στην εφαρμογή αυτών των επιλυτών σχετίζονται με την επιλογή των κλιμάκων χώρου και χρόνου που χρησιμοποιούνται για την διακριτοποίηση του προβλήματος, καθώς επίσης και με την επιλογή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών. Η κλίμακα μήκους λεπτομερών μηχανισμών, όπως η δημιουργία στροβίλου στο ακροπτερύγιο, η παραγωγή στροβιλότητας στο κύμα κρούσης, η περιοχή μετάβασης του οριακού στρώματος και το σημείο απώλειας στήριξης είναι τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερη της ακτίνας του δρομέα, ενώ το εξωτερικό σύνορο του πλέγματος είναι μεγαλύτερο κατά τέσσερις έως πέντε τάξεις μεγέθους. Αντίστοιχα μικρότερες τάξεις μεγέθους επιλέγονται και για την κλίμακα χρόνου σε σχέση με την περίοδο περιστροφής. Έτσι η διακριτοποίηση του χώρου και του χρόνου καθορίζει ποιοι μηχανισμοί και με ποια ποιότητα εμφάνισης θα προλεχθούν αριθμητικά, και καθορίζει το μέγεθος της αριθμητικής διάχυσης (*numerical dissipation*) της μεθόδου (που αναμένεται στην περιοχή του ομόρρου λόγω των μεγάλων κλίσεων στο πεδίο ταχυτήτων). Αυτό συνεπάγεται υψηλό υπολογιστικό κόστος, καθώς για την αναπαράσταση μίας σύνθετης γεωμετρίας σε μη μόνιμες συνθήκες ροής απαιτείται πλέγμα μεγάλων διαστάσεων. Τέλος οι πλεγματικές μέθοδοι παρουσιάζουν δυσκολία στην διαχείριση των πλεγμάτων στην περίπτωση σωμάτων που κινούνται ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Στην επίλυση των εξισώσεων *Navier-Stokes* σε τρισδιάστατο πεδίο ροής δρομέα η βασική μεθοδολογία παρουσιάζεται στη βιβλιογραφία, ως κώδικας *TURNS*, στην αρχή της δεκαετίας του 1990 (*Smivasan and Baeder 1992; Smivasan and Baeder 1993*) και αναφέρεται στο πρόβλημα αιώρησης ελικοπτέρου. Η μέθοδος αυτή εξελίχθηκε με την προσθήκη της τεχνικής *multi-block* και πλεγμάτων τύπου *Chimera* με στόχο την επίτευξη μικρότερης κλίμακας μήκους και εφαρμόστηκε σχετική κίνηση μεταξύ των πλεγμάτων κάνοντας δυνατή την προσομοίωση πεδίου οριζόντιας πτήσης ελικοπτέρου (*Ahamd and Duque 1994*). Αυτή η μεθοδολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως επιλυτής *Euler* σε δομημένα πλέγματα, ενώ η μέθοδος του *Stran* (*Stran and Barth 1993*) σε μη δομημένα πλέγματα. Στην βιβλιογραφία επίσης παρουσιάζονται αναφορές για την επίλυση του τρισδιάστατου μόνιμου πεδίου ροής

γύρω από ναυτικές έλικες με τη χρήση των εμπορικών επιλυτών *Navier-Stokes FINFLOW* και *STAR-CD* ((*Sanchez-Caja 1996*; *STAR-CD 1996*), ενώ μία εκτενής αξιολόγηση όλων των σχετικών επιλυτών *RANS* (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) σε αντίστοιχα προβλήματα γίνεται στα πλαίσια του 22^{ου} (*Workshop της ITTC (ITTC 1998)*).

1.3.2 Επισκόπηση Πειραματικών Μεθόδων

Στη συνέχεια εντοπίζονται αναφορές σε περιπτώσεις πειραματικής διερεύνησης της τρισδιάστατης ροής γύρω από δρομείς ελικοπτέρου καθώς αυτά τα προβλήματα θα αποτελέσουν την βάση αξιολόγησης της αριθμητικής μεθόδου που παρουσιάζεται.

Η διερεύνηση των φυσικών μηχανισμών στο πεδίο της ροής δρομέα ελικοπτέρου με πειραματικές μετρήσεις έχει παρελθόν περίπου δύο δεκαετιών και συμβαδίζει με την εξέλιξη των τεχνολογικών συνθηκών (αεροσήραγγες και τεχνικές μετρήσεων) για την πραγματοποίηση μετρήσεων υπό συνθήκες ομοιότητας (αριθμών *Much* και *Reynolds*). Τα περισσότερα πειράματα έχουν πραγματοποιηθεί σε διάταξη μεμονωμένου δρομέα ή διάταξη κυρίως δρομέα-ατράκτου (*Cansdale, Marshall et al. 1984*; *Imbert and Thibert 1984*; *Splettstoesser 1994*; *HELIFLOW 1996*), ενώ μόλις το 2001 ολοκληρώθηκε το πρώτο πείραμα σε αεροσήραγγα σε διάταξη πλήρους ελικοπτέρου (*HELIFLOW 1996*). Η βασική μέτρηση που πραγματοποιείται είναι της πίεσης σε συχνότητες λήψης περίπου 18KHz (*Gelhaar, Junker et al. 1993*), από όπου προκύπτουν χρονοσειρές πιέσεων σε συγκεκριμένες θέσεις της επιφάνειας του πτερυγίου, από την ολοκλήρωση των οποίων είναι δυνατόν να προκύψουν ολοκληρωμένα μεγέθη όπως ο συντελεστής κάθετης δύναμης, ο συντελεστής ώσης κλπ (*Splettstoesser and al 1993*; *HELIFLOW 1996*). Επίσης γίνεται δυνατή η μέτρηση των τριών συνιστωσών του διανύσματος της ταχύτητας με οπτική μέθοδο *LDV: Laser Doppler Velocimetry* (*Boutier, Lefevre et al. 1995*; *Seelhorst and Sauerland 1995*). Αυτά τα πειράματα είχαν ως πρωταρχικό σκοπό την αξιολόγηση των τεχνικών μετρήσεων, αλλά και της ίδιας της αεροσήραγγας σαν εργαλείο για την σχεδίαση των ελικοπτέρων, καθώς και τη δημιουργία βάσης πειραματικών μετρήσεων για την αξιολόγηση των υπολογιστικών μεθόδων.

1.4 Ο στόχος της εργασίας

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη και η αξιολόγηση μιας μεθοδολογίας για την ανάλυση της ρευστομηχανικής συμπεριφοράς αξονικού δρομέα ελικοπτέρου σε συνθήκες μη μόνιμης ροής και υποθέτοντας ότι το ρευστό είναι ασυμπιέστο και μη συνεκτικό, και ειδικά, στην περίπτωση όπου υπάρχουν στερεά

όρια, η μελέτη και η ανάλυση της αλληλεπίδρασής του ελικοπτέρου με αυτά. Δηλαδή να αξιολογήσουμε την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που μπορεί να δώσει το αριθμητικό πρότυπο όταν κληθεί να υπολογίσει πως αναπτύσσεται το πεδίο ροής του ρευστού γύρω από ένα αεροδυναμικό σώμα με τις γεωμετρικές ιδιαιτερότητες των διαμορφώσεων που μελετάμε.

1.4.1 Η Επιλογή της Μεθόδου (δυνατότητες, καινοτομίες και μεθοδολογικά προβλήματα)

Το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου βασίζεται στην οικογένεια των μη-πλεγματικών μεθόδων (*Lagrangian*) της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Η αναπαράσταση των σωμάτων γίνεται με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, όπου επιλύεται η εξίσωση *Laplace* για το βαθμωτό δυναμικό μέσω της αναπαράστασης πηγών-διπόλων (*Hess and Smith 1962, Hess 1972*) και συνδυάζεται με τη μέθοδο των στοιχείων στροβιλότητας (Βουτσινάς 1990) για την αναπαράσταση της ελεύθερης στροβιλότητας του πεδίου ροής. Με τον τρόπο αυτό επιλύεται το πεδίο ροής επακριβώς επάνω στην πραγματική επιφάνεια των σωμάτων. Όπως αποδεικνύεται, η μέθοδος αυτή παρέχει το πλεονέκτημα της ικανοποιητικής αναπαράστασης του τρισδιάστατου χαρακτήρα της ροής, μέσα από μία ευσταθή αριθμητική διαδικασία. Σε σύγκριση με τις πλεγματικές μεθόδους (*Euler, Navier-Stokes*) η μέθοδος που επιλέγεται χαρακτηρίζεται από την ευελιξία στην διαχείριση σωμάτων, που μπορεί να κινούνται ανεξάρτητα μεταξύ τους, και την εξασφάλιση οικονομίας σε χρόνο και μνήμη ηλεκτρονικού υπολογιστή (H/Y).

Το χαρακτηριστικό πλεονέκτημα της μεθοδολογίας που επιλέγεται είναι ότι δίνει τη δυνατότητα μελέτης του πεδίου ροής, μέσω της αναπαράστασης του δυναμικού Φ για το αστρόβιλο πεδίο ροής, γύρω από σώματα που μπορούν να κινούνται ανεξάρτητα μεταξύ τους και να αλληλεπιδρούν μέσω δυναμικών και στροβιλών μηχανισμών. Οι περιορισμοί της μεθόδου είναι σαφείς καθώς δεν εμπεριέχει τη δυνατότητα πρόλεξης συνεκτικών και συμπιεστών μηχανισμών, όπως η αποκόλληση της ροής, η εκτίμηση του οριακού στρώματος και η πρόλεξη κυμάτων κρούσης.

Στην εφαρμογή της μεθόδου παρουσιάζονται προβλήματα που αφορούν τη διαχείριση του αυξημένου αριθμού των στοιχείων που απαιτούνται για τη γεωμετρική αναπαράσταση των σωμάτων, αλλά και των στοιχείων στροβιλότητας, που μπορεί να αυξάνονται δραματικά σε σύγκριση με το χρόνο, ανάλογα με την εξεταζόμενη εφαρμογή. Στην ειδική περίπτωση όπου η σχετική θέση μεταξύ των στερεών σωμάτων δεν μεταβάλλεται χρονικά, είναι δυνατή η απλοποίηση του αρχικού συστήματος εξισώσεων. Επίσης είναι δυνατή η απλοποίηση των υπολογισμών όταν η απόσταση μεταξύ δύο στοιχείων γίνεται μεγάλη με διάφορες μεθοδολογίες (σημειακοί υπολογισμοί, χρήση πολυπλεγμάτων *multilevel*), ενώ τέλος μπορούν να εισαχθούν και μεθοδολογίες διαχείρισης της αποβαλλόμενης στροβιλότητας μέσω

της προβολής της σε χωρικό πλέγμα που περιβάλλει το πεδίο ροής όπως η μέθοδος *Particle-Mesh* (Πόθου 1997).

1.5 Διάρθρωση της Εργασίας

Στην παράγραφο αυτή γίνεται η εισαγωγή στην παρούσα εργασία με την παρουσίαση της διάρθρωσής της.

Η εργασία αυτή είναι χωρισμένη σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος (κεφάλαιο 2) γίνεται η περιγραφή της μεθόδου που χρησιμοποιείται ενώ στο δεύτερο (κεφάλαιο 3) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του υπολογιστικού εργαλείου που χρησιμοποιήθηκε για την διεκπεραίωση της εργασίας και οι συγκρίσεις τους με αντίστοιχα αποτελέσματα από ένα πείραμα (*ONERA*).

Πιο αναλυτικά στο πρώτο μέρος αρχικά γίνεται η αναλυτική παρουσίαση του πλαισίου πάνω στο οποίο βασίζεται η μέθοδος επίλυσης του γενικού προβλήματος της ροής γύρω από ανωστικό σώμα χωρίς πάχος και πρότυπο ελεύθερου ομόρρου. Η ροή γύρω από ένα τυχαίο σώμα, που αναπαριστάται με διανομές πηγών και διπόλων, επιλύεται με την εφαρμογή κινηματικών και δυναμικών συνθηκών (συνθήκη μη εισχώρησης της κάθετης ταχύτητας και εξίσωση πιέσεων στην ακμή εκφυγής). Το πρότυπο ομόρρου βασίζεται στη θεωρία φύλλων στροβιλότητας και η εξέλιξη του περιγράφεται από τις εξισώσεις του Helmholtz. Επίσης παρουσιάζεται ο τρόπος διακριτοποίησης των εξισώσεων του προβλήματος, γίνονται οι επιλογές για την διακριτή αναπαράσταση των παραμέτρων, επιλέγονται οι βαθμοί ελευθερίας και γράφονται οι εξισώσεις σε διακριτή μορφή έτσι ώστε να μπορούν να προγραμματιστούν άμεσα σε Η/Υ.

Στο δεύτερο μέρος εξετάζεται εκτενώς η αεροδυναμική συμπεριφορά δρομέα ελικοπτέρου που λειτουργεί σε μόνιμη συμμετρική ροή (πτήσης αιώρησης (*hover*)), είτε αυτό βρίσκεται μόνο του είτε περιστοιχίζεται από φυσικά εμπόδια-όρια, και συγκρίνονται αποτελέσματα από διάφορα ύψη πτήσης μεταξύ τους αλλά και με αντίστοιχα αποτελέσματα που λήφθηκαν από πειραματικά δεδομένα (*ONERA*).

Στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται η σύνοψη των συμπερασμάτων που εξάγονται από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν και αναφέρονται προτάσεις για την επέκταση της παρούσας μεθόδου.

Η εργασία ολοκληρώνεται με την παράθεση της σχετικής βιβλιογραφίας.

2 ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

2.1 Αεροδυναμικό Πρότυπο

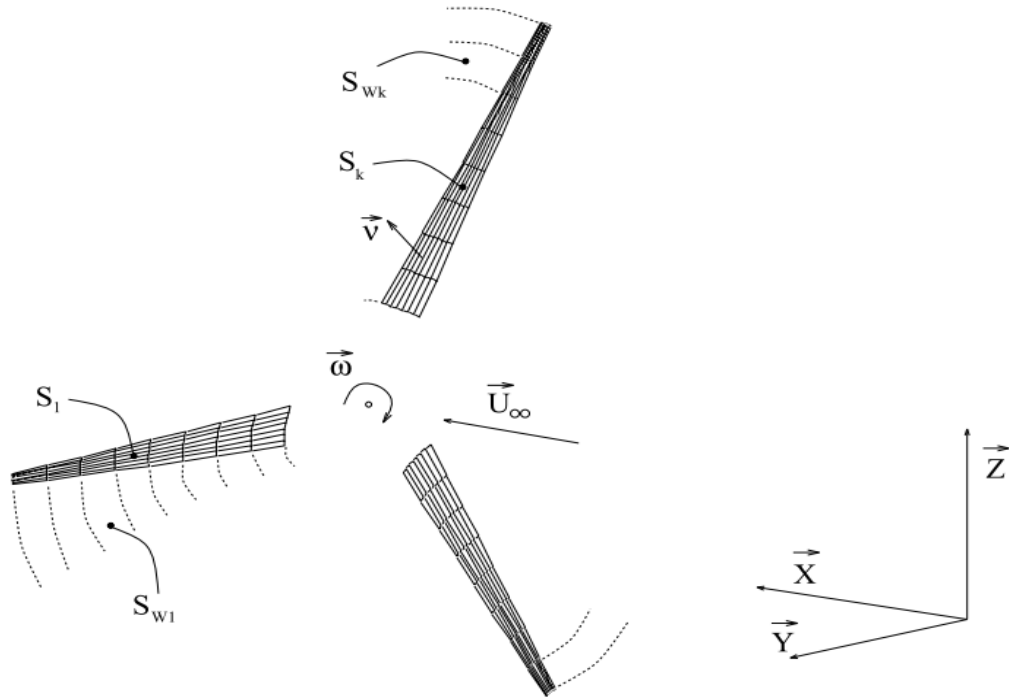
Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει παρουσίαση της μεθόδου στοιχείων στροβιλότητας που χρησιμοποιήθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας για την αεροδυναμική ανάλυση των υπό μελέτη πτερυγών. Το υπολογιστικό πρότυπο που βασίζεται στην μέθοδο αυτή ονομάζεται *GENUVP* και έχει αναπτυχθεί στο Τομέα Ρευστών του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου στο πλαίσιο διπλωματικών εργασιών και διδακτορικών διατριβών (Μπελέσης (1999)). Το πρότυπο έχει αξιολογηθεί εκτενώς σε σχέση με μετρήσεις σε δρομείς Ανεμογεννητριών, τόσο σε συνθήκες κανονικής λειτουργίας όσο και για μεταβατικά ακραία φαινόμενα, στο πλαίσιο των παραπάνω εργασιών και άλλων σχετικών δημοσιεύσεων [*Voutsinas, Belessis and Rados (1994)*, *Voutsinas, Riziotis and Chaviaropoulos (1997)*, *Chassapoyiannis et al (1994)*, *Voutsinas 1995*, Βουτσινάς κ.α. (1996)]. Ως εκ τούτου ο αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες αυτές για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με την επιλογή των αριθμητικών παραμέτρων και την αξιολόγηση των υπολογιστικών τους δυνατοτήτων. Σημειώνεται ότι το πρότυπο *GENUVP* είναι από τα λίγα που χρησιμοποιούν τα στοιχεία στροβιλότητας και χρησιμοποιούνται σήμερα στο χώρο καθώς είναι ιδιαίτερα αξιόπιστο σε ότι αφορά τα αποτελέσματα που παράγει. Αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι ακολουθεί τη λογική του ελεύθερου ομόρρου και όχι του παγωμένου ή προδιαγεγραμμένου.

Στις μεθοδολογίες ελεύθερου ομόρρου, επιλύεται το πρόβλημα της ασυμπίεστης μη συνεκτικής ροής γύρω από τον πτέρυγα ή τον δρομέα. Το πεδίο ταχύτητας μέσω του θεωρήματος του Helmholtz διαχωρίζεται σε ένα τμήμα προερχόμενο από δυναμικό, το οποίο αναπαρίσταται μέσω της δεύτερης ταυτότητας του *Green*, από διανομές ιδιόμορφων σημείων πάνω στην επιφάνεια του πτερυγίου και σε ένα στροβιλό τμήμα το οποίο εκφράζει την ταχύτητα που επάγει ο ομόρρος. Η στροβιλότητα του ομόρρου προσεγγίζεται από ένα πλήθος ελεύθερα κινουμένων στοιχείων στροβιλότητας, η ένταση και η θέση των οποίων προσδιορίζεται από την επίλυση των δυναμικών κινηματικών εξισώσεων για την ελεύθερη στροβιλότητα. Το πτερύγιο στον υπολογισμό εισάγεται είτε ως λεπτή ανωστική επιφάνεια, είτε ως πτέρυγα με πάχος.

2.1.1 Διατύπωση του Προβλήματος

Θεωρείται η μη μόνιμη ροή ασυμπίεστου και μη συνεκτικού ρευστού γύρω από συνδυασμό N_B τρισδιάστατων σωμάτων B_k με όρια S_k , $k = 1, N_B$. Κάθε ένα από τα σώματα μπορεί να είναι είτε ανωστικό, είτε μη ανωστικό. Τα ανωστικά σώματα πάντοτε θα παράγουν ομόρρου. Για την περιγραφή της ροής χρησιμοποιείται σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Όλες οι ποσότητες της ροής υπολογίζονται και αναφέρονται σε αυτό το σύστημα. Θεωρούμε επίσης $D \in R^3$ το πεδίο ροής γύρω από τον δρομέα, S το σύνορό του και \vec{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο S . Η παρουσία των ανωστικών σωμάτων B_k στο πεδίο ροής D έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ομόρρου ο οποίος απελευθερώνεται σε κάθε χρονικό βήμα από τις γραμμές αποβολής στροβιλότητας (emission lines). Η επιφάνεια του ομόρρου λαμβάνεται ως ενεργή στην ανάλυση που πραγματοποιούμε, οπότε αν SW_k , με $K=1, N_B$ οι επιφάνειες των φύλλων στροβιλότητας που αποβάλλονται από τα N_B σώματα και \vec{v}_{wk} τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα σε αυτές, είναι φανερό ότι :

$$\partial D \equiv S = \bigcup_{k=1}^{N_B} S_k + \bigcup_{k=1}^{N_B} S_{Wk} \quad (2.1.1)$$



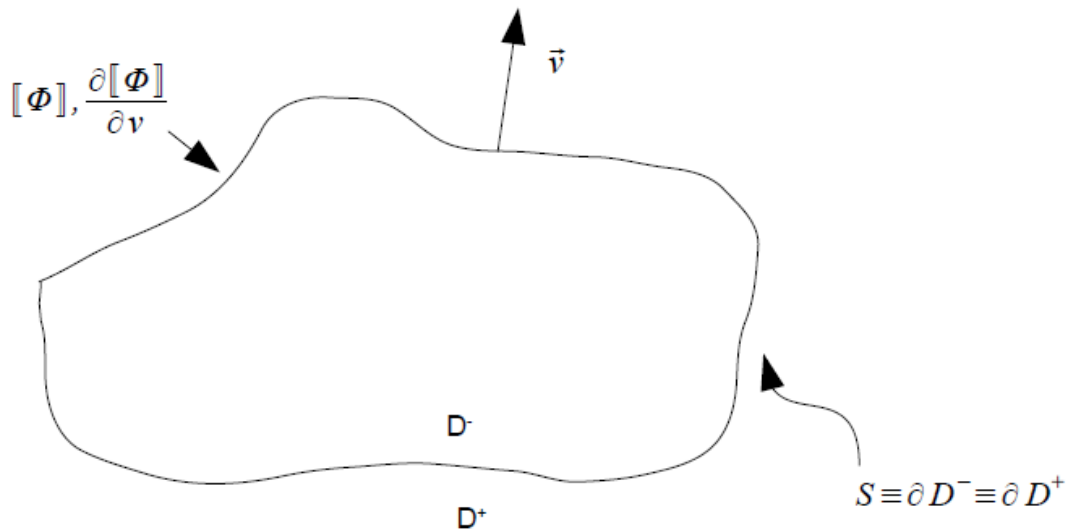
Εικόνα 2.1 Βασικοί Γεωμετρικοί Ορισμοί

Επιπλέον αν υποθέσουμε ότι $\vec{u}(\vec{x}, t)$, $\vec{x} \in D$, $t \geq 0$ είναι το διάνυσμα του πεδίου ταχύτητας, σύμφωνα με το θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz (Βουτσινάς, 1990) αυτό γράφεται :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{U}_\infty(\vec{x}, t) + \nabla\varphi(\vec{x}, t) + \vec{U}_w(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in D, \quad t \geq 0 \quad (2.1.2)$$

όπου $\varphi(x,t)$ είναι ένα δυναμικό διαταραχής, $\vec{U}_\infty(\vec{x}, t)$ η ταχύτητα του πεδίου ροής στο άπειρο και $\vec{U}_w(\vec{x}, t)$ μια επιπλέον επαγόμενη ταχύτητα που αναπαριστά τη συνεισφορά του στροβιλού τμήματος της ροής.

Το δυναμικό του πεδίου ταχύτητας μπορεί να αναπαρασταθεί από επιφανειακές κατανομές ιδιομορφιών. Οι κατανομές αυτές καθορίζουν τόσο το εσωτερικό όσο και το εξωτερικό πρόβλημα Φ^+ , Φ^- . Ωστόσο ο υπολογισμός των συναρτήσεων $\partial[\Phi](\vec{x})/\partial\eta$ και $[\Phi](\vec{x})$ σε όλο το χωρίο D είναι απαραίτητος μόνο αν είναι επιθυμητή η λύση και των δύο προβλημάτων.



Εικόνα 2.2 Πεδίο Εφαρμογής του Θεωρήματος Green

Στο πλαίσιο μιας δυναμικής-μη συνεκτικής θεώρησης της ροής, το δυναμικό της ταχύτητας είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί από μια επιφανειακή διανομή ιδιομορφιών. Στην περίπτωση λεπτών πτερυγίων λαμβάνεται μια διανομή δίπολων τόσο στην επιφάνεια των σωμάτων όσο και στον ομόρρο τους. Με αυτόν τον τρόπο εισάγεται ένα “πήδημα” δυναμικού μεταξύ πάνω και κάτω πλευράς των ενεργών επιφανειών το οποίο επιβάλλεται από τη διπολική διανομή.

Επειδή όμως η λύση του πηδήματος του δυναμικού και της παραγώγου της κάθετης ταχύτητας δεν είναι μοναδική και ενδιαφέρον έχει η λύση μόνο του εξωτερικού προβλήματος γίνεται σαφές πως αρκεί να επιλέξουμε και να δεσμεύσουμε μία κατάλληλη συνθήκη για το αδιάφορο εσωτερικό πρόβλημα υπολογισμού του Φ^- . Η συνθήκη αυτή πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση *Laplace* στον χώρο D^- . Γνωρίζοντας ότι η εξίσωση *Laplace* μπορεί να ικανοποιείται από μία *Neumann* ή μία *Dirichlet* συνθήκη είτε από ένα γραμμικό συνδυασμό των παραπάνω, είναι δυνατές οι ακόλουθες διατυπώσεις ανάλογα με τις επιλογές των οριακών συνθηκών για το δυναμικό Φ^- .

Διατύπωση πηγών

Στην περίπτωση αυτή γίνεται επίλυση ενός εσωτερικού προβλήματος *Dirichlet* για τη συνάρτηση $\Phi^-(\vec{x})$ με οριακή συνθήκη:

$$\Phi^-(\vec{x}) = \Phi^+(\vec{x}) \rightarrow [[\Phi]](\vec{x}) = 0, \vec{x} \in S \quad (2.1.3)$$

που έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό της κατανομής διπόλων στο σώμα. Έτσι προκύπτει η περιγραφή του δυναμικού σύμφωνα με τη διατύπωση πηγών όπου στην επιφάνεια του σώματος έχουμε κατανομή πηγών έντασης

$$\sigma(\vec{x}) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] (\vec{x}), \vec{x} \in S \quad (2.1.4)$$

Το δυναμικό από επιφανειακή κατανομή πηγών σε ένα σημείο \vec{x}_0 δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_\sigma(\vec{x}_0; t) = - \int_S \frac{\sigma(\vec{x}; t)}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|} dS(\vec{x}) \quad (2.1.5)$$

και η επαγόμενη ταχύτητα $\vec{u}_\sigma(\vec{x}; t)$ από τη σχέση:

$$\vec{u}_\sigma(\vec{x}; t) = \int_S \frac{\sigma(\vec{x}; t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) \quad (2.1.6)$$

Διατύπωση διπόλων

Στη διατύπωση διπόλων η διανομή καθορίζεται από την επαλήθευση της συνοριακής συνθήκης Neumann:

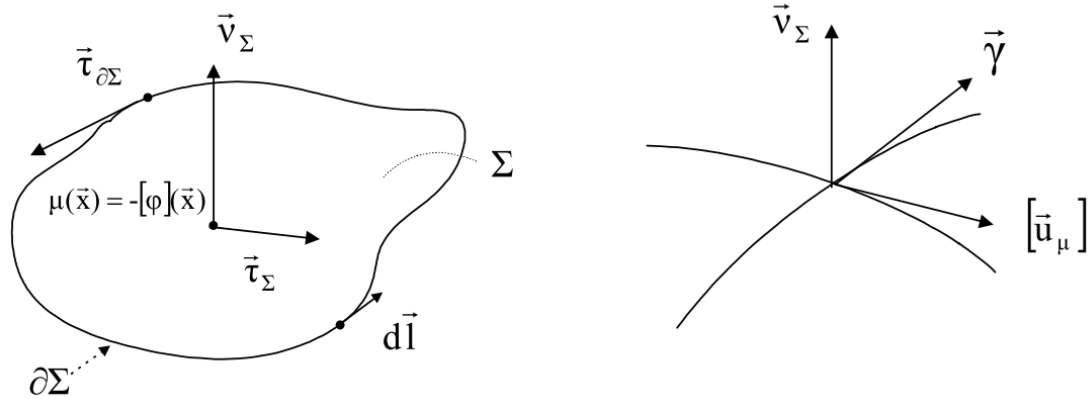
$$\frac{\partial \Phi^-}{\partial \eta}(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi^+}{\partial \eta}(\vec{x}) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} [\Phi](\vec{x}) = 0, \vec{x} \in S \quad (2.1.7)$$

που έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό της κατανομής πηγών στο σώμα. Έτσι προκύπτει η περιγραφή του δυναμικού σύμφωνα με τη διατύπωση διπόλων όπου στην επιφάνεια του σώματος έχουμε κατανομή διπόλων έντασης.

Υπενθυμίζεται ότι μια διανομή δίπολων $\mu(\vec{x}), \vec{x} \in \Sigma$ που λαμβάνεται πάνω σε μια επιφάνεια Σ οδηγεί σε ασυνέχεια δυναμικού :

$$\mu(\vec{x}) = -[\varphi](\vec{x}), \vec{x} \in \Sigma \quad (2.1.8)$$

όπου με $[\varphi]$ συμβολίζεται το πήδημα δυναμικού κατά μήκος της επιφάνειας Σ (εικόνα 2.3).



Εικόνα 2.3 Βασικοί Γεωμετρικοί Ορισμοί για τις Επιφανειακές Κατανομές Διπόλων

Η τιμή του δυναμικού σε κάποιο σημείο \vec{x}_0 του πεδίου D δίνεται, βάση του θεωρήματος αναπαράστασης του Green, από τη σχέση :

$$\varphi(\vec{x}_0, t) = - \int_{\Sigma} \frac{\mu(\vec{x}, t) * \vec{v}(\vec{x}) * (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} d\Sigma(\vec{x}) \quad (2.1.9)$$

Το αντίστοιχο πεδίο ταχύτητας θα προκύπτει από παραγωγή της παραπάνω σχέσης και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes θα δίνεται από τη σχέση :

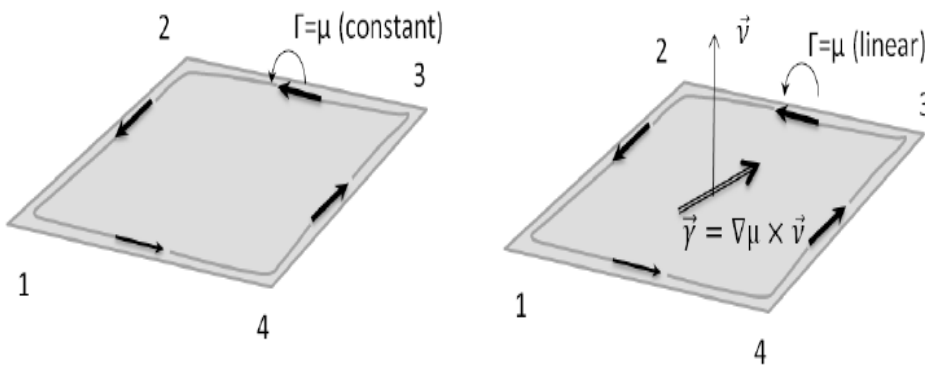
$$\begin{aligned} \vec{u}_{\mu}(\vec{x}_0, t) &= \nabla_0 \varphi(\vec{x}_0, t) \\ &= - \int_{\Sigma} \frac{\nabla_{\Sigma} \mu(\vec{x}, t) * \vec{v}(\vec{x}) * (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} d\Sigma(\vec{x}) + \\ &\quad \oint_{\partial \Sigma} \frac{\mu(\vec{x}, t) * d\vec{l}(\vec{x}) * (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

όπου το ∇_0 συμβολίζει παραγωγή ως προς \vec{x}_0 , $\partial\Sigma$ είναι το σύνορο της επιφάνειας Σ και \vec{dl} στοιχειώδες διάνυσμα εφαπτομενικό ως προς το $\partial\Sigma$ (βλέπε εικόνα 2.3).

Καθώς το \vec{x}_0 πλησιάζει την επιφάνεια Σ , η ταχύτητα γίνεται ασυνεχής. Ειδικότερα αν το $[\vec{u}_\mu]$ συμβολίζει το πήδημα της ταχύτητας πάνω στην επιφάνεια Σ , τότε έχουμε :

$$\begin{cases} [\vec{u}_\mu](\vec{x}_0, t) * \vec{v}(\vec{x}_0) = 0 \\ \vec{v}(\vec{x}_0) * [\vec{u}_\mu](\vec{x}_0, t) = \nabla_\Sigma \mu(\vec{x}, t) * \vec{v}(\vec{x}_0) = \gamma(\vec{x}_0, t) \end{cases}, \vec{x}_0 \in \Sigma \quad (2.1.11)$$

όπου το $\gamma(\vec{x}_0, t)$ συμβολίζει την ένταση της επιφανειακής στροβιλότητας και $\nabla_\Sigma = (\nabla \vec{\tau}_\Sigma) * \vec{\tau}_\Sigma$ τον επιφανειακό διαφορικό συντελεστή. Έτσι από τις (2.2.10) και (2.2.11) προκύπτει ότι η διπολική επιφάνεια στην πραγματικότητα αντιστοιχεί με ένα φύλλο στροβιλότητας, δηλαδή μια επιφάνεια ασυνέχειας της εφαπτομενικής ταχύτητας. Εάν η κατανομή στροβιλότητας είναι σταθερή ή μεταβλητή, προκύπτει διαφορετική αναπαράσταση(Εικόνα 2.2.4).



Εικόνα 2.4 Σταθερή και Γραμμική Επιφανειακή Κατανομή Διπόλων

Για ανωστικά σώματα χωρίς πάχος χρησιμοποιούνται αποκλειστικά κατανομές διπόλων ενώ για μη ανωστικά σώματα με πάχος αποκλειστικά κατανομές πηγών. Τα ανωστικά σώματα είναι απαραίτητο να περιλαμβάνουν κατανομές διπόλων τόσο στην επιφάνεια όσο και στον ομόρρου τους.

Μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων

Στη διατύπωση αυτή εισάγονται διανομές πηγών και διπόλων σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\sigma(\vec{s}) = \left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] \right] (\vec{s}) \text{ και } \mu(\vec{s}) = -\llbracket \Phi \rrbracket (\vec{s}) \quad (2.1.12)$$

Για τον καθορισμό των αγνώστων διανομών πηγών και διπόλων χρησιμοποιείται η συνθήκη Neumann (μη εισχώρησης της ταχύτητας στο όριο του σώματος):

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \llbracket \Phi \rrbracket(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi^+}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi^-}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi^+}{\partial \eta}, \vec{x} \in S \quad (2.1.13)$$

Από τις σχέσεις (2.1.5) και (2.1.9) για το χωρίο D που αποτελεί το πεδίο ροής των NB σωμάτων, το δυναμικό του πεδίου ταχύτητας ορίζεται ως:

$$\varphi(\vec{x}_0, t), \vec{x}_0 \in D$$

$$\varphi(\vec{x}_0, t) = - \sum_{k=1}^{N_B} \int_{S_k} \frac{\sigma_k(\vec{x}, t)}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|} dS(\vec{x}) - \sum_{k=1}^{N_B} \left\{ \int_{S_k} \frac{\mu_k(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) + \int_{S_{wk}} \frac{\mu_{wk}(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}_w(\vec{x}, t) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS_w(\vec{x}) \right\} \quad (2.1.14)$$

όπου $\sigma_k(\vec{x}, t)$ η ένταση πηγών του σώματος k, $\mu_k(\vec{x}, t)$ η ένταση διπόλων του σώματος k και $\mu_{wk}(\vec{x}, t)$ η κατανομή διπόλων του φύλλου στροβιλότητας που παράγεται από το ανωστικό σώμα k.

Οι άγνωστες κατανομές $\sigma_k(\vec{x}, t)$, $\mu_k(\vec{x}, t)$, $\mu_{wk}(\vec{x}, t)$ εξαρτώνται από το χρόνο. Επίσης, το φύλλο στροβιλότητας είναι επιφάνεια που μετακινείται ελεύθερα με τη ροή (ελεύθερος ομόρρους). Συνεπώς το πρόβλημα προς επίλυση είναι πρόβλημα ελευθέρων οριακών συνθηκών με αγνώστους τις επιφανειακές κατανομές και τη γεωμετρία των φύλλων στροβιλότητας από τα ανωστικά σώματα S_{wk} .

Για τον προσδιορισμό των αγνώστων του προβλήματος εφαρμόζονται δύο τύποι συνθηκών. Πρώτον, οι κινηματικές συνθήκες που περιλαμβάνουν τη συνθήκη μη εισχώρησης σε όλες τις στερεές επιφάνειες και τις συνθήκες που περιγράφουν τις υλικές μετακινήσεις των φύλλων στροβιλότητας. Δεύτερον, εφαρμόζονται οι δυναμικές συνθήκες όπως η απαίτηση για μηδενικό άλμα πιέσεων διαμέσου των φύλλων στροβιλότητας.

Συμβολίζεται με $\vec{U}_B(\vec{x}, t)$ η κατανομή ταχυτήτων πάνω στα σώματα, η οποία περιλαμβάνει την ταχύτητα των άκαμπτων σωμάτων αλλά και την ταχύτητα λόγω ελαστικής κίνησης. Οι συνθήκες μη εισχώρησης στις στερεές επιφάνειες παίρνουν τη μορφή:

$$\vec{v}(\vec{x}_0, t) \cdot \nabla \varphi(\vec{x}_0, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\vec{x}_0, t) = \vec{v}(\vec{x}_0, t) \cdot (\vec{U}_{Bk} - \vec{U}_\infty - \vec{U}_\omega), \quad \vec{x}_0 \in S_k, k = 1, N_B \quad (2.1.15)$$

Για τον υπολογισμό του διαταραγμένου πεδίου ταχύτητας χρησιμοποιείται η εξίσωση (2.1.10). Η εξίσωση παίρνει μια πιο ευέλικτη μορφή εάν χρησιμοποιηθεί τμηματικά

σταθερή προσέγγιση των κατανομών διπόλων, οπότε ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι μηδενικός. Ο όρος που απομένει είναι η συνεισφορά γραμμικών κατανομών στροβιλότητας(δινόπετάλων, vortex lattice) ορισμένη στα όρια ∂S του S .

Το φύλλο στροβιλότητας μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια επιφάνεια που σχηματίζεται από την ακολουθία των υλικών γραμμών που ξεκινούν από τη γραμμή αποβολής στροβιλότητας. Προκειμένου να υπάρχει γνώση του χρονικού αποβολής στροβιλότητας, ένα σημείο $\vec{x}_w = \vec{x}_w(\xi^1, \xi^2; t)$ αναγνωρίζεται ως η θέση τη χρονική στιγμή t ενός υλικού σημείου που αποβλήθηκε τη στιγμή ξ^2 στη θέση ξ^1 της γραμμής αποβολής στροβιλότητας. Για παράδειγμα η τρέχουσα θέση της γραμμής αποβολής στροβιλότητας είναι η $\vec{x}_w = \vec{x}_w(\xi^1, t; t)$. Τέλος, οι γραμμές $\xi^1 = ct$ σχηματίζονται από υλικά στοιχεία που έχουν αποβληθεί από την ίδια θέση.

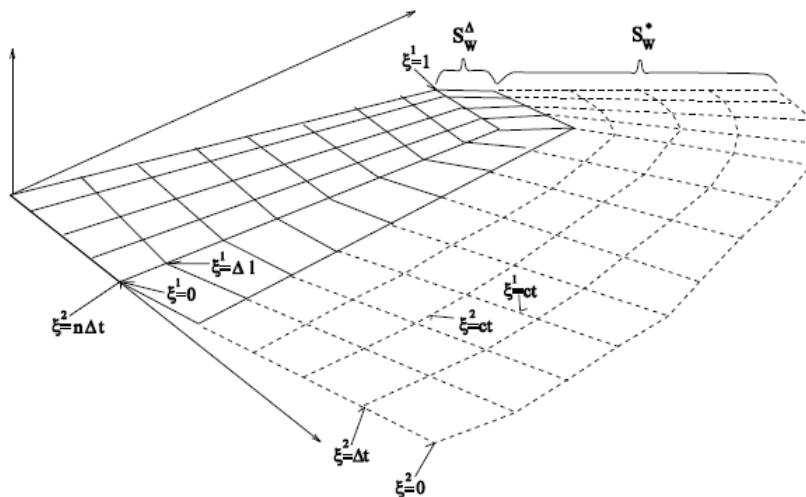
$$\vec{x}_w \in S_w: \vec{x}_w = \vec{x}_w(\xi^1, \xi^2; t), \xi^1 \in [-1, 1], \xi^2 \geq 0 \quad (2.1.16)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί μια παραμετρική ανάλυση φύλλου στροβιλότητας S_w που έχει αποβληθεί από τη γραμμή αποβολής στροβιλότητας.

Η εξέλιξη του ομόρρου $S_w(t)$ στο χρόνο καθορίζεται από την κινηματική εξίσωση:

$$\frac{d\vec{x}_w(\xi; t)}{dt} = \vec{U}_m(\vec{x}_w, t) = \vec{U}_\infty(\vec{x}_w, t) + \nabla\varphi(\vec{x}_w, t) + \vec{U}_\omega(\vec{x}_w, t), \xi = (\xi^1, \xi^2) \quad (2.1.17)$$

όπου $\vec{U}_m(\vec{x}_w, t)$ είναι το διάνυσμα της μέσης ταχύτητας στο φύλλο στροβιλότητας και η απαίτηση για μηδενικό άλμα πίεσης στον ομόρρο.



Εικόνα 2.5 Ο Ομόρρος Ανωστικής Επιφάνειας Χωρίς Πάχος

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli στις δύο όψεις του ομόρρου S_{wk} και λαμβάνοντας υπόψη ότι $[[p]](\vec{x}_w, t) = 0$:

$$\frac{\partial [[\varphi]]}{\partial t} + \vec{U}_m(\vec{x}_w, t) \cdot [[\vec{u}_\mu]](\vec{x}_w, t) = 0 \quad (2.1.18)$$

όπου $[[\vec{u}_\mu]](\vec{x}_w, t)$ είναι το πήδημα της ταχύτητας στην επιφάνεια του ομόρρου. Από τις εξισώσεις (2.2.8) και (2.2.11) παίρνουμε ότι $\mu_w(\xi, t) = -[[\varphi]](\xi, t)$ και $[[\vec{u}_\mu]](\xi, t) = \nabla_{S_w} \mu_w(\xi, t)$. Εάν η επιφανειακή υλική χρονική παράγωγος είναι:

$$\frac{d_m(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\vec{U}_m \cdot \nabla_{S_w})(\cdot) \quad (2.1.19)$$

τότε η (2.1.18) δίνει τη συνθήκη:

$$\frac{d_m \mu_w}{dt} = 0 \quad (2.1.20)$$

που είναι ισοδύναμη του θεωρήματος του Kelvin, αφού προκύπτει ότι η κατανομή διπόλων που ορίζει ένα φύλλο στροβιλότητας διατηρείται υλικά.

