Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών

6/7/2017

Διπλωματική Εργασία με θέμα:

Ομάδες και Άλγεβρες Lie Τετραγωνικών Πινάκων

Επιβλέπων Καθηγητής:
Ανάργυρος Φελλούρης

Της Φοιτήτριας :
Σταυρακάκη Ευανθία
Αριθμός Μητρώου :09108067

ΑΘΗΝΑ 2017

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία των **Ομάδων & Αλγεβρών Lie** αναπτύχθηκε από τον Νορβηγό μαθηματικό **Sophus Lie** (1842-1899).
Αρχικός σκοπός για την ανάπτυξη της θεωρίας του ήταν η μελέτη των απειροελάχιστων δράσεων μιας ομάδας σε μια πολλαπλότητα. Η μελέτη του αυτή τον οδήγησε στην ανάπτυξη της έννοιας της ομάδας Lie, η οποία είχε ως φυσικό επακόλουθο τον ορισμό των Αλγεβρών Lie.
Πρέπει να σημειωθεί ότι κινητήρια δύναμη για την έρευνα του Sophus Lie αποτέλεσε η θεωρία του **Evariste Galois** (1811-1832) και η ενδεχόμενη επέκτασή της.
Σύμφωνα με αξιόπιστες πηγές, ο Sophus Lie θεωρούσε το χειμώνα του 1873-74 ως την εποχή που γεννήθηκε η θεωρία του. Όμως, αρκετοί ερευνητές της Ιστορίας των Μαθηματικών πιστεύουν ότι η θεωρία είχε ήδη ουσιαστικά αναπτυχθεί τα προηγούμενα τέσσερα χρόνια σε διάφορες εργασίες του Lie. Κάποιες από τις αρχικές ιδέες του Lie προήλθαν μέσω της στενής συνεργασίας του με τον μεγάλο Γερμανό μαθηματικό **Felix Klein** (1849-1925). Ο Lie συναντιόταν σε καθημερινή βάση με τον Klein από τον Οκτώβρη του 1869 μέχρι το 1872. Παρόλα αυτά όμως ο ίδιος ο Lie αναφέρει ότι τα κύρια αποτελέσματα της θεωρίας εμφανίστηκαν σχεδόν δεκαπέντε χρόνια αργότερα, το 1884.
Το 1884 ένας νεαρός Γερμανός μαθηματικός, ο **Friedrich Engel** (1861-1941) βοήθησε τον Lie να επεκτείνει και να εκδόσει, σε τρεις τόμους, την εργασία του. Ένας άλλος μαθηματικός που συμμετείχε στη συγγραφή και έκδοση των βιβλίων του Lie ήταν ο **Georg Scheffers**.
Η ανάπτυξη των ιδεών του Lie δεν ήταν αποκομμένη από τα υπόλοιπα μαθηματικά. Μάλιστα το ενδιαφέρον του για τη γεωμετρία των Διαφορικών εξισώσεων προκλήθηκε από τα έργα του **Jacobi**, στις μερικές διαφορικές εξισώσεις και τη Μηχανική.
Η αρχική ιδέα του Lie ήταν να αναπτύξει μια θεωρία για τη συμμετρία των διαφορικών εξισώσεων σε αναλογία με τη θεωρία του Galois για τις αλγεβρικές εξισώσεις.
Η θεώρηση των συνεχών ομάδων από τον **Riemann**, οι ιδέες του Galois για τη συμμετρία, το έργο του Jacobi και του **Poisson** στη Μηχανική και η κατανόηση της Γεωμετρίας από τη σκοπιά των έργων των **Mobius** , **Grassmann** και **Plucker** επενέργησαν στη δημιουργία της θεωρίας του Lie.

Παρότι σήμερα ο Sophus Lie θεωρείται ο κύριος ιδρυτής της θεωρίας, σημαντική συνεισφορά στην υπόψη θεωρία προσέδωσε ο Γερμανός **Wilhlem Killing** (1847-1923) και **Elie Cartan** (1869-1951).

Η πραγματική αναγνώριση της θεωρίας που ανέπτυξε ο Lie, έγινε με τη χρήση της από το γνωστό θεωρητικό φυσικό **Herman Weyl** (1885-1955).
Ο Weyl με τη θεωρία των Ομάδων και Αλγεβρών Lie σε κάποιες εργασίες του το 1922-23 μελέτησε τη συμμετρία των συστημάτων της Κβαντικής Φυσικής. Από τότε, οι έννοιες που ανέπτυξε ο Lie έγιναν αντικείμενο ευρείας μελέτης τόσο από θεωρητικούς μαθηματικούς όσο και από θεωρητικούς φυσικούς.
Η μελέτη των συμμετριών και των συμμετρικών ομάδων αποδείχτηκε κύριας σημασίας όχι μόνο για την κατανόηση της Κβαντικής Φυσικής, αλλά και για τις εφαρμογές της στη Μηχανική, σε κάποιους τομείς των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών καθώς και στις Ιατρικές επιστήμες και ειδικότερα τη Νευροβιολογία.
Ειδικότερα, οι **ομάδες Lie** και οι **ομογενείς χώροι** (το μοντέλο της γεωμετρίας του Klein) αποτελούν θεμελιώδεις έννοιες, οι οποίες παρουσιάζουν ενδιαφέρον από μαθηματική άποψη,αλλά και επειδή εμφανίζονται ως συμμετρίες στις διάφορες θεωρίες πεδίου.
Αποτελούν πλέον βασικά εργαλεία όχι μόνο στη Διαφορική Γεωμετρία, αλλά και την Αλγεβρική Τοπολογία, τις Συνήθεις και Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, την Αρμονική και Μιγαδική Ανάλυση, τη Θεωρία Αριθμών και βεβαίως σε όλο το εύρος της Φυσικής από την Κλασική Φυσική μέχρι τη Σχετικότητα και την Κβαντομηχανική.
Πρέπει να σημειωθεί ότι η θεωρία του Lie αποτελεί ακόμη ενεργό κομμάτι της μαθηματικής έρευνας.
Ακόμη, πρέπει να αναφερθεί ότι ο **Claude Chevalley** (1904 -1984) είναι αυτός που έφερε τη θεωρία του Lie σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα.

Κεφάλαιο 1. Μία μικρή εισαγωγή στις ομάδες

Ορισμός 1: Έστω ένα μη κενό σύνολο G εφοδιασμένο με μία πράξη από το καρτεσιανό επίπεδο $G\times G$ στο G, δηλαδή μια απεικόνιση $o : G\times G \to G$, τέτοια ώστε για κάθε $x,y \in G$ να γράφουμε $o(x,y) = xoy \in G$ ή πιο απλά $o(x,y)= xy$. Αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

- $(xy)z=x(yz)$ για κάθε $x,y,z \in G$, η πράξη o είναι προσεταιριστική
- υπάρχει (μοναδικό) $e \in G$, τέτοιο ώστε για κάθε $x,y \in G$ να ισχύει $xe=ex=x$ (το e καλείται **ταυτοτικό** στοιχείο του G ως προς την πράξη o)
- κάθε στοιχείο $x \in G$ έχει **αντίστροφο**, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x^{-1} \in G$ τέτοιο ώστε $x\, x^{-1}= x^{-1}x=e$,

τότε η G καλείται ***ομάδα*** ως προς την πράξη o.

Αν επί πλέον για κάθε $x,y \in G$ ισχύει $xy=yx$ (αντιμεταθετική ιδιότητα), τότε η ομάδα G καλείται ***αβελιανή***.

Ένα παράδειγμα αβελιανής ομάδας είναι ο R^n με τη συνήθη πράξη την πρόσθεσης, όπου $e=(0,\ldots,0) \in R^n$ το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας.

Δίνοντας μας ένα σύνολο και μία πράξη υπάρχουν 4 πράγματα που πρέπει να ελέγξουμε για να δείξουμε ότι αυτό είναι ομάδα:
κλειστότητα, προσεταιριστικότητα, ύπαρξη ενός ταυτοτικού στοιχείου του συνόλου και την ύπαρξη αντιστρόφων.

Πρόταση 1: (μοναδικότητα ταυτοτικού στοιχείου)
Έστω G μια ομάδα και έστω $e,f \in G$ τέτοια ώστε για κάθε $g \in G$ να ισχύουν : $eg=ge=g$ και $fg=gf=g$. Τότε $e=f$ (το ταυτοτικό στοιχείο είναι μοναδικό).

Απόδειξη
Αφού το e είναι ταυτοτικό στοιχείο θα έχουμε $ef=f$
Από την άλλη αφού το f είναι ταυτοτικό στοιχείο θα έχουμε $ef=e$
Άρα $e=ef=f$. □

Πρόταση 2: (Μοναδικότητα αντιστρόφων)
Έστω G μια ομάδα, τότε το αντίστροφο στοιχείο κάθε στοιχείου g της ομάδας είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Έστω G μία ομάδα, e το ταυτοτικό στοιχείο της G και g ένα αυθαίρετο (οποιοδήποτε) στοιχείο της G. Υποθέτουμε ότι το $h \in G$ είναι το αντίστροφο στοιχείο του g οπότε και θα ισχύει: gh=hg=e. Έστω επίσης ότι υπάρχει και άλλο αντίστροφο στοιχείο του g, το h΄, οπότε θα ισχύει gh΄=h΄g=e. Επομένως έχουμε h΄=h΄e=h΄(gh)=(h΄g)h=eh=h, δηλαδή h΄=h. Άρα το h είναι ο μοναδικός αντίστροφος του g και θα τον συμβολίζουμε g^{-1}=h. □

Πρόταση 3: (Ιδιότητες αντιστρόφων)

Έστω G μία ομάδα, e το ουδέτερό της στοιχείο και g,h αυθαίρετα στοιχεία της G. Τότε θα ισχύει:

$(g^{-1})^{-1}=g$

$(gh)^{-1}=h^{-1}g^{-1}$

$e^{-1}=e$ □

Πρόταση 4:

Έστω G μία ομάδα, e το ουδέτερό της στοιχείο και g ένα αυθαίρετο στοιχείο της G, τότε αν υπάρχει στοιχείο h τέτοιο ώστε hg=e (ή αντιστοίχως η σχέση gh=e), τότε αυτό είναι το μοναδικό αντίστροφο στοιχείο του g, δηλαδή θα ισχύει g^{-1}=h.

Απόδειξη

Έστω ότι ισχύει η σχέση hg=e, τότε θέλουμε να αποδείξουμε την gh=e.

Ισχύει: (gh)g=g(hg) από την προσεταιριστική ιδιότητα

Οπότε (gh)g=ge=g και έστω πως το αντίστροφο στοιχείο του g είναι το k, τότε (gh)gk=gk

Δηλαδή (gh)e=e

g(he)=e

ή gh=e □

Παραδείγματα ομάδων είναι η τετριμμένη ομάδα {e}, οι ακέραιοι Z με την πράξη της πρόσθεσης, οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί με τη πράξη του πολλαπλασιασμού κλπ.

Ορισμός 2: Μία υποομάδα της ομάδας G είναι ένα υποσύνολο H της G με τις ακόλουθες ιδιότητες:

i. Το ταυτοτικό στοιχείο της G είναι στοιχείο της H
ii. Εάν $h \in H$ τότε $h^{-1} \in H$ (το αντίστροφο στοιχείο του h ανήκει στην H)
iii. Εάν $h_1, h_2 \in H$ τότε $h_1 h_2 \in H$ (το γινόμενο δύο στοιχείων της H είναι στοιχείο της H).

Οι παραπάνω προϋποθέσεις για την H εγγυώνται ότι η H είναι μία ομάδα με την ίδια πράξη που διέπει την G. Κάθε ομάδα G έχει το λιγότερο δύο υποομάδες: την ίδια την ομάδα G (H=G) και την μονοσύνολη υποομάδα $\{e\}$ (τετριμμένη ομάδα). Αυτές αποκαλούνται τετριμμένες υποομάδες της G (trivial subgroups of G).

Το σύνολο H των $n \times n$ πραγματικών τετραγωνικών πινάκων με ορίζουσα 1 είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των πινάκων $GL(n;\mathbb{R})$. Το σύνολο H είναι ένα υποσύνολο του $GL(n;\mathbb{R})$ διότι κάθε πίνακας με ορίζουσα 1 είναι αντιστρέψιμος (ιδιότητα ii). Ο ταυτοτικός πίνακας (ταυτοτικό στοιχείο) έχει ορίζουσα 1 και έτσι η πρώτη προϋπόθεση ισχύει. Η ορίζουσα του αντιστρόφου είναι ο αντίστροφος αριθμός της ορίζουσας άρα και η δεύτερη προϋπόθεση ισχύει και η ορίζουσα του γινομένου είναι το γινόμενο των οριζουσών (ιδιότητα iii). Γενικά, γνωρίζουμε πως για την ομάδα αυτή δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Αυτή η ομάδα ονομάζεται **ειδική γραμμική ομάδα** και συμβολίζεται SL(n;R).

Ορισμός 3: Έστω G και H ομάδες, θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο του G και H (το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (g,h) με $g \in G$ και $h \in H$). Ορίζεται πάνω στο καρτεσιανό γινόμενο μία πράξη γινόμενο όπως η παρακάτω: $(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1g_2,h_1h_2)$. Αυτή η πράξη καθιστά το καρτεσιανό γινόμενο του G και του H ομάδα (*directed product*) και συμβολίζεται $G \times H$.

Εύκολα διαπιστώνεται πως το ταυτοτικό στοιχείο για την παραπάνω ομάδα είναι το (e_g,e_h) όπου τα e_g και e_h είναι τα ταυτοτικά στοιχεία των ομάδων G και H αντιστοίχως, ενώ το αντίστροφο στοιχείο του (g,h) είναι το (g^{-1},h^{-1}).

Ορισμός 4: Έστω G και G' δύο ομάδες, θα λέμε ότι μια απεικόνιση $\phi : G \to G'$ είναι **ομομορφισμός ομάδων** (*group homomorphism*) αν για κάθε στοιχείο x,y ϵ G ισχύει $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. Αν επιπλέον η $\phi : G \to G$ είναι ένα προς ένα, τότε η φ καλείται **μονομορφισμός ομάδων** (*group monomorphism*). Αν ο

ομομορφισμός φ είναι επί τότε καλείται **επιμορφισμός ομάδων** (*group epimorphism*). Αν η απεικόνιση φ : $G \to G$ είναι ομομορφισμός τότε η φ καλείται **ενδομορφισμός** (*endomorphism*). Αν ο ομομορφισμός φ είναι ένα προς ένα (1-1) και επί τότε καλείται **ισομορφισμός ομάδων** (*group isomorphism*). Αν η απεικόνιση φ : $G \to G$ είναι ισομορφισμός τότε η φ καλείται **αυτομορφισμός** (*automorphism*).
(σημείωση: επί είναι μία απεικόνιση φ: $G \to H$ αν για κάθε στοιχείο του h του H υπάρχει στοιχείο του g του G με φ(g)=h.)

Ορισμός 5: Έστω δύο ομάδες G και H με το ταυτοτικό στοιχείο της H να είναι το e_2 και ο ομομορφισμός φ: $G \to H$, τότε ονομάζεται **πυρήνας** (***kernel***) της φ το σύνολο των στοιχείων g της ομάδας G για το οποίο ισχύει φ(g)= e_2 ,δηλαδή Kerφ={g∊G|φ(g)= e_2}.

Πρόταση 5: Έστω δύο ομάδες G,H και ο ομομορφισμός φ: $G \to H$, τότε ο πυρήνας της φ είναι υποομάδα της G.

Παράδειγμα ομομορφισμού είναι η απεικόνιση φ:$G \to C^*$ με φ(g)=det(g), όπου G είναι μια οποιαδήποτε ομάδα τετραγωνικών πινάκων και C^* είναι η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Η ιδιότητα φ(g_1)φ(g_2) έπεται από την ιδιότητα det(g_1g_2)=det(g_1)det(g_2) των οριζουσών.

Το θεμελιώδες ισομορφικό θεώρημα της θεωρίας ομάδων λέει ότι αν η απεικόνιση φ:$G \to G'$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων τότε η ομάδα φ(G) είναι ισομορφική με την ομάδα πηλίκο G/kerφ όπου kerφ καλείται πυρήνας της φ αν είναι ker(φ)={g∊G|φ(g)=é}, όπου é το ταυτοτικό στοιχείο της G.

<u>Ορισμός 6</u>: Καλούμε **γενική γραμμική ομάδα** πάνω στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$, και συμβολίζεται $GL(n;\mathbb{R})$, την ομάδα όλων των αντιστρέψιμων nxn πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Ομοίως την **γενική γραμμική ομάδα** πάνω στους μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{C}$, και συμβολίζεται $GL(n;\mathbb{C})$, την ομάδα όλων των αντιστρέψιμων nxn πινάκων με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς.

Η πράξη των παραπάνω ομάδων είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός πινάκων, με το γινόμενο δύο αντιστρέψιμων πινάκων να είναι αντιστρέψιμος, το ταυτοτικό στοιχείο να είναι ο μοναδιαίος πίνακας και φυσικά ο αντίστροφος ενός πίνακα είναι αντίστρέψιμος οπότε ανήκει στην ομάδα.

<u>Ορισμός 7</u>: Ο χώρος όλων των nxn πινάκων με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς συμβολίζεται $M_n(\mathbb{C})$.

