ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΘΕΜΕΛΙΩΔΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE

Κόκκορη Μαρία

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
Γκιντίδης Δρόσος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2017

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής πραγματοποιήθηκε στη σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Κ Δ. Γκιντίδη για την κατανόηση και την καθοδήγησή του όλο αυτό το χρονικό διάστημα.

Θα ήθελα, επίσης, να εκφράσω την ευγνωμοσύνη και τις ευχαριστίες μου σε όλους όσους με βοήθησαν, ηθικά και πρακτικά, κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος 1

Abstract 2

1. Εισαγωγή 3

2. Θεωρία Δυναμικού 4

2.1 Αρμονικές Συναρτήσεις 4

2.2 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών:Μοναδικότητα 17

2.3 Επιφανειακά Δυναμικά 23

2.4 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών: Ύπαρξη 31

3. Μέθοδος Θεμελιωδών Λύσεων 35

3.1 Απαιτήσεις Κανονικότητας Συνόρου 38

3.2 Το Περιγεγραμμένο Ψευδοσύνορο 39

3.3 Χώροι Συναρτήσεων, Θεωρία Κατανομών Και αρμονικά Προβλήματα 40

3.4 Περιγραφή Της Μεθόδου 51

3.5 Αριθμητική Μέθοδος Για το Δισδιάστατο Πρόβλημα 53

Βιβλιογραφία 56

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της μεθόδου θεμελιωδών λύσεων (MFS). Η βασικότερη αιτία ανάπτυξης της MFS είναι το να μπορέσουν να ξεπεραστούν τα μειονεκτήματα της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων (BEM). Και οι δύο μέθοδοι βασίζονται στη θεμελιώδη λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης. Επομένως, η MFS αποτελεί μια αριθμητική τεχνική συνοριακής διακριτοποίησης, μειώνοντας την υπολογιστική πολυπλοκότητα σε σχέση με άλλες μεθόδους.

Σε αντίθεση με τις υπόλοιπες μεθόδους, η MFS αποφεύγει την αριθμητική ολοκλήρωση της μοναδικής θεμελιώδους λύσης. Το μειονέκτημά της έγκειται στο γεγονός ότι χρειάζεται ένα «φανταστικό» όριο έξω από το φυσικό όριο, ώστε να παρακαμφθεί η μοναδικότητα της θεμελιώδους λύσης.

ABSTRACT

The aim of this diploma thesis is to study the method of fundamental solutions (MFS). The most significant reason of its development was the effort to overcome the drawbacks of the boundary element method (BEM). Both methods are based on the fundamental solution of a partial differential equation. Consequently, MFS is a boundary discretization numerical technique that reduces the computational complexity of other methods.

In contrast to other methods, MFS avoids the numerical integration of singular fundamental solution. Its drawback is that it is required to find a fictitious boundary outside the physical domain to circumvent the singularity of fundamental solution.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αρχική υλοποίηση της μεθόδου των θεμελιωδών λύσεων έγινε από τους V. D. Kupradze και M. A. Alexidze στα τέλη της δεκαετίας του ΄50. Η βασική, όμως, πρότασή της ως υπολογιστική τεχνική έγινε από τους R. Mathon και R. L. Johnston το 1970.

Αποτέλεσε χρήσιμο εργαλείο για την λύση μιας πληθώρας φυσικών και μηχανικών προβλημάτων μέχρι το 1990. Τότε μπόρεσαν οι M. A. Golberg και C. S. Chen να την επεκτείνουν τη μέθοδο στα μη ομογενή χωρία και στα χρονοεξαρτώμενα προβλήματα.

Στο 2ο κεφάλαιο, παρουσιάζεται αναλυτικά η θεωρία δυναμικού, η οποία είναι απαραίτητη για την κατανόηση της μεθόδου θεμελιωδών λύσεων. Συγκεκριμένα, γίνεται μελέτη των αρμονικών συναρτήσεων και ελέγχεται η μοναδικότητα και η ύπαρξη λύσεων, αναφορικά με τα προβλήματα συνοριακών τιμών.

Στο 3ο κεφάλαιο, παρουσιάζεται αναλυτικά η μέθοδος θεμελιωδών λύσεων για την εξίσωση Laplace. Αρχικά, ελέγχονται οι απαιτήσεις κανονικότητας του συνόρου, καθώς και οι ιδιότητες που έχει το περιγεγραμμένο ψευδοσύνορο. Εν συνεχεία, καταγράφονται θεωρητικά απαραίτητες έννοιες από τους χώρους συναρτήσεων, τη θεωρία κατανομών, αλλά και τα αρμονικά προβλήματα. Τέλος, καταγράφεται η αριθμητική μέθοδος για τις N διαστάσεις, αλλά και πιο αναλυτικά για το δισδιάστατο πρόβλημα.

2. ΘΕΩΡΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Η επίλυση των προβλημάτων συνοριακών συνθηκών, για μερικές διαφορικές εξισώσεις, αποτελεί μια από τις βασικότερες εφαρμογές των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο, ο στόχος μας είναι να εισάγουμε τις βασικές ιδέες αυτής της εφαρμογής, μελετώντας τα προβλήματα συνοριακών συνθηκών για τη θεωρία δυναμικού. Για λόγους απλούστευσης, περιοριζόμαστε στις περιπτώσεις των χώρων δύο και τριών διαστάσεων. Ασχολούμαστε, λοιπόν, με την κλασική προσέγγιση των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων δεύτερου τύπου στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων. Για την αναπαράσταση των λύσεων της εξίσωσης Laplace, θα παρουσιάσουμε τα θεωρήματα του Green.

2.1 Αρμονικές Συναρτήσεις

Η ανάπτυξη της Θεωρίας Δυναμικού στις αρχές του 19ου αιώνα στηρίχθηκε σε κάποιες βασικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων, τις οποίες θα σκιαγραφήσουμε παρακάτω. Στο όλο εγχείρημα συνέβαλαν ιδιαίτερα οι Dirichlet, Gauss, Green, Riemann και Weierstrass.

***ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1**:*

Μια, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση u, ορισμένη σε έναν τομέα $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2,3,...,$ καλείται αρμονική αν ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $\Delta u = 0$, στο Ω. Όπου:

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^{\,2}} .$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι υπάρχει μια στενή σύνδεση μεταξύ των αρμονικών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^3$ και των ολόμορφων συναρτήσεων στο $\mathbb{C}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.1:

Έστω $f(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$, όπου $z = x_1 + ix_2$, αναλυτική σε ανοικτό σύνολο Ω. Τότε οι συναρτήσεις $u(x_1, x_2)$ και $v(x_1, x_2)$ είναι αρμονικές στο Ω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.2:

Η συνάρτηση

$$G(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, m=2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}, m=3 \end{cases},$$

ορισμένη για κάθε $x \neq y$ στο $\mathbb{R}^m$, ονομάζεται θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace.

Για δεδομένο $y \in \mathbb{R}^m$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^m \setminus \{y\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Το αποτέλεσμα προκύπτει από απλή παραγώγιση.

□

Για $n \in \mathbb{N}$, ως $C^n(\Omega)$ ορίζουμε τον γραμμικό χώρο των συναρτήσεων με πραγματικές (ή μιγαδικές) τιμές, ορισμένες σε ένα χωρίο Ω, οι οποίες είναι n φορές συνεχώς παραγωγίσιμες.

Ως $C^n(\overline{\Omega})$, ορίζουμε τον υπόχωρο όλων των συναρτήσεων που ανήκουν στο $C^n(\Omega)$, οι οποίες, μαζί με όλες τις παραγώγους τους μέχρι τάξεως n, μπορούν να επεκταθούν συνεχώς από τον χώρο Ω στην κλειστότητα $\overline{\Omega}$.

Ένα φραγμένο ανοικτό χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ με σύνορο $\partial\Omega$, λέγεται ότι είναι τάξεως C^n, $n \in \mathbb{N}$, αν η κλειστότητα $\overline{\Omega}$ επιδέχεται ανοικτό πεπερασμένο κάλυμμα $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{q=1}^{p} V_q$, τέτοιο ώστε για κάθε ένα από τα V_q, που τέμνονται με το σύνορο $\partial\Omega$,να ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- Η τομή $V_q \bigcap \overline{\Omega}$ μπορεί να απεικονιστεί ισομορφικά (1-1 και επί) στην μισή μπάλα $H := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < 1, x_m > 0\}$, στο $\mathbb{R}^m$
- Η απεικόνιση αυτή, καθώς και η αντίστροφή της είναι n φορές συνεχώς παραγωγίσιμες
- Η τομή $V_q \bigcap \partial\Omega$ απεικονίζεται πάνω στον δίσκο $H \bigcap \{x \in \mathbb{R}^m : x_m = 0\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.3 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ GREEN):

Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο τάξης C^1 και έστω ν το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του συνόρου $\partial\Omega$, με φορά προς το εξωτερικό του Ω.

Τότε, για $u \in C^1(\overline{\Omega})$ και $\upsilon \in C^2(\overline{\Omega})$ έχουμε το πρώτο θεώρημα του Green

$$\int_{\Omega} (u\Delta\upsilon + gradu \cdot grad\upsilon)dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}ds$$

και για $u, \upsilon \in C^2(\overline{\Omega})$ έχουμε το δεύτερο θεώρημα του Green

$$\int_{\Omega} (u\Delta\upsilon + \upsilon\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu} - \upsilon\frac{\partial u}{\partial\nu} \right) ds\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Εφαρμόζουμε το θεώρημα απόκλισης του Gauss:

$$\int_{\Omega} divAdx = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot Ads$$

στον διανυσματικό χώρο $A \in C^1(\overline{\Omega})$.

Ο χώρος αυτός ορίζεται ως:

$$A := ugrad\upsilon\,.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε:

$$div(u \cdot grad\upsilon) = gradu \cdot grad\upsilon + u \cdot divgrad\upsilon,$$

από το οποίο προκύπτει το πρώτο θεώρημα.

Για να αποδείξουμε το δεύτερο θεώρημα αλλάζουμε την θέση των u και υ και αφαιρούμε.

□

Σημειώνουμε ότι οι υποθέσεις κανονικότητας για το χωρίο Ω είναι επαρκείς συνθήκες για την εγκυρότητα των θεωρημάτων Gauss και Green. Τα αποτελέσματα ισχύουν και για πιο ασθενείς συνθήκες. Συγκεκριμένα το σύνορο, θα μπορούσε να έχει άκρα και γωνίες. [1]

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.1.1:

Έστω $v \in C^2(\overline{\Omega})$ αρμονική στο Ω. Τότε:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \upsilon}{\partial v} ds = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Απλά αντικαθιστούμε $u = 1$ στο πρώτο θεώρημα του Green.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.4 (ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ GREEN):

Έστω Ω ορισμένο όπως στο θεώρημα του Green και $u \in C^2(\overline{\Omega})$ αρμονική στο Ω.

Τότε:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial v}(y) G(x,y) - u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)} \right\} ds(y), x \in \Omega.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Για $x \in \Omega$ διαλέγουμε μια σφαίρα $S(x;r) := \{ y \in \mathbb{R}^m : |y - x| = r \}$ ακτίνας r τέτοια ώστε $S(x;r) \subset \Omega$ και κατευθύνουμε το μοναδιαίο κάθετο ν του $S(x;r)$ στο εσωτερικό του $S(x;r)$.

Τώρα, εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα του Green στην αρμονικές συναρτήσεις u και $S(x;r)$ στο χωρίο $\{ y \in D : |y - x| > r \}$ και βρίσκουμε:

$$\int_{\partial\Omega \cap S(x;r)} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial u}{\partial v} G(x,y) \right\} ds(y) = 0 \ .$$

Αφού στο $S(x;r)$ έχουμε

$$grad_y G(x,y) = \frac{v(y)}{\omega_m r^{m-1}} \ ,$$

όπου $\omega_2 = 2\pi, \omega_3 = 4\pi, \ldots$ ένας ευθύς υπολογισμός, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής και το πόρισμα δείχνουμε ότι:

$$\lim_{r\to 0}\int_{S(x;r)}\left\{u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)}-\frac{\partial u}{\partial v}(y)G(x,y)\right\}ds(y)=u(x),$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

□

Από τον τύπο του Green μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι οι αρμονικές συναρτήσεις είναι αναλυτικές συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών τους. [2]

Στα μαθηματικά, μια αναλυτική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση που τοπικά δίνεται από μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά. Μια συνάρτηση είναι αναλυτική αν και μόνο αν είναι ίση με μια σειρά Taylor σε κάποια γειτονιά για κάθε σημείο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.5:

Οι αρμονικές συναρτήσεις είναι αναλυτικές, δηλαδή κάθε αρμονική συνάρτηση έχει μια τοπική επέκταση δυναμοσειράς.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Για $f\in C(\partial\Omega)$ δείχνουμε ότι η συνάρτηση

$$u(x):=\int_{\partial\Omega}G(x,y)\,f(y)ds(y),x\in\Omega$$

είναι αναλυτική στο Ω και περιοριζόμαστε στην διδιάστατη περίπτωση.

Για τον σκοπό αυτό, καθορίζουμε ένα αυθαίρετο σημείο $x_0\in\Omega$ και επιλέγουμε R>0 τέτοιο ώστε ο δίσκος $B[x_0;3R]\subset\Omega$ και ορίζουμε:

$$V[x_0;R]:=\left\{(x,y):|x-x_0|\le r,|y-x_0|\ge 3R\right\}.$$

Με την βοήθεια του:

$$|x-y|^2=|x_0-y|^2\left\{1+2\frac{(x_0-y)(x-x_0)}{|x_0-y|^2}+\frac{|x-x_0|^2}{|x_0-y|^2}\right\}$$

προκύπτει η σειρά

$$\ln\frac{1}{|x-y|}=\ln\frac{1}{|x_0-y|}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}t^k=\ln\frac{1}{|x_0-y|}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\xi^j\eta^{k-j}\ , \quad (1)$$

όπου t:=ξ+η, με

$$\xi:=2\frac{(x_0-y)\cdot(x-x_0)}{|x_0-y|^2}\ \text{και}\ \eta:=\frac{|x-x_0|^2}{|x_0-y|^2}\ .$$

Για $(x,y)\in V[x_0;R]$ και $k\in\mathbb{N}$ μπορούμε να εκτιμήσουμε:

$$\left|\frac{(-1)^k}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\xi^j\eta^{k-j}\right|\le\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|\xi|^j|\eta|^{k-j}=\left(|\xi|+|\eta|\right)^k\le\frac{7^k}{9^k}\ .$$

Ως εκ τούτου η σειρά (1) έχει συγκλίνον άνω φράγμα, επομένως είναι απολύτως και ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο $V[x_0;R]$.