Σε συνδυασμό με την παραμετρική αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας, παίρνουμε τη συνθήκη:

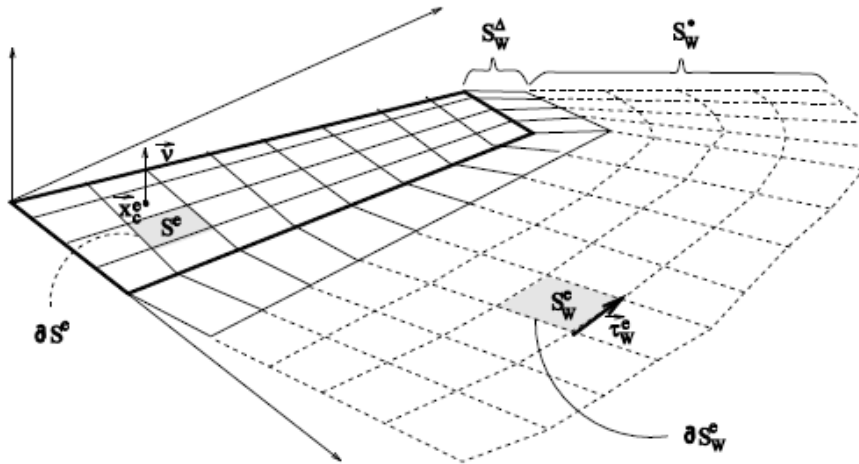
$$\mu_w(\vec{x}_w(\xi^1, \xi^2; t); t) = \mu_w(\vec{x}_w(\xi^1, \xi^2; \xi^2); \xi^2) \quad (2.1.21)$$

Η παραπάνω εξίσωση υποδηλώνει ότι η ένταση της κατανομής διπόλων που μεταφέρει το υλικό σημείο ξ είναι ίση με την ένταση του ίδιου υλικού σημείου, όταν αυτό ξεκίνησε από τη γραμμή αποβολής στροβιλότητας του σώματος. Επομένως, η συνθήκη αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί η ένταση της στροβιλότητας που έχει αποβληθεί από τη γραμμή αποβολής στροβιλότητας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Στην περίπτωση τμηματικά σταθερής προσέγγισης των κατανομών διπόλων η συνθήκη οδηγεί σε ίσες τιμές των εντάσεων $\mu_k(\cdot, t)$ και $\mu_{wk}(\cdot, t)$, για δύο σημεία στο σώμα και στον ομόρρου αντίστοιχα, που εφάπτονται στη γραμμή αποβολής στροβιλότητας.

Τόσο τα αποτελέσματα που δίνει η θεωρία, όσο και ενδείξεις από πειραματικές και υπολογιστικές μελέτες προδιαγράφουν ότι σε βάθος χρόνου ένα ελεύθερο φύλλο στροβιλότητας χάνει την ομαλότητά του εξαιτίας του ιδιόμορφου χαρακτήρα των ολοκληρωμάτων που περιλαμβάνονται στον υπολογισμό του $\nabla \varphi(\vec{x}_w, t)$. Για να αντιμετωπιστεί αυτή η δυσκολία, εισάγεται μια γενικοποίηση της στροβιλότητας. Με βάση τη σχέση (2.6) το γενικοποιημένο πεδίο στροβιλότητας όσον αφορά ένα φύλλο στροβιλότητας μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{S_w}(\vec{x}, t) &= \nabla \times \vec{u}_\mu(\vec{x}, t) = \\ &\delta_{S_w}(\vec{x} - \vec{x}_{S_w}) [\nabla \mu_w(\vec{x}_{S_w}, t) \times \vec{v}(\vec{x}_{S_w}, t)] \quad (surface \ term) \\ &+ \delta_{\partial S_w}(\vec{x} - \vec{x}_{\partial S_w}) \vec{t}(\vec{x}_{\partial S_w}, t) \mu_w(\vec{x}_{\partial S_w}, t) \quad (line \ term) \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

όπου ο πρώτος είναι ο όρος επιφανειών(surface term) και ο δεύτερος ο όρος γραμμών(line term). Με $\delta_{S_W}(\cdot)$ και $\delta_{\partial S_W}(\cdot)$ συμβολίζονται οι επιφανειακές και γραμμικές συναρτήσεις Dirac ορισμένες στο εσωτερικό και το όριο του $S_W(t)$ αντίστοιχα. Τέλος, $\vec{\tau}(\vec{x}_{\partial S_W}, t)$ είναι το μοναδιαίο και εφαπτομενικό διάνυσμα στο $\partial S_W(t)$. Η παραπάνω γενικοποιημένη μορφή είναι ιδιαίτερα σημαντική αφού επιτρέπει την προσέγγιση του ομόρρου με σημειακές στροβιλότητες.



Εικόνα 2.6 Ορισμοί του Πλέγματος πάνω στο Σώμα και τον Ομόρρου

2.1.2 Το Αριθμητικό Πρότυπο

Σε κάθε σώμα S_k και τον ομόρρου του S_{Wk} ορίζεται ένα υπολογιστικό πλέγμα που χωρίζει το σώμα σε έναν αριθμό στοιχείων (panels) $S_k^e, e = 1, E_k$ και τον ομόρρου $S_{Wk}^e, e = 1, E_{Wk}$ με όρια ∂S_k^e και ∂S_{Wk}^e αντίστοιχα (Σχήμα 2.6). Με E_k και E_{Wk} συμβολίζεται ο αριθμός των στοιχείων σε ένα σώμα k και τον ομόρρου του. Τα στερεά σώματα κατατάσσονται σε κατηγορίες ανάλογα με το είδος τους (ανωστικά/μη ανωστικά, με πάχος/λεπτά κ.α.). Ανάλογα με την κατηγορία, τα επιμέρους στοιχεία περιλαμβάνουν τμηματικά σταθερές κατανομές πηγών σ_e , τμηματικά σταθερές, γραμμικές, ειδικά ορισμένες κατανομές διπόλων μ_e ή συνδυασμό των παραπάνω. Αντίστοιχα, τα στοιχεία του ομόρρου των σωμάτων μπορεί να περιλαμβάνουν τμηματικά σταθερές ή γραμμικές κατανομές διπόλων μ_{ew} . Λόγω του μη μόνιμου χαρακτήρα της ροής, οι εντάσεις των πηγών και των διπόλων είναι χρονικά μεταβαλλόμενες.

Η επαγόμενη ταχύτητα σε θέση \vec{x}_0 από μια ανωστική επιφάνεια δίνεται από το άθροισμα των συνεισφορών των δινοτετάλων (vortex lattices) που αντιστοιχούν στα στοιχεία του πλέγματος των S_k και S_{Wk} :

$$\begin{aligned}
\vec{u}(\vec{x}_0, t) &= \vec{U}_\infty(\vec{x}_0, t) + \vec{u}_\omega(\vec{x}_0, t) \\
&+ \sum_{e=1}^E \left\{ \left(\sigma_e(t) + (\nabla \mu_e(t) \times \vec{v}_e(t)) \right) \times \int_{S_e} \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) \right. \\
&\quad \left. + \oint_{\partial S_e} \mu_e(t) \frac{\vec{dl}(\vec{x}, t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} \right\} \\
&+ \sum_{e=1}^{E_w} \left\{ (\nabla \mu_{ew}(t) \times \vec{v}_{ew}(t)) \times \int_{S_{ew}} \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dS(\vec{x}) + \right. \\
&\quad \left. \oint_{\partial S_{ew}} \mu_{ew}(t) \frac{\vec{dl}(\vec{x}, t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} \right\} \quad (2.1.23)
\end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση της ταχύτητας χρησιμοποιείται στη συνθήκη μη εισχώρησης. Οι όροι $\sigma_e(t), \vec{\gamma}_e(t) = \nabla \mu_e(t) \times \vec{v}_e(t), \vec{\gamma}_{ew}(t) = \nabla \mu_{ew}(t) \times \vec{v}_{ew}(t)$ που εμφανίζονται στους επιφανειακούς όρους για τα στοιχεία των στερεών σωμάτων και του ομόρρου βρίσκονται εκτός του ολοκληρώματος επειδή θεωρούνται τμηματικά σταθεροί. Εάν οι κατανομές διπόλων είναι τμηματικά σταθερές, τότε οι αντίστοιχοι επιφανειακοί όροι είναι μηδενικοί (περίπτωση λεπτής ανωστικής επιφάνειας). Στον 4ο και 6ο όρο της εξίσωσης οι εντάσεις $\mu_e(t)$ και $\mu_{ew}(t)$ παραμένουν στο εσωτερικό των ολοκληρωμάτων. Για γραμμικές κατανομές διπόλων, η ένταση μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος των ορίων του στοιχείου (panel), οπότε οι εντάσεις πρέπει να βρίσκονται αναγκαστικά εντός του ολοκληρώματος. Για τμηματικά σταθερές κατανομές διπόλων οι εντάσεις θα μπορούσαν να τοποθετηθούν εκτός αυτού. Τέλος, μπορεί να αναφερθεί ότι στην περίπτωση επίπεδων στοιχείων υπάρχουν αναλυτικές εκφράσεις για οποιαδήποτε πολυωνυμική κατανομή της έντασης.

Η συνθήκη μη εισχώρησης (2.1.15) επαληθεύεται στα κέντρα \vec{x}_k^e των στοιχείων που διαμορφώνουν τα στερεά όρια S_k και από αυτήν λαμβάνονται οι διακριτές εξισώσεις για τις άγνωστες εντάσεις $\mu_k^e(\cdot; t)$. Οι εντάσεις $\mu_k^e(\cdot; t)$ των διπόλων που βρίσκονται στον ομόρρου υπολογίζονται από την κινηματική συνθήκη (2.1.21). Για τμηματικά σταθερές κατανομές διπόλων, η εφαρμογή της (2.1.21) στα στοιχεία του ομόρρου περιορίζει τους άγνωστους βαθμούς ελευθερίας στις εντάσεις που έχουν μόλις δημιουργηθεί από τη γραμμή αποβολής στροβιλότητας. Οι εντάσεις που αντιστοιχούν στα υπόλοιπα στοιχεία του ομόρρου είναι γνωστά από προηγούμενες χρονικές στιγμές, όπως έχει εξηγηθεί παραπάνω.

Για τον υπολογισμό των αγνώστων εντάσεων που έχουν δημιουργηθεί στη γραμμή αποβολής στροβιλότητας την τρέχουσα χρονική στιγμή εφαρμόζεται η συνθήκη Kutta. Η συνθήκη εξασφαλίζει ότι η στροβιλότητα κατά μήκος της γραμμής αποβολής είναι πεπερασμένη. Αυτό σημαίνει ότι για τα στοιχεία που εφάπτονται στη γραμμή αποβολής είναι $\mu_k^e = \mu_{Wk}^e$. Για γραμμικές κατανομές διπόλων η εφαρμογή είναι διαφορετική, αλλά περιλαμβάνει επίσης εφαρμογή της συνθήκης Kutta και του θεωρήματος Kelvin. Το θεώρημα του Kelvin προσδιορίζει τις εντάσεις στον ομόρρου από προηγούμενες χρονικές στιγμές και η συνθήκη Kutta προσδιορίζει τις εντάσεις των στοιχείων που δημιουργούνται την τρέχουσα χρονική στιγμή.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι κατανομές των στοιχείων του ομόρρου από προηγούμενες χρονικές στιγμές είναι γνωστές, ενώ άγνωστες είναι οι κατανομές των στοιχείων που δημιουργήθηκαν την τρέχουσα χρονική στιγμή. Σε αυτή τη βάση χρησιμοποιείται διαφορετική προσέγγιση για τα νέα στοιχεία (κοντινός ομόρρους) και για τα στοιχεία που είναι γνωστά από προηγούμενες χρονικές στιγμές (μακρινός ομόρρους). Συγκεκριμένα, η θεώρηση του ομόρρου ως φύλλο στροβιλότητας χρησιμοποιείται μόνο για τα στοιχεία του κοντινού ομόρρου. Μετά την πάροδο του τρέχοντος χρονικού βήματος, για κάθε στοιχείο του κοντινού ομόρρου δημιουργείται μια σημειακή δίνη (vortex particle) στην οποία ενσωματώνεται η ένταση του στοιχείου, και ύστερα αυτή αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα στο πεδίο ροής (πρότυπο ελεύθερου ομόρρου). Εάν S_{Wk}^A, S_{Wk}^* είναι το κοντινό και το μακρινό τμήμα αντίστοιχα του ομόρρου για κάθε ανωστικό σώμα k , το δυναμικό του ομόρρου [2ος όρος της εξίσωσης (2.14)] μπορεί να διαχωριστεί σε δύο μέρη. Το δυναμικό $\varphi_W^A(\cdot, t)$ από τα στοιχεία του κοντινού ομόρρου, και το δυναμικό $\varphi_W^*(\cdot, t)$ από τα στοιχεία του μακρινού ομόρρου όλων των σωμάτων. Το συνολικό δυναμικό είναι το άθροισμα των συνεισφορών

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi_b(\vec{x}, t) + \varphi_W^A(\vec{x}, t) + \varphi_W^*(\vec{x}, t) \quad (2.1.24)$$

όπου $\varphi_b(\cdot, t)$ είναι το δυναμικό που επάγεται από τα στερεά σώματα και είναι:

$$\begin{aligned} \varphi_b(\vec{x}, t) &= \sum_{k=1}^{N_B} \varphi_{kb}(\vec{x}, t) & \varphi_W^A(\vec{x}, t) &= \sum_{k=1}^{N_B} \varphi_{Wk}^A(\vec{x}, t) \\ \varphi_W^*(\vec{x}, t) &= \sum_{k=1}^{N_B} \varphi_{Wk}^*(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Από τις εξισώσεις (2.1.11) και (2.1.22) φαίνεται πως η ποσότητα $\nabla\varphi_W^*(\cdot, t)$ αντιστοιχεί στο μέρος του πεδίου ταχύτητας που σχετίζεται με την περιστροφή $\vec{u}_\omega(\cdot, t)$:

$$\vec{u}_\omega(\vec{x}_0, t) = \int_{D_\omega(t)} \frac{\vec{\omega}_W(\vec{x}, t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dD(\vec{x}) \quad (2.1.26)$$

όπου $D_\omega(t)$ δηλώνει την ελεύθερη στροβιλότητα του πεδίου ροής $\vec{\omega}_W(\cdot, t)$ η οποία δίνεται σε αντιστοιχία με τη σχέση (2. 2.22)

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_W(\vec{x}, t) &= \nabla \times \vec{u}_\omega(\vec{x}, t) \\ &= \sum_{e_w=1}^{E_w} \{ \delta(\vec{x} - \vec{x}_{e_w})(\nabla\mu_{e_w}(t) \times \vec{v}_{e_w}(t))S_{e_w} \\ &\quad + \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\partial e_w})(\mu_{e_w} \vec{d}\vec{l}_{\partial e_w}) \} \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Η παραπάνω τροποποίηση επιφέρει αλλαγές στην έκφραση της συνθήκης μη εισχώρησης (2.2.15) και της επαγόμενης ταχύτητας (2.2.23). Οποιαδήποτε συνεισφορά στοιχείων του ομόρρου θα πρέπει να περιοριστεί αποκλειστικά στα στοιχεία του κοντινού ομόρρου S_{Wk}^A , ενώ θα πρέπει να συμπεριληφθούν στις

εξισώσεις οι παράγοντες $\varphi_{\omega}^*(., t)$ και $\vec{u}_{\omega}(., t)$. Έστω ότι $\vec{\Omega}_j(t), \vec{Z}_j(t)$ είναι οι εντάσεις και οι θέσεις των σημειακών δινών αντίστοιχα, και $J(t)$ το σύνολο των δεικτών που αντιστοιχούν στις σημειακές δίνες του πεδίου ροής. Τότε η διακριτή προσέγγιση της ελεύθερης στροβιλότητας $\vec{\omega}_{\omega}(., t)$ με σημειακές δίνες είναι:

$$\vec{\omega}_{\omega}(\vec{x}, t) = \sum_{j \in J(t)} \vec{\Omega}_j(t) \zeta_{\varepsilon}(\vec{x} - \vec{Z}_j(t)) \quad (2.1.28)$$

όπου $\zeta_{\varepsilon}(r)$ ορίζεται η συνάρτηση φίλτρου (cut-off function):

$$\zeta_{\varepsilon}(r_j) = \frac{1}{\varepsilon^3} \exp\left(-\left(\frac{r_j}{\varepsilon}\right)^3\right), r_j = |\vec{x} - \vec{Z}_j(t)| \quad (2.1.29)$$

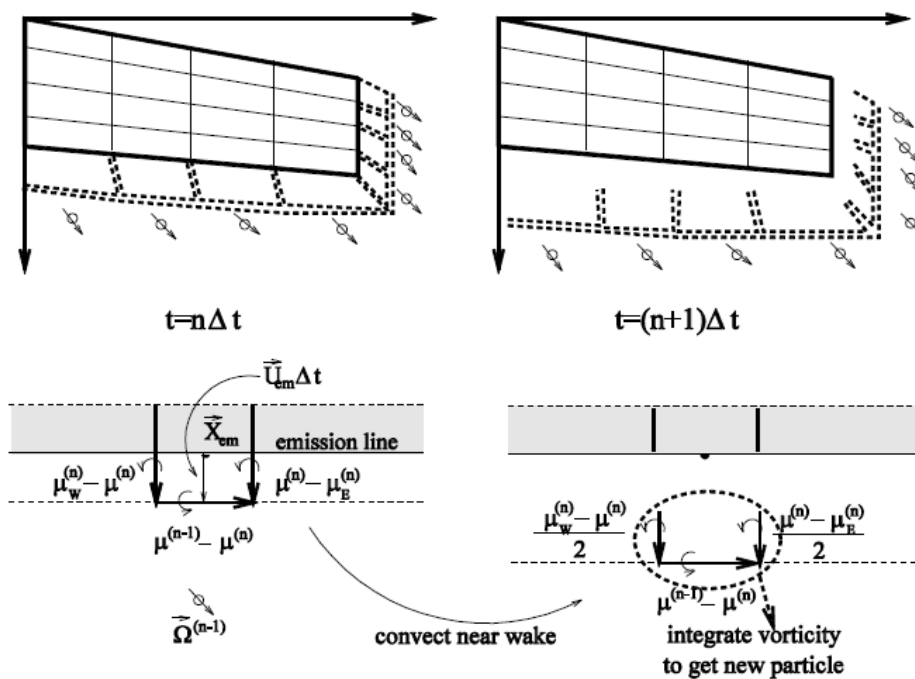
Με χρήση της εξίσωσης 2.28 η περιστροφική συνιστώσα του πεδίου ταχύτητας γράφεται:

$$\vec{u}_{\omega}(\vec{x}_0, t) = \sum_{j \in J(t)} \frac{\vec{\Omega}_j(t) \times (\vec{x} - \vec{Z}_j(t))}{4\pi |\vec{x} - \vec{Z}_j(t)|^3} \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{|\vec{x} - \vec{Z}_j(t)|}{\varepsilon}\right)^3\right)\right) \quad (2.1.30)$$

Επομένως, δεν απαιτείται ο υπολογισμός της γεωμετρίας του φύλλου στροβιλότητας σε κάθε χρονική στιγμή, αφού ισοδύναμα παρακολουθείται η τροχιά των σημειακών δινών (vortex particles) μέσω των δυναμικών εξισώσεων:

$$\frac{d\vec{Z}_j(t)}{dt} = \vec{u}(\vec{Z}_j, t), j \in J(t) \quad (2.1.31)$$

$$\frac{d\vec{\Omega}_j(t)}{dt} = (\vec{\Omega}_j(t) \cdot \nabla) \vec{u}(\vec{Z}_j, t) \quad (2.1.32)$$



Εικόνα 2.7 Το Υβριδικό Πρότυπο Ομόρρου για την Περίπτωση Λεπτής Ανωστικής Επιφάνειας

Οι εξισώσεις (2.1.31), (2.1.32) αφορούν την εξέλιξη του μακρινού ομόρρου. Το κοντινό τμήμα του ομόρρου απαιτεί διαφορετική αντιμετώπιση καθώς διατηρείται η θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας. Αν \vec{U}_{em} είναι η μέση ταχύτητα ενός σημείου της γραμμής αποβολής στροβιλότητας ενός ανωστικού σώματος, η γεωμετρία του τμήματος του κοντινού ομόρρου S_W^A που αντιστοιχεί σε αυτό το σημείο υπολογίζεται από την

$$\vec{X}^{\Delta} = \vec{X}_{em} + \Delta t \vec{U}_{em} \quad (2.1.33)$$

όπου $\vec{X}^{\Delta} - \vec{X}_{em}$ είναι το μήκος του S_{Wk}^A σε διανυσματική μορφή (Εικόνα 2.7). Οι εντάσεις των κατανομών διπόλων του κοντινού ομόρρου υπολογίζονται από τη συνθήκη (2.1.20). Οι σημειακές δίνες (vortex particles) δημιουργούνται σε κάθε χρονικό βήμα από ολοκλήρωση της επιφανειακής στροβιλότητας σε κάθε στοιχείο του κοντινού ομόρρου. Κατά τη δημιουργία κάθε σημειακής δίνης, η ένταση $\vec{\Omega}_j(t)$ και η θέση της $\vec{Z}_j(t)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\vec{\Omega}_j = \int_{S_{Wk}^{Ae}} \vec{\omega}_W dS_W \quad (2.1.34)$$

$$\vec{\Omega}_j \times \vec{Z}_j = \int_{S_{Wk}^{Ae}} \vec{\omega}_W \times \vec{x} dS_W \quad (2.1.35)$$

όπου S_{Wk}^{Ae} , $e = 1, 2$ είναι τα στοιχεία που αποτελούν τον κοντινό ομόρρο του ανωστικού σώματος k.

2.1.3 Υπολογισμός των Αεροδυναμικών Δυνάμεων

Για τον υπολογισμό των μη μόνιμων αεροδυναμικών φορτίων πάνω σε κάθε ανωστική επιφάνεια του δρομέα δίνονται δύο εναλλακτικές δυνατότητες. Στην πρώτη τα φορτία υπολογίζονται με απ' ευθείας χρήση της εξίσωσης *Bernoulli*. Εφαρμόζοντας την εξίσωση *Bernoulli* μεταξύ της πάνω και της κάτω πλευράς του πτερυγίου στο τυχαίο σημείο \vec{x} παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για το πρήδημα της πίεσης κατά το μήκος της επιφάνειας του ακροπτερυγίου:

$$\frac{\partial [\varphi]}{\partial t}(\vec{x}, t) + \vec{U}_m(\vec{x}, t) * [\vec{u}](\vec{x}, t) = -\frac{[P]}{\rho} \quad (2.1.36)$$

όπου $-\varphi$ = μ η διανομή διπόλων πάνω στην πτέρυγα, \vec{U}_m η μέση ταχύτητα μεταξύ πάνω και κάτω πλευράς, $[\vec{u}] = \nabla[\varphi]$ η τοπική ασυνέχεια της ταχύτητας και

[P] το πρήδημα της πίεσης. Για τον υπολογισμό του $[\vec{u}] = -\nabla\mu$ χρησιμοποιείται ένα μηδενικής τάξης σχήμα διαφορών, λόγω της τμηματικά σταθερής διανομής του μ.

Στο διακριτό πρόβλημα η (2.1.36) λαμβάνεται σε κάθε σημείο ελέγχου (δηλαδή στο κέντρο κάθε τμήματος) του k σώματος. Αν υποθέσουμε ότι $[p]_k^e$, $e = 1, E_k$, $k = 1, N_B$ είναι το υπολογιζόμενο πήδημα της πίεσης σε κάθε σημείο ελέγχου του k σώματος, η δύναμη πάνω σε κάθε τμήμα e είναι:

$$\vec{F}_k^e(t) = \vec{v}_k^e * [p]_k^e * S_k^e \quad (2.1.37)$$

Η διανομή της δύναμης κατά μήκος του πτερυγίου, προκύπτει από την ολοκλήρωση των δυνάμεων σε κάθε στοιχείο (λωρίδα) του πτερυγίου και δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{strip}(t) &= \sum_e \vec{v}_k^e * [p]_k^e * S_k^e \\ F_{n\ strip} &= \left(\sum_e \vec{v}_k^e * [p]_k^e * S_k^e \right) * \vec{e}_n \quad (2.1.38) \\ F_{t\ strip} &= \left(\sum_e \vec{v}_k^e * [p]_k^e * S_k^e \right) * \vec{e}_t \end{aligned}$$

όπου \vec{e}_n , \vec{e}_t το μοναδιαίο κάθετο και παράλληλο στο επίπεδο του δρομέα διάνυσμα αντίστοιχα. Στην δεύτερη των (2.1.38) η άθροιση γίνεται πάνω στο πλήθος των τμημάτων που απαρτίζουν το κάθε στοιχείο του πτερυγίου.

Αντίστοιχα η ροπή στρέψης του κάθε στοιχείου του πτερυγίου δίνεται από τη σχέση:

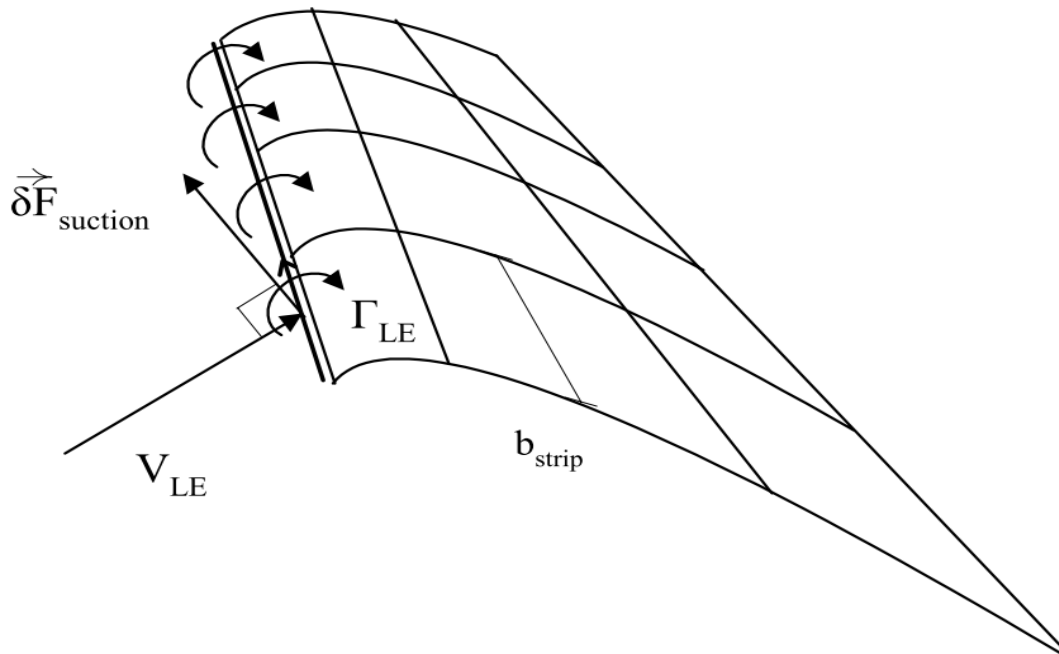
$$M_{strip} = \left(\sum_e (\vec{r}_0^e * \vec{v}_k^e) * [p]_k^e * S_k^e \right) * \vec{e}_p \quad (2.1.39)$$

στην οποία \vec{r}_0^e είναι το διάνυσμα θέσης του εκάστοτε σημείου ελέγχου ως προς τον διαμήκη άξονα του πτερυγίου, γύρω από τον οποίο υπολογίζεται η ροπή στρέψης και \vec{e}_p το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος αυτού του άξονα.

Λόγω του ιδιόμορφου χαρακτήρα της ροής (απειρισμός της ταχύτητας) στην ακμή πρόσπτωσης της πτέρυγας, μια επιπλέον δύναμη «αναρρόφησης» (suction force) προστίθεται στη δύναμη που υπολογίζεται μέσω της (2.1.38). Η δύναμη αυτή υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος Joukowski:

$$\delta \vec{F}_{suction} = \rho \vec{V}_{LE} * \vec{\Gamma}_{LE} * b_{strip} \quad (2.1.40)$$

και αναπαριστά την επαγόμενη αντίσταση του πτερυγίου. Στην (2.1.40) \vec{V}_{LE} συμβολίζεται το διάνυσμα της ταχύτητας υπολογισμένο κατά μήκος της ακμής πρόσπτωσης του πτερυγίου και $\vec{\Gamma}_{LE}$ το διάνυσμα του στροβίλου που διέρχεται από την ακμή πρόσπτωσης, ενώ είναι το εύρος της κάθε λωρίδας (εικόνα 2.8).



Εικόνα 2.8 Δύναμη Αναρρόφησης

Τα φορτία που υπολογίζονται μέσω των (2.1.38),(2.1.39),(2.1.40) δεν συμπεριλαμβάνουν τις επιδράσεις λόγω συνεκτικότητας, όπως και την επίδραση της αποκόλλησης της ροής που γίνεται όλο και ισχυρότερη καθώς οι γωνίες πρόσπτωσης αυξάνουν. Μια εναλλακτική λύση υπολογισμού των φορτίων, ώστε να λαμβάνονται υπόψη σε αυτά τέτοιου είδους επιδράσεις, στηρίζεται στη χρήση ενός a-posteriori σχήματος, ανάλογου αυτού που ακολουθείται στη μέθοδο στοιχείων πτερύγωσης. Το σχήμα αυτό βασίζεται στον προσδιορισμό της φαινόμενης γωνίας πρόσπτωσης και ταχύτητας σε κάθε στοιχείο του πτερυγίου, μέσω των οποίων προσδιορίζονται τελικά οι δυνάμεις. Αρχικά υπολογίζουμε το διάνυσμα της συνολικής “μη συνεκτικής” δύναμης με τη χρήση των σχέσεων (2.38) και (2.40). Στη συνέχεια βάση του θεωρήματος Joukowski, καθορίζεται η κατεύθυνση του διανύσματος της φαινόμενης ταχύτητας σε κάθε “λωρίδα” του πτερυγίου ως η κάθετη στο διάνυσμα της δύναμης (εικόνα 2.9). Με αυτόν τον τρόπο προσδιορίζεται η γωνία πρόσπτωσης της επερχόμενης ροής σε κάθε “λωρίδα” του πτερυγίου και μέσω αυτής και μετρημένων καμπυλών C_L , C_D και C_m υπολογίζονται οι δυνάμεις και η ροπή στρέψης από τις σχέσεις:

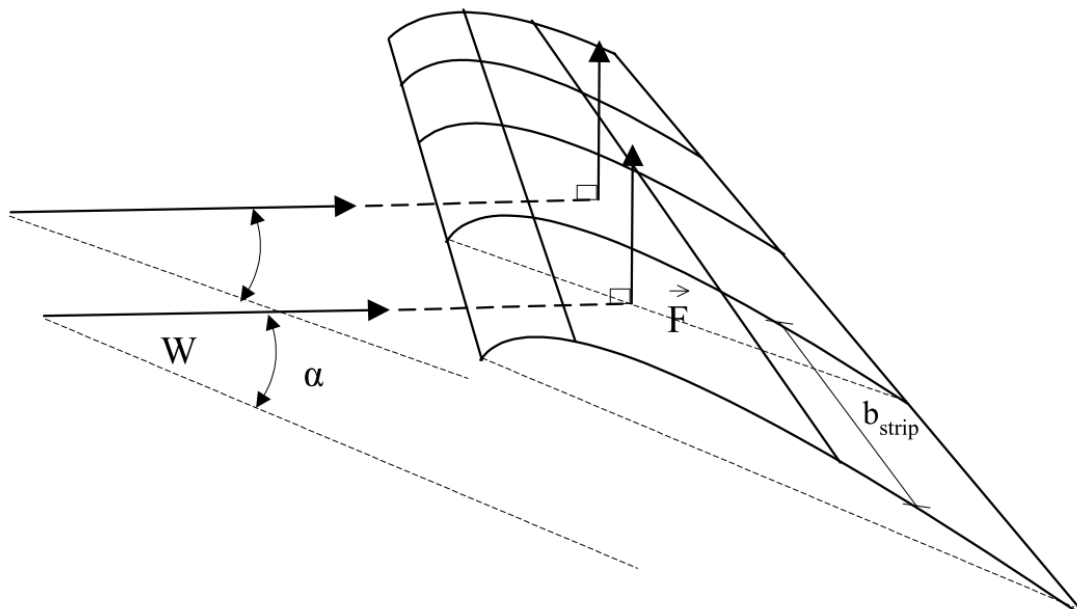
$$F_{n \text{ strip}} = \frac{\rho}{2} C_n(a) * W^2 * c * b_{\text{strip}} = \frac{\rho}{2} [C_L(a) * \cos \varphi + C_D(a) * \sin \varphi] * W^2 * c * b_{\text{strip}}$$

$$F_{t \text{ strip}} = \frac{\rho}{2} C_t(a) * W^2 * c * b_{\text{strip}} = \frac{\rho}{2} [C_L(a) * \sin \varphi - C_D(a) * \cos \varphi] * W^2 * c * b_{\text{strip}}$$

$$M_{strip} = \frac{\rho}{2} C_m(\alpha) * W^2 * c^2 * b_{strip} \quad (2.1.41)$$

Σημειώνεται ότι στις (2.1.41) εκτός από την κατεύθυνση της φαινόμενης ταχύτητας απαραίτητη είναι και η γνώση του μέτρου της W . Αυτό είναι δυνατό να προσδιοριστεί με διάφορους τρόπους. Στη πράξη η καλύτερη δυνατή συμφωνία με πειραματικά δεδομένα επιτυγχάνεται όταν η W (ως μέτρο μόνο) λαμβάνεται ως η μέση τιμή των μέσων ταχυτήτων \overline{U}_m κατά μήκος της εκάστοτε “λωρίδας”.

Ο καθορισμός της Ιακωβιανής των παραγώγων των δυνάμεων ως προς τους ελαστικούς βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος, για τον ποσοτικό προσδιορισμό της αεροδυναμικής απόσβεσης στην μεν περίπτωση χρησιμοποίησης των (2.1.41) είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί αναλυτικά όπως γίνεται και στη μέθοδο των στοιχείων περύγωσης. Στην περίπτωση που ο υπολογισμός των δυνάμεων γίνεται άμεσα από τις (2.1.38) και (2.1.40) τότε ο προσδιορισμός της αεροδυναμικής απόσβεσης γίνεται μόνο αριθμητικά, αφού οι σχέσεις για τις δυνάμεις και τη ροπή στρέψης δε δίνονται σε κλειστή μορφή συναρτήσεων των ελαστικών βαθμών ελευθερίας.



Εικόνα 2.9 Φαινόμενη ταχύτητα

2.2 Η αριθμητική Διακριτοποίηση του Προβλήματος

2.2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ο τρόπος διακριτοποίησης των εξισώσεων που περιγράφουν το θεωρητικό πλαίσιο επίλυσης του προβλήματος. Διαρθρώνεται το σύστημα των διακριτών εξισώσεων του προβλήματος που ικανοποιούν τη συνθήκη μη εισχώρησης στο στερεό σύνορο και επί πλέον την εξίσωση των πιέσεων στην ακμή εκφυγής ενός ανωστικού σώματος. Τα σώματα αναπαρίστανται γεωμετρικά με πλέγμα αποτελούμενο από τετράπλευρα επίπεδα στοιχεία, στα οποία κατανέμονται διανομές πηγών και διπόλων με τμηματικά σταθερή και διγραμμική ένταση αντίστοιχα. Προφανώς στην περίπτωση των μη ανωστικών σωμάτων η διανομή διπόλων είναι μηδενική. Το αποβαλλόμενο φύλλο στροβιλότητας αναπαρίσταται κοντά στο σώμα με πλέγμα δινοσωλήνων (vortex lattice) σύμφωνα με τη δυναμική θεώρηση, ενώ μακριά από αυτό με στοιχεία στροβιλότητας (vortex particles) σύμφωνα με τη στροβιλή θεώρηση. Η ένταση της αρχικά αποβαλλόμενης στροβιλότητας υπολογίζεται σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Η μεταφορά και η παραμόρφωσή του γίνεται επιλύοντας τις υλικές εξισώσεις του Helmholtz.

Η επιτυχημένη εφαρμογή του διακριτοποιημένου σχήματος εξισώσεων σε ένα πρόβλημα καθορίζεται από την κατάλληλη επιλογή τόσο της χωρικής διακριτοποίησης της επιφανειακής γεωμετρίας των σωμάτων, όσο και του χρονικού βήματος εξέλιξης του προβλήματος, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ικανοποιητική αναπαραγωγή της λεπτομέρειας των διαφόρων φυσικών μηχανισμών που αναμένεται να εμφανιστούν.

2.2.2 Η Διακριτοποίηση της Γεωμετρίας ενός Σώματος

Η γεωμετρία της επιφάνειας ενός σώματος αποτελεί δεδομένο του εξεταζόμενου προβλήματος. Προσεγγίζεται από ένα επιφανειακό πλέγμα σημείων (\vec{X}_G) στο γενικό-αδρανειακό σύστημα αναφοράς, που ορίζονται είτε άμεσα, είτε έμμεσα από τις κατανομές των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του σώματος. Ένα τέτοιο επιφανειακό πλέγμα μπορεί να περιγραφεί από μία διπαραμετρική επιφάνεια $S(s_i, r_j)$:

$$S(s_i, r_j), \quad i = 1, NNB, \quad j = 1, NCW \quad (2.2.1)$$

όπου NNB, NCW ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος κατά την s και r διάστασή του αντίστοιχα. Οι γραμμές s_i είναι συνήθως προσανατολισμένες προς την κύρια κατεύθυνση της ροής, ιδιότητα που διευκολύνει αριθμητικές διαδικασίες, όπως την αποβολή στροβιλότητας. Στην περίπτωση ενός περιστρεφόμενου ανωστικού σώματος η παράμετρος μήκους s αντιστοιχεί στο μήκος τόξου, που διατρέχει την επιφάνεια του σώματος σε δεδομένη ακτινική θέση. Ξεκινάει από την ακμή εκφυγής της κάτω πλευράς υπερπίεσης (pressure side), περνάει από το χείλος προσβολής και καταλήγει στην ακμή εκφυγής από την πάνω πλευρά υποπίεσης (suction side). Η παράμετρος μήκους r αντιστοιχεί σε ακτινικές θέσεις πάνω στο σώμα.

Ένα επιφανειακό πλέγμα ορίζεται από NNT (Total Nodes Number) κόμβους, που σχηματίζουν NTE (Total Number of Elements) τετράπλευρα επιφανειακά στοιχεία:

$$NNT = NNB * NCW \quad (2.2.2)$$

$$NTE = (NNB-1) * (NCW -1) \quad (2.2.3)$$

Η γενική αρίθμηση των κόμβων NOD (NODe number) και των στοιχείων NEL (ELement Number) του πλέγματος προκύπτει από μία ακολουθία της μορφής:

$$NOD(i,j) = (j-1) * NNB + i \quad , \quad i = 1, NNB \quad , \quad j = 1, NCW \quad (2.2.4)$$

$$NEL(i,j) = (j-1) * (NNB-1) + i \quad , \quad i = 1, NNB-1 \quad , \quad j = 1, NCW-1 \quad (2.2.5)$$

Οι κόμβοι που ορίζουν το επιφανειακό πλέγμα του σώματος βρίσκονται πάνω στην πραγματική επιφάνεια του σώματος και στη γενική περίπτωση ένα στοιχείο ορίζεται από τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία. Η αναπαράσταση των σωμάτων με επίπεδα στοιχεία οδηγεί σε απλούστευση των αριθμητικών υπολογισμών και εξοικονόμηση χρόνου υπολογιστή. Αυτό επιτυγχάνεται με την προβολή των κόμβων του τετραπλεύρου στοιχείου σε ένα μέσο επίπεδο. Δεν αποτελεί θεωρητική απαίτηση της μεθόδου, αλλά διευκολύνει τους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων ταχυτήτων, που σε αυτήν την περίπτωση γράφονται σε αναλυτική μορφή και έτσι περιορίζονται σημαντικά οι απαιτήσεις σε υπολογιστικό χρόνο. Αυτή η διαδικασία είναι τοπική και δεν εξασφαλίζει ότι τα γειτονικά στοιχεία που προκύπτουν από την προβολή των κόμβων θα εξακολουθούν να εφάπτονται στις πλευρές τους όπως τα αρχικά στοιχεία της γεωμετρίας. Σε σώματα που τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους εμφανίζουν έντονες κλίσεις αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργούνται κενά μεταξύ των στοιχείων και η προσέγγιση της γεωμετρίας να μην είναι ακριβής. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με πύκνωση των κόμβων στις περιοχές αυτές. Προφανώς, στην περίπτωση μία απλής ορθογωνικής πτέρυγας με σταθερή χορδή, χωρίς συστροφή το παραπάνω σφάλμα μηδενίζεται. Από αυτή τη διαδικασία προκύπτουν κατά κανόνα τραπεζοειδή στοιχεία που παρουσιάζουν ικανοποιητική παραλληλία πλευρών κατά την ακτινική τους κατεύθυνση. Το γεωμετρικό σφάλμα που προκύπτει από την θεώρηση επίπεδων στοιχείων ελαχιστοποιείται με την επιλογή πυκνότερου πλέγματος σε περιοχές μεγάλης καμπυλότητας.