<u>Ορισμός 8</u>: Έστω A_m=($\alpha_{ij}(m)$) μία ακολουθία πινάκων του χώρου $M_n(\mathbb{C})$, λέμε ότι η A_m συγκλίνει στον πίνακα A(α_{ij})εάν κάθε στοιχείο του A_m συγκλίνει (καθώς το $m\to\infty$) στο αντίστοιχο στοιχείο του A,δηλαδή $\lim_{m\to\infty} aij(m) = aij, \forall i, j = 1,2,...,n$.

<u>Ορισμός 9</u>: Μία **ομάδα Lie πινάκων** (***matrix Lie group***) είναι κάθε υποομάδα G της $GL(n;\mathbb{R})$ (ή $GL(n;\mathbb{C})$ αντιστοίχως) με την ιδιότητα: Εάν A_m μία ακολουθία πινάκων της G, και η A_m συγκλίνει στον πίνακα A τότε ο A ανήκει στη G ή είναι μη αντιστρέψιμος.

Με άλλα λόγια η ομάδα G είναι μία κλειστή υποομάδα (κλειστό υποσύνολο) της $GL(n;\mathbb{R})$ (ή $GL(n;\mathbb{C})$ αντιστοίχως).

Επομένως ένας ισοδύναμος ορισμός είναι ότι μία ομάδα Lie πινάκων είναι μία κλειστή υποομάδα της $GL(n;\mathbb{R})$ (ή $GL(n;\mathbb{C})$ αντιστοίχως).

<u>ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

Ένα αντιπαράδειγμα υποομάδας της $GL(n;\mathbb{C})$ η οποία δεν είναι κλειστή (και επομένως δεν είναι ομάδα Lie πινάκων), είναι το σύνολο όλων των nxn αντιστρέψιμων πινάκων των οποίων τα στοιχεία είναι ρητοί αριθμοί. Προφανώς είναι υποομάδα της $GL(n;\mathbb{C})$ αλλά όχι κλειστή ομάδα καθώς δύναται να βρεθούν (και εύκολα μάλιστα) ακολουθίες ρητών οι οποίες συγκλίνουν σε άρρητους αριθμούς.

Ένα άλλο αντιπαράδειγμα είναι το εξής:

Για την ομάδα $GL(2;\mathbb{C})$, με α άρρητος πραγματικός αριθμός και έστω

$$G=\left\{\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{it\alpha} \end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Η G είναι υποομάδα της $GL(2;\mathbb{C})$ και G έχει αντιστρέψιμο τον πίνακα ο οποίος δεν ανήκει στην $GL(2;\mathbb{C})$.

2.1 Παραδείγματα ομάδων Lie πινάκων

Παραθέτουμε στην ενότητα αυτήν κάποια παραδείγματα Lie ομάδων πινάκων για μεγαλύτερη κατανόηση και εξοικείωση με τις ομάδες αυτές.

2.1.1 Η ***γενική γραμμική ομάδα*** $GL(n;\mathbb{R})$ και $GL(n;\mathbb{C})$ όπως έχει αναφερθεί στα παραπάνω είναι μία ομάδα Lie πινάκων όπου για μία ακολουθία A_m πινάκων της $GL(n;\mathbb{R})$ (ή της $GL(n;\mathbb{C})$ ισχύει ότι η A_m συγκλίνει στον πίνακα A ο οποίος είναι αντιστρέψιμος και έτσι ανήκει στην ομάδα.

2.1.2 Η ***ειδική γραμμική ομάδα*** (***special linear group***) $SL(n;\mathbb{R})$ και $SL(n;\mathbb{C})$, πάνω στους πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς αντιστοίχως, η οποία έχει πίνακες των οποίων οι ορίζουσα ισούται με ένα. Προφανώς και οι δύο αυτές ομάδες είναι υποομάδες των $GL(n;\mathbb{R})$ και $GL(n;\mathbb{C})$, και ακόμα για μία ακολουθία A_m πινάκων της της ομάδας αυτής η οποία συγκλίνει στον A, ισχύει ότι $\det(A)=1$ διότι η ορίζουσα ως συνάρτηση είναι συνεχής, οπότε από Αρχή μεταφοράς θα είναι : $A_m \to A \Rightarrow \det A_m \to \det A$
και

$$\det(A_m)=1 \Rightarrow \det(A)=1$$

Άρα οι $SL(n;\mathbb{R})$ και $SL(n;\mathbb{C})$, είναι ομάδες Lie πινάκων.

2.1.3 Η ***Heisenberg ομάδα H*** αποτελείται από τους 3x3 πίνακες της μορφής

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

όπου *a,b* και *c* είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί.
Εύκολα βλέπουμε ότι το γινόμενο δύο τέτοιων πινάκων είναι άνω διαγώνιος πίνακας οπότε ανήκει στην ομάδα, ο I_3 μοναδιαίος πίνακας είναι στοιχείο της ομάδας για *a*=*b*=*c*=0, και ο αντίστροφος του παραπάνω πίνακα είναι ο

$$A=\begin{pmatrix}1 & -a & ac-b\\ 0 & 1 & -c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ο οποίος ανήκει στην ομάδα ***Heisenberg***. Τέλος εύκολα μπορούμε να δούμε ότι μία ακολουθία τέτοιων πινάκων συγκλίνει σε άνω διαγώνιο πίνακα με μονάδες στην διαγώνιο, δηλαδή είναι στοιχείο της ομάδας ***Heisenberg.*** Επομένως η ομάδα ***Heisenberg*** είναι κλειστή ομάδα και άρα ομάδα Lie πινάκων.

2.1.4 Οι **ομάδες** $\mathbb{R}^*,\mathbb{C}^*,S^1,\mathbb{R}\ \kappa\alpha\iota\ \mathbb{R}^n$ είναι ομάδες Lie πινάκων!
Όντως κάθε ένα από τα σύνολα $\mathbb{R}^*=\{x\in\mathbb{R}|x\neq 0\},\mathbb{C}^*=\{x\in\mathbb{C}|x\neq 0\}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό μπορούν να θεωρηθούν στοιχεία των $GL(1;\mathbb{R})$ και $GL(1;\mathbb{C})$ αντιστοίχως. Ομοίως και για την ομάδα S^1 η οποία έχει στοιχεία μιγαδικούς με μέτρο 1
Το σύνολο $\mathbb{R}$ με πράξη την πρόσθεση είναι ισομορφικοί με την ομάδα $GL(1;\mathbb{R})^+$ (την 1x1 ομάδα πινάκων με θετική ορίζουσα) μέσω της συνάρτησης $x\rightarrow\left[e^x\right]$.
Τέλος η ομάδα $\mathbb{R}^n$ με πράξη την πρόσθεση διανυσμάτων είναι ισομορφική με την ομάδα των διαγώνιων πινάκων με θετικά στοιχεία μέσω της συνάρτησης

$$\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)\rightarrow\begin{bmatrix}e^{x_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & e^{x_n}\end{bmatrix}.$$

2.1.5 Η ***Ορθογώνια*** ομάδα (***Orthogonal group***) όπου κάθε στοιχείο πίνακας έχει αντίστροφο τον ανάστροφό του. Δηλαδή:

$$O(n)=\left\{A\in M_{nxn}(\mathbb{R})\,|\,A^{T}A=I\right\}$$

όπου αν $A=\left(a_{ij}\right)$ τότε ο ανάστροφός του είναι ο $A^{T}=\left(a_{ji}\right)$.

Σημείωση: τα στοιχεία της ορθογώνιας ομάδας *O(n)* είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί $A:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ που διατηρούν το μήκος, δηλαδή ***ισομετρίες***, και την γωνία διανυσμάτων δηλαδή ***σύμμορφες απεικονίσεις***. Κάθε στοιχείο *A* του *O(n)* έχει ορίζουσα 1 ή -1 ($\det(A)=\det(A^{T})=1$ ή $\det(A)=\det(A^{T})=-1$) αναλόγως αν διατηρεί τον προσανατολισμό (εάν απεικονίζει δεξιόστροφα συστήματα αξόνων σε δεξιόστροφα συστήματα και αριστερόστροφα συστήματα αξόνων σε αριστερόστροφα συστήματα) ή όχι.

2.1.6 Η ***Ειδική Ορθογώνια*** ομάδα (***Special Orthogonal group***).

$$SO(n)=\left\{A\in O(n)\,|\,\det(A)=1\right\}$$

Η οποία αποτελείται από στοιχεία *A* της ορθογώνιας ομάδας που διατηρούν τον προσανατολισμό $\det(A)=\det(A^{T})=1$. Κάθε στοιχείο $A\in SO(n)$ της ορθογώνιας ομάδας αντιστοιχεί σε έναν γραμμικό (επομένως διατηρεί το 0 αρχή των αξόνων) μετασχηματισμό $A:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ ο οποίος διατηρεί μήκος και προσανατολισμό.

Μετασχηματισμοί με αυτές τις ιδιότητες αντιστοιχούν σε στροφή περί άξονα ο οποίος περνάει από την αρχή των αξόνων.

Για παράδειγμα ο πίνακας που αντιστοιχεί στην στροφή του $\mathbb{R}^{2}$ κατά γωνία θ:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(n).$$

2.1.7 Η ομάδα ***Lorentz*** με

$$O(1,n-1)=\left\{A\in GL(n;\mathbb{R})\,|\,\eta(Ax,Ay)=\eta(x,y),\forall x,y\in\mathbb{R}^{n}\right\}=$$
$$=\left\{A\in GL(n;\mathbb{R})\,|\,A^{T}JA=J\right\}$$

Όπου $J=diag(1,-1,1,...,-1)$ και

για $x=\left(x_0,x_1,x_2,...,x_n\right)\in\mathbb{R}^{n}$ και $y=\left(y_0,y_1,y_2,...,y_n\right)\in\mathbb{R}^{n}$ έχουμε την μετρική *Minkowski* $\mathbb{R}^{n}$ $\quad \eta(x,y)=x_0y_0-x_1y_1+x_2y_2-...-x_{n-1}y_{n-1}$.

Η σημασία της ομάδας ***Lorentz*** βρίσκεται στο ότι διατηρεί την μαθηματική μορφή των κινηματικών εξισώσεων της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, των εξισώσεων Maxwell στον ηλεκτρομαγνητισμό και της εξίσωσης Dirac για τα ηλεκτρόνια.

2.1.8 Η ***Ορθομοναδιαία*** ομάδα (***Unitary group***)

$$U(n) = \left\{ A \in M_{nxn}(\mathbb{C}) \mid A^* A = I \right\}$$

Όπου αν $A = \left(a_{ij}\right)$ τότε ο A^* είναι ο ανάστροφος συζυγής του A: $A^* = \left(\overline{a}_{ji}\right)$,

Δηλαδή $\sum_{l=1}^{n} \overline{a}_{il} a_{lj} = \delta_{ij}$, όπου δ_{ij} τα δέλτα του *Kronecker.*

2.1.9 Η ***Ειδική Ορθομοναδιαία*** ομάδα (***Special Unitary group***)

$$SU(n) = \left\{ A \in U(n) \mid \det(A) = 1 \right\}$$

Είναι σαφές ότι οι δύο τελευταίες ομάδες $U(n)$ και $SU(n)$ είναι οι αντίστοιχες ομάδες των $O(n)$ και $SO(n)$ όπως δόθηκαν στα παραπάνω παραδείγματα αλλά στον χώρο των μιγαδικών αντί στον χώρο των πραγματικών αριθμών.

2.1.10 Η ***Συμπλεκτική Ομάδα (Symplectic group)***

$$Sp(2n) = \left\{ A \in M_{2nx2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J \right\}$$

Όπου ο πίνακας J *ορίζεται ως :*

$$J = \begin{pmatrix} 0_{nxn} & I_{nxn} \\ -I_{nxn} & 0_{nxn} \end{pmatrix}$$

όπου I_{nxn} και 0_{nxn} οι αντίστοιχοι μοναδιαίος και μηδενικός πίνακας.
Οι πίνακες A που ικανοποιούν την σχέση $A^T JA = J$ ονομάζονται συμπλεκτικοί πίνακες.

2.1.11 Η ***Ευκλείδεια*** ομάδα $E(n)$

Η Ευκλείδεια ομάδα $E(n)$ είναι η ομάδα όλων των 1-1 και επί συναρτήσεων, ως προς την απόσταση στον $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή των συναρτήσεων
$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τέτοιων ώστε $d\left(f(x), f(y)\right) = d\left(x, y\right) \quad \textit{για κάθε}\ x, y \in \mathbb{R}^n$.

Με $d\left(x,y\right) = \left|x-y\right|$ να είναι η συνήθης Ευκλείδεια απόσταση.

(Σημείωση: δεν έχει δοθεί για τα παραπάνω κανένας περιορισμός για την συνάρτηση *f* η οποία μπορεί και να μην είναι γραμμική).

Με πιο αυστηρό ορισμό :

$E(n) = \left\{ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \left\| f(x) - f(y) \right\| = \left\| x - y \right\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \right\}$

Όπου για $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \textit{είναι} \left\| x \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

2.1.12 Η ***ομάδα Poincare***

$$P(n,1) = \left\{ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{l} \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \mu\varepsilon \\ \eta(f(y) - f(x), f(y) - f(x)) = \eta(y - x, y - x) \end{array} \right\}.$$

Τα στοιχεία της ομάδας $P(1,n-1)$ είναι ισομετρίες του χωροχρόνου του *Minkowski.*

2.2 Συμπαγείς ομάδες Lie πινάκων

<u>Ορισμός 10</u>: Μία ομάδα Lie πινάκων G ονομάζεται συμπαγής αν ισχύουν οι δύο παρακάτω ιδιότητες:

1. Αν A_m είναι μία ακολουθία πινάκων της G η οποία συγκλίνει στον πίνακα A, τότε $A \in G$.
2. Υπάρχει σταθερά *C* τέτοια ώστε όλα τα $A \in G, |A| \leq C \quad \text{για κάθε}\ 1 \leq i, j \leq n$.

Ο παραπάνω ορισμός δεν είναι ο συνήθης ορισμός για τα συμπαγή σύνολα, αλλά δεδομένου ότι κάθε *nxn* πίνακας με μιγαδικά στοιχεία, μπορεί να ταυτιστεί με τον χώρο $\mathbb{C}^{n^2}$, ο παραπάνω ορισμός λέει ότι μία ομάδα Lie πινάκων είναι συμπαγής αν είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}^{n^2}$. Και βέβαια είναι γνωστό για τον $\mathbb{C}^{n^2}$, ότι ένα υποσύνολό του είναι συμπαγές αν και μ είναι κλειστό και φραγμένο.

<u>Παραδείγματα συμπαγών ομάδων</u>:

Οι ομάδες $O(n)$ και $SO(n)$ που έχουμε προαναφέρει είναι συμπαγείς. Πράγματι, η πρώτη ιδιότητα ικανοποιείται καθώς το όριο ορθογωνίων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας με ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα και το όριο πινάκων με ορίζουσα ένα είναι πίνακας με ορίζουσα ένα. Ακόμα, η ιδιότητα δύο ικανοποιείται καθώς εάν αν ο *A* είναι ορθογώνιος τότε κάθε στήλη/διάνυσμα του *A* έχει μέτρο ένα, και επομένως $|A_{ij}| \leq 1, \text{για}\ 1 \leq i, j \leq n$. Ομοίως και για τις ομάδες $U(n), SU(n)\ \text{και}\ Sp(n)$ οι οποίες είναι και αυτές συμπαγείς.

<u>Παραδείγματα μη συμπαγών ομάδων</u>:

Όλα τα άλλα παραδείγματα που έχουν δοθεί είναι μη συμπαγείς ομάδες Lie πινάκων.
Οι ομάδες $GL(n;\mathbb{R})$ και $GL(n;\mathbb{C})$ δεν ικανοποιούν την πρώτη ιδιότητα, καθώς το όριο ενός αντιστρέψιμου πίνακα μπορεί να μην είναι αντιστρέψιμος πίνακας.
Οι ομάδες $SL(n;\mathbb{R})$ και $SL(n;\mathbb{C})$ δεν ικανοποιούν την δεύτερη ιδιότητα (εκτός από την τετριμμένη περίπτωση όπου *n*=1) καθώς ο πίνακας

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ έχει ορίζουσα ίση με 1 , αλλά το *m* δεν είναι φραγμένο!

Οι ομάδες $SO(n;\mathbb{C})\ \kappa\alpha\iota\ O(n;\mathbb{C})$, η ομάδα Heisenberg και οι $Sp(n;\mathbb{R}), Sp(n;\mathbb{C}), E(n)\ \kappa\alpha\iota\ P(n;1)$ όπως και οι ομάδες $\mathbb{R}\ \kappa\alpha\iota\ \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^*\ \kappa\alpha\iota\ \mathbb{C}^*$ οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν πίνακας διάστασης ένα, επίσης παραβιάζουν την δεύτερη ιδιότητα του ορισμού για την συμπαγή ομάδα και επομένως δεν είναι συμπαγείς ομάδες Lie πινάκων.

2.3 Συνεκτικές ομάδες Lie πινάκων

Ορισμός 11: Μία ομάδα Lie πινάκων G ονομάζεται ***κατά δρόμους συνεκτική ομάδα***, εάν για δύο πίνακες *A* και *B* της ομάδας G, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to G$ τέτοια ώστε $f(0)=A$ και $f(1)=B$.
Η συνάρτηση *f* καθώς και το σύνολο τιμών αυτής $\{f(t)\in G \,|\, t\in[0,1]\}$ καλείται ***δρόμος*** (***path***), επιπλέον εάν η *f* είναι παραγωγίσιμη τότε ο δρόμος καλείται ***λείος*** (***smooth***).