Για αυτόν το λόγο, μπορούμε να αναδιατάξουμε την σειρά και να μαζέψουμε τις δυνάμεις του ξ^2 και του η, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα:

$$\ln\frac{1}{|x-y|}=\ln\frac{1}{|x_0-y|}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\xi\sum_{j=0}^{k}a_{kj}\xi^{2j}\eta^{k-j}+\sum_{j=0}^{k}\beta_{kj}\xi^{2j}\eta^{k-j}\right\},$$

με πραγματικούς συντελεστές α_{kj} και β_{kj}.

Εφόσον τα δύο αθροίσματα σε αυτή την επέκταση είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού 2k+1 και 2k, αντίστοιχα, μπορούμε να ξαναγράψουμε την προηγούμενη σχέση ως:

$$\ln\frac{1}{|x-y|}=\ln\frac{1}{|x_0-y|}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j_1+j_2=k}\gamma_{j_1j_2}(x_0,y)(x_1-x_{01})^{j_1}(x_2-x_{02})^{j_2}\ ,$$

με πραγματικούς συντελεστές $\gamma_{j_1j_2}$, εξαρτώμενους από το $x_0=(x_{01},x_{02})$ και το y, και από την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $V[x_0;R]$.

Έτσι, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την συγκεκριμένη σειρά όρο προς όρο και να βρούμε :

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j_1+j_2=k} c_{j_1 j_2}(x_0)(x_1-x_{01})^{j_1}(x_2-x_{02})^{j_2}\ ,$$

όπου $c_{j_1 j_2}$ πραγματικοί συντελεστές, που εξαρτώνται από το x_0 και συγκλίνουν ομοιόμορφα για κάθε $x=(x_1,x_2)\in B[x_0;R]$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει και ο δεύτερος όρος του τύπου του Green καθώς και η περίπτωση των τριών διαστάσεων.

□

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί μια ειδική περίπτωση ενός πιο γενικού αποτελέσματος για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, το οποίο ονομάζεται θεώρημα Holmgren.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.6:

Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο τάξης C^1 και έστω $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ αρμονική στο Ω , τέτοια ώστε $u=\dfrac{\partial u}{\partial v}=0$ στο Γ, για κάποιο ανοικτό υποσύνολο $\Gamma\subset\partial\Omega$.
Τότε το u μηδενίζεται με τον ίδιο τρόπο σε όλο το Ω.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έχοντας τον τύπο του Green:

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\left\{\frac{\partial u}{\partial v}(y)G(x,y)-u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)}\right\}ds(y),\ x\in\Omega\ ,$$

μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό του u θέτοντας

$$u(x):=\int_{\partial\Omega\setminus\Gamma}\left\{\frac{\partial u}{\partial v}(y)G(x,y)-u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)}\right\}ds(y)\ \text{ για }\ x\in\left(\mathbb{R}^m\setminus\overline{\Omega}\right)\cup\Gamma\ .$$

Τότε, από το δεύτερο ολοκληρωτικό θεώρημα του Green

$$\int_{\Omega}(u\Delta\upsilon+\upsilon\Delta u)dx=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\upsilon}{\partial v}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial v}\right)ds\ ,$$

έχουμε ότι u=0 στο $\mathbb{R}^m\setminus\overline{\Omega}$.

Ορίζουμε ως P μια συνιστώσα του $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$ με $\Gamma \bigcap \partial P \neq \varnothing$.

Προφανώς, η u αποτελεί λύση της εξίσωσης Laplace στο $\left(\mathbb{R}^m \setminus \partial\Omega\right) \bigcup \Gamma$ και επομένως, u=0 στο Ω, δεδομένου ότι τα Ω και P είναι συνεκτικά μέσω του ανοίγματος Γ στο σύνορο $\partial\Omega$.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.7 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ):

Έστω u αρμονική σε μια ανοικτή μπάλα $B(x;r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < r \right\}$, με σύνορο $S(x;r)$, και συνεχής στην κλειστότητα $\mathrm{B}[x;r]$.

Τότε:

$$u(x) = \frac{m}{\omega_m r^m} \int_{B[x;r]} u(y)dy = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int_{S(x;r)} u(y)ds(y),$$

δηλαδή, η τιμή της u στο κέντρο της μπάλας είναι ίση με τις ολοκληρωτικές μέσες τιμές πάνω στην μπάλα και στην συνοριακή της επιφάνεια ($\omega_2=2\pi$, $\omega_3=4\pi$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Για κάθε 0<ρ<r έχουμε $u \in C^2\left(B[x;\rho]\right)$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} ds = 0 \text{ και } u(x) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial v}(y) G(x,y) - u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)} \right\} ds(y), x \in \Omega. .$$

Από αυτά τα δύο προκύπτει ότι:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_m \rho^{m-1}} \int_{|y-x|=\rho} u(y)ds(y)$$

και ο δεύτερος τύπος της μέσης τιμής προκύπτει από το πέρασμα στο όριο ρ → r.

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία με ρ_{m-1} και ολοκληρώνοντας ως προς ρ από 0 έως r προκύπτει ο πρώτος τύπος της μέσης τιμής.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.8 (ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ-ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ):

Μια αρμονική συνάρτηση σε ένα χωρίο δεν μπορεί να λάβει μέγιστο ή ελάχιστο, εκτός αν είναι σταθερή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Αρκεί να αποδείξουμε την περίπτωση του μεγίστου.

Έστω u μια αρμονική συνάρτηση στο χωρίο Ω και υποθέτουμε ότι λαμβάνει την μέγιστη τιμή της στο Ω, δηλαδή το σύνολο $\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$,όπου $M := \sup_{x\in\Omega} u(x)$ δεν είναι κενό.

Εφόσον η u είναι συνεχής, το σύνολο Ω_M είναι κλειστό σε σχέση με το Ω.

Έστω x ένα τυχαίο σημείο του Ω_M και εφαρμόζουμε το θεώρημα της μέσης τιμής στην αρμονική $M-u$ σε μία μπάλα $B(x;r)$,όπου $B[x;r] \subset \Omega$.

Τότε:

$$0 = M - u(x) = \frac{m}{\omega_m r^{m-1}} \int_{B[x;r]} \{M - u(y)\} dy \ ,$$

έτσι ώστε $M = u$ στο $B(x;r)$.

Επομένως, Ω_M είναι ανοικτό σε σχέση με το Ω. Επομένως $\Omega = \Omega_M$, δηλαδή η u είναι σταθερή σε όλο το Ω.

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.1.2:

Έστω Ω φραγμένος χώρος και u αρμονική στο Ω και συνεχής στο $\overline{\Omega}$. Τότε, η u λαμβάνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο σύνορο.

Για την μελέτη εξωτερικών προβλημάτων συνοριακών τιμών πρέπει να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των αρμονικών συναρτήσεων, καθώς $|x| \to \infty$. Για τον σκοπό αυτό θα επεκταθεί ο τύπος του Green σε μη φραγμένα χωρία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.9:

Υποθέτουμε ότι Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο τάξης C^1, με συνεκτικό σύνορο $\partial\Omega$, και ν το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα με φορά προς τα έξω και έστω $u \in C^2\left(\mathbb{R}^m \setminus \Omega\right)$ μια φραγμένη αρμονική συνάρτηση.

Τότε:

$$u(x) = u_\infty + \int_{\partial\Omega} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu} G(x,y) \right\} ds(y),$$

για $x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$ και μια σταθερά u_∞.

Για m=2, επιπλέον ισχύει:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0.$$

Επίσης, η ιδιότητα της μέσης τιμής στο άπειρο

$$u_\infty = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y|=r} u(y) ds(y)$$

ικανοποιείται για επαρκώς μεγάλο r.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η πηγή $x = 0$ εμπεριέχεται στο χωρίο Ω. Εφόσον το u είναι φραγμένο, υπάρχει σταθερά $M \succ 0$, τέτοια ώστε $|u(x)| \le M$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega$.

Διαλέγουμε R_0 επαρκώς μεγάλο, έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε ότι $y \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega$, για κάθε $|y| \ge \frac{R_0}{2}$.

Τότε, για δεδομένο x, τέτοιο ώστε $|x| \ge R_0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της μέσης τιμής στις συνιστώσες του grad u.

Από αυτό, καθώς και από το ολοκληρωτικό θεώρημα του Gauss, προκύπτει ότι :

$$gradu(x) = \frac{m}{\omega_m r^m} \int_{B[x;r]} gradu(y) dy = -\frac{1}{\omega_m r^m} \int_{S(x;r)} \nu(y) u(y) ds(y),$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του $S(x;r)$ με φορά προς το εσωτερικό του, και διαλέγουμε την ακτίνα να είναι $|r| = \frac{x}{2}$.

Τότε, μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι:

$$|gradu(x)| \le \frac{mM}{r} = \frac{2mM}{|x|} \text{ για κάθε } |x| \ge R_0 .$$

Για m=2 διαλέγουμε το r επαρκώς μεγάλο, ώστε $S_r := S(0;r)$ να εμπεριέχεται στο $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$ και εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα του Green στην u και στην $G(0;\cdot)$, στον δακτύλιο $r < |y| < R$.

Χρησιμοποιώντας την $grad_y G(x,y) = \frac{\nu(y)}{\omega_m r^{m-1}}$ προκύπτει ότι :

$$\frac{1}{r}\int_{S_r} uds - \ln\frac{1}{r}\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds = \frac{1}{R}\int_{S_R} uds - \ln\frac{1}{R}\int_{S_R}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds .$$

Σημειώνουμε ότι το ν είναι το μοναδιαίο κάθετο του S_r και του S_R.

Από αυτή την σχέση, καθώς και από το πόρισμα 2.1.1, εφαρμοσμένο στον δακτύλιο ανάμεσα στο $\partial\Omega$ και στο S_r, βρίσκουμε ότι:

$$\frac{1}{r}\int_{S_r} uds + \ln\frac{1}{r}\int_{\partial S_r}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds = \frac{1}{R}\int_{S_R} uds + \ln\frac{1}{R}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds .$$

Εφόσον ο πρώτος όρος στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης φράσσεται από το $2\pi M$, αν έχουμε $R \to \infty$, αυτό υποδηλώνει ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds$ μηδενίζεται.

Σημειώνουμε ότι η συνθήκη $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds = 0$ ικανοποιείται μόνο στην περίπτωση διδιάστατου χώρου και είναι απόρροια του ότι στο $\mathbb{R}^2$ η θεμελιώδης λύση δεν είναι φραγμένη στο άπειρο.

Για $x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$, m=2,3, επιλέγουμε επαρκώς μεγάλο r, ώστε $\overline{\Omega} \subset B(x;r)$.

Τότε, από τον τύπο του Green:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega}\left\{\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)G(x,y) - u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)}\right\}ds(y)$$

εφαρμοσμένο στο χωρίο ανάμεσα στο ∂D και στο Ω_r προκύπτει ότι :

$$u(x)=\int_{\partial\Omega\cup S(x;r)}\left\{u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)}-\frac{\partial u}{\partial v}(y)G(x,y)\right\}ds(y)$$

Βάσει του πορίσματος 2.1.1 βρίσκουμε ότι:

- Αν m=3: $\int_{S(x;r)}\frac{\partial u}{\partial v}(y)G(x,y)ds(y)=\frac{1}{4\pi r}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial v}(y)ds(y)\to 0, r\to\infty$
- Αν m=2: $\int_{S(x;r)}\frac{\partial u}{\partial v}(y)G(x,y)ds(y)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial v}(y)ds(y)=0$

Με την βοήθεια του $grad_y G(x,y)=\frac{v(y)}{\omega_m r^{m-1}}$, έχουμε ότι:

$$\int_{S(x;r)}u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)}ds(y)=\frac{1}{\omega_m r^{m-1}}\int_{|y-x|=r}u(y)ds(y).$$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε ότι :

$$u(x+y)-u(y)=gradu(y+\theta x)\cdot x, \text{ για κάποιο } \theta\in[0,1].$$

Χρησιμοποιώντας την:

$$|gradu(x)|\le\frac{mM}{r}=\frac{2mM}{|x|}$$

υπολογίζουμε ότι:

$$|u(x+y)-u(y)|\le\frac{2mM|x|}{|y|-|x|}$$

δεδομένου ότι το $|y|$ είναι αρκετά μεγάλο.

Επομένως:

$$\frac{1}{\omega_m r^{m-1}}\left|\int_{|y-x|=r}u(y)ds(y)-\int_{|y|=r}u(y)ds(y)\right|\le\frac{C}{r},$$

για μια σταθερα $C \succ 0$, που εξαρτάται από το x, και για επαρκώς μεγάλο r.

Τώρα, επιλέγουμε μια ακολουθία (r_n) ακτίνων με $r_n \to \infty$.