Έτσι στο γενικό-αδρανειακό σύστημα ορίζεται δομημένο πλέγμα από σημεία $\vec{XG}(k, n)$, $k=1:3$, $n=1:NNT$, όπου το k αντιστοιχεί σε καρτεσιανή συνιστώσα του αδρανειακού συστήματος αναφοράς και το n σε αριθμό κόμβου του πλέγματος, σύμφωνα με την αρίθμηση (2.2.4). Η θέση ενός τετράπλευρου στοιχείου e,

($e=1, NTE$) καθορίζεται από τις συντεταγμένες \overline{XG} των τεσσάρων κορυφών του, που αριθμούνται δεξιόστροφα. Σύμφωνα με αυτές μπορούμε να ορίσουμε το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του στοιχείου $O^e(\xi, \eta, \zeta)$, με μοναδιαία βάση $\vec{e}_\xi^e, \vec{e}_\eta^e, \vec{e}_\zeta^e$ ως προς το γενικό (αδρανειακό) σύστημα. Οι κορυφές $K=1,4$ στο τοπικό σύστημα του στοιχείου αντιστοιχούν σε κόμβους του γενικού συστήματος που έχουν αρίθμηση $NE(K,e)$, ($K=1,4, e=1, NTE$). Ένας κόμβος K της τοπικής αρίθμησης του στοιχείου θα αντιστοιχεί σε έναν και μόνο κόμβο NE έτσι ώστε:

$$K = 1 \rightarrow NE(1,e) = (j-1) * (NNB-1) + i \quad (2.2.6.1)$$

$$K = 2 \rightarrow NE(2,e) = j * (NNB-1) + i \quad (2.2.6.2)$$

$$K = 3 \rightarrow NE(3,e) = j * (NNB-1) + i + 1 \quad (2.2.6.3)$$

$$K = 4 \rightarrow NE(4,e) = (j-1) * (NNB-1) + i + 1 \quad (2.2.6.4)$$

Με δεδομένη τη γεωμετρία των κόμβων του πλέγματος γίνεται ο υπολογισμός του εμβαδού S^e , του μήκους της περιφέρειας ∂S^e του στοιχείου e , τα μήκη και τις κλίσεις των πλευρών, το πλάτος και τις διαγώνιους του στοιχείου καθώς και άλλα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που εμφανίζονται στους υπολογισμούς. Για κάθε στοιχείο του επιφανειακού πλέγματος ορίζεται το "σημείο ελέγχου" \vec{x}_{CP}^e που αποτελεί το σημείο επαλήθευσης της συνθήκης μη εισχώρησης. Ο υπολογισμός του γίνεται έτσι ώστε να μηδενίζεται η εφαπτομενική αυτεπαγόμενη ταχύτητα της διανομής πηγών του στοιχείου για αύξηση της ακρίβειας των υπολογισμών μας.

Η παραγωγή το ομόρρου ενός ανωστικού σώματος γίνεται σταδιακά σύμφωνα με ένα χρονικό σχήμα παραγωγής στροβιλότητας. Το φύλλο στροβιλότητας μπορεί να αναπαρασταθεί με τη βοήθεια δύο ισοδυνάμων θεωρήσεων. Ο κοντινός ομόρρους αποτελεί το τμήμα του φύλλου στροβιλότητας που εκφεύγει άμεσα από το σώμα και αναπαρίσταται μέσω της δυναμικής θεώρησης με τη δημιουργία πλέγματος δινωσωλήνων. Ο μακρινός ομόρρους αποτελεί το υπόλοιπο τμήμα του φύλλου στροβιλότητας και αναπαρίσταται σύμφωνα με τη στροβιλή θεώρηση με στοιχεία στροβιλότητας.

Η θέση αποβολής στροβιλότητας καθορίζεται από συνεκτικούς μηχανισμούς και στα πλαίσια μίας μη συνεκτικής αναπαράστασης του πεδίου ροής γύρω από ένα ανωστικό σώμα θα πρέπει να θεωρηθεί ως δεδομένο του προβλήματος. Στην περίπτωση μίας πτέρυγας η προφανής θέση είναι η ακμή εκφυγής. Επιπρόσθετα η αποβολή στροβιλότητας μπορεί να συμβαίνει και σε κάποιο τμήμα κατά μήκος ενός ακροπτερυγίου, αλλά και να αποκολλάται λίγο μετά την ακμή προσβολής. Στην πρώτη περίπτωση όπου η αποβολή γίνεται από το ακροπτερύγιο υπάρχει ειδική αναφορά στον τρόπο όπου η παρούσα μέθοδος μπορεί να προλέξει τη ροή, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το πρόβλημα έχει επιλυθεί στις δύο διαστάσεις (Ριζιώτης 2003), ενώ η εφαρμογή του στις τρεις διαστάσεις αποτελεί αντικείμενο άλλης διδακτορικής διατριβής (Ζαγοράκης 2005). Η ανάλυση που ακολουθεί σε αυτήν την παράγραφο αναφέρεται στην απλή περίπτωση, όπου η αποβολή στροβιλότητας γίνεται από την ακμή εκφυγής.

Η διακριτοποίηση του φύλλου στροβιλότητας (σύμφωνα με τη δυναμική θεώρηση) αποτελεί συνέχεια της ακτινικής διακριτοποίησης της επιφάνειας του σώματος και αναπαρίσταται από τετράπλευρα στοιχεία που αποτελούν προέκταση των γραμμών $r=ct$ του σώματος. Οι γραμμές αυτές πρέπει να είναι κοινές για τον ομόρρο και για το σώμα, καθώς αυτό επιβάλλεται από το θεώρημα του Kelvin που εφαρμόζεται σε αυτές τις θέσεις. Η γεωμετρία του ομόρρου αποτελείται από τους κόμβους του σώματος που βρίσκονται πάνω στην ακμή εκφυγής καθώς και τους κόμβους που προκύπτουν από τη μεταφορά αυτών σύμφωνα με τη μέση ταχύτητα που υπολογίζεται στα σημεία ελέγχου των στοιχείων της πάνω και κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής. Αυτό έχει σαν συνέπεια τη δημιουργία NCW -1 επιφανειακών στοιχείων που ορίζονται από $2 * NCW$.

Η θέση του τετράπλευρου στοιχείου "ew" του κοντινού ομόρρου καθορίζεται από τις συντεταγμένες $\overline{XWAKE}(k, nw)$, $k = 1,3$, $nw = 1,2 * NCW$ των τεσσάρων κορυφών του nw, που αριθμούνται δεξιόστροφα. Με δεδομένα αυτά τα σημεία κάνουμε αντίστοιχους υπολογισμούς για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των στοιχείων τόσο στο γενικό όσο και στο τοπικό τους σύστημα. Στην περίπτωση των στοιχείων του κοντινού ομόρρου δεν απαιτείται ο προσδιορισμός του σημείου έλεγχου, καθώς δεν επαληθεύεται η συνθήκη μη εισχώρησης σε αυτά.

Για κάθε στοιχείο "ew" του κοντινού ομόρρου κατασκευάζεται ο πίνακας NEWAKE αντίστοιχης της τοπικής με τη γενική αρίθμηση ενός κόμβου όπως ακριβώς συμβαίνει για τα στοιχεία της επιφάνειας του σώματος.

$$K = 1 \rightarrow \text{NEWAKE}(1,ew) = ew \quad (2.2.7.1)$$

$$K = 2 \rightarrow \text{NEWAKE}(2,ew) = ew + 1 \quad (2.2.7.2)$$

$$K = 3 \rightarrow \text{NEWAKE}(3,ew) = \text{NEWAKE}(2,ew) + NCW \quad (2.2.7.3)$$

$$K = 4 \rightarrow \text{NEWAKE}(4,ew) = \text{NEWAKE}(1,ew) + NCW \quad (2.2.7.4)$$

Τέλος, όπως θα φανεί στο στάδιο διάρθρωσης των εξισώσεων του προβλήματος, είναι απαραίτητη η δημιουργία ενός πίνακα ICIRC(e), $e=1,NTE$, που θα αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο "e" του πλέγματος την τιμή j της ακτινικής λωρίδας στην οποία βρίσκεται, σύμφωνα με τον ορισμό (2.5). Θεωρώντας μάλιστα ότι η αποβολή στροβιλότητας γίνεται μόνο από την ακμή εκφυγής και όχι από παράπλευρες ακμές (όπως λ.χ. το ακροπτερύγιο), τότε σε κάθε ακτινική λωρίδα αντιστοιχεί ένα στοιχείο του κοντινού ομόρρου. Σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας ICIRC(e), θα γράφεται:

$$\text{ICIRC}[e(i,j)] = ew(j) = j, j = 1,NCW-1 \quad (2.2.8)$$

2.2.3 Οι Βαθμοί Ελευθερίας των Διανομών των Ιδιομορφιών στα Σώματα

Το θεώρημα του Green καθιστά δυνατή την αναπαράσταση των σωμάτων κατανέμοντας στην επιφάνειά τους διανομές πηγών και διπόλων. Παράμετροι που καθορίζουν τα χαρακτηριστικά αυτών των κατανομών είναι:

(α) Οι βαθμοί ελευθερίας που χρησιμοποιούνται στην αναπαράσταση της γεωμετρίας του πλέγματος. Η επιφάνεια ενός σώματος μπορεί να αναπαρίσταται με επίπεδα ή καμπύλα στοιχεία. Με τη χρήση καμπύλων στοιχείων η αναπαράσταση αυτή είναι ακριβέστερη και μάλιστα σε αυτήν την περίπτωση η λύση του προβλήματος επιτυγχάνεται με τον ορισμό λιγότερων στοιχείων σε σχέση με αυτά που απαιτούνται όταν θεωρούμε επίπεδα στοιχεία (Βουτσινάς 1990). Σε αυτήν την περίπτωση οι υπολογισμοί είναι ημιαναλυτικοί (Hess 1972). Αντίθετα στην περίπτωση θεώρησης επιπέδων στοιχείων οι υπολογισμοί είναι αναλυτικοί και συνεπώς οι απαιτήσεις υπολογιστικού χρόνου είναι χαμηλές.

(β) Η θέση στην οποία τοποθετούνται οι ιδιομορφίες σε σχέση με την πραγματική επιφάνεια των σωμάτων, και συνεπώς σε σχέση με τα σημεία όπου ικανοποιείται η συνθήκη μη εισχώρησης. Η βέλτιστη επιλογή είναι η τοποθέτησή τους πάνω στην πραγματική επιφάνεια, εκεί όπου απαιτείται η γνώση του πεδίου ταχυτήτων και του πεδίου πιέσεων και ικανοποιείται η συνθήκη μη εισχώρησης. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με κύριο πίνακα που έχει ισχυρή διαγώνιο και συνεπώς το σύστημα είναι καλής ποιότητας.

(γ) Η γεωμετρική διάσταση του χώρου όπου ορίζεται η κατανομή των ιδιομορφιών. Οι ιδιομορφίες μπορεί να είναι συγκεντρωμένες σε σημείο, ή κατανεμημένες σε γραμμικό, επιφανειακό ή χωρικό στοιχείο. Προφανώς η πολυπλοκότητα των υπολογισμών αυξάνει καθώς πηγαίνουμε σε διάσταση μεγαλύτερης τάξης. Η πιο συνηθισμένη επιλογή είναι αυτή της επιφανειακής κατανομής ιδιομορφιών που μπορεί να αναπαράγει με ικανοποιητική ακρίβεια το πεδίο ροής χωρίς να επιβαρύνει σημαντικά τους υπολογισμούς μας. Μάλιστα όταν η απόσταση μεταξύ της ιδιομορφίας και ενός σημείου του χώρου γίνει σημαντική, οι υπολογισμοί μας σε αυτό το σημείο είναι δυνατόν να αναχθούν σε υπολογισμούς από σημειακά συγκεντρωμένη ιδιομορφία, που έχουν απλούστερη μορφή.

(δ) Οι βαθμοί ελευθερίας της μορφής των διανομών των ιδιομορφιών σε κάθε στοιχείο. Η συνέχεια στη διανομή της ιδιομορφίας στα όρια ενός στοιχείου επιτυγχάνεται με διγραμμική, ή μεγαλύτερης τάξης διανομή. Αυτό έχει σαν συνέπεια την εισαγωγή αγνώστων παραμέτρων, που ο αριθμός τους θα πρέπει να βρίσκεται σε ισορροπία με τις εξισώσεις του προβλήματος. Η επιλογή τμηματικά σταθερών διανομών έχει το πλεονέκτημα των απλούστερων συνήθως υπολογισμών.

Στη μέθοδο που χρησιμοποιούμε κάνουμε τις ακόλουθες επιλογές:

(α) Θεωρούμε επίπεδα στοιχεία

(β) Τοποθετούμε τις διανομές των ιδιομορφιών στην πραγματική επιφάνεια των σωμάτων.

(γ) Επιλέγουμε επιφανειακές κατανομές για τις διανομές των ιδιομορφιών πηγών και διπόλων στα σώματα και τον κοντινό ομόρρου και συγκεντρωμένες κατανομές σε σημεία για τη διανομή στροβιλότητας του ομόρρου.

(δ) Θεωρούμε τμηματικά σταθερές κατανομές πηγών για τα στοιχεία του πλέγματος. Επίσης θεωρούμε κατανομή διπόλων τμηματικά σταθερή καυτά την r-κατεύθυνση του πλέγματος και γραμμική κατά την s-κατεύθυνση. Σύμφωνα με τα παραπάνω στο στοιχείο e τοποθετείται επιφανειακή κατανομή πηγών και διπόλων και σε τυχαίο σημείο $\vec{x}^e(s, r) \in S^e$ υπολογίζονται οι εντάσεις σ^e και μ^e αντίστοιχα:

$$\sigma^e(\vec{x}^e) = ct, \vec{x}^e \in S^e \quad (2.2.9)$$

$$\mu^e[\vec{x}^e(s, r)] = B(r) * s, \vec{x}^e \in S^e \quad (2.2.10.1)$$

$$B(r) = B_{j=ICIRC(e)} = ct, r_j \leq r \leq r_{j+1}, j = 1, ICIRC(NTE) \quad (2.2.10.2)$$

Η κλίση της διανομής διπόλων $B(r)$ μεταβάλλεται κατά την ακτινική κατεύθυνση, ενώ έχει σταθερή τιμή $B_{ICIRC(e)} = ct$, κατά τη s-κατεύθυνση, για όλα τα σημεία ελέγχου \vec{x}_{CP}^e κατά το εύρος μίας ακτινικής "λωρίδας" με μέση ακτίνα r.

Με τον τρόπο αυτό ο καθορισμός της διανομής διπόλων στο γεωμετρικό πλέγμα ανάγεται σε πρόβλημα υπολογισμού των αγνώστων σταθερών B_j . Επιλέγοντας τμηματικά σταθερή κατανομή για τη διανομή διπόλων στην ακτινική κατεύθυνση προσεγγίζεται αντίστοιχα με τμηματικά σταθερή κατανομή και η κυκλοφορία του σώματος. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη φόρτισης του σώματος προσεγγίζεται τόσο ακριβέστερα όσο πιο πυκνή είναι η διακριτοποίηση της γεωμετρίας κατά το εύρος του. Η διατήρηση της κυκλοφορίας στο χρόνο, σύμφωνα με το θεώρημα του Kelvin οδηγεί στον καθορισμό των εντάσεων μ_w^t των διπόλων στον ομόρρου:

$$\mu_w^t = B_j^t * L, \mu_w^{t-1} = B_j^{t-1} * L \quad (2.2.11)$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω παρουσιάζονται οι αριθμητικές επιλογές για την αναπαράσταση ενός ανωστικού σώματος. Τοποθετούνται επιφανειακές διανομές πηγών (τμηματικά σταθερές, piecewise constant source distribution) και διπόλων (διγραμμικά μεταβαλλόμενες bi-linearly varying dipole distribution) και η κυκλοφορία προκύπτει στην ακμή εκφυγής του σώματος, ως συνέπεια της εφαρμογής του θεωρήματος του Kelvin.

Ορίζοντας με τον τρόπο αυτόν τις κατανομές των ιδιομορφιών εισάγονται NDFT (Total Number of Degrees of Freedom) βαθμοί ελευθερίας:

$$NDFT = NTE_{\sigma^e} + (NCW - 1)_{\mu^e} = NTE_{\sigma^e} + [ICIRC(NTE)]_{\mu^e} \quad (2.2.12)$$

όπου NTE_{σ^e} είναι ο αριθμός των αγνώστων εντάσεων $\sigma^e(\vec{x})=ct$, $\vec{x} \in S^e$ των τμηματικά σταθερών επιφανειακών πηγών στα NTE στοιχεία του γεωμετρικού πλέγματος του σώματος και $[ICIRC(NTE)]_{\mu^e} = (NCW - 1)_{\mu^e}$ ο αριθμός των τιμών

κλίσεων B_j της κατανομής διπόλων που είναι ίσος με τον αριθμό των ακτινικών θέσεων που ορίζεται στην διακριτοποίηση του σώματος. Αυτό το σύστημα των NDFT αγνώστων είναι πλήρως ορισμένο καθώς μπορούν να οριστούν NTE το πλήθος εξισώσεις που να ικανοποιούν την κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης και NCW-1 εξισώσεις που να ικανοποιούν τη δυναμική συνθήκη Kutta-Joukowski.

2.2.4 Ο Υπολογισμός του Δυναμικού και των Επαγόμενων Ταχυτήτων των Διανομών Ιδιομορφιών

(i) Τμηματικά σταθερή κατανομή πηγών σε επιφανειακά στοιχεία

Θεωρούμε το στοιχείο $e(i,j)$, $i=1,NNB-1$, $j=1,NCW-1$, που έχει επιφάνεια S^e , σημείο ελέγχου $\vec{x}_{CP}^e(s_i, r_j)$ και το κάθετο διάνυσμα \vec{v}^e σε αυτό το σημείο. Διανέμοντας τμηματικά σταθερή διανομή πηγών σε αυτό θα ισχύει:

$$\sigma(\vec{x}, t) = \sigma^e(t) = ct, \vec{x} \in S^e \quad (2.2.13)$$

Το δυναμικό $\Phi_\sigma^e(\vec{x}_0, t)$ και η ταχύτητα $\vec{u}_\sigma^e(\vec{x}_0, t)$ που θα επάγει η επιφανειακή κατανομή πηγών του σε ένα σημείο \vec{x}_0 εκτός της επιφάνειας S^0 είναι:

$$\Phi_\sigma^e(\vec{x}_0, t) = -\sigma * \frac{1}{4\pi} * \int_{S^e} \frac{1}{|\vec{x}_0 - \vec{x}^e|} * dS^e \quad (2.2.14)$$

$$\vec{u}_\sigma^e(\vec{x}_0, t) = \sigma * \frac{1}{4\pi} * \int_{S^e} \frac{\vec{x}_0 - \vec{x}^e}{|\vec{x}_0 - \vec{x}^e|^3} * dS^e \quad (2.2.15)$$

Θεωρώντας τμηματικά σταθερή διανομή πηγών οι υπολογισμοί της ταχύτητας και του δυναμικού ανάγονται σε υπολογισμούς ολοκληρωμάτων με ιδιόμορφους πυρήνες $1/r$, $1/r^3$, $r=|\vec{x}_0 - \vec{x}^e|$. Στην περίπτωση που το σημείο \vec{x}_0 ανήκει στην επιφάνεια S^0 τότε τα παραπάνω ολοκληρώματα γίνονται ιδιόμορφα, καθώς το σημείο υπολογισμού ταυτίζεται με το σημείο ελέγχου \vec{x}_{CP}^e του στοιχείου. Οι τιμές για το δυναμικό και την ταχύτητα θα είναι αντίστοιχα:

$$\Phi_\sigma^e(\vec{x}_0, t) = 0 \quad (2.2.16)$$

$$\vec{u}_\sigma^e(\vec{x}_0, t) = \frac{\sigma}{2} * \vec{v}^e(\vec{x}_{CP}^e, t) \quad (2.2.17)$$

(ii) Γραμμική κατανομή διπόλων σε επιφανειακά στοιχεία του σώματος

Το δυναμικό $\Phi_\mu^e(\vec{x}_0, t)$ και η ταχύτητα $\vec{u}_\mu^e(\vec{x}_0, t)$ που επάγει η επιφανειακή διανομή διπόλων έντασης $\mu^e(\vec{x}^e, t)$, που βρίσκεται στο στοιχείο "e" με επιφάνεια S^0 , σε τυχαίο σημείο \vec{x}_0 του χώρου, υπολογίζονται σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Phi_\mu^e(\vec{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^e} \mu^e(\vec{x}^e, t) \frac{\vec{v}^e(\vec{x}_0 - \vec{x}^e)}{|\vec{x}_0 - \vec{x}^e|^3} dS^e \quad (2.2.18)$$

$$\vec{u}_\mu^e(\vec{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^e} [\nabla \mu^e(\vec{x}^e, t) * \vec{v}^e] \frac{\vec{x}_0 - \vec{x}^e}{|\vec{x}_0 - \vec{x}^e|^3} dS^e + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S} (\mu^e(\vec{x}^e, t)) \frac{\vec{dl}(\vec{x}_0 - \vec{x}^e)}{|\vec{x}_0 - \vec{x}^e|^3} \quad (2.2.19)$$

Ο υπολογισμός της (2.2.18) εύκολα μπορεί να αναχθεί σε υπολογισμό ταχύτητας από σταθερή κατανομή πηγών καθώς η ολοκληρωτέα ποσότητα έχει την ίδια μορφή με αυτήν της σχετικής εξίσωσης (2.2.15). Επίσης συσχετίζοντας τη σχέση (2.2.19) με την (2.2.15) διαπιστώνεται ότι ο επιφανειακός όρος προκύπτει ως το εξωτερικό γινόμενο της επιφανειακής στροβιλότητας $\nabla_{\xi\eta}(\vec{x}^e, t) * \vec{v}^e$ με την ταχύτητα που αντιστοιχεί σε τμηματικά σταθερή διανομή πηγών μοναδιαίας έντασης και υπολογίζεται χωρίς πρόβλημα εάν είναι γνωστές οι κλίσεις της διανομής διπόλων.

Ας υποθέσουμε ότι το γεωμετρικό πλέγμα ενός σώματος προσεγγίζεται ικανοποιητικά από επίπεδα τραπεζοειδή στοιχεία. Αυτή η προσέγγιση είναι εξαιρετικά σημαντική καθώς με την επιλογή τραπεζοειδών στοιχείων γίνεται δυνατή η καλύτερη γεωμετρική αναπαράσταση ενός ανωστικού σώματος με μεταβαλλόμενη χορδή. Μάλιστα είναι δυνατόν το τραπέζιο να εκφυλιστεί σε τρίγωνο, γεγονός που δίνει ακόμα μεγαλύτερη ευελιξία στον τρόπο της αναπαράστασης σωμάτων με τυχαία γεωμετρία. Σημαντικός όμως είναι και ο αριθμητικός περιορισμός που εισάγεται με αυτόν τον τρόπο, της απαίτησης ύπαρξης παραλληλίας μεταξύ δύο πλευρών.

(iii) Διγραμμική κατανομή διπόλων σε επιφανειακά στοιχεία ομόρρου

Η ταχύτητα που επάγει ένα στοιχείο του κοντινού ομόρρου αντιστοιχεί σε ταχύτητα που επάγει διγραμμική επιφανειακή κατανομή διπόλων. Η διανομή της εντάσεως διπόλων στον ομόρρου καθορίζεται από το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Ας θεωρήσουμε το στοιχείο ew του κοντινού ομόρρου τη χρονική στιγμή t με επιφανειακή κατανομή διπόλων $\mu^{ew}(\xi, \eta)$ σε αυτό:

$$\mu^{ew}(\xi, \eta) = \alpha_{00} + \alpha_{10}\xi + \alpha_{01}\eta + \alpha_{11}\xi\eta \quad (2.2.20)$$

Στους κόμβους 1 και 2 της τοπικής αρίθμησης του στοιχείου, που ταυτίζονται με κόμβους του σώματος οι τιμές της έντασης σχετίζονται με το συντελεστή B_{j-ew} και τα αντίστοιχα μήκη τόξου. Στους κόμβους 3 και 4 οι τιμές προκύπτουν από την διατήρηση της κυκλοφορίας σύμφωνα με το θεώρημα Kelvin και είναι ίσες με τις τιμές της κυκλοφορίας που είχαν οι κόμβοι 1 και 2 την προηγούμενη την προηγούμενη στιγμή t-Δt:

$$\mu_1^{ew,t} = \mu_4^{e,t} \quad (2.2.21.1)$$

$$\mu_2^{ew,t} = \mu_3^{e,t} \quad (2.2.21.1)$$

$$\mu_3^{ew,t} = \mu_3^{e,t-\Delta t} = \mu_2^{ew,t-\Delta t} \quad (2.2.21.1)$$

$$\mu_4^{ew,t} = \mu_4^{e,t-\Delta t} = \mu_1^{ew,t-\Delta t} \quad (2.2.21.1)$$

Επαληθεύοντας την (2.2.20) στις τέσσερις πλευρές του τετραπλεύρου, όπου είναι γνωστές οι τιμές της έντασης (2.2.21), προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων με ισάριθμους αγνώστους από όπου προκύπτουν οι άγνωστοι συντελεστές της διανομής:

$$\mu_K^{ew}(\xi_K, \eta_K) = \alpha_{00} + \alpha_{10} * \xi_K + \alpha_{01} * \eta_K + \alpha_{11} * \xi_K * \eta_K, \quad K = 1,4 \quad (2.2.22)$$

Όμως η ένταση της διανομής διπόλων στα στοιχεία του ομόρρου προσδιορίζεται με βάση τις εντάσεις του προηγούμενου χρονικού βήματος αλλά και του τρέχοντος:

$$\mu^{ew}(\xi, \eta) = \mu^{ew}(\xi, \eta)^A + \mu^{ew}(\xi, \eta)^B = \alpha_{00} + \alpha_{10}\xi + \alpha_{01}\eta + \alpha_{11}\xi\eta + b_{00} + b_{10}\xi + b_{01}\eta + b_{11}\xi\eta \quad (2.2.23)$$

Συνεπώς η συνεισφορά των στοιχείων του ομόρρου είναι κατά ένα μεγάλο ποσοστό γνωστή και κατά ένα άλλο άγνωστη. Για το λόγο αυτό η διανομή χωρίζεται δύο τμήματα το (A) που σχετίζεται με τις τιμές των αγνώστων στο τρέχων χρονικό βήμα και το (B) που σχετίζεται αποκλειστικά με γνωστά μεγέθη υπολογισμένα στο προηγούμενο χρονικό βήμα, συμπληρώνοντας με μηδενικές τιμές εντάσεων τις κορυφές που υπολείπονται.

Οι συντελεστές a_{ij} , b_{ij} , $i=0,1$, $j=0,1$ στη σχέση (2.2.23) υπολογίζονται αναλυτικά από την επίλυση δύο αλγεβρικών συστημάτων 4×4 .

Για τη διγραμμική διανομή (A) θα ισχύει:

$$\mu_1^{ew}(\xi_1, \eta_1)^A = \alpha_{00} + \alpha_{10} * \xi_1 + \alpha_{01} * \eta_1 + \alpha_{11} * \xi_1 * \eta_1 = S_4^e B_{ICIRC(e)}^t \quad (2.2.24.1)$$

$$\mu_2^{ew}(\xi_2, \eta_2)^A = \alpha_{00} + \alpha_{10} * \xi_2 + \alpha_{01} * \eta_2 + \alpha_{11} * \xi_2 * \eta_2 = S_3^e B_{ICIRC(e)}^t \quad (2.2.24.1)$$

$$\mu_3^{ew}(\xi_3, \eta_3)^A = \alpha_{00} + \alpha_{10} * \xi_3 + \alpha_{01} * \eta_3 + \alpha_{11} * \xi_3 * \eta_3 = 0 \quad (2.2.24.1)$$

$$\mu_4^{ew}(\xi_4, \eta_4)^A = \alpha_{00} + \alpha_{10} * \xi_4 + \alpha_{01} * \eta_4 + \alpha_{11} * \xi_4 * \eta_4 = 0 \quad (2.2.24.1)$$

Ενώ για τη γραμμική διανομή (B) αντίστοιχα ισχύει:

$$\mu_1^{ew}(\xi_1, \eta_1)^B = b_{00} + b_{10} * \xi_1 + b_{01} * \eta_1 + b_{11} * \xi_1 * \eta_1 = 0 \quad (2.2.25.1)$$

$$\mu_2^{ew}(\xi_2, \eta_2)^B = b_{00} + b_{10} * \xi_2 + b_{01} * \eta_2 + b_{11} * \xi_2 * \eta_2 = 0 \quad (2.2.25.1)$$

$$\mu_3^{ew}(\xi_3, \eta_3)^B = b_{00} + b_{10} * \xi_3 + b_{01} * \eta_3 + b_{11} * \xi_3 * \eta_3 = S_3^e B_{ICIRC(e)}^{t-\Delta t} \quad (2.2.25.1)$$

$$\mu_4^{ew}(\xi_4, \eta_4)^B = b_{00} + b_{10} * \xi_4 + b_{01} * \eta_4 + b_{11} * \xi_4 * \eta_4 = S_4^e B_{ICIRC(e)}^{t-\Delta t} \quad (2.2.25.1)$$

Με τον τρόπο αυτό ορίζεται επακριβώς η διγραμμική συνάρτηση κατανομής διπόλων στις επιφάνειες (A) και (B). Το συνολικό πεδίο ταχύτητας που επάγει ένα επιφανειακό στοιχείο του ομόρρου θα γράφεται συνοπτικά:

$$\vec{u}^{ew}(\vec{x}_0, t) = B_{ew} * \vec{u}^{ew^A}(\vec{x}_0, t) + B_{ew}^{t-\Delta t} * \vec{u}^{ew^B}(\vec{x}_0, t) \quad (2.2.26)$$

Στην εξίσωση αυτή οι όροι ταχύτητας $\vec{u}^{ew^A}(\vec{x}_0, t)$, $\vec{u}^{ew^B}(\vec{x}_0, t)$ αντιστοιχούν σε μοναδιαίες τιμές των συντελεστών κλίσης B_{ew} , $B_{ew}^{t-\Delta t}$ του τρέχοντος (t) και του προηγούμενου (t-Δt) χρονικού βήματος αντίστοιχα. Συμπεριλαμβάνουν τόσο τον επιφανειακό όσο και τον επικαμπύλιο όρο της ταχύτητας και προκύπτουν άμεσα από υπολογισμούς των δεδομένων γεωμετρικών χαρακτηριστικών του στοιχείου. Το συνολικό πεδίο ταχύτητας, που επάγει ο κοντινός ομόρρος (NW: Near Wake) σε σημείο \vec{x}_0 , προκύπτει με άθροιση των ταχυτήτων για όλα τα στοιχεία του πλέγματός του:

$$\vec{u}_{NW}(\vec{x}_0, t) = \sum_{ew=1}^{NTEW} [B_{ew} * \vec{u}^{ew^A}(\vec{x}_0, t) + B_{ew}^{t-\Delta t} * \vec{u}^{ew^B}(\vec{x}_0, t)] \quad (2.2.27)$$

Η ένταση του δυναμικού που επάγει η διγραμμική επιφανειακή κατανομή των διπόλων του κοντινού ομόρρου σε σημείο \vec{x}_0 υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\Phi_{\mu}^{ew}(\vec{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^{ew}} \mu^{ew}(\vec{x}^{ew}, t) \frac{\vec{v}^{ew}(\vec{x}_0 - \vec{x}^{ew})}{|\vec{x}_0 - \vec{x}^{ew}|^3} dS^{ew} \quad (2.2.28)$$

Ο υπολογισμός της (2.2.28) σε σχέση με τον αντίστοιχο της (2.18) εμπεριέχει επιπρόσθετα και τον υπολογισμό του μικτού ολοκληρώματος:

$$I_{\xi\eta}(\vec{x}_0, t) = \int_{S^e} \frac{(x_0 - \xi)(y_0 - \eta)}{|\vec{x}_0 - \vec{x}^{ew}|^3} d\xi d\eta \quad (2.2.29)$$

2.2.5 Η Κινηματική Συνθήκη Μη Εισχώρησης

Η ικανοποίηση της συνθήκης μη εισχώρησης σε σημείο \vec{x} της επιφανείας ενός σώματος επιβάλλει τον μηδενισμό της κάθετης ταχύτητας σε αυτό το σημείο:

$$[\vec{u}(\vec{x}, t) - \vec{U}_B(\vec{x}, t)] * \vec{v}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in S \quad (2.2.30)$$

όπου:

$\vec{v}(\vec{x})$ το κάθετο διάνυσμα στη θέση \vec{x} ,

$\vec{U}_B(\vec{x})$ η ταχύτητα του σώματος στο αδρανειακό σύστημα και

$\vec{u}(\vec{x})$ η ταχύτητα του πεδίου ροής στη θέση \vec{x} .

Η ταχύτητα του πεδίου ροής υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{U}_{\infty}(t) + \vec{u}_{SD}(\vec{x}, t) + \vec{u}_{NW}(\vec{x}, t) + \vec{u}_{\infty}(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in D \quad (2.2.31)$$

όπου:

$\vec{U}_{\infty}(t)$ η αδιατάρακτη ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο,

$\vec{u}_{SD}(\vec{x}, t)$ η επαγόμενη ταχύτητα από τα σώματα,

$\vec{u}_{NW}(\vec{x}, t)$ η επαγόμενη ταχύτητα της επιφανειακής κατανομής στροβιλότητας στον

κοντινό ομόρρου των σωμάτων [εξίσωση (2.2.26)] και

$\vec{u}_{\infty}(\vec{x}, t)$ η επαγόμενη ταχύτητα της χωρικά διανεμημένης στροβιλότητας.

Εισάγοντας στην (2.2.31) τις διακριτές εκφράσεις όλων των συνιστωσών της ταχύτητας και θέτοντας:

$$\vec{U}_a(\vec{x}, t) = \vec{U}_\infty(t) + \vec{u}_\infty(\vec{x}, t) \quad (2.2.32)$$

καταλήγουμε στην διακριτή μορφή της συνθήκης μη εισχώρησης που εφαρμόζεται στο σημείο ελέγχου \vec{x}_{CP}^e κάθε στοιχείου e_i , ($i=1, NTE$) του σώματος:

$$\left[\sum_{e=1}^{NTE} \{ \sigma^e * \vec{u}_\sigma^e(\vec{x}_{CP}^e, t) + B_{ICIRC(e)} * \vec{u}_\mu^e(\vec{x}_{CP}^e, t) \} \right] * \vec{v}^e + \left[\sum_{e=1}^{NTE} B_{ew} * \vec{u}_\mu^{ew^A}(\vec{x}_{CP}^e, t) \right] * \vec{v}^e = - \left[\vec{U}_a(\vec{x}_{CP}^e, t) - \vec{U}_B(\vec{x}_{CP}^e, t) \right] * \vec{v}^e - \left[\sum_{e=1}^{NTE} B_{ew}^{old} * \vec{u}_\mu^{ew^B}(\vec{x}_{CP}^e, t) \right] * \vec{v}^e \quad (2.2.33)$$

όπου \vec{v}^e το κάθετο διάνυσμα στο στοιχείο e_i . Η παραπάνω εξίσωση είναι χωρισμένη σε δύο μέρη όπου στο πρώτο μέρος συμπεριλαμβάνονται όλοι οι άγνωστοι. Ο υπερδείκτης "old" αναφέρεται στην ένταση στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου που είναι γνωστή από το προηγούμενο χρονικό βήμα.

2.2.6 Η δυναμική Συνθήκη Kutta-joukowski

Η εφαρμογή της δυναμικής συνθήκης ολοκληρώνει το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων του προβλήματος. Η συνθήκη Kutta-joukowski επιβάλλει την εξίσωση των πιέσεων, ή ισοδύναμα τον μηδενισμό του πηδήματος της πίεσης στην ακμή εκφυγής και συνεπώς είναι μία μη γραμμική συνθήκη για την ταχύτητα. Ικανοποιείται σε όλες τις ακτινικές λωρίδες που έχουμε ορίσει τους άγνωστους συντελεστές $B_{ICIRC(e)}$ της διανομής διπόλων, δηλαδή $ICIRC(NTE)=NCW -1$ φορές. Όμως δεν εφαρμόζεται στην ακμή εκφυγής \vec{x}_{jTE} , καθώς η ταχύτητα απειρίζεται σε σημεία πάνω σε δινοσωλήνα, αλλά στα σημεία ελέγχου \vec{x}_{jUP} και \vec{x}_{jLOW} των στοιχείων που ορίζουν την ακμή εκφυγής.

Αυτή η επιλογή της θέσεως από τη μία εξασφαλίζει ότι ο υπολογισμός της ταχύτητας γίνεται με ακρίβεια (καθώς στα σημεία ελέγχου εφαρμόζουμε και τη συνθήκη μη εισχώρησης), από την άλλη όμως επιβάλλει την πύκνωση των σημείων στην ακμή εκφυγής, ώστε να προσεγγίζονται καλύτερα οι συνθήκες του πεδίου ροής στην περιοχή αυτή.

Η πύκνωση όμως του γεωμετρικού πλέγματος έχει ένα βασικό περιορισμό, που επιβάλλει την ύπαρξη "αριθμητικά σημαντικής απόστασης" μεταξύ ενός σημείου ελέγχου και των πλευρών που το περιβάλλουν, ώστε να αποφεύγονται ιδιόμορφοι υπολογισμοί ταχυτήτων κοντά σε δινοσωλήνα. Σε αντίθετη περίπτωση οι υπολογισμοί γίνονται μέσω της εισαγωγής συναρτήσεων αποκοπής που αναιρούν τον απειρισμό εισάγοντας όμως σφάλμα, η βαρύτητα του οποίου είναι ιδιαίτερα δύσκολο να εκτιμηθεί στην περιοχή της ακμής εκφυγής. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση εφαρμογής της δυναμικής συνθήκης, το σφάλμα αυτό υψώνεται στο τετράγωνο. Έχει διαπιστωθεί ότι στην περίπτωση ενός πλέγματος με δυσανάλογα στοιχεία, η σύγκλιση της μεθόδου μπορεί να καθυστερεί σημαντικά, αλλά και να οδηγείται σε απόκλιση. Ένας κανόνας που μπορεί να εφαρμοστεί αποβλέποντας στον περιορισμό αυτού του σφάλματος είναι η προσπάθεια αποφυγής δημιουργίας στοιχείων που θα έχουν πλευρές με δυσανάλογο λόγο μήκους, ώστε δύο απέναντι δινοσωλήνες να είναι τοποθετημένοι πολύ κοντά μεταξύ τους. Η πύκνωση προς την ακμή εκφυγής σε συνδυασμό με αυτόν τον περιορισμό επιβάλλει έμμεσα και την

πύκνωση κατά την ακτινική κατεύθυνση. Η πύκνωση αυτή οδηγεί σε αύξηση των βαθμών ελευθερίας και των αποβαλλόμενων στοιχείων στροβιλότητας, επιβαρύνοντας σημαντικά τις υπολογιστικές ανάγκες της μεθόδου.

Η ταχύτητα $\vec{u}(\vec{x})$ σε τυχαίο σημείο \vec{x} υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\vec{u} = \nabla\Phi_{\infty} + \vec{u}_{\infty} + \nabla\Phi_{\sigma,\mu} = \vec{U}_{\alpha} + \nabla\Phi_{\sigma,\mu} \quad (2.2.34)$$

όπου η \vec{U}_{α} συμπεριλαμβάνει τις συνεισφορές του μακρινού ομόρρου \vec{u}_{∞} και της αδιατάρακτης ροής $\vec{U}_{\infty} = \nabla\Phi_{\infty}$ (που θεωρείται αστρόβιλη) και σύμφωνα με τα όσα έχουμε προαναφέρει αποτελεί δεδομένο της εξίσωσης, ενώ η $\nabla\Phi_{\sigma,\mu}$ αναπαριστά τη συνεισφορά του σώματος και του κοντινού του ομόρρου και για λόγους απλοποίησης της γραφής των εξισώσεων στη συνέχεια του κειμένου θα συμβολίζεται ως $\nabla\Phi$ ($\nabla\Phi \equiv \nabla\Phi_{\sigma,\mu}$).

Σύμφωνα με τα όσα έχουν προαναφερθεί για τον υπολογισμό των πιέσεων, από την εφαρμογή της συνθήκης Kutta-joukowski στα σημεία ελέγχου της πάνω και κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής σε μία ακτινική θέση προκύπτει:

$$\frac{P_{UP}(\vec{x}_{UP}, t)}{\rho} = \frac{P_{LOW}(\vec{x}_{LOW}, t)}{\rho} \Rightarrow \frac{\partial\Phi_{UP}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^2(\vec{x}_{UP}, t) - \vec{u}(\vec{x}_{UP}, t) * \vec{U}_b(\vec{x}_{UP}, t) = \frac{\partial\Phi_{LOW}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^2(\vec{x}_{LOW}, t) - \vec{u}(\vec{x}_{LOW}, t) * \vec{U}_b(\vec{x}_{LOW}, t) \quad (2.2.35)$$

Ορίζοντας για το μέγεθος α το <<πήδημα>> $[[\alpha]]$ ως τη διαφορά μεταξύ των τιμών που λαμβάνει στην επάνω και την κάτω πλευρά στην j-ακτινική λωρίδα έτσι ώστε:

$$[[\alpha]] = \alpha(\vec{x}_{jUP}, t) - \alpha(\vec{x}_{jLOW}, t) \quad (2.2.36)$$

τότε η εξίσωση (2.2.35) γράφεται απλοποιημένη:

$$\frac{[[p]]}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{\partial[[\Phi]]}{\partial t} + \frac{1}{2} [[\vec{u}]]^2 - [[\vec{u} \vec{U}_b]] = 0 \Rightarrow 2 \frac{\partial[[\Phi]]}{\partial t} + [[\vec{u} * (\vec{u} - 2\vec{U}_b)]] = 0 \quad (2.2.37)$$

Εισάγοντας την (2.2.34) στην παραπάνω μετά από πράξεις καταλήγουμε στην:

$$2 \frac{\partial[[\Phi]]}{\partial t} + [[\nabla\Phi [\nabla\Phi + 2(\vec{U}_{\alpha} - \vec{U}_b)]]] = [[\vec{U}_{\alpha} * 2(\vec{U}_{\alpha} - \vec{U}_b)]] \quad (2.2.38)$$

Ο τετραγωνικός όρος της επαγόμενης ταχύτητας των σωμάτων $\nabla\Phi$ καθιστά τη συνθήκη μη γραμμική. Για την διατύπωση ενός γραμμικού αλγεβρικού συστήματος, γραμμικοποιούμε τη συνθήκη Kutta, επιλύνοντας με επαναληπτική διαδικασία το σύστημα των εξισώσεων του προβλήματος. Σε ένα δεδομένο χρονικό βήμα θεωρούμε ότι το τετράγωνο της άγνωστης ταχύτητας προσεγγίζεται με το γινόμενο της ταχύτητας στην τρέχουσα επανάληψη (άγνωστο μέγεθος) επί την ταχύτητα στην προηγούμενη επανάληψη (γνωστό μέγεθος). Επίσης, το πήδημα δυναμικού $[[\Phi]]$ συσχετίζεται άμεσα με την κυκλοφορία Γ και την άγνωστη διανομή μ_{UP} :

$$[[\Phi]] = \Gamma = - \mu_{UP} \quad (2.2.39)$$

Έτσι στην (n)-επανάληψη η συνθήκη Kutta γράφεται:

$$-2 \frac{\partial \mu_{UP}}{\partial t} + \left[\nabla \Phi^{(n)} \left[\nabla \Phi^{(n-1)} + 2 (\vec{U}_a - \vec{U}_b) \right] \right] = \left[\vec{U}_a * (2 \vec{U}_b - \vec{U}_a) \right] \quad (2.2.40)$$

Στην πρώτη επανάληψη του μηδενικού χρονικού βήματος θεωρούμε μηδενικές τιμές για τα $\nabla \Phi_{jUP}^{n-1}$, $\nabla \Phi_{jLOW}^{n-1}$, ενώ για την πρώτη επανάληψη μίας χρονικής στιγμής θεωρούμε τις τιμές των $\nabla \Phi_{jUP}$, $\nabla \Phi_{jLOW}$, στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Αυτή η διαδικασία είναι ευσταθής και συγκλίνει σχετικά γρήγορα σε 3-4 περιπτώσεις επαναλήψεις.