Επομένως μία ομάδα Lie πινάκων G είναι κατά δρόμους συνεκτική εάν κάθε δύο στοιχεία της μπορούν να συνδεθούν με έναν συνεχή δρόμο ο οποίος βρίσκεται ολόκληρος μέσα στην G.

Εάν μία ομάδα Lie πινάκων G δεν είναι κατά δρόμους συνεκτική, δηλαδή δεν συνδέονται όλα τα στοιχεία της ομάδας με έναν δρόμο, τότε η ομάδα μπορεί να χωριστεί σε υποσύνολα, με μοναδικό τρόπο καθορισμένα, ώστε για κάθε υποσύνολο να υπάρχει ένας δρόμος που θα συνδέει τα στοιχεία του υποσυνόλου αυτού ανά δύο. Κάθε τέτοιο υποσύνολο καλείται ***συνιστώσα*** και τότε η ομάδα G θα είναι η ένωση αυτών των ξένων μεταξύ τους υποσυνόλων (συνιστωσών). Διαφορετικά για κάθε στοιχείο $x\in G$ όλα τα στοιχεία της *G* τα οποία συνδέονται με το *x* μέσω ενός δρόμου, αποτελούν την μία συνιστώσα της ομάδας *G* , την C_x. Οπότε, θα ισχύει $\forall x,y\in G$ ότι $C_x=C_y$ ή $C_x\bigcap C_y=\varnothing$ και $G=\bigcup\limits_{x\in G} C_x$.

Πρόταση 6: Έστω μία ομάδα Lie πινάκων G τότε η συνιστώσα της G η οποία περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο (είναι μία και μοναδική – και την συμβολίζουμε C_{I}), είναι υποομάδα της G.

Απόδειξη:

Έστω *A* και *B* δύο στοιχεία της G που ανήκουν στην συνιστώσα της G που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο C_{I}. Αυτό σημαίνει ότι το *A* συνδέεται με έναν δρόμο με το ταυτοτικό στοιχείο I, έστω $f(0) = I \;\kappa\alpha\iota\; f(1) = A$. Ομοίως το στοιχείο *B* συνδέεται με έναν δρόμο με το I, έστω $g(0) = I \;\kappa\alpha\iota\; g(1) = B$. Οπότε καθώς το $f(t)g(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση με $f(0)g(0) = I$ και $f(1)g(1) = AB$, ισχύει ότι το γινόμενο δύο στοιχείων ανήκει στην συνιστώσα αφού υπάρχει δρόμος που συνδέει το ταυτοτικό και το γινόμενο των στοιχείων A και B. Ακόμα, εύκολα βλέπουμε ότι η συνάρτηση $f^{-1} : [0,1]$ είναι συνεχής δρόμος που συνδέει το ταυτοτικό στοιχείο και το αντίστροφο του *A* οπότε και το $A^{-1} \in C_I$.

Άρα η συνιστώσα C_I είναι υποομάδα της *G*. □

Πρόταση 7: Η ομάδα $GL(n;\mathbb{C})$ είναι συνεκτική για κάθε $n \geq 1$.

Απόδειξη:

Για $n=1$ έχουμε την τετριμμένη περίπτωση των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών όπου γνωρίζουμε ότι μπορεί να βρεθεί δρόμος από ένα στοιχείο σε ένα άλλο της ομάδας (μία συνεχής συνάρτηση που δεν περνάει από το μηδέν). Εναλλακτικά μπορεί να βρεθεί δρόμος από οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο έως το ταυτοτικό στοιχείο, οπότε όλα τα στοιχεία θα είναι συνδεδεμένα με το ταυτοτικό και από προηγουμένη πρόταση (ανήκει στην συνιστώσα C_{I}) όλη η ομάδα θα είναι συνεκτική.

Για $n = 2$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο της ομάδας συνδέεται με το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας, οπότε και ανήκει στην C_{I}, δηλαδή όλα τα στοιχεία θα ανήκουν σε μία συνιστώσα, άρα και η ομάδα θα είναι συνεκτική.

Από την γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι κάθε πίνακας είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα. Αναλυτικότερα για κάθε τετραγωνικό πίνακα *A* υπάρχει αντιστρέψιμος *D* τέτοιος ώστε

$$A = DBD^{-1} \text{ με } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Επομένως εάν ο πίνακας *A* είναι αντιστρέψιμος τότε όλα τα στοιχεία τις διαγωνίου του πίνακα *B* πρέπει να είναι μη μηδενικά καθώς η ορίζουσα θα είναι :

$$\det(A) = \det(DBD^{-1}) = \det(D)\det(B)\det(D^{-1}) = \det(B)\det(D)\det(D^{-1}) = \det(B)\cdot 1$$

$$\det(A) = \det(B) = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n \neq 0, \quad \acute{\alpha}\rho\alpha\ \lambda_i \neq 0, i = 1,2,...,n$$

Έστω τώρα ο πίνακας $B(t)$ που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο του B με $(1-t), t \in [0,1]$, και $A(t) = DB(t)D^{-1}$. Τότε το σύνολο όλων των $A(t)$ αποτελούν έναν συνεχή δρόμο ξεκινώντας από τον πίνακα $A = A(0)$ και καταλήγοντας στον διαγώνιο πίνακα $B^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = A(1)$.

Ο παραπάνω δρόμος ανήκει στην ομάδα $GL(n;\mathbb{C})$ καθώς για κάθε $t \in [0,1]$ είναι $\det(A) = \det(A(t)) = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n$.

Ακολούθως για κάθε στοιχείο της διαγωνίου μπορεί για κάθε $i = 1,2,...,n$ να βρεθεί δρόμος $\lambda_i(t)$ $t \in [1,2]$ με $\lambda_i(t) \in \mathbb{C}^*$, από το στοιχείο $\lambda_i = \lambda_i(1)$ έως το $1 = \lambda_i(2)$. Οπότε υπάρχει συνεχής δρόμος

$$A(t) = D\begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n(t) \end{pmatrix}D^{-1} \quad , t \in [1,2] \text{ με } A(2) = I$$

Δηλαδή κάθε στοιχείο της ομάδας θα είναι συνδεδεμένο με το ταυτοτικό (ανήκει στην συνιστώσα C_1) και από προηγουμένη πρόταση όλη η ομάδα θα είναι συνεκτική. □

Πρόταση 8: Η ομάδα $SL(n;\mathbb{C})$ είναι συνεκτική για κάθε $n \geq 1$.

Απόδειξη:

Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή για την ομάδα $GL(n;\mathbb{C})$ εκτός του ότι πρέπει να προσθέσουμε την συνθήκη $\det(A) = 1$.

Η περίπτωση για $n = 1$ είναι τετριμμένη οπότε έστω ότι $n \geq 2$. Ορίζουμε όπως πριν για $t \in [0,1]$ $A(t) = DB(t)D^{-1}$ με $A = A(0)$ και $B^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = A(1)$ και φυσικά $\det(A) = \det(A(t)) = 1$. Ακολούθως , για κάθε στοιχείο της διαγωνίου μπορεί για κάθε $i=1,2,...,(n-1)$ να βρεθεί δρόμος $\lambda_i(t) \quad t\in[1,2]$ με $\lambda_i(t)\in\mathbb{C}^*$, από το στοιχείο $\lambda_i=\lambda_i(1)$ έως το $1=\lambda_i(2)$, και $\lambda_n(t)=\left(\lambda_1(t)\lambda_2(t)...\lambda_{n-1}(t)\right)^{-1} \quad t\in[1,2]$. Οπότε υπάρχει συνεχής δρόμος από το A στο ταυτοτικό στοιχείο με κάθε στοιχείο του δρόμου να ανήκει στον ομάδα $SL(n;\mathbb{C})$ καθώς $\det(A)=\det(A(t))=1$. □

Πρόταση 9: Η ομάδα $U(n)$ και $SU(n)$ είναι συνεκτική για κάθε $n\geq 1$.

Απόδειξη:
Από την γραμμική άλγεβρα είναι γνωστό ότι κάθε ορθομοναδιαίος πίνακας (*unitary matrix*) έχει μία ορθοκανονική βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα με ιδιοτιμές της μορφής $e^{i\theta},\theta\in\mathbb{R}$. Οπότε κάθε πίνακας U της ομάδας $U(n)$ μπορεί να γραφεί ως

$$U=U_1\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}U_1^{-1}(n)$$

Με τον U_1 να είναι ορθομοναδιαίος και $\theta_i\in\mathbb{R}, i=1,...,n$. Αντιστρόφως, κάθε πίνακας της παραπάνω μορφής είναι ορθομοναδιαίος.

Οπότε ορίζοντας $U(t)=U_1\begin{pmatrix} e^{i\theta_1(1-t)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n(1-t)}\end{pmatrix}U_1^{-1}(n)$ για $t\in[0,1]$

Παράγεται ένας συνεχής δρόμος από τον πίνακα $U=U(0)$ έως τον ταυτοτικό πίνακα $I=U(1)$, δηλαδή ο κάθε πίνακας U της ομάδας $U(n)$ συνδέεται με τον ταυτοτικό πίνακα επομένως η ομάδα είναι συνεκτική.
Ομοίως και για την ομάδα $SU(n)$. □

Πρόταση 10: Η ομάδα $GL(n;\mathbb{R})$ δεν είναι συνεκτική.

Απόδειξη: Η ομάδα $GL(n;\mathbb{R})$ δεν μπορεί να είναι συνεκτική γιατί αν υπάρχουν δύο πίνακες $A \, \kappa\alpha\iota \, B$ της $GL(n;\mathbb{R})$ με ορίζουσες $\det(A)>0 \, \kappa\alpha\iota \det(B)<0$, τότε από θεώρημα Bolzano κάθε συνεχής δρόμος από τον ένα πίνακα στον άλλον θα πρέπει να έχει σύνολο τιμών το $[\det(B),\det(A)]$, το οποίο περιέχει το μηδέν, δηλαδή θα υπάρχει για τον δρόμο αυτόν κάποιο $t_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $\det\left(A(t_0)\right)=0$ οπότε ο δρόμος θα έχει στοιχείο που δεν ανήκει στην $GL(n;\mathbb{R})$.

□

Η ομάδα $GL(n;\mathbb{R})$ έχει δύο συνιστώσες, την $GL(n;\mathbb{R})^{+}$ και την $GL(n;\mathbb{R})^{-}$, όπου η πρώτη συνιστώσα περιέχει όλους τους πίνακας της ομάδας $GL(n;\mathbb{R})$ με θετική ορίζουσα και η δεύτερη συνιστώσα περιέχει όλους τους πίνακας της ομάδας $GL(n;\mathbb{R})$ με αρνητική ορίζουσα.

Στον παρακάτω πίνακα υπάρχουν οι ομάδες Lie πινάκων και φαίνεται ποιες από αυτές είναι συνεκτικές και συγχρόνως πόσες συνιστώσες έχει η κάθε μία από αυτές.

Για όποια είναι συνεκτική το πλήθος των συνιστωσών είναι 1.

ΟΜΑΔΑ LIE ΠΙΝΑΚΩΝ	Συνεκτική	Συνιστώσες
$GL(n;\mathbb{R})$	ΟΧΙ	2
$GL(n;\mathbb{C})$	ΝΑΙ	1
$SL(n;\mathbb{R})$	ΝΑΙ	1
$SL(n;\mathbb{C})$	ΝΑΙ	1
$O(n)$	ΟΧΙ	2
$SO(n)$	ΝΑΙ	1
$U(n)$	ΝΑΙ	1
$SU(n)$	ΝΑΙ	1
Heisenberg	ΝΑΙ	1
$E(n)$	ΟΧΙ	2
$P(n;1)$	ΟΧΙ	4

Πίνακας 1. Ομάδες Lie πινάκων, συνεκτικότητα και πλήθος συνιστωσών

2.4 Απλή συνεκτικότητα

<u>Ορισμός 12</u>: Μία ομάδα Lie πινάκων λέγεται απλώς συνεκτική εάν είναι συνεκτική και επιπλέον κάθε κλειστός δρόμος στην G συρρικνώνεται συνεχώς σε ένα σημείο της ομάδας *G*.

Αναλυτικότερα, έστω μία συνεκτική ομάδα *G* και έστω ένας κλειστός δρόμος από το στοιχείο *A* στον εαυτό του: $A(t), t \in [0,1]$ με $A(0) = A(1)$, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $A(s,t), s,t \in [0,1]$ με σύνολο τιμών στην *G*, με τις εξής ιδιότητες:

(1) $A(s,0) = A(s,1) \quad , \forall s$

(2) $A(0,t) = A(t)$ και

(3) $A(1,t) = A(1,0) \quad , \forall t$.

Μπορούμε να φανταστούμε την $A(t)$ σαν μία κλειστή διαδρομή (*loop*), ενώ την $A(s,t)$ σαν μία οικογένεια κλειστών διαδρομών παραμετροποιημένων με την μεταβλητή *s*, και η οποία προκαλεί την σύγκλιση του $A(t)$ σε ένα σημείο. Η ιδιότητα (1) λέει ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου *s* έχουμε μία κλειστή διαδρομή (*loop*). Η ιδιότητα (2) λέει ότι για $s = 0$ η κλειστή διαδρομή είναι ο κλειστός δρόμος $A(t)$, ενώ η ιδιότητα (3) λέει ότι για $s = 1$ όλη η κλειστή διαδρομή είναι ένα στοιχείο – σημείο της G ($A(t) = A(1,0), \text{για κάθε } t$).

<u>Πρόταση 11:</u> Η ομάδα $SU(2)$ είναι απλά συνεκτική.

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρώντας δύο τυχαίους μιγαδικούς $\alpha \text{ και } \beta$ ώστε $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ ανήκει στην ομάδα $SU(2)$. Μπορεί να δειχθεί ότι κάθε πίνακας της ομάδας $SU(2)$ μπορεί να γραφτεί στην παραπάνω μορφή με αντίστοιχους αριθμούς $\alpha \text{ και } \beta$. Για αυτό και η $SU(2)$ μπορεί να θεωρηθεί ως σφαίρα τριών διαστάσεων S^3 ως υπόχωρο του $\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{R}^4$. Αυτό υποδηλώνει ότι η $SU(2)$ είναι απλά συνεκτική. □

<u>Η έννοια της απλής συνεκτικότητας είναι πολύ σημαντική καθώς ένα από τα βασικότερα θεωρήματα είναι ότι αν μία ομάδα είναι απλά συνεκτική τότε υπάρχει μία φυσική 1-1 απεικόνιση μεταξύ της αναπαράστασης της ομάδας και της αναπαράστασης της Lie άλγεβρας αυτής.</u>

Για κάθε κατά δρόμους συνεκτικό τοπολογικό χώρο, μπορεί να βρεθεί μία ομάδα η οποίο καλείται θεμελιώδης ομάδα. Ένας τοπολογικός χώρος είναι απλά συνεκτικός εάν και μόνο εάν η θεμελιώδης ομάδα είναι η τετριμμένη ομάδα {1}.
Παρακάτω παρουσιάζονται σε δύο ξεχωριστούς πίνακες (για συμπαγείς ομάδες και για μη συμπαγείς), οι θεμελιώδεις ομάδες για κάποιες ομάδες και αν αυτές είναι απλά συνεκτικές.

ΟΜΑΔΑ LIE ΠΙΝΑΚΩΝ	Απλά Συνεκτική	Θεμελιώδης Ομάδα
$SO(2)$	ΟΧΙ	$\mathbb{Z}$
$SO(n), n \geq 3$	ΟΧΙ	$\mathbb{Z}/2$
$U(n)$	ΟΧΙ	$\mathbb{Z}$
$SU(n)$	ΝΑΙ	{1}
$Sp(n)$	ΝΑΙ	{1}

Πίνακας 2. Συμπαγείς ομάδες Lie πινάκων, απλή συνεκτικότητα και η αντίστοιχη θεμελιώδης ομάδα.

ΟΜΑΔΑ LIE ΠΙΝΑΚΩΝ	Απλά Συνεκτική	Θεμελιώδης Ομάδα
$GL(n;\mathbb{R})^{+}, n \geq 2$	ΟΧΙ	$\mathbb{Z}/2$
$GL(n;\mathbb{C})$	ΟΧΙ	$\mathbb{Z}$
$SL(n;\mathbb{R}), n \geq 2$	ΟΧΙ	$\mathbb{Z}/2$
$SL(n;\mathbb{C})$	ΝΑΙ	{1}
$SO(n;\mathbb{C})$	ΟΧΙ	$\mathbb{Z}/2$
$SO_e(1;1)$	ΝΑΙ	{1}
$SO_e(n;1), n \geq 2$	ΟΧΙ	$\mathbb{Z}/2$
$Sp(n;\mathbb{R})$	ΟΧΙ	$\mathbb{Z}$
$Sp(n;\mathbb{C})$	ΝΑΙ	{1}

Πίνακας 3. Μη συμπαγείς ομάδες Lie πινάκων, απλή συνεκτικότητα και η αντίστοιχη θεμελιώδης ομάδα.