Δεδομένου ότι οι ολοκληρωτικές μέσες τιμές

$$\mu_n := \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int_{|y|=r_n} u(y) ds(y)$$

φράσσονται καθώς $|\mu_n| \le M, n \in \mathbb{N}$, από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία (μ_n) συγκλίνει. Δηλαδή για κάποιο $u_\infty \in \mathbb{R}$:

$$\mu_n \to u_\infty, n \to \infty$$

Από αυτό, λαμβάνοντας υπόψη τις ανωτέρω εκτιμήσεις, έχουμε ότι:

$$\int_{S(x;r_n)} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial u}{\partial v}(y) G(x,y) \right\} ds(y) \to u_\infty, n \to \infty .$$

Ως εκ τούτου, αν θέσουμε $r = r_n$ στην

$$u(x) = \int_{\partial\Omega \cup S(x;r)} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial u}{\partial v}(y) G(x,y) \right\} ds(y)$$

και παίρνοντας το όριο $n \to \infty$, προκύπτει η :

$$u(x) = u_\infty + \int_{\partial\Omega} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial u}{\partial v} G(x,y) \right\} ds(y) .$$

Τέλος, αν θέσουμε $R = r_n$ στην

$$\frac{1}{r} \int_{S_r} u ds + \ln \frac{1}{r} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} ds = \frac{1}{R} \int_{S_R} u ds + \ln \frac{1}{R} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} ds ,$$

παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας την $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} ds = 0$ προκύπτει η

$$u_\infty = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y|=r} u(y) ds(y)$$

□

2.2 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών: Μοναδικότητα

Ο τύπος του Green:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial v}(y) G(x,y) - u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)} \right\} ds(y), x \in \Omega$$

παριστάνει οποιαδήποτε αρμονική συνάρτηση υπό το πρίσμα των συνοριακών της τιμών και των κανονικών παραγώγων της πάνω στο σύνορο, τα οποία είναι γνωστά και ως δεδομένα Cauchy. [2]

Στην μετέπειτα ανάλυση θα δούμε ότι οι αρμονικές συναρτήσεις είναι ήδη πλήρως ορισμένες, είτε από τις συνοριακές τους τιμές, είτε μόνο από τις κανονικές παραγώγους, μέχρι μια σταθερά.

Στη συνέχεια, έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ένα φραγμένο χωρίο τάξης C^2.

Για λόγους απλούστευσης, στο υπόλοιπο κεφάλαιο υποθέτουμε ότι το σύνορο $\partial\Omega$ είναι συνεκτικό.

Και πάλι, ως ν ορίζουμε το μοναδιαίο κάθετο του $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του τομέα $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$.

Εσωτερικό Πρόβλημα Dirichlet:

Να βρεθεί μια συνάρτηση u, η οποία να είναι αρμονική στο Ω, συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και να ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $u = f$, στο $\partial\Omega$, όπου f μια δεδομένη συνεχής συνάρτηση.

Εσωτερικό Πρόβλημα Neumann:

Να βρεθεί μια συνάρτηση u, η οποία να είναι αρμονική στο Ω, συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και να ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $\frac{\partial u}{\partial v} = g$, στο $\partial\Omega$, υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης στο $\partial\Omega$:

$$\lim_{h \to 0^+} v(x) \cdot gradu(x - hv(x)) = g(x), x \in \partial\Omega$$

όπου g μια δεδομένη συνεχής συνάρτηση.

Εξωτερικό Πρόβλημα Dirichlet:

Να βρεθεί μια συνάρτηση u, η οποία να είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$, συνεχής στο $\mathbb{R}^m \setminus \Omega$ και να ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $u = f$, στο $\partial\Omega$, όπου f μια δεδομένη συνεχής συνάρτηση. Για $|x| \to \infty$ απαιτείται:

$$u(x) = O(1), m = 2 \text{ και } u(\chi) = o(1), m = 3$$

ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις.

Εξωτερικό Πρόβλημα Neumann:

Να βρεθεί μια συνάρτηση u, η οποία να είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$, συνεχής στο $\mathbb{R}^m \setminus \Omega$και να ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $\frac{\partial u}{\partial v} = g$ στο $\partial\Omega$, υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης στο $\partial\Omega$, όπου g μια δεδομένη συνεχής συνάρτηση. Για $|x| \to \infty$απαιτείται $u(\chi) = o(1)$, ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις.

□

Σημειώνουμε ότι για τα εξωτερικά προβλήματα επιβάλλουμε την συνθήκη $u_\infty = 0$, με εξαίρεση την περίπτωση του προβλήματος Dirichlet στο $\mathbb{R}^2$, όπου αρκεί η u να είναι φραγμένη.

Ο στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι κάθε ένα από τα παραπάνω θεωρητικά προβλήματα συνοριακών τιμών έχει λύση, η οποία μάλιστα είναι μοναδική και η οποία εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τις συνοριακές συνθήκες, δηλαδή είναι σωστά τοποθετημένο, υπό την έννοια του J. Hadamard.

Οι απαιτήσεις οι οποίες έθεσε ο Hadamard στις λύσεις των προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών είναι οι εξής:

- Η λύση πρέπει να υπάρχει
- Η λύση πρέπει να είναι μοναδική
- Η λύση πρέπει να είναι ευσταθής (να εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τις συνοριακές συνθήκες)

Στις αποδείξεις μοναδικότητας θα χρειαστούμε το θεώρημα του Green, το οποίο παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.
Δεδομένου ότι για τις λύσεις των προβλημάτων συνοριακών τιμών δεν υποθέτουμε την διαφορισιμότητα έως το σύνορο, εισάγουμε την έννοια των παράλληλων επιφανειών.

Αυτές περιγράφονται από την εξής σχέση:

$$\partial\Omega_h := \{z = x + hv(x) : x \in \partial\Omega\},$$

όπου h μια πραγματική παράμετρος.
Επειδή το $\partial\Omega$ είναι εξ υποθέσεως τάξης C^2, παρατηρούμε ότι $\partial\Omega_h$ είναι τάξης C^1.
Για $m = 3$, θεωρούμε ότι:

$$x(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u)), u = (u_1, u_2)$$

είναι μια κανονική παραμετρική αναπαράσταση ενός επιφανειακού τμήματος (που φράσσεται από κλειστή καμπύλη) του $\partial\Omega$.

Με ευθείς υπολογισμούς διαφορικής γεωμετρίας αποδεικνύεται ότι οι ορίζουσες:

$$g(u) := \det\left|\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}\right| \text{ και } g(u;h) := \det\left|\frac{\partial z}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial u_j}\right|$$

σχετίζονται μέσω της :

$$g(u;h) = g(u)\left[1 - 2hH(u) + h^2K(u)\right]^2,$$

όπου H και K δηλώνουν την μέση και την Γκαουσιανή καμπυλότητα (καμπυλότητα κατά Gauss) αντίστοιχα.

Αυτό επιβεβαιώνει ότι οι παράλληλες επιφάνειες είναι καλώς ορισμένες, υπό την προϋπόθεση ότι η παράμετρος h είναι αρκετά μικρή ώστε να εξασφαλίζεται ότι η ποσότητα $\left[1 - 2hH(u) + h^2K(u)\right]$ παραμένει θετική.

Αυτό διασφαλίζει επίσης ότι σε μια αρκετά μικρή γειτονιά του $\partial\Omega$, κάθε σημείο z μπορεί να έχει μοναδική απεικόνιση της μορφής $z = x + hv(x)$, όπου $x \in \partial\Omega$ και $h \in \mathbb{R}$.

Πιο συγκεκριμένα, τα επιφανειακά στοιχεία ds του $\partial\Omega$ και ds_h του $\partial\Omega_h$ σχετίζονται μέσω της σχέσης

$$ds_h = \left\{1 - 2hH(u) + h^2K(u)\right\} ds(x).$$

Δεδομένου ότι $v(x) \cdot v(x) = 1$, έχουμε ότι:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial u_i} \cdot v(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, \text{ για κάθε } x \in \partial\Omega$$

Επομένως, τα εφαπτομενικά διανύσματα

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} + h\frac{\partial \nu(x)}{\partial u_i}, i = 1, 2, \ldots,$$

για κάθε (αρκετά μικρό) h βρίσκονται στο εφαπτόμενο επίπεδο του $\partial\Omega$ στο σημείο x, δηλαδή το κάθετο διάνυσμα $\nu_h(z)$ της παράλληλης επιφάνειας $\partial\Omega_h$ συμπίπτει με το κάθετο διάνυσμα $\nu(x)$ της $\partial\Omega_h$ για κάθε $x \in \partial\Omega$.

Ως εκ τούτου, ενόψει της $ds_h = \{1 - 2hH(u) + h^2K(u)\}ds(x)$, συμπεραίνουμε ότι τα θεωρήματα 2.1.3 και 2.1.8 εξακολουθούν να ισχύουν για αρμονικές συναρτήσεις $u \in C(\overline{\Omega})$ και $u \in C(\mathbb{R}^m \setminus \Omega)$ αντίστοιχα, δεδομένου ότι έχουν μια κάθετη παράγωγο υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Σημειώνουμε ότι στις δύο διαστάσεις η εξίσωση $ds_h = \{1 - 2hH(u) + h^2K(u)\}ds(x)$, αντικαθίσταται από την $ds_h(z) = \{1 - \kappa h\}ds(x)$, όπου κ ο δείκτης καμπυλότητας της $\partial\Omega$.

Δηλαδή, για την αναπαράσταση της $\partial\Omega = \{x(s) : s_0 \le s \le s_1\}$ υπό τον όρο του μήκους του τόξου έχουμε ότι $\kappa = \nu \cdot x''$. [1]

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.1:

Τόσο το εσωτερικό, όσο και το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet έχουν το πολύ μία λύση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η διαφορά $u := u_1 - u_2$ δύο λύσεων του προβλήματος Dirichlet είναι μια αρμονική συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής μέχρι το σύνορο και ικανοποιεί την ομογενή συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο $\partial\Omega$.

Από γνωστό πόρισμα, γνωρίζουμε ότι για Ω φραγμένο χωρίο και u αρμονική στο Ω και συνεχή στην κλειστότητα του Ω, η u θα λαμβάνει και την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο.
Τότε, από την αρχή του μεγίστου-ελαχίστου συνδυασμένη με το πόρισμα έχουμε ότι u=0 στο Ω, για το εσωτερικό πρόβλημα.

Επίσης, παρατηρώντας ότι $u(x) = o(1), |x| \to \infty$, προκύπτει ότι u=0 στο $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, για το εξωτερικό πρόβλημα στις τρεις διαστάσεις. [7]

Για το εξωτερικό πρόβλημα στις δύο διαστάσεις έχουμε, από την αρχή του μεγίστου-ελαχίστου, ότι το supremum και το infimum της φραγμένης αρμονικής συνάρτησης u είτε λαμβάνονται στο σύνορο είτε είναι ίσα με u_∞.

Όταν και το μέγιστο και το ελάχιστο λαμβάνουν την τιμή τους στο σύνορο, τότε από την ομογενή συνοριακή συνθήκη αμέσως προκύπτει ότι u=0 στο $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$.

Αν το supremum ισούται με u_∞, τότε από την $u(x) \le u_\infty$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ και από την αρχή μέσης τιμής παρατηρούμε ότι $u = u_\infty$ στο εξωτερικό κάποιου κύκλου.

Τώρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή του μεγίστου για να δούμε ότι $u = u_\infty$ σε όλο το $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, και με την ομογενή συνοριακή συνθήκη συμπεραίνουμε εν τέλει ότι u=0 στο $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

Η περίπτωση όπου το infimum είναι ίσο με u_∞ γίνεται με αντίστοιχο τρόπο.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.2:

Δύο λύσεις του εσωτερικού προβλήματος Neumann μπορούν να διαφέρουν μόνο κατά μία σταθερά.

Το εξωτερικό πρόβλημα Neumann έχει το πολύ μία λύση.

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ*:**

Η διαφορά $u := u_1 - u_2$ των δύο λύσεων του προβλήματος Neumann είναι μια αρμονική συνάρτηση, συνεχής μέχρι το σύνορο, που ικανοποιεί την ομογενή συνοριακή συνθήκη $\partial u / \partial \nu = 0$ στο $\partial\Omega$, υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Για το εσωτερικό πρόβλημα, υποθέτουμε ότι u δεν είναι σταθερή στο Ω.

Τότε, υπάρχει κλειστή μπάλα B, η οποία περιέχεται στο Ω, τέτοια ώστε:

$$\int_B |gradu|^2 \, dx > 0.$$

Από το πρώτο θεώρημα του Green έχουμε ότι :

$$\int_D (u\Delta\upsilon + gradu \cdot grad\upsilon)dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu} ds.$$

Το εφαρμόζουμε στο εσωτερικό Ω_h, μιας παράλληλης επιφάνειας

$$\partial\Omega_h := \{x - h\nu(x) : x \in \partial\Omega\}$$

με επαρκώς μικρό h>0 και εξάγουμε την:

$$\int_B |gradu|^2\, dx \le \int_{D_h} |gradu|^2\, dx = \int_{\partial D_h} u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds .$$

Περνώντας στο όριο για $h \to 0$, βρισκόμαστε στην αντίφαση $\int_B |gradu|^2\, dx \le 0$.

Άτοπο. Επομένως, η u πρέπει να είναι σταθερά.

Για το εξωτερικό πρόβλημα, υποθέτουμε ότι $gradu \neq 0$ στο $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$.

Τότε, και πάλι υπάρχει κάποια κλειστή μπάλα B, η οποία περιέχεται στο $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$, τέτοια ώστε: $\int_B |gradu|^2\, dx > 0$.

Από το πρώτο θεώρημα του Green, εφαρμοσμένο στο πεδίο $\Omega_{h,r}$, ανάμεσα σε μια παράλληλη επιφάνεια $\partial\Omega_h := \{x + h\nu(x) : x \in \partial\Omega\}$ με επαρκώς μικρό $h \succ 0$ και μια επαρκώς μεγάλη σφαίρα Ω_r ακτίνας r με κέντρο την πηγή (με εσωτερικό κάθετο ν), έχουμε ότι :

$$\int_B |gradu|^2\, dx \le \int_{\Omega_{h,r}} |gradu|^2\, dx = -\int_{S_r} u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds - \int_{\partial\Omega_h} u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds .$$

Έχοντας $r \to \infty$ και $h \to 0$, με την βοήθεια των ασύμπτωτων

$$u(x) = u_\infty + O\left(\frac{1}{|x|}\right), gradu(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right), |x| \to \infty$$

βρισκόμαστε στην αντίφαση $\int_B |gradu|^2\, dx \le 0$.