Εξετάζοντας την (2.2.40) χρειάζεται να γίνει μία παρατήρηση που σχετίζεται με το ότι ο όρος $\nabla \Phi^{(n)}$ περιλαμβάνει και την συνεισφορά του κοντινού ομόρρου μέρους της οποίας είναι γνωστή. Με χρήση της (2.2.27) προκύπτει:

$$\nabla \Phi^{(n)}(\vec{x}_0, t) = \vec{u}_{SD}(\vec{x}_0, t) + \vec{u}_{NW}(\vec{x}_0, t) = \sum_{e=1}^{NTEW} [\sigma^{e^n} * \vec{u}_\sigma^e(\vec{x}_0, t) + B_{ICIRC(e)}^{(n)} * \vec{u}_\mu^e(\vec{x}_0, t)] + \sum_{ew=1}^{NTEW} [B_{ew}^{(n)} * \vec{u}^{ew^A}(\vec{x}_0, t) + B_{ew}^{old} * \vec{u}_\mu^{ew^B}(\vec{x}_0, t)] \quad (2.2.41)$$

$$\text{θέτοντας: } \nabla \Phi^{(B)}(\vec{x}_0, t) = \sum_{ew=1}^{NTEW} [B_{ew}^{old} * \vec{u}_\mu^{ew^B}(\vec{x}_0, t)] \quad (2.2.42)$$

και συμβολίζοντας με $\nabla \Phi^{(n),A}(\vec{x}_0, t)$ τους υπόλοιπους παράγοντες του δευτέρου μέρους της (2.2.41) προκύπτει:

$$\nabla \Phi^{(n)}(\vec{x}_0, t) = \nabla \Phi^{(n),A}(\vec{x}_0, t) + \nabla \Phi^{(B)}(\vec{x}_0, t) \quad (2.2.43)$$

Ας θεωρήσουμε τα στοιχεία e_{jUP} και e_{jLOW} στην ακμή εκφυγής, καθώς και τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου \vec{x}_{jUP} και \vec{x}_{jLOW} , που βρίσκονται στην ακτινική λωρίδα j , $j=1, NCW-1$. Εισάγοντας στην (2.2.40) την (2.2.43) προκύπτει η διακριτή μορφή της γραμμικοποιημένης δυναμικής συνθήκης [εξίσωση (2.2.44)]. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλα τα μεγέθη στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι γνωστά κατά τη (n)-επανάληψη αφού αναφέρονται είτε στο προηγούμενο χρονικό βήμα (old), είτε στο προηγούμενο βήμα (n-1) της επαναληπτικής διαδικασίας επίλυσης της μη γραμμικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} & \nabla \Phi^{(n),A}(\vec{x}_{jUP}, t) \left[\nabla \Phi^{(n-1)}(\vec{x}_{jUP}, t) + 2[\vec{U}_a(\vec{x}_{jUP}, t) - \vec{U}_b(\vec{x}_{jUP}, t)] \right] - \\ & \nabla \Phi^{(n),A}(\vec{x}_{jLOW}, t) \left[\nabla \Phi^{(n-1)}(\vec{x}_{jLOW}, t) + 2[\vec{U}_a(\vec{x}_{jLOW}, t) - \vec{U}_b(\vec{x}_{jLOW}, t)] \right] - 2 \frac{\mu_{jUP}}{\Delta t} = \\ & 2 \frac{\mu_{jUP}^{old}}{\Delta t} - \nabla \Phi^B(\vec{x}_{jUP}, t) \left[\nabla \Phi^{(n-1)}(\vec{x}_{jUP}, t) + 2[\vec{U}_a(\vec{x}_{jUP}, t) - \vec{U}_b(\vec{x}_{jUP}, t)] \right] + \\ & \nabla \Phi^B(\vec{x}_{jLOW}, t) \left[\nabla \Phi^{(n-1)}(\vec{x}_{jLOW}, t) + 2[\vec{U}_a(\vec{x}_{jLOW}, t) - \vec{U}_b(\vec{x}_{jLOW}, t)] \right] - \\ & \left[\vec{U}_a(\vec{x}_{jUP}, t) [\vec{U}_a(\vec{x}_{jUP}, t) - 2 \vec{U}_b(\vec{x}_{jUP}, t)] \right] + \\ & \left[\vec{U}_a(\vec{x}_{jLOW}, t) [\vec{U}_a(\vec{x}_{jLOW}, t) - 2 \vec{U}_b(\vec{x}_{jLOW}, t)] \right] \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

2.2.7 Η Διάρθρωση του Συστήματος Εξισώσεων του Προβλήματος

Οι βασικές εξισώσεις του συστήματος είναι η κινηματική εξίσωση μη εισχώρησης (2.2.33) στα σημεία ελέγχου και η δυναμική συνθήκη εξίσωσης των πιέσεων στην ακμή εκφυγής (2.2.44).

Οι άγνωστοι του συστήματος είναι οι εντάσεις των πηγών σ^e , ($e=1, NTE$) στα σημεία ελέγχου των στοιχείων του επιφανειακού πλέγματος και οι κλίσεις $B_{j=ICIRC(e)}$, ($j=1, NCW-1$, $e=1, NTE$) της διανομής διπόλων για τις ακτινικές λωρίδες του πλέγματος (ή αντίστοιχα η κυκλοφορία στην ακμή εκφυγής).

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα $[S]$ που περιέχει το σύνολο των βαθμών ελευθερίας ως εξής:

$$[S] = [\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^e, \dots, \sigma^{NTE}, B_1, B_2, \dots, B_{j=ICIRC(e)}, \dots, B_{NCW-1}]^T \quad (2.2.45)$$

που όπως έχουμε προαναφέρει το συνολικό τους πλήθος είναι NDFT (Total Number of Degrees of Freedom):

$$NDFT = NTE + ICIRC(NTE) \quad (2.2.46)$$

Για τον έλεγχο της σύγκλισης της επαναληπτικής διαδικασίας εφαρμόζεται σε όλα τα στοιχεία $\{S_i\}$ του πίνακα των βαθμών ελευθερίας κριτήριο της μορφής:

$$\frac{\{S_i\}^{(n)} - \{S_i\}^{(n-1)}}{\{S_i\}^{(n)}} < \varepsilon, \quad i = 1, NDFT \quad (2.2.47)$$

όπου ε μία προεπιλεγμένη τιμή σφάλματος και $(^n)$, $(^{n-1})$ η τρέχουσα και η προηγούμενη επανάληψη αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, το σύστημα των εξισώσεων του προβλήματος μπορεί να αναπαρασταθεί στην ακόλουθη μητρική μορφή:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \vec{v}^e * \vec{u}_\sigma^{ie} \\ \vec{u}_\sigma^{jUPe} * [\nabla\Phi^{jUP, (n-1)} + 2(\bar{U}_a^{jUPe} - \bar{U}_b^{jUPe})] - \\ \vec{u}_\sigma^{jLOWe} * [\nabla\Phi^{jLOW, (n-1)} + 2(\bar{U}_a^{jLOWe} - \bar{U}_b^{jLOWe})] \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} \vec{v}^e * [\sum_{ICIRC(e)=j} \vec{u}_\mu^{ie} + \{\vec{u}_\mu^{iew}\}_j^A] \\ \left[\sum_{ICIRC(e)=j} \vec{u}_\mu^{jUPe} + \{\vec{u}_\mu^{jUPe w}\}_j^A \right] * [\nabla\Phi^{jUP, (n-1)} + 2(\bar{U}_a^{jUPe} - \bar{U}_b^{jUPe})] - \\ \left[\sum_{ICIRC(e)=j} \vec{u}_\mu^{jLOWe} + \{\vec{u}_\mu^{jLOWe w}\}_j^A \right] * [\nabla\Phi^{jLOW, (n-1)} + 2(\bar{U}_a^{jLOWe} - \bar{U}_b^{jLOWe})] - \frac{2S_j^{jUPe}}{\Delta t} \end{array} \right] \\ & = \left[\begin{array}{c} \frac{\sigma^e}{B_{j(e)}} \\ -(\bar{U}_a^{jUPe} (\bar{U}_a^{jUPe} - 2\bar{U}_b^{jUPe})) + (\bar{U}_a^{jLOWe} (\bar{U}_a^{jLOWe} - 2\bar{U}_b^{jLOWe})) - S_j^{jUPe} * B_{j(UP)}^{old} * \{\vec{u}_\mu^{jUPe w}\}_j^B * [\nabla\Phi^{jUP, (n-1)} + 2(\bar{U}_a^{jUPe} - \bar{U}_b^{jUPe})] + \\ S_j^{jLOWe} * B_{j(LOW)}^{old} * \{\vec{u}_\mu^{jLOWe w}\}_j^B * [\nabla\Phi^{jLOW, (n-1)} + 2(\bar{U}_a^{jLOWe} - \bar{U}_b^{jLOWe})] - \frac{2S_j^{jUPe}}{\Delta t} * B_{j(UP)}^{old} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} -\vec{v}^e * [(\bar{U}_a^{jUPe} - \bar{U}_b^{jUPe}) + B_{j(ew)}^{old} * \{\vec{u}_\mu^{iew}\}_j^B] \\ [\nabla\Phi^{jUP, (n-1)} + 2(\bar{U}_a^{jUPe} - \bar{U}_b^{jUPe})] + \\ [\nabla\Phi^{jLOW, (n-1)} + 2(\bar{U}_a^{jLOWe} - \bar{U}_b^{jLOWe})] \end{array} \right] \quad (2.2.48) \end{aligned}$$

όπου:

σ^e Η ένταση της διανομής των πηγών του στοιχείου e .

$B_{j(e)}$	Η κρίση της χορδικής μεταβολής της έντασης των διπόλων κατά μήκος της "λωρίδας" $j(e)=ICIRC(e)$ του πλέγματος.
\vec{u}_M^{KE}	Η ταχύτητα που επάγεται στο σημείο ελέγχου $K\{i, jUP, jLOW\}$ από την διανομή ιδιομορφίας $M\{\sigma, \mu\}$ του στοιχείου $E\{e, ew\}$. Αναφερόμαστε πάντα σε ταχύτητα που αντιστοιχεί σε μοναδιαία διανομή ιδιομορφίας.
$\sum_{ICIRC(e)=j} \vec{u}_M^{KE}$	Το άθροισμα των ταχυτήτων που επάγουν οι διανομές διπόλων όλων των στοιχείων e που ανήκουν στη "λωρίδα" j του επιφανειακού πλέγματος στο K σημείο του ελέγχου.
$\{\vec{u}_M^{KEw}\}_j^{A,B}$	Η ταχύτητα που επάγει η διανομή διπόλων του στοιχείου ew του ομόρρου στο K σημείο ελέγχου. Ο δείκτης j υποδηλώνει ότι το στοιχείο ew του ομόρρου αντιστοιχεί στη "λωρίδα" j του πλέγματος ή ισοδύναμα στο j σημείο επαλήθευσης της συνθήκης Kutta. Ο υπερδείκτης ^A ή ^B κατά περίπτωση αναφέρεται στο άγνωστο ή στο γνωστό τμήμα της ταχύτητας του ομόρρου αντίστοιχα.
$\nabla\Phi^{K,(n)}$	Η ταχύτητα που επάγει το σώμα και το κοντινό τμήμα του ομόρρου του στο K σημείο ελέγχου. Ο υπερδείκτης ⁽ⁿ⁾ δηλώνει το βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας για τη σύγκλιση της συνθήκης Kutta.
\vec{U}_a^K	Το άθροισμα της ταχύτητας της αδιατάρακτης ροής και της ταχύτητας που οφείλεται στο γενικευμένο πεδίο στροβιλότητας που επάγεται στο σημείο ελέγχου K .
\vec{U}_b^K	Η σχετική ταχύτητα του σημείου ελέγχου K ως προς το γενικό σύστημα αναφοράς.
s^K	Το μήκος τόξου που αντιστοιχεί στο σημείο ελέγχου K

2.2.8 Η αναπαράσταση του Φύλλου Στροβιλότητας

Στην παράγραφο αυτή γίνεται μία εκτενής ανάλυση στον τρόπο παραγωγής και εξέλιξης του φύλλου στροβιλότητας. Σύμφωνα με τα όσα έχουμε προαναφέρει η παραγωγή και η εξέλιξη του φύλλου στροβιλότητας γίνεται σταδιακά στο τέλος κάθε χρονικού βήματος επίλυσης, όταν έχουν υπολογιστεί οι άγνωστες διανομές πηγών και διπόλων στο αστρόβιλο πεδίο ροής.

Εξετάζοντας τη γενική περίπτωση της μη μόνιμης ροής, ο ομόρρους ενός ανωστικού σώματος είναι δυνατόν να αποτελείται από δύο τμήματα, τον "κοντινό" και τον "μακρινό" ομόρρου. Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας, αρχικά παράγεται ένα τμήμα επιφανειακής στροβιλότητας (κοντινός ομόρρους), που εκφεύγει από το σώμα με ένταση που προκύπτει από το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Αυτή η περιοχή απαρτίζεται από δινοσωλήνες που ορίζουν τετράπλευρα στοιχεία. Έτσι δημιουργείται ένα δινοπλέγμα (vortex lattice) όπου διανέμεται επιφανειακή και επικαμπύλια στροβιλότητα. Στη συνέχεια αυτή η διανομή στροβιλότητας μετατρέπεται σε χωρική, καθώς συγκεντρώνεται σημειακά σε στοιχεία στροβιλότητας (vortex particles). Έτσι σχηματίζεται ο μακρινός ομόρρους σε στροβιλή μορφή. Η μεταφορά και η παραμόρφωση της χωρικής στροβιλότητας γίνεται μέσω των εξισώσεων στροβιλότητας του Helmholtz. Στην γενική έκφραση ενός πεδίου στροβιλότητας μπορούν να εισάγονται και φύλλα στροβιλότητας άλλων σωμάτων ή και διαταραχές της επί άπειρον ροής (λ.χ. εισερχόμενη τυρβώδης ροή) με μορφή χωρικής στροβιλότητας. Στην περίπτωση αυτή οι θέσεις και οι εντάσεις των στοιχείων στροβιλότητας θεωρούνται γνωστές στο χρονικό βήμα που εισάγονται στο πρόβλημα.

Το Επιφανειακό Φύλλο Στροβιλότητας: Ο Κοντινός Ομόρρους.

Ο κοντινός ομόρρους αποτελεί μία λεπτή ζώνη κοντά στην ακμή εκφυγής όπου η στροβιλότητα διανέμεται ιδιόμορφα σε επιφανειακό πλέγμα διπόλων. Η υλική εξέλιξη του κοντινού ομόρρου καθορίζεται από την κινηματική εξίσωση:

$$\frac{d\vec{x}_w}{dt} = \vec{U}_m(\vec{x}_w, t) \Rightarrow \vec{x}_w^{t+\Delta t} = \vec{x}_w^t + \vec{U}_m(\vec{x}_w, t) * \Delta t \quad (2.2.49)$$

όπου ο όρος $\vec{U}_m(\vec{x}_w, t)$ εκφράζει τη συνολική μέση ταχύτητα στην ακμή εκφυγής (που ουσιαστικά λαμβάνει την τιμή \vec{x}_w^t), και σαφώς έχει μόνο εφαπτομένη συνιστώσα, συμπεριλαμβάνοντας την επίδραση της επί άπειρον ροής, των σωμάτων και της ελεύθερης στροβιλότητας. Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας θεωρούμε ότι η διεύθυνση αυτής της ταχύτητας είναι προδιαγεγραμμένη και μάλιστα ότι είναι η εφαπτομενική στο στοιχείο που βρίσκεται ακριβώς κάτω από την ακμή εκφυγής. Αυτό βρίσκεται σε συνέπεια με τη θεωρία του ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού, που επιβάλλει ότι η διεύθυνση εκφυγής του κοντινού ομόρρου μπορεί να είναι εφαπτομενική, είτε στην κάτω, είτε στην επάνω πλευρά, είτε να είναι η διχοτόμος της πάνω και κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής. Το μέτρο αυτής της ταχύτητας

υπολογίζεται από τη μέση τιμή των ταχυτήτων όπως αυτές υπολογίζονται στα σημεία ελέγχου των δύο επιφανειακών στοιχείων που βρίσκονται εκατέρωθεν από την ακμή εκφυγής, με κοινή πλευρά την ακμή εκφυγής. Η εφαρμογή της (2.2.49) οδηγεί στην δημιουργία επιφανειακής διανομής στροβιλότητας από δινοσωλήνες που ορίζουν τετράπλευρα στοιχεία. Έτσι προσδιορίζεται η γεωμετρία του κοντινού ομόρρου. Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας θα πρέπει το μήκος του κοντινού ομόρρου να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το μήκος των γειτονικών στοιχείων του σώματος στην ακμή εκφυγής. Αυτό είναι ένα γεωμετρικό κριτήριο που πρέπει να ικανοποιείται στο βαθμό που είναι δυνατό. Η εξίσωση (2.2.49) στην περίπτωση αυτή συσχετίζει την κλίμακα χρόνου με την κλίμακα μήκους του προβλήματος, ώστε η αριθμητική επίλυση του προβλήματος να είναι ευσταθής. Αυτό βέβαια δεν εξασφαλίζει ότι μία τυχαία επιλογή χρονικού βήματος και χωρικής διακριτοποίησης που ικανοποιεί αυτό το γεωμετρικό κριτήριο είναι πάντα αρκετή για την λεπτομερή αναπαράσταση του πεδίου ροής. Επιπλέον θα πρέπει η κλίμακα μήκους να επιλέγεται ώστε να μπορεί να αναπαράγει την κλίμακα μήκους των διαφόρων φυσικών μηχανισμών του εξεταζόμενου προβλήματος.

Σύμφωνα με την μέθοδο που περιγράφηκε ο κοντινός ομόρρος αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα δινοσωλήνων με μήκος που καθορίζεται από την τοπική ταχύτητα. Στην περίπτωση της περιστροφής εκφεύγουν ευθύγραμμοι δινοσωλήνες με μήκος ($dx = \omega * r * dt$) που αυξάνει γραμμικά με την ακτίνα και γίνεται ιδιαίτερα σημαντικό στο ακροπτερύγιο, με συνέπεια την αύξηση της ακτίνας του εκφεύγοντος ελικοειδούς δινοσωλήνα. Αυτό αλλοιώνει την φυσική του προβλήματος, καθώς ο ομόρρος μπορεί να έχει την τάση συστολής στην περίπτωση μίας έλικας (ή διαστολής, όπου το σφάλμα θα είναι μικρότερο). Αυτό το αριθμητικό σφάλμα οδηγεί στην ακτινική απομάκρυνση των δινοσωλήνων του κοντινού ομόρρου από το σώμα με συνέπεια την εξασθένηση της επαγόμενης ταχύτητας του ομόρρου στο σώμα (που είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης), με αποτέλεσμα τον υπολογισμό αυξημένων φορτίων και την υπερεκτίμηση των υπολογισμών. Η αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος μπορεί να γίνει με την επιλογή μικρού χρονικού βήματος.

Ο ποσοτικός καθορισμός της αποβαλλόμενης στροβιλότητας στον κοντινό ομόρρο γίνεται σε κάθε χρονικό βήμα με την ικανοποίηση της δυναμικής συνθήκης μηδενισμού της πίεσης στην ακμή εκφυγής και είναι σύμφωνος με την αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει στη συνέχεια θα δούμε πώς καθορίζεται η ένταση της κατανομής διπόλων μ_w στους δινοσωλήνες του κοντινού ομόρρου.

Με δεδομένη τη γεωμετρία $\vec{x}_w(t)$ σε στοιχεία w του κοντινού ομόρρου και τις εντάσεις των διπόλων $\vec{\mu}_w(\vec{x}_w, t)$ σε αυτό, υπολογίζονται το δυναμικό $\vec{\Phi}_w(\vec{x}_0, t)$ και η ταχύτητα $\vec{u}_w(\vec{x}_0, t)$ που αυτό επάγει σε σημείο του χώρου $\vec{x}_0 \in D$:

$$\vec{\Phi}_w(\vec{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \mu_w(\vec{x}_w, t) \frac{\vec{v}_w(\vec{x}_w) * (\vec{x}_0 - \vec{x}_w)}{|\vec{x}_0 - \vec{x}_w|^3} dS_w(\vec{x}) \quad (2.2.50)$$

$$\vec{u}_w(\vec{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \{ \nabla \mu_w(\vec{x}_w, t) * \vec{v}_w(\vec{x}_w) \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x}_w)}{|\vec{x}_0 - \vec{x}_w|^3} dS_w(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S_w} \mu_w(\vec{x}_w, t) \frac{d\vec{l}_w(\vec{x}_0 - \vec{x}_w)}{|\vec{x}_0 - \vec{x}_w|^3} \quad (2.2.51)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο απειρισμός που προκύπτει όταν μηδενίζεται ο παρανομαστής των παραπάνω σχέσεων μπορεί να συμβεί μόνο μετά την επίλυση του συστήματος εάν επιδιώξουμε να υπολογίσουμε το πεδίο ταχύτητας σε θέσεις πάνω στο επιφανειακό φύλλο στροβιλότητας.

Η μετατροπή της επιφανειακής στροβιλότητας σε χωρική

Ας υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή t το αλγεβρικό σύστημα (2.2.48) έχει επιλυθεί. Αν $\mu^{ew}(\xi, \eta)$ είναι η διανομή διπόλων στο στοιχείο ew του κοντινού ομόρρου στο τοπικό σύστημα τότε η ένταση $\vec{\Omega}_{ew}$ της ισοδύναμης χωρικής στροβιλότητας θα είναι:

$$\vec{\Omega}_{ew} = \int_{S_{ew}} \{ \nabla_{\xi\eta} \mu^{ew}(\xi, \eta) * \vec{v}^{ew} \} d\xi d\eta + \oint_{\partial S_{ew}} \mu^{ew}(\xi, \eta) d\vec{l} \quad (2.2.52)$$

όπου ο συμβολισμός $\nabla_{\xi\eta}$ σημαίνει ότι οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς την τοπική βάση. Σε κάθε χρονικό βήμα και για κάθε στοιχείο του κοντινού ομόρρου παράγονται δύο στοιχεία κοντινής στροβιλότητας σύμφωνα με την (2.2.52), ένα που συγκεντρώνει την επιφανειακή στροβιλότητα και ένα που συμπεριλαμβάνει τον επικαμπύλιο όρο. Στο τελευταίο στοιχείο του ομόρρου παράγεται ένα επιπλέον στοιχείο στροβιλότητας που συγκεντρώνει τον στρόβιλο του ακροπτερυγίου. Αυτό σημαίνει ότι αν ο συνολικός αριθμός χρονικών βημάτων είναι n , ο συνολικός αριθμός στοιχείων στροβιλότητας NVR (Number of Vortex Particles) μετά την εξέλιξη και των n χρονικών βημάτων θα είναι:

$$NVR_n = n (2 NTEW + 1) \quad (2.2.53)$$

Η ολοκλήρωση της επιφανειακής στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου οδηγεί στη δημιουργία ενός στοιχείου στροβιλότητας έντασης $\vec{\Omega}_{surf_1}^{ew}$ τοποθετημένο στη θέση $\overline{XVR}_{surf_1}^{ew}$ του γεωμετρικού κέντρου του στοιχείου (με κορυφές \overline{XWAKE}_i^{ew}) από το οποίο προέρχεται:

$$\overline{XVR}_{surf_1}^{ew} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \overline{XWAKE}_i^{ew} \quad (2.2.54)$$

Η έντασή του προκύπτει από την ολοκλήρωση της διανομής διπόλων στο επιφανειακό στοιχείο. Σύμφωνα με τη σχέση (2.2.23) η διανομή διπόλων στον ομόρρου μπορεί να γραφτεί:

$$\mu^{ew}(\xi, \eta) = a_{00} + b_{00} + (a_{10} + b_{10}) \xi + (a_{01} + b_{01}) \eta + (a_{11} + b_{11}) \xi \eta \quad (2.2.55)$$

από όπου προκύπτει:

$$\{ \nabla_{\xi\eta} \mu^{ew}(\xi, \eta) * \vec{v}^{ew} \} = \begin{Bmatrix} (a_{10} + b_{10} + (a_{11} + b_{11})\xi) \\ -a_{01} - b_{01} - (a_{11} + b_{11})\eta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2.56)$$

και συνεπώς η ένταση του στοιχείου στροβιλότητας γράφεται:

$$\vec{\Omega}_{surf_1}^{ew} = \int_{S_{ew}} \{ \nabla_{\xi\eta} \mu^{ew}(\xi, \eta) * \vec{v}^{ew} \} d\xi d\eta = ((a_{10} + b_{10})S^{ew} + (a_{11} + b_{11})m_{\xi}^{ew}) \vec{e}_{\xi}^{ew} - ((a_{10} + b_{10})S^{ew} + (a_{11} + b_{11})m_{\eta}^{ew}) \vec{e}_{\eta}^{ew} \quad (2.2.57)$$

όπου S^{ew} το εμβαδόν του στοιχείου \vec{e}_ξ^{ew} , \vec{e}_η^{ew} η επιφανειακή βάση του στοιχείου (ew) και m_ξ^{ew} , m_η^{ew} οι ροπές του τετραπλεύρου ως προς ξ και η αντίστοιχα:

$$m_\xi^{ew} = \int_{S_{ew}} \xi \, d\xi \, d\eta \quad , \quad m_\eta^{ew} = \int_{S_{ew}} \eta \, d\xi \, d\eta \quad (2.2.58)$$

Αν θεωρήσουμε ότι κάθε πλευρά K , ($K=1,4$) του στοιχείου του κοντινού ομόρρου έχει σταθερή τιμή διπολικής έντασης μ_K και μήκος $\vec{l}_K = l_K * \vec{t}_K$ (όπου \vec{t}_K τα μοναδιαία διανύσματα σε κάθε πλευρά), τότε ο δεύτερος όρος της (2.2.52) γράφεται:

$$\oint_{\partial S_w} \mu^{ew}(\xi, \eta) d\vec{l} = \sum_{k=1}^4 \mu_K * \vec{l}_K = \sum_{k=1}^4 \mu_K * l_K * \vec{t}_K \quad (2.2.59)$$

Για τον υπολογισμό αυτού του όρου ας θεωρήσουμε τρία γειτονικά στοιχεία στον κοντινό ομόρρου σώματος το ew και τα $ew-1$, $ew+1$.

Αριθμώντας ωρολογιακά τις πλευρές των στοιχείων υπολογίζουμε την μέση τιμή για την ένταση του δινοσωλήνα σε καθεμία από αυτές:

$$\text{πλευρά 1: } \mu_1=0 \quad (2.2.60)$$

Η πλευρά αυτή είναι πάνω στην ακμή εκφυγής. Η διανομή διπόλων έχει συνεχή ένταση κατά την σ -κατεύθυνση, με συνέπεια αυτός δινοσωλήνας του κοντινού ομόρρου να αλληλοαναιρείται με τον αντίστοιχο του σώματος. Για λόγους οικονομίας υπολογιστικού χρόνου οι όροι αυτοί δεν υπολογίζονται ούτε στο σώμα ούτε στον ομόρρου.

$$\text{πλευρά 2: } \mu_2 = \frac{1}{2}(\mu_2^{ew} + \mu_3^{ew}) - \frac{1}{2}(\mu_1^{ew+1} + \mu_4^{ew+1}), \quad ew \neq NTEW \quad (2.2.61)$$

Η διανομή διπόλων παρουσιάζει ασυνέχεια κατά την τ -κατεύθυνση (γραμμή αποβολής στροβιλότητας). Στην πλευρά αυτή θέτουμε ένταση στροβιλότητας ίση με τη διαφορά της μέσης τιμής των εντάσεων που υπολογίζουμε στις πλευρές 2 και 4 των στοιχείων ew και $ew+1$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που εξετάζουμε το τελευταίο στοιχείο του κοντινού ομόρρου ($ew=NTEW$) τότε θέτουμε την μέση τιμή της πλευράς 2:

$$\mu_2 = \frac{1}{2}(\mu_2^{ew} + \mu_3^{ew}) \quad , \quad ew = NTEW \quad (2.2.62)$$

$$\text{πλευρά 3: } \mu_3=0 \quad (2.2.63)$$

Η διανομή διπόλων στον ομόρρου είναι συνεχής και οι αντίστοιχοι όροι αλληλοαναιρούνται. Η μόνη περίπτωση που η πλευρά 3 δεν αντιστοιχεί σε μηδενική ένταση είναι αυτή του πρώτου χρονικού βήματος οπότε

αντιστοιχεί στον αρχικό στρόβιλο και είναι:

$$\mu_3 = \frac{1}{2}(\mu_3^{ew} + \mu_4^{ew}) \quad , \quad t = 1 \quad (2.2.64)$$

$$\text{πλευρά 4: } \mu_4 = \frac{1}{2}(\mu_1^{ew} + \mu_4^{ew}) - \frac{1}{2}(\mu_2^{ew-1} + \mu_3^{ew-1}), \quad ew \neq NTEW \quad (2.2.65)$$

Κατά αντιστοιχία με την πλευρά 2 σε αυτήν την πλευρά θέτουμε τη διαφορά της μέσης τιμής των εντάσεων που υπολογίζουμε στις πλευρές 4 και 2 των στοιχείων ew και $ew-1$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που εξετάζουμε το πρώτο στοιχείο του κοντινού ομόρρου ($ew=1$) τότε η ένταση ισούται με τη μέση τιμή της πλευράς 4:

$$\mu_4 = \frac{1}{2}(\mu_1^{ew} + \mu_4^{ew}) \quad , \quad ew = 1 \quad (2.2.66)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο υπολογισμός του επικαμπύλιου όρου της (2.2.52) οδηγεί στη δημιουργία στοιχείων στροβιλότητας που τοποθετούνται στο μέσο της αντίστοιχης πλευράς με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά θέσης και έντασης στροβιλότητας:

$$\begin{aligned} \overline{XVR}_{line,1}^{ew} &= 0.5 (\overline{XWAKE}_1^{ew} + \overline{XWAKE}_4^{ew}) \\ \vec{\Omega}_{line,1}^{ew} &= \mu_4 * l_4 * \vec{\tau}_4 \end{aligned} \quad (2.2.67)$$

και

$$\begin{aligned} \overline{XVR}_{line,2}^{ew} &= 0.5 (\overline{XWAKE}_2^{ew} + \overline{XWAKE}_3^{ew}) \\ \vec{\Omega}_{line,2}^{ew} &= \mu_2 * l_2 * \vec{\tau}_2 \end{aligned} \quad (2.2.68)$$

Η Χωρική Κατανομή Στροβιλότητας: Ο Μακρινός Ομόρρος.

Ο μακρινός ομόρρος προκύπτει με σταδιακό τρόπο στο χρόνο από την ολοκλήρωση της επιφανειακής στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου σε χωρική στροβιλότητα και αποτελεί δεδομένο του προβλήματος που εξετάζουμε. Απαρτίζεται από ένα σύνολο στοιχείων στροβιλότητας σφαιρικής συμμετρίας (vortex particles), από τις θέσεις των οποίων προκύπτει η γεωμετρία του ομόρρου. Εάν θεωρήσουμε ότι τη στιγμή t έχουν δημιουργηθεί συνολικά $K(t)$ σημειακά στοιχεία στροβιλότητας (vortex particles) εντάσεως $\vec{\Omega}_j, j = 1, K(t)$, τότε σε τυχαία θέση \vec{x} του χώρου η επαγόμενη στροβιλότητα και ταχύτητα θα υπολογίζονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{K(t)} \vec{\Omega}_j(t) * \zeta_\varepsilon * \left| \vec{x} - \vec{x}_{\Omega_j}(t) \right| \quad (2.2.69)$$

και

$$\vec{u}_w(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{K(t)} \frac{\bar{\Omega}_j(t) * (\vec{x} - \vec{x}_{\Omega_j}(t))}{|\vec{x} - \vec{x}_{\Omega_j}(t)|^3} f_\varepsilon(|\vec{x} - \vec{x}_{\Omega_j}(t)|) \quad (2.2.70)$$

Είναι φανερό ότι το πεδίο ταχύτητας (2.2.70) παρουσιάζει ιδιομορφία όταν $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_{\Omega_j}(t)$, δηλαδή το σημείο υπολογισμού είναι πολύ κοντά σε στοιχεία στροβιλότητας. Για την άρση αυτού του απειρισμού εισάγεται κατάλληλη συνάρτηση αποκοπής $f_\varepsilon(r)$, $r = |\vec{x} - \vec{x}_{\Omega_j}(t)|$ που ομαλοποιεί την ταχύτητα σε μία χαρακτηριστική περιοχή ακτίνας ε (μήκος αποκοπής) με κέντρο τη θέση \vec{x}_{Ω_j} κάθε στοιχείου στροβιλότητας. Η συνάρτηση αποκοπής πρέπει να ικανοποιεί ταυτοτικά τις συνθήκες:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} f_\varepsilon(r) &= 1 \\ \lim_{r \rightarrow 0} f_\varepsilon(r) &= 1 \end{aligned} \quad (2.2.71)$$

ενώ η συνάρτηση $\zeta_\varepsilon(r)$ συνδέεται με την $f_\varepsilon(r)$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\zeta_\varepsilon(r) = \frac{f'_\varepsilon(r)}{4\pi r^2} \quad (2.2.72)$$

Μία τυπική συνάρτηση αποκοπής είναι η εκθετική συνάρτηση (Βουτσινάς 1990):

$$\zeta_\varepsilon(r) = 1 - e^{-\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^3} \quad (2.2.73)$$

που αντιστοιχεί στη συνάρτηση (Beale and Majda 1985):

$$\zeta_\varepsilon(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{3}{\varepsilon^3} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)^3 \quad (2.2.74)$$

Επίσης χρησιμοποιήθηκε και μία συνάρτηση αποκοπής με αλγεβρική μορφή που εφαρμοζόμενη στον υπολογισμό της ταχύτητας δίνει:

$$\vec{u}_w(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{K(t)} \frac{\bar{\Omega}_j(t) * (\vec{x} - \vec{x}_{\Omega_j}(t))}{\left(|\vec{x} - \vec{x}_{\Omega_j}(t)|^6 + \varepsilon^6\right)^{1/2}} \quad (2.2.75)$$

Σαφώς η επίδραση της εκθετικής συνάρτησης αποκοπής στον υπολογισμό της ταχύτητας οδηγεί σε οξύτερες μεταβολές όσο το σημείο υπολογισμού προσεγγίζει το στοιχείο στροβιλότητας σε σύγκριση με την αλγεβρική μορφή.

Εάν συμβολίσουμε με h τη μέση απόσταση μεταξύ των στοιχείων στροβιλότητας, τότε για τη σύγκλιση της μεθόδου των στοιχείων στροβιλότητας για συναρτήσεις αποκοπής δεύτερης τάξης ακρίβειας, το αριθμητικό σφάλμα ελαχιστοποιείται όταν επιλέξουμε μήκος αποκοπής ε :

$$\varepsilon = h^\alpha, \quad (0.6 < \alpha < 1) \quad (2.2.76)$$

Η μεταφορά και παραμόρφωση της χωρικής στροβιλότητας

Με την μετατροπή της επιφανειακής στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου σε χωρική, αυτός ουσιαστικά παύει να υφίσταται, καθώς η στροβιλότητα που ήταν διανεμημένη σε αυτόν μεταφέρεται πλέον από τα αντίστοιχα στοιχεία στροβιλότητας. Σε όλα τα

στοιχεία στροβιλότητας εφαρμόζονται οι σχέσεις μεταφοράς και παραμόρφωσης της στροβιλότητας του Helmholtz. Αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν υλικά (Langrangian) τόσο την εξέλιξη των θέσεων των στοιχείων στροβιλότητας όσο και την ένταση αυτών.

Η εξέλιξη της τροχιάς και η μεταβολή της έντασης για το στοιχείο στροβιλότητας που τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση \vec{x}_Ω , κινείται με \vec{u}_Ω και έχει ένταση στροβιλότητας $\vec{\Omega}$ θα προκύπτει από τις εξισώσεις:

$$\frac{d\vec{x}_\Omega(t)}{dt} = \vec{u}(\vec{x}_\Omega(t), t) \quad (2.2.77)$$

και

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt}(\vec{x}_\Omega, t) = (\vec{\Omega}(\vec{x}_\Omega, t)\nabla)\vec{u}(\vec{x}_\Omega, t) = \sum_{q=1}^{NVR} \left\{ \frac{\vec{\Omega}_q * \vec{\Omega}_\Omega}{4\pi r^3} - 3 \frac{(\vec{\Omega}_\Omega * \vec{r}) * (\vec{\Omega}_q * \vec{r})}{4\pi r^5} \right\}, \quad \vec{r} = \vec{x}_\Omega - \vec{x}_q \quad (2.2.78)$$

Ο όρος $(\vec{\Omega}(\vec{x}_\Omega, t)\nabla)\vec{u}(\vec{x}_\Omega, t)$ αποτελεί τον όρο παραμόρφωσης των εξισώσεων Lagrange. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στο τέλος ενός χρονικού βήματος, όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται στις εξισώσεις (2.2.77) και (2.2.78) είναι γνωστά ή υπολογίζονται αναλυτικά. Η επίλυση (δηλαδή η ολοκλήρωση) των εξισώσεων των στο χρόνο γίνεται με ένα σχήμα Adams-Basford ακρίβειας $O(\Delta t^2)$. Η επιλογή του συγκεκριμένου σχήματος ολοκλήρωσης είναι σε συνέπεια με το πρόβλημα μεταφοράς της ελεύθερης στροβιλότητας που έχει υπερβολικό χαρακτήρα. Έτσι θα έχουμε:

$$\vec{\Omega}^{(t_{n+1})} = \vec{\Omega}^{(t_n)} + \Delta t \left(\frac{3}{2} \vec{\Omega}^{(t_n)} \nabla \vec{u}(t_n) - \frac{1}{2} \vec{\Omega}^{(t_{n+1})} \nabla \vec{u}(t_{n+1}) \right) \quad (2.2.79)$$

Ολοκληρώνοντας την αναφορά μας στην παραγωγή του φύλλου στροβιλότητας σημειώνεται για μία ακόμη φορά ότι η επιλογή της υλικής αναπαράστασής του με χωρική διανομή στροβιλότητας γίνεται καθώς η εφαρμογή της τροφοδότησης του μακρινού ομόρρου με επιφανειακή διανομή στροβιλότητας εμφανίζει έντονες αριθμητικές αστάθειες, που δημιουργούν ανωμαλίες στη μέθοδο. Η ύπαρξη ιδιόμορφων ολοκληρωμάτων στον υπολογισμό της ταχύτητας εισάγει έντονη διασπορά στην υπολογιζόμενη κατανομή $\vec{x}_w^{t+\Delta t}$, με συνέπεια την απώλεια της λειότητας του φύλλου στροβιλότητας ακόμη και μετά το πέρας μικρού χρονικού διαστήματος από τη στιγμή της δημιουργίας του.

Στην γενική περίπτωση η αποβαλλόμενη στροβιλότητα από ένα σώμα μπορεί να προσπίπτει σε άλλο σώμα. Στην περίπτωση που κάποιο στοιχείο στροβιλότητας βρίσκεται πολύ κοντά στην επιφάνεια ενός σώματος τότε θα πρέπει αυτό να κινείται εφαπτομενικά ως προς αυτό, σύμφωνα με το πεδίο ταχυτήτων που υπολογίζουμε πάνω σε αυτό το σώμα. Μάλιστα σημειώνεται ότι το πεδίο ταχυτήτων στο σώμα είναι γνωστό στα σημεία ελέγχου αυτού, καθώς εκεί εφαρμόζουμε την συνθήκη μη εισχώρησης. Όμως η εφαρμογή των εξισώσεων στροβιλότητας του Helmholtz δεν περιλαμβάνει αυτόν τον περιορισμό. Για το λόγο αυτό μετά την εφαρμογή αυτών των εξισώσεων είναι απαραίτητο να γίνεται έλεγχος εάν κάποιο στοιχείο στροβιλότητας εισχωρεί στο εσωτερικό σώματος. Στην περίπτωση που συμβαίνει κάτι τέτοιο, η θέση

του στοιχείου στροβιλότητας $\vec{x}_\Omega^{(t_{n+1})}$ διορθώνεται σύμφωνα με την εφαπτομενική ταχύτητα \vec{u}_{CP}^e , που έχει το πλησιέστερο σε αυτό σημείο ελέγχου \vec{x}_{CP}^e του σώματος:

$$\vec{x}_\Omega^{(t_{n+1}),corrected} = \vec{x}_\Omega^{(t_n)} + \Delta t \vec{u}_{CP}^e \quad (2.2.80)$$

2.2.9 Η Αποβολή Στροβιλότητας από το Ακροπτερύγιο

Στη συνέχεια παρουσιάζονται εναλλακτικοί τρόποι αποβολής στροβιλότητας από το ακροπτερύγιο στα πλαίσια των ασυμπίεστων μη συνεκτικών μεθοδολογιών. Το πρόβλημα αυτό εντάσσεται στο γενικότερο πρόβλημα αναπαράστασης της αποκολλημένης ροής. Η ροή κοντά στο ακροπτερύγιο χαρακτηρίζεται τοπικά από την εμφάνιση μεγάλων γωνιών πρόσπτωσης που προκαλούν την αποκόλληση της ροής και την ανάπτυξη έντονων τρισδιάστατων φαινομένων που οδηγούν σε αναδίπλωση του αποβαλλόμενου φύλλου στροβιλότητας. Η θέση έναρξης της αποκόλλησης εξαρτάται από συνεκτικούς μηχανισμούς, και στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα πρέπει να θεωρείται δεδομένο του προβλήματος. Σαφώς καθορίζεται από τη γεωμετρία του πτερυγίου και τις συνθήκες ροής σε αυτή την περιοχή.