Θα τελειώσουμε την ενότητα αυτήν με το παράδειγμα της ομάδας $SO(3)$. Εάν ένα μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$, έστω $R_{\upsilon,\theta}$ το στοιχείο της ομάδας $SO(3)$ που αντιστοιχεί στην δεξιά στροφή γωνίας θ στο κάθετο επίπεδο στο υ. Είναι προφανές ότι τα $R_{-\upsilon,\theta}$ και $R_{\upsilon,-\theta}$ στοιχεία της ομάδας $SO(3)$ είναι ακριβώς τα ίδια. Ακόμα είναι εύκολο να δειχθεί ότι κάθε στοιχείο της $SO(3)$ μπορεί να εκφραστεί με κατάλληλα $\upsilon\, \kappa\alpha\iota\, \theta$ με $\theta \in [-\pi, \pi]$, ως ένα στοιχείο $R_{\upsilon,\theta}$. Επίσης από τα παραπάνω χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί ότι κάθε στοιχείο της $SO(3)$ μπορεί να εκφραστεί με κατάλληλα $\upsilon\, \kappa\alpha\iota\, \theta$ με $\theta \in [0, \pi]$, καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί όπου χρειαστεί το αντίθετο στοιχείο του $\upsilon\,(-\upsilon)$.

Έστω η κλειστή σφαίρα B με ακτίνα $\pi\ \sigma\tau o\nu\ \mathbb{R}^3$, και η απεικόνιση

$$\Phi : B \to SO(3) \text{ με } \begin{array}{l} \Phi(u) = R_{\hat{u},\|u\|} \quad , u \neq 0 \\ \Phi(0) = I \end{array}$$

Όπου $\hat{u} = u / \|u\|$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του *u*.

Η Φ είναι συνεχής ακόμα και στο I καθώς το $R_{\upsilon,\theta}$ τείνει στο ταυτοτικό στοιχείο καθώς το θ τείνει στο μηδέν, αναλόγως και το πως συμπεριφέρεται και το *υ*. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η Φ απεικονίζει την σφαίρα *B* στον $\mathbb{R}^3$. Αλλά δεν είναι 1-1 συνάρτηση καθώς τα στοιχεία $R_{-\upsilon,\pi} = R_{\upsilon,-\pi}$ το ένα στον αντίποδα του άλλου στην επιφάνεια της σφαίρας απεικονίζονται στο ίδιο στοιχείο του $SO(3)$.

Αυτό σημαίνει ότι ο $SO(3)$ ταυτίζεται (ομομορφικά) με τον υπόχωρο $B/\tilde{}$, όπου $\tilde{}$ τις δύο κλάσεις που δημιουργούνται από στοιχεία το ένα στον αντίποδα του άλλου, σε μία σφαίρα. Η $B/\tilde{}$ δεν είναι απλά συνεκτική, γιατί υπάρχει συνεχής γραμμή από το στοιχείο υ έως το στοιχείο $-\upsilon$ (τα οποία ταυτίζονται στον $B/\tilde{}$) οπότε και αυτή η γραμμή είναι μία κλειστή διαδρομή (loop). Φυσικά αυτή η κλειστή διαδρομή δεν μπορεί να συγκλίνει σε ένα σημείο στον $B/\tilde{}$. Επομένως αφού ο $B/\tilde{}$ δεν είναι απλά συνεκτικός δεν μπορεί ούτε και ο $SO(3)$ να είναι απλά συνεκτικός.

2.5 Ομομορφισμός και Ισομορφισμός

<u>Ορισμός 13</u>: Έστω δύο ομάδες Lie πινάκων G και H, τότε μία απεικόνιση μεταξύ τους $\Phi : G \to H$ ονομάζεται ***ομομορφισμός ομάδων Lie πινάκων*** εάν

(1) η Φ είναι ομομορφισμός ομάδων και

(2) η Φ είναι συνεχής.

Επιπλέον εάν η Φ είναι 1-1 και επί και η αντίστροφη συνάρτηση της Φ (Φ^{-1}) είναι συνεχής, τότε η Φ ονομάζεται ***ισομορφισμός ομάδων Lie πινάκων***.

Βέβαια, κάθε αντίστροφος ισομορφισμός ομάδων Lie είναι εξ ορισμού ισομορφισμός ομάδων Lie. Εάν για δύο ομάδες Lie πινάκων G και H υπάρχει ισομορφισμός ομάδων Lie τότε οι δύο ομάδες ονομάζονται ***ισομορφικές*** και γράφουμε $G \cong H$. Δύο ισομορφικές ομάδες Lie πινάκων μπορούν να θεωρούνται ουσιαστικά ως μία ομάδα, δηλαδή ότι ταυτίζονται.

Το πιο απλό και ενδιαφέρον παράδειγμα ομομορφισμού ομάδων Lie πινάκων είναι η ορίζουσα (ως συνάρτηση) η οποία είναι ομομορφισμός από την $GL(n;\mathbb{C})$ στην $\mathbb{C}^*$.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R} \to SO(2)$ με

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

η οποία εύκολα διαπιστώνεται πως είναι συνεχής συνάρτηση και ότι έχει ορίζουσα 1 άρα ανήκει στην $SO(2)$, επομένως είναι ομομορφισμός.

Παραδείγματα $SU(2)$ ***και*** $SO(3)$

Σημαντική είναι η σχέση μεταξύ των δύο αυτών ομάδων όπου είναι σχεδόν ισομορφικοί. Συγκεκριμένα, υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδων Lie από την $SU(2)$ στην $SO(3)$ ο οποίος θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως 2-1 συνάρτηση. Έστω ο χώρος V των 2x2 πινάκων με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς, όπου κάθε πίνακας ισούται με τον συζυγή ανάστροφό του ($\bar{A}^T = A^* = A$) και έχει ίχνος (*trace*) μηδέν. Αυτός ο χώρος είναι διαστάσεως 3 και μία ορθοκανονική βάση για τον V είναι η : $\{A_1, A_2, A_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \iota \\ -\iota & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

Το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε να ταυτίσουμε τον V με τον $\mathbb{R}^3$.

Θεωρούμε, τώρα, ένα εσωτερικό γινόμενο στον V ως

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} trace(AB) \quad SU(2) \text{ και } V$$

Έστω τώρα, ότι U είναι ένα στοιχείο του $SU(2)$ και A ένα στοιχείο του V.
Τότε για τον πίνακα UAU^{-1}

είναι $$trace(UAU^{-1}) = trace(U)trace(A)trace(U^{-1}) = 0$$

και $$\left(UAU^{-1}\right)^{*} = \left(U^{-1}\right)^{*} AU^{*} = UAU^{-1}$$

δηλαδή ο UAU^{-1} ανήκει στον χώρο V.

Ακόμα για σταθερό U η απεικόνιση $A \to UAU^{-1}$ είναι γραμμική.
Επομένως για κάθε στοιχείο U του $SU(2)$ μπορεί να ορισθεί γραμμική συνάρτηση $\Phi_U : V \to V$ με $\Phi_U(A) = UAU^{-1}$.

Ισχύει ότι $U_1U_2AU_2^{-1}U_1^{-1} = \left(U_1U_2\right) A \left(U_1U_2\right)^{-1}$, οπότε $\Phi_{U_1U_2} = \Phi_{U_1}\Phi_{U_2}$.
Ακόμα, εφόσον $U \in SU(2)$ και $A, B \in V$ έχουμε

$$\left\langle \Phi_U(A), \Phi_U(B) \right\rangle = \frac{1}{2} trace(UAU^{-1}UBU^{-1}) = \frac{1}{2} trace(AB)$$

$$\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \quad \left\langle \Phi_U(A), \Phi_U(B) \right\rangle = \left\langle A, B \right\rangle$$

Αυτό κάνει την Φ_U ορθογώνιο μετασχηματισμό για της V.

Αφού μπορούμε να ταυτίζουμε τον V με τον $\mathbb{R}^3$, μπορούμε να θεωρούμε την Φ_U ως στοιχείο του χώρου $O(3)$.
Ενώ, από την $\Phi_{U_1U_2} = \Phi_{U_1}\Phi_{U_2}$ φαίνεται ότι η Φ (η απεικόνιση $U \to \Phi_U$) είναι ένας ομομορφισμός από τον $SU(2)$ στην $O(3)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η Φ είναι συνεχής οπότε είναι ομομορφισμός ομάδων Lie.
Δεδομένου ότι τα στοιχεία της $O(3)$ έχουν ορίζουσα 1 ή -1, η $SU(2)$ είναι συνεκτική, η Φ συνεχής και η Φ_I ισούται με την ταυτοτική συνάρτηση ($\Phi_I(A) = A$) προκύπτει ότι η Φ στην πραγματικότητα απεικονίζει την $SU(2)$ στον μοναδιαίο πίνακα I του $O(3)$ δηλαδή τον $SO(3)$.

Παρ ’όλα αυτά, η παραπάνω απεικόνιση $U \to \Phi_U$ δεν είναι 1-1 καθώς για κάθε στοιχείο U του $SU(2)$ θα είναι $\Phi_U = \Phi_{-U}$. Είναι δυνατό να αποδειχθεί (το οποίο θα γίνει σε επόμενο κεφάλαιο) ότι η απεικόνιση $U \to \Phi_U$ είναι μία 2-1 απεικόνιση από τον $SU(2)$ και $SO(3)$, και η σημαντικότητα του ομομορφισμού αυτού έγκειται στο γεγονός ότι ο $SO(3)$ είναι απλά συνεκτικός αλλά ο $SU(2)$ όχι. Αλλά μέσω της παραπάνω απεικόνισης μπορούμε να σχετίζουμε προβλήματα μίας μη απλά συνεκτικής ομάδας με προβλήματα μία απλά συνεκτικής ομάδας.

2.6 Η πολική ανάλυση (*Polar Decomposition*) των $SL(n;\mathbb{R})$ και $SL(n;\mathbb{C})$

Σε αυτήν την ενότητα θεωρούμε την πολική ανάλυση των $SL(n;\mathbb{R})$ και $SL(n;\mathbb{C})$, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη της συνεκτικότητας των δύο ομάδων, οπότε και να δειχθεί ότι οι θεμελιώδεις ομάδες των $SL(n;\mathbb{R})$ και $SL(n;\mathbb{C})$ είναι οι ίδιες όπως στην περίπτωση των $SO(n)$ και $SU(n)$. Η ανάλυση αυτή είναι κατά κάποιον τρόπο ανάλογη της ανάλυσης ενός μιγαδικού αριθμού ως $z = up, όπου\, |u| = 1$ και p θετικός πραγματικός αριθμός.

Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας P λέγεται θετικά ορισμένος εάν το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικό ($\langle x, Px\rangle > 0$) (τετραγωνική μορφή) για όλα τα μη μηδενικά διανύσματα $x \in \mathbb{R}^n$ (όπου συμμετρικός είναι αν $P^T = P$). Ισοδύναμα, ένας συμμετρικός πίνακας P λέγεται θετικά ορισμένος εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.

Για έναν θετικά ορισμένο πίνακα P υπάρχει ορθογώνιος πίνακας R τέτοιος ώστε:

$$P = RDR^{-1}$$

όπου ο D είναι διαγώνιος πίνακας με θετικά στοιχεία στην διαγώνιο $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Οπότε και μπορούμε να θεωρήσουμε την τετραγωνική ρίζα του πίνακα P ως

$$P^{1/2} = RD^{1/2}R^{-1} \text{ όπου } D^{1/2} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας $P^{1/2}$ είναι επίσης συμμετρικός και θετικά ορισμένος, και μπορεί να αποδειχθεί ότι ο $P^{1/2}$ είναι ο μοναδικός θετικά ορισμένος πίνακας του οποίου το τετράγωνο (γινόμενο με τον εαυτό του) είναι ο P (δηλαδή $P^{1/2} \cdot P^{1/2} = P^2 = P$).

Η πολική ανάλυση ενός πίνακα με στοιχεία από το σώμα των μιγαδικών διαχωρίζεται σε δεξιά και αριστερή πολική ανάλυση όπου, αν $A \in \mathbb{C}^{mxn}, m > n$ έχει την μορφή $A = UP$ με $U \in \mathbb{C}^{mxn}$ να είναι πίνακας με ορθοκανονικές στήλες (βάση) και $P \in \mathbb{C}^{nxn}$ είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Πρόταση 12: Για κάθε πίνακα A της ομάδας $SL(n;\mathbb{R})$ υπάρχει μοναδικό ζεύγος πινάκων (R,P) τέτοιο ώστε $R\in SO(n)$, P να είναι πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος και $A=RP$. Ακόμα ισχύει ότι $\det(P)=1$.

Απόδειξη: Εάν υπάρχει ένα τέτοιο ζεύγος πινάκων τότε είναι $A^TA=PR^{-1}RP=P^2$. Ακόμα επειδή ο πίνακας A^TA είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος (καθώς $\left\langle x,A^TAx\right\rangle=\left\langle Ax,Ax\right\rangle>0$), ορίζεται ο πίνακας $P=\left(A^TA\right)^{1/2}$, ο οποίος είναι πραγματικός συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Θέτοντας $R=AP^{-1}=A\left(\left(A^TA\right)^{1/2}\right)^{-1}$, και βλέποντας ότι αυτός είναι ορθογώνιος:

$$RR^{\mathrm{T}}=A\left(\left(A^TA\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(\left(A^TA\right)^{1/2}\right)^{-1}A^{\mathrm{T}}=A\left(A^TA\right)^{-1}A^{\mathrm{T}}=I$$

δηλαδή ο R ανήκει στην $O(n)$, έχουμε το ζεύγος (R,P) και ότι $A=RP$. Μένει να δείξουμε ότι ο R ανήκει στην ομάδα $SO(n)$ ελέγχοντας αν η ορίζουσα ισούται με ένα. Έχουμε $1=\det(A)=\det(R)\det(P)$ και επειδή ο P είναι θετικά ορισμένος είναι $\det(P)>0$, οπότε απορρίπτεται η περίπτωση όπου $\det(R)=-1$ και ισχύει ότι $\det(R)=1$, άρα και $\det(P)=1$.

□

Εάν P είναι ίσος με τον συζυγής μιγαδικό του πίνακα ($P^*=P$), λέμε ότι ο P είναι θετικά ορισμένος αν $\left\langle x,Px\right\rangle>0$ για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x\in\mathbb{C}^n$. Οπότε έχουμε την αντίστοιχη πρόταση της Πρότασης 12 για την ομάδα $SL(n;\mathbb{C})$.

Πρόταση 13: Για κάθε πίνακα A της ομάδας $SL(n;\mathbb{C})$ υπάρχει μοναδικό ζεύγος πινάκων (U,P) τέτοιο ώστε $U\in SU(n)$, P να είναι ίσος με τον συζυγή μιγαδικό του και θετικά ορισμένος, και $A=UP$. Ακόμα ισχύει ότι $\det(P)=1$.

2.7 Ομάδες Lie

Μία ομάδα Lie είναι συγχρόνως λεία πολλαπλότητα και τοπολογική ομάδα. Όπως διαφαίνεται και από την ορολογία μία ομάδα Lie πινάκων είναι μία ομάδα Lie. Θα δείξουμε αργότερα ότι κάθε ομάδα Lie πινάκων είναι ισόμορφη με μία ομάδα Lie, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Δεν είναι πάντα μία ομάδα Lie ισόμορφη με μία ομάδα Lie πινάκων. Γενικά η θεωρία και οι ορισμοί στο πεδίο των πολλαπλοτήτων είναι πολυπλοκότεροι από ότι στο πεδίο των πινάκων, κάτι που κάνει την προσέγγιση πρωτίστως καταλληλότερη από το πεδίο των ομάδων Lie πινάκων έναντι των ομάδων Lie γενικότερα. Επίσης, τα περισσότερα παραδείγματα ομάδων Lie είναι από ομάδες Lie πινάκων. Ακόμα, τα κυριότερα θεωρήματα στο πλαίσιο των ομάδων Lie πινάκων ισχύουν και στο πλαίσιο ομάδων Lie. Όλα τα παραπάνω υποδεικνύουν ότι ναι μεν η σωστότερη προσέγγιση είναι αυτή στο πεδίο των ομάδων Lie(θεώρημα von Neumann), αλλά μέσω των ομάδων Lie πινάκων είναι ευκολότερη η προσέγγιση και πιο κατανοητή σε κάποιον που δεν είναι εξοικειωμένος με τις μαθηματικές πολλαπλότητες.

Ορισμός 14: Μία ***Ομάδα Lie*** είναι μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα G η οποία είναι και τοπολογική ομάδα και τέτοια ώστε το γινόμενο πινάκων να απεικονίζεται στην G

$$G \times G \to G$$

και η αντίστροφη απεικόνιση να είναι $g \to g^{-1}$ διαφορίσιμη.

Μία πολλαπλότητα είναι ένα σύνολο όπου τοπικά μοιάζει με τον $\mathbb{R}^n$. Ένα κλασσικό παράδειγμα που χρησιμοποιείται είναι η επιφάνεια ενός ντόνατ στον $\mathbb{R}^3$ που τοπικά μοιάζει με τον χώρο $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα:
Έστω $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1 = \left\{ (x, y, u) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, u \in S^1 \subset \mathbb{C} \right\}$
και το γινόμενο $G \times G \to G$ με
$\left(x_1, y_1, u_1\right) \times \left(x_2, y_2, u_2\right) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, e^{i x_1 y_2} u_1 u_2\right)$.