Επομένως, u πρέπει να είναι σταθερά σε όλο το $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$, και μάλιστα αυτή η σταθερά πρέπει να είναι μηδέν, εφόσον $u_\infty = 0$.

□

Από τις αποδείξεις είναι προφανές ότι τα αποτελέσματα για την μοναδικότητα συνεχίζουν να ισχύουν και υπό πιο ασθενείς συνθήκες ομαλότητας στο σύνορο.

Βλέπουμε επίσης ότι η μοναδικότητα για το πρόβλημα Dirichlet μέσω της αρχής μεγίστου-ελαχίστου δεν απαιτεί καμία ομαλότητα στο σύνορο, ενώ η μοναδικότητα για το πρόβλημα Neumann ισχύει για όλα τα σύνορα που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Green.

Έχουμε διατυπώσει λοιπόν τα προβλήματα συνοριακών τιμών για σύνορα του C^2, ώστε να αποδείξουμε στη συνέχεια την ύπαρξη των λύσεων κάτω από αυτές τις συνθήκες.

2.3 Επιφανειακά Δυναμικά

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.1:

Δίνεται μια συνάρτηση $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Οι συναρτήσεις

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \varphi(y) G(x,y) ds(y), x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial\Omega$$

και

$$\upsilon(x) := \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y), x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial\Omega$$

ονομάζονται, αντίστοιχα, δυναμικά απλού στρώματος και διπλού στρώματος με πυκνότητα φ.

Στις δύο διαστάσεις, περιστασιακά, για προφανείς λόγους τις ονομάζουμε λογαριθμικά δυναμικά μονού στρώματος και διπλού στρώματος.

□

Για δεδομένο $y \in \mathbb{R}^m$ η θεμελιώδης λύση $u = G(\cdot, y)$ αναπαριστά το δυναμικό μιας μοναδιαίας σημειακής πηγής, τοποθετημένη στο σημείο y. Δηλαδή, η σχέση $grad_x G(x,y)$ δίνει το πεδίο δυνάμεων αυτής της σημειακής πηγής όταν δρα στο σημείο x. Το δυναμικό μονού στρώματος λαμβάνεται κατανέμοντας σημειακές πηγές στο σύνορο $\partial\Omega$. [1]

Για $h \succ 0$, μέσω του θεωρήματος μέσης τιμής έχουμε ότι:

$$G(x, y + h\nu(y)) - G(x, y - h\nu(y)) = 2h\nu(y) \cdot gradG(x, y + \theta h\nu(y)),$$

για κάποιο $\theta = \theta(y) \in [-1,1]$.

Ως εκ τούτου, το δυναμικό διπλού στρώματος μπορεί να μεταφραστεί ως το όριο $h \to 0$ της επαλληλίας των δυναμικών μονού στρώματος u_h και u_{-h} με πυκνότητες $\varphi/2h$ στο ∂D_h και $-\varphi/2h$ στο $\partial\Omega_{-h}$, αντίστοιχα. Δηλαδή, το δυναμικό διπλού στρώματος προκύπτει κατανέμοντας σημειακά δίπολα στο σύνορο $\partial\Omega$.

Αφού για τα σημεία $x \notin \Omega$, μπορούμε να εναλλάξουμε την διαφορισιμότητα και την ολοκλήρωση, τα δυναμικά μονού και διπλού στρώματος αναπαριστούν τις αρμονικές συναρτήσεις στο Ω και στο $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$. Για την λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών πρέπει να ερευνήσουμε την συμπεριφορά των δυναμικών στο σύνορο $\partial\Omega$, όπου τα ολοκληρώματα γίνονται ιδιόμορφα.

Οι συνοριακές συμπεριφορές εκφράζονται από τις παρακάτω σχέσεις άλματος, όπου ως άλμα ορίζεται ένα είδος ασυνέχειας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.1:

Έστω $\partial\Omega$ τάξης C^2 και $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

Τότε, το δυναμικό μονού στρώματος u με πυκνότητα φ, είναι συνεχές σε όλο το $\mathbb{R}^m$.

Στο σύνορο έχουμε:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(y) G(x,y) ds(y), x \in \partial\Omega,$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα.

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ*:**

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $h:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, με $0 \le h(t) \le 1$, για κάθε $t \ge 0$. Ισχύει, $h(t) = 0$, για $0 \le t \le 1/2$ και $h(t) = 1$, για $t \succ 1$.

Χρησιμοποιώντας την συγκεκριμένη συνάρτηση, δείχνουμε ότι το δυναμικό μονού στρώματος u είναι το ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων u_n, που είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^m$.

□

Για την περαιτέρω ανάλυση των σχέσεων άλματος, χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα. Η πρώτη ανισότητα εκφράζει το γεγονός ότι το διάνυσμα $x - y$ είναι σχεδόν ορθογώνιο με το κάθετο διάνυσμα $\nu(x)$.

ΛΗΜΜΑ 2.3.1:

Έστω $\partial\Omega$ τάξης C^2. Τότε υπάρχει μια θετική σταθερά L τέτοια ώστε,

$$\left|\nu(x) \cdot \{x - y\}\right| \le L|x - y|^2 \qquad (1)$$

και

$$\left|\nu(x) - \nu(y)\right| \le L|x - y| \quad , \qquad (2)$$

για κάθε $x, y \in \partial\Omega$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Περιοριζόμαστε στην περίπτωση των δύο διαστάσεων.

Έστω $\Gamma = \{x(s) : s \in [0, s_0]\}$, μια ομαλή παραμετροποίηση ενός τμήματος $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Μια παραμετροποίηση μιας επιφάνειας $x(u,v)$ στα u και v είναι ομαλή αν τα εφαπτομενικά διανύσματα $\frac{\partial x}{\partial u}$ και $\frac{\partial x}{\partial v}$ είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητα..

Δηλαδή, η $x:[0,1] \to F \subset \partial\Omega$ είναι αμφιμονοσήμαντη και δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη με $x'(s) \neq 0$ για κάθε $s \in [0, s_0]$.

Στη συνέχεια, από τον τύπο του Taylor έχουμε ότι:

$$\left|v\left(x(t)\right)\cdot\left\{x(t)-x(\tau)\right\}\right| \le \frac{1}{2}\max_{0\le s\le s_0}\left|x''(s)\right|\left|t-\tau\right|^2,$$

$$\left|v\left(x(t)\right)-v\left(x(\tau)\right)\right| \le \max_{0\le s\le s_0}\left|\frac{d}{ds}v\left(x(s)\right)\right|\left|t-\tau\right|,$$

$$\left|x(t)-x(\tau)\right| \ge \min_{0\le s\le s_0}\left|x'(s)\right|\left|t-\tau\right|$$

Η υπόθεση του λήμματος είναι προφανής από αυτό.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Για το δυναμικό μονού στρώματος με σταθερή πυκνότητα, έχουμε:

$$2\int_{\partial D}\frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)}\,ds(y) = \begin{cases} -2, x \in \Omega \\ -1, x \in \partial\Omega \\ 0, x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega} \end{cases}.$$

Αυτό προκύπτει για $x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$ από την

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial \upsilon}{\partial v}\,ds = 0,$$

εφαρμοσμένη στην $G(x,\cdot)$ και για $x \in \Omega$ από την

$$u(x)=\int_{\partial D}\left\{\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y)-u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)}\right\}ds(y),\ x\in D$$

εφαρμοσμένη στην $u=1$ στο Ω.

Το αποτέλεσμα για $x\in\partial\Omega$ προέρχεται εξαιρώντας το x από την ολοκλήρωση και περικυκλώνοντάς το από μια σφαίρα $S(x;r)$ ακτίνας r και κέντρου x, με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα με φορά προς το κέντρο.

Έστω $H(x;r):=S(x;r)\cap\Omega$.

Τότε από την $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial \upsilon}{\partial \nu}ds=0$ εφαρμοσμένη στην $G(x,\cdot)$, έχουμε:

$$\int_{\{y\in\partial\Omega:|y-x|\geq r\}}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)}ds(y)+\int_{H(x;r)}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)}ds(y)=0$$

και από την

$$\lim_{r\to 0}\int_{H(x;r)}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)}ds(y)=\lim_{r\to 0}\frac{2}{\omega_m r^{m-1}}\int_{H(x;r)}ds(y)=1$$

προκύπτει το αποτέλεσμα.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.2:

Για $\partial\Omega$ τάξης C^2, το διπλού στρώματος δυναμικό υ, με συνεχή πυκνότητα φ, μπορεί να επεκταθεί συνεχώς από το Ω στο $\overline{\Omega}$ και από το $\mathbb{R}^m\setminus\overline{\Omega}$ στο $\mathbb{R}^m\setminus\Omega$, με οριακές τιμές

$$\upsilon_{\pm}(x)=\int_{\partial\Omega}\varphi(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)}ds(y)\pm\frac{1}{2}\varphi(x),\ x\in\partial\Omega,$$

όπου $\upsilon_{\pm}(x)=\lim_{h\to+0}\upsilon\left(h\pm\nu(x)\right)$ και το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε την εκτίμηση :

$$\left|\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)}\right| = \frac{\left|\nu(y)\cdot\{x-y\}\right|}{\omega_m |x-y|^m} \le \frac{L}{\omega_m |x-y|^{m-2}}, x \ne y .$$

Δηλαδή, το ολοκλήρωμα

$$\upsilon_{\pm}(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \pm \frac{1}{2}\varphi(x), x \in \partial\Omega$$

έχει ασθενώς ιδιάζων πυρήνα.

Από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι ολοκληρωτικοί τελεστές με συνεχείς ή ασθενώς ιδιάζοντες πυρήνες είναι συμπαγείς γραμμικοί τελεστές στο $C(\partial\Omega)$ αν $\partial\Omega$ είναι τάξης C^1.

Το ολοκλήρωμα υπάρχει, για $x \in \partial\Omega$, ως γενικευμένο ολοκλήρωμα και αναπαριστά μια συνεχή συνάρτηση στο $\partial\Omega$.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, σε μια αρκετά μικρή περιοχή U του $\partial\Omega$ μπορούμε να αναπαραστήσουμε μοναδικά κάθε $x \in U$ ως $x = z + h\nu(z)$, όπου $z \in \partial\Omega$ και $h \in [-h_0, h_0]$ για κάποιο $h_0 > 0$.

Τότε, μπορούμε να γράψουμε το διπλού στρώματος δυναμικό υ με πυκνότητα φ στη μορφή

$$\upsilon(x) = \varphi(z)w(x) + u(x) \ , \ x = z + h\nu(z) \in U \setminus \partial\Omega ,$$

όπου

$$w(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \ \text{και} \ u(x) := \int_{\partial\Omega} \left|\varphi(y) - \varphi(z)\right| \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y).$$

Για $x \in \partial\Omega$, δηλαδή για $h = 0$, το προηγούμενο ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα και απεικονίζει μια συνεχή συνάρτηση στο $\partial\Omega$.

Επομένως, κοιτώντας το προηγούμενο παράδειγμα, φαίνεται ότι για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} u\left(z + h\nu(z)\right) = u(z), z \in \partial\Omega,$$

ομοιόμορφα στο $\partial\Omega$.

Από την σχέση (1) του λήμματος $\left|\nu(x)\cdot\{x-y\}\right|\le L\left|x-y\right|^2$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$\left|x-y\right|^2\ge\frac{1}{2}\left\{\left|z-y\right|^2+\left|x-z\right|^2\right\},$$

για $x=z+h\nu(z)$ και $h\in\left[-h_0,h_0\right]$, δεδομένου ότι h_0 είναι πολύ μικρό.

Ως εκ τούτου, γράφουμε :

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu(y)}=\frac{\nu(y)\cdot\{z-y\}}{\omega_m\left|x-y\right|^m}+\frac{\nu(y)\cdot\{x-z\}}{\omega_m\left|x-y\right|^m}$$

και χρησιμοποιώντας πάλι την $\left|\nu(x)\cdot\{x-y\}\right|\le L\left|x-y\right|^2$, μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι:

$$\left|\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu(y)}\right|\le C_1\left\{\frac{1}{\left|x-y\right|^{m-2}}+\frac{\left|x-z\right|}{\left[\left|z-y\right|^2+\left|x-z\right|^2\right]^{m/2}}\right\},$$

για κάποια σταθερά $C_1\succ 0$.

Δηλώνοντας $\partial\Omega(z;r):=\partial\Omega\bigcap B[z;r]$, για επαρκώς μικρό r, το προβάλλουμε πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο και συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\partial\Omega(z;r)}\left|\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu(y)}\right|ds(y)\le C_1\left\{\int_0^r d\rho+\int_0^r\frac{\left|x-z\right|\rho^{m-2}d\rho}{\left(\rho^2+\left|x-z\right|^2\right)^{m/2}}\right\}\le C_1\left\{r+\int_0^\infty\frac{\lambda^{m-2}d\lambda}{\left(\lambda^2+1^2\right)^{m/2}}\right\}.(*)$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει ότι :

$$\left|\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu(y)}-\frac{\partial G(z,y)}{\partial\nu(y)}\right|\le C_2\frac{\left|x-z\right|}{\left|z-y\right|^m}\ ,$$

για κάποια σταθερά $C_2>0$ και $2\left|x-z\right|\le\left|z-y\right|$.

Επομένως μπορούμε να εκτιμήσουμε:

$$\int_{\partial\Omega\setminus\partial\Omega(z;r)} \left| \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial G(z,y)}{\partial \nu(y)} \right| ds(y) \le C_3 \frac{|x-z|}{r^m} \qquad (**),$$

για κάποια σταθερά $C_3 > 0$ και $|x-z| \le r/2$.

Επομένως, συνδυάζοντας τις σχέσεις (*) και (**) βρίσκουμε ότι:

$$|u(x)-u(z)| \le C \left\{ \max_{|y-z|\le r} |\varphi(y)-\varphi(z)| + \frac{|x-z|}{r^m} \right\},$$

για κάποια σταθερά $C > 0$, επαρκώς μικρό r και $|x-z| \le r/2$.