Η ακρίβεια αυτών των υπολογισμών θα καθορίζεται τόσο από την λεπτομερή αναπαράσταση της γεωμετρίας του ακροπτερυγίου, όσο και από την επιλογή κατάλληλου χρονικού βήματος, ώστε να προλέγεται σωστά η αναδίπλωση του φύλλου στροβιλότητας. Αυτοί οι περιορισμοί σαφώς αυξάνουν τις ανάγκες σε υπολογιστική μνήμη και χρόνο.

Η κυκλοφορία στην περιοχή του ακροπτερυγίου δεν μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν, όπως απαιτεί το φυσικό πρόβλημα. Αυτό συμβαίνει καθώς η τιμή της κυκλοφορίας καθορίζεται μέσω του συντελεστή $B(r)$ που λαμβάνει την μηδενική τιμή σταθερά κατά το εύρος (ακτίνα) της πτέρυγας και του μήκους s της περιφέρειας της αεροτομής που κατά κανόνα είναι μηδενικό. Ειδικά στο ακροπτερύγιο, όπου η κλίση της κυκλοφορίας είναι μεγάλη, η προσέγγισή της απαιτεί ιδιαίτερη πύκνωση του πλέγματος που οδηγεί σε αύξηση των απαιτήσεων σε υπολογιστικό χώρο (μνήμη) και χρόνο. Η τιμή της κυκλοφορίας στην περιοχή του ακροπτερυγίου θα είναι πάντα μη μηδενική και θα τείνει στο μηδέν όσο πιο πυκνό θα είναι το πλέγμα στην περιοχή αυτή.

Λόγω της αδυναμίας του αριθμητικού προτύπου να αναπαραστήσει τη φυσική λύση στην περιοχή του ακροπτερυγίου, στην πράξη αποβάλλεται στροβιλότητα από αυτό με ένταση που προκύπτει από την μη μηδενική τιμή της κυκλοφορίας στην περιοχή αυτή.

Η γεωμετρία ενός στοιχείου του κοντινού ομόρρου στο ακροπτερύγιο προκύπτει από την υλική μετακίνησή του σύμφωνα με τη μέση ταχύτητα στα σημεία έλεγχου των στοιχείων που βρίσκονται εκατέρωθεν της ακμής εκφυγής. Η διεύθυνση μπορεί να είναι αυτή της ταχύτητας σε ένα από τα δύο στοιχεία ή η μέση. Εάν είναι γνωστές οι εντάσεις της κατανομής διπόλων στις κορυφές των στοιχείων του σώματος, τότε μπορεί να προκύψει η ένταση διπόλων στους κόμβους του στοιχείου του κοντινού

ομόρρου σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις που συντηρούν την προϊστορία της αποβαλλόμενης στροβιλότητας σύμφωνα με το θεώρημα του Kelvin:

$$\mu_1^{wake} = \mu_2^{wing} - \mu_1^{wing\ tip} \quad (2.2.81.1)$$

$$\mu_2^{wake} = (\mu_1^{wake})^{old} \quad (2.2.81.2)$$

$$\mu_3^{wake} = (\mu_4^{wake})^{old} \quad (2.2.81.3)$$

$$\mu_4^{wake} = \mu_3^{wing} - \mu_4^{wing\ tip} \quad (2.2.82.4)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει μία ειδική αναφορά στον τρόπο με τον οποίο γίνεται η κατανομή διπόλων στην παράπλευρη επιφάνεια του ακροπτερυγίου. Ειδικά για την εξεταζόμενη περίπτωσης γεωμετρίας, υιοθετείται τμηματικά σταθερή κατανομή διπόλων κατά μήκος αυτής, η ένταση της οποίας προκύπτει από την ικανοποίηση της συνθήκης μη εισχώρησης.

Εάν θεωρήσουμε ότι το ανωστικό σώμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως συνδυασμός δύο σωμάτων: ενός *μη ανωστικού σώματος* που έχει την μορφή του εξεταζόμενου σώματος και ενός *λεπτότοιχου ανωστικού σώματος* τότε με την εισαγωγή των κατάλληλων οριακών συνθηκών μπορεί να υπολογιστεί η αποβολή στροβιλότητας από την ακμή εκφυγής αλλά και το ακροπτερύγιο.

Το λεπτότοιχο ανωστικό σώμα έχει την ίδια διακριτοποίηση με αυτήν του μη ανωστικού σώματος, όμως δεν υπάρχουν οι παράπλευρες επιφάνειες της ρίζας (hub) και του ακροπτερυγίου (tip). Η τελική μορφή του πλέγματος και η αντίστοιχη τοπολογία του πλέγματος προκύπτει με την αναδίπλωση μία λεπτότοιχης ανωστικής επιφάνειας στη μέση. Στο μη ανωστικό σώμα κατανέμονται επιφανειακές κατανομές πηγών με τμηματικά σταθερή ένταση και ικανοποιείται η συνθήκη μη εισχώρησης σε όλα τα σημεία ελέγχου του (συνεπώς και σε αυτά των παράπλευρων επιφανειών της ρίζας και του ακροπτερυγίου). Στο λεπτότοιχο ανωστικό σώμα κατανέμονται επιφανειακές κατανομές διπόλων και ικανοποιείται η συνθήκη εξίσωσης των πιέσεων στην ακμή εκφυγής, όπου, σύμφωνα με την τοπολογία του λεπτότοιχου πλέγματος, εκεί ταυτίζονται "η ακμή προσβολής" (κάτω πλευρά) με την "ακμή εκφυγής" (πάνω πλευρά). Ο τρόπος της μερικής αποβολής στροβιλότητας από το τμήμα του ακροπτερυγίου θεωρείται γνωστός (Μπέλεσης 1998).

Συνοψίζοντας, στην παράγραφο αυτή εντοπίστηκαν οι αριθμητικές δυσκολίες στην αναπαράσταση της αποβαλλόμενης στροβιλότητας από το ακροπτερύγιο. Στην πραγματικότητα η ροή στην περιοχή του ακροπτερυγίου είναι μία ροή με πολύ μεγάλη γωνία πρόσπτωσης σε σχέση με το ακροπτερύγιο και σε αυτήν την περίπτωση η θεωρία δυναμικού από μόνης της δεν αρκεί για την επίλυση αυτού του προβλήματος.

2.2.10 Ο υπολογισμός των Φορτίων

Σε κάθε χρονικό βήμα αφού ολοκληρωθεί η επίλυση των εξισώσεων του συστήματος, είναι δυνατός ο υπολογισμός της δύναμης που αναπτύσσεται λόγω της ροής πάνω σε κάθε τετράπλευρο στοιχείο του σώματος.

Έχοντας υπολογίσει τις διανομές των πηγών και των διπόλων σε όλα τα επιφανειακά στοιχεία που απαρτίζουν τα σώματα και γνωρίζοντας την προϊστορία του δυναμικού ο υπολογισμός των πιέσεων γίνεται μέσω της ολοκλήρωσης της απόκλισης του θεωρήματος της ροής. Η πίεση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συνεισφορών από το αστρόβιλο και το στροβιλό μέρος της αναπαράστασης ταχυτήτων:

$$p^e(\vec{x}, t) = p_\phi^e(\vec{x}, t) + p_\infty^e(\vec{x}, t) \quad (2.2.82)$$

Το απόλυτο σύστημα αναφοράς, στο τυχαίο στοιχείο e που ανήκει σε σώμα κινούμενο με σχετική ταχύτητα $\vec{U}_B^e(\vec{x}, t)$ θα ισχύει για τον υπολογισμό της πίεσης:

$$\frac{\partial \Phi^e(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^e(\vec{x}, t)^2 + \frac{p_\infty^e(\vec{x}, t)}{\rho} + \frac{p_\phi^e(\vec{x}, t)}{\rho} - \vec{u}^e(\vec{x}, t) * \vec{U}_B^e(\vec{x}, t) = c(t) \quad (2.2.83)$$

όπου ο δείκτης (e) υποδηλώνει ότι όλα τα μεγέθη αναφέρονται στο στοιχείο e . Ο μη μόνιμος όρος αυτής της σχέσης υπολογίζεται ακολούθως:

$$\frac{\partial \Phi^e(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_\infty^e(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{\sigma, \mu}^e(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (2.2.84)$$

Στην περίπτωση της μόνιμης ροής ο όρος $\frac{\partial \Phi_\infty^e(\vec{x}, t)}{\partial t}$ μηδενίζεται, αλλιώς πρέπει να υπολογιστεί σύμφωνα με τα δεδομένα του κάθε προβλήματος, ενώ ο υπολογισμός του όρου δυναμικού διαταραχής $\frac{\partial \Phi_{\sigma, \mu}^e(\vec{x}, t)}{\partial t}$ γίνεται εύκολα καθώς σε κάθε χρονική υπολογίζουμε τις τιμές του δυναμικού $\Phi_\sigma^e(\vec{x}, t)$, $\Phi_\mu^e(\vec{x}, t)$ και συνεπώς και τη χρονική μεταβολή τους.

Η εξίσωση (2.2.84) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πίεσης p^e σε κάθε τετράπλευρο στοιχείο της γεωμετρίας του σώματος. Ο υπολογισμός του συντελεστή πίεσης στο στοιχείο e γίνεται με την αδιαστατοποίηση της πίεσης p^e ως προς μία κατάλληλη πίεση αναφοράς P_{ref} . Προκειμένου να είναι δυνατή η σύγκριση του συντελεστή πίεσης c_p^e των αριθμητικών προλέξεων με τα πειραματικά δεδομένα θα πρέπει να είναι γνωστή η P_{ref} που χρησιμοποιήθηκε για την αδιαστατοποίηση των πειραματικών αποτελεσμάτων:

$$c_p^e = \frac{p^e - p_\infty}{P_{ref}} \quad (2.2.85)$$

Κλείνοντας την αναφορά στον τρόπο υπολογισμού των πιέσεων αξίζει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια στην αναπαράσταση της γεωμετρίας του εξεταζόμενου σώματος επηρεάζει άμεσα τους υπολογισμούς των πιέσεων, τόσο στο χείλος πρόσπτωσης, όπου εμφανίζονται οι μέγιστες τιμές πιέσεων, όσο και στην ακμή εκφυγής, όπου η

ικανοποίηση της εξίσωσης των πιέσεων αποτελεί τη βασική συνθήκη για την παραγωγή στροβιλότητας και την ορθή επίλυση του προβλήματος.

Ο υπολογισμός της κάθετης δύναμης που αναπτύσσεται στο στοιχείο e γίνεται απευθείας καθώς η πίεση p^e έχει ήδη υπολογιστεί:

$$\vec{F}_n^e(\vec{x}, t) = (p^e(\vec{x}, t) * A^e) \vec{\nu}^e \quad (2.2.86)$$

η δύναμη αυτή οδηγεί στην εμφάνιση ροπής $Q^e(\vec{x}, t)$ ως προς την αρχή των αξόνων:

$$Q^e(\vec{x}, t) = \vec{x} * \vec{F}_n^e(\vec{x}, t) \quad (2.2.87)$$

Σημειώνεται ότι στους υπολογισμούς των φορτίων δεν υπεισέρχονται συνεκτικές διορθώσεις, οπότε η συνολική στιγμιαία δύναμη $\vec{F}^{NB}(t)$ και ροπή $\vec{Q}^{NB}(t)$ που αναπτύσσονται στο σώμα (NB) στο απόλυτο σύστημα αναφοράς είναι:

$$\vec{F}^{NB}(t) = \sum_{e=1, NTEB(NB)} \vec{F}_n^e(\vec{x}, t) \quad (2.2.88)$$

$$\vec{Q}^{NB}(t) = \sum_{e=1, NTEB(NB)} \vec{Q}_n^e(\vec{x}, t) \quad (2.2.89)$$

Η Εισαγωγή Συνεκτικής Διόρθωσης των Φορτίων

Σύμφωνα με τις βασικές υποθέσεις του προβλήματος το ρευστό θεωρείται μη συνεκτικό. Μία από τις επιπτώσεις της αγνόησης της συνεκτικότητας είναι η εισαγωγή σφάλματος στον υπολογισμό των υπολογιζόμενων φορτίων πάνω στο περιρρεόμενο στερεό σύνορο. Γενικά το μέτρο των φορτίων λόγω συνεκτικότητας είναι μικρότερο από το αντίστοιχο μέτρο των δυναμικών φορτίων, όμως είναι δυνατόν να επηρεάζουν σημαντικά τους υπολογισμούς ορισμένων μεγεθών. Στην περίπτωση ενός περιστρεφόμενου δρομέα η συνεισφορά της συνεκτικότητας στα περιφερειακά φορτία, και στη ροπή/ισχύ του δρομέα μπορεί να είναι σημαντική.

Είναι δυνατόν να εφαρμοστούν διάφορες τεχνικές συνεκτικής διόρθωσης των φορτίων. Ενδεικτικά αναφέρονται οι ακόλουθες:

(α) Συνεκτική διόρθωση σύμφωνα με τη θεωρία των στοιχείων περυγώσεων:

Στην περίπτωση αυτή το περύγιο διακριτοποιείται σε ακτινικές λωρίδες (strips), όπου γίνεται η απλουστευτική παραδοχή ότι η τοπική ροή είναι δισδιάστατη με σταθερή ταχύτητα \vec{U}_{∞}^{2D} στο άπειρο, οπότε ισχύει για αυτές η θεωρία στοιχείων περυγώσεων. Επίσης θεωρείται ότι τα φορτία λόγω συνεκτικότητας, που εμφανίζονται σε μία αεροτομή, οφείλονται αποκλειστικά στη δύναμη οπισθέλκουσας \vec{D} (Drag), ενώ τα δυναμικά φορτία στη δύναμη άνωσης \vec{L} (Lift), γεγονός που ισχύει για μικρές γωνίες πρόσπτωσης. Εάν είναι διαθέσιμη η πειραματική καταγραφή της αεροδυναμικής συμπεριφοράς αυτών των αεροτομών (αεροδυναμικοί συντελεστές $C_L(\alpha)$, $C_D(\alpha)$), όπου α η γωνία πρόσπτωσης, τότε τα συνεκτικά φορτία μπορούν να εκτιμηθούν.

Για τον σκοπό αυτό απαιτείται ο υπολογισμός της γωνίας πρόσπτωσης α της ροής στην αεροτομή (Chassapoyiannis, 1994). Με βάση τους υπολογισμούς του

δυναμικού πεδίου ροής υπολογίζεται το διάνυσμα της άνωσης \vec{L} στην συγκεκριμένη λωρίδα. Η διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας της ισοδύναμης δισδιάστατης ροής \vec{U}_{∞}^{2D} στο επίπεδο της αεροτομής προκύπτει άμεσα καθώς τα δύο διανύσματα είναι κάθετα. Η οπισθέλκουσα \vec{D} έχει διεύθυνση όμοια με αυτήν της ταχύτητας \vec{U}^{2D} , ενώ το μέτρο της θα προκύπτει άμεσα:

$$|\vec{D}| = \frac{c_D(a)}{c_L(a)} |\vec{L}| \quad (2.2.90)$$

Η παρουσία της οπισθέλκουσας \vec{D} έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της αξονικής δύναμης, που αναπτύσσεται στη δισδιάστατη ροή, κατά συνέπεια και την μείωση της ώσης, με ταυτόχρονη αύξηση της περιφερειακής δύναμης, κατά συνέπεια και της απαιτούμενης ροπής και ισχύος που χρειάζεται να προσδοθεί στον δρομέα.

(β) Συνεκτική διόρθωση σύμφωνα με τη θεωρία οριακού στρώματος πάνω από πλάκα σε παράλληλη ροή.

Υποθέτοντας ότι κάθε στοιχείο του διακριτού πλέγματος ενός σώματος ισοδυναμεί με επίπεδη πλάκα σε παράλληλη ροή με ταχύτητα ίση με την τοπική ταχύτητα \vec{U}_{∞}^{CP} στο σημείο ελέγχου του, είναι δυνατός ο υπολογισμός του τοπικού αριθμού Re (Reynolds). Σύμφωνα με πειραματικούς υπολογισμούς ο συντελεστής αντίστασης c_f της πλάκας καθορίζεται άμεσα με τον αριθμό Re :

$$c_f = 0.074 Re^{-1/2}, \quad Re \in [10^5, 10^7] \quad (2.2.91)$$

ενώ η οπισθέλκουσα λόγω τριβής \vec{D}_f (Friction Drag) σε κάθε στοιχείο θα υπολογίζεται ακολούθως:

$$\vec{D}_f = c_f * A_e * \rho * |\vec{U}_{\infty}^{CP}| * \vec{U}_{\infty}^{CP} \quad (2.2.92)$$

όπου A_e η επιφάνεια του στοιχείου και ρ η πυκνότητα του ρευστού.

3 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

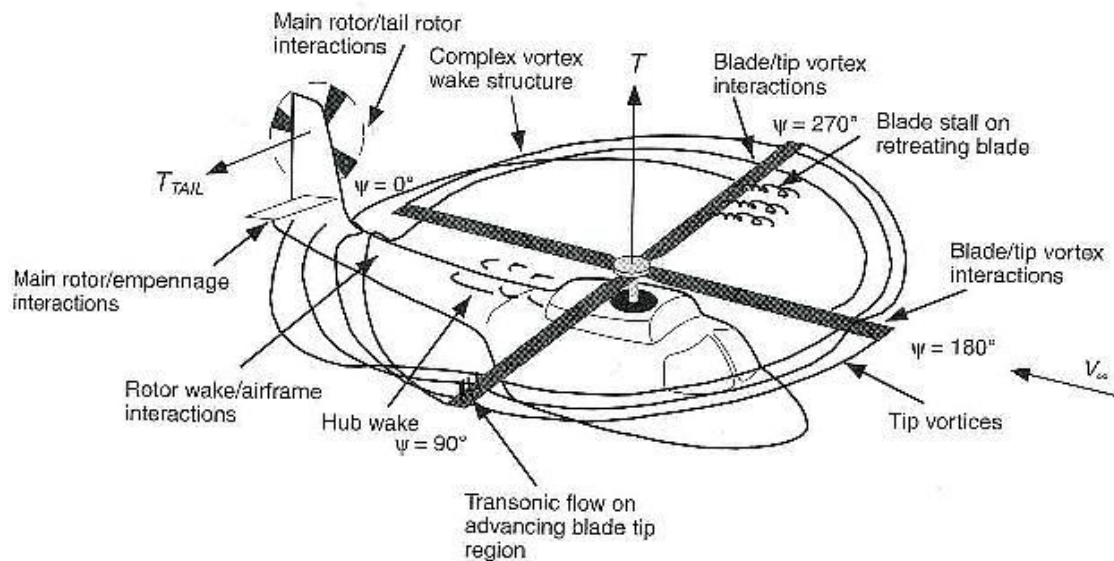
3.1 Εισαγωγή

Ο τρόπος αναπαράστασης των ανωστικών σωμάτων είναι ως λεπτότοιχες επιφάνειες. Κατανέμονται επιφανειακές διανομές πηγών και διπόλων στην πραγματική επιφάνεια των σωμάτων και χρησιμοποιείται η αναπαράσταση πηγών-διπόλων για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης για το δυναμικό.

Στον τρόπο παραγωγής στροβιλότητας ο ομόρρους των ανωστικών σωμάτων τροφοδοτείται και με επιφανειακή στροβιλότητα. Η ρύθμιση της έντασης της αποβαλλόμενης στροβιλότητας γίνεται με την ικανοποίηση της εξίσωσης των πιέσεων στην ακμή εκφυγής (συνθήκη Kutta-Joukowski).

Ο τρόπος υπολογισμού των κατανεμημένων φορτίων στο δρομέα στην παρούσα εργασία γίνεται άμεσα μετά τον υπολογισμό των εντάσεων των διανεμημένων ιδιομορφιών, θεωρώντας το τρισδιάστατο πεδίο ροής γύρω από τον δρομέα. Ο υπολογισμός της κατανομής πίεσης σε μία ακτινική θέση γίνεται με την επίλυση του δισδιάστατου προβλήματος δυναμικής ροής γύρω από αεροτομή (αντίστοιχη αυτής που βρίσκεται στην εξεταζόμενη ακτινική θέση του ανωστικού σώματος) υπό γωνία προσβολής ίση με αυτήν που υπολογίζεται από την ολοκλήρωση των φορτίων στην δεδομένη ακτινική θέση της λεπτότοιχης ανωστικής επιφάνειας. Στα πλαίσια μίας μη συνεκτικής θεώρησης του πεδίου ροής, η συνολική δύναμη που αναπτύσσεται σε μία αεροτομή είναι η δύναμη άνωσης που εξ' ορισμού είναι κάθετη στην κατεύθυνση της ροής. Σύμφωνα με αυτήν την παραδοχή, υπολογίζεται το διάνυσμα της δύναμης που εξ' ορισμού είναι κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητας κα με δεδομένο το διάνυσμα της χορδής προκύπτει η γωνία προσβολής.

Η ανάλυση που ακολουθεί εστιάζεται στην επίλυση του αποσυζευγμένου αεροδυναμικού προβλήματος. Ο ομόρρους του ελικοπτέρου έχει μία σύνθετη δομή που καθορίζεται σε σημαντικό βαθμό από τα γεωμετρικά και λειτουργικά χαρακτηριστικά του κυρίως δρομέα του (main rotor), αλλά και το είδος της πτήσης που εκτελεί. Με τη μέθοδο που παρουσιάστηκε είναι δυνατή η πρόλεξη της αλληλεπίδρασης του ομόρρου ενός πτερυγίου με άλλα στερεά σώματα (Blade vortex interaction), όπως τα επερχόμενα πτερύγια του ίδιου δρομέα, η άτρακτος, αλλά και ο δρομέας του ουραίου (main rotor-tail rotor interaction).



Εικόνα 3.1 Τυπική Μορφή Ομόρρου Ελικοπτέρου (Szymendera 2002)

Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι ο έλεγχος της αξιοπιστίας του υπολογιστικού εργαλείου, στην πρόλεξη των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών του (κυρίως) δρομέα ελικοπτέρου σε διάφορες συνθήκες ροής.

Η αξιολόγηση γίνεται με τη σύγκριση αριθμητικών υπολογισμών και πειραματικών δεδομένων, που αφορούν στις λεπτομερείς κατανομές των φορτίων, στην περίπτωση μόνιμης συμμετρικής ροής με σταθερό βήμα πτερυγίων. Αφορά την περίπτωση λειτουργίας ενός δρομέα σε κατάσταση αιώρησης ελικοπτέρου, όπου η ταχύτητα στο άπειρο είναι πρακτικά μηδενική.

Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με συγκριτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν.

Σημειώνεται ότι όλοι οι υπολογισμοί είναι αμιγώς αεροδυναμικοί και βασίζονται αποκλειστικά στη μέθοδο που περιγράφηκε χωρίς να εισάγονται διορθώσεις που να λαμβάνουν υπόψη τους τη συμπίεστικότητα της ροής και την ελαστικότητα των πτερυγίων. Η υπόθεση της ασυμπίεστης ροής γύρω από απαραμόρφωτο πτερύγιο εισάγει αποκλίσεις στην κατανομή πίεσης ιδιαίτερα κοντά στο ακροπτερύγιο, ενώ η έλλειψη αεροελαστικής προσομοίωσης οδηγεί σε μετατοπισμένες προλέξεις συντελεστή πίεσης. Στη συνέχεια γίνεται μία σύντομη αναφορά στις συνέπειες αυτών των απλουστευτικών παραδοχών.

3.1.1 Ο Ρόλος της Συμπίεστικότητας

Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάστηκε η μεθοδολογία υπολογισμού της αναπαράστασης της μη μόνιμης ασυμπίεστης μη συνεκτικής ροής γύρω από συνδυασμό ανωστικών και μη ανωστικών σωμάτων, Όμως σε γενικές γραμμές η ροή

στο ακροπτερύγιο των δρομέων που εξετάζονται χαρακτηρίζονται από υψηλό αριθμό Mach (Ma) που φτάνει έως και την τιμή $Ma=0.6$.

Τα συμπιεστά φαινόμενα είναι σημαντικά και τοπικά κυρίαρχα στις περιοχές του πεδίου ροής όταν εμφανίζονται. Στις περιοχές αυτές η ως άνω αναπαράσταση του πεδίου ροής είναι ανεπαρκής. Οι περιοχές εμφάνισης των συμπιεστών φαινομένων ορίζονται από τον τοπικό αριθμό Mach της ροής. Δεδομένης της ταχύτητας u , σε μία θέση x , ο αριθμός Much υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$Ma = \frac{u}{c} \quad (3.1)$$

Όπου $c=344\text{m/s}$ η ταχύτητα του ήχου.

Ο τοπικός αριθμός Mach σε περιπτώσεις αιώρησης (hover) ενός δρομέα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω είναι γραμμικός ως προς την ακτινική θέση r :

$$Ma = \frac{\omega * r}{c} \quad (3.2)$$

Καθώς αυξάνει η ακτινική απόσταση ο τοπικός αριθμός Mach αποκτά σημαντική τιμή, δικαιολογώντας την εμφάνιση συμπιεστών φαινομένων. Χαρακτηριστικό μέγεθος είναι ο αριθμός Mach του ακροπτερυγίου ($r=R$):

$$Ma = \frac{\omega * R}{c} \quad (3.3)$$

Όμως στη γενική περίπτωση πτήσης, όπου υπάρχει και μεταφορική ταχύτητα, (οριζόντια πτήση, ή πτήσεις ανόδου ή καθόδου) ο αριθμός Mach της πτήσης (δηλαδή η ταχύτητα της αδιατάρακτης ροής) προσθαφαιρείται στον τοπικό αριθμό Mach λόγω περιστροφής και μπορεί να εμφανίσει περιοχές συμπιεστών φαινομένων ακόμα και όταν ο αριθμός Mach του ακροπτερυγίου δεν είναι σημαντικός. Συνοψίζοντας, όπως προκύπτει από τα παραπάνω, αλλά και από πειραματικές παρατηρήσεις (Caradonna and Tung 1981; Splettstoesser 1994) η εμφάνιση σημαντικών φαινομένων συμπίεσότητας μπορεί να γίνεται σε μία σημαντική περιοχή ενός πτερυγίου (συνήθως για $r/R > 0.7$) στο σύνολο ή σε μία περιοχή της γωνίας αζιμουθίου.

Στα πλαίσια της δυναμικής προσέγγισης της ροής, για διηθητικές ροές έως και $Ma \sim 0.7$ στα αποτελέσματα μπορεί να εισαχθεί η διόρθωση των Prandtl-Glauert (Anderson 1990):

$$c_p^* = \frac{c_p}{\sqrt{1-Ma^2}} \quad (3.4)$$

Η εφαρμογή της διόρθωσης των Prandtl-Glauert (3.4) επηρεάζει κυρίως τις προλέξεις στην πλευρά αναρρόφησης (suction side), καθώς σε αυτή την περιοχή εμφανίζονται οι μεγαλύτερες τιμές πίεσης κατά απόλυτη τιμή. Μάλιστα η διόρθωση γίνεται προς τη σωστή κατεύθυνση των πειραματικών μετρήσεων που στις περιπτώσεις των ακτινικών θέσεων $r/R=0.75, 0.87$ προσεγγίζονται ικανοποιητικά. Παρά την εισαγωγή αυτής της διόρθωσης στο ακροπτερύγιο ($r/R=0,97$) η πίεση στην πλευρά αναρρόφησης υποεκτιμάται, καθώς τα φαινόμενα συμπίεσότητας συνδυάζονται με τον έντονο τρισδιάστατο χαρακτήρα της ροής στην περιοχή αυτή.

3.1.2 Ο Ρόλος των Ελαστικών Παραμορφώσεων

Σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάζονται τα πτερύγια των δρομέων θεωρούνται άκαμπτα. Αυτό έχει σαν συνέπεια να μην λαμβάνεται υπόψη η μεταβολή της γεωμετρίας του πτερυγίου κατά την ελαστική του μεταμόρφωση. Με δεδομένο ότι τα ελαστικά φαινόμενα είναι σημαντικά σε προβλήματα δρομέων με μεγάλο λόγο επί μήκους (aspect ratio), στη συνέχεια θα γίνει μία διερεύνηση για το σφάλμα που προκύπτει από την θεώρηση άκαμπτων πτερυγίων.

Η ύπαρξη μικρών ελαστικών παραμορφώσεων έχει ως αποτέλεσμα την φαινομενική αύξηση του πάχους της αεροτομής (σε μία ακτινική θέση) ως προς την επερχόμενη ροή. Αυτή η διαφοροποίηση οδηγεί σε απλή μετατόπιση της χορδικής κατανομής στο συντελεστή πίεσης.

3.2 Το πείραμα του ONERA

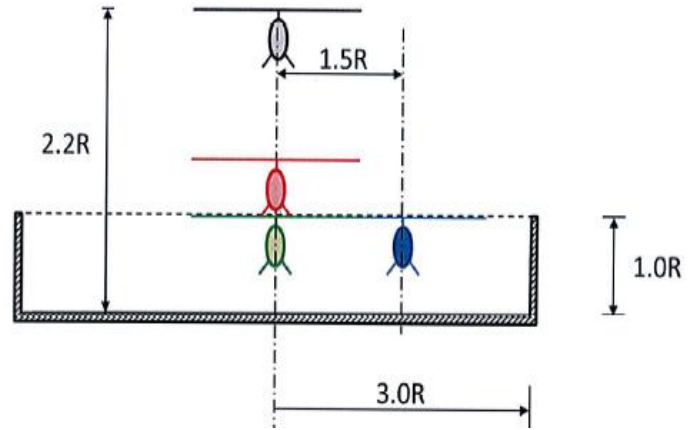
Το πείραμα πραγματοποιήθηκε από την ομάδα GARTEUR AG22 με σκοπό την μελέτη της αεροδυναμικής αλληλεπίδρασης ενός ελικοπτερου με στερεά όρια. Το ελικόπτερο που χρησιμοποιήθηκε ήταν ένα μοντέλο Shynx 3D το οποίο τοποθετήθηκε στη μέση ενός τετραγώνου με την ύπαρξη εδάφους και τοίχους να το περικλείουν. Σκοπός του ήταν κατά βάση η μελέτη των μεταβολών των δυνάμεων λόγω της ύπαρξης του εδάφους και των τοίχων και επιπλέον με τον υπολογισμό πιέσεων στο έδαφος και στους τοίχους και με άλλες απεικονίσεις να οδηγηθούν σε πειραματικά αποτελέσματα που θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και να αξιοποιηθούν από υπολογιστικές μεθόδους CFD. Επειδή το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε και γενικά ο τρόπος που έγινε το πείραμα δεν ανταποκρίνονται πλήρως στην πραγματικότητα δεν δόθηκε ιδιαίτερη βαρύτητα στις τιμές των δυνάμεων παρά μόνο στον τρόπο μεταβολής τους λόγω της ύπαρξης των στερεών ορίων. Το πείραμα έγινε για την περίπτωση πτήσης αιώρησης του ελικοπτερου και επαναλήφθηκε για διαφορετικές αποστάσεις του δρομέα από το έδαφος ενώ οι πιέσεις στο έδαφος και στους τοίχους μετρήθηκαν από διάφορους αισθητήρες πίεσης που τοποθετήθηκαν.

Η γεωμετρία του τετραγώνου που περιβάλλει το ελικόπτερο είναι $6R \times 6R$ με R την ακτίνα του πτερυγίου και το ύψος των τοίχων είναι $1R$. Το ελικόπτερο που χρησιμοποιήθηκε είναι ένα μικρό μοντέλο Shynx 3D στο οποίο τοποθετήθηκαν δύο πτερύγια NACA12 στη θέση των παλιών για καλύτερα αποτελέσματα. Το ελικόπτερο χρησιμοποιεί τη βοήθεια ενός μηχανισμού που είναι πακτωμένος στο έδαφος έτσι ώστε να μπορεί να κρατάει την ισορροπία του και η ταχύτητα περιστροφής του παραμένει σταθερή και η γωνία του πτερυγίου (blade pitch) είναι για $7,5$ μοίρες.

Στα σχήματα 1 και 2 παρουσιάζεται η σχετική πειραματική διάταξη.



Σχήμα 1 Πειραματική Διάταξη Πειράματος ONERA



Σχήμα 2 Γεωμετρική Αναπαράσταση της Πειραματικής Διάταξης Πειράματος ONERA

3.3 Προσομοίωση της πτήσης αιώρησης

3.3.1 Η χρήση συμμετρίας

Η συμμετρία αποτελεί σημαντική έννοια όχι μόνο της Φυσικής αλλά και των Μαθηματικών, της Χημείας και της Βιολογίας. Εφαρμόζεται στις Καλές Τέχνες, όπως στη Μουσική, στην Αρχιτεκτονική, στη Γλυπτική και την συναντάμε τόσο στην έμβια όσο και στην άβια φύση.

Συμμετρία εμφανίζεται στη γεωμετρία αλλά και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών. Η συμμετρία είναι αναλλοίωτη, δηλαδή δεν αλλάζει κάτω από ένα σύνολο μετασχηματισμών.

Λαμβάνοντας υπόψη ένα δομημένο αντικείμενο X οποιουδήποτε είδους, η συμμετρία είναι μια χαρτογράφηση του αντικειμένου, η οποία διατηρεί τη δομή του. Αυτό συμβαίνει σε πολλές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, εάν το X είναι ένα σύνολο χωρίς πρόσθετη δομή, μία συμμετρία είναι ένας αμφιμονοσήμαντος χάρτης από το σύνολο στον εαυτό του που οδηγεί στη δημιουργία αντιμεταθετικών ομάδων. Αν, τώρα, το αντικείμενο X είναι ένα σύνολο σημείων του επιπέδου με τη μετρική του δομή ή με οποιοδήποτε άλλο μετρικό χώρο, η συμμετρία είναι μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία του συνόλου X στον εαυτό του, η οποία διατηρεί την απόσταση ανάμεσα σε κάθε ζεύγος σημείων (ισομετρία).

Γενικά, κάθε είδους δομή στα μαθηματικά θα έχει το δικό του είδος συμμετρίας.

Στην συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιήθηκε αντικατροπτική συμμετρία ως προς το επίπεδο του εδάφους. Το ορθογώνιο σύστημα (X, Y, Z) με ένα μετασχηματισμό parity

(αντικατοπτρικό), μας δίνει ένα νέο ορθογώνιο σύστημα (X',Y',Z'). Το ορθογώνιο σύστημα (X,Y,Z) υπακούει στον κανόνα του 'δεξιού χεριού' (με το δεξί μας χέρι αν πάμε από την κατεύθυνση X στην Y τότε ο αντίχειρας δείχνει τον άξονα Z). Το ορθογώνιο σύστημα (X',Y',Z') υπακούει στον κανόνα του 'αριστερού χεριού'.

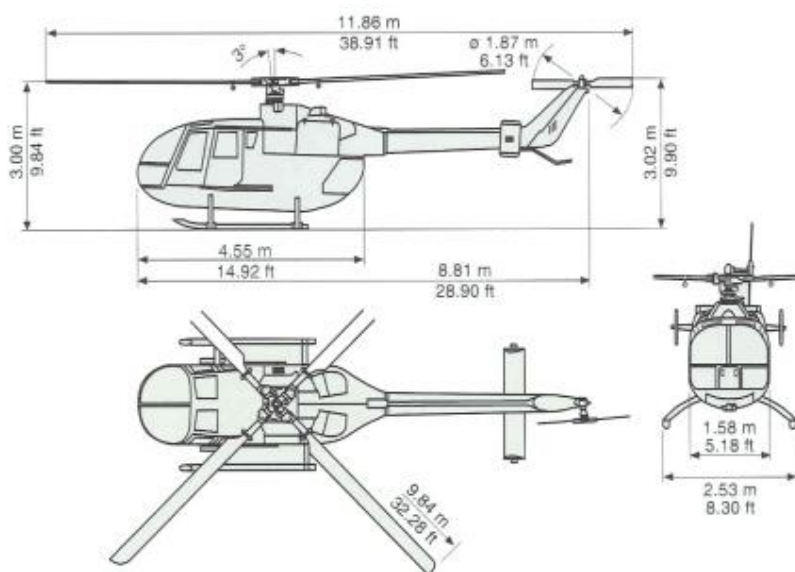
Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στις μετρήσεις που κάνουμε και στο τι επαγγεται σε κάθε σημείο, έστω $P(x,y,z)$, θα συνυπολογίζουμε και αυτές του αντικατοπτρικού $P'(x,y,-z)$

Με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε την επίδραση που έχει το έδαφος πάνω στο πρόβλημα που μελετάμε και πιο συγκεκριμένα πώς επηρεάζει το έδαφος την λειτουργία του ελικοπτέρου μας.

3.3.2 Οι περιπτώσεις που εξετάστηκαν

Όπως έχει αναφερθεί το ελικόπτερο που χρησιμοποιήθηκε για αυτή την εργασία είναι το BO-105 (σχήμα 3). Ο πρότυπος δρομέας είναι τετράπτερος με διάμετρο $D=4m$, ακτίνα πλήμνης $0.35m$ και ορθογωνική πτέρυγα με αεροτομή NACA 23012, σταθερής χορδής $0.121m$. Η πτέρυγα του δρομέα έχει συστροφή που ακολουθεί γραμμική κατανομή σταθερής κλίσης -8° . Η ονομαστική ταχύτητα περιστροφής του δρομέα είναι $N=1040RPM$ ($109rad/sec$) και η ταχύτητα ακροπτερυγίου είναι διηχητική φτάνοντας στα $218m/sec$ (αριθμός Mach ~ 0.63). Ο πρότυπος δρομέας έχει ονομαστική ώθηση $3600N$ και γωνία κώνου 2.5° .

Πριν αναφέρω πως μοντελοποιήθηκε για τον κώδικα που χρησιμοποίησα αναφέρω τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν.



Σχήμα 3 Γεωμετρία BO-105

Οι περιπτώσεις που εξετάστηκαν ήταν:

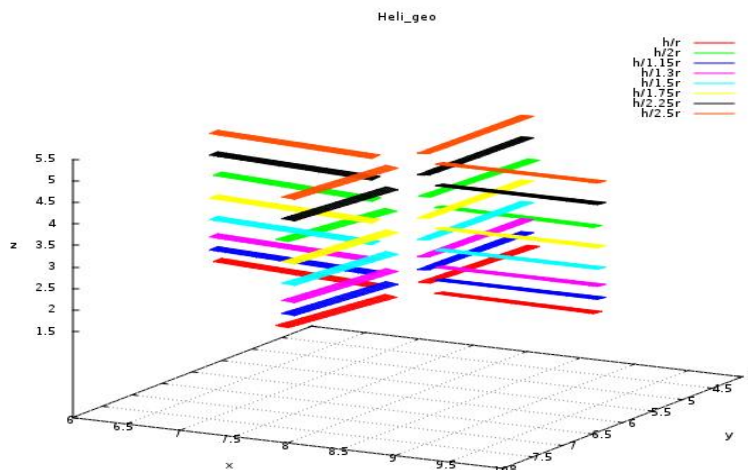
το ελικόπτερο μόνο του σε διάφορα ύψη από το έδαφος (σχήμα 4)

το ελικόπτερο μαζί με τον ένα τοίχο σε απόσταση $3R$ (R η ακτίνα του περφυγίου) από τον τοίχο και σε απόσταση R και $2R$ από το έδαφος (σχήμα 5.1 και 5.2)

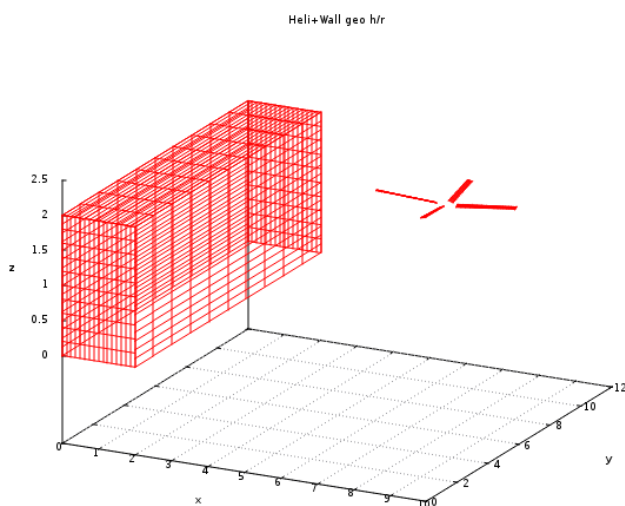
το ελικόπτερο τοποθετημένο στη μέση ενός τετραγώνου διαστάσεων $6R \times 6R$ περικλειόμενο από τοίχους σε απόσταση R και $2R$ από το έδαφος (σχήμα 6.1 και 6.2)

Το υπολογιστικό πρότυπο κλήθηκε να προσομοιώσει αυτές τις περιπτώσεις.