Πρώτον ελέγχουμε εάν το γινόμενο αυτό κάνει την G ομάδα.
Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα και το γινόμενο τριών στοιχείων είναι

$$\left(x_1, y_1, u_1\right)\times\left(x_2, y_2, u_2\right)=\left(x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3, e^{i(x_1y_2+x_1y_3+x_2y_3)}u_1u_2u_3\right).$$

Υπάρχει ταυτοτικό στοιχείο για την G το $e=(0,0,1)$ και κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο το οποίο είναι $(x,y,u)^{-1}=\left(-x,-y,e^{ixy}u^{-1}\right)$.

Επομένως η G είναι ομάδα.

Επιπλέον, τόσο το παραπάνω γινόμενο όσο και η απεικόνιση κάθε στοιχείου στο αντίστροφό του είναι ομαλές συναρτήσεις (διαφορίσιμες), οπότε η G είναι ομάδα Lie.

Σημαντικό εδώ είναι να σημειωθεί ότι δεν δόθηκε με κάποιον τρόπο η G ως ομάδα πινάκων, και μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει ισομορφισμός που να ταυτίζει αυτήν με μία ομάδα Lie πινάκων.
Επομένως έχουμε μία ομάδα Lie η οποία δεν είναι ομάδα Lie πινάκων.

Αλλά η παραπάνω ομάδα Lie είναι στενά συνδεδεμένη με την ομάδα Lie Heisenberg.

<u>Θεώρημα 1</u> : Κάθε ομάδα Lie πινάκων είναι ενσωματώνεται ομαλώς στην υποπολλαπλότητα $M_n(\mathbb{C})$ και επομένως είναι ομάδα Lie.

Για παράδειγμα ας πάρουμε την ομάδα $GL(n;\mathbb{C})$ η οποία είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου $M_n(\mathbb{C})$ και επομένως είναι πολλαπλότητα διαστάσεως $2n^2$. Το γινόμενο πινάκων είναι ομαλή (διαφορίσιμη) συνάρτηση από την $M_n(\mathbb{C})$ στον εαυτό της και η συνάρτηση που απεικονίζει ένα στοιχείο στο αντίστροφό του είναι ομαλή επίσης στην $GL(n;\mathbb{C})$. Επομένως, η $GL(n;\mathbb{C})$ είναι ομάδα Lie.
Εάν $G\subset GL(n;\mathbb{C})$ ως αμάδα Lie πινάκων, αποδεικνύεται (επόμενο κεφάλαιο) ότι η G είναι μία διαφορίσιμα ενσωματωμένη πολλαπλότητα στην $GL(n;\mathbb{C})$. Θα δειχθεί ότι και το γινόμενο πινάκων και η αντίστροφη συνάρτηση είναι περιορισμοί διαφορίσιμων απεικονίσεων σε διαφορίσιμες πολλαπλότητες και για αυτό θα είναι διαφορίσιμες. Επίσης θα δειχθεί ότι από τα παραπάνω προκύπτει πως και η G είναι ομάδα Lie.

Πρόταση 14: Έστω $G \,\kappa\alpha\iota\, H$ δύο ομάδες Lie και Φ ένας ομομορφισμός ομάδων από την $G \,\sigma\tau\eta\nu\, H$, τότε εάν η Φ είναι συνεχής θα είναι και ομαλή (διαφορίσιμη).

Συμπερασματικά οι ομομορφισμοί ομάδων διαχωρίζονται σε δύο κατηγορίες: στους πολύ καλούς (συνεχείς άρα και διαφορίσιμες) και στις πολύ κακούς (ασυνεχείς).

Τέλος και από το Θεώρημα 1 προκύπτει ότι κάθε ομάδα Lie πινάκων είναι μία ομαλή πολλαπλότητα. Επομένως, κάθε ομάδα Lie πινάκων είναι τοπικά συνεκτική κατά δρόμους. Οπότε ισχύει ότι κάθε ομάδα Lie πινάκων είναι κατά δρόμους συνεκτική εάν και μόνο εάν είναι συνεκτική. Το τελευταίο συμπέρασμα προς διευκρίνιση του γιατί χρησιμοποιήθηκε χωρίς βλάβη της γενικότητας ο όρος συνεκτικής ομάδας Lie πινάκων αντί του όρου κατά δρόμους συνεκτικής.

Η έννοια του εκθετικού πίνακα είναι ουσιώδους σημασίας για την θεωρία των ομάδων Lie. Ο εκθετικός πίνακας εμπλέκει κατά έναν σημαντικότατο τρόπο τις ομάδες Lie πινάκων και με τις άλγεβρες Lie, και είναι ο «μηχανισμός» για την μετάβαση από την μία κατηγορία στην άλλη, περνώντας πληροφορία από μία άλγεβρα Lie σε μία ομάδα Lie πινάκων. Επομένως, καθώς η διαχείριση των αλγεβρών Lie είναι ευκολότερη, η έννοια του εκθετικού πίνακα είναι απαραίτητη για την μελέτη των ομάδων Lie πινάκων.

3.1 Ο εκθετικός πίνακας

Θα ξεκινήσουμε θυμίζοντας μία γνωστή σειρά. Έστω $\mathrm{X} \in A, \quad όπου\ A = \mathbb{R}^{nxn}\ ή\ \mathbb{C}^{nxn}$, δηλαδή *nxn* πίνακας με στοιχεία από το σώμα των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών, τότε ορίζεται ο εκθετικός πίνακας του X, ο οποίος και συμβολίζεται $e^{\mathrm{X}}\ ή \exp \mathrm{X}$ και είναι ο $e^{\mathrm{X}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{X}^m}{m!}$.

Επίσης, θυμίζουμε ότι η το μέτρο (νόρμα) ενός διανύσματος $x = (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{C}^n$ ορίζεται ως Q

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2} \in \mathbb{R}.$$

Βάσει αυτού του μέτρου ορίζεται και το μέτρο ενός πίνακα στον χώρο $M_n(\mathbb{C})$ όλων πινάκων του $\mathbb{C}^{nxn}$, και καλείται ***νόρμα Hilbert-Schmidt*** ως :

$$\|\mathrm{X}\| = \left(\sum_{k=1,l=1}^{n} |x_{kl}|^2 \right)^{1/2} \in \mathbb{R}$$

το οποίο ικανοποιεί, ως μέτρο, τις παρακάτω ανισώσεις για κάθε $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in M_n(\mathbb{C})$:

$$\|\mathrm{X} + \mathrm{Y}\| \le \|\mathrm{X}\| + \|\mathrm{Y}\|$$

$$\|\mathrm{X} \cdot \mathrm{Y}\| \le \|\mathrm{X}\| \cdot \|\mathrm{Y}\|$$

Όπου εάν X_m είναι μία ακολουθία πινάκων του $M_n(\mathbb{C})$, τότε αυτή συγκλίνει στον X αν και μόνο εάν $\|\mathrm{X}_m - X\| \to 0 \in \mathbb{R},\ καθώς\ m \to \infty.$

<u>Πρόταση 15</u>: Για κάθε πίνακα *nxn* με στοιχεία πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς, ο εκθετικός πίνακας συγκλίνει. Ο εκθετικός πίνακας e^{X} είναι συνεχής συνάρτηση του X.

<u>Απόδειξη</u>: (τετριμμένη στο πεδίο της ανάλυσης των μαθηματικών).

Μία ακολουθία πινάκων X_n ονομάζεται ***ακολουθία Cauchy*** εάν ισχύει $\|\mathrm{X}_m - X_l\| \to 0, \, καθώς \; m,l \to \infty.$ Θεωρώντας τον χώρο $M_n(\mathbb{C})$ ως χώρο πινάκων του $\mathbb{C}^{nxn}$ και χρησιμοποιώντας στοιχειώδη αποτελέσματα από την ανάλυση, έχουμε

<u>Πρόταση 16</u>: Εάν X_n είναι μία ακολουθία Cauchy πινάκων στον $M_n(\mathbb{C})$, τότε υπάρχει μοναδικός πίνακας X τέτοιος ώστε η X_n να συγκλίνει στον X.

(Δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy πινάκων συγκλίνει).

Ακόμα, θεωρώντας μία άπειρη σειρά πινάκων, με $\mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \ldots$

εάν $\sum_{m=0}^{\infty} \|\mathrm{X}_m\| < \infty$ τότε λέγεται ότι η ακολουθία ***<u>συγκλίνει απολύτως</u>***. Εάν μία σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε είναι σχετικά εύκολο να δειχθεί ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς αποτελούν μία ακολουθία Cauchy, οπότε από την προηγούμενη πρόταση η σειρά συγκλίνει. Επομένως, κάθε σειρά η οποία συγκλίνει απολύτως θα ισχύει ότι συγκλίνει (τα αντίθετο, βέβαια, δεν ισχύει πάντα).

<u>Απόδειξη</u> (της πρότασης 15) :

Λόγω της ιδιότητας $\|\mathrm{X} \cdot \mathrm{Y}\| \le \|\mathrm{X}\| \cdot \|\mathrm{Y}\|$ έχουμε ότι $\|\mathrm{X}^m\| \le \|\mathrm{X}\|^m$ και επομένως

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\| \frac{\mathrm{X}^m}{m!} \right\| \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|\mathrm{X}\|^m}{m!} = e^{\|\mathrm{X}\|} < \infty \, .$$

Δηλαδή, η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει. Για να δειχθεί ότι η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής, αρκεί να δούμε ότι καθώς η X^m είναι συνεχής συνάρτηση του X, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{X}^m}{m!}$ είναι συνεχής συνάρτηση. Τέλος είναι εύκολο να δούμε ότι η $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{X}^m}{m!}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο της μορφής $\{\|\mathrm{X}\| \le \mathbb{R}\}$, και έτσι το άθροισμα είναι συνεχές.□

Για την εκθετική συνάρτηση ισχύουν κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες:

<u>Πρόταση 17</u> : Έστω X, Y δύο τυχαίοι *nxn* πίνακες, θα ισχύουν τα παρακάτω:

1. $e^{0} = I$
2. $\left(e^{\mathrm{X}}\right)^{*} = e^{\mathrm{X}^{*}}$
3. ο e^{X} έχει αντίστροφο και αυτός είναι ο $\left(e^{\mathrm{X}}\right)^{-1} = e^{-\mathrm{X}}$
4. $e^{(\alpha+\beta)\mathrm{X}} = e^{\alpha\mathrm{X}} e^{\beta\mathrm{X}}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
5. Αν $\mathrm{XY} = \mathrm{YX}$, τότε $e^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}} = e^{\mathrm{X}} e^{\mathrm{Y}} = e^{\mathrm{Y}} e^{\mathrm{X}}$
6. Αν ο C είναι αντιστρέψιμος τότε $e^{CXC^{-1}} = Ce^{\mathrm{X}}C^{-1}$
7. $\left\| e^{\mathrm{X}} \right\| \le e^{\|X\|}$

Πολύ σημαντική είναι η ιδιότητα 5. Για την οποία έχουμε :

$$e^{\mathrm{X}} e^{\mathrm{Y}} = \left(\mathrm{I} + \mathrm{X} + \frac{\mathrm{X}^{2}}{2!} + \frac{\mathrm{X}^{3}}{3!} + \ldots \right) \left(\mathrm{I} + \mathrm{Y} + \frac{\mathrm{Y}^{2}}{2!} + \frac{\mathrm{Y}^{3}}{3!} + \ldots \right)$$

από όπου μαζεύοντας τους όρους που προκύπτουν από την επιμεριστική, και οι οποίοι έχουν ως μονώνυμα βαθμό *m*, δηλαδή $\mathrm{X}^{k}\mathrm{Y}^{l}, \mu\varepsilon\ k + l = m$, έχουμε:

$$e^{\mathrm{X}} e^{\mathrm{Y}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{X}^{k}}{k!} \frac{\mathrm{Y}^{m-k}}{(m-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \mathrm{X}^{k} \mathrm{Y}^{m-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\mathrm{X} + \mathrm{Y} \right)^{m}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο και μόνο γιατί $\mathrm{XY} = \mathrm{YX}$.

Και επομένως, $e^{\mathrm{X}} e^{\mathrm{Y}} = e^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}$.

<u>Πρόταση 18</u> : Έστω X ένας *nxn* πίνακας με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς, τότε η $e^{t\mathrm{X}}$ είναι μία ομαλή (διαφορίσιμη) καμπύλη στον $M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ και $\frac{d}{dt}(e^{t\mathrm{X}}) = \mathrm{X}e^{t\mathrm{X}} = e^{t\mathrm{X}}\mathrm{X}$. (και ειδικά $\left.\frac{d}{dt}(e^{t\mathrm{X}})\right|_{t=0} = \mathrm{X}$).

<u>Απόδειξη</u>: Παραγωγίζοντας για κάθε όρο της σειράς $e^{t\mathrm{X}}$ προκύπτει το ζητούμενο.

3.2 Υπολογίζοντας τον εκθετικό ενός πίνακα

Θα παρουσιάσουμε μερικούς τρόπους για τον υπολογισμό τους εκθετικού ενός πίνακα, ξεχωρίζοντας κάποιες περιπτώσεις πινάκων.

3.2.1 Περίπτωση 1η : ο X είναι *διαγωνοποιήσιμος*

Έστω X ένας *nxn* πίνακας με στοιχεία πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς ο οποίος είναι διαγωνοποιήσιμος στον $\mathbb{C}$, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας C τέτοιος ώστε $\mathrm{X}=CDC^{-1}$ με $D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$. Εύκολα προκύπτει ότι ο e^D είναι ο διαγώνιος πίνακας με ιδιοτιμές $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$ οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα 6. είναι $e^{\mathrm{X}}=C\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}C^{-1}$.

Επομένως εάν μπορούμε να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα X, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε και τον εκθετικό πίνακα του X, e^{X}.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν ο πίνακας X είναι πραγματικός, ακόμα και αν ο C είναι μιγαδικός και οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικοί, ο e^{X} θα προκύπτει να είναι με πραγματικά στοιχεία, καθώς η σειρά $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{X}^m}{m!}$ θα αποτελείται από πίνακες με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

<u>Παράδειγμα</u>: έστω ο πίνακας $\mathrm{X}=\begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ τα ιδιοδιανύσματα του οποίου είναι τα $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ με ιδιοτιμές τις $-i\alpha$ και $i\alpha$ αντιστοίχως. Οπότε, από γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι, ο πίνακας C είναι ο $C=\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$, και τελικά έχοντας τον αντίστροφο του $C^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, ο εκθετικός πίνακας του X είναι ο $e^{\mathrm{X}}=\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{ia} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

3.2.2 Περίπτωση 2η : ο X είναι ***μηδενοδύναμος*** (*nilpotent*)

Ένας πίνακας X λέγεται μηδενοδύναμος εάν υπάρχει θετικός φυσικός αριθμός $\kappa \in \mathbb{N}^*$, τέτοιος ώστε $\mathrm{X}^\kappa = \mathrm{O}$. Φυσικά, για κάθε φυσικό λ μεγαλύτερο του $\lambda > \kappa$ θα είναι $\mathrm{X}^\lambda = \mathrm{O}$ και η σειρά η οποία καθορίζει τον εκθετικό πίνακα θα έχει πεπερασμένου πλήθους όρους (κ) μη μηδενικούς πίνακες. Επομένως, ο e^{X} υπολογίζεται από ένα πεπερασμένο άθροισμα πινάκων.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω ο πίνακας $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, τότε ο πίνακας X^2 είναι ο $\mathrm{X}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και ο πίνακας $\mathrm{X}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{O}$, δηλαδή είναι μηδενοδύναμος με $\kappa = 3$.

Επομένως ο εκθετικός πίνακας του X είναι ο

$$e^{\mathrm{X}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{X}^m}{m!} = \sum_{m=0}^{2} \frac{\mathrm{X}^m}{m!} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\mathrm{O}}{m!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{O}$$

Δηλαδή $e^{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta + \alpha\gamma/2 \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.2.3 Περίπτωση 3η : ο X είναι τυχαίος πίνακας

Από γραμμική άλγεβρα και το θεώρημα Jordan -Chevalier γνωρίζουμε ότι κάθε πίνακας X μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός διαγωνοποιήσιμου και ενός μηδενοδύναμου πίνακα, δηλαδή $\mathrm{X} = \Delta + \mathrm{M}$, όπου Δ διαγωνοποιήσιμος και M μηδενοδύναμος πίνακας, και ισχύει $\Delta \cdot \mathrm{M} = \mathrm{M} \cdot \Delta$.

Οπότε από την ιδιότητα 5. έχουμε $e^{\mathrm{X}} = e^{\Delta + \mathrm{M}} = e^{\Delta\mathrm{M}} = e^{\Delta} e^{\mathrm{M}}$,

όπου οι δύο πίνακες e^{Δ} και e^{M} υπολογίζονται εύκολα, καθώς υπάγονται στις δύο πρώτες περιπτώσεις (3.2.1 και 3.2.2).

Παράδειγμα: Έστω $\mathrm{X}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$, τότε $\Delta=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$ και $\mathrm{M}=\begin{bmatrix}0 & \beta\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Οπότε εύκολα έχουμε $e^{\mathrm{X}}=\begin{bmatrix}e^{\alpha} & 0\\ 0 & e^{\alpha}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\alpha} & e^{\alpha}\beta\\ 0 & e^{\alpha}\end{bmatrix}$.