Δεδομένου $\varepsilon > 0$, μπορούμε να διαλέξουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\max_{|y-z|\le r} |\varphi(y)-\varphi(z)| \le \frac{\varepsilon}{2C},$$

για κάθε $z \in \partial\Omega$, αφού η φ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\partial\Omega$.

Τότε, παίρνοντας $\delta \prec \varepsilon r^m / 2C$ βλέπουμε ότι $|u(x)-u(z)| \prec \varepsilon$, για κάθε $|x-z| \prec \delta$ κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.3:

Έστω $\partial\Omega$ τάξης C^2. Τότε, για το δυναμικό μονού στρώματος u με συνεχή πυκνότητα φ έχουμε ότι:

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2}\varphi(x), x \in \partial\Omega,$$

όπου

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{h\to+0} \nu(x) \cdot gradu\left(x \pm h\nu(x)\right)$$

είναι να γίνει κατανοητό υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης στο $\partial\Omega$ και το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω u το δυναμικό διπλού στρώματος με πυκνότητα φ και έστω U ορισμένο όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 2.3.2.

Τότε, για $x = z + hv(z) \in U \setminus \partial\Omega$, μπορούμε να γράψουμε:

$$v(z) \cdot gradu(x) + \upsilon(x) = \int_{\partial D} \{v(y) - v(z)\} \cdot grad_y G(x,y) \varphi(y) ds(y),$$

έχοντας χρησιμοποιήσει την ιδιότητα $grad_x G(x,y) = -grad_y G(x,y)$.

Χρησιμοποιώντας την $|v(x) - v(y)| \le L|x - y|$, ανάλογα με το δυναμικό μονού στρώματος στο θεώρημα 2.3.1, μπορούμε να δούμε ότι το δεύτερο μέλος μπορεί να ληφθεί υπόψη ως συνεχές στο U. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την εφαρμογή του θεωρήματος 2.3.2. .

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.4:

Έστω $\partial\Omega$ τάξης C^2. Τότε, το δυναμικό διπλού στρώματος υ με συνεχή πυκνότητα φ ικανοποιεί την:

$$\lim_{h \to +0} v(x) \cdot \{grad\upsilon(x + hv(x)) - grad\upsilon(x - hv(x))\} = 0,$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \partial\Omega$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η απόδειξη είναι αρκετά μακροσκελής οπότε παραλείπεται. Η δομή της είναι ανάλογη της απόδειξης του θεωρήματος 2.3.2.

□

2.4 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών: Ύπαρξη

Ο τύπος του Green δείχνει ότι κάθε αρμονική συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί ως συνδυασμός δυναμικών μονού και διπλού στρώματος. Για προβλήματα συνοριακών τιμών, προσπαθούμε να βρούμε μια λύση στην μορφή ενός εξ' αυτών των δυναμικών.

Εισάγουμε δύο ολοκληρωτικούς τελεστές : $K, K' : C(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$, όπου:

$$(K\varphi)(x) := 2\int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y), x \in \partial\Omega$$

και

$$(K'\psi)(x) := 2\int_{\partial\Omega} \psi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y), x \in \partial\Omega .$$

Λόγω της

$$\left|\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)}\right| = \frac{|\nu(y)\cdot\{x-y\}|}{\omega_m |x-y|^m} \le \frac{L}{\omega_m |x-y|^{m-2}}, x \ne y ,$$

οι ολοκληρωτικοί τελεστές K και K' έχουν ασθενώς μη αντιστρέψιμους πυρήνες και επομένως είναι συμπαγείς. Σημειώνουμε ότι στις δύο διαστάσεις για σύνορα C^2 οι πυρήνες των K και K' στην πραγματικότητα είναι συνεχείς. Όπως φαίνεται από την εναλλαγή της ολοκλήρωσης οι K και K' είναι αυτοσυζυγείς αναφορικά με το δυϊκό σύστημα $\langle C(\partial\Omega), C(\partial\Omega)\rangle$, το οποίο ορίζεται από την σχέση

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\partial\Omega} \varphi\psi ds, \varphi, \psi \in C(\partial\Omega) .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.1:

Οι τελεστές $I-K$ και $I-K'$ έχουν τετριμμένους πυρήνες $N(I-K) = N(I-K') = \{0\}$.

Οι πυρήνες των τελεστών $I+K$ και $I+K'$ έχουν διάσταση ένα και $N(I+K) = span\{1\}$, $N(I+K') = span\{\psi_0\}$ με $\int_{\partial D} \psi_0 ds = 1$, δηλαδή ο αριθμός Riesz είναι 1.

Η συνάρτηση ψ_0 ονομάζεται φυσικό φορτίο στο $\partial\Omega$ και το δυναμικό μονού στρώματος με πυκνότητα ψ_0 είναι σταθερό στο Ω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.2:

Το δυναμικό διπλού στρώματος

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y), x \in \Omega,$$

με συνεχή πυκνότητα φ, είναι μια λύση του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet της ολοκληρωτικής εξίσωσης :

$$\varphi(x) - 2\int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = -2f(x), x \in \partial\Omega.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.3:

Το εσωτερικό πρόβλημα Dirichlet έχει μια μοναδική λύση.

□

Από προηγούμενο θεώρημα, βλέπουμε ότι για να βρούμε μια ολοκληρωτική εξίσωση δεύτερου είδους για το πρόβλημα Dirichlet , είναι πολύ σημαντικό να ψάξουμε την λύση στην μορφή του δυναμικού διπλού στρώματος και όχι του απλού. Το απλού στρώματος, θα οδηγούσε σε ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους. [1]

Η προσέγγιση με δυναμικό διπλού στρώματος, για το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet, οδηγεί σε μια ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής $\varphi + \mathrm{K}\varphi = 2f$, για πυκνότητα φ.

Δεδομένου ότι:

$$N(I + K') = span\{\psi_0\},$$

από την εναλλακτική Fredholm έχουμε ότι η εξίσωση είναι επιλύσιμη, αν και μόνο αν

$$\langle f, \psi_0 \rangle = 0.$$

Φυσικά, για αυθαίρετη συνοριακή συνθήκη f, δεν μπορούμε να περιμένουμε ότι η συγκεκριμένη συνθήκη ικανοποιείται. Επομένως την διαμορφώνουμε ως εξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.4:

Το μετασχηματισμένο δυναμικό διπλού στρώματος:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \left\{ \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} + \frac{1}{|x|^{m-2}} \right\} ds(y), x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega},$$

με συνεχή πυκνότητα φ αποτελεί μια λύση στο εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet ,

δεδομένου ότι φ είναι μια λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\varphi(x)+2\int_{\partial\Omega}\varphi(y)\left\{\frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)}+\frac{1}{|x|^{m-2}}\right\}ds(y)=2f(x),x\in\partial\Omega.$$

Εδώ, υποθέτουμε ότι η πηγή συμπεριλαμβάνεται στο Ω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.5:

Το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet έχει μια μοναδική λύση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.6:

Το δυναμικό διπλού στρώματος

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\psi(y)G(x,y)ds(y),x\in\Omega,$$

με συνεχή πυκνότητα φ είναι μια λύση του εσωτερικού προβλήματος Neumann, δεδομένου ότι ψ είναι μία λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$\psi(x)+2\int_{\partial\Omega}\psi(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial v(y)}ds(y)=2g(x),x\in\partial\Omega.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.7:

Το εσωτερικό πρόβλημα Neumann είναι επιλύσιμο αν και μόνο αν ικανοποιείται η

$$\int_{\partial\Omega}gds=0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.8:

Το δυναμικό μονού στρώματος

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\psi(y)G(x,y)ds(y),x\in\mathbb{R}^m\setminus\overline{\Omega},$$

με συνεχή πυκνότητα ψ είναι μία λύση του εξωτερικού προβλήματος Neumann, δεδομένου ότι ψ είναι μια λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\psi(x) - 2\int_{\partial\Omega} \psi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = -2g(x), x \in \partial\Omega,$$

και αν m=2, ικανοποιεί και την

$$\int_{\partial\Omega} \psi ds = 0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.9:

Στο $\mathbb{R}^3$ το εξωτερικό πρόβλημα Neumann έχει μια μοναδική λύση. Στο $\mathbb{R}^2$ το το εξωτερικό πρόβλημα Neumann έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν ικανοποιείται η $\int_{\partial\Omega} g ds = 0$.

□

Τελικά, δείχνουμε ότι οι λύσεις εξαρτώνται με συνεχή τρόπο από τις συνοριακές συνθήκες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.10:

Οι λύσεις των προβλημάτων Dirichlet και Neumann εξαρτώνται με συνεχή τρόπο από την maximum νόρμα των δεδομένων.

3. ΜΕΘΟΔΟΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Σε μια τυπική εφαρμογή στο πρόβλημα Dirichlet, για την εξίσωση Laplace,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \Omega \\ u = f, \partial\Omega \end{cases},$$

η συνάρτηση

$$G(\vec{x};\vec{y}) = e_1(\vec{x}-\vec{y}) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

είναι θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace. [4]

Στην MFS, η λύση προσεγγίζεται από έναν πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό της μορφής :

$$u_N\left(\vec{x};\vec{c}\right) = \sum_{j=1}^{N} c_j G\left(\vec{x},\overrightarrow{y_j}\right) = \sum_{j=1}^{N} c_j e_1\left(\vec{x}-\overrightarrow{y_j}\right),$$

όπου $\overrightarrow{y_j} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ και $\vec{c} = \{\overrightarrow{c_j}\}_{j=1}^{N} \subset \mathbb{R}$.

Οι συντελεστές προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες. Προφανώς, η προσεγγιστική λύση u_N είναι αρμονική σε μια περιοχή του $\overline{\Omega}$.

Στην αρχική μέθοδο για την λύση του προβλήματος Dirichlet, για το πρόβλημα Laplace, σε φραγμένη περιοχή $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ απλά συνεκτική, οι ιδιομορφίες βρίσκονται σε ένα 'ψευδοσύνορο' $\partial\Omega'$ του Ω', όπου $\overline{\Omega} \subset \Omega'$. [3]

Η επιλογή των σταθερών έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθεί η L^2-απόσταση της προσεγγιστικής λύσης από την συνοριακή συνθήκη.

Η θέση των ιδιομορφιών καθορίζεται κατά την ελαχιστοποίηση, κάτι το οποίο οδηγεί σε μη γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων. [3]

Δηλαδή ,

$$\left\| u_N\left(\vec{x};\vec{c}\right) - f\left(\vec{x}\right) \right\|^2 = \int_{\partial\Omega} \left| u_N\left(\vec{x};\vec{c}\right) - f\left(\vec{x}\right) \right|^2 dx = f\left(\vec{c}\right)$$

Οι βασικότερες μορφές της MFS είναι δυο:

- Οι ιδιομορφίες βρίσκονται σε σταθερή επιφάνεια και η μέθοδος μας οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα.
- Οι ιδιομορφίες προσδιορίζονται ως μέρος της λύσης του διακριτού προβλήματος και μας οδηγεί σε μη γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων. [3]

Στην πρώτη μορφή, οι συντελεστές μπορούν να υπολογιστούν με τον συνδυασμό των συνοριακών συνθηκών. Σε αυτή την περίπτωση, επιλέγουμε M σημεία $\left\{\overrightarrow{y_j}\right\}_{j=1}^{M}$ στο $\partial\Omega'$-τις ιδιομορφίες- και N σημεία παρεμβολής $\{\overrightarrow{x_k}\}_{k=1}^{N}$ στο $\partial\Omega$ και απαιτούμε η προσεγγιστική λύση $u_{M,N}$ να ικανοποιεί την:

$$u_{M,N}\left(\overrightarrow{x_k};\vec{c}\right)=\sum_{j=1}^{M}c_j G\left(\overrightarrow{x_k},\overrightarrow{y_j}\right)=f\left(\overrightarrow{x_k}\right),k=1,...,M\ .$$

Επομένως, έχουμε ένα $M\times N$ γραμμικό σύστημα.

- Αν $M=N$, οι συντελεστές καθορίζονται με μοναδικό τρόπο, εφόσον ο πίνακας $g=\left(G\left(\overrightarrow{x_k},\overrightarrow{y_j}\right)\right)_{k,j=1}^{N}$ είναι ομαλός (αντιστρέψιμος).
- Αν $M\succ N$ το σύστημα έχει ελεύθερους συντελεστές. Σε αυτή την περίπτωση, οι συντελεστές επιλέγονται από τα ελάχιστα τετράγωνα ελαχιστοποιώντας την ποσότητα

$$\int_{\partial\Omega}\left|u_{M,N}\left(\overrightarrow{x_k};\vec{c}\right)-f\left(\vec{x}\right)\right|^2 dx=F\left(\vec{c}\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(u_{M,N}\left(\overrightarrow{x_k};\vec{c}\right)-f\left(\overrightarrow{x_k}\right)\right)^2\approx$$

$$\approx\frac{1}{|\partial\Omega|}\left\|u_{M,N}\left(\cdot;\vec{c}\right)-f\right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2$$

  όπου $|\partial\Omega|$ είναι το εμβαδόν του $\partial\Omega$.
- Αν $M\prec N$, τότε $u_{M,N}$, έχει γενικά άπειρες λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Στην περίπτωση του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Laplace στο D_ρ, τον δίσκο ακτίνας ρ, και με την περίμετρο ενός ομόκεντρου δίσκου ως 'ψευδοσύνορο', αποδεικνύεται ότι το supremum σφάλμα στην προσέγγιση MFS $\varepsilon_N=\sup_{x\in\overline{D_\rho}}\left|u_N(\vec{x})-u(\vec{x})\right|$, τείνει στο 0, καθώς ο αριθμός N, οι ιδιομορφίες και τα σημεία παρεμβολής τείνουν στο άπειρο, δεδομένου ότι και οι ιδιομορφίες και τα σημεία παρεμβολής είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $\partial\Omega$ και στο $\partial\Omega'$, καθώς και ότι οι

συνοριακές συνθήκες έχουν απολύτως συγκλίνουσες σειρές Fourier. Η σύγκλιση γίνεται πιο γρήγορη όσο πιο λείο είναι το σύνορο.