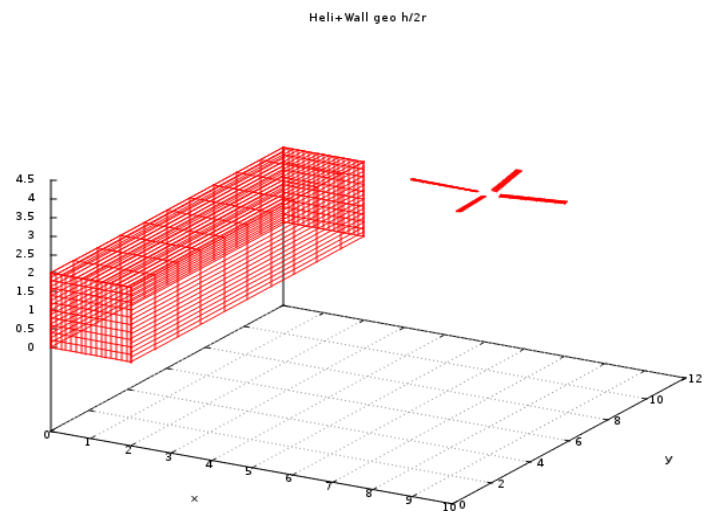
Όλα τα διαγράμματα που παρουσιάζονται είναι από το τελευταίο χρονικό βήμα.



Σχήμα 4 Περιπτώσεις που εξετάστηκαν με μόνο το ελικόπτερο

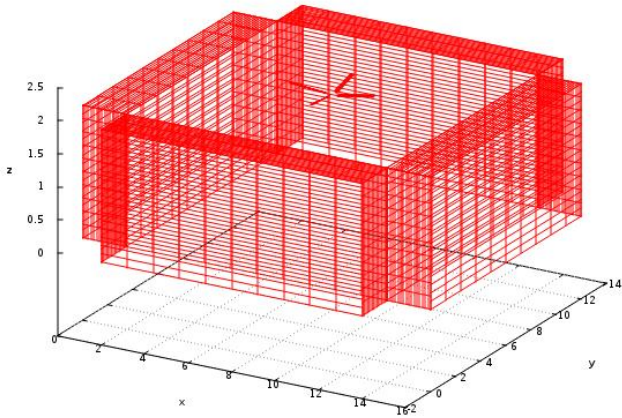


Σχήμα 5.1 Το Ελικόπτερο μαζί με τον Τοίχο σε Απόσταση r από το Έδαφος



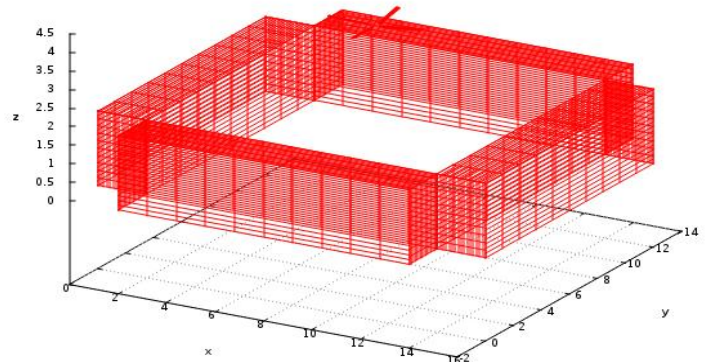
Σχήμα 5.2 Το Ελικόπτερο μαζί με τον Τοίχο σε Απόσταση $2r$ από το Έδαφος

Heli+walls geo h/r



Σχήμα 6.1 Το Ελικόπτερο γύρω από όλους τους Τοίχους σε Απόσταση r από το Έδαφος

Heli+walls geo h/2r



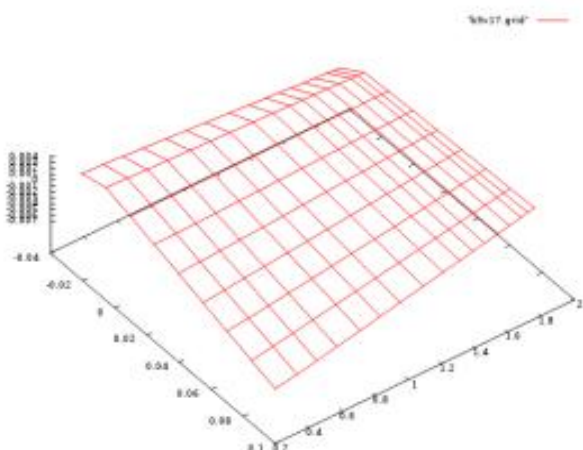
Σχήμα 6.2 Το Ελικόπτερο γύρω από όλους τους Τοίχους σε Απόσταση $2r$ από το Έδαφος

Ο τρόπος που προσομοίωσα το πρότυπο ελικόπτερο (BO-105) είναι με μήκος των τεσσάρων πτερυγίων 2m. Η προσομοίωση έγινε για σταθερή σχεδόν μηδενική ταχύτητα ανέμου (0.01 m/s). Η πυκνότητα του ρευστού ορίστηκε ίση με 1.225 kg/m^3 . Επιπλέον ορίστηκε κατάλληλη γωνία tilt και γωνία κώνου (cone) στον δρομέα ίδια με αυτή του πρότυπου δρομέα.

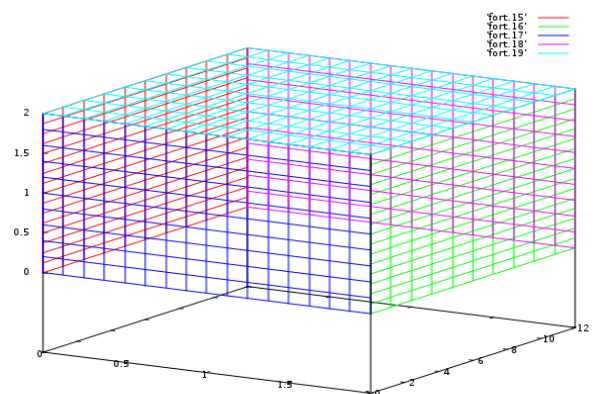
Το πεδίο ροής γύρω από δρομέα ελικοπτερό είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα περιστροφής του. Η ύπαρξη συμμετρίας σημαίνει ότι το πεδίο ροής είναι ανεξάρτητο από την αζιμουθιακή γωνία και μάλιστα με δεδομένο ότι η ταχύτητα στο άπειρο είναι μηδενική, τότε μπορεί να θεωρηθεί ως μόνιμο. Αυτή η περίπτωση αποτελεί την ιδανική περίπτωση πεδίου ροής δρομέα για την αξιολόγηση αριθμητικών εργαλείων στην προσομοίωση των βασικών μηχανισμών.

Η προσομοίωση που έγινε ήταν για ταχύτητα περιστροφής ($\omega = 109 \text{ rad/sec}$ ή $N=1040 \text{ RPM}$) και γωνία πτερυγίου (blade pitch) 7.72 μοίρες.

Για την γεωμετρική αναπαράσταση των πτερυγίων επιλέχθηκε πλέγμα διαστάσεων 9×17 για κάθε πτερύγιο (σχήμα 7.1) ενώ για αυτή των τοίχων 11×17 για κάθε πλευρά (σχήμα 7.2).



Σχήμα 7.1 Πλέγμα Πτερυγίου



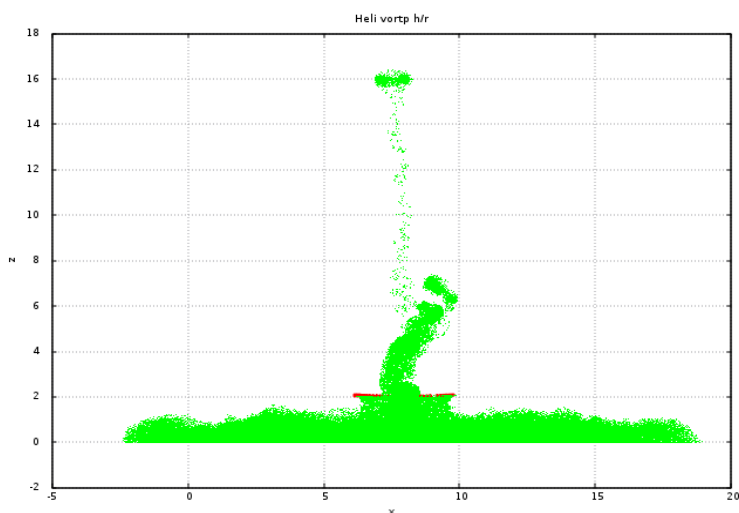
Σχήμα 7.2 Πλέγμα Προσομοίωσης του Τοίχου

Το χρονικό βήμα που επιλέχτηκε ήταν 72 βήματα/περίοδο και ο χρόνος που διήρκεσαν τα τρεξίματα ήταν 30 περιόδους (2160 βήματα).

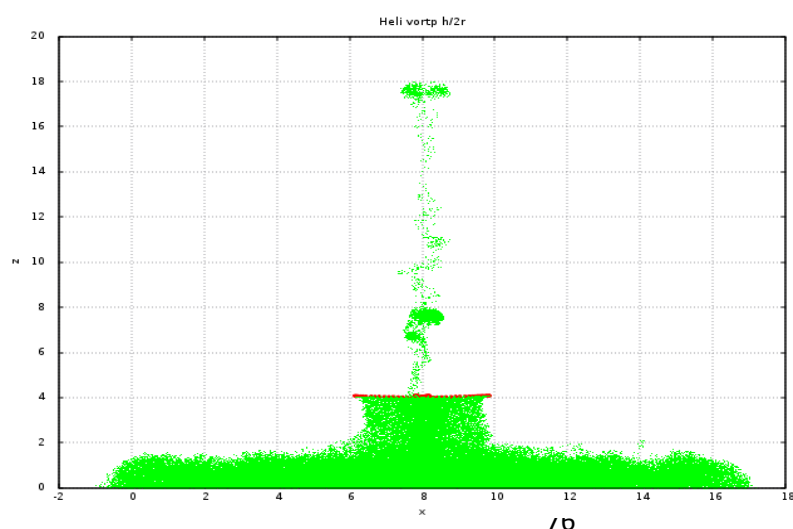
Με αυτές τις επιλογές η σύγκλιση στη μόνιμη κατάσταση επιτυγχάνεται μετά από περίπου 15 περιστροφές.

Στην περιοχή της ρίζας των πτερυγίων προλέγεται συγκέντρωση στοιχείων στροβιλότητας που κινούνται αντίθετα, προς τις θετικές τιμές του άξονα Z, ως συνέπεια της ελλιπούς προσομοίωσης του στροφείου του δρομέα. Σε όλες τις περιπτώσεις ο ομόρρους είναι συμμετρικός παρουσιάζοντας μία ιδιαίτερη μορφή “ανεστραμμένου μανιταριού”, που οφείλεται στην γρήγορη αναδίπλωση του φύλλου στροβιλότητας, παρά το γεγονός ότι στην πτήση αιώρησης η επ’ άπειρο ταχύτητα είναι μηδενική. Αυτή η μορφή είναι συνεπής σύμφωνα με το νόμο δράσης-αντίδρασης του Νεύτωνα. Το ελικόπτερο μπορεί να αιωρείται όταν αναπτύσσεται άνωση (δράση), που όμως συνοδεύεται από την εμφάνιση του πεδίου ταχυτήτων αντίθετης φοράς (αντίδραση) που επιταχύνει τη ροή στον ομόρρου κατάντι του δρομέα.

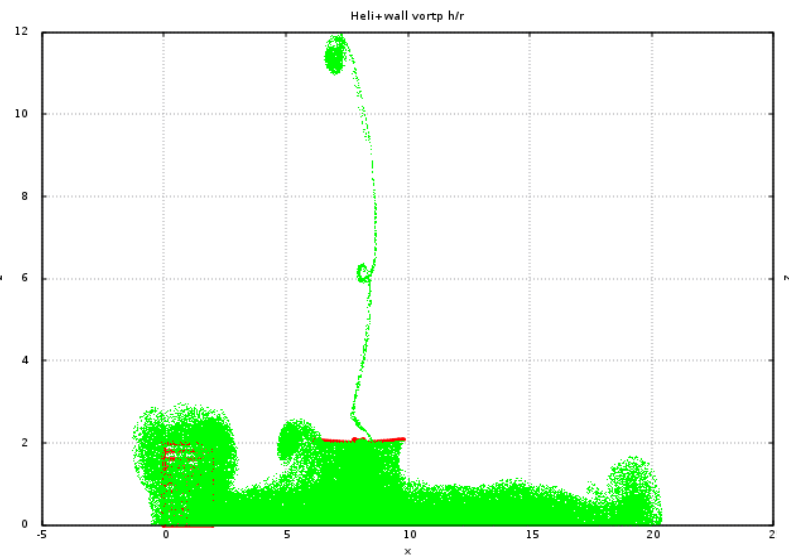
Στα πρώτα χρονικά βήματα δημιουργούνται στοιχεία στροβιλότητας, που συσσωρεύονται κάτω από το δρομέα, καθώς δεν υπάρχει ικανοποιητική ταχύτητα να τα απομακρύνει από αυτόν. Η χρονική εξέλιξη του ομόρρου οδηγεί στη δημιουργία ενός “δακτυλίου” στροβιλότητας (vortex torus) αποτελούμενου από στοιχεία στροβιλότητας που περιστρέφονται με συγκεκριμένη φορά. Ο δακτύλιος αυτός συμπεριφέρεται σαν ένας κυκλικός δινωσωλήνας με χρονικά αυξανόμενη ένταση. Η διάμετρος του “δακτυλίου” μεγαλώνει σε σχέση με τη διάμετρο του δρομέα, καθώς ολοένα και περισσότερα στοιχεία στροβιλότητας εγκλωβίζονται σε αυτόν. Συνέπεια αυτού του φαινομένου είναι η δημιουργία ενός πεδίου επαγόμενων ταχυτήτων, που επιτείνουν τόσο την αξονική μετακίνηση του ίδιου του δακτυλίου μακριά από το επίπεδο του δρομέα, όσο και την συστολή της διαμέτρου του ομόρρου του δρομέα (wake contraction), που διαρκώς εντείνεται, επηρεάζοντας ουσιαστικά τον τρόπο φόρτισης του δρομέα. Η καταγραφή αυτού του φαινομένου γίνεται μέσα από μία αριθμητική διαδικασία, που σε καμία περίπτωση δεν παρουσίασε προβλήματα ευστάθειας. Στα σχήματα 8.1 έως 8.6 παρουσιάζεται ο ομόρρους που έχει δημιουργηθεί την τελευταία χρονική στιγμή για 6 περιπτώσεις.



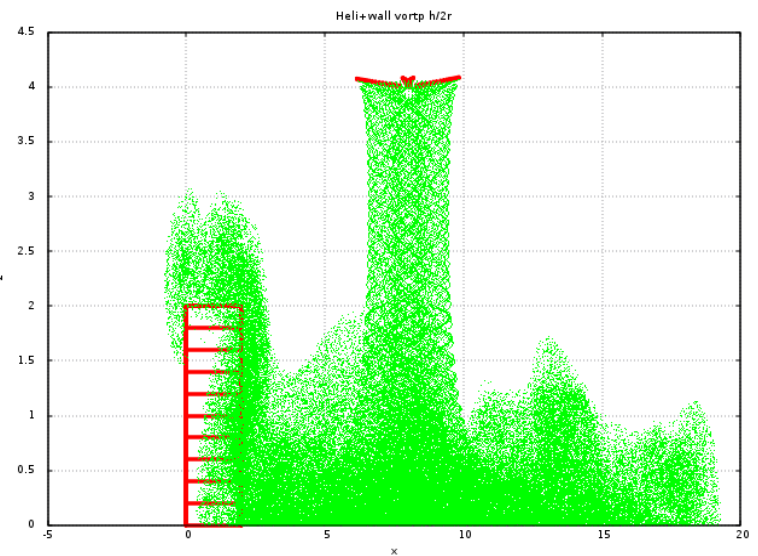
Σχήμα 8.1 Αναπαράσταση Ομόρρου στην Περίπτωση hover σε Απόσταση $h=r$ από το Έδαφος (μόνο το Ελικόπτερο)



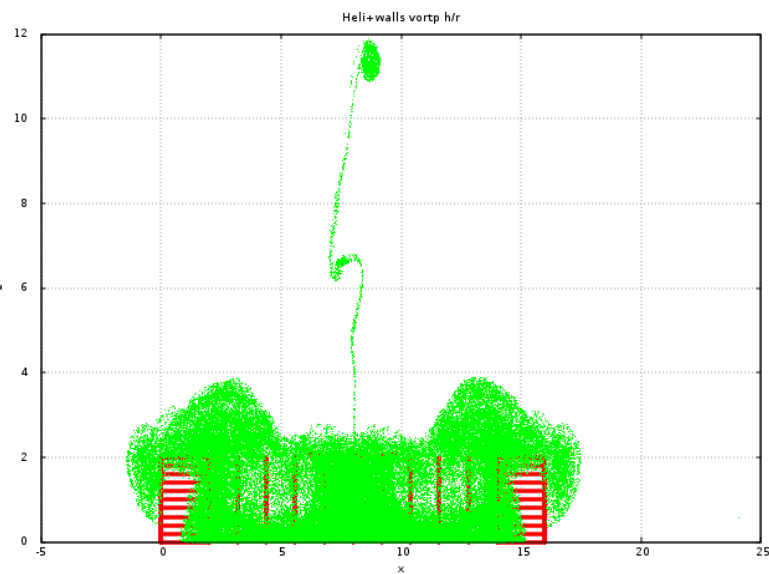
Σχήμα 8.2 Αναπαράσταση Ομόρρου στην Περίπτωση hover σε Απόσταση $h=2r$ από το Έδαφος (μόνο το Ελικόπτερο)



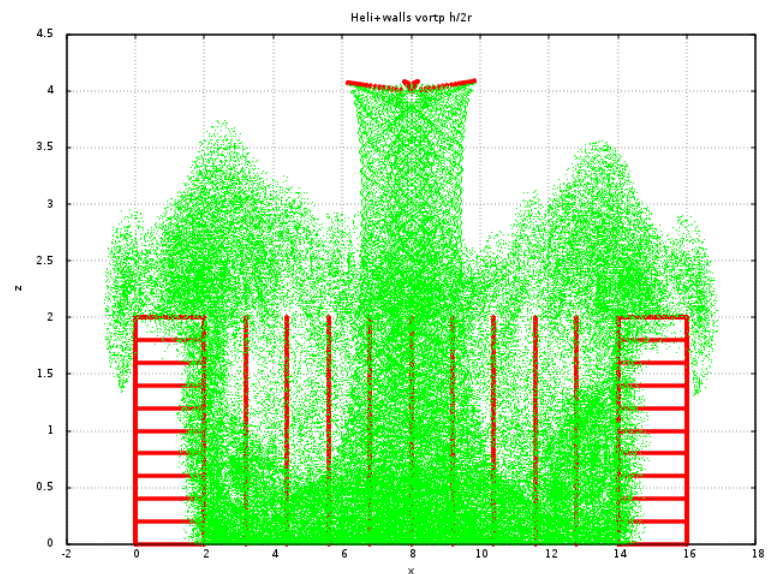
Σχήμα 8.3 Αναπαράσταση Ομόρρου στην Περίπτωση hover σε Απόσταση $h=r$ από το Έδαφος (Ελικόπτερο μαζί με έναν Τοίχο)



Σχήμα 8.4 Αναπαράσταση Ομόρρου στην Περίπτωση hover σε Απόσταση $h=2r$ από το Έδαφος (Ελικόπτερο μαζί με έναν Τοίχο)



Σχήμα 8.5 Αναπαράσταση Ομόρρου στην Περίπτωση hover σε Απόσταση $h=r$ από το Έδαφος (Ελικόπτερο Περιτριγυρισμένο από Τοίχους)



Σχήμα 8.6 Αναπαράσταση Ομόρρου στην Περίπτωση hover σε Απόσταση $h=2r$ από το Έδαφος (Ελικόπτερο Περιτριγυρισμένο από Τοίχους)

Γενικά για την λεπτομερέστερη μελέτη ενός ομόρρου έχει αποδειχθεί από προηγούμενες εργασίες ότι η αύξηση της γωνίας βήματος έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση τόσο της αξονικής μετατόπισης (αξονικής ταχύτητας) όσο και της ακτινικής συστολής του ομόρρου (δηλαδή μείωση της ακτινικής του θέσης) για το ίδιο χρονικό

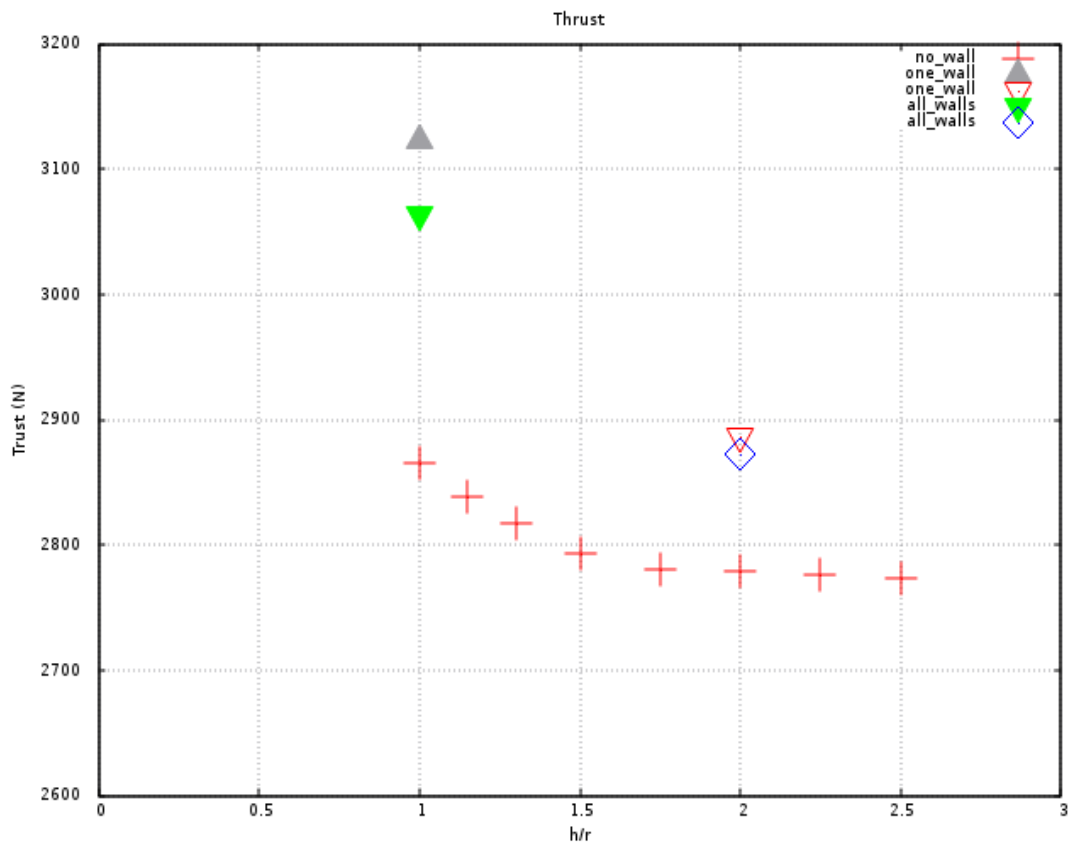
διάστημα και ότι η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής δεν επηρεάζει την αδιάστατη γεωμετρία του ομόρρου.

3.4 Η φόρτιση του δρομέα

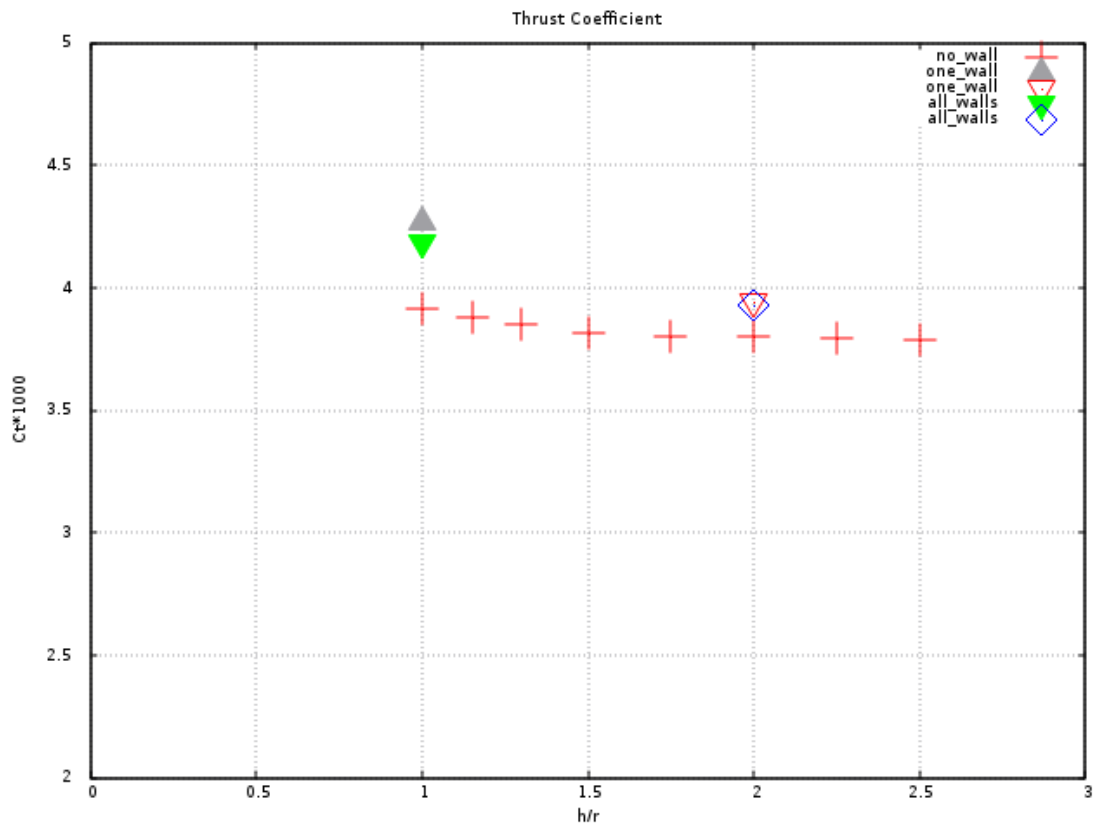
Στη συνέχεια παρατίθενται η ώση T και ο συντελεστής της C_t σε σύγκριση με τον αντίστοιχο που είχε προκύψει από το πείραμα του ONERA. Ο συντελεστής ώσης προκύπτει από τον τύπο:

$$C_t = \frac{T}{\pi * \rho * \omega^2 * R^4} \quad (3.5)$$

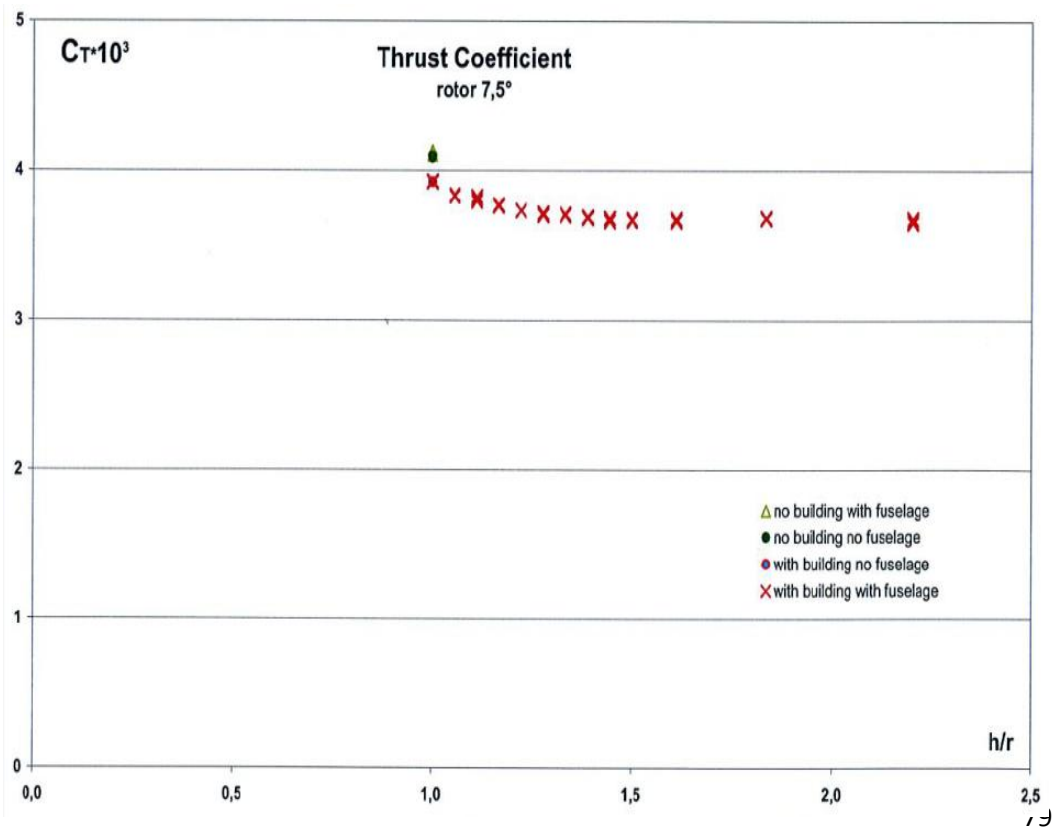
όπου T η υπολογισμένη ώση (υπολογίζεται από την ολοκλήρωση των δυνάμεων στην επιφάνεια του δρομέα) και ρ η πυκνότητα του αέρα.



Σχήμα 9 Η Άνωση για Όλες τις Περιπτώσεις που Εξετάστηκαν



Σχήμα 10.1 Συντελεστής Άνωσης

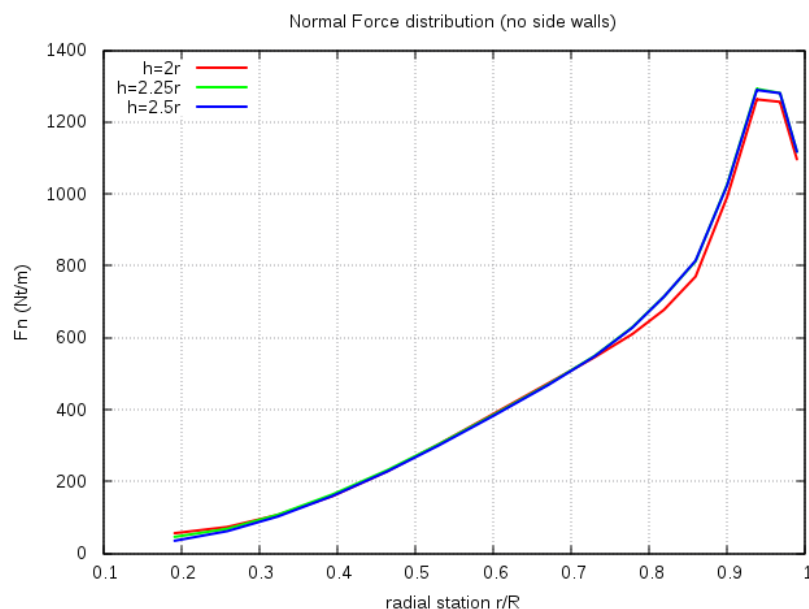


Σχήμα 10.2 Συντελεστής Άνωσης (ONERA)

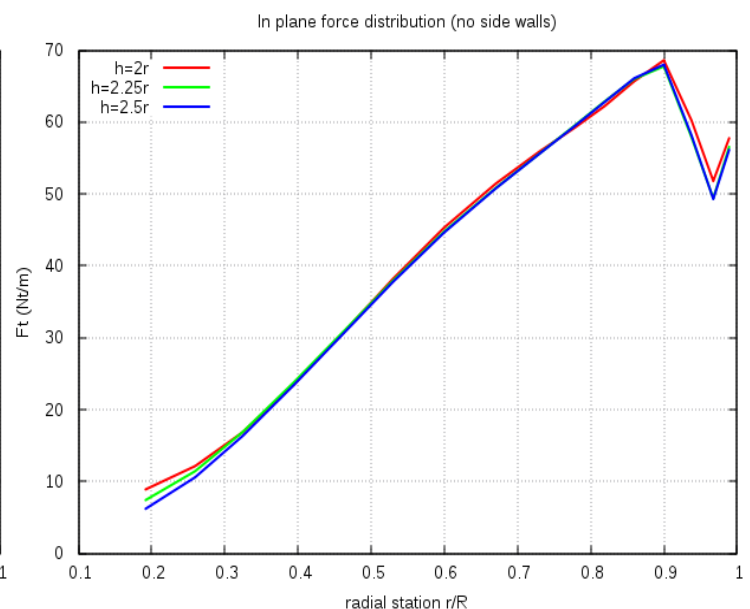
Η ταύτιση της μορφής των αποτελεσμάτων κρίνεται ιδιαίτερα ικανοποιητική.

Παρατηρούμε στην περίπτωση της ώσης και κατ'επέκταση στο συντελεστή της ότι όσο η πτήση αιώρησης πραγματοποιείται σε μεγαλύτερο ύψος από το έδαφος μικραίνει και η τιμή της ώσης. Αυτό συμβαίνει περίπου μέχρι την απόσταση $2R$ από το έδαφος ενώ σε αποστάσεις μεγαλύτερη από αυτή μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ύπαρξη του εδάφους δεν επηρεάζει περισσότερο τη λειτουργία του ελικόπτερου αφού στις περιπτώσεις που το ελικόπτερο βρίσκεται σε απόσταση μεγαλύτερη του $2R$ από το έδαφος τα αποτελέσματά μας είναι ίδια με αυτά στην περίπτωση που βρίσκεται ακριβώς στην απόσταση $2R$.

Αυτό το συμπέρασμα βγαίνει και αν παρατηρήσουμε τα σχήματα των κατανομών των δυνάμεων πάνω σε ένα πτερύγιο (σχήμα 11 και 12)



Σχήμα 11



Σχήμα 12

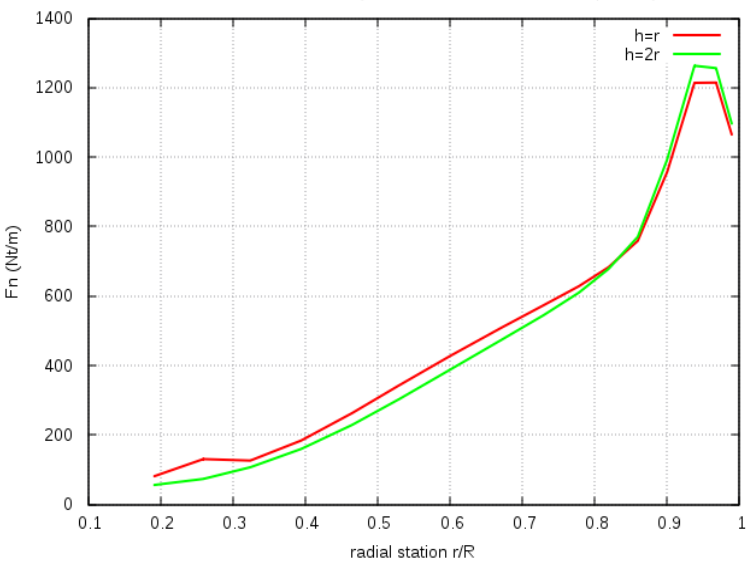
Παρατηρούμε ότι στις περιπτώσεις για απόσταση $2.25R$ και $2.5R$ από το έδαφος οι τιμές των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στην πτέρυγα σχεδόν ταυτίζονται ενώ στην περίπτωση όπου το ελικόπτερο πραγματοποιεί πτήση αιώρησης σε απόσταση $2R$ οι διαφορές στις τιμές σε σχέση με αυτές για τις περιπτώσεις που βρίσκεται σε απόσταση μεγαλύτερη από $2R$ από το έδαφος είναι αρκετά μικρής τάξης μεγέθους πράγμα που επαληθεύει και τη μορφή των διαγραμμάτων για την ώση και τον συντελεστή ώσης.

Με δεδομένα τα παραπάνω θεωρήθηκε υπερβολικό να γίνουν δοκιμές για τις περιπτώσεις όπου το ελικόπτερο κάνει πτήση αιώρησης με τον ένα αλλά και με

όλους τους τοίχους για περισσότερο από δύο ύψη απόστασης του δρομέα από το έδαφος. Τα ύψη που επιλέχθηκαν ήταν για απόσταση R και για απόσταση $2R$ (αφού είδαμε ότι μέχρι αυτή την απόσταση υπάρχει ουσιαστική επιρροή του εδάφους στο ελικόπτερο) από το έδαφος.

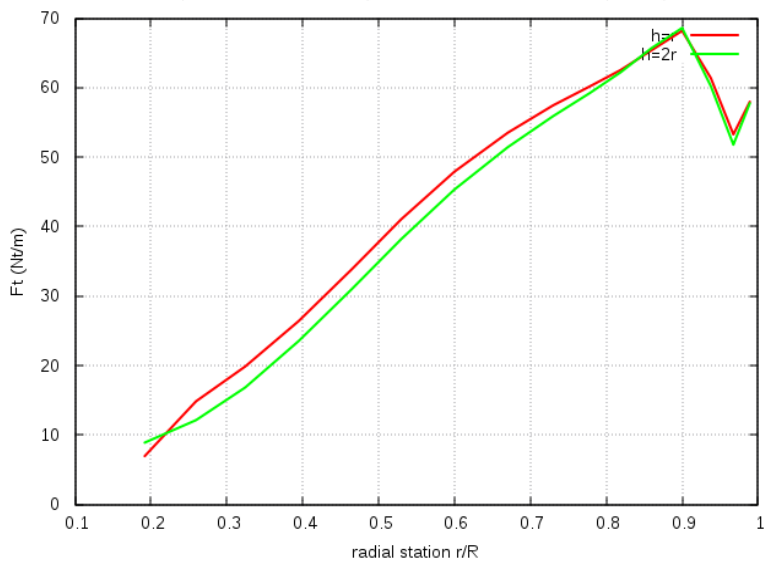
Πριν παρουσιάσω όμως την επίδραση του ενός αλλά και όλων των τοίχων στην φόρτιση των πτερυγίων του ελικοπτέρου και συγκρίνω τα αποτελέσματα αυτά με την περίπτωση όπου το ελικόπτερο είναι μόνο του, έχει ενδιαφέρων να δείξω τις διαφορές στην κατανομή των δυνάμεων στο πτερύγιο για πτήση αιώρησης σε ύψος R σε σχέση με το ύψος $2R$.

Normal force distribution (no side walls h/R and $h/2r$ comparison)



Σχήμα 13

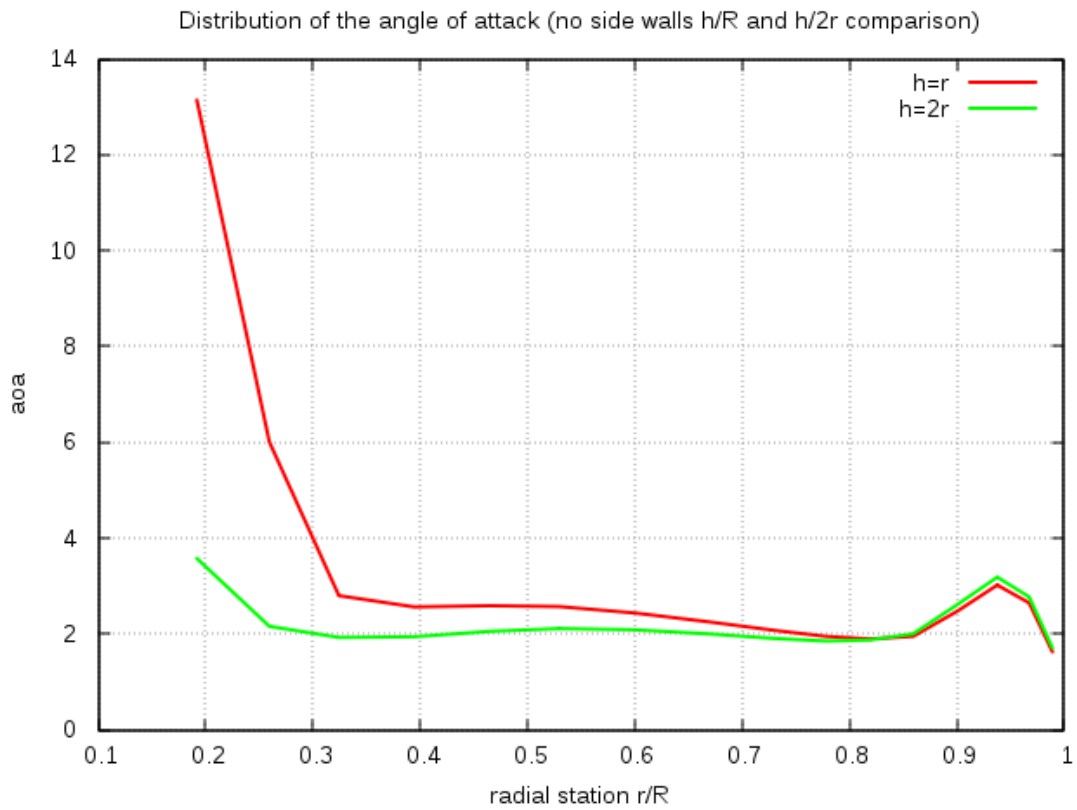
In plane force distribution (no side walls h/R and $h/2r$ comparison)



Σχήμα 14

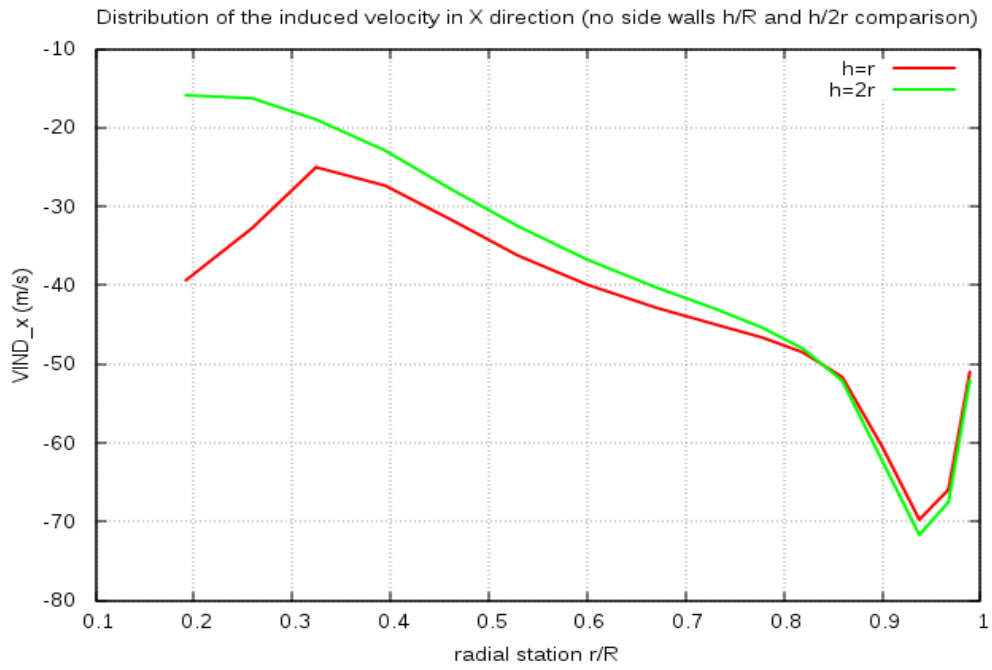
Με βάση τη συμπεριφορά της ώσης (μικρότερη τιμή όσο απομακρύνεται το ελικόπτερο από το έδαφος) θα περιμέναμε ότι οι δυνάμεις πάνω στην πτέρυγα θα ήταν μεγαλύτερες για την απόσταση R από αυτή των $2R$. Αυτό συμβαίνει ωστόσο μόνο μέχρι περίπου το 90% του μήκους του πτερυγίου.

Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε ότι οι τιμές των γωνιών πρόσπτωσης είναι μεγαλύτερες για απόσταση R από το έδαφος μέχρι περίπου το 90% του μήκους του πτερυγίου ενώ μετά γίνονται μεγαλύτερες για την απόσταση $2R$ από το έδαφος. Αυτό δικαιολογεί τη μορφή του διαγράμματος με τη σύγκριση των αντίστοιχων κατανομών δυνάμεων.

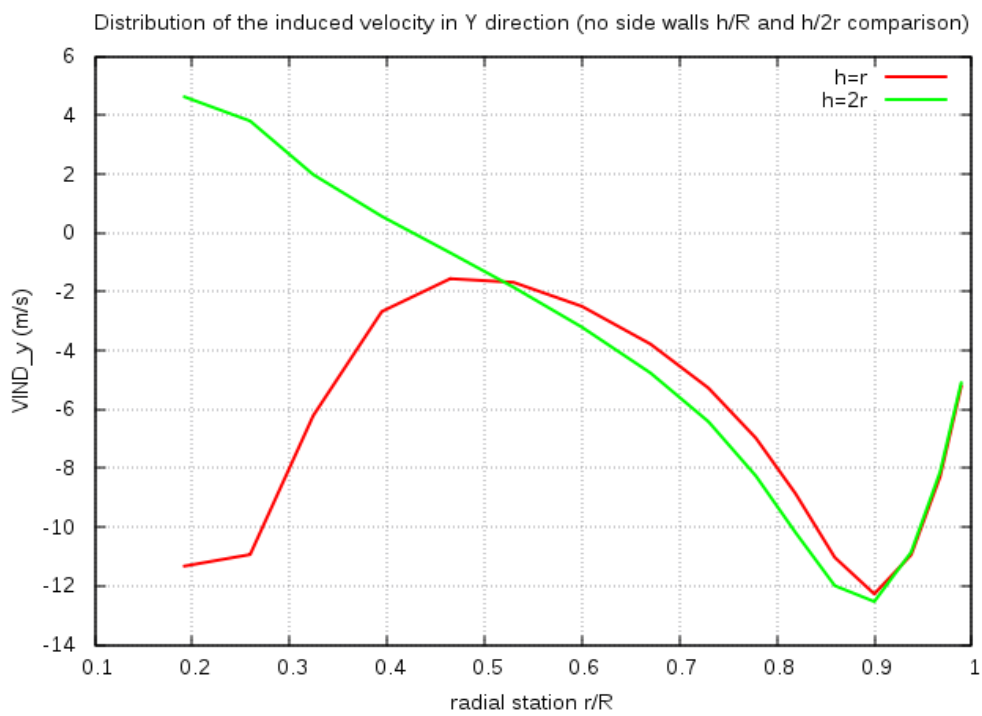


Σχήμα 15

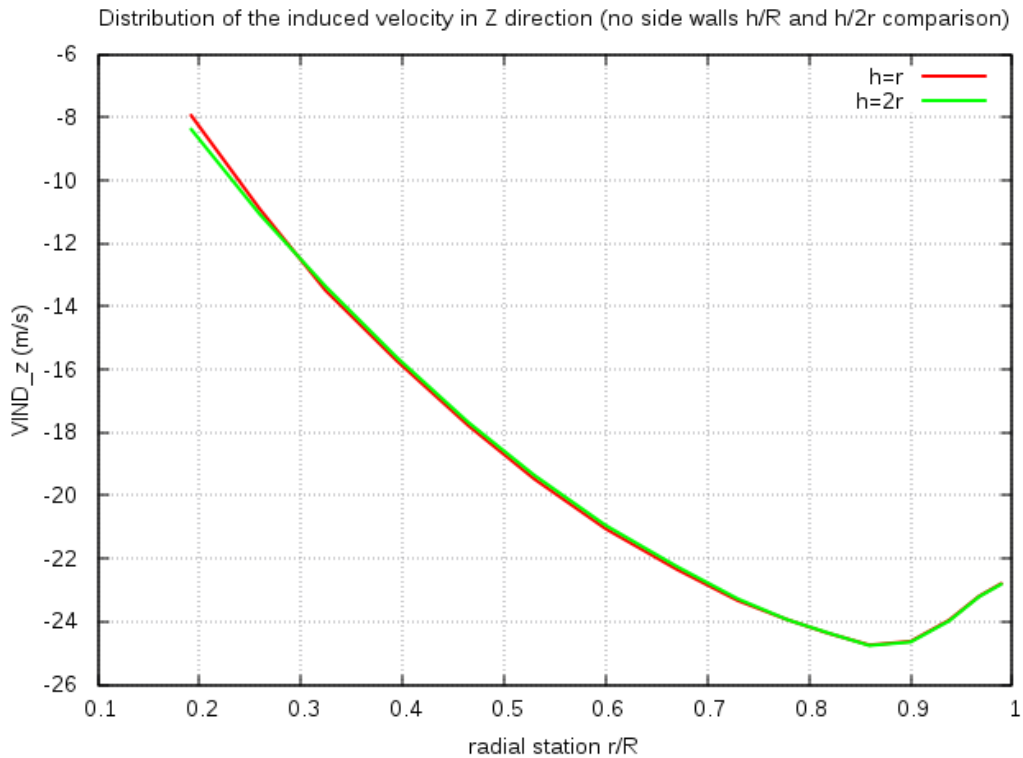
Το γιατί οι τιμές των γωνιών πρόσπτωσης έχουν αυτή τη συμπεριφορά δικαιολογείτε αν δούμε τα διαγράμματα των επαγόμενων δυνάμεων στο πτερύγιο. Η απόλυτη τιμή τους είναι μεγαλύτερη για την απόσταση R μέχρι το 90% περίπου του μήκους του πτερυγίου ενώ μετά από αυτό είναι μεγαλύτερη για την απόσταση $2R$ (σχήματα 16.1, 16.2, 16.3).



Σχήμα 16.1



Σχήμα 16.2

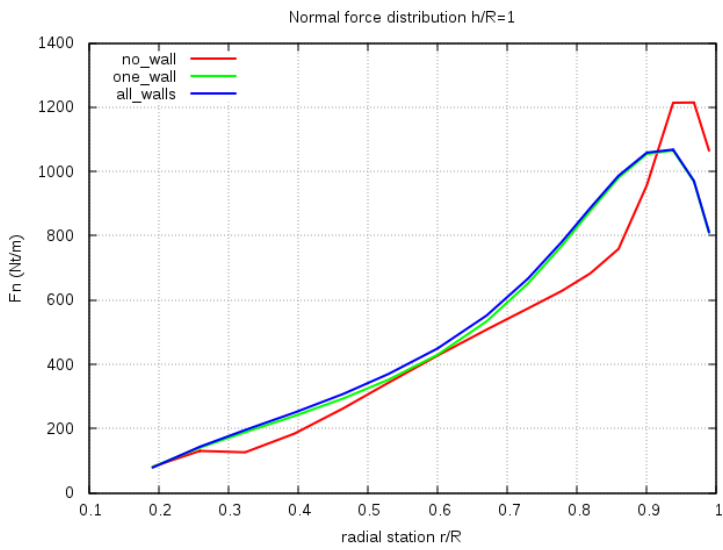


Σχήμα 16.3

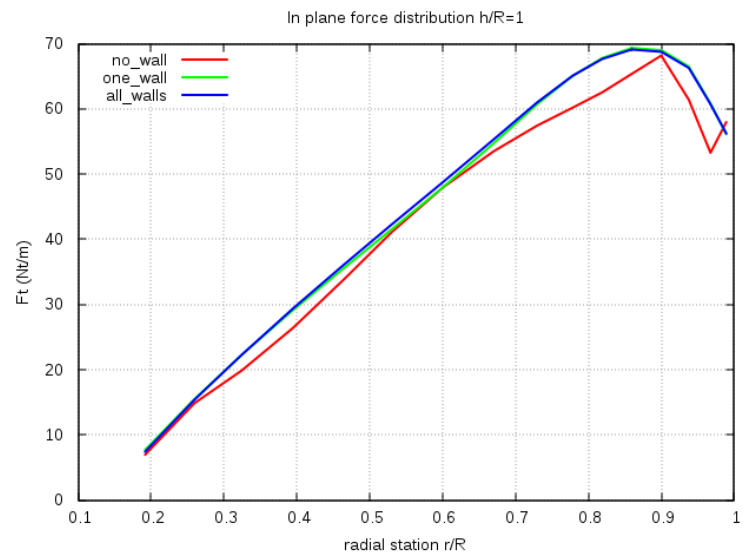
Ο λόγος που συμβαίνει αυτό, όπως παρατηρούμε και από τα σχήματα αναπαράστασης του ομόρρου (8.1 και 8.2), μπορεί να αιτιολογηθεί από τον τρόπο εξέλιξης του ομόρρου του ελικοπτερού. Παρατηρούμε ότι ο ομόρρος που έχει ανατηχθεί αφού έχει επιδράσει με το έδαφος έχει εξαπλωθεί, και στον άξονα (ζ) έχει φτάσει σχεδόν σε απόσταση R από το έδαφος πράγμα που συμβαίνει και στις δύο περιπτώσεις. Όταν το ελικόπτερο βρίσκεται σε απόσταση R από το έδαφος το ύψος του ομόρρου είναι περίπου στο ίδιο ύψος με τον δρομέα πράγμα που δεν συμβαίνει στη περίπτωση όπου το ελικόπτερο βρίσκεται σε απόσταση $2R$ από το έδαφος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο ομόρρος που παράγεται να επηρεάζει τα μεγέθη που μετράμε όσο πλησιάζουμε στο ακροπτερύγιο σε αρκετά μεγαλύτερο βαθμό όσο το ελικόπτερο κάνει πτήση αιώρησης πιο κοντά στο έδαφος.

Όπως παρατηρήθηκε στα διαγράμματα της ώσης και του συντελεστή ώσης για την ίδια απόσταση του ελικοπτερού από το έδαφος (σχήματα 9 και 10) η τιμή της ώσης και του συντελεστή ώσης είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση όπου το ελικόπτερο πραγματοποιεί την πτήση αιώρησης πίσω από τον τοίχο ή ανάμεσα σε όλους τους τοίχους από όταν είναι μόνο του. Αυτό επαληθεύεται και στα αποτελέσματα από το πείραμα (ONERA). Ωστόσο θα μελετήσουμε την επίδραση των τοίχων στη φόρτιση των πτερυγίων. Στα επόμενα σχήματα δείχνω, όταν το ελικόπτερο βρίσκεται αρχικά σε απόσταση R και μετά σε απόσταση $2R$ από το έδαφος και για τις 3 περιπτώσεις,

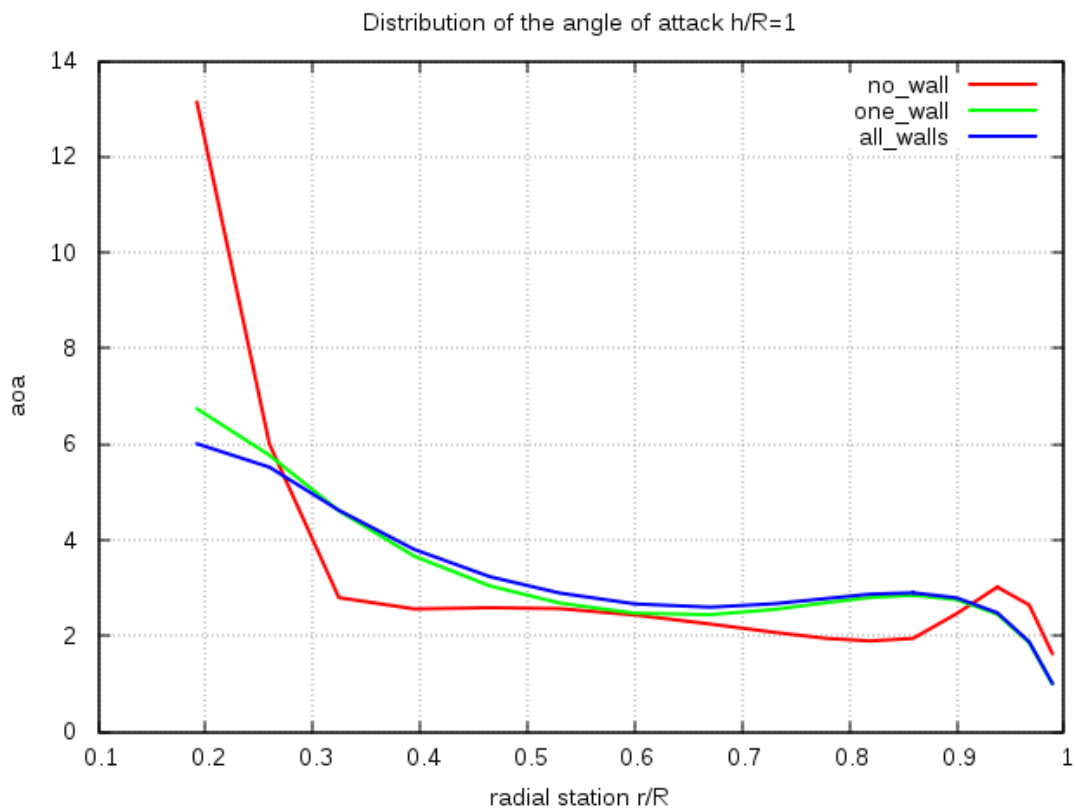
την κατανομή δυνάμεων, τις γωνίες πρόσπτωσης και τις επαγόμενες ταχύτητες κατά μήκος της χορδής του πτερυγίου.



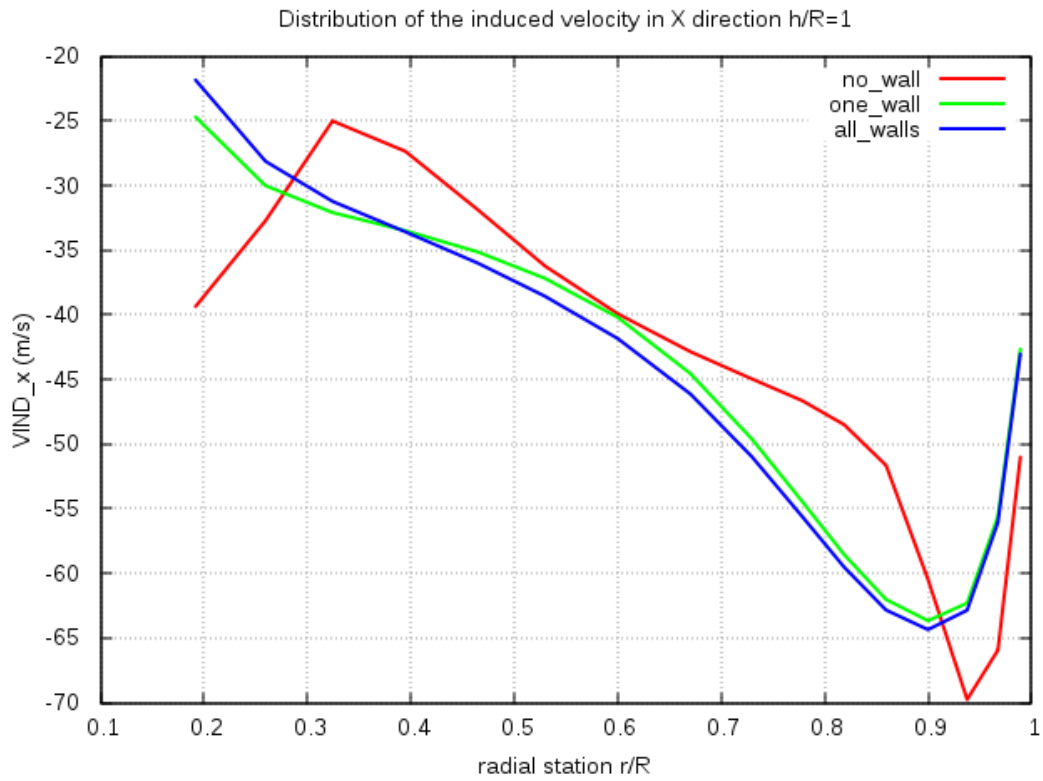
Σχήμα 17



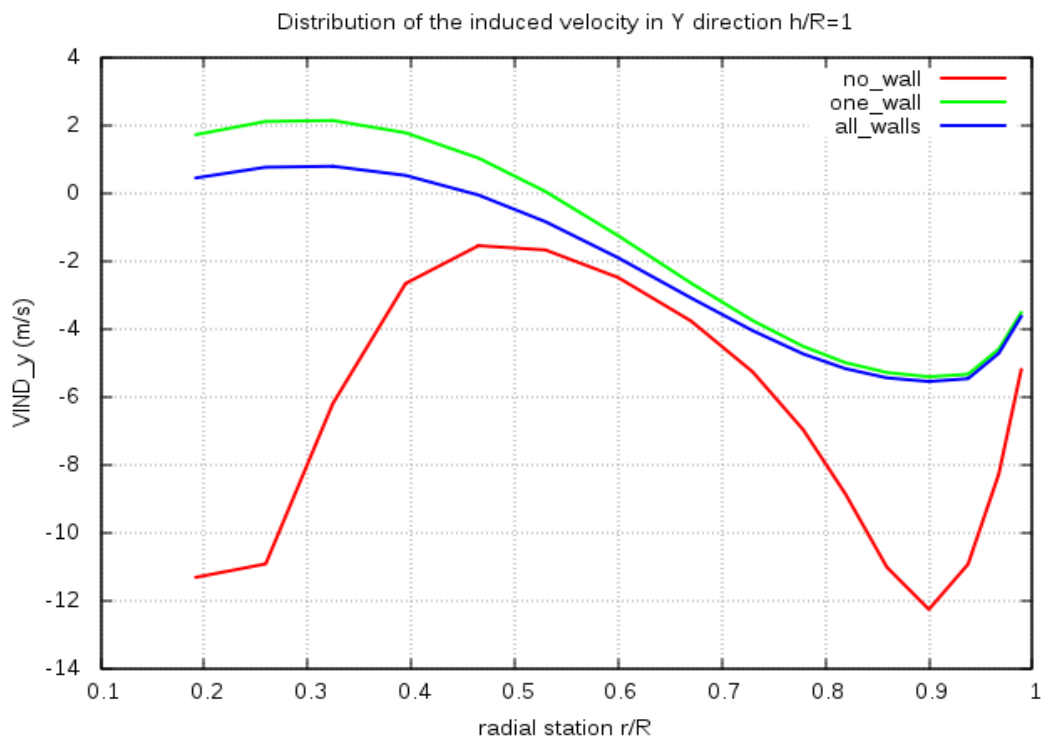
Σχήμα 18



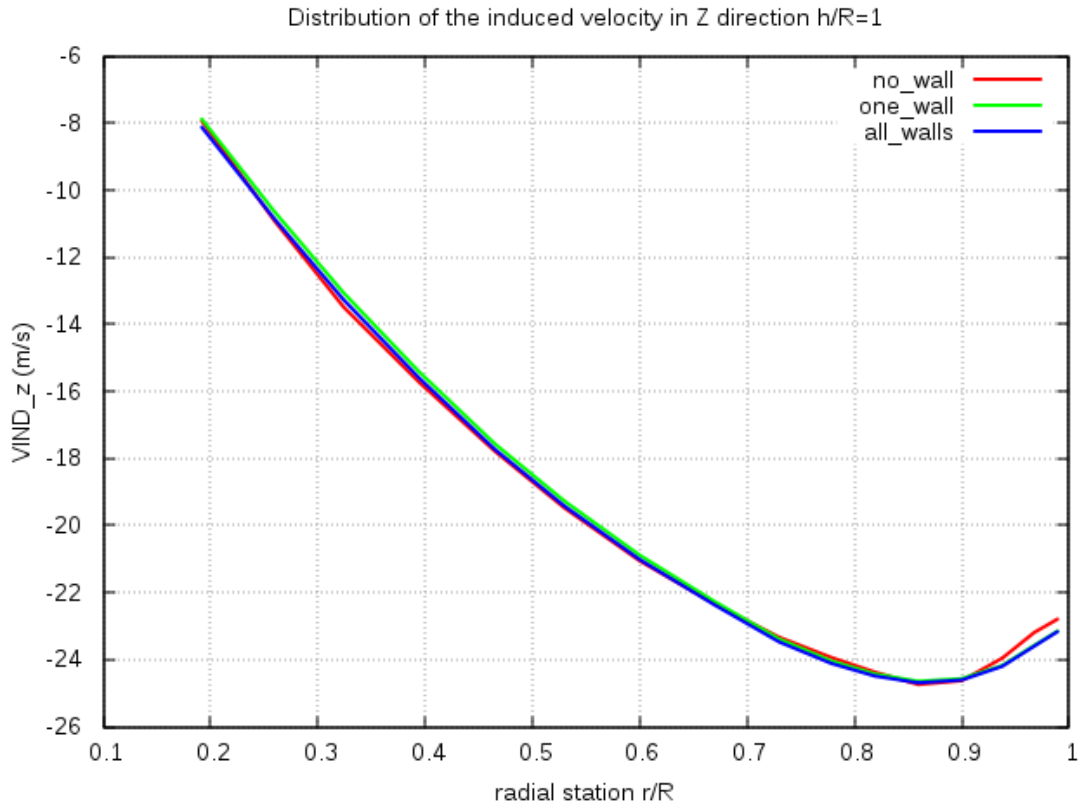
Σχήμα 19



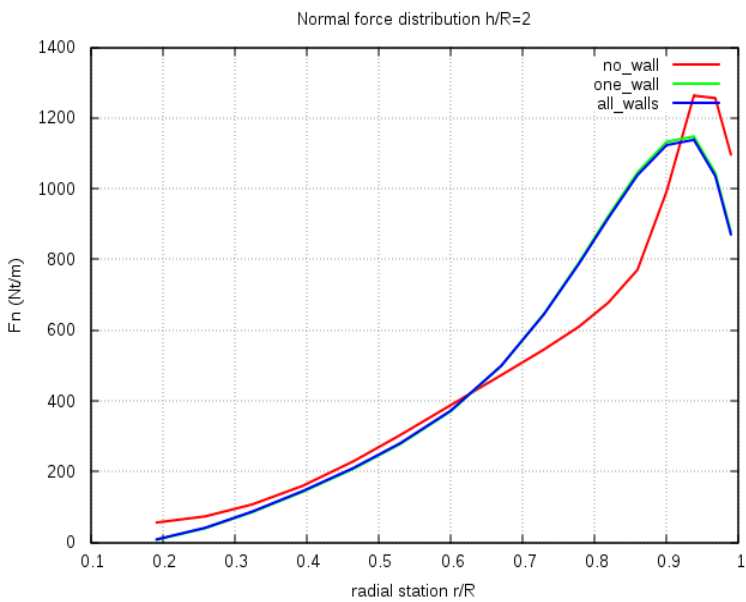
Σχήμα 20.1



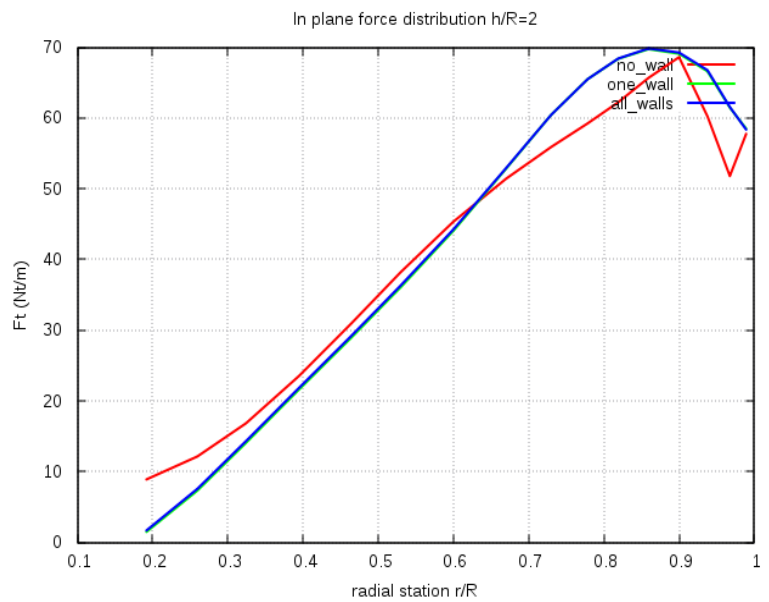
Σχήμα 20.2



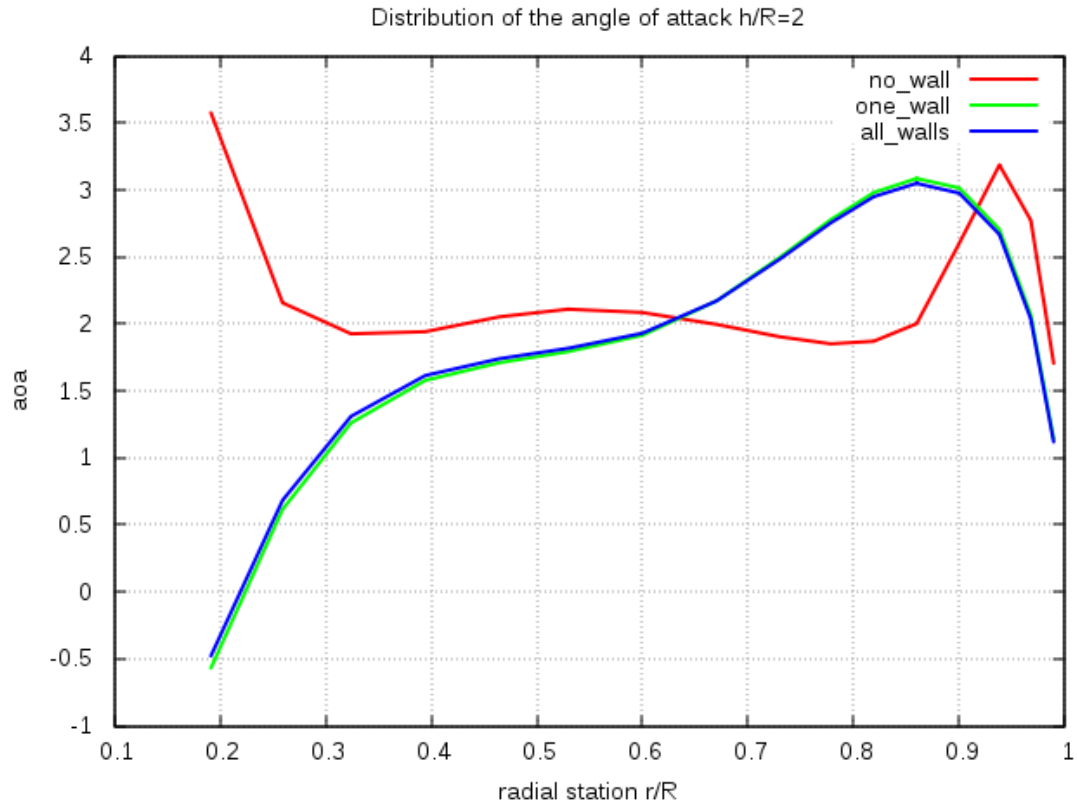
Σχήμα 20.3



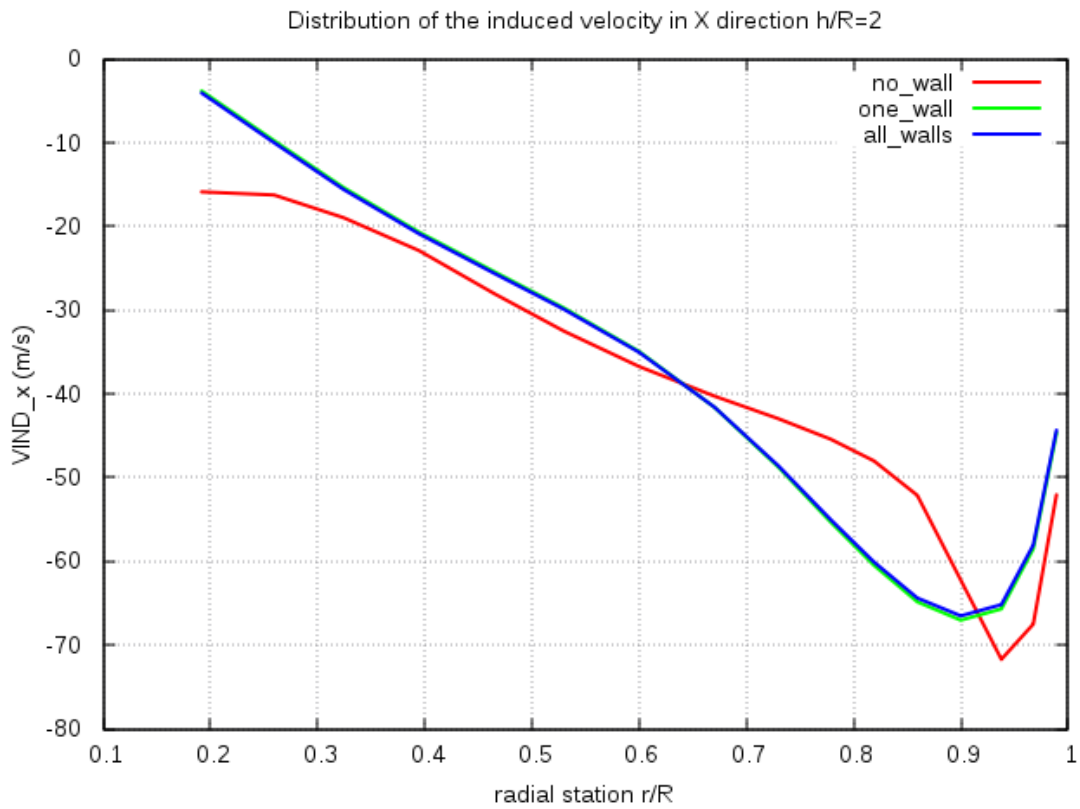
Σχήμα 21



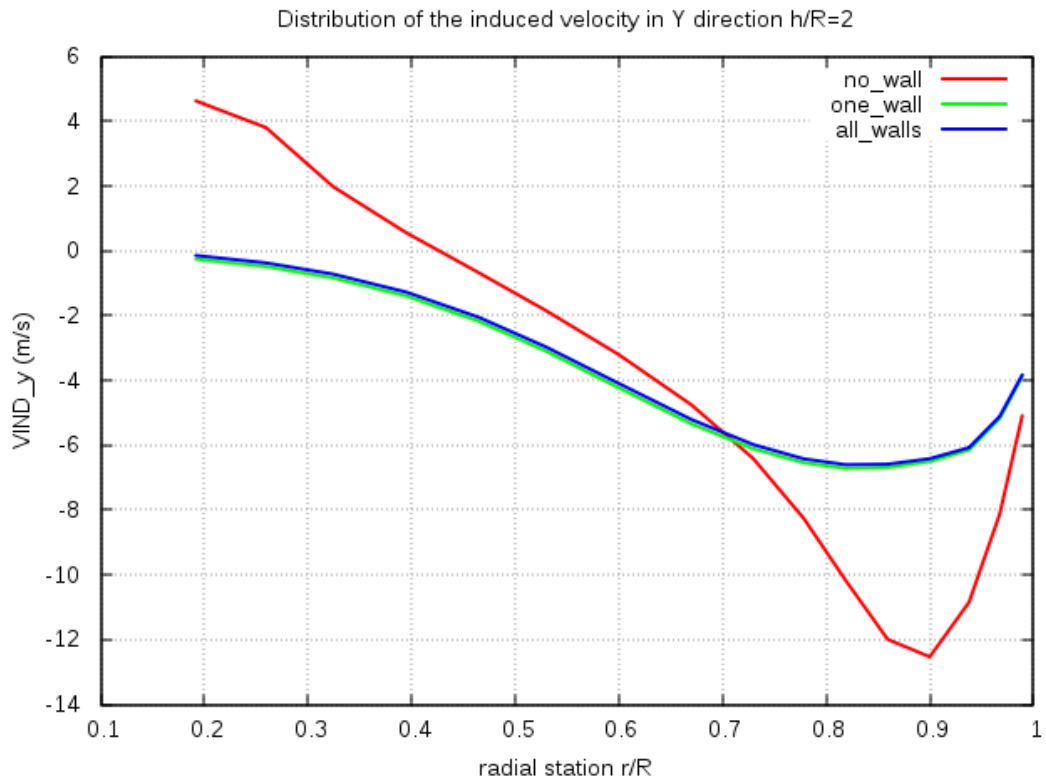
Σχήμα 22



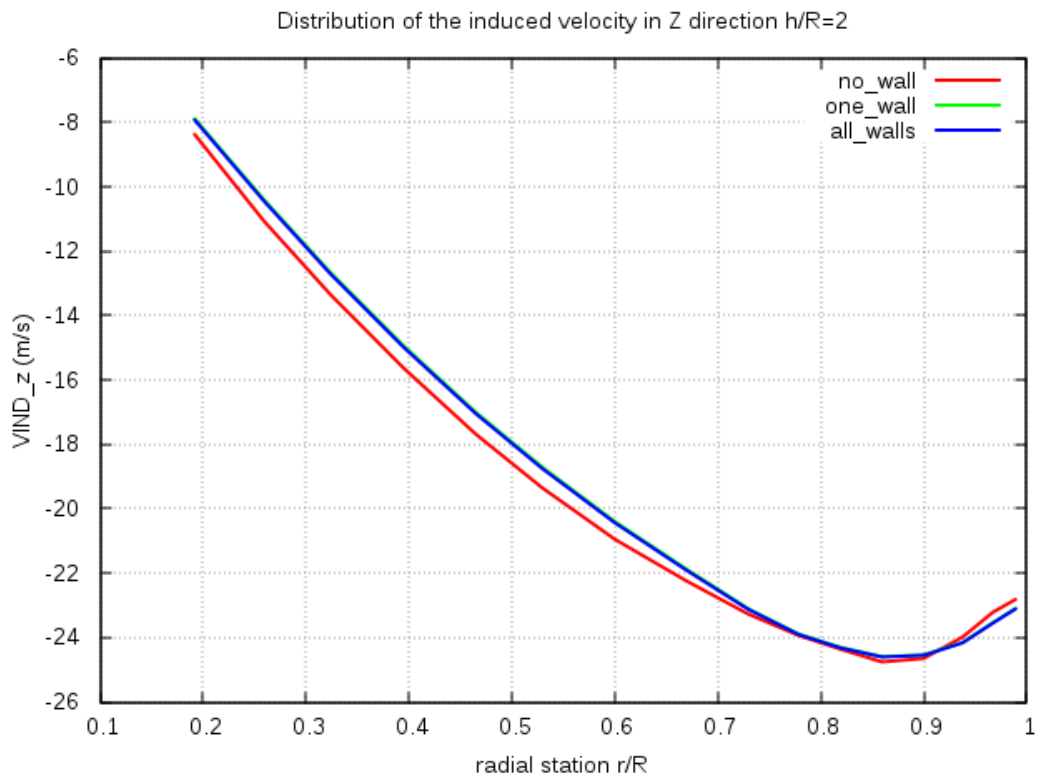
Σχήμα 23



Σχήμα 24.1



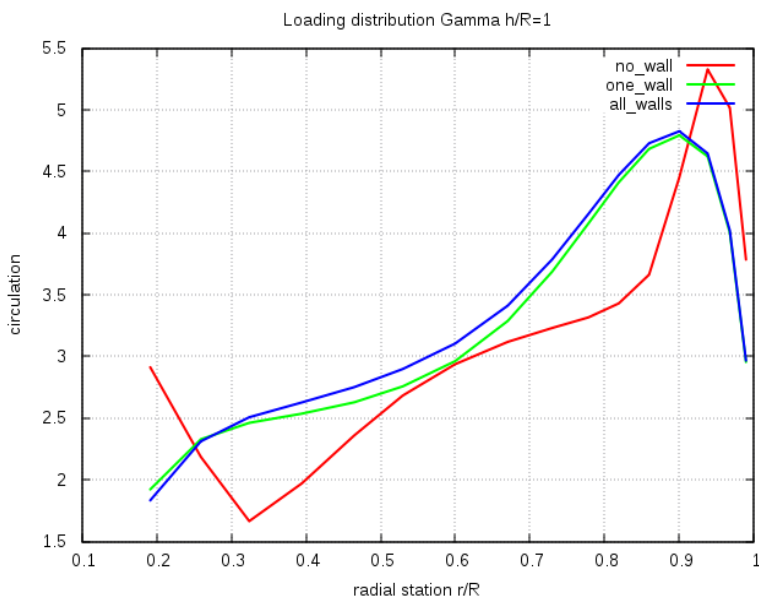
Σχήμα 24.2



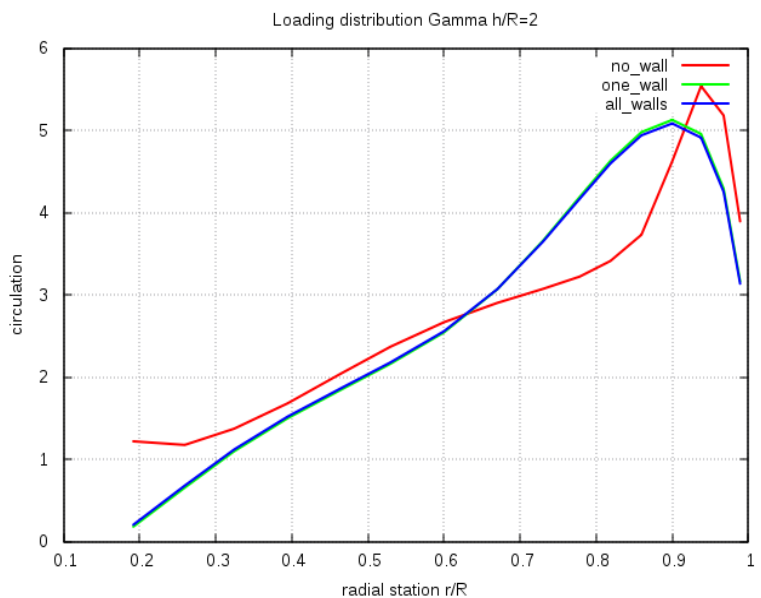
Σχήμα 24.3

Παρατηρούμε ότι αντίστοιχα με τη μορφή των διαγραμμάτων της ώσης και του συντελεστή ώσης, τα διαγράμματα για την κατανομή δυνάμεων στο πτερύγιο έχουν τη μορφή που περιμέναμε, δηλαδή η τιμή τους για την περίπτωση που υπάρχουν και οι τοίχοι είναι μεγαλύτερες από ότι στην περίπτωση που είναι το ελικόπτερο μόνο του. Για τις δυνάμεις F_n η προηγούμενη παρατήρηση ισχύει μέχρι περίπου το 95% τη μήκους του πτερυγίου. Στην περιοχή του ακροπτερυγίου βλέπουμε ότι η τιμή της δύναμης F_n είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση όπου το ελικόπτερο είναι χωρίς τους τοίχους. Αυτό επαληθεύεται και από τη μορφή του διαγράμματος για τις γωνίες πρόσπτωσης όπου και σε αυτό μετά το 95% του μήκους του πτερυγίου η τιμή της γωνίας για την περίπτωση όπου το ελικόπτερο είναι χωρίς τους τοίχους γίνεται μεγαλύτερη από την αντίστοιχη για τις περιπτώσεις με τον έναν αλλά και με όλους τους τοίχους πράγμα που δικαιολογείται βλέποντας και τη μορφή του διαγράμματος για τις τοπικές επαγόμενες ταχύτητες V_x όπου μετά το 95% του μήκους του πτερυγίου η απόλυτη τιμή τους είναι μεγαλύτερη για την περίπτωση που δεν υπάρχουν οι τοίχοι ενώ μέχρι εκείνο το σημείο συνέβαινε το αντίθετο.

Τέλος παρατηρούμε ότι και το διάγραμμα για την κατανομή της κυκλοφορίας έχει το ίδιο μοτίβο με αυτό των f_n , των γωνιών προσβολής και της V_x . Προκύπτει δηλαδή ότι σε μία σημαντική περιοχή του πτερυγίου η κυκλοφορία αυξάνει σχεδόν γραμμικά (ως προς την ακτίνα), λαμβάνοντας τη μέγιστη τιμή της κοντά στο 90%, ενώ στη συνέχεια η φόρτιση μειώνεται απότομα με τάση μηδενισμού στο ακροπτερύγιο όπως ήταν και η ανάλογη διακύμανση στην ακτινική διανομή της φόρτισης του πτερυγίου.



Σχήμα 25.1



Σχήμα 25.2

Σε γενικές γραμμές η πρόλεξη των μετρήσεων είναι ικανοποιητική στο σύνολο των ακτινικών θέσεων. Ακόμα και στη θέση του ακροπτερυγίου ($r / R=0.96$), όπου η ροή παρουσιάζει έντονα τρισδιάστατο χαρακτήρα, οι προλέξεις είναι αποδεκτές.