3.3 Ο λογαριθμικός πίνακας

Θα ορίσουμε την κατά κάποιο τρόπο αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής συνάρτησης για τους πίνακες που δόθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Πρωτίστως όμως, πρέπει να γίνει μία υπενθύμιση για τον ορισμό του λογαρίθμου ενός μιγαδικού αριθμού. Επειδή για κάθε μιγαδικό $z\in\mathbb{C}$ ο e^z είναι μη μηδενικός, $e^z>0$, και καθώς κάθε μιγαδικός μπορεί να γραφτεί στην μορφή e^z, για κάποιο z, έστω και χωρίς αυτό να γίνεται με μοναδικό τρόπο, ορίζεται ο λογάριθμος ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού.

Επειδή ο τρόπος γραφής ενός μιγαδικού στην μορφή e^z δεν είναι μοναδικός δεν μπορεί να είναι συνεχής η συνάρτηση ορισμού του λογαρίθμου ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού. Ομοίως για τους πίνακες, δηλαδή για κάθε πίνακα X στον $M_n(\mathbb{C})$, ο εκθετικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος (υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση) αλλά <u>μόνο οι αντιστρέψιμοι πίνακες μπορούν να έχουν λογάριθμο</u>. Παρ 'όλα αυτά δεν είναι μοναδικός ο τρόπος που μπορεί να οριστεί μία αντιστοιχία – απεικόνιση από τον e^{X} στον X μέσω του λογαρίθμου ενός αντιστρέψιμου πίνακα.

Ο απλούστερος τρόπος να ορισθεί ο λογαριθμικός πίνακας, είναι με δυναμοσειρές.

Υπενθυμίζουμε σχετικά:

<u>Λήμμα</u> : Η παρακάτω συνάρτηση ορίζεται, και είναι αναλυτική, πάνω στον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο το σημείο (1,0), (ή αλλιώς τον κύκλο $(z=1, r=1)$ ή ακόμα στον κύκλο $|z-1|<1$):

$$\log(z)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(z-1)^m}{m}.$$

Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ με $|z-1|<1$ είναι $e^{\log(z)}=z$.

Για κάθε $u\in\mathbb{C}$ με $|u|<\log 2$, είναι $|e^u-1|<1$ και $\log(e^u)=u$.

<u>Απόδειξη</u> : Ο συνήθης λογάριθμος πραγματικών αριθμών ικανοποιεί την σχέση

$$\frac{d}{dx}(\log(1-x)) = \frac{-1}{1-x} = -(1+x+x^2+\ldots)$$, για κάθε $x \in \mathbb{R}, \mu\varepsilon\ |x|<1$.

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ισότητα, και δεδομένου ότι $\log 1 = 0$ έχουμε

$$\log(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right).$$

Θέτοντας $z = 1-x$ η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\log(z) = -\left((1-z) + \frac{(1-z)^2}{2} + \frac{(1-z)^3}{3} + \ldots\right) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(1-z)^m}{m}.$$

Αυτή η σειρά έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και ορίζει μία σύνθετη αναλυτική συνάρτηση στο σύνολο $\{|z-1|<1\}$, η οποία συμπίπτει με τον συνήθη λογάριθμο για τους πραγματικούς στο διάστημα (0,2). Καθώς, $\exp(log(z)) = z$ για κάθε $z \in (0,2)$, η παραπάνω ταυτότητα ισχύει στο σύνολο $\{|z-1|<1\}$.

Από την άλλη μεριά, εάν $|u| < \log 2$, τότε :

$$|e^u - 1| < \left|u + \frac{u^2}{2} + \ldots\right| \leq |u| + \frac{|u|^2}{2} + \ldots = e^{|u|} - 1 < 1.$$

Επομένως, $\log(\exp(u))$ ορίζεται για κάθε u. Και επειδή $\log(\exp(u)) = u$ για κάθε πραγματικό u με $|u| < \log 2$ θα ισχύει για κάθε μιγαδικό αριθμό $u, \mu\varepsilon\ |u| < \log 2$, ότι $\log(\exp(u)) = u$. □

<u>Ορισμός 15</u>: Για κάθε *nxn* πίνακα A ορίζεται ο λογαριθμικός πίνακας αυτού ως:

$$\log(\mathrm{A}) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{I})^m}{m}$$

όταν η σειρά συγκλίνει.

Κατά αντιστοιχία της σειράς μιγαδικών $\log(z)=\sum_{=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(z-1)^m}{m}$, η οποία έχει ακτίνα σύγκλισης 1, και επειδή $\left\|(\mathrm{A}-\mathrm{I})^m\right\|\leq\left\|\mathrm{A}-\mathrm{I}\right\|^m$, η σειρά πινάκων αναμένεται να συγκλίνει εάν $\|\mathrm{A}-\mathrm{I}\|<1$. Αλλά τελικά μπορεί να συγκλίνει και σε περιπτώσεις με $\|\mathrm{A}-\mathrm{I}\|>1$, όταν ισχύει $\left\|(\mathrm{A}-\mathrm{I})^m\right\|<\left\|\mathrm{A}-\mathrm{I}\right\|^m$ όπως στην περίπτωση που ο $(\mathrm{A}-\mathrm{I})$ είναι μηδενοδύναμος πίνακας.

Παρόλα αυτά θα περιοριστούμε στην περίπτωση που $\|\mathrm{A}-\mathrm{I}\|<1$.

<u>Θεώρημα 2</u> : Η συνάρτηση $\log(\mathrm{A})=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{I})^m}{m}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο σύνολο των *nxn* πινάκων με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς και τέτοιους ώστε $\|\mathrm{A}-\mathrm{I}\|<1$.

Επίσης, ισχύει για κάθε τέτοιον πίνακα ότι $e^{\log(\mathrm{A})}=\mathrm{A}$.

Για κάθε $\mathrm{X}, \mu\varepsilon \ \|\mathrm{X}\|<\log 2$, έχουμε $\left\|e^{\mathrm{X}}-\mathrm{I}\right\|<1$ και $\log(e^{\mathrm{X}})=\mathrm{X}$.

<u>Απόδειξη</u> : Επειδή ισχύει η σχέση $\left\|(\mathrm{A}-\mathrm{I})^m\right\|\leq\left\|\mathrm{A}-\mathrm{I}\right\|^m$

και καθώς η σειρά $\log(z)=\sum_{=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(z-1)^m}{m}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1 η ζητούμενη σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε Α με $\|\mathrm{A}-\mathrm{I}\|<1$. Η απόδειξη της συνέχειας είναι παρόμοια με την αντίστοιχη της εκθετικής.
Για την σχέση $e^{\log(\mathrm{A})}=\mathrm{A}$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση $1^η$: ο <u>*Α είναι διαγωνοποιήσιμος*</u>.
Με τον Α διαγωνοποιήσιμο θα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας C τέτοιος ώστε $\mathrm{A}=CDC^{-1}$ με D διαγώνιο. Τότε, ο πίνακας τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας C τέτοιος ώστε $\mathrm{X}=CDC^{-1}$ με $\mathrm{A}-\mathrm{I}=CDC^{-1}-\mathrm{I}=C(D-\mathrm{I})C^{-1}$, οπότε και ο πίνακας $(\mathrm{A}-\mathrm{I})^m$ θα είναι της μορφής :

$$(\mathrm{A}-\mathrm{I})^m=C\begin{bmatrix}(z_1-1)^m & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (z_n-1)^m\end{bmatrix}C^{-1}$$

όπου $z_1,z_2,\ldots,z_n$ είναι οι ιδιοτιμές του Α.

Ακόμα, από την $\|\mathrm{A}-\mathrm{I}\|<1$ έχουμε ότι για κάθε ιδιοτιμή θα ισχύει η σχέση $\|z_i - 1\| < 1$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Οπότε έχουμε: $\sum_{=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(z-1)^m}{m} = C \begin{bmatrix} \log(z_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \log(z_n) \end{bmatrix} C^{-1}$

και από προηγούμενο λήμμα θα έχουμε

$$e^{\log(\mathrm{A})} = C \begin{bmatrix} e^{\log(z_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\log(z_n)} \end{bmatrix} C^{-1} = \mathrm{A}.$$

Περίπτωση 2η: ο <u>*Α δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.*</u>

Μπορεί να δειχθεί ότι μπορεί να φτιαχτεί μία ακολουθία διαγωνοποιήσιμων πινάκων A_m η οποία να συγκλίνει στον A. Εάν $\|\mathrm{A}-\mathrm{I}\|<1$ τότε θα υπάρχει κάποιο m_* ώστε για κάθε $m > m_*$ να ισχύει $\|\mathrm{A}_m - \mathrm{I}\| < 1$, οπότε από την 1η περίπτωση θα είναι $e^{\log(\mathrm{A}_m)} = \mathrm{A}_m$ και επειδή η συναρτήσεις log και exp είναι συνεχείς θα είναι και $e^{\log(\mathrm{A})} = \mathrm{A}$.
Επομένως, έχουμε δείξει ότι $e^{\log(\mathrm{A})} = \mathrm{A}$ για κάθε πίνακα A με $\|\mathrm{A}-\mathrm{I}\|<1$. Ομοίως για την σχέση $\|e^{\mathrm{X}} - \mathrm{I}\| < 1$ και $\log(e^{\mathrm{X}}) = \mathrm{X}$, όταν έχουμε $\|\mathrm{X}\| < \log 2$. □

<u>Πρόταση 19</u> : Για κάθε nxn πίνακα B με $\|\mathrm{B}\| < \frac{1}{2}$ υπάρχει σταθερός αριθμός c τέτοιος ώστε : $\|\log(\mathrm{I}+\mathrm{B}) - \mathrm{B}\| \le c \cdot \|\mathrm{B}\|^2$.

<u>Απόδειξη</u> : Για την $\log(\mathrm{I}+\mathrm{B}) - \mathrm{B}$ έχουμε :

$$\log(\mathrm{I}+\mathrm{B}) - \mathrm{B} = \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(\mathrm{B})^m}{m} = \mathrm{B}^2 \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(\mathrm{B})^{m-2}}{m}$$

Οπότε είναι

$$\|\log(\mathrm{I}+\mathrm{B}) - \mathrm{B}\| = \|\mathrm{B}^2\| \cdot \left\| \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(\mathrm{B})^{m-2}}{m} \right\| = \|\mathrm{B}\|^2 \cdot \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}}{m} = \|\mathrm{B}\|^2 \cdot c$$

γιατί η $\sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}}{m}$ συγκλίνει στους πραγματικούς. □

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να γράφουμε και $\log(\mathrm{I}+\mathrm{B})=\mathrm{B}+\mathrm{O}\left(\|\mathrm{B}\|^2\right)$, όπου $\mathrm{O}\left(\|\mathrm{B}\|^2\right)$ δηλώνει όρους της τάξης του $\|\mathrm{B}\|^2$.

Ακόμα ισχύει και το παρακάτω θεώρημα, το οποίο δεν θα αποδείξουμε.

<u>Θεώρημα 3</u> :Κάθε αντιστρέψιμος nxn πίνακας μπορεί να γραφτεί στην μορφή e^{X} για κάποιον $\mathrm{X}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

3.4 Ιδιότητες του εκθετικού πίνακα

Στην παρούσα ενότητα θα δοθούν διάφορα πρόσθετα αποτελέσματα-ιδιότητες περί του εκθετικού ενός πίνακα και τα οποία είναι σημαντικά για την μελέτη των αλγεβρών Lie.

<u>Θεώρημα 4</u> : (***Lie Product Formula***). Έστω X και Y δύο *nxn* πίνακες με μιγαδικά στοιχεία. Τότε ισχύει

$$e^{X+Y}=\lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right)^m .$$

Το θεώρημα αυτό έχει έναν «μεγάλο αδερφό», το αποκαλούμενο θεώρημα ***Trotter product formula*** το οποίο δίνει το ίδιο συμπέρασμα στην περίπτωση που οι X και Y είναι κατάλληλοι μη φραγμένοι τελεστές σε έναν άπειρης διάστασης χώρο *Hilbert*.

<u>Απόδειξη</u> : Εάν πολλαπλασιάσουμε τις δυναμοσειρές των $e^{\frac{X}{m}}$ και $e^{\frac{Y}{m}}$ προκύπτουν, εκτός από τρεις όρους, όροι που έχουν δυνάμεις $\left(\frac{1}{m}\right)^2$ ή και μεγαλύτερες, επομένως είναι $e^{X+Y}=\mathrm{I}+\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+\mathrm{O}\left(\left(\frac{1}{m}\right)^2\right)$. Επειδή $e^{X+Y}\to\mathrm{I}$

καθώς $m \to \infty$, ο όρος e^{X+Y} είναι βασικό στοιχείο του λογαρίθμου για μεγάλο m. Από την πρόταση 19 έχουμε ότι $\log\left(e^{X+Y}\right) = \log\left(\mathrm{I} + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) =$

$$= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + \mathrm{O}\left(\left\|\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\|^2\right) =$$

$$= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

Άρα θα είναι $\qquad e^{X+Y} = e^{\log\left(e^{X+Y}\right)} = e^{\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)}$

οπότε και $\qquad \left(e^{X+Y}\right)^m = e^{X+Y+\mathrm{O}\left(\frac{1}{m}\right)}$.

Τελικά λόγω συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης είναι

$$\lim_{m \to \infty} \left(e^{\frac{X}{m}} e^{\frac{Y}{m}}\right)^m = e^{X+Y}. \qquad \square$$

Ακολούθως, υπενθυμίζουμε το ***ίχνος*** για έναν πίνακα ορίζεται ως το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του, οπότε και όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος. (το ίχνος του πίνακα Α θα το συμβολίζουμε tr(A) στα παρακάτω).

<u>Θεώρημα 5</u> : Για κάθε πίνακα X στον $M_n\left(\mathbb{C}\right)$ ισχύει $\det(e^{\mathrm{X}}) = e^{tr(\mathrm{X})}$.

<u>Απόδειξη</u> : Υπάρχουν και εδώ τρεις περιπτώσεις όπως στον υπολογισμό του εκθετικού ενός πίνακα.

<u>Περίπτωση 1η</u> : ο πίνακας X είναι διαγωνοποιήσιμος.

Τότε θα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας C τέτοιος ώστε $\mathrm{X} = CDC^{-1}$ με D διαγώνιο, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$. Οπότε θα είναι $e^{\mathrm{X}} = C\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}C^{-1}$, με το ίχνος του X να είναι $tr(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ και η ορίζουσα του εκθετικού του πίνακα να είναι $\det\left(e^{\mathrm{X}}\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{tr(\mathrm{X})}$.

Περίπτωση 2η : ο πίνακας X είναι μηδενοδύναμος.

Αποδεικνύεται ότι αν ένας πίνακας X είναι μηδενοδύναμος τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας C, τέτοιος ώστε $\mathrm{X}=C\begin{bmatrix}0 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{bmatrix}C^{-1}$. Εύκολα προκύπτει για τον εκθετικό πίνακα ότι $e^{\mathrm{X}}=C\begin{bmatrix}1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}C^{-1}$. Επομένως, ο X θα έχει ίχνος μηδέν (($tr(\mathrm{X})=0$) και ο εκθετικός του θα έχει ορίζουσα ένα ($\det\left(e^{\mathrm{X}}\right)=1$).

Περίπτωση 2η : ο πίνακας X είναι τυχαίος.

Από γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι κάθε πίνακας X μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός διαγωνοποιήσιμου και ενός μηδενοδύναμου πίνακα, δηλαδή $\mathrm{X}=\Delta+\mathrm{M}$, όπου Δ διαγωνοποιήσιμος και M μηδενοδύναμος πίνακας, και ισχύει $\Delta\cdot\mathrm{M}=\mathrm{M}\cdot\Delta$.

Όπως έχουμε επαναλάβει θα είναι $e^{\mathrm{X}}=e^{\Delta}e^{\mathrm{M}}$ και επομένως θα είναι :

$\det(e^{\mathrm{X}})=\det(e^{\Delta})\det(e^{\mathrm{M}})=e^{tr(\Delta)}e^{tr(\mathrm{M})}=e^{tr(\mathrm{X})}$. □

Ορισμός 16: Μία συνάρτηση $\mathrm{A}:\mathbb{R}\to GL(n;\mathbb{C})$ καλείται **υποομάδα μίας παραμέτρου** της ομάδας $GL(n;\mathbb{C})$ εάν

1. η A είναι συνεχής
2. $\mathrm{A}(0)=\mathrm{I}$
3. $\mathrm{A}(t+s)=\mathrm{A}(t)\cdot\mathrm{A}(s), \text{για κάθε } t,s\in\mathbb{R}$.

Θεώρημα 6 : (**Υποομάδες μίας παραμέτρου**), εάν η συνάρτηση A είναι **υποομάδα μίας παραμέτρου** της ομάδας $GL(n;\mathbb{C})$, τότε υπάρχει μοναδικός *nxn* πίνακας X με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς τέτοιος ώστε $\mathrm{A}(t)=e^{t\cdot\mathrm{X}}$.

Απόδειξη : Η απόδειξη της μοναδικότητας είναι άμεση καθώς αν υπάρχει τέτοιος πίνακας X τότε $\left.\frac{d}{dt}\mathrm{A}(t)\right|_{t=0}=\mathrm{X}$. Οπότε ζητούμενο είναι η ύπαρξη του X.