Για παράδειγμα, αν τα συνοριακά δεδομένα είναι αναλυτικές συναρτήσεις, τότε η σύγκλιση είναι εκθετική. [5]

3.1 Απαιτήσεις Κανονικότητας Συνόρου

Τα αποτελέσματα για την πυκνότητα απαιτούν χωρία με λεία σύνορα. Παρόλα αυτά, οι περισσότερες αριθμητικές εφαρμογές της MFS είναι σε χωρία, χωρίς λεία σύνορα. Οι χώροι πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη του κώνου.

***ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.1(ΣΥΝΘΗΚΗ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ)*:**

Έστω Ω, Ω' ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το Ω ικανοποιεί την συνθήκη του κώνου, αν υπάρχει πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα $\{U_j\}_{j=1}^{J}$ του $\partial\Omega$ και $h \succ 0$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Omega \bigcup U_j$ να υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε ο κώνος

$$C_h(\vec{\xi_j}) = \left\{ \vec{y} = \vec{x} + r\vec{\xi} : r \in (0,h) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \left| \vec{\xi} - \vec{\xi_j} \right| \prec h \right\}$$

να είναι ένα υποσύνολο του Ω.

□

Μια ασθενέστερη συνθήκη, η οποία είναι επαρκής για το πρόβλημά μας είναι αυτή του τόξου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.2 (ΣΥΝΘΗΚΗ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ):

Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το Ω ικανοποιεί την συνθήκη του τόξου αν για κάθε $x \in \partial\Omega$ υπάρχει μια περιοχή $U_{\vec{x}}$ του $\vec{x}$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\xi_{\vec{x}}} \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε αν $\vec{y} \in U_{\vec{x}} \bigcap \overline{\Omega}$, τότε $\vec{y} + t\vec{\xi_{\vec{x}}} \in \Omega$ για κάθε $t \in (0,1)$.

□

Η διαφορά της συνθήκης του τόξου είναι ότι επιτρέπει στα σύνορα να έχουν γωνίες και ακμές. [5]

Επίσης, σημειώνουμε ότι το Ω ικανοποιεί την συνθήκη του τόξου μόνο αν το $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ την ικανοποιεί.

3.2 Το Περιγεγραμμένο Ψευδοσύνορο

Στα αποτελέσματά μας για την πυκνότητα, οι ιδιομορφίες των θεμελιωδών λύσεων, βρίσκονται σε ένα προκαθορισμένο ψευδοσύνορο, δηλαδή στο σύνορο $\partial\Omega'$ ενός πεδίου Ω', το οποίο περικλείει το Ω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.1:

Έστω Ω, Ω΄ ανοικτά συνεκτικά υποσύνολα του R^n. Θα λέμε ότι το Ω΄ περικλείει το Ω αν $\overline{\Omega}\subset\Omega'$ και για κάθε συνεκτική συνιστώσα V του $R^n\setminus\overline{\Omega}$ υπάρχει μία ανοικτή συνιστώσα V' του $R^n\setminus\overline{\Omega}'$ τέτοια ώστε $\overline{V}'\subset V$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ο δακτύλιος:

$$A_{r_1,r_2}=\left\{x\in\mathbb{R}^2 : r_1<|x|<r_2\right\}$$

περικλείει τον δακτύλιο A_{ρ_1,ρ_2}, δεδομένου ότι $0<r_1<\rho_1<\rho_2<r_2$.

Αντιθέτως, ένας δίσκος δεν μπορεί να περικλείει έναν δακτύλιο.

Σημειώνεται ότι, αν Ω δεν έχει τρύπες και $U\neq\varnothing$ ανοικτό, τέτοιο ώστε $\overline{\Omega}\bigcap\overline{U}=\varnothing$, τότε $\mathbb{R}^n\setminus\overline{U}$ περικλείει το Ω.

Στην πραγματικότητα, αν Ω φραγμένο και περικλείεται από το Ω΄, τότε το Ω μπορεί να έχει πεπερασμένο πλήθος από τρύπες. [5]

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.2:

Έστω Ω, Ω΄ ανοικτά συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το Ω΄ περικλείει το Ω αν $\overline{\Omega}\subset\Omega'$ και $\Omega'\setminus\Omega$ δεν περιέχει καμία κλειστή συνεκτική συνιστώσα. Αν Ω και Ω' ικανοποιούν την συνθήκη του τόξου, τότε ο δεύτερος ορισμός συνεπάγεται τον πρώτο.

3.3 Χώροι Συναρτήσεων, Θεωρία Κατανομών Και αρμονικά Προβλήματα

Αν Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε ο $C^l(\Omega)$, όπου $l \neq 0$ ακέραιος, περιέχει όλες τις συναρτήσεις u οι οποίες, μαζί με όλες τις μερικές παραγώγους $D^a u$, τάξης $|a| \leq l$, είναι συνεχείς στο Ω και $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{i \in N} C^l(\Omega)$.

Ο χώρος $C^l(\overline{\Omega})$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in C^l(\Omega)$, για τις οποίες $D^a u$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς και φραγμένες στο Ω, για κάθε $|a| \leq l$.

Στην ουσία $C^l(\overline{\Omega})$ είναι χώρος Banach με νόρμα :

$$|u|_{l,\overline{\Omega}} = \max_{|a| \leq l} \sup_{\vec{x} \in \overline{\Omega}} \left| D^a u(\vec{x}) \right|.$$

Ο $C_0^l(\mathbb{R}^n)$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων u, οι οποίες μαζί με τις μερικές παραγώγους $D^a u$, τάξης $|a| \leq l$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^n$ και ικανοποιούν την :

$$\lim_{|\vec{x}| \to \infty} D^a u(\vec{x}) = 0,$$

για κάθε $|a| \leq l$.

Επομένως, ο $C_0^l(\mathbb{R}^n)$ είναι χώρος Banach με νόρμα:

$$|u|_{l,\mathbb{R}^n} = \max_{|a| \leq l} \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left| D^a u(\vec{x}) \right|.$$

Τα στοιχεία του $(C^l(\overline{\Omega}))'$ ορίζουν γραμμικές φραγμένες συναρτήσεις στον $C_0^l(\mathbb{R}^n)$.

Έστω $\sigma \in (0,1)$ και Ω ανοικτό φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^n$.

Ο χώρος των συναρτήσεων Holder $\Lambda^{0,\sigma}(\overline{\Omega})$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις u, τέτοιες ώστε:

$$[u]_\sigma = \sup_{\delta > 0} \omega_\sigma(u, \delta) \prec \infty,$$

όπου $\omega_\sigma(u,\delta) = \sup_{\substack{\vec{x},\vec{y} \in \overline{\Omega} \\ 0 < |\vec{x}-\vec{y}| < \delta}} \dfrac{\left| u(\vec{x}) - u(\vec{y}) \right|}{\left| \vec{x} - \vec{y} \right|^\sigma}$.

Ο χώρος $\Lambda^{0,\sigma}(\overline{\Omega})$ είναι Banach με νόρμα $|u|_{0,\sigma} = |u|_0 + |u|_\sigma$, όπου $[\cdot]_0$ είναι η νόρμα στο $C(\overline{\Omega})$.

Γενικά, αν $k \in \mathbb{N}$, ο χώρος $\Lambda^{\kappa,\sigma}(\overline{\Omega})$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις u, οι οποίες ,μαζί με τις μερικές παραγώγους $D^a u$, τάξης $|a| \le l$, ανήκουν στο $C^{0,\sigma}(\overline{\Omega})$.

Και αυτός είναι χώρος Banach, με νόρμα :

$$|u|_{k,\sigma} = |u|_k + \max_{|a|\le k} \left[D^a u \right]_\sigma .$$

Αν $u \in \Lambda^{\kappa,\sigma}(\overline{\Omega})$ και $\lim_{\delta\to 0} \omega_\delta(u,\delta) = 0$, τότε η u καλείται ομοιόμορφα Holder συνεχής, τάξης (k,σ) στο $\overline{\Omega}$. Το σύνολο αυτών των u, που ονομάζεται $C^{\kappa,\sigma}(\overline{\Omega})$, είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\Lambda^{\kappa,\sigma}(\overline{\Omega})$, άρα είναι και αυτό ένας χώρος Banach.

Προφανώς, αν $u \in \Lambda^{\kappa,\sigma}(\overline{\Omega})$ μπορεί να προσεγγιστεί, μέσω της νόρμας $|\cdot|_{k,\sigma}$, από συναρτήσεις οι οποίες είναι C^∞ σε μια περιοχή του $\overline{\Omega}$, τότε $u \in C^{\kappa,\sigma}(\overline{\Omega})$.

Επεκτείνουμε για $\sigma = 0$ τον ορισμό του $C^{\kappa,\sigma}(\overline{\Omega})$, θέτοντας $C^{\kappa,0}(\overline{\Omega}) = C^\kappa(\overline{\Omega})$.

Ως $\mathcal{D}(\Omega)$ ή $C_0^\infty \mathcal{D}(\Omega)$ορίζουμε τον χώρο των συναρτήσεων που είναι πεπερασμένες φορές παραγωγίσιμες με συμπαγή υποστήριξη στο Ω. Τα στοιχεία του $\mathcal{D}(\Omega)$ είναι γνωστά ως συναρτήσεις ελέγχου. Ο χώρος αυτών των συναρτήσεων $\mathcal{D}(\Omega)$ είναι ένας χώρος Frechet. Δηλαδή, η τοπολογία του παράγεται από μια πλήρη αναλλοίωτη μετρική.

Μια ακολουθία $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ συγκλίνει στο μηδέν, αναφορικά με την τοπολογία του $\mathcal{D}(\Omega)$, αν υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο K του Ω, τέτοιο ώστε $\operatorname{supp}\psi_n \subset K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $D^a\psi_n \to 0$, ομοιόμορφα στο K, για κάθε δείκτη $a \in \mathbb{N}^n$.

Ο χώρος $\mathcal{D}(\Omega)$ έχει έναν τοπολογικά δυϊκό $\mathcal{D}'(\Omega)$, τα στοιχεία του οποίου είναι συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή στο $\mathcal{D}(\Omega)$, γνωστά ως κατανομές στο Ω.

Ως $\langle \cdot,\cdot \rangle$ συμβολίζουμε την σχέση ανάμεσα στο $\mathcal{D}$ και το $\mathcal{D}'$. Κάθε συνάρτηση $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ορίζει μια κατανομή T_f μέσω της συσχέτισης:

$$\langle \psi, \mathrm{T}_f \rangle = \langle \psi, f \rangle = \int_\Omega \psi f d\vec{x},$$

όπου $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Αν η f είναι επαρκώς λεία, τότε:

$$\mathrm{T}_{D^a f}(\psi)=\int_{\Omega}\psi D^a f d\vec{x}=(-1)^{|a|}\int_{\Omega}D^a\psi f d\vec{x}.$$

Η έκφραση:

$$(-1)^{|a|}\int_{\Omega}D^a\psi f d\vec{x},$$

ορίζει την κατανομή ακόμα και αν η f δεν είναι λεία.

Στην πραγματικότητα, αν T είναι μια κατανομή, τότε είναι και η D^aT η οποία ορίζεται αντίστοιχα ως:

$$\langle\psi,D^aT\rangle=(-1)^{|a|}\langle D^a\psi,T\rangle.$$

Ομοίως, αν $\mathcal{L}$ είναι ένας διαφορικός τελεστής με σταθερούς συντελεστές, τότε ο $\mathcal{L}T$ είναι και αυτός μια κατανομή και ορίζεται ως:

$$\langle\psi,\mathcal{L}\mathrm{T}\rangle=\langle\mathcal{L}^*\psi,\mathrm{T}\rangle\ .$$

Λέμε ότι μια κατανομή $\mathrm{T}\in\mathcal{D}'(\Omega)$ έχει συμπαγή στήριξη αν υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο $\mathrm{K}\subset\Omega$, τέτοιο ώστε αν $\psi|_{\mathrm{K}}=0$ να ισχύει $\mathrm{T}(\psi)=0$.

Αν $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, τότε η συνέλιξη $u*\psi$ ορίζεται όπως στην περίπτωση που u είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δηλαδή,

$$(u*\psi)(\vec{x})=\int_{\mathbb{R}^n}\psi(\vec{x}-\vec{y})u(\vec{y})d\vec{y}=\langle\tau_{-\vec{x}}\psi,u\rangle,$$

όπου $\tau_{\vec{x}}\psi(\vec{y})=\psi(\vec{x}-\vec{y})$ και $\psi(\vec{x})=\psi(\overrightarrow{-x})$.

Προφανώς, η $u*\psi$ ορίζει μια συνάρτηση στο $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, και αν η u έχει συμπαγή στήριξη, τότε $u*\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Τέλος, αν $u,\upsilon\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ένα εκ των οποίων (έστω υ) έχει συμπαγή στήριξη, τότε η συνέλιξή τους ορίζεται ως

$$\langle\psi,u*\upsilon\rangle=\langle\widehat{\upsilon}*\psi,u\rangle.$$

Στην πραγματικότητα, $u*\upsilon\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Είναι αξιοσημείωτο, ότι αν e είναι μια θεμελιώδης λύση του μερικού διαφορικού τελεστή $\mathcal{L}$ και $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ με συμπαγή στήριξη, τότε έχουμε

$$\mathcal{L}(e*T) = (\mathcal{L}e)*T = \delta * T = T,$$

υπό την έννοια των κατανομών, όπου $\langle \psi, \delta \rangle = \psi(0)$. [5]

Τα αποτελέσματα για την πυκνότητα βασίζονται στο παρακάτω λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 3.3.1:

Έστω $\mathcal{L}\sum_{|a|\le m} a_a D^a$ ένας ελλειπτικός τελεστής με σταθερούς συντελεστές στο $\mathbb{R}^n$ και $e = e(\vec{x})$ μια θεμελιώδης λύση του $\mathcal{L}$.