Είναι φανερό ότι υπάρχει μία περιοχή του πτερυγίου όπου η φόρτιση αυξάνει γραμμικά (ως προς την ακτίνα), λαμβάνοντας τη μέγιστη τιμή της κοντά στο 90%, ενώ μετά αναμένεται η απότομη μείωσή της με τάση μηδενισμού στο ακροπτερύγιο.

3.5 Οι πιέσεις στο έδαφος και στον τοίχο

Όπως αναφέρθηκε, τόσο στο πείραμα (ONERA) όσο και στην υπολογιστική μέθοδο που χρησιμοποιήσα, μελετήθηκε η συμπεριφορά των πιέσεων τόσο στο έδαφος όσο και πάνω στον τοίχο με ουσιαστικό ενδιαφέρον στο πως μεταβάλλονται και όχι τόσο στην τιμή που είχαν.

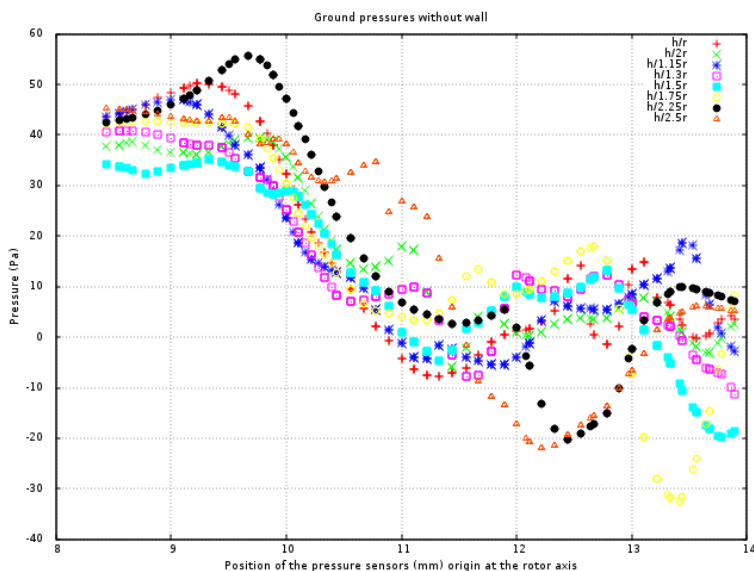
Για τον υπολογισμό αυτών των πιέσεων δημιουργήσα μία υπορουτίνα για τον κώδικα όπου έβρισκε για διάφορες θέσεις, στην ευθεία του δρομέα του ελικοπτερου, τις πιέσεις P_G πάνω στο έδαφος P_{GROUND} αλλά και πάνω στον τοίχο P_{WALL} με χρήση της εξίσωσης Bernoulli:

$$P_{GROUND} = \frac{1}{2} U_{\infty}^2 \rho - \frac{1}{2} U_{out}^2 \rho + P_G \quad (3.5.1)$$

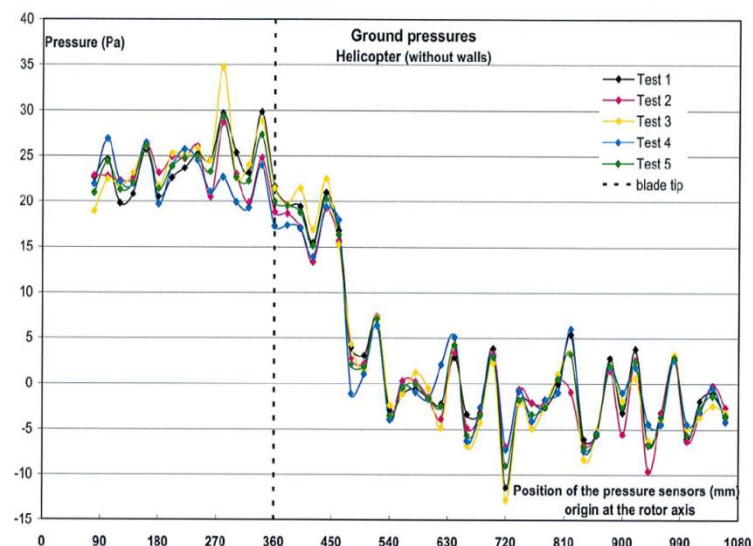
$$P_{WALL} = \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{2} U_{out}^2 \rho + P_G \quad (3.5.2)$$

όπου $U_{\infty} = 0.01$ m/s, U_{out} η απόλυτη ταχύτητα στο σημείο που υπολογίζουμε την πίεση και P_G η τοπική πίεση που υπάρχει στο σημείο αυτό και είναι σχεδόν σταθερή για όλα τα σημεία.

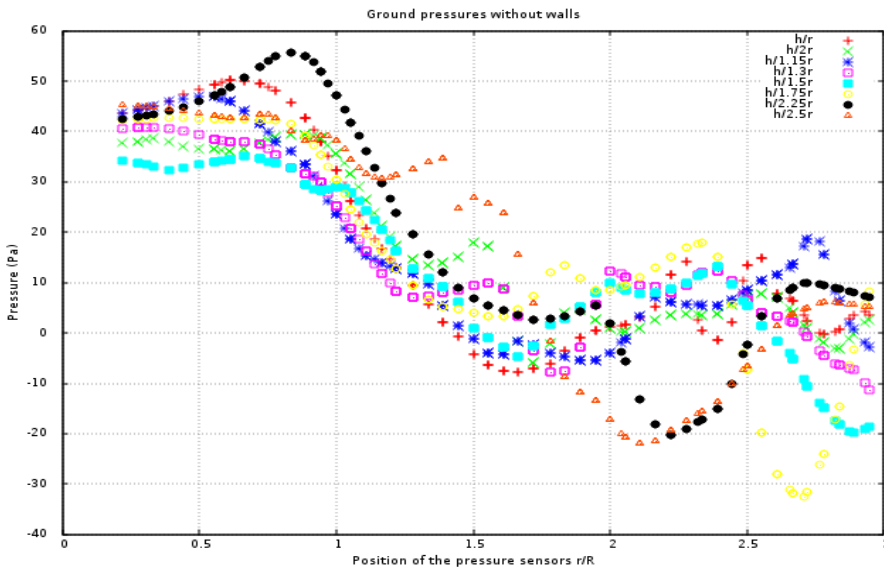
Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα που προέκυψαν και η σύγκρισή τους με τα αντίστοιχα από το πείραμα (ONERA).



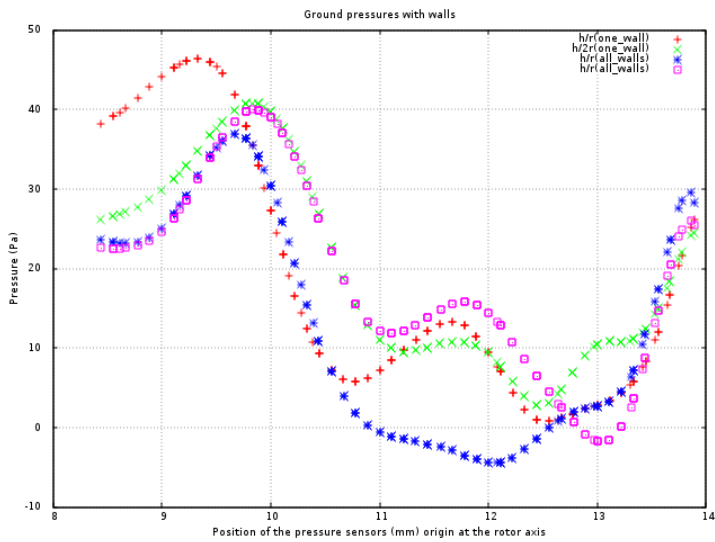
Σχήμα 26.1 Πιέσεις στο έδαφος (μόνο ελικόπτερο)



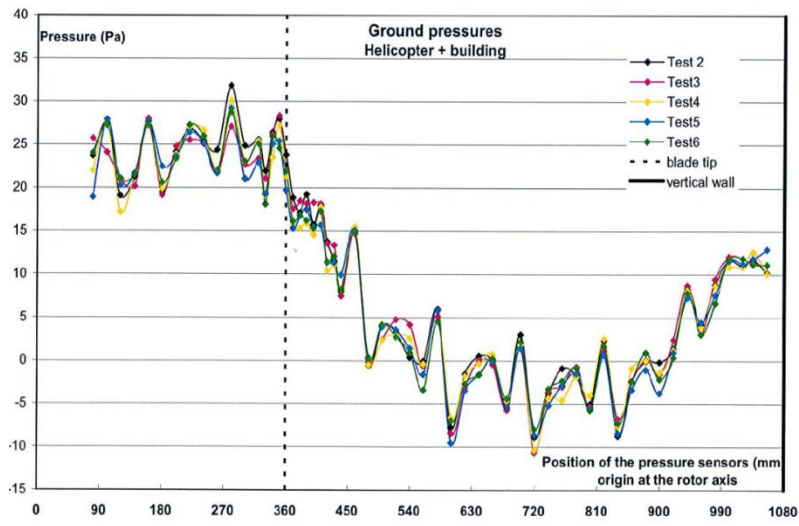
Σχήμα 26.2 Πιέσεις στο έδαφος (μόνο ελικόπτερο (ONERA))



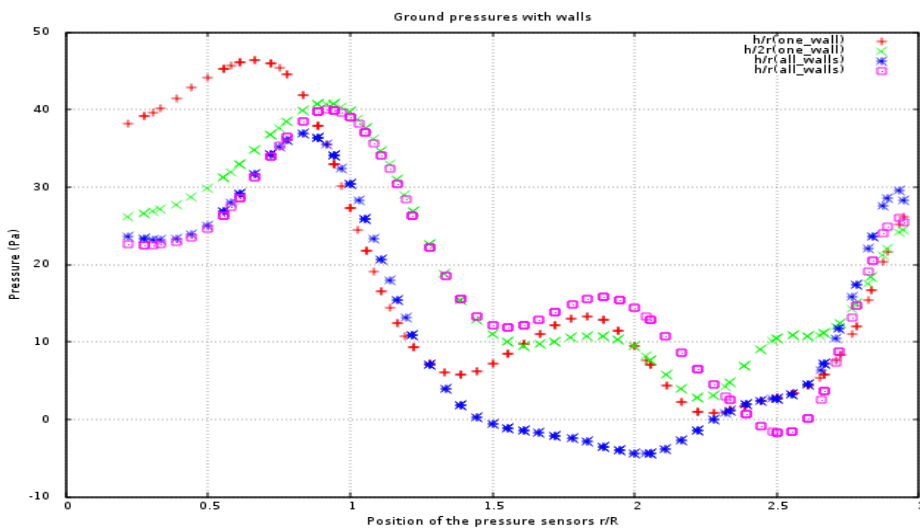
Σχήμα 26.3 Πιέσεις στο έδαφος (μόνο ελικόπτερο) ως προς r/R



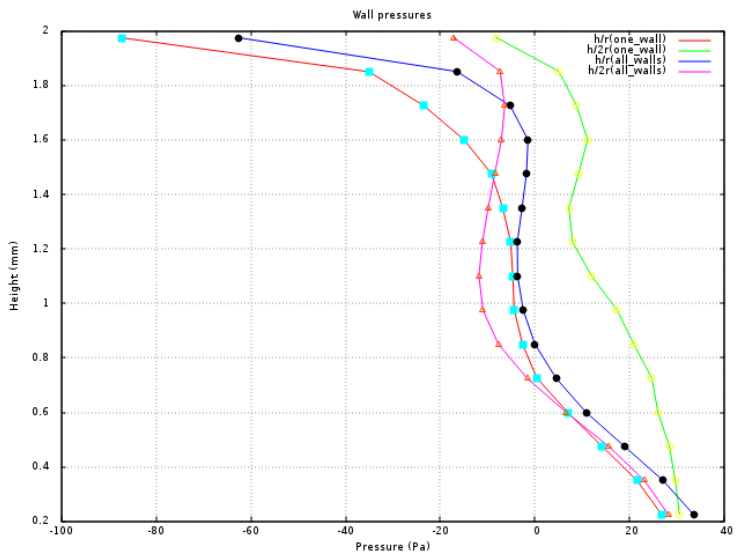
Σχήμα 27.1 Πιέσεις στο έδαφος (ελικόπτερο μαζί με τοίχους)



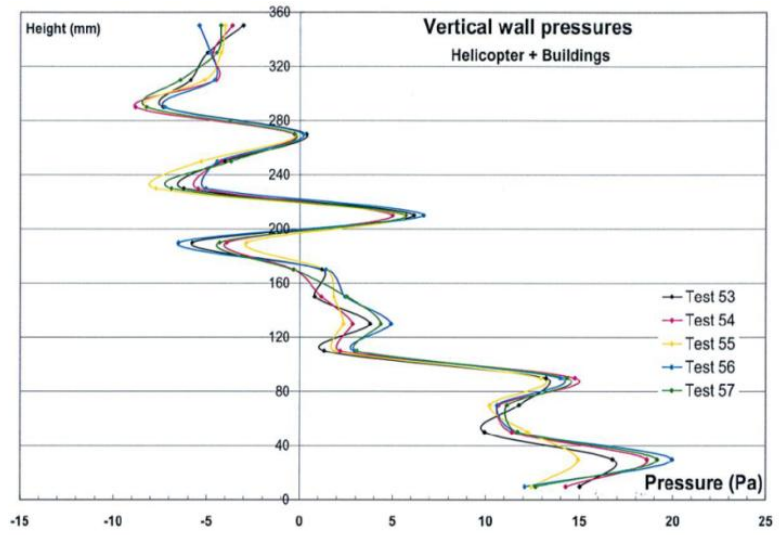
Σχήμα 27.2 Πιέσεις στο έδαφος (ελικόπτερο μαζί με τοίχους (ONERA))



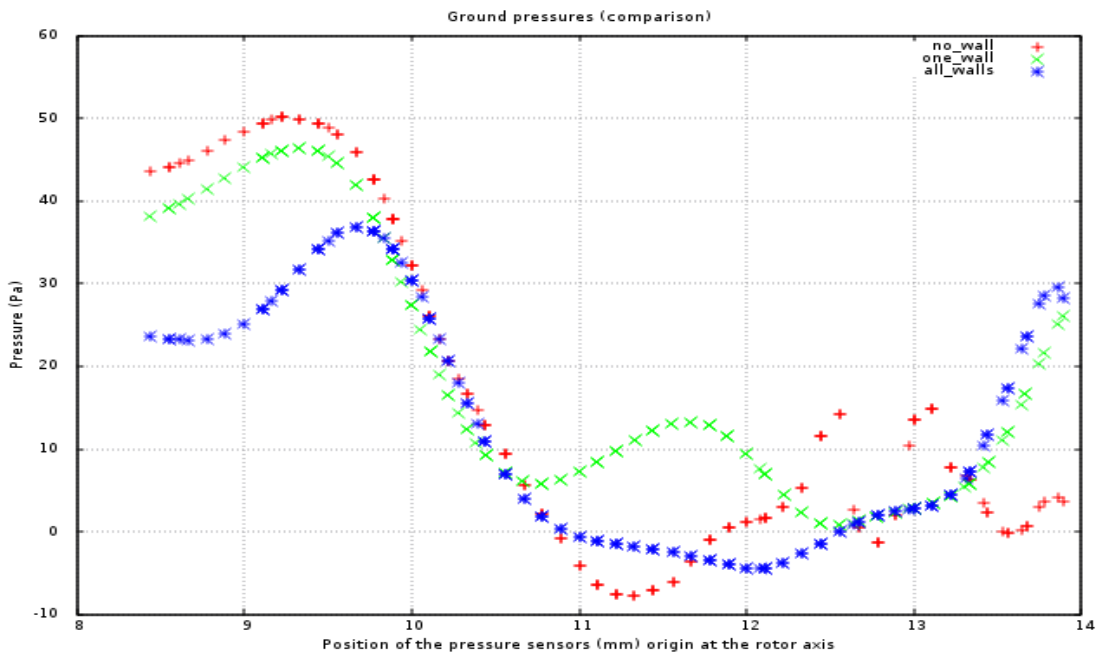
Σχήμα 27.3 Πιέσεις στο έδαφος (ελικόπτερο μαζί με τοίχους) ως προς r/R



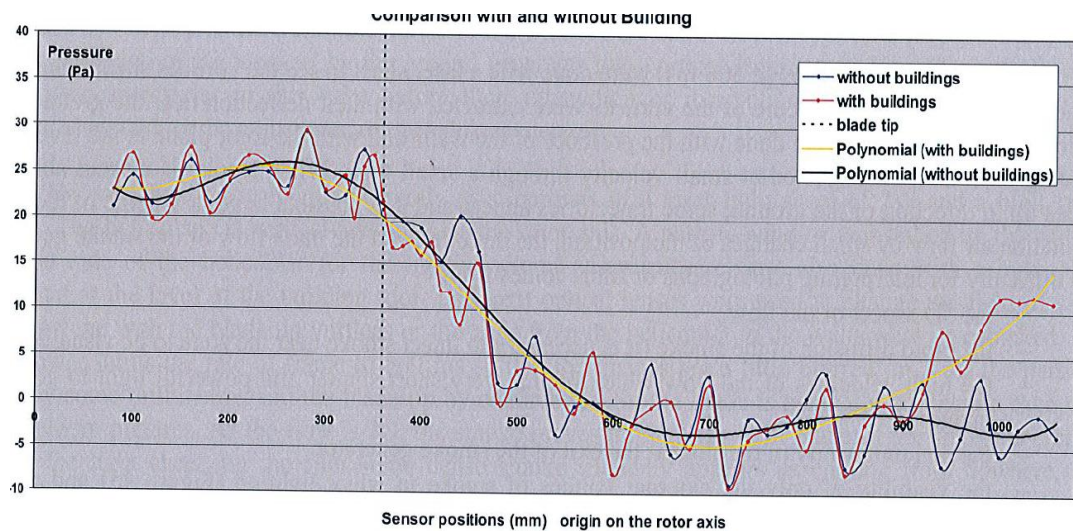
Σχήμα 28.1 Πιέσεις στον τοίχο



Σχήμα 28.2 Πιέσεις στον τοίχο (ONERA)



Σχήμα 29.1 Σύγκριση πιέσεων στο έδαφος με και χωρίς τον τοίχο



Σχήμα 29.2 Σύγκριση πιέσεων στο έδαφος με και χωρίς τον τοίχο (ONERA)

Παρατηρούμε ότι η μορφή των σχημάτων που προέκυψαν από το υπολογιστικό πρότυπο που αναπτύχθηκε είναι παρόμοια με αυτή από το πείραμα (ONERA).

Στην περίπτωση όπου το ελικόπτερο είναι χωρίς τους τοίχους παρατηρούμε ότι η τιμή των πιέσεων ελαττώνεται όσο απομακρυνόμαστε κατά μήκος του εδάφους από το κέντρο του δρομέα ξεκινώντας από τιμές υπερπίεσης ακριβώς κάτω από το δρομέα και καταλήγοντας σταδιακά σε μικρές τιμές υποπίεσης. Αυτό συμβαίνει επειδή η τιμή τους δεν εξαρτάται από τις ταχύτητες που επάγει η ροή του ομόρρου αλλά εξαιτίας των τοπικών ταχυτήτων που έχουν σχηματιστεί στο έδαφος.

Παρόμοια είναι και τα αποτελέσματα για την περίπτωση όπου υπάρχουν τοίχοι με μόνη διαφορά ότι στην περίπτωση που υπάρχουν οι τοίχοι, όσο πλησιάζουμε προς αυτούς οι τιμές των πιέσεων σταματάνε να μειώνονται και αρχίζουν πάλι να αυξάνονται σταδιακά μέχρι το σημείο που βρίσκεται ο τοίχος.

Όσον αφορά τις πιέσεις που υπάρχουν πάνω στον τοίχο ακολουθούν και αυτές παρόμοια μορφή με αυτές του εδάφους ξεκινώντας από το ύψος του εδάφους με θετική τιμή η οποία όσο αναβαίνουμε στον τοίχο μειώνεται παίρνοντας την μικρότερη τιμή της στην κορυφή του τοίχου.

Επίσης παρατηρούμε ότι η απόσταση που βρίσκεται το ελικόπτερο από το έδαφος δεν παίζει σχεδόν καθόλου ρόλο στη διαμόρφωση των τιμών των πιέσεων κάτι που είναι λογικό αφού όπως αναφέρθηκε η τιμή τους υπολογίζεται ουσιαστικά από τις τοπικές ταχύτητες.

3.6 Σύνοψη

Σε γενικές γραμμές, η σύγκριση της πρόλεξης της μεθοδολογίας που χρησιμοποιήσα δίνει αποτελέσματα ίδιας τάξης μεγέθους, άμεσα συγκρίσιμα με τα πειραματικά δεδομένα.

Στο κεφάλαιο αυτό διερευνήθηκε η αεροδυναμική συμπεριφορά δρομέα ελικοπτερου με χρήση της συμμετρίας εδάφους σε πτήση αιώρησης, για διάφορα ύψη από το έδαφος, όταν βρίσκεται μόνο του αλλά και γύρω από στερεά όρια. Επίσης έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ τους για τις διαφορετικές περιπτώσεις όπως και με τα δεδομένα που υπήρχαν από ένα αντίστοιχο πείραμα (ONERA).

Έγινε ο έλεγχος της ευαισθησίας των τελικών αποτελεσμάτων για τις αριθμητικές παραμέτρους που επιλέχθηκαν και μάλιστα προέκυψε το συμπέρασμα τα αποτελέσματα χαρακτηρίζονται από αριθμητική ανεξαρτησία σε κάποιες περιπτώσεις.

Εξετάζοντας τα πειραματικά δεδομένα είναι εμφανές ότι κυρίως στην περιοχή προχώρησης, εμφανίζονται φαινόμενα συμπίεσότητας σε μερικές περιπτώσεις από το 75% της ακτίνα που ισχυροποιούνται στο 97%. Η εισαγωγή των διορθώσεων

συμπιεστότητας μέσω των εξισώσεων Prandtl-Glauert είναι δυνατό να βελτιώσει το εύρος των προλέξεων προς την κατεύθυνση των πειραματικών δεδομένων.

Διαπιστώθηκαν αποκλίσεις από τις μετρήσεις, που θεωρούνται αναμενόμενες.

Η πρόλεξη μετατοπισμένων διανομών συντελεστή πίεσης, οφείλεται στην μη προσομοίωση των φαινομένων αεροελαστικότητας. Μάλιστα αξίζει να σημειωθεί ότι τα φαινόμενα αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά στην πράξη, καθώς παραμορφώνοντας το πτερύγιο οδηγούν στην τροποποίηση των γωνιών ρύθμισης βήματος.

Η εμφάνιση φαινομένων συμπιεστότητας (ιδιαίτερα στην περιοχή προχώρησης και κοντά στο ακροπτερύγιο) οδηγεί επιπλέον στη διαφοροποίηση του εύρους μεταξύ προλέξεων και πειράματος. Παρά το γεγονός αυτό, διαπιστώνεται ότι η παρούσα μέθοδος προλέγει ικανοποιητικά τα βασικά μη μόνιμα χαρακτηριστικά των δρομέων (διανεμημένη φόρτιση).

Από την ανάλυση που προηγήθηκε, προκύπτει σαν γενικό συμπέρασμα ότι η επίλυση του προβλήματος του δρομέα ελικοπτέρου με την χρήση της διατύπωσης διπόλων μπορεί να γίνει σε ικανοποιητικό βαθμό, δεδομένου ότι δεν συμπεριλαμβάνει την αεροελαστική μοντελοποίηση του δρομέα, τα φαινόμενα συμπιεστότητας της ροής και την μοντελοποίηση της αποβολής στροβιλότητας κατά μήκος της χορδής του ακροπτερυγίου.

4 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

4.1 Επισκόπηση της Εργασίας και των Αποτελεσμάτων

Η παρούσα εργασία έθεσε ως στόχο την ανάπτυξη και την αξιολόγηση μίας μεθοδολογίας για την ανάλυση της αεροδυναμικής συμπεριφοράς ενός δρομέα ελικοπτέρου σε πτήση αιώρησης κοντά στο έδαφος τόσο όταν είναι σε ανοιχτό χώρο αλλά και στην περίπτωση που βρίσκεται γύρω από σπίτια ή άλλου είδους οικοδομήματα ή γενικά κοντά σε στερεά όρια.

Για την υλοποίηση αυτού του στόχου υιοθετήθηκε αριθμητική μέθοδος βασισμένη στην οικογένεια των μη-πλεγματικών μεθόδων της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Η αναπαράσταση των σωμάτων γίνεται με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων όπου επιλέγεται η διατύπωση διπόλων για το ελικόπτερο και η διατύπωση πηγών για τους τοίχους. Η στροβιλότητα του πεδίου ροής αναπαριστάται ως σύνολο ελεύθερων στοιχείων στροβιλότητας. Αυτή η επιλογή παρουσιάζει σαφές πλεονέκτημα τόσο έναντι των μεθόδων προδιαγεγραμμένου ομόρρου, καθώς προλέγει με ακρίβεια την δημιουργία του αρχικού στροβίλου, γεγονός που αποδεδειγμένα οδηγεί στη γρήγορη σύγκληση της μεθόδου παράγοντας ταυτόχρονο αξιόπιστα αποτελέσματα όσο και έναντι των συνεκτικών μεθοδολογιών (RANS), όσον αφορά τις απαιτήσεις σε χρόνο και μνήμη Η/Υ.

Το υπολογιστικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε χαρακτηρίζεται από ευρεία εφαρμοσιμότητα και ευελιξία. Έχει τη δυνατότητα να εφαρμόζεται άμεσα, δίνοντας αποτελέσματα χωρίς να διαφοροποιείται αρκετά από περίπτωση σε περίπτωση όπως σε τεχνολογικά προβλήματα, όπου η γεωμετρία αλλά και η εφαρμογή του δρομέα διαφοροποιείται σημαντικά, λ.χ. δρομέας ανεμογεννήτριας, ελικοπτέρου και ναυτική έλικα, ή σε μόνιμες και μη μόνιμες ροές με και χωρίς συμμετρία, γύρω από δρομείς που μπορεί να αλληλεπιδρούν έντονα με άλλα σώματα, αλλά και με προσπίπτουσα σε αυτά στροβιλότητα. Ακόμα, για την πρόλεξη τόσο του μη μόνιμου πεδίου ταχυτήτων όσο και των διανεμημένων φορτίων στα στερεά σύνορα ή σε μεγάλο εύρος συνθηκών λειτουργίας που εκτείνεται πέρα από την περιοχή κανονικής λειτουργίας του δρομέα.

Η μέθοδος μπορεί να αναπαράγει τα ρευστοδυναμικά χαρακτηριστικά του πεδίου ροής μέσα στα πλαίσια των υποθέσεων που έχουν γίνει για την φυσική του προβλήματος. Συγκεκριμένα προλέγεται η μη μόνιμη φόρτιση του δρομέα και η διανομή του πεδίου ταχυτήτων με λεπτομέρεια στο χρόνο και το χώρο. Υπενθυμίζεται ότι επιλύεται η μη συνεκτική ροή χωρίς να συμπεριλαμβάνονται οποιοδήποτε τύπο συνεκτικές διορθώσεις, η ροή θεωρείται ασυμπίεστη και σε μερικές περιπτώσεις εισάγονται οι διορθώσεις συμπίεστικότητας μέσω των εξισώσεων Prandtl-Glauert, δεν γίνεται η ελαστική προσομοίωση των πτερυγίων καθώς η εργασία εστιάζεται στο

αμιγώς ρευστοδυναμικό πρόβλημα, προσομοιώνεται μόνο η γεωμετρία του δρομέα (σε μερικές περιπτώσεις με τον άξονά του), χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η γεωμετρία της πειραματικής εγκατάστασης και το φύλλο στροβιλότητας εκφεύγει υποχρεωτικά από την ακμή εκφυγής του πτερυγίου. Επιπλέον ο στρόβιλος του ακροπτερυγίου εκφεύγει υποχρεωτικά από την ακμή εκφυγής του πτερυγίου (δεν υπάρχει η δυνατότητα της αποβολής του από κάποια άλλη προηγούμενη θέση κατά μήκος του ακροπτερυγίου).

Σε όλες τις περιπτώσεις υπολογίζεται με αξιοπιστία τόσο η κατάσταση μόνιμης ροής, όσο και η δυναμική κατάσταση ακόμα και όταν το φυσικό πρόβλημα δεν υπόκειται στους παραπάνω περιορισμούς. Τα όρια εφαρμογής της μεθόδου θέτει κυρίως η αγνόηση της συνεκτικότητας (μπορεί να είναι σημαντική σε όλες τις εφαρμογές δρομέων που εξετάστηκαν, ανάλογα με το σημείο λειτουργίας του δρομέα και την εξεταζόμενη θέση στο πτερύγιο), της συμπίεσότητας (προφανώς στις περιπτώσεις διηχητικής ροής σε δρομείς ελικοπτέρου), καθώς επίσης και της ελαστικότητας (σε δρομείς ανεμογεννητριών και ελικοπτέρου).

Τα αποτελέσματα της έλλειψης των συνεκτικών δυνάμεων γίνονται αντιληπτά κυρίως ως απουσία οριακού στρώματος γύρω από τις στερεές επιφάνειες και ως απουσία συνεκτικής διάχυσης στον ομόρρο. Η απουσία οριακού στρώματος συνεπάγεται την αδυναμία άμεσου υπολογισμού των διατμητικών φορτίων στα στερεά σύνορα, την εισαγωγή σφάλματος στην αλληλεπίδραση προσπίπτουσας στροβιλότητας - στερεής επιφάνειας και την αδυναμία πρόλεξης της αποκόλλησης της ροής. Το τελευταίο από αυτά τα αποτελέσματα περιορίζει καθοριστικά την ικανότητα της μεθόδου για πρόλεξη των φορτίων σε σημεία έξω από την περιοχή κανονικής λειτουργίας του δρομέα.

Σε ικανοποιητικό βαθμό προλέγεται η αλληλεπίδραση τόσο μεταξύ στερεών σωμάτων, όσο και μεταξύ στερεών σωμάτων και προσπίπτουσας στροβιλότητας. Το πρότυπο αριθμητικής διαχείρισης της στροβιλότητας καθώς αυτή πλησιάζει κάποιο στερεό σύνορο, ελαχιστοποιεί τις αριθμητικές αστάθειες χωρίς να αλλοιώνει σημαντικά την φυσική των ροών.

Το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου είναι τέτοιο που επιτρέπει την εφαρμογή της σε ρεαλιστικά προβλήματα μη μόνιμης ροής, όπου μπορεί να αλληλεπιδρούν σώματα με σύνθετη γεωμετρία κινούμενα ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Όσον αφορά τα συμπεράσματα, που προκύπτουν από τις τεχνολογικές εφαρμογές που εξετάστηκαν, αυτά καταγράφονται στο τέλος της ανάλυσης για κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

Συνοψίζοντας τα πιο σημαντικά από αυτά προκύπτει ότι ο βασικός χαρακτήρας των ροών που εξετάστηκαν είναι κυρίως δυναμικός και δεν απαιτεί την προσομοίωση των συνεκτικών μηχανισμών σε ένα σημαντικό εύρος λειτουργίας των δρομέων και ότι ο μη γραμμικός χαρακτήρας του προβλήματος, όπως αναπαράγεται μέσα από την επιβολή της συνθήκης Kutta-Joukowski, οδηγεί σε ικανοποιητική πρόλεξη των ρευστομηχανικών χαρακτηριστικών του πεδίου ροής δικαιολογώντας τις επιλογές που έγιναν στο σχεδιασμό του παρόντος αριθμητικού εργαλείου.

Η αριθμητική μέθοδος που επιλέγεται είναι πρωτότυπη όσον αφορά τη θεωρητική της διατύπωση, την υλοποίησή της σε αριθμητική διαδικασία και τέλος τον τρόπο αξιολόγησής της. Μεθοδολογικά για πρώτη φορά συμπεριλαμβάνεται ο υπολογισμός του πεδίου πιέσεων, που επάγει το στροβιλό μέρος της ροής μέσα από την ολοκλήρωση της απόκλισης του θεωρήματος ορμής. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται ο ορθός υπολογισμός του πεδίου πιέσεων στο γενικευμένο πεδίο ροής, καθώς ο υπολογισμός της πίεσης από το αστρόβιλο μέρος της ροής γίνεται σύμφωνα με την εξίσωση Bernoulli. Ο όρος αυτός έχει μεγάλη σημασία στην περίπτωση ισχυρής αλληλεπίδρασης σωμάτων-στροβιλότητας (B/VI: blade-vortex interaction) καθορίζοντας την ακουστική πίεση που παράγεται από αυτή την αλληλεπίδραση.

Στα πρωτότυπα στοιχεία της εργασίας μπορεί να συμπεριληφθεί η εισαγωγή διαφόρων αριθμητικών διαδικασιών μείωσης του υπολογιστικού χρόνου της μεθόδου: η αναδιάρθρωση του συστήματος των εξισώσεων στην περίπτωση όπου η σχετική θέση των σωμάτων δεν μεταβάλλεται χρονικά, η εισαγωγή της χρήσης πολυπλεγμάτων (έστω και στο επίπεδο υπολογισμών σε μη ανωστικά σώματα) και τέλος η παρουσίαση ενός υβριδικού προτύπου ομόρρου.

Όσον αφορά τη συνεισφορά της μεθόδου στην αντιμετώπιση τεχνολογικών προβλημάτων παρουσιάζονται για πρώτη φορά μη μόνιμοι υπολογισμοί που υλοποιούνται άμεσα στην πραγματική επιφάνεια δρομέα ελικοπτέρου και συμπεριλαμβάνουν την αλληλεπίδραση με ελεύθερα φύλλα στροβιλότητας.

4.2 Προτάσεις για Μελλοντική εργασία

Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεράσματα και τις παρατηρήσεις που έγιναν κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας προκύπτουν οι ακόλουθες κατευθύνσεις προς τις οποίες υπάρχει η δυνατότητα επέκτασης της παρούσας μεθόδου:

(α) Μεθοδολογικές προσθήκες

Η παρούσα μέθοδος προσφέρει το ασφαλές υπόβαθρο για την ανάπτυξη σύνθετων υπολογισμών που θα συμπεριλαμβάνουν την ενσωμάτωση τρισδιάστατων συνεκτικών μηχανισμών. Η υλοποίηση αυτής της διαδικασίας αναμένεται ότι θα οδηγήσει σε βελτίωση των προλέξεων των διατμητικών φορτίων και συνεπώς στην καλύτερη εκτίμηση των περιφερειακών δυνάμεων και της ισχύος του εξεταζόμενου συστήματος.

Η προσθήκη μηχανισμού αποκόλλησης είναι δυνατή με την χρήση στροβιλών μεθοδολογιών έχοντας ως δεδομένο την καμπύλη έναρξης της απόκλισης (Ριζιώτης 2003). Η θέση αυτή μπορεί να προκύψει από ένα πρότυπο τρισδιάστατου οριακού στρώματος. Με την επέκταση αυτή τα όρια εφαρμογής της μεθόδου επεκτείνονται σημαντικά και γίνεται δυνατή η αντιμετώπιση ρευστομηχανικών προβλημάτων μες μεγάλο τεχνολογικό ενδιαφέρον.

Η εισαγωγή του σχήματος αποβολής στροβιλότητας κατά μήκος της χορδής του ακροπτερυγίου, διορθώνει τόσο τη διανομή κυκλοφορίας στο πτερύγιο, όσο και την

ένταση και την θέση της αποβαλλόμενης στροβιλότητας που αναμένεται να έχει ισχυρή ένταση.

(β) Αριθμητικές Προσθήκες

Η πλήρης εφαρμογή του αριθμητικού σχήματος πολυπλεγμάτων (multi-level grids), έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνει τη δυνατότητα διαχείρισης των διανομών διπλόλων, θα συμβάλλει σημαντικά προς την κατεύθυνση βελτίωσης της γεωμετρικής αναπαράστασης των στερεών ορίων (οδηγώντας συνεπώς σε ακριβέστερο υπολογισμό των κατανομών πίεσης) με ταυτόχρονη μείωση του υπολογιστικού κόστους.

(γ) Σύνθετες εφαρμογές

Η ανάπτυξη του αεροδυναμικού εργαλείου στην παρούσα μορφή παρέχει τη δυνατότητα της άμεσης σύζευξης του με ακουστικά πρότυπα που έχουν προταθεί σε παλαιότερες εργασίες (Πόθου 1997, Τριάντος 2002), παρέχοντας τη δυνατότητα εκτέλεσης λεπτομερέστερων αεροακουστικών υπολογισμών.

Η σύζευξη της μεθόδου με ένα ελαστοδυναμικό πρότυπο μπορεί να γίνει άμεσα, καθώς απαιτεί απλά την ανταλλαγή της πληροφορίας των φορτίων και των ελαστικών μετατοπίσεων και στροφών, όπως αυτά προκύπτουν από το ρευστοδυναμικό και το ελαστοδυναμικό πρόβλημα αντίστοιχα.

Τέλος είναι δυνατή η σύζευξη της μεθόδου με RANS μεθοδολογίες, για την επίλυση προβλημάτων ροών σε αγωγούς, όπου η παρούσα μέθοδος θα μπορεί να παρέχει την πληροφορία της κατανομής πιέσεων πάνω στο δρομέα/πτερωτή, που αποτελεί την οριακή συνθήκη πιέσεων για τις RANS μεθοδολογίες.

(δ) Τεχνολογικές Εφαρμογές

Από την πλευρά των εφαρμογών που παρουσιάζουν τεχνολογικό ενδιαφέρον, η παρούσα μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί στην επίλυση του πλήρους προβλήματος του ελικοπτέρου με την προσομοίωση του κλωβού και του ουραίου πτερυγίου και τη διερεύνηση του πλήρους αεροελαστικού και αεροακουστικού προβλήματος.

Σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η εφαρμογή της παρούσας μεθοδολογίας σε συνδυασμό με την επίλυση του προβλήματος ροής σε αγωγό (με τη χρήση RANS μεθοδολογιών) σε προβλήματα όπου είναι ελλιπής η γνώση του επερχόμενου πεδίου ταχυτήτων της αδιατάρακτης ροής (απουσία του δρομέα). Στα πλαίσια αυτά εντάσσονται γενικότερες εφαρμογές όπως λ.χ. υδροστροβίλων και συστημάτων πρόωσης με ανάδραση (waterjet).

Η επέκταση της μεθόδου σε προβλήματα μη αξονικών ροών (λ.χ. σε ακτινική αντλία) γίνεται άμεσα χωρίς καμία μετατροπή στο υπάρχον υπολογιστικό εργαλείο, αρκεί να

είναι δεδομένη η γεωμετρία των στερών συνόρων και του πεδίου ταχύτητας στην είσοδο του δρομέα.

Τέλος, στη παρούσα εργασία τα σώματα που μοντελοποιήθηκαν, τόσο το ελικόπτερο όσο και οι τοίχοι, θεωρήθηκαν λεπτότοιχα σώματα. Θα μπορούσε να μελετηθεί το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας και χρησιμοποιώντας τα σώματα αυτά ως σώματα με πάχος.

Επίσης, θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί το ίδιο πρόβλημα και στην περίπτωση όπου υπήρχε και από τους τοίχους αποβολή στροβιλότητας ή να γίνονταν οι απαραίτητες τροποποιήσεις έτσι ώστε να μπορούν να εισαχθούν και μεθοδολογίες διαχείρισης της αποβαλλόμενης στροβιλότητας μέσω της προβολής της σε χωρικό πλέγμα που περιβάλλει το πεδίο ροής όπως η μέθοδος Particle-Mesh (Πόθου 1997) όπου θα γλίτωνε και αρκετό υπολογιστικό χρόνο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Aeroacoustics of Full Helicopter Configurations Using Vortex Particle Approximation, Triantos D. and S. Voutsinas (1999a), CEAS Forum on Aeroacoustics of Rotors and Propellers, Rome, Italy
2. Aerodynamic and Aeroacoustics of Wings and Rotors via BEM, Morino L., M. Gennareti, et al. (1998)
3. Aerodynamic interaction helicopter-obstacles : experiments above a shallow square pit, J.B Paquet ; J.P. Bourez, Applied Aerodynamics Department, December 2015, ONERA
4. Computational Free Wake Analysis of a Helicopter Rotor, Szymendera C. (2002), CEMBA Seminar. Pennsylvania State University
5. Flowfield of a Lifting Rotor in Hover: A Navier-Stokes Simulation, Smivasan G. and J. Baeder (1993)
6. Free Wake Modeling of Rotor Aerodynamics: Recent Developments and Future Perspectives, Chassapoyiannis P.I., M. Belessis
7. Helicopter Rotor Blade Computation in Unsteady Flow Using Moving Embedded Grids, Ahamd J. and E. Duque (1994)
8. Improved Experimental and Theoretical Tools for Helicopter Aeromechanic and Aeroacoustic Interactions, BRITE/EURAM III project, No: BE-95-1311, HELFLOW
9. Αεροδυναμική-Αεριοδυναμική, Αθανασιάδης Ν.(1992), Αθήνα Εκδ. Συμμεών
10. Αεροδυναμική ανάλυση σταθερών πτερυγίων και περιστρεφόμενων πτερυγίων με κυρτό άκρο (Winglet), Κ. Κουλουράς, Αθήνα 2012
11. Αεροδυναμική και Αεροακουστική Ανάλυση Δρομέων Ελικοπτέρων, Τριάντος Δ. (2002), Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Αθήνα Ε.Μ.Π.
12. Αεροδυναμική Συμπιεστού Ρευστού, Τσαγγάρης Σ. (1999) Αθήνα, Εκδ. Συμμεών
13. Ανάλυση Μη Μόνιμων Ροών Γύρω Από Περιστρεφόμενους Δρομείς, Μπέλεσης Μ. (1998), Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Αθήνα Ε.Μ.Π.
14. Ανάλυση Συμπεριφοράς Αξονικού Δρομέα σε Μόνιμες και Μεταβατικές Καταστάσεις Λειτουργίας, Πέτρος Ι. Χασαπογιάννης, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών ΕΜΠ, Αθήνα 2005
15. Υπολογιστική Ρευστομηχανική, Μπεργελές Γ. (1995) Αθήνα, Εκδ. Συμμεών