Έστω η ανοικτή σφαίρα B_ε περί το μηδέν ακτίνας ε στον $GL(n;\mathbb{C})$, δηλαδή $B_\varepsilon = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \|X\| < \varepsilon\}$. Παίρνοντας $\varepsilon < \log 2$, γνωρίζοντας ότι η εκθετική συνάρτηση απεικονίζει την σφαίρα B_ε μέσα στον $M_n(\mathbb{C})$ και με την συνεχή αντίστροφη συνάρτηση (log), θεωρούμε την $U = e^{B_{\varepsilon/2}}$ η οποία είναι ανοικτό σύνολο στον $GL(n;\mathbb{C})$.

<u>**Λήμμα**</u>: Κάθε $g \in U = e^{B_{\varepsilon/2}}$ έχει μοναδική τετραγωνική ρίζα $h \in U$ με $h = e^{\frac{1}{2}\log(g)}$.

<u>Απόδειξη</u> : Έστω $X = \log(g)$, τότε $h = e^{X/2} = \left(e^X\right)^{\frac{1}{2}}$ είναι τετραγωνική ρίζα του g καθώς $h^2 = \left(e^{\frac{X}{2}}\right)^2 = e^X = g$. Έστω ότι υπάρχει και άλλη τετραγωνική ρίζα του g $h' \in U$ (δηλαδή να ικανοποιεί την $h^2 = g$), και θέτοντας $Y = \log h'$ έχουμε $e^Y = h'$
και $e^{2Y} = (h')^2 = g = e^X$. Δηλαδή είναι $Y \in B_{\varepsilon/2}$, επομένως και $2 \cdot Y \in B_\varepsilon$, οπότε θα είναι και $X \in B_{\varepsilon/2} \subseteq B_\varepsilon$. Επειδή η συνάρτηση είναι 1-1 στην B_ε θα πρέπει $2Y = X$, δηλαδή $h' = e^Y = e^{X/2} = h$, δηλαδή η τετραγωνική ρίζα του g είναι μοναδική στο U. □

(συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 6)

Λόγω της συνέχεια της A συνάρτησης θα υπάρχει πραγματικός $t_0 > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $|t| < t_0$ να είναι $A(t) \in U$. Τότε θέτοντας $X = \frac{1}{t_0}\log\left(A(t_0)\right)$, ώστε να είναι $t_0 \cdot X = \log\left(A(t_0)\right)$. Αλλά τότε $t_0 X \in B_{\varepsilon/2}$ και $A(t_0) = e^{t_0 X}$, οπότε το $A(t_0/2)$ ανήκει στην U και $A(t_0/2)^2 = A(t_0)$. Από το παραπάνω λήμμα το $A(t_0)$ έχει μοναδική τετραγωνική ρίζα στη U, την $e^{t_0 X/2}$, οπότε θα πρέπει να έχουμε $A(t_0/2) = e^{t_0 X/2}$.

Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω μπορούμε να έχουμε $A(t_0/2^\kappa) = e^{t_0 X/2^\kappa}$ για κάθε φυσικό αριθμό κ. Οπότε για κάθε ακέραιο αριθμό m θα έχουμε:

$$A(mt_0/2^\kappa) = e^{mt_0 X/2^\kappa} = \left(e^{t_0 X/2^\kappa}\right)^m = A(t_0/2^\kappa)^m$$

Δηλαδή θα είναι $A(t) = e^{tX}$ για κάθε πραγματικό αριθμό της μορφής $t = mt_0/2^\kappa$
Το σύνολο τέτοιων πραγματικών είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, οπότε από συνέχεια των συναρτήσεων *e* και *A* θα είναι $A(t) = e^{tX}$ για κάθε πραγματικό αριθμό t. □

3.5 Η Lie άλγεβρα μίας ομάδας Lie πινάκων

Οι άλγεβρες Lie είναι απαραίτητο εργαλείο για την μελέτη των ομάδων Lie πινάκων. Από την μία, οι άλγεβρες Lie είναι απλούστερες από τις ομάδες Lie πινάκων, διότι (όπως θα δούμε) οι άλγεβρες Lie είναι γραμμικός χώρος. Επομένως, μπορούμε να καταλάβουμε πολλά για τις Lie άλγεβρες μέσω της γραμμικής άλγεβρας. Από την άλλη, η Lie άλγεβρα μίας ομάδας Lie πινάκων περιέχει αρκετή πληροφορία για την ομάδα αυτή. Για αυτό, πολλά ερωτήματα για τις ομάδες Lie πινάκων μπορούν να απαντηθούν θεωρώντας ένα απλούστερο αντίστοιχο πρόβλημα για την αντίστοιχη άλγεβρα Lie.

Ορισμός 17 : Έστω μία ομάδα Lie πινάκων G. Η ***Lie άλγεβρα*** της G, την οποία θα συμβολίζουμε $\mathfrak{g}$, είναι το σύνολο όλων των πινάκων X τέτοιων ώστε ο $e^{t\mathrm{X}}$ να ανήκει στην G για κάθε πραγματικό αριθμό t.

Αυτό σημαίνει ότι ο X ανήκει στην $\mathfrak{g}$ αν και μόνο αν η υποομάδα μίας παραμέτρου που παράγεται από την X ανήκει στην G. Να σημειωθεί ότι ακόμα και αν η G είναι υποομάδα της $GL(n;\mathbb{C})$ -και όχι απαραιτήτως της $GL(n;\mathbb{R})$- δεν σημαίνει ότι ο $e^{t\mathrm{X}}$ ανήκει στην G για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς, t αλλά μόνο για τους πραγματικούς. Ακόμα, δεν αρκεί να ανήκει η e^{X} στην G. Είναι εύκολο να βρεθεί παράδειγμα με X ανήκει στην G και e^{X} να ανήκει στην G, αλλά ο $e^{t\mathrm{X}}$ να μην ανήκει στην G για κάποιον πραγματικό αριθμό t δηλαδή $e^{t\mathrm{X}} \notin \mathfrak{g}$.

Θα δειχθεί παρακάτω ότι κάθε ομάδα Lie πινάκων είναι μία ενσωματωμένη υποπολλαπλότητα του $GL(n;\mathbb{C})$. Θα δειχθεί επί πλέον ότι η $\mathfrak{g}$ είναι εφαπτόμενος χώρος στην G στο ταυτοτικό. Αυτό σημαίνει ότι η $\mathfrak{g}$ μπορεί να εναλλακτικά να ορισθεί ως το σύνολο των παραγώγων των ομαλών καμπυλών από το ταυτοτικό στοιχείο της G.

3.5.1.Φυσική απεικόνιση

Φυσική απεικόνιση θα αποκαλούμε την $\mathrm{X} \to e^{i\mathrm{X}}$ αντί της $\mathrm{X} \to e^{\mathrm{X}}$ για δοθέν t. Επομένως, φυσική απεικόνιση θα θεωρείται η άλγεβρα Lie της G ως το σύνολο όλων των πινάκων X της G τέτοιο ώστε $e^{it\mathrm{X}} \in G$ για κάθε πραγματικό αριθμό t.

3.5.2 Η γενική γραμμική ομάδα

Εάν ο X είναι ένας *nxn* πίνακας με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς, τότε από την πρόταση 17 (ιδιότητες εκθετικής συνάρτησης) θα έχουμε ότι ο e^{tX} είναι αντιστρέψιμος, επομένως, η άλγεβρα Lie της $GL(n;\mathbb{C})$ είναι ο χώρος όλων των *nxn* πινάκων με μιγαδικά στοιχεία. Αυτή η άλγεβρα Lie συμβολίζεται $gl(n;\mathbb{C})$.

Εάν X είναι ένας *nxn* πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, τότε ο e^{tX} είναι πραγματικός και αντιστρέψιμος. Από την άλλη, εάν ο e^{tX} είναι πραγματικός για κάθε πραγματική τιμή του t, τότε ο $X = \frac{d}{dt} e^{tX} \Big|_{t=0}$ θα είναι επίσης πραγματικός. Άρα η άλγεβρα Lie της $GL(n;\mathbb{R})$ είναι ο χώρος όλων των *nxn* πινάκων με πραγματικά στοιχεία. Αυτή η άλγεβρα Lie συμβολίζεται $gl(n;\mathbb{R})$.

Να σημειωθεί ότι μπορεί να δειχθεί ότι αν η G είναι υποομάδα της $GL(n;\mathbb{R})$ τότε η άλγεβρα Lie της G θα αποτελείται ολοκληρωτικά από πραγματικούς πίνακες. Θα χρησιμοποιείται πλέον αυτό στα παρακάτω.

3.5.3 Η ειδική γραμμική ομάδα

Από προηγούμενο θεώρημα (5°) έχουμε ότι $\det(e^{X}) = e^{tr(X)}$, άρα εάν $tr(X) = 0$ τότε $\det(e^{tX}) = e^{0} = 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό t. Από την άλλη, εάν ισχύει $\det(e^{tX}) = 1$ για κάποιον *nxn* πίνακα X, και για κάθε πραγματικό αριθμό t, θα είναι $\det(e^{tX}) = e^{t \cdot tr(X)} = 1, \forall t \in \mathbb{R}$, το οποίο σημαίνει ότι $t \cdot tr(X)$ θα είναι ο ακέραιος επί *2πi* για κάθε t , αλλά αυτό συμβαίνει μόνο αν $tr(X) = 0$. Έτσι, η άλγεβρα Lie της $SL(n;\mathbb{C})$ είναι ο χώρος όλων των *nxn* πινάκων με μιγαδικά στοιχεία με ίχνος μηδέν. Αυτή η άλγεβρα Lie συμβολίζεται $sl(n;\mathbb{C})$.

Ομοίως, η άλγεβρα Lie της $SL(n;\mathbb{R})$ είναι ο χώρος όλων των *nxn* πινάκων με πραγματικά στοιχεία με ίχνος μηδέν. Αυτή η άλγεβρα Lie συμβολίζεται $sl(n;\mathbb{R})$.

3.5.4 Η Ορθομοναδιαία ομάδα

Ένας πίνακα U είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν $U^{*} = U^{-1}$, και αντιστοίχως ο e^{tX} είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν $\left(e^{tX}\right)^{*} = \left(e^{tX}\right)^{-1} = e^{-tX}$.

Αλλά ξέρουμε ότι $\left(e^{tX}\right)^{*} = e^{tX^{*}}$, οπότε $e^{tX^{*}} = e^{-tX}$.

Προφανώς, ικανή συνθήκη για την σχέση αυτή είναι η $X^* = -X$. Από την άλλη, εάν η $e^{tX^*} = e^{-tX}$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό t, τότε παραγωγίζοντας στο $t_0 = 0$, προκύπτει ότι η $X^* = -X$ είναι και αναγκαία.

Οπότε, η άλγεβρα Lie της $U(n)$ είναι ο χώρος όλων των *nxn* πινάκων X με μιγαδικά στοιχεία, τέτοιων ώστε $X^* = -X$. Αυτή η άλγεβρα Lie συμβολίζεται $u(n)$.

Συνδυάζοντας τα τελευταία έχουμε ότι , η άλγεβρα Lie της $SU(n)$ είναι ο χώρος όλων των *nxn* πινάκων X με μιγαδικά στοιχεία, τέτοιων ώστε $X^* = -X$ και ίχνος μηδέν ($tr(X) = 0$). Αυτή η άλγεβρα Lie συμβολίζεται $su(n)$.

3.5.5 Η ορθογώνια ομάδα

Η ταυτοτική συνιστώσα της $O(n)$ είναι η $SO(n)$. Από τις ιδιότητες της εκθετικής, έχουμε ότι ο εκθετικός ενός πίνακα μίας άλγεβρας Lie είναι αυτομάτως στην ταυτοτική συνιστώσα, οπότε η Lie άλγεβρα της $O(n)$ είναι η ίδια με την Lie άλγεβρα της $SO(n)$.

Τώρα, ένας *nxn* πίνακας R με πραγματικά στοιχεία είναι ορθογώνιος εάν και μόνο εάν $R^T = R^{-1}$. Έτσι, για έναν *nxn* πίνακας X με πραγματικά στοιχεία, ο e^{tX} είναι ορθογώνιος εάν και μόνο εάν $\left(e^{tX}\right)^T = e^{tX^T} = e^{-tX}$.

Προφανώς, ικανή συνθήκη για την σχέση αυτή είναι η $X^T = -X$. Από την άλλη, εάν η $\left(e^{tX}\right)^T = e^{tX^T} = e^{-tX}$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό t, τότε παραγωγίζοντας στο $t_0 = 0$, προκύπτει ότι η $X^T = -X$ είναι και αναγκαία.

Οπότε, η άλγεβρα Lie της $O(n)$, όπως και η άλγεβρα Lie της $SO(n)$, είναι ο χώρος όλων των *nxn* πινάκων X με πραγματικά στοιχεία, τέτοιων ώστε $X^T = -X$.

Αυτή η άλγεβρα Lie συμβολίζεται $so(n)$.

Να σημειωθεί ότι η σχέση $X^T = -X$ σημαίνει ότι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα πρέπει να είναι μηδενικά οπότε και το ίχνος τους θα είναι μηδέν.

Ομοίως προκύπτει ότι η άλγεβρα Lie της $SO(n;\mathbb{C})$, είναι ο χώρος όλων των *nxn* πινάκων X με μιγαδικά στοιχεία, τέτοιων ώστε $X^T = -X$.

Αυτή η άλγεβρα Lie συμβολίζεται $so(n;\mathbb{C})$ (και δεν είναι η ίδια με την $su(n)$).

3.5.6 Η γενικευμένη ορθογώνια ομάδα

Ένας πίνακας ανήκει στην $O(n;k)$ εάν και μόνο εάν $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} g \mathrm{A} = g$ όπου g είναι ο $(n+k)\times(n+k)$ διαγώνιος πίνακας με τα n πρώτα διαγώνια στοιχεία την μονάδα και τα υπόλοιπα k ίσα με -1. Η παραπάνω συνθήκη είναι ισοδύναμη με την συνθήκη $g^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} g = \mathrm{A}^{-1}$, ή επειδή $g^{-1} = g$, ισοδύναμα με την $g\mathrm{A}^{\mathrm{T}} g = \mathrm{A}^{-1}$.

Τώρα αν X είναι ένας $(n+k)\times(n+k)$ πίνακας με πραγματικά στοιχεία, τότε, ο $e^{t\mathrm{X}}$ ανήκει στην $O(n;k)$ εάν και μόνο εάν

$$g e^{t\mathrm{X}^{\mathrm{T}}} g = e^{tg\mathrm{X}^{\mathrm{T}} g} = e^{-t\mathrm{X}}.$$

Αυτή η συνθήκη ισχύει για κάθε πραγματικό t εάν και μόνο εάν $g\mathrm{X}^{\mathrm{T}} g = -\mathrm{X}$. Άρα, η άλγεβρα Lie της $O(n;k)$, όπως και η άλγεβρα Lie της $SO(n;k)$, είναι ο χώρος όλων των $(n+k)\times(n+k)$ πινάκων X με πραγματικά στοιχεία, τέτοιων ώστε $g\mathrm{X}^{\mathrm{T}} g = -\mathrm{X}$.

Αυτή η άλγεβρα Lie συμβολίζεται $so(n;k)$.

Γενικά η ομάδα $SO(n;k)$ δεν είναι συνεκτική, σε αντίθεση με την ομάδα $SO(n)$. Η ταυτοτική συνιστώσα της $SO(n;k)$ η οποία είναι η ίδια με την ταυτοτική της $O(n;k)$, συμβολίζεται $SO(n;k)_e$. Η Lie άλγεβρα της $SO(n;k)_e$ είναι ίδια με την Lie άλγεβρα της $SO(n;k)$.

3.5.7 Οι συμπλεκτικές ομάδες

Οι συμπλεκτικές ομάδες συμβολίζονται $sp(n;\mathbb{R}), sp(n;\mathbb{C})$ και $sp(n)$. Οι υπολογισμοί αυτών των αλγεβρών Lie είναι παρόμοιοι με αυτές της γενικευμένης ορθογώνιας ομάδας. Οπότε συνοπτικά, έχουμε:

Έστω J ένας πίνακας από τις συμπλεκτικές ομάδες. Τότε, $sp(n;\mathbb{R})$ είναι ο χώρος των (2n)x(2n) πινάκων με πραγματικά στοιχεία, ώστε $J\mathrm{X}^{\mathrm{T}} J = \mathrm{X}$. Ο $sp(n;\mathbb{C})$ είναι ο χώρος των (2n)x(2n) πινάκων με μιγαδικά στοιχεία, ώστε $J\mathrm{X}^{\mathrm{T}} J = \mathrm{X}$. Και $sp(n)$ είναι η τομή των $sp(n;\mathbb{C})$ και $u(2n)$, δηλαδή $sp(n) = sp(n;\mathbb{C}) \bigcap u(2n)$.

Για τον $sp(n;\mathbb{C})$ έχουμε ότι έχει στοιχεία τους πίνακες με

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ C & -\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

όπου οι C, B είναι συμμετρικοί πίνακες.

3.5.8 Η ομάδα Heisenberg

Ας θυμηθούμε ότι η ομάδα *Heisenberg* (*H*) η οποία είναι το σύνολο των 3x3 πινάκων A της μορφής

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

με $a, b \; \kappa\alpha\iota \; c$ πραγματικούς αριθμούς.