Επίσης, έστω Ω ένα ανοικτό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την συνθήκη του τόξου και $\nu \in \left(C^{\ell}(\overline{\Omega})\right)'$.

Αν $\vartheta = e*\nu$ η συνέλιξη των κατανομών e και ν και αν $\operatorname{supp}\vartheta \subset \overline{\Omega}$, τότε υπάρχει μια ακολουθία $\{\vartheta^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ με $\operatorname{supp}\vartheta^k \subset \Omega$ και $\{\mathcal{L}\vartheta^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \left(C^{\ell}(\overline{\Omega})\right)'$, τέτοια ώστε $\{\mathcal{L}\vartheta^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνουν στο ν υπό την ασθενή έννοια του $\left(C^{\ell}(\overline{\Omega})\right)'$.

Δηλαδή, για κάθε $u \in C^{\ell}(\overline{\Omega})$, $\lim_{k\to\infty} \mathcal{L}\vartheta^k(u) = \nu(u)$.

□

Το βασικότερο αποτέλεσμα του λήμματος είναι αναφορικά με τις λύσεις των προβλημάτων Dirichlet και Neumann, για την εξίσωση Laplace σε φραγμένα χωρία του $\mathbb{R}^n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.1:

Έστω Ω, Ω' ανοικτά και φραγμένα χωρία του $\mathbb{R}^n$. Το Ω ικανοποιεί την συνθήκη του τόξου και το Ω' περικλείει το Ω. Έστω l ένας μη αρνητικός ακέραιος.

Τότε, ο χώρος $\mathcal{X}$ των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών της μορφής

$$\sum_{j=1}^{N} c_j e_1(\vec{x} - \vec{y_j}),$$

όπου e_1 δίνεται για δύο διαστάσεις από την σχέση

$$e_1(\vec{x}-\vec{y})=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

και $\left\{\vec{y}_j\right\}_{j=1}^{N}\subset\partial\Omega'$, είναι πυκνός για $n\geq 3n$στον

$$\mathcal{Y}_\ell=\left\{u\in C^2(\Omega):\Delta u=0\,\sigma\tau o\Omega\right\}\cap C^\ell\left(\overline{\Omega}\right),$$

αναφορικά με την νόρμα του χώρου $C^\ell\left(\overline{\Omega}\right)$.

Αν $n=2$, τότε το γραμμικό ευθύ άθροισμα $\mathcal{X}\oplus\left\{c\cdot 1\big|_{\overline{\Omega}}:c\in\mathbb{R}\right\}$ είναι πυκνό στο $\mathcal{Y}_\ell$ και πάλι αναφορικά με την ίδια νόρμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Τα σύνολα $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}_\ell$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του $C^\ell\left(\overline{\Omega}\right)$.

Αν $v\in\left(C^\ell\left(\overline{\Omega}\right)\right)'$, τότε υπάρχει $\{v_a\}_{|a|\leq\ell}\subset\mathfrak{M}\left(\overline{\Omega}\right)$, όπου $\mathfrak{M}\left(\overline{\Omega}\right)$ είναι το σύνολο των πεπερασμένων μέτρων Borel στο $\overline{\Omega}$, τέτοιο ώστε

$$v(u)=\sum_{|a|\leq\ell}\int_{\overline{\Omega}}D^a u dv_a\,,$$

για κάθε $u\in C^\ell\left(\overline{\Omega}\right)$.

Από το θεώρημα Hahn-Banach αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{X}^\perp\subset\mathcal{Y}_\ell^\perp$, δηλαδή αν

$$v\in\left(C^\ell\left(\overline{\Omega}\right)\right)'\ \text{και}\ \underset{\forall u\in\mathcal{X}}{v}(u)=0\ ,\ \text{τότε}\ \underset{\forall u\in\mathcal{Y}_\ell}{v}(u)=0\ .$$

Έστω $v\in\left(C^\ell\left(\overline{\Omega}\right)\right)'$ τέτοιο ώστε $v(u)=0$, για κάθε $u\in\mathcal{X}$. Αν $x\in\partial\Omega'$, τότε η συνάρτηση

$$u\left(\vec{y}\right)=e_1\left(\vec{y}-\vec{x}\right)=\tau_x e_1\left(\vec{y}\right)$$

ανήκει στο $\mathcal{X}$ και

$$0=v(u)=\left\langle v\left(\tau_{\vec{x}}e_1\right)=(e_1*v)\left(\vec{x}\right)\right.\!.$$

Επομένως, η συνέλιξη $\vartheta=e_1*v$ μηδενίζεται στο $\partial\Omega'$.

Η ϑ ορίζει μια κατανομή στο $\mathbb{R}^n$, ως συνέλιξη δύο κατανομών , όπου η μια (εδώ η ν) έχει συμπαγή φορέα , δηλαδή $\operatorname{supp}\nu \subset \overline{\Omega}$. Επίσης , η ϑ είναι πραγματική αναλυτική συνάρτηση και είναι αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Υπό την έννοια των κατανομών στο $\mathbb{R}^n$ ισχύει $-\Delta\vartheta = \nu$.

Έστω U η μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Επειδή το Ω' περικλείει το Ω , υπάρχει μια συνεκτική συνιστώσα U' του $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, τέτοια ώστε $\overline{U}' \subset U$. Προφανώς $\partial U' \subset \partial\Omega'$, κάτι το οποίο συνεπάγεται ότι το ϑ μηδενίζεται στο $\partial U'$.

Αν U' είναι φραγμένη , τότε το ϑ μηδενίζεται σε όλο το U' , από την αρχή του μεγίστου. Συνεπώς , το ϑ μηδενίζεται σε όλο το U ως πραγματική αναλυτική συνάρτηση.

Αν το U' είναι μη φραγμένο , τότε για $\vec{x} \in U'$ έχουμε ότι :

$$\vartheta\left(\vec{x}\right) = \nu\left(\tau_{\vec{x}} e_1\right) = \sum_{|a|\le \ell} \int_{\overline{\Omega}} D^a_{\vec{y}} e_1\left(\vec{y} - \vec{x}\right) d\nu_a\left(\vec{y}\right)$$

και επομένως :

$$\left|\vartheta\left(\vec{x}\right)\right| \le \left(\sum_{|a|\le \ell} \|\nu_a\|\right) \bullet \left(\sup_{\vec{y}\in\overline{\Omega}, |a|\le \ell} \left|D^a e_1\left(\vec{y} - \vec{x}\right)\right|\right).$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι για μεγάλο $\vec{x}$ (και το $\vec{y}$ να ανήκει στο $\overline{\Omega}$), έχουμε ότι :

$$D^a e_1\left(\vec{y} - \vec{x}\right) = \mathcal{O}\left(\left|\vec{x}\right|^{2-n-|a|}\right),$$

το οποίο συνδυασμένο με την

$$\left|\vartheta\left(\vec{x}\right)\right| \le \left(\sum_{|a|\le \ell} \|\nu_a\|\right) \bullet \left(\sup_{\vec{y}\in\overline{\Omega}, |a|\le \ell} \left|D^a e_1\left(\vec{y} - \vec{x}\right)\right|\right)$$

μας δίνει

$$\vartheta(\vec{x}) = \mathcal{O}\left(\left|\vec{x}\right|^{2-n}\right).$$

Επομένως, $\lim_{\vec{x}\to\infty} \vartheta(\vec{x}) = 0$. Αφού το ϑ μηδενίζεται στο $\partial U'$και είναι αυθαίρετα μικρό στο $S_R = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \left|\vec{x}\right| = R\right\}$, για R επαρκώς μεγάλο, συνεπάγεται ότι το ϑ μηδενίζεται σε όλο το U'.

Αν το U είναι μια φραγμένη συνιστώσα του $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, τότε υπάρχει μια ανοικτή συνιστώσα του U' στο $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}'$, τέτοια ώστε $\overline{U}' \subset U$. Πιο συγκεκριμένα, $\partial U' \subset \partial\Omega'$ κάτι το οποίο οδηγεί στο ότι το ϑ μηδενίζεται στο $\partial U'$. Άρα, το ϑ μηδενίζεται σε όλο το U', και επειδή είναι αρμονική συνάρτηση, θα μηδενίζεται σε όλο το U. Το συμπέρασμα είναι ότι το ϑ μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}'$ και άρα $\operatorname{supp}\vartheta \subset \overline{\Omega}$.

Έστω, $u \in \mathcal{Y}_l$. Θέτουμε στο προηγούμενο λήμμα $\mathcal{L} = -\Delta$ και $e = e_1$, και πλέον έχουμε μια ακολουθία κατανομών $\left\{\vartheta^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ με φορέα στο Ω. Ισχύει,

$$\left\{\Delta\vartheta^k\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \left(C^l(\overline{\Omega})\right)',$$

τέτοια ώστε $v(u) = -\lim_{k\to\infty} \Delta\vartheta^k(u)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta\vartheta^k(u) = 0$. Αφού, $\operatorname{supp}\vartheta^k \subset \Omega$, μπορούμε να βρούμε μια $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, η οποία θα ισούται με ένα σε μια περιοχή του $\overline{\Omega}$.

Η κατανομή $-\Delta\vartheta^k$ περιγράφεται από τα πεπερασμένα μέτρα Borel $\left\{v_a^k\right\}_{|a|\le l}$, αφού ανήκει στον δυϊκό του $C^l(\overline{\Omega})$.

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι :

$$-\Delta\vartheta^k(u) = \sum_{|a|\le l} \int_{\overline{\Omega}} D^a u dv_a^k = \sum_{|a|\le l} \int_{\operatorname{supp}\vartheta^k} D^a u dv_a^k = \sum_{|a|\le l} \int_{\operatorname{supp}\vartheta^k} D^a \varphi(u) dv_a^k$$

$$= -\Delta\vartheta^k(\varphi u) = -\left\langle \varphi u, \Delta\vartheta^k \right\rangle.$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι η φu ανήκει στο $C^l(\overline{\Omega})$ και στο $\mathcal{D}(\Omega)$, ενώ η $-\Delta\vartheta^k$ στο $C^l(\overline{\Omega})'$ και στο $\mathcal{D}'(\Omega)$, καθώς και από το ότι τα δύο ζεύγη συμπίπτουν στην τομή των αντίστοιχων χώρων. Από τον ορισμό των κατανομών $\Delta\vartheta^k$, έχουμε ότι $\left\langle \varphi u, \Delta\vartheta^k \right\rangle = \left\langle \Delta(\varphi u), \vartheta^k \right\rangle$.

Το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας είναι μηδέν αφού $\Delta(\varphi u) = \Delta u = 0$ στον φορέα του $\operatorname{supp}\vartheta^k$, κάτι το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος για τις τρείς διαστάσεις.

□

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Το βασικό ερώτημα στην περίπτωση $n=2$, είναι αν οι σταθερές εξισώσεις μπορούν να προσεγγιστούν από θεμελιώδεις λύσεις της εξίσωσης Laplace, με ιδιομορφίες, σε δεδομένο ψευδοσύνορο.

Ας θεωρήσουμε ως χωρίο Ω', τον μοναδιαίο δίσκο D_1 και $\varphi\left(\vec{0},\vec{y}\right)=-\frac{1}{2\pi}\log\left|\vec{y}\right|=0$, για κάθε $\vec{y}\in\partial D_1$.

Έστω $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των θεμελιωδών λύσεων με ιδιομορφίες στον μοναδιαίο κύκλο.

Προκύπτει ότι κάθε $\upsilon\in\boldsymbol{\mathcal{X}}$, μηδενίζεται και επομένως $\overline{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\subset_{\neq}\mathcal{Y}_l$.

Αντιθέτως, στην περίπτωση του δίσκου D_ρ, ο δίσκος ακτίνας $\rho\neq 1$, η σταθερή εξίσωση μπορεί να προσεγγιστεί από θεμελιώδεις λύσεις.

Συγκεκριμένα, η ακολουθία των λύσεων της MFS

$$u_{\mathrm{N}}(\vec{x})=\frac{1}{N\log\rho}\sum_{j=1}^{N}\log\left|\vec{x}-\rho e^{2\pi ij/N}\right|,\ N\in\mathbb{N},$$

συγκλίνει στο $u\equiv 1$, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του D_ρ. [5]

□

Αν το ψευδοσύνορο περικλείεται σε έναν μοναδιαίο δίσκο οι σταθερές συναρτήσεις προσεγγίζονται από γραμμικούς συνδυασμούς των θεμελιωδών λύσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.1:

Έστω Ω,Ω' ανοικτά και φραγμένα χωρία του $\mathbb{R}^2$, όπου το Ω ικανοποιεί την συνθήκη του τόξου και το Ω' περικλείει το Ω. Αν το $\overline{\Omega}'$είναι ένα υποσύνολο του μοναδιαίου δίσκου, τότε η συνάρτηση $f=1_{\overline{\Omega}}$ μπορεί να προσεγγιστεί, αναφορικά με την supremum νόρμα, από τους γραμμικούς συνδυασμούς της μορφής

$$\sum_{j=1}^{N}c_j\log\left|\vec{x}-\overrightarrow{y_j}\right|,$$

όπου $\left\{\overrightarrow{y_j}\right\}_{j=1}^{N}\subset\partial\Omega'$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\overline{\Omega}'$ είναι ένα υποσύνολο του μοναδιαίου δίσκου D_1, του οποίου το κέντρο βρίσκεται στην πηγή. Έστω $\mathcal{X}$ ο χώρος των γραμμικών συνδυασμών της μορφής

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \log\left|\vec{x}-\overrightarrow{y_j}\right|, \text{ όπου } \left\{\overrightarrow{y_j}\right\}_{j=1}^{N} \subset \partial\Omega'.$$

Προφανώς, τα στοιχεία του $\mathcal{X}$, όταν περιοριστούμε στο $\overline{\Omega}$, είναι και στοιχεία του $C\left(\overline{\Omega}\right)$. Υποθέτουμε ότι $1_{\overline{\Omega}} \notin \overline{\mathcal{X}}$.