Επίσης, σε προηγούμενη ενότητα υπολογίσαμε τον εκθετικό ενός πίνακα της μορφής

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και δείξαμε ότι ο e^{X} ανήκει στην ομάδα *H*. Από την άλλη, εάν X είναι ένας πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι ο $e^{t\mathrm{X}}$ είναι ίδιας μορφής με αυτή των πινάκων της ομάδας *Heisenberg*, τότε όλα τα στοιχεία του πίνακα $\mathrm{X} = \left.\frac{d}{dt} e^{t\mathrm{X}}\right|_{t=0}$ πάνω ή κάτω από την κύρια διαγώνιο θα πρέπει να είναι μηδέν, οπότε ο X είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, η άλγεβρα Lie της ομάδας *Heisenberg*, είναι ο χώρος όλων των *3x3* πινάκων X με πραγματικά στοιχεία, αυστηρά άνω τριγωνικών.

3.5.9 Η Ευκλείδεια και η Poincare ομάδα

Η Ευκλείδεια ομάδα $\mathrm{E}(n)$ μπορεί να θεωρηθεί, για την παρούσα εργασία, ως το σύνολο των $(n+1)\times(n+1)$ πινάκων με πραγματικά στοιχεία της μορφής:

$$\begin{pmatrix} & & & x_1 \\ & R & & \vdots \\ & & & x_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Με $R \in O(n)$. Ακόμα, εάν X είναι ένας $(n+1)\times(n+1)$ πίνακας με πραγματικά στοιχεία, έτσι ώστε ο $e^{t\mathrm{X}}$ να ανήκει στην Ευκλείδεια ομάδα για κάθε *t*, τότε $\mathrm{X} = \left.\frac{d}{dt}e^{t\mathrm{X}}\right|_{t=0}$ πρέπει να έχει μηδενικά στην τελευταία γραμμή, δηλαδή:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} & & & y_1 \\ & \mathrm{Y} & & \vdots \\ & & & y_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πρέπει να καθορίσουμε ποιοι από τους πίνακες της παραπάνω μορφής είναι στην άλγεβρα Lie της Ευκλείδειας ομάδας. Με απλούς υπολογισμούς έχουμε για $n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} & & & y_1 \\ & \mathrm{Y} & & \vdots \\ & & & y_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} & \mathrm{Y}^n & & \mathrm{Y}^{n-1}y \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ όπου } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

Έτσι εάν $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} & & & y_1 \\ & \mathrm{Y} & & \vdots \\ & & & y_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ τότε ο $e^{t\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} & & & * \\ & e^{tY} & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Έχοντας δείξει ότι ο $e^{t\mathrm{Y}} \in O(n)$ για κάθε t μόνο και μόνο αν $\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{Y}$, έχουμε ότι η άλγεβρα Lie της Ευκλείδειας ομάδας στον χώρο όλων των X πινάκων $(n+1)\times(n+1)$ με πραγματικά στοιχεία όπως παραπάνω με $\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{Y}$.

Ομοίως προκύπτει ότι η άλγεβρα Lie της ομάδας *Poincare* $P(n;1)$ είναι ο χώρος όλων των X πινάκων $(n+2)\times(n+2)$ με πραγματικά στοιχεία της μορφής :

$$\begin{pmatrix} & & & y_1 \\ & \mathrm{Y} & & \vdots \\ & & & y_{n+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ με } \mathrm{Y} \in so(n;1).$$

3.6 Ιδιότητες μίας άλγεβρας Lie

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται βασικές ιδιότητες μίας άλγεβρας Lie μίας ομάδας Lie πινάκων.

Πρόταση 20 : Έστω G μία ομάδα Lie πινάκων και X ένα στοιχείο της άλγεβρας Lie αυτής. Τότε, ο e^{X} είναι ένα στοιχείο της ταυτοτικής συνιστώσας της G.

Απόδειξη : Εξ ορισμού της άλγεβρας Lie ο $e^{t\mathrm{X}}$ ανήκει στην G για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αλλά καθώς το t παίρνει τιμές από το 0 προς το 1 ο $e^{t\mathrm{X}}$ είναι ένας συνεχής δρόμος ο οποίος συνδέει το ταυτοτικό στοιχείο με το e^{X}. Επομένως ανήκει στην ταυτοτική συνιστώσα της G. □

Πρόταση 21 : Έστω G μία ομάδα Lie πινάκων και $\mathfrak{g}$ η άλγεβρα Lie αυτής. Έστω X ένα στοιχείο της $\mathfrak{g}$, και A ένα στοιχείο της G. Τότε $\mathrm{AXA}^{-1} \in \mathfrak{g}$.

Απόδειξη : Αυτό είναι άμεσο από τις ιδιότητες της εκθετικής γιατί $e^{t(\mathrm{AXA}^{-1})} = \mathrm{A}e^{t\mathrm{X}}\mathrm{A}^{-1}$ και έτσι $\mathrm{A}e^{t\mathrm{X}}\mathrm{A}^{-1} \in G$, για κάθε t. □

Θεώρημα 7 : Έστω G μία ομάδα Lie πινάκων και $\mathfrak{g}$ η άλγεβρα Lie αυτής και X και Y στοιχεία της $\mathfrak{g}$. Τότε,

1. $s\mathrm{X} \in \mathfrak{g}, \forall s \in \mathbb{R}$
2. $\mathrm{X} + \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$
3. $\mathrm{XY} - \mathrm{YX} \in \mathfrak{g}$.

Οι ιδιότητες 1. και 2. δηλώνουν ότι η $\mathfrak{g}$ είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος (για την ακρίβεια πραγματικός υπόχωρος του $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$).

Ορισμός 18 : Για δύο nxn πίνακες A και B ορίζεται το **Lie *Bracket*** (ή ***commutator***) των A και B και συμβολίζεται $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ ως το

$$[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}.$$

Από το θεώρημα 7 προκύπτει ότι μία άλγεβρα Lie είναι κλειστό σύνολο υπό την πράξη *Bracket*.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ακόμα και αν τα στοιχεία της ομάδας G έχουν μιγαδικά στοιχεία, η άλγεβρα Lie αυτής δεν ανήκει απαραίτητα σε μιγαδικό διανυσματικό χώρο. Έτσι, αν X είναι στοιχείο της $\mathfrak{g}$, το $i\mathrm{X}$ μπορεί να μην είναι στοιχείο της $\mathfrak{g}$. Για παράδειγμα, τα στοιχεία του $SU(n)$ μπορούν γενικά να έχουν μιγαδικά στοιχεία, αλλά εάν X είναι στοιχείο της άλγεβρας Lie $su(n)$, τότε $\mathrm{X}^* = -\mathrm{X}$ και έτσι $(i\mathrm{X})^* = i\mathrm{X}$, το οποίο σημαίνει ότι το $i\mathrm{X}$ δεν ανήκει στην $su(n)$, εκτός αν $\mathrm{X} = \mathrm{O}$.

<u>Ορισμός 19</u> : Μία ομάδα Lie πινάκων G λέγεται ότι είναι ***<u>μιγαδική</u>*** εάν η άλγεβρα Lie αυτής ($\mathfrak{g}$) είναι μιγαδικός υπόχωρος του $M_n(\mathbb{C})$. (θα ισχύει $i\mathrm{X} \in \mathfrak{g}, \forall \mathrm{X} \in \mathfrak{g}$).

Παραδείγματα μιγαδικών ομάδων είναι $GL(n;\mathbb{C}), SL(n;\mathbb{C}), SO(n;\mathbb{C})\ \kappa\alpha\iota\ Sp(n;\mathbb{C})$. Η συνθήκη του παραπάνω ορισμού ισοδυναμεί με το ότι η G είναι μιγαδική υποπολλαπλότητα του $GL(n;\mathbb{C})$.

Το παρακάτω θεώρημα είναι σημαντικότατο καθώς μας δείχνει ότι δύο ισόμορφες ομάδες Lie έχουν την ίδια άλγεβρα Lie.

<u>Θεώρημα 8</u> : Έστω G και H δύο ομάδες Lie πινάκων με άλγεβρες Lie αντιστοίχως τις $\mathfrak{g}$ και $\mathfrak{h}$. Υποθέτουμε ότι η $\Phi: G \to H$ είναι ομομορφισμός ομάδων Lie. Τότε υπάρχει μοναδική πραγματική γραμμική απεικόνιση $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ τέτοια ώστε

$$\varphi(e^{\mathrm{X}}) = e^{\varphi(\mathrm{X})}$$

για κάθε $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$. Με την απεικόνιση φ να έχει επιπλέον τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\varphi\left(\mathrm{A}\mathrm{X}\mathrm{A}^{-1}\right) = \varphi(\mathrm{A})\varphi(\mathrm{X})\varphi(\mathrm{A})^{-1}, \forall \mathrm{X} \in \mathfrak{g}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A} \in G$
2. $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)], \forall \mathrm{X}, Y \in \mathfrak{g}$
3. $\varphi(X) = \dfrac{d}{dt}\Phi\left(e^{t\mathrm{X}}\right)\Big|_{t=0}, \forall \mathrm{X} \in \mathfrak{g}$.

Υποθέτουμε ότι G, H και K είναι ομάδες Lie πινάκων $\Phi: H \to K$ και $\Psi: G \to H$ είναι ομομορφισμοί ομάδων Lie, με την $\Lambda: G \to K$ να είναι η σύνθεση των $\Phi\ \kappa\alpha\iota\ \Psi$ ($\Lambda(\mathrm{A}) = \Phi(\Psi(\mathrm{A}))$). Έστω $\varphi, \psi\ \kappa\alpha\iota\ \lambda$ οι αντίστοιχες απεικονίσεις των αλγεβρών Lie. Τότε, $\lambda(\mathrm{X}) = \varphi(\psi(\mathrm{X}))$.

Στην πράξη δοσμένου ενός ομομορφισμού Φ μπορούμε να κατασκευάσουμε την φ βάσει της ιδιότητας 3. Φυσικά, καθώς η φ είναι πραγματική γραμμική απεικόνιση, μπορούμε να κατασκευάσουμε την φ σε μία βάση της $\mathfrak{g}$ (είναι γραμμικός χώρος!).

Στην γλώσσα των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων η ιδιότητα 3. λέει ότι η φ **είναι η παράγωγος της** Φ στο ταυτοτικό στοιχείο, που είναι και ο βασικός ορισμός της φ.

Μία γραμμική απεικόνιση με την ιδιότητα 3. λέγεται ***Ομομορφισμός αλγεβρών Lie***. Το παραπάνω θεώρημα λέει ότι για κάθε ομομορφισμό ομάδων Lie υπάρχει ένας επαγόμενος ομομορφισμός αλγεβρών Lie. Μπορεί να δειχθεί ότι αντιστροφή γίνεται *υπό συγκεκριμένες συνθήκες*. Συγκεκριμένα, έστω ότι G και H είναι ομάδες Lie και $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie. Εάν η G είναι απλά συνεκτική, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων Lie $\Phi:G\to H$ τέτοια ώστε οι Φ και φ να συνδέονται όπως το παραπάνω θεώρημα.

<u>Ορισμός 20</u> : (***The Adjoint mapping***). Έστω μία ομάδα Lie πινάκων G με άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Τότε, για κάθε $\mathrm{A}\in G$, ορίζεται μία γραμμική απεικόνιση $Ad_{\mathrm{A}}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ με

$$Ad_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})=\mathrm{AXA}^{-1}.$$

<u>Πρόταση 22</u> : Έστω μία ομάδα Lie πινάκων G με άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Ας συμβολίσουμε με $GL(\mathfrak{g})$ την ομάδα όλων των αντιστρέψιμων γραμμικών απεικονίσεων της $\mathfrak{g}$. Τότε για κάθε $\mathrm{A}\in G$, η Ad_{A} είναι αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση με αντίστροφη την $Ad_{\mathrm{A}^{-1}}$, και η απεικόνιση $\mathrm{A}\to Ad_{\mathrm{A}}$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων της G στην $GL(\mathfrak{g})$. Επιπλέον, για κάθε $\mathrm{A}\in G$, η Ad_{A} ικανοποιεί για κάθε $\mathrm{X},\mathrm{Y}\in\mathfrak{g}$ την $Ad_{\mathrm{A}}\left([\mathrm{X},\mathrm{Y}]\right)=\left[Ad_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}),Ad_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y})\right]$.

Καθώς η $\mathfrak{g}$ είναι πραγματικός γραμμικός χώρος διαστάσεως έστω k, η $GL(\mathfrak{g})$ είναι ουσιαστικά η ίδια με την $GL(k;\mathbb{R})$. Οπότε, μπορούμε να θεωρούμε την

$GL(\mathfrak{g})$ ως ομάδα Lie πινάκων. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ είναι συνεχής και επομένως είναι ομομορφισμός ομάδων Lie. Από το θεώρημα 7 υπάρχει μία επαγόμενη πραγματική γραμμική συνάρτηση $\mathrm{X} \to Ad_{\mathrm{X}}$ από την ($\mathfrak{g}$) άλγεβρα Lie της G στην ($gl(\mathfrak{g})$) άλγεβρα Lie της $GL(\mathfrak{g})$ με την ιδιότητα ότι :

$$Ad(e^{\mathrm{X}}) = e^{Ad_{\mathrm{X}}} .$$

<u>Πρόταση 23</u> : Έστω μία ομάδα Lie πινάκων G με άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ και τον ομομορφισμό ομάδων Lie $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ όπως ορίστηκε παραπάνω. Έστω $ad : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$ να είναι η επαγόμενη απεικόνιση άλγεβρα Lie. Τότε για κάθε $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$ θα είναι

$$ad_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] .$$

<u>Απόδειξη</u> : Από το θεώρημα 8 έχουμε την σχέση μεταξύ των δύο συναρτήσεων με παραγώγιση δηλαδή $ad_{\mathrm{X}} = \frac{d}{dt} Ad\left(e^{t\mathrm{X}}\right)\Big|_{t=0}$

Οπότε θα είναι :

$$ad_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) = \frac{d}{dt} Ad\left(e^{t\mathrm{X}}\right)(\mathrm{Y})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{t\mathrm{X}} \mathrm{Y} e^{-t\mathrm{X}}\Big|_{t=0} = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \qquad \square$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η παρακάτω σημαντική πρόταση.

<u>Πρόταση 24</u> : Για κάθε $\mathrm{X} \in M_n(\mathbb{C})$, έχουμε την $ad_{\mathrm{X}} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ τέτοια ώστε $ad_{\mathrm{X}}\mathrm{Y} = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$. Τότε για κάθε $\mathrm{Y} \in M_n(\mathbb{C})$ έχουμε :

$$e^{ad_{\mathrm{X}}}\mathrm{Y} = Ad_{e^{\mathrm{X}}}\mathrm{Y} = e^{\mathrm{X}}\mathrm{Y}e^{-\mathrm{X}} .$$

<u>Απόδειξη</u> : γίνεται και με απ’ ευθείας πράξεις.

Συμπερασματικά μια πεπερασμένων διαστάσεων πραγματική ή μιγαδική Lie άλγεβρα είναι ένας πεπερασμένων διαστάσεων πραγματικός ή μιγαδικός διανυσματικός χώρος g συνοδευόμενος με [.;.] από το gxg στο g με τις ακόλουθες ιδιότητες :

- [.;.] είναι διγραμμικός
- [X,Y]=-[Y,X] για όλα τα X,Y ϵ g
- [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[Y,X]]=0 για όλα τα X,Y,Z ϵ g

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. “Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία”, Ανάργυρου Φελλούρη, Αθήνα 2009.

2. “Graduate Texts in Mathematitics: Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, An Elementary Introduction”, Brian C. Hall, Springer, USA, 2000.

3. Lie Groups, Lie Algebras and some of their applications”, Robert Gilmore, Drexel
4. University, Dover Publications, INC, Mineola, New York, 2002.

5. An Introduction to Lie Groups and Symplectic Geometry”, by Robert L.Bryant , Duke University (1991), Durham, NC.

6. “Lie algebras”, Shlomo Sternberg, 2004.

7. “Notes on Group Actions Manifolds, Lie Groups and Lie Algebras”, Jean Gallier,
8. University of Pennsylvania, Philadelphia USA 2005.

9. “Introduction to Lie groups”, Joseph Hundley, Southern Illinois Umniversity, 2009.

10. “Introduction to Lie groups and Lie algebras”, Arthur A.Sagle & Ralph E.Walde,
11. Academic Press, N.Y, San Francisco, London, 1973.

12. “Finding moonshine, a mathematician journey through symmetry”, Marcus du Sautoy,2008.

13. “Introduction to Differentiable Manifolds”, Louis Auslander & Robert E. MacKenzie,Mineola, New York, 2009.

14. “Ομάδες Lie, Ομογενείς χώροι και Διαφορική Γεωμετρία”, Ανδρέα Αρβανιτογεώργου, Τροχαλία 1999.

15. “Θεωρία Ομάδων”, Ι. Δ. Βέργαδου, 1991

16. “Notes on differential geometry and lie groups” , Jean Gallier Department of computer and information science,University of Pennsylvania

17. “Introduction to Lie Groups and Lie Algebras”, Alexander Kirillov, Jr, Department of Mathematics, Suny at Stony Brook, Stony Brook, NY 11794, USA.