Τότε, λόγω του θεωρήματος του Hahn-Banach, υπάρχει ένα μέτρο $\mu \in \mathfrak{M}\left(\overline{\Omega}\right) = \left(C\left(\overline{\Omega}\right)\right)'$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\int_{\overline{\Omega}} 1_{\overline{\Omega}} d\mu\left(\vec{y}\right) = \mu\left(\overline{\Omega}\right) = 1$$

και εκμηδενίζει τον $\mathcal{X}$.

Αυτό, υποδεικνύει ότι η συνάρτηση

$$u\left(\vec{x}\right) = \int_{\overline{\Omega}} \log\left|\vec{x}-\vec{y}\right| d\mu\left(\vec{y}\right),$$

η οποία είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, μηδενίζεται στο $\partial\Omega'$.

Επίσης, για μεγάλο $|x|$ έχουμε ότι:

$$u\left(\vec{x}\right) = \int_{\overline{\Omega}} \log\left|\vec{x}\right| d\mu\left(\vec{y}\right) + \int_{\overline{\Omega}} \log\frac{\left|\vec{x}-\vec{y}\right|}{\left|\vec{x}\right|} d\mu\left(\vec{y}\right) = \log\left|\vec{x}\right| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

το οποίο μας δείχνει ότι $\lim_{|x|\to\infty} u\left(\vec{x}\right) = +\infty$.

Λόγω της αρχής μεγίστου έχουμε ότι $u\left(\vec{x}\right) > 0$, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}'$.

Αν

$$u\left(\vec{x}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\overline{\Omega}} \log\left|\vec{x}-e^{i\vartheta}\vec{y}\right| d\mu\left(\vec{y}\right) d\vartheta,$$

τότε u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, όπου $\Omega = U_{\vartheta\in[0,2\pi]} e^{i\vartheta}\Omega'$.

Συγκεκριμένα, Ω είναι ένας ανοικτός δίσκος ακτίνας $\rho<1$ με κέντρο την πηγή, όπου

$$1-\rho = dist\left(\overline{\Omega}', \partial D_1\right).$$

Επίσης, η u είναι ακτινική, για παράδειγμα $u\left(\vec{x}\right)=\upsilon\left(\left|\vec{x}\right|\right)$.

Στην πραγματικότητα, η u πρέπει να είναι της μορφής

$$u\left(\vec{x}\right)=A\log\left|\vec{x}\right|+B,$$

όπου A, B είναι πραγματικές σταθερές με $A>0$.

Προφανώς, $u\left(\vec{x}\right)>0$, για κάθε $\left|\vec{x}\right|=1$, αφού το ίδιο ισχύει και για την u.

Επομένως, $B>0$.

Αν θεωρήσουμε $R=\left|\vec{x}\right|>\left|\vec{y}\right|=r$, τότε έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\vec{x}-e^{i\vartheta}\vec{y}\right|d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\log\left(R^2-2rR\cos\vartheta+r^2\right)d\vartheta=\log R=\log\left|\vec{x}\right|.$$

Από το θεώρημα Fubini έχουμε ότι:

$$u\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\overline{\Omega}}\int_0^{2\pi}\log\left|\vec{x}-e^{i\vartheta}\vec{y}\right|d\vartheta d\mu\left(\vec{y}\right)=\mu\left(\overline{\Omega}\right)\log\left|\vec{x}\right|=\log\left|\vec{x}\right|,$$

η οποία έρχεται σε αντίθεση με την $u\left(\vec{x}\right)=A\log\left|\vec{x}\right|+B$, και πιο συγκεκριμένα με το γεγονός ότι $B>0$.

□

Η πρόταση αυτή μας δίνει την δυνατότητα παραμετροποίησης των θεμελιωδών λύσεων, ώστε να αποφύγουμε την χρήση των σταθερών συναρτήσεων.

Δηλαδή, οι συναρτήσεις:

$$e_1^R(\vec{x})=-\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{\left|\vec{x}\right|}{R}\right)$$

είναι, επίσης, θεμελιώδεις λύσεις της Laplace για κάθε $R\succ 0$.

Επομένως, εφόσον το ψευδοσύνορο είναι υποσύνολο του δίσκου ακτίνας R, τότε οι αρμονικές συναρτήσεις σε κάθε χωρίο Ω που περικλείεται από το Ω', με σύνορο που ικανοποιεί την συνθήκη του τόξου μπορούν να προσεγγιστούν από γραμμικούς συνδυασμούς.

Βέβαια, υπάρχει και η περίπτωση όπου το σύνορο είναι αναλυτικό. Αυτό συμβαίνει στις περισσότερες περιπτώσεις αριθμητικών εφαρμογών της μεθόδου. Δηλαδή, το ψευδοσύνορο είναι αναλυτικό (κύκλος, έλλειψη, σφαίρα) ή ένωση αναλυτικών επιφανειών (πολύγωνο, κύλινδρος). Σε αυτή την περίπτωση, οι γραμμικοί συνδυασμοί των θεμελιωδών λύσεων με πηγές σε ένα μικρό κομμάτι του ψευδοσυνόρου είναι πυκνοί στο σύνολο των λύσεων της εξίσωσης με την οποία ασχολούμαστε.

Αν είμαστε στην περίπτωση του διδιάστατου προβλήματος, τότε έχουμε το εξής: έστω $\partial\Omega'$ το ψευδοσύνορο ενός φραγμένου χωρίου $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη του τόξου). Αυτό, μπορεί να παραμετροποιηθεί ως:

$$\partial\Omega' = \{(\alpha(s), \beta(s) : s \in I)\},$$

όπου I είναι ένα ανοικτό διάστημα και $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ πραγματικές αναλυτικές συναρτήσεις. [5]

3.4 Αναλυτική Περιγραφή Της Μεθόδου

Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση :

$$G(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, m=2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}, m=3 \end{cases},$$

ορισμένη για κάθε $x \neq y$ στο $\mathbb{R}^m$, ονομάζεται θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace.

Επομένως, η προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης δίνεται από τον τύπο :

$$u_N\left(\vec{x};\vec{c}\right) = \sum_{j=1}^{N} c_j G\left(\vec{x},\overrightarrow{y_j}\right) = \sum_{j=1}^{N} c_j e_1\left(\vec{x}-\overrightarrow{y_j}\right).$$

Οι ιδιομορφίες $\left\{\overrightarrow{y_j}\right\}_{j=1}^{N}$ βρίσκονται στο εσωτερικό του $\overline{\Omega}$.

Οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet και Neumann, αντίστοιχα, ισχύουν για N στοιχεία $\vec{x}_m$, πάνω στο $\partial\Omega$. Ως Ω, ορίζεται ο δίσκος ακτίνας $r_m = r\left(\vec{x}_m\right)$, δηλαδή :

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \prec r_m\right\}.$$

Πιο συγκεκριμένα, η συνοριακή συνθήκη για το πρόβλημα Dirichlet δίνεται από την σχέση:

$$u_N\left(\vec{x}_m\right) = f\left(\vec{x}_m\right), \text{ στο } \partial\Omega_1$$

και για το πρόβλημα Neumann δίνεται από την σχέση:

$$\frac{\partial u_N}{\partial \eta}\left(\vec{x}_m\right) = g\left(\vec{x}_m\right), \text{ στο } \partial\Omega_2.$$

Για τα χωρία ισχύει :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2 \text{ και } \partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 = \varnothing.$$

Το πρόβλημα πλέον συνίσταται στην εύρεση των άγνωστων συντελεστών $\left\{c_j\right\}_{j=1}^{N}$.

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες έχουμε ότι:

$$f\left(\vec{x}_m\right)=\sum_{j=1}^{N} c_j G\left(\vec{x}_m,\overrightarrow{y_j}\right),\ \text{για}\ \ m=1,\ldots,N_1$$

για πρόβλημα Dirichlet και

$$g\left(\vec{x}_m\right)=\sum_{j=1}^{N} c_j \frac{\partial G}{\partial \eta}\left(\vec{x}_m,\overrightarrow{y_j}\right),\ \text{για}\ \ m=N_1+1,\ldots,N$$

για πρόβλημα Neumann.

3.5 Αριθμητική Μέθοδος Για το Δισδιάστατο Πρόβλημα

Έστω

$$\vartheta_m = \frac{2\pi(m-1)}{N}, \text{ για } m = 1,...,N$$

μια ομοιόμορφη διακριτοποίηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Θεωρούμε ότι το σύνορο $\partial\Omega$ περιγράφεται σε παραμετρική μορφή από τα σημεία

$$\vec{x}_m = r_m\left(\cos\frac{2\pi(m-1)}{N}, \sin\frac{2\pi(m-1)}{N}\right) = r_m\left(\cos\vartheta_m, \sin\vartheta_m\right), \text{ για } m = 1,...,N.$$

Επίσης, οι ιδιομορφίες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε έναν κύκλο ακτίνας $R_j \succ r_m$ και ορίζονται ως:

$$\vec{y}_j = R_j\left(\cos\frac{2\pi(j-1+a)}{N}, \sin\frac{2\pi(j-1+a)}{N}\right), \text{ για } j = 1,...,N.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν ότι οι θέσεις των πηγών διαφέρουν κατά μια γωνία $\frac{2\pi a}{N}$ από τις θέσεις των συνοριακών σημείων και $0 \le a \le 1$.

Υπενθυμίζουμε ότι η θεμελιώδης λύση του προβλήματος Laplace, για το διδιάστατο πρόβλημα δίνεται από τον τύπο:

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{y}\right|} = -\frac{1}{2\pi}\ln\left|\vec{x}-\vec{y}\right| = -\frac{1}{4\pi}\ln\left[\left(x_1-y_1\right)^2 + \left(x_2-y_2\right)^2\right].$$

Το προς τα έξω μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ορίζεται ως

$$\eta(\vec{x}) = \left\{\frac{1}{\sqrt{r^2(\vartheta) + (r')^2(\vartheta)}}\left(-y'(\vartheta), x'(\vartheta)\right)\right\} =$$

$$\left\{\frac{-1}{\sqrt{r^2(\vartheta) + (r')^2(\vartheta)}}\left(r'(\vartheta)\sin\vartheta + r(\vartheta)\cos\vartheta, r(\vartheta)\sin\vartheta - r'(\vartheta)\cos\vartheta\right\},\right.$$

για $\vec{x} \in \partial\Omega$

Ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(G\left(\vec{x},\vec{y_j}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(-\frac{1}{4\pi}\ln\left[\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2\right]\right)=$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\eta\nabla_{\vec{x}}\ln\left[\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2\right]\right)=$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\eta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\ln\left[\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2\right]+\eta_2\frac{\partial}{\partial x_2}\ln\left[\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2\right]\right)=$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\eta_1\frac{2\left(x_1-y_1\right)}{\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2}+\eta_2\frac{2\left(x_2-y_2\right)}{\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2}\right)=$$

$$-\frac{1}{4\pi\left[\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2\right]}\left(\widehat{\eta_1 2}\left(x_1-y_1\right)+\widehat{\eta_2 2}\left(x_2-y_2\right)\right)=$$

$$-\frac{1}{2\pi\left[\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2\right]}\left(\widehat{\eta_1}\left(x_1-y_1\right)+\widehat{\eta_2}\left(x_2-y_2\right)\right)=$$

Όπου

$\eta_1=\frac{\mathrm{x}_1}{\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^2}}$
$\eta_2=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^2}}$ αν είναι κάθετο στον κύκλο, δηλαδή το σύνορο.

Επομένως η κάθετη παράγωγος δίνεται ως εξής:

$$\frac{\partial u_N}{\partial\eta}\left(\vec{x}_m\right)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}c_j\frac{\partial G}{\partial\eta}\left(\vec{x}_m,\vec{y_j}\right)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}c_j\frac{\eta\left(\vec{x}-\vec{y}\right)}{\left|\vec{x}-\vec{y}\right|^2}.$$

Υποθέτουμε ότι τα πρώτα N_1 σημεία συνδιάταξης βρίσκονται στο $\partial\Omega_1$, ενώ τα υπόλοιπα N_2 βρίσκονται στο $\partial\Omega_2$. Προφανώς $N_1+N_2=N$.

Βάσει των συνοριακών συνθηκών για πρόβλημα Dirichlet και Neumann, έχουμε αντίστοιχα:

$$u_N\left(\vec{x}_m\right) = f\left(\vec{x}_m\right), \text{ για } m = 1,\ldots,N_1$$

και

$$\frac{\partial u_N}{\partial \eta}\left(\vec{x}_m\right) = g\left(\vec{x}_m\right), \text{ για } m = N_1+1,\ldots,N \ .$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Rainer Kress , ***Linear Integral Equations*** , London , Springer p. 75-141, 2010

[2] Ermes Anthony Salgado-Ibarra **,** ***Boundary Element Method (BEM) and Method of Fundamental Solutions (MFS) for the boundary value problems of the 2-D Laplace's equation*** **,** Las Vegas , University of Nevada p. 1-64, 2011

[3] C. S. Chen**,** S. Y. Reutskiy, V. Y. Rozo**,** ***The method of the fundamental solutions and its modifications for electromagnetic field problems*** p. 21-31, 2009

[4] Ya Ting Chi, ***The method of fundamental solutions for Laplace's equation in 3D*** **,** 2008

[5] Yiorgos-Sokratis Smyrlis**,** ***Applicability and applications of the method of fundamental solutions,*** Volume 78, Number 267, p. 1399–1434, 2009

[6] Andreas Karageorghis, ***The method of fundamental solutions for elliptic problems in circular domains with mixed boundary conditions,*** Cyprus, Numer Algor (2015) 68:185–21, 2014

[7] Jeng-Tzong Chena,b,n, Jheng-Lin Yanga, Ying-Te Leea, Yu-Lung Changa , ***Formulation of the MFS for the two-dimensional Laplace equation with an added constant and constraint,*** Engineering Analysis with Boundary Elements 46 p. 96-107, 2014

[8] S. C. Malik, ***Mathematical Analysis*** (2nd ed.), New York, 1992

[9] G. Folland**,** ***Introduction to Partial Differential Equations,*** United Kingdom**,** Princeton University Press, 1995.